第一巻　準備

第 3 部 ヤン–ミルズ理論（古典）

Kiichi, Shiori and Rin · 2026-11-14 の版 · https://computoergosum.com/principia/yang-mills/

> この PDF は Web 版の各章をそのまま刷ったものです。動かせる図は刷った時点の姿で止まっています。章の間のリンクは Web 版へ飛びます。最新の内容は Web 版に在ります。

章		頁
3-01	ゲージ原理	2
3-02	非可換ゲージ場	13
3-03	作用と方程式	25
3-04	幾何としてのゲージ理論	36
3-05	インスタントンと位相	46
3-06	寄り道：Donaldson とエキゾチック $\mathbb{R}^4$	57
3-07	標準模型の中のヤン–ミルズ	67

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 3 部 ヤン–ミルズ理論（古典） ゲージ原理

ゲージ原理 — 局所的な対称性を要求すると、比べる道具が要り、それが力を運ぶ

> この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 位相を点ごとに回す（局所的な）対称性を要求すると微分が壊れ、隣の点を比べる道具（接続）で直ること。その道具が場になり、保存する電荷と結び付いて力を運ぶこと。SU(2) ではゲージ場自身も回されること。

前提となる章 — 2-03（ゲージ変換・位相因子）と 1-04（SU(2)・随伴表現）。ほかに 2-01 の Noether の定理と 2-04 §07 の添字だけを使います。$\hbar = c = 1$、$\varepsilon_0 = 1$（Heaviside–Lorentz 単位）とします。

先に言うこと — ゲージ原理は理論の形を選ぶ指針で、定理ではありません（07 節）。非可換の場の強さと自己相互作用は 3-02 に回します。古典の場だけを扱い、この章はヤン–ミルズの質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. 大域的な対称性 — 電荷が保存する
2. 局所的に回す — 微分が壊れる
3. 比べる道具 — 接続と共変微分（図 1・表 1）
4. A を動く場にする — 場の強さと、置けない質量項
5. 力が出る — 保存する電荷との結合（図 2）
6. 同じ要求を SU(2) で — 自分も回される場と、質量の問題
7. 原理が決めること、決めないこと（表 2）
8. 寄り道：「ゲージ」はもともと物差しだった
9. この本での行き先

01

大域的な対称性 — 全体で同じだけ回す

2-03 では、ポテンシャル $\mathbf{A}$ が先にあり、位相の取り替え (G') は後から見つかりました。この章は逆に、「位相を点ごとに勝手に回しても理論が変わらない」ことを要求して電磁場を導きます。この手続きが**ゲージ原理**です。

出発点は複素数の値をとる場 $\psi(t,\mathbf{x})$、電荷を持つ粒子のいちばん簡単な模型です。ラグランジアン密度（2-01・2-02）を

$$\mathcal{L}_0 = |\partial_t\psi|^2 - |\nabla\psi|^2 - V(|\psi|^2) \tag{1}$$

とします（例えば $V = M^2|\psi|^2$、M は粒子の質量）。定数 α で $\psi \mapsto e^{i\alpha}\psi$ と回しても $\mathcal{L}_0$ は不変です（**大域的な U(1) 対称性**。U(1) は絶対値 1 の複素数の群、1-02）。Noether の定理（2-01）から、定数 q を掛けて書いた保存則が出ます。

$$\rho = iq\big(\psi^*\partial_t\psi - \psi\,\partial_t\psi^*\big), \qquad \mathbf{J} = -iq\big(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\big), \qquad \partial_t\rho + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0 \tag{2}$$

例。平面波 $\psi = e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$（$\omega > 0$）では $\rho = 2q\omega$、$\mathbf{J} = 2q\mathbf{k}$。$q$ は 05 節で電荷になります。大域的な対称性は「全点の位相の基準をいっせいにずらしても何も変わらない」と言っています。

02

局所的に回すと、微分が壊れる

回す角を点ごとに変え、$\psi \mapsto e^{i\alpha(t,\mathbf{x})}\psi$ とします（**局所的な**変換）。$|\psi|^2$ は変わりませんが、微分に余分な項が付きます（∂_μ は ∂_t と ∇ の成分、$\mu = 0,1,2,3$）。

$$\partial_\mu\big(e^{i\alpha}\psi\big) = e^{i\alpha}\big(\partial_\mu\psi + i(\partial_\mu\alpha)\,\psi\big)$$

例。定数の場 $\psi = 1$ の勾配のエネルギー $|\nabla\psi|^2$ は 0 ですが、$\alpha = kx$ で回すと $\psi = e^{ikx}$、$|\nabla\psi|^2 = k^2$。基準を変えただけなのに、(1) は別の状態として数えます。

微分は隣り合う二点の差 $\psi(x+\varepsilon n) - \psi(x)$ を ε で割った極限です（n は向きの単位ベクトル）。二つの値が違う角だけ回されると、差に「場の変化」と「基準の変化」が混ざります。違う点の値は、そのままでは引き算できません。

なぜ局所的な変換を要求するのか。Yang と Mills（1954）の要旨は、アイソスピンの回転（06 節）での通常の不変性が局所的な場という考え方と相容れない、と述べます（要旨の中

身は 3-02 §01）既知。これは要求（原理）で定理ではなく、自然が従うかは実験が決めます（07 節）。

03

比べる道具 — 接続と共変微分

違う点の値を比べるには、「点 x の位相の基準は、点 y ではどれに当たるか」という対応が要ります。これを**比較器** $U(y,x)\in U(1)$ と呼び、$\psi(x)$ を y へ運んだものを $U(y,x)\psi(x)$ とし、変換の下で

$$U(y,x)\mapsto e^{i\alpha(y)}\,U(y,x)\,e^{-i\alpha(x)} \tag{3}$$

と約束します。逆向きに運ぶのは逆元で、$U(x,y)=U(y,x)^{-1}$ とします。すると差 $\psi(y)-U(y,x)\psi(x)$ には $e^{i\alpha(y)}$ が掛かるだけです。比べる前に運ぶ、が要点です。

近い二点では比較器は 1 に近く、そのずれの割合を場 A_μ と名付けます：$U(x+\varepsilon n,x)=\exp\!\big(iq\varepsilon\, n^\mu A_\mu(x)\big)+O(\varepsilon^2)$。逆向きはその逆元なので $U(x,x+\varepsilon n)=\exp\!\big(-iq\varepsilon\, n^\mu A_\mu(x)\big)+O(\varepsilon^2)$ です。$x+\varepsilon n$ の値をこれで x へ運んでから引き、n を μ の向きにとって差の商の極限をとると

$$D_\mu\psi=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{U(x,x+\varepsilon n)\,\psi(x+\varepsilon n)-\psi(x)}{\varepsilon}=\big(\partial_\mu-iqA_\mu\big)\psi \tag{4}$$

これが**共変微分**です。(3) を $y=x+\varepsilon n$ で展開すると A_μ の変わり方が決まります。

$$\psi\mapsto e^{i\alpha}\psi,\qquad A_\mu\mapsto A_\mu+\frac{1}{q}\,\partial_\mu\alpha,\qquad D_\mu\psi\mapsto e^{i\alpha}D_\mu\psi \tag{5}$$

例。$A_0=-\phi$、$(A_1,A_2,A_3)=\mathbf{A}$（2-04 の書き方）、$\alpha=q\chi$ と置くと、(5) は $\mathbf{A}\mapsto\mathbf{A}+\nabla\chi$、$\phi\mapsto\phi-\partial_t\chi$、$\psi\mapsto e^{iq\chi}\psi$。2-03 のゲージ変換の式と、波動関数の位相の変換 (G') です。要求から電磁ポテンシャルとそのゲージ変換に行き着きました。道に沿って比較器を掛け重ねたものが 2-03 §05 の位相因子、幾何の言葉では平行移動（1-07 §03）です。

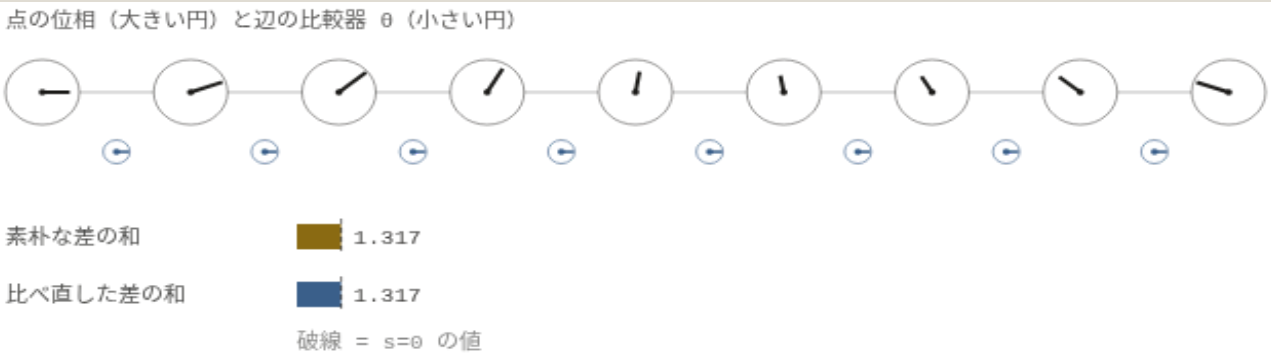
鎖で見る

空間を点の列 $j=0,1,2,\dots$ に刻むと、比較器は辺ごとの $U_j=U(j{+}1,j)=e^{i\theta_j}$（2-03 §08、5-01 のリンク変数）になり、微分の代わりに**比べ直した差**を使います。(3) は $\theta_j\mapsto\theta_j+\alpha_{j+1}-\alpha_j$ で、

$$e^{-i\theta'_j}\psi'_{j+1}-\psi'_j=e^{i\alpha_j}\big(e^{-i\theta_j}\psi_{j+1}-\psi_j\big)$$

絶対値の二乗の和は変わらず、素朴な差 $\psi_{j+1}-\psi_j$ の和は変わります。

図 1　s を変えると各点の位相（大きい円）が回る。「接続：あり」では辺の比較器（小さい円）も (3) で回り、比べ直した差の和は変わらない。「接続：なし」では変わる



s = 0.00　素朴な差の和 = 1.317　比べ直した差の和 = 1.317

計算 図の数値はその場で計算。点ごと・接続ありで s を 0 から 0.25 刻みで 1 まで動かすと、素朴な差の和は 1.317・8.070・19.536・22.541・17.700、比べ直した差の和は 1.317 のまま（接続なしでは両方とも前者、全体で同じなら両方とも 1.317）。

計算 **表 1**　12 点の輪（でたらめな場と比較器）を変換した前後。W は一周する比較器の積（SU(2) は 06 節）、W' は変換した後の値です。「$W'-W$ の成分の最大」は、差の行列の成分の絶対値の最大をとったものです。

群	回し方	素朴な差の和 前 → 後	比べ直した差の和 前 → 後	$W'-W$ の成分の最大	$\lvert\operatorname{tr}W'-\operatorname{tr}W\rvert$
U(1)	点ごと	65.474 → 50.856	83.239 → 83.239	0	0
SU(2)	全体で同じ	82.514 → 82.514	75.704 → 75.704	1.39	9×10^{-16}
SU(2)	点ごと	82.514 → 85.310	75.704 → 75.704	0.239	1×10^{-15}

比べ直した差の和の変化はどれも 3×10^{-14} 以内（丸め誤差）。U(1) を全体で同じだけ回すと、どの列も変わりません。

04

A を動く場にする — 場の強さと、置けない項

A_μ を自分の方程式に従う場にするには、A の微分を含み (5) で変わらない項を作用に足します。材料は閉じた道の比較器で、(3) から α が全部打ち消し合います。x から μ の向きへ、次に ν の向きへ進んで一辺 ε の正方形を一周し、x に戻ると

$$U_{\square}=\exp\bigl(iq\varepsilon^{2}F_{\mu\nu}\bigr)+O(\varepsilon^{3}),\qquad F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu \tag{6}$$

同じ量は $[D_\mu,D_\nu]\psi=-iqF_{\mu\nu}\psi$ にも現れます。比較器は 1-07 の平行移動と同じく始点から終点へ運ぶ向きで、幾何の書き方 $A_{\text{幾何}}=-iqA$、$F_{\text{幾何}}=-iqF$ に直すと (6) は $\exp(-\varepsilon^{2}F_{\text{幾何}})$ となり、1-07 の (10) と $U_p\approx\exp(-a^{2}F_{\mu\nu})$ に符号まで一致します（格子のリンクを逆向きに読む 5-01 では指数の符号が逆になります）。**例**。成分は $F_{0i}=-E_i$、$F_{ij}=\varepsilon_{ijk}B_k$（2-04）で、

F は電場と磁場そのもの。電場と磁場は比較器の**曲率**（小さな輪を回ったときのずれ、1-07 §05）でした。不変な項のうち微分の次数が最も低いものを並べると

$$\mathcal{L} = |D_t\psi|^2 - |\mathbf{D}\psi|^2 - V(|\psi|^2) + \tfrac{1}{2}\big(|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{B}|^2\big), \qquad D_t = \partial_t + iq\phi,\ \ \mathbf{D} = \nabla - iq\mathbf{A} \tag{7}$$

最後の項は $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$（2-04 の (8)）です。(1) の ∂ を D に替えるだけの結び付け方を**最小結合**と呼びます。

置けない項。A に質量を与える項 $-\frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu = \frac{1}{2}m^2(\phi^2 - |\mathbf{A}|^2)$ は、(5) で $-\frac{m^2}{q}\big(\phi\,\partial_t\alpha + \mathbf{A}\cdot\nabla\alpha\big)$ と α の二次の項だけ変わります。ゲージ原理から出る場には質量項を書けません（2-03 §04 と同じ）既知。これが 05 節で力の届く距離に効き、06 節で難点になります。

05

力が出る — 保存する電荷との結合

(7) を q について展開すると、01 節の量がそのまま現れます。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \phi\,\rho + \mathbf{A}\cdot\mathbf{J} + q^2\big(\phi^2 - |\mathbf{A}|^2\big)|\psi|^2 + \tfrac{1}{2}\big(|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{B}|^2\big) \tag{8}$$

ゲージ場は、大域的な対称性の保存量 (2) に、変換に現れたのと同じ q で結び付きます。2-03 の (L) の形そのものです。

(8) を ϕ で変分すると Gauss の法則が出ます。

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \rho - 2q^2\phi\,|\psi|^2 = iq\big(\psi^* D_t\psi - \psi\,(D_t\psi)^*\big)$$

右辺は (2) の ρ そのものではなく、その ∂_t を D_t に替えたものです（ϕ を含む項が加わります）。原点に止まった点電荷 Q では、この右辺を $Q\,\delta^3(\mathbf{x})$ と置きます。静的なら $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ で、$-\nabla^2\phi = Q\,\delta^3(\mathbf{x})$ から $\phi = Q\,G_0(r)$。距離 r の電荷 Q' のエネルギーは

$$\mathcal{U}(r) = QQ'\,G_m(r), \qquad G_0(r) = \frac{1}{4\pi r}, \qquad G_m(r) = \frac{e^{-mr}}{4\pi r}\ \text{(質量項を仮に足した場合)} \tag{9}$$

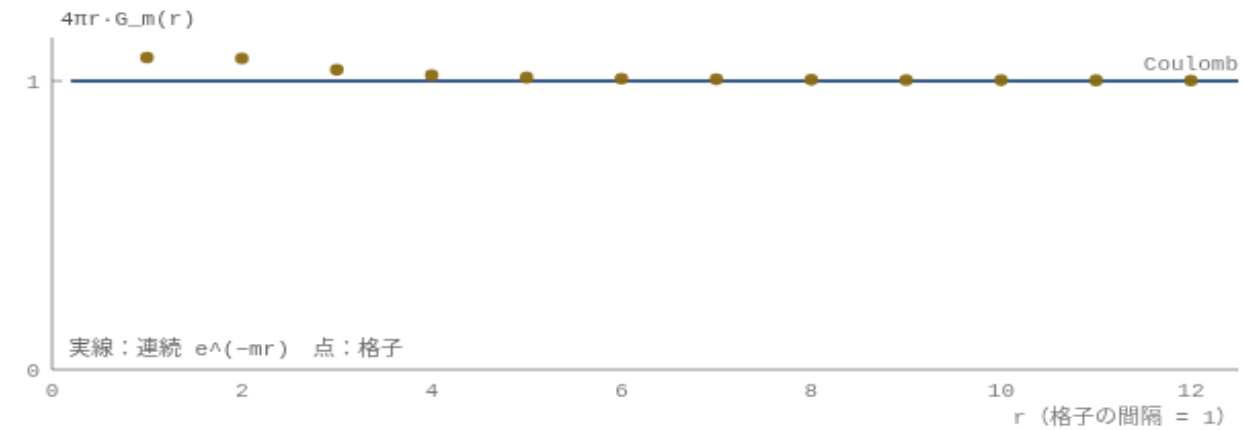
例。$m = 0$ では同符号の電荷は反発し、力は $1/r^2$ で遠くまで届きます。局所的な対称性を要求しただけで、離れた電荷の間に力が生じました。(7) の理論（V の最小が $\psi = 0$ のとき）では、禁じた質量項を仮に足すと $(-\nabla^2 + m^2)\phi = \rho$ になり、G_m（湯川型）はおよそ $1/m$ より遠くに届きません。足さなければ Coulomb 型で遠くまで届きます。

ただし、ゲージ不変性は力が遠くまで届くことを保証しません。古典論でも Higgs 場があれば、ゲージ不変性を保ったまま届く距離は有限になります（3-07）既知。(8) で見ると、V の最小が $|\psi|^2 = v^2 > 0$ にあって $|\psi|^2$ がそこに留まるとき、項 $q^2(\phi^2 - |\mathbf{A}|^2)|\psi|^2$ は $m^2 = 2q^2v^2$

の質量項 $\frac{1}{2}m^2(\phi^2-|\mathbf{A}|^2)$ と同じ形になります（3-07 の (9) は場の大きさの最小を $v/\sqrt{2}$ に置くので、同じ質量が $m=qv$ と書かれます）。

図 2 は立方格子（間隔 1）で $(-\Delta_{\text{lat}}+m^2)G_m=\delta$ を数値で求めたものです（$\Delta_{\text{lat}}f$ は隣の六点の値の和から $6f$ を引いたもの）。

図 2　m を変えると 4πr·G_m(r)（Coulomb なら 1）が変わる。実線は連続の e^(−mr)、点は立方格子。m > 0 は質量項を手で足した場合（ゲージ不変でない）



m = 0.00　届く距離の目安 1/m = ∞　r = 4：格子 1.020・連続 1.000

計算 点はこの端末の計算、実線はその場で計算。静止した値：$r=1,\,4,\,12$ で格子の $4\pi r\,G_0$ は 1.082・1.020・1.002 で、格子の間隔の数倍より遠くで Coulomb に近づきます。$4\pi r\,G_{0.5}$ は 0.670・0.147・0.0027（連続の $e^{-0.5r}$ は 0.607・0.135・0.0025）で、格子の軸方向の減衰の速さは $\cosh\mu=1+m^2/2$ から $\mu=0.4949$ です。

06

同じ要求を SU(2) で

陽子と中性子は質量がほぼ等しく、核力もほぼ同じように感じます。二つを二成分の場 $\psi=(\psi_1,\psi_2)$ にまとめるのがアイソスピンの見方で、混ぜる回転 $\psi\mapsto\Omega\psi$（$\Omega\in SU(2)$、1-04。(1) の V と区別して、行列は 3-02 と同じく Ω と書きます）で (1) の形の理論は変わりません。Yang–Mills（1954）は、この対称性に 02 節の要求を課しました。

比較器を SU(2) の行列にして $U(y,x)\mapsto\Omega(y)\,U(y,x)\,\Omega(x)^{-1}$ とし、近い二点で $U(x+\varepsilon n,x)=\exp(ig\varepsilon\,n^\mu A_\mu)+O(\varepsilon^2)$、$A_\mu=A_\mu^aT^a$（$T^a=\sigma^a/2$。1-07 の幾何の書き方とは $A_{\text{幾何}}=-igA=-i\hat{A}$。$\hat{A}=gA$ は 3-02 §02 の「結合を吸収」した書き方）とすると

$$D_\mu=\partial_\mu-igA_\mu,\qquad A_\mu\mapsto\Omega A_\mu\Omega^{-1}-\frac{i}{g}\,(\partial_\mu\Omega)\Omega^{-1},\qquad D_\mu\psi\mapsto\Omega\,D_\mu\psi\tag{10}$$

例。$\Omega = e^{i\alpha}$（1×1）なら (5) に戻り（g が q の役）、幾何の書き方では 1-07 §07 の $A \mapsto \Omega A\Omega^{-1} - (d\Omega)\Omega^{-1}$ です（1-07 は変換の行列を g と書きますが、ここでは g は結合定数です）。U(1) との違いは三つあります。

1. **場の数**。リー環の次元だけ要ります：U(1) は 1（光子）、SU(2) は 3（A^1, A^2, A^3）、SU(3) は 8（グルーオン）、SU(N) は N^2-1。
2. **ゲージ場自身が回される**。(10) の $\Omega A\Omega^{-1}$ は Ω が定数でも A を回します（随伴表現、1-04 §06）。光子と違い、自分が結び付く「電荷」を自分でも持つわけです。表 1 で SU(2) の W が全体の回転でも $\Omega_0 W \Omega_0^{-1}$ と変わり、$\mathrm{tr}\, W$ だけが残るのはこのためで、ここから自己相互作用が出ます（3-02）。
3. **結合定数は一つ**。U(1) では場ごとに別の q を自由に置けます。単純な非可換群（1-03 §08）では結合定数は一つの g だけで、各物質場との結合の強さは g と、その場の表現の生成子 T^a で決まります（二成分の場なら $\sigma^a/2$、随伴表現の三成分の場なら $(T^a)_{bc} = -i\varepsilon_{abc}$）既知。理由の筋は、場の強さの非線形の項 $-ig[A_\mu, A_\nu]$（09 節・3-02）が A の規格化を g と結び付けて固定し、群が単純なら運動の項の不変な形も定数倍を除いて一つしかないことです（2-04 §07・1-03）。

質量の問題。SU(2) でもゲージ場に質量項は書けません。Yang の回想では、1954 年 2 月下旬の Princeton のセミナーで Pauli が「この場の質量は何か」と尋ねました（経緯は 3-02 の寄り道）。核力は短距離の力で、05 節の Coulomb 型の届き方と合いません。Jaffe–Witten の問題文 §1 も、古典の波に質量が無いことが深刻な障害だったと書き既知、弱い力では Higgs 場を足して（3-07）、強い力では量子論そのものの性質（漸近自由、4-06）で越えられたとします物理。後者で期待される質量ギャップ（4-11）を数学として示すのが問題文の課題です。

07

原理が決めること、決めないこと

ゲージ原理は強い制約ですが、理論を一つに決めはしません（**表 2**）。

決めること	決めないこと
接続 A が要ること、その変換則 (5)(10)	どの群か（U(1)・SU(2)・SU(3) を選ぶのは実験）
微分が D を通してしか入れられないこと、結び付く流れが保存すること	U(1) での電荷の比（群が円なら表現 $e^{i\alpha} \mapsto e^{in\alpha}$ の n は整数で電荷は整数比。円か直線 $\mathbb{R}$ かは原理の外）
ゲージ場に質量項を書けないこと	運動の項が F^2 であること（F^4 も不変。低い次元の項だけ残す理由は 4-04）

決めること	決めないこと
ゲージ変換で移り合う配置は同じ物理を表すこと	最小結合（∂ を D に替えるだけ）を選ぶこと。最小でない結び付け方（$\lvert\psi\rvert^2 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ も不変）も原理は禁じない

表の二行目の例。群が円なら、どの場の電荷も一つの単位の整数倍になります。群が直線 $\mathbb{R}$ なら電荷の比は任意の実数でよく、原理だけからは電荷が一つの単位の整数倍に揃う理由は出ません。三行目の例。F^4 のような項は F^2 より場の次数が高く、四次元では係数が長さの四乗の次元を持つので、長い距離ほど効きが小さくなると考えられています（2-04 §08・4-04 §06）物理 。

局所的な「対称性」は普通の対称性と違い、拘束（Gauss の法則）と書き方の重複を生みます（2-01 §08）。重複をどう割るかは 3-04・4-08 の主題です。

もう一つ、普通の対称性との違いがあります。対称性が**自発的に破れる**とは、作用（統計力学ならエネルギー）は対称なのに、平衡状態（期待値）が対称でなくなることです。例は 2-08 §04 の自発磁化です。Elitzur（1975）は、ゲージを固定しない格子ゲージ理論では局所的な対称性が自発的に破れない（ゲージ不変でない量の期待値は 0 になる）と論じ、可換な格子の簡単な系で具体的に示しました 既知 。

08

寄り道：「ゲージ」はもともと物差しだった

飛ばしてよい節です。

「ゲージ変換」「ゲージ不変性」という語が物理に最初に現れるのは、Weyl が 1918 年に重力と電磁気を一つの幾何から導こうと試みた論文で、意味は長さの基準の取り替え（較正。ドイツ語の Eich-、動詞 eichen）でした（O'Raifeartaigh–Straumann §I） 既知 。Weyl は、離れた二点のベクトルの大きさを直接比べられる Riemann 幾何に不満を述べました（英訳、同 §II）。

> A true infinitesimal geometry should, however, recognize only a principle for transferring the magnitude of a vector to an infinitesimally close point …

（真の無限小幾何は、ベクトルの大きさを無限に近い点へ移す原理だけを認めるべきだ。）03 節の比較器と同じ発想です。ただし運ぶのは位相ではなく長さです。Weyl の理論には、長さの基準が点から点へどれだけの割合で変わるかを表す実数値の場 w_μ があり、ベクトルを道 γ に沿って点 p から点 q へ運ぶと、長さ ℓ は

$$\ell(q) = \exp\!\Big(-\int_\gamma w_\mu \, dx^\mu\Big)\, \ell(p)$$

と変わります（O'Raifeartaigh–Straumann の (2.2)。符号は規約によります）。閉じた道を一周して戻ると、長さは実数の因子 $\exp\!\big(-\oint w_\mu \, dx^\mu\big)$ 倍になります。(6) と同じく、穴の無い領域でこの因子がどの

輪でも 1 になるのは $\partial_\mu w_\nu - \partial_\nu w_\mu = 0$ のときで、Weyl は w_μ を電磁ポテンシャルと見なしました（同 §II）。

Einstein はすぐに反論しました。原子時計の振動数がたどった道で変わってしまい、原子のスペクトルが安定していることと矛盾する、と 既知 。

量子力学が現れると、London（1927）は指数を虚数にすれば波動関数の位相の取り替えになると気づきました（その不変性は Fock（1926）が見つけていた）。Weyl は 1928 年の著書と 1929 年の論文でこれを「ゲージ不変性の原理」として掲げ、電磁場は物質の波の場に必然的に伴うと書きました（Jackson–Okun §III.B） 既知 。名前は長さの較正に由来するまま残りました。比喩で言えば「各点で物差しを勝手に選べる理論」ですが、正確には、各点で選べるのは長さの尺度ではなく複素数の位相（一般には群の元）です。非可換の最初の模型は Klein（1938）でしたが忘れられ、今日の流れは Yang–Mills（1954）からとされます（同 §V）。

09

この本での行き先

3-02 では (6) の正方形を SU(N) で回します。比較器が掛ける順で変わるため、場の強さに交換子が加わり、自己相互作用が出ます。

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$$

Gauss の法則を量子論で課すのは 4-01。5-01 の格子では比較器 U_j を変数にし、(6) の正方形の積（プラケット）で作用を作ります。四次元で g が無次元になることは 2-04 §08 と 四次元 の記事。

