第二巻　存在 — 公開された構成を読む

第 9 部 繰り込みの一段

Kiichi, Shiori and Rin · 2026-11-14 の版 · https://computoergosum.com/principia/yang-mills/

> この PDF は Web 版の各章をそのまま刷ったものです。動かせる図は刷った時点の姿で止まっています。章の間のリンクは Web 版へ飛びます。最新の内容は Web 版に在ります。

章		頁
9-01	ブロックの核 — 一段は写像でなく確率の核	2
9-02	パッチと重み — 中心に置いたブロックと一様分布の畳み込み	10
9-03	ゲージ固定の二本立て — 対称な最小化と、確率で引く軸ゲージ	17
9-04	予測子と群への射影 — 輸送の重みつき平均を群へ	24
9-05	対称性 — 超立方の群と粗い並進での不変性、ゲージの共変性	31
9-06	密度の表示 — 真空の項・主な作用・正則な活動・強制された活動の気体	38
9-07	小さい場の閾と、切った作用 — 段に依る閾	46

ブロックの核 — 一段は写像でなく確率の核

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討、§07 は未解決の地図です。

この章で分かること — 公開された構成で「繰り込みの一段」がどういう数学の対象として定義されているか。細かい配位 U から粗い配位 V への確率の核 $T_\beta(U, V)$ の式、罰の係数 c_{pen} の役割、核に入る β が細かい側の段の値であること、そしてこれらの宣言がどの目標に使われているか。

前提となる章 — 8-01 格子・Wilson の測度・規約、8-02 段取り、7-05 繰り込み群の段の列。比べる相手として 19-04 ブロック写像と繰り込みの一段。

先に言うこと — 公開された構成の結果は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」の水準で書きます。本書が確かめたのは、源の定義と言明の形を読んだことまでです。核の中に入る予測子・ゲージ固定・重みの中身は 9-02〜9-04 で読みます。核が鏡映について正値型かどうかは、源の言明に見当たらず、本書も調べていません。

この章の順序

1. **言明 — 一段は確率の核**：`StepData.density` と `push`、核であることの定理
2. **核の式を三つの因子で読む**：選び方の確率・予測子・ガウス型の雑音
3. **罰の係数**：任意の正の数で、主定理はそれごとに量化する
4. **核の β は細かい側の段の β**：一段の等式と分配関数の保存
5. **どの目標に入っているか**：宣言と記録の表
6. **本書の検討で見えていたこと**：決定的なブロック写像の押し出しとの違い
7. **読めていない所**

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。源はリポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）、評価書は `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）です。公開された構成の定理は源 で言明の字句を、「証明されている」という水準は評 で書きます。記号：一ループの傾きを $s = 11C_g/(24\pi^2)$（評価書では一ループの係数の二倍として書かれる量、源の `slopeConstant`）と書きます。

01

言明 — 一段は確率の核

公開された構成は、格子間隔 $a_N = 1/D_N$ の Wilson の測度から出発し、ブロック変換を N 回施して間隔 1 の段まで粗くします（段の番号は 8-02：$m = N$ が一番細かく、$m = 0$ が一番粗い）。この「一段」は、細かい配位 U から粗い配位 V を一つ決める写像ではありません。**粗い配位を確率で引く核**として定義されています源 。

記号を置きます。ゲージ群 $G \subset U(d_G)$ の元 u に対して

$$\mathrm{price}(u) = 1 - \frac{\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,u}{d_G}, \qquad \mathrm{chord}(u) = \frac{\|u - 1\|_F}{\sqrt{d_G}}, \qquad \mathrm{price}(u) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{chord}(u)^2 \tag{1}$$

と書きます（$\|\cdot\|_F$ は Frobenius のノルム。最後の等式は `YM/Gauge/MatrixGroup.lean` の `chord_price`、117 行）源 。price は Wilson の作用の一枚の面の項 $1 - \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U_p/d_G$ と同じ形の関数で、$u = 1$ で 0、群の上で非負です。SU(2) では $d_G = 2$ で、本書の $1 - \mathrm{Re}\,U_p$（19-01）と一致します初 。

一段の核は、源の `YM/RG/Block.lean` の `StepData.density`（71 行）で次の形に定義されています源 。

$$T_\beta(U,V) = \sum_{\tau} P(\tau \mid U) \prod_{b} \frac{1}{Z_\beta} \exp\Big(-c_{\mathrm{pen}}\,\beta\ \mathrm{price}\big(V_b\,Q_b(U,\tau)^{-1}\big)\Big), \qquad Z_\beta = \int_G e^{-c_{\mathrm{pen}}\beta\,\mathrm{price}(v)}\,dv \tag{2}$$

和の τ は有限個の離散の選び（9-03・9-04 で読む「枠の札」と「道の札」の組）、$P(\tau \mid U)$ はその選びの確率、積の b は粗い格子の正の向きのリンク全体、$Q_b(U,\tau) \in G$ は細かい配位から作った粗いリンクの**予測子**（9-04）、h は確率に正規化した Haar 測度です。核による関数の運び（押し出し）は

$$(\mathcal{T}_\beta F)(V) = \int T_\beta(U,V)\,F(U) \prod_{\ell} dh(U_\ell) \tag{3}$$

で、源の名は `StepData.push`（同 77 行）です源。出力は「粗い格子の Haar の積に対する密度」として読む約束です（説明文 74〜76 行）。

