第一巻　準備

第 1 部 数学の準備

Kiichi, Shiori and Rin · 2026-11-14 の版 · https://computoergosum.com/principia/yang-mills/

> この PDF は Web 版の各章をそのまま刷ったものです。動かせる図は刷った時点の姿で止まっています。章の間のリンクは Web 版へ飛びます。最新の内容は Web 版に在ります。

章		頁
1-01	ベクトル空間と線形写像	2
1-02	群とは何か	13
1-03	リー群とリー環	24
1-04	SU(2) と SU(3)	36
1-05	多様体と接空間	47
1-06	微分形式と外微分	57
1-07	ベクトル束と接続	69
1-08	確率と測度	80
1-09	無限次元の確率	92
1-10	ヒルベルト空間と自己共役作用素	104
1-11	フーリエ解析と分布	114
1-12	寄り道：四次元でだけ起きること	125

ベクトル空間と線形写像 — 行列を「ベクトルを動かす規則」として読み、固有値・指数関数・エルミートとユニタリを揃える

> この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 行列を「ベクトルを動かす規則」として読むこと。固有値が「向きを変えない方向」の伸び率であること。エルミート行列（固有値が実数）とユニタリ行列（長さを保つ）が $U = e^{iH}$ で結ばれること。

前提となる章 — なし。行列の積と行列式、複素数、定数係数の常微分方程式を既知とします。

先に言うこと — 有限次元に限ります。質量ギャップは無限次元の作用素の問題で、有限次元の結論がそのまま延びるとは限りません（1-10）。定理はすべて既知の線形代数です。

この章の順序

1. なぜ線形代数から — 行列が出る三つの場所
2. ベクトル空間 — 成分が複素数の実ベクトル空間
3. 線形写像と行列 — 掛ける順序で結果が変わる
4. 固有値と固有ベクトル — 向きを変えない方向（図1）／寄り道：回転の固有ベクトル
5. 内積と随伴 — 複素数での長さ
6. エルミート行列 — 実の固有値と隙間（図2）／寄り道：準位は避け合う
7. ユニタリ行列 — 長さを保つ変換
8. 行列の指数関数 — 級数と微分方程式（図3）／寄り道：級数を足すと失敗する例
9. エルミートとユニタリを結ぶ — $U = e^{iH}$

01

なぜ線形代数から始めるか

ヤン–ミルズ理論では、数が入るはずの場所に行列が入ります。役は三つです。

変換	場	エネルギー
ゲージ変換 $g(x)$ はユニタリ行列 各点で長さを保つ行列を掛ける（§07）	ゲージ場 $A_\mu(x)$ の値は行列 μ は方向（時間・空間）の番号。掛ける順で値が変わる＝非可換（§03・§09）	ハミルトニアン H はエルミート 質量ギャップは最低の値と次の値の隙間に当たる（§06）。正確には、真空（最低の状態）を除いたスペクトルの下端（1-10・4-11）

ゲージ変換に使う行列の大きさを N（$N \times N$ 行列）とすると、電磁気学は $N = 1$ の場合で、ゲージ変換は絶対値 1 の数 $e^{i\alpha}$ を掛けるだけです（2-03）。数の積は順序に依らないので、物質の無いとき、ゲージ場自身の方程式（Maxwell 方程式）は線形のままです。$N \geq 2$ では順序が効き、物質が無くてもゲージ場どうしの積が方程式に現れます（3-02）。この章はその土台を有限次元で揃えます。

02

ベクトル空間

ベクトル空間とは、足し算とスカラー倍ができ、結合・交換・分配の法則など数と同じ規則が成り立つ集まりです。スカラーを $\mathbb{R}$ から取れば実ベクトル空間、$\mathbb{C}$ から取れば複素ベクトル空間です。どのベクトルも $v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$ とただ一通りに書けるとき $v_1, \ldots, v_n$ を**基底**、本数 n を**次元**と呼びます。例は $\mathbb{R}^n$、$\mathbb{C}^n$、$n \times n$ 行列全体（次元 n^2）、区間上の連続関数全体（無限次元、1-10）です。

この本で何度も戻る例は、トレース 0 の 2×2 エルミート行列の全体です。エルミートとは $H^\dagger = H$ となることで、$\dagger$ は転置して各成分の複素共役を取る操作です（§05・§06）。和も実数倍もエルミートですが、i 倍すると $(iH)^\dagger = -iH$ となって外れます。つまり**成分は複素数なのに実ベクトル空間**で、次元は 3 です。

$$\begin{pmatrix} x & y - iz \\ y + iz & -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad x, y, z \in \mathbb{R}$$

右辺の三つは 1-02 §05・1-04 で Pauli 行列 $\sigma_3, \sigma_1, \sigma_2$ として再登場し、$\mathrm{SU}(2)$ のゲージ場の値はこの空間（の i 倍）に入ります。

03

線形写像と行列

線形写像は和とスカラー倍を保つ写像です（$L(u+v)=Lu+Lv$、$L(cv)=c\,Lv$）。基底を決めると行列で書け、**j 列目が基底 e_j の行き先**です。合成は行列の積 $(AB)v=A(Bv)$ で、数と違い、順序を入れ替えると一般に変わります。

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}:\qquad AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

差 $[A,B]=AB-BA$ を**交換子**と呼びます。この例では $[A,B]=\mathrm{diag}(1,-1)$ で、§02 の基底の一つ目です。交換子がリー環の骨格になる話は 1-03 で扱います。

行列式 $\det A$ は面積（体積）の符号つきの倍率、**トレース** $\operatorname{tr}A$ は対角成分の和です。$\det(AB)=\det A\det B$、$\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$ から、どちらも基底の取り替え $A\mapsto P^{-1}AP$ で変わらず、写像そのものの性質です。例：回転 $R(\theta)=\left(\begin{smallmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{smallmatrix}\right)$ は $\det R=1$、$\operatorname{tr}R=2\cos\theta$。

04

固有値と固有ベクトル

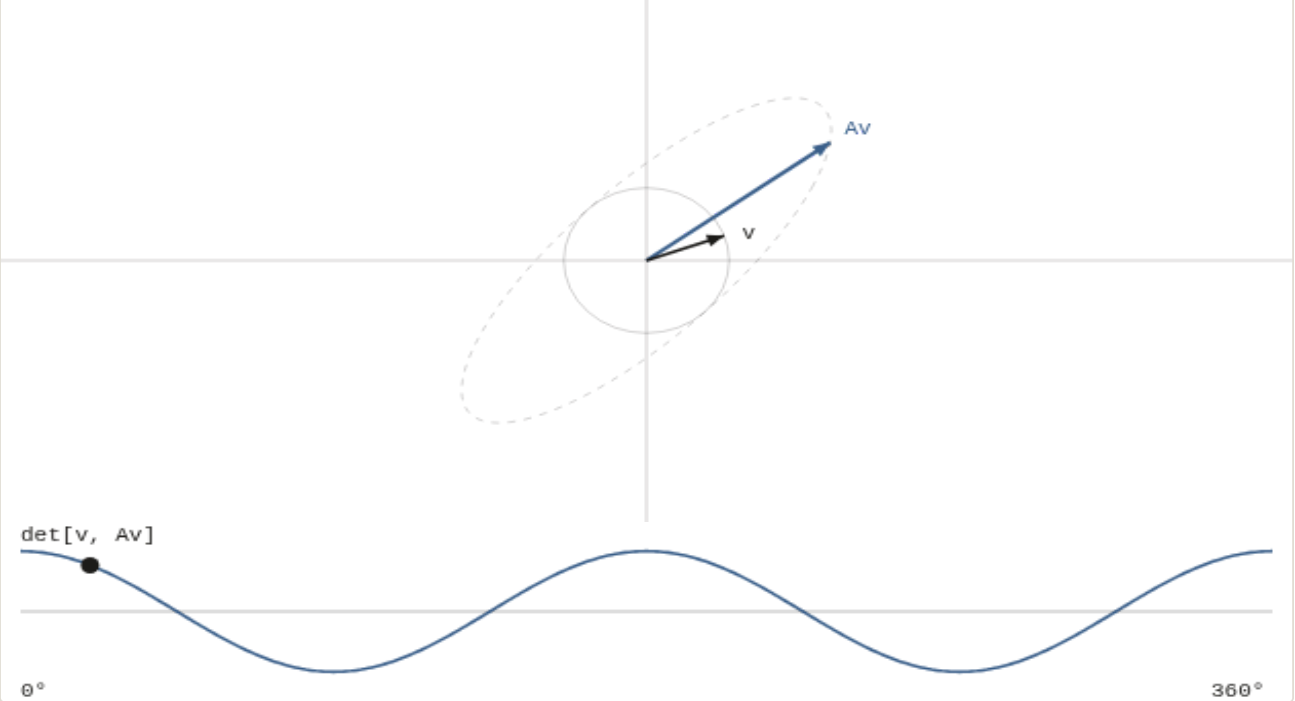
写像はたいていのベクトルの向きを変えますが、**向きを変えずに伸び縮みだけさせる方向**をもつことがあります。その方向のベクトルが固有ベクトル、伸び率が固有値です。

$$Av=\lambda v\ \ (v\neq 0)\qquad\Longleftrightarrow\qquad \det(A-\lambda I)=0$$

2×2 では $\lambda^2-(\operatorname{tr}A)\lambda+\det A=0$。実の 2×2 行列では、判別式 $D=(\operatorname{tr}A)^2-4\det A$ が正なら実の固有方向が二本、負なら無く（固有値は複素数の組）、0 なら重根です（重根のとき固有方向は一本だけか、スカラー行列 λI ならすべての方向）。n 本の独立な固有ベクトルを並べた P で、$P^{-1}AP$ は対角行列になります（対角化）。

v と Av が同じ直線に乗ることは、二つを並べた行列式 $\det[v,Av]$ が 0 になることと同じです。図1 で確かめられます。

図1　つまみで単位ベクトル v を回すと Av（青）が動く。同じ直線に乗る角度が固有方向で、下の曲線 $\det[v,Av]$ がそこで 0 になる。点線は単位円の像



計算 この図の数値はこの端末で計算しました（表は NumPy の固有値計算）。行列は行を「;」で区切っています。下の表の行を押すと、その行列が図に入ります。

行列	D	固有値	実の固有方向（x 軸から）
対称 (2 1 ; 1 2)	**4**	$3, 1$	**45°, 135°（直交）**
対称でない (1.5 1 ; 0.5 1)	2.25	$2, 0.5$	$26.565°, 135°$
ずれ (1 1 ; 0 1)	0	1（重根）	$0°$ の一本だけ
$60°$ 回転	−3	$0.5 \pm 0.866025\,i$	なし

対称行列では固有方向が直交します（理由は §06）。ずれは固有方向が一本しかなく、対角化できません。回転には実の固有方向が無く、$\det[v, Av]$ はどの向きでも $\sin 60° \approx 0.866$ です。

寄り道：回転に実の固有ベクトルが無いこと

飛ばしてよい小節です。

$R(\theta)$ の固有値は $e^{\pm i\theta}$、固有ベクトルは $(1, \mp i)$ です。比喩で言えば、平面の回転は複素数の世界では二つの「位相の掛け算」に分かれます。正確には、$\mathbb{C}^2$ の基底を $(1, -i)$、$(1, i)$ に取り替えると $R(\theta) = \mathrm{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta})$ です。複素数では固有方程式が必ず根をもつ（代数学の基本定理）ので、どの正方行列にも固有値があります。四次元の回転の二つの角（四次元の記事）は、固有値 $e^{\pm i\alpha}$、$e^{\pm i\beta}$ の二組です。

05

内積と随伴

長さと角度を測るのが内積です。複素数の成分でそのまま $\sum_k u_k v_k$ とすると、$v=(1,i)$ の「長さの二乗」が $1+i^2=0$ になってしまいます。そこで片方に複素共役を付けます（$\overline{z}\,z=|z|^2\geq 0$）。

$$\langle u,v\rangle=\sum_k \overline{u_k}\,v_k,\qquad \|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle},\qquad \langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$$

この本は物理の流儀で、第 2 引数について線形とします（$\langle cu,v\rangle=\overline{c}\langle u,v\rangle$）。数学の教科書には逆の流儀も多く（例：Axler の定義 6.2）、結論は変わりません。$\langle u,v\rangle=0$ なら直交、互いに直交する長さ 1 のベクトルの基底が正規直交基底です。

A の**随伴** $A^\dagger$ は、転置して成分の複素共役を取った行列です（数学では A^*）。内積の中で A を反対側へ移します。

$$(A^\dagger)_{ij}=\overline{A_{ji}},\qquad \langle u,Av\rangle=\langle A^\dagger u,v\rangle,\qquad (AB)^\dagger=B^\dagger A^\dagger$$

06

エルミート行列

$H^\dagger=H$ の行列が**エルミート行列**で、実の成分なら対称行列です。量子力学では測定値（エネルギーなど）がエルミートな作用素で表されます（2-05）。鍵は二つの性質です。

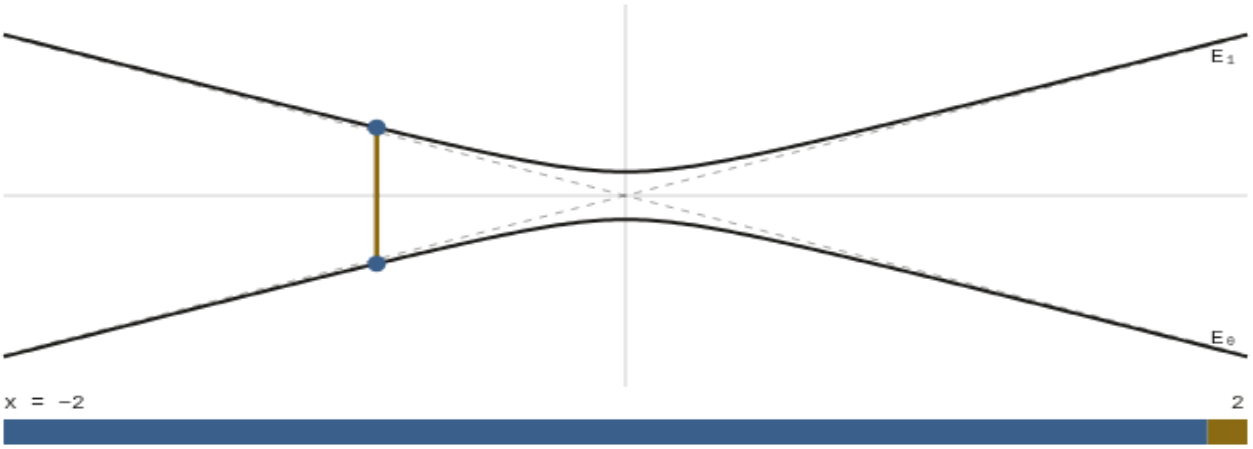
固有値は実数：$Hv=\lambda v$、$\|v\|=1$ なら $\lambda=\langle v,Hv\rangle=\langle Hv,v\rangle=\overline{\lambda}$。**異なる固有値の固有ベクトルは直交：**$Hu=\mu u$ なら $\lambda\langle u,v\rangle=\langle u,Hv\rangle=\langle Hu,v\rangle=\overline{\mu}\langle u,v\rangle=\mu\langle u,v\rangle$（$\mu$ は実数）で、$\mu\neq\lambda$ だから $\langle u,v\rangle=0$。

押し進めたのが**スペクトル定理**です 既知 。エルミート行列には固有ベクトルからなる正規直交基底があり、固有値 $\lambda_1\leq\cdots\leq\lambda_n$ は実数です。基底を並べたユニタリ行列 U（§07）で $U^\dagger HU$ は実対角になります。

最小の固有値と次の固有値の差を**隙間**（ギャップ）と呼びます。量子力学では最小の固有値 E_0 が基底状態のエネルギー、E_1-E_0 が最初の励起に要るエネルギーです。有限次元では隙間はいつも計算できます。問題は無限次元で、極限のあとも隙間が正のまま残るかどうかです（1-10・4-11）。

例：§02 の行列は $\operatorname{tr}H=0$、$\det H=-(x^2+y^2+z^2)$ なので固有値は $\pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}$、隙間が 0 になるのは $x=y=z=0$ だけです。図2 は $y=c$、$z=0$ の場合です。

図2　$H(x)=\left(\begin{smallmatrix} x & c \\ c & -x \end{smallmatrix}\right)$ の二つの固有値。非対角成分 c を上げると交差が開いて隙間が残り、x を動かすと下の固有ベクトルの中身（帯、青が e_1 の重み）が入れ替わる



計算　曲線はその場で $\pm\sqrt{x^2+c^2}$ から描き、表は NumPy のエルミート用固有値計算の値です（両者は表示の桁で一致）。x を $-x$ にすると重みが入れ替わります。表の行を押すと、その x と $c=0.3$ が図に入ります。

x（$c=0.3$）	$E_0=-E_1$	隙間	下の固有ベクトル $e_1:e_2$
0.0	−0.300000	0.600000	0.5000 : 0.5000
0.2	−0.360555	0.721110	0.2226 : 0.7774
0.5	−0.583095	1.166190	0.0713 : 0.9287
1.0	−1.044031	2.088061	0.0211 : 0.9789

$c=0$ では直線 $\pm x$ が交わります。$c\neq 0$ なら曲線は近づくだけで、最小の隙間 $2c$ が残り、そこを過ぎると下の固有ベクトルの中身が入れ替わります。

寄り道：準位は避け合う

飛ばしてよい小節です。

2×2 で固有値が重なるには、エルミートなら $x=y=z=0$ の三条件、実対称なら二条件が要ります。一つのパラメータで動く族がそこを通るのは特別な場合だけなので、対称性の無い一般の族では、固有値の曲線はふつう交わりません 既知 。対称性があって行列が区画に分かれるときは、違う区画どうしの準位は交わりえます。一般の $n\times n$ での数え上げは von Neumann と Wigner（1929）に遡るとされます。比喩では準位が「反発する」と言います。正確には、力が働くのではなく、重なる行列が条件の数だけ次元の低い薄い集合をなす、ということです。

07

ユニタリ行列

内積を保つ行列が**ユニタリ行列**です。長さと角度を変えない変換で、実の成分なら直交行列（回転と鏡映）です。

$$U^{\dagger}U = I \qquad \Longleftrightarrow \qquad \langle Uu, Uv\rangle = \langle u, v\rangle \quad \text{（すべての } u, v\text{）}$$

左から右は $\langle Uu, Uv\rangle = \langle u, U^{\dagger}Uv\rangle$ から出ます。列が正規直交基底をなすことと同じで、$U^{-1} = U^{\dagger}$。固有値は $|\lambda| = 1$、$|\det U| = 1$ です。積と逆行列もユニタリなので、全体 $\mathrm{U}(n)$ と、$\det U = 1$ の部分 $\mathrm{SU}(n)$ は「群」になります（1-02）。

例：$\mathrm{U}(1) = \{e^{i\alpha}\}$ は単位円です。$|a|^2 + |b|^2 = 1$ の複素数で作った $\left(\begin{smallmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{smallmatrix}\right)$ は $\mathrm{SU}(2)$ の元です（すべてがこの形であることは 1-02 §05）。

ユニタリ行列も対角化できます。根拠は複素のスペクトル定理です [既知]。$AA^{\dagger} = A^{\dagger}A$ を満たす行列（**正規行列**）は、ユニタリ行列で対角化できます。ユニタリ行列は $U^{\dagger}U = UU^{\dagger} = I$ なのでこれに当たり（エルミート行列も当たります）、$U = V\,\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})V^{\dagger}$（$V$ はユニタリ、θ_k は実数）と書けます。

ゲージ理論でユニタリ行列が出るのは、物質の場が $\mathbb{C}^N$ に値をとり、長さの二乗 $\psi^{\dagger}\psi$ が作用に現れるからです。ゲージ変換はそれを保つように選ばれます（3-01）。格子の上では、ゲージ場そのものが各辺のユニタリ行列です（5-01）。

08

行列の指数関数

指数関数の級数は掛け算と足し算しか使わないので、行列にもそのまま使えます。

$$e^{X} = I + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots = \sum_{k \ge 0} \frac{X^k}{k!}$$

収束。作用素ノルム $\|X\| = \max_{\|v\|=1}\|Xv\|$（長さ 1 のベクトルを最大何倍にするか）は $\|XY\| \le \|X\|\|Y\|$ を満たすので、各項は $\|X\|^k/k!$ 以下、和は $e^{\|X\|}$ 以下です。$k = N$ までの部分和 $S_N(X)$ の誤差は次のとおりです。

$$\left\| e^{X} - S_N(X) \right\| \le \frac{\|X\|^{N+1}}{(N+1)!}\, e^{\|X\|}$$

性質。(a) $\frac{d}{dt}e^{tX} = Xe^{tX}$。よって $x(t) = e^{tX}x_0$ は $x' = Xx$、$x(0) = x_0$ の解です。(b) $e^{(s+t)X} = e^{sX}e^{tX}$、特に $(e^{X})^{-1} = e^{-X}$。(c) $Pe^{X}P^{-1} = e^{PXP^{-1}}$。(d) $\det e^{X} = e^{\mathrm{tr}\,X}$。対角化できれば (c)

から $\prod_k e^{\lambda_k} = e^{\sum_k \lambda_k}$、一般には上三角化で示せます 既知 。どの複素正方行列 X も、ユニタリ行列 V で $V^{\dagger} X V$ を上三角にでき（Schur の定理）、上三角行列の指数関数は対角成分が e^{λ_k} の上三角行列です。

注意。 $XY = YX$ なら $e^{X+Y} = e^X e^Y$ ですが、一般には違います。§03 の A, B は $A^2 = B^2 = 0$ なので $e^A = I + A$、$e^B = I + B$ で、

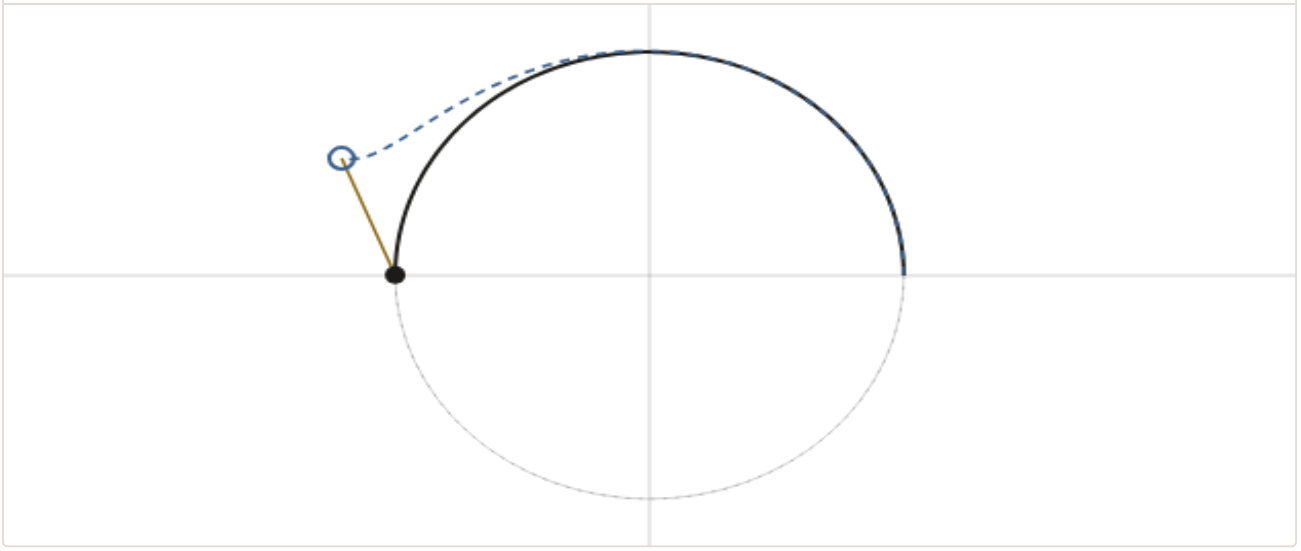
$$e^A e^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad e^B e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$e^{A+B} = \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.5431 & 1.1752 \\ 1.1752 & 1.5431 \end{pmatrix}.$$

計算 三つとも違います。差を交換子で書く公式は 1-03 の主題です。(d) は乱数の 4×4 複素行列 1000 個で相対誤差 5.7×10^{-14} 以内でした。

例：$J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ は $J^2 = -I$ なので、偶数次と奇数次に分けて $e^{tJ} = \cos t\, I + \sin t\, J = R(t)$、つまり回転です。一般に $X^2 = -\omega^2 I$ なら $e^{tX} = \cos(\omega t)\, I + \frac{\sin(\omega t)}{\omega} X$ です。

図3　$X = \left(\begin{smallmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{smallmatrix}\right)$、$x_0 = (1, 0)$。実線が $e^{tX}x_0$、青の破線が部分和 $S_N(tX)x_0$。N を増やすと破線が実線に重なり、t を延ばすと要る N が増える。$a \neq 0$ で円が渦巻きになる（点線の半径 e^{at}）



計算 図の部分和はその場で級数を足しています。表は倍精度の部分和と回転行列 e^{tJ}（$a = 0$）との差を作用素ノルムで測った値です。表の数値のセルを押すと、その N と t（$a = 0$）が図に入ります。

N	$t = 1$	$t = \pi$	$t = 2\pi$	$t = 4\pi$
4	8.3×10⁻³	2.3	57	1.0×10³
8	2.7×10⁻⁶	7.9×10⁻²	36	1.3×10⁴
16	2.8×10⁻¹⁵	7.8×10⁻⁷	9.9×10⁻²	1.1×10⁴
30	1.1×10⁻¹⁶	2.5×10⁻¹⁶	6.6×10⁻¹⁰	1.4

N	$t=1$	$t=\pi$	$t=2\pi$	$t=4\pi$
誤差 $<10^{-6}$ の最小の N	9	16	26	43

t が大きいと項 $t^k/k!$ がいったん膨らむので、要る N は t とともに増えます。$t=\pi$、$N=16$ では、上の誤差の上界 1.8×10^{-5} に対し実際の誤差は 7.8×10^{-7} です。

寄り道：級数をそのまま足すと失敗する例

飛ばしてよい小節です。

定義として正しい式が、計算法として良いとは限りません。Moler と Van Loan の総説（1978 年。2003 年に再録と追補）の例 既知 は $A=\left(\begin{smallmatrix}-49 & 24\\ -64 & 31\end{smallmatrix}\right)$（固有値 −1 と −17）です。$e^A$ の成分は 1 程度なのに、級数の途中の項は約 9.3×10^6 まで膨らんで打ち消し合います。この端末で値が変わらなくなるまで足すと 計算 、単精度（約 7 桁）では 61 項で右下の成分が 1.1036 のはずが −0.8392 になり、倍精度では 74 項で誤差 5.7×10^{-9} でした。論文は、問題は級数の打ち切りではなく算術の打ち切りにある、と述べています。実用のプログラム（SciPy の `expm` など）は、行列を 2 の冪で割ってから近似し、二乗を繰り返して戻す scaling and squaring を使います。

09

エルミートとユニタリを結ぶ

エルミート行列とユニタリ行列は指数関数でつながります。比喩で言えば、エルミート行列は「回し方」、ユニタリ行列は「回した結果」です。正確には次のとおりです。

$$H^\dagger=H \implies U=e^{iH} \text{ はユニタリ}, \qquad \det e^{iH}=e^{i\operatorname{tr}H}$$

項ごとに随伴を取ると $(e^{iH})^\dagger=e^{-iH}$。iH と $-iH$ は交換するので §08 (b) から $U^\dagger U=e^0=I$、行列式は (d) から出ます。$\operatorname{tr}H=0$ なら $\det U=1$ で $U\in\mathrm{SU}(n)$ です。逆に、どのユニタリ行列も §07 の対角化から $H=V\,\mathrm{diag}(\theta_k)V^\dagger$ と置いて e^{iH} と書けます 既知 （θ_k は 2π の整数倍だけ選べるので、H は一つに決まりません）。

例：$H=\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ は $H^2=I$ なので $e^{i\theta H}=\cos\theta\,I+i\sin\theta\,H$、行列式は $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$。 計算 乱数の 3×3 エルミート行列 1000 個で $\|U^\dagger U-I\|\le1.6\times10^{-15}$、トレース 0 なら $|\det U-1|\le1.1\times10^{-15}$ でした。

この対応は二か所で使われます。量子力学の時間発展 $e^{-itH/\hbar}$ はユニタリで、確率の合計を保ちます（2-05）。ゲージ理論では、§02 の空間を $N\times N$ に広げたもの（トレース 0 の $N\times N$ エルミート行列、の i 倍）を指数関数で送った先が $\mathrm{SU}(N)$ で、前者がゲージ場の値、後者がゲ

ージ変換の空間です（1-03・1-04）。実の成分に限れば、「反対称行列 K の e^K は回転」という形になります。

ゲージ場の値に「i 倍」を付けるのは幾何の書き方（1-07）です。物理の書き方はゲージ場をエルミートな行列のまま書き、二つは $A_{\text{幾何}} = -iA_{\text{物理}}$ で移り合います（結合定数を分けて書く章での形は 3-02 の表）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 有限次元のエルミート行列は実の固有値と、固有ベクトルからなる正規直交基底をもつ。ユニタリ行列も同様に対角化でき、固有値は絶対値 1。	無限次元で同じことが言えるか。固有ベクトルをもたない作用素もある（1-10）。
既知 e^X はいつも収束し、$\det e^X = e^{\operatorname{tr} X}$。$H$ がエルミートなら e^{iH} はユニタリで、どのユニタリ行列もこの形。	e^{X+Y} と $e^X e^Y$ の差を交換子で表す公式（1-03）。
計算 図と表の数値、乱数行列での恒等式の確認。	乱数での確認は証明ではない。
既知 有限次元では、最小固有値と次の固有値の隙間はいつも計算できる。	無限次元の作用素で、極限のあとも隙間が正のまま残るか。質量ギャップの問題はこの形をしており（4-11）、この章はそれについて何も言わない。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
内積の流儀、スペクトル定理（実・複素、正規行列）、上三角化（Schur の定理）	既知	S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, 4th ed., Springer (Undergraduate Texts in Mathematics), 2024。定義 6.2、7.29、7.31、6.38。オープンアクセス版で本文を確認。
級数による計算の失敗例、scaling and squaring	既知	C. Moler, C. Van Loan, SIAM Review 45 (2003) 3–49（Method 1・3、本文を確認）。初出 SIAM Review 20 (1978) 801–836（書誌のみ）。SciPy の `expm` の方式は SciPy 1.11 の説明文による（A. H. Al-Mohy, N. J. Higham, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 31 (2009) 970–989、書誌のみ）。
固有値の交差に要る条件の数	既知	J. von Neumann, E. Wigner, Physikalische Zeitschrift 30 (1929) 467–470（書誌のみ）。
図1・図2 の表	計算	この端末の Python 3・NumPy 1.26 の `eig`・`eigh`。トレース 0 の 2×2 エルミート行列 1000 個で式 $\pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ との差 2.2×10^{-15} 以内。
図3 の表、§08 の寄り道の再計算、§08・§09 の恒等式	計算	部分和を倍精度・単精度で計算（半精度は途中の項が上限を超えて計算不能）。厳密値は回転行列と $P\,\mathrm{diag}(e^{-1}, e^{-17})P^{-1}$（$P = \left(\begin{smallmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{smallmatrix}\right)$）。SciPy 1.11 の `expm` と乱数行列（シード固定、各 1000 個）。

次に読む章：1-02 群とは何か ― ユニタリ行列の集まりが「群」をなすことから始め、SO(3) と SU(2) の関係へ進みます。

群とは何か — 対称性を「掛け算できるもの」として扱う

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 群の約束と例。三次元の回転の群 SO(3) と、それを二重に覆う SU(2)（360° では戻らず 720° で戻る）。群を行列で書く「表現」。問題文の「コンパクト単純ゲージ群」の読み方。

前提となる章 — 1-01 ベクトル空間と線形写像（行列式・ユニタリ行列・行列の指数関数）。リー環は 1-03、パウリ行列と SU(3) は 1-04 で扱います。

先に言うこと — この章は準備で、質量ギャップについては何も示しません。証明を載せずに引く定理には「既知」の札を付けます。

この章の順序

1. 対称性から群へ — 正三角形の六つの操作と積の表（選べる図）
2. 群の定義と例 — 可換と非可換・行列の群・コンパクト
3. 準同型・正規部分群・商 — 群を比べる道具・中心
4. 回転群 SO(3) — 軸・回す順番の食い違い（動く図）
5. SU(2) — 三次元の球面・半分の角
6. 二重被覆 SU(2) → SO(3) — 720° で戻る（動く図）
7. 寄り道：SO(3) の形と 720° の輪 — 縮む輪と縮まない輪（動く図）
8. 表現の入口 — 整数の番号・既約・スピン
9. ヤン–ミルズの中の群 — ゲージ群・コンパクト・単純

01

対称性から群へ

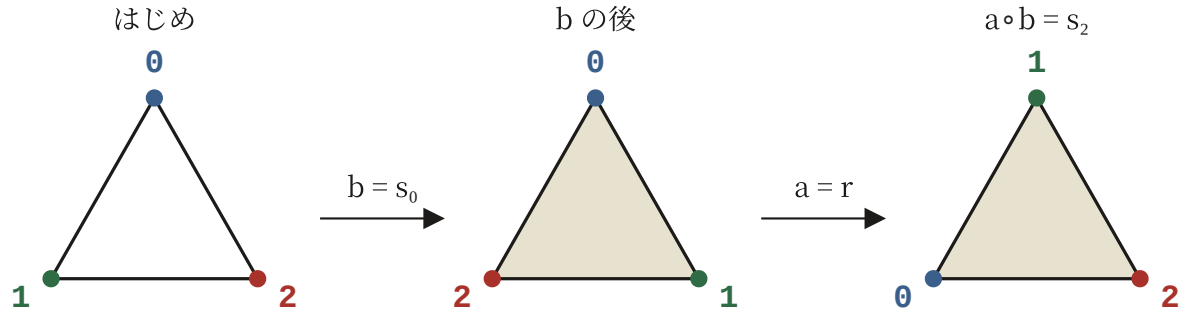
正三角形の板を**元の場所にぴったり重なるように**置き直す方法は六通りです。0°・120°・240° 回す三つと、頂点を通る軸で裏返す三つ。**二つを続けて行うと、また六つのどれかになり**、何もしない操作と、元に戻す操作があります。群とは、この性質だけを取り出した言葉です。

頂点に 0・1・2 を反時計回りに振り、e（何もしない）、r（120° 回す）、r^2（240°）、s_k（頂点 k を通る軸で裏返す）と書きます。積 ab は「**先に b、次に a**」と読みます（写像の合成 $a \circ b$ の向き）。

$$r \circ s_0 = s_2, \qquad s_0 \circ r = s_1$$

順番を入れ替えると結果が変わります。**掛け算の順番が効く**ことが、この本の最後まで主役です。

図 1　表のます目（行 a・列 b）を選ぶと、三角形が「はじめ → b の後 → a∘b の後」と並びます。色の付いた三角形は裏返った状態です。



r∘s₀ = s₂（先に s₀、次に r）。逆の順では s₀∘r = s₁（違う）

a＼b	e	r	r²	s₀	s₁	s₂
e	e	r	r^2	s_0	s_1	s_2
r	r	r^2	e	**s_2**	s_0	s_1
r²	r^2	e	r	s_1	s_2	s_0
s₀	s_0	s_1	s_2	e	r	r^2
s₁	s_1	s_2	s_0	r^2	e	r
s₂	s_2	s_0	s_1	r	r^2	e

計算 表の値は、頂点の置換の合成としてこの端末で計算しました。群の約束も全組で確かめてあります。

各行・各列に六つの元が一度ずつ現れるのは、$ax = b$ の解 $x = a^{-1}b$ がただ一つある、つまり**割り算ができる**ことの表れです。36 通りの順序対のうち $ab \neq ba$ は 18 通りでした 計算 。

02

群の定義と例

定義　集合 G と、二つの元から G の元を一つ作る規則（積）$(a,b)\mapsto ab$ があって、次を満たすとき G を**群**と呼びます。

1. 結合法則：$(ab)c=a(bc)$。
2. 単位元：すべての a で $ea=ae=a$ となる e がある。
3. 逆元：各 a に $aa^{-1}=a^{-1}a=e$ となる a^{-1} がある。

すべての組で $ab=ba$ なら**可換**（アーベル群）、そうでなければ**非可換**です。「非可換ゲージ理論」の非可換はこの意味です。下の表の後半は**行列の群**で、$U^\dagger$ は複素共役をとった転置です（1-01）。

群	元（積）	可換か	コンパクトか	実パラメータ
$\mathbb{Z}_N$	N で割った余り（足し算）	可換	有限	0
D_3	正三角形の六つの操作	非可換	有限	0
$\mathbb{R}$	実数（足し算）	可換	いいえ	1
$\mathrm{U}(1)$	$e^{i\theta}$（掛け算）	可換	はい	1
$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$	逆行列をもつ実行列	非可換	いいえ	n^2
$\mathrm{O}(n)$	$R^{\mathsf{T}}R=I$ の実行列	非可換	はい	$n(n-1)/2$
$\mathrm{SO}(n)$	$\mathrm{O}(n)$ のうち $\det R=1$	$n\geq 3$ で非可換	はい	$n(n-1)/2$
$\mathrm{U}(n)$	$U^\dagger U=I$ の複素行列	非可換	はい	n^2
$\mathrm{SU}(n)$	$\mathrm{U}(n)$ のうち $\det U=1$	非可換	はい	n^2-1

行列の群は $n\geq 2$。SO(2) は U(1) と同じ形の可換群です。

コンパクトとは、行列の群では、成分の空間の中で**有界**かつ**閉じている**（元の列の極限もまた元）ことです 既知 。U(n) は各列が長さ 1 なので有界で、$U^\dagger U=I$ は極限でも保たれます。GL(n, ℝ) は有界ではありません。「実パラメータ」は元を指定する実数の個数（群の次元、1-03）で、SO(3) なら軸の向きに 2 個と角に 1 個です。

03

準同型・正規部分群・商

部分群は積と逆元で閉じた部分集合です（$\{e,r,r^2\}\subset D_3$、SU(n) ⊂ U(n) など）。**準同型**は $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$ を満たす写像 $\varphi: G\to H$ で、単位元に写る元の集まりを**核** $\ker\varphi$ と呼びます。

$$\det : \mathrm{U}(n) \to \mathrm{U}(1), \qquad \det(UV) = \det U \, \det V$$

この準同型の核が $\mathrm{SU}(n)$ です。$\theta \mapsto e^{i\theta}$ の核は $2\pi\mathbb{Z}$。D_3 の回転を $+1$、裏返しを -1 に送る写像も準同型です。部分群 N が**正規**とは、すべての g で $gNg^{-1} = N$ となることで、核は必ず正規です。このとき g と gn（$n \in N$）を同一視した**商群** G/N が作れ、全射な準同型 φ について次が成り立ちます（準同型定理）既知 。

$$G/\ker\varphi \;\cong\; H$$

例：$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong \mathrm{U}(1)$（角とは 2π の整数倍の違いを忘れた実数）。**中心** $Z(G)$（すべての元と可換な元）も正規部分群で、SU(n) の中心は ωI（$\omega^n = 1$）の n 個、$\mathbb{Z}_n$ と同じ形です 既知 。閉じ込めを扱う 17-02 で再び現れます。

04

回転群 SO(3)

三次元の回転は、内積を保ち（$R^{\mathsf{T}}R = I$）、鏡像を作らない（$\det R = 1$）線形写像です。

$$\mathrm{SO}(3) = \{\, R \in M_3(\mathbb{R}) : R^{\mathsf{T}}R = I,\ \det R = 1 \,\}$$

どの回転にも軸がある

SO(3) のどの元にも動かない直線がある（Euler の回転定理）既知 。実の直交行列は複素行列としてユニタリなので（1-01）、固有値は絶対値 1 で、積は $\det R = 1$。実係数の三次式の根なので、複素固有値は $\lambda, \bar{\lambda}$ の組（積 $|\lambda|^2 = 1$）で、残る実固有値は 1。全部実なら ± 1 が三つで積 1 なので、やはり 1 を含みます。その固有ベクトルが軸です。奇数次元が効いており、四次元の回転には原点のほかに動かない点を持たないものがあります。軸 n と角 θ では次の形です（Rodrigues の式）既知 。

$$R(\theta, n)\, x = \cos\theta\, x + \sin\theta\, (n \times x) + (1 - \cos\theta)(n \cdot x)\, n$$

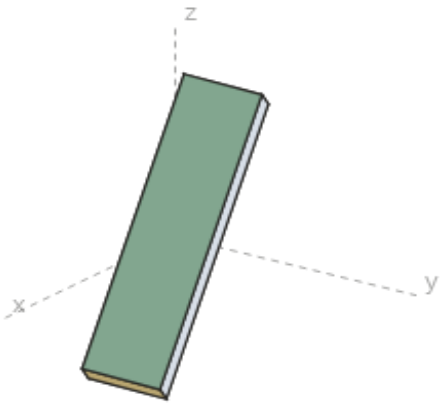
トレースは $\operatorname{tr} R(\theta, n) = 1 + 2\cos\theta$ で、角が読めます。

回す順番の食い違い

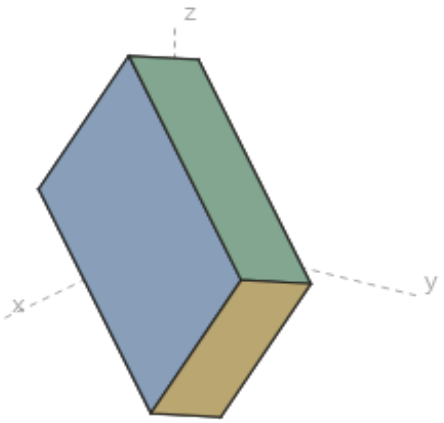
x 軸と y 軸のまわりに同じ角 θ 回します。「先に x」は $A = R_y(\theta)R_x(\theta)$、「先に y」は $B = R_x(\theta)R_y(\theta)$。食い違い $D = AB^{-1}$ も回転なので、その角 φ で違いを測ります。

図 2　つまみで角 θ を変えると、二つの箱の最後の向きの違いが変わります。「順に回す」で二回の回転を順に再生します。

先に x 軸、次に y 軸



先に y 軸、次に x 軸



θ = 60°　φ = 57.91°　φ/θ² = 0.9217

θ	φ	φ / θ²（ラジアンで）
1°	0.0175°	1.0000
10°	1.7409°	0.9975
30°	15.3639°	0.9781
45°	33.6842°	0.9531
60°	57.9100°	0.9217
90°	120.0000°	0.8488
180°	0°	0

計算 表はこの端末で回転行列の積から計算しました。図の φ も同じ式でその場で計算しています。

小さい θ では $\varphi \approx \theta^2$ で、D の軸はほぼ −z 方向です（θ = 10° で (−0.087, 0.087, −0.992)）計算 。**食い違いは θ の二次**で、一次の近似では回転は可換に見えます。これを取り出したものが 1-03 の交換子 $[X, Y] = XY - YX$ です。θ = 180° では二つとも対角行列で、可換です。

05

SU(2)

次は複素 2×2 行列の群です。

$$\mathrm{SU}(2) = \{\, U \in M_2(\mathbb{C}) : U^\dagger U = I,\ \det U = 1 \,\}$$

二つの列は正規直交です。第 1 列を (a, b) とすると $|a|^2 + |b|^2 = 1$、第 2 列はそれに直交する長さ 1 のベクトル $e^{i\chi}(-\bar{b}, \bar{a})$ で、$\det U = e^{i\chi} = 1$ です。

$$U = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}, \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

a, b の実部・虚部は $\mathbb{R}^4$ の単位球面上の点をなし、**SU(2) は空間としては三次元の球面 S^3** です 既知 。**パウリ行列**（1-04）を使うと、すべての元が単位ベクトル n と実数 θ で書けます。

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$n\cdot\sigma=n_1\sigma_1+n_2\sigma_2+n_3\sigma_3$ と書くと、次の形です。

$$U(\theta,n)=\cos\tfrac{\theta}{2}\,I-i\sin\tfrac{\theta}{2}\,n\cdot\sigma=\exp\Big(-\tfrac{i\theta}{2}\,n\cdot\sigma\Big)$$

成分では $a=\cos\frac{\theta}{2}-in_3\sin\frac{\theta}{2}$、$b=(n_2-in_1)\sin\frac{\theta}{2}$。右の等号は、$(n\cdot\sigma)^2=I$（$\sigma_j\sigma_k+\sigma_k\sigma_j=2\delta_{jk}I$ と $|n|=1$ から。確かめ方は 1-04）と行列の指数関数（1-01）から従います。θ = 2π では n によらず $U=-I$、θ = 4π でようやく $U=I$。この**半分の角**が次の節の主役です。

06

二重被覆 SU(2) → SO(3)

$\mathbb{R}^3$ のベクトルを、トレースが 0 のエルミート行列と同一視します。

$$x\ \longleftrightarrow\ X=x\cdot\sigma=\begin{pmatrix}x_3&x_1-ix_2\\x_1+ix_2&-x_3\end{pmatrix},\qquad \det X=-|x|^2$$

$UXU^\dagger$ もエルミートでトレース 0 なので、あるベクトル x' の行列です。こうして線形写像 $\rho(U):x\mapsto x'$ が決まります 既知 。

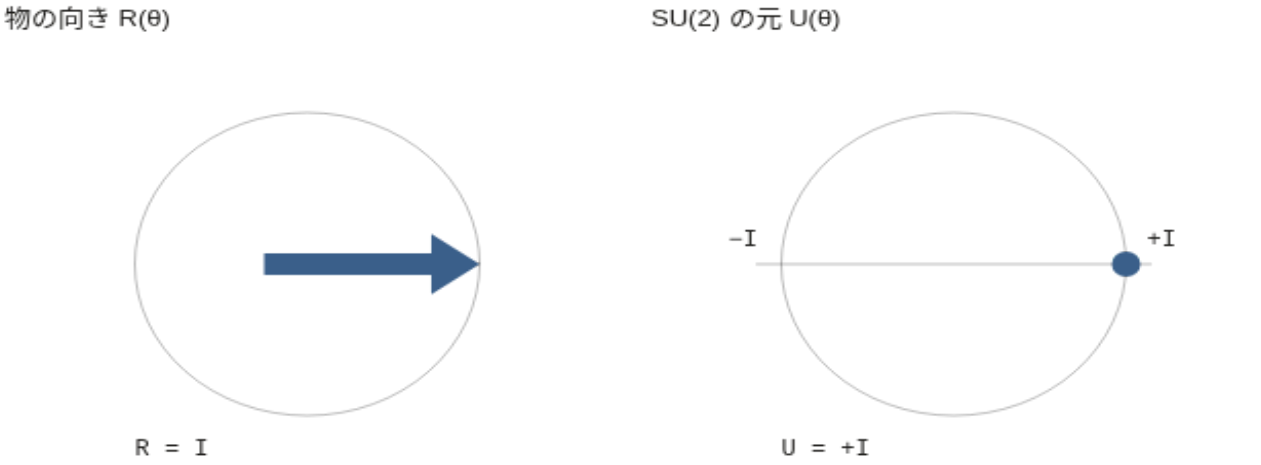
1. **長さを保つ**：$\det(UXU^\dagger)=\det X$ から $|x'|=|x|$。SU(2) はつながっていて ρ は連続なので、行列式は +1 から動けず $\rho(U)\in\mathrm{SO}(3)$。
2. **準同型**：$(UV)X(UV)^\dagger=U(VXV^\dagger)U^\dagger$ から $\rho(UV)=\rho(U)\rho(V)$。
3. **核は $\pm\mathbf{I}$**：$\rho(U)=I$ なら U は σ_3 と可換（対角）で σ_1 とも可換（対角成分が等しい）なので $U=\lambda I$、$\det U=\lambda^2=1$。
4. **全射で、角は半分**：$\rho(U(\theta,n))=R(\theta,n)$。どの回転も $R(\theta,n)$ の形（04 の軸の定理）なので、$U(\theta,n)$ がその原像になり、全射です。

4 の簡単な場合：n が z 軸なら $U=\mathrm{diag}(e^{-i\theta/2},e^{i\theta/2})$ で $U\sigma_1U^\dagger=\cos\theta\,\sigma_1+\sin\theta\,\sigma_2$。**二つの半分の角が掛け合わさって角 θ になります**。準同型定理から

$$\mathrm{SO}(3)\ \cong\ \mathrm{SU}(2)/\{\pm I\}$$

一つの回転に二つの元 $\pm U$ が対応するので**二重被覆**と呼びます。360° の回転は SU(2) では I から $-I$ までで、戻るには 720° 要ります。

図 3　つまみで回した角 θ を変えると、左の物（上から見た矢印）は 360° で元に戻り、右の点は半分の速さで円を回って 720° で戻ります。右の点は $U(\theta) = \cos\frac{\theta}{2} I - i \sin\frac{\theta}{2} \sigma_3$ の二つの係数 $(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2})$ で、S^3 の中の大円の一つです。



θ = 0° tr R = 3.000 tr U = 2.000

θ	$\mathrm{tr}\, R(\theta) = 1 + 2\cos\theta$	$\mathrm{tr}\, U(\theta) = 2\cos\frac{\theta}{2}$	R	U
0°	3	2	I	$+I$
180°	−1	0	z 軸まわり 180°	$-i\sigma_3$
360°	3	−2	I	$-I$
540°	−1	0	z 軸まわり 180°	$+i\sigma_3$
720°	3	2	I	$+I$

計算　この端末で ρ(U) を組んで計算しました。無作為な U 20,000 個で直交性（ずれ最大 1.2×10⁻¹⁵）・準同型・ρ(−U) = ρ(U) を、(θ, n) 2,000 組で Rodrigues の式との一致（ずれ最大 1.0×10⁻¹⁵）を確認しました。

07

寄り道：SO(3) の形と 720° の輪

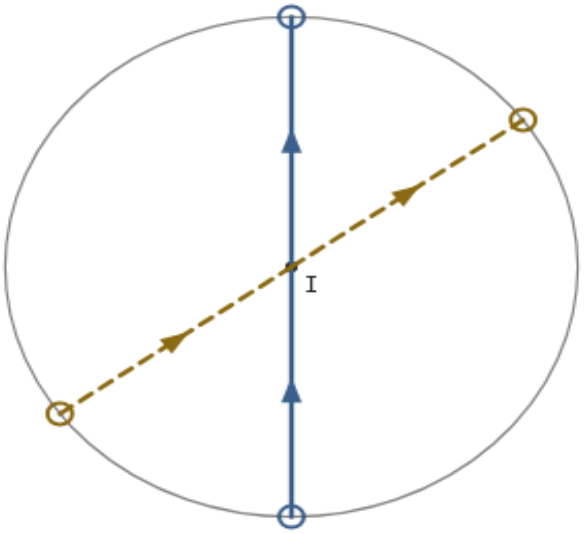
飛ばしてよい節です。後の章の前提になりません。二重被覆を「形」として見る話です。

軸 n のまわりの角 θ（$0 \le \theta \le \pi$）の回転を、半径 π の球の点 θn で表します。n と −n のまわりの π 回転は同じなので、SO(3) は**半径 π の球で表面の対蹠点を貼り合わせたもの**です 既知 。

z 軸のまわりの 0°→360° の道は、中心から北極へ進み、同じ点である南極から現れて中心に戻る輪で、**一点に縮められません** 既知 。SU(2) に持ち上げると I から $-I$ への道です。輪を連続に変形すると持ち上げの終点も連続に動きますが、終点は $\pm I$ の二点から跳べません。一点の輪の持ち上げは I で終わるので、そこへは変形できないのです。720° の輪は持ち上げても I で終わり、実際に縮みます。

図 4　つまみの前半で 2 周目の回転軸を傾け、後半で「行って戻る」道を縮めます。「360° の輪」に切り替えると、軸をどう傾けても縁を 1 回横切ったままです（一般の変形でも横切る回数の偶奇は変わりません）。

1 周目（実線）と 2 周目（破線）。2 周目の軸を傾けている



縁を横切る回数 2　SU(2) での終点 +I

輪	縁を横切る回数	SU(2) での終点	一点に縮むか
360°	1（奇数）	$-I$	縮まない
720°	2、変形の後半で 0（偶数）	$+I$	縮む

既知 円板は球の断面で、縁の向かい合う二点は同じ回転です。道の座標だけを描く模式図で、横切る回数の偶奇（道が縁に接しない場合）が輪の分類に当たります。

SO(3) の輪は「縮む」「縮まない」の二種類で（基本群が $\mathbb{Z}_2$）、S^3 ではどの輪も縮みます 既知 。皿を手に載せて水平のまま一回転させると腕がねじれ、もう一回転で解ける「皿の手品」は、この事実の目に見える形とよく説明されます。正確には、肩から手までの各点の向きが SO(3) の道をつくり、720° 回す間のその道の動きが輪を縮める変形です。

08

表現の入口

定義　群 G の（有限次元の）**表現**とは、ベクトル空間 V と準同型 $\pi : G \to GL(V)$（行列の群では連続なもの）の組、つまり各元に可逆な行列を $\pi(gh) = \pi(g)\pi(h)$ となるように割り当てることです（$\dim V$ が次元）。例：自明表現（すべてを 1 に）、D_3 を平面の回転・鏡映で書くもの、SO(3) の $\mathbb{R}^3$ や SU(2) の $\mathbb{C}^2$ への作用（**定義表現**）、3 次元の表現 ρ。

U(1) の表現は整数で番号が付く

$e^{i\theta} \mapsto e^{iq\theta}$ が U(1) の表現であるには、θ と θ + 2π が同じ元なので $e^{2\pi i q} = 1$、つまり **q は整数**です。連続な 1 次元のユニタリ表現はこれで尽きます 既知 。$\mathbb{R}$ では任意の実数 q で $x \mapsto e^{iqx}$ が表現なので、**番号を整数に揃えているのはコンパクト性**です。電磁気学のゲージ群（2-03）

を U(1) とすれば電荷は単位の整数倍に並ぶ、という物理の議論はこの事実に立ちます（C. N. Yang 1970 の題がこの対応を掲げる）物理 。

既約と完全可約

すべての g で $\pi(g)W \subset W$ となる部分空間 W を**不変**、0 と V のほかに不変部分空間が無い表現を**既約**と言います。SO(3) の $\mathbb{R}^3$ への作用は既約で、D_3 を $\mathbb{R}^3$ の座標の入れ替えで表すと直線 (1, 1, 1) が不変なので既約ではありません。**コンパクトな群の有限次元表現は既約表現の直和に分かれます**（完全可約）既知 。内積を群全体で平均すると、どの $\pi(g)$ もその内積を保ち、不変部分空間の直交補空間も不変になるからです。平均は、有限群なら全元についての和を元の個数で割ったもの。コンパクトな群では、群の上の不変な積分（存在は既知）で同じことができます。

SU(2) の表現と 360° での符号

SU(2) は、有限次元の複素既約表現を、同値（基底の取り替え）を除いて各次元にちょうど一つずつ持ちます既知 。次元 m + 1 のものは、2 変数の m 次斉次多項式の空間に $(\Pi_m(U)f)(z) = f(U^{-1}z)$ で働く Π_m で、物理では $j = m/2$ を**スピン**と呼びます。$-I$ は $f(-z) = (-1)^m f(z)$ と働くので、SO(3) の表現になれるのは **m が偶数（次元が奇数）のものだけ**です。

m	次元	スピン j	指標 $\chi(360^\circ)$	SO(3) の表現か
0	1	0	+1	なる
1	2	1/2	−2	ならない
2	3	1	+3	なる
3	4	3/2	−4	ならない
4	5	2	+5	なる

指標 χ は表現行列のトレースで、$U(\theta, e_3)$ で測りました。720° ではどれも次元の値に戻ります計算 。半整数のスピンでは 360° で符号が反転する——図 3 の $-I$ が、表現の上ではこの符号として現れます。

09 ヤン–ミルズの中の群

問題文（0-03）は群の条件から始まります。

> Prove that for any compact simple gauge group G, a non-trivial quantum Yang–Mills theory exists on $\mathbb{R}^4$ and has a mass gap $\Delta > 0$.

