第一巻　準備

第 2 部 物理の準備

Kiichi, Shiori and Rin · 2026-11-14 の版 · https://computoergosum.com/principia/yang-mills/

> この PDF は Web 版の各章をそのまま刷ったものです。動かせる図は刷った時点の姿で止まっています。章の間のリンクは Web 版へ飛びます。最新の内容は Web 版に在ります。

章		頁
2-01	ラグランジアンと作用	2
2-02	場という考え	12
2-03	電磁気学はゲージ理論である	22
2-04	特殊相対論と時空	32
2-05	量子力学の骨	42
2-06	調和振動子と生成消滅	51
2-07	経路積分の考え方	61
2-08	統計力学と相転移	72
2-09	寄り道：イジング模型で見るギャップと相関長	83
2-10	緩和の時間と動的指数 z	93

ラグランジアンと作用 — 運動は「道全体に付く一つの数」の停留点として書ける

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 運動方程式が作用の停留条件として書けること。そこから Euler–Lagrange 方程式が出ること。連続的な対称性から保存量が出ること（Noether の定理）と、局所的な対称性からは拘束が出ること。

前提となる章 — 1-01 ベクトル空間と線形写像（回転行列・実対称行列の固有値）。ほかは多変数の微積分とニュートンの運動方程式です。

先に言うこと — 有限個の自由度に限ります（場は 2-02、ヤン–ミルズの作用は 3-03）。証明は滑らかな道と端を固定した変分の範囲です。作用原理がなぜ成り立つのかには答えません。

この章の順序

1. なぜ作用から始めるのか — 三つの利点
2. 作用という一つの数 — 運動エネルギー − 位置エネルギーの積分
3. 道を少しずらす — 刻めば多変数の関数（図 1）
4. Euler–Lagrange 方程式 — 部分積分一回。座標を選ばない
5. 最小とは限らない — 固有値と共役点（計算つき）
6. Noether の定理 — 対称性から保存量（図 2）
7. 寄り道：刻んだ作用にも Noether がある — 角運動量がちょうど保たれる理由
8. 局所的な対称性は拘束を生む — ゲージ理論への前触れ

01

なぜ作用から始めるのか

ニュートンの運動方程式 $m\ddot{q} = F$ は、各時刻の加速度を決める局所的な規則です。この章では同じ運動を別の形で書きます。出発と到着を決め、その間の**道全体**に一つの数 S（**作用**）を与える。実際の運動は、道を少しずらしても S が一次では変わらない道として選ばれる。これが**作用原理**（最小作用の原理とも）です。

利点は三つです。**座標に依らない**（§04）。対称性から**保存則が自動的に出る**（§06）。**場の理論の言葉である**：ヤン–ミルズ理論は $\operatorname{tr} F^2$ の積分という作用で定義され（3-03）、経路積分も作用を指数の肩に載せて道を足し合わせます（2-07）。

比喩で言えば、運動方程式は「一歩ずつの道案内」、作用原理は「地図で道全体を見比べる」見方です。正確には、保存力の系では両者は同じ方程式を与え（§04）、違うのは何が見やすいかだけです。

02

作用という一つの数

直線上の粒子の時刻 t での位置を $q(t)$、速度を $\dot{q} = dq/dt$、質量を m、位置エネルギーを $V(q)$ とします。**ラグランジアン** L は運動エネルギーから位置エネルギーを**引いた**もので、和であるエネルギーとは別の量です。それを道に沿って積分した数が**作用**です。

$$L(q, \dot{q}) = \tfrac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q)$$

$$S[q] = \int_{t_0}^{t_1} L\big(q(t), \dot{q}(t)\big)\, dt$$

角括弧は、道を丸ごと入れて数を返す写像（**汎関数**）であることを示します。

例。$V = 0$、$m = 1$、端を $q(0) = 0$、$q(1) = 1$ とします。等速の道 $q = t$ では $S = 0.5$。同じ端を結ぶ回り道 $q = t + 0.3 \sin \pi t$ では $S = \tfrac{1}{2}\int_0^1 (1 + 0.3\pi \cos \pi t)^2\, dt = \tfrac{1}{2}(1 + 0.09\pi^2/2) \approx 0.722$。回り道をすると作用が増えます。

03

道を少しずらす

関数の極値は、変数を少し動かしたときの一次の変化が 0 になる点でした。作用では道を動かします。端で 0 になる関数 $\eta(t)$ を取ると、$S(\varepsilon) = S[q + \varepsilon\eta]$ は実数 ε の普通の関数です。**作用**

原理は「端を固定したどの η でも $S'(0)=0$」という要求で、これを満たす道を**停留点**と呼びます。

刻めば、有限個の変数の関数になる

時間を N 等分（刻み幅 h）して道を折れ線にし、積分を台形則で近似すると、作用は途中の位置 $q_1,\dots,q_{N-1}$ の多変数関数になります（端 q_0、q_N は固定）。

$$S_N=\sum_{k=0}^{N-1}\left[\frac{m(q_{k+1}-q_k)^2}{2h}-\frac{h}{2}\big(V(q_k)+V(q_{k+1})\big)\right]$$

$$\frac{\partial S_N}{\partial q_k}=-h\left[m\,\frac{q_{k+1}-2q_k+q_{k-1}}{h^2}+V'(q_k)\right]$$

作用原理は「勾配が 0」になり、それは $m\ddot q=-V'(q)$ の差分版です（§07 で再び使う）。

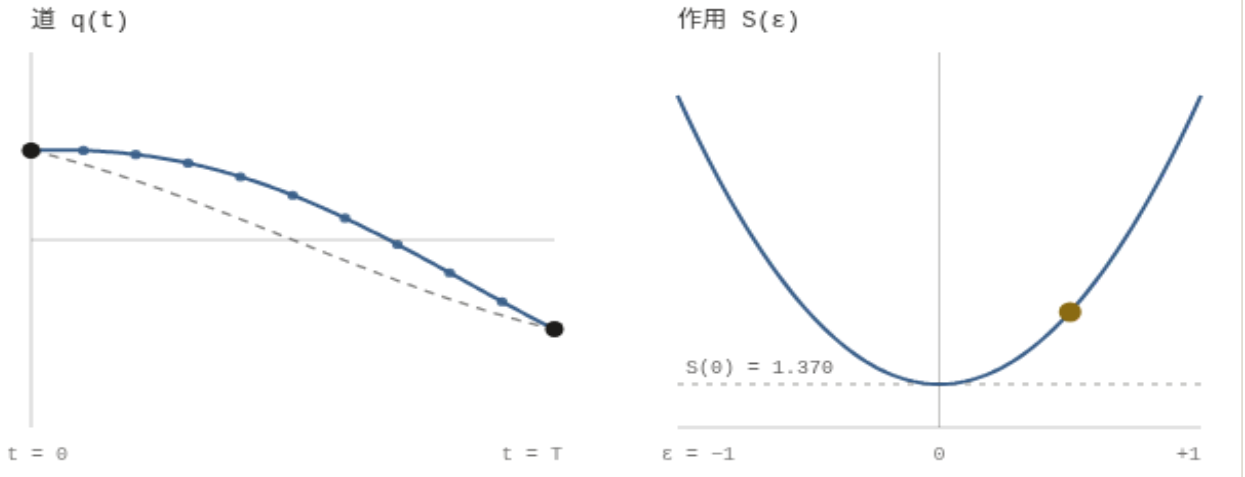
例：ばねの粒子

$V=\frac12 m\omega^2 q^2$、$m=1$、時間の長さ $T=1$、端を $q(0)=1$、$q(1)=-1$ とします。運動方程式の解は $q_{\mathrm{cl}}(t)=\sin\big(\omega(\tfrac12-t)\big)/\sin(\omega/2)$ です（cl は「古典的な道」）。ずらし $\eta_n=\sin n\pi t$（$n=1,2,3$）に対して、作用は ε の二次式になります。

$$S(\varepsilon)=\omega\cot\frac{\omega}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4}\big((n\pi)^2-\omega^2\big)$$

一次の項が無いことが「停留」の中身です。二次の項は $\frac12\int(\dot\eta^2-\omega^2\eta^2)\,dt$ から来ます。図 1 で ε を動かすと、作用は放物線の上を動き、$\varepsilon=0$ で傾きが 0 です。

図 1　ε・形 n・ωT を動かすと、ずらした道（左）と作用 S(ε)（右）が変わるS(ε) = 1.764　二次の係数 +1.579　上に開く＝この向きで最小



計算　曲線は上の公式をブラウザで描いたもので、公式はこの端末で数値積分と照合した（表 1）。点線は古典的な道、点は $N=10$ で刻んだときの変数。

表 1　作用の値（$m=T=1$、$q(0)=1$、$q(1)=-1$）

$\omega T/\pi$	n	$S(0)$	$S(1)$	**二次の係数**
0.5	1	1.5708	3.4213	+1.851
1.0	1	0.0000	0.0000	0
1.5	1	−4.7124	−7.7966	−3.084
1.5	2	−4.7124	−0.3944	+4.318

計算 Simpson 則（20000 区間）の数値積分と公式の差は 4×10^{-15} 以下。一次の係数も 5×10^{-13} 以下。

04

Euler–Lagrange 方程式

§03 の条件を刻まずに計算します。ε で微分し、第二項を部分積分します（端で $\eta=0$ なので境界の項は消える）。

$$S'(0)=\int_{t_0}^{t_1}\Big[\frac{\partial L}{\partial q}\,\eta+\frac{\partial L}{\partial \dot q}\,\dot\eta\Big]\,dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\Big[\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\Big]\,\eta\,dt$$

これがどの η でも 0 なら、括弧は各時刻で 0 です（括弧は連続なので、どこかで正ならその近くでも正で、その近くだけで正の η を取れば積分が正になる。**変分法の基本補題**）。こうして **Euler–Lagrange 方程式**が出ます。自由度が複数なら成分ごとに一本です。

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}-\frac{\partial L}{\partial q}=0 \tag{EL}$$

例。 $L=\tfrac12 m\dot q^2-V(q)$ なら $m\ddot q=-V'(q)$。保存力のニュートン方程式そのものです。

座標を選ばない

この導き方は q が何を表すかを使っていません。角度でもよく（**一般化座標**）、同じ形の方程式が成り立ちます 既知 。同じ道には座標によらず同じ作用が付くからです（1-05）。振り子を角度 θ で書くと $L=\tfrac12 ml^2\dot\theta^2+mgl\cos\theta$ から $ml^2\ddot\theta=-mgl\sin\theta$。張力は現れません。

L に $dG(q,t)/dt$ を足しても方程式は変わりません（作用は端の値だけで決まる量しか変わらない） 既知 。ヤン–ミルズ理論の **θ 項**はこれの四次元版で、時間での全微分の代わりに四次元の発散（**全発散**）の形をしています。正確には、θ 項は古典的な方程式を変えませんが、場の位相を通じて量子論では効きます（3-05）。

05

最小とは限らない

作用原理が求めるのは一次の変化が 0 であることだけで、最小かどうかは二次の項で決まります。§03 の例では係数 $((n\pi)^2-\omega^2)/4$ の符号です。$\omega T<\pi$ ならどの n でも正で、一般の η も正弦級数に展開すれば各 n の和に分かれるので、古典的な道は本当に最小です（作用が二次式のため）。

ωT が π を越えると $n=1$ の係数が負になり、その向きには作用が**減る**（**鞍点**）。図 1 で $\omega T/\pi$ を 1 の左右に動かすと、$n=1$ の放物線が裏返ります。$\omega T=\pi$ ちょうどでは、$n=1$ の向きに動かしても作用が変わらず（$n\ge 2$ の向きでは増える）、同じ端を結ぶ解が一族 $\cos\pi t + c\sin\pi t$ になります。一般に、時刻 0 の同じ点から出た近くの解の族が再び一点に集まる時刻を、0 の**共役点**と呼びます 既知 。この例の共役点は $t=\pi/\omega, 2\pi/\omega, \dots$ で、$\omega T=\pi$ は終わりの時刻がちょうど最初の共役点に来た場合です。

二次の項は行列の固有値の問題

刻むと、二次の項はヘッセ行列 $H_{jk}=\partial^2 S_N/\partial q_j \partial q_k$ です。実対称なので対角化でき（1-01）、極小とは固有値がすべて正であること。負の固有値の個数は作用を減らせる向きの数で、**Morse 指数**と呼びます（ここでは刻んだ行列についての呼び名）。調和振動子の H は三重対角（対角 $2m/h-m\omega^2 h$、両隣 $-m/h$）で、h で割った固有値は $m((n\pi/T)^2-\omega^2)$ に近づき、負のものは $\lfloor \omega T/\pi \rfloor$ 個です。

表 2　刻んだ作用のヘッセ行列（$m=T=1$、$N=200$）

$\omega T/\pi$	負の固有値の個数	最小固有値 $/\,h$	$\pi^2-(\omega T)^2$
0.50	0	7.4020	7.4022
1.05	1	−1.0118	−1.0116
2.50	2	−51.8156	−51.8154
3.20	3	−91.1953	−91.1951

計算 numpy の `eigvalsh` で全固有値を求めた。$N=20$ でも個数は同じで、最小固有値の差は約 0.02。

刻まない場合も、この例で作用を減らせる向きは $\sin n\pi t$ のうち $n\pi<\omega T$ のもので、その数は $(0,T)$ にある共役点 $k\pi/\omega$ の数に等しくなります。これは **Morse の指数定理**（二次の項の負の向きの数は、$(0,T)$ にある共役点の数に重複を込めて等しい）の一例です 既知 。

この見方は 1-10 で無限次元に広げます。ここでの最小固有値（作用の二次の項）と、4-11 の質量ギャップ（ハミルトニアンのスペクトルの隙間）は別物です。

06

Noether の定理

L が座標 q を含まなければ、Euler–Lagrange 方程式は $p = \partial L/\partial \dot q$（**共役な運動量**）の保存を言います。中心力を極座標で書いた $L = \tfrac12 m(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) - V(r)$ は φ を含まず、角運動量 $mr^2\dot\varphi$ が保存します。これを座標から切り離したのが Noether の定理です。

実数 s で連続に番号付けされ $s=0$ で恒等写像になる変換 $q \mapsto \Phi_s(q)$（平行移動や角 s の回転）の、動く向きを $K(q) = \frac{d}{ds}\Phi_s(q)\big|_{s=0}$ とします。**Noether の定理**：どの道でも $L\big(\Phi_s(q), \frac{d}{dt}\Phi_s(q)\big) = L(q,\dot q)$ なら、運動に沿って次の Q は一定です 既知 。

$$Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\, K_i(q) \tag{N}$$

証明。仮定を $s=0$ で微分すると $\sum_i (\partial L/\partial q_i) K_i + \sum_i (\partial L/\partial \dot q_i)\,\dot K_i = 0$。Euler–Lagrange 方程式で $\partial L/\partial q_i$ を $\frac{d}{dt}(\partial L/\partial \dot q_i)$ に置き換えると、左辺は積の微分 dQ/dt です。∎

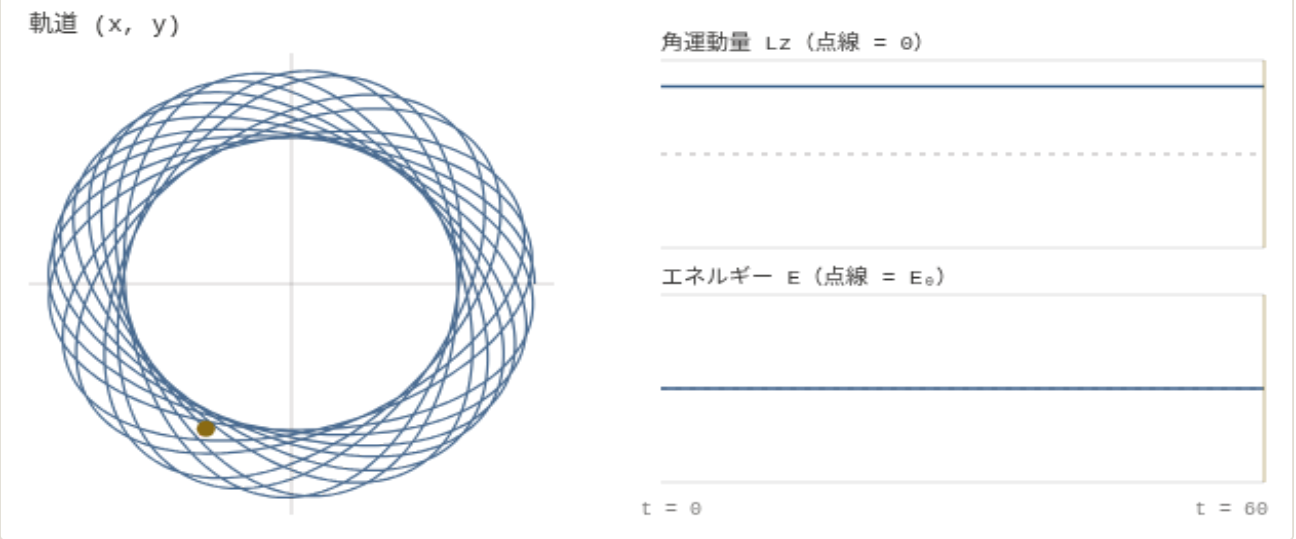
作用を変えない変換	K	保存量 Q
平行移動 $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} + s\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{e}$	運動量の成分 $m\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{e}$
平面の回転 $\boldsymbol{x} \mapsto R(s)\boldsymbol{x}$	$(-y, x)$	角運動量 $L_z = m(x\dot y - y\dot x)$
時間の平行移動（$\partial L/\partial t = 0$）	—	エネルギー $E = \sum_i \dot q_i\, \partial L/\partial \dot q_i - L$

三行目は直接微分して $dE/dt = -\partial L/\partial t$ から出ます（$E = \tfrac12 m\dot q^2 + V$）。

図で確かめる：対称性を壊すと保存量が消える

平面の粒子（$m=1$）に、極座標で $V = \tfrac12 r^2 + \tfrac14 r^4(1 + \delta\cos 4\theta)$ を与えます。$\delta = 0$ なら回転対称で L_z が保存します。$\delta > 0$ では V を変えない回転が 90° の倍数だけになり、対称性は飛び飛びに落ちます。定理が使う無限に小さい変換が無いので定理は何も言わず、実際 L_z は保存しません。V は時間によらないので E は保存します。

図 2　δ を動かすと、角運動量 Lz は揺れ始めるが、エネルギー E はほとんど揺れない（10⁻⁵ 程度）δ = 0.00Lz の幅 1.4e−14 max|E−E₀| 2.0e−5　t = 60.0



計算 初期値は位置 $(1,0)$、速度 $(0,0.9)$。軌道は速度 Verlet 法（$h=0.01$）でブラウザが計算し、同じ手順をこの端末で回した値が表 3（1.4e−14 は 1.4×10^{-14}）。右の帯二つは縦の目盛りが同じ。

表 3　角運動量とエネルギーの変化（$0\le t\le 60$）

δ	h	L_z の最小	L_z の幅	$\max\lvert E-E_0\rvert$
0	0.01	0.9000	1.4e−14	2.0e−5
0	0.005	0.9000	1.6e−14	5.0e−6
0.1	0.01	0.8581	0.080	2.8e−5
0.3	0.01	−1.0152	2.03	4.3e−5
0.5	0.01	−1.0938	2.19	5.8e−5

$\delta=0.3$ と 0.5 では L_z の符号まで変わり、粒子は途中で回る向きを逆にします。E のずれは 10^{-5} 程度で、図では平らに見えます。

07

寄り道：刻んだ作用にも Noether がある

飛ばしてよい節です。

図 2 は刻み幅 h で一歩ずつ計算したものです。ここでは位置 q_k と速度 v_k は平面のベクトルで（$q_k\in\mathbb{R}^2$。§03 の q_k は数でした）、力 $F=-\nabla V$ を使って**速度 Verlet 法**で進めます。

$$v_{k+1/2}=v_k+\frac{h}{2m}F(q_k),\qquad q_{k+1}=q_k+h\,v_{k+1/2},\qquad v_{k+1}=v_{k+1/2}+\frac{h}{2m}F(q_{k+1})$$

それなのに表 3 の $\delta=0$ で L_z は丸め誤差の水準で一定、エネルギーは 10^{-5} ずれます。理由があります。

速度を消去すると $m(q_{k+1}-2q_k+q_{k-1})=h^2F(q_k)=-h^2\nabla V(q_k)$。これは §03 の刻んだ作用の停留条件を平面に移したものそのものです 既知 （Hairer–Lubich–Wanner 2003, §1.6。この形は

Störmer–Verlet 法と呼ばれ、速度 Verlet 法はその書き方の一つ)。V が回転対称なら刻んだ作用も一斉の回転で変わらず、§06 の計算が差分で通って、次の J が k によらず一定です。

$$J = \frac{m}{h}\,(q_k \times q_{k+1})_z$$

ここで $(a \times b)_z = a_x b_y - a_y b_x$ です。直接にも確かめられます。停留条件に左から $q_k\times$ を掛けると、中心力では $F(q_k)$ が q_k に平行なので右辺が消え、$q_k \times q_{k+1} = q_{k-1} \times q_k$ が残ります。J は原点と隣り合う二点が作る三角形の面積の $2m/h$ 倍で、一歩ごとに掃く面積が一定ということです。

この J は表 3 の $L_z = m(q_k \times v_k)_z$ そのものです。更新式の最初の二つから $q_{k+1} = q_k + h\,v_k + \frac{h^2}{2m}F(q_k)$。中心力では $F(q_k)$ が q_k に平行なので $q_k \times q_{k+1} = h\,q_k \times v_k$、よって $J = L_z$ です。同じ論文の Theorem 3.5 は、角運動量のような二次の保存量がこの方法で厳密に保たれることを一般に示しています 既知 。また §1.3 は、Feynman の講義を引いて、『プリンキピア』がケプラーの第二法則を示した論法がこの計算法の一つの書き方(等速で半歩、中心に向けて一撃、等速で半歩)と同じ形だと紹介しています。

一方、時間は刻んだので、ずらせるのは h の整数倍だけです。飛び飛びの対称性には定理が働かず、エネルギーはちょうどは保存しません。ただし、エネルギーの式(位置と速度の関数)が滑らかで、数値解がある有界な範囲に留まるなら、任意の正の整数 N について次が示されています 既知 (同 Theorem 5.1。C と C_N は t と h によらない)。

$$|E_k - E_0| \le Ch^2 + C_N h^N t \qquad (0 \le t = kh \le h^{-N})$$

第二項は $t \le h^{2-N}$ なら $C_N h^2$ 以下です。N を大きく取れば、h^{-1} の高いべきという非常に長い時間まで、誤差は h^2 程度に留まります。無限の時間についての定理ではありません。表 3 で h を半分にすると、ずれはほぼ 1/4 です。

「残したい対称性は、刻んだ作用の対称性として厳密に残す」は、格子ゲージ理論の Wilson の方法の出発点でもあります(5-01)。そこで厳密に残るのはゲージ対称性で、壊れるのは時空(虚時間に直した四次元。4-02)の連続的な回転と平行移動です。格子の向きの 90° 回転と、格子間隔ずつの平行移動は残ります。

08

局所的な対称性は拘束を生む

§06 の s は定数でした(**大域的**な対称性)。時刻ごとに違う $s(t)$ で変換しても作用が変わらないのが**局所的**な対称性で、ゲージ理論の中心です(3-01)。変数が $x(t)$、$\lambda(t)$ の二つの玩具で見ます。

$$L = \tfrac{1}{2}m(\dot{x} - \lambda)^2, \qquad x \mapsto x + s(t), \quad \lambda \mapsto \lambda + \dot{s}(t)$$

どんな $s(t)$ でも $\dot{x}-\lambda$ は変わりません。λ は時間微分なしで現れるので、その方程式は**拘束**になります。

$$(\lambda)\ \ m(\dot{x}-\lambda)=0, \qquad (x)\ \ \frac{d}{dt}\big[m(\dot{x}-\lambda)\big]=0$$

二本目は一本目の微分で、独立なのは一本だけ。x は方程式が決めない任意の関数として残ります。Noether（1918）の**第二定理**は、任意関数を含む変換で作用が変わらないとき、Lagrange の方程式のいくつかが残りから従うことを述べています 既知 。正確には、Lagrange の方程式の左辺とその微分の間に、任意関数の個数だけ恒等式が成り立ちます。この玩具では任意関数は $s(t)$ の一つで、恒等式も「(x) の左辺は (λ) の左辺の時間微分」の一つです。定数の s から (N) で作る $Q=m(\dot{x}-\lambda)$ は、保存どころか 0 に拘束されています。

電磁気学では、λ と同じ役をスカラーポテンシャル ϕ が、x と同じ役をベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ がし、λ の方程式と同じ役をするのが Gauss の法則です（2-03・4-01）。正確には、電磁気学では $s(t)$ が各点の関数 $\chi(t,\mathbf{x})$ になり、$\mathbf{A}$ は $\nabla\chi$ だけ、ϕ は $-\partial\chi/\partial t$ だけずれます（2-03 のゲージ変換の式。ϕ のずれの符号は玩具の λ と逆）。方程式が決めない自由度は書き方の重複で、その扱いはヤン–ミルズ理論の量子化の大きな問題の一つです（4-08）。

玩具そのものには物理的な中身はありません（解は $\lambda=\dot{x}$ だけで、x は任意）。

この章が言えている範囲

事柄	言えていること	言えていないこと
Euler–Lagrange 方程式	既知 端を固定した滑らかな道で導いた	端を動かす変分・拘束の一般論
停留と最小	計算 調和振動子で $\omega T<\pi$ なら最小、越えると鞍点（表 1・表 2）	一般の共役点の理論（Jacobi の条件・Morse の指数定理の証明）
Noether の第一定理	既知 有限自由度・L が厳密に不変な場合を証明した	L が全微分だけ変わる場合、場の理論での形（2-02）
数値での観察	計算 一つの例（$t\le 60$）で L_z の揺れと保存、E の誤差 $\propto h^2$ を見た（表 3）	一般の主張ではない。長時間の評価は文献の定理に依る
Noether の第二定理	一つの玩具で方程式の重複と拘束を見た	一般の証明と場の理論での形（3-01）
作用原理の由来	—	物理 2-07

出典と再現

もの	種別	出典・道具
Euler–Lagrange 方程式・一般化座標・(N)	既知 教科書	L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Mechanics*, 3rd ed., Pergamon Press, 1976。書誌のみ
Noether の二つの定理	既知 一次資料	E. Noether, Invariante Variationsprobleme, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. (1918) 235–257。英訳 M. A. Tavel, Invariant variation problems, Transport Theory and Statistical Physics 1(3) (1971) 186–207, doi:10.1080/00411457108231446, arXiv:physics/0503066（§1 の定理 I・II を確認）
二階の変分・共役点	既知 教科書	D. Liberzon, *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, Princeton University Press, 2012, doi:10.1515/9781400842643（出版前の版の §2.6.2 で Jacobi の条件と共役点を確認）。I. M. Gelfand, S. V. Fomin, *Calculus of Variations*, 1963。書誌のみ
Morse の指数定理	既知 教科書	J. Milnor, *Morse Theory*, Annals of Mathematics Studies 51, Princeton University Press, 1963（§15 Theorem 15.1 を確認。述べられているのは測地線の場合）
§07 の Störmer–Verlet 法について	既知 総説	E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner, Acta Numerica 12 (2003) 399–450, doi:10.1017/S0962492902000144（§1.3・§1.6・Theorem 3.5・5.1 を確認）
変分積分法	既知 総説	J. E. Marsden, M. West, Acta Numerica 10 (2001) 357–514。書誌のみ
表 1・表 2・表 3	計算	python3＋numpy（本書の検討の記録）。`action_scan.py`（Simpson 則）・`hessian.py`（`eigvalsh`）・`noether_verlet.py`（速度 Verlet 法。図 2 は同じ手順をブラウザで回したもの）

次に読む章：2-02 場という考え（q_i を場 $\phi(x)$ に置き換え、自由度が無限個になる）。

場という考え — 粒の数を無限にすると、系の座標が関数になる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 場は、粒の鎖で粒の数を無限にした極限であること。
弦は独立な単振動の無限個の集まりで、質量項があると振動数に下限ができ、箱を広げても残ること。
代価：熱平衡の場の値は、空間が二次元以上だと一点で定まらないこと。

前提となる章 — 2-01（Euler–Lagrange 方程式・Noether の定理）。対称行列の固有値（1-01）。フーリエ級数は 04 節で必要な分だけ作ります。

先に言うこと — 古典の場だけを扱います（量子化は 2-06）。06 節の「振動数の下限」は古典の波の性質で、問題文の質量ギャップ（量子論のスペクトルの隙間、4-11）そのものではありません。この章は質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. 粒の鎖 — 自由度 N 個
2. 基準振動 — 独立な単振動に分かれる
3. 連続極限 — 波動方程式が出る（図 1）
4. 波の解 — 進む波と定在波（図 2）
5. エネルギー — 保存とモードへの配分
6. 質量項 — 振動数の下限（図 3）
7. 自由度が無限個ということ — 熱い場は一点で定まらない（図 4）
8. この本での行き先 — 分けられたのは線形だったから（寄り道：閉じ込めの弦も、この方程式で揺れる）

01

粒の鎖 — 自由度が N 個の系

場の話は、有限個の粒から始めるのが近道です。長さ ℓ の区間に N 個の粒を間隔 $a = \ell/(N+1)$ で並べ、隣どうしを張った糸でつなぎ、両端を壁に固定します。粒 j の横のずれを $q_j(t)$（壁は $q_0 = q_{N+1} = 0$）、粒の質量を $m = \rho a$（ρ は線密度）、張力を σ とします。

隣とのずれ Δq が小さいと、間の糸は $\sqrt{a^2 + \Delta q^2} - a \approx \Delta q^2/(2a)$ だけ伸びます。粒は横にだけ動くとし、次の項 $-\Delta q^4/(8a^3)$ は捨てます。こうして以下の方程式は線形になります（線形であることが効く場面は 08 節）。張力 × 伸び が位置エネルギーなので、ラグランジアン（2-01）と Euler–Lagrange 方程式は次の形です。

$$L = \sum_{j=1}^{N} \frac{m}{2}\dot{q}_j^{\,2} - \sum_{j=0}^{N} \frac{\sigma}{2a}(q_{j+1} - q_j)^2$$

$$m\ddot{q}_j = \frac{\sigma}{a}\left(q_{j+1} - 2q_j + q_{j-1}\right)$$

右辺には隣の粒しか出てきません。この**局所性**はゲージ理論まで残ります。**例**。$N = 1$ なら $m\ddot{q} = -(2\sigma/a)q$ の単振動で、$\ell = \rho = \sigma = 1$ のとき $\omega = \sqrt{8} \approx 2.828$ です。

02

基準振動 — もつれた振動をほどく

まとめて $\ddot{\mathbf{q}} = -K\mathbf{q}$ と書くと、K は対角成分が $2\sigma/(ma)$、その両隣が $-\sigma/(ma)$、ほかが 0 の対称行列です。対称行列なので、直交する N 本の固有ベクトルを持ち、固有値は実数です（1-01）。固有値は負にもなりません。$\mathbf{q}\cdot K\mathbf{q}$ は位置エネルギーの $2/m$ 倍で、二乗の和だからです。固有ベクトル $\mathbf{v}$ では $\mathbf{v}\cdot K\mathbf{v} = \lambda|\mathbf{v}|^2$ なので $\lambda \geq 0$。両端が壁に留まるので位置エネルギーが 0 になるのは $\mathbf{q} = 0$ のときだけで、$\lambda = 0$ も起きません。そこで固有値を ω_n^2（$\omega_n > 0$）と書きます。

固有ベクトルを軸に取り直すと、各成分は $\ddot{Q}_n = -\omega_n^2 Q_n$ に従います。**もつれ合った N 個の粒が、互いに無関係な N 個の単振動に分かれる**。これが基準振動で、それぞれの揺れ方を「モード」、n をモードの番号と呼びます。この行列では $n = 1, \dots, N$ について閉じた式が書けます。

$$v_n(j) = \sin\frac{jn\pi}{N+1}$$

$$\omega_n = 2\sqrt{\frac{\sigma}{ma}}\,\sin\frac{n\pi}{2(N+1)}$$

代入して $\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$ を使えば確かめられます。**例**。$\ell=\rho=\sigma=1$ なら $\omega_n=2(N+1)\sin\frac{n\pi}{2(N+1)}$ で、n が N より十分小さいと $\omega_n\approx n\pi$。次の節の弦の振動数です。

03

連続極限 — 場と波動方程式

粒の数を増やし間隔 a を 0 に近づけます。ℓ・ρ・σ は固定し、粒の質量 $m=\rho a$ は 0 へ。**何を固定して極限を取るか**は、格子ゲージ理論で同じ形の問いとして戻ってきます（5-09）。番号 j を位置 $x=ja$ と読み替えて $q_j(t)=u(t,x)$ と書くと、$(q_{j+1}-q_j)/a\to\partial_x u$、$\sum_j a(\cdots)\to\int dx$、$(q_{j+1}-2q_j+q_{j-1})/a^2\to\partial_x^2 u$ となり、

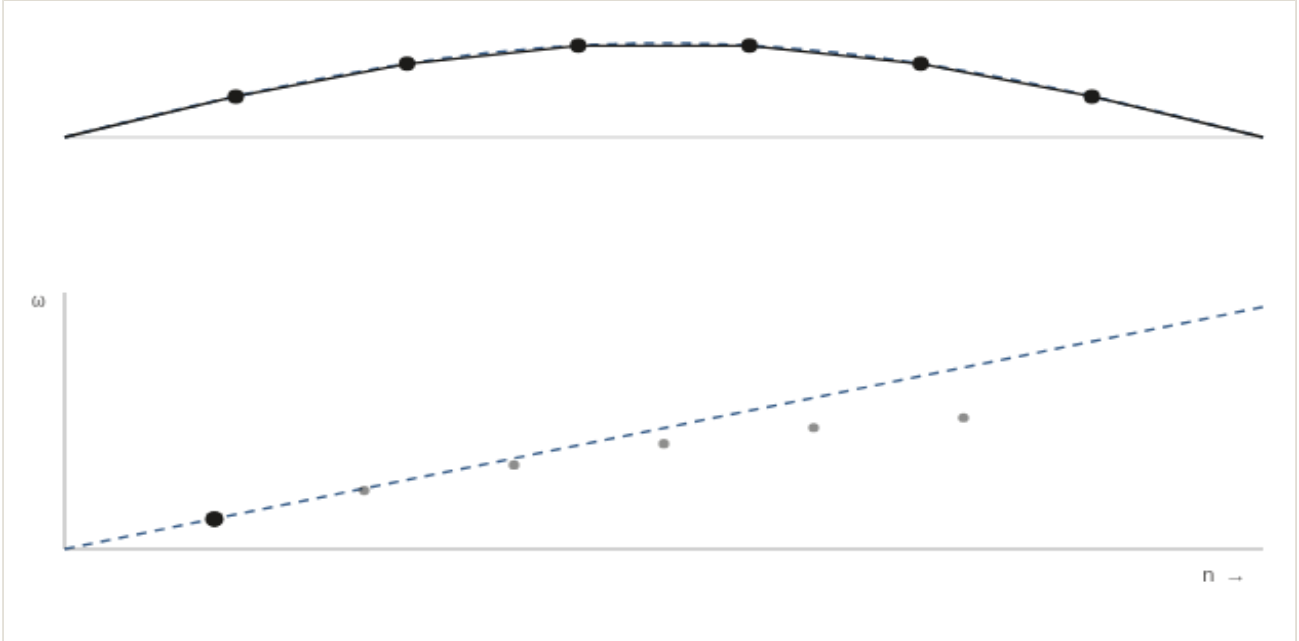
$$L=\int_0^\ell \mathcal{L}\,dx,\quad \mathcal{L}=\frac{\rho}{2}(\partial_t u)^2-\frac{\sigma}{2}(\partial_x u)^2$$

$$\partial_t^2 u=c^2\partial_x^2 u,\quad c=\sqrt{\sigma/\rho}$$

$\mathcal{L}$ を**ラグランジアン密度**、下の式を**波動方程式**と呼びます。同じ式は場の Euler–Lagrange 方程式 $\partial_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t u)}+\partial_x\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x u)}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}=0$ からも出て、この形は電磁場（2-03）でもヤン–ミルズ場（3-03）でも使います。

場とは、添字 j が連続な x に置き換わった系です。系の「座標」は数の組ではなく関数 $u(t,\cdot)$ 一つです。弦の基準振動は $\sin(n\pi x/\ell)\cos\omega_n t$、振動数は $\omega_n=n\pi c/\ell$（$n=1,2,\ldots$）で、上限がありません。

図 1　N と n を変えると、鎖（実線と点）と弦（破線）の揺れと振動数のずれが変わる。下段は全モードの振動数（破線：弦 ω = nπ、点：鎖）。表 1 の数値を押すと、その N と n になる



```
N = 6, n = 1  ω(鎖) = 3.115  ω(弦) = 3.142  比 = 0.9916
```

計算 図の数値は本文の閉じた式からその場で計算。

計算 **表 1**　鎖と弦の振動数の比 $\omega_n/(n\pi)$（$\ell=\rho=\sigma=1$）。行列 K の固有値を数値で求めた値で、閉じた式との相対差は最大 3×10^{-12} でした。

N	n = 1	n = N/2	n = N
4	0.9836	0.9355	0.7568
16	0.9986	0.9114	0.6735
64	0.99990	0.9033	0.6464
256	0.999994	0.9011	0.6391

n を固定すれば比は 1 に近づきますが、$n=N/2$ の列は $\sin(\pi/4)/(\pi/4)\approx0.900$ へ、$n=N$ の列は $2/\pi\approx0.637$ へ近づくだけです。連続極限は**波長が間隔より十分長い波**についての近似です。

04

波の解 — 進む波と定在波

解は二通りに読めます。**進む波として**：二回微分できる任意の f,g について $u=f(x-ct)+g(x+ct)$ は解です。f は右へ、g は左へ、形を保って速さ c で進みます。初めの形 u_0・初速 0 なら $u=\frac12[u_0(x-ct)+u_0(x+ct)]$ で、山は二つに割れます（両端固定なら u_0 を奇関数・周期 2ℓ に延ばす）。この形の解は d'Alembert の 1747 年の論文にさかのぼるとされます。