まとめると、局所的な対称性の要求がゲージ場を呼び込み、その場は保存する電荷と結び付いて力を運び、古典論ではその質量項を手で書けません（Higgs 場を足すと事情が変わります。3-07）。四次元の非可換の場合に、量子論ではそれでも質量の隙間が生じることを示せ、というのが問題文です（0-03）。

この章が言えている範囲

事項	言えている	言えていない
01〜05 節：共変微分 (4)、変換則 (5)、場の強さ (6)、質量項が不変でないこと、保存流との結合、(9) の二つの形	古典の場での標準の導出 既知 。表 1、図 1・2 の数値 計算	格子は間隔 1 の値で、連続極限は取っていない

事項	言えている	言えていない
力の届く距離	(7) の理論（V の最小が $\psi = 0$）では、質量項が無ければ Coulomb 型で遠くまで届くこと 既知	ゲージ不変性だけからは遠くまで届くことは出ない。Higgs 機構の中身は 3-07
06 節：SU(2) の変換則 (10)、場の数、随伴で回されること、結合定数が一つであること	(10)・場の数・随伴での回り方 既知 。結合定数が一つである理由は筋だけ（2-04 §07・1-03）	自己相互作用の式（3-02）
質量の問題	古典のゲージ場に質量項を手で書けないこと 既知 。強い力の越え方は 物理	量子論の質量ギャップ（未解決。この章は何も示していない）
07 節：原理の位置づけ・Elitzur の結果	原理は理論の形を選ぶ指針であること。Elitzur の結果は要旨の水準（論じ、可換な格子の簡単な系で示した）	原理を定理として導くこと。一般の群での Elitzur の議論の中身（本文は確認していない）
08 節の経緯	二つの総説に書かれていること 既知	原論文の本文（書誌のみ）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1・図 1	計算	python3・NumPy（`covariant_diff.py`）。図はその場で計算
図 2 の点・05 節の値	計算	python3・SciPy（`lattice_green.py`：$G_m(r) = \int_0^\infty e^{-(m^2+6)t} I_r(2t) I_0(2t)^2 dt$、変形 Bessel 関数。恒等式 $G_0(0) - G_0(1) = 1/6$ を 10 桁で再現）。FFT による検算 `check_fft.py`
動機・Pauli の質問	既知	C. N. Yang, R. L. Mills, Phys. Rev. 96 (1954) 191（要旨を確認）。C. N. Yang, Selected Papers 1945–1980 with Commentary (1983) p. 525（書誌のみ。O'Raifeartaigh–Straumann §VII の引用で確認）
古典の波に質量が無い障害と、Higgs 場・漸近自由による乗り越え	既知	A. Jaffe, E. Witten, Quantum Yang–Mills Theory（Clay の問題文）§1（本文を確認）
局所的な対称性は自発的に破れない（Elitzur）	既知	S. Elitzur, Phys. Rev. D 12 (1975) 3978（要旨を確認）
08 節の経緯	既知	J. D. Jackson, L. B. Okun, Rev. Mod. Phys. 73 (2001) 663, arXiv:hep-ph/0012061（§III.B・§V を確認）。L. O'Raifeartaigh, N. Straumann, Rev. Mod. Phys. 72 (2000) 1, arXiv:hep-ph/9810524（arXiv 版の §I・§II・§V・§VII を確認）。原論文は書誌のみ（二つの総説の文献表による）：H. Weyl, Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin (1918) 465／V. Fock, Z. Phys. 39 (1926) 226／F. London, Z. Phys. 42 (1927) 375／H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik (Hirzel, Leipzig, 1928) ／H. Weyl, Z. Phys. 56 (1929) 330／O. Klein, in New Theories in Physics（Warsaw の会議, 1938）

次に読む章：3-02 非可換ゲージ場。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 3 部 ヤン–ミルズ理論（古典） 非可換ゲージ場

非可換ゲージ場 — 掛ける順が効くと、場が自分自身の源になる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — $\mathrm{SU}(N)$ の変換を点ごとに選べるようにすると、共変微分と変換則が決まり、場の強さ F に交換子の項が加わります。その項のためにゲージ場は自分自身の電荷を持ち、三次・四次の自己相互作用と非線形な方程式が生じます。空間に一様な場では、交換子だけが x^2y^2 の谷を作ります。

前提となる章 — 3-01（ゲージ原理。特に §06 の SU(2) の場合）。1-03 の構造定数、1-04 の随伴表現、2-04（添字の上げ下げと計量の符号）を使います。同じ内容を幾何の言葉で書いたものが 1-07 です。

先に言うこと — 古典の章で、量子論も質量ギャップも扱いません。作用と運動方程式は 3-03 に回し、エネルギー密度は電磁気学からの類推で先に使います。§01 の Pauli の書簡と Yang の回想は、総説からの引用です。

この章の順序

1. 各点で回す — 3-01 の SU(2) を SU(N) へ・Yang と Mills の要旨。寄り道：1954 年の春
2. 約束 — 生成子と、三つの書き方の翻訳
3. 共変微分 — 変換則の二つの項・鎖の上で見る（図 1）
4. 場の強さ — 共変微分の交換子・純ゲージ
5. 色の電場と色の磁場 — 測れる量を数え直す
6. 自己相互作用 — 二次・三次・四次の項
7. 空間に一様な場 — x^2y^2 の谷（図 2）・古典には尺度が無い
8. 質量の問題 — 手で足せない理由

01

各点で回す — Yang と Mills の問い

3-01 §06 では、陽子と中性子をまとめた二成分の場 ψ を SU(2) の行列で混ぜる対称性（アイソスピン）に、点ごとに回してよいという要求を課し、共変微分と変換則 (10) を得ました。この章はそれを $\mathrm{SU}(N)$ に広げ、交換子から生じることを順に追います。

Yang と Mills の論文（Phys. Rev. 1954）の要旨は、すべての点で同じ行列で回すという通常の不変性が局所的な場という考えと相容れないと指摘し、“The possibility is explored of having invariance under local isotopic spin rotations.” と続けます。要旨の一文目を本書の読みで言い換えると、ある点でどの向きを「陽子」と呼ぶかが遠くの点の呼び方まで決めてしまうのは、近くの点どうしの関係で書く場の法則に合わない、ということです。そこで変換の行列 $\Omega = \Omega(x)$ を点ごとに選べるとします。

要旨によれば、帰結はアイソスピンに対して電磁場と同じ役をする $\mathbf{b}$ 場で、それは非線形の微分方程式に従い、その量子はスピン 1・アイソスピン 1・電荷 $\pm e$ か 0 の粒子です 既知 。§03〜§06 はこの要約を式にします。強い力を担う群は、後に SU(3) と分かりました（Jaffe–Witten の問題説明：“the gauge group is G = SU(3)”）。ただし、ゲージ化されたのはアイソスピンではなく、別の自由度である色の SU(3) でした（アイソスピンは近似的な、点ごとには回さない対称性のまま残ります）。数学は群を取り替えるだけです（3-07・1-04 の寄り道）。

寄り道：1954 年の春

飛ばしてよい小節です。

Straumann の小論によれば、Pauli は 1953 年 7 月に Pais へ送った手紙に付けたノートと、11 月の Zürich での二回のセミナーで、余剰次元（17-06）の枠組みから同じ場の強さを得ていました。しかし 12 月の Pais 宛ての手紙で “one will always obtain vector mesons with rest mass zero” と書き、公表しませんでした。1954 年 2 月下旬の Princeton のセミナーでは、Yang が黒板に $(\partial_\mu - i\epsilon B_\mu)\psi$ を書いた直後に、Pauli が “What is the mass of this field B_μ?” と尋ねたと Yang は回想しています（Yang の自選論文集の解説から、Straumann の小論と O'Raifeartaigh–Straumann の総説が引用）。同じ総説は、この理論が他の著者にも独立に見つけられたことに触れ、系譜の図に Shaw（1954–55）と Utiyama（1954–55, 1956）を置きます 既知 。質量の問いには §08 で答えます。

02

約束 — 生成子と、三つの書き方

第 3 部では $\hbar = c = 1$、計量の符号は $(-,+,+,+)$ です（2-04）。$\mu, \nu = 0, \dots, 3$ は時空、$i, j, k = 1, 2, 3$ は空間、a, b, c は群の方向（色）の添字で、二度出た添字は和を取ります。群は $G = \mathrm{SU}(N)$、生成子はエルミートな T^a（$a = 1, \dots, N^2 - 1$）で、構造定数と規格化は次の通りです（1-04）。

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \qquad \mathrm{tr}(T^a T^b) = \tfrac{1}{2}\delta^{ab}$$

例。SU(2) では $T^a = \sigma^a/2$（パウリ行列の半分）で $f^{abc} = \varepsilon^{abc}$、SU(3) では $T^a = \lambda^a/2$（Gell-Mann 行列の半分）です。ゲージ変換の行列は $\Omega(x) \in G$ と書き（3-01 と同じ字です）、字 g は結合定数に取っておきます。物質の場 $\psi(x) \in \mathbb{C}^N$ は $\psi \mapsto \Omega(x)\psi$ と変わるとします（基本表現）。

この章は物理の流儀で、エルミートな $A_\mu = A_\mu^a T^a$ と結合 g を分けて書きます。§01 の寄り道の Yang の黒板の ϵ と B_μ は、この g と A_μ に当たります（係数の約束は論文によります）。本の中の他の書き方とは、次の一行で翻訳できます。

書き方	共変微分	場の強さ	章
この章	$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$	$F_{\mu\nu}$（式 (6)）	3-02・第 4 部
幾何（反エルミート）	$D = d + \mathcal{A}$、$\mathcal{A} = -igA$	$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A}\wedge\mathcal{A} = -igF$	1-07・3-04
結合を吸収	$D_\mu = \partial_\mu - i\hat{A}_\mu$、$\hat{A} = gA$	$\hat{F} = gF$	2-04

03

共変微分 — 変換則の二つの項

3-01 の (10) を $\mathrm{SU}(N)$ に広げ、導き方を追い直します。困るのは微分です。Ω が点によると、積の微分から余分な項が出ます。

$$\partial_\mu(\Omega\psi) = \Omega\,\partial_\mu\psi + (\partial_\mu\Omega)\,\psi \tag{1}$$

第二項は、枠の違う隣どうしの点の値をそのまま引き算したために出ます（1-07 §01）。そこで 3-01 と同じく、補正の場 A_μ を足した微分が ψ と同じように変わることを要求します。

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu, \qquad D'_\mu(\Omega\psi) = \Omega\, D_\mu\psi \tag{2}$$

左辺は $\Omega\partial_\mu\psi + (\partial_\mu\Omega)\psi - igA'_\mu\Omega\psi$、右辺は $\Omega\partial_\mu\psi - ig\,\Omega A_\mu\psi$ です。すべての ψ で等しいことから、A'_μ が決まります。

$$A'_\mu = \Omega A_\mu \Omega^{-1} - \frac{i}{g}\,(\partial_\mu \Omega)\,\Omega^{-1} \tag{3}$$

第一項は随伴表現による回転（1-04 §06）、第二項は Ω の傾きから来る非斉次の項です。$\Omega\Omega^\dagger = 1$ を微分すると $(\partial\Omega)\Omega^{-1}$ は反エルミートで、$\det\Omega = 1$ からトレースは 0 なので、A' も同じリー環に留まります。例。$\Omega = e^{i\alpha(x)}$（U(1)）なら第一項は A_μ のままで、$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\alpha/g$ は、$\chi = \alpha/g$ とおけば 2-03 のゲージ変換の式そのものです（2-04 の $A_\mu = (-\phi, \mathbf{A})$ の約束で）。非可換で新しいのは、A を挟む第一項です。

無限小の変換 — ゲージ場自身が回る

$\Omega = 1 + i\alpha^a T^a$（$\alpha$ は小さい）として (3) を一次まで展開すると、成分では

$$\delta A^a_\mu = \frac{1}{g}\,\partial_\mu \alpha^a + f^{abc} A^b_\mu\, \alpha^c = \frac{1}{g}\,(D_\mu \alpha)^a \tag{4}$$

です。右端の $(D_\mu\phi)^a = \partial_\mu\phi^a + g f^{abc} A^b_\mu \phi^c$ は随伴表現の場に働く共変微分です。例。SU(2) で α を定数とし $\alpha^3 = \theta$（他は 0）に取ると、$\delta A^1 = \theta A^2$、$\delta A^2 = -\theta A^1$、$\delta A^3 = 0$。場所によらない回転でもゲージ場の成分が互いに回るので、**ゲージ場自身が非可換な電荷を持ちます**（3-01 §06 の「ゲージ場自身が回される」を成分で見たもの）。光子が電荷を持たないのと対照的で、要旨の「アイソスピン 1」はこのことです。

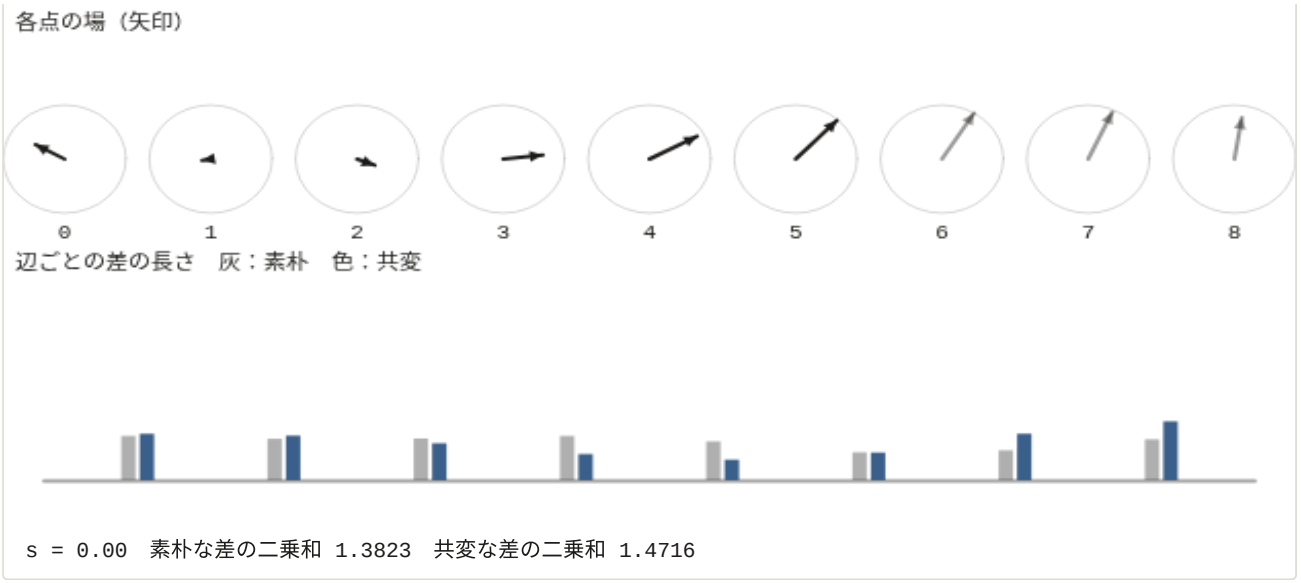
鎖の上で見る

点を一列に並べると (2) の意味が見えます。点 n に随伴表現の場（実の三成分ベクトル）ϕ_n を置き、点 $n+1$ の値を点 n の枠へ運ぶ回転 U_n を辺に置きます。2-03 の辺の U(1) の元の非可換版で、5-01 の格子の部品です。3-01 の比較器で書けば $U_n = U(n, n{+}1)$ で、3-01 の鎖の $U_j = U(j{+}1, j)$ とは向きが逆です。ここでの Ω_n と U_n は、SU(2) の元が随伴表現で与える 3×3 の回転（1-04 §06）を同じ字で書いたものです。

$$\phi'_n = \Omega_n \phi_n, \qquad U'_n = \Omega_n U_n \Omega_{n+1}^{-1}, \qquad U'_n \phi'_{n+1} - \phi'_n = \Omega_n\big(U_n\phi_{n+1} - \phi_n\big) \tag{5}$$

右端の「共変な差」は回転が一つ掛かるだけなので、長さが変わりません。素朴な差 $\phi'_{n+1} - \phi'_n$ は二点の回転が違うので、長さが変わります。点の間隔を h として $U_n \approx 1 - igh A$ と置き、$h \to 0$ とすると、(5) の二つ目は (3) に、共変な差は $hD_\mu\phi$ になります。ここで A は、随伴表現の行列 $(T^a_{\text{adj}})_{bc} = -if^{abc}$ を使った $A = A^a T^a_{\text{adj}}$ として作用し、$D_\mu\phi$ の成分は (4) の右端と同じ形になります。

図 1　九つの点の場（上の矢印）と、辺ごとの差の長さ（下の棒）。つまみ s でゲージ変換の強さを変えると、灰色の棒（素朴な差）は変わり、色の棒（共変な差）は変わりません。



計算 この図の数値はこの端末で計算した（表 1 と同じ式・同じ配置をブラウザで計算）。JavaScript が無効なら表 1 が図の中身です。

表 1　ゲージ変換の強さ s と、八本の辺の差の二乗和

s	素朴な差	共変な差
0.00	1.3823	1.4716
0.25	3.0524	1.4716
0.50	7.6091	1.4716
0.75	13.5267	1.4716
1.00	18.6570	1.4716

各辺の共変な差の変化は 3×10^{-16} 以下（丸め誤差）でした 計算 。$s = 0$ で二つが違うのは、U_n を小さな回転に取ってあるからです。

04

場の強さ — 共変微分の交換子

電磁気学では $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ がゲージ変換で変わらない量でした。非可換では (3) の第一項のため、この組み合わせは共変にもなりません。正しい組み合わせは、共変微分を二つの順で掛けた差から出ます。

$$[D_\mu, D_\nu]\,\psi = -ig\,F_{\mu\nu}\,\psi, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig\,[A_\mu, A_\nu] \tag{6}$$

左辺を展開すると $\partial_\mu\partial_\nu\psi$ と $A\,\partial\psi$ の項は $\mu\nu$ について対称なので消え、ψ の微分が残りません。$F_{\mu\nu}$ は各点の行列（リー環の元）で、成分では次の通りです。

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\,f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \tag{7}$$

SU(2) では、三成分 $(A^1_\mu, A^2_\mu, A^3_\mu)$ を内部空間のベクトルとみると、最後の項はベクトル積 $g\,A_\mu \times A_\nu$ です。(2) は作用素として $D'_\mu = \Omega D_\mu \Omega^{-1}$ という意味なので、交換子も同じく挟まれます。

$$F'_{\mu\nu} = \Omega\, F_{\mu\nu}\, \Omega^{-1} \tag{8}$$

F は不変ではなく、各点で随伴表現により回ります（共変）。電場と磁場がそのまま測れる量だった電磁気学との大きな違いです。

例 1（純ゲージ）。$A = 0$ を (3) で変換した $A_\mu = -\frac{i}{g}(\partial_\mu \Omega)\Omega^{-1}$ は、(8) により $F = 0$ です。逆に $\mathbb{R}^4$ のような単連結な領域で $F = 0$ なら、A はこの形に書けます 既知 。Straumann が紹介する、Pauli が 1953 年 7 月に Pais へ送った手紙に付けたノートは、これを “The vanishing of the field strength is necessary and sufficient for the $A^a_\mu(x)$ in the whole space to be transformable to zero.” と述べています。穴のある領域では成り立たず、2-03 の Aharonov–Bohm 効果がその例です（大域的な話は 3-04）。

例 2（交換子だけ）。定数の場 $A_x = a\,T^1$、$A_y = b\,T^2$ では、$F_{xy} = -ig\,ab\,[T^1, T^2] = g\,ab\,T^3 \neq 0$ です。電磁気学なら定数のポテンシャルは場を作りません。小さな正方形を一周したずれとして見る図が 1-07 の図 2 にあります。

計算 SU(2)・SU(3) で滑らかな A と Ω を与えて差分で比べると、(8) の両辺の差は 5×10^{-9}（刻み 10^{-4} の誤差）、交換子を落とすと 0.78・1.74、純ゲージの F は 10^{-9} 以下でした。

05

色の電場と色の磁場 — 測れる量を数え直す

電磁気学にならい、群の方向ごとに電場と磁場を定めます。2-04 の $F_{0i} = -E_i$、$F_{ij} = \varepsilon_{ijk} B_k$ と同じ置き方で、空間の三成分を太字で書きます（$\mathbf{A}^a = (A^a_1, A^a_2, A^a_3)$）。

$$E^a_i = F^a_{i0}, \qquad B^a_i = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk} F^a_{jk} = (\nabla \times \mathbf{A}^a)_i + \tfrac{g}{2}\,\varepsilon_{ijk} f^{abc} A^b_j A^c_k \tag{9}$$

$A_0 = 0$ に取る（時間ゲージ）と $E^a_i = -\partial_t A^a_i$ です。磁場の第二項が交換子の部分で、ポテンシャルが空間的に一様でも磁場が生じます。

$\mathbf{E}^a$ と $\mathbf{B}^a$ は (8) により、各点で色の添字について回ります。そのため「色の電場の 3 番の成分」はゲージで値が変わり、測れる量ではありません。変わらないのは $\sum_a |\mathbf{E}^a|^2 = 2\,\mathrm{tr}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})$ のような長さの二乗です。電磁気学にならい、この章では次をエネルギー密度とします（作用から導くのは 3-03）。

$$\mathcal{E} = \tfrac{1}{2}\sum_a \left(|\mathbf{E}^a|^2 + |\mathbf{B}^a|^2 \right) \tag{10}$$

例。ゲージで変わらない量の典型は $\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$ と、閉じた道の平行移動のトレース（Wilson ループ、1-07 §06）です。

06

自己相互作用 — 二次・三次・四次の項

エネルギー (10) も、3-03 で作用に置く $F^a_{\mu\nu}F^{a\,\mu\nu}$ も F の二乗です。(7) を入れると、A について二次・三次・四次の項に分かれます。

$$\begin{aligned} F^a_{\mu\nu}F^{a\,\mu\nu} = {} & (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)(\partial^\mu A^{a\,\nu} - \partial^\nu A^{a\,\mu}) \\ & + 4g\, f^{abc}\,(\partial_\mu A^a_\nu)\, A^{b\,\mu} A^{c\,\nu} \\ & + g^2 f^{abe} f^{cde}\, A^a_\mu A^b_\nu A^{c\,\mu} A^{d\,\nu} \end{aligned} \tag{11}$$

一行目は Maxwell の $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ を色の数 N^2-1 だけ並べたもので、ここだけなら互いに作用しない Maxwell 場の集まりです。二・三行目は f^{abc} を含み、U(1) では消えます。作用に置くと（3-03）、これらはゲージ場どうしの相互作用で、摂動論（4-03）ではゲージ場が三本・四本出会う頂点になります。古典の Maxwell 方程式では光どうしは散乱しませんが、ヤン–ミルズ場は自分自身と散乱します。

帰結は方程式の非線形性です。Jaffe–Witten は “The Yang–Mills equations are nonlinear—in contrast to the Maxwell equations.” と書きます 既知 。二つの解を足しても、一般には解になりません。 計算 無作為な $A^a_\mu \cdot \partial_\mu A^a_\nu$ で (11) の両辺は 10 桁一致しました。0 でない f^{abc} は順序つきで SU(2) が 6 個、SU(3) が 54 個です。

表 2　電磁気学とヤン–ミルズの古典的な違い

	電磁気学 U(1)	**ヤン–ミルズ SU(N)**
ゲージ場の数	1	N^2-1（SU(3) で 8）
場の強さ	不変	共変 (8)
ゲージ場の電荷	持たない	持つ (4)
定数のポテンシャル	場を作らない	交換子が 0 でなければ作る
方程式	線形	非線形 (11)
古典の波	質量 0	質量 0（§08）

07

空間に一様な場 — 交換子だけが作る谷

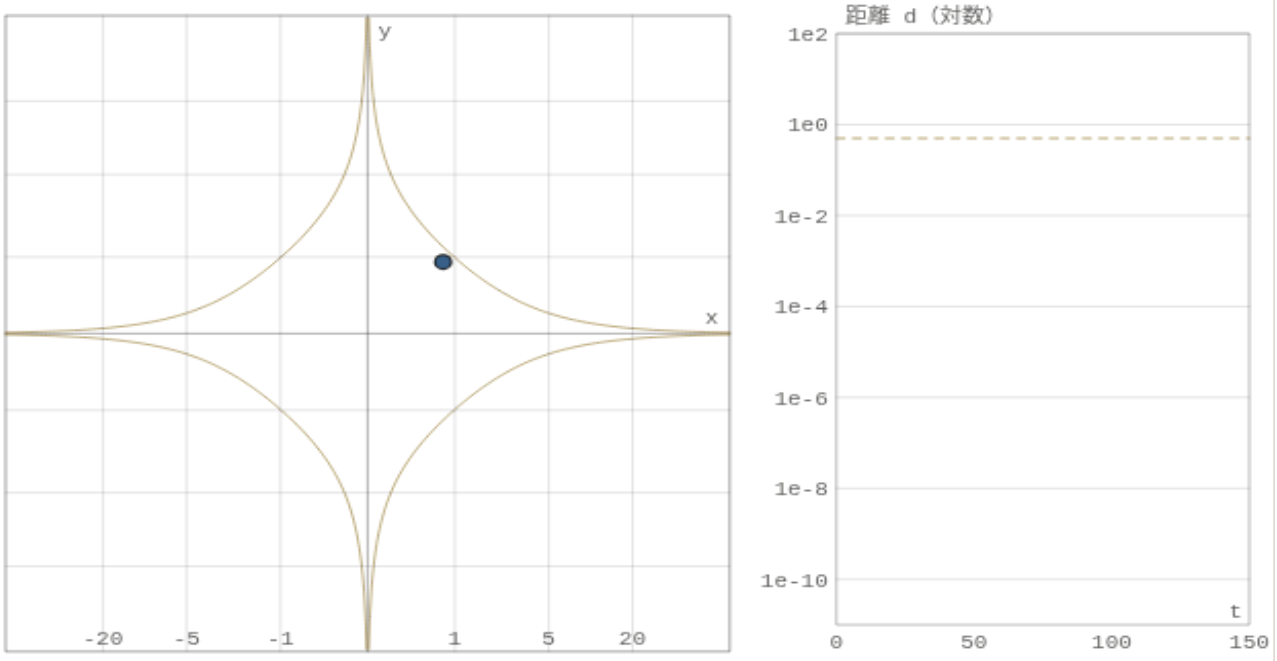
自己相互作用を一番小さな形で見ます。SU(2) で $A_0 = 0$ とし、A_i^a が時間だけの関数だとすると、(9) の磁場は交換子の項だけです。さらに $A_1^1 = x(t)$、$A_2^2 = y(t)$、ほかを 0 と置くと、0 でない場は $E_1^1 = -\dot{x}$、$E_2^2 = -\dot{y}$、$B_3^3 = g\,xy$ で、(10) は平面上の粒子のエネルギーになります。

$$H = \tfrac{1}{2}\big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\big) + \tfrac{1}{2}g^2x^2y^2, \qquad \ddot{x} = -g^2xy^2, \quad \ddot{y} = -g^2x^2y \tag{12}$$

