第一巻　準備

第 4 部 量子化

Kiichi, Shiori and Rin · 2026-11-14 の版 · https://computoergosum.com/principia/yang-mills/

> この PDF は Web 版の各章をそのまま刷ったものです。動かせる図は刷った時点の姿で止まっています。章の間のリンクは Web 版へ飛びます。最新の内容は Web 版に在ります。

章		頁
4-01	正準量子化とハミルトニアン	2
4-02	経路積分とユークリッド化	12
4-03	摂動論と Feynman ダイアグラム	23
4-04	発散と繰り込み	32
4-05	発散の代数	42
4-06	漸近自由	53
4-07	次元転移と Λ	62
4-08	ゲージ固定と Faddeev–Popov	73
4-09	場の量子論の公理	84
4-10	Osterwalder–Schrader の公理と再構成	95
4-11	質量ギャップの定義	105
4-12	寄り道：摂動級数は発散する	116

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 4 部 量子化 正準量子化・Gauss 拘束

正準量子化とハミルトニアン — Gauss の法則は、状態への条件になる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 交換関係を課してハミルトニアンを作る手順（正準量子化）。
A_0 に運動量が無く、Gauss の法則が「小さなゲージ変換で変わらない」という状態への条件になること。
その条件がゲージの向きの平らな運動を消し、円周の上では準位を Casimir で決めること。

前提となる章 — 2-05（スペクトル・ギャップ）、3-03（作用・Gauss の法則）。振動子は 2-06。

先に言うこと — 四次元の連続の理論では、この章のハミルトニアンは式の形のままで、この形の作用素としては構成されていません（厳密なのは格子 5-03 と低次元の模型）。2026-11 に公開された構成は、ユークリッドの側から再構成でハミルトニアンを作りました（Lean で証明されている、と委員会が評価した。12-08）。質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. 正準量子化の手順
2. A_0 には運動量が無い — 拘束
3. 時間ゲージで量子化する — 波動汎関数
4. Gauss の法則は状態への条件 — 電荷と大きなゲージ変換
5. 自由な場で見る — 平らな向きを消す（図 1・表 1）
6. 円周の上のヤン–ミルズ — 類関数と Casimir（図 2・表 2・表 3）
7. 寄り道：小さな箱と、波動汎関数からの議論
8. Gauss の法則を解いてしまう道 — Gribov
9. 何が形式的か

01

正準量子化の手順 — 座標と運動量を作用素にする

問題文は質量ギャップをハミルトニアン H のスペクトルで定めます（真空は $H\Omega = 0$）：“A quantum field theory has a mass gap Δ if H has no spectrum in the interval $(0, \Delta)$ for some $\Delta > 0$.”（Jaffe–Witten §4）既知。その H を古典の場から書き下す道の一つが正準量子化です（もう一つは 4-02）。

有限自由度では三段です（2-05）。(i) 運動量 $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ を作る。(ii) $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ を q, p で書く。(iii) q, p を Hilbert 空間の作用素に替え、次を課す。

$$[q_i, p_j] = i\,\delta_{ij} \qquad (\hbar = 1) \tag{1}$$

波動関数の上では $p_j = -i\,\partial/\partial q_j$ です。場では添字が点 $\mathbf{x}$ に、δ_{ij} が $\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ に替わります。**例**。質量 m のスカラー場は波数ごとの振動子に分かれ、隙間は m でした（2-06 §08）。ヤン–ミルズでは段 (i) で運動量の作れない変数が現れます。

02

A_0 には運動量が無い — Gauss の法則は拘束として現れる

規約は 3-03 §01 と同じです（$\hbar = c = 1$、$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$、随伴の場に $(D_i X)^a = \partial_i X^a + g f^{abc} A_i^b X^c$）。色の電場は

$$E_i^a = F_{i0}^a = -\partial_t A_i^a + (D_i A_0)^a \tag{2}$$

で、$L = \tfrac{1}{2}\int \sum_a (|\mathbf{E}^a|^2 - |\mathbf{B}^a|^2)\, d^3x$（磁場は時間微分を含まない）です。$A_i^a$ の運動量は $\Pi_i^a = -E_i^a$ ですが、L は $\partial_t A_0$ を含まないので、A_0 の運動量は恒等的に 0 です。

段 (ii) を書きます。$\sum_i p_i \dot{q}_i$ にあたるのは $\int \Pi_i^a\, \partial_t A_i^a\, d^3x$ です。(2) を $\partial_t A_i = -E_i + D_i A_0$ と読み替えて代入すると

$$\int \Pi_i^a\, \partial_t A_i^a\, d^3x = \int \big(|\mathbf{E}|^2 - \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}A_0 \big) d^3x$$

です。ここから L を引くと $\tfrac{1}{2}(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2)$ と $-\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}A_0$ が残ります。最後の項は部分積分で D を $\mathbf{E}$ の側へ移します（遠方で場は 0 とします）。微分 ∂_i の部分は、ふつうの部分積分で符号を変えます。$g f^{abc} A_i^b$ の部分は、f^{abc} が添字の入れ替えで符号を変える（反対称な）ので、添字の名前を付け替えると同じく符号が一つ変わります。こうして $-\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}A_0\, d^3x = \int A_0^a (\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})^a\, d^3x$ となり、

$$H = \int \Big[\tfrac{1}{2}\big(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2\big) + A_0^a\,(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})^a \Big]\, d^3x \tag{3}$$

です（$|\mathbf{E}|^2 = \sum_a |\mathbf{E}^a|^2$）既知。$A_0$ は一次でだけ現れる未定乗数で（2-01 §08 の玩具の λ）、その方程式 $(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})^a = 0$ が Gauss の法則です（3-03 の (3)）。このような条件を**拘束**と呼び、一般の扱いは Dirac（1950）に始まるとされます。

03

時間ゲージで量子化する — 波動汎関数と電場の作用素

ゲージ変換で $A_0 = 0$ にそろえます（**時間ゲージ**。各点で $\partial_t \Omega = -ig\,\Omega A_0$ を解けばよい）。残る自由は時刻によらないゲージ変換です。座標は $A_i^a(\mathbf{x})$、運動量は §02 の $\Pi_i^a = -E_i^a$ です。$\Pi = -E$ なので、(1) の場の版 $[A, \Pi] = i\delta$ は

$$[A_i^a(\mathbf{x}),\, E_j^b(\mathbf{y})] = -i\,\delta^{ab}\delta_{ij}\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{4}$$

です（符号が負なのは $E = -\Pi$ だからです）。状態を配位の関数（**波動汎関数**）$\psi[A]$ で表します。小さな ϵ と関数 $h_i^a(\mathbf{x})$ について

$$\psi[A + \epsilon h] - \psi[A] \approx \epsilon \int h_i^a(\mathbf{x})\, \frac{\delta \psi}{\delta A_i^a(\mathbf{x})}\, d^3x$$

となる関数 $\delta\psi/\delta A_i^a(\mathbf{x})$ を**汎関数微分**と呼びます。有限次元の $\psi(q+\epsilon h) - \psi(q) \approx \epsilon \sum_i h_i\, \partial\psi/\partial q_i$ の添字 i を点 $\mathbf{x}$ に、和を積分に替えたものです。(1) の $p = -i\,\partial/\partial q$ にならって $\Pi_i^a(\mathbf{x}) = -i\,\delta/\delta A_i^a(\mathbf{x})$、したがって $E_i^a(\mathbf{x}) = i\,\delta/\delta A_i^a(\mathbf{x})$ と働き、(3) は形式的に

$$H = \int \Big[-\tfrac{1}{2}\frac{\delta^2}{\delta A_i^a(\mathbf{x})^2} + \tfrac{1}{2} B_i^a B_i^a \Big]\, d^3x \tag{5}$$

です（$\delta^2/\delta A_i^a(\mathbf{x})^2$ は a・i について和を取ります）既知。無限個の座標の粒子が位置エネルギー $\frac{1}{2}\int |\mathbf{B}|^2$ の中を動く、と読めます。正確には (5) は形だけです（§09）。$\hat{A} = gA$ と取り直すと

$$H = \int \Big[-\frac{g^2}{2}\,\frac{\delta^2}{\delta \hat{A}^2} + \frac{1}{2g^2}\,|\hat{\mathbf{B}}|^2 \Big]\, d^3x \tag{6}$$

で、g が大きいと電場の項が、小さいと磁場の項が勝ちます。5-03 の (16) の係数 $g^2/2a$・$2N/g^2a$ はこの二項の格子版です。**例**。各点の $3(N^2-1)$ 個の A_i^a から次節の条件で N^2-1 個のゲージの向きが消え、$2(N^2-1)$ 個が残ります（3-03 §03 と同じ数）。古典では拘束と残るゲージ変換の二つで消した一成分を、量子では (10) が一度に消します。

04

Gauss の法則は状態への条件 — 小さなゲージ変換で変わらない

A_0 を消したので、Gauss の法則はもう運動方程式の中にありません。Gauss の作用素

$$G^a(\mathbf{x}) = (\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})^a = \partial_i E_i^a + g f^{abc} A_i^b E_i^c \tag{7}$$

には三つの性質があります 既知 。(a) **ゲージ変換を生む**。$G(\alpha)=\int \alpha^a G^a\, d^3x$ と置くと、部分積分と (4) から

$$G(\alpha)\,\psi[A] = -i\,\frac{d}{d\epsilon}\,\psi[A+\epsilon\, D\alpha]\Big|_{\epsilon=0} \tag{8}$$

です（$A\mapsto A+\epsilon D\alpha$ は 3-02 の (4) で α を $g\epsilon\alpha$ としたもの、つまり無限小のゲージ変換）。(b) H **と交換する**。(5) の二項はゲージ不変なので $[H, G^a(\mathbf{x})]=0$。(c) **閉じた代数をなす**。

$$[G^a(\mathbf{x}), G^b(\mathbf{y})] = -ig\, f^{abc}\, G^c(\mathbf{x})\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{9}$$

$G^a=0$ を作用素の等式にはできません。$G(\alpha)$ と A_j の交換子が $-i\,D_j\alpha\neq 0$ だからです。代わりに状態に課します。

$$G^a(\mathbf{x})\,\psi = 0 \iff \psi[A^\Omega] = \psi[A] \tag{10}$$

右の Ω は恒等変換に連続につながるものです。(10) を満たす状態が**物理的状態**です。(b) で時間発展はこの部分空間を保ち、(c) で条件どうしは矛盾しません。観測量はゲージ不変なものに限り、質量ギャップは物理的状態の上の H の隙間です（4-11 §09）。

例。$SU(2)$ の一様な場（3×3 の実行列 A_i^a。一様な場は 3-02 §07）では $G^a = ig\,\varepsilon^{abc}A_i^b\,\partial/\partial A_i^c = -gL^a$ です。$L^a=-i\varepsilon^{abc}A_i^b\,\partial/\partial A_i^c$ は色の添字を回す角運動量で、$[L^a,L^b]=i\varepsilon^{abc}L^c$ を満たします。これは生成子の $[T^a,T^b]=if^{abc}T^c$（3-02 §02）と同じ交換関係なので、$G=-gL$ から (9) の $-ig$ が出ます。ゲージ不変な関数は $A^{\mathsf T}A$ と $\det A$ の符号の関数です。差分で、G^a が $\frac12|\mathbf{B}|^2\cdot\det A$ を 2×10^{-10} 以下まで消し A_1^1 は消さないこと、(9) が相対 2×10^{-11} で成り立つことを確かめました 計算 。

電荷と、大きなゲージ変換

静止した色の電荷があると条件は $G^a\psi=\rho^a\psi$ です。Kogut–Susskind（1975）の要旨は格子のゲージ不変な配位を “a collection of strings with quarks at their ends. The strings are lines of non-Abelian electric flux.” と書きます 既知 （表 3）。また (8) が生むのは恒等変換につながる変換だけです。遠方で 1 に近づき、$\mathbb{R}^3\cup\{\infty\}=S^3$ から $SU(2)$ への巻き付き数が 1 の変換 T（3-05 §07）は恒等変換につながりません。そのため $\psi[A^T]=e^{-i\theta}\psi[A]$ となること

は (10) と矛盾しません（$(T\psi)[A] = \psi[A^T]$ と約束すると 3-05 の (12) と同じ向き。逆の約束では $e^{+i\theta}$）。これが θ 真空の θ です 物理 。

05

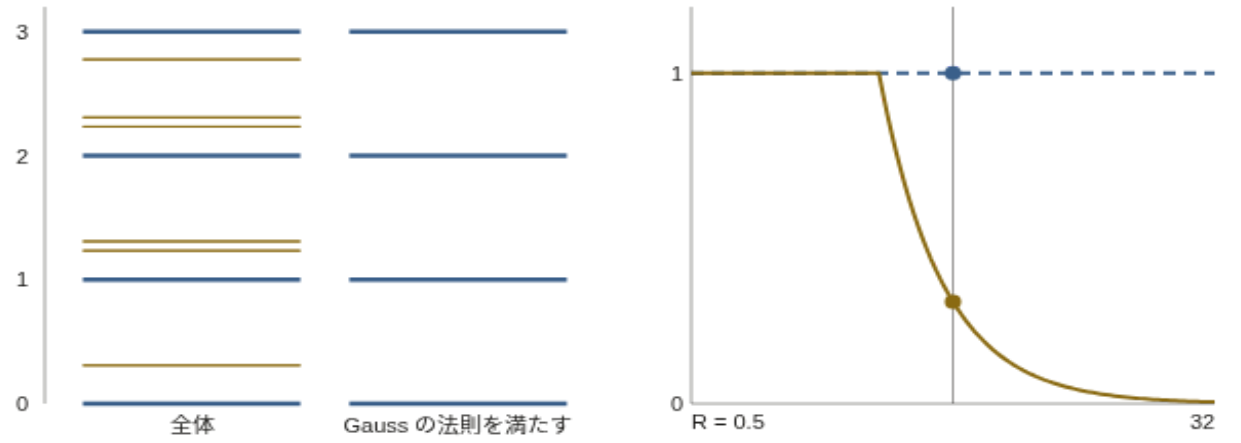
自由な場で見る — Gauss の法則が平らな向きを消す

$g = 0$ で、波数 $\mathbf{k}$ の成分を $\mathbf{k}$ に平行な縦 a_L と垂直な横 a_T に分けます。磁場は横だけを含むので、横の一つの向きだけ書くと

$$H_{\mathbf{k}} = \tfrac{1}{2}\left(p_T^2 + p_L^2\right) + \tfrac{1}{2}|\mathbf{k}|^2 a_T^2 \tag{11}$$

で、$G_{\mathbf{k}} \propto \mathbf{k}\cdot\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \propto p_L$ です。縦はゲージ変換 $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla\chi$ の向きで、復元力が無く、全体の H では各準位の上に縦の運動のエネルギーが連続に積み上がります。Gauss の法則 $p_L\psi = 0$ がこの連続を消し、横の振動子の Fock 空間（光子。2-06 §07）が残ります 既知 。図 1 は縦を長さ $2R$ の円周に閉じ（$|\mathbf{k}| = 1$）、準位 $E(n,m) = n + \tfrac{1}{2}(\pi m/R)^2$（$m \in \mathbb{Z}$）のうち $m = 0$ が残る様子を見ます。

図 1　つまみで縦の向きの長さ R を変えると、左の準位と右の隙間が変わる。太線は縦に一定な状態（$m = 0$）、細線は縦に動く状態。右の実線は全体の、破線は Gauss の法則を満たす状態の隙間



R = 4.00：全体の隙間 0.3084、物理的 1、E ≤ 3 の準位 16・物理的 4

計算 この図の数値はこの端末で計算した（閉じた式をその場で計算。表 1 と一致）。

計算 表 1　縦の長さ R と隙間（$|\mathbf{k}| = 1$）。準位の数は $E \le 3$（物理的には常に 4）

R	全体の隙間	物理的な隙間	準位の数（全体）
2	1.00000	1	8
4	0.30843	1	16
32	0.00482	1	120

全体の隙間 $\min(1, \pi^2/2R^2)$ は $R \to \infty$ で 0 で、時間ゲージの H そのものの隙間はゲージの向きの運動が埋めます。物理的な隙間 $|\mathbf{k}|$ も箱を広げれば 0 に近づき、自由な場に質量ギャップはありません（質量 m の場なら隙間は m でした。2-06 §08）。

06

円周の上のヤン–ミルズ — 状態はホロノミーの類関数

空間を長さ L の円周（$1+1$ 次元）にすると磁場は無く、$H = \frac{1}{2}\int_0^L E^a E^a \, dx$ です。Gauss の法則は E が平行移動（1-07）で運ばれることを言い、随伴の平行移動は長さを保つので $H = \frac{L}{2} E^a E^a(0)$ です。ゲージ不変な関数に残るのは一周のホロノミー $U = P\exp(ig\oint A_1 dx)$ の共役類だけです。共役 $U \mapsto gUg^{-1}$ で変わらない関数を**類関数**、表現行列のトレースを**指標**と呼びます（1-02）。Witten（1992）§4 は “Ψ must be a class function of U, invariant under conjugation, and so must have an expansion in characters” と書き、H を Casimir 作用素で表します 既知 。$E^a(0)$ は U を T^a の向きに回す微分の g 倍として働き、

$$H\,\chi_r(U) = \frac{g^2 L}{2}\, C_2(r)\, \chi_r(U) \tag{12}$$

です（χ_r は既約表現 r の指標、C_2 は $\sum_a T^a T^a$ の値。1-04）。固有値は Rajeev（1988）が厳密に求め、転送行列からの道は 7-02 §07 です。**例**。$SU(2)$ で U の固有値を $e^{\pm i\theta}$ とすると $\chi_j = \sin((2j+1)\theta)/\sin\theta$、準位は $j(j+1)$ の $g^2L/2$ 倍です。隙間 $\frac{3}{8}g^2L$ は円周を一周する電気力線の輪のエネルギー（張力 $\frac{3}{8}g^2$）と読めます。

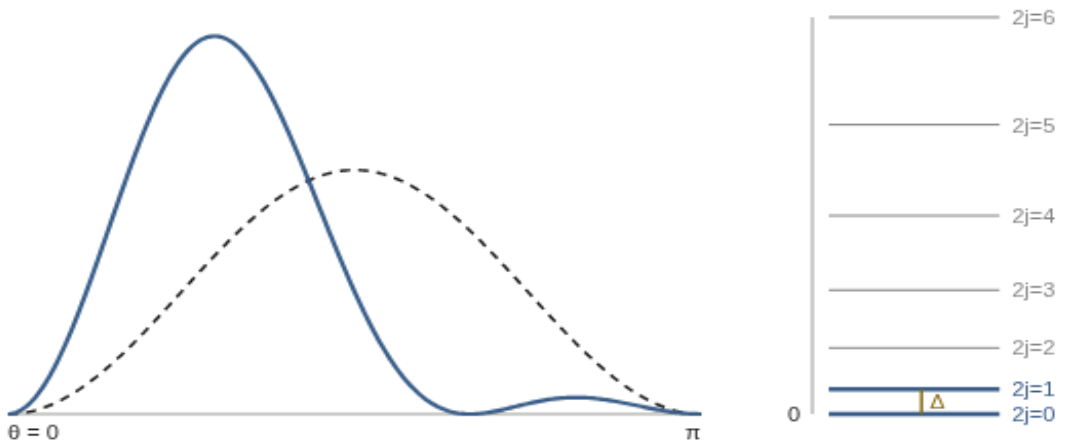
軌道の体積が準位を決める

類関数の内積は Haar 測度 $\frac{2}{\pi}\sin^2\theta\, d\theta$ で取ります。1-08 §03 の a_0 の密度 $\frac{2}{\pi}\sqrt{1-a_0^2}\,da_0$（半円）で $a_0 = \cos\theta$ と置くと、この形になります。$\sin^2\theta$ は共役類（S^3 の中の球面）の面積、つまりゲージ軌道の体積です（4-02 §07）。(12) を θ で書くと

$$H = \frac{g^2 L}{2}\Big(-\frac{1}{4\sin^2\theta}\frac{d}{d\theta}\sin^2\theta\frac{d}{d\theta}\Big) \tag{13}$$

で、$u = \sin\theta\, f$ の上では $\frac{g^2L}{8}(-u'' - u)$、つまり区間 $[0,\pi]$ の箱の粒子（$u = \sin n\theta$、$n = 2j+1$）から 1 を引いたものです。測度を忘れて平らなラプラシアンを使うと、準位は $k^2/4$ に変わります（表 2）。この体積の因子は、三次元のクーロンゲージでは Faddeev–Popov の行列式として現れます（§08）。

図 2　$SU(2)$ の円周（$g=1$）。$2j$ と L を選び「動かす」と時間が進み（画面の 1 秒が時間 1）、χ_0 と χ_j を半分ずつ重ねた状態の θ の密度（実線）が角振動数 $\Delta = E_j - E_0$ で揺れる。$2j$ や L を大きくすると揺れが速くなる。破線は Haar の重み、右は準位 (12)



2j = 1、L = 2.0：Δ = 0.750、周期 2π/Δ = 8.38、位相 Δt = 0.00π

計算 この図の数値はこの端末で計算した（指標と (12) の閉じた式をその場で計算。表 2 と一致）。

計算 表 2　(13) の固有値（$g^2L/2$ 単位。差分は Haar の重みつき 4000 点）と、測度を忘れた $-\frac{1}{4}d^2/d\theta^2$（$[0,\pi]$ の両端で傾き 0。$\theta \mapsto -\theta$ で対称な周期関数）の下から $k = 2j$ 番目

2j	j(j+1)	差分（Haar）	測度を忘れた k²/4
0	0	0.000000	0
1	0.75	0.750000	0.25
2	2	2.000000	1
3	3.75	3.749998	2.25

格子で数える — Gauss の法則を破る状態

円周を N 本のリンク（$a = L/N$）に刻み、$H = \frac{g^2 a}{2}\sum_\ell E_\ell^2$ とします（5-03 §07 の二次元版。プラケットは無い）。比喩で言えば、一本のリンクは $SU(2)$ の上を回るこまで（5-03 §06）、角運動量 j の状態が左右の回転について $(2j+1)\times(2j+1)$ 個あります。正確には、リンクの状態の空間 $L^2(SU(2))$ を表現ごとに分ける Peter–Weyl の定理です 既知 。こうしてエネルギーは $\frac{g^2 a}{2}\sum_\ell j_\ell(j_\ell+1)$、重複度は $\prod_\ell (2j_\ell+1)^2$ です。頂点では二本のリンクの端が出会い、Gauss の法則はその二つの表現を合成したものが回転で変わらない（スカラーである）ことを求めます。角運動量の合成 $j \otimes j' = |j-j'| \oplus \cdots \oplus (j+j')$ に 0 が現れるのは $j = j'$ のときだけで、しかも一通りです（Schur の補題） 既知 。したがって隣り合う j は等しく、物理的状態は各 j に一つで、準位は N によらず (12) です。

計算 表 3　$SU(2)$ の格子の円周（$g^2L/2$ 単位）。物理的な最低の励起は常に 0.75、$E \le 2$ の物理的状態は 3 個

N	全体の最低の励起	$E \le 2$ の状態数（全体）
1	0.75	14
4	0.1875	115,504
16	0.046875	2.44×10^{22}

全体の最低の励起は一本のリンクだけ $j=\frac{1}{2}$、つまり両端に電荷の対を置いた状態（§04）で、エネルギー $\frac{3}{8}g^2 a$ は張力と距離 a の積です。$a\to 0$ で 0 に近づくので、物理的状態に制限してはじめて $\frac{3}{8}g^2 L$ が残ります。

07

寄り道：小さな箱と、波動汎関数からの議論

飛ばしてよい節です。

三次元の周期的な箱（一辺 ℓ）では一様な成分 $A_i^a = c_i^a$ が特別です。(5) をこの成分に制限すると $H_0 = -\frac{1}{2\ell^3}\partial_c^2 + \frac{\ell^3}{2}|\mathbf{B}(c)|^2$（磁場は交換子の項 $g\,c^2$ だけ。3-02 §07）で、$c = g^{-1/3}\ell^{-1} y$ と置き直すと

$$H_0 = \frac{g^{2/3}}{\ell}\left[-\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \tfrac{1}{2}|\mathbf{B}_1(y)|^2\right] \tag{14}$$

です（$\mathbf{B}_1$ は $g=1$ の磁場）。準位は $g^{2/3}/\ell$ に比例し、g が小さければ一様でない成分の $2\pi/\ell$ より低くなります。Lüscher（1983）の要旨は “When non-abelian gauge fields are enclosed in a box with periodic boundary conditions, the spectrum of the hamiltonian becomes discrete” と書き、準位を $g^{2/3}$ のべきに展開しています 既知 。括弧の中の二成分だけを残したものが 2-05 の x^2y^2 の井戸です。小さな箱（漸近自由で g が小さい側）は、無限の体積を問う四次元の問いとは反対の端です。Lüscher の g は箱の大きさで測った繰り込まれた結合で、(14) の古典の g そのものではありません。

Feynman（1981）は $2+1$ 次元で、要旨に “Only qualitative or suggestive discussions are made.” と断ったうえで、波動汎関数のゲージ不変性が “a finite energy for any excitation (“glueball”) above the ground state” をもたらすと論じます 物理 。

08

Gauss の法則を解いてしまう道 — クーロンゲージと Gribov

ゲージをさらに固定して拘束を先に解く道もあります。クーロンゲージ $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$ で $\mathbf{E} = \mathbf{E}_T - \nabla\phi$（$\nabla\cdot\mathbf{E}_T = 0$）と分けると、Gauss の法則は ϕ の線形の方程式です。

$$M\phi = -\rho, \qquad M = -\nabla\cdot\mathbf{D} \tag{15}$$

$\rho^a = g f^{abc} A_i^b E_{T,i}^c$ は横の場自身が運ぶ色の電荷です。M が逆に持てれば、$K = M^{-1}(-\nabla^2)M^{-1}$ として

$$H = \tfrac{1}{2}\int\left(|\mathbf{E}_T|^2 + |\mathbf{B}|^2\right) + \tfrac{1}{2}\int \rho\, K\,\rho \tag{16}$$

です（積分は d^3x）既知。Christ–Lee（1980）の要旨は、時間ゲージからの変数変換が “an unconventional operator ordering” を生み、“new nonlocal interactions, even in the familiar Coulomb gauge” が現れると書きます既知。§06 の $\sin^2\theta$ にあたる軌道の体積の因子は $\det M$ です既知。これは変数をゲージの条件（$\nabla\cdot\mathbf{A}=0$ の切り口の上の座標）に取り替えるときのヤコビアンで、Faddeev–Popov の行列式と呼ばれます（詳しくは 4-08）。困難は、A が大きいと M が固有値 0 を持つことです。Gribov（1978）の要旨は “the fixing of the divergence of the potential in non-Abelian theories does not fix its gauge” と書きます既知。切り口を大域的に選べないことは 3-04 の Singer の定理です。時間ゲージの (10) はこの困難を避けています。

09

何が形式的か — ハミルトニアンを定義するという問題

四次元の (5) には三つの点で意味が欠けています。(i) $E_i^a(\mathbf{x})E_i^a(\mathbf{x})$ は超関数の同じ点での積です（1-11 §09・1-09 §09）。(ii) 零点エネルギー $\frac{1}{2}|\mathbf{k}|$ の和は発散し（2-06 §09）、相互作用があると繰り込み（4-04）と組になります。(iii) 内積 $\int|\psi|^2\mathcal{D}A$ には、無限次元にルベーグ測度が無いこと（1-09 §02）と軌道の体積の発散が重なります（相互作用のある H を自由場の Fock 空間の上に置けないこと、つまり Haag の定理も関わります。4-09）。

格子では状態空間が定まり、Gauss の法則も頂点ごとに厳密に課せます（表 3）。残るのは、格子間隔を 0 に、箱を無限にする極限で隙間が正に残るかです。問題文は “Establishing a quantum mechanical Hilbert space is part of the solution to this Millennium problem.” と書きます（§6.5）既知。§6.1 は Hilbert 空間の道と汎関数積分の道を Osterwalder–Schrader の構成が結ぶと述べます。§6.5 は、これまでの数学の進展の多くが汎関数積分の理解から来たと書きます（“Much of the mathematical progress reviewed above results from understanding functional integration”）。この道では H は虚時間の測度から再構成されます（4-02 §08・4-10 §09）。この章は四次元のヤン–ミルズについて何も示していません。

この章が言えている範囲

事項	言えている	言えていない
(1)〜(10)	形式的な導出既知。一様な場の検算計算	四次元の場での作用素としての意味。θ は物理の水準

事項	言えている	言えていない
(11)〜(13)・図・表	自由な場の模型と円周の上の準位 既知 、差分・数え上げ 計算	空間が二次元以上の場合
(14)〜(16)・寄り道	尺度の勘定と古典の書き換え 既知	量子の順序の項（本文未確認）。Feynman の議論は定性的 物理
質量ギャップ	—	四次元で H は 2026-11 に公開された構成が再構成で作った（委員会の評価の水準。12-08）。その隙間は示されていない（6-04）。この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
問題文（§4・§6.1・§6.5）	本文	A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*, Clay Math. Inst. (2000)
円周の上の類関数と Casimir	本文 §4・§4.2	E. Witten, J. Geom. Phys. 9 (1992) 303–368, arXiv:hep-th/9204083
§08 の順序の項と $\det M$	要旨（本文は書誌のみ。$\det M$ の項は未確認）	N. H. Christ, T. D. Lee, Phys. Rev. D 22 (1980) 939
§04・§06〜§08 の引用	要旨	J. Kogut, L. Susskind, Phys. Rev. D 11 (1975) 395／S. G. Rajeev, Phys. Lett. B 212 (1988) 203／M. Lüscher, Nucl. Phys. B 219 (1983) 233／R. P. Feynman, Nucl. Phys. B 188 (1981) 479／V. N. Gribov, Nucl. Phys. B 139 (1978) 1
拘束の一般論	書誌のみ	P. A. M. Dirac, Can. J. Math. 2 (1950) 129–148（帰属は未確認）
(2)〜(10)・(15)(16)	既知	標準の導出。符号は 3-03 の規約で計算し直した
§04 の検算・表 1〜3・図	計算	Python 3.12・NumPy・SciPy（`gauss_uniform.py`・`flat_mode.py`・`holonomy.py`・`ring_counts.py`）。図は素の JavaScript

次に読む章：4-02 経路積分とユークリッド化。格子のハミルトニアンは 5-03、ゲージ固定は 4-08。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 4 部 量子化 経路積分・Wick 回転

経路積分とユークリッド化 — 時間を虚にすると、場の理論は四次元の確率の問題になる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 場の経路積分が場の配位すべてについての和であること。
時間を虚にすると重み e^{iS} が e^{-S_E} になり、ヤン–ミルズでは $S_E \geq 0$ なので確率の重みとして読めること。
ローレンツ変換が四次元の回転になり、時間が四つの対等な方向の一つになること。

前提となる章 — 2-07（経路積分・虚時間）、2-04（ローレンツ変換・場の作用）。§04 は 3-02・3-03 の非可換の場の強さを使います。ハミルトニアンは 4-01、ガウス測度は 1-09。

先に言うこと — この章の変形の多くは形式的です。Wick 回転は発見法で、厳密な対応は Osterwalder–Schrader の再構成（4-10）です。四次元のヤン–ミルズの測度は構成されておらず、この章は質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. 道から場の配位へ — 格子では何千万重の積分
2. 時間を虚にする — iS が $-S_E$ になる
3. 伝播関数で見る回転 — 極を避けて回す（図 1・表 1）
4. ヤン–ミルズ場の回転 — $S_E \geq 0$、θ 項は虚のまま
5. 時空が空間になる — ブーストが回転に（表 2）
6. 確率測度としての場の理論 — 格子では本物の測度（図 2）
7. ゲージ場で足りないもの — 軌道の体積（表 3）
8. 虚時間の相関がエネルギーを読む — ギャップとのつながり
9. 寄り道：真空の波動関数を半分の時空で書く — 振動子で確かめる

01

道から場の配位へ — 足すものが関数になる

2-07 では一粒子の道 $x(t)$ について e^{iS} を足しました。場の理論では、道の代わりに時空の関数 $\varphi(t,x)$、場の歴史のすべてについて足します。真空 Ω での相関（T は時刻の遅いものを左に並べる約束）は、形式的に

$$\langle \Omega |\, \mathrm{T}\, \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\, | \Omega \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\varphi\; \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\, e^{iS[\varphi]}}{\int \mathcal{D}\varphi\; e^{iS[\varphi]}} \tag{1}$$

と書かれます。一粒子でも $e^{iS}\mathcal{D}x$ は測度になりませんでした（2-07 §03）。場では各時刻に無限個の変数もあります（1-09）。

例。格子に刻めば (1) は有限の多重積分です。空間 32^3・時間 64 の格子の点は 2,097,152 個で、$SU(3)$ のヤン–ミルズ場は一点に 4 本のリンク、一本に 8 個の実数を持つので 67,108,864 重の積分です 計算 。困難は e^{iS} の振動と、刻みを細かく箱を広くする極限の二つです。この章は一つ目を取り除きます（二つ目は第 5・7 部）。

02

時間を虚にする — iS が $-S_E$ になる

$t = -i\tau$ という置き換えは二度出てきました。2-04 §09 では波動方程式に代入し、振動が減衰に変わることを見ただけでした。2-07 §05 では一粒子の経路積分の重みを回しました。ここでは場の作用と相関を回します。スカラー場の作用（2-04 の (7) に位置エネルギー V を足したもの）に $t = -i\tau$（$\hbar = c = 1$、符号は $(-,+,+,+)$、$x_4 = \tau$）を入れると、$dt = -i\,d\tau$、$(\partial_t\varphi)^2 = -(\partial_\tau\varphi)^2$ から

$$iS_M = -S_E, \qquad S_E[\varphi] = \int d^4x \Big[\tfrac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{4} (\partial_\mu\varphi)^2 + \tfrac{1}{2}m^2\varphi^2 + V(\varphi) \Big] \tag{2}$$

です。時間の微分の符号が空間の微分にそろい、四つの方向が対等になりました。S_E をユークリッド作用と呼び、V が下に有界なら重み e^{-S_E} は正で有界です。(1) は **Schwinger 関数**（名は Schwinger 1958 にちなむとされる）に替わります。

$$S_n(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}\varphi\; \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\, e^{-S_E[\varphi]}, \qquad Z = \int \mathcal{D}\varphi\; e^{-S_E[\varphi]} \tag{3}$$

例。$V = 0$ なら (3) は共分散 $(-\Delta + m^2)^{-1}$（Δ はラプラシアン $\sum_\mu \partial_\mu^2$。質量ギャップの Δ とは別）のガウス積分で、$S_2(x,y) = G(x-y)$ は 1-11 の (10) の伝播関数です。注意。(1) は収束

する積分ではないので、$t = -i\tau$ を入れるのは変数変換ではなく書き換えの規則です。正確な中身は相関関数の解析接続で、一つの積分で見ると次節の形です。

03

伝播関数で見る回転 — 極を避けて積分路を回す

質量 m の自由場の二点関数は、運動量で書くと

$$\langle \Omega | \, \mathrm{T}\, \varphi(x)\varphi(0) \, | \Omega \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{ip\cdot x}\, \frac{-i}{p^2 + m^2 - i\varepsilon}, \qquad p^2 = -(p^0)^2 + |p|^2 \tag{4}$$

です。$\varepsilon \to +0$ は極を避ける側を決めます（Feynman の処方）。まず時刻の差 $t = 0$ の成分で見ます。このとき $e^{ip\cdot x}$ のうち p^0 による因子 $e^{-ip^0 t}$ は 1 です。$\omega = \sqrt{|p|^2 + m^2}$ と置くと p^0 の被積分関数は $i/((p^0)^2 - \omega^2 + i\varepsilon)$ で、極 $\pm\sqrt{\omega^2 - i\varepsilon}$ は第 4・第 2 象限にあります。

ここで複素積分の事実を一つだけ使います。**極**とは分母が 0 になる点です。複素平面で、極を囲まない閉じた道に沿って積分すると 0 になります（**Cauchy の積分定理**。正確には、道とその内側で関数が複素微分できることが条件で、分母が 0 にならない有理関数はこれを満たします）既知 。だから極を横切らずに積分路を連続的に動かしても、値は変わりません。

積分路を $p^0 = e^{i\theta} s$（s は実）と反時計回りに回します。θ が 0 から 90° の間、動く直線は第 1・第 3 象限を掃くだけで、極を横切りません。回す前と後の二本の直線を、半径 R の遠くの弧で結ぶと、極を囲まない閉じた道になります。弧の長さは R に比例し、被積分関数は $1/R^2$ で減るので、弧の寄与は $1/R$ で消えます。したがって実軸の上の積分と回した直線の上の積分は等しく、$\theta = 90^\circ$、つまり $p^0 = ip_4$ で

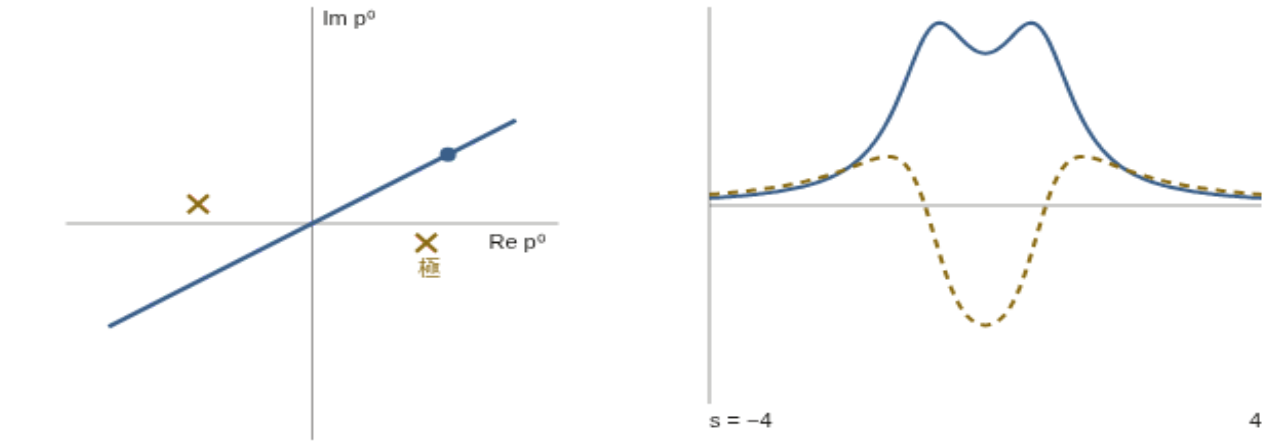
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi}\, \frac{i}{(p^0)^2 - \omega^2 + i\varepsilon} \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_4}{2\pi}\, \frac{1}{p_4^2 + \omega^2} \;=\; \frac{1}{2\omega} \qquad (\varepsilon \to 0) \tag{5}$$

右辺の被積分関数は正でなめらかです。四次元では $-i\,d^4p/(p^2 + m^2 - i\varepsilon)$ が $d^4p_E/(p_E^2 + m^2)$ に替わり、これがユークリッドの伝播関数です 既知 。$1/(2\omega)$ は振動数 ω の振動子の基底状態の $\langle x^2 \rangle$ で（2-06）、自由場のフーリエ成分は一つ一つが振動子でした（2-06 §08）。

$t \neq 0$ の成分では因子 $e^{-ip^0 t}$ が付きます。$p^0 = e^{i\theta} s$ を第 1 象限に回すと、$st > 0$ の側で $|e^{-ip^0 t}| = e^{st\sin\theta}$ は遠くで増えるので、弧の寄与が消えません。そこで t も同じ角度だけ逆向きに、$t = e^{-i\theta}\tau$ と回します。すると途中のどの角度でも $p^0 t = s\tau$ は実で、因子は大きさ 1 の振動のまま残り、弧の議論が通ります。$\theta = 90^\circ$ で $t = -i\tau$、$p^0 = ip_4$、$p^0 t = p_4 \tau$ です。時間が時計回り、エネルギーが反時計回りに回るのはこのためです。

逆に回すと極を横切り符号が変わるので（図 1・表 1）、向きは $i\varepsilon$ が決めています。名は Wick（1954）の Bethe–Salpeter 方程式の扱いによるとされます。

図 1　角度 θ を変えると、p^0 平面の積分路（積分路の図の太線）と、その上の被積分関数（被積分関数の図。実線が実部、破線が虚部）が変わる。極（×）を横切らない限り積分 $I(\theta)$ は変わらない（$\omega = 1$）



θ = 30°、ε = 0.40：I(θ) = 0.4731 + 0.0911i　1/(2√(ω²−iε)) = 0.4731 + 0.0911i　（極の角度 -10.9° より上）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（$s = \tan u$ と置いた台形公式）。

計算 表 1　図 1 の $I(\theta)$（python3）。$\varepsilon = 0.4$ の極の角度は $-10.90°$。

θ	ε	I(θ)
90°・30°・0°・−10°	0.4	+0.473094 + 0.091110i
−12°・−45°・−90°	0.4	−0.473094 − 0.091110i
0°	0.001	0.500000 + 0.000250i

角度によらず値は一つで、極を越えて逆に回すと符号だけが反転します。

04

ヤン–ミルズ場の回転 — $E^2 - B^2$ が $E^2 + B^2$ になる

記号は 3-03 §01 の $\hat{A} = gA$ に合わせ、ハットを省いて書きます。つまり g を A に吸収し、A_μ はエルミートな行列、$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$、$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]$（2-04 の (9) と同じ）、$\mathrm{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ です。

ゲージ場は 1-形式（1-07）なので $A_0\,dt = A_4\,d\tau$、つまり $A_0 = iA_4$ と回します。$\partial_0 = i\partial_4$ と合わせて

$$F_{0j} = i\partial_4 A_j - i\partial_j A_4 - i[iA_4, A_j] = i\,F_{4j}, \qquad F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2F_{0j}F_{0j} + F_{jk}F_{jk} = \sum_{\mu,\nu=1}^{4} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{6}$$

です。言葉で言えば、時間の添字を一つ持つ成分（電場の成分）にだけ i が一つ付き、二乗で -1 になります。ミンコフスキーの計量では電場の二乗に -1 が付いていたので、その二つが打ち消し、四つの添字がすべて同じ符号で並びます。スカラー場の (2) で $(\partial_t\varphi)^2$ の符号が空間の微分にそろったのと同じことです。$S_M = -\frac{1}{2g^2}\int dt\, d^3x\, \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$（3-03 の (1) をハットの記号で書いたもの）に入れると $i\cdot(-i)=1$ が残り、$iS_M = -S_E$ で

$$S_E[A] = \frac{1}{2g^2}\int d^4x\ \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{g^2}\int d^4x\ \mathrm{tr}\big(E_E^2 + B^2\big)\ \geq\ 0, \qquad E_{E,j} = F_{4j},\ B_j = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{jkl}F_{kl} \tag{7}$$

エルミートな X では $\mathrm{tr}\, X^2 = \sum |X_{ij}|^2 \geq 0$ なので $S_E \geq 0$、等号は $F=0$ のときだけです。位相電荷 Q の配位では $S_E \geq 8\pi^2|Q|/g^2$ です（3-03 の (12)・3-05）既知 。**例。** $A_4 = 0$ で A_j が τ によらない配位では $E_E = 0$ なので、長さ T の虚時間の S_E は $T\mathcal{E}$（$\mathcal{E} = \frac{1}{g^2}\int \mathrm{tr}\, B^2 d^3x$ は磁場のエネルギー）で、重みは $e^{-T\mathcal{E}}$ です。

θ 項は虚のまま残る

位相の項 θQ は違います。各成分に時間の添字を持つ F がちょうど一つ入るので、回転の i と dt の $-i$ が打ち消し合い、重みは $e^{-S_E}e^{i\theta Q}$（符号は向きの規約による）、$\theta \neq 0$ では複素数です。Vicari–Panagopoulos（2009）は 'the complex nature of the θ term in the Euclidean QCD Lagrangian prohibits a direct MC simulation at θ ≠ 0' と書きます 既知 。以下 $\theta = 0$ とします。

05

時空が空間になる — ブーストが回転になる

2-04 のブースト $t' = t\cosh\phi - x\sinh\phi$、$x' = x\cosh\phi - t\sinh\phi$ に $t = -i\tau$ と虚の急速度 $\phi = i\alpha$ を入れると、$\cosh i\alpha = \cos\alpha$、$\sinh i\alpha = i\sin\alpha$ から

$$\tau' = \tau\cos\alpha + x\sin\alpha, \qquad x' = x\cos\alpha - \tau\sin\alpha \tag{8}$$

で、(τ, x) 平面の回転です。ローレンツ群 $SO(3,1)$ は回転群 $SO(4)$ に替わります 既知 。間隔は $\tau^2 + |x|^2 \geq 0$ になり、光円錐も過去と未来の区別も消えます。どの方向を時間と呼ぶかは後で選ぶ事柄です。反射正値性（4-10）も満たすなら、回転不変性から、どの方向を時間に選んでも同じ理論が戻ります。両者を互いに移す方法は公理的場の理論の成果です 既知 （Clay の懸賞問題の公式の問題文である Jaffe–Witten の解説〈2000、0-03〉の §3。以下「解説」）。

格子は回転を 90° に減らす

格子に残る回転は 90° 刻みと鏡映だけで、$SO(4)$ が $a \to 0$ で戻ることも示すべき事柄です。四次元の格子の自由場（$m=1$、$a = 1/2n$）で、距離 1 の点 $(2n,0,0,0)$ と (n,n,n,n) の相関を

比べます。連続の相関は $G(r) = \dfrac{m\,K_1(mr)}{4\pi^2 r}$ です。K_1 は変形 Bessel 関数と呼ばれる特殊関数で、遠くでは e^{-mr} で減ります（近くでは $1/(mr)$ のようにふるまい、$G \approx 1/(4\pi^2 r^2)$）。

