第一巻　準備

第 5 部 格子ゲージ理論

Kiichi, Shiori and Rin · 2026-11-14 の版 · https://computoergosum.com/principia/yang-mills/

> この PDF は Web 版の各章をそのまま刷ったものです。動かせる図は刷った時点の姿で止まっています。章の間のリンクは Web 版へ飛びます。最新の内容は Web 版に在ります。

章		頁
5-01	Wilson の格子	2
5-02	強結合展開	13
5-03	反射正値性と転送行列	24
5-04	無限体積極限とクラスター展開	35
5-05	弱結合と連続極限	46
5-06	U(1) と非可換の違い	56
5-07	モンテカルロ法	68
5-08	グルーボールと弦張力の測定	78
5-09	何を固定して極限を取るか	90
5-10	有限群の格子ゲージ理論	104
5-11	寄り道：Bakry–Émery と一リンク積分	114

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 5 部 格子ゲージ理論 Wilson の格子

Wilson の格子 — 辺に群の元を置けば、ゲージ不変性は近似されずに残る

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 格子の辺に群の元（リンク変数）を置き、小さな正方形（プラケット）を一周する積で作用を作ること。その作用は格子間隔によらず厳密にゲージ不変で、滑らかな場では連続の作用に a^2 の速さで近づき、そこから $\beta = 2N/g^2$ が決まること。測度がゲージ固定なしに定まること。

前提となる章 — 3-03（作用）と 1-04（SU(2)・SU(3)）。規約は 3-02、平行移動は 1-07、Haar 測度は 1-08 §03。

先に言うこと — 定義と古典的な性質の章です。§05 の連続極限は滑らかな場での作用の近づき方で、量子論の連続極限（5-05）とは別物です。質量ギャップについて、この章は何も示していません。

この章の順序

1. なぜ格子か — 有限次元の積分へ。寄り道：1973 年の夏
2. リンク変数 — 辺に群の元を置く（表 1）
3. プラケットと Wilson ループ — 閉じた道だけが残る（図 1・表 2）
4. Wilson 作用 — 五つの性質
5. 古典的な連続極限 — β の由来（図 2・表 3）・規約の換算（表 4）
6. 格子の上の測度 — ゲージ固定が要らない
7. 残るもの、壊れるもの — 正則化の選び方
8. 第 5 部の地図 — 二つの極限

01

なぜ格子か — 積分を有限次元にする

ユークリッド化した量子ヤン–ミルズ理論（4-02）は、形式的には接続 A の全体で $e^{-S[A]}$ を積分するものです。しかし無限次元の空間に一様な測度はなく（1-09 §02）、ゲージ変換で移り合う A の分だけ積分が重複します（3-04・4-08）。Wilson は時空を格子に置き換えました。1974 年の論文の要旨です。

> “It is shown how to quantize a gauge field theory on a discrete lattice in Euclidean space-time, preserving exact gauge invariance and treating the gauge fields as angular variables (which makes a gauge-fixing term unnecessary).”

「角度の変数」とは、場をリー環の元でなく群の元として持つことです。問題文（Jaffe–Witten §6.5）は、コンパクトな群とコンパクト化した時空では “the lattice approximation reduces the functional integration to a finite-dimensional integral” と書き、格子間隔 0・体積無限大の極限でゲージ不変な観測量の期待値が存在することを確かめねばならない、と続けます 既知 。極限は §08 で見ます。

約束。ユークリッドの $\mathbb{R}^4$、添字は 1〜4、$\hbar = c = 1$。3-02 と同じく $A_\mu = A_\mu^a T^a$（エルミート、$\operatorname{tr} T^a T^b = \tfrac{1}{2}\delta^{ab}$）、$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$、連続の作用は $S = \tfrac{1}{2}\int \operatorname{tr} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\, d^4x$（全添字で和）。$\beta$ は格子の逆結合（4-06 の β 関数 $\beta(g)$ とは別の量）、θ はただの角（θ 項ではない）です。

寄り道：1973 年の夏

飛ばしてよい小節です。

Wilson の回想（2005 年刊）では、漸近自由の論文（1973 年 6 月刊）のあと、統計力学で慣れた格子から QCD に入り、1973 年の夏には Orsay で講演していました（本人はこの講演を覚えておらず、Balian–Drouffe–Itzykson の論文の参照で分かる、と書きます）。その時点で、ゲージの変数は “must be unitary matrices from the gauge group itself, rather than being variables from the infinitesimal Lie algebra of the group” であること、点ごとに別々のゲージ不変性があること、ゲージ固定なしに有限の結果が出ることが分かっていたと書きます。係数が $1/g^2$ なので強結合展開（5-02）がすぐ見えたこと、J. Smit が格子ゲージ理論の定式化を進めており、Polyakov も独立に同じものを得ていたこと、Wegner（1971）の模型（2-09）にも触れています 既知 。

02

リンク変数 — 辺に群の元を置く

間隔 a の格子 $a\mathbb{Z}^4$（有限の体積では一辺 L 点の周期格子）で、x と $x+a\hat{\mu}$ を結ぶ辺をリンクと呼びます。連続の理論でゲージ場は隣の点と枠を比べる道具でした（3-01）。格子では道具そのものを変数にし、各リンクに $U_{x,\mu}\in G$ を置いて「$x+a\hat{\mu}$ の値を x の枠へ運ぶ」と読みます。ゲージ変換は点ごとの $\Omega(x)\in G$ で次のように働きます。

$$U_{x+a\hat{\mu},\,-\mu}=U_{x,\mu}^{-1},\qquad U'_{x,\mu}=\Omega(x)\,U_{x,\mu}\,\Omega(x+a\hat{\mu})^{-1} \tag{1}$$

物質の場が $\psi\mapsto\Omega\psi$ なら、差 $U_{x,\mu}\psi(x+a\hat{\mu})-\psi(x)$ は $\Omega(x)$ だけで変わります（3-02 の鎖の四方向版）。滑らかな A からは、辺に沿った平行移動（1-07）の逆元がリンクです。辺を n 等分し、小さな回転を始点側から左に掛けます。

$$U_{x,\mu}=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n-1}e^{-igh A_\mu(x+(k+\frac12)h\hat{\mu})}=\exp\!\big(-iga\,A_\mu(x+\tfrac{a}{2}\hat{\mu})+O(a^3)\big),\qquad h=\tfrac{a}{n} \tag{2}$$

(1) は 3-02 の変換則 $A'=\Omega A\Omega^{-1}-\frac{i}{g}(\partial\Omega)\Omega^{-1}$ を辺に沿って積み上げたものです 既知 。例：U(1) なら $U=e^{-i\theta}$ で、$\Omega(x)=e^{i\alpha(x)}$ なら (1) は $\theta\mapsto\theta+\alpha(x+a\hat{\mu})-\alpha(x)$（2-03 §03）。SU(2) なら $U=u_0+i\,\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\sigma}$（$u_0^2+|\mathbf{u}|^2=1$）で、各リンクは S^3 の一点、$\frac12\mathrm{tr}\,U=u_0$ です。

周期格子のリンクは $4L^4$ 本で、配置の空間 G^{4L^4} は実 $4(N^2-1)L^4$ 次元のコンパクトな多様体です（1-05）。ゲージ変換の自由度 G^{L^4} はその四分の一で、連続の 4 成分からゲージの 1 成分を除く勘定と同じ割合です。

表 1　周期格子の大きさ 計算

L	リンク	プラケット	SU(3) の実変数
4	1,024	1,536	8,192
16	262,144	393,216	2,097,152
32	4,194,304	6,291,456	33,554,432

03

プラケットと Wilson ループ — 閉じた道だけが残る

一本のリンクは両端の Ω に挟まれて変わりますが、二本を端でつなぐと、つないだ点の $\Omega^{-1}\Omega$ が消えます。閉じた道を一周すると始点の Ω だけが両側に残ります。最小の閉じた道が一辺 a の正方形、プラケットです。

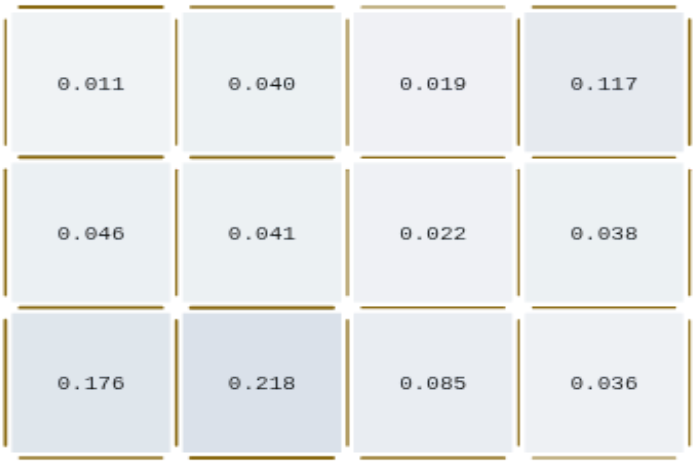
$$U_P=U_{x,\mu}\,U_{x+a\hat{\mu},\nu}\,U_{x+a\hat{\nu},\mu}^{-1}\,U_{x,\nu}^{-1},\qquad U'_P=\Omega(x)\,U_P\,\Omega(x)^{-1} \tag{3}$$

よって $\operatorname{tr} U_P$ は、近似なしに、格子間隔や配置の粗さによらず不変です。一般の閉じた道 C では、道の順に掛けた積のトレース

$$W_C = \frac{1}{N} \operatorname{tr} \prod_{\ell \in C} U_\ell \tag{4}$$

を Wilson ループと呼びます。滑らかな場から (2) で作ると、格子の道が閉曲線に近づくにつれて連続の Wilson ループ（1-07 のホロノミーのトレース）に近づきます（Chatterjee 2018 §4）既知。長方形のループは閉じ込めの判定に使います（5-02・17-02）。掛ける順は効きます。同じ四本を $U_{x,\mu} U^{-1}_{x+a\hat{\nu},\mu} U_{x+a\hat{\mu},\nu} U^{-1}_{x,\nu}$ の順に掛けると、因子の間に $\Omega(x+a\hat{\nu})^{-1}\Omega(x+a\hat{\mu})$ などが挟まって消えません。U(1) では順は関係ありません（2-03）。

図 1　SU(2) の 5×4 点の小片。つまみ s（ゲージ変換の強さ）を動かすと、辺の太さ（$1-\frac{1}{2}\operatorname{tr} U_\ell$）は変わり、面の数（$1-\frac{1}{2}\operatorname{tr} U_P$）は変わりません。「順を崩す」と面の数も動きます。



s = 0.00 Σ_P(1−½trU_P) = 0.849977 Σ_ℓ ½trU_ℓ = 27.0024

計算 この図の数値はこの端末で計算した。表 2 と同じ配置・同じ式をブラウザで計算しています（JavaScript が無効なら表 2 が中身）。

表 2　図 1 の配置（辺 31 本・面 12 枚）での和

s	$\sum_\ell \frac{1}{2}\operatorname{tr} U_\ell$	$\sum_P (1-\frac{1}{2}\operatorname{tr} U_P)$	**順を崩した** $\sum_P (1-\frac{1}{2}\operatorname{tr})$
0	27.0024	0.849977	0.5719
0.5	17.5284	0.849977	3.0662
1	0.6552	0.849977	5.1220

計算 四次元の一辺 4 点の周期格子で無作為な配置に無作為なゲージ変換を施すと、§04 の作用の変化は SU(2) で 2×10^{-13}、SU(3) で 0 でした。リンクの対数（リー環の元）で差分 $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ の二乗和を作ると、SU(2) で 34,707 が 35,659 に変わります。交換子を足しても、有限のゲージ変換では A の変換則が非斉次（(1) の下の $-\frac{i}{g}(\partial\Omega)\Omega^{-1}$ の項）なので、差分は厳密には不変になりません。寄り道の回想の「リー環の変数ではなく群の元」の意味です。

04

Wilson 作用 — 五つの性質

$$S_W(U) = \beta \sum_P \Big(1 - \frac{1}{N}\operatorname{Re}\operatorname{tr} U_P\Big), \qquad \beta = \frac{2N}{g^2} \quad (G = SU(N)) \tag{5}$$

和はすべてのプラケットを一枚ずつ取ります（周期格子で $6L^4$ 枚）。性質は五つです 既知 。

1. **ゲージ不変**：各項が (3) で変わらない。
2. **実数**：向きを逆にしても $\operatorname{Re}\operatorname{tr} U_P^\dagger$ は同じ。
3. **有界**：固有値が絶対値 1 なので各項は 0 以上 2 以下。最大は SU(2) で 2（$U_P = -1$）、SU(3) で $3/2$（固有値が三つとも $e^{2\pi i/3}$、または三つとも $e^{-2\pi i/3}$） 計算 。
4. **最小**：$S_W = 0$ はすべての $U_P = 1$ のときに限る。純ゲージ $\Omega(x)\Omega(x+a\hat\mu)^{-1}$ がその例です。周期格子では、可換な元 V_μ を方向ごとに一様に置いた配置もそうです。その一周の積 V_μ^L が 1 でなければ純ゲージではありません。純ゲージの配置では、一周の積は $\Omega(x)\Omega(x)^{-1} = 1$ になるからです。
5. **局所**：各項は四本のリンクだけに依存する。

Chatterjee（2018）は $\beta' \sum_P \operatorname{Re}\operatorname{tr}(I - U_P)$ と書くので $\beta' = \beta/N$ です（7-02 の SU(2) の β も同じ）。

05

古典的な連続極限 — $\beta = 2N/g^2$ の由来

滑らかな A を (2) でリンクに写し、$a \to 0$ を見ます。指数関数の積を一つにまとめる Baker–Campbell–Hausdorff の公式 $e^X e^Y = e^{X+Y+\frac12[X,Y]+\cdots}$ で (3) を展開すると、プラケットの中心 c で

$$U_P = \exp\big(-iga^2 F_{\mu\nu}(c) + O(a^3)\big) \tag{6}$$

です。向かい合う辺の A の差が $-iga^2(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$ を、交換子が $(-iga)^2[A_\mu, A_\nu]$ を与え、合わせて場の強さになります（曲率＝小さな輪を一周したずれ。1-07）。1-07 の記号との対応：1-07 の反エルミートな接続と曲率はこの章の $-igA$・$-igF$ にあたり、1-07 の平行移動は始点から終点へ運ぶので、この章のリンクとプラケットはその逆元です。1-07 が $U_p \approx \exp(-a^2 F)$ と書くのと (6) とで指数の符号が逆なのはこのためで、トレースの値は変わりません。エルミートな X で $\operatorname{Re}\operatorname{tr} e^{-iX} = \operatorname{tr}\cos X = N - \frac12 \operatorname{tr} X^2 + \cdots$ なので

$$1 - \frac{1}{N}\operatorname{Re}\operatorname{tr} U_P = \frac{g^2 a^4}{2N}\operatorname{tr} F_{\mu\nu}(c)^2 + O(a^5) \tag{7}$$

です。展開の中心をプラケットの中心に取ると、a^5 の項は向きの対称性で打ち消し合い、残る誤差は一枚あたり a^6 です 既知 。a^{-4} 枚を足すと相対誤差は a^2 で、Symanzik の改良（5-05）が消すのはこの項です。プラケットを点 x と組 $\mu<\nu$ で数えて $\sum_x a^4$ を積分に置き換えると

$$S_W \approx \frac{\beta g^2}{2N}\sum_{\mu<\nu}\int \operatorname{tr} F_{\mu\nu}^2\, d^4x = \frac{\beta g^2}{2N}\,S \tag{8}$$

です。連続の作用 S に一致するのは $\beta = 2N/g^2$ のときで、これが (5) の β の由来です 既知 。Chatterjee（2018）§3 は同じ計算をして、四次元では古典的に β が a によらないこと、量子論では β が $\log(1/a)$ のように増えるべきだと物理で信じられているが疑いもあり、“the question remains an open mathematical problem” であることを書きます 物理 （5-05）。

規約の換算 — 一つの結合の五つの書き方

同じ結合 g^2 が、文献によって別の文字と別の規格化で書かれます。同じ条件が章ごとに違う数に見えるのはこのためです。この本の基準は (5) の Wilson の $\beta = 2N/g^2$ です（記号表 A-01 §06。g^2 を加えた六つの書き方と同じ数値例を表 7 に並べています）。他の書き方は、作用 (5) と項ごとに比べれば決まります。

$$\beta = \frac{2N}{g^2},\qquad \beta_{\mathrm{Ch}} = \frac{\beta}{N} = \frac{2}{g^2},\qquad \beta_{\mathrm{SZZ}} = \frac{\beta}{N^2},\qquad \lambda = g^2 N = \frac{2N^2}{\beta} = \frac{2}{\beta_{\mathrm{SZZ}}},\qquad \alpha = \frac{g^2}{4\pi} \tag{8a}$$

β_{Ch} は作用を $\beta_{\mathrm{Ch}}\sum_P \operatorname{Re}\operatorname{tr}(I-U_P)$ と書く形（$1/N$ を付けない。7-10 の (3)）、β_{SZZ} は作用の前の逆結合を $N\beta_{\mathrm{SZZ}}$ と書く 't Hooft の規約（Shen–Zhu–Zhu。5-04）、λ は大 N の 't Hooft 結合（17-04）、α は物理で使う結合の強さです。作用の定数項の違いは規格化 Z で消え、測度を変えません。

表 4　規約の換算と数値例（Shen–Zhu–Zhu の条件は四次元、$|\beta_{\mathrm{SZZ}}| < 1/(16(d-1)) = 1/48$） 計算

書き方	β からの換算	SU(2)・$\beta=2.5$	SU(3)・$\beta=6.0$	SZZ の条件：SU(2)	SZZ の条件：SU(3)
Wilson の β（この本）	$2N/g^2$	2.5	6.0	$\beta < 0.0833$	$\beta < 0.1875$
β_{Ch}（$1/N$ を付けない形）	β/N	1.25	2.0	< 0.0417	< 0.0625
β_{SZZ}（'t Hooft の規約）	β/N^2	0.625	0.6667	$< 1/48 = 0.0208$	< 0.0208
't Hooft 結合 λ	$2N^2/\beta$	3.2	3.0	$\lambda > 96$	$\lambda > 96$
g^2	$2N/\beta$	1.6	1.0	$g^2 > 48$	$g^2 > 32$
$\alpha = g^2/4\pi$	$N/(2\pi\beta)$	0.1273	0.0796	$\alpha > 3.820$	$\alpha > 2.546$

例：Shen–Zhu–Zhu の条件は、β_{SZZ} で書けば N によらず $1/48$、λ で書けば $\lambda > 96$ で、Wilson の β に直すと $N^2/48$ です。β_{SZZ} と λ では N が消えるのが 't Hooft の規約の利点です。数値計算でよく使う SU(2) の $\beta = 2.5$ は $\alpha \approx 0.13$、条件の端は $\alpha \approx 3.8$ で、二つは約 30 倍離れています。換算はこの本の算術で、条件そのものは各文献の規格化のまま読むものです（5-04・5-09・7-10）。

一枚のプラケットで見る

SU(2) の定数の場 $A_1 = c\,T^1$、$A_2 = c\,T^2$ では微分の項が無く、$F_{12} = g c^2 T^3$ は交換子だけから来ます（3-02 §04 の例 2）。リンクは $e^{-i\theta\sigma_1/2}$、$e^{-i\theta\sigma_2/2}$（$\theta = gac$）、プラケットは群の交換子 $U_1 U_2 U_1^{-1} U_2^{-1}$ です。§02 の $u_0 + i\,\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ の形で掛けます。パウリ行列の積 $\sigma_j\sigma_k = \delta_{jk} + i\epsilon_{jkl}\sigma_l$ から

$$(a_0 + i\,\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})(b_0 + i\,\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = a_0 b_0 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + i\,(a_0\mathbf{b} + b_0\mathbf{a} - \mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\boldsymbol{\sigma}$$

です。$c = \cos\frac{\theta}{2}$、$s = \sin\frac{\theta}{2}$ と置くと $U_1 = (c;\,-s,0,0)$、$U_2 = (c;\,0,-s,0)$（u_0 と $\mathbf{u}$ を並べた書き方）で、$U_1 U_2 = (c^2;\,-cs,-cs,-s^2)$、$U_1^{-1}U_2^{-1} = (U_2U_1)^{-1} = (c^2;\,cs,cs,-s^2)$ です。二つを掛けた u_0 が $\frac12\mathrm{tr}\,U_P$ で、

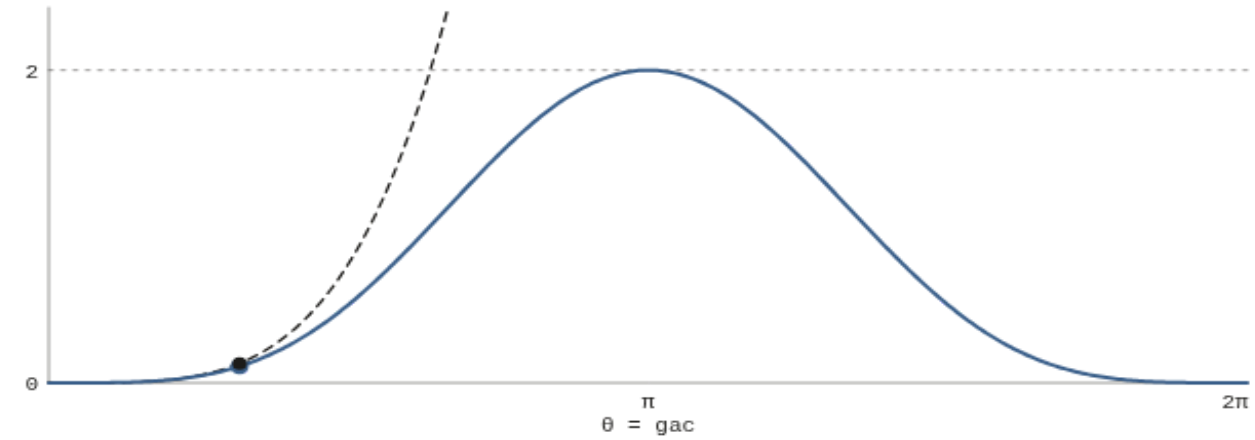
$$\tfrac12\mathrm{tr}\,U_P = c^4 - \left(-c^2s^2 - c^2s^2 + s^4\right) = (c^2+s^2)^2 - 2s^4 = 1 - 2\sin^4\frac{\theta}{2}$$

となり、次の閉じた形が出ます。

$$1 - \tfrac12\mathrm{tr}\,U_P = 2\sin^4\frac{\theta}{2}, \qquad \frac{g^2a^4}{2N}\,\mathrm{tr}\,F_{12}^2 = \frac{\theta^4}{8} \tag{9}$$

小さい θ では比が $1 - \theta^2/6 + \cdots$ で、相対誤差は a^2 に比例します。大きい θ では格子の値は 2 を超えず、$\theta = 2\pi$ で 0 に戻ります。リンクは場を e^{-igaA} の形でしか見ないので、強すぎる場と弱い場を区別しません。この有界性が §06 で積分が有限になる理由の一つです。

図 2　一枚のプラケット。実線が格子の $2\sin^4(\theta/2)$、破線が連続の $\theta^4/8$、点線が上限 2。つまみで $\theta = gac$（場を固定すれば a に比例）を動かすと、二つの点と比が変わります。



θ = 1.00　格子 0.10566　連続 0.12500　比 0.8453

計算 この図の数値はこの端末で計算した。曲線は (9)（行列の計算との差 2×10^{-16} 以下）。JavaScript が無効なら：比（格子／連続）は $\theta=0.1,\,0.5,\,1,\,2$ で 0.998・0.959・0.845・0.501、格子の値は $\theta=\pi$ で最大 2、2π で 0 です。

四次元の滑らかな場で見る

トーラス $[0,1)^4$ の滑らかな SU(2) の場（8 つの波数の三角関数の和、$g=1$、$\beta=4$）で比べます。リンクは (2) を $n=16$ で打ち切り、連続の作用は三角多項式なので有限個の点の和で誤差なく積分しました（$S=184.2275$）。

表 3　格子間隔 $a=1/L$ と Wilson 作用 計算

L	S_W	$(S_W-S)/S$	同じ値 $/a^2$
4	134.502	−0.2699	−4.319
8	170.242	−0.07592	−4.859
16	180.618	−0.01959	−5.016
32	183.318	−0.004938	−5.057

差は a^2 に比例し、係数はこの場で −5.06 付近です（値は場による）。n を 8・16・32 と変えた S_W の変化は $L=8$ で 0.03・0.008 です。(6) の $\|U_P-e^{-iga^2F(c)}\|/a^2$ は $a=1/8$ から $1/64$ で 0.190・0.119・0.065・0.034 と、a を半分にするたびにほぼ半分になり（比は 1.6 から 1.9 へ）、a に比例して縮みます。交換子の符号を逆にすると 5〜6.5 のままでした 計算 。

06

格子の上の測度 — ゲージ固定が要らない

有限の格子の上の量子論は、次の確率測度で定まります（1-08 §01）。

$$d\mu_\beta(U)=\frac{1}{Z}\,e^{-S_W(U)}\prod_{\ell}dU_\ell,\qquad Z=\int e^{-S_W(U)}\prod_{\ell}dU_\ell \tag{10}$$

dU_ℓ は G の Haar 測度（左右どちらから掛けても変わらない重さ 1 の測度。SU(2) では S^3 の一様分布）です。**有限である**：$0 < e^{-S_W} \le 1$ は連続で範囲はコンパクトなので $0 < Z \le 1$、§04 の有界性から $Z \ge e^{-12\beta L^4}$ も出ます（7-10 の (3)）既知。一辺 4 点の SU(3) なら実 8,192 次元の上のふつうの多重積分です。

ゲージ固定が要らない：Haar 測度は左右の掛け算で変わらないので、(1) で配置を移しても $\prod dU_\ell$ も S_W も変わらず、$\langle f \rangle = \langle f \circ \Omega \rangle$ です。連続では無限大の体積の軌道から代表を選ぶゲージ固定が要りましたが（4-08・3-04）、格子ではゲージ変換の全体 G^{L^4} がコンパクトで重さ 1 なので、重複は平均されるだけです。要旨の「ゲージ固定の項を不要にする」はこのことです既知。

帰結が二つあります。(i) 一般の f について、$\langle f \rangle$ はゲージ変換で平均した f の期待値に等しくなります。特に、ゲージ変換で自明でない形に変わる量（一本のリンク U_ℓ やその成分、$\mathrm{tr}\, U_\ell$ など）は、Haar 平均で打ち消されて期待値が 0 です（17-02 の寄り道。無限体積でも保たれるのが Elitzur 1975 の定理）。ゲージ不変でない量がすべて 0 になるわけではなく、$|\mathrm{tr}\, U_\ell|^2$ の期待値は正です。(ii) 木（閉路を含まないリンクの集合）の上のリンクは 1 にそろえてよい（7-02 §02）。観測量の典型は Wilson ループと、離れた二つのループの相関です。相関の減る速さが格子の上の質量で（4-11・5-09）、Chatterjee（2018）§5 の格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）はこれを問います。

07

残るもの、壊れるもの — 正則化の選び方

無限大を避ける工夫（正則化）は理論の一部を変え、何を残すかで後の仕事が決まります。Wilson の格子では、ゲージ不変性は各 a で厳密に残り、回転と平行移動は 90° の回転と格子間隔ずつの移動だけが残ります（連続の対称性の回復は極限で示すこと。7-10。2026-11 に公開された構成での回復は 12-06）。反射正値性は成り立ち（Osterwalder–Seiler 1978。5-03）、位相電荷（3-05）はそのままでは定まりません。

問題文（JW §6.5）は反射正値性が Wilson の近似で成り立つことを “a major advantage” と呼びます既知。ハミルトニアンとヒルベルト空間を作る鍵だからです（4-10）。反対に、連続の運動量の切断はゲージ不変性を壊し、相殺項で戻します（7-07 §06）。JW §6.5 は、反射正値性が次元正則化や Pauli–Villars などの正則化で失われた場合、それを回復する方法は少ない、とも書きます既知。これを根拠に、三つ（ゲージ不変性・反射正値性・連続の回転）をすべて保つ正則化は、探した範囲では見当たりません（この本の整理。紫外の制御を加えて四つで数える言い方は 7-10 §03）。

Lüscher（1982）の要旨は、作用の密度が小さい四次元の超立方格子の非可換ゲージ場が “an integer topological charge Q, which is invariant under continuous deformations of the field” を持つ、と述べます 既知 。この Q は古典的な連続極限で Chern 数（3-05）に戻るとされます。（この章の補足：条件が無ければ $SU(N)^{\text{リンク数}}$ は連結なので、連続で整数値の量は定数しかありません。）作用も Wilson の形に限らず、熱核の作用（Villain 型。7-02）や、1×2 の長方形を足して表 3 の a^2 の差を消す改良作用（Symanzik の改良。5-05）があります。どれでも同じ連続極限に着くと考えるのが普遍性です 物理 。

08

第 5 部の地図 — 二つの極限

有限の格子の理論は (10) で定まりました。問題文の理論には、$L \to \infty$ と $a \to 0$（四次元では $\beta \to \infty$ と組にすると考えられている 物理 ）の二つの極限が要ります。順序は、まず β（つまり a）を固定して $L \to \infty$ を取り、そのあと $a \to 0$ です。Chatterjee（2018）§5 の格子の相関長の問題も、固定した β での無限体積の極限を出発点にしています 既知 。一つ目についてさえ、Chatterjee（2018）§3 は、無限体積の極限の一意性は二次元より上の大きい β で一般には分かっていないと書きます 既知 。2026-11 に公開された構成は逆の順で、体積を止めて a → 0 を取り、そのあと体積の部分列で極限を取っています（Lean で証明されている、と委員会が評価した。8-05）。この構成を読むのは第二巻で、格子の族と極限の順は 8-01〜8-05、繰り込みの一段は 9-01〜9-07 です。第 5 部の続きが分担します。小さい β の展開は 5-02、ハミルトニアンは 5-03、強結合側の無限体積は 5-04、$\beta \to \infty$ と $a(\beta)$ は 5-05、数値積分は 5-07・5-08、極限で何を固定するかは 5-09 です。二つの極限の存在とその質量ギャップについて、この章は何も示していません。

この章が言えている範囲

事項	言えている	言えていない
定義とゲージ不変性・測度の有限性	各格子間隔で厳密（代数の恒等式・コンパクト性） 既知 。数値でも確認 計算	無限体積の極限の一意性（大きい β で一般には未知）
古典的な連続極限 (6)〜(8)	形式的な展開と $\beta = 2N/g^2$ 既知 。一つの場で差が a^2 に比例 計算	一般の場の誤差評価。量子論の連続極限（2026-11 に公開された構成が作った。委員会の評価の水準。6-00・8-05）
反射正値性・位相電荷	文献の主張の紹介	証明（5-03・3-05）

事項	言えている	言えていない
質量ギャップ	—	格子の上でも連続でも、この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§01 の要旨／寄り道の回想	一次資料（1974 年は要旨のみ確認、2005 年は本文を確認）	K. G. Wilson, “Confinement of Quarks”, Phys. Rev. D 10 (1974) 2445–2459／“The Origins of Lattice Gauge Theory”, Nucl. Phys. B Proc. Suppl. 140 (2005) 3–19, arXiv:hep-lat/0412043
有限次元の積分・二つの極限・反射正値性の引用（正則化で失われる場合を含む）	一次資料（本文を確認）	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”（Clay の公式問題説明）§6.5
β'・展開の計算・$\log(1/a)$・Wilson ループの近似・一意性・格子の相関長の問題	一次資料（本文を確認）	S. Chatterjee, “Yang–Mills for probabilists”, arXiv:1803.01950 (2018) §3–§5
位相電荷	一次資料（要旨を確認。Chern 数との一致は本文未読）	M. Lüscher, “Topology of lattice gauge fields”, Commun. Math. Phys. 85 (1982) 39–48
反射正値性・Wegner の模型・Elitzur の定理	書誌のみ（Crossref で確認）	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471／F. J. Wegner, J. Math. Phys. 12 (1971) 2259–2272／S. Elitzur, Phys. Rev. D 12 (1975) 3978–3982
表 4・(8a)	この本の算術（条件は各文献の規格化のまま）	H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, Comm. Math. Phys. 400 (2023) 805–851（arXiv:2204.12737 の要旨。規格化の読みは 5-04）
表 1〜3・図 1・図 2・本文の数値	この端末で計算	Python 3.12・NumPy 1.26・SciPy 1.11。`gauge.py`（表 1・表 2・§03）、`plaquette.py`（(9)・SU(3) の 3/2）、`continuum.py`（表 3・(6)。約 110 秒）。図は同じ式を素の JavaScript で計算

次に読む章：5-02 強結合展開（小さい β で (10) を展開し、面積則を見る）。

強結合展開 — 小さい β では Wilson ループが面の和になり、面積則が出る

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 小さい β では Wilson ループの期待値が縁を持つ面の和になり（指標展開）、最小の面から面積則 $\langle W \rangle \approx u^{RT}$ と弦張力の主項 $\sigma_0 = -\ln u$、こぶから一つ目の補正、管から質量の主項 $m_0 = -4 \ln u$ が出ます。SU(2) の数値と並べ、どこまで効くかを見ます。

前提となる章 — 5-01。表現は 1-04、Haar 測度は 1-08、質量は 4-11。

先に言うこと — 強結合の面積則は格子間隔を固定した小さい β の定理で、$U(1)$ でも成り立ちます。連続極限（$\beta \to \infty$）とは反対の側の話で、閉じ込めや質量ギャップの証明ではありません。収束の証明は 5-04 に回します。

この章の順序

1. 小さい β の世界 — $\mathbb{Z}_2$ で見る面の和
2. 指標展開 — 一枚の重みを表現ごとに割る（表 1）。寄り道：(4) の導出
3. 面を敷く — 主項と面積則（図 1）。寄り道：面の和と弦
4. こぶ — 一つ目の補正と次元の数
5. 管 — 質量の主項と相関長
6. 数値と比べる — どこまで効くか（図 2・表 2）
7. 収束 — 有限の箱と無限の箱。どこで止まるか
8. 面積則は閉じ込めの証明か — 可換な群でも出る

01

小さい β の世界 — $\mathbb{Z}_2$ で見る面の和

Wilson 作用（5-01 §04）の係数 $\beta = 2N/g^2$ が小さいことは結合 g が大きいことなので、この側の展開を**強結合展開**と呼びます。β は逆温度の役なので**高温展開**とも呼びます（2-08）。$\beta = 0$ ではリンクは独立に Haar 測度で散らばり、$\int_G U\, dU = 0$ なので単純なループの期待値は 0 です。Wilson 1974 の要旨は “The lattice gauge theory has a computable strong-coupling limit; in this limit the binding mechanism applies and there are no free quarks. There is unfortunately no Lorentz (or Euclidean) invariance in the strong-coupling limit.” と書きます 既知 。

例：$\mathbb{Z}_2$。リンクが ± 1 の群（2-09）で作用を $\beta \sum_P (1 - U_P)$ とすると、$U_P = \pm 1$ なので一枚の重みは定数を除いて二項に割れます。

$$e^{\beta U_P} = \cosh\beta \left(1 + t\, U_P\right), \qquad t = \tanh\beta \tag{1}$$

積を開くとプラケットの集合 X ごとに $t^{|X|} \prod_{P \in X} U_P$ の項が出ます。一様な ± 1 の平均は偶数乗で 1、奇数乗で 0 なので、分配関数には各リンクが偶数枚に囲まれた集合（閉じた面）だけが、Wilson ループ $\prod_{\ell \in C} U_\ell$ の分子には縁が C の面だけが残ります。最小の面は平らな長方形なので

$$\langle W_{R\times T} \rangle = t^{RT}(1 + \cdots), \qquad -\ln \langle W_{R\times T} \rangle \approx RT\, (-\ln\tanh\beta) \tag{2}$$

で、期待値が面積の指数で減ります（**面積則**）。5-03 §08 の $\mathbb{Z}_2$ で小さい β の隙間が $-4 \log\tanh\beta$ に近いのも同じ勘定です。

02

指標展開 — 一枚の重みを表現ごとに割る

一般の群でも、一枚の重み $e^{\frac{\beta}{N}\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\, U}$ は共役 VUV^{-1} で変わらない関数（**類関数**）です。これを表現ごとに割るために、道具を二つだけ用意します。

指標。群の表現 r（1-04）に対し、$\chi_r(U) = \mathrm{tr}\, r(U)$ を**指標**と呼びます。トレースは共役で変わらないので、指標は類関数です。既約表現の指標は、Haar 測度 dU（群の上の一様な確率測度。1-08 §03）について正規直交です（Schur の直交関係。証明は略します）既知 。

$$\int_G \chi_r(U)\, \overline{\chi_s(U)}\, dU = \delta_{rs}$$

類関数はこの指標で展開できます。フーリエ級数の非可換な群への一般化です 既知 。

$SU(2)$ の類の上の積分。$SU(2)$ の元は $U = V\,\mathrm{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta})\,V^{-1}$（$0 \le \theta \le \pi$）と書けるので、類関数は θ だけの関数です。その積分は次の形になります（Weyl の積分公式の $SU(2)$ 版）既知 。

$$\int_{SU(2)} f(U)\,dU = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\,\sin^2\theta\,d\theta$$

このとき $\mathrm{tr}\,U = 2\cos\theta$、スピン j の表現の指標は $\chi_j = \sin((2j+1)\theta)/\sin\theta$、次元は $2j+1$ です。

指標係数

一般の群の重みは、指標で次のように展開します。

$$e^{\frac{\beta}{N}\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U} = c_0(\beta)\Big[1 + \sum_{r\neq 0} d_r\,u_r(\beta)\,\chi_r(U)\Big], \qquad u_r = \frac{\int e^{\frac{\beta}{N}\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U}\,\overline{\chi_r(U)}\,dU}{d_r\int e^{\frac{\beta}{N}\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U}\,dU} \tag{3}$$

d_r は次元です。u_r を**指標係数**、基本表現のものを単に u と書きます（$\mathbb{Z}_2$ では $u = t$）。$SU(2)$ では、上の類の積分を変形ベッセル関数 I_n で書けて（寄り道：(4) の導出）

$$u_j = \frac{I_{2j+1}(\beta)}{I_1(\beta)}, \qquad u = \frac{I_2(\beta)}{I_1(\beta)} = \frac{\beta}{4} - \frac{\beta^3}{96} + \cdots \tag{4}$$

です 既知 （数値積分と 2×10^{-13} で一致 計算 ）。5-03 §06 の一本のリンクの転送行列の固有値の比 λ_j/λ_0 と同じ数です。

$\beta > 0$ なら $0 < u_r < 1$ です。正であるのは、指数関数を開いた各項がテンソル積の指標の非負な和になるためです（5-03 §06）。1 未満であるのは、$\mathrm{Re}\,\chi_r(U) \le d_r$ で、等号が $r(U)$ が単位行列のときに限るためです。

小さい β では u は $\mathbb{Z}_2$ で β、$U(1)$ で $\beta/2$、$SU(2)$ で $\beta/4$、$SU(N)$ $(N \ge 3)$ で $\beta/(2N^2)$ に近づきます 計算 。理由は一次の項です。(3) の指数関数を一次まで開くと $u \approx \frac{\beta}{N^2}\int(\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U)\,\overline{\chi_F(U)}\,dU$（$F$ は基本表現）で、この積分は $N \ge 3$ なら $\int(\mathrm{tr}\,U)^2 dU = 0$ なので $1/2$、$\mathbb{Z}_2$ と $SU(2)$ では $\mathrm{tr}\,U$ が実数なので 1 です 既知 。

$SU(2)$ では、7-02 の β はこの章の $\beta/2$ です（7-02 の (3.3) の w と、この章の (4) の u を比べる。$U(1)$ は同じ β）。

表 1　基本表現の指標係数 $u(\beta)$。作用はどれも $\beta\sum_P(1-\frac{1}{N}\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U_P)$ 計算

β	$\mathbb{Z}_2$	$U(1)$	$SU(2)$	$SU(3)$
0.5	0.4621	0.2425	0.1237	0.0289
1	0.7616	0.4464	0.2402	0.0601

β	$\mathbb{Z}_2$	$U(1)$	$SU(2)$	$SU(3)$
2	0.9640	0.6978	0.4331	0.1286

寄り道：(4) の導出

飛ばしてよい小節です。

$SU(2)$ の一枚の重みは $e^{\frac{\beta}{2}\cdot 2\cos\theta}=e^{\beta\cos\theta}$ です。使う式は変形ベッセル関数 I_n の標準の性質二つです 既知 。

$$\int_0^{\pi} e^{\beta\cos\theta}\cos n\theta\,d\theta=\pi I_n(\beta),\qquad I_{n-1}(\beta)-I_{n+1}(\beta)=\frac{2n}{\beta}\,I_n(\beta)$$

分母。$\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ なので

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\beta\cos\theta}\sin^2\theta\,d\theta=I_0-I_2=\frac{2}{\beta}\,I_1.$$

分子。積和の公式で $\sin^2\theta\cdot\frac{\sin((2j+1)\theta)}{\sin\theta}=\sin\theta\,\sin((2j+1)\theta)=\frac{1}{2}\big[\cos 2j\theta-\cos(2j+2)\theta\big]$ なので

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\beta\cos\theta}\cdot\tfrac{1}{2}\big[\cos 2j\theta-\cos(2j+2)\theta\big]\,d\theta=I_{2j}-I_{2j+2}=\frac{2(2j+1)}{\beta}\,I_{2j+1}.$$

(3) の u_j は分子を $d_j=2j+1$ と分母で割ったものなので $u_j=I_{2j+1}/I_1$ です。小さい β では $I_n(\beta)\approx(\beta/2)^n/n!$ から $u=I_2/I_1\approx\beta/4$ です。

03

面を敷く — 主項と面積則

(3) をすべてのプラケットで掛けて開くと、各項は「どのプラケットにどの表現を置くか」の割り当てです。リンクを一本ずつ積分する規則は二つです（Schur の直交関係 既知 。7-02 の (3.1) は同じ考えの補題）。

$$\int_G \chi_r(U)\,dU=\delta_{r0},\qquad \int_G \chi_r(AU)\,\chi_s(U^{-1}B)\,dU=\delta_{rs}\,\frac{\chi_r(AB)}{d_r}\tag{5}$$

左は「一枚にだけ乗った辺があれば 0」、右は「同じ表現の二枚を共通の辺で貼ると大きな輪になり $1/d_r$ が付く」です。生き残るのは、表現を置いたプラケットが閉じた面か、縁が観測するループの面をなす項だけです。