Jaffe と Witten の問題説明は「古典論の水準では、電磁気学のゲージ群 U(1) をコンパクトなゲージ群 G で置き換える」と書いています。**ゲージ群**は、ひとことで言えば時空の各点で独立に施せる対称性の群です。正確には、各点 x に G の元 g(x) を一つずつ選んだものが**ゲージ変換**で、G はその値をとる群です（3-01）。

単純。抽象的な群として「単純」とは、正規部分群が {e} と自分自身だけであることで、この意味では SU(2) は単純ではありません（中心 {±I} が正規部分群）。リー群の用語では意味が違い、連結で非可換な群のリー環が単純（1-03）であることを「単純」と呼びます。問題の説明は simple を定義していませんが、抽象的な群の意味では SU(N)（$N \geq 2$）がすべて外れる（中心 $\mathbb{Z}_N$）ので、この本ではリー群の意味に読みます。SU(N)（$N \geq 2$）はこの意味で単純で（一覧は 1-04）既知 、可換な U(1) は含まれません。

コンパクト。同じ説明は、コンパクトなゲージ群とコンパクト化した時空では Wilson の格子近似が汎関数積分を有限次元の積分に帰着させる、と述べています。格子の各辺に G の元を置いて G 全体で積分する（5-01）ので、G の大きさが有限であることが効きます。

表現。強い力の理論（QCD）ではゲージ群が SU(3) で、クォークは基本表現（この章の定義表現）で変換する、と同じ説明にあります。ゲージ場は G のリー環に値をとります。各点で同じ元を施す変換では随伴表現（1-04）で変換し、一般のゲージ変換では余分な項が付きます（3-02）。場の強さは随伴表現で変換します。問題が扱う純粋なヤン–ミルズ理論にクォークは無く、ゲージ場だけです（3-07）。G を有限群にした格子の模型は 5-10 で扱います。

次は 1-03 リー群とリー環：「二次の食い違い」を、群の無限小の部分の交換子として取り出します。

この章が言えている範囲

項目	言えていること	言えていないこと
群の定義と例	定義と例。D_3 の表 計算	群の一般論
SO(3)	軸の存在の証明の筋。食い違い $\varphi \approx \theta^2$ の数値 計算	θ^2 になる理由（交換子）は 1-03
二重被覆	ρ が SO(3) への準同型で核が $\pm I$ であること。$\rho(U(\theta, n)) = R(\theta, n)$ は z 軸で式、一般の n で数値 計算	一般の n の式による証明 既知

項目	言えていること	言えていないこと
SO(3) の輪	360° の輪は縮まず 720° は縮むことの、図と持ち上げによる説明	基本群 $\mathbb{Z}_2$ の完全な証明（道の持ち上げ定理） 既知
表現	U(1) の表現が整数で番号付けられる理由。Π_m の 360° での符号 計算	SU(2) の既約表現の分類と完全可約性の証明 既知 。電荷の量子化は物理 物理
ヤン–ミルズ	問題文の群の条件（コンパクト・単純）の読み方	質量ギャップ・理論の構成については何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
問題文、U(1) を G で置き換えること、QCD と基本表現、格子の有限次元積分。simple の定義が無いこと	一次資料（本文を確認）	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”, Clay Mathematics Institute の問題説明（研究所のサイトの PDF。日付の記載なし。書誌は 0-03 の出典表）
コンパクト性の定義、SU(2) → SO(3) の二対一、SU(2) が単連結で SO(3) の普遍被覆であること、完全可約性（Prop. 5.17。群の上の不変な測度を使う）、抽象的な群の単純（第 1 章 演習 13 の注）、リー環の単純（第 7 章冒頭）、Π_m	既知（本文を確認）	B. C. Hall, “An Elementary Introduction to Groups and Representations”, arXiv:math-ph/0005032 (2000)
SO(3) を半径 π の球の表面の対蹠点を貼り合わせたものとみる模型、基本群 $\mathbb{Z}_2$、S^3 の輪が縮むこと	既知（本文を確認）	A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002)。著者が公開している版の §3.D（$\mathbf{SO(3)} \approx \mathbb{RP}^3$）、Example 1.43（$\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \mathbb{Z}_2$）、Prop. 1.14（$\pi_1(S^n) = 0$、$n \geq 2$）
リー群の「単純」（連結・非可換・リー環が単純）	この本の用語の約束	抽象的な群とリー環の定義は上の Hall のノートで確認。リー群についてこの約束を明記した教科書は未確認
電荷の量子化とゲージ群のコンパクト性	書誌のみ（題と要旨）	C. N. Yang, “Charge Quantization, Compactness of the Gauge Group, and Flux Quantization”, Phys. Rev. D 1 (1970) 2360
D_3 の表（$ab \neq ba$ は 18/36）、$\varphi(\theta)$、二重被覆の確認、Π_m（m = 0〜6）の符号と指標	**この端末で計算**	Python 3.12・NumPy 1.26。置換の合成、回転行列の積、S^3 上の一様な U 20,000 個と (θ, n) 2,000 組、斉次多項式の表現行列（準同型のずれ最大 5.8×10^{-15}）
図 1〜4	図	素の JavaScript。図 1 は計算済みの表、図 2〜4 は回転の式と cos・sin をその場で計算

次に読む章：1-03 リー群とリー環。

リー群とリー環 — 曲がった群を、単位元での接線の空間で読む

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 行列の群の「無限小の元」の集まりがベクトル空間（リー環）になり、群の掛け算の食い違いが交換子として残ること。指数写像で群に戻れる範囲。構造定数と Killing 形式が、群が単純か・コンパクトかを映すこと。

前提となる章 — 1-02 群とは何か（SO(3)・SU(2)・二重被覆・準同型）と、その前提の 1-01（行列の指数関数・エルミートとユニタリ）。多様体は使わず、行列の群に限ります（一般のリー群は 1-05 の後で読めます）。

先に言うこと — この章は準備で、質量ギャップについては何も示しません。定理の多くは証明を載せずに引き、「既知」の札を付けます。数値は有限次元の行列の計算で、証明の代わりではありません。

この章の順序

1. 無限小の元を見る — 曲がった群と平らな接空間
2. 行列リー群とそのリー環 — 指数写像・次元
3. 指数写像はどこまで届くか — 単位元の近くでは一対一／寄り道：SL(2, ℝ) の届かない元（動く図）
4. 交換子は食い違いの二次の項 — 縦列駐車（動く図）・1-02 の θ^2
5. リー環という構造 — Jacobi 恒等式・SU(2) と SO(3)・随伴
6. 構造定数 — 数学と物理の二つの流儀
7. Baker–Campbell–Hausdorff の式 — 交換子だけで積が決まる（動く図）
8. Killing 形式 — 単純とコンパクトを符号で見る（表の行を選ぶ図）
9. ヤン–ミルズの中のリー環 — 不変な内積・結合定数の数

01

無限小の元を見る

1-02 の SO(3) や SU(2) は、元が実数のパラメータで連続に動く群です。空間としては曲がっている（SU(2) は三次元の球面）ので、**単位元のごく近くだけを一次近似**します。比喩で言えば、曲がった地表でも足元の地図は平面で描けます。正確には、$g(0)=I$ となる群の中の曲線 $g(t)$ の速度 $g'(0)$ を全部集めた平らなベクトル空間が**リー環**です。

$$R(t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}=e^{tJ},\qquad R'(0)=J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

平面の回転 SO(2) のリー環は J の実数倍です（1-01 §08）。掛け算の順序は二次の項に残り（§04）、その情報だけで単位元の近くの掛け算が復元できます（§07）。ヤン–ミルズ理論では**ゲージ変換が群に、ゲージ場がリー環に値をとります**（3-02）。

02

行列リー群とそのリー環

定義　$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$（可逆な複素 $n\times n$ 行列の群）の部分群 G で閉じているもの（元の列が可逆な行列に収束すれば極限も G の元）を**行列リー群**と呼びます 既知 。その**リー環**は

$$\mathfrak{g}=\{\,X\in M_n(\mathbb{C}):\text{すべての実数 } t \text{ で } e^{tX}\in G\,\}$$

で、$X\mapsto e^X$ を**指数写像**と呼びます。単位元から出る曲線 e^{tX} の速度が X です（1-01 §08 の (a)）。条件は「すべての t で」で、$e^X\in G$ だけでは足りません。例えば単位元だけの群 $G=\{I\}$ と $X=2\pi J$ では $e^X=I\in G$ ですが、$t=\frac14$ の e^{tX} は 90° の回転で G に入りません。

例：U(n)。条件 $e^{tX^\dagger}e^{tX}=I$ を $t=0$ で微分すると $X^\dagger=-X$。逆にこのとき e^{tX} はユニタリです（1-01 §09）。$\det e^{tX}=e^{t\,\mathrm{tr}\,X}$ から、行列式 1 の条件は $\mathrm{tr}\,X=0$ になります。

$$\mathfrak{su}(n)=\{X:X^\dagger=-X,\ \mathrm{tr}\,X=0\}$$

リー環は**実**ベクトル空間で（i 倍するとエルミートになって外れる）、その次元を**群の次元**と呼びます（1-02 の表の「実パラメータ」の個数）。同じ計算で次の表になります 既知 。

群	群の元の条件	リー環の元の条件	次元
SO(n)	実、$R^\top R=I$、$\det R=1$	実、$X^\top=-X$	$n(n-1)/2$
U(n)	$U^\dagger U=I$	$X^\dagger=-X$	n^2

群	群の元の条件	リー環の元の条件	次元
SU(n)	$U^\dagger U = I$、$\det U = 1$	$X^\dagger = -X$、$\operatorname{tr} X = 0$	$n^2 - 1$
SL(n, ℝ)	実、$\det g = 1$	実、$\operatorname{tr} X = 0$	$n^2 - 1$

03

指数写像はどこまで届くか

単位元の近くでは、指数写像は一対一で逆も連続です 既知 。逆写像は対数の級数 $\log(I + A) = A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - \cdots$（$\|A\| < 1$）で、近くの元は小さい X でただ一通りに e^X と書けます（**指数座標**）。

遠くでは、SU(2) は 1-02 の $U(\theta, n) = \exp(-\frac{i\theta}{2}\, n \cdot \sigma)$ ですべての元に届き（全射）、θ を 4π ずらしても同じ元なので一対一ではありません。**コンパクトでつながった群では指数写像は全射**です 既知 。

寄り道：SL(2, ℝ) には指数関数で届かない元がある

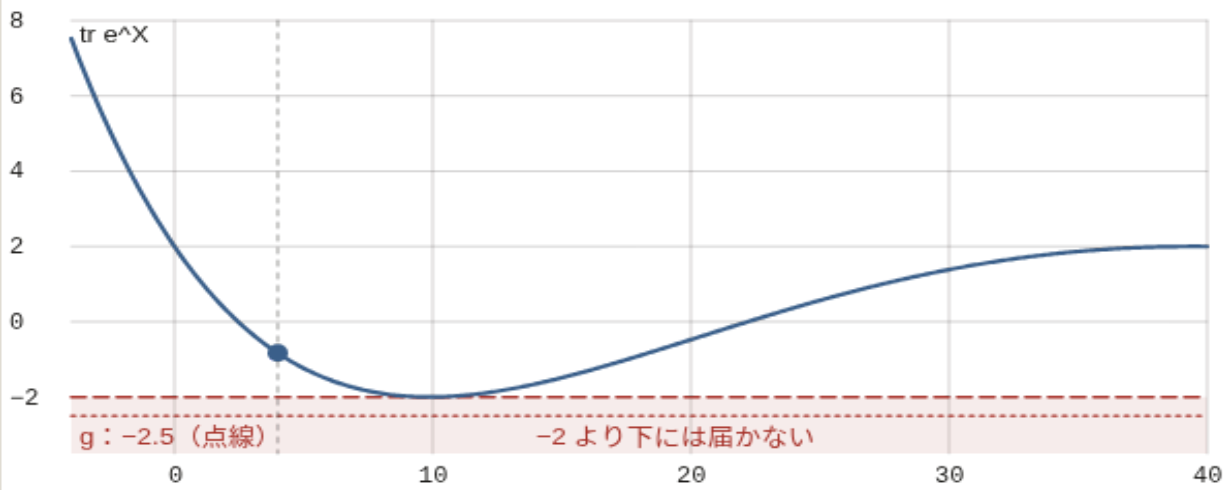
飛ばしてよい小節です。後の章の前提になりません。コンパクトでない群の例です。

$X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ は $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ の形です。成分を掛けて確かめられるとおり $X^2 = (a^2 + bc)I = -\delta I$（$\delta = \det X = -a^2 - bc$）で、2×2 でトレースが 0 の行列はいつもこうなります。そこで 1-01 §08 の例と同じく、指数関数の級数を偶数次と奇数次に分けると

$$\operatorname{tr} e^X = 2\cos\sqrt{\delta}\ (\delta > 0), \quad 2\ (\delta = 0), \quad 2\cosh\sqrt{-\delta}\ (\delta < 0) \qquad \text{どれも } \geq -2$$

よって $g = \operatorname{diag}(-2, -\frac{1}{2})$（行列式 1、トレース −2.5）はどの e^X にもなりません 既知 。それでも §01 の J で $g = e^{\pi J} e^{\operatorname{diag}(\log 2, -\log 2)}$ と二つの積には書けます。 計算 無作為な X 20 万個で、$\operatorname{tr} e^X$ の最小値は −2.000000 でした。

図 1　つまみで $\delta = \det X$（横軸）を動かすと、$\operatorname{tr} e^X$（縦軸）の点が曲線の上を動きます。曲線は −2 の破線より下に出ないので、g のトレース −2.5（点線）には届きません。「動かす」で δ を −4 から 40 まで送ります。



δ = 4.00　tr e^X = −0.8323　= 2cos√δ（√δ = 2.000。例 X = √δ·J：回転の仲間）

X の例	$\delta = \det X$	$\operatorname{tr} e^X$
$\mathrm{diag}(1,-1)$（伸び縮み）	−1	3.08616
E_{12}（(1, 2) 成分だけが 1。冪零）	0	2.00000
$3J$（回転の仲間）	9	−1.97998
πJ	9.8696	−2.00000

計算 この図の数値はこの端末で計算しました。表は行列の指数関数の数値計算、曲線は上の閉じた式をその場で計算（両者の相対差は 4.2×10^{-16} 以下）。

04

交換子は食い違いの二次の項

$e^{tX} = I + tX + \frac{t^2}{2}X^2 + O(t^3)$ を四つ掛けると、一次の項は消えて二次が残ります。

$$e^{tX}e^{tY}e^{-tX}e^{-tY} = I + t^2\,[X,Y] + O(t^3), \qquad [X,Y] = XY - YX \tag{1}$$

左辺を**群の交換子**、$[X,Y]$ を**交換子**と呼びます。$[X,Y] \neq 0$ なら、四手で一周するはずの道が t^2 の程度だけ閉じません。

例：縦列駐車。平面上の「向きをもつ点」（位置 (x,y)・向き α）の群 SE(2) を 3×3 行列で書きます。

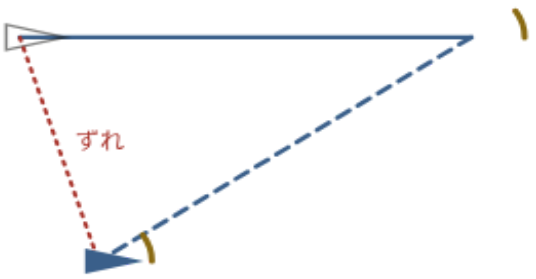
$$g = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & x \\ \sin\alpha & \cos\alpha & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad [J,P] = P_\perp$$

J は左上に §01 の J を置いた回転、P・$P_\perp$ は (1, 3)・(2, 3) 成分だけが 1 の並進の行列です。右から e^{tP} を掛けると「向いた方へ t 進む」、e^{tJ} は「その場で左へ t 回る」。比喩で言えば、そ

の場で回れるが横には動けない台車です。正確には、(1) から「前進 → 左に回る → 後退 → 右に回る」は $e^{t^2[P,J]} = e^{-t^2 P_\perp}$（右へ t^2 の並進）に三次まで等しく、厳密なずれは $(t(1-\cos t),\ -t\sin t)$ です。

図 2　つまみで一歩 t を変えると、四手の後のずれ（点線と「ずれ」の字）が変わります。一歩が同じ長さに見えるよう拡大しており、すき間が t に比例して縮むことが「ずれは t^2 の大きさ」の表れです。「順を入れ替える」とずれは逆向き。

前進 → 回る → 後退 → 逆に回る



実線 前進　破線 後退　　弧 その場で回る

t = 0.60　ずれ = (0.1048, -0.3388)　横 / t² = -0.9411

t	前後のずれ Δx	横のずれ Δy	$\Delta y/t^2$
0.6	0.1048	−0.3388	−0.94107
0.1	4.996×10^{-4}	-9.983×10^{-3}	−0.99833
0.01	5.000×10^{-7}	-1.000×10^{-4}	−0.99998

計算 この図の数値はこの端末で計算しました。表は行列の指数関数の積で、厳密な式との差は 2×10^{-16} 以下。図はその式をその場で計算。

1-02 の θ^2 の理由。1-02 §04 の、x 軸と y 軸の回転を逆順に施した食い違いは、角が θ^2 に近く軸はほぼ −z でした。生成子 $(L_a)_{bc} = -\varepsilon_{abc}$（$\varepsilon_{123}=1$ の完全反対称記号）で $R_x = e^{\theta L_1}$、$R_y = e^{\theta L_2}$、$[L_1, L_2] = L_3$。食い違い $D = R_y R_x R_y^{-1} R_x^{-1}$ は (1) の形なので $D = I - \theta^2 L_3 + O(\theta^3)$、−z 軸まわりの角 θ^2 の回転です。計算 $\log D/\theta^2$ と $-L_3$ の差は $\theta = 10°$ で 0.12、1° で 0.012 でした。

05

リー環という構造

$\mathfrak{g}$ が交換子で閉じたベクトル空間であることの筋 既知 。**和：Lie の積公式** $e^{t(X+Y)} = \lim_{m\to\infty}(e^{tX/m}e^{tY/m})^m$（§07）の右辺は G の元の列で、G は閉じている。**交換子**：$g e^{sY} g^{-1} = e^{s\,gYg^{-1}}$ から $e^{tX} Y e^{-tX} \in \mathfrak{g}$、これを $t=0$ で微分すると $XY - YX$。

行列を忘れた定義では、**リー環**とは、実ベクトル空間と双線形な演算 $[\cdot,\cdot]$ の組で、次を満たすもの（二つ目が **Jacobi 恒等式**）です。

$$[X,Y]=-[Y,X],\qquad [X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$$

三次元の外積もリー環で、$L(v)=\sum_a v_a L_a$ は $L(v)w=v\times w$、$[L(a),L(b)]=L(a\times b)$ を満たします。

リー環は局所しか見ない。1-02 の二重被覆 $\rho:\mathrm{SU}(2)\to\mathrm{SO}(3)$ を単位元で微分すると、交換子を保つ一対一の線形写像 $\mathfrak{su}(2)\to\mathfrak{so}(3)$ になります（§06 で構造定数が一致することを見ます）。核 $\{\pm I\}$ は離れた二点で単位元の近くに現れず、720° か 360° かの違いは大域的で、リー環には映りません。

随伴。群はリー環に $\mathrm{Ad}_g X=gXg^{-1}$ で働き、その微分が $\mathrm{ad}_X Y=[X,Y]$ です。$\mathrm{Ad}_{e^X}=e^{\mathrm{ad}_X}$ が成り立ちます 既知 。ゲージ場はゲージ変換で Ad を通して変わります（3-02）。表現としては 1-04 で扱います。

06

構造定数

基底 $X_1,\dots,X_d$ を選ぶと $[X_a,X_b]=\sum_c f_{ab}{}^c X_c$ と書け、係数 f を**構造定数**と呼びます。反対称性と Jacobi 恒等式が f の条件になります 既知 。

- $\mathfrak{so}(3)$：$[L_a,L_b]=\sum_c \varepsilon_{abc}L_c$。
- $\mathfrak{su}(2)$：$X_a=-\frac{i}{2}\sigma_a$（パウリ行列、1-02 §05）で $[X_a,X_b]=\sum_c \varepsilon_{abc}X_c$ 計算 。同じ定数なので $X_a\mapsto L_a$ が §05 の同型で、1-02 の $U(\theta,n)$ は $\exp(\theta\sum_a n_a X_a)$ です。

物理の流儀（e^{-itT} と書く）では、エルミートな T^a で $[T^a,T^b]=if^{abc}T^c$ と書き、繰り返す添字 c の和の記号を省きます。$X_a=-iT^a$ と置けば $[X_a,X_b]=f^{abc}X_c$ で、**実数の f は二つの流儀で同じ**です。$\mathfrak{su}(N)$ で $\mathrm{tr}(T^aT^b)=\frac{1}{2}\delta^{ab}$ と規格化すると、f^{abc} は**完全反対称**（どの二つの添字を入れ替えても符号が変わる）です。交換子の式に T^c を掛けてトレースをとると $\mathrm{tr}([T^a,T^b]T^c)=\frac{i}{2}f^{abc}$ なので

$$f^{abc}=-2i\,\mathrm{tr}\big([T^a,T^b]T^c\big)=-2i\big(\mathrm{tr}(T^aT^bT^c)-\mathrm{tr}(T^bT^aT^c)\big)$$

トレースは巡回的（$\mathrm{tr}(PQ)=\mathrm{tr}(QP)$ から $\mathrm{tr}(ABC)=\mathrm{tr}(CAB)$）なので、右辺は添字の巡回 $a\to b\to c\to a$ で変わらず、a と b の入れ替えで符号を変えます。巡回と一つの入れ替えを組み合わせればどの入れ替えも作れるので、完全反対称です。$\mathfrak{su}(3)$ の f^{abc} は 1-04 で出します。

07

Baker–Campbell–Hausdorff の式

1-01 §08 で見た $e^{A}e^{B} \neq e^{A+B}$ の差を、交換子で書く式です。X, Y が十分小さいとき $e^{X}e^{Y} = e^{Z}$ で

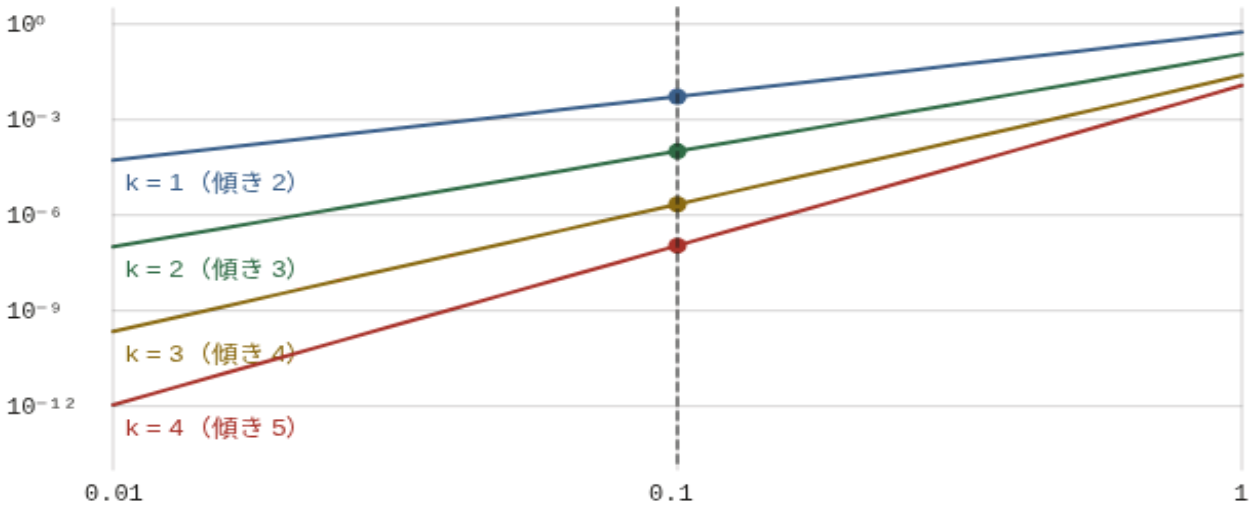
$$Z = X + Y + \tfrac{1}{2}[X,Y] + \tfrac{1}{12}\big([X,[X,Y]] + [Y,[Y,X]]\big) - \tfrac{1}{24}[Y,[X,[X,Y]]] + \cdots \qquad (2)$$

三次までの項は Hall と Kirillov にあります 既知 。四次の項は Casas と Murua の論文に $\frac{1}{24}[X,[Y,[Y,X]]]$ の形で載っていて、Jacobi 恒等式で (2) の形と等しくなります 既知 。四次の係数はこの端末の数値でも確かめました（下の図 3 と表） 計算 。

$X + Y$ より先はすべて交換子の入れ子で、係数は群によりません 既知 。だから単位元の近くの掛け算はリー環で決まります。つながった群は単位元の近くの元の積で生成されるので、群が空間として分かっていれば演算も決まります 既知 。ただし、**リー環だけから群そのものは決まりません**。SU(2) と SO(3) はリー環が同じで、群としては違います。違いは §05 で見た大域的な部分（核 $\{\pm I\}$）にあります。

$\mathfrak{so}(3)$ の $X = L(1,0,0.3)$、$Y = L(0.5,1,0)$ を t 倍し、(2) を k 次で打ち切った誤差を測りました。式が正しければ誤差は t^{k+1} に比例します。

図 3　$\log(e^{tX}e^{tY})$ と k 次までの式 (2) の差（両対数）。k 次の誤差は傾き $k+1$ の直線に乗ります。つまみで t を動かすと、誤差とそれを t^{k+1} で割った値が読めます。



t = 0.100　k=1 5.27e-3 (÷t^2 = 0.527)　k=2 1.02e-4 (÷t^3 = 0.102)　k=3 2.20e-6 (÷t^4 = 0.022)　k=4 1.10e-7 (÷t^5 = 0.011)

t	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4
1	0.561	0.116	2.48×10^{-2}	1.19×10^{-2}
0.1	5.28×10^{-3}	1.02×10^{-4}	2.20×10^{-6}	1.10×10^{-7}

t	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4
0.01	5.27×10^{-5}	1.02×10^{-7}	2.20×10^{-10}	1.10×10^{-12}
$t\to0$ で誤差$/t^{k+1}$	0.5274	0.1017	0.0220	0.0110

計算 この図の数値はこの端末で計算しました（差は作用素ノルム、図は 21 点を埋め込み）。

最後の行の 0.5274・0.1017・0.0220 は次に来る項（$\frac{1}{2}[X,Y]$・三次・四次の項）の大きさと一致し、t の多項式であてはめた係数も (2) と 5×10^{-9} 以内で合いました 計算 。

Lie の積公式。(2) から $(e^{X/m}e^{Y/m})^m=\exp\bigl(X+Y+\frac{1}{2m}[X,Y]+O(m^{-2})\bigr)$ で、誤差はおよそ $1/m$ で減ります。 計算 上の X,Y で $m=10$・100・1000 の誤差は 4.57×10^{-2}・4.57×10^{-3}・4.57×10^{-4} でした（m 倍するといずれも約 0.457）。この公式には、X,Y が非有界な作用素（無限次元のヒルベルト空間の上、1-10）の場合への拡張があり、Trotter の積公式と呼ばれます 既知 。経路積分で時間を細かく刻む操作がこの形になることは 2-07 で見ます。

08

Killing 形式

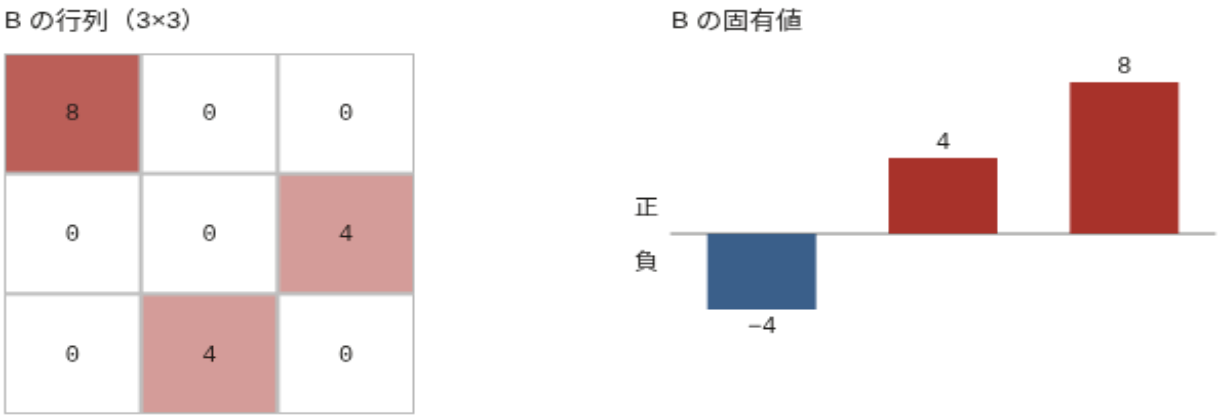
ヤン–ミルズの作用には、Ad_g で変わらない「長さの二乗」がリー環の上に要ります（§09）。リー環だけから作れる候補が **Killing 形式**です。

$$B(X,Y)=\mathrm{tr}\bigl(\mathrm{ad}_X\,\mathrm{ad}_Y\bigr),\qquad B(X_a,X_b)=\sum_{c,d}f_{ad}{}^{c}\,f_{bc}{}^{d}$$

B は対称で、$B(\mathrm{Ad}_g X,\mathrm{Ad}_g Y)=B(X,Y)$、$B([Z,X],Y)+B(X,[Z,Y])=0$ の意味で**不変**です 既知 。$\mathfrak{su}(2)$ では $\mathrm{ad}_{X_a}=L_a$ なので $B(X_a,X_b)=\mathrm{tr}(L_aL_b)=-2\delta_{ab}$、**負の定値**です。

部分空間 $\mathfrak{i}$ が**イデアル**とは $[\mathfrak{g},\mathfrak{i}]\subset\mathfrak{i}$ のこと。**単純**とは可換でなくイデアルが 0 と $\mathfrak{g}$ だけのこと、**半単純**とは単純なものの直和です（標準の定義は別の形で、それと同値であることが知られています：Kirillov 定義 6.19・系 6.43）。次が知られています 既知 。(i) **Cartan の判定法**：半単純 $\Leftrightarrow$ B が非退化。(ii) コンパクトな群のリー環では B は負の半定値で、退化する向きはちょうど中心（すべてと可換な元）。逆に、半単純で B が負の定値なら、コンパクトな群のリー環です。

図 4　下の表の行を選ぶと、そのリー環の基底での B の行列（色の濃さが大きさ）と固有値の棒が変わります。棒が軸より下なら負、上なら正、軸の上の丸は 0 です。



sl(2, ℝ) 符号（負, 0, 正）= (1, 0, 2) 基底 H = diag(1, −1)、E = E_{12}、F = E_{21}。B(H, H) = 8、B(E, F) = 4 で行列は対角でない

リー環	次元	B の符号（負, 0, 正）	読み
$\mathfrak{su}(2)$	3	(3, 0, 0)	コンパクト・単純
$\mathfrak{su}(3)$	8	(8, 0, 0)	コンパクト・単純
$\mathfrak{so}(4)$	6	(6, 0, 0)	コンパクト・半単純（$\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{su}(2)$）
$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$	3	(1, 0, 2)	単純だがコンパクトでない
$\mathfrak{u}(2)$	4	(3, 1, 0)	中心 $i\mathbb{R}I$ の向きで退化
SE(2) のリー環	3	(1, 2, 0)	並進のイデアルで退化
Heisenberg（対角 0 の上三角）	3	(0, 3, 0)	$B=0$

計算 この図の数値はこの端末で計算しました（構造定数から ad の行列を作り、B の行列と固有値を出して埋め込み）。棒の長さは基底の取り方で変わりますが、負・0・正の個数は変わりません（Sylvester の慣性法則 既知 。無作為な基底の取り替え 200 回でも同じ個数）。E_{jk} は (j,k) 成分だけが 1 の行列です。

計算 構造定数から ad の行列を作って B の固有値の符号を数え、$B=2n\,\mathrm{tr}(XY)$（$\mathfrak{su}(2)$〜$\mathfrak{su}(4)$）と $B=(n-2)\,\mathrm{tr}(XY)$（$\mathfrak{so}(3)$〜$\mathfrak{so}(5)$）を確認しました。不変性のずれは 1.3×10^{-12} 以下。$\mathfrak{so}(4)$ が単純でないことは符号からは読めません。

09

ヤン–ミルズの中のリー環

記号の d（外微分）・$\wedge$（外積）・$*$（ホッジ双対）と形式の積分は 1-06 で定義します。ここでは Tr がどこに現れるかだけを見ます。

Jaffe と Witten の問題説明は、U(1) をコンパクトな群 G に置き換えて曲率を $F=dA+A\wedge A$ とし、Lagrangian と呼ぶ式 $L=\frac{1}{4g^2}\int \mathrm{Tr}\,F\wedge *F$（時空で積分してあるので、本書の言葉では作用、2-01）の Tr を “an invariant quadratic form on the Lie algebra of G”（G のリー環の上の不変な二次形式）と書いています。この章の言葉では：

- **場の値**：ゲージ場は各点・各方向に $A_\mu = \sum_a A_\mu^a X_a \in \mathfrak{g}$ を持ちます（$\mu = 0,1,2,3$ は時空の方向の番号）。$A \wedge A$ の成分は交換子 $[A_\mu, A_\nu]$ で書け、U(1) では消えます。前に付く係数は成分の約束（$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ など）によるので、正確な形は 3-02 に委ねます。
- **不変**：ゲージ変換は Ad で働くので、作用には §08 の意味で不変な形式が要ります。
- **コンパクト**：$\mathfrak{su}(N)$ では $X \neq 0$ なら $-\operatorname{tr} X^2 = \sum_{ij} |X_{ij}|^2 > 0$。エネルギーが二乗の和で下に有界になり、符号が混じると負のエネルギーの向きが現れます 物理 （3-03）。
- **単純**：コンパクトな単純リー環（$\mathfrak{su}(N)$ など）の上では、不変な対称双線形形式は定数倍を除いて一つです 既知 。複素化（実数の係数を複素数に広げる。$\mathfrak{su}(N)$ なら $\mathfrak{sl}(N,\mathbb{C})$）しても単純なままで、複素単純リー環の上では Schur の補題から一意になるからです。「単純」だけでは足りません。$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ を実リー環と見ると単純ですが、Killing 形式の実部と虚部が別々の不変な形式になります。一意な形式の定数は結合定数 g に吸収されます（Tr の規格化の違いも同じ）。$G_1 \times G_2$ なら定数は因子ごとに入り、標準模型 SU(3)×SU(2)×U(1) の結合定数は三つです（3-07）。

次は 1-04 SU(2) と SU(3)：パウリ行列と Gell-Mann 行列、随伴表現、コンパクト単純群の一覧。

この章が言えている範囲

項目	言えていること	言えていないこと
リー環	交換子で閉じること（筋） 既知 。群の交換子の二次の項と SE(2)・SO(3) の数値 計算	多様体としてのリー群（1-05 の後）
指数写像	局所で一対一 既知 。SU(2) で全射（1-02 の式）、SL(2, ℝ) で全射でない（§03 のトレースの式） 既知 。無作為な 20 万個での確認 計算	コンパクトでつながった群なら全射、の証明は載せていない（定理そのものは既知）
BCH・Killing 形式	三次までの係数と四次の係数 既知 。四次の係数・誤差の次数・表の符号の数値 計算 。リー環から群そのものは決まらないこと（SU(2) と SO(3)）	一般項・収束域、Cartan の判定法とコンパクト性の証明は載せていない（定理そのものは既知）
ヤン–ミルズ	作用に不変な二次形式が要ること（一次資料）。コンパクトで単純なら定数倍を除き一つ 既知 。正の定値とエネルギー 物理	質量ギャップ・理論の構成については何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
定義、§02 の表、交換子で閉じること、Lie の積公式と Trotter の積公式への拡張、局所で一対一、SL(2, ℝ) の像、$\mathrm{Ad}_{e^X} = e^{\mathrm{ad}_X}$、BCH の三次まで、単純・半単純、物理の流儀	既知（本文を確認）	B. C. Hall, “An Elementary Introduction to Groups and Representations”, arXiv:math-ph/0005032 (2000)。定義 2.2・3.13、第 3 章 §5 の例、定理 3.9 とその直後の注意（非有界な作用素への拡張と Reed–Simon への案内）、定理 3.16・3.23、式 (3.17)、第 3 章演習 15、第 4 章、第 6 章 §7
コンパクトでつながった群なら全射、BCH の普遍性と三次まで、演算がリー環から決まることと「群そのものは決まらない」という但し書き、$\mathfrak{su}(n)$ の複素化、Killing 形式、Cartan の判定法、半単純の定義と直和への分解、コンパクト性と負の定値、不変形式の一意性（複素単純リー環の場合）	既知（本文を確認）	A. Kirillov Jr., *Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*（講義ノート。著者の所属する Stony Brook 大学のページで公開の PDF。PDF の作成は 2005 年）。番号は講義ノート版のもの（書籍版とずれうる）。注意 3.8（文言は “for compact Lie groups”。本文では単位元を含む成分、つまりつながった群について読む）、定理 3.34・式 (3.15)・系 3.35 とその後の注意、例 3.54、演習 4.4、定義 6.19・6.20・6.34、例 6.35、定理 6.37、系 6.43、定理 6.49
同じ著者の書籍版	書誌のみ	A. Kirillov Jr., *An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 113, Cambridge University Press (2008)
BCH の四次の項	既知（本文を確認）	F. Casas, A. Murua, “An efficient algorithm for computing the Baker–Campbell–Hausdorff series and some of its applications”, J. Math. Phys. 50 (2009) 033513, arXiv:0810.2656。式 (1.4) の後の $Z_4 = \frac{1}{24}[X,[Y,[Y,X]]]$
Trotter の積公式	書誌のみ	H. F. Trotter, “On the product of semi-groups of operators”, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959) 545–551／M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. I（Academic Press, 1972）§VIII.8（節は Hall の案内による）。書誌は Crossref で確認
経路積分（Feynman 積分）を数学として扱った一次資料	書誌のみ	E. Nelson, “Feynman Integrals and the Schrödinger Equation”, J. Math. Phys. 5 (1964) 332–343（書誌は Crossref で確認。時間を刻む形との関係は 2-07）
符号の個数が基底によらないこと（Sylvester の慣性法則）	書誌のみ	J. J. Sylvester, “A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares”, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science 4 (1852) 138–142（書誌は Crossref で確認）
作用の Tr が「G のリー環の上の不変な二次形式」であること、$F = dA + A \wedge A$、式 (1) を Lagrangian と呼ぶこと	一次資料（本文を確認）	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”, Clay Mathematics Institute の公式問題説明（PDF。本文に年の記載は無い。賞の発表は 2000 年と Clay のページで確認）。所収：J. Carlson, A. Jaffe, A. Wiles (eds.), *The Millennium Prize Problems*, American Mathematical Society／Clay Mathematics Institute (2006)（書誌は Open Library で確認。所収の頁は未確認）

もの	種別	出典・道具
図 1〜図 4 の表、§03・§04・§06〜§08 の数値	この端末で計算	Python 3.12・NumPy 1.26・SciPy 1.11（expm・logm）。BCH の係数は $\lvert t\rvert \le 0.05$ の 20 点へのあてはめ。Killing 形式は構造定数を最小二乗で求めて作り、不変性は無作為な元 50 組、符号の個数は無作為な基底の取り替え 200 回で確認。$\operatorname{tr} e^{X}$ は閉じた式（expm との相対差 4.2×10^{-16} 以下）
図 1〜図 4	図	素の JavaScript（図 1・図 2 は式をその場で計算、図 3・図 4 は計算済みの値を埋め込み）

次に読む章：1-04 SU(2) と SU(3)。

SU(2) と SU(3) — ゲージ場が値をとる行列を、手で触れる大きさで見る

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — パウリ行列と Gell-Mann 行列による su(2)・su(3)。su(2) の既約表現が 2j+1 次元に並ぶ理由。SU(3) の重み図。ゲージ場が従う随伴表現と $C_A = N$、中心。根のなす角が四通りしかないことと、コンパクト単純リー群の一覧。

前提となる章 — 1-03 リー群とリー環（交換子・構造定数・Killing 形式）。SU(2) と二重被覆は 1-02、同時対角化は 1-01。

先に言うこと — 準備の章で、質量ギャップについては何も示しません。最高ウェイトの定理、単純根と鏡映の性質、分類定理は証明せずに引きます（既知）。

この章の順序

1. なぜ SU(2) と SU(3) か — 成分の数と記号の約束
2. パウリ行列と su(2) — 回転と同じリー環
3. su(2) の表現：梯子 — 2j が整数になる理由（図 1）
4. Gell-Mann 行列と su(3) — 構造定数と階数
5. 重みと根 — SU(3) の表現を平面に描く（図 2）
   - 寄り道：味の SU(3) と色の SU(3)
     — 図 2 の点に粒子の名を当てる（飛ばしてよい）
6. 随伴表現 — ゲージ場の変わり方と C_A
7. 中心と N-ality — ゲージ場に見えない部分
8. 根系：角度が四通り — 単純根と鏡映で根を生やす（図 3）
9. コンパクト単純リー群の一覧 — 問題文の G はどの行でもよい

01

なぜ SU(2) と SU(3) か

ゲージ場は、時空の各点・各方向ごとに、ゲージ群 G のリー環 $\mathfrak{g}$ の元を一つずつ持ちます（3-02）。電磁気学の G = U(1) では成分は一つです。SU(N) ではリー環が行列の空間になります。

$$\mathfrak{su}(N) = \{\, X \in M_N(\mathbb{C}) : X^\dagger = -X,\ \operatorname{tr} X = 0 \,\}, \qquad \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{su}(N) = N^2 - 1 \tag{1}$$

数え方：対角成分は純虚数で N 個、対角より上は複素数で $N(N-1)/2$ 個。実の自由度 N^2 から跡 0 の条件で一つ減ります。SU(3) では 8 で、グルーオンが 8 種ある理由です（PDG）。

物理では $X = -i\theta^a T_a$（T_a はエルミート、繰り返す添字は和）と書きます。1-02 の $U = \exp(-\frac{i\theta}{2}\, n\cdot\sigma)$ は $T_a = \sigma_a/2$ としたこの形です。この本では $\operatorname{tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$ と正規化し、1-03 の構造定数をこう書きます。

$$[T_a, T_b] = i f_{abc}\, T_c \tag{2}$$

f_{abc} は実数で完全反対称です。PDG の QCD の総説も同じ約束です 既知 。

02

パウリ行列と su(2)

パウリ行列（1-02 §05）の性質は、次の恒等式に詰まっています。ε_{abc} は $\varepsilon_{123} = 1$ で、添字を二つ入れ替えると符号が変わる記号です。

$$\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab}\, I + i\, \varepsilon_{abc}\, \sigma_c \tag{3}$$

跡をとると $\operatorname{tr}(\sigma_a\sigma_b) = 2\delta_{ab}$、a と b を入れ替えて引くと $[\sigma_a, \sigma_b] = 2i\varepsilon_{abc}\sigma_c$。$T_a = \sigma_a/2$ で式 (2) の形になり、$f_{abc} = \varepsilon_{abc}$ です。例：$T_1T_2 = \frac{i}{4}\sigma_3$、$T_2T_1 = -\frac{i}{4}\sigma_3$ なので $[T_1, T_2] = iT_3$。