計算 表 2　格子の二点関数と連続の $G(1) = K_1(1)/4\pi^2$ の比。格子の側は、変形 Bessel 関数の一族 I_ν を使った一重積分の表示で計算。

a	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32
軸	1.4329	1.1297	1.0247	1.0058	1.0014
対角	0.8126	0.9475	0.9869	0.9967	0.9992

粗い格子では向きで相関が約 1.8 倍違い、差は a^2 に比例して消えます。Wilson の格子（5-01）は反射正値性（4-10）を厳密に保つ代わりに回転を壊します。正則化で反射正値性を失うと回復する方法は少ない、と解説は書きます（Jaffe–Witten §6.5）。

06

確率測度としての場の理論 — e^{-S_E} を確率と読む

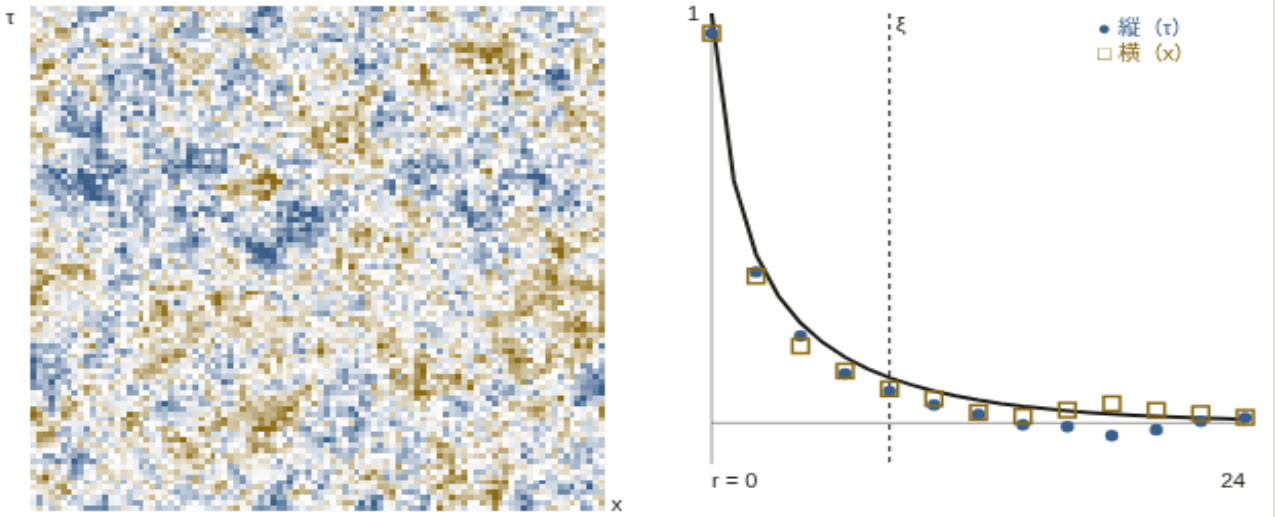
S_E が下に有界なら e^{-S_E}/Z は場の配位の上の確率密度のように読め、(3) はその積率（モーメント）です。場の理論が、四次元の空間の上のランダムな関数の理論になります。解説はこの見方を Symanzik に帰します（Jaffe–Witten §3）既知 。

正確には、無限次元のルベーグ測度 $\mathcal{D}\varphi$ は無いので（1-09）、そのまま正しいのは有限次元です。間隔 a・一辺 L の周期格子 $\Lambda_{a,L}$ では

$$d\mu_{a,L}(\varphi) = \frac{1}{Z_{a,L}}\, e^{-S_E^{(a)}(\varphi)} \prod_{x \in \Lambda_{a,L}} d\varphi(x) \tag{9}$$

が本物の確率測度です（$S_E^{(a)}$ は (2) の微分を差分に、積分を和に替えたもの）。場の理論を作るとは、$a \to 0$、$L \to \infty$ での積率の極限とその性質を示すことです（7-01）。自由場の極限は超関数の空間のガウス測度で、解説は、非線形な場には非ガウスの測度が要る（'one requires non-Gaussian dμ to obtain nonlinear fields'）と書きます（Jaffe–Witten §6.2、1-09）。

図 2　相関長 ξ を変えると、二次元の周期格子（96×96）の自由場の標本（左。色が $\varphi/\sqrt{G(0)}$）と、その縦・横の相関（右の ●・□。実線は厳密な $G(r)/G(0)$）が変わる。一つの標本なので点の相関は揺らぐ（「引き直す」で別の標本。200 標本の平均は本文）



ξ = 8：G(0) = 0.6056、G(8)/G(0) = 0.111（厳密） この標本：縦 0.078・横 0.083（一つの標本なので揺らぐ。200 標本の平均は本文）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（種を固定した乱数）。

標本を見ても、どちらの軸が時間かは分かりません。同じ作り方の 200 標本（python3）では、$\xi = 8$（作用の質量の係数 $M = 2\sinh\frac{1}{2\xi}$。相関がちょうど $e^{-r/\xi}$ で減るように選んだもの）の距離 8 の相関が縦 0.1120 ± 0.0032、横 0.1112 ± 0.0030、厳密 0.1107 で、$\xi = 2, 4, 16$ でも標準誤差の 2 倍以内で一致します 計算 。$G(0)$ が ξ とともに対数で増えるのは、二次元の点の値の発散（2-07 §09）の現れです。

07

ゲージ場で足りないもの — 軌道の体積とコンパクトな群

$S_E[A]$ はゲージ変換（3-02）で変わらないので、e^{-S_E} はゲージ軌道（ゲージ変換で互いに移る接続の集まり、3-04）の上で一定です。軌道は各点に群が一つずつ付いた無限次元のもので、その向きの積分は形式的にも無限大です。

(A) 重み $e^{-(x-y)^2/2}$ はずらし $(x, y) \to (x + c, y + c)$ で変わらず、軌道は無限に長い直線です。正方形 $[-R, R]^2$ の積分 Z_R は R に比例して増えますが、ずらしで変わらない $(x - y)^2$ の平均は 1 に近づきます。(B) 重み $e^{\beta\cos(\theta_1 - \theta_2)}$ の軌道は長さ 2π の円で、円の上の一様な測度（Haar 測度）で積分すれば $Z = (2\pi)^2 I_0(\beta)$ はどの β でも有限です（二重積分と Bessel 関数で確認） 計算 。ここで I_0 は表 2 の I_ν の $\nu = 0$ で、

$$I_0(\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\beta\cos\theta}\, d\theta$$

です。$\theta = \theta_1 - \theta_2$ と置けば、残る θ_2 の積分が軌道の長さ 2π を一つ出すだけです。

計算 表 3　おもちゃ (A)。Z_R は閉じた式と 10 桁一致。

R	$Z_R/2R$	$\langle (x-y)^2 \rangle_R$
1	1.528	0.4341
10	2.407	0.9584
100	2.497	0.9960
1000	2.506	0.9996

(A) では分母と分子が同じ速さで発散し、比だけが残ります（$Z_R/2R \to \sqrt{2\pi} = 2.5066$）。Wilson の格子（5-01）は (B) の形です。有限の格子の上で、リンク変数 $U \in G$ をコンパクトな群の Haar 測度で積分するので、ゲージを固定しなくても積分は有限です（'the lattice approximation reduces the functional integration to a finite-dimensional integral'、Jaffe–Witten §6.5）既知 。連続のまま扱うにはゲージ固定（4-08）が要り、代表を大域的に連続には選べない障害があります（3-04）。どちらでも、意味を持つのはゲージ不変な観測量（Wilson ループ・$\mathrm{tr}\, F^2$ など）だけです。

08

虚時間の相関がエネルギーを読む — 質量ギャップとのつながり

ハミルトニアン H（真空のエネルギーを 0 とする）と真空 Ω が在るなら、虚時間 τ だけ離れた観測量 O の相関は、固有状態 $|n\rangle$ で展開して

$$\langle O(\tau) O(0) \rangle = \langle \Omega | \, O \, e^{-\tau H} \, O \, | \Omega \rangle = \sum_n |\langle n | O | \Omega \rangle|^2 \, e^{-E_n \tau} \tag{10}$$

です（スペクトルが連続なら積分）。真空が一つで（エネルギー 0 の状態は Ω だけ）、$\langle \Omega | O | \Omega \rangle = 0$、$H$ のスペクトルが $(0, \Delta)$ に無ければ、相関は少なくとも $e^{-\Delta \tau}$ で減ります。

例。 自由場の二点関数を空間で積分すると運動量 0 の一粒子だけが残り、減る速さはちょうど質量です 既知 。

$$\int d^3x \; S_2\big((\tau, x), 0\big) = \int \frac{dp_4}{2\pi} \, \frac{e^{i p_4 \tau}}{p_4^2 + m^2} = \frac{e^{-m|\tau|}}{2m} \tag{11}$$

これがユークリッドの側でのギャップの現れ方で、定義は 4-11 で整えます。格子では隣り合う時刻の層をつなぐ重みが転送行列 $T = e^{-aH}$ で（2-07 §08）、ゲージ理論では、時間方向の刻みを 0 にする極限で、$A_0 = 0$ のゲージの転送行列から Kogut–Susskind のハミルトニアンが出ます（Creutz 1977 の要旨）既知 。格子のハミルトニアンは 5-03 で扱います。

向きに注意

(10) は H と Hilbert 空間が先に在るときの式です。ユークリッドの測度だけから H を作るには、鏡映 $\tau \to -\tau$ についての正値性（反射正値性）が要ります（4-10）。解説は 'Establishing a quantum mechanical Hilbert space is part of the solution to this Millennium problem' と書きます（Jaffe–Witten §6.5）。「ギャップ ⟺ 相関の指数減衰」は再構成の後の対応です。四次元のヤン–ミルズでは、その Hilbert 空間は 2026-11 に公開された構成が作りました（Lean で証明されている、と委員会が評価した。12-08）。そこで相関が指数で減ることは示されていません（6-04）。

09

寄り道：真空の波動関数を、半分の時空の経路積分で書く

飛ばしてよい節です。

(10) の $e^{-\tau H}$ には、もう一つの使い道があります。状態を H の固有状態で展開すると、$e^{-\tau H}$ は E_n の成分を $e^{-E_n \tau}$ 倍します。長い虚時間をかけると、エネルギーの最も低い成分より他は相対的に速く消えます。つまり $e^{-\tau H}$ は、真空の成分を持つどんな状態からも真空だけを取り出す濾過器です（2-07 §05）。正確には、初めの状態が真空の成分を持ち、真空が一つであることが条件です。

これを経路積分で書くと、真空の波動関数そのものが経路積分になります。一粒子で見ます。$\langle x | e^{-TH} | x_i \rangle$ は、虚時間 $\tau = -T$ に x_i を出て $\tau = 0$ に x に着く道すべての e^{-S_E} の和です。$T \to \infty$ では $\psi_0(x)\,\psi_0(x_i)\,e^{-E_0 T}$ が主になり、x の関数としては真空の波動関数 $\psi_0(x)$ だけが残ります。

$$\psi_0(x) \;\propto\; \int_{x(0)=x} \mathcal{D}x\; e^{-S_E[x]}, \qquad S_E[x] = \int_{-\infty}^{0} \Big[\tfrac{1}{2}\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}\omega^2 x^2 \Big] d\tau \tag{12}$$

和を取るのは、虚時間の半直線 $\tau \le 0$ の上で、端 $\tau = 0$ の値だけを決めた道です。

例。振動子では (12) の指数が $x(\cdot)$ の二次式なので、答えの x への依存は作用の最も小さい道で決まります（そのまわりのゆらぎの寄与は x によらない定数）。$\ddot{x} = \omega^2 x$ を満たし、$\tau = 0$ で x、$\tau \to -\infty$ で 0 になる道は $x(\tau) = x\,e^{\omega\tau}$ です。その作用は

$$S_E = \int_{-\infty}^{0} \omega^2 x^2 e^{2\omega\tau}\, d\tau = \frac{\omega x^2}{2}, \qquad \psi_0(x) \propto e^{-\omega x^2/2}$$

で、2-06 の基底状態そのものです 既知 。

格子でも確かめられます。間隔 a の虚時間の格子で $x_0 = x$ を固定し、$x_{-1}, x_{-2}, \ldots$ を順に積分します。一つ積分するごとに $e^{-c\,x^2/2}$ の形が保たれ、係数 c は漸化式で動いて一つの値に落ち着きます。端の点 x_0 の位置エネルギーを、隣の半分の時空と半分ずつ分ける約束で数えると、落ち着く値は $c(a) = \omega\sqrt{1 + a^2\omega^2/4}$ です。$\omega = 1$ で $a = 1/2$ なら 1.0308、$a = 1/10$ なら 1.00125 で、連続の $\omega = 1$ との差は a^2 に比例して消えます 計算 。

場では

場でも形は同じです。真空の波動汎関数 $\Psi_0[\varphi_0]$（4-01 §03 の波動汎関数）は、$\tau = 0$ で $\varphi = \varphi_0$ となる、$\tau < 0$ の半分の時空の場の配位すべての和です。自由場ではフーリエ成分の一つ一つが振動数 $\omega_p = \sqrt{|p|^2 + m^2}$ の振動子なので（2-06 §08）、振動子の答えを成分ごとに掛け合わせて

$$\Psi_0[\varphi_0] \;\propto\; \exp\!\Big(-\frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\omega_p\,|\tilde{\varphi}_0(p)|^2\Big), \qquad \tilde{\varphi}_0(p) = \int d^3x\, e^{-ip\cdot x}\varphi_0(x)$$

です 既知 。Osterwalder–Schrader の再構成（4-10）は、この見方を逆にたどります。$\tau > 0$ の半分の時空の場だけで決まる量から状態を作り、鏡映 $\tau \to -\tau$ で内積を定めます。内積が正であることを保証するのが反射正値性です。正確には、(12) は Hilbert 空間と H が先に在るときの式です。四次元のヤン–ミルズでは、Hilbert 空間とハミルトニアンは 2026-11 に公開された構成が再構成で作りましたが（委員会の評価の水準。§08）、場の配位の上の測度は構成されておらず、半分の時空の経路積分としての (12) は形式的なままです。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	(2)・(5)〜(8)・(11) の式変形と (5) の積分路の回転、格子の (9) が確率測度であること、コンパクトな群なら格子の積分が有限であること 既知 。表 1〜3・図 1〜2・§01 と §06 と §09 の数 計算
条件つき	(10) と (12) は Hilbert 空間とハミルトニアンが先に在り、真空が一つのときの式（戻る条件は 4-10）
言えていない	(1)・(3) の $\mathcal{D}\varphi$ は形式的で測度ではない。四次元のヤン–ミルズの測度の存在は示されていない（6-04）。回転対称性の回復と、反射正値性を保つ連続極限は、相関関数の水準で 2026-11 に公開された構成が示した（委員会の評価の水準。12-01・12-06）。質量ギャップについては何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
解説の引用（§3・§6.2・§6.5）	本文	A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*, Clay Math. Inst. (2000)
θ 項が複素であること	本文 §1	E. Vicari, H. Panagopoulos, Phys. Rept. 470 (2009) 93, arXiv:0803.1593
転送行列と $A_0 = 0$	要旨	M. Creutz, Phys. Rev. D 15 (1977) 1128–1136
Wick・Schwinger の名	書誌のみ	G. C. Wick, Phys. Rev. 96 (1954) 1124–1134／J. Schwinger, PNAS 44 (1958) 956–965（名の由来は未確認）

もの	種別	出典・道具
ユークリッドとミンコフスキーの対応	書誌のみ	K. Osterwalder, R. Schrader, CMP 31 (1973) 83–112・42 (1975) 281–305 ／K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471
ギャップの定義と Hilbert 空間	本文	Jaffe–Witten §4・§6.5
表 1・図 1	計算	python3（SciPy。閉じた形と 3×10^{-13} で一致）。図は JavaScript で表と一致
表 2	計算	python3（SciPy）。原点の値 0.154933（1-09 と同じ）と 40^4 の周期格子の FFT（$a = 1/2$ で 7 桁一致）で検算
§09 の $c(a)$	計算	python3（漸化式と 400 点の二次形式の直接計算が 10 桁一致・古典解の作用を数値積分）
図 2・§06、表 3・§01	計算	python3（NumPy の FFT・種を固定した 200 標本／SciPy／数え上げ）。図は同じ作り方の標本一つ

次に読む章：4-03 摂動論と Feynman ダイアグラム。(5) のユークリッドの伝播関数が線になります。物理の時空へ戻る条件は 4-10。

摂動論と Feynman ダイアグラム — ガウス積分のまわりで展開すると、項が図になる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 展開の各項がガウス積分の対の組み方の和になり、線と頂点の図で数えられること。
対称因子・連結な図・ループ、ループの数が $\hbar$ の冪を数えること。
ヤン–ミルズではゲージ固定が要り、三点・四点の頂点とゴーストが現れること。

前提となる章 — 4-02。対の数え上げは 1-08、伝播関数は 1-11、三次・四次の項は 3-02。$\hbar = c = 1$（§06 だけ戻す）。

先に言うこと — 摂動論は冪級数を一項ずつ作る方法で、和も理論の存在も与えません。係数の積分は発散し（4-04）、級数も発散すると考えられています（4-12）。質量ギャップはどの次数にも映らないと考えられており（4-07）、この章はそれについて何も示しません。

この章の順序

1. 摂動論の考え方 — ガウスのまわりで展開
2. 対の組み方を線で描く — 対称因子（図 1・表 1）／寄り道：1949 年
3. 連結な図 — 対数は連結な図（表 2）
4. 場へ — 線は伝播関数
5. 運動量で書く — 保存則とループ
6. ループの数は ħ の冪 — 木は古典
7. ヤン–ミルズの Feynman 則 — ゲージ固定が要る
8. 摂動の級数 — 漸近級数（表 3）
9. 摂動論が言うこと、言わないこと

01

摂動論の考え方 — ガウス積分のまわりで展開する

ユークリッドの経路積分（4-02 の (3)）で厳密に計算できるのは、作用が場の二次式、つまりガウス積分のときです（2-07 §02）。そこで作用を二次の部分 S_0 と相互作用 S_{int} に分け、$e^{-S_{\mathrm{int}}}$ を展開します（$\langle\cdot\rangle_0$ は S_0 だけの期待値）。

$$\langle F\rangle = \frac{\langle F\, e^{-S_{\mathrm{int}}}\rangle_0}{\langle e^{-S_{\mathrm{int}}}\rangle_0}, \qquad \langle F\, e^{-S_{\mathrm{int}}}\rangle_0 \overset{\text{形式}}{=} \sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^n}{n!}\,\langle F\, S_{\mathrm{int}}^{\,n}\rangle_0 \tag{1}$$

和と積分の入れ替えは形式的です（§08）。**例**。場の代わりに実数一つ x を取り、$S=\frac12 x^2+\frac{u}{4!}x^4$（$u\ge 0$。4-04 と同じ約束）とします。時空が一点だけの「ゼロ次元の場の理論」です。$\langle x^{2k}\rangle_0=(2k-1)!!$（1-08 §06）から

$$Z(u)=\int\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac12 x^2-\frac{u}{4!}x^4} \;\sim\; \sum_{n\ge 0}\frac{(4n-1)!!}{n!}\Big(-\frac{u}{4!}\Big)^n = 1-\frac{u}{8}+\frac{35}{384}u^2-\frac{385}{3072}u^3+\cdots \tag{2}$$

です（$\sim$ の意味は §08。係数は分数で計算 計算 ）。図の値がすべて数になるので勘定を手で確かめられ、四次元でも図の形と重みの勘定は同じです。展開の各項は、ガウス分布の下での多項式の平均、つまり正規分布の積率だけで書けます。難しい積分は一つも残らず、残るのは「数え上げ」だけです。

02

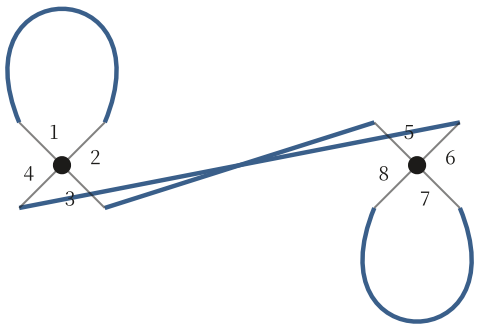
対の組み方を線で描く — Wick の定理から図へ

(2) の n 次の項は、$4n$ 個の x を二つずつ組にする方法の数でした（Isserlis の公式、物理では Wick の定理。1-08 の (9)）。$\frac{u}{4!}x^4$ の一つを脚が 4 本の点（頂点）で描き、組にした脚を線で結びます。結んだ後の形が同じ組み方は値も同じなので、形ごとにまとめます。これが Feynman ダイアグラム（図）です。

$$\frac{\#\{\text{形 }\Gamma\text{ になる組み方}\}}{n!\,(4!)^n}=\frac{1}{S(\Gamma)} \tag{3}$$

分母は頂点と脚の並べ替えの数で、ふつうはちょうどこの数の組み方が一つの形を作ります。形に対称性があると並べ替えの一部が同じ組み方を返して数が減り、その比が対称因子 $S(\Gamma)$、正確には図の自己同型（頂点の入れ替えと脚の付け替えのうち、線のつながり方を変えないもの）の数です 既知 。**例**。頂点一つなら組み方は 3 通りで、どれも「8 の字」です。$3/4!=1/8$ が (2) の u の係数で、輪の入れ替えと各輪の反転で $S=2\cdot 2\cdot 2$ です。

図 1　場合を選び、つまみで組み方の番号を動かすと、脚の組み方（青い線）とそれが作る図の形が変わる。「全部数える」は形ごとに数える



組み方 4 / 105：「泡の両側に輪」　この形の組み方 72 通り、1/S = 1/16

計算 この図の数え上げはブラウザの中で行い、表 1 と一致することを確かめてある。番号は頂点の脚、x・y・1〜4 は外の点（外から入れた x）。

計算 表 1　組み方をすべて作り、形（同型の類）に分けた（python3）。括弧は（組み方の数・$1/S$）

場合	組み方	形
真空・頂点 1	3	8 の字（3・1/8）
真空・頂点 2	105	泡の両側に輪（72・1/16）、四本でつなぐ（24・1/48）、8 の字が二つ（9・1/128）
二点・頂点 1	15	輪つきの線（12・1/2）、線と 8 の字（3・1/8）
二点・頂点 2	945	輪の上に輪（288・1/4）、輪が二つ並ぶ（288・1/4）、三本でつなぐ（192・1/6）、泡を含むもの：線と泡の両側に輪（72・1/16）、輪つきの線と 8 の字（72・1/16）、線と四本でつなぐ（24・1/48）、線と 8 の字二つ（9・1/128）
四点・頂点 1	105	×（24・1）、線と輪つきの線（6 通り×12・各 1/2）、線二本と 8 の字（3 通り×3・各 1/8）

寄り道：1949 年の論文と翌年の定理

飛ばしてよい小節です。

Feynman（1949）の要旨は、行列要素を 'written down directly for any specific problem' できる見方を示すと書き、同年の Dyson（1949）は Feynman と Schwinger の理論の同等性を示しました。翌年 Wick（1950）が、'a sum of "graph" terms' への還元を簡単にする代数の定理を証明します。公式そのものは統計学の Isserlis（1918）にあります 既知 。

03

連結な図 — 泡は割り算で消え、対数は連結な図を数える

表 1 には外の点につながらない部分（真空の泡）を含む図も混じっています。離れた部分からなる図の値は部分の値の積で、(1) の分母 Z は泡だけの図の和なので、割り算で泡は消えます。さらに図全体の和は連結な図の和の指数です。同じ連結な図 C が k 個並ぶと入れ替え $k!$ が S に加わり、$\sum_k C^k/k! = e^C$ となるからです 既知 。ゼロ次元では線の値が 1 なので、図の値は $(-u)^n/S$ です。

$$\log Z = \sum_{\text{連結な真空の図}} \frac{(-u)^n}{S}, \qquad \langle x^2 \rangle = \sum_{\text{連結な二点の図}} \frac{(-u)^n}{S} \tag{4}$$

例。u^2 では、連結な真空の図の $\frac{1}{16} + \frac{1}{48} = \frac{1}{12}$ が $\log Z$ の係数 $\frac{35}{384} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{64} = \frac{1}{12}$ と一致し、連結な二点の図の $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ が $\langle x^2 \rangle$ の係数です。逆に読めば積分一つが図を数える母関数で、曲面の上の図の数え上げ（Bessis–Itzykson–Zuber 1980、17-04）につながります。

計算 表 2　全組み方から数えた連結な形の $(-1)^n/S$ の和（python3）。級数の係数とすべて一致。括弧は級数から出した係数（二点の $n=4$ は数え上げていない）

n	真空の組み方	形（連結）	$\log Z$	二点の組み方	$\langle x^2 \rangle$
1	3	1（1）	−1/8	15	−1/2
2	105	3（2）	1/12	945	2/3
3	10,395	7（4）	−11/96	135,135	−11/8
4	2,027,025	20（10）	17/72	—	（34/9）

04

場へ — 線は伝播関数、頂点は位置の積分

四次元の場でも手順は同じです。d 次元の作用

$$S_E[\phi] = \int d^d x \left[\tfrac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \tfrac{1}{2} m^2 \phi^2 + \tfrac{u}{4!}\phi^4 \right] \tag{5}$$

の二次の部分は共分散 $G = (-\Delta + m^2)^{-1}$（Δ はラプラシアン $\sum_\mu \partial_\mu^2$。質量ギャップの Δ とは別）のガウス測度で（4-02 §06）、Wick の定理はそのまま使えます。変わるのは二点です。線の値が伝播関数 $G(x-y)$ になり（点 x の場の揺らぎが点 y にどれだけ伝わるかの度合いで、離れるほど小さくなります）、頂点は時空のどこにでも置けるので、その位置 z を積分します。

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = G(x-y) - \frac{u}{2}\int d^d z\, G(x-z)\, G(0)\, G(z-y) + O(u^2) \tag{6}$$

第二項は「輪つきの線」で、ゼロ次元の $\langle x^2\rangle = 1 - \frac{u}{2} + \cdots$ の数 1 が伝播関数に替わっただけです。四点の最低次「×」は $-u\int d^dz \prod_i G(x_i - z)$ で、四つの粒子が一点で出会うと読めます。正確には、その点の位置を全空間で積分するという意味です。**注意。**$G(0)$ は $d \geq 2$ で無限大で（1-11）、一次から発散します。その扱いが 4-04 で、そこでの $T(\Lambda)$ がこの輪です。

05

運動量で書く — 保存則と、残るループの積分

$G(x) = \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{e^{ip\cdot x}}{p^2+m^2}$（1-11 の (10) の $\hat{G}$ をフーリエ逆変換したもの。回転は 4-02 の (5)）を入れて頂点の位置を積分すると $\int d^dz\, e^{i(p_1+\cdots+p_4)\cdot z} = (2\pi)^d\delta^{(d)}(p_1+\cdots+p_4)$、つまり各頂点で運動量が保存します。ここの δ は、平面波を全空間で積分すると波数が 0 のところにだけ値が集まるという 1-11 の関係です。位置の積分が、運動量の足し算の条件に替わります。内線 I 本に条件が V 個、そのうち一つは全体の保存で外線だけに掛かるので、連結な図で自由に残る運動量の数は

$$L = I - V + 1 \tag{7}$$

で、これは図の独立な輪（ループ）の数です 既知 。規則は、線ごとに $1/(p^2+m^2)$、頂点ごとに $-u$、ループごとに $\int d^dk/(2\pi)^d$、全体に $1/S$ です。**例。**四点の一ループの「泡」は $I = V = 2$、$L = 1$ で、運動量 P が流れ込むと

$$\frac{u^2}{2}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{(k^2+m^2)\big((k+P)^2+m^2\big)} \tag{8}$$

です。二点の「三本でつなぐ」図は $I = 3$、$V = 2$、$L = 2$ で二重の積分です。(8) は大きい $|k|$ で $k^{d-1}dk/k^4$ のように振る舞い、$d = 4$ で対数発散します。三通りの泡を足して符号を変えたものが 4-04 の (4) の一ループの項です。

06

ループの数は $\hbar$ の冪 — 木は古典、ループは量子の補正

重みを $e^{-S_E/\hbar}$ に戻すと、伝播関数は $\hbar$ 倍、頂点は $1/\hbar$ 倍です。外の点へ行く線も含めて線 I' 本・頂点 V 個・外の点 E 個の連結な図では、外の点も点と数えて $L = I' - V - E + 1$ なので

$$\hbar^{\,I'-V} = \hbar^{\,L+E-1} \tag{9}$$

です。E を決めると $\hbar$ の冪はループの数で決まります（Srednicki §21） 既知 。最低次はループの無い図（木）で、Boulware–Brown（1968）の要旨は、源の作る古典の場が 'the generating functional of the tree-graph approximation' だと書きます 既知 。

例。ゼロ次元に源を足した $\frac12 x^2+\frac{u}{4!}x^4-Jx$ の古典解は $x_{\mathrm{cl}}=J-\frac{u}{6}J^3+\frac{u^2}{12}J^5-\frac{u^3}{18}J^7+\cdots$ です。一般に $x_{\mathrm{cl}}=\sum_k(-1)^k T_k\,(u/6)^k J^{2k+1}$ と書け、$T_k=1,1,3,12,55,\ldots$ は三分木の数です。$u=1$、$J=0.8$ で数値積分すると、$(\langle x\rangle-x_{\mathrm{cl}})/\hbar$ は $\hbar=0.1,\,0.01,\,0.001$ で $-0.2167,\,-0.2266,\,-0.2277$ と、一ループの図（x_{cl} のまわりの輪つきの線）の値 -0.2278 に近づきます 計算 。ヤン–ミルズでは $\hat A=gA$ と取り直すと作用は $\frac{1}{2g^2}\int \mathrm{tr}\,\hat F^2$（4-02 の (7)）で、重みには $g^2\hbar$ の組でしか入らず、ループ展開は g^2 の展開です（3-03）。

07

ヤン–ミルズの Feynman 則 — 逆にならない二次形式と、三点・四点の頂点

約束は 3-02 と同じで、g を分けて書き、$F^a_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+g f^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$、$S_E=\frac14\int F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}\,d^4x$ です。二次・三次・四次に分けると（3-02 の (11) を 4-02 §04 のとおりユークリッドに読み替えたもの。添字はすべて下付きで、繰り返す添字は 1〜4 で和を取る）

$$S_E=\frac12\int A^a_\mu\big(-\partial^2\delta_{\mu\nu}+\partial_\mu\partial_\nu\big)A^a_\nu+g f^{abc}\int(\partial_\mu A^a_\nu)A^b_\mu A^c_\nu+\frac{g^2}{4}f^{abe}f^{cde}\int A^a_\mu A^b_\nu A^c_\mu A^d_\nu \tag{10}$$

二次の核は運動量で $K_{\mu\nu}=p^2\delta_{\mu\nu}-p_\mu p_\nu$ で、p_μ を 0 に送ります。$A_\mu=\partial_\mu\lambda$ は作用を変えない無限小のゲージ変換の向きだからです（4-02 §07）。逆行列が無いので伝播関数が作れません。ゲージを固定する項 $\frac{1}{2\alpha}\int(\partial_\mu A^a_\mu)^2$ を足すと（正当化は 4-08）

$$K^{(\alpha)}_{\mu\nu}=p^2\delta_{\mu\nu}-\Big(1-\frac{1}{\alpha}\Big)p_\mu p_\nu,\qquad D^{ab}_{\mu\nu}(p)=\frac{\delta^{ab}}{p^2}\Big(\delta_{\mu\nu}-(1-\alpha)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\Big) \tag{11}$$

で、$\alpha=1$（Feynman ゲージ）なら $\delta^{ab}\delta_{\mu\nu}/p^2$ です（4-08 と同じ字です）。運動量への移り方は $A^a_\mu(x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{ip\cdot x}\tilde A^a_\mu(p)$（微分は ip_μ に替わる）とします。頂点は、作用の n 次の項を $\tilde A$ で n 回微分したものの符号を変えたもの（$(2\pi)^4\delta(\sum p)$ を除く）で、e^{-S} の符号がここに入ります（運動量はすべて流れ込む向き）。フーリエの向きを逆に取ると (12) の i の符号が逆になります。

$$V^{abc}_{\mu\nu\lambda}(p,q,r)=ig\,f^{abc}\big[\delta_{\mu\nu}(p-q)_\lambda+\delta_{\nu\lambda}(q-r)_\mu+\delta_{\lambda\mu}(r-p)_\nu\big] \tag{12}$$

$$V^{abcd}_{\mu\nu\lambda\rho}=-g^2\big[f^{abe}f^{cde}(\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho}-\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda})+f^{ace}f^{bde}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho}-\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda})+f^{ade}f^{bce}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho}-\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho})\big] \tag{13}$$

三点は運動量に比例し、四点は運動量によらず、どちらも f^{abc} を含みます。**例**。(10) に平面波を入れて係数を直接取り出し、SU(2) と SU(3) の乱数の運動量・偏極・色 20 組で (11)〜(13) と比べると、相対誤差は最大 8×10^{-13} でした 計算 。

ゴースト。Faddeev–Popov（1967）の要旨は 'Feynman and De Witt showed, that the rules must be changed for … diagrams with closed loops' と書き、経路積分から任意の図

の規則を得る方法を提案しました。結果は、伝播関数 δ^{ab}/p^2 のゴーストと、ゴースト二本・ゲージ場一本の頂点を足し、ゴーストの閉じたループごとに -1 を掛ける規則です（Srednicki §71）既知。-1 は、ゴーストが反可換な数（4-08）であることから来ます。導き方と、前提の局所的なゲージ固定の限界（3-04）は 4-08 です。

08

摂動の級数 — 係数は階乗で増え、どこかで打ち切る

(2) の係数 a_n の比は $|a_{n+1}/a_n| = \frac{(4n+1)(4n+3)}{24(n+1)} \approx \frac{2n}{3}$ で、a_n はおよそ $n!\,(2/3)^n$ の速さで増え、どの $u>0$ でも級数は収束しません。$u<0$ で積分 (2) が発散することも同じ事情を示します。量子電磁力学でこの形の議論をしたのが Dyson（1952）で、要旨は結論を 'tentatively'（暫定的に）と断っています（4-12）。それでも、Taylor の剰余 $\left|e^{-s}-\sum_{n<N}(-s)^n/n!\right| \le s^N/N!$（$s\ge 0$）に $s=\frac{u}{4!}x^4$ を入れて積分すると

$$\left| Z(u) - \sum_{n<N} a_n u^n \right| \le |a_N|\, u^N \qquad (u \ge 0) \tag{14}$$

です既知。N を決めて $u\to 0$ とすれば誤差は u^N の速さで消えます。これが漸近級数で、(2) の $\sim$ の意味です。u を決めて N を増やすと誤差は下がってから上がり、最良は項が最小になる $N\approx 3/(2u)$ の辺りです（項の大きさの谷は 4-12 の図 1 で動かせます）。

計算 表 3　$\langle x^2\rangle = 1-\frac{1}{2}u+\frac{2}{3}u^2-\frac{11}{8}u^3+\frac{34}{9}u^4-\cdots$ の打ち切り（python3、$N\le 16$）

u	厳密な $\langle x^2\rangle$	最良の N	最小の誤差	N=10 の誤差
0.1	0.955577	14	1.3e-6	2.3e-6
0.2	0.919366	6	1.6e-3	3.2e-3
0.5	0.838595	2	7.8e-2	41
1.0	0.750511	0	0.25	4.7e4

$u=1$ では何も足さない $N=0$ が最良です。(14) は $u\le 1$、$N\le 16$ で数値でも成り立ちました計算。場の理論について問題文は、多くの既知の例で（'In most known examples'）摂動級数は 'divergent expansions' だと書き（Jaffe–Witten §6.1）、構成された二次元の模型では散乱行列が 'an asymptotic series in the coupling constants' に展開できると書きます（§6.2）。四次元のヤン–ミルズでは、2026-11 に公開された構成が理論を作りましたが（委員会の評価の水準。6-00）、摂動論と合うことが言われているのは結合の一ループの走りなどの範囲で、級数がその理論の漸近展開であることは示されていません（6-04）。

09

摂動論が言うこと、言わないこと

各次数の係数は図の積分の有限和で、繰り込みの後に各次数が有限になることは、ゲージ理論を含めて定理です（4-04 §08・4-05）既知 。**級数の和**は一般に意味を持ちません。**摂動論に映らないもの**もあります。伝播関数 (11) は $p = 0$ に極を持ち、質量 0 の粒子を表します。質量ギャップが在るなら、$\Lambda \propto e^{-1/(2b_0 g^2)}$ のように g^2 のどの次数でも 0 に見える形で来ると考えられています（4-07）物理 。問題文 §6.6 も 'the mass gap is not classically visible' と書きます。

それでも摂動論は問題文の条件に入っています。§4 は、構成された理論の相関関数が短い距離で漸近自由と摂動的な繰り込み理論の予言に合うことを求めます（引用は 0-03 §07）。摂動論は理論を作る方法ではなく、作った理論が満たすべき目印です。漸近自由は 4-06、大 N は 17-04 です。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	(1)(2)(4) の展開と図の数え方、(3) の対称因子、(7)(9) のループの勘定、(11)〜(13) の Feynman 則の形、ゼロ次元の (14) 既知 。表 1〜3、図 1、§06・§07 の数 計算
条件つき	(6)(8) など場の図の値は、切断を入れたときにだけ意味を持つ（4-04）。ゴーストの規則は局所的なゲージ固定の下の規則（4-08）。質量ギャップが e^{-1/g^2} の形で来るという見方は物理の期待 物理
言えていない	摂動級数の和、場の理論で (14) に当たる評価、四次元のヤン–ミルズの存在、質量ギャップ（このサイトはどれも示していない）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
問題文の引用（§4・§6.1・§6.2・§6.6）	本文	A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*, Clay Math. Inst. (2000)
$\hbar$ の勘定・ゴーストの -1	本文 §21・§71	M. Srednicki, *Quantum Field Theory*, Cambridge UP (2007)（著者の公開草稿）
図の方法の始まり	要旨	R. P. Feynman, Phys. Rev. 76 (1949) 769／F. J. Dyson, Phys. Rev. 75 (1949) 486／G. C. Wick, Phys. Rev. 80 (1950) 268
ガウスの積率の公式	書誌のみ	L. Isserlis, Biometrika 12 (1918) 134–139

もの	種別	出典・道具
ゴーストの規則	要旨	L. D. Faddeev, V. N. Popov, Phys. Lett. B 25 (1967) 29–30。先行の Feynman, Acta Phys. Polon. 24 (1963) 697 と DeWitt, Phys. Rev. 162 (1967) 1195・1239 は書誌のみ
木の図と古典／図の数え上げ／級数の発散	要旨	D. G. Boulware, L. S. Brown, Phys. Rev. 172 (1968) 1628／D. Bessis, C. Itzykson, J.-B. Zuber, Adv. Appl. Math. 1 (1980) 109／F. J. Dyson, Phys. Rev. 85 (1952) 631
表 1・2、図 1	計算	python3（全組み方を作り、置換で同型の類に分類。真空は 4 次の 2,027,025 通りまで）。図の JS も同じ分類で、node で一致を確認
§07 の比較	計算	python3（NumPy。平面波を入れて係数を取り出す）
表 3、§06 の数	計算	python3（係数は分数。厳密値は SciPy の数値積分で、Z は Bessel 関数 $K_{1/4}$ の閉じた式とも一致）

次に読む章：4-04 発散と繰り込み。(6) の $G(0)$ と (8) の対数発散を、測った結合で書き直します。

発散と繰り込み — 無限大を、測った量で書き直す

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — ループの積分が短い距離の揺らぎを足しすぎて発散すること。発散する型は次元を数えれば分かり、四次元の ϕ^4 とヤン–ミルズでは有限個であること。発散を測った結合に吸収すると予言が切断に依らなくなり、その結合が尺度とともに走ること。

前提となる章 — 4-03（伝播関数・頂点・ループ）。あると読みやすい：1-11・2-08。$\hbar = c = 1$、ユークリッドの運動量。β は β 関数（格子の逆結合ではない）。

先に言うこと — 摂動論の計算とその読み方の章です。繰り込み可能性は摂動の各次数（形式的な冪級数）の水準の定理で、級数の和も四次元の理論の存在も与えません。このサイトは連続極限の構成も質量ギャップも示していません。

この章の順序

1. 無限大の出どころ — 短い距離の揺らぎを足しすぎる
2. 切断を入れる — 正則化と、その代価（表 1）
3. 次元を数える — 表面的な発散の次数（表 2）
4. 相殺項 — 裸の結合を測った結合で書き直す（図 1）
5. 走る結合と繰り込み群方程式
6. Wilson の見方 — 関係・無関係・周辺（図 2）／寄り道：Fermi の相互作用
7. ゲージ理論では — 対称性を壊さずに引く
8. 数学から見た繰り込み — 定理の所と、まだの所（表 3）

01

無限大の出どころ — 短い距離の揺らぎを足しすぎる

摂動論の図（4-03）にループがあると、外から決まらない運動量 k の積分が残ります。大きい $|k|$ は短い距離の揺らぎで、四次元ではその数が多すぎて収束しません。$|k|<\Lambda$ で切り（Λ は**切断**）、増え方を見ます。

$$
\begin{aligned}
T(\Lambda) &= \int_{|k|<\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{k^2+m^2} = \frac{1}{16\pi^2}\left[\Lambda^2 - m^2\ln\!\left(1+\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)\right] \\
I(\Lambda) &= \int_{|k|<\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{(k^2+m^2)^2} = \frac{1}{16\pi^2}\left[\ln\!\left(1+\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2+m^2}\right]
\end{aligned}
\tag{1}
$$

T は伝播関数一本を閉じた図、I は二本で閉じた図（泡）です（$d^4k = 2\pi^2 k^3 dk$）。体積 k^3dk に伝播関数ごとの k^{-2} を掛けると、T は $k\,dk$（二次の発散）、I は $k^{-1}dk$（対数発散）です。位置の側では $G(x)^2 \sim |x|^{-4}$ が原点で積分できないことに当たります（1-11）。

例。$m=1$ で $\Lambda = 10, 10^3, 10^6$ とすると、$16\pi^2 T$ は $95.4 \cdot 1.0\times10^6 \cdot 1.0\times10^{12}$、$16\pi^2 I$ は $3.625 \cdot 12.816 \cdot 26.631$ です。Λ を 10 倍するごとに T は約 100 倍、$16\pi^2 I$ は $2\ln 10 = 4.605$ ずつ増えます 計算 。

02

切断を入れる — 正則化と、その代価

人工の尺度を入れて有限にすることを**正則化**と呼びます。正則化は足場で、$\Lambda\to\infty$（格子なら $a\to 0$）で答えが足場に依らないことが目標です。表 1 の四つは、どれも何かを失います。

表 1　代表的な正則化

正則化	保つもの	失うもの
運動量の切断	回転	ゲージ不変性（§07）・反射正値性
格子（5-01、$\Lambda\sim\pi/a$）	ゲージ不変性・反射正値性（5-03）	連続の回転（4-02）
Pauli–Villars（重い場を引く）	回転	反射正値性（4-10）（非可換ではゲージ不変性も。§07）
次元正則化（$d=4-\epsilon$）	回転・ゲージ不変性	反射正値性（4-05）

次元正則化（Bollini–Giambiagi 1972・'t Hooft–Veltman 1972）はヤン–ミルズを含む摂動論の標準の道具です。一方、表 1 で反射正値性を保つのは格子の行だけです。反射正値性は、ユークリッドの相関関数から量子力学のヒルベルト空間（状態の空間）を組み立てるのに要る性質です（4-10）。問題文は、正則化で失った反射正値性を取り戻す方法は少ないと書き、例に次元正則化と Pauli–Villars を挙げます（§6.5。引用は 0-03 §03）。一度失うと取り戻しにくい性質を最初から保てることが、構成の側で格子が選ばれる理由の一つです。

03

次元を数える — 表面的な発散の次数

$\hbar = c = 1$ では量の次元 $[\cdot]$ は質量の冪です（長さは -1）。作用は無次元、d^dx は $-d$、微分は $+1$ なので、場と結合の次元が決まります。

$$\int d^dx \left[\tfrac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \tfrac{u}{4!}\phi^4\right] :\ [\phi] = \tfrac{d-2}{2},\ [u] = 4-d; \qquad \frac{1}{2g^2}\int d^dx\, \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} :\ [A] = 1,\ [g^2] = 4-d \tag{2}$$

四次元では u も g^2 も無次元です。これが「四次元は周辺」の意味です（0-03・1-12。次元の勘定の導き方は 2-04 §08 の (10)）。ループ L 個・内線 I 本の図の運動量の冪は $\omega = dL - 2I$（微分を運ぶ頂点の数を足す）で、$\omega \geq 0$ なら表面的に発散します。ϕ^4 の頂点 n 個・外線 E 本なら $4n = 2I + E$、$L = I - n + 1$ から

$$\omega_{\phi^4} = d - \frac{d-2}{2}E - [u]\,n, \qquad \omega_{\mathrm{YM}} = d - \frac{d-2}{2}E - \frac{[g^2]}{2}(V_3 + 2V_4) \tag{3}$$

です（V_3, V_4 はヤン–ミルズの三点・四点の頂点の数、外線はグルーオン）。四次元では $\omega_{\mathrm{YM}} = 4 - E$。結合の次元が次数の係数に出るので三通りに分かれます 既知 。正なら次数とともに ω が下がり、発散する図は有限個（**超繰り込み可能**）。0 なら発散する型（E の値）は有限個だが全次数に現れる（**繰り込み可能**）。負なら型が際限なく増える（**繰り込み不可能**）。

計算 表 2　$\omega \geq 0$ となるループの図の型（$E = 0$ を除く、次数 30 まで。頂点と外線の組から数え上げ、式 (3) と一致。ヤン–ミルズの $E = 1$ はローレンツ対称性と色の対称性で 0）

