第二巻　存在 — 公開された構成を読む

第 7 部 構成的場の理論

Kiichi, Shiori and Rin · 2026-11-14 の版 · https://computoergosum.com/principia/yang-mills/

> この PDF は Web 版の各章をそのまま刷ったものです。動かせる図は刷った時点の姿で止まっています。章の間のリンクは Web 版へ飛びます。最新の内容は Web 版に在ります。

章		頁
7-01	構成的場の理論とは	2
7-02	二次元の可解性とヤン–ミルズ測度	15
7-03	スカラー場の構成	26
7-04	クラスター展開	38
7-05	繰り込み群の段の列	49
7-06	三次元ヤン–ミルズの紫外安定性	60
7-07	四次元	71
7-08	四次元の ϕ^4 の自明性	82
7-09	確率量子化と正則性構造	92
7-10	四次元で止まる場所	104
7-11	発散以外の障害	116
7-12	寄り道：「1/0 に記号を与えれば」	127

構成的場の理論とは — 場の量子論を「作る」ことを六つの段に分ける

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 場の量子論を「作る」とは、公理を満たすガウスでない確率測度を近似の列の極限として示すことだ、という考え方。その道筋の六つの段と各段の難しさ。第 7 部の各章がどの段を扱うか。

前提となる章 — 4-10 Osterwalder–Schrader の公理と再構成。4-02・4-11・5-01 も参照します。第二巻の中では、6-04 示されていないこと の次に読みます。

先に言うこと — 六つの段は、この本が問題文（Jaffe–Witten）の記述に沿って置いた整理で、分野の標準の用語ではありません。この章は既知の枠組みの説明で、四次元のヤン–ミルズについて何かを示すものではありません。第 7 部は第二巻の序として、公開された構成（第 6 部）を細かく読む前に、構成的場の理論の道具と、2026 年より前の文献の到達点を整理します。公開された構成がどの段まで届いたかは 6-01・6-04 で扱います。

この章の順序

1. 作るとは何を作ることか — ガウスでない測度
2. 形式的な式のどこが壊れているか — 三か所（計算の表）
3. 六つの段 — 地図と到達点（動く図）
4. 正則化と有限体積の段 — 保つもの、壊すもの
5. 紫外極限の段 — 繰り込みと一様な評価
6. 無限体積極限の段 — クラスター性
7. 公理の段 — 反射正値性
8. 一様なギャップの段 — 「一様に」が本体
9. 寄り道：一次元の鎖で六つの段を全部通す — 動く図
10. 第 7 部の読み方 — 段と章の対応

01

作るとは何を作ることか

物理の教科書は理論が在ると仮定して計算します。数学の問いはその手前、公理（4-09・4-10）を満たす対象が在るか、です。問題文は、四次元で公理を満たす非自明な相対論的場の理論を一つも知らない、と書いています（JW §6、2000 年）。

問題文は存在を示す方法を二つに分けます（JW §6.1）。(i) 閉じた形の正確な解を見つける。(ii) 近似の問題の列を解き、解が極限に収束することを示す。**構成的場の理論**（constructive quantum field theory）は (ii) を指し、中心は近似によらない不等式――一様な事前評価――です。 既知

ユークリッドの形（4-02）では、作る対象は超関数の空間 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ の上の確率測度 μ です。その積率

$$S_n(f_1,\dots,f_n)=\int \phi(f_1)\cdots\phi(f_n)\,\mathrm{d}\mu(\phi) \tag{1}$$

が OS の公理を満たせば、再構成定理でヒルベルト空間とハミルトニアンが得られます（$\phi(f)$ は場を試験関数 f で均した値）。物理では同じ測度を

$$\mathrm{d}\mu(\phi)=\frac{1}{Z}\,e^{-S(\phi)}\,\mathcal{D}\phi \tag{2}$$

と書きます。目標の形ですが、右辺の記号はどれも、このままでは数学の対象ではありません。

例：質量 m の自由場は、平均 0・共分散 $C=(-\Delta+m^2)^{-1}$（Δ はラプラシアン。質量ギャップの Δ とは別）のガウス測度で、OS の公理を満たしますが、相互作用が無く自明です（JW §6.2）。仕事は**ガウスでない**測度を作ることです。問題文によれば、公理を満たす形の（ガウスでない測度としての）最初の構成は 1970 年代で、二次元の小さい多項式相互作用の場でした（JW §6.2）。

次元で何が切り替わるかを十一行に並べた図は 1-12 §10 図 4（d = 4 で開く。最下段は表 2 の YM の行）。

02

形式的な式のどこが壊れているか

式 (2) の壊れた場所は三つです。(i) $\mathcal{D}\phi$：無限次元の空間では、平行移動で変わらず、どの球にも有限の重さを配る測度は 0 しかありません（1-09 §02）。(ii) 点での値：二次元以上では

自由場の見本は超関数で、$\phi(x)^4$ に意味がありません（1-11）。(iii) 体積：$\mathbb{R}^d$ 全体では作用が無限大です。スカラー場の作用は

$$S(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\tfrac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \tfrac{1}{2} m^2 \phi^2 + \lambda\, \phi^4 \right) \mathrm{d}x \tag{3}$$

で、ヤン–ミルズでは場が接続 A、作用は曲率 F の二乗の積分です（3-03）。

(ii) は数で見えます。格子 $a\mathbb{Z}^d$ の自由場の一点の分散は

$$G_a(0) = \langle \phi(x)^2 \rangle_a = \int_{[-\pi/a,\,\pi/a]^d} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \, \frac{1}{m^2 + \frac{4}{a^2} \sum_{j} \sin^2 \frac{k_j a}{2}} \tag{4}$$

で、分母は $m^2 + |k|^2$ の格子版、運動量は $|k_j| \le \pi/a$ に切られています。

計算 表 1　$G_a(0)$（$m = 1$）。熱核の表示 $G_a(0) = a^{2-d} \int_0^\infty e^{-m^2 a^2 s} \, [e^{-2s} I_0(2s)]^d \, \mathrm{d}s$（$I_0$ は変形ベッセル関数）の数値積分。$d = 1$ は閉じた式 $1/(m\sqrt{m^2a^2+4})$ と 5 桁一致。

a	$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$	$d = 4$
1	0.44721	0.25405	0.1705	0.127
1/4	0.49614	0.49320	0.9289	2.431
1/16	0.49976	0.71675	3.9634	39.598
1/64	0.49998	0.93768	16.0950	634.524
$a \to 0$	$\to 0.5$	$\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{a} + 0.2758$	$0.2527/a$	$0.1549/a^2$

二次元以上では分散が無限大に向かい、点での値は確率変数になりません。ϕ^4 は a に依存する引き算で定義し直す必要があり、これが紫外極限の段の繰り込みの入口です。

03 六つの段

壊れた場所を有限のもので置き換え（正則化と有限体積）、最後に外す（二つの極限）。極限が取れたら、公理とスペクトルの隙間を確かめる。問題文も格子について、格子間隔を 0 に、体積を無限大にしたときの期待値の極限を確かめよ、と書いています（JW §6.5）。

段	何をするか	要るもの
1 正則化	場を有限個の自由度に置き換える	格子間隔 a
2 有限体積	一辺 L の箱で測度を作る	測度 $\mu_{a,L}$
3 紫外極限	$a \to 0$	繰り込み・一様な評価
4 無限体積	$L \to \infty$	クラスター性

段	何をするか	要るもの
5 公理	極限が OS の公理を満たす	反射正値性
6 ギャップ	ハミルトニアンの隙間	一様な指数減衰

正則化の段から無限体積の段までの四つは、二重の極限

$$\mu = \lim_{L\to\infty} \lim_{a\to 0} \mu_{a,L} \tag{5}$$

を作ることで、公理の段と一様なギャップの段は μ の性質です。格子の強結合の結果のように a を固定して $L \to \infty$ を先に取る道もあり、そのとき紫外極限の段は後に残ります。ただし強結合の領域（格子の結合 g が大きく、$\beta = 2N/g^2$ が小さい側）は連続極限（$\beta \to \infty$）から離れているので、この道はそのままでは紫外極限の段につながりません。 既知

図 1　理論を選ぶ（下のボタンか表 2 の行）と、段ごとの到達点が変わる



YM 四次元：格子・有限体積の紫外安定性（Bałaban 1987–89。有効結合が十分小さい区間に入るという仮定つき、7-07）。MRS 1993 は赤外切断つきの構成の概略。連続の有限体積測度は未構成

既知 表 2　理論ごとの 2026 年より前の到達点（閉＝定理がある／一部／未／—＝問いが立ちにくい／取らない＝その道では段を通らない）。問題文と一次資料による。年は代表する論文の掲載年（16-01 の年表は最初の公開年で数えるので、Sengupta は 1992–93、Lévy は 2001 になる）。行を選ぶと図 1 が変わる。

理論	1	2	3	4	5	6	要点
自由場	閉	閉	閉	閉	閉	閉	相互作用が無く自明
ϕ^4_2 弱結合	閉	閉	閉	閉	閉	閉	公理・粒子の質量・非自明な散乱（JW §6.2）
ϕ^4_3 弱結合	閉	閉	閉	閉	閉	閉	非ガウス測度・Wightman 公理（JW §6.2）。質量ギャップは Feldman–Osterwalder 1976（題名による・書誌のみ）

理論	1	2	3	4	5	6	要点
YM 二次元	閉	閉	閉	閉	一部	—	コンパクトな曲面の上の連続測度（Sengupta 1997・Lévy 2003）、平面上の連続測度とユークリッド不変性（Driver 1989）。伝播する自由度が無い
YM 三次元	閉	閉（格子）	一部	未	未	未	格子の一様評価（Bałaban 1985）。連続の有限体積測度は T^3 でも未構成（Chevyrev 2022）
YM 四次元	閉	閉（格子）	一部	未	未	未	格子・有限体積の紫外安定性（Bałaban 1987–89。有効結合が十分小さい区間に入るという仮定つき、7-07）。MRS 1993 は赤外切断つきの構成の概略。連続の有限体積測度は未構成
格子 YM 四次元・強結合	閉	閉	取らない	閉	一部	閉	a を固定したまま。無限体積・反射正値性（Osterwalder–Seiler 1978）、指数減衰（Shen–Zhu–Zhu 2023、β が小さい領域）。回転の対称性は無い

公開された構成（2026）を入れた今の印は、1-12 表 4 と 7-07 表 4 に在ります。四次元は、構成の六つの段のうち、正則化・有限体積（格子）・紫外極限・公理の段が閉、無限体積の段が一部（体積の部分列まで）、一様なギャップの段が未です（1-12 の印のとおり）。

表 2 の「—」は、問いがそのままの形では立ちにくいことを表します。二次元のヤン–ミルズには伝播する自由度（遠くへ伝わる波。電磁気の光に当たるもの）が無いので、スペクトルの隙間という問いが四次元と同じ形では立ちません（7-02）。既知 「取らない」は、その道では段を通らないことです。格子の強結合では a を固定したままなので、紫外極限の段を通りません。三次元・四次元のヤン–ミルズの有限体積の段は、格子なら式 (6) で閉じます（§04）。連続のまま有限体積の測度を作ることはまだできておらず、その部分は紫外極限の段の「一部」と要点の欄に書いています。

表 2 の YM 四次元の行は、2026 年より前の文献の到達点です。2026-11-10 に、四次元の Wilson の格子ゲージ理論の尺度の極限として Wightman の公理を満たす理論が作れることの Lean による形式化と、委員会の評価書が公開されました。Lean で証明されている、と委員会が評価したのは、局所の観測量の相関関数の形での紫外極限、体積の部分列に沿った無限体積の極限、そこからの公理の確かめと再構成までです（6-01、再構成は 12-08）。無限体積の極限の収束と一意性、連続の理論の確率測度、一様な質量ギャップ（指数の減衰）は示されていません（6-04）。

> 04

正則化と有限体積の測度の段

正則化には**格子**（場を格子点や辺に置く）と**運動量の切断**（フーリエ成分を $|k| \le \kappa$ に制限する）があり、どちらも何かを壊します。

性質	格子（Wilson 作用）	運動量の切断
ゲージ不変性	そのまま保つ	壊す。戻す相殺項が要る（MRS 1993 §I）
反射正値性	保つ（Osterwalder–Seiler 1978）	失われやすい。正則化で失った反射正値性を取り戻す方法は一般に乏しい（JW §6.5）。MRS 1993 §I は、正値性を欠くゲージの選び方（Feynman 型）は最初から直接には使えないとし、OS 正値性は、まず格子で切断し、その後で運動量の切断を使えば示せるだろう、としている
回転の対称性	壊す	切断そのものは回転対称にできる。ただしゲージ固定（ゲージ変換で移り合う場から代表を一つ選ぶこと）や有限の箱は回転を壊しうる。MRS 1993 は特定の方向を特別に扱うゲージ（axial ゲージ）と赤外の切断を使う

格子では有限体積の測度が直ちに意味を持ちます。ゲージ群 G がコンパクトなら

$$\mathrm{d}\mu_{a,L}(U) = \frac{1}{Z_{a,L}}\, e^{-S_W(U)} \prod_{\ell} \mathrm{d}U_\ell \tag{6}$$

で、ℓ は格子の辺、$U_\ell \in G$、$\mathrm{d}U_\ell$ は Haar 測度（重さ 1 の不変な測度）、S_W は Wilson 作用

$$S_W(U) = \beta \sum_{P} \Big(1 - \tfrac{1}{N} \operatorname{Re}\operatorname{tr} U_P\Big), \qquad \beta = \frac{2N}{g^2} \quad (G = SU(N))$$

です。和は格子の最小の正方形（プラケット）P についてとり、U_P は P の四辺の U_ℓ を一周する順に掛けた積です（5-01）。被積分関数は有界で連続、範囲はコンパクトなので $Z_{a,L}$ は有限で正です（JW §6.5）。既知

例：四次元・一辺 16 点の周期格子の辺は $4 \times 16^4 = 262144$ 本、`SU(3)` は実 8 次元なので、式 (6) は 2,097,152 次元の積分です。計算

連続のまま作るのは難しく、三次元のヤン–ミルズでもトーラス T^3 の上でまだ構成されていません（Chevyrev 2022）。格子なら有限体積の段は式 (6) で閉じ（表 2 の「閉（格子）」）、代わりに回転の対称性の回復が公理の段に回ります。

```
05
```

紫外極限の段

$a \to 0$ では、作用の係数（裸の結合）を a に応じて動かさないと、極限は発散するか自明に潰れます。この動かし方が繰り込みです（4-04）。問題文によれば、ϕ^4 では切断に依存する定数を摂動論の示す形で選べば、定数は発散しても期待値は収束します。二次元では少数の定数で足り、三次元では係数の全部に加えて波動関数の繰り込み、つまり状態のベクトル（2-06 の Fock 空間のベクトル）を切断とともに発散する定数で規格化し直すことが要ります（JW §6.2）。 既知

何が要るかは次元の数え方で見当が付きます。 既知 作用が単位を持たないことから、質量の単位で

$$[\phi] = \frac{d-2}{2}, \qquad [\lambda] = 4 - d, \qquad [g^2] = 4 - d \tag{7}$$

です（g はヤン–ミルズの結合）。$d < 4$ では結合が正の質量次元を持ち（**超繰り込み可能**）、表面的に発散するダイアグラム（摂動論の各項を図にしたもの。4-03）の型は有限個です。「表面的に」は、図に付く積分の運動量の冪を数えるだけで発散と判定される、という意味です（4-04。教科書として Rivasseau 1991）。$d = 4$ は結合が単位を持たない境目です。表 1 も同じ数え方で読めます。$[\phi^2] = d - 2$ なので $G_a(0)$ は a^{2-d} で増え、$d = 2$ では対数になります（1-12）。

例：二次元では積を $:\!\phi^4\!:_a = \phi^4 - 6G_a(0)\phi^2 + 3G_a(0)^2$ と定義し直し（Wick の順序積）、これと真空のエネルギーの定数で足ります（JW §6.2 の α, γ）。

示したいのは、期待値が a によらない定数で抑えられること、

$$\sup_{a>0} \left| \langle \Phi \rangle_{a,L} \right| \le C_\Phi \tag{8}$$

です。一様な評価 (8) があれば、測度の列から弱い意味で収束する部分列が取れます（有界な数列から収束する部分列が取れることの、測度の版）。ただし極限は一意とは限らず、公理やギャップは別の問題です。問題文は、コンパクト性による弱い存在だけでは、極限の性質を別に示さない限り解と認めない、としています（JW 脚注 2）。四次元は 7-07 で扱います。

06

無限体積極限の段

$L \to \infty$ には L によらない評価が要り、とくに遠く離れた量がほぼ独立になること（**クラスター性**）が鍵です。問題文は評価の立て方として (a) 相関不等式、(b) 対称性、(c) 収束する展開

（クラスター展開）を挙げ、(a) はスカラー場や可換なゲージ理論に限られがちで、(c) が中心の道具になったとしています（JW §6.1）。示したい形は

$$\left|\langle A\, B_x\rangle_L - \langle A\rangle_L \langle B_x\rangle_L\right| \le C\, e^{-m|x|} \quad (C,\, m \text{ は } L \text{ によらない}) \tag{9}$$

です（B_x は B を x だけずらしたもの）。減衰の速さ m があれば、箱の縁の影響は e^{-mL} 程度しか届きません。

例：一次元の鎖で、長さ L の輪の一点の分散と無限の鎖の値の差は、L が大きいとほぼ e^{-mL}/m です。$m=1$ なら $L=16$ で 1.1×10^{-7}、$m=0.1$ ならまだ 2.5。近づく速さは m が決めます。計算

四次元のヤン–ミルズでは、長い距離で結合が強くなると考えられています。物理 これは摂動論の繰り込み群から来る見方です（4-04）。MRS 1993 §I は、赤外の切断を外さない理由として 'this would lead to large values of the coupling constant'（結合定数が大きな値になってしまう）と書き、さらに 'there is no easy solvable model of these phenomenons around which to expand'（展開の出発点にできる、これらの現象の簡単に解ける模型が無い）と書いています。

比喩で言えば、展開の足場が無くなります。正確には、展開の出発点にできる解ける模型も、展開に使える小さいパラメータも無い、ということです。問題文も $T^4 \to \mathbb{R}^4$ を得る方法を今の手法は示唆しない、としています（JW §6）。

07

公理の段

正則化で成り立つ公理は極限に引き継がれやすく、壊したものは取り戻す必要があります。要は**反射正値性**です。時間の反転 $\Theta : t \mapsto -t$ について、$t>0$ の場だけに依る F に対し

$$\left\langle\, \overline{\Theta F}\; F \,\right\rangle \;\ge\; 0 \tag{10}$$

が成り立つこと。これがヒルベルト空間とハミルトニアンを取り出す条件です（5-03）。

式 (10) は不等式なので、極限に引き継がれます。既知 条件は三つです。極限をとる F が、正の時間の側の格子の場だけに依る関数で近似できること。その期待値が収束すること。反射の面が格子の面（格子点を通る面か、隣り合う格子点の間の面）であること。このとき各 $\mu_{a,L}$ での非負の値の極限なので、極限でも非負です。格子ゲージ理論では、格子の面についての反射正値性が示されています（Osterwalder–Seiler 1978。MRS 1993 §I もこれを文献として引いています）。

逆に、失った反射正値性を取り戻す方法は乏しく、ヒルベルト空間を立てること自体が問題の一部だと問題文は書いています（JW §6.5）。格子で壊した回転の対称性は、回復を別に示します。既知 公開された構成がこれらをどう満たすかは第 12 部で読みます（12-01 格子の鏡映正値性、12-06 Euclid 不変、12-08 再構成と Wightman の公理）。

例：ガウス測度では、反射正値性は ΘC を正の時間の側に制限したものの正値性と同じです（JW §6.2）。一次元では $C(t) = e^{-m|t|}/(2m)$ なので、$t_i, t_j > 0$ で

$$\sum_{i,j} f_i \, f_j \, C(t_i + t_j) = \frac{1}{2m} \Big(\sum_i f_i \, e^{-m t_i} \Big)^2 \;\geq\; 0 \tag{11}$$

と平方になります。格子の鎖で 40 点・乱数の f を 20000 本試すと、最小値は 1.4×10^{-8} で負になりません。平方なので当然で、これは式の確かめです。対照として、符号を変えた共分散 $-C(t_i + t_j)$ では行列の最小固有値が -2.49 になり、反射正値性が成り立ちません。計算

確率量子化（7-09）は測度を方程式の不変測度として作るので、反射正値性は出力に含まれず、別に示す課題になります。

08

一様なギャップの段

次に、ハミルトニアンのスペクトルの隙間を問います（4-11）。ユークリッドの側では相関の減衰の速さです。格子では時間方向の減衰率が格子単位の隙間 m_{lat} で、物理の単位のギャップは

$$\Delta = \lim_{a \to 0} \frac{m_{\mathrm{lat}}(a)}{a} \tag{12}$$

です。これが正で有限で、しかも体積に一様であることを示したい。

有限の箱の格子では、隙間は自動的に在ります。既知 **転送行列** T は、時刻 t の切り口（その時刻の格子の場の値の組 u）から時刻 $t + a$ の切り口 v へ重みを運ぶ積分作用素

$$(T f)(u) = \int K(u, v) \, f(v) \, \mathrm{d}v$$

です。核 $K(u, v)$ は、二つの時刻をつなぐ作用の部分 $S_{t,t+a}(u, v)$ から $e^{-S_{t,t+a}(u,v)}$ として作ります。反射正値性から T は正の作用素になり、ハミルトニアンは $T = e^{-aH}$ で決まります。場の値の範囲が有界で閉じていて（ゲージ群がコンパクトな格子ゲージ理論はこれに当たる）、核が連続かつ正なら、最大固有値 λ_0 は重複しません。成分がすべて正の行列についての Perron–Frobenius の定理の、無限次元の版（Jentzsch の定理の一般化）です 既知 （一般化は Schaefer 1974。出典は 5-03）。よって次の固有値 λ_1 との比は $\lambda_1 / \lambda_0 < 1$ で、隙間

$-\log(\lambda_1/\lambda_0)/a > 0$ が在ります（5-03。格子ゲージ理論の正の自己共役な転送行列は Osterwalder–Seiler 1978）。問われるのは $a \to 0$・$L \to \infty$ のもとでの一様さで、問題文は、体積に一様なギャップには新しい考えが要ると書いています（JW §6.5）。

例：$m = 1$ の鎖では m_{lat}/a が 0.9624（$a = 1$）、0.9974（$a = 0.25$）、0.99990（$a = 0.05$）と 1 に近づき、格子単位の m_{lat} そのものは $a = 0.05$ で約 0.05 と 0 に向かいます。連続極限では**格子単位の隙間は閉じていくのが正しい姿**で、見るべきは比 (12) です（5-09）。転送行列の固有値の比 $-\log(\lambda_1/\lambda_0)/a$ は、相関の減衰率と一致し、差は 5×10^{-14} 以下です。計算

09

寄り道：一次元の鎖で六つの段を全部通す

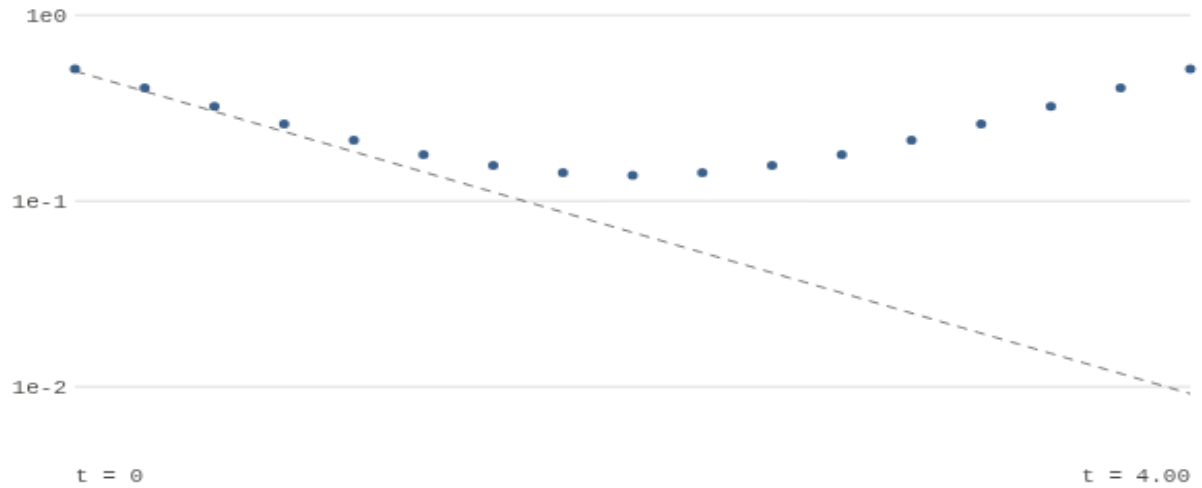
飛ばしてよい節です。

$d = 1$ のユークリッド場の理論は量子力学で、場 $\phi(t)$ は粒子の位置、作用 $\int (\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2)\,\mathrm{d}t$ は調和振動子の虚時間の作用です（2-06・2-07）。正則化の段で時間を間隔 a で刻み、有限体積の段で長さ L の輪にし、紫外極限の段と無限体積の段で $a \to 0$・$L \to \infty$。公理の段は式 (11)、一様なギャップの段のギャップは準位の間隔 m です。$N = L/a$ 点の輪の相関は閉じた式で書けます。

$$\cosh m_{\mathrm{lat}} = 1 + \tfrac{1}{2}m^2a^2, \qquad \langle \phi_0\, \phi_n \rangle_L = \frac{a\,\cosh\!\big(m_{\mathrm{lat}}(N/2 - n)\big)}{2\sinh m_{\mathrm{lat}}\,\sinh(m_{\mathrm{lat}}N/2)} \tag{13}$$

作用の行列を直接逆にした値と 10^{-14} の桁で一致します。計算

図 2　a・L・m を動かすと、輪の上の相関（縦は対数）と格子のギャップ m_{lat}/a が変わる



a = 0.25, L = 4.00（16 点）, m = 1.00 m_lat/a = 0.9974 <φ²>_L = 0.5148（連続・無限 0.5000）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（式 (13)）。点は格子の値、破線は無限・連続の $e^{-mt}/(2m)$。

L を伸ばすと、輪を回り込む寄与（右側の持ち上がり）が消えて破線に重なります。m を小さくすると、要る L が $1/m$ に比例して長くなります。ギャップが無限体積極限の速さを決める、という無限体

積の段と一様なギャップの段のつながりで、問題文も一様なギャップが無限体積極限の証明で基本的な役割を果たしうると書いています（JW §5）。二つの極限を別々の表で見ます（どちらも $m = 1$）。

計算 表 3　格子間隔 a を細かくする（紫外極限の段・一様なギャップの段。無限の鎖）。

a	m_{lat}/a	$\langle\phi^2\rangle$（無限の鎖）
1	0.962424	0.447214
0.25	0.997414	0.496139
0.05	0.999896	0.499844
0.01	0.999996	0.499994
$a \to 0$	$\to 1$	$\to 1/(2m) = 0.5$

計算 表 4　輪の長さ L を伸ばす（無限体積の段。$a = 0.05$）。$L = \infty$ の値は無限の鎖の 0.499844（表 3 の $a = 0.05$ の行）。

L	$\langle\phi^2\rangle_L$	無限の鎖との差
1	1.081735	5.8×10^{-1}
2	0.656350	1.6×10^{-1}
4	0.518503	1.9×10^{-2}
8	0.500180	3.4×10^{-4}
16	0.499844	1.1×10^{-7}

一次元で全部が通るのは、点での値が確率変数で、紫外極限の段に発散が無いからです（表 1）。非調和な項 $\lambda\phi^4$ を足しても量子力学として意味を持ちます。既知

10

第 7 部の読み方

表 2 の各行は、正則化の段から順に閉じていく様子を並べたものです。第 7 部の各章は、その「閉」がどの道具で得られたか、「一部」「未」がどこで止まっているかを、段ごとに追います。二次元のヤン–ミルズとスカラー場は段が通った例として、クラスター展開と繰り込み群はそれが効く段の道具として、三次元・四次元の章は止まっている段の記録として読むと、各章の位置が分かります。一つの章が複数の段に触れることもあるので、下の対応は主に扱う段です。

- 正則化から無限体積までの段：7-02 二次元のヤン–ミルズ
- 六つの段の全て：7-03 ϕ^4_2・ϕ^4_3（六段が通った例）
- 無限体積の段と一様なギャップの段：7-04 クラスター展開

- 紫外極限の段：7-05 繰り込み群、7-06 三次元、7-07 四次元、7-08 自明性、7-12 寄り道：1/0
- 有限体積の段と紫外極限の段を別の道で：7-09 確率量子化
- 全部：7-10 四次元で止まる場所、7-11 発散以外の障害、16-01 年表

この章が言えている範囲

	内容
言えている	構成的場の理論は近似の列の極限で公理を満たす非ガウス測度を示す方法で、一様な評価が中心（JW §6.1） 既知
言えている	格子の自由場の一点の分散は $d=1$ で有限、$d=2,3,4$ で $\log(1/a)$・$1/a$・$1/a^2$ で増える（$a \geq 1/64$） 計算
言えている	一次元の鎖では六つの段が閉じた式で通り、相関の減衰率と転送行列の固有値比が一致する 計算
言えていない	六つの段という分け方は、この本の整理で、分野の標準の区分ではない
言えていない	表 2 の「閉」の中身（原論文の証明は追っていない。ϕ^4_2・ϕ^4_3 は問題文による。ϕ^4_3 のギャップは文献の題名による）
言えていない	四次元のヤン–ミルズで、無限体積の極限の一意性と一様なギャップの段を進める方法（問題文〔2000 年〕は方向を指す考えが無いとする。2026-11-10 に公開された構成も、この二つは示していない。6-04）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
JW の記述と引用（§5・§6・§6.1・§6.2・§6.5・脚注 2）	一次資料（本文で確認）	A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*, Clay Mathematics Institute の公式問題文（2000）
OS の公理・教科書	書誌のみ	K. Osterwalder, R. Schrader, Comm. Math. Phys. 31 (1973) 83–112; 42 (1975) 281–305。J. Glimm, A. Jaffe, *Quantum Physics*, 2nd ed., Springer (1987)
ϕ^4_2・ϕ^4_3	書誌のみ（問題文の文献表）	Glimm–Jaffe–Spencer, Ann. Math. 100 (1974) 585–632; Glimm–Jaffe, Fortschr. Phys. 21 (1973) 327–376; J. Feldman, K. Osterwalder, “The Wightman axioms and the mass gap for weakly coupled ϕ^4_3 quantum field theories”, Ann. Phys. 97 (1976) 80–135

もの	種別	出典・道具
摂動論と繰り込みの教科書	書誌のみ（問題文の文献表）	V. Rivasseau, *From Perturbative to Constructive Renormalization*, Princeton Univ. Press (1991)
格子の反射正値性・正の自己共役な転送行列・強結合の無限体積	書誌と要旨のみ	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471
Perron–Frobenius・Jentzsch の定理	既知の定理（Perron 1907・Jentzsch 1912 は書誌のみ。コンパクト空間上の核への一般化は Schaefer 1974〔書誌のみ、主張は二次資料で確認〕・Krein–Rutman 1948〔書誌のみ〕）	5-03 を参照
強結合の指数減衰	要旨で確認	H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, Comm. Math. Phys. 400 (2023) 805–851, arXiv:2204.12737
二次元の連続測度（平面）	要旨と序論で確認	B. K. Driver, Comm. Math. Phys. 123 (1989) 575–616
二次元の連続測度（コンパクトな曲面）	書誌のみ（Lévy 2003 は要旨まで確認）	A. Sengupta, Mem. Amer. Math. Soc. 126 no. 600 (1997); T. Lévy, Mem. Amer. Math. Soc. 166 no. 790 (2003), arXiv:math/0101239
三次元・四次元の紫外安定性	1985 と 1989（CMP 122, 355–392）は冒頭と主定理（条件つきの紫外安定性の定理。Theorem 1）を確認。1987 と系列の他は書誌のみ	T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 102 (1985) 255–275; 109 (1987) 249–301; 122 (1989) 355–392
赤外切断つきの構成	要旨と §I を確認	J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, Comm. Math. Phys. 155 (1993) 325–383
三次元の測度は未構成	本文 §1.1 を確認	I. Chevyrev, arXiv:2202.13359 (2022)
表 1・次元の数・一次元の鎖	計算	この端末の Python（numpy・scipy）：`point_variance.py`・`counts.py`・`chain.py`（転送行列は位置を 1601 点で対角化）
図 1・図 2	図	SVG・canvas と素の JavaScript。図 1 は表 2 を読む（JavaScript が無効なら YM 四次元の静止図）。図 2 は式 (13) を計算

次に読む章：7-02 二次元の可解性とヤン–ミルズ測度（正則化から無限体積までの四つの段が閉じる例）。

二次元の可解性とヤン–ミルズ測度 — 平面ではプラケットが独立になり、測度が作れる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 二次元の格子では、ゲージを木の上で固定するとプラケットが独立になり、面積則がすべての結合で正確に成り立つこと。連続極限で群の熱核が現れ、平面と閉じた曲面の上で連続の測度が構成されていること。トーラスの上では確率量子化でも同じ測度に着いたこと。

前提となる章 — 5-01 Wilson の格子。指標は 1-04 の範囲をその場で補います。期待値・独立・密度は 1-08、白色雑音とブラウン運動は 1-09、六つの段は 7-01。

先に言うこと — 二次元の純ヤン–ミルズは四次元の縮小版ではありません。伝播する自由度が無く、測度は面積だけを見ます。可解性の芯は四次元に持ち越せません（§09）。この章は既知の結果の紹介です。

この章の順序

1. なぜ二次元から始めるか — 非可換群で連続の測度が構成されているのは二次元だけ
2. 木を固定するとプラケットが独立になる — 辺の数と面の数が一致する
3. 面積則はすべての β で正確 — 指標の補題で面を一枚ずつ剝がす
4. 連続極限：群の熱核 — 面積が熱方程式の時刻になる
    - 寄り道：面積しか見ない理論 — 面積を保つ変形で期待値は変わらない
5. Driver と Gross–King–Sengupta — 場の強さが白色雑音になり、平行移動が確率微分方程式になる
6. 閉じた曲面の上へ — 面は独立でなくなるが、測度は構成されている
    - 寄り道：面積を 0 に近づけると — 平坦接続の空間の体積が出る
7. 転送行列で見る — 最低の励起は円周の長さに比例し、伝わる粒子は無い

8. 確率量子化での再構成 — トーラスの上で、同じ測度を不変測度として得る

9. 持ち出せるもの、持ち出せないもの — 方法は延びるが、面の独立性は延びない

01

なぜ二次元から始めるか

非可換のゲージ群で連続のヤン–ミルズ測度が構成されているのは、いまのところ二次元だけです。Chatterjee（2018）は、Wilson ループが自明でないふるまいをする連続極限は二次元より高い次元では一つも構成されていないと書いています。既知 2026-11-10 に公開された四次元の構成も、局所の観測量の相関関数の形で連続の理論を作るもので、確率測度と Wilson ループの観測量は作っていません（6-04）。二次元では場の強さの成分が一つです。

$$F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 + [A_1, A_2], \qquad S(A) = \frac{1}{2g^2} \int_{\mathbb{R}^2} |F_{12}|^2 \, d^2x \tag{1.1}$$

A はリー環に値をとる接続（3-02）、$|\cdot|$ は共役で変わらない長さです。F は長さの二乗の逆数の次元なので、作用が無次元であるには g^2 が**面積の逆数**の次元を持ち、尺度は g 自身が与えます。四次元では g が無次元で、尺度は量子効果で生まれると考えられています物理（4-07）。この章の主役は、**ゲージを適切に固定すると面ごとの自由度が独立になる**という二次元だけの性質です。六つの段（7-01）で言えば正則化の段から無限体積の段までが閉じ、公理の段は一部（ユークリッド不変性。§05）、一様なギャップの段のギャップは四次元と同じ意味の問いになりません（§07）。

02

木を固定するとプラケットが独立になる

設定は 5-01 のとおりで、辺 ℓ に $U_\ell \in G$、面 p の周りの積を U_p、重みを $\prod_p e^{\beta \operatorname{Re}\operatorname{tr} U_p}$（$dU$ は Haar 測度）とします。この章の β は、$SU(2)$ で慣用の β_W（Wilson 作用 $\beta_W \sum_p \big(1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{Re}\operatorname{tr} U_p\big)$、四次元では $\beta_W = 4/g^2$）の半分です：$\beta = \beta_W/2$。§03 の β = 1 は $\beta_W = 2$ に当たります。ゲージ変換 $U_{xy} \mapsto g_x U_{xy} g_y^{-1}$ は $\operatorname{tr} U_p$ を変えません。木（閉路の無い辺の集まり）の上の変数は、根から順に g_x を選べば 1 にでき、ゲージ不変な量の期待値は変わりません。既知 $L \times L$ の正方格子（自由境界）で数えると

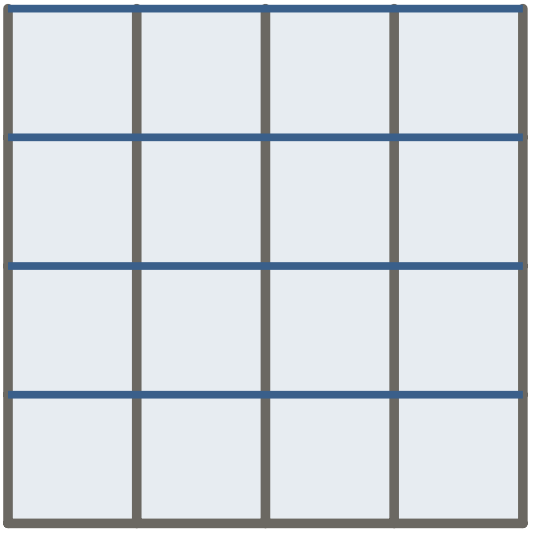
$$V = (L+1)^2, \quad E = 2L(L+1), \quad P = L^2, \qquad E - (V-1) = P. \tag{2.1}$$

木は $V-1$ 本なので、残る辺は面と同じ数です（円板のオイラーの公式）。木を縦の辺と下端の辺に取ると（Driver 1989 と同じ）、残るのは横の辺 $h_{i,j}$（$h_{i,0}=1$）で

$$U_{p(i,j)} = h_{i,j}\,h_{i,j+1}^{-1} \iff h_{i,j+1} = U_{p(i,j)}^{-1} h_{i,j}. \tag{2.2}$$

下から順に解けて一対一に対応し、Haar 測度は掛け算で動かないので測度も移ります。**面の変数は互いに独立で、それぞれ密度 $\rho_\beta(U) = e^{\beta\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U}/z(\beta)$ に従います。**既知 平面全体に広げると、無限体積の極限が境界条件に依らず存在し、有限の領域では自由境界の測度に一致します（Driver の定理 7.2。Haar 測度の不変性で外側の辺を積分して示され、Driver はこの定理が Dosch–Müller 1979 にほぼ含まれると書いています）。既知

図 1　木ゲージ — つまみ L で格子の大きさが変わります。「動かす」で木（灰色）を 1 に固定し、面を下から塗ります。面を一つ塗るたびに上の辺が一つ決まります。



L = 4：頂点 25・辺 40・面 16。木の 24 本を 1 に固定すると、残る辺は 16 本で面の数と一致します。

計算 この図の数値（頂点・辺・面の数）はこの端末で計算した。数は式 (2.1)。

03

面積則はすべての β で正確に成り立つ

道具は**指標** $\chi_\lambda(U) = \mathrm{tr}\,\lambda(U)$（$\lambda$ は既約ユニタリ表現、次元 d_λ）です。共役で変わらず、$\int_G \chi_\lambda \overline{\chi_\mu}\,dU = \delta_{\lambda\mu}$。$SU(2)$ ではスピン j の表現が $2j+1$ 次元で、固有値 $e^{\pm i\theta}$ の元に対し $\chi_j = \sin((2j+1)\theta)/\sin\theta$ です（1-04）。鍵は補題：X の密度が共役で変わらず X が A と独立なら

$$\mathbb{E}[\chi_\lambda(XA)] = w_\lambda\,\chi_\lambda(A), \qquad w_\lambda = \mathbb{E}[\chi_\lambda(X)]/d_\lambda. \tag{3.1}$$

$\mathbb{E}[\lambda(X)]$ がすべての $\lambda(V)$ と可換なので、Schur の補題で $w_\lambda I$ になるからです。単純閉曲線 C が n 枚の面を囲むとき、木ゲージの U_C には囲まれた面の変数が、他の面の変数による共役を

伴って一回ずつ現れます。密度が共役で変わらないので (3.1) がそのまま使え、トレースの巡回性で一枚ずつ先頭に回して剝がすと

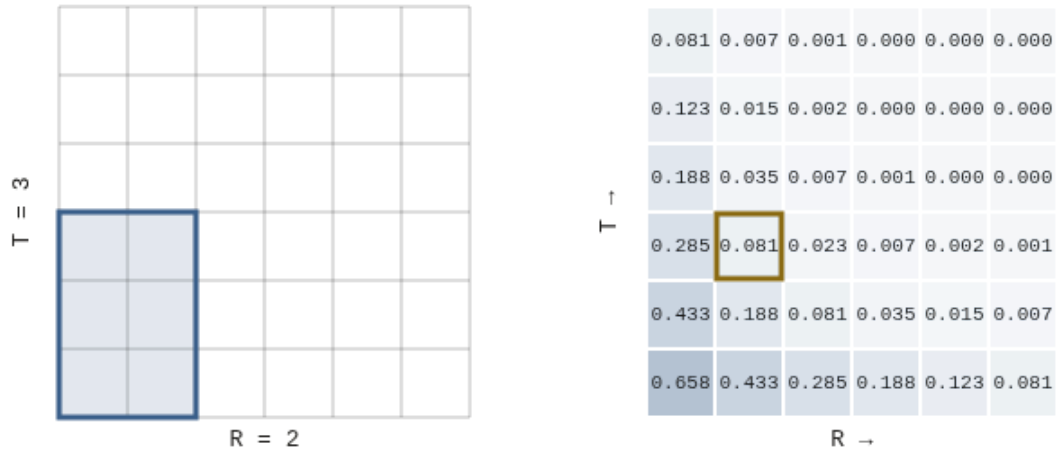
$$\frac{\mathbb{E}[\chi_\lambda(U_C)]}{d_\lambda} = w_\lambda(\beta)^n, \qquad \langle W_C \rangle = e^{-\sigma_{\mathrm{lat}} n}, \quad \sigma_{\mathrm{lat}} = -\ln w_{\mathrm{fund}}. \tag{3.2}$$

ここで $W_C = \chi_{\mathrm{fund}}(U_C)/d_{\mathrm{fund}}$（基本表現での値。$SU(2)$ では $\frac{1}{2}\operatorname{tr} U_C$）です。Migdal（1975）は、格子を粗くするときの重みの変換規則（再帰式）が二次元では正確になることを示し、指標の期待値が囲む面積 A の指数 $\langle \chi_q \rangle = d_q e^{-g_q^2 A}$（$q$ は表現、g_q^2 は表現ごとの定数）になる式を書いて、「Wilson の面積則にほかならない」と述べています。既知 値は面積だけで決まり、**すべての β で**成り立ちます。四次元の面積則が強結合の側でしか示されていないこと（5-02）と対照的です。係数は次の修正 Bessel 関数の式で書け、数値積分との差は 2×10^{-16} 以下でした。計算

$$SU(2):\ w_j = \frac{I_{2j+1}(2\beta)}{I_1(2\beta)}, \qquad U(1):\ w_n = \frac{I_n(\beta)}{I_0(\beta)} \tag{3.3}$$

I_n は修正 Bessel 関数で、整数 n に対し $I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos\theta}\cos n\theta\, d\theta$ です。x が大きいと比 $I_n(x)/I_1(x)$ は 1 に近づき、§04 はその近づき方を使います。

図 2　面積則（SU(2)） ― つまみ β で一枚の面の値 w が、R・T でループの形が変わります。右は 6×6 通りの長方形の w^{RT} で、面積が同じなら同じ値です。



β = 2.0：w = 0.6580、σ = 0.4185。2×3（面積 6、周 10）：⟨W⟩ = 0.0812。

計算 この図の数値はこの端末で計算した。図の w は (3.3) の Bessel 級数をその場で足したもので、scipy で計算した値と小数第 5 位まで一致する。JavaScript が無効なら表 1 を。

表 1　$SU(2)$。「乱数」は**ゲージを固定しない** 6×6 の格子（自由境界）の熱浴モンテカルロ。括弧は最後の桁の誤差。計算

β	w	σ_{lat}	2×2 式	2×2 乱数	3×3 式	3×3 乱数
1	0.4331	0.8367	0.0352	0.0366(11)	0.0005	−0.0002(15)
2	0.6580	0.4185	0.1875	0.1893(12)	0.0231	0.0223(16)

β	w	σ_{lat}	2×2 式	2×2 乱数	3×3 式	3×3 乱数
4	0.8192	0.1994	0.4505	0.4514(12)	0.1662	0.1649(29)

ゲージを固定しない計算が、木ゲージの式と誤差の範囲で合います。

04

連続極限：群の熱核が現れる

格子間隔 a では、面積 A のループが囲む面は $n = A/a^2$ 枚です。(1.1) の長さを $|X|^2 = -2\,\mathrm{tr}\,X^2$ に取ると、$U_p \approx e^{a^2 F_{12}}$ の展開から $SU(2)$ では $\beta = 2/(g^2 a^2)$ です。$I_n(x)/I_1(x) = 1 - \frac{n^2-1}{2x} + O(x^{-2})$ より $w_j = 1 - j(j+1)/\beta + O(\beta^{-2})$ なので

$$w_j(\beta)^{A/a^2} \longrightarrow e^{-g^2 A\, j(j+1)/2} \qquad (a \to 0). \tag{4.1}$$

右辺は群の**熱核** Q_t の係数です。Δ は群の上のラプラシアン（質量ギャップの Δ とは別）で、指標を固有関数に持ち $\Delta \chi_\lambda = -c_\lambda \chi_\lambda$ となる作用素です。$c_\lambda \ge 0$ は表現ごとに決まる Casimir の値で、$SU(2)$ では $c_j = j(j+1)$。熱核は熱方程式 $\partial_t Q_t = \frac{1}{2}\Delta Q_t$ の、時刻 0 で単位元に集中した解で、指標で展開すると

$$Q_t(U) = \sum_{\lambda} d_\lambda\, e^{-c_\lambda t/2} \chi_\lambda(U), \qquad Q_s * Q_t = Q_{s+t} \tag{4.2}$$

