第二巻　存在 — 公開された構成を読む

第 8 部 格子から連続へ — 対象

Kiichi, Shiori and Rin · 2026-11-14 の版 · https://computoergosum.com/principia/yang-mills/

> この PDF は Web 版の各章をそのまま刷ったものです。動かせる図は刷った時点の姿で止まっています。章の間のリンクは Web 版へ飛びます。最新の内容は Web 版に在ります。

章		頁
8-01	格子・Wilson の測度・規約	2
8-02	段取り — 間隔の列・体積の列・育つ辺	10
8-03	局所場の札と格子の代表	17
8-04	繰り込んだ挿入	25
8-05	相関関数と極限の順	32

格子・Wilson の測度・規約

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§05 は本書の検討です。

この章で分かること — 公開された構成が出発点に置く対象 — 群 $G \subset U(m)$、周期の格子、面のホロノミー、Wilson の測度 — の定義と、その規約（$\beta = 1/g_0^2$、内積 $\langle X, Y\rangle_{\mathfrak{g}} = -m^{-1}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}(XY)$、Casimir の定数 $C_{\mathfrak{g}}$）です。最後に、本書の規約（$SU(2)$ の標準の $\beta = 4/g^2$）との換算を一つの表にします。

前提となる章 — 5-01 Wilson の格子（導入）、19-01 格子・リンクの変数・Wilson の測度（本書の規約）、4-06 漸近自由（一ループの係数）。この巻の引用の約束は 6-00。

先に言うこと — この章は定義と規約の章です。格子間隔の列と体積の列は次の 8-02、連続の極限は 8-05 で扱います。公開された構成の結果は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」の水準で引き、本書が自分で確かめたのは定義と言明の形を読んだことまでです。

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

この章の順序

1. 言明 — 群・格子・Wilson の測度：公開の言明が置く対象
2. 連続の規約 — β = 1/g² と内積：面の項が曲率の二乗に近づく仕組み
3. Casimir の定数 C_g：定義、SU(N) での値、表現の大きさへの依り方
4. 換算表 — 公開された構成・本書・標準の規約：同じ数がどの規約で何を意味するか
5. 本書の検討で見えていたこと：本書の Lean の規約との比べ
6. 読めていない所：在りかつき

01

言明 — 群・格子・Wilson の測度

公開された構成は、Lean のリポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）として公開され、委員会の評価書 `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10、以下「評価書」）がそれを評価しています。この部では、その構成が格子の上に置く対象と、格子から連続へ渡る道具を読みます。以下、ファイルの相対パスはこのリポジトリの中のものです。

群。入力は、ある m について $U(m)$ の閉じた部分群 G で、その実の Lie 環 $\mathfrak{g}$ が非可換で単純なもの（真の非零のイデアルを持たない）です 源 （`PublicTheory.lean` の `GaugeGroup`・`GaugeGroup.IsSimple`、25〜45 行）。m は「行列の大きさ」で、群の階数や $\dim \mathfrak{g}$ とは別の数です。$G = SU(2)$ は二次元の定義表現で与えられ、$m = 2$ です 源 （`ConcreteSU2.lean` の `su2`）。

格子。間隔の番号 N と体積の番号 p の二つの添字があります。辺の点の数は $L_p D_N$ で、格子は

$$\Lambda_{N,p} = \big(\mathbb{Z}/(L_p D_N)\mathbb{Z}\big)^4, \qquad a_N = D_N^{-1} \tag{1}$$

です。格子点 y は連続の点 $a_N \cdot y$（各座標を $-\tfrac{1}{2}L_pD_N$ から $\tfrac{1}{2}L_pD_N$ の間の代表で読む）に置かれます 源 （`PublicWilson.lean` の `Site`・`mesh`・`place`、11・50〜52 行）。辺の長さは連続の単位で $a_N \cdot L_p D_N = L_p$ です。D_N と L_p の選び方は 8-02 で読みます。

面と Wilson のエネルギー。リンクの変数 $U_{y,\mu} \in G$ を正の向きの辺ごとに置き、面のホロノミーを

$$U_{\square} = U_{y,\mu}\, U_{y+e_\mu,\nu}\, U_{y+e_\nu,\mu}^{-1}\, U_{y,\nu}^{-1} \qquad (\mu < \nu) \tag{2}$$

とします 源 （`plaquette`、20〜23 行）。Wilson のエネルギーは、格子点と向きの組 $\mu < \nu$ の全てにわたる和

$$E(U) = \sum_{y \in \Lambda_{N,p}} \sum_{\mu<\nu} \Big(1 - \frac{1}{m} \operatorname{Re}\operatorname{Tr} U_{\square}\Big) \tag{3}$$

です 源 （`wilsonEnergy`、25〜27 行。分母は `g.n+1` で、これが m）。面は一枚ずつ一度だけ数えられ、全部で $6|\Lambda_{N,p}|$ 枚です。

Wilson の測度。Haar の確率測度 h の積に密度 $e^{-\beta E}$ を掛けて正規化したもの

$$d\mu^{\mathrm{W}}_{N,p}(U) = Z_{N,p}^{-1} \exp\big(-\beta_{N,p} E(U)\big) \prod_{e} dh(U_e) \tag{4}$$

が格子の理論です 源 （`wilsonLaw`、29〜33 行）評 （評価書 §4、式 (3)）。公開の構造 `WilsonFamily`（35〜46 行）は、体積の列 `period`、間隔の分母の列 `denominator`（どちらも狭義に増える）、結合 `beta N p`、Haar の測度（確率で、左不変）、札の型 `Token` と挿入 `insertion` を欄に持ちます。札と挿入は 8-03・8-04 の主題です。

この構造と、それが満たす条件 `WilsonRegularity`（`ChallengeSpec.lean` 12〜22 行）は、公開の定理 `JointExistence`（同 186〜188 行）の言明の一部です 源 。つまり「どの格子の上のどの測度から始めるか」は、公開の言明そのものに書かれています。

格子の側の定義は、独立に作られた格子ゲージ理論の Lean の定式化（`mrdouglasny/lgt`）と照合されています。委員会の記録では、その照合は格子点・リンク・面の添字を付け替え、作用・分配関数・確率測度が一致することを Lean で示したもので、結合の換算は $\beta_{\mathrm{submission}} = m\,\beta_{\mathrm{lgt}}$ です 評 （評価書 §11）。字句は委員会の注釈つきの例 `LatticeAndScale-20261028.lean` の `same_plaquette`・`coupling_conversion`（35・55 行）に在ります 源 。

02

連続の規約 — β = 1/g² と内積

評価書 §3 は、連続の Yang–Mills の規約を次のように置きます 評 。滑らかな $\mathfrak{g}$ 値の接続 A の曲率を $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$ とし、$\mathfrak{g}$ の上の不変な内積を

$$\langle X, Y \rangle_{\mathfrak{g}} = -\frac{1}{m}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}(XY) \tag{5}$$

とします。形式的な測度は

$$Z^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{2g^2}\int_{\mathbb{R}^4}\sum_{\mu<\nu}\|F_{\mu\nu}(x)\|_{\mathfrak{g}}^2\,d^4x\Big)\,\mathcal{D}A \tag{6}$$

です。この規約で、式 (4) の β は $\beta = 1/g_0^2$（g_0 は切断での結合）と読まれます 評 （評価書 §4）。評価書は、(6) に当たる確率測度を作ることは主張されていない、と明記しています。作られるのは局所の観測量の相関関数です（8-05）。

なぜ $\beta = 1/g^2$ かは、面の項の Taylor 展開で分かります 初 。リンクが滑らかな接続の平行移動から来ているとき、間隔 a の面のホロノミーは $U_{\mu\nu} = \exp X$、$X = a^2 F_{\mu\nu}(x) + O(a^3)$ と書けます。X は反エルミートなので $\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,X = 0$ で、$\exp X$ を二次まで展開すると

$$1 - \frac{1}{m}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,U_{\mu\nu} = -\frac{1}{2m}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}(X^2) + O(a^8) = \frac{a^4}{2}\|F_{\mu\nu}\|_{\mathfrak{g}}^2 + O(a^5) \tag{7}$$

です。格子点の和 $\sum_y$ は $a^{-4}\int d^4x$ に当たるので、

$$\beta\, E(U) \;\approx\; \frac{\beta}{2}\int \sum_{\mu<\nu} \|F_{\mu\nu}\|_{\mathfrak{g}}^2 \, d^4x \tag{8}$$

となり、(6) と比べて $\beta = 1/g^2$ です。評価書 §4.1 の式 (4)、$a^{-4}\bigl(1 - \frac{1}{m}\operatorname{Re}\operatorname{Tr} U_{\mu\nu}\bigr) \to -\frac{1}{2m}\operatorname{Tr} F_{\mu\nu}(0)^2$ は (7) と同じ事実です 評 。

この内積で長さを測ることは、ただの約束ではありません。後で出る係数 — 走る結合の傾き、Casimir の定数、跡の異常の係数 — は全てこの内積に対して書かれます。規約を変えれば係数の数値が変わり、意味は変わりません。§04 の表は、その数値の対応です。

03

Casimir の定数 C_g

公開の言明 `WilsonRegularity.running` が求めるのは、$\beta_{N,p}/\log(1/a_N)$ がある正の傾き s に近づくこと — 正の傾きが**在ること** — だけです 源 （`ChallengeSpec.lean` 13〜14 行）。構成はこれを $s = 11C_{\mathfrak{g}}/(24\pi^2)$ で満たします 源 （`HierarchyBridge.lean` の `regular`、18 行） 評 （評価書 定理 4.1 の式 (7)）。ここで $C_{\mathfrak{g}}$ は、(5) の内積に対する随伴の Casimir の定数で、次の等式で決まる数です。

$$-\operatorname{tr}\bigl(\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y\bigr) = C_{\mathfrak{g}}\,\langle x, y\rangle_{\mathfrak{g}} \qquad (x, y \in \mathfrak{g}) \tag{9}$$

Lean では、(5) の内積で正規直交な基底 b_i について $C_{\mathfrak{g}} = -\sum_i \operatorname{tr}(\operatorname{ad} b_i \circ \operatorname{ad} b_i)/\dim \mathfrak{g}$ と定義され（`YM/Gauge/Colors.lean` の `casimir`、180 行）、単純な $\mathfrak{g}$ について (9) が成り立つことが `trace_adjoint`（`YM/Gauge/Casimir.lean`、140 行）です 源 。内積が (5) であることは `trace_color`（`Colors.lean`、71 行。$-\operatorname{Re}\operatorname{Tr}(cd) = m\langle c, d\rangle$）で読めます 源 。傾きの定数は `slopeConstant` $= 11C_{\mathfrak{g}}/(24\pi^2)$（`Colors.lean`、184 行）、$b_0 = 11C_{\mathfrak{g}}/(48\pi^2)$（`YM/Pert/Asymptotics/RawAxis.lean`、13 行）で、$2b_0$ が傾きです 源 。