一様な場では、ヤン–ミルズの運動方程式（3-03）は 9 成分 A_i^a の粒子が $\tfrac{1}{2}\sum (B_i^a)^2$ の中を動く式になり、この置き方はそれと矛盾しません 計算 （数値微分で、他の 7 成分に働く力は 0。Gauss の拘束 $\varepsilon^{abc}A_i^bE_i^c = 0$ も成り立ちます）。Gauss の拘束とは、時間ゲージで失われた A_0 の方程式が残す条件で、電磁気学の $\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$ の非可換版です。一様な場では微分の項が消えて、この形になります（4-01）。比べるために二つの成分を同じ色の向きに置く（$A_1^1 = x$、$A_2^1 = y$）と、交換子が 0 で $V = 0$、電磁気学と同じく粒子はまっすぐ進みます。

非可換の $V = \tfrac{1}{2}g^2x^2y^2$ は座標軸の上で 0 で、谷は無限に続き、奥ほど細くなります（エネルギー E で動ける幅は $|y| \le \sqrt{2E}/(g|x|)$）。図 2 は、速度を δ だけ変えた二つの粒子を同時に走らせます。

図 2　左：(12) の軌道（$g = 1$、初期値 $(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (0.8, 0.9, 0.6, -0.3)$、$E = 0.4842$。目盛りは遠くを縮め、細い曲線は $V = E$ の等高線）。右：二つの粒子の距離 d（縦は対数）。つまみ k で初めのずれ $\delta = 10^{-k}$ を変え、「可換にする」で $V = 0$ に切り替えます。



t = 0.00　d = 0.0e+0　0.5 を超えた時刻 —　E のずれ 0e+0　（非可換、δ = 1e-6）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（表 3 と同じ積分の規則：4 次の Runge–Kutta、刻み $\min(0.01,\ 0.02/(g\max(|x|,|y|)))$、0.05 ごとに距離を見る）。JavaScript が無効なら表 3 が図の中身です。

表 3　初めのずれ δ と、距離が 0.5 を超える時刻

δ	非可換	可換（$0.5/\delta$）
1e-2	7.45	50
1e-4	25.05	5e3
1e-6	37.90	5e5
1e-8	54.55	5e7
1e-10	77.15	5e9

非可換では δ を 1/10 にするごとに、離れる時刻がおよそ 8 ずつ延びるだけです（10^{-2}〜10^{-10} の 9 点への直線のあてはめで傾き 8.04（表 3 は一桁おきの 5 点）。軌道が谷の奥にいる間は離れ方が鈍るので刻みは不揃い）。距離が指数的に増えるということで、右の図ではほぼ直線に上がります。可換では距離は $\delta\, t$ です。エネルギーのずれは $t \le 120$ で 5×10^{-9} 以下でした 計算 。この系は古典ヤン–ミルズ力学として調べられてきました。Savvidy（1983）はこの種の力学を K 系（混合性の強い力学系）だと論じましたが、Dahlqvist–Russberg（1990）はこの x^2y^2 の系に安定な周期軌道の族を見つけ、運動が完全にエルゴード的だという先行の主張を否定しました（要旨による）。この端末の計算が示すのは、上の初期値で有限の時間に見える離れ方までです。

古典には尺度が無い

(12) には長さや時間の単位になる定数がありません（g は時間の目盛りを変えるだけ）。解 $x(t), y(t)$ があれば、任意の $\lambda > 0$ で

$$x_\lambda(t) = \lambda\, x(\lambda t), \qquad y_\lambda(t) = \lambda\, y(\lambda t), \qquad E_\lambda = \lambda^4 E \tag{13}$$

も解です（代入すると両辺に λ^3 が出ます）。例。エネルギーを 1/16 にすると、同じ形の運動が 2 倍ゆっくり起こります。エネルギーを 0 に近づければ運動はいくらでも遅くなり、振動数に下限がありません。計算 $\lambda = 0.5,\ 0.25,\ 0.125$ の初期値を同じ規則で別々に解き、時刻 $5/\lambda$ の位置を λ で割ると、どれも $(-0.401421,\ 0.616689)$ と 6 桁一致しました。

場全体でも同じで、$A = 0$ のまわりで (11) の二次の項だけを残すと Maxwell 場の集まりになり、振動数は $\omega = |\mathbf{k}|$ で 0 まで続きます。Jaffe–Witten はこれを、古典の方程式が “massless waves that travel at the speed of light” を記述する、と書きます 既知 。量子にすると、谷の奥では横の振動の最低エネルギー $g|x|/2$ が壁になり、(12) を量子化した作用素のスペクトルは離散で、最低固有値は正です 既知 （Simon 1983、2-05 の寄り道）。これは一様な場だけを残した有限自由度の模型についての定理です。

場の理論としての量子ヤン–ミルズに隙間があることは、物理では広く受け入れられていますが、定理にはなっていません 物理 。

08

質量の問題 — 手で足せない理由

§01 の寄り道の Pauli の問いに、式で答えます。質量 m のベクトル場なら、ラグランジアン密度に $-\frac{1}{2}m^2 A^a_\mu A^{a\,\mu}$ を足すのが普通です（電磁場なら Proca の場）。ところが (4) で変化を計算すると

$$\delta\left(A^a_\mu A^{a\,\mu}\right) = \frac{2}{g}\,A^{a\,\mu}\partial_\mu \alpha^a + 2f^{abc}A^{a\,\mu}A^b_\mu\,\alpha^c = \frac{2}{g}\,A^{a\,\mu}\partial_\mu\alpha^a \tag{14}$$

です。第二項は f^{abc} が a,b について反対称、$A^{a\,\mu}A^b_\mu$ が対称なので消えます。残る第一項は (3) の非斉次の項から来ていて、α が点によると 0 になりません。質量項は、各点で回してよいという要求を壊します 既知 。 計算 無作為な A と小さな α で、SU(2)・SU(3) とも (14) の両辺が 4 桁以上一致しました。

こうしてゲージ不変性を保つ限り、古典のヤン–ミルズ場の波は質量を持ちません。Jaffe–Witten は “The massless nature of classical Yang–Mills waves was a serious obstacle to applying Yang–Mills theory to the other forces” と書きます。越え方が弱い力（Higgs 場、3-07）と強い力（漸近自由、4-06）で違ったことは、3-01 §06 で見ました。

強い力の理論が量子の水準で持つべき性質の一つ目として、Jaffe–Witten は質量ギャップを挙げます：“there must be some constant $\Delta > 0$ such that every excitation of the vacuum has energy at least Δ”（0-03・4-11）。古典の場には尺度が無く（§07）、隙間は量子化してはじめて生じると考えられています 物理 。純粋なヤン–ミルズ理論について存在と質量ギャップを定理として示すことが問題文の要求で、この章はそれについて何も示していません。

この章が言えている範囲

事項	言えている	言えていない
(2)〜(8)・(11)	標準の導出と、SU(2)・SU(3) での数値の確認 既知 計算	運動方程式・Bianchi 恒等式（3-03）、接続の空間の幾何（3-04）
(12) 一様な場の x^2y^2 の系	置き方の整合と、この初期値で有限時間に見える指数的な離れ方 計算	不規則性の証明、リャプノフ指数（近い軌道が離れる速さの指数）の値

事項	言えている	言えていない
(13) 古典に尺度が無いこと	厳密なスケーリングと数値の確認 計算	量子化で尺度が生じることの、場の理論としての証明
(14) 質量項	局所的なゲージ不変性を壊すこと 既知	Higgs 機構の中身（3-07）
質量ギャップ	—	量子のヤン–ミルズ理論に隙間があること（未解決。このサイトは何も示していない） 物理
§01 の歴史	要旨・総説・問題説明に書かれていること	Yang–Mills の本文、Pauli の書簡の原文、Shaw の仕事の中身

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§01 の要旨の引用と要約	一次資料（要旨を確認・本文は未読）	C. N. Yang, R. L. Mills, “Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance”, Phys. Rev. 96 (1954) 191（受理 1954 年 6 月 28 日）
Pauli の 1953 年の仕事・書簡の一句・ノートの引用・Yang の回想	総説（本文を確認）	N. Straumann, “On Pauli's invention of non-abelian Kaluza-Klein Theory in 1953”, arXiv:gr-qc/0012054（Yang の回想は C. N. Yang, Selected Papers p. 525 を典拠として引く）。書簡集（W. Pauli, Wissenschaftlicher Briefwechsel IV/II, Springer 1999）は書誌のみ
1954 年 2 月のセミナーの回想・Shaw と Utiyama	総説（本文を確認）	L. O'Raifeartaigh, N. Straumann, “Early History of Gauge Theories and Kaluza-Klein Theories, with a Glance at Recent Developments”, arXiv:hep-ph/9810524 §VII・図 1（掲載時の題 “Gauge theory: Historical origins and some modern developments”, Rev. Mod. Phys. 72 (2000) 1–23）。原典の C. N. Yang, Selected Papers 1945–1980 with Commentary (1983) p. 525 は書誌のみ
Utiyama（1956）の書誌	一次資料（要旨を確認）	R. Utiyama, “Invariant Theoretical Interpretation of Interaction”, Phys. Rev. 101 (1956) 1597
SU(3)・非線形・質量の無い波・深刻な障害・質量ギャップの引用	一次資料（本文を確認）	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”, Clay Mathematics Institute の公式問題説明 §1
x^2y^2 の系：K 系という主張	書誌のみ（Crossref で確認）	Savvidy, “The Yang-Mills classical mechanics as a Kolmogorov K-system”, Phys. Lett. B 130 (1983) 303–307
x^2y^2 の系：安定な周期軌道の族	一次資料（要旨を確認）	P. Dahlqvist, G. Russberg, “Existence of stable orbits in the x^2y^2 potential”, Phys. Rev. Lett. 65 (1990) 2837–2838
量子の x^2y^2 の系の離散スペクトル	既知（書誌のみ）	B. Simon, “Some quantum operators with discrete spectrum but classically continuous spectrum”, Ann. Phys. 146 (1983) 209–220（Jaffe–Witten §6.6 の文献 [43]。平らな方向を持つ位置エネルギーでも束縛状態が生じる例として引かれる）

もの	種別	出典・道具
(1)〜(14) の導出	既知	標準的な事項。記号の翻訳は §02 の表
表 1・図 1、§04・§06・§08 の数値	この端末で計算	Python 3.12・NumPy 1.26・SciPy 1.11（`chain_covariance.py`・`formula_checks.py`）。図 1 は同じ式を素の JavaScript で計算
§07 の整合・表 3・(13) の確認・図 2	この端末で計算	Python 3.12（`ym_mechanics.py`）。図 2 は同じ規則を素の JavaScript で積分。丸めの違いは不規則な運動で増幅されるので、t が 100 を大きく過ぎると図と表の軌道は離れうる

次に読む章：3-03 作用と方程式（$\mathrm{tr}\, F^2$・Bianchi 恒等式・運動方程式・自己双対）。幾何の続きは 3-04。

作用と方程式 — 一つの作用から、方程式・恒等式・エネルギー・自己双対が出る

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 作用の変分から方程式 $D_\mu F^{\mu\nu} = 0$ が、F の作り方から Bianchi 恒等式が出ます。四次元では応力の跡が 0 で、静止した有限エネルギーの塊は無いことが出ます。虚時間の作用は $8\pi^2|Q|/g^2$ 以上で、等号は自己双対な場です。

前提となる章 — 3-02（共変微分・場の強さ・色の電場と磁場）。変分は 2-01、Maxwell の作用は 2-03・2-04、ホッジの星は 1-06・1-12。

先に言うこと — 古典論の章で、量子論も質量ギャップも扱いません。§06 は古典の場の既知の事実で、量子論の隙間の有無とは別の話です。Q が整数であることと BPST の解の構成は 3-05 に回します。

この章の順序

1. 約束と作用 — $\mathrm{tr}\, F^2$ を選ぶ理由
2. 運動方程式 — 場が自分自身の源になる
3. 色の電場と磁場で書く — Gauss の法則は拘束
4. Bianchi 恒等式 — 方程式の残り半分
5. エネルギーと運動量 — 四次元で跡が消える
6. 静止した塊は無い — 寄り道：減る速さの仮定は要らない・球対称な場（図 1）・寄り道：エネルギー無限大の解
7. 虚時間の作用と自己双対 — 作用の下界
8. 伸び縮みさせたインスタントン — Q は変わらず作用が増える（図 2）
9. 古典論が言うこと、言わないこと

01

約束と作用 — tr F² を選ぶ理由

規約は 3-02 §02 と同じで、$\hbar = c = 1$、計量 $(-,+,+,+)$、エルミートな T^a（$\operatorname{tr} T^a T^b = \tfrac{1}{2}\delta^{ab}$）、$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$ です。リー環に値を取る場 X には $D_\mu X = \partial_\mu X - ig[A_\mu, X]$（成分で $\partial_\mu X^a + g f^{abc} A^b_\mu X^c$）と働き、色の電場と磁場は $E^a_i = F^a_{i0}$、$B^a_i = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^a_{jk}$ です（3-02 §05）。作用は Maxwell の作用（2-04 の (8)）の F を非可換の場の強さに替え、トレースを取ったものです。

$$S[A] = -\frac{1}{2}\int \operatorname{tr}\!\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) d^4x = -\frac{1}{4}\int F^a_{\mu\nu}F^{a\,\mu\nu}\, d^4x = \frac{1}{2}\int \sum_a \left(|\mathbf{E}^a|^2 - |\mathbf{B}^a|^2\right) d^4x \qquad (1)$$

形は四つの要求でほぼ決まります。ゲージ不変性（$F' = \Omega F \Omega^{-1}$ の回転はトレースで消える）、ローレンツ不変性、方程式が時間の二階微分で閉じること、そして作用の係数に長さの尺度を入れないこと（質量の次元が $[F^2] = 4$ の項だけ。2-04 §08 の次元の勘定）です。最後の条件が要るのは、$(\operatorname{tr} F^2)^2$ のような F の高い次の不変式を足しても方程式は二階のままだからです。その係数には長さの四乗が要り、尺度が入ります。四つを課し、群が単純なら、F の二次の不変式は (1) と方程式を変えない θ 項（3-05）の一次結合だけです（2-04 §07）既知 。例。一様な場 $A^1_1 = x(t)$、$A^2_2 = y(t)$（3-02 §07）では体積あたり $L = \tfrac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \tfrac{1}{2}g^2x^2y^2$ で、その Euler–Lagrange 方程式（2-01）が 3-02 の (12) です。

$\hat{A} = gA$ と取り直すと (1) は $-\frac{1}{2g^2}\int \operatorname{tr}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}$ で（Jaffe–Witten の $\frac{1}{4g^2}\int \operatorname{Tr} F\wedge *F$ と、規格化と符号の約束を除いて同じ形 既知 ）、g は古典の方程式に効かず、量子論で $g^2\hbar$ の組として摂動の展開の変数になります（4-03）。

02

運動方程式 — 場が自分自身の源になる

A を δA だけずらすと、3-02 の (6) から $\delta F_{\mu\nu} = D_\mu \delta A_\nu - D_\nu \delta A_\mu$ です。$F^{\mu\nu}$ の反対称性と、部分積分で交換子の項が $\operatorname{tr}([A,X]Y) = -\operatorname{tr}(X[A,Y])$ により相手に移ることから（δA は遠くで 0）、

$$\delta S = -2\int \operatorname{tr}\!\left(F^{\mu\nu} D_\mu \delta A_\nu\right) d^4x = 2\int \operatorname{tr}\!\left((D_\mu F^{\mu\nu})\,\delta A_\nu\right) d^4x$$

です。どの δA でも 0 という停留の条件が、ヤン–ミルズ方程式です 既知 。

$$D_\mu F^{\mu\nu} = 0, \qquad \partial_\mu F^{a\,\mu\nu} = -g\, f^{abc} A^b_\mu F^{c\,\mu\nu} \qquad (2)$$

Maxwell と違って右辺に残る A と F の積は、ゲージ場自身が運ぶ色の電流です（3-02 §06 の予告）。(2) は A の三次までを含む非線形な方程式で、Jaffe–Witten は “The Yang–Mills equations are nonlinear—in contrast to the Maxwell equations.” と書きます 既知 。微分形式では $d_A{*}F = 0$ です（1-06）。

電流は共変にしか保存しない

物質の場があると右辺に色の電流が立ち、Maxwell と同じ符号で $D_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu$ です。左辺には、どんな A でも成り立つ恒等式があります（各項が同じ行列どうしの交換子なので 0）。

$$D_\nu D_\mu F^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}[D_\nu, D_\mu]F^{\mu\nu} = -\tfrac{ig}{2}\,[F_{\nu\mu}, F^{\mu\nu}] = 0$$

よって $D_\nu j^\nu = 0$ が必要で、普通の意味で保存するのは物質と場の電流の和 $j^{a\nu} + g f^{abc} A^b_\mu F^{c\,\mu\nu}$ です（2-03 の電荷の保存との違い）。

03

色の電場と磁場で書く — 非可換の Maxwell 方程式

$F^{i0} = -E_i$、$F^{ij} = \varepsilon_{ijk} B_k$ を $D_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu$ に入れると、Gauss と Ampère–Maxwell の法則（2-03 の源のある Maxwell の式）の ∇ を共変微分 $(\mathbf{D}_i X)^a = \partial_i X^a + g f^{abc} A^b_i X^c$ に替えた形です（$\rho = j^0$）。

$$(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})^a = \rho^a, \qquad (\mathbf{D}\times\mathbf{B})^a - (D_t\mathbf{E})^a = \mathbf{j}^a \tag{3}$$

Gauss の法則は時間の二階微分を含まない各時刻の拘束で、$A_0 = 0$ では初めに満たせば §02 の恒等式で満たされ続けます。3-02 §07 が確かめた拘束 $\varepsilon^{abc} A^b_i E^c_i = 0$ は、一様な場でのこの式です。

この拘束から、自由に選べる成分の数が分かります。各色で A_μ は 4 成分です。(1) には A_0 の時間微分が現れないので（F_{i0} は $\partial_0 A_i$ を含むが $\partial_0 A_0$ を含まない）、A_0 は運動する変数ではなく、ゲージ変換で $A_0 = 0$ にできます。残る A_i の 3 成分のうち、小さな波で見て進む向きに沿った縦の成分は、Gauss の法則と、$A_0 = 0$ を保つ時間によらないゲージ変換とで取り去られます。こうして各色 $4 - 1 - 1 = 2$ が残り、光の二つの偏りと同じ数です。$SU(N)$ では色が $N^2 - 1$ 個あるので $2(N^2-1)$、$SU(3)$ なら 16 です 既知 （量子版は 4-01）。

04

Bianchi 恒等式 — 残り半分は作り方から出る

Maxwell 方程式の源の無い半分は、場をポテンシャルから作ったことから出ました（1-06 の $dF = 0$）。非可換でも、F が A の曲率であることだけから次が成り立ちます 既知 。

$$D_\lambda F_{\mu\nu} + D_\mu F_{\nu\lambda} + D_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \tag{4}$$

理由は作用素のヤコビ恒等式 $[D_\lambda,[D_\mu,D_\nu]]+[D_\mu,[D_\nu,D_\lambda]]+[D_\nu,[D_\lambda,D_\mu]]=0$ です。$[D_\mu,D_\nu] = -igF_{\mu\nu}$（3-02 の (6)）と、積の微分の規則から出る $[D_\lambda, F_{\mu\nu}] = D_\lambda F_{\mu\nu}$ を入れると、左辺は (4) の $-ig$ 倍です。幾何の書き方では 1-07 の (12)、Jaffe–Witten の $0 = d_A F$ です。電場と磁場では (3) と対になる二本です。

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \mathbf{D}\times\mathbf{E} + D_t\mathbf{B} = 0 \tag{5}$$

電磁気学と違い、普通の発散 $\nabla\cdot\mathbf{B}^a = -gf^{abc}\mathbf{A}^b\cdot\mathbf{B}^c$ は 0 とは限らず、一つの色だけ見れば磁力線は途中で切れてよいのです。正確には、$\nabla\cdot\mathbf{B}^a$ はゲージで変わる量で、ゲージによらない主張は (5) の $\mathbf{D}\cdot\mathbf{B}=0$ です。小さな立方体の六面の磁束は面ごとに違う色の枠で測った量で、共通の一点まで平行移動（1-07）してから足すと、体積の次数の項が消えます（(5) の第一式を立方体で積分した形）。無作為な場で、(4) の左辺は差分の誤差（4×10^{-7}）の範囲で 0、普通の微分での巡回和は 2.1〜2.6 でした 計算 。

05

エネルギーと運動量 — 四次元で跡が消える

並進の Noether の保存量（2-01）をゲージ不変に整えたものが、エネルギー運動量テンソルです 既知 。

$$T^{\mu\nu} = F^{a\,\mu\alpha}F^{a\,\nu}{}_{\alpha} - \tfrac{1}{4}\,\eta^{\mu\nu}F^a_{\alpha\beta}F^{a\,\alpha\beta} \tag{6}$$

$T^{00} = \frac{1}{2}\sum_a(|\mathbf{E}^a|^2+|\mathbf{B}^a|^2)$ がエネルギー密度（3-02 の (10)）、$T^{0i} = \sum_a(\mathbf{E}^a\times\mathbf{B}^a)_i$ が運動量密度で、色について和を取るのでゲージで変わりません。エネルギー密度は 0 以上で、0 になるのは $F=0$（純ゲージ、3-02 §04）の所だけです。発散を取り (4) を使うと F の微分の項が二つ打ち消し合い、

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = (D_\mu F^{\mu\alpha})^a\,F^{a\,\nu}{}_{\alpha} \tag{7}$$

が残ります。解の上では 0 で、エネルギーと運動量が保存します。物質があれば右辺は $-j^{a\alpha}F^{a\,\nu}{}_{\alpha}$ で、物質に働く色の Lorentz 力の分だけ場が失います。跡は $\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} = d$（時空の次元）から

$$T^{\mu}{}_{\mu} = \left(1 - \frac{d}{4}\right) F^{a}_{\alpha\beta} F^{a\,\alpha\beta} \tag{8}$$

で、恒等的に 0 になるのは $d = 4$ だけです。古典の作用に長さの尺度が無いこと（2-04・1-12）の、応力の側からの言い方です 既知 。量子論では、摂動論の計算で跡に β 関数（結合定数が尺度とともに動く速さ。4-06）に比例する F^2 の項が現れ（跡の異常）、4-07 の次元転移と同じ現象とされます 物理 。跡の係数 $1 - d/4$ を、四で切り替わる他の量と並べた図は 1-12 §10 の次元のつまみです。

無作為な SU(2)・SU(3) の場で、$D_\nu D_\mu F^{\mu\nu}$ と (7) の両辺の差は差分の誤差の範囲（2.2×10^{-5} 以内）、T^{00}・T^{0i}・跡・(3) の形は丸め誤差以内で、(8) の係数は $d = 3, 5, 6$ でも $1 - d/4$ でした 計算 。

06

静止した塊は無い — 跡 0 と力のつり合い

粒子を古典の場で表すなら、エネルギーが一か所に留まる解（静止した塊）が候補です。純粋なヤン–ミルズ場の $3+1$ 次元では、至る所滑らかでエネルギーが有限な、時間によらない解は真空だけです 既知 。筋を追います。$T^{\mu\nu}$ が時間によらないなら、(7) から $\partial_k T^{kj} = 0$ です（$T^{\mu\nu}$ は (6) から対称で、発散をどちらの添字で取っても同じです）。$\partial_k x^i = \delta_{ik}$ と合わせて $\partial_k (x^i T^{kj}) = T^{ij}$ なので、半径 R の球の中で積分して発散定理を使うと、体積の積分が球面の積分に移ります（場が球の中で滑らかなので使えます）。

$$\int_{|\mathbf{x}|<R} T^{ij}\, d^3x = \oint_{|\mathbf{x}|=R} x^i T^{kj} n_k \, dS$$

右辺の大きさは、球面の面積 $4\pi R^2$ と腕の長さ R と球面の上の $|T|$ の積の程度です。たとえば T が r^{-3} より速く減れば、$R \to \infty$ で 0 になり $\int T^{ij} d^3x = 0$ です。実はエネルギーが有限なだけで足ります（下の寄り道）。(8) の $-T^{00} + \sum_i T^{ii} = 0$ と合わせると

$$E = \int T^{00}\, d^3x = \sum_i \int T^{ii}\, d^3x = 0 \tag{9}$$

です。エネルギー密度は 0 以上の連続関数なので至る所 0 で、至る所 $F = 0$ です。塊の外向きの圧力 $\sum_i T^{ii}$ がエネルギーと等しく、押し返すものが無いという形です。関係する結論を題に掲げた論文に Deser（1976）“Absence of static solutions in source-free Yang–Mills theory” と Coleman（1977）“There are no classical glueballs” があります（書誌のみ。証明の方法は本文で確認していません）。質量の次元を持つ定数（Higgs 場など）を足すと跡が 0 でなくなり、この議論は使えません。

寄り道：減る速さの仮定は要らない

飛ばしてよい小節です。

(6) を電場と磁場で書くと、各色で $T^{ij}=\tfrac12\delta_{ij}(|\mathbf{E}|^2+|\mathbf{B}|^2)-E_iE_j-B_iB_j$ です。単位ベクトル $\mathbf{n}$ で挟むと $\tfrac12(|\mathbf{E}|^2+|\mathbf{B}|^2)-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})^2-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{B})^2$ で、色について足しても $-T^{00}$ と T^{00} の間にあります。対称行列なので $|T^{kj}n_k|\le T^{00}$ で、球面の積分の大きさは $R\,f(R)$ 以下です。ここで $f(R)=\oint_{|\mathbf{x}|=R}T^{00}dS$ は $\int_0^\infty f(R)\,dR=E$ を満たします。

もし大きな R で常に $R\,f(R)\ge c>0$ なら、$\int^\infty c/R\,dR$ が発散して E が有限であることに反します。よって $R_n f(R_n)\to 0$ となる半径の列 $R_n\to\infty$ が取れ、その列に沿って球面の積分は 0 に近づきます。左辺も $|T^{ij}|\le T^{00}$ から $\int T^{ij}d^3x$ に収束するので、(9) は「至る所滑らかでエネルギーが有限」だけで成り立ちます 既知 。

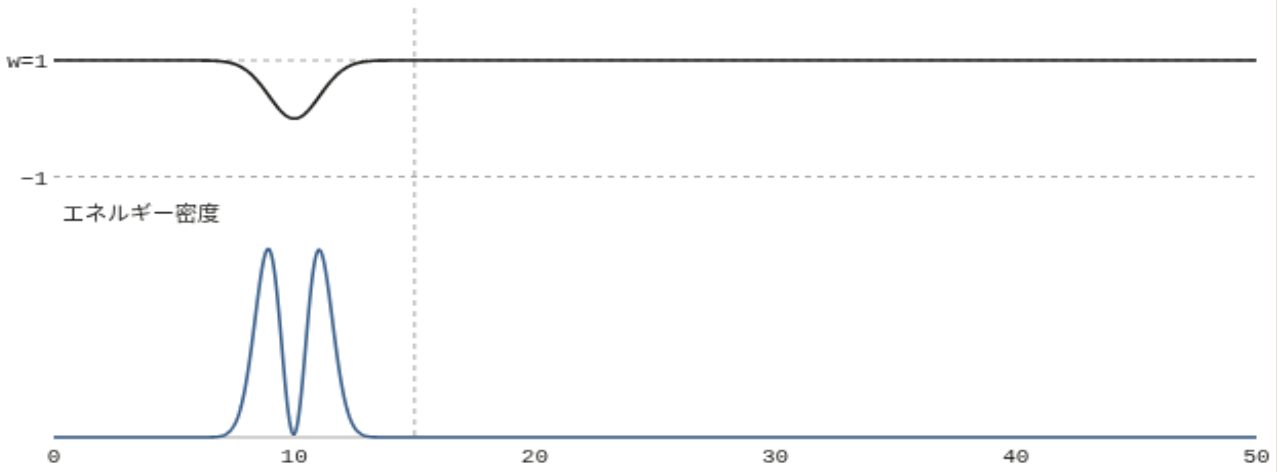
球対称な場で見る

SU(2) で空間と色を同時に回して変わらない形 $A_0=0$、$A_i^a=\varepsilon_{aij}x_j\,(1-w(r,t))/(gr^2)$ を取ると、問題は一変数 $r=|\mathbf{x}|$ になります。

$$E=\frac{4\pi}{g^2}\int_0^\infty\Big[w_t^2+w_r^2+\frac{(1-w^2)^2}{2r^2}\Big]dr,\qquad w_{tt}=w_{rr}+\frac{w(1-w^2)}{r^2}\tag{10}$$