理論	結合の次元	E（ω）	次数	分類
ϕ^4、$d = 2$	2	2（0）	1 だけ	超繰り込み可能
ϕ^4、$d = 3$	1	2（1, 0）	1, 2	超繰り込み可能
ϕ^4、$d = 4$	0	2（2）・4（0）	すべて	繰り込み可能
ϕ^4、$d = 6$	−2	2, 4, 6, 8, …	すべて	繰り込み不可能
ヤン–ミルズ、$d = 4$	0	1（3）・2（2）・3（1）・4（0）	すべて	繰り込み可能

二次元の型は T と同じ形で、Wick の順序づけで除けます（7-03。三次元のヤン–ミルズは 7-06）。「表面的」と断るのは、$\omega < 0$ でも内側に $\omega \geq 0$ の部分図があれば発散するからです。部分図まで含めた冪の条件で収束を言うのが Weinberg 1960 の定理で、部分図を順に引く方法は 4-05 で扱います。

04

相殺項 — 裸の結合を測った結合で書き直す

四次元の ϕ^4 で手順を一ループでたどります。作用の係数 m_0, u_0 を**裸の**質量・結合と呼びます（切断の下の係数で、直接は測れない）。四点の強さ Γ^4（4-03 の図の記号 Γ とは別。外線の伝播関数を外し、線一本を切っても二つに分かれない図だけを足した四点関数。木の水準で u_0）は、泡を一つ挟んだ分ずれます。

$$\Gamma^4 = u_0 - \frac{u_0^2}{2}\sum_{j=1}^{3} B(P_j;\Lambda) + O(u_0^3), \qquad P_1 = p_1+p_2,\ P_2 = p_1+p_3,\ P_3 = p_1+p_4 \tag{4}$$

三項は外線を二本ずつに分ける三通り、$\frac{1}{2}$ は対称因子です（7-08 と同じ数え方）。運動量 P の流れ込む泡は、$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{[xA+(1-x)B]^2}$（Feynman のパラメタ）と変数のずらしで式 (1) の I に帰着します。

$$B(P;\Lambda) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k^2+m^2)\big((k+P)^2+m^2\big)} = \int_0^1 I\big(\Lambda;\, m^2 \to m^2 + x(1-x)P^2\big)\,dx \tag{5}$$

ずらした変数で切った値と元の k で切った値の差は $\Lambda\to\infty$ で 0 です（$P=m$、$\Lambda = 10^3 m$ で、$16\pi^2$ 倍で 3×10^{-7}）計算。そこで、測る量で結合を定義し直します。三つの $|P_j|$ がすべて μ の配置で測った Γ^4 を、尺度 μ の**繰り込まれた結合** $u_R(\mu)$ とします。

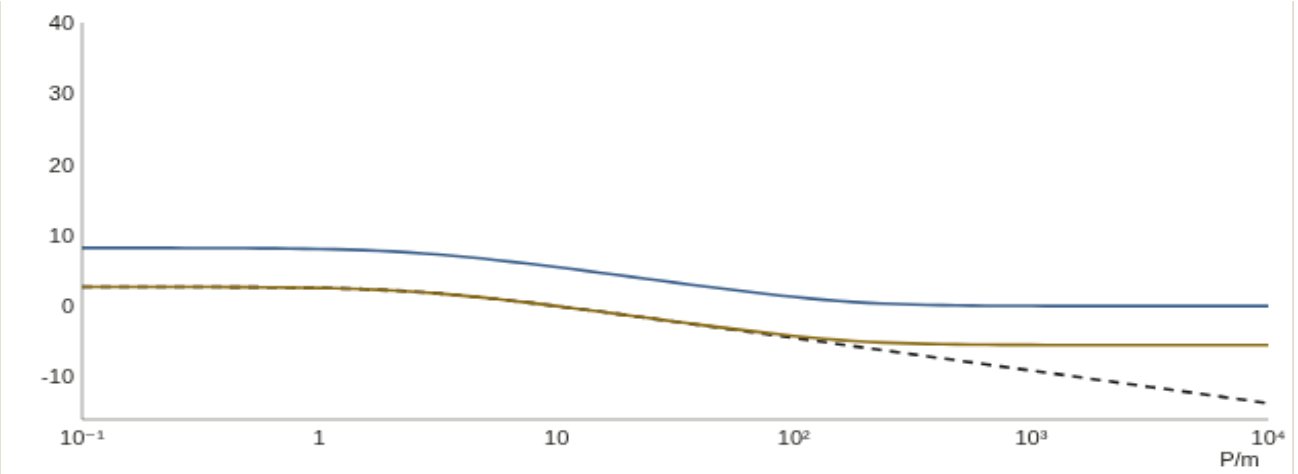
$$u_R(\mu) = u_0 - \tfrac{3}{2}u_0^2 B(\mu;\Lambda) + O(u_0^3), \qquad u_0 = u_R + \underbrace{\tfrac{3}{2}u_R^2 B(\mu;\Lambda)}_{\text{相殺項 }\delta u} + O(u_R^3) \tag{6}$$

$\delta u \approx \frac{3u_R^2}{32\pi^2}\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}$ は発散します。これを式 (4) に戻すと、発散が差の形に閉じ込められます。

$$\Gamma^4 = u_R - \frac{u_R^2}{2}\sum_j \big[B(P_j;\Lambda) - B(\mu;\Lambda)\big] + O(u_R^3) \xrightarrow{\Lambda\to\infty} u_R - \frac{u_R^2}{32\pi^2}\sum_j \int_0^1 \ln\frac{m^2+x(1-x)P_j^2}{m^2+x(1-x)\mu^2}\,dx \tag{7}$$

右辺に Λ は残りません。予言を**測った結合で書けば有限**、というのが繰り込みの中身で、無限大は測れない u_0 に押し込まれます。質量の発散（T）は m_0 に、二ループからは場の規格化 Z にも押し込み、四次元の ϕ^4 ではこの三つで全次数が足ります。これが「繰り込み可能」の実際の意味です既知。

図 1　つまみで切断 Λ を上げると、裸の泡 $16\pi^2 B(P;\Lambda)$（実線・上）は上がり続け、$\mu = 10m$ の値を引いた差（実線・下）は破線の極限に落ち着く。横軸は P（対数）。「動かす」は Λ を往復



Λ = $10^{2.0}$ m：P = 100m で 裸 1.289・差 −4.208（極限 −4.496）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（式 (5)(7) を python3 で数値積分。図は同じ式をその場で Simpson 則で積分し 4 桁で一致）。静止した値（$16\pi^2$ 倍、$\mu = 10m$）：$P = 1000m$ の差は $\Lambda = 10^2 m$ で −5.477、$10^4 m$ で −9.096、$10^8 m$ で −9.099（極限 −9.099）。同じ Λ で裸の $B(100m)$ は 1.289・10.208・28.629 と伸び続ける。

05

走る結合と繰り込み群方程式

基準の尺度 μ は勝手に選べます。u_0, Λ を止めて μ を動かしたときの u_R の変わり方が **β 関数**です。

$$\beta(u_R) = \mu \frac{du_R}{d\mu} = -\frac{3}{2} u_R^2 \, \mu \frac{\partial B(\mu;\Lambda)}{\partial \mu} + O(u_R^3) = \frac{3u_R^2}{16\pi^2} + O(u_R^3) \qquad (\mu \gg m) \tag{8}$$

Λ は微分で消えます。式 (5) を数値で微分すると係数は $\mu = 10m$ で 0.01728、$10^3 m$ で 0.018997 と $3/16\pi^2 = 0.018998$ に近づきます 計算 。一ループで積分すると

$$\frac{1}{u_R(\mu)} = \frac{1}{u_R(\mu_0)} - \frac{3}{16\pi^2} \ln \frac{\mu}{\mu_0} \tag{9}$$

で、短い距離ほど結合が強まります。$u_R(\mu_0) = 1$ なら $\mu/\mu_0 = 10^{10}$ で 1.78、$10^{22.86}$ で分母が 0 です（Landau 極。7-08） 計算 物理 。ヤン–ミルズは符号が逆です（4-06）。

例。量子電磁気学の一ループでは、電荷 1 のディラック粒子（荷電レプトン）ごとに $d(1/\alpha)/d\ln\mu = -2/3\pi$。$1/\alpha = 137.036$ から $M_Z = 91.188$ GeV まで電子・μ・τ で延ばすと 132.20 です（一ループの対数の主要部だけ） 計算 。PDG 2024 の値は $\hat{\alpha}^{(5)}(M_Z)^{-1} = 127.930$ です。$\overline{\text{MS}}$ は、切断の代わりに次元正則化の極だけを引く方式です（4-05）。上付きの (5) は、トップを除く五種のクォークを入れた値であることを表します。132.20 との差はクォークと方式の定数の分です（3-07）。

関数全体でも言えます。裸の量で書いた n 点関数は μ を知らず、繰り込んだ $\Gamma_R^{(n)}$ は場の規格化 Z の分だけ違うので

$$\Big[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(u)\frac{\partial}{\partial u}-n\gamma(u)\Big]\Gamma_R^{(n)}(P;u,\mu)=0,\qquad \gamma=\tfrac{1}{2}\mu\,\partial_\mu\ln Z \tag{10}$$

です（γ は**異常次元**。ϕ^4 では二ループから）。質量が効かない所では、運動量を s 倍しながら結合も一緒に動かすと、式 (10) の左辺が s についての一つの常微分に揃います（特性曲線の方法）。γ を無視すれば $\Gamma^4(sP;u,\mu)=\Gamma^4(P;\bar u(s),\mu)$（$s\,d\bar u/ds=\beta(\bar u)$、$\bar u(1)=u$）。運動量を s 倍して見ることは、結合を尺度 $s\mu$ の値に替えることです 既知 。Gell-Mann–Low 1954 は電子の有効電荷 $e(\mu)$ を尺度の関数として定義しました（講義録 D. Tong, *Statistical Field Theory* §3.5.3）。繰り込みの変換が群をなすことには Stueckelberg–Petermann 1953 が注目していたとされます。質量を動かす形の方程式は Callan 1970・Symanzik 1970 によるもので（Callan–Symanzik 方程式）、教科書では式 (10) の形もこの名で呼ばれます。どれも摂動の各次数の言明です。

06

Wilson の見方 — 短い尺度を積分して消す

Λ を本物の最小の尺度とみなし、$\Lambda/b<|k|<\Lambda$ の揺らぎだけを積分して長さを b 倍に測り直すと、作用の係数がすべて少し動きます。これを繰り返すのが Wilson 1971 の繰り込み群で、Kadanoff のブロック化の考え（2-08）を運動量の殻ごとの積分として実装したものです（格子の上の厳密な版は 7-05）。比喩で言えば写真の解像度を一段ずつ落とす操作です。正確には、有効作用の係数の列が段ごとの写像で移る力学系です。

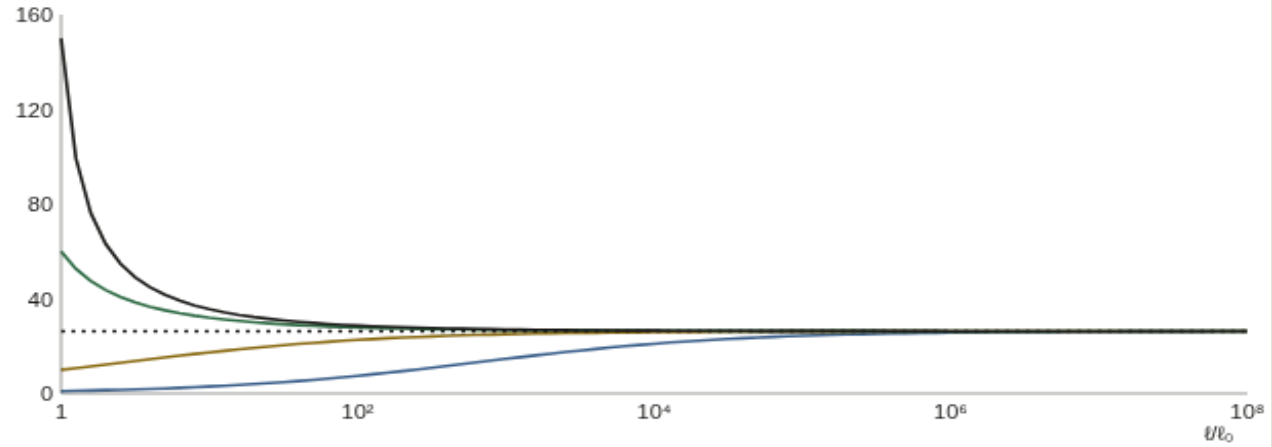
次元 $\Delta_{\mathcal O}$ の局所的な項の係数は次元 $d-\Delta_{\mathcal O}$ を持ち、無次元にした係数は長い距離へ一段ごとに $b^{\,d-\Delta_{\mathcal O}}$ 倍されます。講義録（§3.2.2）は 'Relevant if $\Delta_{\rm O}<$ d'・'Irrelevant if $\Delta_{\rm O}>$ d'・'Marginal if $\Delta_{\rm O}=$ d' と分けます 既知 。無関係な項はエネルギー E で $(E/\Lambda)^{\Delta_{\mathcal O}-d}$ 程度に薄まり、長い距離には関係する項と周辺の項だけが残ります。四次元の $\mathrm{tr}F^2$（$\Delta=4$）は周辺、$\mathrm{tr}F^4$（$\Delta=8$）は無関係です（3-01 の問い）。格子の作用の細部によらず同じ連続極限になるという期待（普遍性。18-04）もここから来ます 物理 。

周辺の結合の向きは量子の補正が決めます。講義録は 'most couplings which naively appear marginal will end up becoming either marginally relevant or marginally irrelevant due to such corrections' と書き、関係する側に回る例に 'the Kondo effect and non-Abelian gauge theories' を挙げます（§3.4）。ϕ^4_4 は長い距離で弱まる側、ヤン–ミルズは強まる側です。長い距離へ向かう $t=\ln(\ell/\ell_0)$ と無次元の $\hat u=u\,\ell^{\,4-d}$ で、d を実数に延ばして書くと

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = (4-d)\,\hat{u} - \frac{3}{16\pi^2}\,\hat{u}^2 \tag{11}$$

です（講義録 §3.5 の式を $u/4!$ の規格化に直したもの。式 (8) と向きが逆で符号も逆）。$d<4$ では $\hat{u}_* = 16\pi^2(4-d)/3$ に固定点があり、正のどの初期値もそこへ流れ込みます。Wilson–Fisher 1972 の固定点で、普遍性のいちばん小さな模型です。$d=4$ ではゆっくり、$d>4$ では速く 0 へ向かいます（7-08）物理。(2) の $[g^2]$ と (11) の固定点を、四で切り替わる他の量と並べた図は 1-12 §10 の次元のつまみです。

図 2　つまみで次元 d を動かすと式 (11) の流れが変わる。線は $\hat{u}_0 = 1, 10, 60, 150$、点線は固定点。d<4 で一点に集まり、d≥4 で 0 へ下がる。「動かす」は d を 3〜5 で往復



d = 3.50：û* = 26.32　長さ 10⁸ 倍で û = 26.25・26.31・26.32・26.32

計算 物理 この図の数値はこの端末で計算した（閉じた解。RK4 と一致）。静止した値（長さ 10^8 倍、$\hat{u}_0 = 1/100$）：$d=3$ で 52.6／52.6（$\hat{u}_* = 52.64$）、$d=4$ で 0.741／2.78、$d=5$ で 9.8×10^{-9}／3.5×10^{-7}。式は一ループの近似で、$4-d$ が小さいときに信頼できる。

寄り道：繰り込めない理論も役に立つ — Fermi の相互作用

飛ばしてよい小節です。

弱い相互作用の低エネルギーの記述では、四つのフェルミオンが一点で出会う項（$\Delta=6$）に $G_F = 1.1663788(6)\times10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2}$（PDG 2024）が掛かり、繰り込み不可能です。それでも $G_F E^2$ は 1 GeV で 1.2×10^{-5}、1 になるのは $E = 292.8$ GeV 計算。その手前で W・Z のゲージ理論（3-07）が代わります。こうした理論も、ある尺度より下の有効理論として役に立ちます 既知。

07

ゲージ理論では — 対称性を壊さずに引く

ヤン–ミルズの相殺項は、足した後もヤン–ミルズの形に収まっていてほしいところです。ゲージ不変で次元 4 以下の局所的な項は $\mathrm{tr}F^2$ と $\mathrm{tr}F\tilde{F}$（θ 項。全微分で摂動論に入らない。3-05）

だけで、質量項 $\mathrm{tr} A_\mu A_\mu$ は書けません（3-02）。ただし摂動論はゲージを固定した作用で行います。そこではゲージ不変性の代わりに BRST 対称性（ゲージ固定の後に残る対称性）が相殺項の形を縛ります（4-08）。その結果、ゲージ場の部分は $\mathrm{tr} F^2$ の形に保たれます。発散は g と場の規格化（ゴーストとゲージ固定の項の規格化も）に吸収され、径数が一つなので走りの積分定数が唯一の尺度 Λ_{YM} になります（切断の Λ とは別の量。4-07）。ゲージ不変性は発散も減らします。グルーオンの二点の補正は Ward（非可換では Slavnov–Taylor）の恒等式で横向きの形に限られます 既知 。

$$\Pi_{\mu\nu}(P) = \left(P^2 \delta_{\mu\nu} - P_\mu P_\nu\right) \Pi(P^2) \tag{12}$$

横向きとは $P_\mu \Pi_{\mu\nu} = 0$、つまり運動量の向きの成分が無いことです。P の二次が括り出されるので、表 2 の $\omega = 2$ のうち残るのは対数発散の Π だけです。質量項に当たる $\Lambda^2 \delta_{\mu\nu}$ はゲージ不変な正則化では現れません。運動量の切断はこれを壊し、Magnen–Rivasseau–Sénéor 1993 の構成でも 'breaks gauge invariance and requires gauge restoring counterterms' と書かれます。't Hooft 1971 の要旨は、ゲージ不変でない調整場も、その質量を大きくした極限で有限個の相殺項によりゲージ不変性を回復できれば使えるとし、質量の無いヤン–ミルズ場は通常の意味で繰り込めるとみられる（'appear to be renormalizable'）と書きます。ゲージ固定とゴーストは 4-08。格子は正則化の段でゲージ不変性を厳密に保ちます（5-01）。

08

数学から見た繰り込み — 定理の所と、まだの所

三つの水準を混ぜないことが肝心です。

表 3　繰り込みの三つの水準

水準	状態	章
摂動の各次数が有限になること	既知 定理。BPHZ（Bogoliubov–Parasiuk 1957・Hepp 1966・Zimmermann 1969）、Epstein–Glaser 1973。ゲージ理論は 't Hooft 1971、't Hooft–Veltman 1972、Lee–Zinn-Justin 1972、Becchi–Rouet–Stora 1976。BV 形式による別の証明が Costello 2011	4-05
級数を足し上げること（四次元）	物理 ϕ^4・ヤン–ミルズとも、級数は発散すると考えられ、和の意味づけは無い	4-12
級数を足し上げること（二・三次元）	既知 二次元の ϕ^4 で級数の発散（Jaffe 1965）と Borel 総和可能性（Eckmann–Magnen–Sénéor 1975）、三次元の ϕ^4 で Borel 総和可能性（Magnen–Sénéor 1977）、二次元の質量のある Gross–Neveu 模型で Borel 和（Feldman–Magnen–Rivasseau–Sénéor 1986）	4-12

水準	状態	章
切断を外した理論そのもの	既知 二・三次元の ϕ^4 は構成済み。四次元のヤン–ミルズ：有限体積・格子・小結合での有効作用の一様な評価（Bałaban の 1980 年代の一連の論文。1989 年の定理は有効結合に仮定つき。一様な評価から取れるのはコンパクト性による収束部分列で、極限は一意とは限らない）。赤外切断つきの連続の構成の基礎（Magnen–Rivasseau–Sénéor 1993）。Wilson の格子の尺度の極限としての連続の理論は 2026-11 に公開された構成が作った（委員会の評価の水準。6-00）。無限体積の極限の一意性は示されていない（6-04）	7-01・7-07

一つ目の考え方の早い例は量子電磁気学の Dyson 1949 です（質量と電荷の繰り込みで各次数の発散を除く議論。完全な証明は後の Weinberg 1960・BPHZ。級数の収束は示していない）。三つ目について問題文は、二・三次元の ϕ^4 で係数を切断 κ に 'to depend on κ in the way that perturbation theory suggests' 選び、'One then proves that the expectations converge as $\kappa \to \infty$, even though the specified constants α, . . . diverge.' と書きます（§6.2）。式 (6) の δu が発散しても式 (7) が有限だったことの、構成の側の版です。

四次元のヤン–ミルズでは、相関関数が短い距離で教科書にある漸近自由と摂動的な繰り込み理論の予言に合うことが求められます（§4。引用は 0-03 §07）。§2 は 'Asymptotic freedom ensures a decisive regularity in the case when classical Sobolev inequalities are borderline' と書きます。この記事の読みでは、「境目」は §03 の「四次元で結合が無次元」に当たり（18-04）、この文は見通しで定理ではありません。無限大の処理そのものが難しさの中心ではないことは 16-08。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	式 (1)–(11) の計算、表 1 の正則化の性質、繰り込み可能性の三分類——摂動論の計算・定理として 既知 。表 2、図 1・2、β の係数の数値微分、QED の走りと G_F の数 計算
条件つき	式 (11) と図 2 は一ループの式を実数の次元に延ばした近似。普遍性は四次元のヤン–ミルズでは前提のまま 物理 。式 (12) は教科書の水準の引用で、出典は書誌のみ
言えていない	摂動級数の和。切断を外した四次元の理論の存在、ヤン–ミルズの連続極限、質量ギャップ（このサイトはどれも示していない）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
本文を読んだもの	既知	A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*（Clay の問題文）§2・§4・§6.2・§6.5。D. Tong, *Statistical Field Theory*（講義録）第 3 章 §3.2.2・§3.4・§3.5・§3.5.3。J. Erler, A. Freitas, Electroweak Model…, in S. Navas et al. (PDG), Phys. Rev. D 110 (2024) 030001（式 (10.8)(10.11)、$\hat{\alpha}(M_Z)$）と要約表

もの	種別	出典・道具
要旨だけ読んだもの	既知	Gell-Mann–Low, Phys. Rev. 95 (1954) 1300；Weinberg, Phys. Rev. 118 (1960) 838；Callan, Phys. Rev. D 2 (1970) 1541；Symanzik, CMP 18 (1970) 227；'t Hooft, Nucl. Phys. B 33 (1971) 173；'t Hooft–Veltman, Nucl. Phys. B 44 (1972) 189；'t Hooft–Veltman, Nucl. Phys. B 50 (1972) 318；Bollini–Giambiagi, Nuovo Cim. B 12 (1972) 20；Lee–Zinn-Justin, Phys. Rev. D 5 (1972) 3121；Jaffe, CMP 1 (1965) 127；Eckmann–Magnen–Sénéor, CMP 39 (1975) 251；Magnen–Sénéor, CMP 56 (1977) 237；Wilson, Phys. Rev. B 4 (1971) 3174；Wilson–Fisher, Phys. Rev. Lett. 28 (1972) 240（INSPIRE）
調査の材料で照合済み	既知	Dyson, Phys. Rev. 75 (1949) 486・1736（要旨）；Magnen–Rivasseau–Sénéor, CMP 155 (1993) 325；Bogoliubov–Parasiuk, Acta Math. 97 (1957) 227；Hepp, CMP 2 (1966) 301；Zimmermann, CMP 15 (1969) 208；Epstein–Glaser, Ann. IHP A 19 (1973) 211；Costello, AMS (2011)；Bałaban, CMP 122 (1989) 175・355（CMP 109 (1987) 249 は書誌のみ）；Feldman–Magnen–Rivasseau–Sénéor, CMP 103 (1986) 67（要旨）
書誌のみ	既知	Becchi–Rouet–Stora, Ann. Phys. 98 (1976) 287（問題文の文献表）；Stueckelberg–Petermann, Helv. Phys. Acta 26 (1953) 499；Peskin–Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*（1995。式 (12) の形）
表 2、図 1・2、数値の例	計算	python3（scipy・数え上げ・RK4。各 1 分未満）。図の JS は node で照合

次に読む章：4-05 発散の代数（BPHZ・次元正則化・Connes–Kreimer）。β 関数の符号は 4-06。

発散の代数 — 入れ子の引き算は群の分解になり、それでも形式的冪級数の外には出ない

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 入れ子の発散を引く三つの処方（BPHZ・Epstein–Glaser・次元正則化）。引き算が Connes–Kreimer の Hopf 代数で群の Birkhoff 分解になること（小さな模型で計算）。Costello の有効作用の族と、これらが質量ギャップに届かない場所。

前提となる章 — 4-04 発散と繰り込み。あると読みやすい：1-11（超関数）、4-03（Feynman 図）。

先に言うこと — 形式的冪級数の水準の既知の結果の案内で、ヤン–ミルズ理論の存在や質量ギャップについて何も示しません。小さな模型は代数の構造を見るためのもので、四次元の計算ではありません。

この章の順序

1. 入れ子の発散 — 小さな模型で見る：全体だけ引くと外の尺度が残る
2. 森の公式 — BPHZ：内側から引き、引く組を森で数える
3. 位置空間の延長 — Epstein–Glaser：自由度は δ とその微分
4. 次元を連続に動かす — 次元正則化：発散が極 $1/\varepsilon$ に。MS 方式
5. 図の代数 — Connes–Kreimer の Hopf 代数：余積が取り出しを書く
6. Birkhoff 分解 — 引き算が群の分解になる：相殺項は一つの因子。寄り道：根付き木と Runge–Kutta 法
7. 有効作用の族 — Costello：尺度ごとの作用の族
8. 代数が届く所と届かない所：測度と $\exp(-1/g^2)$ は外

01

入れ子の発散 — 小さな模型で見る

4-04 では一ループの発散を、基準の尺度 μ での値を引いて除きました。引く量は外の運動量に依らない数（相殺項）でした。二ループからは図の一部分（**部分図**）がそれだけで発散します（**部分発散**）。部分発散どうしは、一方が他方を含む**入れ子**か、共通部分があって含み合わない**重なり**か、互いに素です。

入れ子だけの小さな模型（Kreimer の玩具の模型。Panzer 2012 の §3.2 の定義）を使います。「一つのループ」は $\int_0^\infty dy/(y+s)$ で、$s>0$ は外の尺度、y はループの変数です。四次元の泡と同じく対数で発散するので、y^{-z}（z は小さい正の数。§04 の ε に当たる）を掛けて**正則化**し、内側の値を外側の被積分関数に入れて入れ子を作ります。

$$\varphi(\bullet)(s)=\int_0^\infty \frac{y^{-z}\,dy}{y+s}=s^{-z}F(z),\qquad F(z)=\frac{\pi}{\sin \pi z}=\frac{1}{z}+\frac{\pi^2}{6}z+\cdots \tag{1}$$

$$\varphi(\ell_2)(s)=\int_0^\infty \frac{y^{-z}}{y+s}\,\varphi(\bullet)(y)\,dy=s^{-2z}F(z)\,F(2z) \tag{2}$$

z の負の冪の部分（**極部分**）を pole と書き、$L=\ln(s/\mu)$、$\mu=1$ とすると

$$\operatorname{pole}\varphi(\bullet)=\frac{1}{z},\qquad \operatorname{pole}\varphi(\ell_2)=\frac{1}{2z^2}-\frac{L}{z} \tag{3}$$

計算 二重のループの極には L が入ります。全体の極だけを引くと、引く量が $\ln s$ を含み、作用に足せる局所的な項になりません。**例：**$z=0.1$、$L=1$ で $\varphi(\ell_2)=44.49$、その極部分は $50-10=40$ です。

02

森の公式 — BPHZ

直し方は内側から引くことです。Bogoliubov の処方では、部分発散をその相殺項 $S(\bullet)=-1/z$ で置き換えた項を先に足し、そのあとで全体を引きます。

$$\bar R(\ell_2)=\varphi(\ell_2)+S(\bullet)\,\varphi(\bullet),\qquad \operatorname{pole}\bar R(\ell_2)=-\frac{1}{2z^2} \tag{4}$$

計算 L/z が消え、全体の相殺項 $S(\ell_2)=1/(2z^2)$ は外の尺度に依りません（$\bar R$：Bogoliubov の写像）。一般の図では**森**——発散する部分図の集合で、どの二つも入れ子か互いに素なもの（空集合と図全体も含む）——について和をとります。Zimmermann の森の公式は

$$R\Gamma=\sum_{\mathcal{F}:\,\text{森}}\ \prod_{\gamma\in\mathcal{F}}\bigl(-T_\gamma\bigr)\,\Gamma \tag{5}$$

で、T_γ は γ の発散部分を取り出す操作（運動量空間では外の運動量の Taylor 展開の低い次数）、積は内側から作用させます（細部を省いた形）。**例：** ℓ_2 の森は $\varnothing, \{\bullet\}, \{\ell_2\}, \{\bullet, \ell_2\}$ で、(5) は $(1-T_{\ell_2})(1-T_\bullet)\,\ell_2$ の展開です。$(1-T_\bullet)$ の部分が (4) の $\bar{R}$、残りの $-T_{\ell_2}$ が全体の相殺項 $S(\ell_2) = 1/(2z^2)$ を足すことに当たり、極の無い値が残ります（§05 の φ_+）。Bogoliubov–Parasiuk（1957）、Hepp（1966）、Zimmermann（1969）の頭文字で BPHZ と呼ばれ、最初の証明の穴は後の二人の仕事で埋まったとされます（Ebrahimi-Fard–Kreimer 2005 の §1）。重なりのある場合の森の公式も根付き木の Hopf 代数（§05）から出ます（Kreimer 1999 の要旨）。既知

03

位置空間の延長 — Epstein–Glaser

この節は 1-11 §04 と §08 の超関数を使います。要点だけ書きます。**テスト関数** g は何回でも微分できて遠くで速く 0 になる関数、**超関数** t はテスト関数に数 $\langle t, g\rangle$ を線形に対応させる規則です。$\langle \delta, g\rangle = g(0)$、その微分は $\langle \partial^\alpha \delta, g\rangle = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha g(0)$ で定めます。超関数の列が「超関数として収束する」とは、どのテスト関数 g についても $\langle t_n, g\rangle$ が収束することです。

位置空間では、発散は超関数を特異な点へ延ばせないことです。例はユークリッドの $\mathbb{R}^4$ でとります。四次元の質量の無い伝播関数 $G = 1/(4\pi^2|x|^2)$ の二乗（泡の図）は原点の近くで $|x|^{-4}$ となり、積分が対数で発散します。Epstein–Glaser（1973）の方法はミンコフスキー空間（時間のある時空）で立てられたもので、時間順序積（その期待値が相関関数）を頂点の数について帰納的に作り（Brunetti–Fredenhagen 2000 の §4）、点が重なる**対角線**の外で決まった値を対角線の上へ**延長**します。繰り込みは期待値の対角線への延長そのものです（同論文の要旨）。延長として定式化するので、発散する積分を途中で書かずに済みます。延長の問題そのものは、下のようにユークリッドの $\mathbb{R}^d$ でも同じ形です。自由度は**尺度の次数**で測ります（同論文の式 (33)。番号は arXiv 版。収束は超関数として）。

$$\mathrm{sd}(t) = \inf\bigl\{\omega : \lambda^\omega\, t(\lambda x) \to 0 \ (\lambda \downarrow 0)\bigr\}, \qquad \mathrm{sd}(|x|^{-a}) = a, \quad \mathrm{sd}(\delta) = d \tag{6}$$

$\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ 上の t_0 について（同論文の定理 5.2・5.3）既知 ：$\mathrm{sd}(t_0) < d$ なら尺度の次数を保つ延長はただ一つ。$d \le \mathrm{sd}(t_0) < \infty$ なら延長はあり、二つの延長の差は原点に台を持つ

$$t - t' = \sum_{|\alpha| \le \rho} c_\alpha\, \partial^\alpha \delta, \qquad \rho = \mathrm{sd}(t_0) - d \tag{7}$$

の形です。ρ は 4-04 の表面的な発散の次数に当たり、定数 c_α が局所的な相殺項の自由度です。**例：** $t_0 = |x|^{-4}$（$d = 4$、$\rho = 0$）で、半径 $1/\mu$ の球の中でだけ $g(0)$ を引く延長

$$\langle u_\mu, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{g(x) - g(0)\,\mathbf{1}\{|x| < 1/\mu\}}{|x|^4}\, d^4x \tag{8}$$

は $x \neq 0$ では t_0 と一致し、分子が $O(|x|)$ なので収束します。μ を替えた差は $2\pi^2 \ln(\mu'/\mu)\, g(0)$（$2\pi^2$ は S^3 の面積）、δ の定数倍です。

例： $g_s = e^{-|x|^2/s^2}$ では $\langle u_\mu, g_s\rangle = 2\pi^2(\ln(\mu s) - \gamma/2)$（$\gamma$ は Euler の定数）。$\mu = 1$ で $s = 0.1, 1, 10$ なら -51.148、-5.697、39.754、$\mu = 2$ との差はどれも $2\pi^2 \ln 2 = 13.682$ です。延長せずに $|x| < \eta$ を除くと $\eta = 10^{-2}, 10^{-8}$（$s = 1$）で 85.21、357.91 と伸びます。計算

04

次元を連続に動かす — 次元正則化

運動量の積分を次元 d の関数と見ます。4-04 の泡（質量 m）は $d < 4$ で収束して

$$I(d) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\, \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} = \frac{\Gamma(2 - d/2)}{(4\pi)^{d/2}}\, (m^2)^{d/2 - 2} \tag{9}$$

です（$d = 3$ で $1/(8\pi m)$）。右辺は複素数の d へ**有理型**に（極と呼ぶ孤立した点を除いて複素微分できる関数として）延び、$d = 4, 6, \ldots$ に極を持ちます。これを使うのが**次元正則化**です。ここでは $d = 4 - 2\varepsilon$ と書きます（4-04 の $d = 4 - \epsilon$ の ϵ の半分）。すると

$$16\pi^2\, I = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi - \ln m^2 + O(\varepsilon) \tag{10}$$

と、発散が極 $1/\varepsilon$ になります。$\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001$ で $16\pi^2 I$（$m = 1$）は 12.2535、101.9814、1001.9565、(10) の近似との差は 0.2997、0.0276、0.0027 です。運動量を $|k| < k_{\max}$ で切った $\ln(k_{\max}^2/m^2) - 1$ の $\ln k_{\max}^2$ の役を、$1/\varepsilon$ が担います。計算 **MS 方式**は $1/\varepsilon$ だけを、$\overline{\text{MS}}$ **方式**は $1/\varepsilon - \gamma + \ln 4\pi$ を引きます。尺度 μ を入れる（結合に $\mu^{2\varepsilon}$ を掛ける）ので、$\overline{\text{MS}}$ では $-\ln(m^2/\mu^2)$ が残ります。4-06 の $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ はこの方式の Λ です。

1972 年に Bollini–Giambiagi と 't Hooft–Veltman（題は「ゲージ場の正則化と繰り込み」）の論文があり、ゲージ対称性を壊さない正則化としてヤン–ミルズの摂動論で標準的に使われているとされます。 代償として、(9) は図ごとの解析接続で、非整数の d に測度を与えません。問題文も、次元正則化などで失った反射正値性を取り戻す方法は少ないと書きます（p.11。引用は 0-03 §03。4-10）。

05

図の代数 — Connes–Kreimer の Hopf 代数

引き算は「部分図 γ の取り出し」と「γ を一点につぶした残り Γ/γ」の繰り返しです。これを演算にする前に、言葉を三つ用意します。

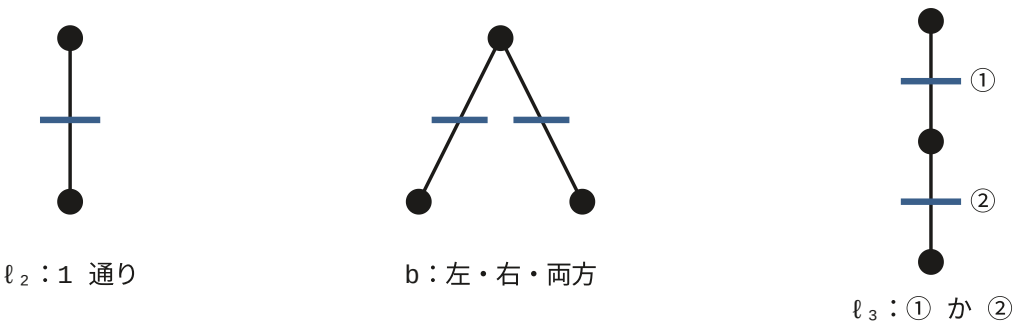
- **一粒子既約**：内線を一本切っても二つに分かれない図。
- $\otimes$（テンソル積）：$\gamma \otimes \Gamma/\gamma$ は二つの図の組を形式的に並べる記号です。左右それぞれについて線形（双線形）で、左右を掛けはしません。あとで値を入れるときに $\varphi(\gamma)\,\varphi(\Gamma/\gamma)$ と掛けます。
- **Hopf 代数**：積と**余積**（一つの元を $\otimes$ の組の和に割る写像）と、余単位・対合子という付属の写像を持つ代数。この章で使うのは余積だけです。

引き算を演算にしたのが Kreimer（1998）と Connes–Kreimer（1998・2000）の Hopf 代数で、生成元は発散する一粒子既約な図、積は図を並べること、取り出しは余積です（Ebrahimi-Fard–Kreimer 2005 の式 (15)）。(11) の和は、発散する一粒子既約な真の部分図と、その互いに素な組（積として並べたもの）について取ります。組のときの Γ/γ は、どれも一点につぶした残りです。余積を Δ と書くのは文献の慣習で、質量ギャップの Δ とは別です。

$$\Delta(\Gamma) = \Gamma \otimes 1 + 1 \otimes \Gamma + \sum_{\gamma \subsetneq \Gamma} \gamma \otimes \Gamma/\gamma \tag{11}$$

入れ子だけなら、図の代わりに**根付き木**で足ります。頂点が発散する部分図、子が内側の部分発散です。(11) の和は**許される切断**（根から葉へのどの道も高々一度しか切らない辺の選び方）の和になり、切り落とした側が左、根の側が右に入ります（図 1）。

図 1　根付き木と許される切断。上端が根（図全体）、下ほど内側。色の線が切断で、切り落とした下側が式 (12) の左、根の側が右の因子。ℓ_3 の ① と ② は同じ道の上なので同時には切らない



$$\begin{aligned} \Delta(\ell_2) &= \ell_2 \otimes 1 + 1 \otimes \ell_2 + \bullet \otimes \bullet \\ \Delta(b) &= b \otimes 1 + 1 \otimes b + 2\,\bullet \otimes \ell_2 + \bullet\bullet \otimes \bullet \end{aligned} \tag{12}$$

b は根に子が二つの木です。正則化した値 φ（z のローラン級数に値をとり、積を積に移す写像。**指標**）どうしは、畳み込み $\varphi_1 \star \varphi_2 = m \circ (\varphi_1 \otimes \varphi_2) \circ \Delta$（$m$ は値の積）で群をなします。単位は空の図に 1、ほかの図に 0 を与える指標です。逆元があるので、φ の発散を打ち消す因子 S_R を掛けて $S_R \star \varphi = \varphi_+$ を有限にする、という問題の立て方ができます。相殺項 S_R が φ の逆元の役をするわけです（§06）。方式 R（MS は極部分、MOM は $s = \mu$ での値）を決めると、相殺項 S_R と繰り込んだ値 φ_+ が木の大きさの順に決まります（Ebrahimi-Fard–Kreimer 2005 の式 (21)(25)(26)）。

$$\begin{aligned} S_R(\Gamma) &= -R\big[\bar{R}(\Gamma)\big], \qquad \varphi_+(\Gamma) = (1-R)\big[\bar{R}(\Gamma)\big] \\ \bar{R}(\Gamma) &= \varphi(\Gamma) + \sum_{\gamma} S_R(\gamma)\,\varphi(\Gamma/\gamma) \end{aligned} \tag{13}$$

玩具の模型では、頂点 v を根とする部分木を t_v、頂点の数を $|t|$ として、値が閉じた形になります（Panzer 2012 の命題 3.2.2）。

$$\varphi(t)(s) = s^{-z|t|} \prod_{v} F\big(z\,|t_v|\big) \tag{14}$$

頂点 4 個までの木 8 本で (13) を計算すると、(i) 相殺項はどれも L を含まず（局所性）、(ii) 繰り込んだ値は L の $|t|$ 次の多項式で最高次は $(-L)^{|t|}/t!$（$t! = \prod_v |t_v|$ は**木の階乗**）、(iii) MOM の値は Panzer の式 (3.4.2)–(3.4.5) と一致しました。MS と MOM の差は有限です。計算

計算 表 1　玩具の模型の繰り込み（有理数で誤差なく計算）。右端は $z \to 0$ の値。MS で引くと定数が変わる（ℓ_2 は $\frac{L^2}{2} + \frac{\pi^2}{4}$、$\ell_3$ は $-\frac{L^3}{6} - \frac{5\pi^2 L}{12}$）。

木	$t!$	裸の値の極部分	相殺項（MS）	φ_+（MOM）
$\bullet$	1	$\frac{1}{z}$	$-\frac{1}{z}$	$-L$
ℓ_2	2	$\frac{1}{2z^2} - \frac{L}{z}$	$\frac{1}{2z^2}$	$\frac{L^2}{2}$
b	3	$\frac{1}{3z^3} - \frac{L}{z^2} + \frac{27L^2+11\pi^2}{18z}$	$-\frac{1}{3z^3} + \frac{\pi^2}{18z}$	$-\frac{L^3}{3} - \frac{\pi^2 L}{3}$
ℓ_3	6	$\frac{1}{6z^3} - \frac{L}{2z^2} + \frac{27L^2+14\pi^2}{36z}$	$-\frac{1}{6z^3} - \frac{\pi^2}{18z}$	$-\frac{L^3}{6} - \frac{\pi^2 L}{6}$

06

Birkhoff 分解 — 引き算が群の分解になる

Connes–Kreimer（2000）の主定理（要旨）は、次元正則化した裸の理論が、時空の整数の次元 D のまわりの小さな円の上で指標の群のループ $\gamma(z)$ を与え、'the renormalized theory is just the evaluation at z = D of the holomorphic part γ+ of the Birkhoff decomposition of γ' だというものです。$z = D$ は時空の整数の次元、γ は正則化した理論が与えるループ（次

元 z を円の上で動かしたときの指標の族)、γ_+ はその分解の正則な因子です。既知 以下では z を D からのずれとして書きます（玩具の模型の z と同じ役で、$z=0$ が整数の次元)。

$$\varphi(z) = \varphi_-(z)^{\star -1} \star \varphi_+(z) \tag{15}$$

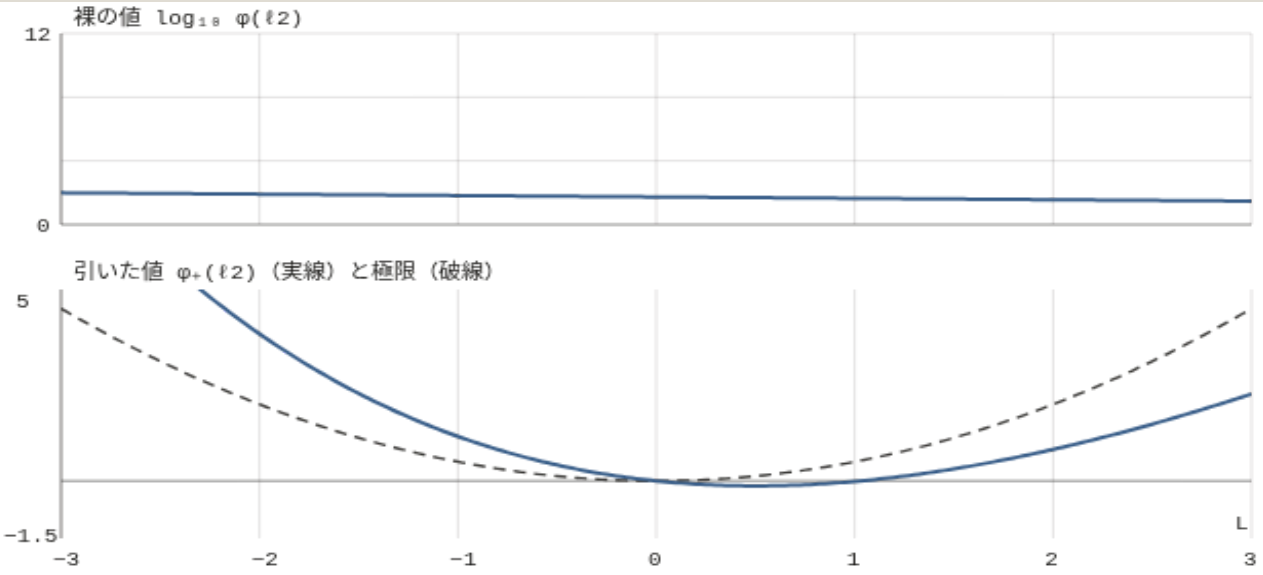
φ_- は $1/z$ の多項式（定数項は単位）で MS の相殺項、φ_+ は $z=0$ で正則で $\varphi_+(0)$ が繰り込んだ値です。たとえれば、ローラン級数を極の部分と正則な部分に分けることの掛け算版です。正確には、群が可換でないので (13) の帰納で木の大きさの順に決まります。S_R と φ_+ が再び指標になるのは、R が $R^2=R$ と **Rota–Baxter の等式**

$$R(x)\,R(y) + R(xy) = R\big(R(x)\,y + x\,R(y)\big) \tag{16}$$

を満たすからです（Ebrahimi-Fard–Kreimer 2005 の式 (20))。既知 **例：**極部分の R と $x = 1/z + a$、$y = 1/z + b$ では両辺とも $2/z^2 + (a+b)/z$ です。