(4.1) の右辺は $t = g^2 A$ での係数 $e^{-c_j t/2}$ です。つまり**面積 A の単純閉曲線のホロノミーは熱核 $Q_{g^2 A}$ に従います**。既知 半群性は「面積を足すと時刻が足される」ことです。表 2 では $j = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ のどれもが熱核に近づき、誤差は a を半分にするたび 1/4 になります。計算

表 2　$SU(2)$、$g = 1$、面積 1、$\beta = 2/a^2$。値は w_j^n。計算

a	n	$j = \frac{1}{2}$	$j = 1$	$j = \frac{3}{2}$
1/2	4	0.67919	0.35713	0.14579
1/4	16	0.68527	0.36504	0.15119
1/32	1024	0.68726	0.36783	0.15332
熱核	∞	0.68729	0.36788	0.15335

面の重みを最初から熱核に取ると、半群性で面の分け方に依らない測度になります（Migdal の観察）。Driver は、熱核の重み（Villain 作用）と Wilson 作用の格子が同じ連続の測度に収束することを示し、後者には群値の中心極限定理（Borgs–Seiler）を使っています。既知

寄り道：面積しか見ない理論

飛ばしてよい小節です。

Driver の系 6.7 によれば、ゲージ不変な量の期待値は**面積を保つ微分同相写像**で変わりません（曲線の配置が許容される形のまま移る限り）。比喩で言えばゴム膜の上の理論で、面積を保って膜を伸ばしても何も変わりません。正確には、期待値が熱核の積の有限次元積分で書け、入るのが面の面積と曲線の交わり方だけだ、ということです（定理 6.4）。

05

連続の測度：Driver と Gross–King–Sengupta

木ゲージの連続版は**完全軸ゲージ**（$A_2 = 0$、かつ x 軸の上で $A_1 = 0$）です。このとき $[A_1, A_2] = 0$ なので場の強さは線形になり、重み e^{-S} は F についてガウス型になります。

$$F_{12} = -\partial_2 A_1, \qquad \mathbb{E}\big[F^a(R) F^b(R')\big] = g^2 \delta^{ab} |R \cap R'| \tag{5.1}$$

F は**リー環に値をとる白色雑音**で（$F^a(R)$ は領域 R の上の積分、$|R|$ は面積。1-09）、互いに素な領域の値は独立です。格子の「面ごとに独立」の連続版です。既知 F は点ごとに定まらないので、平行移動は**確率微分方程式**になります。駆動項に白色雑音（ブラウン運動の増分）を含む常微分方程式のことで、確率積分の取り方を一つ決めて解きます。水平な曲線に沿う平行移動の駆動項は、曲線と x 軸のあいだの F の積分で、各成分はその面積を時間とするブラウン運動（1-09）です（Driver の命題 3.2）。この方法は Gross–King–Sengupta（1989）に由来します。

Driver の結果は、(i) ホロノミーのゲージ不変な関数の期待値が熱核の積を密度とする有限次元積分で書けること（時刻は面の面積、引数は曲線の交わり方。定理 6.4）、(ii) 面積を保つ写像での不変性（系 6.7）、(iii) 格子の収束、です。既知 系 6.7 から、ゲージ不変な期待値のユークリッド不変性（公理の一部）が出ます。反射正値性を含む Osterwalder–Schrader の公理（4-10）全体の検証は、Driver は主張していません。観測量は曲線に沿う量で、Driver は Wilson ループの変数が「$d = 3$、とくに $d = 4$ ではかなり特異」だと書いています。

06

閉じた曲面の上へ：Sengupta と Lévy

種数 γ の閉曲面ではオイラーの公式が $V - E + P = 2 - 2\gamma$ になり、木を固定した後に残る辺は $P - 1 + 2\gamma$ 本です。面の変数に全体で一つの拘束がかかり、穴を回る 2γ 個の変数が加わる

ので、面は独立ではありません。それでも測度は構成されています。Sengupta（1992–97）はコンパクトな曲面の上で構成し（原論文は書誌のみ）、Lévy（2003）は離散と連続極限を統一的に扱って、曲面を切り貼りする操作に関する**マルコフ性**（曲線で切ったとき、切り口の値を固定すると両側が互いに影響しないこと）を示しました。曲面の上でゲージ場を貼り合わせる仕方には位相的な種類があり（1-07）、その自明でない種類（自明でない主束）は Lévy（2006）、ホロノミー場の一般論は Lévy（2010）です。既知 離散版は各面 F に熱核を置く形です。

$$\mathbb{E}[f] = \frac{1}{Z}\int f(h)\prod_{F} Q_{g^2|F|}\big(h(\partial F)\big)\prod_{e} dh_e, \qquad Z_\gamma(T) = \sum_{\lambda} d_\lambda^{2-2\gamma} e^{-c_\lambda g^2 T/2} \tag{6.1}$$

$h(\partial F)$ は面の縁に沿う積、T は全面積で、Z は定数倍を除きます。既知 トーラスの Z_1 は §07 のハミルトニアンの $\operatorname{Tr} e^{-\tau H}$ と同じ形です。

寄り道：面積を 0 に近づけると

飛ばしてよい小節です。

$\gamma \geq 2$ なら $T \to 0$ で $Z_\gamma \to \sum_\lambda d_\lambda^{2-2\gamma}$ です。測度は曲率 0 の接続（平坦接続）に集中し、この極限から**平坦接続のモジュライ空間**（平坦接続をゲージ変換で同一視したものの空間）の体積が出ます。これが Witten の体積公式で、正確な極限の形は Sengupta（2003）が与えています（総説の定理 4.1）。定理 4.1 は G が単連結で $\gamma \geq 2$ であることを仮定しており、$SU(2)$・$\gamma \geq 2$ はそれを満たします。既知 $SU(2)$ では次元が $1, 2, 3, \ldots$ なので極限は $\zeta(2\gamma - 2)$ です。計算

γ	$T = 1$	$T = 0.1$	$T = 0.01$	$T \to 0$
1	2.2738	7.5201	24.597	発散
2	1.2247	1.4713	1.5849	ζ(2) = 1.6449
3	1.0482	1.0767	1.0817	ζ(4) = 1.0823

07

転送行列で見る：最低の励起は円周の長さに比例する

質量ギャップはハミルトニアンのスペクトルの隙間です（4-11）。格子では**転送行列** T を使います。時間を一段進める重みを核とする作用素で、$\mathsf{T} = e^{-aH}$ によってハミルトニアン H を定めます（5-03）。空間を L 本の辺の円周に取り、時間方向は周期的にしません（開いた円柱）。すると時間方向の辺は閉路を作らないので 1 に固定でき、ゲージ不変な状態は一周のホロノミー $V_1 \cdots V_L$ の共役類の関数、つまり指標の重ね合わせです。一段の時間発展で各辺に独立な面の変数が一つずつ掛かるので、(3.1) を L 回使って

$$\mathsf{T}\chi_\lambda = w_\lambda(\beta)^L \chi_\lambda, \qquad E_\lambda = -L \ln w_\lambda(\beta) \quad (\text{格子単位},\ E_0 = 0). \tag{7.1}$$

最低の励起は基本表現の $E = \sigma_{\mathrm{lat}} L$ で、円周を一周する「力線の輪」のエネルギーです。張力は §03 の面積則と同じ数です。$SU(2)$・β = 1 で $E_{1/2}$ は $L = 4$ で 3.3469、$L = 8$ で 6.6938。比 $E_1/E_{1/2}$ は β = 1, 32, 512 で 2.4044, 2.6664, 2.6667 と Casimir の比 $8/3$ に近づきます。補題 (3.1) も乱数（2×10^6 個）で確かめました。計算

連続極限は §04 と同じ置き方で取れます。物理の長さ $L_{\mathrm{phys}} = La$ を固定し、$\beta = 2/(g^2 a^2)$ と $-\ln w_\lambda = c_\lambda/\beta + O(\beta^{-2})$ を (7.1) に入れると

$$\frac{E_\lambda}{a} = -\frac{L_{\mathrm{phys}}}{a^2} \ln w_\lambda(\beta) = \tfrac{1}{2} g^2 L_{\mathrm{phys}}\, c_\lambda + O(a^2). \tag{7.2}$$

$\Delta \chi_\lambda = -c_\lambda \chi_\lambda$（§04）と合わせると、連続極限のハミルトニアンは群の上のラプラシアンの定数倍 $-\frac{1}{2} g^2 L_{\mathrm{phys}} \Delta$ です（共役類の関数に働く）。紙 導出はこの章のもので、$g = 1$・$L_{\mathrm{phys}} = 1$ の $SU(2)$ では $a = 1/64$ で $j = \frac{1}{2}$ の値が 0.375011（極限 0.375）、差は a を半分にするたび 1/4 になりました。計算

円周を長くする（$L \to \infty$）と真空以外の固有値はすべて無限遠に去り、有限のエネルギーで伝わる励起（粒子）はありません。相関長もここで定めておきます。プラケット p_x の量 $P_x = \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\, U_{p_x}$ の連結相関 $\langle P_x P_y \rangle - \langle P_x \rangle \langle P_y \rangle$ が $e^{-|x-y|/\xi_{\mathrm{lat}}}$ のように減るときの長さ ξ_{lat}（格子単位）が相関長です。平面では異なるプラケットが独立なので連結相関はちょうど 0 で、どの β でも $\xi_{\mathrm{lat}} = 0$ です（何を固定して極限を取るかは 5-09）。四次元の問い（相関長が発散し、物理の単位で有限の質量が残るか）は、二次元には現れません。

08

確率量子化での再構成

確率量子化は、測度を直接書かず、それを不変測度に持つ確率的な時間発展 $\partial_t A = -\frac{1}{2}\nabla S(A) + \xi$（$\xi$ は時空の白色雑音）を解く方法です。この方程式を **Langevin 方程式**と呼びます。有限次元ならこの方程式の不変測度は e^{-S} に比例します。二次元でも A は分布なので、繰り込みとゲージとの整合が要ります。その道具（正則性構造・DeTurck の方法）は 7-09 で扱い、ここでは結果だけを見ます。既知

Chevyrev（2019）は T^2 の測度を分布的な 1 形式として実現し、Chandra–Chevyrev–Hairer–Shen（2022）は分布的な接続とゲージ軌道の空間（Polish 空間＝確率論が普通に使える良い距離空間）を作り、法則の意味でゲージと整合する **Markov 過程**（未来の分布が現在の状態だけで決まる確率過程）を定めました。Chevyrev–Shen（arXiv 2023、2026 年に Comm. Pure Appl. Math.）は、T^2 上の自明な主束のヤン–ミルズ測度がこの過程の**一意な不**

変確率測度であることを示しました（定理 2.16）。系として過程の長時間存在、Wilson・Villain・Manton の格子の極限が同じ測度になること（Villain 作用については Lévy 2006 で既に知られていたと論文は書いています）、ガウス自由場（1-09）とほぼ Lipschitz な剰余への分解が出ます。既知

この道も可解性から離れてはいません。Chevyrev–Shen は格子のゲージ固定を使い、モーメント評価を二次元の可解性から得ています。論文はこの評価を高次元や二次元のヤン–ミルズ–Higgs 模型に延ばすことを未解決とし、非可換 Higgs 模型の構成は二次元でも未解決と書いています。既知 2026 年 7 月にはプレプリントが二つ出ています（未査読・要旨による）。Chevyrev–Klose–Mohamed は既存の測度に最適な正則性のゲージ固定の表示を与え、Chhaibi–Dang–Guedes Bonthonneau–Rivière–Tô は Morse 理論（曲面の上の関数の臨界点で曲面を分解する方法）を使って格子を経ずに曲面上の測度を作り、Migdal・Witten・Lévy の公式を再現したとしています。既知

09

二次元から持ち出せるもの、持ち出せないもの

可解性の芯は §02 の数え上げでした。d 次元の格子では格子点あたり、ゲージで消した後に残る辺が $d-1$ 本、面が $\binom{d}{2}$ 枚で、$d=2,3,4$ で 1 と 1、2 と 3、3 と 6 です。三次元以上では面の変数が立方体ごとの拘束（格子の Bianchi 恒等式）で結ばれ、独立にとれません。既知

性質	二次元	四次元
面積則	すべての β	強結合の側だけ（5-02・5-06）
結合定数	面積の逆数の次元	無次元。β の走り方は、疑いもあり数学的に未解決（Chatterjee 2018）。2026-11-10 に公開された構成は、漸近自由に要る結合の尺度の振る舞いを与える、と委員会は評価した（6-01）
連続の測度	平面・閉曲面で構成済み	未構成（公開された構成も測度は作らない。6-04）。三次元でも T^3 上で未構成（7-06・7-07）
相関長	0	質量ギャップの本体

持ち出せるのは方法の側です。曲線に沿うホロノミーを観測量に取ること、指標による展開（強結合展開の道具）、格子作用の普遍性の証明の型、確率量子化の枠組み。持ち出せないのは、面の独立性、面積だけに依ること、伝播する自由度が無いことです。Jaffe–Witten の問題文が、公理を満たす相互作用するゲージ理論の「唯一の完全な例」として挙げるのも、二次元の可換 Higgs 模型（Brydges–Fröhlich–Seiler）です。既知

この章が言えている範囲

	内容	札
言えている	平面の格子では面の変数が独立で、Wilson ループは $w(\beta)^{\text{面積}}$（すべての β）。ゲージを固定しない乱数と一致	既知 計算
言えている	連続極限でホロノミーは熱核 $Q_{g^2 A}$ に従い、誤差は a^2 に比例。円周上の最低の励起は円周の長さに比例し、連続極限のハミルトニアンは $-\frac{1}{2}g^2 L_{\text{phys}}\Delta$（式 (7.2) はこの章の導出）	既知 紙 計算
言えている	平面の連続測度の構成と格子の収束（Driver、Gross–King–Sengupta）。閉曲面の上の構成（Sengupta、Lévy）。T^2 では Langevin 方程式の過程の一意な不変測度（Chevyrev–Shen）	既知
言えている	ゲージ不変な期待値のユークリッド不変性（Driver の系 6.7 から。公理の段の一部）	既知
言えていない	この方法が三次元以上に延びること。反射正値性を含む OS 公理全体の検証（Driver・Sengupta の総説・Chevyrev–Shen は主張していない）。非可換 Higgs 模型（二次元でも未構成）	
言えていない	2026 年のプレプリントの中身（要旨のみ）。書誌のみの文献の本文	

出典と再現

もの	種別	出典・道具
二次元で再帰式が正確・$\langle \chi_q \rangle = d_q e^{-g_q^2 A}$（面積 A）・「Wilson の面積則にほかならない」	本文 §2	A. A. Migdal, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 69 (1975) 810–822［英訳 Sov. Phys. JETP 42 (1976) 413–418］
白色雑音・命題 3.2・定理 6.4・系 6.7（とユークリッド不変性）・定理 7.2 と Dosch–Müller への言及・8.5・8.8・「かなり特異」	本文	B. K. Driver, Comm. Math. Phys. 123 (1989) 575–616
ホロノミーの法則・離散測度・細分不変性・分配関数・定理 4.1（G 単連結・$\gamma \geq 2$）と体積公式の帰属	総説の本文	A. N. Sengupta, arXiv:0707.4136 (2007)
統一とマルコフ性／自明でない束／ホロノミー場	要旨	T. Lévy, Mem. AMS 166 no. 790 (2003)；Probab. Theory Relat. Fields 136 (2006) 171–202；Astérisque 329 (2010)
平行移動の確率微分方程式	書誌のみ	L. Gross, C. King, A. Sengupta, Ann. Phys. 194 (1989) 65–112
無限体積の極限（定理 7.2 がほぼ含まれるもの）	書誌のみ（Driver の文献 [23] による）	H. G. Dosch, V. F. Müller, Fortschr. Phys. 27 (1979) 547–559

もの	種別	出典・道具
群値の中心極限定理	書誌のみ（Driver の定理 8.8 による）	C. Borgs, E. Seiler, Comm. Math. Phys. 91 (1983) 329–380
コンパクトな曲面の上の測度	書誌のみ・未確認	A. N. Sengupta, J. Funct. Anal. 108 (1992)（題・頁は未確認）；Quantum gauge theory on compact surfaces, Ann. Phys. 221 (1993) 17–52；Gauge theory on compact surfaces, Mem. AMS 126 no. 600 (1997)（1993・1997 の題・頁は総説の文献表による）
体積公式とその正確な極限	書誌のみ	E. Witten, J. Geom. Phys. 9 (1992) 303–368（式 (4.72)。総説による帰属）；A. N. Sengupta, J. Geom. Phys. 47 (2003) 398–426（総説の定理 4.1 の出典）。関連：E. Witten, Comm. Math. Phys. 141 (1991) 153–209
可換 Higgs 模型	書誌のみ	D. Brydges, J. Fröhlich, E. Seiler, Ann. Phys. 121 (1979) 227–284；Comm. Math. Phys. 71 (1980) 159–205；Comm. Math. Phys. 79 (1981) 353–399
確率量子化	要旨	Chevyrev, Comm. Math. Phys. 372 (2019)；Chandra–Chevyrev–Hairer–Shen, Publ. Math. IHÉS 136 (2022)
定理 2.16・系・§1.2 の未解決問題・Villain 作用は既知（Lévy 2006）という記述	本文 §1・§2	Chevyrev–Shen, arXiv:2302.12160v3（2023）；Comm. Pure Appl. Math. (2026)（巻・頁は未確認）
2026 年のプレプリント	要旨（未査読）	Chevyrev–Klose–Mohamed, arXiv:2607.22236；Chhaibi ほか, arXiv:2607.24640
高次元で非自明な連続極限が無いこと・β の走り	総説の本文	S. Chatterjee, arXiv:1803.01950 (2018)
「唯一の完全な例」	問題文 §6.4	Jaffe–Witten, Quantum Yang–Mills theory（Clay）
表・図・補題・式 (7.2) の確認	計算	python3（numpy・scipy）。乱数は SU(2) を四元数で表した熱浴法（6×6・自由境界・ゲージ固定なし・7000 掃引・35 ブロック・種は固定）。図は素の JavaScript

次に読む章：7-03 スカラー場の構成。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 7 部 構成的場の理論 φ⁴₂・φ⁴₃

スカラー場の構成 — φ⁴ が二次元と三次元で公理を満たすまで

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 六つの段が最初に通った相互作用のある例、ϕ^4_2・ϕ^4_3 の構成の筋。二次元では Wick 積で紫外が足り、壁は「下から有界でない」ことだったこと。場の方程式の道と統計力学の道。三次元で要るもう一段の繰り込みの数え方。

前提となる章 — 7-01 構成的場の理論とは。4-10・1-11・4-04 も参照します。

先に言うこと — 1965〜1976 年の既知の構成とその後の別証明の紹介で、証明は筋だけを追います。表の数値は有限の格子と見本の計算で、極限の存在の証明ではありません。四次元のヤン–ミルズについて何かを示すものではありません。

この章の順序

1. なぜスカラー場から始めるか — 目標の文
2. Wick 積：どの冪が確率変数になるか — 計算の表
3. 二次元の壁：下から有界でない — 動く図
4. 二つの道：場の方程式と統計力学
5. 弱結合：クラスター展開・質量ギャップ・散乱
6. 三次元：もう一段の繰り込み — 動く図
7. 別の道でもう一度
8. 寄り道：強結合の ϕ^4_2 と相転移
9. 四次元へ持ち出せるもの、持ち出せないもの

01

なぜスカラー場から始めるか

7-01 の地図（六つの段）で、相互作用のある理論として六つの段がすべて閉じた例は、二次元と三次元の ϕ^4 でした。場は各点に実数を一つ持つだけで、ゲージ対称性も拘束もなく、難しさは点での積（紫外）と体積（赤外）に絞られます。ユークリッドの作用は、質量 m_0 の自由場の作用に問題文の式 (3) の多項式を足したものです。

$$S(\phi)=\int\Big(\tfrac12|\nabla\phi|^2+\tfrac12 m_0^2\phi^2+\lambda\phi^4+\tfrac12\sigma\phi^2+c\Big)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

$\lambda>0$ は結合定数、$\sigma=\alpha\lambda+\beta\lambda^2$ と $c=\gamma\lambda+\delta\lambda^2+\varepsilon\lambda^3$ は切断に依存させる相殺項です（JW §6.2）。ϕ^4_d の d は時空の次元で、二次元では下に有界な多項式 P に広げた $P(\phi)_2$ も同じ方法で扱われました。目標は問題文の一文です：'For 0 < λ ≪ 1, one can choose σ(λ), c(λ) so the field theory described by (3) exists, is unique, and has a mass equal to m such that |m − m_0| is small'（JW §6.2）。四次元では格子の極限がガウスに潰れます（7-08）。既知

02

Wick 積：どの冪が確率変数になるか

7-01 の表 1（壊れている場所）で、二次元以上では格子の一点の分散 $c_a=G_a(0)$ が $a\to0$ で無限大になることを見ました。Wick 積は期待値が 0 になるように低い冪を引いた積で、次の条件で順に決まります（Summers 2016 §3.1）。

$$:\!\phi^0\!:=1,\qquad \frac{\partial}{\partial\phi}:\!\phi^n\!:=n:\!\phi^{n-1}\!:,\qquad \int:\!\phi^n\!:\mathrm{d}\mu_C=0 \tag{2}$$

分散 c の一変数なら $:\!x^2\!:=x^2-c$、$:\!x^4\!:=x^4-6cx^2+3c^2$ で、尺度を合わせた Hermite 多項式です。要は、平均 0・共分散 C のガウス場で

$$\big\langle:\!\phi(x)^n\!::\!\phi(y)^k\!:\big\rangle=\delta_{nk}\,n!\,C(x-y)^n \tag{3}$$

が成り立つことです。均した $:\!\phi^n\!:(f)$ の分散は $n!\iint f(x)f(y)C(x-y)^n$ で、C は近距離で $d=2$ なら $\log(1/|x|)$、$d\ge3$ なら $|x|^{-(d-2)}$ のように振る舞うので

$$\int_{|x|<1}C(x)^n\,\mathrm{d}^dx<\infty\iff n(d-2)<d \tag{4}$$

です。二次元ではすべての n が有限、三次元では $n\le2$ だけで、$n=3$ が対数の境目、$n=4$ は $1/a$ で発散します。既知

計算 表 1　格子の $\int C^n\approx a^d\sum_x G_a(x)^n$（m = 1。周期箱の一辺は二次元で 8、三次元で 4）。二次元の最下行は連続・無限体積の $\int_0^\infty 2\pi r\,(K_0(r)/2\pi)^n\,\mathrm{d}r$。

a	d=2, n=2	n=3	n=4	d=3, n=2	n=3	n=4
1/8	0.08086	0.01571	0.00487	0.04771	0.02128	0.03050
1/16	0.08026	0.01518	0.00453	0.04712	0.02589	0.06776
1/32	0.08007	0.01498	0.00436	0.04678	0.03038	0.14358
1/64	0.08001	0.01491	0.00429	0.04661	0.03482	0.29652
1/256	0.07999	0.01487	0.00425	–	–	–
$\to 0$	0.07958	0.01484	0.00424	収束	対数	$\propto$ 1/a

二次元の列はどれも連続の値に近づきます。三次元では $\int C^2$ が収束し、$\int C^3$ は a を半分にするごとの増分が 0.0044 前後に近づき（連続の予想は $\log 2/(16\pi^2) = 0.00439$）、$\int C^4$ はほぼ 2 倍ずつ増えます。二次元の $:\phi^4:(f)$ は確率変数ですが、三次元のそれは違います。この二列は §06 で頂点が二つの図としてもう一度現れます。

03

二次元の壁：下から有界でない

$V = \int_\Lambda :\phi^4: \mathrm{d}x$（$\Lambda$ は有限の箱）が確率変数でも、測度 $e^{-\lambda V}\mathrm{d}\mu_C / Z$ を作るには $e^{-\lambda V}$ が積分できなければなりません。古典的な ϕ^4 は非負ですが、Wick 積は違います。$:x^4: = (x^2 - 3c)^2 - 6c^2$ なので

$$:x^4: \;\geq\; -6c^2, \qquad V_a \;\geq\; -6\,c_a^2\,|\Lambda| \tag{5}$$

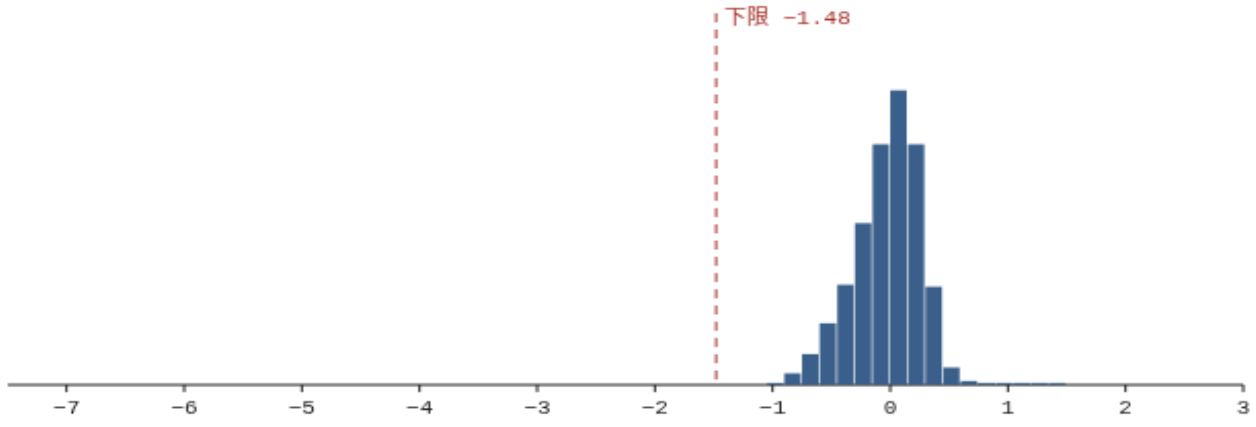
で、二次元では $c_a = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{a} + O(1)$ ですから、下限は $(\log\frac{1}{a})^2$ の速さで $-\infty$ へ逃げます。Jaffe（2000）は、二次元の初期の進展が、空間を円周にした ϕ^4 のハミルトニアンの安定性（下に有界であること）を示した Nelson の 1965 年の論文に多くを負うとしています。既知

下限が逃げても積分できることを示す議論の筋は三段です。(i) 切断した V_a は式 (5) で下から抑えられる。(ii) $V - V_a$ の分散は表 1 の収束のように a の冪で小さくなる。(iii) ガウス場の 4 次の多項式は、標準偏差が s なら t を超える確率が $\exp(-\mathrm{const}\cdot(t/s)^{1/2})$ 程度。$V < -M$ には $V - V_a$ が大きく負である必要があり、a を M に合わせて選ぶと、その確率は e^{-pM} より速く減ります。結論は（Summers 2016 §3.1）既知

$$e^{-\lambda V} \in L^p(\mathrm{d}\mu_C) \qquad (\text{すべての } p < \infty) \tag{6}$$

ここで $X \in L^p(\mathrm{d}\mu_C)$ は $E[|X|^p] < \infty$、つまり p 乗の期待値が有限という意味です（E は自由場の測度 μ_C での期待値）。$p = 1$ なら正規化の定数 $Z = E[e^{-\lambda V}]$ が有限で、測度 $e^{-\lambda V}\mathrm{d}\mu_C/Z$ が作れます。

図 1　a を細かくすると、下限 $-6c_a^2$（破線）は左へ逃げるが、二次元では V_a の分布が動かない。三次元に切り替えると広がる



d = 2　a = 1/4　下限 −1.48　標準偏差 0.406　0.1% 点 −0.969　log E[e^(−V)] = 0.0575（見本 20000 本）

計算　この図の数値はこの端末で計算した。一辺 1 の周期箱・m = 2 の格子の自由場の見本 20000 本（三次元の a = 1/64 は 6000 本）で $V_a = a^d \sum_x :\phi_x^4:$ を数えた。横軸は V_a、縦軸は密度。

計算　表 2　図 1 の分布（抜粋）。標準偏差は式 (3) から正確に、0.1% 点と $\log E[e^{-V}]$（λ = 1）は見本から（後者の誤差は二次元で ±0.002、三次元で ±0.005〜0.17）。括弧はガウス近似 $\mathrm{Var}(V)/2$。

d, a	下限	標準偏差	0.1% 点	$\log E[e^{-V}]$
2, 1/4	−1.48	0.4060	−0.969	0.0575
2, 1/16	−3.15	0.3860	−0.991	0.0479
2, 1/64	−5.37	0.3788	−0.946	0.0505
2, 1/128	−6.70	0.3779	−0.923	0.0500
3, 1/4	−5.91	0.6806	−1.944	0.176（0.232）
3, 1/16	−97.20	1.3599	−4.152	0.865（0.925）
3, 1/32	−390.73	1.9229	−5.866	1.746（1.849）
3, 1/64	−1566.46	2.7194	−8.151	3.54（3.70）

二次元では、下限が −1.5 から −6.7 へ下がっても 0.1% 点は −0.9〜−1.0 から動かず、$\log E[e^{-V}]$ は 0.05 前後に落ち着きます。下限は遠くても、そこまで行く確率が極端に小さい、という式 (6) の中身です。三次元では標準偏差が半分ごとに $\sqrt{2}$ 倍、$\log E[e^{-V}]$ がほぼ 2 倍になってガウス近似に近づきます。$1/a$ で増える定数を λ^2 の次数で引く必要があり、これが問題文の δ に当たります（§06）。計算

04

二つの道：場の方程式と統計力学

最初の構成（Glimm–Jaffe の四部作、1968–1972）は、ミンコフスキー時空で場の方程式を作用素として解く形でした。二次元の方程式は

$$\partial_t^2\phi - \partial_x^2\phi + m_0^2\phi + 4\lambda :\phi^3: = 0, \qquad :\phi^3: = \lim_{\kappa\to\infty}\left(\phi_\kappa^3 - 3c_\kappa\phi_\kappa\right) \tag{7}$$

です（ϕ_κ はフーリエ成分を $|k|\le\kappa$ で切った場、$c_\kappa\sim\log\kappa$。Jaffe 2000 §3）。空間を関数 g で切った $H(g)=H_0+\lambda\int :\phi(0,x)^4: g\,\mathrm{d}x$ が Fock 空間で本質的自己共役（切断した式から自己共役作用素がただ一つに決まること）・下に有界・最低の固有値が単純であることを示し、信号が光速を超えないことを使って $g\to 1$ でポアンカレ不変な真空を得ます（有限体積の段→無限体積の段。Summers 2016 §2）。表現は Fock 表現と同値でありませんが（4-09 の Haag の定理）、有界な領域に制限すると同値です。既知

1970 年代前半には、Nelson の Markov 場（ここでは名前だけ挙げます）と Osterwalder–Schrader の公理（4-10）で、ユークリッドの測度

$$\mathrm{d}\mu_\Lambda = \frac{1}{Z}\,e^{-\lambda U_\Lambda}\,\mathrm{d}\mu_C, \qquad U_\Lambda=\int_\Lambda :P(\phi):\mathrm{d}^2x \tag{8}$$

として作る道が開きました（式 (6) で意味を持つ）。二次元の格子では、差分の項が隣り合う点の組 $\langle xy\rangle$ について

$$\tfrac12\sum_{\langle xy\rangle}(\phi_x-\phi_y)^2 = \sum_{\langle xy\rangle}\left(\tfrac12\phi_x^2+\tfrac12\phi_y^2\right) - \sum_{\langle xy\rangle}\phi_x\phi_y \tag{9}$$

となり、最後の項は e^{-S} の中で $e^{+\phi_x\phi_y}$ として隣どうしに同じ符号を好ませます。スピンが実数全体を動く強磁性体です（Guerra–Rosen–Simon 1975 の題は 'as classical statistical mechanics'）。そこで相関不等式（GKS 型。隣どうしが同じ符号を好む系で、相関が非負になることを言う不等式）が効き、P が偶多項式から $h\phi$（$h\ge 0$）を引いた形なら、Schwinger 関数は非負で、境界条件を工夫すると箱とともに増えます。一様な上界と合わせれば単調収束で無限体積極限が取れ（無限体積の段）、結合の大きさに制限はありません（Summers 2016 §3.1）が、問題文は相関不等式がスカラーのボソンや可換なゲージ理論に限られがちだとしています（JW §6.1）。反射正値性は極限に引き継がれます（公理の段、7-01）。既知

05

弱結合：クラスター展開・質量ギャップ・散乱

一様なギャップの段まで通したのは Glimm–Jaffe–Spencer（1974）です。λ/m_0^2 が十分小さいとき、クラスター展開で無限体積極限と OS の公理を示し、相関の指数減衰（7-01 の式 (9)）

を得ました。質量作用素 $M = \sqrt{H^2 - P^2}$（P は運動量）については

$$\operatorname{spec} M \subset \{0\} \cup \{m\} \cup [m_1, \infty), \qquad m \to m_0, \quad m_1 \to 2m_0 \quad (\lambda \to 0) \tag{10}$$

が示されています（Summers 2016 §3.1）。0 は真空、孤立した m は一粒子、m_1 より上は二粒子以上です。孤立した一粒子があれば Haag–Ruelle の散乱理論（孤立した粒子の状態から、遠い過去と遠い未来の散乱の状態を組み立てる一般論。ここでは名前だけ挙げます）が使え、Osterwalder–Sénéor（1976）は散乱行列が自明でなく、摂動級数がその漸近展開になることを示しました（Summers 2016 §3.1）。一方、存在とギャップの証明に使うクラスター展開は λ の冪級数ではなく、n 番目の項が $\lambda^n G_n(\lambda)$（G_n は $\lambda \to 0$ で有界）の形をした収束する展開です（Jaffe 2000 §4）。摂動級数のほうは発散し（4-12）、正確な答えの漸近展開になるだけです。仕組みは 7-04 で扱います。 既知

例：$\lambda = 0$ なら二点関数は $C(x)$ で、遠方で $e^{-m_0|x|}$ のように減衰し、ギャップは m_0 です。弱結合の結果は、この隙間が小さな相互作用で潰れないことを言っています。ギャップの出どころは作用に書き込んだ m_0 です（§09）。

06

三次元：もう一段の繰り込み

何が増えるかは摂動論の図の数え方で見当が付きます（4-03・4-04）。頂点が n 個・外線が E 本の連結な図は、内線が $I = 2n - E/2$ 本、ループが $L = n - E/2 + 1$ 個です。ループの積分は運動量の d 乗、伝播関数は -2 乗を運ぶので、見かけの発散の次数は

$$\omega = dL - 2I = d + (d-4)\,n - \frac{d-2}{2}\,E \tag{11}$$

で、$\omega \geq 0$ が紫外で発散しうる図（$\omega = 0$ は対数）です。頂点が一つの図は自分とつながる線だけでできていて、Wick 積で消えます。

図 2　次元 d を動かすと、発散しうる図の型（色の枠。濃いのは ω > 0、薄いのは ω = 0）が変わる。破線は頂点が一つで Wick 積で消える型、「木」はループの無い図、「一」は連結な図が無い型

E＼n	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6
E = 0	**ω = 2**	**ω = 1**	**ω = 0**	ω = −1	ω = −2	ω = −3
E = 2	**ω = 1**	**ω = 0**	ω = −1	ω = −2	ω = −3	ω = −4
E = 4	木	ω = −1	ω = −2	ω = −3	ω = −4	ω = −5
E = 6	—	木	ω = −3	ω = −4	ω = −5	ω = −6
E = 8	—	—	木	ω = −5	ω = −6	ω = −7

d = 3.00　Wick の後に残る発散の型（n ≥ 2）：3 個

計算 この図の値は式 (11) をその場で計算したもの。表 3 はこの端末の計算と一致する。

計算 表 3　ω ≥ 0 となる型 (n, E) と ω。

d	頂点が一つ（Wick 積で消える）	Wick の後に残る型
2	(1, 0)・(1, 2)：0	なし
3	(1, 0)：2、(1, 2)：1	(2, 0)：1、(2, 2)：0、(3, 0)：0
4	(1, 0)：4、(1, 2)：2	すべての n で E = 0, 2, 4（ω = 4, 2, 0）

三次元で残る型のうち二つは表 1 の列そのものです。(2, 0) は二つの頂点を四本の線で結んだ真空の泡で $\int C^4$（$1/a$）、(2, 2) は三本の線で結んだ自己エネルギーで $\int C^3$（対数）です。図 2 で d を 2.66 から 2.67 へ動かすと、(2, 0) が発散しうる型に入ります。境目は $d = 8/3$ で、式 (4) の $n = 4$ の境目と一致します。計算

問題文は、二次元では α, γ を、三次元では五つすべてを切断に依存させるとしています（JW §6.2）。既知 問題文はどの定数がどの図に当たるかを書いていませんが、λ の次数を頂点の数と読むと、α, γ は $n = 1$、β, δ は $n = 2$、ε は $n = 3$ に当たり、表 3 の型の数と合います。計算 Jaffe（2000 §6）も、三次元では Wick 積に加えて、対数で発散する質量の相殺項と、線形と対数で発散する二つの真空のエネルギーの相殺項が要るとしています。λ 自身は繰り込まれません。既知

さらに三次元では、Wick 積をとったハミルトニアンが稠密に定義された作用素（どのベクトルにもいくらでも近いベクトルを含む部分空間の上で定義された作用素）にならず、状態ベクトルを切断とともに 0 に向かう定数で掛け直す必要があり（問題文の言う波動関数の繰り込み）、表現は Fock 表現と同値になりません（Jaffe 2000 §6）。Jaffe はこれを、有界な領域では Fock 表現と同値になる二次元（§04）とはまったく違う、としています。制御の道具は Glimm–Jaffe（1973）の位相空間の細胞（位置と運動量の尺度の両方で区切った箱）への局所

化で、ある尺度の評価から二倍の尺度を評価する帰納は繰り込み群の考えにつながります（同。7-05）。その上で Feldman–Osterwalder（1976）と Magnen–Sénéor（1976）が独立に、λ/m_0^2 が小さいとき切断と体積を外した極限で OS の公理を示しました（Summers 2016 §3.2。前者は題に質量ギャップを掲げる）。λ/m_0^2 の制限は後に Seiler–Simon（1976）と Park（1977）が別の方法で外し、Burnap（1977）は一粒子状態の存在を示して Haag–Ruelle の散乱理論が使えるようにしました（Summers 2016 §3.2。原論文は書誌のみ）。

既知

07

別の道でもう一度

ϕ^4_2・ϕ^4_3 はその後も、新しい方法が既知の結果を再現できるかを確かめる例になりました。方法ごとに、出力に含まれる段が違います。Brydges–Fröhlich–Sokal（1983）は格子・Schwinger–Dyson 方程式・相関不等式で、弱結合の存在と非自明性を格子理論の部分列の極限として示しました。確率量子化（7-09）は測度 e^{-S} を

$$\partial_t \phi = -\frac{\delta S}{\delta \phi} + \sqrt{2}\,\xi \qquad (\xi \text{ は時空の白色雑音}) \tag{12}$$

の不変測度（この方程式で時間発展させても分布が変わらない測度）として作ります。Hairer（2014）は正則性構造で、有限体積の Φ^4_3 に対応する確率量子化の方程式 (12) の解を（爆発するかもしれない時刻までの局所解として）作りました。要旨はこれを、その測度に関して対称な自然な Markov 過程を作る問題の解決と述べていますが、本文では解が大域的であることや測度の不変性は示されておらず、期待されるとしています。Gubinelli–Hofmanová（2021）は $\mathbb{R}^3$ 上で、極限点がどれも非ガウスで反射正値性と並進不変性を持つことを示し、要旨は回転不変性とクラスター性を除いて OS の公理を確かめたとしています。有限体積（三次元トーラス）では、測度を確率最適制御で変分的に書く方法もあります（Barashkov–Gubinelli 2020）。なお問題文は、ヤン–ミルズの問題の存在の部分について、コンパクト性による弱い存在だけでは、極限の性質（質量ギャップや公理）を別に示さない限り解答と認めないとしています（JW 脚注 2）。既知

08

寄り道：強結合の φ⁴₂ と相転移

飛ばしてよい節です。

二次元の ϕ^4 は正の λ のすべてで存在しますが、$\lambda \gg 1$ では解が二つに分かれます（JW §6.3）。並べ直すと二つの谷を持つ形

$$\lambda'\Big(\phi^2-\frac{1}{\lambda'}\Big)^2+\tfrac{1}{2}\sigma'\phi^2+c' \qquad (\lambda'\ll 1) \tag{13}$$

になり、谷ごとにクラスター展開を組んで谷の間を行き来する確率が小さいことを示すと、$\phi\to-\phi$ の対称性が破れた二つの相が得られます（Glimm–Jaffe–Spencer 1976）。臨界値 λ_c に下から近づくとギャップは単調かつ連続に 0 まで下がり、その近くは 'practically nothing has been proved' とされます（JW §6.3）。ギャップは結合を変えれば閉じうる量で、4-11 の言葉では相関長が無限大に向かう点が臨界点です。式 (9) の見方を押し進めると、格子と有限体積で切断した ϕ^4_2 はイジングのスピンの集まりで近似できます（Simon–Griffiths 1973）。この仕事は Lee–Yang の定理（分配関数の零点の位置から、外場があると相転移が起きないことを導く定理）を ϕ^4_2 に広げてもいて、そこから外場 $h\neq 0$ を加えた模型の真空が一意であることが従います（Summers 2016 §3.1）。イジング模型のギャップは 2-09 にあります。既知

09

四次元へ持ち出せるもの、持ち出せないもの

既知 表 4　四つの理論（結合の質量次元は 7-01 の式 (7)、発散の型は表 3）。

	φ^4_2	φ^4_3	φ^4_4	ヤン–ミルズ（四次元）
結合の質量次元	2	1	0	0
発散しうる図の型（φ^4 は Wick の後）	なし	3	E = 0, 2, 4 の三種がすべての n に（相殺項の種類は有限）	すべての次数に現れる（相殺項の種類は有限。4-04）
短距離での結合	効きが弱い（超繰り込み可能）		漸近自由でない	弱くなる（4-06）
ギャップの出どころ	作用の質量 m_0		—	作用に質量が無い
構成	公理・ギャップ・散乱	公理・ギャップ・一粒子状態（Summers §3.2）	格子の極限はガウス（7-08）	2026 年より前は未（7-07）。2026-11 に公開された構成は、Wightman の公理を満たす理論の構成まで（6-01）。質量ギャップは示されていない

持ち出せるものは四つです。(1) 相殺項の形を摂動論から読み、切断に依存させること。(2) 尺度ごとの評価を積み上げること（位相空間の細胞は繰り込み群の段の列になった。7-05）。(3) 反射正値性のような不等式の性質は極限に引き継がれること。(4) 弱結合の展開で相関の指数減衰を示せば、それがギャップになること。

持ち出せないものの中心はギャップの出どころです。ϕ^4_2・ϕ^4_3 では作用に $m_0>0$ を書き込み、$|m-m_0|$ が小さいことを示しました。ヤン–ミルズの作用には質量の項が無く、期待されているギャップの尺度は $e^{-\mathrm{const}/g^2}$ の形で結合に依存し、g の冪には展開できません（4-07）。弱結

合の展開の足場になる質量が、はじめから無いのです。加えて四次元では発散する図がすべての次数に現れ、場は接続でゲージ不変性を保たねばなりません（5-01）。既知 物理

一方で問題文は、四次元の ϕ^4 が漸近自由でないことを自明性の証拠に挙げ、短距離で結合が弱くなるヤン–ミルズを四次元の構成的場の理論の自然な候補としています（JW §6.2）。止まる場所は 7-10 で見ます。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	格子の $\int C^n$ は二次元の n = 2, 3, 4 で収束、三次元では n = 2 が収束・n = 3 が対数・n = 4 が 1/a で増える（a ≥ 1/256・1/64） 計算
言えている	二次元では下限 $-6c_a^2$ が下がっても V_a の左の裾と $\log E[e^{-V_a}]$ は動かず、三次元では $\log E[e^{-V_a}]$ が 1/a で増える（a ≥ 1/128・1/64） 計算
言えている	Wick の後に残る発散しうる図の型は d = 2 でなし、d = 3 で三つ、d = 4 では E = 0, 2, 4 の三種がすべての n に現れる。三次元の三つは、定数の次数を頂点の数と読むと問題文と Jaffe（2000）の相殺項の記述に合う 計算 既知
言えている	弱結合の φ^4_2・φ^4_3 は公理と質量ギャップを満たし、強結合の φ^4_2 は二つの相を持つ（問題文と総説による） 既知
言えていない	式 (6)・クラスター展開・位相空間の細胞の証明（筋のみ。原論文は書誌のみ）
言えていない	表 1・表 2 の数値からの極限の存在（有限の a と有限の見本の計算）
言えていない	臨界点の近く、確率量子化の道での回転不変性とクラスター性（その後の文献は追っていない）
言えていない	確率量子化の道での大域解・不変性（Hairer 2014 の後の文献は追っていない）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
問題文 §6.1–6.3・脚注 2	一次資料（本文で確認）	A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*, Clay Mathematics Institute の公式問題文（2000）
歴史・式 (7)・三次元の相殺項と表現・位相空間の細胞	総説（本文で確認）	A. Jaffe, Constructive quantum field theory, in *Mathematical Physics 2000*, World Scientific (2000)