回転にも同じ関係があります。$(L_a)_{bc} = -i\varepsilon_{abc}$ は $[L_a, L_b] = i\varepsilon_{abc}L_c$ を満たし、$e^{-i\theta L_3}$ は z 軸まわりの角 θ の回転です 計算 。**su(2) と so(3) は同じリー環**です。リー環は単位元の近くしか見ないので、SU(2) が SO(3) を二重に覆うこと（1-02 §06）はここには現れません。

03

su(2) の表現：梯子を上り下りする

su(2) の表現とは、$f = \varepsilon$ の式 (2) を満たすエルミート行列 J_1, J_2, J_3 の組です。**一段ずつ上り下りする行列**を作ります。

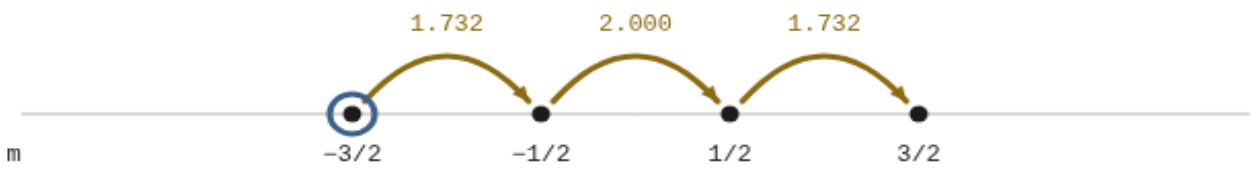
$$J_\pm = J_1 \pm i J_2, \qquad [J_3, J_\pm] = \pm J_\pm, \qquad [J_+, J_-] = 2J_3 \tag{4}$$

$J_3 v = m v$ なら $J_3(J_\pm v) = (m \pm 1) J_\pm v$ で、$J_\pm$ は固有値を 1 ずつ動かします。$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = J_- J_+ + J_3^2 + J_3$ はすべての J_a と可換です。有限次元なので上端 v（$J_+ v = 0$）があり、その固有値を j とすると $J^2 v = j(j+1) v$。下りると $\|J_- v_m\|^2 = (j+m)(j-m+1)\|v_m\|^2$ で、この係数は負になれないので、列は $m = -j$ でちょうど止まる必要があります。j から整数の歩幅で −j に着くので、**2j は 0, 1, 2, ⋯ のどれか**です 既知 。

$$J_3 v_m = m\, v_m, \qquad J_+ v_m = \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\; v_{m+1}, \qquad m = -j, \dots, j \tag{5}$$

次元は $2j+1$ で、各次元に既約表現が一つずつあります（1-02 の Π_m は m = 2j）。例：j = 1/2 は $J_a = \sigma_a/2$。j = 1 は基底を取り替えると §02 の L_a です。

図 1　つまみで 2j を変えると段の数と係数が変わります。「上る」で J_+ を掛け続けると、上端で 0 になります。



j = 3/2　次元 4　J² = 3.75　いま m = −3/2　次の係数 √3 = 1.7321

j	次元	J²	J₊ の係数（m = −j から上へ）
1/2	2	0.75	$\sqrt{1}$
1	3	2	$\sqrt{2},\ \sqrt{2}$
3/2	4	3.75	$\sqrt{3},\ \sqrt{4},\ \sqrt{3}$
3	7	12	$\sqrt{6},\ \sqrt{10},\ \sqrt{12},\ \sqrt{12},\ \sqrt{10},\ \sqrt{6}$

計算 この図と表 1 の数値はこの端末で計算しました。式 (5) で組んだ j ≤ 3 の行列で、交換関係と $J^2 = j(j+1)I$ のずれは最大 1.8×10⁻¹⁵。

04

Gell-Mann 行列と su(3)

su(3) でパウリ行列の役をするのが 8 個の **Gell-Mann 行列**です。どれもエルミートで跡 0、$\mathrm{tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}$ です。

$$\lambda_{1,2,3}=\begin{pmatrix}\sigma_{1,2,3} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\quad \lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

$\lambda_{4,5}$ は 1・3 番目、$\lambda_{6,7}$ は 2・3 番目の成分でパウリ行列と同じことをし、λ_8 は λ_3 と直交する対角行列です。$T_a=\lambda_a/2$ とし、$f_{abc}=-2i\,\mathrm{tr}([T_a,T_b]T_c)$ で取り出すと次の表です。

abc	123	147	156	246	257	345	367	458	678
f_{abc}	1	1/2	−1/2	1/2	1/2	1/2	−1/2	√3/2	√3/2

表 2：a < b < c で 0 でないもの（他は反対称性で決まるか 0）。64 個の交換子が再現され、Jacobi 恒等式のずれは 3.3×10^{-16} 以下 計算 。

中には su(2) が三つあります。$\{T_1,T_2,T_3\}$、$\{T_4,T_5,\frac12T_3+\frac{\sqrt3}{2}T_8\}$、$\{T_6,T_7,-\frac12T_3+\frac{\sqrt3}{2}T_8\}$ がそれぞれ $f=\varepsilon$ の式 (2) を満たします 計算 。成分の組 (1,2)・(1,3)・(2,3) ごとの SU(2) です。

T_3 と T_8 は可換です。互いに可換な元を一次独立に最大でいくつ取れるか（それらが張る空間の次元）を**階数**と呼び、su(3) は 2、su(N) は N − 1 です 既知 。実際、su(3) の中で T_3・T_8 の両方と可換な元はこの二つの一次結合だけで、su(N) でも対角の N − 1 個と可換な元はそれらの一次結合だけでした（N = 2〜6） 計算 。

05

重みと根：SU(3) の表現を平面に描く

表現の中で T_3 と T_8 は可換なエルミート行列なので同時に対角化でき、共通の固有ベクトルの固有値の組 (μ_3,μ_8) を**重み**と呼びます（su(2) の m の二次元版）。定義表現 **3** では対角成分を読むだけです。

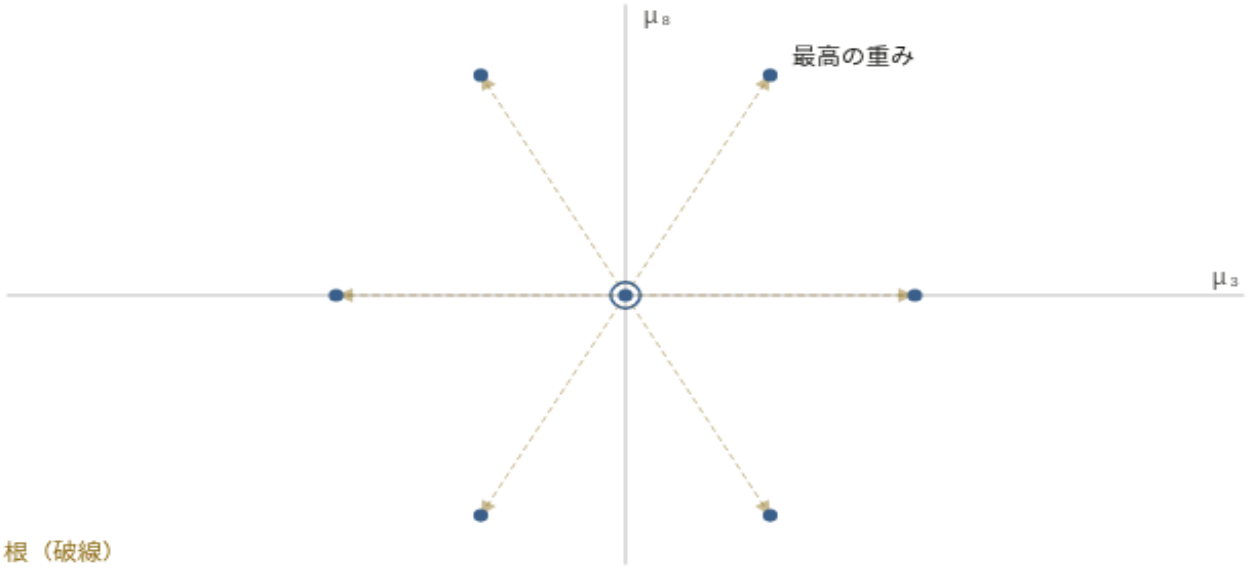
$$\mu(e_1)=\left(\tfrac12,\ \tfrac{1}{2\sqrt3}\right),\qquad \mu(e_2)=\left(-\tfrac12,\ \tfrac{1}{2\sqrt3}\right),\qquad \mu(e_3)=\left(0,\ -\tfrac{1}{\sqrt3}\right)\tag{6}$$

三点は正三角形で、$\bar{\mathbf{3}}$（複素共役）はその −1 倍です。行列単位 E_{ij}（(i, j) 成分だけ 1）は対角行列 H に対し $[H,E_{ij}]=(h_i-h_j)E_{ij}$ を満たし、重みを $\mu(e_i)-\mu(e_j)$ だけ動かす梯子です。この差の 6 個を**根**と呼び、長さ 1 の正六角形をなします。$E_{12}=T_1+iT_2$ は §03 の J_+ です。E_{ij} は $J_\pm$ と同じく su(3) の元の複素係数の一次結合で、su(3) そのものの元ではありませんが、表現の上では同じように働きます。

既約表現は非負整数の組 (p, q) で番号が付き（最高の重み $p\,\mu(e_1) - q\,\mu(e_3)$）、次元は次の式です 既知 。(1, 0) が **3**、(0, 1) が $\bar{\mathbf{3}}$、(1, 1) が随伴表現です。

$$\dim V(p,q) = \tfrac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2) \tag{7}$$

図 2　つまみで (p, q) を選ぶと、V(p, q) の重みが横 μ_3・縦 μ_8 の平面に出ます。点を囲む輪の数が重複度。表の行でも切り替わります。



V(1, 1) = 8　次元 8　Casimir 3.0000　N-ality 0　点 7　最大の重複 2

(p, q)	名	Casimir	N-ality	重みの点	最大の重複
(1, 0)	3	4/3	1	3	1
(0, 1)	$\bar{3}$	4/3	2	3	1
(1, 1)	**8**	**3**	**0**	**7**	**2**
(3, 0)	10	6	0	10	1
(2, 2)	27	8	0	19	3
(3, 3)	64	15	0	37	4

計算 この図と表 3 の数値はこの端末で計算しました。重みと重複度は単項式の数え上げと表現行列の Casimir の二通りで求め、p + q ≤ 5 の 21 個で一致。図は数え上げをその場で行い、16 個とも Python の計算と一致。名は次元（q > p なら上線）、Casimir は $\sum_a T_a T_a$ の値 $(p^2+q^2+pq+3p+3q)/3$。

図で見える規則：重複度は外の殻から内へ 1 ずつ増え、殻が三角形になってからは重複度が増えなくなり、内側まで一定です。計算した 16 個すべてがこの形でした 計算 。

寄り道：味の SU(3) と色の SU(3)

飛ばしてよい小節です。

図 2 の軸は物理の量で読めます。$\mu_3 = I_3$（アイソスピンの第 3 成分）、$\mu_8 = \frac{\sqrt{3}}{2} Y$（Y は超電荷）です。定義表現の三つの基底を u・d・s クォークと読むと Y = 1/3, 1/3, −2/3 で、式 (6) の μ_8 になります 計算 。

Rosner の解説によれば、Gell-Mann と Ne'eman（1961）の SU(3) では、電荷が素電荷の整数倍になる族のうち最も簡単なものは 1・8・10 個の族で、陽子・中性子を含む 8 個のバリオンが 8 個の族にちょうど収まりました 物理 。図 2 の (1, 1) では、外の六点が Σ^+・Σ^-・p・n・Ξ^0・Ξ^-（例えば p は $(I_3, Y) = (\frac{1}{2}, 1)$ で、点 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$）、重複度 2 の中心が Σ^0 と Λ です 計算 。のちに Δ・Σ^*・Ξ^* が 10 個の族に並び、欠けた頂点の Ω^-（(3, 0) の三角形の下の頂点）が Barnes ら（1964）に見つかりました。

この「味」の SU(3) は破れた近似の大域対称性で、強い力のゲージ群は三つの「色」の別の SU(3) です（PDG）。ヤン–ミルズは後者の型です（3-01）。

06

随伴表現：ゲージ場はこの表現で変わる

群は自分のリー環に共役で働きます。これが**随伴表現**で、その微分が交換子です（1-03）。

$$\mathrm{Ad}_g(X) = g X g^{-1}, \qquad \mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y], \qquad (T_a^{\mathrm{adj}})_{bc} = -i f_{abc} \tag{8}$$

右端の行列は式 (2) をもう一度満たします（Jacobi 恒等式と同値）。SU(2) では $-i\varepsilon_{abc}$ が §02 の L_a なので、**1-02 の写像 SU(2) → SO(3) は随伴表現そのもの**で、j = 1 に当たります。

ゲージ場は、空間に依らないゲージ変換 g で $A \mapsto gAg^{-1}$ と変わります（一般の形は 3-02）。U(1) では $gAg^{-1} = A$ で光子は電荷を持ちませんが、SU(N) では**ゲージ場自身が荷電**し、自分と相互作用します。PDG でもグルーオンは随伴表現、クォークは基本表現です 既知 。

$\sum_a T_a T_a$ はすべての T_b と可換です（§03 の J^2 と同じ）。**Schur の補題**（既約な複素表現で、すべての表現行列と可換な行列は単位行列の定数倍）により、既約表現ではこれは単位行列の定数倍で、その定数を Casimir と呼びます 既知 。

$$\sum_a T_a T_a = C_F\, I, \quad C_F = \frac{N^2-1}{2N}; \qquad f_{acd} f_{bcd} = C_A\, \delta_{ab}, \quad C_A = N \tag{9}$$

N	2	3	4	5	6
dim su(N)	3	8	15	24	35
C_F	3/4	4/3	15/8	12/5	35/12
C_A	2	3	4	5	6
Killing 形式 / tr	4	6	8	10	12

表 4：一般化した Gell-Mann 行列で計算 [計算]。最下行は Killing 形式 $B(X,Y)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X\,\mathrm{ad}_Y)$ と $\mathrm{tr}(XY)$ の比で、2N でした。反エルミートな $X\neq 0$ では $\mathrm{tr}(X^2)<0$ なので B は負定値で、コンパクト性が符号に見えています。

作用の Tr が「G のリー環上の不変な二次形式」であることは 1-03 §09 で見ました。コンパクト単純なリー環（複素化も単純になる）では、不変な対称双線形形式は定数倍を除いて一つなので [既知]、表 4 の B と tr の違いも g に吸収されます。C_A は漸近自由の係数に入ります。PDG の一ループ係数 $b_0=(11C_A-4n_fT_R)/(12\pi)$ は、クォークの無い純ヤン–ミルズで $11N/(12\pi)$ です [既知]。17-01・4-06 の「11N」の N は C_A です。

07

中心と N-ality

すべての元と可換な元の集まりを**中心**と呼びます。SU(N) では行列式 1 のスカラー行列です [既知]。

$$Z(\mathrm{SU}(N))=\{\,\omega^k I : k=0,1,\dots,N-1\,\},\qquad \omega=e^{2\pi i/N} \tag{10}$$

中心の元はすべての表現行列と可換なので、既約表現の上では Schur の補題（§06）によりスカラーとして働きます。SU(3) では対角成分を比べると $\omega I=\exp(4\pi i\,T_8/\sqrt{3})$ で、重み (μ_3,μ_8) のベクトルには $e^{4\pi i\mu_8/\sqrt{3}}$ が掛かります。V(p, q) の最高の重みは $\mu_8=(p+2q)/(2\sqrt{3})$ なので、表現全体に $\omega^{p+2q}=\omega^{p-q}$ が掛かります。p, q ≤ 3 の 16 個の表現の重みの点（計 216 点）すべてでこの値でした [計算]。$k=p-q \bmod 3$ を **N-ality** と呼びます。表 3 の列で、$\mathbf{3}$ は 1、$\bar{\mathbf{3}}$ は 2、随伴は 0 です。

随伴で 0 になるのは、スカラー行列 z で $zXz^{-1}=X$ だからです。**ゲージ場は中心を感じません**。そのためグルーオンだけでは N-ality が 0 でない電荷を遮蔽できず [物理]、中心は閉じ込めの議論の主役になります（17-02・5-10）。中心が自明な G_2（§09）では電荷がグルーオンで遮蔽され弦が切れうる、と Holland ら（2003）は論じています [物理]。

08

根系：角度が四通りしかない

§05 の根は、どのコンパクト単純リー環にもあります。階数 r なら、互いに可換な r 個の元の同時固有値として、根は r 次元の空間に並びます。内積 (α,β) は §05 と同じく、生成子を不変な二次形式で正規直交にしたときの座標の内積です（su(3) では (μ_3,μ_8) 平面の普通の内積で、根の長さは 1）。

分類の心臓部は §03 の「2j は整数」です。根 α ごとに E_α、$E_{-\alpha}$ と両者の交換子が su(2) を作り、別の根 β をこの su(2) から見ると、m に当たる量は $(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha)$ で、**1/2 の整数倍（整数も含む）**になります 既知 。su(3) で α = (1, 0)（E_{12}、su(2) は $\{T_1, T_2, T_3\}$）、β = $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$（$E_{13}$）なら m = 1/2 です。二つの向きで掛けると、なす角 θ について次が出ます。

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} \cdot \frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} = 4\cos^2\theta \in \{0,1,2,3\} \tag{11}$$

左辺は整数の積で、$\beta \neq \pm\alpha$ なら 4 未満だからです。二つの因子の比は長さの比の二乗なので、直交しない二本の根の長さの比は 1・√2・√3 のどれかです（積が 1・2・3 になる整数の組は限られるため）。

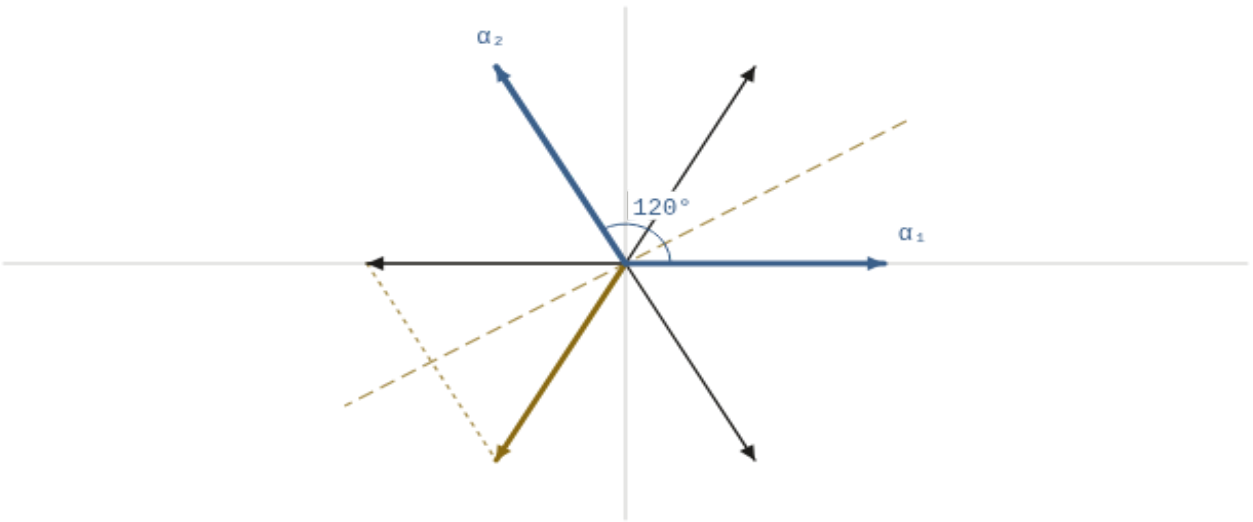
根は多いので代表を選びます。原点を通り根を一本も含まない直線（階数 3 以上なら超平面）を引き、片側の根を**正の根**と呼びます。正の根のうち、二つの正の根の和で書けないものが**単純根**で、本数は階数に等しく、互いのなす角は 90° 以上です 既知 。よって単純根どうしの角は 90°・120°・135°・150° の四通りです。

単純根から全体を戻すのが**鏡映**です。根 α での鏡映は、α に垂直な直線（超平面）に関する折り返しです。

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\,\alpha \tag{12}$$

鏡映は根を根に移し、単純根に単純根の鏡映を繰り返すとすべての根が得られます 既知 。(12) の係数は (11) の整数なので、根はすべて単純根の整数係数の和です。係数は全部 0 以上か全部 0 以下です 既知 。

図 3　表の行で階数 2 の型を選ぶと、単純根 α_1・α_2（太線）とその角が出ます。つまみで本数を変えるか「生やす」を押すと、式 (12) の鏡映で根が一本ずつ増えます（破線が鏡、点線が折り返し）。



A₂　根 6 / 6　−α₁ を α₂ の鏡で折り返して −α₁ − α₂　これで全部。次元 8

型	単純根の角	$4\cos^2\theta$	長い根 / 短い根	根の数	次元
$A_1 \times A_1$	90°	0	1	4	6
A_2	**120°**	**1**	**1**	**6**	**8**
B_2	135°	2	√2	8	10
G_2	150°	3	√3	12	14

計算 この図と表 5 の数値はこの端末で計算しました。単純根から鏡映を繰り返して根を生やした順番と、単純根での係数を Python で求めて図に埋めてあります。長い根の長さを 1 にしています。

階数 2 では $A_1 \times A_1$（根 4 本、二つの su(2) に分かれて単純でない）・A_2（6 本、§05 の正六角形そのもの）・B_2（8 本）・G_2（12 本）です。次元は階数 + 根の数です（su(3) なら対角の 2 方向と、6 本の根ごとの E_{ij} で 8）。図 3 の係数も全部 0 以上か全部 0 以下でした 計算 。

09

コンパクト単純リー群の一覧

問題文（0-03）は「任意のコンパクト単純ゲージ群 G」を求めます。§08 の制限を階数 3 以上でも詰めると、リー環の候補は四つの系列 $A_n = \mathfrak{su}(n+1)$、$B_n = \mathfrak{so}(2n+1)$、$C_n = \mathfrak{sp}(n)$、$D_n = \mathfrak{so}(2n)$ と、五つの例外 G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 で尽きます 既知 。Baez の総説によれば、Killing は 1887 年の書簡で分類を告げ、続く三年の論文で発表しました（例外を 6 個と数えていました）。Cartan の 1894 年の学位論文がすべてを構成し、52 次元の二つが同型であることを見いだして、例外は 5 個になりました。

型	単連結な群	階数	次元	$h^\vee$	中心
A_n（$n \geq 1$）	SU(n+1)	n	n(n+2)	n+1	$\mathbb{Z}_{n+1}$
B_n（$n \geq 2$）	Spin(2n+1)	n	n(2n+1)	2n−1	$\mathbb{Z}_2$
C_n（$n \geq 3$）	Sp(n)	n	n(2n+1)	n+1	$\mathbb{Z}_2$
D_n（$n \geq 4$）	Spin(2n)	n	n(2n−1)	2n−2	$\mathbb{Z}_4$（n 奇）・$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$（n 偶）
G_2 ／ F_4	G_2 ／ F_4	2 ／ 4	14 ／ 52	4 ／ 9	自明
E_6 ／ E_7 ／ E_8	E_6 ／ E_7 ／ E_8	6 ／ 7 ／ 8	78 ／ 133 ／ 248	12 ／ 18 ／ 30	$\mathbb{Z}_3$ ／ $\mathbb{Z}_2$ ／ 自明

表 6：系列は n ≤ 8 で式と一致 計算 。Spin(m) は SO(m) を二重に覆う単連結な群、Sp(n) は四元数成分のユニタリ行列の群です。単純根どうしの整数 $2(\alpha_i,\alpha_j)/(\alpha_j,\alpha_j)$（式 (11) の因子）を並べた行列を **Cartan 行列**と呼び、中心の位数はその行列式です 既知 。中心の形（$\mathbb{Z}_4$ か

$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ か）もこの行列から計算しました。$h^\vee$（双対 Coxeter 数）は、この章では表の値として引くだけにします。

SU(N) では $h^\vee = N$ で、§06 の $C_A = N$ と一致します。長い根の長さの二乗を 1 に揃える（SU(N) では $\mathrm{tr}(T_aT_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$ に当たり、§05 で根の長さが 1 だったのと同じ）と、一般の G でも $C_A = h^\vee$ です 既知 。数学で多い「長さの二乗を 2」の規格化では、随伴の Casimir は $2h^\vee$ になります。SU(3) で二つの規格化を比べると 3 と 6 でした 計算 。**問題文の G はこの表のどの行でもよく**、摂動論の係数には群がこうした数で入ります。$SU(2)/\mathbb{Z}_2 = SO(3)$ のような中心で割った群も同じリー環を持ち、違いは束の位相に現れます（3-05 §03）。

次は 1-05 多様体と接空間：この章の行列を時空の各点に載せるための言葉です。

この章が言えている範囲

項目	言えていること	言えていないこと
su(2)・su(3)	表 2 の f_{abc}。2j が整数になる理由。式 (5) が $j \le 3$ で表現になること。su(N)（N = 2〜6）で対角の元と可換な元の次元 計算	既約表現がこれで尽きることの完全な証明、階数が極大な可換部分の取り方に依らないこと 既知
SU(3) の重み	$p, q \le 3$ の重みと重複度 計算	最高ウェイトの定理と式 (7) の証明 既知 。殻の規則は観察
随伴表現	N = 2〜6 の C_F・C_A・$B = 2N\cdot\mathrm{tr}$ 計算	Schur の補題、一般の N、不変二次形式の一意性 既知
中心	SU(N) の中心、随伴表現が中心を感じないこと。SU(3) の N-ality（$p, q \le 3$ の全重み） 計算	閉じ込め・G_2 との関係 物理
根系と分類	角度が四通りの理由 (11)。階数 2 の四つの根系を鏡映で生やしたこと（図 3・表 5）。表 6 計算	単純根と鏡映の性質、分類がこれで尽きること、一般の G での $C_A = h^\vee$（長い根の長さの二乗 1 の規格化で） 既知
ヤン–ミルズ	ゲージ場の変わり方、11N の N の出どころ	質量ギャップ・理論の構成については何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
su(2) の既約表現、SU(3) の最高ウェイトと式 (7)	既知（本文を確認：5 章 §4、6 章 §3・定理 6.11）	B. C. Hall, “An Elementary Introduction to Groups and Representations”, arXiv:math-ph/0005032 (2000)

もの	種別	出典・道具
$t=\lambda/2$、C_F・C_A、b_0、グルーオンとクォークの表現	既知（本文を確認）	J. Huston, K. Rabbertz, G. Zanderighi, “Quantum Chromodynamics”, in S. Navas et al. (PDG), Phys. Rev. D 110 (2024) 030001
「コンパクト単純ゲージ群」「不変な二次形式」	一次資料（本文を確認）	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”, Clay Mathematics Institute の問題説明
分類の経緯（1887 年の書簡、Killing の数えた 6 個の例外、Cartan の 1894 年の学位論文と 52 次元の二つの同型）、系列と例外	総説（本文を確認）	J. C. Baez, “The Octonions”, Bull. Amer. Math. Soc. 39 (2002) 145–205, arXiv:math/0105155
味の SU(3) の経緯（整数電荷の最も簡単な族が 1・8・10 個、バリオンの 8 個の族、Δ・Σ^*・Ξ^* と Ω^-）	解説（本文を確認）	J. L. Rosner, “The Eightfold Way”, arXiv:hep-ph/0109241 (2001)
G_2 の中心と弦の切断	要旨を確認	K. Holland, P. Minkowski, M. Pepe, U.-J. Wiese, Nucl. Phys. B 668 (2003) 207, arXiv:hep-lat/0302023
原論文、Ω^- の発見、双対 Coxeter 数 $h^\vee$ と随伴の Casimir の関係の文献	書誌のみ	W. Killing, Math. Ann. 31–36 (1888–1890)；É. Cartan, 学位論文 (1894)；M. Gell-Mann, CTSL-20 (1961)；Y. Ne'eman, Nucl. Phys. 26 (1961) 222；V. E. Barnes et al., “Observation of a Hyperon with Strangeness Minus Three”, Phys. Rev. Lett. 12 (1964) 204；V. G. Kac, *Infinite Dimensional Lie Algebras*, 第 3 版 (1990)
表 1〜6、§02・§04・§07 と寄り道の確認、図 1〜3	**この端末で計算**	Python 3.12・NumPy 1.26・SciPy 1.11：`su2_ladder.py`・`su3_algebra.py`・`su3_weights.py`・`classification.py`・`rank_center_roots.py`。図は canvas と素の JavaScript で、式 (5) と単項式の数え上げはその場で計算し、図 3 の根の順番は Python の結果を埋め込み

次に読む章：1-05 多様体と接空間。

多様体と接空間 — 地図を貼り合わせ、座標に依らずに微分する

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 曲がった空間を座標（地図）の貼り合わせで扱う方法（多様体）。一点での向きの空間（接空間）と成分の変換則。流れの順序の食い違いを測る括弧積。

前提となる章 — 1-01 と多変数の微積分（連鎖律・陰関数定理）。1-02・1-03 を読んでいれば例がつながります。

先に言うこと — この章は準備で、質量ギャップについては何も示しません。定理は証明を載せずに引き「既知」の札を付けます。数値は有限個の点での確かめです。

この章の順序

1. なぜ多様体が要るか
2. 座標近傍と地図帳（動く図）
3. 多様体の定義と例
4. 方程式で切り出す（計算）
5. 滑らかな関数と写像
6. 接ベクトル
7. 変換則と写像の微分
8. ベクトル場と流れ／寄り道：毛玉の定理
9. 括弧積（動く図）
10. ヤン–ミルズの中の多様体

01

なぜ多様体が要るか

ヤン–ミルズ理論には平らでない空間が出てきます。ゲージ群 SU(2) は空間としては球面 S^3 です（1-02 §05）。問題文の舞台は $\mathbb{R}^4$ ですが、出題者の説明は四次元トーラス T^4 による近似や一般の四次元多様体にも触れています 既知 。

こうした空間は一組の座標で覆えないことがあります。比喩で言えば、世界地図はどう描いても極か日付変更線で破れます。正確には、球面 S^2 と $\mathbb{R}^2$ の開集合の間に、一対一で両方向に連続な対応はありません 既知 。球面は有界閉集合で、その連続像も有界閉集合ですが、$\mathbb{R}^2$ の空でない開集合はそうでないからです。

そこで何枚かの地図を滑らかに貼り合わせ、**地図の選び方に依らない量だけを幾何の量と呼びます**。ゲージに依らない量だけが観測にかかる（2-03 §03）のと同じ構えです。

02

座標近傍と地図帳

集合 M の部分集合 U と、U を $\mathbb{R}^n$ の開集合へ一対一に写す φ の組 (U,φ) を**地図**（座標近傍）と呼び、$\varphi(q)=(x^1,\dots,x^n)$ を q の座標とします。M を覆う地図の集まりで、次の二つを満たすものを**地図帳**と呼びます 既知 。どの二枚 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$・$(U_\beta,\varphi_\beta)$ についても、重なりの像 $\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$ と $\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であること（開集合の上でないと微分が定義できないため）。そして、重なりでの読み替え（**貼り合わせ写像**）が C^∞ であること。

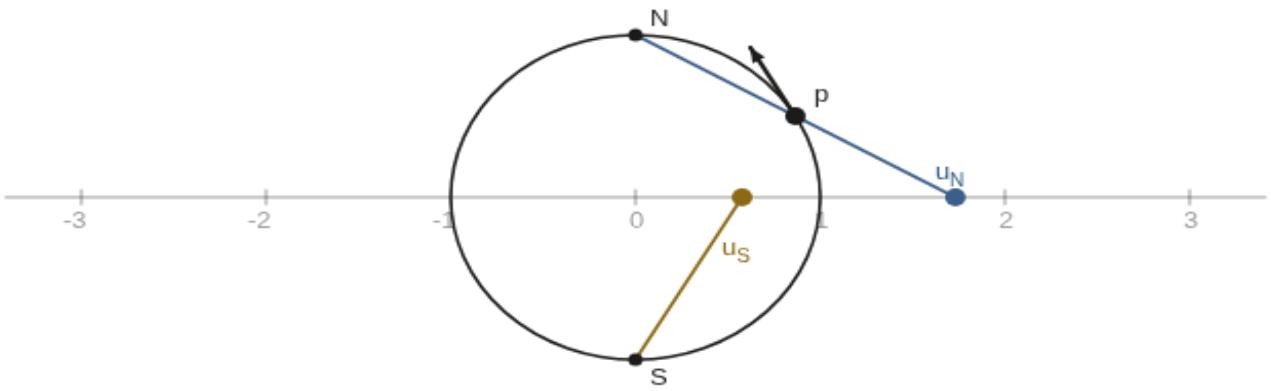
$$\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}:\ \varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\longrightarrow\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\quad\text{が } C^\infty \tag{1}$$

例：円 S^1。角 θ は一枚の地図になりません（$0\le\theta<2\pi$ では像が開集合でなく、$0<\theta<2\pi$ では一点が抜ける）。そこで**立体射影**を使います。北極 $N=(0,1)$ と点 $p=(\cos\theta,\sin\theta)$ を結ぶ直線が横軸と交わる位置を u_N、南極 $S=(0,-1)$ から同様にした位置を u_S とします。

$$u_N=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta},\qquad u_S=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta},\qquad u_N\,u_S=\frac{\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta}=1 \tag{2}$$

u_N は N 以外を、u_S は S 以外を覆い、重なりでの $u_S=1/u_N$ は滑らかなので (1) を満たします。

図1　つまみ（または表の行）で p を動かすと、座標 u_N（青）・u_S（黄土）が変わり、積はいつも 1 です。p が北極に近づくと u_N は際限なく大きくなります。本文色の矢印は速さ 1 で動く p の接ベクトル（§07）。



θ = 30°　u_N = 1.7321　u_S = 0.5774　積 = 1.000000　v_N = 2.0000　v_S = -0.6667　v_S/v_N = -0.3333　$-1/u_N^2$ = -0.3333

θ（度）	u_N	u_S	v_N	v_S	v_S/v_N	$-1/u_N^2$
30	1.7321	0.5774	2.0000	−0.6667	−0.3333	−0.3333
89	114.5887	0.0087	6565.7794	−0.5000	−0.0001	−0.0001
−135（= 225）	−0.4142	−2.4142	0.5858	−3.4142	−5.8284	−5.8284

計算 この図の数値はこの端末で計算しました（式 (2) とその θ 微分。数値微分との相対差 5×10^{-10} 以下）。v_N・v_S は速さ 1 で回るときの du_N/dt・du_S/dt です（§05・§07）。

球面 S^2 も、両極から赤道面への射影 $u=(x_1,x_2)/(1-x_3)$・$u'=(x_1,x_2)/(1+x_3)$ で覆え、貼り合わせは $u'=u/|u|^2$ です 既知 （無作為な点 約 2000 個で差 2×10^{-13} 以下 計算 ）。

03

多様体の定義と例

定義　n 次元の（滑らかな）**多様体**とは、集合 M と、M を覆う地図帳の組です。加えても (1) が崩れない地図はすべて加えておきます（極大な地図帳） 既知 。教科書はさらに位相の条件（ハウスドルフ性など）を課しますが、この本の例では自動的に満たされます。

例：$\mathbb{R}^n$ の開集合（$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\subset\mathbb{R}^{n^2}$ など） 既知 、球面 S^n、積（トーラス $T^2=S^1\times S^1$、T^4 ）、行列の群（§04）。**非例**：8 の字の交点。交点の小さな近傍から交点を抜くと四つに分かれ、一点を抜くと二つに分かれる区間と同じ形になりえません。二重の円錐 $x^2+y^2=z^2$ の頂点も同様です。

この定義は外の空間を使いません。地図帳として違うだけのもの（例えば $\mathbb{R}$ を地図 $x\mapsto x^3$ から作る地図帳）は、微分同相（§05）で通常のものに移るので同じ構造とみなします。そう数えても、同じ空間に本当に別の滑らかな構造が載ることがあります。$\mathbb{R}^4$ と同相（両方向に連

続な一対一の対応がある）だが微分同相でない滑らかな構造を**エキゾチック** $\mathbb{R}^4$ と呼び、それが無数に（連続体濃度、つまり実数と同じ個数だけ）あることは Taubes が最初に示したとされます 既知 （1-12 §07、3-06、四次元の記事）。

04

方程式で切り出す — 正則値定理

多くの多様体は方程式の解として現れます。滑らかな $F:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^m$ と値 c について、次が成り立ちます（**正則値定理**） 既知 。

$$M=F^{-1}(c),\qquad \operatorname{rank} dF_x=m\ \ (x\in M)\ \Longrightarrow\ M\ \text{は}\ N-m\ \text{次元の多様体} \tag{3}$$

中身は陰関数定理で、m 個の座標を残りの $N-m$ 個の関数として解き、その $N-m$ 個を地図にします。例えば $F(A)=A^{\mathsf T}A$ は $\mathbb{R}^9$ を対称行列（成分 6 個）へ写し、$F^{-1}(I)=\mathrm{O}(3)$ は $9-6=3$ 次元です。det は連続で ±1 しかとらないので、$\mathrm{O}(3)$ は $\det A=1$ の部分（回転の群 $\mathrm{SO}(3)$）と $\det A=-1$ の部分に分かれ、どちらも 3 次元です。回転が軸の向き 2 個と角 1 個で決まること（1-02 §04）と合います。

表 1 計算 無作為な点 200 個で dF の階数を数え、群は単位元での核（§06 の接空間）も求めました。階数は、$dF\,dF^{\mathsf T}$ の固有値の平方根（特異値）のうち、10^{-6} の相対しきい値で 0 とみなせないものの個数です。直交群の点は $\det=1$ の部分からとりました。

集合	方程式	N	階数	次元	単位元での核
$S^3=\mathrm{SU}(2)$	$\lvert x\rvert=1$	4	1	3	—
$\mathrm{O}(3)$（$\det=1$ の部分が $\mathrm{SO}(3)$）	$A^{\mathsf T}A=I$	9	6	3	反対称（残差 3×10^{-16}）
$\mathrm{U}(2)$	$A^{\dagger}A=I$	8	4	4	反エルミート
円錐（非例）	$x^2+y^2=z^2$	3	頂点で 0	–	—

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$・$\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$（核はトレース 0）・$\mathrm{O}(4)$（$\det=1$ の部分が $\mathrm{SO}(4)$）・$\mathrm{U}(3)$ でも次元は 3・8・6・9 と出ました。円錐は頂点で階数が落ちます。閉じた行列の群はいつも多様体（リー群）で 既知 、1-03 §02 の議論はここで裏付けられます。

05

滑らかな関数と写像

関数 $f:M\to\mathbb{R}$ は、どの地図でも $f\circ\varphi^{-1}$ が C^∞ のとき**滑らか**と呼びます。重なりでは (4) なので、一方の地図で滑らかなら他方でも滑らかです（貼り合わせに滑らかさを求めた理由）。写像 $F:M\to N$ も同様で、逆も滑らかな全単射を**微分同相**と呼びます。

$$f \circ \varphi_\beta^{-1} = \bigl(f \circ \varphi_\alpha^{-1}\bigr) \circ \bigl(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\bigr) \tag{4}$$

例：円の上の高さ。 S^1 の点 $p = (\cos\theta, \sin\theta)$ に高さ $f(p) = \sin\theta$ を対応させます。(2) から $u_N^2 = \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$、$u_S^2 = \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$ なので、これを $\sin\theta$ について解くと、§02 の二枚の地図で読んだ f は

$$f = \frac{u_N^2 - 1}{u_N^2 + 1} \quad \text{(地図 N)}, \qquad f = \frac{1 - u_S^2}{1 + u_S^2} \quad \text{(地図 S)}$$

です。分母はどちらも 1 以上なので、どちらの式も C^∞ で、f は滑らかです。重なりで $u_S = 1/u_N$ を代入すると一方の式が他方に移り、(4) の実例になっています 計算 。

偏微分の値は地図ごとに違います。点 $\theta = 0$（$u_N = u_S = 1$）では $df/du_N = 1$、$df/du_S = -1$ で、二枚の地図は目盛りの向きが逆です。それでも、曲線 γ に沿った変化率 $\frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=0}$ は座標を使わずに書けています。$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ なら、座標の速さ $v_N = du_N/dt$・$v_S = du_S/dt$ は $t = 0$ で 1 と -1（図 1 の表の量）。連鎖律で、地図 N では 1×1、地図 S では $(-1) \times (-1)$ となり、どちらも $1 = \cos 0$ です 計算 。座標に依らない微分の種はこれです。

06

接ベクトル — 三つの見方

曲がった空間では点から点へ伸びる矢印がはみ出すので、矢印を**一点に付いた向き**として定義し直します。三つの見方が同じものを与えます 既知 。**(a) 曲線の速度**：地図で読んだ速度が等しい曲線を同じとみなす（(1) により地図に依らない）。**(b) 方向微分**：$v(f) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=0}$。線形で積の法則を満たす。**(c) 成分**：地図 x で連鎖律を使うと

$$v(f) = \sum_{i=1}^{n} v^i \, \frac{\partial f}{\partial x^i}(p), \qquad v^i = \frac{d}{dt} x^i(\gamma(t))\Big|_{t=0}, \qquad v(fg) = v(f)\,g(p) + f(p)\,v(g) \tag{5}$$

で、$v = \sum_i v^i \, \partial_i$ と書けます。この向きの全体が p での**接空間** T_pM（n 次元のベクトル空間）で、$\partial_1, \dots, \partial_n$ を**座標基底**と呼びます。

方程式で切り出した場合。 $M = F^{-1}(c)$ の中の曲線では $F(\gamma(t)) = c$ なので $dF_p(\gamma'(0)) = 0$、次元を数えると $T_pM = \ker dF_p$ です 既知 。SO(3) の単位元では $A^{\mathsf T}A = I$ を微分して $X^{\mathsf T} + X = 0$：接空間は反対称行列の全体で、1-03 §02 のリー環と一致します 既知 （表 1 の右の列） 計算 。

07

成分の変換則と写像の微分

接ベクトル v は地図の前に決まっていて、成分 v^i は地図に落とした影です。別の地図 x' での成分は連鎖律で得られます 既知 。

$$v'^{\,i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x'^{\,i}}{\partial x^j}(p)\, v^j, \qquad \partial'_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^j}{\partial x'^{\,i}}(p)\, \partial_j \tag{6}$$

成分は Jacobi 行列で、基底はその逆で変わり、$\sum_i v^i \partial_i$ は不変です。例：$(x,y)=(1,1)$（$r=\sqrt{2}$、$\theta=\pi/4$）で $\partial_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\partial_r - \frac{1}{2}\,\partial_\theta$。図 1 の円では $v_N = 1/(1-\sin\theta)$、$v_S = -1/(1+\sin\theta)$ で、(6) は $v_S = -v_N/u_N^2$。図 1 の表の右二列の一致がその確認です 計算 （北極の近くで v_N が大きいのは地図 N の目盛りが伸びるため）。

写像の微分。滑らかな $F : M \to N$ は、曲線を運ぶことで接ベクトルを運びます。

$$dF_p\big(\gamma'(0)\big) = (F\circ\gamma)'(0), \qquad d(G\circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p \tag{7}$$

$dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ は線形で、地図で読めば Jacobi 行列です。(6) は恒等写像を二枚の地図で読んだ場合です（線形な例がローレンツ変換、2-04）。df を「ベクトルを食べて数を返すもの」として扱うのは 1-06 です。

08

ベクトル場と流れ

各点に接ベクトルを滑らかに割り当てたもの $X = \sum_i X^i(x)\,\partial_i$ を**ベクトル場**と呼びます。矢印に沿う曲線（**積分曲線**）は常微分方程式の解で、局所的にただ一つです 既知 。p を時間 t 進めた点を $\varphi_t(p)$ と書き、**流れ**と呼びます。

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i\big(x(t)\big), \qquad \varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}, \qquad \varphi_0 = \mathrm{id} \tag{8}$$

線形な場 $X(x) = Ax$ の流れは $\varphi_t(x) = e^{tA}x$、つまり 1-01 の行列の指数関数です。平面の例：回転 $R = -y\,\partial_x + x\,\partial_y$ は角 t の回転、伸縮 $E = x\,\partial_x + y\,\partial_y$ は e^t 倍、$x\,\partial_y$ は $(x,y)\mapsto(x, y+tx)$。

寄り道：毛玉の定理

飛ばしてよい小節です。後の章の前提になりません。

S^2 の上の連続なベクトル場は、どこかで零になります 既知 。比喩で言えば、毛の生えた球をどう撫でつけてもつむじが残ります。正確には、零点を小さな円で一周するあいだに矢印が回る回数を**指数**と呼ぶと、零点が有限個の場なら、指数の和が場に依らず 2 になるとされます（Poincaré–Hopf の定理 既知 ）。この 2 は S^2 の**オイラー標数**で、球面を多面体に分けて数えた 頂点 − 辺 + 面と同じ値です。 計算 §02 の地図で零点の周りを回ると、z 軸まわりの回転と高さ x_3 の勾配は両極で +1 ずつ、地図 N で一定の場 $\partial/\partial u^1$ は北極だけで +2 で、和はどれも 2 でした。トーラスのオイラー標数は 0 で、零点の無い場があります。

「各点で基準を連続に選ぶことが大域的にはできない」型の障害は、ゲージ固定（3-04）にも別の姿で現れます。

09

括弧積 — 流れは入れ替えられるか

二つの場を関数に続けて作用させると二階微分が出ますが、順序を入れ替えて引くと二階の項は消え（偏微分は順序を交換できる）、新しいベクトル場が残ります。これが**括弧積**です 既知 。

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf), \qquad [X,Y]^i = \sum_{j=1}^{n} \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \tag{9}$$

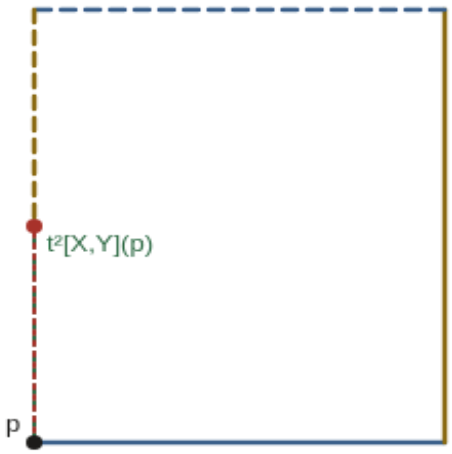
座標基底どうしは $[\partial_i, \partial_j] = 0$。逆に、基底をなす n 本の場がどの二本も可換なら、局所的にそれらを座標基底とする地図がとれます（可換な枠についての定理で、Frobenius の定理の一形） 既知 。

幾何の意味。X の流れで t、Y で t、X で $-t$、Y で $-t$ と進むと道は閉じず、ずれは t^2 の大きさで $[X,Y]$ の向きに出ます 既知 。例えば $X = \partial_x$、$Y = x\,\partial_y$ なら $(x,y) \to (x+t,y) \to (x+t, y+tx+t^2) \to (x, y+tx+t^2) \to (x, y+t^2)$ で、ずれはちょうど $t^2 \partial_y = t^2 [X,Y]$ です。

$$\varphi^Y_{-t} \circ \varphi^X_{-t} \circ \varphi^Y_{t} \circ \varphi^X_{t}(p) = p + t^2\,[X,Y](p) + O(t^3) \tag{10}$$

図 2　A〜E のボタン（または表の行）で組を、つまみで t を選ぶと、四本の流れ（青が X・黄土が Y、破線は $-t$ の向き）と閉じないずれ（赤）が変わります。緑は (10) の主要項 $t^2[X,Y](p)$。一辺の長さを揃えて拡大しているので、ずれが t に比例して縮むのが「t^2 の大きさ」の表れです。$p = (0.6,\ 0.4)$。

組 B：X = ∂_x（青）　Y = $x\partial_y$（黄土）



`t = 0.60　ずれ = (0.0000, 0.3600)　ずれ/t² = (0.0000, 1.0000)　[X,Y](p) = (0, 1)`

組	X	Y	$[X,Y]$	$[X,Y](p)$	ずれ / t^2（$t=0.5$）	$t=0.01$
A	∂_x	∂_y	0	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
B	∂_x	$x\partial_y$	∂_y	(0, 1)	(0, 1.0000)	(0, 1.0000)
C	R	E	0	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
D	∂_x	R	∂_y	(0, 1)	(0.2448, 0.9589)	(0.0050, 1.0000)
E	$x\partial_y$	$y\partial_x$	$x\partial_x - y\partial_y$	(0.6, -0.4)	(0.9500, -0.7000)	(0.6041, -0.4060)

計算 この図の数値はこの端末で計算しました。表は流れを Runge–Kutta 法（刻み 10^{-3}）で解き、括弧積は (9) を中心差分で評価（A・C のずれは 10^{-15} 以下）。図は流れの閉じた式で計算。

A は座標基底で閉じます。C も可換です：$R=\partial_\theta$、$E=\partial/\partial(\log r)$ は地図 $(\log r,\theta)$ の座標基底です。D は 1-03 §04 の縦列駐車と同じ群 SE(2) を点の動きとして見たもので、ずれは厳密に $(t(1-\cos t),\, t\sin t)$。E は線形な場 $X_A(x)=Ax$ の例で、(9) から $[X_A,X_B]=X_{BA-AB}$：行列の交換子と**符号が逆**です。

「小さな四辺形が閉じない量」は、群の掛け算（1-03 §04）、流れ（この節）、曲率（1-07：小さな輪に沿った平行移動の食い違い）と三度現れます 既知 。

10

ヤン–ミルズの中の多様体

- **時空**：$\mathbb{R}^4$ は一枚の地図で覆えます。出題者の説明は、電磁気のゲージ場（群 U(1) の接続）を「局所的には時空の上の 1 形式」と書き、非可換の場合もこれを群 G に置き換えて扱います（Jaffe–Witten §1） 既知 。1 形式と接続の意味は 1-06・1-07 で与えます。