図 2 は梯子 ℓ_n（頂点が一列に n 個）の MOM です。(13) の和は $\bar{R}(\ell_n) = \varphi(\ell_n) + \sum_{j<n} S_R(\ell_j)\,\varphi(\ell_{n-j})$ になり、$z \to 0$ で裸の値は z^{-n} の速さで逃げ、引いた値は多項式に落ち着きます。計算

図 2　つまみ z を小さくすると、上の段の裸の値 $\log_{10}\varphi(\ell_n)$ は上へ逃げ、下の段の引いた値 $\varphi_+(\ell_n)$（実線）は $z\to 0$ の多項式（破線）に近づく。横軸は L、n は梯子の段数。「動かす」で z が下がる



n = 2　z = 0.100　L = 1 で 裸の値 44.49　引いた値 −0.0141　極限 0.5000

計算 この図の数値はこの端末で計算した。式 (13)(14) の閉じた形を図の中で評価し、python3 と照合した。

JavaScript が無効なら：$L=1$ で $z=0.02,\ 0.005$ の引いた値は、$n=1$：−0.991、−0.998（極限 −1)、$n=2$：0.394、0.473（0.5)、$n=3$：−1.696、−1.776（−1.812)、$n=4$：0.655、1.419（1.687)。裸の値は $z=0.02$ で 49、1205、19802、245195。極限との差はほぼ z に比例して縮む。計算

寄り道：根付き木と Runge–Kutta 法

飛ばしてよい小節です。

$y' = f(y)$ の解を h で展開すると、k 階の導関数を「子が k 個の頂点」と読んで f, $f'f$, $f''(f,f)$, $f'f'f$ が $\bullet$, ℓ_2, b, ℓ_3 になります。

$$y(h) = y + hf + \frac{h^2}{2}\,f'f + \frac{h^3}{6}\bigl(f''(f,f) + f'f'f\bigr) + O(h^4) \tag{17}$$

h^3 の係数は ℓ_3 で $1/t!$、b で左右の入れ替えの 2 と $t! = 3$ の積の逆数で、表 1 と同じ木の階乗です。Runge–Kutta 法はこの係数を決まった次数まで再現するよう作られ、展開を扱う群を Butcher の群と呼びます（Butcher 1972）。Brouder（2000）は要旨で、繰り込みの根付き木の代数と Runge–Kutta 法のつながりを指摘しています。既知

07

有効作用の族 — Costello

別の道は、尺度ごとの作用の族を理論と見ることです（Wilson の繰り込み群。7-05）。Costello（2007 年の論文、2011 年の本）は伝播関数 $1/k^2 = \int_0^\infty e^{-tk^2}\,dt$ の t（長さの二乗）を ε から T に制限します。

$$P(\varepsilon, T)(k) = \int_\varepsilon^T e^{-tk^2}\,dt = \frac{e^{-\varepsilon k^2} - e^{-Tk^2}}{k^2} \tag{18}$$

正確には、論文はコンパクトな多様体の上の熱核で書かれ、平らな空間ではそれが e^{-tk^2} になります。**例：** $\varepsilon = 0.01$、$T = 100$ で $k^2 P$ は $k = 1, 10, 30$ で 0.990、0.368、1.2×10^{-4}。計算
異なる尺度の作用は繰り込み群方程式で結ばれます（$\Gamma(P, S)$ は S の頂点を P で結んだ図の和）。

$$S_{\text{eff}}(T_2) = \Gamma\bigl(P(T_1, T_2),\, S_{\text{eff}}(T_1)\bigr) \tag{19}$$

論文の相殺項の一意性の定理（Costello の定理 B）は、方式（ε の関数のうちどれを特異な部分と呼ぶかの選び方）を固定すると、相殺項 $S^{\mathrm{CT}}(\varepsilon)$ が一意にあって $\lim_{\varepsilon\to 0}\Gamma(P(\varepsilon,T), S - S^{\mathrm{CT}})$ が存在し、相殺項は T に依らず局所的なことです。相殺項は $\hbar$（ループの数を数える文字）の冪級数です。尺度 T の**有効作用**は、この相殺項を引いてから $\varepsilon \to 0$ とした極限

$$\Gamma^R\bigl(P(0,T), S\bigr) = \lim_{\varepsilon\to 0}\Gamma\bigl(P(\varepsilon,T),\, S - S^{\mathrm{CT}}(\varepsilon)\bigr) \tag{20}$$

で、$P(0,T)$ のままで図を作ると発散します。有効作用も $\hbar$ の形式的冪級数です（§ 08）。有効作用の族の分類の定理（Costello の定理 C）は、方式を固定すると局所的な作用と、(19) と

$T \to 0$ での局所性を満たす有効作用の族とが一対一に対応することです。方式を替えるのは同じ族に別の座標を付けることに当たります。既知

ゲージ対称性は Batalin–Vilkovisky（BV）形式の量子マスター方程式で表します（ここでは名前だけ。ゲージ対称性を保つ条件を、補助の場を加えた一つの方程式にまとめたもの）。2007 年の論文は繰り込み（相殺項の構成）と量子化（量子マスター方程式の解の構成）を区別し、コンパクトな四次元多様体上の純ヤン–ミルズを前者の例に、後者の非自明な例を Chern–Simons 理論とします。2011 年の本はヤン–ミルズの摂動的な繰り込み可能性のコホモロジー（$Q^2 = 0$ となる写像 Q について $\ker Q / \operatorname{im} Q$ を見る代数の道具。ここでは名前だけ）による証明を含むと紹介されています。繰り込み可能性そのものは 't Hooft（1971）、't Hooft–Veltman（1972）、Lee–Zinn-Justin（1972）、Becchi–Rouet–Stora（1976）らで確立したとされます（7-12 §06）。既知

08

代数が届く所と届かない所

ここまでの道具はどれも結合定数の**形式的冪級数**の上で働き、各次数を有限にし、自由度を有限個の局所項に閉じ込めます。既知 届かないものは三つです。**(i) 級数の和：**四次元ヤン–ミルズの摂動級数は発散すると考えられています（4-12）。物理 **(ii) どの次数でも 0 の量：**一ループの尺度（4-07。純 $SU(N)$ で $\beta_0 = 11N/3$。係数の四つの書き方の換算は 4-06 表 1）

$$\Lambda = \mu \, \exp\!\left(-\frac{8\pi^2}{\beta_0 \, g^2} \right) \tag{21}$$

は（$b_0 = \beta_0/(16\pi^2)$ とおけば 4-07 の式 (3) と同じ式）、g についての Taylor 係数がすべて 0 です。質量ギャップは Λ に比例すると期待され物理、そうした量は形式的冪級数の中で 0 と区別できません（7-12 §07）。**(iii) 測度と正値性：**問題文が求めるのは係数の列ではなく公理を満たす理論で（0-03）、その相関関数は短い距離で漸近自由と摂動的な繰り込み理論の予言に合うべきだとされます（p.6。引用は 0-03 §07）。この章の代数は、構成が再現すべき答えの側にあります。

同じ代数が形式的冪級数の外の道具の中で使われている例に、Hairer の正則性構造の繰り込みがあります。正則性構造は**確率量子化**（7-09。ここでは名前だけ。雑音で揺らした時間発展の方程式を解き、その長い時間の後の分布として測度を得ようとする方法）の方程式を解くための枠組みで、その繰り込みは二つの Hopf 代数の組と Birkhoff 分解の変種で書かれます（Bruned–Hairer–Zambotti 2019 の要旨）。正則性構造は、三次元ヤン–ミルズ–Higgs の確率量子化の方程式の局所時間の解（短い時間の間だけの解）の構成に使われています（Chandra–Chevyrev–Hairer–Shen 2024 の要旨）。既知 扱えるのは劣臨界（短い尺度ほど

非線形項が弱くなる）の方程式で、四次元ヤン–ミルズは**臨界**（非線形項の強さが尺度に依らない）なのでその外です。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	五つの定式化と引用した定理（延長の分類、Birkhoff 分解の主定理、Costello の相殺項の一意性の定理・有効作用の族の分類の定理）既知 。玩具の模型で、全体だけの引き算が L を含む極を残し Bogoliubov の処方で消えること、木 8 本で相殺項が局所的で値が L の多項式になること。$\lvert x\rvert^{-4}$ の延長の差が δ の定数倍であること。泡の極 計算
条件つき	玩具の模型は入れ子だけで、局所性はその中での確認（一般には文献の定理による）。摂動級数の発散と $\Delta \propto \Lambda$ は期待 物理
言えていない	四次元ヤン–ミルズの多ループの計算。級数の和。非摂動の測度・反射正値性・質量ギャップ。書誌のみの文献の証明の中身

出典と再現

もの	種別	出典・道具
本文を読んだもの	既知	Jaffe–Witten, Quantum Yang–Mills Theory（Clay の問題文）p.6・p.11。Panzer, arXiv:1202.3552 (2012) §3.2–3.4。Ebrahimi-Fard–Kreimer, J. Phys. A 38 (2005) R385 §1–2。Brunetti–Fredenhagen, arXiv:math-ph/9903028（Commun. Math. Phys. 208 (2000) 623）の要旨・§4・§5.1–5.2（式・定理の番号は arXiv 版）。Costello, arXiv:0706.1533 (2007) §1
要旨だけ読んだもの	既知	Kreimer, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 303。Connes–Kreimer, Commun. Math. Phys. 199 (1998) 203；210 (2000) 249。Kreimer, Commun. Math. Phys. 204 (1999) 669。Brouder, Eur. Phys. J. C 12 (2000) 521。Bruned–Hairer–Zambotti, Invent. Math. 215 (2019) 1039。Chandra–Chevyrev–Hairer–Shen, Invent. Math. 237 (2024) 541（arXiv:2201.03487）
書誌のみ	既知	Bogoliubov–Parasiuk, Acta Math. 97 (1957) 227。Hepp, Commun. Math. Phys. 2 (1966) 301。Zimmermann, 同 15 (1969) 208。Epstein–Glaser, Ann. Inst. H. Poincaré A 19 (1973) 211。Bollini–Giambiagi, Nuovo Cim. B 12 (1972) 20。't Hooft–Veltman, Nucl. Phys. B 44 (1972) 189（ゲージ理論での標準的な使われ方は未確認）。't Hooft, 同 33 (1971) 173。Lee–Zinn-Justin, Phys. Rev. D 5 (1972) 3121。Becchi–Rouet–Stora, Ann. Phys. 98 (1976) 287。Costello, Renormalization and Effective Field Theory, AMS (2011)（紹介文による）。Butcher, Math. Comp. 26 (1972) 79
式 (3)(4)、表 1	計算	python3（標準ライブラリの有理数で z のローラン級数を誤差なく計算。木 8 本、MS と MOM）

もの	種別	出典・道具
図 2、§03・§04・§06・§07 の数値	計算	python3（SciPy の数値積分と Γ 関数、閉じた式）。図 2 の JavaScript は node で python3 の値と突き合わせた

次に読む章：4-06 漸近自由。寄り道は 7-12・4-12。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 4 部 量子化 β 関数・11N/3

漸近自由 — 短い距離で結合が弱まる符号と、11N/3 の中身

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — ヤン–ミルズの β 関数は負で、短い距離ほど結合が対数的に弱まること。係数 11/3 がスピンの 4 と軌道の −1/3 に分かれること。b_0, b_1 は結合の定義に依らず、それを足場に格子の数値と予言を比べられること。

前提となる章 — 4-04（走る結合）。あると読みやすい：17-01・3-02・5-01。$\hbar = c = 1$、$\mathrm{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$。β 関数を $\beta(g)$、格子の逆結合を $\beta_{\mathrm{L}} = 2N/g_0^2$ と書き分けます。

先に言うこと — 係数は摂動論の計算です（既知 は「摂動論の計算として既知」）。四次元の連続理論は 2026-11 に公開された構成が作り、そこには結合の一ループの走りと短距離の幾つかの検査が言明として入っています（Lean で証明されている、と委員会が評価した。10-06・6-01）。摂動論との全ての次数での一致は示されていません（6-04）。この章の格子との照合は数値の比較で、それ自体は連続極限の存在を示すものではありません。このサイトは質量ギャップも連続理論の構成も示していません。

この章の順序

1. 走る結合 — β 関数の符号
2. 一ループの係数 — 四つの書き方（表 1）
3. 11/3 の中身 — スピンと軌道（図 1・表 2）／寄り道：真空は常磁性体
4. 物質を足すと — Coleman–Gross
5. 二ループと普遍性 — b_0, b_1 は定義に依らない
6. 発見の経緯 — 年表（表 3）
7. 格子との整合 — Λ の比と r_0/a（図 2・表 4）
8. 問題文の中の漸近自由 — 言うことと言わないこと（表 5）

01

走る結合 — β 関数の符号

繰り込んだ結合 g は、測る尺度 μ（運動量。距離ならおよそ $1/\mu$）を決めると、そこで値が決まります（4-04）。その変わり方が **β 関数**で、右辺は小さい g での展開です。

$$\beta(g) = \mu \frac{dg}{d\mu} = -b_0\, g^3 - b_1\, g^5 - \cdots \tag{1}$$

$\beta > 0$ なら短い距離（大きい μ）で結合が強まり、QED と四次元の ϕ^4 がこちらです（7-08）。$b_0 > 0$ なら短い距離で弱まります。これが**漸近自由**です。b_1 以降を捨てて積分すると、$1/g^2$ が $\ln \mu$ の一次式になります（17-01 と同じ式）。

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g^2(\mu_0)} + 2b_0 \ln \frac{\mu}{\mu_0} \tag{2}$$

式 (2) は、μ が何倍になったかの対数に比例して $1/g^2$ が増える、という意味です。μ を 10 倍しても 100 倍しても、増え方は一定の刻みで、結合はゆっくりとしか弱まりません。

例。結合の二乗を 4π で割った α で書くと、電子だけの QED の一ループでは $d(1/\alpha)/d\ln\mu = -2/(3\pi) \approx -0.212$（Tong の講義録 §2.4.1 の式の書き直し）、純 SU(3) では $+1.751$ です。後者では μ が 10 倍になるごとに $1/\alpha$ が約 4.03 増えます（0-03）計算 。

02

一ループの係数 — 11N/3 の四つの書き方

ゲージ群に、ディラック粒子 n_f 個（表現 R_f）と複素スカラー n_s 個（表現 R_s）を足した理論の一ループの係数は次のとおりです（Tong の講義録 §2.4・§2.7。't Hooft 1999 の式 (5.3) は規格化の違う同じ式）既知 。

$$16\pi^2\, b_0 = \frac{11}{3}\, C_A - \frac{4}{3}\, T(R_f)\, n_f - \frac{1}{3}\, T(R_s)\, n_s \tag{3}$$

$T(R)$ は $\mathrm{tr}_R(T^a T^b) = T(R)\,\delta^{ab}$ で決まる数で、基本表現で $\frac{1}{2}$、随伴表現で C_A（SU(N) なら N。1-04）です。純 SU(N) では $b_0 = \frac{11N}{48\pi^2}$ です。変数の取り方で見かけの数が変わるので、表 1 に並べます（四行は同じ内容）。

表 1　純 SU(N) の一ループの係数の四つの書き方

変数	流れの式	係数	SU(2)	SU(3)
g	$\mu\, dg/d\mu = -b_0 g^3$	$\frac{11N}{48\pi^2}$	0.04644	0.06966
$1/g^2$	$d(1/g^2)/d\ln\mu = 2b_0$	$\frac{11N}{24\pi^2}$	0.09288	0.1393

変数	流れの式	係数	SU(2)	SU(3)
$\alpha = g^2/(4\pi)$	$\mu^2 d\alpha/d\mu^2 = -b_0^{(\alpha)}\alpha^2$	$\frac{11N}{12\pi}$	0.5836	0.8754
$\beta_{\mathrm{L}} = 2N/g^2$	$d\beta_{\mathrm{L}}/d\ln\mu = \kappa$	$\kappa = 4Nb_0 = \frac{11N^2}{12\pi^2}$	0.3715	0.8359

計算 python3 で評価。SU(3) の $b_0^{(\alpha)} = 33/(12\pi)$ は PDG の式 (9.3) とその直後の b_0 の式と一致。

最後の行は格子の言葉です（5-01）。格子間隔 a を半分にするごとに β_{L} を $\kappa\ln 2$（SU(2) で 0.258、SU(3) で 0.579）上げれば同じ物理が保たれる、というのが一ループの予言です 計算 。SU(2) の $\kappa = 11/(3\pi^2)$ は、本書の検討の記録の傾き κ と同じ数で、既知の一ループ係数を格子の規約で書いたものです（23-02） 既知 。

03

11/3 の中身 — スピンの 4 と軌道の −1/3

なぜ符号が逆になるのでしょう。**背景場の方法**は、ゆっくり変わる外の場（背景場）を置き、そのまわりの量子の揺らぎを一ループで積分して、背景場の作用の係数 $1/g^2$ がどう変わるかを見る方法です。これで計算すると（Tong の講義録 §2.4.2）、グルーオンの寄与は二つに割れます。場の成分をスカラーのように数える項は、ゴーストで余分を引いたあと、電磁気と同じ遮蔽の向きに $-\frac{1}{3}$ を与えます。スピン 1 から来る項（講義録の 'the paramagnetic piece'）は反遮蔽の向きに $+4$ を与えます。全体の負号はここから来ます（'This is where the overall minus sign comes from'） 既知 。

$$\frac{11}{3} = 4 - \frac{1}{3} \tag{4}$$

光子は電荷を持たず QED の真空の偏極に加わりませんが、グルーオンは色の電荷を持つので加わります（3-02）。Wilczek のノーベル講演も 'it is the effect of virtual gluons that is responsible for antiscreening' と書きます。

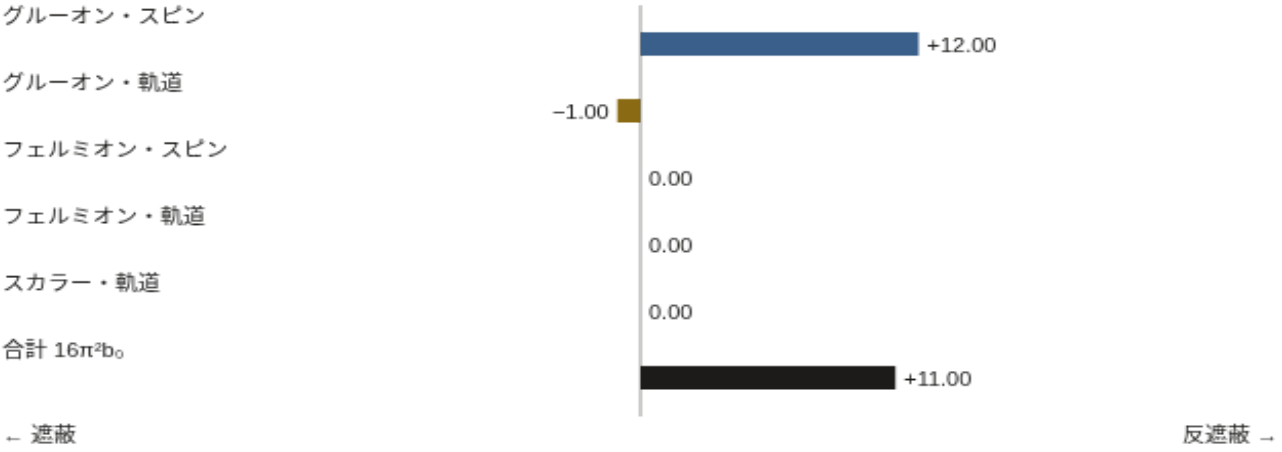
同じ分け方は物質にも使えます。質量の無い粒子の一つの状態（スピン s、磁場の向きの成分 s_z）が $16\pi^2 b_0$ に

$$\tfrac{1}{2}\,(-1)^{2s}\big((2s_z)^2 - \tfrac{1}{3}\big)\,T(R) \tag{5}$$

ずつ寄与すると数えます。$(2s_z)^2$ がスピン（常磁性）、$-\frac{1}{3}$ が軌道（反磁性）の分、$(-1)^{2s}$ はフェルミオンのループの符号です。グルーオン（$s_z = \pm 1$）で $\frac{11}{3}C_A$、ディラック粒子で $-\frac{4}{3}T$、複素スカラーで $-\frac{1}{3}T$ と、式 (3) がすべて出ます（表 2）。この章では、式 (5) を既知の係数を再現する数え方として置きます。この規則が式 (3) の係数をすべて再現することは、この端末で確かめました 計算 。規則そのものの導出はこの章では扱いません。漸近自由を常磁性とし

て見る類比は Nielsen 1981 に遡るとされます（Tong の文献注。Tong は 't Hooft への私的な帰属にも触れています）。

図 1　つまみで N、基本表現のディラック粒子の数 n_f、複素スカラーの数 n_s を変えると、$16\pi^2 b_0$ への寄与と合計が動く。右（正）が漸近自由の側。「動かす」は n_f を往復させる



SU(3)・n_f=0・n_s=0：$16\pi^2 b_0 = 11.00$（漸近自由）　$(16\pi^2)^2 b_1 = 102.0$

表 2　式 (5) による一つの粒子あたりの寄与（$T(R)$ を掛ける前）

粒子	状態	スピン	軌道	計＝既知の係数
グルーオン（$\times C_A$）	2	+4	−1/3	+11/3
ディラック粒子	4	−2	+2/3	−4/3
複素スカラー	2	0	−1/3	−1/3

計算　この図と表の数値はこの端末で計算した（python3 の有理数で式 (5) を評価し既知の係数と一致。図は同じ式をその場で足す）。JavaScript が無効ならこの表で読める。

寄り道：真空は常磁性体

飛ばしてよい小節です。

相対論的な真空では光の速さが 1 なので、誘電率と透磁率の積が $\varepsilon\mu_{\mathrm{m}} = 1$。常磁性（$\mu_{\mathrm{m}} > 1$）なら $\varepsilon < 1$ で、電荷は反遮蔽されます（Tong §2.4.1）。自由電子気体では、スピンの Pauli 常磁性と軌道の Landau 反磁性が $1 : -\frac{1}{3}$ で（Tong の統計物理 §3.6）、式 (5) の括弧 $1 - \frac{1}{3}$ と同じ比です。ただし真空のフェルミオンではループの符号 $(-1)^{2s}$ が全体を反転させるので、電子の寄与は遮蔽の側になります（表 2 の $-\frac{4}{3}$）。グルーオンでは $4 - \frac{1}{3}$。比喩で言えば、グルーオンの真空は強い常磁性体です。正確には、式 (5) の「スピン」「軌道」は計算の中の項の呼び名で、真空の磁化という観測量ではありません。

04

物質を足すと — $n_f < 11N/2$ と Coleman–Gross

物質は b_0 を減らします。基本表現のディラック粒子 n_f 個なら式 (3) は $16\pi^2 b_0 = \frac{11N}{3} - \frac{2n_f}{3}$ で、漸近自由は $n_f < 11N/2$（SU(3) で 16.5 未満）のときだけです 計算 。't Hooft の回想（1999）にも同じ数があります。現実のクォークは 6 種で、QCD は漸近自由の側です。

可換な群では $C_A = 0$ なので、(3) には物質の項だけが残り、$b_0 < 0$（§01 の QED の向き）です。標準模型の $U(1)_Y$（$Q = T_3 + Y$ の規格。超電荷は 3-07 の表 1）では、$T(R)$ を Y^2 に替え、左巻きの Weyl 成分一つをディラック粒子の半分に数えると、三世代のフェルミオン（一世代で $\sum Y^2 = 10/3$）と Higgs 二重項から

$$16\pi^2\, b_0\big|_{U(1)_Y} = -\frac{2}{3}\cdot 3\cdot\frac{10}{3} - \frac{1}{3}\cdot 2\cdot\frac{1}{4} = -\frac{41}{6}$$

で、一ループでは結合が短い距離で強まります 計算 。§05 の b_1（二ループの係数）とは別の数です。

ヤン–ミルズ場の無い理論については、Coleman と Gross（1973）の要旨が 'No renormalizable field theory without non-Abelian gauge fields can be asymptotically free.' と述べます（β 関数の計算の水準の主張） 既知 。問題文 §6.2 も四次元の ϕ^4 が漸近自由でないことを自明性（7-08）と並べ、ヤン–ミルズを 'the natural candidate for four-dimensional CQFT' と呼びます。ヤン–ミルズが問題の主役である理由の一つです。

05

二ループと普遍性 — b_0, b_1 は定義に依らない

二ループの係数は Caswell と Jones がそれぞれ 1974 年の論文で求めています 既知 。純 SU(N) では正で、PDG の α の式を g に直すと次の形です（SU(3) で照合 計算 ）。

$$b_1 = \frac{34}{3}\,\frac{N^2}{(16\pi^2)^2} \tag{6}$$

b_0 と b_1 は、結合の定義（繰り込みの方式）を替えても変わりません。別の結合 $\tilde g = g + c\,g^3 + d\,g^5 + \cdots$ に替え、$\mu\, d\tilde g/d\mu = (1 + 3cg^2 + 5dg^4)\beta(g)$ を $\tilde g$ で書き直すと

$$\begin{aligned} \tilde\beta(\tilde g) &= -b_0\tilde g^3 - b_1\tilde g^5 - \tilde b_2\tilde g^7 - \cdots \\ \tilde b_2 &= b_2 - 2c\,b_1 + (2d - 3c^2)\,b_0 \end{aligned} \tag{7}$$

で、c, d は $\tilde b_2$ から先にしか入りません（有理数の級数で確かめた 計算 ）。PDG も b_2 以降は 'renormalization-scheme-dependent' と書き、Capitani ほか 1999 は b_0, b_1 を 'The universal coefficients' と呼びます 既知 。この普遍性が §07 の足場です。

例。純 SU(3) で同じ積分定数 Λ（4-07）から出すと、α は $\mu/\Lambda = 10$ で一ループ 0.248・二ループ 0.186、10^{10} でも 0.0248・0.0232 と 7% 違います 計算 。補正は「対数の対数」で、なかなか消えません。物質を足して $b_1 < 0$ にすると β 関数が $g_*^2 = -b_0/b_1$ で 0 になり、SU(3) の $n_f = 16$ なら $\alpha_* \approx 0.042$ の赤外の固定点が見えます 計算 （Banks–Zaks 1982 物理 ）。係数は五ループまで計算されています（PDG の文献表。級数全体の意味は 4-12）。

06

発見の経緯 — 符号は何度か見えていた

負の符号は 1973 年より前にも計算に現れていました。't Hooft の回想（1999）によれば、当時は β 関数が正であることが普遍的と考えられ、場の量子論では Bjorken スケーリング（高エネルギーの散乱で、ハドロンの中の構成要素が短い距離では自由に近く動いて見える規則性）を説明できないと思われていました。

表 3　漸近自由の年表

年	出来事	出典
1964	Vanyashin–Terentyev：荷電ベクトル中間子で負の符号。繰り込み不可能性のせいとされた（論文は 1965）	't Hooft 1999
1969	Khriplovich：クーロンゲージでヤン–ミルズに逆の符号。漸近自由とは結び付けられなかった	同上
1972	Marseille の会議で 't Hooft が一ループの式を黒板に書く（論文にはせず）	同上
1973	Gross–Wilczek、Politzer、Coleman–Gross	要旨
1974	Caswell、Jones：二ループ	要旨
1980	Creutz：格子の数値。Hasenfratz–Hasenfratz：格子と連続の Λ	要旨
2004	Gross・Politzer・Wilczek にノーベル物理学賞	nobelprize.org

Politzer の題は疑問符付きの 'Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?' でした 既知 。't Hooft は 1973 年の論文について 'I was surprised, not about the result, which I had known all along, but about the stir they caused' と書き、本当に問題なのは閉じ込めだと続けます。この本の問題もその先にあります（17-01）。

07

格子との整合 — 裸の結合の走りと Λ の比

格子（5-01）では格子間隔 a が切断で、裸の結合 g_0 が a とともに走ります。§05 の普遍性から、その β 関数も同じ b_0, b_1 で始まり、二ループまでで積分すると

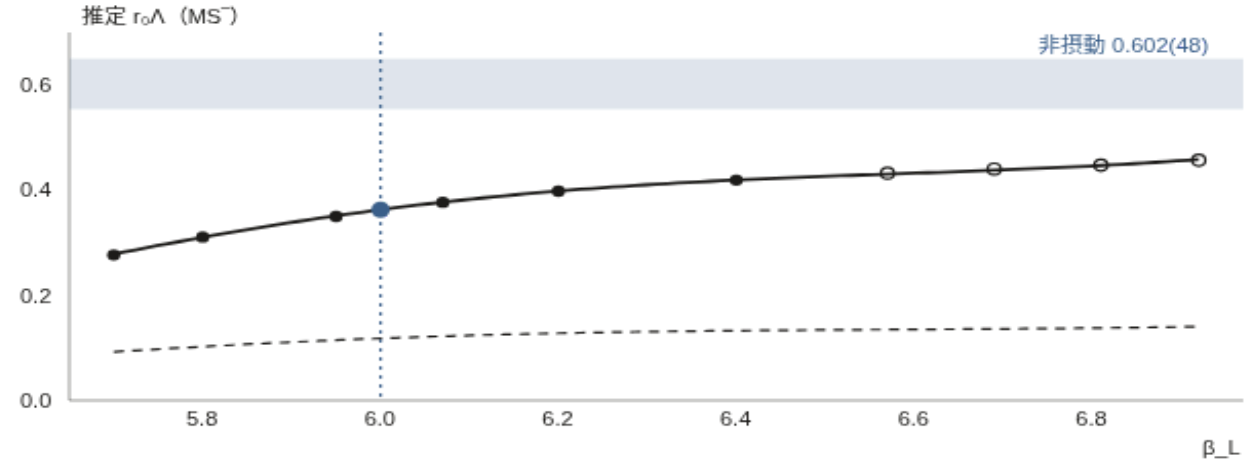
$$a\Lambda_{\mathrm{L}} = (b_0 g_0^2)^{-b_1/(2b_0^2)}\, e^{-1/(2b_0 g_0^2)}\,\bigl(1 + O(g_0^2)\bigr) \tag{8}$$

です（Capitani ほか 1999 の式 (2.7) で $\mu = 1/a$ とした形）既知。格子の Λ_{L} と、連続の $\overline{\mathrm{MS}}$ 方式の Λ を比べます。$\overline{\mathrm{MS}}$ は、次元正則化で発散の極とそれに付く定数だけを引く、連続の理論で標準の結合の定義です（4-05）。二つの Λ は一ループで決まる定数倍だけ違い、Wilson 作用では $\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}/\Lambda_{\mathrm{L}} = 28.81$（SU(3)）、19.82（SU(2)）です。Lüscher–Weisz 1995 の係数 k_1 から計算し、SU(3) は同論文の式 (4.1) の 28.80934 と一致しました 計算。式 (8) が格子の数値で成り立つことを**漸近スケーリング**と呼びます（5-05。早い時期の検証は Creutz 1980）。

今の精度で — 純 SU(3) の r_0/a

長さの基準 r_0 は、静的な色の電荷の対に働く力 F から $r_0^2 F(r_0) = 1.65$ で決めます（17-01）。Necco–Sommer 2002 の r_0/a に式 (8) と Λ の比を掛けた $r_0\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}$ の素朴な推定は、漸近スケーリングが成り立てば一定になるはずの量です。

図 2　つまみで β_{L} を動かすと、その点の r_0/a と、a を半分にする β_{L} の上げ幅（データと二ループ）が下に出る。曲線は $r_0\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}$ の推定（実線が二ループ、破線が一ループ）、点は格子の値（塗りつぶしは r_0/a の直接の値、白抜きは r_c/a からの換算で表 4 の *）、帯は非摂動の値



β_L = 6.00：r₀/a = 5.37　上げ幅 データ 0.475・二ループ 0.614　推定 r₀Λ = 0.363

表 4　純 SU(3)・Wilson 作用：r_0/a、$r_0\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}$ の推定、a を半分にする上げ幅

β_{L}	r_0/a	推定（二ループ）	上げ幅（データ）	上げ幅（二ループ）
5.70	2.922	0.277	0.354	0.616
5.95	4.898	0.350	0.456	0.614
6.20	7.380	0.398	0.524	0.613
6.40	9.74	0.419	—	0.612
6.57	12.18*	0.432	—	0.611
6.92	19.13*	0.457	—	0.609

計算 この図と表の数値はこの端末で計算した。r_0/a は Necco–Sommer 2002 の表 1（* は r_c/a を $r_c/r_0 = 0.5133$ で換算）、上げ幅（データ）は同論文の補間式 (2.6) から（— は範囲外）。推定は $(r_0/a) \times a\Lambda_{\mathrm{L}} \times 28.81$。図の値は python3 と一致。JavaScript が無効ならこの表で読める。

推定は 0.28 から 0.46 へ増え続け、非摂動の値 0.602(48) にまだ届きません。裸の結合の展開は収束が遅いのです（一ループだけなら 0.09〜0.14）。それでも向きと桁はそろい、β_{L} を上げるほど予言に近づきます。箱の大きさを尺度に走る結合を非摂動的に測る方法（Lüscher–Weisz–Wolff 1991）では、測った結合が 'closely matched by the perturbative evolution' で、そこから 0.602(48) が出ています（Capitani ほか 1999）既知 。ただし、どれも有限の格子の数値と摂動論の比較で、連続極限の存在も一意性も示しません（5-09・16-08）。

08

問題文の中の漸近自由 — 言うことと言わないこと

問題文は漸近自由をまず物理の説明として導入し（§1）、二つの役目を与えます。一つは要件で、相関関数が短い距離で漸近自由と摂動的な繰り込み理論の予言に合うこと（§4。引用は 0-03 §07）。作った理論が「ヤン–ミルズ」であることを短い距離で照合する役目です。もう一つは道具で、'Asymptotic freedom ensures a decisive regularity in the case when classical Sobolev inequalities are borderline'（§2）既知 。四次元は古典の評価がぎりぎり足りない境目の次元で、その不足を漸近自由が補う、と読めます（1-12。Bałaban の仕事は 7-07）。

表 5　漸近自由が言うことと、言わないこと

言うこと	言わないこと
短い距離で結合が対数的に弱まる（摂動論の計算として）。紫外の制御の手掛かり（7-05）	構成された理論でそうなること。長い距離の振る舞い（$\mu \to \Lambda$ で g は大きくなり、式 (2) は使えない）
積分定数 Λ が現れ、μ に依らない（4-07）	質量ギャップ。Λ に比例すると期待される量は $e^{-1/(2b_0 g^2)}$ の形で、摂動のどの次数にも映らない（4-12）
四次元で漸近自由なら非可換ゲージ場が要る	閉じ込め（17-02）

漸近自由は「短い距離は易しい」と告げ、同時に「長い距離では展開の手掛かりが無い」とも告げています。問題の難しさは後者の側にあります（7-10・7-11）。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	式 (3)(6)(7)(8)、物質の数の境目、Coleman–Gross——摂動論の計算として 既知 。式 (5)(7) の確かめ、表と図の数、Λ の比 計算
条件つき	格子と予言の一致は、有限の格子の数値と摂動論の式の比較として。赤外の固定点は二ループの式の範囲 物理

	内容
言えていない	構成された四次元の理論で、漸近自由が摂動論と全ての次数で一致すること（2026-11 に公開された構成の言明は一ループの走りまで。10-06）。無限体積の極限の一意性（6-04）。式 (5) の「スピン」「軌道」は項の呼び名。1964〜69 年の出来事は回想による（原論文は未読）。閉じ込めと質量ギャップ

出典と再現

もの	種別	出典・道具
本文を読んだもの	既知	PDG：J. Huston, K. Rabbertz, G. Zanderighi, in S. Navas et al., Phys. Rev. D 110 (2024) 030001, §9.1.1。G. 't Hooft, Nucl. Phys. B Proc. Suppl. 74 (1999) 413, arXiv:hep-th/9808154。F. Wilczek 2005, arXiv:hep-ph/0502113。S. Capitani, M. Lüscher, R. Sommer, H. Wittig 1999, arXiv:hep-lat/9810063。S. Necco, R. Sommer 2002, arXiv:hep-lat/0108008。M. Lüscher, P. Weisz 1995, arXiv:hep-lat/9502001・hep-lat/9505011。D. Tong の講義録 *Gauge Theory* §2.4・*Statistical Physics* §3.6。A. Jaffe, E. Witten（Clay の問題文）
要旨だけ読んだもの	既知	Gross–Wilczek, PRL 30 (1973) 1343；Politzer, PRL 30 (1973) 1346；Coleman–Gross, PRL 31 (1973) 851；Caswell, PRL 33 (1974) 244；Jones, Nucl. Phys. B 75 (1974) 531；Banks–Zaks, Nucl. Phys. B 196 (1982) 189；Creutz, Phys. Rev. D 21 (1980) 2308；Hasenfratz–Hasenfratz, Phys. Lett. B 93 (1980) 165；Lüscher–Weisz–Wolff, Nucl. Phys. B 359 (1991) 221。授賞理由は nobelprize.org
書誌のみ	既知	Vanyashin–Terentyev, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 48 (1965) 565；Khriplovich, Yad. Fiz. 10 (1969) 409（'t Hooft の文献表から）；N. K. Nielsen, Am. J. Phys. 49 (1981) 1171；高次の係数の文献（PDG の文献表から）
式 (5)(7)、表 1・2・4、図 1・2、Λ の比、数値の例、§04 の $U(1)_Y$ の $-41/6$	計算	python3（有理数の級数・二分法。各 1 秒未満）。図の JavaScript の値は node で python3 の値と突き合わせた

次に読む章：4-07 次元転移と Λ（式 (2) を長い距離の側へ延ばすと現れる Λ）。格子の側の続きは 5-05。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 4 部 量子化 Λ・exp(−1/g²)

次元転移と Λ — 尺度の無い古典論に、量子論が尺度を一つ持ち込む

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 尺度の無い古典論から、量子論で走る結合の積分定数として尺度 Λ が一つ現れること。質量は Λ の定数倍と期待され、その形 $e^{-1/(2b_0 g^2)}$ が摂動論に映らないこと。厳密な例としての二次元のデルタ井戸。

前提となる章 — 4-06（β 関数と b_0, b_1）。あると読みやすい：1-12・2-05・3-05。記号は 4-06 と同じ（$\hbar = c = 1$、$\beta(g) = \mu\, dg/d\mu$、$b_0 = 11N/(48\pi^2)$）。

先に言うこと — 次元転移は摂動論の繰り込み群から読む物理の議論で、四次元では定理ではありません。繰り込み群は「質量が在るなら Λ の定数倍」までを言い、係数が 0 でないこと（質量ギャップ）は言いません。このサイトは質量ギャップも連続理論の構成も示していません。

この章の順序

1. 古典には尺度が無い
2. Λ は走りの積分定数（表 2）
3. 径数が一つ消える（図 1）
4. 物理量は Λ の定数倍（表 3）
5. $\exp(-1/g^2)$ は摂動論に映らない（表 4）
6. 二次元のデルタ井戸（図 2・表 5。寄り道：金属の Cooper 対）
7. Λ は約束で変わる（表 6）
8. 尺度対称性の破れ方
9. 言えることと言えないこと（表 7）

01

古典には尺度が無い

$\hbar = c = 1$ では長さは質量の逆数で、すべての量を質量の冪で測れます。作用 $S = \frac{1}{2g^2}\int \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\, d^dx$ の結合の次元は

$$[g^2] = (\text{質量})^{4-d} \tag{1}$$

です（2-04・1-12）。三次元なら g^2 そのものが質量で、$m = c\,g^2$ と書けます（7-06）。四次元では g が無次元なので、古典の材料からは質量が作れません。古典の波は分散 $\omega = |\mathbf{k}|$ で、問題文も 'massless waves that travel at the speed of light' と書きます（§1）既知。静止した有限エネルギーの解（塊）もありません（3-03。Deser 1976・Coleman 1977）既知。

例。BPST インスタントンの作用 $8\pi^2/g^2$ は大きさ ρ に依りません（3-05）。古典解には好みの大きさが無いのです。量子論で $\Delta > 0$ なら、その尺度は古典の作用の外から来るはずです。問題文 §6.6 の 'the mass gap is not classically visible' はこの事情です（§05）。

02

Λ は走りの積分定数

4-06 の $\beta(g) = \mu\, dg/d\mu$ は一階の常微分方程式です。変数を分けて積分すると

$$\ln\frac{\mu}{\Lambda} = \int^{g(\mu)} \frac{dg'}{\beta(g')} \tag{2}$$

です。右辺の下端の自由度を定数として左辺に出したのが Λ で、積分定数なので流れのどの点から計算しても同じ値です。一ループ（$\beta = -b_0 g^3$）で定数を 0 に選ぶと

$$\Lambda = \mu\, \exp\!\Big(-\frac{1}{2b_0\, g^2(\mu)}\Big) \tag{3}$$

で、$\ln\Lambda$ を $\ln\mu$ で微分すると $1 + \beta/(b_0 g^3) = 0$ です。格子の SU(2)（$\beta = 4/g^2$）で書き直すと $1/(a\Lambda) \propto e^{3\pi^2\beta/11}$ で、第 23 部の記帳の長さ ξ_{RG} の一ループの部分と同じ式です（23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定）既知。二ループ以上では下端の約束が要ります。広く使われるのは Capitani ほか 1999 の式 (2.7) です。

$$\Lambda = \mu\,(b_0 g^2)^{-b_1/(2b_0^2)}\, e^{-1/(2b_0 g^2)}\, \exp\!\Big(-\int_0^{g}\Big[\frac{1}{\beta(x)} + \frac{1}{b_0 x^3} - \frac{b_1}{b_0^2 x}\Big]dx\Big) \tag{4}$$

角括弧の中は $x \to 0$ で有限なので、下端に 0 が使えます。PDG の総説は Λ を 'a constant of integration, which corresponds to the scale where the perturbatively-defined coupling

would diverge' と説明します 既知 。

例（表 2）。二ループの β を厳密とみなし、SU(3) で $g^2(\mu_0)=2$ から流れを数値で積分しました。式 (4) は 9 桁まで一定です。式 (3) は μ を 10^{16} 倍するあいだに 2.7 倍ずれ、前の冪だけ付けた式も差が 4.6% から 0.43% へ縮むだけです。数値には定義の式を添えます。

表 2　純 SU(3)・二ループの流れの上の三つの「Λ/μ_0」

μ/μ_0	$g^2(\mu)$	式（3）	冪だけ付けた式	式（4）
1	2.000	0.02763	0.06341	0.066444376
10^{16}	0.1733	0.01028	0.06616	0.066444376

計算 python3（RK4）。式 (4) の積分は閉じた形と数値積分が 9 桁一致。

本書での使い方は 24-07 §01（結合が無次元であることを、四次元の難しさの一つ目として読む）。

03

径数が一つ消える — Λ は単位

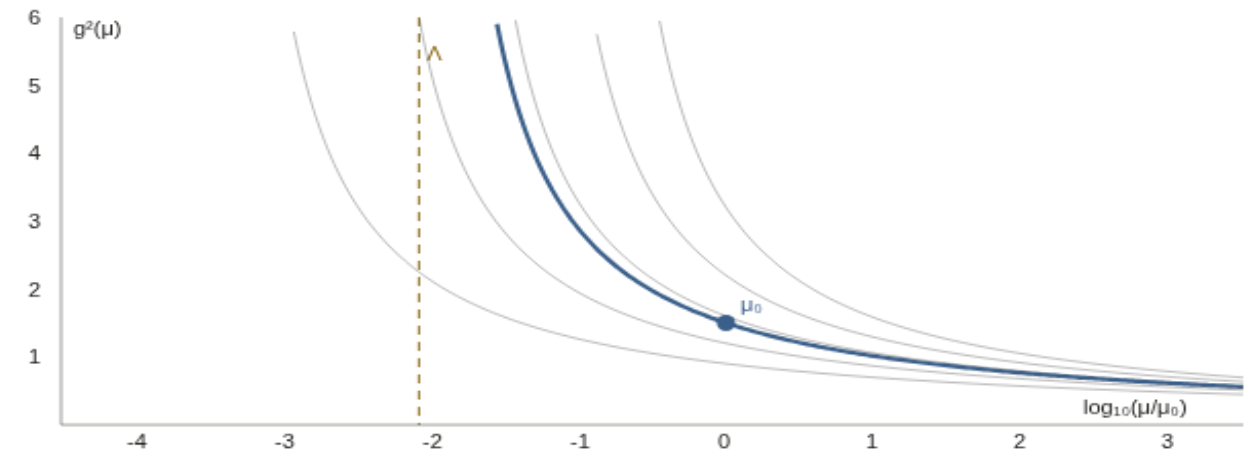
式 (3) を裏返すと、Λ 一つで流れ全体が決まります。

$$g^2(\mu)=\frac{1}{2b_0\ln(\mu/\Lambda)}\qquad(\mu>\Lambda,\ \text{一ループ}) \tag{5}$$

Λ は μ/Λ の形でしか入りません。Λ を 2 倍にするのは質量の単位を半分にするのと同じで、「μ_0 での結合を選ぶ」一径数の族は、単位を除けばただ一つの理論です。無次元の g が次元を持つ Λ に置き換わりました。これを**次元転移**（dimensional transmutation）と呼びます 物理 。

Tong は、この考えが Coleman と E. Weinberg の 1973 年の仕事から知られていたと書きます（Tong §2.9）。E. Weinberg の同年の学位論文は、質量の無いスカラー場の電磁気学で、量子効果によって生じた真空期待値 $\langle\phi\rangle$（スカラー場の真空での値で、質量の尺度になるもの）を変えることは 'completely equivalent to changing the scale in which masses are measured' だと書きます 既知 。純ヤン–ミルズには無次元の結合が残らず、残る入力は群（N）と θ 角（3-05）だけです。