もの	種別	出典・道具
式 (2)・(6)・(8)・(10)、段取り、相関不等式、§3.1 の散乱と Lee–Yang の定理の拡張、§3.2 の制限の除去と一粒子状態	総説（本文で確認）	S. J. Summers, A Perspective on Constructive Quantum Field Theory, arXiv:1203.3991（v2, 2016）
二次元の原論文	書誌のみ（問題文・総説の文献表）	Nelson, 1965 年の会議の会議録 *Mathematical Theory of Elementary Particles*（R. Goodman・I. Segal 編、MIT Press 1966）。Glimm–Jaffe, Phys. Rev. 176 (1968) 1945–1951; Ann. Math. 91 (1970) 362–401; Acta Math. 125 (1970) 203–267; J. Math. Phys. 13 (1972) 1568–1584。Nelson, Proc. Sympos. Pure Math. XXIII, AMS (1973) 413–420。Osterwalder–Schrader, Comm. Math. Phys. 31 (1973) 83–112; 42 (1975) 281–305。Guerra–Rosen–Simon, Ann. Math. 101 (1975) 111–259。Glimm–Jaffe–Spencer, Ann. Math. 100 (1974) 585–632。Osterwalder–Sénéor, Helv. Phys. Acta 49 (1976) 525–535
三次元の原論文	書誌のみ	Glimm–Jaffe, Fortschr. Phys. 21 (1973) 327–376。Feldman–Osterwalder, Ann. Phys. 97 (1976) 80–135。Magnen–Sénéor, Ann. Inst. H. Poincaré A 24 (1976) 95–159。Seiler–Simon, Ann. Phys. 97 (1976) 470–518。Park, J. Math. Phys. 18 (1977) 354–366。Burnap, Ann. Phys. 104 (1977) 184–196
別の構成	Brydges–Fröhlich–Sokal は書誌と要旨の要約のみ。Hairer は要旨と arXiv 版 v4 の本文（Remark 1.18）、他は要旨で確認	Brydges–Fröhlich–Sokal, Comm. Math. Phys. 91 (1983) 141–186。Hairer, Invent. Math. 198 (2014) 269–504, doi:10.1007/s00222-014-0505-4, arXiv:1303.5113。Barashkov–Gubinelli, Duke Math. J. 169 (2020) 3339–3415, arXiv:1805.10814。Gubinelli–Hofmanová, Comm. Math. Phys. 384 (2021) 1–75, arXiv:1810.01700
相転移	書誌のみ	Glimm–Jaffe–Spencer, Ann. Phys. 101 (1976) 610–630, 631–669。Simon–Griffiths, Comm. Math. Phys. 33 (1973) 145–164。臨界への減少（JW §6.3 の文献）：Glimm–Jaffe, Phys. Rev. D 10 (1974) 536–539。Guerra–Rosen–Simon, Comm. Math. Phys. 41 (1975) 19–32。McBryan–Rosen, Comm. Math. Phys. 51 (1976) 97–105
四次元の φ^4	書誌のみ（7-08 で扱う）	Aizenman–Duminil-Copin, Ann. of Math. 194 (2021) 163–235, arXiv:1912.07973
表 1〜3・図 1	計算	この端末の Python（numpy・scipy）：`wick_powers.py`・`wick_mc.py`（FFT で周期格子の自由場を生成、乱数の種は固定。(d, a) ごとに分けて走らせ、各 5 分以内。最も重い三次元の a = 1/64 で約 3 分 40 秒）・`fig_data.py`・`power_count.py`
図 1・図 2	図	canvas・SVG と素の JavaScript。図 1 は表 2 の見本の度数（密度を 0.01 刻み）、図 2 は式 (11) を計算

次に読む章：7-04 クラスター展開（§05 で使った道具の仕組み）。

クラスター展開 — 弱く結びついた小さな塊に分けて、対数を収束する和に書き直す道具

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 分配関数の対数を「つながった塊（クラスター）」の和に書く式と、その収束条件。収束すれば無限体積極限・解析性・相関の指数減衰が一度に出ること。連続の場も立方体ごとに切り離せること。

前提となる章 — 7-03。7-01 の無限体積の段と一様なギャップの段、4-11、1-08（ガウス測度）も使います。グラフの言葉はその場で定義します。

先に言うこと — 小さな径数（弱い結合・高温・格子の強結合）があるときの道具で、四次元のヤン–ミルズの無限体積極限とギャップには届いていません（2026-11-10 に公開された構成の無限体積の極限は、展開ではなくコンパクト性による体積の部分列です。12-05）。計算は一次元の模型と小さなグラフについてのものです。

この章の順序

1. 何のための道具か — 独立なら対数は和。弱い結びつきを補正として足し込む
2. いちばん小さい例：一次元の剛体格子気体 — 係数・収束半径 1/4・負の活量の側の特異点（計算の表）
3. ポリマー模型 — 相容れない塊の気体という共通の形
4. 対数を取る：Ursell 関数と連結グラフ — 連結なクラスターだけが残る
5. なぜ収束しうるか：打ち消し合いと木 — 符号が打ち消し合い、木の数だけが残る（動く図）
6. 収束の判定条件 — Kotecký–Preiss などの不等式と、保証される範囲（動く図）
7. 寄り道：確率論の局所補題と同じ不等式 — Lovász の局所補題と独立集合多項式の零点
8. 展開から出るもの：無限体積・解析性・指数減衰 — 相関の減衰率がこの模型の「質量ギャップ」

9. 連続の場へ：立方体に切って補間で切り離す — 立方体の塊の気体に書き直す
10. ゲージ場での使い道と限界 — 強結合の側で働き、四次元の赤外には届かない

01

何のための道具か

無限体積の段と一様なギャップの段で要るのは、箱の大きさに依らない評価と、遠く離れた量がほぼ独立になることでした（7-01 の式 (9)）。問題文は、摂動級数はたいてい発散するので「cluster expansions」と総称される展開法が発達したとし、'Refined estimates yield the rate of exponential decay of Green's functions, magnitude of masses, ...' と書いています（JW §6.1）。既知

芯は一つです。区画どうしが独立なら、分配関数は積、対数は和です。

$$Z_\Lambda = \prod_j Z_j \quad \Longrightarrow \quad \log Z_\Lambda = \sum_j \log Z_j \tag{1}$$

和なら体積当たりの量は箱に依らず、遠くの区画は効きません。実際の区画は弱く結びついており、クラスター展開はその結びつきを「つながった区画の組」ごとの補正として足し込み、和の収束を示します。比喩で言えば、ほとんどぶつからない薄い気体です。正確には、(i) n 個をつなぐ補正が小さな数の n 乗程度、(ii) つなぎ方の数が $n!$ で割って指数関数程度（§05）の二つが要ります。

例：区画が「空」か「粒子一つ（重み z）」で独立なら $Z = (1+z)^N$。$\log Z/N = z - \frac{z^2}{2} + \cdots$ は $|z| < 1$ で収束し、$Z = 0$ となる $z = -1$ で止まります。級数の届く範囲は、複素数の z で分配関数が 0 になる場所が決めます。

02

いちばん小さい例：一次元の剛体格子気体

章を通して使う例です。点 $x = 1, \dots, N$ に粒子を置き（$n_x \in \{0,1\}$）、隣どうしの同時占有を禁じ（**剛体の反発**）、粒子一つに重み z（**活量**）を付けます。

$$\Xi_N(z) = \sum_{\substack{n \in \{0,1\}^N \\ n_x n_{x+1} = 0}} z^{n_1 + \cdots + n_N} \tag{2}$$

点 N と点 1 も隣どうしとみなして輪にすると、転送行列 $T=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{z}\\ \sqrt{z} & 0\end{pmatrix}$ で $\Xi_N=\operatorname{tr}T^N$ と書けます（転送行列は 2-08 §03。イジング模型の例は 2-09、格子ゲージでは 5-03）。成分は $T_{nn'}=z^{(n+n')/2}$（$n,n'\in\{0,1\}$。ただし $n=n'=1$ だけ 0）です。だから $\operatorname{tr}T^N=\sum_{n_1,\dots,n_N}\prod_{x=1}^{N}T_{n_x n_{x+1}}$（$n_{N+1}=n_1$）では、各 n_x の重みを半分ずつ二回拾って z^{n_x} になり、隣どうしの同時占有は 0 で消えます。これは輪の上の式 (2) そのものです。固有値 $\lambda_\pm=\tfrac12(1\pm\sqrt{1+4z})$ の大きいほうが残ります。次の $p(z)$ を**圧力**と呼びます（物理の圧力に逆温度を掛けたもので、体積当たりの log 分配関数です）。

$$p(z)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log\Xi_N=\log\frac{1+\sqrt{1+4z}}{2}=\sum_{n\ge1}b_n z^n,\qquad b_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\binom{2n-1}{n}\tag{3}$$

計算 表 1　係数 b_n（有理数の級数演算で $n\le24$ まで閉じた式と一致）。

n	2	3	4	6	20	60
b_n	-3/2	10/3	-35/4	-77	-3.4×10⁹	-8.1×10³²
$\lvert b_n/b_{n-1}\rvert$	1.500	2.222	2.625	3.056	3.705	3.901

比は 4 に近づき、収束半径は $1/4$。べき級数の収束半径は、関数が複素平面で解析的でなくなる点のうち、原点に最も近いものまでの距離です（複素解析の定理）既知。ここでその点は、根号の中が 0 になって固有値が重なる $z=-1/4$ です。$z>0$ に相転移は無いのに、級数は $1/4$ の先へ進めません。**展開の届く範囲は、物理的でない負の活量の側の特異点で決まります**。長さ n の鎖の Ξ の零点で原点に最も近いものは $-1/(4\cos^2\frac{\pi}{n+2})$（Scott–Sokal 2005, Ex. 3.2）で、$n=5,10,20$ で $-0.3080,-0.2679,-0.2552$ です。計算

03 ポリマー模型

構造を抜き出します。有限の塊（**ポリマー**）γ の集まり $\mathcal{P}$、**相容れない**という関係 $\gamma\not\sim\gamma'$（重なる・接するなど。自分とも相容れない）、複素数の活量 z_γ を用意し、どの二つも相容れる組だけを数えます。

$$\Xi_\Lambda=1+\sum_{n\ge1}\frac{1}{n!}\sum_{(\gamma_1,\dots,\gamma_n)\in\Lambda^n}z_{\gamma_1}\cdots z_{\gamma_n}\prod_{j<k}\mathbf{1}\{\gamma_j\sim\gamma_k\}\tag{4}$$

Λ は有限の集まり、$\mathbf{1}\{\cdot\}$ は条件が真なら 1、偽なら 0。この形式は Gruber–Kunz（1971）が導入したとされます（Fernández–Procacci 2007 §1）。既知

例： §02 はポリマー＝占有された一点、相容れない＝同じ点か隣。外場なしの高温のイジング模型（2-08）では、ポリマーは各点の次数が偶数の辺の連結な集まり、頂点を共有すれば相

容れない、活量は $(\tanh\beta)^{\text{辺の数}}$ です。格子ゲージの強結合（5-04）はプラケットの連結な集まり、弱結合の連続の場（§09）は立方体の連結な集まりです。塊が小さい理由が、展開の小さな径数になります。

04

対数を取る：Ursell 関数と連結グラフ

Mayer の名で呼ばれる手口（Mayer 1937 に遡るとされる）では、$\mathbf{1}\{\gamma_j \sim \gamma_k\} = 1 + \zeta_{jk}$（相容れなければ -1、相容れれば 0）と書いて積を展開します。各項は点 $1,\dots,n$ の上の**グラフ**（点と、点の対を結ぶ辺）に対応し、対数では連結なグラフだけが残ります。理由は、グラフの重みが連結成分ごとの重みの積に分かれることです。点を連結成分に分ける分け方で整理すると、$1/n!$ を付けて全部の n で足した和どうしで、**全グラフの和 = $\exp$（連結なグラフの和）**（**指数公式**）が成り立ち、対数を取れば連結なものだけが残ります。 既知

$$\log \Xi_\Lambda = \sum_{n\ge 1} \frac{1}{n!} \sum_{(\gamma_1,\dots,\gamma_n)} \varphi^{\mathrm{T}}(\gamma_1,\dots,\gamma_n)\, z_{\gamma_1}\cdots z_{\gamma_n}, \qquad \varphi^{\mathrm{T}} = \sum_{\substack{G\subset G_\gamma \\ \text{連結・全域}}} (-1)^{|E(G)|} \tag{5}$$

G_γ は $\gamma_j \not\sim \gamma_k$ のとき j,k を結んだグラフ、和は全部の点を使う連結な部分グラフについて、$|E(G)|$ は辺の数です（$n=1$ では 1）。φ^{T} は **Ursell 関数**（場 ϕ とは無関係）で、G_γ が連結でなければ 0。寄与するのは相容れなさでつながった組、つまり**クラスター**だけです（Fernández–Procacci (2.3)(2.4)。まだ形式的な級数）。

例： §02 では並進で平均して $b_n = \frac{1}{n!}\sum_{x_2,\dots,x_n} \varphi^{\mathrm{T}}(0,x_2,\dots,x_n)$。$n=2$ では $x_2 = -1, 0, 1$ がどれも辺一本で -1、よって $b_2 = -3/2$。配置では禁じられた $(0,0)$ が対数には現れます。$n \le 6$ まで総当たりで足すと表 1 と有理数で一致しました。 計算

05

なぜ収束しうるか：打ち消し合いと木

式 (5) の和は巨大です。どの二つも相容れないとき G_γ は**完全グラフ** K_n（全部の対を結ぶ）で、連結な全域部分グラフは全グラフとほぼ同数あり、± 1 のまま残れば $n!$ で割っても収束しません。ところが和は打ち消し合い、$(-1)^{n-1}(n-1)!$ だけが残ります。

計算 表 2　K_n（$n \le 6$ は総当たり、$n = 10$ は漸化式）。

n	連結な全域部分グラフ	全域木 n^{n-2}	交代和
4	38	16	−6

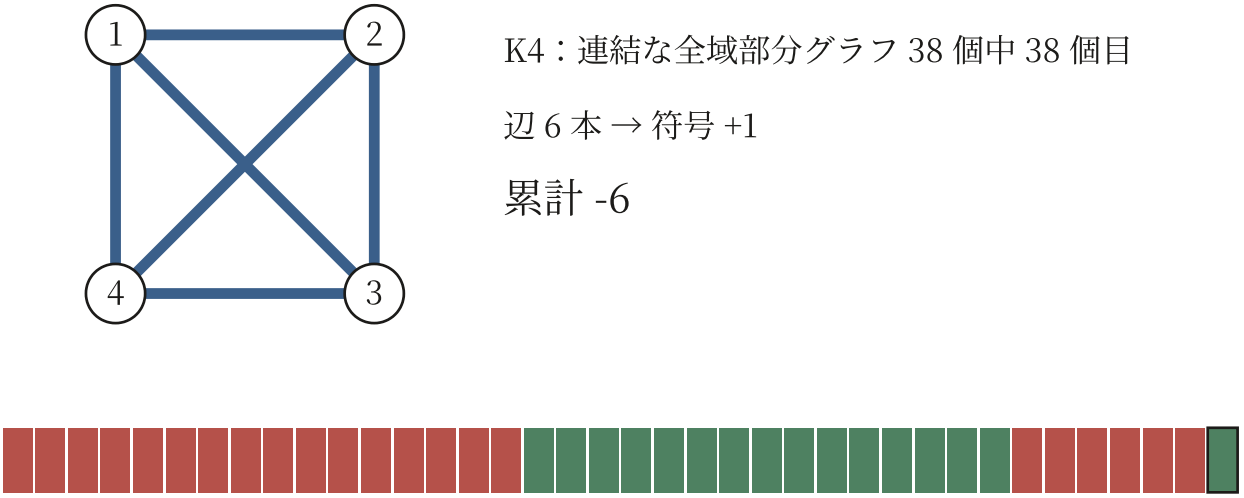
n	連結な全域部分グラフ	全域木 n^{n-2}	交代和
10	34 496 488 594 816	100 000 000	−362 880

仕組みは Penrose（1967）によります。連結な全域部分グラフを**全域木**（全点をつなぐ輪の無い部分グラフ）T ごとの区間 $[T, R(T)]$ に分けると、区間内の符号の和は $\prod_{e\in R(T)\setminus T}(1-1)$ の因子で消え、$R(T)=T$ の木（Penrose 木）だけが残ります（Fernández–Procacci, Prop. 5）。既知

$$\varphi^{\mathrm{T}}(\gamma_1,\dots,\gamma_n)=(-1)^{n-1}\,\#\{\text{Penrose 木}\}\quad\Longrightarrow\quad\left|\varphi^{\mathrm{T}}\right|\le\#\{G_\gamma\text{ の全域木}\}\tag{6}$$

Penrose 木の数は $n\le 6$ の総当たりで交代和の絶対値と一致しました計算。全域木は K_n でも n^{n-2} 個で、$n^{n-2}/n!$ は e^n 程度。**$n!$ で割って残るのが指数関数だけ**なので、活量が小さければ (5) は収束しえます。和を初めから木や森で書く恒等式は、Brydges–Federbush（1978）から Brydges–Kennedy（1987）の森の公式へ整えられました（Abdesselam–Rivasseau 1994）。

図 1　グラフを選んで「動かす」と、連結な全域部分グラフを辺の少ない順に数え、符号 $(-1)^{|E|}$ の累計が変わる（帯：緑 +1・赤 −1）



K4：連結な全域部分グラフ 38 個中 38 個目　辺 6 本 → 符号 +1　累計 -6

計算 この図の数値はこの端末で計算した。K_4 の累計は辺 3 本（全域木 16 個）で −16、4 本（15 個）で −1、5 本（6 個）で −7、6 本で −6。C_4 は −3、P_4 は −1、K_3 は +2。

06

収束の判定条件

木の評価を足し上げると条件が出ます。広く使われる Kotecký–Preiss（1986）の条件は、各塊に「予算」$a(\gamma)\ge 0$ を割り当てて

$$\sum_{\gamma' \not\sim \gamma} |z_{\gamma'}|\, e^{a(\gamma')} \;\le\; a(\gamma) \qquad (\text{すべての } \gamma) \tag{7}$$

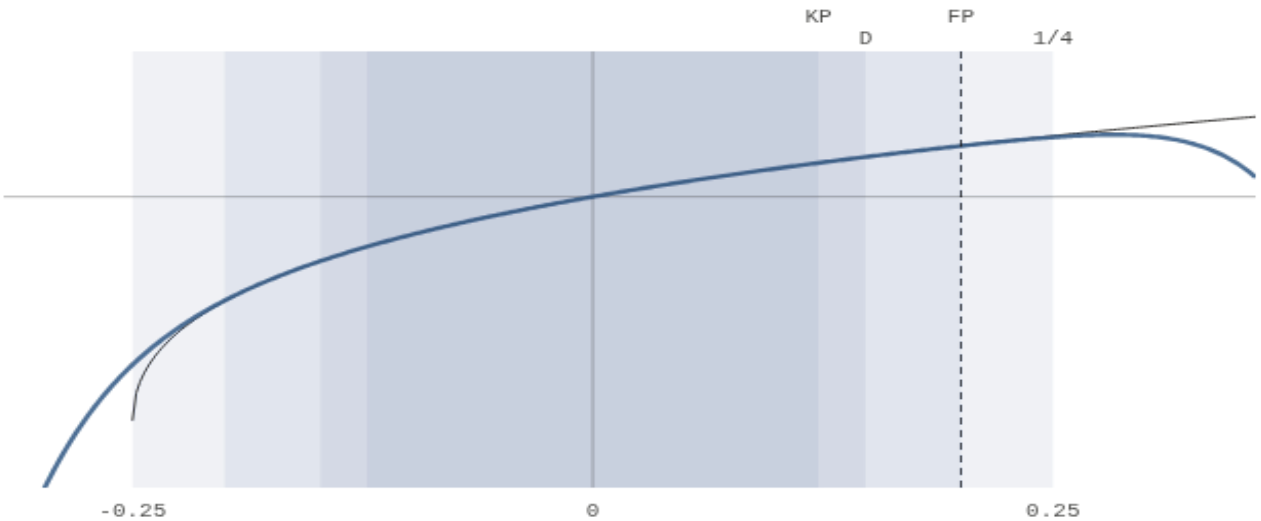
とするもので（左辺は γ 自身も含む）、成り立てば、$\log \Xi_\Lambda$ を z_{γ_0} で微分した級数（塊 γ_0 を含むクラスターの和。ポリマー一つ当たりの和）は、各項を絶対値に替えても Λ によらず $e^{a(\gamma_0)}$ 以下です（Fernández–Procacci (2.6)(2.7)(2.14)(2.15)）。$\log \Xi_\Lambda$ そのものは体積とともに大きくなりますが、この一つ当たりの上界が Λ によらないので、(5) は Λ に一様な評価つきで絶対収束します（同 (2.7) の直後の文）。塊 γ_0 を除いたときの対数の変化も $|z_{\gamma_0}|e^{a(\gamma_0)}$ 以下です（同 (2.11)）。「相容れない相手の重み付きの活量の合計が、自分の予算に収まる」と読みます。同じ型の Dobrushin（1996）・Fernández–Procacci（2007）の条件は、順に適用範囲が広がります。 既知

計算 表 3　§02 の気体（最大次数 $\Delta = 2$）で保証される範囲。数値的な最大化が Fernández–Procacci Table 1 の式と一致。

条件	この気体での形	保証される $\lvert z\rvert$
Kotecký–Preiss	$3\lvert z\rvert e^{a} \le a$	$1/(3e) = 0.1226$
Dobrushin	$\lvert z\rvert \le \mu/(1+\mu)^3$	$4/27 = 0.1481$
Fernández–Procacci	$\lvert z\rvert \le \mu/(1+3\mu+\mu^2)$	$1/5 = 0.2000$
正確な半径	式 (3)	$1/4 = 0.2500$

$1+3\mu+\mu^2$ は相容れない三点のうち互いに相容れる部分集合（空・一点三つ・$\{x-1, x+1\}$）の数え上げで、$(1+\mu)^3$ はそうでない組も数える分だけ粗くなります。最後の行の $1/4$ は、各点の次数が Δ の無限の木で正確な値 $(\Delta-1)^{\Delta-1}/\Delta^{\Delta}$（Shearer／Scott–Sokal。Fernández–Procacci Table 1 の星印）に $\Delta = 2$ を入れたものです。$\Delta = 2$ のこの木は整数の直線そのものなので、式 (3) の $1/4$ と一致します。上の三つの条件はどれも**十分条件**です。

図 2　項の数 N を増やすと、級数 (3) の部分和（太線）は $|z| < 1/4$ で正確な圧力（細線）に重なり、外では暴れる（帯は各条件の範囲）



N = 10, z = 0.200：部分和 0.15732、差 3.86e-4

計算 この図の数値はこの端末で計算した。$|S_N(z)-p(z)|$ は $N=5,20,40$ で、$z=0.2$ なら 3e−3・1.5e−5・6.4e−8、$z=0.3$ なら 0.029・0.063・0.88。

07

寄り道：確率論の局所補題と同じ不等式

飛ばしてよい節です。

組合せ論の **Lovász の局所補題**（Erdős–Lovász 1975）は、「悪い事象」A_x がどれも起きない確率が正になる条件です。事象どうしの依存の仕方をグラフで表します。点 x に隣り合う点の集合を $\Gamma(x)$ と書きます。

依存グラフ：各 A_x が、x とその隣 $\Gamma(x)$ 以外の事象たち（全体をまとめたもの）と独立なとき、このグラフを依存グラフと呼びます。定理は次の形です（Scott–Sokal 2005, Thm 1.1。A_x^c は A_x が起きないという事象）。

$$0\le r_x<1,\quad \mathbb{P}(A_x)\le r_x\prod_{y\in\Gamma(x)}(1-r_y)\ (\text{すべての } x)\ \Longrightarrow\ \mathbb{P}\Big(\bigcap_x A_x^c\Big)\ge\prod_x(1-r_x)>0 \tag{8}$$

Scott–Sokal は次の同値を示しました。依存グラフ G を持ち $\mathbb{P}(A_x)\le p_x$ となる**どの**事象の族でも局所補題の結論（どれも起きない確率が正）が成り立つことは、G の上の剛体気体の分配関数が、半径 p_x の多重円板（すべての x で $|z_x|\le p_x$ となる複素数の組 (z_x)）で 0 にならないことと同値です。この分配関数は、互いに隣り合わない点の集合 S についての和 $\sum_S\prod_{x\in S}z_x$（**独立集合多項式**。点ごとに活量を変えた多変数版）で、G が道なら §02 の気体になります。局所補題の通常の証明は、Shearer（1985）が暗に、Dobrushin が明示的に見つけた「零点が無いこと」の帰納法と対応する、とも示しています（要旨）。

$r=\mu/(1+\mu)$ と置けば (8) の仮定は表 3 の Dobrushin の形で、左右にだけ依存する事象の列なら $p\le 4/27$ で十分です。最良は $1/4$ で、上からは Scott–Sokal §8.4 の Example 8.1（有限の道の零点が $-1/4$ に近づく）、下からは表 3 の正確な半径（Shearer の値 $(\Delta-1)^{\Delta-1}/\Delta^{\Delta}$ に $\Delta=2$）が押さえます。教科書でよく見る対称版もここから出ます。各事象が高々 d 個の他の事象に依存し、確率がどれも p 以下のとき、(8) で $r_x=1/(d+1)$ と置くと $r(1-r)^d=\frac{1}{d+1}\big(\frac{d}{d+1}\big)^d\ge\frac{1}{e(d+1)}$ なので、$ep(d+1)\le 1$ で十分です。$d=2$ では $1/(3e)$、表 3 の Kotecký–Preiss の値です。こうして表 3 の四つの値は、局所補題の側にもすべて現れます。既知

08

展開から出るもの：無限体積・解析性・指数減衰

条件 (7) が体積に依らず成り立つと三つが出ます。(i) 圧力の極限が存在し、円板の中で解析的。(ii) 箱の大きさを感じるのは縁に触れるか一周するクラスターだけ。(iii) 打ち切り相関に

は x と y の両方に触れる、つまり相容れなさの鎖で x から y までつながるクラスターだけが残り、輪ごとに $|z|$ 程度が掛かる（Ueltschi 2004, Thm 3）。既知

$$\left|\langle A_x B_y\rangle - \langle A_x\rangle\langle B_y\rangle\right| \;\le\; C\,e^{-m|x-y|} \tag{9}$$

例： §02 の気体を 14 点の輪で数えると、$\log \Xi_{14}/14$ の係数は $n \le 13$ で b_n と一致し、$n = 14$ でずれました（一周には 14 点全部が要る）。補正は $\frac{1}{N}\log\left(1 + (\lambda_-/\lambda_+)^N\right)$ で、小さい z では $\lambda_-/\lambda_+ \approx -z$ なので $(-z)^N/N$ 程度です（$n = 14$ の係数のずれはちょうど $1/14$）。密度の打ち切り相関は $(\lambda_-/\lambda_+)^{|x-y|}$ に比例し、減衰率は $m(z) = \log(\lambda_+/|\lambda_-|)$ です。計算

計算 表 4　減衰率 $m(z)$ と、鎖からの見積もり $\log(1/|z|)$。

z	**−0.249**	**−0.1**	**0.01**	**0.25**	**1**
$m(z)$	0.1267	2.0634	4.6249	1.7627	0.9624
$\log(1/\lvert z\rvert)$	1.3903	2.3026	4.6052	1.3863	0

小さい z では $m \approx \log(1/z)$ で鎖の絵が当たり、$z \to -1/4$ で $m \to 0$（半径を決めた特異点で減衰が止まる）。$z = 1$ は半径の外でも $m > 0$：収束は十分条件です。

$m(z)$ は転送行列の固有値の比、この模型の「質量ギャップ」です（7-01 の一様なギャップの段・4-11）。場の理論でも、時間方向の打ち切り相関が体積に一様に e^{-mt} で減衰し、その減衰が示せる観測量から作ったベクトル ψ（真空の成分を引いたもの）が、真空と直交する部分空間で稠密なら、OS の再構成（4-10）のハミルトニアン H は $(0, m)$ にスペクトルを持ちません。既知

道具は**スペクトル測度**です。ψ ごとに $\langle \psi, e^{-tH}\psi\rangle = \int e^{-t\lambda}\,\mathrm{d}\mu_\psi(\lambda)$ となる $[0,\infty)$ 上の測度 μ_ψ があります（1-10 のスペクトル定理。固有ベクトルの基底 e_k があるなら、μ_ψ は各固有値 λ_k に重み $|\langle e_k, \psi\rangle|^2$ を置くもの）。$\int e^{-t\lambda}\mathrm{d}\mu_\psi \le Ce^{-mt}$ が全ての t で成り立てば、$t \to \infty$ を見て μ_ψ は $\lambda < m$ に重みを置けません。これが稠密な ψ で言えるので、$(0, m)$ にスペクトルが残りません。逆向きは問題文 §5 の式 (2) です。

09

連続の場へ：立方体に切って補間で切り離す

連続の場では自由場の共分散 $C(x, y)$ が離れた点も結びます。箱を単位立方体 b_i（指示関数 χ_i）に切り、立方体をまたぐ部分に $s_{ij} \in [0, 1]$ を掛けます。

$$C(\mathbf{s})(x, y) = \sum_i \chi_i(x) C(x, y) \chi_i(y) + \sum_{i \ne j} s_{ij}\,\chi_i(x) C(x, y) \chi_j(y), \qquad s_{ij} = s_{ji} \tag{10}$$

s が全部 1 なら元の共分散、全部 0 なら立方体ごとに独立です（Abdesselam–Rivasseau 1994 (V.A.5)）。間を Taylor の公式でつなぎます（同 (III.1)）。式 (11) の添字 ℓ は立方体の対 $\{i,j\}$ を走り、$s_\ell = s_{ij}$ です。$f(\mathbf{s})$ は共分散を $C(\mathbf{s})$ にしたときの分配関数、I は対の集まり、$\psi_I(h)$ は $\ell \in I$ で $s_\ell = h_\ell$、$\ell \notin I$ で $s_\ell = 0$ とした点です。

$$f(1,\dots,1) = \sum_{I \subset \{\text{対}\}} \prod_{\ell \in I} \int_0^1 \mathrm{d}h_\ell \, \Big(\prod_{\ell \in I} \frac{\partial}{\partial s_\ell} \Big) f\big(\psi_I(h)\big) \tag{11}$$

対が一つなら $f(1) = f(0) + \int_0^1 f'(h)\,\mathrm{d}h$ で、(11) はこれを対ごとに繰り返したものです。$\partial/\partial s_\ell$（$\ell = \{i,j\}$）は立方体 b_i, b_j を結ぶ線を一本下ろし、その大きさは $|C|$ 程度、質量 m_0 なら $e^{-m_0|x-y|}$ 程度です。微分された対が塊をなし、積分は塊ごとに分かれて、立方体の連結な集まり Y をポリマーとする気体になります（同 (V.A.7)(V.A.8)）。

ただし補間した共分散は正定値（ガウス測度として意味を持つ条件）であり続ける必要があるので、実際には**森の公式**（Brydges–Kennedy の Taylor 森の公式、同 Thm III.1）を使います。これは、二つの立方体を結ぶ径数を、森をなす木の中で二つを結ぶ道に沿った h_ℓ の最小値で置く版で、こうすると正定値性が保たれます（同 (V.A.9)・Thm IV.5）。この形で、任意の定数 K に対し、紫外の切断を入れたうえで結合 g を（K に応じて）十分小さくとれば $\sum_{Y \ni 0} |A(Y)| K^{|Y|} \le 1$ です（同 (V.A.10)。$|Y|$ は Y の立方体の数）。この型の展開を構成的場の理論に持ち込んだのは Glimm–Jaffe–Spencer で（同 §I）、結果は 7-03 §05・§08 にあります。既知

例：道具は**ガウスの部分積分**です（ガウス分布は 1-08 §06）。標準正規の ϕ では、密度 $e^{-\phi^2/2}$ の微分が $-\phi\, e^{-\phi^2/2}$ なので、部分積分で $\mathbb{E}[\phi F(\phi)] = \mathbb{E}[F'(\phi)]$ が出ます。これを共分散行列 $C(s)$ の平均 0 のガウス変数に広げると $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbb{E}_s[H] = \frac{1}{2}\sum_{a,b} \frac{\mathrm{d}C_{ab}}{\mathrm{d}s}\, \mathbb{E}_s[\partial_a \partial_b H]$ です既知。分散 1・共分散 sc のガウス変数 (ϕ_1, ϕ_2) では $\mathrm{d}C_{12}/\mathrm{d}s = \mathrm{d}C_{21}/\mathrm{d}s = c$ なので $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbb{E}_s[F(\phi_1)G(\phi_2)] = c\,\mathbb{E}_s[F'(\phi_1)G'(\phi_2)]$。$s = 0$ では二つは独立なので、s について 0 から 1 まで積分して

$$\mathrm{Cov}\,\big(F(\phi_1), G(\phi_2)\big) = c \int_0^1 \mathbb{E}_s\big[F'(\phi_1)\, G'(\phi_2)\big]\,\mathrm{d}s, \qquad \big|\mathrm{Cov}\,\big| \le |c|\, \sup|F'|\, \sup|G'| \tag{12}$$

で、塊の相関はつなぐ共分散 $|c|$ で抑えられます。$F = G = \cos$ なら値は $e^{-1}(\cosh c - 1)$（$c = 0.9$ で 0.15932358）で、左辺・右辺の数値積分と 8 桁一致しました。計算

10

ゲージ場での使い道と限界

格子の強結合。小さい β ではプラケットの塊の展開が働き（5-02・5-04）、無限体積極限の存在と解析性、閉じ込めの評価が示されています（Osterwalder–Seiler 1978）。ただしこの面積

則は $U(1)$ を含むどの群でも成り立ち、非可換な閉じ込めの証拠にならない、と Chatterjee（2018）は注意しています。既知

位相空間の展開。単位の尺度で小さな径数が無いときは、場を尺度ごとに分け、各尺度の「位相空間の細胞」で展開して積み上げます（Battle–Federbush 1982。JW §6.1 の 'phase-space localization'）。格子ゲージ理論では Bałaban の系列がこれにあたります（7-05）。既知

赤外の限界。四次元では長い距離で結合が強くなります。Magnen–Rivasseau–Sénéor 1993 §I は 'there is no easy solvable model of these phenomenons around which to expand' と書き、問題文も体積に一様なギャップには新しい考えが要るとします（JW §6.5）。展開が収束する小さい β は、連続極限 $\beta \to \infty$ の反対の岸です。正確には、展開が収束するのは β が小さい側の有限の区間で、連続極限は $\beta \to \infty$ で取ります（5-09）。

切れ目　届く範囲と行きたい場所

§02 では展開を止めた特異点は負の活量の側でした。四次元の $U(1)$ 格子では、大きい β で面積則が破れる相が実際に在ります（Guth 1980。完全な証明と質量ゼロの相は Fröhlich–Spencer 1982）。非可換（$SU(2)$・$SU(3)$ の Wilson 作用）では、閉じ込めを失う相転移は無いと信じられています物理 が、定理ではありません。展開の収束が止まる場所は、その先の相転移の有無を教えません。この本の整理では、弱結合の紫外（7-05〜7-07）と強結合の展開のあいだ、結合が $O(1)$ になる一段が欠けています（7-10）。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	展開の式・Penrose の恒等式・三つの収束条件とその帰結（解析性・指数減衰）既知
言えている	一次元の剛体格子気体の係数・半径 $1/4$・閾値・減衰率。K_n の交代和と Penrose 木の一致（$n \le 6$）。式 (12)計算
言えていない	連続の場と格子の強結合での収束の証明の中身（原論文は追っていない。5-04）。四次元の赤外で使える展開（知られていない）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
問題文の引用（§5・§6.1・§6.5）	本文で確認	A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*, Clay Mathematics Institute (2000)
式 (4)〜(7)・Dobrushin と FP の条件・表 3 の式	本文で確認	R. Fernández, A. Procacci, CMP 274 (2007) 123–140, arXiv:math-ph/0605041
式 (10)(11)・森の公式／相関の減衰	本文で確認	A. Abdesselam, V. Rivasseau, arXiv:hep-th/9409094 (1994)。D. Ueltschi, Moscow Math. J. 4 (2004) 511–522
局所補題・同値・鎖の零点・$\lambda_c \le 1/4$・Shearer の値	要旨・§1・§4.1・§5.2・§8.4 を確認	A. D. Scott, A. D. Sokal, J. Stat. Phys. 118 (2005) 1151–1261, arXiv:cond-mat/0309352
原典・系譜	書誌のみ	Kotecký–Preiss, CMP 103 (1986) 491。Dobrushin, AMS Transl. (2) 177 (1996) 59。Gruber–Kunz, CMP 22 (1971) 133。Penrose, in *Statistical Mechanics: Foundations and Applications* (T. A. Bak ed.), Benjamin (1967) 101–109。Mayer, J. Chem. Phys. 5 (1937) 67。Brydges–Federbush, J. Math. Phys. 19 (1978) 2064。Brydges–Kennedy, J. Stat. Phys. 48 (1987) 19。Battle–Federbush, Ann. Phys. 142 (1982) 95。Glimm–Jaffe–Spencer, in *Constructive Quantum Field Theory* (G. Velo, A. Wightman eds.), Lecture Notes in Physics 25, Springer (1973)（Part II: The cluster expansion）、および Ann. Math. 100 (1974) 585。Erdős–Lovász, in *Infinite and Finite Sets* II, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 10, North-Holland (1975) 609–627。Shearer, Combinatorica 5 (1985) 241
格子の強結合・$U(1)$ の相・赤外の引用	要旨・本書の材料の検査による	Osterwalder–Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（本文未入手）。Chatterjee, arXiv:1803.01950 §4。Guth, PRD 21 (1980) 2291（書誌は Chatterjee の文献表による）。Fröhlich–Spencer, CMP 83 (1982) 411。Magnen–Rivasseau–Sénéor, CMP 155 (1993) 325
指数公式・スペクトル測度・ガウスの部分積分・収束半径と特異点	既知	標準的な事実（1-08・1-10）
表・零点・輪・式 (12)・図	計算	この端末の Python：`hardcore1d.py`・`graphs.py`・`decouple.py`。図は素の JavaScript

次に読む章：7-05 繰り込み群の段の列（展開を尺度の列に積み上げる）。

繰り込み群の段の列 — 尺度を一段ずつ積分し、小さい場と大きい場に分けて進む

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 格子を一段ずつ粗くする変換（ブロック化）を重ねて紫外の極限を押さえる考え方。各段で場を「小さい場」と「大きい場」に分けること。ゲージ場では群の元の平均と局所的なゲージが要ること。

前提となる章 — 7-01（紫外極限の段）と 4-04（結合の走り）。7-04 のポリマー、4-06 §02 の b_0、7-02 の二次元の $U(1)$（プラケットの角の独立性・熱核）も使います。プラケットと Wilson の作用は 5-01 の言葉ですが、要る分はその場で定義します。

先に言うこと — 方法の骨組みの説明で、Bałaban の証明を追ったものではありません。四次元ではこの方法の主定理も仮定つきで、連続極限の一意性・無限体積・質量ギャップには届いていません（§07・§09）。2026-11-10 に公開された構成が繰り込みの一段と大きい場をどう扱うかは、第 9 部と第 11 部で読みます。ゲージ場の細部は一次資料の序文と定理の文面、スカラー場での解説（Dimock）の範囲です。計算は二次元の $U(1)$・自由場・一ループの走りについてで、四次元の非可換理論の数値ではありません。

この章の順序

1. なぜ段の列にするのか — 全尺度に共通の小さな数が無いので、尺度を一段ずつ積分する（式 (1)）
2. 一段の変換：ブロック化 — 平均を緩く固定して細かい変数を積分すると、作用の形が一段で変わる（表 1）
3. 自由場なら一段は正確に書ける — 極小配位と、平均の制約だけで生まれるグリーン関数の局所性（表 2）
4. 小さい場と大きい場（動く図） — 各段で領域を分け、大きい場は小さな因子を運ぶ（図 1・表 3）

5. ゲージ場で加わること — 拡大縮小できない・足して割れない・ゲージは局所的に選ぶ（式 (8)）
6. 結合の走りと段の数（動く図） — 四次元では補正の和が段数とともに増え続ける（図 2・表 4）
7. 帰納の形 — 各段で同じ形の評価を保ち、定数を段と格子間隔によらせない（式 (10)）
8. 寄り道：「位相空間の細胞」という呼び名 — 段ごとに積分する自由度を数える（式 (11)）
9. 別の道と、止まる場所 — 連続の切断による構成と、結合が $O(1)$ になる尺度

01

なぜ段の列にするのか

紫外極限の段で示したいのは、期待値が格子間隔 a によらず有界であることでした（7-01 の式 (8)）。四次元のヤン–ミルズでは、漸近自由（4-06）により細かい尺度で結合 g が小さく、粗い尺度で $O(1)$ になります。どの尺度にも小さな数はあるが、全尺度に共通の小さな数は無い。そこで尺度を一段ずつ積分します。

$$a \;\to\; La \;\to\; L^2 a \;\to\; \cdots \;\to\; L^K a = a_0, \qquad K = \log_L \frac{a_0}{a} \tag{1}$$

倍率 L の変換を K 回重ね、各段ではその尺度の結合だけを小さな数として使います（L は 7-01 の箱の大きさとは別物、a_0 は固定）。段 k の後の重み（有効密度）を ρ_k とすると $Z = \int \rho_0 = \int \rho_1 = \cdots = \int \rho_K$ です。問題文はこの変換を「大きい運動量の自由度を積分し、尺度を戻す」と説明し（JW §6.5）、Bałaban 1985 の序文は K. Wilson の提案した形に従うと書きます。既知

例： $L = 2$、$a_0 = 1$、$a = 2^{-20}$ なら $K = 20$。a を半分にするたびに段が一つ増えるので、示すべきは **K によらない**評価です。

02

一段の変換：ブロック化

一段では、粗い格子の変数を決め、その値を保つように細かい変数を積分します。スカラー場で書くと、一辺 L 点のブロック $B(y)$ の平均が (2) で、Bałaban の方法を解説した Dimock は平均をガウスの重みで緩く固定します（$\alpha > 0$ は任意、N は積分を保つ定数）。

$$(Q\Phi)(y) = \frac{1}{L^{d}} \sum_{x \in B(y)} \Phi(x) \tag{2}$$

$$\tilde{\rho}_{k+1}(\Phi') = \frac{1}{N} \int \exp\Big(-\frac{\alpha}{2L^{2}} \big\| \Phi' - Q\Phi \big\|^{2} \Big)\, \rho_{k}(\Phi)\, \mathrm{d}\Phi \tag{3}$$

そのあと格子を単位の間隔に縮め、場を掛け直して ρ_{k+1} とします（Dimock I の (26)(27)）。 既知

例：二次元の $U(1)$ で見ます。$U(1)$ の元は角 θ で $e^{i\theta}$ と書けます。格子の単位正方形 p を**プラケット**と呼び、その四辺の変数を向きに沿って順に掛けた積を $U(\partial p) = e^{i\theta_p}$ と書いて、θ_p をプラケットの角と呼びます（5-01 §03）。各プラケットに重み $e^{\beta \cos\theta_p}$ を置くのが **Wilson 型**の作用です（β は格子の逆結合で、大きいほど結合は弱い。§06 の β 関数とは別の量）。自由境界の二次元ではプラケットの角が独立で（7-02 §02）、2×2 のブロックの角は四つの角の和です。独立な角の和では、分布のフーリエ係数が各々の係数の積になります。一つの角の係数

$$c_{n}(\beta) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}\, e^{\beta\cos\theta}\, \mathrm{d}\theta}{\int_{-\pi}^{\pi} e^{\beta\cos\theta}\, \mathrm{d}\theta}$$

を使うと、ブロックの角の係数は一段で $c_{n}(\beta)^{4}$ になります。$I_{n}(\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} e^{\beta\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$ と置けば $c_{n} = I_{n}(\beta)/I_{0}(\beta)$ で、I_{n} は変形 Bessel 関数と呼ばれる特殊関数です。一段の後も Wilson 型なら、c_{1} で決めた β' で c_{2} も合うはずです。

計算 表 1　二次元 $U(1)$・Wilson 型の一段（$L=2$）。β' は $c_{1}(\beta') = c_{1}(\beta)^{4}$ で決めた値、ずれは $c_{2}(\beta')/c_{2}(\beta)^{4} - 1$。

β	2	10	50	100	400
β'	0.488	2.996	12.892	25.383	100.377
ずれ	2.43	6.6e−2	2.8e−4	3.2e−5	4.8e−7

合いません。一段で作用の形が変わり、新しい項が生まれます。計算 重みをはじめから係数が $c_{n} = e^{-n^{2}/2\beta}$ になるものに取ると、$c_{n}^{4} = e^{-n^{2}/(2\cdot\beta/4)}$ で、形は正確に保たれます。この重みは円周上の**熱核**（Villain 型とも呼ばれる）で、分散 $1/\beta$ の正規分布の密度を 2π ずつずらして足し合わせた円周上の分布、つまり正規分布を円周に**巻きつけた**ものです（7-02 §04）。一般には主要な局所項を追い、残りを塊 X ごとの補正 $E_{k}(X)$ にまとめます（Dimock I の (105)(108)。7-04 のポリマーの形）。既知

03

自由場なら一段は正確に書ける

重みがガウス型（自由場）なら (3) は何段でも閉じた形で書けます。k 段後の密度は、粗い値 Φ を与えたとき細かい場の作用を最小にする配位 ϕ_{k}——**極小配位**、または背景場——で決ま

ります（Dimock I の (45)〜(52)）。

$$\rho_k(\Phi) = Z_k\, e^{-S_k(\Phi,\,\phi_k)}, \qquad \phi_k = \alpha_k G_k Q_k^{\mathsf T}\Phi, \qquad G_k = \big(-\Delta + \bar\mu_k + \alpha_k Q_k^{\mathsf T}Q_k\big)^{-1} \tag{4}$$

Δ は格子のラプラシアン（質量ギャップの Δ とは別）、Q_k は k 段分の平均、$Q_k^{\mathsf T}Q_k$ はブロックの上で定数な関数への射影、$\bar\mu_k$ は質量の二乗、$\alpha_k = \alpha(1-L^{-2})/(1-L^{-2k})$（Dimock I の (32)）は k 段分の重みをまとめた定数です。極小配位からの揺らぎはガウス変数で、積分すると定数 Z_k を残します。要は G_k の局所性です。$\bar\mu_k$ が 0 に近くても平均に掛かる項が質量の役を果たし、x が立方体 Δ_y に、f の台が立方体 $\Delta_{y'}$ にあるとき（Δ_y は一辺 $M=L^m$ の大きい立方体、$d(y,y')$ はこの立方体を単位に測った距離）

$$\big|(G_k f)(x)\big| \le C\, e^{-\gamma\, d(y,y')}\, \|f\|_\infty \tag{5}$$

が成り立ちます（Dimock I の (85)。そこでは $\gamma = \tfrac12\gamma_0$。文献は Bałaban, CMP 89 (1983) ほか）。既知 質量の無い $(-\Delta)^{-1}$ は二次元では距離の対数でしか変わりません。

例：二次元の周期格子（一辺 32 ブロック）で $(-\Delta+\ell^{-2}P)^{-1}$（$P$ は一辺 ℓ のブロックの平均への射影）を、ブロック単位の距離 r で並べました。

計算 表 2　$G(r)/G(0)$。最下行は $r=4$〜12 の値に $e^{-\gamma r}$ を当てはめた γ（一ブロックあたりの減衰率）。右端は全体に質量 ℓ^{-2} を入れたもの。

r	$\ell=2$	$\ell=4$	$\ell=8$	**質量（$\ell=8$）**
1	0.181	0.135	0.111	0.111
4	4.29e-3	3.12e-3	2.53e-3	2.94e-3
8	5.10e-5	3.47e-5	2.76e-5	3.87e-5
減衰率	1.089	1.106	1.111	1.064

減衰率は一ブロックあたり約 1.1 で、ℓ にほとんどよりません。制約はブロックの平均にしか掛からないのに、全体に質量を入れた場合（同じ当てはめで $\ell=2,4,8$ について 1.055〜1.064）と同程度で、やや速いくらいです。段によらないこの局所性が、各段でクラスター展開（7-04）を使える理由です。計算

