第一巻　準備

第 0 部 入口 — この本の読み方

Kiichi, Shiori and Rin · 2026-11-14 の版 · https://computoergosum.com/principia/yang-mills/

> この PDF は Web 版の各章をそのまま刷ったものです。動かせる図は刷った時点の姿で止まっています。章の間のリンクは Web 版へ飛びます。最新の内容は Web 版に在ります。

章		頁
0-01	この本の読み方	2
0-02	一枚の絵	16
0-03	問題文を一語ずつ読む	28
0-04	数学の四次元と物理の四次元	42

この本の読み方 — 札で主張の強さを読み、前提の地図で順を選ぶ

> この章は案内です（この本の読み方）。

この章で分かること — 本の組み立て（三巻・二十九の部と付録・264 章）と章に共通する形。
五つの札（Lean・紙・計算・既知・物理）が保証すること・しないこと。第二巻と第三巻の札との関係。
どの読者がどこから読むか。前提の地図、寄り道を飛ばしてよい理由、読む順の道。
この本が主張すること、しないこと。

前提となる章 — ありません。全体の絵は次の 0-02、問題文の読みは 0-03 にあります。

先に言うこと — この本はヤン–ミルズの存在と質量ギャップの問題の解決を主張しません。存在は、2026-11-10 に公開された構成が示しました（Lean で証明されている、と委員会が評価した。第二巻が読みます。6-00）。質量ギャップは開いています（6-04・16-02）。この本自身の結果は、格子間隔を固定した言明と、仮定を置いた条件つきの言明です（16-04・§08）。§05〜§07 の数は 2026-10-15 の目次（166 章）の「前提」の欄から計算したもので、そのあとに加わった 98 章（第二巻の大半と、第三巻の第 19〜22・28 部など）は入っていません。

この章の順序

1. 何の本か — 問題の一文と部の役割
2. 読者と前提知識 — 2 年生の知識から
3. 札の凡例 — 保証すること・しないこと（表 1）
4. 一章の形 — 冒頭の三行・番号・記号・動く図
5. 前提の地図 — ある章に何章が要るか（図 1・表 2）
6. 寄り道の飛ばし方 — 飛ばしても前提は欠けない（寄り道：前提を破らない並べ方は何通りあるか）
7. 読む順の提案 — 読者ごとの入口と、前提の地図から作る道（図 2・表 3）

8. この本が主張すること、しないこと — 公開された構成・開いている問い・この本の結果

01

何の本か — 問題の一文と部の役割

この本は、クレイ数学研究所の懸賞問題「ヤン–ミルズの存在と質量ギャップ」を、大学 2 年生の知識から研究の現在地まで読むための本です。懸賞問題は 2000 年 5 月 24 日にパリのコレージュ・ド・フランスで発表され 既知 、公式の問題文（Arthur Jaffe と Edward Witten の解説）の核は次の一文です 既知 。

> 任意のコンパクト単純ゲージ群 G について、$\mathbb{R}^4$ 上に非自明な量子ヤン–ミルズ理論が存在し、質量ギャップ $\Delta > 0$ を持つことを証明せよ。

質量ギャップとは、理論のハミルトニアン H（エネルギーの作用素）のスペクトル $\sigma(H)$ が、真空のエネルギー 0 のすぐ上で空いていることです。

$$\sigma(H) \subset \{0\} \cup [\Delta, \infty), \qquad \Delta > 0 \tag{1}$$

例。(1) までの道のりが巻の分け方です。**第一巻「準備」**（第 0〜5 部）は道具をそろえます。第 1・2 部は数学と物理の道具、第 3 部は古典の理論、第 4 部は量子化と (1) の正確な定義（4-11）、第 5 部は格子ゲージ理論です。**第二巻「存在 — 公開された構成を読む」**（第 6〜15 部）は、2026-11 に公開された四次元のヤン–ミルズの存在の構成と委員会の評価書を読みます。何が証明され何が示されていないか（第 6 部、6-00〜）から始め、構成的場の理論の背景（第 7 部）、対象と極限の順（第 8 部）、繰り込みの一段（第 9 部）、結合の合わせと漸近自由（第 10 部）、多段の評価と大きい場（第 11 部）、無限体積と再構成（第 12 部）、ヤン–ミルズである証拠（第 13 部）、本書の検討との比べ（第 14 部）と進みます。巻の最後の第 15 部は、本書の検討が紫外の制御を試みた記録です（15-00〜）。**第三巻「質量ギャップへ」**（第 16〜28 部と付録）は、開いている側を扱います。現在地と残る問い（第 16 部、16-01〜）、物理の側からの見方（第 17 部）、物理の言葉と数学の言葉の辞書（第 18 部、18-01〜）、格子の上の対象と確かな定理（第 19〜22 部、19-00〜）、拡散型緩和時間の仮定を軸に置いた一本目の道（第 23・24 部、23-00〜）、二本目の道と移り変わりの帯（第 25・26 部）、条件つきの言明（第 27 部）、前提の木（第 28 部、28-00〜）、記号表・用語集・文献案内などの付録（A-01〜）です。

一語ずつの読みは 0-03、四次元が特別な理由は既存の記事 四次元でだけ起きること・符号が一つ違う と 0-04 にあります。

02

読者と前提知識 — 2 年生の知識から

想定する読者は数学科か物理学科の 2 年生です。既知としてよいのは、多変数の微積分、線形代数の基礎、複素数、常微分方程式、力学と電磁気学の入門、確率の初歩です。ほかの道具は第 1・2 部で用意し、前提の章に無い道具はその場で最小限を定義します。次の三つの式が読めれば、第 1 部から始められます。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}, \qquad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 \tag{2}$$

例。ガウス積分は自由場を表すガウス測度に（1-08）、$e^{i\theta}$ は群 $U(1)$ の元として電磁気のゲージ変換に（2-03）なります。右の式は行列 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ の固有値を求める式で、固有値は ± 1 です。この行列をハミルトニアンと読むと、二つの固有値の差 2 が二準位系のエネルギーの隙間で、ギャップのいちばん簡単な例です（2-05）。数学科の読者には第 2 部を、物理学科の読者には第 1 部の後半（1-07〜1-11）を丁寧に読むことを勧めます。

03

札の凡例 — 保証すること・しないこと

この本は、主張の強さを文ごとに**札**で示します。「証明された」「予想されている」「数値的に支持されている」を一つの文で混ぜず、混ぜそうな文には札を付けます。

表 1　五つの札。

札	意味	保証しないこと	主に現れる層
Lean	Lean 4 で機械検査した言明。定理名を添える。証明を省いた印 `sorry` は 0 個。`native_decide`（計算を検査器の外のコンパイル済みのコードに任せる近道）は使わない。公理は Lean の標準の三つ（命題の外延性 `propext`・選択公理 `Classical.choice`・商の健全性 `Quot.sound`）だけ。詳しくは A-04・Lean の案内	前提が正しいこと	本書の検討（5-11・17-12・第 15 部・第三巻）
紙	紙の上の証明はあるが、機械検査は済んでいない	誤りが無いこと	本書の検討
計算	この端末で計算して確かめた範囲	範囲の外で成り立つこと・定理であること	全ての層（既知の式の検算を含む）

札	意味	保証しないこと	主に現れる層
既知	既知の定理、その言い換え、外の文献の確認	このサイトの成果であること	基礎・既存の知見
物理	物理では受け入れられているが数学の定理ではないもの（数値・半古典・予想）	証明があること	既存の知見（第 17 部）・地図

第三巻の第 16〜28 部と第 15 部では、この五つの札を、材料に合わせて五分類（初・典・機・読・仮）に細かくしています（23-00 §01）。対応はおおむね、紙→初か仮、計算→機（区間演算）か読（浮動小数・Monte Carlo）、既知→典、物理→読か仮で、Lean は札の外の欄として、定理名と仮定を同じ行に書きます。第 24 部の「見」は「読」と同じ水準の札です（物理の見立てで、五つの札の「物理」に当たります）。道具ごとの家と札は 16-10 表 1 にあります。

第二巻の札。第二巻の第 6〜14 部は、公開された構成を読むための三つの札、源（公開された構成の源を読んだ）・推（本書の推し量り）・評（委員会の評価書による）を使います。意味と、それぞれが保証しないことは 6-00 の「札」にあります。第二巻の本文では、このほかに第三巻と同じ五分類の札（初・典・機・読・仮）と Lean の札も、同じ意味で使います。第二巻は公開された構成の結果を全て「Lean で証明されている、と委員会が評価した」の水準で引きます。この本はそのコードを組み立ても実行もしていません（6-00 §02）。上の表 1 の Lean の札は、この本の検討が自分で機械検査した言明だけに付けます。

誤解されやすいのは Lean の札です。機械検査が保証するのは、前提から結論が論理的に従うこと、つまり矢印の部分です。

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_k \implies Q \tag{3}$$

前提 $P_1, \ldots, P_k$ の正しさは札の外です。前提に測った値や仮に置いた関数の形が入れば結論も条件つきで、この本はその前提を併記します（23-13）。逆に、この端末で導き直した値でも、値そのものが既知なら札は既知です（一ループの係数。4-06）。

例。このサイトの論文（5-11）では、一本の論文の中で札が段ごとに分かれます。格子の作用からある下界（定数 27 を含む不等式）までの鎖は Lean で、定理名は 5-11 に載せます。そこから格子の上の質量ギャップへ進む段は 紙 で、しかも概略です。定数 27 を 21 より小さくできないことは、具体的な配位での誤差の無い算術で確かめてあり 計算 、Lean の定理ではありません。下界の意味などの用語は 5-11 で定義します。一本の論文の中でも、札は文ごとに違います。

> 04

一章の形 — 冒頭の三行・番号・記号・動く図

どの章も、冒頭の三行（分かること・前提・先に言うこと）、章の順序、番号つきの節、末尾の二つの表（言えている範囲・出典と再現）の順です。節の中は言葉、式、例の順です。式・表・図の番号は章ごとに振り直し、記号は初出で定義して記号表（A-01）と揃えます。たとえば作用は全章でこう書きます。

$$S[A] = \frac{1}{2g^2} \int_{\mathbb{R}^4} \operatorname{tr}\bigl(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}\bigr)\, d^4x \tag{4}$$

A はゲージ場、$F_{\mu\nu}$ はその強さ、g は結合定数で、二度現れた添字は 1 から 4 まで和を取ります（3-03）。(4) は物理の書き方（A と F をエルミートな行列で書く規約）です。幾何の書き方の曲率 $F_{\text{幾何}}$ とは $F_{\text{幾何}} = -iF$ の関係にあり、そちらで書くと $\operatorname{tr} F^2$ の符号が変わります（二つの書き方は A-01）。第 3 部から先は $\hbar = c = 1$ とし、章の冒頭で断ります。

例。 同じ字の二つの意味も冒頭で断ります。β は、格子では結合の逆数 $\beta = 2N/g^2$（5-01）、統計力学では逆温度 $\beta = 1/k_B T$（2-08）です。動く図は最初は止まっていて「動かす」で動き、JavaScript が無くても図の下の表で読めます。用語は A-02 にあります。

05

前提の地図 — ある章に何章が要るか

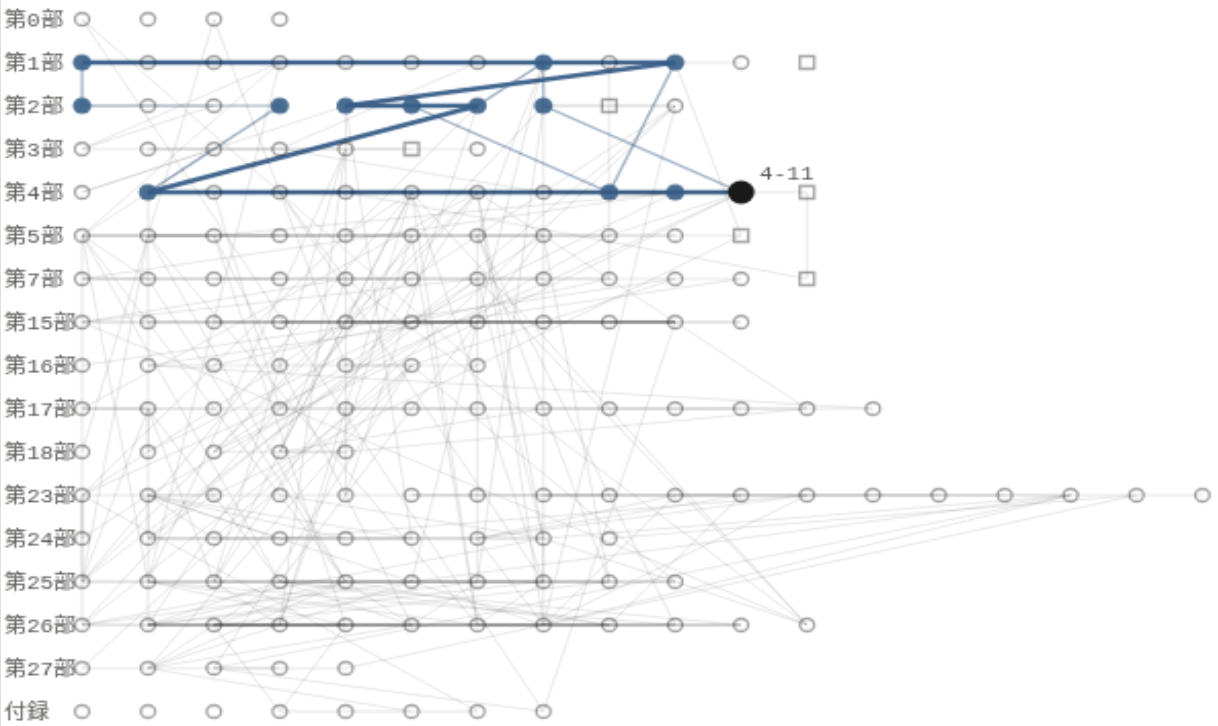
目次の各章の「前提」の欄には、先に読む章が書かれています。前提にもまた前提があるので、ある章に要る章の全体は、矢印を逆向きにたどって集めた集合です。これを**推移的な前提**と呼びます。章 c の直接の前提を $\mathrm{Pre}(c)$ とすると、推移的な前提 $\mathrm{Anc}(c)$ と最長の鎖の章数 $\ell(c)$ は次の再帰で決まります（前提の無い章では $\varnothing$ と 1）。

$$\mathrm{Anc}(c) = \bigcup_{p \in \mathrm{Pre}(c)} \bigl(\{p\} \cup \mathrm{Anc}(p)\bigr), \qquad \ell(c) = 1 + \max_{p \in \mathrm{Pre}(c)} \ell(p) \tag{5}$$

矢印が輪を作らなければ、この再帰は終わります。計算 この地図は、2026-10-15 の目次の 166 章（第一巻・第 7 部・15-00〜15-10・第 16 部の 7 章・第 17・18 部・第 23〜27 部・付録）についての図です。その 166 章の間に前提の矢印は 336 本あり、輪はありません。前提の無い章は 14 章です。2026-10-15 の目次の順（部の並びは今の番号で 0〜5・7・17・18・16・23〜27・15・付録）は矢印の向きを守るように並べてあり、第 25〜27 部の 7 本（26-01 → 25-06・25-07、26-02 → 25-08、27-02 → 27-01 と、付録 A-04・A-06 を前提に引く 3 本）を除いて、どの章でも前提の章が目次で先にありました。部を読む順に振り直した今の目次の順では、さらに 2 本（17-13 → 16-05 と 26-11 → 15-00）で前提が後に来ます 計算 。今の目次の順に通読するなら、この 9 本の先を一度めくれば、前提は欠けません。この地図には、そのあと

に加わった 98 章（第二巻の第 6・8〜14 部、15-11〜15-14、16-02〜16-04・16-11、第 19〜22 部、26-12、第 28 部、記号の対応表 24-09）が入っていません。それらの前提は各章の冒頭の「前提となる章」にあります。

図 1　2026-10-15 の目次の 166 章（範囲は本文のとおり）の前提の地図。つまみで章を選ぶと、その章の推移的な前提が塗られ、最長の鎖が太線になる。行は部（この地図に入る十六の部を今の番号の順に。最後の行は付録）、列は部の中の目次の順、四角は寄り道の章。「動かす」で章を順に送る



4-11 質量ギャップの定義｜直接の前提 4-10・2-08｜推移的な前提 12 章｜最長の鎖 7 章：1-01 → 1-10 → 2-05 → 2-07 → 4-02 → 4-10 → 4-11｜この章を前提にする章 67

計算 この図の数値はこの端末で計算しました。図は「前提」の欄の表からその場で (5) をたどり、表 2 と一致します（2026-10-15 の目次）。

例。 計算 表 2 は (5) をいくつかの章で計算したものです。最も長い鎖は 29 章で、付録の「質量ギャップまでの地図」（A-08）に至るものです（第 15 部の「言えないこと・問いの索引」15-09 までの 28 章に A-08 を足した鎖）。第 1・2・4・5 部を通って第 23 部に入り、統合表（23-12）・残件（23-15）から 24-07 を経て紫外の制御の要約（26-11）に届き、第 15 部を 15-00 から 15-06 まで順に通ります。第 27 部までで最も長いのは 26-10・27-01 に至る 26 章、第 24 部までは 24-07 に至る 19 章です。第 23 部の中で最も長いのは 23-15・23-14 に至る 18 章、第 16 部では課題の一覧（16-07）に至る 14 章です。

計算 **表 2**　代表的な章の前提。

章	直接の前提	推移的な前提	最長の鎖
4-11 ギャップの定義	4-10・2-08	12	7

章	直接の前提	推移的な前提	最長の鎖
5-09 何を固定するか	5-05・4-11	26	10
7-10 四次元で止まる場所	7-07	16	10
17-10 四次元に戻す	17-09	13	11
16-07 課題の一覧	16-05	25	14
23-12 統合表と依存グラフ	23-06・23-07・23-09・23-11	38	17
23-15 残件と費用	23-12	39	18
24-07 四次元だからこそ	24-01・24-02・23-03・23-15・4-07・7-07	49	19
26-10 新しい見方の候補	26-06・26-08・26-09・25-03・26-01	86	26
27-01 条件つきの言明	16-09・27-00・25-04・25-05・26-02・26-05・A-06・27-02	88	26
15-09 言えないこと・問いの索引	15-00・15-01・15-02・15-03・15-04・15-05・15-06・15-07・15-08	60	28
15-10 体系の試み	15-05・15-08	59	27