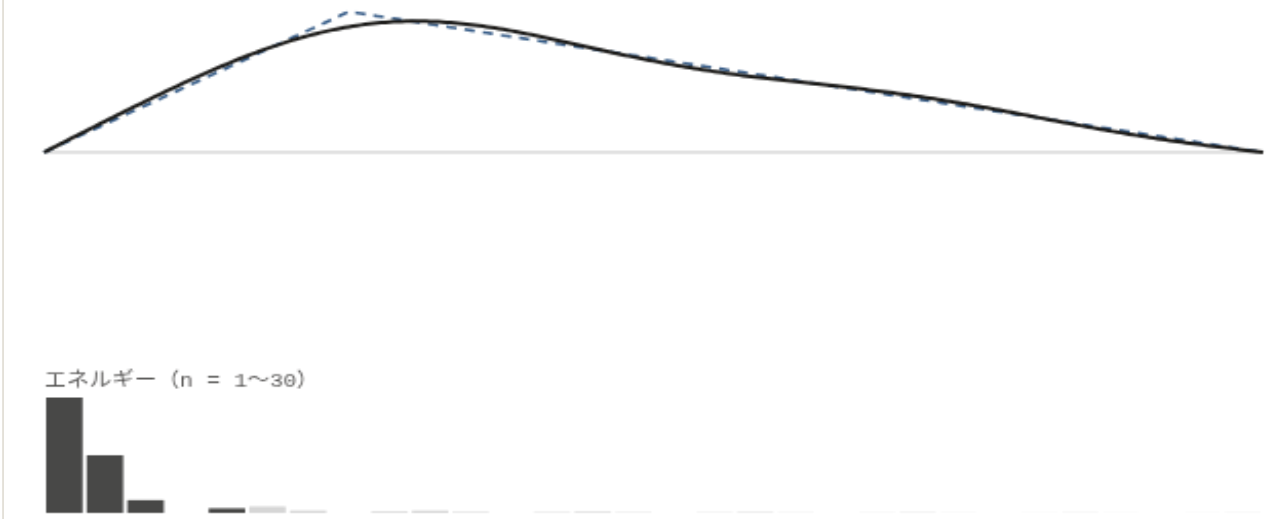
定在波の重ね合わせとして：方程式が線形なので、基準振動の和も解です。

$$u=\sum_{n\ge1} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\cos\omega_n t$$

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} u_0(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

係数の式は $\sin(n\pi x/\ell)$ どうしの直交性（積の積分が $n\neq n'$ で 0、$n=n'$ で $\ell/2$）から出ます。フーリエ正弦級数です（1-11）。**例**。位置 p を高さ h まで引いて放した三角形では $b_n=\frac{2h\ell^2}{n^2\pi^2p(\ell-p)}\sin\frac{n\pi p}{\ell}$。係数は $1/n^2$ でしか減らず、角を表すには高いモードまで要ります。

図 2　K と p を変えると、定在波の和（実線）と d'Alembert の解（破線）の近さ、エネルギーの配分（棒）が変わる。動かすと山が二つに割れ、壁で裏返る。表 2 の数値を押すと、その p と K になる



K = 5, p/ℓ = 0.25　最初の 5 個のエネルギー：89.2%

計算 図の数値は b_n の部分和と d'Alembert の式からその場で計算（$\ell = c = h = 1$）。

05

エネルギー — 保存と、モードへの配分

運動と位置のエネルギーの和 E は時間によりません。波動方程式を使うと被積分関数の時間微分が $\sigma\,\partial_x(\partial_t u\,\partial_x u)$ になり、両端が動かないので境界の項が消えるからです。

$$E = \int_0^{\ell} \Big[\frac{\rho}{2}(\partial_t u)^2 + \frac{\sigma}{2}(\partial_x u)^2 \Big]\, dx$$

$$\frac{dE}{dt} = \sigma \big[\partial_t u\ \partial_x u \big]_0^{\ell} = 0$$

Noether の定理（2-01）の場の版です。基準振動に分けると直交性で交差項が消え、$E = \sum_n E_n$、$E_n = \frac{\rho\ell}{4}(\dot b_n^2 + \omega_n^2 b_n^2)$。各 E_n は一つずつ保存します。**弦は、互いに無関係な単振動の無限個の集まり**です。

例。はじいた弦（$s = p/\ell$）では、モード n の取り分は $f_n = \frac{2\sin^2(n\pi s)}{n^2\pi^2 s(1-s)}$ です。

計算 **表 2**　最初の K 個のモードが持つエネルギーの割合。全項の和が 1 になること（200 万項で 5 桁以上）も確かめました。

s = p/ℓ	K = 1	K = 3	K = 10	K = 100
0.5	0.8106	0.9006	0.9596	0.9959
0.25	**0.5404**	**0.8706**	**0.9508**	**0.9946**
0.1	0.2150	0.5732	0.8920	0.9887

s = p/ℓ	K = 1	K = 3	K = 10	K = 100
0.02	0.0408	0.1217	0.3882	0.9489

真ん中をはじくと $f_1 = 8/\pi^2 \approx 0.81$。端の近く（$s = 0.02$）では最初の 10 個で 4 割に届かず、エネルギーは短い波長の側へ逃げます。

06

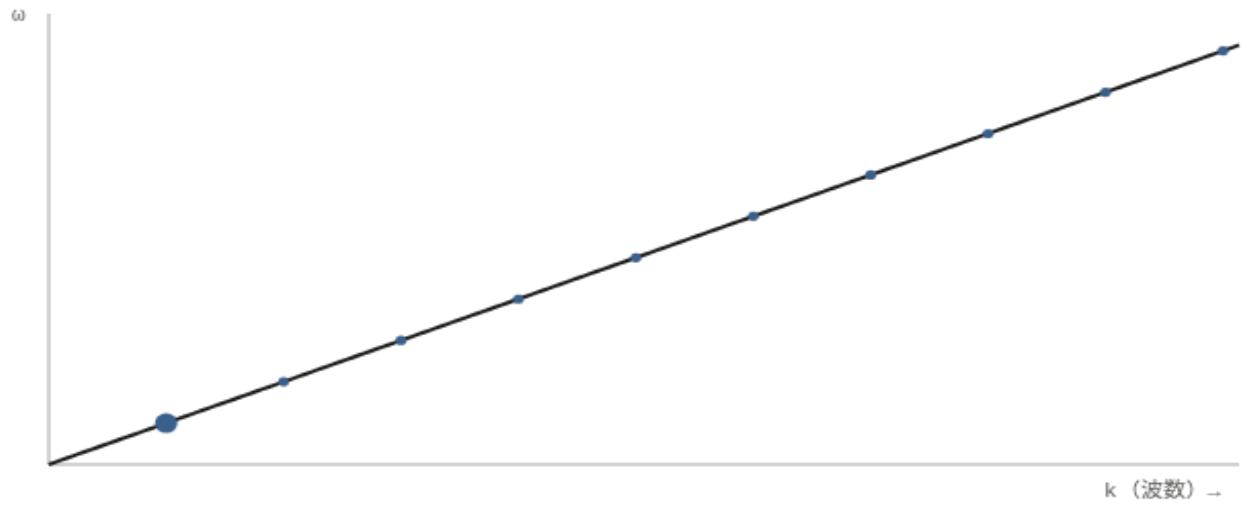
質量項 — 振動数に下限ができる

各粒を元の位置へ引き戻すばね（定数 κ）でも床につなぐと、位置エネルギーに $\sum_j \frac{\kappa}{2} q_j^2$ が足されます。$\Omega^2 = \kappa/m$ を固定した連続極限が左の Klein–Gordon 方程式、平面波 $\cos(kx - \omega t)$ を代入した**分散関係**が右です。ここでの k は**波数**（単位長さあたりの位相の進み。波長 λ なら $k = 2\pi/\lambda$）で、モードの番号 n とは別の量です。

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u - \Omega^2 u, \qquad \omega^2 = c^2 k^2 + \Omega^2$$

$\Omega = 0$ なら $\omega = c|k|$ で、波長を長くすれば振動数は 0 に近づきます。$\Omega > 0$ なら常に $\omega \geq \Omega$：**振動数に下限ができます**。長さ ℓ の箱では波数が $k_n = n\pi/\ell$ に限られ、最低振動数は $\omega_1 = \sqrt{(c\pi/\ell)^2 + \Omega^2}$。有限の箱では $\Omega = 0$ でも正で、**問われるのは箱を広げても下限が残るかどうか**です。質量ギャップの定義が無限体積で書かれるのはこのためです（4-11）。

図 3　Ω と ℓ を変えると、分散関係（曲線）と箱が許す波（点）が変わる。左端の大きな点が最低振動数



ℓ = 4.0, Ω = 0.00　最低振動数 ω₁ = 0.7891

計算 図の数値は $\omega = \sqrt{k^2 + \Omega^2}$、$k_n = n\pi/\ell$ からその場で計算（$c = 1$）。

計算 最低振動数（$c = 1$）は、$\ell = 1, 10, 100, 1000$ に対して $\Omega = 0$ で 3.142, 0.314, 0.0314, 0.00314、$\Omega = 1$ で 3.297, 1.048, 1.0005, 1.000005（閉じた式の値）。$\ell \leq 100$ では、間隔 0.05 の鎖の行列の最小固有値と相対差 0.11% 以内（$\ell = 1$ で最大）で一致しました。

古典の下限と、質量ギャップ

既知 量子化すると（2-06）、自由な場の真空の上のいちばん低い励起は無限体積で $\hbar\Omega$ です。$E = mc^2$ と比べて $\Omega = mc^2/\hbar$ と読むので、この項を**質量項**と呼びます。ヤン–ミルズの作用には質量項がありません（ゲージ不変性が許さない、3-02）。物理 それでも量子論では隙間が生じると考えられ、格子の数値計算も支持しています（5-08）。質量項を足さずに、理論の中から隙間が出ることを数学として示す——それが問題の中身です（0-03）。

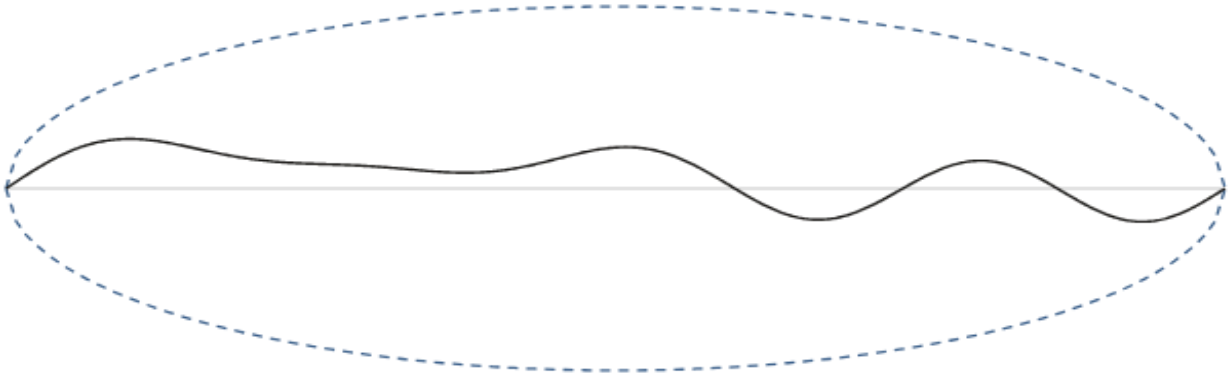
07

自由度が無限個ということ

弦の自由度は可算無限個です。困るのは**すべてのモードが同じ重みで揺すられる**とき、典型は熱平衡です。最小限の定義（詳しくは 2-08）：温度 T の熱平衡では、配置の確率密度が $\exp(-V/k_BT)$ に比例します（k_B はボルツマン定数）。$V = \sum_n \frac{\kappa_n}{2} Q_n^2$ なら各 Q_n は独立なガウス分布（1-08）に従い、分散は k_BT/κ_n、位置エネルギーの平均は一つあたり $k_BT/2$ です（**等分配**）。弦では $u = \sum_n q_n \sin(n\pi x/\ell)$ に対し $\kappa_n = \sigma n^2\pi^2/(2\ell)$ で、三つのことが起きます。

1. **全エネルギーは無限大**。無限個のモードに $k_BT/2$ ずつ配られるからです。
2. **一点での変位は有限**。$\operatorname{Var} u(x) = \sum_n \frac{2\ell k_BT}{\sigma n^2\pi^2} \sin^2 \frac{n\pi x}{\ell} = \frac{k_BT}{\sigma} \cdot \frac{x(\ell-x)}{\ell}$。この確率的な曲線は**ブラウン橋**と呼ばれます（既知 Sheffield 2007）。
3. **傾きは定まらない**。$\operatorname{Var} \partial_x u = \frac{2k_BT}{\sigma\ell} \sum_n \cos^2 \frac{n\pi x}{\ell}$ は発散します。曲線は途切れないのに、どこも角だらけです。正確には、どの点でも傾きが確率変数として定義できない、という意味です。

図 4　K を倍々に増やすと、熱平衡の弦の見本が細かくなる。大筋は変わらず、破線の帯 $\pm 2\sqrt{x(1-x)}$（標準偏差の 2 倍）におおむね収まる（各点で外に出る確率は約 5%）



```
K = 8  中心の分散 = 0.2374 k_BTℓ/σ（極限 0.25）  中心の傾きの分散 = 8 k_BT/(σℓ)（K とともに増え続ける）
```

計算 図は $u = \sum_{n \le K} g_n \sqrt{2} \sin(n\pi x)/(n\pi)$（$g_n$ は種を固定した正規乱数、$\ell = k_B T/\sigma = 1$）をその場で計算。

計算 空間の次元 d を上げたとき（膜、箱の中の場）の、箱 $[0,1]^d$ の中心での分散（単位 $k_B T/\sigma$）を、各方向の番号を K まで取ったモードの和で数えます（$K = 10$ から 160 まで倍々）。モード $n = (n_1, \ldots, n_d)$ の寄与は $1/|n|^2$ に比例します。格子で刻んだ同じ量の表と図は 1-09 表 3・図 3 にあり、この本ではそれを正本にします。四で切り替わる量と並べた図は 1-12 §10 の次元のつまみです。

$d = 1$ は $1/4$（ブラウン橋の中心の値）に収束します。$d = 2$ は K を倍にするごとに $\ln 2/(2\pi) \approx 0.110$ ずつ増え（$\log K$ で発散）、$d = 3$ は倍、$d = 4$ は四倍になります。半径 r の殻のモード数が r^{d-1} に比例し、一つあたり $1/r^2$ なので、和は $\sum r^{d-3}$ の形です。発散は**波長の短い側**から来ます。

既知 d 次元の箱の中の場を $\varphi(x)$ と書きます（弦の u の多次元版）。$d \ge 2$ では熱い場の一点の値 $\varphi(x)$ は意味を持たず、滑らかな重みの関数 f をかけて積分した値 $\int \varphi f \, dx$ だけが確率変数として意味を持ちます。この意味で、場は関数ではなく**超関数**に値を取ります（Sheffield 2007、1-09・1-11）。量子の場を虚時間で書くと時間も空間の一方向と同じ扱いになり、四次元時空の自由な場は $d = 4$ の行と同じ形の和を持ちます（4-02）。

場が荒いほど、場どうしの積（非線形項）に意味を与えにくくなります。正確には、超関数どうしの積は一般には定義できません（1-11）。発散（4-04）はその素朴な現れです。どこまで荒くても非線形項を扱えるかを正確に述べるのが、確率量子化の「劣臨界・臨界」です（7-09）。

08

この本での行き先

この先の使い道：電磁場のポテンシャルと冗長さ（2-03）、$\partial_t^2/c^2 - \partial_x^2$ のローレンツ不変性（2-04・時空の記事。波が尾を引くかは空間の次元で決まる：同記事）、モードを量子の振動子にした Fock 空間（2-06）、場の上の確率（2-07）。

3-02 で前提が一つ崩れます。**基準振動に分けられたのは、方程式が線形だったから**です。ヤン–ミルズ場は各点でリー環に値を取り、自分自身と相互作用するので、モードは独立でなくなります。古典の波には下限もありません。物理 それでも量子では隙間が生じると考えられています。

寄り道：閉じ込めの弦も、この方程式で揺れる

飛ばしてよい小節です。

物理 重い電荷の対を距離 r だけ離すと、間のヤン–ミルズ場は張力 σ の弦のような管になると考えられています（17-03）。管は相対論的な弦とみなされ、そのとき線密度は $\rho = \sigma/c^2$ で、横波の速さ $\sqrt{\sigma/\rho}$ は光速 c に等しくなります。管の横揺れは波動方程式に従うとされ、モード $\omega_n = n\pi c/r$ の零点エネルギー（量子の振動子のいちばん低いエネルギー $\hbar\omega_n/2$、2-06）を揺れる向き $d-2$ 個（ここの d は時空の次元で、17-03 と同じ字。07 節の d は場が広がる空間の次元です）について足し、発散する $1+2+3+\cdots$ に形式的に $-1/12$ を当てる（4-12）と、$V(r) = \sigma r - \frac{(d-2)\pi\hbar c}{24r} + \cdots$ が出ます。この Lüscher 項は有効弦理論の予想として格子の数値と比べられてきました（Lüscher 1981、解説 Hari Dass 2023）。筋書きであり導出ではありません。

この章が言えている範囲

内容	状態
01〜06 節の古典の事実（鎖の振動数、連続極限、波の二つの解、エネルギーの保存と分配、質量項による下限）	言えている 既知 （表 1・2 と 06 節で数値も確認 計算 ）
熱平衡の場の一点の分散が d = 1 で有限、d ≥ 2 で発散すること	言えている 既知 （発散の速さは K ≤ 160 の数値と殻の数え上げ 計算 ）
連続極限の厳密な収束	言えていない（この章の極限は形式的）
古典の振動数の下限と量子の隙間の対応	自由な場でだけ言える 既知 （2-06）
閉じ込めの弦と Lüscher 項／ヤン–ミルズの質量ギャップ	前者は物理の水準の筋書きのみ 物理 。後者についてこの章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1・表 2・06 節と 07 節の数値・図 1〜4	計算	表は python3・NumPy（固有値、級数の和）。図はブラウザの JavaScript（本文の式と部分和）
弦の方程式と一般解	既知	J. le R. d'Alembert, “Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration”, Hist. Acad. R. Sci. Belles-Lettres Berlin 3（1747 年分）pp. 214–219。書誌のみ（刊行年は未確認）
ブラウン橋・場が超関数になること	既知	S. Sheffield, “Gaussian free fields for mathematicians”, Probab. Theory Relat. Fields 139 (2007) 521–541, arXiv:math/0312099（§ 2.5 を確認）

もの	種別	出典・道具
量子ヤン–ミルズの隙間を支持する格子の数値	物理	5-08 の出典表に譲る。一例：C. J. Morningstar, M. Peardon, “The glueball spectrum from an anisotropic lattice study”, Phys. Rev. D 60 (1999) 034509, arXiv:hep-lat/9901004（書誌のみ）
Lüscher 項	物理	M. Lüscher, “Symmetry breaking aspects of the roughening transition in gauge theories”, Nucl. Phys. B180 (1981) 317–329（書誌のみ）。式の形は N. D. Hari Dass, “Effective String Theories (EST) of Yang-Mills Flux Tubes”, arXiv:2312.10629（書籍 Strings to Strings, Springer 2023 の第 22 章）の式 (1) で確認

次に読む章：2-03 電磁気学はゲージ理論である。量子化へ先に進むなら 2-06。

電磁気学はゲージ理論である — ポテンシャルの書き方の余りは、各点で選ぶ U(1) の元になる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 同じ電場・磁場を与えるポテンシャルが無数にあること（ゲージ変換）。
Gauss の法則が拘束であり、ゲージ不変性と電荷の保存が組であること。
量子力学ではゲージ変換が位相（U(1) の元）を点ごとに回し、閉じた道の位相因子が観測にかかること。

前提となる章 — 2-02、2-01 の 08 節（局所的な対称性と拘束）、1-01。ベクトル解析と電磁気学の入門は既知とし、量子力学は 05 節で最小限を置きます。

先に言うこと — 相対論の形は 2-04、非可換は 3-02。相互作用の無い電磁場に質量ギャップはありません（04 節）。この章はヤン–ミルズの質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. 電場と磁場 — Maxwell 方程式
2. ポテンシャル — 源の無い Maxwell の式を自動的に満たす
3. ゲージ変換 — 書き方の余り（図 1）
4. 作用から — 拘束と電荷の保存
5. 量子の位相と U(1) — 位相を点ごとに回す（位相因子）
6. Aharonov–Bohm 効果 — B = 0 でも縞が動く（図 2・表 1）
7. 輪の上の粒子 — 準位は磁束の周期関数
8. 格子の輪 — 辺に U(1) の元を置く（図 3・表 2）
9. U(1) から SU(N) へ — ゲージ原理へ

01

電場と磁場 — 四本の方程式

電磁気学の主役は、各点に三次元ベクトルを持つ二つの場、**電場** $\mathbf{E}(t,\mathbf{x})$ と**磁場** $\mathbf{B}(t,\mathbf{x})$ です。電荷 q・速度 $\mathbf{v}$ の粒子は **Lorentz 力** $\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$ を受け、場は **Maxwell 方程式**に従います（SI 単位。ρ は電荷密度、$\mathbf{J}$ は電流密度、$c^2=1/\varepsilon_0\mu_0$）。

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0},\qquad \nabla\times\mathbf{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\mu_0\mathbf{J} \tag{M1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0,\qquad \nabla\times\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=\mathbf{0} \tag{M2}$$

源のある Maxwell の式の二本（**Gauss の法則**と **Ampère–Maxwell の法則**）は電荷と電流が場を作る式、源の無い Maxwell の式の二本（磁荷が無いことと **Faraday の電磁誘導の法則**）は場の形への制約です。**例**。源の無い所では、四本の Maxwell の式から $\partial_t^2\mathbf{E}=c^2\nabla^2\mathbf{E}$（2-02 の波動方程式の三次元版）が出て、この波が光です。分散 $\omega=c|\mathbf{k}|$ に下限はありません。

源の無い Maxwell の式は源を含まないので、方程式を解く前に $\mathbf{E},\mathbf{B}$ の形を先に絞れます。それが次の節です。

02

ポテンシャル — 源のない二本を自動的に満たす

恒等式 $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=0$ と $\nabla\times\nabla f=\mathbf{0}$ で、源の無い Maxwell の式を自動的に満たせます。$\mathbf{B}$ を回転で書けば一本目が成り立ち、二本目は $\nabla\times(\mathbf{E}+\partial_t\mathbf{A})=\mathbf{0}$ となるので、$\mathbf{E}+\partial_t\mathbf{A}$ を勾配で書きます。

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A},\qquad \mathbf{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \tag{P}$$

$\mathbf{A}$ を**ベクトルポテンシャル**、ϕ を**スカラーポテンシャル**と呼びます。$\mathbb{R}^3$ 全体では $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ なら必ず $\mathbf{B}$ は回転で書けます 既知 （1-06）。

例 1。一様な $\mathbf{B}=B_0\mathbf{e}_z$ には $\mathbf{A}_1=\frac{B_0}{2}(-y,x,0)$ も $\mathbf{A}_2=B_0(0,x,0)$ も使えます。**例 2**。半径 a の長いソレノイドで、内側に一様な $B_0\mathbf{e}_z$、外側は磁場なし、磁束 $\Phi=\pi a^2B_0$。軸からの距離 r、軸を回る向きの単位ベクトル $\mathbf{e}_\theta$ で

$$\mathbf{A}=\frac{B_0 r}{2}\,\mathbf{e}_\theta\ \ (r<a),\qquad \mathbf{A}=\frac{\Phi}{2\pi r}\,\mathbf{e}_\theta\ \ (r>a)$$

外側では $\nabla\times\mathbf{A}=\frac{1}{r}\partial_r(rA_\theta)\mathbf{e}_z=\mathbf{0}$ なのに $\mathbf{A}\neq\mathbf{0}$。半径 r の円を一周する線積分は Φ で、Stokes の定理どおり中を貫く磁束です。回転が 0 の所だけを通る道でも、一周の値は 0 にな

りません。道が穴（ソレノイド）を囲んでいるからで、この値を量子力学が読み取るのが 06 節です。

03

ゲージ変換 — 同じ場を与える書き方の余り

ポテンシャルの表示は $\mathbf{E},\mathbf{B}$ から $(\phi,\mathbf{A})$ を一つに決めません。滑らかな関数 $\chi(t,\mathbf{x})$ で

$$\mathbf{A}\mapsto\mathbf{A}+\nabla\chi,\qquad \phi\mapsto\phi-\frac{\partial\chi}{\partial t} \tag{G}$$

と取り替えても $\mathbf{E},\mathbf{B}$ は変わりません（$\nabla\times\nabla\chi=\mathbf{0}$、$\nabla\partial_t\chi=\partial_t\nabla\chi$）。これを**ゲージ変換**、$\chi$ を**ゲージ関数**と呼びます。**例**。例 1 の二つは $\chi=B_0xy/2$ で移り合います（$\mathbf{A}_2-\mathbf{A}_1=\nabla\chi$）。

条件（$\nabla\cdot\mathbf{A}=0$ など）で余りを減らすことを**ゲージ固定**と呼びます（量子版は 4-08）。

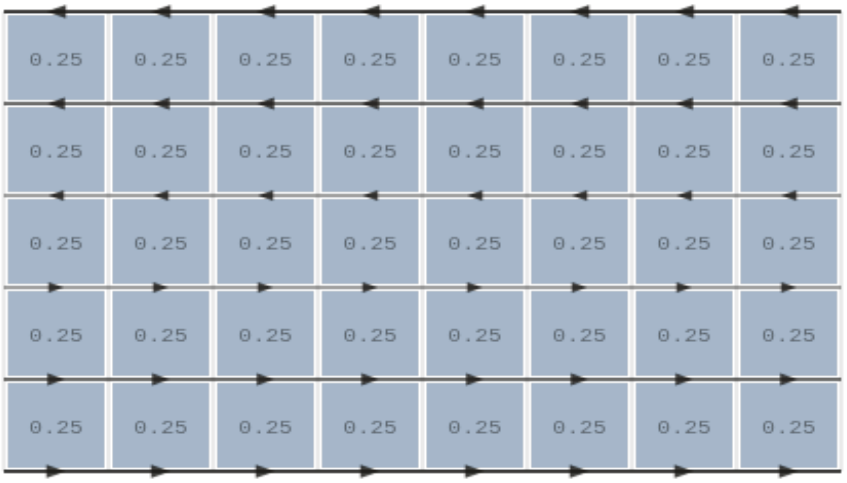
格子の上で見る

平面を正方格子に刻み、$\mathbf{A}$ を辺ごとの数 $A_{ij}=\int_i^j\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$（$A_{ji}=-A_{ij}$）で持ちます。正方形の面 p の角を反時計回りに 1〜4 とすると、Stokes の定理から面を貫く磁束 B_p は四辺の和で、ゲージ関数は格子点の値 χ_i になります。

$$B_p=A_{12}+A_{23}+A_{34}+A_{41},\qquad A_{ij}\mapsto A_{ij}+\chi_j-\chi_i$$

各角の χ は $+$ と $-$ で一度ずつ現れて消え、B_p は変わりません。**例**。辺の値 $(0.3,\,0.5,\,-0.1,\,-0.2)$ の和は 0.5。$\chi=(1,0,2,-1)$ で変換すると $(-0.7,\,2.5,\,-3.1,\,1.8)$ ですが、和は 0.5 のままです。辺に群の元を置けば Wilson の格子ゲージ理論（5-01）の出発点です。

図 1　ゲージ関数の大きさ s を変える・動かすと、辺の値（線の太さと矢印）は変わるが、面の値（塗りと数字）は変わらない




```
s = 0.00  辺の変化 最大 0.000  面の変化 最大 0.0e+0
```

計算 図の数値は四辺の和と $\chi_j - \chi_i$ の足し込みからその場で計算。

「一つの面だけに磁束」は 06 節のソレノイドの格子版です。0 でない辺の列はゲージで形を変えても消えません（06 節の角 θ が跳ぶ切れ目に当たる）。「磁場なし」で辺だけが揺れるのが**純粋なゲージ**です。

04

作用から — 拘束と電荷の保存

Maxwell 方程式も作用の停留条件です（2-01・2-02）。未知数は $(\phi, \mathbf{A})$、$\mathbf{E}, \mathbf{B}$ はポテンシャルの表示で書いたものとします。

$$\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2}|\mathbf{E}|^2 - \frac{1}{2\mu_0}|\mathbf{B}|^2 - \rho\,\phi + \mathbf{J}\cdot\mathbf{A}, \qquad S = \int \mathcal{L}\, dt\, d^3x \tag{L}$$

源の無い Maxwell の式はポテンシャルの表示から自動的に成り立ち、源のある Maxwell の式が Euler–Lagrange 方程式として出ます 既知 。$\mathcal{L}$ は $\nabla\phi$ を含みますが $\partial_t\phi$ を含まないので、ϕ を動かして出る $\varepsilon_0 \nabla\cdot\mathbf{E} = \rho$ は時間の二階微分を含まない同時刻の条件、**拘束**です。2-01 の玩具の λ の方程式に当たります。こうして $(\phi, \mathbf{A})$ の四成分のうち、ゲージ変換の式で一つ、この拘束で一つが消え、残る $4 - 1 - 1 = 2$ が光の偏りの数です 既知 （量子版は 4-01）。

ゲージ変換の式で最初の二項は変わらず、後ろの二項は $\rho\,\partial_t\chi + \mathbf{J}\cdot\nabla\chi$ だけ増えます。部分積分すると（χ は遠くで 0）

$$\delta S = -\int \chi \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J} \right) dt\, d^3x$$

どの χ でも作用が変わらないことは、**電荷の保存** $\partial_t\rho + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0$ と同じです。方程式の側から見ると、源のある Maxwell の式の二本は独立ではありません。Gauss の法則の時間微分と

Ampère–Maxwell の法則の発散を組み合わせると、場の項は $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{B})=0$ で恒等的に消え、$\partial_t\rho+\nabla\cdot\mathbf{J}=0$ だけが残ります。電荷が保存するなら方程式の一部は残りから従う。これが 2-01 の第二定理の形です。

例：質量項は置けない。 2-02 にならい $-\frac{\varepsilon_0\Omega^2}{2}|\mathbf{A}|^2$ を足すと、横波の分散は $\omega^2=c^2|\mathbf{k}|^2+\Omega^2$ になり下限 Ω ができます。しかしこの項はゲージ変換の式で変わってしまいます。ゲージ不変性の下では、作用に質量項を直接書き足すことはできません。相互作用の無い電磁場では下限は生じず、量子論でも光子の質量は 0、自由な電磁場に質量ギャップはありません 既知 。

ゲージ不変性を保ったまま、相互作用から質量が生じうるかは別の問題です。超伝導体の中の Meissner 効果や Higgs 機構（3-07）はその例です 既知 。ヤン–ミルズでは、別の場を足さずにそれが起きるかが問われます（09 節・4-11）。

05

量子の位相と U(1)

古典の粒子は $\mathbf{E},\mathbf{B}$ だけを感じますが、量子力学ではポテンシャルが式に入ります。使うのは三つ（2-05）。(i) 状態は複素数値の**波動関数** $\psi(t,\mathbf{x})$ で表され、$|\psi|^2$ が位置の確率密度。(ii) 定数 α について ψ と $e^{i\alpha}\psi$ は同じ状態。(iii) 質量 m・電荷 q の粒子は次の Schrödinger 方程式に従う（$\hbar=h/2\pi$）。

$$i\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{1}{2m}\big(-i\hbar\nabla-q\mathbf{A}\big)^2\psi+q\phi\,\psi \tag{S}$$

ゲージ変換の式で (S) は崩れそうですが、ψ も

$$\psi\mapsto e^{iq\chi/\hbar}\psi \tag{G'}$$

と変えれば (S) はそのまま成り立ちます。鍵は**共変微分** $D=\nabla-\frac{iq}{\hbar}\mathbf{A}$ で、積の微分から出る $\frac{iq}{\hbar}(\nabla\chi)\psi$ が $\mathbf{A}$ の変化分と打ち消し合います。

$$\Big(\nabla-\frac{iq}{\hbar}(\mathbf{A}+\nabla\chi)\Big)\big(e^{iq\chi/\hbar}\psi\big)=e^{iq\chi/\hbar}\Big(\nabla-\frac{iq}{\hbar}\mathbf{A}\Big)\psi$$

時間の側も同様です。Fock（1926）がこの不変性に気づき、London（1927）がそれを Weyl が以前に立てた尺度（Eich）の理論と結びつけ、Weyl（1928〜29）がゲージ不変性として原理に掲げたとされます（Jackson–Okun 2001）。

$e^{iq\chi/\hbar}$ は絶対値 1 の複素数で、その全体は掛け算で群をなします。これが **U(1)**（単位円。1-02）です。**ゲージ変換とは、各点で U(1) の元を一つずつ選ぶこと**です。全点で同じ元なら (ii) そのもの、点ごとに違えば $\mathbf{A}$ が辻褄を合わせます（逆向きの議論は 09 節）。

道に沿った位相因子

基準が点ごとなら、離れた点の位相はどう比べるのか。$\mathbf{x}$ から $\mathbf{y}$ への道 C について

$$W(C) = \exp\!\Big(\frac{iq}{\hbar}\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}\Big), \qquad W(C) \mapsto e^{iq\chi(\mathbf{y})/\hbar}\, W(C)\, e^{-iq\chi(\mathbf{x})/\hbar}$$

両端の取り替えを打ち消すので、$W(C)\in U(1)$ は位相を $\mathbf{x}$ から $\mathbf{y}$ へ運ぶ道具（**平行移動**、1-07）です。閉じた道ならゲージ不変で、囲む磁束 Φ_C により $W(C)=e^{iq\Phi_C/\hbar}$。格子では辺ごとの $e^{iqA_{ij}/\hbar}$ の積で、03 節の足し算が群の掛け算になります。

06

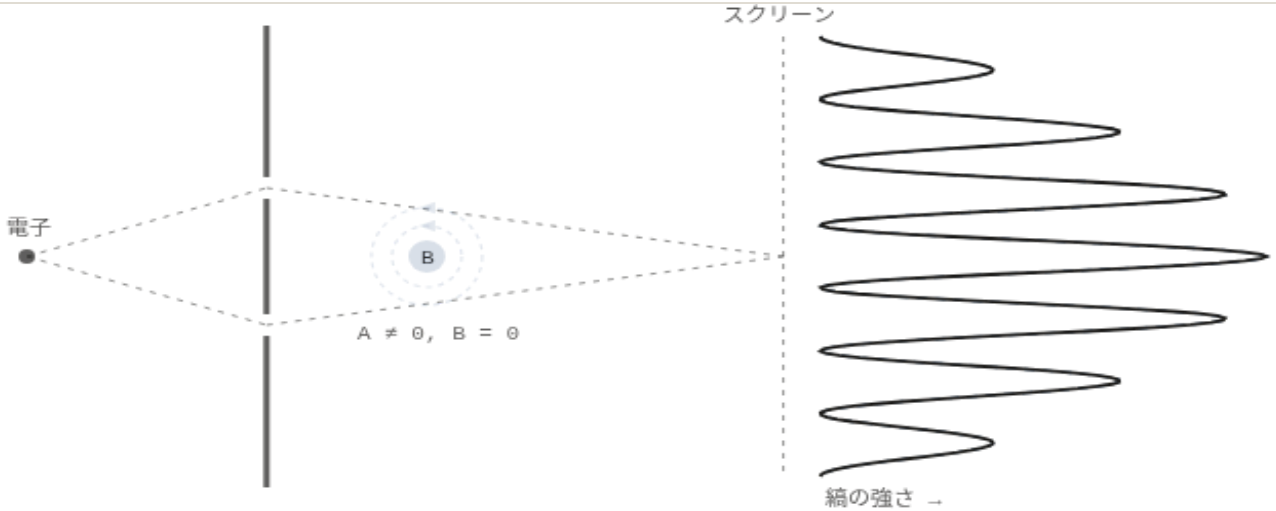
Aharonov–Bohm 効果 — 磁場の無い所で縞が動く

例 2 のソレノイドの両脇を電子が通る二重スリットを考えます。電子の通る所は $\mathbf{B}=\mathbf{0}$ で、古典的には何も変わりません。量子力学では、スリット 1 の道 C_1 と 2 の道 C_2 の寄与が足され、位相差が縞を作ります。C_1 と逆向きの C_2 をつなぐとソレノイドを一周するので、$\mathbf{A}$ による位相差は

$$\Delta = \frac{q}{\hbar}\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \frac{q\Phi}{\hbar} = \pm 2\pi\,\frac{\Phi}{\Phi_0}, \qquad \Phi_0 = \frac{h}{|q|}$$

で、縞は縞間隔の Φ/Φ_0 だけずれます。Φ が Φ_0 の整数倍なら元と区別できません。予言は Aharonov–Bohm（1959）。先に Ehrenberg–Siday（1949）が同じ結論に達しており、1939 年の手がかりも指摘されています 既知 （Hiley 2013）。

図 2　磁束 Φ/Φ₀ を変える・動かすと、縞（右の実線）が Φ = 0 の縞（破線）からずれ、Φ/Φ₀ が 1 増えるごとに重なる。電子の道の上は B = 0



Φ/Φ₀ = 0.00　位相差 = 0.00π　縞のずれ = 縞間隔の 0.00

計算 縞は $I(y) \propto \operatorname{sinc}^2(0.6y)\cos^2(3.5\pi y + \pi\Phi/\Phi_0)$（$\operatorname{sinc} u = \sin(\pi u)/(\pi u)$）をその場で計算した模式図（縞の数と幅は見やすさで選択）。

なぜゲージ変換で消せないか。外側では $\mathbf{A} = \nabla(\Phi\theta/2\pi)$（$\theta$ は軸を回る角）なので $\chi = -\Phi\theta/2\pi$ で消せそうですが、θ は一周で 2π 増え、関数として一つに決まりません。一価であればよいのは位相 $e^{iq\chi/\hbar} = e^{-iq\Phi\theta/2\pi\hbar}$ のほうで、それは Φ/Φ_0 が整数のときに限られ、そのときに限り $\mathbf{A}$ は消えて効果も消える。周期 Φ_0 はここから来ます。

計算 **表 1**　半径 1・$\Phi = 1$ のソレノイドの周りの $\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$ の数値積分。右の二列は例 2 の $\mathbf{A}$ と、$\chi = \sin x\cos 2y + x^2 y/3$ で変換した $\mathbf{A}'$。囲む磁束 × 巻き数との差は 4×10^{-10} 以内。

閉じた道	道の上の $\lvert\mathbf{B}\rvert$	$\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$	$\oint \mathbf{A}'\cdot d\mathbf{l}$
円 半径 2・中心 (0, 0)	0	1.000000	1.000000
正方形 一辺 5・中心 (0.7, −0.4)	0	1.000000	1.000000
円 半径 1・中心 (3, 0)（囲まない）	0	0.000000	0.000000
円 半径 2 を 2 周	0	2.000000	2.000000
円 半径 0.5（ソレノイドの中）	0.3183	0.250000	0.250000

計算 電子では $\Phi_0 = h/e = 4.1357\times10^{-15}$ Wb、直径 1 μm の円にこれを通す磁場は 5.27 mT。既知 実験による最初の検証は Chambers（1960）とされ、Tonomura ら（1986）は磁場を超伝導体に閉じ込めて測りました。