04 小さい場と大きい場

摂動の形の解析は場が小さいときしか使えません。Bałaban の方法の特徴は、各段で格子を**小さい場の領域 Ω** とその外に分け、すべての分け方について和を取ることです（Dimock II §1）。

$$1 = \sum_{\Omega} \zeta(\Omega^c, \Phi)\, \chi(\Omega, \Phi) \tag{6}$$

χ は Ω で小さい場の条件が成り立つこと、ζ は Ω^c の各立方体で条件がどこかで破れることの指示関数です。Dimock I の序文（§1.1）の言葉では 'The large field region is treated crudely but makes a small contribution due to the fundamental stability of the interaction'。次の段は前の段の小さい場の領域の中で分けるので、$\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \cdots$ と減っていきます。既知

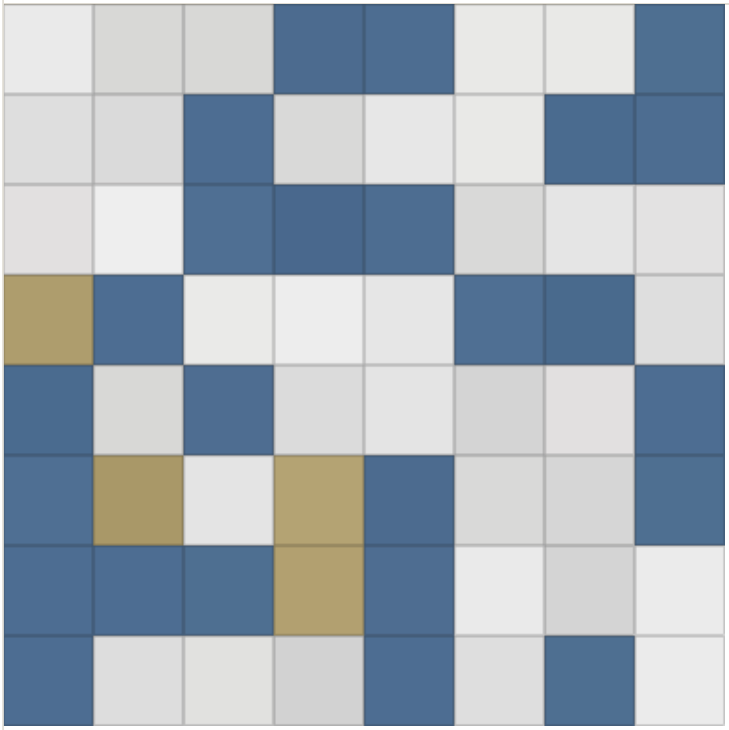
ゲージ場では条件をプラケットに置きます。Bałaban 1985 は最初の段（裸の結合 g_0）で、各プラケット p に

$$|U(\partial p) - 1| < \varepsilon_1, \qquad \varepsilon_1 = g_0\, p(g_0), \qquad p(g) = c\,(1 + \log g^{-1})^{p_0}, \quad p_0 > 2 \tag{7}$$

を課し（c は十分大きい定数）、破れたプラケットから十分離れたブロックの和を小さい場の領域とします（同 p.256–257 の (4)(7)。記号は本書に合わせた）。既知

大きさの感じを、目安として見積もります。重みはおおよそ $e^{-|U(\partial p)-1|^2/g^2}$ なので典型的な大きさは g 程度、閾値はその $p(g)$ 倍です。すると大きい場は、目安として $e^{-O(1)\,p(g)^2}$ 程度の因子を運びます。これは g のどの冪よりも速く小さい。スカラー場の解説では、大きい場の立方体一つごとに $e^{-O(1)\,p_0^2}$ の因子が出ると書かれています（Dimock II §1。そこでの $p_0 = (-\log \lambda_0)^p$ は閾値の大きさで、(7) の指数 p_0 とは別の記号）。既知 **例：** $c = 1$、$p_0 = 3$、$g = 0.1$ で $p \approx 36.0$。$O(1)$ を 1 とすると $e^{-p^2} \approx e^{-1298}$ で、$g^{10} = e^{-23}$ と桁違いです。計算

図 1　段 k を進めると、ブロックの角の大きさ（地の濃さ）、大きい場（■ 濃い塗り）、前の段で小さい場の領域から外れた部分（■ 薄い塗り）がどう増えるか



```
段 2（4×4） β_k = 4.000  ε = 0.50  大きい場 25/64  領域の外 29/64
```

計算 この図の数値はこの端末で計算した（32×32 の標準正規の標本を約 0.1 刻みで埋め込み、角 $\theta_p = z_p/\sqrt{\beta}$ とブロックの和はその場で計算）。

計算 表 3　図 1 の標本（$\beta = 64$、$\varepsilon = 0.5$。段 0 は 0/1024）。「正確」は分散 $4^k/\beta$ の巻きつけた正規分布での確率。

段 k	β_k	大きい場（標本）	同（正確）	領域の外
1	16	13/256	0.043	13/256
2	4	25/64	0.312	29/64
3	1	13/16	0.613	15/16

図の模型は §02 の熱核型で、段 k の有効結合は正確に $\beta_k = \beta/4^k$ です。二次元では結合が段ごとに強まり、閾値を固定すると数段で大きい場が埋めます。結合が $O(1)$ になる前に止める所が (1) の a_0 です。四次元の強まり方はずっと遅い（§06）。

05

ゲージ場で加わること

ゲージ場では三つが加わります。既知 **(i) 群の元は拡大縮小できない**。Bałaban 1985 は 'we use improvement of regularity properties of typical gauge fields instead of non-existing scalings' と書きます。**(ii) 群の元は足して割れない**。粗い辺の変数は細かい辺の変数から作りますが、群の元の平均は群から外れます。平均の作り方そのものが一篇の主題です（Bałaban, CMP 98 (1985) 17–51、書誌のみ）。電荷を持つ場なら、道に沿った位相を掛けてゲージ共変に平均します（Dimock の QED の論文の式 (20)）。**(iii) ゲージは局所的に、尺度ごとに選ぶ**。$U = e^{igA}$ と書いて展開するにはゲージを固定する必要がありますが、大域的に連続な選び方は存在しません（Singer 1978、3-04・4-08）。格子では群がコンパクトなので Z の定義にゲージ固定は要らず、要るのは局所的な選択だけです。問題文によれば、ゲージは時空の場所と尺度ごとに選ばれ（'phase cells'）、段とともに紫外のゲージから赤外のゲージへ選び直されます（JW §6.5。三次元の仕事の説明）。

局所的である理由は初等的です。行列 A の**作用素ノルム**を、ベクトルを最も伸ばす倍率 $\|A\| = \max_{|v|=1} |Av|$ で定めます。ユニタリ行列は長さを変えないので $\|U\| = 1$ です。ユニタリ行列 U, V, W について

$$\|UV - 1\| \le \|U - 1\| + \|V - 1\|, \qquad \|WUW^{-1} - 1\| = \|U - 1\| \tag{8}$$

です（前者は $UV - 1 = U(V-1) + (U-1)$ と $\|U(V-1)\| \le \|U\|\,\|V-1\| = \|V-1\|$ から、後者は W も W^{-1} も長さを変えないことから）。紙 ゲージ変換でプラケットの変数は $WU(\partial p)W^{-1}$ の形に変わるので、後者から、作用素ノルムで測った条件 (7) はゲージ変換で変

わりません。二次元の一辺 ℓ のブロックで縦の辺と底の横の辺を 1 にする（完全軸性ゲージ）と、高さ y の横の辺は真下の y 枚のプラケットの変数の逆の積なので、(8) を繰り返し使って $\|U_b - 1\| < \ell\,\varepsilon_1$ です。紙 **例：** $\varepsilon_1 = 0.05$ なら $\ell = 8$ で 0.4 以内。$\ell = 64$ では 3.2 で、常に $\|U - 1\| \le 2$ だから何も言いません。ゲージが効くのはブロック程度の範囲です。

06

結合の走りと段の数

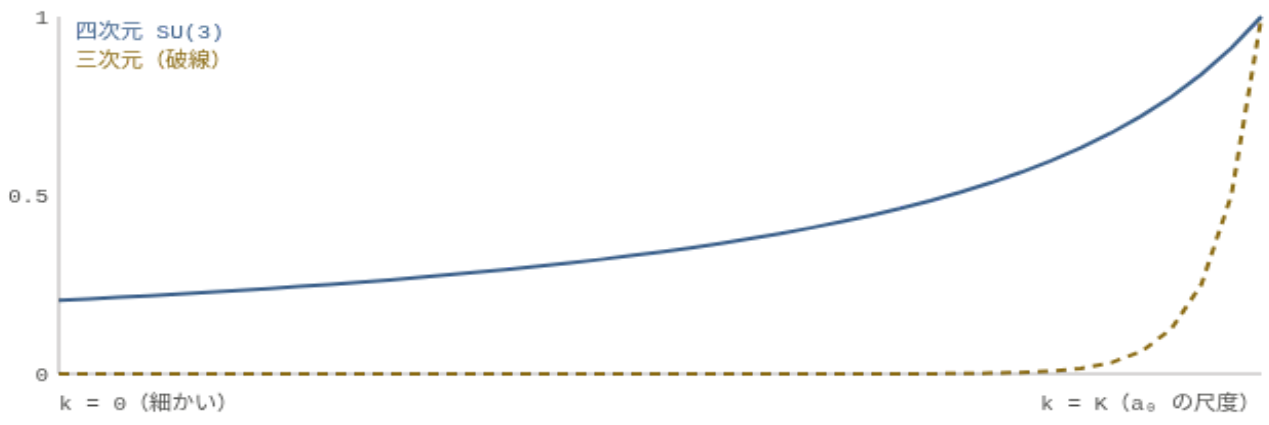
段ごとに変わる主なものは有効結合 g_k です。四次元では一ループの走り（4-06 §01 の β 関数 $\mu\,\mathrm{d}g/\mathrm{d}\mu = -b_0 g^3 + O(g^5)$、$b_0 = 11N/48\pi^2$ を積分した $1/g^2(\mu) = 1/g^2(\mu_0) + 2b_0 \ln(\mu/\mu_0)$。物理の側からの同じ式は 17-01 の式 (2)）を段に刻むと

$$\frac{1}{g_{k+1}^2} = \frac{1}{g_k^2} - 2b_0 \ln L \tag{9}$$

で、粗くするたびに一定量ずつ強まります。三次元では g^2 が質量の次元を持ち、段 k の無次元の結合 $g_k^2 = g^2 L^k a$ は細かい側で幾何級数的に小さい。既知

ここからは式 (9) だけを使った目安の議論で、Bałaban の評価そのものではなく、定理の水準の主張でもありません。違いは足し算に出ます。一段ごとに g_k^2 程度の補正が出るとすると、三次元の $\sum_k g_k^2$ は有限ですが、四次元では $g_k^2 \approx 1/(2b_0 \ln L \cdot (K-k))$ で和が段数の対数で増え続け、誤差として積むことができません。その大きさの補正は結合の走りそのものに繰り込んで追う必要がある、というのがこの目安の示すことです。残りが g_k^3 程度なら和は収まります。四次元への拡張の論文（Bałaban, CMP 109 (1987)。JW の文献表による）の題は 'a coupling constant renormalization in 4D' を含みます。既知

図 2　段の数 K（a = 2^−K）を動かすと、有効結合 g_k² の並び（右端で g² = 1）と和がどう変わるか。三次元は g_k² = 2^(k−K)



K = 40　四次元：g₀² = 0.206　Σg² = 16.99　Σg³ = 11.88　三次元：Σg² = 2.000

計算 この図の数値はこの端末で計算した（式 (9) の部分和。表 4 と一致）。

計算 表 4　$SU(3)$、$L=2$、右端で $g_K^2=1$。g_0^2 は最も細かい段の値。

K	g_0^2	$\sum g_k^2$ (4D)	$\sum g_k^3$ (4D)	$\sum g_k^2$ (3D)
10	0.509	7.76	6.63	1.999
40	0.206	16.99	11.88	2.000
160	0.061	29.54	16.12	2.000
320	0.031	36.38	17.56	2.000

例：右端の $g^2=1$ から最も細かい段で $g^2=0.1$ にするには、$SU(3)$ で約 93 段（$a\approx 9\times 10^{-29}$）、$SU(2)$ で約 140 段。$\sum g_k^2$ は K を倍にするたびに約 7.2 増え、$\sum g_k^3$ は約 21.2 に、三次元の $\sum g_k^2$ は 2 に収まります。計算

07

帰納の形：各段で何を仮定し何を示すか

証明は段 k についての帰納法です。仮定は「ρ_k が決まった形と評価を満たす」こと。形は、小さい場の領域での主要な作用、塊 X に局在し指数的に小さい補正 $E_k(X)$、大きい場の領域の和、からなります（Dimock II §1）。一段 (3) の後も同じ形と評価が成り立つことを示し、定数が k と a によらないことが要です。三次元の論文の主定理の評価は次の形です（Bałaban 1985 の (5)。記号は本書に合わせた）。

$$\chi(U)\,\exp\Big(-\frac{1}{g_k^2}A\big(U_k(U)\big)-C\,|T_k|\Big)\;\le\;\rho_k(U)\;\le\;\exp\big(C\,|T_k|\big)\tag{10}$$

A は Wilson の作用、$U_k(U)$ は極小配位、χ は小さい場の条件の指示関数、$|T_k|$ は段 k の格子の点の数で、C は a にも k にもよりません。積分すれば分配関数の a に一様な上下界が出ます（同 (6)）。四次元では 1989 年の論文が 'If the sequence of the effective coupling constants is contained in an interval]0, γ] with a sufficiently small positive γ' という仮定のもとで、四次元の紫外安定性を主定理（条件つきの紫外安定性の定理。Bałaban 1989 の Theorem 1）として述べています。既知

例：三次元の ϕ^4 では Dimock の紫外安定性の定理（Dimock の Theorem 1）が同じ型で、相殺項を選べば $e^{-c\,\mathrm{Vol}}\le Z/Z_{\mathrm{free}}\le e^{c\,\mathrm{Vol}}$ が紫外の切断と体積によらず成り立ちます（7-03 §06）。

切れ目　評価の型と、それで言えること

(10) の型から出るのは、分配関数と有効作用の一様な有界性までです。1989 年の論文は、仮定を外す基本の不等式（Bałaban 1989 の Theorem 2。二次の摂動計算による）の証明は未公刊と序文で述べ、Wilson ループなどの期待値の解析を今後の課題とします。

MRS 1993 は、ここから滑らかにした Wilson ループの紫外極限が部分列の水準で従うはずだが一意とは限らない、と評します。問題文はコンパクト性だけの弱い存在を、極限の性質を別に示さない限り解と認めません（JW 脚注 2）。三次元は 7-06、四次元は 7-07 で。

08

寄り道：「位相空間の細胞」という呼び名

飛ばしてよい節です。

この方法は「phase cell renormalization」とも呼ばれます（Chatterjee 2018 §6）。既知 呼び名の意味を、この章の言葉で説明します。段 k の揺らぎは空間では一辺 $L^k a$ のブロックに、運動量では $1/(L^k a)$ 程度に局在します。そこで位置と運動量の幅の積が $O(1)$ の箱――位相空間の細胞――ごとに、自由度がおよそ一つあると数えます。中身は (5) の指数的な局在です。三次元のスカラー場では、同じ考えが Glimm–Jaffe（1973）の位相空間の細胞への局所化として現れました（7-03 §06）。

$$n_k = L^{d(K-k)}\bigl(1 - L^{-d}\bigr), \qquad \sum_{k=0}^{K-1} n_k = L^{dK} - 1 \tag{11}$$

n_k は単位体積で段 k に積分される変数の数。**例：**四次元・$L = 2$・$K = 20$ で点は $2^{80} \approx 1.2 \times 10^{24}$ 個、最初の段でその 15/16 を積分します。計算 同じ言葉は 7-04 §10 にも現れます。

09

別の道と、この方法が止まる場所

Magnen–Rivasseau–Sénéor（MRS 1993）は、連続の運動量の切断で四次元の $SU(2)$ を扱いました（赤外の切断つき・自明な位相セクター）。大きい場では軸性ゲージ、小さい場では背景場に依存するゲージを使い、切断が壊すゲージ不変性を相殺項で戻します。序文は、この論文が詳細な証明を与えていないことを明記しています（'we do not provide a detailed proof'）。Bałaban の結果への序文の評は §07 の切れ目で見ました。既知 格子から始める利点は、ゲージ不変性と反射正値性が保たれることです（JW §6.5、5-03）。代わりに、壊した回転対称性を極限で戻す課題が残ります（7-01 の公理の段）。

止まる場所は (1) の右端で、a_0 より長い尺度には展開の足場がありません。MRS は赤外の切断を外さない理由を 'this would lead to large values of the coupling constant, and presumably to so-called non-perturbative effects corresponding to confinement' と書き、問題文は体積に一様なギャップには新しい考えが要るとします（JW §6.5）。**例：**図 2 で

K を増やしても、右端の $g_K^2 = 1$ は動きません。右端の先に段を足す方法は、この章の道具に含まれていません。続きは 7-10・7-11。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	式 (3)〜(7)・(10) の形（Dimock の解説と Bałaban 1985 の定理の文面による）。1989 年の主定理の仮定（序文による） 既知
言えている	表 1〜4 と図の値（二次元の模型と式 (9) の算術） 計算
言えている	不等式 (8) と二次元の完全軸性ゲージでの辺の評価（その場の証明） 紙
言えていない	ゲージ場での平均・ゲージの選び方・大きい場の操作の中身（系列の多くは本文未入手）
言えていない	§04 の大きい場の因子 $e^{-O(1)p(g)^2}$ の見積もりと、§06 の補正の和の議論（どちらも目安で、定理の水準ではない）
言えていない	Bałaban の方法での四次元の証明の完結（主定理は仮定つき。7-07）。表 4 が実際の有効結合の列であること。無限体積とギャップ

出典と再現

もの	種別	出典・道具
変換・ゲージ・反射正値性・脚注 2	本文で確認	A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*, Clay Mathematics Institute (2000) §6.5
三次元の主定理・(7)(10)・Wilson の繰り込み群	本文 p.255–257 を確認	T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 102 (1985) 255–275
四次元の主定理の仮定・未公刊の基本の不等式（Theorem 2）	要旨と序文を確認	T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 122 (1989) 355–392
Bałaban の系列の他の論文（平均・ゲージ固定・四次元 I, II ほか）	書誌のみ	CMP 89 (1983)；95, 96 (1984)；98, 99 (二篇), 102 (277–309) (1985)；109 (1987) 249–301；116, 119 (1988)；122 (1989) 175–202（Dimock I と Chatterjee の文献表で照合）
(2)〜(6)・帰納の形・ϕ^4_3 の定理・荷電場の平均	I §1–3・II §1・QED §2.3 を確認、III は要旨	J. Dimock, The renormalization group according to Balaban I・II・III, arXiv:1108.1335, 1212.5562, 1304.0705；Quantum electrodynamics on the 3-torus I, arXiv:math-ph/0210020
連続の切断・Bałaban への評・赤外の留保・詳細な証明が無いことの明記	p.325–327 を確認	J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, Comm. Math. Phys. 155 (1993) 325–383

もの	種別	出典・道具
phase cell renormalization の呼び名	§6 を確認	S. Chatterjee, Yang–Mills for probabilists, arXiv:1803.01950
大域的なゲージ固定の不可能性	書誌のみ	I. M. Singer, Comm. Math. Phys. 60 (1978) 7–12
三次元のスカラー場での位相空間の細胞への局所化	書誌のみ（帰属は 7-03 §06 による）	J. Glimm, A. Jaffe, Fortschr. Phys. 21 (1973) 327–376
表 1〜4・図の標本・§04 と §08 の数値	計算	この端末の Python（numpy・scipy）：`wilson_step.py`・`greens.py`・`villain2d.py`・`running.py`・`numbers.py`（§04 と §08 の数値）。図は canvas と素の JavaScript

次に読む章：7-06 三次元ヤン–ミルズの紫外安定性（この方法が最初に使われた場所で、何が示され、何が未構成か）。

三次元ヤン–ミルズの紫外安定性 — 格子の評価は一様になったが、測度はまだ無い

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 三次元では結合定数が長さの逆数の次元を持ち、発散しうる図が有限個になること。Bałaban（1985）の定理が格子の上で何を一様に評価したか。連続の測度と観測量がまだ無い理由。

前提となる章 — 7-05 繰り込み群の段の列。7-01・5-01・4-04 も参照します。

先に言うこと — 既知の結果の紹介で、証明は筋だけを追います。表と図の数値は自由場（ガウス）と段の数え方の計算で、三次元ヤン–ミルズの測度について何かを示すものではありません。非可換の三次元の連続の測度は、有限体積でも構成されていません。

この章の順序

1. 三次元という中間 — 二次元は構成済み、四次元は 2026-11 に相関関数の形の構成が公開された、三次元は紫外の一様な評価まで
2. 結合定数が長さを持つ — 格子で見える結合は $g^2 a$、細かいほど弱い
3. 発散を数える — 発散しうる型は有限個で、要る相殺項は定数一つ。計算の表
4. Bałaban 1985 の定理 — 有効密度の上下界が格子間隔によらない。動く図
5. 証明の筋 — 小さい場と大きい場、局所的な軸ゲージ、半単純性を使う一か所
6. 定理が言っていないこと — 一様な評価から極限・観測量・公理までの距離
7. 観測量の壁：三次元の Wilson ループ — 線積分は潰れ、均した場では値が残る。計算の表・動く図
8. 別の道：確率量子化と状態空間 — 方程式の側から測度に近づく道と、均した場で作る状態空間
9. 寄り道：2+1 次元の格子の数値 — 数値ではグルーボールの質量も弦張力もある（物理の水準）

10. 三次元の現在地 — 段ごとの到達点と、四次元との違い

01

三次元という中間

二次元の純ヤン–ミルズは格子の上で正確に解け、連続の測度まで構成されています（7-02）。四次元は、Bałaban と MRS の系列では紫外の側が有限体積で「制御の水準」まで来ていて未完でした（7-07）。2026-11-10 に公開された構成は、局所の観測量の相関関数の形で Wightman の公理を満たす理論を作った、と委員会は評価しています（6-01）。連続の確率測度は作られていません（6-04）。三次元はそのあいだで、2+1 次元の時空に対応します。

総説は、二次元・三次元は超繰り込み可能（発散しうる図が有限個しか無いこと。§03）なので 'substantially simpler' と考えられているとしたうえで、'a construction of the 3D YM measure and a description of its gauge-invariant observables, even on T3, remains open' と書きます（Chevyrev 2022 §1.1）。既知

先に一文で言うと、三次元で示されているのは格子の上の**一様な評価**で、評価を**極限**に変えることと、極限で何を測るか（**観測量**）を決めることが残っています。場所は六つの段の紫外極限の段です。「二次元と三次元ではできている」という言い方は、スカラー場（7-03）では正確で、可換群でも連続極限までは示されています（表 3）。非可換では「三次元は紫外の一様な評価まで」が正確です。

02

結合定数が長さを持つ

この章では結合を作用の前に出し、A は g を含まないものとします。A は反エルミートな行列（$X^\dagger = -X$ を満たす行列。$SU(N)$ のリー環はこの形、1-03）に値を取る 1 形式で、$F_A = dA + A \wedge A$、$|F_A|^2 = -\sum_{\mu,\nu} \operatorname{tr} F_{\mu\nu}^2 \geq 0$ です（3-03）。物理の章のエルミートな A_μ（3-02、結合を吸収した書き方）とは $A = -iA_\mu dx^\mu$、$F_A = -iF$ の関係です。

作用 $S(A) = \frac{1}{2g^2}\int |F_A|^2\, d^dx$ は次元の無い数です。A は長さの -1 乗、曲率は -2 乗、体積要素は d 乗の次元なので、結合定数の次元と、間隔 a の格子で見える無次元の結合が決まります。

$$[g^2] = (\text{長さ})^{d-4}, \qquad g_0^2 = g^2 a^{4-d} = g^2 a \quad (d=3) \tag{1}$$

右の式は Bałaban（1985）の出発点です。$g_0^2 = g^2 a$ は次元から決まる関係で、比例定数は作用の規格化によります。本書の規約（5-01・付録 A-01）では、$SU(N)$ の Wilson 作用を $\beta \sum_p \left(1 - \frac{1}{N} \operatorname{Re}\operatorname{tr} U_p\right)$ と書いて $\beta = 2N/g_0^2$ です。論文の作用とは tr の規格化が揃っているとは限らないので、論文の g_0 とは定数倍の違いがありえます。どちらの規約でも、三次元の $\beta = 2N/(g^2 a)$ は $1/a$ に比例します。既知

例：$g^2 = 1$ の単位で $a = 2^{-20}$ なら $g_0^2 \approx 10^{-6}$。細かい格子ほど結合はひとりでに弱くなり、漸近自由（4-06）の対数の遅さを待つ必要がありません。長さ $1/g^2$ では結合は 1 程度で、長さの尺度はこれ一つなので、理論が在って質量を持つならそれは g^2 の定数倍です（四次元は 4-07）。物理

本書での使い方は 15-01 §01（四次元では損の和が対数で発散する）。

03

発散を数える

摂動論で発散しうる図を数えます（4-04、スカラー場は 7-03）。摂動論では $A \to gA$ と置き直します。作用は $\frac{1}{2}\int |dA|^2$ に、g を運ぶ三点の頂点と g^2 を運ぶ四点の頂点が付いた形になります。外線がグルーオン E 本・ループ L 個の 1 粒子既約な図（線を一本切っても二つに分かれない図）は g^{E-2+2L} を運ぶので、運動量の次元から g の冪の次元を引いて

$$\omega(E, L) = d - E + (4 - d)(1 - L) \tag{2}$$

が見かけの発散の次数です。四次元では $\omega = 4 - E$ で L によらず、どの次数にも発散が現れます。三次元では $\omega = 4 - E - L$ で、ループが増えるごとに 1 下がります。

計算 表 1　三次元の $\omega(E, L)$。太字が $\omega \geq 0$。$E = 1$ は色の対称性で消える。外線はグルーオンに限る（ゴーストの外線を持つ型は省く）。

E\L	1	2	3	4	5
0（真空）	**3**	**2**	**1**	**0**	−1
2	**1**	**0**	−1	−2	−3
3	**0**	−1	−2	−3	−4
4	−1	−2	−3	−4	−5

外線をグルーオンに限ると、$\omega \geq 0$ の型は三次元で七つです（二次元は三つ、四次元は無数）。

相殺項は定数一つ

七つのうち真空以外の三つ（$E = 2$ の 1・2 ループと $E = 3$ の 1 ループ）の発散は、ゲージ不変性を保つ正則化のもとでは相殺項を要しません。理由は相殺項の形にあります。相殺項はゲ

ージ不変な局所項（一点での場とその微分の多項式を積分したもの）で、係数が g^2 の冪で書けるものです。三次元では g^2 が長さの -1 乗の次元を持つので、§02 の規約で次元が 3 以下の項に限られ、そういう項は定数だけです。次元 2 の候補の F について一次の項は、リー環の上の一次式で随伴作用（$X \mapsto hXh^{-1}$）で不変なものでなければならず、半単純な群では 0 しか無い（行列で書けば $\operatorname{tr} F = 0$）。次元 3 の候補の Chern–Simons 項は向きの反転（パリティ）で符号を変えるので、反転で不変な作用からは出ません。既知

この論法は連続の摂動論のものです。格子では回転対称性が壊れていて（立方格子の回転と反転だけが残る）、そのまま当てはめることはできません。格子の上でこれに当たるのが、§05 で見る Bałaban の「半単純性を使う一か所」です。Bałaban の出発点の密度も、Wilson 作用のほかは 'vacuum energy renormalization counterterms' を含む定数だけです。L ループの真空の図は $g_0^{2(L-1)}$ の次数で、最後の $L=4$ が g_0^6 に当たり、論文が g_0 の 6 次まで展開することと数が合います（この章の照合）。

04

Bałaban 1985 の定理

定理の文面

一辺を固定したトーラス $\mathbb{T}$ を間隔 a の格子で近似します（Bałaban の論文では格子間隔を ε と書きます）。出発点の密度は

$$\rho_0(U) = \exp\bigl[-A(U)/g_0^2 - E_0\bigr]$$

で（論文の式 (1)）、A は Wilson 作用、E_0 は規格化と真空のエネルギーの相殺項を含む定数です（論文では E。§03 の外線の数と区別して E_0 と書きます）。§03 で相殺項が定数一つで足りたことに当たります。繰り込み変換 T（L 倍に粗くするブロック化。7-05）で $\rho_{k+1} = T\rho_k$ を作り、$L^K a = a_0$（a_0 は g だけで決まる正の定数）で止めます。紫外安定性とは最後の密度の上下界が a によらないことで、論文の式 (3) は

$$\chi(U)\, e^{-O(1)|\mathbb{T}|} \;\le\; \rho_K(U) \;\le\; e^{O(1)|\mathbb{T}|} \tag{3}$$

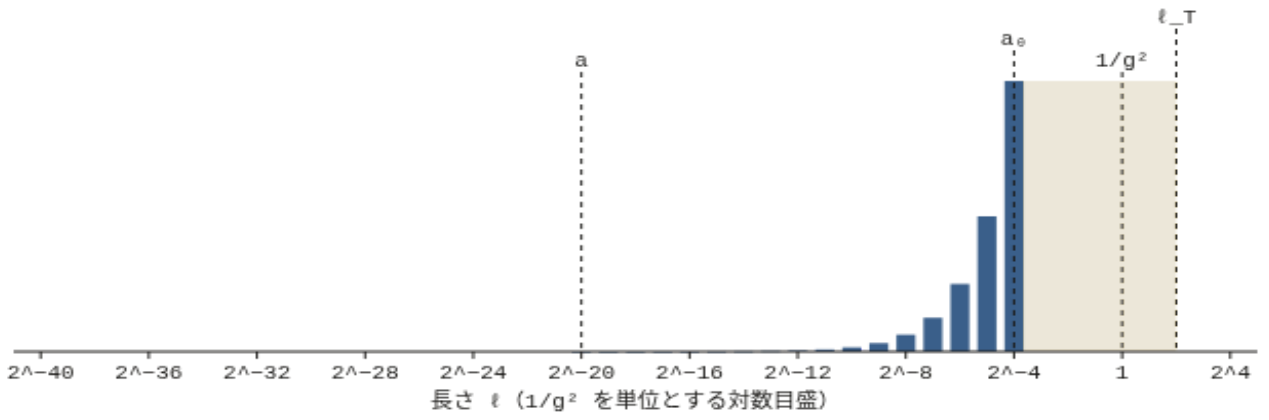
です。$U(\partial p)$ はプラケット p の縁を一周するリンク変数の積、χ は最後の粗い格子（間隔 a_0）のすべてのプラケットで $|U(\partial p) - 1|$ が小さいとき 1、そうでないとき 0 を取る関数（指示関数）、$|\mathbb{T}|$ は体積、$O(1)$ は g と a_0 だけで決まる定数です。既知

論文は、この $O(1)$ が $g \to 0$ で ∞ に行くことを注意し、g で発散する作用の項を書き出した形に直して、全段 k に広げます。その不等式 (5) が主定理です（形は 7-05 の式 (10)）：'The lattice approximations of the three-dimensional pure Yang-Mills theory with a semi-

simple compact group Lie G are ultraviolet stable in the sense that the sequence of densities ρk ... satisfies the bounds (5).' 系は 'uniform in ε bounds for the partition function'。著者は 'the proof is very sketchy' と断っています。既知

段の和

図 1　格子間隔 a を細かくすると、段（青い棒＝その段で見える結合 g_k^2）が左端に足される。黄の帯は段の外に残る尺度（a_0 からトーラスの一辺 $\ell_T = 4/g^2$ まで）



a = 2^-20/g²　段の数 K = 16　g₀² = 9.5e-7　Σ g_k² = 0.124999（0.125 未満）　細かい格子の点 ≈ 10^19.9

計算 この図の数値はこの端末で計算した（$g^2 = 1$ の単位、$L = 2$、$g^2 a_0 = 1/16$ は説明のための値）。

段 k の格子で見える結合は $g_k^2 = g^2 L^k a$（論文の $g_k = g(L^k a)^{1/2}$）で、細かい側へ一段ごとに $1/L$ 倍です。新しい段は左端に前より小さい結合で足されるだけで、和は $\frac{L}{L-1} g^2 a_0$ を超えません（$g^2 a = 2^{-8}, 2^{-20}, 2^{-40}$ で段は 4・16・36、和は 0.121094・0.124999・0.125000）。計算

四次元では同じ和が段数の対数で増えます（7-05 の §06。段数を倍にするごとに約 7.2 増える）。a_0 より上は、点の数が a によらない格子（図では 262144 点）の上の有限次元の積分で、コンパクト群の上なので有界です。ただしトーラスが $1/g^2$ より大きければ、結合が 1 を超える尺度がそこに入ります。計算

05

証明の筋

証明は先行論文群（伝播関数・平均化・正則な配位の空間・変分問題）の上に立ち、三次元の Higgs 模型での著者自身の方法をなぞります。既知

小さい場と大きい場。プラケットごとに $|U(\partial p) - 1|$ の大小で 1 を分割します（1 を「小さい」と「大きい」の二つの関数の和に書き、場合ごとに評価する）。大きいプラケットは $A(U)/g_0^2$ を大きくするので、最後には大きい場のプラケットごとに小さい因子 $\exp(-\frac{1}{4}p^2(g_j))$ が出ま

す。$g_j = g(L^j a)^{1/2}$ は段 j の結合、$p(g)$ は大きい場の閾値の倍率で、$\log g^{-1}$ の冪で増えます（7-05 の式 (7)）。この因子は g_j のどの冪よりも速く小さくなります。

小さい場の中。ブロックごとに Faddeev–Popov の手続き（ゲージを一つに固定し、その代わりの因子を積分に掛ける方法。4-08）で軸ゲージ（ブロックの中で、決めた向きのリンク変数を 1 に置くゲージ）を取り（大域的なゲージ固定は無いので局所に。3-04）、作用を最小にする配位（背景場）と揺らぎに分けます。揺らぎは指数的に減衰する共分散のガウス測度と局所的な相互作用になり、$g_0 = g a^{1/2}$ が小さいので g_0 の 6 次までの展開と 6 頂点までの真空の図で足ります。論文は、この積分は本来クラスター展開（7-04）で表せるが超繰り込み可能性による簡略化を使う、と書きます。

二つの特徴。群に値を取る格子の場は拡大縮小できないので、尺度変換の代わりに 'improvement of regularity properties of typical gauge fields' を使うこと。半単純性は一か所でだけ使い、随伴作用で不変なリー環の元が 0 しか無いことから 'there are no relevant variables in the effective action'（段を進めるごとに育つので追跡が要る量が、有効作用に無い）を導くこと。§03 の「相殺項は定数だけ」の格子の側の言い方がこれに当たります（この章の読み）。問題文はこの仕事を、ゲージを位相空間の細胞ごと・尺度ごとに紫外向きから赤外向きへ選び直すものと紹介します（JW §6.5）。既知

06

定理が言っていないこと

式 (3) は有効密度と分配関数が一様に有界だと言うだけで、極限については何も言いません。

$$\sup_a |\log Z_a| < \infty \quad \not\Longrightarrow \quad \lim_{a\to 0}\langle \mathcal{O}\rangle_a \text{ が在る} \quad \not\Longrightarrow \quad \text{公理とギャップ} \tag{4}$$

評価から極限へ。一様な評価からはコンパクト性（有界な列から収束する部分列が取れる、という性質）で部分列の極限の見込みが立ちますが、一意性は出ません（部分列の存在を「紫外安定性」と呼ぶ用法もあります。Chatterjee 2018 §6）。問題文の脚注 2 は、四次元の問題で 'weak-existence (compactness)' だけでは解と認めない（極限の性質を別に示すなら別）としています。既知

何を測るか。問題文は 'These results need to be extended to the study of expectations of gauge-invariant functions of the fields' と書きます（JW §6.5）。三次元ではこれが観測量の定義の問題です（次節）。

その先。定数 $O(1)|\mathbb{T}|$ は体積に比例し、無限体積（無限体積の段）には何も言いません。反射正値性は格子で成り立ちますが（Osterwalder–Seiler 1978、5-03）、回転対称性の回復とギャ

ップ（公理の段と一様なギャップの段）は手つかずです。二次元の確率量子化の力学を扱った Chevyrev–Shen の論文も、2026 年の版の §1.2 で 'the construction of the 3D YM measure in the continuum is open, even in finite volume' と書きます。既知

07

観測量の壁：三次元の Wilson ループ

線積分が定まらない

二次元では Wilson ループ $W(\gamma) = \operatorname{tr} \mathcal{P} \exp \oint_\gamma A$ が自然な観測量で、面積則が正確に成り立ちます（7-02）。三次元のヤン–ミルズは短い距離でガウス自由場（GFF。1-09）のように振る舞うと考えられ、その共分散は $1/|x-y|$ の程度なので、線分の上の線積分の分散は $\int_0^1 \int_0^1 ds\, dt / |t-s| = \infty$ です（Chevyrev 2022 §3.1。Cao–Chatterjee の要旨も 'line integrals of the GFF do not exist in such dimensions'）。既知

最も簡単な場合で確かめます。U(1) の自由場（ガウス測度）を格子で作り、一辺 1 の正方形のループ、結合 $e^2 = 1$ とすると、ゲージによらず $\langle W \rangle = \exp(-\tfrac{1}{2} \operatorname{Var} \oint A)$ で、

$$\operatorname{Var} \oint_\gamma A = \oint_\gamma \oint_\gamma G(x-y)\, dx \cdot dy, \qquad G_t(r) = \frac{\operatorname{erf}\left(r/\sqrt{8t}\right)}{4\pi r} \quad (d=3) \tag{5}$$

です。G は格子のラプラシアンの逆、G_t は熱流 $A \mapsto e^{t\Delta} A$（ヤン–ミルズ流の線形化）で均した場の共分散の連続版です。$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds$ は誤差関数で、x が大きいと 1 に近づきます。均す幅は erf の引数の長さ $\sqrt{8t}$ 程度で、それより遠い二点では G_t は $1/(4\pi r)$ とほぼ同じ、近い二点では有限の値に抑えられます。

計算 表 2　一辺 1 の正方形の $\langle W \rangle$。t は熱流の時間。最下行は式 (5) を連続で積分した値。

a	二次元	三次元	三次元 t = 0.01	四次元	四次元 t = 0.01
1/4	0.6065	0.4837	0.6919	1.96e−1	0.6175
1/16	0.6065	0.3150	0.7396	5.22e−4	0.7127
1/128	0.6065	0.1631	0.7421	1.67e−28	0.7174
連続	$e^{-1/2}$	0	0.7421	0	0.7175

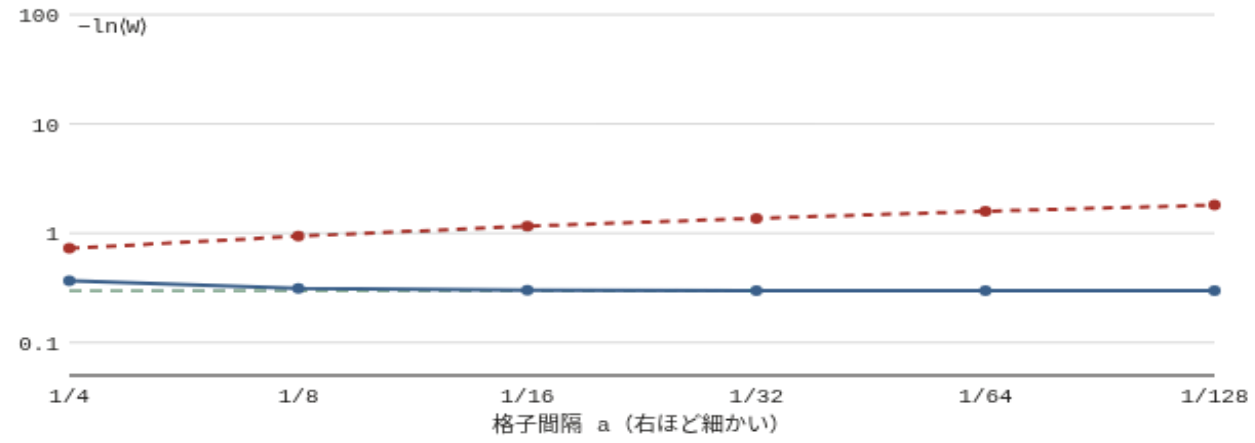
表 2 の読み

二次元ではどの格子でも $\operatorname{Var} = 1$（面積）で $\langle W \rangle = e^{-1/2}$ が正確に出ます。三次元では Var が $\ln(1/a)$ に比例して増え、$\langle W \rangle \to 0$ です。Var の $\ln(1/a)$ に対する傾きは 0.613 から 0.635 へ

（$2/\pi \approx 0.637$ に近づく）。a を半分にするごとの増分では 0.425 から 0.440 で、$(2/\pi)\ln 2 \approx 0.441$ に近づきます。四次元では $\mathrm{Var} \approx 1/a$ です。計算

均すと、三次元でも四次元でも格子の値は連続の値に収束します。観測量を「均した場の Wilson ループ」で定める Cao–Chatterjee と CCHS の出発点の、最小の例です。計算

図 2　熱流の時間 t を動かすと、均した Wilson ループ（青）は格子を細かくしても連続の値（緑の破線）に落ち着く。赤の破線は均さないもの



d = 3　t = 0.01　a = 1/128：均さない −ln(W) = 1.81、均した値 0.298（連続 0.298）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（表 2 と同じ計算）。

08

別の道：確率量子化と状態空間

方程式を解く道

測度を直接作る代わりに、それを不変測度（時間が経っても分布が変わらない測度）に持つはずの確率偏微分方程式を解く道があります（7-09）。Chandra–Chevyrev–Hairer–Shen（CCHS 2024）は三次元のヤン–ミルズ–Higgs で、分布の非線形な距離空間にゲージ同値を広げ、正則性構造（特異な確率偏微分方程式の解の理論。7-09 で扱う）で繰り込んだ方程式の局所解（短い時間だけ在る解）を作り、'there is a unique choice of renormalisation counterterms such that these solutions are gauge covariant in law' を示しました。既知

Higgs 場は無くてもよく、純ヤン–ミルズに制限した述べ方は Chevyrev 2022 Remark 1.2 にあります。結果として、軌道空間の上の Markov 過程（先の振る舞いが現在の状態だけで決まる確率過程）が、有限時間の爆発（解が有限の時間で無限大になること）の可能性つきで定まります。

状態空間

状態空間の作り方が前節への答えです。線積分は使えないので、決定論的なヤン–ミルズ流（DeTurck の項つき。ゲージの向きの項を足して熱方程式の形にしたもの）を「ゲージと両立する均し」とし、均した後の場でゲージ同値を定めます（Chevyrev 2022 §3.1）。軌道の空間は二次元では Polish 空間（完備な距離が入り、可算な稠密部分集合を持つ空間）ですが、三次元では 'completely Hausdorff (and separable)'（異なる二点を連続関数で分けられ、可算な稠密部分集合を持つ）までしか分かっていません（同 Remark 1.5）。非可換では軌道の空間が非線形で、状態空間から難しくなります（同 §1.1、3-04）。

残っているのは不変測度で、それが唯一に在ると示されれば有限体積の三次元ヤン–ミルズ測度の構成になる、と総説は書きます（同 §4）。Cao–Chatterjee（2024）は、理論が短い距離で GFF のように振る舞うと仮定すれば、単位トーラスの上で理論を 'random distributional gauge orbits' として実現でき、均した Wilson ループが定義できることを示しました。これも状態空間の結果です。 既知

09

寄り道：2+1 次元の格子の数値

飛ばしてよい節です。

物理の側では、三次元のヤン–ミルズは閉じ込めと質量ギャップを持つと考えられています。Teper（arXiv 1998、Phys. Rev. D 1999）は SU(2)〜SU(5) の格子理論を 2+1 次元でモンテカルロ法（5-07）で計算し、グルーボールの質量と弦張力の比を連続極限へ外挿しました。要旨によれば比は N にほとんどよらず、弦張力は N が大きくても 0 になりません。$\beta = 2N/(g^2 a)$ なので格子単位の相関長 $\xi/a = \beta/\big(2N\,(m/g^2)\big)$ は β に比例して伸びるだけです（四次元では指数的。5-05）。 物理

問題文は、ギャップが四次の項 $(A \wedge A)^2$ から来るという見方の文献に Feynman の 2+1 次元の論文（1981）を挙げます（JW §6.6）。三次元の U(1) 格子ゲージ理論は、格子間隔を固定したまま、すべての結合で静的な電荷を閉じ込めることが示されています（Göpfert–Mack 1982。四次元の U(1) は 5-06）。 既知 連続極限は自由な電磁場なので（Gross 1983）、この閉じ込めは連続極限には残らないと考えられます。 物理

10

三次元の現在地

既知 表 3　三次元での到達点（段は 7-01。区分は 7-01 の表 2 と同じ）。

段	非可換ヤン–ミルズ	可換 U(1)（参考）
1 正則化	閉	閉
2 有限体積の測度	閉（格子）。連続のまま作ることは紫外極限の段の「一部」に含める	閉（格子）
3 紫外	一部：格子の一様な評価（Bałaban 1985）。連続の測度は未構成。確率量子化は力学まで（CCHS 2024）	連続極限（Gross 1983、別種の収束で。極限は自由場）。Higgs つきは King 1986
4 無限体積	未	Higgs つきで極限（King 1986）
5 公理	未	ここでは確かめていない
6 ギャップ	未（数値では在る。物理）	格子（a 固定）で全結合の閉じ込め（Göpfert–Mack 1982）。連続極限（紫外極限の段）ではこの性質は残らないと考えられる物理

U(1) の欄は参考です。一様なギャップの段の行に書いたのは閉じ込め（静的な電荷のあいだの力が距離とともに弱まらないこと）で、閉じ込めと質量ギャップは別の性質です（17-02 §02）。

四次元（7-07）との違いは、紫外で結合を弱めるのが次元そのものであることです。共通して残るのは、評価を極限に変えること、極限で測る量を決めること、体積に一様な評価です。無限体積では三次元も長さ $1/g^2$ で結合が 1 程度になり、四次元の赤外と同じ種類の困難に入ります（この章の読み。7-10）。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	格子で見える結合は $g^2 a$。外線をグルーオンに限ると発散しうる型は七つ計算 。ゲージ不変な局所項の次元から、要る相殺項は真空のエネルギーの定数一つ既知
言えている	Bałaban（1985）の定理：有効密度の格子間隔に一様な上下界と、分配関数の一様な評価（本文で確認）既知
言えている	U(1) 自由場の Wilson ループは三次元で $\ln(1/a)$、四次元で $1/a$ の速さで潰れ、熱流で均すと連続の値に収束する（$a \geq 1/128$ の範囲）計算
言えている	非可換の三次元の連続の測度は有限体積でも未構成（Chevyrev 2022、Chevyrev–Shen）既知
言えていない	Bałaban の証明の細部（著者自身が概略と書く）。相互作用のある理論で均した Wilson ループが極限を持つか（表 2 は自由場）