逆向きに数えると土台の章が分かります。計算 1-01（線形代数）は 145 章の、2-01（作用）は 132 章の、1-10（ヒルベルト空間）は 119 章の推移的な前提です。一方、前提の欄は道具として要る章だけを記します。7-10 の推移的な前提 16 章に第 3 部（古典のヤン–ミルズ）は入っていません。前提の欄は読む順の下限で、読むとよい章の全部ではありません。

06

寄り道の飛ばし方 — 飛ばしても前提は欠けない

寄り道は二種類あります。目次で題に「寄り道」と付いた 6 章（1-12・2-09・3-06・4-12・5-11・7-12）と、章の中で「寄り道：」で始まる見出しの小節です。どちらも飛ばしても先へ進めるように書く約束です。章の中の寄り道の小節は、その章の冒頭の「この章の順序」に「寄り道：」の題で出るので、そこで見分けて飛ばせます。寄り道の章の集合を Y とすると、計算 推移的な前提に寄り道を含む本筋の章は、二次元イジング（2-09）を前提にする 2-10 と、2-10 を前提にする第 23〜27 部の章、それに 7-12 だけです。

$$\mathrm{Anc}(c) \cap Y \subseteq \{\text{2-09}, \text{4-12}, \text{5-11}\}, \qquad \text{2-09} \in \mathrm{Anc}(c) \iff \text{2-10} \in \mathrm{Anc}(c) \cup \{c\}, \quad \text{4-12} \in \mathrm{An}$$

例。 1-12・3-06・7-12 はどの章の前提でもありません。4-12 は 7-12 だけの、5-11 は 23-02 だけの直接の前提で、23-02 へ進むときにだけ 5-11 を先に読みます。2-09 は 2-10（緩和の時間と動的指数）の前提で、第 23 部から第 27 部までの章の多くは 2-10 を前提にするので、第 23 部へ進むときは 2-09 も先に読みます。

寄り道：前提を破らない並べ方は何通りあるか

飛ばしてよい小節です。

前提の矢印を守る並べ方を、半順序の**線形拡大**と呼びます。目次の順はその一つです。長さ a と b の二本の鎖を順を保って混ぜる方法は、$a+b$ 個の席のどこを一本目に渡すかで $\binom{a+b}{a}$ 通りです 既知 。第 1 部を部の中の矢印だけで見ると、1-01 から枝が出て（1-02 → 1-04 の鎖と 1-05 → 1-06 が合流して 1-07、ほかに 1-10 → 1-11）、別に 1-08 → 1-09 と 1-12 があります。三つの塊（9・2・1 章）を混ぜ、1-07 の手前の二本を混ぜ、その 6 章に 1-10 → 1-11 を混ぜると

$$e = \frac{12!}{9!\,2!\,1!} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{8}{2} = 660 \cdot 10 \cdot 28 = 184800 \tag{7}$$

通りです。**例**。 計算 部分集合の上の動的計画法で数えると第 1 部は (7) と一致し、12! の約 3.9×10^{-4} です。第 2 部は 7560 通り、第 3 部は 20 通りです。第 2・3 部は、部の中でどの章も前提が高々一つなので**森**になり、森の公式 $e = n!/\prod_c h(c)$（$h(c)$ は c と、c を推移的な前提にする部の中の章を合わせた数） 既知 が使えます。この公式の値も動的計画法と一致しました。第 1 部は 1-07 が前提を二つ持つので森ではなく、そのため (7) で数えています。二本の鎖の $\binom{a+b}{a}$ は、森の公式で h が $1,\dots,a$ と $1,\dots,b$ になる場合です。第 1・2 部の 21 章では 44437771778400 通りで、21! の約 8.7×10^{-7} です。

07

読む順の提案 — 読者ごとの入口と、前提の地図から作る道

読者ごとの入口。この本は三巻を順に読むように並べてありますが、目的によって入口を変えられます。

- **問題と現在地だけを知りたい読者** — 0-02 → 0-03 → 6-00 → 6-01 → 6-04 → 16-02 → 16-04。何が示され、何が開いていて、この本がどこに立つかまでです。
- **公開された構成を数学として読みたい読者（数学科）** — 第一巻の 1-08〜1-11、4-09〜4-11、5-01・5-03・5-05 と、構成的場の理論の 7-01・7-05・7-07 を先に読み、そのあと第二巻を 6-00 から順に。
- **物理の側から入りたい読者（物理学科）** — 第一巻の第 3・4 部と 5-01・5-08 から、物理の側の見方（17-01〜）と辞書（18-01〜）へ。そのあと 6-01 と 13-01〜（ヤン–ミルズである証拠）。
- **質量ギャップに向けたこの本の結果を読みたい読者** — 16-01〜16-04 のあと、下の「確かな所から読む」の道、そして条件つきの言明（27-00〜）。
- **この本の検討の道を追いたい読者** — 一本目の道（23-00〜）、二本目の道（25-00〜）、移り変わりの帯（26-00〜）。紫外の制御の試みは第 15 部（15-00〜）、公開された構成との比べ

は第 14 部（14-01〜）。

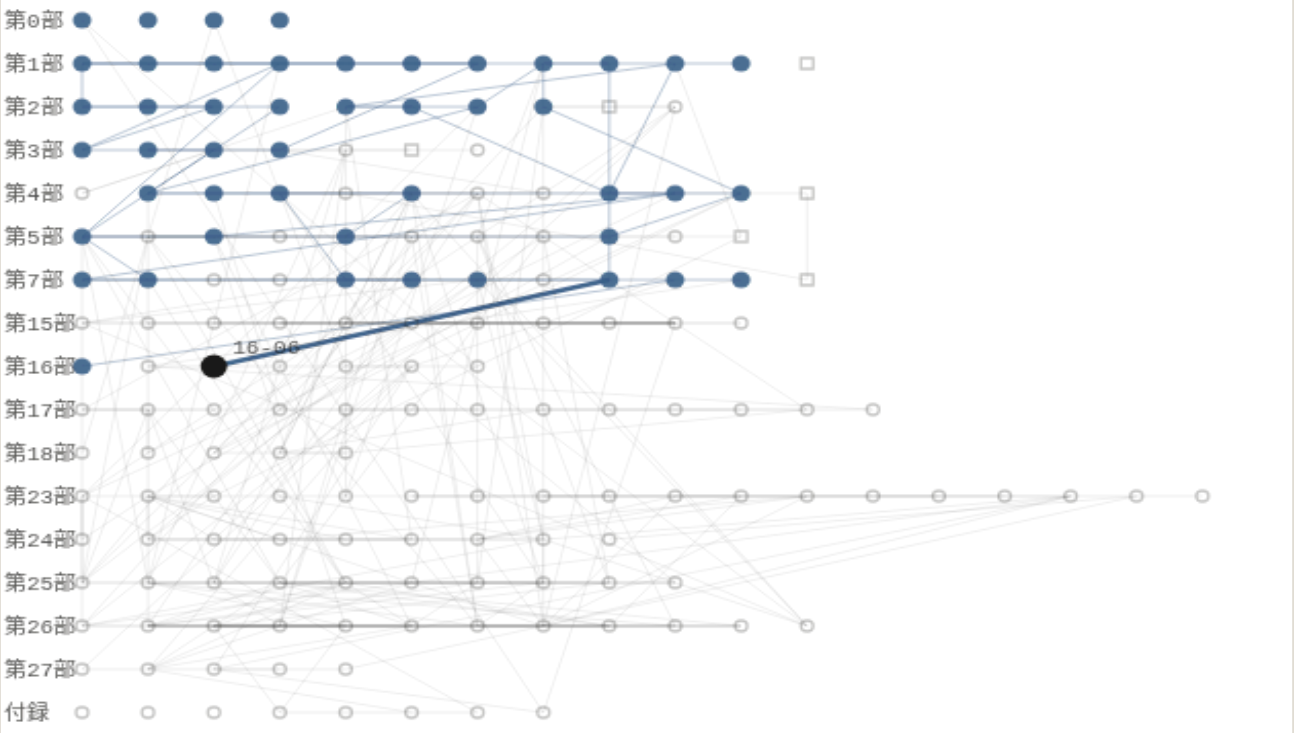
以下の道は、§05 の前提の地図（2026-10-15 の 166 章）から作ったものです。

通読なら目次の順で足ります。急ぐなら、目的の章の集合 G に推移的な前提を足して目次の順に並べます。この列が §05 の 9 本の矢印（前提が目次で後に来るもの）を含まなければ、前提は欠けません。

$$R(G) = G \cup \bigcup_{g \in G} \mathrm{Anc}(g) \qquad \text{(目次の順に並べる)} \tag{8}$$

提案は五通りです（図 2 にあるのは最初の三つ）。第 25〜27 部へ入る三つの道（第 25 部を追う・帯を追う・一本目の道から帯へ）と、第 15 部（紫外の制御）の三本の筋は目次の「読む順」にあり、後者は表 3 の最後の三行にもあります。**入口だけ**は、前提が空か第 0 部だけで済む章（付録を含めて 16 章 計算 ）から選んだ 7 章です。**数学の側から**は公理・格子・構成的場の理論を経て四次元で止まる場所まで、**物理の側から**は漸近自由・閉じ込め・ホログラフィーを経て物理が数学と離れる場所までです。どの道も、表 3 の G から (8) で作った列です。

図 2　ボタンで道を選び、つまみか「動かす」で一章ずつ進む。読んだ章を塗り、いま読む章の前提の矢印を太くする。前提より先に来る章があれば「前提の欠け」に数える



数学の側から　48/48：16-06 新しい概念の候補｜前提　7-09（44 章目）｜この道の前提の欠け　0

計算 この図の数値はこの端末で計算しました。図は表 3 の G からその場で (8) を作り、python3 の列と一致します。

例。 計算 三つの列はどれも前提の欠けが 0 です。数学の側からは 48 章、物理の側からは 39 章で、24 章が共通です。二つの道は 16-05（二つの掘り方の切れ目）で合流し、どちらから来

ても、もう一方の道の章を足さなければ進めません。16-05 は推移的な前提が 24 章あるので、入口だけの道には入りません。

計算 **表 3**　読む順。G にはどの道でも第 0 部の 4 章を加える。図 2 は上の三つ。四行目から八行目は、章の役割（層）で選ぶ四本と道具から入る道で、図 2 には無い。最後の五行は第 23 部・第 24 部・第 15 部へ入る道で、図 2 には無い。章数は目的の章の推移的な前提を含めた数。

道	目的の章 G	章数	16-05 へ進むときに足す章
入口だけ	1-12・16-08・23-16	7	—（次は二つの道のどちらかへ）
数学の側から	1-11・3-04・4-11・5-03・5-09・7-02・7-06・7-09・7-11・16-01・16-06	48	17-04・17-05・17-08・17-09・17-10・17-13
物理の側から	3-05・3-07・4-07・5-08・17-02・17-03・17-10・17-11・17-13	39	2-06・4-09・4-10・7-01・7-05・7-07・7-10・7-11
層：基礎	0-02・0-03・1-01・1-02・1-04・1-08・1-10・2-05・2-07・2-08・3-01・3-02・4-02・4-10・4-11	24	—
層：既存の知見	4-06・4-07・5-03・5-04・5-06・7-05・7-07・7-10・17-02・16-01・24-07・15-01・15-02（節：23-08 §01・23-08 §03・24-05 §04・24-06 §02・26-04 §01・26-08 §03。章数には数えない）	65	—
層：本書の検討	5-11・17-12・16-09・16-10・23-00・23-01・23-05・23-15・24-04・25-00・25-04・25-05・26-00・26-02・27-01・15-00・15-03	101	—
層：地図	0-02・16-05・16-07・16-09・23-15・25-09・26-08・27-02・27-03・27-04・15-08・15-09	104	—
道具から入る（16-10 §02）	1-10 → 5-03 → 5-11 → 7-04 → 7-05 → 18-04 → 23-08 §01〜§03 → A-04 → 24-06 → 15-04 → 15-05	72	—
第 23 部の検討をたどる道	23-00 → 23-01 → 23-03 → 23-04 → 23-05 → 23-12 → 23-15 → 23-16（とその推移的な前提）	45	—
第 24 部を追う道	24-00 → 24-01 → 24-03 → 24-04 → 24-05 → 24-08（とその推移的な前提）	49	—
紫外の制御（最短）	26-11 → 15-00 → 15-03 → 15-09	65	—（15-09 の推移的な前提は第 15 部の全章を含む）
紫外の制御（計算の筋）	15-04 → 15-05 → 15-06	62	—
紫外の制御（壁の筋）	15-02 → 15-07 → 15-08 → 15-08 §06（小さい場の結合への寄与の割り方）	61	—

二つの道の和に 16-07 と 23-15（残件と費用）の推移的な前提を足すと 78 章で、2026-10-15 の目次の順なら欠けはありません。今の目次の順では、16-05 の前提の 17-13 を先に読みます。表 3 の第 15 部へ入る四行（道具から入る道と紫外の三行）でも、今の順では 26-11 を 15-00 より先に読みます 計算 。学科で習った章は、どの道でも飛ばし読みしてかまいません。**第 23 部の検討をたどる道**は、緩和時間の仮定を軸に置いて、一段目の主張を条件に割り、残りと主張しないことまでを順にたどる道です（08 節のとおり、何かを示した記録ではありません）。

確かな所から読む — 19-00 → 20-00 → 21-00 → 22-00 → 28-00（第 19〜22 部と第 28 部の入口）。格子の上に定義した対象、機械検査した定理、前提の一覧の順です。一つの尺度の結果（自由場の一段と線形化）は第 15 部の後半（15-11〜）にあります。この道は表 3 と図 2 の数えに入っていません。

08

この本が主張すること、しないこと — 公開された構成・開いている問い・この本の結果

この本は、ヤン–ミルズの存在と質量ギャップの問題の解決を主張しません。今の状況を三つに分けて書きます。

- **存在**。2026-11-10 に、四次元の Wilson の格子ゲージ理論の尺度の極限として Wightman の公理を満たす相対論的な場の量子論が作れることを、任意の単純なコンパクト群について示した Lean の証明と、それを検査した委員会の評価書が公開されました。委員会はこの構成が証明されていると評価しています。この本はそのコードを組み立ても実行もしておらず、第二巻はこの結果を「Lean で証明されている、と委員会が評価した」の水準で読みます（6-00・6-01）。
- **示されていないこと**。同じ評価書によれば、無限体積の極限の収束と一意性（極限は部分列で取られている）、連続の理論の確率測度、一様な質量ギャップ（相関の指数の減衰とスペクトルの隙間）、Wilson ループと面積則、一粒子の状態は示されていません。質量ギャップは開いています（6-04・16-02）。
- **この本の結果**。第三巻の確かな定理（第 20〜22 部）は、格子間隔を固定した言明です。強結合の窓の中の無限体積の極限・格子の単位の隙間・面積則と、どの結合でも成り立つ渦の床、弱結合の側の大きい面の稀さです。どれも既知の型の結果の形式化です。強結合の結果は残る問い（連続極限での隙間）とは反対の端（強結合・格子間隔は固定）にあり、大きい面の稀さも繰り込む前の一つの尺度の言明で、どれもその問いに答えたものではありません

（16-04）。第 23〜27 部の道は仮定を置いた条件つきの言明で、置いた前提は前提の木（第 28 部）に並べてあります。

取り違えやすい点を一つ挙げます。格子ゲージ理論（第 5 部）では、格子間隔 a を固定し、結合の逆数 β が小さい側（強結合）で多くが示されています。問題が要るのは反対側です。

$$\underbrace{\beta \text{ が小さい（強結合）}}_{\text{格子の上で示されている側}} \quad \longleftrightarrow \quad \underbrace{\beta \to \infty,\ a \to 0}_{\text{問題が要る側}} \tag{9}$$

この本の一文を置きます。**質量ギャップの証明は下界の証明である**。試しの状態や有限の測定から出るのは隙間の上界だけで、下界にはすべての状態についての議論が要ります（1-10 の囲み「上界と下界の非対称」）。

格子から入る道で質量ギャップを示すには、格子単位の質量 m_{lat} を a で割った $\Delta = m_{\mathrm{lat}}/a$ が $a \to 0$ で正に残ることを示すことになります。極限の理論が公理を満たし自明でないことは、2026-11 に公開された構成が示しました（委員会の評価の水準。6-01）。ただしその構成は、隙間について何も言っていません（5-09・23-01・0-03）。

例。強結合の格子では、Wilson ループの面積則が示されています（Osterwalder–Seiler 1978）既知 。Wilson ループは閉じた道に沿ってゲージ場の平行移動を掛け合わせて作る観測量で、面積則はその期待値が道の囲む面積の指数で小さくなることです。クォークの閉じ込めの目印とされます 物理 （5-02）。ただし面積則は、可換な群 $U(1)$ を含むどの格子ゲージ理論でも強結合で成り立つので、それだけでは非可換の理論の閉じ込めの証拠になりません（5-06）既知 。無限体積の極限について強結合の側で示されていることは 5-04 で扱います。節 03 の例の論文も強結合の側の結果で、連続極限について何も主張していません。