例：1×2 のループ。観測量は $\frac{1}{d}\chi(U_C)$（d は基本表現の次元）です。主項は、ループの内側の二枚に表現を置いた項 $(du)^2\chi(U_{P_1})\chi(U_{P_2})$ です。$SU(N)$ では、観測量の χ と対になるよう面には共役表現 $\bar r$ が乗ります（$SU(2)$ では $\bar r=r$）。三段で積分します。

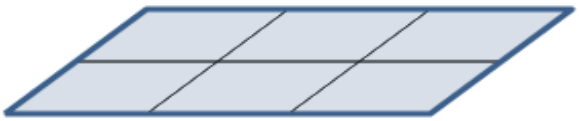
1. 二枚が共有する辺を (5) 右で積分します。二つの輪が 1×2 の縁の輪 $\chi(U_\partial)$ につながり、$1/d$ が付きます。
2. 縁の六本のうち一本を (5) 右で積分します。観測量の輪と縁の輪が逆向きに貼り合わさり、残る五本は VV^{-1} の形で打ち消して $\chi(1)/d = d/d = 1$ が残ります。
3. 正規化：観測量の $\frac{1}{d}$ が残ります（分配関数は、定数 c_0 の冪を除けば主項で 1 なので、割っても変わりません）。

合わせて $(du)^2\cdot\frac{1}{d}\cdot 1\cdot\frac{1}{d} = u^2$、つまり $\langle W_{1\times 2}\rangle = u^2$ です。$R\times T$ を敷き詰めても d の冪は打ち消し合い、

$$\langle W_{R\times T}\rangle = u^{RT}\big(1 + O(u^4)\big), \qquad \sigma_0 = -\ln u \tag{6}$$

が残ります。静的な電荷対のエネルギー $V(R) = -\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\langle W_{R\times T}\rangle$（17-02 §01）は主項で $\sigma_0 R$、距離に比例して増える閉じ込めの形です 既知 。例：$SU(2)$、$\beta = 1$ で $\sigma_0 = 1.426$、2×2 のループは $u^4 = 0.0033$ 計算 。

図 1　ループ（太線）を縁とする最小の面とこぶ。つまみ R・T・β で面の枚数と重みが、「動かす」でこぶ（立方体の残り五枚）の場所と向きが変わります（第四の軸の二通りは数だけ）。



β=1.5 u=0.3441 u^6=0.00166 こぶ 24 通り×u⁴=0.0140 補正込み 0.00233

計算 この図の数値はこの端末で計算した（u は (4) の級数をその場で計算）。JavaScript が無効なら：面は RT 枚で重み u^{RT}、こぶは四次元で $4RT$ 通り、一つごとに u^4。

寄り道：面の和と弦

飛ばしてよい小節です。

Wilson 1974 の要旨は、強結合展開がクォークの道とそれをつなぐ格子の面の和になると述べ、“This structure is reminiscent of relativistic string models of hadrons.” と結びます。一枚ごとに $u = e^{-\sigma_0}$ を払う面の和は、面積に比例する作用の弦の世界面の和に見えます 既知 。比喩で言えば格子に張

った膜です。正確には、強結合の面は格子に沿って硬く、揺らぐ連続の弦とは別の状態にある、と物理は考えます（17-03 §07）物理。

04

こぶ — 一つ目の補正と次元の数

次に効く面は、平らな面の一枚を、それを底とする単位立方体の残り五枚に置き換えたものです（図 1）。一枚の代わりに五枚を払うので重みは u^4 倍、立方体は面に垂直な $d-2$ 本の軸の両側で $2(d-2)$ 個、四次元で 4 個です。離れたこぶはこの次数では独立に数えてよいので、まとめると指数になります（$SU(2)$ の勘定）。

$$\langle W_{R\times T}\rangle \approx u^{RT}\, e^{2(d-2)RT\,u^4}, \qquad \sigma_1 = -\ln u - 4u^4, \qquad \left\langle \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\, U_P \right\rangle \approx u + 4u^5 \quad (d=4) \tag{7}$$

次の補正は重なるこぶ・二段のこぶ・高い表現の乗る面から来ます（高次の係数は Drouffe–Zuber 1983 の総説に、$SU(2)$・四次元の弦張力の高次の級数は Münster 1981 にあります。出典表）。指数の形を体積に一様に正当化するのがクラスター展開です（5-04、7-04）既知。

二次元にはこぶが無い。$d=2$ では面が平面から出られず、主項 u^{RT} がすべての β で厳密です（7-02 §03）既知。三次元以上の難しさは、面が平面の外へ揺らげることから始まります。例：$SU(2)$、$\beta=2$ では $4u^4 = 0.141$ が $\sigma_0 = 0.837$ の 17% に達し、打ち切りが怪しくなります 計算。

05

管 — 質量の主項と相関長

質量は相関の減る速さです（4-11）。空間方向の一枚 $P = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\, U_P$ と、時間方向に t ずらした $P(t)$ を結ぶ最小の閉じた面は、二枚を蓋とする $1\times 1\times t$ の箱です。蓋は観測量なので重みは付かず、側面の $4t$ 枚が u^{4t} を払います。

$$\langle P(t)P(0)\rangle - \langle P\rangle^2 \approx C\, u^{4t}, \qquad m_0 = -4\ln u = 4\sigma_0, \qquad \xi_0 = 1/m_0 \tag{8}$$

計算（最低次の数え上げ）。最低次の形は標準とされます（Drouffe–Zuber 1983、書誌のみ）。5-03 §08 の $\mathbb{Z}_2$ で隙間が $-4\log\tanh\beta$ に近いのも同じ形です。相関長 ξ_0 は $\beta=1$ で 0.175、$\beta=2.6$ でも 0.38 目盛りで、相関は一目盛りの内に消えます 計算。連続極限には ξ が格子間隔よりずっと長いこと（Chatterjee 2018 の格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）の $\xi(\beta)\to\infty$。5-09）が要り、主項はその反対を書いています。

(8) の比 $m_0/\sqrt{\sigma_0} = 4\sqrt{\sigma_0}$ を収束域の外へ延ばすと、主項の比は β とともに 0 へ下がります。格子の数値の比は 3.3（$\beta = 2.25$）から 3.8（$\beta = 2.6$）へ上がって一定の値に近づきます（17-12 §08）物理。主項の形の話で、理論の言明ではありません。$\beta = 2.6$ の主項 $a\sqrt{\sigma_0} = 0.808$、$am_0 = 2.61$ は Lucini–Teper（2001）表 1 の $0.13395(62)$、$0.514(8)$ の 6.0 倍と 5.1 倍です 計算（文献値は 物理）。$\beta = 2.4 \to 2.6$ で文献の $a\sqrt{\sigma}$ は半減し、主項は 4% 減るだけです。

06

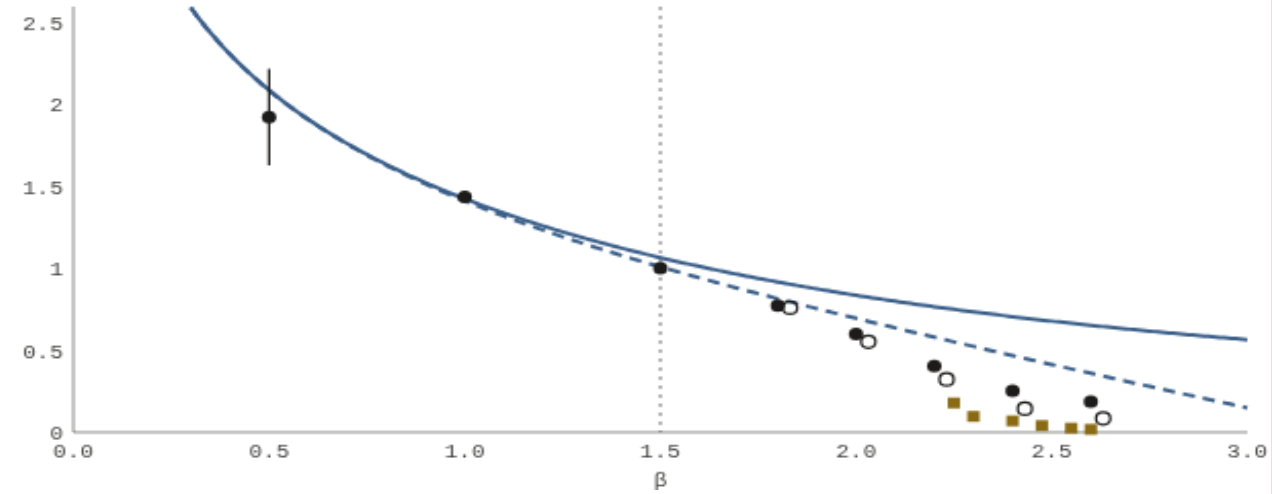
数値と比べる — どこまで効くか

四次元の周期格子（一辺 6 と 8）の $SU(2)$ を熱浴法（リンクを一本ずつ条件付き分布から引き直す更新。5-07）で積分し、弦張力を Creutz 比（17-02 の (3)）で測りました。

$$\chi(R) = -\ln \frac{W(R,R)\,W(R-1,R-1)}{W(R,R-1)^2} \tag{9}$$

周長と角の項は比の中で消え、(7) の形なら $\chi(R) = \sigma_1$ です。

図 2　弦張力（$SU(2)$・格子単位）。実線 σ_0、破線 σ_1、● $\chi(2)$、○ $\chi(3)$、■ 文献の $(a\sqrt{\sigma})^2$。つまみで β の縦線が、「対数目盛」で縦軸が変わります。



β=1.50 σ₀=1.067 σ₁=1.011 χ(2)=1.0026±0.0059

計算 この図の数値はこの端末で計算した（曲線はその場で計算、点は表 2 の値、■ は文献値）。JavaScript が無効なら表 2 が中身です。

表 2　四次元 $SU(2)$ の熱浴法（一辺 6：$\beta \le 2$、8：それ以上。括弧は統計誤差）と強結合の式 計算。最後の列は Lucini–Teper 物理

β	プラケット	$u + 4u^5$	$\chi(2)$	$\chi(3)$	σ_1	文献：プラケット／$(a\sqrt{\sigma})^2$
0.5	0.12375(13)	0.1238	1.93(30)	–	2.089	–
1.0	0.24335(14)	0.2434	1.438(32)	–	1.413	–
1.5	0.36249(15)	0.3635	1.0026(59)	–	1.011	–

β	プラケット	$u+4u^5$	$\chi(2)$	$\chi(3)$	σ_1	文献：プラケット／$(a\sqrt{\sigma})^2$
1.8	0.44074(16)	0.4400	0.7730(21)	0.761(79)	0.816	–
2.0	0.50104(22)	0.4941	0.5991(17)	0.553(33)	0.696	–
2.2	0.56925(22)	0.5510	0.4054(12)	0.3231(55)	0.581	–
2.4	0.63031(16)	0.6106	0.2525(11)	0.1445(23)	0.469	0.629995(17)／0.0694
2.6	0.670275(68)	0.6729	0.18618(38)	0.08514(90)	0.360	0.670009(3)／0.0179

読み方は三つです 計算 。(i) $\beta \le 1$ ではプラケットが $u+4u^5$ と、$\chi(2)$ が σ_1 と誤差の範囲で合います。(ii) 1.8 から $\chi(2)$ は σ_1 を下回り、2.4 では半分近くです（2.6 でプラケットが $u+4u^5$ に近いのは曲線が交わる偶然）。(iii) $\chi(3)$ はさらに小さく、なお文献の $(a\sqrt{\sigma})^2$ の 2〜5 倍です（小さいループには短い距離の寄与が混じる 物理 ）。プラケットは文献値と 0.0003 程度の差で、$\beta=2.6$ では統計誤差の 4 倍です。差には、一辺 8 の格子と文献の 12^4（$\beta=2.4$）・24^4（$\beta=2.6$）の格子の有限体積の違いが含まれえます 計算 。

同じ種類の計算をした Creutz（1980）の要旨は、弦張力を固定して格子を細かくすると、裸の結合が摂動の繰り込み群の予言どおりに（対数的に）減ると報告し、“This supports the coexistence of confinement and asymptotic freedom for quantized non-Abelian gauge fields.” と結びます。強結合側の面積則と弱結合側の漸近自由が、相転移で切れずにつながって見える、と読めます。四次元の、関心のある多くの非可換な格子模型で $\beta_c=\infty$（連続極限は $\beta\to\infty$ の側だけ）とするのは、Chatterjee（2018）§5 の言葉で “It is believed” の水準です 物理 。

07

収束 — 有限の箱と無限の箱

一辺 L の格子の $Z_L(\beta)=\int e^{-S_W}\prod dU_\ell$ は有限次元のコンパクトな空間の上の積分で、β の整関数（複素平面全体で収束する冪級数で表せる関数）です。Z_L 自体は整関数ですが、期待値や $\ln Z_L/|\Lambda_L|$（$|\Lambda_L|$ は格子点の数。自由エネルギー）は Z_L で割るので、複素 β 平面にある Z_L の零点がそれらの展開の収束半径を縮めます。問題は、その収束半径が L によらず残るかです（2-08 の相転移） 既知 。つながった面の数は枚数 n とともに K^n（K は次元で決まる）で増え、一枚の重みは u なので、$Ku<1$ 程度なら和が収束する（粗い見積もり。正確な条件は 5-04）、というのが芯です。Shen–Zhu–Zhu（2023）の序論は Osterwalder–Seiler（1978）を “when the coupling is sufficiently strong, the cluster expansion … for the expectation values of local observables … is convergent, uniformly in volume” とまとめ、そこから質量ギャップ（指数的なクラスター性：離れた観測量の相関が距離の指数で減ること。4-11 の質量ギャップ）と無限体積極限の存在・解析性が従うと書きます 既知 。SZZ 自身は Langevin 力学（7-09）で $SU(N)$、$|\beta_{\mathrm{SZZ}}|<1/(16(d-1))$ に “a strictly positive mass

gap” を示しました。式 (1.2) から $\beta = N^2 \beta_{\mathrm{SZZ}}$ で、四次元の $SU(2)$ なら $\beta < 1/12$（換算はこの本の算術）。十分条件で、展開が止まる場所ではありません。

どこで止まるか

(a) 面の荒れ：ある β で面の揺らぎが勝ち、σ の級数はそこから延ばせない、と物理は考えます（17-03 §07、SU(2) でおよそ 2。見積もりの誤差は大きい）物理。(b) 四次元の $U(1)$ では面積則が大きい β で破れます（§08）。(c) 有限次で打ち切った式は、$\beta \to \infty$ で $e^{-c\beta}$ のような指数の小ささを表せません（主項 $-\ln u$ は $3/(2\beta)$ と冪で減るだけ）。一方、漸近自由（4-06・4-07）の連続極限では、一ループ（4-06 の β 関数の最低次）で $a^2\sigma \propto e^{-(6\pi^2/11)\beta}$ と指数で小さくなるはずです 物理。β を 2 から 4 にすると $-\ln u$ は 0.837 から 0.418 へ半分になるだけですが、$e^{-(6\pi^2/11)\beta}$ は約 5×10^4 分の 1 になります 計算。連続極限の側へは有限次の展開では届きません（この本の整理。5-05）。

この本の定義の上で機械検査した形は 20-01〜20-04 に、強結合の面積則は 20-06 に在ります。どれも強結合の窓の中で格子間隔を固定した言明で、連続極限の側の問いとは反対の端にあります。

08

面積則は閉じ込めの証明か — 可換な群でも出る

表 1 の u はどの群でも 1 未満なので、(6) の面積則は $\mathbb{Z}_2$ でも $U(1)$ でも出ます。Chatterjee（2018）§4 は “the area law holds for any lattice gauge theory at sufficiently small β” と書き、それゆえ “the area law at small β cannot be evidence for quark confinement” だと続けます。証明は Osterwalder–Seiler（1978）で、その要旨は “We then prove existence and analyticity of the infinite volume limit of strongly coupled Yang-Mills theories on the lattice and we verify Wilson's confinement bound.” と書きます 既知。四次元の $U(1)$ 格子は大きい β で面積則を満たしません（Guth 1980。Guth は、Wilson 形とは別の Villain 形の作用で示した。完全に厳密な証明は Fröhlich–Spencer 1982。5-06）既知。強結合の面積則は格子が粗いことの性質で、非可換性を使っていません。同論文の格子の面積則の問題（Chatterjee の Problem 4.1）は、四次元の非可換なコンパクト群の任意の無限体積極限で、すべての $\beta > 0$ について

$$|\langle W_{R\times T}\rangle| \le C(\beta)\, e^{-c(\beta) RT} \tag{10}$$

を示せと問い、大きい β では “remains elusive” と書きます。強結合側では、Cao–Nissim–Sheffield が $U(N)$ の面積則の範囲を大きい N で広げ（arXiv:2505.16585、プレプリント・掲載は未確認。要旨 “This improves on a classical result of Osterwalder-Seiler from

1978”)、't Hooft の領域（β を N に比例させて N を大きくする取り方。規約の換算は 5-01 表 4）では、SZZ の方法で要旨が [DF80] と引く質量ギャップ条件を確かめ、そこから面積則を導きました（arXiv:2509.04688、プレプリント・掲載は未確認）既知 。どちらも格子間隔を固定した結果です。質量ギャップと閉じ込めは別の文で（17-02 §02、有限群は 5-10）、この章は連続の理論のどちらも示していません。

この章が言えている範囲

事項	言えている	言えていない
指標展開・主項 (3)〜(6)	標準の道具 既知 。数値と一致 計算	—
補正 (7)	SU(2)・四次元の最低次の数え上げ。$L=6$ の $\beta \le 1$ でプラケット・$\chi(2)$ と一致 計算	高次の係数、打ち切りの誤差評価（5-04）、無限体積の値
質量の主項 (8)	最低次の数え上げ 計算 。この端末では数値と比べていない。$\beta=2.6$ で文献値の 5.1 倍	質量の数値照合、高次の補正
収束・面積則の定理	小さい β の一様な収束・面積則・指数減衰（文献） 既知	証明の中身。大きい β の面積則（格子の面積則の問題）
閉じ込め・質量ギャップ	格子間隔を固定した強結合側の結果の紹介	連続極限での両方。この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§01・寄り道の引用	要旨	K. G. Wilson, Phys. Rev. D 10 (1974) 2445–2459
§07・§08 の Osterwalder–Seiler の結果、§08 の引用	要旨（INSPIRE・Elsevier 版。本文は未入手）	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471
§07 の序論・式 (1.2)・条件	本文 §1	H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, Commun. Math. Phys. 400 (2023) 805–851, arXiv:2204.12737
§05・§06・§08 の引用、格子の面積則の問題と格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 4.1・5.1）	本文	S. Chatterjee, arXiv:1803.01950 (2018) §4–§6
§06 の引用	要旨	M. Creutz, Phys. Rev. D 21 (1980) 2308–2315
§05・表 2・図 2 の文献値	本文の表 1・7 物理	B. Lucini, M. Teper, JHEP 0106 (2001) 050, arXiv:hep-lat/0103027

もの	種別	出典・道具
§08 の面積則の拡張	要旨（プレプリント・二本とも掲載は未確認）	S. Cao, R. Nissim, S. Sheffield, arXiv:2505.16585・arXiv:2509.04688 (2025)。2509.04688 の要旨が引く [DF80] は Durhuus–Fröhlich 1980 とされる（書誌は未確認）
$U(1)$ の非閉じ込めの相（Guth）	要旨（INSPIRE）	A. H. Guth, Phys. Rev. D 21 (1980) 2291–2307
$U(1)$ の非閉じ込めの相（Fröhlich–Spencer）	書誌のみ（Chatterjee の記述による）	J. Fröhlich, T. Spencer, Commun. Math. Phys. 83 (1982) 411–454
高次の係数の総説、(8) の最低次の形	書誌のみ	J.-M. Drouffe, J.-B. Zuber, Phys. Rep. 102 (1983) 1–119
$SU(2)$ 四次元の弦張力の高次の級数	要旨のみ	G. Münster, Nucl. Phys. B180 (1981) 23–60
§07 の荒れの転移	17-03 の出典による	Itzykson, Peskin, Zuber, Phys. Lett. B 95 (1980) 259–264
表 1・2・図・本文の数値	この端末で計算	Python 3.12・NumPy・SciPy。`chars.py`（表 1・(4)）、`sc_tables.py`（§05・§07）、`mc_su2.py`・`run_mc.sh`（表 2。熱浴法、20 区間のジャックナイフ、一本 2〜4 分）。図は素の JavaScript

次に読む章：5-03 反射正値性と転送行列（同じ格子からハミルトニアンを取り出す）。

反射正値性と転送行列 — 鏡に映した積分が正なら、格子の上にハミルトニアンが立つ

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — Wilson 作用がサイト反射ではどの β でも、リンク反射では $\beta \geq 0$ で反射正値であること。そこから正の転送行列と格子のハミルトニアンが立ち、時間の刻みを 0 にすると Kogut–Susskind の形になること。

前提となる章 — 5-01・4-10。2-09（転送行列）と 7-02 §03（指標）も参考に。β は 5-01 の格子の逆結合で、4-06 の β 関数 $\beta(g)$ とは別の量です。

先に言うこと — 有限の格子の話です。有限の箱で隙間が正なのは自動的で、格子間隔を 0 に、体積を無限にしたとき隙間が残るかについて、この章は何も示していません。数値は空間 4×4 までの $\mathbb{Z}_2$ などの計算です。

この章の順序

1. この章の位置 — 積分から作用素へ
2. 格子の上の時間反射 — 面は二通り（図 1）
3. 一次元の鎖 — 二種類の「正」
4. Wilson 作用の反射正値性 — 二つの証明
5. 転送行列 — 格子のハミルトニアン
6. 一本のリンク — 電場のエネルギー
7. Kogut–Susskind のハミルトニアン — 時間の刻みを 0 に
8. Z_2 ゲージ理論 — 正でない転送行列（図 2・表 1）
9. 何が保たれ、何が残るか — 極限・改良した作用・言わないこと

01

この章の位置 — 鏡が一枚あれば量子力学が戻る

格子の上の理論（5-01）は次の確率測度で書かれます。

$$d\mu_\beta(U) = \frac{1}{Z}\, e^{-S_W(U)} \prod_\ell dU_\ell, \qquad S_W = \beta \sum_P \Big(1 - \tfrac{1}{N}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\, U_P\Big), \qquad \beta = \frac{2N}{g^2} \tag{1}$$

dU は全体が 1 の Haar 測度、β は作用の係数です（例：$SU(2)$・$g^2 = 1$ で $\beta = 4$）。最後の座標 t を虚時間と呼びます。ここには積分と期待値しかなく、Hilbert 空間もハミルトニアンもありません。質量ギャップはハミルトニアンのスペクトルの隙間なので（4-11）、まず作用素を取り戻します。道具は 4-10 の反射正値性で、格子では作用から証明できます。問題文 §6.5 は 'Reflection positivity holds for the Wilson approximation [36], a major advantage' と書きます（[36] は Osterwalder–Seiler 1978）既知 。

02

格子の上の時間反射 — 面は二通り

鏡に映した格子がもとの格子に重なるには、面 $t = t_0$ の $2t_0$ が整数でなければなりません。t_0 が整数なら面は格子点を通り（**サイト反射**）、半整数なら縦（時間方向）のリンクの中点を切ります（**リンク反射**）。

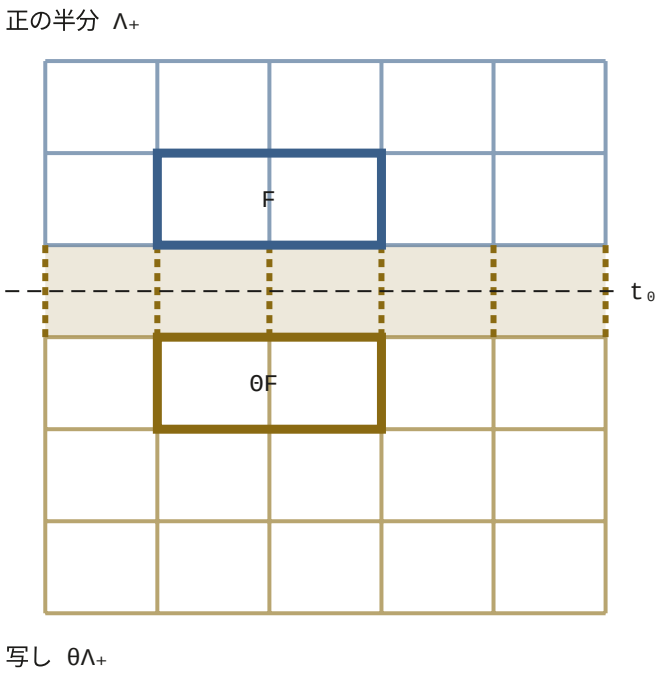
$$\theta(x,t) = (x,\, 2t_0 - t), \qquad (\theta U)_{x\to y} = U_{\theta x \to \theta y}, \qquad (\Theta F)(U) = F(\theta U) \tag{2}$$

リンク変数は逆向きにたどると逆元です（$U_{y\to x} = U_{x\to y}^{-1}$）。両端が $t \geq t_0$（リンク反射では $t > t_0$）のリンクの集まりを Λ_+、その変数だけで決まる関数の全体を $\mathcal{A}_+$ とします。反射正値性は 4-10 の (4) と同じ形の

$$\langle\, \overline{\Theta F}\, F \,\rangle \geq 0 \qquad (F \in \mathcal{A}_+) \tag{3}$$

です。θ はプラケットをプラケットに写し（時間方向を含むものは向きが逆になる）、$\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}$ は逆元で変わらないので $S_W(\theta U) = S_W(U)$ です。

図 1　**二通りの鏡** — つまみで面 t_0 を半目盛りずつ動かすと、サイト反射とリンク反射が交互に現れます。青は正の半分と F（長方形の Wilson ループ）、茶はその写し。



t₀ = 1/2（リンク反射）：破線のリンクが面を跨ぎ、網かけのプラケットが上下をつなぐ。

例（図 1）。$t_0 = \frac{1}{2}$ では面を横切る縦のリンクが向きの逆な自分自身に写って（$(\theta U)_b = U_b^{-1}$）どちらの半分にも属さず、面を跨ぎます。それを辺に持つプラケットが上下をつなぎます。$t_0 = 0$ では $t = 0$ の横のリンクが自分自身に写り、跨ぐものはありません。

03

一次元の鎖で見る — 二種類の「正」

スピン $s_t = \pm 1$ の鎖に重み $\prod_t e^{K s_t s_{t+1}}$ を置きます（2-09 の一次元イジング模型で外場 0。$K < 0$ も許す）。転送行列は

$$T = \begin{pmatrix} e^{K} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K} \end{pmatrix}, \qquad \lambda_0 = 2\cosh K, \quad \lambda_1 = 2\sinh K \tag{4}$$

です。**サイト反射**（$t_0 = 0$）では、s_0 を止めると上半分の和 $\varphi(s_0)$ と下半分の和が互いに複素共役になり、K の符号によらず $\langle \overline{\Theta F} F \rangle \propto \sum_{s_0} |\varphi(s_0)|^2 \geq 0$ です。**リンク反射**（$t_0 = \frac{1}{2}$）では跨ぐ結合が一つ残り、

$$\langle \overline{\Theta F} F \rangle \;\propto\; \sum_{s_0, s_1} \overline{\varphi(s_0)}\, T_{s_0 s_1}\, \varphi(s_1) \tag{5}$$

という T の二次形式になります。すべての φ で 0 以上なのは $T \geq 0$、つまり $K \geq 0$ のときだけです。例。$F = s_1$ なら、リンク反射で $\langle s_0 s_1 \rangle = \tanh K$ が $K = -\frac{1}{2}$ で -0.4621 となり (3) が破れ、サイト反射では $\langle s_{-1} s_1 \rangle = \tanh^2 K = 0.2136 \geq 0$ です 計算 。

「正」は二種類あります。一つは成分が正であること。成分がすべて正の行列では、最大の固有値は重複せず、他の固有値の絶対値より大きい（Perron–Frobenius の定理）既知。(4) の T の成分は K の符号によらず正なので $\lambda_0 > |\lambda_1|$ となり、相関 $(\tanh K)^t$ は指数関数的に減ります。もう一つは作用素として正であること。$T \geq 0$ なのは $K \geq 0$ のときだけで、$K > 0$ なら $T = e^{-H}$ と実の H で書けます。$K < 0$ では相関が符号を変えながら減り、$-\log \lambda_1$ は実数になりません。サイト反射の正値性は $T^2 \geq 0$ に、リンク反射のは $T \geq 0$ に当たります既知。

04

Wilson 作用の反射正値性 — 二つの証明

主張：Wilson 作用の格子で (3) が、サイト反射ではすべての実数 β で、リンク反射では $\beta \geq 0$ で成り立つ。格子ゲージ理論の反射正値性と、正の自己共役な転送行列の存在は Osterwalder–Seiler 1978 によります。その要旨は物理的正値性を確かめたと述べ、'This implies the existence of a positive self-adjoint transfer matrix' と続けます既知。反射の種類ごとの β の条件は、以下の (6)〜(8) の証明によります紙。$\beta < 0$ でリンク反射が実際に破れる例は 08 節です計算。以下が証明の筋です（周期的な時間では面が二枚になるが同じ）。

サイト反射 — 面の上の変数を止める

跨ぐプラケットはありません。面の上のプラケットの作用を半分ずつ上下に配ると $S_W = S_+ + S_-$、$S_-(U) = S_+(\theta U)$ です。面の上の変数 U_0 を止めると、下の積分は $U_< = \theta U_>$ の置き換え（Haar 測度は逆元で不変）で上の積分の複素共役になり

$$\langle \overline{\Theta F} F \rangle = \frac{1}{Z} \int dU_0 \left| \int dU_> \, F \, e^{-S_+} \right|^2 \geq 0 \tag{6}$$

です。β の符号はどこにも使っていません。

リンク反射 — 跨ぐプラケットを二乗の和に開く

跨ぐ縦のリンクは上の端点が別々なので、その点でのゲージ変換で 1 にできます（7-02 §02）。そのために、一般の F は先に、面のすぐ上の層（$t = 1$）の点でのゲージ変換で平均した $\widetilde{F}$ に置き換えておきます。ΘF は $t \leq 0$ の変数だけで決まり、その層の点に触れません。そこでその層のゲージ変換 g で積分の変数を $U \to U^g$ と替えると（作用も Haar 測度も変わらない）$\langle \overline{\Theta F} F \rangle = \langle \overline{\Theta F} F^g \rangle$、$g$ で平均して $\langle \overline{\Theta F} \widetilde{F} \rangle$ です。鏡の層（$t = 0$）で同じことをすれば、(3) の左辺は $\langle \overline{\Theta \widetilde{F}} \, \widetilde{F} \rangle$ に等しくなります。跨ぐプラケットは上の横のリンク ℓ とその写しだけの $\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(U_{\theta\ell} U_\ell^\dagger)$ になり、成分 $h_{ij} = (U_\ell)_{ij} \in \mathcal{A}_+$（$\Theta h_{ij} = (U_{\theta\ell})_{ij}$）で

$$\operatorname{Re}\operatorname{tr}\bigl(U_{\theta\ell}U_{\ell}^{\dagger}\bigr)=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\Bigl(\overline{\Theta h_{ij}}\,h_{ij}+\overline{\Theta\overline{h_{ij}}}\,\overline{h_{ij}}\Bigr) \tag{7}$$

と書けます。跨ぐプラケットの重み $\exp\bigl(\frac{\beta}{2N}\sum_k \overline{\Theta h_k}h_k\bigr)$（$h_k$ はすべての h_{ij} と $\overline{h_{ij}}$。定数倍は除く）を級数に開くと、h_k の積 H_α で $\sum_\alpha c_\alpha \overline{\Theta H_\alpha}H_\alpha$ の形になり、$\beta\ge 0$ なら $c_\alpha\ge 0$ です。上下はもう変数を共有しないので

$$\langle \overline{\Theta F}F\rangle \propto \sum_{\alpha} c_\alpha \Bigl|\int dU_{>}\, F\, H_\alpha\, e^{-S_{+}}\Bigr|^2 \ge 0 \tag{8}$$

です。鎖の (5) で $T\ge 0$ が要ったのと同じく、ここで $\beta\ge 0$ が要ります。実際に破れる例は 08 節です。

この本の定義の上で機械検査した形は 20-01〜20-04 に在ります。

05

転送行列 — 格子のハミルトニアン

反射正値性があれば 4-10 の再構成で Hilbert 空間と時間を一目盛り進める作用素が作れ、格子ではこの作用素（転送行列）を直接書けます。時間を周期的（長さ L_t）にし、縦のリンクをゲージ変換でできるだけ 1 にそろえると（時間ゲージ）、各空間点 x の時間の輪に一本ずつリンク V_x が残ります。残った V_x で積分することは、一時刻の全リンクにゲージ変換 $g_x=V_x$ を施して平均することと同じで、その平均がゲージ不変な状態への射影 P_0 です。状態の空間は一時刻の空間方向のリンク E_s の関数の空間 $\mathcal{H}=L^2(G^{E_s},dU)$ で、T は核

$$T(U,U')=e^{-\frac12 S_s(U)}\prod_{\ell\in E_s} e^{-\beta\left(1-\frac{1}{N}\operatorname{Re}\operatorname{tr}U_\ell U_\ell'^{\dagger}\right)}\,e^{-\frac12 S_s(U')} \tag{9}$$

の積分作用素です（S_s は一時刻の空間のプラケットの作用、真ん中の積は縦のプラケットから）。すると

$$Z=\operatorname{Tr}\bigl(P_0 T^{L_t}\bigr),\qquad \langle O(t)O(0)\rangle-\langle O\rangle^2 \xrightarrow{L_t\to\infty} \sum_{n\ge 1}|\langle\Omega|O|n\rangle|^2\Bigl(\frac{\lambda_n}{\lambda_0}\Bigr)^{t} \tag{10}$$

です（O はゲージ不変な実の観測量、λ_n・$|n\rangle$ は P_0T の固有値と固有ベクトル、$\Omega=|0\rangle$。2-09 の (8) と同じ計算）。

(a) 核が実対称なので T は自己共役（サイト反射の内容）。(b) $T=VKV$（V は $e^{-S_s/2}$ を掛ける作用素、K は真ん中の積）で、$\beta\ge0$ なら $K\ge0$（06 節）なので $T\ge0$（リンク反射の内容）。(c) $\beta>0$ では、V は正の関数を掛ける作用素なので逆を持ち、06 節の λ_r がすべて正なので K も 0 を固有値に持たず、T は 0 を固有値に持たない [紙]。Lüscher 1977 はこの性質を

題で 'strictly positive' と呼びます。(d) 有限の箱では $P_0 T$ の核は連続で正、ゲージ軌道の空間はコンパクトなので、連続で正の核を持つコンパクト空間上の積分作用素についての Jentzsch の定理の一般化（Krein–Rutman 型。Perron–Frobenius の定理の積分作用素版）で λ_0 は重複しない 既知 （一般化は Schaefer 1974。出典の表）。

以下 $\beta > 0$ とします。(b)(c) から固有値はすべて正なので、λ_0 が重複しないことから $\lambda_1 < \lambda_0$ です。こうして $P_0 \mathcal{H}$ の上に

$$H_a = -\frac{1}{a} \log \frac{T}{\lambda_0} \;\geq\; 0, \qquad m_L(\beta) = \log \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \;>\; 0 \tag{11}$$

が立ちます（a は格子間隔）。例。物理の単位の隙間は $\Delta = m_L / a$ です。箱ごとの $m_L > 0$（$\beta > 0$）は (d) から自動的で、問われるのは $L \to \infty$・$a \to 0$ で Δ が正に残るかです（4-11 §08・5-09）。

本書での使い方は 26-04 §01（転送行列の正値性と鏡映正値性を、捩れた区画の偏りに当てる）。

06

一本のリンクの転送行列 — 電場のエネルギーが現れる

K はリンクごとの作用素 k の積です。一本のリンクでは $(kf)(U) = \int_G e^{\frac{\beta}{N} \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\, UU'^{-1} - \beta} f(U')\, dU'$ で、核は $W = UU'^{-1}$ の共役 $W \to hWh^{-1}$ で変わらない関数（類関数）です。これを対角にするには、表現の言葉が二つ要ります。

- 表現 r（次元 d_r）の**指標**を $\chi_r(W) = \mathrm{tr}\, r(W)$ と書きます。類関数で、既約表現どうしでは $\int_G \chi_r(W) \overline{\chi_s(W)}\, dW = \delta_{rs}$（直交性） 既知 。
- 類関数との畳み込みは、各既約表現の行列要素 $r(U)_{ij}$ の張る空間の上でスカラー倍として働きます（1-04 の Schur の補題から）。$L^2(G)$ はこれらの行列要素で張られるので（Peter–Weyl の定理）、k は既約表現ごとの固有値で決まります 既知 。

詳しくは 7-02 §03 の (3.1)。表現 r での固有値は

$$\lambda_r = \frac{1}{d_r} \int_G e^{\frac{\beta}{N} \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\, W - \beta}\, \overline{\chi_r(W)}\, dW \tag{12}$$

です。指数関数を $\mathrm{tr}\, W$ と $\overline{\mathrm{tr}\, W}$ のべきに開くと各べきはテンソル積表現の指標で、既約表現の重複度は 0 以上なので、$\beta \geq 0$ なら $\lambda_r \geq 0$、つまり $K \geq 0$ です。$\beta > 0$ なら展開の係数はすべて正で、どの既約表現も基本表現とその複素共役のテンソル積のどれかに現れるので 既知 、$\lambda_r > 0$ です。$SU(2)$ では、W の固有値を $e^{\pm i\theta}$（$0 \leq \theta \leq \pi$）として $\mathrm{tr}\, W = 2\cos\theta$、$\chi_j = \sin((2j+1)\theta) / \sin\theta$ です。類関数を積分するときの Haar 測度は $\frac{2}{\pi} \sin^2\theta\, d\theta$ で、これは 5-01

の S^3 の一様分布を北極からの角 θ で見た密度です（Weyl の積分公式の最も簡単な場合）。これらから 既知

$$\lambda_j = e^{-\beta}\,\frac{2}{\beta}\,I_{2j+1}(\beta), \qquad j = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \dots \tag{13}$$

です（$I_n(\beta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\beta\cos\theta}\cos n\theta\,d\theta$ は変形ベッセル関数。数値積分と相対誤差 10^{-10} 未満で一致 計算 。比 λ_j/λ_0 は 5-02 の (4) の u_j）。$\beta < 0$ では半整数の j で負です。大きい β の漸近形 $I_\nu(\beta) \approx \frac{e^\beta}{\sqrt{2\pi\beta}}\big(1 - \frac{4\nu^2-1}{8\beta}\big)$（DLMF 10.40.1）から、一段あたりのエネルギーは

$$E_j = -\log\frac{\lambda_j}{\lambda_0} \;\approx\; \frac{2j(j+1)}{\beta} = \frac{g^2}{2}\,j(j+1) \tag{14}$$

です。$j(j+1)$ は Casimir E^aE^a の値です（1-04 の J^2）。比喩で言えば、一本のリンクは $SU(2)$（三次元の球面）の上を回るこまで、E^a はその角運動量です。正確には、大きい β で k が群の上の熱核 $e^{-\frac{g^2}{2}E^aE^a}$ に近づくということです（7-02 §04）。

例 計算 。$E_{1/2}$ は $\beta = 16$（$g^2 = \frac{1}{4}$）で 0.0967（(14) は 0.0938）、$\beta = 64$ で 0.0236（0.0234）です。比 $E_{1/2}/(14)$ のずれ（相対誤差）は 1.032 から 1.008 へと、ほぼ $1/\beta$ で縮みます（差そのものは 0.00295 から 0.00018 へ、$1/\beta^2$ で縮む）。強結合の $\beta = 1$ では $E_1 = 3.24$ が近似の 4 から外れます。比 $E_1/E_{1/2} \to 8/3$ は 7-02 §07。

07

Kogut–Susskind のハミルトニアン — 時間の刻みを 0 にする

(11) の H_a は積分作用素の対数で、形が見えません。局所的な形は、時間方向の間隔 a_t だけを空間の間隔 a より細かくすると見えます。四次元で、時間方向を含むプラケットと空間だけのプラケットに別々の係数

$$\beta_t = \frac{2N}{g^2}\,\frac{a}{a_t}, \qquad \beta_s = \frac{2N}{g^2}\,\frac{a_t}{a} \tag{15}$$

を付けます。体積あたりのプラケットの数 $1/(a^3 a_t)$ と 5-01 の (7) から、古典的な連続極限はどちらの向きでも 5-01 の (8) の作用になります。$a_t \to 0$ では $\beta_t \to \infty$ なので、時間方向の一段には (14) の一般形 $-\log(\lambda_r/\lambda_0) \approx \frac{N}{\beta_t}C_2(r) = a_t\frac{g^2}{2a}C_2(r)$ が使えます（C_2 は Casimir の値、規格化は $\operatorname{tr} T^aT^b = \frac{1}{2}\delta^{ab}$）。$W = e^{iX^aT^a}$ の近くで $\frac{\beta}{N}\operatorname{Re}\operatorname{tr} W \approx \beta - \frac{\beta}{4N}X^aX^a$ となり、k が時刻 N/β の熱核に近いからです（$SU(3)$ の基本表現で $\beta = 640$ のとき比 1.003 計算 ）。空間の部分 $V^2 = e^{-S_s}$ は $\beta_s \propto a_t$ なので、はじめから $e^{-a_t(\cdots)}$ の形です。合わせて $T = e^{-a_t H_{\mathrm{KS}} + O(a_t^2)}$、

$$H_{\mathrm{KS}} = \frac{g^2}{2a}\sum_{\ell} E^a_\ell E^a_\ell + \frac{2N}{g^2 a}\sum_{p}\Big(1 - \frac{1}{N}\operatorname{Re}\operatorname{tr} U_p\Big) \tag{16}$$

です。第一項が電場（各リンクのこまの回転）、第二項が磁場のエネルギーで、状態は Gauss の法則を満たすもの（$P_0\mathcal{H}$）に限ります。この形は Kogut–Susskind 1975 が与え、Creutz 1977 の要旨は 'Taking the timelike lattice spacing to zero, we extract the Kogut-Susskind Hamiltonian from the transfer matrix in the gauge A0 = 0' と書きます 既知 。(15)(16) の係数はこの章の規約での計算で、極限は固有値ごとの近似です。正準量子化からは 4-01。

例。g^2 が大きいと第一項が支配し、最初の励起は一枚のプラケットの縁を基本表現の電場が一周する状態で、エネルギーは $\frac{g^2}{2a}\cdot 4\cdot C_2(\text{基本})$ です。$SU(N)$ では $C_2(\text{基本})=\frac{N^2-1}{2N}$ で、$SU(2)$（$j=\frac12$、$C_2=\frac34$）では $\frac{3g^2}{2a}$ です。電場の線のエネルギーは長さに比例します（5-02）。