$w=\pm1$ はエネルギー 0 の純ゲージです。三次元の場で差分により、エネルギー密度（10^{-8} の精度）・Gauss の法則・(3) の残りが (10) に帰着することを確かめました 計算 。

図 1　つまみ a でへこみの深さ（$w(r,0)=1-a\,e^{-((r-10)/1.5)^2}$）を変え、「動かす」で時間を進める。上は w、下は dr あたりのエネルギー密度、点線は $r=15$



a = 1　t = 0.00　E(t)/E(0) = 1.0000　r<15 の割合 = 1.000

計算 この図の数値はこの端末で計算した。表 1 と同じ差分（$h=0.05$、$\Delta t=h/2$ の蛙跳び）を同じ順序で解き、python3 と 12 桁一致します。JavaScript が無効なら表 1 が図の中身です。

表 1　$a = 1.0$ の時間発展。山の位置は dr あたりのエネルギー密度の極大。全エネルギー $0.84922 \times 4\pi/g^2$ のずれは $t \le 40$ で相対 2×10^{-4} 以下

t	$r < 15$ の割合	外向きの山	内向き→折り返しの山
0	1.0000	–	–
10	0.4996	18.95	1.10
20	0.4983	28.95	10.90
30	0.0000	38.90	20.90

へこみは二つに割れて光の速さ 1 で進み、内向きの山は $t \approx 10$ に原点で折り返し、$t = 30$ には $r < 15$ に何も残りません。$a = 0.3,\ 1.8$ でも同じでした 計算 。示しているのはこの初期値と有限の時間の範囲までです。

寄り道：静止した解はあるが、エネルギーが無限大

飛ばしてよい小節です。

(10) の $w = 0$ は時間によらない解で、磁場は $|\mathbf{B}| = 1/(gr^2)$ と点磁荷の形です 計算 。原点で特異で、エネルギー $\int 4\pi r^2 dr/(2g^2 r^4)$ が原点で発散するので、(9) の仮定（至る所滑らか・エネルギーが有限）の外にあります。Wu と Yang の名で呼ばれるとされる解です。

07

虚時間の作用と自己双対 — 作用の下界

虚時間 $t = -i\tau$、$x_4 = \tau$（2-04 §09）に移ります。$A_0\,dt = A_4\,d\tau$ から $A_0 = iA_4$、また $\partial_t = i\partial_4$ なので、$F_{i0} = iF_{i4}$ です。そこで $E_i^a = F_{i4}^a$ と置き直すと (1) の $|\mathbf{E}^a|^2$ の符号が反転し、iS は $-S_E$ になります。ユークリッドの作用 S_E は正の量の和で、量子論ではこれが重み e^{-S_E} に入ります（4-02）。

$$S_E[A] = \frac{1}{4}\int F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}\,d^4x = \frac{1}{2}\int \sum_a \left(|\mathbf{E}^a|^2 + |\mathbf{B}^a|^2\right) d^4x \ \ge 0 \tag{11}$$

ホッジの星 $(*F)_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$（$\varepsilon_{1234} = 1$、1-12）はこの書き方で $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ を入れ替えるので、自己双対 $F = *F$ は $\mathbf{E}^a = \mathbf{B}^a$、反自己双対は $\mathbf{E}^a = -\mathbf{B}^a$ です。各点で $\frac{1}{2}(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2) = \frac{1}{2}|\mathbf{E} \mp \mathbf{B}|^2 \pm \mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ なので、

$$S_E = \frac{1}{2}\int \sum_a |\mathbf{E}^a \mp \mathbf{B}^a|^2\,d^4x \pm \frac{8\pi^2}{g^2}Q \ \ge\ \frac{8\pi^2}{g^2}|Q|, \qquad Q = \frac{g^2}{8\pi^2}\int \sum_a \mathbf{E}^a\cdot\mathbf{B}^a\,d^4x \tag{12}$$

で、等号は自己双対（$Q>0$）か反自己双対（$Q<0$）のときだけです 既知 。ヤン–ミルズ方程式の解で作用が有限なら、S^4 の上の場に延びて Q は整数になるとされます（Uhlenbeck 1982、書誌のみ）。解でない一般の場については 3-05 §03 で扱います。3-05 の幾何の書き方（反エルミートな A と c_2）では $Q=-c_2$ です（3-05 の寄り道）。

自己双対な場は自動的に解です。$D_\mu F_{\mu\nu}=\pm\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}D_\mu F_{\rho\sigma}$ は (4) の巡回和で 0 だからです。二階の (2) の代わりに一階の $F=\pm *F$ を解けばよく、その解は同じ Q の中で作用が最小です。Jaffe–Witten §2 は、古典の非可換ゲージ理論が三・四次元の多様体の研究で大きな役割を果たしてきたと書きます 既知 。四次元でのその代表が（反）自己双対の一階の方程式で、Donaldson（1983）はその解の空間を四次元の位相に使いました（3-06） 既知 。実の自己双対な場は虚時間にしかありません（1-06）。

08

伸び縮みさせたインスタントン — Q は変わらず、作用だけが増える

例として、3-05 で構成する BPST の解（Belavin–Polyakov–Schwartz–Tyupkin 1975）を借ります 既知 。't Hooft の記号（$\eta_{aij}=\varepsilon_{aij}$、$\eta_{ai4}=-\eta_{a4i}=\delta_{ai}$）で、大きさ ρ の解は次の形です。

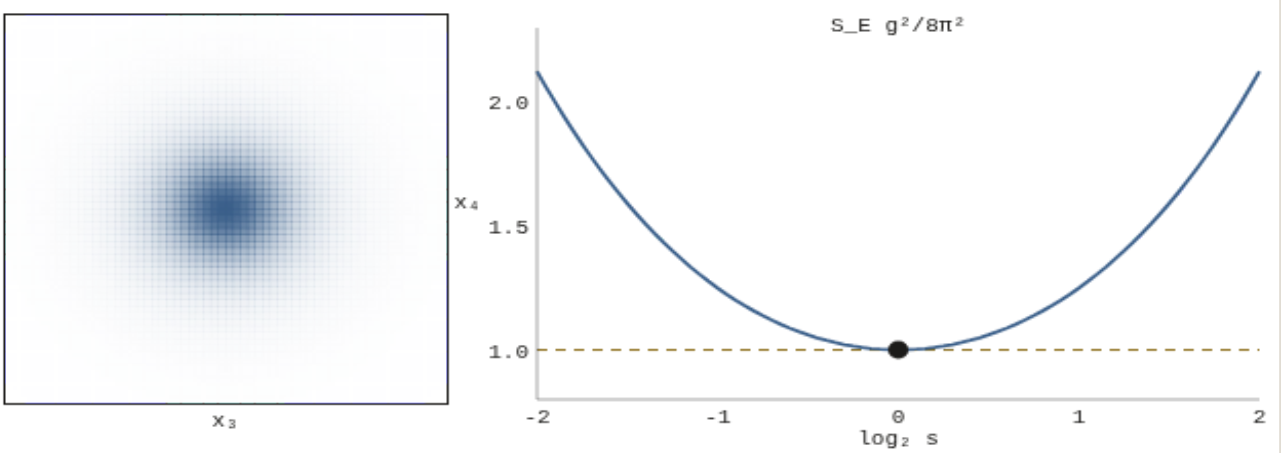
$$A^a_\mu=\frac{2}{g}\,\frac{\eta_{a\mu\nu}x_\nu}{|x|^2+\rho^2},\qquad F^a_{\mu\nu}=-\frac{4}{g}\,\frac{\eta_{a\mu\nu}\,\rho^2}{(|x|^2+\rho^2)^2} \tag{13}$$

η_a が自己双対なので $\mathbf{E}^a=\mathbf{B}^a$、$S_E=8\pi^2/g^2$、$Q=1$ です（1-12 の表 1）。差分で (13) の右の式・$F=*F$・$D_\mu F_{\mu\nu}=0$ を 6×10^{-10} 以内で確かめました 計算 。これを虚時間の向きに変形します。$M=\mathrm{diag}(1,1,1,s)$ で $A^{(s)}_\mu(x)=M_{\nu\mu}A_\nu(Mx)$ と引き戻すと、$s>1$ なら場の形は x_4 の向きに $1/s$ 倍に縮み、$s<1$ なら $1/s$ 倍に伸びます。$\mathbf{E}^{(s)}=s\,\mathbf{E}(Mx)$、$\mathbf{B}^{(s)}=\mathbf{B}(Mx)$ で、x_4 を添字に持つ $\mathbf{E}$ の成分 F_{i4} だけが s 倍になります（x_4 の微分と A_4 に s が掛かるため）。$s\neq1$ では解ではありません。$y=Mx$（$d^4x=d^4y/s$）と置き換えると次が出ます。

$$S_E^{(s)}=\frac{8\pi^2}{g^2}\cdot\frac{1}{2}\Big(s+\frac{1}{s}\Big),\qquad Q^{(s)}=1 \tag{14}$$

作用は $s=1$ で最小で、伸ばしても縮めても増えます（相加相乗平均）。Q が変わらないのは、被積分関数 $\mathrm{tr}\,F\wedge F$ が計量を使わない四次の微分形式で、向きを保つ座標の取り替えで積分が変わらないからです（1-06）。作用はホッジの星、つまり計量を使うので変わります。

図 2　つまみで $\log_2 s$ を動かすと、左の作用密度の断面（$x_1=x_2=0$、縦が虚時間 x_4）が伸び縮みし（$s>1$ で縦に縮む）、右の点が曲線 $\frac{1}{2}(s+1/s)$ の上を動く。破線は $Q=1$ の下界




```
s = 1.000  |E|/|B| = 1.000  S_E·g²/8π² = 1.0000  Q = 1
```

計算 この図の数値はこの端末で計算した。図は (14) と作用密度の閉じた式をその場で計算しています（表 2 と一致）。

表 2　x_4 の向きに伸び縮みさせたインスタントンを変数変換せず x の四次元極座標で数値積分（$g=\rho=1$。動径 96 点・角度 48×64×64 点）計算 。S_E は (14) と 6 桁一致し、どの s でも $\geq |Q| = 1$

s	0.25	0.5	0.8	1	1.25	2	4
$S_E g^2/8\pi^2$	2.125000	1.250000	1.025000	1.000000	1.025000	1.250000	2.125000
Q	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

09

古典論が言うこと、言わないこと

古典のヤン–ミルズ場には、有限のエネルギーの静止した塊が無く（§06）、波の振動数に下限も無く（3-02 §07）、虚時間では各 Q の作用の最小が自己双対な場で実現します。どれも質量ギャップではありません。Jaffe–Witten §2 は質量ギャップと閉じ込めを “quantum properties that do not have classical analogs” と呼びます 既知 。古典に尺度が無い以上、隙間の尺度は量子化の過程で入ると考えられています（4-07）物理 。この章は量子論についても質量ギャップについても何も示していません。

この先の章への橋です。3-04 では、ゲージ変換で移り合う場を同じものと見なした空間（ゲージ軌道空間）の形を調べ、ゲージを全体で一通りに固定できない理由を扱います。§07 の Q が整数であることと BPST の解の構成は 3-05、自己双対な場の解の空間が四次元の位相を見分ける話は 3-06 の寄り道です。§05 の跡と尺度の話は、量子論の側で 4-06（漸近自由）と 4-07（次元転移）に続きます。

この章が言えている範囲

事項	言えている	言えていない
(1)〜(8)	導出と数値の確認 既知 計算	物質の場（3-07）、量子論の跡 物理
(9)	至る所滑らかでエネルギーが有限な、時間によらない解についての議論 既知	滑らかさの仮定を外すこと（§06 の寄り道の $w = 0$ は特異）
(10)・図 1・表 1	三つの初期値で有限の時間に見える散り方 計算	一般の初期値での証明
(12)〜(14)・表 2	導出と 6 桁の数値確認 既知 計算	Q が整数であること（3-05）
質量ギャップ	—	量子のヤン–ミルズ理論に隙間があること（未解決。このサイトは何も示していない） 物理

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§01・§02・§04・§07・§09 の引用と言及	一次資料（本文を確認）	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”（2000）, Clay Mathematics Institute の公式問題説明 §1・§2。*The Millennium Prize Problems*（2006）に収録
静止した解の非存在・BPST の解・有限作用の解の延長	書誌のみ（Crossref）	S. Deser, “Absence of static solutions in source-free Yang–Mills theory”, Phys. Lett. B 64 (1976) 463–464／S. Coleman, “There are no classical glueballs”, Commun. Math. Phys. 55 (1977) 113–116／A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, Yu. S. Tyupkin, “Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations”, Phys. Lett. B 59 (1975) 85–87／K. Uhlenbeck, “Removable singularities in Yang-Mills fields”, Commun. Math. Phys. 83 (1982) 11–29
§07 の Donaldson	書誌のみ（本文の引用は 3-06）	S. K. Donaldson, “An application of gauge theory to four-dimensional topology”, J. Differential Geom. 18 (1983) 279–315
$w = 0$ の解の呼び名	未確認	一次資料を確認していない。候補：T. T. Wu, C. N. Yang, “Some solutions of the classical isotopic gauge field equations”, H. Mark, S. Fernbach 編 *Properties of Matter Under Unusual Conditions*（1969）349 頁〜（書誌のみ。この解を含むかは確かめていない）
作用の一意性（尺度の条件つき）・変分・(4)〜(9)・(12)	既知	標準的な事項。導出は本文。規約は 3-02 §02
§03〜§05・§06・§08 の数値、表 1・表 2、図 1・図 2	この端末で計算	Python 3.12・NumPy 1.26（`identity_checks.py`・`radial_reduction.py`・`radial_sim.py`・`instanton_stretch.py`）。図 1 は同じ差分を素の JavaScript で解く（Node.js で照合）

次に読む章：3-04 幾何としてのゲージ理論。インスタントンは 3-05、格子の作用は 5-01。

幾何としてのゲージ理論 — まっすぐな空間を軌道で割ると、代表を連続には選べなくなる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 接続の全体 $\mathcal{A}$ はまっすぐですが、ゲージで移り合う配位を同一視した軌道空間は曲がり、角を持ちます。ゲージ固定は軌道空間の切り口を選ぶことで、切り口は同じ軌道と何度も交わります（Gribov のコピー）。Singer の定理によれば、S^4（と S^3）の上の $SU(N)$ などの半単純群では連続な切り口が在りません。

前提となる章 — 1-07（接続・ゲージ変換・ホロノミー）と 3-02（非可換の場の強さ）。Haar 測度（§04）、ホモトピー群と主束（§07）はその場で定義します。

先に言うこと — 古典の幾何の章で、量子論も質量ギャップも扱いません。Singer の定理は言明と証明の筋の紹介です。図と表は有限個の辺の格子の模型の計算で、四次元の連続の理論のコピーを数えたものではありません。

この章の順序

1. 配位の空間 — 場の全体を一点ずつ
2. 接続の空間 — まっすぐで、穴が無い
3. ゲージ群と軌道 — 接線と、止める元
4. 軌道空間 — 曲がり、角を持つ（表 1）。寄り道：軌道空間とギャップ
5. ゲージ固定は切り口 — コピーと horizon（図 1・表 2）
6. 一周すると別のコピーへ（表 3）
7. Singer の定理 — 四段の筋（表 4）
8. どう回避されてきたか

01

配位の空間 — 場の全体を一つの空間と見る

力学では粒子の位置の全体を一つの空間（配位空間）と見ました（2-01）。場でも接続 A 一つを一点と見なし、その全体を $\mathcal{A}$ と書きます（無限次元）。ゲージ変換で移り合う配位は同じ物理を表すので（3-01）、本当の配位空間は移り合うものを束ねた集まりです。束ねた一つを**軌道**、その全体を**軌道空間** $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ と呼びます。ゲージ変換は 1-07 の式 (4) と、その格子版（1-07 の式 (7)）です。

$$g\cdot A = gAg^{-1} - (dg)\,g^{-1}, \qquad (g\cdot U)_\ell = g_y\,U_\ell\,g_x^{-1} \quad (\ell: x\to y) \tag{1}$$

(1) の U_ℓ は、辺 ℓ に沿って x から y へ運ぶ平行移動です（1-07 の式 (7)）。5-01 の $U_{x,\mu}$ は $x+a\hat{\mu}$ から x へ運ぶ向きに読むので、この章の記号では U_ℓ（$\ell: x+a\hat{\mu}\to x$）に当たります（$U_\ell = U_{x,\mu}$、逆向きの辺では逆元）。

例（格子）。辺に群の元を置く格子（5-01）では、配位は辺の数 E 個の組 G^E、ゲージ変換は頂点の数 V 個の組 G^V で、有限次元です。問いは二つです。軌道空間はどんな形か。軌道ごとに代表を一つ、連続に選べるか（§07）。

02

接続の空間 — まっすぐで、穴が無い

約束。1-07 と同じく $G=SU(N)$、$\mathfrak{g}$ は反エルミートで跡 0 の行列、接続は $\mathfrak{g}$ 値の 1-形式 $A=\sum_\mu A_\mu\,dx^\mu$ です（3-02 の表の $\mathcal{A}=-igA$ をこの章では A と書き、$\mathcal{A}$ は接続の全体に使います）。底空間 M は $\mathbb{R}^4$・S^4・S^3・円周です。二つの接続の差は $\mathfrak{g}$ 値の 1-形式で、接続に 1-形式を足せばまた接続です（1-07 §03）。だから $\mathcal{A}$ は原点の決まっていないベクトル空間（アフィン空間）です。

$$A_t = (1-t)A_0 + tA_1 \in \mathcal{A}, \qquad g\cdot A_t = (1-t)\,g\cdot A_0 + t\,g\cdot A_1 \tag{2}$$

右の式は、(1) の $-(dg)g^{-1}$ が重み $(1-t)+t=1$ で一度だけ出ることから従います。t を 1 から 0 へ動かすと $\mathcal{A}$ 全体が一点 A_0 に連続に縮みます。これを**可縮**と呼び、§07 の出発点です。接線の向き a,b には内積を入れます。

$$\langle a,b\rangle = -\int_M \sum_\mu \operatorname{tr}\!\left(a_\mu b_\mu\right) d^dx \tag{3}$$

反エルミートなら $-\operatorname{tr}(a_\mu a_\mu)\ge 0$ で、ゲージ変換 $a\mapsto gag^{-1}$ はこの内積を保ちます。**例**。格子の $U(1)^E$ はトーラスで、縮められない輪を持つので可縮ではありません（格子の配位の空間が可縮でないことは §08 で効きます）。

03

ゲージ群と軌道 — 軌道の接線と、止める元

ゲージ変換の全体 $\mathcal{G}$（滑らかな $g : M \to G$、積は点ごと）は無限次元の群です。軌道の接線は $g = e^{t\xi}$（$\xi : M \to \mathfrak{g}$）を (1) に入れて微分すると出ます。

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{t\xi} \cdot A = -D_A\xi, \qquad D_A\xi = d\xi + [A, \xi] \tag{4}$$

D_A は随伴表現の共変微分です（3-02 §03）。(3) で部分積分すると（ξ どうしの内積は $-\int \mathrm{tr}(\xi\eta)\, d^dx$、境界の項は落とす）、随伴 D_A^* が決まります。

$$\langle D_A\xi, a\rangle = \langle \xi, D_A^* a\rangle, \qquad D_A^* a = -\sum_\mu \big(\partial_\mu a_\mu + [A_\mu, a_\mu]\big) \tag{5}$$

向き a が軌道に直交することは $D_A^* a = 0$ と同じで、$A = 0$ では Landau の条件 $\partial_\mu a_\mu = 0$ です 既知 。**止める元**。$g \cdot A = A$ に右から g を掛けると $gA - dg = Ag$、つまり

$$g \cdot A = A \iff dg + [A, g] = 0 \tag{6}$$

で、平行移動の方程式です（1-07 §04）。g は一点 m での値で決まり、$g(m)$ は A のホロノミーと可換でなければなりません（Singer 1978 §2） 既知 。だから基点つきのゲージ群 $\mathcal{G}_m = \{g : g(m) = 1\}$ はどの接続も動かし（自由に働き）、ホロノミーが共通の不変部分空間を持たない**既約**な接続を止めるのは中心 $\mathbb{Z}_N$（1-04）だけです。$A = 0$ のような**可約**な接続は大きな群（定数の G 全体）で止まり、軌道が細くなって軌道空間の角になります。

04

軌道空間 — 曲がり、角を持つ

L 本の辺が輪になった格子では、ゲージで変わらない量は一周のホロノミー $U = U_{L-1}\cdots U_0$ の共役類だけです（1-07 §06）。$U(1)$ なら角 Φ（$U = e^{i\Phi}$）で、軌道空間は円周です。$SU(2)$ なら固有値 $e^{\pm i\theta}$（$0 \le \theta \le \pi$）で決まり、軌道空間は線分 $[0, \pi]$、端の $U = \pm 1$ は止める元が $SU(2)$ 全体に跳ね上がる角です。$SU(2) \cong S^3$（単位四元数、1-12）と見ると、角 θ の共役類は半径 $\sin\theta$ の球面で、端で一点に潰れます。群の上の、掛け算で変わらない重さ 1 の測度を **Haar 測度**と呼びます。$SU(2)$ では S^3 の一様分布です（1-08 §03）。これを軌道空間に落とすと、軌道の面積（分子）を S^3 の体積（分母）で割った重みが付きます（Weyl の積分公式） 既知 。

$$\rho(\theta)\, d\theta = \frac{4\pi \sin^2\theta}{2\pi^2}\, d\theta = \frac{2}{\pi}\sin^2\theta\, d\theta \tag{7}$$

計算 **表 1**　4 本の辺をそれぞれ $SU(2)$ の Haar 測度で無作為に選んだ環の、ホロノミーの角 θ の分布（200 万標本、標本誤差は 0.0004 以下）。

θ の区間	標本	(7) の積分
0°–30°	0.0289	0.0288
30°–60°	0.1666	0.1667
60°–90°	0.3047	0.3045
90°–120°	0.3044	0.3045
120°–150°	0.1667	0.1667
150°–180°	0.0288	0.0288

(7) に一致し、辺 1 本でも同じです（Haar 測度の元の積はまた Haar 測度に従う）。角の近くの軌道は小さく、そこに来る確率も小さい。この重みは、ゲージを固定するときに掛ける Faddeev–Popov の行列式（§05 の式 (9) の M の行列式）と同じ役をします。正確には、有限次元の群で共役を対角形に固定すると、Faddeev–Popov の行列式が $\sin^2\theta$ の定数倍（Weyl の因子）になります。無限次元のゲージ固定での行列式は、その形式的な類比です（4-08 §02）。

寄り道：軌道空間とギャップ

飛ばしてよい小節です。

量子論の運動エネルギーは、軌道空間のラプラシアンに当たります（4-01）。Karabali–Nair（1996）は Feynman（1981）の論点を “for a finite-dimensional compact manifold the Laplacian has a discrete spectrum, the gap between the first and second eigenvalues being the analogue of the mass gap” とまとめ、ゲージ不変な距離が際限なく大きくならなければギャップが出る、という (2+1) 次元の議論を紹介します 物理 。正確には定理ではなく、同じ論文も “have to be understood with regularizations and all that” と断っています。

05

ゲージ固定は切り口 — Gribov のコピーと horizon

ゲージを固定するとは、各軌道から代表を一つずつ選ぶ写像 $s : \mathcal{A}/\mathcal{G} \to \mathcal{A}$（**切り口**）を選ぶことです。よく使うのは、軌道の上で原点にいちばん近い点を選ぶ規則です。(4)(5) から

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \|e^{t\xi}\cdot A\|^2 = -2\langle A, D_A\xi\rangle = -2\langle D_A^{*}A, \xi\rangle \tag{8}$$

で、これがすべての ξ で 0 になるのは $\partial_\mu A_\mu = 0$、Landau ゲージです。Singer は A を通り軌道に直交する面 $\mathcal{S}_A = \{A + \tau : D_A^* \tau = 0\}$ を一般化された Coulomb ゲージと呼び、A の近くでは面が軌道とちょうど一度ずつ交わる（局所的な切り口）ことを述べます 既知 。遠くでは面が軌道に接します。$A+\tau$ での軌道の接線 $D_{A+\tau}\xi$ が面に入るのは、次の作用素が 0 でない解を持つときです。

$$M(\tau)\,\xi = D_A^* D_{A+\tau}\,\xi \tag{9}$$

そこでは Faddeev–Popov の行列式（$M(\tau)$ の行列式）が 0 になります。$A=0$ なら $M(\tau) = -\partial_\mu D_{\tau,\mu}$ です。M が正の範囲を **Gribov 領域**、その境目を **horizon**、軌道と面の交点の一つひとつを **Gribov のコピー**と呼びます。Singer の Theorem 8 は、面のどの向きにも十分遠くで軌道に接する点があることを示します。Gribov（1978）は $\mathbb{R}^4$ の $SU(2)$ で、Coulomb ゲージが原点の軌道と遠くでもう一度交わることを見つけました（Singer の紹介による） 既知 。量子論での数え方は 4-08 §05・§06。

例（図 1）。$U(1)$ の L 本の辺の環。基点で $g_0 = 1$、残りを $g_x = e^{i\alpha_x}$ とすると、(1) で変換した辺の角は $\psi_\ell = \theta_\ell + \alpha_{\ell+1} - \alpha_\ell$（添字は L で一周）です。原点からの離れ方を Mehta ら（2014）と同じ関数で測ります。

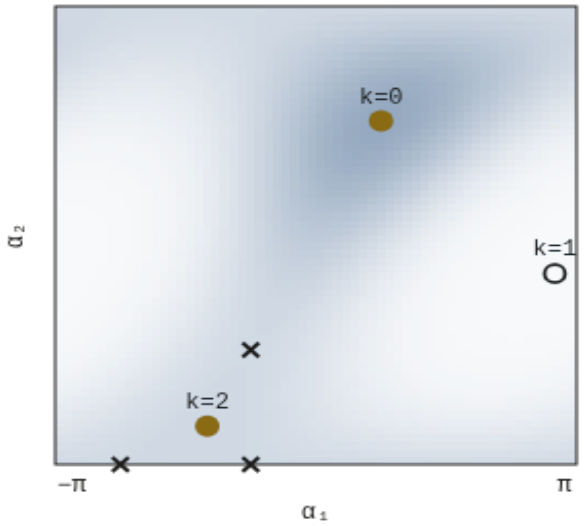
$$E(\alpha) = \sum_{\ell=0}^{L-1} \bigl(1 - \cos\psi_\ell\bigr), \qquad \frac{\partial E}{\partial \alpha_j} = \sin\psi_{j-1} - \sin\psi_j \tag{10}$$