緩和時間の仮定を軸に置いた検討の部（23-00〜）は、計算・計算機援用・Lean で確かめた範囲と仮定の行を並べた部で、検証前の着想（23-17）も札で区別して含みます。一本目の道の後半（第 24 部、24-00〜）は、緩和時間の仮定とは別の視点と、緩和時間の仮定を前提とした新しい見方を置きます。主張しないことは 23-16、Lean の読み方は Lean の案内・Lean の記録、論文は 論文の一覧 にあります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない（どこで扱うか）
計算 2026-10-15 の目次（166 章）の「前提」の欄から数えたこと：矢印 336 本・輪が無い・2026-10-15 の目次の順が矢印を守る（第 25〜27 部の 7 本を除く。今の順では 9 本）・表 2・(6)・線形拡大の数・表 3 の列に欠けが無い	前提の欄は設計の段階の依存で、章の中身を写し切るとは限らない（目次が改まれば数も変わる）。五つの道が最善であること（提案で、最適化ではない）。章の中の寄り道を飛ばせることは約束で、計算していない
既知 問題の一文と発表の日付・場所。強結合の格子の面積則と、それが連続極限の反対側の結果であること	質量ギャップの証明（未解決。6-04・16-02）。連続極限の構成は 2026-11 に公開された構成が示した（委員会の評価の水準。6-00）。強結合の側の無限体積の極限（5-04）
札の意味と、Lean の札が前提の正しさを保証しないこと（この本の約束）	個々の Lean の言明の前提と定理名（23-13・A-04・論文については 5-11）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
問題の一文	既知	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”（Clay 数学研究所の公式の問題文 PDF）。§4 の一文を原文と照合。訳は 0-03
発表の日付と場所	既知	J. Carlson, A. Jaffe, A. Wiles (eds.), *The Millennium Prize Problems*, CMI／AMS の序文（p. viii）：'The prize was announced at a meeting on May 24, 2000, at the Collège de France.'。照合は 0-03 の出典表による（研究所が公開している書籍の PDF）
論文の札の分かれ方	Lean 紙 計算（段ごと）	このサイトの論文（5-11）。段ごとの札は本書の材料の検査が論文の原稿と照合
強結合の格子の面積則	既知	K. Osterwalder, E. Seiler, “Gauge field theories on a lattice”, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471。書誌のみ（面積則をこの論文に帰すのは次の行の Chatterjee §4 による）
面積則が $U(1)$ を含むどの格子ゲージ理論でも強結合で成り立つこと	既知	S. Chatterjee, “Yang–Mills for probabilists”, arXiv:1803.01950 (2018) §4。本書の材料の調査が §4 の本文と照合：'the area law holds for any lattice gauge theory at sufficiently small β. A rigorous proof was given by Osterwalder and Seiler … this also implied that the area law at small β cannot be evidence for quark confinement'
森の公式・$\binom{a+b}{a}$	既知	D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Vol. 3, Addison–Wesley, 1973, p. 70。書誌のみ（森の線形拡大の公式をこの頁に帰すのは S. C. Billey, J. P. Swanson, arXiv:2010.12701 §1.3・§2.3 の本文による）。$\binom{a+b}{a}$ は二本の鎖の場合
表 2・表 3・(6)・(7)・本文の数・図	計算	python3 で 2026-10-15 の目次の「前提」の欄から計算（区切りは「,」「、」「・」。第 24 部の記号の対応表 24-09 は章に数えない）。線形拡大は部分集合の上の動的計画法、森の公式と (7) で検算。図はブラウザの JavaScript が同じ表からその場でたどる

次に読む章：0-02 一枚の絵。

一枚の絵 — 短い距離で道具が最も進み、長い距離で手が離れている

この章の §01〜§05 は既存の知見、§06・§07 は未解決の地図、§08 は案内です。

この章で分かること — 問題が求める二つの仕事と、隙間が古典論にも摂動論にも映らない理由。
長さの尺度を並べた一枚の絵で、どこまで既知の道具が進み、どこで数学と物理の手が離れているか。
この本のどの部が絵のどこを扱うか。

前提となる章 — ありません。式はその場で定義します。問題文の語ごとの読みは 0-03、二つの四次元は 0-04。

先に言うこと — 案内図の章です。この本はヤン–ミルズの存在と質量ギャップの問題の解決を主張しません。存在は 2026-11 に公開された構成が示し（Lean で証明されている、と委員会が評価した。6-00）、質量ギャップは開いています（6-04）。図 1 は一ループの近似式（物理の水準）による模式図で、帯の境目と幅は説明のための選択です。図 2 は相互作用の無い場の例です。

この章の順序

1. 問い
2. 古典では見えない質量（表 1）
3. 一枚の絵：尺度のはしご — 短い距離は弱く、長い距離は強い（図 1・表 2）
4. 有限の箱と一様な隙間（図 2・表 3）
5. 世界はどこまで来ているか（表 4）
6. 発散のほかに何があるか（表 5・寄り道：無限大に記号を与えれば）
7. 二つの掘り方と七つの切れ目（表 6）
8. この本の地図

01

問い — 何を作り、何を示すか

クレイ数学研究所は 2000 年 5 月 24 日、パリで七つの懸賞問題を発表しました。この問題の公式の問題文は Jaffe と Witten が書いています。ヤン–ミルズ理論は非可換な群を使うゲージ理論で、強い力と弱い力の記述の骨組みです（3-02）。核の一文はこうです。既知

> 任意のコンパクト単純ゲージ群 G について、$\mathbb{R}^4$ 上に非自明な量子ヤン–ミルズ理論が存在し、質量ギャップ $\Delta > 0$ を持つことを証明せよ（§4）。

「非自明」は、理論が自由場（相互作用の無い場。その確率の重みは、正規分布を無限個の変数に広げた**ガウス型**）に帰着しないことです（0-03）。

仕事は二つです。**作ること**——「存在」には、場の量子論の公理（Wightman の公理、Osterwalder–Schrader の公理）と少なくとも同じ強さの性質の確立が含まれます。公理は、場の量子論が満たすべき条件を数学の言葉で並べた一覧です。Wightman のものは時空（ミンコフスキー空間）の側で、Osterwalder–Schrader のものは時間を虚数にした側（ユークリッド空間）で書かれています（4-09・4-10）。**示すこと**——エネルギーの作用素 H（ハミルトニアン）について

$$\sigma(H) \subset \{0\} \cup [\Delta, \infty), \qquad \Delta > 0 \tag{1}$$

です。$\sigma(H)$ はスペクトルで、取りうるエネルギーの値の集まりと思ってかまいません（1-10）。0 は真空のエネルギーで、式 (1) は、どの励起も Δ 以上のエネルギーを持つと言っています。

例。調和振動子のエネルギーは真空から測って $0, \hbar\omega, 2\hbar\omega, \ldots$ で隙間 $\hbar\omega$ があり、直線上の自由な粒子の $p^2/2m$ はいくらでも 0 に近づくので隙間がありません。相対論では静止した粒子のエネルギーが質量（$E = mc^2$）なので、隙間は最も軽い励起の質量に当たります。既知 正確には、問題文の隙間はスペクトルで定義され、粒子では定義されていません。対象はクォークを含まない純ヤン–ミルズ理論で、閉じ込め（色の電荷を持つものが単独では取り出せないこと）は拡張問題です（0-03）。

02

古典では見えない質量 — どの冪にも映らない尺度

問題文によれば、古典的なヤン–ミルズ方程式は光速で進む質量の無い波を記述し（§1）、四次元では質量ギャップは古典的に見えません（§6.6）。既知 作用に入る定数は次元の無い結

合 g だけで、古典論からは質量が作れないのです。それでも量子論では尺度が一つ生まれる、と物理では考えます（次元転移）。一ループの近似では

$$\Lambda = \mu \, \exp\!\Big(-\frac{1}{2 b_0 \, g^2(\mu)}\Big), \qquad b_0 = \frac{11 N}{3} \cdot \frac{1}{16\pi^2} \tag{2}$$

です（μ は基準の尺度、$g^2(\mu)$ はそこでの結合、N は $SU(N)$ の N）。隙間は $\Delta = c\Lambda$（c は数）と期待されますが、定理ではありません。物理

関数 $e^{-c/x}$（$c > 0$）は $x \to 0$ でどの冪よりも速く消えます。

$$\lim_{x \to 0^{+}} \frac{e^{-c/x}}{x^{n}} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{3}$$

だから $x = 0$ での Taylor 係数はすべて 0 で、g^2 の冪級数で展開する摂動論はどの次数でも Λ を 0 と見ます。既知 欠けているのは無限大の値ではなく、級数に載らない量です（表 1）。

計算 表 1　純 $SU(3)$・式 (2)。$1/(2b_0) = 24\pi^2/33 \approx 7.178$

g^2	Λ/μ	$\div (g^2)^{10}$	$\div (g^2)^{20}$
0.5	5.83e−7	5.97e−4	0.611
0.3	4.06e−11	6.88e−6	1.17
0.1	6.71e−32	6.71e−22	6.71e−12

20 乗で割った比は $g^2 = 0.3$ で 1 を超えますが、$g^2 \to 0$ では 0 に向かいます。続きは 4-07・7-11・4-12。

03

一枚の絵：尺度のはしご

横軸に長さ ℓ（対数）、縦軸にその長さでの結合の強さを取ります。四次元のヤン–ミルズでは短い距離ほど結合が弱くなります（漸近自由。Gross–Wilczek、Politzer、1973 年）。既知 一ループでは $\alpha = g^2/4\pi$ について

$$\alpha(\ell) = \frac{1}{2 b_0' \ln\!\big(1/(\ell\Lambda)\big)}, \qquad b_0' = 4\pi b_0 = \frac{11 N}{12\pi}, \qquad \ell\Lambda < 1 \tag{4}$$

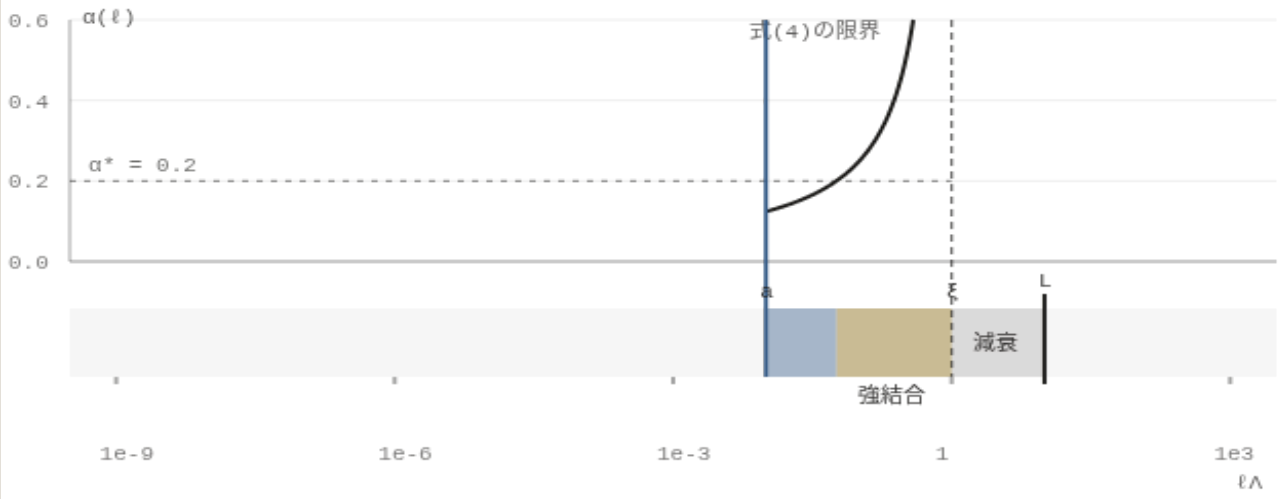
です（g^2 で書くと式 (2)）。物理 $\ell \to 0$ で α は対数の速さでしか消えません。二・三次元では g^2 が質量の $4 - d$ 乗の次元を持ち、無次元の強さ $g^2 \ell^{4-d}$ が冪の速さで消えるので、四次元が境目です（0-04）。

同じ $4 - d$ を本の他の量と並べて一本のつまみで動かす図は 1-12 §10 図 4（d = 4 で開く）。

長い側の目印は**相関長** ξ です。離れた二点の相関が距離 r について $e^{-r/\xi}$ の速さで減るときの長さで、隙間とは $\xi = 1/\Delta$ の関係にあります（$\hbar = c = 1$ の単位。4-11）。

理論を作るには、短い側を格子間隔 a、長い側を一辺 L の箱で切り、$a \to 0$（紫外極限）と $L \to \infty$（無限体積極限）を取ります。長さ 2 倍を一段と数えます（繰り込み群の一段。7-05）。

図 1　つまみで a を小さく、L を大きくすると、左の弱結合の帯と右の減衰の帯が伸びる。中央の強結合の帯は a に依らない。「動かす」で二つの極限を同時に取る



log₁₀(aΛ) = −2.0　α(a) = 0.124　段：弱 2.5／強 4.1／ξ〜L 3.3

計算 この図の数値はこの端末で計算しました（式 (4)・$N = 3$）。目安 $\alpha_* = 0.2$ と $\xi\Lambda = 1$ は説明のための選択です。JavaScript が無効なら表 2。

計算 表 2　式 (4)・$N = 3$・$\alpha_* = 0.2$ の段の数

$\log_{10}(a\Lambda)$	$\alpha(a)$	弱結合	強結合
−1	0.248	0	3.3
−2	0.124	2.5	4.1
−3	0.083	5.8	4.1
−6	0.041	15.8	4.1
−9	0.028	25.8	4.1

a を 10 分の 1 にするたびに段は約 3.3 増え、増えるのはすべて弱結合の段です。強結合の段は a に依らず約 4.1 です（目安を 0.1・0.3 にすると 8.2・2.7 で、やはり a に依らない）。L を大きくすると ξ より長い側が $\log_2(L\Lambda)$ 段増えます。計算

帯の幅は ξ と α_* の置き方で変わります。物理の数値では、純 $SU(3)$ の最も軽いグルーボール（グルーオン、つまりヤン–ミルズ場の粒子だけでできた束縛状態）の質量 m は $r_0 m \approx 4.21$（Morningstar–Peardon 1999）、同じ理論の Λ は $\overline{\mathrm{MS}}$ という定義で $r_0\Lambda \approx 0.602$（Capitani–

Lüscher–Sommer–Wittig 1999）と見積もられています。r_0 は静的なクォークの間の力から決める長さの物差しです。$\xi = 1/m$ と置けば $\xi\Lambda \approx 0.14$ で、ξ は $1/\Lambda$ より短い側に来ると見込まれます。物理 式 (4) の Λ とは定義が違うので目安ですが、この値なら強結合の帯は $\alpha_* = 0.2$ で約 1.3 段、$\alpha_* = 0.3$ ではほぼ 0 段です。計算 帯の幅の数値は物理の量ではありません。この絵で頑健なのは、幅が a に依らないことのほうです。

弱結合の帯は展開の足場がある側で、数学が最も進んでいるのもここです（Bałaban。完結はしていません。§06・7-07）。強結合の帯には小さな径数が無く、$a \to 0$ でも消えません。ξ より長い帯では、相関の指数減衰を、物理の単位で箱に一様に示すことが鍵になります（§04）。問題の本体は、三つの帯を両方の極限で崩れない評価でつなぐことです。正確には、式 (4) は摂動論の式で、この絵は物理の水準の描像です。物理

04

有限の箱と一様な隙間

問題文が求めているのは $\mathbb{R}^4$ 上の理論の隙間です。出題者はそこへの道筋として有限の体積の近似を考え、今の方法では方向が見えない場所として「体積に一様な（uniform in the volume）質量ギャップ」と「無限体積の極限 $T^4 \to \mathbb{R}^4$」を挙げます（§6。T^4 は四次元の箱の対面を貼ったもの）。前者には新しい考えが要り、それが得られれば $T^4 \to \mathbb{R}^4$ の研究が可能になるだろう、と書いています（§5 末・§6.5）。既知

格子間隔 a と箱の一辺 L を固定すれば、格子の隙間が正であることは易しい側です（17-13 の寄り道）。出題者が鍵と見ているのは、連続の理論（$a \to 0$ の後、または a にも一様に）の隙間が、箱の大きさに依らず下から抑えられること

$$\inf_{L} \ \Delta_{\text{物理}}(L) > 0 \tag{5}$$

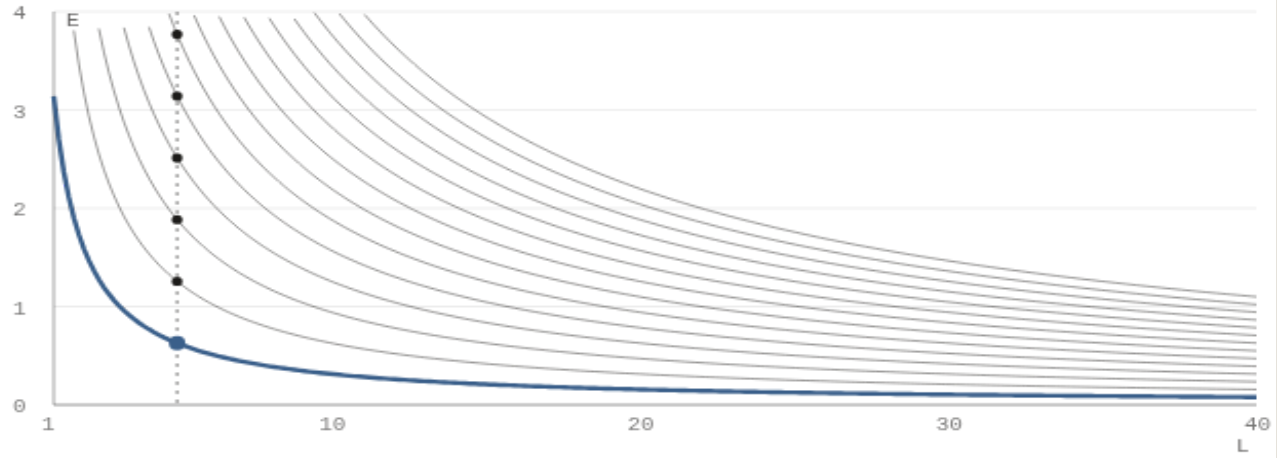
です（§5・§6.5）。$\Delta_{\text{物理}}(L)$ は一辺 L の箱での隙間を Λ のような物理の尺度で測った値で、格子の目盛り $1/a$ で測った値ではありません。この区別が大事です。a を固定して格子の目盛りで測るなら、強結合の側では無限体積での指数減衰がすでに示されています（表 4）。要るのは、物理の単位で測った隙間が $a \to 0$ と $L \to \infty$ の両方に一様であることです（5-09）。

相互作用の無い場（自由場）で違いを見ます。長さ L、両端で場が 0 の箱の一粒子の準位は

$$\omega_n(L) = \sqrt{(n\pi/L)^2 + m^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots \tag{6}$$