$SU(N)$ の定義表現での値。 $\mathfrak{su}(N)$ の Killing 形式は $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} x\ \operatorname{ad} y) = 2N\operatorname{Tr}(xy)$ です。(5) で $m = N$ とすると $-2N\operatorname{Tr}(xy) = C_{\mathfrak{g}}\cdot(-\operatorname{Tr}(xy)/N)$ なので

$$C_{\mathfrak{su}(N)} = 2N^2, \qquad C_{\mathfrak{su}(2)} = 8 \tag{10}$$

です 初 （$N = 2, 3, 4$ で数値でも確かめました。$8, 18, 32$）。傾きは $SU(2)$ で $11\cdot 8/(24\pi^2) = 11/(3\pi^2) \approx 0.3715$ です。

表現の大きさへの依り方。 (5) は行列の跡を m で割るので、同じ Lie 環でも、どの $U(m)$ に埋め込むかで内積が変わり、$C_{\mathfrak{g}}$ の値も変わります。たとえば同じ $\mathfrak{su}(2)$ を三次元の随伴表現（$SO(3) \subset U(3)$、$m = 3$）で持つと、(9) から $C_{\mathfrak{g}} = 3$ になります 初 （数値で確かめました）。

そのときは β と g の意味も (5) に合わせて変わります。**$C_{\mathfrak{g}}=8$ は「$SU(2)$ を二次元の表現で持つ」規約での値**です。数値だけを他の規約の式に持ち込まないでください。

標準の規約との照合。$SU(N)$ の標準の規約では $\beta_{\mathrm{std}}=2N/g_{\mathrm{std}}^2$、一ループの係数は $b_0^{\mathrm{std}}=11N/(48\pi^2)$ です（Gross–Wilczek、Politzer。4-06）。漸近自由の一ループの走り $1/g_{\mathrm{std}}^2\approx 2b_0^{\mathrm{std}}\log(1/a)$ を β に直すと $\beta_{\mathrm{std}}/\log(1/a)\to 2N\cdot 2b_0^{\mathrm{std}}=11N^2/(12\pi^2)$ で、(10) を入れた $11C_{\mathfrak{g}}/(24\pi^2)=11\cdot 2N^2/(24\pi^2)$ と一致します 初 。

04

換算表 — 公開された構成・本書・標準の規約

本書の第三巻の対象は $SU(2)$ で、重みを $\exp\bigl(\beta\sum_p \mathrm{Re}\,U_p\bigr)$（$\mathrm{Re}\,U_p=\frac12\,\mathrm{tr}\,U_p$、四元数の実部）と書きます（19-01 §05）。公開された構成で $G=SU(2)$、$m=2$ とすると、$\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,U/m=\frac12\,\mathrm{tr}\,U=\mathrm{Re}\,U$ なので

$$e^{-\beta E(U)}=e^{-6|\Lambda|\beta}\exp\Bigl(\beta\sum_p \mathrm{Re}\,U_p\Bigr) \tag{11}$$

で、定数は正規化で消えます 初 。**$SU(2)$ では、公開された構成の β と本書の β は同じ数です。**違うのは、その数を g で書くときの規約だけです。

量	公開された構成（$G\subset U(m)$）	本書（$SU(2)$）	標準の規約（$SU(N)$、定義表現）
面の重み	$\exp\bigl(-\beta\sum(1-\frac1m\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,U_\square)\bigr)$	$\exp\bigl(\beta\sum\mathrm{Re}\,U_p\bigr)$（定数倍を除き左と同じ）	$\exp\bigl(-\beta_{\mathrm{std}}\sum(1-\frac1N\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,U_p)\bigr)$
β と g	$\beta=1/g^2$（内積 (5)）	$\beta=4/g_{\mathrm{std}}^2$	$\beta_{\mathrm{std}}=2N/g_{\mathrm{std}}^2$
g どうし	$g_{\mathrm{std}}^2=2m\,g^2$。$SU(2)$ では $g_{\mathrm{std}}^2=4g^2$、β の数は三つとも同じ 初		
Casimir	$C_{\mathfrak{g}}$（(9)、内積 (5) に対して）。$SU(N)$ の定義表現で $2N^2$、$SU(2)$ で 8	（使わない）	$C_A=N$（$\mathrm{tr}\,T^aT^b=\frac12\delta^{ab}$ の規約）
一ループの係数	$b_0=11C_{\mathfrak{g}}/(48\pi^2)$。$SU(2)$ で $11/(6\pi^2)$	（β の単位で書く。下の行）	$b_0^{\mathrm{std}}=11N/(48\pi^2)$。$SU(2)$ で $11/(24\pi^2)$
β の走りの傾き	$\beta/\log(1/a)\to 2b_0=11C_{\mathfrak{g}}/(24\pi^2)$。$SU(2)$ で $11/(3\pi^2)\approx 0.3715$	辺 2 の一段で $\frac{11}{3\pi^2}\ln 2\approx 0.2575$（15-01）	$2N\cdot 2b_0^{\mathrm{std}}=11N^2/(12\pi^2)$
独立の格子の定式化	$\beta=m\,\beta_{\mathrm{lgt}}$ 評	—	—
跡の異常の係数（13-02）	$3\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{g}/\pi^4$。$SU(2)$ で $9/\pi^4\approx 0.0924$	（対応物なし）	—

二つの b_0 の比は 4 で、これは $g^2_{\mathrm{std}} = 4g^2$ から来ます。β で書いた傾きは三つの規約で一致します（β は同じ数だから）。本書の辺 2 の一段の値は **傾き** $\times \ln 2$ で、公開された構成の辺は 3 以上の奇数なので（8-02）、辺 2 の一段そのものは扱われていません。比べられるのは $\log b$ の係数だけで、一段の $O(1)$ の定数は比べられません 推 。

体積の単位にも注意が要ります。公開された構成の長さの単位は「段 0 の間隔」で、$a_0 = 1$ です（8-02）。本書の第三巻の格子は間隔 1 の一つのトーラスです。同じ「1」でも、公開された構成では β を段 0 で決まった値 $\bar{\beta}$ に合わせることで物理の単位が決まっています（10-01）。本書の格子間隔 1 には、そうした合わせは入っていません。

05

本書の検討で見えていたこと

本書の Lean は $SU(2)$ だけを、単位の四元数で扱いました（19-01）。重みの形・β の意味・Haar の測度の積は、§04 のとおり公開された構成の $m = 2$ の場合と同じです。違いは次の三つです。

- 本書の格子は間隔 1 に固定した一つのトーラスで、間隔の列も体積の列もありません。公開された構成は二つの添字 (N, p) の族を最初から持ちます。
- 本書の Lean は Lie 環の内積も Casimir の定数も定義していません。一ループの値 $\frac{11}{3\pi^2}\ln 2$ は、紙と数値の側（15-01 など）で使っただけです。
- 公開された構成は、任意の単純な閉じた行列群について同じ言明を立て、$SU(2)$ はその特別な場合です（`ConcreteSU2.lean` の `su2Theory`）。

規約の上で食い違う所は見つかりませんでした。本書の β で書いた数（強結合の窓 $|\beta| < 0.0556$ など、第 20 部）は、公開された構成の β に同じ数のまま読めます。ただし公開された構成は全ての段で β を大きく保ち（10-01）、強結合の窓は通りません。

06

読めていない所

- `GaugeGroup` から構成の内部の型 `Gauge` への移し（`g.core`・`GaugeGroup.coreSimple`）の中身は読んでいません。$C_{\mathfrak{g}} > 0$（`casimir_pos`）の証明も読んでいません。
- (7) の展開は本書の手計算です。構成が札の代表を選ぶときの Taylor の条件（8-03）は読みましたが、面の項そのものについて (7) を述べる宣言は探していません。

- 委員会の側の `submissions/openai-20261028/checks/ImportedAFGauge.lean`（81〜86 行）は、一ループの係数を別の規約 $\mu\, dg/d\mu = -b_0 g^3/(16\pi^2)$、$b_0 = \frac{11}{3} C_2(\mathrm{adj})$ で持ちます 源 。$SU(N)$ では $11N/3$ で、$16\pi^2$ で割ると標準の $b_0^{\mathrm{std}} = 11N/(48\pi^2)$ と同じです 推 。この規約の係数が委員会の検査のどこで使われるかは読んでいません。
- 独立の格子の定式化との照合（§01 の最後）は、注釈つきの例の言明を読んだだけで、照合の証明は読んでいません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
源 公開の言明は、$G \subset U(m)$（Lie 環が単純）、格子 (1)、面 (2)、エネルギー (3)、測度 (4) の族から始まる（`PublicWilson.lean` 20〜46 行）	どの $\beta_{N,p}$ を選ぶか（それは構成の側。10-04）
評 $\beta = 1/g_0^2$、内積は (5)（評価書 §3・§4）	(6) に当たる連続の確率測度の存在（評価書が主張されていないと明記）
源 $C_{\mathfrak{g}}$ の定義と (9)（`casimir`・`trace_adjoint`）	$C_{\mathfrak{g}}$ の値が表現に依らないこと（依る。§03）
初 $SU(N)$ の定義表現で $C_{\mathfrak{g}} = 2N^2$、$SU(2)$ で 8。傾きは $11/(3\pi^2)$	他の埋め込み・他の群での値の一覧
初 $SU(2)$ で公開された構成の β と本書の β は同じ数（(11)）	一段の $O(1)$ の定数の比べ（辺が違う）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
格子・面・エネルギー・測度・`WilsonFamily`	源	`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0、版 3456e5e）の `PublicWilson.lean` 10〜46 行、`ChallengeSpec.lean` 12〜22・186〜188 行、`PublicTheory.lean` 25〜45 行、`ConcreteSU2.lean`
規約 (5)(6)、$\beta = 1/g_0^2$、式 (3)(4)	評	評価書 `yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）§3・§4・§4.1
$C_{\mathfrak{g}}$・傾き・b_0	源	`YM/Gauge/Colors.lean` 71・180・184 行、`YM/Gauge/Casimir.lean` 140 行、`YM/Pert/Asymptotics/RawAxis.lean` 13 行
独立の格子の定式化との照合	評	評価書 §11
独立の格子の定式化との照合（注釈つきの例）	源	評価の側 `yang-mills-group/YM`・版 55ba9fc の `submissions/openai-20261028/docs/examples/LatticeAndScale-20261028.lean` 35・55 行
$\mathfrak{su}(N)$ の Killing 形式、一ループの係数	典	D. J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1343；H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1346（4-06）