	内容
言えていない	三次元の質量ギャップと閉じ込め（数値は物理の水準）。2024 年以降の文献の網羅

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§02〜§05	一次資料（本文で確認）	T. Bałaban, Ultraviolet stability of three-dimensional lattice pure gauge field theories, Comm. Math. Phys. 102 (1985) 255–275
§05・§06・§09 の引用	一次資料（本文で確認）	A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*, Clay Mathematics Institute の公式問題文（2000）
§01・§07・§08 の引用	総説（本文で確認）	I. Chevyrev, Stochastic quantisation of Yang–Mills, arXiv:2202.13359（2022）§1.1・Remark 1.2・Remark 1.5・§3.1・§4
§06・表 3 の可換群	総説（本文で確認）	S. Chatterjee, Yang–Mills for probabilists, arXiv:1803.01950（2018）§4・§6
§06 の連続の測度の現状	一次資料（§1.2 を本文で確認）	I. Chevyrev, H. Shen, Invariant measure and universality of the 2D Yang–Mills Langevin dynamic, Comm. Pure Appl. Math.（2026）, arXiv:2302.12160（v3, 2026）
§07・§08・§09	要旨で確認	A. Chandra, I. Chevyrev, M. Hairer, H. Shen, Stochastic quantisation of Yang–Mills–Higgs in 3D, Invent. Math. 237 (2024) 541–696, arXiv:2201.03487。S. Cao, S. Chatterjee, A state space for 3D Euclidean Yang–Mills theories, Comm. Math. Phys. 405 (2024), arXiv:2111.12813。M. Teper, Phys. Rev. D 59 (1999) 014512, arXiv:hep-lat/9804008
可換群・Feynman・反射正値性	書誌のみ	L. Gross, CMP 92 (1983) 137–162。C. King, CMP 102 (1986) 649–677; 103 (1986) 323–349。M. Göpfert, G. Mack, CMP 82 (1982) 545–606（この一篇は要旨まで確認：Villain 作用・全結合で弦張力が正。INSPIRE。本文は未読。年は Crossref の発行年で、INSPIRE は 1981）。R. P. Feynman, Nucl. Phys. B 188 (1981) 479–512。K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471
表・図	計算	この端末の Python：`powercount.py`（表 1）、`ladder.py`（§04 の段の和・図 1）、`wilson_free.py`（表 2・図 2。scipy で格子のグリーン関数を熱核の Bessel 表示から積分し、二次元の Var = 1 を 1e−10 で再現。約 10 秒）。図は canvas と素の JavaScript

次に読む章：7-07 四次元（同じ方法の四次元版）。

四次元：Bałaban と Magnen–Rivasseau–Sénéor — 紫外の側は有限体積で「制御の水準」まで来たが、この二つの系列では構成は完了していない

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 四次元では結合が対数でしか弱まらず、結合そのものを繰り込む必要があること。Bałaban の 1989 年の主定理が何を仮定し何を結論するか。MRS 1993 が連続の切断で何をしたか。「制御の水準」がどこまでを含み、どこから先を含まないか。

前提となる章 — 7-05 繰り込み群の段の列。7-06・7-01 の紫外極限の段・4-06 も参照します。

先に言うこと — 既知の結果の紹介です。Bałaban の四次元の系列は、1989 年の論文の要旨と序文のほかは書誌だけで扱います。MRS は序文と設定の節までです。表と図の数値は結合の走りの算術です。この章の二つの系列では、四次元のヤン–ミルズの構成は有限体積のトーラスの上でも完了していません。2026-11-10 に、別の設計による構成の Lean での形式化と、委員会の評価書が公開されました。その読みは第 6 部と第 8〜14 部で、この章はその前の到達点の記録です（表 4 の右の列だけが公開された構成）。

この章の順序

1. 四次元で何が変わるか — 結合は対数でしか弱まらない
2. Bałaban の四次元の系列 — 土台から四次元まで、六年にわたる 13 篇
3. 1989 年の主定理を読む — 仮定つきの定理
4. 仮定を数で見る — 動く図・表
5. 「紫外安定性」の三つの読み — 評価・部分列・一意性
6. MRS 1993：連続の切断で — 軸性ゲージと Slavnov 恒等式
7. 二つの道を並べる — 格子と連続の切断、場の最初の上界
8. 「制御の水準」の意味 — 動く図・表

9. 寄り道：数百頁の証明をどう確かめるか

01

四次元で何が変わるか

三次元では、格子を細かくすると結合がひとりでに弱まりました（7-06 §02）。四次元では結合 g に長さの次元が無く、細かい尺度で結合を弱めるのは漸近自由だけです（4-06）。長さの尺度 ℓ での結合 $g(\ell)$ は、純ゲージの $SU(N)$ で

$$\ell \frac{dg}{d\ell} = b_0 g^3 + b_1 g^5 + \cdots, \qquad b_0 = \frac{11N}{48\pi^2}, \qquad b_1 = \frac{17N^2}{384\pi^4} \tag{1}$$

に従います（PDG の式 (9.3) をこの本の規約に直した値）。既知 一ループだけを残すと

$$\frac{1}{g^2(\ell)} = \frac{1}{g^2(\ell')} + 2b_0 \ln \frac{\ell'}{\ell} \tag{2}$$

で、尺度を半分にするごとに $1/g^2$ が $2b_0 \ln 2$ だけ増えます。**例：**$g^2 = 0.2$ から格子間隔を半分にすると、$SU(3)$ では $1/g^2$ が 5 から 5.0966 になり g^2 は 1.9% 減、$SU(2)$ では 1.3% 減です。三次元なら $g_0^2 = g^2 a$ が半分になります。計算

この遅さのため、段ごとの g_k^2 程度の補正の和は段数の対数で増え続け、誤差として積めません（7-05 §06）。補正を結合そのものに繰り込む必要があり、四次元の系列の最初の論文の題は 'a coupling constant renormalization in four dimensions' を含みます。既知

02

Bałaban の四次元の系列

Bałaban の仕事は、三次元と共通の土台（1983–85）の上に四次元の論文（1987–89）を積んだ系列で、総説は 'a long series of papers spanning six years' と書きます（Chatterjee 2018 §6）。既知

既知 表 1　系列の並び（書誌は Chatterjee 2018・Dimock 2011・Crossref で照合）。

年	誌 CMP	内容（題から）	確認
1983–85	89・95・96・98・99（二篇）・102	伝播関数・平均化・ゲージ固定・背景場などの土台	書誌のみ
1985	102, 255–275	三次元の紫外安定性（7-06 §04）	本文 p.255–257

年	誌 CMP	内容（題から）	確認
1987	109, 249–301	小さい場の近似での有効作用と、四次元の結合定数の繰り込み	書誌のみ
1988	116, 1–22；119, 243–285	同 II：クラスター展開；収束する繰り込み展開	書誌のみ
1989	122, 175–202	大きい場の繰り込み I：R 操作の基本の段	書誌のみ
1989	122, 355–392	大きい場の繰り込み II：局所化・指数化・評価	要旨と序文

問題文はこの拡張を 'a qualitative breakthrough' と呼び、'an analysis of asymptotic freedom to control the renormalization group flow as well as obtaining quantitative estimates on effects arising from large values of the gauge field' と要約します（JW §6.5）。題に即せば、1987 年の論文が小さい場と結合の走りを、1989 年の二篇が大きい場（7-05 §04 の Ω^c）を受け持ちます。既知

本書での使い方は 15-02 §01（連作の五段の地図）。

03

1989 年の主定理を読む

最後の論文の序文の定理（条件つきの紫外安定性の定理。Bałaban 1989 の Theorem 1）です。

'Theorem 1. If the sequence of the effective coupling constants is contained in an interval]0, γ] with a sufficiently small positive γ, then the effective densities ρ_k have the form, and satisfy all the conditions and bounds, described in Sect. 2 [III].'

有効結合の列とは、段 $k = 0, \dots, K$（細かい段から単位格子まで）ごとの結合 g_k です。「形と条件と評価」は 7-05 §07 の帰納の形を指します。論理の形だけを取り出すと

$$\underbrace{0 < g_k \le \gamma \ \ (k = 0, \dots, K)}_{\text{仮定}} \implies \underbrace{\rho_k \text{ が帰納的な表示と評価を満たす}}_{\text{定理 1}} \tag{3}$$

です。著者は、仮定は先行論文の定理 2 から出る基本不等式に従うので外せるが、'The proof of Theorem 2, which is based on second order perturbative calculations, is very awkward and long ... and has not been published yet, so we have Theorem 1 with the assumption' と続けます（Theorem 2 は、仮定を外すための基本の不等式）。1989 年の時点で、四次元の紫外安定性は**仮定つきの定理**です。探した範囲（著者の 1989 年以後の論文の書誌）では、基本の不等式（Theorem 2）の証明を載せた論文は見当たりません。既知

定理から 'the ultraviolet stability bounds of the same type as for superrenormalizable models in [16]' が出て、定数 $E_\pm$ は 'independent of k, T_η, U_k' です。ループ変数などの期待値の解析は今後の課題とされています。既知

超繰り込み可能な模型（原論文の文献 [16]）と同じ型の評価、という意味です。三次元のヤン–ミルズは超繰り込み可能なので（7-01 の式 (7)）、形は 7-05 の式 (10) と同じ型と読めます。T_η は論文の格子、$|T_\eta|$ はその点の数で、7-05 の式 (10) の $|T_k|$ に当たります。U_k は段 k の場の配位です。定数が段にも格子の大きさにも場にもよらない、ということです（この段落はこの章の読み）。

例：論文の有効結合 g_k は論文の中で段ごとに定められるもので、式 (2) の走りそのものではありません。一ループの走り (2) で読めば g_k は粗い側ほど大きく、列の最大は単位格子の g_K なので、仮定 (3) は $g_K \le \gamma$ の一条件に縮みます（この章の読み）。

04

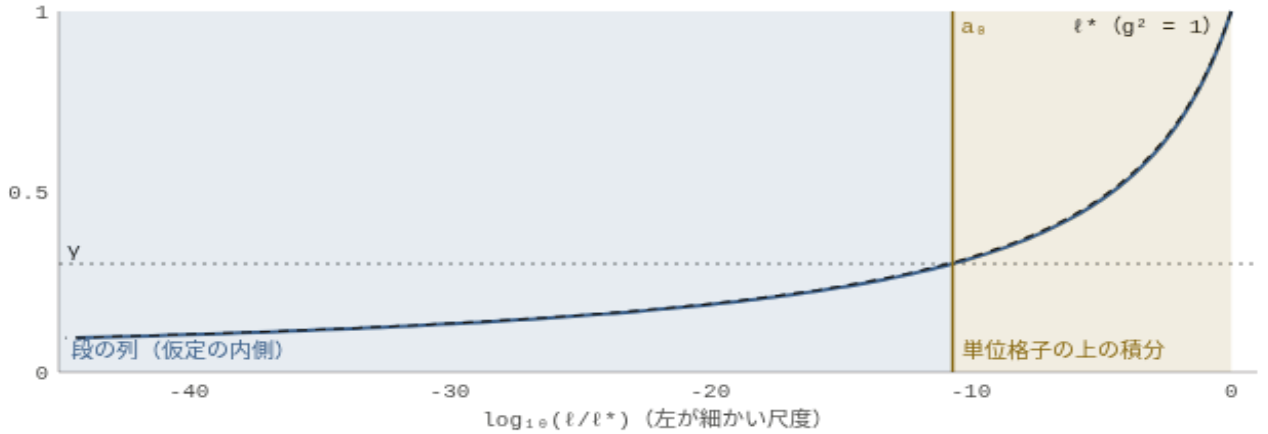
仮定を数で見る

段の列が止まる単位格子の尺度を a_0 とすると（7-05 の式 (1)）、仮定は単位格子の尺度で結合が小さいことで、ここでは $g^2(a_0) \le \gamma$ と書きます。式 (1) を粗い側へ延ばして $g^2 = 1$ になる長さを ℓ_* と書きます。ℓ_* は摂動論を信頼できない所まで延ばした**目安の長さ**で、閉じ込めや質量が現れると物理で考えられている尺度の見当です。物理 $u = g^2$ として式 (1) を積分すると

$$\ln \frac{\ell_*}{a_0} = \int_\gamma^1 \frac{du}{2u^2\,(b_0 + b_1 u)} \;\approx\; \frac{1}{2b_0}\Big(\frac{1}{\gamma} - 1\Big) \tag{4}$$

右は一ループの近似です。定理の文面で γ は 'sufficiently small' とあるだけなので、下の γ は説明のための値です。ここでは γ を g^2 の上限として使います（式 (3) の $g_k \le \gamma$ とは γ の付け替えだけの違いです）。

図 1　γ を動かすと、段の列が止まる尺度 a_0（縦線）と $g^2 = 1$ の目安 ℓ^*（右端）の距離が変わる



SU(2)　γ = 0.30　$\log_{10}(a_0/\ell^*)$ = −10.70（二ループ）・−10.91（一ループ）　一辺 ℓ^* のトーラスの単位格子の点 ≈ 10^42.8

計算 この図の数値はこの端末で計算した（式 (4)。実線が二ループ、破線が一ループ。表 2 と一致）。

計算 表 2　$\log_{10}(\ell_*/a_0)$（一ループ／二ループ）と、一辺 ℓ_* の四次元トーラスの単位格子の点の数（二ループ）。

γ	SU(2)	SU(3)	点 SU(2)	点 SU(3)
0.5	4.68 / 4.55	3.12 / 3.00	10^18.2	10^12.0
0.3	10.91 / 10.70	7.27 / 7.06	10^42.8	10^28.2
0.2	18.70 / 18.42	12.47 / 12.18	10^73.7	10^48.7
0.1	42.08 / 41.67	28.06 / 27.64	10^166.7	10^110.6

表 2 の範囲（$\gamma = 0.1$〜0.5）では、a_0 は ℓ_* より 3〜42 桁細かい所にあり、一辺 ℓ_* の四次元トーラスの単位格子の点は 10^{12}〜10^{167} 個です。計算

読み方（この章の読み）。段の列で押さえるのは a_0 より細かい尺度だけです。その先は単位格子の上の有限次元の積分で、群がコンパクトなので有界ですが、定数は $e^{E|T|}$ の形です。$|T|$ は単位格子の点の数で、7-05 の式 (10) の $|T_k|$（§03 の $|T_\eta|$）の最後の段に当たります。一辺 ℓ_* のトーラスなら $|T|$ は上の点の数の大きさです。紫外安定性は ℓ_* の尺度についての情報ではありません。

05

「紫外安定性」の三つの読み

同じ言葉が違う強さで使われます。既知 **評価として：**'The ultraviolet stability means that the actions ρ_K have bounds independent of the lattice spacing ε'（Bałaban 1985）。**部分列として：**'The existence of a convergent subsequence is known as ultraviolet stability'（Chatterjee 2018 §6）。「**一つの形**」**として：**MRS と Bałaban について 'a form of ultraviolet stability' が示された（Chevyrev 2022 §1.1）。

評価から部分列へ進む道具はコンパクト性で、いちばん簡単な形は Bolzano–Weierstrass の定理です。

$$\sup_K |x_K| < \infty \implies \text{ある } K_1 < K_2 < \cdots \text{ について } x_{K_j} \text{ が収束する} \tag{5}$$

極限は一つとは限りません。**例：**$x_K = \sin K$ は $|x_K| \le 1$ ですが収束せず、$K = 33, 77$ では $0.99991, 0.99952$、$K = 11, 55$ では $-0.99999, -0.99976$ で、1 に近づく部分列と -1 に近づく部分列が取れます。計算

MRS の序文は Bałaban の結果をこう評します。'From this result the existence of an ultraviolet limit for gauge invariant observables such as "smoothed Wilson loops" should follow, at least through a compactness argument using a subsequence of

approximations; but the limit is not necessarily unique.' 問題文の脚注 2 は、コンパクト性による弱い存在を、極限の性質（ギャップと公理）を別に示さない限り解と認めません（JW §6.5。7-06 §06 も参照）。既知

06

MRS 1993：連続の切断で

Magnen–Rivasseau–Sénéor は格子を使わず、連続の運動量の切断から出発しました。対象は四次元の純 $SU(2)$、自明な位相セクター、固定した赤外の切断で、紫外の切断を外した、正則化した軸性ゲージの Schwinger 関数です。既知 言葉を順に定義します。

- **軸性ゲージ**：一つの座標方向の成分を 0 にそろえるゲージの選び方です（$A_4 = 0$ など。ゲージ固定は 4-08）。
- **自明な位相セクター**：インスタントン数（3-05）が 0 の配位だけを扱うことです。
- **Schwinger 関数**：ゲージを一つ固定したときの場の積の期待値 $\langle A(x_1) \cdots A(x_n) \rangle$ です。

中心は場の大きさの見積もりです。切断が壊したゲージ不変性を戻す相殺項が場を λ^{-1} 程度に抑えます（λ は結合）。軸性ゲージでは、ゲージを固定した後の測度が正の重みのまま残ります。これが軸性ゲージの**正値性**で、MRS は Feynman ゲージなどを出発点に使えない理由として 'lack of positivity' を挙げています。この正値性と合わせると、確率の意味で場はおよそ $\lambda^{-1/2}$ になります。そこで小さい場と大きい場の領域に分けて扱います。MRS の曲率で書くと

$$F = dA - \lambda[A, A], \qquad \frac{\lambda |A|^3}{|A|^2} = \lambda |A|, \qquad \frac{\lambda^2 |A|^4}{|A|^2} = \lambda^2 |A|^2 \tag{6}$$

です。作用 $|F|^2$ を展開すると二次・三次・四次の項が出ます。右の二つは三次の項と四次の項を二次の項で割った比で、微分の数を数えない大きさの目安です（この章の読み）。$|A| \sim \lambda^{-1}$ では比はどちらも 1、$|A| \sim \lambda^{-1/2}$ では $\lambda^{1/2}$ と λ です。λ^{-1} では非線形の項が二次の項と同じ大きさで、MRS も λ^{-1} の情報だけでは 'not enough to start perturbation theory' と書きます。**例：**$\lambda = 0.01$ なら、$|A| \sim 100$ で比は 1 と 1、$|A| \sim 10$ で 0.1 と 0.01。計算

小さい場の領域ではゲージを摂動計算向きの、背景場に依存するものに替えます。結論は 'The ultraviolet limit as ρ → ∞ of the Schwinger functions … exists; furthermore these functions in the ultraviolet limit satisfy the Slavnov identities' です。Slavnov 恒等式は、小さいゲージ変換への不変性がゲージを固定した相関関数の間に残す関係式です（4-08）。
既知

留保も著者自身が書いています。'we do not provide a detailed proof of this statement'、詳細な証明は 'would presumably be several hundred pages long'。軸性ゲージに限られ、インスタントンを扱わず、赤外の切断を外しません。外せば結合が大きくなり 'presumably to so-called non-perturbative effects corresponding to confinement' に至るからです。 既知

07

二つの道を並べる

MRS は自分たちの切断の役割を 'quite similar to the role played by compactness of integration over the gauge group in Balaban' だとします。式にすると

$$\text{格子：}\ U_\ell \in G\ \text{（コンパクト）}\ \Rightarrow \|U_\ell - 1\| \le 2, \qquad \text{連続：相殺項} \Rightarrow |A| \lesssim \lambda^{-1} \tag{7}$$

で、どちらも場の最初の上界です。 既知 格子の側は群の元、連続の側はリー環の元で書いているので、大きさをそろえます。$SU(2)$ で $U_\ell = e^{igB_\ell}$（B_ℓ はリー環の元）と書けば、回転角を 0 から π に取れるので $|B_\ell| \le \pi/g$ です。つまり格子の側でもリー環の場は $1/g$ 程度に抑えられ、両辺とも「場 $\lesssim$ 1/結合」の形になります（この章の読み）。**例：**$SU(2)$ で $\|U-1\| = 2$ になるのは $U = -1$、回転角 π のとき。 計算 上界だけでは摂動を始められない点も共通です。

既知 表 3　二つの道。

	Bałaban（1987–89）	MRS（1993）
正則化	格子（Wilson 作用）	運動量の切断（ゲージ不変性を壊し相殺項で戻す）
群・赤外	コンパクトなリー群 G（三次元の論文の設定。四次元の細部は未確認）・トーラスの上	$SU(2)$・固定した赤外の切断
押さえたもの	有効密度と分配関数の、格子間隔によらない上下界	軸性ゲージの Schwinger 関数の紫外極限と Slavnov 恒等式
ゲージ	場所と尺度ごとに局所的に選ぶ（考え方は 7-05 §05。四次元の論文での具体的な選び方は本文で確かめていない）	大きい場で軸性、小さい場で背景場に依存
反射正値性	各格子間隔の Wilson 測度では成り立つ（JW §6.5、5-03）。極限での成立は扱っていない	未。格子を最初の切断にすれば示せるだろう、と著者
証明	主定理は仮定つき（§03）	詳細な証明は無い（著者）

MRS は、Bałaban の仕事がゲージを固定した Schwinger 関数を扱わないことを指摘し、'one can consider in fact that the ultraviolet problem for the Yang-Mills field theory is not yet understood until this point is clarified' と書きます。逆に MRS は反射正値性と赤外を後に残しています。 既知

08

「制御の水準」の意味

紫外極限の段（7-01）の中とその先を、摂動論の水準から一様なギャップの水準までの八つの水準に分けます（表 4 の行。非自明性の水準は極限が自由場（ガウス）でないことで、問題文はさらに短距離の振る舞いが漸近自由の予言と一致することを求めます。一様なギャップの水準は体積に一様な質量ギャップ）。式 (8) の数字は表 4 の行の番号です。文献の言葉を矢印に載せると

$$1 \xrightarrow{\text{従うはず（MRS）}} 2 \xrightarrow{\text{一意とは限らない}} 3 \longrightarrow 4,5 \longrightarrow 6,7 \tag{8}$$

で、定理があるのは一様な評価の水準だけです（四次元では仮定つき）。既知

図 2　仕事を選ぶと、各水準の状態（定理・仮定つき・概略・見込み・未）が変わる



Bałaban 四次元：一様な評価の水準が仮定つきの定理、部分列の極限の水準は「従うはず」

既知 表 4　制御の水準（「見込み」は文献が「従うはず」「示せるだろう」と書くもの。問題文が求めるのは理論の存在と性質で、一様な評価の水準は方法の段）。右の列は 2026-11-10 に公開された構成で、「定理」は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」の意味です（6-01・6-04）。

水準	Bałaban 四次元	MRS	問題文	公開された構成（2026-11-10）
0 摂動論	前提	前提	前提	前提
1 一様な評価	定理（仮定つき）	概略	（方法として通常は要る）	定理（多段の評価。第 11 部）
2 部分列の極限	見込み	概略	単独では不可（脚注 2）	定理
3 一意性	未	概略	要る	族の選んだ間隔の列の全体で収束。ほかの間隔の列への普遍性は未（6-04）

水準	Bałaban 四次元	MRS	問題文	公開された構成（2026-11-10）
4 対称性・反射正値性	未（各格子間隔の Wilson 測度では成り立つ）	Slavnov は概略、OS 正値性は見込み	要る	定理（相の各成分が OS の公理の変種を満たす。第 12 部）
5 非自明性	未	未	要る	定理
6 無限体積	未	未（赤外の切断を外さない）	要る（$\mathbb{R}^4$）	体積の部分列に沿って定理。収束と一意性は未（6-04）
7 一様なギャップ	未	未	要る（$\Delta > 0$）	未（在るのは多項式の評価だけ。6-04）

「制御の水準まで来ている」とは、一様な評価の水準が通り（四次元では仮定つき）、部分列の極限・一意性・対称性と反射正値性の水準の一部が見込みか概略として書かれている状態のことです。問題文は T^4 について 'while the construction is not complete, there is ample indication that known methods could be extended to construct Yang–Mills theory on T4' と書き、コンパクトな空間の上の詳細な構成だけでも 'a major breakthrough' だとします（JW §6）。2004 年の報告も 'The state of the art remains the works of Balaban and of Magnen, Rivasseau and Sénéor' と書きます（Douglas 2004）。既知 2026-11-10 に公開された構成は、表 4 の右の列のとおり、一様な評価から非自明性までの水準と、体積の部分列に沿った無限体積に届いている、と委員会は評価しています。一様なギャップの水準には届いていません（6-01）。

例：物差しとして、弱結合の三次元の ϕ^4 では一様な評価の水準から一様なギャップの水準までに当たるものがすべて定理です（JW §6.2、7-03 §06）。非自明性の水準に当たるのは、極限の測度が非ガウスであること（JW §6.2 の 'a remarkable non-Gaussian measure'）です。非自明性の水準が別に示す必要のある性質であることは 7-08、無限体積の水準と一様なギャップの水準で出題者が新しい考えを求めていることは 7-10 で扱います。

09

寄り道：数百頁の証明をどう確かめるか

飛ばしてよい節です。

二つの仕事には長さという共通の困難があります。表 1 の論文の頁を足すと

$$\underbrace{221}_{\text{土台 7 篇}} + \underbrace{21}_{\text{三次元}} + \underbrace{184}_{\text{四次元 5 篇}} = 426 \text{ 頁} \tag{9}$$

です（頁の範囲の足し算）。計算 MRS は Bałaban の仕事を 'not easily accessible ... the results are scattered over many publications; hence to check the consistency of all the arguments is very difficult' と評し、自分たちの詳細な証明を書くことは 'an extremely valuable task' だと結びます。既知

一つの応答は易しい模型での書き直しで、Dimock は 'others have been slow to adopt the approach' として三次元の ϕ^4 で方法を解説しました（7-05）。もう一つは長い証明を機械で検査する道具で、考え方は Lean の案内 にあります。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	条件つきの紫外安定性の定理（Theorem 1）の文面と仮定・未公刊の基本の不等式（Theorem 2）、MRS 1993 の設定と留保、出題者と総説の評価（一次資料で確認）既知
言えている	式 (1)(2)(4)(6) の算術、表 2・図 1、§01・§04〜§07 の例と数値、式 (9)計算
言えていない	Bałaban の四次元の証明の中身と設定の細部。γ の値。表 2 の a_0 が論文の単位格子の尺度に一致すること（この章の読み）
言えていない	基本の不等式（Theorem 2）の証明の公刊（探した範囲＝著者の 1989 年以後の論文の書誌では見当たらない）。2004 年以後の文献での四次元の紫外側の進展の有無（2026 年の総説は書誌と要旨のみで、評価には使っていない。2026-11-10 に公開された構成は第二巻で読む）
言えていない	四次元での極限の一意性・公理・非自明性・無限体積・質量ギャップ。どれについても、この章もこの本も自分では示していない。2026-11-10 に公開された構成では、公理・非自明性・体積の部分列に沿った無限体積までが Lean で証明されている、と委員会が評価した。体積の極限の一意性と質量ギャップは示されていない（6-04）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
Theorem 1・Theorem 2	要旨と序文 p.355–356	T. Bałaban, Large field renormalization. II, Comm. Math. Phys. 122 (1989) 355–392
紫外安定性の定義（三次元）	本文 p.255–257	T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 102 (1985) 255–275
系列の他の論文（表 1）	書誌のみ	CMP 89 (1983)；95, 96 (1984)；98, 99, 102 (1985)；109 (1987)；116, 119 (1988)；122 (1989) 175–202。題は Chatterjee の文献表と Crossref で照合

もの	種別	出典・道具
基本の不等式（Theorem 2）の公刊の有無	書誌のみ	Crossref の著者検索（T. Bałaban、1989 年以後）。ゲージ場を含む論文は T. Bałaban, M. O'Carroll, R. Schor, J. Math. Phys. 32 (1991) 3199–3208（外部ゲージ場の中のフェルミオンのブロック繰り込み）だけで、基本の不等式の証明に当たるものは見当たらない
MRS の内容と Bałaban への評	p.325–328	J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, Construction of YM_4 with an infrared cutoff, Comm. Math. Phys. 155 (1993) 325–383
出題者の評価・脚注 2・ϕ^4_3 の非ガウス性	本文	A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*, Clay Mathematics Institute (2000) §6, §6.2, §6.5
'state of the art'	本文	M. R. Douglas, Report on the Status of the Yang–Mills Millenium Prize Problem, Clay Mathematics Institute (2004)
紫外安定性の用法・文献表	§6	S. Chatterjee, Yang–Mills for probabilists, arXiv:1803.01950
'a form of ultraviolet stability'	§1.1	I. Chevyrev, Stochastic quantisation of Yang–Mills, J. Math. Phys. 63 (2022) 091101, arXiv:2202.13359
解説の動機・文献表	§1.1	J. Dimock, The renormalization group according to Balaban, I. Small fields, arXiv:1108.1335
b_0, b_1	§9.1.1 式 (9.3)	S. Navas et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. D 110 (2024) 030001
2026 年の総説	書誌と要旨のみ（評価には使っていない）	M. R. Douglas, The Yang–Mills Millennium problem, Nature Reviews Physics 8 (2026) 86–97
表 2・図 1・例・式 (9)	計算	この端末の Python：`running_gamma.py`（式 (4) を数値積分と照合）、`ratios_quartic.py`（式 (6) の比と $SU(2)$ の $\lvert B\rvert \le \pi/g$）

次に読む章：7-08 四次元の φ^4 の自明性（非自明性の水準が、なぜ別に示す必要のある性質なのか）。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 7 部 構成的場の理論 自明性

四次元の φ⁴ の自明性 — 格子で作った極限はガウスに潰れる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 「自明」がガウスを指すこと。四次元が境目になる数え方と、それを二本の酔歩の出会いで見る見方。Aizenman–Duminil-Copin の定理（2021）の仮定と結論。ヤン–ミルズで「非自明」が別の要件になる理由。

前提となる章 — 7-03 スカラー場の構成（2-08・7-07 も参照）。§08 の一ループの式だけは 4-04 発散と繰り込み（と 1-11 の Parseval の等式）を使います。

先に言うこと — 証明は筋だけを追います。表の数値は自由場と単純酔歩の計算で、イジング模型の計算ではありません。§08・§09 は一ループの絵で定理ではありません。ヤン–ミルズが自明か非自明かについて、この章は何も示しません。

この章の順序

1. 自明とは何か：ガウスと Wick の法則
2. 格子から連続へ：臨界点に寄せる
3. 次元を数える：樹形図の上界と L^{4-d}
4. ランダムカレント：Wick からのずれは塊の出会い
5. 二本の酔歩の出会い：稀だが、まとめて出会う
6. 泡の図：四次元の対数
7. 定理を読む：範囲と年表
8. 物理の絵：一ループの走る結合
9. 表と図で読む：潰れる結合と Landau 極（寄り道：赤外で自由になる側）
10. 非自明性の要件：ヤン–ミルズでは何が要るか

01

自明とは何か：ガウスと Wick の法則

ユークリッド化した場の理論は確率測度で、中身は相関関数 $S_n(x_1,\dots,x_n) = \langle \Phi(x_1)\cdots\Phi(x_n)\rangle$ に表れます（7-01）。ガウス測度では、偶数点の相関が二点関数を対に分けるだけで決まります（1-08）。

$$S_{2n}(x_1,\dots,x_{2n}) = \sum_{\pi}\prod_{j=1}^{n} S_2\big(x_{\pi(2j-1)},x_{\pi(2j)}\big) \tag{1}$$

和は $2n$ 点を二つずつ組にする分け方 π の全体です。この Wick の法則は相互作用が無いことを意味し、そのためガウスな場は**自明（trivial）**と呼ばれてきました（ADC §1.1）。ずれを測る最初の量が四点の Ursell 関数です。既知

$$U_4(x,y,z,t) = S_4(x,y,z,t) - \big[S_2(x,y)S_2(z,t) + S_2(x,z)S_2(y,t) + S_2(x,t)S_2(y,z)\big] \tag{2}$$

Lee–Yang の性質（分配関数の磁場についての零点が虚軸上に並ぶ性質。2-08 の Lee–Yang の定理）を持つ模型では、極限で U_4 が消えればガウス性が従います（Newman 1975、ADC §6.3）。既知 **例：**±1 を等確率で取るスピン一つでは $\langle\sigma^4\rangle - 3\langle\sigma^2\rangle^2 = -2$、独立な N 個の和では比 U_4/Var^2 が $-2/N$ で潰れます（1-08）。臨界点の近くのスピンは強く相関するのでこの理由は使えず、三次元の ϕ^4 は非ガウスな測度を与えます（JW §6.2、7-03）。

02

格子から連続へ：臨界点に寄せる

対象は、格子 $\mathbb{Z}^d$ の各点に実数 ϕ_x を置き、隣どうしを強磁性の結合 $J \ge 0$ でつないだ模型です（ADC 式 (1.12)。7-03 の式 (1) の格子版）。

$$\langle F\rangle = \frac{1}{Z}\int F(\phi)\,\exp\Big(\sum_{\{x,y\}} J_{xy}\phi_x\phi_y\Big)\prod_x e^{-\lambda\phi_x^4 + b\phi_x^2}\,\mathrm{d}\phi_x \tag{3}$$

$b = 2\lambda \to \infty$ で一点の分布が ±1 に集まり、イジング模型になります（ADC 式 (1.20)）。見る尺度を格子の単位で L（連続の単位の格子間隔は $a = 1/L$）とし、均した和を、箱 Λ_L の和の標準偏差 $\sqrt{\Sigma_L}$ で割った量を追います（$\Lambda_L = [-L,L]^d$、ADC 式 (1.14)(1.15)）。

$$T_{f,L}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\Sigma_L}}\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} f(x/L)\,\phi_x, \qquad \Sigma_L = \Big\langle\Big(\sum_{x\in\Lambda_L}\phi_x\Big)^2\Big\rangle \tag{4}$$

体積を先に無限大にしてから $L\to\infty$ とし、途中で (J,λ,b) を動かしてよいとします。尺度 L で滑らかな相関を得るには臨界点に寄せて相関長を L 程度以上にします。相関長が格子の単位

で有限のままなら極限は白色雑音です（ADC 脚注 1、2-08）。イジング模型（$b = 2\lambda \to \infty$）では J を βJ と書き、β を逆温度、β_c を相関長が発散する臨界値と呼びます（2-08）。遠方で $S_2 \to 0$ となるのは $\beta \le \beta_c$ の側で（ADC 式 (1.10)）、この章はこの側に限ります。既知

周辺的自明性の定理（Aizenman–Duminil-Copin 2021 の THEOREM 1.2）

$d = 4$ では、上の作り方で到達でき、遠方で $S_2 \to 0$ となる確率場は、どれも一般化されたガウス過程である。既知

一般化されたガウス過程とは、テスト関数 f ごとの $T_f(\Phi)$（式 (4) の $T_{f,L}$ の $L \to \infty$ での極限）の有限個の組が、どれも多変数ガウス分布に従う超関数値の確率場のことです（1-09 のガウス測度）。

03

次元を数える：樹形図の上界と L^{4-d}

五次元以上の自明性は二つの不等式で示されました（Aizenman 1981・1982、Fröhlich 1982）。四点のずれを「四本の足が一点 u で出会う図」で抑える**樹形図の上界**と、臨界点でも二点関数が自由場の形を超えない赤外の上界です（イジング模型、ADC 式 (1.22)(1.23)）。

$$|U_4(x,y,z,t)| \le 2 \sum_{u \in \mathbb{Z}^d} S_2(u,x) S_2(u,y) S_2(u,z) S_2(u,t), \qquad S_2(x,y) \le \frac{C}{|x-y|^{d-2}} \ (\beta = \beta_c) \tag{5}$$

四点が互いに距離 L 程度なら、$S_4 \sim S_2^2 \sim L^{-2(d-2)}$、右辺は u の和が L^d、因子四つが $L^{-4(d-2)}$ です。

$$\frac{|U_4|}{S_4} \lesssim \frac{L^d \, L^{-4(d-2)}}{L^{-2(d-2)}} = L^{4-d} \tag{6}$$

$d > 4$ なら 0 に向かい、細部を除けばこれが五次元以上の定理の骨です（ADC §1.3）。$d = 4$ では L^0 で、一次資料は 'clearly inconclusive for d = 4' と書きます。問題文も、五次元以上で四次の自己相互作用を持つスカラー場は存在せず、その証明は一成分の場に当てはまると書きます（JW §6.2）。既知 同じ指数は 7-01 の式 (7) の結合の次元 $[\lambda] = 4 - d$ にも現れ、$d > 4$ では結合が遠くで効かなくなる向きです。物理

04

ランダムカレント：Wick からのずれは塊の出会い

樹形図の上界の出どころは**ランダムカレント表示**です。重み $e^{\beta J \sigma_x \sigma_y}$ を辺ごとに Taylor 展開し、次数 $n(x,y)$ を辺の整数（カレント）と見てスピンの和を取ると、次数の和が奇数の点（源）の集合 ∂n が相関を取る点の集合 A に一致する配置だけが残ります（ADC 式 (3.5)）。

$$\left\langle \prod_{x \in A} \sigma_x \right\rangle = \frac{\sum_{\partial n = A} w(n)}{\sum_{\partial n = \varnothing} w(n)}, \qquad w(n) = \prod_{\{x,y\}} \frac{(\beta J_{xy})^{n(x,y)}}{n(x,y)!} \tag{7}$$

源の無い配置はループの集まりで、二点相関は「x と y を結ぶ道を一本入れる効果」です。源を付け替える恒等式（切り替え補題）から次が出ます（ADC 式 (3.11)）。

$$U_4(x,y,z,t) = -2\, S_2(x,y)\, S_2(z,t)\, \mathbf{P}^{xy,zt}\big[\, \mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(z) \neq \varnothing \,\big] \tag{8}$$

$\mathbf{P}^{xy,zt}$ は、源がそれぞれ $\{x,y\}$ と $\{z,t\}$ の独立な二つのカレント n_1, n_2 の法則です（式 (7) の重みを確率に直したもの）。$\mathcal{C}(x)$ は、和 $n_1 + n_2$ が正の辺をたどって x につながる点の集合で、$\mathcal{C}(z)$ も同じです。$\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(z) \neq \varnothing$ は、x と z が $n_1 + n_2$ の中でつながることを意味します。Wick の法則からのずれは、この出会いの確率そのものです。既知

二つの塊は独立ではありません。そこで源の無いカレントを足して、独立な二つの塊に置き換えます。そうしても交わる確率は増えるだけです（ADC 式 (3.13)(3.14)）。その確率を交点の数の期待値で抑え、切り替え補題をもう一度使うと、式 (5) の一つ目の不等式（樹形図の上界）になります（ADC §3.2）。既知

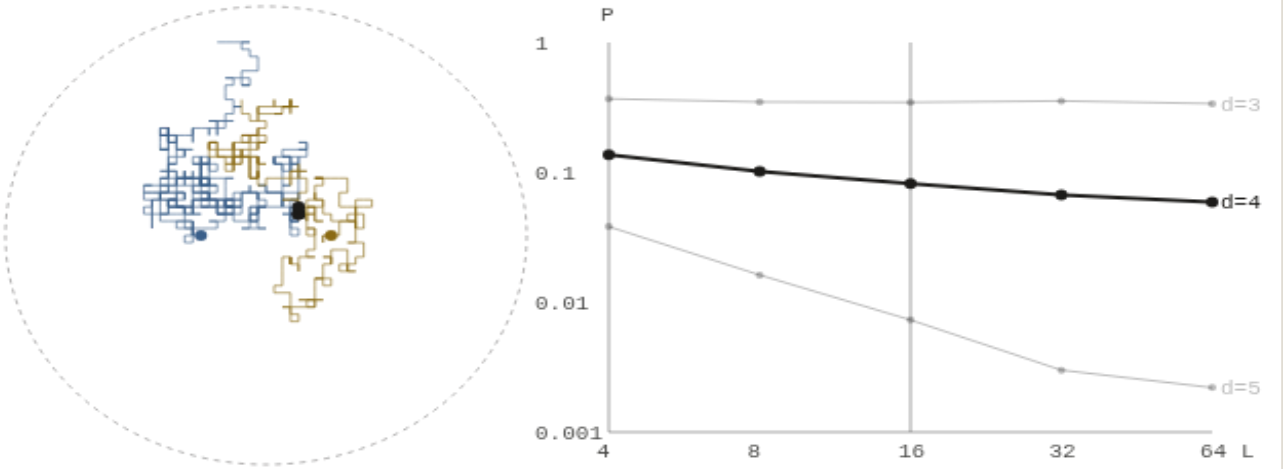
05

二本の酔歩の出会い：稀だが、まとめて出会う

二つの塊を、x と y、z と t を結ぶ酔歩に見立てると直感がつかめます（一次資料もこの類推を案内に使います）。四次元で、距離 L 離れた二点から出て、半径 L 程度の範囲を出るまで（歩数で L^2 程度）歩かせた二本の軌跡を考えます。交わる確率は $1/\log L$ のように 0 に向かうのに、交点の数の期待値は L によらない正の定数より小さくなりません。交わるのは稀でも、交わると交点が $\log L$ で増えるからです（ADC §3.2）。既知

目安は、酔歩の軌跡が二次元的（半径 L で約 L^2 点）で、二次元どうしが出会う境目が $2+2=4$ だということです。正確には、交点の数の期待値が式 (6) の L^{4-d} で振る舞うこと（表 2 の E）がこの目安の中身です。

図 1　次元と L を選ぶと、二本の酔歩（最初の二座標への射影）と d 次元で重なった点（黒丸）が変わる。右（狭い画面では下）は交わる確率 P（表 2 の計算。縦軸は対数）。交点の数は一つの見本の値で、平均ではない



d = 4　L = 16　この見本の交点 5 個（見本の値）　平均：P = 0.082　E = 0.3

計算 P の点と表 2 はこの端末で計算した。酔歩の絵は決まった種の乱数による見本（最初の図は交わる例を選んだ）。射影で重なって見える所の大半は d 次元では重なっていない。

計算 表 2　二本の単純酔歩を $\pm(L/2)e_1$ から出し、半径 $2L$ の球を出るまで歩かせたときの共通の格子点の数の平均 E、交わる確率 P、交わったときの平均 E/P（各 6000 組。P の標準誤差は 0.003〜0.0044。$L=8,32$ は図 1）。

L	E（d=3）	E（d=4）	E（d=5）	P（d=4）	E/P（d=4）
4	1.75	0.32	0.064	0.137	2.35
16	5.86	0.30	0.013	0.082	3.67
64	23.03	0.27	0.004	0.059	4.61

E は三次元で L に比例し、五次元で $1/L$ のように減り、四次元ではほぼ一定で、式 (6) の L^{4-d} どおりです。四次元では P がゆっくり下がり E/P が増える、「稀だが、出会うときはまとめて出会う」形です。有限の L なので $1/\log L$ の速さの確認にはなりません。計算

06

泡の図：四次元の対数

四次元で樹形図の上界を改良する鍵は、距離 L で切った泡の図 B_L です（ADC 式 (1.25)）。二点関数を二本つないで一周する図です。自由場の二点関数 G（格子のラプラシアンの逆）なら、同じ点から出た二本の酔歩が同じ点を踏む回数の期待値に比例し、四次元の遠方で $G(x)\approx 1/(4\pi^2|x|^2)$ なので対数で増えます。既知

$$B_L=\sum_{x\in\Lambda_L} S_2(0,x)^2,\qquad \sum_{x\in\Lambda_L}G(x)^2\approx\int_{1<|x|<L}\frac{\mathrm{d}^4x}{16\pi^4|x|^4}=\frac{\ln L}{8\pi^2}+\text{定数}\tag{9}$$

計算 表 1　自由場の格子の泡 $\sum_{x\in[-L,L]^d}G(x)^2$（無限格子・質量 0、$G(x)=\int_0^\infty\prod_i e^{-2t}I_{x_i}(2t)\,\mathrm{d}t$ を数値積分。I_n は変形ベッセル関数で、$e^{-2t}I_n(2t)$ は左右へそれぞれ率 1 で跳ぶ一次元の連続時間酔歩が時刻 t に n にいる確率）。増分は L を倍にしたときの差で、式 (9) からは $\ln 2/(8\pi^2)=0.00878$。

L	d=3	d=4	d=4 の増分	d=5
4	0.4504	0.05123	0.00738	0.01866
8	0.8388	0.05926	0.00803	0.01898
16	1.6161	0.06766	0.00839	0.01916
32	3.1711	0.07624	0.00858	0.01925

四次元の増分は 0.00878 に近づき、三次元は増分が倍々（$\propto L$）、五次元は半分ずつで収束します。計算 改良された樹形図の上界（Aizenman–Duminil-Copin の定理 1.3）は、四次元の最近接強磁性のイジング模型で $\beta \le \beta_c$、$L \le \xi(\beta)$、互いに L より離れた四点について、ある $c, C > 0$ で次を与えます（ADC 式 (1.24)）。

$$|U_4(x,y,z,t)| \le \frac{C}{B_L(\beta)^c} \sum_{u \in \mathbb{Z}^4} S_2(u,x) S_2(u,y) S_2(u,z) S_2(u,t) \tag{10}$$

二点関数が赤外の上界をほぼ満たすなら（四次元で予想されている場合）B_L は $\log L$ 程度で $|U_4|/S_4 = O((\log L)^{-c})$、ずっと小さいなら式 (5) だけで足ります。四点から先は、式 (4) の量の特性関数が $(\log L)^{-c}$ の誤差でガウスに近いことで閉じます（特性関数がガウスに近いことの命題。ADC の命題 1.4）。証明の中心は、交わったときの交点の数が $(\log L)^c$ 以上に増えることの多重尺度の解析です（ADC §4・§6）。既知

07

定理を読む：範囲と年表

周辺的自明性の定理（ADC の定理 1.2）は相殺項の選び方によりません。結果は相殺項の計算でなく、どんな極限にも現れうる Schwinger 関数（§01 の S_n）どうしの次元に依存した関係に基づきます（ADC §1.1）。「硬い」ϕ^4 もイジング模型も含みます（スピンの塊の平均で ϕ^4 を作る Griffiths–Simon の構成）。一方、対象は最近接・強磁性・一成分・格子の切断の模型の極限に限られ、あらゆる構成法の定理ではありません。対数の補正の正確な大きさと極限の共分散も与えていません（ADC §1.2）。既知

既知 表 3　自明性の主な結果（区分は ADC §1.1–1.2。§1.1 は下の小さい λ の結果の一部も $d = 4$ の部分的な結果に数える。掲載先は末尾）。

年	著者	内容
1981–82	Aizenman；Fröhlich	$d > 4$ でガウス
1983	Aizenman–Graham；Aragão de Carvalho–Caracciolo–Fröhlich	$d = 4$ の部分的な結果
1985–87	Gawędzki–Kupiainen；Feldman–Magnen–Rivasseau–Sénéor；Hara–Tasaki	小さい λ（繰り込み群）