ψ が小さいと $E \approx \tfrac{1}{2}\sum_\ell \psi_\ell^2$ で、(8) の格子版です。止まる点ではすべての $\sin\psi_\ell$ が等しく、一様な点 $\psi_\ell = \varphi$ と、一部の辺だけ $\pi - \varphi$ の点があります。一様な点は次の L 個です。

$$\varphi_k = \frac{\Phi + 2\pi k}{L} \quad (k = 0, \dots, L-1), \qquad E = L\,(1 - \cos\varphi_k) \tag{11}$$

そこでの二階微分の行列（格子の Faddeev–Popov 行列）は輪のラプラシアンの $\cos\varphi_k$ 倍なので、$\cos\varphi_k > 0$ なら極小（Gribov 領域の中のコピー）、負なら極大です。非一様な点は極小になりません（$L = 3$〜9） 計算 。

図 1　つまみで Φ を変えると、$L=3$ の軌道（トーラス）の上の E の濃淡（濃いほど小さい）と臨界点（● 極小、× 鞍点、○ 極大、k は (11) の番号）が動きます。「動かす」で Φ が一周し、$k=0$ の代表は元の $k=1$ の位置に着きます。$L=3$ では途中で horizon を越えるので、着いた先は極大です（§06）。



Φ = 135°　極小 2 個：E = 0.879, 2.224

Φ	極小	鞍点	極大	極小での E	極小の φ
0°	1	3	2	0.0000	0°
99°	2	3	1	0.4840, 2.8430	33°, −87°
135°	2	3	1	0.8787, 2.2235	45°, −75°
180°	2	3	1	1.5000, 1.5000	60°, −60°

計算 **表 2**　代表 $\theta = (0, 0, \Phi)$ の軌道の臨界点を (10) で列挙し、二階微分で分類。この図の数値はこの端末で計算した（図は同じ式をその場で計算）。JS が無効ならこの表が図の中身です。

Φ が 90° と 270° の間でだけ、$\cos\varphi_0 > 0$ と $\cos\varphi_2 > 0$ が両立し、Gribov 領域の中にコピーが二つあります。Φ が増える向きに 90° を越えるとき、$k = 2$ の点と三つの鞍点が一点に重なり、二階微分が 0 になります。これより先で $k = 2$ は極小になります。これが horizon です。$\Phi = 180^\circ$ では二つの極小の E が等しく、最も近い点だけを集めた領域（基本モジュラー領域）の境界がここです。臨界点の符号つきの和が 0 になること（Neuberger の 0/0）は 7-11 §05 にあります。

06

一周すると別のコピーへ — 代表を連続に選び続けると食い違う

図 1 で Φ を一周させると、(11) の一様な代表は $\varphi = \Phi/L$ から $(\Phi + 2\pi)/L$ へ連続に動き、$k = 1$ の代表に着きます。軌道は元に戻ったのに、選んだ代表は別のコピーです。図 1 の $L = 3$ では途中の $\Phi = 270^\circ$ で horizon を越え、着いた先は極大（Gribov 領域の外のコピー）です。領域の中にとどまったまま別のコピーに着くのは $L \geq 5$ です（表 3）。二つのコピーは、点 x で角 $\alpha_x = 2\pi x/L$ だけ回すゲージ変換（連続の円の巻き数 1 の変換を格子に写したもの）で移り合います（最後の辺でも $\alpha_0 - \alpha_{L-1} \equiv 2\pi/L$）。

$$\psi_\ell \;\mapsto\; \psi_\ell + \alpha_{\ell+1} - \alpha_\ell \equiv \psi_\ell + \frac{2\pi}{L} \pmod{2\pi}, \qquad \varphi_k \mapsto \varphi_{k+1} \tag{12}$$

代表を連続に選び続けると一周で食い違う——連続な大域的ゲージ固定を妨げる仕組みの、いちばん小さな姿です。たどる途中で horizon（$\cos\varphi = 0$、つまり $\Phi = \pi L/2$）に当たるかどうかは L で変わります。

計算 **表 3**　$\Phi = 0$ の極小を Φ に沿って一周たどった結果と、Gribov 領域の中のコピーの数（Φ を 4000 通り動かした最小〜最大）。

L	領域の中のコピー	horizon に当たる Φ	一周後の代表
3	1〜2	270°	—（途中で極小でなくなる）
4	2	360°（一周の端）	—
5	2〜3	当たらない	$\varphi = 2\pi/5$（$k = 1$）
8	4	当たらない	$\varphi = 2\pi/8$（$k = 1$）

$L \geq 5$ では代表は一周の間 Gribov 領域の中にとどまって $k = 1$ のコピーに着き、$L \leq 4$ では途中か端で horizon に当たります。どちらでも元の代表には戻りません 計算 。

例（連続の円）。長さ ℓ の円周の $U(1)$ 接続 $A = i\,a\,dx$ では、Landau の条件は a を定数にし、巻き数 n のゲージ変換 $e^{2\pi i n x/\ell}$ は a を $a - 2\pi n/\ell$ に移すので、コピーは無限個です。ゲージで変わらないのは $a\ell \bmod 2\pi$ だけで、代表を連続に選ぶことは角から実数を連続に選ぶ（連続な対数を取る）ことですが、一周で 2π ずれるので不可能です 既知 。

07

Singer の定理 — 可縮な空間は、穴のある群との積になれない

Singer（1978）は底空間を S^4（$\mathbb{R}^4$ に無限遠の一点を足したもの。遠方でゲージ変換が一定の値に近づく条件に当たる）か S^3（ある時刻の空間）とし、コンパクトで連結な半単純群（リー環が単純なものの直和になる群。論文では簡単のため $SU(N)$、$N > 1$）について、要旨で “It is shown that no continuous choice of exactly one connection on each orbit can be made.” と述べ、“No gauge fixing is possible.” と結びます 既知 。正確には「**連続な大域的**ゲージ固定は無い」で、局所的な切り口や不連続な選び方は禁じられません。

ホモトピー群。$\pi_k(X)$ は、k 次元の球面から X への基点つきの連続写像を、連続変形で移り合うものごとにまとめた類です。π_0 はつながった成分、π_1 は輪の類、$\pi_3(SU(2))$ は 1-12 の写像度で、$\pi_k(X \times Y) = \pi_k(X) \times \pi_k(Y)$ です。証明は四段です（Singer 1978 §2）。

1. $\mathcal{A}$ は可縮（§02）。可約な接続の集合 C を除いた $\mathcal{A}^*$ も、すべての $\pi_j(\mathcal{A}^*) = 0$（Singer の Theorem 2）。除いた集合 C はどの点でも、それに直交する無限次元ぶんの向きを残すの

で、球面の像を C から押し出せるからです。

2. $\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{G}/\mathbb{Z}_N$（中心 $\mathbb{Z}_N$ はどの接続も止めるので割っておく）は $\mathcal{A}^*$ に自由に働き、$\mathcal{A}^* \to \mathcal{N}^* = \mathcal{A}^*/\hat{\mathcal{G}}$ は $\hat{\mathcal{G}}$ をファイバーとする主束（Singer の Theorem 1）。**主束**とは、底（ここでは $\mathcal{N}^*$）の各点の上に群 $\hat{\mathcal{G}}$ の写し（**ファイバー**。ここでは一つの軌道）が乗り、$\hat{\mathcal{G}}$ がそれぞれの写しの中で自由かつ推移的に（1 以外の元はどの点も動かし、どの点もどの点へも移せるように）働く束です。切り口があれば、全体は底と群の積になります。
3. 連続なゲージがあれば、それが主束の切り口になって束は積 $\mathcal{A}^* \cong \mathcal{N}^* \times \hat{\mathcal{G}}$ になり、$\pi_j(\mathcal{A}^*) = 0$ と積の公式から、すべての j で $\pi_j(\hat{\mathcal{G}}) = 0$ が従う。
4. ところが $\hat{\mathcal{G}}$ のどれかの π_j は 0 でない（Theorem 3）。矛盾（Corollary 4）。

$$\pi_j(\mathcal{G}_m) \cong \pi_{j+r}\big(SU(N)\big) \qquad (M = S^r) \tag{13}$$

四段目の道具が (13)（Theorem 5）です。$\mathcal{G}_m$ は $\mathcal{A}$ 全体に自由に働き、(13) からそのホモトピー群のどれかは 0 でないので、$\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{G}_m$ にも切り口が無い、と Singer は注意します。

既知 **表 4**　(13) で読む $\pi_j(\mathcal{G}_m)$（$M = S^r$）。非可換の欄は Singer の本文（Toda の表を引く）による。

M	$U(1)$	$SU(2)$	$SU(N)$、$N \geq 3$
S^3	すべて 0（注）	$\pi_0(\mathcal{G}_m) = \pi_3(SU(2)) = \mathbb{Z}$	$\pi_0(\mathcal{G}_m) = \pi_3(SU(N)) = \mathbb{Z}$
S^4	すべて 0（注）	$\pi_0(\mathcal{G}_m) = \pi_4(SU(2)) = \mathbb{Z}_2$、$\pi_2(\mathcal{G}_m) = \pi_6(SU(2)) = \mathbb{Z}_{12}$	$\pi_0(\mathcal{G}_m) = \pi_4(SU(N)) = 0$（四段目には $\pi_1(\hat{\mathcal{G}}) \neq 0$ を使う）

注：$U(1)$ の列は、基点つきの写像の空間のホモトピー群 $\pi_j(\mathcal{G}_m) = \pi_{j+r}(U(1))$ から読んだもので（$U(1)$ の π_k は $k \geq 2$ で 0）、Singer の Theorem 5 は $SU(N)$ の言明です。

S^3 では、巻き数の違うゲージ変換がつながらないことだけで矛盾が出ます（§06 の円周は $\pi_0(\mathcal{G}_m) = \pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$ による可換版）。$U(1)$ の高いホモトピー群は 0 なので S^3・S^4 では四段目が働かず、Singer も可換なら “An integral submanifold provides the gauge for quantum electrodynamics.” と書きます。障害は、非可換性と遠方の条件が作る位相から来ています 既知 。

08

どう回避されてきたか — 格子・局所的なゲージ・軌道空間そのもの

Faddeev–Popov の手順（4-08 §03）は局所的な切り口の上では正しく、大域的にはそのまま使えません。Singer は局所的な切り口の効く領域で軌道空間を覆い、1 の分割（覆いの各片に、足すと至る所で 1 になる重みを割り振ること）で足し合わせる道を挙げ、“This partition

of unity argument would be useful if the covering used could be made explicit.” と書きました。以後の仕事は三つの道で障害をよけています。

- **格子**。Wilson の格子は Haar 測度で積分するので、ゲージを固定せずに有限です（4-02・5-01）既知 。全頂点を結ぶ木（最大木）の辺をすべて 1 にするゲージは、基点つきのゲージ群について大域的で連続な切り口です 既知 。根の頂点で $g = 1$ とし、木に沿って隣の頂点へ進みながら、その辺が 1 になるように g を順に決めます（辺 $\ell : x \to y$ で g_x が決まっていれば $g_y = g_x U_\ell^{-1}$）。g は辺の元の積と逆元でただ一通りに決まり、U に連続に依存します。基点つきのゲージ群が木の辺の配位に自由かつ推移的に働くので、各軌道に代表がちょうど一つあり、それを連続に選べるわけです。$SU(N)^E$ は可縮でない（$\pi_3(SU(N)) = \mathbb{Z}$。$SU(2)$ では 1-12 の写像度）ので、Singer の定理と矛盾しません。代わりに格子の対称性が壊れます。共変なゲージを BRST 対称に（固定した後にも形式的な対称性が残るように）固定すると 0/0 が現れます（7-11・4-08 §08。BRST は 4-08 §04）。
- **局所的なゲージ**。三次元の周期格子での Bałaban の繰り込み群について、問題の解説は “One defines these gauges in phase cells: The choices vary locally in space-time, as well as on different length scales.” と書きます（Jaffe–Witten §6.5）既知 。場所と尺度ごとに切り口を取り替える方法です（7-06 §05・7-05 §05）。四次元の Bałaban の仕事も同じ考え方を使うとされます（7-07 §07。四次元の論文での具体的な選び方は本文で確かめていない）。
- **軌道空間そのもの**。確率量子化はゲージを固定せず、軌道空間を状態空間に取ります。総説は “The space O is a non-linear space if G is non-Abelian, which makes non-trivial even the construction of the state space” と書き（Chevyrev 2022）、Chandra–Chevyrev–Hairer–Shen は二次元トーラスの上で、分布（1-11）としての接続の軌道の空間を状態空間に取り、その上の確率的な力学を構成しました（要旨）既知 （7-09）。

7-11 §05 は、これを発散とは別の障害の一つ（曲がった状態空間の障害）として扱い、格子で片づく部分と、弱結合の解析でゲージ固定が要るときに残る 0/0 に分けています。

この章が言えている範囲

項目	言えていること	言えていないこと
接続と軌道	(1)〜(9) の導出 既知	関数空間の位相の入れ方、局所的な切り口の定理の証明
格子の模型	表 1〜3・図 1 計算	四次元の連続の理論のコピーの数や配置

項目	言えていること	言えていないこと
Singer の定理	言明と四段の筋（原論文で確認） 既知	Singer の Theorem 2・5 の証明の再現
寄り道	Feynman の見取り図 物理	定理ではない
ヤン–ミルズ	ゲージ固定の大域的な障害の意味	質量ギャップ・理論の構成については何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1〜3・図 1	**この端末で計算**	Python 3.12・NumPy（`ring_copies.py`・`ring_bruteforce_check.py`・`su2_classes.py`）。図は (10)(11) をその場で計算
Singer の言明・引用・表 4	一次資料（本文を確認）	I. M. Singer, “Some remarks on the Gribov ambiguity”, Commun. Math. Phys. 60 (1978) 7–12
Gribov のコピー	書誌のみ	V. N. Gribov, “Quantization of non-Abelian gauge theories”, Nucl. Phys. B 139 (1978) 1–23（本文中の中身は Singer §1 の紹介による。Singer は 1977 年の SLAC Translation 176 版を引く）
(10) の関数と二階微分	一次資料（§I–II を確認）	D. Mehta, N. S. Daleo, J. D. Hauenstein, C. Seaton, Phys. Rev. D 90 (2014) 054504, arXiv:1406.6678
寄り道	本文 §1 を確認／Feynman は書誌のみ	D. Karabali, V. P. Nair, Nucl. Phys. B 464 (1996) 135–152, arXiv:hep-th/9510157；R. P. Feynman, Nucl. Phys. B 188 (1981) 479
§08 の引用	本文を確認／要旨	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”（Clay, 2000）§6.5；I. Chevyrev, “Stochastic quantisation of Yang–Mills”, J. Math. Phys. 63 (2022) 091101, arXiv:2202.13359 §1；A. Chandra, I. Chevyrev, M. Hairer, H. Shen, Publ. Math. IHÉS 136 (2022) 1–147, arXiv:2006.04987
(7)・ホモトピー群の値	既知（書誌のみ）	Weyl の積分公式：T. Bröcker, T. tom Dieck, *Representations of Compact Lie Groups*, Graduate Texts in Math. 98, Springer (1985) 第 IV 章；球面のホモトピー群：H. Toda, *Composition Methods in Homotopy Groups of Spheres*, Ann. of Math. Studies 49, Princeton (1962)（Singer の文献表による）

次に読む章：3-05 インスタントンと位相（S^4 の束を分ける整数と、作用が最小の軌道）。ゲージ固定の量子論は 4-08。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 3 部 ヤン–ミルズ理論（古典） インスタントンと位相

インスタントンと位相 — 作用の下界の整数は、無限遠の巻き数から来る

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 3-03 の作用の下界の整数 Q が、$\mathrm{tr}\, F \wedge F$ が全微分であることと無限遠の巻き数から出ること。四元数で書く BPST の解と、二つのインスタントンの一つが点に縮む様子。θ 項が量子論で真空を変える様子（円周上の粒子の模型）。

前提となる章 — 3-03（自己双対と下界 (12)）。微分形式は 1-06、純ゲージは 1-07、§06・§07 の量子力学は 2-05。寄り道の章 1-12 の §02・§03・§05・§06（四元数・写像度・自己双対な 2-形式・作用の内側の割合）は読むとよい章で、この章に要る分は本文で最小限を定義します（四元数と写像度は §03、内側の割合は §04）。

先に言うこと — §01〜§05 は古典の場の既知の数学です。§06〜§08 の量子論の話は物理の水準の議論で、定理ではありません。この章は質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. 連続に変えても変わらない整数 — 巻き数と約束
2. tr F∧F は全微分 — 積分は境界で決まる
3. 無限遠で整数が決まる — 写像度（表 1）・SO(3) の束・寄り道：符号
4. BPST の解 — 四元数で一行（表 2）
5. 二つのインスタントン — 一つが縮む（図 1・表 3）
6. θ 項 — 円周の上の粒子（図 2・表 4）
7. 真空はトンネルでつながる — θ 真空（表 5）
8. 格子と問題文の θ — セクターと θ = π

01

連続に変えても変わらない整数 — 平面の巻き数から

位相（トポロジー）は連続な変形で変わらない性質を扱います。原点を通らない閉曲線 $z(t)$ の巻き数

$$n = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dz}{z} \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

は、連続に動かしても整数なので変われず、曲線が原点を横切る瞬間にだけ変わります。例。$z = e^{it} + c$（c は実数）は $|c|<1$ で 1、$|c|>1$ で 0。c を実軸に沿って動かすと、$|c|=1$ を横切る瞬間に曲線が原点を通り、そこでだけ値が跳びます。第一 Chern 数も同じ仕組みでした（1-07 §08）。この章は 3-03 の (12) の整数 Q の出所を場の側から導きます。

約束。A は反エルミートな行列値の 1-形式、$D = d + A$、$F = dA + A\wedge A$ で、g は A に吸収します（$A = -ig\,A_{\text{物理}}$。3-03 §01・記号表）。この書き方で作用・第二 Chern 数・Q は次の形です。Q は 3-03 の Q・1-12 の k です（符号は §03 の寄り道）。

$$S_E = -\frac{1}{g^2}\int \operatorname{tr} F\wedge *F, \qquad c_2 = \frac{1}{8\pi^2}\int \operatorname{tr} F\wedge F, \qquad Q = -c_2 \tag{2}$$

物理の書き方（3-03 の $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$ で、g を A に吸収しない）では、$\tilde F_{\mu\nu} = \frac12 \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$（3-03 の $*F$ の成分）として

$$Q = \frac{g^2}{32\pi^2}\int F^a_{\mu\nu}\tilde F^a_{\mu\nu}\,d^4x = \frac{g^2}{8\pi^2}\int \sum_a \mathbf{E}^a\cdot\mathbf{B}^a\,d^4x$$

で、3-03 の (12) の Q そのものです。

02

tr F∧F は全微分 — Chern–Simons 形式

U(1) では $F\wedge F = d(A\wedge dA)$ で、積分は境界だけで決まりました（1-06）。非可換でも補正を一つ足せば成り立ちます 既知 。

$$\operatorname{tr} F\wedge F = d\,\mathrm{CS}(A), \qquad \mathrm{CS}(A) = \operatorname{tr}\Big(A\wedge dA + \tfrac23 A\wedge A\wedge A\Big) \tag{3}$$

確かめるのに要る規則は一つです。行列値の p-形式 α と q-形式 β では、成分の行列の積のトレースは順序を替えても変わらず、微分形式の部分を入れ替える符号だけが残ります。

$$\operatorname{tr}(\alpha\wedge\beta) = (-1)^{pq}\operatorname{tr}(\beta\wedge\alpha)$$

A^k を A の k 回の外積とします。$d\,\mathrm{tr}\,A^3$ を積の規則 $d(\alpha\wedge\beta)=d\alpha\wedge\beta+(-1)^p\alpha\wedge d\beta$（1-06）で三項に開き、一項ずつ dA を先頭へ回します。

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(dA\wedge A\wedge A)&=\mathrm{tr}(dA\wedge A^2)\\
-\mathrm{tr}(A\wedge dA\wedge A)&=+\mathrm{tr}(dA\wedge A^2)\qquad (p=1,\ q=3)\\
+\mathrm{tr}(A\wedge A\wedge dA)&=+\mathrm{tr}(dA\wedge A^2)\qquad (p=q=2)
\end{aligned}$$

和は $d\,\mathrm{tr}\,A^3=3\,\mathrm{tr}(dA\wedge A^2)$ です。$d\,\mathrm{tr}(A\wedge dA)=\mathrm{tr}(dA\wedge dA)$（$d\,dA=0$）と合わせて $d\mathrm{CS}=\mathrm{tr}(dA\wedge dA)+2\,\mathrm{tr}(dA\wedge A^2)$。$\mathrm{tr}\,F\wedge F=\mathrm{tr}\big((dA+A^2)\wedge(dA+A^2)\big)$ を開くと同じ二項（$\mathrm{tr}(A^2\wedge dA)=\mathrm{tr}(dA\wedge A^2)$）と $\mathrm{tr}\,A^4$ が出て、$\mathrm{tr}\,A^4=\mathrm{tr}(A\wedge A^3)=-\mathrm{tr}(A^3\wedge A)=-\mathrm{tr}\,A^4$ なので 0 です。名前は Chern–Simons（1974）から来ています。

帰結は二つです。第一に、球 B_R の上で A が滑らかなら、Stokes の定理（1-06）で

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_{B_R}\mathrm{tr}\,F\wedge F=\frac{1}{8\pi^2}\int_{S^3_R}\mathrm{CS}(A)\tag{4}$$

例。§04 の解で右辺は $R=\rho,3\rho,10\rho$ で $-0.5,-0.972,-0.999708$、1-12 の表 1 の内側の割合と一致します（表 2）計算 。第二に、遠方で 0 の δA には Bianchi 恒等式（3-03 §04）から $\delta\,\mathrm{tr}\,F\wedge F=2\,d\,\mathrm{tr}(\delta A\wedge F)$ で、積分は変わりません。c_2 を作用に足しても方程式は変わらず、§06 の θ 項はここから始まります。

03

無限遠で整数が決まる — 純ゲージと写像度

作用が有限なら遠方で $A\to-(dg)g^{-1}$（$g:S^3\to SU(2)$、純ゲージ）です。解については Uhlenbeck（1982）の要旨 “every Yang-Mills field over R4 with bounded functional (L2 norm) may be obtained from a field on S4” が根拠で 既知 、一般の場では遠方の減衰を仮定します（1-07）。純ゲージでは $dA=-A^2$ なので $\mathrm{CS}=\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(g^{-1}dg)^3$ で、(4) の $R\to\infty$ は次の式です。

$$c_2=\frac{1}{24\pi^2}\int_{S^3}\mathrm{tr}\big(g^{-1}dg\big)^3=-\deg g,\qquad Q=\deg g\tag{5}$$

恒等写像と数値で確かめる

四元数を使います（1-12 §02。この章に要るのは次の規則だけです）。$x=x_1+x_2i+x_3j+x_4k$ を $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$ で掛け、$\bar x=x_1-x_2i-x_3j-x_4k$、$|x|^2=x\bar x$ です。長さ 1 の四元数の全体が S^3 で、掛け算で SU(2) と同じ群になります。写像度 $\deg g$ は、行き先の一般の点の逆像を、向きを保つ点は $+1$、反転する点は -1 として数えた整数です（1-12 §06）。

S^3 の向きは、球 B^4 の境界として外向きの法線を先に置く向きです（点 $x=1$ では $dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4$ が正）。恒等写像 $g(x)=x$ の点 $x=1$ で $g^{-1}dg = i\,dx_2 + j\,dx_3 + k\,dx_4$ です。i,j,k の並べ替えの符号つきの和は -6 なので、$\mathrm{tr}(g^{-1}dg)^3 = -12\,dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4$（四元数の 1 は 2×2 の単位行列でトレース 2）。左の掛け算で不変なのでどこでも同じで、面積 $2\pi^2$ を掛けて $24\pi^2$ で割ると $c_2=-1$ です。一般の g でも被積分形式は規格化した体積形式の引き戻しの -1 倍で、積分は写像度の -1 倍です 既知 。

表 1　$-\frac{1}{24\pi^2}\int_{S^3}\mathrm{tr}(g^{-1}dg)^3$ の数値積分（$x\in S^3$。64×64×128 点） 計算 。値が変わるのは正規化の前の写像が 0 を通るときだけ

g	積分	写像度
$x^{-2},\ x^{-1},\ 1,\ x,\ x^2,\ x^3$	-2, -1, 0, 1, 2, 3（以下も誤差 10^{-5} 未満）	n
$\frac{x+c}{\lvert x+c\rvert}$（$c=0.5, 0.9$／$1.1, 1.5$）・$\frac{x^2+ci}{\lvert x^2+ci\rvert}$（$c=0.7$／$1.3$）	1, 1／0, 0・2／0.000002	$\lvert c\rvert<1$ で 1・2

有限作用の場は Q ごとの類（セクター）に分かれ、互いに連続にはつながりません。S^4 の上の SU(2) の束が c_2 で分類されるということです（1-07）。

中心で割った群 — SO(3) の束

SU(2) を中心 $\{\pm 1\}$ で割った $SO(3)=SU(2)/\mathbb{Z}_2$（1-04 §07）を群にしても、リー環は同じなので局所的な式は変わりません。違いは束の張り合わせに出ます。S^4（遠方で純ゲージに近づく $\mathbb{R}^4$ の場）では、張り合わせは S^3 から群への写像で、S^3 は単連結なので SO(3) への写像は SU(2) への写像に持ち上がります。だから S^4 の上の SO(3) の束はすべて SU(2) の束から来ます 既知 。

$H^2(X;\mathbb{Z}_2)\neq 0$ の閉じた四次元多様体 X（たとえば四次元トーラス T^4）では、SU(2) の束に持ち上がらない SO(3) の束があります。障害は第二 Stiefel–Whitney 類 $w_2\in H^2(X;\mathbb{Z}_2)$ で、SO(3) の束は w_2 と第一 Pontryagin 類 p_1 で分類されるとされます（Dold–Whitney 1959） 既知 。SU(2) の束から来る場合に c_2 と一致するように $-p_1/4$ で数を測ると、$w_2\neq 0$ では整数とは限らず、T^4 では半整数も現れます。物理では 't Hooft のひねった境界条件（1979・1981）の分数の位相電荷として知られるとされます 既知 。この章の整数 Q は SU(2) の束（または S^4）の話です。中心の対称性は 18-03。

寄り道：物理の Q と数学の c_2 は符号が逆

飛ばしてよい小節です。

物理は $Q=\frac{g^2}{8\pi^2}\int \mathrm{tr}\,F_{\text{物理}}\wedge F_{\text{物理}}$、数学は $F=-ig\,F_{\text{物理}}$ で c_2 を書くので、符号が $(-i)^2=-1$ だけ違います。物理のインスタントンは自己双対で $Q=1$、数学の文献は反自己双対（$c_2\geq 0$）を扱うことが多

く（3-06）、二つは鏡像です（1-12）。

本書での使い方は 25-01 §01（小さな捩れた T^2 の格子の設定）。

04

BPST の解 — 四元数で一行に書く

§03 の四元数 $x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$ で、i, j, k を $-i\sigma_1, -i\sigma_2, -i\sigma_3$ と読むと、純虚な四元数は su(2) の元です。$dx = \sum_\mu e_\mu dx_\mu$（$e_\mu = 1, i, j, k$）として、大きさ ρ の解は次の形です 既知 。

$$A = \mathrm{Im}\,\frac{x\,d\bar{x}}{|x|^2 + \rho^2}, \qquad F = \frac{\rho^2\, dx \wedge d\bar{x}}{(|x|^2 + \rho^2)^2} \tag{6}$$