もの	種別	出典・道具
$C_{\mathbb{g}}$ の値（$N = 2, 3, 4$、随伴の埋め込み）、24 と 48/16 の勘定	初	本書の検討の数値の記録（`numcheck.py`。行列の跡と随伴の作用を数値で組み、(9) の比を計算）

この章で使った語 — Wilson の測度、面のホロノミー、Casimir の定数、一ループの係数、規約。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：8-02 段取り — 間隔の列・体積の列・育つ辺 — 格子の族の二つの添字が、どう選ばれているか。

段取り — 間隔の列・体積の列・育つ辺

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討です。

この章で分かること — 格子の族 $\Lambda_{N,p}$ の二つの添字 — 間隔の番号 N と体積の番号 p — が、公開の言明と構成の側でそれぞれどう決まっているかです。間隔は $a_N = 1/D_N$、$D_N = \prod_{k<N} b_k$ で、比 b_k は 3 以上の奇数、番号とともに減らず、無限に育ちます。体積の辺 L_p は段 0 の間隔を 1 とする単位で測ります。

前提となる章 — 8-01 格子・Wilson の測度・規約。繰り込みの段の考えは 7-05、本書のブロック写像は 19-04。

先に言うこと — 間隔の列は構成が選ぶもので、公開された構成は「どんな間隔の列でも同じ極限になる」とは言っていません。辺を育てる理由の詳しい勘定は 10-05、定数を選ぶ順は 11-08 に置きます。

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

この章の順序

1. 言明 — 公開の言明が求めること：狭義に増える二つの列と、走りの条件
2. 段の向きと格子の大きさ：段 N が最も細かく、段 0 が間隔 1
3. 比の列 — 奇数・非減少・育つ：暦の条件から読めること
4. なぜ辺を育てるか（あらまし）：一段の誤差を log b で割る
5. 体積の列と単位：L_p = 4(M+p+1)、試験関数の置き場所
6. 本書の検討で見えていたこと：辺 2・辺 3 の固定したブロック
7. 読めていない所

01

言明 — 公開の言明が求めること

公開の構造 `WilsonFamily`（8-01）は、体積の列 $p \mapsto L_p$（`period`）と間隔の分母の列 $N \mapsto D_N$（`denominator`）を持ち、どちらも正の整数で**狭義に増える**ことだけを求めます 源（`PublicWilson.lean` 36〜39 行）。間隔は $a_N = 1/D_N$（`mesh`、50 行）です。

この族に課される条件 `WilsonRegularity` の一つ目が、結合の走りです 源（`ChallengeSpec.lean` 13〜14 行）。

$$\exists\, s > 0 \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_0 \;\; \forall N \ge N_0 \;\; \forall p : \qquad \left| \frac{\beta_{N,p}}{\log(1/a_N)} - s \right| < \varepsilon \tag{1}$$

量化の順に注意します。N_0 は ε だけで決まり、体積の番号 p には依りません。つまり走りは**体積に一様**です。構成はこの傾きを $s = 11C_{\mathrm{g}}/(24\pi^2)$（評価書が一ループの係数の二倍として書く値。8-01 §03）で満たします 源（`HierarchyBridge.lean` の `regular`、16〜25 行）評（評価書 定理 4.1 の式 (7)）。走りの証明は 10-06 で読みます。

評価書は、この族について次のことをはっきり書いています 評（評価書 §4・§4.3）。

- 構成は二つの列を**選ぶ**。紫外の収束の定理は、ありうる全ての間隔の列についての収束を言っていない。
- 収束は、選ばれた間隔の列の**全体**に沿って成り立つ（部分列ではない）。ただし、間隔の列の型についての普遍性の結果は無い。

評価書の付録（Lean の言明の用語集）は、構成の選び方を $L_p = 4(M + p + 1)$（M は大きさの条件を満たすよう十分大きく固定）、$D_N = \prod_{k<N} b_k$、$b_N \ge 3$ は奇数で $b_{N+1} \ge b_N$、$\log b_N / \log D_N \to 0$ と説明します 評（評価書 付録 A の `WilsonFamily.period`・`denominator`）。§02〜§05 で、構成の側の定義と照らします。

02

段の向きと格子の大きさ

構成の側の段取りは、構造 `Schedule` にまとまっています 源（`YM/Lattice/Scale.lean` 28〜34 行）。欄は、比の列 `block`（各 b_m は奇数で $b_m \ge 3$）と体積の列 `period`（4 で割り切れ、狭義に増える）です。そこから

$$D_0 = 1, \quad D_{m+1} = D_m\, b_m, \qquad a_m = \frac{1}{D_m}, \qquad n_{m,p} = L_p\, D_m \tag{2}$$

と定義されます 源 （`denominator` 39〜41 行、`a` 99 行、`side` 67 行）。$n_{m,p}$ は段 m の格子の一辺の点の数で、段 m の格子は $(\mathbb{Z}/n_{m,p})^4$ です。物理の辺の長さは

$$a_m \cdot n_{m,p} = L_p \qquad (\text{全ての } m) \tag{3}$$

で、段に依りません 初 （委員会の例の `side_length_in_physical_units`、`LatticeAndScale-20261028.lean` 92 行でも確かめられています 源 ）。

段の向き。切断 N の理論は、段 N（最も細かい、間隔 a_N）の Wilson の測度から始まり、繰り込みの一段（9-01）を N 回施して段 0（間隔 $a_0 = 1$）まで粗くします。段 m から段 $m-1$ への一段で、辺の点の数は b_{m-1} で割られます。D_m が奇数の積なので、粗い点を細かいブロックの**中心**に置けます（9-02）。

記号	意味	Lean の側
N	切断の番号（最も細かい段）	公開の `WilsonFamily` の添字 `N`
$m \in \{0, \dots, N\}$	繰り込みの段（$m = N$ が裸、$m = 0$ が間隔 1）	`History` の段の添字
b_m	段 $m+1$ から段 m への比（ブロックの辺）	`Schedule.block m`
$D_m,\ a_m$	分母と間隔	`Schedule.denominator` ・ `Schedule.a`
L_p	物理の辺の長さ（段 0 の間隔が単位）	`Schedule.period p`（公開の `period`）
$\log(1/a_m) = \sum_{k<m} \log b_k$	段の目盛り	`Schedule.scale`（`scale_succ`、124 行）

公開の言明の分母 D_N は、ここの `Schedule.denominator` そのものです 源 （`WilsonBridge.lean` の `wilsonFamily`、20〜30 行）。

03

比の列 — 奇数・非減少・育つ

`Schedule` 自身が求めるのは「奇数で 3 以上」だけです。残りの性質は、暦 `Calendar` とその条件 `Calendar.Fits` から来ます 源 （`YM/RG/History.lean` 64〜77 行と 97 行から）。暦は、段の定数の組の列 $j \mapsto \mathrm{stage}(j)$、辺の候補の列 $j \mapsto \mathrm{factor}(j)$、段の深さ $J(m) \geq 4$ を持ち、`Fits` は次を求めます。

- `sameFactor`：$b_m = \mathrm{factor}(J(m+1))$。`monotoneL`：factor は単調。`mono`：$J$ は単調。`stepSlow`：$J(m+1) \leq J(m) + 1$。`deep`：$J(m) \to \infty$。
- `mesh`（`Gentle`、`Scale.lean` 129〜130 行）：$\log b_m / \log(1/a_m) \to 0$。
- `driftSmall`：段 $m+1$ の定数の組の drift について $\mathrm{drift} / \log b_m \leq J(m+1)^{-2}$。

- `logCost`：$\log\bigl(1+\mathrm{paths}+\mathrm{width}^{-1}+\mathrm{columns}+\mathrm{relaxation}+\mathrm{supportExponent}\bigr)/\log b_m \le J(m+1)^{-2}$。
- 大きさの条件（`sizeT`・`fitsPatch`）：格子の辺が、被覆の大きさやパッチの半径の 100 倍より大きい、など。

ここから読めることを並べます。

非減少。$b_m=\mathrm{factor}(J(m+1))$ で、factor も J も単調なので $b_{m+1}\ge b_m$ です 初 。

無限に育つ。定数の組の欄 columns は 1 以上（`columns_ge`）なので、`logCost` の分子は $\log 2$ 以上です。すると $\log b_m \ge J(m+1)^2\log 2$ で、$J\to\infty$ から $b_m\to\infty$ です 推 （定義からの導出。分子の他の項が負でないことを使う）。評価書の付録は「b_N は RG の変換に現れる定数で書いた、込み入っているが陽な不等式を満たすよう選ばれる」と書きます 評 。

ゆっくり育つ。`Gentle` は b_m が D_m に比べて小さい（$\log b_m = o(\log D_m)$）ことを言います。`Scale.lean` の `mesh_inequality`（133 行）は、そこから $c\,a_m^2 \le a_{m+1}$ となる $c>0$ が在ることを出します 源 。間隔が段ごとに急に縮みすぎない、という意味です。

跡の短距離の解析（13-03）は、暦にさらに条件 `PostT` を課します。その一つ `bloom` は $b_i \le \log \hat\beta_i$（$\hat\beta_i$ は段 i の一ループの走り）で、比の列が対数より遅く育つことを求めます 源 （`YM/TraceExtension/Terrace/Base.lean` 29〜34 行）。

まとめると、比の列は「3 以上の奇数、減らない、無限に育つ、ただし $\log D_m$ に比べればゆっくり」です。具体的な b_m の式は、言明の中にはありません（§07）。

04

なぜ辺を育てるか（あらまし）

詳しくは 10-05 で読みます。ここでは骨だけを書きます。

一段の結合の移りは、一ループの値からのずれ（drift）を持ちます。一段の移りの式は $|\beta_{m+1}-\beta_m-s\log b_m|\le \mathrm{drift}$ の形で 源 （`History.Transfer`、`History.lean` 223 行）、drift は段の定数の組の実数の欄です。構成はこのずれを段の定数（$O(1)$）でしか抑えていない、と本書は読みます 推 。辺を一定の b に固定すると、N 段の和は $N\cdot O(1)=\frac{\log D_N}{\log b}\cdot O(1)$ で、$\log D_N$ と同じ大きさになり、(1) の傾きが決まりません 推 。`driftSmall` は $\mathrm{drift}_m \le \log b_m/J(m+1)^2$ を求めるので、ずれの和は

$$\sum_{m<N}\mathrm{drift}_m \le \sum_{m<N}\frac{\log b_m}{J(m+1)^2} = o\Bigl(\sum_{m<N}\log b_m\Bigr) = o(\log D_N) \tag{4}$$