で、隙間は ω_1 です（$\hbar = c = 1$）。$m = 0$ なら隙間 π/L はどの箱にもあるのに $L \to \infty$ で潰れ、$m > 0$ なら常に m より大きく、式 (5) の形の一様な下界を満たします。既知

図 2　つまみで箱の長さ L を動かすと、準位（点）が曲線 ω_n(L) に沿って動く。ボタンで質量を切り替える。質量 0 では隙間 ω_1 が潰れ、質量 1 では破線 E = 1 より下に来ない



m = 0　L = 5.0　隙間 ω_1 = 0.6283　E < 1 の準位 1 個

計算 この図の数値はこの端末で計算しました（式 (6)）。JavaScript が無効なら表 3。

計算 表 3　式 (6) の隙間 $\omega_1(L)$

L	$m=0$：π/L	$m=1$	$m=0$ で $E<1$ の準位の数
1	3.1416	3.2969	0
10	0.3142	1.0482	3
100	0.0314	1.0005	31
1000	0.0031	1.0000	318

$m=1$ では $L^2(\omega_1-1)\to\pi^2/2$、$m=0$ では $E<1$ の準位が L/π の割合で増えます。計算 正確には、この m は手で入れたもので、ヤン–ミルズの隙間は相互作用から生まれなければなりません。隙間のもう一つの顔は相関の減衰で、問題文 §5 の式 (2) は、真空期待値が 0 の局所的な量について、Δ より小さい任意の正の C で、十分遠方の相関が e^{-Cr} で抑えられることを述べます（0-04・2-09）。

05

世界はどこまで来ているか

作る仕事は六つの段に分けられます（7-01）。①正則化（格子などで短い距離を切ること）、②有限体積の測度 $\mu_{a,L}$（場の配位への確率の重み。1-08）、③$a\to 0$、④$L\to\infty$、⑤公理、⑥隙間。①〜④は

$$\mu=\lim_{L\to\infty}\lim_{a\to 0}\mu_{a,L} \tag{7}$$

を作ることで、⑤⑥は μ の性質です。

既知 表 4　理論ごとの到達点

理論	到達点	文献
YM 二次元	連続の測度が在る（平面・閉曲面・トーラス）。厳密に解ける構造による。公理は対象外	Driver 1989、Gross–King–Sengupta 1989、Lévy、Chevyrev–Shen
YM 三次元	格子で間隔に一様な紫外の評価まで。連続の測度は T^3 でも未構成	Bałaban 1985、Chevyrev 2022
YM 四次元	有限体積の紫外安定性（Bałaban。仮定つき、収束する部分列の水準）と、赤外の切断を残した連続の構成の概略（MRS）。2026-11 に公開された構成で ③・⑤ と、④ の部分列の水準まで（Lean で証明されている、と委員会が評価した）。④ の一意性と ⑥ は未	Bałaban 1984–89、Magnen–Rivasseau–Sénéor（MRS）1993、公開された構成と委員会の評価書 2026（6-00）
格子 YM・強結合	a を固定して（格子の目盛りで）無限体積と指数減衰。連続極限と反対の側	Osterwalder–Seiler 1978、Shen–Zhu–Zhu 2023
φ^4	二・三次元は公理を満たす非自明な理論が在る。四次元は、格子で紫外を切った単成分の φ^4 の臨界点付近のスケーリング極限がガウス（自由場）になる	問題文 §6.2、Aizenman–Duminil-Copin 2021

表 4 の語：「紫外安定性」は、格子間隔を小さくしても量が暴れず、収束する部分列が取れること（極限の一意性は含まない）。「ガウス」は §01 の自由場の型。「公理」は §01 の Wightman・Osterwalder–Schrader の公理。

表 4 の読み方です。四次元のヤン–ミルズの行では、2026-11 に公開された構成が ③ と ⑤ を通し、④ は体積の部分列の水準まで来ました（6-01）。⑥ の隙間は手つかずです（6-04）。強結合の行は ④ と ⑥ に似たことを示していますが、a を固定した格子の話で ③ を通っていないので、§04 の式 (5) とは別の命題です。φ^4 の行は、四次元では極限が自由場になってしまう理論があることを示します。四次元のヤン–ミルズでは、公開された構成が自明でない極限を作りました（委員会の評価の水準。6-01）。

2000 年の問題文は、四次元で公理を満たす非自明な相対論的場の理論を一つも知らないと書きました。Douglas 2004 の報告は到達点を Bałaban と MRS に置き、Chatterjee 2018 の総説は、二次元より上で Wilson ループ（閉じた道に沿ってゲージ場による回転を掛け合わせ、そのトレースを取った量。5-01）が非自明に振る舞う連続極限の構成はまだ無いと書きます。既知 2026-11 に公開された構成は、四次元で Wightman の公理を満たす自明でない理論を作りました（Lean で証明されている、と委員会が評価した。6-00）。ただし Wilson ループはその構成の外で、Chatterjee の言う意味の連続極限は今も作られていません（6-04）。「二・三次元はできる」は非可換のヤン–ミルズでは不正確で、三次元は有限体積（T^3）でも連続の測度が構成されていません（7-02・7-06・16-01）。

> 06

発散のほかに何があるか

「無限大の処理を数学が許さないから難しい」は一面です。発散の処理は図 1 の左の帯の話で、最も進んでいます（Bałaban の計画は未完で、主定理は有効結合が小さいという仮定つき、外す定理は未公刊。7-07。2026-11 に公開された構成は、別の組み立ての繰り込みで紫外を制御しました。第 9〜11 部）。出題者が新しい考えを求めたのは、§04 の発散ではない場所です。既知

既知 表 5　発散に還元できない障害（7-11）

1	赤外に小さな径数が無い	展開の中心に置ける易しい可解模型が無い（MRS）。厳密に扱える格子の強結合は、連続極限の反対の側
2	摂動論に映らない	隙間の尺度は表 1 の型
3	非自明性	φ^4_4（四次元の φ^4。漸近自由でない）は、格子で切った臨界点付近の極限がガウスになる（7-08）。四次元のヤン–ミルズでは、2026-11 に公開された構成が自明でない極限を作った（委員会の評価の水準。6-01）
4	状態空間が曲がっている	軌道空間は線形でなく、各軌道から一つの場を連続に選ぶこと（大域的なゲージ固定）はできない（S^4 などの閉じた空間上で。Singer 1978。設定は 3-04）
5	反射正値性を保つ正則化が乏しい	格子は保つが回転対称性を壊す。連続の正則化の多くは壊す（§6.5）
6	無限自由度の構造	標準的な条件の下で、相互作用表示は存在しない（Haag の定理）

表 5 の語：「軌道空間」は、ゲージ変換で移り合う場を同じものと見なして作る空間。「反射正値性」は、ユークリッド空間の測度から量子力学のヒルベルト空間を取り戻すための正値性の条件（4-10）。「相互作用表示」は、自由場の状態空間をそのまま使い、そこに相互作用を足して時間発展を書く書き方（4-09）。

表 5 の読み方です。1 と 2 は図 1 の中央と右の帯、つまり結合が小さくない側の話です。3 は、作った極限が自由場に潰れていないことを示す仕事です。4〜6 は、ゲージ理論と無限自由度という枠組みそのものが持つ構造です。どれも「無限大をどう処理するか」とは別の問題で、発散の処理だけでは片付きません。既知

「非可換だから」も正確には、三次元以上の連続な非可換群で無限体積の指数減衰が示されたのは強結合の側だけで、弱結合の結果は有限群に限られます（Adhikari–Cao。5-06・5-10）。

寄り道：無限大に記号を与えれば

飛ばしてよい小節です。

「1/0 を記号にすれば変わるか」。既知の事例を見るかぎり、変わらない見込みが高いと考えられます。摂動論の内側の発散の処理はすでに厳密で（BPHZ、Epstein–Glaser、Connes–Kreimer。繰り込み可

能性は 't Hooft–Veltman 1972 ほか)、現れる $0/0$ は値の割り当てでなく、近づく速さや幾何の取り替えで処理されてきました。隙間の尺度は e^{-1/g^2} の型です。これは事例の整理で、不可能性の定理ではありません（7-12)。

07

二つの掘り方と七つの切れ目

数学の側は「理論はまだ無い」から始め、存在 → 公理 → 隙間の順に作ります（第 5・7 部)。物理の側は「理論は在る」から始め、グルーボール（§03）の質量や弦張力を測ります（第 17 部)。比喩で言えば両側から掘るトンネルです。数学の側は 2026-11 に公開された構成で存在と公理まで掘り進みましたが（6-00)、隙間のところでまだ通じていません。正確には、物理の数値は存在を仮定したときの整合性の確認です（17-01・16-05)。

表 6　七つの切れ目

1	存在の前提	数値が収束して見えることは存在の証明ではない	17-13
2	尺度は一つ	隙間も弦張力も Λ の定数倍、と物理は考える。定理ではない	17-12
3	岸が違う	足場がある岸：摂動論（形式的な級数)・格子の強結合（定理)・ホログラフィー（$N \to \infty$・$\lambda \to \infty$、物理の水準)。問題文の理論はどの岸にも無い	17-13
4	有限と無限	数値は外挿。要るのは一様な評価	5-09
5	時空と空間	構成はユークリッド側。時空への戻り道は反射正値性	0-04
6	「粒子」という語	物理は粒子を数え、問題文はスペクトルの隙間を求める	4-11
7	余剰次元	隙間が幾何に化けるが、四次元に戻す極限の順序は未整備	17-10

表 6 の語：「岸」は比喩で、正確には、定理か制御された近似が得られている径数の範囲のこと。$\lambda = g^2 N$ は 't Hooft 結合。「幾何に化ける」も比喩で、正確には、ホログラフィーでは隙間が余剰次元を含む幾何の上の波の方程式の固有値として計算される（$1/N$ の主項。物理の水準。17-09)。

表 6 の読み方です。七つはどれも、物理では当たり前とされている一歩が、数学では証明の要る命題になる場所です。1 と 4 は数値計算と極限の関係、2 と 6 は何を「質量」と呼ぶか、3 と 7 は計算できる模型と問題文の理論との距離、5 は時空とユークリッド空間の間の翻訳にかかわります。右端の列は、それぞれを詳しく扱う章です。

本書の検討は 2 の周りに手を付け、「尺度は一つ」を拡散型緩和時間の仮定として切り出しましたが、証明はしていません（23-01。等価原理との対応は類比。17-12)。残りの六つは名指

しまでです。

08

この本の地図

この本は三巻です。第一巻「準備」（第 0〜5 部）は、この章の絵を読む道具をそろえます。第 0 部の残りの二章は、問題文の語（0-03）と二つの四次元（0-04）を読みます。第 1・2 部は数学と物理の準備で、式 (1)・(7) と §04 を読む道具（スペクトル・測度・経路積分・統計力学）を用意します。第 3 部は古典のヤン–ミルズ理論で §02 を、第 4 部は量子化で式 (2)・(4) と公理を、第 5 部は格子ゲージ理論で図 1 の a（格子間隔）と強結合の側を扱います。

第二巻「存在 — 公開された構成を読む」（第 6〜15 部）は、表 4 の四次元の行を書き換えた 2026-11 の構成を読みます。何が証明され何が示されていないか（第 6 部）、構成的場の理論の背景で表 4・表 5 の文献（第 7 部）、格子から連続への対象と極限の順（第 8 部）、繰り込みの一段（第 9 部）、結合の合わせと漸近自由で図 1 の左の帯（第 10 部）、多段の評価と大きい場（第 11 部）、無限体積と再構成（第 12 部）、ヤン–ミルズである証拠（第 13 部）、本書の検討との比べ（第 14 部）の順です。巻の最後の第 15 部は、本書の検討が紫外の制御を試みた記録です（15-00〜）。

第三巻「質量ギャップへ」（第 16〜28 部と付録）は、まだ開いている側、図 1 の中央と右の帯と式 (5) を扱います。現在地と残る問い（第 16 部。§05 と表 6 の続き）、物理の側からの見方（第 17 部）、物理の言葉と数学の言葉の辞書（第 18 部）、格子の上の対象と確かな定理（第 19〜22 部）、本書の検討の二本の道と移り変わりの帯（第 23〜26 部。表 6 の 2 の周りを含む）、条件つきの言明と前提の木（第 27・28 部）の順です。付録は記号表・用語集・文献案内・Lean の案内などです。「寄り道」の付いた章と節は飛ばしてかまいません。読む順の提案は 0-01 にあります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない（どこで扱うか）
既知 問題文の該当箇所（PDF と照合）	語ごとの読み（0-03）
既知 式 (3)。計算 表 1	$\Delta = c\Lambda$ は物理の期待（4-07）
計算 図 1・表 2（式 (4) の中での段の数）	式 (2)・(4) は定理ではない。帯の境目と幅は描き方の選択。$\xi\Lambda \approx 0.14$ は定義の違う Λ による目安（物理）

言えている	言えていない（どこで扱うか）
計算 図 2・表 3（自由場）	ヤン–ミルズの隙間について何も示さない
既知 表 4・表 5	文献の網羅ではない（16-01）
—	この本は連続極限も隙間も示していない（連続極限は公開された構成が示した。委員会の評価の水準。6-00）。拡散型緩和時間の仮定は仮定のまま

出典と再現

もの	種別	出典・道具
一文・§1〜§6.6	既知	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”（Clay 数学研究所の公式の問題文の PDF。該当箇所を読んだ）。書籍としては J. Carlson, A. Jaffe, A. Wiles 編, *The Millennium Prize Problems*, Clay Mathematics Institute／American Mathematical Society (2006) pp. 129–152 に収録（目次は CMI 公開の PDF、刊行年は AMS の書籍のページで確認）
発表の日と場所	既知	Clay 数学研究所のサイトの Millennium Prize Problems のページ（読んだ。2000 年 5 月 24 日、パリの Collège de France）。同書の序文にも同じ日付と場所（CMI 公開の PDF で確認）
漸近自由	既知	D. J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1343／H. D. Politzer, 同 1346。要旨を確認（前者は広い類の非可換ゲージ理論が対数の補正を除いて自由場の漸近形を持つこと、後者は深いユークリッド領域で摂動論が任意によくなること）
§03 の ξ_Λ の目安	物理	C. Morningstar, M. Peardon, Phys. Rev. D 60 (1999) 034509 表 VII（書誌のみ。材料の調査が本文と照合）／S. Capitani, M. Lüscher, R. Sommer, H. Wittig, Nucl. Phys. B 544 (1999) 669 式 (6.2)（本文を読んだ）。比と段の数は python3
b_0	物理	Particle Data Group, Phys. Rev. D 110 (2024) 030001, QCD の章 §9.1.1。書誌のみ（材料の調査が照合）
表 4	既知	B. K. Driver, CMP 123 (1989) 575／L. Gross, C. King, A. Sengupta, Ann. Phys. 194 (1989) 65／T. Lévy, Mem. AMS 166 no. 790 (2003)／I. Chevyrev, H. Shen, arXiv:2302.12160／T. Bałaban, CMP 102 (1985) 255、CMP 122 (1989) 355／J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, CMP 155 (1993) 325／I. Chevyrev, arXiv:2202.13359／K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440／H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, CMP 400 (2023) 805／M. Aizenman, H. Duminil-Copin, Ann. of Math. 194 (2021) 163／M. R. Douglas, Clay 数学研究所の報告 (2004)／S. Chatterjee, arXiv:1803.01950。書誌のみ（材料の調査が原文と照合。CMP = Comm. Math. Phys.）／四次元の 2026-11 の行：yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028（Lean の源）と委員会の評価書 yang-mills-group/YM の docs/assessment-1.pdf（2026-11-10）。読み方と水準は 6-00
表 5・§06	既知	I. M. Singer, CMP 60 (1978) 7／R. Haag, Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk. 29 (1955) no. 12（二次資料による）／A. Adhikari, S. Cao, Ann. Probab. 53 (2025) 140／G. 't Hooft, M. Veltman, Nucl. Phys. B 44 (1972) 189。書誌のみ
表 1〜3・図 1・図 2	計算	python3（式 (2)・(4)・(6)）。図はブラウザが同じ式から描く

もの	種別	出典・道具
用語の言い換え（公理・反射正値性・軌道空間・相互作用表示）	既知	本書の 4-09・4-10・3-04 に詳しい定義と出典

次に読む章：0-03 問題文を一語ずつ読む。

問題文を一語ずつ読む — 語の一つ一つが、易しい答えへの抜け道を閉じている

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 問題文の核の一文と、その語を定める段落・二つの脚注がどこに在り、何を言うか。
「任意のコンパクト単純群」「$\mathbb{R}^4$」「存在」「非自明」「質量ギャップ」「短距離」の各語が何を要求するか。
各語が直接締め出す「易しい答え」の一覧（表 5）。

前提となる章 — ありません。各語は後の章で道具にします（節の終わりに行き先を書きます）。全体の絵は前の 0-02、二つの四次元の違いは次の 0-04。

先に言うこと — この章は問題文を読むだけで、問題について何も示していません。この本はこの問題の解決を主張しません。存在の側は 2026-11 に公開された構成が示し（Lean で証明されている、と委員会が評価した。6-01 がこの章の語と構成を突き合わせます）、質量ギャップは開いています。英語の引用は Clay 数学研究所の公式の問題文の PDF と照合した原文で、日本語はこの章の訳です。表 5 はこの章の読みで、出題者がその形で述べたものではありません。

この章の順序

1. 核の一文 — どこに書かれ、どう組み立てられているか
2. 任意のコンパクト単純群 — 例外群まで全部（表 1。寄り道：コンパクトでない群では）
3. $\mathbb{R}^4$ 上に — 箱でも格子でもない、無限に広い連続の四次元
4. 存在する — 公理を満たすものを作ること（表 2）
5. 非自明な — ガウスに潰れていないこと
6. 質量ギャップ — スペクトルの隙間と $m > 0$（図 1・表 3）
7. 短距離での一致 — 漸近自由が「ヤン–ミルズ」を名指す

8. 二つの脚注 — 量子の演算子と、コンパクト性だけの存在（図 2・表 4）
9. 書かれていないこと — 拡張問題・QCD・格子の上の定式化
10. 各語が締め出すもの — 一語ずつの一覧（表 5）

01

核の一文 — どこに書かれ、どう組み立てられているか

クレイ数学研究所は 2000 年 5 月 24 日、パリのコレージュ・ド・フランスでの会合で七つの懸賞問題を発表しました（研究所のサイトと、問題文を収めた書籍の序文）。その一つの公式の問題文が、Arthur Jaffe と Edward Witten の解説「Quantum Yang–Mills Theory」（14 ページ）です 既知 。以下、§ は問題文の節、「節 06」はこの章の節です。問題は §4 の一文です。

> *Yang–Mills Existence and Mass Gap.* Prove that for any compact simple gauge group G, a non-trivial quantum Yang–Mills theory exists on $\mathbb{R}^4$ and has a mass gap $\Delta > 0$. Existence includes establishing axiomatic properties at least as strong as those cited in [45, 35].