年	著者	内容
2014	Bauerschmidt–Brydges–Slade	小さい λ、n 成分
2021	Aizenman–Duminil-Copin	$d=4$、すべての λ とイジング

その後、一頁の訂正（2024）と有効次元が四以上への拡張（Panis 2026）が出ています（書誌のみ）。

08

物理の絵：一ループの走る結合

物理の側の理由は、四次元の四次の結合が漸近自由でないことです（JW §6.2）。以下は一ループの絵で、定理ではありません。物理 4-04 を読んでいなければ、式 (11) の右端だけを受け入れて読み進めてかまいません。相互作用を $\frac{u}{4!}\phi^4$ と書きます（式 (3) なら $u=24\lambda$）。一ループでは四点の結合が泡を一つ挟んだぶんずれ、挟み方は三通り（式 (2) の三つの対）、各々に対称因子 $\frac12$、泡は式 (9) と同じ $\frac{1}{8\pi^2}\ln$ です（位置の和 $\sum G^2$ と運動量の積分は Parseval の等式で等しい。1-11）。Λ を切断、μ を見る尺度として

$$u(\mu)\approx u(\Lambda)-\frac{3}{2}u(\Lambda)^2\frac{\ln(\Lambda/\mu)}{8\pi^2},\qquad \frac{1}{u(\mu)}=\frac{1}{u(\Lambda)}+\frac{3\ln(\Lambda/\mu)}{16\pi^2}\ \Longrightarrow\ u(\mu)<\frac{16\pi^2}{3\ln(\Lambda/\mu)}\tag{11}$$

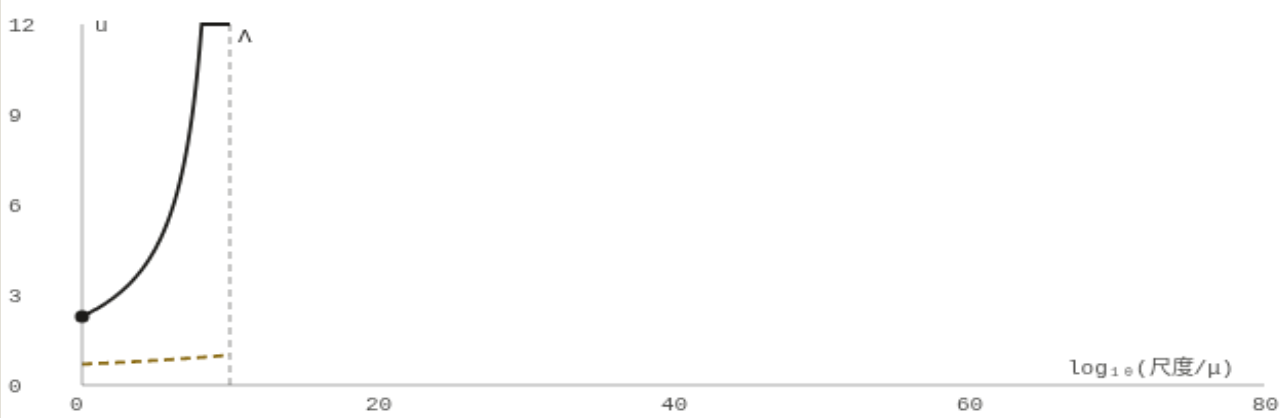
です（中央は流れの式 $\mu\,du/d\mu=3u^2/16\pi^2$ の積分）。裸の結合 $u(\Lambda)$ をどれほど大きくしても、切断を上げると $u(\mu)$ は 0 に向かいます。逆に $u(\mu)=1$ を保って上へ延ばすと、$\ln(\Lambda/\mu)=16\pi^2/3\approx 52.6$（$\Lambda/\mu\approx 10^{22.9}$）で分母が 0 になります（Landau 極）。ヤン–ミルズでは符号が逆で（7-07 の式 (2)）、$g^2(\mu)$ を固定して Λ を上げても、裸の結合 $g^2(\Lambda)$ が 0 に向かうだけです。物理 計算

09

表と図で読む：潰れる結合と Landau 極

式 (11) を数で見ます。表 4 の左の二列が ϕ^4、右端がヤン–ミルズで、図 2 は同じ量を尺度の関数として描きます。

図 2　切断 Λ（縦線）を上げると、ϕ^4 では尺度 μ（左端）の結合が潰れ、ヤン–ミルズでは裸の結合（縦線上）が 0 に向かう（一ループ）。ϕ^4 の実線は裸の結合 u(Λ) = ∞、破線は u(Λ) = 1



φ⁴　log₁₀(Λ/μ) = 10　u(μ) < 2.286（裸の結合が ∞ でも）　u(Λ) = 1 なら 0.696

計算 この図の数値はこの端末で計算した（式 (11) と 7-07 の式 (2)。表 4 と一致）。

計算 物理 表 4　式 (11) の $u(\mu)$ と、$SU(3)$ で $g^2(\mu)=1$ を保つ裸の結合 $g^2(\Lambda)$（$b_0 = 11\cdot 3/48\pi^2$）。

log₁₀(Λ/μ)	u(Λ) = ∞	u(Λ) = 1	g²(Λ)
2	11.430	0.920	0.609
10	2.286	0.696	0.238
40	0.572	0.364	0.072
80	0.286	0.222	0.038

潰れる速さは $1/\ln\Lambda$ で、式 (10) の $(\log L)^{-c}$ と同じ型の遅さです。一ループの式は結合が大きい所では信頼できず、自明性の証明にはなりません。問題文は 2000 年の時点で 'all insights from random walks, perturbation theory, and renormalization analysis point toward triviality' と書いていました（JW §6.2）。定理としての答えが §02〜§07 です。既知

寄り道：赤外で自由になる側

飛ばしてよい小節です。

一次資料は、構成的場の理論から見て 'disappointment' とされうるものが、統計力学から見れば 'a positive and constructive result' だと書きます（ADC §1.2）。四次元の臨界イジング模型の大きな尺度はガウスで書ける、という答えだからです。既知

式 (11) を長い距離の側に読むと、u は対数的に 0 に向かいます。**例：**表 4 の $u(\Lambda)=1$ の列は、$u=1$ の尺度から 10 桁長い距離で 0.696、80 桁で 0.222 と読めます。結合が小さく保たれるので、繰り込み群（7-05）を制御しやすい側です。物理 表 3 の Gawędzki–Kupiainen の題（'Massless Lattice Φ^4_4 Theory: Rigorous Control of a Renormalizable Asymptotically Free Model'）の 'asymptotically free' は、質量ゼロ（題の 'Massless'）の模型で結合が長距離の側で 0 に向かう（式 (11) を赤外に読んだもの）という意味と読めます。物理 ヤン–ミルズは正反対で、結合は長い距離で強くなり、ギャップはその強い側から来ると考えられています（7-07 §01）。物理

10

非自明性の要件：ヤン–ミルズでは何が要るか

問題文は 'a non-trivial quantum Yang–Mills theory exists on R^{4}' を求め、相関関数が短距離で漸近自由と摂動的繰り込みの予言に一致することを要求します（JW §4、0-03）。既知 摂動論の予言では、短距離で $g^2(\ell) \approx 1/(2b_0 \ln(\ell_0/\ell))$ のように結合が対数的に 0 に向かいますが、恒等的に 0 ではありません（4-06、例は表 4 の右端）。物理 要件の意味は三つに整理できます（この章の読み）。

1. **非自明性は別に示す性質である**。紫外の評価や極限の存在からは従いません（7-07 の非自明性の水準）。四次元の ϕ^4 は、最近接・強磁性・一成分の格子の族の中では、パラメタをどう動かしても（遠方で $S_2 \to 0$ なら）ガウスになる実例です。
2. **ϕ^4 の定理はヤン–ミルズの自明性を示さない**。問題文は漸近自由の有無で両者を対比し、ヤン–ミルズを 'natural candidate' とします（JW §6.2）。2026-11-10 に公開された四次元のヤン–ミルズの構成は、自明でないことも示している、と委員会は評価しています（6-01。ヤン–ミルズである証拠は第 13 部）。$SU(2)$ のヤン–ミルズ–ヒッグス模型のガウスな極限は、ゲージ結合を格子間隔に連動させて 0 にする取り方によるもので、非ガウスな極限は未解決とされています（Chatterjee 2026）。
3. **証明の道具はそのままでは持ち出せない**。ランダムカレント表示は、イジング型の模型の構造です。

2026 年より前の状況は、問題文の 'at present we do not know any non-trivial relativistic field theory that satisfies the Wightman (or any other reasonable) axioms in four dimensions'（JW §6）と、総説の 'there is yet no construction of a continuum limit of a lattice gauge theory in any dimension higher than two where Wilson loop variables have been shown to have nontrivial behavior'（Chatterjee 2018 §6）のとおりでした。既知 2026-11-10 に公開された構成について、委員会は自明でないことも証明されていると評価しています（上の二つ目）。止まる場所の全体は 7-10 で見ます。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	「自明」はガウスのことで、四点の Ursell 関数が目印であること。格子で紫外を切った一成分の ϕ^4 とイジング模型の、臨界点に寄せる極限が $d > 4$ で 1981〜82 年に、$d = 4$ で 2021 年にガウスと示されたこと（$d > 4$ は ADC §1.1 の記述と JW §6.2 による。$d = 4$ は ADC の本文で確認）既知

	内容
言えている	式 (6) の数え方が自由場の泡（表 1）と酔歩の見本（表 2）に現れること。表 4 と図 2 の算術 計算 。一ループの絵での ϕ^4 とヤン–ミルズの対比 物理
言えていない	格子・最近接・一成分の外での ϕ^4_4 の自明性。対数の補正の正確な大きさ、極限の共分散、訂正の中身。表 1・2 のイジング模型での値。四次元のヤン–ミルズの非自明性と自明性（この章もこの本も、どちらも示していない）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
式 (1)–(10)、定理 1.2・1.3、命題 1.4、§03・§07・§09 の引用	本文（arXiv 第 4 版）	M. Aizenman, H. Duminil-Copin, Marginal triviality of the scaling limits of critical 4D Ising and ϕ^4_4 models, Ann. of Math. 194 (2021) 163–235, arXiv:1912.07973
表 3 の他の文献	書誌のみ	Aizenman, PRL 47 (1981) 1–4, CMP 86 (1982) 1–48；Fröhlich, NPB 200 (1982) 281–296；Aizenman–Graham, NPB 225 (1983) 261–288；Aragão de Carvalho–Caracciolo–Fröhlich, NPB 215 (1983) 209–248；Gawędzki–Kupiainen, CMP 99 (1985) 197–252；FMRS, CMP 109 (1987) 437–480；Hara–Tasaki, JSP 47 (1987) 99–121；BBS, JSP 157 (2014) 692–742
Newman・赤外の上界・訂正・拡張	書誌のみ	Newman, CMP 41 (1975) 1–9；Fröhlich–Simon–Spencer, CMP 50 (1976) 79–95；Glimm–Jaffe, Positivity of the ϕ^4_3 hamiltonian, Fortschr. Phys. 21 (1973) 327–376（ADC は赤外の上界 (1.23) の出典として [19, 21] でこの二つを引く）；Ann. of Math. 199 (2024) 479；R. Panis, Ann. Probab. 54 (2026) no. 2
問題文の要求・ϕ^4 との対比・現状	本文 §4・§6・§6.2	A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*, Clay Mathematics Institute (2000)
ゲージ理論の非自明な連続極限・YMH のガウス極限	§6・要旨	S. Chatterjee, Yang–Mills for probabilists, arXiv:1803.01950；A scaling limit of SU(2) lattice Yang–Mills–Higgs theory, Prob. Math. Phys. 7 (2026) 339–381, arXiv:2401.10507
表 1・2・4、図 1・2、Landau 極	計算	この端末の Python：`bubble.py`・`rw_intersect.py`・`running.py`

次に読む章：7-09 確率量子化と正則性構造（劣臨界と臨界。四次元が境目になることの、方程式の側の顔）。

確率量子化と正則性構造 — 測度を「動かして」作る道と、四次元の手前で止まる理由

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 測度 e^{-S} を、それを不変にする確率的な時間発展から作る考え方。場で積が定義できなくなる理由と、二次元・三次元の処方。劣臨界 $d < 4$ の出どころと、ヤン–ミルズで得られていること。

前提となる章 — 7-01 構成的場の理論とは、1-09 無限次元の確率。7-03（Wick 積）・1-03（リー環の括弧）・1-07（接続と曲率）も参照します。§07・§08 で使うゲージ場の記号と確率過程の用語は、その場で一行ずつ定義します。

先に言うこと — 既知の結果の紹介で、証明は筋だけを追います。数値は一次元の模型・次数の勘定・記号の数え上げで、ヤン–ミルズの測度について何かを示すものではありません。三次元のヤン–ミルズは力学（局所解と Markov 過程）までで、測度は有限体積でも未構成です。四次元は臨界で、正則性構造の一般論の外です。

この章の順序

1. なぜ「動かして」測度を作るのか — 坂を下る流れと雑音の釣り合いで e^{-S}/Z が動かなくなる。一次元の玉の動く図
2. 確率熱方程式と自由場 — 線形なら定常分布はガウス自由場。雑音の粗さの勘定
3. 積が定義できない — 分布の積は次数の和が正のときだけ。次元ごとの「余裕」の表
4. 二次元：解を二つに分ける — 粗い部分を Wick 積で先に作り、残りを不動点定理で解く
5. 三次元：正則性構造 — Taylor 展開の多項式を、雑音から作った記号に取り替える
6. 劣臨界と臨界 — 拡大すると非線形項が消えるのは $d < 4$。記号の数が次元で増える動く図
7. ゲージ場：DeTurck の項と共変性 — 軌道の方向に均す項を足し、繰り込みの定数を共変性と両立させる

8. ヤン–ミルズの到達点 — 状態空間・Markov 過程・二次元の不変測度と、残る問題の表
9. 寄り道：無限の彼方から降りてくる — 大きな初期値を忘れる評価が、不変測度を作る鍵になる
10. 四次元へ持ち出せるもの — 見方と状態空間は持ち出せ、局所劣臨界という前提は持ち出せない

01

なぜ「動かして」測度を作るのか

有限次元の密度 $e^{-S(x)}/Z$（Z は正規化の定数）から点を引くには、点を坂 S に沿って下らせながら雑音で揺すり続けます。

$$dX_t = -\nabla S(X_t)\,dt + \sqrt{2}\,dW_t \tag{1}$$

W_t はブラウン運動（1-09）です。式 (1) は、小さな刻み Δt で

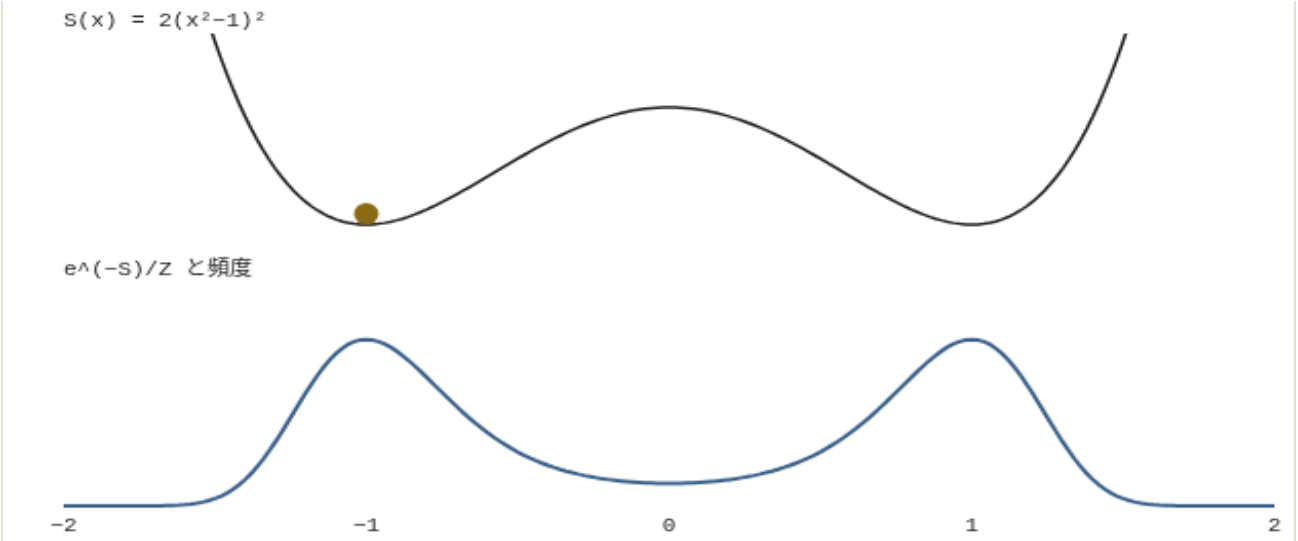
$$X_{t+\Delta t} = X_t - \nabla S(X_t)\,\Delta t + \sqrt{2\Delta t}\;N$$

（N は毎回新しく引く標準正規乱数）と進める規則の、$\Delta t \to 0$ の極限という意味です。図 1 の玉もこの規則で動きます（Euler–丸山法）。式 (1) を **Langevin 方程式**、それが定める時間発展を Langevin 力学と呼びます。

点をたくさん同時に走らせると、点の群れの密度 $\rho(t,x)$ は Fokker–Planck 方程式 $\partial_t \rho = \nabla\cdot(\nabla\rho + \rho\nabla S)$ に従います。右辺が流れの湧き出しの形なので、点の総数は保たれます（密度が従う保存則）。$\rho = e^{-S}/Z$ では括弧の中が 0 で動きません。これが**不変測度**です。比喩で言えば、坂を下る流れと雑音が広げる流れの釣り合いです。正確には、S が無限遠で十分速く増えるとき、X_t の法則はどこから始めても e^{-S}/Z に近づきます。既知

場の測度をこの形の方程式の不変測度として作るのが**確率量子化**で、ゲージ理論の文脈で Parisi–Wu（1981）が提案しました（Chevyrev 2022 §1.2）。7-02 の式は時間の尺度を取り直した同じもので、モンテカルロ法（5-07）も同じ考えです。例は $x = \pm 1$ に谷を持ち、山の高さが h の $S_h(x) = h(x^2-1)^2$ です。

図 1　つまみで山の高さ h（0.5・1・2・3・4 の五段）を変え、「動かす」で玉を式 (1) で揺らす。下の棒は玉のいた場所の頻度、線は e^{-S_h}/Z



h = 2　t = 0.0　標本 0　〈x²〉 = –（積分 0.852）　谷を渡った回数 0（T = 5.129）

計算 この図の Z・$\langle x^2\rangle$・T はこの端末で計算した値。玉はその場で Euler–丸山法で動かす。表 1 の模擬は $x=-1$ から出る 2000 本の鎖（刻み 0.002、時刻 20〜120）、T は -1 から $+1$ への平均到達時間 $\int_{-1}^{1} e^{S(y)} \int_{-\infty}^{y} e^{-S(z)}\,dz\,dy$。

h	〈x²〉積分	〈x²〉模擬	T
0.5	0.8935	0.8932	3.35
1	0.8327	0.8316	3.57
2	0.8521	0.8497	5.13
3	0.8893	0.8872	8.88
4	0.9177	0.9152	17.3

$\langle x^2\rangle$ は 0.3% 以内で合います。一方 T は h が大きいと指数関数的に伸び（$h=6,8$ で 80.9・437.5）、$h=4$ では時刻 10 でも鎖の平均 $\langle x\rangle$ が −0.33 と左の谷に偏っています。計算

大きい h での伸び方には Kramers の公式があり、谷の底と山の頂の曲がり具合 $S_h''(\pm1)=8h$・$S_h''(0)=-4h$ から

$$T \approx \frac{2\pi}{\sqrt{S_h''(-1)\,|S_h''(0)|}}\,e^{h} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}\,h}\,e^{h}$$

となります。既知 計算した T から $T\cdot h/e^{h}$ を作ると $h=4,6,8$ で 1.27・1.20・1.17 で、係数 $\pi/(2\sqrt{2})\approx 1.11$ にゆっくり近づいています。計算 不変測度が在ることと、そこへ速く近づくことは別の問題で、場の理論でも時間に一様な評価が難所です（§08）。

02

確率熱方程式と自由場

トーラス T^d 上の場で $S(\phi)=\int \left(\tfrac12|\nabla\phi|^2+\tfrac12 m^2\phi^2+\tfrac{\lambda}{4}\phi^4\right)dx$ とすると、式 (1) は

$$\partial_t \phi = \Delta\phi - m^2\phi - \lambda\phi^3 + \sqrt{2}\,\xi \tag{2}$$

になります（Δ はラプラシアン。質量ギャップの Δ とは別）。ξ は時空の白色雑音で、形式的に $\mathbb{E}[\xi(t,x)\xi(s,y)] = \delta(t-s)\,\delta(x-y)$ を満たすランダムな分布です（1-09）。$\lambda = 0$ の線形の**確率熱方程式**はフーリエ成分ごとに独立な $d\hat\phi_k = -(|k|^2 + m^2)\hat\phi_k\,dt + \sqrt{2}\,dW_k$ に分かれ、定常分布は共分散 $(-\Delta + m^2)^{-1}$ のガウス自由場（7-03 の出発点の測度）です。既知

時間を長さ二つ分と数える放物型の尺度で、白色雑音は次数 $-(d+2)/2$ のすぐ下の正則性を持ち、熱方程式で解くと 2 上がります（Hairer 2014 §8）。線形の解 Ψ は

$$\Psi \in \mathcal{C}^{\,1-d/2-\kappa} \qquad (\kappa > 0 \text{ は任意に小さい}) \tag{3}$$

にあります。$\mathcal{C}^\alpha$ は、$0 < \alpha < 1$ なら $|f(x) - f(y)| \lesssim |x-y|^\alpha$ の滑らかさ、$\alpha < 0$ なら幅 r の山形の関数で均した値が r^α 程度に収まる分布の空間です。$d = 1$ で $\frac{1}{2} - \kappa$（ブラウン運動の粗さ）、$d = 2$ で $-\kappa$（もう関数でない）、$d = 3$ で $-\frac{1}{2} - \kappa$ です。

03

積が定義できない

困るのは ϕ^3 です。分布の積には次の限界があります（Hairer 2014 §1、Chevyrev 2022 §1.3。α, β は整数でない）。既知

$$(f,g) \mapsto fg \text{ が } \mathcal{C}^\alpha \times \mathcal{C}^\beta \text{ に連続に延びる} \iff \alpha + \beta > 0 \tag{4}$$

$d = 2$ の $\Psi \in \mathcal{C}^{-\kappa}$ では Ψ^2 が定義できず、切断した Ψ_ε^2 の平均は $\log(1/\varepsilon)$ の程度で発散し、定数を引く（Wick 積。7-03）と極限が取れます。表 2 の**余裕**は「非線形項の次数 − 雑音の次数」で、正なら細かい尺度で非線形項は雑音より滑らかな補正にとどまります。

計算 表 2　次数の勘定（κ を除く。`trees.py` が有理数で出力）。$d = 4$ が臨界、$d = 5$ が超臨界。

d	雑音 ξ	Ψ	φ³	A∂A	余裕 φ⁴	余裕 YM
2	−2	0	0	−1	2	1
3	−5/2	−1/2	−3/2	−2	1	1/2
4	−3	−1	−3	−3	0	0
5	−7/2	−3/2	−9/2	−4	−1	−1/2

余裕は ϕ^4 で $4-d$、$A\partial A$ で $(4-d)/2$（A^3 は ϕ^3 と同じ）で、$d < 4$ で正です。Hairer はこれを**局所劣臨界**の条件とし、ϕ^4 では $d < 4$ と同値だと確かめています（Hairer 2014 Assumption 8.3・§8）。既知

04

二次元：解を二つに分ける

二次元では解を「雑音のいちばん粗い部分」と残りに分け、$\phi = \Psi + v$ と置きます。

$$\partial_t v = \Delta v - m^2 v - \lambda\big(v^3 + 3v^2\Psi + 3v{:}\Psi^2{:} + {:}\Psi^3{:}\big) \tag{5}$$

${:}\Psi^n{:}$ は確率の計算で先に作れる $\mathcal{C}^{-\kappa}$ の Wick 積です。右辺が $\mathcal{C}^{-\kappa}$ なので $v \in \mathcal{C}^{2-\kappa}$ で、$v \cdot {:}\Psi^2{:}$ は次数の和が正になって (4) に入り、普通の不動点定理で解けます（短い時間なら、方程式を積分の形に書いた右辺が縮小写像になり、不動点がちょうど一つ在る）。ϕ に戻すと、ϕ^3 を $\phi^3 - 3C_\varepsilon\phi$（$C_\varepsilon$ は $\log(1/\varepsilon)$ の程度）に替えた方程式の極限です。Da Prato–Debussche（2003）がこれで二次元の**強い解**（与えられた雑音の実現ごとに方程式を満たす解）を得ました。 既知

過程の構成はそれより前からあります。Jona-Lasinio–Mitter（1985）は、Dirichlet 境界の正方形の上で、作用素の冪で均した方程式の弱い解（雑音ごと取り替えてよく、法則として方程式を満たす解）として、時刻が無限大で ϕ^4_2 測度に収束する **Markov 過程**（未来の分布が現在の状態だけで決まる確率過程）を作っています（Summers 2016 §5）。Hairer 2014 §1 は二次元の先行研究に Albeverio–Röckner（1991）と Da Prato–Debussche（2003）を挙げています。 既知

$a = 1 - d/2$ とすると $v \in \mathcal{C}^{2+3a}$ なので、$v \cdot {:}\Psi^2{:}$ には $5a + 2 > 0$、つまり $d < 14/5$ が要ります。三次元では一段の分け方では足りません（Hairer 2014 §8）。 計算

05

三次元：正則性構造

滑らかな関数は各点の近くで Taylor の多項式で書けます。Hairer（2014）はこの多項式を、問題ごとに雑音から作った分布の組（要旨の言葉で「目の前の問題のために作ったモデル」）に取り替えました。

$$\phi(y) - \phi(x) \approx \sum_{\tau} \phi_\tau(x)\,(\Pi_x\tau)(y) \qquad (\text{誤差は } |y-x|^\gamma \text{ の程度}) \tag{6}$$

τ は $\Psi \cdot \mathcal{I}(\Psi^3)\Psi$（$\mathcal{I}$ は熱方程式で解く操作）・多項式 X などの**記号**、$\Pi_x\tau$ はそれを点 x 中心に置き直した分布です。定義できない積は記号の代数に移り、解析に要るのは確率の計算で作れる有限個の $\Pi_x\tau$ だけです。その発散を引く操作は「繰り込み群」の作用として現れます（同要旨。代数は Bruned–Hairer–Zambotti 2019）。三次元の ϕ^4 では

$$\partial_t u_\varepsilon = \Delta u_\varepsilon + (3C_1^\varepsilon - 9C_2^\varepsilon)\,u_\varepsilon - u_\varepsilon^3 + \xi_\varepsilon \tag{7}$$

で、$C_1^\varepsilon \sim \varepsilon^{-1}$、$C_2^\varepsilon \sim \log \varepsilon$ です（同 (9.21)・Remark 10.23）。負の次数の記号は $\Xi, \Psi, \Psi^2, \Psi^3, \Psi^2 X_i, \mathcal{I}(\Psi^3)\Psi, \mathcal{I}(\Psi^2)\Psi^2, \mathcal{I}(\Psi^3)\Psi^2$ の 8 個です（同 §10.5、Theorem 10.22 の証明）。paracontrolled 分布（Gubinelli–Imkeller–Perkowski 2015）という別の道もあり、その後の不変測度と公理の結果は表 4 と 7-03 にあります。既知

06

劣臨界と臨界

$\phi_\delta(t,x) = \delta^{(d-2)/2}\phi(\delta^2 t, \delta x)$ と拡大すると（ゲージ場 A も同じ拡大をします）、雑音の法則と Δ は変わらず、非線形項の係数だけが変わります。式 (8) の右はヤン–ミルズの結合 g です。作用を $\frac{1}{g^2}\int |F_A|^2$ とし、A を gA と置き直すと、§07 の式 (9) の $A\partial A$ の項に g、A^3 の項に g^2 が付きます。

$$\lambda \longrightarrow \lambda\,\delta^{4-d}, \qquad g^2 \longrightarrow g^2\,\delta^{4-d} \tag{8}$$

$d < 4$ なら細かい尺度 $\delta \to 0$ で非線形項は消え、方程式は確率熱方程式の摂動になります。これが劣臨界で、超繰り込み可能に対応します（Chevyrev 2022 §1.3：劣臨界は $d<4$ と同値）。正則性構造の一般論は局所劣臨界を仮定しています（Hairer 2014 Assumption 8.3）。既知 余裕 $4-d$ を、四で切り替わる他の量と並べた図は 1-12 §10 の次元のつまみです。

$d = 4$ は臨界で、一般論はどちらの模型も含みません。ϕ^4 について、Hairer 2014 §1 は四次元で非自明な意味を持つとは期待しないと書き、格子からの極限が自明になることはのちに Aizenman–Duminil-Copin が示しました（7-08）。既知 ヤン–ミルズは漸近自由で、結合が細かい尺度で対数的に小さくなると考えられています。これは摂動論の β 関数としての結果（4-06）で、非摂動の定理ではありません。物理

記号の数で見る

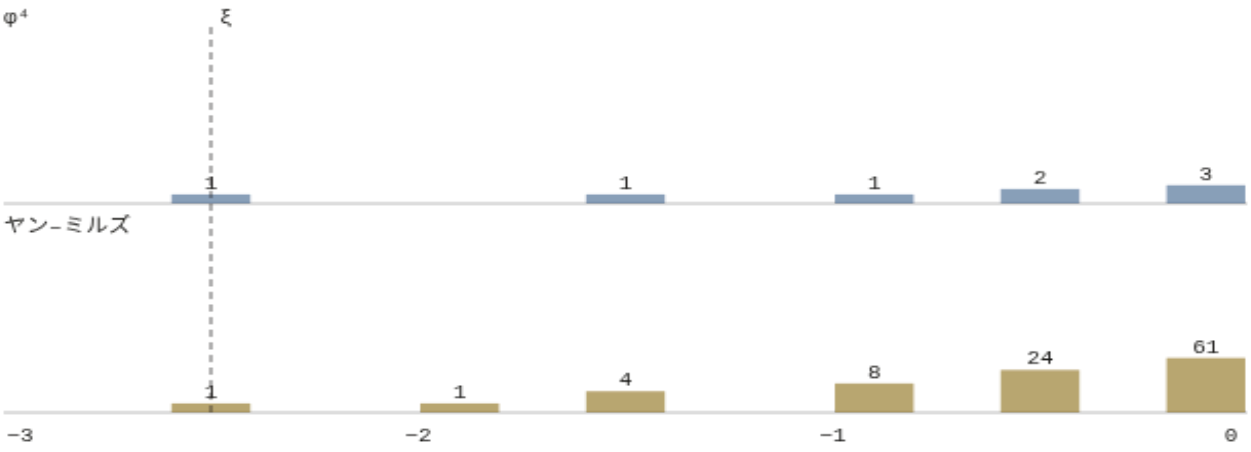
臨界に近づく様子は、§05 の記号の数でも見えます。次の三つの規則で記号を組み、次数が負のものを数えます。κ は正の無限小として扱い、X_i の向きや場の成分の添字は区別しません。

1. **材料**。雑音 Ξ（次数 $-(d+2)/2-\kappa$）と、すでにできた記号 τ に $\mathcal{I}$（§05 の、熱方程式で解く操作）を掛けた $\mathcal{I}(\tau)$（次数 +2）と、その微分 $\partial\mathcal{I}(\tau)$（次数 +1）。$\Psi = \mathcal{I}(\Xi)$ です。
2. **積**。非線形項の形に合わせて材料を席に並べて掛けます（次数は和）。ϕ^4 は ϕ^3 の三つの席に $\mathcal{I}(\cdot)$ を一つから三つ。ヤン–ミルズは $A\partial A$ の二つの席に $\mathcal{I}(\cdot)$ と $\partial\mathcal{I}(\cdot)$ を一つずつまで、または A^3 の三つの席に $\mathcal{I}(\cdot)$ を一つから三つ。

3. **空いた席**。席が一つでも空いていれば、そこに多項式 X（次数 +1、何乗でもよい）を置いてよい。

例（$d=3$ の ϕ^4）：Ξ は $-\frac{5}{2}-\kappa$、Ψ は $-\frac{1}{2}-\kappa$。三つの席を Ψ で埋めた Ψ^3 は $-\frac{3}{2}-3\kappa$ で、それに $\mathcal{I}$ を掛けた $\mathcal{I}(\Psi^3)$ は $\frac{1}{2}-3\kappa$ です。二つの席に $\mathcal{I}(\Psi^3)$ と Ψ を置いた $\mathcal{I}(\Psi^3)\Psi$ は -4κ で、0 のすぐ下なので数えます。空いた三つ目の席に X を置くと $1-4\kappa$ で正になり、数えません。新しい負の記号が出なくなるまで、これを繰り返します。

図 2　つまみで次元 d を動かすと、負の次数の記号の数が次数ごとに変わる（上 ϕ^4、下ヤン–ミルズ。棒の高さは個数の対数、点線は雑音の次数）



d = 3.00　雑音の次数 −2.500　負の次数の記号：φ⁴ 8 個、ヤン–ミルズ 99 個

計算 この図と表 3 の数値はこの端末で計算した（`trees.py`。上の規則による「形」の数、— は計算していない）。

d	2	2.8	3	22/7	10/3	3.5	3.7	3.8
φ⁴	4	5	8	10	22	44	525	38561
YM	11	27	99	163	1918	65197	—	—

ϕ^4 は $d=3$ で §05 の 8 個と一致します。$d=14/5$ で加わる $\mathcal{I}(\Psi^3)\Psi^2$ は §04 の分け方が壊れる境目、$d=22/7$ で加わる二つは Hairer 2014 §9.2 が $\alpha=-18/7$ として注意する境目です。余裕が半分のヤン–ミルズは増え方がずっと速く、$d=4$ では $\mathcal{I}(\tau)\Psi^2$ を重ねても次数が変わらないので無限個になります。計算 ϕ^4 では Chandra–Moinat–Weber が雑音を $\mathcal{C}^{-3+\delta}$ に取って非整数の次元をまね、劣臨界の全範囲で事前評価を与えています。既知

07

ゲージ場：DeTurck の項と共変性

ゲージ場 $A=(A_1,\dots,A_d)$ の成分はリー環の元（行列）で、$[X,Y]=XY-YX$ はリー環の括弧です（1-03）。$d_A=d+[A,\cdot]$ は共変微分、F_A はその曲率（場の強さ）、d_A^* は d_A の随伴（内積について転置に当たる作用素）です（1-07）。作用 $S(A)=\int|F_A|^2$ に式 (1) を当て、時

刻を 2 倍に数え直すと $\partial_t A = -d_A^* F_A + \xi$ になります。この式は雑音が無くても**放物型**（熱方程式 $\partial_t u = \Delta u$ と同じく、どの向きの細かい揺らぎも時間とともにならす型）ではありません。作用がゲージ変換で変わらず、軌道の方向に均す力が働かないからです（Chevyrev 2022 §1.2）。軌道に接する項 $-d_A d^* A$（$d^* A = -\sum_i \partial_i A_i$）を足すと（Zwanziger 1981・Donaldson 1985、Ricci 流では DeTurck 1983）

$$\partial_t A_i = \Delta A_i + [A_j,\, 2\partial_j A_i - \partial_i A_j + [A_j, A_i]] + \xi_i \tag{9}$$

と放物型になります（同 (1.3)。略記 $\partial_t A = \Delta A + A\partial A + A^3 + \xi$）。形式的には、解 A を時間に依存するゲージ変換 g で移した $B = A^g$ も、雑音 $\mathrm{Ad}_g \xi = g\xi g^{-1}$（$g$ で挟んで回したもの）で同じ式を満たし、$\mathrm{Ad}_g \xi$ は ξ と同じ法則を持ちます。この**法則の意味でのゲージ共変性**が、軌道の上の過程を定める根拠です。既知

繰り込みでは、雑音を幅 ε で均した方程式に質量の項 $(C^\varepsilon_{\mathrm{bphz}} + \mathring{C})A$ を足します。$C^\varepsilon_{\mathrm{bphz}}$（BPHZ 定数）は ε に依る部分で、二次元では打ち消し合いで有限の値に収束し、三次元では ε^{-1} の程度で発散します（Chevyrev 2022 Remark 1.10）。$\mathring{C}$（裸の質量）は ε に依らない有限の部分で、自由に選べます。この質量の項も、雑音を均すことも、共変性を壊します。Chandra–Chevyrev–Hairer–Shen（CCHS）は、$\mathring{C}$ をある値 $\check{C}$ に選ぶと二つの破れが極限で打ち消し合うことを、二次元（2022）と三次元（2024）で示しました。既知

$\check{C}$ が一つに決まるかは二段で答えられています。CCHS は、ある結合（ゲージ同値な二つの初期値からの解を、回した雑音で同じ確率空間に並べて比べる作り方）の意味では一意な選び方があることを示しました（Chevyrev 2022 Theorem 1.14）。法則の意味でゲージ共変な解を与える質量の繰り込みが一つしかないことは、二次元では Chevyrev–Shen（Comm. Pure Appl. Math. 2026、arXiv:2302.12160 の Theorem 2.15）、三次元では Chevyrev–Shen（Arch. Ration. Mech. Anal. 2026、arXiv:2503.03060）が示し、CCHS の結果を強めました。既知

例：$G = U(1)$ では式が $\partial_t A = \Delta A + CA + \xi$ となり、T^d 上で共変なのは $C = 0$ だけです（$C \neq 0$ だと、A_1 を定数 2π ずらした同値な初期値で $e^{i\int A_1}$ の期待値が食い違う。同 §1.4）。既知

08 ヤン–ミルズの到達点

解が住む**状態空間**も要ります。二次元では線分に沿う線積分が意味を持ち、軌道の空間は Polish 空間（完備で、可算な稠密部分集合を持つ距離空間。確率測度を扱うのに都合がよい）になります（CCHS 2022）。三次元ではガウス自由場の線積分が既に発散する（$\mathbb{E}|A(\ell)|^2 \asymp$

$\int_0^1\int_0^1 |\ell|/|t-s|\,ds\,dt=\infty$）ので、ヤン–ミルズ流（式 (9) から雑音を除いた決定論的な流れ）で均した場でゲージ同値を定める非線形な空間を使います（Chevyrev 2022 §3.1、7-06）。得られたのは軌道の空間の上の Markov 過程（§04）で、有限時間での爆発の可能性を残した形です。二次元では Chevyrev–Shen（Comm. Pure Appl. Math. 2026）が、T^2 上のヤン–ミルズ測度がその一意な不変測度であることを、可解性によるモーメント評価・格子上のゲージ固定・Bourgain の論法で示しました（7-02）。力学では避けたゲージ固定を、不変測度の証明では格子の上で使っています。既知

既知 表 4　確率量子化の到達点（有限体積は原則トーラス）。

模型	局所解・過程	不変測度	無限体積・公理
ϕ^4_2	Da Prato–Debussche 2003（強い解。過程は Jona-Lasinio–Mitter 1985・Albeverio–Röckner 1991 が先）	ϕ^4_2 測度（構成的場の理論で既知）に収束する過程：Jona-Lasinio–Mitter 1985（正方形・Dirichlet 境界、作用素の冪で均した方程式）	他の方法で既知（7-03）
ϕ^4_3	Hairer 2014	Mourrat–Weber 2017	Gubinelli–Hofmanová 2021（回転不変性・クラスター性を除く）
YM 二次元	CCHS 2022（爆発の可能性つき）	Chevyrev–Shen（Comm. Pure Appl. Math. 2026）：YM 測度が一意な不変測度	$T^2\to\mathbb{R}^2$ はこの方法では未
YM 三次元	CCHS 2024（同。Higgs つきも。質量の繰り込みの一意性は Chevyrev–Shen, Arch. Ration. Mech. Anal. 2026）	未解決	未
YM 四次元	臨界で、正則性構造の一般論の外		

総説の未解決問題は、不変測度の存在（三次元なら、まだ有限体積でも無いヤン–ミルズ測度の構成）、$T^d\to\mathbb{R}^d$（二次元でも自明でない）、自明でない主束、$N\to\infty$ です（Chevyrev 2022 §4）。Chevyrev–Shen（Comm. Pure Appl. Math. 2026）は二次元に限られる理由を Bourgain の論法が要するモーメント評価に帰し、高次元への拡張を未解決としています。反射正値性も別の課題です（7-01）。既知

09

寄り道：無限の彼方から降りてくる

飛ばしてよい節です。

不変測度の標準の作り方は、時間平均の一様な評価から極限を取る方法（Krylov–Bogoliubov）で、「どんな大きな初期値からも、決まった時間で決まった大きさまで戻る」評価が効きます。最も簡単な

例が $\dot{x} = -x^3$ です。

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 + 2x_0^2\, t}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2t}} \qquad (x_0 \to \infty) \tag{10}$$

大きさは $1/\sqrt{2t}$ を超えず、初期値を忘れます。$t = 0.01$ で $x_0 = 10, 10^3, 10^6$ の解は 5.7735・7.0709・7.0711 で、極限 7.0711 に並びます。線形の $\dot{x} = -x$ の解 $x_0 e^{-t}$ は初期値を覚えたままです（$x_0 = 10^6$ なら 9.90×10^5）。計算

Mourrat–Weber（2017）は三次元の ϕ^4 でこの型の評価（題名の「無限から降りてくる」）を示し、不変測度を作りました（要旨）。ヤン–ミルズでは可換の $U(1)$ でさえ、式 (9) の解の空間平均 $\int A_i$ がブラウン運動のように動いて不変確率測度が無く、軌道に移したときにだけ不変測度が現れます（Chevyrev 2022 Remark 1.17）。非可換の三次元で要る評価が、§08 の未解決問題の中身です。既知

10

四次元へ持ち出せるもの

持ち出せるもの：測度をゲージと両立する力学の不変測度として捉える見方。ヤン–ミルズ流で均してから比べる状態空間（格子の側でも、流れた場が滑らかな繰り込まれた場になることが理論と数値から示唆される、と Lüscher 2010 は書きます物理）。DeTurck の項がもとは Ricci 流の工夫だったことは、16-06 で「何が Ricci 流に当たるか」を考える手がかりです。

持ち出せないもの：局所劣臨界という前提です。四次元では余裕が 0 で、記号は有限個に収まりません（表 3）。三次元でさえ不変測度の存在・無限体積・反射正値性が残ります。質量ギャップは無限体積のハミルトニアンのスペクトルの性質（4-11）で、有限体積の不変測度からは直接には出ません。四次元の止まり方は 7-10 でまとめます。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	式 (1) の模擬は 0.3% 以内で積分と一致し、谷を渡る時間は h とともに指数関数的に伸びる（$T \cdot h/e^h$ は $h = 8$ で 1.17 と、Kramers の係数 $\pi/(2\sqrt{2}) \approx 1.11$ に近づく）。余裕は ϕ^4 で $4 - d$、$A\partial A$ で $(4-d)/2$。負の次数の記号は ϕ^4 の $d = 3$ で 8 個（Hairer 2014 と一致）、$d = 3.8$ で 38561 個、ヤン–ミルズの $d = 3.5$ で 65197 個計算
言えている	T^2 上のヤン–ミルズ測度は Langevin 力学の一意な不変測度。三次元のヤン–ミルズ（–Higgs）は局所解と軌道空間上の Markov 過程まで。法則の意味でゲージ共変にする質量の繰り込みは、二次元・三次元とも一つに決まる既知

	内容
言えていない	記号の数は「形」の数で、文献が数える「繰り込みに寄与しうる記号」とは定義が違う。三次元のヤン–ミルズ測度と四次元への延長（未解決）。正則性構造の証明の中身。2025 年以降の文献の網羅

出典と再現

もの	種別	出典・道具
次数・積・式 (7)・記号	本文で確認（§1・§8・§9・§10）	M. Hairer, Invent. Math. 198 (2014) 269–504, arXiv:1303.5113
引用・式 (9)・Remark 1.10・Theorem 1.14・Remark 1.17	総説、本文で確認	I. Chevyrev, J. Math. Phys. 63 (2022) 091101, arXiv:2202.13359
二次元の不変測度・質量の繰り込みの一意性	本文で確認（§1、Theorem 2.15・2.16、§9.1 の題）	I. Chevyrev, H. Shen, Comm. Pure Appl. Math. (2026), arXiv:2302.12160
§04〜§09 の結果	要旨で確認	CCHS: arXiv:2006.04987（Publ. IHÉS 2022）、2201.03487（Invent. Math. 2024）。Chevyrev–Shen: 2503.03060（Arch. Ration. Mech. Anal. 250 (2026) Paper No. 11）。Da Prato–Debussche, Ann. Probab. 31 (2003)。Mourrat–Weber: 1601.01234。Gubinelli–Hofmanová: 1810.01700。Chandra–Moinat–Weber: 1910.13854
Jona-Lasinio–Mitter	総説による（原論文は書誌のみ）	S. J. Summers, arXiv:1203.3991v2（2016）§5。Jona-Lasinio–Mitter, CMP 101 (1985) 409–436
Albeverio–Röckner	書誌のみ（Hairer 2014 の文献表）	S. Albeverio, M. Röckner, Probab. Theory Related Fields 89 (1991) 347–386
§01・§05・§07・§10	書誌のみ（Chevyrev 2022 の文献表）	Parisi–Wu, Sci. Sinica 24 (1981)。Zwanziger, Nucl. Phys. B 192 (1981)。DeTurck, J. Diff. Geom. 18 (1983)。Donaldson, PLMS 50 (1985)。Gubinelli–Imkeller–Perkowski, Forum Math. Pi 3 (2015)。Bruned–Hairer–Zambotti, Invent. Math. 215 (2019)
§10 の Lüscher の「示唆」	要旨で確認	M. Lüscher, JHEP 2010(8) 071
§01 の Kramers の公式	標準の結果（原論文は未確認）	谷の底と山の頂の二階微分で決まる、山越えの平均時間の近似。表 1 の T との比は `kramers.py` で計算
表 1〜3・図・§09 の数値	計算	この端末の Python：`langevin.py`（約 1 分）、`kramers.py`（$h = 0.5$〜8 の T と $T \cdot h/e^{h}$）、`trees.py`（有理数で数え上げ。ϕ^4 の $d = 3$ の 8 個と $d = 22/7$ の境目で検算。約 30 秒）、`fig2_pack.py`、`comedown.py`。図は canvas と素の JavaScript

次に読む章：7-10 四次元で止まる場所。確率量子化を新しい概念の候補として見るのは 16-06。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 7 部 構成的場の理論 出題者の言葉

四次元で止まる場所 — 紫外は有限体積で見込み、止まっていたのは無限体積と一様なギャップ（2026 年の公開より前の地図）

この章は未解決の問いの地図です。§01・§03・§06・§08・§09 は既存の知見です。

この章で分かること — 出題者（Jaffe–Witten 2000）が T^4 の構成を「見込み」、$T^4 \to \mathbb{R}^4$ と一様なギャップを「方向を指す考えが無い」と書き分けたこと。六つの段の四次元での到達点と文献の言葉。問題文のクラスター性の式を自由場の数で読むこと。

前提となる章 — 7-07 四次元：Bałaban と MRS。六つの段は 7-01、非自明性は 7-08、ギャップの定義は 4-11。

先に言うこと — 既知の文献の言葉を段ごとに並べ直した章で、示す定理はありません。2026 年の公開より前の文献では、四次元のヤン–ミルズは T^4 の上でも構成が完了していません。2000 年以後の文献は、本文か要旨を確かめた範囲に限ります。2026-11-10 に公開された構成では、紫外極限の段・体積の部分列に沿った無限体積の段・公理の段までが Lean で証明されている、と委員会が評価しました。止まっている所は、無限体積の極限の一意性と一様なギャップの段に移りました（6-04、第三巻の 16-02・16-03）。

この章の順序

1. 出題者の二つの文 — T^4 の構成は「十分な兆候」、一様なギャップと $T^4 \to \mathbb{R}^4$ は「方向を指す考えが無い」
2. 段ごとの地図 — 六つの段に、四次元の到達点と文献の言葉を重ねる（動く図）
3. 正則化と有限体積：格子なら閉じている — 格子では有限次元の積分になるが、回転の対称性が壊れる
4. 紫外極限の段：有限体積で「見込み」 — 閉じた姿は繰り込んだ Wilson ループの極限、残るのは一意性と非自明性
5. 無限体積の段：ここで止まっていた — 結合が $O(1)$ に育つ尺度を、体積によらず渡る一段が無い

6. 公理の段：公理と問題文の追加の条件 — 反射正値性は引き継がれる、問題文は局所場・漸近自由・非自明性・$m < \infty$ を足す
7. 一様なギャップの段：体積に一様なギャップ — 一様なギャップが無限体積への道を開きうる、と出題者は書く
8. クラスター性の式 JW (2) を読む — 自由場の数で $C < \Delta$ と「十分遠く」の意味を見る（計算・動く図）
9. 寄り道：古典では見えないギャップ — Debye 遮蔽では、変数の取り替えで質量が見える

01

出題者の二つの文

問題文（Jaffe–Witten 2000、以下 JW）の §6 は、四次元の現状を二つの文に分けます。

既知

'Some results are known for Yang–Mills theory on a 4-torus T^4 approximating R^4, and, while the construction is not complete, there is ample indication that known methods could be extended to construct Yang–Mills theory on T^4.' ／ 'Yet, even if this were accomplished, no present ideas point the direction to establish the existence of a mass gap that is uniform in the volume. Nor do present methods suggest how to obtain the existence of the infinite volume limit $T^4 \to R^4$.'