本書での使い方は 24-05 §04（Hamiltonian 格子の上で、隙間を真空の測度の Poincaré 定数として読む）。

08

$\mathbb{Z}_2$ ゲージ理論で全部を見る — 正でない転送行列

群を $\mathbb{Z}_2=\{\pm1\}$（2-09 の寄り道・5-10）、時空を三次元（空間は $L\times L$ の周期格子）とし、作用を $\beta\sum_P(1-U_P)$ とします。一本のリンクの因子は (4) で K を β に替えた行列の $e^{-\beta}$ 倍で、固有値の比は $\tanh\beta$ です。$\beta<0$ では負になります。

各リンクの因子の固有ベクトル（電場の基底）では、各リンクを電場の線が通るか否かが決まります。Gauss の法則は各点に集まる線が偶数本であることで、ゲージ不変な状態は閉じた線の集まり e で番号付けられ、K は線の総延長 $|e|$ だけで決まる対角行列です。

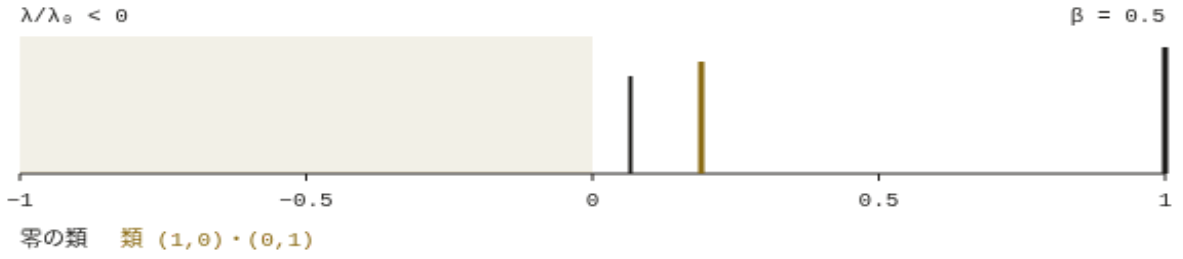
$$K(e)\ \propto\ (\tanh\beta)^{|e|} \tag{17}$$

閉じた線は x・y 方向に巻き付く回数の偶奇で四つの類に分かれ、V（プラケットの縁の線を足し引きする）は類を保ちます。縁を足しても長さの偶奇は変わらないので、類 $(1,0)$ の線の長さは L と偶奇が同じです。よって $\beta<0$ で L が奇数なら、類 $(1,0)$・$(0,1)$ で $K\le0$、$T=VKV\le0$ です。L が偶数なら比 λ/λ_0 は β と $-\beta$ で同じです。一つおきの行の x 向きのリンクの符号を反転すると $U_p\to-U_p$ となり、$V(-\beta)$ は $V(\beta)$ の定数倍と相似になります。L が偶数なら閉じた線の長さはすべて偶数なので、(17) の K も定数倍しか変わりません 紙 （$L=2$ の全固有値、$L=4$ の上位で一致 計算 ）。

各類は 2^{L^2-1} 次元で、$L\le3$ は対角化、$L=4$ は Lanczos 法（大きな対称行列の端の固有値だけを反復で求める方法）です（$L=3$ で両者が印字した 8〜11 桁で一致 計算 ）。$F=W(1)$ を、時刻 1 で x 方向に一周する Wilson 線とします。リンク反射（$t_0=\frac12$）の (3) の左辺は $\langle W(0)W(1)\rangle=\sum_n|\langle0|W|n\rangle|^2\lambda_n/\lambda_0$（$n$ は類 $(1,0)$）で、$L=3$、$\beta=-0.5$ では -0.1306 と負

です。サイト反射（$t_0 = 1$、$F = W(2)$）では $\langle W(0)W(2)\rangle = +0.0183$ です。転送行列を使わないモンテカルロ（$3 \times 3 \times 18$）でも $-0.1305(18)$・$+0.0189(11)$ で、誤差の範囲で合います 計算 。

図 2　$\mathbb{Z}_2$ の転送行列の固有値（空間 3×3） — つまみで β（−1〜2）を動かすと、縦線が固有値の比 λ/λ_0 の位置に動きます（黒：零の類の λ_0・λ_1、茶：類 $(1,0)$・$(0,1)$ で絶対値が最大のもの）。



β = 0.5：零の類 λ₁/λ₀ = 0.0663（m = 2.71）、類 (1,0) の最大 λ/λ₀ = 0.190。固有値はすべて正。

計算 この図の数値はこの端末で計算した。

計算 表 1　零の類（巻き付く線の無い状態）の隙間 $m = \log(\lambda_0/\lambda_1)$ と、類 $(1,0)$ の最低のエネルギー $E_w = \log(\lambda_0/\lambda_0^{(1,0)})$（格子単位）。

β	m (L=3)	m (L=4)	−4 log tanh β	E_w (L=3)	E_w (L=4)
0.10	9.233	9.233	9.224	6.915	9.223
0.75	1.587	1.153	1.816	0.1860	0.1443
1.00	2.991	2.840	1.089	0.0200	0.00459

読み方。(i) $\beta > 0$ では固有値はすべて正で $m > 0$（05 節の (d)）。(ii) 小さい β では $m \approx -4 \log \tanh \beta$（長さ 4 の線。5-02 の m_0）、$E_w \approx -L \log \tanh \beta$（巻き付く線の長さに比例。閉じ込めの形）。(iii) 大きい β では E_w は L とともに急に小さくなります。(iv) $\beta = 0.75$ の近くでは m が L で大きく動きます。三次元の $\mathbb{Z}_2$ ゲージ理論は三次元イジング模型と双対で相転移があるとされ（Wegner 1971）既知 、有限の箱の m だけでは無限体積の隙間は決まりません。(v) $\beta < 0$・$L = 3$ では類 $(1,0)$・$(0,1)$ の 512 個の固有値がすべて 0 以下で（$\beta = -1$ で最小 $-0.788\lambda_0$）、$\langle W(0)W(t)\rangle$ は t の偶奇で符号を変えます（$\beta = -0.5$、$t = 3$ で -0.0027）計算 。

09

何が保たれ、何が残るか

極限で保たれる。(3) は不等式なので、格子の列で期待値が収束し、鏡の面がどの段でも格子の面に乗っていれば、極限の測度も反射正値です（7-01 §07）既知 。四次元の非可換な場合、連続極限の存在は 2026-11 に公開された構成が示し、極限の相関の鏡映正値性もそこで言

われています（Lean で証明されている、と委員会が評価した。12-01・12-05）。ただし極限は相関関数の水準で、測度としての極限は作られていません（6-04）。

作用を替えると失われうる。次元 6 の項を足す改良（5-05 の Symanzik の改良）では、Lüscher–Weisz 1984 の要旨が 'physical positivity is lost in general' と書き、転送行列に複素数の固有値が現れうること（減衰振動する相関）と、二点関数のスペクトル分解に負の重みが必ず出ることを述べます 既知 。08 節の $\beta < 0$ は、転送行列が正でなくなる最も簡単な例です（固有値は実で負）。連続の正則化は 4-10 §08。

言わないこと。$m_L > 0$ が $L \to \infty$（強結合側は 5-04）・$a \to 0$ で残るかに、この章の道具は答えません。回転対称性の回復も極限の側の課題です。

この章が言えている範囲

内容	状態
格子ゲージ理論の反射正値性と正の自己共役な転送行列	既知 （Osterwalder–Seiler 1978 の要旨）
(3) の β の条件：サイト反射はすべての β、リンク反射は $\beta \geq 0$	紙 （この章の (6)〜(8)）
$\beta < 0$ でリンク反射が破れる例	計算 （08 節の $\mathbb{Z}_2$、$L = 3$）
T の自己共役・$\beta \geq 0$ で正	既知 （Osterwalder–Seiler 1978、Lüscher 1977）
$\beta > 0$ で T が 0 を固有値に持たない	紙 （05 節の (c)、06 節の $\lambda_r > 0$）
λ_0 の単純性、箱ごとの $m_L > 0$（$\beta > 0$）	既知 （Jentzsch の定理の一般化。Schaefer 1974）
(12)〜(16)	式は 既知 、06 節の数値と $SU(3)$ の一般形の確認は 計算 。(15)(16) の係数はこの章の規約、$a_t \to 0$ は固有値ごとの近似
$\mathbb{Z}_2$（$L \leq 4$）の表 1・図 2	計算 （対角化と独立なモンテカルロ）
質量ギャップ・連続極限	何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1・図 2・本文の数値	計算	python3（NumPy、SciPy）：`table1.py`・`one_link.py`・`z2_transfer.py`・`check_lanczos.py`・`even_L_check.py`・`winding_corr.py`・`mc_check.py`・`fig_data.py`・`su3_casimir.py`。$\langle W(0)W(t)\rangle$ はスペクトル表示とモンテカルロの二通り
問題文 §6.5	既知	A. Jaffe, E. Witten, "Quantum Yang–Mills Theory" (2000)。本文を確認

もの	種別	出典・道具
反射正値性・転送行列	既知	K. Osterwalder, E. Seiler, "Gauge field theories on a lattice", Ann. Phys. 110 (1978) 440–471（要旨を確認、本文は未確認）／M. Lüscher, Commun. Math. Phys. 54 (1977) 283–292（題と要旨を確認）
(16)・改良した作用	既知	J. Kogut, L. Susskind, Phys. Rev. D 11 (1975) 395–408／M. Creutz, Phys. Rev. D 15 (1977) 1128–1136／M. Lüscher, P. Weisz, Nucl. Phys. B 240 (1984) 349–361。いずれも要旨を確認
Perron–Frobenius・Jentzsch	既知	O. Perron, Math. Ann. 64 (1907) 248–263／R. Jentzsch, "Über Integralgleichungen mit positivem Kern", J. reine angew. Math. 141 (1912) 235–244。いずれも書誌を Crossref で確認、本文は書誌のみ（Jentzsch の主張〔正方形の上の連続で正の核では、スペクトル半径が正の固有関数をもつ単純な固有値〕は二次資料 arXiv:1910.01120 で確認）。コンパクト空間上の核への一般化：H. H. Schaefer, *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer (1974) p. 337 の定理（核 $N \geq 0$ の積分作用素で、ある冪がコンパクト、かつ正の測度の集合 S とその補集合をつなぐ核の積分が正なら、スペクトル半径はほとんど至る所正の固有関数をもつ単純な固有値。$N > 0$ ならほかの固有値の絶対値はそれより小さい）。書誌のみ（主張は arXiv:1910.01120・arXiv:1501.06011 の引用で確認。有限の箱の連続で正の核は Hilbert–Schmidt なのでこの仮定を満たす）。M. G. Krein, M. A. Rutman, Uspekhi Mat. Nauk 3:1(23) (1948) 3–95（英訳 Amer. Math. Soc. Translation 26, 1950）。書誌を Math-Net.Ru で確認、本文は書誌のみ
I_ν の漸近形	既知	NIST DLMF 10.40.1・10.17.1。式を確認
$\mathbb{Z}_2$ とイジングの双対	既知	F. J. Wegner, J. Math. Phys. 12 (1971) 2259–2272。書誌のみ

次に読む章：5-04 無限体積極限とクラスター展開。

無限体積極限とクラスター展開 — 小さい β では塊の展開が箱によらず収束し、極限と格子の隙間が出る

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 無限体積極限は部分列ならいつも取れるが一つとは限らないこと。小さい β ではプラケットの塊の展開が箱によらず収束し、極限の存在・解析性・相関の指数減衰（格子単位の隙間）が出ること。境界条件によらない一意性は Shen–Zhu–Zhu が Langevin 力学の道で示したこと（§08）。どちらも保証の範囲がずっと狭いこと。

前提となる章 — 5-02。4-11・5-03・7-04 も参照します。β は 5-01 の格子の逆結合で、4-06 の β 関数 $\beta(g)$ とは別の量です。

先に言うこと — 格子間隔を固定した小さい β の側の話で、連続極限 $\beta \to \infty$ の反対の岸です。連続の理論の無限体積極限と質量ギャップについて、この章は何も示していません。表 3 は粗い評価の当てはめで、文献の最良の値ではありません。

この章の順序

1. 箱から全空間へ — 無限体積極限とは何か
2. 極限はいつも取れるが、一つとは限らない（図 1・表 1）
3. 寄り道：Elitzur の定理 — ゲージを変える量は、どの極限でも 0
4. 塊に分ける — 閉じた塊だけが残る
5. 塊を数える — 数は指数で増え、重みも指数で減る（表 2）
6. 収束の条件 — Kotecký–Preiss（図 2・表 3）
7. 展開から出るもの — 極限・解析性・格子の隙間
8. 別の道 — Langevin 力学と Poincaré 不等式
9. どこで止まるか — 強結合の岸と連続極限の岸（表 4）

01

箱から全空間へ — 無限体積極限とは何か

格子ゲージ理論はまず一辺 L の箱 Λ_L で定義します。Wilson 作用（5-01）と Haar 測度の重みは、コンパクトな空間の上の普通の確率測度です。

$$\langle F\rangle_L = \frac{1}{Z_L}\int F(U)\, e^{-S_W(U)} \prod_{\ell\in\Lambda_L} dU_\ell, \qquad S_W = \beta\sum_P \Big(1 - \tfrac{1}{N}\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\, U_P\Big) \tag{1}$$

質量ギャップは距離を無限に延ばしたときの言明（4-11 §02）なので、箱を大きくした極限を考えます。有限個のリンクで決まる連続関数を**局所観測量**と呼び、全格子の上の確率測度 μ が

$$L_k \to \infty \text{ となる列があって、すべての局所観測量 } F \text{ で } \quad \langle F\rangle_{L_k} \longrightarrow \int F\, d\mu \tag{2}$$

を満たすとき、μ を**無限体積極限**と呼びます。測度の弱収束です。Chatterjee（2018）§3 は “a weak limit of the above probability measures as $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^n$” と書きます 既知 。

例：二次元で自由境界なら、ゲージを木に沿って固定するとプラケット変数が独立になり、どの箱でも $\langle W_{R\times T}\rangle = u^{RT}$（5-02 §04）で、極限は自明です 既知 。

02

極限はいつも取れるが、一つとは限らない

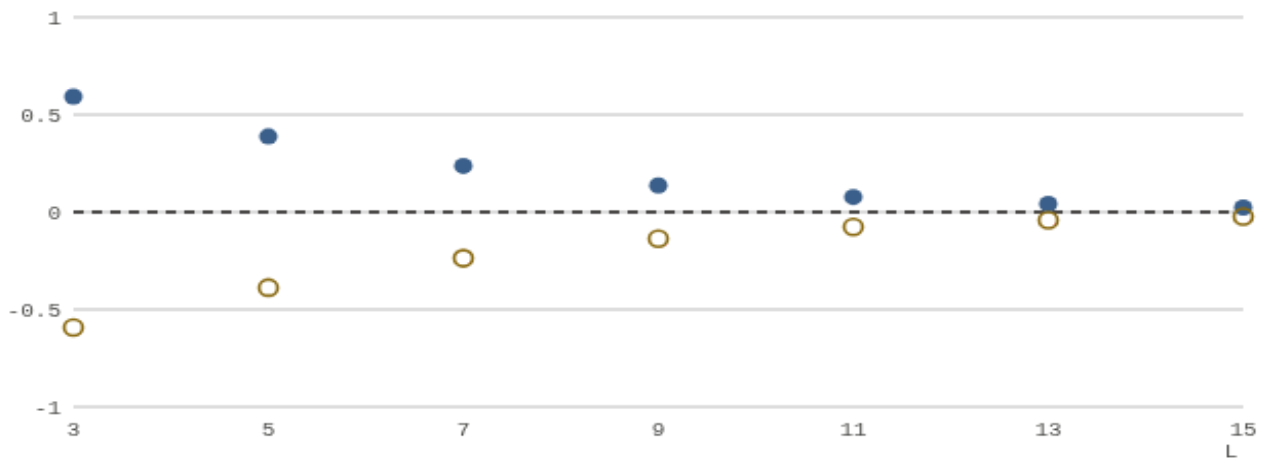
存在はコンパクト性でほぼ無料です。$\langle F\rangle_L$ は有界な数列なので収束する部分列があり、局所観測量を近似する可算個の関数について対角線論法で同時に収束させられます 既知 。

難しいのは**一意性**です。Chatterjee（2018）§3 は “The infinite volume limit may or may not be unique. Indeed, the uniqueness (or non-uniqueness) is in general unknown for lattice gauge theories in dimensions higher than two when β is large.” と書きます 既知 。破れる例を二次元イジング模型（2-09）で見ます。$L\times L$ の箱の外周を ± 1 に固定し、中心のスピンの平均を測ります。

$$\langle \sigma_0\rangle_L^{\pm} \xrightarrow{L\to\infty} \pm m^*, \qquad m^* = \begin{cases} 0 & \beta \le \beta_c \\ \big(1-\sinh^{-4}2\beta\big)^{1/8} & \beta > \beta_c \end{cases}, \qquad \beta_c = \tfrac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) \tag{3}$$

右は自発磁化の厳密な式です 既知 。$\beta > \beta_c$ では境界条件ごとに異なる極限が現れます（相転移。2-08）。

図 1　外周が＋（●）と −（○）の箱の中心のスピン（$L = 3, \dots, 15$）、破線は $\pm m^*$。つまみ・「動かす」・表 1 の行で β が変わります。



β = 0.30 L=15：±0.023 m* = 0.000

計算 この図の数値はこの端末で計算した（列の転送行列）。JavaScript が無効なら表 1 が中身です。

表 1　$\langle\sigma_0\rangle_L^{+}$（– 境界では符号が逆）。行を選ぶと図 1 の β が変わります 計算

β	$L=5$	$L=15$	m^*	**読み**
0.30	**0.3882**	**0.0231**	**0**	**境界の影響が指数で消える**
0.44	0.8473	0.7544	0	臨界点の近く。箱が小さい
0.50	0.9241	0.9119	0.9113	$\pm m^*$ に分かれる

中心と外周の距離は $(L+1)/2$ で、$\beta=0.2$ の $\ln(\langle\sigma_0\rangle_{13}/\langle\sigma_0\rangle_{15})=1.219$ は相関の減衰率 $2(K^*-K)=1.223$（2-09 §06）とほぼ同じです 計算 。**境界の影響は相関と同じ速さで消えます。**ゲージ理論で相関の減衰を示す道具が §04 からの塊の展開です。

03

寄り道：Elitzur の定理 — ゲージを変える量は、どの極限でも 0

飛ばしてよい節です。

ゲージ理論では境界が向きを選べません。箱の内部の一点 x だけでゲージ変換 g をしても（出るリンクは gU_ℓ、入るリンクは $U_\ell g^{-1}$）、S_W も Haar 測度も境界も変わらないので、g について平均でき、x から出るリンク ℓ で

$$\langle \operatorname{tr} U_\ell\rangle_L=\left\langle \operatorname{tr}\Big(\textstyle\int_G g\,dg\,U_\ell\Big)\right\rangle_L=0 \tag{4}$$

が、どの箱・どの境界条件でも、したがってどの極限でも成り立ちます。$\int_G g\,dg=0$ は、中心の元 ωI（$SU(N)$ では $\omega=e^{2\pi i/N}$、$U(1)\cdot\mathbb{Z}_2$ では -1 など）を掛けても Haar 測度が変わらないので $\int g\,dg=\omega\int g\,dg$ となることから出ます。Elitzur（1975）の要旨は “It is argued that a spontaneous breaking of local symmetry for a symmetrical gauge theory without gauge fixing is impossible.” です 既知 。正確には、言えるのは「ゲージを変える量は秩序の目印にならない」ことで、相転移が無いこ

とではありません。相の違いはゲージ不変な量（面積則、Polyakov ループ。18-03）に現れえます（5-06）。

04

塊に分ける — プラケットの塊の気体

小さい β では各プラケットの重みがほぼ定数です。重みを「定数×(1＋小さなずれ)」に分けて積を開きます。

$$e^{\frac{\beta}{N}\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U} = c_0(\beta)\big(1+f(U)\big), \qquad c_0 = \int_G e^{\frac{\beta}{N}\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U}\,dU, \qquad \int_G f\,dU = 0 \tag{5}$$

ずれを拾うプラケットの集合 X を、**リンクを共有すればつながる**という規則で連結な部分に分けます。リンクを共有しない部分の積分は独立なので、積に分かれます。

$$\frac{Z_L}{(e^{-\beta}c_0)^{|\mathcal{P}|}} = \sum_{\substack{\{X_1,\dots,X_k\}\\ \text{互いにリンクを共有しない}}} \prod_{i=1}^{k} z(X_i), \qquad z(X) = \int \prod_{P\in X} f(U_P) \prod_{\ell\in X} dU_\ell \tag{6}$$

$|\mathcal{P}|$ は箱のプラケットの数です。これは 7-04 §03 のポリマー模型そのものです 既知 。活量について二つの事実が効きます。

$$|z(X)| \le \varepsilon^{|X|}, \quad \varepsilon(\beta) = \sup_U |f(U)|; \qquad z(X) = 0 \quad (X \text{ の一枚にしか含まれないリンクがある}) \tag{7}$$

右は、そのリンクが一枚の $f(AU_\ell B)$ にしか現れず、Haar 測度の不変性で $\int f(AU_\ell B)\,dU_\ell = \int f = 0$ となるからです。残るのは、どのリンクも二枚以上に囲まれた**閉じた塊**だけです。最小は単位立方体の表面（6 枚）です。

例：$\mathbb{Z}_2$ では $f = \tanh\beta\cdot U$ で立方体の活量は $\tanh^6\beta$。$SU(2)$ では各面を 5-02 の (3) で $f = \sum_{j\neq 0} d_j\,u_j\,\chi_j$ と展開し、5-02 の (5) で積分すると、全部の面が同じ表現 j を持つ項だけが残ります。閉じた面では、その寄与が $d_j^{F-E+V}u_j^F$ になるという規則が知られています（F,E,V は面・辺・頂点の数、$F-E+V$ は面のオイラー標数で、立方体の表面は球なので $6-12+8=2$）既知 。立方体なら次のように確かめられます。隣り合う面を (5) の右の式で 5 回貼ると（1 回ごとに $1/d_j$）、6 枚は一枚の円板になります。その縁を一周する積では、残る 7 本のリンクが $U_\ell U_\ell^{-1}$ と隣り合うものから順に打ち消し合い、単位行列が残ります。したがって $d_j^6\cdot d_j^{-5}\cdot\chi_j(1) = d_j^2$ です。

$$z(\text{立方体}) = \sum_{j=1/2,1,\dots} (2j+1)^2\,u_j^6 \approx 4u^6, \qquad u_j = \frac{I_{2j+1}(\beta)}{I_1(\beta)} \tag{8}$$

$\beta = 1$ で 7.682×10^{-4}、Monte Carlo の直接積分は $7.63(8) \times 10^{-4}$ です 計算 。

05

塊を数える — 数は指数で増え、重みも指数で減る

言葉を四つ決めます（詳しくは 7-04 §03・§04）。(6) の X を**ポリマー**（塊）と呼びます。二つの塊がリンクを共有するとき**相容れない**と言います。相容れない関係で一つにつながった塊の列（同じ塊が何度出てもよい）を**クラスター**と呼びます。(6) の左辺の対数はクラスターごとの項の和に書き直せ、問題はその和が箱によらず絶対収束するかどうかです 既知 。

収束は塊の**数の増え方**と重み ε^n の勝負です。根のプラケットを含むリンクでつながった n 枚の集合の数を c_n とします。一枚のプラケットには 4 本のリンクがあり、一本のリンクは $2(d-1)$ 枚に含まれるので、リンクを共有する相手は $D = 4(2(d-1)-1) = 4(2d-3)$ 枚（四次元で 20）です。Borgs–Chayes–Kahn–Lovász（2010）の補題 2.1(c) の上界があります 既知 。

$$c_n \le \frac{1}{n}\binom{nD}{n-1}, \qquad \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{n}\binom{nD}{n-1}\Big)^{1/n} = \frac{D^D}{(D-1)^{D-1}} \approx 53.0 \quad (D=20) \tag{9}$$

表 2　四次元の c_n（Redelmeier の方法で列挙） 計算

n	c_n	比	閉じた塊	(9) の上界
2	20	20.0	0	20
3	458	22.9	0	590
4	11 132	24.3	0	20 540
5	280 175	25.2	0	784 245
6	7 218 768	25.8	4	31 763 004

比は $n=6$ で約 26、上界の増え方 53 はその倍ほどです。閉じた塊は $n \le 5$ に無く、$n=6$ の 4 個は四つの立方体です 計算 。この数え方で収束を保証するには、ε が塊の増え方の逆数（表 2 の比から $1/26$ より小さく、(9) から $1/53$ より大きいと見込まれる値）より小さいことが要ります。

比喩で言えば、一枚ごとに $\ln(1/\varepsilon)$ の費用と $\ln 26$ ほどの選び方の得の勝負です。正確には、得が勝っても展開が使えなくなるだけで、相転移が起きるとは限りません（7-04 §10）。

06

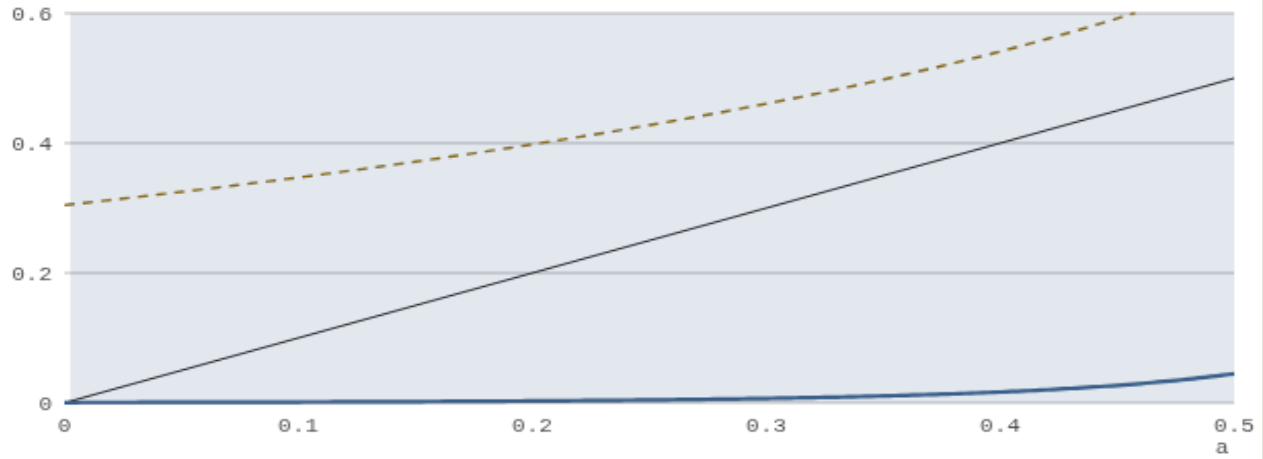
収束の条件 — Kotecký–Preiss の条件を当てはめる

勝負を定理にするのが Kotecký–Preiss の条件です（7-04 §06）。定理の形では、ある $a>0$ があって、すべての塊 X で (10) の左の不等式が成り立てば、(6) の対数のクラスターの和は箱によらず絶対収束します 既知 。各塊に予算 $a|X|$ を配り、相容れない相手の重み（$e^{a|X'|}$ を掛けたもの）の合計が予算に収まる、という読み方です。

$$\sum_{X' \text{ が } X \text{ とリンクを共有}} |z(X')|\, e^{a|X'|} \le a|X| \quad \Longleftarrow \quad 8(d-1)\,G\!\left(\varepsilon e^{a}\right) \le a, \qquad G(x)=\sum_{n} c'_n\, x^{n} \tag{10}$$

右は、X のリンクが高々 $4|X|$ 本、一本のリンクを含む塊はその $2(d-1)$ 枚のどれかを含む、という勘定です。c'_n は閉じた塊の数（$n\le 6$ は表 2、$n\ge 7$ は (9)）です。$\varepsilon = x\,e^{-8(d-1)G(x)}$ を $x=\varepsilon e^{a}$ について最大化すると保証の上限 $\varepsilon_{\max}$ が出て、$\varepsilon(\beta)=\varepsilon_{\max}$ を解けば β の範囲です。

図 2　四次元の条件 (10)。細線は右辺 a、太線は左辺 $24G(\varepsilon e^{a})$（閉じた塊）、破線は連結な塊すべて。太線が細線の下に来る帯があれば収束が保証されます。つまみで β、ボタンで群が変わります。



SU(2)　β = 0.0100　ε = 0.0100　条件を満たす　a：0.003〜0.500

計算 この図の数値はこの端末で計算した。JavaScript が無効なら表 3 が中身です。

表 3　(10) が保証する β の上限（連結な塊すべてを数えると 0.0087）計算 と Shen–Zhu–Zhu の条件をこの本の Wilson の β に直した値 既知 （規約の換算は 5-01 表 4）

四次元	$\varepsilon_{\max}$	$\mathbb{Z}_2$	$U(1)$	$SU(2)$	$SU(3)$
閉じた塊	0.0161	0.0161	0.0160	0.0160	0.0160
Shen–Zhu–Zhu 既知	–	–	–	0.0833	0.1875

保証されるのは $\beta<0.016$ 程度で、$\varepsilon\approx\beta$ なので群にほぼ依りません。5-02 表 2 で強結合の式が数値と合った $\beta\le 1$ より二桁狭く、出所は上限ノルム（$SU(2)$・$\beta=0.1$ で $\varepsilon=0.104$、$u=0.025$）、(9) の粗さ、打ち消し合いの無視です 計算 。表 3 は「展開が止まる場所」ではありません。

07

展開から出るもの — 極限・解析性・指数的なクラスター性・格子の隙間

(10) が箱によらず成り立つと、7-04 §08 から次が出ます 既知 。

(a) 解析性。一枚あたりの $\ln Z_L$ の極限は β の解析関数（複素の β まで広げても収束する）で、その範囲に相転移はありません。**(b) 極限の存在**。$\langle F\rangle_L$ は部分列を取らずに収束します（境界の影響は表 1 と同じく指数で消える）。言えるのはその境界条件の列での極限の存在で、境界条件によらない一意性は §08 の道によります。**(c) 指数的なクラスター性**。二つの局所観測量の連結相関には両方の台に触れるクラスターだけが残り、距離 r を結ぶには r 枚程度以上が要ります。

$$\big|\langle FG\rangle - \langle F\rangle\langle G\rangle\big| \le C_{F,G}\, e^{-m\,\mathrm{dist}(F,G)}, \qquad m>0 \tag{11}$$

例：二枚のプラケットを結ぶ最小の塊は、その二枚を両端とする側面 $4t$ 枚の管（両端と合わせて閉じた面）で、主項は $m_0 = -4\ln u$（5-02 §05）。(11) はそれを箱によらず正当化します。

(d) 格子の隙間。転送行列 T（5-03 §05）を、真空 Ω の固有値が 1 になるよう規格化します。ゲージ不変な局所観測量 F が作る状態 $F\Omega$ から真空の成分を引いたものについて、時間の向きの (11) は $\langle F\Omega, T^t F\Omega\rangle$ がどの F でも e^{-mt} の速さで減ることを言います。こうした状態は真空に直交するゲージ不変な状態の全体で稠密なので、スペクトル定理から、そこでの T のスペクトルは $[0, e^{-m}]$ に収まります（4-11 §02）。つまり真空に直交するゲージ不変な状態の上で $\|T\| \le e^{-m}$ で、$-\ln T$ の隙間は m 以上です。

文献では、Shen–Zhu–Zhu（2023）§1 が Osterwalder–Seiler（1978）の内容を “the existence of a mass gap (exponential clustering) follows from convergence of the cluster expansion, so do existence of the infinite volume limit and analyticity of Schwinger functions in the inverse coupling.” とまとめ、一意性は “should also follow” と弱く書きます。Chatterjee（2018）§6 は “quark confinement and the existence of a positive self-adjoint transfer matrix” が示されたと書きます 既知 。原論文の要旨も “We then prove existence and analyticity of the infinite volume limit of strongly coupled Yang-Mills theories on the lattice and we verify Wilson's confinement bound.” と述べます（本文は読んでいません）。

この本の定義の上で機械検査した形は 20-01〜20-04 に在ります。

08

別の道 — Langevin 力学と Poincaré 不等式

塊を数えずに届く道もあります。言葉を三つ用意します。

三つの言葉 — Langevin 力学・Ricci 曲率・ヘッセ行列

Langevin 力学は、リンク変数を $dQ = -\nabla S_W(Q)\,dt + \sqrt{2}\,dB$ の形で確率的に動かす力学です。∇ はリンク変数の群の上の勾配、B は群の上のブラウン運動（各リンクに独立な揺らぎ）です。坂を下る力と揺らぎの釣り合いで、測度 (1) を変えない（不変測度に持つ）ように作ってあります（7-09）。**Ricci 曲率**は、群を曲がった面と見たときの曲がり具合です。球面のように正に曲がっていると、近くから出た測地線が寄り集まります。$SU(N)$ では至る所で同じ正の定数（Shen–Zhu–Zhu の内積の規格で $N/2$）です。**ヘッセ行列**は、作用 S_W の二階微分を群の上で取ったものです。

Poincaré 不等式と Bakry–Émery の判定法

鍵は Poincaré 不等式（1-10）です。

$$\mathrm{Var}_\mu(F) \le C_P\,\mathbb{E}_\mu\big[\,|\nabla F|^2\,\big] \tag{12}$$

C_P が箱によらないことが「一様な評価」に当たります。1-10 の (9) では、一次元で $V'' \ge \kappa > 0$ なら $C_P \le 1/\kappa$ でした。群の上では曲率がこの κ に加わり、Bakry–Émery の判定法は次の形になります [既知]。

$$\text{Ricci 曲率} + \text{作用のヘッセ行列} \;\ge\; K_S > 0 \quad\Longrightarrow\quad \text{(12) が箱によらない } C_P \text{ で成り立つ}$$

Shen–Zhu–Zhu の強結合の条件（Shen–Zhu–Zhu の仮定 1.1）は、$SU(N)$ で $K_S = N/2 - 8N|\beta_{\mathrm{SZZ}}|(d-1) > 0$ です。右の項は、ヘッセ行列が $-8N|\beta_{\mathrm{SZZ}}|(d-1)$ より下がらないという評価から来ます。ヘッセ行列が $|\beta|N$ の程度に収まることが要です（一本のリンクの例は 5-11）。比喩で言えば、丸い器の底へ戻す力が作用の凸凹より強い状態です。正確には、比べるのは曲率 $N/2$ と、ヘッセ行列が負になりうる大きさ $8N|\beta_{\mathrm{SZZ}}|(d-1)$ です。

Shen–Zhu–Zhu の定理

Shen–Zhu–Zhu（2023）は $SU(N)$ で $|\beta_{\mathrm{SZZ}}| < 1/(16(d-1))$（$\beta = N^2\beta_{\mathrm{SZZ}}$。換算は 5-01 表 4）の下で、要旨に “The finite volume Yang–Mills measures converge to this unique invariant measure in the infinite volume limit”、“the infinite volume measure has a strictly positive mass gap” と書きます。不変測度の一意性の定理（Shen–Zhu–Zhu の定理 1.2）は、Langevin 力学の不変測度が一つしかないこと (1) と、周期境界の箱の測度の極限が部分列によらずそれに一致すること (2) を示します。群がコンパクトなので箱の測度の列はい

つも緊密（tight）で、(2) の “every tight limit” は §02 の意味の部分列の極限と読んでよいものです。注意 1.3 は、周期境界を Dirichlet などの境界条件に替えても極限は同じ不変測度だと述べます。強結合の範囲での §02 の問いへの一つの答えです 既知 。四次元 $SU(2)$ なら $\beta < 1/12$ です。

注意　二つの隙間

(12) の $1/C_P$ は Langevin の人工的な時間の隙間で、転送行列の隙間とは別の量です（18-03）。Shen–Zhu–Zhu の質量ギャップは、(12) から導いた、格子の上の距離についての（Langevin の人工的な時間ではない）相関の指数減衰（Shen–Zhu–Zhu の系 1.6）で、(11) と同じ意味の言明です。

09

どこで止まるか — 強結合の岸と連続極限の岸

表 4　四次元 $SU(2)$（作用 (1)）の β の目盛り

β	言えていること	水準
< 0.016	この章の当てはめ（表 3）	計算
< 0.083	一意な極限と相関の指数減衰（Shen–Zhu–Zhu）	既知
$\lesssim 1$	強結合の式が数値と合う（5-02 表 2）	計算
≈ 2	面の荒れ（5-02 §07）	物理
2.3 以上	連続極限へ外挿する数値（5-08）	物理
$\to \infty$	連続極限（5-05）。相関関数の極限は 2026-11 に公開された構成が作った（体積は部分列。6-00）。一意性と物理の単位の隙間の定理は無い（6-04）	委員会の評価

表の上と下で「無限体積極限」の意味が変わります。この章の極限は格子間隔を固定したものです。連続極限では $a \to 0$ と同時に格子単位の箱も無限大になり、隙間は格子単位で $m(\beta) \to 0$ と閉じるはずです（5-09） 物理 。要るのは物理の単位で一様な隙間で、そこに小さな ε はありません。問題文 §6 は “no present ideas point the direction to establish the existence of a mass gap that is uniform in the volume. Nor do present methods suggest how to obtain the existence of the infinite volume limit $\mathrm{T}^4 \to \mathrm{R}^4$.” と書きます 既知 。

また、解析性は (10) が保証する複素 β の小さい円板の外を語りません。四次元の $U(1)$ では大きい β で面積則が破れ（Guth 1980。Chatterjee（2018）§4 によれば完全に厳密な証明は Fröhlich–Spencer 1982。5-06）、非可換群では有限の β に臨界点が無い（相関長は $\beta \to \infty$

でだけ発散する）ことは Chatterjee（2018）§5 の “It is believed that … many of the non-Abelian lattice models of interest have βc = ∞.” の水準です 物理 （7-10）。

この章が言えている範囲

事項	言えている	言えていない
(2)〜(8)	部分列の極限の存在・Elitzur・塊の気体 既知 。表 1 と立方体の活量 計算	大きい β での一意性
表 2・表 3	$n \le 6$ の数と、(10) の粗い十分条件 計算	文献の最良の範囲、展開が止まる β
(a)〜(d)・(11)・(12)	強結合側の既知の結果の紹介（Osterwalder–Seiler は要旨と二次資料による）。境界条件によらない一意性は、塊の展開からは “should also follow” の水準で、Shen–Zhu–Zhu が Langevin 力学の道で示した 既知	証明の細部。連続極限での一意性と隙間。この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§01・§02・§07・§09 の引用	本文 §3・§4・§5・§6	S. Chatterjee, arXiv:1803.01950 (2018)
§07・§08 の引用、仮定 1.1・定理 1.2・注意 1.3・定理 1.4・系 1.6・式 (1.2)・(4.7)・(4.8)	要旨・本文 §1・§4	H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, Commun. Math. Phys. 400 (2023) 805–851, arXiv:2204.12737
§07 の Osterwalder–Seiler	要旨（転送行列の正値性・強結合での無限体積の極限の存在と解析性・Wilson の閉じ込めの評価。INSPIRE の要旨）・本文は書誌のみ	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471
原典（(10) を含む）	書誌のみ（内容は上の二つと 7-04 による）	R. Kotecký, D. Preiss, CMP 103 (1986) 491。E. Seiler, *Gauge theories as a problem of constructive quantum field theory and statistical mechanics*, Springer (1982)
§03 の引用	要旨	S. Elitzur, Phys. Rev. D 12 (1975) 3978–3982
(9)	本文 補題 2.1(c)	C. Borgs, J. Chayes, J. Kahn, L. Lovász, arXiv:1002.0115 (2010)
表 2 の列挙法	書誌のみ	D. H. Redelmeier, Counting polyominoes: yet another attack, Discrete Math. 36 (1981) 191–203

もの	種別	出典・道具
(8) の d^{F-E+V} の規則	本文 §3.4（貼り合わせの式 (3.17)・(3.19) と、閉じた面で $(\dim R)^{2-2p}$ が出ること。二次元の理論の形で）	S. Cordes, G. Moore, S. Ramgoolam, Lectures on 2D Yang–Mills theory, equivariant cohomology and topological field theories, arXiv:hep-th/9411210 (1994)
§09 の問題文	本文 §6（材料で逐語確認）	A. Jaffe, E. Witten, Quantum Yang–Mills Theory, Clay Mathematics Institute (2000)
(3) の $m^*/U(1)$ の相	書誌のみ	C. N. Yang, Phys. Rev. 85 (1952) 808–816／A. H. Guth, Phys. Rev. D 21 (1980) 2291、J. Fröhlich, T. Spencer, Commun. Math. Phys. 83 (1982) 411
表 1〜3・図・(8)	この端末で計算	Python 3・NumPy・SciPy：ising_box.py・animals.py・kp.py・cube.py・cube_check.py

次に読む章：5-05 弱結合と連続極限（反対の岸）。一般論は 7-04。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 5 部 格子ゲージ理論 連続極限

弱結合と連続極限 — β を上げると格子は細かくなり、その速さは漸近自由が決める

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — β を上げると格子間隔 $a(\beta)$ が 0 に近づき、a は物理量で目盛って決める出力であること。「スケーリング」と「漸近スケーリング」の違い。格子の誤差が a^2 で消え、改良作用と連続外挿で減らせること。

前提となる章 — 5-01（Wilson の格子）と 4-06（β 関数）。連続極限の一般論は 2-08 §08、質量ギャップは 4-11。この章の β は 5-01 の格子の逆結合 $2N/g_0^2$ で、4-06 の β 関数 $\beta(g)$ とは別の量です。§03 の「格子の β 関数」は、この β の a への依り方 (3) を指します。

先に言うこと — $a(\beta)$ の漸近形と a^2 の誤差は摂動論と数値の水準の話です 物理 。四次元の非可換な格子の連続極限は、2026-11 に公開された構成が、裸の結合を漸近自由の走りに合わせて選んだ族について作りました（Lean で証明されている、と委員会が評価した。6-00）。物理量で目盛りを決めた形の極限、(4) の比の極限、質量ギャップは示されていません（6-04）。この章も連続極限と質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. 連続極限は臨界点に近づくこと
2. 格子間隔は出力である — 何で目盛るか
3. 格子の β 関数と漸近スケーリング — a を半分にする $\Delta\beta$（表 1・図 1）。寄り道：連続極限の値段
4. スケーリング — 無次元の比が止まる
5. 格子の誤差の形 — 自由場で見る a^2（表 2・図 2）
6. Symanzik の有効理論と改良作用 — 長方形を足して a^2 を消す（表 3）、量子論の対数補正。寄り道：改良の代償
7. 連続外挿 — a^2 に対して直線を引く