図 1　つまみで $g^2(\mu_0)$ を変えると、純 SU(3)・一ループの流れ（太線）と Λ（破線）が横に動く（細線は $g^2(\mu_0)=0.9$〜3.2）。「横軸を μ/Λ に」で六本が重なる。「動かす」は往復



g²(μ₀) = 1.50 → Λ/μ₀ = 8.35e-3

計算 この図の数値はこの端末で計算した（図は式 (3)(5) をその場で評価）。細線の Λ/μ_0 は 3.44×10^{-4} から 0.106 まで動くが、$\mu=10\Lambda$・$10^3\Lambda$・$10^6\Lambda$ の g^2 はどれも 3.117・1.039・0.520。

尺度の出所は切断です。格子なら Λ は組 (a, g_0) から作られます（4-06 の式 (8)）。

04

物理量は Λ の定数倍 — 係数の正負は言わない

質量の次元を持つ物理量を計算すると、次元解析から $m=\mu\,F(g(\mu))$ の形です。m は μ の選び方に依らないので

$$\mu\frac{d}{d\mu}\big(\mu\,F(g(\mu))\big)=\mu\big(F(g)+\beta(g)\,F'(g)\big)=0 \tag{6}$$

で、解は $F(g)=C\exp\!\big(-\int^{g}dg'/\beta(g')\big)$ です。式 (2) と比べると

$$m=C\,\Lambda \tag{7}$$

で、C は純数です。式 (6) は異常次元の無い物理量の繰り込み群方程式（4-04）です。弦張力なら $\sigma=C'\Lambda^2$ で、比 $m/\sqrt{\sigma}$ は N と θ だけで決まる純数になり、調整できる値はありません 物理 。これが「尺度は一つ」の中身です（17-01・17-12）。

式 (6) の解には $C=0$ も含まれます。言えるのは「質量が在るなら Λ の定数倍」までで、$C>0$ は言えません。質量ギャップの問題は、理論を構成し、真空の次の状態について $C>0$ を示せという問題だと読めます（0-03・4-11）。

例（表 3）。格子の数値は無次元の比で出ます（r_0 は 4-06 の長さ）。$m(0^{++})$ は、スピン 0・パリティ正・荷電共役正の最も軽いグルーボールの質量です（5-08）。

表 3　純 SU(3) の無次元の比

比	値	出典
$r_0 \Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}$	0.602(48)	Capitani ほか 1999
$r_0\, m(0^{++})$	4.21(11)(4)	Morningstar–Peardon 1999
$m(0^{++})/\sqrt{\sigma}$	3.405(21)	Athenodorou–Teper 2020
$m(0^{++})/\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}$	6.99(59)	上の二行の割り算（別の論文の値を組み合わせた目安）

計算 最終行は python3 で割り、誤差を独立として伝播。物理 どれも格子からの外挿で、連続理論が在ることを前提に読む（17-01）。

05

exp(−1/g²) は摂動論に映らない

一ループで式 (7) を書き直すと

$$\frac{m}{\mu} = C\,\exp\!\Big(-\frac{1}{2b_0\, g^2(\mu)}\Big) \tag{8}$$

です。$f(x)=e^{-1/x}$（$x>0$）、$f(x)=0$（$x\le 0$）は $x=0$ で何回でも微分でき、導関数はすべて 0 です。$f^{(n)}(x) = P_n(1/x)\,e^{-1/x}$（$P_1(u)=u^2$、$P_2(u)=u^4-2u^3$）で、多項式は e^{-u} に勝てないからです 既知 。(8) を g^2 の冪に展開すると係数はすべて 0 です。

摂動論（4-03）は g^2 の冪級数を計算するので、(8) の形の量はどの次数でも 0 に見えます。問題文 §6.6 は、ギャップが古典的に見えないので、それを示すには古典的でない変数の取り替え（'change of variables or “duality transformation.”'）が要るかもしれないと書きます 既知 。Gross–Neveu 1974 の要旨も、漸近自由な理論で動的に生じる質量は 'must depend on the coupling constants in a nonanalytic fashion, vanishing exponentially when these vanish' と述べます（繰り込み群の水準）。二重井戸のトンネルの隙間も同じ型です（2-05）。

例（表 4）。係数を 1 とした目安で、$\alpha = g^2/4\pi$ の n 乗が Λ/μ まで下がる次数 $n^{*} = \ln(\Lambda/\mu)/\ln\alpha$ は、$g^2=1$ で 2.8、$g\to 0$ で際限なく増えます。実際の係数は次数とともに増え、級数は発散すると考えられています（4-12）。

表 4　純 SU(3)・一ループ

g^2	Λ/μ	n^{*}	$\log_{10} e^{-8\pi^2/g^2}$
2	2.76×10⁻²	1.95	−17.15
1	7.63×10⁻⁴	2.84	−34.29
0.25	3.39×10⁻¹³	7.33	−137.16

g^2	Λ/μ	n^*	$\log_{10} e^{-8\pi^2/g^2}$
0.1	6.71×10⁻³²	14.85	-342.91

計算 python3。右端（§08）は $(\Lambda/\mu)^{11}$ と全桁で一致。P_n は $n=6$ まで確かめた。

06

二次元のデルタ井戸 — 厳密な次元転移

厳密な例は二次元の量子力学にあります。$\hbar^2/2m=1$ の単位で、d 次元のデルタ関数の井戸

$$H = -\nabla^2 - g\,\delta^{d}(\mathbf{x}) \tag{9}$$

を考えます。δ^d は長さの $-d$ 乗、∇^2 は -2 乗の次元なので、g は長さの $d-2$ 乗の次元で、$d=2$ で無次元です。四次元のヤン–ミルズと同じ状況です。フーリエ変換を $\hat\psi(\mathbf{k}) = \int \psi(\mathbf{x})\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, d^d x$（1-11）とすると、$\delta^d$ の変換は 1 です。束縛状態 $E=-\kappa^2$ は $(k^2+\kappa^2)\,\hat\psi(\mathbf{k}) = g\,\psi(0)$ を満たすので、$k^2+\kappa^2$ で割って積分すると

$$1 = g\int_{|\mathbf{k}|<K} \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{k^2+\kappa^2} \tag{10}$$

が出ます（K は運動量の切断）。$d=2$ の右辺は $(g/4\pi)\ln(1+K^2/\kappa^2)$ で、四次元のヤン–ミルズの一ループと同じく対数的に発散します（4-04）。解くと

$$E_B = \kappa^2 = \frac{K^2}{e^{4\pi/g}-1} \approx K^2\, e^{-4\pi/g} \tag{11}$$

で、式 (8) と同じ形です。繰り込みは E_B を固定して $K\to\infty$ とする操作で、$g(K) = 4\pi/\ln(1+K^2/E_B)$ と結合を 0 に近づけます。$K^2 \gg E_B$ で

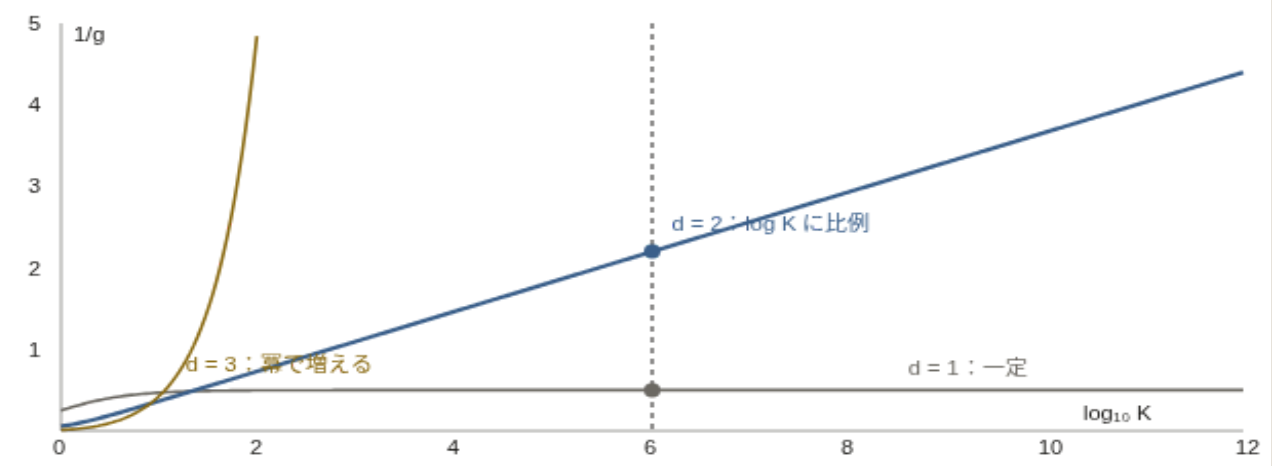
$$\beta(g) = K\frac{dg}{dK} = -\frac{g^2}{2\pi} \tag{12}$$

で、符号は負、つまり漸近自由です。極限に残る径数は E_B だけです。ここまでは運動量の切断での初等的な計算です 計算 。

数学の側では、切断を外す極限で、ハミルトニアンは束縛状態をただ一つ（エネルギー $-E_B$）持つ自己共役作用素に収束する（レゾルベント $(H-z)^{-1}$ の意味で）ことが知られています（Albeverio ほか、第 I 部 5 章。書誌のみ） 既知 。そこでの極限の取り方は、短い距離のポテンシャルを縮めながら結合を対数で繰り込むもので、上の運動量の切断とは別の道筋です。教材としては Gosdzinsky–Tarrach 1991 があります（書誌のみ）。

図 2　つまみで切断 K を動かすと、E_B = 1 を保つ結合の逆数 1/g が d = 1・2・3 でどう動くかが見える。d = 2 は log K に

比例（漸近自由）。「動かす」は K を往復させる



K = 10^6.00：g_1 = 2.0000　g_2 = 0.4548　g_3 = 1.97e-5　g_2 を 1% 上げると E_B は ×1.31

表 5　$E_B = 1$ を保つ結合 $g_d(K)$（単位は $\sqrt{E_B}$）

K	g_1	g_2	$2\pi/\ln K$	g_3
10	2.1355	2.7229	2.7288	2.314
10^6	2.0000	0.4548	0.4548	1.974×10^{-5}
10^{12}	2.0000	0.2274	0.2274	1.974×10^{-11}

計算　この図の数値はこの端末で計算した。式 (10) の閉じた形は数値積分と 11 桁一致、$K\,dg/dK$ は $K \geq 10^4$ で $-g^2/2\pi$ と一致（比 1.000000）。g_2 を 1% 動かしたときの E_B の倍率は $K = 10$ で 1.05、10^{12} で 1.73。

$d = 1$ では $E_B = g^2/4$ は g の冪で、$g(K)$ は 2 に落ち着きます。$d = 3$ では g を臨界値 $2\pi^2/K$ に冪で寄せる必要があります。結合の質量次元が正・0・負の場合で、四次元のヤン–ミルズは $d = 2$、三次元のヤン–ミルズは $d = 1$ の側です（類比）。

寄り道：金属の Cooper 対

飛ばしてよい小節です。

同じ対数は金属の中の電子の対にも出ます。金属では、電子の状態が Fermi 面（詰まった電子の海の表面）まで埋まっています。Fermi 面から測った一電子のエネルギーを ξ とし、$N(0)$ を Fermi 面でのスピン一つあたりの状態密度（単位エネルギー・単位体積あたりの状態の数）とします。面の上の二電子が、$0 < \xi < \omega_D$（ω_D は格子振動の最大の周波数で、ここでの切断）の殻の中でだけ強さ V の引力を感じるとすると、束縛条件は式 (10) と同じ手順で

$$1 = N(0)V\int_0^{\omega_D}\frac{d\xi}{2\xi + E_B} = \frac{N(0)V}{2}\ln\left(1 + \frac{2\omega_D}{E_B}\right) \tag{15}$$

です。$N(0)$ が一定なので、二次元の $d^2k \propto d(k^2)$ と同じく対数が出ます。解くと $E_B = 2\omega_D/(e^{2/(N(0)V)} - 1) \approx 2\omega_D\, e^{-2/(N(0)V)}$ で、弱い引力でも束縛状態があり、その大きさは V の冪の級数に映りません（Cooper 1956。書誌のみ）既知 。指数の 2 は、$N(0)$ をスピン一つあたりとする約束によります。

計算 python3。閉じた形と式 (15) の数値積分が $N(0)V = 0.05$〜0.5 で倍精度の範囲で一致。

07

Λ は約束で変わり、比は変わらない

Λ の値は結合の定義（方式）で変わります。方式 A の g と B の $\tilde{g}$ が $\tilde{g} = g + c\,g^3 + O(g^5)$ でつながると、$1/\tilde{g}^2 = 1/g^2 - 2c + O(g^2)$ なので、式 (3) から

$$\frac{\Lambda_B}{\Lambda_A} = e^{c/b_0} \tag{13}$$

です。b_0, b_1 が方式に依らないので（4-06）、式 (4) の Λ ではこの比がちょうど成り立ちます。Celmaster–Gonsalves 1979 の要旨は、二つの方式の Λ の比は 'a pure number which we show is exactly deducible from our one-loop results' と書きます 既知 。

例（表 6）。MS（最小引き算：次元正則化で現れる極だけを引く方式。4-04）と、PDG が標準とする $\overline{\text{MS}}$（極と一緒に定数 $\ln 4\pi - \gamma_E$ も引く方式。Bardeen ほか 1978）は尺度の読み替え $\mu^2 \to \mu^2 e^{\gamma_E}/4\pi$ だけ違い、比は $\sqrt{4\pi e^{-\gamma_E}} = 2.656$ です。格子の Wilson 作用との比 28.81（SU(3)、4-06）も、$1/g^2$ のずれでは 0.468 にすぎません。一ループの差が $1/b_0$ 倍されて指数に入るので、Λ は一桁以上変わります。

表 6　方式の取り替えと Λ の比

比	群	c	$1/g^2$ のずれ	e^{c/b_0}	式 (4) の比
$\overline{\text{MS}}$／MS	SU(3)	0.0681	−0.136	2.656	–
$\overline{\text{MS}}$／格子	SU(3)	0.2341	−0.468	28.81	28.8100
$\overline{\text{MS}}$／格子	SU(2)	0.1387	−0.277	19.82	19.8200

計算 python3。$\tilde{g} = g(1 + cg^2)$ から方式 B の β を作り、式 (4) を数値積分した比は $\mu/\mu_0 = 1$〜10^{16} で 6 桁一定。前の冪だけの式の比は 6.76→23.08（SU(3)）と遅い。

$m/\sqrt{\sigma}$ のような物理量どうしの比は方式に依りません。$r_0\Lambda$ は方式を名指したときにだけ一つの数になります。MeV を付けるには別の量を借ります（17-01）。

08

尺度対称性の破れ方 — インスタントンとトレース異常

§01 の古典の尺度対称性は、量子論で二か所に跡を残します。一つはインスタントンの大きさで、古典では自由だった ρ が結合の走りで区別されます（Tong §2.3.1–§2.3.2）。尺度 $1/\rho$ での結合を使うと、式 (3) と $16\pi^2 b_0 = 11N/3$ から一ループで

$$e^{-8\pi^2/g^2(1/\rho)} = (\rho\Lambda)^{11N/3} \tag{14}$$

が恒等的に成り立ちます（表 4 で照合 計算 ）。小さいインスタントンは $\rho\Lambda$ の冪で抑えられ、$\rho \sim 1/\Lambda$ で抑えが効かなくなります。一ループの計算は 't Hooft 1976 物理 。

もう一つはエネルギー運動量テンソルの跡です。尺度変換の保存流（2-01）の発散は跡 $T^{\mu}{}_{\mu}$ で、古典の四次元では 0 です（3-03）。量子論では $\beta(g)$ に比例する $F^{a}_{\mu\nu}F^{a\,\mu\nu}$ の項が残ります（Collins–Duncan–Joglekar 1977。式は 18-04）物理 。問題文 §4 も短い距離の要件に 'the existence of a stress tensor' を含めます 既知 。

09 言えることと言えないこと

格子では、式 (7) から相関長 $\xi_{\mathrm{lat}} = 1/(am)$ どうしの比が一定値に近づくかが検査になります（5-05・5-09）。確かさを例ごとに並べます。上の四つは結合が無次元の二次元の模型で、定理になっているのは自由度が有限の模型か、切断を残した形です。

行ごとに、何が定理で何が物理かを分けておきます。デルタ井戸では、切断つきの束縛条件 (10) は初等的な計算で、切断を外した極限の作用素は数学の文献にあります。二次元 Gross–Neveu 模型（相互作用するフェルミオンの模型）では、紫外の切断を残し、成分の数 N を大きく（ただし有限に）取ると、二点関数が指数的に減衰すること、つまり質量が生じることが定理です。二次元 O(N) σ 模型（長さ 1 の N 成分ベクトルを値とする場の模型）でも、正則化した版での質量生成は定理ですが、切断を外した理論の構成は無いままです。O(3) の $8/e$ は、Bethe 仮説（二次元の可積分な模型で散乱が厳密に解けることを使う方法）の結果を摂動論と突き合わせて得た物理の値です。四次元の純 SU(3) では、比 m/Λ は格子の数値だけです。連続理論の構成は 2026-11 に公開された構成が与えましたが（委員会の評価の水準。6-00）、$\Delta > 0$ は示されていません。

表 7　次元転移の例と、数学での状態

模型	尺度	数学での状態
二次元のデルタ井戸	$K^2 e^{-4\pi/g(K)}$	切断つきは初等的な計算。切断を外した極限は束縛状態をただ一つ持つ自己共役作用素（Albeverio ほか。書誌のみ）
二次元 Gross–Neveu	非解析的な質量	切断つき・大きい有限の N で指数減衰が定理（Kopper–Magnen–Rivasseau 1995）
二次元 O(3) σ 模型	$m = (8/e)\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}$	Bethe 仮説と摂動論を突き合わせた物理の値（Hasenfratz–Maggiore–Niedermayer 1990）
二次元 O(N) σ 模型（N が大きい有限）	質量 m	紫外切断つきで質量生成（相関の指数減衰）が定理（Kopper 1999）。要求の水準の構成は、2004 年の報告の時点で無い（Douglas 2004）

模型	尺度	数学での状態
四次元純 SU(3)	$m(0^{++}) \approx 7\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}$（表 3 の目安）	格子の数値。連続理論の構成は 2026-11 に公開された構成（委員会の評価の水準）。$\Delta > 0$ は未証明

問題文は Λ に触れず、$\Delta > 0$ と、短い距離で漸近自由の予言と合うことを求めます（0-03）。理論が在ってその予言と合うなら、物理ではそこから Λ が読み取れると考えます 物理 。そのとき質量ギャップは、摂動論にも古典論にも映らない C が正だという主張です。この一尺度の使い方は 17-01・17-12 で扱います。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	式 (2)〜(4) の μ 不変性、解 (7)、$e^{-1/x}$ のテイラー係数が 0 であること、式 (10)〜(15)。既知 の計算で、表と図の数値は 計算
条件つき	「質量は Λ の定数倍」は理論が在り繰り込み群が短い距離を正しく記述する前提で 物理 。表 3 は格子からの外挿。デルタ井戸の極限の作用素は文献による（本文未確認）。d ごとの対応は類比
言えていない	四次元で Λ が定義されること、$C > 0$、表 3 の値が連続理論の量として存在すること（格子からの外挿であって定理ではない）。このサイトは質量ギャップも連続理論の構成も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
問題文・Λ の文・式 (4)	既知	A. Jaffe, E. Witten, "Quantum Yang–Mills Theory"（Clay）；PDG, PRD 110 (2024) 030001 §9.1.1；S. Capitani ほか, NPB 544 (1999) 669, hep-lat/9810063（以上本文）。W. A. Bardeen ほか, PRD 18 (1978) 3998（要旨）
由来・インスタントン	既知	D. Tong, *Gauge Theory* §2.3.1–§2.3.2・§2.9（本文）；E. J. Weinberg, 学位論文（1973）, hep-th/0507214 第 IV 章（本文）；S. Coleman, E. Weinberg, PRD 7 (1973) 1888（要旨のみ。語 dimensional transmutation の初出は未確認）
§01 の古典の定理	既知	S. Deser, PLB 64 (1976) 463；S. Coleman, CMP 55 (1977) 113 'There are no classical glueballs'（以上要旨）
§04〜§08 の文献	既知	D. J. Gross, A. Neveu, PRD 10 (1974) 3235；W. Celmaster, R. J. Gonsalves, PRD 20 (1979) 1420；G. 't Hooft, PRD 14 (1976) 3432；J. C. Collins ほか, PRD 16 (1977) 438（以上要旨）。S. Albeverio ほか, *Solvable Models in Quantum Mechanics*（Springer, 1988）第 I 部 5 章、P. Gosdzinsky, R. Tarrach, Am. J. Phys. 59 (1991) 70、L. N. Cooper, Phys. Rev. 104 (1956) 1189 は書誌のみ
表 3・表 7 の数値と例	物理	C. Morningstar, M. Peardon, PRD 60 (1999) 034509；A. Athenodorou, M. Teper, JHEP 11 (2020) 172；P. Hasenfratz, M. Maggiore, F. Niedermayer, PLB 245 (1990) 522（要旨）；C. Kopper ほか, CMP 169 (1995) 121；C. Kopper, CMP 202 (1999) 89（大きい有限の N の O(N) σ 模型。要旨）；M. R. Douglas の Clay への報告（2004）。書誌のほかは照合済みの調査の材料による

もの	種別	出典・道具
表 2〜6・図・式 (14)・式 (15)	計算	python3（RK4・scipy）。図は同じ式を JavaScript で評価。28.81・19.82 は 4-06 の値

次に読む章：4-08 ゲージ固定と Faddeev–Popov。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 4 部 量子化 ゲージ固定

ゲージ固定と Faddeev–Popov — 局所では正しく、大域では符号が打ち消し合う

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 摂動論にはゲージ固定が要り、その手順（Faddeev–Popov）が行列式とゴーストを生むこと。固定後も BRST 対称性が残り、ゲージの選び方への非依存を形式的に保証すること。軌道が条件の面と何度も交わる（Gribov のコピー）と手順が崩れ、格子では符号の打ち消し合いで 0/0 になること。

前提となる章 — 4-03（摂動論・伝播関数）と 3-04（軌道空間・Gribov のコピーの幾何・Singer の定理）。Grassmann 数（§03）、BRST のコホモロジー（§04）、Euler 標数（§08）はその場で最小限を定義します。

先に言うこと — Faddeev–Popov と BRST は摂動論の各次数で確立した道具で、非摂動の定義ではありません。図と表は平面の模型と箱の中の一定の場の計算です。この章は質量ギャップも理論の構成も示していません。

この章の順序

1. なぜ固定するのか — 軌道の向きに作用が平らで、伝播関数が作れない
2. 有限次元の手本 — 平面の回転で「1 の挿入」を行う
3. 場の理論では — 行列式を反可換な場（ゴースト）の積分に書く（寄り道：可換ならゴーストは消える）
4. BRST 対称性 — 固定した後にも残る対称性と、物理的な状態の選び方
5. コピーがあると何が起きるか — 四つの数え方を比べる（図 1・表 1。寄り道：交点を符号つきで数える）
6. Gribov 領域と基本モジュラー領域 — 凸で、どの向きにも有界
7. 箱の中の地平 — 箱が大きいほど地平は原点に近い（図 2・表 2）
8. 格子の 0/0 — 符号つきで数えると Euler 標数 0 になる

9. 質量ギャップの問題から見たゲージ固定 — 公理と構成の試みでの位置

01

なぜ固定するのか — 伝播関数が作れない

約束：ユークリッドの $\mathbb{R}^4$、$\hbar = c = 1$、エルミートな $A_\mu = A_\mu^a T^a$ と結合 g を分けて書きます（3-02 の流儀。幾何の章の接続とは $\mathcal{A} = -igA$）。

$$(D_\mu \omega)^a = \partial_\mu \omega^a + g f^{abc} A_\mu^b \, \omega^c, \qquad \delta A_\mu^a = \tfrac{1}{g} (D_\mu \lambda)^a, \qquad S = \tfrac{1}{4} \int F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \, d^4x \tag{1}$$

摂動論（4-03）は作用の二次の部分の逆を伝播関数に使います。S はゲージ変換で変わらないので、二次の部分は $A = \partial\lambda$ の向きに平らで、逆がありません。

$$S_2 = \tfrac{1}{2} \int \tfrac{d^4k}{(2\pi)^4} \, \tilde{A}_\mu^a(-k) \, K_{\mu\nu}(k) \, \tilde{A}_\nu^a(k), \qquad K_{\mu\nu} = k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu, \qquad K k = 0 \tag{2}$$

例。$k = (0,0,0,\kappa)$ なら $K = \kappa^2 \, \mathrm{diag}(1,1,1,0)$ で、第 4 成分は作用に現れません 計算 。軌道の体積（4-02 §07）が有限な Wilson の格子では固定が要りません（5-01 §06） 既知 。要るのは連続のまま $A = 0$ の周りで展開するときです。

逆が無い理由を言葉にします。経路積分 $\int \mathcal{D}A \, e^{-S}$（4-02）は、ゲージ変換で移り合う場（一つの軌道）をすべて足します。軌道の向きには e^{-S} が変わらないので、その向きのガウス積分は減衰せず、発散します。比喩で言えば、谷底が一本の溝になっていて、溝に沿ってはどこまでも平らです。正確には、二次形式 (2) の核 K が k の向きに固有値 0 を持つ、ということです。そこで、軌道の向きの積分を一つ外に取り出し、各軌道から代表を一つ選んで残りを足したくなります。その取り出し方を、まず有限次元の模型で見ます。

02

有限次元の手本 — 平面の回転で Faddeev–Popov を行う

平面の重み $e^{-S(|x|)}$ は回転 R_θ で変わらず、軌道は原点を中心とする円です。ここで回転の角 θ が「軌道の向き」に当たります。狙いは Z の値を変えずに θ の積分を表に出すことで、そのために Z の中へ 1 を書き換えたものを入れます。使うのは一変数の δ 関数の規則です。

$$\int d\theta \, \delta\big(G(\theta)\big) \, \big|G'(\theta_0)\big| = 1 \qquad (G \text{ が一点 } \theta_0 \text{ だけで } 0 \text{ になるとき})$$

条件 $G(x)=0$ が各円と一度だけ交わるなら、$\theta \mapsto G(R_\theta x)$ は一点だけで 0 になるので、次の「1 の挿入」が成り立ちます。

$$1 = \Delta_G(x) \int_0^{2\pi} d\theta\, \delta\big(G(R_\theta x)\big), \qquad \Delta_G(x) = \left| \frac{\partial}{\partial\theta} G(R_\theta x) \right|_{G(R_\theta x)=0} \tag{3}$$

これを $Z = \int d^2x\, e^{-S}$ に入れ $x \to R_\theta^{-1} x$ と変数を変えると、d^2x・S・Δ_G は回転で変わらないので θ の積分は群の体積 2π を残します。

$$Z = 2\pi \int d^2x\, \delta\big(G(x)\big)\, \Delta_G(x)\, e^{-S(|x|)} \tag{4}$$

これが Faddeev–Popov の手順のすべてで、面の上の重み Δ_G が **Faddeev–Popov の行列式**です。

例。条件を正の x_1 軸（$G = x_2$、$x_1 > 0$）にすると $\Delta_G = r$、(4) は $Z = 2\pi \int_0^\infty r\, e^{-S} dr$ で、極座標のヤコビアンです。行列式は軌道の大きさを測ります（3-04 §04 の Weyl の因子と同じ役）。

03

場の理論では — 行列式とゴースト

群を各点のゲージ変換の全体に、条件を $G^a = \partial_\mu A^a_\mu - \omega^a$ にして (3)(4) を繰り返します。$\delta G^a = \frac{1}{g}\partial_\mu (D_\mu \lambda)^a$ なので、行列式の中身は次の $\mathcal{M}$ です。定数倍 $1/g$ と符号は行列式の全体の定数になり、Z の全体の定数（期待値の比で消える）に吸収されるので落とします。

$$\mathcal{M} = -\partial_\mu D_\mu, \qquad Z = \int \mathcal{D}A\, \det\mathcal{M}\, \delta(\partial_\mu A_\mu - \omega)\, e^{-S} \tag{5}$$

ω を重み $e^{-\int \omega^2/2\alpha}$ で平均すると（母数を ξ と書く文献も多いが、この本では ξ を相関長に使うので α と書きます。4-03 と同じ字です）、δ 関数が作用の項に変わり、二次形式に逆ができます。

$$S + \tfrac{1}{2\alpha}\int (\partial_\mu A^a_\mu)^2, \qquad D^\alpha_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2}\Big(\delta_{\mu\nu} - (1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\Big) \tag{6}$$

$\alpha = 1$ が Feynman、$\alpha \to 0$ が Landau ゲージです（逆は数値で確認 計算 ）。$\det\mathcal{M}$ も作用の項にするため、反可換な数（Grassmann 数：$\theta_i\theta_j = -\theta_j\theta_i$、$\theta_i^2 = 0$）を使います。規則は $\int d\theta\, 1 = 0$、$\int d\theta\, \theta = 1$ です。$e^{-a\bar\theta\theta} = 1 + a\theta\bar\theta$ で展開が止まるので

$$\int d\bar\theta\, d\theta\, e^{-a\bar\theta\theta} = a, \qquad \int \prod_i d\bar\theta_i d\theta_i\, e^{-\bar\theta M \theta} = \det M \tag{7}$$

です 既知 。行列式が**符号つきで**出ます（§08 の 0/0 の源）。こうして行列式は反可換な場 $c^a, \bar{c}^a$（**ゴースト**。4-10 で Pauli–Villars の負の重みの状態を指す「ゴースト」とは別の意味）の積分になります。

$$\det \mathcal{M} = \int \mathcal{D}\bar{c}\,\mathcal{D}c\; e^{-\int \bar{c}^a (\mathcal{M}c)^a}, \qquad \bar{c}^a(\mathcal{M}c)^a \simeq \partial_\mu \bar{c}^a \partial_\mu c^a + g f^{abc} (\partial_\mu \bar{c}^a) A^b_\mu c^c \tag{8}$$

（$\simeq$ は部分積分。）ゴーストの伝播関数 δ^{ab}/k^2 と、$g f^{abc} p_\mu$ に比例する頂点が出ます 既知 。ゴーストは外に出る粒子ではなく、ループの中にだけ現れます（β 関数にも入る：4-06 §03）。**例**。n 成分の実のガウス積分は $(\det A)^{-1/2}$ を与えます（2-07 §02）。Feynman ゲージ（$\alpha = 1$）で $g = 0$ なら核は $k^2 \delta_{\mu\nu}$ なので、各運動量で 4 成分のゲージ場が $(k^2)^{-4/2}$、ゴーストが (7) により $(k^2)^{+1}$ を与え、合わせて $(k^2)^{-2/2}$：横波の二つの偏りだけが残ります（$4 - 2 = 2$）。

寄り道：可換ならゴーストは消える

飛ばしてよい小節です。

$U(1)$ では $f^{abc} = 0$ で $\mathcal{M} = -\partial^2$ は A に依らず、$\det \mathcal{M}$ は定数として比の中で消えます。ゴーストは要りません。非可換では $\mathcal{M}$ が A に依るので、行列式が場と結合し、ゴーストのループが図に加わります。Faddeev–Popov（1967）の要旨は、ゲージ不変な場の理論では閉じたループの規則を変えねばならないことを Feynman と DeWitt が示した、と書いています 既知 。規則の変更が要るのは、この $\mathcal{M}$ が A に依る場合です。

04
BRST 対称性 — 固定した後に残る対称性

固定した作用にも、ゲージ場とゴーストを混ぜる反可換な対称性 s が残ります（補助場 b^a を足す）。

$$sA^a_\mu = (D_\mu c)^a, \quad sc^a = -\tfrac{g}{2} f^{abc} c^b c^c, \quad s\bar{c}^a = i b^a, \quad s b^a = 0; \qquad S + \int s\Psi, \;\; \Psi = \bar{c}^a \big(\partial_\mu A^a_\mu - \tfrac{i\alpha}{2} b^a\big)$$

$s\Psi = i b\, \partial A + \frac{\alpha}{2} b^2 + \bar{c}\, \mathcal{M} c$ で、b を積分すると (6)(8) に戻ります。$sS = 0$ と冪零性 $s^2 = 0$（Jacobi 恒等式）から、形式的に二つが出ます 既知 。

- **ゲージの選び方に依らない**。Ψ を変えると作用は $s(\delta\Psi)$ だけ変わり、s で消える O には $\langle O\, s(\delta\Psi)\rangle = \langle s(O\delta\Psi)\rangle = 0$。Becchi–Rouet–Stora（1976）の要旨は、半単純な群で、すべての場が質量を持つ線形のゲージでは Slavnov 恒等式（s の対称性を相関の間の関係に書いたもの）が繰り込まれた摂動論の全次数で成り立つと示し、例として調べた SU(2) Higgs–

Kibble 模型では物理的な S 作用素がユニタリでゲージのパラメータに依らないことを摂動の意味で示した、と書きます（1975 年の論文は可換な Higgs–Kibble 模型）。質量ゼロの純ヤン–ミルズについての結論ではありません。

- **物理的な状態**。s は状態に働く演算子 Q_B（BRST 電荷。$Q_B^2 = 0$）になります。共変なゲージでは状態空間が不定計量（内積 $\langle \psi, \psi \rangle$ が負や 0 になりうる）で、そのままでは確率の解釈ができません。そこで物理的な状態を $\operatorname{Ker} Q_B / \operatorname{Im} Q_B$（BRST のコホモロジー）とします。これは「$Q_B$ で消える状態を、Q_B の像の分だけ同一視したもの」です。$Q_B^2 = 0$ なので像 $\operatorname{Im} Q_B$ は核 $\operatorname{Ker} Q_B$ に含まれ、商が作れます。像に入る状態は物理的な状態との内積が 0 になるので、同一視で落としても測れる量は変わらない、というのが狙いです。負や 0 のノルムの状態（時間成分・縦成分の偏り、ゴースト）がこうして落ち、残る空間の内積が正になることが期待されます。S 作用素は散乱の前と後の状態をつなぐ作用素で、ユニタリ性は確率の合計を保つこと（2-05 §02 の e^{-itH} と同じ性質）です。Kugo–Ojima（1979）の要旨は、局所共変な演算子形式（理論とその漸近場が在ることを前提にした枠組み）の中で、BRS 電荷の代数から物理的な S 行列のユニタリ性を示したと書きます 物理 。理論そのものが在ることは仮定で、連続の理論での同一性は示されていません（§09）。

「BRST」は Becchi・Rouet・Stora と Tyutin の頭文字とされます。**例**。場を定数とした部分で s^2 を記号計算すると、SU(2)・SU(3) とも $s^2 A^a$・$s^2 c^a$ は 0 項でした。sc の係数 $-\frac{1}{2}$ を -1 に変えると $s^2 A^a$ に 2 項・25 項が残ります 計算 。

05

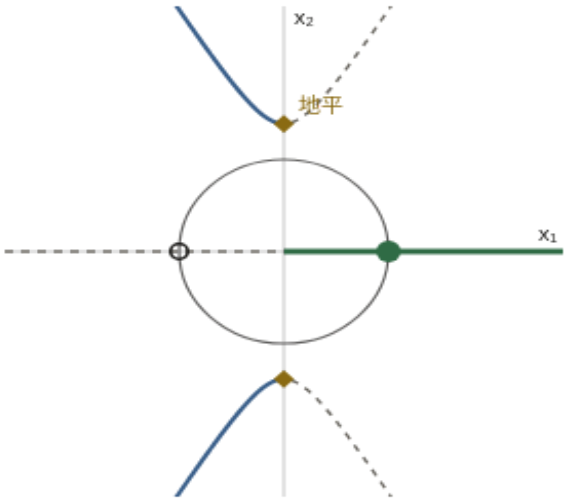
コピーがあると何が起きるか — 四つの数え方

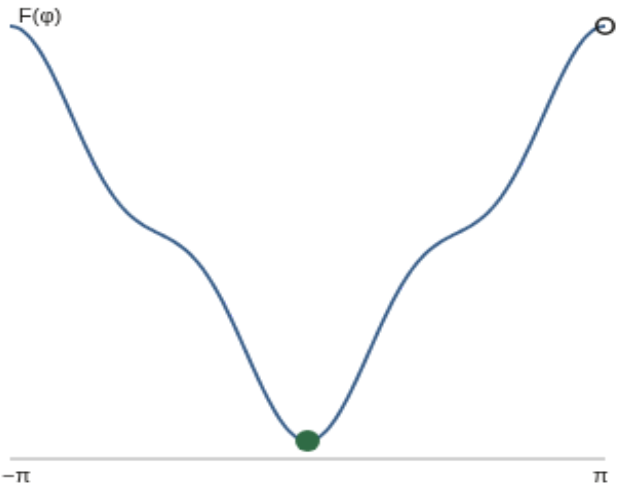
(3) の「一度だけ」が崩れる場合を作ります。Landau ゲージ（3-04 §05）に倣い円の上の F の臨界点を代表にし、$M = \partial_\varphi^2 F$ を行列式、極小の集まりを Gribov 領域の類比とします。

$F = -r\cos\varphi - c\,r^2\cos 3\varphi$ ：　$r < r_* = \frac{1}{3c}$ でコピー 2（極小 1・極大 1），　$r > r_*$ で 0（極小

大きい場で極小と極大の組が生まれ、その点 $(0, \pm r_*)$ で $M = 0$（地平の類比）です。重み $e^{-r^2/2}$ で r^2（真の期待値 2）を四通りに数えます（$|M|$ と M の違いは この節の寄り道）：(i) $|\det|$ で全コピー、(ii) Gribov 領域（極小）だけ、(iii) F の最小だけ（基本モジュラー領域）、(iv) 符号つき（BRST の数え方）。

図 1　c と r を動かすと、平面（左か上）の条件の面と軌道の交点（コピー）と、円の上の F(φ)（右か下）が変わる。● 極小（Gribov 領域）、○ 極大、緑 ● 最小（基本モジュラー領域）、◇ 地平





c = 0.20・r = 1.20：コピー 2（極小 1・極大 1）、符号の和 0　r* = 1.667

⟨r²⟩：真 2.000・|det| 2.924・Gribov 領域 2.924・最小 2.000・符号つき 0/0

計算 この図の数値はこの端末で計算した（式 (10) と表 1 の閉じた式をその場で評価。表 1 は臨界点を数える総当たりと差 0.004 以下）。

表 1　$\langle r^2 \rangle$ の四つの数え方（真の値 2）。閉じた式 $\frac{4+8e^{-u}(1+u)}{2+4e^{-u}}$、$u = 1/(18c^2)$

c	r_*	(i) $\lvert\det\rvert$	(ii) Gribov 領域	(iii) 最小	(iv) 符号つき
0.08	4.167	2.005896	2.005896	2	0/0
0.20	1.667	2.924325	2.924325	2	0/0
0.50	0.667	2.273601	2.273601	2	0/0

コピーの数が軌道で変わると (i) はずれ、領域の中にコピーが残る (ii) も直りません。(iii) は正しいが、最小の選択は大域的な比較で局所的な条件では書けません。(iv) は極小と極大が同数なので 0/0 です。

例。(i) のずれ $4ue^{-u}/(1+2e^{-u})$（$c = 0.05$ で 2×10^{-8}）は c の冪でどの次数も 0 で、4-07 §05 の $e^{-1/x}$ と同じ型です 計算 。

寄り道：交点を符号つきで数える

飛ばしてよい小節です。(10) の $|M|$ と M の違いを、円の上の一変数で見ます。

群を円周 $\theta \in [0, 2\pi)$、条件を周期関数 $f(\theta) = 0$ とし、零点を θ_i（そこで $f' \neq 0$）とします。δ 関数の規則 $\int \delta(f)\, u\, d\theta = \sum_i u(\theta_i)/|f'(\theta_i)|$ から

$$\int_0^{2\pi} d\theta\, \delta\big(f(\theta)\big)\, |f'(\theta)| = \#\{\theta_i\}, \qquad \int_0^{2\pi} d\theta\, \delta\big(f(\theta)\big)\, f'(\theta) = \sum_i \operatorname{sign} f'(\theta_i) = 0 \tag{10a}$$

です。右が 0 なのは、周期関数は上向きに 0 を横切る回数と下向きに横切る回数が等しいからです。
例：$f(\theta) = \sin(\theta - \theta_A)$ では交点が二つで、左は 2、右は $1 - 1 = 0$ です。絶対値を付ければ交点の数

が、付けなければ符号の相殺が残ります。格子で BRS 不変なゲージ固定を非摂動で行うときの障害（Neuberger 1987。要旨は形式的には連続にもあると書く）との関係は §08 で扱います。

06

Gribov 領域と基本モジュラー領域 — 凸で、どの向きにも有界

Gribov（1978）の要旨は、非可換では $\partial_\mu A_\mu$ を固定してもゲージは固定されず、FP 行列式が正の範囲に制限すれば足りるらしい、と書きます [既知]。Landau ゲージをノルム $\|A^g\|^2$ の停留点と読むと

$$\Omega = \{\partial_\mu A_\mu = 0,\ \mathcal{M}(A) > 0\}\ \text{(極小)}, \qquad \Lambda = \{A:\ \|A\| \le \|A^g\|\ \forall g\}\ \text{(最小)}, \qquad \Lambda \subset \bar{\Omega} \tag{11}$$

Ω が **Gribov 領域**、境界が **地平**、Λ が **基本モジュラー領域**です [既知]。$\bar{\Omega}$ は Ω の閉包（境界も含めたもの）です。Ω は $\mathcal{M} > 0$ で開いた集合、Λ は $\le$ で閉じた集合で、Λ の境界には地平に接する点がある（van Baal、§07）ので、閉包で書きます。

- **凸**。$\mathcal{M}(A)$ は A について一次なので、「すべての ω で $\langle \omega, \mathcal{M}(A)\omega\rangle > 0$」は半空間の共通部分です。Zwanziger（1982）の要旨も 'convex region Ω which is bounded in every direction' と書きます。Λ も凸です（van Baal 1997 の節 "Complete gauge fixing"）。
- **どの向きにも有界**（Zwanziger 1982 の要旨）。有限次元での筋：$\mathcal{M}(tA) = \mathcal{M}_0 + t\mathcal{M}_1$ の $\mathcal{M}_1$ は跡 0（$f^{aba} = 0$）の対称行列で負の固有値を持つので、大きな t で正でなくなる。
- **どの軌道も地平の内側を通る**（Dell'Antonio–Zwanziger 1991 の要旨：ノルムは各軌道で最小に達し、そこで軌道は地平の内側と交わる）。
- **Ω の中にもコピーは残る**。Zwanziger（2004）はそれが期待値に影響しないと主張しています [物理]。

図 1 の実線が Ω、正の x_1 軸が Λ の類比です。伝播関数への影響は 17-02 §07。

07

箱の中の地平 — 一定の背景場での固有値

一辺 L の周期的な箱で SU(2) の一定の場 $A^a_\mu = a\,\delta^{a3}\delta_{\mu 1}$ を取ると、$\mathcal{M}$ は平面波 $p = 2\pi n/L$ で対角化でき、色の 3 番（中性）と $\omega^1 \pm i\omega^2$（荷電）に分かれます。

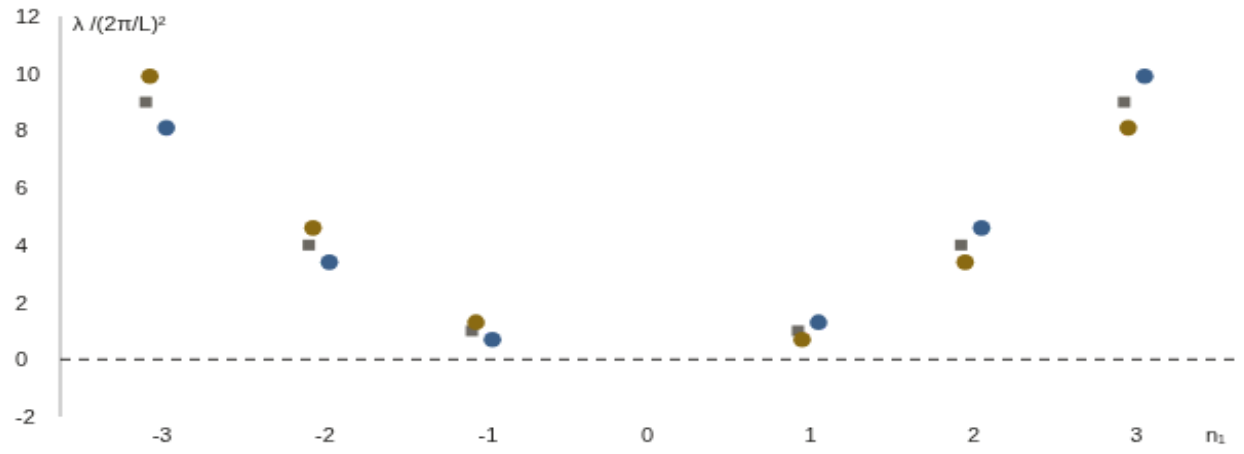
$$\lambda_{\text{中性}} = \left(\tfrac{2\pi}{L}\right)^2 |n|^2, \qquad \lambda_\pm = \left(\tfrac{2\pi}{L}\right)^2 \left(|n|^2 \pm s\, n_1\right), \qquad s = \frac{gaL}{2\pi} \tag{12}$$

最小の非自明な固有値（$n = 0$ は除く）は $n = (\pm 1, 0, 0, 0)$ の $1 - s$ で、地平は

$$g\,a_{\mathrm{h}} = 2\pi/L \;\longrightarrow\; 0 \quad (L\to\infty) \tag{13}$$

です。van Baal（1997 の節 "Gauge fields on the three-torus"）は三次元のトーラスの Coulomb ゲージで同じ計算を $C = gaL$ で行い、Gribov 領域が $|C_k| \le 2\pi$ の立方体、捩れた（反周期的な）ゲージ変換による $A=0$ のコピーが地平の上にあることを示しています 既知 。基本モジュラー領域は、反周期的な変換も同一視するとき（純ヤン–ミルズ）は $|C_k| \le \pi$（$s \le \tfrac{1}{2}$）です。基本表現の場（クォーク）があって周期的な変換しか許されないときは $|C_k| \le 2\pi$（$s \le 1$）で、その境界は地平に接します 既知 。