トーラス T^4（箱の向かい合う面を貼り合わせたもの）の上の構成は未完了だが、既知の方法を延ばせば作れる兆候が十分にある。体積に一様なギャップと $T^4 \to \mathbb{R}^4$ には、方向を指す考えが今は無い。一辺 L の箱の測度を μ_L、ハミルトニアンの隙間を Δ_L とすると、対象は

$$\underbrace{\mu_L = \lim_{a\to 0} \mu_{a,L} \quad (L \text{ は固定})}_{\text{兆候は十分}} \qquad \underbrace{\inf_L \Delta_L > 0, \qquad \lim_{L\to\infty} \mu_L}_{\text{方向を指す考えが無い}} \tag{1}$$

です（$\mu_{a,L}$ は格子間隔 a の測度。7-01 の式 (6)）。**例：**出題者は見立ての強さを言葉で書き分けています（表 1）。この章はその差を段に写します。

既知 表 1　問題文の強さの言葉（Clay の PDF の本文で確認）。

言葉	訳	何について	節
'ample indication'	十分な兆候	T^4 の上の構成	§6
'no present ideas point the direction'	方向を指す考えが無い	体積に一様なギャップ	§6
'New ideas are needed'	新しい考えが要る	体積に一様なギャップ	§6.5
'may play a fundamental role'	基本的な役割を果たしうる	一様なギャップ → 無限体積極限	§5

02

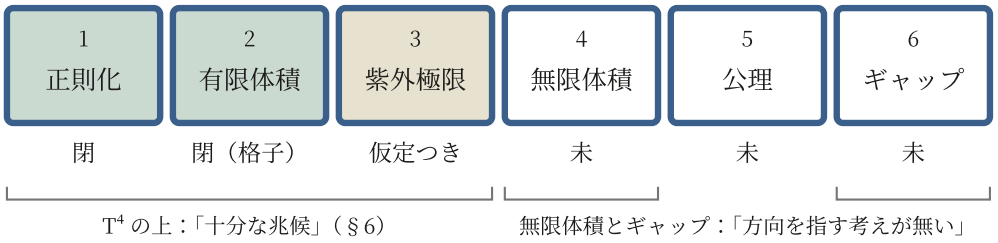
段ごとの地図

7-01 の六つの段に、四次元の到達点と文献の言葉を重ねます。到達点は**閉**（定理がある）、**仮定つき**（仮定の下の定理か、詳細な証明の無い概略）、**未**（定理が無い）の三つです。正則化の段から紫外極限の段までは二重の極限

$$\mu = \lim_{L\to\infty}\ \lim_{a\to 0}\ \mu_{a,L} \tag{2}$$

の内側、無限体積の段は外側、公理の段と一様なギャップの段は μ の性質です。式 (1) の前の文は内側を、後の文は外側と一様なギャップの段を指します。

図 1　文献を選ぶと、言及した段が縁取られ要点が出る（段の箱か表 2 の行を押すとその段の言葉）。「動かす」で文献を巡る



問題文 2000

正則化の段：Wilson は格子の上にゲージ不変な作用を定めた（JW §6.5）。

有限体積の段：コンパクトな群と時空なら、格子で関数積分が有限次元の積分になる（JW §6.5）。

紫外極限の段：T⁴ の構成は未完了だが十分な兆候（JW §6）。

無限体積の段：T⁴ → R⁴ を今の手法は示唆しない（JW §6）。

公理の段：反射正値性は Wilson 近似で成り立ち、失えば取り戻しにくく、ヒルベルト空間を立てることが問題の一部（JW §6.5）。

ギャップの段：体積に一様なギャップには方向を指す考えが無く、新しい考えが要る（JW §6・§6.5）。

既知　この図の文は表 2 と同じ（問題文・報告・論文・総説の本文）。下の括弧は、§6 の前の文が正則化から紫外極限までの段を、後の文が無限体積の段と一様なギャップの段を指すことを示す。

既知　表 2　四次元のヤン–ミルズの段ごとの到達点（連続の理論として。2026-11-10 の公開より前の文献による。公開された構成は表のあとの段落）。

段	到達点	文献の言葉（要点）	章
1 正則化	閉	Wilson は格子の上にゲージ不変な作用を定めた（JW §6.5）。	5-01
2 有限体積	閉（格子）	コンパクトな群と時空なら、格子で関数積分が有限次元の積分になる（JW §6.5）。連続の測度は三次元でも T^3 の上で未構成（Chevyrev 2022）。	7-06

段	到達点	文献の言葉（要点）	章
3 紫外極限	仮定つき	T^4 の構成は未完了だが十分な兆候（JW §6）。紫外極限は概略で、詳細な証明は無い（MRS 1993）。Douglas の知る限り、ここ数年突破は無く、到達点は今も Bałaban と MRS（Douglas 2004）。二次元より上で非自明な連続極限の構成は無い（Chatterjee 2018）。四次元では「一つの形の紫外安定性」（Chevyrev 2022）。	7-07
4 無限体積	未	$T^4 \to R^4$ を今の手法は示唆しない（JW §6）。赤外の切断は外さない、外せば結合が大きく、足場になる解ける模型が無い（MRS 1993）。大きい β での一意性は $d > 2$ で一般に未知（Chatterjee 2018）。	5-04
5 公理	未	反射正値性は Wilson 近似で成り立ち、失えば取り戻しにくく、ヒルベルト空間を立てることが問題の一部（JW §6.5）。赤外の切断があるので OS の公理の全体は扱えない（MRS 1993）。	4-10
6 ギャップ	未	体積に一様なギャップには方向を指す考えが無く、新しい考えが要る（JW §6・§6.5）。格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）：すべての β で相関長が有限、$\beta \to \infty$ で無限大（Chatterjee 2018）。	5-09

この章が読んだ範囲で、2000 年以後の四次元の結果は二種類です。一つは格子間隔を固定した側です（§05）。もう一つは、Higgs 場（ゲージ場と結合する物質場の一つ。3-07）を加えた $SU(2)$ の模型で、格子間隔・結合・Higgs 場の長さを連動させて取る特殊なスケーリング極限です（次元 $d \geq 2$ のどれでもよい）。その極限はガウス（自由場）で、著者は 'The question of constructing a non-Gaussian scaling limit remains open' と書きます（Chatterjee 2026）。既知 純粋なヤン–ミルズの連続の紫外極限の段から一様なギャップの段までを閉じたとする文献は、2026 年の公開より前には、この章が読んだ範囲に見当たりません。

2026-11-10 に公開された構成は、紫外極限の段（族の選んだ間隔の列の全体での収束）、体積の部分列に沿った無限体積の段、公理の段（相の各成分が OS の公理の変種を満たし、そこから Wightman の理論を再構成する）までを、Lean で証明されている、と委員会が評価しました。一様なギャップの段と、無限体積の極限の一意性は示されていません（6-01・6-04。再構成は 12-08）。

03

正則化と有限体積：格子なら閉じている

正則化の段と有限体積の段は、四次元でも格子の上なら閉じています。JW §6.5 は 'the lattice approximation reduces the functional integration to a finite-dimensional integral' と書き、反射正値性も成り立つとします（Osterwalder–Seiler 1978）。既知 Chatterjee（2018）の書き方で、プラケット（最小の正方形）の集合を P、U_p を p を一周する群の元の積とすると

$$S(U)=\sum_{p\in P}\operatorname{Re}\operatorname{tr}\big(I-U_p\big),\qquad 0\le \operatorname{Re}\operatorname{tr}(I-U_p)\le 2N,\qquad e^{-2N\beta|P|}\le Z=\int e^{-\beta S(U)}\prod_{\ell}\mathrm{d}U_\ell \tag{3}$$

です。$U_p\in SU(N)$ の固有値は絶対値 1、Haar 測度 $\mathrm{d}U_\ell$ は重さ 1 だからです。**例：**一辺 4 点の四次元の周期格子のプラケットは $6\times 4^4=1536$ 枚で、$SU(2)$ なら $e^{-6144\beta}\le Z\le 1$。計算

代わりに格子は回転の対称性を壊し、連続の切断はゲージ不変性を壊します（7-07 §06）。反射正値性について JW §6.5 は、正則化で失うと取り戻す方法が少ないと書きます（引用は 0-03 §03）。既知 ゲージ不変性・反射正値性・ユークリッド不変性・紫外の制御の四つを同時に保つ四次元の正則化は、この章が読んだ文献に見当たりません（この章の読み）。

04

紫外極限の段：有限体積で「見込み」

中身は 7-07 で読みました（Bałaban 1989 は仮定つきの評価、MRS 1993 は概略）。出題者は §6.5 でこう書きます。既知

'One presumably needs to revisit known results at a deep level, simplify the methods, and extend them.'

見直し、簡素にし、延ばす。紫外極限の段について求められているのは新しい考えではなく、この作業です。閉じた姿は Wilson ループ W_γ（閉じた道 γ に沿った群の元の積の $\frac{1}{N}\operatorname{tr}$。5-01）で書けます。格子の道 $\gamma_a\to\gamma$ について

$$\big\langle W_{\gamma_a}\big\rangle^{\mathrm{ren}}_{a,L}\xrightarrow[a\to 0]{}\big\langle W_\gamma\big\rangle_L\qquad\text{(部分列でなく列全体で、自由場でない極限へ)}\tag{4}$$

です（ren は次の段落の繰り込み。形は Chatterjee 2018 §5・§6 に倣った）。

繰り込みが要る理由は、Chatterjee 2018 の連続の弦張力の問題（Problem 5.2。連続極限）に見えます。無限体積の四次元の格子で、物理的な大きさが $R\times T$ の長方形の道（格子の上では R/a 歩と T/a 歩）を $\gamma_{R/a,T/a}$ と書くと、問題は $\beta\to\infty$ で

$$\log\big\langle W_{\gamma_{R/a,\,T/a}}\big\rangle=-c\,(R+T)-\sigma\,RT+o(1),\qquad a=a(\beta)\to 0,\quad c=c(\beta)\to\infty,\quad \sigma\neq 0$$

となる列を見つけることです（σ は連続の理論の弦張力。原文の記号は d）。$R+T$ は周の長さに比例し、RT は面積です。$c\to\infty$ なので、そのままでは $\log\langle W\rangle\to-\infty$、つまり期待値は 0 に潰れます。周の長さに比例する項 $c(R+T)$ を足し戻してから極限を取るのが、ここでの繰り込みです。既知 ただし Chatterjee 自身は 'it is not clear to me whether the renormalization term c(R + T) is indeed necessary' と書いており、この項が本当に要るかも開いた問いです。

例：可換な $U(1)$ の四次元の格子には、連続極限の構成があります（Driver 1987）。Chatterjee 2018 §6 は、Gross が三次元の $U(1)$ で通常とは別の意味の収束として示した方法を、Driver が四次元に使ったと紹介します。既知 可換な群では格子の作用の二次より高い項（場の自己相互作用）が連続極限に残らず、極限は自由な電磁場と見込まれる、というのがこの章の説明です（Driver の本文は未読）。

非可換で式 (4) に届くまでに、段差が二つあります。(i) 紫外安定性は、部分列が収束することしか与えません（Chatterjee 2018 §6）。列全体が収束すること、つまり極限の一意性は別の仕事です（7-07 §05）。(ii) 極限が在っても、それはガウス（自由場）かもしれません。自由場でないこと、つまり非自明性も別の仕事です（7-08 §10）。脚注 2 は、コンパクト性による弱い存在を、極限の性質を別に示さない限り解と認めません（§6.5 末尾）。2026-11-10 に公開された構成は、局所の観測量の相関について (i) を族の選んだ間隔の列の全体での収束で越え、(ii) の非自明性も示した、と委員会は評価しています。ただし式 (4) の Wilson ループの観測量そのものは作っていません（6-04）。

05

無限体積の段：ここで止まっていた

出題者の言葉は 'Nor do present methods suggest how to obtain the existence of the infinite volume limit' の一文です（§6）。当事者の MRS 1993 §I は、赤外の切断を外すと結合が大きくなるとして、'there is no easy solvable model of these phenomenons around which to expand' と書きます。既知 繰り込み群の段の列（7-05）を尺度の軸に並べると

$$\underbrace{a \to 2a \to \cdots \to a_0}_{g^2 \le \gamma\text{: 段 3（仮定つき）}} \longrightarrow \underbrace{a_0 \to \cdots \to \ell_*}_{g^2 \text{ が } O(1) \text{ へ育つ}} \longrightarrow \underbrace{\ell_* \to \cdots \to L \to \infty}_{\text{段 4}} \tag{5}$$

です。a_0 は仮定の届く最も粗い尺度（$g^2(a_0) \le \gamma$。7-07 と同じく γ を g^2 の上限として使う）、ℓ_* は走りを延ばして $g^2 = 1$ になる目安の長さで、$\gamma = 0.3$ の $SU(2)$ なら $\ell_*/a_0 \approx 10^{10.7}$（二ループ。7-07 §04 の表 2）です。計算 ℓ_* を閉じ込めの尺度と読むのは物理の見当です。物理 この本の整理では、欠けているのは真ん中、結合が $O(1)$ に育つ尺度を体積によらない評価で渡る一段です（7-04 §10）。2026-11-10 に公開された構成は、体積によらない評価から、体積の部分列に沿った無限体積の極限を取っています（第 12 部、12-03・12-05）。極限の一意性と、体積に一様な指数の減衰は示されていません（6-04）。

例：格子間隔を固定すれば、無限体積の段は強結合の側で閉じています（Osterwalder–Seiler 1978）。Shen–Zhu–Zhu 2023 は、$SU(N)$ で $|\beta| < 1/(16(d-1))$、$d = 4$ なら $1/48 \approx 0.0208$ のとき、無限体積の測度の一意性と相関の指数減衰を示しました。この β は 't Hooft

の規約の値です。この規約では作用の前の逆結合を βN と書くので、式 (3) の β に直すと N 倍になり、条件は $|\beta| < N/48$ です（この本の Wilson の β では $N^2/48$。五つの規約の換算は 5-01 表 4）。弱結合の側では非可換群の一意性すら一般に未知で（Chatterjee 2018 §3）、指数減衰は有限群でだけ示されています（Adhikari–Cao 2025、5-10）。$U(1)$ には大きい β で閉じ込めない相が在り（Guth 1980、Fröhlich–Spencer 1982）、非可換で相転移が無いことは信じられているだけです物理（5-06）。

06

公理の段：公理と問題文の追加の条件

公理の段は Osterwalder–Schrader の公理です（4-10）。反射正値性は格子の各間隔で成り立ち、不等式なので極限に引き継がれます（7-01 §07）。回転の対称性の回復は別の仕事で、ヒルベルト空間を立てること自体が問題の一部です（JW §6.5）。既知 公開された構成がこれらをどう満たすかは第 12 部で読みます（12-01 格子の鏡映正値性、12-06 Euclid 不変、12-08 再構成と Wightman の公理）。

§4 は条件を足します。(i) $\mathrm{Tr}\, F_{ij}F_{kl}(x)$ のような曲率のゲージ不変な局所多項式に対応する局所場（脚注 1：自然な一対一対応は繰り込みのために無い）。(ii) 短距離で漸近自由と摂動的繰り込みの予言に一致すること（応力テンソルと演算子積展開を含む）。(iii) 非自明性（7-08）。そして

$$\mathrm{spec}\, H \cap (0, \Delta) = \varnothing \quad (\Delta > 0), \qquad m = \sup\{\Delta\}, \qquad m < \infty \tag{6}$$

です（$H \geq 0$ はハミルトニアン、m は質量）。**例：** $H \geq 0$ なので、$m < \infty$ は H のスペクトルが正の点を含むこと、つまり $H \neq 0$ と同じです。$m = \infty$ なら $(0, \infty)$ にスペクトルが無く、$H = 0$ です。さらに真空の一意性を並進について述べる形（並進で不変な単位ベクトルがただ一つ。nLab の「Wightman axioms」の Axiom 3 の書き方）を使うと、スペクトル条件（エネルギーと運動量が前方の錐に入る）から運動量も 0、すべてのベクトルが並進で不変になり、ヒルベルト空間は真空だけになります。この形の公理の下では、$m < \infty$ は空の理論を除く条件と読めます（この章の読み）。問題文 §3 の要約は「Poincaré 不変な真空ベクトルが位相を除いて一意」という形で、こちらからは同じ結論がすぐには出ません。(iii) で落ちる例は、格子からの極限がガウスになる四次元の ϕ^4 です（Aizenman–Duminil-Copin 2021）。

07

一様なギャップの段：体積に一様なギャップ

有限の箱の格子では隙間は自動的に在り（7-01 §08）、問いは一辺 L によらないことです。JW §6.5 は 'New ideas are needed to prove the existence of a mass gap that is uniform in the volume of space-time. Such a result presumably would enable the study of the limit as $\mathrm{T}^4 \to \mathrm{R}^{4}$' と書きます（§5 も同じ向き。表 1）。既知

出題者は、有限体積で一様なギャップ（一様なギャップの段）が無限体積（無限体積の段）への道を開きうると書きます（§5 の 'may play a fundamental role'、§6.5 の 'presumably would enable'）。7-01 で無限体積の段を先に置いたのは、ギャップが $\mathbb{R}^4$ の理論について定義されるからで、証明の順ではありません。仕組みは一行の評価です。箱のハミルトニアン H_L、真空 Ω_L、隙間 Δ_L について、スペクトル分解で真空の成分とそれ以外を分けると

$$\left| \langle \Omega_L,\, A\, e^{-tH_L} B\, \Omega_L \rangle - \langle \Omega_L, A\,\Omega_L\rangle \langle \Omega_L, B\,\Omega_L\rangle \right| \;\le\; \|A^{*}\Omega_L\|\, \|B\,\Omega_L\|\, e^{-\Delta_L t} \tag{7}$$

で（虚時間 t だけ離れた相関）、$\Delta_L \ge \Delta_{*} > 0$ が L によらなければ減衰の速さも L によりません。既知 **例：**二次元イジング模型の帯では、臨界点で $E_1 - E_0$ が $1/L$ で閉じ、低温では指数的に閉じます（2-09 §07・§08）。弱結合の ϕ^4_2・ϕ^4_3 では小さい径数の展開が無限体積の段と一様なギャップの段を同時に与えました（7-04 §08）が、四次元のヤン–ミルズの長い距離にはその径数がありません。

08

クラスター性の式 JW (2) を読む

JW §5 はギャップの帰結として 'For any positive constant C < Δ and for any local quantum field operator O ... such that ⟨Ω, OΩ⟩ = 0, one has (2) |⟨Ω, O(x)O(y)Ω⟩| ≤ exp(−C|x − y|), as long as |x − y| is sufficiently large' と書きます（x, y は空間の点。以下この不等式を JW (2) と書き、この章の式 (2) と区別します）。既知 要は $C < \Delta$ と「十分大きい」距離です。右辺に定数が無くてよいのは、C を Δ より真に小さく取っているので、定数倍も冪の因子も、十分遠くでは $e^{-(\Delta - C)r}$ に負けるからです。 質量 Δ の自由なスカラー場の同時刻の相関は

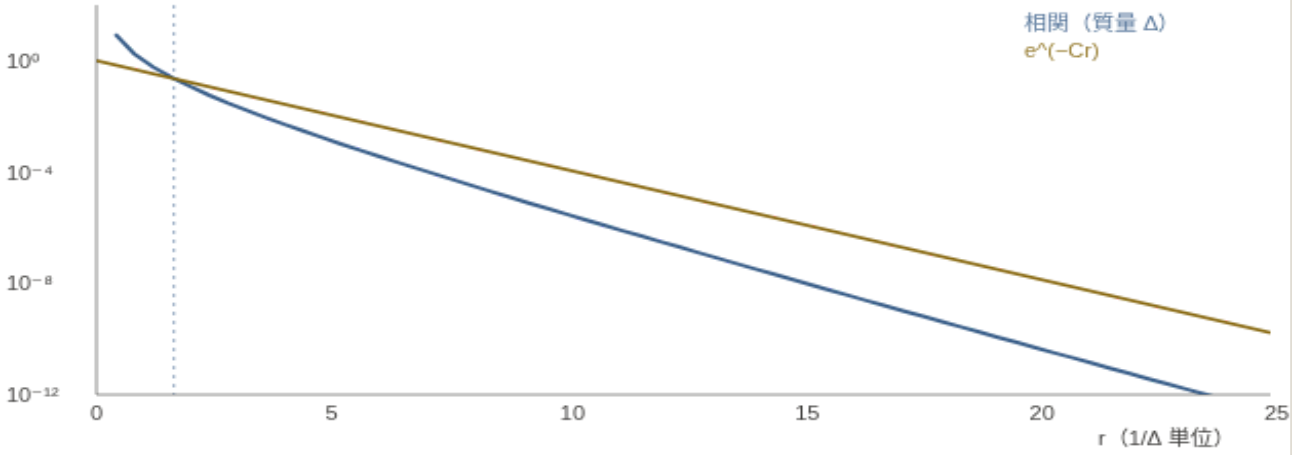
$$\langle \Omega, \phi(x)\phi(y)\Omega\rangle = \frac{\Delta\, K_1(\Delta r)}{4\pi^2 r} \;\sim\; \frac{\sqrt{\pi/2}}{4\pi^2}\,\frac{\Delta^{1/2}}{r^{3/2}}\, e^{-\Delta r} \qquad (r = |x-y| \to \infty) \tag{8}$$

で、ユークリッドの二点関数と同じ形です（K_1 は第二種の変形 Bessel 関数。点の場は局所作用素の代わりの見本で、均しても遠方の形は定数倍しか変わらない）。$r = 1/\Delta$ で 1 に規格化して e^{-Cr} と比べ、質量 0（相関は $1/r^2$ に比例）も並べます。

計算 表 3　規格化した相関が e^{-Cr} 以下になる r の範囲（r は $1/\Delta$ 単位、$r \le 5000$ で調べた）。

C/Δ	質量 Δ	質量 0
0.10	$r \ge 1.04$	$1.05 \le r \le 90$
0.50	$r \ge 1.25$	$1.43 \le r \le 8.6$
0.90	$r \ge 1.65$	成り立たない
1.00	$r \ge 1.82$	成り立たない
1.05	$1.93 \le r \le 132$	成り立たない
1.20	$2.47 \le r \le 17.8$	成り立たない

図 2　C/Δ を動かすと、直線 e^{-Cr} と相関（縦は対数）の上下が入れ替わる距離が変わる。「Δ = 0 と比べる」で質量 0 の相関を重ねる



C/Δ = 0.90：質量 Δ なら r ≥ 1.65 で成り立つ

計算 この図の数値はこの端末で計算した（式 (8)。縦の点線は、質量 Δ で JW (2) が成り立ち始める距離と破れ始める距離）。

読み方：(a) $C < \Delta$ なら r が 2 程度より先で成り立つ。(b) $C = \Delta$ でも冪 $r^{-3/2}$ のおかげで成り立つが、問題文は $C < \Delta$ しか言わない。(c) $C > \Delta$ では遠方で必ず破れる。(d) 質量 0 では、どの $C > 0$ も遠方で破れる。遠方の傾き $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\log$ は $r = 10$ で 1.153Δ、$r = 100$ で 1.015Δ と上から Δ に近づきます。計算 格子の測定は空間で和を取って運動量 0 の成分を取り出し、時間方向の相関から同じ種類の冪の因子を消して、指数関数 e^{-mt} の和を見ます（5-08）。自由場なら、ユークリッドの二点関数を空間で積分した時間方向の相関はちょうど $e^{-\Delta|t|}/(2\Delta)$ です。既知 一様なギャップの段から無限体積の段へ渡るには、JW (2) や式 (7) が箱の大きさによらずに成り立つことが要ります。

```
09
```

寄り道：古典では見えないギャップ

飛ばしてよい節です。

JW §6.6 は '... a theory in which the mass gap is not classically visible, to demonstrate it may require a non-classical change of variables or "duality transformation."' と書きます。古典のヤン–ミルズ方程式を小さい場で線形にすると波動方程式で、振動数は $\omega(k) = |k|$、質量 0 です（3-03）。挙げられた例は Coulomb 気体（正と負の点電荷が、距離 r に反比例するポテンシャル $1/r$ を及ぼし合う気体）の Debye 遮蔽です。試験電荷の間の力が指数的に減ることを、分配関数を sine-Gordon の場の理論（作用に $\cos(\lambda\phi)$ の項をもつスカラー場 ϕ の理論）のものに書き換え、谷の底を放物線で近似して示します（Brydges–Federbush 1980）。既知

$$-z\cos(\lambda\phi) = -z + \tfrac{1}{2}\, z\lambda^2\, \phi^2 + O(\phi^4) \tag{9}$$

ϕ^2 の係数 $z\lambda^2$ が質量の二乗の役をし（z は活量＝粒子の出やすさ。化学ポテンシャル μ と温度 T で $z \propto e^{\mu/k_{\mathrm{B}}T}$）、$1/r$ の言葉では見えなかった質量が谷の曲率として見えます。正確には (9) は近似の形で、証明はそれが効く条件を評価するものです。同じ節は四次の項 $(A \wedge A)^2$（Feynman 1981）、平らな方向のある量子力学の束縛状態（Simon 1983。2-05）、大 N の双対（17-04）も挙げます。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	問題文 §3〜§6.6・脚注、2004 年の報告（Clay の PDF の本文）、MRS 1993・Chatterjee 2018（Problem 5.1・5.2・§6）・Chevyrev 2022 の文。Shen–Zhu–Zhu・Adhikari–Cao は本文 §1（式 (1.2) (1.3)・序論）、Chatterjee 2026 は要旨の文 既知
言えている	2026 年の公開より前の文献では、四次元の連続では紫外極限の段が有限体積で仮定つき・概略、無限体積・公理・一様なギャップの段は未。格子間隔を固定すれば無限体積の段と一様なギャップの段は強結合の側で閉。式 (3)・(7) の一行の評価 既知
言えている	自由場で読んだ JW (2)：表 3・図 2 と遠方の傾き。$\ell_*/a_0 \approx 10^{10.7}$（7-07 の計算） 計算
言えていない	一様なギャップから無限体積極限へ渡る道が、四次元のヤン–ミルズで実際に通ること（出題者も 'may'・'presumably' と書く）
言えていない	「欠けている一段」、$m < \infty$ を空の理論を除く条件と読むこと（真空の一意性の形による）、四つを保つ正則化が無いという見立て（この本の読み）。Driver 1987 の極限が自由な電磁場であること（本文未読）。2000 年以後の文献の網羅（2026 年の Douglas の総説は書誌のみ）。四次元の紫外極限の段から一様なギャップの段のどれについても、この本は自分では示していない（公開された構成の読みは第二巻）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
問題文（§4〜§6.6、脚注 1・2、文献表）	本文	A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*, Clay Mathematics Institute (2000)
2004 年の報告	本文	M. R. Douglas, *Report on the Status of the Yang–Mills Millenium Prize Problem*, Clay Mathematics Institute (2004)
赤外の切断と公理の留保	本文 pp.325–327	J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, Comm. Math. Phys. 155 (1993) 325–383
作用・一意性・Problem 5.1・5.2・紫外安定性と Driver の紹介（§6）	本文	S. Chatterjee, *Yang–Mills for probabilists*, arXiv:1803.01950 (2018)
真空の一意性を並進で述べる形（§06）	本文	nLab, *Wightman axioms*（Axiom 2・Axiom 3）
紫外安定性・三次元	本文 §1.1・§4	I. Chevyrev, arXiv:2202.13359, J. Math. Phys. 63 (2022) 091101
Bałaban 1989 の定理	要旨と序文（7-07）	T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 122 (1989) 355–392
強結合・有限群の結果	本文 §1（式 (1.2)(1.3)・序論。16-01 の照合）	H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, arXiv:2204.12737, CMP 400 (2023) 805–851／A. Adhikari, S. Cao, arXiv:2202.10375, Ann. Probab. 53 (2025) 140–174
ヤン–ミルズ–Higgs の結果	要旨のみ	S. Chatterjee, arXiv:2401.10507, Probab. Math. Phys. 7 (2026) 339–381
§03〜§06・§09 のその他の文献	書誌のみ	Osterwalder–Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471／Guth, Phys. Rev. D 21 (1980) 2291–2307／Fröhlich–Spencer, CMP 83 (1982) 411–454／Driver, CMP 110 (1987) 479–501／Aizenman–Duminil-Copin, Ann. of Math. 194 (2021) 163–235／Brydges–Federbush, CMP 73 (1980) 197–246／Feynman, Nucl. Phys. B188 (1981) 479–512／Simon, Ann. Phys. 146 (1983) 209–220
2026 年の Douglas の総説（範囲の表）	書誌のみ	M. R. Douglas, Nature Reviews Physics 8 (2026) 86–97（書誌は検索結果による）
表 3・図 2・遠方の傾き・式 (3) の例	計算	この端末の Python（SciPy の K_1。熱核の積分表示と相対差 2×10^{-8} 以内で一致。$r\le 50$ で刻み 10^{-4}、$50<r\le 5000$ で刻み 10^{-2}）。式 (3) の例は算術
$\ell_*/a_0\approx 10^{10.7}$（§05）	計算	7-07 の計算（表 2。$SU(2)$、$\gamma=0.3$、二ループ）

次に読む章：7-11 発散以外の障害。無限体積・公理・一様なギャップの段で止まっていた理由を、発散とは別の障害として並べます。年表と次元ごとの表は 16-01。

発散以外の障害 — 無限大を一つも含まない格子の上にも、問題は残っている

この章は既存の知見の整理です。§02・§08 は未解決の地図です。

この章で分かること — 紫外の発散を取り除いた格子にも残る六つの障害と、そのどこまでが発散の問題か。三つを最小の例の計算で見ること（摂動論の次数と $e^{-c/\alpha}$、ゲージ固定の符号の和 0、体積だけで 0 に向かう真空の重なり）。

前提となる章 — 7-10 四次元で止まる場所。道具は 2-06（Fock 空間）・3-04（ゲージ軌道空間）・4-08（ゲージ固定）・4-10（反射正値性）・5-01（格子）。

先に言うこと — 文献にある障害を並べ直した章で、どれも取り除いていません。六つという数え方と発散かどうかの判定はこの本の整理です。計算は最小の例で、四次元のヤン–ミルズの計算ではありません。

この章の順序

1. 試し方 — 格子間隔を固定する
2. 赤外に小さな径数が無い — 群を替える
3. 摂動論に映らない — 表 1・図 1
4. 自由場に潰れないこと — 自明性と 0/0
5. 状態空間が曲がっている — 発散に還元できる部分と、残る 0/0（表 2）
6. 反射正値性 — 破れる例
7. 無限自由度の構造 — 真空の重なり（図 2）
8. 六つを並べる — 表 4
9. 寄り道：位相のセクターと θ

01

試し方：発散を消しても残るか

「難しさは無限大の処理だ」という説明は一面です。この章は障害を次の試しにかけます。**格子間隔 a を固定したまま（紫外の切断を残したまま）でも、その障害は残るか**。残るなら、発散をどう処理しても片づきません。

発散とは、自由場の一点の分散 $G_a(0) \approx 0.1549/a^2$（四次元）のように切断を外すと無限大に向かう量でした（7-01 §02）。格子間隔を固定した有限の箱の格子ゲージ理論は、有限次元の積分です。

$$\langle F \rangle_{\beta,\Lambda} = \frac{1}{Z_{\beta,\Lambda}} \int F(U)\, e^{-\beta S(U)} \prod_{\ell \in \Lambda} \mathrm{d}U_\ell, \qquad 0 < Z_{\beta,\Lambda} \le 1 \tag{1}$$

Λ は箱の辺の集合、$\mathrm{d}U_\ell$ は重さ 1 の Haar 測度、S は Wilson の作用、β は格子の逆結合（逆温度ではない。大きい β が弱結合）です（7-10 の式 (3)）。無限大は一つもありません。

例：それでも、箱だけを $\mathbb{Z}^4$ へ広げた理論について、Chatterjee の講演スライド（日付の記載なし。PDF の作成日は 2020 年 9 月）は 'Even showing any kind of correlation decay at large β for non-Abelian theories in 3D and 4D is open.' と書きます。既知 その後、有限群については Adhikari–Cao が弱結合での相関の減衰を示しました。既知 この章が読んだ文献の範囲では、いま開いているのは、連続な非可換 Lie 群（$SU(N)$ など）の場合です。結果は表 4 にまとめます。

02

赤外に小さな径数が無い

数学的な評価の多くは小さな数による展開ですが、四次元のヤン–ミルズの結合は短い距離で弱く（漸近自由）、長い距離で強くなり、赤外の側には展開の足場が見当たりません（7-10 §05）。展開が収束する小さい β（強い結合）は、連続極限 $\beta \to \infty$ の反対の岸です。正確には、強結合展開が収束する β の範囲は 0 の近くに限られ、連続極限が要る $\beta \to \infty$ とは重なりません。

格子の上の目標は Chatterjee（2018）の格子の相関長の問題（Problem 5.1）です。ゲージ不変な局所的な量の相関が $e^{-|x-y|/\xi}$ で減る長さ $\xi(\beta)$（格子単位）について

$$0 < \xi(\beta) < \infty \quad (\text{すべての } \beta > 0), \qquad \lim_{\beta \to \infty} \xi(\beta) = \infty \tag{2}$$

を示すこと（四次元・コンパクトな非可換 Lie 群）。既知 前半はどの格子間隔でもギャップがあること、後半は連続極限の見込みです（5-09）。

例：群を替えると (2) は壊れます。$U(1)$ は大きい β で質量ゼロの相に入り、面積則が破れます（Guth 1980、完全な証明は Fröhlich–Spencer 1982）。既知 有限群は弱結合で相関が指数的に減りますが（Adhikari–Cao）既知、閉じ込めず連続極限も無いと考えられています。物理 $SU(N)$ はすべての β で閉じ込めの相と信じられています。物理

どの群にも同じく働く議論は $U(1)$ で誤るので、効くはずなのは「連続で非可換な群で、相転移の点が $\beta=\infty$ にあってもギャップが残る」ことです（5-06・5-10）。欠けているのは、結合が $O(1)$ に育つ尺度を体積によらずに渡る評価です。

03

摂動論に映らない

物理の見立てでは、質量ギャップは理論のただ一つの尺度 Λ の定数倍で（4-07）、一ループの繰り込み群では尺度 μ での結合 g と次の関係にあります。物理

$$\frac{\Lambda}{\mu}=\exp\Big(-\frac{1}{2b_0 g^2}\Big)=\exp\Big(-\frac{c_N}{\alpha}\Big),\qquad b_0=\frac{11N}{48\pi^2},\quad \alpha=\frac{g^2}{4\pi},\quad c_N=\frac{6\pi}{11N} \tag{3}$$

b_0 は結合の走り $\mu\,\mathrm{d}g/\mathrm{d}\mu=-b_0 g^3+\cdots$ の係数です（4-06）。右辺はどの冪よりも速く 0 に近づきます。

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\alpha^{-n}e^{-c/\alpha}=0\qquad (n=0,1,2,\dots) \tag{4}$$

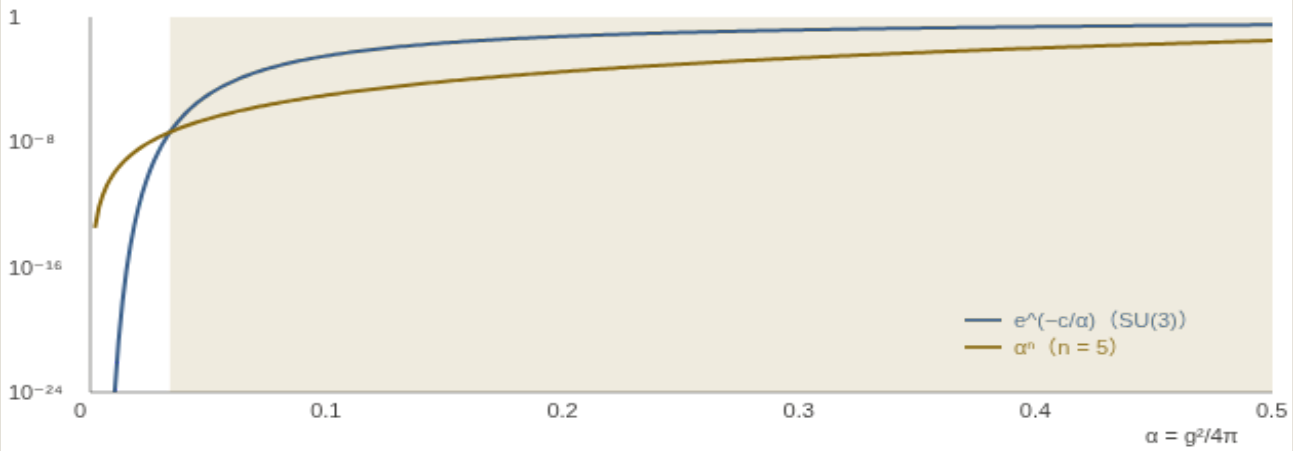
だから $\alpha=0$ のテイラー係数はすべて 0 で、摂動論はどの次数でも $\Lambda=0$ と答えます（量子力学では 2-06）。既知

例：α^n が $e^{-c_N/\alpha}$ と等しくなる次数 $n_*=c_N/\big(\alpha\ln(1/\alpha)\big)$ は、結合が小さいほど増えます。

計算 表 1　$e^{-c_N/\alpha}$ と次数 n_*（$c_2=0.8568$、$c_3=0.5712$）。

α	$SU(2)$	n_*	$SU(3)$	n_*
0.30	5.75e−2	2.37	1.49e−1	1.58
0.10	1.90e−4	3.72	3.31e−3	2.48
0.05	3.61e−8	5.72	1.09e−5	3.81
0.02	2.48e−19	10.95	3.95e−13	7.30
0.01	6.16e−38	18.61	1.56e−25	12.40

図 1　n を動かすと、$e^{-c/\alpha}$ が α^n を上回る帯（縦は常用対数）が動く。帯の左には α^n が大きい範囲が必ず残る



SU(3)、n = 5：0.0337 < α < 0.878 でだけ e^(−c/α) が αⁿ を上回る。α < 0.0337 では αⁿ の方が大きい

計算 この図の数値はこの端末で計算した（式 (3) と交点の二分法）。

欠けているのは無限大の値ではなく、級数に載らない情報です。級数の発散は別の現象です。問題文（Jaffe–Witten 2000、以下 JW）は §6.1 で、摂動級数は多くの例で 'divergent expansions' だと書きます。Beneke（1999）は 'The sum of a convergent series may still differ from R by exponentially small terms exp(−1/α)' と書きます。既知 収束する級数でも $e^{-c/\alpha}$ は取りこぼされえます（4-12・7-12）。

04

自由場に潰れないこと

発散を処理して極限が取れても、自由場（ガウス測度）なら答えではありません（JW §4 は非自明な理論を求める）。平均 0 の場の二点・四点の相関 S_2、S_4 から

$$u_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = S_4 - \big[S_2(x_1,x_2)S_2(x_3,x_4) + S_2(x_1,x_3)S_2(x_2,x_4) + S_2(x_1,x_4)S_2(x_2,x_3)\big] \tag{5}$$

を作ると、ガウスなら $u_4 \equiv 0$ です（Wick の法則。7-08 §01）。

例：四次元の ϕ^4 は、格子で紫外を切って臨界点に寄せた無限体積のスケーリング極限がガウスになります（Aizenman–Duminil-Copin 2021）。既知 発散は処理済みで、それでも極限は自由場です。$SU(2)$ のヤン–ミルズ–Higgs の特別なスケーリング極限もガウスで、非ガウスな極限は 'remains open' とされます（Chatterjee 2026）。既知

何を固定するかも同種の問題です。物理の単位の質量 $m_{\mathrm{lat}}(\beta)/a(\beta)$ は 0/0 の形で、意味を持つのは $m/\sqrt{\sigma}$ のような次元の無い比の極限、つまり 0 に向かう速さの比です（5-09）。要件は 7-08 §10。

05

状態空間が曲がっている

測度を置く場所は、接続の空間をゲージ変換で割った軌道空間で、線形空間ではありません（3-04）。軌道とは、ゲージ変換で互いに移り合う接続の集まりです。Singer（1978）は、S^4（$\mathbb{R}^4$ に無限遠点を一つ足したもの）の上で、非可換なコンパクト群について、各軌道から接続をちょうど一つずつ連続に選ぶことはできないと示しました（'No gauge fixing is possible.'）。既知 題の「曲がっている」は比喩で、正確には、この二つ（線形空間でないこと、代表を大域的に連続には選べないこと）を指します。

発散に還元できる部分

形式的な $\mathrm{d}A$（無限次元のルベーグ測度のつもりのもの）では $Z = \infty$ になり（Chatterjee 2018）、軌道の体積も無限大と見込まれます（Singer 1978）。格子はここを片づけます。式 (1) はゲージを固定せずに有限です。

残る 0/0

残るのは、弱結合の解析でゲージの固定が要るときです。Bałaban は細胞ごとに変わる局所的なゲージを使います（7-05 §05）。格子の全体で一つの共変な（Landau 型の）ゲージを BRST 対称に固定すると、次の 0/0 が現れます（Neuberger 1987。式は Mehta–Daleo–Hauenstein–Seaton 2014 の (2)）。既知 使う言葉を一行ずつ定義します（詳しくは 4-08）。

- **Landau 型のゲージ**：変換後の辺の変数が 1 からどれだけ離れているかを測る関数 F（ゲージ変換の関数）を作り、その臨界点を軌道の代表に選ぶ固定です。下の例の F がその形です。
- **Gribov のコピー**：一つの軌道の上に F の臨界点が複数あるときの、その一つひとつです。
- **Faddeev–Popov の行列 M_{FP}**：臨界点での F の二階微分の行列です。ゲージを固定した積分は $\det M_{\mathrm{FP}}$ を重みに持ちます。
- **BRST 対称な固定**：ゲージを固定した後にも形式的な対称性（BRST）が残るように固定するやり方です。このとき一つの軌道の寄与は、すべてのコピーの $\operatorname{sign}\det M_{\mathrm{FP}}$ の和になります。
- **Euler 標数 χ**：コンパクトで境界の無い多様体（1-05）の上の滑らかな関数（臨界点が退化していないもの）の臨界点を、二階微分の行列の行列式の符号（負の固有値が偶数個なら $+1$、奇数個なら -1）をつけて足した数です。関数の選び方によりません（Poincaré–Hopf の定理）。曲面なら「極小と極大の数 − 鞍点の数」で、球面では 2 です。円では極小が $+1$、極大が -1 と数えるので 0 です。

$$Z_{\mathrm{GF}} = \sum_{\text{Gribov のコピー}} \operatorname{sign}\det M_{\mathrm{FP}} = \chi(G)^{N} = 0 \tag{6}$$

N は格子点の数で、ゲージ変換は各点に群 G の元を一つずつ置くものなので、動かす空間は G の N 個の積です。符号の和はその Euler 標数 $\chi(G)^N$ で、正の次元のコンパクトな連結 Lie 群では $\chi(G)=0$ です。ゲージ不変な量は軌道の上で一定なので、ゲージを固定した期待値は分子も分母も 0 になり、0/0 です。

例：円 $S^1 = U(1)$ の上の滑らかな関数では極大と極小が交互に並び、符号の和は $\chi(S^1)=0$ です。N 点の環で、Mehta らの式 (3) の $F=\sum_j \big(1-\cos(\phi_j+\theta_{j+1}-\theta_j)\big)$ の臨界点をすべて数えました（θ_j は点 j のゲージ変換の角で、全体を一様に回す自由度を除くため $\theta_0=0$ とおく。ϕ_j は辺の角で一様乱数、300 軌道）。