- **四次元球面**：ユークリッドの $\mathbb{R}^4$（時間の座標も空間と同じ符号で距離に入れたもの。2-04・4-02）の上で、作用 $\int |F|^2$（F は場の強さ、3-02）が有限なヤン–ミルズ方程式（3-03）の解は、ゲージを取り直すと、無限遠点を足した S^4 の上に滑らかに延びるとされます（Uhlenbeck 1982、3-05） 既知 。
- **ゲージ群と格子**：単位元での接空間がリー環（1-04）。格子の配置の空間は群の有限個の積で、コンパクトな多様体です（ここでは、行列の成分を並べた空間の中で有界かつ閉じている、の意味。5-01）。
- **ゲージ軌道の空間**：無限次元で、連続なゲージ固定を大域的に選べないことが論じられています（Singer 1978、3-04） 既知 。

地図とゲージの選択、貼り合わせ写像と遷移関数、球面の地図とゲージ固定の障害はよく似ています。ただし比喩です。正確には、ゲージの側は各点に群を載せる構造（**主束**。1-07 で定義）とその上の接続の話で、この章はその土台です。

この章が言えている範囲

項目	言えていること	言えていないこと
多様体	定義・例・非例・正則値定理 既知 。貼り合わせ・表 1・§05 の例 計算	位相の条件の役割、諸定理の証明。数値は有限個の点
接ベクトル	三つの見方・(6)・(7) 既知 。円での変換則 計算	三つの見方の一致の証明。微分形式（1-06）
流れと括弧積	(9)・(10) 既知 。五組でずれ / $t^2 \to [X,Y](p)$、寄り道の指数 計算	(10) の剰余、可換な枠の定理・毛玉の定理・Poincaré–Hopf の定理の証明
ヤン–ミルズ	案内のみ	質量ギャップ・理論の構成については何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§02・§03・§05〜§09 の定義と定理の多く	既知（本文を確認）	S. M. Carroll, “Lecture Notes on General Relativity”, arXiv:gr-qc/9712019 (1997)。式 (2.4)〜(2.13)・(3.69)・(3.74)・(5.16) の周辺
行列リー群はリー群、GL(n, ℝ) は開集合、リー環は単位元での接空間	既知（本文を確認）	B. C. Hall, “An Elementary Introduction to Groups and Representations”, arXiv:math-ph/0005032 (2000)。定義 2.14・定理 2.15、第 3 章演習 19

もの	種別	出典・道具
問題文の $\mathbb{R}^4$、T^4 と一般の四次元多様体、接続が局所的に 1 形式（U(1) の場合）	一次資料（本文を確認）	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”, Clay Mathematics Institute の公式問題説明。§1・§4〜§6
正則値定理、式 (10)、位相の条件	書誌のみ	J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer GTM (2013)
毛玉の定理	書誌のみ	J. Milnor, “Analytic Proofs of the ‘Hairy Ball Theorem’ and the Brouwer Fixed Point Theorem”, Amer. Math. Monthly 85 (1978) 521–524
Poincaré–Hopf の定理（零点が有限個の場の指数の和）	書誌のみ（Poincaré の原論文は未確認）	H. Hopf, “Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten”, Math. Ann. 96 (1927) 225–249／J. Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, University Press of Virginia (1965)
エキゾチック $\mathbb{R}^4$ が連続体濃度だけあること	書誌のみ	C. H. Taubes, “Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds”, J. Differential Geom. 25 (1987) 363–430
ゲージ固定の障害	書誌のみ	I. M. Singer, “Some remarks on the Gribov ambiguity”, Commun. Math. Phys. 60 (1978) 7–12
S^4 への延長（ユークリッドの $\mathbb{R}^4$・作用が有限・ゲージの取り直し）	書誌のみ	K. Uhlenbeck, “Removable singularities in Yang–Mills fields”, Commun. Math. Phys. 83 (1982) 11–29
図 1・図 2・表 1・§05 の例・寄り道の数値	この端末で計算	Python 3.12・NumPy 1.26。図は素の JavaScript

次に読む章：1-06 微分形式と外微分 — 接ベクトルを食べて数を返すもの（1 形式）と Stokes の定理へ。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 1 部 数学の準備 外微分・Stokes・de Rham

微分形式と外微分 — 勾配・回転・発散を一つの d にまとめ、穴を数える

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 微分形式は接ベクトルを食べて数を返す「向きのついた測り」です。外微分 d は勾配・回転・発散をまとめ、$d^2 = 0$ と Stokes の定理が全体を支えます。閉で完全でない形式が穴を数えること、電磁場が $F = dA$ と書けること、四次元でだけ F と $*F$ が比べられることまで。

前提となる章 — 1-05 多様体と接空間。行列式は 1-01。§09 で使う計量はその場で最小限を定義し、符号の約束は 2-04 に合わせます。

先に言うこと — 準備の章で、質量ギャップについては何も示しません。Stokes・Poincaré・de Rham の定理は筋だけを示すか証明せずに引きます（既知）。ゲージ場は U(1) までで、行列値の場合は 1-07 です。

この章の順序

1. なぜ微分形式か — 積分されるものに名前を
2. 1-形式 — 線積分は引き戻し
3. k-形式と外積 — 向きつきの面積（図 1）
4. 外微分 — $d^2 = 0$・勾配・回転・発散
5. 積分と向き — ヤコビアンは外積から出る・半球面の例
6. Stokes の定理 — 内側の辺は打ち消し合う（図 2）
7. 閉と完全 — dθ と巻き数（図 3）
8. de Rham コホモロジーの入口 — 穴を数える。寄り道：格子の上の微分形式（図 4）
9. ホッジ双対と Maxwell 方程式 — 計量から $*$ を作る・$F = dA$・四次元の特別さ

01

なぜ微分形式か

線積分の $P\,dx + Q\,dy$ は、積分記号の中の飾りに見えます。微分形式は、この「積分されるもの」を独立した対象にする言葉です。座標の取り替えでの変わり方が連鎖律で決まり、勾配・回転・発散が一つの演算 d にまとまります。

$$\int_\gamma (P\,dx + Q\,dy) = \int_a^b \big(P(\gamma(t))\,x'(t) + Q(\gamma(t))\,y'(t)\big)\,dt, \qquad \gamma(t) = (x(t), y(t)) \tag{1}$$

「dx を $x'(t)\,dt$ に置き換える」規則が、§02 で**引き戻し**と呼ぶものの最初の例です。**例**。逆向きにたどると (1) は符号が変わり、長さ $\int |\gamma'(t)|\,dt$ は変わりません。微分形式が測るのは**向きのついた量**です。(1) の被積分関数は、曲線の各点の速度 $(x'(t), y'(t))$ に数を返す規則になっています。この「接ベクトルに数を返す」という見方が §02 の出発点です。

この本では電磁場が $F = dA$（§09）、ゲージ場が行列値の 1-形式（1-07）、インスタントン数が 4-形式の積分（3-05）として現れます。

02

1-形式

点 p の接ベクトル（1-05）に数を返す線形の関数を**余接ベクトル**、それを各点に滑らかに与えたものを**1-形式**と呼びます。基本の例は関数の微分 df で、v に方向微分を返します（繰り返す添字は和）。

$$df_p(v) = v^i\,\frac{\partial f}{\partial x^i}(p), \qquad dx^i\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = \delta^i_j, \qquad \alpha = \alpha_i\,dx^i \tag{2}$$

dx^i は $\partial/\partial x^j$ の双対基底で、座標の取り替えでは連鎖律から $dx'^j = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\,dx^i$。成分 α_i は、接ベクトルの成分を変える行列 $\partial x'^j/\partial x^i$ の逆行列の転置で変わるので、$\alpha(v) = \alpha_i v^i$ は座標に依りません。曲線 γ での線積分は、**引き戻し** $\gamma^*\alpha = \alpha_i(\gamma(t))\,\dot\gamma^i(t)\,dt$ の一変数の積分 $\int_a^b \gamma^*\alpha$ です。

例 1。$\alpha = -y\,dx + x\,dy$ を単位円 $(\cos t, \sin t)$ で引き戻すと $\gamma^*\alpha = dt$、積分は 2π。**例 2**。$\gamma^* df = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\,dt$ なので

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \tag{3}$$

で、閉曲線なら 0。よって例 1 の α はどんな f の df でもありません。ただし α は §07 で言う「閉」でもありません（§04 の (7) で $d\alpha = 2\,dx \wedge dy \neq 0$）。閉なのに df の形でない例は §07 の $d\theta$ です。

曲線でなくても引き戻しの規則は同じです。写像 $\varphi : u \mapsto x = \varphi(u)$ に対して $\varphi^{*}\omega$ は、ω の中の x を $\varphi(u)$ に、dx^{i} を $\frac{\partial \varphi^{i}}{\partial u^{j}}\, du^{j}$ に置き換えたものです。曲線は $u = t$ が一変数の場合で、§03 以降の L^{*}・φ^{*} はすべてこの意味です。

03

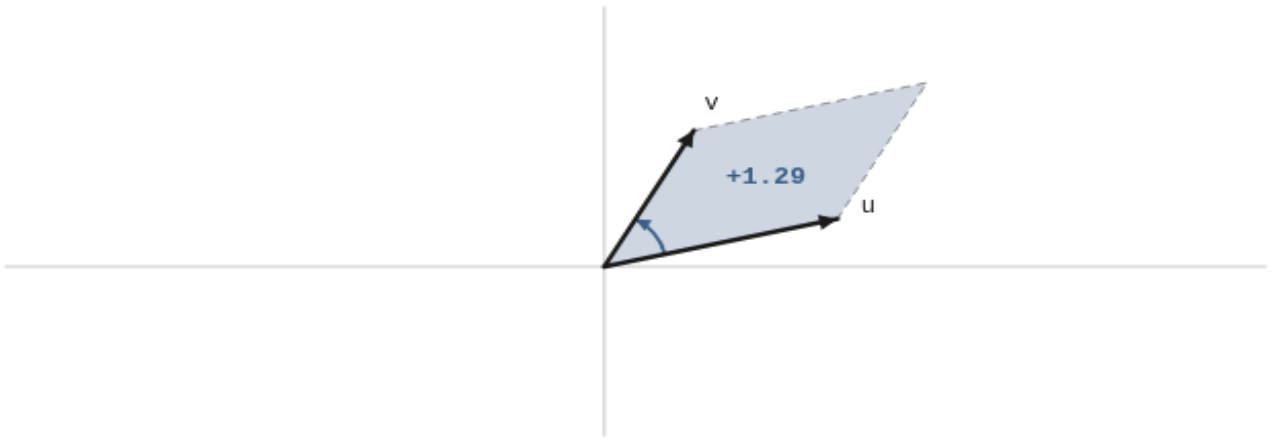
k-形式と外積

2-形式は二本の接ベクトルから数を返し、それぞれについて線形で、入れ替えると符号が変わるものです。比喩で言えば「向きを覚えた面積計」、正確には各点の接空間上の反対称な双線形形式を滑らかに並べたものです。

$$(\alpha \wedge \beta)(u, v) = \alpha(u)\,\beta(v) - \alpha(v)\,\beta(u), \qquad (dx \wedge dy)(u, v) = u^{1}v^{2} - u^{2}v^{1} = \det[\,u\ v\,] \tag{4}$$

左が 1-形式の**外積**で、規則は $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$、特に $\alpha \wedge \alpha = 0$。右は u, v の張る平行四辺形の向きつき面積で、v が u の時計回りの側に来ると負です（図 1）。n 次元の k-形式は $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$（$i_1 < \cdots < i_k$）の関数係数の和で、成分は $\binom{n}{k}$ 個、k > n なら 0 です。k-形式と l-形式の外積は (k+l)-形式で、$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl}\,\beta \wedge \alpha$。

図 1　つまみで v の向きを回すと、平行四辺形の向きつき面積 $(dx \wedge dy)(u, v) = \det[\,u\ v\,]$ の符号が変わります。二本目が一本目の反時計回りの側なら正（青）、時計回りの側なら負（黄土）、一直線に並ぶと 0。「順番を入れ替える」で (v, u) にすると、同じ平行四辺形で符号だけが逆になります。



v の向き 60°　(dx∧dy)(u, v) = +1.293　二本目は一本目の反時計回りの側 → 正

計算 $u = (1.5, 0.35)$、$|v| = 1.15$。面積は式 $u^{1}v^{2} - u^{2}v^{1}$ をその場で計算しています（符号と「反時計回りの側」の対応は 360 通りの向きで照合）。

例。 $\mathbb{R}^{3}$ では 1-形式も 2-形式も 3 成分です。$a = a_i\,dx^{i}$、$b = b_i\,dx^{i}$ の外積を $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$, $dx \wedge dy$ の係数で読むと、外積ベクトル $a \times b$ です（無作為な 10^{4} 組で一致 計算 ）。$\mathbb{R}^{4}$ の 2-形式は 6 成分で、電場 3 と磁場 3 がちょうど入ります（§09）。線形写像 L で引き戻すと $L^{*}(dx \wedge dy) = (\det L)\,dx \wedge dy$ です。

04

外微分

$f \mapsto df$ を、k-形式から (k+1)-形式への操作に延ばします（今の形の外微分は É. Cartan（1899）に始まるとされます）。規則は「係数を微分し、出てきた dx^j を左から外積で掛ける」だけです。

$$d\bigl(f\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\bigr)=\frac{\partial f}{\partial x^j}\,dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k} \tag{5}$$

d は線形で、k-形式 α について $d(\alpha\wedge\beta)=d\alpha\wedge\beta+(-1)^k\alpha\wedge d\beta$。そして

$$d\circ d=0 \tag{6}$$

理由：$d(df)=\partial_i\partial_j f\,dx^i\wedge dx^j$ で、係数は i, j について対称（偏微分の順序交換）、$dx^i\wedge dx^j$ は反対称なので和が消えます。k-形式でも、係数の二階微分の対称性と外積の反対称性で同じように消えます。**例**。平面では $dx\wedge dx=0$ と $dy\wedge dx=-dx\wedge dy$ だけを使って

$$d(P\,dx+Q\,dy)=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy \tag{7}$$

既知 $\mathbb{R}^3$ では 0-形式の d が勾配、1-形式 $a_i\,dx^i$ の d が回転（$(\partial_y a_z-\partial_z a_y)\,dy\wedge dz+\cdots$）、2-形式 $b_x\,dy\wedge dz+\cdots$ の d が発散 $(\nabla\cdot\mathbf{b})\,dx\wedge dy\wedge dz$ です。(6) は $\nabla\times\nabla f=0$ と $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{a})=0$ を一度に言っていて、2-03 §02 がポテンシャルを導入したときの恒等式です。

§02 の引き戻しと d は入れ替えられる（$\varphi^*d\omega=d\varphi^*\omega$）既知 ので、$d$ は座標に依らず、計量なしに多様体の上で定義されます。極座標の $df=\partial_r f\,dr+\partial_\theta f\,d\theta$ には勾配の公式の $1/r$ が無く、$1/r$ は計量から入ります。

05

積分と向き

k-形式は向きのついた k 次元の部分の上で積分します。部分を $\varphi: D\subset\mathbb{R}^k\to M$ で表し、引き戻して普通の多重積分にします：$\int_\varphi\omega=\int_D\varphi^*\omega$。(4) から次が出ます。

$$\varphi^*(dx^1\wedge\cdots\wedge dx^k)=\det\!\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial u^j}\right)du^1\wedge\cdots\wedge du^k \tag{8}$$

変数変換の公式の $|\det|$ の代わりに符号つきの $\det$ が出て、向きを反転すると符号が変わります。多様体全体では地図ごとに計算して貼り合わせるので、全体で向きを揃えられること（**向き付け可能**）が要ります（メビウスの帯は不可）既知 。

例。極座標では $dx \wedge dy = (\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta) \wedge (\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta) = r\, dr \wedge d\theta$。面積要素の r は外積から出ます。

例（曲面）。上半球面を外向きに向け、球座標 $\psi(\vartheta, \varphi) = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$（$0 \le \vartheta \le \pi/2$）で表します。$(\vartheta, \varphi)$ の順は外向きの向きに合います。(8) の det（x, y の二成分についての 2×2）を計算すると $\psi^*(dx \wedge dy) = \cos\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta \wedge d\varphi$ なので

$$\int_{\text{上半球面}} z\, dx \wedge dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \cos^2\vartheta\, \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \frac{2\pi}{3}$$

です（数値積分と向きの確認 計算 ）。値は半球体の体積と同じです。偶然ではなく、次の §06 の Stokes の定理の一例です：$d(z\, dx \wedge dy) = dx \wedge dy \wedge dz$ で、半球体の縁のうち底の円板では $z = 0$ です。

06

Stokes の定理

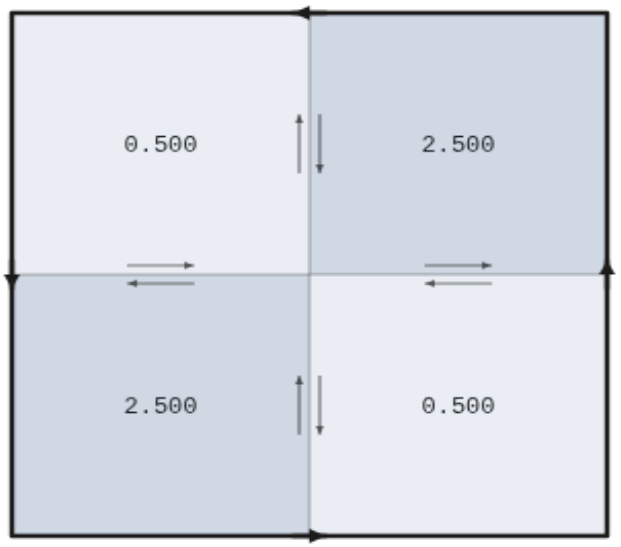
「内側での微分の総和は、縁での値の総和」。(3) を全次元にまとめた形です。M をコンパクトで向きのついた n 次元の多様体（縁 ∂M があってよい）、ω を (n−1)-形式とすると

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \tag{9}$$

∂M の向きは、外向きの法線を先頭に置くと M の向きになるように取ります。区間なら (3)、平面の領域なら (7) による Green の定理、$\mathbb{R}^3$ の曲面なら回転の Stokes の定理、立体なら Gauss の発散定理です 既知 。

証明の筋。長方形 $[a,b]\times[c,d]$ で $\omega = Q\, dy$ なら $\iint \partial_x Q\, dx\, dy = \int_c^d (Q(b,y) - Q(a,y))\, dy$ で、右の辺（上向き）と左の辺（下向き）の線積分の和です。一般の領域は小さな正方形に分けます。隣り合う正方形は共通の辺を逆向きにたどるので内側の辺は打ち消し合い、外周だけが残ります。一方、小さな正方形の周回は「中心の $d\omega$ × 面積」に近づきます。

図 2　分割の数 N を変えても、小正方形の周回（数字と塗り）の総和は外周の値 6 のまま。「周回 ÷ 面積」は中心の $d\omega$ に近づきます。N ≤ 4 では内側の辺に、両隣がたどる逆向きの矢印を描きます。



N = 2 Σ 周回 = 6.000000 外周の ∮ = 6.000000 max|周回/面積 − dω| = 0.250000 = 1/4

$\omega = (-\frac{y}{4} - xy^2 - y^3)\,dx + (\frac{x}{4} + x^2 y)\,dy$、$d\omega = (\frac{1}{2} + 4xy + 3y^2)\,dx \wedge dy$、領域 $[-1,1]^2$。計算 周回は四辺の線積分の閉じた式でその場で計算（表 1 と一致）。

計算 **表 1**　図 2 の ω で、各小正方形の周回を四辺の線積分の和として求めたもの（面積分は使わない）。

N	周回の総和	max |周回/面積 − dω(中心)|
1	6.000000000000	1.000000
2	6.000000000000	0.250000
8	6.000000000000	0.015625
64	6.000000000000	0.000244

総和はどの N でも外周の $\oint \omega = 6$ と一致し（差 3×10^{-15} 以下）、ずれはちょうど $1/N^2$ で減ります（一辺 $h = 2/N$ の正方形で $3y^2$ の平均が中心の値より $h^2/4$ 大きい）。単位円板でも両辺は $5\pi/4$ で一致 計算 。

07

閉と完全

$d\omega = 0$ なら**閉**、$\omega = d\eta$ となる η があれば**完全**といいます。(6) から完全なら閉。逆は空間の形に依ります。原点を除いた平面で：

$$d\theta := \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} \tag{10}$$

(7) で $\partial_x \frac{x}{r^2} + \partial_y \frac{y}{r^2} = \frac{2r^2 - 2x^2 - 2y^2}{r^4} = 0$ なので閉。単位円では例 1 と同じく $\oint d\theta = 2\pi$ なので、(3) から完全ではありません。偏角 θ は一周で 2π 増えるので、切れ目（例えば負の x 軸）を

入れた領域でだけ関数です。**dθ は切れ目なしに定義されます。**

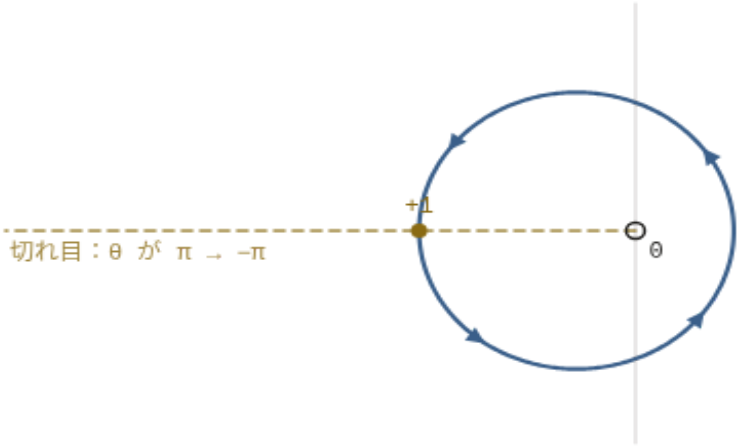
Poincaré の補題。星形の領域（ある点と各点を結ぶ線分を含む）では閉形式はすべて完全です 既知 。原点に関して星形なら、閉じた 1-形式 α に対し

$$\eta(x) = \int_0^1 x^i \, \alpha_i(tx) \, dt \tag{11}$$

が $d\eta = \alpha$ を満たします（$d(\sin x\, e^y + x^3 y)$ で確認。基点を (1, 0) に移すと右半平面の dθ から θ が戻る 計算 ）。

巻き数。$\frac{1}{2\pi}\oint_\gamma d\theta$ は閉曲線 γ が原点の周りを回る回数で、原点をまたがない変形では変わりません（変形の軌跡の帯で dθ は閉なので、(9) から差は 0）。θ は負の x 軸を上から下へ横切るたびに π から −π へ跳ぶので、巻き数は**切れ目を横切った向きつきの回数**でもあります。

図 3　閉曲線の中心 c_x を動かすと、$\frac{1}{2\pi}\oint d\theta$ が 0・1・2 と整数で跳びます。値は曲線が原点をまたぐときだけ変わり、切れ目（破線）を横切る向きつきの回数に等しい。



円・中心 (-0.375, 0)　∮dθ/2π = 1.000000　切れ目の横切り = 1　原点との距離 0.625

計算 720 点での偏角の差の和をその場で計算（16 か所でこの端末の計算と一致）。リマソンは $r = \frac{1}{2} + \cos t$ を $(c_x, 0)$ ずらした曲線。

計算 **表 2**　$\frac{1}{2\pi}\oint d\theta$。$2\times10^5$ 点で二通りに計算し、整数との差は 10^{-9} 未満。

閉曲線	巻き数
円 半径 1・中心 (0, 0)／逆回り／2 周	1／−1／2
円 半径 1・中心 (2, 0)（原点を囲まない）	0
リマソン $c_x = -0.25$／-1／0.5	2／1／0

1-05 の寄り道（毛玉の定理）の零点の指数もこの巻き数です。2-03 §06 のソレノイドの外では $A = \frac{\Phi}{2\pi}\,d\theta$ で、$dA = 0$ なのに周回は Φ。Aharonov–Bohm 効果は、閉で完全でない形式の物理です。

08

de Rham コホモロジーの入口

閉形式のうち完全なものを 0 と見なし、残りを数えます。

$$H^k(M) = \frac{\{\omega : d\omega = 0\}}{\{d\eta\}}, \qquad b_k(M) = \dim H^k(M) \tag{12}$$

b_k を **Betti 数**と呼びます。**例**。H^0 は連結成分ごとに定数の関数なので、b_0 は連結成分の数。$H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ は [dθ] が張る一次元です（閉形式 ω から $c\,d\theta$ を引いて単位円での周回を 0 にすると完全になります。どの閉曲線も原点をまたがずに「単位円を何周かする曲線」へ変形でき、変形で周回は変わらない（§07 の議論）ので周回はすべて 0。すると基点からの線積分が道に依らず関数を定めるからです 既知 ）。球面の面積形式 σ は閉で $\int_{S^2}\sigma = 4\pi$ ですが、$\sigma = d\eta$ なら縁の無い S^2 で (9) から積分は 0 のはず。よって完全ではありません。

de Rham（1931）の定理を今日の言葉で言うと、H^k は形式を使わず位相だけで定義されるコホモロジー（実係数）と一致します 既知 。例：$\mathbb{R}^n$ は (1, 0, 0, ⋯)、$\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ は (1, 0, 1, 0)、S^4 は (1, 0, 0, 0, 1)（3-05 の舞台）。

点磁荷。$\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ の 2-形式 $\beta = (x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy)/r^3$ は磁場 $\hat{\mathbf{r}}/r^2$ で、$d\beta = 0$ ですが原点を囲む閉曲面での積分は 4π（球面・ずらした立方体で差 10^{-9} 未満、囲まない球面で 0 計算 ）です。よって全体で $dA = \beta$ となる A はありません。負の z 軸の外では $A_N = (1-\cos\vartheta)\,d\varphi$、正の z 軸の外では $A_S = -(1+\cos\vartheta)\,d\varphi$（球座標）が使え、差 $2\,d\varphi$ は多価の関数 2φ によるゲージ変換です 計算 。北と南の二つの領域でポテンシャルを別々に取り、重なりでゲージ変換により貼り合わせる扱いは Wu–Yang（1975）の §III にあります。この貼り合わせの言葉が束と接続です（1-07）。

全磁束を Φ とすると差は $\frac{\Phi}{2\pi}\,d\varphi$（ここでは Φ = 4π）です。電荷 q の粒子の位相因子 $e^{iq\chi/\hbar}$（2-03）が $\chi = \frac{\Phi}{2\pi}\varphi$ で一価になるのは、$q\Phi/h$ が整数のときです。点磁荷の量子化は Dirac（1931）によるもので、束の言葉での読みは 1-07 §08 にあります。

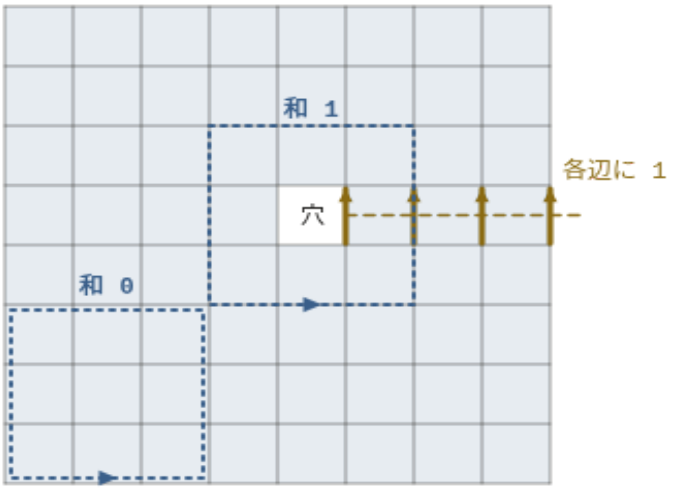
寄り道：格子の上の微分形式

飛ばしてよい小節です。

正方格子の頂点・向きつきの辺・面に値を置いたものを 0-・1-・2-形式とし、d_0 を辺の両端の差、d_1 を面の縁を反時計回りにたどった和とします。各頂点は面の縁で + と − に一度ずつ現れるので、$d_1 d_0 = 0$ は整数の行列として厳密です（2-03 の格子でゲージ関数が面の値から消えた理由）。$b_0 = \dim\ker d_0$、$b_1 = \dim\ker d_1 - \operatorname{rank} d_0$、$b_2 = F - \operatorname{rank} d_1$（F は面の数）を計算したのが表 3 です。

計算 **表 3**　格子の上の Betti 数（一辺 L = 8。L = 4 でも同じ）と、対応する滑らかな曲面の既知の値。表は図 4 の中にあり、行を選ぶと図が変わります。

図 4　下の表の行を選ぶと、その格子（一辺 8）と、頂点・辺・面の数 V・E・F、Betti 数が出ます。「面を一つ除く」では、切れ目（破線）を横切る辺に 1 を置いた 1-形式（太い矢印）と、二つの閉路（点線）での和を描きます。穴を囲む閉路で 1、囲まない閉路で 0 です。



面を一つ除く　V = 81　E = 144　F = 63　$(b_0, b_1, b_2) = (1, 1, 0)$　$V - E + F = 0 = b_0 - b_1 + b_2$

格子	(b_0, b_1, b_2)	滑らかな場合
正方形	(1, 0, 0)	円板 (1, 0, 0)
面を一つ除く	(1, 1, 0)	穴が一つの円板 (1, 1, 0)
面を二つ除く	(1, 2, 0)	穴が二つの円板 (1, 2, 0)
周期的な格子	(1, 2, 1)	トーラス T^2 (1, 2, 1)
立方体の表面	(1, 0, 1)	球面 S^2 (1, 0, 1)

計算 この図の数はこの端末で計算しました（整数の行列 d_0・d_1 の階数から）。図はその数を埋め込んで描くだけです。

細かさに依らず滑らかな場合の値が出ます（両者のコホモロジーが一致するという定理の小さな確認 既知 ）。図 4 の数では $V - E + F = b_0 - b_1 + b_2$ も成り立っています。核の次元と階数の和が列の数になることから、どの格子でも言えます 既知 。穴一つの格子で、穴から右端への切れ目を横切る辺にだけ 1 を置くと閉で、穴を一周する和は 1、穴を囲まない閉路では 0 です 計算 。dθ/2π の格子版です。辺に数でなく群の元を置くのが Wilson の格子ゲージ理論です（5-01）。

09

ホッジ双対と Maxwell 方程式

ここまで計量を使っていません。ホッジ双対には計量が要るので、この節で使う分だけをその場で定義します。計量は、座標の方向どうしの内積 η_{ij} の表で与えます（ここでは対角で、成

分は ±1)。ミンコフスキー時空（2-04）では座標 (t,x,y,z) について $\eta=\mathrm{diag}(-1,1,1,1)$（符号 $(-,+,+,+)$）、$c=\varepsilon_0=\mu_0=1$)、ユークリッドの $\mathbb{R}^4$ では $\eta=\mathrm{diag}(1,1,1,1)$ です。

- **体積形式**：$\mathrm{vol}=dt\wedge dx\wedge dy\wedge dz$（ユークリッドでは $dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3\wedge dx^4$)。
- **形式どうしの内積**：基底について $\langle dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k},\ dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\rangle=\eta_{i_1i_1}\cdots\eta_{i_ki_k}$、添字の組が違う基底どうしは 0。一般の形式には係数について双線形に延ばします。
- **ホッジ双対**：k-形式 β を (n−k)-形式 $*\beta$ に移す線形写像で、すべての k-形式 α について $\alpha\wedge*\beta=\langle\alpha,\beta\rangle\,\mathrm{vol}$ となるもの。

例。ミンコフスキーで $\langle dt\wedge dx,dt\wedge dx\rangle=\eta_{tt}\eta_{xx}=-1$ と $dt\wedge dx\wedge dy\wedge dz=\mathrm{vol}$ から $*(dt\wedge dx)=-dy\wedge dz$。$\langle dy\wedge dz,dy\wedge dz\rangle=+1$ と $dy\wedge dz\wedge dt\wedge dx=\mathrm{vol}$ から $*(dy\wedge dz)=dt\wedge dx$ です（2-形式の基底 6 個すべてで確認 計算)。時間を含む基底にだけ −1 が入り、これが (14) の符号と下の $**$ の符号に効きます。

電磁場に使います。ポテンシャルを 1-形式にまとめると

$$A=-\phi\,dt+A_x\,dx+A_y\,dy+A_z\,dz,\qquad F=dA=-E_i\,dt\wedge dx^i+B_x\,dy\wedge dz+B_y\,dz\wedge dx+B_z\,dx\wedge dy \tag{13}$$

（$\mathbf{E}=-\nabla\phi-\partial_t\mathbf{A}$、$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$)。Maxwell 方程式の四本は二つになります。

$$dF=0,\qquad d{*}F=*j,\qquad j=-\rho\,dt+J_x\,dx+J_y\,dy+J_z\,dz \tag{14}$$

$dF=0$ は (6) から自動的で 2-03 の源の無い Maxwell の式の二本、$d{*}F=*j$ が源のある Maxwell の式の二本です（無作為なポテンシャルで確認 計算)。ゲージ変換 $A\mapsto A+d\chi$ で F が変わらないのも (6) です（2-03 のゲージ変換の式)。作用に入るのは $F\wedge*F=(|\mathbf{B}|^2-|\mathbf{E}|^2)\,\mathrm{vol}$、また $F\wedge F=-2(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})\,\mathrm{vol}$ です 計算 。

四次元でだけ起きること

$*F$ は (n−2)-形式で、F と同じ次数になるのは n = 4 だけです。2-形式の上の $**$ はユークリッドの $\mathbb{R}^4$ で +1（$*$ の固有値 ±1 が 3 個ずつ)、ミンコフスキーで −1（固有値 $\pm i$）です（公式 $(-1)^{k(n-k)+s}$、s は負の符号の数、とすべての k で一致 計算)。ユークリッドでは $F=F^+ +F^-$（自己双対・反自己双対）と分かれ、$|F|^2=|F^+|^2+|F^-|^2\geq\big||F^+|^2-|F^-|^2\big|=|\langle F,{*}F\rangle|$。積分すると $\int F\wedge*F\geq|\int F\wedge F|$、等号は $F=\pm*F$ で、インスタントンの不等式の骨格です（3-05)。

ミンコフスキーでは 2-形式の上で $**=-1$ なので、$*F=\lambda F$ なら $-F=\lambda^2F$ となり、$*F=\pm F$ を満たす実の F は 0 だけです。物理では、インスタントンを虚時間（2-04・4-02）で考えます。U(1) では $F\wedge F=d(A\wedge F)$ と完全なので、その積分は境界（無限遠）の項だけで決まります。非可換の場合に、これが整数値の位相的な量になります（3-05)。

四次元の記事・1-12 も参照。非可換では $F = dA + A \wedge A$（A は反エルミートな行列に値をとる幾何の書き方。物理の書き方との翻訳は 3-02）で、$dF = 0$ の代わりに $dF + A \wedge F - F \wedge A = 0$（Bianchi）です（1-07・3-03）。

この章が言えている範囲

項目	言えていること	言えていないこと
外微分・Stokes	(4)〜(8)、$d^2 = 0$ の理由、半球面の例、表 1 計算	引き戻しと d の可換性、一般の Stokes の定理の証明 既知
閉と完全・de Rham	dθ・面積形式・点磁荷が完全でない理由、表 2・3、図 4 の切れ目の 1-形式 計算	Poincaré の補題の一般形、de Rham の定理 既知
Maxwell とホッジ双対	基底での $*$ の値、(14) の符号、$F \wedge *F$・$F \wedge F$、$**$ の符号と固有値 計算	非可換の場合（1-07・3-03）、インスタントンの存在（3-05）
ヤン–ミルズ	ゲージ場が形式で書ける理由、四次元の特別さの一つ	質量ギャップ・理論の構成については何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1〜3、本文の数値、図 1〜4	**この端末で計算**	Python 3.12・NumPy 1.26：`forms_algebra.py`・`stokes_cells.py`・`winding.py`・`cochains.py`・`monopole.py`・`maxwell_forms.py`・`hodge_basis.py`・`hemisphere.py`・`lattice_fig.py`。図は素の JavaScript（図 1 は行列式をその場で計算、図 2・3 の関数は node で表 1・`winding.py` と照合、図 4 は `lattice_fig.py` の数を埋め込み）
外微分・Stokes・Poincaré の補題・de Rham の定理	既知（書誌のみ）	M. Spivak, *Calculus on Manifolds* (1965)；R. Bott, L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology* (1982)
外微分の起源	一次資料（書誌のみ）	É. Cartan, Ann. Sci. ÉNS (3) 16 (1899) 239–332。外微分の起源という位置づけは二次資料による
de Rham の定理	一次資料（書誌のみ。定理の帰属は二次資料で確認）	G. de Rham, J. Math. Pures Appl. (9) 10 (1931) 115–200
点磁荷を二つの領域の貼り合わせで扱うこと（§ III）	一次資料（本文を確認）	T. T. Wu, C. N. Yang, Phys. Rev. D 12 (1975) 3845–3857

もの	種別	出典・道具
点磁荷の量子化	一次資料（書誌のみ。帰属は Wu–Yang の本文による）	P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. Lond. A 133 (1931) 60

次に読む章：1-07 ベクトル束と接続（§08 の貼り合わせ）。

ベクトル束と接続 — 点ごとに別々の空間を、道に沿って比べる規則

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 各点のベクトル空間を道に沿って比べる規則（接続）を行列値の 1-形式 A で書き、平行移動・曲率 $F = dA + A \wedge A$・ホロノミー・ゲージ変換 $A \mapsto gAg^{-1} - (dg)g^{-1}$ を一続きに導きます。単極子の貼り合わせからは整数（第一 Chern 数）が出ます。

前提となる章 — 1-04（リー環・随伴表現）と 1-06（1-形式・外微分・§08 の点磁荷）。2-03 の位相因子を知っていると早く読めます（§08 で要る分はその場で定義します）。

先に言うこと — 準備の章で、質量ギャップについては何も示しません。Gauss–Bonnet・Ambrose–Singer・Chern 数の整数性は証明せずに引きます（既知）。ゲージ軌道の空間は 3-04 です。

この章の順序

1. なぜ束と接続か — 運んでからでないと引けない
2. ベクトル束 — 変換関数・自明な束とねじれた束
3. 接続と共変微分 — ゲージ変換の式
4. 平行移動 — 球面の一周（図 1）。寄り道：フーコーの振り子
5. 曲率 — 小さな輪のずれ・定数でも曲がる接続（図 2）
6. ホロノミー — Wilson ループ
7. ゲージ変換の幾何 — Bianchi 恒等式
8. 貼り合わせと整数 — 北と南の位相因子（図 3）・第一 Chern 数

01

なぜ束と接続か — 運んでからでないと引けない

場 ψ が各点で $\mathbb{C}^N$ に値をとるとします（クォークの色なら $N=3$）。ゲージ理論では、各点の $\mathbb{C}^N$ の基底（どの向きを「一番目の色」と呼ぶか）を点ごとに選び直してよいと考えます（3-01）。すると $\psi(x+h)-\psi(x)$ は別々の基底で書いた成分の差で、選び直すと値が変わります。球面の接ベクトルも同じで、北極と赤道の接平面は別物です。そこで、一方の空間を道に沿って他方へ運ぶ規則 P を用意し、運んでから引きます（e_i は座標方向）。

$$D_i\psi(x)=\lim_{h\to 0}\frac{P_{x+he_i\to x}\,\psi(x+he_i)-\psi(x)}{h} \tag{1}$$

運ぶ規則を**接続**、各点の空間を束ねたものを**ベクトル束**と呼びます。**例。**電磁気学では $N=1$ で、運ぶ規則は位相因子 $e^{\frac{iq}{\hbar}\int \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}}$ でした（2-03）。この章はそれを行列に広げ、1-06 §08 の「二枚の貼り合わせ」も同じ言葉で扱います。

02

ベクトル束 — 局所的には積、全体ではねじれうる

ベクトル束 $E\to M$ は、多様体 M（1-05）の各点 x に N 次元の空間 E_x（**ファイバー**）を付け、小さな開集合 U_α の上では $U_\alpha\times\mathbb{C}^N$ と同一視できるようにしたものです。N を**階数**、$N=1$ のものを**直線束**と呼びます。ファイバーを $\mathbb{R}^N$ にしても同じように定義でき、これを**実ベクトル束**と呼びます。同一視を与える基底が**局所的な枠**で、重なりでは二つの枠の成分が行列で結ばれます。

$$\psi_\alpha=g_{\alpha\beta}\,\psi_\beta,\qquad g_{\alpha\beta}\,g_{\beta\gamma}=g_{\alpha\gamma} \tag{2}$$

$g_{\alpha\beta}$ を**変換関数**、三つが重なる所での右の式をコサイクル条件と呼び、変換関数が群 G（U(1)・SU(N) など）に値をとるとき G を**構造群**と呼びます。(2) を満たす変換関数があれば貼り合わせで束が作れます 既知 。各点で E_x の元を滑らかに選んだものが**切断**で、場 ψ は切断です。

自明な束とねじれた束

全体で $M\times\mathbb{C}^N$（実なら $M\times\mathbb{R}^N$）と同一視できる束を**自明**と呼びます。次の三つは自明ではありません 既知 ：メビウスの帯（ファイバー $\mathbb{R}$ の実直線束。円を二つの弧で覆うと、重なりの一方で変換関数 +1、他方で −1）、接束 TS^2（実の階数 2 の束）、§08 の単極子の束（$n\neq 0$）。自明なら 0 にならない切断があるはずです。メビウスの帯では、切断を枠で書いた値が一周で符号を変えるので、中間値の定理でどこかが 0 になります。TS^2 では毛玉の定理（1-05）がそれを禁じます。

ファイバーを複素数にすると、同じ変換関数でもねじれが解けます。$-1 = e^{i\pi}$ は U(1) の中で e^{it}（t を π から 0 へ）と 1 まで連続に動かせ、変換関数を連続に動かしても束は同型のままなので 既知 、重なりで +1 と −1 を変換関数とする複素直線束は自明です。円の上では、ねじれが残るかは、変換関数が値をとる群の中でそれを 1 まで連続に動かせるかで決まります。$\{\pm 1\}$ の中では動かせず、U(1) の中では動かせます。§08 では U(1) の中の巻き数が、この動かせなさを担います。$\mathbb{R}^4$ の上の束は自明ですが 既知 、無限遠を一点と見なした S^4 や周期的な格子では自明でない束が現れます（3-05）。

03

接続と共変微分 — $D = d + A$

枠を決めると、(1) の P の一次の項が行列値の 1-形式 $A = A_i\,dx^i$ になります。$A_i(x)$ は構造群のリー環 $\mathfrak{g}$ の元で（1-03）、U(N)・SU(N) なら反エルミート行列です。

$$D\psi = d\psi + A\,\psi, \qquad D_i\psi = \partial_i\psi + A_i\,\psi \tag{3}$$

(1) で $P_{x+he_i\to x} = 1 + hA_i + O(h^2)$ と置いたものです。枠を $\psi' = g\psi$（$g(x)\in G$）と取り替えても $D'\psi' = g\,D\psi$ となるには、$(d+A')(g\psi) = dg\,\psi + g\,d\psi + A'g\psi$ が $g(d\psi + A\psi)$ に等しいことから

$$A' = g\,A\,g^{-1} - (dg)\,g^{-1} \tag{4}$$

が要ります。これが**ゲージ変換**です。重なりの A_α と A_β も $g = g_{\alpha\beta}$ として (4) で結ばれ、**貼り合わせとゲージ変換は同じ式**です。

例（U(1)）。$A = -\frac{iq}{\hbar}\,\mathbf{A}\cdot d\mathbf{x}$、$g = e^{iq\chi/\hbar}$ と置くと、(3) は 2-03 の共変微分、(4) は $\mathbf{A}\mapsto \mathbf{A} + \nabla\chi$ です。物理の本はエルミートな T_a（1-04）で $A = -i\,A_\mu^a T_a\,dx^\mu$ と書き、実数の A_μ^a をゲージ場と呼びます（結合定数の置き方は 3-02）。二つの接続の差は $g(A_1 - A_2)g^{-1}$ と変わり（dg の項が消える）、足し引きできる量です。接続の全体はそこで**アフィン空間**——原点は決まっていないが、二点の差がベクトル空間の元になる集合——になります。基準の接続 A_0 を一つ選べば、どの接続も A_0 ＋（$\mathfrak{g}$ 値の 1-形式）と書けます（3-04）。

04

平行移動 — 道に沿った常微分方程式

道 $\gamma:[0,1]\to M$ に沿って、共変微分が 0 になるように v を運びます。

$$\frac{dv}{dt} + A\big(\dot\gamma(t)\big)\,v = 0, \qquad v(1) = P_\gamma\,v(0) \tag{5}$$

解はただ一つで、P_γ を**平行移動**と呼びます。A が反エルミートなら $\frac{d}{dt}|v|^2 = -v^*(A+A^*)v = 0$ で P_γ はユニタリです。各時刻の $A(\dot\gamma)$ が可換でないので $\exp(-\int A)$ とは書けず、短い区間の解を時刻の順に掛けます。

$$
\begin{aligned}
P_\gamma &= \lim_{n\to\infty} e^{-A_n \Delta t} \cdots e^{-A_1 \Delta t} \\
&=: \mathcal{P}\exp\Big(-\int_\gamma A\Big)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$A_k = A(\dot\gamma(t_k))$ で、後の時刻を左に置く**経路順序積**です。道をつなげば $P_{\gamma_2\gamma_1} = P_{\gamma_2}P_{\gamma_1}$、ゲージ変換では両端の枠の取り替えだけを受けます。

$$
P'_\gamma = g\big(\gamma(1)\big)\, P_\gamma\, g\big(\gamma(0)\big)^{-1} \tag{7}
$$

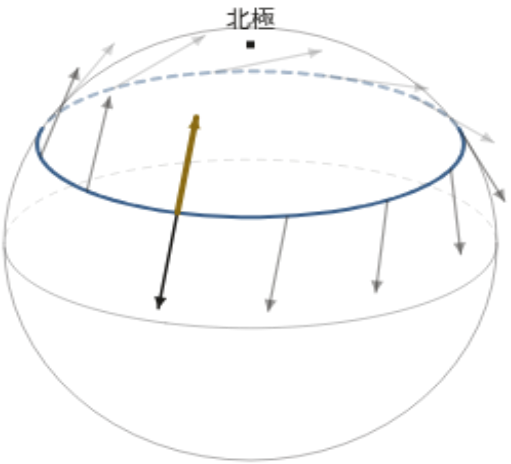
例：球面の一周

球面の中から見て曲がらないように接ベクトルを運ぶのが Levi-Civita の平行移動で、単位球面では $\dot v = -(v\cdot\dot\gamma)\,\gamma$（法線方向の変化だけを許す）です。自分の速度ベクトル $\dot\gamma$ をこの平行移動で保つ曲線を**測地線**と呼び、球面では大円です。余緯度 θ_0 の緯線を東へ回ると、南向き・東向きの枠 (e_θ, e_φ) に対する角は $\alpha(\varphi) = \alpha_0 - \varphi\cos\theta_0$ で変わり、一周では

$$
\Delta\alpha \equiv 2\pi(1-\cos\theta_0) \pmod{2\pi} \tag{8}
$$

右辺は緯線が囲む球冠の面積です。赤道以外の緯線は大円でない（測地線でない）ので、ベクトルは枠に対して回ります。(8) は「曲率 1 の面では一周の回転角が囲む面積に等しい」という Gauss–Bonnet の定理の特別な場合です [既知]。三辺が測地線の**測地三角形**でも回転角は面積に等しく、表 1 の最下行がその例です。

図 1　つまみ（または表 1 の行）で余緯度 θ_0 を変え、「運ぶ」で緯線を東へ一周。一周後の太い矢印は出発時の細い矢印（薄い矢印は途中）からずれ、その角が球冠の面積 (8) に等しい。



θ₀ = 60°　φ = 360°　α = -180.0°　(8) = 180.0°

θ_0	一周の回転（RK4）	(8) との差
10°	5.469209°	2×10^{-12}
60°	**180.000000°**	**4×10^{-11}**
90°	0°（= 360°）	6×10^{-14}
測地三角形（面積 $\pi/2$）	90.000000°	—

計算 **表 1**　(5) を RK4 で積分した一周の回転（枠に対する角、mod 360°）。最下行は北極と赤道上の経度 0°・90° を結ぶ測地三角形。図は $\alpha = -\varphi\cos\theta_0$ をブラウザで計算。JS が無効ならこの表が図の中身です。

寄り道：フーコーの振り子

飛ばしてよい小節です。

振動面は地面に対して回って見えますが、正確には回るのは地面の枠（北・東）で、振動面は緯線に沿って平行移動されます（自転がゆっくりな近似）既知 。北緯 λ なら (8) で $\theta_0 = 90^\circ - \lambda$ とおき、一恒星日に $-2\pi\sin\lambda$（北半球では時計回り）。北緯 48.85°（パリ付近）で 271.08° です 計算 。

05

曲率 — 小さな輪のずれ

平行移動が道に依るかは、小さな輪を回ったときのずれで測れます。共変微分の順序を入れ替えた差では ψ の微分が消え、行列の掛け算だけが残ります。

$$
\begin{aligned}
[D_i, D_j]\,\psi &= F_{ij}\,\psi, \\
F_{ij} &= \partial_i A_j - \partial_j A_i + [A_i, A_j]
\end{aligned}
\tag{9}
$$