となります 推 （$J \to \infty$ と $\sum \log b_m = \log D_N \to \infty$ から。正確な形は 10-05）。一段の誤差を $O(1)$ のまま、$\log b$ で割って消す設計です。二ループの係数は使われていません。

もう一つの理由は、段の定数そのものが段とともに増えることです。次数 d の局所場（8-03）を扱うには、基準の段から先で段の Taylor の次数が $d+1$ 以上である必要があります 源 （`YM/Source/Construction.lean` の `Makes.stages`、47〜49 行：$d+3 \le J(r(d))$、段 $r(d)$ から先で order $\ge d+1$）。全ての次数の場を得るので、段の深さ J は無限に育ち、それに合わせて辺も育ちます 推 。

代価は、**間隔の列が構成に合わせた特別なもの**になることです。これが §01 の「普遍性は言われていない」の中身です。

05

体積の列と単位

体積の辺は $L_p = \mathrm{page}(M+p) = 4(M+p+1)$ です 源 （`YM/Price/Waits.lean` 87・102 行）。M は暦を満たすよう十分大きく取った自然数で、評価書は「最小の大きさと初めの体積の評価を満たすよう固定」と書きます 評 。

単位。長さの単位は段 0 の間隔で、$a_0 = 1$ です。委員会は、全ての切断 N と体積 p が同じ物差しを使うことを、次の四つの事実として確かめています 評 （評価書 §11、委員会の結合の目標の一部）。

1. 基準の間隔は $a(0) = 1$。
2. 全ての N, p で、RG の軌道は段 0 で同じ基準の結合 $\beta_{N,p}(0) = \bar{\beta} > 0$ に着く（10-04）。
3. 有効作用の二次の項は単位行列に正規化される（10-01）。
4. 次数 d の札の係数は、基準の段 $r(d)$ で、切断と体積に依らず札そのものに等しい（8-04）。

つまり「1」の長さは、ただの格子の目盛りではなく、段 0 で結合を $\bar{\beta}$ に合わせることで物理の単位として決まっています。

試験関数の置き場所。体積 p で使えるのは、台が $\big((-L_p/2, L_p/2)^4\big)^n$ の内側に**真に**入る試験関数だけです 源 （`PublicWilson.lean` の `suitable`、75〜77 行）。固定した試験関数は、十分大きい p で必ずこの条件を満たします。

間隔 1 より長い距離。繰り込みは段 0 で止まり、間隔 1 より粗い尺度へは進みません。体積の極限は、鏡映正値性・チェス盤の評価・転送作用素・コンパクト性で扱われます（第 12 部）。

06

本書の検討で見えていたこと

本書のブロック写像は、辺 2 と辺 3 の二つの設計を持ち、どちらも辺は固定です（19-04）。段 m の箱は $(\mathbb{Z}/2^m L)^4$ の形で、段の向きは公開された構成と同じ（細かい側が大きい番号）です。

- 辺 3 の設計（奇数の辺、中心に置く）は、公開された構成の作りに近い所があります。違いは、公開された構成では辺が育つことです。
- 本書の鎖では、裸の結合の列 β_N を外から与えて段を跨ぐ評価を前提に置きました（28-04）。辺を固定すると一段の誤差が積もる、という事情は §04 と同じで、本書はそれを前提の側に置いていました。
- 体積の単位を段 0 の合わせで決める考えは、本書の「合わせ」（単位の長さで決まる量を固定の値に合わせる）と同じ向きです。合わせに使う量は違います（14-03）。

07

読めていない所

- b_m の具体的な式。暦を作る `Wait.ready`（`YM/Price/Waits.lean` 137 行）と `Program.exhaust`・`Rolls` は言明だけ読みました。
- M の大きさと、それを決める「初めの体積の評価」の中身。
- 段の定数の組 `Stage` の各欄の値（paths・width・columns・relaxation など）。どれが J とともにどの速さで増えるか。
- (4) は本書の推し量りで、構成の中の同じ勘定 `YM.RG.Supply.Large`（`YM/Price/Intent.lean` 39〜47 行）の条件 `slow`（drift/log L ≤ 1/j²）と `kick`（drift/log L ≤ s/4）は `driftSmall` と同じ形で、(4) と矛盾しません。勘定の全体は突き合わせていません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
源 公開の言明は、狭義に増える L_p・D_N と、体積に一様な走り (1) を求める	走りの傾き以外の、$\beta_{N,p}$ の p への依り方

言えている	言えていない
源 b_m は 3 以上の奇数、$D_m = \prod b_k$、$a_m = 1/D_m$、L_p は 4 の倍数で $4(M+p+1)$	b_m と M の具体的な値
初 暦の条件から b_m は非減少。推 $b_m \to \infty$	育つ速さの陽な形
評 収束は選ばれた間隔の列の全体に沿う	間隔の列の取り方への普遍性（評価書が開いていると明記）
評 全ての N, p で同じ物差し（基準の間隔・基準の結合・運動項・札の較正）	β を変えたときの依り方

出典と再現

もの	種別	出典・道具
公開の列と走りの条件	源	`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0、版 3456e5e）の `PublicWilson.lean` 36〜39・50・75〜77 行、`ChallengeSpec.lean` 13〜14 行、`HierarchyBridge.lean` 16〜25 行、`WilsonBridge.lean` 20〜30 行
段取りと暦	源	`YM/Lattice/Scale.lean` 28〜34・39〜41・67・99・124・129〜133 行、`YM/RG/History.lean` 64〜77・97〜118・223 行、`YM/Price/Waits.lean` 87・102 行、`YM/Source/Construction.lean` 47〜49 行
普遍性の無さ、列の選び方、共通の物差し	評	評価書 `yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）§4・§4.3・§11・付録 A（`WilsonFamily` の項）
段に依らない辺・共通の物差し（注釈つきの例）	源	評価の側 `yang-mills-group/YM`・版 55ba9fc の `submissions/openai-20261028/docs/examples/LatticeAndScale-20261028.lean` 90〜105 行

この章で使った語 — 繰り込みの段、ブロックの辺、暦、普遍性、物理の単位。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：8-03 局所場の札と格子の代表 — この格子の上で、何を「場」と呼ぶか。

局所場の札と格子の代表

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討です。

この章で分かること — 公開された構成で、局所場が三つの段 — 札（代数の対象）、格子の代表（有限個のリンクの多項式）、場（相関で区別できる札の類）— で与えられることです。場の空間 $F_d = V_d / N_d$ は相関の零空間による商として内在的に定義され、各次数で自由な Maxwell 場の多項式の空間と線形同型です。

前提となる章 — 8-01（格子と規約）、8-02（間隔の列）。古典の曲率と共変微分は 3-02、公理の中の場は 4-09。

先に言うこと — この章は札と代表の**定義**までです。代表に掛ける繰り込みの係数は 8-04、相関の作り方は 8-05 です。Maxwell 場との線形同型は「場の数が同じ」ことで、相関が自由場と同じだという意味ではありません。

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

この章の順序

1. 言明 — 公開の言明に在る場：抽象の札の型と、有限次元の場の空間
2. 札 — 次数 d までの曲率の多項式：重みの付け方と基底
3. 格子の代表 — Taylor 展開で合う多項式：有限の型紙と七つの条件
4. 場の空間 — 相関の零空間で割る：内在的な定義と、相の間で変わらないこと
5. 自由な Maxwell 場との線形同型：何が同じで、何が同じでないか
6. 本書の検討で見えていたこと：面の平均は次数 4 の素朴な代表
7. 読めていない所

01

言明 — 公開の言明に在る場

公開の定理 `JointExistence` の中で、場は次の形で現れます 源 （`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028` の `PublicWilson.lean` 44〜46 行、`ChallengeSpec.lean` 28〜33 行）。

- 格子の族 `WilsonFamily` は、型 `Token`（札）と、札・格子点・配位に複素数を返す挿入 `insertion` を持つ。
- 連続の側の階層 `Hierarchy` は、次数 d ごとの有限次元の複素ノルム空間 `Field d`（$= F_d$）、ラベルの空間への線形写像 `toLabel`、札を場へ送る `project` を持つ。
- 再構成の欄（`Reconstructed`、同 120〜123 行）は、`toLabel` が単射、全ての場が何かの札の像（`represents`）、ラベルの空間が場の像で尽くされる（`covers`）ことを求める。

公開の言明を読むだけでは、`Token` は中身の分からない型です。**札がどの曲率の多項式を表すかは、公開の構造には書かれていません** 源 （`PublicWilson.lean` 44 行は `Token : Type` だけ）。それが書かれているのは構成の側（`YM.Register.Token`、`YM.Labels.Frame`）と、委員会の検査です 評 （評価書 §3、付録 A の `WilsonFamily.Token` の項）。この章は、構成の側の中身を読みます。

評価書 §3 の要約は次のとおりです 評 。局所の観測量は一点での曲率と共変微分のゲージ不変な多項式で、関数や分布としてではなく、ベクトル空間の元である**抽象の札**として定義される。札には重み（次数）があり、重み d 以下の札は有限次元の複素ベクトル空間 V_d をなす。札の間には Bianchi の恒等式などから来る線形の関係があり、その関係は相関関数で定式化される。主定理の場は、商 $F_d = V_d / N_d$ の全ての次数の和の元である。

02

札 — 次数 d までの曲率の多項式

重み。曲率 $F_{\mu\nu}$ に重み 2、共変微分一つに重み 1 を与え、積の重みは和とします。k 階の共変微分を掛けた曲率 $D_{\lambda_1}\cdots D_{\lambda_k}F_{\mu\nu}$ の重みは $k+2$ です。ゲージ不変な多項式で、どの単項式も重み d 以下のものの全体が V_d です。例 評 （評価書 §3）：

$$-\operatorname{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}) \in V_4, \qquad -\operatorname{Tr}\big((D_\lambda F_{\mu\nu})(D_\kappa F_{\rho\sigma})\big) \in V_6 \tag{1}$$