$dx \wedge d\bar{x}$ の i の成分は $-2(dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4)$ で、j, k の成分も自己双対です（1-12 §03）。よって $F = *F$ で解です（3-03 §07）。遠方では $g = x/|x|$ として $A \to \mathrm{Im}(x\,d\bar{x})/|x|^2 = g\,d\bar{g} = -(dg)g^{-1}$、$g$ は S^3 の恒等写像（写像度 1）で $Q = 1$、$c_2 = -1$。密度は $48\rho^4/(|x|^2+\rho^2)^4$、半径 R の内側に入る作用の割合は $1 - 3/(1+u)^2 + 2/(1+u)^3$（$u = R^2/\rho^2$。1-12 の (9)）で、$S_E = 8\pi^2/g^2$ は下界の等号です（3-03 の (13) と同じ性質）。BPST（1975）の要旨は “We find regular solutions of the four dimensional euclidean Yang-Mills equations” 既知 。鏡像 $\mathrm{Im}(\bar{x}\,dx)/(\cdots)$ は反自己双対で $Q = -1$。

表 2　(6) と鏡像の検査（$\rho = 1$、差分と数値積分） 計算

項目	(6)	鏡像
閉じた式との差・$F \mp *F$・c_2・Q	1.6×10⁻¹⁰・0・-1.00000000・+1	1.8×10⁻¹⁰・0・+1.00000000・-1
(4) の右辺（$R = 0.5, 1, 3, 10$）	-0.104, -0.500, -0.972, -0.999708	符号が逆

パラメータは中心 4・大きさ 1・定数のゲージ回転 3 の 8 個で、$Q = k$ では $8k$ 個です（Tong の講義録：SU(N) で $4kN$） 既知 。作用が有限なすべての自己双対な場を線形代数で与えるのが ADHM（1978）の構成です。

05

二つのインスタントン — 距離によらない作用と、縮む一つ

自己双対な場は各 Q で作用が最小なので、$Q = 2$ なら二つの塊をどこに置いても作用は $16\pi^2/g^2$ で、塊どうしに力は働きません。具体的な族があります。ここだけ 3-03 の成分の書

き方（$A_\mu = A_\mu^a T^a$、$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$）で $g = 1$ とします。$\bar\eta$ は 3-03 §08 の 't Hooft の記号 η の η_{ai4} の符号を変えたもの（$\bar\eta_{aij} = \varepsilon_{aij}$、$\bar\eta_{ai4} = -\bar\eta_{a4i} = -\delta_{ai}$）です。

$$\phi = 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\rho_i^2}{|x - a_i|^2}, \qquad A_\mu^a = -\bar\eta_{a\mu\nu}\,\partial_\nu \ln\phi \tag{7}$$

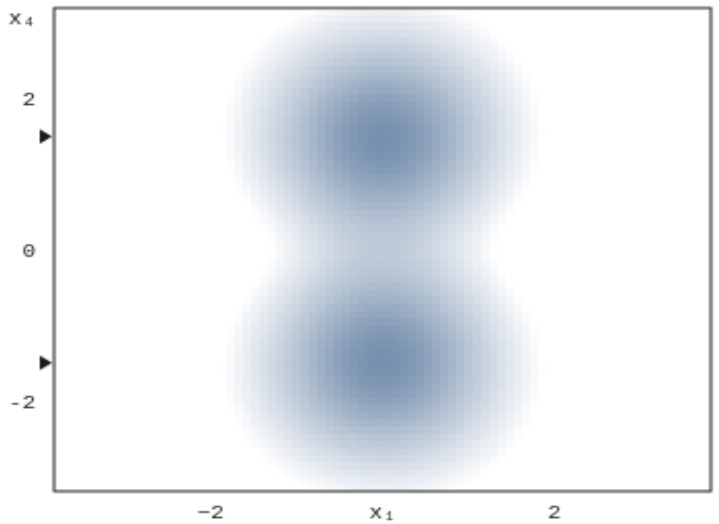
$1/|x|^2$ は四次元の調和関数で、この族は a_i, ρ_i によらず自己双対、$Q = k$ です。(7) の A は極 a_i で発散しますが、この特異性はその点で特異なゲージ変換で取り除けます。$k = 1$ はそうして §04 の解を a_1 へ平行移動したものに移ります。

密度は ϕ だけで書けます。記号は $\Box = \sum_\mu \partial_\mu^2$（ユークリッドの四次元ラプラシアン。2-04 のダランベルシアンとは別）、$\psi_\mu = \partial_\mu\phi$、$H_{\mu\nu} = \partial_\mu\partial_\nu\phi$、$|H|^2 = \sum_{\mu\nu} H_{\mu\nu}^2$、$\psi\cdot H\psi = \sum_{\mu\nu}\psi_\mu H_{\mu\nu}\psi_\nu$、$|\psi|^2 = \sum_\mu \psi_\mu^2$ です。

$$s = \tfrac14 F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a = -\tfrac12\,\Box\Box \ln\phi = \frac{|H|^2}{\phi^2} - \frac{4\,\psi\cdot H\psi}{\phi^3} + \frac{3|\psi|^4}{\phi^4} \qquad (x \neq a_i) \tag{8}$$

二つの極で、差分の F が $F = *F$ と (8) を相対誤差 10^{-9} で満たします 計算 。Corrigan–Fairlie（1977）は、φ^4 型のスカラー場の理論の解と SU(2) のゲージ場の解の関係として、この型の解を扱いました。Jackiw–Nohl–Rebbi（1977）は、各塊の位置と大きさを表す $5k$ 個のパラメータの既知の族を、$5k+4$ 個のパラメータの解に広げました（いずれも要旨） 既知 。

図 1　つまみで二つの極の距離 d を変えると、断面 $x_2 = x_3 = 0$（横 x_1・縦 x_4・三角が極）の作用の密度（対数の濃淡）が変わる。d が小さいと原点に鋭い山が立つ



d = 3.00　s(0) = 2.100　48/(d/2)⁴（小さい d での近似）　= 9.481　全作用 = 16π²（表 3）

計算 この図の数値はこの端末で計算した。(8) をその場で計算（$\rho_i = 1$、極は $x_4 = \pm d/2$）。

表 3　二つの極（$\rho_1 = \rho_2 = 1$）の作用（$8\pi^2$ 単位。適応積分） 計算

d	4	1	0.5	0.2	0.1	0

d	4	1	0.5	0.2	0.1	0
全作用	2.000000	2.000000	2.000000	2.000000	2.000000	1.000000
$\lvert x\rvert < d$ の内側	1.945544	1.140005	0.925267	0.896362	0.895881	–

全作用はどの d でも $16\pi^2$ です。d が小さいと原点の密度は $48/(d/2)^4$ に近づき（$d=0.1$ で 7.661×10^6 対 7.68×10^6）、半径 d の内側の 0.896 は大きさ $d/2$ の BPST の解の割合 $1-\frac{3}{25}+\frac{2}{125}$（1-12 の (9)）です。一つが作用を保ったまま縮み、$d=0$ では $\phi=1+2/\lvert x\rvert^2$ の $Q=1$ の解になって一つぶんが点に消えます。1-12 §05 の集中が解の族の中で起きる様子です（3-06）。

06

θ 項 — 方程式に見えない角

§02 から、作用に Q の定数倍を足しても古典の方程式は変わりません。量子論の重みでは虚時間でも虚数のまま残ります（4-02。符号は約束による）。

$$e^{-S_E[A]} \longrightarrow e^{-S_E[A]+i\theta Q[A]} \tag{9}$$

既知 (i) 摂動論（$A=0$ のまわりの展開。4-03）では全微分の積分は各次数で 0 で、見えません。(ii) Q が整数なので θ は周期 2π の角度です。(iii) 時空では $\mathbf{E}^a\cdot\mathbf{B}^a$ に比例し（§01・2-04）、$\mathbf{E}$ は空間反転で、$\mathbf{B}$ は時間反転で向きを変えるので、$\theta\neq0,\pi$ では空間反転と時間反転が破れます。Jackiw–Rebbi（1976）の要旨は θ 真空（§07）を “a family of quantum mechanical vacua, parametrized by a CP-nonconserving angle” と書きます（CP は粒子と反粒子の入れ替えと空間反転を合わせた変換）。θ = 0 と π では時間反転で不変です（Gaiotto–Kapustin–Komargodski–Seiberg 2017、以下 GKKS の要旨 “time reversal invariant at θ = 0 and θ = π”）。

円周の上の粒子 — θ の最小の模型

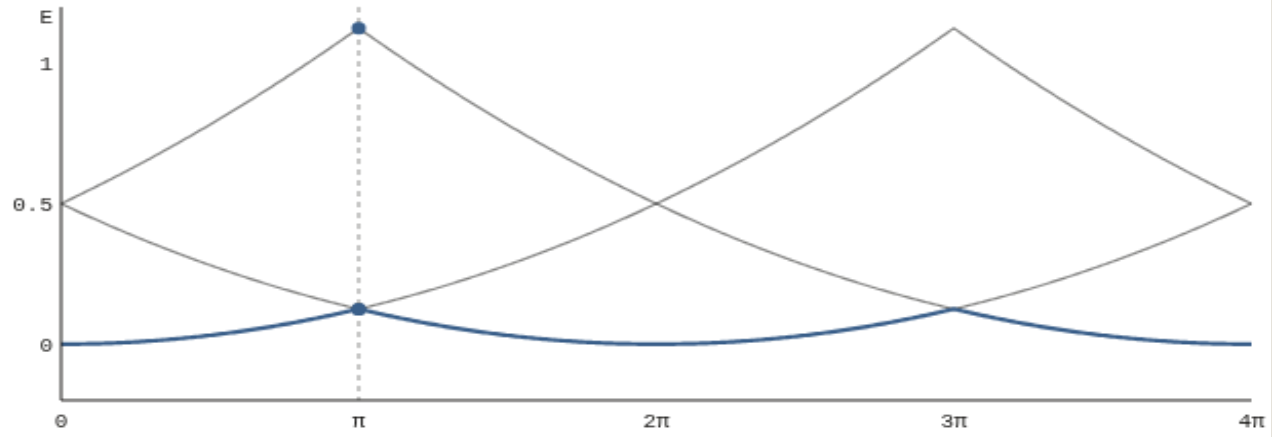
同じ構造の量子力学があります（GKKS の付録 D.1）。角度 $q\sim q+2\pi$ の上の粒子に速度の一次の項を足します。

$$L=\frac{1}{2}\dot q^2+\frac{\theta}{2\pi}\dot q,\qquad E_n=\frac{1}{2}\Big(n-\frac{\theta}{2\pi}\Big)^2\quad(n\in\mathbb{Z}) \tag{10}$$

足した項は $\frac{d}{dt}\frac{\theta q}{2\pi}$ で方程式を変えません（2-01）が、$\theta q/2\pi$ は一周で θ ずれ、虚時間の周期的な道の重みに $e^{i\theta\times\text{巻き数}}$ が掛かります。(9) と同じ形です。周期的な波動関数で $H=\frac{1}{2}(-i\,d/dq-\theta/2\pi)^2$ の固有関数 e^{inq} の固有値が (10) です（2-05）。θ は円を貫く磁束の役目で（GKKS 脚注 27。2-03）、“for θ = π and only in this case the ground state is two-fold

degenerate” です。$-K\cos q$ を足すと交差が開き、$-K\cos 2q$ なら二重縮退が厳密に残ります（同付録 “still maintains some exact two-fold degeneracy”）。

図 2　つまみで θ（横軸 0〜4π）を動かすと縦線と準位（点）が動く。ボタンで位置エネルギーを 0・$-K\cos q$・$-K\cos 2q$（$K=0.4$）に替えると、$\theta=\pi$ の交差が開くか残るかが分かる



θ = 1.00π　E₀ = 0.125　E₁ − E₀ = 0.000

計算 この図の数値はこの端末で計算した。V = 0 は (10)、ほかは e^{inq}（$|n|\le 40$）で対角化した表（$0\le\theta\le\pi$ の 13 点）を周期と対称性で広げたもの。

表 4　E_1-E_0（$K=0.4$、$I=\hbar=1$） 計算

位置エネルギー	θ = 0	π/2	π
0	0.5	0.25	0
$-K\cos q$	0.60436	0.46493	0.38481
$-K\cos 2q$	0.32981	0.21083	0

07

真空はトンネルでつながる — θ 真空

ここからは物理の水準です 物理 。$A_4=0$ とそろえると古典的な真空は三次元の純ゲージ $-(dh)h^{-1}$（$h:\mathbb{R}^3\to SU(2)$ は遠方で 1 に近づくとし、$\mathbb{R}^3\cup\{\infty\}=S^3$ とみなす。§ 03 の無限遠の S^3 とは別の球面）で、写像度 n で番号が付き、写像度 1 のゲージ変換 T が n を一つずらします。(4) を虚時間の厚板に使うと Q は $\tau\to\pm\infty$ の真空の番号の差で、BPST の解は n から $n+1$ へ移る虚時間の道です。重みは

$$e^{-8\pi^2/g^2}:\qquad g^2=1,\ 2,\ 4,\ 8\ \text{で}\ 5.1\times10^{-35},\ 7.2\times10^{-18},\ 2.7\times10^{-9},\ 5.2\times10^{-5}\qquad(11)$$

で 計算 、$g^2=0$ で何回微分しても 0 なので、摂動論のどの次数にも現れません（2-05 の二重井戸・4-07・4-12）。1976 年に 't Hooft が “the tunneling process described by the Belavin-Polyakov-Schwarz-Tyupkin field configuration” を計算し、Jackiw–Rebbi・

Callan–Dashen–Gross が真空の族を述べました（要旨）既知。小さなゲージ変換で不変（4-01）で T で位相だけ変わる状態が θ 真空です。

$$|\theta\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in\theta}|n\rangle, \qquad T|\theta\rangle = e^{-i\theta}|\theta\rangle \tag{12}$$

円周上の粒子では、円に巻く前の直線の谷 $q = 2\pi n$ が $|n\rangle$、$q \mapsto q + 2\pi$ が T で、(12) は Bloch 波の形です（GKKS も q をヤン–ミルズの Chern–Simons の量と読む）。谷が深いと一番下の準位は細い帯になり、谷から谷への道の作用 $S_0 = \int_0^{2\pi} \sqrt{2K(1-\cos q)}\, dq = 8\sqrt{K}$ で決まります。帯は $E_0(0) + \frac{W}{2}(1-\cos\theta)$ の形で、W は Mathieu 方程式の漸近形（DLMF 28.8.2 の書き直し $\frac{16}{\sqrt{\pi}} K^{3/4} e^{-S_0}\left(1 - \frac{7}{64\sqrt{K}}\right)$）に近づきます（表 5）。

表 5　$-K\cos q$ の一番下の帯の幅 $W = E_0(\pi) - E_0(0)$（60 桁の十進演算の二分法。右端の「—」は、ずれが倍精度では測れないことを表す）計算

K	W	W／漸近形	$1-\cos\theta$ からのずれ／W
1	2.66699×10⁻³	0.98887	2.8×10⁻³
4	2.71024×10⁻⁶	0.99782	1.7×10⁻⁶
16	8.89113×10⁻¹³	0.99951	—

ヤン–ミルズの希薄気体の近似（インスタントンが離れて散らばるとみなす）では、真空のエネルギー密度が $-\cos\theta\, e^{-8\pi^2/g^2}$ に比例するとされます物理。典型的な配位を滑らかな解の重ね合わせとみなす近似で、数学的には未確定です（尺度と極限の辞書）。正確には、四次元では結合が尺度とともに走る（4-06）ため、インスタントンの大きさ ρ の積分が大きい ρ の側で発散し、この近似は物理の水準でも制御されていないとされます物理。近似に依らない量は位相感受率 $\chi_t = \langle Q^2\rangle/V$（$E(\theta) = -\frac{1}{V}\ln\sum_Q Z_Q e^{i\theta Q}$ の $\theta=0$ での二階微分）です。

本書での使い方は 25-02 §03（分数インスタントンの希薄な気体で弦の張力を数える）。

08 格子の上の整数と、問題文の θ

格子（5-01）の場の空間は連結で、“the concept of a topological sector has therefore no a priori well-defined meaning” です（Lüscher 2010）既知。作用の密度が小さい格子場は整数 Q を持ち、古典的な連続極限で Chern 数に戻るとされます（整数を持つことは Lüscher 1982 の要旨。7-11 §09）。SU(3) で Wilson 流により滑らかにした場 V が $\max_p \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\{1 - V(p)\} < 0.067$ を満たす割合は $a = 0.1,\ 0.07,\ 0.05$ fm で 0%・8%・70% で、セクターは “a dynamical property of the theory” です（同 2010）物理。SU(2) で赤外切断（長い距離の側の切断）を固定した Magnen–Rivasseau–Sénéor（1993）の構成は、自明なセクターに限

られます（7-07）既知。HMC では Q^2 の実効的な動的臨界指数が約 5 です（Schaefer–Sommer–Virotta 2011。5-07）物理。

Jaffe–Witten の問題文には θ 項もインスタントンも出てきません（全文を検索）。GKKS は、時間反転と中心対称性（18-03）の 't Hooft アノマリー（二つの対称性を保ったまま自明な真空を作れないという障害）から “at θ = π the vacuum cannot be a trivial non-degenerate gapped state” と論じ、θ = 0 の真空は対照的に自明でギャップを持ち非縮退だと述べます（いずれも物理の水準）物理。「ギャップを持つ一意な真空」は θ に依存する主張で、図 2 の $-K\cos 2q\cdot\theta = \pi$ がその量子力学版です。

この章が言えている範囲

項目	言えていること	言えていないこと
Q の整数性	作用が有限な解（Uhlenbeck）と、遠方で純ゲージに減衰すると仮定した場 既知	減衰を仮定しない一般の有限作用の場
古典と模型	(3)〜(10)、表 1〜5、図 1・2 既知 計算	Uhlenbeck・ADHM の証明の再現。模型はヤン–ミルズの準位ではない
量子論	θ 真空・希薄気体・格子・GKKS の言葉 物理	定理ではない。質量ギャップ・理論の構成については何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
BPST・Uhlenbeck・ADHM・(7) の族・トンネル・θ 真空と CP	要旨	Belavin–Polyakov–Schwartz–Tyupkin, PLB 59 (1975) 85／Uhlenbeck, CMP 83 (1982) 11／Atiyah–Hitchin–Drinfeld–Manin, Phys. Lett. A 65 (1978) 185／Corrigan–Fairlie, PLB 67 (1977) 69／Jackiw–Nohl–Rebbi, PRD 15 (1977) 1642／'t Hooft, PRD 14 (1976) 3432／Jackiw–Rebbi, PRL 37 (1976) 172／Callan–Dashen–Gross, PLB 63 (1976) 334
Chern–Simons 形式	書誌のみ	Chern–Simons, Ann. of Math. 99 (1974) 48
SO(3) の束の分類・分数の位相電荷（§03 の SO(3) の束）	書誌のみ（中身は本文未照合）	A. Dold, H. Whitney, Ann. of Math. 69 (1959) 667／G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141／G. 't Hooft, Commun. Math. Phys. 81 (1981) 267
希薄気体の $-\cos\theta$・大きさの積分の発散	未確認	一次資料の本文は未照合
パラメータの数・θ = π・円周上の粒子・格子	本文	Tong, arXiv:hep-th/0509216 §1.1.2・§1.2（式 (1.13)）／Gaiotto–Kapustin–Komargodski–Seiberg, JHEP 05 (2017) 091（要旨・付録 D.1）／Lüscher, JHEP 08 (2010) 071 §4

もの	種別	出典・道具
格子の位相電荷・凍結・自明なセクター	要旨	Lüscher, CMP 85 (1982) 39／Magnen–Rivasseau–Sénéor, CMP 155 (1993) 325／Schaefer–Sommer–Virotta, NPB 845 (2011) 93
問題文・Mathieu の漸近形	本文	Jaffe–Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*（Clay）／NIST DLMF (28.8.2)
表 1〜5・(11)・図	計算	Python 3.12・NumPy・SciPy・decimal（標準ライブラリ。表 5 の 60 桁の演算）（`winding.py`・`bpst.py`・`two_instantons.py`・`rotor.py`）。図は素の JavaScript

次に読む章：3-06 寄り道：Donaldson とエキゾチック R^4。位相電荷の辞書は 18-04。

寄り道：Donaldson とエキゾチック R⁴ — 古典ヤン–ミルズの解の空間が、四次元の滑らかさを見分ける

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — エキゾチックな構造とは何か。交叉形式と位相の地図（Freedman・Rokhlin）。自己双対な接続の解の空間を同境として読み、定値な交叉形式が対角化できることを導く Donaldson の筋と、そこから $\mathbb{R}^4$ のエキゾチックな構造が出る理由。

前提となる章 — 3-05（BPST の解・点に縮む極限）。滑らかな構造は 1-05、交叉形式の入口は 1-12 §07、軌道空間と可約な接続は 3-04 §04。ホモロジー・符号数・同境・指数・共形変換の群は、その場で最小限を定義します。

先に言うこと — 寄り道で、どの章の前提でもありません。既知の数学の筋だけを追い、解析の本体は再現していません。量子ヤン–ミルズや質量ギャップについては何も示していません。

この章の順序

1. 同じ形なのに違う — 同相と微分同相
2. 交叉形式 — 交点を数える行列
3. 位相の世界の地図 — Freedman と Rokhlin・寄り道：五次元以上では
4. Donaldson の定理 — 数え上げの補題（表 1）
5. モジュライ空間 — 五次元の解の空間（図 1）
6. 解の空間を同境として読む — 錐と端と符号数（図 2）
7. エキゾチック R^4 — 球面で囲めない集合（表 2）
8. 同じ方程式の二つの顔 — 古典と量子

01

同じ形なのに違う — 同相と微分同相

位相の意味で同じ（同相）とは、両方向とも連続な一対一の対応があることです。滑らかな多様体（1-05）では、両方向とも滑らかな対応（微分同相）を求めます。

$$X \underset{\text{微分同相}}{\cong} Y \implies X \underset{\text{同相}}{\cong} Y, \qquad \text{逆は一般には成り立たない} \tag{1}$$

同相だが微分同相でないとき、一方を他方の「エキゾチックな」構造と呼びます。地図帳の書き方が違うだけのもの（1-05 の $x \mapsto x^3$）は微分同相で移り合うので、これに当たりません。最初の例は七次元の球面とされます（Milnor 1956）既知。

例。$\mathbb{R}^n$ の滑らかな構造は $n \neq 4$ ではただ一つです。Gompf（1983）の序は “it is a standard fact that for n ≠ 4, exotic R^{n}'s cannot exist” と書き、高い次元の平滑化の理論を当てはめると $\mathbb{R}^4$ の構造は一つのはずだ（“there should only be one structure on R4, as it has no cohomology”）と続けます既知。実際には非可算個あります（§07・四次元の記事）。その理由がこの章の主題です。

02

交叉形式 — 曲面の交点を数える整数の行列

閉じた（コンパクトで境界の無い）向きの付いた四次元多様体 X の中の閉曲面は、連続に動かしても変わらない類に分かれ、類どうしは足せます。この集まりが $H_2(X;\mathbb{Z})$ で、単連結な X では $\mathbb{Z}^r$（$r = b_2$。1-06 §08 の Betti 数）です。正確には、H_2 の元はホモロジー類で、ここではその直観だけを使います（四次元ではどの類も埋め込まれた曲面で表せるとされます）。二つの曲面は一般の位置で有限個の点で交わり（1-12 §07）、向きで決まる ± 1 の和は、曲面を動かしても変わりません。

$$Q(\Sigma_1, \Sigma_2) = \sum_{p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2} (\pm 1), \qquad Q : \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z} \ \text{ は対称で } \ \det Q = \pm 1 \tag{2}$$

$\det Q = \pm 1$（ユニモジュラー）は Poincaré 双対性によります既知。形から読む数は、階数 r、符号数 $\sigma = b^+ - b^-$（正と負の固有値の個数の差）、偶奇（すべての $Q(a,a)$ が偶数なら偶）です。$b^- = 0$ なら正定値です。

例。$\mathbb{CP}^2$ は二本の直線 $\mathbb{CP}^1$ が一点で交わるので (1)、向きを逆にした $\overline{\mathbb{CP}^2}$ は (-1)、$S^2 \times S^2$ は $H = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ です。連結和（球を抜いて貼る）は直和になり、$\#r\,\mathbb{CP}^2$ は単位行列 $\langle 1 \rangle^r$（標準形）です。Kummer 曲面（K3）の形は $E_8 \oplus E_8 \oplus H^{\oplus 3}$ です（E_8 は負定値の符号。Gompf はこの $H^{\oplus 3}$ を階数 6 の H と書く）既知。

正定値で偶な形の最小の例が E_8 です。次の Cartan 行列は行列式 1・偶・正定値です 計算 。Gompf は、階数 8 の偶で定値なユニモジュラー形は E_8 だけだと述べます（“the unique symmetric form over Z which has rank 8, is even, and is negative definite”）。

$$E_8 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

03

位相の世界の地図 — Freedman の定理と Rokhlin の制限

位相だけで見ると、四次元は高い次元に似ています。Freedman（1982）は、行列式 ± 1 のどの対称形も閉じた単連結な位相多様体の形として実現でき、形と $\mathbb{Z}/2$ の量（Kirby–Siebenmann の障害。滑らかなら 0）で同相の類が決まることを示しました（Donaldson 1983 §I.1 の紹介による）既知 。E_8 を形に持つ位相多様体 $|E_8|$ もあります。

滑らかさの制限は前から一つ知られていました。Donaldson の紹介では “Rohlin's theorem asserts that any even form coming from a smooth simply connected 4-manifold has signature divisible by 16” です 既知 。

$$X \text{ が滑らか・単連結で } Q \text{ が偶} \implies \sigma(X) \equiv 0 \pmod{16} \tag{4}$$

例。E_8（$\sigma = 8$）は (4) で除かれ、$|E_8|$ は滑らかな構造を持ちません。$E_8 \oplus E_8$（$\sigma = 16$）は (4) を通り、奇な $E_8 \oplus \langle 1 \rangle$ には (4) は何も言いません。これらを裁いたのが §04 の定理です。

寄り道：五次元以上では、なぜ滑らかさが効かないのか

飛ばしてよい小節です。

高い次元では、符号が逆の余分な交点の対を、二点を結ぶ輪に張った円板に沿って滑らせて消す操作（Whitney の技法と呼ばれる）が要とされます。五次元以上では円板は一般の位置で他と交わりませんが、四次元では $2+2=4$ で円板自身が曲面と点で交わります（1-12 §07）。Freedman は円板の代わりの無限の塔（Casson handle）が開いた 2-ハンドル $D^2 \times \mathbb{R}^2$ と同相なことを示しました。正確には、Casson handle は、交点を持つ円板を太らせたもの（kinky handle）を、交点ごとに次の段で貼り足すことを無限に繰り返してできる開いた四次元多様体です。Gompf は Donaldson の定理から “they are not all diffeomorphic to it” と書きます 既知 。