形式でまとめると $F = dA + A \wedge A$ です。dA は成分ごとの外微分で、行列値の形式どうしの外積は、成分の行列を掛けて dx の外積を取ります。

$$
A \wedge A = \sum_{i,j} A_i A_j\, dx^i \wedge dx^j = \tfrac{1}{2}\sum_{i,j} [A_i, A_j]\, dx^i \wedge dx^j
$$

二つ目の等号は、i と j の名前を入れ替えた式（$dx^j \wedge dx^i = -dx^i \wedge dx^j$）と平均したものです。スカラーの 1-形式 α なら $\alpha \wedge \alpha = 0$ ですが（1-06）、行列は可換でないので 0 になりません。$F = \sum_{i<j} F_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$ の係数が (9) の F_{ij} で、Jaffe–Witten の問題説明の式そのものです（1-03）。F を**曲率**、物理では**場の強さ**と呼びます。

小さな輪で確かめる

点 p から x・y 方向に一辺 ε の正方形を反時計回りに一周すると、

$$P_{\square} = 1 - \varepsilon^2 F_{xy}(p) + O(\varepsilon^3) \tag{10}$$

(4) を (9) に入れると $F' = gFg^{-1}$ です。U(1) では F はゲージで変わらず、（係数 $-iq/\hbar$ を除いて）電場と磁場そのもの（1-06 §09）ですが、非可換では F が枠とともに回り、変わらないのは $\mathrm{tr}(F_{ij}F_{kl})$ のような組み合わせです（3-03 の作用）。

計算 **表 2**　$\mathfrak{su}(2)$ 値の滑らかな接続で (5) を RK4 で積分し、(10) と比べる（作用素ノルム、$|F_{xy}| = 0.369$）。

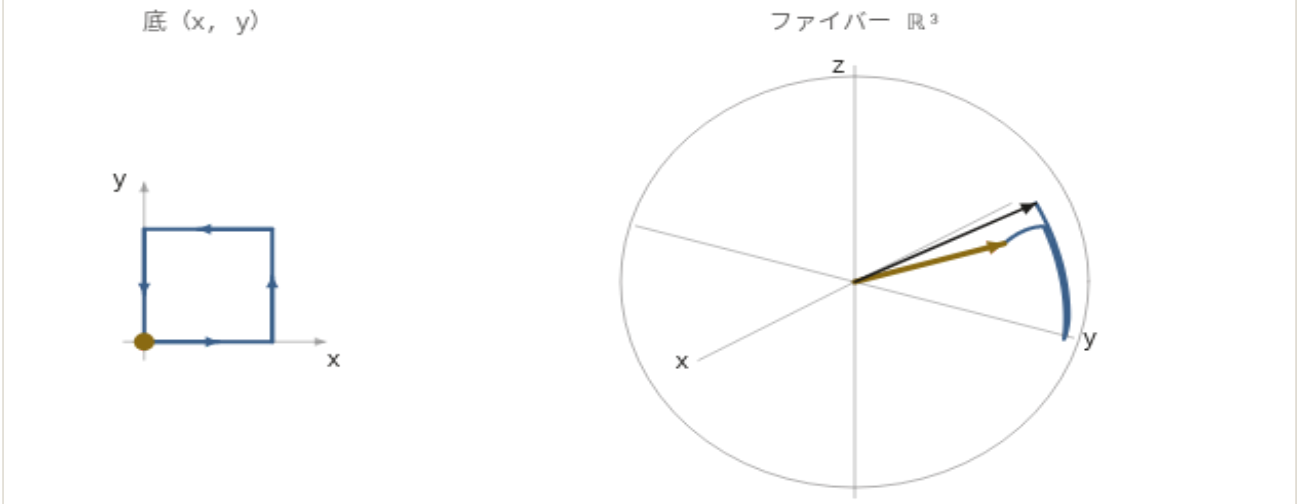
ε	$\left\lvert \frac{P_{\square}-1}{\varepsilon^2} + F_{xy} \right\rvert$	F の代わりに dA で
0.2	0.076538	0.348489
0.1	0.038844	0.324000
0.05	0.019532	0.311139
0.025	0.009790	0.304592

ε を半分にすると誤差も半分（$O(\varepsilon)$）。交換子を落とした dA では誤差が $\|[A_x, A_y]\| = 0.298$ に近づいて消えません。でたらめな g で (7) は差 1.5×10^{-12}、$F' = gFg^{-1}$ は差 3×10^{-7}（差分の誤差）計算 。

定数でも曲がる接続

非可換では A が定数でも F は 0 になりません。群を SO(3)（SU(2) の随伴表現、1-04）、ファイバーを $\mathbb{R}^3$（§02 の実ベクトル束）とします。ここでの L_x, L_y, L_z は実の反対称行列 $(L_a)_{bc} = -\varepsilon_{abc}$ で、1-04 §02 のエルミートな L_a に $-i$ を掛けたものです。$L_a v = e_a \times v$、$[L_x, L_y] = L_z$ を満たし、e^{tL_z} は z 軸まわりの角 t の回転です（1-04 の e^{-itL_3} と同じ）。$A_x = aL_x$、$A_y = aL_y$ と置くと、$dA = 0$ なのに $F_{xy} = a^2 L_z$ です。U(1) の定数の A は $g = e^{A_x x + A_y y}$ で消せますが（純ゲージ）、こちらは $F' = gFg^{-1} \neq 0$ なので、どんな g でも消せません。

図 2　左は底の正方形、右はファイバー $\mathbb{R}^3$。「運ぶ」で左の点が一周する間に右のベクトルが (5) で動き、一周後の太い矢印が出発時の細い矢印からずれます。つまみ（または表 3 の行）は $s = \varepsilon a$、「可換にする」は $A_y = aL_x$。



s = 0.60　v_0 と v の角 19.52°　軸 (-0.28, 0.28, -0.92) まわり 20.04°（s^2 = 20.63°）

s	回転角 θ（rad）	θ / s²	回転軸
0.1	0.009992	0.999168	$(-0.050, 0.050, -0.998)$
0.4	0.157919	0.986994	$(-0.195, 0.195, -0.961)$
1.2	1.297942	0.901348	$(-0.492, 0.492, -0.719)$

計算 **表 3**　四辺の回転の合成 $e^{sL_y}e^{sL_x}e^{-sL_y}e^{-sL_x}$ の回転角と軸（可換なら $|P_{\square}-1|<10^{-15}$）。図は同じ合成をブラウザで計算。JS が無効ならこの表が図の中身です。

θ/s^2 は $s\to 0$ で 1 に近づき、軸はほぼ −z で、(10) の $1-s^2L_z$（−z まわりの正の回転）と合います。「ゲージ場が自分自身と相互作用する」ことの幾何の顔です（3-02）。

06

ホロノミー — 閉じた道が残すもの

点 x_0 から出て戻る道 γ の平行移動を**ホロノミー** Hol_γ と呼びます。(7) で両端が同じ点なので、ゲージ変換では共役で変わり、トレースは変わりません。

$$\begin{aligned}\mathrm{Hol}'_\gamma &= g(x_0)\,\mathrm{Hol}_\gamma\, g(x_0)^{-1},\\ W(\gamma) &= \tfrac{1}{N}\,\mathrm{tr}\,\mathrm{Hol}_\gamma\end{aligned}\tag{11}$$

ゲージ不変な $W(\gamma)$ を **Wilson ループ**と呼びます。

- **平坦でも残る**。$F=0$ なら、ホロノミーは輪の連続変形で変わりません 既知 。穴のある空間では縮められない輪のホロノミーが 1 でないことがあり、それが Aharonov–Bohm 効果です（2-03）。
- **曲率はホロノミーの無限小版**。M が連結なら、x_0 の輪のホロノミー全体（部分群）のリー環は、すべての点 y の曲率 $F_{ij}(y)$ を、y と x_0 を結ぶあらゆる道で x_0 まで運んだもので張られます（Ambrose–Singer 1953）既知 。

- **格子**。辺に平行移動 $U_\ell \in G$ を置き、プラケットの積 U_p を曲率の代わりにするのが Wilson の格子です（5-01）。(10) から間隔 a で $U_p \approx \exp(-a^2 F_{\mu\nu})$、よって $\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(1-U_p) \approx -\frac{a^4}{2}\,\mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}^2 \geq 0$ です（μ, ν は固定で和を取らない。$F_{\mu\nu}$ が反エルミートなので $F_{\mu\nu}^2 = -F_{\mu\nu}^* F_{\mu\nu} \leq 0$）既知 。

07

ゲージ変換の幾何 — 枠の取り替えと、変わらないもの

ゲージ変換は滑らかな写像 $g : M \to G$ で、切断を $g\psi$、接続を (4)、曲率を gFg^{-1} に動かします。全体 $\mathcal{G}$ は無限次元の群です。比喩で言えば各点のものさしの向きの選び直しで、正確には枠の取り替え（受動的）とも、束の**自己同型**——各ファイバーを線形に同型写像し、底の点は動かさない束の写像——（能動的）とも読め、式はどちらも (4) です。物理で意味を持つのは $\mathcal{G}$ で変わらない量です：Wilson ループ、作用の $\mathrm{tr}(F \wedge *F)$、位相の量 $\mathrm{tr}(F \wedge F)$（3-05）。

曲率にはゲージに依らない恒等式があります。$A \wedge F$ と $F \wedge A$ も §05 と同じ規則（成分の行列を掛けて dx の外積を取る）で定まり、行列の順序が効きます。

$$DF := dF + A \wedge F - F \wedge A = 0 \tag{12}$$

Bianchi 恒等式です。$F = dA + A \wedge A$ を入れると、$d(A \wedge A) = dA \wedge A - A \wedge dA$、$d^2 = 0$、外積の結合法則だけで消えます。U(1) では $dF = 0$（Maxwell 方程式の源の無い二本）。三次元の $\mathfrak{su}(2)$ 値の接続で、左辺は差分の誤差 3.5×10^{-7} 以内、交換子を落とすと 0.553 計算 。

接続の全体 $\mathcal{A}$ を $\mathcal{G}$ で割った $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ が物理で区別できる配位の空間で、各軌道から代表を連続的に選ぶ（大域的なゲージ固定）ことは一般にできません（Singer、3-04・4-08）。Wu–Yang（1975）の対訳表では、ゲージポテンシャル＝接続、位相因子＝平行移動、場の強さ＝曲率と並び、源の欄だけが「？」です。

08

貼り合わせと整数 — 単極子と第一 Chern 数

1-06 §08 で、点磁荷 $\hat{\mathbf{r}}/r^2$ のポテンシャルは北と南の二枚でしか書けず、重なりでの差は $2\,d\varphi$ でした。磁荷を g_m 倍して磁場 $g_m\hat{\mathbf{r}}/r^2$（全磁束 $\Phi = 4\pi g_m$）にすると差は $2g_m\,d\varphi$ で、§03 の例のとおり $-iq/\hbar$ を掛けて接続にすると

$$A_N - A_S = -\frac{iq}{\hbar}\,2g_m\,d\varphi$$

です。一方、可換な場合の (4) は $A_N - A_S = -g_{NS}^{-1} dg_{NS}$ なので、赤道の変換関数は $g_{NS} = e^{in\varphi}$、$n = 2qg_m/\hbar$ です。束の言葉では、北と南の二枚を赤道でこの g_{NS} により貼り合わせた U(1) 束です。g_{NS} は赤道を一周して元に戻らなければならないので、**n は整数**です。

位相因子で見る

n の意味は位相因子で見ると測れる形になります。閉じた道 C の**位相因子**は、(6) で $A = -\frac{iq}{\hbar}\,\mathbf{A}\cdot d\mathbf{x}$ とおいた平行移動（C のホロノミー、§06）です。U(1) では経路順序が要らず、Stokes の定理（1-06）から

$$\mathrm{Hol}_C = \exp\!\left(\frac{iq}{\hbar}\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}\right) = e^{iq\Phi_C/\hbar} = e^{2\pi i\,\Phi_C/\Phi_0}, \qquad \Phi_0 = \frac{h}{q}$$

です（Φ_C は C が囲む磁束、q > 0 とします。詳しくは 2-03）。Φ_0 を**磁束の単位**と呼び、$f = \Phi/\Phi_0$ と書くと $n = 2qg_m/\hbar = q\Phi/(2\pi\hbar) = f$ です。**以後 n と f は同じ量**で、f と書くときは整数とは限らない値も考えます。

余緯度 ϑ の緯線 C の位相因子を、北の球冠の上で使える A_N で計算すると、囲む磁束は $\Phi(1-\cos\vartheta)/2$ で $e^{i\pi f(1-\cos\vartheta)}$。南の球冠の上で使える A_S で計算すると、C は南の球冠の縁を逆向きに回るので $e^{-i\pi f(1+\cos\vartheta)}$ です。比は $e^{2\pi i f}$ で、一致するのは f が整数のときだけ。二枚の記述が一つの束の接続になる条件で、Dirac（1931）の量子化条件の、束の言葉での読みです。

図 3　つまみ（または表 4 の行）で f と余緯度 ϑ を変えると、単位円の上の二本の矢印——北の球冠から計算した位相因子と、南の球冠から計算した位相因子——が動きます。二本が重なるのは f が整数のときだけで、そのときは ϑ を変えても重なったまま動きます。「f を動かす」で f が 0 から 3 まで増えます。



f = 0.50　ϑ = 60°　北 45.0°　南 -135.0°　食い違い 180.0°

f	北から	南から	変換関数の巻き数
0.5	**0.707+0.707i**	**−0.707−0.707i**	0.5（一周で戻らない）
1	i	i	1

f	北から	南から	変換関数の巻き数
2	−1	−1	2

計算 **表 4**　余緯度 60° の緯線で。巻き数は $e^{if\varphi}$ の偏角の赤道一周の増分 ÷ 2π。$\frac{i}{2\pi}\int F$ はどの行でも f。図は二つの位相因子の閉じた式をブラウザで計算し、食い違いの角は $360^\circ \times f$（360° の整数倍は除く）です。JS が無効ならこの表が図の中身です。

曲率から読む

整数は曲率からも読めます。北と南の球冠で Stokes の定理を使い、赤道で (4)（可換なので $A_N - A_S = -g^{-1}dg$）を使うと

$$c_1 = \frac{i}{2\pi}\int_{S^2} F = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\text{赤道}} g_{NS}^{-1}\,dg_{NS} = n \tag{13}$$

左辺は $\frac{i}{2\pi}\cdot\left(-\frac{iq}{\hbar}\right)\Phi = f$、右辺は変換関数の巻き数（1-06 §07）で、上で見た n = f がここでも出ます。c_1 を**第一 Chern 数**と呼びます。接続を連続的に変えても整数は飛べないので、束だけで決まります 既知 。

四次元では

S^4 の上の SU(2) 束は整数 $c_2 = \frac{1}{8\pi^2}\int \mathrm{tr}(F\wedge F)$（符号は本による）で分類されます 既知 。$\mathbb{R}^4$ の上でも、作用が有限なヤン–ミルズ方程式の解は遠方で純ゲージ $-(dg)g^{-1}$（$g : S^3 \to SU(2)$）に近づき、g の巻き数がインスタントン数です 既知 。これは無条件の事実ではありません。正確には、そうした解が無限遠の一点を足した S^4 の上の束の接続に延びるという定理（Uhlenbeck の除去可能特異点定理）に基づき、方程式の解でない一般の場では遠方での適当な減衰を仮定して同じことを言います。詳しくは 3-05・1-12・四次元の記事。

この章が言えている範囲

項目	言えていること	言えていないこと
束・接続・平行移動	(2)〜(8) の導出。表 1・図 1 計算	§02 の例の非自明性・変換関数を連続に動かしても束が同型であること・Gauss–Bonnet の一般形 既知
曲率とホロノミー	(9)〜(12)。表 2・3、図 2、(7) と $F' = gFg^{-1}$ の確認 計算	Ambrose–Singer・平坦な接続の性質の証明 既知
単極子と Chern 数	貼り合わせから整数が出ること、$n = \Phi/\Phi_0$、(13)、表 4・図 3 計算	Chern 数の一般論、c_2 による分類、$\mathbb{R}^4$ の場が S^4 に延びること 既知
ヤン–ミルズ	ゲージ場・場の強さ・ゲージ変換の幾何の意味	質量ギャップ・理論の構成については何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1〜4・§04〜§07 の数値・図 1〜3	**この端末で計算**	Python 3.12・NumPy・SciPy（`sphere_holonomy.py` ほか 3 本）。図は素の JavaScript で、閉じた式をその場で計算
経路順序積の並べ方・対訳（Table I）・単極子	一次資料（本文を確認）	T. T. Wu, C. N. Yang, Phys. Rev. D 12 (1975) 3845–3857
$F = dA + A \wedge A$	一次資料（本文を確認）	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”（Clay）
平行移動・ホロノミー	既知（本文を確認）	S. M. Carroll, arXiv:gr-qc/9712019 (1997) 第 3 章
Levi-Civita・Ambrose–Singer・Dirac・Chern 類	一次資料（書誌のみ）	T. Levi-Civita, Rend. Circ. Mat. Palermo 42 (1916) 173–204；W. Ambrose, I. M. Singer, Trans. AMS 75 (1953) 428–443；P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. A 133 (1931) 60–72；S. S. Chern, Ann. of Math. 47 (1946) 85–121, doi:10.2307/1969037（頁の範囲は zbMATH の書誌で確認）
§08 の四次元：除去可能特異点	一次資料（書誌のみ）	K. Uhlenbeck, “Removable singularities in Yang–Mills fields”, Comm. Math. Phys. 83 (1982) 11–29, doi:10.1007/BF01947068
フーコーの振り子を平行移動として見ること	論文（書誌のみ）・二次資料で確認	J. B. Hart, R. E. Miller, R. L. Mills, “A simple geometric model for visualizing the motion of a Foucault pendulum”, Am. J. Phys. 55 (1987) 67–70, doi:10.1119/1.14972（書誌のみ）；Wikipedia “Foucault pendulum”（本文を確認）
§02 の例・Gauss–Bonnet・c_2	既知（書誌のみ）	Kobayashi–Nomizu, *Foundations of Differential Geometry* I (1963)；Nakahara, *Geometry, Topology and Physics* (1990)

次に読む章：1-08 確率と測度。この章の続きは 3-01〜3-04。

確率と測度 — 平均は落ち着き、揺らぎはガウスになる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 確率を「集合に重さを配る規則（測度）」として書く言葉。ガウス分布は共分散だけで決まり、高次のモーメントは対の数え上げになること。大数の法則と中心極限定理が「平均は落ち着き、揺らぎはガウスになる」と言い、その速さが $1/\sqrt{n}$ であること。

前提となる章 — なし（§03 の例は 1-02 があると読みやすい）。

先に言うこと — 測度論の証明はしません。無限次元の確率は 1-09 の主題です。四次元のヤン–ミルズ理論を確率測度として作ることは未解決で、このサイトもそれを示していません。2026-11 に公開された構成（6-00）が作ったのは相関関数と、そこから再構成した場の理論で、確率測度ではありません（6-04）。

この章の順序

1. なぜ確率か
2. 確率空間
3. 確率変数と分布 — 群の上の一様分布と半円（図1）
4. 期待値・分散・特性関数
5. 独立
6. ガウス分布 — 共分散と対の数え上げ（図2・寄り道：カタラン数を二通りに数える）
7. 格子の上のガウス場 — 相関長と質量（図3）
8. 大数の法則 — 平均は落ち着く（図4）
9. 中心極限定理 — 揺らぎはガウスになる（図4）
10. 寄り道：ガウスにならないもの

01

なぜ確率か — 場の理論は確率測度で書かれる

場の量子論を虚時間に移す（ユークリッド化、4-02）と、場の配置一つ一つに重み e^{-S}（S は作用）が付き、規格化すると**確率**として読めます。問題文も場の理論の構成の副産物に 'non-Gaussian, Euclidean-invariant measures' を挙げます 既知 。格子のヤン–ミルズでは各辺 ℓ に群の元 U_ℓ が乗り（5-01）、確率は次の形です。

$$d\mu(U) = \frac{1}{Z}\, e^{-S(U)} \prod_{\ell} dU_\ell, \qquad Z = \int e^{-S(U)} \prod_{\ell} dU_\ell \tag{1}$$

dU_ℓ は群の上の一様な重さ（§03）、Z は全体を 1 にする定数（2-08）です。**例：**辺が一本で群が円周 $U(1)$、$S = -\beta\cos\theta$（β は格子の結合の逆数。統計力学の逆温度と同じ字です）なら、(1) は密度 $e^{\beta\cos\theta}/Z$ で、β が大きいほど $\theta = 0$ の近くに集まります。この章はそのための言葉を揃えます。

02

確率空間 — 集合に重さを配る

確率とは、起こりうることの全体 Ω の部分集合（**事象**）に 0 から 1 の重さを配る規則です。重さを配る事象の族 $\mathcal{F}$ は Ω を含み、補集合と可算個の和集合で閉じているとします（**σ-加法族**）。三つ組 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が**確率空間**で、P には次を課します 既知 。

$$P(\Omega) = 1, \qquad P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (A_i \text{ が互いに交わらないとき}) \tag{2}$$

$\mu(\emptyset) = 0$ で (2) の後半（**可算加法性**）を満たす非負の集合関数が**測度**で、全体が 1 の測度が確率です（Durrett §1.1。公理化は Kolmogorov の 1933 年の本に始まるとされます）。$\mathcal{F}$ を全部の部分集合にしないのは、選択公理を使った構成で、回転で変わらず (2) を満たす長さを付けられない部分集合が作れるからです（Vitali 1905） 既知 。**例：**サイコロは $P(A) = |A|/6$。$[0,1]$ の一様分布は $P([a,b]) = b - a$、つまり長さ（**ルベーグ測度**）です。一点の確率は 0 なのにどれか一点は必ず出ますが、非可算個の和には (2) が使えないので矛盾しません。確率 1 で成り立つことを「**ほとんど確実に**」と言います。

03

確率変数と分布 — 群の上の一様分布と半円

確率変数は Ω 上の実数値関数 X で、$\{X \le a\}$ がどれも事象になるもの（**可測**）です。**分布**は Ω の重さを X で数直線に押し出した測度です。

$$\mu_X(B) = P\big(X^{-1}(B)\big), \qquad F_X(a) = P(X \le a), \qquad \mu_X(B) = \int_B \rho(x)\,dx \tag{3}$$

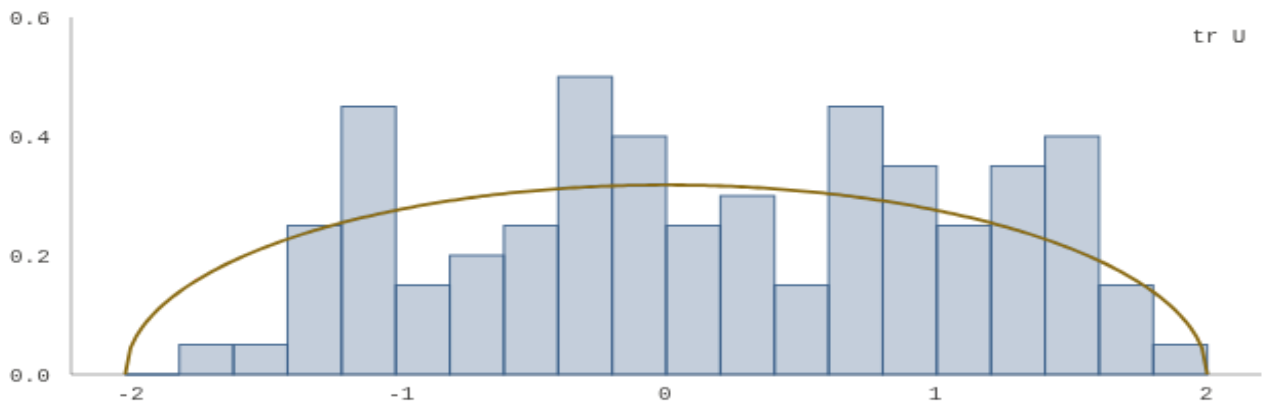
F_X が**分布関数**、ρ が**密度**です。**例：**表の確率 p の硬貨を n 回投げた表の数は**二項分布** $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ に従い、$np=\lambda$ を保って $n\to\infty$ とすると**ポアソン分布** $e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ になります。

$SU(2)$ のように、閉じていて有界な行列の群を**コンパクト**な群と呼びます。コンパクトな群 G には、左右どちらから掛けても変わらない確率測度、つまりすべての $g\in G$ と部分集合 A で $\mu(gA)=\mu(Ag)=\mu(A)$（$gA=\{ga : a\in A\}$）を満たすものがただ一つあり、**Haar 測度**と呼ばれます（円周なら $d\theta/2\pi$）既知。(1) の dU_ℓ はこれです。**例：**$SU(2)$ の元は $U=a_0+i(a_1\sigma_1+a_2\sigma_2+a_3\sigma_3)$（$\sigma_i$ はパウリ行列、$|a|=1$）で、$SU(2)$ は球面 S^3 です（1-02）。Haar 測度は S^3 上の一様分布で $\operatorname{tr}U = 2a_0$。高さ a_0 の切り口は半径 $r=\sqrt{1-a_0^2}$ の球面（面積 $\propto r^2$）、帯の幅は da_0/r なので a_0 の密度は r に比例し、$\operatorname{tr}U$ は**半円**の密度を持ちます既知。

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2} \qquad (-2\le x\le 2) \tag{4}$$

S^3 上の一様な点 10^6 個で $\operatorname{tr}U$ のヒストグラム（20 区間）を作ると、各区間に落ちた割合と、(4) から出る各区間の確率（0.019〜0.064）との差は 6.4×10^{-4} 以内でした計算。点を増やしていく様子を図1 で見られます。同じ半円は、成分が独立なガウスの大きな対称行列の固有値の分布にも、適当に規格化して行列の大きさを無限大にした極限で現れます（17-04）。

図1　S^3 上の一様な点（$SU(2)$ の Haar 測度に従う U）の最初の n 個から作った $\operatorname{tr}U$ のヒストグラム（棒、20 区間、面積 1）と半円 (4)（曲線）。つまみか「動かす」で n を 10 から 10^6 まで増やすと、棒が曲線に寄っていく



計算 図1 のヒストグラムは、この端末で作った標本（上の文と同じ 10^6 個）の最初の n 個の、区間ごとの個数を埋め込んだもの。曲線と区間の確率は (4) の式から計算する。JavaScript が無効なら上の文の数値で読める。

```
04
```

期待値・分散・特性関数 — 平均を積分で書く

期待値は「値 × 重さ」の総和で、連続なら積分です。ルベーグ積分は値の方を刻み、「値が c 付近の集合の重さ」に c を掛けて足します。比喩で言えば硬貨の山を額面ごとに数える勘定で、正確には有限個の値だけを取る関数の和 $\sum_i c_i P(A_i)$ の極限です。

$$E[X] = \int_\Omega X \, dP = \int_{\mathbb{R}} x \, d\mu_X(x), \qquad \mathrm{Var}(X) = E\big[(X - E[X])^2\big] \tag{5}$$

$Y = X - E[X]$ として $\mathbf{1}_{\{|Y| \ge t\}} \le Y^2/t^2$（$\mathbf{1}_A$ は A の上で 1、外で 0）の期待値を取ると**チェビシェフの不等式**です 既知 。

$$P\big(|X - E[X]| \ge t\big) \le \frac{\mathrm{Var}(X)}{t^2} \tag{6}$$

特性関数 $\varphi_X(t) = E[e^{itX}]$ は分布を一意に決めます（Durrett §3.3）。**例：**サイコロは $E = 7/2$、$\mathrm{Var} = 35/12$。ポアソン分布の $E[(-1)^N] = e^{-2\lambda}$ は中心渦の勘定（17-02）に使われます。(4) では $E[\mathrm{tr}\, U] = 0$、$E[(\mathrm{tr}\, U)^2] = 1$ です。

05

独立 — 無相関との違い

X と Y が**独立**とは、同時の確率が積に分かれることです。

$$P(X \in A,\ Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B) \qquad (\text{すべての } A, B) \tag{7}$$

このとき (X, Y) の分布は、平面の長方形 $A \times B$ に重さ $P(X \in A)P(Y \in B)$ を配る測度（**積測度**）で、$E[XY] = E[X]E[Y]$、$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}\, X + \mathrm{Var}\, Y$、$\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$ です 既知 。**共分散** $E[XY] - E[X]E[Y]$ が 0 なら**無相関**で、独立なら無相関ですが逆は偽です。**例：**X が $\{-1, 0, 1\}$ に等確率、$Y = X^2$ なら共分散は 0 ですが $P(X = 0, Y = 0) = 1/3 \neq 1/9$ です。

場の理論では、離れた二点の場が「ほぼ独立」であってほしいところです。問題文は質量ギャップ Δ（4-11）の帰結として**クラスター性**を挙げます 既知 。空間 $\mathbb{R}^3$ の点 x, y に置いた、期待値が 0 の局所的な量 $O(x)$、$O(y)$ の相関（期待値が 0 なので、上の共分散は積の期待値そのもの）の大きさが、$0 < C < \Delta$ なら、$|x - y|$ が十分大きいところで $e^{-C|x-y|}$ 以下になる、という性質です。正確には O は量子論の演算子で、相関は基底状態（真空）での期待値です（例は §07）。

06

ガウス分布 — 共分散と対の数え上げ

平均 0 のガウス分布は、n 次元なら**共分散行列** $C_{ij} = E[x_i x_j]$（正定値の対称行列、1-01）だけで決まります。

$$\rho(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det C}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\, x \cdot C^{-1} x\Big), \qquad E\big[e^{i\,t\cdot x}\big] = e^{-\frac{1}{2}\,t\cdot C t} \tag{8}$$

性質は三つです 既知 。(i) 線形写像 $y = Mx$ の像もガウスで、共分散は MCM^{T}。(ii) 同時にガウスなら、無相関で独立（C が対角なら密度が積に分かれる）。(iii) 高次のモーメントは、変数を**対に組むすべての方法**にわたる C の積の和です（Isserlis 1918。物理では同じ形の公式が Wick の定理（1950）として使われます）。

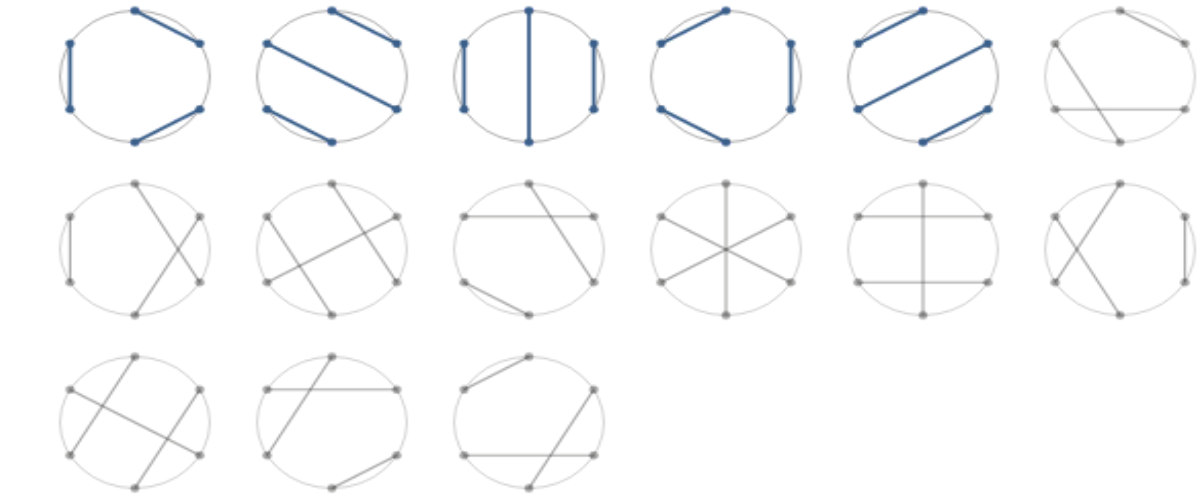
$$E[x_1 x_2 x_3 x_4] = C_{12}C_{34} + C_{13}C_{24} + C_{14}C_{23} \tag{9}$$

無作為な 4×4 の C で、(9) の右辺 -0.0769 に対し標本 4×10^6 個では -0.0774 ± 0.0005 でした 計算 。一変数なら $E[x^{2k}] = (2k-1)!!\,\sigma^{2k}$ です。$(2k-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)$（奇数だけを掛ける二**重階乗**）は $2k$ 点を対に組む方法の数です（点 1 の相手が $2k-1$ 通り、残りで同じことを繰り返す）。一方 (4) の半円のモーメントは、円周上の $2k$ 点を**交差しない**弦で組む方法の数、**カタラン数** $\mathrm{Cat}_k = \binom{2k}{k}/(k+1)$ です 紙 （寄り道で両方を計算します）。交差しない組の数え上げと (4) の数値積分は、どちらも $k \le 6$ で Cat_k と一致しました（積分は 6 桁） 計算 。表1 の行を選ぶと、図2 にその k の組み方が並びます。

表1　全部の対（ガウス）と交差しない対（半円）。行を選ぶと図2 が変わる 計算

k	$(2k-1)!!$	Cat_k	$E[(\mathrm{tr}\,U)^{2k}]$（標本 10^6）
1	1	1	1.001
2	3	2	2.001
3	**15**	**5**	**5.001**
4	105	14	14.00
5	945	42	42.01
6	10395	132	132.05

図2　円周上の $2k$ 点を弦で対に組む方法。表1 の行（またはつまみ）で k を選ぶ。色の付いたものが弦の交差しない組（Cat_k 通り）、薄いものが交差する組。$k=2$ の三つは (9) の三項 $C_{12}C_{34}$・$C_{14}C_{23}$・$C_{13}C_{24}$ に当たる（点に時計回りに 1〜4 と番号を振る）



k = 3　対の組み方 15 通り（(2k−1)!!）　交差しない組 5 通り（Cat_3）

計算 図2 の組み方はブラウザで並べ、その個数が表1 の数え上げ（この端末の計算）と一致することを確かめてある。JavaScript が無効なら表1 で読める。

(9) は Feynman ダイアグラムの原型で（4-03）、交差しない組は大 N の平面ダイアグラムにつながります（17-04）。

寄り道：カタラン数を二通りに数える

飛ばしてよい小節です。

交差しない組の数。円周上の点に時計回りに 1 から $2k$ まで番号を振り、交差しない組の数を c_k（$c_0 = 1$）とします。点 1 の相手を点 p とすると、1 と p の間にある点は弦 $\{1,p\}$ をまたげないので、間の点どうしで組むしかありません。間の点は偶数個なので $p = 2j$ で、間の $j-1$ 組と外の $k-j$ 組は別々に選べます。係数を一つの冪級数に並べたもの（**母関数**）$c(x) = \sum_{k\ge 0} c_k x^k$ で書くと、

$$c_k = \sum_{j=1}^{k} c_{j-1}\,c_{k-j} \quad (k \ge 1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad c(x) = 1 + x\,c(x)^2$$

です。二次方程式を解いて $x \to 0$ で有限な方の根を取り、$\sqrt{1-4x}$ を二項級数で展開すると係数が出ます。

$$c(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}, \qquad \sqrt{1-4x} = 1 - \sum_{n\ge 1} \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1} x^n \qquad \Longrightarrow \qquad c_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$$

半円のモーメント。(4) で $x = 2\sin\theta$ と置くと $\sqrt{4-x^2} = 2\cos\theta$、$dx = 2\cos\theta\,d\theta$ です。$I_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^n\theta\,d\theta$ は部分積分で $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$、$I_0 = \pi$ を満たすので、$I_{2k} = \pi\,(2k-1)!!/(2k)!!$（$(2k)!! = 2\cdot 4\cdots 2k = 2^k k!$）です。$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ を使うと

$$\int_{-2}^{2} x^{2k}\rho(x)\,dx = \frac{2^{2k+2}}{2\pi}\bigl(I_{2k} - I_{2k+2}\bigr) = \frac{2^{2k+1}}{\pi}\cdot\frac{I_{2k}}{2k+2} = \frac{2^{2k}\,(2k-1)!!}{(k+1)\,(2k)!!} = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$$

最後の等号は $(2k-1)!! = (2k)!/(2^k k!)$ から出ます。二つの計算は別々に同じ Cat_k に着きました 紙 。なぜ半円が交差しない組を数えるのかは、大 N の平面ダイアグラムの勘定（17-04）で見えてきます。

07

格子の上のガウス場 — 相関長と質量

輪に並んだ N 個の変数 $x_0, \dots, x_{N-1}$（$x_N = x_0$）に、隣どうしは近い値を好み、全体は 0 に引き戻される重みを付けます。

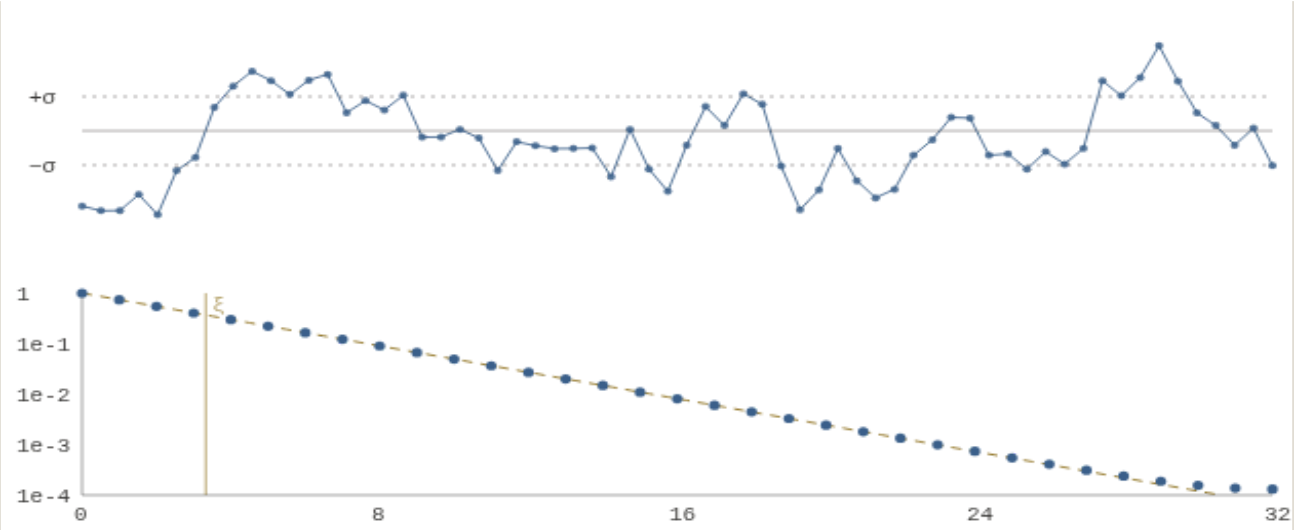
$$\rho(x) \propto \exp\Big(-\frac{1}{2} \sum_{j} \big[(x_{j+1} - x_j)^2 + m^2 x_j^2 \big] \Big) = \exp\Big(-\frac{1}{2}\, x \cdot (-\Delta_{\mathrm{lat}} + m^2)\, x \Big) \qquad (10)$$

$(\Delta_{\mathrm{lat}} x)_j = x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}$ は**格子のラプラシアン**です。§05 の質量ギャップ Δ とは別のものなので、添字 lat を付けて区別します。(8) と見比べると、(10) は共分散 $C = (-\Delta_{\mathrm{lat}} + m^2)^{-1}$ のガウス分布です。問題文は、連続の $\mathbb{R}^d$ の上で共分散が同じ形（格子のラプラシアンを連続のものに替えた形）のガウス測度を 'the free, mass-m0 field' と呼びます。(10) はその一次元の格子（輪）での類似物で、d 次元の格子でも共分散は同じ形 $(-\Delta_{\mathrm{lat}} + m^2)^{-1}$ になります 既知 。輪が無限に長ければ厳密に $C(0,x) = e^{-|x|/\xi}/(2\sinh(1/\xi))$ です 既知 。

$$\frac{C(0,x)}{C(0,0)} \approx e^{-|x|/\xi}, \qquad \cosh\frac{1}{\xi} = 1 + \frac{m^2}{2}, \qquad \xi \approx \frac{1}{m} \quad (m \text{ が小さいとき}) \qquad (11)$$

ξ が**相関長**で、質量 m はほぼその逆数です（どちらも格子間隔を単位にして測った量です）。この減る速さが量子論の「隙間」に当たります（2-06）。(10) は振動子の虚時間の経路積分を刻んだもので、m は 2-07 の $a\omega$（そこでは $\omega = 1$ なので刻み a そのもの）に当たります。相関長の一般論は 2-08 です。

図3　輪（$N = 64$）の上のガウス場。m を動かすと、上の標本（乱数は固定、点線は $\pm\sigma$）の滑らかさと、下の $C(0,x)/C(0,0)$（対数目盛り、破線 $e^{-x/\xi}$）が変わる



m = 0.302 ξ = 3.32 1/m = 3.31 σ = 1.279 C(0,8)/C(0,0) = 0.0901

表2　輪（$N=64$）の上の相関 計算

m	ξ（(11)）	$C(0,8)/C(0,0)$	傾きから読んだ ξ
0.05	20.00	0.703	24.1
0.1	10.00	0.452	10.2
0.3	3.35	0.0915	3.35
1	1.04	4.5×10^{-4}	1.04
2	0.57	7.5×10^{-7}	0.57

計算 図3 と表2 の数値はこの端末で計算した（図は厳密な相関と固定した乱数から描く。傾きは $x=4$〜12）。JavaScript が無効なら表2 で読める。

$m=0.05$ で傾きから読んだ ξ が 20 より大きいのは、輪の長さが相関長の 3 倍ほどしかなく反対回りの寄与 $e^{-(N-x)/\xi}$ が効くためです（有限の箱の効果、5-09）。(10) はガウスなので (9) ですべての相関が C で決まり、相互作用がありません（**自由場**）。

08

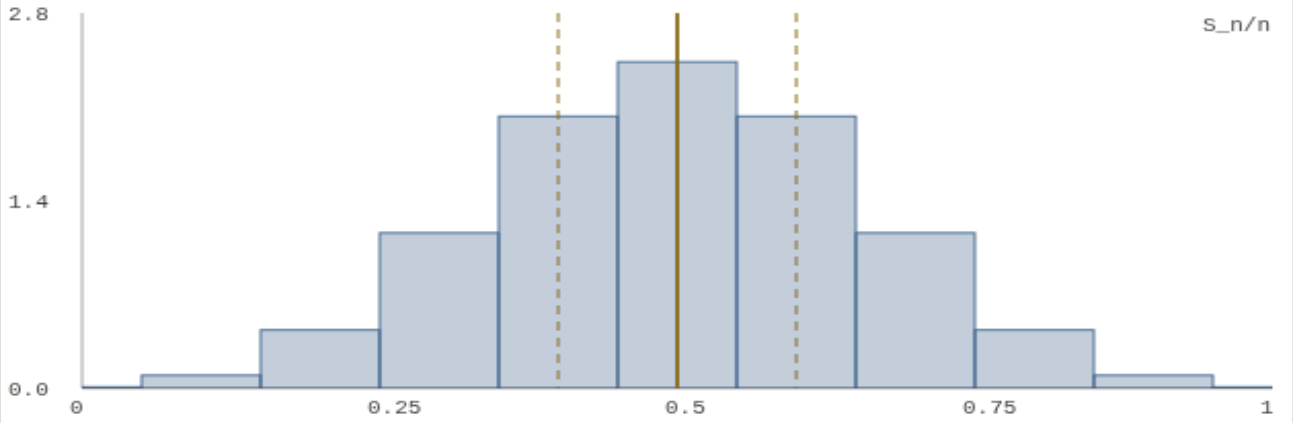
大数の法則 — 平均は落ち着く

同じ分布に従う独立な $X_1, X_2, \dots$（平均 μ、分散 σ^2）の和を S_n とします。§05 から $\mathrm{Var}(S_n/n)=\sigma^2/n$ で、(6) に入れると**大数の弱法則**です 既知 。

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|\ge\varepsilon\right)\le\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}\ \longrightarrow\ 0\qquad(n\to\infty)\tag{12}$$

さらに $E|X_1|<\infty$ だけで $S_n/n\to\mu$ がほとんど確実に成り立ちます（**強法則**、Durrett 定理 2.4.1） 既知 。図4 の「そのまま」で、S_n/n の分布が p に縮む様子と (12) の左辺（$\varepsilon=0.1$）が見えます。

図4　表の確率 p の硬貨を n 回投げた表の数の分布（棒、面積 1）。n を増やすと、「そのまま」では p（縦線）に縮み破線の外の確率が減り、「$\sqrt{n}$ 倍に拡大」では標準ガウス（曲線）に寄る



n = 10 p = 0.50 P(|S_n/n − p| ≥ 0.1) = 0.754 (12) の右辺 2.50

計算 図4 と表3 の数値はこの端末で計算した（図は二項分布と Φ の近似式からその場で計算し、Python の値と 4 桁で一致）。JavaScript が無効なら次の段落と表3 で読める。

$p = 1/2$、$\varepsilon = 0.1$ では、(12) の左辺は $n = 10, 100, 1000$ で 0.754、0.0569、2.7×10^{-10}、右辺 $25/n$ は 2.5、0.25、0.025 です 計算 。右辺は粗い上界ですが、極限には足ります。実用上の読みは**標本平均の誤差はおよそ $\sigma/\sqrt{N}$** で、精度を 10 倍にするには標本が 100 倍要ります。$E[(\mathrm{tr}\,U)^2] = 1$ を標本平均で推定すると、$N = 10^2$ で 0.916 ± 0.092、10^6 で 1.0015 ± 0.0010 でした（表1 とは別の標本。誤差棒は標本標準偏差 $/\sqrt{N}$） 計算 。格子のモンテカルロ法では、続けて作る配置が独立でないので実効的な N が減ります（5-07）。

09

中心極限定理 — 揺らぎはガウスになる

ずれ $S_n/n - \mu$ は $1/\sqrt{n}$ の大きさです。$\sqrt{n}$ 倍に拡大すると、元の分布によらず**ガウス分布**が現れます（**中心極限定理**、Durrett 定理 3.4.1） 既知 。

$$P\Big(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le a\Big) \;\longrightarrow\; \Phi(a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx \qquad (\text{すべての } a) \tag{13}$$

理由は特性関数で見えます。$\mu = 0$ なら $\varphi(s) = 1 - \sigma^2 s^2/2 + o(s^2)$ で、独立性から $\varphi(t/\sigma\sqrt{n})^n = (1 - t^2/2n + o(1/n))^n \to e^{-t^2/2}$、これは (8) の一次元の標準ガウスの特性関数です。特性関数の収束から分布の収束を出す連続性定理（Durrett 定理 3.3.17）で (13) になります（一般の条件での古典的な証明は Lindeberg 1922）。近づく速さは **Berry–Esseen の不等式**が与えます（$\rho = E|X-\mu|^3$）。

$$D_n = \sup_a \Big| P\Big(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le a\Big) - \Phi(a) \Big| \le \frac{C_0\,\rho}{\sigma^3\sqrt{n}} \tag{14}$$

Durrett は $C_0 = 3$ で証明し、Shevtsova（2011）は $C_0 < 0.4748$ を示しています 既知 。両辺は図4 の拡大表示と表3 で比べられます。

表3　二項分布の D_n（厳密）と (14) の右辺（$C_0 = 0.4748$） 計算

p	n	D_n	**右辺**	$D_n\sqrt{n}$
0.5	10	0.1230	0.1501	0.389
0.5	1000	0.0126	0.0150	0.399
0.1	100	0.0832	0.1298	0.832
0.02	100	0.1767	0.3258	1.767

$p = 1/2$ では $D_n\sqrt{n}$ が $1/\sqrt{2\pi} \approx 0.399$ に落ち着きます。n が偶数なら、分布関数は $a = 0$ に高さ約 $\sqrt{2/\pi n}$ の段差を持ち、滑らかな Φ はその中ほどを通るので、段差の半分が必ず残ります（Durrett §3.4.4）。n が奇数なら中央に段差は無く、中央の二つの段差（$a = \pm 1/\sqrt{n}$）のあいだで分布関数が $1/2$ のまま平らになり、その端で同じ大きさのずれが残ります（$n = 11$ で $D_n\sqrt{n} = 0.393$、$n = 199$ で 0.399） 計算 。どちらでも $1/\sqrt{n}$ より速くはなりません。$p = 0.02$、$n = 100$ では $np = 2$ で、分布は非対称なポアソン分布に近く、ガウスとはまだ離れています。極限定理は「いつ近いか」を言わないので、速さの評価が要ります。

10

寄り道：ガウスにならないもの — 重い裾・自明性

飛ばしてよい節です。

(13) には分散が有限という仮定があります。**コーシー分布**（密度 $1/\pi(1+x^2)$、特性関数 $e^{-|t|}$）は $E|X| = \infty$ で、n 個の平均が元と同じ分布に従います（Durrett 演習 3.3.6） 既知 。

場の理論では逆に「ガウスに潰れる」ことが問題になります。四次元の格子の ϕ^4 模型では、臨界点の近くで格子を細かくする極限がガウスになり、相互作用が消えること（**自明性**）が示されています（Aizenman–Duminil-Copin 2021、7-08） 既知 。比喩で言えば中心極限定理の潰れ方ですが、正確には強く相関した場の定理で、証明の道具も別です。