訳：**任意のコンパクト単純ゲージ群 G について、$\mathbb{R}^4$ 上に非自明な量子ヤン–ミルズ理論が存在し、質量ギャップ $\Delta > 0$ を持つことを証明せよ**。存在には、文献 [45]（Streater–Wightman の本）と [35]（Osterwalder–Schrader の二論文）が挙げる公理的な性質と、少なくとも同じ強さの性質を確立することを含む。

骨組みを論理式で書くと、量化子の順番が見えます（$\sigma(H)$ はハミルトニアン H のスペクトル。節 06）。

$$\forall G \; \exists \mathcal{T}_G : \quad \mathcal{T}_G \text{ は公理を満たし、非自明で、短距離で一致し、 } \sigma(H) \cap (0, \Delta_G) = \varnothing \text{ となる} \tag{1}$$

群ごとに理論 $\mathcal{T}_G$ が一つずつ要り、隙間 Δ_G は群ごとに違ってかまいません。§4 はもう一つ、隙間の上限 m_G が有限であること（$m_G < \infty$。節 06）も課しています。語の意味は前後の段落が決めています。量子場と公理は §3、局所場と短距離の条件は §4 の第 1 段落、質量ギャップは §4 の第 2 段落、クラスター性と拡張問題は §5、有限体積の評価と弱い存在の脚注（Jaffe–Witten の脚注 2）は §6・§6.5 にあります。

例。$G = SU(3)$ なら、求められているのはクォークを含まない 8 種類のゲージ場（グルーオン）だけの理論です（8 は $SU(3)$ の次元。表 1）。クォークを加えた QCD は対象ではありません（節 09）。

02

任意のコンパクト単純群 — 例外群まで全部

ゲージ群は、場の値を各点で独立に回してよい対称性の群です（3-01）。**コンパクト**は、行列の群として有界で閉じていることです。**単純**はリー群の意味で、リー環（1-03）が可換でなく、自明でないイデアル（どの元と括弧を取っても外に出ない部分空間）を持たないことです。$SU(2)$ は中心 $\{\pm 1\}$ を持つので抽象的な群としては単純でありません。問題文では §1 が強い力のゲージ群として $G = SU(3)$ を挙げ（中心 $\mathbb{Z}_3$ を持つので、抽象的な群としては単純でない）、§6.6 も $SU(N)$ を扱うので、リー群の意味で読みます。

ゲージ場は群の次元の数だけ成分を持ちます。リー環の基底 T^a を選ぶと、括弧（交換子）は $[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$ と基底で展開できます。この係数 f^{abc} が**構造定数**で、リー環の掛け算表に当たります（1-03）。これを使うと

$$A_\mu = \sum_{a=1}^{\dim G} A_\mu^a T^a, \qquad \sum_{c,d} f^{acd} f^{bcd} = C_A\, \delta^{ab} \tag{2}$$

です。C_A は可換な群では 0、コンパクト単純群では正です 既知 。値は基底の大きさの取り方で変わるので、規格化を決めます。基底 T^a は群の作用で変わらない内積で正規直交にとり、その内積は、最長の根（1-04）の長さの二乗が 1 になるように選びます。$SU(N)$ では、基本表現で $\mathrm{tr}\, T^a T^b = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ とする物理の標準の規格化がこれに当たります。この規格化で C_A は**双対 Coxeter 数** $h^\vee$ という群ごとに決まる正の整数に等しく、$SU(N)$ では N です 既知 。数学で多い「長さの二乗を 2」の規格化では $C_A = 2h^\vee$ になります（$SU(2), SU(3), SU(4), SO(5), SO(7), SO(8)$ で、構造定数から確かめました 計算 ）。コンパクト単純なリー環は系列 A_n, B_n, C_n, D_n と例外型 G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 で尽き（Killing–Cartan の分類。1-04） 既知 、「任意の」はこの全部です。

計算 **表 1**　群ごとに決まる次元と正の整数 $h^\vee$（値の一覧は 1-04）。どの行も標準的な値と一致。計算の手順は出典表。b_0 は節 07 の一ループ係数。

群	型	次元	$C_A = h^\vee$	$b_0 = 11C_A/12\pi$
$SU(2)$	A_1	3	2	0.5836
$SU(3)$	A_2	8	3	0.8754
$Sp(3)$	C_3	21	4	1.1671

群	型	次元	$C_A = h^\vee$	$b_0 = 11C_A/12\pi$
$SO(8)$	D_4	28	6	1.7507
G_2	G_2	14	4	1.1671
F_4	F_4	52	9	2.6261
E_7	E_7	133	18	5.2521
E_8	E_8	248	30	8.7535
$U(1)$（単純でない）	可換	1	0	0

一ループ係数の一般形は $b_0 = (11C_A - 4n_f T_R)/(12\pi)$ です（n_f はクォークの種類の数、T_R はクォークの表現で決まる正の数。PDG 2024）既知 。クォークの無い理論では $n_f = 0$ で $b_0 = 11C_A/12\pi$ となり、$C_A > 0$ からどの単純群でも $b_0 > 0$ です。一ループの摂動論の水準で、短距離ほど結合が弱くなります（節 07）。b_0 の数値は結合 g の規格化（上の C_A の規格化）に依存するので、群どうしで大小を比べる意味はありません。要点は正であることです。$U(1)$ では $b_0 = 0$ で、その理論は質量ゼロの光子の自由場です。隙間はありません。二つの単純群の積なら作用が和に分かれ、互いに作用しない二つの理論になります。

寄り道：コンパクトでない群では

飛ばしてよい小節です。

作用 $\frac{1}{4g^2}\int \mathrm{Tr}\, F \wedge *F$（問題文の式 (1) は Lagrangian L と表記。中身は積分した作用）について、問題文は Tr を「リー環の上の不変な二次形式」とだけ書いています。定値であることを求めるのはこの章の議論で、理由は古典のエネルギーが正になるにはそれが要るからです。$\mathfrak{su}(2)$ の元は反エルミートなので $\mathrm{tr}\, X^2 \le 0$ です。$SL(2,\mathbb{R})$ のリー環では

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} :\ \mathrm{tr}\, X^2 = 2, \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} :\ \mathrm{tr}\, Y^2 = -2$$

と両方の符号が出て、不変な二次形式（$\mathrm{tr}\, XY$ の定数倍に限る）は不定値です。正定値の不変内積を持つ実リー環は、コンパクトな群のリー環に限られます 既知 。

03

$\mathbb{R}^4$ 上に — 箱でも格子でもない、無限に広い連続の四次元

$\mathbb{R}^4$ は実数四つの組の全体で、有限の箱でも、周期的な箱（四次元トーラス T^4）でも、格子でもありません。近似の上では対称性が欠けます。格子は連続な平行移動と回転を壊し、T^4 は平行移動を残して回転を壊します。

§4 の一文は $\mathbb{R}^4$ の符号を書いていません。§3 は Wightman の公理を「ミンコフスキーの符号の $\mathbb{R}^4$」の上の理論として紹介し、§6 は構成的場の理論の現状を述べる括弧書きで「ユークリッドの定式化では、ユークリッド時空 $\mathbb{R}^4$ を $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ に置き換える」と書いており、ユークリッド版の舞台が $\mathbb{R}^4$ であることが読み取れます 既知 。長さの測り方は二通りです。

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \ \text{(ユークリッド)}, \qquad -t^2+x^2+y^2+z^2 \ \text{(ミンコフスキー)} \tag{3}$$

二つは Osterwalder–Schrader の理論でつながります（§3。形式的には $t=-i\tau$ の置き換え）。その仕組みは 0-04・2-04 と既存の記事 符号が一つ違う で扱います。

例。 §6 は T^4 について「構成は完全ではないが、既知の方法を延長できる十分な兆候がある」と書き、$T^4 \to \mathbb{R}^4$ の極限を得る方法は現在の手法からは示唆されない、と書きます 既知 。この隔たりがそのまま問題に入っています。四が特別な理由は 1-12 と既存の記事 四次元でだけ起きること にあります。

近似で失うのは対称性だけではありません。§6.5 は反射正値性について 'few methods exist to recover reflection positivity in case it is lost through regularization—such as with dimensional regularization, …' と書き、例に次元正則化と Pauli–Villars を挙げます 既知 。格子は反射正値性を保って回転を壊し、連続の正則化は逆です（4-04・4-10・7-11）。

04

存在する — 公理を満たすものを作ること

「存在する」は、何かの極限が在るという意味ではありません。§4 は、§3 の意味の場の量子論を**定義**し、その局所場が曲率 F とその共変微分の**ゲージ不変な局所多項式**と対応するようにせよ、と書きます 既知 。曲率は §1 で $F=dA+A\wedge A$ と書かれ、§4 が例に挙げる局所多項式は $\operatorname{Tr} F_{ij}F_{kl}(x)$ です。

$$F=dA+A\wedge A \ \ (\S1), \qquad \operatorname{Tr} F_{ij}F_{kl}(x) \ \ (\S4) \tag{4}$$

ゲージ場 A そのものは求められていません。A はゲージ変換で変わり、観測量ではないからです。「量子場」は §3 で「時空の上の作用素値の超関数」と定義されます。点での値 $\mathcal{O}(x)$ は意味を持たず、試験関数 f でならした $\mathcal{O}(f)=\int \mathcal{O}(x)f(x)\,d^4x$ が作用素になります（1-11）。

表 2 「存在」に含まれる性質（問題文 §3 の要約。正確な形は文献 [45]・[35]。本書では 4-09・4-10）。

性質	中身
状態の空間	ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が Poincaré 群（時空の平行移動とローレンツ変換を合わせた群。2-04）の表現を持つ。H と P は時間と空間の平行移動の生成子

性質	中身
エネルギー	$0 \le H$
真空	Poincaré 群で不変なベクトル Ω が位相を除いて一つ
場	ゲージ不変な場の関数が $\mathcal{H}$ の作用素として働き、共変に変換する
局所性	光の信号で結べない領域の場は独立（作用素が可換）
ユークリッド版	ユークリッド不変な理論との相互の変換。鍵は反射正値性

例。自由な Klein–Gordon 場は最初の公理系の模型になった場ですが（§6.2）、次の「非自明」で除かれます。§6.5 は「量子力学のヒルベルト空間を確立することは、このミレニアム問題の解の一部である」と明言しています 既知 。

05

非自明な — ガウスに潰れていないこと

問題文は「非自明」を定義していません。ふつうは「自由場（相互作用の無い場）でない」と読みます。§6.2 は、平均 0・共分散 $(-\nabla^2 + m_0^2)^{-1}$（∇^2 はラプラシアン）の**ガウス測度**が質量 m_0 の自由場を与え、非線形の場にはガウスでない測度が要る、と書きます 既知 。ガウスかどうかは高次の相関で見分けられます。平均 0 のガウスの確率変数 X では

$$\frac{\mathbb{E}[X^4]}{(\mathbb{E}[X^2])^2} = 3 \tag{5}$$

で、多変数でも四点の期待値は二点の期待値の積の和で書けます（Isserlis の公式。1-08） 既知 。

例。 計算 密度 $\propto e^{-x^4}$ では (5) の比は 2.18844（$\Gamma(\tfrac{1}{4})\Gamma(\tfrac{5}{4})/\Gamma(\tfrac{3}{4})^2$ と一致）です。密度 $\propto e^{-x^2/2 - \lambda x^4}$ では $\lambda = 1,\ 0.1,\ 0.01$ で 2.319、2.537、2.843 と、$\lambda \to 0$ で 3 に戻ります。場の理論の**自明性**とは、近似の一つ一つはガウスでないのに、極限でこの種の比がガウスの値に戻ってしまう現象です。

正確には、一変数の比は目安です。四次元の $\lambda\varphi^4$ では、格子で紫外を切り、臨界点の近くで格子間隔 0・無限体積のスケーリング極限を取ると、極限がガウスになることが定理です（Aizenman–Duminil-Copin 2021。1-08） 既知 。ヤン–ミルズは短距離で結合が弱くなる点で違い、非自明な極限が期待されてきました 物理 。四次元では 2026-11 に公開された構成が自明でない極限を作りました（Lean で証明されている、と委員会が評価した。6-01）。質量を持つ自由場は隙間を持つので（表 3）、ギャップだけでは自由場を締め出せません（7-08）。§6 は、四次元で Wightman の（あるいは他の妥当な）公理を満たす非自明な相対論的場の理論は、現時点で一つも知られていないと書いています（2000 年の記述） 既知 。2026-11 に

公開された構成は、四次元のヤン–ミルズでそのような理論を作った、と委員会は評価しています（6-00）。

06

質量ギャップ — スペクトルの隙間と $m < \infty$

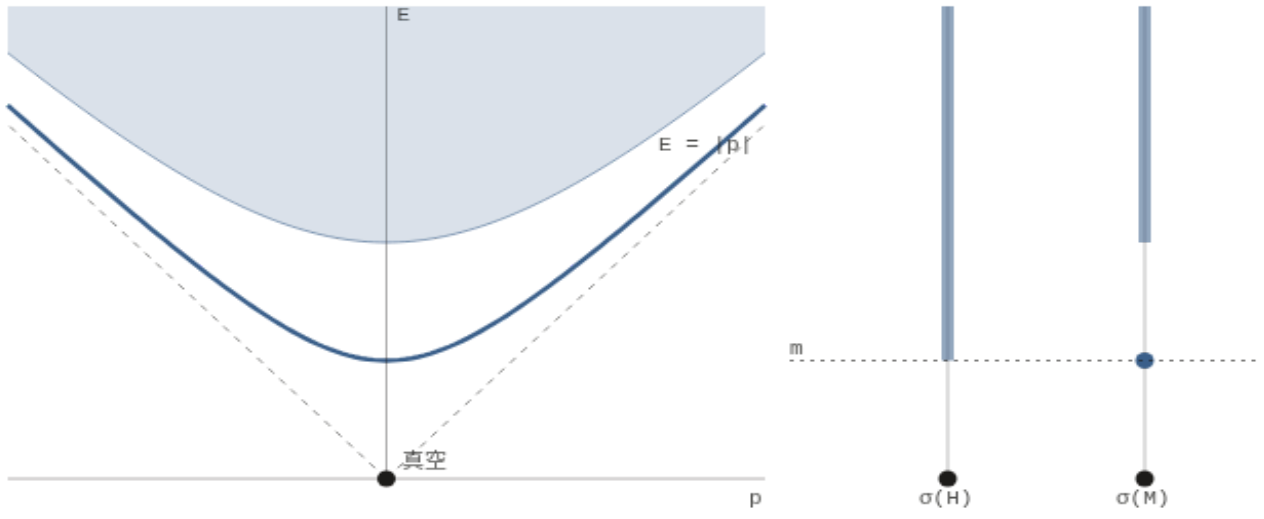
§4 の定義は、ハミルトニアン H のスペクトル $\sigma(H)$（行列なら固有値の集合に当たるもの。1-10）で書かれています。真空はエネルギー 0 の固有ベクトルで、エネルギーは負になりません。そのうえで 0 のすぐ上に空いた区間があることを、ギャップと呼びます。

$$H\Omega = 0, \qquad \sigma(H) \subset [0, \infty), \qquad \sigma(H) \cap (0, \Delta) = \varnothing, \qquad m = \sup \Delta < \infty \tag{6}$$

$\sup \Delta$ は条件を満たす Δ 全体の上限で、これを**質量** m と呼びます 既知 。問題文は $m < \infty$ を課す理由を書いていません。式から読むと、何を除くかが分かります。$\sigma(H) = \{0\}$ ならどの Δ も条件を満たし、$m = \infty$ です。**自己共役**（1-10）とは、エルミート行列（固有値がすべて実数の行列）の性質を無限次元の作用素に広げたものです。自己共役な H で $\sigma(H) = \{0\}$ は $H = 0$ と同じなので、$m < \infty$ は「真空の上に正のエネルギーの状態が何か在る」ことです。

「質量」と呼ぶ理由は、エネルギーと運動量の関係にあります（$\hbar = c = 1$。2-04）。質量 μ の粒子は $E = \sqrt{|p|^2 + \mu^2} \geq \mu$ です。§6.2 の**質量の作用素** $M = \sqrt{H^2 - P^2}$ について $H \geq M$ で、運動量 0 では $H = M$ です。$M > 0$ の状態はローレンツ変換で運動量を 0 に寄せられるので（公理のローレンツ共変性を使います）、H の隙間と M の隙間は同じ幅になります 既知 。真空のほかに $M = 0$ の状態があれば、どちらの隙間も 0 で、結論は同じです。この同値は問題文自身には書かれていません。

図 1　つまみで m を動かすと、左のエネルギー・運動量の平面の双曲線 E = √(p² + m²) が上下し、右の σ(H) と σ(M) の隙間が開閉する。ボタンで孤立した一粒子の有無を切り替えても σ(H) は変わらない



m = 1.00　σ(H) = {0} ∪ [1.00, ∞)　σ(M) = {0} ∪ {1.00} ∪ [2.00, ∞)