04

Donaldson の定理 — 定値なら対角化できる

Donaldson の対角化の定理（Donaldson 1983 の Theorem 1）は “Let X be a compact smooth simply connected oriented 4-manifold with the property that the associated form Q is positive definite. Then that form is equivalent, over the integers, to the standard diagonal form” です 既知 。整数の基底を取り替えると単位行列になる、ということです。向きを逆にすれば負定値でも同じで、単連結の仮定はのちに外されたとされます（Donaldson 1987）。証明で使う数の性質は一つで、$Q(a,a)=1$ の a を $\pm a$ で一組と数えた組の数 $n(Q)$ についての補題です（論文の Lemma 2）既知 。

$$n(Q)=\#\{\pm a\in\mathbb{Z}^r:\ Q(a,a)=1\},\qquad n(Q)\le r,\qquad \text{等号}\iff Q\cong\langle 1\rangle^r \tag{5}$$

証明は階数の帰納法です。$Q(a,a)=1$ ならどの b も $b=m\,a+c$（$m=Q(b,a)$、$c\perp a$）と整数係数で分けられ、$Q(b,b)=m^2+Q(c,c)$ です。正定値なので $Q(b,b)=1$ は $b=\pm a$ か「$m=0$ かつ $Q(c,c)=1$」で、$n(Q)=n(Q|_{a^\perp})+1$、階数も 1 減ります。a が尽きたとき残りの階数が 0 なら標準形、でなければ $n(Q)<r$ です。

例。表 1 は列挙で数えた $n(Q)$ です 計算 。D_n^+ は、成分の和が偶数の整数ベクトル全体 D_n と、それを $(\tfrac12,\dots,\tfrac12)$ だけずらした集合を合わせたものです（n が 4 の倍数のとき行列式 1 の整数の形）。(4) を通る形も、$n(Q)<r$ なら定理が除きます。

表 1　正定値ユニモジュラー形の $n(Q)$（行列式 1。列挙による）計算

形	r	偶奇	$n(Q)$	ノルム 2	(4)	定理
$\langle 1\rangle^8$（$\#8\,\mathbb{CP}^2$）	8	奇	8	112	—	標準形
E_8	8	偶	0	240	除く	除く
$E_8\oplus\langle 1\rangle$	9	奇	1	240	—	除く
D_{12}^+	12	奇	0	264	—	除く
$E_8\oplus E_8\cdot D_{16}^+$	16	偶	0	480	通る	除く

05

道具：自己双対な接続のモジュライ空間

約束。3-05 と同じ幾何の書き方（反エルミートな A、$c_2=\frac{1}{8\pi^2}\int \operatorname{tr}F\wedge F$）を使います。Donaldson（1983）も同じ符号で、正定値な X 上の $c_2(P)=-1$ の SU(2) 束と、自己双対な接続を使います 既知 。自己双対とは $F^-=0$ のことで、F^- は F の反自己双対な部分です（1-12 §03。3-03 の $F=*F$ と同じ条件）。多くの教科書は向きを逆にし、負定値と反自己双対（$c_2=k>0$）で書きます（3-05 の寄り道・1-12 §07）。向きを替えれば同じ話です。ゲー

ジ変換で移り合う解を同一視した集まりがモジュライ空間で、3-04 の軌道空間の中の解の部分です。

$$\mathcal{M}_k = \{A:\ F_A^- = 0\}\,/\,\mathcal{G}\ \subset\ \mathcal{A}/\mathcal{G}, \qquad k = -c_2(P), \qquad \dim \mathcal{M}_k = 8k - 3(1 - b_1 + b^-) \tag{6}$$

k は 3-05 の Q です。b_1 は一次元の穴の数（1-06 §08 の Betti 数。単連結なら 0）です。次元は、方程式を線形化したものの**指数**から出ます。指数は線形の方程式の解の空間の次元の見積りで、有限次元の連立一次方程式なら「未知数の数 − 式の数」に当たります（正確には核の次元から余核の次元を引いたもの。ここでは名前だけ使います）。Donaldson（1983）§II はこの指数を $8|c_2(P)| - \frac{3}{2}(\chi(X) - \tau(X))$ と書きます 既知 。τ は符号数 σ、$\chi = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4$ はオイラー数（1-06 の $V - E + F$ の仲間）で、閉じた四次元では $b_0 = b_4 = 1$、$b_3 = b_1$、$b_2 = b^+ + b^-$ なので $\frac{3}{2}(\chi - \tau) = 3(1 - b_1 + b^-)$、つまり (6) です。反自己双対の流儀では b^- が b^+ に替わります。

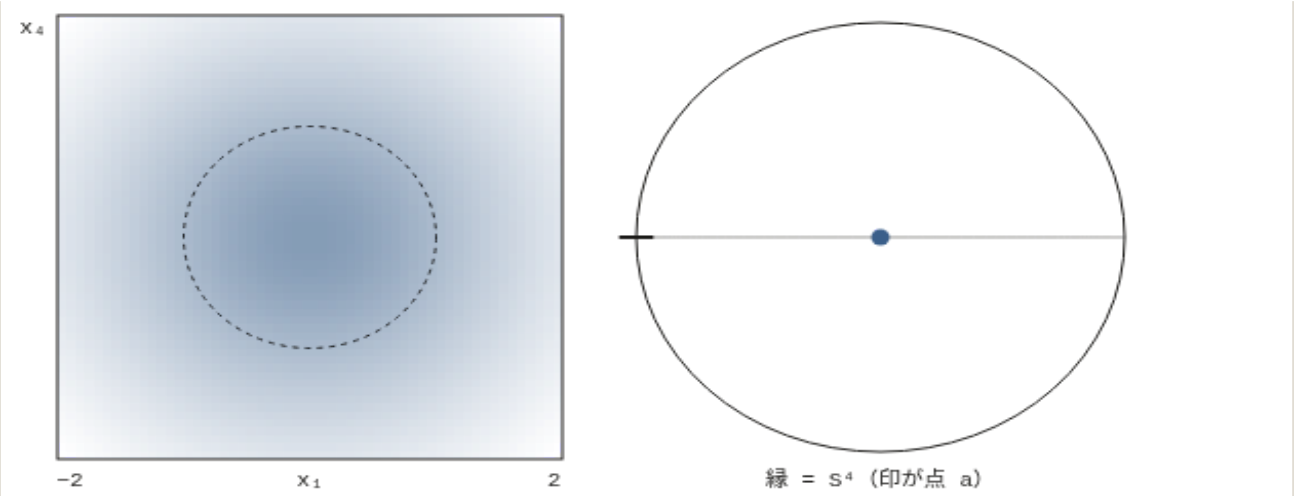
S^4（$b_1 = b^- = 0$）では $8k - 3$ です。3-05 §04 の $8k$ 個のパラメータから、定数のゲージ回転の 3 個（ゲージ変換で移り合うので同一視する）を除くと $8k - 3$ で、$k = 1$ では中心 4＋大きさ 1 の 5 です。定理の X（$b_1 = b^- = 0$、$k = 1$）でも 5 です。

例。S^4 の $k = 1$ では、Donaldson は $\mathcal{M}(S^4) = SO(5,1)^+/SO(5)$ を開いた五次元球 B^5 と書きます。$SO(5,1)^+$ は S^4 の共形変換（角度を保つ変換）の群です。Donaldson は、解は「中心」と「大きさ」で決まると説明し、閉じた球 $\bar{B}^5 = \mathcal{M}(S^4) \cup S^4$ について “a point x of S4 represents the limit point of a sequence of connections whose curvature becomes concentrated in diminishing balls about x” と述べます 既知 。3-05 §05 の「点に縮む」極限が縁です。図 1 は中心 a（x_1 軸上）と大きさ λ を上半平面の点 $w = a + i\lambda$ と読み、上半平面を単位円板に写す一次分数変換 $z = (w - i)/(w + i)$ で写した切り口です（図のための座標）。

図 1 の双曲距離

図の読み出しの双曲距離は、上半平面 $\lambda > 0$ で曲線の長さを $\int \sqrt{da^2 + d\lambda^2}/\lambda$ と測ったときの、点 (a, λ) と $(0, 1)$ を結ぶ最短の長さです。この計量 $(da^2 + d\lambda^2)/\lambda^2$（上半空間の計量の切り口）は共形変換の群 $SO(5,1)^+$ で不変ですが、解の空間に自然に入る L^2 の計量（接続の変化 δA の大きさを $\int |\delta A|^2$ で測るもの）ではありません。$a = 0$ の双曲距離は $|\ln \lambda|$（$\lambda \le 1$ なら $\ln(1/\lambda)$）です 計算 。この計量では縁は無限に遠くにあります。大きさ λ をいくら小さくしても解であり続け、族が縁まで途切れないのは、四次元で作用が尺度によらないためです（1-12 §04）。

図 1　つまみで大きさ λ（対数）と中心 a を動かすと、左の作用の密度（断面 $x_2 = x_3 = 0$・対数の濃淡・点線の円の内側に作用の半分）と、右の円板（B^5 の二次元の切り口）の点が動く。$\lambda \to 0$ で点は縁（S^4）の a の位置へ行く



λ = 1.00　a = 0.00　半径 0.1 の内側 = 0.0003　1 − |z| = 1.00　双曲距離 = 0.000

計算 この図の数値はこの端末で計算した。密度 $48\lambda^4/(|x-a|^2+\lambda^2)^4$（1-12 の (9)）と z をその場で計算。静的な値：$a=0$ で $\lambda=1,\ 0.1,\ 0.01$ と縮めると $1-|z|=1,\ 0.182,\ 0.0198$、双曲距離 $0,\ 2.30259,\ 4.60517$、半径 0.1 の内側の作用の割合 $0.0003,\ 0.5000,\ 0.9997$（閉じた式と数値積分が一致）。

06

解の空間を同境として読む — 錐と端と符号数

(6) の $\mathcal{M}$ は三つの部分からなります（Donaldson 1983 §I.2・§II・§III）既知 。

(i) 既約な点。ホロノミー（1-07）が共通の不変部分空間を持たない接続で、方程式を小さく摂動すると向きの付いた滑らかな五次元多様体になります。

(ii) 可約な点。束が $E=L\oplus L^{-1}$ と分かれ、接続もそれを保つ場合で、$c_2(E)=-c_1(L)^2$ から $Q(\alpha,\alpha)=1$（$\alpha=c_1(L)$）です。$b^-=0$ なので各 $\pm\alpha$ に自己双対な接続が在り、$b_1=0$ なのでそれはゲージ同値を除いて一つで、数は $n(Q)$ です。その接続を動かさないゲージ変換の群（止める群）が U(1) と大きいので、3-04 §04 の「角」になります。正確には、止める群が大きい点で軌道空間が滑らかな多様体でなくなり、近傍が錐の形になる、という意味です。近傍は $\mathbb{C}^3/S^1$ で、$\mathbb{C}^3$ の単位球 S^5 を円 S^1 で割ると $\mathbb{CP}^2$、それに半径の方向を足したものなので、$\mathbb{CP}^2$ の上の錐です。

(iii) 端。大きさの小さな解は X の一点に集中した BPST の解に見えます。Taubes（1982）がそれを $b^-=0$ の下で作りました。Donaldson §III は Uhlenbeck（1982）の収束の結果を使い、逃げる列は集中するものに限られることを示します。Theorem 11 は端の近傍が $X\times(0,\lambda_0)$ と微分同相だと述べます。図 1 の縁が、ここでは X の写しです。

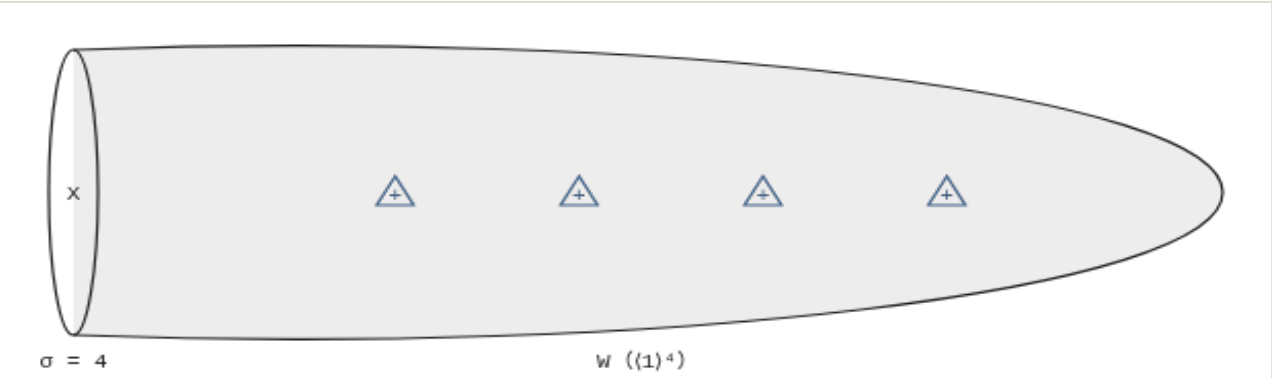
錐の頂点のまわりを切り取り、端に X を貼ると、境界が X と $n(Q)$ 個の $\pm\mathbb{CP}^2$ の、向きの付いたコンパクトな五次元多様体 W ができます（境界を分け合う関係を同境と呼ぶ）。符号数は “an invariant of oriented cobordism” です。向きの付いたコンパクトな五次元多様体の境界

全体（ここでは X と、向きを込めた $n(Q)$ 個の $\pm\mathbb{CP}^2$ の和）の符号数は 0 になる、というのが同境不変の意味で、ここから $\sigma(X)=\sum \varepsilon_i\,\sigma(\mathbb{CP}^2)$（$\varepsilon_i=\pm1$ は向きの入り方）が出て、次が言えます。

$$r=\sigma(X)=\sum_{i=1}^{n(Q)}\varepsilon_i\,\sigma(\mathbb{CP}^2)\ \le\ n(Q)\ \le\ r\qquad(\varepsilon_i=\pm1,\ \sigma(\mathbb{CP}^2)=1)\tag{7}$$

四つの関係の理由は次のとおりです。一つ目の等号：正定値なので $b^-=0$ で、$\sigma=b^+=r$。二つ目の等号：同境不変（上の段落）。一つ目の不等号：各 $\varepsilon_i\le1$ なので、和は項の数 $n(Q)$ 以下。二つ目の不等号：(5)。両端が r なので途中はすべて等号で $n(Q)=r$、(5) の等号の場合から標準形です。例。$E_8\oplus E_8$ では錐が無く、境界は X だけなので $\sigma=16$ が 0 になれず矛盾します。図 2 は形ごとの帳尻です。論文の大半は (i)〜(iii) の解析です。

図 2　形のボタンを選ぶと、その形の滑らかな X があったと仮定したときの W の模式図（左の縁が X、三角が錐）と (7) の帳尻が変わる。錐が足りないと矛盾（破線）



Q = ⟨1⟩⁴　r = σ(X) = 4　錐の数 n(Q) = 4　(7)：4 ≤ 4 は成り立つ → 標準形　(4)：奇なので何も言わない

計算 この図の数値はこの端末で計算した。階数と $n(Q)$ は表 1 の列挙の値（$\langle1\rangle^4$ は $n(Q)=4$）。JavaScript が無いときは表 1 の r と $n(Q)$ を (7) に入れれば同じ判定です。

07

エキゾチック R⁴ — 滑らかな球面で囲めない集合

Taubes（1987）の序は “Donaldson's theorem ... has the surprising corollary that there exists an exotic smooth structure on R4. This corollary was deduced by M. Freedman” と書きます 既知 。筋は三段です（Taubes の紹介による）。(a) $|E_8\oplus E_8|$ は滑らかにできない（§ 04）。(b) 一点を抜くと滑らかにでき（Freedman）、抜いた点のまわりは、$\mathbb{R}^4$ と同相なある滑らかな R の無限遠と、コンパクト集合の外で微分同相になる。(c) R が標準なら、大きな滑らかな S^3 で切って球体で蓋ができ、$|E_8\oplus E_8|$ が滑らかになってしまう。よって次が言えます。

$$R \underset{\text{同相}}{\cong} \mathbb{R}^4, \qquad R \underset{\text{微分同相}}{\ncong} \mathbb{R}^4 \tag{8}$$

Gompf（1983）は K3 と $\#3\, S^2 \times S^2$ から同種の R^4_{DF} を作り、“there is a compact set in R4DF … which cannot be enclosed by any smooth S3. This behavior is impossible in the standard R4.” と書きます 既知 。

例。Gompf §2 は Kummer 曲面の代わりに $\mathbb{CP}^2 \# 9\overline{\mathbb{CP}^2}$（形 $\langle 1\rangle \oplus 9\langle -1\rangle$、基底 $e_0, \dots, e_9$）を使って別のエキゾチック $\mathbb{R}^4$ を作ります。鍵は $x = 3e_0 + e_1 + \cdots + e_8$ です。$x \cdot x = 9 - 8 = 1$ で、直交補空間 $E_8 \oplus \langle -1\rangle$（負定値で対角化できない）が定理に反するので、$x$ が張る形 $\langle 1\rangle$ の部分を手術（多様体を切り取って貼り直す操作）で切り離すことは、位相では可能でも滑らかには行えません。表 2 はその検査です 計算 。

表 2　Gompf §2 の x の直交補空間（$e_0, \dots, e_8$ の中） 計算

基底	$e_i - e_{i+1}$（$i = 1, \dots, 7$）と $e_0 + e_1 + e_2 + e_3$（ノルムは -2）
Gram 行列	(3) の -1 倍（最後の基底の符号を替えると一致）。行列式 1・偶・負の固有値 8 個
ノルム -2・-4 の本数	240・2160（E_8 と同じ）

いくつあるか。Taubes は (b) の同相で半径 r の球を写した R_r が、ある r_0 より大きな相異なる r で互いに微分同相でないことを、端が周期的な多様体の上のゲージ理論で示しました。Theorem 1.1 は “There exists an uncountable family of diffeomorphism classes of oriented 4-manifolds which are homeomorphic to R4.” です 既知 。r は区間 $r > r_0$ を動き、相異なる r は相異なる類を与えるので、少なくとも実数と同じだけあります（多様体の類は高々実数の濃度しかないので、ちょうど連続体濃度とされる）。一方、S^4 にエキゾチックな構造があるかは知られていないとされます。

08

同じ方程式の二つの顔 — 古典の道具と量子の問題

方程式は 3-05 と同じでも、Donaldson は解の集まりの形を道具にし、確率も時間発展も使いません。問題文（0-03）が問うのは、同じ作用を重みにした確率測度（4-02）と、そのハミルトニアンのスペクトルです。

古典：$\mathcal{M} = \{F_A = *F_A\}/\mathcal{G}$ の形を見る，　　量子：$d\mu(A) = \frac{1}{Z} e^{-S_E[A]}\, \mathcal{D}A$（形式的）を作る (9)

量子の測度の上では、滑らかな古典解は典型的な配位でないと期待されます（1-09 の Cameron–Martin 空間からの類推） 物理 。問題で効く「四」は、結合定数の次元が消える四です（0-04）。例。問題文 §2 は “Classical properties of gauge theory are within the reach of established mathematical methods” とし、四次元多様体の研究での役割を述べたあと、“one does not yet have a mathematically complete example of a quantum gauge

theory in four-dimensional space-time” と続けます 既知 。これは 2000 年の記述で、2026-11 に公開された構成が四次元の量子ヤン–ミルズ理論を作った、と委員会は評価しています（6-00）。

物理の水準の橋が二つあります。Witten（1994）の要旨は Donaldson の不変量について “instead of defining four-manifold invariants by counting SU(2) instantons, one can define equivalent four-manifold invariants by counting solutions of a non-linear equation with an abelian gauge group” と書きます（背景は 17-11）物理 。問題文 §5 は、質量ギャップから出るクラスター性が “may make it possible to apply mathematical results established on R4 to any 4-manifold” とし、ギャップは “may also be important in mathematical applications of four-dimensional quantum gauge theories to geometry” と結びます 物理 。

この章が言えている範囲

項目	言えていること	言えていないこと
交叉形式	定義と例、(5) の証明、表 1・表 2 既知 計算	Poincaré 双対性・Rokhlin・Freedman の定理の証明
Donaldson の定理	言明と (6)(7) の筋、図 1・図 2 既知 計算	摂動・向き付け・収束・端の解析。図 1 の双曲距離は共形変換で不変な計量のもので、解の空間の L^2 計量ではない。図 2 は模式図
エキゾチック $\mathbb{R}^4$	(8) の筋、Gompf・Taubes の言明 既知	Freedman・Taubes の証明の再現
物理との関係	問題文と Witten の要旨の言葉 物理	量子ヤン–ミルズの構成・質量ギャップについては何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§03〜§06 の引用と筋、(6) の次元（§II の指数の式）	本文（§I〜§III の該当箇所）	S. K. Donaldson, “An application of gauge theory to four-dimensional topology”, J. Differential Geom. 18 (1983) 279–315
§01〜§03・§07 の引用と例	本文（§0〜§2）	R. E. Gompf, “Three exotic $\mathbb{R}^4$'s and other anomalies”, J. Differential Geom. 18 (1983) 317–328
(a)〜(c)・R_r・非可算個	本文（§1）	C. H. Taubes, “Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds”, J. Differential Geom. 25 (1987) 363–430

もの	種別	出典・道具
§08	本文（§2・§5）	A. Jaffe, E. Witten, Quantum Yang–Mills Theory, Clay Mathematics Institute
§08	要旨	E. Witten, Math. Res. Lett. 1 (1994) 769–796, arXiv:hep-th/9411102
原論文（上の本文経由）	書誌のみ	Freedman, JDG 17 (1982) 357／Taubes, JDG 17 (1982) 139／Uhlenbeck, CMP 83 (1982) 11・31／Atiyah–Hitchin–Singer, Proc. R. Soc. A 362 (1978) 425／Donaldson, JDG 26 (1987) 397／Milnor, Ann. of Math. 64 (1956) 399
Milnor（1956）の例・S^4 の問い・単連結の仮定を外した版（1987）	二次資料	Wikipedia “Exotic sphere”“Exotic R4”“Donaldson's theorem”
Whitney の技法・Casson handle の構成・曲面による類の表示・双対性と同境不変性の証明・多様体の類の濃度の上界・§08 の類推	未確認（通説）	本文は未照合
(3) の性質・表 1・表 2・図 1・図 2	計算	Python 3.12・NumPy 1.26・SciPy 1.11（lattices.py・gompf_check.py・moduli_disc.py）。図の式は node で照合

次に読む章：3-07 標準模型の中のヤン–ミルズ。Seiberg–Witten の物理は 17-11、問題で効く「四」は 0-04。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 3 部 ヤン–ミルズ理論（古典） 標準模型

標準模型の中のヤン–ミルズ — 三つの群の積に、物質と Higgs を足したもの

> この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 標準模型のゲージ部分は SU(3)×SU(2)×U(1) の三つのヤン–ミルズ場の和です。電荷はアノマリーの相殺という算術を満たし、Higgs 場の値が W・Z に質量を与えて光子を質量 0 に残します。問題文が純ヤン–ミルズだけを取り出す理由も整理します。

前提となる章 — 3-02（3-01・1-04 も使う）。スピン 1/2 の場は §02 で最小限を定義します。

先に言うこと — 古典の章です。§03 は量子論の条件の算術だけを確かめ、§06 の数は摂動の最低次（木の水準）の推定です。質量ギャップについて、この章は何も示していません。

この章の順序

1. 三つの群 — 十二本のゲージ場
2. 物質の場 — 一世代と電荷（表 1）
3. 数えると零になる — アノマリー（表 2）。寄り道：SU(5)
4. 色の SU(3) — クォークと色の一重項
5. Higgs 機構 — 可換の模型（図 1）
6. 電弱の SU(2)×U(1) — W・Z・光子（図 2・表 3）
7. 質量はどこから来るか — 陽子とパイ中間子
8. 純ヤン–ミルズとの違い（表 4）

01

三つの群 — 十二本のゲージ場

規約は 3-02 §02 と同じです（$\hbar = c = 1$、計量 $(-,+,+,+)$、エルミートな生成子、$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$）。

標準模型は三つの群を並べたゲージ理論で、PDG の総説は “the renormalizable field theory with gauge group $G_{\mathrm{SM}} = \mathrm{SU}(3)_C \times \mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$” と定義します [既知]（$C$ は色、L は左巻き、Y は超電荷）。因子ごとにヤン–ミルズ場が付き、本数は $8 + 3 + 1 = 12$ で、グルーオン G^a_μ・W^i_μ・B_μ です。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{gauge}} = -\tfrac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^{a\,\mu\nu} - \tfrac{1}{4} W^i_{\mu\nu} W^{i\,\mu\nu} - \tfrac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \tag{1}$$

G と W の場の強さは 3-02 の (7) の形で交換子の項を持ちます。$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ は電磁場と同じく自己相互作用を持ちません。物質への働きは一つの共変微分にまとまります。

$$D_\mu = \partial_\mu - i g_s\, G^a_\mu T^a - i g\, W^i_\mu \tfrac{\sigma^i}{2} - i g'\, Y\, B_\mu \tag{2}$$

T^a は色の三重項に、$\sigma^i/2$（1-04）は二重項にだけ働き、一重項では項ごと落とします。群が単純でないので結合定数は因子ごとに一つ、計三つです（1-03）。例。$g_s \approx 1.22$ は、強い力の結合の強さ $\alpha_s = g_s^2/4\pi$ を Z の質量の尺度で測った値 $\alpha_s(m_Z) = 0.1180$（$\overline{\mathrm{MS}}$ の約束。§06 の表 3 の注）から出したものです。$g \approx 0.65$、$g' \approx 0.35$ は、§06 の表 3 で W・Z の質量から逆算した木の水準の推定です [計算]。

02

物質の場 — 一世代と $Q = T_3 + Y$

クォークとレプトンはスピン 1/2 の場です。成分の中身（Dirac 行列）は使わず、群での回り方だけを使います。要るのは、この場が**左巻き** ψ_L と**右巻き** ψ_R に分かれること（質量 0 なら進む向きに対するスピンの回り方）と、SU(2) が左巻きにだけ働くことです [既知]。空間の反転 $\mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$（パリティ）は左巻きと右巻きを入れ替えるので、左巻きにだけ働く力はこの反転で不変でありません。これを**パリティの破れ**と呼びます。

表 1　一世代の場（$(\mathbf{3},\mathbf{2})$ は色の三重項で二重項。T_3 は二重項の上が $+\frac{1}{2}$、下が $-\frac{1}{2}$）

場	表現	Y	$Q = T_3 + Y$	成分
$Q_L = (u_L, d_L)$	$(\mathbf{3},\mathbf{2})$	1/6	2/3, −1/3	6
u_R	$(\mathbf{3},\mathbf{1})$	2/3	2/3	3
d_R	$(\mathbf{3},\mathbf{1})$	−1/3	−1/3	3
$L_L = (\nu_L, e_L)$	$(\mathbf{1},\mathbf{2})$	−1/2	0, −1	2

場	表現	Y	$Q = T_3 + Y$	成分
e_R	$(\mathbf{1},\mathbf{1})$	-1	-1	1
Higgs Φ	$(\mathbf{1},\mathbf{2})$	1/2	1, 0	2（複素）

計算 Q は分数のまま計算した。既知 PDG の大統一の総説の (93.1) は、右巻きの場を共役の u^c, d^c, e^c（§03。色は $\bar{\mathbf{3}}$ になり、Y の符号が反転）で書き、Y を 2 倍に規格化して下付きに添えている。たとえば表 1 の u_R（$(\mathbf{3},\mathbf{1})$、$Y = 2/3$）は u^c の $(\bar{\mathbf{3}},\mathbf{1})_{-4/3}$。Higgs は PDG で $(\mathbf{1},\mathbf{2})_1$ で、表 1 の $Y = 1/2$ に当たる。換算すると表 1 と同じ。

$$u_L:\ \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}=\tfrac{2}{3}, \qquad e_L:\ -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}=-1, \qquad \nu_L:\ \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}=0 \tag{3}$$