問題文の「非自明な」ヤン–ミルズ理論は、おおまかには極限でガウスでない理論です。スカラー場について問題文（§6.2）が述べるように、自由場はガウス測度から得られ、'one requires non-Gaussian dμ to obtain nonlinear fields' です。格子の (1) は初めからガウスではありませんが、極限でガウスでない測度として残りクラスター性まで持つことを示した結果は無く、問題文自身、四次元で公理を満たす非自明な相対論的場の理論は現時点で一つも知られていないと書きます（2000 年の記述） 既知 。2026-11 に公開された構成は、測度ではなく相関関数の水準で、四次元の自明でない理論を作りました（Lean で証明されている、と委員会が評価した。6-01）。このサイトは測度の非自明性を示していません（0-03・7-10）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 定義、(6)、(12) の証明、(4) の導き方。ほかの定理は文献から引用。	測度論の証明（拡張定理・収束定理・連続性定理）。
紙 半円のモーメントと、円周上の $2k$ 点を交差しない弦で組む方法の数が、どちらも Cat_k であること（§06 の寄り道の二つの計算）。$k \le 6$ では数え上げと数値積分でも確かめた 計算 。	二つが一致する理由（大 N の平面ダイアグラム、17-04 で扱う）。
計算 表1〜表3、図1〜図4、§03・§06・§08・§09 の数値。	数値は有限の k・n・標本での確かめで、極限の証明の代わりにはならない。
既知 問題文の、自由場がガウス測度であること・クラスター性・非自明な理論にはガウスでない測度が要ること。四次元の ϕ^4 の自明性。	無限次元の測度（1-09）。四次元のヤン–ミルズの測度の存在（未解決。2026-11 に公開された構成も測度は作っていない。6-04）。このサイトは測度の非自明性・クラスター性も示していない。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§02・§04・§08〜§10 の定理と注意	既知	R. Durrett, *Probability: Theory and Examples*, 5th ed., Cambridge Univ. Press (2019)（定理 2.4.1・3.4.1・3.3.17・3.4.17、§3.4.4 の注意、演習 3.3.6）。著者の公開版で本文を確認。
原論文（公理化・Vitali・Haar・(9)・(13)・(14)）	既知	A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer (1933)。G. Vitali, Bologna (1905)。A. Haar, Ann. of Math. 34 (1933) 147。L. Isserlis, Biometrika 12 (1918) 134–139。G. C. Wick, Phys. Rev. 80 (1950) 268–272。J. W. Lindeberg, Math. Z. 15 (1922) 211–225。A. C. Berry, Trans. AMS 49 (1941) 122–136。C.-G. Esseen, "On the Liapounoff limit of error in the theory of probability", Ark. Mat. Astron. Fys. A 28, No. 9 (1942) 1–19。いずれも書誌のみ。
$C_0 < 0.4748$・§10 の自明性	既知	I. Shevtsova, arXiv:1111.6554 (2011)。M. Aizenman, H. Duminil-Copin, Ann. of Math. 194 (2021) 163–235, arXiv:1912.07973（要旨を確認）。同, Corrigendum, Ann. of Math. 199 (2024) 479（書誌のみ）。
問題文の引用（§01・§05・§07・§10）	既知	A. Jaffe, E. Witten, "Quantum Yang–Mills Theory"（Clay 数学研究所の問題記述）。J. Carlson ほか編 *The Millennium Prize Problems*, Clay Math. Inst. / AMS (2006) 129–152 に収録。Clay の公開版で本文を確認（§5 の式 (2)、§6.2）。
§06 のカタラン数（寄り道）	紙	この章の中の計算（部分積分の漸化式と二項級数）。ガウス行列の半円は 17-04 とその出典表。
表・図・数値	計算	この端末の Python 3.12（NumPy・SciPy）：moments.py（表1・§03・§08、半円の数値積分は $k \le 6$）、pairings.py（$k \le 6$ の数え上げ・(9)）、fig_semicircle.py（図1 の区間ごとの個数）、lattice_gauss.py（表2・図3）、clt.py（表3・図4）、clt_odd.py（§09 の奇数の n）。図の関数は fig_check.js・fig_check2.js（node）で表と照合。

次に読む章：1-09 無限次元の確率 — 場そのものの上の確率と、出発点としてのガウス測度。

無限次元の確率 — 一様な重さは無く、ガウス測度から始める

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 無限次元には平行移動で変わらない重さ（ルベーグ測度）が無く、出発点はガウス測度になること。ずらしてよい方向の全体（Cameron–Martin 空間）には、見本が確率 1 で入らないこと。ブラウン運動・白色雑音・自由場が、次元とともに関数ですらなくなること。

前提となる章 — 1-08。ℓ^2・トーラスの上のフーリエ係数・超関数は、要る分だけその場で定義します（本格的には 1-10・1-11）。

先に言うこと — 測度論の大きな定理は引用で済ませます。この章で作る測度はすべてガウスで、相互作用のある測度には §10 で引用として触れるだけです。四次元のヤン–ミルズ理論を測度として作ることは未解決で、このサイトもそれを示していません。2026-11 に公開された構成（6-00）が作ったのは相関関数と再構成した場の理論で、測度ではありません（6-04）。

この章の順序

1. なぜ無限次元か — 場の変数は無限個
2. ルベーグ測度は無い — 直交する方向に球を詰める
3. 高次元のガウスは殻に住む — 分散を減らす
4. 無限次元のガウス測度 — 影がすべてガウス
5. Cameron–Martin の定理 — ずらせる方向（図1）
6. ブラウン運動 — 経路は落ち着き、エネルギーは発散（図2）
7. 白色雑音 — 点では値を持たない
8. 自由場と次元 — 一点の分散が発散する（図3）
9. 場の積 — 超関数どうしは掛けられない
10. 寄り道：互いに特異な測度 — 尺度・質量・相互作用

01

なぜ無限次元か — 場の変数は無限個

1-08 の格子の確率は、変数が有限個なので「密度 × 体積要素」で書けました。格子を細かくし箱を大きくすると、変数は無限個になります。物理の本は、質量 m の自由なスカラー場（ユークリッド化したもの、4-02）の確率をこう書きます。

$$d\mu(\varphi) \overset{\text{形式的}}{=} \frac{1}{Z}\exp\Big(-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\big(|\nabla\varphi|^2+m^2\varphi^2\big)\,dx\Big)\prod_{x\in\mathbb{R}^d}d\varphi(x) \tag{1}$$

右辺の二つの因子は、どちらも単独では意味を持ちません。$\prod_x d\varphi(x)$ にあたる測度は存在せず（§02）、指数の中の積分は見本のほとんどすべてで $+\infty$ です（§05・§06）。それでも積としての μ はガウス測度として作れます（§04）。問題文も、構成的場の理論が生んだ測度を 'non-Gaussian, Euclidean-invariant measures on spaces of generalized functionals' と書きます 既知 。超関数（§07）の空間の上の、ガウスでなく、回転と平行移動で変わらない測度、という意味です。この章が扱うのは、その出発点になるガウスの場合です。**例：** $d=1$ で区間を N 等分すると、(1) は 1-08 §07 の N 変数のガウス分布で、$N\to\infty$ の行き先がこの章の主題です。

02

ルベーグ測度は無い — 直交する方向に球を詰める

長さ・面積（ルベーグ測度）は、平行移動で変わらず、有界な集合に有限の重さを配ります。無限次元ではこの二つが両立しません。二乗和が有限な数列の空間 $\ell^2=\{x=(x_1,x_2,\dots):\sum_k x_k^2<\infty\}$、長さ $\|x\|=(\sum_k x_k^2)^{1/2}$、第 n 成分だけが 1 の数列 e_n で述べます。

定理 既知 ℓ^2 の上の測度が平行移動で変わらず、どの開球にも有限の重さを配るなら、それは 0 である。

証明。$n\neq m$ なら $\|e_n-e_m\|=\sqrt{2}>1$ なので、球 $B(e_n,\frac12)$ は互いに交わらず、どれも $B(0,\frac32)$ に入ります。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu\big(B(e_n,\tfrac12)\big)\;\le\;\mu\big(B(0,\tfrac32)\big)\;<\;\infty \tag{2}$$

左辺の各項は平行移動で同じ値 c なので $c=0$ です。ℓ^2 は、有理数を成分とし有限個を除いて 0 の数列を中心とする可算個の半径 $\frac12$ の球で覆えるので、全体の重さも 0 です。∎ $\mathbb{R}^n$ なら球は 3^n 個（体積の比）までしか入らず、矛盾しません。

03

高次元のガウスは殻に住む — 分散は減らねばならない

$\mathbb{R}^n$ の標準ガウス $N(0, I_n)$（1-08 (8)）の密度は原点で最大ですが、重さの大半は遠くの薄い殻にあります。$|x|^2 = \sum_{k \le n} x_k^2$ は独立な n 個の和なので、大数の法則（1-08 (12)）から $|x|^2/n \to 1$ です。

$$E|x|^2 = n, \qquad \operatorname{Var}|x|^2 = 2n, \qquad |x| = \sqrt{n} + O(1) \tag{3}$$

$n = 10,\ 100,\ 1000$ で $E|x|/\sqrt{n} = 0.975,\ 0.9975,\ 0.99975$、$|x|$ の標準偏差は $0.698,\ 0.706,\ 0.707$ で、殻の厚さは n によらず $1/\sqrt{2}$ に落ち着きます 計算 。分散 1 のまま $n \to \infty$ とすると $|x| \to \infty$ で、極限は ℓ^2 にありません。そこで分散 σ_k^2 を減らします。独立な $N(0,1)$ の列 $\xi_1, \xi_2, \dots$ で

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \, \xi_k \, e_k, \qquad E\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 \tag{4}$$

とすると、右辺の和が有限なことが、x が ℓ^2 に値を取るガウスの確率変数になる必要十分条件です（Hairer 演習 4.7）既知 。**例：** $\sigma_k = 1/k$ なら $E\|x\|^2 = \pi^2/6$。分散 1 の列も、すべての数列の空間 $\mathbb{R}^\infty$ の上になら作れます。使うのは **Kolmogorov の拡張定理**（有限個ずつの分布が矛盾なく与えられていれば、無限個の列の分布が一つに決まる、という定理。Durrett 定理 2.1.21）既知 で、これが §07 の白色雑音の芽です。

04

無限次元のガウス測度 — 一次元の影がすべてガウス

密度が使えないので、ガウス測度は「影」で定義します。空間 E（ℓ^2 や連続関数の空間）の上の確率測度 μ が**ガウス測度**であるとは、連続な線形写像 $\ell : E \to \mathbb{R}$ のどれについても $\ell(x)$ が一次元のガウス分布に従うことです（Hairer 定義 4.4）既知 。平均 0 なら、共分散 $C(\ell, \ell') = E[\ell(x)\ell'(x)]$ が μ を決めます（1-08 (8) の形）。

$$\int_E e^{\,i\ell(x)} \, d\mu(x) = \exp\Big(-\frac{1}{2} C(\ell, \ell) \Big) \tag{5}$$

ℓ^2 の上では $C(\ell, \ell') = \langle \ell, C\ell' \rangle$ と**共分散作用素** C で書け、(4) なら $Ce_k = \sigma_k^2 e_k$ です。対称で正の C のトレース（固有値の和）が有限なら、それを共分散とするガウス測度があります（Hairer 命題 4.17）既知 。**例：** $\ell(x) = \sum_k a_k x_k$ は分散 $\sum_k a_k^2 \sigma_k^2$ のガウスです。問題文は自由場を、超関数の空間 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ の上の、平均 0・共分散 $(-\Delta + m_0^2)^{-1}$ のガウス測度として与えます 既知 。(1) の二つの因子は、共分散という一つの情報に置き換わりました。

05

Cameron–Martin の定理 — ずらせる方向の全体は確率 0

二つの確率測度が**同値**であるとは、零集合（重さ 0 の集合）が同じことです。反対に、一方で確率 1 の集合が他方で確率 0 になるとき、二つは**互いに特異**であるといいます。有限次元のガウス測度は、ずらすと密度が掛かります（一次元なら $N(h,1)$ は $N(0,1)$ の $e^{hx-h^2/2}$ 倍）。一般に、すべての集合 A で $\mu_h(A)=\int_A D(x)\,d\mu(x)$ となる関数 D を**相対密度**と呼び、$d\mu_h/d\mu$ と書きます。(4) の最初の n 座標で μ を h だけずらした μ_h では次です。

$$\frac{d\mu_h}{d\mu}(x)=\exp\Big(\sum_{k\le n}\frac{h_k x_k}{\sigma_k^2}-\frac{1}{2}\|h\|_H^2\Big),\qquad \|h\|_H^2=\sum_{k\le n}\frac{h_k^2}{\sigma_k^2} \tag{6}$$

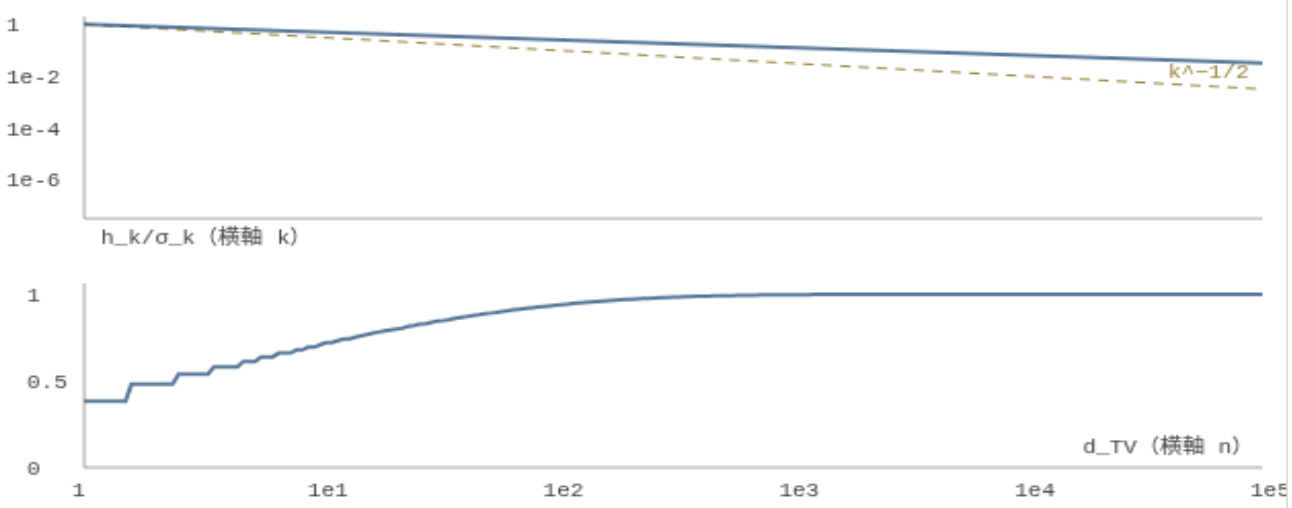
$\|h\|_H$ は「ずれを、その方向の揺れで測った長さ」です。二つを見分けられる度合い（全変動距離）は $C^{-1}h$ の方向の一次元の問題に帰着し、厳密に次の式になります（Φ は 1-08 (13)）。

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu,\mu_h)=\sup_A\big|\mu(A)-\mu_h(A)\big|=2\,\Phi\big(\tfrac{1}{2}\|h\|_H\big)-1 \tag{7}$$

(7) は数値積分と 40 次元の標本で確かめました 計算 。$n\to\infty$ で $\|h\|_H$ が有界なら $d_{\mathrm{TV}}<1$、発散すれば $d_{\mathrm{TV}}\to 1$ で、後者では二つの測度は互いに特異になります。

Cameron–Martin の定理 既知 μ_h が μ と同値なのは $\|h\|_H<\infty$ のときに限り、そうでなければ互いに特異である（Hairer 定理 4.44 とその証明。原論文は Cameron–Martin 1944）。この h の全体 H が **Cameron–Martin 空間**です。ところが (4) の見本では $\|x\|_H^2=\sum_k \xi_k^2=+\infty$（大数の法則）で、無限次元なら $\mu(H)=0$ です（Hairer 命題 4.45） 既知 。ずらしてよい方向の全体 H には、見本が確率 1 で入りません。

図1　$\sigma_k=1/k$ の測度を $h_k=k^{-a}$ だけずらす。a を動かすと、上の比 $h_k/\sigma_k=k^{1-a}$（両対数）が破線 $k^{-1/2}$ より速く減るかが変わり、下の d_{TV}（最初の n 座標での (7)）が 1 に張り付くか、破線の極限に留まるかが変わる



a = 1.30　n = 10⁵ で ‖h‖² = 248.0、d_TV = 1.0000　極限 ∞、1

表1　$\sigma_k = 1/k$、$h_k = k^{-a}$ での $\|h\|_H^2 = \sum_{k\le n} k^{2-2a}$ と (7) 計算

a	$\|h\|_H^2$（$n = 10^5$）	極限	d_{TV}（$n = 10^5$）	極限
1	10^5	∞	1.0000	1
1.25	631	∞	1.0000	1
1.5	12.09	∞	0.9179	1
1.75	2.606	2.612	0.5804	0.5810
2	1.645	$\pi^2/6$	0.4787	0.4787

計算 図1 と表1 の数値はこの端末で計算した（図は (7) と部分和からその場で描き、表と 4 桁で一致）。JavaScript が無効なら表1 で読める。

境目の $a = 3/2$ では $\|h\|_H^2 \approx \ln n + 0.577$ と対数でしか伸びず、$n = 10^{20}$ でも $d_{\mathrm{TV}} = 0.9994$ です 計算 。

06

ブラウン運動 — 経路は落ち着き、エネルギーは発散する

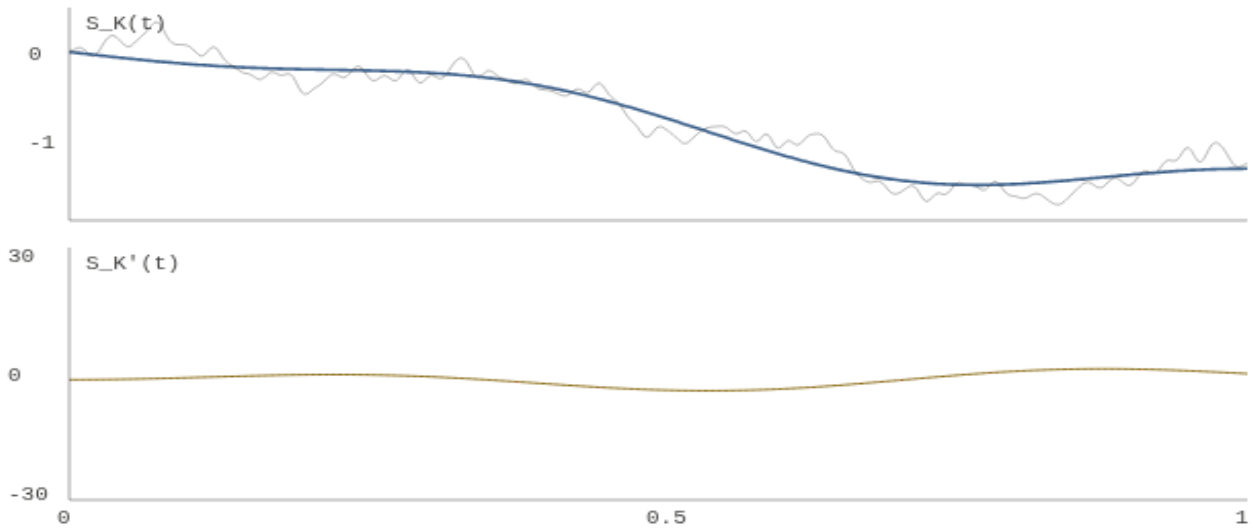
$[0,1]$ の上の連続関数に値を取り、平均 0・共分散 $E[B(s)B(t)] = \min(s,t)$ のガウス測度が**ウィーナー測度**、その見本 B が**ブラウン運動**です（Wiener 1923 に始まるとされる） 既知 。経路は指数 $1/2$ 未満のヘルダー連続性を持ち（$\gamma < 1/2$ なら、経路ごとの定数 C で、すべての s,t について $|B(t) - B(s)| \le C|t-s|^{\gamma}$）、確率 1 でどの点でも微分できません（Durrett 定理 7.1.5・7.1.6） 既知 。Durrett は前者を Wiener 1923 の結果として、後者を Paley–Wiener–Zygmund 1933 の発見として挙げています。

(4) の形にするには、共分散作用素 $(Cf)(s) = \int_0^1 \min(s,t) f(t)\,dt$ の固有関数を探します。$g = Cf$ は $g'' = -f$、$g(0) = 0$、$g'(1) = 0$ を満たすので、固有値の問題は常微分方程式 $-g'' = \lambda^{-1} g$ になり、$\cos\omega = 0$ から次が出ます。

$$B(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \frac{\sqrt{2}\,\sin(\omega_k t)}{\omega_k}, \qquad \omega_k = \Big(k - \frac{1}{2}\Big)\pi \tag{8}$$

$\sigma_k = 1/\omega_k \approx 1/(\pi k)$ は §05 の例と同じ減り方で、4000 項の共分散は $\min(s,t)$ と 5.1×10^{-5} 以内で合います 計算 。Cameron–Martin 空間は $h(0) = 0$、$\|h\|_H^2 = \int_0^1 \dot h^2\,dt < \infty$ の関数の全体で（Hairer 演習 4.29） 既知 、この $\|h\|_H^2$ が (1) の $d = 1$、$m = 0$ の指数の中身です。K 項の部分和 S_K では $\int_0^1 \dot S_K^2\,dt = \sum_{k\le K} \xi_k^2 \approx K$ で、図2 の経路は落ち着くのに、この「エネルギー」は伸び続けます。

図2　(8) の部分和。K（項の数）を動かすと、上の S_K（薄い線は $K = 128$）は落ち着き、下の $\dot S_K$（白色雑音の近似、§07）は振れ幅がおよそ $\sqrt{K}$ で増える




```
K = 4  ∫S_K'² = Σξ_k² = 4.62 (÷K 1.154)  max|S_K − S_128| = 0.442
```

計算 図2 の数値はこの端末で計算した（固定した 128 個の乱数 ξ_k の部分和）。$K = 1, 16, 64, 128$ で $\sum \xi_k^2 = 2.13,\ 13.4,\ 56.5,\ 132.8$、$\max_t |S_K - S_{128}| = 0.589,\ 0.202,\ 0.090,\ 0$。JavaScript が無効ならこの数値と表2 で読める。

格子で見る — 二次変分

格子に切っても同じことが見えます。N 等分した増分の二乗和（**二次変分**）は 1 に近づき（Durrett 演習 7.1.6）既知、滑らかな関数では 0 に近づくので、離散化したエネルギー $\sum (\Delta B)^2/\Delta t$ は N に比例して発散します（表2）。経路積分（2-07）の $e^{-\frac{1}{2}\int \dot{x}^2 dt} \prod_t dx(t)$ は、この測度を形式的に書いたものです。正確には、指数も $\prod_t dx(t)$ も単独では意味を持たず（§01）、組としてウィーナー測度を指します。

表2　2^{20} 点で作った一本の経路を N 等分して見る 計算

N	$\sum (\Delta B)^2$（揺れ $\sqrt{2/N}$）	$\sum (\Delta B)^2/\Delta t$	$h = t^2$ の $\sum (\Delta h)^2$
16	0.689（0.35）	11.0	0.083
4096	0.979（0.02）	4010	3.3×10^{-4}
1048576	0.9999（0.001）	1.05×10^{6}	1.3×10^{-6}

07

白色雑音 — 点では値を持たない

形式的な微分 $\xi = \dot{B}$ が**白色雑音**です。点ごとの値が無い（図2 の下段）ので、関数と組にして定義します。白色雑音とは、二乗積分が有限な関数 $f \in L^2[0,1]$ ごとのガウスの確率変数 $\xi(f)$ で、f について線形で次を満たすものです（Hairer 例 4.63）既知。

$$E\big[\xi(f)\,\xi(g)\big] = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt \qquad \big(\text{形式的には } E[\xi(s)\xi(t)] = \delta(s-t)\big) \tag{9}$$

例：$\mathbf{1}_{[0,t]}$ を $[0,t]$ の上で 1、外で 0 の関数とすると、$\xi(\mathbf{1}_{[0,s]})$ と $\xi(\mathbf{1}_{[0,t]})$ の共分散は $\int_0^1 \mathbf{1}_{[0,s]}(u)\,\mathbf{1}_{[0,t]}(u)\,du = \min(s,t)$ で、これはブラウン運動です（Hairer 演習 4.64）。幅 ε の区間の平均 $\xi(\mathbf{1}_{[t,t+\varepsilon]})/\varepsilon$ の分散は $1/\varepsilon$、d 次元の一辺 ε の箱なら ε^{-d} で、点に縮めると発散します。

白色雑音は共分散が恒等写像（すべての $\sigma_k = 1$）のガウスで、§03 の通り L^2 に入りません。どれだけ入り損ねるかを次元ごとに測るため、ここから舞台を $[0,1]$ から d 次元の**トーラス** $\mathbb{T}^d = [0,2\pi)^d$（向かい合う端をつないだ箱）に移します（(9) の積分は $\mathbb{T}^d$ の上の積分に替える）。$\mathbb{T}^d$ の上の関数を $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k\, e^{ik\cdot x}$ と書き、c_k を**フーリエ係数**と呼びます。$-\Delta = -\sum_i \partial_i^2$ は $e^{ik\cdot x}$ に $|k|^2$ を掛けるので、係数では c_k を $|k|^2 c_k$ にする操作です。白色雑音のフーリエ係数は、$c_{-k} = \overline{c_k}$ で結ばれる組を除いて独立で、$E|c_k|^2$ はどれも同じ定数です。

形式的な級数 $\sum_k c_k e^{ik\cdot x}$ に長さ $\left(\sum_k (1+|k|^2)^{-s}|c_k|^2\right)^{1/2}$ を与えた空間を H^{-s} とします（s が大きいほど高い周波数を軽く数える）。白色雑音ではこの長さの二乗の平均が $\sum_k (1+|k|^2)^{-s}$ の定数倍で、半径 R の殻に R^{d-1} 程度の k があるので、有限なのは $s > d/2$ のときです。実際、そのときに限り白色雑音は H^{-s} に実現できます（Hairer 演習 4.65）既知 。関数と組にしたときにだけ値が出るものが**超関数**で、一般論は 1-11、白色雑音で場を揺らす確率量子化は 7-09 です。

08 自由場と次元 — 一点の分散が発散する

トーラスの上で考えた (1) の自由場は、白色雑音のフーリエ係数 c_k を $(|k|^2+m^2)^{-1/2}$ 倍してならしたものです。この操作を $(-\Delta+m^2)^{-1/2}$ と書くと、共分散は $(-\Delta+m^2)^{-1}$（§04 の問題文の形）で、係数の分散は $1/(|k|^2+m^2)$ に比例します。§07 の勘定で H^{-s} に入る条件は $s > d/2-1$ になり、白色雑音より一階分なめらかですが、$d \ge 2$ では関数になりません。有界な領域の自由場は、$d=1$ なら L^2 の見本として作れ、$d=2$ では作れません（Sheffield 命題 2.7 の後の注意）既知 。

格子間隔 a の格子 $a\mathbb{Z}^d$ では、$-\Delta$ を差分に替えます。1-08 (10) の $(\Delta x)_j = x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}$ を座標の向きごとに足し、a^2 で割ったものです。$e^{ik\cdot x}$ はこの差分ラプラシアンの固有関数で、$e^{ik_i a} - 2 + e^{-ik_i a} = -4\sin^2\frac{k_i a}{2}$ から、固有値は $-\sum_i \frac{4}{a^2}\sin^2\frac{k_i a}{2}$ です。したがって一点の分散は次の積分です（k は格子で区別できる範囲の箱を動く）。

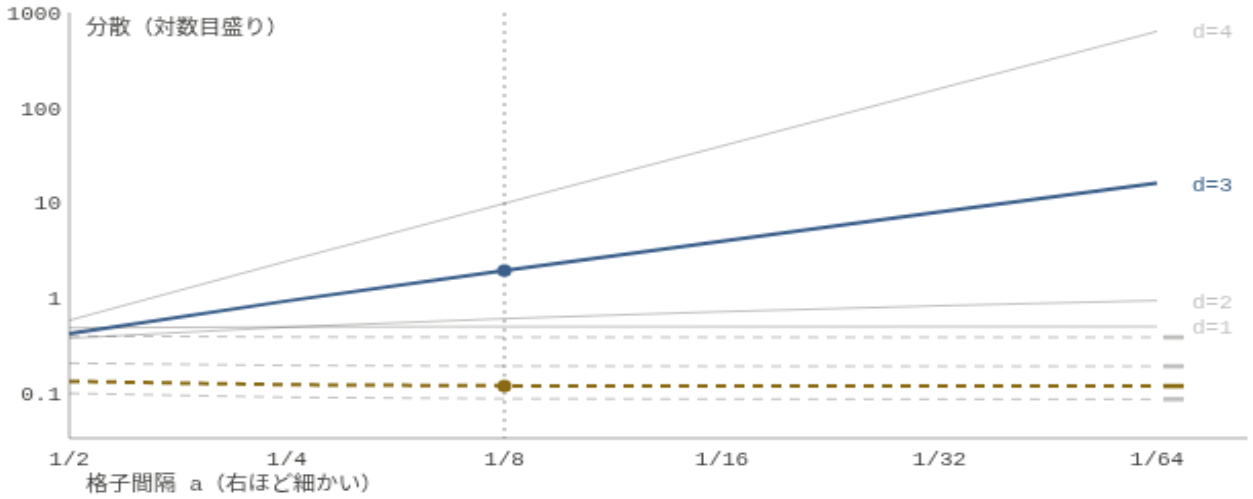
$$G_a(0) = \int_{[-\pi/a,\,\pi/a]^d} \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{m^2 + \sum_{i=1}^d \frac{4}{a^2}\sin^2\frac{k_i a}{2}} \tag{10}$$

$a \to 0$ では大きい $|k|$ の寄与がおよそ $\int^{1/a} k^{d-3}\,dk$ で、$d \geq 2$ で発散します。点の値の代わりに、標準偏差 ℓ のガウス核 $\rho_\ell(x) = (2\pi\ell^2)^{-d/2} e^{-|x|^2/(2\ell^2)}$ と組にした値 $\varphi(\rho_\ell)$（形式的には $\int \varphi(x)\rho_\ell(x)\,dx$、**ならした値**）を見ると、その分散は

$$\operatorname{Var}\varphi(\rho_\ell) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\, \frac{e^{-\ell^2|k|^2}}{|k|^2 + m^2}$$

です（格子では k を (10) と同じ箱に制限し、分母を (10) のものに替える）。因子 $e^{-\ell^2|k|^2}$ が大きい $|k|$ を抑えるので、どの d でも有限です。

図3　格子を細かくする（つまみで a を $1/2$ から $1/64$ へ）と、一点の分散 $G_a(0)$（実線）は $d \geq 2$ で増え続け、ならした値の分散（破線）は右端の印の値に落ち着く。次元のボタンを押すと、その d の二本が濃くなる（縦軸は対数、$m = 1$、$\ell = 1/4$）



a = 1/8、d = 3　一点の分散 G_a(0) = 1.941（a·G = 0.2426）　ならした値の分散 0.1193（a→0 で 0.1183）

表3　格子の自由場（$m = 1$）の一点の分散 $G_a(0)$ と、標準偏差 $\ell = 1/4$ のガウス核でならした値 $\varphi(\rho_\ell)$ の分散 計算 。一点の分散の d 依存の表はこの本ではこれを正本にします（2-07 §09・2-02 はここを引く）

a	$d=1$	$d=2$	$d=3$	$d=4$
1	0.4472	0.2540	0.1705	0.1271
1/2	0.4851	0.3769	0.4223	0.5816
1/4	0.4961	0.4932	0.9289	2.431
1/8	0.4990	0.6057	1.941	9.859
1/16	0.4998	0.7168	3.963	39.60
1/32	0.4999	0.8273	8.007	158.6
1/64	0.5000	0.9377	16.10	634.5
増え方（$a \to 0$）	$\to$ 1/2	$\approx \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{a} + 0.276$	$\approx 0.2527/a$	$\approx 0.1549/a^2$
ならした値（$a \to 0$）	0.3852	0.1912	0.1183	0.0861

(10) は $d=1$ の厳密な値、$d=2,3$ の格子の直接の和と照合済みです。$d=1$ は $1/(2m)$ に収束し、$d=2$ は $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{a}$ との差が 0.276 に落ち着き、$d=3$ では $a\,G_a(0)$ が 0.253 前後に近づき（$a=1/64$ で 0.2515）、$d=4$ では $a^2 G_a(0)$ が 0.155 に近づきます 計算 。この二つの行き先は $\mathbb{Z}^3$・$\mathbb{Z}^4$ の格子のグリーン関数の原点での値で、別の一次元積分から 0.2527・0.1549 と出ます（$d=3$ は Watson の積分の半分）計算 。ならした値の分散はどの d でも有限に収束し、$a=1/32$ で極限と小数第 3 位まで合います。場の値は「点では無限、ならせば有限」です。境目が 2 のこの量を、四で切り替わる量と並べた図は 1-12 §10 の次元のつまみです。

計算 図3 と表3 の数値はこの端末で計算した（$a=2^{-p}$、$p=1,\dots,6$ の値を表として図に埋めてある。表3 はそれに $a=1$ の行と増え方の行を足したもの）。JavaScript が無効なら表3 で読める。

09

場の積 — 点の値が無いと、掛け算が困る

§08 の通り、$d\geq 2$ では $\varphi(x)^2$ の平均が無限大です。そのため φ^4 のような項には引き算の手当て（繰り込み、4-04・7-03）が要り、超関数どうしの積は一般に定義できません（1-11）。四次元のヤン–ミルズ場 A は、短い距離では四次元の自由場と同じ荒さを持つと期待されています（漸近自由、4-06）物理 。正確には、短い距離での相関関数が、対数の補正を除いて自由場のものに近づく、という期待です。問題文は漸近自由を 'at short distances the field displays quantum behavior very similar to its classical behavior' と説明し（§1）、構成すべき理論の相関関数が 'should agree at short distances with the predictions of asymptotic freedom' ことを求めています（§4）既知 。場の強さ $F=dA+A\wedge A$（1-07）の $A\wedge A$ は、そういう超関数どうしの積です（7-10）。

10

寄り道：互いに特異な測度 — 尺度・質量・相互作用

飛ばしてよい節です。

二つのガウス測度は、同値（§05）か互いに特異かのどちらかで、その中間はありません（Feldman 1958、Hájek 1958。教科書では Bogachev 定理 2.7.2 などにあるとされる）既知 。有限次元では、共分散が正定値のガウス測度どうしはいつも同値です。無限次元では、次の例のように、わずかな違いで互いに特異になります。

尺度。共分散を c^2 倍すると、$\frac{1}{N}\sum_{k\leq N} x_k^2/\sigma_k^2$ は 1 でなく c^2 に収束します（大数の法則）。見本一つで c が読めるので、$c\neq\pm 1$ なら互いに特異です（Hairer 命題 4.43）既知 。

質量。トーラスの上で質量 m_1, m_2（どちらも正）の自由場を比べると、フーリエ係数の分散の比は $1+\varepsilon_k$、$\varepsilon_k=(m_1^2-m_2^2)/(|k|^2+m_2^2)$ です。独立な座標を並べた二つの積の測度を比べるには Kakutani の

判定を使います。k 番目の座標の二つの密度を p_k, q_k とします（ここではどちらも正のガウス密度）。一次元ごとの重なり $\int \sqrt{p_k(x) q_k(x)}\, dx$ の無限積が正なら二つは同値、0 なら互いに特異です（Kakutani 1948）既知 。実数値の場ではフーリエ係数の実部と虚部が独立な座標になりますが、どちらの分散の比も $1+\varepsilon_k$ なので、下の条件は変わりません。分散の比が $r^2 = 1+\varepsilon$ の二つのガウスの重なりは $\sqrt{2r/(1+r^2)} = 1 - \varepsilon^2/16 + O(\varepsilon^3)$ で、$\varepsilon_k \to 0$ なので、積が正であることは $\sum_k \varepsilon_k^2 < \infty$ と同値です。

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varepsilon_k^2 = (m_1^2 - m_2^2)^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{(|k|^2 + m_2^2)^2} \;<\; \infty \quad \Longleftrightarrow \quad d \le 3 \tag{11}$$

$m_2 = 1$ で $|k| \le R$ の部分和 $\sum (|k|^2+1)^{-2}$ を $R = 16, 32, 64, 128$ で見ると、$d=3$ では 9.21、9.61、9.80、9.90 と、R を倍にするごとの増分が 0.39、0.20、0.10 と半分になり、10.0 付近に収束します（残りはおよそ $4\pi/R$。別の積分で和全体は 9.998）。$d=4$ では増分が半分にならず、R を倍にするごとに $2\pi^2 \ln 2 \approx 13.7$ ずつ伸びます 計算 。したがって、$m_1 \neq m_2$ なら、質量の違う二つの自由場の測度は、トーラスの上で $d \le 3$ なら同値、$d \ge 4$ なら互いに特異です 既知 （Schröfl–Floerchinger 2025 §4.1。有界な領域の上の Dirichlet・Neumann・周期境界の場合）。(11) は Feldman–Hájek の判定（C_i を質量 m_i の共分散として、$C_1^{-1/2} C_2 C_1^{-1/2} - I$ が Hilbert–Schmidt 作用素、ここでは固有値 ε_k の二乗和が有限）と同じ条件です。

相互作用。ガウス測度に密度 e^{-V} を掛ける作り方は、V が見本のほとんどすべてで定義できないと破れます。極限として作った測度は一般に密度を持たず（Sheffield §3.3）、三次元のトーラスの上の φ^4 の測度は自由場と互いに特異です（Barashkov–Gubinelli 2020）既知 。構成的場の理論は、測度を切断した測度の極限として作ります（7-01・7-05）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 §02 の定理（証明は本文）。ほかの定理は文献から引用。	Kolmogorov・Cameron–Martin・Kakutani・Feldman–Hájek の定理の証明、超関数の空間の上に測度を作る一般論。
既知 (11) による、トーラス上の質量の違う自由場（$m_1 \neq m_2$）の判定（Schröfl–Floerchinger 2025 §4.1 と同じ結論）。	機械検査なし。$\mathbb{R}^d$ 全体は扱っていない。
計算 表1〜表3、図1〜図3、本文の数値と検算。	極限値（0.253・0.155・10.0 など）は、有限の a・R からの読みと数値積分によるもので、誤差の厳密な評価はしていない。
物理 四次元のヤン–ミルズ場の相関関数が、短い距離で（対数の補正を除いて）自由場のものに近づくという期待。	定理ではない。四次元で相互作用のある測度（ヤン–ミルズを含む）の存在は未解決で、このサイトも示していない（2026-11 に公開された構成も測度は作っていない。6-04）。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§03〜§10 の定義と定理（番号は本文）	既知	M. Hairer, "An Introduction to Stochastic PDEs", arXiv:0907.4178（v2, 2023）§4。本文を確認。
定理 2.1.21（Kolmogorov の拡張定理）、定理 7.1.5・7.1.6 と前後の帰属の記述（Wiener 1923、Paley–Wiener–Zygmund 1933）、演習 7.1.6	既知	R. Durrett, *Probability: Theory and Examples*, 5th ed., Cambridge Univ. Press (2019)。著者の公開版で本文を確認。
命題 2.7 とその後の注意、§3.3	既知	S. Sheffield, "Gaussian free fields for mathematicians", Probab. Theory Relat. Fields 139 (2007) 521–541, arXiv:math/0312099。本文を確認。
原論文（ウィーナー測度、微分できないこと、Cameron–Martin、Kakutani、ガウス測度の二分法）	既知	N. Wiener, J. Math. Phys. 2 (1923) 131–174。R. E. A. C. Paley, N. Wiener, A. Zygmund, Math. Z. 37 (1933) 647–668（書誌は Durrett の文献表による）。R. H. Cameron, W. T. Martin, Ann. of Math. 45 (1944) 386。S. Kakutani, Ann. of Math. 49 (1948) 214–224。J. Feldman, Pacific J. Math. 8 (1958) 699–708（本文を確認：ガウス過程の測度の同値か直交かの二択）。J. Hájek, Czechoslovak Math. J. 8 (1958) 610–618（ロシア語。書誌を DML-CZ で確認、本文は書誌のみ）。ほかは書誌のみ（Kakutani の主張は二次資料で確認）。
ガウス測度の二分法（教科書）	既知	V. I. Bogachev, *Gaussian Measures*, AMS (1998) 定理 2.7.2。G. Da Prato, J. Zabczyk, *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*, Cambridge Univ. Press (2014) 定理 2.25。いずれも書誌のみ（二次資料で言及を確認）。
§10 の質量の違う自由場の判定（有界な領域・$d<4$ で同値、$d\geq 4$ で特異）	既知	M. Schröfl, S. Floerchinger, "Relative entropy and mutual information in Gaussian statistical field theory", Ann. Henri Poincaré 26 (2025) 3233–3319, arXiv:2307.15548。本文を確認（§4.1・定理 3。周期境界は同節の立方体の場合）。
$\mathbb{Z}^3$ の格子のグリーン関数の原点での値（§08）	既知・計算	G. N. Watson, "Three triple integrals", Quart. J. Math. Oxford 10 (1939) 266–276。書誌のみ。値 0.2527 はこの端末で別の一次元積分から計算した。
三次元のトーラスの上の φ^4 の特異性	既知	N. Barashkov, M. Gubinelli, "The Φ^4_3 measure via Girsanov's theorem", arXiv:2004.01513 (2020)。要旨を確認。
§01・§04・§09 の問題文の引用	既知	A. Jaffe, E. Witten, "Quantum Yang–Mills Theory"（Clay 数学研究所の問題記述）の §1・§2・§4・§6。本文を確認。
表・図・本文の数値	計算	この端末の Python 3.12（NumPy 1.26・SciPy 1.11）：dims.py、cameron_martin.py、brownian.py、gff.py、watson.py、fig3.py。図の関数は fig_check.js（node）で表と照合。

次に読む章：1-10 ヒルベルト空間と自己共役作用素 — この章の ℓ^2・共分散作用素・固有関数展開を、スペクトルの言葉で整える。

ヒルベルト空間と自己共役作用素 — 無限次元で「いちばん下」と「その次」を測る

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 関数を長さの測れるベクトルとして扱う空間と、微分のような有界でない作用素。スペクトルが固有値より広く、境界条件も作用素の一部であること。いちばん下の値と隙間を測る変分原理が、Poincaré 不等式の最良の定数と同じものであること。

前提となる章 — 1-01（内積・エルミート行列・対角化）。02・05・08・09 節で 1-08・1-09（長さ 0 の集合・ブラウン運動・ガウス分布）に触れます。

先に言うこと — 関数解析の入口を紹介し、定義域の細部と定理の証明は省きます。場の量子論のハミルトニアンはずっと扱いにくく（4-09）、この章はヤン–ミルズの質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. なぜ無限次元か — 下の固有値は止まり、上は逃げる（図 1・表 1）
2. ヒルベルト空間 — 極限が空間の中に残る
3. 作用素と自己共役 — 境界条件も作用素の一部
4. スペクトル — 固有値の無い値もある
5. スペクトル定理 — 隙間が減り方を決める
6. 変分原理 — 上界は易しく、下界には別の情報が要る（表 2・囲み「上界と下界の非対称」）
7. Poincaré 不等式 — 最良の定数は隙間の逆数
8. 重みの付いた Poincaré 不等式 — 凸なら 1/κ、谷が二つなら大きい（図 2・表 3）
9. 変数が多いとき — 積・ガウス・自由場と、二つの隙間
10. 寄り道：固有値を数える — Weyl の法則と太鼓の形

01

なぜ無限次元か — 下の固有値は止まり、上は逃げる

有限次元なら最小固有値と次との隙間はいつでも計算できます（1-01）。問われるのは、自由度を増やした極限で隙間が正のまま残るかどうかです。例として、$[0,1]$ で両端が 0 の関数 u に $-u''$ を対応させる規則を、N 等分の格子で刻みます（2-01 §05 のヘッセ行列と同じ形）。

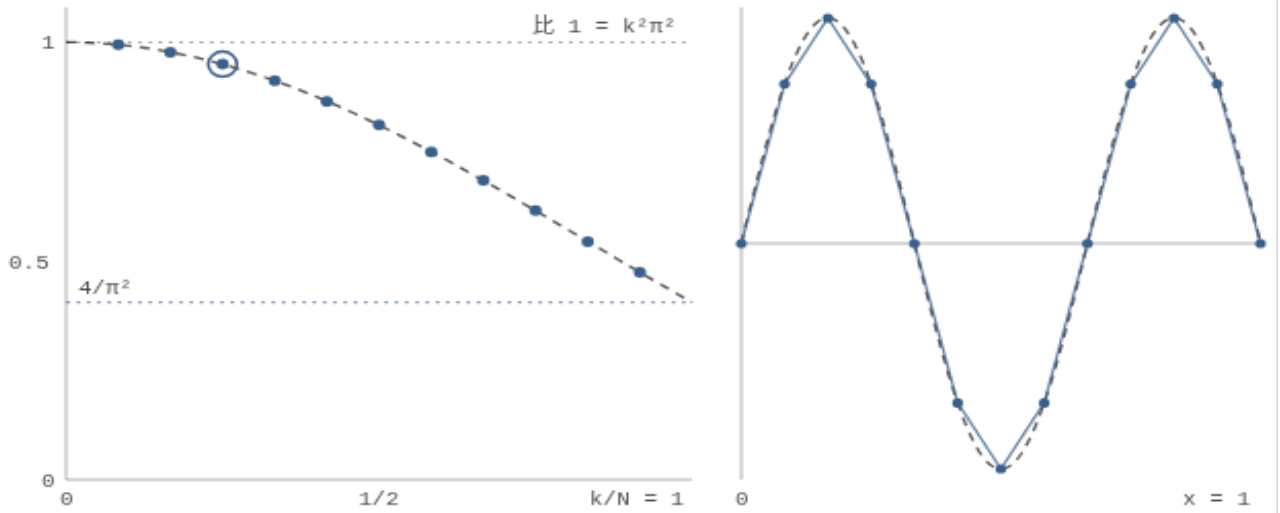
$$(A_N u)_j = N^2\,(-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}), \quad u_0 = u_N = 0; \qquad \lambda_k(N) = 4N^2 \sin^2\frac{k\pi}{2N} \quad (1 \le k \le N-1) \tag{1}$$

固有ベクトルは $u_j = \sin(k\pi j/N)$ です（代入して確かめられます）。k を止めて $N \to \infty$ とすると $\lambda_k(N) \to k^2\pi^2$。これは $-u'' = \lambda u,\ u(0) = u(1) = 0$ の固有値です。いちばん上の固有値は $4N^2$ 近くまで伸び、極限を持ちません。

計算 **表 1**　(1) の行列の固有値（三重対角の固有値計算と (1) の差は相対 10^{-15} 以下）。

N	λ_1	λ_2	いちばん上
10	9.78870	38.19660	390.2
40	9.86453	39.39731	6390.1
160	9.86929	39.47334	102390.1
連続	π² = 9.86960	4π² = 39.47842	（無い）

図 1　左：(1) の固有値の比 λ_k(N)/k²π²（点、k = 1 … N − 1）を t = k/N に対して描く。点は N によらず曲線 (sin(πt/2)/(πt/2))²（破線）に乗り、N を増やすと番号 k の点（丸）は比 1 に寄る。右端の比 4/π² は、上の端が 4N² で頭打ちになること。右：k 番目の固有ベクトル（点）と sin kπx（破線）



N = 12　k = 3　λ_k(N) = 84.35　k²π² = 88.83　比 = 0.9496

計算 図の数値は (1) からその場で計算しています（表 1 で照合）。

比は $t = k/N$ だけで決まり、$\lambda_k(N)/k^2\pi^2 = \big(\sin(\pi t/2)/(\pi t/2)\big)^2$ です（図 1 左の破線）。$k = N/2$ で $8/\pi^2 \approx 0.81$、右端の $t \to 1$ で $4/\pi^2 \approx 0.41$。k を止めて N を増やせば $t \to 0$ で比は 1 に近づきます。k が N に近い固有ベクトルは、格子点では $\sin k\pi x$ の値そのものですが、振動が点の間隔と同じくらい細かいので、点を結ぶと別の形に見えます。実際 $\sin(k\pi j/N) = -(-1)^j \sin((N-k)\pi j/N)$ で、ゆっくりした振動に一点ごとの符号の交代を掛けた形です（図 1 右で k を $N-1$ に近づけると見えます）。極限に残るのは下の固有値と隙間で、相手は上に際限のない作用素です。格子ゲージ理論の連続極限（5-05）でも、格子から読むのはスペクトルの下の端（最も軽い状態）です 物理 。四次元では、格子ゲージ理論の尺度の極限が在ることを 2026-11 に公開された構成が示しました（Lean で証明されている、と委員会が評価した。6-00）。その極限の理論のスペクトルの下の端、つまり質量ギャップは示されていません（6-04）。

02

ヒルベルト空間 — 極限が中に残る

関数を「成分が無限個あるベクトル」として扱うには、内積（1-01 §05）と**完備性**が要ります。完備とは、互いにいくらでも近づいていく列（コーシー列）が空間の中に極限を持つことです。この二つを持つ複素ベクトル空間を**ヒルベルト空間**と呼びます。

$$\ell^2 = \Big\{(c_1, c_2, \dots) : \sum_k |c_k|^2 < \infty\Big\}, \qquad L^2(0,1) = \Big\{f : \int_0^1 |f|^2 dx < \infty\Big\}, \qquad \langle f, g\rangle = \int_0^1 \overline{f}\, g\, dx \tag{2}$$

L^2 では、長さ 0 の集合の上でしか違わない関数を同じものとみなします（1-08）。連続関数だけでは完備になりません。$\tanh(n(x-\tfrac12))$ は互いに近づくのに、行き先は段差の関数です。06 節で「比を小さくしていく列」の行き先を取るには、完備な L^2 が要ります 既知 。

$e_k = \sqrt{2}\sin k\pi x$ $(k \ge 1)$ は $L^2(0,1)$ の正規直交基底で、$c_k = \langle e_k, f\rangle$ について $\|f\|^2 = \sum_k |c_k|^2$（Parseval の等式）です 既知 （1-11）。例。$f = x(1-x)$ では奇数の k で $c_k = 4\sqrt{2}/(k\pi)^3$、偶数で 0 です。$\sum_{k\,\text{奇}} 32/(k\pi)^6 = 1/30$ は $\int_0^1 x^2(1-x)^2 dx = 1/30$ と一致します。1-09 の ℓ^2 は、こうして関数の空間とつながります。