8. 数学から見た連続極限 — 示されたことと、示されていないこと

01

連続極限は臨界点に近づくこと

格子の理論には長さの単位がなく、出るのは「格子何個分」という数です。たとえば二つのプラケットの相関が $e^{-|x|/\xi_{\mathrm{lat}}}$ で減るときの相関長 $\xi_{\mathrm{lat}}(\beta)$ です（4-11）。物理の単位の質量は格子間隔で割って得ます。

$$\Delta = \frac{1}{a(\beta)\,\xi_{\mathrm{lat}}(\beta)} \tag{1}$$

$\beta = 2N/g_0^2$（5-01）の格子で Δ を止めて $a \to 0$ とするには $\xi_{\mathrm{lat}} \to \infty$、つまり臨界点に近づく必要があります。Chatterjee（2018）§5 は物理の用法を “the model has a continuum limit if there is a critical point βc ∈ [0,∞] such that as β → βc, the correlation length tends to infinity” とまとめ、四次元の非可換な模型では “It is believed ⋯ βc = ∞” と書きます 既知 。$\beta = \infty$ は $g_0 \to 0$ で、漸近自由（4-06）と同じ向きです。

極限は二つで、先に β を止めて箱を無限にし（5-04）、その後で $\beta \to \infty$ とします。

02

格子間隔は出力である — 何で目盛るか

a が何 fm かは、質量次元 k の量 Q の格子での値 $\widehat{Q} = a^k Q$ と物理の値を突き合わせて後から決めます。

$$a_Q(\beta) = \left(\widehat{Q}(\beta)/Q_{\mathrm{phys}}\right)^{1/k} \tag{2}$$

基準には弦張力 σ（Creutz 1980 は “hold fixed the string tension” として a を決めた）、力から定める長さ r_0、勾配流の t_0（Lüscher 2010）が使われます 既知 。r_0 は、静的な電荷の対に働く力 $F(r)$ から $r_0^2 F(r_0) = 1.65$ で決める長さです（Sommer 1994。4-06 §07）。t_0 は、場を拡散方程式で滑らかにする操作（勾配流）で決める長さです（18-04 §08 では同じものを Wilson 流と呼びます）。

例：純 SU(3) の r_0/a は $\beta = 5.7$ で 2.922、6.4 で 9.74 です（Necco–Sommer 2002 の表 1。$\beta \le 6.4$ は先行の計算の値の再掲）。$r_0 \approx 0.5$ fm（QCD での目安の値。Necco–Sommer の

序）と置くと $a \approx 0.171$ fm と 0.051 fm です（$1\ \text{fm} = 10^{-15}$ m） 計算 。r_0 の物理の値は格子の外から来る入力です。

基準を変えると有限の β で $a(\beta)$ は少し違い、二つの a の比は格子で測った比 $\widehat{Q}_1/\widehat{Q}_2$ で決まります。この比が落ち着くことが §04 のスケーリングです。数学の定式化（§08）でも目盛りの選び方が問題になり、どちらの流儀の $\varepsilon(\beta)$ も存在は未証明です（5-09）。

03

格子の β 関数と漸近スケーリング

格子を細かくしても同じ物理を保つには裸の結合 g_0 を弱めます。その速さは方式に依らない b_0, b_1 で始まります（4-06 §05） 既知 。$\mu = 1/a$ と読み $\beta = 2N/g_0^2$ に書き直すと

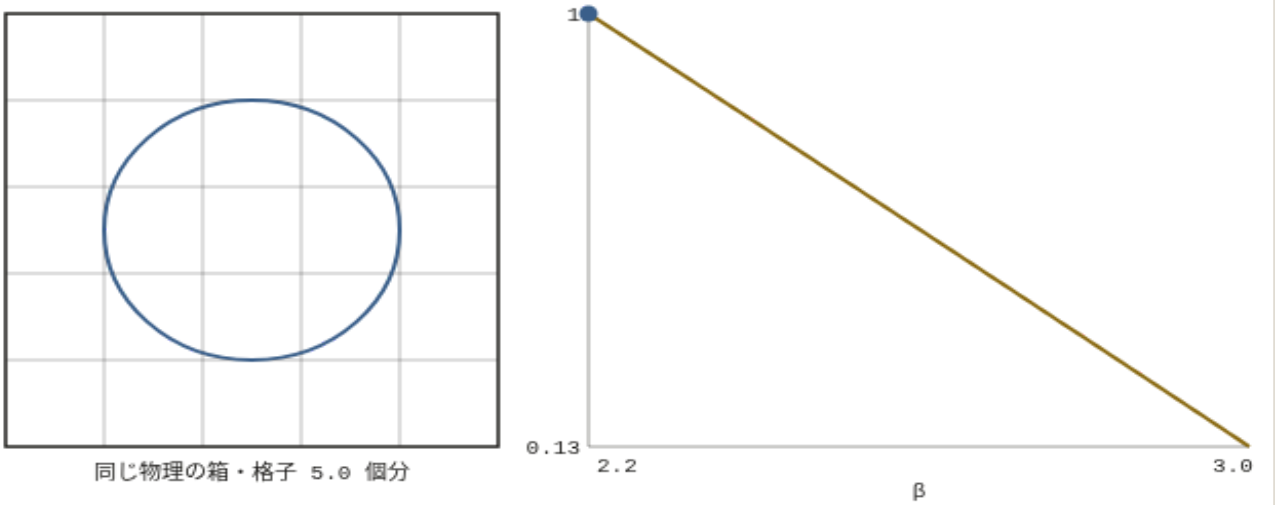
$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{d\ln(1/a)} &= 4Nb_0 + \frac{8N^2 b_1}{\beta} + O(\beta^{-2}), \\ a\Lambda_{\mathrm{L}} &= (b_0 g_0^2)^{-b_1/(2b_0^2)} e^{-1/(2b_0 g_0^2)} \bigl(1 + O(g_0^2)\bigr) \end{aligned} \tag{3}$$

で、下の式は上を積分した 4-06 の式 (8) です。積分定数 Λ_{L}（4-07）は出ませんが、比 $a(\beta)/a(\beta')$ は出ます。一ループでは $a \propto e^{-\beta/(4Nb_0)}$ で、a を半分にする上げ幅は $\Delta\beta = 4Nb_0 \ln 2$：SU(2) で $4Nb_0 = 11/(3\pi^2)$ から 0.2575、SU(3) で 0.5794 です 計算 。

表 1　式 (3)（二ループ）の $a(\beta)$ 計算

群	β	a/a_{ref}	同じ箱の格子点 ×	半分にする $\Delta\beta$
SU(2)	2.2	1	1	0.2760
SU(2)	2.6	0.3656	56.0	0.2732
SU(2)	3.0	0.1323	3263.5	0.2711
SU(3)	5.7	1	1	0.6155
SU(3)	6.3	0.5088	14.9	0.6121
SU(3)	6.9	0.2579	225.9	0.6092

図 1　β を上げると、同じ物理の箱（左）の格子が式 (3) に従って細かくなり、相関長（円）にまたがる格子が増えます。右は a/a_{ref} の対数。



SU(2) β = 2.20 a/a(2.2) = 1.0000 格子単位の ξ ×1.00 格子点の数 ×1.0 a を半分にする Δβ = 0.2760

計算 この図の数値はこの端末で計算した（式 (3) をその場で計算。表 1 と 4 桁で一致。JavaScript が無効なら表 1）。

格子の数値が (3) に従うことを**漸近スケーリング**と呼びます。Creutz（1980）は SU(2) で “a logarithmic decrease of the bare coupling constant in a manner consistent with the perturbative renormalization-group prediction” を見ました 既知 。純 SU(3) のデータの上げ幅は $\beta = 5.70$ で 0.354、6.20 で 0.524 で、二ループの 0.61 に届きません（4-06 の表 4）物理 。Lepage–Mackenzie（1993）の要旨は、物理量で定義した結合で展開すると摂動論と数値がよく合うと述べます。裸の結合の代わりにその結合を使えば、$\beta = 5.7$ 程度から既にスケーリングは摂動論に従う、とも要旨は述べます。裸の結合で見たずれは、結合の選び方に由来する部分が大きいということです。

寄り道：連続極限の値段

飛ばしてよい小節です。

箱を止めて a を半分にすると、四次元では格子点が 16 倍です。SU(2) で β を 2.2 から 3.0 に上げると約 3,300 倍（表 1）。比喩なら「解像度を倍にするたびに画素が 16 倍、しかも一筆が遅くなる絵」です。正確には、費用は格子点の数と自己相関時間の積で、後者も ξ_{lat} の冪で増えると見込まれます（5-07）物理 。

04

スケーリング — 無次元の比が止まる

連続極限に要るのは、物理の量どうしの**比**が β に依らなくなることです。

$$R(\beta) = \widehat{Q}_1(\beta)/\widehat{Q}_2(\beta) = R_0\big(1 + s\,a^2 Q_2^2 + \cdots\big) \tag{4}$$

が誤差の内で一定になることを**スケーリング**、その β の範囲をスケーリングの窓と呼びます。例：Necco–Sommer（2002）は力で定めた二つの長さの比 r_c/r_0 で “No dependence on the resolution is seen within the errors of below 1%” と書き、外挿で 0.5133(24) を得ています 既知 。$m/\sqrt{\sigma}$ は 5-08 で見ます。

スケーリングは比が止まることで、連続極限に必要です。**漸近スケーリング**は $a(\beta)$ 自体が (3) に従うことで、格子を摂動論の Λ に結ぶ追加の主張です 物理 。二つの量が (3) から同じだけずれていれば、ずれは比の中で消えます。格子で求めた $m/\sqrt{\sigma}$ のような結果はスケーリングに依ります（18-04 §05）。

05

格子の誤差の形 — 自由場で見る a²

(4) の補正が a^2 から始まる理由を、厳密に解ける自由場で見ます。左右対称な差分 $f(x+a)-2f(x)+f(x-a)$ では a の奇数乗が打ち消し合います。質量 m の自由なスカラー場では、転送行列（5-03）から格子で見える質量 E が決まります 既知 。具体的には、格子の伝播関数 $1/(\hat{p}^2+m^2)$（$\hat{p}^2$ は下の式 (6)）の極を、空間運動量 0・虚の運動量 $p=iE$ で探すと $\frac{4}{a^2}\sinh^2\frac{aE}{2}=m^2$ になり、これを書き直したのが次の上の式です。

$$\begin{aligned} \cosh(aE) &= 1+\tfrac{1}{2}(am)^2, \\ \frac{E}{m} &= 1-\frac{(am)^2}{24}+\frac{3(am)^4}{640}-\cdots \end{aligned} \tag{5}$$

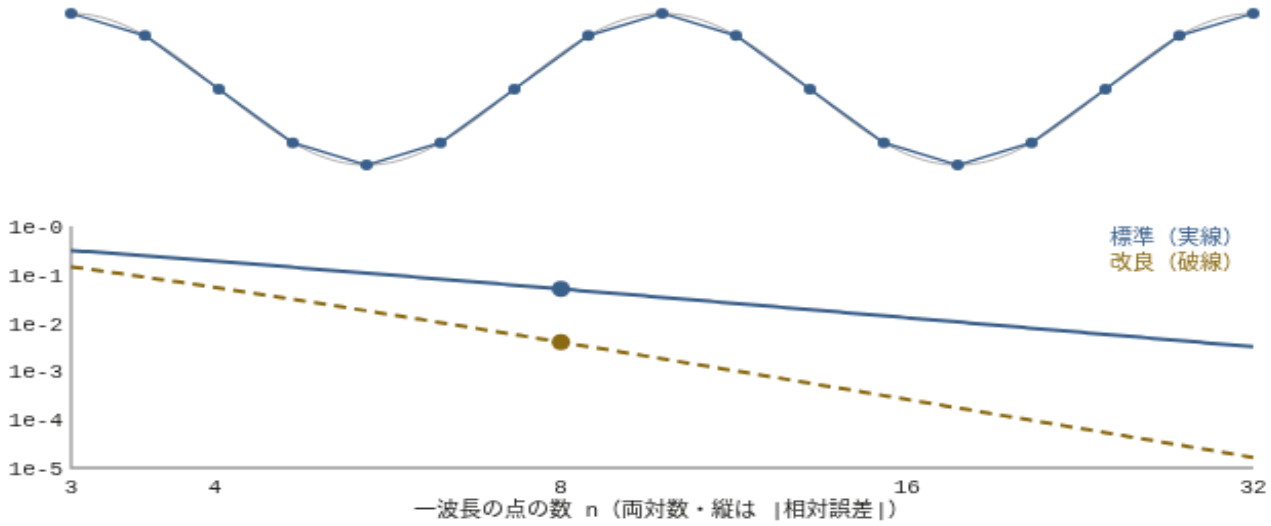
表 2　自由場の格子の質量 (5) と二点外挿 (8) 計算

am	$(E/m-1)/(am)^2$	**外挿の誤差**
1.0	-0.03758	-9.9×10⁻⁴
0.4	-0.04093	-2.9×10⁻⁵
0.2	-0.04148	-1.9×10⁻⁶
0.1	-0.04162	-1.2×10⁻⁷

二列目は $-1/24=-0.04167$ に近づきます。空間方向でも同じで、波数 p の波に格子のラプラシアンを掛けると p^2 の代わりに $\hat{p}^2$ が出ます。二つ先の点まで使う差分を重み $\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}$ で組むと a^2 の項が消えます。これが改良の最も簡単な例です。

$$\begin{aligned} \hat{p}^2 &= \tfrac{4}{a^2}\sin^2\tfrac{pa}{2} = p^2\big(1-\tfrac{(pa)^2}{12}+\cdots\big), \\ \hat{p}^2_{\mathrm{imp}} &= \tfrac{4}{3}\hat{p}^2-\tfrac{1}{3a^2}\sin^2(pa) = p^2\big(1-\tfrac{(pa)^4}{90}+\cdots\big) \end{aligned} \tag{6}$$

図 2　一波長の格子点の数 n を変えると、上の標本点と、下（両対数）の標準（実線）・改良（破線）の差分の誤差の位置が動きます。



n = 8 pa = 0.785 標準 -5.036 % 改良 -0.4002 %

計算 この図の数値はこの端末で計算した（(6) をその場で計算）。JavaScript が無効なら：$\hat{p}^2/p^2 - 1$ は $n = 4, 8, 16, 32$ で標準 −0.189・−0.0504・−0.0128・−0.00321、改良 −0.0543・−0.00400・−0.000261・−0.0000165。n を倍にすると標準は約 1/4、改良は約 1/16 になります。

06

Symanzik の有効理論と改良作用

Symanzik（1983）は小さい a の格子の理論を「連続の理論に a の冪つきの項を足したもの」と読み、要旨で “Corrections to continuum theory results stemming from finite lattice spacing can be diminished systematically by use of lattice actions that also include suitable irrelevant terms” と述べます 既知 。純粋なゲージ理論では次の形と考えられています 物理 。

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + a^2 \sum_{i=1}^{3} c_i(g_0)\,\mathcal{O}_i + O(a^4) \tag{7}$$

第一項は 5-01 と同じ規格（共変微分に g_0 を入れる）です。$\mathcal{O}_i$ は質量次元 6 のゲージ不変な項です（$\mathrm{tr}F^2$ の次元は 4 なので a^2 が掛かる。4-04）。Lüscher–Weisz（1985）の要旨によれば、スペクトルの量（安定な粒子の質量や静的ポテンシャルなど）だけを改良するなら三つの係数の一つは自由に選べます 既知 。**なぜ a^1 が無いか**：次元 5 の項は場の強さ二つと微分一つで添字が 5 個です。格子は各軸の反転で不変なので、各方向の添字は偶数回ずつ現れねばならず、奇数個の添字は置けません 物理 。これは作用とスペクトルの量（質量）についての議論です。静的電荷の間の力のように演算子を含む量では、補正が a^2 から始まることを別に示す必要があり、Necco–Sommer（2002）§4 がその議論を与えています。

長方形を足す

プラケットに 1×2 の長方形を重み c_0, c_1（$c_0+8c_1=1$）で足します。長方形は面ごとに二つの向きがあり、面積が 2 倍で主項に 4 倍効くので 8 です。最低次（古典）の係数は Lüscher–Weisz（1985）が与えたとされ、長方形だけを足す作用では $c_1=-\frac{1}{12}$（$c_0=\frac{5}{3}$）になります 既知 。この数値は表 3 で再現します。二次元トーラスの滑らかな U(1) 場（六つの波数の和。磁束は原始関数で誤差なく計算）で確かめます。

表 3　二次元の滑らかな U(1) 場（古典）での作用の相対誤差 計算

$L=1/a$	**Wilson**	$/a^2$	**改良** $c_1=-\frac{1}{12}$	$/a^4$
4	-0.2718	-4.35	-0.1229	-31.5
16	-0.02121	-5.43	-1.06×10⁻³	-69.2
32	-0.005370	-5.50	-6.94×10⁻⁵	-72.8
64	-0.001347	-5.52	-4.39×10⁻⁶	-73.7

a を半分にしたときの誤差の比は Wilson で 3.95→3.99（→4）、改良で 15.2→15.8（→16）。Wilson の係数は予想値 $-\frac{1}{12}\int|\nabla F|^2/\int F^2=-5.522$ に近づきます。$L=16$ で $c_1=0,\,-\frac{1}{24},\,-\frac{1}{12},\,-\frac{1}{8}$ とすると a^2 で割った誤差は $-5.43,\,-2.85,\,-0.27,\,+2.31$ と直線的に動きます 計算 。四次元の非可換な場は 5-01 の表 3。

量子論での係数と対数補正

量子論では c_i が g_0 に依ります（一ループは Lüscher–Weisz 1985）。漸近自由のため誤差の主項は $a^2[\bar g^2(a^{-1})]^{\hat\gamma_1}$ の形の対数補正を伴い、Husung–Marquard–Sommer（2020）はヤン–ミルズで “the log-corrections are a rather weak modification” と結論しています 物理 。ここで $\bar g^2(a^{-1})$ は尺度 $1/a$ での走る結合（4-06）で、$1/\ln(1/(a\Lambda))$ のように 0 に近づきます。$\hat\gamma_1$ は補正項ごとに決まる指数（異常次元に当たる数）です。したがって誤差は a^2 に $\ln(1/a)$ の冪が掛かった形になります。

寄り道：改良の代償

飛ばしてよい小節です。

Wilson 作用は反射正値性を持ち、正の転送行列＝格子のハミルトニアンを与えます（5-03）。Lüscher–Weisz（1984）の要旨は、次元 6 の演算子を足すと “physical positivity is lost in general” で、転送行列は定義できるが複素固有値が現れうること、二点関数のスペクトル分解に負の重みの寄与が必ずあることを示しました 既知 。精度を取るか、格子のハミルトニアン（4-10）を取るか、の選択です（18-04）。

07

連続外挿 — a² に対して直線を引く

計算機で $a=0$ には行けないので、いくつかの β で比 R を測り、横軸 a^2 で直線を引いて切片を取ります。

$$R(a) = R_0 + c\,a^2 + O(a^4) \quad\Longrightarrow\quad R_0 \approx \tfrac{1}{3}\big(4R(a/2) - R(a)\big) \tag{8}$$

表 2 の三列目がこの二点外挿の誤差で、誤差は a^4 に下がります。傾き c は作用ごとに違っても、切片 R_0 は共通のはずです（普遍性。§08）。表 3 の Wilson でも $L=16,32$ から作ると相対誤差は 0.54 % から 0.009 % になります 計算 。実際の数値では、Necco–Sommer（2002）が力を $(1+s(a/r_c)^2)$ の形で当てはめ、傾き s は有意でないと報告しています 既知 。

落とし穴は、粗すぎる点（表 3 の $L=4$ は $/a^2$ が 2 割ずれる）・§06 の対数補正・小さすぎる箱です。どれも $R(a)$ が (8) の形だという前提の上の手続きで、前提は定理ではありません 物理 。

08

数学から見た連続極限 — 示されたことと、示されていないこと

Chatterjee（2018）§3 は “the general belief in the physics community is that β should scale like log(1/ε) in dimension four, although there are doubts about this belief and the question remains an open mathematical problem” と書きます（2018 年の記述） 既知 。式 (3) の上の式を積分すると $\beta \approx 4Nb_0\log(1/a)$ になり、これがこの $\log(1/\varepsilon)$ です。同 §5 の連続の弦張力の問題（Chatterjee の Problem 5.2）は、無限体積の理論で $\beta\to\infty$ のとき、列 $\varepsilon(\beta)\to 0$、$c(\beta)\to\infty$ と 0 でない d が在って、縦 R・横 T の長方形の輪について

$$\log\big\langle W_{\gamma_{R/\varepsilon,\,T/\varepsilon}}\big\rangle = -c\,(R+T) - d\,RT + o(1) \tag{9}$$

となることを問います。d が連続の弦張力で、周の項については “it is not clear to me whether the renormalization term c(R+T) is indeed necessary” とあります 既知 。

二次元では Wilson・Villain・Manton の格子作用が同じヤン–ミルズ測度に行くこと（Chevyrev–Shen、トーラスの自明な束。7-02）が示されています 既知 。四次元の U(1) は様子が違い（弱結合側に質量の無い光子の相があり、臨界点が有限の β にある。5-06）、非可換な場合の繰り込みの段は 7-07 で扱います。四次元の非可換な場合、2026-11 に公開された構成が、間隔の列を選んだ Wilson の作用の族について、繰り込んだ局所の観測量の相関が収束することを示しました（Lean で証明されている、と委員会が評価した。体積の極限は部分

列。8-02・8-05)。その族の裸の結合は、β と log(1/a) の比が一定の値に近づくように選ばれています（10-06)。作用や間隔の列に依らないこと、(4) の比の極限、連続の弦張力の問題は定理ではありません（6-04)。この章の表と図は極限を仮定したときの手続きで、存在の証拠ではありません。第二巻は、この構成を対象（8-01〜8-05)、繰り込みの一段（9-01〜9-07)、結合の合わせ（10-01〜）の順に読みます。

この章が言えている範囲

事項	言えている	言えていない
連続極限＝臨界点 (1)	物理の用法の紹介 既知	四次元の非可換な格子で ξ_{lat} が存在し発散すること
二ループの $a(\beta)$ (3)・表 1・図 1	普遍な b_0, b_1 からの計算 計算	実際の $a(\beta)$ が (3) に従うこと（数値ではずれが残る 物理 ）
スケーリング (4)	数値での支持の紹介 物理	比が極限を持つこと（定理なし）
誤差が a^2 で始まる・改良 $c_1 = -\frac{1}{12}$	自由場と二次元 U(1)（古典） 計算 。有効理論の説明 物理	四次元の量子論での証明・係数・対数補正
連続外挿 (8)	自由場・古典場で 計算	実際の数値での妥当性
連続極限の存在・質量ギャップ	—	この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§01・§08 の引用	一次資料（本文を確認）	S. Chatterjee, “Yang–Mills for probabilists”, arXiv:1803.01950 (2018) §3・§5
§02・§03 の弦張力による目盛り	一次資料（要旨を確認）	M. Creutz, “Monte Carlo Study of Quantized SU(2) Gauge Theory”, Phys. Rev. D 21 (1980) 2308
§02 の r_0・t_0	一次資料（要旨を確認）	R. Sommer, Nucl. Phys. B 411 (1994) 839, arXiv:hep-lat/9310022／M. Lüscher, JHEP 1008 (2010) 071, arXiv:1006.4518
§02 の r_0/a（表 1 の $\beta \le 6.4$ は先行の計算の再掲）と $r_0 \approx 0.5$ fm・§04 の r_c/r_0・§06 の力の a^2・§07 の当てはめ	一次資料（本文を確認。§4 は書誌のみ）	S. Necco, R. Sommer, Nucl. Phys. B 622 (2002) 328, arXiv:hep-lat/0108008
§03 の Lepage–Mackenzie	一次資料（要旨を確認）	G. P. Lepage, P. B. Mackenzie, Phys. Rev. D 48 (1993) 2250, arXiv:hep-lat/9209022

もの	種別	出典・道具
§06 の Symanzik	一次資料（要旨を確認）	K. Symanzik, Nucl. Phys. B 226 (1983) 187・205
§06 の係数・寄り道の転送行列	一次資料（要旨を確認。$-\frac{1}{12}$ の数値は本文未確認で、要旨は係数を最低次で定めたことまで）	M. Lüscher, P. Weisz, Commun. Math. Phys. 97 (1985) 59；Erratum 98 (1985) 433／Phys. Lett. B 158 (1985) 250／Nucl. Phys. B 240 (1984) 349
§06 の対数補正	一次資料（要旨を確認）	N. Husung, P. Marquard, R. Sommer, Eur. Phys. J. C 80 (2020) 200, arXiv:1912.08498
§08 の二次元の普遍性	一次資料（要旨を確認）	I. Chevyrev, H. Shen, arXiv:2302.12160；Comm. Pure Appl. Math. (2026)（巻・頁は未確認）
表 1〜3・図 1・図 2・本文の数値	この端末で計算	Python 3.12・NumPy：`a_of_beta.py`（§02 の a の fm 換算を含む）・`freefield.py`・`improve2d.py`。図の式は `jscheck.js` で照合。b_0, b_1 と SU(3) の上げ幅は 4-06

次に読む章：5-06 U(1) と非可換の違い。

U(1) と非可換の違い — 同じ格子でも、可換な群は途中で相が変わる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 四次元の格子で群を $U(1)$ にすると、大きい β で質量ゼロの光子の相に入り、途中に相転移があることが（少なくとも Villain 型の作用で）定理になっていること（Guth・Fröhlich–Spencer）。$SU(2)$ では跳びが数値に見えず、有限の β で相関長が発散しない（$\beta_c = \infty$）と信じられていること。「非可換だから」の正確な形。

前提となる章 — 5-02 強結合展開。2-08 の相転移と 4-06 の一ループ係数も借ります。

先に言うこと — 定理は $U(1)$・有限群・三次元についてのものです。四次元の $SU(N)$ では、$\beta_c = \infty$ も隙間も証明されていません。数値は 6^4 の小さな格子での観察です。

この章の順序

1. 同じ格子に二つの群 — 角度の和と行列の積
2. 強結合の側では区別がつかない — どちらも面積則
3. 弱結合の U(1) は光子の気体 — Coulomb の力（図 1）
4. 二つの岸の間で線が折れる — Guth・Fröhlich–Spencer（図 2）
5. 寄り道：単極子の輪 — 四次元と三次元
6. SU(2) には跳びが見えない — 交差だけがある
7. 違いの源は結合が走ること — C_A と $\beta_c = \infty$
8. 「非可換だから」の正確な形 — 反例の表
9. 数学として残っていること

01

同じ格子に二つの群 — 角度の和と行列の積

Wilson の格子（5-01）はどのコンパクト群でも同じ形です。辺に群の元を置き、プラケットの四辺の積に重みを付けます。$U(1)$（2-03 §08）では辺に角度 θ_ℓ が載り、積は角度の和 θ_P になります。$SU(2)$ では 2×2 の行列 U_ℓ が載り、積は行列の積 U_P です。

$$S_{U(1)}=\beta\sum_P(1-\cos\theta_P),\quad \theta_P=\theta_{x,\mu}+\theta_{x+\hat\mu,\nu}-\theta_{x+\hat\nu,\mu}-\theta_{x,\nu},\quad \beta=\tfrac{1}{g^2};\qquad S_{SU(2)}=\beta\sum_P\Big(1-\tfrac{1}{2}\operatorname{tr}U_P\Big)\tag{1}$$

β の規約は古典的な連続極限で Maxwell・Yang–Mills の作用に戻るように決めたものです 既知 。$U(1)$ の $\beta=1/g^2$ は、$SU(N)$ の $\beta=2N/g^2$ に $N=1$ を入れた $2/g^2$ ではありません。生成元の規格化が違うためです（$U(1)$ は辺に e^{-iagA_μ}（符号は 5-01 の (2) と同じ）、$SU(N)$ は $\operatorname{tr}T^aT^b=\delta^{ab}/2$）。$U(1)$ では $\theta_P\approx -a^2gF_{\mu\nu}$ と $1-\cos\theta_P\approx\theta_P^2/2$ から作用はおよそ $\frac{\beta g^2}{4}\sum_x a^4\sum_{\mu,\nu}F_{\mu\nu}^2$ となり、Maxwell の $\frac14\int F^2$ に一致させると $\beta=1/g^2$ です。違いは式の形に出ています。θ_P は辺の角度の**一次式**（格子の回転）で、$U(1)$ の作用の非線形性は cos の周期性、つまり群がコンパクトなことだけです。$SU(2)$ で $U_\ell=e^{i\vartheta_\ell\cdot\sigma}$ と書くと、U_P の指数には交換子 $[\vartheta,\vartheta]$ の項が入ります（1-03）。これが格子の上の自己相互作用です（3-02）。例：四辺の角度が $0.1,0.2,0.3,0.4$ なら $\theta_P=-0.4$ で、足す順は効きません。$SU(2)$ で $A=e^{0.3i\sigma_1}$、$B=e^{0.3i\sigma_3}$ とすると、$\frac12\mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1})=0.9847$、順を替えた $\frac12\mathrm{tr}(ABB^{-1}A^{-1})=1$ です 計算 。$U(1)$ なら角度の和はどちらも 0 です。ただし巡回的な並べ替え（$BA^{-1}B^{-1}A$ など）では $\operatorname{tr}XY=\operatorname{tr}YX$ により値は変わりません。

02

強結合の側では区別がつかない — どちらも面積則

β が小さい側では二つの群は同じように振る舞います。5-02 の指標展開の変数 u は

$$u_{U(1)}=\frac{I_1(\beta)}{I_0(\beta)},\qquad u_{SU(2)}=\frac{I_2(\beta)}{I_1(\beta)},\qquad \langle W_{R\times T}\rangle\approx u^{RT},\quad \sigma\approx-\log u\tag{2}$$

で（I_n は変形 Bessel 関数）、$u<1$ なのでどちらも面積則です。例：$U(1)$ の $\beta=0.5$ で $u=0.2425$・$\sigma\approx1.417$、$\beta=1$ で $u=0.4464$・$\sigma\approx0.807$ 計算 。小さい β の面積則と指数減衰は、任意のコンパクト群で定理です（Osterwalder–Seiler 1978）既知 。格子が粗いことの性質で、非可換性を使いません（5-02 §08）。

違いは数値の係数にだけ出ます。$\beta\to0$ では $u_{U(1)}\approx\beta/2$、$u_{SU(2)}\approx\beta/4$ なので、$\sigma\approx-\log u$ はどちらも $\log(1/\beta)$ の形で大きくなり、差は定数 $\log 2$ です。$\beta=1$ では $u_{SU(2)}=0.2402$・$\sigma\approx1.426$ で、同じ β の $U(1)$（$\sigma\approx0.807$）より大きく出ます 計算 。(1) の規約が群ごとに違

うので、同じ β どうしの大小に意味はあまりありません。効いているのは、どちらも同じ形の面積則になることです。

03

弱結合の U(1) は光子の気体 — Coulomb の力と周長則

β が大きいと重みは $\theta_P \approx 0$ を求め、$1-\cos\theta_P \approx \theta_P^2/2$ とすると作用は二次式です。θ_P が一次式なので、これは相互作用の無い格子の Maxwell 場（光子）です。

$$S_{U(1)} \approx \frac{\beta}{2}\sum_P \theta_P^2, \qquad \langle \theta_\mu(k)\theta_\nu(-k)\rangle = \frac{\delta_{\mu\nu}}{\beta\,\hat{k}^2}, \qquad \hat{k}^2 = \sum_\mu 4\sin^2\frac{k_\mu}{2} \tag{3}$$

(3) の右の式は、ゲージを一つ固定したときの形です（Feynman ゲージ、4-08）既知 。ゲージ不変な量（Wilson ループ）はこの選び方に依りません。

$\hat{k}\to 0$ で $1/\hat{k}^2$ が発散するのが「質量ゼロ」で、場の強さの相関は冪 $|x|^{-4}$ で減ります 既知 。

一点あたり物理の自由度は 3 つ（辺 4 本からゲージの 1 つを引く）、プラケットは 6 枚です。ガウス積分 $\int x^2 e^{-x^2/2}dx \big/ \int e^{-x^2/2}dx = 1$ から、二次の作用 $\frac{\lambda}{2}x^2$ を持つ一つのモードの作用の平均は $1/2$ です（等分配）。したがって $6\cdot\frac{\beta}{2}\langle\theta_P^2\rangle = \frac{3}{2}$、すなわち

$$\langle\cos\theta_P\rangle \approx 1-\frac{1}{4\beta}\ \ (U(1)), \qquad \left\langle \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,U_P\right\rangle \approx 1-\frac{3}{4\beta}\ \ (SU(2)) \tag{4}$$

です（$SU(2)$ は生成元が 3 つ）。例：$U(1)$・$\beta=2$ で 0.875、モンテカルロは 0.865（表 2）計算 。

静的な電荷の間の力

$R\times T$ の Wilson ループは、静的な電荷の対を時間 T 置いた振幅です。ガウスの場では閉じた形で書け、$T\to\infty$ で

$$V(R) = -\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log\langle W_{R\times T}\rangle = \frac{G_3(0)-G_3(R)}{\beta}, \qquad G_3(r) = \int_{[-\pi,\pi]^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{e^{ik\cdot r}}{\sum_i 4\sin^2(k_i/2)} \tag{5}$$

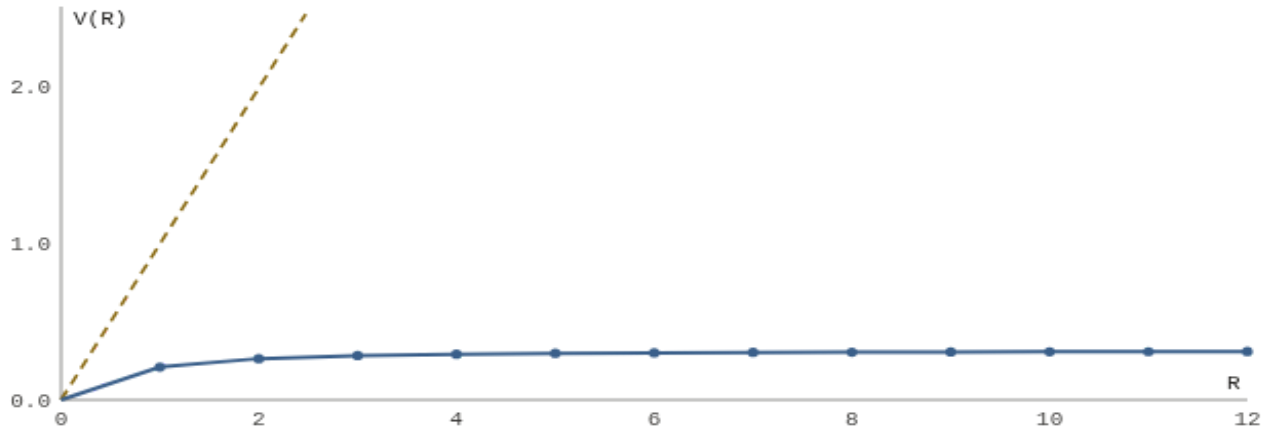
が残ります 既知 。G_3 は三次元の格子の Green 関数で、遠方で $1/(4\pi R)$。したがって V は Coulomb の形で、有限の値 $G_3(0)/\beta$ に止まります。閉じ込めません。$G_3(r,0,0) = \int_0^\infty e^{-6t}I_r(2t)I_0(2t)^2dt$ で計算して $G_3(0)=0.252731$ です 計算 。$R=1$ の $1/6$ は $6G_3(0)-6G_3(1)=1$ による検算です。

計算 表 1　弱結合の $U(1)$ の $\beta V(R)$（式 (5)）と Coulomb の近似

R	$\beta V(R)$	$G_3(0)-\frac{1}{4\pi R}$

R	$\beta V(R)$	$G_3(0) - \frac{1}{4\pi R}$
1	0.16667	0.17315
4	0.23244	0.23284
16	0.24775	0.24776
∞	0.25273	0.25273

図 1　$U(1)$ の静的ポテンシャル。つまみ β で、強結合の σR（破線）と弱結合の Coulomb の形（実線）が変わる



β = 0.80：強結合 σ = 0.991（直線）、弱結合 V(∞) = 0.316（有界）。強結合の近似が使える側

計算 この図の数値はこの端末で計算した（実線は表 1 の計算、破線は I_1/I_0 の級数をその場で計算）。$\beta \approx 1$ の近くではどちらの近似も使えません（§04）。

有限の正方形 $R \times R$ でも、64^4 の周期格子で Fourier 和から $-\beta \log\langle W\rangle$ を求めました。$R = 1, 4, 8, 16$ で $0.250,\ 1.631,\ 3.584,\ 7.557$：面積 R^2 で割ると $0.250 \to 0.030$ と 0 に向かい、周長 $4R$ で割ると $0.063,\ 0.102,\ 0.112,\ 0.118$ とほぼ一定に落ち着きます（周長則）。周長あたりの値は $R \to \infty$ で $G_3(0)/2 \approx 0.126$ に近づきます（長い長方形の極限と同じ）。その近づき方は $1/R$ と角の対数の補正です計算 。

04

二つの岸の間で線が折れる — Guth と Fröhlich–Spencer

近似をやめても同じ絵が残ることは、$U(1)$ では定理になっています。ただし定理は Villain 型の作用についてのものです（Guth の要旨）。Villain 型は $e^{\beta\cos\theta}$ の代わりに周期的なガウス $\sum_n e^{-\frac{\beta}{2}(\theta+2\pi n)^2}$ を重みにした作用です。Fröhlich–Spencer の要旨には作用の型が書かれていません（本文は未入手）。(2)(4)・表 2・図 2・下の β_T は Wilson 作用 (1) の数値です。

定理の論理は短く、弦張力が小さい β で正、大きい β で 0 なら、$\sigma(\beta)$ は解析関数ではありえません。解析関数は区間で 0 なら至る所 0 だからです。熱力学の量が解析的でない点が相転移

です（2-08 §04）。

$$\sigma(\beta) > 0 \ (\beta < \beta_1), \quad \sigma(\beta) = 0 \ (\beta > \beta_2) \implies \sigma \text{ は } [\beta_1, \beta_2] \text{ のどこかで解析的でない} \quad (6)$$

後半を示したのが Guth（1980）で、Villain 型の作用で、$g^2 < 0.168$ のとき Wilson ループの下界が “has the form of a Coulomb interaction and guarantees that electric charges are not confined”（Coulomb 相互作用の形で、電荷が閉じ込められないことを保証する）と示し、Osterwalder–Seiler の強結合の結果と合わせて “this model has at least one phase transition”（この模型には少なくとも一つの相転移がある）と結論します（要旨） 既知 。

Fröhlich–Spencer（1982）の要旨は “We give a new, elementary proof for the existence of a deconfining transition to a massless (QED) phase in the four-dimensional U(1) lattice gauge theory”（四次元の U(1) 格子ゲージ理論で、質量ゼロ（QED）の相への非閉じ込め転移が在ることの、新しい初等的な証明を与える）です 既知 。Chatterjee（2018）§4 は “A fully rigorous proof of Guth's theorem”（Guth の定理の完全に厳密な証明）と紹介します。

連続極限への収束 — Driver

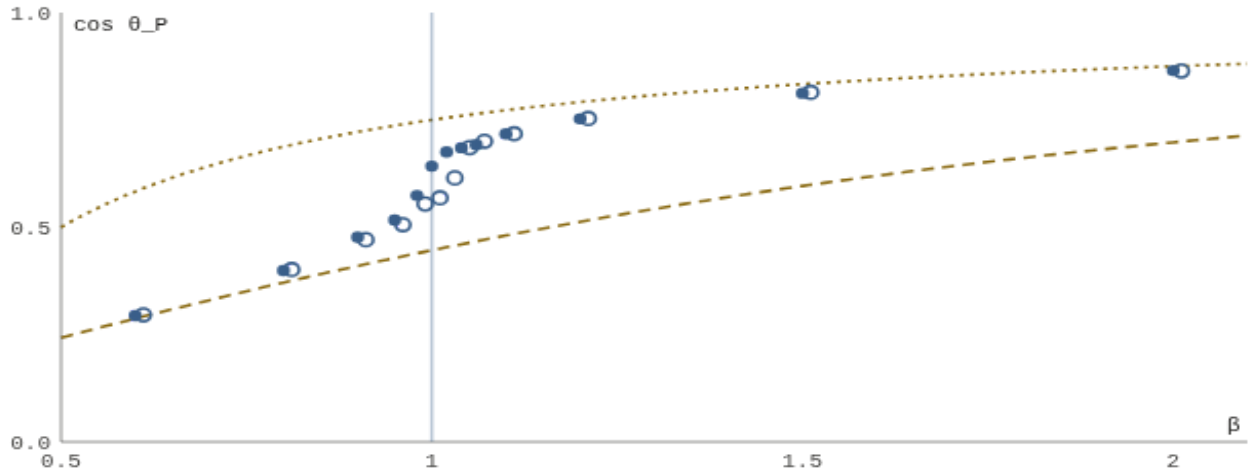
Driver（1987）の要旨は連続極限を扱います。“compact U(1) lattice gauge theory with general energy function converges to a renormalized free electromagnetic field on the current sector as the lattice spacing approaches zero”（一般の作用のコンパクトな U(1) 格子ゲージ理論は、格子間隔を 0 にすると、電流の部分で繰り込まれた自由な電磁場に収束する）に、条件 “provided the coupling constant is sufficiently large”（結合定数が十分大きければ）が付きます。Wilson 作用については “it is possible, by judicious choice of the Gibbs state, to get convergence for arbitrary coupling strengths”（Gibbs 状態をうまく選べば、任意の結合の強さで収束させられる）とあります 既知 。「電流の部分（current sector）」は、場を滑らかな電流で均した観測量の範囲のことです。要旨の “coupling constant” が β の側か g の側かは、本文を読めていないため確かめていません。

数値で見る跳び

Wilson 作用での転移点は数値で $\beta_T = 1.011128(11)$ と報告され、一次転移の証拠が挙げられています（Arnold ほか 2001、会議録。後続の会議録 hep-lat/0210010 の要旨も “strong evidence for a first-order phase transition”（一次転移の強い証拠）と書きます） 物理 。一次転移とは、プラケットの平均が β_T で跳ぶ転移で、そこでは二つの相が共存しえます。共存しうるので、片方の相から始めた列はしばらくその相に留まり、β を上げる列と下げる列で値が食い違います。これが履歴現象です。

この端末では 6^4 の格子のメトロポリス法で、β を上から下げる列（冷たい始まり）と下から上げる列（熱い始まり）を比べました（各 β で 100 掃引を捨て 100 掃引を測定）。