核であることは定理として言われています。`StepData.isKernel`（同 203 行）は、9-03・9-04 の三つの義務 `Patch.Branches`（枠の最小元の一意性・予測子の一意性・大きい場で引く札が空でないこと）を仮定して、全ての β で次の五つを結論します源：$T_\beta \ge 0$、(U,V) について可測、上に有界、各 U で V について可積分、$\int T_\beta(U,V)\,dV = 1$。三つの義務は、罰の係数を固定するごとに全てのパッチで満たせることが別に示されています（§03 の `Axial.viable`）源。

02

核の式を三つの因子で読む

式 (2) は、粗い配位を次の順で引く手続きを確率の言葉で書いたものです推。

1. **選びを引く**。細かい配位 U を見て、離散の選び τ を確率 $P(\tau \mid U)$ で引きます。源の `likelihood`（49 行）は、粗い点ごとの枠の札の確率 `frameMass` と、粗いリンクごとの道の札の確率 `predictorMass` の積です。小さい場では札は使われず、一様な確率が形式的に置かれます（9-03・9-04）。
2. **予測子を作る**。U と τ から、粗いリンクごとに群の元 $Q_b(U,\tau)$ を一つ作ります（`prediction`、44 行）。
3. **雑音を足す**。粗いリンク V_b を、リンクごとに独立に、Q_b を中心とする重み $e^{-c_{\mathrm{pen}}\beta\,\mathrm{price}(V_bQ_b^{-1})}$ で引きます（`noise`、68 行）。

三つ目の因子は、各 Q について V の確率測度です。Haar 測度の右不変性で $\int Z_\beta^{-1} e^{-c_{\mathrm{pen}}\beta\,\mathrm{price}(vQ^{-1})}dh(v) = 1$ となるからです（`noise_mass`、146 行）源。一つ目の因子の和が 1 であること（`chosen`、123 行）と合わせて、$\int T\,dV = 1$ が出ます初。

雑音の幅を見ておきます。$V_bQ_b^{-1} = e^X$（X は Lie 環の小さな元）と書くと、評価書の内積 $\langle X,Y\rangle = -\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(XY)/d_G$（評価書 §3）で $\mathrm{price}(e^X) = \tfrac12\langle X,X\rangle + O(|X|^3)$ です初。だから重みはおよそ $\exp(-\tfrac12 c_{\mathrm{pen}}\beta\langle X,X\rangle)$ で、V_b は Q_b のまわりに幅 $(c_{\mathrm{pen}}\beta)^{-1/2}$ ほどで散らばります推。β が大きい弱結合の段では、核は予測子の近くに強く集まりますが、一点には潰れません。

決定的な写像（比べる相手）

粗い配位を $V = B(U)$ と一つに決めます。押し出しは $\int F(B(U))\, d\mu(U)$ で、核で書けば V についての点測度 $\delta_{B(U)}$ です。

確率の核（公開された構成）

V は予測子のまわりで幅 $(c_{\mathrm{pen}}\beta)^{-1/2}$ の揺らぎを持ちます。δ 拘束は置きません。`Block.lean` の説明文も、核の外で密度による割り算をしないと述べています。

03

罰の係数 — 任意の正の数で、主定理はそれごとに量化する

式 (2) の c_{pen} は、源の `KernelChoices.penalty`（`YM/RG/Patch.lean` 37〜45 行）です。`KernelChoices` は、罰の係数と三つの閾（枠の閾 `frame_cut`、予測子の閾 `predictor_cut`、軸ゲージの倍率 `axial_factor`）を正の数として束ねた構造で、説明文は「一度だけ選ぶ」と書いています源。本書は罰の係数を c_{pen} と書きます。

罰の係数は任意の正の数に取れます。`Axial.viable`（`YM/Branch/Pick.lean` 137 行）は、任意の $c_{\mathrm{pen}} > 0$（源の引数の名は κ）に対し、`penalty` がその値で、枠と予測子の閾がゲージ群だけで決まり、軸ゲージの倍率が 16 の組が在って、**全てのパッチ**（辺 L と平滑の指数 J に依らない）で三つの義務 `Branches` が成り立つ、と言います源。

構成の定理 `YangMills.constructed`（`Construction.lean` 15〜16 行）は $b > 0$ を引数に取り、罰の係数がちょうど b の族を作ります。つまり主な結論は罰の係数ごとに量化されています源。公開の定理 `YangMills.jointExistence`（`Solution.lean` 4 行）は、この b に 1 を入れて使っています源。説明文には「罰の係数は族を選ぶ前に固定する」とあり（`Construction.lean` 13 行）、段ごとの定数は罰の係数を決めた後に選ばれます源。

罰の係数は核の外でも効きます。一段の自由場の精度の行列は $K + c_{\mathrm{pen}} Q^{\mathsf{T}} Q$ と定義されていて（`YM/Push/FREE_RESOLVENT/Flat.lean` 80〜81 行 `baseMatrix`）、木のゲージの切り口での精度の下界は $\min(a, c_{\mathrm{pen}})/(1 + \beta_L + \gamma_L)$ の形です（同 189〜198 行 `treeFare`・`tree_gap`）源。罰の係数が小さいと、この下界と伝播関数の減衰の定数がそれに比例して悪くなります推。小さい場の一段の詳しい形は 11-09 で読みます。$c_{\mathrm{pen}} \to 0$ や $c_{\mathrm{pen}} \to \infty$ で一様な評価は、源の言明に見当たりません源。