重みは、場の「工学的な次元」（長さの $-d$ 乗で尺度が変わる）に当たります。$V_d \subset V_{d+1}$ なので、次数は上限です。

構成の側では、多項式は二つの数の組（二重次数）で分類されます 源
（`YM/Labels/Grading.lean` の `weight_slot`、76〜79 行）：一つ目は上の重み、二つ目は曲率の因子の数です（k 階の微分を掛けた曲率の変数一つが $(k+2,1)$ を持つ）。

基底と札。構造 `Frame G d` は V_d の基底を一つ選びます 源 （`YM/Labels/Basis.lean` 50〜57 行）。条件は三つです。

- 基底の 0 番目は恒等の場 $\mathbf{1}$（定数の多項式 1）。
- 各基底の元は実（複素共役の操作で変わらない）。
- 各基底の元は一つの二重次数に属し、重みは d 以下。

札は組 (d, c) で、c はこの基底での係数のベクトルです 評 （評価書 付録 A の `WilsonFamily.Token`）。恒等の場が基底の先頭に入っていることは、繰り込みで恒等の場との混合を扱うときに効きます（8-04）。

委員会の注釈つきの例は、どのゲージ不変な多項式も、ある次数 d の札として現れることを示しています（全体に上限の次数は課されない） 源 （評価の側 `yang-mills-group/YM`・版 55ba9fc の `submissions/openai-20261028/docs/examples/OperatorContent-20261028.lean` の `every_registered_polynomial_appears`、41 行）。同じ例は、これが「提出された代数の辞書に対して尽くしている」ことで、辞書を意図した局所場と同一視するのは人の審査であり、線の欠陥のような非局所の観測量の完全性は言わない、と書いています（35〜38 行）。

03

格子の代表 — Taylor 展開で合う多項式

札は代数の対象で、相関を持ちません。格子の上で測るには、札ごとに**格子の代表**を選びます。考え方は評価書 §4.1 の例で見えます 評 。滑らかなリンクでは $U_{\mu\nu} = 1 + a^2 F_{\mu\nu}(0) + O(a^3)$ なので

$$a^{-4}\Big(1 - \frac{1}{m}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,U_{\mu\nu}\Big) \;\longrightarrow\; -\frac{1}{2m}\,\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}(0)^2 \tag{2}$$

です（8-01 の (7) と同じ計算）。だから $1 - \frac{1}{m}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,U_{\mu\nu}$ は札 $-\frac{1}{2m}\,\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}^2$ の**代表の候補**になります。ただし評価書は、構成は追加の対称性のためにこの素朴な面の項そのものを代表には選んでいない、と注意しています。

構成の側の定義は次の二段です。

型紙と多項式。次数 d ごとに、有限の型紙（格子点のずれの有限集合）$S_d \subset \mathbb{Z}^4$ と、係数ベクトルから多項式への線形写像を選びます。多項式の変数は、型紙の中の辺のリンクの行列成分

とその複素共役です 源 （`YM/Source/Local.lean` の `SectionData`、103〜105 行。変数の添字 `Index` は 92〜93 行）。型紙と多項式は N, p に依りません 評 （付録 A の `WilsonFamily.insertion`）。点 x での代表は、型紙を x へ平行移動したものです（`places`）。

健全さの七つの条件。`SectionData.Sound` は次を求めます 源 （`Local.lean` 140〜147 行）。

1. 型紙は原点を含む。
2. 型紙は超立方の群（符号つきの座標の置換）で不変。
3. 多項式はゲージ不変。
4. 恒等の場の係数ベクトルは定数 1 に写る。
5. 超立方の群の作用と両立する（配位を回すことは、係数ベクトルを回すことと同じ）。
6. 係数の複素共役は値の複素共役に写る（とくに実の係数ベクトルは実の値を持つ。`ordinary_real`）。
7. **Taylor の条件**（`Projects`、85〜90 行）：全ての「ジェット」J（多項式のゲージ・ポテンシャルの係数）について、尺度 h の平行移動から作ったリンクの上での多項式の値 $f(h)$ と、J を尺度 h で縮めたもの（i 階の係数に h^{i+2} を掛ける）での連続の札の値 $g(h)$ が、$h = 0$ で d 階まで同じ微分を持つ。

7 が「Taylor 展開が d 次まで合う」の正確な形です。評価書の言い方では「多項式のゲージ・ポテンシャルの平行移動で得たリンクの上で、間隔についての Taylor 展開が、尺度を合わせた連続の札と d 次まで一致する」 評 。条件 2 と 5 は、格子の対称性（超立方の群）を代表の段階で保つためのもので、評価書の「追加の対称性」に当たる、と本書は読みます 推 。

公開の言明の側では、挿入について三つの性質だけが求められます 源 （`ChallengeSpec.lean` 15〜22 行）：配位について連続、ゲージ変換で不変、そして札ごとに N, p, x に依らない有限の型紙が在って、挿入はその中のリンクにしか依らない（`localSupport`）。

04

場の空間 — 相関の零空間で割る

異なる札が同じ相関を持つことがあります（Bianchi の恒等式、運動方程式など）。構成は、その同一視を**相関関数そのもの**で定義します 源 （`YM/Euclid/Null.lean`）。

連続の相関の表 S（8-05 の S^{mix}）について、次数 d の札 v が**零**であるとは、任意の個数の傍観者の札 $B_1, \dots, B_n$ と、互いに異なる任意の点 $x_0, \dots, x_n$ について

$$S\big(v(x_0)\, B_1(x_1) \cdots B_n(x_n)\big) = 0 \tag{3}$$

となることです（`criterion`、36〜38 行。零の空間 `null` は 34 行で、全ての点の離れた相関を並べる線形写像の核）。場の空間は商

$$F_d = V_d / N_d \tag{4}$$

です（`Field`、74 行）。ノルムは、基底の係数の最大値のノルムから来る商のノルムです 評（付録 A の `Hierarchy.Field`）。

単射が二つ出てくるので分けます。一つは、商 F_d から点の離れた相関の全体への、零の空間を核とする写像から誘導される写像（`spectra`、`Null.lean` 93 行）で、これは商の定義から単射です 源。もう一つは公開の言明の `toLabel` で、場の空間から再構成した理論のラベルの空間への線形写像です（`ChallengeSpec.lean` 32 行）。その単射は公開の欄 `Reconstructed.injective`（120 行）として求められ、構成では `toLabel := S.pin` と置かれます 源（`HierarchyBridge.lean` 32 行）。委員会の例は、前者について「単射だけでは、場を殺しすぎていないことは言えない」と注意し、実質の結果は次の §05 の次元の比べだと書いています 源（`OperatorContent-20261028.lean` 71〜86 行）。

相を選んでも場は失われない。 8-05 で、混ざった理論 S^{mix} は成分（相）S^{ξ} の平均に分けられます。委員会の例は、全ての相 ξ で零の空間が S^{mix} のものと同じであることを示しています 源（`each_phase_retains_the_dictionary`、103 行）。量化は「ほとんど全ての相」ではなく「全ての相」で、混ざった理論が相の平均であることより強い言明です。

商で場を定める考えは、相関で区別できないものは同じとする、という自然な選びです。場の空間は格子の代表の選び方に依らず、連続の相関だけで決まります。

05

自由な Maxwell 場との線形同型

評価書 §3 は、各次数 d で F_d が古典の Maxwell 理論から来るゲージ不変な多項式の空間と**線形同型**であることを、構成が示したと書きます 評。比べる空間は、自由な曲率とその微分の多項式で重み d 以下のものを、源のない Maxwell 方程式と Bianchi の恒等式を満たす形式的な曲率のデータの上で一致するものどうし同一視したもの（`Maxwell.shellSector G d`）です。

$$F_d \;\cong_{\mathbb{C}\text{-線形}}\; (\text{Maxwell の殻の上の多項式、重み} \le d) \tag{5}$$

委員会の例は (5) を Lean の言明として示しています 源
（`interacting_field_dictionary`、`OperatorContent-20261028.lean` 89〜91 行。評価の側の `submissions/openai-20261028/checks/CompletenessAudit.lean` 45 行の `local_field_content` から）。自由の側では、比べる空間に余分な零が無いことも示されています（`free_residual_vanishes`、62 行）。

何が同じで、何が同じでないか。同じ例が、次のことを明記しています 源 （84〜86 行）。

- (5) は**ベクトル空間の同型**で、相互作用する相関と自由な相関が等しいことではない。
- 代数の同型でも、量子場の理論のユニタリ同値でもない。
- 独立に作った標準の Yang–Mills の Hilbert 空間との比べでもない。

(5) が言っているのは「各次数で、独立な場の数が自由な Maxwell 場と同じ」ことです。言い換えると、相関で消える札の関係は、自由な場の関係（運動方程式と Bianchi の恒等式）とちょうど同じだけ在る 推 。場の数が多すぎも少なすぎもしないことは、「場の空間が曲率の多項式に対応する」という問題文の要求（評価書 §1 の 2）を、数の水準で確かめるものです。

この比べは委員会の結合の目標（`combined_acceptance`）の一部です 評 （評価書 §9.3 の field-content の検査）。構成の側では、比べの源は証人の欄 `F.phase.transport.comparator`（`Maxwell.Ranks`）です 源 （`YM/Spec/Closed.lean` 40 行の `comparator` の欄）。

06

本書の検討で見えていたこと

本書の Lean には局所場の札も、場の空間も、Maxwell 場との比べも**無い**です。本書の観測量は粗い格子のリンクの関数 — 面の平均、Wilson ループ、捩れた分配関数の比 θ_M — でした（第 19〜21 部）。

- 面の平均 $\frac{1}{6}\sum_{\mu<\nu}\mathrm{Re}\,U_{\mu\nu}$ は、(2) から見て次数 4 の札（$\mathrm{Tr}\,F^2$ の形）の**素朴な代表**（と定数の和）です 推 。ただし公開された構成で相関が収束するのは、次の 8-04 の繰り込んだ挿入だけで、その係数には恒等の場との混合（a^{-4} の項）が入るはずです。本書の面の平均の連続の極限を語るには、この混合を本書の帳簿で読み直す必要があります（14-06）。
- Wilson ループや捩れた分配関数は局所の札の空間に入りません。委員会の例も線の欠陥を明示的に外しています。
- 相関の零空間で割って対象を内在的に定める形は、本書の非局所の観測量の連続の対象を定めるときにも使える型です 推 。