07

輪の上の粒子 — 準位は磁束の周期関数

縞のずれは準位にも現れます。半径 R の輪に閉じ込めた電荷 $q>0$ の粒子を考え、輪の中心を磁束 Φ が貫くとします。輪の上は $\mathbf{B}=\mathbf{0}$、$A_\theta = \Phi/2\pi R$ で、∇ は輪に沿う向きの $\frac{1}{R}\partial_\theta$ だけになります。(S) に**定常状態** $\psi = e^{-iEt/\hbar}e^{in\theta}$（$|\psi|^2$ が時間によらない状態。一周で戻るので n は整数）を入れると、左辺は $E\psi$、右辺は $\frac{1}{2mR^2}(\hbar n - q\Phi/2\pi)^2\psi$ となり、エネルギーは

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mR^2}\left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2, \qquad n\in\mathbb{Z}$$

$\Phi \mapsto \Phi+\Phi_0$ では番号が $n\mapsto n+1$ と付け替わるだけなので、**準位の集まりは周期 Φ_0 の周期関数**で、$\Phi=\Phi_0/2$ で下の二つが重なります。輪の上に磁場は無いのに、準位は磁束を知っています。この周期性から超伝導の円筒の磁束の量子化（周期 $h/2e$）を論じたのが Byers–Yang（1961）とされます 既知 。

Wu–Yang（1975）は AB 効果の検討から、場の強さでは電磁気学を記述し足りず、位相 $\frac{q}{\hbar}\oint\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$ では記述し過ぎで、過不足ないのは位相因子 $e^{\frac{iq}{\hbar}\oint\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}}$ だとまとめています 既知 。こ

の準位もその一例です。

08

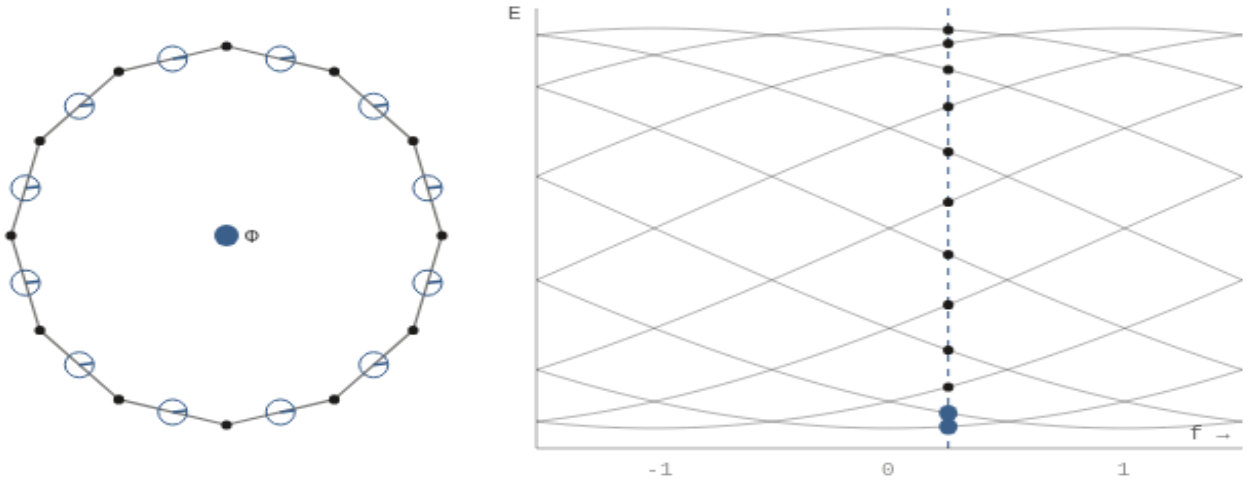
格子の輪 — 辺に U(1) の元を置く

N 点の輪で、隣へ移る振幅 $-t$（$t>0$）に辺ごとの U(1) の元を掛けたエルミート行列 $H_{j+1,j}=-t\,e^{i\theta_j}$、$H_{j,j+1}=\overline{H_{j+1,j}}$（番号は N を法とする）を考えます。ゲージ変換は $\theta_j \mapsto \theta_j+\chi_{j+1}-\chi_j$ で、変わらないのは一周の積 $\prod_j e^{i\theta_j}=e^{2\pi i f}$（$f=\Phi/\Phi_0$）だけ。一様な $\theta_j=2\pi f/N$ では平面波が固有ベクトルで、

$$E_n=-2t\cos\frac{2\pi(n-f)}{N},\qquad n=0,\dots,N-1$$

$|n-f|\ll N$ なら $E_n\approx -2t+t(2\pi/N)^2(n-f)^2$ で、07 節の連続の輪と同じ形です。

図 3　f = Φ/Φ₀ と点の数 N を変える（または表 2 の行を押す）と、準位（右の点）が動く。「ゲージ」を押すと辺の位相（左の時計）の配り方が変わるが、準位は変わらない



N = 12, f = 0.25　E₀ = -1.98289　E₁ = -1.84776　E₁ − E₀ = 0.13513　一周の位相の和 ÷ 2π = 0.25（1 を法として）

計算 準位は閉じた式（$t=1$）からその場で計算。

計算 **表 2**　$N=12$、$t=1$ の下の二つの準位（行列の固有値）。右端は三つのゲージ（一様／一本の辺に集める／でたらめな χ を足す）の間の差と、閉じた式との差の最大。行を押すと図 3 に移ります。

f	E_0	E_1	E_1-E_0	差の最大
0	-2.000000	-1.732051	0.267949	1.0e-15
0.25	-1.982890	-1.847759	0.135131	6.7e-16
0.5	-1.931852	-1.931852	0.000000	7.8e-16

f	E_0	E_1	$E_1 - E_0$	差の最大
0.75	-1.982890	-1.847759	0.135131	1.3e-15
1.25	-1.982890	-1.847759	0.135131	8.9e-16

準位は三つのゲージで丸め誤差の範囲で一致し、$f \cdot 1-f \cdot f+1$ で同じです。$N=192$ では $(E+2t)/t(2\pi/N)^2$ が連続の輪の $(n-f)^2$ に近づき、下の二つの準位で相対差は最大 5.0×10^{-5}（$f=0.25$ の E_1）でした 計算 。

この「隙間」と、質量ギャップ

E_1-E_0 は有限の輪の話で、輪を大きくすると 0 に近づきます。問題文の質量ギャップ（4-11）とは別物です。見てほしいのは、準位が一周の位相因子だけで決まること。ヤン–ミルズの格子の観測量も閉じた道の位相因子（Wilson ループ、5-01）から作ります。

09

U(1) から SU(N) へ — この本での行き先

ヤン–ミルズ理論は、各点で選ぶ元を U(1) から SU(N)（行列式 1 の $N\times N$ ユニタリ行列、1-04）に取り替えたものです（3-02）。掛ける順で結果が変わるため、場の強さに交換子の項が加わり、場自身が色電荷（電荷に当たるもの）を持って方程式が非線形になります（3-03）。古典の波に下限が無いのは光と同じですが、量子では隙間が生じると考えられています 物理 （5-08）。U(1) との違いは 5-06。

次の橋は 3-01 です。この章は $\mathbf{A}$ を先に置き、(G′) を後から見つけました。3-01 は逆に、位相を各点で勝手に回しても (S) が変わらないよう求め、辻褄を合わせる場として $\mathbf{A}$ を導きます。同じ要求を SU(N) で行うとヤン–ミルズ場が出ます。これが**ゲージ原理**で、05 節の平行移動と 08 節の辺の元がその部品です。

この章が言えている範囲

内容	状態
01〜05 節（ゲージ変換、拘束、電荷の保存、作用に質量項を直接置けないこと、(G′)、位相因子）	言えている 既知 。格子は図 1 計算
06〜08 節（AB 効果の位相差と周期 Φ_0、輪の準位の周期性とゲージ不変性）	言えている 既知 （道の位相の比較として。散乱の厳密解は扱わない）。表 1・2 計算

内容	状態
自由な電磁場に質量ギャップが無いこと／ゲージ不変なまま質量が生じる機構・ヤン–ミルズの質量ギャップ	前者は既知。後者は例を名指すだけで、この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1・2、06・07 節の数値、図 1〜3	計算	python3・NumPy（線積分の中点則、エルミート行列の固有値）。図はブラウザの JavaScript（本文の式）
Maxwell 方程式・ゲージ不変性の経緯（Fock・London・Weyl）	既知	J. D. Jackson, L. B. Okun, Rev. Mod. Phys. 73 (2001) 663, arXiv:hep-ph/0012061（要旨と III 節を確認）。J. C. Maxwell, Phil. Trans. R. Soc. Lond. 155 (1865) 459、V. Fock, Z. Phys. 39 (1926) 226、F. London, Z. Phys. 42 (1927) 375、H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik (1928)・Z. Phys. 56 (1929) 330（書誌のみ）
ゲージ不変なまま質量が生じる例	既知	P. W. Anderson, Phys. Rev. 130 (1963) 439（題名と要旨を確認）。詳しくは 3-07
AB 効果の予言・経緯・実験	既知	Y. Aharonov, D. Bohm, Phys. Rev. 115 (1959) 485、A. Tonomura et al., Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 792（ともに要旨を確認）。B. J. Hiley, arXiv:1304.4736（本文を確認）。W. Ehrenberg, R. E. Siday, Proc. Phys. Soc. B 62 (1949) 8（書誌のみ）。R. G. Chambers, Phys. Rev. Lett. 5 (1960) 3（書誌のみ・題名を確認・「最初」は未確認）
位相因子による記述	既知	T. T. Wu, C. N. Yang, Phys. Rev. D 12 (1975) 3845（§II の結論を確認）
磁束の周期性と超伝導	既知	N. Byers, C. N. Yang, Phys. Rev. Lett. 7 (1961) 46（書誌のみ。題名で主題を確認・内容は未確認）

次に読む章：2-04 特殊相対論と時空。ゲージ原理へ進むなら 3-01。

特殊相対論と時空 — 符号が一つ違う二次形式を保つことが、作用の形を絞る

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — ローレンツ変換は波動方程式の形を保つ変換で、間隔の符号が二点の関係を三つに分けること。
質量は四元運動量の不変な長さで、自由粒子の作用は固有時であること。
場の作用の形が絞られ、四次元の純ヤン–ミルズの作用には長さの尺度が無いこと。

前提となる章 — 2-01（作用・Euler–Lagrange・Noether）と行列の積（1-01）。2-02 の波動方程式と質量項も使います（式はその場で再掲）。04 節の群は 1-02、05 節の「なぜ質量ギャップと呼ぶか」は 2-05、07 節の電磁場は 2-03、そのヤン–ミルズは 1-03・1-04 を先取りします。最初に読むときは結論だけ受け取って先へ進めます。

先に言うこと — 重力の無い平坦な時空の、古典の話だけです（量子論は 2-05 から）。09 節の虚時間は形式的な代入で、正当化は 4-02・4-10 の仕事です。08 節の「古典の作用に尺度が無い」を含め、この章は質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. 波動方程式は、ガリレイ変換で形を変える — 光速を誰にとっても同じに
2. ローレンツ変換 — 間隔を保つ（図 1・表 1）
3. 光円錐と同時の相対性 — 符号で三つに分かれる
4. 四元ベクトルとローレンツ群 — 添字・非コンパクト
5. 固有時と四元運動量 — 質量は不変な長さ（なぜ「質量」ギャップか）
6. 自由粒子の作用 — 直線が固有時を最大にする（図 2・表 2）
7. ローレンツ不変な場の作用 — スカラー・電磁・ヤン–ミルズ
8. 次元の勘定 — 四次元の結合は無次元（表 3・表 4）
9. 虚時間への橋 — 質量が減衰の速さになる

01

波動方程式は、ガリレイ変換で形を変える

2-02 で作った波動方程式を、空間一次元・波の速さ c で書きます。

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \partial_x^2\right)u = 0 \tag{1}$$

速さ v で右へ動く観測者の座標は、ニュートン力学では $t' = t,\ x' = x - vt$ です（ガリレイ変換）。$\partial_t = \partial_{t'} - v\partial_{x'}$、$\partial_x = \partial_{x'}$ を入れると、(1) の作用素は形を変えます。

$$\frac{1}{c^2}\partial_{t'}^2 - \frac{2v}{c^2}\partial_{t'}\partial_{x'} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\partial_{x'}^2$$

例。$u = f(x' - st')$ を代入すると $s^2 + 2vs - (c^2 - v^2) = 0$、つまり $s = c - v$ と $-(c + v)$。$v = c/2$ なら右へ $0.5c$、左へ $1.5c$ の波に見えます 計算 。

音ならこれで正しい。空気に対して止まった観測者が特別だからです。しかし光の波動方程式は Maxwell 方程式（2-03）から出て、媒質を要しません。Einstein（1905）は、法則がどの慣性系でも同じ形であることと、光速が光源の運動によらないことを前提にしました 既知 。問いを逆にします。**(1) の形を変えない変換はどれか**。

02

ローレンツ変換 — 間隔を保つ変換

線形変換では、作用素 (1) をそのまま保つことと次の**間隔**を保つことが同値です（二つの係数行列は互いに逆の関係で変わる。拡大・縮小は方程式 (1) を保つが間隔は保たない）。

$$s^2 = -c^2t^2 + x^2 \tag{2}$$

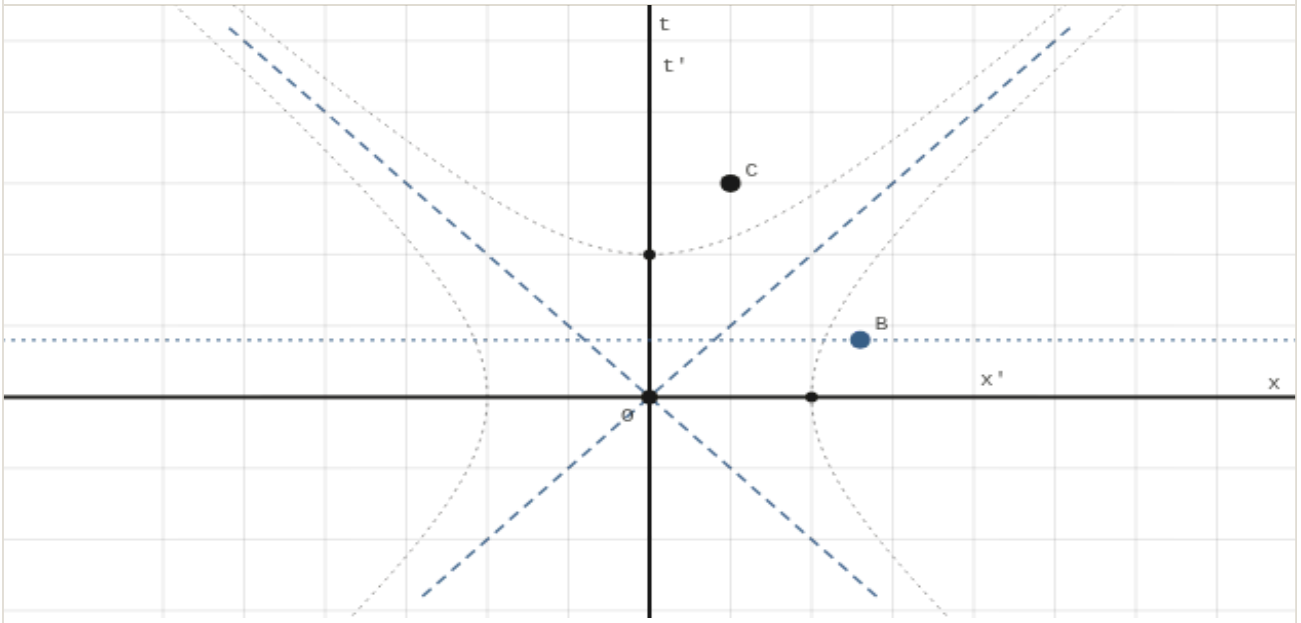
回転は $x^2 + y^2$ を保ち $\cos, \sin$ で書けました。s^2 を保つ変換は $\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi = 1$ により $\cosh, \sinh$ で書けます。

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & -\sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{3}$$

φ を**急速度**（$\tanh\varphi = v/c$）、この変換を**押し出し**と呼びます。$\gamma = \cosh\varphi = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ と置けば $t' = \gamma(t - vx/c^2),\ x' = \gamma(x - vt)$ で、$c \to \infty$ でガリレイ変換に戻ります（Einstein 1905 の §3 も、光速を V と書く点を除いて同じ形） 既知 。回転との違いは時空の記事の

§01・§04 にあります。**例**。$v = 0.5c$ で $\gamma = 1.1547$。$x = 0$ の時計の時刻 t は動く観測者には $t' = \gamma t$ で、一刻みが延びて見えます。

図 1　急速度 φ を変えると、動く観測者の軸 t′・x′（実線）が光円錐（破線）へ倒れる。双曲線 $s^2 = \pm 1$（点線）は動かない。色の点線は、動く観測者にとって B と同時の線



φ = 0.00　v/c = 0.000　γ = 1.0000　B：t' = 0.400（O より後）　C：t' = 1.500　s²：B 1.53・C −2（不変）

計算 図の数値は (3) からその場で計算。表 1 の行を押す（Tab で選んで Enter でもよい）と図がその速さになります。

計算 **表 1**　γ・急速度・運動エネルギーの比（$(\gamma-1)mc^2 \div mv^2/2$）。$\gamma = \cosh\varphi$ を検算。

v/c	γ	φ	エネルギー比
0.1	1.005038	0.1003	1.0076
0.5	1.154701	0.5493	1.2376
0.9	2.294157	1.4722	3.1955
0.999	22.366272	3.8002	42.8181

03

光円錐と同時の相対性 — 間隔の符号で三つに分かれる

二つの出来事の差の s^2 は押し出しで変わらず、その**符号**は誰が見ても同じです。

$$s^2 < 0:\ \text{時間的},\quad s^2 = 0:\ \text{光的},$$
$$s^2 > 0:\ \text{空間的}$$

時間的な二点は光より遅い信号で結べ、時間の向きを反転しない変換（04 節）なら前後は誰が見ても同じです。空間的な二点はどんな信号でも結べず、**前後が観測者によって入れ替わり**

ます。時間と空間を一つの四次元の幾何として見る見方は、Minkowski の 1908 年の講演で広く知られるようになりました。虚の時間座標 $t\sqrt{-1}$ を置いてローレンツ変換を四次元の回転と見る扱いは、Poincaré（1906）にすでにあります 既知 。

例（図 1）。$c=1$。原点 O と B $=(t,x)=(0.4,1.3)$ は $s^2=1.53>0$ で空間的です。$t'_B=\gamma(0.4-1.3v)$ は $v>0.308$（$\varphi>0.318$）で負になり、B は O の「後」から「前」へ移ります。C $=(1.5,0.5)$ は $s^2=-2$ で時間的で、$t'_C=\gamma(1.5-0.5v)>0$ のままです。

入れ替わる二点が因果で結ばれていたら矛盾します。量子場の理論ではこれが「空間的に離れた場の演算子は可換」という公理になります（Jaffe–Witten §3、4-09）。光円錐と「距離の退化」は時空の記事の §03 へ。

04

四元ベクトルとローレンツ群 — 添字で書くと不変量が見える

空間を三次元に戻し、$x^\mu=(ct,x,y,z)$ と書きます。上下に同じ添字が出たら和を取ります。

$$\eta=\mathrm{diag}(-1,1,1,1),\quad s^2=\eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu\Delta x^\nu \\ \Lambda^{\mathsf{T}}\eta\Lambda=\eta \tag{4}$$

添字を下げるには η を掛けます（$x_\mu=(-ct,x,y,z)$）。$\partial_\mu=\partial/\partial x^\mu$、$\Box=\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu=-\partial_t^2/c^2+\nabla^2$。符号 $(-,+,+,+)$ は時空の記事と同じで、逆の約束の教科書もあります。

ローレンツ変換は (4) の右の式を満たす 4×4 実行列 Λ で、群 $\mathrm{O}(1,3)$ をなします（1-02）。$\mathrm{O}(1,3)$ は $\det\Lambda=\pm1$ と時間の向き（左上の成分が ≥1 か ≤-1 か。(4) からその二乗は 1 以上）で四つの部分に分かれます。単位行列を含む部分 $\mathrm{SO}^+(1,3)$（$\det\Lambda=1$・時間の向きを保つ）は回転 3 個と押し出し 3 方向で生成され、並進 4 個を加えた群が **Poincaré 群**です 既知 。問題文の量子場は、この群の表現を持つヒルベルト空間の上に置かれます（Jaffe–Witten §3）。

例。$\mathrm{SO}(4)$ はコンパクトですが、$\mathrm{SO}^+(1,3)$ は φ がいくらでも大きく取れるのでコンパクトではありません。問題文の「コンパクトな単純ゲージ群」は内部の対称性（1-04）の話で、時空のローレンツ群はもともと非コンパクトです。

05

固有時と四元運動量 — 質量は観測者によらない長さ

粒子が持ち歩く時計の時間を**固有時** τ と呼びます。s^2 の不変性から $c^2d\tau^2=c^2dt^2-|dx|^2$、つまり $d\tau=dt/\gamma$ です。τ は誰にとっても同じなので、**四元運動量** $p^\mu=m\,dx^\mu/d\tau$ は x^μ と同じ

く Λ で変わります。

$$
\begin{aligned}
p^\mu &= \left(\frac{E}{c}, p\right) = (\gamma mc,\ \gamma m v) \\
\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu &= -m^2 c^2
\end{aligned}
\tag{5}
$$

右の式は $E^2 = |p|^2 c^2 + m^2 c^4$。$E$ と p は観測者ごとに違っても、**質量は四元運動量の不変な長さ**です。**例**。$E = \gamma mc^2 = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}mv^4/c^2 + \cdots$ で、表 1 の右端の列がこの補正です。

なぜ「質量」ギャップと呼ぶか

2-02 の分散関係 $\omega^2 = c^2 k^2 + \Omega^2$ は、$E = \hbar\omega,\ p = \hbar k$（2-05）と読むと (5) そのもので、$\Omega = mc^2/\hbar$ です。問題文は質量ギャップを「ハミルトニアン H のスペクトル（取りうるエネルギーの値の集合。2-05・1-10 で定義）が $(0, \Delta)$ に無いこと」と定義します（Jaffe–Witten §4）。ローレンツ不変性・正のエネルギー（$H \geq 0$ がどの観測者でも成り立つ）・真空が一つ、の三つがそろうと（Jaffe–Witten §3）、これは「真空以外の状態のエネルギーと運動量の組 (E, p) は $E \geq \sqrt{|p|^2 c^2 + \Delta^2}$ を満たす」ことと同じです。外れる組があると、空間的（$E < |p|c$）なら押し出しでエネルギーが負になって正のエネルギーに反し、時間的なら静止系で、光的なら押し出しでいくらでも小さくなって、$(0, \Delta)$ に入るからです。組 $(0, 0)$ を持つのが真空だけであることに、真空が一つという前提を使います 既知 。Δ は最も軽い状態の mc^2 と読めます（4-11）。

06

自由粒子の作用 — まっすぐな道が固有時を最大にする

作用（2-01）が誰にとっても同じなら、運動方程式も同じ形です。世界線の最も簡単な不変量は固有時なので、

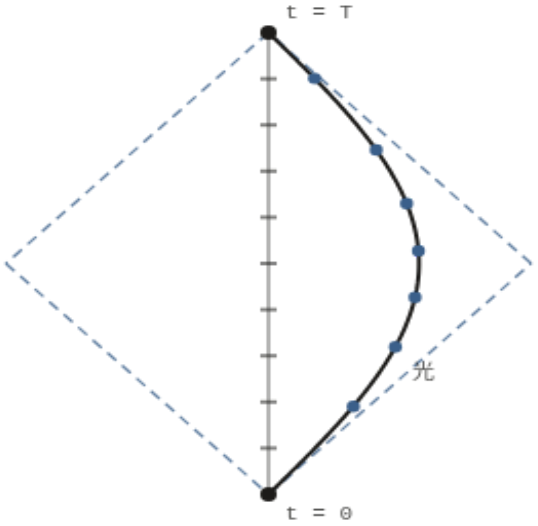
$$
\begin{aligned}
S &= -mc^2 \int d\tau \\
&= -mc^2 \int \sqrt{1 - |v|^2/c^2}\, dt
\end{aligned}
\tag{6}
$$

係数は、遅いときの展開 $L = -mc^2 + \frac{1}{2}m|v|^2 + \cdots$ がニュートンに合うように選びました。運動方程式は $\frac{d}{dt}(\gamma m v) = 0$ で世界線は直線、時間の並進の Noether 保存量（2-01）は $E = \gamma mc^2$ です。符号から**作用の最小と固有時の最大は同じこと**で、端点を固定した時間的な世界線のうち固有時を最大にするのは直線です。両端が同じ場所にある観測者の系（両端は時間的なので、そういう系がある。そこでの時刻の差を T）で見ると $d\tau = \sqrt{1 - |v|^2/c^2}\, dt \leq dt$ で、等号は $v \equiv 0$ のときだけ。だから $\tau \leq T$ で、最大は直線だけです（τ はどの系でも同

じ)。これを**逆向きの三角不等式**と呼びます 既知 。停留点は最小とは限りませんが（2-01)、ここでは本当に最小で、双子のパラドックスはこの言い換えです。

例。$T=1$、$x(t)=(u/\pi)\sin\pi t$（最高速 u）の固有時は、$\mathcal{E}(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta$（第二種完全楕円積分）で $\tau=\frac{2}{\pi}\mathcal{E}(u)$。$u\to 1$ で $2/\pi\approx 0.637$ です。

図 2　最高速 u を変えると、端点を固定した世界線が曲がり、固有時（色の点：0.1 T ごと）が減る。動かすと、同じ座標時刻での二人の時計が出る



u = 0.90　曲げた道の固有時 0.7459 T（まっすぐな道は 1 T）

計算 図の数値は $d\tau=dt/\gamma$ の台形則（400 分割）でその場で計算。

計算 **表 2**　端点を固定した世界線の τ/T。曲線は数値積分と $\frac{2}{\pi}\mathcal{E}(u)$ が 2×10^{-16} まで一致。折れ線は速さ u で行って戻る道（双子)。

u/c	曲線	近似 1 − u²/4	折れ線 √(1 − u²)
0.3	0.977105	0.977500	0.953939
0.6	0.902780	0.910000	0.800000
0.9	0.745926	0.797500	0.435890
0.99	0.654748	0.754975	0.141067

07

ローレンツ不変な場の作用 — スカラー場・電磁場・ヤン–ミルズ場

場の作用は $S=\frac{1}{c}\int\mathcal{L}\,d^4x$。$|\det\Lambda|=1$ で d^4x は変わらないので、ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ がスカラーなら作用は不変です。**局所的**（その点の場と一階微分だけ）という条件も課すと、項の形は強く絞られます。

スカラー場では $\partial_\mu\phi$ を η で縮めます。

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi - \tfrac{1}{2}\mu^2\phi^2$$
$$(\Box - \mu^2)\phi = 0, \quad \mu = \frac{mc}{\hbar} \tag{7}$$

右が Klein–Gordon 方程式です。**例**。一次元で全体に張力 σ を掛けると 2-02 の質量項つきの弦になり、$c^2 = \sigma/\rho$、$\Omega = c\mu$ と対応します。

電磁場。2-03 のポテンシャル ϕ, A（この ϕ は (7) の場とは別）を $A_\mu = (-\phi/c, A)$ とまとめ、$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ と置きます。成分は $F_{0i} = -E_i/c$、$F_{ij} = \varepsilon_{ijk}B_k$（$\varepsilon_{ijk}$ は $\varepsilon_{123} = 1$ で、添字を入れ替えると符号を変える記号）で、電場と磁場を一つの反対称行列にまとめたものです。ゲージ変換 $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\chi$（2-03 のゲージ変換の式）で変わりません。$F^{0i} = -F_{0i}$、$F^{ij} = F_{ij}$ なので $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2|E|^2/c^2 + 2|B|^2$ で、

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\left(|E|^2/c^2 - |B|^2\right) \tag{8}$$

SI では全体に $1/\mu_0$ が掛かり、2-03 の (L) の ρ, J の無い部分になります。運動方程式 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ が真空の Maxwell 方程式の半分で、残り半分は F を A から作った時点で成り立ちます。

ヤン–ミルズ場。$A_\mu = A_\mu^a T^a$ をリー環に値を取る場にし（1-03・1-04）、構造定数 f^{abc} の項を F に足します（3-02）。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2}\sum_a F^a_{\mu\nu}F^{a\,\mu\nu}$$
$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + f^{abc}A^b_\mu A^c_\nu \tag{9}$$

行列で書けば $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]$（$T^a$ はエルミートで $[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$＝1-03 の規約。g は A に吸収）。最後の項が Maxwell との唯一の違いで、場が自分自身の源になります。それでも古典の方程式は「光の速さで進む質量の無い波」を記述します（Jaffe–Witten §1）既知。

ゲージ不変性（3-02）も課し、群が単純なら（不変な二次形式が定数倍を除いて一つ。1-03）、F の二次式でローレンツ不変なものは $\sum_a F^a_{\mu\nu}F^{a\,\mu\nu}$ と $\sum_a \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^a_{\mu\nu}F^a_{\rho\sigma}$（$\varepsilon^{0123} = 1$ の四次元版の記号）の一次結合だけです既知。二つ目は電磁場なら $E\cdot B$ に比例し、空間反転で符号を変え、全微分なので運動方程式を変えません（3-05 の θ 項）。条件が無いと、任意の対称行列 c_{ab} で作る $\sum c_{ab}F^a_{\mu\nu}F^{b\,\mu\nu}$ も不変です。

> 08

次元の勘定 — ħ = c = 1 と、結合定数の次元

$c=1$ で長さと時間が、$\hbar=1$ でエネルギーと時間の逆数がそろい、残る単位は一つです。質量の次元を 1 とすると長さは -1。換算は $\hbar c = 197.3269804\ldots$ MeV fm（$1\,\mathrm{fm}=10^{-15}\,\mathrm{m}$）だけです。ギャップ Δ には長さ $\hbar c/\Delta$ が対応し、相関の届く距離の目安です。ギャップがあると、真空での期待値 $\langle O\rangle$ が 0 の局所的な量 O なら、同じ時刻で十分離れた二点での相関 $|\langle O(x)O(y)\rangle|$ は、$C<\Delta/(\hbar c)$ を満たす任意の C で $\exp(-C|x-y|)$ 以下です（Jaffe–Witten §5。$\hbar=c=1$ なら $C<\Delta$）。期待値が 0 でないと、相関は $\langle O\rangle^2$ に近づきます。

計算 **表 3**　質量を長さに直す（$\hbar c$ は SI の定義値 h, c, e から計算）。

もの	mc² (MeV)	ħ/(mc) (fm)
電子	0.51099895069	386.159267
陽子	938.27208943	0.210309

作用は無次元（$\hbar$ で測る）なので、d 次元の時空で $[\mathcal{L}]=d$、$[\partial]=1$。$(\partial\phi)^2$ と $\lambda\phi^4$ の次元が d であることから、また (9) の F が ∂A と AA の和で $[A]=1$、$[F^2]=4$ であることから、

$$[\phi]=\frac{d-2}{2},\quad [\lambda]=[g^2]=4-d \tag{10}$$

計算 **表 4**　質量の次元（$\hbar=c=1$、分数で計算）。

d	[φ]	[λ]	[g²]	読み
2	0	2	2	結合が質量^{2}の次元
3	1/2	1	1	結合が質量の次元
4	1	0	0	結合は無次元
5	3/2	-1	-1	結合が長さの次元

四次元では、作用 (9) に次元を持つ定数が一つも無い。係数から質量も長さも組み立てられず、古典のヤン–ミルズ理論に尺度はありません 既知 。量子論で $\Delta>0$ があるなら尺度は古典の作用の外から来るはずで、物理では繰り込みの過程で入ると考え次元転移と呼びます（4-07） 物理 。解説も、四次元のゲージ理論で質量ギャップが古典的に見えない（'the mass gap is not classically visible'）ことを、古典的でない変数の取り替えが要りうる理由に挙げます（Jaffe–Witten §6.6）。二・三次元では g^2 自体が尺度です（4-04・7-06）。ϕ^4 は 7-08、四次元の別の特別さは 四次元の記事へ。表 4 の d を連続に動かし、四で切り替わる他の量と並べた図は 1-12 §10 の次元のつまみです。

```
09
```

虚時間への橋 — 符号を一つ戻すと、質量は減衰の速さになる

(2) に $t = -i\tau$（τ は実）を代入すると $-c^2t^2 = c^2\tau^2$ で、間隔はユークリッドの距離の二乗 $c^2\tau^2 + |x|^2$ になります。符号の違いを形式的に戻す **Wick 回転**（名は Wick 1954 にちなむとされる）で、時空の記事 §02 の ict と同じ操作です（場の作用と相関での形は 4-02 §02 が正本）。$\partial_t^2 = -\partial_\tau^2$ なので $\Box$ は四次元のラプラシアンに、(7) は $(-\partial_\tau^2/c^2 - \nabla^2 + \mu^2)\phi = 0$ になり、振動が減衰に変わります。空間の依存を落とし $c = 1$ と置いた一次元版が (11) です。$\delta(\tau)$ は $\tau = 0$ に集中し $\int f(\tau)\delta(\tau)\,d\tau = f(0)$ となるもの（正確には関数でなく超関数。1-11）。

$$\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \mu^2\right) G = \delta(\tau)$$
$$G(\tau) = \frac{e^{-\mu|\tau|}}{2\mu} \tag{11}$$

例。$\tau \neq 0$ では $G'' = \mu^2 G$、$\tau = 0$ で傾き G' が -1 跳ぶので G'' は $-\delta$ を含み、$-G'' + \mu^2 G = \delta$ です。三次元なら $e^{-\mu r}/(4\pi r)$ 既知 。**ユークリッドの側では、質量は減衰の速さ（長さの逆数）として現れます**。4-11 で質量ギャップと相関長を結ぶ出発点です。ユークリッドの理論を確率測度として書き（4-02）、Minkowski の側を再構成する条件（Osterwalder–Schrader）は 4-10 の主題です。この章は代入を見せただけです。

この章が言えている範囲

内容	状態
ローレンツ変換・間隔の三分類・四元運動量・自由粒子の作用と固有時の最大・三種の場の作用の形	言えている 既知 （表 1・2 で数値も確認 計算 ）
ローレンツ不変性・正のエネルギー・真空が一つ、のもとで、ギャップの定義が $E \geq \sqrt{|p|^2c^2 + \Delta^2}$ と同じになること	言えている 既知 （05 節。公理の枠組みは 4-09・4-11）
四次元の純ヤン–ミルズの古典作用に次元を持つ定数が無いこと	言えている 既知 （表 4 計算 ）
ギャップの尺度が繰り込みから来ること（次元転移）	物理の水準 物理 （4-07）
Wick 回転の正当化・曲がった時空・スピン	扱っていない
ヤン–ミルズの質量ギャップ	この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
01 節の係数・表 1〜4・図 1〜2	計算	表は python3（NumPy・SciPy）。図はブラウザの JavaScript（(3) と台形則）。JavaScript が無効のときの静止画は同じ式から python3 で作った SVG
二つの前提とローレンツ変換	既知	A. Einstein, “Zur Elektrodynamik bewegter Körper”, Ann. Phys. 17 (1905) 891–921。序と §3 を確認（光速の記号は V）
時空の幾何としての見方	既知	H. Minkowski, “Raum und Zeit”, Phys. Z. 10 (1909) 104–111（1908 年 9 月 21 日ケルンでの講演）。冒頭を確認
虚の時間座標・ローレンツ変換を四次元の回転と見ること	既知	H. Poincaré, “Sur la dynamique de l’électron”, Rend. Circ. Mat. Palermo 21 (1906) 129–176。書誌のみ（Wikisource の翻刻で該当の一節だけ確認）
ギャップの定義・Poincaré 群・正のエネルギーと真空の一意性・局所性・クラスター性・古典の波	既知	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills theory”（Clay 数学研究所の問題解説）。§1・§3〜§5・§6.6 を確認
Wick 回転の名	既知	G. C. Wick, Phys. Rev. 96 (1954) 1124–1134。書誌のみ（帰属は未確認）
$\hbar c$・電子と陽子の質量	既知	CODATA 2022（NIST で確認）。$\hbar c$ は SI の定義値からの計算と一致
固有時の最大・$\mathrm{O}(1,3)$ の四つの部分・F の二つの不変量（ゲージ不変・単純群のもと）・電磁場の成分・次元の勘定	既知	標準的な事実（本文の式で確かめられる）

次に読む章：2-05 量子力学の骨。虚時間の続きは 4-02、時空そのものは 符号が一つ違う。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 2 部 物理の準備 量子力学とスペクトル

量子力学の骨 — 状態はベクトル、エネルギーはスペクトル、ギャップはいちばん下の隙間

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 状態は単位ベクトル、観測量は自己共役作用素で、エネルギーの値はスペクトルであること。
ギャップ $E_1 - E_0$ が「励起の値段」「振動の速さ」「虚時間での減衰の速さ」の三通りに読めること。
閉じる隙間と残る隙間、摂動論に映らない隙間、Poincaré 定数との一致。

前提となる章 — 1-10（ヒルベルト空間・スペクトル・変分原理・Poincaré 不等式）。行列の場合は 1-01。

先に言うこと — 扱うのは有限個の自由度の量子力学だけです。場の量子論の質量ギャップは 4-11 で扱い、この章はヤン–ミルズの質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. 状態と観測量 — 状態はベクトル、測る量は作用素
2. 時間発展 — 準位の隙間が往復の速さを決める
3. スペクトル — 固有値でない値も入る（寄り道：谷が無限に続く井戸）
4. 基底状態 — 試し関数は上界しか出さない（表 1）
5. ギャップの三つの読み方 — 値段・振動・減衰（図 1・表 2）
6. 閉じるギャップ、残るギャップ — 箱を広げて比べる（表 3）
7. 二重井戸 — 摂動論に映らない隙間（図 2・表 4）
8. ギャップと Poincaré 不等式 — 隙間は重みの付いた定数の逆数

01

状態と観測量 — ベクトルと自己共役作用素

量子力学では、状態は**複素ヒルベルト空間** $\mathcal{H}$ の長さ 1 のベクトル ψ です（1-10）。和 $\alpha\psi+\beta\phi$ を長さ 1 に直したものも状態で（**重ね合わせ**）、$|z|=1$ の z を掛けた $z\psi$ は同じ状態です（2-03 の位相）。内積は左について共役線形とします。

$$\mathcal{H}=\mathbb{C}^2:\ |\alpha|^2+|\beta|^2=1;\qquad \mathcal{H}=L^2(\mathbb{R}):\ \int_{\mathbb{R}}|\psi(x)|^2\,dx=1 \tag{1}$$