計算 図はその場で式 $E=\sqrt{p^2+m^2}$ から描いています（運動量は一方向だけ。塗りは連続スペクトル）。

表 3　四つの例のスペクトル。

例	$\sigma(M)$	$\sigma(H)$	判定
質量 m の粒子が一種類（束縛状態なし）	$\{0\}\cup\{m\}\cup[2m,\infty)$	$\{0\}\cup[m,\infty)$	隙間あり
隙間の上が連続スペクトルだけ	$\{0\}\cup[m,\infty)$	$\{0\}\cup[m,\infty)$	隙間あり
質量ゼロの自由場（光子）	$[0,\infty)$	$[0,\infty)$	隙間なし
真空だけ	$\{0\}$	$\{0\}$	$m=\infty$ で除外

1 行目と 2 行目は $\sigma(H)$ が同じです。問題文が求めるのは $\sigma(H)$ の隙間だけで、孤立した一粒子の状態は拡張問題です（節 09）。§5 はギャップの帰結として**クラスター性**を挙げます。$\langle\Omega,\mathcal{O}\Omega\rangle=0$ の局所場 $\mathcal{O}$ と $0<C<\Delta$ について、二点が十分に離れていれば

$$|\langle\Omega,\mathcal{O}(x)\,\mathcal{O}(y)\,\Omega\rangle|\le e^{-C|x-y|} \tag{7}$$

です 既知 。離れた場所の揺らぎが独立に近づく速さを、ギャップが決めます。定義の本体は 4-11、有限の系での読み方は 2-05 にあります。

07

短距離での一致 — 漸近自由が「ヤン–ミルズ」を名指す

量子ヤン–ミルズ理論は、作る前には定義がありません。作ったものを「G の量子ヤン–ミルズ理論」と結び付けるのが、§4 の第 1 段落の条件です。量子場の相関関数は**短距離で**、教科書にある漸近自由と摂動的な繰り込み理論の予言と一致しなければなりません（原文 'should agree at short distances with the predictions of asymptotic freedom and perturbative renormalization theory, as described in textbooks'）。予言には応力テンソルと演算子積展開の存在が含まれ、その局所的な特異性は漸近自由が予言する形を持つ、とあります 既知 。

漸近自由は、結合の強さが尺度で変わり、短距離（大きい運動量 μ）で弱くなる性質です（Gross–Wilczek と Politzer、1973。問題文の文献 [21]・[38]）。クォークの無い理論では、$\alpha=g^2/4\pi$ の走り方は次の形です（PDG 2024 の式 (9.3) で $n_f=0$。右は一ループの解） 既知 。

$$\mu^2\frac{d\alpha}{d\mu^2}=-b_0\alpha^2-b_1\alpha^3-\cdots,\qquad b_0=\frac{11C_A}{12\pi},\qquad \alpha(\mu^2)\approx\frac{1}{b_0\ln(\mu^2/\Lambda^2)} \tag{8}$$

Λ は積分定数で、摂動論で定義した結合が発散する尺度です。

例。 計算 $SU(3)$ では $b_0=0.8754$ で、$\mu/\Lambda=10,\ 100,\ 1000$ のとき $\alpha=0.248,\ 0.124,\ 0.083$ です。運動量が 10 倍になるごとに $1/\alpha$ は同じ量 $2b_0\ln 10\approx 4.03$ ずつ増えます。弱くなり方は

対数的で、ゆっくりです。

(8) を解くと $\Lambda = \mu\, e^{-1/(2b_0\alpha)}$ で、$e^{-1/x}$ は $x \to 0^+$ でどの x^k よりも速く 0 に近づくので、α のべき級数の係数はすべて 0 です 既知 。古典の作用には質量の次元の定数が無く、量子論の質量は $\Delta = c\Lambda$ の形になると物理では考えられています 物理 。§6.6 の「質量ギャップは古典的には見えない」と整合します。問題文は結合定数 g の値を指定していません（4-06・4-07）。

08

二つの脚注 — 量子の演算子と、コンパクト性だけの存在

局所場の脚注（Jaffe–Witten の脚注 1。§4）は、古典的な「微分多項式」と量子の演算子の間には繰り込みの微妙さのため自然な一対一の対応は無く、次元 d 以下どうしの空間が対応すると期待される、と書きます 既知 。次元は質量の次元で、A が 1、F が 2、$\mathrm{Tr}\,F^2$ が 4 です。

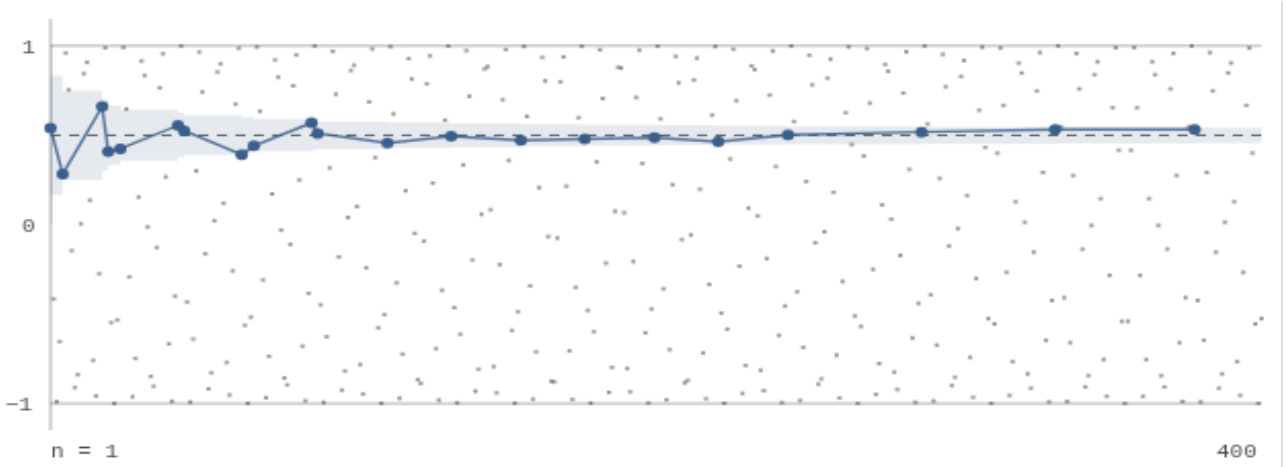
弱い存在の脚注（§6.5 の末尾）は、存在の部分の解として**弱い存在（コンパクト性）**を特に除く、ただし極限の性質（質量ギャップや公理）を別の手法で確立するなら別だ、と書きます 既知 。脚注が付いた本文は「体積に一様な質量ギャップを示すには新しい考えが要る。それがあれば $T^4 \to \mathbb{R}^4$ の極限を研究できるだろう」という趣旨です。一様とは、箱の大きさ L ごとの隙間 Δ_L について右側が成り立つことです。

$$\Delta_L > 0 \ \text{(各 } L\text{)} \qquad \text{ではなく} \qquad \inf_L \Delta_L > 0 \tag{9}$$

左側だけなら質量ゼロの自由場でも成り立ちます。辺 L の箱の壁で場を 0 とすると、いちばん低い振動のエネルギーは $\sqrt{3}\,\pi/L$ で、隙間は $L \to \infty$ で閉じます（2-05）。

コンパクト性の議論は、有界な数列が収束する部分列を持つ（Bolzano–Weierstrass）という型の議論です。確率測度の列でも、一様な評価（緊密性）があれば弱収束する部分列が取れます（Prokhorov の定理） 既知 。**緊密**とは、列のどの測度も確率のほとんど（$1-\varepsilon$ 以上）を共通のコンパクトな集合（$\mathbb{R}^n$ なら有界で閉じた集合）に載せていることで、**弱収束**とは有界で連続な関数の期待値がすべて収束することです。弱いのは、部分列の取り方で極限が変わりうることです。極限が一つに決まるか、ギャップや公理のどれを満たすかは、コンパクト性だけからは分かりません（反射正値性のように弱収束で保たれる性質もあります。5-03）。図 2 は数列 $a_n = \cos n$ で、極限が一つに決まらない様子を見ます。

図 2　つまみで目標 t を動かすと、同じ数列 a_n = cos n（点）から t に収束する部分列（色の点と線）が取り出される。帯は次の項に許す誤差。「動かす」で t を往復させる



計算 この図の数値はこの端末で計算しました。規則：n_1 は $|\cos n - t| < 1/2$ となる最小の n、n_{k+1} は $n > n_k$ で $|\cos n - t| < 1/(k+2)$ となる最小の n。図は同じ規則をその場で計算し、python3 の結果（表 4）と一致します。

計算 **表 4**　$n \le 400$ で取り出した部分列。

t	最初の 8 項 n_k	項数	最後の項の $\cos n_k$
1.0	1, 6, 7, 12, 13, 19, 25, 31	40	0.9873
0.5	1, 5, 18, 20, 24, 43, 45, 64	21	0.5328
−1.0	3, 9, 10, 16, 22, 28, 35, 41	41	−0.9998

n を 2π で割った余りは一様に分布するので（Weyl の等分布定理）、どの $t \in [-1, 1]$ にも収束する部分列が取れます 既知 。$n \le 100000$ での $\cos n$ の経験分布と逆正弦分布の差は、10 区間とも 0.0001 未満でした 計算 。有界性だけからは、極限は一つに決まりません。

正確には、格子の方法では格子間隔 a ごとに測度 μ_a があり、$a \to 0$ を取りたい。一様な評価から部分列の極限が得られても、一意か、公理とギャップを満たすかは別の問題で、弱い存在の脚注はそこを示せと言っています。四次元の紫外側の既知の結果から見込まれるのも、部分列を使うコンパクト性の議論による極限だと述べられており、極限は一意とは限らない、とも書かれています（Magnen–Rivasseau–Sénéor 1993 の序論。7-07） 既知 。

2026-11 に公開された構成でも、無限体積の極限はコンパクト性による部分列で取られ、一意性は示されていません。委員会の評価書は、問題文がこの脚注で部分列の極限だけでは足りないとみなすことを書いたうえで、再構成と局所場の定理がコンパクト性を超える情報を与えている、と述べています（6-01。Lean で証明されている、と委員会が評価した水準）。質量ギャップは示されていません（6-04）。

```
09
```

書かれていないこと — 拡張問題・QCD・格子の上の定式化

§5 は次を**自然な拡張**として挙げ、本体と分けています 既知 。孤立した一粒子状態の存在（質量ギャップに加えて「上のギャップ」）。閉じ込めの証明。漸近自由を保つ場を加えた他の四次元ゲージ理論の存在と、その力学（ギャップ・閉じ込め・カイラル対称性の破れ）。存在定理を任意の四次元多様体へ広げること。上のギャップを式で書くと、M のスペクトルが次の形であることです（この章の書き方。§6.2 の「m が M の孤立した固有値」に当たります）。

$$\sigma(M) = \{0\} \cup \{m\} \cup [m', \infty), \qquad m < m' \tag{10}$$

質量 m の粒子が一種類だけで束縛状態の無い理論では、二粒子の連続スペクトルが始まる $m' = 2m$ です（表 3 の 1 行目）。

§1 は、QCD が量子の水準で持つべき三つの性質として、質量ギャップ・クォークの閉じ込め・カイラル対称性の破れを挙げます。問題の本体に入ったのは一つ目だけで、対象もクォークの無い純ヤン–ミルズです。問題文は隙間の**値**も求めていません。グルーボールの質量や弦張力との比は物理の測定の対象です（5-08）。

例。Chatterjee（2018）の格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）は、格子（β は格子の結合の逆数で、大きいほど結合が弱い。5-01）の上でプラケット変数の相関が指数的に減衰し（相関長 $\xi(\beta)$ が有限）、$\beta \to \infty$ で $\xi(\beta) \to \infty$ となることを問います。格子の上の定式化で、連続極限・$\mathbb{R}^4$・公理・非自明性を含む Clay の要件とは別物です。それが示されても、それだけでは Clay の問題の解になりません（5-09・16-08）。

10

各語が締め出すもの — 一語ずつの一覧

(1) の条件を、節 01 で触れた $m_G < \infty$ と合わせて一語ずつ取り上げ、その語が直接締め出すものを並べます。

$$\forall G \; \exists \mathcal{T}_G \left[\text{公理} \wedge \text{非自明} \wedge \text{短距離} \wedge \Delta_G > 0 \wedge m_G < \infty \right] \tag{11}$$

表 5　一語ずつの一覧（この章の読み）。

語	その語が直接締め出すもの	節
任意の	都合のよい一つの群（たとえば $SU(2)$）だけの構成	02
コンパクト	不変な二次形式が不定値で、古典のエネルギーが正にならない群	02
単純	$G = U(1)$。自由な電磁場には隙間が無いので、入れると主張が偽になる	02

語	その語が直接締め出すもの	節
$\mathbb{R}^4$	T^4 や格子の上の理論。有限の格子なら積分は有限次元で（§6.5）、いつでも在る	03
存在（公理）	何かの極限が在るだけのもの。ヒルベルト空間もハミルトニアンも無い	04
非自明	ガウスに潰れた極限。質量を持つ自由場は公理を満たし、隙間もある	05
$\Delta > 0$	質量ゼロの自由場。公理を満たすが隙間が無い	06
$m < \infty$	真空だけの理論（$\sigma(H) = \{0\}$）	06
短距離	ヤン–ミルズと関係の無い、隙間を持つ別の理論	07
弱い存在の脚注	部分列を取ったコンパクト性の極限（一意性も、ギャップと公理も示されていないもの）	08

表 5 の語は、外したときに何が起きるかで二種類に分かれます。一つは、外すと主張が**偽**になる語です。「単純」がそうで、下の例のとおり、隙間の無い理論が一つ混ざります。もう一つは、外すと主張が**易しく**なる語です。「$\mathbb{R}^4$」を外せば有限の格子の上の有限次元の積分で済み、「存在（公理）」を外せば極限が在るだけのものが通り、「弱い存在の脚注」を外せば部分列の極限で足ります。「$m < \infty$」を外すと、真空だけの理論が隙間の条件を形の上で満たしてしまいます。この章の読みでは、問題文の語の多くは後者で、易しい答えへの抜け道を一つずつ閉じています。

締め出しは重なります。質量を持つ自由場は「非自明」と「短距離」の両方に掛かります。一つの語を外しても、別の語が同じものを締め出していることがあります。表 5 は語ごとの役目の目安です。

例。「単純」を外すと $G = U(1)$ についても隙間を示すことになりますが、その理論は自由な電磁場で、表 3 の 3 行目のとおり隙間がありません。外した主張はこの一例で偽になります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない（どこで扱うか）
既知 問題文の一文・定義・脚注・拡張問題の所在と中身（Clay の PDF と照合）	問題文が定義しない語（「非自明」など）の意味はこの章の読み
計算 表 1 の次元と $h^\vee$ を根系から求め、標準的な値と一致。式 (2) の規格化で $C_A = h^\vee$ となることを六つの群で確認	分類がこれで尽きることと、一般の群での $C_A = h^\vee$ の証明（この本では証明しない。値の一覧は 1-04）
既知 $m < \infty$ と $\sigma(H) \neq \{0\}$ が同じこと。表 3 の例	四次元の量子ヤン–ミルズの H が在ること自体（2026-11 に公開された構成が再構成で作った。委員会の評価の水準。6-00。その隙間は示されていない）
計算 表 4、(5) の比、(8) の数値、$\cos n$ の経験分布	Prokhorov の定理の証明（この本では扱わない）

言えている	言えていない（どこで扱うか）
物理 $\Delta = c\Lambda$、非自明性の期待	どちらも証明は無い（4-07・17-12）
—	表 5 は読みで、出題者の言明ではない。この章は問題について何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
一文・§1〜§6.6・脚注	既知	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”（Clay 数学研究所の公式の問題文、研究所のサイトの PDF。全文を照合）。所収：J. Carlson, A. Jaffe, A. Wiles (eds.), *The Millennium Prize Problems*, CMI／AMS, pp. 129–152（刊行年は未確認）
発表の日付と場所	既知	Clay 数学研究所のサイト（Millennium Prize Problems のページ）／上の書籍の序文（Introduction, p. viii）：'The prize was announced at a meeting on May 24, 2000, at the Collège de France.'（研究所が公開している書籍の PDF で確認）
(8)・b_0 の一般形 $(11C_A - 4n_f T_R)/(12\pi)$・$\Lambda$	既知	S. Navas et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. D 110 (2024) 030001、QCD の章 §9.1.1 の式 (9.3)。該当箇所を読んだ（4-06 の出典表と同じ箇所）
漸近自由	既知	D. J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1343／H. D. Politzer, 同 30 (1973) 1346。書誌のみ
公理系	既知	R. Streater, A. Wightman, *PCT, Spin and Statistics and All That*, Benjamin, 1964／K. Osterwalder, R. Schrader, Comm. Math. Phys. 31 (1973) 83–112、42 (1975) 281–305。書誌のみ（中身は問題文 §3 による）
φ^4_4 の自明性	既知	M. Aizenman, H. Duminil-Copin, Ann. of Math. 194 (2021) 163–235, arXiv:1912.07973。要旨を確認
紫外側の極限の見込み	既知	J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, Comm. Math. Phys. 155 (1993) 325–383。書誌のみ（序論の該当箇所は 7-07 の出典表）
格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）	既知	S. Chatterjee, “Yang–Mills for probabilists”, arXiv:1803.01950 (2018)。要旨を確認。格子の相関長の問題の本文は 5-09 の出典表
$C_A = h^\vee$（最長の根の長さの二乗を 1 にする規格化で）・$h^\vee$ の定義	既知	V. G. Kac, *Infinite Dimensional Lie Algebras*, 第 3 版 (1990)。書誌のみ（1-04 の出典表と同じ）
分類・$C_A > 0$・不変内積・Isserlis・Weyl・Prokhorov	既知	標準的な事実（書誌は付けていない）

もの	種別	出典・道具
表 1・表 4・本文の数値・図	計算	python3。表 1 は有理数による誤差の無い計算：Cartan 行列から正の根をすべて生成し、次元＝階数 $+\,2\times$（正の根の数）、$h^\vee=(\theta,\theta+2\rho)/(\theta,\theta)$（$\theta$ は最高根、2ρ は正の根の和。比なので内積の規格化によらない）。式 (2) の規格化は、定義表現の生成子から構造定数を作り、最長の根の長さの二乗を 1 にした内積で $C_A=h^\vee$、2 にした内積で $2h^\vee$ となることを $SU(2),SU(3),SU(4),SO(5),SO(7),SO(8)$ で数値的に確認。数値積分は SciPy。図はブラウザの JavaScript（図 1 は式から、図 2 は表 4 と同じ規則）