07

読めていない所

- 代表の多項式の具体形（型紙の大きさ、どの多項式か）。`SectionData` の実例を作る所は読んでいません。
- Taylor の条件の中の平行移動の流れ（`Hol.flow`・`links`）と、連続の札の読み（`read`）の定義の細部。
- (5) の証明（`Maxwell.Ranks` とその源）。比べる空間の基底の数を数える所。
- 二重次数の二つ目の成分（曲率の因子の数）が繰り込みの尺度（8-04 の `scaled`）以外のどこで使われるか。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
源 公開の言明の札は抽象の型、場は有限次元の空間 `Field d`	公開の言明だけからの、札の意味（構成の側と委員会の検査に在る）
源 代表は有限の型紙の上のリンクの多項式で、七つの条件（Taylor の条件を含む）を満たす	代表の具体形
源 $F_d = V_d/N_d$、N_d は全ての点の離れた相関が消える札	点が重なる所での関係（相関は点の離れた所だけ。8-05）
源 各次数で F_d は Maxwell の殻の上の多項式の空間と線形同型。全ての相で同じ	相関の一致・代数の同型・ユニタリ同値。線の欠陥の完全性

出典と再現

もの	種別	出典・道具
公開の札・場・挿入の条件	源	`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0、版 3456e5e）の `PublicWilson.lean` 44〜46 行、`ChallengeSpec.lean` 15〜33・117〜123 行
重み・基底・代表・Taylor の条件	源	`YM/Labels/Grading.lean` 76〜79 行、`YM/Labels/Basis.lean` 50〜57 行、`YM/Source/Local.lean` 85〜105・140〜147 行
零の空間と商	源	`YM/Euclid/Null.lean` 34〜38・74 行
札の説明、Maxwell との比べ、例 (1)(2)	評	評価書 `yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）§3・§4.1・§9.3・付録 A

もの	種別	出典・道具
委員会の例（尽くすこと・線形同型・相の保持）	源	評価の側の `submissions/openai-20261028/docs/examples/OperatorContent-20261028.lean` 35〜38・41・62・71〜91・103 行、`submissions/openai-20261028/checks/CompletenessAudit.lean` 45 行

この章で使った語 ― 札、格子の代表、型紙、Taylor の条件、相関の零空間、場の空間、Maxwell の殻。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：8-04 繰り込んだ挿入 ― 代表にどんな係数を掛ければ、相関が収束するか。

繰り込んだ挿入

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§07 は本書の検討です。

この章で分かること — 公開された構成で、相関が収束するのは札の素朴な代表ではなく**繰り込んだ挿入**だ、ということと、その係数の決め方です。挿入を一段ずつ正確に粗い段へ運び、基準の段で係数が札そのものになるよう、細かい段の係数を輸送の逆で選びます。

前提となる章 — 8-03 局所場の札と格子の代表。発散と繰り込みの考えは 4-04、繰り込みの一段は 9-01・9-06。

先に言うこと — 係数には陽な式がありません（評価書もそう書いています）。恒等の場との混合がどう入るかは、源の型から読める範囲までで、混合の行列の形は読めていません。係数が N について収束することの証明の筋は 11-10 で扱います。

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

この章の順序

1. 言明 — 挿入の形：a_N^{-d} と係数を掛けた代表の和
2. なぜ係数が要るか — 混合：素朴な代表の相関が発散する理由
3. 輸送とその逆 — 基準の段での較正：挿入を正確に運び、基準の段で読む
4. 恒等の場と次数の低い場との混合の在りか：係数の空間の座標の中で
5. 切断について安定すること（あらまし）：有限次元の線形の写しと、縮む剰余
6. 言っていないこと
7. 本書の検討で見えていたこと
8. 読めていない所

01

言明 — 挿入の形

公開の言明は、挿入 $I_{N,p}(v,x;U)\in\mathbb{C}$ に、連続・ゲージ不変・有限の型紙への局所性の三つしか求めません（8-03 §03）源。挿入が具体的に何かは、構成の側に在ります。

評価書 §4.2 は次のように書きます評。重み d の札 $v\in V_d$ と、V_d の基底 $v_1,\dots,v_M$ について、紫外の収束の言明は v に

$$I_{N,p}(v,x;U)=\sum_{j=1}^{M} c_j(N,p;v)\,L_{v_j}(x;U) \tag{1}$$

という**繰り込んだ格子の観測量**を対応させる。係数は v について線形で、間隔の冪を含み、極限で発散してよい。収束の定理は、相関を収束させる繰り込みの係数 $c_j(N,p;v)$ が**在る**ことを言う。提出物は係数を格子の繰り込みの変換で書いた式を与えるが、和や積分で陽に表してはいない。

付録 A の `WilsonFamily.insertion` の項は、もう一段詳しく書きます評。十分細かい間隔では、繰り込みの輸送が、間隔 a_N での係数から基準の間隔 $a_{r(d)}$（$r(d)\le N$、$r(d)$ は d だけに依る）での係数への**可逆な線形写像**を与える。構成はその逆を c に施し（輸送した係数が c に等しくなるように）、座標ごとの尺度の因子を掛ける。結果の係数を $\tilde c_{N,p,j}$ と書くと

$$I_{N,p}\big((d,c),x;U\big)=a_N^{-d}\sum_{j=1}^{k}\tilde c_{N,p,j}\,P_{d,j}(x;U) \tag{2}$$

で、$P_{d,j}$ は 8-03 の格子の代表です。コードはこの写像を定義し、可逆であることを示しているが、逆の行列成分の陽な式は与えていない。

02

なぜ係数が要るか — 混合

8-03 の面の例で考えます。$P=1-\frac{1}{m}\operatorname{Re}\operatorname{Tr}U_{\mu\nu}$ の期待値は、滑らかな配位の Taylor 展開 $a^4\cdot\frac12\|F\|^2$ だけでは決まりません。量子の揺らぎは間隔 a の尺度で起き、その寄与は P の期待値に、a^4 よりはるかに大きい量として入ります。弱結合では $\langle P\rangle$ は g_0^2 の程度で、$g_0^2\sim 1/(2b_0\log(1/a))$ なので、間隔について対数でしか小さくなりません推。すると $a^{-4}P$ の期待値は $a^{-4}/\log(1/a)$ の程度で発散します。これは次数 4 の場 $\operatorname{Tr}F^2$ が**恒等の場 $\mathbf{1}$（次数 0）と混ざる**ことの現れです。同じ理由で、一般に次数 d の場は、同じ対称性を持つ次数の低い場と $a^{-(d-d')}$ の係数で混ざります（合成演算子の繰り込み。4-04）。

だから、素朴な代表の一次結合の係数を a とともに調整して、混合を打ち消す必要があります。打ち消し方を陽に書くには、全ての次数の混合の係数を知らねばなりません。公開された構成は、それを陽に書く代わりに、**繰り込みの変換そのものに係数を運ばせる**方法を取ります。

03

輸送とその逆 — 基準の段での較正

挿入つきの密度。構成は、挿入を密度の一次の摂動として扱います。段 m で、挿入の情報は組（`Coefficient`）で持たれます 源 （`YM/Source/Insertion.lean` 26〜30 行）：

- 局所の係数 $x \in \mathbb{C}^k$（8-03 の基底での座標。0 番目が恒等の場）、
- 正則な剰余（台つきの関数の列）、
- 大きい場の剰余（強制された活動に付く部分）。

挿入つきの密度は、段 m の密度 ρ_m（9-06）に「x_0＋恒等以外の係数を局所の代表に置いたもの＋正則な剰余」を掛け、大きい場の部分を足したものです 源 （`density`、47〜49 行。説明文は「源 λ について $\lambda^2 = 0$ で書いた式」）。恒等以外の係数は、段 m の小さい場の閾 t_m（9-07）の冪で尺度を付けて置かれます（`exponentialEntry`、37〜39 行。尺度の写像 `scaled` は曲率の因子の数を冪に持つ。`YM/Labels/Reference.lean` 58 行）。

輸送。次数 d の札、切断 N、体積 p ごとに、構成は輸送の族 `TransferData` を持ちます 源 （`Insertion.lean` 73〜75 行）：各段 m で入力 v に段 m の組を返す `entries m v` と、係数の空間の線形同型 `terminal`。条件 `Based`（89〜114 行）の主な欄は次のとおりです。

欄	中身
`bare_coord`・`bare_germ`	段 N では局所の係数が入力 v そのもので、剰余は 0
`encode`	段 N の挿入つきの密度は、裸の Wilson の重みに初期の挿入を掛けたもの（a_N^d の因子つき）
`unnormalized`	段 m の挿入つきの密度 $= b_m^d \cdot$（段 $m+1$ の挿入つきの密度を一段の核で押し出したもの）。**近似でなく等式**
`reads`	基準の段 r での局所の係数は $\mathrm{terminal}(v)$
`unit_coord`	恒等の場は恒等の場へ：段 N の $a_N^d \mathbf{1}$ は段 m で $a_m^d \mathbf{1}$ に写る
`back`・`front`	隣り合う段の係数の大きさの、両向きの評価
`linear`	係数と剰余は v について線形

つまり「段 N で係数 v を置き、正確な押し出しで段 r まで運ぶと、段 r の局所の係数が $\mathrm{terminal}(v)$ になる」という線形写像が `terminal` です。

逆で較正する。札 v の挿入は、入力に $\mathrm{terminal}^{-1}(v)$ を使います 源 （`cylinder`、87 行。`Family.O`、`YM/Source/Construction.lean` 42 行）：

$$I_{N,p}(v) = \mathrm{initial}\big(\mathrm{terminal}_{N,p}^{-1}\, v\big), \qquad \mathrm{initial}(w) = a_N^{-d} \cdot P_d\big(\mathrm{scaled}_{t_N^{-1}}\, w\big) \tag{3}$$

（`initial`、77〜79 行）。すると基準の段での読みは $\mathrm{terminal}(\mathrm{terminal}^{-1} v) = v$ で、**札そのもの**になります（`normalized`、`Construction.lean` 65〜68 行。仮定は `Makes` と $r(d) \le N$ ） 源 。構成の証人の条件 `Makes.calibrated`（62 行）が、全ての d, N, p（$r(d) \le N$）でこの `Based` を求めます。

委員会は、これを全ての体積で共通の正規化の一つとして確かめています 評 （評価書 §11 の四つ目：「次数 d の札 v の正規化した係数は、基準の段 $r(d)$ で、切断と体積に依らず v に等しい」）。字句は委員会の注釈つきの例 `LatticeAndScale-20261028.lean` の `insertion_has_the_prescribed_reference_value`（105 行）に在ります 源 。