図 2　プラケットの平均。ボタンで群、つまみで β の点を選ぶと縦線と読み値が変わる（冷たい ●・熱い ○・強結合の主項は破線・弱結合の主項は点線）



U(1)、β = 1.00：冷たい 0.6425、熱い 0.5684（差 0.0741）、強結合 0.4464、弱結合 0.7500

計算 この図の数値はこの端末で計算した（点はモンテカルロで表 2 はその抜粋、曲線は (2)・(4) をその場で計算）。

計算 表 2　6^4 の格子のプラケットの平均（括弧は区間平均の誤差。転移の近くでは過小評価）

群	β	冷たい	熱い	強結合	弱結合
U(1)	0.98	0.5742(55)	0.5541(27)	0.4393	0.7449
U(1)	1.00	0.6425(39)	0.5684(35)	0.4464	0.7500
U(1)	1.02	0.6756(18)	0.6150(38)	0.4534	0.7549
U(1)	2.00	0.8652(4)	0.8641(5)	0.6978	0.8750
SU(2)	1.8	0.4440(10)	0.4371(18)	0.3994	0.5833
SU(2)	2.2	0.5685(20)	0.5638(18)	0.4645	0.6591
SU(2)	4.0	0.7997(8)	0.7994(6)	0.6580	0.8125

$U(1)$ では $\beta = 0.98$〜1.02 で二つの列が食い違い、$\beta = 1$ で差は 0.074 です。それぞれの列が元の相に留まっている、と読めます（上の履歴現象）。$U(1)$ の転移は Creutz–Jacobs–Rebbi（1979）の数値でも見られています 物理 。この表は小さな格子の短い列で、次数を判定する力はありません（5-07）。

05

寄り道：単極子の輪 — 四次元と三次元

飛ばしてよい節です。

θ_P は 2π の整数倍を区別しません。小さな立方体の六面の θ_P を $(-\pi, \pi]$ に戻して足すと 2π の整数倍が余ることがあり、それが格子の磁気単極子です。四次元では単極子は閉じた輪（世界線）で、長さ ℓ の輪は作用をおよそ $\beta\varepsilon\ell$ 払い、描き方がおよそ μ^{ℓ} 通りあります。

$$\sum_{\ell} \mu^{\ell} e^{-\beta\varepsilon\ell} = \sum_{\ell} e^{-(\beta\varepsilon - \log\mu)\ell} \tag{7}$$

$\beta\varepsilon < \log\mu$ なら長い輪が空間を埋めて力線を乱し、面積則を生みます。β が大きいと短い輪しか残らず、光子が生き残ります。この種の見積もりは Banks–Myerson–Kogut（1977）にあります 物理 。正確には (7) は輪の相互作用を省いた形で、定理は §04 のほうです。

三次元では単極子は点になり、点の気体は任意の結合で Debye 遮蔽（点電荷の気体が遠方の場を弱める働き）を起こします。Polyakov（1977）はこの機構で三次元のコンパクト $U(1)$ の閉じ込めを示しました（半古典の議論） 物理 。Göpfert–Mack（1982）は Villain 作用で “string tension α is nonzero for all values of the coupling constant g^2”（弦張力 α は結合 g^2 のすべての値で 0 でない）を証明しました 既知 。同じ要旨は、連続極限で物理の単位の弦張力が無限大に行くと書きます。可換でも閉じ込め、尺度が一つにならない例です（17-02 §03）。

06

SU(2) には跳びが見えない — 交差だけがある

表 2 の $SU(2)$ では、二つの列の差は最大 0.007 程度で、$U(1)$ の十分の一ほどです。$\beta = 1.8$ の差 0.0069 は表の誤差の約 3 倍ありますが、各 β で 100 掃引しか熱化していない列どうしの差で、β を変えても冷たい列と熱い列が系統的な二つの枝に分かれません（熱化の不足と跳びの見分け方は 5-07）。プラケットは $\beta \lesssim 1.8$ で強結合の主項に沿い、$\beta \gtrsim 3$ で弱結合の主項に近づき、その間を $\beta \approx 2.2$ のあたりで滑らかにつなぎます 計算 。

Creutz（1980）の要旨は、弦張力を固定して格子を細かくし、裸の結合が繰り込み群の予言どおり対数的に減ることを見て、“This supports the coexistence of confinement and asymptotic freedom”（閉じ込めと漸近自由が両立することを支持する）と書きます 物理 。

交差のあたりの比熱の山は、随伴表現の項を足した作用の族で近くにある臨界の端点の “shadow”（影）だとされます（Bhanot–Creutz 1981） 物理 。相転移の有無は作用の選び方に依りうるので、連続極限とは切り離して考えます。四次元の $SU(2)$ で有限の β に相関長が発散する点が無いことは信じられている文で、定理ではありません。Chatterjee（2018）§5 は “It is believed … $\beta_c = \infty$”（$\beta_c = \infty$ と信じられている）と書きます（5-05 §01）。

07

違いの源は結合が走ること — C_A と $\beta_c = \infty$

$U(1)$ と $SU(2)$ を分けるのは、有効な結合が距離とともに変わるかどうかです（4-06）。一ループで

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = -b_0 g^3, \qquad b_0 = \frac{11\, C_A}{48\pi^2}, \qquad \frac{1}{g^2(L)} \approx \frac{1}{g_0^2} - 2b_0 \log \frac{L}{a} \tag{8}$$

です。C_A は随伴表現の Casimir 数で $SU(N)$ では N、$U(1)$ では 0 既知 。右の式は間隔 a で g_0 の結合を長さ L で見た値です。

物質場の無いとき、b_0 は $U(1)$ で 0、$SU(2)$ で 0.04644、$SU(3)$ で 0.06966 です 計算 。

$U(1)$ では $b_0 = 0$ なので、β が大きければガウスの近似がすべての距離で自己無撞着で、§03 の Coulomb の力が遠方まで続きます。$SU(2)$ では、どれほど β が大きくても L を十分大きく取れば (8) の右辺は 0 に近づき、結合は強くなります。目安は $L \sim a\, e^{\beta/(4Nb_0)}$ で、5-05 §03 の $a(\beta)$ と同じ形です。有限の β で相関長が無限大になる点が無い、というのが「$\beta_c = \infty$」です 物理 。例：$SU(2)$ で、一ループでは β を 1 上げると相関長はおよそ $e^{1/0.3715} \approx 15$ 倍です（$4Nb_0 = 11/(3\pi^2)$） 計算 。これは一ループだけの目安で、二ループ以上の補正と、実際に使う β の範囲での漸近スケーリングの破れは 5-05 で扱います。

08

「非可換だから」の正確な形 — 四つの言い方と反例

群と次元を入れ替えた既知の例で、どの言い方が成り立たないかを並べます（16-08 §04 も参照）。

既知 表 3　言い方と、それを破る例（大きい β の側）

言い方	破る例	出典
可換なら閉じ込めない	三次元の $U(1)$ はすべての結合で面積則（Villain 作用）	Göpfert–Mack
非可換なら閉じ込める	四次元の非可換な有限群は、閉じ込めないと考えられている 物理	Chatterjee の講義資料・5-10
指数減衰は非可換だから	有限群は可換・非可換を問わず弱結合で指数減衰が定理	Adhikari–Cao
相の数は群が可換かどうかで決まる	四次元の可換な $\mathbb{Z}_N$（N が大きい）は、閉じ込め・質量ゼロ（QED 的）・遮蔽の少なくとも三相を持つ	Elitzur–Pearson–Shigemitsu、Guth（Villain 型・$N > 37$）、Fröhlich–Spencer、数値は Creutz–Jacobs–Rebbi

表 3 の「遮蔽」は Elitzur–Pearson–Shigemitsu の “screened” で、Wilson ループが周長則に従い、励起に質量がある相を指します。§05 の Debye 遮蔽（閉じ込めを生む側）とは別の意味です。同論文は、この相の並びを O(2) 模型の相の存在から、自己双対性と相関不等式で導いています（要旨）。数値では Creutz–Jacobs–Rebbi（1979）の要旨が $N \geq 5$ で二つの転移を報告しています 物理 。

効いているのは「非可換」だけではなく、群が**連続**であることです。ただし連続性が効くのは、十分大きい β の端で質量ゼロの波が残るかどうか、という点です。有限群では辺の値が飛び飛びで、十分大きい β では辺が単位元に凍りつき、光子のような質量ゼロの波が作れません 物理 。一方で $\mathbb{Z}_N$（N が大きい）には、中間の β に質量ゼロの相があります（表 3 の 4 行目）。有限群の大きい β の指数減衰は、連続の理論の隙間とは別物です（5-10）。$U(1)$ は連続なので質量ゼロの波を持ち、$C_A = 0$ なのでそれが生き残ります。

正確な形

四次元・連続な非可換コンパクト群では、(i) 有限の β に相関長が発散する点が無く（$\beta_c = \infty$）、(ii) $\beta \to \infty$ で格子単位の隙間 $1/\xi$ は 0 に行くが、次元の無い比（例えば $m/\sqrt{\sigma}$）は正の値に止まる 物理 。

(ii) は 5-09 の格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）の形です。(i)(ii) はどちらも証明されていません。非可換性の役目は「隙間を作ること」ではなく「弱結合の質量ゼロの絵を遠方で壊すこと」と言うほうが正確です。

09

数学として残っていること

定理の側は、§02 の強結合の結果、§04 の Guth・Fröhlich–Spencer（Villain 型の作用）と Driver（要旨の条件つき）、§05 の Göpfert–Mack、表 3 の 1・3 行目と 4 行目の Guth・Fröhlich–Spencer です 既知 。§05 の (7) と Polyakov、表 3 の 2 行目は物理の水準です。信念の側：四次元の $SU(N)$ で、有限の β に相関長が発散する点が無いこと（$\beta_c = \infty$、Chatterjee §5）、すべての β の面積則、連続極限で隙間が物理の単位で残ること 物理 。作用によっては、相関長の発散を伴わない bulk な（格子の尺度の）相転移がありえます。N が大きい $SU(N)$ の格子計算では、強結合の側にそのような転移があり、計算できる範囲を限ると報告されています（Lucini–Teper–Wenger 2005 の要旨）物理 。これは $\beta_c = \infty$ と食い違いません。Chatterjee（2018）の格子の面積則の問題（Chatterjee の Problem 4.1）は、四次元の非可換なコンパクト群ですべての $\beta > 0$ の面積則を問い、大きい β では “remains elusive” と書きます（5-02 §08）。

$U(1)$ の定理が教えるのは、群を区別せずに強結合の結果を弱結合へ延ばす議論は誤りだということです。$SU(N)$ で示すべきことは「相関長の発散と面積則の破れが有限の β で起きない」という否定の文を含み、それを β の全範囲で言う道具は今は強結合の側にしかありません（7-10・16-07）。

この章が言えている範囲

事項	言えている	言えていない
主項 (2)(3)(4)・見積もり (7)	標準の近似 既知 。表 2 と両端で整合 計算 。(7) は物理の見積もり 物理	中間の β での誤差。(7) の係数
静的ポテンシャル・周長則	ガウス近似の中での有界な Coulomb の力と周長則 計算	近似を外した評価
四次元 $U(1)$ の相転移（Villain 型の作用）	定理の紹介 既知 。Wilson 作用の 6^4 での履歴の観察 計算	転移の次数・位置。Wilson 作用での定理の形
$SU(2)$ の $\beta_c = \infty$	小さな格子で跳びが見えないこと 計算	有限の β で相関長が発散しないことの証明
「非可換だから」	既知の反例による言い方の整理 既知	(i)(ii) の証明。質量ギャップと連続極限について、この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§04・表 3	要旨（本文は未入手）	A. H. Guth, Phys. Rev. D 21 (1980) 2291
§04・表 3	要旨（本文は未入手。作用の型は要旨に無い）	J. Fröhlich, T. Spencer, Commun. Math. Phys. 83 (1982) 411–454
§04 の連続極限	要旨（本文未入手）	B. K. Driver, Commun. Math. Phys. 110 (1987) 479–501
§02 の強結合の定理	書誌のみ	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471
§04・§06・§09	本文 §4・§5	S. Chatterjee, arXiv:1803.01950 (2018)
§09 の bulk な転移	要旨	B. Lucini, M. Teper, U. Wenger, “Properties of the deconfining phase transition in SU(N) gauge theories”, JHEP 0502 (2005) 033, arXiv:hep-lat/0502003

もの	種別	出典・道具
§04 の β_T	要旨（会議録）	G. Arnold, T. Lippert, T. Neuhaus, K. Schilling（著者の順は arXiv による）, “Finite size scaling analysis of compact QED”, Nucl. Phys. B Proc. Suppl. 94 (2001) 651–656, arXiv:hep-lat/0011058
§04 の後続の会議録	要旨	G. Arnold, B. Bunk, T. Lippert, K. Schilling, Lattice 2002, arXiv:hep-lat/0210010
§04 の数値・表 3 の 4 行目	要旨	M. Creutz, L. Jacobs, C. Rebbi, Phys. Rev. D 20 (1979) 1915
§05	要旨	T. Banks, R. Myerson, J. B. Kogut, Nucl. Phys. B 129 (1977) 493／A. M. Polyakov, Nucl. Phys. B 120 (1977) 429
§05・表 3	要旨	M. Göpfert, G. Mack, Commun. Math. Phys. 82 (1982) 545–606（年は Crossref の発行年。INSPIRE は 1981）
§06	要旨	M. Creutz, Phys. Rev. D 21 (1980) 2308／G. Bhanot, M. Creutz, Phys. Rev. D 24 (1981) 3212
表 3	要旨	A. Adhikari, S. Cao, Ann. Probab. 53 (2025) 140, arXiv:2202.10375／S. Elitzur, R. B. Pearson, J. Shigemitsu, Phys. Rev. D 19 (1979) 3698
表 3 の 2 行目	講義スライドの本文（主語は面積則：“It is not expected to hold for 4D Abelian theories at large β, nor even for 4D non-Abelian theories with finite gauge groups”）。同じスライドは、Cao（2020）が四次元の任意の有限群で大きい β の Wilson ループの主項を求めた、と紹介する（Cao の論文は書誌のみ・未確認）	S. Chatterjee, “Yang–Mills on the lattice: New results and open problems”（講義スライド。年は未確認、PDF の作成日は 2020 年）
表 2・図 2	この端末で計算	Python 3・NumPy。mc_u1.py・mc_su2.py（メトロポリス法、引数 6 100 100、一本 1〜2 分）、approx.py
§01 の順序の例・§02 の u の比較	この端末で計算	Python 3・SciPy。order_su2.py
表 1・§03 の周長則・図 1・§07 の b_0	この端末で計算	Python 3・SciPy。coulomb.py（G_3 の積分・64^4 の Fourier 和）、g3table.py

次に読む章：5-07 モンテカルロ法（表 2 を作った方法と誤差の見方）。

モンテカルロ法 — 重みに従う配位を作り、相関を数えて誤差を出す

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること

- 格子の期待値の積分（数万次元）を、重みに従うマルコフ連鎖の標本平均で見積もる仕組み。
- 標本どうしの相関が誤差を大きくする分の数え方（自己相関時間・ビン分け・Γ 法）。
- 連続極限に近づくと相関の時間が ξ^z で伸びる臨界減速（自由場では式で $z = 2$）。

前提となる章 — 5-01 Wilson の格子、1-08 確率と測度。数学の側は 18-03 §06〜§08 を参照します。

先に言うこと — モンテカルロ法は有限の格子での期待値を誤差つきで見積もる方法で、質量ギャップや連続極限を証明するものではありません。この章の計算は 6^4 の $SU(2)$ の一点と二次元の自由場という小さな例です。

この章の順序

1. なぜ乱数で積分するか
2. マルコフ連鎖と詳細釣り合い
3. リンクを一本ずつ動かす — 歩幅（図 1・表 1）
4. 熱浴と過緩和
5. 熱化と自己相関 — 三つの更新法（表 2）
6. 誤差の見積もり — ビン・ジャックナイフ・Γ 法
7. 臨界減速 — 自由場の $z = 2$（図 2・表 3）
8. HMC と位相の凍結
9. 数学から見たモンテカルロ — 定理と観察の境目

この章の β は Wilson 作用の結合（5-01）で、逆温度ではありません。

01

なぜ乱数で積分するか — 一万五千次元の積分

格子の期待値は全リンクについての積分です（5-01 §06。dU_ℓ は Haar 測度）。

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int O(U)\, e^{-S_W(U)} \prod_\ell dU_\ell \tag{1}$$

一辺 6 の四次元格子のリンクは 5,184 本、$SU(2)$ は一本 3 次元なので 15,552 次元の積分です 計算 。そこで重み e^{-S_W}/Z に従う配位 $U^{(n)}$ を作り、標本平均を取ります。

$$\overline{O}_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} O\big(U^{(n)}\big), \qquad \text{独立なら}\ \ \mathrm{Var}\,\overline{O}_N = \frac{\mathrm{Var}\,O}{N} \tag{2}$$

誤差は次元に依らず $1/\sqrt{N}$ で減ります（1-08） 既知 。一様に引く手は使えません。$\beta = 2.3$・6^4 でプラケット 7,776 枚の平均は平衡で 0.6026、一様な配位では 0 の周りに標準偏差 0.00567 で散らばり、平衡の値は 106 標準偏差先です 計算 。

02

マルコフ連鎖と詳細釣り合い — 止まる分布を作る

配位を一歩ずつ変える確率的な規則（マルコフ連鎖、遷移確率 $P(x,y)$）を作り、長い時間の後に重み π に従わせます。一歩で分布が変わらないこと（定常）の十分条件が**詳細釣り合い**です。

$$\sum_x \pi(x)P(x,y) = \pi(y), \qquad \pi(x)P(x,y) = \pi(y)P(y,x) \tag{3}$$

右を x で足すと左です。右を満たす連鎖を**可逆**と呼びます。さらにどこからどこへも行ける（既約）なら、有限状態の連鎖の時間平均は期待値に収束します（エルゴード定理）。周期も無ければ（非周期）、分布そのものが π に近づきます（収束定理） 既知 。連続な状態空間でも、遷移に密度があって正であるなどの条件の下で、同じ形の大数の法則と中心極限定理があります（Tierney 1994） 既知 。

Metropolis 法（Metropolis ほか 1953。最初の応用は二次元の剛体球の状態方程式）は対称な提案 $q(x,y) = q(y,x)$ で候補 y を出し、次の確率で受理し、棄却なら留まります。

$$A(x \to y) = \min\bigl(1,\ \pi(y)/\pi(x)\bigr) = \min\bigl(1,\ e^{-\Delta S}\bigr) \tag{4}$$

$\pi(y) \le \pi(x)$ なら $\pi(x) q \cdot \pi(y)/\pi(x) = \pi(y) q \cdot 1$ で (3) が成り立ち、Z は要りません。例：二状態、$\pi = (0.2, 0.8)$、提案「もう一方へ」で $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$、固有値は $1, -0.25$ で、状態 0 からの分布は 5 歩で $(0.1992, 0.8008)$ です 計算 。ずれは 1 以外で絶対値が最大の固有値（ここでは -0.25）の冪で減り、これが §05 の自己相関時間の源です。

03

リンクを一本ずつ動かす — メトロポリスと歩幅

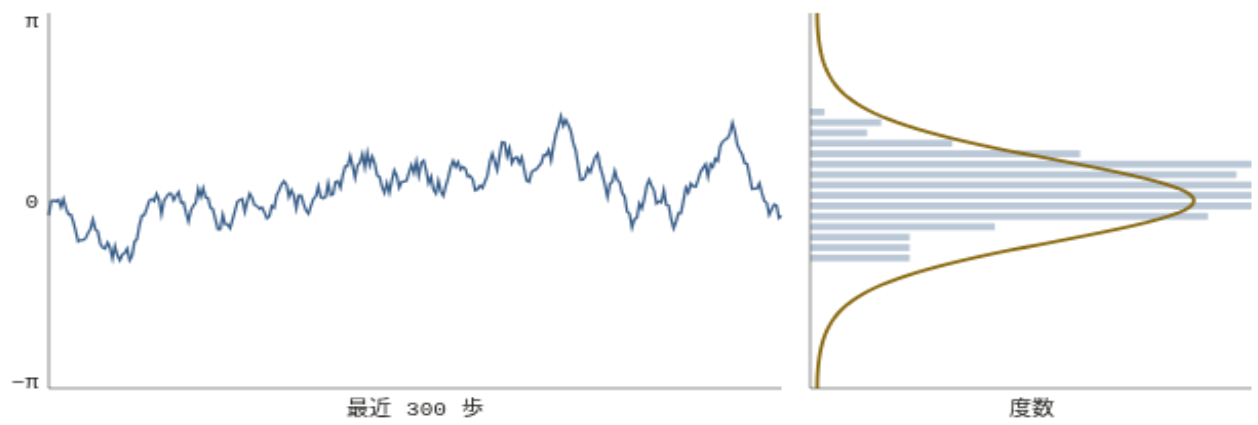
リンク U_ℓ を含むプラケットは四次元で 6 枚で、作用の U_ℓ に依る部分は次の形です。

$$S_W = -\frac{\beta}{N}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\bigl(U_\ell A_\ell\bigr) + (\,U_\ell \text{ を含まない項}\,), \qquad A_\ell = \sum_{6\text{ 枚}} \text{ステープル} \tag{5}$$

ステープルはプラケットから U_ℓ を除いた三辺の積です（5-01 §03）。全リンクを一巡する単位を**一掃**と呼びます。

メトロポリスの提案は今の値の近くです。歩幅 δ が大きいと棄却が増え、小さいと少ししか動きません。$U(1)$ のリンク一本（重み $e^{\kappa \cos\theta}$）で見ます。

図 1　$U(1)$ のリンク一本（$\kappa = 2$）。つまみで歩幅 δ、「動かす」で連鎖が進む。左は最近 300 歩の θ、右は度数と目標の密度



δ = 0.25：受理率 0.937（図の走行 0.973）、τ_int(cos θ) = 63.9 ± 5.53

計算 この図の数値はこの端末で計算した（読み値は表 1。図の連鎖はその場で走らせた例）。

計算 表 1　リンク一本のメトロポリス（各 20 万歩）。受理率は数値積分の厳密値（走行と 0.002 以内で一致）。厳密な $\langle\cos\theta\rangle = I_1(2)/I_0(2) = 0.69777$

δ	受理率	$\tau_{\mathrm{int}}(\cos\theta)$	$\langle\cos\theta\rangle$
0.1	0.975	242(37)	0.747(17)
0.25	0.937	63.9(5.5)	0.695(10)

δ	受理率	$\tau_{\mathrm{int}}(\cos\theta)$	$\langle\cos\theta\rangle$
1	0.757	5.90(18)	0.6972(31)
2.5	0.494	1.94(4)	0.6990(18)
π	0.426	2.00(4)	0.6990(18)

δ を 0.1 から 2.5 に広げると、受理率は半分に、τ_{int}（§05）は約 120 分の 1 になります。受理率の高さは効率を示しません。$\delta = 0.1$ の平均は厳密値から 2.9 標準偏差ずれ、遅い連鎖では誤差の見積もりも不確かです。

04

熱浴と過緩和 — 条件つき分布から引き直す

熱浴法はリンク一本を、残りを止めた条件つき分布 $\propto e^{\frac{\beta}{2}\mathrm{tr}(U_\ell A_\ell)}$ から直接に引き直します。$SU(2)$ の行列の和は $SU(2)$ の行列の実数倍なので（1-04 の四元数）$A_\ell = kV$（$V \in SU(2)$）と書け、$X = U_\ell V$ も Haar 測度で動き、重みは $e^{\beta k x_0}$（$x_0 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}X$）です。$SU(2)$ は三次元球面 $x_0^2 + |x|^2 = 1$ で、Haar 測度はその上の一様な測度です。x_0 を止めた切り口は半径 $\sqrt{1-x_0^2}$ の二次元球面で、面積は $1-x_0^2$ に比例します。x_0 を dx_0 だけ動かしたときの三次元球面の上の幅（弧の長さ）は $dx_0/\sqrt{1-x_0^2}$ です。積が $\sqrt{1-x_0^2}\,dx_0$ なので

$$p(x_0) \;\propto\; \sqrt{1-x_0^2}\,e^{\beta k x_0} \qquad (-1 \le x_0 \le 1) \tag{6}$$

から x_0 を引き、残りの向きを一様に選び、$U_\ell = XV^{-1}$ とします 既知 。Creutz（1980）の $SU(2)$ の計算で使われたとされる方法です。Kennedy–Pendleton（1985）は (6) を速く引く改良、Cabibbo–Marinari（1982）は $SU(N)$ を $SU(2)$ の部分群ごとに更新する方法です。

過緩和は作用を変えずに大きく動く一手で、$SU(2)$ では $U_\ell \mapsto V^{-1}U_\ell^{-1}V^{-1}$ です。$X' = X^{-1}$ で作用は変わらず、二回で元に戻り Haar 測度を保つので詳細釣り合いを満たします。単独ではエルゴード的でないので熱浴と混ぜます（Adler 1981・Creutz 1987・Brown–Woch 1987）。なお、順に並べた一掃は一般に可逆でなく（時間を逆向きに見た連鎖は、逆の順に更新したものになる）、定常性だけが残ります 既知 。

05

熱化と自己相関 — 出発点を忘れ、相関を数える

連鎖は全リンクを単位行列にした**冷たい出発点**か、一様に引いた**熱い出発点**から始め、初めの区間を捨てます（熱化）。6^4・$\beta = 2.3$ のプラケット（平衡 0.6026、表 2 の熱浴）は、熱浴なら両側から 20 掃で平衡の帯に入り、メトロポリスの熱い側は 20 掃で 0.482、150 掃で 0.593

と遅れます 計算 。二つの出発点の一致は必要条件にすぎません（5-06 §04。数学の対応物は 18-03 §06 の混合時間）。

平衡でも配位は独立でありません。時系列の t 歩離れた相関を分散で割った**自己相関関数**と、**積分自己相関時間**を

$$\rho(t)=\frac{\langle \delta O_n\,\delta O_{n+t}\rangle}{\langle \delta O^2\rangle},\qquad \tau_{\mathrm{int}}=\frac{1}{2}+\sum_{t\ge 1}\rho(t),\qquad \operatorname{Var}\overline{O}_N\approx\frac{2\tau_{\mathrm{int}}\operatorname{Var}O}{N} \tag{7}$$

とします（$\delta O=O-\langle O\rangle$、$N\gg\tau_{\mathrm{int}}$）。実効的に独立な標本は $N/(2\tau_{\mathrm{int}})$ 個です（Wolff 2004 の式 (23)(25)） 既知 。表 2 の熱浴では $9{,}500/(2\cdot 5.08)\approx 935$ 個です。最も遅い減衰の時間 $\tau_{\exp}$ は、遷移の固有値のうち 1 以外で絶対値が最大のもの $\lambda_\star$ で決まり、$\tau_{\exp}=-1/\log\lambda_\star$ です（§02 の例では $\lambda_\star=0.25$）。

数学の側では、遅さを **Poincaré 定数** C_P で測ります。C_P は、すべての関数 f について $\operatorname{Var} f\le C_P\,\mathbb{E}|\nabla f|^2$ を満たす最小の定数です（1-10 §07。離散の連鎖では右辺を一歩での変化の二乗平均の半分 $\frac12\sum_{x,y}\pi(x)P(x,y)(f(y)-f(x))^2$ に置き換えます）。**Langevin 力学**は、作用の勾配に沿って下る動きに雑音を加えた連続時間の力学で、そこでは $\tau_{\exp}=C_P$ が等号で成り立ちます。離散時間の連鎖では、次の三つが別の量になります 既知 （Levin–Peres–Wilmer §12.2、18-03 §06）。

- $C_P=1/\gamma$：$\gamma=1-\lambda_2$ は 1 と二番目に大きい固有値 λ_2 との隙間。
- 緩和時間 $t_{\mathrm{rel}}=1/\gamma_\star$：$\gamma_\star=1-\lambda_\star$ は絶対ギャップ。
- $\tau_{\exp}=-1/\log\lambda_\star$。

$\gamma_\star$ が小さいとき、後の二つの比は $1+O(\gamma_\star)$ です。表 2 の最後の列の **Polyakov ループ**は、各空間点で時間方向に一周するリンクの積のトレースを取り、空間で平均した量です（ここではその絶対値を見ます）。格子全体に広がる、遅く動く量の例です。

計算 表 2　四次元 $SU(2)$・6^4・$\beta=2.3$（最初の 500 掃を捨てる）。τ_{int} は掃。費用はリンク一本あたりのステープル計算の回数

方法	費用	プラケット	τ：プラケット	τ：|Polyakov|
メトロポリス	1	0.60291(57)	42(10)	79(24)
熱浴	1	0.60261(21)	5.1(6)	6.0(7)
熱浴＋過緩和 3	4	0.60297(19)	2.1(2)	0.87(6)

標本数は 9,500・9,500・4,500 です。同じ標本数でメトロポリスの誤差は熱浴の 2.7 倍で、$\sqrt{42/5.1}\approx 2.9$ と整合します。費用を掛けた τ で比べると、過緩和はプラケットでは 8.3 対 5.1 と損をし、Polyakov ループでは 3.5 対 6.0 と得をします。得をするのは遅い大域的な量で

す 計算 。$SU(3)$ でも、過緩和で Polyakov ループの大きさの τ が 28 掃から 9 掃に縮んだと報告されており（Brown–Woch 1987）、傾向は一致します 物理 。

06

誤差の見積もり — ビン・ジャックナイフ・Γ 法

τ_{int} はデータから見積もります。**ビン分け**は時系列を長さ B の区間に切り、区間平均を独立とみなします。$B \gg \tau_{\mathrm{int}}$ で誤差が頭打ちになる所を読みます（Flyvbjerg–Petersen 1989）。**ジャックナイフ**は区間を一つずつ除いた平均 $\bar{b}_{(i)}$ から非線形な量 f の誤差を出します。

$$\sigma_f^2 = \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bigl(f(\bar{b}_{(i)}) - \overline{f(\bar{b}_{(\cdot)})}\bigr)^2, \qquad n = N/B \tag{8}$$

Creutz 比や質量（5-02 §06・5-08）で使います。表 2 の熱浴のプラケットでは、（ビンの誤差／素朴な誤差）^{2} が $B = 1, 5, 20, 100$ で 1.00・2.85・6.23・10.19 と伸び、Γ 法の $2\tau_{\mathrm{int}} = 10.2$ に届きます。$B = 200$〜1000（47〜9 区間）では 7.4〜7.7 と下に揺れます。区間が少ないと誤差の誤差が効きます（比の二乗では相対誤差 約 $\sqrt{2/(n-1)}$） 計算 。

Γ 法は (7) の和を窓 W で切って直接に見積もります。

$$\tau_{\mathrm{int}}(W) = \frac{1}{2} + \sum_{t=1}^{W}\rho(t), \qquad \langle(\delta\tau_{\mathrm{int}})^2\rangle \approx \frac{4}{N}\Bigl(W + \frac{1}{2} - \tau_{\mathrm{int}}\Bigr)\tau_{\mathrm{int}}^2 \tag{9}$$

右は Wolff（2004）の式 (42) です。Madras–Sokal（1988）が与えた窓の和の誤差の近似式（Wolff の式 (40)）から、誤差伝播で導かれています 既知 。W が短いと偏り、長いと雑音が効きます。この章の τ_{int} は Wolff（2004）の自動の窓（$S = 1.5$）によります。Wolff は $\tau_{\mathrm{int}}(W)$ が平らなことを “verify by eye” するよう求めます。図 2（§07）の下段で、縦線の窓 W のまわりが平らなことを目で確かめられます。

07

臨界減速 — 自由場で $z = 2$ を式で見る

連続極限に近づくと相関長 ξ（格子単位）が伸び（5-05 §01）、局所的な更新の τ も伸びます。物理は $\tau \propto \xi^{z}$ と書き、z を動的指数と呼びます（Hohenberg–Halperin 1977 の総説、18-03 §07） 物理 。式で確かめられるのが格子の自由場（1-08 §07）です。

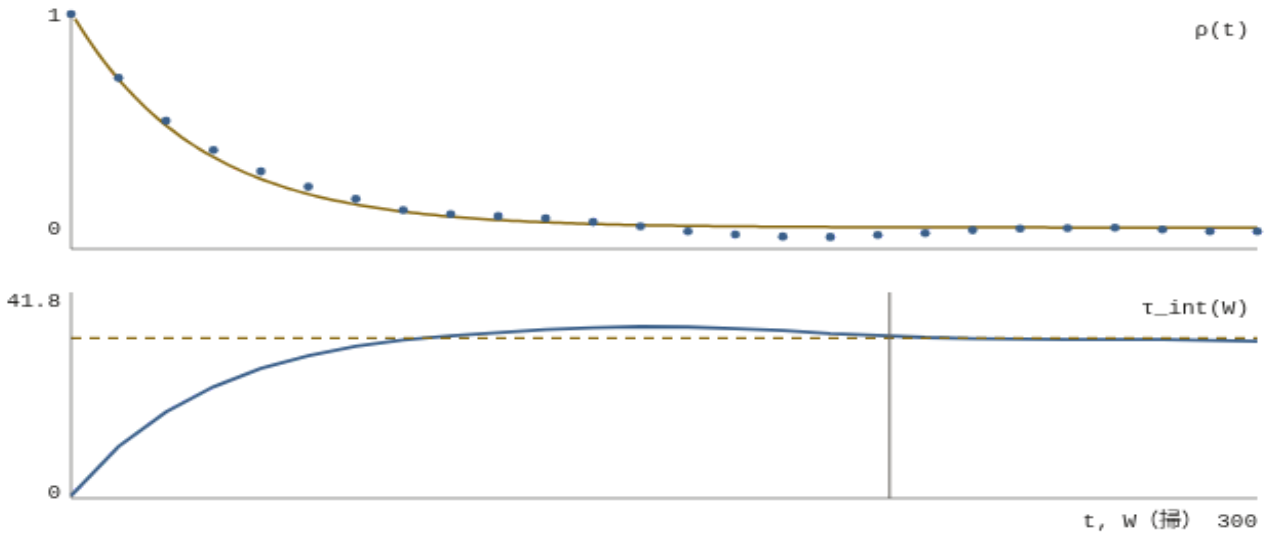
$$S = \frac{1}{2}\sum_{x}\Bigl[\sum_{\mu}(\phi_{x+\hat{\mu}} - \phi_x)^2 + m^2\phi_x^2\Bigr], \qquad \phi_x \,|\, \text{近傍} \sim \mathcal{N}\Bigl(\frac{\sum_{y\sim x}\phi_y}{2d+m^2}, \frac{1}{2d+m^2}\Bigr) \tag{10}$$

市松の熱浴で偶の点の和を M_e、奇を M_o とすると、奇の点は $2d$ 個の偶の点の隣なので $M_e' = rM_o +$（雑音）、$r = 2d/(2d+m^2)$ です。零運動量 $M = M_e + M_o$ について

$$\rho_M(t) = \tfrac{1+r}{2}\, r^{2t-1}\ (t \ge 1), \qquad \tau_{\mathrm{int}}(M) = \frac{1}{2(1-r)} = \frac{1}{2} + \frac{d}{m^2}, \qquad \tau_{\exp} = \frac{-1}{\log r^2} \approx \frac{d}{m^2} \tag{11}$$

$\cosh(1/\xi) = 1 + m^2/2$ から $\xi \approx 1/m$ で、$\tau \approx d\xi^2$、この力学では $z = 2$ です 計算 。直観は酔歩で、局所の更新は距離 ξ を伝えるのに ξ^2 歩かかります。正確には、(11) の $r = 1 - m^2/(2d+m^2)$ が $m \to 0$ で 1 に近づくので、一掃で縮む割合が $1 - O(\xi^{-2})$ になります。

図 2　二次元の自由場・市松の熱浴。つまみで m（上：$\rho_M(t)$、点は測定・曲線は (11)。下：$\tau_{\mathrm{int}}(W)$、破線は (11)、縦線は自動の窓 W）。「重ねる」で横軸を t/ξ^2 にすると四つが重なる



m = 0.25（ξ = 4.01、64²）：τ_int 測定 33.14 ± 3.91（窓 W = 207）、(11) 32.5、τ_int/ξ² = 2.02

計算 この図の数値はこの端末で計算した（曲線は (11) をその場で計算。JavaScript が無効なら表 3）。

計算 表 3　二次元の自由場・市松の熱浴（一辺 16〜64、5〜6 万掃）。τ は掃

m	ξ	$\tau_{\mathrm{int}}(M)$ 測定	(11)	(11)/ξ^2
1	1.039	2.57(10)	2.5	2.316
0.5	2.020	8.17(53)	8.5	2.082
0.25	4.010	33.1(3.9)	32.5	2.021
0.125	8.005	125(23)	128.5	2.005

ξ を倍にするごとに $\tau_{\mathrm{int}}(M)$ は約 4 倍です。同じ精度の計算は ξ^{d+z} 程度で増えると見積もられます（5-05） 物理 。Langevin 力学（§05）では緩和時間が $1/m^2 = C_P$ です（18-03。場の値 ϕ_x そのものを座標にして勾配を測る自由場の正規化で、座標の取り方を変えると C_P は定数倍だけ変わります）。どちらも m^{-2}（$\propto \xi^2$）に比例します。熱浴の τ は掃、Langevin の τ は Langevin の時間で測るので、係数は比べません。

08

HMC と位相の凍結 — 大域的な一歩と、越えにくい壁

HMC（ハイブリッド・モンテカルロ、Duane ほか 1987）は全リンクを一度に動かします。運動量 P_ℓ（エルミートでトレース 0 の行列。1-03 の T^a の実係数の組み合わせ）を正規分布で与え、

$$H(P,U) = \frac{1}{2}\sum_{\ell} \operatorname{tr} P_\ell^2 + S_W(U) \tag{12}$$

の古典力学をリープフロッグ法で動かし、確率 $\min(1, e^{-\Delta H})$ で受理します。リープフロッグ法は時間を戻せて相空間の体積を保つので、刻みの誤差があっても e^{-S_W} が正確に定常分布です 既知 。HMC の自己相関時間を Langevin の C_P で見積もるのは仮定です（生成作用素が違います）。

連続極限に近づくと、場は位相電荷 Q（連続の場では整数値をとる、場のねじれ方の数。格子での定義は 3-05 §08）の区画に分かれ、小さな一歩では移りにくくなります。Schaefer–Sommer–Virotta（2011）は、純ゲージの HMC で Q^2 の “effective dynamical critical exponent of about 5” を報告し、Wilson ループはこの遅いモードから切り離せるとしました 物理 。Lüscher–Schaefer（2011）は時間方向に開いた境界条件で位相電荷を出入りさせる方法を示しました 物理 。比喩なら谷の多い地形の峠越えです。正確には、区画の境界付近の測度が小さいと Poincaré 定数が大きくなります（18-03 §08）既知 が、それが凍結の原因かは確かめられていません。

09

数学から見たモンテカルロ — 定理と観察の境目

有限の格子で (1) はコンパクトな空間の上の確率測度です（5-01 §06）。定理として言えるのは、エルゴード定理による時間平均の収束（連続な状態空間では §02 の条件の下で）と、中心極限定理です。可逆な連鎖では、漸近分散が有限なら (7) の形の中心極限定理が成り立ちます（Kipnis–Varadhan 1986）既知 。観察にとどまるのは誤差棒です。有限の N では見えない遅いモードがあれば誤差棒は小さく出ます（表 1 の $\delta = 0.1$、§08）。有限体積と有限の a からの外挿（5-05 §07・5-09）も別の仮定を要します。

5-08 のグルーボールの質量や弦張力は、その外挿による物理の結果で 物理 、問題文の存在と隙間の証明（4-11）ではありません。一方、C_P は数学の対象で、強結合では格子ヤン–ミルズの Poincaré 不等式が示されています（Shen–Zhu–Zhu 2023、5-04）既知 。$\xi \to \infty$ の側で C_P の ξ 依存を決めた定理は、四次元のヤン–ミルズにはありません。

本書での使い方は 23-08 §01・§03（区間演算で数値の不等式を確かめ、札「機」を付ける）。

この章が言えている範囲

事項	言えている	言えていない
更新法	メトロポリス・熱浴・過緩和・HMC が定常分布を保つこと、(6) 既知	四次元の格子での混合の速さ
表 1・表 2	小さな例での τ_{int} と誤差 計算	大きな格子への一般化。誤差棒が上界であること
臨界減速	自由場・市松の熱浴で (11)、$z = 2$ 計算 。一般の $\tau \propto \xi^{z}$ は仮説 物理	四次元ヤン–ミルズの z
位相の凍結	要旨の数値（有効指数 約 5） 物理	凍結の数学的な説明
質量ギャップ	—	この章は質量ギャップ・連続極限について何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§02	要旨	N. Metropolis ほか, J. Chem. Phys. 21 (1953) 1087
§02 のエルゴード定理・収束定理、§05 の緩和時間	本文	D. A. Levin, Y. Peres, E. L. Wilmer, *Markov Chains and Mixing Times*, 2nd ed.：定理 C.1（エルゴード定理、付録 C.1）・定理 4.9（収束定理、§4.3）・§12.2・定理 12.4–12.5（緩和時間と混合時間）
§02・§09 の連続な状態空間	要旨	L. Tierney, Ann. Statist. 22 (1994) 1701
§04・§05（Brown–Woch の 28→9 掃）	要旨（熱浴の Creutz への帰属は未確認）	M. Creutz, PRD 21 (1980) 2308／N. Cabibbo, E. Marinari, PLB 119 (1982) 387／A. D. Kennedy, B. J. Pendleton, PLB 156 (1985) 393／S. L. Adler, PRD 23 (1981) 2901／M. Creutz, PRD 36 (1987) 515／F. R. Brown, T. J. Woch, PRL 58 (1987) 2394
§05・§06 の (7)(9)・自動の窓	本文（式 (23)(25)(40)(42)(50)–(52)。(42) は (40) からの誤差伝播）	U. Wolff, CPC 156 (2004) 143（erratum: CPC 176 (2007) 383）, arXiv:hep-lat/0306017
§06（窓の和の誤差の式 (40) の出所、ビン分け）	要旨	N. Madras, A. D. Sokal, J. Stat. Phys. 50 (1988) 109／H. Flyvbjerg, H. G. Petersen, J. Chem. Phys. 91 (1989) 461
§07 の動的指数 z	要旨	P. C. Hohenberg, B. I. Halperin, Rev. Mod. Phys. 49 (1977) 435

もの	種別	出典・道具
§08	要旨	S. Duane, A. D. Kennedy, B. J. Pendleton, D. Roweth, PLB 195 (1987) 216／S. Schaefer, R. Sommer, F. Virotta, NPB 845 (2011) 93, arXiv:1009.5228／M. Lüscher, S. Schaefer, JHEP 07 (2011) 036, arXiv:1105.4749
§09	書誌のみ／要旨	C. Kipnis, S. R. S. Varadhan, CMP 104 (1986) 1／H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, CMP 400 (2023) 805, arXiv:2204.12737
表 1〜3・図 1・図 2・§01・§02・§05〜§07 の数	この端末で計算	Python 3・NumPy・SciPy。one_link_metropolis.py、su2_algos.py・analyze_su2.py、free_field.py・exact_tint.py、free_field_ext.py（図 2 の延長）、gamma_method.py（AR(1) で検算）、small_numbers.py