図 2　s（背景の大きさ）を動かすと、FP 作用素の固有値（単位 (2π/L)²、横向きの n は 0）が動く。灰は中性、青と橙は荷電、赤は負。読み出しの「Λ の境界（s = 0.5）」は反周期的な変換も同一視するときの値（周期的な変換だけなら s = 1）



s = 0.30：最小の非自明な固有値 0.70 ×(2π/L)² → Λ と Ω の中

計算 この図の数値はこの端末で計算した（式 (12) をその場で評価）。$s = 0$・0.5・1・2 で最小の非自明な固有値は 1・0.5・0・−1（順に $A=0$・基本モジュラー領域の境界〔反周期的な変換も同一視するとき〕・地平・周期的な変換による $A=0$ のコピー）。

格子でも確かめました。L^4 格子で 1 の向きのリンクを $e^{i\theta\sigma_3/2}$ とし、Landau ゲージの汎関数 $\sum(1-\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,g_x U_{x,\mu} g^\dagger_{x+\mu})$ の二階微分を運動量ごとに対角化すると、荷電の固有値は $\tfrac{1}{2}[\cos\tfrac{\theta}{2} - \cos(p_1 \pm \tfrac{\theta}{2})] + \tfrac{1}{2}\sum_{\nu\neq 1}(1-\cos p_\nu)$ に一致しました（格子間隔 1 で $\theta = ga$）。

表 2　格子の FP 行列の地平（二分法）

L	4	8	16	32
$\theta_{\mathrm{h}} L/2\pi$	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

計算 python3・NumPy。閉じた式との差は 3×10^{-16} 以下。

箱が大きいほど長い波長の向きの地平は原点に近く、Gribov の要旨はこの制限が赤外の特異性を打ち消し遠距離の線形な相互作用につながると書きます 物理 。四次元の測度の定理にはなっていません。

```
08
```

格子の 0/0 — 符号つきで数えると消える

ゴーストは $\det \mathcal{M}$ を絶対値なしで与えました（式 (7)）。したがって BRST 対称なゲージ固定の積分は、一つの軌道の上のコピーを $\operatorname{sign}\det \mathcal{M}$ **つきで**数えます。

$$Z_{\mathrm{GF}}[U] = \int \prod_x dg_x \, \delta\big(G(U^g)\big) \det \mathcal{M}(U^g) = \sum_{\text{コピー}} \operatorname{sign}\det \mathcal{M} = \chi(G)^N = 0 \qquad (14)$$

ここで使う言葉を定義します。**Euler 標数** χ：コンパクトで境界の無い多様体（1-05）の上の滑らかな関数の臨界点（二階微分の行列が退化しないもの）を、その行列の行列式の符号（負の固有値が偶数個なら $+1$、奇数個なら -1）をつけて足した数です。この数は関数の選び方によりません（Poincaré–Hopf の定理）。円では極小が $+1$、極大が -1 で $\chi(S^1) = 0$、球面では $\chi(S^2) = 2$ です。正の次元のコンパクトで連結なリー群 G では $\chi(G) = 0$ で、積の空間では $\chi(G^N) = \chi(G)^N$ です [既知]。**Morse 理論**は、このように臨界点を数えて多様体の形を読む理論の名前です。

最後の二つの等号は符号の和を G^N（N は格子点の数）の Euler 標数と読むもので（Schaden 1999 の Morse 理論の解釈、Mehta ほか 2014 の式 (2)。臨界点が退化しない軌道で）、$\chi(G) = 0$ です [既知]（7-11 §05）。ゲージ不変な量の期待値は 0/0 です。Mehta らはこれを「Neuberger の 0/0 問題」と呼んで Neuberger の 1986 年と 1987 年の論文を引き、1987 年の論文の要旨は、非摂動で出会うこの障害は形式的には連続の定式化にも在る、と述べます [既知]。

例。図 1 の「符号の和 0」がその最小版です（$\chi(S^1) = 0$）。同じ要旨は、摂動展開のどの次数でも格子の BRS 不変性は局所ゲージ不変性の代わりを果たすとも論じます。符号の打ち消し合いは摂動のどの次数にも映らないからで、§05 の例の $e^{-1/(18c^2)}$ と同じ型です。回避の道は数え方を取り替えます [既知]。

- **固定しない**（Wilson の格子。Elitzur の定理：18-02 §09）か、Gribov 問題の無い最大木のゲージ（3-04 §08）。
- **立体射影による修正 Landau ゲージ**：リンクの変数を立体射影で平らな座標に写してから汎関数を作る（von Smekal ほか 2007。要旨：コンパクトな $U(1)$ では Gribov 問題を解き、最大可換部分群に使えば $SU(N)$ の 0/0 を避けられるかもしれない。Landau ゲージの連続極限は変わらない）。
- **オービフォールド化**：ゲージ固定に使う群の多様体を、特異な点を許す多様体の一般化（オービフォールド）に取り替え、その上の Morse 理論で数える（Mehta ほか 2014。要旨：分配関数が軌道に依らなくなる）。

- **質量で正則化**：ゲージ場とゴーストに質量項（Curci–Ferrari 質量）を足した作用で数え、0/0 を正則化する（Ghiotti–von Smekal–Williams 2006、要旨）。**剰余空間**：群の全体ではなく $SU(2)/U(1)$（球面 S^2 で $\chi = 2$）の上で数える BRST（Schaden）。

発散の代数との比較は 7-12。

09

質量ギャップの問題から見たゲージ固定

問題文が求めるのはゲージ不変な局所場（$\mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$ など）の相関と、再構成したハミルトニアンのギャップです（0-03）。ゲージ固定は摂動論では必須の道具です（§04）。それ以外では次の位置にあります 既知 。

- **公理との関係**。確率の解釈に要る正値性（反射正値性。4-10 で定義）は、共変なゲージで固定した場には期待できません。共変なゲージでは不定計量の状態空間を使うこと（§04）は既知の枠組みで、Magnen–Rivasseau–Sénéor 1993 は Feynman ゲージのような共変なゲージは正値性を欠くので構成の最初からは使えないと書きます（4-10 §09）。そのため再構成はゲージ不変な量から行います。BRST のコホモロジーとその正定値の空間の同一性は連続では示されていません（18-02 の「物理的状態」の項）。
- **構成の試み**では局所的に使います。Bałaban について問題文の解説は 'The choices vary locally in space-time, as well as on different length scales.' と書きます（Jaffe–Witten §6.5、7-05・7-07）。二次元の Chevyrev–Shen も格子のゲージ固定を使います（要旨、7-09）。

Singer の定理が禁じるのは連続な大域的な切り口だけで、0/0 も格子全体で共変なゲージを BRST 対称に固定したときの現象です。ゲージ不変な相関の四次元の連続極限は、2026-11 に公開された構成が相関関数の水準で作りました（委員会の評価の水準。6-00）。残る問いは、その測度が在るか、スペクトルに隙間があるかです（6-04）。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	(3)〜(9) の形式的な導出 既知 。表 1・表 2・図の数値・s^2 の記号計算 計算 。寄り道の (10a) 紙 （初等的）

	内容
条件つき	Slavnov 恒等式は質量を持つ線形のゲージで摂動論の全次数、ユニタリ性とゲージへの非依存は Higgs–Kibble 模型で摂動の意味で。Kugo–Ojima のユニタリ性は理論の存在を前提にした枠組みの中で 物理 。Gribov 領域の性質は要旨の水準で確認。(14) は退化しない軌道で。赤外への影響は 物理
言えていない	四次元の連続の理論でのコピーの配置、基本モジュラー領域の上の測度、BRST と OS の空間の同一性。Neuberger の論証は要旨の範囲まで。このサイトは質量ギャップも連続理論の構成も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
手順・Gribov のコピー	既知	L. D. Faddeev, V. N. Popov, Phys. Lett. B 25 (1967) 29；V. N. Gribov, Nucl. Phys. B 139 (1978) 1（要旨）
BRST・ユニタリ性	既知	C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, Commun. Math. Phys. 42 (1975) 127（可換な Higgs–Kibble 模型。書誌のみ）；Ann. Phys. 98 (1976) 287（要旨）；T. Kugo, I. Ojima, Prog. Theor. Phys. Suppl. 66 (1979) 1（要旨）。I. V. Tyutin, arXiv:0812.0580（書誌のみ）
Gribov 領域	既知	D. Zwanziger, Nucl. Phys. B 209 (1982) 336；G. Dell'Antonio, D. Zwanziger, Commun. Math. Phys. 138 (1991) 291；D. Zwanziger, Phys. Rev. D 69 (2004) 016002（要旨）；P. van Baal, hep-th/9711070（本文の節 "Complete gauge fixing"・"Gauge fields on the three-torus"）
格子の 0/0 と回避策	既知	H. Neuberger, Phys. Lett. B 175 (1986) 69（書誌のみ）；Phys. Lett. B 183 (1987) 337（要旨のみ）；D. Mehta, N. S. Daleo, J. D. Hauenstein, C. Seaton, Phys. Rev. D 90 (2014) 054504, arXiv:1406.6678（要旨・本文 §I・§II）；M. Schaden, Phys. Rev. D 59 (1999) 014508（書誌のみ）；L. von Smekal ほか arXiv:0710.2410（要旨）；M. Ghiotti ほか hep-th/0611058（要旨）
§09 の引用	既知	A. Jaffe, E. Witten, "Quantum Yang–Mills Theory"（Clay）§6.5；I. Chevyrev, H. Shen, arXiv:2302.12160（要旨）；J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, Commun. Math. Phys. 155 (1993) 325（4-10 §09 の引用による）
表・図・§01 §03 §04 の数値	計算	python3・NumPy（toy_fp・box_horizon・lattice_formula_check・brst_nilpotent・propagator_check）。図は式 (10)(12) を JavaScript で評価

次に読む章：4-09 場の量子論の公理。

場の量子論の公理 — 「理論が在る」を七つの条件で言い、無限個の自由度が表現を選ばせる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 問題文が「存在」の中身に挙げる Wightman の公理の七つの条件と、それぞれが締め出すもの。相関関数の全体から状態空間と場を組み立て直せること。自由度が無限個だと真空が Fock 空間に入らないことがあり、それが Haag の定理として相互作用表示を締め出すこと。

前提となる章 — 1-10 ヒルベルト空間と自己共役作用素・2-06 調和振動子と生成消滅。テスト関数と超関数（1-11）、光円錐とローレンツ変換（2-04）も使いますが、使う箇所で一行ずつ定義します。$\hbar = c = 1$。時空の点 $x = (t, x)$ の長さの二乗を $x^2 = -t^2 + |x|^2$ と書き、計量の符号 $(-,+,+,+)$ はこの符号の並びを指します。

先に言うこと — 既知の枠組みの紹介で、証明は筋だけです。四次元で公理を満たす非自明な理論は知られていない、と 2000 年の問題文 §6 は書きます。四次元のヤン–ミルズについては 2026-11 に公開された構成が作りました（委員会の評価の水準。09 節）。この章はヤン–ミルズについて何も示していません。数値は自由場のものです。

この章の順序

1. なぜ公理か — 作ったかを判定する条件
2. 場は点で値を持たない — 平均してから作用素にする（表 1）
3. Wightman の公理 — 七つの条件（表 2）
4. Wightman 関数と再構成 — 相関から理論を組み立てる
5. 局所性 — 可換と無相関は違う（図 1・表 3）
6. 公理から出ること — PCT・スピンと統計・クラスター性。寄り道：真空はどこにでも届く
7. 無限自由度の表現 — 粒子の数が無限なら同じ空間に入らない（図 2・表 4）
8. Haag の定理 — 相互作用する場を自由場の空間に置けない

9. ゲージ理論で起きること — 観測量・正値性・公理の形

01

なぜ公理か — 作ったかを判定する条件

物理の教科書は、相互作用する場の理論が在ると仮定して計算します（4-03）。数学の問いはその手前です。何を作れば「在る」と言えるかを先に決めなければ、作ったかどうかを判定できません。公理は、その判定の条件の一覧です。

問題文 §3 は量子場を 'an operator-valued generalized function on space-time obeying certain axioms' と定義し、'Gårding and Wightman gave mathematically precise axioms for quantum field theories on R4 with a Minkowski signature, see [45]' と続けます。§4 は存在の中身を、[45]（Streater–Wightman の本）と [35]（Osterwalder–Schrader の二論文）の公理と少なくとも同じ強さの性質とします（0-03）既知。作るべきものは次の四つ組です。

$$\mathcal{T} = (\mathcal{H},\ U,\ \Omega,\ \phi) \qquad \text{状態の空間・対称性の表現・真空・場} \tag{1}$$

例。一粒子の量子力学（2-05）では $L^2(\mathbb{R})$・e^{-itH}・基底状態・位置の作用素がこの四つで、初めから手元にあります。場の理論で新しいのは、対称性が Poincaré 群（平行移動とローレンツ変換。2-04）であること、場が一点で値を持たないこと（02 節）、自由度が無限個で $\mathcal{H}$ が一つに決まらないこと（07 節）です。虚時間の側の公理は 4-10 で扱います。

02

場は点で値を持たない — 平均してから作用素にする

2-06 §08 の自由な場を空間全体に置くと、一点の値 $\phi(x)$ の二乗の真空期待値は、全モードの零点のゆらぎの和になって発散します。関数 f で平均した $\phi(f) = \int \phi(x) f(x)\, d^D x$（$D$ は空間の次元）なら有限です 既知。

$$\langle \Omega, \phi(f)^2\, \Omega \rangle = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{|\hat{f}(p)|^2}{2\omega_p}, \qquad \omega_p = \sqrt{p^2 + m^2} \tag{2}$$

$\hat{f}(p) = \int f(x)\, e^{-ip\cdot x}\, d^D x$ はフーリエ変換で、f を波数 p の波に分けたときの振幅です（1-11）。幅 ε の f は $|p| \gtrsim 1/\varepsilon$ のモードを消し、$\varepsilon \to 0$ では (2) は発散します。例。正規化したガウス関

数（$\hat{f} = e^{-\varepsilon^2 p^2/2}$）では、$D=1$ で (2) は $e^{\varepsilon^2 m^2/2} K_0(\varepsilon^2 m^2/2)/(4\pi)$（$K_0$ は 05 節）で対数的に、$D=3$ では $1/(8\pi^2\varepsilon^2)$ のように増えます。

計算 表 1　幅 ε のガウス関数で平均した自由場の $\langle \phi(f)^2 \rangle$（$m=1$、(2) の数値積分）。括弧内は $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{m\varepsilon}$ と $\frac{1}{8\pi^2\varepsilon^2}$

$m\varepsilon$	$D=1$	$D=3$
0.1	0.43302（0.36647）	1.2383（1.2665）
0.01	0.79736（0.73294）	126.59（126.65）
0.001	1.16379（1.09940）	12665（12665）

$D=1$ の差は $(\ln 2 - \gamma/2)/(2\pi) = 0.06439$（$\gamma$ は Euler の定数）に近づきます 計算 。どの $\varepsilon > 0$ でも有限で、$\varepsilon = 0$ だけが意味を持ちません。そこで場を、テスト関数 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ から作用素 $\phi(f)$ への線形写像と定義します。これが作用素値超関数です。$\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ は、滑らかで、自身もどの階の導関数も $|x|$ のどの冪よりも速く減る関数の空間です（1-11）。空間だけでなく時空で平均するのは、相互作用する場では時刻を固定した場が意味を持つとは限らないとされるからです。場の強さの繰り込み（4-04）が要る理論では、時刻を固定して空間で平均しただけでは (2) に当たる量が有限になりません 既知 。

03

Wightman の公理 — 七つの条件と、締め出すもの

公理は (1) の各部品に課す条件です。番号は本ごとに違うので、この本では番号でなく条件の名前で呼びます。表 2 は実数値のスカラー場一つの場合です 既知 。

表 2　Wightman の公理（中性のスカラー場。Streater–Wightman の形の要約）

番号	条件	中身	締め出すもの
1	状態と対称性	可分なヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に Poincaré 群の強連続なユニタリ表現 $U(a,\Lambda)$	不定の内積（09 節）
2	スペクトル条件	$P^\mu = (H, P)$ の同時スペクトルが $\overline{V}_+$ に入る（式 (3)）	負のエネルギー
3	真空の一意性	U で不変な単位ベクトル Ω が位相を除いて一つ	真空の混ざり
4	場の公理	$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ ごとに $\phi(f)$ が稠密な $\mathcal{D} \ni \Omega$ で定まり $\phi(f)\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$、$\langle \psi, \phi(f)\chi \rangle$ は緩増加超関数、$\phi(f)^* \supset \phi(\bar{f})$	点の値（02 節）
5	共変性	$U(a,\Lambda)\phi(f)U(a,\Lambda)^{-1} = \phi(f_{a,\Lambda})$、$f_{a,\Lambda}(x) = f(\Lambda^{-1}(x-a))$	特別な座標系
6	局所可換性	f, g の台が空間的に離れていれば $[\phi(f), \phi(g)] = 0$	光より速い影響（05 節）
7	巡回性	$\phi(f_1)\cdots\phi(f_n)\Omega$ の一次結合が $\mathcal{H}$ で稠密	場と無関係な状態

表の言葉を一行ずつ定めます。**稠密**：$\mathcal{H}$ のどの元にも、その集合の元でいくらでも近づけること。**可分**：可算個のベクトルの一次結合の全体が稠密になること。$U(a,\Lambda)$ は、時空の平行移動 a とローレンツ変換 Λ（x^2 を保つ一次変換。2-04 §02）の組に割り当てたユニタリ作用素で、**強連続**とは (a,Λ) が単位元に近づくとき、どの ψ でも $U(a,\Lambda)\psi \to \psi$ となることです。**緩増加超関数**は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ の上の連続な線形汎関数です。二点 x, y が**空間的に離れている**とは $(x-y)^2 > 0$、つまり光の信号で結べないことで、$x^2 = 0$ の面が原点の**光円錐**です（2-04 §03）。

$$\sigma(P) \subset \overline{V}_+ = \{\, p = (p^0, p) \;:\; p^0 \geq |p| \,\} \tag{3}$$

(3) から $H \geq 0$ が出て、質量の作用素 $M = \sqrt{H^2 - P^2}$ が意味を持ちます（4-11 §05）。問題文 §3 の要約は、状態と対称性の公理・スペクトル条件（'positive energy, 0 ≤ H'）・真空の一意性（'unique up to a phase'）・共変性・局所可換性を名指しします 既知 。スピン 1/2 の場では Poincaré 群の二重被覆（ローレンツ変換一つに二つの元が対応する群。1-02 の $SU(2) \to SO(3)$ の四次元版）を使い、局所可換性はフェルミオンどうしで反交換 $\phi(f)\phi(g) + \phi(g)\phi(f) = 0$ になります。例。質量 m の自由場は七つを満たし、スペクトルは $\{0\}$・双曲面 $p^0 = \sqrt{p^{\,2} + m^2}$・$p^0 \geq \sqrt{p^{\,2} + 4m^2}$ の和です（2-06 §08 の図 4）。

04

Wightman 関数と再構成 — 相関から理論を組み立てる

場の積の真空期待値を Wightman 関数と呼びます。場の公理（表 2）により緩増加超関数です。

$$W_n(x_1, \ldots, x_n) = \langle \Omega,\; \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\, \Omega \rangle \tag{4}$$

七つの条件は W_n の性質に翻訳されます。Poincaré 不変性、スペクトル条件、局所性（空間的に離れた隣どうしを入れ替えてよい）、正値性です。正値性は $\Psi = \sum_n \phi(f_n)\Omega$（$\phi(f_n) = \int f_n\, \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\, dx$）の長さが負でないことで、$(\phi(x_1)\cdots\phi(x_n))^* = \phi(x_n)\cdots\phi(x_1)$ から

$$\|\Psi\|^2 = \sum_{n,k} \int \overline{f_n(x_1,\ldots,x_n)}\; W_{n+k}(x_n,\ldots,x_1,y_1,\ldots,y_k)\; f_k(y_1,\ldots,y_k)\, dx\, dy \;\geq 0 \tag{5}$$

再構成定理 既知 。これらを満たす $\{W_n\}$ があれば、それを Wightman 関数とする理論 (1) がユニタリ同値を除いて一つ作れます。Wightman 1956 の要旨は 'The problem of determining a theory of a neutral scalar field given its vacuum expectation values is posed and solved.' と書きます。作り方は 4-10 §05 と同じ型で、テスト関数の有限列 $(f_0, f_1, \ldots)$ に (5) を内積として入れ、長さ 0 を割って完備化すると $\mathcal{H}$ です。$\Omega = (1, 0, 0, \ldots)$ で、$\phi(g)$ は各成分を、g を先頭に付けた関数に置き換える操作です（$(g \otimes f_1)(x_0, x_1) = g(x_0) f_1(x_1)$）。

$$\phi(g)\colon (f_0, f_1, f_2, \dots) \longmapsto (0,\ g\,f_0,\ g\otimes f_1,\ g\otimes f_2, \dots)$$

スペクトル条件からは解析性が出ます。時空のテスト関数 f で $\psi=\phi(f)\Omega$ と置き、ρ を ψ に対する H のスペクトル測度（1-10 §05）とします。Ω は時間発展で変わらないので、左辺は二点の Wightman 関数の片方の場を時刻 t だけずらして平均したものです。

$$\langle \psi,\ e^{-itH}\,\psi\rangle = \int_{[0,\infty)} e^{-iEt}\,d\rho(E) \xrightarrow{\ t=-i\tau\ } \int_{[0,\infty)} e^{-E\tau}\,d\rho(E) \tag{6}$$

$E\ge 0$ なので $\operatorname{Im} t<0$ へ解析的に延び、$t=-i\tau$ で振動が減衰に変わります。これが虚時間の相関で、要旨は 'The vacuum expectation values are shown to be boundary values of analytic functions.' と書きます。この向きが 4-02 のユークリッド化の厳密な形、逆向きが 4-10 です 既知 。例。自由場では W_n は W_2 の積を対の組み方すべてで足したもので、再構成すると 2-06 の Fock 空間が出ます。

05

局所性 — 可換であることと、相関が無いことは違う

局所可換性は、光で結べない二点の場は互いに邪魔しない、という要求です。そのような二点の時間の順序は観測者で入れ替わるので（2-04 §03）、作用素の順序が効くと矛盾します。局所可換性は相関が 0 だとは言っていません。空間一次元の自由場で比べます。

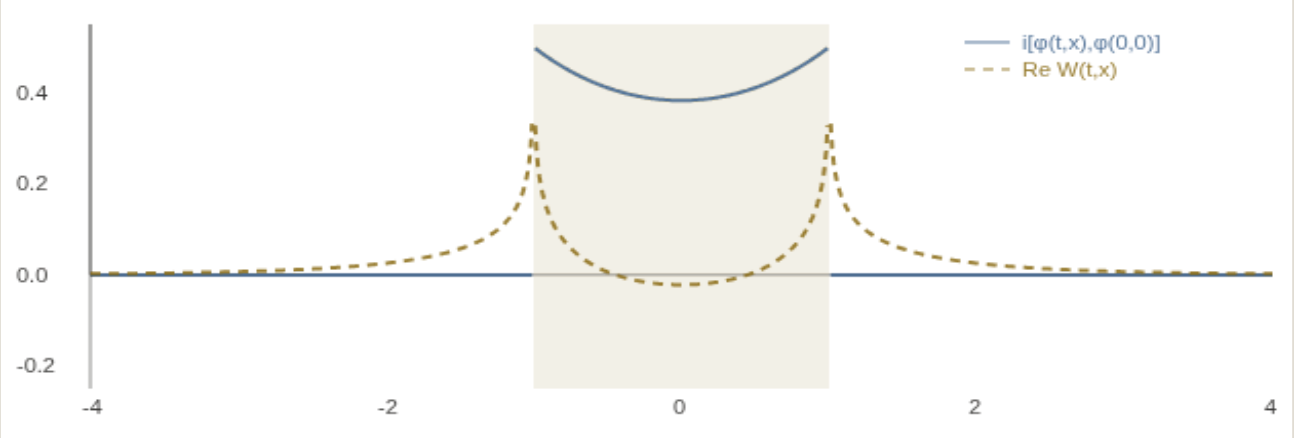
$$W(t,x)=\langle \Omega,\phi(t,x)\phi(0,0)\Omega\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2\pi\cdot 2\omega_p}\,e^{-i(\omega_p t-px)} \tag{7}$$

$$i\,[\phi(t,x),\phi(0,0)] = i\big(W(t,x)-W(-t,-x)\big) = \tfrac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)\,\theta(t^2-x^2)\,J_0\big(m\sqrt{t^2-x^2}\big) \tag{8}$$

$$W(0,x)=\frac{1}{2\pi}K_0(m|x|),\qquad K_0(z)\approx\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\quad(z\to\infty) \tag{9}$$

θ は階段関数、$J_0(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin\vartheta)\,d\vartheta$ と $K_0(z)=\int_0^\infty e^{-z\cosh u}\,du$ は Bessel 関数です。(8) の θ が局所可換性で、光円錐の外で交換子は 0 です。ところが (9) の相関は外でも 0 でなく、距離とともに e^{-mr} で減ります。この減り方が質量ギャップの空間の向きの顔です（4-11 §06）。ユークリッドに移ると空間の向きと虚時間の向きは回転で移り合うので、(6) の虚時間の減衰と同じ速さになります（4-11 §02）。四次元では $W(0,x)=mK_1(mr)/(4\pi^2 r)$ です 計算 。

図 1　時刻 t と質量 m を変えると、1+1 次元の自由場の交換子 $i[\phi(t,x),\phi(0,0)]$（実線）と相関 $\operatorname{Re}W(t,x)$（破線）の形が変わる。影は光円錐の内側。「動かす」で t を進める



t = 1.00、m = 1.00：x = 1.50（外側）で交換子 0、Re W = 0.0567／x = 0 で交換子 0.3826、Re W = −0.0221

計算 この図の数値はこの端末で計算した（(8)(9) と Y_0 の級数・積分を JavaScript で評価。SciPy と 10^{-13} 以内で一致）。

計算 表 3　$m=1$、$t=1$ の断面。内側の $\mathrm{Re}\,W$ は $-\frac{1}{4}Y_0(m\sqrt{t^2-x^2})$（第二種の Bessel 関数）。(7) の数値積分と 5 桁で一致

x	位置	$i[\phi(t,x),\phi(0,0)]$	$\mathrm{Re}\,W(t,x)$
0	内側	0.38260	−0.02206
0.9	内側	0.47653	0.13611
1.1	外側	0	0.15875
2	外側	0	0.02529
4	外側	0	0.00205

光円錐の上では $\mathrm{Re}\,W$ が対数で発散します。$t=x=0$ の発散は 02 節の $D=1$ の対数と同じもので、場が点で値を持たないことの現れです。

06

公理から出ること — PCT・スピンと統計・クラスター性

七つの条件だけから、経験で知られていた性質が定理として出ます。[45] の題 'PCT, Spin and Statistics and all That' はその二つを指します。PCT 定理は、空間の反転・時間の反転・粒子と反粒子の入れ替えを合わせた変換がどの理論でも対称性であること、スピンと統計の定理は、空間的に離れた点どうしで、整数スピンの場は交換し半整数スピンの場は反交換することです 既知 。三つ目がクラスター性で、真空の一意性の下で場の組を空間の向きに遠ざけると相関は積に分かれます。

$$W_{n+k}(x_1,\dots,x_n,\ y_1+\lambda a,\dots,y_k+\lambda a)\ \xrightarrow[\lambda\to\infty]{}\ W_n(x_1,\dots,x_n)\,W_k(y_1,\dots,y_k) \qquad (10)$$

質量ギャップがあると収束は指数の速さです。問題文 §5 は 'An important consequence of the existence of a mass gap is clustering' と書きます（4-11 §06）既知 。例。自由場では (10) の差は (9) の e^{-mr} の項の和です。

寄り道：真空はどこにでも届く

飛ばしてよい小節です。

Reeh–Schlieder の定理は、巡回性（表 2）の稠密性が時空の任意の小さな開集合に台を持つテスト関数だけでも成り立つとします（Reeh–Schlieder 1961 とされる）既知。部屋の中の場を操作するだけで遠くの状態を任意に近く作れる、ということです。正確には近似で、使う作用素は一般にユニタリでありません。こうしたことが起こるのは、図 1 の破線のように真空が光円錐の外まで相関を持っているからです。一方で交換子（実線）は外で 0 なので、信号を光より速く送ることはできません。

07

無限自由度の表現 — 粒子の数が無限なら、同じ空間に入らない

振動子が有限個なら交換関係の既約な表現は一つです（Stone–von Neumann。2-06 §09）。無限個ではそうなりません。質量の違う二つの自由場で見ます。振動子一つでは、角振動数 ω' の基底状態を ω の消滅作用素 a_ω で数えた量子の数 n と、基底状態どうしの重なりが

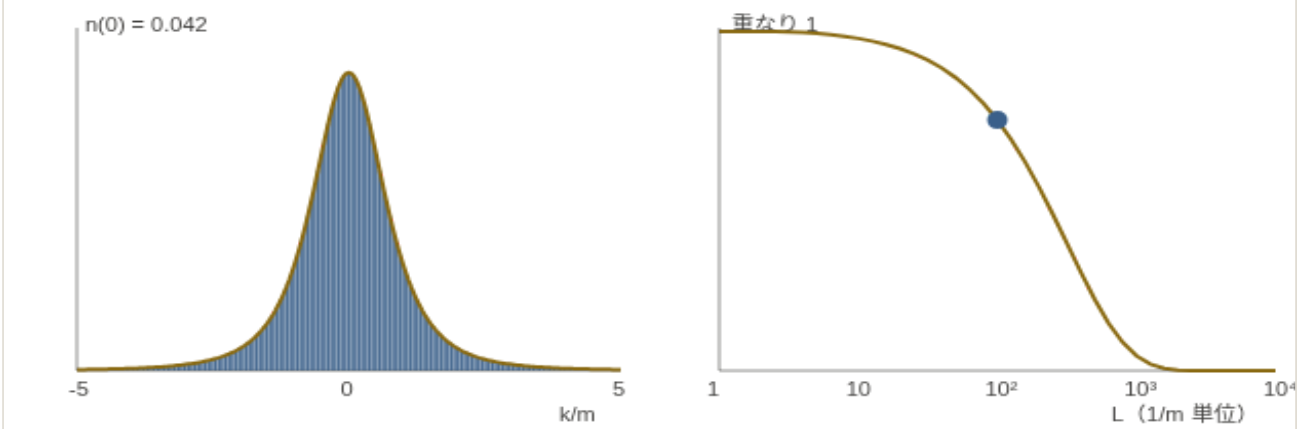
$$n = \langle 0_{\omega'} | a_\omega^\dagger a_\omega | 0_{\omega'} \rangle = \frac{(\omega-\omega')^2}{4\omega\omega'}, \qquad \langle 0_\omega | 0_{\omega'} \rangle = \left(\frac{2\sqrt{\omega\omega'}}{\omega+\omega'} \right)^{1/2} = (1+n)^{-1/4} \tag{11}$$

です既知 計算。長さ L の輪の上の場（2-06 (14)）では、モード $k = 2\pi j/L$ ごとに $\omega_k = \sqrt{k^2+m^2}$ と $\omega_k' = \sqrt{k^2+m'^2}$ があり、真空はモードごとの積なので

$$N(L) = \sum_k n_k, \qquad \langle \Omega_m, \Omega_{m'} \rangle = \prod_k (1+n_k)^{-1/4} \tag{12}$$

n_k は (11) の n をモード k で取ったもの、$N(L)$ は質量 m' の真空に含まれる質量 m の量子の数の期待値です。$n_k \approx (m'^2-m^2)^2/(16k^4)$ と減るので有限の L では和は有限、重なりは正です。L を広げるとモードの数も $N(L)$ も L に比例し、重なりは e^{-sL} で 0 に向かいます。

図 2　L と m'/m を変えると、左：モードごとの n_k（縦棒が輪のモード、曲線が $n(k)$）、右：真空の重なりと L（対数目盛）の関係が変わる。「動かす」で L を広げる



L = 100/m、m'/m = 1.50：量子の数 N = 1.269（1/m あたり 0.0127）、重なり 0.731

計算 この図の数値はこの端末で計算した（(12) を $|k| \le 60m$ で足し、外は k^{-4} の裾で補う。表 4 と 6 桁で一致）。

計算 表 4　長さ L（$1/m$ 単位）の輪での $N(L)$ と重なり（式 (12)）

L	N（$m' = 1.5m$）	重なり	N（$m' = 2m$）	重なり
10	0.12695	0.96915	0.43539	0.90040
100	1.2692	0.73104	4.3534	0.35025
1000	12.692	0.043592	43.534	2.778e−5
10000	126.92	2.478e−14	435.34	2.740e−46

L を広げると重なりは 0 に向かいます。正確には、無限体積では m' の真空に当たるベクトルが m の Fock 空間の中に無く、二つは時刻 0 の場の同じ交換関係の、ユニタリ同値でない表現を与えます 既知 。(12) から、重なりが正であることと $\sum_k n_k < \infty$ の同値が読めます。一般の Bogoliubov 変換（a_k を a_k と $a^\dagger_{-k}$ の一次結合に取り替える変換。(11) の a_ω と $a_{\omega'}$ の関係はその一例）についても同じ形の判定が知られています（Shale 1962 とされる）。無限体積の密度 $\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} n_k$（$m' = 1.5m$）は空間の次元 $D = 1, 2, 3$ で $0.012692,\ 0.0049736,\ 0.0030929$（$m^D$ 単位）と有限です。現実の時空（時空四次元）に当たる $D = 3$ でも密度は有限で、壊れ方は体積だけから来ます。空間が四次元（時空が五次元）の $D = 4$ では密度が対数で発散し、有限の箱でも重なりは 0 です 計算 。三次元の格子の図は 7-11 §07。

08

Haag の定理 — 相互作用する場を自由場の空間に置けない

物理の摂動論は、自由場の Fock 空間を舞台に $H = H_0 + V$（H_0 は自由、V は相互作用）と分け、自由場の真空から相互作用する真空へ移る描像（相互作用表示）を使います。07 節では、質量を変えるだけの穏やかな変更でも新しい真空は元の Fock 空間に入りませんでした。

Haag の定理はこれを一般の形で言います 既知 。時刻 0 の場と共役運動量が自由場のものとユニタリに移り合い、両方の理論が空間の平行移動と回転で不変なただ一つの真空を持つな

ら、最初の四つの Wightman 関数は自由場と一致し、二点関数が自由場と同じ理論は同じ質量の自由場になる、とされます（Haag 1955、Hall–Wightman 1957。まとまった形は Streater–Wightman、読み方は Earman–Fraser 2006）。中心の補題は初等的で、質量 $m > 0$ の Fock 空間で空間の平行移動のすべてで不変なベクトルは真空の定数倍だけです。

$$e^{-ia\cdot(p_1+\cdots+p_n)}\,\psi_n(p_1,\ldots,p_n) = \psi_n(p_1,\ldots,p_n)\ \ (\forall a) \implies \psi_n = 0 \quad (n \geq 1) \tag{13}$$

n 粒子の成分 ψ_n は運動量の和が 0 の面の外で 0 になり、その面の体積は 0 なので L^2 の元として 0 です。例。(12) の m' の真空は平行移動で不変で自由場の真空と違うので、Fock 空間に居場所がありません。

実際の扱いは二つです。物理は有限の箱と紫外の切断を置いて計算し、繰り込み（4-04）で切断を外した量だけを答えにします。構成的場の理論は切断のある空間でハミルトニアンを作り、極限で新しい表現を得ます（7-03）。粒子もスペクトルから作ります。問題文 §6 は 'If m is an isolated eigenvalue of M, then one infers from the Wightman axioms and Haag–Ruelle scattering theory that asymptotic scattering states of an arbitrary number of particles exist' と書きます 既知 。

09

ゲージ理論で起きること — 観測量・正値性・公理の形

ゲージ場 A_μ そのものは Wightman の公理を満たす場にならないことが知られています（Strocchi 1967・1970 とされる）既知 。理由は三つです。観測量：A_μ はゲージ変換で変わります（3-01）。問題文 §4 は局所作用素を 'the gauge-invariant local polynomials in the curvature F and its covariant derivatives, such as Tr Fij Fkl (x)' に対応させることを求め、局所場の脚注（Jaffe–Witten の脚注 1）で、古典的な多項式と量子の作用素の自然な一対一対応は繰り込みのために無いと注意します 既知 。

正値性：ローレンツ共変なゲージで A_μ を場として扱うと内積が不定の空間が要り、状態と対称性の公理が破れます。Gupta–Bleuler の方法（電磁場）では、大きな空間から条件を満たす状態の部分空間を取り、その中の長さ 0 の状態で割って正値性を取り戻します 既知 。非可換の BRST の方法（4-08 §04）でも同じ形の構成（部分空間を取って割る。BRST のコホモロジー）が摂動論の水準で知られています（Kugo–Ojima 1979 とされる）。非摂動の水準では、Gribov のコピー（4-08 §05）のためにこの構成は確立していません 物理 。観測量の形：Wilson ループ（3-02）は曲線の上の量で、点の場を平均する場の公理に収まりません（4-10 §09）。問題文 §3 は領域ごとの作用素の代数を置く Haag–Kastler の枠組みにも触れ、'One hopes that the continued mathematical exploration of quantum field theory will lead to refinements of the axiom sets that have been in use up to now' と書きます。

現在地。問題文 §6 は 'at present we do not know any non-trivial relativistic field theory that satisfies the Wightman (or any other reasonable) axioms in four dimensions' と書きます（2000 年の評価）。二次元と三次元では、公理を満たす相互作用するスカラー場（ϕ_2^4・ϕ_3^4 など）が構成されています（7-03）既知。三次元のヤン–ミルズは未構成です（7-06）。四次元のヤン–ミルズについては、2026-11 に公開された構成が、Wilson の格子ゲージ理論の尺度の極限として、構成自身の版の Wightman の公理を満たす理論を作りました（Lean で証明されている、と委員会が評価した。6-00・12-08）。局所の場は場の強さのゲージ不変な多項式に当たる繰り込んだ挿入で（8-04）、Wilson ループは扱われていません（6-04）。ユークリッドの側から場を作る道が次の章です。

この章が言えている範囲

内容	言えている	言えていない
公理（03 節）と問題文の対応	既知。問題文 §3〜§6 は本文で照合	表 2 は標準形の要約（Streater–Wightman の本文は未入手）
再構成・解析性（04 節）	既知（Wightman 1956 の要旨）と作り方の筋	証明の細部
表 1・表 3・図 1・式 (2)(7)〜(9)	計算：自由場で倍精度の一致	相互作用する場の相関の形
表 4・図 2・式 (11)(12)	計算：自由場どうしの真空の重なりが体積とともに 0 に向かう	Shale の判定の証明（本文未読）
PCT・スピンと統計・Reeh–Schlieder・Haag の定理	既知 の主張の紹介と補題 (13)	定理の証明（原論文は書誌のみ）
ゲージ理論の公理（09 節）	問題文の要求と既知の障害の整理	非摂動の水準で BRST による正値性の回復は確立していない。Wilson ループを含む公理の形は定まっていない。四次元ヤン–ミルズで公理を満たす理論は、2026-11 に公開された構成が作った（委員会の評価の水準。6-00）。この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
問題文の引用	既知	A. Jaffe, E. Witten, "Quantum Yang–Mills Theory"（Clay）§3〜§6・脚注 1。本文で逐語照合

もの	種別	出典・道具
公理・PCT・スピンと統計・時刻を固定した場（02 節）	既知	R. Streater, A. Wightman, *PCT, Spin and Statistics and all That*, Benjamin, 1964。書誌のみ
再構成・解析性	既知	A. S. Wightman, Phys. Rev. 101 (1956) 860。要旨で確認
Haag の定理	既知	R. Haag, Mat.-fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 29 no. 12 (1955)：書誌のみ（二次資料）。D. Hall, A. S. Wightman, 'A theorem on invariant analytic functions with applications to relativistic quantum field theory', 同誌 31 no. 5 (1957)：書誌のみ（二次資料で一致）。J. Earman, D. Fraser, Erkenntnis 64 (2006) 305–344：書誌のみ
Bogoliubov 変換の判定	既知	D. Shale, Trans. Amer. Math. Soc. 103 (1962) 149–167。書誌のみ
寄り道	既知	H. Reeh, S. Schlieder, Nuovo Cim. 22 (1961) 1051–1068。書誌のみ
Haag–Kastler・Haag–Ruelle	既知	R. Haag, D. Kastler, J. Math. Phys. 5 (1964) 848–861：書誌のみ（Crossref で書誌を確認）。D. Ruelle, Helv. Phys. Acta 35 (1962) 147：書誌のみ・未確認。R. Haag, *Local Quantum Physics*, Springer, 1992・Phys. Rev. 112 (1958) 669。書誌のみ
ゲージ場と正値性（09 節）	既知 ・ 物理	F. Strocchi, Phys. Rev. 162 (1967) 1429–1438・Phys. Rev. D 2 (1970) 2334–2340。T. Kugo, I. Ojima, Prog. Theor. Phys. Suppl. 66 (1979) 1–130。書誌のみ（Crossref で書誌を確認）
表 1・3・4、図 1・2、(8)(9)(11)(12) と K_1 の式	計算	python3・SciPy（`smear_variance.py`・`wightman_1p1.py`・`free_3p1.py`・`bogoliubov.py`）。図は同じ式を JavaScript で評価

次に読む章：4-10 Osterwalder–Schrader の公理と再構成。

Osterwalder–Schrader の公理と再構成 — 反射正値性が確率を量子力学に戻す

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — Schwinger 関数に課す五つの条件（正則性・ユークリッド共変性・反射正値性・置換対称性・クラスター性。Osterwalder–Schrader の公理 E0〜E4）と、そこから Hilbert 空間・$H \geq 0$・真空を組み立てる手順。鍵の反射正値性が、一次元のガウス過程では「相関が減衰する指数関数の正の重ね合わせであること」と同じこと。反射正値性を壊す正則化と保つ格子。

前提となる章 — 4-02 経路積分とユークリッド化・4-09 場の量子論の公理。道具は 1-08・1-10・1-11・2-06・2-07。$\hbar = c = 1$。

先に言うこと — 既知の定理の紹介で、証明は一次元の筋だけです。四次元のヤン–ミルズでは、2026-11 に公開された構成が、極限の Schwinger 関数からこの章の再構成で Hilbert 空間を作りました（Lean で証明されている、と委員会が評価した。6-00・12-08）。公理を満たす確率測度は作られていません（6-04）。この章は何も示しません。06 節は一粒子の模型の計算です。

この章の順序

1. 戻り道を定理にする
2. Schwinger 関数
3. 五つの条件（表 1）
4. 反射正値性（図 1・表 2）
5. 再構成
6. 最小の模型で再構成を走らせる（図 2・表 3）
7. 寄り道：雑音のあるデータ
8. 自由場

9. 反射正値性を壊す正則化、保つ格子
10. ゲージ理論で加わること

01

戻り道を定理にする — 虚時間から Hilbert 空間へ

ユークリッドの側で作れるのは確率測度 μ とその積率です（4-02・符号が一つ違う）。問題文が求めるのは Hilbert 空間 $\mathcal{H}$・$H \geq 0$・真空 Ω（4-09）で、§4 は 'Existence includes establishing axiomatic properties at least as strong as those cited in [45, 35].' と書きます。[35] が Osterwalder–Schrader（OS）の二本の論文です 既知 。

行きの道（時空から虚時間へ）は解析接続です。帰り道について Schwinger は 1958 年の CERN の会議の討論で 'The question of to what extent you can go backwards, remains unanswered' と述べています（Jaffe 2018 による）。Nelson が Markov 性（現在を知れば過去と未来が独立という性質）の下で帰り道を作り、OS はそれを反射正値性に置き換えました（問題文 §3） 既知 。

$$\mu \;\longrightarrow\; \{S_n\} \xrightarrow[\text{再構成}]{(E0)\sim(E4)} (\mathcal{H},\, H \geq 0,\, \Omega) \xrightarrow[\text{解析接続}]{(E0')} \{W_n\} \tag{1}$$

例。一粒子では $\mathbb{E}[x(\tau)x(0)] = \langle x\psi_0, e^{-\tau(H-E_0)}x\psi_0\rangle$ が行きの道です（2-06 の式 (8)）。06 節はその逆です。

02

Schwinger 関数 — 相関にエネルギーが書き込まれている

点を $x = (\tau, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^d$ と書き、τ をユークリッドの時間と呼びます。n 点の **Schwinger 関数**は μ の積率で、正確には試験関数でならした $S_n(f)$ が対象です（1-11）。Wightman 関数とは形式的に $x^0 \to -i\tau$ の置き換え $S_n = W_n(x_1^E, \dots, x_n^E)$ で結ばれます（Summers §3） 既知 。

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = \int \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\, d\mu(\phi) \tag{2}$$

例：質量 m の自由場は共分散 $(-\Delta + m^2)^{-1}$（Δ はラプラシアン $\sum_\mu \partial_\mu^2$。質量ギャップの Δ とは別）のガウス測度です（問題文 §6.2）。p_0 だけを積分すると（2-04 の式 (11)）

$$S_2(x,y) = \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{e^{ip\cdot(x-y)}}{p^2+m^2}, \qquad \int \frac{dp_0}{2\pi}\frac{e^{ip_0\tau}}{p_0^2+\omega^2} = \frac{e^{-\omega|\tau|}}{2\omega} \tag{3}$$