左は二択の系（スピンや「左の谷か右の谷か」）、右は直線上の粒子で、$|\psi(x)|^2$ を位置の確率密度と読みます（Born 1926 にさかのぼるとされます）。測れる量には**自己共役作用素** A が対応し（有限次元ではエルミート行列、1-01）、測定の値は固有値 a_k のどれか、その確率は正規直交な固有ベクトル e_k を使って $|\langle e_k,\psi\rangle|^2$ です。

$$\langle A\rangle_\psi=\sum_k a_k\,|\langle e_k,\psi\rangle|^2=\langle\psi,A\psi\rangle \tag{2}$$

例。$\psi=(1,1)/\sqrt{2}$ で $\sigma_z=\mathrm{diag}(1,-1)$ を測ると ±1 が半々です。$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ なら $\sigma_x\psi=\psi$ で、ψ は固有値 $+1$ の固有ベクトルなので、測ると確実に $+1$ です（σ_x,σ_z は Pauli 行列、1-04）。$L^2(\mathbb{R})$ では位置 X は x を掛ける作用素、運動量は $P=-i\hbar\,d/dx$ で、$XP-PX=i\hbar$ から不確定性 $\Delta X\,\Delta P\ge\hbar/2$ が出ます 既知 。

02

時間発展 — 定常状態と二準位の往復

エネルギーの作用素を**ハミルトニアン** H と呼びます。直線上の粒子なら $H\psi=-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''+V\psi$ です。状態は Schrödinger 方程式に従います。

$$i\hbar\frac{d\psi}{dt}=H\psi,\qquad \psi(t)=e^{-itH/\hbar}\psi(0)=\sum_n c_n\,e^{-iE_nt/\hbar}\,\phi_n \tag{3}$$

右端は固有ベクトル $H\phi_n=E_n\phi_n$ による展開で、各成分は位相が回るだけです。$e^{-itH/\hbar}$ はユニタリで確率の合計を保ちます（1-01。逆向きは Stone の定理 既知 ）。固有ベクトル一つの状態は分布が変わらない**定常状態**で、変化は位相の差 $(E_n-E_m)t/\hbar$ だけから生じます。

例（二準位）。左の谷 e_L、右の谷 e_R、すり抜けの振幅 $g>0$ の系です。

$$H=\begin{pmatrix}\varepsilon&-g\\-g&\varepsilon\end{pmatrix},\qquad E_\mp=\varepsilon\mp g,\qquad P_R(t)=\sin^2\frac{gt}{\hbar} \tag{4}$$

e_L から出発すると、右にいる確率 P_R は角振動数 $2g/\hbar = (E_+ - E_-)/\hbar$ で往復します。**準位の隙間が往復の速さを決めます**（1-01 の図 2 の $x = 0$）。07 節で g が指数関数的に小さい例を見ます。

03

スペクトル — 固有値だけでは足りない

無限次元では固有ベクトルの無い値も現れるので、**スペクトル** $\sigma(H)$（$H - \lambda$ が有界な逆を持たない λ の集合、1-10）を使います。自己共役なら、$\lambda \in \sigma(H)$ は「$\|\psi_k\| = 1$、$\|(H - \lambda)\psi_k\| \to 0$ の列がある」と同じです（Weyl の判定法）既知 。

$$\text{箱 } [0,L]:\ E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}\ (n \geq 1); \qquad \text{直線}:\ \sigma\Big(\frac{P^2}{2m}\Big) = [0,\infty) \tag{5}$$

壁で $\psi = 0$ とした箱のスペクトルは固有値だけです（**離散スペクトル**）。直線では平面波 $e^{ipx/\hbar}$ は $\int |\psi|^2 = \infty$ で状態になりません。**例**。幅 ℓ の波束 $\ell^{-1/2}\chi(x/\ell)e^{ipx/\hbar}$（$\chi$ は滑らかな山）では $\|(H - p^2/2m)\psi\|$ が $1/\ell$ 程度で 0 に近づき、どの $E \geq 0$ もスペクトルに入り、固有値ではありません（**連続スペクトル**）。箱を広げると左の間隔が詰まり、右に近づきます（06 節）。

寄り道：谷が無限に続く井戸

飛ばしてよい小節です。

平面上の $V = \frac{1}{2}x^2y^2$（$\hbar = m = 1$）には座標軸に沿って $V = 0$ の谷が無限に続き、古典の粒子はいくらでも遠くへ逃げられます。量子では谷の奥ほど幅が狭く、y の方向の振動子の最低エネルギー $|x|/2$（2-06）が壁になります。正確には、谷の奥だけで効く見積りです。計算 正方形 $[-R,R]^2$ で解くと、最低固有値は $R = 3, 5, 9$ で $0.5671,\ 0.55413,\ 0.55411$ と止まり、自由粒子の値 $\pi^2/4R^2$ は 0 へ向かいます。一様な $\mathrm{SU}(2)$ の場 $A_1 = x\sigma_1,\ A_2 = y\sigma_2$ では、ヤン–ミルズの位置エネルギー $-\operatorname{tr}[A_1, A_2]^2$ が x^2y^2 に比例します（3-02 §07）。この端末の数値が示すのは、箱を広げても最低固有値が止まる傾向までです。問題の解説（Jaffe–Witten §6.6）は、平らな方向があっても束縛状態が生じる例として Simon（1983、題は「古典的には連続スペクトルなのに離散スペクトルを持つ量子作用素」）を引きます 既知 。

04

基底状態 — 上からの評価は易しい

$E_0 = \inf \sigma(H)$ を**基底状態のエネルギー**、それが固有値ならその固有ベクトル ϕ_0 を**基底状態**と呼びます。変分原理（1-10）では次の通りです。

$$E_0 = \inf_{\psi \neq 0} \frac{\langle \psi, H\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} \tag{6}$$

どの試し関数も**上界**を与えますが、下界にはすべての ψ を押さえる必要があります（この非対称は本の全体に出てくるので 1-10 §06 の囲みにまとめてあります）。注意を三つ。(i) 下端は固有値とは限りません（直線上の自由粒子）。(ii) 底まで落ちません。$V = \tfrac{1}{2}m\omega^2 x^2$ なら $\langle X^2\rangle\langle P^2\rangle \geq \hbar^2/4$ と相加相乗平均から $\langle H\rangle \geq \hbar\omega/2$ です（2-06）。(iii) 一次元で V が遠方で増えるなら、基底状態は縮退せず正に取れ、n 番目の固有関数は n 個の零点を持ちます（Sturm の振動定理）既知 。

例。$\hbar = m = 1$、$H = -\tfrac{1}{2}d^2/dx^2 + x^4$ にガウス関数 $e^{-x^2/4s^2}$ を入れると $\langle H\rangle_s = 1/8s^2 + 3s^4$ で、その最小値 $\tfrac{3}{16}48^{1/3} = 0.68142$ が $E_0 = 0.667986$ の上界です。奇の試し関数 $xe^{-x^2/4s^2}$ は偶の基底状態に直交するので、E_1 の上界を与えます。

計算 **表 1**　ガウスの試し関数の最良の上界と、三点差分の固有値。

V	E_0 の上界	E_0	E_1 の上界	E_1	上界の差	$E_1 - E_0$
x^4	0.681420	0.667986	2.423739	2.393644	1.742319	1.725658

上界どうしの差は、ギャップの上界でも下界でもありません（試し関数次第でどちらにもずれます）。下から押さえるには、基底状態に直交するすべての状態の評価が要ります。場の量子論で質量ギャップを示すことも、定義から、真空に直交する状態のエネルギーを下から押さえることです（4-11）。

05

ギャップの三つの読み方 — 値段・振動・減衰

基底状態が縮退せず E_0 がスペクトルの孤立点のとき、$\Delta = \inf(\sigma(H)\setminus\{E_0\}) - E_0 > 0$ を**ギャップ**と呼びます。問題の解説は、真空のエネルギーを 0 として「H のスペクトルが $(0, \Delta)$ に無い」ことを質量ギャップと定めています（Jaffe–Witten §4）既知 。読み方は三つです。(i) **値段**：正確には、ϕ_0 に直交する状態では $\langle H\rangle \geq E_0 + \Delta$。(ii) **振動**：$\phi_0$ と ϕ_1 の重ね合わせは角振動数 $\Delta/\hbar$ で揺れる（(4)）。(iii) **減衰**：(3) に形式的に $t = -i\tau$ を入れると（2-04）、振動が減衰に変わる。

$$e^{-\tau(H-E_0)/\hbar}\psi = c_0\phi_0 + \sum_{n\geq 1} c_n\, e^{-(E_n-E_0)\tau/\hbar}\phi_n \tag{7}$$

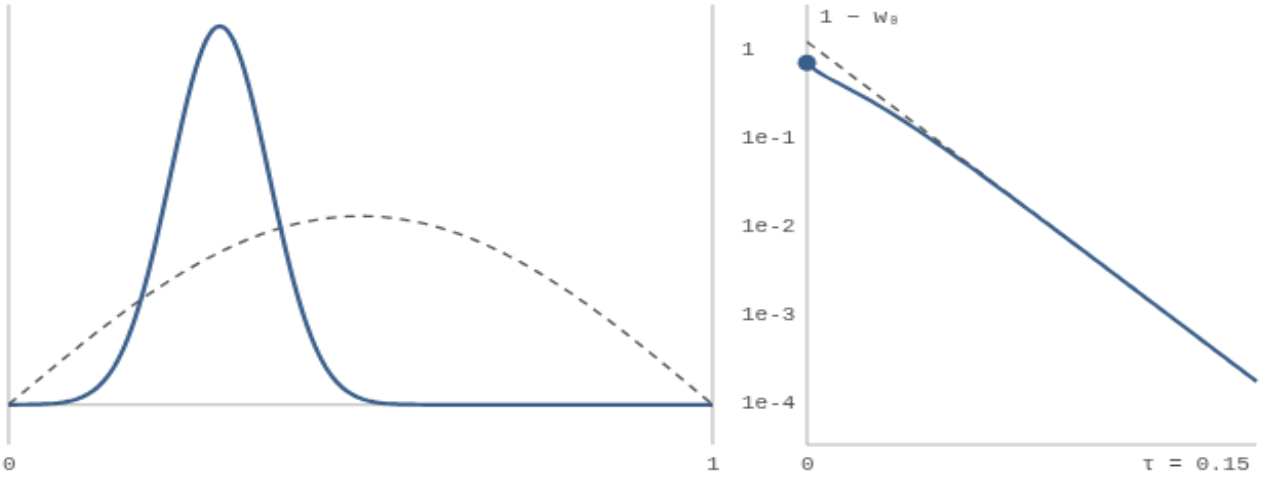
$c_0 \neq 0$ なら基底状態に近づき、残りは $e^{-\Delta\tau/\hbar}$ 倍以下になります。(7) の左辺を $\psi(\tau)$ と書き、基底状態の**重み**を $w_0(\tau) = |\langle\phi_0, \psi(\tau)\rangle|^2/\|\psi(\tau)\|^2$ とします。$1 - w_0$ は基底状態以外にある確率

で、図 1 と表 2 はこれを追います。自己共役な A（$\langle \phi_0, A\phi_0 \rangle = 0$）の**虚時間の相関**では次の形です。

$$0 \le \langle A\phi_0,\, e^{-\tau(H-E_0)/\hbar} A\phi_0 \rangle \le e^{-\Delta\tau/\hbar}\, \|A\phi_0\|^2 \tag{8}$$

(8) から、虚時間の方向で相関が消えるまでの目安は $\hbar/\Delta$ 以下です。これは時間の次元の量で、相対論では c を掛けて長さ $\hbar c/\Delta$ にします。空間の方向の減衰（クラスター性）と相関長（2-08）は 4-11、経路の和での見方は 2-07 で扱います。

図 1　虚時間 τ を進めると、x = 0.3 中心の山（色）が基底状態 ϕ_0（破線）に近づく。右は $1 - w_0$（常用対数の目盛）で、次の準位だけ残した予想（破線。自然対数で傾き −2Δ、ħ = 1）に揃う



τ = 0.000　w₀ = 0.30949　1 − w₀ = 6.91e-1　予想 1.20e+0

計算 図の数値はこの端末で計算しました（箱 $[0,1]$、$H = -d^2/dx^2$（$\hbar = 1$、$\hbar^2/2m = 1$）、$\Delta = 3\pi^2$。係数は python3 で求め、(7) の部分和をその場で計算）。

計算 **表 2**　基底状態以外の重み $1 - w_0$ と、次の準位だけ残した予想 $(c_1/c_0)^2 e^{-2\Delta\tau}$。

τ	1 − w₀	予想
0	6.905e-1	1.195e+0
0.05	5.831e-2	6.189e-2
0.10	3.194e-3	3.204e-3
0.15	1.659e-4	1.659e-4

重みは振幅の二乗なので指数は 2Δ です。中央について対称な状態なら $c_1 = 0$ で、減り方は $E_2 - E_0 = 8\pi^2$ で決まります。**ギャップが保証するのは、どの状態にも効く最も遅い減り方**です。

```
06
```

閉じるギャップ、残るギャップ — 箱を広げる

質量ギャップは無限に広い空間で問われます。有限の箱で正でも、広げると閉じることがあります。問題の解説も、体積によらない**一様な**ギャップが無限体積極限の証明で役を果たしうること、その証明には新しい着想が要ることを述べます（Jaffe–Witten §5・§6.5）既知 。$\hbar = m = 1$、箱 $[-L/2, L/2]$ で三つの V を比べます。

計算 **表 3**　箱の長さ L と隙間 $E_1 - E_0$（三点差分。$V = 0$ は厳密値 $3\pi^2/2L^2$ と一致）。

L	V = 0	V = −sech²x	V = x²/2
10	0.14804	0.57518	1.00000
40	0.00925	0.50342	1.00000
160	0.00058	0.50020	1.00000

自由粒子の隙間は $1/L^2$ で閉じます。$-\operatorname{sech}^2 x$ には束縛状態 $\operatorname{sech} x/\sqrt{2}$（$E_0 = -1/2$、代入で確かめられます）がちょうど一つあり、次の準位が連続スペクトルの下端 0 へ下がるので、隙間は $1/2$ に向かいます 既知 。**ギャップの上は連続スペクトルでもかまいません**。質量ギャップを持つ場の理論でも、真空の上は粒子の連続スペクトルで、Δ から始まります（2-04）。

例。独立な振動子 N 個では、基底エネルギー $N\hbar\omega/2$ は N とともに増え、$N \to \infty$ で発散します。それでもギャップは $\hbar\omega$ のままです（2-06）。場の量子論では真空のエネルギーを 0 とし、差を問います。Jaffe–Witten §4 は、真空のベクトル Ω が Poincaré 群（2-04）の下で不変であることから $H\Omega = 0$ と述べています。

07

二重井戸 — 摂動論に映らない隙間

同じ井戸を二つ並べ、間の山を高くしていきます（$\hbar = m = 1$）。

$$V_a(x) = \frac{(x^2 - a^2)^2}{8a^2}, \qquad V_a''(\pm a) = 1, \qquad S_0 = \int_{-a}^{a} \sqrt{2V_a}\, dx = \frac{2a^2}{3} \tag{9}$$

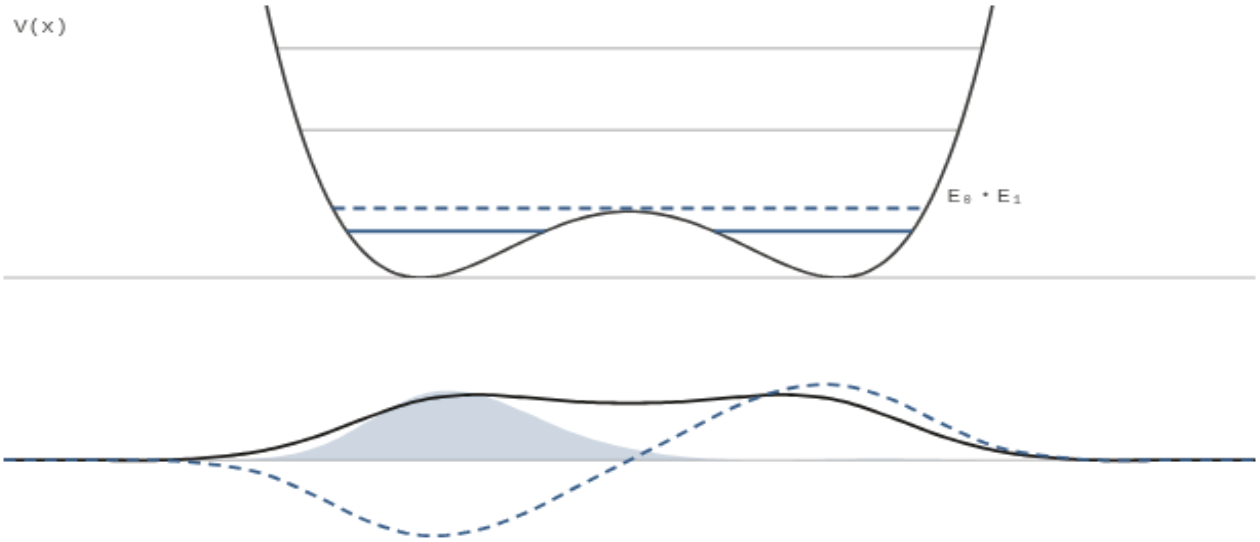
谷一つなら最低準位は約 $1/2$ で、谷の数だけ二重に重なります。谷の間のすり抜けが (4) の g の役をして、準位は偶の ϕ_0 と奇の ϕ_1 に分かれ、山が高いときの幅は次の通りです 既知 。

$$E_1 - E_0 \approx \frac{4a}{\sqrt{\pi}}\, e^{-2a^2/3} = 2\sqrt{\frac{6S_0}{\pi}}\, e^{-S_0} \tag{10}$$

Zinn-Justin–Jentschura（2004）の式 (2.8) $\frac{2}{\sqrt{\pi g}} e^{-1/6g}$ で $g = 1/4a^2$ としたものです（同論文の位置エネルギーを a ずらすと (9)。山の高さは $a^2/8 = 1/32g$）。谷の一つのまわりで V_a を振

動子の項と、g が小さいとき小さい残りの項に分け、準位を g のべきで展開して各次数の係数を順に求めるのが**摂動論**です（4-03）。その摂動級数はパリティ（$x \to -x$ での偶奇）によらず、二つの準位で同じです（同論文 (2.13)–(2.14) の説明）既知。隙間の $e^{-1/6g}$ は、g のべき級数に展開すると係数がすべて 0 です。**摂動論をどれだけ高い次数まで計算しても、この隙間は現れません**。S_0 は虚時間で $-V_a$ の山頂から山頂へ転がる古典解（インスタントン）の作用です。ヤン–ミルズでの対応物は 3-05、e^{-1/g^2} の形の量は 4-07・4-12 で出ます。

図 2　a を大きくすると谷（±a）が離れて山が高くなり、準位 E_0（色の実線）と E_1（色の破線）が寄って重なる。下段は ϕ_0（実線）・ϕ_1（破線）と、左の谷から出た状態の確率密度（塗り）。「動かす」で右の谷へ移る（時間は縮めて表示）



a = 2　S₀ = 2.667　E₀ = 0.35024　E₁ = 0.52319　Δ = 0.1729（(10) では 0.3136）　π/Δ = 18.17　t = 0.000　で右にいる確率 0.041

計算 図の数値はこの端末で計算しました（準位と波動関数は python3 の三点差分。塗りは $\frac{1}{2}(\phi_0^2+\phi_1^2-2\phi_0\phi_1\cos\Delta t)$）。

計算 **表 4**　(9) の隙間（三点差分）と (10) の比較。右端は、同じ論文が予想として述べる展開 (2.13) の係数（式 (2.19a)）による補正の倍率 $1-\frac{71}{12}g-\frac{6299}{288}g^2$ です 物理。

a	Δ（数値）	式 (10)	比	補正の倍率
2	1.729e-1	3.136e-1	0.551	0.545
3	1.355e-2	1.678e-2	0.807	0.819
4	1.895e-4	2.104e-4	0.901	0.902
5	6.118e-7	6.519e-7	0.9384	0.9386

比は 1 に、また補正の倍率に近づきます（$a=5$ で差 2×10^{-4}）。$a=5$ の隙間は準位の間隔（約 1）より 6 桁小さく、右へ移る時間 π/Δ は約 5×10^6 です。

```
08
```

ギャップと Poincaré 不等式 — 基底状態で重みを付ける

一次元で $\phi_0 > 0$ のとき（04 節）、実数値の f で $\psi = f\phi_0$ と書いて部分積分すると、$H\phi_0 = E_0\phi_0$ により $V - E_0$ の項が消えます。

$$\langle \psi, (H - E_0)\psi \rangle = \frac{\hbar^2}{2m} \int |f'|^2 \, d\mu, \qquad d\mu = \phi_0^2 \, dx \tag{11}$$

$\psi \perp \phi_0$ は $\int f \, d\mu = 0$ のことで、そのとき $\|\psi\|^2 = \mathrm{Var}_\mu(f)$ です。変分原理を ϕ_0 に直交する ψ に使うと、最良の定数で次が成り立ちます。

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \le C_P \int |f'|^2 \, d\mu, \qquad C_P = \frac{\hbar^2}{2m\Delta} \tag{12}$$

ギャップは基底状態の分布 μ の Poincaré 定数に反比例します 既知 （Poincaré 不等式は 1-10 §07、重みの付いた形は §08）。ここでの μ は一つの時刻での基底状態の分布です。$\psi = f\phi_0$ と対応させると $H - E_0$ は $\frac{\hbar^2}{2m}L$（L はこの μ に対する 1-10 §08 の作用素）にあたり、L の隙間は $2m\Delta/\hbar^2$ です。1-10 §09 の $C_P \approx \xi^2$ は、虚時間の経路全体の測度（1-08 (10)）についての言明で、別の量です。**例**。振動子（$\hbar = m = \omega = 1$）では $\phi_0 = \pi^{-1/4} e^{-x^2/2}$（代入で確かめられます）なので μ は分散 $1/2$ の正規分布で、ギャップ 1（表 3 の右列、2-06）から $C_P = 1/2$ です。「正規分布の Poincaré 定数は分散に等しい」は、振動子のギャップ $\hbar\omega$ と同じ内容です（$f = x$ で等号）。二重井戸の $a = 3$ では $C_P = 1/2\Delta = 36.9$ です。f を「左で -1、右で $+1$」に近く取ると、分散は約 1 なのに、傾きは μ のほとんど無い山の間でしか効きません。**分布のくびれがギャップを小さくします**。同じ形は一リンク積分（5-11・このサイトの論文）でも使います。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない（どこで扱うか）
既知 状態・スペクトル・変分原理の枠組み、表 1〜3 の準位と隙間、虚時間での減り方（数値は表 1〜3・図 1 計算 ）	Stone の定理・Weyl の判定法・Sturm の振動定理は引用で、証明していない
計算 $\frac{1}{2}x^2y^2$ の最低固有値が、箱を $R = 3, 5, 9$ と広げても止まる傾向	止まることの証明（離散スペクトルは Simon（1983）の主題。本文は読んでいない）
既知 二重井戸の隙間の主要項 (10) と、それが摂動級数のどの次数にも現れないこと（比が 1 へ近づく傾向は表 4 計算 ）	(10) の導出。補正の係数を含む展開 (2.13) は同論文の予想 物理 （インスタントンは 3-05、発散級数は 4-12）

言えている	言えていない（どこで扱うか）
既知 ギャップが基底状態の分布の Poincaré 定数に反比例すること（一次元・$\phi_0 > 0$）	変数が無限個のときの (11) の正当化。経路の測度の $C_P \approx \xi^2$ との関係（1-10・23-01）
—	無限個の自由度と相対論の要請のもとでの質量ギャップ（4-11）。この章はヤン–ミルズの質量ギャップについて何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1〜4・寄り道の数値・図 1〜2	計算	python3（NumPy・SciPy の三点差分・疎行列・数値積分）。図はブラウザの JavaScript
質量ギャップの定義・$H\Omega = 0$・一様なギャップ・平らな方向の注	既知	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”（Clay 数学研究所の公式問題文。問題の発表は 2000 年）。所収：J. Carlson, A. Jaffe, A. Wiles (eds.), *The Millennium Prize Problems*, CMI／AMS, pp. 129–152（書の刊行年は未確認）。§4・§5・§6.5・§6.6 を確認
二重井戸の隙間の主要項 (10)・摂動級数がパリティによらないこと	既知	J. Zinn-Justin, U. D. Jentschura, Ann. Phys. 313 (2004) 197–267, arXiv:quant-ph/0501136。§2.1 の式 (2.1)〜(2.8) と (2.13)–(2.14) の説明を確認
表 4 の補正の倍率	物理	同論文が予想として述べる展開 (2.13) の係数 (2.19a)（同論文は証明なしで引用）。この端末では数値で傾向を確認 計算
Schrödinger 方程式	既知	E. Schrödinger, “Quantisierung als Eigenwertproblem”, Ann. Phys. 384 (1926) 361–376（第 1 報。時間によらない固有値問題）、同題の第 4 報 Ann. Phys. 386 (1926) 109–139。時間を含む形 (3) は第 4 報にあるとされる（未確認）。いずれも書誌のみ
確率の解釈／Stone の定理／平らな方向と離散スペクトル	既知	M. Born, Z. Phys. 37 (1926) 863–867（帰属は二次資料による）／M. H. Stone, Ann. of Math. 33 (1932) 643–648／B. Simon, “Some quantum operators with discrete spectrum but classically continuous spectrum”, Ann. Phys. 146 (1983) 209–220（Jaffe–Witten の文献 [43]。x^2y^2 を扱う箇所は未確認）。いずれも書誌のみ
変分原理・Poincaré 不等式（重みの付いた形）・正規分布の Poincaré 定数	既知	1-10 §06・§07・§08
Weyl の判定法・Sturm の振動定理・不確定性・(11)	既知	標準的な事実（1-10 には無い。書誌は付けていない）

次に読む章：2-06 調和振動子と生成消滅。虚時間の続きは 2-07、ギャップの定義の本体は 4-11。

調和振動子と生成消滅 — 準位は等間隔に並び、場の量子は粒子として数えられる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 準位 $\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ が生成・消滅の代数だけで決まること。
隙間が振動と相関の減衰の速さを決め、二つの谷では摂動論に映らないこと。
場を量子化すると粒子が現れ、質量 m の自由な場の隙間は m であること。

前提となる章 — 2-05（状態・スペクトル・ギャップ・二重井戸）、2-02（基準振動・質量項）、2-04（08 節で使う $E^2=p^2+m^2$、04 節で使う虚時間）、1-03（交換子）。1-04 の梯子は比較のためだけに出ます。

先に言うこと — 一粒子の量子力学と相互作用の無い場だけを扱います。08 節の隙間 m は手で入れた値で、ヤン–ミルズの質量ギャップ（4-11）とは別物です。この章は質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. なぜ振動子か — 平衡点の近くは二次式
2. 生成と消滅 — 代数で準位が決まる
3. 基底状態と零点エネルギー — ガウス関数（図 1）
4. 時間発展 — 隙間は振動の速さ、虚時間では相関の減る速さ（図 2）
5. 振動子を歪める — 隙間は動く（表 1）
6. 寄り道：二つの谷 — 摂動級数の側から見る（図 3・表 2）
7. たくさんの振動子と Fock 空間 — 占有数で数える
8. 場を量子化する — 粒子が現れ、隙間は m（図 4・表 3）
9. 零点の和と、無限個の注意 — 差だけが測れる

01

なぜ振動子か — 平衡点の近くは二次式

場の量子論は調和振動子の集まりとして始まります。平衡点 x_0 の近くでは、どんな位置エネルギーも $V(x_0)+\frac{1}{2}V''(x_0)(x-x_0)^2$ と近似でき、弦も独立な単振動の集まりでした（2-02）。位置 x と運動量 $p=-i\hbar\,d/dx$ は $L^2(\mathbb{R})$ 上の自己共役な作用素で、$[x,p]=i\hbar$ です（2-05）。

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}x^2 \tag{1}$$

長さを $\ell=\sqrt{\hbar/m\omega}$、エネルギーを $\hbar\omega$ で測り、$\xi=x/\ell$、$\eta=p\ell/\hbar$ と置くと $H=\frac{\hbar\omega}{2}(\xi^2+\eta^2)$、$[\xi,\eta]=i$。**例。** 計算 $1\,\mathrm{g}$・$1\,\mathrm{Hz}$ のばねでは $\ell\approx 1.3\times10^{-16}\,\mathrm{m}$、$\hbar\omega\approx 6.6\times10^{-34}\,\mathrm{J}$ で、室温の $k_BT\approx 4.1\times10^{-21}\,\mathrm{J}$ より 13 桁小さい値です。

02

生成と消滅 — 代数で準位が決まる

(1) の固有値は、微分方程式を解かずに代数だけで求まります（$a^\dagger$ は a の随伴）。

$$a=\frac{\xi+i\eta}{\sqrt{2}},\qquad a^\dagger=\frac{\xi-i\eta}{\sqrt{2}} \tag{2}$$

$[a,a^\dagger]=1$、$a^\dagger a=\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2-1)$ なので

$$H=\hbar\omega\Big(N+\frac{1}{2}\Big),\qquad N=a^\dagger a \tag{3}$$

$[N,a]=-a$、$[N,a^\dagger]=a^\dagger$ から、$N\psi=\nu\psi$ なら $N(a\psi)=(\nu-1)a\psi$、$N(a^\dagger\psi)=(\nu+1)a^\dagger\psi$：$a$ は 1 下げ、$a^\dagger$ は 1 上げます。$\|a\psi\|^2=\langle\psi,N\psi\rangle=\nu\|\psi\|^2\ge 0$ なので、ν が整数でなければ下り続けて矛盾し、整数なら $\nu=0$ の $a\psi_0=0$ で止まります。上りは $\|a^\dagger\psi\|^2=(\nu+1)\|\psi\|^2>0$ で止まりません。

$$E_n=\hbar\omega\Big(n+\frac{1}{2}\Big),\qquad n=0,1,2,\dots \tag{4}$$

既知 準位は**等間隔**で、隙間は $\hbar\omega$。規格化すると $a^\dagger\psi_n=\sqrt{n+1}\,\psi_{n+1}$、$a\psi_n=\sqrt{n}\,\psi_{n-1}$。1-04 の梯子と同じ議論ですが、1-04 の梯子は両端で止まる有限次元でした。$[a,a^\dagger]=1$ を満たす有限次の行列は無く（トレースが 0 と次元で合わない）、**この代数は無限次元でしか実現しません。**

03

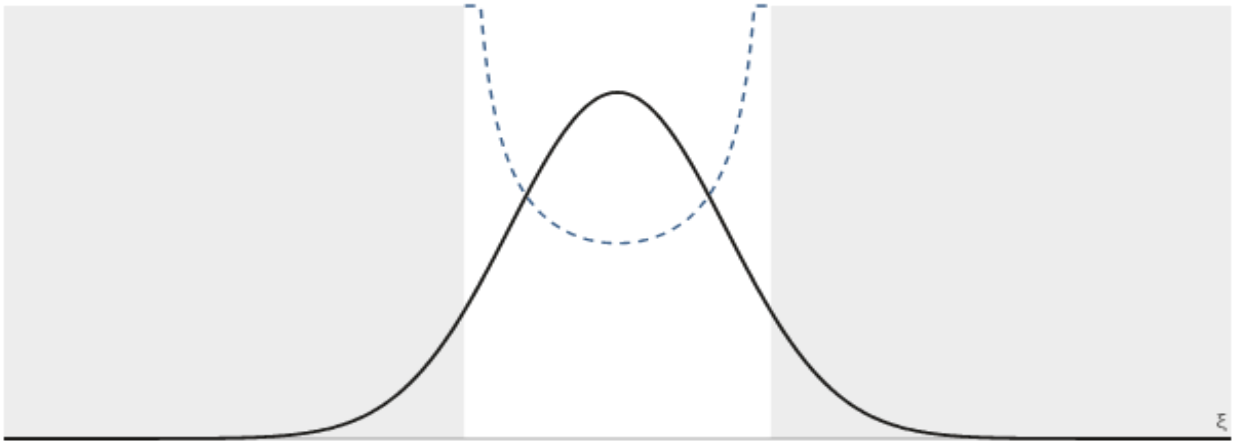
基底状態と零点エネルギー — ガウス関数

$a\psi_0 = 0$ は座標では一階の方程式 $(\xi + \frac{d}{d\xi})\psi_0 = 0$ で、解は定数倍を除いて一つです（縮退が無い）。

$$\psi_0(\xi) = \pi^{-1/4} e^{-\xi^2/2}, \quad \psi_n = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\,\psi_0 \tag{5}$$

基底状態は**ガウス関数**で、$\langle x^2\rangle = \hbar/2m\omega$、$\Delta x\,\Delta p = \hbar/2$ は不確定性関係の下限ちょうどです。$E_0 = \hbar\omega/2$ を**零点エネルギー**と呼び、0 にできないのは位置と運動量を同時に 0 へ寄せられないからです。正確には $\langle H\rangle \geq \omega\sqrt{\langle p^2\rangle\langle x^2\rangle} \geq \omega\,\Delta x\,\Delta p \geq \hbar\omega/2$。$\psi_n$ は Hermite 多項式と $e^{-\xi^2/2}$ の積です。

図 1　n を変えると、確率密度 $|\psi_n|^2$（実線）と、同じエネルギーの古典の粒子の滞在の割合（破線）が変わる。灰色は古典では入れない領域



n = 0　E = 0.5 ħω　⟨ξ²⟩ = 0.5　入れない所の確率 = 0.1573

計算 曲線は漸化式 $\psi_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\,\xi\psi_n - \sqrt{\frac{n}{n+1}}\,\psi_{n-1}$（(2) と梯子の関係から出る）と古典の密度 $1/(\pi\sqrt{2n+1-\xi^2})$ でその場で計算。

計算 数値積分で求めた、入れない領域にいる確率は $n = 0, 1, 2, 5, 10, 30$ で $0.1573,\ 0.1116,\ 0.0951,\ 0.0740,\ 0.0602,\ 0.0425$（$n=0$ は $\mathrm{erfc}(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_1^\infty e^{-t^2}\,dt$）。$n$ が大きいと、揺れを均した $|\psi_n|^2$ は古典の密度に近づきます。

04

時間発展 — 隙間は振動の速さ

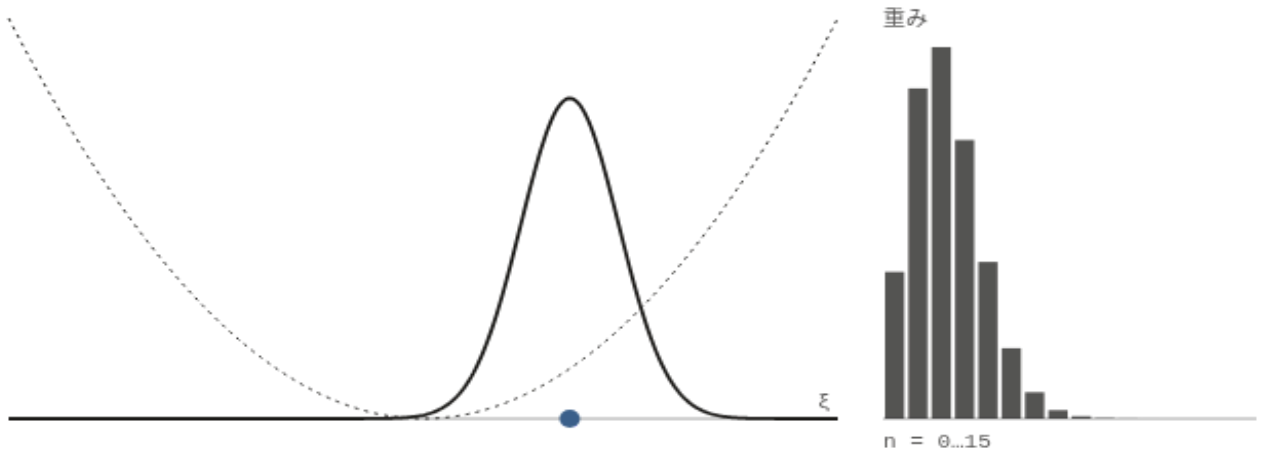
固有状態は位相が回るだけで、密度は動きません。$\psi = c_0\psi_0 + c_1\psi_1$ では、$\Delta = E_1 - E_0$ として（偶奇から対角の項は 0）

$$\langle x\rangle(t) = 2\,\mathrm{Re}\big(\overline{c_0}c_1 e^{-i\Delta t/\hbar}\big)\langle\psi_0, x\psi_1\rangle \tag{6}$$

隙間は、観測できる量が振動する速さで、振動子では古典の ω です。**コヒーレント状態** $\psi_\alpha = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\psi_n$（$a\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha$）の重みは平均 $|\alpha|^2$ のポアソン分布で、α が実数なら密度は形を保って古典の軌道を往復します。

$$|\psi_\alpha(\xi,t)|^2 = \pi^{-1/2} e^{-(\xi - \sqrt{2}\alpha\cos\omega t)^2} \tag{7}$$

図 2　α を変えて「動かす」と、コヒーレント状態の密度（実線）が古典の粒子（点）と同じ周期で往復する。点線は位置エネルギー、右の棒は準位 n の重み



α = 1.5　量子数の平均 = 2.25　E = 2.75 ħω

計算 式 (7) とポアソン分布からその場で計算。

虚時間では、隙間は相関の減る速さ

2-05 の (8) を振動子の $A = x$ で計算します。(2) から $x = \ell\,(a + a^\dagger)/\sqrt{2}$ なので $x\psi_0 = \frac{\ell}{\sqrt{2}}\psi_1$ で、ほかの成分はありません。

$$G(\tau) = \big\langle x\psi_0,\; e^{-\tau(H-E_0)/\hbar}\,x\psi_0\big\rangle = \frac{\ell^2}{2}\,e^{-\omega\tau} = \frac{\hbar}{2m\omega}\,e^{-\omega\tau} \tag{8}$$

減る速さは隙間 $(E_1 - E_0)/\hbar = \omega$ で、2-05 の (8) は振動子では等号です。一般の V では $G(\tau) = \sum_{n\ge 1} |\langle\psi_n, x\psi_0\rangle|^2 e^{-(E_n-E_0)\tau/\hbar}$ となり、$\tau\to\infty$ で $n=1$ の項が残ります（$\langle\psi_1, x\psi_0\rangle \neq 0$ のとき）。**虚時間の相関は隙間の速さで減ります**。格子でグルーボールの質量を測るのも（5-08）、質量ギャップを相関の減衰で言い換えるのも（4-11）この形です（$t = -i\tau$ の意味は 2-04、経路積分は 2-07）。

```
05
```