次に読む章：5-08 グルーボールと弦張力の測定（この章の方法で作った配位から質量と弦張力を読む）。

グルーボールと弦張力の測定 — 相関の減り方から質量を読み、比 $m/\sqrt{\sigma}$ を作る

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 格子の質量は、時間片の演算子の相関が虚時間で減る速さから読み、その値は上から近づく上界です。平滑化と変分法が近づきを速めます。弦張力は周期的な弦から弦の補正を仮定して取り出し、比 $m(0^{++})/\sqrt{\sigma}$ は一次資料で $SU(2)$ 3.78〜3.84、$SU(3)$ 3.41〜3.61（二次情報の Meyer の値を含めると 3.35〜3.61）です。

前提となる章 — 5-07 モンテカルロ法。転送行列（5-03）、質量ギャップの定義（4-11）、変分原理（1-10）を使います。β は 5-01 の格子の逆結合で、4-06 の β 関数 $\beta(g)$ とは別の量です。

先に言うこと — この章の数はすべて数値の水準で、定理ではありません。有限の箱・β・時間の窓で測り、外挿と弦の絵を通しています。この端末の実演は三次元 $\mathbb{Z}_2$ ゲージ理論で、四次元ヤン–ミルズではありません。質量ギャップの存在について、この章は何も示しません。

この章の順序

1. 質量は相関の減り方 — 有効質量は上界
2. グルーボールの名札 — 立方体の回転群
3. 雑音は減らない — 相対誤差は指数で増える
4. 演算子を太らせる — 空間だけの平滑化
5. 変分法 — 上界の最良化
6. 弦張力を測る — Creutz 比と周期的な弦
7. この端末での実演 — 三次元 $\mathbb{Z}_2$
8. 一次資料の数値 — $m/\sqrt{\sigma}$ の表
9. 数が言っていること、言っていないこと — 上界・窓・外挿・弦の仮定

01

質量は相関の減り方 — 有効質量は上界

格子で時間を一段進めることは、転送行列 $T = e^{-aH}$ を一回掛けることです（5-03）。H の固有値は、一つの時間片 t の上の量で作った演算子 $O(t)$ の相関の減り方から読みます。O は空間で和を取って運動量を 0 にし、真空の期待値を引きます（格子単位 $a = 1$）。

$$C(t) = \langle O(t)\, O(0) \rangle - \langle O \rangle^2 = \sum_{n \geq 1} |\langle n|O|\Omega\rangle|^2 \, e^{-E_n t}, \qquad m_{\text{eff}}(t) = \ln \frac{C(t)}{C(t+1)} \tag{1}$$

$|\Omega\rangle$ は真空、E_n は真空から測った固有値です。重み $|\langle n|O|\Omega\rangle|^2$ は絶対値の二乗なので 0 以上です。固有値 e^{-E_n} が正の実数なのは、リンク反射の正値性（$\beta \geq 0$）から $T \geq 0$ となり、$\beta > 0$ なら T が 0 を固有値に持たないことによります（5-03 §鎖・§転送行列）。0 以上の重みを持つ正の指数の和は対数凸（Cauchy–Schwarz で $C(t)^2 \leq C(t-1)C(t+1)$）なので、有効質量 $m_{\text{eff}}(t)$ は t について単調に減り、O が触れる最も軽い状態のエネルギーに上から近づきます 既知 。有限の t で読んだ値は**上界**で、下界は出ません（有限の窓の例は 4-11 §窓）。時間方向が周期的（長さ N_t）な格子では、各項に逆向きの $e^{-E_n(N_t - t)}$ が付きます。§07 の $N_t = 32$、$t \leq 7$ では無視できる大きさです。

例。$C(t) = 0.8\, e^{-0.77t} + 0.2\, e^{-1.8t}$ では、m_{eff} は $t = 0, \ldots, 5$ で 0.908、0.824、0.790、0.777、0.773、0.771 と下ります 計算 。

02

グルーボールの名札 — J^{PC} と立方体の回転群

ゲージ不変な状態をグルーボールと呼び、スピン J・空間反転 P・荷電共役 C で分類します。P は空間の座標を反転 $x \to -x$ する操作（リンクもそれに合わせて写す）、C はリンクを複素共役 $U \to U^*$ に写す操作です。ループの跡では $\operatorname{tr} U^* = \overline{\operatorname{tr} U}$ で、これは向きを逆にしたループの跡なので、C はループの向きの反転です。最も軽いと考えられているのが 0^{++}、次が 2^{++} です 物理 。

立方体の回転群と指標

格子に残る回転は立方体を自分に重ねる 24 個だけで、この群 O の既約表現は A_1, A_2, E, T_1, T_2（次元 1, 1, 2, 3, 3）です。「名札」は比喩で、正確には、状態が属する O の既約表現と、P・C の固有値（± 1）の組です。

スピン J の表現は格子の上でこれらの和に割れます。割れ方を決めるのが指標です。表現の指標 $\chi(g)$ は、元 g を表す行列の跡です。O の 24 個の元は、指標が同じ値を取る五つの組（共役

類）に分かれます：恒等（1 個）、面の中心を通る軸の 90° 回転（6 個）、同じ軸の 180° 回転（3 個）、対角線の軸の 120° 回転（8 個）、辺の中点を通る軸の 180° 回転（6 個）。表現 Γ が現れる回数は次の和で、これは有限群の指標の直交性という定理から出ます（ここでは使い方だけ） 既知 。

$$n_\Gamma = \frac{1}{24}\sum_{g \in O} \chi_J(g)\,\chi_\Gamma(g), \qquad \chi_J(\theta) = \frac{\sin\!\big((2J+1)\theta/2\big)}{\sin(\theta/2)}$$

θ は g の回転角です。例えば $J=2$ では $\chi_2 = (5,-1,1,-1,1)$ で、$n_E = \frac{1}{24}(5\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 2 + 8\cdot(-1)\cdot(-1)) = 1$ です。

既知 **O の指標**　列は上の五つの共役類（個数）。

	恒等 (1)	90° (6)	180° (3)	120° (8)	辺 180° (6)
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	−1	1	1	−1
E	2	0	2	−1	0
T_1	3	1	−1	0	−1
T_2	3	−1	−1	0	1

計算 既知 **表 1**　スピン J の表現の、立方体の回転群 O への分かれ方（五つの共役類の指標から計算。次元の和が $2J+1$ になることを確かめた）。

J	0	1	2	3	4
分かれ方	A_1	T_1	$E + T_2$	$A_2 + T_1 + T_2$	$A_1 + E + T_1 + T_2$

0^{++} は A_1^{++} で測りますが、A_1 には $J=4$ も入ります。Lucini–Teper 2001 は、励起 0^{++*} が最も軽い 4^{++} である可能性を自ら挙げています。2^{++} は E^{++} と T_2^{++} に現れ、二つが揃うことが回転対称性の回復の目安です（Athenodorou–Teper 2021 の $SU(\infty)$ で 4.582(14) と 4.578(11)） 物理 。

例。三つの向きの空間プラケットの和 $P_{12}+P_{23}+P_{31}$ は A_1^{++}、差 $P_{12}-P_{23}$ は E^{++} です。$SU(2)$ では $U^{*} = gUg^{-1}$（$g = i\sigma_2 \in SU(2)$、σ_2 は 1-04 のパウリ行列）なので、C はすべての点で同じゲージ変換をすることと同じです。そのためゲージ不変な状態はすべて $C=+$ です。

```
03
```

雑音は減らない — 信号は指数で減り、ゆらぎは残る

$C(t)$ は N 個の配位の平均で推定します（配位の作り方と誤差は 5-07）。誤差を決める積 $O(t)O(0)$ の分散は、t が大きくなると $\langle O^2\rangle^2$ ほどの一定値に近づき、減りません。信号は $e^{-E_{\min}t}$ で減るので

$$\frac{\delta C(t)}{C(t)} \;\approx\; \frac{\text{一定}}{\sqrt{N}}\, e^{+E_{\min}t} \tag{2}$$

です。この議論は格子分光の標準で、Parisi 1984 に遡るとされます 既知 。グルーボールは $E_{\min}$ が大きく、0^{++} は真空の引き算も要るので、特に強く効きます。

例。§07 の実演（$E_{\min}\approx 0.77$、約 35,000 配位）で、プラケットの $C(t)$ の相対誤差は $t=0,\dots,7$ で 0.004、0.011、0.025、0.050、0.121、0.214、0.379、0.657 でした 計算 。一段ごとの倍率 1.8〜2.9 は $e^{0.77}\approx 2.2$ と同じ程度です。

04

演算子を太らせる — 空間だけの平滑化とブロック化

プラケットの大きさは a ですが、物理の長さ $1/\sqrt{\sigma}$ は $SU(2)$・$\beta=2.60$ で約 $7.5a$ です（表 2）。そこで演算子を「太らせ」ます。正確には、リンクを近くの経路の平均で置き換え、演算子が広がった状態に大きく重なるようにします。

$$U_i(x) \;\longmapsto\; \mathrm{Proj}\Big[\,U_i(x) + \alpha \sum_{j\neq i} \big(U_j(x)\,U_i(x+\hat{j})\,U_j(x+\hat{i})^{\dagger} + (\text{逆向き})\big)\Big] \tag{3}$$

i,j は空間の向きだけを走り、Proj は和を群に戻す操作です。長さ $2a$ のリンクを作るブロック化もあります。Lucini–Teper 2001 は、これらを標準の方法として Teper 1987 と Albanese ほか 1987（APE の平滑化）を引いています 既知 。空間だけで平均するのが要で、演算子が一つの時間片に載ったままなので (1) の正の重みと「上から近づく」が保たれます。

良さは基底状態の重みの割合 c_0^2 で測ります。Lucini–Teper 2001 の最良の演算子では、0^{++} で、粗い格子で約 0.95（$SU(2)$）から約 0.90（$SU(5)$）、細かい格子で約 0.92 から約 0.85 でした。周期的な弦ではどちらの格子でも約 0.90 から約 0.75 です。N が大きいほど重なりが悪くなります 物理 。

§07 の三次元 $\mathbb{Z}_2$ では、割合の目安 $C(2)e^{2m}/C(0)$（$m=1/1.296$。大きめに出る）がプラケットで 0.57、3×3 のループで 0.85 でした。Proj をリンクと二本のステープルの多数決にした平滑化では、0.59 が 1 回で 0.66 に上がりました 計算 。

05

変分法 — 一般化固有値問題と、上界の最良化

候補 $O_1, \dots, O_N$ を並べ、最良の一次結合を相関そのものに選ばせます。相関行列 $C_{ij}(t) = \langle O_i(t) O_j(0) \rangle - \langle O_i \rangle \langle O_j \rangle$ について

$$C(t)\, v_n = \lambda_n(t, t_0)\, C(t_0)\, v_n, \qquad E_n^{\mathrm{eff}}(t) = \ln \frac{\lambda_n(t, t_0)}{\lambda_n(t+1, t_0)} \tag{4}$$

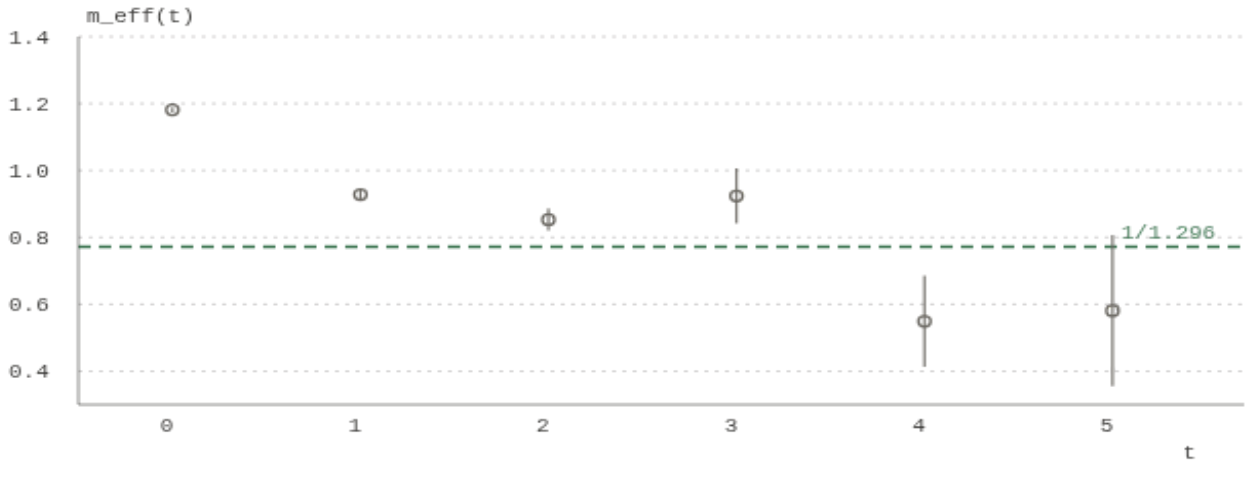
を解きます。変分の考えは Wilson の 1981 年の講演に始まり、グルーボールには Berg 1982・Michael–Teasdale 1983 が使ったとされます。t_0 を入れた一般化固有値問題の形と補正の評価は Lüscher–Wolff 1990 とされます（Blossier ほか 2009 の序による） 既知 。Blossier ほか 2009 は、$t_0 \geq t/2$ に取れば補正が $\exp\!\big(-(E_{N+1} - E_n)t\big)$ で消えることを示しています。図 1 の $t_0 = 0$ はこの条件の外で、式 (5) の上界の意味だけで使っています。

$t_0 = 0$、$t = 1$ では Rayleigh–Ritz の変分原理そのものです（1-10、2-05）。$\psi = \sum_i v_i O_i |\Omega\rangle$（真空成分は引いたもの）について

$$\lambda_{\max}(1, 0) = \max_{v} \frac{v^{\dagger} C(1)\, v}{v^{\dagger} C(0)\, v} = \max_{\psi} \frac{\langle \psi | T | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \leq e^{-E_1} \tag{5}$$

なので、$-\ln \lambda_{\max}$ は候補の張る空間の中で最良の上界です 既知 。変分法は上界を良くしますが、上界であることは変えません。

図 1　三次元 $\mathbb{Z}_2$ の 0^+ の有効質量。ボタンで演算子を選ぶと点が変わる。破線は一次資料の $1/1.296$



1×1：m_eff(0) = 1.181、m_eff(3) = 0.924±0.082（参照 0.772）

計算 この図の数値はこの端末で計算した。

計算 図 1 の数値（ジャックナイフ誤差、39 ビン。変分は $1\times1 \cdot 1\times2 + 2\times1 \cdot 2\times2 \cdot 3\times3$、$t_0 = 0$）。

t	0	1	2	3	割合
1×1	1.181(7)	0.928(17)	0.853(33)	0.924(82)	0.57
2×2	0.940(6)	0.858(14)	0.841(29)	0.842(70)	0.78
3×3	0.883(6)	0.818(13)	0.831(29)	0.795(61)	0.85
変分（4 個）	0.860(6)	0.824(13)	0.831(29)	0.803(63)	0.87

読み方。$t=0$ では変分が最も低く（式 (5)）、どの列も $t=2,3$ で 0.80〜0.85 に下り、参照値 0.772 に上から寄ります。$t\geq4$ は誤差が 0.1 を超えます（図 1）。右端は割合の目安（§ 04）。

06

弦張力を測る — Creutz 比と周期的な弦

弦張力 σ は、離した二つの静的な電荷のエネルギー $V(R)$ の傾きです。$R\times T$ の Wilson ループ（5-01）は $e^{-V(R)T}$ のように減り、長い距離では次の形が使われます（17-03）物理 。

$$V(R)=\sigma R+\mu-\frac{\pi(d-2)}{24R},\qquad \chi(R,R)=-\ln\frac{W(R,R)\,W(R-1,R-1)}{W(R,R-1)\,W(R-1,R)} \tag{6}$$

d は時空の次元です。Creutz 比 χ（Creutz 1980 とされる）では周長と角の寄与が消えます。式 (6) の形を仮定し、有限の T の補正を無視すれば、$\chi(R,R)\approx V'(R-\tfrac12)=\sigma+\pi(d-2)/\big(24(R-\tfrac12)^2\big)$ は σ に上から近づきます物理 。

周期的な弦

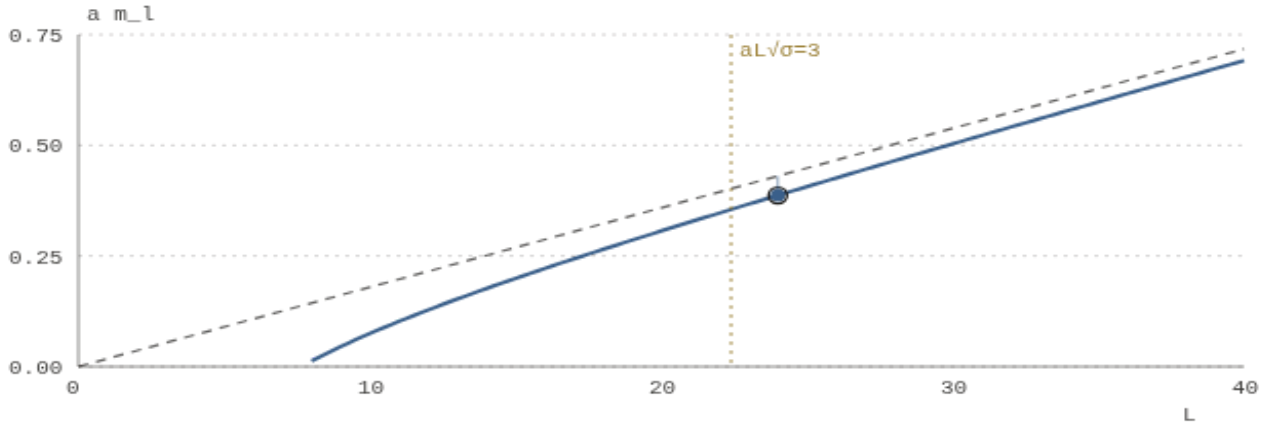
もう一つは、空間の周期 L を一周する閉じた電束（周期的な弦）の質量 m_l を § 01 と同じ方法で読むことです。Lucini–Teper 2001 は四次元で次の式から σ を取り出しました（補正は一般に $\pi(d-2)/(6L)$。三次元では $\pi/(6L)$。17-03 § 閉じた弦 の式 (7)）。

$$a\,m_l=a^2\sigma L-\frac{\pi}{3L} \tag{7}$$

著者は 'in using eqn(4) we are assuming that we have linear confinement … Nambu-Gotto universality class' と書き（Nambu–Goto は、弦を面積に比例する作用の膜として扱う近似。17-03）、二つの L では 'we cannot claim to have evidence for both the 1/L functional form and for its coefficient' と断っています。使うのは $aL\sqrt{\sigma}\geq3$ の格子だけです。弦の補正そのものを調べるには、周期的な弦のほうが Wilson ループよりずっと良いと著者は書いています。補正の係数が大きく（$\pi/3$ 対 $\pi/12$）、静的な電荷の Coulomb 項（同じ $1/r$ の形で短い距離を支配する）が混ざらないからです。

周期的な弦がグルーボールと混ざらないのは中心対称性によります。空間の向き i の面 $x_i = c$ を横切る i 向きのリンクすべて（すべての時刻で）に、群の中心の元（すべての元と可換な元。$SU(2)$ なら -1。1-04）を掛けます。どのプラケットもこのリンクを含まないか、行きと帰りの組で含むので、作用は変わりません。i 向きに一周する輪は面を一度横切るので中心の元が一つ掛かり（$SU(2)$ なら符号が変わり）、縮められる閉じた輪は変わりません。閉じ込め相ではこの対称性が破れていないので、両者の相関は 0 です 既知 。

図 2　L を動かすと、弦の質量（実線）と σL（破線）の差、素朴な $\sqrt{m_l/L}$ のずれが変わる。$SU(2)$、$\beta = 2.60$。丸は同論文の $L = 24$ の測定値



L = 24：a m_l = 0.3870　補正の割合 10.1%　素朴な a√σ = 0.1270（真の値の 94.8%）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（式 (7)）。

計算 **表 2**　Lucini–Teper 2001 の表 1（$SU(2)$）の am_l から式 (7) で出し直した $a\sqrt{\sigma}$。六点の β と質量の正本は 16-05 表 3。

β	L	am_l	$a\sqrt{\sigma}$	補正の割合	$L\,a\sqrt{\sigma}$
2.25	8	1.301(17)	0.4231(25)	9.1%	3.38
2.30	10	0.861(11)	0.3108(18)	10.8%	3.11
2.40	12	0.745(9)	0.2634(14)	10.5%	3.16
2.475	16	0.585(8)	0.2016(12)	10.1%	3.23
2.55	20	0.453(4)	0.1590(6)	10.4%	3.18
2.60	24	0.387(4)	0.1340(6)	10.1%	3.21

読み方。同論文の $a\sqrt{\sigma}$ は式 (7) から丸めの範囲で再現されます（最終桁の誤差で 1 以内）。$L\,a\sqrt{\sigma}$ はどの β でも 3.1〜3.4 で、箱は物理の長さでほぼ一定です。補正は σL の約 10% で、入れなければ $\sqrt{\sigma}$ を約 5% 小さく見積もります 計算 。

> 07

この端末での実演 — 三次元 $\mathbb{Z}_2$ ゲージ理論

同じ測り方を、最も簡単なゲージ理論で確かめます。リンクに ± 1 を置き、Wilson 作用 $S = -\beta \sum_p U_p$ を使う三次元の $\mathbb{Z}_2$ ゲージ理論です。双対性で三次元のイジング模型に移ることが知られています（Wegner 1971 とされる。対応の使い方は Agostini ほか 1997）。0^+ の質量はイジング模型の相関長の逆数に、弦張力は界面張力（上向きと下向きの領域の境目が単位面積あたりに持つ自由エネルギー。2-09 §低温）に対応します 既知 。

Agostini ほか 1997 は $\beta = 0.72484$ で $\xi_{0^+} = 1.296(3)$（$N_s \geq 16$ で安定、同論文の表 2）、$\sigma = 0.05558(10)$、$\sigma\xi^2 = 0.0934(6)$（表 6、界面張力の文献から）を与え、$m/\sqrt{\sigma} = 3.27$ です 物理 。

この端末では $16^2 \times 32$ の格子で熱浴法の更新を約 35,000 回（独立な三本の列）行い、§04・§05 の演算子と周期的な弦を毎回、Wilson ループを 5 回に一度測りました（多数決の平滑化は別の二本の列）。

計算 **表 3**　三次元 $\mathbb{Z}_2$、$\beta = 0.72484$ の実演と参照値。σ は周期的な弦の $m_{\mathrm{eff}}(2)$ を $m_l = \sigma L - \pi/(6L)$ に入れたもの。Creutz 比の目安は $\chi \approx V'(R - \frac{1}{2})$ の粗い近似で、有限の T（ループが正方形であること）の補正を含まない。

量	この端末	参照値
m_{0^+}（変分、$t = 3$）	0.803(63)	0.7716(18)
m_l（$L = 16$）	0.872(39)	0.857（式から）
σ	0.0566(24)	0.05558(10)
$m/\sqrt{\sigma}$	3.38(27)	3.27
$\chi(R,R)$、$R = 4, 5, 6$	0.0698(6), 0.0645(11), 0.0664(26)	目安 $\sigma + \frac{\pi}{24(R-1/2)^2}$：0.066, 0.062, 0.060

読み方。質量も弦張力も誤差の内で参照値と合います。質量の中心値は参照値より上にありますが、差は誤差の約 0.5 倍で、区別できません。上界なのは厳密な期待値 $C(t)$ についての性質で、有限の配位数の推定値は雑音で下にも出ます（図 1 の $t \geq 4$）。$t_0 = 0$ の $t = 3$ の値は二つの最大固有値の比で、式 (5) のような厳密な上界でもありません。Creutz 比は $R = 5, 6$ でも σ より 16〜19% 大きく、目安よりも少し上です。周期的な弦は $L = 16$ の一点から 4% の精度で σ を与えました。

比は理論ごとに違います。Agostini ほか 1997 の連続極限の値は $m_{0^+}/\sqrt{\sigma} = 3.08(3)$、同論文の表 9 が別の文献から引く三次元 $SU(2)$ の値は 4.763(31) です 物理 。

08

一次資料の数値 — $m/\sqrt{\sigma}$ の表

四次元の純粋なヤン–ミルズ理論の、一次資料の連続極限の値です（外挿の手順は 5-09 §比）。

物理 計算 **表 4**　$m/\sqrt{\sigma}$ の連続極限と、この端末で割った $2^{++}/0^{++}$（誤差は独立として合成。Meyer の行だけは出典の表の比で、この端末で割ると 1.47(4)）。LT = Lucini–Teper 2001、AT = Athenodorou–Teper 2020（$SU(3)$）・2021（$SU(2)$、$SU(\infty)$、2^{++} は E^{++}）。$SU(\infty)$ は $1/N^2$ の外挿。

出典・群	0^{++}	2^{++}	$2^{++}/0^{++}$
LT $SU(2)$	3.844(61)	5.59(15)	1.45(5)
LT $SU(3)$	3.607(87)	5.13(22)	1.42(7)
LT $SU(4)$	3.49(14)	5.21(21)	1.49(9)
LT $SU(5)$	3.38(16)	4.88(38)	1.44(13)
LT $SU(\infty)$	3.37(15)	4.93(30)	1.46(11)
AT $SU(2)$	3.781(23)	5.349(20)	1.415(10)
AT $SU(3)$	3.405(21)	4.894(22)	1.437(11)
AT $SU(\infty)$	3.072(14)	4.582(14)	1.492(8)
Meyer $SU(3)$（GKN II 経由）	3.347(68)	4.916(91)	1.46(5)

Morningstar–Peardon 1999 と Chen ほか 2006 は $SU(3)$ を Sommer の尺度 r_0（静的な電荷のあいだの力 F が $r_0^2F(r_0)=1.65$ を満たす距離）の単位で $r_0m(0^{++})=4.21(11)(4)$、$4.16(11)(4)$ と報告しており、AT 2020 の $r_0\sqrt{\sigma}=1.160(6)$ で割ると 3.63(10)、3.59(10) です 計算 。出典の違う数を組んだ換算で、目安にとどまります。

読み方。0^{++} の比は N とともに下がり、$2^{++}/0^{++}$ はどの N でも 1.4〜1.5 です。同じ群でも出典でずれ、$SU(2)$ の LT と AT の差 0.063 は合成誤差の約 1 倍、$SU(3)$ の差 0.20 は約 2.3 倍です 計算 。差の原因をこの章では特定しません。GeV への換算は 5-09 §寄り道、大 N は 17-04 で扱います。

09

数が言っていること、言っていないこと — 上界・窓・外挿・弦の仮定

表 4 は、正の隙間が $\sqrt{\sigma}$ の 3〜4 倍ほどある、という物理の見方を支える数値です。数学の言明にするには四つが残ります。

1. **上界**。各 β の am は有限の t の上界か、平坦域への当てはめです（§01・§05）。有限の窓から下界は出ません（4-11 §窓）。
2. **箱と量子数**。有限の箱では二つのグルーボールや一対の周期的な弦も同じ量子数に現れます（Morningstar–Peardon 1999 は要旨でそれらを区別したと述べます）。スピンは立方体の表現を通して同定します（§02）。
3. **外挿**。連続極限の値は a^2 の補正の形を仮定した外挿です（5-09、5-05）。質量や弦張力の比の極限が在ることは示されていません（2026-11 に公開された構成は局所の場の相関の極限を作りましたが、質量ギャップと Wilson ループは扱っていません。6-04）。
4. **弦の仮定**。σ は線形の閉じ込めと Nambu–Goto 型の補正を仮定して取り出しています（§06）。四次元の非可換群で大きい β の閉じ込めは証明されていないので、この σ を閉じ込めの証拠に使うと循環します（17-03）。

質量ギャップの問題（4-11）が求めるのは連続極限の理論と隙間の**下界**で、この章の方法はどれも上から近づきます。何を固定して極限を取るかは 5-09 で扱います。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	有効質量が単調に減り、最低エネルギーの上界を与えること。$t_0 = 0, t = 1$ の一般化固有値問題が Rayleigh–Ritz の上界であること。空間だけの平滑化が一つの時間片の演算子を保つこと。J の立方体の群への分かれ方（表 1）既知 。
数値の水準	一次資料の $m/\sqrt{\sigma}$（表 4）と、式 (7) による $a\sqrt{\sigma}$ の再現（表 2）物理 計算 。三次元 $\mathbb{Z}_2$ の実演が誤差の内で参照値と合ったこと（図 1・表 3）計算 。
言えていない	四次元ヤン–ミルズの連続極限と $m/\sqrt{\sigma}$ の極限が在ること、隙間の下界。弦の補正の独立な確認。$SU(3)$ の値のずれの原因。この章は質量ギャップの存在について何も示していない。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
$SU(N)$ の am_l・$a\sqrt{\sigma}$・am（同論文の表 1）、式 (4)、連続値（同論文の表 5）、演算子と変分の手順、c_0^2、4^{++} の問い、逐語引用	一次（本文）	B. Lucini, M. Teper, JHEP 0106 (2001) 050, arXiv:hep-lat/0103027

もの	種別	出典・道具
$m/\sqrt{\sigma}$、$r_0\sqrt{\sigma}$、E^{++} と T_2^{++}	一次（検査済みの材料による本文照合）	A. Athenodorou, M. Teper, JHEP 11 (2020) 172, arXiv:2007.06422；JHEP 12 (2021) 082, arXiv:2106.00364
$r_0 m$、要旨	一次（材料による本文照合）	C. Morningstar, M. Peardon, Phys. Rev. D 60 (1999) 034509, arXiv:hep-lat/9901004；Y. Chen ほか, Phys. Rev. D 73 (2006) 014516, arXiv:hep-lat/0510074
Meyer の $SU(3)$ の値と比 1.46(5)	二次（原典は未入手）	H. B. Meyer, arXiv:hep-lat/0508002 の値を U. Gürsoy, E. Kiritsis, F. Nitti, JHEP 0802 (2008) 019, arXiv:0707.1349 の表から
三次元 $\mathbb{Z}_2$ の ξ_{0^+}（同論文の表 2）、$\sigma \cdot \sigma\xi^2$（表 6）、3.08(3)、双対の対応の使い方	一次（本文）	V. Agostini, G. Carlino, M. Caselle, M. Hasenbusch, Nucl. Phys. B 484 (1997) 331, arXiv:hep-lat/9607029
三次元 $SU(2)$ の 4.763(31)	二次（Agostini ほか 1997 の表 9 経由・原典は未確認）	同上の表 9
一般化固有値問題の補正と条件 $t_0 \geq t/2$、変分の経緯（同論文の序）	一次（本文）	B. Blossier ほか, JHEP 0904 (2009) 094, arXiv:0902.1265
変分の起点（Wilson 1981 の講演・Berg 1982）	書誌のみ（Blossier ほか 2009 の序による・原典は未確認）	同上の序の引用
変分法・平滑化・ブロック化・Creutz 比・雑音の議論・弦の補正・双対性	書誌のみ（帰属は「とされる」）	Michael–Teasdale, Nucl. Phys. B 215 (1983) 433（書誌は Blossier ほか 2009 の引用による）；M. Lüscher, U. Wolff, Nucl. Phys. B 339 (1990) 222；M. Albanese ほか, Phys. Lett. B 192 (1987) 163；M. Teper, Phys. Lett. B 183 (1987) 345；M. Creutz, Phys. Rev. D 21 (1980) 2308；G. Parisi, Phys. Rept. 103 (1984) 203；M. Lüscher, Nucl. Phys. B 180 (1981) 317；F. J. Wegner, J. Math. Phys. 12 (1971) 2259
Sommer の尺度 r_0 の定義	書誌のみ（定義の式は検査済みの材料で照合）	R. Sommer, Nucl. Phys. B 411 (1994) 839, arXiv:hep-lat/9310022
表 1、表 3・図 1（熱浴法・ジャックナイフ・一般化固有値問題）、表 2・図 2、表 4 の比と換算、§01 の例	計算	python3（numpy・scipy）。スクリプトと出力は本書の検討の記録に保存。多数決の平滑化は三本の列を走らせ、一本は打ち切りで記録が壊れたので使っていない

次に読む章：5-09 何を固定して極限を取るか（格子単位の数を物理の量に直し、何を止めて $\beta \to \infty$ に行くか）。

何を固定して極限を取るか — 格子の数に単位を与えるのは、こちらが決める目盛りである

この章は既存の知見の整理です。§05・§06 は未解決の地図です。

この章で分かること — 格子の計算が返す数はすべて「格子間隔を単位にした」次元の無い数で、物理の単位は一つの量を固定したときにだけ付くこと。固定の仕方によらず意味を持つのは次元の無い比（たとえば $m/\sqrt{\sigma}$）であること。格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）が格子単位の相関長の発散を求めていて、「格子単位の隙間が一様に正」はその反対であること。

前提となる章 — 5-05 弱結合と連続極限（$a(\beta)$ と漸近自由の格子版）、4-11 質量ギャップの定義（隙間・相関長・体積に一様なこと）。5-01 の記号（β・リンク・Wilson ループ）と、2-08 §連続極限 の「臨界点は格子を消す場所」を使います。

先に言うこと — この章は問いの立て方の章です。格子の相関長の問題も、連続の弦張力の問題（Chatterjee の Problem 5.2）も未解決で、この章は連続極限の存在についても質量ギャップについても何も示していません。数値はすべて一次資料の格子計算（数値の水準）と、それをこの端末で計算し直したものです。

この章の順序

1. 格子の数には単位が無い — 測れるのは格子間隔を単位にした数だけ
2. 目盛りを一つ決める — σ・r_0・相関長・Λ のどれかを固定する（寄り道：MeV は借り物）
3. 次元の無い比 — 目盛りの選び方が消える量と、a^2 の外挿
4. 「一様な隙間」の誤読 — 格子単位の隙間を止めると、物理の質量は無限大へ
5. 格子の相関長の問題を読む — 相関長が各 β で有限、かつ $\beta \to \infty$ で発散
6. 連続の弦張力の問題と比の出どころ — Wilson ループで目盛りを決める、もう一つの書き方
7. 何について一様か — 体積・格子単位・物理単位の三つの「一様」
8. 固定しただけでは足りない — 自明な極限の三つの型

9. 極限の順序 — 先に体積、次に β。数値の側の近道

01

格子の数には単位が無い — 測れるのは格子間隔を単位にした数だけ

純粋なヤン–ミルズの格子理論（5-01 §作用）には、径数が一つしかありません。作用に掛かる β です。格子は整数の点 $\mathbb{Z}^4$ の上に置かれ、どこにも「メートル」や「MeV」は書かれていません。

ですから、格子の計算が返す数は、すべて格子の一目盛りを単位にした数です。質量なら am（格子間隔 a と質量 m の積）、弦張力なら $a^2\sigma$、相関長なら $\xi = 1/(am)$（格子間隔の何個分か）という形でしか出てきません。この本では、格子単位の質量を m_{lat}、格子単位の相関長を ξ と書きます。

$$m_{\mathrm{lat}}(\beta) = a\,m, \qquad \xi(\beta) = \frac{1}{m_{\mathrm{lat}}(\beta)}, \qquad \sigma_{\mathrm{lat}}(\beta) = a^2\sigma \tag{1}$$

左辺はどれも β だけの関数で、次元を持ちません。右辺の a と m は、この段階ではまだ別々には決まっていません。格子の上で決まっているのは積だけです。

比喩で言えば、目盛りの間隔が書かれていない定規で物を測っているようなものです。「目盛り 4 個分」とは言えても、「何センチ」とは言えません。正確には、格子理論は β を与えると m_{lat}・σ_{lat} などの次元の無い関数の組を決め、a はその組のどれか一つに物理の値を割り当てたときに定義されます。

例。一次資料の格子計算（Lucini–Teper 2001、$SU(2)$）の数を表 1 に写します。$\beta = 2.60$ の $a\sqrt{\sigma} = 0.13395$ は「弦張力の平方根は格子間隔の逆数の 0.134 倍」、$m_{\mathrm{lat}} = 0.514$ は「最も軽いスカラーのグルーボールの質量は 0.514 倍」という意味で（このグルーボールを 0^{++} と書きます。スピン 0・パリティ正・荷電共役正の状態で、記法は 5-08）、どちらも単位の無い数です 物理 。

計算 **表 1**　この章で使う数（$a\sqrt{\sigma}$・$m_{\mathrm{lat}} = a\,m(0^{++})$・格子の大きさは Lucini–Teper 表 1。六点の m_{lat} は 16-05 表 3（正本）と同じ。$\xi = 1/m_{\mathrm{lat}}$ と、箱の一辺を $1/\sqrt{\sigma}$ 単位で測った $L\,a\sqrt{\sigma}$ はこの端末で計算）。

β	格子	$a\sqrt{\sigma}$	m_{lat}	ξ	$L\,a\sqrt{\sigma}$
2.25	8^4	0.4231(25)	1.390(30)	0.72	3.38

β	格子	$a\sqrt{\sigma}$	m_{lat}	ξ	$L\,a\sqrt{\sigma}$
2.30	10^4	0.3108(17)	1.090(33)	0.92	3.11
2.40	12^4	0.2634(14)	0.953(19)	1.05	3.16
2.475	16^4	0.2016(13)	0.754(10)	1.33	3.23
2.55	20^4	0.15896(63)	0.586(10)	1.71	3.18
2.60	24^4	0.13395(62)	0.514(8)	1.95	3.21

02

目盛りを一つ決める — σ・r_0・相関長・Λ のどれかを固定する

単位を付けるには、次元を持つ量を一つ選び、その値を約束で決めます。これを**尺度の設定**と呼びます。選んだ量を Q（質量の次元）、約束した値を Q_* とすると、格子間隔が次のように定まります。

$$a_Q(\beta) := \frac{(aQ)(\beta)}{Q_*} \tag{2}$$

分子は格子の数、分母は約束の数です。ほかの量は $m = m_{\mathrm{lat}}(\beta)/a_Q(\beta)$ のように物理の単位に直せます。選び方はいくつもあります。

- **弦張力 σ**：Creutz 1980 は 'hold fixed the string tension' として、弦張力を固定すると裸の結合が対数的に減ることを数値で見ています（要旨）物理 。
- **Sommer の尺度 r_0**：静的な電荷の間の力 F について $F(r_0)\,r_0^2 = 1.65$ で定める長さです（Sommer 1994）物理 。
- **相関長そのもの**：Chatterjee 2018 §5 は、相関長が有限の正の値に近づくように格子間隔 ϵ を 0 に送る、と説明します 既知 。
- **漸近自由の Λ**：二ループの式で $a\Lambda_{\mathrm{L}}$ を β の関数として与え、Λ_{L} を固定します（5-05、4-06 §二ループ）。

二つの選び方 Q と Q' で作った格子間隔の比は、格子の数だけで書けます。

$$\frac{a_Q(\beta)}{a_{Q'}(\beta)} = \frac{(aQ)(\beta)}{(aQ')(\beta)} \cdot \frac{Q'_*}{Q_*} \tag{3}$$

右辺の第一因子は次元の無い比 Q/Q' の格子の値です。これが $\beta \to \infty$ で定数に落ち着けば、二つの目盛りは極限で定数倍しか違いません。落ち着くことは定理ではなく、数値で支持されている事柄です（§03）。

例。弦張力で決めた目盛りと、二ループの Λ_{L} で決めた目盛りを比べます。$SU(2)$ では $g^2 = 4/\beta$、$b_0 = 11N/(48\pi^2)$、$b_1 = \frac{34}{3}\left(\frac{N}{16\pi^2}\right)^2$ として

$$a\Lambda_{\mathrm{L}} = (b_0 g^2)^{-b_1/(2b_0^2)}\, e^{-1/(2b_0 g^2)} \tag{4}$$

です。表 1 の $a\sqrt{\sigma}$ を (4) で割ると、表 2 になります（(4) の高次の補正は入れていない）。

計算 **表 2**　$SU(2)$ で二つの目盛りの比 $\sqrt{\sigma}/\Lambda_{\mathrm{L}}$。

β	2.25	2.30	2.40	2.475	2.55	2.60
$a\Lambda_{\mathrm{L}} \times 10^3$	6.704	5.914	4.600	3.809	3.152	2.777
$\sqrt{\sigma}/\Lambda_{\mathrm{L}}$	63.1	52.6	57.3	52.9	50.4	48.2

$\beta = 2.25$・2.30 は格子が粗く（$a\sqrt{\sigma} > 0.3$）比が上下するので、比較は 2.40 以上で行います。$\beta = 2.40$ から 2.60 の間で、比は 57 から 48 へ 16% ほど動きます。この範囲の β では「σ を固定する」と「裸の結合の Λ_{L} を固定する」は同じ目盛りを与えていません。この区別（スケーリングと漸近スケーリング）は 18-04 §連続極限と a(β) と 5-05 で扱います 物理 。

寄り道：MeV は借り物

飛ばしてよい小節です。

純粋な $SU(2)$ のヤン–ミルズ理論に当たる実験は無く、「MeV」で書くときの $\sqrt{\sigma}$ や r_0 の値は外から持ち込んだ約束です。$SU(3)$ でも同じです。Athenodorou–Teper 2020 は連続極限の $r_0\sqrt{\sigma} = 1.160(6)$ に、クォークを含む格子 QCD から出た $r_0 = 0.472(5)$ fm を当てて $\sqrt{\sigma} = 485(6)$ MeV とし、0^{++} を 1.653(26) GeV と書きます 物理 。同じ箇所で著者自身が 'Strictly speaking this is of course not possible: the pure gauge theory and QCD … are two different theories' と断っています。

比喩で言えば、隣の国の物差しを借りて測っているようなものです。正確には、純粋なヤン–ミルズ理論が予言するのは次節の次元の無い比だけで、GeV の値はそこに外から一つの約束を掛けたものです。

03

次元の無い比 — 目盛りの選び方が消える量と、a^2 の外挿

二つの格子の数を割ると、格子間隔が約分されます。

$$\frac{m_{\mathrm{lat}}(\beta)}{\sqrt{\sigma_{\mathrm{lat}}(\beta)}} = \frac{a\,m}{a\sqrt{\sigma}} = \frac{m}{\sqrt{\sigma}} \tag{5}$$

この比は、どの目盛りを選んでも同じ値です。式 (2) の Q_* がどこにも入らないからです。純粋なヤン–ミルズ理論には、繰り込んだあとに自由に選べる次元の無い径数が残りません（次