04

核の β は細かい側の段の β

式 (2) の β にどの値を入れるかは、一段の等式の側で決まっています。`YM/RG/History.lean` の `History.Transfer`（223〜227 行）は、段 m の密度の表示 ρ_m（9-06）について

$$\rho_m = \mathcal{T}_{\beta_{m+1}}\,\rho_{m+1}, \qquad \left|\beta_{m+1} - \beta_m - s\log b_m\right| \le \mathrm{drift}_{m+1} \tag{4}$$

を課します源。核に入るのは**細かい側の段**の結合 $\beta_{m+1} = \beta(N, p, m+1)$ です（225 行）。ここで b_m は段 m の辺、$s = 11C_g/(24\pi^2)$ は 10-02 の傾き、drift は段の定数です。

この選びから、二つのことが読めます。

- 核は段ごとに違います。$\beta(N, p, m+1)$ は切断 N と体積の番号 p に依るので（第 10 部）、同じ段 m の一段でも N が変われば核が変わります推。「押し出しの測度」は、N とともに写像そのものが変わる対象です（11-10）。
- 分配関数は保たれます。核の全質量が 1 なので $\int \mathcal{T}_\beta F = \int F$ です（`YM/RG/Push.lean` 37 行 `push_integral`）源。これを段 N から繰り返すと、`History.partition_eq`（`History.lean` 242 行）は、どの段の表示を積分しても段 N の Wilson の分配関数 $Z_N(\beta_N)$ に等しい、と言います源。

一段の等式 (4) の第一式は**等式**で、近似ではありません源。測度は一段で変わらず、表示（9-06）の側が書き直されます。

05

どの目標に入っているか

源の `verification/declaration-usage.tsv` は、検証の記録が挙げる 17 の見出しの定理のどれかから届く宣言を `used`、届かないものを `outside` と記録しています。`used` は「公開の定理が使う」という意味ではありません（6-02）源。

宣言（在りか）	中身	記録	目標との関係
`StepData.density`（`RG/Block.lean`:71）	核 (2)	used	構成の定理の結論 `C.Makes` の欄 `History.Selected` の一段の等式に入る源
`StepData.isKernel`（:203）	確率の核であること	used	見出しの定理のどれかから届く。存在の道の鎖は辿っていない
`Axial.viable`（`Branch/Pick.lean`:137）	任意の罰の係数で義務が立つ	used	同上

宣言（在りか）	中身	記録	目標との関係
`History.Transfer` ・ `Selected`（`RG/History.lean`:223, 234）	一段の等式と段の列	used	`Family.Makes` の欄 `wilson`（`Source/Construction.lean`:45）。構成の定理の結論 源
`History.partition_eq`（:242）	分配関数の保存	used	見出しの定理のどれかから届く

公開の定理 `JointExistence` の言明には、核も段の列も現れません（評価書の用語集、23 頁） 評 。核は、公開の定理の**証人**を作る構成の内側の対象です。

06

本書の検討で見えていたこと

本書の第三巻と第 15 部の一段は、**決定的な**ブロック写像 B です（19-04）。道の積の重みつきの平均を球へ引き戻して粗いリンクを一つ決め、測度は押し出し $B_*\mu$ で運びます（19-04 §押し出し）。核の言葉では、本書の一段は V についての点測度で、公開された構成の一段は予測子のまわりの幅 $(c_{\mathrm{pen}}\beta)^{-1/2}$ の揺らぎです 推 。

本書の検討は、ブロックの設計を二つ持っていました。一つは辺 2・重なる重み $(1/8, 3/4, 1/8)$ の今の設計（28-05）、もう一つは辺 3・粗い点を中心に置くブロック・一様な重みの設計です。後者について、SU(2) の Wilson の測度を m 段押し出した測度が、格子点の面の鏡映について鏡映正値性を持つこと（二枚の粗い格子点の面の間に厳に入る粗いリンクだけに依る有界可測な関数について）は Lean で機械検査されています Lean ：`Block3.rp_push` ・ `Block3.rp_push_prob`（格子の辺が偶数の周期格子、任意の実数 β）。これは既知の型の結果（鏡映と可換な局所の写像は押し出しで鏡映正値性を保つ）の形式化です。

この議論は、決定的な写像が鏡映と可換であることと、写像の局所性を使います。公開された構成の一段は核なので、同じ議論はそのままでは移りません 推 。核が鏡映について正値型であるか、という別の問いが立ちます。公開された構成の側でも、一段の核の鏡映正値性の言明は、読んだ範囲には見当たりません 源 。鏡映正値性は元の Wilson の測度について言われています（12-01）。設計の比べは 14-02 にまとめます。