振動子を歪める — 隙間は動く

四次の項を足します（$\hbar = m = \omega = 1$）。

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \lambda x^4 \tag{9}$$

$x^4 = \frac{1}{4}(a + a^\dagger)^4$ は n を最大 4 動かすので、梯子はもう閉じません。一次の摂動（期待値で置き換える）では $E_n \approx n + \frac{1}{2} + \frac{3\lambda}{4}(2n^2 + 2n + 1)$、隙間は $1 + 3\lambda$ です。

計算 **表 1**　式 (9) の準位を差分法で求めた値（刻みを半分にした変化は 3×10^{-6} 以内）。

λ	隙間 $E_1 - E_0$	一次の見積もり $1+3\lambda$	$E_2 - E_1$
0	1.0000	1	1.0000
0.01	1.0284	1.03	1.0552
0.1	1.2104	1.3	1.3691
1	1.9341	4	2.4414
10	3.8166	31	5.0254

見積もりは $\lambda = 0.01$ で合い、$\lambda = 1$ で外れます。**間隔は上ほど広がり**、隙間は正のままです。既知 一次元で V が連続で、$|x| \to \infty$ で $V \to \infty$ なら、スペクトルは固有値だけからなり（離散スペクトル、1-10）、どの固有値も縮退しません。縮退しない理由は短く言えます。同じ E の固有関数 ψ, χ のロンスキアン $W = \psi\chi' - \psi'\chi$ は方程式から $W' = 0$ で定数で、遠方で 0 なので恒等的に 0、つまり ψ と χ は比例します。離散的であることの証明は出典表の教科書にあります（基底状態は 2-05 の 04 節）。

06

寄り道：二つの谷 — 摂動級数の側から見る

飛ばしてよい節です。

2-05 の二重井戸を、振動子の摂動級数の側から見直します（$\hbar = m = 1$）。

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2\left(1 - \sqrt{g}\,x\right)^2 = \frac{x^2}{2} - \sqrt{g}\,x^3 + \frac{g}{2}x^4 \tag{10}$$

2-05 の (9) で $g = 1/4a^2$ と置き、a だけずらしたもの（$V(x) = V_a(x - a)$。谷は 0 と $1/\sqrt{g}$）で、Zinn-Justin–Jentschura（2004）の式 (2.4) の形です。左の谷の底は 01 節の振動子で、残りの $-\sqrt{g}\,x^3 + \frac{g}{2}x^4$ を 05 節と同じく摂動として g の冪に展開します。鏡映 $x \mapsto 1/\sqrt{g} - x$ で右の谷から始めても同じ計算になり、最低の二準位はどちらも次の級数を漸近展開に持ちます 既知 （同論文の式 (2.6)）。

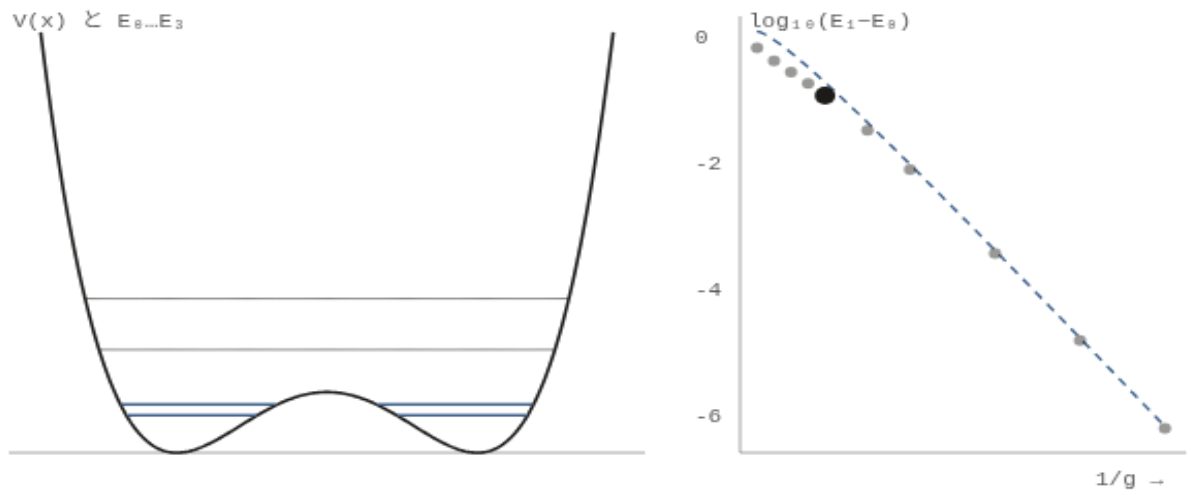
$$E \sim \frac{1}{2} - g - \frac{9}{2}g^2 - \frac{89}{2}g^3 - \frac{5013}{8}g^4 - \cdots$$

係数は階乗的に増え、**どの次数でも隙間は 0** です。隙間は級数の外にあり、2-05 の (10) を g で書いた次の式です（同論文の式 (2.8)）。

$$E_1 - E_0 \approx \frac{2}{\sqrt{\pi g}}\, e^{-1/(6g)} \tag{11}$$

肩の $\frac{1}{6g}$ は 2-05 の $S_0 = 2a^2/3$ で、山の下をくぐって谷から谷へ行く道の作用、と言われます。正確には、虚時間で $-V$ の山頂から山頂へ転がる古典解（インスタントン、3-05）の作用です。

図 3　1/g を変えると、二つの谷（左）と最低四準位が変わる。右は隙間 $E_1 - E_0$ の常用対数（点：数値、破線：式 (11)）。谷が離れると隙間は指数関数的に縮む



1/g = 20　山の高さ = 0.625　E₀ = 0.38510　E₁ = 0.49649　隙間 = 1.114e-1（式 (11)：1.800e-1）

計算 準位はこの端末で求めた値、破線は式 (11)。

計算 部分和は二準位の**平均**へ寄るだけで、二つを分けません。五項までの部分和は、$1/g = 40$ で 0.5, 0.475, 0.472188, 0.471492, 0.471247 と平均 0.471054（$E_0 = 0.467282$、$E_1 = 0.474826$）へ、$1/g = 100$ で 0.5, 0.49, 0.48955, 0.4895055, 0.4894992 と平均 0.4894978（$E_0 = 0.4894975$、$E_1 = 0.4894981$）へ寄ります。

計算 **表 2**　山の低い側での隙間と式 (11) の比。右端は同論文の次の補正 $(1 - \frac{71}{12}g)$（式 (2.19a) の係数）を掛けた式との比。$1/g = 16$〜100 は 2-05 の表 4。

1/g	山の高さ	隙間 E₁−E₀	比	補正込みの比
20	0.625	1.114e−1	0.619	0.879
30	0.938	3.153e−2	0.757	0.943
40	1.250	7.544e−3	0.831	0.975

物理 ヤン–ミルズの隙間も尺度 Λ に比例するとされ、Λ は結合定数に e^{-c/g^2}（$c > 0$。g は尺度 μ での結合定数で、前に g の冪が付く）の形で依るので摂動論に映りません（4-07・4-12）。

07

たくさんの振動子と Fock 空間 — 占有数で数える

独立な振動子が K 個あれば $[a_k, a_l^\dagger] = \delta_{kl}$、$[a_k, a_l] = 0$ で

$$H = \sum_{k=1}^{K} \hbar\omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right) \tag{12}$$

固有状態は**占有数**の組 $(n_1, \dots, n_K)$ で番号づけられ、n_k は「モード k の量子の数」です。全部 0 が**真空** $|0\rangle$、$a_k^\dagger|0\rangle$ が一量子の状態です。$a_k^\dagger a_l^\dagger|0\rangle = a_l^\dagger a_k^\dagger|0\rangle$ なので量子に番号札は付かず、「どのモードに何個」だけが意味を持ちます。2-02 の鎖を量子化するとこの形です。

振動子の数に依らない形が **Fock 空間**です。一量子の空間を $\mathfrak{h}$（ここでは $\mathbb{C}^K$、場では関数の空間）とします。$\mathfrak{h} = \mathbb{C}^K$ なら、$\mathrm{Sym}^r\mathfrak{h}$ は上の占有数の組のうち和が r になるもの $(n_1, \dots, n_K)$ を正規直交基底とする空間、と読んでよいです（正確には r 個のテンソル積の対称化です）。モードが無限個なら、0 でない n_k が有限個で和が r の組を基底にとります。

$$\mathcal{F}(\mathfrak{h}) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \mathrm{Sym}^r\mathfrak{h}, \quad \mathrm{Sym}^0\mathfrak{h} = \mathbb{C}\,|0\rangle \tag{13}$$

直和はノルムの二乗の和が有限な列の全体で、量子の総数 $\hat{N} = \sum_k a_k^\dagger a_k$ は $\mathrm{Sym}^r\mathfrak{h}$ で値 r です。**例**。K 個のモードに r 個を配る仕方は $\binom{r+K-1}{r}$ 通りで、$\dim \mathrm{Sym}^2\mathbb{C}^3 = 6$ です。既知 生成・消滅で光を扱う方法は Dirac（1927）に、この空間は Fock（1932）にさかのぼるとされます。

08

場を量子化する — 粒子が現れ、隙間は m

長さ L の輪（周期境界）の上で、質量項 m のある場（2-02 §06）を量子化します（$\hbar = c = 1$）。モード e^{ikx}（$k = 2\pi n/L$、$\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$。2-02 の分散関係 $\omega^2 = c^2k^2 + \Omega^2$ で $c = 1$、$\Omega = m$ としたもの）ごとに振動子を置くと

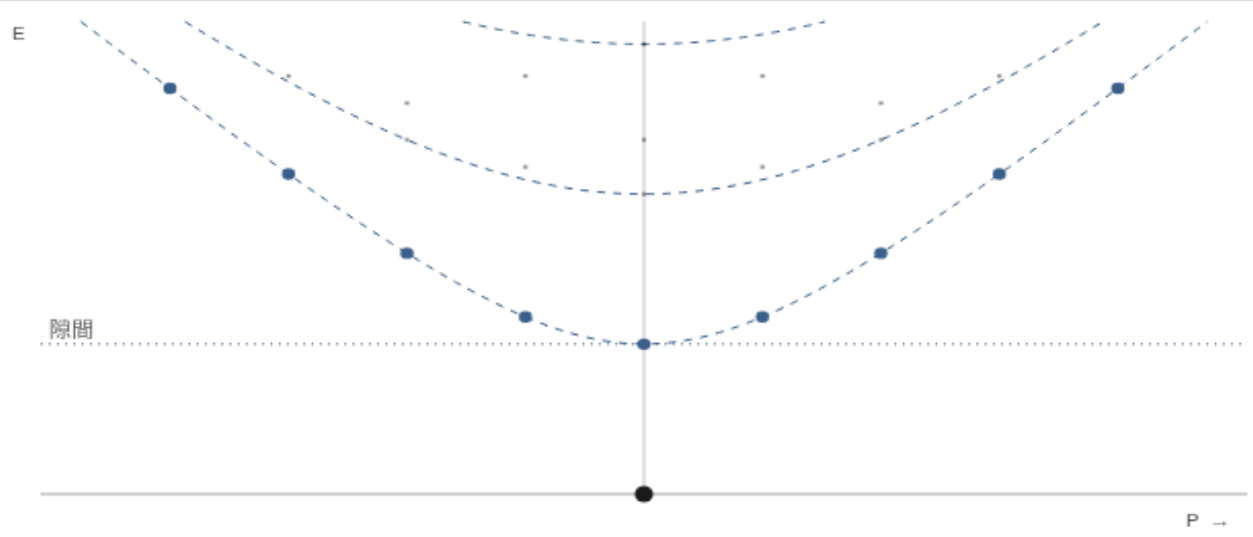
$$\phi(x) = \sum_k \frac{a_k e^{ikx} + a_k^\dagger e^{-ikx}}{\sqrt{2L\omega_k}} \tag{14}$$

$$H = \sum_k \omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right) \tag{15}$$

全運動量は $P = \sum_k k\, a_k^\dagger a_k$ です。モード k の量子一つはエネルギー $\sqrt{k^2+m^2}$ と運動量 k を持ち、質量 m の粒子の関係 $E^2 = p^2 + m^2$（2-04）そのものです。**粒子とは場の基準振動の量子**です。(P, E) 平面では（図 4）一粒子は双曲線 $E = \sqrt{P^2 + m^2}$ に乗り、二粒子以上は $E \geq$

$\sqrt{P^2+4m^2}$ の側を埋めます。真空の次は $k=0$ の一粒子で、**箱を広げても隙間は m**。既知 無限体積では k が実数全体を動き、一粒子のエネルギー $\sqrt{k^2+m^2}$ が $[m,\infty)$ を覆い、多粒子は $[2m,\infty)$ に入るので、ハミルトニアンのスペクトルは $\{0\}\cup[m,\infty)$ です。$m=0$ では隙間 $2\pi/L$ が 0 へ縮みます（振動子でない $k=0$ は除く）。

図 4　L と m を変えると、箱の中の自由な場の全状態（E ≤ 3）の運動量 P（横）とエネルギー E（縦）が変わる。大きい点は一粒子。破線は $E=\sqrt{P^2+(jm)^2}$（j = 1, 2, 3。m = 0 では $E=|P|$）、点線が隙間。状態が 1 万を超えると二粒子以上の点は省く



L = 10.0, m = 1　E ≤ 3 の状態の数 = 23　隙間 = 1.0000

計算 点は占有数の組をその場で数え上げたもの（表 3 と同じ手順）。

計算 **表 3**　周期 L の箱の自由な場で、$E\le 3$ の状態の数と隙間。

L	m = 1：隙間	状態の数	m = 0：隙間	状態の数
5	1.0000	10	1.2566	8
10	1.0000	23	0.6283	38
20	1.0000	69	0.3142	734
40	1.0000	219	0.1571	55535

自由な場の隙間と、問題文の隙間

ここでの m は手で入れた値です。ヤン–ミルズの作用には質量項が無く（3-02）、自己相互作用でモードは独立でなくなります。物理 それでも隙間が生じると考えられ、それを数学として示すことが問題の中身です（0-03・4-11）。§03 の不確定性関係が隙間の起源だという言い方は、16-08 §09 で正します。定理が与えるのは長さをエネルギーに換える段だけで、長さの側がこの問題です。

09

零点の和と、無限個の注意 — 差だけが測れる

(15) の真空のエネルギー $\sum_k \omega_k/2$ は発散します。$|k| \le \Lambda$ で打ち切り、$\Lambda \gg m$ とすると

$$\sum_{|k|\le\Lambda} \frac{\omega_k}{2} \approx \frac{L}{2\pi}\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{\omega_k}{2}\,dk \approx \frac{L\Lambda^2}{4\pi} \tag{16}$$

体積に比例し Λ^2 で増えます。測れるのは差なので、定数を捨てて $H = \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k$ とします（**正規順序**）。隙間は差なので変わりません。物理 箱を変えたときの真空のエネルギーの**差**は有限に残ることがあり、Lüscher 項はその例とされます（17-03）。

$[a_k, a_l^\dagger] = \delta_{kl}$ を満たす作用素をヒルベルト空間の上に用意することを、交換関係の**表現**と呼びます。既知 振動子が有限個なら、交換関係を指数の形（Weyl の関係。一つの振動子なら $e^{isx}e^{itp} = e^{-i\hbar st}e^{itp}e^{isx}$）で書いたときのユニタリで既約な表現（不変な閉部分空間が自明なものだけ）は、ユニタリ同値（ユニタリ写像で移り合うこと）を除いて一つです（Stone–von Neumann）。無限個では、Fock 表現とユニタリ同値でない表現がつくれます。たとえば全モードに量子を一つずつ置いた状態は占有数の和が無限大で Fock 空間に入らず、それを真空とする別の表現が考えられます。相互作用のある場の扱いは Haag の定理とともに 4-09 で扱います。

この章が言えている範囲

内容	状態
01〜04 節：振動子の準位・状態・相関の減衰	言えている 既知
05 節：歪めた振動子の準位と隙間	数値として言えている 計算 。離散で縮退しないことは 既知
06 節：二準位に共通な摂動級数と式 (11)	文献の式 既知 。部分和と隙間を数値と照合 計算 。導出はしていない
07〜08 節：Fock 空間、スペクトル $\{0\} \cup [m, \infty)$	言えている 既知 （表 3 計算 ）
無限個の振動子の表現	紹介のみ（4-09）
ヤン–ミルズの質量ギャップ	この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1〜3・図 1〜4・本文の数値	計算	python3・NumPy・SciPy（差分法の固有値、数値積分、数え上げ）。図はブラウザの JavaScript
生成・消滅で放射を扱う方法	既知	P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. Lond. A 114 (1927) 243–265, doi:10.1098/rspa.1927.0039。書誌のみ
Fock 空間	既知	V. Fock, Z. Phys. 75 (1932) 622–647, doi:10.1007/BF01344458。書誌のみ
二つの谷：式 (10)(11)・級数・補正 71/12	既知	J. Zinn-Justin, U. D. Jentschura, Ann. Phys. 313 (2004) 197–267, doi:10.1016/j.aop.2004.04.004, arXiv:quant-ph/0501136（§2.1 の式 (2.4)(2.6)(2.8)(2.19a)(2.20) を確認）。同じ系の導入と数値は 2-05
一次元で $V \to \infty$ のときスペクトルが離散的であること	既知	M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators*（Academic Press）第 XIII 章。書誌のみ（刊行年と該当の節は未確認）
自由な場のスペクトル $\{0\} \cup [m, \infty)$	既知	M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*（Academic Press, 1975）の自由な相対論的場の節（§X.7 とされる。節番号は未確認）。書誌のみ
Stone–von Neumann の一意性	既知	J. von Neumann, Math. Ann. 104 (1931) 570–578, doi:10.1007/BF01457956。書誌のみ。無限個の振動子と Haag の定理は 4-09 で扱う

次に読む章：2-07 経路積分の考え方。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 2 部 物理の準備 経路積分

経路積分の考え方 — すべての道を足し、時間を虚にすると確率になる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 振幅が、刻んだ多重積分の極限「すべての道についての $e^{iS/\hbar}$ の和」として書けること。
時間を虚にすると重み $e^{-S_E/\hbar}$ が正になり、Wiener 測度という確率測度になること。
分配関数が輪の上の道の積分になり、量子力学が一次元の古典統計力学と同じ形になること。

前提となる章 — 2-05（虚時間での減衰）、1-08（確率・ガウス分布）。振動子は 2-06。

先に言うこと — 扱うのは直線上の一粒子です。実時間の経路積分は測度にならず、式の多くは刻んだ積分の極限として読みます。場の経路積分の構成には入りません（4-02・第 7 部）。この章はヤン–ミルズの質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. 道の和という考え — 振幅を足してから二乗する
2. ガウス積分 — 値は行列式で、相関は逆行列で決まる
3. 時間を刻む — 伝播関数と積の公式から刻んだ積分を作る
4. 振動する積分と古典の道 — 打ち消し合いが停留点を選ぶ（図 1）
5. 虚時間 — 振動が重みに変わり、Wiener 測度が現れる
6. 分配関数は輪の上の道 — 量子力学が一次元の古典の鎖と同じ形になる（図 2）
7. 振動子を刻んで計算する — 相関長が 1/a で伸びる（図 3）
8. 転送行列で x^4 の準位を求める — ガウスでなくても行列の積で計算できる
9. 場へ — 一点の揺らぎが $d \geq 2$ で発散する（表と図は 1-09）

01

道の和という考え — 振幅を足してから二乗する

量子力学を、粒子が通りうる**すべての道**からの寄与の和として書き直すのが経路積分です。時刻 0 に a を出た粒子が時刻 t に b で見つかる振幅（**伝播関数**）を、Feynman（1948）は次の形に書きました。

$$K(b,t;a,0)=\langle b|e^{-itH/\hbar}|a\rangle=\text{“}\sum_{\text{道 }x(\cdot)}\text{”}\,e^{iS[x]/\hbar},\qquad S[x]=\int_0^t\Big(\frac{m}{2}\dot{x}^2-V(x)\Big)ds \tag{1}$$

S は 2-01 の作用で、道は $x(0)=a$、$x(t)=b$ を満たすものすべてです。どの道も絶対値 1 の複素数を持ち寄り、違うのは位相だけで、確率は和の絶対値の二乗です 既知 。着想は Dirac（1933）にさかのぼるとされます。比喩で言えば、光が二つのスリットを両方通って干渉するように、粒子はすべての道を通って干渉します。正確には、(1) の「和」はそのままでは定義されず、03 節の刻んだ積分の極限として読みます。

02

ガウス積分 — すべての計算の土台

計算できる経路積分の多くはガウス積分に帰着します。A を正定値な対称行列とし、対角化して一変数の $\int e^{-ax^2/2+Jx}dx=\sqrt{2\pi/a}\,e^{J^2/2a}$ を固有値ごとに使うと

$$\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac12 x\cdot Ax+J\cdot x}\,d^nx=\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}}\,e^{\frac12 J\cdot A^{-1}J} \tag{2}$$

規格化すれば平均 0・共分散行列 A^{-1} のガウス分布です（1-08）。J で微分して $J=0$ と置くと

$$\langle x_ix_j\rangle=(A^{-1})_{ij},\qquad \langle x_1x_2x_3x_4\rangle=\langle x_1x_2\rangle\langle x_3x_4\rangle+\langle x_1x_3\rangle\langle x_2x_4\rangle+\langle x_1x_4\rangle\langle x_2x_3\rangle \tag{3}$$

$2k$ 個の積の期待値は、二つずつ組にする $(2k-1)!!$ 通りの和です（Isserlis 1918） 既知 。物理では、演算子の形で同じ組み合わせが Wick（1950）に現れ、Wick の定理の名で呼ばれます。この組み方を線で描いたものが Feynman ダイアグラムです（4-03）。**例**。$A=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$ では積分は $2\pi/\sqrt{3}$、$\langle x_1^2\rangle=\frac23$、$\langle x_1x_2\rangle=\frac13$、$\langle x_1^2x_2^2\rangle=\frac49+2\cdot\frac19=\frac23$ 計算 。**値は $\det A$ で、相関は A^{-1} で決まります。**

03

時間を刻む — 伝播関数と積の公式

材料は三つです。**合成**：$e^{-i(t_1+t_2)H/\hbar}=e^{-it_2H/\hbar}e^{-it_1H/\hbar}$ から、途中の場所 c のすべてについて足す式 $K(b,t_1+t_2;a,0)=\int K(b,t_1+t_2;c,t_1)K(c,t_1;a,0)\,dc$ が出ます。**短い時間の核**：自由粒子では厳密に

$$K_0(b,t;a,0)=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}\,\exp\!\Big(\frac{i}{\hbar}\,\frac{m(b-a)^2}{2t}\Big) \tag{4}$$

で、指数の中は等速の道の作用です。**積の公式**：ハミルトニアンを $H=T+V$ と分けます。$T=P^2/2m$ は運動エネルギーの演算子（$P=-i\hbar\,d/dx$ は 2-05 の運動量）、V は位置エネルギー $V(x)$ を掛ける演算子です。T と V は交換しませんが、たとえば $T+V$ が T と V の定義域の共通部分の上で自己共役なら、$e^{-it(T+V)/\hbar}=\lim_N\big(e^{-i\varepsilon T/\hbar}e^{-i\varepsilon V/\hbar}\big)^N$、$\varepsilon=t/N$ が成り立ちます 既知 。Trotter（1959）の縮小半群の積の定理の特別な場合で、この形は Reed–Simon I 第 VIII 章にあります。合わせると、$x_0=a$、$x_N=b$ として

$$K(b,t;a,0)=\lim_{N\to\infty}\Big(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\Big)^{N/2}\int dx_1\cdots dx_{N-1}\,\exp\!\Big(\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{N-1}\varepsilon\Big[\frac{m}{2}\Big(\frac{x_{j+1}-x_j}{\varepsilon}\Big)^2-V(x_j)\Big]\Big) \tag{5}$$

指数の和は折れ線の道の作用のリーマン和、つまり 2-01 の刻んだ作用です。(1) はこの極限の略記で、$\int\mathcal{D}x\,e^{iS/\hbar}$ とも書きます。

> 注意 — $\mathcal{D}x$ は測度ではない
>
> 実時間の $e^{iS/\hbar}\mathcal{D}x$ は、Wiener 測度（05 節）の分散を複素数にした形の測度としては構成できない（そうした測度は、道の空間の有界な集合の上でさえ全変動が無限大になる）と Cameron（1960）が示したとされます 既知 。全変動は、集合を細かく分けて各部分の測度の絶対値を足したものの上限で、確率測度なら 1 です。無限次元の測度一般は 1-09 で扱います。

04

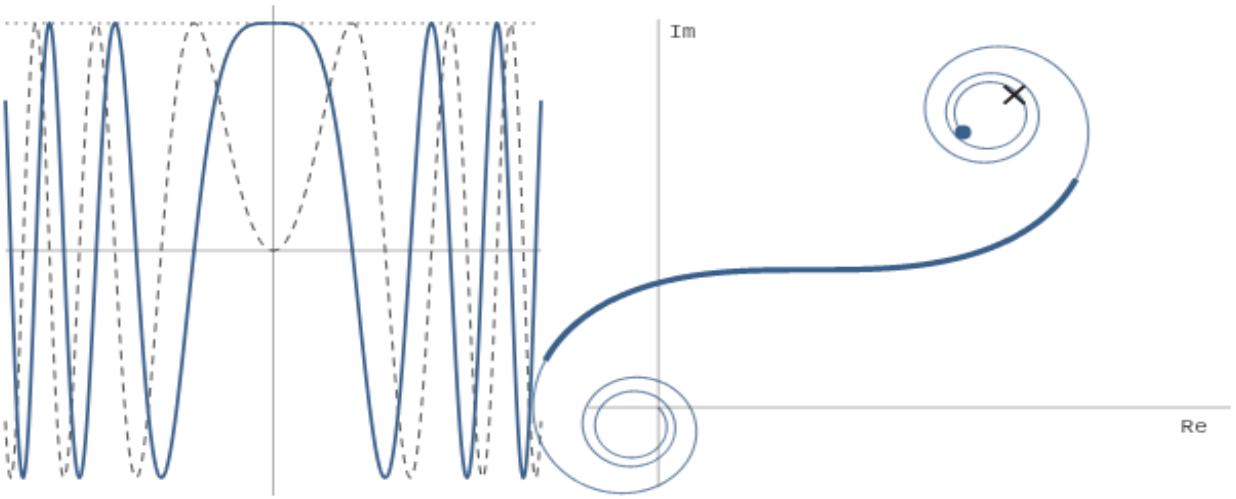
振動する積分と古典の道 — 打ち消し合いと停留点

(5) の被積分関数は絶対値 1 で振動し、絶対収束しません。手本の $\int e^{ix^2/2}dx=\sqrt{2\pi}\,e^{i\pi/4}$（Fresnel 積分）を図 1 で見ます。右は途中までの積分（上端を動かした積分）$F(x)=\int_{-6}^{x}w\,dx'$ の軌跡で、$\theta=0$ では両端が渦を巻いて打ち消し合い、正味の前進は位相の傾きが 0 の**停留点** $x=0$ の近くだけで起きます。$\hbar\to0$ では（符号は $S''(x_c)$ の符号） 既知

$$\int g(x)\, e^{iS(x)/\hbar}\, dx \approx g(x_c)\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{|S''(x_c)|}}\; e^{iS(x_c)/\hbar \pm i\pi/4}, \qquad S'(x_c)=0 \tag{6}$$

道の空間でも、寄与は $\delta S = 0$ の**古典の道**（2-01）の近くから来ます。作用が二次式なら (6) は厳密で、(4) がその形です。**例**。1 g の玉が 1 cm/s で 1 秒進むと $S/\hbar \approx 4.7 \times 10^{26}$ 計算 。ずれた道は位相が何周も回って打ち消し合います。

図 1　角度 θ を変えると、$w(x) = e^{ie^{i\theta}x^2/2}$（左。実線が実部、破線が虚部、点線が絶対値）と途中までの積分 $F(x)$ の軌跡（右）が変わる。θ = 0 が実時間、90° が虚時間（2-04 の $t=-i\tau$ を角度でつないだ $t = e^{-i\theta}\tau$。時空の記事も参照）。太線は |x| < 1.5、× は厳密値



θ = 0° F(6) = 1.517 + 1.560i 厳密値 = 1.772 + 1.772i 差 3.3e-1

計算 図の数値はこの端末で計算しました（その場の台形公式）。表 1 は python3 の複素誤差関数による値です。

計算 **表 1**　$\int_{-X}^{X} w\, dx$ と厳密値 $\sqrt{2\pi}\, e^{i(\pi/2-\theta)/2}$ の差の絶対値。

X	θ = 0	θ = 22.5°	θ = 90°
2	9.3e-1	4.1e-1	1.1e-1
8	2.5e-1	1.2e-6	< 1e-14
32	6.25e-2	< 1e-14	< 1e-14

実時間では誤差が $2/X$ でしか減らず、少しでも回すと $e^{-\sin\theta\, X^2/2}$ の速さで消えます。

05

虚時間 — 振動が重みに変わる

(5) で刻み ε を $-i\delta$（$\delta > 0$）に置き換えると、指数の中は $-\frac{\delta}{\hbar}\left[\frac{m}{2}(\Delta x/\delta)^2 + V\right]$ となり、位置エネルギーの符号が変わります。$\tau = N\delta$ として

$$\langle b|e^{-\tau H/\hbar}|a\rangle = \lim_{N\to\infty}\Big(\frac{m}{2\pi\hbar\delta}\Big)^{N/2}\int dx_1\cdots dx_{N-1}\; e^{-S_E/\hbar}, \qquad S_E=\sum_{j=0}^{N-1}\delta\Big[\frac{m}{2}\Big(\frac{x_{j+1}-x_j}{\delta}\Big)^2+V(x_j)\Big] \tag{7}$$

S_E を**ユークリッド作用**と呼びます。重みは正で、V が下に有界なら積分は絶対収束します。$V=0$ の部分は差が独立に分散 $\hbar\delta/m$ の正規分布に従うランダムウォークで、$N\to\infty$ で連続な道の上の確率測度、**Wiener 測度**（ブラウン運動の分布）になり、V は重みとして掛かります。

$$\big(e^{-\tau H/\hbar}\psi\big)(x)=\mathbb{E}_x\Big[\exp\Big(-\frac{1}{\hbar}\int_0^\tau V(X_s)\,ds\Big)\,\psi(X_\tau)\Big] \tag{8}$$

X_s は x を出て分散 $\hbar s/m$ で広がるブラウン運動です。(8) を Feynman–Kac の公式と呼びます（Kac 1949）。たとえば V が有界で連続なら定理で、下に有界なかなり一般の V でも成り立ちます 既知 。**実時間では測度が無く、虚時間では有る**。場の理論をユークリッドの側で構成する理由の一つです（場の回転は 4-02 §02・4-10）。**例**。停留点 $\delta S_E=0$ は $-V$ の中の運動で、2-05 の二重井戸の S_0 はその道（インスタントン、3-05）の作用でした。

道の荒さと測度

道そのものは確率 1 でどこでも微分できません 既知 。$\Delta x\sim\sqrt{\delta}$ なので、S_E の運動の項 $S_{\rm kin}=\sum(\Delta x)^2/2\delta$（$\hbar=m=1$）の期待値 $\langle S_{\rm kin}\rangle$ は刻みの数に比例して増えます 計算 （07 節の輪で $\beta=4$、$N=16,256,4096$ に対し 6.97・126.96・2046.96。ほぼ $N/2$）。位置エネルギーの部分 $\sum\delta\,V(x_j)$ はそれだけで $\int_0^\tau V(X_s)\,ds$ に近づきますが、運動の項の重み $e^{-S_{\rm kin}/\hbar}$ と $\mathcal{D}x$ は別々には極限を持たず、積だけが Wiener 測度として残ります（どちらも 1-09）。

06

分配関数は輪の上の道 — 統計力学との一致

熱平衡では状態 n が重み $e^{-\beta E_n}$ で現れ（$\beta=1/(k_B\times\text{温度})$、$k_B$ はボルツマン定数）、その和が**分配関数**です（2-08）。トレースは $a=b$ として a で積分することなので、(7) から、長さ $\beta\hbar$ の**輪の上の閉じた道**の積分になります。

$$Z(\beta)=\operatorname{Tr}e^{-\beta H}=\sum_n e^{-\beta E_n}=\int_{x(0)=x(\beta\hbar)}\mathcal{D}x\;e^{-S_E[x]/\hbar} \tag{9}$$

刻んで読むと、輪に並べた $x_0,\dots,x_{N-1}$ をばね $\frac{m}{2\delta}(x_{j+1}-x_j)^2$ でつなぎ、各点に V を掛けた**古典の鎖**の分配関数です。量子力学が一次元の古典統計力学と同じ形になり、$\hbar$ が温度の、$\beta\hbar$ が鎖の長さの役をします。場の理論のユークリッドの期待値を、密度が e^{-S} に比例する古典統計

力学の集団として読む見方を、問題の解説は Symanzik に帰しています（Jaffe–Witten §3）[既知]。この節の鎖はその一次元版です。

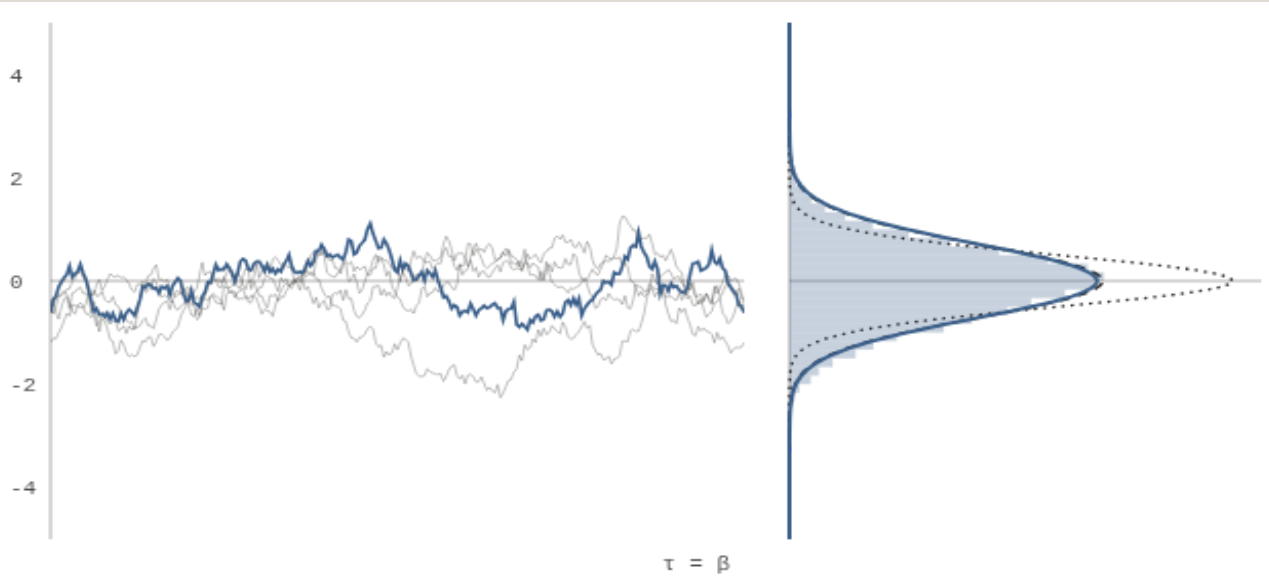
例：振動子の輪

振動子では $Z = 1/(2\sinh\frac{\beta\hbar\omega}{2})$ で、輪の一点 $x(0)$ の分布は熱平衡の位置の分布、分散は

$$\langle x^2\rangle_\beta = \frac{\hbar}{2m\omega}\coth\frac{\beta\hbar\omega}{2} \longrightarrow \begin{cases} \hbar/2m\omega & (\beta\to\infty) \\ 1/m\omega^2\beta & (\beta\to 0) \end{cases} \tag{10}$$

で、低温では基底状態の $|\psi_0|^2$（2-06）に、高温では古典のボルツマン分布に近づきます。

図 2　$\beta\hbar\omega$（輪の長さ）を変えると、輪の上の道（左。色が最新）と、道が通った位置の分布（右の塗り）が変わる。実線は (10)、破線は基底状態、点線は古典。「動かす」で道を足す（$\hbar=m=\omega=1$）



βħω = 4　経路 120 本　標本の ⟨x²⟩ = 0.557　刻んだ系 0.5186　(10) 0.5187　古典 0.2500

[計算] 図の数値はこの端末で計算しました。道は輪を 256 個に刻んだ (7) の厳密な標本（実のフーリエ成分が独立な正規分布なので、種を固定した乱数で引く）。表 2 は同じ手順の python3 の値。

[計算] **表 2**　輪の一点の $\langle x^2\rangle$（単位 $\hbar/m\omega$。基底状態は 0.5）。

βħω	標本	刻んだ系の厳密値	量子 (10)	古典
0.25	4.05 ± 0.09	4.0208	4.0208	4.0000
4	0.517 ± 0.006	0.5186	0.5187	0.2500
16	0.504 ± 0.003	0.4998	0.5000	0.0625

高温の短い輪では道はほぼ一点に縮み（古典の粒子）、低温では**量子の揺らぎが虚時間の方向に伸びた道の揺らぎとして**見えます。

```
07
```

振動子を刻んで計算する — 行列式・相関・相関長

$\hbar = m = \omega = 1$、長さ β の輪を N 個に刻みます。ここからの $a = \beta/N$ は刻みの幅（格子間隔）で、01〜06 節の始点 a とは別の記号です。$S_E = \frac{1}{2} x \cdot Ax$ の A は $(Ax)_j = \frac{1}{a}(2x_j - x_{j+1} - x_{j-1}) + a x_j$（添字は N を法として数える）で、隣とだけつながる**循環行列**です。固有ベクトルは $v_j = e^{2\pi i j k/N}$（離散フーリエ、$k = 0, \dots, N-1$）で、$v_{j\pm1} = e^{\pm 2\pi i k/N} v_j$ を代入すると固有値 $\frac{1}{a}(2 - 2\cos\frac{2\pi k}{N}) + a$ が出ます。(2) と規格化 $(2\pi a)^{-N/2}$ から

$$Z_N = \prod_{k=0}^{N-1} \Big(2 - 2\cos\frac{2\pi k}{N} + a^2\Big)^{-1/2} = \frac{1}{2\sinh(N\kappa/2)}, \qquad \cosh\kappa = 1 + \frac{a^2}{2} \tag{11}$$

連続の $1/(2\sinh\frac{\beta}{2})$ と比べると、刻んだ系は振動数 $\Omega_a = \kappa/a = 1 - a^2/24 + \cdots$ の振動子と同じです。相関は A^{-1} で決まり、$N \to \infty$ で

$$\langle x_0 x_j \rangle = (A^{-1})_{0j} = \frac{a\, e^{-\kappa|j|}}{2\sinh\kappa} \longrightarrow \frac{e^{-\tau}}{2} \qquad (\tau = ja,\ a \to 0) \tag{12}$$