元転移、4-07 §径数が一つ消える)。そのため、理論の予言として意味を持つのは (5) のような比の極限値だけです 物理 。

有限の β では、比にも格子の補正が残ります。Wilson 作用ではその主項が a^2 に比例すると考えられ、Lucini–Teper は次の形で外挿しています（同論文の式 (5)。係数 c は本来 g^2 の冪級数ですが、定数として扱うと断っています） 物理 。

$$\frac{m(a)}{\sqrt{\sigma(a)}} = \frac{m(0)}{\sqrt{\sigma(0)}} + c\,a^2\sigma \tag{6}$$

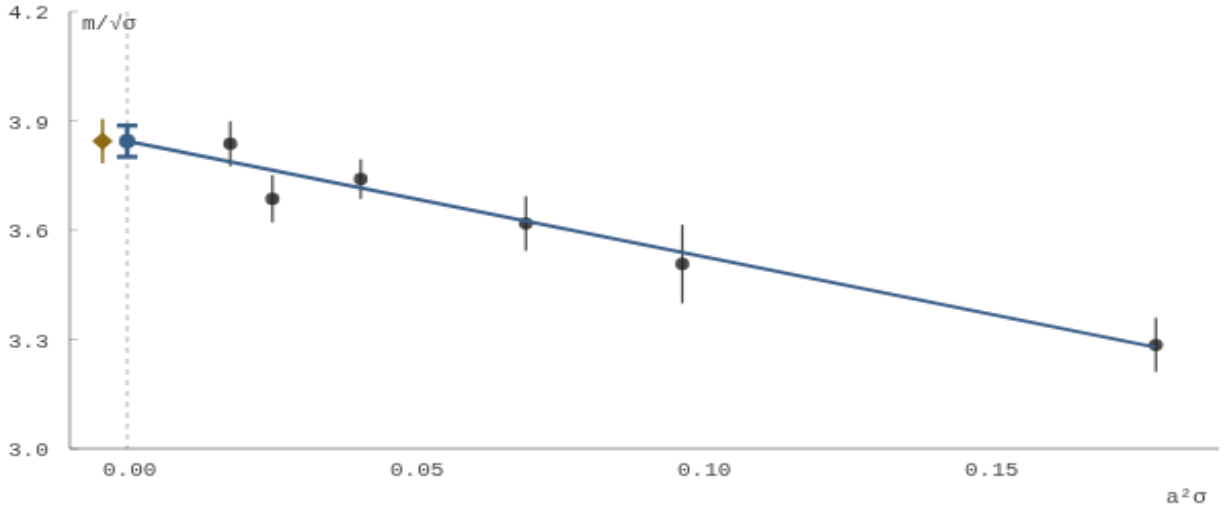
同論文の手順は、全部の点で当てはめ、当てはまりが悪ければ最も粗い点から一つずつ落とす、というものです。表 3・表 4 は表 1 の数から、この端末で当てはめをやり直したものです。

当てはめは、各点の誤差 δ_i から重みを $1/\delta_i^2$ とした最小二乗です。当てはまりの良し悪しは次の量で測ります。

$$\chi^2 = \sum_i \left(\frac{y_i - (\text{直線の値})}{\delta_i} \right)^2$$

ここで y_i は各点の $m/\sqrt{\sigma}$ です。χ^2 を自由度（点の数 − 2）で割った値が 1 前後なら、誤差の大きさと見合う当てはまりです。信頼度は、直線が正しいときにこれ以上大きな χ^2 が偶然出る確率で、小さいほど当てはまりが悪いことを示します。

図 1　縦軸は $m(0^{++})/\sqrt{\sigma}$、横軸は $a^2\sigma$（右ほど粗い格子）。ボタンで粗い側の点を落とすと、直線と切片（$a=0$ の外挿値）が変わる。菱形は同論文の表 5 の値 3.844(61)



6 点で当てはめ：切片 3.844(43)　傾き c = −3.16(53)　χ²/自由度 = 0.60

計算 この図の数値はこの端末で計算した（点は表 3、直線は表 4 の当てはめ）。

計算 **表 3**　各 β の比（誤差は m_{lat} と $a\sqrt{\sigma}$ の誤差を独立として伝播）。右端は §04 で使う「誤読」の値（m_{lat} を 1.390 に止めたとき）。

β	**2.25**	**2.30**	**2.40**	**2.475**	**2.55**	**2.60**
$a^2\sigma$	0.1790	0.0966	0.0694	0.0406	0.0253	0.0179
$m/\sqrt{\sigma}$	3.285(74)	3.507(108)	3.618(75)	3.740(55)	3.686(65)	3.837(62)
誤読	3.29	4.47	5.28	6.89	8.74	10.38

計算 **表 4**　式 (6) の重み付き当てはめ。

使った点	**切片** $m(0)/\sqrt{\sigma(0)}$	**傾き** c	χ^2**/自由度**	**信頼度**
6 点（2.25〜2.60）	3.844(43)	−3.16(53)	0.60	0.66
5 点（2.30〜）	3.855(61)	−3.5(1.3)	0.77	0.51
4 点（2.40〜）	3.849(72)	−3.3(1.8)	1.15	0.32
3 点（2.475〜）	3.84(11)	−2.9(3.6)	2.28	0.13

読み方。格子の比は 3.29 から 3.84 へ動きますが、$a^2\sigma$ の直線に乗せると切片は 3.84〜3.86 に揃います。6 点の切片の中心値は同論文の表 5 の 3.844 と一致します（誤差の付け方は同論文のほうが大きい）。比はおおむね増えて下から近づきますが、$\beta = 2.475 \to 2.55$ で一度、誤差の内で下がります 物理 。より新しい計算（Athenodorou–Teper 2021、5-08 §数値）では 3.781(23) です 物理 。

ここで言えるのは「a^2 の補正を仮定すると、この範囲の数は一つの値に揃う」ことまでです。極限が在ることの証明ではありません。測り方（変分法・弦張力の取り出し）は 5-08 で扱います。

04

「一様な隙間」の誤読 — 格子単位の隙間を止めると、物理の質量は無限大へ

ここで、読み違えやすい点に来ます。格子の上の「質量ギャップ」を、「格子単位の隙間 $m_{\mathrm{lat}}(\beta)$ が、すべての β で一定の正の数以上」と読みたくなります。有限の格子の隙間が正であることはほぼ自明で（4-11 §有限の箱と一様性）、それを β に一様にすればよさそうに見えるからです。

しかし物理の単位の質量は、格子単位の質量を格子間隔で割ったものです。

$$m_{\mathrm{phys}}(\beta) = \frac{m_{\mathrm{lat}}(\beta)}{a(\beta)}, \qquad \inf_{\beta} m_{\mathrm{lat}}(\beta) \geq c > 0 \ \text{かつ} \ a(\beta) \to 0 \implies m_{\mathrm{phys}}(\beta) \geq \frac{c}{a(\beta)} \to \infty \tag{7}$$

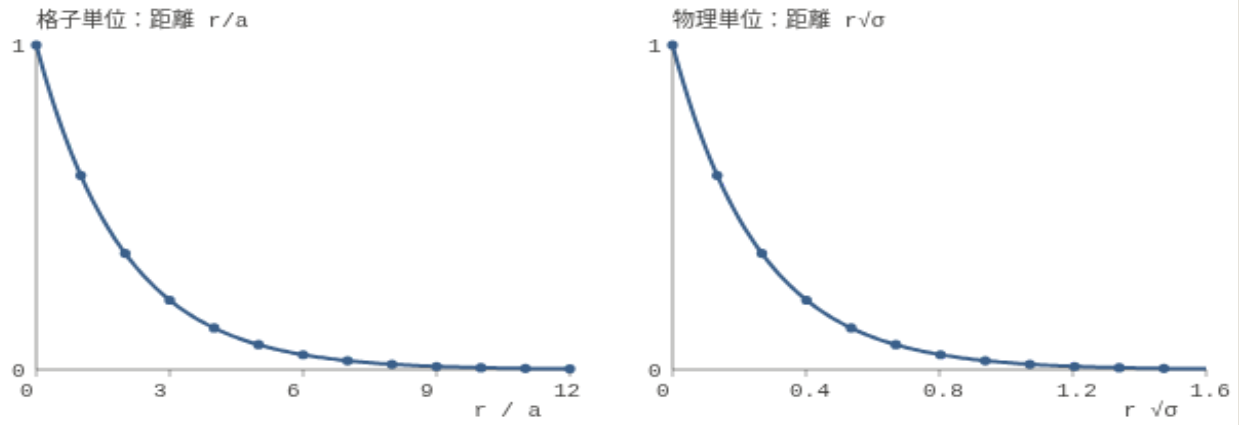
連続極限では $a \to 0$ ですから、格子単位の隙間が一様に正なら、物理の質量は無限大に行きます。相関は物理の距離で 0 の幅に縮み、離れた二点の相関は 0 になります。これは「質量が正」ではなく「何も伝わらない」極限です。

連続極限で質量が有限の正の値に残るには、反対に m_{lat} が a と同じ速さで 0 に向かう必要があります。

$$m_{\mathrm{lat}}(\beta) \sim m_\infty\, a(\beta) \ \ (\beta \to \infty), \qquad \text{つまり} \quad \xi(\beta) \to \infty \tag{8}$$

比喩で言えば、定規の目盛りを細かくしていくとき、物の長さが一定なら、物は「目盛り何個分」かが増えていくはずです。いつも目盛り 2 個分なら、物は縮んでいます。正確には、(8) は格子単位の相関長 ξ が発散し、物理の単位の相関長 $a\xi$ が一定に保たれることです（2-08 § 連続極限 のガウス鎖で厳密に見た形）。

図 2　つまみで β を選ぶと、左（格子単位の距離）では相関 $e^{-m_{\mathrm{lat}} r/a}$ の減衰が伸び、右（$1/\sqrt{\sigma}$ を単位にした物理の距離）では減衰の形がほぼ変わらない。「誤読」を押すと m_{lat} を $\beta = 2.25$ の値に止め、右の減衰が急になる



β = 2.60　a√σ = 0.134　m_lat = 0.514　ξ = 1.95　m/√σ = 3.84

計算　この図の数値はこの端末で計算した（$a\sqrt{\sigma}$ と m_{lat} は表 1。曲線は指数関数をその場で描いたもの）。

$\beta = 2.25 \to 2.60$ で格子間隔は約 3.2 分の 1 になり、m_{lat} は約 2.7 分の 1 になります。二つがほぼ同じ速さで縮むので、比はほぼ一定です。表 3 の誤読の列は $1/a$ に比例して増え続けます。なお、この範囲の ξ は 2 格子間隔に届いておらず、数値は極限そのものを見ているわけではありません 物理 。

05

格子の相関長の問題を読む — 相関長が各 β で有限、かつ $\beta \to \infty$ で発散

前節の向きを、数学の問いとしてはっきり書いたものがあります。Chatterjee の概説 "Yang–Mills for probabilists"（arXiv:1803.01950、2018）§ 5 の格子の相関長の問題（Mass gap）

です 既知 。要点を訳します。

> 任意のコンパクトな非可換 Lie 群 $G \subseteq U(N)$（$N \geq 2$）と、四次元の格子ゲージ理論の任意の無限体積極限を考える。各 $x \in \mathbb{R}^4$ に最も近いプラケット p_x を取り、W_{p_0} と W_{p_x} の相関を $f_\beta(x)$ とする。任意の $\beta > 0$ について、ある $\xi(\beta) \in (0, \infty)$ があって
>
> $$\lim_{|x| \to \infty} \frac{\log f_\beta(x)}{|x|} = -\frac{1}{\xi(\beta)} \tag{9}$$
>
> となることを示せ。さらに $\lim_{\beta \to \infty} \xi(\beta) = \infty$ を示せ。

格子の相関長の問題の β は 5-01 §作用 の $\beta' = \beta/N$ に当たりますが、$\beta \to \infty$ を問う限り違いはありません。

ここで相関は連結相関 $\langle W_{\gamma_1} W_{\gamma_2} \rangle - \langle W_{\gamma_1} \rangle \langle W_{\gamma_2} \rangle$ で、対数を取るのは指数の前に冪の補正がありうるからだと同節は書きます。続けて 'The number ξ represents the reciprocal of the mass of the lightest glueball in the theory.' とあります。

この問いは二つの部分から成ります。

1. **各 β での有限性**：$\xi(\beta) < \infty$、つまり格子単位で相関が指数関数的に減ること。これは格子単位で隙間が正であることに当たります（4-11 §相関長）。
2. **$\beta \to \infty$ での発散**：$\xi(\beta) \to \infty$。§04 の (8) の向きです。格子単位の隙間は 0 に向かわなければなりません。

前半だけなら「格子単位で一様に正」とは矛盾しません。矛盾するのは後半です。格子の相関長の問題は、前半を各 β ごとに求め、後半で一様性を明確に否定しています。

この問いが求めていないこと

この問いが**求めていないこと**も書いておきます。発散の速さは求めていません。漸近自由が予言するのは $\xi \propto e^{\beta/(4Nb_0)}$ のような形です（β は 5-01 の Wilson の規格化。5-05 の一ループの式 $a \propto e^{-\beta/(4Nb_0)}$ の逆数で、Chatterjee の β' で書けば $e^{N\beta'/(4Nb_0)} = e^{\beta'/(4b_0)}$）。比 $m/\sqrt{\sigma}$ も文面に出てきません。極限の理論が在ることや、それが Osterwalder–Schrader の公理（4-10）を満たすことも別の問いです。格子の相関長の問題が示されても、Clay の問題文（0-03 §質量ギャップ）の質量ギャップがそのまま出るわけではありません。

例。表 1 の ξ は β とともに 0.72 から 1.95 へ伸びています。これは後半の向きと合う数値ですが、有限個の β で ξ が伸びることは、極限での発散の証明にはなりません 物理 。

06

連続の弦張力の問題と比の出どころ — Wilson ループで目盛りを決める、もう一つの書き方

同じ §5 の連続の弦張力の問題（Continuum limit）は、目盛りの決め方をもう一つ与えています[既知]。長方形の Wilson ループ $W_{R,T}$（5-01 §プラケットと Wilson ループ）について、$\beta \to \infty$ で $\epsilon(\beta) \to 0$、$c(\beta) \to \infty$ となる列と、0 でない定数 d があって、任意の R, T で

$$\log \langle W_{R/\epsilon,\, T/\epsilon} \rangle = -c\,(R+T) - d\,RT + o(1) \tag{10}$$

となることを示せ、という問いです。$o(1)$ は $\beta \to \infty$ で 0 に行く項です。RT は縮めたループの面積で、d が連続理論の弦張力に当たる、と同節は書きます。$R+T$ は縮めたループの周長に比例する量です（周長の半分。係数 2 は c に吸収されます）。ここの d は面積の係数で、時空の次元ではありません。

(10) では、$\epsilon(\beta)$ は「その目盛りで見ると Wilson ループの面積の係数が一定になる」ものが存在する、とだけ求められています。つまり弦張力で目盛りを決める書き方です。§5 の説明の段落のほうは相関長で目盛りを決めます。連続の弦張力の問題は格子の相関長の問題を前提にしていません。どちらの $\epsilon(\beta)$ も、存在は示されていません。

もう一つ注意があります。周長の項 $c(R+T)$ について、Chatterjee は同じ節で 'it is not clear to me whether the renormalization term c(R + T) is indeed necessary. It seems entirely possible that the limit in (5.2) holds without the renormalization term.' と書いています。周長の項を引くことは、この問いの立て方の一つの提案です。

二つの問いを同じ目盛りで組む

比 $m/\sqrt{\sigma}$ は、二つの問いを**同じ** $\epsilon(\beta)$ で組んだときに現れます。連続の弦張力の問題が成り立ち、さらに $\epsilon(\beta)\,\xi(\beta) \to \ell \in (0, \infty)$ だとします。物理の相関長は $\epsilon\xi \to \ell$、物理の質量は $1/\ell$、弦張力は d ですから、

$$\frac{m}{\sqrt{\sigma}} = \frac{1}{\ell\sqrt{d}} = \lim_{\beta\to\infty} \frac{1/\xi(\beta)}{\sqrt{\sigma_{\mathrm{lat}}(\beta)}}, \qquad \sigma_{\mathrm{lat}}(\beta) \approx d\,\epsilon(\beta)^2 \tag{11}$$

となり、ϵ は約分されて消えます。§03 の (5) を極限で書いたものです。この組み立ては Chatterjee の文面には無く、二つの問いの読み合わせです。二つの極限が同じ ϵ で同時に存在すること自体が仮定である点に注意が要ります。

例。(11) の右辺の格子の値が表 3 の $m/\sqrt{\sigma}$ の行です。$\beta = 2.60$ では $(1/1.95)/0.134 \approx 3.84$ です。

07

何について一様か — 体積・格子単位・物理単位の三つの「一様」

「一様な隙間」という言葉は、何について一様かを言わないと意味が定まりません。質量ギャップの議論には、少なくとも三つの「一様」が出てきます。

何について一様か	式の形	連続極限での意味	どこで出てくるか
体積 L について	$\inf_L m(L) \geq c > 0$	必要。箱を広げても隙間が閉じない	問題文 §6.5（下の引用）、4-11 §有限
β について、格子単位で	$\inf_\beta m_{\mathrm{lat}}(\beta) \geq c > 0$	(7) により物理の質量が無限大。求めるものの反対	強結合の評価が与える形（β の小さい範囲）
β について、物理単位で	$\inf_\beta m_{\mathrm{lat}}(\beta)/a(\beta) \geq c > 0$	求めるもの。$a(\beta)$ の選び方込みで意味を持つ	格子の相関長の問題と連続の弦張力の問題を組んだ形（§06）

Clay の問題文 §6.5 は 'New ideas are needed to prove the existence of a mass gap that is uniform in the volume of space-time.' と書きます 既知 。直後の文は 'Such a result presumably would enable the study of the limit as T4 → R4' で、コンパクトな時空 T^4 から $\mathbb{R}^4$ への極限を念頭に置いた文です。ここの一様は一行目、体積についての一様です。三行目とは別の要求で、両方が要ります。

二行目の形の定理は在ります。Shen–Zhu–Zhu は $SU(N)$ で β が十分小さいとき（四次元では、逆結合を $N\beta$ とする同論文の規格化で $\beta < 1/48$。この本の Wilson の β では $\beta < N^2/48$ ：5-01 表 4）に無限体積の測度の一意性と相関の指数減衰を示しています（要旨） 既知 。より古くは Osterwalder–Seiler 1978 が、小さい β で面積則を厳密に示しました（Chatterjee 2018 §4 の本文による） 既知 。同論文の要旨は、強結合（小さい β）で無限体積の極限が在り、β について解析的であることも示したと述べます（本文は未読）。これらは β を小さい範囲に固定した結果で、格子間隔を止めたままの世界の定理です。連続極限（$\beta \to \infty$）とは反対の側に居ます（5-02 §管、5-04）。

これらの評価の定数は $\beta \to \infty$ へは延びず、連続極限で問う「目盛りを細かくしたときの振る舞い」には届きません。

有限群のゲージ理論では、大きい β でゲージ不変な量の相関の指数減衰が証明されています（Adhikari–Cao、要旨） 既知 。これは格子の相関長の問題の前半の形が大きい β で成り立つ例ですが、群が連続でないので、後半の $\xi \to \infty$ を求める問いとは別の場面です（5-10）。

08

固定しただけでは足りない — 自明な極限の三つの型

目盛りを一つ固定して $\beta \to \infty$ とすれば、何かの極限は取れそうに見えます。けれども、取れた極限が求める理論である保証はありません。うまくいかない型を三つ並べます。

型 1：相関長が伸びない

$\xi(\beta)$ が有界なら、どんな $\epsilon(\beta) \to 0$ を選んでも $\epsilon\xi \to 0$ です。物理の相関長は 0、質量は無限大で、§04 の誤読の世界そのものです。極限に残るのは、どの二点も相関しない（白色雑音のような）場です。

型 2：相関長は伸びるが、比が 0 か無限大に行く

二つの量の発散の速さが違うと、一方で目盛りを決めたとき、もう一方は 0 か無限大に逃げます。三次元のコンパクトな $U(1)$ の格子理論では、Göpfert–Mack がすべての β で面積則を証明しました（Chatterjee 2018 §4 の本文による）既知 。それでも連続極限は自由なスカラー場で、質量の単位で見た弦張力は無限大へ行く、と同論文の要旨は述べます（Villain 作用。本文は未読）既知 。格子のどの β でも閉じ込めているのに、比 $m/\sqrt{\sigma}$ は 0 に向かう例です。

型 3：比は有限だが、ガウスに潰れる

相関長を固定して極限が取れても、それが自由場（ガウス測度）なら、非自明な理論ではありません。四次元の Ising 型の模型と φ^4（スカラー場に四次の自己相互作用を足した模型。7-03）では、臨界点付近のスケーリング極限がガウス的であることが示されています（Aizenman–Duminil-Copin 2021）既知 。問題文が「非自明な」理論を求める理由がここにあります（0-03 §非自明な、7-08）。

三つをまとめると、求める極限の条件は次の組になります。

$$\xi(\beta) \to \infty, \qquad \frac{m_{\mathrm{lat}}}{\sqrt{\sigma_{\mathrm{lat}}}} \to R_\infty \in (0, \infty), \qquad \text{極限はガウスでない} \tag{12}$$

二つ目は閉じ込めを使う書き方で、問題文そのものは閉じ込めを要求していません（4-11 §定義）。弦張力の代わりに r_0 など別の目盛りを使っても、(12) の二つ目は「二つの次元を持つ量の比が有限で正」の形になります。数値の側では、表 3・表 4 が二つ目を $SU(2)$ で支持しています 物理 。

```
09
```

極限の順序 — 先に体積、次に β。数値の側の近道

問題文の理論には二つの極限が要ります。体積 $L \to \infty$ と、格子間隔 $a \to 0$（四次元では $\beta \to \infty$ と連動して）です（5-01 §第 5 部の地図）。格子の相関長の問題は、各 β で**先に**無限体積の極限を取り、そのあとで $\beta \to \infty$ を考える順序で書かれています。

$$\xi(\beta) = \xi\big(\lim_{L\to\infty} \mu_{L,\beta}\big), \qquad \text{そのあと } \beta \to \infty \tag{13}$$

一つ目の極限でさえ、Chatterjee 2018 §3 は 'the uniqueness (or non-uniqueness) is in general unknown for lattice gauge theories in dimensions higher than two when β is large.' と書きます [既知]。格子の相関長の問題が「任意の無限体積極限」と言うのはこのためです。

数値の計算は別の道を通ります。表 1 の右端の列 $L\,a\sqrt{\sigma}$ は、格子の一辺 L（格子点の数）を物理の単位で測った箱の一辺です。

格子を細かくするたびに格子点の数を増やし、物理の箱の大きさをほぼ $3.2/\sqrt{\sigma}$ に保っています。つまり数値の外挿は「物理の体積を固定して $a \to 0$」という道です。同論文は、閉じた電束管の質量から弦の補正 $\pi/(3L)$ を引いて弦張力を出す式（同論文の式 (4)）が使える長さとして、$aL\sqrt{\sigma} \geq 3$ の格子だけを使います。グルーボールの有限体積効果もこの大きさで見えなくなる、と同論文は書いています [物理]。

2026-11 に公開された構成も、体積を止めて a → 0 を取る道を通り、そのあと体積の部分列で極限を取っています。二つの極限の順を入れ替えてよいとは言っていません（8-05）。

この道と (13) の道が同じ値に着くこと、つまり二つの極限の入れ替えは、数値で確かめる事柄であって定理ではありません。入れ替えには箱の大きさに一様な評価が要り、それが §07 の表の一行目の要求です。

この本の第 23 部は、ここで立てた向き（格子単位の隙間は 0 に向かうべきこと）を出発点に使います。そこで宣言する定義との対応は 23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定 にあります。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	格子の数は格子間隔を単位にした次元の無い数で、物理の単位は一つの量を固定して付くこと（式 (1)〜(3)、定義の整理）。格子単位の隙間が β に一様に正なら、$a \to 0$ で物理の質量は無限大へ行くこと（式 (7)、初等的な帰結）。二つの問題（Chatterjee の Problem 5.1・5.2）の文面、周長項についての Chatterjee の留保、無限体積極限の一意性が大きい β で未知であること（Chatterjee 2018 の本文） 既知 。二つの問いを同じ ϵ で組めば比 $m/\sqrt{\sigma}$ が (11) の形で現れること（仮定のもとでの代数）。
数値の水準	$SU(2)$ の $m/\sqrt{\sigma}$ が a^2 の外挿で 3.84〜3.86 に揃うこと、$\sqrt{\sigma}/\Lambda_{\mathrm{L}}$ が $\beta = 2.40$〜2.60 で 16% 動くこと、数値の箱が物理の大きさでほぼ一定に保たれていること（Lucini–Teper の表をこの端末で計算し直したもの） 物理 計算 。$O(a^2)$ の形は仮定で、弦張力の取り出しには弦の補正の仮定が入る。
言えていない	格子の相関長の問題と連続の弦張力の問題のどちらも未解決で、$\xi(\beta) \to \infty$ も、$m/\sqrt{\sigma}$ の極限の存在も、極限の順序の入れ替えも示されていない。三次元のコンパクトな $U(1)$ の連続極限についての記述は要旨の水準で、本文は確かめていない。この章は連続極限の構成についても質量ギャップについても何も示していない。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
格子の相関長の問題と連続の弦張力の問題（Problem 5.1・5.2）、§3 の一意性の文、§4 の Göpfert–Mack の記述、周長項の留保	一次（本文）	S. Chatterjee, "Yang–Mills for probabilists", arXiv:1803.01950（2018。PDF 本文 §3〜§5）
$SU(2)$ の $a\sqrt{\sigma}$・$am(0^{++})$・格子の大きさ、外挿式 (6)、連続値 3.844(61)、$aL\sqrt{\sigma} \geq 3$	一次（本文）	B. Lucini, M. Teper, JHEP 0106 (2001) 050, arXiv:hep-lat/0103027（表 1・式 (4) (5)・表 5）
表 1 の ξ・$L\,a\sqrt{\sigma}$、表 2〜4、図 1・図 2 の数値	計算	python3（重み付き最小二乗・χ^2 の信頼度・二ループの式 (4)）。スクリプトと出力は本書の検討の記録に保存
'uniform in the volume of space-time'	一次（本文 §6.5）	A. Jaffe, E. Witten, "Quantum Yang–Mills theory"（Clay の問題文）§6.5
弦張力を固定する処方	要旨	M. Creutz, Phys. Rev. D 21 (1980) 2308
r_0 の定義 $F(r_0)r_0^2 = 1.65$	要旨	R. Sommer, Nucl. Phys. B 411 (1994) 839, arXiv:hep-lat/9310022
$SU(3)$ の $r_0\sqrt{\sigma}$・$\sqrt{\sigma} = 485(6)$ MeV・著者の断り	一次（検査済みの材料による本文照合）	A. Athenodorou, M. Teper, JHEP 11 (2020) 172, arXiv:2007.06422（式 (8) (9)・表 17・§5.2）

もの	種別	出典・道具
$SU(2)$ の $m(0^{++})/\sqrt{\sigma} = 3.781(23)$	一次（検査済みの材料による本文照合）	A. Athenodorou, M. Teper, JHEP 12 (2021) 082, arXiv:2106.00364（表 23）
三次元コンパクト $U(1)$ の面積則と連続極限	要旨（連続極限・Villain 作用。INSPIRE の要旨）・本文は未読	M. Göpfert, G. Mack, Commun. Math. Phys. 82 (1982) 545–606（年は Crossref の発行年。INSPIRE は 1981。面積則は Chatterjee 2018 §4 の本文でも確認）
四次元 Ising 型・φ^4 のスケーリング極限がガウス的	要旨	M. Aizenman, H. Duminil-Copin, Ann. Math. 194 (2021) 163, arXiv:1912.07973
小さい β での面積則・無限体積の極限	要旨（無限体積の極限の存在と解析性・Wilson の閉じ込めの評価。INSPIRE の要旨）・面積則は Chatterjee §4 の記述でも確認	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440
$SU(N)$ の強結合での一意性と指数減衰（四次元で $\beta_{\mathrm{SZZ}} < 1/48$）	要旨	H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, arXiv:2204.12737
有限群の弱結合での相関の指数減衰	要旨	A. Adhikari, S. Cao, arXiv:2202.10375（Ann. Probab. 53 (2025)）

次に読む章：5-10 有限群の格子ゲージ理論（大きい β で相関が減るのに、連続極限の向きには進まない例）。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 5 部 格子ゲージ理論 有限群

有限群の格子ゲージ理論 — 弱結合の指数減衰は定理だが、そこは連続極限の反対側

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 辺に有限群の元を置くと、弱結合では辺が凍りつき、作用の隙間 Δ_G を払う欠陥だけが残ります。そこから Wilson ループの一次の式（Chatterjee・Cao）と相関の指数減衰の定理（Adhikari–Cao）が出ます。その減衰は相関長が 0 に向かう側、つまり連続極限の反対側の話です。

前提となる章 — 5-02。道具：5-01・1-08・4-11。§07 は 5-09 の後だと短く読めます。

先に言うこと — 定理はすべて格子間隔を固定した有限群の理論のものです。連続な群の質量ギャップと連続極限について、この章は何も示していません。「弱結合で閉じ込めない」は物理の見方で、引く定理の主張ではありません（§08）。

この章の順序

1. 群を有限にする — 辺の値だけが飛び飛びになる
2. 凍りつく辺 — 最小の欠陥と Δ_G
3. 欠陥の形は次元で決まる — 面積則と周長則
4. 途中で線が折れる — 双対性と一次転移（表 1）
5. 周の長さだけで決まる — Wilson ループ（図 1・表 2）
6. 相関の指数減衰 — Adhikari–Cao（図 2・表 3）／寄り道：非可換な欠陥は絡み目になる
7. 連続極限の反対側 — 相関長は 0 へ
8. 三つの「ギャップ」 — 隙間はあるが閉じ込めない（表 4）
9. SU(2) の部分群で近づけても — $\Delta_G \to 0$

01

群を有限にする — 同じ格子で、辺の値だけが飛び飛びになる

辺に置く群を有限群 G に替えても、格子・プラケット・ゲージ変換・Wilson ループの定義はそのままです（5-01 §02）。辺ごとの積分は $|G|$ 個の元の平均になります。作用には忠実なユニタリ表現 ρ（次元 d。$g \neq 1$ なら $\rho(g) \neq I$）の指標 $\chi = \operatorname{tr}\rho$ を使い、プラケット p を一周する積を σ_p とします。

$$S_\Lambda(\sigma) = \sum_p \operatorname{Re}\big(\chi(1) - \chi(\sigma_p)\big), \qquad \mu_{\Lambda,\beta}(\sigma) = \frac{1}{Z_{\Lambda,\beta}}\, e^{-\beta S_\Lambda(\sigma)} \tag{1}$$

（Adhikari–Cao (1.2)(1.3)）既知 。$\chi(g)$ は絶対値 1 の固有値 d 個の和なので各項は 0 以上で、0 になるのは $\sigma_p = 1$ のときだけです。

例。$\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ では重みが $e^{\beta \sum_p \sigma_p}$ に比例する Ising 格子ゲージ理論で、Chatterjee（2020）は Wegner（1971）の定義した最初の格子ゲージ理論としています 既知 （2-09）。$\mathbb{Z}_N$ は角度を $2\pi/N$ の倍数に制限した $U(1)$ です。$SU(2)$ の有限部分群 $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$（四元数の単位）と、$\bar{T}$・$\bar{O}$・$\bar{I}$（正四面体・正八面体・正二十面体の回転群〈$SO(3)$ の部分群〉を $SU(2)$ に引き戻した群。位数 24・48・120。1-12 §08）では $\chi = \operatorname{tr}$、Wilson の規約とは $\beta_W = 2\beta$ です。

有限群にはリー環が無く、単位元に近い元もありません。5-01 §05 の $U = e^{iaA}$ から始まる古典的な連続極限は無く、同じゲージの構造を持つ格子の模型として読みます。

02

凍りつく辺 — 最小の欠陥と、作用の隙間 Δ_G

β が大きいと、重みはすべてのプラケットが単位元の配位を強く好みます。箱の上でそうなる配位は純粋なゲージ（$\sigma_{(x,y)} = h_x h_y^{-1}$）だけで、ゲージを除けば「すべての辺が単位元」の一つです。弱結合の理論はそのまわりの小さな揺らぎで、これを「辺が凍りつく」と言います。

以下、格子の次元を D と書き、d は表現の次元に限ります。最も安い揺らぎは、辺を一本だけ $g \neq 1$ に変えることです。D 次元の格子でその辺を含むプラケットは $2(D-1)$ 枚で、積はどれも $g^{\pm 1}$ の共役です。$\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ なので

$$\Delta S = 2(D-1)\operatorname{Re}\big(\chi(1) - \chi(g)\big) \;\geq\; 2(D-1)\,\Delta_G, \qquad \Delta_G := \min_{g \neq 1} \operatorname{Re}\big(\chi(1) - \chi(g)\big) \tag{2}$$

です。$\Delta_G > 0$ は ρ が忠実であることと同値です（Cao §1.2）既知 。例：四次元の $\mathbb{Z}_2$ は $\Delta_G = 2$ で、この欠陥の重みは $e^{-12\beta}$。この 12 が §05 の定理に現れます。

$U(1)$ で辺を $e^{i\theta}$ にすると増分は $\approx (D-1)\theta^2$ でいくらでも小さく、長い波（光子）が安く作れます（5-06 §03）。Δ_G は 4-11 の質量ギャップとは別物です。

03

欠陥の形は次元で決まる — 点・輪・閉じた面と、面積則・周長則

$\mathbb{Z}_2$ で γ を縁とする面（プラケットの集まり）P を取ると、内側の辺は二回ずつ現れて消えます（離散版の Stokes。P の存在は Chatterjee 2020 の補題 3.1）既知 。

$$W_\gamma = \prod_{e\in\gamma}\sigma_e = \prod_{p\in P}\sigma_p = (-1)^{\#\{p\in P:\,\sigma_p=-1\}} \tag{3}$$

ここで双対格子を使います。各 D 次元立方体の中心を頂点とする格子で、元の格子の k 次元の胞体（辺・面・立方体…）は双対格子の $D-k$ 次元の胞体と一対一に対応します。同論文の補題 3.3 では、負のプラケットは「渦」に分かれ、各渦の双対は閉じています。プラケット（$k=2$）の双対は $(D-2)$ 次元の胞体なので、渦は二次元で点、三次元で閉じた輪、四次元で閉じた面です 既知 。符号を変えるのは γ と絡む渦だけで（補題 3.2）、その数 N が平均 μ の Poisson 分布なら $\mathbb{E}[(-1)^N] = e^{-2\mu}$ です（1-08・17-02 §06）。

例。二次元の自由境界ではプラケットが独立で $\mathbb{E}\sigma_p = \tanh\beta$ なので、面積 A のループで

$$\langle W_\gamma\rangle = (\tanh\beta)^A, \qquad \sigma_{\text{lat}} = -\ln\tanh\beta > 0 \quad (\text{すべての } \beta) \tag{4}$$

です 既知 。二次元では有限群でもすべての β で面積則です（一般の群は 7-02 §03）。三・四次元の大きい β では渦は小さく、γ と絡むのは近くのものだけで、数は周に比例します（周長則）物理 。小さい β での面積則は強結合展開の定理です（5-02 §03）既知 。

04

途中で線が折れる — 双対性と四次元 $\mathbb{Z}_2$ の一次転移

Chatterjee 2020 の定理 4.1 は、四次元 $\mathbb{Z}_2$ の分配関数を双対格子の同じ理論で書き、強弱を入れ替える λ に結合を移します 既知 。

$$\lambda(\beta) = -\tfrac{1}{2}\log\tanh\beta, \qquad \lambda(\beta_{\text{sd}}) = \beta_{\text{sd}} \iff \beta_{\text{sd}} = \tfrac{1}{2}\ln\bigl(1+\sqrt{2}\bigr) = 0.44069 \tag{5}$$

(5) の数値は 計算 。双対性は転移点を転移点に移すので、転移がちょうど一つならそれは自己双対点に来ます 既知 。Wegner（1971）の要旨によれば、単純立方格子の Ising 模型の双対は四スピン積（プラケット）の模型、つまり三次元の $\mathbb{Z}_2$ ゲージ理論です 既知 。

一次転移とは、プラケットの平均のような量が β の一点で跳ぶ転移です。β を上げる列と下げる列の食い違い（履歴）がその兆候になります。四次元では Creutz–Jacobs–Rebbi（1979）が一次転移を数値で報告し、$\mathbb{Z}_N$ では $N \geq 5$ で一次でない転移が二つになり一方は N とともに $\beta \to \infty$ へ動く、と報告しました 物理 。

この端末でも 8^4 の周期格子で熱浴法を走らせました（β を上げる列は乱雑な開始、下げる列は全辺 $+1$ の開始、各 β 200 掃引の後半の平均）。主項 $1 - 8e^{-12\beta}$ は、四本の辺のどれかに §02 の欠陥が乗る確率 $\approx 4e^{-12\beta}$ から出ます。

計算 表 1　四次元 $\mathbb{Z}_2$、8^4 のプラケットの平均（抜粋）

β	上げる列	下げる列	$\tanh\beta$	$1 - 8e^{-12\beta}$
0.40	0.4214	0.4205	0.3799	0.9342
0.44	0.5025	0.9117	0.4136	0.9593
0.46	0.9206	0.9422	0.4301	0.9680
0.60	0.9928	0.9930	0.5370	0.9940

$\beta = 0.43$〜0.45 で二つの列が食い違い（0.44 で差 0.41）、その区間は自己双対点をまたぎます 計算 。小さな格子の短い列で、転移の次数（一次か、跳びの無い転移か）を判定する力はありません（5-07。$U(1)$・$SU(2)$ の同じ比べは 5-06 §04）。

05

周の長さだけで決まる — 弱結合の Wilson ループの一次の式

Chatterjee（2020）の定理 1.1：ℓ を γ の辺の数、ℓ_0 を角の辺の数（γ の別の辺と同じプラケットに乗る辺。長方形なら 8 本）とすると、ある β_0 以上で、普遍定数 C_1, C_2 により 既知

$$\left| \langle W_\gamma \rangle_\beta - e^{-2\ell e^{-12\beta}} \right| \leq C_1 \left(e^{-2\beta} + \sqrt{\ell_0/\ell} \right)^{C_2} \tag{6}$$

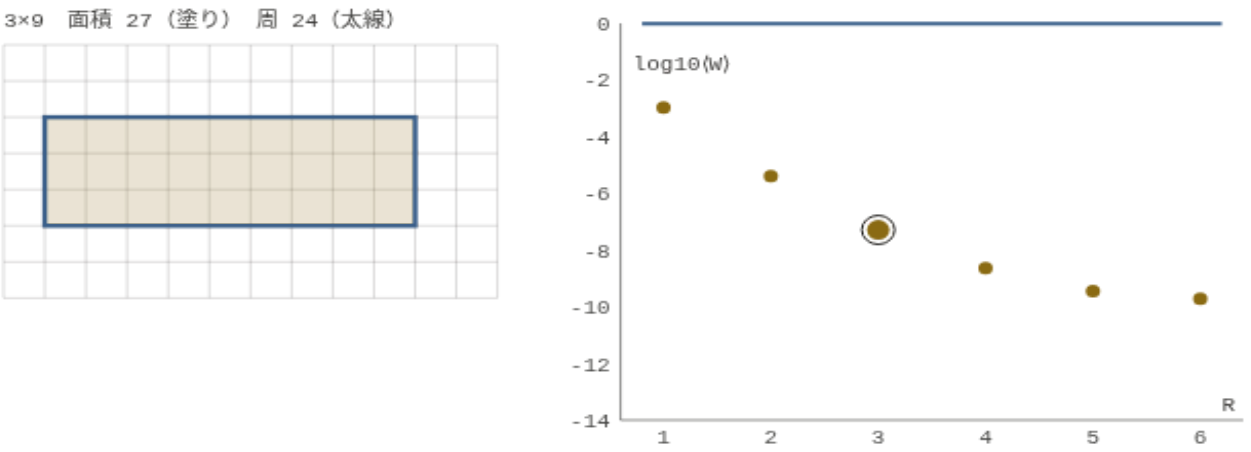
論文は “Nontrivial behavior happens if and only if ℓ is like a constant multiple of $e^{12\beta}$” と読みます。各辺が確率 $\approx e^{-12\beta}$ で §02 の欠陥の中心になり符号を一回変える、その数が Poisson なら (6) の主項です（§03） 物理 。

Cao（2020）は任意の有限群に広げました。その定理 1.2.1 は単一の自己回避ループ γ についてのもので、条件は $\beta \geq (1000 + 14 \log|G|)/\Delta_G$ と $\|A_\beta\|_{\mathrm{op}} < 1$ です。その下で主項は

$$\langle W_\gamma \rangle_\beta \approx \sum_{i=1}^{d} e^{-\ell\, r_\beta (1 - \lambda_i(\beta))}, \qquad r_\beta = \sum_{g \neq 1} e^{-6\beta\, \mathrm{Re}(\chi(1) - \chi(g))} \tag{7}$$

で、λ_i は欠陥の運ぶ $\rho(g)$ を欠陥の重みで平均した行列 A_β の固有値、$\|A_\beta\|_{\mathrm{op}}$ はその作用素ノルム（単位ベクトルを伸ばす倍率の最大）です 既知 。後者の条件のため、$\mathbb{Z}_2$（$A_\beta=-1$、ノルム 1）はこの定理に直接は入りません（Cao の注意 1.2.3） 既知 。それでも主項の形は、$\mathbb{Z}_2$ の $r_\beta=e^{-12\beta}$・$\lambda=-1$ を入れると (6) と一致します 計算 。主項は周の長さだけの関数で、同じ周なら細長くても正方形でも同じ値です。二次元の (4) は面積だけの関数でした。

図 1　周 24 の長方形 $R\times(12-R)$。β・R・「動かす」で、二次元 (4)（点）と四次元の主項 (6)（横線）の $\log_{10}\langle W\rangle$ が変わる



β = 0.60、3×9：二次元 10^-7.29、四次元の主項 0.9648

計算 この図の数値はこの端末で計算した（(4)(6) をその場で計算）。例：$\beta=0.7$ の 1×11・3×9・6×6 で二次元は 3.9×10^{-3}・1.2×10^{-6}・1.3×10^{-8}、四次元はどれも 0.989。定理 1.1 が保証するのは十分大きい β（β_0 以上。値は論文に明示されない）です。0.4407 は転移の目安で、それより下（破線）では主項は形としても当てはまりません。