で、$\omega = \sqrt{p^2 + m^2}$ は運動量 p の粒子のエネルギーです。相関の減る速さにエネルギーが書き込まれている——これが再構成の種です。$d = 1$ では右がそのまま $S_2(\tau)$ で、04 節の例になります。高次の S_n は S_2 の対の積の和です（1-08）。

03

五つの条件 — 正則性からクラスター性まで、と線形増大

$\Theta(\tau, x) = (-\tau, x)$ を時間の反転とします。

既知 表 1　OS の条件（スカラー場。番号は OS 1975 のものとされる）

条件	中身	時空の側で
正則性（E0）	点の重なりを除き緩増加	作用素値の超関数
ユークリッド共変性（E1）	回転と平行移動で不変	Poincaré 共変性
反射正値性（E2）	正の時間に台を持つ f_n で $\sum_{n,m} S_{n+m}(\Theta \overline{f_n} \otimes f_m) \geq 0$	内積が正・$H \geq 0$
置換対称性（E3）	点の入れ替えで不変	離れた場が可換
クラスター性（E4）	空間の向きに遠ざけると $S_{n+m} \to S_n S_m$	真空が一つ
線形増大の条件（E0′）	$\lvert S_n(f)\rvert \leq \sigma_n \lvert f\rvert_{C_n}$、$\sigma_n \leq A(n!)^B$（評価に使う滑らかさの次数が n に比例：「線形増大」の名の由来）	W_n への接続

表の記号。関数 f の**台**は $f \neq 0$ となる点の集まり（の閉包）で、「正の時間に台を持つ」は $\tau \leq 0$ で $f = 0$ となることです。$\otimes$ は変数を分けて掛けた関数 $(f \otimes g)(x, y) = f(x) g(y)$、$\Theta \overline{f}$ は $\overline{f}$ の各変数の時間を反転したものです。$\lvert f\rvert_k$ は f の k 階までの導関数に多項式の重みを掛けた大きさの上限で、急減少関数の滑らかさと減り方を測ります（1-11）。

正則性が点の重なりを除くことは、自由場の S_2 が $x = y$ で発散すること（$d \geq 2$）と合っています。1973 年の論文の証明には超関数のテンソル積の連続性に関わる誤りがあり（Jaffe 2018）、1975 年の第二論文は線形増大の条件を仮定に加えて正しい証明を与えたとされます（二次資料による。OS 1975 は書誌のみ）。Wightman 理論から作った S_n は五つの条件を満たすことが示されていますが、線形増大の条件を満たすとは限りません。そのため、線形増大の条件を含む OS の公理が Wightman の公理そのものと同値かは分かっていません（Summers §3・脚注 15）。OS 1975 が示したのは、Wightman の理論を修正した形との同値です（Jaffe 2018。修正は増大の条件を足すものとされる）既知 。例。自由場は全部を満たし、線形増大の条件は S_{2k} が $(2k-1)!! \leq (2k)!$ 個の対の組み方の和であることから出ます。対の数 $(2k-1)!!$ が σ_n に入り、各因子は次数一定のセミノルムで押さえられます。

04

反射正値性 — 時間の鏡で長さを測る

F を正の時間の場だけで決まる量（例：$F=\sum_j c_j\phi(\tau_j,x_j)$、$\tau_j>0$）、$\Theta F$ をその時間を反転したものとします。反射正値性は次の形です。

$$\langle F,F\rangle := \mathbb{E}\big[\,\overline{\Theta F}\,F\,\big]\ \geq\ 0 \tag{4}$$

比喩で言えば、未来の量の長さを鏡像との重なりで測る条件です。正確には、過去と未来の相関の二次形式が負にならない条件で、$\mathbb{E}[|F|^2]\geq 0$ と違って自明ではありません。一次元の定常なガウス過程（共分散 $C(\tau-\tau')$）で $F=\sum_j c_j\phi(\tau_j)$ とすると

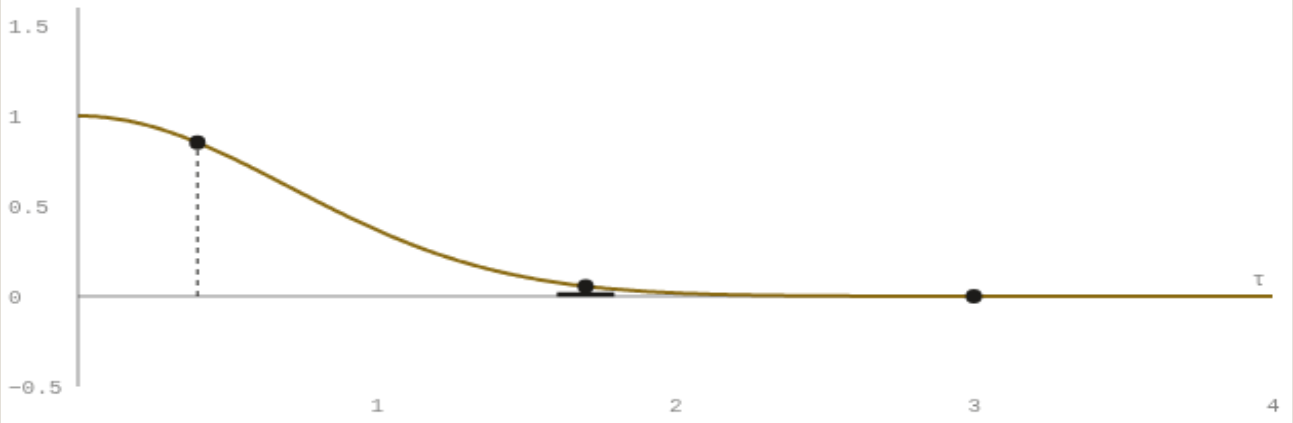
$$\sum_{i,j}\overline{c_i}c_j C(\tau_i+\tau_j)\geq 0\ \ (\tau_j>0),\qquad \text{特に}\ \ C(2\tau)\geq 0,\ \ C(\tau_1+\tau_2)^2\leq C(2\tau_1)C(2\tau_2) \tag{5}$$

です。右は二点の 2×2 の行列の対角と行列式で、$\log C$ の凸性を要求します。十分条件は、$C(\tau)=\int_{[0,\infty)}e^{-E\tau}d\rho(E)$（$\rho\geq 0$）なら左辺が $\int|\sum_j c_j e^{-E\tau_j}|^2 d\rho\geq 0$ になることです。

例：$e^{-\tau^2}$ は反射正値でない

$e^{-\tau^2}$ は正当な共分散です（フーリエ変換が正。**Bochner の定理**：連続関数 C が正定値、つまりどの τ_i と複素数 c_i でも $\sum_{i,j}\overline{c_i}c_jC(\tau_i-\tau_j)\geq 0$ であることと、そのフーリエ変換が正の測度であることは同値）が、$\log C$ は凹で、$\tau_1=0.2$、$\tau_2=1.5$ では $C(0.4)=0.852144$、$C(1.7)=0.055576$、$C(3.0)=1.234\times10^{-4}$ から行列式が -2.98×10^{-3} です 計算 。（この形に書けない理由：正の ρ なら $C(\tau)\geq\rho([0,E])e^{-E\tau}$ で、指数関数より速くは減れません。これが破れの原因であることは、05 節で必要性を示してから分かります。）

図 1　共分散を選び τ_1,τ_2 を動かすと、三点 $C(2\tau_1),C(\tau_1+\tau_2),C(2\tau_2)$（丸）と (5) の上限（横棒）が動く。両端の丸が 0 より下か、中の丸の高さの絶対値が横棒より大きいと破れる



e^−τ²、τ₁=0.20、τ₂=1.50：C(2τ₁)=0.8521、C(τ₁+τ₂)=0.0556、C(2τ₂)=0.00012、最小固有値 −0.00349（破れる）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（(5) の行列をその場で計算）。

計算 表 2 「行列」は $[C(\tau_i+\tau_j)]$（$\tau_i=0.1i$、$i\le 40$）の最小固有値、「二点」は $\tau_1,\tau_2\in(0,2]$ での (5) の行列式の最小値。

$C(\tau)$	フーリエ変換（正）	行列	二点
$e^{-\lvert\tau\rvert}$	$\frac{2}{1+\omega^2}$	≈ 0	≈ 0
$e^{-\lvert\tau\rvert}+\frac{1}{2}e^{-3\lvert\tau\rvert}$	$\frac{2}{1+\omega^2}+\frac{3}{9+\omega^2}$	≈ 0	≈ 0
$e^{-\tau^2}$	$\sqrt{\pi}\,e^{-\omega^2/4}$	-0.462	-0.238
$(1-\lvert\tau\rvert)_+$	$\left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\right)^2$	-0.366	-0.239
$e^{-\lvert\tau\rvert}\cos 3\tau$	$\frac{1}{1+(\omega-3)^2}+\frac{1}{1+(\omega+3)^2}$	-2.13	-0.376
$\frac{1}{2}e^{-\lvert\tau\rvert}-\frac{1}{6}e^{-3\lvert\tau\rvert}$	$\frac{8}{(1+\omega^2)(9+\omega^2)}$	-0.054	-0.011

六つとも共分散としては正当で、下の四つが反射正値性を破ります（$(a)_+=\max(a,0)$）。減衰振動は複素の極 $\omega=\pm 3\pm i$ を持つ伝播関数の姿で、17-02 の Gribov–Zwanziger の形も複素の極を持ちます。時間方向の相関が負になる場は (5) により反射正値な理論の場として読めません。Landau ゲージの格子計算では、グルーオンの時間方向の相関が負になることが観測されており、物理ではこれをグルーオンが観測される粒子でない表れと読みます 物理 。

05

再構成 — 内積・縮小・ハミルトニアン

(4) があれば、あとは線形代数で進みます 既知 。① **内積**。正の時間の場の有界な関数の全体 $\mathcal{E}_+$ に $\langle F,G\rangle:=\mathbb{E}[\overline{\Theta F}\,G]$ を置きます。(4) により $\langle F,F\rangle\ge 0$ ですが、$F\neq 0$ でも $\langle F,F\rangle=0$ でありえます（半正定値）。それでも Cauchy–Schwarz $|\langle F,G\rangle|^2\le\langle F,F\rangle\langle G,G\rangle$ は成り立ちます（t の二次式 $\langle F+tG,F+tG\rangle\ge 0$ の判別式から）。そこから長さ 0 のものの全体 $\mathcal{N}$ は部分空間になり、長さ 0 の差しかないものを同一視した $\mathcal{E}_+/\mathcal{N}$ を完備化して $\mathcal{H}$ とします（完備化は 1-10）。② **ずらす**。時間の向きに $s\ge 0$ ずらす U_s は正の時間の量を正の時間の量に移し、μ の平行移動不変性と $\Theta U_s\Theta=U_{-s}$ から

$$\langle F,U_sG\rangle=\langle U_{s/2}F,U_{s/2}G\rangle=\langle U_sF,G\rangle \tag{6}$$

です。③ **縮小**。(6) と Cauchy–Schwarz を n 回繰り返すと

$$\|U_sF\|^2=\langle F,U_{2s}F\rangle\le\|F\|\,\|U_{2s}F\|\ \Longrightarrow\ \|U_sF\|\le\|F\|^{1-2^{-n}}\|U_{2^ns}F\|^{2^{-n}} \tag{7}$$

で、$\|U_uF\|\le\sup|F|$ なので $n\to\infty$ で $\|U_sF\|\le\|F\|$。長さ 0 は長さ 0 に移り、U_s は $\mathcal{H}$ 上の $T(s)$ を定めます。④ **ハミルトニアン**。$T(s)$ は対称で $0\le T(s)=T(s/2)^2\le 1$、$T(s)T(u)=T(s+u)$ なので、連続ならスペクトル定理（1-10）から

$$T(s)=e^{-sH},\qquad H=H^*\ge 0,\qquad \Omega:=[1],\qquad H\Omega=0 \tag{8}$$

です。

一次元での必要性と実時間

一次元では $C(\tau+2\varepsilon)=\langle\psi_\varepsilon, e^{-\tau H}\psi_\varepsilon\rangle=\int e^{-E\tau}d\rho_\varepsilon(E)$（$\psi_\varepsilon=[\phi(\varepsilon)]$、$\rho_\varepsilon$ はスペクトル測度。ϕ は有界でありませんが、ガウスなら $\mathcal{E}_+$ を二乗可積分な関数まで広げてよい）なので、04 節の十分条件は必要条件でもあります。したがって $e^{-\tau^2}$ のように指数関数より速く減る C は反射正値になれません。$\int e^{-E\tau}d\rho(E)$ の形を ρ の**ラプラス変換**と呼び、この側では Widder 1934 の特徴づけに当たります。反射正値性との結びつきは Klein–Landau が指摘したとされます（Jaffe 2018）。$H\geq 0$ なので e^{-zH} は $\mathrm{Re}\,z\geq 0$ で意味を持ち、$z=it$ で時間発展 e^{-itH} です。押し出しは、OS の再構成では Wightman 関数の解析接続から得られます。回転角を虚数に延ばす形（0-04 §02）に抽象化したのが Fröhlich–Osterwalder–Seiler 1983 と Klein–Landau です（Jaffe 2018 §3.3.1）。線形増大の条件は W_n を得る段で使います 既知 。例。$C=e^{-m|\tau|}/(2m)$、$F=\phi(\tau_0)$ なら $\|U_sF\|=e^{-ms}\|F\|$ で、H はこのベクトルの上で m 倍です。

06

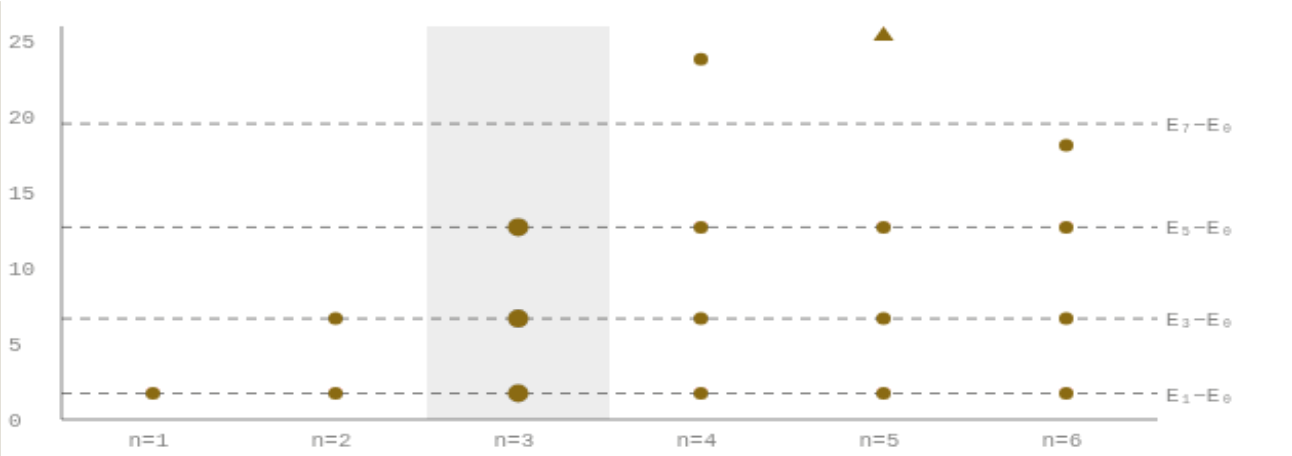
最小の模型で再構成を走らせる — 相関だけから準位を読む

2-07 の表 4 の $H=\frac12 p^2+x^4$ で $C(\tau)=\mathbb{E}[x(\tau)x(0)]$ を作り（基底 240 本で対角化）、H を忘れて C だけで 05 節を行います。$s=0.25$、$F_i=x((i+\frac12)s)$（$i<n$）として

$$G_{ij}=\langle F_i,F_j\rangle=C\big((i+j+1)s\big),\qquad G^{(1)}_{ij}=\langle F_i,T(s)F_j\rangle=C\big((i+j+2)s\big)\tag{9}$$

の一般化固有値問題 $G^{(1)}v=\lambda G v$（G が正定値なら $G^{-1/2}G^{(1)}G^{-1/2}$ の固有値と同じ）から $E=-\frac1s\log\lambda$ と読みます。F_i の張る部分空間に制限した $T(s)$ の固有値なので、変分原理（1-10）から真の準位の**上界**です 既知 。G が正定値であること（反射正値性）が前提です。x は奇関数なので読めるのは E_1-E_0・E_3-E_0・⋯ で、重み $|\langle\psi_0,x\psi_n\rangle|^2$ は $n=1$ の 0.287 から $n=7$ の 3.9×10^{-9} まで急に小さくなります 計算 。

図 2　相関の本数 n と雑音 ε を変えると、読んだ準位（丸。列ごとに一つの n）が変わる。破線は真の準位、三角は 26 超



ε=0（丸めだけ）、n=3：G の最小固有値 3.6e−10。読めた準位 1.72566、6.66774、12.71344

計算 この図の数値はこの端末で計算した（表 3 と同じ計算の結果）。

計算 表 3　相関の数表だけから読んだ準位（雑音なし）と G の最小固有値。

n	E_1-E_0	E_3-E_0	E_5-E_0	E_7-E_0	min G
1	1.72807				1.9e-1
2	1.72566	6.67039			2.4e-5
3	1.72566	6.66774	12.71344		3.6e-10
4	1.72566	6.66774	12.71165	23.80937	2.5e-16
真	1.725658	6.667744	12.711350	19.552863	

$n=3$ で三つの準位が 4〜5 桁で出て、どれも真の値より上です。$n=4$ で G の最小固有値が倍精度の丸めの大きさになり、その先は区別できません。

寄り道：雑音のあるデータ — 帰り道は不安定

飛ばしてよい小節です。

モンテカルロ（5-07）の相関には誤差があります。$C(ks)$ に相対 ε の正規乱数の誤差を掛けて（種は固定）同じ手順を行いました 計算 。$n=4$ で $\varepsilon=10^{-12}$ なら三番目は 12.70331 で真の 12.71135 を下回り、上界の性質が失われます。$\varepsilon=10^{-8}$ では G の最小固有値が -6.4×10^{-10} と負になり、データが (4)（(5) の左の行列の形）を破ります（E_3-E_0 は 6.66936）。$\varepsilon=10^{-4}$、$n=6$ では真の隙間より低い 1.52597 という偽の準位が出ます（図 2）。ラプラス変換を逆にたどるので、わずかな誤差が上の準位を大きく動かします。再構成の定理は誤差の無い S_n の主張で、有限精度のデータから準位を読むのは別の、条件の悪い問題です。グルーボールの測定（5-08）も (9) の形の行列を使います。

> 07

自由場 — Fock 空間が出てくる

ガウス測度では再構成を書き切れます。一次元の $C(\tau) = e^{-m|\tau|}/(2m)$（角振動数 m の振動子）で、ϕ の冪を分散 $\sigma^2 = C(0)$ で整えた **Wick 積**（$:\phi^2: = \phi^2 - \sigma^2$、$:\phi^3: = \phi^3 - 3\sigma^2\phi$、一般には Hermite 多項式 $He_k(x) = (-1)^k e^{x^2/2}\frac{d^k}{dx^k}e^{-x^2/2}$ で $:\phi^k: = \sigma^k He_k(\phi/\sigma)$）を使うと

$$\mathbb{E}\big[:\phi(\tau)^k: :\phi(0)^l:\big] = \delta_{kl}\, k!\, C(\tau)^k = \delta_{kl}\,\frac{k!}{(2m)^k} e^{-km|\tau|} \tag{10}$$

で、減る速さ km が準位です。この過程（共分散 $e^{-m|\tau|}/(2m)$ を持つ定常ガウス過程を **Ornstein–Uhlenbeck 過程**と呼びます）では $[:\phi^k:]$ が固有値 km の固有ベクトルで、$H = m\,a^\dagger a$ です 既知 。2-06 の準位 $E_k - E_0 = km$（2-06）が相関だけから出ます。例。$m = 1$、$k = 2$ では $\frac{1}{2}e^{-2\tau}$ で、速さ 2 は二粒子の状態です。

d 次元では (3) により運動量ごとに正の指数関数が並ぶので反射正値性が成り立ち（問題文 §6.2）、再構成すると Fock 空間が出て、スペクトルは $\{0\} \cup [m, \infty)$ です（2-06 §08）。 既知 ヤン–ミルズの作用には質量項が無く（3-02）、隙間は相互作用の出力でなければなりません（4-11）。

08

反射正値性を壊す正則化、保つ格子

紫外を抑える正則化（4-04）は反射正値性を壊しえます。例：Pauli–Villars 型。重い質量 M の伝播関数を引くと、大きい p で p^{-4} と速く減ります。

$$\frac{1}{p^2+m^2} - \frac{1}{p^2+M^2} = \frac{M^2 - m^2}{(p^2+m^2)(p^2+M^2)} > 0, \qquad C_{\mathrm{PV}}(\tau) = \frac{e^{-m|\tau|}}{2m} - \frac{e^{-M|\tau|}}{2M} \tag{11}$$

共分散としては正当ですが、時間の向きでは指数関数の重みが $E = M$ で負です。$m = 1$、$M = 3$ では $CC'' - C'^2 = -\frac{1}{3}e^{-4\tau} < 0$ で $\log C$ はどこでも凹になり、(5) の検査が異なるどの二点でも破れます（表 2 の最後の行） 計算 。負の重みは内積が負の状態（ゴースト。4-08 §03 の Faddeev–Popov の反可換な場を指す「ゴースト」とは別の意味）に当たります 既知 。問題文 §6.5 は、正則化で失った反射正値性を取り戻す方法は少ないと書き、例に次元正則化と Pauli–Villars 正則化を挙げます（引用は 0-03 §03）。

格子は逆です。Wilson の作用は反射正値性を保ち（Osterwalder–Seiler 1978、問題文 §6.5）、転送行列とハミルトニアンが立ちます（例は 0-04 §06、ゲージ理論は 5-03）。代わりに回転を 90° 刻みに落とします。反射正値性は不等式なので極限に引き継がれます（7-01 §07） 既知 。

09

ゲージ理論で加わること — 曲線の上の量・ゲージ固定・体積

観測量。意味を持つのはゲージ不変な量で、局所的なものは $\mathrm{Tr}\, F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}(x)$ のような合成の量です（問題文 §4）。Wilson ループ（3-02）について Chatterjee は Seiler を引いて 'the key observables in these theories do not take values at points, but at curves' と書きます。**ゲージ固定**。固定した場の相関は一般に反射正値でなく、共変なゲージでは内積が不定の空間を使います（4-08）。Magnen–Rivasseau–Sénéor 1993 は、Feynman ゲージのような共変なゲージは 'cannot be used directly at the beginning because of their lack of positivity' として正則化した軸ゲージを使い、OS の正値性は 'could be shown to hold with some additional work' と見込むにとどまります。**体積**。T^4 の上でも、反射正値な測度が作れれば有限体積の Hilbert 空間と転送行列は得られます（格子の周期箱ではそうなります。連続の T^4 上の構成そのものが未完です。問題文 §6）が、$\mathbb{R}^4$ の Poincaré 共変な理論には $T^4 \to \mathbb{R}^4$ が要ります（0-04 §09）既知 。

例。二次元の Driver 1989 の測度からはゲージ不変な期待値のユークリッド不変性が出ますが、公理の全体は主張されていません（7-02）。問題文 §6.4 は二次元の可換 Higgs 模型（Brydges–Fröhlich–Seiler）を 'the only complete example of an interacting gauge theory satisfying the axioms' と書き（2000 年の評価）、§6.5 は 'Establishing a quantum mechanical Hilbert space is part of the solution to this Millennium problem.' と続けます 既知 。2026-11 に公開された構成は、格子の極限の Schwinger 関数からこの章の再構成で Hilbert 空間を作り、構成自身の版の Wightman の公理を確かめています（Lean で証明されている、と委員会が評価した。12-08）。体積の極限は部分列で、極限は相の混ざりとして得られます（12-07）。

この章が言えている範囲

内容	状態
01〜03・07〜09 節	既知 （OS の論文の本文は未入手）
04・05 節の議論	一次元の筋で証明を書いた 既知 。実時間・押し出し・W_n は述べただけ
04 節末のグルーオンについての読み	物理 （格子の数値と解釈。定理ではない）
表 2・3、図 1・2、(11) の検査、寄り道	倍精度の 計算
四次元のヤン–ミルズの公理・Hilbert 空間・隙間	公理を満たす理論と Hilbert 空間は 2026-11 に公開された構成が作った（委員会の評価の水準。6-00）。隙間は示されていない（6-04）。この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 2・3・図・本文の数値	計算	python3・NumPy・SciPy（固有値・対角化・一般化固有値問題・乱数の種 1）
問題文の引用	既知	A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*（Clay Mathematics Institute, 2000）§3・§4・§6.2・§6.4・§6.5。本文で確認
五つの条件（E0〜E4）と線形増大の条件（E0′）	既知	K. Osterwalder, R. Schrader, Comm. Math. Phys. 31 (1973) 83–112；42 (1975) 281–305。書誌のみ。番号と線形増大の条件の形は Summers §3 と二次資料（Wikipedia “Osterwalder–Schrader theorem”）による
Schwinger の発言	既知	1958 年 CERN 会議の討論（会議録 p.140、Pauli の質問への応答）。Jaffe 2018 経由・会議録は未読
経緯・$S_n = W_n(x^E)$・線形増大の条件の役割	既知	A. Jaffe, arXiv:1802.07880；S. J. Summers, arXiv:1203.3991（§3・脚注 15）。本文を確認
Nelson・押し出し・ラプラス変換	既知	E. Nelson, J. Funct. Anal. 12 (1973) 97–112, 211–227；J. Fröhlich, K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. of Math. 118 (1983) 461–489；A. Klein, L. Landau, J. Funct. Anal. 44 (1981) 121–137；D. V. Widder, Bull. Amer. Math. Soc. 40 (1934) 321–326。書誌のみ
05 節の議論・Wilson 作用	既知	J. Glimm, A. Jaffe, *Quantum Physics*, 2nd ed.（Springer, 1987）書誌のみ（該当の章は未確認）；K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471。書誌のみ
04 節末のグルーオンの相関	物理	A. Cucchieri, T. Mendes, A. R. Taurines, Phys. Rev. D 71 (2005) 051902；P. O. Bowman ほか, Phys. Rev. D 76 (2007) 094505（クォークを含む格子 QCD）。書誌のみ（巻・頁は Crossref で照合）
09 節	既知	S. Chatterjee, arXiv:1803.01950 §1；J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, Comm. Math. Phys. 155 (1993) 325–383（§I）；B. K. Driver, Comm. Math. Phys. 123 (1989) 575–616（序論）。MRS の引用は §I。Bochner の定理は本文で定義

次に読む章：4-11 質量ギャップの定義。格子の反射正値性は 5-03。

質量ギャップの定義 — 真空の上の最低エネルギーと、相関の一様な減衰

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 質量ギャップは「真空に直交する状態のエネルギーの下限」で、虚時間では「すべての連結相関が一つの速さ以上で減ること」と同値であること。一つの相関や有限の範囲の測定からは上界しか出ないこと。粒子状態・クラスター性・相関長と隙間の異同。

前提となる章 — 4-10 Osterwalder–Schrader の公理と再構成・2-08 統計力学と相転移。道具は 1-10（スペクトル定理・変分原理）。$\hbar = c = 1$、$d = 4$。

先に言うこと — 定義と既知の対応の整理で、四次元ヤン–ミルズの隙間については何も示しません。隙間を問う前提の Hilbert 空間とハミルトニアンは、2026-11 に公開された構成が作りました（Lean で証明されている、と委員会が評価した。6-00）。その H に隙間があるかは示されていません（6-04）。計算の例はすべて自由場です。

この章の順序

1. 定義 — 真空に直交する状態のエネルギーの下限
2. 虚時間の顔 — すべての相関の一様な減衰と同値
3. 観測量ごとの減衰（図 1・表 1）
4. 有限の窓 — 測定からは上界だけ（図 2・表 2）
5. 粒子状態との違い
6. クラスター性
7. 相関長（表 3）
8. 有限の箱と一様性
9. ゲージ理論で読む
10. 付表：「隙間」の語の一覧 — 同値・上界・別物（付表）

01

定義 — 真空に直交する状態の、エネルギーの下限

問題文 §4 の定義は 'A quantum field theory has a mass gap Δ if H has no spectrum in the interval $(0,\,\Delta)$ for some $\Delta > 0$. The supremum of such Δ is the mass m, and we require $m < \infty$.' です（一語ずつの読みは 0-03 §06）。この文は (a) Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ と自己共役な $H \geq 0$（4-10 §05 の再構成で得るもの）と、(b) 位相を除いて一つの真空 Ω、$H\Omega = 0$（4-10 の表 1 のクラスター性）を前提にし、(c) 真空に直交する状態を問います。§1 の言葉では 'every excitation of the vacuum has energy at least Δ' です。(b) の下で、定義は次と同じです 既知 。

$$m = \inf \sigma\big(H|_{\Omega^\perp}\big) = \inf_{\psi \perp \Omega,\, \psi \neq 0} \frac{\langle \psi, H\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle}, \qquad \text{隙間がある} \iff m > 0 \tag{1}$$

二つ目の等号は変分原理です（1-10 §06）。(b) が要ることも (1) から読めます。真空と直交するエネルギー 0 の状態 Ω' があれば $\psi = \Omega'$ で (1) は 0 ですが、問題文の一文目だけなら 0 は $(0, \Delta)$ の外なので見落とします。例。質量 m の自由場では (1) も m（同じ字を使います）、質量 0 なら 0 です（4-10 §07）。

02

虚時間の顔 — 隙間は「すべての相関が一様に減ること」と同値

4-10 §05 の記号で、正の時間の有界な量 F はベクトル $[F]$ を与え、時間の向きに τ ずらす U_τ は $e^{-\tau H}$ になります。$\psi_F = [F] - \mathbb{E}[F]\,\Omega$ と置くと、**連結相関**（真空の成分を引いた相関）について

$$\mathbb{E}\big[\overline{\Theta G}\; U_\tau F\big] - \overline{\mathbb{E}[G]}\,\mathbb{E}[F] = \langle \psi_G, e^{-\tau H}\psi_F \rangle, \qquad \big|\langle \psi_G, e^{-\tau H}\psi_F \rangle\big| \leq e^{-m\tau}\,\|\psi_G\|\,\|\psi_F\| \tag{2}$$

です。不等式はスペクトル定理（1-10 §05）から出ます 既知 。逆も成り立ちます。すべての有界な F で $\langle \psi_F, e^{-\tau H}\psi_F \rangle \leq e^{-\Delta\tau}\|\psi_F\|^2$ なら $m \geq \Delta$ です。

これを見るために、ψ_F の**スペクトル測度** μ_F を使います。ψ_F を H の固有成分に分けたときの、重みのエネルギー軸 E の上の分布です。固有基底 e_k（$He_k = \lambda_k e_k$）があれば $\mu_F = \sum_k |\langle e_k, \psi_F \rangle|^2\, \delta_{\lambda_k}$ で（δ_λ は点 λ に置いた重み 1）、連続スペクトルでも同じ意味の分布がスペクトル定理から定まります。このとき $\langle \psi_F, e^{-\tau H}\psi_F \rangle = \int e^{-E\tau} d\mu_F(E)$ です。左辺は $\int e^{-E\tau} d\mu_F \geq e^{-\Delta'\tau}\mu_F([0, \Delta'))$（$\Delta' < \Delta$）なので、$\tau \to \infty$ で $\mu_F([0,\Delta')) = 0$ です。ψ_F の全体は $\Omega^\perp$ で**稠密**（$\Omega^\perp$ のどのベクトルにもいくらでも近づける）なので、$\Omega^\perp$ の上で $H \geq \Delta$ で

す。$E=0$ も含むので、真空が一つであることも一緒に出ます 既知 。**隙間は、すべての連結相関が観測量によらない一つの速さ以上で減ることと同値です。**

一つの相関 $C_F(\tau)=\int e^{-E\tau}d\mu_F(E)$ は**対数凸**、つまり $\log C_F$ が下に凸です（4-10 の (5) の $C(\tau_1+\tau_2)^2\le C(2\tau_1)\,C(2\tau_2)$ がこれに当たります）。だから**有効質量**は単調に下ります。

$$m_{\mathrm{eff}}(\tau)=-\frac{d}{d\tau}\log C_F(\tau)\ \searrow\ E_F:=\min\operatorname{supp}\mu_F,\qquad m=\inf_F E_F \tag{3}$$

$\operatorname{supp}\mu_F$（**台**）は μ_F の重みが載る最小の閉集合で、E_F は ψ_F が触れる最低のエネルギーです。どの時刻の m_{eff} も E_F の上界で、上からは一つの F で押さえられ、下からはすべての F が要ります（1-10 の囲み「上界と下界の非対称」と同じ形）。格子では U_a が転送行列 $T=e^{-aH}$ で、$m_{\mathrm{lat}}=\log(\lambda_0/\lambda_1)$、$\Delta=m_{\mathrm{lat}}/a$ です。λ_0・λ_1 は T の最大と二番目に大きい固有値です（ゲージ理論ではゲージ不変な状態の上。08 節）（2-09 の (1) はその最小の例）。

03

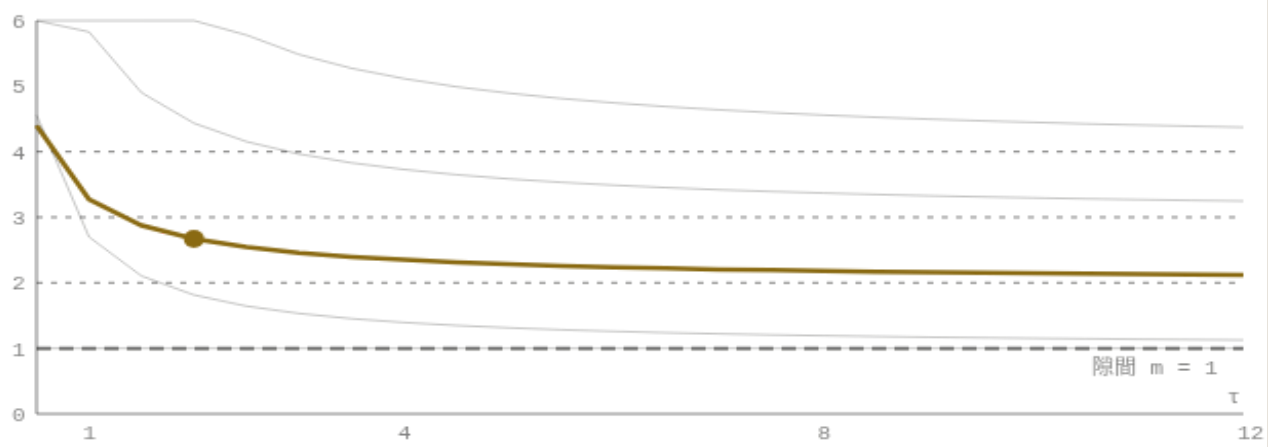
観測量ごとの減衰 — 一つの相関が見るのは、その観測量が触れる部分だけ

E_F が観測量で変わることを四次元の自由場（$m=1$）で見ます。4-10 §07 の Wick 積を空間で積分して運動量 0 にした O_k の相関は

$$O_k(\tau)=\int d^3x\,{:}\phi^k{:}(\tau,x),\qquad \frac{\mathbb{E}[O_k(\tau)O_k(0)]}{\text{体積}}=k!\int d^3x\,S(\tau,x)^k,\qquad S(x)=\frac{m\,K_1(m|x|)}{4\pi^2|x|} \tag{4}$$

です（S は四次元の自由場の二点関数、K_1 は修正ベッセル関数）。O_k はちょうど k 個の粒子を合計運動量 0 で作るので $E_{O_k}=km$ です。大きい τ では各粒子のエネルギーを $m+|p|^2/(2m)$ と近似でき、合計運動量 0 の k 粒子の相関は $e^{-km\tau}$ に、残る $k-1$ 個の三次元の運動量のガウス積分から $\tau^{-3(k-1)/2}$ が掛かります。そこで下端の近くでは $m_{\mathrm{eff}}\approx km+\frac{3(k-1)}{2\tau}$ です 計算 。隙間 1 を見るのは $k=1$ だけで、${:}\phi^2{:}$ をどれだけ精密に測っても 2 に近づくだけです。自由場では粒子の数が保たれるからで、相互作用があっても対称性で部分が分かれます（ヤン–ミルズでは 09 節のチャネル）。射影しない一点どうしの $S(\tau,0)$ では、同じ ϕ でも $1+\frac{3}{2\tau}$ のようにゆっくり下ります。動く粒子のエネルギーが連続に並び、一つの三次元の運動量の積分が同じ理由で $\tau^{-3/2}$ を掛けるからで、格子の測定が空間で和を取る理由です（5-08）。

図 1　観測量を選び τ を動かすと、有効質量（太線と丸）が観測量の下端（細い破線）へ下りる。隙間 m = 1（太い破線）まで下りるのは φ だけ



:φ²:、τ = 2.0：m_eff = 2.671（下端 2、隙間 1）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（(4) を τ の 0.5 刻みで求めた表を埋め込み）。

計算 表 1　自由場（$m = 1$）の $m_{\mathrm{eff}}(\tau)$。括弧は下端 E_F。運動量 0 の ϕ はどの τ でも 1.00000 で、閉じた形 $e^{-\tau}/2$ と倍精度の丸めの範囲で一致した。

τ	φ 一点 (1)	:φ²: (2)	:φ³: (3)	:φ⁴: (4)
2	1.81431	2.67113	4.43494	6.22414
4	1.39395	2.35013	3.72854	5.11460
8	1.19273	2.18027	3.36864	4.55915
16	1.09513	2.09177	3.18575	4.28029

どの列も単調に下り（$\tau \le 12$ の 0.25 刻みのすべての点で確かめた）、$\tau = 16$ で漸近形と 0.13% 以内で合い、最後まで下端より上にあります。読めるのは E_F の上界です 計算 。

04

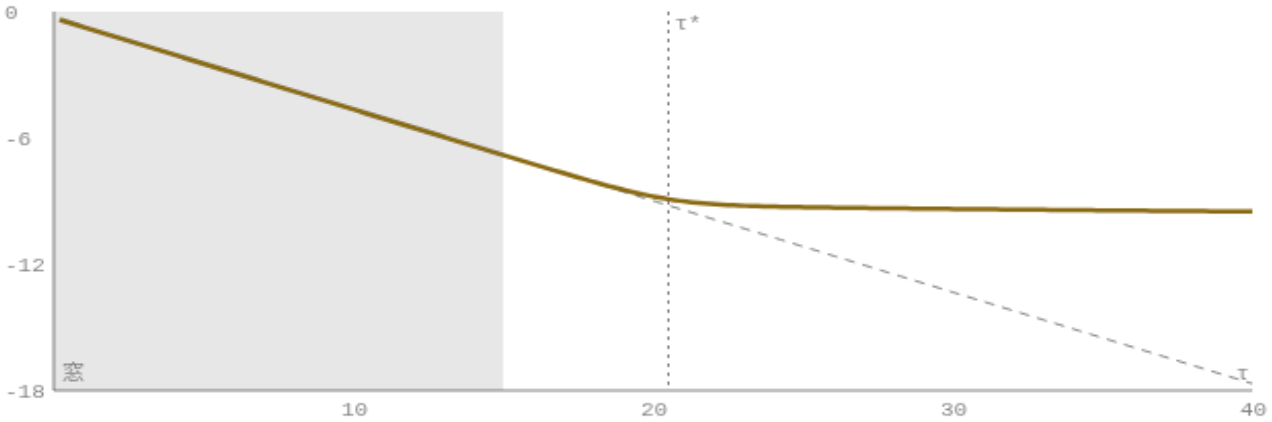
有限の窓 — 減衰を測っても、隙間の下界は出ない

測定で見られる τ の範囲を**窓**と呼びます（正確には有限区間 $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$）。(3) の下限は無限に多くの F と $\tau \to \infty$ を含むので、窓の中の測定はその一部しか見ません。質量 1 の自由場 ϕ と質量 0 の自由場 χ を独立に並べた、隙間の無い理論で見ます。$O = \int d^3x\, [\phi + \varepsilon :\chi^2:]$ の相関は、交差項が消えて

$$\frac{\mathbb{E}[O(\tau)O(0)]}{\text{体積}} = \frac{e^{-\tau}}{2} + \frac{\varepsilon^2}{8\pi^2\tau}, \qquad m_{\mathrm{eff}}(\tau) = \frac{\frac{1}{2}e^{-\tau} + \frac{\varepsilon^2}{8\pi^2\tau^2}}{\frac{1}{2}e^{-\tau} + \frac{\varepsilon^2}{8\pi^2\tau}} \tag{5}$$

です（第二項の係数は数値積分で 12 桁確かめた 計算 ）。二項が等しくなる τ^* までは $m_{\mathrm{eff}} \approx 1$ で、「隙間 1 の理論」に見えます。

図 2　ε を小さくすると、相関（太線、縦軸は常用対数）が $e^{-\tau}/2$（破線）から離れる点 τ* が右へ逃げる。窓の端を動かすと、そこでの m_{eff} が変わる



ε = 1e−3：τ* = 20.51。窓の端 τ = 15.0 で m_eff = 0.9949

計算 この図の数値はこの端末で計算した（(5) をその場で計算。τ* は二分法）。

計算 表 2　(5) の τ^* と m_{eff}。

ε	τ*	m_eff(20)
10^{-1}	10.646	0.0502
10^{-2}	15.636	0.0652
10^{-3}	20.512	0.6384
10^{-4}	25.328	0.9942
10^{-6}	34.858	1.0000

二項を等しく置くと $\tau^* = \ln(1/\varepsilon^2) + \ln(4\pi^2\tau^*)$ なので、ε が一桁小さくなるごとに τ^* は $2\ln 10 \approx 4.6$ に対数の補正を足した約 5 だけ延び、どんな有限の窓にも「隙間 1」に見える ε があります（十分先では $m_{\mathrm{eff}} \approx 1/\tau$）。有限の窓の測定から隙間の下界は出ません 既知 。格子の数値の読み方は 16-08 §07。

05

粒子状態との違い — 孤立した固有値は、隙間とは別の要求

質量の作用素 $M = \sqrt{H^2 - P^2}$ の隙間は H の隙間と同じ幅でした（0-03 §06）。**質量 μ の一粒子状態**は M の固有値 μ に属する状態で（粒子を Poincaré 群の既約表現と見る Wigner 1939 の考え）、μ の近くに他の $\sigma(M)$ の点が無ければ**孤立**しています。問題文 §5 はこれを要求の外に置き、'one would like to prove the existence of an isolated one-particle state (an upper gap, in addition to the mass gap)' と書きます 既知 。

違いは二点関数に出ます。スカラー場 ϕ（$\langle \Omega, \phi\,\Omega\rangle = 0$）のユークリッドの二点関数は、正の測度 ρ で

$$\widehat{S}_2(p) = \int_{[0,\infty)} \frac{d\rho(s)}{p^2 + s}, \qquad \int d^3x\, S_2(\tau, x) = \int \frac{e^{-\sqrt{s}\,\tau}}{2\sqrt{s}}\, d\rho(s) \tag{6}$$

と書け、Källén–Lehmann の表示と呼ばれます 既知 （右は 4-10 の (3) を s で重ねたもの）。隙間 m があれば ρ の台は $[m^2, \infty)$ に入り、質量 μ の粒子に ϕ が触れれば ρ は $s = \mu^2$ に点の重みを持ちます。

例 1：隙間はあるが粒子は無い。ρ を $[m^2, 4m^2]$ 上の一様な重みにし、共分散 $\int d\rho(s)(-\Delta + s)^{-1}$ のガウス測度を取ります。反射正値性は共分散の正の重ね合わせで保たれる条件なので、各 s で成り立てば（4-10 §07）正の測度 ρ で積分しても成り立ちます。再構成すると「一粒子」の M は $[m, 2m]$ を連続に埋め、$\sigma(H) = \sigma(M) = \{0\} \cup [m, \infty)$ です。隙間は m で、M の固有値は 0 のほかにありません。この種の場は一般化自由場と呼ばれます（Greenberg 1961）既知 。**例 2：粒子はあるが隙間は無い。**04 節の理論で ϕ の一粒子状態は $M = 1$ ですが、χ の二粒子が $[0, \infty)$ を埋め、固有値 1 は連続スペクトルに埋もれています。

ヤン–ミルズで物理が期待するのは隙間の下端の孤立したグルーボールです 物理 。相関から孤立点と連続の端を見分ける難しさは 16-08 §05。

06

クラスター性 — 空間の向きに離すと、どれだけ速く独立になるか

速さを問わない**クラスター性**（遠ざけた二つの量が独立に近づくこと）は Osterwalder–Schrader の公理 E4 で、真空が一つであることと対です（4-10 の表 1）既知 。質量 0 の自由場もこれを満たしますが、相関は $1/(4\pi^2|x|^2)$ と冪でしか減りません。問題文 §5 の式 (2) は、$\langle \Omega, \mathcal{O}\Omega\rangle = 0$ の局所場 $\mathcal{O}(x) = e^{-iP\cdot x}\mathcal{O}e^{iP\cdot x}$ について

$$|\langle \Omega, \mathcal{O}(x)\,\mathcal{O}(y)\,\Omega\rangle| \le e^{-C|x-y|} \qquad (0 < C < \Delta,\ \ |x-y| \text{ が十分大きいとき}) \tag{7}$$

です。ユークリッドの側の筋は (2) と回転不変性（ユークリッド共変性。Osterwalder–Schrader の公理 E1）です。半径 δ に局在した二つの量が距離 R 離れていれば、結ぶ向きを回転で τ 軸に合わせると (2) から連結相関は（R によらない定数）$\times e^{-m(R-2\delta)}$ 以下です。同時刻で空間的に離れた点では、Wightman 関数（場の積の真空期待値。4-09 §04）は Schwinger 関数の時刻 0 での値に等しいので（4-10 §05 の解析接続）、このユークリッドの相関の減衰がそのまま (7) になります。点の場 $\mathcal{O}(x)$ は有界な量ではないので、正確には場を半径 δ の範囲で少しぼかした量で考えます。(7) の「$C < \Delta$」「十分大きいとき」は、前に付く定数と幅 2δ の分です。ミンコフスキーの側の定理は、Nachtergaele–Sims 2006 の序論が 'in