2-06 の (8) と同じく、相関は隙間の速さで減ります。格子の目盛りで数えた**相関長**は $\xi = 1/\kappa = 1/(a\Omega_a)$ です。

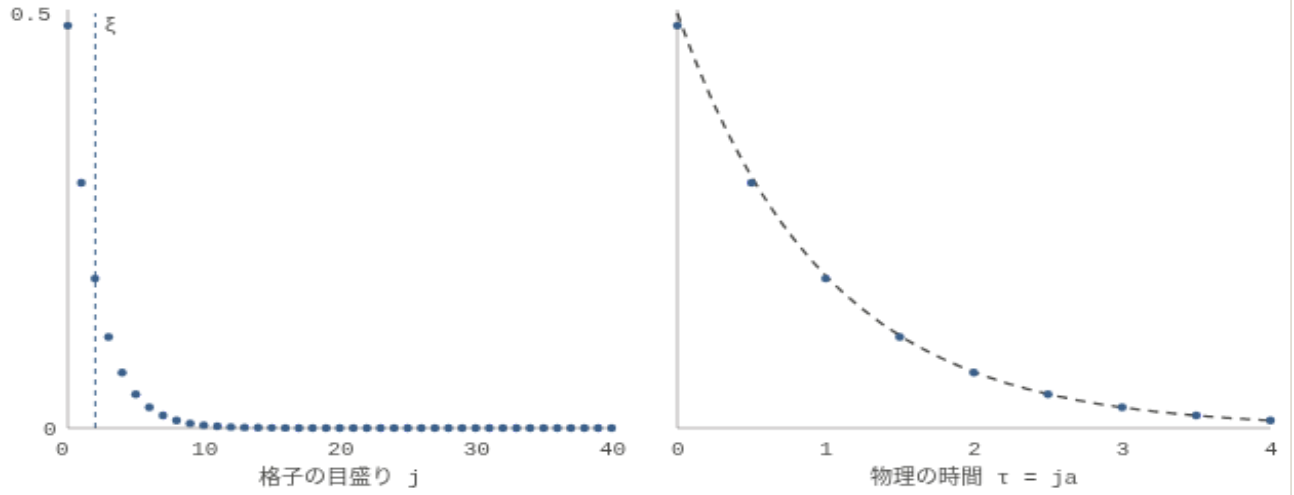
相関長と連続極限

計算 **表 3**　$\beta = 4$ の輪（Z_N は行列式の数値と (11) が 10 桁一致）。

N	a	Z_N / Z − 1	Ω_a	ξ
4	1	8.1e-2	0.96242	1.04
16	0.25	5.4e-3	0.99741	4.01
128	0.03125	8.4e-5	0.99996	32.00

ずれは a^2 で消え、相関長は $1/a$ で伸びます（図 3）。**連続に近づけることは、格子の鎖を「相関長が格子間隔の何倍にもなる」状態、統計力学の言葉では臨界点に近づけることです。**物理の隙間 $1/(\xi a)$ を固定して $\xi \to \infty$ とします。格子ゲージ理論でも、連続極限はこの形で取ると考えられています 物理 。四次元では、2026-11 に公開された構成が、裸の結合を漸近自由の走りに合わせて選ぶ形で尺度の極限を作りました（Lean で証明されている、と委員会が評価した。6-00・8-02）。物理の隙間を固定したまま相関長を伸ばす形、つまり極限で隙間が正に残ることは示されていません（6-04・5-05・5-09）。

図 3　刻み a を変えると、相関 (12) $a\,e^{-\kappa j}/(2\sinh\kappa)$（$\beta \to \infty$）の見え方が変わる。左は格子の目盛り j で数えたもの（縦の破線が相関長 $\xi = 1/\kappa$）、右は物理の時間 $\tau = ja$ で測ったもの（破線は連続の $e^{-\tau}/2$）。「動かす」で a を 1 と 1/16 の間で往復させる




```
a = 0.500  κ = 0.4949  ξ = 1/κ = 2.02 目盛り  Ω_a = κ/a = 0.98987
```

計算 図の数値はこの端末で計算しました（閉じた式 (12) をその場で計算。$a = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{16}$ の κ・ξ・Ω_a は python3 の値と表示の桁まで一致）。左では a を小さくするほど点が遠くまで続き、右では点が同じ破線に重なっていきます。

08

ガウスでない例 — 転送行列で x^4 の準位を求める

ガウスでなくても、刻んだ積分は行列の積として計算できます。(7) の一段分（$\hbar = m = 1$、刻み a）を $e^{-aV/2} e^{-aP^2/2} e^{-aV/2}$ の積分核

$$T_a(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \exp\!\left(-\frac{(x-y)^2}{2a} - \frac{a}{2}\big(V(x) + V(y)\big) \right) \tag{13}$$

にすると $Z_N = \mathrm{Tr}\, T_a^N$ で、統計力学の**転送行列**です。固有値を $e^{-aE_n(a)}$ と書けば $a \to 0$ で $E_n(a) \to E_n$。核は各点で正（$T_a(x,y) > 0$）です。さらに $V = x^4$ は無限遠で増えるので $\iint T_a(x,y)^2\, dx\, dy \le \frac{1}{2\pi a} \big(\int e^{-aV} dx \big)^2 < \infty$ となり、T_a は**コンパクト**（有限次元の行列でいくらでも近く近似でき、固有値は 0 以外に集積しない作用素）です。この二つがそろうと、Perron–Frobenius の定理の積分作用素版（Jentzsch 1912 に始まるとされ、L^2 の形は Reed–Simon IV）から、最大固有値は重複せず、その固有関数は正にとれます 既知。したがって基底状態は縮退しません（2-05・5-03）。

計算 **表 4**　$H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + x^4$ の転送行列の準位（x の格子幅 ≤ 0.02、$|x| \le 3.2$）と、2-05 表 1 の値（$E_0 = 0.667986$、$E_1 - E_0 = 1.725658$）との差。格子の幅を半分にしても 9 桁変わらない。

a	$E_0(a)$	$E_1(a) - E_0(a)$	E_0 の差	隙間の差
0.1	0.666246	1.719680	-1.7e-3	-6.0e-3
0.05	0.667546	1.724144	-4.4e-4	-1.5e-3
0.025	0.667876	1.725278	-1.1e-4	-3.8e-4

差は刻みを半分にするごとにほぼ 1/4 です。**刻んだ経路積分と演算子の量子力学は、同じ準位と隙間を与えます。**

09

場へ — 刻みを細かくすると揺らぎが発散する

07 節の刻み方を、そのまま場に広げます。場の理論では道 $x(\tau)$ が場 $\phi(x)$（d は虚時間を含む時空の次元）に替わり、$S_E=\int(\frac12|\nabla\phi|^2+\frac12 m^2\phi^2+\cdots)d^dx$ です（m はここでは場の質量。4-02）。間隔 a の格子で刻むと、相互作用の無い場はまた (2) のガウス積分で、一点の揺らぎは A^{-1} の対角成分です。

$$\langle\phi(0)^2\rangle = G_a(0) = \int_{[-\pi/a,\pi/a]^d} \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{\sum_{\mu=1}^{d}\frac{4}{a^2}\sin^2\frac{p_\mu a}{2}+m^2} \tag{14}$$

$d=1$ は 07 節の鎖そのもので、(14) は (12) の $j=0$ の値 $a/(2\sinh\kappa)$ に等しく、$1/2m$ に収束します。$d\ge 2$ では発散します。一点の分散の発散は 1-09 でも無限次元のガウス測度の側から扱っています。ここでは経路積分の刻みの続きとして、刻みを半分にするたびに何が起きるかを見ます。

計算 刻みを半分にするたびに、$d=1$ は $1/2$ に収束し、$d=2$ は約 $\ln 2/(2\pi)\approx 0.110$ ずつ増え（$G_a(0)\approx\frac{1}{2\pi}\log\frac1a+0.276$）、$d=3$ は 2 倍（$\approx 0.2527/a$）、$d=4$ は 4 倍（$\approx 0.1549/a^2$）になります（$m=1$。(14) を Bessel 関数 I_0 の一次元積分に直して数値積分）。刻みごとの値の表と次元を選ぶ図は 1-09 表 3・図 3 にあり、この本ではそれを正本にします。四で切り替わる他の量と並べた図は 1-12 §10 の次元のつまみです。

連続極限の場とヤン–ミルズ

連続極限の場は各点の値を持たない**超関数**です（1-11）。$\phi(x)^2$ のような積には引き算（繰り込み）が要ります（4-04・7-03）。

四次元のヤン–ミルズでは、この発散とゲージの自由度（4-08）と相互作用を同時に扱います。問題の解説は、コンパクトな群と有限の（周期的な）時空では、Wilson の格子で関数積分が有限次元の積分になり、そのうえでゲージ不変な観測量の期待値について、格子間隔 $\to 0$・体積 $\to\infty$ の極限が在ることを示す必要がある、と述べます（Jaffe–Witten §6.5）既知。2026-11 に公開された構成は、体積を止めて格子間隔 $\to 0$ の極限を取り、そのあと体積の部分列で極限を取っています（8-05）。四次元の特別さは 四次元の記事 へ。

この章が言えている範囲

内容	状態
(2)〜(12) の式	言えている 既知 （(5)・(8) は条件つき。表 2・3・図 2・3 で数値も確認 計算 ）。$\mathcal{D}x$ が測度にならないことは文献の紹介
表 4 の収束・§09 の発散の増え方の定数	数値で確かめた範囲 計算
格子ゲージ理論の連続極限も「相関長 $\to\infty$」の形で取ること（07 節）	物理の水準の見方 物理 。四次元の尺度の極限は 2026-11 に公開された構成が作った（委員会の評価の水準。6-00）。隙間が正に残る形は示されていない（6-04）
相互作用のある場・ゲージ場の経路積分	扱っていない（4-02・第 7 部）。ヤン–ミルズの質量ギャップは何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1〜4・例の数値・図 1〜3	計算	python3（NumPy・SciPy）。図はブラウザの JavaScript（台形公式・種を固定した乱数・閉じた式 (12)）
§09 の増え方の定数（0.2527・0.1549・0.276）	計算	python3（SciPy の I_0 と数値積分）で、質量 0 の格子の原点の値（$d=3$：0.252727、$d=4$：0.154933）と、$d=2$ の差 $G_a(0)-\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{a}$ の $a=2^{-10}$ までの値（0.27579）を計算。1-09 の表 3 と一致
(1)	既知	R. P. Feynman, “Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics”, Rev. Mod. Phys. 20 (1948) 367–387（書誌は Crossref で確認・本文は書誌のみ）／P. A. M. Dirac, Physik. Z. Sowjetunion 3 (1933) 64（書誌のみ。Dirac の示唆にさかのぼることは下の Scholarpedia の記事による）
積の公式	既知	H. F. Trotter, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959) 545–551（書誌のみ）／M. Reed, B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics I（Academic Press 1972）第 VIII 章（書誌のみ。定理 VIII.31 とされる・番号は未確認）
$\mathcal{D}x$ が測度にならないこと・(8) の条件	既知	R. H. Cameron, “A family of integrals serving to connect the Wiener and Feynman integrals”, J. Math. and Phys. 39 (1960) 126–140（書誌のみ）。内容は S. Albeverio, S. Mazzucchi, “Path integral: mathematical aspects”, Scholarpedia 6(1):8832 (2011) で確認
(8)・(3)	既知	M. Kac, Trans. Amer. Math. Soc. 65 (1949) 1–13／L. Isserlis, Biometrika 12 (1918) 134–139／G. C. Wick, Phys. Rev. 80 (1950) 268–272。いずれも書誌のみ
Symanzik の見方・格子と極限	既知	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills theory”（Clay の問題解説）§3・§6.5 を確認／K. Symanzik, “Euclidean quantum field theory”, in Local Quantum Theory (R. Jost ed., Academic Press 1969) 152–226（書誌のみ。Jaffe–Witten の文献 [46]）
Perron–Frobenius の積分作用素版	既知	R. Jentzsch, “Über Integralgleichungen mit positivem Kern”, J. reine angew. Math. 141 (1912) 235–244（書誌は Crossref で確認・本文は書誌のみ）／M. Reed, B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics IV（Academic Press 1978）（書誌のみ。§XIII.12 とされる・未確認）

もの	種別	出典・道具
停留位相	既知	R. P. Feynman, A. R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals（1965）。書誌のみ
道が微分できないこと	既知	1-09（Durrett の定理を引いている）

次に読む章：2-08 統計力学と相転移。

統計力学と相転移 — 確率の重み、相関の届く長さ、その長さが発散する点

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 熱平衡を確率分布 $e^{-\beta H}/Z$ と読み、$\log Z$ の微分で平均と揺らぎを得ること。
相関長と、ガウス鎖で相関長が $1/m$ で伸びること。
相転移が無限の系でだけ起きること、臨界指数の普遍性、連続極限が臨界点への接近であること。

前提となる章 — 1-08（確率・分散・ガウス測度）。行列の逆は 1-01。03 節の転送行列は 2-07 にも出てきます（読んでいれば。この章でもその場で定義します）。

先に言うこと — 扱うのは格子の上の古典統計力学です。三次元の臨界指数は数値で定理ではなく、場の理論との対応はガウス鎖を除き物理の水準の読み替えです。この章はヤン–ミルズの質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. ボルツマン分布 — 温度は確率の重みの付け方
2. 分配関数は母関数 — 微分すると平均と揺らぎ
3. 相関と相関長 — ガウス鎖で厳密に。相関長の逆数は転送行列の隙間
4. 相転移 — 無限の系でだけ起きる折れ曲がり
5. 平均場の模型 — 綱引きを目で見る（図 1・表 1）。寄り道：分配関数の零点（図 2）
6. 臨界点 — 臨界指数（表 2）
7. 普遍性 — 指数は普遍、係数はそうでない（図 3・表 3）
8. 連続極限 — 臨界点は格子を消す場所（図 4・表 4）

01

ボルツマン分布 — 温度は確率の重みの付け方

多数のスピンや粒子の系の状態の一つ一つを**配置** σ、そのエネルギーを $H(\sigma)$ とします。熱平衡の系は配置の上の確率分布で記述され、エネルギーの低い配置ほど重く、重みは指数関数です。

$$\mu_\beta(\sigma) = \frac{e^{-\beta H(\sigma)}}{Z_\beta}, \qquad Z_\beta = \sum_\sigma e^{-\beta H(\sigma)}, \qquad \beta = \frac{1}{k_B T} \tag{1}$$

μ_β を**ボルツマン分布**、Z_β を**分配関数**と呼びます（T は温度。以下ボルツマン定数 $k_B = 1$、β は逆温度）。$\beta \to 0$ では一様分布に、$\beta \to \infty$ ではエネルギー最小の配置に集中します。$\langle \cdot \rangle$ は μ_β での期待値です（1-08）。

指数関数になる理由の一つが次の変分原理です 既知 。エントロピーを $S(P) = -\sum_\sigma P \log P$ として

$$-\frac{1}{\beta}\log Z_\beta = \min_P \Big(\mathbb{E}_P[H] - \frac{1}{\beta} S(P) \Big) \tag{2}$$

が成り立ち、最小は $P = \mu_\beta$ だけで達成されます（両辺の差が相対エントロピー $\frac{1}{\beta}\sum_\sigma P \log(P/\mu_\beta) \geq 0$）。左辺が**自由エネルギー**です。エネルギーを下げる力と配置の数を増やす力の綱引きで、低温では前者、高温では後者が勝ちます。正確には、有限の系では (2) の最小はいつも μ_β 一つです。無限の系で (2) を一点あたりに直した最小化を考えると、低温では最小を与える状態が一つでなく複数になりえます。この「一つから複数に割れる」ことが、相転移（相の共存）の一つの正確な形です（05 節で一変数の形で見ます）。

例。相互作用の無い N 個のスピン $\sigma_x = \pm 1$ が外場 h の中にあると（$H = -h\sum_x \sigma_x$）、$Z = (2\cosh \beta h)^N$ で、スピンは独立、$\langle \sigma_x \rangle = \tanh \beta h$ です。

02

分配関数は母関数 — 微分すると平均と揺らぎ

$\log Z$ を微分すると平均と分散が出ます。確率の言葉では、$\log Z_\beta$ は $-H$ のキュムラント母関数（に定数を足したもの）です。キュムラント母関数とは、確率変数 X に対する $t \mapsto \log \mathbb{E}[e^{tX}]$ のことで、$t = 0$ で一回微分すると平均、二回微分すると分散になります。

$$\langle H \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta}\log Z_\beta, \qquad \mathrm{Var}(H) = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\log Z_\beta \geq 0 \tag{3}$$

全磁化 $M = \sum_x \sigma_x$ で外場を $-hM$ と入れると、磁化と**帯磁率** χ（外場への応答）が出ます。

$$\langle M\rangle = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial h}\log Z, \qquad \chi = \frac{1}{N}\frac{\partial \langle M\rangle}{\partial h} = \frac{\beta}{N}\operatorname{Var}(M) \tag{4}$$

右の等式は、押したときの応答が押さないときの揺らぎで決まるという揺動応答の関係です。分散は負でないので $\log Z$ は β についても h についても凸です。一点あたりの $f_N = -\frac{1}{\beta N}\log Z_N$ の $N\to\infty$ の極限 f を**熱力学極限**と呼びます。短距離の相互作用なら極限は存在し、凸性も残ることが知られています [既知]（格子のスピン系では、系を箱に分けたとき $\log Z$ が箱ごとの和と境界の分しか違わないこと〔部分加法性〕による標準的な議論。Ruelle 1969 など）。

例。独立なスピンでは $\chi = \beta(1-\tanh^2\beta h) = \beta\operatorname{Var}(\sigma_x)$。$h=0$ なら $\chi=\beta$ で、どの温度でも有限です。相互作用が無ければ何も起きません。

03

相関と相関長 — 離れた二点はどれだけ連動するか

相互作用があると離れた点が連動します。その度合いが**連結二点相関**（共分散）です。

$$G(x,y) = \langle \sigma_x\sigma_y\rangle - \langle\sigma_x\rangle\langle\sigma_y\rangle \tag{5}$$

並進不変な無限の系では $G(x,y)=G(x-y)$、(4) は $\chi = \beta\sum_x G(x)$。**帯磁率が発散するには、相関がゆっくりしか減らないことが要ります**。相関が指数関数的に減るとき、その長さを**相関長** ξ と呼びます。

$$\frac{1}{\xi} = -\lim_{|x|\to\infty}\frac{\log G(x)}{|x|} \tag{6}$$

対数を取るのは前に付く多項式の因子を許すためです。格子ゲージ理論の相関長も同じ形で定義されます。ただしスピンの代わりに、小さな正方形のループ（プラケット）の変数の相関を使います（5-01、Chatterjee 2018 §5・5-09）[既知]。例は二つです。

イジング模型：$\mathbb{Z}^d$ の各点に $\sigma_x=\pm1$、$H=-J\sum_{\langle xy\rangle}\sigma_x\sigma_y - h\sum_x\sigma_x$（$\langle xy\rangle$ は隣り合う対、$J>0$ は揃うと得をする強磁性の結合。計算例は 2-09）。

ガウス鎖：$\mathbb{Z}$ の各点に実数 ϕ_x を置き、$\beta=1$、$m>0$（**質量**）として

$$H(\phi) = \frac{1}{2}\sum_{x}\Big[(\phi_{x+1}-\phi_x)^2 + m^2\phi_x^2\Big] \tag{7}$$

とします。長さ L の区間に制限して外を $\phi=0$ とおくと、ϕ を縦ベクトルとして $H=\frac12\phi^{\mathsf T}K\phi$（$K$ は対角が m^2+2、隣が -1 の $L\times L$ 行列）と書け、e^{-H} は有限次元のガウス測度で、共分散は K^{-1} です（1-08）。$L\to\infty$ で区間の中央の G は次の (8) に収束します。(8) は、無限の

鎖の式 $\sum_y K_{xy}G(y)=\delta_{x0}$ に $x\neq 0$ で $G=Ae^{-\kappa|x|}$ を入れて $m^2+2=e^{\kappa}+e^{-\kappa}$ を得、$x=0$ の式で A を決めたものです。

$$G(x)=\frac{e^{-\kappa|x|}}{2\sinh\kappa},\qquad \cosh\kappa=1+\frac{m^2}{2},\qquad \xi=\frac{1}{\kappa}\approx\frac{1}{m} \tag{8}$$

質量が小さいほど相関長は長く、$m\to 0$ で $1/m$ の速さで発散します。

計算 $m=1,\ 0.2,\ 0.05$ で $\xi=1.03904,\ 5.00831,\ 20.00208$（$\xi m\to 1$）。区間（1601〜4001 点）の中央で K の逆を数値で求めた $G(20)$ は (8) と 13 桁一致しました。

この鎖は 2-07 の虚時間の調和振動子を時間の格子に置いたものです。$m^2\phi_x^2$ を両隣の結合に半分ずつ配ると、e^{-H} は隣り合う二点の重み

$$T(\phi,\phi')=\exp\!\Big(-\frac{(\phi-\phi')^2}{2}-\frac{m^2(\phi^2+\phi'^2)}{4}\Big)$$

の積になります。この T を核とする積分作用素 $(Tf)(\phi)=\int T(\phi,\phi')f(\phi')\,d\phi'$ を**転送行列**と呼びます（行列の積の $\sum$ を積分に置き換えたもの）。周期的につないだ L 点の鎖では $Z=\int T(\phi_1,\phi_2)T(\phi_2,\phi_3)\cdots T(\phi_L,\phi_1)\,d\phi_1\cdots d\phi_L$、つまり T^L のトレースです。T の大きい方から二つの固有値の比が $e^{-\kappa}$ で、この κ を転送行列の**隙間**と呼びます。**相関長の逆数が隙間になる**最も簡単な例です 既知 （一般の形は 4-11）。計算 T を 1500 点で離散化した行列の固有値の比は、$m=1,\ 0.5,\ 0.2$ で $e^{-\kappa}$ と 10 桁一致しました。

04

相転移 — 無限の系でだけ起きる折れ曲がり

温度などを少し変えただけで振る舞いが一変することを**相転移**と呼びます。数学の言葉では、熱力学極限の $f(\beta,h)$ がその点で解析的でない（その点のまわりでテイラー展開で表せない）ことです。**有限の系では起きません**。正確には、Z_N は β,h の指数関数 $e^{-\beta H(\sigma)}$ の有限和で、実の β,h で正です。だから $\log Z_N$ は何回でも微分でき、テイラー展開が収束します（これを**実解析的**と言います）。

イジング模型では次が知られています 既知 。$d=1$ では相転移は無い（Ising 1925、2-09）。$d=2$、$h=0$ では

$$\sinh(2\beta_c J)=1,\qquad \beta_c J=\tfrac{1}{2}\log\!\big(1+\sqrt{2}\big)=0.440687\ldots \tag{9}$$

で相転移が起きます。転移がただ一つだと仮定して、Kramers–Wannier 1941 が双対性から位置を定め、Onsager 1944 が自由エネルギーを厳密に求めて比熱の $-\log|T-T_c|$ の発散を

示しました。低温で向きが揃って残ることを示す議論は Peierls 1936 に始まるとされます（証明としての整備は後年）。これを正確に言うのが**自発磁化**です。

$$\bar{m}_0(\beta) = \lim_{h \downarrow 0} \lim_{N \to \infty} \langle \sigma_0 \rangle_{N,h} \tag{10}$$

例。極限の順序が大事です。先に $h \to 0$ とすると、有限の系の H は全反転 $\sigma \to -\sigma$ で不変なので $\langle \sigma_0 \rangle = 0$。先に無限にしてから外場を切ると、二次元の $\beta > \beta_c$ で $\bar{m}_0 > 0$ が残ります（$\beta \downarrow \beta_c$ で $(\beta - \beta_c)^{1/8}$ のように 0 へ。Yang 1952）。**極限の順序で答えが変わる**ことは、ヤン–ミルズでも繰り返し問題になります（5-09・17-10）。

分配関数の零点から相転移を見る見方は、05 節の後の寄り道で扱います。

05

平均場の模型 — 綱引きを目で見る

すべてのスピンが同じ強さで結合する **Curie–Weiss 模型** $H_N = -\frac{J}{2N} M^2 - hM$（$M = \sum_{x=1}^{N} \sigma_x$、$J > 0$）は、相転移を手で追える最小の例です。上向きの数 k でまとめて $Z_N = \sum_{k} \binom{N}{k} e^{-\beta H_N}$。一スピンあたりの磁化を $\bar{m} = M/N$ とします（ガウス鎖の質量 m と区別して棒を付けます）。Stirling の公式からの $\binom{N}{N(1+\bar{m})/2} = e^{N s(\bar{m}) + o(N)}$、$s(\bar{m}) = -\frac{1+\bar{m}}{2}\log\frac{1+\bar{m}}{2} - \frac{1-\bar{m}}{2}\log\frac{1-\bar{m}}{2}$ を使うと、和は最大の項で決まります（Laplace の方法）。

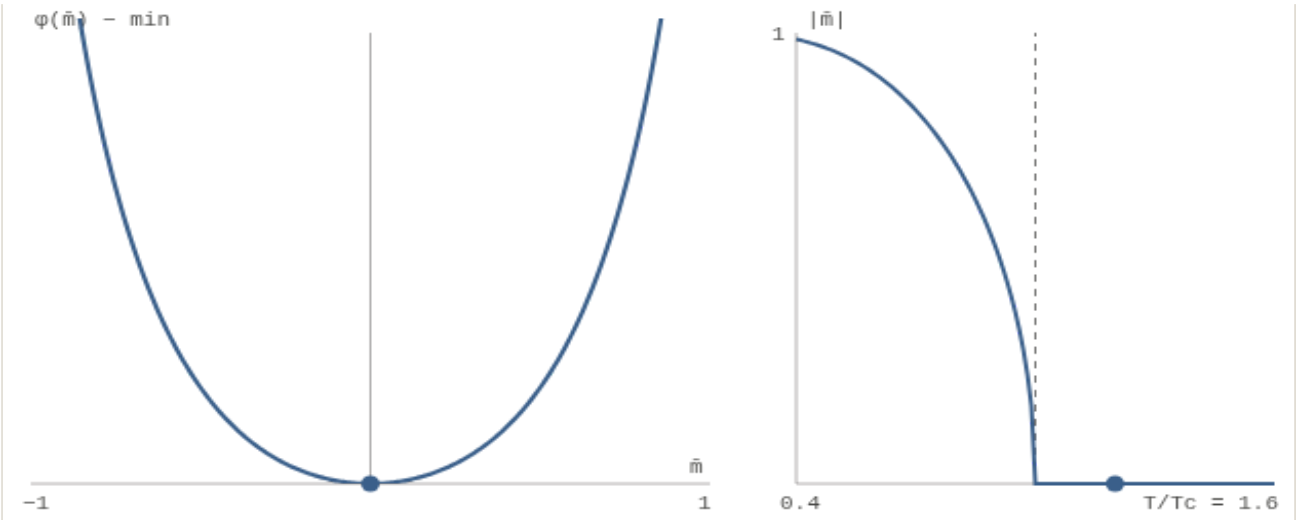
$$f = \min_{-1 \le \bar{m} \le 1} \varphi(\bar{m}), \qquad \varphi(\bar{m}) = -\frac{J}{2}\bar{m}^2 - h\bar{m} - \frac{1}{\beta} s(\bar{m}) \tag{11}$$

(2) の綱引きが一変数に縮みました（第一項がエネルギー、最後の項がエントロピー）。$\varphi'(\bar{m}) = 0$ は

$$\bar{m} = \tanh\bigl(\beta(J\bar{m} + h)\bigr) \tag{12}$$

です。$h = 0$ なら $\beta J \le 1$ で解は $\bar{m} = 0$ だけ、$\beta J > 1$ で $\pm \bar{m}^{*} \neq 0$ が最小になります（臨界温度 $T_c = J$）。$\tanh u \approx u - u^3/3$ から $\bar{m}^{*} \approx \sqrt{3(\beta J - 1)}$、(12) を h で微分すると $T > T_c$ で $\chi = \beta/(1 - \beta J)$（Curie–Weiss の法則）です。

図 1　T/T_c と外場 h を動かすと、左の $\varphi(\bar{m})$（最小を 0 に揃えた）の谷が T_c で二つに割れる。右は $h = 0$ の $\bar{m}^{*}$（線）と今の最小点。「動かす」で冷やす



T/Tc = 1.20 h = 0.00 最小点 m̄ = 0.00000 χ = 5.000

計算 図は (11)(12)（$J=1$）をその場で計算。$h=0$ の $\bar{m}^*$ は $T/T_c=0.9,\ 0.8,\ 0.6$ で $0.52543,\ 0.71041,\ 0.90733$（python3 と一致）。

計算 **表 1**　$\sqrt{\langle \bar{m}^2 \rangle}$（$h=0$。有限の N は $\binom{N}{k}$ の和を誤差なく計算）と $N=\infty$ の $\bar{m}^*$。

N	βJ = 0.8	βJ = 1	βJ = 1.25
1000	0.07003	0.19172	0.70824
10^5	0.00707	0.06083	0.71039
∞	0	0	0.71041

$\beta J=0.8$ は $N^{-1/2}$ で 0 へ（$\sqrt{N}$ 倍は 2.2358、(4) と Curie–Weiss の法則からの予想 2.2361）、$\beta J=1.25$ は $\bar{m}^*$ へ、臨界の $\beta J=1$ は $N^{-1/4}$ で 0 へ（$N^{1/4}$ 倍で約 1.08）。**有限の N ではどれも β の滑らかな関数で、折れ曲がりは $N\to\infty$ でだけ現れます。**

寄り道：分配関数の零点

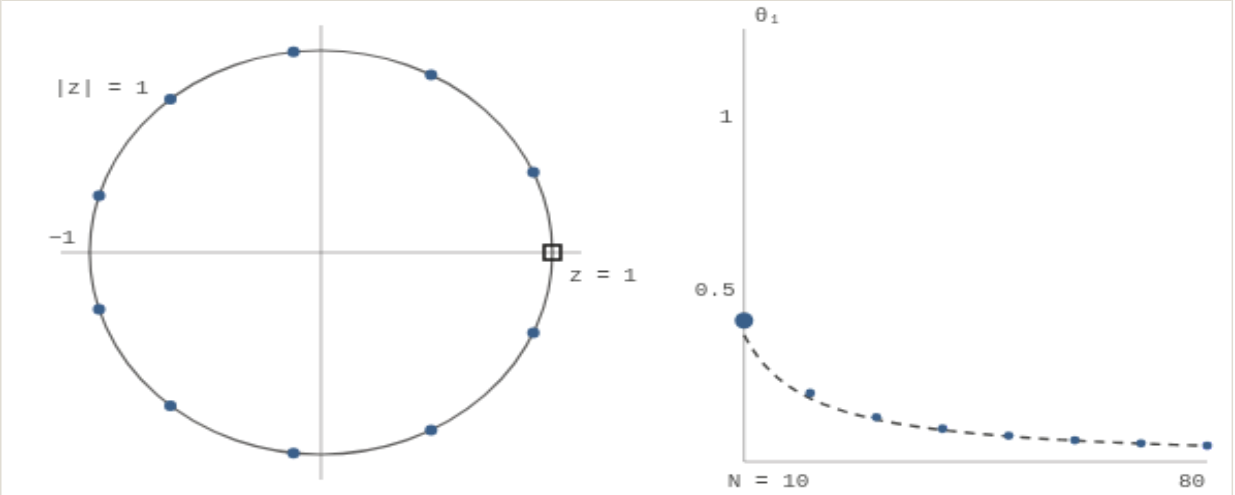
飛ばしてよい小節です。

$z=e^{-2\beta h}$ とおくと Z_N は z の正係数の多項式（に $e^{\beta h N}$ を掛けたもの）で、強磁性なら零点はすべて単位円 $|z|=1$ の上にあります（Lee–Yang 1952）既知 。実の h は正の実軸に、$h=0$ は $z=1$ に当たります。係数が正なので有限の N では零点は $z=1$ に乗らず、$\log Z_N$ は $h=0$ の近くで滑らかです。零点が $N\to\infty$ で $z=1$ を挟み込むと、$h=0$ で f が折れえます。

計算 05 節の模型で $z=1$ に最も近い零点の角 θ_1 は、$N=10$ から 80 で、$\beta J=1.5$ なら $N\theta_1=4.08\to 3.72$（0 へ寄る。低温で Z_N を $\cosh(N\beta h\bar{m}^*)$ の定数倍で近似したときの予想 $\pi/\bar{m}^*=3.66$）、$\beta J=0.5$ なら $\theta_1=1.157\to 0.722$（h を複素数にして (12) の二つの解が一つに重なる点から出る予想 0.571 と矛盾しない）でした。

図 2　N を動かすと、単位円の上の零点（点。上下は複素共役）が増える。$\beta J=1.5$（低温）では $z=1$（$h=0$、四角）に寄り、$\beta J=0.5$（高温）では $z=1$ のまわりに零点の無い弧（網掛けは $N\to\infty$ の予想 $|\theta|<0.571$）が残る。

右（幅の狭い画面では下）は θ_1 と予想（破線）。「動かす」で N を 10 から 80 へ



βJ = 1.5　N = 10　θ₁ = 0.40767　Nθ₁ = 4.077（Nθ₁ の予想の行き先 π/m* = 3.659）

計算 図の零点は python3 で求めた角を埋めたもの。$z=e^{i\theta}$ の上で実数になる $z^{-N/2}Z_N$ の符号の変化を 80 桁の十進演算で追い、$0<\theta<\pi$ にちょうど $N/2$ 個あることを確かめた（θ_1 は上の値と 6 桁一致）。

06

臨界点 — 相関長が発散し、べき乗が現れる

自発磁化が 0 から連続に立ち上がる転移の点を**臨界点**と呼びます。近づくと相関長が発散し、多くの量がべき乗で振る舞います。その指数が**臨界指数**です。$t=(T-T_c)/T_c$ として

$$\xi \sim |t|^{-\nu}, \quad \chi \sim |t|^{-\gamma}, \quad \bar{m}_0 \sim (-t)^{\beta}, \quad G(x)\big|_{T=T_c} \sim \frac{1}{|x|^{d-2+\eta}} \tag{13}$$

と書きます（$\sim$ は比が定数に近づくこと。指数の β は逆温度とは別物。η は、後の章で動的な指数と区別するときは η_s と書きます：18-03 §07。緩和の時間と動的指数 z は 2-10）。スケーリングの仮説から指数の間に次の関係が出て（繰り込み群がそれを説明する。Pelissetto–Vicari 2002 の式 (1.38)〜(1.40)）物理、右の二つは $d<4$ で成り立つとされます。

$$\gamma=\nu(2-\eta), \qquad \beta=\frac{\nu}{2}(d-2+\eta), \qquad \alpha=2-d\nu \tag{14}$$

α は比熱の指数です。二次元イジングの $\nu=1,\ \eta=1/4$ を入れると $\gamma=7/4,\ \beta=1/8,\ \alpha=0$ と厳密な値が戻ります計算。

計算 **表 2**　臨界指数。平均場と二次元は Pelissetto–Vicari（表 13 など）、三次元の ν,η は共形ブートストラップの数値（Kos ほか 2016）、* は (14) で計算（誤差で動くのは最後の桁の ±1 程度）。

指数	平均場（d > 4）	二次元イジング	三次元イジング 物理
ν（相関長）	1/2	1	0.629971
η（臨界点の相関）	0	1/4	0.0362978
γ（帯磁率）	1	7/4	1.23708*
β（自発磁化）	1/2	1/8	0.32642*
α（比熱）	0	0（対数）	0.11009*

例。ガウス鎖では質量の二乗 m^2（03 節）が t の役をし、$\xi \approx (m^2)^{-1/2}$ から $\nu = 1/2$。05 節の $\beta = 1/2,\ \gamma = 1$ とともに平均場の列と同じです。η はガウス的な振る舞いからのずれを測り（Pelissetto–Vicari）、三次元イジングでは小さいものの 0 ではありません。

07

普遍性 — 細部を忘れる

表 2 の指数は格子の形や結合の細部に依らず、次元・対称性・相互作用の届く範囲だけで決まると考えられています。同じ指数を持つ系の集まりが**普遍クラス**です 物理 。単純な流体の気体–液体の臨界点や一軸性の反強磁性体は三次元イジングのクラスに属するとされ（Pelissetto–Vicari §3.1）、液体と磁石が同じ指数を持ちます。

臨界点の近くでは ξ が格子の間隔よりずっと長くなります。Kadanoff 1966 は、格子の間隔より大きく相関長より小さい塊にスピンをまとめて見直し、Wilson 1971 はそれを繰り返す操作を繰り込み群の方程式にしました。細部は薄れ、同じ固定点に流れ込む系は同じ指数を持ちます。正確には、普遍性は多くの例で確かめられた物理の原理で、一般の定理ではありません（7-05・4-04）。

最小の例として、(7) に二つ先との結合 $c \geq 0$ を足します。

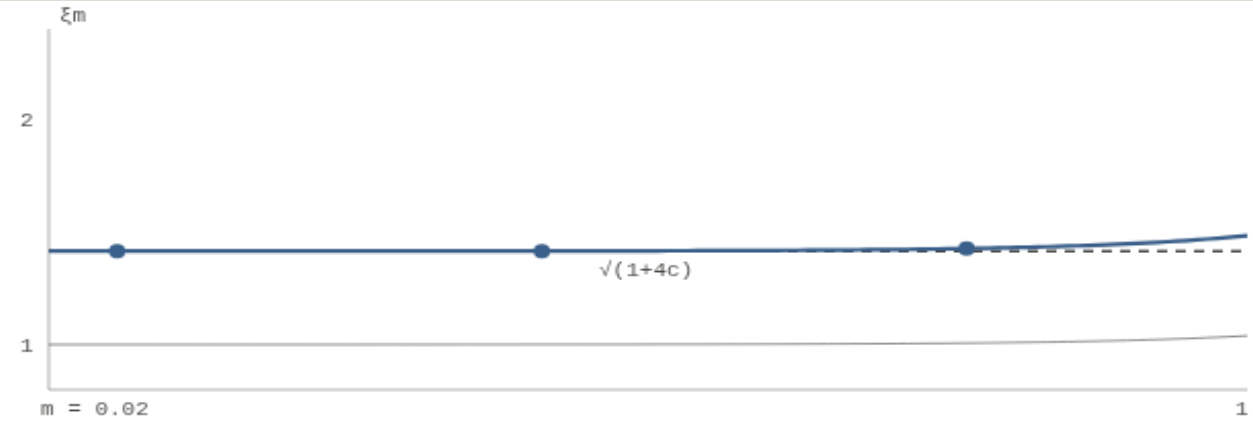
$$H_c = \frac{1}{2}\sum_{x}\Big[(\phi_{x+1}-\phi_x)^2 + c\,(\phi_{x+2}-\phi_x)^2 + m^2\phi_x^2\Big] \tag{15}$$