07

読めていない所

- 核の鏡映正値性：一段の核が鏡映について正値型かどうかの言明を、リポジトリ全体では検索していません（読んだのは `YM/RG/` と `YM/Branch/` の範囲）。
- `isKernel`・`Axial.viable` が公開の定理の存在の道に載るかは、鎖を辿っていません。記録の上で見出しの定理のどれか（`SharpGram.habitat` が証人）から届く、までです。
- 罰の係数を動かしたときに段の定数がどう変わるか（定数は罰の係数を固定した後に選ばれる、という説明文の読みまで）。
- 核の β を細かい側に取る理由の説明は源に見当たらず、§04 の読みは定義からの推し量りです。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
源 一段は式 (2) の確率の核として定義され、押し出しは式 (3)（`StepData.density`・`push`）	核を決定的な写像の極限として扱う言明（源に無い）
源 三つの義務のもとで核は確率の核（`isKernel`）、義務は任意の罰の係数で全てのパッチに立つ（`Axial.viable`）	罰の係数について一様な評価
源 構成の定理は罰の係数 $b > 0$ ごとに量化され、公開の定理は $b = 1$ を使う	罰の係数に依らない形の結論
源 核に入る β は細かい側の段の値（`History.lean`:225）	その選びの理由（源の説明文に無い）
源 一段で分配関数が保たれる（`push_integral`・`partition_eq`）	一段の核の鏡映正値性（言明が見当たらない）
Lean 本書の辺 3・中心の設計で、押し出した測度の格子点の面の鏡映正値性（`Block3.rp_push`）	同じ形の主張を確率の核について（本書は調べていない）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
核・押し出し・核であること	源	`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）`YM/RG/Block.lean`：`StepData.density` 71 行、`push` 77 行、`noise_mass` 146 行、`isKernel` 203 行
price と chord	源	同 `YM/Gauge/MatrixGroup.lean` 112・115・117 行
罰の係数と三つの閾、義務	源	同 `YM/RG/Patch.lean` 37〜45・182〜185 行、`YM/Branch/Pick.lean` 137 行 `Axial.viable`

もの	種別	出典・道具
罰の係数の量化	源	同 `Construction.lean` 13〜16 行 `YangMills.constructed`、`Solution.lean` 4〜6 行
精度の行列と木の切り口の下界	源	同 `YM/Push/FREE_RESOLVENT/Flat.lean` 80〜81・189〜198 行
一段の等式・分配関数	源	同 `YM/RG/History.lean` 223〜227・242 行、`YM/RG/Push.lean` 37 行
依存の記録	源	同 `verification/declaration-usage.tsv`、`verification/Usage.lean`
規約と用語集	評	`yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）§3、付録 A
本書の決定的なブロック写像と押し出し	Lean	19-04 の出典の表
辺 3・中心の設計の鏡映正値性	Lean	本書の Lean の束（`Block3.rp_push`・`Block3.rp_push_prob`、部品 `Block3.down_refl`・`down_local`）。Lean の核の検査を通った束

この章で使った語 — ブロックの核、確率の核、押し出し、予測子、罰の係数、price、chord、一段の等式、分配関数の保存、見出しの定理、used と outside。意味は A-02 用語集にあります。

次に読む章：9-02 パッチと重み — 予測子を作るときに使う、粗い点の中心に置いたパッチと、一様分布の畳み込みの重みを読みます。

パッチと重み — 中心に置いたブロックと一様分布の畳み込み

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討、§07 は未解決の地図です。

この章で分かること — 一段の核（9-01）の中で使う、粗い点ごとの細かい点の箱（パッチ）と、その上の重み w_J の定義。粗い点がブロックの中心に座ること、重みが一様分布の J 回の畳み込みであること、支えが隣のブロックと大きく重なること、J が段とともに無限大へ育つこと。

前提となる章 — 9-01 ブロックの核、8-02 段取り。確率の畳み込みは 1-08。

先に言うこと — 重みとパッチは定義で、ここに定理はほとんどありません。重みの選び（なぜ畳み込みか、なぜ $J \geq 4$ か）の理由は源の説明文に書かれておらず、§04 の読みは推し量りを含みます。

この章の順序

1. **言明 — パッチと重みの定義**：`Patch`、`radius`、`weight`
2. **粗い点はブロックの中心に座る**：奇数の辺と埋め込み $x \mapsto Lx$
3. **一様分布の畳み込み**：一軸ごとの形と、$L = 3,\ J = 4$ の例
4. **支えの半径と重なり**：$J(L-1)/2$ と隣の粗い点までの距離 L
5. **J は段とともに育つ**：`Calendar.op` と `Fits`
6. **本書の検討で見えていたこと**：辺 2・横のずらしの重み、辺 3・中心・一様
7. **読めていない所**

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。源はリポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）、評価書は `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）です。公開された構成の定理は源 で言明の字句を、「証明されている」という水準は評 で書きます。

01

言明 — パッチと重みの定義

一段の形は、源の `YM/RG/Patch.lean` の構造 `Patch`（29〜34 行）で決まります。中身は四つです源 。

- 辺 L：奇数で $L \geq 3$（`odd_side`・`coarse`）。粗い格子の間隔は細かい格子の間隔の L 倍で、細かいトーラスの辺は粗いトーラスの辺の L 倍です（`StepData.sizes`）。
- 平滑の指数 J：$J \geq 4$（`order_cut`）。
- パッチの半径 $R = (J+3)L$（`radius`、51 行）。パッチは細かい格子の、原点を中心とする一辺 $2R+1$ の箱 $\{z \in \mathbb{Z}^4 : |z|_\infty \leq R\}$ です（`sites`、53 行）。
- 重み w_J（`weight`、87 行）：パッチの点の上の確率。