次に読む章：0-04 数学の四次元と物理の四次元。語ごとの深掘りは、各節の終わりに挙げた章へ。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 0 部 入口 — この本の読み方 ユークリッドと時空

数学の四次元と物理の四次元 — 同じ R⁴ に物差しが二つあり、問題は両方で通じる理論を求めている

この章の §01〜§08 は既存の知見、§09 は未解決の地図です。

この章で分かること — 問題文の $\mathbb{R}^4$ が、ユークリッドの四次元（数学の側）と時空の四次元（物理の側）の二通りに読めること。二つを結ぶのが虚時間と反射正値性で、質量ギャップにも「ハミルトニアンの隙間」と「相関の指数減衰」の二つの顔があること。問題で効く「四」は、結合定数の次元が消える四であること。

前提となる章 — なし。量子力学の言葉は 04 節、反射正値性は 06 節で最小限だけ置きます（詳しくは 2-05・4-10）。06・07 節の例は変形 Bessel 関数 $I_k(J) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{J\cos\theta}\cos k\theta\, d\theta$（$k = 0, 1$）を数値として使うだけです。記事 四次元でだけ起きること・符号が一つ違う を読んでいるとつながりが見えやすくなります。

先に言うこと — 道筋の案内の章です。虚時間への置き換えは発見法で、厳密な橋（Osterwalder–Schrader の再構成）は 4-10 で扱います。07 節の計算は一つの粒子の量子力学の例で、四次元のヤン–ミルズでは、戻り道の先の Hilbert 空間は 2026-11 に公開された構成が再構成で作りましたが（委員会の評価の水準。09 節）、その上の隙間は示されていません。この章は質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. 問題文の R^4 — 符号は書かれず、二つの公理系が指定されている
2. 同じ点、二つの物差し — 虚数の角の回転が押し出しになる
3. 二本の記事の事例は、問題のどこに効くか（表 1）
4. 時間を回す — エネルギーが正だから振動が減衰に変わる（図 1・表 2）
5. 二つの四次元の辞書（表 3・寄り道：自己双対は虚時間にしか住まない）
6. 反射正値性 — 確率から Hilbert 空間を取り戻す
7. 質量ギャップの二つの顔 — 円周上の粒子で数える（図 2・表 4）
8. 問題で効く「四」 — 数えるのはユークリッドの d

9. 戻り道の三つの関門 — ヤン–ミルズに特有のずれ

01

問題文の R⁴ — 符号は書かれていない

問題文（Jaffe–Witten によるクレイ数学研究所の記述）は、任意のコンパクト単純群 G について「$\mathbb{R}^4$ の上に」非自明な量子ヤン–ミルズ理論が存在し質量ギャップ $\Delta > 0$ を持つことを示せ、と求めます（一語ずつの読みは 0-03）。この $\mathbb{R}^4$ には長さの測り方が書かれていません。

測り方は前後の節に出てきます。§3 は公理を 'Gårding and Wightman gave mathematically precise axioms for quantum field theories on R4 with a Minkowski signature' と紹介し、§6 は '(Equivalently in the Euclidean formulation one replaces Euclidean space-time R4 by R2 or R3.)' と添えます。存在は 'axiomatic properties at least as strong as those cited in [45, 35]' を含み、[45] は Streater–Wightman（時空の側の公理）、[35] は Osterwalder–Schrader（ユークリッドの側の公理）です 既知 。同じ $\mathbb{R}^4$ に物差しが二つある、と言えます。正確には、点の集まりは同じで、違うのは長さの二乗を測る二次形式です（$c = 1$）。

$$
\begin{aligned}
Q_{\mathrm{E}}(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \\
Q_{\mathrm{M}}(t, x) &= -t^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2
\end{aligned}
\tag{1}
$$

例。点 $(1, 0, 0, 1)$ の最後の座標を時間と読むと、$Q_{\mathrm{E}} = 2$ ですが $Q_{\mathrm{M}} = 0$ で、原点と光でちょうど結ばれます。$(0, 0, 0, 1)$ は $Q_{\mathrm{E}} = 1$、$Q_{\mathrm{M}} = -1$（時間的）です。符号を $(+, -, -, -)$ と書く流儀もあり、中身は同じです。

02

同じ点、二つの物差し — 虚数の角の回転が押し出しになる

物差しを決めると、それを保つ変換の群が決まります。$SO(4)$ は Q_{E} を、$SO(3,1)$ は Q_{M} を変えない、行列式 1 の 4×4 実行列の群です。前者が四次元の回転群、後者がローレンツ群で、平行移動を合わせるとユークリッド群とポアンカレ群です。どちらも座標平面 $\binom{4}{2} = 6$ 枚ごとに一つの向きを持ちます（四次元でだけ起きること）。違いは時間を含む 3 枚で、そこでの回転が時空では押し出しに変わります（2-04）。

$$
\begin{aligned}
\tau' &= \tau\cos\alpha - x\sin\alpha \\
x' &= \tau\sin\alpha + x\cos\alpha \\
&\Big\downarrow\ \tau = it,\ \ \alpha = i\varphi \\
t' &= t\cosh\varphi - x\sinh\varphi \\
x' &= x\cosh\varphi - t\sinh\varphi
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$\cos(i\varphi)=\cosh\varphi$、$\sin(i\varphi)=i\sinh\varphi$ だからです 既知 。この φ を急速度（ラピディティ）と呼びます。(2) の下の式で $x'=0$ となる点は $x=t\tanh\varphi$ を動くので、押し出しの速度は $v=\tanh\varphi$ です。例。$\varphi=0.7$、$(t,x)=(0.4,\,1.3)$ を左に入れると $t'=-0.484091,\ x'=1.328286$ で、右と一致します 計算 。回転の角は 2π で一周しますが、急速度には上限がありません（$\varphi\to\infty$ で v は 1 に近づくだけです）。二次形式で言い直すと、$SO(4)$ は点を Q_{E} が一定の球面の上でしか動かせませんが、$SO(3,1)$ は $Q_{\mathrm{M}}=-1$ の双曲面の上でいくらでも遠くへ運べます。$SO(4)$ がコンパクトで $SO(3,1)$ が非コンパクトなのは、この違いの表れです（符号が一つ違う §01）。

03

二本の記事の事例は、問題のどこに効くか

記事 四次元でだけ起きること はユークリッドの $\mathbb{R}^4$ とその位相を、符号が一つ違う は時空を見ていました。事例のすべてが問題に効くわけではありません。ユークリッドの側で最もよく効くのは、6 枚の平面が「垂直な平面」と 3 組の対になり、場の強さ F が二つに割れることです（1-12）。場の強さは、電磁気学の電場と磁場をまとめた $F_{\mu\nu}$（2-03）をヤン–ミルズに一般化したもので（3-02）、座標平面ごとに一つの成分を持ちます。電磁気学なら、電場の 3 成分が時間を含む 3 枚、磁場の 3 成分が空間だけの 3 枚に当たります。各平面の成分を垂直な平面へ移す操作をホッジの星 $*$ と書くと、平面の分け方がそのまま F の分け方になります。

$$
\begin{gathered}
\binom{4}{2} = 6 = 3 + 3 \\
F = F^{+} + F^{-}, \qquad F^{\pm} = \tfrac{1}{2}\left(F \pm *F\right)
\end{gathered}
\tag{3}
$$

例として、事例が問題でどう顔を出すかを並べます。

表 1　二本の記事の事例と問題（E＝ユークリッド、M＝時空）

事例		問題との関係	この本
回転から軸が消える	E	$F^{\pm}$ に割れる。インスタントンの分類	3-05
24-cell	E	SU(2) の有限部分群。有限群の格子の模型	5-10
エキゾチック $\mathbb{R}^4$	E	古典の方程式が位相を見分ける（Donaldson）。問題文には現れない	3-06

事例		問題との関係	この本
回転が回転でなくなる・虚数を入れる	E・M	二つの四次元を結ぶ発見法	04 節
光円錐と因果	M	光で結べない領域の場は可換、という公理	4-09
重力・波の尾	M	問題は平らな時空だけで、現れない	—

表の読み方。上の三行（E）は、第 3 部（古典のヤン–ミルズ）と第 5 部（格子）で道具や模型として効きます。四行目（E・M）は、この章の 04〜07 節で二つの四次元を結ぶために使います。M の行のうち光円錐は第 4 部の公理（4-09）に入り、重力の行は問題の外です。

問題で効く「四」は、エキゾチック構造のような四次元に特有の現象ではなく、結合定数の次元が消える四です（08 節）。ただしエキゾチック $\mathbb{R}^4$ の存在の証明には、Freedman の位相的な定理と合わせて、同じヤン–ミルズの方程式（その反自己双対な解の空間）が使われています（1-12・3-06）。古典論は方程式の解を位相を見る道具に、量子論は作用を確率の重みに使います。

04

時間を回す — エネルギーが正だから振動が減衰に変わる

二つの四次元を行き来する最初の道具は、時間 t を虚数に置き換えることです（Wick 回転。名は Wick 1954 にちなむとされます。場の作用での形は 4-02 §02 が正本）。(1) に $t = -i\tau$ を入れると Q_{M} が Q_{E} になります。何が変わるかは量子力学の時間発展で見えます。

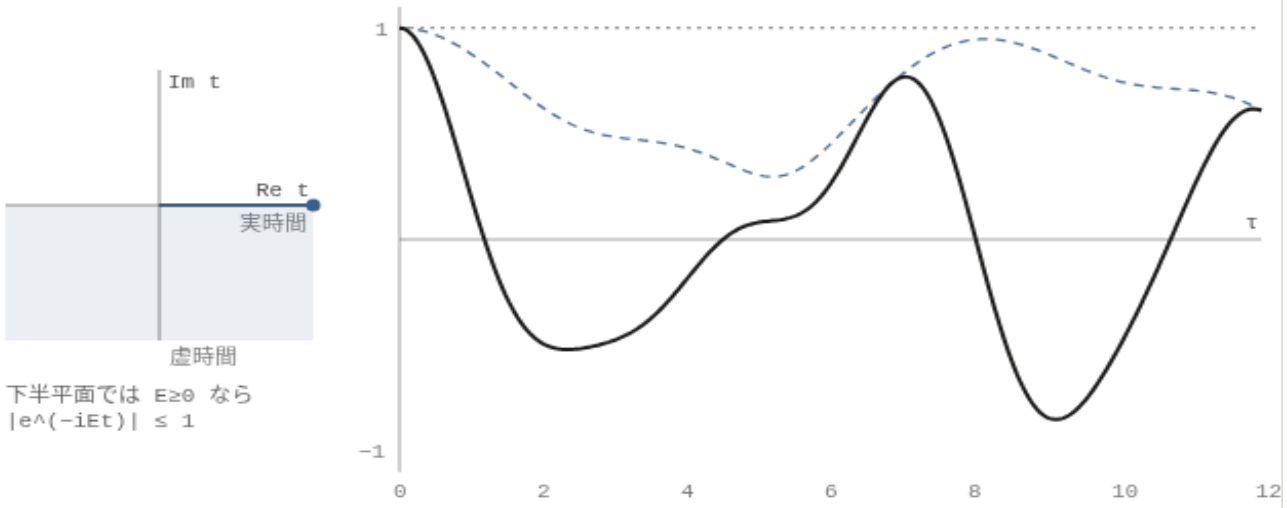
状態は Hilbert 空間（内積をもち、極限について閉じた複素ベクトル空間。1-10）の長さ 1 のベクトルで、エネルギーの作用素 H（ハミルトニアン）の固有ベクトル ψ_n（固有値 E_n）で展開できるとします。エネルギー E_n の成分は位相 e^{-iE_nt} で回ります（$\hbar = 1$）。いちばん低い状態を真空 Ω（エネルギー 0）とし、観測量 O を当てたベクトルを $O\Omega = \sum_n c_n \psi_n$ と書くと、時間 t を隔てた相関は

$$
\begin{aligned}
C(t) &= \langle O\Omega,\ e^{-iHt}\, O\Omega \rangle = \sum_n |c_n|^2 e^{-iE_nt} \\
t &= \tau e^{-i\vartheta} \implies \left| e^{-iE_nt} \right| = e^{-E_n\tau \sin\vartheta}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

です。ϑ は時間を複素平面で回す角で、$\vartheta = 0$ が実時間、$\vartheta = 90^\circ$ が虚時間です。すべての E_n が 0 以上なら、t を下半平面に回しても各項は 1 を超えず、$\vartheta = 90^\circ$ で振動が減衰 $e^{-E_n\tau}$ に変わります。負の E_n があればその項は増え、和が意味を失います。問題文 §3 は 'Wightman used positive energy to establish analytic continuation of expectations of Minkowski field theories to Euclidean space.' と書きます 既知 。

例。真空の項を除いた連結部分 C_{conn} を、$E_n = 1,\ 1.7,\ 2.6$、重み $0.6,\ 0.3,\ 0.1$ の模型で描きます。ギャップは $\Delta = 1$ です。

図 1　角 ϑ を 0° から 90° へ動かすと、時間の向き（左）が虚軸へ回り、相関の実部（右の実線）の振動が減衰に変わる。破線は |C|、点線は e^(−Δτ sinϑ)。「負のエネルギー」を入れると増大に変わる



ϑ = 0°　減衰の速さ Δ·sinϑ = 0.000　振動の速さ Δ·cosϑ = 1.000　|C(τ=8)| = 0.94469

計算　この図の数値はこの端末で計算しました（(4) の和をブラウザで計算。表 2 は python3）。「負のエネルギー」は $E = -0.3$、重み 0.03 の項です。

表 2　$|C_{\mathrm{conn}}(\tau e^{-i\vartheta})|$（最後の列は負のエネルギーを入れた場合）

ϑ	τ = 2	τ = 8	$e^{-8\sin\vartheta}$	負を入れて τ = 8
0°	0.62270	0.94469	1	0.92401
30°	0.23920	0.01104	0.01832	0.08978
60°	0.11873	0.00059	0.00098	0.24004
90°	0.09176	0.00020	0.00034	0.33090

実時間では $\tau = 8$ でも 0.94 で、相関は減りません。回すほど速く減り、負のエネルギーを入れると回すほど増えます。上界 $|C_{\mathrm{conn}}| \le e^{-\Delta\tau\sin\vartheta}$ は、重みの和が 1 で $E_n \ge \Delta$ なので、(4) の各項に三角不等式を使えば出ます 既知。$0 \le \vartheta \le 90°$、$0 \le \tau \le 12$ の細かい格子の全点でも確かめました 計算。

05

二つの四次元の辞書

虚時間に移すと、量子論の言葉が確率論の言葉に置き換わります。問題文 §3 は、Symanzik がユークリッドの期待値を 'a statistical mechanical ensemble of classical Markov fields [46], with a probability density proportional to exp(−S)' と読み、Osterwalder と

Schrader が二つの公理系の同等性の一般論を与えた、とまとめます 既知 （定理の正確な向きと条件は 4-10）。

$$
\begin{aligned}
e^{iS[\phi]} &\longrightarrow e^{-S_{\mathrm{E}}[\phi]} \\
e^{-iHt} &\longrightarrow e^{-H\tau}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

左の e^{iS}（S は作用、ϕ は場。2-01・2-02）は大きさ 1 で振動し、確率になりません。右の $e^{-S_{\mathrm{E}}}$（S_{E} は虚時間に移した作用）は正で、規格化すれば確率の重みになりえます（2-07・4-02）。数学の側でヤン–ミルズが「接続の空間の上の確率測度を作る問題」になるのはこのためです（接続はゲージ場 A のことで、詳しくは 1-07）。例として、対応の主な行を並べます。

表 3　二つの四次元の辞書（厳密な形は 4-10）

物理の四次元（時空）	数学の四次元（ユークリッド）
ローレンツ群 $SO(3,1)$	回転群 $SO(4)$
時間発展 e^{-iHt}	$e^{-H\tau}$。格子では転送行列（5-03）
経路積分の重み e^{iS}	確率の重み $e^{-S_{\mathrm{E}}}$（2-08）
場の積の真空期待値（Wightman 関数）	確率測度のモーメント（Schwinger 関数）
Hilbert 空間とエネルギーの正値 $H \geq 0$	反射正値性（06 節）
光で結べない領域の場は可換	Schwinger 関数が引数の並べ替えで変わらない（ボース的な場の場合）
質量ギャップ：H のスペクトルが $(0, \Delta)$ に無い	連結相関が指数的に減る（07 節）

どの行も、最後は「反射正値性があれば Hilbert 空間に戻れる」という一点を通ります。

寄り道：自己双対は虚時間にしか住まない

飛ばしてよい小節です。

辞書で訳せない行もあります。ホッジの星 $*$（各平面の成分を垂直な平面へ移す操作。1-12）を二回かけた符号が、物差しで変わります。

$$
\begin{gathered}
** = +1 \ \text{(ユークリッド)} \\
** = -1 \ \text{(時空)} \\
* : (E, B) \mapsto (-B, E) \ \text{(時空)}
\end{gathered}
\tag{6}
$$

ユークリッドでは $F = *F$（自己双対）を満たす実の場があり、インスタントンはその解です（3-05）。時空では $*$ の固有値が $\pm i$ なので、実の場で $*F = \pm F$ なら $F = 0$ です。例。六成分の行列として $*$ を組むと、固有値はユークリッドで ± 1、符号 $(-,+,+,+)$ で $\pm i$ が三つずつでした 計算 （(6) の右の符号は慣習による）。インスタントンを虚時間のトンネル効果と読むのは半古典の解釈です 物理 。

06

反射正値性 — 確率から Hilbert 空間を取り戻す

ユークリッドの側にあるのは確率測度（期待値 $\mathbb{E}$）だけで、Hilbert 空間もハミルトニアンもありません。取り戻すには内積が要り、材料は時間の鏡 $\Theta : \tau \mapsto -\tau$ です。X, Y を $\tau > 0$ の側の場だけで決まる量とし、ΘX を X の中の時刻をすべて符号反転したもの（$\tau < 0$ の側の量）として