一世代は色まで数えて 15 成分で、それが三世代あります（PDG）既知 。どの場がどの表現に入るかをゲージ原理は決めず（3-01）、PDG も表 1 の “apparently rather complex group-theoretic data” は説明されていないと述べます。

03

数えると零になる — アノマリーの相殺

先に言葉を一つ用意します。表現 $\psi \mapsto \Omega\psi$ の各成分の複素共役を取った $\psi^* \mapsto \Omega^*\psi^*$ も表現になり、これを**共役表現**と呼びます。三重項の共役を $\bar{\mathbf{3}}$（反三重項）と書き、SU(3) では $\mathbf{3}$ と同値でありません。U(1) では $e^{iY\alpha}$ が $e^{-iY\alpha}$ に変わるので、Y の符号が反転します 既知 。SU(2) の二重項では $\sigma^2\Omega^*\sigma^2 = \Omega$（$\sigma^2$ は二番目の Pauli 行列で、二乗ではありません）なので、共役は元と同値な表現になり、区別しません 計算 。

表 1 の Y には強い制約があります。古典の作用がゲージ不変でも、量子化の段で左右を別々に回す変換の不変性が壊れることがあり、これを**ゲージアノマリー**と呼びます。Gross–Jackiw（1972）の要旨は、それが “may destroy this gauge invariance in perturbation theory” と述べます 既知 。導出は扱わず、条件が算術になることだけを使います。スピン 1/2 の場は共役を取ると右巻きが左巻きになるので、右巻きの場を共役で左巻きにそろえる（Y の符号が反転し、u^c は $-2/3$）と、条件は次の和がすべて 0 になることです。右の括弧は、それぞれがどの群の組のアノマリーの条件かを示します。

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{\text{色の三重項と反三重項}} Y &= 0 \quad (\mathrm{SU}(3)^2\,\mathrm{U}(1)) \\ \textstyle\sum_{\text{二重項}} Y &= 0 \quad (\mathrm{SU}(2)^2\,\mathrm{U}(1)) \\ \textstyle\sum Y^3 &= 0 \quad (\mathrm{U}(1)^3) \\ \textstyle\sum Y &= 0 \quad (\text{重力}^2\,\mathrm{U}(1)) \\ \#\mathbf{3} - \#\bar{\mathbf{3}} &= 0 \quad (\mathrm{SU}(3)^3) \end{aligned} \tag{4}$$

和は、組に入らない群の表現の次元を重みに取ります（二重項の和では Q_L を色の数 3 倍、三重項と反三重項の和では Q_L を 2 倍）。$\sum Y^3$ と $\sum Y$ は色と二重項の成分まで数えた 15 成分にわたり、後者が重力との組 $\text{重力}^2\,\mathrm{U}(1)$ の条件です。Bouchiat・Iliopoulos・Meyer（1972）

の要旨は、レプトンとクォークを含む模型で “the troublesome anomalies cancel” と述べます 既知 。例。電荷を固定して色の数 N_c だけ変えると表 2 です。

表 2　一世代での (4) の和（電荷を固定し N_c だけ変えた）

N_c	$\mathrm{SU}(N_c)^2\mathrm{U}(1)$	$\mathrm{SU}(2)^2\mathrm{U}(1)$	$\mathrm{U}(1)^3$	重力^2 $\mathrm{U}(1)$
1	0	−1/3	1/2	0
2	0	−1/6	1/4	0
3	**0**	**0**	**0**	**0**

計算 分数のまま足した。一般の N_c で、$\mathrm{SU}(2)^2\mathrm{U}(1)$ の列は $N_c/6-1/2$、$\mathrm{U}(1)^3$ の列は $(3-N_c)/4$。$\mathrm{SU}(3)^3$ の条件は表に列を置かず、$N_c=3$ で $\#\mathbf{3}-\#\bar{\mathbf{3}}=2-2=0$（$Q_L$ の二つと u^c, d^c の二つ）。既知 SU(2) には別の条件もあり、Witten（1982）の要旨は、左巻きの二重項が奇数個（ほかの表現は無し）の SU(2) ゲージ理論は数学的に矛盾すると述べる。一世代の二重項は $3+1=4$ 個で偶数。

$\mathrm{U}(1)^3$ ではクォークの分が $-3/4$、レプトンの分が $+3/4$ で、一世代がそろったときだけ、しかも色が 3 のときだけ打ち消します 計算 。スピン 1/2 の場の無い純ヤン–ミルズには、この条件は現れません。

寄り道：SU(5) に収まる

飛ばしてよい小節です。

Georgi–Glashow（1974）は、三つの力が SU(5)（問題文の群の一つ、0-03）の一つの相互作用から生じると “conjectured” しました。5×5 の左上に SU(3)、右下に SU(2) を置くと、両方と可換な跡 0 の $Y=\mathrm{diag}(-\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})$ が残ります。一世代は $\bar{\mathbf{5}}$（$d^c\cdot L$）と $\mathbf{10}$（$Q\cdot u^c\cdot e^c$）にちょうど分かれます。$Q=T_3+Y$ の T_3 も SU(5) の跡 0 の元なので、Q の跡も 0 です。$\bar{\mathbf{5}}$ で書くと $3Q(d^c)+Q(\nu)+Q(e)=0$ で、$Q(\nu)=0$、$Q(e)=-1$ から $Q(d^c)=\tfrac{1}{3}$、つまり $|Q(d)|=|Q(e)|/3$ です。下向きクォークの電荷が電子のちょうど 3 分の 1 であることが、群の形から出ます 計算 。大統一は仮説です。

04

色の SU(3) — クォークと色の一重項

SU(3) の部分が量子色力学（QCD）です。PDG は QCD を “the SU(3) component of the SU(3)×SU(2)×U(1) Standard Model” と呼び、クォークは三色で基本表現、グルーオンは 8 種で随伴表現と書きます 既知 。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}}=\sum_q \bar{\psi}_q\big(i\gamma^\mu D_\mu-m_q\big)\psi_q-\tfrac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{a\,\mu\nu},\qquad D_\mu=\partial_\mu-ig_sG^a_\mu T^a \tag{5}$$

和は 6 種のクォーク（u, d, s, c, b, t）にわたり、γ^μ はスピンに働く 4×4 行列、$\bar\psi = \psi^\dagger\gamma^0$ です。PDG の (9.1) の共変微分の符号を 3-02 に合わせた形で、最後の項が純ヤン–ミルズです。γ^μ の項は PDG の約束（計量 $(+,-,-,-)$）のままにしてあり、中身はこの章では使いません。質量の項 $m_q\bar\psi\psi$ は左右を掛ける項で、色は左右を同じに回すので書けますが、SU(2) は左巻きだけを回すので $\bar u_L u_R$ は不変でなく、標準模型では質量が Higgs 場を通して入ります（§07）既知。色の一重項は SU(3) の二つの性質から作れます。

$$\bar\psi_a\psi^a \quad (\Omega^\dagger\Omega = 1), \qquad \varepsilon_{abc}\,\psi^a\psi^b\psi^c \quad (\det\Omega = 1) \tag{6}$$

前者が中間子、後者がバリオン（陽子・中性子）の形です。例。$\Omega = \mathrm{diag}(e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{-i(\alpha+\beta)})$ で $\psi^1\psi^2\psi^3$ の位相は変わりません。1-04 の中心 $\mathbb{Z}_3$ の元も三回で 1 です。Jaffe–Witten は閉じ込めを、物理的な粒子の状態が “SU(3)-invariant” であることとして述べます 既知（機構は 17-02）。

05

Higgs 機構 — 可換の模型で質量が生える

質量項はゲージ不変性を壊します（3-02 §08）が、W と Z は重い粒子です。この食い違いを埋めたのが、電荷を持つスカラー場のポテンシャルの最小を $\phi = 0$ の外に置く考えです。U(1) の模型で見ます。

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - \mu^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4, \qquad D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu \tag{7}$$

$\lambda > 0$ とします。$\mu^2 < 0$ なら最小は円周 $|\phi| = v/\sqrt{2}$（$v = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$）に並び、ゲージ変換 $\phi \mapsto e^{i\alpha(x)}\phi$ はこの円周に沿って動かします。各点で位相を回して $\phi = (v+h)/\sqrt{2}$（実数）と書くと

$$-(D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) = -\tfrac{1}{2}\,\partial_\mu h\,\partial^\mu h - \tfrac{1}{2}\,q^2(v+h)^2 A_\mu A^\mu \tag{8}$$

です。$h = 0$ の部分は 3-02 の (14) で禁じた質量項そのもので、質量は次のとおりです 既知。作用は不変のまま、解（最小の位置）が質量を持ち込みます。

$$m_A = q\,v, \qquad m_h = \sqrt{2\lambda}\,v = \sqrt{-2\mu^2} \tag{9}$$

図 1　つまみで μ^2 を変えると、ポテンシャル（左：断面、右：上から）と v・m_A・m_h が変わる。「動かす」で谷に沿った動き（ゲージ変換で消せる向き）と動径の振動 h を示す（動きを減らす設定の端末では一コマずつ進める）。$\lambda = 1$、$q = 0.6$。

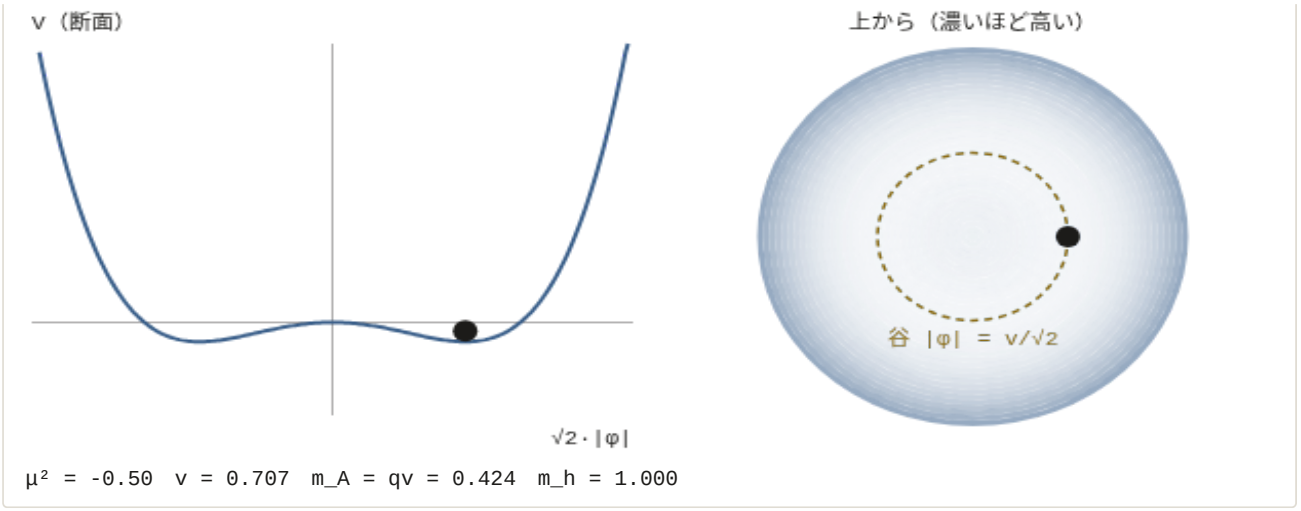


図 1 の五つの点（$\lambda = 1$、$q = 0.6$）

μ^2	v	$m_A = qv$	スカラーの質量	V の最小値
+0.5	0	0	0.707, 0.707	0
0	0	0	0, 0	0
−0.25	0.500	0.300	$m_h = 0.707$	−0.0156
−0.5	0.707	0.424	$m_h = 1.000$	−0.0625
−1	1.000	0.600	$m_h = 1.414$	−0.2500

計算 この図と表の数値はこの端末で計算した（(9) による）。$\mu^2 \geq 0$ の行のスカラーの質量は ϕ の二つの実の成分のもの（どちらも $\sqrt{\mu^2}$）、$\mu^2 < 0$ の行は動径の h のもの。

自由度と Goldstone ボソン

例。自由度を数えます。質量 0 のベクトル場の偏りは 2 です。四成分のうちゲージ変換で一つ、拘束で一つが消えるからです（2-03 §04）。質量項があるとゲージ変換で消せる一つが無くなり、拘束だけが残るので $4 - 1 = 3$ です 既知 。すると前は質量 0 の A（2）と ϕ（実の成分 2）、後は質量を持つ A（3）と h（1）で、どちらも 4 です。消えた位相は A の縦の振動になりました。

連続な対称性が自発的に破れたときに現れる質量 0 の励起を **Goldstone ボソン**と呼びます 既知 。図 1 の谷に沿った動きがそれに当たり、ゲージ場があると、この向きはゲージ変換で消せます。Higgs（1964）は “the longitudinal degrees of freedom of these particles (which would be absent if their mass were zero) go over into the Goldstone bosons when the coupling tends to zero” と書き、超伝導体のプラズモンについての Anderson（1963）の指摘の “relativistic analog” と呼びました。同年に Englert–Brout、Guralnik–Hagen–Kibble も論文を出しています 既知 。Higgs は “nothing is proved about the quantized theory” とも断っています。

「対称性の自発的な破れ」はゲージを固定した記述での言い方です。Elitzur（1975）は、ゲージを固定しない格子ゲージ理論では局所的な対称性が自発的に破れないと論じました 既知（3-01 §07）。

06

電弱の SU(2)×U(1) — W・Z・光子

標準模型では SU(2)×U(1) と表 1 の Higgs 二重項 Φ で同じことをします。$V=\lambda(\Phi^\dagger\Phi-v^2/2)^2$ の最小の一つ $\Phi_0=(0,\,v/\sqrt{2})$ を変えないのは、下の成分で $T_3+Y=-\tfrac12+\tfrac12=0$ となる電荷 Q の U(1) です。Jaffe–Witten の言い方では、構造群が “to a U(1) subgroup (diagonally embedded in SU(2) × U(1))” に減ります 既知。(2) を Φ_0 に働かせると

$$-(D_\mu\Phi_0)^\dagger(D^\mu\Phi_0)=-\frac{v^2}{8}\Big[g^2\big(W^1_\mu W^{1\mu}+W^2_\mu W^{2\mu}\big)+\big(gW^3_\mu-g'B_\mu\big)\big(gW^{3\mu}-g'B^\mu\big)\Big] \tag{10}$$

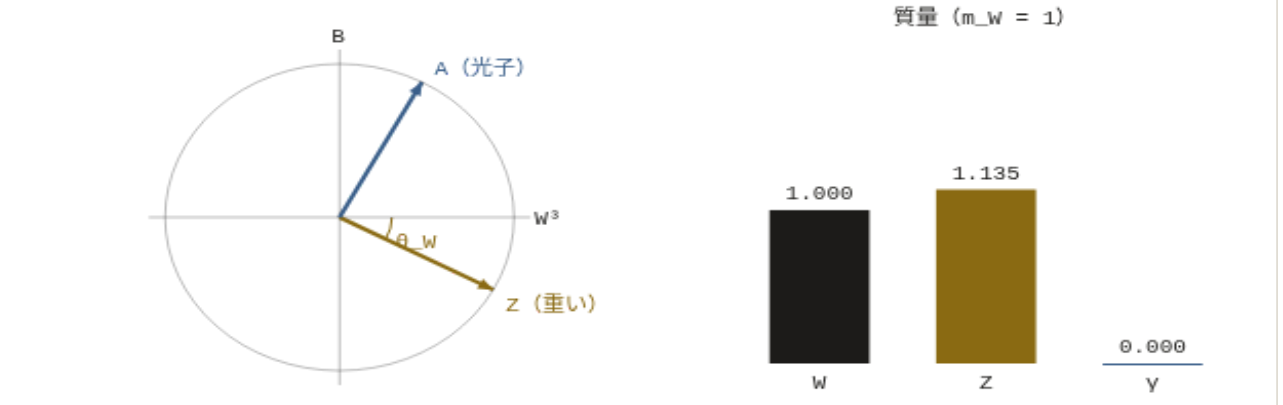
です。W^3 と B は $gW^3-g'B$ の組でしか現れないので、平面 (W^3,B) を**弱混合角** θ_W（$\tan\theta_W=g'/g$）だけ回します。

$$Z_\mu=\cos\theta_W\,W^3_\mu-\sin\theta_W\,B_\mu,\qquad A_\mu=\sin\theta_W\,W^3_\mu+\cos\theta_W\,B_\mu \tag{11}$$

$$m_W=\frac{gv}{2},\qquad m_Z=\frac{m_W}{\cos\theta_W},\qquad m_\gamma=0,\qquad e=g\sin\theta_W \tag{12}$$

$W^\pm=(W^1\mp iW^2)/\sqrt{2}$ です。PDG の (10.3)(10.5) と同じで、PDG は “at tree level, i.e., to lowest order in perturbation theory” の質量と断ります 既知。 計算 4×4 の質量行列を Pauli 行列から作ると、三通りの (g,g',v) で固有値が (12) と一致しました（相対の差は 10^{-15} 未満で、丸めの誤差の程度）。

図 2　つまみで $g'/g=\tan\theta_W$ を変えると、(W^3,B) の平面で Z と光子 A の向きが回り、$m_Z/m_W=1/\cos\theta_W$ が変わる。「測定値」で 0.536 に戻す。



g'/g = 0.536　θ_W = 28.19°　sin²θ_W = 0.2232　m_Z/m_W = 1.1346　e/g = 0.4724

図 2 の五つの点

g'/g	θ_W	$\sin^2\theta_W$	m_Z/m_W	e/g
0	0.00°	0.0000	1.0000	0.0000
0.25	14.04°	0.0588	1.0308	0.2425
0.536	28.19°	0.2232	1.1346	0.4724
1	45.00°	0.5000	1.4142	0.7071
1.5	56.31°	0.6923	1.8028	0.8321

計算 この図と表の数値はこの端末で計算した（(12) による）。$g'/g=0$ では光子は B そのもの。0.536 は表 3 の測定値からの値。

例。PDG 2024 の値から (12) を逆算すると表 3 です。

表 3　木の水準の推定（入力：$G_F=1.1663788\times10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2}$、$m_W=80.3692$、$m_Z=91.1880$、$m_H=125.20\,\mathrm{GeV}$）

量	式	値
v	$(\sqrt{2}\,G_F)^{-1/2}$	246.22 GeV
g・g'	$2m_W/v$・$g\tan\theta_W$	0.6528・0.3499
$\sin^2\theta_W$	$1-m_W^2/m_Z^2$	0.22321
$1/\alpha$	$4\pi/e^2$	132.1
λ	$m_H^2/(2v^2)$	0.1293

計算 PDG では on-shell の $\sin^2\theta_W=0.22348$、$1/\alpha$ は低エネルギーで 137.036、m_Z で 127.930（$\overline{\mathrm{MS}}$）。on-shell・$\overline{\mathrm{MS}}$ は量子補正の入れ方（繰り込みの約束）の名前で、同じ名前の量でも値が少し違う（4-04）。表 3 の λ は本文の $V=\lambda(\Phi^\dagger\Phi-v^2/2)^2$ の約束の値。PDG の λ は $m_H=\lambda v$（(10.5a)）の規格化で $m_H/v=0.5085$ になり、二つは $\lambda=\lambda_{\mathrm{PDG}}^2/2$ で結ばれる。m_W は CDF（2022）を除く平均。

$1/\alpha$ の 132.1 は、低エネルギーの 137.036 より 3.6 % 小さい値です。表 3 の v は G_F（ミューオンの寿命から決める定数）から取ったので、G_F と α を結ぶ量子補正 Δr が入っていません。PDG の電弱の総説の (10.22b) を二乗すると $m_W^2\sin^2\theta_W\,(1-\Delta r)=\pi\alpha/(\sqrt{2}\,G_F)$（$\sin^2\theta_W$ は on-shell）で、PDG は $\Delta r=0.03685$ を与えます 既知 。木の水準の $1/\alpha$ は $(1-\Delta r)/\alpha$ に当たり、$137.036\times(1-0.03685)=131.99$ は表 3 の 132.1 と 0.09 % で合います 計算 （量子補正は 4-04）。$\overline{\mathrm{MS}}$ の 127.930 は約束の違う量で、参考に並べるだけです。自由度は前後とも 12 です（W^i, B の 8 と二重項の 4 から、重い $W^\pm, Z$ の 9・光子の 2・H の 1 へ） 計算 。

Weinberg（1967）は W と Z の質量が “not from a mass term put in at the beginning” と書き、Higgs 粒子は 2012 年に ATLAS と CMS が観測を報告しました 既知 。

> 07

質量はどこから来るか — 陽子とパイ中間子

v が直接与えるのは、W・Z と、**湯川結合**を通したクォークとレプトンの質量です 既知 。湯川結合は Higgs 場とスピン 1/2 の場の積の項 $\bar{\psi}_L \Phi \psi_R$ で、上向きのクォークには $\tilde{\Phi} = i\sigma^2 \Phi^*$（$Y = -\frac{1}{2}$ の二重項。§03 の共役）を使います。どの項も Y の和が 0 で（例：$\bar{Q}_L \Phi d_R$ は $-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 0$）ゲージ不変です 計算 。$\Phi$ を Φ_0 に置くと、$\bar{\psi}_L \psi_R$ に比例する質量の項になります。ところが陽子の質量はこれではほとんど説明されません。芯の u, u, d の質量の和は陽子の 1% ほどです。

$$\frac{2m_u + m_d}{m_p} = \frac{2 \times 2.16 + 4.70}{938.272} \approx 0.0096 \tag{13}$$

計算 値は PDG 2024 の要約表（m_u, m_d は $\overline{\text{MS}}$、2 GeV）。クォークの質量は定義に依るので、(13) は桁の目安です。残りは QCD の力学から来ると考えられ、その尺度は量子化で生じる Λ です（4-07） 物理 。

パイ中間子は軽く、陽子の 15% ほどです（$m_{\pi^\pm} = 139.57$ MeV） 計算 。PDG によれば、三種の軽いクォークの質量を 0 にした極限で、左右を別々に回す味の対称性（カイラル対称性）が破れ、“eight massless Goldstone bosons, the π’s, K’s, and η” が現れます 物理 。その QCD には隙間が無いと考えられます。Jaffe–Witten が QCD の三つ目の性質に挙げる “chiral symmetry breaking” です 既知 。純ヤン–ミルズにはクォークが無く、最も軽い状態はグルーボールと考えられています（5-08） 物理 。問題文の隙間 Δ は、クォークにも Higgs 場にも頼らず、ヤン–ミルズ場だけから生じるはずの尺度です（4-11）。

08

純ヤン–ミルズとの違い — 問題文が外したもの

問題文は任意のコンパクト単純群の純ヤン–ミルズ理論を対象にします（0-03）。標準模型から何を外すとそこに着くかが表 4 です。

表 4　標準模型・QCD・純ヤン–ミルズ

項目	標準模型	QCD	純ヤン–ミルズ
群	SU(3)×SU(2)×U(1)	SU(3)	コンパクト単純群
物質の場	クォーク・レプトン・Higgs	6 種のクォーク	無し
パラメータ	19 個（PDG の数え方）	g_s・6 つの m_q・θ	g・θ（3-05）
古典の質量の尺度	μ^2（v）と湯川結合	m_q	無し（3-02 §07）

項目	標準模型	QCD	純ヤン–ミルズ
質量 0 の粒子	光子	軽いクォークの質量 0 の極限で π など 物理	無いと予想 物理
問題文での扱い	対象外	拡張問題	本体

違いは三つです。**群**：単純でありません。可換な $\mathrm{U}(1)_Y$ の部分は漸近自由（短距離で結合が弱くなる性質）でなく（Coleman–Gross、4-06 §04）既知 、一ループでは結合が短距離で強くなります 物理 。**質量 0 の粒子**：光子が残るので標準模型の全体には隙間が無く、隙間を問えるのは強い力の部分です。**質量の出所**：Higgs 機構では尺度 μ^2 が古典の作用にあり解から見えますが、純ヤン–ミルズの古典の作用には尺度が無く、隙間は量子化で生じると考えられています 物理 。Jaffe–Witten も §2 で、Higgs 機構を “classical properties” の例に、質量ギャップと閉じ込めを “quantum properties that do not have classical analogs” の例に挙げます 既知 。

外したものは拡張問題に残ります。Jaffe–Witten は “other four-dimensional gauge theories (incorporating additional fields that preserve asymptotic freedom)” を挙げ（0-03）、問題説明を書いた時点では、Brydges–Fröhlich–Seiler の二次元の可換な Higgs 模型を “the only complete example of an interacting gauge theory satisfying the axioms” と呼んでいます 既知 。四次元の Higgs 模型の特殊な極限は 7-10、群の出どころの絵は 17-07 です。

この章が言えている範囲

事項	言えている	言えていない
(1)〜(6)・表 1・表 2	標準の定義、電荷と和の算術 既知 計算	表現がなぜこれか、アノマリーの条件の導出、閉じ込め
(7)〜(12)・図・表 3	古典の場での質量の出方、木の水準の推定、PDG の Δr を使った $1/\alpha$ の比較 既知 計算	量子論での Higgs 機構の定理、量子補正を含む値
表 4・寄り道 SU(5)	PDG の数え方と、表現の割り振りの算術 既知 計算	大統一が正しいこと、19 個の由来
(13)・§07	比の計算と PDG の記述 物理	それらの QCD からの証明
質量ギャップ	—	純ヤン–ミルズに隙間があること（未解決。このサイトは何も示していない） 物理

出典と再現

もの	種別	出典・道具
標準模型の定義・表現・SU(5)・19 個、電弱と QCD の式と値、クォークの質量、Goldstone ボソン	総説・要約表（本文を確認）	S. Navas et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. D 110 (2024) 030001：§9 QCD・§10 Electroweak Model・§60 Quark Masses・§93 Grand Unified Theories・Summary Tables
Jaffe–Witten の引用	一次資料（本文を確認）	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”, Clay Mathematics Institute の公式問題説明 §1・§2・§5・§6
Higgs・Weinberg の引用	一次資料（本文を確認）	P. W. Higgs, Phys. Rev. Lett. 13 (1964) 508／S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1264
その他の引用と要約	一次資料（要旨を確認）	Englert, Brout, PRL 13 (1964) 321／Bouchiat, Iliopoulos, Meyer, PLB 38 (1972) 519／Gross, Jackiw, PRD 6 (1972) 477／Georgi, Glashow, PRL 32 (1974) 438／Elitzur, PRD 12 (1975) 3978（3-01 と同じ）／Witten, “An SU(2) anomaly”, PLB 117 (1982) 324／ATLAS, PLB 716 (2012) 1／CMS, PLB 716 (2012) 30
Anderson	一次資料（要旨を確認。本文の言い方は Higgs 1964 の本文による）	P. W. Anderson, Phys. Rev. 130 (1963) 439
Brydges–Fröhlich–Seiler	書誌のみ（Jaffe–Witten §6.4 の文献 [7] を通して）	“On the construction of quantized gauge fields” I: Ann. Phys. 121 (1979) 227／II: CMP 71 (1980) 159／III: CMP 79 (1981) 353
Guralnik–Hagen–Kibble	書誌のみ	PRL 13 (1964) 585
表 1〜3・図と表の値・質量行列の固有値・(13)・Δr の比較・共役と湯川の確かめ	この端末で計算	Python 3.12・NumPy 1.26・fractions（`sm_tables.py`・`sm_checks.py`）。図は (9)(12) を素の JavaScript で

次に読む章：4-01 正準量子化とハミルトニアン。