重みの定義を式で書きます。小さな箱 $C = \{z : |z|_\infty \leq (L-1)/2\}$（源の `Small` は `box (L/2)` で、$L$ が奇数なので半径は $(L-1)/2$）をとり、C の点の J 個の組 $(z_1, \dots, z_J)$ を一様に引いたときの和 $z_1 + \cdots + z_J$ の分布を w_J とします源 。

$$w_J(x) = \frac{\#\{(z_1,\dots,z_J) \in C^J : z_1 + \cdots + z_J = x\}}{|C|^J} = \big(u_C^{*J}\big)(x), \qquad u_C = \frac{1}{|C|}\mathbf{1}_C. \tag{1}$$

u_C は C の上の一様分布、$*$ は畳み込みです。源は `weight_sum`（90 行）で $\sum_x w_J(x) = 1$ を、`weight_nonneg`（96 行）で非負を示しています源 。和 $z_1 + \cdots + z_J$ は半径 $J(L-1)/2$ の箱に入り、それはパッチ（半径 $(J+3)L$）の中なので、重みはパッチの点の上で定義されます（`roll_sites`、63 行）源 。

説明文は、パッチの形を「一つの形で、辺の比を決める前の解析の約束にも使う」と書いています（28 行）源 。

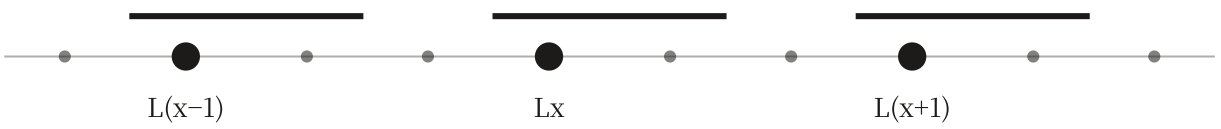
02

粗い点はブロックの中心に座る

粗い点 x は細かい点 Lx に写されます。源の `Ratio.embed`（`YM/Lattice/Subdivision.lean` 29 行）は、粗い点を中心に取った代表 `lift x` に L を掛け、細かいトーラスに巻き戻したものです源。そしてパッチは、細かい配位を点 Lx から見た配位（`expandAt`、`YM/Lattice/Path.lean` 224 行）の上で、原点を中心に置かれます（`StepData.frames`、`YM/RG/Block.lean` 36〜37 行）源。

L が奇数なので、細かい格子は粗い点を中心とする一辺 L の立方体 $Lx + C$ に、重なりも隙間もなく分かれます初。粗い点はそれぞれ自分の立方体の真ん中に座ります。辺が偶数だとこの形の分け方はできず、粗い点はブロックの角か、細かい点のない位置に来ます。

図 1　一軸に沿って見た、辺 $L = 3$ のブロック（太い区間）と粗い点（●）。粗い点 Lx は自分のブロックの中心に座る。



図は一軸の断面です。四次元では L^4 個の細かい点が一つのブロックになります。

03

一様分布の畳み込み

C は四つの軸の区間 $\{-(L-1)/2, \dots, (L-1)/2\}$ の直積なので、u_C は一軸の一様分布の積で、畳み込みも軸ごとに分かれます初。

$$w_J(x) = \prod_{i=1}^{4} v_J(x_i), \qquad v_J = \left(\tfrac{1}{L}\mathbf{1}_{\{-(L-1)/2,\dots,(L-1)/2\}}\right)^{*J}. \tag{2}$$

例として $L = 3,\ J = 4$ をとります。一軸の分布は $\{-1, 0, 1\}$ の一様分布の 4 回の畳み込みで、

$$v_4(-4), \dots, v_4(4) = \frac{1,\ 4,\ 10,\ 16,\ 19,\ 16,\ 10,\ 4,\ 1}{81} \tag{3}$$

です初。中心で一番大きく、端に向かって減る山の形です。一軸の分散は $J(L^2-1)/12$ で、J が大きいと v_J は中心極限の定理で離散のガウス型に近づきます初。

重みは超立方の群（軸の入れ替えと符号の反転）で不変です。源の `weight_invariant`（`YM/Branch/Transport.lean` 135 行）は、符号つきの置換 s について $w_J(s \cdot x) = w_J(x)$ を

示しています源。一様分布 u_C が不変なので、その畳み込みも不変、という形の証明です。この不変性は、一段の核の対称性（9-05）の出どころの一つです。

重みが使われるのは予測子の側です（9-04）源。

- 重みつきの平均：粗いリンクの予測子は、パッチの点 z ごとの輸送 $Y(z)$ の w_J による平均から作ります（`bondCost`、`Patch.lean` 159 行）。
- 一本を引く確率：平均が使えないときは、点 z を確率 $w_J(z)$ で引いて $Y(z)$ をそのまま使います（`predictorMass`、177 行）。

ゲージ固定（9-03）の平均は重みを使わず、パッチの全ての点の対についての一様な平均です源。

04

支えの半径と重なり

w_J の支えは半径 $J(L-1)/2$ の箱です初。隣の粗い点までの距離は L なので、$J(L-1)/2 \geq L$ なら隣のブロックの中心まで届きます。$J \geq 4,\ L \geq 3$ では $J(L-1)/2 \geq 2(L-1) \geq L$ で、いつも届きます初。

L	J	支えの半径 $J(L-1)/2$	パッチの半径 $(J+3)L$	支えが届く粗い点の層
3	4	4	21	1
3	10	10	39	3
5	4	8	35	1
9	6	24	81	2

表の最後の列は $\lfloor J(L-1)/(2L) \rfloor$ で、隣から数えて何層目の粗い点まで支えが届くかです初。J が育つと、一つの粗いリンクの予測子が見る細かい領域は、粗い格子の単位で $J/2$ 層ほどに広がります。パッチの半径 $(J+3)L$ は粗い格子の単位で $J+3$ 層で、支え（およそ $J/2$ 層）より、およそ $J/2+3$ 層広く取られています（`Patch.radius`、`YM/RG/Patch.lean` 51 行）源。枠（9-03）がパッチの全ての点の上で定義されるので、予測子の平均に使う点の外側にも余白がある形です推。