03 節と同じ計算で G は $e^{-\kappa|x|}$ の形の項の和になり、最も遅く減る項の κ は $m^2 = 2(\cosh\kappa - 1) + 2c(\cosh 2\kappa - 1)$ の最小の正の根です。これは $w = \cosh\kappa$ の二次方程式 $4cw^2 + 2w - (2 + 4c + m^2) = 0$ なので、根は式で書けます。κ が小さいと右辺は約 $(1+4c)\kappa^2$ なので $\xi \approx \sqrt{1+4c}/m$。

計算 **表 3**　c を足した鎖の ξm。行き先は $\sqrt{1+4c} = 1,\ 1.41421,\ 2.23607$（行列の逆とも 10 桁一致）。

m	c = 0	c = 1/4	c = 1
0.4	1.00659	1.42586	2.24613
0.1	1.00042	1.41495	2.23670
0.025	1.00003	1.41426	2.23611

図 3　二つ先との結合 c を動かすと、ξm の曲線（横軸は m、対数目盛。点は表 3 の m）の行き先 $\sqrt{1+4c}$（破線）の高さが変わる。$m \to 0$ で曲線が平らになること（$\xi \propto m^{-1}$）は c に依らない。細い線は $c = 0$。「動かす」で c を 0 から 1 へ



c = 0.25　√(1+4c) = 1.41421　ξm：m = 0.4 で 1.42586、0.1 で 1.41495、0.025 で 1.41426

計算 図は上の二次方程式の根をその場で計算。$c = 0,\ 1/4,\ 1$ で表 3 と一致（python3 の根の探索・行列の逆とも一致）。

指数（$\xi \propto m^{-1}$）は c に依らず、係数 $\sqrt{1+4c}$ は依ります。ゆっくり変わる場では $(\phi_{x+2} - \phi_x)^2 \approx 4(\phi_{x+1} - \phi_x)^2$ なので、二つ先の結合は隣の結合を $1 + 4c$ 倍するだけに見え、長さの物差しを替えれば消えます。

08

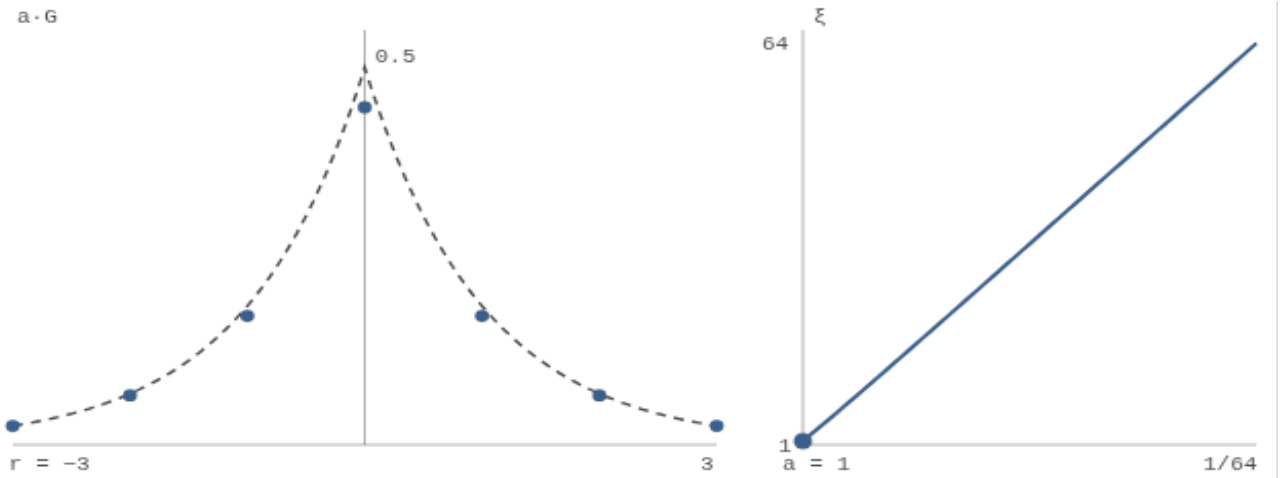
連続極限 — 臨界点は格子を消す場所

格子の間隔 a を入れて点 x を位置 $r = xa$ と読みます。格子の単位の相関長を ξ（03 節の $1/\kappa$）とすると、物理の単位の相関長は $a\xi$ です。$a\xi$ を保って $a \to 0$ とすると、ξ は無限大へ行くしかありません。**連続極限を取ることは、臨界点に近づくことです**（Chatterjee 2018 §5）物理。ガウス鎖ではすべて明示的で、$M > 0$ を固定して $m = Ma$ とおくと $\kappa/a \to M$、$a/(2\sinh\kappa) \to 1/(2M)$ より次が成り立ちます既知。

$$a\,G\Big(\frac{r}{a}\Big) \;\longrightarrow\; \frac{e^{-M|r|}}{2M} \qquad (a \to 0) \tag{16}$$

右辺は $-d^2/dr^2 + M^2$ の逆の核（伝播関数、1-11）で、M が物理の単位の質量です。

図 4　格子の間隔 a を小さくすると、物理の単位の aG（点）が連続の $e^{-M|r|}/2M$（破線、$M = 1$）に重なり、右の格子の単位の相関長 ξ（両対数）は発散する。「動かす」で a を 1 から 1/64 へ



a = 1.00 ξ = 1.039 aξ = 1.0390 a·G(0) = 0.44721（連続 0.5）

計算 図は (8)(16) をその場で計算。**表 4**　$M=1$ で a を縮めたときの ξ（格子の単位）と aG（python3）。最下段は (16) の右辺。

a	ξ（格子の単位）	a·G(0)	a·G(r = 1)
1	1.0390	0.447214	0.170820
1/8	8.0052	0.499026	0.183701
1/64	64.0007	0.499985	0.183936
連続	–	0.5	0.183940

ヤン–ミルズでは、多くの非可換な格子ゲージ理論で臨界点は $\beta=\infty$ にあると信じられ（ここの β は格子ゲージ理論の作用に掛かる定数で、結合定数 g の二乗の逆に比例し、逆温度の役をします。5-01）、相関長の逆数は最も軽いグルーボール（グルーオンだけでできた粒子、17-01）の質量に当たります（Chatterjee 2018 §5）物理。格子の側の問いの一つは「各 $\beta>0$ で相関が指数関数的に減る（$\xi(\beta)$ が $(0,\infty)$ に定まる）こと、$\beta\to\infty$ で $\xi(\beta)\to\infty$」で、Chatterjee は同節でこれを格子の相関長の問題（Problem 5.1）として挙げます（5-09）。連続極限で質量が正に残るかはその先の問いです（5-05・4-11）。重み・相関長・臨界点・普遍性は場の理論の経路積分（4-02）・質量の逆数・連続極限・繰り込みに当たり、ガウス鎖ではこれが厳密です。

この章が言えている範囲

内容	状態
(1)〜(4)・有限の系の解析性・(8) と転送行列の隙間・(15) の ξ・(16)・(11)(12)	言えている 既知 （表 1・3・4 と図 1・3・4 計算 ）
熱力学極限の存在	定理 既知 （文献は書誌のみ）

内容	状態
イジング模型の $d = 1, 2$ の事実、Lee–Yang の定理	定理 既知 （文献は要旨まで確認。Ising 1925・Peierls 1936 は書誌のみ）
寄り道の零点の角（図 2）	$N \leq 80$ の数値 計算 。行き先は予想
三次元の臨界指数・(14)・普遍性一般	数値と物理の水準 物理 （表 2 の * は (14) の算術 計算 ）
相関長と質量の対応・格子ゲージ理論の臨界点 $\beta = \infty$	物理の水準 物理 。質量ギャップ・連続極限の構成について何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1〜4・03 節と寄り道の数値・転送行列の固有値の比・図 1〜4 の照合値と図 2 の零点	計算	python3（NumPy・SciPy。零点は標準ライブラリの 80 桁の十進演算）。図はブラウザの JavaScript
(6) の形・連続極限と臨界点・$\beta_c = \infty$・グルーボール・格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）	既知	S. Chatterjee, arXiv:1803.01950。§5 を確認
(13)(14)・平均場と二次元の指数・普遍クラス	既知	A. Pelissetto, E. Vicari, Phys. Rep. 368 (2002) 549–727, arXiv:cond-mat/0012164。§1.1・§1.2・§3.1・表 13 を確認
三次元イジングの ν, η	物理	F. Kos, D. Poland, D. Simmons-Duffin, A. Vichi, JHEP 08 (2016) 036, arXiv:1603.04436。要旨と序論を確認
(9)・比熱／双対性／自発磁化／零点	既知	L. Onsager, Phys. Rev. 65 (1944) 117／H. A. Kramers, G. H. Wannier, 同 60 (1941) 252／C. N. Yang, 同 85 (1952) 808／C. N. Yang, T. D. Lee, 同 87 (1952) 404／T. D. Lee, C. N. Yang, 同 410。要旨を確認
熱力学極限の存在	既知	D. Ruelle, Statistical Mechanics: Rigorous Results（初版 1969、World Scientific 1999 に再刊）（書誌のみ）
塊にまとめる見方／繰り込み群	既知	L. P. Kadanoff, Physics 2 (1966) 263／K. G. Wilson, Phys. Rev. B 4 (1971) 3174。要旨を確認
一次元で相転移が無いこと／低温の議論	既知	E. Ising, Z. Phys. 31 (1925) 253（書誌のみ）／R. Peierls, Proc. Cambridge Philos. Soc. 32 (1936) 477（書誌のみ・未確認）
(2)・Laplace の方法・ガウス測度の共分散・転送行列の隙間	既知	標準的な事実（1-08・2-07・2-09・4-11）

次に読む章：2-09 寄り道：イジング模型で見るギャップと相関長。質量ギャップとの関係は 4-11、緩和の時間と動的指数は 2-10。

寄り道：イジング模型で見るギャップと相関長 — 転送行列の固有値の比が、相関の届く長さを決める

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 転送行列の最大の二つの固有値の比が相関長を決め、$1/\xi$ が $-\log T$ のギャップそのものであること。二次元の帯で、高温・臨界点・低温のギャップの三通りの振る舞い。低温で閉じる隙間は、質量ギャップが無いことの印ではないこと。

前提となる章 — 2-08（相関長・臨界点）。04 節と 08 節は 2-05（ギャップ・二準位・二重井戸）と 2-07（虚時間・転送行列）を読んでいると楽です。

先に言うこと — 寄り道なので飛ばしてかまいません。二次元の数値は幅 20 までの帯の計算です。この章はヤン–ミルズの質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. 見取り図 — 相関長の逆数はギャップ
2. 一次元イジングと転送行列
3. 相関は固有値の比で減る（図 1・表 1）
4. 転送行列は虚時間の量子力学
5. 二次元：帯の転送行列（表 2）
6. 高温側 — ギャップは残る
7. 臨界点（図 2）— $1/L$ で閉じる
8. 低温側（表 3）— 閉じる隙間と残るギャップ
9. ヤン–ミルズの言葉に戻す（寄り道：Z_2 ゲージ理論）

01

見取り図 — 相関長の逆数はギャップ

質量ギャップはハミルトニアンの最低の二つの固有値の差（2-05）、相関長は離れた二点の連動が消える長さ（2-08）でした。二つが一つの数であることを、最も簡単な模型で確かめます。

鍵は転送行列です。格子を一列ずつ進む行列 T の固有値を $\lambda_0 > \lambda_1 \geq \cdots$、$E_n = -\log \lambda_n$ とすると

$$\frac{1}{\xi} = \log \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = E_1 - E_0 \tag{1}$$

です（条件は 04 節）。左辺は統計の量、右辺は「ハミルトニアン」$H = -\log T$ のギャップで、一目盛りを虚時間の一刻みと読めば、2-05 の (8) が言う「減衰の速さはギャップ」と同じ内容です。

例。二次元の幅 L の帯では、$E_1 - E_0$ は高温側で正の値に落ち着き、臨界点で $1/L$ に比例して、低温側で指数関数的に閉じます（05〜08 節）。

02

一次元イジングと転送行列 — 分配関数は行列のトレース

N 個のスピン $\sigma_i = \pm 1$ を輪に並べ（$\sigma_{N+1} = \sigma_1$）、隣どうしを結合します。$K = \beta J$、$B = \beta h$ とし、外場の項を隣の二点に半分ずつ配ると、重みは隣の対ごとの因子の積です。

$$e^{-\beta H} = \prod_{i=1}^{N} \exp\Bigl(K\sigma_i\sigma_{i+1} + \tfrac{B}{2}(\sigma_i + \sigma_{i+1}) \Bigr) \tag{2}$$

一つの因子は σ_i と σ_{i+1} だけで決まるので 2×2 の行列になり（行が σ_i、列が σ_{i+1}、$+1$ が一行目）、和は輪を一周して戻るのでトレースです。

$$T = \begin{pmatrix} e^{K+B} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K-B} \end{pmatrix}, \qquad Z_N = \sum_{\sigma} \prod_{i} T_{\sigma_i \sigma_{i+1}} = \operatorname{tr} T^N = \lambda_0^N + \lambda_1^N \tag{3}$$

T は実対称なので固有値は実で（1-01）、

$$\lambda_{0,1} = e^{K}\cosh B \pm \sqrt{e^{2K}\sinh^2 B + e^{-2K}} \tag{4}$$

です。N が大きいと $Z_N \approx \lambda_0^N$ です。分配関数を行列の最大固有値で求める方法は Kramers–Wannier 1941 が一次元の鎖で実行し、二次元へ進めたものです 既知 。

例。計算 $N=14$、$K=0.7$、$B=0.2$ で 2^{14} 個の配置を全部足した Z_N と相関は、(3) のトレースの式と丸め誤差の範囲（相関の差 10^{-13} 未満）で一致しました。

03

相関は固有値の比で減る — 一次元に相転移は無い

T の正規直交な固有ベクトルを v_0, v_1、スピンを $S=\mathrm{diag}(1,-1)$ で表します。$N\to\infty$ では輪の残りが $\lambda_0^{N-r} v_0 v_0^{\mathsf{T}}$ に置き換わり、間の T^r を固有値で展開すると距離 r の相関が出ます。

$$m = v_0^{\mathsf{T}} S v_0, \qquad G(r) = \langle \sigma_0 \sigma_r \rangle - m^2 = (v_0^{\mathsf{T}} S v_1)^2 \Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\Big)^r = (1-m^2)\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\Big)^r \tag{5}$$

最後の等号は $v_0=(\cos\varphi,\sin\varphi)$、$v_1=(-\sin\varphi,\cos\varphi)$ とおくと $m=\cos 2\varphi$、$v_0^{\mathsf{T}} S v_1 = -\sin 2\varphi$ となることから出ます。相関長は (1) の通りです。$B=0$ なら $\lambda_0=2\cosh K$、$\lambda_1=2\sinh K$ で

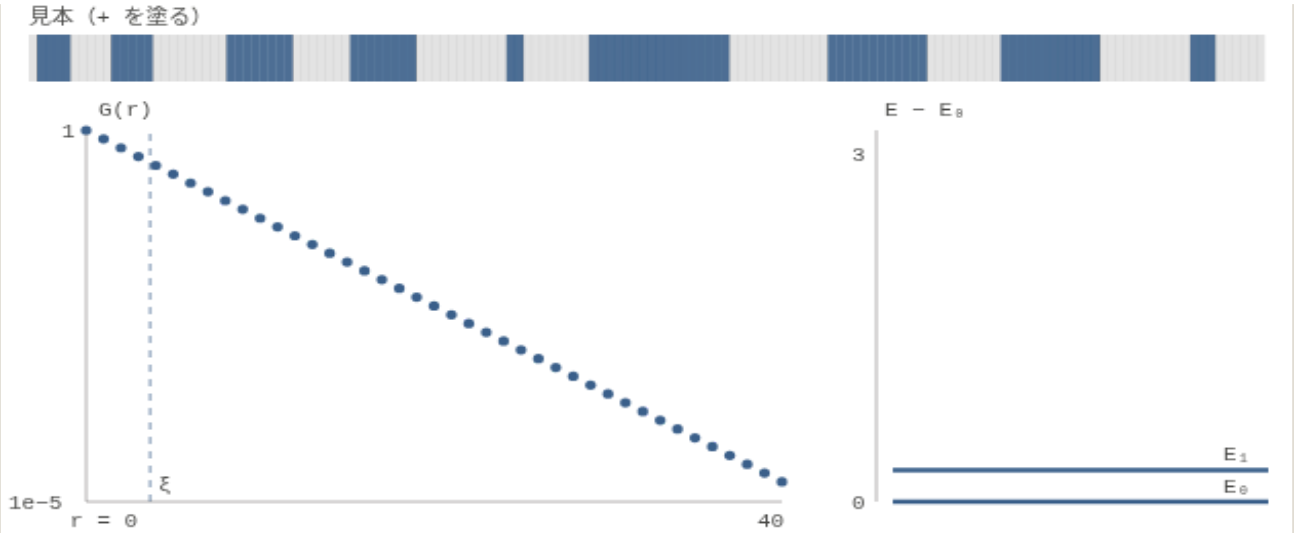
$$G(r) = (\tanh K)^r, \qquad \xi = \frac{1}{\log\coth K} \;\approx\; \frac{e^{2K}}{2} \quad (K\to\infty) \tag{6}$$

計算 **表 1**　$B=0$ の固有値と相関長。

K	λ_0	λ_1	ξ	$e^{2K}/2$
1	3.086161	2.350402	3.671861	3.6945
2	7.524391	7.253721	27.296022	27.2991
3	20.135324	20.035750	201.713984	201.7144

どの $K<\infty$ でも $\lambda_0>\lambda_1$ なので ξ は有限で、外場を切ると $m=\sinh B/\sqrt{\sinh^2 B + e^{-4K}} \to 0$ です。(4) の根号の中は正なので λ_0 は λ_1 と重ならず、一点あたりの自由エネルギー f は $\beta f = -\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log Z_N = -\log\lambda_0$ で、K と B の解析的な関数です。これが一次元に相転移が無いこと（Ising 1925。相転移の定義は 2-08 の 04 節）の、転送行列での理由です 既知 。成分がすべて正の一般の正方行列でも最大固有値は重ならず、これを Perron–Frobenius の定理と呼びます（ここでは名前だけ）。直観では、隣が食い違う割合（壁の割合）$p=\frac{1-\tanh K}{2}\approx e^{-2K}$ がどれほど低温でも 0 にならず、相関は壁を越えるごとに符号を変えるので $\xi\approx 1/(2p)$ です。

図 1　K と B（= βh）を動かすと、上の鎖の見本の塊の長さ、左の G(r)（対数目盛）の傾き、右の準位の間隔 $E_1-E_0 = 1/\xi$ が一緒に変わる。「動かす」で K を増やす（冷やす）



計算 $G(r)$ と準位は (4)(5) をその場で計算、鎖は v_0 から作るマルコフ連鎖の見本（種を固定した乱数）。読み出しは python3 と一致（$K=1$、$B=0.1$ で $\xi=2.9563$）。

04

転送行列は虚時間の量子力学 — 一つのスピンの二準位

$B=0$ の T は e^{K} 倍の単位行列と e^{-K} 倍の $\sigma^x=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$（1-04）の和です。$e^{K^*\sigma^x}=\cosh K^*+\sigma^x\sinh K^*$ と比べると

$$T=\sqrt{2\sinh 2K}\;e^{K^*\sigma^x},\qquad \tanh K^*=e^{-2K}\quad\left(\text{同値な形 }\sinh 2K\,\sinh 2K^*=1\right)\tag{7}$$

と書けます。K^* を双対結合と呼びます（Kramers–Wannier の双対性の量）。$T=e^{-H}$、$H=-K^*\sigma^x+$ 定数 は横向きの磁場の中の一つのスピン、つまり二準位系（2-05）で、ギャップは $E_1-E_0=2K^*=\log\coth K=1/\xi$ です。鎖の方向が虚時間、一目盛りが刻み 1 です（2-07）。結合が強い（低温）ほど K^* は小さく、二準位は寄り、相関は長く続きます。

一般に、T が正の対称行列（無限次元なら正の自己共役作用素）で固有ベクトルが $|n\rangle$ なら、観測量 A の相関は同じ計算で

$$\langle A_0A_r\rangle-\langle A\rangle^2=\sum_{n\geq 1}|\langle 0|A|n\rangle|^2\,e^{-(E_n-E_0)r}\tag{8}$$

です 既知 。例。係数 $\langle 0|A|n\rangle$ が対称性で 0 になる準位は、その A の相関に現れません。ギャップは「どの観測量にも効く最も遅い減り方」で、個々の相関はそれ以上の速さで減ります（2-05 表 2 の後の注）。格子ゲージ理論で転送行列が正の自己共役になることは反射正値性から出ます 既知 （Osterwalder–Seiler 1978 とされる。詳しくは 5-03）。

05

二次元：帯の転送行列 — 2^L 次の行列

正方格子の二次元イジング模型（$B=0$、縦横とも K）を幅 L の帯に置きます。幅の方向は周期的につなぎ（円筒）、長さの方向を虚時間と読みます。一列の状態は 2^L 通りで、列の中の結合を対角行列 $V_1=\exp(K\sum_j \sigma_j\sigma_{j+1})$、隣の列との結合を V_2 とすると、(7) を各点に使って

$$T = V_1^{1/2} V_2 V_1^{1/2}, \qquad V_2 = (2\sinh 2K)^{L/2} \exp\Bigl(K^* \sum_{j=1}^{L} \sigma_j^x\Bigr) \tag{9}$$

です。ここで σ_j^x は j 番目のスピンだけを裏返す 2^L 次の行列、σ_j^z は j 番目のスピンの符号 ±1 を掛ける対角行列で、どちらも他のスピンには何もしません。V_1 の指数は $\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z$ の和、V_2 の指数は σ_j^x の和です。V_1 を半分ずつ両側に置くと T が対称行列になり、04 節の (8) が使えます。T は一列の量子スピンの系（横磁場イジング鎖）の虚時間の一刻みの形です。二次元の古典統計力学が一次元の量子系になりました。

T は全反転 $\sigma\to-\sigma$ と交換するので固有ベクトルは偶と奇に分かれ、偶の最大が λ_0、奇の最大が λ_1、帯の相関長は $\xi_L=1/(E_1-E_0)$ です（de Queiroz 2011 の式 (1)）。臨界点 $\sinh 2K_c=1$（2-08 の (9)）は、(7) から $K^*=K$ となる自己双対の点です。

計算 **表 2**　幅 L の帯の準位の差（E_2 は三番目の準位）。最下段は $L\to\infty$ の式の値（06〜08 節）。

L	$T/T_c=1.5$ E_1-E_0 図 2 へ	**1.2** E_1-E_0 図 2 へ	**1.0** ξ_L/L 図 2 へ	**0.8** E_1-E_0 図 2 へ	**0.8** E_2-E_0 図 2 へ
8	0.666788	0.326116	1.264745	7.731e-3	1.122679
12	0.665579	0.314285	1.269548	1.173e-3	0.969005
16	0.665513	0.311692	1.271177	1.924e-4	0.907939
20	–	0.311069	1.271924	3.287e-5	0.878022
式	0.665509	0.310856	1.273240	0	0.821788

$L=20$（$2^{20}\approx10^6$ 次）も、行列を作らず V_1 と V_2 を順に掛ける作用だけで求めました。三つの温度で振る舞いがまったく違います。

06

高温側 — ギャップは残り、その上に粒子の帯

$T>T_c$（$K<K^*$）では L を広げても E_1-E_0 は正の値に落ち着きます。帯の固有値には閉じた形があり（Onsager 1944。まとめは Domb 1960 の総説、式の形は de Queiroz 2011 の式

(6)〜(8))、その部品が次の $\gamma(\omega)$ です。右の形は $\sinh 2K \sinh 2K^* = 1$ から出ます。

$$\cosh\gamma(\omega) = \cosh 2K^* \cosh 2K - \sinh 2K^* \sinh 2K \cos\omega = \cosh\gamma(0) + (1 - \cos\omega) \quad (10)$$

$\gamma(0) = 2|K^* - K|$ で、表 2 の $E_1 - E_0$ は $2(K^* - K)$ に近づきます 計算 （$T/T_c = 1.5$、$L = 16$ で差 4×10^{-6}）。$\gamma(\omega)$ は運動量 ω の一つの粒子のエネルギーと読めます（自由フェルミオンの見方。Schultz–Mattis–Lieb 1964）。帯の上では運動量が $2\pi n/L$ に量子化され、奇の二番目の準位は $\gamma(2\pi/L)$ に近く、T_c から離れるほどよく合います（$L = 16$ で、$T/T_c = 1.5$ なら 0.763461 と 0.763457、1.2 なら 0.495433 と 0.494596）計算 。$L \to \infty$ でこれらが $\gamma(0)$ まで降り、ギャップの上は連続した帯になります（2-05 の 06 節の実例）。

例。臨界点の近くで γ, ω が小さいと、(10) の右の形を二次まで展開して

$$\gamma(\omega)^2 \approx \gamma(0)^2 + \omega^2 \quad (11)$$

で、相対論の $E^2 = m^2 + p^2$（光速 1、2-04）の形です。正確には、(11) は $\gamma(0)$ と ω が小さいときだけの近似です（$T/T_c = 1.05$、$\omega = 0.1$ で左辺 0.017234、右辺 0.017263）計算 。

07

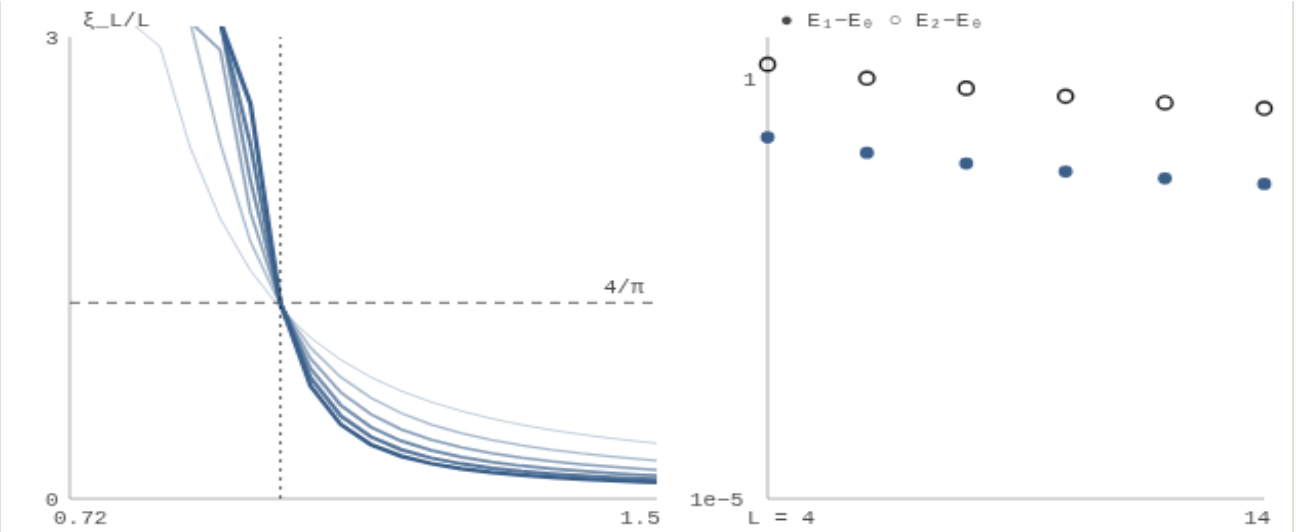
臨界点 — ギャップは 1/L で閉じる

$T = T_c$ では $\gamma(0) = 0$ で、無限に広い帯のギャップは 0 です。有限の帯では ξ_L が L に比例して伸び、比例定数は模型の細部に依らない普遍量です。次の (12) の最初の式（一般の関係）は、共形不変性（臨界点で、角度を保つ変換にも形を変えない、という性質。ここでは名前だけ）からの予言です 物理 （Cardy 1984。形は de Queiroz 2011 の式 (3)(5))。二次元イジングでは、06 節の帯の固有値の閉じた形から同じ値 $4/\pi$ が出ます 既知 。

$$E_1 - E_0 \approx \frac{2\pi x}{L}, \qquad \frac{\xi_L}{L} \longrightarrow \frac{1}{2\pi x} = \frac{4}{\pi} = 1.273240 \quad \left(x = \tfrac{1}{8}\right) \quad (12)$$

x はスピンの尺度次元で、臨界点で $G(r) \sim r^{-2x}$、二次元では 2-08 の $\eta = 1/4$ の半分です。例。計算 $L = 18,\ 20$ の ξ_L/L から、差が c/L^2 で消えると仮定して外挿すると 1.273248 で、$4/\pi$ との差は 8×10^{-6} です。

図 2　T/T$_c$ を動かすと、左の縦線と、右の幅 L ごとの E$_1$ − E$_0$（●）・E$_2$ − E$_0$（○）（対数目盛）が変わる。左は ξ$_L$/L（L = 4〜14、濃いほど広い）と 4/π（破線）。右の破線は L → ∞ の式、点線は低温側の傾き σ。「動かす」で冷やす。表 2 の「図 2 へ」でも温度を選べる



T/Tc = 1.00 L = 14：E₁−E₀ = 0.0562（ξ_L = 17.8） E₂−E₀ = 0.4469 L→∞：ξ_L/L → 4/π = 1.2732

計算 図の数値はこの端末で計算しました（$L=4$〜14、$T/T_c=0.72$〜1.5 を刻み 0.04（最後だけ 0.02）。python3 の値を有効数字 4 桁で埋め込み）。右の破線と点線は (10)(13) の値をその場で計算。

左の線は幅が違っても T_c でほぼ一点に集まり、高温側では L が大きいほど下へ、低温側では上へ開きます。

08

低温側 — 閉じる隙間と、残るギャップ

$T<T_c$ では E_1-E_0 が L とともに指数関数的に小さくなります。帯の上には「ほぼ全部 $+$」と「ほぼ全部 $-$」の二つの状態があり、偶と奇の最大固有ベクトルはその和と差です。一方から他方へ移るには帯を横切る長さ L の壁が要り、その重みは $e^{-\sigma L}$ 程度です。σ は壁の単位長さあたりの自由エネルギー（界面張力）で、二次元イジングでは

$$\sigma = 2(K - K^{*}) \qquad (K > K_c) \tag{13}$$

とされます（反対向きの秩序の境界の自由エネルギーは Onsager 1944 が求めた）。(13) は T_c（$K=K^{*}$ の自己双対点）で 0 になり、$K\to\infty$ では、壁の単位長さあたり食い違う結合一本ぶんの $2K$（重み e^{K} が e^{-K} になる）に近づきます。(7) の関係は K と K^{*} を入れ替えても成り立つ（$\tanh K = e^{-2K^{*}}$）ので、等価な形は $\sigma = 2K + \log\tanh K$ です。2-05 の 07 節の二重井戸と同じ構図です。正確には、山の高さに当たるのが壁の自由エネルギー σL で、幅に比例して高くなります。

一方、三番目の準位との差 E_2-E_0 は閉じず、(10) の粒子二つ分 $2\gamma(0)=4(K-K^{*})$ に近づくとされ、表 3 の外挿はそれと矛盾しません 物理。二つ分になるのは、幅の方向を周期的につないだ一列の中では、向きの食い違いが一周すると元に戻るので偶数個しか入らず、食い違い一つが (10) の粒子一つに当たるからです。

計算 **表 3**　$T/T_c = 0.8$。傾きは $\frac{1}{2}\log\frac{(E_1-E_0)_{L-2}}{(E_1-E_0)_L}$、補正は前因子を $L^{-1/2}$ と仮定したもの、外挿は $L-2$ と L の E_2-E_0（表 2）から、差が c/L^2 で消えると仮定したもの。

L	傾き	補正した傾き	E_2-E_0 の外挿
12	0.46438	0.41880	0.838971
16	0.44854	0.41515	0.827635
20	0.43991	0.41357	0.824247
式	0.410894	0.410894	0.821788

傾きは σ へ、外挿は $4(K-K^*)$ へ向かって動きます。前因子と補正の形は仮定なので、(13) と矛盾しないという水準の確認です。逆に σ を (13) の値に固定し、前因子を L^{-p} として隣の二つの L から p を逆算すると、$L=12,\,16,\,20$ で 0.587、0.564、0.551 と $1/2$ に近づいていきます 計算 。有限の帯（円筒）での一次転移の有限サイズ効果は Privman–Fisher 1983 が論じたとされます。図 2 の右で T/T_c を 1 より下げると、● が傾き σ の点線に平行に並んでいくのが見えます。

大事な読み方です。幅 L が有限なら T の成分はすべて正なので（V_2 の成分は $e^{\pm K}$ の積）、03 節で名前を挙げた Perron–Frobenius の定理により $\lambda_0 > \lambda_1$、つまり $E_1-E_0>0$ です（03 節と同じく相転移はありません）。$E_1-E_0\to 0$ は、幅 L を無限に広げた極限で秩序状態が $+$ と $-$ の二つになる印で、それぞれの上には正のギャップ（上の E_2-E_0 の極限）が残るとされます 物理 。閉じる隙間は「真空が二つある」印で、「質量ギャップが無い」印ではありません。質量ギャップを論じるときは、真空が一つであることを別に確かめます（4-11）。

09

ヤン–ミルズの言葉に戻す

この章の対応を並べます。どれも物理の水準の読み替えで、ヤン–ミルズについて何かを示すものではありません 物理 。表と下の段落の β は格子ゲージ理論の作用に掛かる定数（g^2 の逆に比例。2-08 §08）で、この章の逆温度の β とは別の量です。

イジング模型	格子ゲージ理論	章
$1/\xi = E_1-E_0$	最も軽いグルーボールの質量（格子の単位）	5-08・4-11
帯の幅 L を広げる	空間の箱を広げる	5-04
$K\to K_c$ で $\xi\to\infty$	$\beta\to\infty$ で $\xi(\beta)\to\infty$（連続極限）	5-05・5-09
界面張力 σ	弦張力	5-02・17-03

違いもあります。四次元の非可換ゲージ理論の臨界点は $\beta=\infty$ にあると信じられ、そこへの近づき方を漸近自由が決めます（4-06）。二次元イジングのような閉じた形の解もありませ

ん。

寄り道：Z_2 ゲージ理論とイジング模型

飛ばしてよい小節です。

群を $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ にした格子ゲージ理論（5-01 の形でリンク変数が ± 1）は Wegner 1971 が導入したとされます。三次元では三次元イジング模型と双対で、その Wilson ループの面積則の係数が、双対な結合の三次元イジング模型の界面張力に対応するとされます 既知 （書誌のみ）。次元と群をそろえれば、上の表の最後の行は比喩ではなく等式になります（三次元での話で、この章の二次元の σ そのものではありません）。有限群の格子ゲージ理論は 5-10。

この章が言えている範囲

内容	状態
一次元の (2)〜(7)・二準位の読み替え・(8)	言えている 既知 （表 1・全数え上げ 計算 ）
表 2（$L \le 20$）・高温側の極限・(10) (11)・臨界点の $4/\pi$	式は文献 既知 、数値の一致は 計算 （外挿は c/L^2 を仮定）。(12) の一般の関係は共形不変性からの予言 物理
界面張力 (13)・$E_2 - E_0 \to 4(K - K^*)$・秩序状態の上に残るギャップ	式の形は文献の本文で未確認（「とされる」） 物理 。(13) の両端の値・表 3・前因子の指数は 計算 （表 3 と指数は仮定つきの傾向の確認）
09 節の対応表	物理の水準の読み替え 物理 。質量ギャップ・連続極限の構成について何も示していない
$\mathbb{Z}_2$ ゲージ理論と三次元イジング模型の双対	既知 （書誌のみ・未確認）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1〜3・全数え上げ・分散の照合・前因子の指数・図の数値	計算	python3（NumPy・SciPy の `eigsh`。2^L 次の作用を行列を作らずに掛ける）。図はブラウザの JavaScript
転送行列の方法・一次元の鎖	既知	H. A. Kramers, G. H. Wannier, Phys. Rev. 60 (1941) 252。要旨を確認
$\xi_L = 1/\log(\lambda_0/\lambda_1)$・(10)・双対結合・(12) の形	既知	S. L. A. de Queiroz, Phys. Rev. E 84 (2011) 031107, arXiv:1105.6248。§I・§II の式 (1)〜(9) を確認。閉じた形のまとめ（総説）C. Domb, Adv. Phys. 9 (1960) 149 は書誌のみ

もの	種別	出典・道具
(12) の一般の関係（共形不変性から）	物理	J. L. Cardy, J. Phys. A 17 (1984) L385。要旨を確認
帯の固有値の閉じた形・境界の自由エネルギー（(13) の出所）	既知	L. Onsager, Phys. Rev. 65 (1944) 117。要旨を確認（円筒の帯の固有値問題と、境界の自由エネルギーを扱っていること。(13) の式の形は未確認）
自由フェルミオン／一次元で相転移が無いこと	既知	T. D. Schultz, D. C. Mattis, E. H. Lieb, Rev. Mod. Phys. 36 (1964) 856／E. Ising, Z. Phys. 31 (1925) 253。いずれも書誌のみ
Z_2 ゲージ理論と双対	既知	F. J. Wegner, J. Math. Phys. 12 (1971) 2259（書誌のみ・未確認）
格子ゲージ理論の転送行列と反射正値性	既知	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（書誌のみ・未確認）
有限の帯での一次転移の有限サイズ効果	既知	V. Privman, M. E. Fisher, J. Stat. Phys. 33 (1983) 385（書誌のみ・未確認）

次に読む章：2-10 緩和の時間と動的指数 z。あわせて読むなら 3-01 ゲージ原理。ギャップの定義の本体は 4-11、格子の転送行列は 5-03。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 2 部 物理の準備 緩和と動的指数

緩和の時間と動的指数 z — 平衡へ向かう速さは、相関長の何乗で遅くなるか

この章は既存の知見の整理です。§05 は本書の検討です。

この章で分かること — 同じ平衡の分布を作る力学（Langevin・Glauber・熱浴）の緩和時間を Poincaré 定数 C_P で測ること。ガウス鎖と一次元イジングでは緩和時間が相関長の二乗（$z = 2$）になり、二次元イジングの臨界点ではそれより遅くなること。動的指数 z と $\eta_{\mathrm{dyn}} = 2 - z$ の定義と、$z = 2$ の型が破れる既知の例。

前提となる章 — 2-08（相関長・臨界点・ガウス鎖）と 2-09（イジング模型の転送行列）。Poincaré 不等式は 1-10 §07、ブラウン運動は 1-09 §06 を読んでいると楽です。