計算 表 2　$U(1)$ の環のゲージ固定。

N	コピーの数	符号の和	極小の数
2	2	0	1
3	6	0	1〜2
4	12	0	2
8	280	0	4
12	5544	0	6

コピーの数は調べた軌道ですべて同じで、偶数の N で $\frac{N}{2}\binom{N}{N/2}$ と指数的に増え、符号の和は常に 0 でした。計算 極小に限れば 0/0 は避けられますが、極小の数が軌道で変わりうる（$N=3$）ことが別の困難です（Mehta ら §I）。0 は位相から来ています。Singer 自身は、回避の道として、局所的な被覆を 1 の分割で貼り合わせる局所化を挙げました（4-08・7-12）。

06

反射正値性を保つ正則化が乏しい

ユークリッドから時空へ戻る道は反射正値性 $\langle \overline{\Theta F}\, F\rangle \geq 0$（$\Theta$ は時間の反射、F は正の時間の側の量）に懸かっています（4-10）。Wilson の作用はこれを保ち（Osterwalder–Seiler 1978）、回転の対称性を壊します。連続の正則化は逆で、問題文は、正則化で失った反射正値性を取り戻す方法は少ないと書き、例に次元正則化と Pauli–Villars を挙げます（JW §6.5。引用は 0-03 §03）。既知

例：自由場の空間運動量 p を固定すると、二点関数の時間の依存は $G(t)=e^{-\omega|t|}/(2\omega)$（$\omega=\sqrt{p^2+m^2}$）。ガウスの場では反射正値性は、正の時刻 t_i と実数 f_i について

$$Q(f) = \sum_{i,j} f_i f_j \, G(t_i + t_j) \;\geq\; 0 \tag{7}$$

です。G が正の重み $\rho(E)$ の指数関数の和なら $Q = \sum_E \rho(E) \big(\sum_i f_i e^{-E t_i} \big)^2 \geq 0$。Pauli–Villars は重い質量 M の項を引き $G_{\mathrm{PV}}(t) = e^{-\omega t}/(2\omega) - e^{-\Omega t}/(2\Omega)$（$\Omega = \sqrt{p^2 + M^2}$）とするので、$\sum_i f_i e^{-\omega t_i} = 0$ となる f で $Q = -\frac{1}{2\Omega} \big(\sum_i f_i e^{-\Omega t_i} \big)^2 < 0$ です。$p = 0$、$m = 1$、$M = 5$、$t = (0.1, 0.2)$、$f = (1, -e^{0.1})$ で $Q = -4.0 \times 10^{-3}$。計算 $M \to \infty$ で破れは縮みますが、切断を残す段では使えません。

二次元より上で Wilson ループを熱流で均す必要がある（Cao–Chatterjee）のは紫外の問題ですが、正値性を保つ正則化、回転の対称性の回復、点でなく曲線に値を持つ観測量（Chatterjee 2018）を公理に載せることは構造の問題です。既知

07

無限自由度の構造

振動子が有限個なら正準交換関係の既約な表現は本質的に一つですが（Stone–von Neumann。2-06）、無限個では同値でない表現が無数に現れます。既知 帰結の一つが Haag の定理で、相互作用する理論を自由場の Fock 空間に（相互作用表示で）載せることはできないとされます（Haag 1955、Hall–Wightman 1957。4-09）。

仕組みは無限大なしに見えます。周波数 $\omega \neq \omega'$ の振動子の基底状態の重なりは $\big(2\sqrt{\omega\omega'}/(\omega + \omega') \big)^{1/2} < 1$ で、一辺 L 点・間隔 a の三次元の周期的な格子の、質量 m と m' の自由場の真空の重なりはモードごとの積です。

$$\langle \Omega_m, \Omega_{m'} \rangle = \prod_{k} \left(\frac{2\sqrt{\omega_k \omega_k'}}{\omega_k + \omega_k'} \right)^{1/2}, \qquad (a\omega_k)^2 = (am)^2 + 4 \sum_{j=1}^{3} \sin^2 \frac{\pi n_j}{L} \tag{8}$$

積は $k = (n_1, n_2, n_3)$、$n_j = 0, \dots, L-1$ の L^3 個のモードにわたります（ω_k' は m' で同様）。各モードの対数は負です。

例：二つの極限を比べます。A は格子間隔を固定して（$am = 0.5$）箱を広げ、B は箱を固定して（一辺 $2/m$）格子を細かくします。どちらも一辺の点の数 L を増やします。

計算 表 3　$m' = 1.2m$ の真空の重なり $\langle \Omega_m, \Omega_{m'} \rangle$。

L	A の重なり（箱の一辺 $0.5L/m$）	B の重なり（格子間隔 $2/(Lm)$）
4	0.9974	0.99741
32	0.6237	0.99745
64	0.02289	0.99746

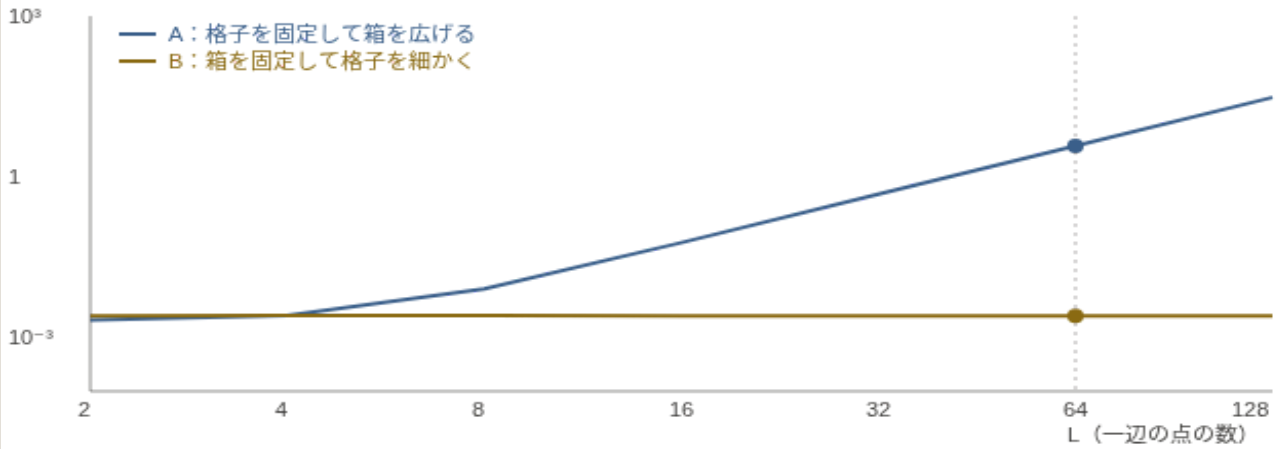
L	A の重なり（箱の一辺 $0.5L/m$）	B の重なり（格子間隔 $2/(Lm)$）
128	7.53e-14	0.99747

A では $-\ln\langle\Omega_m,\Omega_{m'}\rangle$ が L^3 に比例し（一点あたり 1.44×10^{-5}）、重なりは 0 に向かいます。

計算

B で重なりが正の値に落ち着く理由は、大きい運動量のモードにあります。ω_k が大きいとき、一つのモードの対数の寄与はおよそ $-(m'^2-m^2)^2/(64\omega_k^4)$ で、ω_k は $|k|$ にほぼ比例して増えるので、全体は $\sum_k |k|^{-4}$ の形の和になります。三次元では $|k|\approx R$ の殻にあるモードはおよそ R^2 個で、殻ごとの寄与は R^{-2} のように減るので、この和は収束します。計算

図 2　m'/m を選ぶと $-\ln\langle\Omega_m,\Omega_{m'}\rangle$（両対数）が変わる。「動かす」で L を増やす。A は傾き 3（体積に比例）、B は平ら



m'/m = 1.2、L = 64：A の重なり 0.0229（箱の一辺 32/m）／B の重なり 0.99746（格子間隔 0.0313/m）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（式 (8)。m′/m = 1.1, 1.2, 1.5, 2）。

重なりが 0 に向かうのは紫外ではなく体積のせいです（質量の違う自由場の表現が同値でないことは Haag の定理の一般化とされる。Reed–Simon）。構成的場の理論は、有限の箱と格子で測度を密度として作り、その極限から状態空間を再構成します（4-10）。状態空間は入力ではなく出力です（Chatterjee 2018 の 'we do not even know for certain the right spaces'）。

関連する現象と対比しておきます。この節の真空（固定した時刻の、空間三次元の格子の上のもの）は、有限の体積なら重なりが正です（表 3 の B）。質量の違う二つの自由場を、ユークリッドの四次元の時空の測度として比べると、有限の箱（トーラス）でも紫外のために互いに特異になります（1-09 の寄り道、式 (11)）。効き方は、空間の次元 3 と時空の次元 4 で分かれます。

```
08
```

六つを並べる：どこまでが発散か

表 4　六つの障害と発散の部分（紫外の切断を外したときにだけ起きる部分。判定はこの本の整理）。

障害	a を固定しても	発散の部分	欠けているもの
1 赤外の径数	残る	無し	結合が $O(1)$ の尺度を渡る一様な評価
2 摂動論に映らない	残る	無し	級数に載らない $e^{-c/\alpha}$ の扱い
3 非自明性	連続極限の問い	無し	自由場でないことの証明
4 状態空間	局所ゲージと 0/0	形式的な $Z=\infty$、軌道の体積	大域的なゲージ固定に代わるもの
5 反射正値性	回転の回復	粗い場の観測量	正値性を保つ正則化、曲線の観測量の公理
6 無限自由度	残る（体積で直交）	この例（自由場・質量の違い）では無し。時空四次元の測度では紫外も効く（1-09）	状態空間を理論から作ること

2026 年の公開より前の文献では、紫外の側も完了していませんでした（Bałaban の四次元の結果は仮定つきの評価まで。部分列の極限は見込みでした。7-07 §05）。2026-11-10 に公開された構成では、紫外の側と、体積の部分列に沿った無限体積の極限が、Lean で証明されている、と委員会が評価しました（6-01）。それでも、出題者が新しい考えを求めた体積に一様なギャップの側は、示されていません（7-10 §01・6-04）。表 4 の障害のうち、赤外の径数の障害は、公開された構成でも越えられていない側に在ります（この本の読み）。六つの外に局所場との対応（JW 脚注 1）と位相のセクター（寄り道）があります。切れ目は 16-05（名前の対訳は 16-05 の対訳表）、課題は 16-07。

09

寄り道：位相のセクターと θ

飛ばしてよい節です。

滑らかな接続は整数の位相電荷（第二 Chern 数）でセクターに分かれます（3-05）。格子では事情が変わります。二次元の $U(1)$ で、プラケット p の角 $\theta_p \in (-\pi,\pi]$（U_p の偏角の主値）から

$$Q=\frac{1}{2\pi}\sum_{p}\theta_p \;\in\; \mathbb{Z} \tag{9}$$

を作ると、周期的な格子では整数です。辺の角をそのまま足した総和は、各辺が逆向きに二回ずつ現れるので 0 で、主値に直すずれは 2π の整数倍だからです。[紙] ただし配位を連続に動かすと、θ_p が $\pm\pi$ を横切るとき Q は跳び、すべてのプラケットが 1 に近い（作用の密度が小さい）配位に限れば跳びません。Lüscher（1982）は四次元の非可換の格子場でこれを示し、Q が古典的な連続極限で Chern 数に

戻ることも示しました。既知 典型的な配位は粗いので、セクターにはこの種の条件が要ります。Magnen–Rivasseau–Sénéor（1993、MRS）の構成は、自明なセクターに限っています（7-07 §06）。

重みに $e^{i\theta Q}$ を掛ける θ 項は摂動論に見えません。$\theta = \pi$ ではアノマリーのため真空は自明で縮退の無いギャップ状態ではありえない、と論じられています（Gaiotto–Kapustin–Komargodski–Seiberg 2017）。物理 問題文は θ に触れておらず、暗に $\theta = 0$ を指しています。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	六つの障害の一次資料の言葉と、格子間隔を固定しても残ること既知
言えている	表 1〜3・図 1〜2・Pauli–Villars の例計算 、式 (9) の Q が整数であること紙
言えていない	六つの数え方と表 4 の判定（この本の整理）。式 (3)・$\Delta \propto \Lambda \cdot \theta = \pi$（物理の水準）。計算は最小の例で、式 (8) は Haag の定理の証明ではない。どの障害もこの本は取り除いていない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
問題文・格子の相関長の問題・講演スライドの引用	本文	A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*, Clay Math. Inst. (2000)／S. Chatterjee, *Yang–Mills for probabilists*, arXiv:1803.01950 (2018)／同, *Yang–Mills on the lattice: New results and open problems*（講演スライド。PDF の作成日 2020-09。日付の記載なし）
指数的に小さい項・ゲージ固定の不可能性	本文	M. Beneke, *Renormalons*, Phys. Rept. 317 (1999) 1–142／I. M. Singer, CMP 60 (1978) 7–12
式 (6)・環の関数・極小に限る注意	本文 §I–II	D. Mehta, N. S. Daleo, J. D. Hauenstein, C. Seaton, Phys. Rev. D 90 (2014) 054504, arXiv:1406.6678
有限群・$U(1)$・自明性・ガウスな極限・Wilson ループ・位相電荷・$\theta = \pi$	要旨	A. Adhikari, S. Cao, Ann. Probab. 53 (2025) 140–174, arXiv:2202.10375／J. Fröhlich, T. Spencer, CMP 83 (1982) 411–454／M. Aizenman, H. Duminil-Copin, Ann. of Math. 194 (2021) 163–235, arXiv:1912.07973／S. Chatterjee, arXiv:2401.10507, Probab. Math. Phys. 7 (2026) 339–381／S. Cao, S. Chatterjee, arXiv:2111.12813／M. Lüscher, CMP 85 (1982) 39–48／J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, CMP 155 (1993) 325–383／D. Gaiotto, A. Kapustin, Z. Komargodski, N. Seiberg, JHEP 05 (2017) 091

もの	種別	出典・道具
0/0・Gribov・$U(1)$ の相・反射正値性の原典	書誌のみ	H. Neuberger, Phys. Lett. B 183 (1987) 337／M. Schaden, Phys. Rev. D 59 (1999) 014508／V. N. Gribov, Nucl. Phys. B 139 (1978) 1–19／A. H. Guth, Phys. Rev. D 21 (1980) 2291–2307／K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471
無限自由度と表現の一意性	本文 §4.3	Stanford Encyclopedia of Philosophy, “Quantum Field Theory”
Haag の定理と異なる質量への一般化	書誌のみ（二次資料で確認）	R. Haag, Mat.-Fys. Medd. 29 (1955) no. 12／D. Hall, A. S. Wightman, Mat.-Fys. Medd. 31 (1957) no. 5／M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics* II (1975), Theorem X.46（二次資料による。本文未確認）
表 1・図 1	計算	この端末の Python。式 (3) と n_*、交点の二分法
表 2	計算	臨界点を組合せで列挙し、固有値で符号と極小を判定（$N=3$ は Newton 法と一致）
Pauli–Villars の例	計算	式 (7) を二点で評価（$M/m = 2, 5, 10, 100$ で負）
表 3・図 2	計算	式 (8) を全モードで計算（$L \le 180$）。振動子の式は数値積分と一致

次に読む章：7-12 寄り道：「1/0 に記号を与えれば」。§03 の $e^{-c/\alpha}$ と §05 の 0/0 を記号の側から見直します。物理の側からは 17-01。

寄り道：「1/0 に記号を与えれば」 — 値を置くと近づき方が消え、ギャップに期待される尺度は e^{-1/g^2} の形をしている

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — $1/0$ に値を置く体系が手放すもの。$0/0$ が運ぶ近づき方と、それを保つ爆発。どの次数でも 0 に見える e^{-1/g^2} と、Borel 平面の極との結び目。

前提となる章 — 4-05 発散の代数、4-12 寄り道：摂動級数は発散する。使う分はその場で定義します。

先に言うこと — 既知の数学と文献の整理で、ヤン–ミルズについて何かを示す章ではありません。「$1/0$ を記号にしても核心は変わらない見込みが高い」は定理ではなく見立てです。$\Delta \propto \Lambda$ と renormalon は物理の水準の期待です。

この章の順序

1. 問いを三通りに読む
2. 1/0 に値を置く体系と、その代償
3. 経路を決めると値が決まる
4. 0/0 は方向を持つ：爆発
5. 方向を保つ置き換えが効いてきた場所
6. 発散の代数は 1/0 より多くを運ぶ
7. どの次数でも 0 に見える量
8. 1/0 は Borel 平面に現れる
9. 食い違いを記録する：transseries と renormalon
10. 記号が運ぶべきもの — 寄り道：論理の側から

01

問いを三通りに読む

「$1/0$ を記号として数学に組み込めば、発散に悩む場の理論の状況は変わるのではないか」。問いは三通りに読めます。(i) **値を置く**：$1/0$ や $0/0$ に一つの値（∞、0、新しい記号 $\perp$ など）を与える。(ii) **置き換える**：特異点を、近づく方向の集まりや境界に取り替える。(iii) **公理を替える**。

(iii) は別の問題になります。問題文は 'Existence includes establishing axiomatic properties at least as strong as those cited in [45, 35]'（Wightman と Osterwalder–Schrader の公理）と性質を名指ししているからです（0-03）。既知 この章は (i) と (ii) を調べ、次にたどり着きます。

$$\begin{aligned} \text{値を置く} &\Rightarrow \text{近づき方が消える} \\ \text{方向を保つ置き換え} &\Rightarrow \text{幾何と摂動論で効いた} \end{aligned} \tag{1}$$

例： $\sin x/x$ は $x=0$ で $0/0$ の形でも、極限は 1 に決まります。直線の上の近づき方は左右の二通りで、どちらからも同じ値だからです。平面ではそうはいきません（§04）。

02

1/0 に値を置く体系と、その代償

$1/0$ に値を置く体系はいくつもあり、どれも矛盾なく作られていますが、何かを手放しています（表 1）。

既知 表 1　$1/0$ に値を置く体系（IEEE 754 は計算、transreal は書誌のみ）。

体系	$1/0$・$0/0$	手放すもの
リーマン球面	$1/0=\infty$	$0\cdot\infty$・$\infty-\infty$ は未定義。順序は ∞ で切れる
wheel（Carlström）	$0/0$ も一つの元	$0x=0$ が一般に成り立たない。$x-x=0x^2$、$x/x=1+0x/x$
meadow（Bergstra ほか）	$0^{-1}=0$	可換環の公理に式 (2) を足すだけで公理化。$x\neq 0$ でも $x\,x^{-1}\neq 1$ がありうる
transreal（Anderson ほか）	$\pm\infty$、$\Phi=0/0$	体ではない。分配則が一部で崩れるとされる
IEEE 754 の浮動小数点	$1/\pm 0=\pm\infty$、$0/0=\mathrm{NaN}$	等号の反射律と「$x=y\Rightarrow 1/x=1/y$」
ゼロ除算の算法（Saitoh ほか）	$b/0=0$	正則化の経路を一つに固定する（§03）

meadow は可換環（足し算・引き算・掛け算が普通の規則で使える集合。割り算は仮定しない）に、逆元の演算 $x \mapsto x^{-1}$ を足し、

$$(x^{-1})^{-1} = x, \qquad x \cdot (x \cdot x^{-1}) = x \tag{2}$$

だけを課します。ここから $0^{-1} = 0$ が出ます。体（0 以外の元で割り算ができる可換環。$\mathbb{Q}$ など）に $0^{-1} = 0$ と約束したものは meadow で、その直積（成分ごとの演算）も meadow です。たとえば $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ の $x = (1, 0)$ では $x^{-1} = (1, 0)$、$x \cdot x^{-1} = (1, 0) \neq (1, 1)$ です。計算

IEEE 754 の倍精度をこの端末で確かめると、NumPy 1.26 では `1/0`・`1/(-0)`・`0/0` が `inf`・`-inf`・`nan`、`0.0 == -0.0` は `True`、`nan == nan` は `False` で、Python の `1.0/0.0` は例外 `ZeroDivisionError` です。計算 同じ数でも答えが違います。「$1/0$ の値」は体系の約束です。符号つきの 0 は「どちら側から来たか」を一ビット残す記号で、代わりに $0 = -0$ なのに逆数が分かれます。ヤン–ミルズの道具（ヒルベルト空間・スペクトル。1-10）は $0 \cdot x = 0$・引き算・等号に頼ります。隣には $1/\varepsilon$ は持つが $1/0$ は定義しない非標準解析、超関数の積を許す代わりに等号を弱める Colombeau の代数があります（1-11）。

03

経路を決めると値が決まる

Saitoh の草稿（2023）の §2.1 は、b/a を方程式 $ax = b$ の解と見て、Tikhonov の正則化で定めます。既知

$$x_\lambda(a, b) = \arg\min_x \left[\lambda x^2 + (ax - b)^2\right] = \frac{ab}{\lambda + a^2}, \qquad \frac{b}{a} := \lim_{\lambda \to +0} x_\lambda(a, b) \tag{3}$$

$a \neq 0$ なら普通の b/a、$a = 0$ なら $x_\lambda = 0$ なので $b/0 = 0$ です。罰則を $\lambda(x - c)^2$ に替えると

$$x_\lambda = \frac{\lambda c + ab}{\lambda + a^2} \xrightarrow[\lambda \to +0]{} \begin{cases} b/a & (a \neq 0) \\ c & (a = 0) \end{cases} \tag{4}$$

で、$a = 0$ の答えは c そのものです。**例：**$(a, b) = (0, 1)$ では $\lambda = 1$ から 10^{-8} まで常に $x_\lambda = c$。$(a, b, c) = (2, 1, 5)$ では $1.4,\ 0.511,\ 0.5001,\ 0.5$ と b/a に近づきます。計算

式 (3) は、方程式 $ax = b$ の Moore–Penrose の一般逆による解の自明な場合でもあり（草稿 §2.1）、矛盾のない定義です。言えるのは、$b/0$ の値が方程式からではなく、足した罰則——正則化の経路——から来ていることです。場の理論の繰り込みが追いかけるのは、この経路への依存です（§06）。

04

0/0 は方向を持つ：爆発

平面では極限が方向で変わります。

$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}\qquad \big((x,y)\neq(0,0)\big) \tag{5}$$

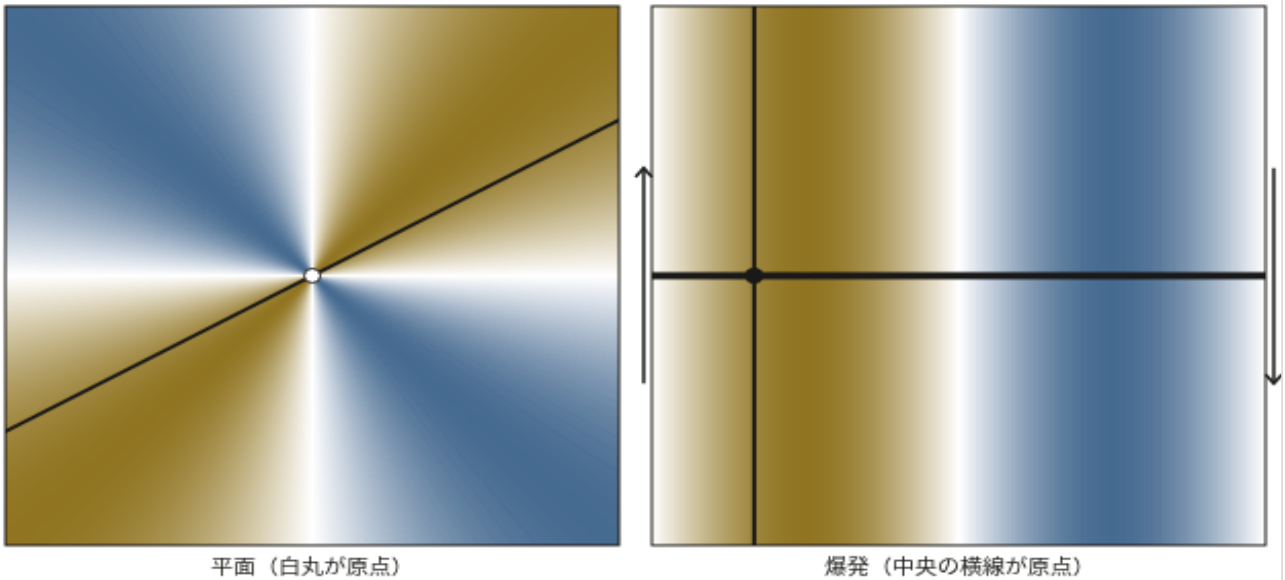
角 θ の半直線 $(r\cos\theta,\, r\sin\theta)$ の上では $f=\sin 2\theta$ で、r によりません。原点に値を一つ決めても f は連続になりません。既知

爆発（blow-up）は、原点を方向の集まり（射影直線 $\mathbb{RP}^1$。θ と $\theta+\pi$ を同じと見た円）に取り替える操作です。方向は $[u:v]$ と書きます。$[u:v]$ は $(u,v)\neq(0,0)$ を 0 でない数倍を除いて見たもの、つまり原点を通る直線の名前です（$[1:2]=[-2:-4]$）。正確には、点と方向の組の集合

$$\widetilde{\mathbb{R}^2}=\big\{\,((x,y),[u:v])\ :\ xv=yu\,\big\} \tag{6}$$

を作ります。原点の外では方向が一つに決まるので元の平面と同じで、原点の上にだけ円が一つ載り、全体は開いたメビウスの帯です（1-05）。この上で $f=2uv/(u^2+v^2)$ は、原点の上の円まで込めて連続です。

図 1　つまみで方向 θ を回すと、その方向から原点に近づくときの値 $\sin 2\theta$ が、左の平面と右の爆発に同時に示される。右は横が $\theta\in[0,\pi)$、縦が符号つきの距離 r で、中央の横線 $r=0$ が原点の代わりの円。左右の辺は矢印に合わせて上下を逆に貼る。「動かす」で方向が回る



θ = 30°：この方向の直線に沿って近づくと f → sin 2θ = 0.866（爆発の中央の横線の上の黒丸）

計算 この図の値は式 (5) を図の中で計算している（色の濃さが $|f|$、二色が符号）。

右の絵は、点 $(r\cos\theta,\, r\sin\theta)$ を $\theta\in[0,\pi)$ と符号つきの r で表したものです。$r<0$ の点は方向 $\theta+\pi$ の側にありますが、$\sin 2\theta$ は $\theta\to\theta+\pi$ で変わらないので、値は縦の縞になり、中央

の横線 $r=0$ を横切っても途切れません。$\theta=\pi$ は $\theta=0$ と同じ方向で、そこでは r の符号が入れ替わるので、右の辺の (π, r) を左の辺の $(0,-r)$ と貼ります。上下を逆に貼るので、帯はメビウスの帯になります。$0/0$ に一つの値を置く記号には、この縞を載せる場所がありません。

05

方向を保つ置き換えが効いてきた場所

特異点を取り替えて効いてきた例は、どれも近づき方を保つ形です。既知

- **無限遠に一点を足す**。Uhlenbeck（1982）の除去可能特異点定理により、$\mathbb{R}^4$ 上で作用が有限なヤン–ミルズ方程式の解は、ゲージ変換を除いて $S^4=\mathbb{R}^4\cup\{\infty\}$ 上の滑らかな解から来ます（3-05）。直観的には、有限な作用が無限遠への近づき方を縛るためです。
- **衝突を方向で置き換える**。Fulton–MacPherson（1994）は配置空間（n 個の点の位置の組全体）の対角線（二点以上が重なる所）を、衝突の方向と尺度を記録する境界に替えます。Axelrod–Singer の第 II 部（1994）はこの型のコンパクト化で、三次元のゲージ理論の一つである Chern–Simons 理論の摂動論の位相不変性を示しました。Bergbauer–Brunetti–Kreimer（2009）は、wonderful model（De Concini–Procesi。Fulton–MacPherson 型のコンパクト化を一般化したもの）への延長が Epstein–Glaser の繰り込みと一致することを示しました。

ヤン–ミルズの中でも同じです。Singer（1978）は、連続な大域的ゲージ固定が無いことから Faddeev–Popov の方法に 'an infinity in the determinant of the Jacobian' が生じると注意し、局所的なゲージ固定を 1 の分割で貼り合わせる道を挙げます（3-04・4-08）。格子の $\Delta=m_{\mathrm{lat}}/a$ は $a\to 0$ で $0/0$ の形で、意味を持つのは次元の無い比 $m_{\mathrm{lat}}/\sqrt{\sigma_{\mathrm{lat}}}$ の極限です（5-09）。効いてきたのは幾何と摂動論の側で、非ガウスの測度と質量ギャップには、まだ届いていません。

06

発散の代数は 1/0 より多くを運ぶ

紫外発散は正則化した量の族として来ます。小さな模型：

$$
\begin{aligned}
I(p;\eta) &= \int_{\eta}^{\infty} \frac{e^{-px}}{x}\,dx, \\
I(p;\delta) &= \int_{0}^{\infty} x^{\delta-1}e^{-px}\,dx = \Gamma(\delta)\,p^{-\delta}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

左は下端を切って $\ln(1/\eta)$ のように、右は冪をずらして $1/\delta$ のように発散します。「$1/0$」と書けば同じですが、速さも形も違い、それでも差は同じ値に行きます。

$$I(1;\cdot) - I(2;\cdot) \;\longrightarrow\; \ln 2 = 0.693147\ldots \tag{8}$$

計算 表 2　二つの正則化（この端末の SciPy）。

η	$I(1;\eta)$	差	δ	$I(1;\delta)$	差
10^{-2}	4.037930	0.683222	10^{-2}	99.432585	0.686831
10^{-4}	8.633225	0.693047	10^{-4}	9999.422883	0.693083
10^{-8}	17.843465	0.693147	10^{-6}	999999.422785	0.693147

尺度 μ を選んで $I_R(p;\mu) = \lim_{\eta\to 0}[I(p;\eta) + \ln(\eta\mu)] = -\gamma - \ln(p/\mu)$（$\gamma$ は Euler の定数）と差し引くと、有限部分は μ によりますが差はよりません。計算 この自由度と、μ を動かしたときの有限部分の動きが、繰り込み群の芽です（4-04）。

場の理論では「どう発散するか」を運ぶ記号化が既に数学的に作られています（4-05）。BPHZ の差し引き、無限大が一度も現れない Epstein–Glaser の方法、次元正則化の極 $1/\varepsilon$ を形式的な記号として Birkhoff 分解する Connes–Kreimer の Hopf 代数です。ヤン–ミルズの摂動的な繰り込み可能性は 't Hooft、't Hooft–Veltman、Lee–Zinn-Justin らにより 1971–72 年に確立し（BRS 対称性による整理が続きます）、Costello が BV 形式で別の証明を与えました。既知 記号化は $1/0$ より多くを運ぶ形で実現していて、それでも問題は残っています。残りは値の割り当ての問題ではありません。

07

どの次数でも 0 に見える量

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \le 0) \end{cases} \tag{9}$$

は微積分の定番です。$x>0$ で $h^{(n)}(x) = P_n(1/x)\,e^{-1/x}$、$P_{n+1}(u) = u^2(P_n(u) - P_n'(u))$（たとえば $P_2 = u^4 - 2u^3$）で、$u\to\infty$ で $u^k e^{-u}\to 0$ だから、すべての n で $h^{(n)}(0) = 0$。テイラー級数は恒等的に 0 なのに、h は $x>0$ で 0 ではありません。既知

$e^{-1/x}$ はどの冪よりも速く 0 に行きますが、勝ち始めるのは遅く、$e^{-1/x}/x^k$ の最大値は $x = 1/k$ での $k^k e^{-k}$ です。**例：** $e^{-1/x}/x^{10}$ は $x=0.1$ で 4.5×10^5、$x=0.05$ で 2.1×10^4、$x=0.02$ でやっと 1.9×10^{-5} です。計算

物理ではこの形が尺度 Λ に現れます。一ループの走る結合は $\alpha_s(\mu^2) = (b_0 \ln(\mu^2/\Lambda^2))^{-1}$ で、Particle Data Group（PDG）の総説は Λ を 'the scale where the perturbatively-defined

coupling would diverge' と説明します（一ループでの走る結合の「1/0」）。逆に解くと

$$\begin{aligned}\Lambda &= \mu\,\exp\!\Big(-\frac{1}{2b_0\,\alpha_s(\mu^2)}\Big)\\ &= \mu\,\exp\!\Big(-\frac{8\pi^2}{\beta_0\,g^2}\Big),\quad \beta_0=\frac{11N}{3}\end{aligned}\tag{10}$$

です（純 $SU(N)$、$\alpha_s=g^2/4\pi$。PDG の $b_0=(33-2n_f)/12\pi$ で $N=3$、$n_f=0$。4-07）。(10) は g^2 の関数として (9) の形なので、Λ に比例する量は g の冪級数のどの次数でも 0 に見えます。質量ギャップは Λ に比例すると期待されています。物理 **例：$SU(3)$ で $g^2=1$ なら $\Lambda/\mu=7.6\times10^{-4}$、$g^2=2$ なら 2.8×10^{-2}**（g^2 は仮）。計算 問題文 §6.6 も 'the mass gap is not classically visible' と書きます（7-10）。

08

1/0 は Borel 平面に現れる

係数が $n!$ の級数

$$F(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n\tag{11}$$

は各項が有限でも、どの $x>0$ でも収束しません。項は n が $1/x$ に届くまで減り、その先で増えます。最小の項は Stirling の公式から $\sqrt{2\pi/x}\,e^{-1/x}$ 程度で、打ち切りの精度はそこで頭打ちです（図 2）。**Borel 和**は、係数を $n!$ で割った $B(t)=\sum t^n=1/(1-t)$ を作り、$\int_0^\infty e^{-t}t^n\,dt=n!$ で戻します。

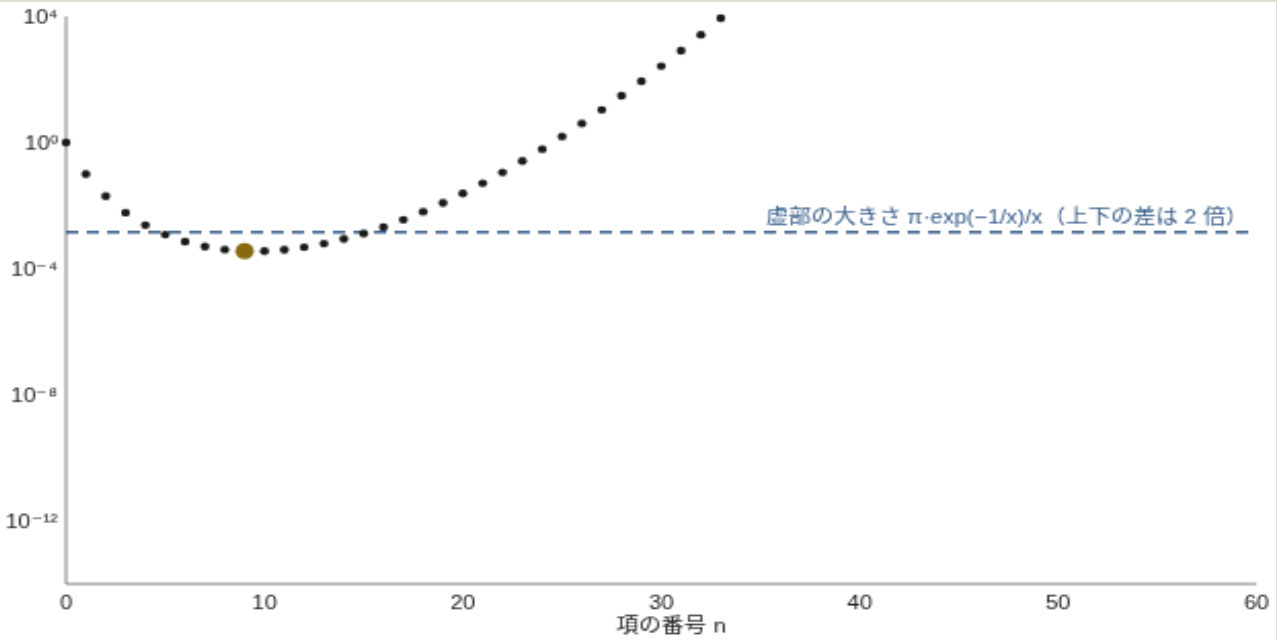
$$S(x)=\int_0^\infty e^{-t}\,B(xt)\,dt=\int_0^\infty\frac{e^{-t}}{1-xt}\,dt\tag{12}$$

積分の道の上、$t=1/x$ に極があります。この章の「1/0」はここ——Borel 平面——に現れます。小さな半円 $t=1/x+\rho e^{i\phi}$ で極を避けると、上を回れば ϕ は π から 0 へ、下を回れば $-\pi$ から 0 へ動くので、$\int dt/(t-1/x)=\int i\,d\phi$ は上で $-i\pi$、下で $+i\pi$ です。被積分関数は $\frac{1}{1-xt}=-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{t-1/x}$ なので符号が反転し、極の近くで $e^{-t}\approx e^{-1/x}$ と置くと、半円の寄与は上で $+i\pi e^{-1/x}/x$、下で $-i\pi e^{-1/x}/x$ になります。上を回る和を S_+、下を回る和を S_- と書くと

$$\begin{aligned}S_\pm(x)&=\mathrm{PV}\!\int_0^\infty\frac{e^{-t}\,dt}{1-xt}\pm i\pi\,\frac{e^{-1/x}}{x},\\ \mathrm{PV}\!\int_0^\infty\frac{e^{-t}\,dt}{1-xt}&=\frac{e^{-1/x}\,\mathrm{Ei}(1/x)}{x}\end{aligned}\tag{13}$$

と食い違います。PV は極の両側から対称に近づけた主値、$\mathrm{Ei}(y) = \mathrm{PV}\int_{-\infty}^{y} e^{s}\,ds/s$ は指数積分です。二つは虚部の符号だけが違い、虚部の大きさは $\pi e^{-1/x}/x$ です。上下の差は $S_{+} - S_{-} = 2\pi i\, e^{-1/x}/x$ で、大きさはその 2 倍です。最適な打ち切りの誤差も食い違いも、$e^{-1/x}$ に x の冪を掛けた大きさです（表 3）。計算

図 2　つまみで x を変えると、項 $n!\,x^{n}$（対数目盛）の谷が動き、Borel 和の虚部の大きさ $\pi e^{-1/x}/x$（破線。上下の差はその 2 倍）と並ぶ。「動かす」で x が往復する



x = 0.100：項は n = 9 で最小（3.63e-4）。虚部の大きさ π·exp(−1/x)/x = 1.43e-3（上と下の和の差はその 2 倍）。

計算 この図の値は、項 $n!\,x^{n}$ と $\pi e^{-1/x}/x$ を図の中で計算している。

計算 表 3　表の数値はこの端末で計算した（SciPy）。N^{*} は最小の項の番号。右端の列は Borel 和の虚部の大きさで、上下の差はその 2 倍。

x	主値 PV	N^{*}	最小の項	$\min_N \lvert S_N - \mathrm{PV}\rvert$	虚部の大きさ $\pi e^{-1/x}/x$
0.05	1.055956	19, 20	2.32e−8	7.70e−9	1.30e−7
0.10	1.131470	9, 10	3.63e−4	1.20e−4	1.43e−3
0.15	1.239251	6	8.20e−3	2.74e−3	2.67e−2
0.20	1.353831	4, 5	3.84e−2	1.26e−2	1.06e−1

09

食い違いを記録する：transseries と renormalon

食い違いを残すには、$e^{-1/x}$ を独立な単位として足します。

$$F(x) = \sum_{n\ge 0} n!\,x^{n} \;+\; \sigma\,\frac{e^{-1/x}}{x} \;+\; \cdots \tag{14}$$

極の避け方の選択は係数 σ の選択に移り、近づき方の情報は $1/0$ の値ではなく $e^{-1/x}$ の係数に記録されます。このような形式的な和を **transseries**、この方向の研究を resurgence と呼びます（4-12）。既知

ヤン–ミルズでは摂動級数が $\alpha_s^n\, n!$ 型に発散すると考えられています（renormalon）。（赤外）renormalon の $n!$ は、ループ運動量の積分のうち運動量が Λ に近い領域——一ループの走る結合が発散する点の近く——からの寄与と考えられています。運動量の大きい側から来る紫外の renormalon も別にあるとされます。PDG は 'closely connected with non-perturbative contributions' と書きつつ、今ある次数では 'not usually visible' とします。物理
resurgence の物理の水準の結果は、$\mathbb{R} \times S^1$ 上の二次元 $CP(N-1)$ 模型（ねじれた境界条件。Dunne–Ünsal 2012）や、$\mathbb{R}^3 \times S^1$ にコンパクト化した、随伴フェルミオンつきの四次元ゲージ理論（Argyres–Ünsal 2012）にあり、$\mathbb{R}^4$ 上の純ヤン–ミルズにはありません。

10

記号が運ぶべきもの

値を置く体系は、演算の規則を弱めるか経路を一つに固定して成り立ち、近づき方の情報を捨てます。効いてきたのは近づき方を保つ置き換えと、発散の速さを運ぶ記号（$1/\varepsilon$ の Birkhoff 分解、繰り込み群）で、どちらも幾何と摂動論の側です。既知 ギャップの尺度と期待される Λ は e^{-1/g^2} の形で、どの次数にも映りません。物理 2026 年より前に残っていた障害——体積に一様な評価・無限体積極限・非自明性・反射正値性・ゲージ軌道空間——は値の割り当ての問題ではありません（7-11）。公開された構成（2026）のあとの今の状態は、7-11 と 6-04 にあります。

寄り道：論理の側から

飛ばしてよい小節です。

元の言語の文について新しい定理を生まない拡張が**保守的拡大**です。Nelson（1977）の内部集合論 IST の Theorem 8.8 は 'Every internal theorem of IST is a theorem of ZFC'（Powell の結果）です。ZFC は通常の数学の公理系、内部定理は IST が新たに足した述語「標準」を使わない文で書かれた定理のことです。IST は $1/\varepsilon$ を扱い、$1/0$ は定義しません。既知 ただ「保守的な記号は定理を増やさないから無力」は決め手になりません。グラフの Hopf 代数も正則性構造も Perelman のエントロピーも通常の数学の中の定義による拡張です。それでも、正則性構造は特異確率偏微分方程式の解の構成に、Perelman のエントロピーは幾何化予想の証明に使われ、Hopf 代数は繰り込みの組合せを見通しよくしました。記号の評価は「何を運ぶか」の水準でしかできません。

この本の読み（未検証）

「質量ギャップは $1/0$ の問題ではなく e^{-1/g^2} の問題である」。確信度は中程度です。transseries も形式的な対象で、それだけでは測度も体積に一様な評価も与えません。$\mathbb{R}^4$ 上の純ヤン–ミルズでは、resurgence は物理の水準でも確立していません。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	表 1 の体系は演算の規則を弱めるか経路を一つに固定している（wheel・meadow・ゼロ除算の算法は本文、IEEE 754 はこの端末で確かめた範囲。transreal は書誌のみ）既知 計算
言えている	式 (5) の爆発、式 (9) のテイラー係数が 0 であること、§05・§06 の既知の例 既知
言えている	表 2・表 3 と §02・§03・§07 の数値。Borel 和の食い違いと最適な打ち切りの誤差が、ともに $e^{-1/x}$ に冪を掛けた大きさであること 計算
言えていない	四次元ヤン–ミルズの摂動級数の発散・renormalon・$\Delta \propto \Lambda$（物理の期待）。$1/0$ の記号化が原理的に無力であること（見立て）。e^{-1/g^2} を運ぶ記号がギャップに届くこと（この本の読み）。この本はヤン–ミルズについて何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
問題文（§6.6・公理の指定）	本文	A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*, Clay Mathematics Institute (2000)
走る結合・b_0・renormalon	本文 §9.1.1・脚注 1	Particle Data Group, *Review of Particle Physics* (2024), §9
wheel・meadow・ゼロ除算の算法	本文	J. Carlström, Research Reports in Math. 2001:11, Stockholm Univ.（誌版 Math. Struct. Comput. Sci. 14 (2004) 143–184）／Bergstra–Hirshfeld–Tucker, arXiv:0901.0823 §1／S. Saitoh, *Division by Zero Calculus; an extended version*（草稿 2023）§2.1
IST・Singer の注意	本文	E. Nelson, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977) 1165–1198（p.1196）／I. M. Singer, Comm. Math. Phys. 60 (1978) 7–12
その他	要旨	Axelrod–Singer, J. Differential Geom. 39 (1994) 173–213／Bergbauer–Brunetti–Kreimer, arXiv:0908.0633／Connes–Kreimer, Comm. Math. Phys. 210 (2000) 249–273／Epstein–Glaser, Ann. IHP A 19 (1973) 211–295／Dunne–Ünsal, arXiv:1210.2423, JHEP 11 (2012) 170（$\mathbb{R} \times S^1$・ねじれた境界条件は本文の節見出しで確認）／Argyres–Ünsal, arXiv:1206.1890, JHEP 08 (2012) 063

もの	種別	出典・道具
ゼロ除算の算法の原典	書誌のみ	M. Kuroda, H. Michiwaki, S. Saitoh, M. Yamane, Int. J. Appl. Math. 27 (2014) 191–198／S. Saitoh, Springer Proc. Math. Stat. 177 (2016) 151–182（ISAAC 2015 の講演録）。いずれも草稿の文献表 [58]・[115] による
繰り込み可能性	書誌のみ	G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 33 (1971) 173–199 と B 35 (1971) 167–188／'t Hooft–Veltman, Nucl. Phys. B 50 (1972) 318–353／B. W. Lee, J. Zinn-Justin, Phys. Rev. D 5 (1972) 3121–3137（続編 3137・3155）／Becchi–Rouet–Stora, Ann. Phys. 98 (1976) 287–321／Costello, AMS (2011)
その他	書誌のみ	Anderson–Völker–Adams, Proc. SPIE 6499 (2007)／IEEE Std 754-2019／Colombeau, North-Holland (1984)／Uhlenbeck, Comm. Math. Phys. 83 (1982) 11–29／Fulton–MacPherson, Ann. of Math. 139 (1994) 183–225／'t Hooft–Veltman, Nucl. Phys. B 44 (1972) 189–213（次元正則化）／M. Beneke, Phys. Rep. 317 (1999) 1–142, arXiv:hep-ph/9807443（renormalon）／M. Hairer, Invent. Math. 198 (2014) 269–504（正則性構造）／G. Perelman, arXiv:math/0211159（エントロピー）
表 2・表 3、§02・§03・§07 の例、図 1・図 2	計算	この端末の Python 3・NumPy 1.26・SciPy 1.11（E_1・Γ・Ei、主値は Cauchy 重みの数値積分と 12 桁一致、meadow は有理数で検算）。図は式 (5) と $n!\,x^n$ を図の中で計算

次に読む章：8-01 格子・Wilson の測度・規約。第二巻は第 8 部から、公開された構成の対象の定めに入ります。物理の側の見方は第三巻の 17-01 物理はどう見ているか で、尺度 Λ を物理がどう扱うかから第 17 部が始まります。