重なりは大きいです。一つの細かいリンクは、多くの粗いリンクの予測子の平均に入ります。核の式（9-01 の (2)）が粗いリンクごとに独立な雑音の積であっても、予測子 $Q_b(U,\tau)$ どうしは同じ細かいリンクを通じて関係します推。押し出した測度で、離れた粗いリンクがどう独立になるか（あるいはならないか）は、核の定義だけからは読めません。

格子が十分大きいことは暦の条件で課されています。`Calendar.Fits` の欄 `fitsPatch`（`YM/RG/History.lean` 110 行）は、$100 \cdot (\text{パッチの半径} + 1) \le$ 細かい側の格子の辺、を要求します源。パッチがトーラスを一周して自分に重なることはありません。

05

J は段とともに育つ

段 $m+1$ から段 m への一段 `Calendar.op m p`（`History.lean` 88〜91 行）は、辺 $L = b_m$（段 m の辺）と平滑の指数 $J = J(m+1)$ のパッチを使います源。J は暦の欄 `J : ℕ → ℕ` で、`Calendar.Fits`（97〜118 行）が次を課します源。

- `mono`：J は非減少。`stepSlow`：一段で高々 1 しか増えない。`deep`：$J \to \infty$。
- `sameFactor`：辺 b_m は $J(m+1)$ だけで決まる値 `factor (J (m+1))`。`monotoneL`：その値は J について非減少。
- `deepOrder` ほか：Taylor の次数などの段の定数 `Stage` は J で番号づけられ、J について単調。

つまり J は「段の定数の組の番号」でもあり、辺 b_m・重みの畳み込みの回数・作用の展開の次数（9-06）が、同じ番号でいっしょに育ちます源。$J \to \infty$ と `logCost` の条件から辺 $b_m \to \infty$ が出ます（10-05）推。辺を育てる理由は 10-05 で読みます。

畳み込みの回数が増えると重みは滑らかになり、ブロックの縁での重みの段差が小さくなります推。源の説明文は畳み込みを選んだ理由を述べていません。

06

本書の検討で見えていたこと

本書の検討の二つの設計と並べます（本書の設計は 19-04 §重み、28-05）。

項目	公開された構成	本書の今の設計	本書の辺 3 の設計
辺	奇数 ≥ 3、段とともに育つ	2（固定）	3（固定）
粗い点の位置	ブロックの中心	細かい点の上（ブロックの角）	ブロックの中心
重みの対象	パッチの点（四次元の全ての平行移動）	道の横のずれ $-1, 0, +1$	ブロックの中の一様な平均
重みの形	一様分布の J 回の畳み込み（$J \ge 4$、育つ）	$(1/8,\ 3/4,\ 1/8)$	一様

項目	公開された構成	本書の今の設計	本書の辺 3 の設計
隣との重なり	大きい（支えの半径 $J(L-1)/2 \geq L$）	あり（横に 1 ずれる）	—

中心に置く点は、本書の辺 3 の設計と同じ向きです。辺 3 の設計では、粗い点を中心に置くことと格子点の面の鏡映が合うことを使って、押し出した測度の鏡映正値性が Lean で閉じています（9-01 §06、`Block3.rp_push`）Lean 。公開された構成の重みは支えが育って隣と大きく重なるので、本書の鏡映正値性の議論の前提（写像の局所性と鏡映の面を跨がないこと）とは合いません推。重みを畳み込みで滑らかにし、J を育てる発想は、本書の検討には無かったものです。

07

読めていない所

- なぜ $J \geq 4$ で、なぜパッチの半径が $J+3$ 層か。源の説明文に理由が無く、下流の評価（Taylor の次数、支えの評価）のどこで使うかを辿っていません。
- 重みの滑らかさ（畳み込みの回数）が、どの評価で効いているか。小さい場の一段（11-09）の中で使われていると推しますが、確かめていません。
- 重なりの大きい予測子どうしの依存が、活動の局所性（9-06 の正則な活動の支え）にどう反映されるか。
- 辺 b_m の具体的な列（`YM/Price/Waits.lean` の構成）は言明だけ読みました。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
源 パッチは奇数の辺 $L \geq 3$、$J \geq 4$、半径 $(J+3)L$ の箱で、粗い点 x は細かい点 Lx に中心で座る	$J \geq 4$ と $J+3$ の理由
源 重みは一様分布の J 回の畳み込みで、総和 1・非負・超立方の群で不変（`weight_sum`・`weight_invariant`）	畳み込みを選んだ理由（説明文に無い）
初 支えの半径 $J(L-1)/2$ は $J \geq 4$ でいつも L 以上で、隣のブロックと重なる	重なりが押し出した測度の独立性にどう効くか
源 段 m の一段は $L = b_m$、$J = J(m+1)$ を使い、J は非減少で一段に高々 1 増え、無限大へ育つ	J の具体的な増え方（暦の構成は言明だけ読んだ）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
パッチ・半径・重み	源	`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）`YM/RG/Patch.lean`：`Patch` 29 行、`radius` 51 行、`roll_sites` 63 行、`weight` 87 行、`weight_sum` 90 行、`bondCost` 159 行、`predictorMass` 177 行
埋め込みと配位の見方	源	同 `YM/Lattice/Subdivision.lean` 29 行 `Ratio.embed`、`YM/Lattice/Path.lean` 224 行 `expandAt`、`YM/Lattice/Box.lean` 13 行 `box`
重みの不変性	源	同 `YM/Branch/Transport.lean` 135 行 `weight_invariant`
段ごとのパッチと暦	源	同 `YM/RG/History.lean` 88〜91 行 `Calendar.op`、97〜118 行 `Calendar.Fits`
(3) の数・表の数	初	本文の手計算（$(1+x+x^2)^4$ の係数）
本書の二つの設計	Lean	19-04 の出典の表、本書の Lean の束（`Block3.paths`・`Block3.wts`・`Block3.rp_push`）