03

作用素と自己共役 — 定義域と境界条件

伸び率の上限 $\|A\| = \sup_{\psi\neq 0}\|A\psi\|/\|\psi\|$ が有限な作用素を有界と呼びます。$-d^2/dx^2$ は e_k を $k^2\pi^2$ 倍するので有界でなく、二階微分が L^2 に入らない関数もあります。そこで施してよい関数の部分空間、**定義域** $D(A)$ を作用素の一部として指定します。$D(A)$ の上で $\langle \phi, A\psi\rangle =$

$\langle A\phi,\psi\rangle$ なら**対称**です。自己共役はもう一歩強く、この等式の相手 ϕ を $D(A)$ の外まで探しても増えないことを言います。正確には、すべての $\psi\in D(A)$ で $\langle\phi,A\psi\rangle=\langle\eta,\psi\rangle$ となる η が在る ϕ の全体を随伴 $A^\dagger$ の定義域 $D(A^\dagger)$ とし、$A^\dagger\phi=\eta$ と定めます。対称なら $D(A)\subset D(A^\dagger)$ で、$D(A^\dagger)=D(A)$ のとき**自己共役**です。スペクトル定理や時間発展 e^{-itA}（2-05）は自己共役が前提です 既知 。運動量 $P=-i\,d/dx$ では部分積分から次が出ます。

$$\langle\phi,P\psi\rangle-\langle P\phi,\psi\rangle=-i\left[\,\overline{\phi}\,\psi\,\right]_0^1 \tag{3}$$

(a) $D=\{\psi(0)=\psi(1)=0\}$ なら対称ですが、相手の ϕ に条件が要らず、どの複素数 z でも $P^\dagger e^{izx}=ze^{izx}$ なので自己共役ではありません。(b) $D_\theta=\{\psi(1)=e^{i\theta}\psi(0)\}$ なら相手も同じ条件で自己共役、固有値は $2\pi n+\theta$ $(n\in\mathbb{Z})$。輪を貫く磁束 Φ による位相差 $q\Phi/\hbar$ が θ の役をします（2-03 の Aharonov–Bohm）。$-d^2/dx^2$ も、端で $u=0$（Dirichlet）ならスペクトルは $\{k^2\pi^2\}_{k\ge1}$、$u'=0$（Neumann）なら $\{k^2\pi^2\}_{k\ge0}$ です。**境界条件は作用素の一部**で、いちばん下の値を変えます。

04

スペクトル — 逆が作れない値

無限次元には、一対一なのに逆が有界でない場合があります。そこで**スペクトル**を次で定めます。

$$\sigma(A)=\bigl\{\lambda\in\mathbb{C}:\ (A-\lambda)^{-1}\text{ が有界な作用素として無い}\bigr\},\qquad \bigl\|(A-\lambda)^{-1}\bigr\|=\frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda,\sigma(A))} \tag{4}$$

右の等式は A が自己共役で $\lambda\notin\sigma(A)$ のときのもので、このとき $\sigma(A)$ は実数直線の閉集合です 既知 。例。$L^2(0,1)$ で x を掛ける作用素 M は、$xf=\lambda f$ なら $f=0$ なので固有値を持ちません。それでも $\lambda\in[0,1]$ では $1/(x-\lambda)$ が有界でなく、$\sigma(M)=[0,1]$ です。$[\lambda,\lambda+\varepsilon]$ だけで一定の長さ 1 の関数は $\|(M-\lambda)f\|\le\varepsilon$ で、固有ベクトルにいくらでも近いものはあります（2-05 §03 の Weyl の判定法）。刻めば固有値は格子の点になり、$[0,1]$ を埋めていきます（01 節の下の固有値は離れたまま）。

孤立した有限重複の固有値を**離散スペクトル**、残りを**真性スペクトル**と呼びます。質量ギャップは、真空の固有値 0 が孤立し、残りのスペクトルが $\Delta>0$ 以上にあるという主張です（4-11）。

05

スペクトル定理 — 隙間が減り方を決める

自己共役作用素は、適当なユニタリで M のような「実数値の関数を掛ける作用素」に移せます（スペクトル定理）既知 。行列の対角化（1-01）の無限次元版で、正確には固有値だけでは書けない部分も含みます。関数 g を代入でき、固有ベクトルの基底があれば次の形です。

$$g(A)\,\psi = \sum_{k} g(\lambda_k)\,\langle e_k, \psi\rangle\, e_k, \qquad \left\| e^{-tA}\psi - \langle e_0,\psi\rangle e_0 \right\| \le e^{-\Delta t}\left\| \psi - \langle e_0,\psi\rangle e_0 \right\| \tag{5}$$

右は、$A \ge 0$、0 の固有空間を長さ 1 の e_0 が張り、残りのスペクトルが $[\Delta, \infty)$ にあるときで、各成分に $e^{-t\lambda} \le e^{-\Delta t}$ を使えば出ます。**隙間は、いちばん下以外の成分が消える最も遅い速さ**です（虚時間での読み方は 2-05 §05）。例 1。両端を断熱した棒の熱の方程式 $\partial_t u = \partial_x^2 u$ では A は Neumann の $-d^2/dx^2$、$\Delta = \pi^2$ で、温度の平均からのずれは $t = 0.5$ で $e^{-\pi^2/2} \approx 0.0072$ 倍以下です。例 2。Dirichlet の $-d^2/dx^2$ の逆は $(Gf)(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y)\,dy$、$G(x,y) = \min(x,y) - xy$ です（$-(Gf)'' = f$ と両端の 0 を確かめられます）。1-09 のブラウン運動 B から $X(t) = B(t) - tB(1)$ を作ると両端が 0 になり（**ブラウン橋**）、その共分散 $E[X(s)X(t)]$ がちょうど $G(s,t)$ です。G の固有値は $(k\pi)^{-2}$ で、和 $\sum_k (k\pi)^{-2} = 1/6$ が有限なことが、ブラウン橋の見本が L^2 に入るための 1-09 (4) の条件です。

06

変分原理 — 上からは易しく、下からは難しい

下に有界な自己共役作用素のスペクトルの下端は、**Rayleigh 商**の下限です。n 番目も「n 次元の部分空間で最大を取り、部分空間について最小を取る」形で書けます（min-max 原理。真性スペクトルより下の固有値を重複を込めて小さい順に）既知 。

$$\inf \sigma(A) = \inf_{0 \neq \psi \in D(A)} \frac{\langle \psi, A\psi\rangle}{\langle \psi, \psi\rangle}, \qquad \lambda_n = \min_{\dim V = n}\ \max_{0\neq\psi\in V} \frac{\langle \psi, A\psi\rangle}{\langle \psi,\psi\rangle} \tag{6}$$

固有ベクトルで展開すると Rayleigh 商は固有値の重み付き平均 $\sum \lambda_k |c_k|^2 / \sum |c_k|^2$ で、λ_1 を下回りません。部分空間 V に制限した行列の固有値は $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ の**上界**になり、V を広げるほど下がります（Rayleigh–Ritz の方法）。例。Dirichlet の $-d^2/dx^2$ に $x(1-x)$ を入れると、商は $(1/3)/(1/30) = 10 \ge \pi^2$ です。下からの評価には Temple の不等式があります。$\psi \in D(A)$ の Rayleigh 商を R とし、次の固有値の下界 μ（$R < \mu \le \lambda_2$）を知っていれば次が成り立ちます 既知 。

$$\lambda_1 \;\ge\; R - \frac{\|A\psi\|^2/\|\psi\|^2 - R^2}{\mu - R} \tag{7}$$

$\psi = x(1-x)$ なら $A\psi = 2$、$\|A\psi\|^2/\|\psi\|^2 = 120$ です。ここでは $\lambda_2 = 4\pi^2$ が厳密に分かっている（03 節）ので $\mu = 39$ と置けて、$\lambda_1 \geq 10 - 20/29 = 9.310$ です。表 2 の下に出る Ritz の値（$39.50\ldots$）は λ_2 の上界で、μ の根拠にはなりません。**変分原理だけでは上界しか出ず、下から押さえるには別の情報が要ります。**Temple の不等式では、それが次の準位の下界 μ です（08 節の凸性 $V'' \geq \kappa$ はもう一つの例）。質量ギャップの証明が難しいことの、有限個の自由度での姿です（2-05 §04・4-11）。

計算 **表 2**　$V_n = \{x(1-x)p(x) :\ p \text{ は } n-1 \text{ 次以下}\}$ での Rayleigh–Ritz の値と、(7)（$\mu = 39$）の下界。行列は分数で誤差なく作成。

n	λ_1 の上界	λ_1 の下界 (7)	λ_3 の上界
1	10.000000000	9.310344828	—
3	9.869749621	9.866602308	102.1303
5	9.869604435	9.869602524	89.1736
厳密	9.869604401		88.82644

偶数の n で加わる反対称な関数は λ_2 だけを改善し、上界は $42,\ 39.50155,\ 39.47847$（$4\pi^2 = 39.47842$）と下がります。$n = 5$ で π^2 は幅 2×10^{-6} の区間に挟まれます（下の端は $\mu = 39 \leq 4\pi^2$ に依ります）。

上界と下界の非対称 — 上からは一つ、下からはすべて

隙間や最低の固有値を**上から**押さえるには、試しのベクトルを**一つ**示せば足ります。(6) の商の値は、どれもそのまま上界です。**下から**押さえるには、**すべての**ベクトルについて商が下回らないことを言う必要があり、変分原理の外の情報が要ります（Temple の不等式の μ、08 節の凸性、スペクトル定理による全体の分解）既知。Poincaré 定数 C_P（07 節）は隙間の逆数なので向きが入れ替わり、試しの関数一つで出るのは C_P の下界、上界にはすべての関数が要ります。

質量ギャップ $\Delta > 0$ は、真空に直交する状態のエネルギーの**下界**です（4-11 §01）。この本はこれを一文にします。**質量ギャップの証明は下界の証明である。**試しの状態や有限個の相関の測定から出るのは Δ の上界で、隙間が正であることについては何も言いません（4-11 §02・18-01 §08）。比喩で言えば、山の一番低い谷を探すのに、谷を一つ見つければ「これ以下」は言えますが、「これより低い谷は無い」には山全体を調べる必要があります。正確には、(6) の下限を一つの ψ で評価すれば上界が出て、下限そのものを下から押さえるにはすべての ψ が要る、ということです。

07

Poincaré 不等式 — 最良の定数は隙間の逆数

「傾きの小さい関数は平均からあまり外れない」を数で言ったものが Poincaré 不等式です。区間 $[0,1]$ では次の形で、定数 $1/\pi^2$ はこれ以上小さくできません 既知 。

$$\int_0^1 \left|f-\bar f\right|^2 dx \;\le\; \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 |f'|^2 dx, \qquad \bar f=\int_0^1 f\,dx \tag{8}$$

証明。Neumann の固有関数 $1,\ \sqrt2\cos k\pi x$ で $f-\bar f=\sum_{k\ge1} a_k\sqrt2\cos k\pi x$ と書くと、左辺は $\sum|a_k|^2$、右辺の積分は $\sum k^2\pi^2|a_k|^2\ge\pi^2\sum|a_k|^2$ です。等号は $f=a+b\cos\pi x$ のときだけ。長さ L の区間では定数は $(L/\pi)^2$ で、**大きさの二乗に比例**します（円の上の版は 17-06 の (4)）。

これは 06 節の変分原理を、Neumann の作用素の「0 の次」に使ったものです。一般に、自己共役な $A\ge0$ で $Af=0$ となるのが定数だけ、隙間が Δ なら、$\mathrm{Var}(f)\le C_P\langle f,Af\rangle$ の最良の定数は $C_P=1/\Delta$ で、(5) からならす動きは速さ $1/C_P$ で落ち着きます。Dirichlet 版 $\int|f|^2\le\pi^{-2}\int|f'|^2$（$f(0)=f(1)=0$）も同じ数ですが、等号は $\sin\pi x$ で、別の内容です。例。$f=x$ では左辺 $1/12$、右辺 $1/\pi^2$ で、比は 0.82 です。

08

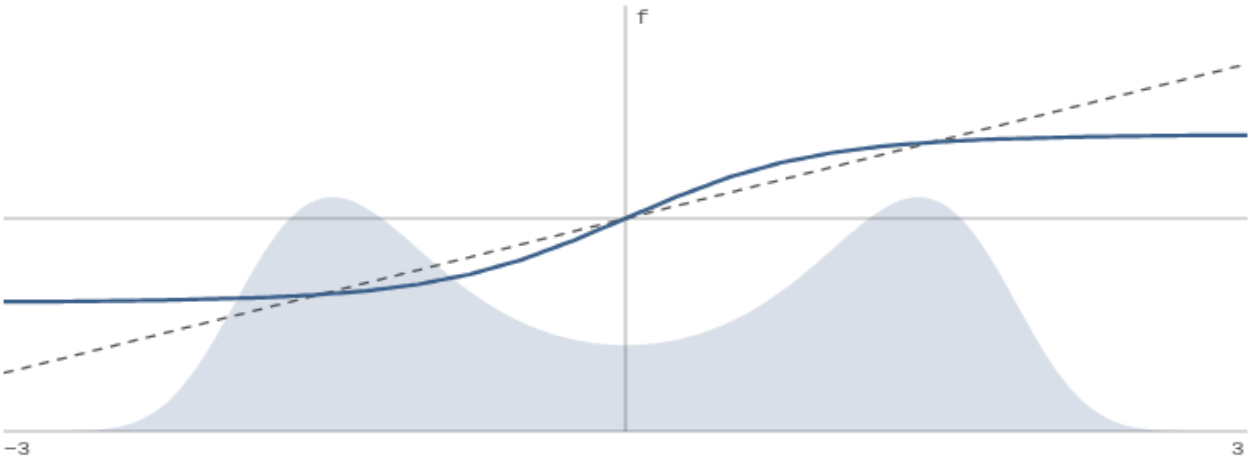
重みの付いた Poincaré 不等式 — 凸なら 1/κ、谷が二つなら大きい

場の理論で要るのは、確率測度 $\mu(dx)=e^{-V(x)}dx/Z$（Z は全体を 1 にする定数）に対する形です。内積を $\langle f,g\rangle_\mu=\int \overline{f}\,g\,d\mu$ とし、この内積で長さが有限な関数の空間を $L^2(\mu)$、分散を $\mathrm{Var}_\mu(f)=\int\left|f-\int f\,d\mu\right|^2 d\mu$ と書きます。

$$\mathrm{Var}_\mu(f)\le C_P\int|f'|^2\,d\mu; \qquad \mathrm{Var}_\mu(x)\;\le\;C_P\;\le\;\frac{1}{\kappa}\quad(V''\ge\kappa>0) \tag{9}$$

最良の C_P は、$Lf=-f''+V'f'$ の 0 の次の隙間の逆数です。L は $L^2(\mu)$ で自己共役で、部分積分から $\langle f,Lf\rangle_\mu=\int|f'|^2d\mu$、$Lf=0$ となるのは定数だけです（07 節と同じ形。基底状態の側からは 2-05 §08）。左の不等式は $f=x$ を入れれば出ます。右は Brascamp–Lieb（1976）の分散の不等式の系とされ、Bakry–Émery（1985）の対数 Sobolev 不等式（Poincaré 不等式より強い形の不等式）からも出ます 既知 。一次元なら次の筋で足ります。$Lf=\lambda f$ を微分すると $g=f'$ は $Lg+V''g=\lambda g$、g との内積で $\int|g'|^2d\mu+\int V''g^2d\mu=\lambda\int g^2d\mu$、よって $\lambda\ge\kappa$（固有関数があり境界の項が消えるとして）。正規分布 $V=x^2/(2\sigma^2)$ では三つとも σ^2 です（Chernoff 1981）。

図 2　c（−2 から 4）を動かすと重み exp(−V_c)（塗り）が二つの山に分かれ、等号となる f（実線）が直線 x/√Var(x)（破線）から段差へ変わる



c = 2.0　障壁 c²/4 = 1.00　Var(x) = 1.6655 ≤ C_P = 2.6714　（κ > 0 が無く、右の上界は無い）

計算 図の数値はこの端末で計算しました（最良の f と C_P は python3 で求めて埋め込み、重み e^{-V_c} はその場で計算）。

計算 **表 3**　$V_c = x^4/4 - cx^2/2$ の C_P（L をシュレーディンガー型の作用素に直して三点差分で求めた。方法は出典表。刻みを半分にしても 4 桁一致）。$c < 0$ では $\kappa = -c$。

c	1/κ	Var(x)	C_P
−2	0.500	0.3451	0.3503
0	—	0.6760	0.7307
1	—	1.0418	1.2625
2	—	1.6655	2.6714
3	—	2.5853	7.6577
4	—	3.6707	33.580

谷が二つ（$c > 0$、谷の間の山の高さ $c^2/4$）になると C_P は $\mathrm{Var}(x)$ よりずっと速く増え、$c = 4$ では 9 倍です。最良の f は左の谷で -1、右で $+1$ に近い段差になり、その傾きは重みのほとんど無い山の上でしか効きません。**重みのくびれが C_P を大きくします。**

本書での使い方は 23-14 §02（四つの条件ごとに、最も近い既知の定理との距離を並べる）。

09

変数が多いとき — 積・ガウス・自由場と、二つの隙間

変数が $x = (x_1, \ldots, x_n)$ と多いときは、(9) の $|f'|^2$ を勾配の長さの二乗 $|\nabla f|^2 = \sum_j |\partial_j f|^2$ に替えます。基本は次の二つです 既知 。

(i) 独立な変数の積の測度の C_P は、各因子の C_P の最大値で、変数の数によりません。L が各変数の L の和になり、固有関数は積 $f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)$、固有値は和になるので、0 の次の値は各因子の隙間の最小値だからです（固有関数の基底があるとして）。

(ii) 平均 0・共分散行列 C のガウス測度の C_P は、C の最大固有値です。C の固有ベクトルを直交座標に取ると、測度は分散が C の固有値の独立な一次元ガウスの積に分かれ（1-08）、$|\nabla f|^2$ は直交座標の取り替えで変わりません。あとは (i) と、一次元の $C_P=\sigma^2$（08 節）を使います。

1-08 (10) の輪の上の自由場では $C=(-\Delta_{\mathrm{lat}}+m^2)^{-1}$ です。$-\Delta_{\mathrm{lat}}$ の固有値は 0 以上で、0 は定数の向き（すべての x_j を同じだけずらす向き）なので、C^{-1} の最小固有値は m^2、よって $C_P=1/m^2$ です。相関長 $\xi\approx 1/m$（1-08 (11)）と合わせると $C_P\approx\xi^2$ になります（この C_P は場の変数 x_j の勾配で測ったものです。格子ゲージ理論でリンクの角度を変数に取ると定数倍が変わるので、どちらで測るかを必ず書きます。23-01）。

ここで二つの隙間を区別します。自由場では、C_P の逆数 m^2 は L の隙間（(5) で e^{-tL} が平均からのずれを消す速さ）です。一方、1-08 (10) を虚時間の経路積分と読んだときのハミルトニアンの隙間は、格子間隔を単位にして $1/\xi$（1-08 (11)。m が小さいとき $\approx m$）です。二乗の関係 $C_P\approx\xi^2$ は自由場の計算で、相互作用のある理論で一般に保たれるかどうかは 23-01 の問いであり、証明されていません（群の上の同じ形は 5-11）。

10

寄り道：固有値を数える — Weyl の法則と太鼓の形

飛ばしてよい節です。1910 年 10 月末、Lorentz がゲッティンゲンの Wolfskehl 講演に招かれ、第 4 講の終わりに「空洞の中の高い振動数の定在波の数は、形によらず体積に比例するはずだ」という問題を出し、聴いていた Weyl が 2 年足らずで証明した、と Kac（1966）は伝えています。平面の領域 Ω の Dirichlet の $-\Delta$ では次の形です 既知 。

$$N(\lambda)=\#\{k:\ \lambda_k\le\lambda\}\ \sim\ \frac{|\Omega|}{4\pi}\lambda\quad(\lambda\to\infty);\qquad d\text{ 次元では }N(\lambda)\propto|\Omega|\,\lambda^{d/2}\tag{10}$$

計算 一辺 1 の正方形（固有値 $\pi^2(j^2+k^2)$）では $\lambda=10^6$ で $N=79269$。主項 79577.5 に周の長さ 4 の補正 $-\sqrt{\lambda}/\pi$ を足すと 79259.2 です。Kac は面積と周の長さが固有値の列から「聞こえる」（正確には、固有値の列だけから決まる）ことを論じ、形そのものはどうかと問いました。答えは否で、Gordon・Webb・Wolpert（1992）が固有値の列が一致する別の形の平面領域を作りました。λ を運動量の二乗 Λ^2 と読むと、Λ 以下のモードの数は四次元で Λ^4 に比例します。短い距離の自由度のこの多さは、発散を考える出発点の一つです（4-04・1-12）。

この章が言えている範囲

内容	状態
(1) の固有値、下の固有値の収束と上の端の発散	言えている 既知 （表 1・図 1 計算 ）
格子から連続極限でスペクトルの下の端を読むこと（01 節末）	物理 の水準。四次元の尺度の極限は 2026-11 に公開された構成が作った（委員会の評価の水準。6-00）。その下の端（質量ギャップ）は示されていない（6-04）
ヒルベルト空間・自己共役・スペクトル・スペクトル定理・Weyl の法則 (10)	定義と例を示し、定理は引用 既知
変分原理 (6)・Temple の下界 (7)・表 2	言えている 既知 ・計算 。$\mu = 39$ は $\lambda_2 = 4\pi^2$ を知っているから置けた値
Poincaré 不等式 (8)・$C_P = 1/\Delta$・(9)・積とガウス測度の C_P・自由場の $C_P = 1/m^2$	言えている 既知 。(9) の一次元の筋と 09 節 (i) の筋は固有関数の存在を仮定。表 3・図 2 は 計算
相互作用のある理論での C_P と相関長の関係	扱っていない（23-01。証明されていない）。$C_P \approx \xi^2$ は自由場の計算
場の量子論のハミルトニアンのスペクトル・ヤン–ミルズの質量ギャップ	扱っていない（4-09・4-11）。何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1〜3・図 1〜2・10 節の数	計算	この端末の python3（NumPy 1.26・SciPy 1.11）。表 3 は $f = \psi e^{V/2}$ と置いて L を $-d^2/dx^2 + V'^2/4 - V''/2$ に直し（2-05 §08 の $\psi = f\phi_0$ で $\phi_0 = e^{-V/2}$ としたもの）、$[-7, 7]$ の三点差分で求めた。図は素の JavaScript で、読み出しを node で表と照合
(4)〜(7)・スペクトル定理・Weyl の判定法	既知	G. Temple, Proc. R. Soc. Lond. A 119 (1928) 276–293／W. Ritz, J. reine angew. Math. 135 (1909) 1–61／J. von Neumann, Math. Ann. 102 (1930) 49–131（無限次元のスペクトル定理の代表的な論文とされる）／M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I*（Academic Press, 1972）。いずれも書誌のみ
(9)・09 節の積とガウス測度の C_P	既知	H. J. Brascamp, E. H. Lieb, J. Funct. Anal. 22 (1976) 366–389（書誌のみ。(9) の右の不等式がその系として出ることは未確認）／D. Bakry, M. Émery, Sém. Probab. XIX (1985) 177–206（冒頭の要約を確認）／H. Chernoff, Ann. Probab. 9 (1981) 533–535（要旨を確認）／D. Bakry, I. Gentil, M. Ledoux, *Analysis and Geometry of Markov Diffusion Operators*（Springer, 2014。書誌のみ）
Weyl の法則・Lorentz の問題・太鼓	既知	H. Weyl, Math. Ann. 71 (1912) 441–479（題を確認、書誌のみ）／M. Kac, Amer. Math. Monthly 73 (1966) no. 4, part II, 1–23（本文を確認）／C. Gordon, D. L. Webb, S. Wolpert, Bull. AMS 27 (1992) 134–138, arXiv:math/9207215（要旨を確認）

次に読む章：1-11 フーリエ解析と分布。量子力学での使い方は 2-05。

フーリエ解析と分布 — 点で値を持たないものを、波と平均で扱う

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 周波数に分けると微分が掛け算になること。点で値を持たない対象（超関数）を、なめらかな関数と組にした値で定義すること。伝播関数が近くで発散し遠くで e^{-mr} と減ること、その二乗が四次元でちょうど積分できなくなること、超関数どうしの積が一般には定まらず、荒さの合計が正なら定まること。

前提となる章 — 1-10（ヒルベルト空間・正規直交基底）。§01・§06・§08 で 1-09 の白色雑音・自由場と 1-08 §06 の対の数え上げを使います（式は再掲）。

先に言うこと — 定理は証明を省いて引用します。相互作用のある場の積は入口だけです（7-09・7-10）。この章はヤン–ミルズの質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. なぜこの章か — 点の値の代わりに平均を測る
2. フーリエ級数 — なめらかさは係数の減り方に出る（図 1）
3. フーリエ変換 — 微分が掛け算に、方程式が割り算になる
4. テスト関数と超関数 — 試して測る
5. 超関数のフーリエ変換 — δ はすべての周波数を等しく含む
6. 荒さの物差し — Sobolev 空間と尺度の指数（(9a)(9b)）
7. 伝播関数 — 近くで発散し、遠くで e^{-mr}（図 2・表 1）
8. 特異性を数える — 四次元が境目（表 2・図 3）
9. 積の困難 — ならし方が答えに残る（図 4）
10. 作れる場合 — 荒さの合計が正なら

01

なぜこの章か — 点の値の代わりに平均を

二次元以上の自由場は一点での値を持ちません。一点の分散が無限大だからです（1-09 §08）。意味を持つのは、なめらかな重み f で平均した値で、その分散は二点の相関 G を二重に平均して書けます。

$$\varphi(f)=\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\,f(x)\,d^dx,\qquad E\big[\varphi(f)^2\big]=\iint f(x)\,G(x-y)\,f(y)\,d^dx\,d^dy \tag{1}$$

G を**伝播関数**と呼び、形式的には $E[\varphi(x)\varphi(y)]=G(x-y)$ です。G は $x=y$ で無限大ですが、(1) の右辺は有限です。**例：**一辺 ε の箱で平均した値の分散は、$d\ge 3$ なら $G\approx c\,r^{2-d}$（§07）により ε^{2-d} に比例し、四次元では箱を半分にするごとに 4 倍です。点では無限、平均すれば有限です。

02

フーリエ級数 — 周期関数を波に分ける

周期 2π の関数を波 e^{ikx} の重ね合わせに分けます。$e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$ $(k\in\mathbb{Z})$ は $L^2(-\pi,\pi)$ の正規直交基底で（1-10 §02 の複素版）、係数は内積で取り出せます 既知 。

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,e^{-ikx}\,dx,\qquad f=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k\,e^{ikx},\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2\,dx=\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2 \tag{2}$$

最後が Parseval の等式です。部分積分をすると、微分は係数に ik を掛けることに替わります。

$$c_k[f']=ik\,c_k[f]\qquad (f\text{ が周期的でなめらかなとき}) \tag{3}$$

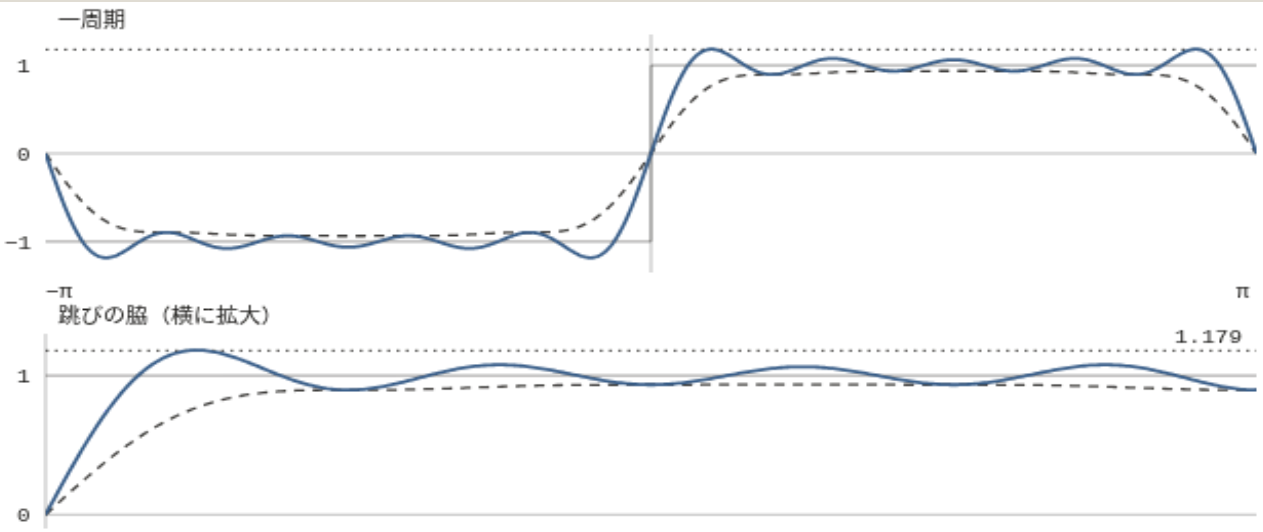
だから**なめらかさは係数の減り方**に出ます。n 回微分しても二乗積分が有限なら $\sum_k k^{2n}|c_k|^2<\infty$。跳びがあると係数は $1/k$ でしか減りません。

例：矩形波 $f(x)=\operatorname{sign}x$ の部分和は $S_N(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k\,\text{奇数}\le N}\frac{\sin kx}{k}$ です。二乗平均の誤差は Parseval により $\frac{8}{\pi^2}\sum_{k\,\text{奇数}>N}k^{-2}\approx\frac{4}{\pi^2 N}$ で 0 に行くのに、最大値は跳びの脇で約 1.179 まで行き過ぎ、跳びの幅 2 に対する比 $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt-\frac{1}{2}=0.08949\cdots$ は N によらず残ります。これが**Gibbs 現象**で、Wilbraham（1848）が最初に調べ、Gibbs の 1899 年の手紙で広く知られ、Bôcher（1906）が名を付けたとされます 既知 。

計算 S_N の最大（$x=\pi/(N+1)$ の値）は $N=1,9,999$ で 1.27324・1.18233・1.17898（極限 $\frac{2}{\pi}\operatorname{Si}(\pi)$）、二乗平均の誤差は 0.18943・0.04040・0.000405 です（Parseval の式と数値積分で一致。$N=999$ の 0.0004052846 は 10 桁まで一致）。二乗平均では収束し、一様には収束しな

い。「収束」には強さの違う意味があります。部分和を平均した **Fejér 平均** $\sigma_N = \frac{1}{N+1}(S_0 + S_1 + \cdots + S_N)$ は正の核でならしたものなので行き過ぎが起きません（$|\sigma_N| \le 1$） 既知 。「ならしてから極限を取る」は §04 の近似の基本の手です。

図 1　矩形波（細線）の部分和 S_N（実線）と Fejér 平均 σ_N（破線）。上は一周期、下は跳びの脇 $0 < x < 8\pi/(N+1)$（$N < 7$ では $0 < x < \pi$）を横に拡げたもの。N を増やすと上では S_N が矩形波に寄るのに、下の山の高さは約 1.179（点線）のまま残り、σ_N は 1 を越えない。「動かす」で N を増やす



N = 9　部分和の最大 1.18233（x = π/(N+1)、極限 1.17898）　行き過ぎ／跳び 0.09116　Fejér 平均の最大 0.93573　二乗平均の誤差 0.040395（Parseval）

計算 この図の数値はこの端末で計算しました（級数の部分和をその場で足す。読み出しは $N = 1, 3, 5, 9, 19, 49, 99, 199$ で上の計算と 5 桁一致）。

03

フーリエ変換 — 微分が掛け算になる

周期の無い関数では周波数が連続に並び、和が積分に替わります。この本の約束は次の通りです。測度を $d^dk/(2\pi)^d$ とする点は 1-09 の (10) と揃えてあります。

$$\hat f(k) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-ik\cdot x}\, d^dx, \qquad f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat f(k)\, e^{ik\cdot x}\, \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \tag{4}$$

級数と同じ規則が成り立ちます 既知 。長さが保たれ（Plancherel）、微分が掛け算に、畳み込み $(f*g)(x) = \int f(y)g(x-y)\,d^dy$ が積になります。

$$\int |f|^2\, d^dx = \int |\hat f|^2\, \frac{d^dk}{(2\pi)^d}, \qquad \widehat{\partial_j f} = ik_j\, \hat f, \qquad \widehat{f*g} = \hat f\, \hat g \tag{5}$$

すると $\widehat{-\Delta f} = |k|^2 \hat f$ で、定数係数の微分方程式は周波数ごとの割り算になります。$m > 0$ なら分母は 0 にならず、解が一つ決まります。

$$(-\Delta + m^2)\,u = f \quad\Longleftrightarrow\quad \hat{u}(k) = \frac{\hat{f}(k)}{|k|^2 + m^2} \tag{6}$$

例：幅 σ のガウスの変換は幅 $1/\sigma$ のガウスです（2-05 の不確定性関係）。$e^{-m|x|}$ の変換は $\frac{2m}{k^2+m^2}$ で、$x=0$ の角が $1/k^2$ の遅い減り方に出ます（§07 の一次元の伝播関数）。

04

テスト関数と超関数 — 試して測る

点の値を持たない対象を、なめらかな関数と組にした値で定義します。組む相手を**テスト関数**と呼び、何回でも微分できて有界な集合の外で 0 になる関数とします（全体を $\mathcal{D}$。例：$|x|<1$ で $e^{-1/(1-|x|^2)}$、外で 0）。

超関数とは、テスト関数 ϕ に数 $\langle T,\phi\rangle$ を対応させる線形で連続な規則です（連続とは、台（関数が 0 でない点の集まりの閉包）が一つの有界集合に収まり、すべての導関数が一様に 0 に近づく列 ϕ_n で $\langle T,\phi_n\rangle \to 0$ となること）既知。題の「試して測る」は比喩で、正確には、点の値の代わりにこの規則 $\phi \mapsto \langle T,\phi\rangle$ そのものを対象とみなす、という意味です。英語は distribution で、章の題の「分布」はその直訳です（確率の「分布」とは別の言葉）。超関数の考えは Sobolev（1936）に始まり、Schwartz が体系にしたとされます 既知。

例：(a) 有界な集合の上で積分できる関数 f は $\langle f,\phi\rangle = \int f\phi\, d^dx$ で超関数になります。(b) $\langle \delta,\phi\rangle = \phi(0)$ の δ は、どの関数の積分でも書けません。微分は部分積分を定義に格上げして決めます。

$$\langle \partial_j T,\phi\rangle = -\langle T,\partial_j\phi\rangle \tag{7}$$

右辺はいつでも意味を持つので、どの超関数も何回でも微分できます。階段関数 H（$x>0$ で 1、$x<0$ で 0）なら $\langle H',\phi\rangle = -\int_0^\infty \phi'\,dx = \phi(0)$、つまり $H'=\delta$ です。

近似：$\rho\ge 0$ をなめらかで $\int\rho = 1$ の関数、$\rho_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-d}\rho(x/\varepsilon)$ とすると $\langle\rho_\varepsilon,\phi\rangle\to\phi(0)$、つまり $\rho_\varepsilon\to\delta$ です。$\sin nx$ は点ごとには収束しませんが、部分積分で $\frac{1}{n}$ が出るので超関数としては 0 に収束します。

05

超関数のフーリエ変換 — δ はすべての周波数を等しく含む

変換には $\mathcal{D}$ より広い相手を使います。何回でも微分でき、関数も導関数も $|x|$ のどの冪より速く減る関数の全体 $\mathcal{S}$（Schwartz 空間）で、変換は $\mathcal{S}$ を $\mathcal{S}$ の上へ一対一に写します 既知。$\mathcal{S}$ の上の連続な線形の規則（**緩増加超関数**）の変換は、$\int\hat f\phi = \int f\hat\phi$ に合わせて定めます。

$$\langle \hat{T}, \phi \rangle = \langle T, \hat{\phi} \rangle \qquad (\phi \in \mathcal{S}) \tag{8}$$

例： $\langle \hat{\delta}, \phi \rangle = \hat{\phi}(0) = \int \phi \, d^d x$ なので $\hat{\delta} = 1$。一点に集中したものは、すべての周波数を同じ重みで含みます（白色雑音の「白色」の由来）。

逆に定数 1 の変換は $(2\pi)^d \delta$ で、どこでも同じ大きさのものは周波数 0 だけを含みます。(5) の規則もそのまま延びて $\widehat{\partial_j T} = i k_j \hat{T}$ となります 既知 。§07 で伝播関数を $\hat{G} = 1/(|k|^2 + m^2)$ と書けるのはこのためです。

06

荒さの物差し — Sobolev 空間と尺度の指数

なめらかさは係数や $\hat{f}$ の減り方に出ます（(3)(5)）。これを数で測る物差しを二つ置きます。一つ目は周波数に重みを付けた長さで、これが有限な対象の全体を Sobolev 空間 H^s と呼びます。s が大きいほどなめらかなものしか入らず、s が負ほど荒いものまで入ります。

$$\|f\|_{H^s}^2 = \int (1 + |k|^2)^s \, |\hat{f}(k)|^2 \, \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tag{9a}$$

二つ目は拡大縮小での振る舞いです。超関数の $T(\lambda \cdot)$ は、変数変換の式を定義に格上げして $\langle T(\lambda \cdot), \phi \rangle = \lambda^{-d} \langle T, \phi(\cdot/\lambda) \rangle$ で決めます。

$$T(\lambda \cdot) = \lambda^{\alpha} T \ \ (\text{すべての } \lambda > 0) \quad \text{のとき、} \alpha \text{ を尺度の指数と呼ぶ} \tag{9b}$$

「物差し」は比喩で、正確には (9a) の s と (9b) の α という二つの数のことです。$\hat{\delta} = 1$ なので $\|\delta\|_{H^s}$ が有限なのは $s < -d/2$ のときだけです。尺度の指数は δ が $-d$、$|x|^{-a}$ が $-a$ です。

確率的な対象 T では、$T(\lambda \cdot)$ と $\lambda^{\alpha} T$ が同じ確率分布を持つとき、指数を α とします。白色雑音 ξ（$E[\xi(f)\xi(g)] = \int f g \, d^d x$、1-09 §07 の $\mathbb{R}^d$ 版）では、$\xi(\lambda \cdot)$ をテスト関数 ϕ, ψ と組にした値の共分散が $\lambda^{-2d} \int \phi(x/\lambda)\psi(x/\lambda)\, d^d x = \lambda^{-d} \int \phi\psi \, d^d x$ で、平均 0 のガウスは共分散で決まるので、$\xi(\lambda \cdot)$ は $\lambda^{-d/2}\xi$ と同じ確率分布を持ちます。指数は $-d/2$ です。質量の無い自由場（$m = 0$、$d \geq 3$）は共分散が $G(\lambda x) = \lambda^{2-d} G(x)$（§07 の近い側の式が $m = 0$ では厳密）なので、指数は $1 - d/2$ です。$d = 2$ では G が対数なので、定数を除いて同じことが成り立ちます 既知 。時間も含む時空の白色雑音を、時間を λ^2 倍・空間を λ 倍する放物型の尺度で測ると、指数は $-(d+2)/2$ です（Hairer の講義の演習 2.3） 既知 。この指数が §10 で積の可否を決めます。

07

伝播関数 — δ に応える場

(6) の右辺を δ にした方程式の解が伝播関数です。「δ に応える」は比喩で、正確には (10) の最初の式を超関数の等式として満たすことで、このような解を**基本解**と呼びます。$\frac{1}{|k|^2+m^2} = \int_0^\infty e^{-t(|k|^2+m^2)}dt$ とガウスの変換から、熱方程式 $\partial_t u = \Delta u$ の基本解 $(4\pi t)^{-d/2}e^{-|x|^2/4t}$（**熱核**）を時間で積分した表示も出ます。

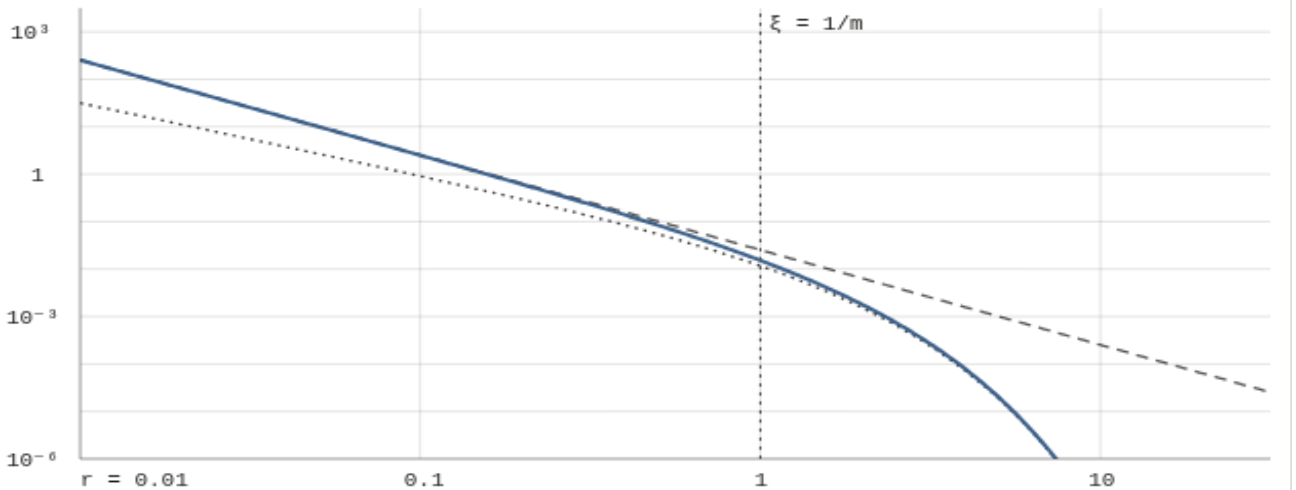
$$(-\Delta + m^2)\,G = \delta, \qquad \hat{G}(k) = \frac{1}{|k|^2+m^2}, \qquad G(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-|x|^2/4t - m^2 t}}{(4\pi t)^{d/2}}\,dt \tag{10}$$

G は自由場の共分散で、物理では質量 m の粒子のユークリッドの伝播関数です（4-02・4-03）。$r = |x|$ として $d=1$ では $e^{-mr}/2m$、$d=3$ では $e^{-mr}/4\pi r$、一般には変形ベッセル関数 $K_\nu(s) = \int_0^\infty e^{-s\cosh t}\cosh \nu t\, dt$ を使って $(2\pi)^{-d/2}(m/r)^{d/2-1}K_{d/2-1}(mr)$ です 既知 。大事なのは二つの顔です。

$$G(r) \approx \begin{cases} \dfrac{\Gamma(d/2-1)}{4\pi^{d/2}}\, r^{2-d} & (r\to 0,\ d\ge 3) \\[2mm] \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r} & (r\to 0,\ d=2) \end{cases} \qquad G(r) \approx \frac{1}{2m}\left(\frac{m}{2\pi r}\right)^{\frac{d-1}{2}} e^{-mr} \quad (r\to\infty) \tag{11}$$

近い顔では m が消え、$d\ge 2$ で発散します。**遠い顔**では e^{-mr} で減ります。「顔」は比喩で、正確には $r\to 0$ で $G(r)$ と (11) の左の式との比が 1 に近づき、$r\to\infty$ で右の式との比が 1 に近づく、という意味です。相関が $e^{-r/\xi}$ で減るときの ξ を相関長と呼ぶと（2-08）$\xi = 1/m$ で、「相関の減る速さ＝質量」は質量ギャップの定義（4-11）の自由場の版です。

図 2　伝播関数 $G(r)$ の両対数グラフ（実線）。d と m を動かすと、近い側は (11) の左の式（破線。$d=2$ は定数 $(\ln(2/m)-\gamma)/2\pi$ を足した形、$d=1$ は原点の値 $1/(2m)$）に、遠い側は右の式（点線）に沿い、折れ目は $\xi = 1/m$（縦線）に来る。「動かす」で m を往復させる



d = 4　m = 1.00　G(0.01) = 2.532e+2（近い側の式との比 0.9997）　G(10ξ) = 4.724e−8（遠い側の式との比 1.036）

計算 この図の数値はこの端末で計算しました（K_ν の積分表示を台形則で。表 1 と 7 桁一致）。

計算 **表 1**　$m=1$ の G と (11) の式との比（$d=2$ の近い側は定数 $\ln 2-\gamma$ を足す）。ベッセル関数の式と (10) の数値積分が 15 桁一致。

d	r	G(r)	近い側との比	遠い側との比
2	0.01	0.7514	1.0000	0.3805
4	0.01	253.2	0.9997	8.057
4	1	0.01525	0.6019	1.306
4	10	4.724×10^{-8}	0.0002	1.036

格子の伝播関数

間隔 a の格子の伝播関数は、1-09 の (10) の被積分関数に $e^{ik\cdot x}$ を掛けて積分したものです（1-09 の (10) はその $x=0$ の値）。$d=3$、$m=1$ の距離 1 では、連続の G との差が $a=1/8$ で 0.9%、$a=1/16$ で 0.2% と a^2 に比例して縮みます 計算 （5-01）。

08

特異性を数える — 四次元が境目

原点で発散しても、近くで積分できれば §04 の (a) で超関数です。冪なら次元との比べっこです（$|S^{d-1}|$ は単位球面の面積）。

$$\int_{\varepsilon<|x|<1}|x|^{-a}\,d^dx=|S^{d-1}|\int_\varepsilon^1 r^{d-1-a}\,dr\ \xrightarrow[\varepsilon\to0]{}\ \begin{cases}\text{有限} & (a<d)\\ \ln(1/\varepsilon)\text{ で発散} & (a=d)\\ \varepsilon^{d-a}\text{ で発散} & (a>d)\end{cases}\tag{12}$$

$G\sim r^{2-d}$ は $a=d-2<d$ なので、どの次元でも超関数です。その n 乗は $a=n(d-2)$ で、積分できるのは $n(d-2)<d$、二乗なら $d<4$、三乗なら $d<3$ のときです。

伝播関数の冪は場の積から出ます。ガウスの四次の平均は対の組み方の和です（1-08 §06）。無限大の $E[\varphi^2]=G(0)$ を引いた $:\varphi^2:=\varphi^2-E[\varphi^2]$（Wick 積）では、$x$ の φ と y の φ を結ぶ組だけが残ります（x どうし・y どうしの組は引いた分で消える） 既知 。

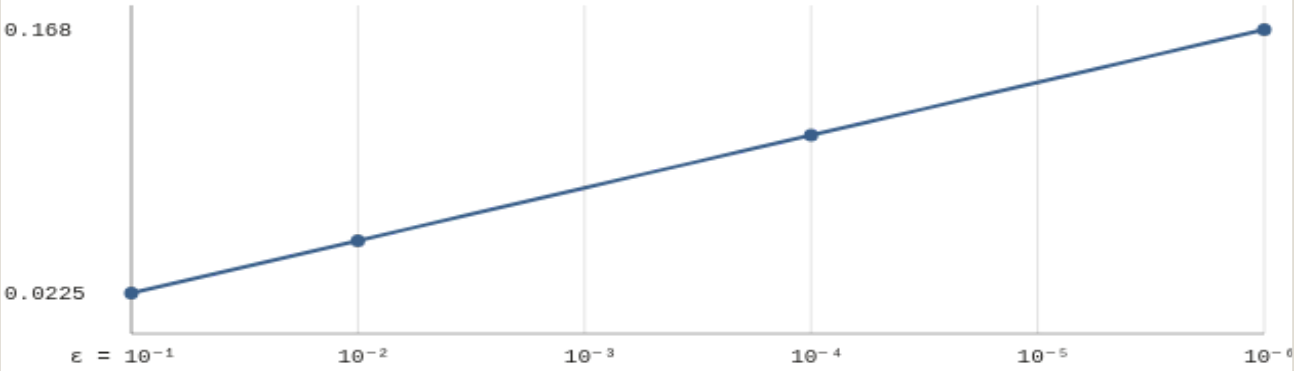
$$E\big[:\varphi^2:(x):\varphi^2:(y)\big]=2\,G(x-y)^2,\qquad E\big[:\varphi^2:(f)^2\big]=2\iint f(x)\,G(x-y)^2\,f(y)\,d^dx\,d^dy\tag{13}$$

$:\varphi^2:(f)$ の分散が有限なのは G^2 が積分できる $d<4$ のとき、三乗なら $6G^3$ で $d<3$ のときです。四で切り替わる他の計算と並べた図は 1-12 §10 の次元のつまみです。

計算 **表 2**　$I_n(\varepsilon)=\int_{\varepsilon<|x|<1}G(x)^n\,d^dx$（$m=1$、動径の数値積分）。行を押すと図 3 に描きます。

d	n	ε = 0.1	0.01	10^{-4}	10^{-6}	ε → 0
2	3	0.01079	0.01408	0.01426	0.01426	有限
3	2	0.02719	0.03362	0.03440	0.03440	有限
3	3	0.00565	0.01866	0.04763	0.07679	対数で発散
4	1	0.1851	0.1876	0.1876	0.1876	有限
4	2	0.02248	0.05143	0.1097	0.1681	対数で発散
4	3	0.01404	1.598	16041	1.604×10^8	ε^{-2} で発散