(2) と (3) を見比べると、評価書の $\tilde{c}_{N,p}$ は $\mathrm{scaled}_{t_N^{-1}}\big(\mathrm{terminal}_{N,p}^{-1} c\big)$ に当たります 推 。「座標ごとの尺度の因子」は、段 N の閾 t_N の、曲率の因子の数を冪にしたものです。

04 恒等の場と次数の低い場との混合の在りか

係数の空間は、次数 d 以下の札の基底（8-03 の `Frame`）の座標です。基底の 0 番目は恒等の場、ほかの基底の元の重みは d 以下なので、**次数の低い場も同じ空間に入っています** 源 （`YM/Labels/Basis.lean` 50〜57 行）。そこで、§02 の混合は、段ごとの線形の写し（§05 の `leanings`）の行列の**非対角の成分**として現れる、と読めます 推 。

- `unit_coord` は恒等の場の列を固定します（恒等の場は恒等の場へ、段の尺度 a^d の比だけを掛けて） 源 。
- 他の場から恒等の場へ流れる成分（a^{-4} の型）は、第 0 座標として許されています 推 。§02 の $\mathrm{Tr}\, F^2$ と $\mathbf{1}$ の混合は、ここに入るはずです。
- 剰余の評価は、恒等の場の成分を除いた部分 `core`（`Reference.lean` 123 行）の大きさで書かれています 源 。

混合を三角の行列の形で書く言明や、恒等の場の成分を引き算する言明は、読んだ範囲には見当たりませんでした。逆写像 $\mathrm{terminal}^{-1}$ は、混合をまとめて打ち消す形で働いています。

05

切断について安定すること（あらまし）

(3) の係数は N ごとに違います。相関が $N \to \infty$ で収束するには、輸送の写しが N について安定する必要があります。構成の筋は次のとおりです 源 （詳しくは 11-10）。

1. 段ごとの写し（`Club`、`YM/FullVolume/Mark/Nursery.lean` 11〜16 行）：段 $m+1$ の係数から段 m の係数への線形同型 `leanings` で、段 $m+1$ の剰余の Gram に依る。逆は一様に有界（`hail`）。剰余の写像 `flow` は差を半分に縮める（`trail`）。
2. 基準の段 r で値を固定し、細かい側へ逆写像で運ぶ（`Gear.spends`、`Mark/Sages.lean` 66 行）：基準の段で Cauchy、各段の写しが N について収束し、逆が有界なら、上の全ての段で Cauchy。
3. その結果、段 $m \geq r$ の係数と挿入の値が N について Cauchy（`Branch.winds`・`stays`、`Gables/Master.lean` 44・50 行）。

写しは有限次元の線形写像で、剰余は上から縮みます。そのためこの部分にはコンパクト性が要りません。速さの言明は無く、収束は質的です 源 。

06

言っていないこと

- 係数 $\tilde{c}_{N,p,j}$ の陽な式（評価書が明記） 評 。
- 混合の行列が三角であること、恒等の場の成分を引き算の形で書くこと（読んだ範囲に無い）。
- 基準の段 $r(d)$ の選び方に係数や極限が依らないこと。
- 係数が摂動論の合成演算子の繰り込みと一致すること。

07

本書の検討で見えていたこと

本書の Lean には、合成演算子の繰り込みは**無い**です。

- 本書の観測量（面の平均、捩れた分配関数の比）は繰り込まずに使いました。粗い段の面の平均を段 m_0 で固定の値に合わせる鎖（第 28 部）では、観測量そのものに係数を掛ける必要が起きない作りでした。

- 本書はブロック写像の線形化と押し出しの共分散を扱いました（15-13）。そこでは線形化は場の揺らぎの運び方で、局所の観測量の係数の空間の上の写しとしては使っていません。
- 「合成場の繰り込みを、繰り込みの輸送の線形化の逆として与える」という見方は、本書に無かった発想です（14-05）。本書の面の平均の連続の極限を語る入口にもなります。

08

読めていない所

- 段ごとの線形同型の中身（`Gram.reads`、`Mark/Hinge.lean`）と、その行列の形。
- `terminal` が実際にどう作られるか（`Family.factory` の実例）。
- 基準の段 $r(d)$ の値。`Makes.stages` が $d+3 \le J(r(d))$ を求めること以外は読んでいません。
- 挿入つきの密度の大きい場の剰余（`marked`）が、一段の押し出しでどう組み直されるか。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
評 挿入は代表の一次結合で、係数は繰り込みの輸送の逆と尺度の因子から決まり、陽な式は無い	係数の陽な式
源 輸送は一段の核の正確な押し出し、基準の段での読みは terminal(v)、挿入は terminal$^{-1}(v)$ を入力にする	terminal の具体形
源 基準の段で係数は札そのもの（切断・体積に依らない）	基準の段の選び方への非依存
推 恒等の場との混合は、線形の写しの第 0 座標への成分として入る	混合の行列の形（三角かどうか）
源 段 $m \ge r$ の係数は N について Cauchy	収束の速さ

出典と再現

もの	種別	出典・道具
挿入の組・密度・輸送・較正	源	`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0、版 3456e5e）の `YM/Source/Insertion.lean` 26〜49・73〜114 行、`YM/Source/Construction.lean` 24〜30・42・62・65〜68 行、`YM/Labels/Reference.lean` 58・123 行
係数の安定	源	`YM/FullVolume/Mark/Nursery.lean` 11〜16 行、`YM/FullVolume/Mark/Sages.lean` 66 行、`YM/FullVolume/Gables/Master.lean` 44・50 行

もの	種別	出典・道具
式 (1)(2)、陽な式が無いこと、共通の正規化	評	評価書 `yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）§4.2・§11・付録 A（`WilsonFamily.insertion`）
共通の正規化（注釈つきの例）	源	評価の側 `yang-mills-group/YM`・版 55ba9fc の `submissions/openai-20261028/docs/examples/LatticeAndScale-20261028.lean` 105 行
合成演算子の混合	典	導入は 4-04

この章で使った語 — 繰り込んだ挿入、繰り込みの輸送、基準の段、較正、恒等の場、混合。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：8-05 相関関数と極限の順 — 繰り込んだ挿入の相関を、どの順の極限で連続へ運ぶか。

相関関数と極限の順

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§07 は本書の検討です。

この章で分かること — 公開の言明 `JointExistence` の中の収束の言明 `Converges` の形です。均した格子の相関 $C_{N,p}(v;f)$ を、(i) 体積 p を止めて $N\to\infty$（選ばれた間隔の列の全体で）、(ii) そのあと体積の部分列で、の順に極限を取り、混ざった理論 S^{mix} を得ます。S^{mix} は成分 S^{ξ} の確率の平均です。

前提となる章 — 8-02（間隔と体積）、8-03（札と場）、8-04（繰り込んだ挿入）。分布と試験関数は 1-11、OS の公理は 4-10。

先に言うこと — 相関は全て、点が互いに異なる所でだけ定まっています。体積の極限は部分列で、極限が部分列の選び方に依らないことは示されていません。二つの極限の順を入れ替えてよいとも言っていません。相の分解と再構成の中身は第 12 部で扱います。

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

この章の順序

1. 均した格子の相関：式と、許される試験関数
2. 収束の言明 — 二つの極限とその順：`Converges` の三つの欄
3. 公開の定理の量化 — 部分列と一つの階層：$\forall p\ \exists q\ \exists T$
4. なぜ点の離れた試験関数か：特異点と接触項
5. 混ざった理論と成分：$S^{\mathrm{mix}}=\int S^{\xi}\,d\mu$
6. 言っていないこと
7. 本書の検討で見えていたこと
8. 読めていない所

01

均した格子の相関

札の並び $v = (v_1, \dots, v_n)$ と試験関数 f について、格子の相関を

$$C_{N,p}(v; f) = a_N^{4n} \sum_{x_1, \dots, x_n \in \Lambda_{N,p}} f(a_N x_1, \dots, a_N x_n)\, \mathbb{E}_{\mu^{\mathrm{W}}_{N,p}}\Big[\prod_{j=1}^{n} I_{N,p}(v_j, x_j; U)\Big] \tag{1}$$

と定めます 源 （`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028` の `PublicWilson.lean`：`finiteMoment` 54〜57 行、`smear` 79〜81 行） 評 （評価書 §4.3 の式 (6)）。和は格子点の順序つきの n 組の全てにわたり、a_N^{4n} は格子の和を積分 $\int d^{4n}x$ に合わせる因子です。$I_{N,p}$ は 8-04 の繰り込んだ挿入、$\mu^{\mathrm{W}}_{N,p}$ は 8-01 の Wilson の測度です。

許される試験関数 源 （58〜77 行）：

- 開集合 $\{(x_1, \dots, x_n) : x_i \neq x_j \ (i \neq j)\}$（`separated n`）の上の、滑らかでコンパクトな台の複素関数（`SeparatedTest n`）。台は点の重なる所から離れています。
- 積の形 $f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$ に限りません。
- 体積 p で使うときは、台が $\big((-L_p/2, L_p/2)^4\big)^n$ の内側に入ること（`suitable p`）。固定した f は、十分大きい p で必ずこれを満たします。

02

収束の言明 — 二つの極限とその順

体積の番号の狭義に増える列 $k \mapsto p_k$（`volumeOrder`）と、連続の側の相関 S について、`Converges` は次の三つを求めます 源 （`PublicWilson.lean` 85〜90 行）。全ての n、札の並び v、試験関数 f について

1. 十分大きい k で、f は体積 p_k に収まる。
2. ある数列 $\mathrm{row}(p)$ が在って、f が収まる**全ての**体積 p で $C_{N,p}(v; f) \to \mathrm{row}(p)$（$N \to \infty$、**全ての** N にわたって）。
3. $\mathrm{row}(p_k) \to \displaystyle\int f(x)\, S(v; x)\, dx$（$k \to \infty$）。

評価書の書き方では 評 （付録 A の `Properties.wilson`）

$$\lim_{k \to \infty} \lim_{N \to \infty} C_{N,p_k}(v; f) = \int_{(\mathbb{R}^4)^n} f(x)\, S^{\mathrm{mix}}(v; x)\, dx \tag{2}$$

です。**内側が切断、外側が体積**で、この順は固定です。

内側の極限。評価書の定理 4.1 は、体積を止めた紫外の極限 $S_p(v;f)=\lim_N C_{N,p}(v;f)$ が選ばれた間隔の列の全体に沿って在り、さらに核 $S_p(v;x)$ が点の重なり（周期 L_p を法として）から離れた所で C^∞ であることを述べます 評 。証明は、構成の繰り込みの正規化を使って十分細かい切断どうしを比べ、N について Cauchy であることを示すもの、と評価書は要約しています。その筋は 11-10 で読みます。