この章で使った語 — パッチ、平滑の指数、一様分布の畳み込み、支えの半径、ブロックの中心、超立方の群、暦。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：9-03 ゲージ固定の二本立て — パッチの上で、細かい配位をどの枠で見るか（小さい場の対称な最小化と、大きい場の確率で引く軸ゲージ）を読みます。

ゲージ固定の二本立て — 対称な最小化と、確率で引く軸ゲージ

> この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討、§07 は未解決の地図です。

この章で分かること — 一段の核（9-01）に入る「枠」の定義。枠はパッチの点ごとの群の元で、細かい配位をそれで見直してから粗いリンクの予測子を作ります。小さい場の枠（対称な最小化、Landau 型）と大きい場の枠（根と軸の順を確率で引く軸ゲージ）、二つを分ける条件、そして大きい場で対称を破る選び方を確率で引いて和を取ることで、核の離散の対称が保たれること。

前提となる章 — 9-01 ブロックの核、9-02 パッチと重み。ゲージ固定一般は 4-08。

先に言うこと — 最小元の一意性（`Branch.align`）と、引いてよい札が在ること（`Axial.existence`）の証明の中身は読んでいません。閾の具体的な値も読んでいません。言えるのは定義と、閾を十分小さく取れば一意性が成り立つという言明の形までです。

この章の順序

1. **言明 — 枠とその二本立て**：`Patch.frame`、`usesMin`、`frameMass`
2. **小さい場の枠 — 対称な最小化**：全ての点の対と 24 通りの軸の順についての平均
3. **大きい場の枠 — 確率で引く軸ゲージ**：根と軸の順の札、引いてよい札の条件
4. **分岐の条件**：中心の軸ゲージでの輸送の chord と閾
5. **なぜ二本立てか**：一意性・連続性・離散の対称
6. **本書の検討で見えていたこと**：道の族の対称な平均
7. **読めていない所**

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。源はリポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）、評価書は `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）です。公開された構成の定理は源 で言明の字句を、「証明されている」という水準は評 で書きます。

01

言明 — 枠とその二本立て

パッチ B（9-02）の上の**枠**とは、点ごとの群の元の組 $h : B \to G$ です（源の `Patch.Frame`、`YM/RG/Patch.lean` 99 行。型そのものは正規化を含みません）。中心での正規化 $h(0) = 1$ は、小さい場では最小化の条件 `minimizing`（121 行）に入り、大きい場の軸ゲージの枠は式 (3) で自動的に満たします。枠はパッチの上のゲージ変換で、細かい配位をこれで見直してから予測子を作ります（9-04）源 。

記号を置きます。軸の順 l（四つの軸の並べ方、24 通り。`Order` は $\{0,1,2,3\}$ の置換、`YM/Lattice/Box.lean` 39 行）と二点 z, z' について、$\Gamma_l(z \to z')$ を「l の順に一軸ずつまっすぐ進んで z から z' へ行く座標の道」とします（`route`、同 44 行）。配位 U の道に沿った積（輸送）を $U(\Gamma)$ と書きます源 。

枠は二本立てで定義されています（`Patch.frame`、153〜155 行）源 。

$$h = \begin{cases} h^{\mathrm{sym}}(U) & \text{(小さい場：}\ \texttt{usesMin}\ \text{が成り立つ)}, \\ h^{\mathrm{ax}}_{(r,l)}(U) \ \text{ただし札 } (r,l) \text{ を確率で引く} & \text{(大きい場)}. \end{cases} \tag{1}$$

札 (r,l) の確率は `frameMass`（148〜151 行）です。小さい場では全ての札に一様な確率 $1/|B \times \mathrm{Order}|$ を置き（札は使われない）、大きい場では「引いてよい札」の集合 $E(U)$ の上の一様な確率 $1/|E(U)|$ を置きます源 。この確率が、核の式（9-01 の (2)）の $P(\tau \mid U)$ の枠の部分です。

二つの枠がちゃんと定まることは、三つの義務 `Patch.Branches`（182〜185 行）のうちの二つです：小さい場の最小元が一つに決まること（`frame_unique`）と、引いてよい札が空でないこと（`axial_exists`）源 。前者は `RG.frame_unique`（`YM/Branch/Uniform.lean` 18 行）が「枠の閾が群だけで決まるある $\delta > 0$ 以下なら、全てのパッチで一意」と言い、後者は `Axial.viable`（`YM/Branch/Pick.lean` 137 行）が倍率 16 で満たします源 。

02

小さい場の枠 — 対称な最小化

小さい場の枠は、次の関数を最小にする枠です（`score`、114〜115 行、`minimizing`、121〜122 行）源 。

$$\mathcal{S}_U(h) = \frac{1}{|B|^2 \cdot 24} \sum_{z \in B} \sum_{z' \in B} \sum_{l} \operatorname{price}\Big(h(z)\, U\big(\Gamma_l(z \to z')\big)\, h(z')^{-1} \Big), \qquad h(0) = 1. \tag{2}$$