図 3　表 2 の行を押す（キーボードでは Tab と Enter）と、その (d, n) の $I_n(\varepsilon)$ を $\log_{10}(1/\varepsilon)$ に対して描く。有限なら横ばい、対数で発散すれば直線、冪で発散すれば急に立ち上がる（縦軸を対数にすると直線）。丸は表 2 の列の値



d = 4, n = 2（対数で発散） ε を 10^{-5} から 10^{-6} にしたときの増分 0.0292　比 1.21

計算 この図の数値はこの端末で計算しました（表 2 と同じ動径の数値積分を $\log_{10}(1/\varepsilon) = 1, 1.25, \ldots, 6$ で行い、4 桁で埋め込んだ表）。

$d = 4, n = 2$ は ε を 1/10 にするごとに 0.02916 伸び、(11)(12) から出る $\ln 10/8\pi^2$ に合います 計算 。四次元は G^2 がちょうど積分できなくなる境目で、四次元で結合定数が次元を持たないこと（4-04）も同じ尺度の勘定です 既知 （1-12）。

09

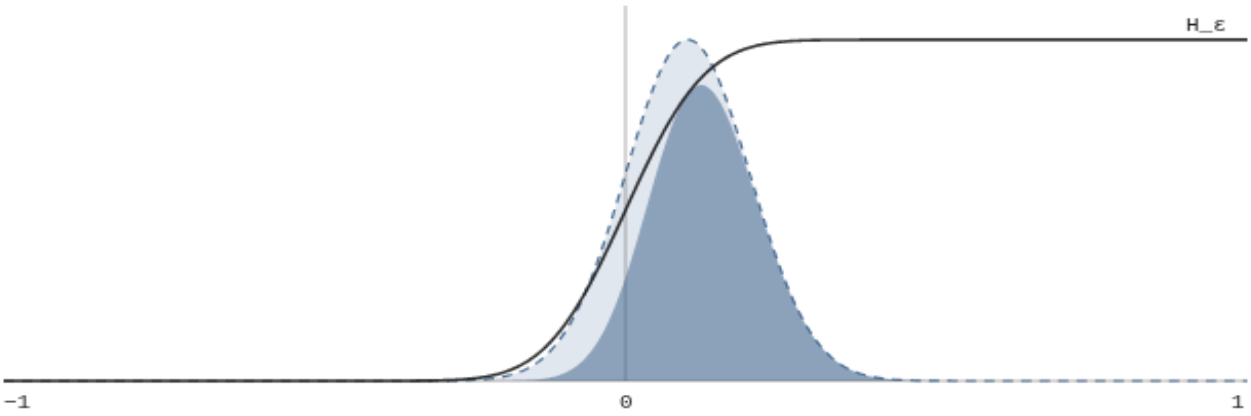
積の困難 — ならしてから掛けると、ならし方が残る

なめらかな g と超関数 T の積は $\langle gT, \phi\rangle = \langle T, g\phi\rangle$ で決まります。超関数どうしを「ならして掛け、ならしを外す」と三つのことが起きます。**(i) 発散する：**ρ_ε^2 の面積は $\varepsilon^{-d}\int \rho^2$ で無限大に行きます。**(ii) ならし方が残る：**H を ρ で、δ を ψ（どちらも確率密度）でならし、$x = \varepsilon X$ と置き換えます。

$$\int (H * \rho_\varepsilon)\, \psi_\varepsilon\, \phi\, dx = E\big[\mathbf{1}\{Y \le X\}\, \phi(\varepsilon X)\big] \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} c\, \phi(0), \qquad c = P(Y \le X) \quad (Y \sim \rho,\ X \sim \rho) \tag{14}$$

極限は $c\,\delta$ ですが、c はならし方で決まります。ρ を標準ガウス、ψ を中心 s のガウスにすると $c=\Phi(s/\sqrt{2})$（Φ は標準正規分布の分布関数）で、0 と 1 の間のどの値にもなります。

図 4　ならした H（実線）、ならした δ の形（破線、高さは縮尺）、積（濃い塗り）。s を動かすと積の面積が 0 と 1 の間で変わり、ε を縮めても変わらない。δ どうしの積の面積は $1/\varepsilon$ で伸びる。「動かす」で ε を縮める



ε = 0.1000　s = 1.0　H と δ の積の面積 = 0.76025　δ どうしの積の面積 = 2.197

計算 この図の数値はこの端末で計算しました（閉じた式。下の数値積分と照合）。

計算 数値積分では、H と δ の積の面積は $s=-2,0,1,2$ で 0.078650・0.500000・0.760250・0.921350（$\varepsilon=0.1$ と 0.01 で同じ、$\Phi(s/\sqrt{2})$ と 6 桁一致）、δ どうしは $\varepsilon=0.1$ で 1.038・2.821・2.197・1.038、$\varepsilon=0.01$ でその 10 倍です。

(iii) 結合法則が壊れる。主値 $\langle \mathrm{p.v.}\frac{1}{x},\phi\rangle=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx$ について、「なめらかな関数×超関数」の積として $x\cdot\delta=0$、$x\cdot\mathrm{p.v.}\frac{1}{x}=1$ です。

$$(\delta\cdot x)\cdot\mathrm{p.v.}\tfrac{1}{x}=0,\qquad \delta\cdot\left(x\cdot\mathrm{p.v.}\tfrac{1}{x}\right)=\delta \tag{15}$$

関数の積の性質をすべて保つ積は、超関数全体には入れられません。正確には、超関数（少なくとも連続関数と δ）を含む結合的な積で、連続関数どうしでは普通の積に一致し、微分がライプニッツ則 $(fg)'=f'g+fg'$ を満たすものは作れない、とされます（Schwartz 1954）既知 。

10

作れる場合 — 荒さの合計が正なら

積が作れる条件は、§06 の尺度の指数で書けます。C^α を次の空間とします。$0<\alpha<1$ なら α 次のヘルダー連続な関数（$|f(x)-f(y)|\le C|x-y|^\alpha$、$|x-y|\le1$）の全体、$\alpha>1$ なら導関数に同じ形の条件を課したもの、$\alpha<0$ なら §06 の尺度の指数が局所的に一様に α 以上の超関数の全体です。α が大きいほどなめらかです。荒さの合計が正なら積が作れます（Hairer 2014 の命題 4.14）既知 。

$$f \in C^{\alpha},\ g \in C^{\beta},\ \alpha+\beta>0 \quad\Longrightarrow\quad f\cdot g \in C^{\min(\alpha,\beta)} \text{ が連続に定まる} \tag{16}$$

「連続に定まる」とは、なめらかな関数どうしの積を極限で延ばしたものが、近づけ方に依らず一つに決まることです。同じ命題は、α が自然数でなければ $\alpha+\beta>0$ が必要でもあることを述べています。

例：階段関数 H は有界ですが跳びがあり、荒さの指数は 0 です（$H(\lambda x)=H(x)$。$\alpha<0$ のどの C^{α} にも入る）。一次元の δ は -1 です。合計は正にならないので (16) は使えず、§09 の (ii) の現象と矛盾しません。自由場は $1-d/2$ より少し荒い（$\alpha<1-d/2$ の C^{α} に入る）ので、二乗が (16) の決まった積として作れるのは $d<2$ だけです 既知 。§08 で $d=2,3$ の $:\varphi^2:(f)$ の分散が有限になったのは、§09 の (i) の発散を先に引いた（繰り込んだ）からで、ならし方に依らない形になることは確率の打ち消し（ガウスの対の数え上げ）に依っています。

ヤン–ミルズの接続 A は短い距離で自由場と同じ荒さを持つと期待され 物理 、場の強さ $F=dA+A\wedge A$（1-07）の $A\wedge A$ は二次元以上で (16) を満たさない積です。二・三次元ではこの種の積の解析が確率量子化で進められ（7-09）、四次元では 2026-11 に公開された構成が、格子の極限として連続の理論を作りました（Lean で証明されている、と委員会が評価した。6-00）。そこでは局所的な積は、格子の上で繰り込んだ挿入として定義されます（8-04）。それより前の到達点は 7-10 にあります。

この章が言えている範囲

内容	状態
フーリエの規則 (2)〜(6)、Gibbs の行き過ぎ、Fejér 平均	言えている 既知 。数値と図 1 は 計算
超関数・微分 (7)・変換 (8)・物差し (9a)(9b)、白色雑音と自由場の尺度の指数	定義と例 既知 。二つの指数は §06 に一行の導出
伝播関数 (10)(11)・相関長 $=1/m$、G^n が積分できる条件、Wick 積の分散 (13)	言えている 既知 。表 1・表 2・図 2・図 3 は 計算
積の困難 (14)(15)、積が作れる条件 (16)	(14) は計算を示した。図 4 と数値積分は 計算 。Schwartz の定理は書誌のみ、(16) は言明を確認（証明は追っていない）
格子の誤差 a^2（$d=3$ の一点）／ヤン–ミルズの接続の荒さ／相互作用のある場・質量ギャップ	観察 計算 ／期待 物理 ／扱っていない。何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表・図・本文の数値	計算	この端末の python3（NumPy 1.26・SciPy 1.11）。図は素の JavaScript で、図 1 の部分和・図 2 の K_ν の積分表示・図 4 の閉じた式はその場で計算し、図 3 は python で計算した表を埋め込んだもの。読み出しを node で表と照合
Gibbs 現象の経緯	既知	E. Hewitt, R. E. Hewitt, Arch. Hist. Exact Sci. 21 (1979) 129–160（本文を確認：第 II 部）／H. Wilbraham, Cambridge and Dublin Math. J. 3 (1848) 198–201・J. W. Gibbs, Nature 59 (1899) 606（書誌のみ）
超関数の始まりと積の不可能性	既知	S. Soboleff, Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. 1(43) (1936) 39–72・L. Schwartz, *Théorie des distributions*（Hermann）・L. Schwartz, C. R. Acad. Sci. Paris 239 (1954) 847–848（いずれも書誌のみ）。超関数の考えの始まりの帰属と、*Théorie des distributions* の年（1950–51 とされる）は未確認（二次資料による）
(16)	既知	M. Hairer, Invent. Math. 198 (2014) 269–504, arXiv:1303.5113（本文を確認：§1 と命題 4.14。$\alpha \notin \mathbb{N}$ なら $\alpha+\beta>0$ は必要でもある、という後半を含む）
尺度の指数	既知	時空の白色雑音の放物型の尺度での指数 $-(d+2)/2$：M. Hairer, *An Introduction to Stochastic PDEs*, arXiv:0907.4178（本文を確認：演習 2.3）。空間の白色雑音の $-d/2$ と質量の無い自由場の $1-d/2$ は §06 の一行の導出による
変換・$\mathcal{S}$・緩増加超関数・Sobolev 空間・伝播関数の式	既知	M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II*（Academic Press, 1975）ほか標準的な教科書（書誌のみ）

次に読む章：1-12 寄り道：四次元でだけ起きること。伝播関数の使い道は 4-03、超関数に値を取る場の公理は 4-09。

寄り道：四次元でだけ起きること — 八つの事例を、ヤン–ミルズの側から読み直す

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 四次元の回転が SU(2) 二つに割れ、場の強さが自己双対と反自己双対に割れること。作用が尺度によらないのは四次元だけで、場が作用を保って一点に潰れうること。無限遠の S^3 と SU(2) が同じ形なので整数が現れること。

前提となる章 — なし（1-02（SU(2)）・1-03（リー環）・1-06（$dx_1 \wedge dx_2$ とホッジの星）・1-07（ゲージ変換と純ゲージ）を読んでいると楽です）。次元の勘定は 2-04。

先に言うこと — 寄り道なので飛ばしてかまいません。既知の事実の案内で、質量ギャップや連続極限の構成について何も示していません。本体は 3-05・3-06・4-05 です。

この章の順序

1. 見取り図 — 記事の八つとこの本
2. 左と右の掛け算
3. 場の強さが二つに割れる（図 1）
4. 尺度を変えても作用が変わらない（図 2）
5. 一点に潰れる（表 1）
6. 無限遠の球面と SU(2)
7. 平面は点で交わる（寄り道：結び目とウィルソンループ）
8. 24-cell は SU(2) の有限部分群（表 2）
9. 球の面積と、四次元で発散し始める積分（表 3・図 3）
10. 次元のつまみ（図 4）

01

見取り図 — 記事の八つと、この本で効く場所

記事「四次元でだけ起きること」の出発点は、動ける方向は n 個なのに回転できる平面は

$$\dim SO(n) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \tag{1}$$

個ある、という数え方でした。三次元では平面と垂直な軸が一対一に対応し、回転を軸で言えます。四次元では 6 枚の平面に垂直なのはまた平面で、この 6 が 3＋3 に割れることが多くの節の出発点です。割れ方は 02・03 節で、四元数の左右の掛け算として具体的に書きます。

記事の八つの事例がこの本で顔を出す場所を表にします。左の列は記事の見出しへ、右の列はこの章の節と本体の章へのリンクです。記事に無い話題（尺度と集中・無限遠の巻き数）は 04〜06 節で足します。表の左の番号は記事の事例の番号で、この章の節番号とは別です。この章そのものが寄り道なので、気になる行だけを拾って読んでもかまいません。

記事の事例	この本での顔	節・章
01 回転から軸が消える	回転群が SU(2) 二つに、場の強さが二つに割れる	02・03・3-05
02 正多面体が増える（24-cell）	頂点が SU(2) の有限部分群をなす	08・5-10
03 結び目がほどける	ウィルソンループは結び目を見ない	07
04 左手が右手になる	鏡は自己双対と反自己双対を入れ替える	03
05 平面が点で交わる／06 エキゾチック $\mathbb{R}^4$	交叉形式・ヤン–ミルズが位相を見る	07・3-06
07 難しさが単調でない	結合が無次元になる境目の次元	04・05・7-10
08 球は五次元で最大	同じ式で次元を連続に動かす	09・4-05
（記事には無い）	巻き数・インスタントン数	06・3-05

02

左と右の掛け算 — 四次元の回転は SU(2) 二つ

四次元の点を一つの数と読みます。四元数は実数に記号 i, j, k を足した数で、規則は次の一行です。掛け算は結合的ですが可換ではありません（$ij = k$、$ji = -k$）。

$$x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k, \qquad i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \qquad \bar{x} = x_1 - x_2 i - x_3 j - x_4 k, \tag{2}$$

長さ 1 の四元数は S^3 をなし、掛け算で SU(2) と同じ群になります（SU(2) が S^3 であることは 1-02 の 05 節）既知。長さ 1 の q, p を左右から掛けると四次元の回転になり、どの回転もこの

形に書けます。同じ回転を与えるのは (q,p) と $(-q,-p)$ の組だけです 既知 。三次元の $SO(3)\cong SU(2)/\{\pm1\}$（1-02）と違い、SU(2) が二つあります。

$$x \longmapsto q\,x\,\bar{p}\quad(|q|=|p|=1),\qquad SO(4)\cong \big(SU(2)\times SU(2)\big)/\{\pm(1,1)\} \tag{3}$$

例。$q=\cos a+i\sin a$、$p=\cos b+i\sin b$ なら (x_1,x_2) 面が角 $a-b$、(x_3,x_4) 面が角 $a+b$ 回ります。事例 01 の二つのつまみ（xy 面と zw 面の速さ）は、左右の角の差と和です。無作為な 200 組で (3) が行列式 1 の直交行列であることを確かめました 計算 。

03

場の強さが二つに割れる — 左は F^+ だけ、右は F^- だけを回す

場の強さ F は各点で反対称な配列 $F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu}$ で、独立な 6 成分が一枚ずつの平面に付いています。電磁場なら、この 6 成分は電場 E の 3 つと磁場 B の 3 つです（1-06 の (13)）。ヤン–ミルズでは各成分がリー環（1-03）の元になりますが、この節では実数とします。ホッジの星 $*$ は各平面を垂直な平面に移す操作で、$\varepsilon_{1234}=1$ の完全反対称な記号で

$$(*F)_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\sum_{\rho,\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma},\qquad (*F)_{12}=F_{34},\quad (*F)_{13}=F_{42},\quad (*F)_{14}=F_{23} \tag{4}$$

です。n 次元の $*$ は二形式を $(n-2)$-形式に送るので、二形式に戻るのは $n=4$ だけです。$**=1$（1-06）なので $F^{\pm}=\tfrac12(F\pm *F)$ と分けられ（$|F|^2=\sum_{\mu<\nu}F_{\mu\nu}^2$）、作用の密度と位相の密度（06 節）が同じ二つで書けます。$F=\pm *F$ を自己双対・反自己双対と呼びます。

$$|F|^2=|F^+|^2+|F^-|^2,\qquad \frac{1}{4}\sum\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}=|F^+|^2-|F^-|^2 \tag{5}$$

(4) を使うと $F^{\pm}$ の独立な成分は三つずつで、長さの二乗が $|F^{\pm}|^2$ になるように並べると次の形です。図 1 の三本の軸はこの順です。

$$F^+=\tfrac{1}{\sqrt2}\big(F_{12}+F_{34},\ F_{13}+F_{42},\ F_{14}+F_{23}\big),\qquad F^-=\tfrac{1}{\sqrt2}\big(F_{12}-F_{34},\ F_{13}+F_{24},\ F_{14}-F_{23}\big)$$

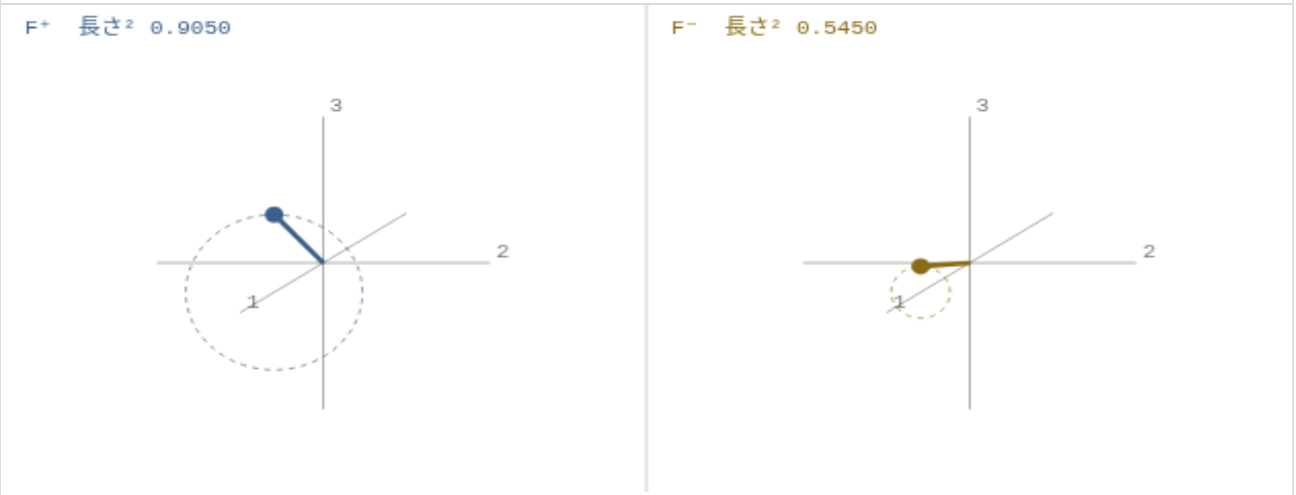
要点は (3) との関係です。回転 $x\mapsto qx\bar p$ は F^+ の 3 成分を q だけで、F^- の 3 成分を p だけで回し、二つを混ぜません 既知 。

$$\Lambda^2\mathbb{R}^4=\Lambda^2_+\oplus\Lambda^2_-\ (3+3),\qquad q\text{ は }\Lambda^2_+\text{ を},\ p\text{ は }\Lambda^2_-\text{ を回す} \tag{6}$$

どちらが F^+ を回すかは規約で決まります。向きや四元数への座標の割り当てを変えると左右が入れ替わります。この本では (2) と $\varepsilon_{1234}=1$ に揃えます。この規約では、左から i を掛ける行列は $dx_1\wedge dx_2+dx_3\wedge dx_4$ に比例して自己双対、右から掛ける行列は $dx_1\wedge dx_2-dx_3\wedge dx_4$ に比例して反自己双対です 計算 。

例。$q=\cos a+i\sin a$ は F^+ を第 1 軸のまわりに角 $2a$ 回し、$a=180°$（$q=-1$）で元に戻ります。1-02 の二重被覆が F^+ の上に見えます。無作為な 200 個で、(5) が成り立つこと、二つを混ぜる成分が 2.2×10^{-16} 以下であること、左の掛け算で F^- が不動で鏡 $x_4\mapsto -x_4$ では二つが入れ替わることを確かめました 計算 。

図 1　左の角 a を動かすと F⁺ だけが、右の角 b を動かすと F⁻ だけが回る。「鏡に映す」は始めの場を $x_4\to -x_4$ で映して F⁺ と F⁻ を入れ替えてから回す（a と b の役割は変わらない）。長さは変わらない



a = 0°　b = 0°　鏡 なし　F⁺ = (0.7071, 0.0000, 0.6364)　F⁻ = (0.7071, 0.0000, 0.2121)

計算 始めの場は $F=dx_1\wedge dx_2+0.6\,dx_1\wedge dx_4+0.3\,dx_2\wedge dx_3$。図は (2)(4) をその場で計算し、python3 の値と一致（鏡ありの行を含む）。点線は軌道。

鏡とミンコフスキーの符号

鏡は (5) の右辺の符号を変えます（事例 04）。インスタントンの鏡像は反インスタントンで、θ 項（(5) の右辺の積分に係数 θ を掛けて作用に足す項）が鏡で符号を変えるのもこのためです（3-05） 既知 。ミンコフスキーの符号では $**=-1$ で実の自己双対な場は無く（符号が一つ違う）、虚時間で考える理由の一つです（4-02）。

04

尺度を変えても作用が変わらない — 結合が無次元になる次元

場の形を保って大きさだけ $1/\lambda$ 倍にすると $A_\lambda(x)=\lambda A(\lambda x)$、$F_\lambda(x)=\lambda^2F(\lambda x)$ です（ゲージ場は長さの逆数の次元）。$y=\lambda x$ と置き換えると

$$S_d[A_\lambda]=\frac{1}{2g^2}\int_{\mathbb{R}^d}\lambda^4|F(\lambda x)|^2\,d^dx=\lambda^{4-d}\,S_d[A]\tag{7}$$

で、四次元だけ作用が大きさによりません。古典の理論に好みの長さが無いということで、2-04 の $[g^2]=4-d$ の別の顔です 既知 。問題文の 'the mass gap is not classically

visible'（Jaffe–Witten §6.6）もこれと関係します（4-07）。

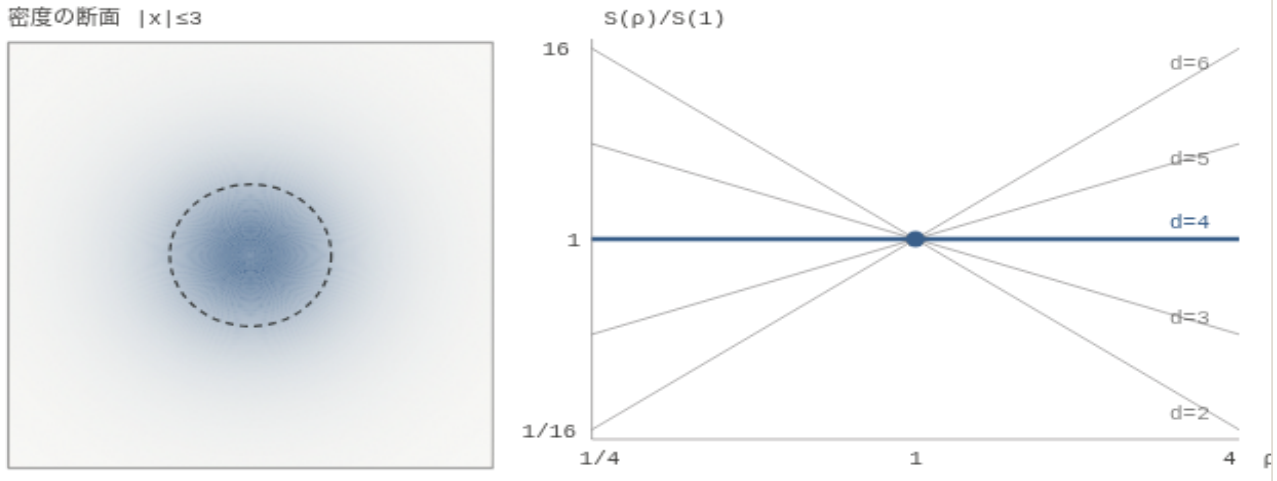
帰結の一つ。作用有限の解（停留点）なら、大きさの変形でも作用は一次で変わりません。

$$\frac{d}{d\lambda} S_d[A_\lambda]\Big|_{\lambda=1} = (4-d)\, S_d[A] = 0 \tag{8}$$

よって $d \neq 4$ なら $F = 0$ で、作用有限で自明でない解は四次元にしかありません（変形が許されるだけの減衰を仮定。同種の議論は Derrick 1964 とされます）既知。

例。格子で見ても同じです。格子間隔 ϵ の n 次元格子では、格子の各小正方形（プラケット）に付く量の和が作用の役をし、それに逆結合 β（作用の前に掛かる係数で、$1/g^2$ に当たります。定数倍は規格化により、Wilson の規約では $\beta = 2N/g^2$）を掛けます（5-01）。プラケットの和は $\frac{\epsilon^{4-n}}{4} S_{\mathrm{YM}}(A)$ で近似されます（S_{YM} は (7) の作用から $1/2g^2$ を外した積分）。そこで β は古典的には、和が ϵ^{4-n} で縮む分を補うように $\beta\,\epsilon^{4-n}$ を一定に保てばよく（$\beta \propto \epsilon^{n-4}$）、$n = 4$ では動きません。三次元なら $\beta \propto 1/\epsilon$ で、$[g^2] = 1$ と合います。物理では四次元の β は $\log(1/\epsilon)$ のように動くと信じられていますが、疑いもあり数学では未解決だと Chatterjee（arXiv:1803.01950 §3、2018 年）は書いています物理。2026-11 に公開された構成（6-00）では、選んだ格子の族の裸の結合と $\log(1/\varepsilon)$ の比が一定の値に近づくことが言明に入っています（10-06。Lean で証明されている、と委員会が評価した。一ループの主部だけの言明）。この走りが漸近自由です（4-06）。

図 2　大きさ ρ と次元 d を動かす。左は作用密度の断面（点線の円の内側に作用の半分）、右は S(ρ)/S(1) = ρ^(d−4) の両対数で、d = 4 だけ水平。「動かす」で ρ を往復させる



ρ = 1.000　d = 4　S(ρ)/S(1) = 1.000　[g²] = 0　中心の密度 48/ρ⁴ = 48.00　全作用 8π² ≈ 78.957

計算 左は (9)、右は (7) の ρ^{d-4}（$\rho = 1/\lambda$）をその場で計算（python3 の積分比と一致）。$d \neq 4$ は同じ形を縮めたときの比で、解ではありません。

05

一点に潰れる — 境目の次元

ここからは値がリー環の場を扱うので、$|F|^2$ を決めておきます。1-04 の T_a に $-i$ を掛けた $t_a = -iT_a$（$\mathrm{tr}(t_a t_b) = -\frac{1}{2}\delta_{ab}$）で $F_{\mu\nu} = \sum_a F^a_{\mu\nu} t_a$ と書き、

$$|F|^2 = \sum_{\mu<\nu}\sum_a \left(F^a_{\mu\nu}\right)^2, \qquad S = \frac{1}{2g^2}\int |F|^2\, d^4x = -\frac{1}{2g^2}\int \sum_{\mu,\nu} \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\, d^4x$$

とします。t_a が反エルミートなので $\mathrm{tr}\, F^2$ は負で、負号が付きます。(5) も各 a について足したものと読みます。

最も簡単な自己双対な解（BPST のインスタントン、3-05）は、作用の密度が原点に丸く集まった形です。$1/g^2$ を単位にした作用の密度 $s = \frac{1}{2}|F|^2$ と、半径 R の内側の作用の割合は、大きさ ρ の解で次の通りです（$d^4x = 2\pi^2 r^3 dr$、$2\pi^2$ は単位の S^3 の面積）既知 。s の形は上の規格化で BPST の接続から計算し直しました 計算 。

$$s(x) = \frac{48\,\rho^4}{(|x|^2+\rho^2)^4}, \qquad \int_{\mathbb{R}^4} s\, d^4x = 8\pi^2, \qquad \frac{1}{8\pi^2}\int_{|x|<R} s\, d^4x = 1 - \frac{3}{(1+u)^2} + \frac{2}{(1+u)^3},\quad u = \frac{R^2}{\rho^2} \tag{9}$$

計算 **表 1**　(9) の数値積分。全体は ρ によらず、半径 ρ の内側にいつも半分が入ります。

ρ	中心の密度 $48/\rho^4$	全作用 / $8\pi^2$	半径 ρ の内側	90% が入る半径
4	0.1875	1.000000000000	0.500000	8.1065
1	48	1.000000000000	0.500000	2.0266
1/16	3.146×10^{6}	1.000000000000	0.500000	0.1267

例。$\rho \to 0$ で、作用を $8\pi^2/g^2$ に保ったまま密度が一点に潰れます。三次元以下なら縮めると作用が増える（図 2）ので集中は止まりますが、四次元では止まりません。この集中の扱いが四次元の古典ヤン–ミルズの解析の要であることは、Uhlenbeck の 1982 年の仕事以来知られているとされます 既知 。問題文 §2 は 'Asymptotic freedom ensures a decisive regularity in the case when classical Sobolev inequalities are borderline.' と書き、漸近自由が決定的な正則性を「保証する（ensures）」と言い切っています。この章はそれを、(7) と表 1 で見た古典の境目（四次元で評価がちょうど足りなくなること）を漸近自由が補う、という意味に読みます（解釈）。

06

無限遠の球面と SU(2) — 整数が出る場所

$\mathbb{R}^d$ の遠方は大きな球面 S^{d-1} です。作用が有限で減り方が十分なら、遠方で A はゲージ変換だけで書ける形（純ゲージ。1-07）に近づき、ゲージ変換の写像が残ります（1-07 の単極子と同

じ仕組み)。結合定数 g と区別するため、この節ではその写像を h と書きます。連続な変形で移り合う写像を同じと見た類がホモトピー群 π_{d-1} です。

$$h:\ S^3 \to SU(2) \cong S^3, \qquad k = \deg h \in \pi_3(S^3) = \mathbb{Z}, \qquad S \geq \frac{8\pi^2}{g^2}\,|k| \tag{10}$$

四次元では遠方も SU(2) も S^3 で、同じ次元の球面の間の写像には「何回かぶせたか」という整数（写像度）があります。正確には、行き先の S^3 の一般の点を一つ選び、その逆像の各点に、そこで h が向きを保つなら $+1$、反転するなら -1 を付けて足した和です（どの点を選んでも同じ値)。これがインスタントン数 k です。

不等式は (5) から出ます。05 節の規格化で $k = \frac{1}{16\pi^2}\int (|F^+|^2 - |F^-|^2)\,d^4x$ と書けるので、$S = \frac{1}{2g^2}\int (|F^+|^2 + |F^-|^2)\,d^4x \geq \frac{8\pi^2}{g^2}|k|$ で、等号は自己双対か反自己双対のときです。BPST の解は $k=1$ です（3-05）既知 。

例。ホモトピー群の表によれば、SU(2)$=S^3$ への類 $\pi_{d-1}(S^3)$ は $d=2,3,4,5$ で $0,0,\mathbb{Z},\mathbb{Z}/2$、U(1)$=S^1$ への類は $d=2$ だけ $\mathbb{Z}$（渦の数。1-07 の単極子と同じ仕組み）です。コンパクトな単純リー群なら π_3 はいつも $\mathbb{Z}$ で、SU(3) にも k があります 既知 。

07

平面は点で交わる — 交叉形式とエキゾチック $\mathbb{R}^4$

事例 05 のとおり、四次元の二枚の平面は普通は一点で交わります。閉じた四次元多様体の中の二つの閉曲面も有限個の点で交わり、向きを込めた ±1 の和は曲面を動かしても変わりません。これが交叉形式（整数の対称行列）です。

$$\dim(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) = 2+2-4 = 0, \qquad Q(\Sigma_1,\Sigma_2) = \sum_{p \in \Sigma_1\cap\Sigma_2} (\pm 1) \tag{11}$$

例。$\mathbb{CP}^2$ の交叉形式は (1)、$S^2\times S^2$ は $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ です 既知 。Donaldson は反自己双対な接続（(6) で $F^+=0$。向きを逆にすれば自己双対な接続と同じで、一次資料の流儀は 3-06）の解の空間を道具に、「向きの付いた閉じた滑らかな四次元多様体の定値な交叉形式は対角化できる」という定理に至りました。1983 年に単連結の場合を示し、のちに単連結の仮定を外した形に広げたとされます（細部は 3-06)。Freedman の位相的な定理と対比すると、$\mathbb{R}^4$ と同相だが微分同相でない空間（エキゾチック $\mathbb{R}^4$）が現れ、それが連続体濃度だけあることは Taubes が最初に示したとされます 既知 。本体は 3-06。

寄り道：結び目とウィルソンループ

飛ばしてよい小節です。

ウィルソンループは閉じた道のホロノミー（1-07）のトレースで、三次元の Chern–Simons 理論ではその期待値が結び目の不変量（Jones 多項式）を与えます（Witten 1989）既知。四次元ではどの輪もほどけ（事例 03）、ヤン–ミルズは位相的でもないので、期待値は道の大きさと形で決まり、物質場の無い理論では面積則が閉じ込めの目印とされます物理（5-02）。

08

24-cell は SU(2) の有限部分群

24-cell の頂点（座標の二つが ±1、二つが 0）に $(1+i)/\sqrt{2}$ を左から掛け $1/\sqrt{2}$ 倍すると、次の 24 個の単位四元数になります計算。掛け算で閉じた SU(2) の有限部分群（二項四面体群。SO(3) への像は正四面体の 12 個の回転）です既知。

$$\bar{T} = \left\{ \pm 1,\ \pm i,\ \pm j,\ \pm k,\ \tfrac{1}{2}(\pm 1 \pm i \pm j \pm k) \right\}, \qquad |\bar{T}| = 24 \tag{12}$$

正六百胞体の 120 頂点も同じく二項二十面体群 $\bar{I}$ をなします。

例。格子ゲージ理論（5-01）ではリンクに有限群の元を置けます。Petcher–Weingarten 1980 は $\bar{T}$・$\bar{O}$・$\bar{I}$ で計算し、要旨によれば $\bar{I}$ のプラケットの平均・ウィルソンループ・弦張力の推定は広い結合の範囲で SU(2) と一致しました。十分弱い結合では、元の間の隙間のため SU(2) と違う振る舞いになるとされます物理（出典と詳しい話は 5-10）。

計算 **表 2**　三つとも積で閉じることを確認。「最も遠い点までの角」は S^3 上の無作為な 20 万点から最も近い元までの角の最大（推定）。

群	位数	最近接の距離	辺の数	最も遠い点までの角
$\bar{T}$（24-cell）	24	1	96	44.7°
$\bar{O}$	48	$\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 0.7654$	144	31.2°
$\bar{I}$（600-cell）	120	$1/\varphi \approx 0.6180$	720	22.2°

09

球の面積と、四次元で発散し始める積分

事例 08 の球の体積は単位球面の面積の式から出ます。この式は d が整数でなくても意味を持ち、摂動論（4-03）で最初に出会う形の積分も d の関数になります。

$$|S^{d-1}| = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}, \qquad I(d) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d k}{(k^2+1)^2} = |S^{d-1}| \int_0^\infty \frac{k^{d-1} dk}{(k^2+1)^2} = \pi^{d/2}\,\Gamma\!\left(2 - \frac{d}{2}\right) \tag{13}$$

Γ はガンマ関数で、階乗を実数に延ばしたものです（$\Gamma(n) = (n-1)!$、$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$、$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$）。被積分関数は遠くで k^{-4}、体積は $k^{d-1}dk$ なので収束は $d < 4$ だけで、四次元は発散が対数で始まる境目です。結合が無次元になる次元で、発散もちょうど対数になります（4-04）。$d = 4 - \epsilon$ で計算する方法（次元正則化、't Hooft–Veltman 1972・Bollini–Giambiagi 1972）と運動量を K で切る方法では

$$I(4-\epsilon) = \frac{2\pi^2}{\epsilon} + O(1), \qquad \int_{|k|<K} \frac{d^4k}{(k^2+1)^2} = 2\pi^2 \ln K - \pi^2 + O(K^{-2}) \tag{14}$$

となり、$1/\epsilon$ と $\ln K$ が同じ係数 $2\pi^2 = |S^3|$ で対応します。

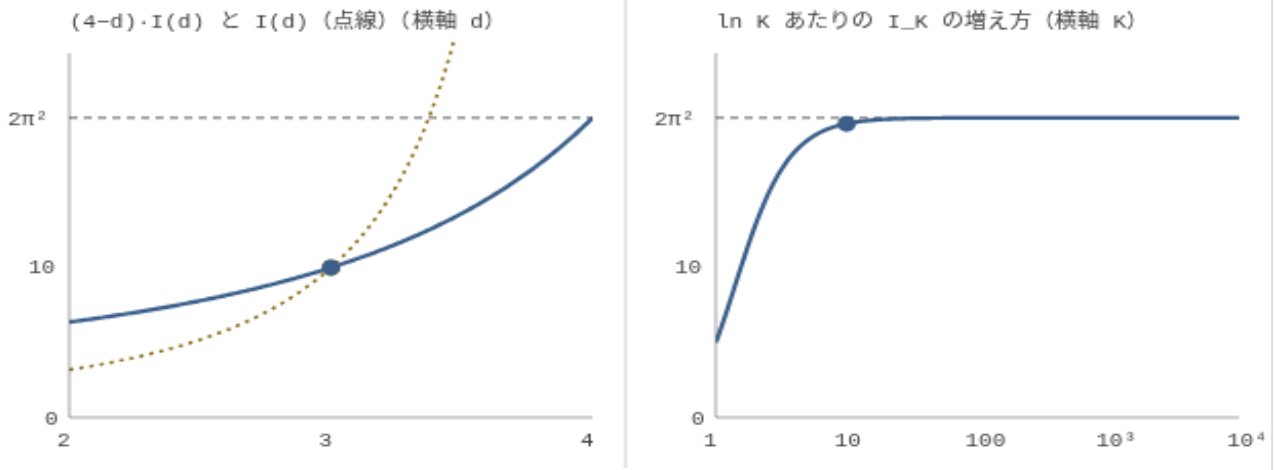
計算 **表 3**　(13) の公式と数値積分。

d	I(d) 公式	I(d) 数値積分	(4−d)·I(d)
2	3.141593	3.141593	6.283185
3	9.869604	9.869604	9.869604
3.99	1957.039052	–	19.570391
3.999	19722.225249	–	19.722225

例。最後の列は $2\pi^2 = 19.739209$ に近づき、切断のほうは $K = 10^4$ で $I_K - 2\pi^2 \ln K = -9.869604$（$-\pi^2$）でした。記事の球の体積（$V_5 = 5.2638$ など）も同じ式で一致します 計算 。

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ を使うと $(4-d)\,I(d) = 2\pi^{d/2}\Gamma(3 - \frac{d}{2})$ で、右辺は $d = 4$ をまたいで滑らかです。発散は $1/(4-d)$ の因子にだけあり、残りの係数は $d = 4$ で $2\pi^2\Gamma(1) = 2\pi^2$ です。切断のほうでは $I_K = \pi^2\big(\ln(1+K^2) + \frac{1}{1+K^2} - 1\big)$ で、$\ln K$ が 1 増えるごとの増え方 $2\pi^2 K^4/(K^2+1)^2$ が同じ $2\pi^2$ に近づきます。図 3 はこの二つを並べます。

図 3　左のつまみで d を 4 に近づけると、I(d)（点線）は発散するが (4−d)·I(d)（実線）は $2\pi^2$ に近づく。右のつまみで切断 K を大きくすると、ln K あたりの I_K の増え方が同じ $2\pi^2$ に近づく



d = 3.0000 I(d) = 9.8696 (4−d)·I(d) = 9.8696 ｜ K = 10.00 I_K = 35.7775 I_K − 2π² ln K = -9.6737 （2π² = 19.7392）

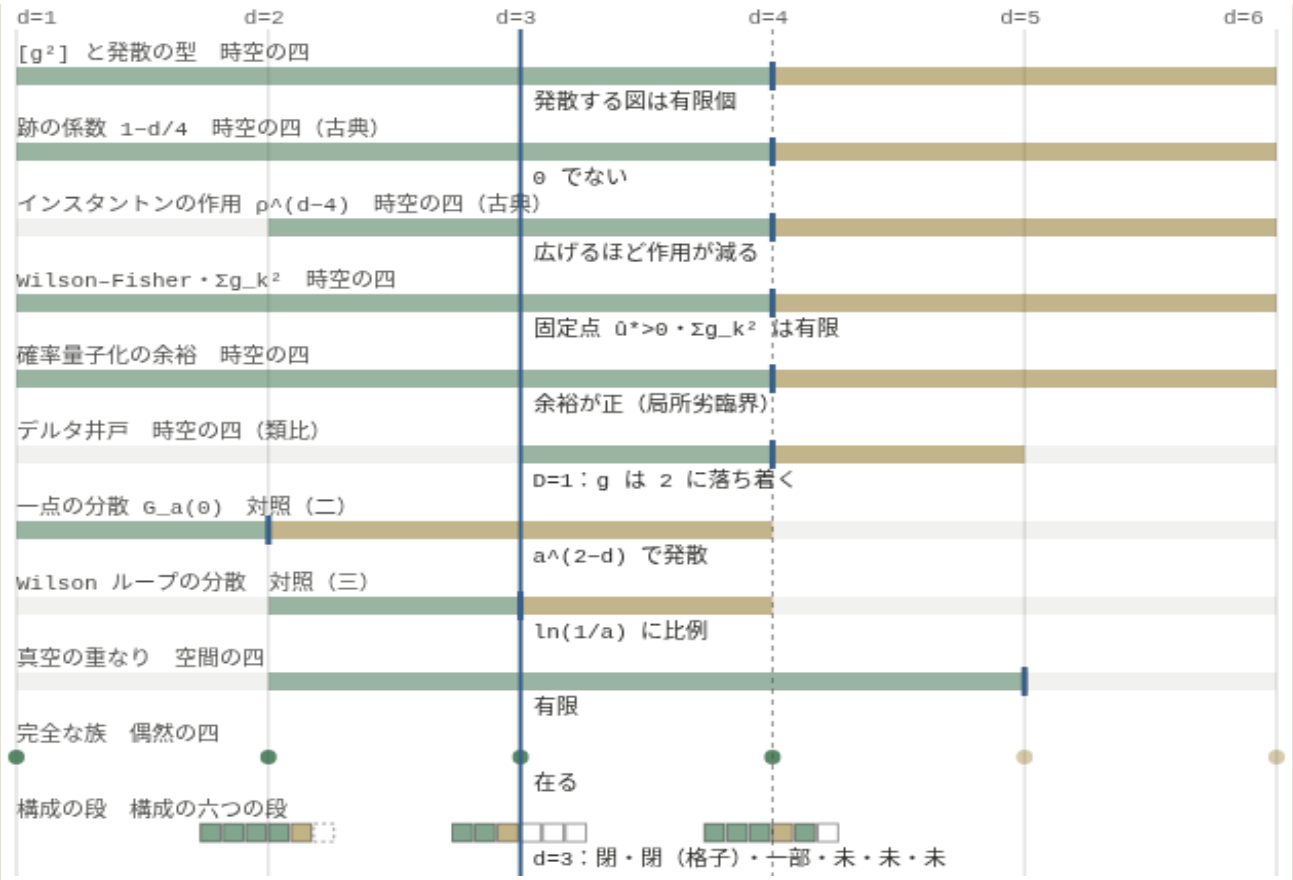
計算 左は $I(d)=\pi^{d/2}\Gamma(2-\frac{d}{2})$ と $(4-d)I(d)=2\pi^{d/2}\Gamma(3-\frac{d}{2})$、右は $2\pi^2K^4/(K^2+1)^2$ と I_K をその場で計算（ガンマ関数は Lanczos の近似式。python3 の値と一致）。左のつまみは $4-d=10^{-u}$ の u を動かします。

10

次元のつまみ — 四で揃う行と揃わない行

本に散る d 依存を一本のつまみで並べます。各行は冪 $p(d)$ の符号で分かれ、$p=0$ の境目では冪が消えて対数か不変が残ります。時空の四の六行は同じ $d=4$ で境目に来ます。残る四行は四でない所か、別の理由で切り替わります。既知 正確には、六行が揃うのは同じ次元の勘定（伝播関数 $1/k^2$ の 2 が二回）のためで、四次元の構成が不可能だという意味ではありません。

図 4　d を動かすと十一行の文が同時に替わる。緑＝手前・太線＝境目・黄土＝先・灰＝出所が扱わない d



d = 3.00　行の数：手前 8・境目 1・先 1

計算 境目はこの端末で計算、文は各章の写し。JavaScript が無効なら表 4。

表 4　図 4 の行。

量（章）	札	境目	手前（d 小）	境目で	先（d 大）
[g²] と発散の型（4-04 表 2）	時空の四	4	発散する図は有限個	型は有限・全次数、結合が対数で走る	型が際限なく増える
跡の係数 1−d/4（3-03 (8)）	時空の四（古典）	4	0 でない	恒等的に 0（古典に尺度が無い）	0 でない（符号が逆）
インスタントンの作用 ρ^(d−4)（(7)・3-05）	時空の四（古典）	4	広げるほど作用が減る	ρ によらない	潰すほど作用が減る
Wilson–Fisher・Σg_k²（4-04 (11)・7-05）	時空の四	4	固定点 û*>0・Σg_k² は有限	û は対数の速さで 0 へ・Σg_k² は段数の対数で増える	û は冪で 0 へ
確率量子化の余裕（7-09 表 2）	時空の四	4	余裕が正（局所劣臨界）	余裕 0・記号が有限個に収まらない	余裕が負
デルタ井戸（D=d−2 の類比）（4-07 表 5）	時空の四（類比）	4	D=1：g は 2 に落ち着く	D=2：1/g が ln K に比例	D=3：g を冪で寄せる

量（章）	札	境目	手前（d 小）	境目で	先（d 大）
一点の分散 G_a(0)（1-09 表 3）	対照（二）	2	有限	ln(1/a) で発散	a^(2−d) で発散
Wilson ループの分散（7-06 表 2）	対照（三）	3	有限（面積）	ln(1/a) に比例	1/a に比例
真空の重なり（D=d−1）（4-09 §07）	空間の四	5	有限	対数で発散（時空五次元）	—
完全な族（5-11・Lean `no_perfectZ_of_five`）	偶然の四	—	在る	整数の d だけ	無い
構成の段（YM）（7-01 表 2）	構成の六つの段	—	d=2：閉・閉・閉・閉・一部・—；d=3：閉・閉（格子）・一部・未・未・未；d=4：閉・閉（格子）・閉・一部・閉・未（三つ目〜五つ目は 2026-11 に公開された構成による。体積の極限は部分列まで。7-01 表 2 の四次元の行は 2026 年より前の文献の到達点（閉・閉（格子）・一部・未・未・未）で、ここではそれに公開された構成を重ねた。Lean で証明されている、と委員会が評価した。6-01）		

この章が言えている範囲

内容	状態
(3)〜(8)・鏡での入れ替え	既知。(8) は減衰を仮定。数値の確認は 計算（(3) の全射性は見ていない）
格子の β の $\log(1/\epsilon)$ の走り／有限群と SU(2) の弱結合での違い	物理。前者は数学では未解決と原文に明記。後者の出典は 5-10
(9)・表 1・$\lvert F\rvert^2$ の規格化／05 節の問題文の読み方	密度の形と積分は 計算（解であることは 3-05）／この章の解釈
(10)(11)・07 節の定理	既知（原論文は書誌のみ）
(12)〜(14)・表 2・表 3・図 3	計算（被覆の角は標本による推定）
図 4・表 4	各章の写し。並べ方はこの本の整理
質量ギャップ・連続極限	この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1〜4、05 節の規格化、図 1〜3 の照合値	計算	python3（NumPy・SciPy）。図はブラウザの JavaScript（同じ関数を node で実行して照合）
八つの事例・球の体積・24-cell	このサイト	四次元でだけ起きること
格子と β・問題文の引用	既知	S. Chatterjee, arXiv:1803.01950 §3／A. Jaffe, E. Witten, Quantum Yang–Mills theory（Clay Mathematics Institute のミレニアム懸賞問題の問題記述、claymath.org の PDF）§2・§6.6（どちらも本文を確認）
08 節	既知	D. Petcher, D. H. Weingarten, Phys. Rev. D 22 (1980) 2465（要旨を確認。弱結合での違いの出典は 5-10）
(3)・06 節の π_{d-1}・07 節の主張と帰属	既知	Wikipedia「Rotations in 4-dimensional Euclidean space」「Homotopy groups of spheres」「Donaldson's theorem」（1983 年の版は単連結を仮定し、一般の基本群への拡張は 1987 年の論文とする）「Exotic R4」（二次資料）
書誌のみ（本文は読んでいない）	既知	Conway–Smith, *On Quaternions and Octonions* (2003)／Belavin–Polyakov–Schwartz–Tyupkin, Phys. Lett. B 59 (1975) 85／Derrick, J. Math. Phys. 5 (1964) 1252／Uhlenbeck, Commun. Math. Phys. 83 (1982) 11, 31／Donaldson, J. Differential Geom. 18 (1983) 279／Donaldson, 同 26 (1987) 397／Freedman, 同 17 (1982) 357／Taubes, 同 25 (1987) 363／Witten, Commun. Math. Phys. 121 (1989) 351／'t Hooft–Veltman, Nucl. Phys. B 44 (1972) 189／Bollini–Giambiagi, Nuovo Cim. B 12 (1972) 20

次に読む章：2-01 ラグランジアンと作用。続きは 3-05・3-06・4-07・7-10。