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &:= \mathbb{E}\big[\,\overline{\Theta X}\; Y\,\big] \\ \langle X, X \rangle &\geq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

と置きます。後半が反射正値性です（OS 正値性とも呼びます）。成り立てば $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が（長さ 0 のものを同一視して）内積になり、τ の向きに s ずらす操作が e^{-sH}（$H \geq 0$）として働きます 既知 。問題文 §6.5 は 'Establishing a quantum mechanical Hilbert space is part of the solution to this Millennium problem.' と書きます。

例。円周上を回る粒子（慣性モーメント I、角 θ）を刻み a の虚時間の格子に置きます。この章では θ をこの粒子の角に使います（3-05 などの θ 項の角とは別です）。時刻 ka の角を θ_k と書き、作用 $\int \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 d\tau$ の一歩分を $\frac{I}{a}\big(1 - \cos(\theta_{k+1} - \theta_k)\big)$ で近似すると、重みは

$$\begin{aligned} &\prod_k e^{J\cos(\theta_{k+1}-\theta_k)}, \qquad J = \frac{I}{a} \\ &e^{J\cos u} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} I_n(J)\, e^{inu} \\ &I_n(J) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{J\cos u}\cos nu \, du \end{aligned} \tag{8}$$

です。J は隣り合う時刻の角をそろえようとする強さで、統計力学ではこの重みの鎖を一次元の XY 模型と呼びます（分配関数と転送行列の言葉は 2-08・2-09）。I_n は変形ベッセル関数で、べき級数の係数がすべて正なので $I_n(J) > 0$ です 既知 。転送行列 T は、一歩分の重みを積分の核にした作用素です。

$$(Tf)(\theta) = \int_0^{2\pi} K(\theta, \theta')\, f(\theta')\, d\theta', \qquad K(\theta, \theta') = e^{J\cos(\theta - \theta')}$$

(8) の展開を代入すると、T は $e^{in\theta}$ を固有値 $2\pi I_n(J)$ で自分に移します（θ を 256 点に刻んだ数値と 12 桁一致 計算 ）。反射の面を格子の点と点のあいだに置くと (7) の左辺は T を挟んだ二次形式になり、固有値が正なので 0 以上です。こうして $H_a = -\frac{1}{a}\log\big(T / 2\pi I_0(J)\big) \geq 0$ が定まります。Wilson の格子ゲージ理論での反射正値性は Osterwalder–Seiler 1978 が示しました（転送行列の構成は Lüscher 1977 も。5-03）。

07

質量ギャップの二つの顔 — 円周上の粒子で数える

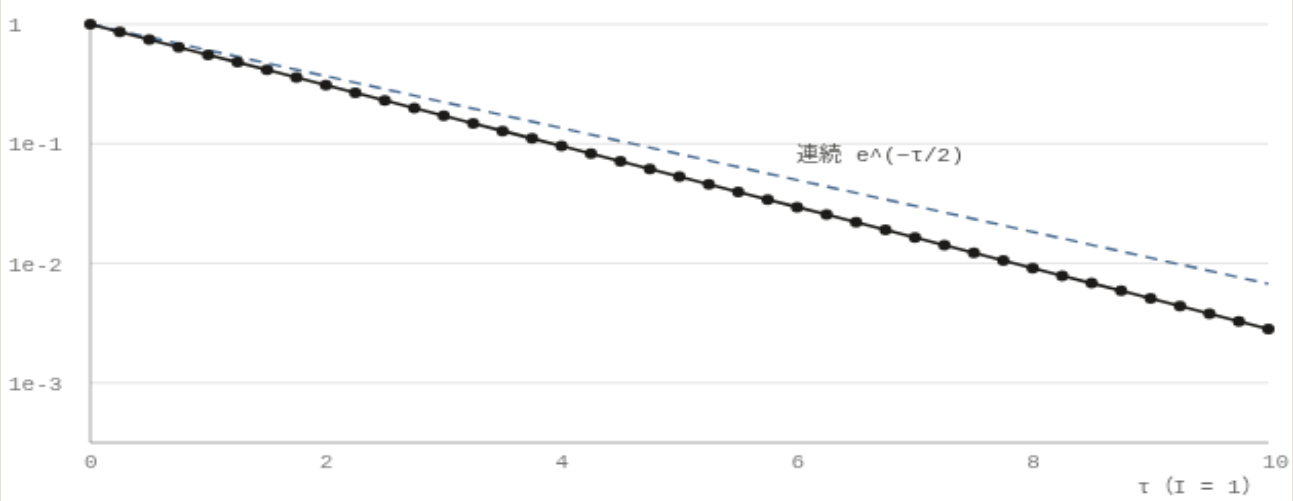
質量ギャップの定義は時空の側にあり、問題文 §4 は 'A quantum field theory has a mass gap Δ if H has no spectrum in the interval $(0,\,\Delta)$ for some $\Delta > 0$.' と書きます（H はハミルトニアン。スペクトル $\operatorname{spec} H$ は、有限次元なら固有値の集合です）。ユークリッドの側では同じことが相関の減衰に見えます。これを質量ギャップの二つの顔と呼びます。正確には、ハミルトニアンのスペクトルについての条件と、連結相関（Schwinger 関数から真空の寄与を引いたもの。表 3）の指数減衰の二つです。(4) で $\vartheta = 90^\circ$ と置けば

$$\begin{aligned} \operatorname{spec} H \subset \{0\} \cup [\Delta, \infty) \;\Longrightarrow\; & \\ C_{\mathrm{conn}}(\tau) = \sum_{E_n \geq \Delta} |c_n|^2 e^{-E_n \tau} & \\ \leq C_{\mathrm{conn}}(0)\, e^{-\Delta \tau} & \end{aligned} \tag{9}$$

です。O がいちばん低い励起と重なれば $-\frac{d}{d\tau}\log C_{\mathrm{conn}}$ は Δ に近づき、図 1 の模型では $\tau = 1, 2, 4, 8$ で 1.178、1.086、1.021、1.001 でした 計算 。格子でグルーボール（ヤン–ミルズの粒子に当たる励起の候補）の質量を測るのはこちらの顔です（5-08）。ユークリッドでは時間と空間が回転で移り合うので、τ の向きの減衰は空間の向きの減衰にもなり、問題文 §5 のクラスター性につながります 既知 。局所的な観測量（有界な領域の場だけで決まる量）を回した先もまた局所的な観測量なので、どの向きにも同じ速さの減衰が言えます。ただしこれは、再構成で Hilbert 空間とハミルトニアンが得られた後の話です。

例。06 節の粒子で $O = e^{i\theta}$ とします。$H = -\frac{1}{2I}\frac{d^2}{d\theta^2}$ の固有値は $\frac{n^2}{2I}$、ギャップは $\Delta = \frac{1}{2I}$ で、$O\Omega$ は $n = 1$ の成分だけなので $C_{\mathrm{conn}}(\tau) = e^{-\Delta\tau}$ です。格子では無限に長い鎖で $\langle e^{i(\theta_k - \theta_0)}\rangle = (I_1/I_0)^k$ となり、$\tau = ka$ と読んだ減衰の速さは $\Delta(a) = -\frac{1}{a}\log\frac{I_1(J)}{I_0(J)}$ です。これは格子の上のギャップを物理の単位で測ったもので（06 節の H_a のいちばん小さい正の固有値）、格子の単位では $a\,\Delta(a)$ です（付録 A-01 の m_{lat}）。

図 2　刻み a = I/J を細かくすると、格子の相関（実線。粗い格子では点も）の傾きが連続の e^(−Δτ)（破線）に近づく。縦軸は対数。表 4 の行を押しても J が変わる




```
J = I/a = 4  a = 0.25  Δ(a) = 0.586941  Δ(a)/Δ = 1.173882  (Δ = 0.5)
```

計算 この図の数値はこの端末で計算しました（I_1/I_0 と $\Delta(a)$ は python3・SciPy で計算した表 4 の値。図は点 $(ka,\,(I_1/I_0)^k)$ を結ぶだけ）。

表 4　円周上の粒子の格子（$I=1$、$\Delta=0.5$、刻み $a=1/J$）。最後の列は二番目の準位 $E_2=2$ との比

J	Δ(a)/Δ	1 + 1/(2J)	E₂(a)/E₂
1	1.613125	1.500000	1.116436
2	1.439436	1.250000	1.196582
4	1.173882	1.125000	1.130427
8	1.071311	1.062500	1.065295
16	1.033214	1.031250	1.032022
32	1.016093	1.015625	1.015824
64	1.007927	1.007813	1.007863

粗い格子（$J\le 2$）の $\Delta(a)/\Delta$ は 1.4〜1.6 で、ギャップとは別の数です。細かくすると $1+\frac{1}{2J}$ とほぼ同じ速さで 1 に近づき、二番目の準位も近づきます。周期 400 の鎖で転送行列の積から計算した相関も $(I_1/I_0)^k$ と 10 桁一致しました 計算 。この例ではギャップが在ることは最初から明らかです。四次元のヤン–ミルズで要るのは、格子の単位で見た減衰 $a\,\Delta(a)$ が 0 に向かう極限で $\Delta(a)$ が正の値に留まることです（5-09）。極限の Hilbert 空間は、2026-11 に公開された構成が再構成で作りました（委員会の評価の水準。09 節）。

08

問題で効く「四」 — 数えるのはユークリッドの d

次元の勘定はユークリッドの側で、d 個の対等な座標について行います。$c=1$ なら時間も長さで測るので、3+1 次元の時空は $d=4$ です。d 次元のユークリッドの作用を $S_d[A]=\frac{1}{2g^2}\int_{\mathbb{R}^d}\operatorname{tr}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\,d^dx$（$\mu,\nu$ について和）と書きます。付録 A-01 の作用の形で、ここでは結合 g

を作用の前に出し、F には含めない書き方をとります。$\hbar = c = 1$ で質量の次元を $[\cdot]$ と書くと（導き方は 2-04・1-12）

$$\begin{aligned} [g^2] &= 4 - d \\ S_d[A_\lambda] &= \lambda^{4-d}\, S_d[A] \\ \big(A_\lambda(x) &= \lambda A(\lambda x)\big) \end{aligned} \tag{10}$$

で、四次元だけ古典の作用に長さの尺度がありません。古典の定数から質量を組めないので、ギャップは量子効果で生まれる尺度 Λ の定数倍 $\Delta = C\Lambda$（C は無次元の定数）になると期待されています[物理]。問題文 §6.6 の 'the mass gap is not classically visible' はこの事情です（4-07）。次元 d を連続に動かし、四で切り替わる他の量と並べた図は 1-12 §10 の次元のつまみです。

例。三次元では $[g^2] = 1$ で g^2 自体が質量の尺度になり、勘定の上では易しい側に入ります。Chevyrev（arXiv:2202.13359 §1.1）も 'The cases d = 2, 3 are considered substantially simpler than d = 4' と書きますが、同じ節で三次元の測度の構成は 'even on T3, remains open' です[既知]。二次元は連続の測度が構成済み、四次元は測度としては未構成です（2026-11 に公開された構成が作ったのは相関関数の水準。09 節。次元ごとの現在地は 7-10、誤解は 16-08）。

09

戻り道の三つの関門 — ヤン–ミルズに特有のずれ

円周上の粒子では辞書がそのまま使えました。ユークリッドの側で作った理論から、辞書を逆にたどって時空の側の理論に戻る道を、この章では戻り道と呼びます。戻り道とは、正確には、ユークリッドの確率測度から OS の再構成で Wightman の公理を満たす理論（Hilbert 空間と $H \geq 0$ をもつもの）を得ることです。ヤン–ミルズでは、その途中に関門が三つあります：観測量・正則化・体積。道の全体を並べると次のとおりです。

$$\begin{aligned} &\underbrace{\text{格子・正則化}}_{\text{反射正値性}} \xrightarrow{a \to 0} \text{連続の測度} \\ &\xrightarrow{T^4 \to \mathbb{R}^4} \text{ユークリッド不変} \\ &\xrightarrow{\text{再構成}} (\mathcal{H},\, H \geq 0) \xrightarrow{?} \Delta > 0 \end{aligned} \tag{11}$$

左端の正則化は、理論に最小の長さ（格子の刻み a など）を入れて無限大が出ないようにしたものです。T^4 は各辺を周期的につないだ四次元の箱で、体積を有限にしておくためのものです。四次元の非可換ヤン–ミルズでは、2026-11 に公開された構成が、(11) の最後の矢印の手前までを通しました。ただし連続の対象は測度ではなく相関関数で、体積の極限は部分列です（Lean で証明されている、と委員会が評価した。6-00・12-06・12-08）。最後の「?」の矢

印、質量ギャップは示されていません（6-04）。2000 年の問題文 §6 は T^4 の上の構成について 'while the construction is not complete' と書きます。二次元では、格子から平面 $\mathbb{R}^2$ の上の連続の測度までが通っています（7-02）。三つの関門は次のとおりです。

観測量。意味を持つのはゲージ不変な量、つまりゲージ変換（各点で群の元を選んで場を取り替える操作。3-01）で値の変わらない量だけです。局所的なものは $\mathrm{Tr}\, F_{ij}F_{kl}(x)$ のような合成の量です（問題文 §4）。Chatterjee（arXiv:1803.01950 §1）は Seiler を引いて 'the key observables in these theories do not take values at points, but at curves' と書き、Driver 1989 はウィルソンループが 'quite singular in d = 3 and especially d = 4' と述べます 既知 。この関門は (11) のどの段にもかかわります。

正則化。(11) の左端の関門です。Wilson の格子は反射正値性を保ちますが、回転を 90° 刻みに落とします。問題文 §6.5 は、正則化で失った反射正値性を取り戻す方法は少ないと書き（引用は 0-03 §03）、連続の正則化を使った Magnen–Rivasseau–Sénéor 1993 も OS 正値性（反射正値性）は追加の仕事で示せると考える、にとどまります 既知 。

体積。(11) の二本目の矢印の関門です。T^4 でも反射正値性があれば有限体積の Hilbert 空間と転送行列は得られますが、$\mathbb{R}^4$ の上でポアンカレ群の対称性をもつ理論には $T^4 \to \mathbb{R}^4$ が要ります。問題文 §6 は 'Nor do present methods suggest how to obtain the existence of the infinite volume limit T4 → R4.' と書きます 既知 。2026-11 に公開された構成は、無限体積の極限をコンパクト性による部分列で取りました（12-05）。極限が部分列に依らないことは示されていません（6-04）。

例。三次元・四次元の非可換ヤン–ミルズでは、一意で非自明な連続極限はまだ示されていません（四次元は、非自明な極限を 2026-11 に公開された構成が作りましたが、一意性は示されていません。三次元は T^3 の上でも未構成。08 節）。(11) の最後の「?」が質量ギャップの本体ですが、ギャップは最後に一本だけ残る矢印ではありません。問題文 §6.5 は 'New ideas are needed to prove the existence of a mass gap that is uniform in the volume of space-time' と書き、続けて、体積によらない（箱をどれだけ大きくしても一様な）ギャップが示されれば $T^4 \to \mathbb{R}^4$ の極限を調べられるようになるだろう、と見ています 既知 。つまりギャップと体積の関門は絡み合っています（7-11・16-05）。

この章が言えている範囲

内容	状態
問題文の $\mathbb{R}^4$ に符号の指定がなく、両側の公理系が [45, 35] として指定されていること	言えている 既知 （問題文 §3・§4・§6）
(2)・(6)・(8)、エネルギーが正なら虚時間で減衰になること (4)、ギャップが減衰の上界を与えること (9)	言えている 既知 （図 1〜2・表 2・表 4 は 計算 ）
辞書（表 3）と、反射正値性から Hilbert 空間を作る手順 (7)	対応として 既知 。定理の形は 4-10 で扱い、この章は述べただけ
$\Delta = C\Lambda$ の形でギャップが量子効果から生まれること	物理の水準 物理 （4-07）
四次元のヤン–ミルズで (11) の各矢印が成り立つこと	最後の矢印（質量ギャップ）は未解決。その手前の矢印は 2026-11 に公開された構成が相関関数の水準で通した（委員会の評価の水準。体積は部分列。6-00）。この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
(2)・(6) の数値、表 2・表 4、図 1〜2、07 節の有効質量と鎖の検算	計算	python3（NumPy・SciPy）。図 1 は (4) をブラウザで計算、図 2 は表 4 の値を描画
問題文の引用	既知	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”, Clay Mathematics Institute の公式の問題文（問題の発表は 2000 年）。所収：J. Carlson, A. Jaffe, A. Wiles (eds.), *The Millennium Prize Problems*, CMI／AMS, pp. 129–152（目次と頁で確認。刊行年は未確認）。本文を確認
両側の公理と再構成	既知	R. F. Streater, A. S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics and All That* (1964)。K. Osterwalder, R. Schrader, Comm. Math. Phys. 31 (1973) 83–112; 42 (1975) 281–305。書誌のみ
格子の反射正値性・転送行列	既知	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471。要旨で確認（格子ゲージ理論の Schwinger 関数の physical positivity・正の自己共役な転送行列）。M. Lüscher, “Construction of a selfadjoint, strictly positive transfer matrix for Euclidean lattice gauge theories”, Comm. Math. Phys. 54 (1977) 283–292。要旨で確認
Wick 回転	既知	G. C. Wick, Phys. Rev. 96 (1954) 1124–1134。要旨で確認（相対時間の純虚数値への解析接続・積分路の回転）。「Wick 回転」の名の帰属は慣習
曲線の上の観測量／二・三次元の現在地	既知	S. Chatterjee, arXiv:1803.01950 §1／I. Chevyrev, arXiv:2202.13359 §1.1。本文を確認

もの	種別	出典・道具
ウィルソンループの特異性	既知	B. K. Driver, Comm. Math. Phys. 123 (1989) 575–616。序論の該当の一文を確認
四次元・赤外切断つきの構成	既知	J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, Comm. Math. Phys. 155 (1993) 325–383。§I の OS 正値性の箇所を確認
変形ベッセル関数	既知	NIST DLMF 10.32.3（積分表示）を確認。べき級数は §10.25

次に読む章：1-01 ベクトル空間と線形写像。この章の続きは 2-04・4-02・4-10・4-11。