[1] Fredenhagen proves a general theorem applicable to arbitrary strictly local theories' と紹介しています（[1] は Fredenhagen 1985）既知 。

逆向きは一般には成り立たず、同じ序論は、基底状態が一つで相関が指数関数的に減るのに隙間の無い格子の量子系があると書き、例として Nachtergaele 1996 の Example 2 を挙げます 既知 。回転不変なユークリッドの理論では時間も向きの一つです。「すべての向きに一様な速さで減る」なら時間の向きにも同じ速さで減るので、02 節の逆向きの議論（前に付く定数は F ごとでよい）がそのまま使え、隙間と同値です。二つの相を混ぜた状態（2-09 §08）はクラスター性そのものを破り、(1) の前提 (b) が崩れます。

07

相関長 — 隙間の逆数を、長さで言い直す

2-08 の (6) は一つの相関から相関長を定めました。理論の相関長は観測量にわたる上限です。

$$\frac{1}{\xi_F} = -\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\log C_F(\tau) = E_F, \qquad \xi := \sup_F \xi_F = \frac{1}{m} \tag{8}$$

どちらも (3) の言い換えです 既知 （単位を戻せば $\xi = \hbar c/\Delta$、格子では $\xi_{\mathrm{phys}} = a\,\xi_{\mathrm{lat}} = 1/\Delta$ ）。Chatterjee 2018 の格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）はプラケットの相関で格子の相関長を定め、'The number ξ represents the reciprocal of the mass of the lightest glueball' と書きます 既知 。

二次の積率による $\xi_{2\mathrm{nd}}^2 = \sum_x |x|^2 G(x) \big/ \big(2d\sum_x G(x)\big)$ もよく使われ、格子では減衰の速さが向きにもよります（4-02）。隙間の逆数に等しいのは転送行列の向き（軸）の長さです。四次元の格子の自由場（共分散 $(-\Delta_{\mathrm{lat}} + m_0^2)^{-1}$）では閉じた形があります。

$$\cosh\frac{1}{\xi_{\text{軸}}} = 1 + \frac{m_0^2}{2}, \qquad \xi_{2\mathrm{nd}} = \frac{1}{m_0}, \qquad \text{向き } e \text{ の減衰率} = \max\Big\{q\cdot e : \sum_{\mu}(2\cosh q_\mu - 2) \le m_0^2\Big\} \tag{9}$$

三つ目の e は長さ 1 のベクトルで、軸は $e=(1,0,0,0)$、対角は $e=(1,1,1,1)/2$ です。

計算 表 3　四次元の格子の自由場。右の二列は $\xi_{\text{軸}}$ との比（対角は $e=(1,1,1,1)/2$ の向き）。(9) の三つ目は、二次元の周期格子で二点関数を高速フーリエ変換で求め、軸と対角で 0.11% 以内で合うことを確かめた。

m_0	$\xi_{\text{軸}}$	$\xi_{\text{対角}}/\xi_{\text{軸}}$	$\xi_{2\mathrm{nd}}/\xi_{\text{軸}}$
2	0.5673	0.91579	0.88137
1	1.0390	0.97228	0.96242
0.2	5.0083	0.99876	0.99834

m_0	$\xi_{\text{軸}}$	$\xi_{\text{対角}}/\xi_{\text{軸}}$	$\xi_{\text{2nd}}/\xi_{\text{軸}}$
0.05	20.0021	0.99992	0.99990

相関長が格子間隔程度（$m_0 = 1, 2$）だと三つの長さは 3〜12% 食い違い、$\xi_{\text{軸}} = 20$ では差は 10^{-4} の桁で、回転の対称性が戻ります（連続極限。2-08 §08）。自由場の外では長さどうしが一致する保証は無く、隙間に使うのは $\xi_{\text{軸}}$ です。

08

有限の箱と一様性 — 隙間が問われるのは極限の側

有限の格子では、隙間が正であることはほとんど自明です。時間ゲージでは、転送行列 T（5-03 §05）は一つの時刻のリンクの値の空間 $L^2(G^n)$（G はコンパクトな群、n はリンクの数）に作用する、正の連続な核を持つ積分作用素です。コンパクトな空間の上の連続な核なので T はコンパクトな作用素（正確には、有限次元の行列のノルム極限）で、固有値は 0 以外に集積しない離散の列です。さらに核が正なので、Jentzsch の定理（Perron–Frobenius の定理の無限次元版）から最大固有値 λ_0 は単純で、$\lambda_1 < \lambda_0$ です 既知 。群が有限なら T は成分が正の有限の行列で、文字どおり Perron–Frobenius の定理です。最大固有値が単純なだけでは、残りの固有値が λ_0 に詰まる可能性が残るので、離散であることが要ります。問われるのは、体積 $L \to \infty$ と格子間隔 $a \to 0$ の極限で $m_{\text{lat}}(a, L)/a$ が正に留まるかです。問題文 §6.5 は 'New ideas are needed to prove the existence of a mass gap that is uniform in the volume of space-time.' と書き、§5 も一様な隙間が無限体積極限の証明で役を果たしうると述べます 既知 。(2) は相関どうしの不等式です（右辺の $\|\psi_F\|^2 = \mathbb{E}[\overline{\Theta F} F] - |\mathbb{E}[F]|^2$ も相関です）。だから近似の列で同じ Δ のまま成り立ち相関が収束すれば、極限でも成り立ちます。02 節の逆向きを極限の理論で使えば $m \geq \Delta$ です（ψ_F の全体が $\Omega^\perp$ で稠密なことは再構成の作り方から。7-01）。

有限の箱の隙間が $L \to \infty$ で閉じる型は、質量 0 の粒子（周期的な箱で $2\pi/L$。2-05 §06）と対称性の破れ（相の間のトンネルの分裂。2-09 §08）です。後者では無限体積の各相に隙間があり、問題文 §6.3 は二次元の ϕ^4 の各相が 'a non-zero mass gap and a unique, Poincaré-invariant vacuum state' を持つと書きます 既知 。$a \to 0$ では Δ 一定なら $m_{\text{lat}} = a\Delta \to 0$ で、格子単位の隙間が一様に正なことは連続極限の $\Delta = \infty$ を意味します（5-09）。

09

ゲージ理論で読む — ゲージ不変な状態の上の隙間

ヤン–ミルズでは (1) の $\mathcal{H}$ はゲージ不変な状態の空間で（4-01）、(2)・(3) の観測量は場の強さから作る $\mathrm{Tr}\, F_{ij} F_{kl}(x)$ のような局所量（問題文 §4）や Wilson ループです（4-10 §09）。状

態はスピン・パリティ・荷電共役の組 J^{PC}（チャネル）で分かれ（J はスピン、P と C は空間反転と、場を複素共役〈反粒子〉に替える操作に対する符号 ±）、03 節の k と同じく各チャネルの最低エネルギーの最小が m です。格子の数値では 0^{++} が最低で（純 $SU(3)$ で 2^{++} の約 0.7 倍。Chen ほか 2006。5-08）、物理ではそれを隙間の下端と読みます 物理 。

ゲージを固定した場の相関は一般に反射正値である保証が無く（4-10 §04・§09）、グルーオンの伝播関数では破れていると読まれています 物理 。反射正値でない相関の減り方は $\sigma(H)$ の点を与えません。弦張力は静的な電荷の対のエネルギーで決まり、真空の上の励起とは別の量です（16-08 §06）。数学では、格子の強結合（小さい β）での格子単位の隙間に以前からの結果があります（5-04）。Shen–Zhu–Zhu 2023 は 't Hooft の規約（作用の結合を $N\beta$ の形に書く。他の規約への換算は 5-01 の表 4）で、$SU(N)$ なら $|\beta| < 1/(16(d-1))$ のとき、ある族の観測量の相関が指数関数的に減ることを示しました。要旨はこれを 'strictly positive mass gap' と呼び、'Our method improves earlier results' とも書きます 既知 。02 節の同値に使うには、その族が稠密であることが要ります。これは 08 節の極限の手前の結果で、四次元の連続の理論では (1) の $\mathcal{H}$ と H は 2026-11 に公開された構成が作りましたが（委員会の評価の水準。12-08）、その隙間は示されていません（6-04。それより前の到達点は 7-10）。

10

付表：「隙間」の語の一覧 — 同じ語、同値・上界・別物

この本には「隙間」「ギャップ」と呼ばれる量が十以上出てきます。問題文の Δ と**同値**なもの、Δ の**上界**にしかならないもの、**別物**（別の作用素の隙間、または追加の要求）があり、取り違えると主張の向きが変わります。下の表は、各行の定義・主に扱う章・Δ との関係を一行ずつ並べたものです（関係の付け方はこの本の整理。上界と下界の向きは 1-10 の囲み「上界と下界の非対称」）。

付表　「隙間」の語。関係の欄の「同値」は、記した前提の下で同じ数になること。

#	名前	定義（一行）	章	Δ との関係
1	ハミルトニアンの隙間（質量ギャップ）	$\Omega^{\perp}$ の上の H のスペクトルの下限 Δ	§01・0-03 §06	基準（問題文の Δ）
2	質量作用素の隙間	$M=\sqrt{H^2-P^2}$ の 0 の次	§05・0-03 §06	同値（同じ幅）
3	一様な減衰率	すべての連結相関が $e^{-m\tau}$ 以上の速さで減る最大の m	§02	同値（(2)・(3)。反射正値性の下）
4	相関長の逆数	$1/\xi$、$\xi=\sup_F \xi_F$（転送行列の向き）	§07	同値（(8)）。$\xi_{2\mathrm{nd}}$・対角の向きの長さは別物（自由場で近い）

#	名前	定義（一行）	章	Δ との関係
5	有効質量	$m_{\mathrm{eff}}(\tau) = -\frac{d}{d\tau}\log C_F(\tau)$	§02・§04・18-01 §08	上界（$m_{\mathrm{eff}}(\tau) \geq E_F \geq \Delta$）
6	転送行列の隙間（格子単位）	$m_{\mathrm{lat}} = \log(\lambda_0/\lambda_1)$	§02・5-03	格子で同値（$T = e^{-aH}$）
7	物理単位の隙間	$\Delta = m_{\mathrm{lat}}/a$	§08・5-09	6 と a で結ぶ。連続極限で問われるのはこちら
8	有限体積の隙間	一辺 L の箱の T の $\lambda_1 < \lambda_0$	§08	常に正（Jentzsch の定理）。Δ については何も言わない
9	一様な隙間	体積 L（と範囲を決めた β）について $\inf m_{\mathrm{lat}} > 0$	§08・5-04・16-05	無限体積での 6 の下界。β に一様な格子単位の隙間は、物理単位では $\Delta = \infty$ の側（偽の友。18-01）
10	上の隙間（upper gap）	一粒子の固有値 μ が $\sigma(M)$ の残りから離れている幅	§05	別物（問題文 §5 の追加の要求）
11	Langevin の隙間	経路の測度（格子の Wilson 測度）の生成作用素 L の隙間 $1/C_P$	1-10 §09・18-03 §05	別物（人工的な時間の隙間）。自由場では $1/C_P = m^2$（隙間の二乗）。揃うと置くのが 23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定
12	時刻 0 の測度の Poincaré 定数	基底状態の分布 $\phi_0^2 dx$ の C_P	2-05 §08	同値（基底状態変換。$C_P = \hbar^2/(2m\Delta)$ の正規化で）

11 と 12 はどちらも Poincaré 定数ですが、11 は虚時間の経路全体の測度、12 は一つの時刻の測度についての量で、同値なのは 12 だけです（2-05 §08）。5 と 9 は向きが逆で、5 は一つの観測量で出る上界、9 はすべての観測量と体積にわたる下界です。

この章が言えている範囲

内容	状態
(1)〜(3)・(8)、05 節の例、08 節の有限の格子の隙間	既知 。筋を本文に書いた
表 1〜3・図 1・2・(5)・(9) の検査、03 節の漸近形との照合	自由場の倍精度の 計算
(7) のユークリッドの側	筋のみ。ミンコフスキーの側は Fredenhagen 1985（書誌のみ）
10 節の付表の「同値・上界・別物」	この本の整理。各行の根拠は本文と挙げた章（既知 の言い換え）
09 節のグルーボール	物理 （格子の数値と外挿）
四次元ヤン–ミルズの隙間	$\mathcal{H}$・H は 2026-11 に公開された構成が作った（委員会の評価の水準。12-08）。隙間は示されていない（6-04）。この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表・図・本文の数値	計算	python3・NumPy・SciPy（数値積分・二分法・FFT）
問題文 §1・§4・§5・§6.3・§6.5、格子の相関長の問題	既知	A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*（Clay, 2000）；S. Chatterjee, arXiv:1803.01950 §5。本文で確認
06 節	既知	B. Nachtergaele, R. Sims, Comm. Math. Phys. 265 (2006) 119–130（arXiv:math-ph/0506030）序論を確認；K. Fredenhagen, 'A Remark on the Cluster Theorem', Comm. Math. Phys. 97 (1985) 461–463 書誌のみ；B. Nachtergaele, Comm. Math. Phys. 175 (1996) 565–606 の Example 2 書誌のみ
05 節	既知	H. Lehmann, Nuovo Cimento 11 (1954) 342–357；O. W. Greenberg, Ann. Phys. 16 (1961) 158–176；E. Wigner, Ann. of Math. 40 (1939) 149；G. Källén 1952 'On the Definition of the Renormalization Constants in Quantum Electrodynamics'（初出の誌名・巻は未確認）。書誌のみ
08 節	既知	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471 書誌のみ（転送行列の構成は 5-03）
09 節	物理・既知	Y. Chen ほか, Phys. Rev. D 73 (2006) 014516 表 VIII（本文）；H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, Comm. Math. Phys. 400 (2023) 805–851（arXiv:2204.12737 の要旨）

次に読む章：4-12 寄り道：摂動級数は発散する。極限で何を固定するかは 5-09。

寄り道：摂動級数は発散する — 係数の階乗は、級数に映らない e^{-c/g^2} の影であることが多い

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 係数が $n!$ で増える出どころ（負の結合・鞍点・運動量積分の端）。最良の打ち切りと Borel 和、その曖昧さが e^{-c/g^2} の項と組になること。ヤン–ミルズの Borel 平面で期待される特異点。

前提となる章 — 4-04 発散と繰り込み（走る結合）。4-03 §08 の漸近級数とゼロ次元の模型 (2) を使います。複素関数論は Cauchy の積分公式だけをその場で述べて使います。

先に言うこと — 模型の式は導出でき、数値はこの端末で確かめました。四次元ヤン–ミルズの級数の発散・renormalon・級数と理論の関係は物理の水準の期待で、定理ではありません。この章はヤン–ミルズについて何かを示す章ではありません。

この章の順序

1. 漸近級数 — 収束しなくても近づく：係数は関数から決まり、逆は決まらない
2. Dyson の議論 — 結合の符号を裏返す：負の結合で虚部 $e^{-3/(2s)}$ が出る
3. 係数は裏返しの側で決まる — 分散関係と鞍点：虚部から $n!\,(2/3)^n$
4. 最良の打ち切り — 項が最小のところで止める：誤差の底は $e^{-3/(2u)}$
5. Borel 和 — $n!$ で割って、積分で戻す：模型では厳密な値に戻る
6. 正の軸に特異点があるとき — 曖昧さと指数的に小さい項：和が割れる
7. renormalon — 運動量積分の端から来る $n!$：山が Λ に届く次数で止まる
8. ヤン–ミルズの Borel 平面 — 期待される特異点の地図：renormalon が最も近い
9. 数学から見ると — 何が定理で、何が期待か：四次元では漸近性は示されていない

01

漸近級数 — 収束しなくても近づく

この章の問題は、繰り込みで有限になった係数を並べた**級数そのものが収束しない**ことです（4-04 の発散とは別）。それでも使い道はあります。次数 N を決めて $u \to 0$ とすると打ち切りの誤差が u^{N+1} の速さで消えるとき、級数は f に**漸近する**と言い、$f(u) \sim \sum a_n u^n$ と書きます。

$$\left| f(u) - \sum_{n=0}^{N} a_n u^n \right| \le K_{N+1}\, u^{N+1} \qquad (0 < u < u_0,\ N = 0, 1, 2, \dots) \tag{1}$$

収束とは極限の順が逆です。係数は f から一通りに決まりますが 既知 、逆は成り立ちません。$e^{-1/u}$ はどの u^N より速く 0 に近づくので、f と $f + e^{-1/u}$ は同じ級数を持ちます（7-12 §07）。この章の主題は、この「係数に映らない部分」が係数の増え方に記録されていることです。

例。$e^{-1/u}$ の係数がすべて 0 であることは、(1) を u^N で割った形で確かめられます。$v = 1/u$ と置くと $e^{-1/u}/u^N = v^N e^{-v}$ で、$u \to 0$（$v \to \infty$）のとき指数関数が冪に勝って 0 に近づきます。どの N でもそうなので、$a_0 = a_1 = \cdots = 0$ です。逆向きの例がこの章の模型 (2) です。4-03 §08 の (14) は $u \ge 0$ で $\left| Z(u) - \sum_{n<N} a_n u^n \right| \le |a_N|\, u^N$ を示しており、(1) の K_N として $|a_N|$ が取れます。K_N は N とともに階乗で増えますが、(1) が要るのは N を決めるごとの評価だけなので、級数は Z に漸近します。

02

Dyson の議論 — 結合の符号を裏返す

Dyson（1952）の要旨は、量子電磁気学の冪級数が繰り込み後もすべて発散するという結論へ 'tentatively' 導く議論を示すと書きます 既知 。骨子は「$e^2 < 0$ では同符号の電荷が引き合って真空が崩れるので、級数は $e^2 = 0$ の両側へ滑らかには続けない」という形で紹介されます。発見的な議論です。小さな模型なら全部を計算できます。

$$Z(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-S_u(x)}, \qquad S_u(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{u}{4!}x^4 \tag{2}$$

$u = -s < 0$ では積分が存在しません（模型の中の「真空の崩れ」）。それでも変数を $x \to e^{-i\theta/4}x$ と回すと $u = s\,e^{i\theta}$ の四次の項が $s\,x^4$ に戻るので、Z は複素数の u へ延びます。積分路を回してよい理由は二つです。一つは、閉じた道とその内側で複素微分できる関数の、その道に沿う積分は 0 になること（Cauchy の定理 既知 。§03 で積分公式の形で使います）。被積分関数は x の多項式の指数なので、どこでも複素微分できます。もう一つは、元の実軸と回し

た直線にはさまれた扇形の遠い弧の上で、四次の項の実部が正のまま $|x|^4$ の速さで効き、弧の寄与が $|x| \to \infty$ で消えることです。上から負の軸へ近づけると

$$Z(-s+i0) = e^{-i\pi/4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\,\frac{i}{2}x^2 - \frac{s}{24}x^4} \tag{3}$$

は実でない値になり、下からならその複素共役です。**負の軸の上下で値が食い違う——ここが発散の源です**。虚部は壁の高さで決まります。$S_{-s}(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{s}{24}x^4$ は $x^2 = 6/s$ で最大値 $\frac{3}{2s}$ を取り、谷から壁を越えて漏れる確率の目安が $e^{-3/(2s)}$ です。正確には、ゼロ次元の積分にトンネルはありません。(3) の被積分関数の鞍点 $x^2 = 6/s$ での作用の値 $\frac{3}{2s}$ が虚部の指数を決め、$s \to 0$ での主要項が $-e^{-3/(2s)}/\sqrt{2}$ になる、という意味です（表 1）。

計算 表 1　(3) の数値積分。虚部は $s \to 0$ で $-e^{-3/(2s)}/\sqrt{2}$ に近づく

s	$\mathrm{Im}\, Z$	$e^{-3/(2s)}/\sqrt{2}$	比
0.50	-3.351e-2	3.521e-2	0.952
0.20	-3.825e-4	3.911e-4	0.978
0.10	-2.138e-7	2.163e-7	0.988

03

係数は裏返しの側で決まる — 分散関係と鞍点

使う道具は **Cauchy の積分公式**です：閉じた道とその内側で複素微分できる関数は、内側の点で $f(u) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(w)}{w-u}\,dw$（反時計回り）を満たします 既知 。$Z$ は負の軸を除く平面で複素微分でき、無限遠で $|w|^{-1/4}$ と減るので、道を大きな円と負の軸の上下に取ると上下の差 $2i\,\mathrm{Im}\, Z$ だけが残ります。

$$Z(u) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\, Z(-s+i0)}{s+u}\, ds \tag{4}$$

これが**分散関係**です（(3) で計算した虚部で右辺を数値積分すると $u = 0.5, 1, 2$ で左辺と 10^{-6} の桁まで合います 計算 ）。$\frac{1}{s+u} = \sum_n (-u)^n/s^{n+1}$ と展開して項ごとに積分すると

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\, Z(-s+i0)}{s^{\,n+1}}\, ds \tag{5}$$

で（$u = 0$ で複素微分できないので、得られるのは漸近級数）、n が大きいと効くのは $s \to 0$ の虚部 $\approx -e^{-3/(2s)}/\sqrt{2}$ だけです。$\int_0^\infty e^{-c/s} s^{-n-1} ds = \Gamma(n)/c^n$ から

$$a_n \approx (-1)^n \Big(\frac{2}{3}\Big)^n \frac{\Gamma(n)}{\pi\sqrt{2}} \tag{6}$$

階乗の出どころは $\Gamma(n)=(n-1)!$、底の $2/3$ は壁の高さ $3/(2s)$ の係数の逆数、符号の交代は特異点が負の軸にあることから来ます。

計算 表 2　厳密な係数 $a_n=\frac{(4n-1)!!}{n!}\left(-\frac{1}{24}\right)^n$（有理数）と (6) の比

n	a_n	$a_n/(6)$
1	-0.1250	0.833
10	1.3901e+3	0.981
20	8.1571e+12	0.991
40	4.1327e+38	0.995

鞍点の作用から大きい次数を読むこの筋を場の理論に持ち込んだのは Lipatov（1977）とされ、Beneke（1999）の総説はインスタントン（虚時間の古典解。§06 で定義します）による階乗の発散を Lipatov 1977 に帰します 既知 。

量子力学の $H=\frac12 p^2+\frac12 x^2+gx^4$ の基底エネルギー $\frac12+\frac34 g-\frac{21}{8}g^2+\cdots$ の大きい次数は Bender–Wu（1969・1973）が調べました（要旨） 既知 。知られた形 $E_n\approx(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}}3^n\Gamma(n+\frac12)$（出典の本文は未確認）と、有理数で 150 次まで計算した係数の比は $n=10$ で 0.832、150 で 0.991 です 計算 。底の 3 は、$V=\frac12 x^2-|g|x^4$ の壁を虚時間ですり抜ける作用 $\frac{1}{3|g|}$ の係数の逆数です。

04

最良の打ち切り — 項が最小のところで止める

素朴な方法は**項が最小になる所で止める**ことです。(6) の項 $\Gamma(n)(2u/3)^n$ は $n\approx 3/(2u)$ まで減り、その先で増えます。Stirling の公式 $\Gamma(n)\approx\sqrt{2\pi/n}\,(n/e)^n$ をそこに入れると

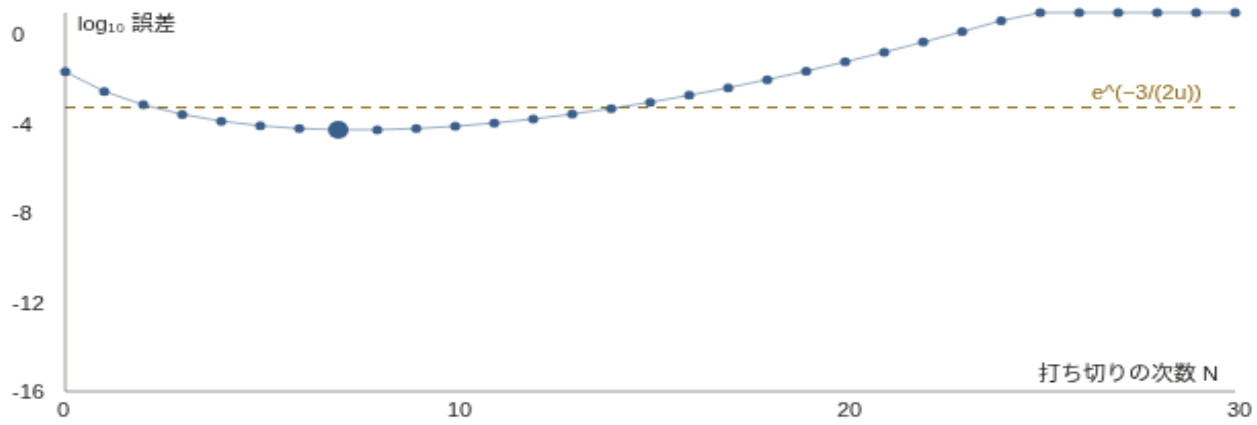
$$\min_n |a_n u^n| \;\approx\; \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2\pi}{N^*}}\,e^{-N^*} \;\propto\; \sqrt{u}\,e^{-3/(2u)}, \qquad N^*\approx\frac{3}{2u} \tag{7}$$

です。誤差の底は、**壁の高さで決まる指数的に小さい量**の大きさで、級数はそれより細かいことを言えません。第 01 節の「係数に映らない部分」が精度の限界として現れます（右端の比が動くのは $\sqrt{u}$ のため）。

誤差がほぼ最小の項になる理由。この模型では、4-03 §08 の (14) により、N 項で止めた誤差は最初に捨てた項 $|a_N|u^N$ を超えません 既知 。項が最小になる所で止めれば、誤差はその最小の項以下です。係数の符号が交代するので、実際の誤差は最小の項のほぼ半分に落ち着きます（表 3 の 6 行で 0.47〜0.50 倍 計算 ）。こうして「最良の誤差 ≈ 最小の項 ≈ (7)」となります。**表 3 の読み方**。各行は u を一つ決め、0 次から N 次までの部分和（$N<60$）を直接の数値積分 $Z(u)$ と比べて、誤差が最も小さい N とその誤差を示します。最良の N は $3/(2u)$ の辺

りに来ます。右端の列は誤差を $e^{-3/(2u)}$ で割ったもので、u を 0.1 から 2 まで変えても 0.07〜0.26 に収まります。誤差が $e^{-3/(2u)}$ と同じ速さで小さくなる、ということです。

図 1　u を変えると、打ち切りの誤差 $|S_N(u) - Z(u)|$（対数目盛）の谷の底が破線 $e^{-3/(2u)}$ と平行に（約 1 桁下で）動く




```
u = 0.20  Z(u) = 0.97791537  最良の N = 7  最小の誤差 5.52e−5  e^(−3/(2u)) = 5.53e−4
```

計算　この図の数値はこの端末で計算した（Simpson 則と係数の漸化式。表 3 と一致）。

計算　表 3　最良の打ち切り（$Z(u)$ は直接の数値積分。第 05 節の Borel 和 (8) は 6 行とも 5×10^{-16} 以内（倍精度の丸めの範囲）で一致）

u	最良の N	最小の誤差	誤差 $/e^{-3/(2u)}$
0.1	15	2.18e−8	0.071
0.2	7	5.52e−5	0.100
0.3	5	7.96e−4	0.118
0.5	3	7.31e−3	0.147
1.0	1	4.39e−2	0.197
2.0	1	1.22e−1	0.259

05

Borel 和 — $n!$ で割って、積分で戻す

Borel 和は、$n!$ をいったん割って収束させ、$\int_0^\infty e^{-t} t^n \, dt = n!$ で掛け戻します。

$$B(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} \, t^n, \qquad \tilde{Z}(u) = \frac{1}{u} \int_0^\infty e^{-t/u} \, B(t) \, dt \tag{8}$$

B を **Borel 変換**、t の複素平面を **Borel 平面**と呼びます。項ごとに $\frac{1}{u}\int_0^\infty e^{-t/u} \frac{t^n}{n!} dt = u^n$ なので、$\tilde{Z}$ の漸近級数は元の級数です。ゼロ次元の模型では $(4n-1)!! = 16^n (\frac{1}{4})_n (\frac{3}{4})_n$（$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$）から

$$B(t)=\sum_{n\ge 0}\frac{(\frac14)_n(\frac34)_n}{(n!)^2}\Big(-\frac{2t}{3}\Big)^n={}_2F_1\Big(\tfrac14,\tfrac34;1;-\tfrac{2t}{3}\Big)\tag{9}$$

です。超幾何関数 ${}_2F_1(a,b;c;z)$ は $z=1$ から伸びる切れ目を除く平面に延びます 既知 。**Borel 平面の特異点は $t=-3/2$ の一点だけで、位置は壁の高さの係数と同じ**です。積分の道 $t\ge 0$ は特異点に触れず、(8) は表 3 のとおり $Z(u)$ に戻ります 計算 。

Borel 和が元の関数に一致することを保証する定理は、原点に接する円板での元の関数の解析性と、(1) の K_N が $A\sigma^N N!$（A,σ は N によらない定数）で抑えられる一様な評価を要求します。(1) だけでは足りません。Beneke はこれを Watson–Nevanlinna–Sokal の定理（Sokal 1980）として引き、'These requirements are too strong for renormalizable theories' と書きます 既知 。

06

正の軸に特異点があるとき — 曖昧さと指数的に小さい項

符号が揃って $a_n\approx K\,a^n n!$（$a>0$）と増える級数では、特異点が正の軸の $t=1/a$ に来て、(8) の道の上に乗ります。上を回るか下を回るかで、**虚部が $e^{-1/(au)}$ の大きさだけ食い違う**和が二つできます。いちばん簡単な $a_n=n!\,a^n$ で見ます。Borel 変換は $B(t)=\sum_n (at)^n=\frac{1}{1-at}$ で、$t=1/a$ に極があります。上を回った積分から下を回った積分を引くと、極を時計回りに一周する積分になり、留数から

$$\tilde Z_{\text{上}}(u)-\tilde Z_{\text{下}}(u)=\frac{2\pi i}{au}\,e^{-1/(au)}$$

です（それぞれの虚部は $\pm\pi e^{-1/(au)}/(au)$）。この差は u のどの冪にも映らない大きさです。表と図は 7-12 §08 にあります。Beneke は正確な関数が分かる例で、Borel 積分と指数的に小さい項の二通りの曖昧さが打ち消し合うのを見せ、次の連鎖を立てます 既知 。

$$\text{符号の揃った階乗の発散}\ \Longrightarrow\ \text{Borel 積分の曖昧さ}\ \Longrightarrow\ \text{指数的に小さい項を足す}\tag{10}$$

そして 'it is not rigorous' と注意します。定理ではありません 物理 。

例。2-05 §07 の二重井戸の隙間は e^{-S_0} の大きさで、摂動論のどの次数にも現れません。虚時間で一方の谷から他方の谷へ移る古典解を**インスタントン**と呼び、その作用が 2-05 の (9) の S_0 です。逆向きに移る解が**反インスタントン**です（ヤン–ミルズでの対応物は 3-05 で詳しく）。谷のまわりの級数の Borel 和の曖昧さは e^{-2S_0}（インスタントン・反インスタントン対の重み）の大きさで、対の寄与の曖昧さと打ち消し合うとされます（Bogomolny 1980・Zinn-Justin 1981） 物理 。級数の発散の仕方が、級数に映らない項の存在を知らせています。

07

renormalon — 運動量積分の端から来る $n!$

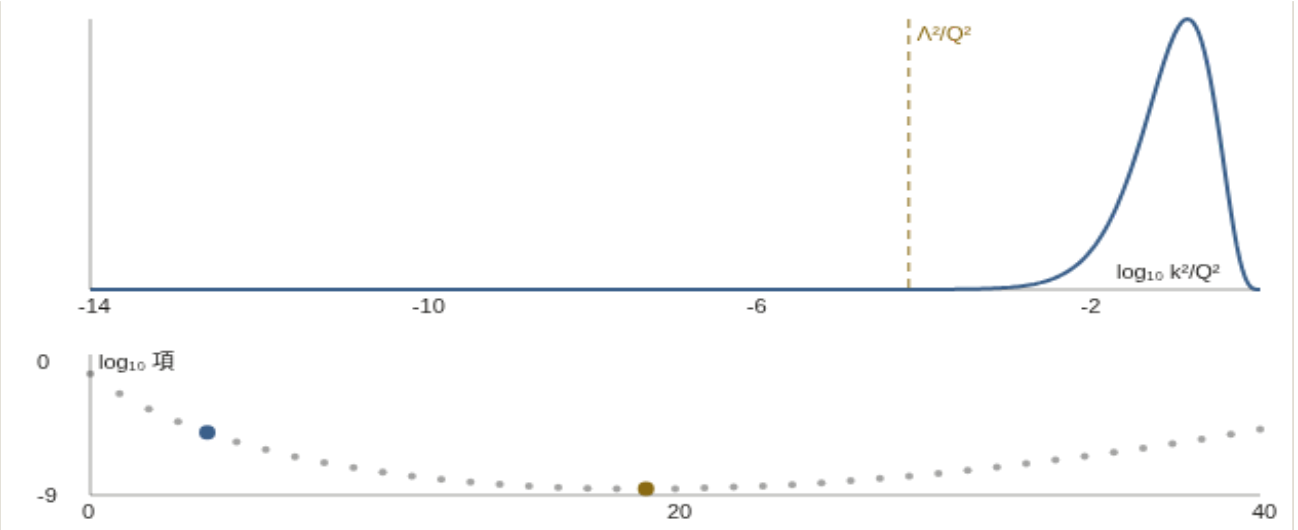
繰り込み可能な理論には鞍点と別の $n!$ の出どころ **renormalon** があります（Beneke によれば Gross–Neveu 1974・Lautrup 1977・'t Hooft 1977 が見つけ、名前は 't Hooft の Erice の講義から 既知 ）。出どころは**泡の鎖**の図です。伝播関数に一ループの泡（粒子の対が生まれて消える輪）を n 個つないだ図で、n について足すと、一ループの走る結合 $\alpha(k)$ を一本の線に入れたものになります（Beneke §2.2）既知 。4-03 §03 の真空の泡とは別物です。

これを一つの変数に縮めた模型を使います。外から運動量 Q を入れて測る量があり、その中のループ運動量 k の積分に、走る結合 $\alpha(k)=\alpha/(1-b\alpha\ln(Q^2/k^2))$ が掛かるとします（$\alpha=\alpha(Q)$、$b=\beta_0/4\pi$、純 $SU(N)$ で $\beta_0=11N/3$。係数の四つの書き方の換算は 4-06 表 1。4-04 §05・4-06）。$\alpha(k)$ を α で展開すると、$n+1$ 次には $\ln(Q^2/k^2)$ の n 乗が入ります。残りの被積分関数については、$d\ln k^2$ で測ったとき、小さい k で k^4 に比例して消え（x^2）、大きい k で $1/k^2$ で減る（x^{-1}）、とだけ仮定します。$x=k^2/Q^2$ として

$$r_n^{\mathrm{IR}}=\int_0^1 x\left(b\ln\tfrac{1}{x}\right)^n dx=\frac{b^n\,n!}{2^{n+1}},\qquad r_n^{\mathrm{UV}}=\int_1^\infty\frac{dx}{x^2}\left(-b\ln x\right)^n=(-b)^n\,n! \tag{11}$$

各項は有限なのに、係数は $n!$ で増えます（閉形は数値積分と 6 桁一致 計算 ）。理由は山の位置です。赤外側の被積分関数（$\ln x$ について測ると $x^2(\ln\frac{1}{x})^n$）は $x=e^{-n/2}$ に山を持ち、**次数が上がるほど山が小さい運動量へ逃げます**。紫外側の山は $x=e^n$ です。Beneke の (2.24)・(2.25) も泡の鎖の図で同じ位置を与えます 既知 。赤外側は符号が揃い（正の軸・曖昧さあり）、紫外側は交代します。小さい k での冪を k^a に変えると、赤外 renormalon の位置は §08 の尺度で $u=a/2$、曖昧さの大きさは $(\Lambda/Q)^a$ になります（Beneke §2.2）既知 。この模型は $a=4$ です。

図 2　n を上げると (11) の赤外側の山（上段、横軸 $\log_{10}k^2/Q^2$）が左へ動き、破線 Λ^2/Q^2 を越える辺りで項 $r_n\alpha^{n+1}$（下段、対数）が最小になる。α で Λ が動く



n = 4　山 k²/Q² = 1.35e−1　Λ²/Q² = 6.24e−5（N = 3）　項 = 1.01e−5　最小の項は n* = 19

計算 この図の数値はこの端末で計算した（(11) の式を図の中で評価。表 4 と一致）。

山はどこで止まるか。一ループでは $\Lambda^2/Q^2 = e^{-1/(b\alpha)}$ です（4-07）。項 $r_n^{\mathrm{IR}}\alpha^{n+1}$ は $n^* \approx 2/(b\alpha)$ で最小になり、そのとき山は $e^{-n^*/2} \approx \Lambda^2/Q^2$ にあります。**級数が役に立たなくなる次数は、ループの運動量が Λ に届く次数**で、最小の項は $(\Lambda/Q)^4$ に α の冪ほどの因子を掛けた大きさです。

計算 表 4　純 SU(3)（$b = 11/4\pi$）の模型で、最小の項の次数と山の位置

$\alpha(Q)$	Λ^2/Q^2	n^*	山 $/(\Lambda^2/Q^2)$	最小の項	最小の項 $/(\Lambda/Q)^4$
0.300	2.22e−2	7	1.36	5.09e−4	1.03
0.200	3.31e−3	11	1.24	9.23e−6	0.84
0.118	6.24e−5	19	1.20	2.53e−9	0.65
0.080	6.29e−7	28	1.32	2.11e−13	0.54

Beneke は、renormalon の位置は β 関数の高次の係数に依らず、Landau 極とは一般に論理的に別だと注意します 既知 。

08

ヤン–ミルズの Borel 平面 — 期待される特異点の地図

α の級数を (8) の型で変換し、位置を $u = \beta_0 t/4\pi$ で測ると $e^{-t/\alpha} = (\Lambda^2/Q^2)^u$ なので、**u の位置の特異点は $(\Lambda/Q)^{2u}$ の大きさの曖昧さ**に当たります。言葉を二つ用意します。**演算子積展開**は、短い距離 $1/Q$ で測る量を「係数 $\times$ $(\Lambda/Q)^d$ $\times$ 次元 d の場の組み合わせの真空での期待値」の和に展開する物理の処方です 物理 。純ヤン–ミルズで、ゲージ変換で変わらない場の組み合わせのうち次元が最も低いのは次元 4 の $F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}$ で、その期待値 $\langle F^2\rangle$ を**グルーオン凝縮**と呼びます。次元 2 のゲージ不変な組み合わせはありません（$A_\mu A_\mu$ は次元 2 ですがゲージ変換で変わります）。

Beneke がまとめる QCD の二点の相関関数（外から運動量 Q を入れて測る量。例はクォークの電流の相関）では 物理 、赤外 renormalon が $u = 2, 3, \ldots$（$u = 1$ が無いのは演算子積展開に次元 2 の項が無いため・Parisi 1979。$u = 2$ はグルーオン凝縮の $(\Lambda/Q)^4$ に当たり、§07 の模型の重み k^4 がこの $u = 2$ です）、紫外 renormalon が $u = -1, -2, \ldots$、インスタントン・反インスタントン対が $t = 4\pi n$（Bogomolny–Fateyev 1977）です。どの u に在るかは観測量に依ります。純 $SU(N)$ の β_0 で $t = 4\pi u/\beta_0$ に換算すると、renormalon は $1/N$ に比例して原点に寄り、対は 4π に留まります。$N = 3$ では $u = 2$ が $t = 2.285$、対はその 5.5 倍遠く、$N = 10$ では 18 倍です 計算 。

対の重み $e^{-4\pi/\alpha} = e^{-16\pi^2/g^2}$ は $(\Lambda/Q)^{22N/3}$ で、$u = 2$ の $(\Lambda/Q)^4$ よりはるかに小さい量です（一つなら 4-07 §08 の (14)）。Beneke も、QCD ではインスタントンの特異点は遠く大きい次数を決めないと見込みます 物理 。

格子での観測。Bali–Bauer–Pineda（2014）は純 SU(3) の平均プラケットの摂動係数を α の 35 次まで数値的に求め、'The on-set of the dominance of the dimension four renormalon associated to the gluon condensate is clearly observed' と書きます（要旨） 物理 。PDG の総説も renormalon の発散は今ある次数では 'not usually visible' だが非摂動の寄与と 'closely connected' だとします。

09

数学から見ると — 何が定理で、何が期待か

定理の側。ゼロ次元の模型の (4)〜(6)・(9) は確かめられる数学です 既知 。Borel 総和可能性を題に掲げた論文が、非調和振動子（Graffi–Grecchi–Simon 1970）と $P(\phi)_2$・ϕ^4_3（Eckmann–Magnen–Sénéor 1975・Magnen–Sénéor 1977。7-03）にあります（書誌のみ）。題によれば、それぞれ振動子の固有値、$P(\phi)_2$・ϕ^4_3 の Schwinger 関数（相関関数）について Borel 総和可能性を示しています。その場合は §05 の Watson–Nevanlinna–Sokal の定理により、級数が値を一通りに決めます。

期待の側。四次元ヤン–ミルズでは係数は各次数で有限に定まりますが（4-05）、級数と理論の関係は示されていません。問いの前提の非摂動の理論は 2026-11 に公開された構成が作りましたが（委員会の評価の水準。6-00）、摂動論との全次数の一致も、級数がその理論の漸近展開であることも示されていません（6-04）。公開された構成より前に Beneke（1999）は 'Since there is no rigorous non-perturbative definition of R in theories such as QED and QCD, we cannot even ask whether series expansions are asymptotic' と書きます 既知 。問題文（Jaffe–Witten §6.1）も、知られている例のほとんどで摂動級数は 'divergent expansions'

で 'even Borel and other resummation methods have limited applicability' と書きます 既知 。

まとめると、(i) 係数の $n!$ は級数に映らない e^{-c/g^2} の量の影です 物理 。正確には、模型では負の結合での虚部の指数 c が係数の底 $1/c$ を決める、という (4)〜(6) の意味です。ヤン–ミルズでは連鎖 (10) の水準の期待で、紫外 renormalon（符号が交代）には指数的に小さい項の曖昧さは付きません。(ii) ギャップが $\Lambda \propto e^{-8\pi^2/(\beta_0 g^2)}$ に比例するなら、ギャップは級数のどの次数にも現れず（4-07 §05）、手がかりは発散の仕方の側にしか残りません 物理 。(iii) 発散の仕方から映らない項を組み立てる形式（transseries）は 7-12 §09 で、$\mathbb{R}^4$ 上の純ヤン–ミルズでは物理の水準でも確立していません。

この章の範囲の外

発散以外の障害は 7-11、図の数が指数でしか増えない平面図の理論は 17-04 です。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	ゼロ次元の模型の (4)〜(6)・(9) と Borel 和の一致（表 1〜3）。振動子の 150 次の係数。(11) の閉形と、最小の項が山の Λ に届く次数に来ること（表 4） 計算 。Borel 平面の位置の換算
条件つき	連鎖 (10) 物理 。二重井戸の打ち消しは文献による（本文未確認）。renormalon の位置は泡の鎖の近似と演算子積展開に基づく期待。プラケットの $u = 2$ は数値の観測
言えていない	四次元ヤン–ミルズの級数の発散・漸近性・renormalon の実在はいずれも定理ではない。Dyson の議論は発見的。このサイトは質量ギャップも連続理論の構成も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§03・§05〜§09 の Beneke の記述と引用	既知	M. Beneke, Phys. Rept. 317 (1999) 1, hep-ph/9807443（本文 §1・§2）
問題文と PDG の引用	既知	Jaffe–Witten（Clay の問題文）§6.1；J. Huston, K. Rabbertz, G. Zanderighi, ‘9. Quantum Chromodynamics’（2023 年 8 月改訂）, in S. Navas et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. D 110 (2024) 030001、脚注 1（以上本文）
Dyson・非調和振動子	既知	Dyson, Phys. Rev. 85 (1952) 631；Bender–Wu, Phys. Rev. 184 (1969) 1231・PRD 7 (1973) 1620（以上要旨）

もの	種別	出典・道具
格子のプラケット	物理	Bali–Bauer–Pineda, PRD 89 (2014) 054505, arXiv:1401.7999（要旨）
その他	書誌のみ	Lipatov, JETP 45 (1977) 216；'t Hooft, Erice 1977 の講義（Plenum, 1978）；Gross–Neveu, PRD 10 (1974) 3235；Lautrup, PLB 69 (1977) 109；Parisi, NPB 150 (1979) 163；Bogomolny–Fateyev, PLB 71 (1977) 93；Bogomolny, PLB 91 (1980) 431；Zinn-Justin, NPB 192 (1981) 125；Sokal, JMP 21 (1980) 261；Graffi–Grecchi–Simon, PLB 32 (1970) 631；Eckmann–Magnen–Sénéor, CMP 39 (1975) 251；Magnen–Sénéor, CMP 56 (1977) 237
表 1〜3・図 1・分散関係の照合・§04 の最小の項との比	計算	`zero_dim.py`（SciPy・有理数）・`min_term.py`。図 1 は JavaScript の Simpson 則
非調和振動子の 150 次の係数	計算	`oscillator.py`（有理数の漸化式。最初の 4 項は既知の値と一致）
(11)・表 4・図 2・§08 の位置	計算	`renormalon.py`。図は同じ式を JavaScript で評価

次に読む章：5-01 Wilson の格子。続きの寄り道は 7-12。