外側の極限。評価書の定理 5.1 は、体積の極限が部分列で取れること、**一つの部分列が全ての相関に共通に効く**ことを述べます 評 。道具は Arzelà–Ascoli のコンパクト性で、点の離れた配位のコンパクト集合 K ごとに、体積に一様な有界性と同程度連続性

$$\sup_{p\ge p_0(K)}\ \sup_{x\in K}|S_p(v;x)|\le M_K,\qquad |S_p(v;x)-S_p(v;y)|\le \omega_K(|x-y|) \tag{3}$$

を示します（評価書 §5 の式 (11)）。評価書は、この二つの評価が鏡映正値性・チェス盤の評価・転送作用素の表示・Cauchy の評価という一般の道具から出ること、構成に固有の入力は繰り込んだ観測量の、間隔に一様な制御であることを書いています 評 。中身は 12-04・12-05 です。

委員会の注釈つきの例は、この言明が「点の重なりでの点ごとの主張をしない」「紫外と赤外の極限を入れ替えられるとは言わない」ことを明記しています 源 （評価の側 `yang-mills-group/YM`・版 55ba9fc の `submissions/openai-20261028/docs/examples/LeadingTrace-20261028.lean` 113〜116 行）。

03

公開の定理の量化 — 部分列と一つの階層

公開の定理は次の形です 源 （`ChallengeSpec.lean` 186〜188 行）。

```
∀ g（単純）, ∃ C : WilsonFamily g, WilsonRegularity C ∧
  ∀ p（狭義に増える体積の列）, ∃ q（狭義に増える）,
    ∃ T : Hierarchy C, T.Properties (p ∘ q)
```

読み方を三点に分けます。

- **族が先**。格子の族 C（間隔・体積・結合・挿入）は、体積の列を聞かれる前に一つ決まります。
- **どの体積の列にも部分列**。求めた体積の列 p ごとに、さらに部分列 q を取れば、$p\circ q$ に沿って (2) が成り立ちます。これはコンパクト性の言明の形です。

- **一つの階層**。その部分列の上で、一つの階層 T（場・相関・再構成した理論・OPE・跡の場）が、四つの性質 — 収束 `wilson`、再構成 `reconstruction`、OPE `ope`、自由でないこと `nonfree` — を同時に満たします（`Properties`、177〜181 行）。

T は p ごとに選ばれ、違う p で同じ T になるとは言っていません。評価書は、極限の相関が選んだ部分列に依るかどうかは未解決だと書き、Jaffe–Witten の問題文が、コンパクト性による部分列の極限だけでは（極限の性質を示す議論が加わらない限り）足りないとしていることに触れています 評 （評価書 §5）。

構成の定理 `constructed` の結論は公開の言明より多くを含み、その中に言明 `FullVolume.PositionsUV C Sequence.full` が在ります 源 （`Construction.lean` 24 行）。定義（`YM/FullVolume/Profiles.lean` 25〜36 行）は、体積 p ごとに、点の離れた所で滑らかな核が在って、切断の列の全体に沿って均した相関がその核に収束し、差分をとった相関も核の導関数に収束する、という形です 源 （読んだのは定義の形まで）。公開の言明でも切断は列の全体で、体積だけが部分列です。核と差分つきの強い形は構成の定理にだけ在ります。

04

なぜ点の離れた試験関数か

局所場の相関は、点が近づくと特異になります。たとえば次数 4 の場の二点関数は、素朴には $|x-y|^{-8}$ の大きさで、さらに対数の補正が付きます（13-02）。これは $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ の上で局所可積分でないので、点の重なりを含む試験関数で均すには、重なりの上に台を持つ項（接触項）を決める必要があります。接触項は理論から一意には決まりません（繰り込みの任意性。4-04）。

公開された構成は、収束の言明をはじめから点の離れた試験関数に限ることで、この問題を収束の言明から外しています。点の重なりまで延ばした分布が**在る**ことは別の言明（接触項の延長、存在だけ）として構成の定理に入っています（13-04）。

委員会の OS の公理の独立の検査は、別の試験関数の空間 — 全ての対角線の上で全ての階の微分が消える Schwartz の関数 — を使います 評 （評価書 §10 の式 (21)）。これは点の離れたコンパクトな台の関数を含みますが、対角線の上の接触項は見えません。

05

混ざった理論と成分

(2) の極限 S^{mix} は「混ざった」理論と呼ばれます。遠く離した二組の相関が積に分かれる性質（群がり、clustering）が示されていないからです 評 （評価書 §6）。群がりが無いと、OS

の再構成から出る理論の真空が一つとは限りません。

構成はこれを**相の分解**で回ります 評 （評価書 §6.1、付録 A の `Hierarchy.Character`）。S^{mix} から作った OS の Hilbert 空間で、エネルギー零の部分空間 H_0 に圧縮した作用素の生成する C*-環が可換であることを示し、その Gelfand のスペクトル X（コンパクトな距離空間）を相の空間とします。真空の状態を表す X の上の確率測度 μ（源の `phaseMeasure`。評価書は ν と書きます） について

$$S^{\mathrm{mix}}(v;x) = \int_X S^{\xi}(v;x)\, d\mu(\xi) \qquad (x \text{ は点の離れた配位}) \tag{4}$$

です。公開の言明では、相関は `correlation none`（S^{mix}）と `correlation (some ξ)`（S^{ξ}）の二通りで、(4) は再構成の欄 `mixture` です 源 （`ChallengeSpec.lean` 41・133〜134 行）。同じ欄の集まりに、μ が確率測度（`normalized`）で台が全体（`fullSupport`）、$\xi \mapsto S^{\xi}(v;x)$ が連続（`characterContinuity`）が入っています（124〜125・131〜132 行）。

各成分 S^{ξ} は群がりを含む OS の公理の変種を満たし、一つの相 ξ^{*}（`selected`）を選んで Wightman の理論を再構成します。中身は 12-07・12-08 です。

極限が零でないこと。委員会は、固定した点の離れた試験関数 f について、繰り込んだ跡の場の二点の格子の相関が、同じ極限の順で零でない極限を持つことを確かめています 評 （評価書 §11 の式 (23)）：

$$\lim_{k\to\infty}\ \lim_{N\to\infty} \left|C_{N,p(q(k))}(\Theta,\Theta;f)\right|^{1/8} = \left|S_2^{\mathrm{mix}}(\Theta,\Theta;f)\right|^{1/8} > 0 \tag{5}$$

委員会の例は、これがスペクトルの質量でも質量ギャップでも収束の速さでもなく、試験関数とその正規化が証人に依り得るので相に依らない固有の尺度でもない、と書いています（`LatticeAndScale-20261028.lean` 136〜157 行）。

06

言っていないこと

- 間隔の列の取り方への普遍性 評 。
- 体積の極限の一意性（部分列の選び方に依らないこと）。評価書 §8 の開いた問いの一つ目 評 （16-02）。
- S^{mix} の群がり。成分どうしが等しいこと。各成分が元の周期の体積の状態の部分列の極限であること 源 （`LeadingTrace-20261028.lean` 151〜153 行）。
- 二つの極限の順の入れ替え。点の重なりでの値。

- 連続の確率測度（相関はあるが、場の配位の上の測度は作られていない。評価書 §8 の二つ目）[評]。

07

本書の検討で見えていたこと

本書の第三巻の鎖は、粗い段の**ブロック変数の分布**（押し出しの測度）を対象にしました（28-01）。局所場の点の離れた相関ではありません。

- 共通する所：物理の大きさを固定した箱で、切断を外す極限を先に考え、極限はコンパクト性による部分列で取る、という形。
- 違う所：本書の含意は、部分列の極限の存在をコンパクト性だけから出し、性質を仮定の欄で運びました。公開された構成は、体積を止めた紫外の極限を**部分列でなく列の全体で**出しています（その源は 11-10 の「錨と縮み」による一意性）。
- 本書には相の分解に当たるものは無く、本書の非退化の条件（面の平均の期待値を固定の値に合わせる）は、(5) の零でない極限と同じ役を、別の観測量で担う設計でした[推]。

08

読めていない所

- `FullVolume.PositionsUV` の中の差分の作り方（`squall`・`Cluster`・`Meets`）と、その証明。
- (3) の $p_0(K)$ がどう決まるか。体積の下限が K に依る理由の細部。
- 公開の `Converges` を構成から出す `wilsonLimit`（`HierarchyBridge.lean` 44〜56 行）の先の `fromWilson` の証明。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
[源] 相関は (1) の形で、点の離れた滑らかなコンパクト台の試験関数（積の形に限らない）で均す	点の重なりを含む試験関数での収束
[源] 極限の順は「体積を止めて切断を全列で外す → 体積の部分列」	順の入れ替え
[源] 族は先に一つ決まり、どの体積の列にも部分列と一つの階層が在る	階層が部分列に依らないこと
[源] $S^{\mathrm{mix}} = \int S^{\xi} d\mu$、$\mu$ は台が全体の確率測度	S^{mix} の群がり、成分の一致

言えている	言えていない
評 跡の場の二点の格子の相関は零でない極限を持つ (5)	(5) が質量や尺度の固有の値であること

出典と再現

もの	種別	出典・道具
相関・試験関数・収束の言明・公開の定理	源	`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0、版 3456e5e）の `PublicWilson.lean` 54〜90 行、`ChallengeSpec.lean` 41・117〜134・177〜188 行、`Construction.lean` 15〜31 行、`HierarchyBridge.lean` 44〜56 行
定理 4.1・5.1、式 (6)(11)(23)、相の分解、開いた問い	評	評価書 `yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）§4.3・§5・§6・§6.1・§8・§10・§11・付録 A
委員会の注釈つきの例	源	評価の側の `submissions/openai-20261028/docs/examples/LeadingTrace-20261028.lean` 113〜116・151〜153 行、`submissions/openai-20261028/docs/examples/LatticeAndScale-20261028.lean` 136〜157 行
Jaffe–Witten の問題文	典	A. Jaffe, E. Witten（Clay 数学研究所の公式の問題文、2000）。0-03

この章で使った語 — 均した相関、点の離れた試験関数、極限の順、部分列、混ざった理論、相（成分）、群がり。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：9-01 ブロックの核 — 第 9 部では、ここで「繰り込みの一段」と呼んだものの中身を読みます。