先に言うこと — 厳密なのはガウス鎖と一次元の鎖だけです。z の値（2.1665 など）は数値と物理の予言で、二次元イジングのこの端末の計算は一辺 5 までの小さな箱です。この章はヤン–ミルズの質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. 時間を足す — 平衡の写真と、それを作る機械
2. Langevin の力学 — 隙間の逆数が Poincaré 定数
3. Glauber の力学（表 1）— 一次元では $\tau \approx 2\xi^2$
4. ガウス鎖の Langevin（図 1・表 2）— $C_P = \xi^2$ は連続極限で厳密
5. 二次元イジングの小さな箱（表 3・図 2）— 臨界点で C_P/L^2 が伸びる
6. 動的指数 z と η_dyn — $\eta_{\mathrm{dyn}} := 2 - z$ をここで定める
7. z ≠ 2 の既知の例（表 4・寄り道：保存する力学では z = 4）
8. 熱浴と Langevin を同一視しない — 定数・単位・変数の取り方
9. ヤン–ミルズへの橋 — 分かっていること、いないこと

01

時間を足す — 平衡の写真と、それを作る機械

2-08 と 2-09 で扱ったのは平衡の分布、つまり「どの配位がどれだけの確率で現れるか」でした。そこには時間がありません。ところが計算機で平衡の分布から見本を引くとき、あるいは物理の系が熱浴に触れて平衡に向かうとき、配位は時間とともに動きます。この章は、その動きの速さを測ります。

比喩で言うと、平衡の分布は一枚の写真で、力学はそれを作る機械です。同じ写真を作る機械は速いものも遅いものもあります。正確には、一つの確率測度 μ を不変にするマルコフ過程（先の動きが今の配位だけで決まる確率的な動き）は一つに決まらず、選び方で平衡への近づき方が変わります。

この章の時間 s は、2-09 の虚時間とは別物です（対照は 18-03 §05）。

虚時間（2-07・2-09）	力学の時間 s（この章）
配位の**中**の一つの向き。相関 $\langle\sigma_0\sigma_r\rangle$ の減り方が相関長 ξ を決め、$1/\xi$ は転送行列のギャップ。	配位**全体**が動く外の時間。自己相関の減り方が緩和時間 τ を決め、$1/\tau$ は生成作用素のギャップ。

主題は関係 $\tau \approx \xi^{z}$ で、z を動的指数と呼びます。後の部の仮定（A-06 名前の索引）は $z=2$ を冪の水準で置く型をしています。その型が成り立つ例と破れる例を、ここで先に並べます。

02

Langevin の力学 — 坂を下る動きに揺らぎを足す

一つの実数 X が、確率密度 $e^{-V(x)}/Z$ に従うようにしたいとします。坂 V を下る向きに動かし、同時に乱数で揺らすと、二つの効果が釣り合ったところで分布が止まります。これが Langevin の力学です。

$$dX = -V'(X)\,ds + \sqrt{2}\,dW(s) \tag{1}$$

W はブラウン運動（1-09 §06）で、dW は時間 ds のあいだの平均 0・分散 ds のガウスの増分です。係数 $\sqrt{2}$ は、止まる分布がちょうど e^{-V} になるように選んだものです。

関数 f の期待値の時間変化を生む作用素を生成作用素と呼び、$\mathcal{L}$ と書きます。$f(X+dX)$ を二次まで展開すると、dX の一次の項からは坂の向きの $-V'f'\,ds$ が、二次の項からは dW^2 の

平均が ds なので $\frac{1}{2} f'' \cdot 2\,ds$ が残ります（ds より高い次数は落とす）。こうして (1) では

$$\mathcal{L} f = f'' - V' f', \qquad \frac{d}{ds}\,\mathbb{E}\, f(X_s) = \mathbb{E}\,(\mathcal{L} f)(X_s), \qquad \int f\,(-\mathcal{L} g)\,d\mu = \int f' g'\,d\mu \tag{2}$$

です（$\mu = e^{-V} dx / Z$。最後の等式は部分積分）。最後の等式から $-\mathcal{L}$ は $L^2(\mu)$ で対称で、0 以上です。0 になるのは定数だけで、その次の固有値（隙間）を $\mathrm{gap}(\mathcal{L})$ と書きます。

隙間の逆数が Poincaré 定数です（1-10 §07）。

$$\mathrm{Var}_\mu f \;\le\; C_P \int |f'|^2\,d\mu \quad (\text{すべての } f), \qquad C_P = \frac{1}{\mathrm{gap}(\mathcal{L})} \tag{3}$$

平衡から走らせたとき、どの観測量の自己相関も e^{-s/C_P} より速く減り、ちょうどこの速さで減る観測量があります。つまり最も遅い緩和の時間 $\tau_{\exp}$ は C_P に等しくなります 既知 。この等号は連続時間で可逆な力学の性質で、離散時間の連鎖では三つの量に割れます（18-03 §06）。

例。$V = x^2/(2\sigma^2)$ なら (1) は Ornstein–Uhlenbeck 過程で、$f = x$ が固有関数、$\mathcal{L} x = -x/\sigma^2$ です。よって $C_P = \sigma^2$：分散が大きい（裾が広い）ほど緩和は遅くなります。変数が多いときは、各点の場 ϕ_x ごとに (1) を立てて

$$d\phi_x = -\frac{\partial S}{\partial \phi_x}\,ds + \sqrt{2}\,dW_x(s) \tag{4}$$

とし（W_x は点ごとに独立）、(3) の $|f'|^2$ を勾配の長さの二乗 $|\nabla f|^2$ に替えます。止まる分布は e^{-S}/Z です。場の理論ではこれを確率量子化と呼びます（7-09）。

03 Glauber の力学 — スピンを一つずつ裏返す

イジング模型のスピンは ± 1 なので、坂を連続に下ることができません。代わりに、各スピンが独立な時計を持ち、時計が鳴るとスピンを条件つき分布から引き直します。これを熱浴の規則と呼び、連続時間でこれを行う力学を Glauber の力学と呼びます（Glauber 1963 は一次元の閉じた鎖でこの型の過程を詳しく解析した） 既知 。

逆温度を結合に含めた K（2-09 と同じ）で $\mu(\sigma) \propto \exp(K \sum_{\langle xy \rangle} \sigma_x \sigma_y)$ とします。スピン j を裏返した配位を σ^j、隣の和を $h_j = \sum_{y \sim j} \sigma_y$ とすると、熱浴の反転の率は

$$w_j(\sigma) = \frac{1}{1 + e^{2K \sigma_j h_j}}, \qquad \mu(\sigma)\, w_j(\sigma) = \mu(\sigma^j)\, w_j(\sigma^j) \tag{5}$$

です。右の式は詳細釣り合いで、「σ から σ^j へ流れる確率」と逆向きの流れが等しいことを言います。これから μ が止まる分布で、力学は可逆です。揃っているスピン（$\sigma_j h_j > 0$）ほど裏返りにくくなります。生成作用素は $(\mathcal{L}f)(\sigma) = \sum_j w_j(\sigma)\big(f(\sigma^j) - f(\sigma)\big)$、(3) の右辺の $\int |f'|^2$ は $\frac{1}{2}\sum_\sigma \mu(\sigma)\sum_j w_j(\sigma)\big(f(\sigma^j)-f(\sigma)\big)^2$ に替わり、$C_P = 1/\mathrm{gap}(\mathcal{L})$ は同じです。

一次元の鎖は解ける

一次元では $h_j \in \{-2, 0, 2\}$ なので $w_j = \frac{1}{2}\big(1 - \frac{g}{2}\sigma_j(\sigma_{j-1}+\sigma_{j+1})\big)$、$g = \tanh 2K$ と書けます。スピンの期待値は一回の反転で 2 だけ変わるので $\frac{d}{ds}\langle\sigma_j\rangle = -2\langle\sigma_j w_j\rangle$ で、

$$\frac{d}{ds}\langle\sigma_j\rangle = -\langle\sigma_j\rangle + \frac{g}{2}\big(\langle\sigma_{j-1}\rangle + \langle\sigma_{j+1}\rangle\big) \tag{6}$$

と閉じます。全体の磁化 $M = \sum_j \sigma_j$ の平均は $e^{-(1-g)s}$ で減ります。一方、静的な相関は $\langle\sigma_0\sigma_r\rangle = (\tanh K)^r$ で（2-09 §03）、

$$\tau = \frac{1}{1-\tanh 2K}, \qquad \xi = \frac{-1}{\log\tanh K}, \qquad \frac{\tau}{\xi^2} \xrightarrow[K\to\infty]{} 2 \tag{7}$$

です。極限は $1-\tanh 2K \approx 2e^{-4K}$、$-\log\tanh K \approx 2e^{-2K}$ から出ます。冷やすほど相関は長くなり、緩和はその二乗で遅くなります：この力学では $z = 2$ です。

計算 表 1　一次元の Glauber 力学。$N = 8,\ 10$ 点の輪の生成作用素を全状態（2^N 個）で対角化し、隙間が $K = 0.25,\ 0.5,\ 1,\ 1.5$ のすべてで $1-\tanh 2K$ と 10 桁一致することを確かめた。この二つの輪では磁化の減衰が最も遅い緩和です。一般の N では、磁化の減衰率 $1-\tanh 2K$ が隙間の上界を与えます（磁化が $\mathcal{L}$ の固有関数なので）。

K	ξ	$\tau = 1/(1-\tanh 2K)$	τ/ξ^2
0.50	1.295	4.195	2.499
1.00	3.672	27.80	2.062
1.50	10.03	202.2	2.008
2.00	27.30	1491	2.001
3.00	201.7	81378	2.00002

04

ガウス鎖の Langevin — 長い波ほど遅く、緩和時間は相関長の二乗

2-08 の (7) のガウス鎖（2-08 の $H(\phi)$。ここでは作用として S と書く）$S = \frac{1}{2}\sum_x[(\phi_{x+1}-\phi_x)^2 + m^2\phi_x^2]$ に (4) を使います。$\partial S/\partial\phi_x = (2+m^2)\phi_x - \phi_{x+1} - \phi_{x-1}$ は一次式なので、波数 q のフーリエ成分 $\hat\phi_q = \sum_x e^{-iqx}\phi_x$（1-11）ごとに方程式が分かれます。

$$d\hat\phi_q = -\omega_q\,\hat\phi_q\,ds + (\text{雑音}), \qquad \omega_q = m^2 + 4\sin^2\frac{q}{2} \tag{8}$$

どの成分も (1) の Ornstein–Uhlenbeck 過程で、減る速さは ω_q です。最も遅いのは一様な成分 $q=0$ で、速さは m^2 です。したがって $C_P = 1/m^2$ です（1-10 §09 の「ガウス測度の C_P は共分散の最大固有値」と同じ数） 既知 。

相関長は 2-08 の (8) で $\cosh(1/\xi) = 1 + m^2/2$ でした。$\cosh u - 1 = 2\sinh^2(u/2)$ を使うと、二つは一つの式でつながります。

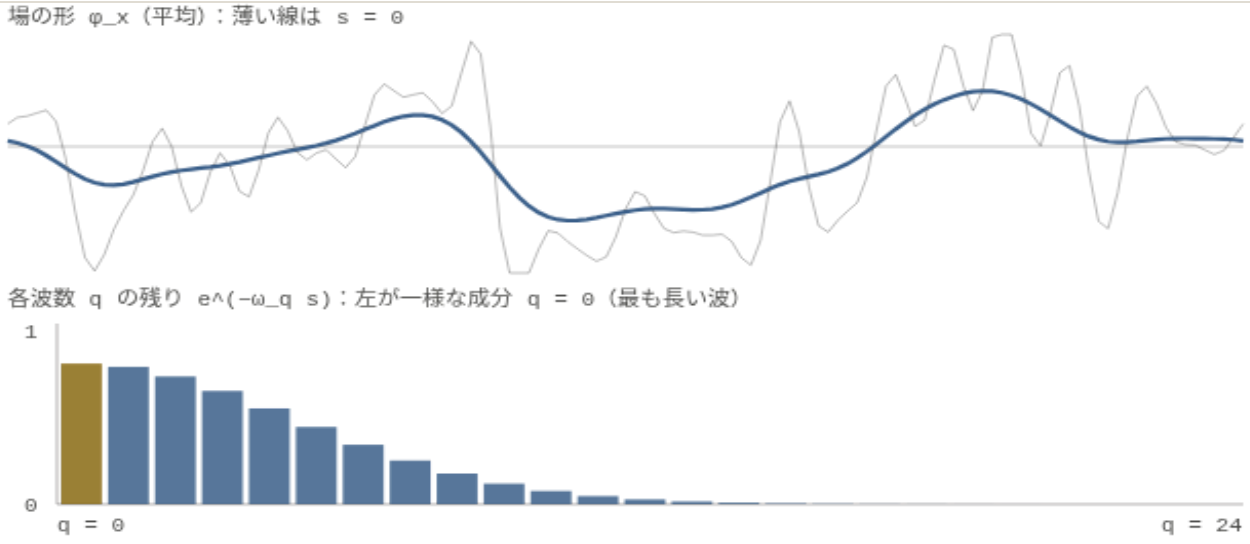
$$\frac{1}{C_P} = m^2 = 4\sinh^2\frac{1}{2\xi}, \qquad \frac{C_P}{\xi^2} = \left(\frac{1/(2\xi)}{\sinh(1/(2\xi))}\right)^2 \xrightarrow[\xi\to\infty]{} 1 \tag{9}$$

これは厳密な等式で、格子の上では C_P は ξ^2 より少しだけ小さく、連続極限（$\xi \to \infty$）で $C_P/\xi^2 \to 1$ になります。連続の自由場では $C_P = \xi^2$ がちょうど成り立ちます 既知 （初等的な導出。表 2 の数値は 計算 ）。

なぜ二乗か

なぜ二乗か。(8) の雑音を除いた平均の動きは質量の付いた熱方程式 $\frac{d}{ds}\phi = \Delta_{\text{lat}}\phi - m^2\phi$ です。拡散は長さ ℓ のでこぼこを均すのに ℓ^2 程度の時間をかけ（酔歩と同じ）、質量の項は ξ より長い波を一律の速さ m^2 で消します。だから時間は ξ^2 です。正確には、(8) の ω_q が小さい q で $m^2 + q^2$ に近づき、$q \lesssim 1/\xi$ では m^2 で底を打つことが、この説明の中身です。

図 1　ガウス鎖（128 点の輪）の平均の動き。m を小さくすると、長い波（左の棒）が残る時間が $1/\text{m}^2$ で伸びる。時間 s を動かすと上の形が均され、下の棒（各波数の残り $\text{e}^{-\omega_q \text{s}}$）が右から順に消える



計算 図の曲線は (8) の厳密な解 $\hat\phi_q(s) = e^{-\omega_q s}\hat\phi_q(0)$ をその場で計算したもの（初期の形は種を固定した乱数で作った）。雑音を除いた平均の動きで、揺らぎの見本ではない。

計算 表 2　ガウス鎖の ξ・C_P。最後の二列は 08 節の熱浴の下界（線形の関数の上の減り方から決まる）

m	ξ	$C_P = 1/m^2$	C_P/ξ^2	熱浴の下界 $(2+m^2)/m^2$	下界／Langevin
1.00	1.039	1	0.9263	3	3.000
0.50	2.020	4	0.9798	9	2.250
0.20	5.008	25	0.9967	51	2.040
0.10	10.004	100	0.99917	201	2.010
0.02	50.001	2500	0.999967	5001	2.000

転送行列のギャップと並べた表は 18-03 の表 1、市松模様の熱浴で測った表は 5-07 §07 にあります。

05

二次元イジングの小さな箱 — 臨界点では C_P/ξ^2 が伸びる

相互作用があると、式は閉じません。そこで二次元イジング模型の $L \times L$ の箱（周期境界）で、Glauber の力学 (5) の生成作用素を数値で対角化し、C_P を求めます。状態は 2^{L^2} 個で、$L = 5$ では約 3,400 万個です。最も遅い緩和は磁化の向き（並進で不変、全反転で符号が変わる部分空間）にあると期待されます。$L = 3,\ 4$ では全空間の隙間とこの部分空間の隙間が、下の七つの温度のすべてで 8 桁一致しました 計算 。$L = 5$ では全空間を扱えないので、この部分空間（671,104 次元）に絞って隙間を求めました。その値は全空間の隙間以上なので、$L = 5$ の C_P は真の C_P の下界です。

臨界点 $K_c = \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})$（2-08 §04）では無限の系の ξ は無限大で、箱の中の相関の届く長さは箱の大きさ L で頭打ちになります（2-09 §07）。そこで ξ の代わりに L を物差しにします。$\tau \approx \xi^{z}$ が正しければ

$$C_P(L) \approx L^{z}, \qquad \frac{C_P(L)}{L^2} \approx L^{z-2}, \qquad z_{\mathrm{eff}}(L, L') = \frac{\log\bigl(C_P(L')/C_P(L)\bigr)}{\log(L'/L)} \tag{10}$$

です。z_{eff} は隣り合う大きさから読む有効な指数で、$L \to \infty$ で z に近づくと期待されます。

計算 表 3　二次元イジング・連続時間の熱浴（各スピンが率 1 で引き直す）・$L \times L$ 周期境界の $C_P = 1/\mathrm{gap}$。時間の単位は「一スピンあたり一回の試み」

K/K_c	$L=3$	$L=4$	$L=5$	$z_{\mathrm{eff}}(3,4)$	$z_{\mathrm{eff}}(4,5)$	図 2 へ
0.6	5.759	6.267	6.474	0.29	0.15	選ぶ
0.8	14.56	19.34	22.83	0.99	0.74	選ぶ
0.9	24.56	38.47	52.26	1.56	1.37	選ぶ
1.0	42.89	82.84	137.4	**2.29**	**2.27**	選ぶ

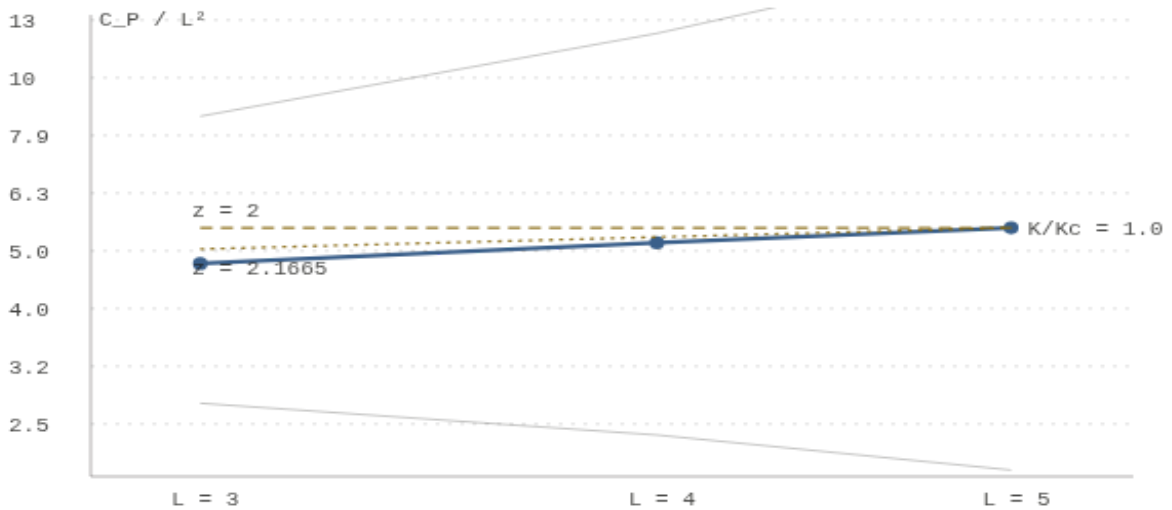
K/K_c	$L=3$	$L=4$	$L=5$	$z_{\mathrm{eff}}(3,4)$	$z_{\mathrm{eff}}(4,5)$	図 2 へ
1.1	77.18	191.0	408.0	3.15	3.40	選ぶ
1.2	142.4	464.6	1324	4.11	4.69	選ぶ
1.5	997.9	7906	56656	7.19	8.83	選ぶ

三つの振る舞い

三つの振る舞いが読めます。高温側（$K/K_c = 0.6$）では C_P は 6 あたりで頭打ちになり、z_{eff} は 0 に向かいます：ξ が有限なら緩和時間も有限です。低温側（$K/K_c = 1.5$）では $\log C_P$ が L とともにほぼ一定の差で増え（差は 2.07、1.97）、冪よりも指数関数に近い伸び方をします。「ほぼ全部 $+$」から「ほぼ全部 $-$」へ移るには箱を横切る壁を作る必要があり、その重みが壁の長さに比例する指数 e^{-cL} で小さくなるためと考えられます 物理 。周期境界の箱では壁が二枚要るので、c は界面張力 σ の 2 倍程度と期待されます。ただし $K/K_c = 1.5$ の $2\sigma \approx 1.55$ と $L \le 5$ の差 2 前後はまだ合わず、この箱で言えるのは「指数関数で伸びる傾向」までです。似た構図は 2-09 §08 の閉じる隙間にあります。

臨界点では C_P/L^2 が $4.77,\ 5.18,\ 5.50$ と増え続け、z_{eff} は $2.29,\ 2.27$ です。2 より大きい側にあります。より大きな箱（15×15 まで）の数値で知られている値は $z = 2.1665(12)$（Nightingale–Blöte 1996、熱浴）で 物理 、この端末の小さな箱の値はその上から近づいていくようにも読めますが、二点では判断できません。言えるのは「$L \le 5$ の範囲で C_P/L^2 は一定に落ち着かない」までです。

図 2　二次元イジングの C_P/L^2（両対数・縦軸は選んだ温度に合わせて拡大）。温度を動かすと、選んだ線（●）と右の読み出しの z_{eff} が変わる。破線は $z=2$（水平）、点線は $z=2.1665$ の傾き（どちらも $L=5$ の点を通す）。「動かす」で温度を順に替える。表 3 の「選ぶ」でも選べる



K/Kc = 1.0　C_P = 42.89, 82.84, 137.4（L = 3, 4, 5）　z_eff = 2.29（3→4）, 2.27（4→5）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（表 3 の値を埋め込み）。$L=2$ は隣が重なる特殊な箱なので除いた。

06

動的指数 z と η_{dyn} — 冪が 2 からずれる量に名前を付ける

物理では、ξ が伸びるとき緩和時間が ξ の冪で伸びるという仮説を置きます。動的スケーリングの仮説と呼び、静的なスケーリング（2-08 §06）を時間を含む相関に広げたものとされます（Ferrell ほか 1967、Halperin–Hohenberg 1967、詳しい展開は 1969）物理。可逆な連続時間の力学について数学の言葉にすると

$$C_P \asymp \xi^{\,z}, \qquad \eta_{\mathrm{dyn}} := 2 - z, \qquad C_P \asymp \xi^{\,2-\eta_{\mathrm{dyn}}} \tag{11}$$

です。$A \asymp B$ は、比 A/B が上下とも正の定数で挟まれることを表します。この本では η_{dyn} をこの式で定めます。名前の由来は、自由場の $C_P \approx \xi^2$ からのずれを冪で測る量だという点にあります。

2-08 の (13) の η とは別の量です。2-08 の η は臨界点の静的な相関 $G(x) \sim |x|^{-(d-2+\eta)}$ の冪のずれで、動的な量と区別するときは η_s と書きます。二つが一致するのは「緩和時間は帯磁率に比例する」とする従来の理論（van Hove の名で呼ばれる）の中だけで、二次元イジングでは $\eta_s = 1/4 > 0$ なのに $\eta_{\mathrm{dyn}} \approx -0.17 < 0$ と符号まで違います（18-03 §07 の表 2）。

型 z = 2	遅すぎる側	速すぎる側
$z = 2$、$\eta_{\mathrm{dyn}} = 0$ ガウス鎖の Langevin（(9)）・一次元の Glauber（(7)）で成り立つ	$z > 2$、$\eta_{\mathrm{dyn}} < 0$ 二次元・三次元のイジングの Glauber（数値）・保存する力学	$z < 2$、$\eta_{\mathrm{dyn}} > 0$ 非局所な更新（クラスター法）。局所的な力学では下界 $z \geq \gamma/\nu$（γ, ν は帯磁率と相関長の静的な指数）が二つのスケーリング仮説の下で出る（18-03 §07）物理。イジングの局所的な力学では臨界点で $z \geq 2$ が定理（§07）

第 23 部の拡散型緩和時間の仮定（23-01）は、格子ヤン–ミルズの Langevin 力学について、この左の型を冪の水準で置いた文 $\lim \ln C_P / \ln \xi = 2$（$C_P = \xi^{2+o(1)}$、$\eta_{\mathrm{dyn}} = 0$）です。帯の文 $C_P \asymp \xi^2$ は 23-01 で帯の形の拡散型緩和時間の仮定と呼び、拡散型緩和時間の仮定とは別に扱います（A-06 名前の索引）。それが成り立つかは証明されていない仮定で、物理の側の対応は 18-05 §03 で問いの形で並べます。この章で確認したいのは、型そのものは自明でなく、力学を一つ替えれば破れる、ということです。その例が次の節です。

07

$z \neq 2$ の既知の例 — 型が破れる三つの道

表 4 は、$C_P \asymp \xi^2$ の型が破れる既知の例です。破れ方は三つの道に分かれます。

相互作用で冪がずれる。二次元・三次元のイジングの Glauber 力学では、数値で z が 2 をわずかに超えます。局所的な規則のままでも、相互作用が冪を動かします。数学では、二次元の臨界イジングの Glauber 力学で隙間の逆数が L の多項式で押さえられることが示されています（Lubetzky–Sly）既知 。下からは、周期境界の臨界点（と低温側）で熱浴の隙間が $C(\log L/L)^2$ 以下であること、つまり $z \geq 2$ が示されています（Masaoka–Soejima–Watanabe 2025。局所的で可逆な一スピン反転の力学に広がる）既知 。二次元の臨界点では $(L/\log L)^2 \lesssim C_P(L) \leq \mathrm{poly}(L)$ が定理で、§06 の「速すぎる側」は局所的なイジングの力学では起きません。冪の値 z そのものを決めた定理は見当たりません。

保存量で遅くなる。磁化の総和を変えない（隣どうしのスピンを交換する）力学では、一様な成分は動けず、長い波は拡散で運ばれるのでさらに遅くなります。物理の予言は $z = 4 - \eta_s$ とされます（Hohenberg–Halperin の分類で model B）物理 。

更新の仕方で速くなる。Swendsen–Wang のクラスター法は塊ごと裏返す非局所な力学で、要旨は動的な普遍性を破り 'unusually small values of the dynamical critical exponent' を与えると書きます 物理 。同じ平衡の分布でも、機械を替えれば z が替わります。

物理 表 4　z の値の例（数値・予言の値は一次資料の要旨から。$\eta_{\mathrm{dyn}} = 2 - z$ はこの端末で計算）

模型・力学	z	η_{dyn}	水準
ガウス鎖・Langevin（(9)）／一次元イジング・Glauber（(7)）	2	0	既知 （厳密）
二次元イジング・熱浴（Glauber）	2.1665(12)	−0.1665	物理 数値
三次元イジング・Glauber	2.032(3)	−0.032	物理 数値
保存する力学（model B）・三次元イジング類	3.972(2)	−1.972	物理 数値（予言 $4 - \eta_s$）
保存する力学・ガウス鎖（下の寄り道。波数 $1/\xi$ の成分の緩和時間で測る）	4	−2	計算 （閉じた式）
純ゲージの HMC・位相電荷の二乗	約 5	約 −3	物理 数値（18-03 §08）

最後の行は格子ゲージ理論の計算で実際に現れる遅さです。HMC（ハイブリッド・モンテカルロ。仮の運動量を足して決定論的に動かす更新法。5-07 §08）は Langevin と別の力学で（次節）、同じ遅さが Langevin でも起きるかは 23-02 四次元格子で試した道と壁 で扱います。

寄り道：保存する力学では $z = 4$

飛ばしてよい。ガウス鎖で、(4) の駆動 $-\partial S/\partial\phi$ を格子のラプラシアン Δ_{lat} にもう一度通し、雑音も隣どうしの差の形にすると、$\sum_x \phi_x$ が保存されます。(8) の減る速さは

$$\omega_q^{(\mathrm{B})} = 4\sin^2\frac{q}{2}\left(m^2 + 4\sin^2\frac{q}{2}\right) \tag{12}$$

に替わり、$q = 0$ は止まります（保存量なので減らない）。波長が相関長ほどの成分 $q = 1/\xi$ の緩和時間は $1/\omega_{1/\xi}^{(\mathrm{B})} \approx \xi^4/2$ です。この端末の計算では $m = 0.5,\ 0.1,\ 0.02$ で $\tau/\xi^4 = 0.510,\ 0.5004,\ 0.50002$ でした 計算 。無限の鎖では $q \to 0$ の成分がいくらでも遅いので隙間は 0 で、$C_P = \infty$ です。型 $C_P \asymp \xi^2$ は、ここでは意味を失います。

08

熱浴と Langevin を同一視しない — 同じ写真、別の機械

「緩和時間」は、どの力学の時間かを言わないと決まりません。熱浴と Langevin は同じ分布に対して別の生成作用素を持ちます。

ガウス鎖で比べます。連続時間の熱浴（各点が率 1 で、隣を固定した条件つき分布 $\mathcal{N}\big((\phi_{x-1}+\phi_{x+1})/(2+m^2),\ 1/(2+m^2)\big)$ から引き直す）では、場の値の平均は

$$\frac{d}{ds}\,\mathbb{E}\,\phi_x = -\phi_x + \frac{\phi_{x-1}+\phi_{x+1}}{2+m^2} = -\frac{1}{2+m^2}\,\frac{\partial S}{\partial \phi_x} \tag{13}$$

で動きます。線形の関数はこの生成作用素の固有関数で、一様な成分の減る速さは $m^2/(2+m^2)$ です。したがって熱浴の C_P は $(2+m^2)/m^2$ 以上です 計算 （64 点の輪の行列で確認）。この下界は ξ^2 の 2 倍ほどなので、熱浴では $z \geq 2$ です。表 2 の右の二列のとおり、下界と Langevin の C_P の比は $\xi \to \infty$ で 2 に近づきます。幂が同じだとしても、定数は違います。

定数のほかの違い

違いは定数だけではありません。

- **変数の取り方**。熱浴は各点の変数を付け替えても（$\psi_x = c\,\phi_x$ など）同じ過程です。条件つき分布から引くという操作が座標に依らないからです。Langevin の C_P は勾配の長さで測るので、$\psi = c\,\phi$ で測れば c^2 倍になります。格子ゲージ理論で「リンクの角度 ϑ で測るか、場 $A = \sqrt{\beta}\,\vartheta$ で測るか」で C_P が β 倍変わるのはこのためです。$\beta \sim \ln\xi$ なので幂の文（拡散型緩和時間の仮定）は変わりませんが、帯の文は変わります（1-10 §09・23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定）。

- **時間の単位**。熱浴の時間は「一点あたりの試みの回数」、Langevin の時間は (1) の s です。離散時間で一掃ずつ進める熱浴（5-07 §07）はさらに別の量で、C_P・緩和時間・$\tau_{\exp}$ が割れます（18-03 §06）。
- **指数**。保存量が同じ（どちらも model A 型：磁化を保存しない）局所的で可逆な二つの力学は同じ z を持つ、と物理では期待されます（同じ動的普遍類）物理 。§07 の保存する力学は保存量が違う（model B）ので、この期待の反例ではありません。ガウス鎖では Langevin が $z=2$、熱浴は線形の関数からの下界で $z \geq 2$ までが式で言えます。熱浴の隙間が線形の関数で決まり等号になることは、この章では示していません。一般に二つの力学の z が等しいことを示した定理を、この章は持っていません。

この本で C_P と書くときは、断りのない限り Langevin (4) の生成作用素の隙間の逆数で、どの変数の勾配で測ったかを添えます。熱浴や HMC の数値を Langevin の C_P に読み替えるのは、仮定です。

09

ヤン–ミルズへの橋 — どこで使い、何が分かっていないか

格子ヤン–ミルズでも、(4) の Langevin 力学は立てられます。変数がリンクの群の元なので、勾配は群の上の微分（1-03）で取ります。連続の場で同じことを行うのが確率量子化（7-09）、計算機で同じ分布から見本を引くのがモンテカルロ法（5-07）です。

強結合（β が小さい側）では、格子ヤン–ミルズの Poincaré 不等式と log-Sobolev 不等式（(3) より強い不等式で、エントロピーの減り方を押さえる）が示されています（Shen–Zhu–Zhu 2023）既知 。これは ξ が有限の側の結果です。四次元で C_P の $\xi \to \infty$ での冪を決めた定理はありません。

この章から先へ

$z=2$ の型を格子ヤン–ミルズの Langevin 力学で冪の水準の文 $\lim \ln C_P / \ln \xi = 2$（$C_P = \xi^{2+o(1)}$、$\eta_{\mathrm{dyn}} = 0$）として置くのが 23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定 です。帯の文 $C_P \asymp \xi^2$ は 23-01 で帯の形の緩和時間の仮定と呼んで別に扱います。比喩での入口は 23-00（にじむ時間と定規）、物理の言葉との突き合わせは 18-05 §02（記録の η を η_{dyn} に固定する）、ξ と C_P の二つのギャップの辞書は 18-03 §05〜§07 です。この章は質量ギャップについて何も示していません。

この章が言えている範囲

内容	状態
Langevin (1)(4) の生成作用素 (2)、$\tau_{\exp} = C_P$（連続時間で可逆な力学）、熱浴の詳細釣り合い (5)	言えている 既知
一次元の Glauber 力学 (6)(7)、磁化の減衰率 $1-\tanh 2K$、$\tau/\xi^2 \to 2$	言えている 既知 （(6) の導出はこの章で行った）。隙間 $= 1-\tanh 2K$ は $N = 8, 10$ の輪で 計算 。一般の N では磁化の減衰率が隙間の上界を与える
ガウス鎖の (8)(9)、$C_P/\xi^2 \to 1$、保存する力学の (12) と $\tau \approx \xi^4/2$、熱浴の (13) と下界 $C_P \geq (2+m^2)/m^2$（熱浴は $z \geq 2$ まで）	言えている（式は厳密） 既知 （初等的な導出）。表 2 と (12) の数値は 計算
表 3：二次元イジングの $L \leq 5$ の C_P と z_{eff}	計算 （厳密な対角化。磁化の部分空間への制限は $L \leq 4$ で全空間と照合、$L = 5$ は部分空間の値で真の C_P の下界）。z を決めたものではなく、傾向の確認
動的スケーリング $C_P \asymp \xi^z$、表 4 の z の値、model B の $4-\eta_s$、局所的な二つの力学が同じ z を持つこと	物理 （仮説・数値・予言）。二次元臨界イジングで $(L/\log L)^2 \lesssim C_P(L) \leq \text{poly}(L)$（下から $z \geq 2$、上は多項式）は 既知 、冪の値は定理になっていない
$\eta_{\text{dyn}} := 2 - z$	この本の定義（以後の章で共通）
ヤン–ミルズの C_P の ξ 依存	言えていない。四次元で決めた定理は無く、緩和時間の仮定（冪の水準の文、23-01 §05）も帯の文（帯の形の緩和時間の仮定）も仮定のまま。この章は質量ギャップ・連続極限の構成について何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1・表 2・表 3、(9)(12)(13) の数値、図 1・図 2	計算	python3（NumPy・SciPy。表 3 は生成作用素を並進と全反転で約した部分空間の疎行列にし、Lanczos 法で最小固有値）。図はブラウザの JavaScript。スクリプトは計算の記録に残してある
Glauber の力学・一次元の鎖	既知	R. J. Glauber, "Time-dependent statistics of the Ising model", J. Math. Phys. 4 (1963) 294–307。要旨を確認（熱浴に触れた閉じた N 点の鎖のマルコフ過程を解析し、スピンの期待値と相関を陽に求めた）。本文は未読で、(6) はこの章で導いたもの
Poincaré 定数・連続時間と離散時間の違い	既知	D. A. Levin, Y. Peres, E. L. Wilmer, *Markov Chains and Mixing Times* 2nd ed., §12.2（18-03 の出典表と同じ）

もの	種別	出典・道具
動的スケーリングの仮説	物理	R. A. Ferrell, N. Menyhárd, H. Schmidt, F. Schwabl, P. Szépfalusy, Phys. Rev. Lett. 18 (1967) 891–894。要旨を確認（ラムダ点に特性の長さが無いことから第二音波の分散 $\omega \propto k^{3/2}$ を導く）。B. I. Halperin, P. C. Hohenberg, Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 700–703。要旨を確認（Widom–Kadanoff のスケーリング則を、時間を含む相関関数についての仮定のもとで動的現象に一般化）。詳しい展開は B. I. Halperin, P. C. Hohenberg, Phys. Rev. 177 (1969) 952（要旨のみ）。分類（model A・B）は P. C. Hohenberg, B. I. Halperin, Rev. Mod. Phys. 49 (1977) 435–479。要旨を確認（主要な動的普遍類を同定し特徴づける。model A・B の名は要旨には無く、本文は未読）
二次元イジングの $z = 2.1665(12)$	物理	M. P. Nightingale, H. W. J. Blöte, Phys. Rev. Lett. 76 (1996) 4548。要旨を確認（熱浴・無作為な点の選択・15×15 まで）
三次元イジングの $z = 2.032(3)$	物理	Z. Liu, E. Vatansever, G. T. Barkema, N. G. Fytas, Phys. Rev. E 108 (2023) 034118, arXiv:2307.01837。要旨を確認
保存する力学の $z = 3.972(2)$ と予言 $z = 4 - \eta$	物理	C. Chattopadhyay, J. Ott, T. Schäfer, V. Skokov, Phys. Rev. D 108 (2023) 074004, arXiv:2304.07279（巻・論文番号は Crossref で確認）。本文を確認（予言は Hohenberg–Halperin 1977 に帰している）
クラスター法の小さな z	物理	R. H. Swendsen, J.-S. Wang, Phys. Rev. Lett. 58 (1987) 86。要旨を確認
二次元臨界イジングの隙間の逆数が L の多項式	既知	E. Lubetzky, A. Sly, Commun. Math. Phys. 313 (2012) 815–836, arXiv:1001.1613。要旨を確認（任意の境界条件で隙間の逆数が多項式）
二次元以上のイジングで $z \geq 2$（隙間 $\leq C(\log L/L)^2$、周期境界・$\beta \geq \beta_c$）	既知	R. Masaoka, T. Soejima, H. Watanabe, J. Stat. Phys. 192 (2025) 76, arXiv:2502.09908。要旨を確認
純ゲージの HMC の位相電荷の遅さ	物理	S. Schaefer, R. Sommer, F. Virotta, Nucl. Phys. B 845 (2011) 93（要旨のみ。18-03 §08 と同じ）
強結合の格子ヤン–ミルズの Poincaré・log-Sobolev	既知	H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, Commun. Math. Phys. 400 (2023) 805（要旨のみ。18-03 と同じ）

次に読む章：3-01 ゲージ原理。この章の続きは 5-07 §07（モンテカルロ法の臨界減速）、18-03 §05〜§07（二つの時間の辞書）、23-01（緩和時間の仮定）。