計算 表 2　四次元 $\mathbb{Z}_2$、8^4 の Wilson ループ（3000 掃引・ジャックナイフ）

β	$R\times T$	$\langle W\rangle$	$-\ln W$／面積	$-\ln W$／周
0.40	1×1	0.42137(39)	0.864	0.216
0.40	2×3	0.00660(18)	0.837	0.502
0.50	1×1	0.97190(20)	0.0285	0.00713
0.50	3×3	0.91281(59)	0.0101	0.00760

$\beta=0.40$ では面積で割った値が、$\beta=0.50$ では周で割った値がそろいます 計算 。後者は (6) の $2e^{-6}=0.00496$ の約 1.5 倍で、転移のすぐ上では角や大きな渦の補正が効きます。

```
06
```

相関の指数減衰 — Adhikari–Cao の定理と Δ_G

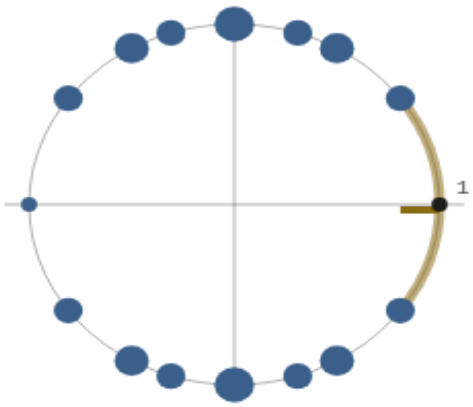
離れた観測量が独立に近づくこと（相関の減衰）は、弱結合の可換な有限群では先行の結果があり（$\mathbb{Z}_2$ は Chatterjee 2020 §5、ほかに Adhikari–Cao §1.1 が挙げる Seiler・Forsström の結果）、非可換を含めて四次元で示したのが Adhikari–Cao（Ann. Probab. 2025）です。B_1, B_2 を ℓ^∞ 距離（各座標の差の最大）で L 以上離れた長方形とし、$|B|$ を長方形 B に含まれるプラケットの数とします。f_i は B_i の中のループのホロノミー（ループに沿った辺の元の積 σ_γ。5-01 §02）の関数で、各引数について共役不変（$f(h^{-1}gh) = f(g)$）なものです。Wilson ループの任意の関数を含みます。$\|f\|_\infty = \max|f|$、Cov は共分散です（1-08）。$\beta \geq (114 + 4\log|G|)/\Delta_G$ なら、どの有限の箱でも 既知

$$\left|\mathrm{Cov}(f_1, f_2)\right| \;\leq\; 4\left(4\cdot 10^{24}|G|^2\right)^{|B_1|+|B_2|}\,\|f_1\|_\infty\|f_2\|_\infty\, e^{-(\beta/2)\Delta_G\,(L-1)} \tag{8}$$

箱に依らない評価です。定数は観測量の台（B_1, B_2）の大きさについて指数的に増えますが、L には依りません。著者たちは “can be interpreted as showing the existence of a mass gap in the setting of finite (non-Abelian) gauge groups at large β” と書きます（小さい β は 5-04 §07）。証明は、独立な二つの配位を領域で入れ替える写像が測度を保つことを使い、共分散を「欠陥が B_1 から B_2 までつながる確率」で抑えます。

条件と速さは Δ_G で決まります（$\mathbb{Z}_N$ で $1-\cos(2\pi/N)$、$SU(2)$ の部分群で $2-2\cos\theta_{\min}$）。

図 2　群の元の固有値を単位円に置く。ボタンで群を選ぶと、1 に最も近い角 $\theta_{\min}$（弧）と $1-\cos\theta_{\min}$（太線）、定理の条件が変わる



Ī　Δ_G = 0.381966

Ī（位数 120）：θ_min = 36°、Δ_G = 0.3820、Adhikari–Cao の条件 β ≥ 348.59（β_W ≥ 697.18）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（群を積で閉じるまで作り、固有値の角と Δ_G を数えた。表 3 と同じ）。

計算 表 3　Δ_G と定理の β の条件（$SU(2)$ の部分群は $\chi = \mathrm{tr}$）

群	位数	$\theta_{\min}$	Δ_G	Adhikari–Cao	同 β_W

群	位数	$\theta_{\min}$	Δ_G	Adhikari–Cao	同 β_W
$\mathbb{Z}_2$	2	180°	2	58.39	–
$\bar{T}$	24	60°	1	126.71	253.42
$\bar{O}$	48	45°	0.5858	221.04	442.09
$\bar{I}$	120	36°	0.3820	348.59	697.18

群が細かいほど Δ_G は小さく条件は $1/\Delta_G$ で大きくなります（$\mathbb{Z}_N$ で $\approx 2\pi^2/N^2$）。Cao 2020 は自身の (7) の条件を “very loose” と書いています（Adhikari–Cao の閾値はこれより一桁ほど小さい）。

寄り道：非可換な欠陥は絡み目になる

飛ばしてよい小節です。

Adhikari–Cao §1.2 によれば、可換なら離れた欠陥は独立に現れますが、非可換では絡んだ二つの欠陥の輪はどれほど離れても分解しません 既知 。欠陥の運ぶ元は別の欠陥を回ると $g \mapsto hgh^{-1}$ と変わるからです（Q_8 で $jij^{-1} = -i$ 計算 ）。同論文は非可換な場合を “do not (as of yet) admit a cluster expansion” と書きます。

07

連続極限の反対側 — 相関長は 0 へ向かう

(8) の定数は観測量の台の大きさに依りますが L には依らないので、(8) は相関長の上界を与えます（4-11 §07）。

$$\xi(\beta) \;\le\; \frac{2}{\beta\,\Delta_G} \xrightarrow{\beta\to\infty} 0 \tag{9}$$

既知 （(8) からの帰結。4-11 §07 の定義で）

条件ちょうどの β で、上界は $\mathbb{Z}_2$ で 0.0171、$\bar{I}$ で 0.0150 格子間隔です。(7) の主項が 1 から離れる周の長さ $1/\big(r_\beta(1-\lambda)\big)$ は、Cao の条件ちょうどの β で $\bar{T}$ が $10^{2721.1}$、$\bar{I}$ が $10^{2780.1}$ です 計算 。条件は緩いので大事なのは向きで、弱結合の有限群は相関が格子一つ分も届かない凍った格子です。

5-09 §05 の格子の相関長の問題（Chatterjee 2018 の Problem 5.1、arXiv:1803.01950）は、四次元の非可換なコンパクト群で、各 β で $\xi(\beta) < \infty$、かつ $\beta \to \infty$ で $\xi \to \infty$ を求めます。有限群は大きい β で前半を満たし、後半とは正反対の $\xi \to 0$ に向かいます 既知 。5-09 §08 の「型 1」で、物理の質量は無限大です。

08

「隙間はあるが閉じ込めない」の正確な形 — 三つの「ギャップ」

有限群の理論は「ギャップはあるが閉じ込めない」例として引かれます。この「ギャップ」には意味が三つあります。

既知 表 4 「ギャップ」の三つの意味と、弱結合の有限群での状態

意味	中身	弱結合の有限群
(a) 問題文の隙間	連続・無限体積の理論のスペクトルの隙間（4-11）	連続の理論が無く、当てはまらない
(b) 強い形	任意の境界条件の下での指数減衰（強い減衰の定義〈Chatterjee 2021 の定義 2.3〉）	示されていない（一様な減衰から面積則への定理〈Chatterjee 2021 の定理 2.4〉は連結な群が仮定で、有限群は字義どおりには入らない）
(c) 弱い形	決まった測度での共分散の減衰（(8) の形）	定理（Adhikari–Cao）

Chatterjee（2021）の一様な減衰から面積則への定理は、群 G を $U(n)$ の閉じた連結な部分群とし、中心に非自明に作用する表現について、(b) から面積則を導きます 既知 。自明でない有限群は連結でないので、この仮定には字義どおりには入りません。それでも同論文 p.8 は有限群の理論を “believed to be ‘gapped’ … not confining at large β” の例に挙げ、これが一様な減衰から面積則への定理と矛盾しない理由を、そこでの減衰が強い減衰の定義より弱い意味（ある種の境界条件での二点の切断相関）だからだと説明しています 既知 。同論文は、いくつかの理論では Gibbs 測度が複数あることが厳密に示されている、とも続けています。連結性を外しても証明が通るなら、という条件つきで読めば、閉じ込めない有限群では (b) は成り立ちません。

(6)(7) の誤差はループを大きくしても 0 に行かないので、固定した β で弦張力が 0 であることは、ここで引いた定理の主張ではありません（可換な有限群での周長則を直接言う結果は、この章では確かめていない）。物理の標準の見方です（表 2 と整合） 物理 。閉じ込めとギャップは別の文です（17-02 §02）。

09

SU(2) の部分群で近づけても — $\Delta_G \to 0$ と一様性

Petcher–Weingarten（1980）の要旨によれば、$\bar{T}$・$\bar{O}$・$\bar{I}$ はどれも一次転移を持ち、位数を上げると臨界の結合は 0 に向かいます。$\bar{I}$ は広い結合の範囲で $SU(2)$ の数値と一致しました 物理 。

目安を作ります。5-02 の $SU(2)$・$\beta_W = 2.4$ では $\langle 2 - \operatorname{tr} U_p \rangle = 0.739 > \Delta_{\bar{I}} = 0.382$ です。弱結合の主項 $\langle \frac{1}{2} \operatorname{tr} U_p \rangle \approx 1 - 3/(4\beta_W)$（5-06 §04）から、$\langle 2 - \operatorname{tr} U_p \rangle \approx 3/(2\beta_W)$ が Δ_G に等しく

なるのは

$$\beta_W \approx \frac{3}{2\Delta_G}: \qquad \bar{T}\ 1.50, \qquad \bar{O}\ 2.56, \qquad \bar{I}\ 3.93 \tag{10}$$

です 計算 。これより大きい β_W では $SU(2)$ の揺らぎが有限群の刻みより細かい、という粗い見積もりで、転移点の値ではありません 物理 。

要点は定数の向きです。部分群を $SU(2)$ に近づけると $\Delta_G \to 0$ で、条件 $\propto 1/\Delta_G$ も速さ $(\beta/2)\Delta_G$ も退化します。$SU(2)$ で要るのは、作用に隙間の無い領域で相関長が有限で、しかも $\beta \to \infty$ で発散することです。その質量の隙間は結合が距離とともに強くなることから来ると考えられています（5-06 §07・4-07） 物理 。

この章が言えている範囲

事項	言えている	言えていない
(1)〜(5)	定義・最小の欠陥・渦・二次元の面積則・双対性 既知 。表 1・表 3 計算	渦の気体の読み（見積もり）。四次元の転移の次数
(6)(7)	主項の定理 既知 。$\mathbb{Z}_2$ での主項の形の一致・表 2 計算	固定した β で弦張力が 0 であること
(8)(9)	四次元・有限群・弱結合の指数減衰と $\xi \to 0$ 既知	(b) の強い形。他の次元
$SU(2)$ との関係	部分群の数値の報告 物理 。(10) の算術 計算	連続な群の質量ギャップ・連続極限・閉じ込め。この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
(1)(2)(8)・引用・寄り道	本文 §1	A. Adhikari, S. Cao, arXiv:2202.10375v3; Ann. Probab. 53(1) (2025), doi:10.1214/24-AOP1702。§1.1 が挙げる Seiler・Forsström の先行結果は書誌のみ
(3)(5)(6)・引用・§06 の $\mathbb{Z}_2$	本文 §1–§5	S. Chatterjee, arXiv:1811.09770v3; Commun. Math. Phys. 377 (2020) 307–340, doi:10.1007/s00220-020-03738-9
(7)・条件の注	本文 §1.2（定理 1.2.1・注意 1.2.2–1.2.3）	S. Cao, arXiv:2001.05627v3; Commun. Math. Phys. 380 (2020) 1439–1505, doi:10.1007/s00220-020-03912-z
§08 の一様な減衰から面積則への定理・引用	本文 §2（定義 2.1・2.3、定理 2.2・2.4、p.8）	S. Chatterjee, Commun. Math. Phys. 385 (2021) 1007–1039, arXiv:2006.16229

もの	種別	出典・道具
§04 の双対・転移	要旨	F. J. Wegner, J. Math. Phys. 12 (1971) 2259；M. Creutz, L. Jacobs, C. Rebbi, Phys. Rev. Lett. 42 (1979) 1390・Phys. Rev. D 20 (1979) 1915
§09 の部分群	要旨	D. Petcher, D. H. Weingarten, Phys. Rev. D 22 (1980) 2465
表 1〜3・図 1・図 2・(5)(7)(10) と §07 の数	この端末で計算	python3（この端末の計算：群の表・四次元 $\mathbb{Z}_2$ の熱浴法〈約 100 秒〉・面積と周の比べ）

次に読む章：5-11 寄り道：Bakry–Émery と一リンク積分（強結合側で定理が出る仕組みを一本のリンクで見る）。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 5 部 格子ゲージ理論 Bakry–Émery

寄り道：Bakry–Émery と一リンク積分 — 曲率で隙間を出す判定法と、先に積分して定数を動かす一例

この章は本書の検討です。§02・§03 は既存の知見です。

この章で分かること — 「曲率が正なら Poincaré 不等式」という Bakry–Émery の判定法と、それが一本のリンクでどれだけ控えめか。格子 $SU(2)$ で、どのプラケットにも一本ずつ含まれるリンクの族を先に積分すると、作用の曲がりが $O(\beta^2)$ に下がり、閾値が $1/12$ から $\sqrt{2/27} \approx 0.272$ に動くこと（このサイトの論文）と、定数 27 の内訳。

前提となる章 — 5-02・1-10。5-04 §08 と 1-08 §03（$SU(2)$ の Haar 測度）も使います。

先に言うこと — 格子間隔を固定した小さい β の側、連続極限の反対の岸の話で、連続極限と問題文の質量ギャップについては何も示していません。Lean の定理は曲がりの下界と族の組合せまでで、質量ギャップは Lean の定理ではありません。強結合の範囲を広げたとも主張していません（§07）。

この章の順序

1. この章の位置 — 強結合側の一例
2. 曲率が隙間を作る — 判定法と証明
3. 一本のリンクで見る — 本当の隙間は κ とともに増える（図 1・表 1）
4. 格子全体に当てはめる — 1/12 と 1/8
5. 先に積分する — 完全な族（表 2）
6. 27 の内訳 — $36 \times 6 \div 8$
7. 閾値を比べる — 直線と放物線（図 2・表 3）
8. 寄り道：完全な族は四次元まで — Hamming 限界の等号
9. 方法の限界と位置 — 何が Lean か

この章の β は $SU(2)$ の規約 $\beta = 4/g^2$ で、結合 g の二乗に反比例します（5-01）。統計力学の逆温度の役をします（5-02）。

$$S(U) = \beta \sum_{P} \Big(1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{tr} U_P\Big), \qquad \mu_\beta(dU) = \frac{1}{Z}\, e^{-S(U)} \prod_{\ell} dU_\ell \tag{1}$$

$SU(2)$ の元は長さ 1 の四元数で、群は単位球面 S^3 です（1-02）。内積は $\langle u, v\rangle = \tfrac{1}{2}\operatorname{tr}(uv^\dagger)$ です。

01

この章の位置 — 強結合側の一様な評価の一例

5-04 §08 の Langevin の道の鍵は **Bakry–Émery の判定法**で、「群の丸さ（曲率）が作用の凸凹に勝てば、Poincaré 不等式が箱によらない定数で成り立つ」と言います。この章はそれを一本のリンク（§02・§03）と格子全体（§04〜§07）で具体的に見ます。

得られるのは格子間隔を固定した格子単位の相関の減衰で（4-11）、連続極限で欲しい「格子単位の隙間が正しい速さで閉じること」（5-09）の反対の岸です。

5-04 §08 では判定法を結論だけ使いました。この章で加わるのは三つです。判定法の証明の筋（§02）、一本のリンクでの本当の隙間との比較（§03）、そしてリンクの一部を先に積分すると曲がりが β の一次から二次に下がり、閾値の定数が動くこと（§05〜§07）です。

読む順は、まず図 1 で「判定法がどこで控えめになるか」を目で見て、次に §04 の直線 $2 - c\beta$ の閾値、最後に §05〜§07 の放物線 $2 - 27\beta^2$ の閾値へ進むのが近道です。§06 の内訳と §08 の寄り道は飛ばしても筋は追えます。

02

曲率が隙間を作る — 判定法と一行の証明

1-10 §08 で、直線上の $e^{-V}dx/Z$ について「$V'' \geq \kappa > 0$ なら $C_P \leq 1/\kappa$」を見ました。群の上ではこれに空間そのものの丸さが加わります。

比喩で言えば、赤道から真北へ歩き出した二人は北極で出会います。正確には、単位ベクトル v の向きに出た測地線の束が v に垂直な各方向で寄っていく度合いを足したものが Ricci 曲率 $\mathrm{Ric}(v,v)$ で、半径 1 の n 次元球面では $(n-1)|v|^2$ です 既知 。群の上の測地線は $\tau \mapsto U e^{\tau X}$（$X$ は純虚の四元数＝リー環の元。1-03）で、これに沿う二階微分を $\mathrm{Hess}\, V(X,X)$ と書きます。直線の V'' に当たるものです。

$$\mathrm{Ric}(X,X)=2|X|^2\ (S^3),\qquad \mathrm{Ric}+\mathrm{Hess}\,V\ge K>0\implies \mathrm{Var}_\mu(f)\le\frac{1}{K}\int|\nabla f|^2d\mu \quad (2)$$

右が Bakry–Émery（1985）の判定法の Poincaré 版です（$\mu=e^{-V}\mathrm{vol}/Z$、条件は全ての点で）既知。対数 Sobolev 不等式も出ます。**定数に次元が入らない**ので、曲率の下界が箱によらなければ Poincaré の定数も箱によりません。

証明の筋は 1-10 §08 と同じです。$Lf=-\Delta f+\nabla V\cdot\nabla f$（$\Delta$ は群の上のラプラシアンで、質量ギャップの Δ とは別）、$Lf=\lambda f$ とすると、部分積分を二回して（積分した Bochner の公式）既知

$$\lambda^2\int f^2d\mu=\int(Lf)^2d\mu=\int\|\nabla^2 f\|^2d\mu+\int(\mathrm{Ric}+\mathrm{Hess}\,V)(\nabla f,\nabla f)\,d\mu\ \ge\ K\lambda\int f^2d\mu \quad (3)$$

となり（$\int|\nabla f|^2d\mu=\lambda\int f^2d\mu$）、$\lambda\ge K$ です。(3) は 1-10 の $\int|g'|^2+\int V''g^2=\lambda\int g^2$ を多次元にしたもので、V'' が $\mathrm{Hess}\,V$ に置き換わり、空間の丸さが Ric として加わります。例：一様な S^3 では判定法は「隙間 ≥ 2」、本当は 3 です（一次の球面調和関数。表 1 の一行目）。次元を使わない分だけ控えめです。

本書での使い方は 24-06 §02（閉じた群の上での凸性の天井は 24-06 §03）。

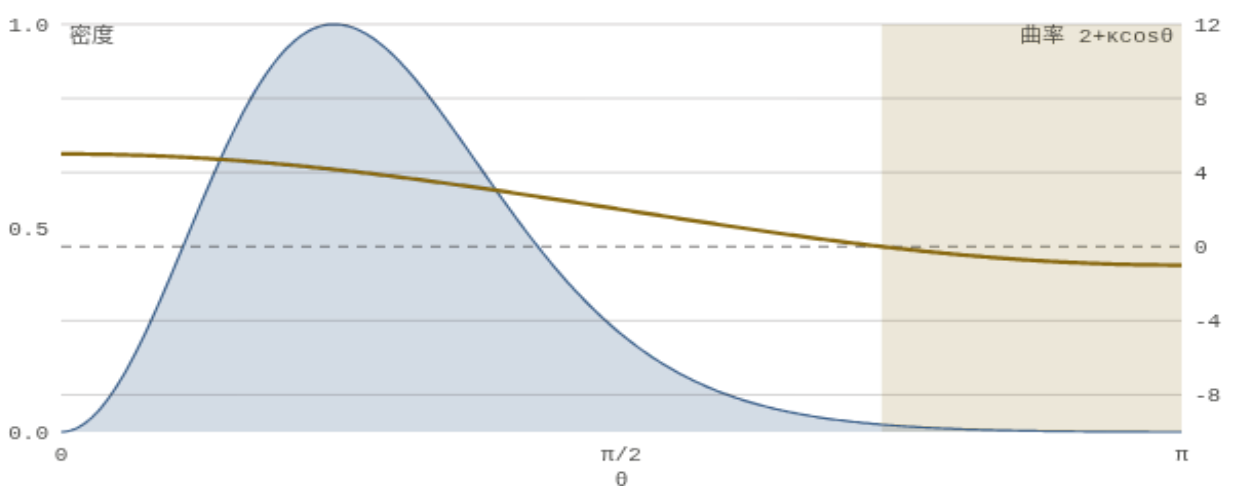
03 一本のリンクで見る — 本当の隙間と判定法

一本のリンク u 以外を止めると、重みは u を含む六枚のプラケットから来ます。プラケットから u を除いた残り三本のリンクの積（コの字形）を**ステープル**と呼びます。六枚のステープル $V_1,\dots,V_6$ を向きを揃えて足したもの $M=\sum_i V_i$ を使うと、重みは $e^{\beta\langle u,M\rangle}$ です（23-02 四次元格子で試した道と壁 と同じ設定。熱浴法の分布。5-07）。M の向きを北極に取り、θ を北極からの角とすると、高さ $\cos\theta$ のヘッセ行列は $-\cos\theta$ 倍の計量なので

$$\mu_\kappa(du)\propto e^{\kappa\cos\theta}du\ \ (\kappa=\beta|M|\le 6\beta),\qquad \mathrm{Ric}+\mathrm{Hess}\,V=(2+\kappa\cos\theta)|X|^2\ge(2-\kappa)|X|^2 \quad (4)$$

です既知。判定法が言えるのは $\kappa<2$ で隙間 $\ge 2-\kappa$ だけですが、本当の隙間は κ とともに**増えます**（北極に寄った測度は分散 $1/\kappa$ のガウスに近い）。判定法は、測度がほとんど乗らない南極の負の曲率に足を取られます。

図 1　つまみ・「動かす」で κ が変わる。塗りは密度 $e^{\kappa\cos\theta}\sin^2\theta$、実線は曲率 $2+\kappa\cos\theta$（右の目盛り）、帯は曲率が負の範囲。



κ=3.00　判定法 0.00　隙間 4.1160　負の曲率の重み 0.0039

計算 この図の数値はこの端末で計算した（隙間は表 1 の計算の 41 点、他はその場で式から）。JavaScript が無効なら表 1 が中身です。

表 1　μ_κ の隙間 λ_1 と判定法 計算 （S^2 の角運動量 $l=0,1,2$ ごとの固有値問題。刻み 800 と 1600 で 5 桁一致。右端は $\int_{\arccos(-2/\kappa)}^{\pi} e^{\kappa\cos\theta}\sin^2\theta\,d\theta \big/ \int_0^{\pi}$ の数値積分）

κ	$l=1$＝隙間	判定法	負の曲率の範囲の重み
0	3.0000	2.0	0
1	3.1323	1.0	0
2	3.5164	0	0
4	4.8782	–	0.0027
6	6.6746	–	0.00059
10	10.580	–	1.5×10^{-5}

隙間は $l=1$（M に垂直に傾ける揺らぎ）で決まります。判定法は正しいが粗い道具です。

注意。$\lambda_1=1/C_P$ は Langevin の時間の隙間で、転送行列の隙間（5-03）とは別です（18-03）。

04

格子全体に当てはめる — 閾値 1/12 と 1/8

格子全体の配位の空間は S^3 の直積で、Ricci 曲率は各リンクで 2 のままです。判定法が求めるのは次です。

$$K(\beta)=2+\inf_{U}\lambda_{\min}\big(\mathrm{Hess}\,S(U)\big)>0 \tag{5}$$

下界は $-c\beta$ の形です。Shen–Zhu–Zhu（2023）はプラケットごとの見積もりで、$SU(N)$ について $|\beta_{\mathrm{SZZ}}|<1/(16(d-1))$ の下で、無限体積の測度の一意性と相関の指数減衰（要

旨：“the infinite volume measure has a strictly positive mass gap”）を示しました 既知 。規約は $SU(2)$ で $\beta = 4\beta_{\mathrm{SZZ}}$ なので、四次元では $\beta < 1/12 = 0.0833$、この章の書き方で $K = 2 - 24\beta$ です（$\beta < 1/12$ は 5-04 表 4 と同じ）。

一方、全てのプラケットが -1 の $\mathbb{Z}_2$ 配位で $\lambda_{\min}(\mathrm{Hess}\, S) = -16\beta$ になります（初等的） 紙 。論文の数値探索ではそれより下は見つかっていませんが、これは証明ではありません（論文 §1・§8）。天井 $1/8$ は初等的な側だけから出ます：この配位で $K \le 2 - 16\beta$ なので、**積分せずに判定法を使う限り、$\beta < 1/8$ で頭打ちです。**

05

先に積分する — 完全な族とーリンク積分

このサイトの論文は、判定法の前にリンクの一部を（不等式で抑えるのでなく）等式のまま積分します。積分する集合 I^* に次を課します。

$$I^* \text{ が完全な族} \iff \text{どのプラケット } P \text{ でも } |P \cap I^*| = 1 \tag{6}$$

族の二本は同じプラケットに乗らないので、各リンクは独立に積分でき、しかも全てのプラケットが族のリンクを含むので、**積分後の残りの作用には裸のプラケットが一枚も残りません。** 族の密度は $1/4$ で、四次元には周期 2 の族があります（数え上げと図は 23-02 四次元格子で試した道と壁、四次元までの理由は §08）。

一本の積分はカタラン数で出ます。Haar 測度の下で $\mathrm{tr}\, u = 2\cos\theta$ は半円の分布で（1-08 (4)）、偶数次の積率は $\mathbb{E}[(2\cos\theta)^{2k}] = \mathrm{Cat}_k$ です（1-08 の寄り道）。指数関数を展開し、$\mathrm{Cat}_k/(2k)! = 1/(k!(k+1)!)$ を使うと

$$\int_{SU(2)} e^{\beta\langle u, M\rangle}\, du = \sum_{k\ge 0} \frac{\kappa^{2k}\,\mathrm{Cat}_k}{(2k)!\,4^k} = F_0\!\left(\frac{\kappa^2}{4}\right) = \frac{2I_1(\kappa)}{\kappa}, \qquad F_0(x) = \sum_{k\ge 0} \frac{x^k}{k!\,(k+1)!} \tag{7}$$

です（I_1 は変形 Bessel 関数） 既知 。論文ではこれが Haar 測度の左不変性だけから Lean で示されています Lean （`IsHaarS3.one_link`。仮定は Haar の性質だけ）。残りのリンクの周辺密度は $e^{-\Phi}$ で、族のリンク s（「星」）ごとの和です。

$$\Phi = -\sum_{s \in I^*} G\big(|M_s|^2\big), \qquad G(t) = \ln F_0\!\left(\frac{\beta^2 t}{4}\right) = \frac{\beta^2 t}{8} - \frac{\beta^4 t^2}{384} + O(\beta^6 t^3) \tag{8}$$

微分には $F_1(x) = \sum_{k\ge 0} x^k/(k!\,(k+2)!) = F_0'(x)$、$F_2 = F_1'$ を使います。連鎖律で

$$G'(t) = \frac{\beta^2}{4}\,\frac{F_1}{F_0}, \qquad G''(t) = \left(\frac{\beta^2}{4}\right)^2 \frac{F_0 F_2 - F_1^2}{F_0^2} \qquad \left(F_i \text{ の引数は } \tfrac{\beta^2 t}{4}\right)$$

なので、$G' \le \beta^2/8$ は $2F_1 \le F_0$ と、$G'' \le 0$ は Turán 型の不等式 $F_1^2 \ge F_0 F_2$ と同じです。

$O(\beta)$ の項が消え、曲がりは $O(\beta^2)$ からです（長さ 6 のループが結合 $\beta^2/4$ で現れる。23-02 §02）。

表 2　(7) の級数と Bessel の閉形、比 $r = 2F_1/F_0 = G'(t)/(\beta^2/8)$ 計算　（角度の数値積分とも 12 桁一致）

κ	$F_0(\kappa^2/4)$	$2I_1(\kappa)/\kappa$	r
1	1.130318207985	1.130318207985	0.9608
4	4.879732576852	4.879732576852	0.6580
8	99.96828419564	99.96828419564	0.4096

06

27 の内訳 — 36 × 6 ÷ 8

論文の中心の定理は、Φ の測地線に沿う二階微分の下界です。全ての β・全ての配位で成り立ち、小ささは仮定しません Lean （`StaplePerturbation.hess_gauge`。仮定は周期 L が偶数で $L \ge 3$（つまり 4 以上の偶数。$L = 2$ では向かい合うステープルがリンクを共有して数え方が変わる）、$\|U_e\| = 1$、X_e は純虚。周辺密度が $e^{-\Phi}$ なのは `WilsonOneLink.integral_star_links`）。

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\Phi\big(U e^{\tau X}\big)\Big|_0 \ge -27\beta^2 \sum_e \|X_e\|^2 \tag{9}$$

÷ 8 — 一リンク積分

$0 \le G' \le \beta^2/8,\ G'' \le 0$

表 2 の $r \le 1$（$\iff 2F_1 \le F_0$）。凹性（$\iff F_1^2 \ge F_0 F_2$）はカタラン数の恒等式から Lean （`turan_series`）

× 36 — 一つの星

$(|M_s|^2)'' \le 36 \sum \|X\|^2$

重み付き Cauchy–Schwarz と平方和 Lean （`StarInequality.star_S` と `StapleCurve.second_deriv_le`。等号は `StapleCurve.second_deriv_sharp`）

× 6 — 数え方

残りの各リンクはちょうど 6 つの星に乗る

Lean （`star_count`。$L \ge 3$）

つなぎ方は一行です。星の項の二階微分は、$t = |M_s|^2$ として

$$-\big(G(t)\big)'' = -G'(t)\,t'' - G''(t)(t')^2 \ \ge\ -G'(t)\max(t'', 0) \ \ge\ -\frac{\beta^2}{8}\cdot 36 \sum_{\text{星の中}} \|X\|^2 \tag{10}$$

で、$G'' \le 0$ のおかげで $(t')^2$ の項は邪魔をしません。星について足すと各リンクは 6 回数えられ、$-\frac{\beta^2}{8}\cdot 36 \cdot 6 = -27\beta^2$ です。$G' \le \beta^2/8$ は「傾いた Haar 測度の揺らぎは Haar 測度の揺ら

ぎを超えない」という主張で、これが $SU(2)$ に特有です（§09）。

例。星の比 $t''/(36\sum\|X\|^2)$ は無作為な 20 万組で最大 0.371、等号は $s=(+,+,+,-,-,-)$・三本の向きを $s_i\,i$ に揃えた配位で出ます（1.000000）計算 。緩みは星をつなぐ側にあります（§09）。

07

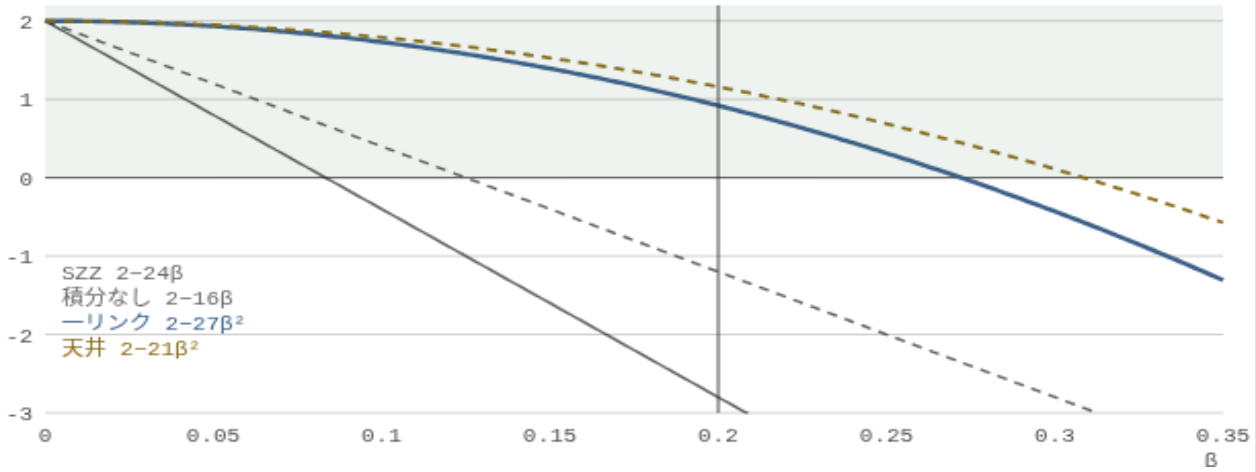
閾値を比べる — 直線と放物線

(9) と $\mathrm{Ric}=2$ を合わせると、残りのリンクの周辺測度の曲率は $K'=2-27\beta^2$ 以上で、閾値は

$$\beta < \sqrt{2/27} = 0.27217 \qquad (\beta_{\mathrm{SZZ}} < 0.06804) \tag{11}$$

です。$1/12$ の $4\sqrt{2/3}=3.27$ 倍、天井 $1/8$ の 2.18 倍です 計算 。族のある d では閾値 $\sqrt{2/3}/(d-1)$ で、比 3.27 は d によりません 紙 （Lean は $d=4$ だけ）。

図 2　四通りの曲率の下界 $K(\beta)$。つまみ・「動かす」で β が動き、各値と $K>0$ かが下に出る。



β = 0.200　SZZ -2.800（使えない）　積分なし -1.200（使えない）　一リンク +0.920（使える）　天井 +1.160（この道の上限）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（表 3 の式）。JavaScript が無効なら表 3 が中身です。

表 3　四次元 $SU(2)$ の曲率の下界と閾値 計算

見積もり	$K(\beta)$	閾値	$\beta=0.2$	水準
Shen–Zhu–Zhu の数え方	$2-24\beta$	0.0833	−2.80	既知
積分しない最良	$2-16\beta$	0.1250	−1.20	紙 （$\le -16\beta$）＋論文の数値探索
完全な族を先に積分	$2-27\beta^2$	0.2722	+0.92	Lean ＋既知

見積もり	$K(\beta)$	閾値	$\beta = 0.2$	水準
この道の天井	$2 - 21\beta^2$	`0.3086`	`+1.16`	論文 §8 の誤差の無い整数演算による計算（機械検査なし・この端末では再計算していない。§09）

強結合の古典である Osterwalder–Seiler（1978）のクラスター展開の到達範囲は、この章では数値で比べられません（出典表：書誌のみ）。論文 §9 の粗い Kotecký–Preiss の見積もりは $\beta \lesssim 0.014$（Mayer 形）〜0.06（指標展開）で、前者は 5-04 表 3 と同じ桁です。一方、指標展開が絶対収束するための必要条件は β が 0.4〜0.8 まで許し、注意深い展開はもっと先へ届きうる。**だから論文は強結合の範囲を広げたとは主張せず、「Bakry–Émery の方法の中で定数が 3.27 倍よくなる」とだけ言います。**同じ力学の方法は面積則にも使われています（Cao–Nissim–Sheffield）既知 。

08

寄り道：完全な族は四次元まで — 符号理論の一行

飛ばしてよい節です。

完全な族は $\mathbb{Z}^d$ で $d \le 4$ のときだけ存在します Lean （`no_perfectZ_of_five`、周期の仮定なし。周期 L の箱では「$d \le 4$ かつ L が偶数」と同値：`PerfectFamily.perfectK_one_iff`、$d \ge 2$）。23-02 §02 は頂点の数え方で示します。論文の紙の筋は符号理論です。言葉を三つ用意します。長さ n の 0 と 1 の列の集まりを**二元符号**、その列を**語**と呼び、二つの列の **Hamming 距離**は食い違う座標の数、**最小距離**は異なる二語の距離の最小です。

単位 d 立方体の中で、向き μ の族のリンクは残りの $d-1$ 座標（0 か 1）で位置が決まるので、長さ $n = d-1$ の二元符号 C_μ になります。語数は面の数え方から出ます。向き μ, ν の面は 2^{d-2} 枚あり、各面が族のリンクをちょうど一本含むので $|C_\mu| + |C_\nu| = 2^{d-2}$、三つの向きで連立すると $|C_\mu| = 2^{d-3}$ です。三次元の部分立方体の面の条件から、どの二座標を消しても語が区別できる、つまり最小距離は 3 以上です。距離 3 以上の語のまわりの半径 1 の球は重ならないので（Hamming 限界）

$$2^{d-3}(1+n) \le 2^n \iff d \le 4 \qquad (d=4:\ 8=8,\quad d=5:\ 20>16) \tag{12}$$

$d = 4$ は等号で、長さ 3 の繰り返し符号 $\{000, 111\}$ が $\{0,1\}^3$ をちょうど埋めます 計算 。この「4」は格子の組合せの数で、物理の四次元時空とは関係しない一致です。$d \ge 5$ では「高々一本」の族しか取れず（密度 $1/d$ 以下 Lean ）、改善は 1.72 倍に落ちます。

09

方法の限界と位置 — 21 と 27・大きい β・SU(N)・何が Lean か

論文 §8 の四つの限界は、「局所的な曲率の方法は定数を動かせても岸は動かせない」ことの別の面です。

(a) 27 と 21。陽な配位で $\lambda_{\min}(\mathrm{Hess}\,\Phi) = -21\beta^2$ がちょうど出ます（論文 §8 の $\mathbb{Z}[e^{i\pi/3}]$ での誤差の無い整数演算による計算。機械検査なし、この端末では再計算していない）。真の値は 21 と 27 の間、天井は $\sqrt{2/21} = 0.3086$ です。

(b) 大きい β。β が大きいと、先に積分する方が悪くなります。$\lambda_{\min}$ は $\beta = 1$ ではまだ -12.1 対 -16（積分あり対なし）ですが、$\beta = 2$ で $-43.1\beta^2$（積分なしは -32β）と逆転します。どちらの値でも $K < 0$ で、判定法は使えません（論文の数値計算。この端末では再計算していない）。§03 と同じく判定法は全ての配位で曲率を要求し、$\mathrm{Ric} = 2$ は β で動かないので、閾値は $O(1)$ を超えません。

(c) 繰り返せない。もう一本積分すると重みは Bessel 型に戻りません 紙 。

(d) $SU(2)$ だけ。「傾けても揺らぎは増えない」は $U(2)$、$M = \mathrm{diag}(s, 0)$ で既に偽です。論文が直接測ったのは主に $U(N)$ の星の定数です。$N = 2, 3, 4$ で測った閾値はほぼ一定（$\beta_{\mathrm{SZZ}} \approx 0.093$）ですが、大きい N では $\beta^* \sim 0.0962/\sqrt{N}$ と見積もられ（論文 §8）、$N \gtrsim 21$ で Shen–Zhu–Zhu の N によらない閾値を下回ります。't Hooft の極限で利得は消えます（論文の数値計算と漸近の見積もり。この端末では再計算していない）。

何が Lean か。Lean の定理は (7)・周辺密度 $e^{-\Phi}$・三つの因子・(9)・族の $d \le 4$ です。$\mathrm{Ric} = 2$ と判定法は標準の事実 既知 、相関の指数減衰と一意性へ進む段（Shen–Zhu–Zhu の議論の移し替え）は定数つきの**概略** 紙 です。つまり $\beta < 0.2722$ での格子単位の質量ギャップは Lean の定理ではありません。論文の探した範囲では同じ組み立ては見当たりませんが、モンテカルロ法の分散低減の文脈で知られているかもしれない、と論文は書きます。

曲率の方法が一様に効くのは $C_P = O(1)$、相関長が格子間隔の数倍の世界で、連続極限で欲しいことの反対側です（23-01）。この評価をいくら良くしても問題文の質量ギャップには近づきません。

この章が言えている範囲

事項	言えている	言えていない
(2)〜(4)・(7)	判定法・一リンク積分 既知	判定法の細部（原典は書誌のみ）
表 1	一本のリンクの隙間は κ とともに増え、判定法は $\kappa < 2$ だけ 計算	格子全体の隙間
§04	$\beta < 1/12$ の換算 既知 、積分なしの天井 $1/8$ 紙	クラスター展開の到達範囲（原典は書誌のみ）

事項	言えている	言えていない
(9)・(11)	下界 $-27\beta^2$ Lean 、曲率の閾値 0.2722	最良の定数。質量ギャップは紙の概略。範囲を広げたとは言えない
§08	族は $d \le 4$ Lean	物理の四次元との関係（無い）
章全体	格子間隔を固定した強結合側の一例	連続極限・問題文の質量ギャップについては何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§04〜§09 の定理・定数・限界	本文 §1〜§11（草稿・未投稿・査読なし）	このサイトの論文 “One-link integration before Bakry–Émery for SU(2) lattice Yang–Mills”（2026-09-25 版、論文の一覧）
§04 の条件と引用	要旨（本文の番号は上の論文の引用による）	H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, Commun. Math. Phys. 400 (2023) 805–851, arXiv:2204.12737
(2) の判定法	書誌のみ	D. Bakry, M. Émery, Diffusions hypercontractives, Séminaire de Probabilités XIX (1985) 177–206
§04 の -16β より下が無いこと、§09 (a)(b)(d) の値（$-21\beta^2$・$-12.1\beta^2$・$-43.1\beta^2$・$U(2)$ の反例・$N=2,3,4$ の閾値）	論文の計算（この端末では再計算していない）	上の論文 §8（数値探索・整数演算。機械検査なし）
§07 の Kotecký–Preiss の見積もり	論文の粗い見積もり	上の論文 §9
§07 の面積則	要旨	S. Cao, R. Nissim, S. Sheffield, Dynamical approach to area law for lattice Yang–Mills, arXiv:2509.04688
強結合の古典	書誌のみ	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110(2) (1978) 440–471
Turán 型 $F_1^2 \ge F_0 F_2$	要旨	Á. Baricz, S. Ponnusamy, Proc. Amer. Math. Soc. 141(2) (2013) 523–532, arXiv:1010.3346
表 1〜3・図 1・2・§06 の比・(11)(12)	この端末で計算	Python 3・NumPy・SciPy：gap_s3.py（$l=0,1,2$ の三重対角の固有値問題と、表 1 の負の曲率の範囲の重みの数値積分）・onelink_series.py（$F_1^2-F_0F_2$ の係数を $n \le 30$ まで有理数で照合）・star_check.py・thresholds.py

次に読む章：6-00 入口 — この巻の約束。あわせて読むなら 7-01 構成的場の理論とは（二つの岸のあいだ）。族は 23-02 で再び使います。Lean は 手引き・一覧。