$\operatorname{price}(u) = 1 - \operatorname{Re}\operatorname{tr} u / d_G$（9-01 の (1)）です。和はパッチの**全ての点の対**と**全ての軸の順**にわたります。最小元は、中心で 1 に固定した枠の集合のコンパクト性（群がコンパクト）で在り（`min_exists`、124 行）、選んだ一つを `selected` と呼びます（129 行）源 。

この最小化は Landau ゲージの離散の形の一つです。Landau ゲージは隣り合う点の間のリンクだけを見て $\sum \operatorname{price}(h(z) U_{zz'} h(z')^{-1})$ を最小にしますが、(2) は全ての点の対を座標の道でつなぐので、パッチの上の完全グラフの Landau 型です推 。全ての点の対を一様に見ることと、24 通りの順を平均することで、(2) は超立方の群（軸の入れ替えと反転）で不変な関数になります推 。

最小元は自己無撞着の式を満たします。源の `Branch.self_consistent`（`YM/Branch/Synchronize.lean` 100 行）は、各点 z で $h(z)$ が「ほかの全ての点から運んだ h の値の平均」に一番近い群の元であることを言います源 。最小元を一つに決める補題 `Branch.align`（同 232 行）の説明文は、平均の差が法の切り口に入ることと、最近点の写像の微分の評価から、二つの最小元の差が上限のノルムで縮むことを使う、と書いています源 。証明の中身は読んでいません。

03

大きい場の枠 — 確率で引く軸ゲージ

大きい場では、札 (r, l)（根 $r \in B$ と軸の順 l）を一つ引き、根から座標の道で輸送した値で枠を作ります（`axial`、102〜103 行と `frame` の第二の枝）源 。

$$A_{r,l}(z) = U\big(\Gamma_l(r \to z)\big), \qquad h^{\mathrm{ax}}_{(r,l)}(z) = A_{r,l}(0)^{-1} A_{r,l}(z). \tag{3}$$

これは根 r からの軸ゲージ（木のゲージの一つ）を、中心 0 で $h = 1$ になるように左から正規化したものです推 。軸ゲージでは、根から出る座標の道の上のリンクが全て 1 になり、残りのリンクの値は曲率（面の値）の積で書けます。

引いてよい札は、軸ゲージでのリンクの chord の和が、面の chord の和の決まった倍以下のものです（`eligible`、143〜146 行）源 。

$$E(U)=\Big\{(r,l):\ \sum_{\text{パッチの中のリンク } e}\operatorname{chord}\big(U_e^{h^{\mathrm{ax}}_{(r,l)}}\big)\ \le\ c_{\mathrm{ax}}\,(2R+1)\sum_{\text{パッチの中の面 } p}\operatorname{chord}(U_p)\Big\}. \tag{4}$$

c_{ax} は `axial_factor`、R はパッチの半径です。`Axial.existence`（`Pick.lean` 80 行）は、どの配位でも軸の数×層の数×4 の倍で抑えられる根が在ることを示し、四つの軸で倍率 16 にすると $E(U)$ が空でないことが出ます（`Axial.eligible`、同 119 行。倍率が 16 以上なら、どの軸の順についても引いてよい根が在る）源 。意味は「リンクの大きさが曲率の大きさで抑えられる軸ゲージを選ぶ」ことです。大きい場では面の値が大きい所があり、そうでない所も含めて、リンクの値の総量を曲率の総量で測れる枠を取ります推 。

札の選び方は対称を破ります。根の位置と軸の順を一つ選ぶと、超立方の群の作用で別の札に移ります。そこで札を一つに決めずに、**引いてよい札の上で一様に引き、核の中で和を取ります**。群の元 s は引いてよい札の集合を札の集合へ一対一に写すので（9-05 の `orient`）、和を取った核は対称です源 。

04

分岐の条件

どちらの枠を使うかは、`usesMin`（109〜110 行）で決まります源 。

$$\mathtt{usesMin}(U)\iff\forall\,l,\ k,\ z,\ z':\quad \operatorname{chord}\Big(A_{0,l}(z)\,U\big(\Gamma_k(z\to z')\big)\,A_{0,l}(z')^{-1}\Big)<\delta_F. \tag{5}$$

つまり、**中心 0 を根とする軸ゲージ**（どの軸の順 l でも）で見て、パッチの全ての点の対を結ぶ全ての座標の道の輸送が単位元から δ_F 未満の距離にあるとき、小さい場の枠を使います。δ_F は `frame_cut` です源 。

条件は面の大きさではなく、**輸送の chord** で書かれています。面の値がどれも小さくても、パッチの大きさ（半径 $(J+3)L$）にわたって曲率が積もれば輸送は大きくなりえます推 。(5) は軸ゲージでゲージ不変な形に直した条件で、配位のゲージ変換で変わりません（ゲージ不変性は 9-05）。

	小さい場（usesMin）	大きい場（そうでない）
枠	(2) の最小元（一つ）	札 (r,l) ごとの軸ゲージ (3)
札の確率	一様（使われない）	引いてよい札 $E(U)$ の上で一様
対称の保ち方	(2) が不変で、最小元が一意	札の和
使う閾	δ_F（最小元の一意性に足りる小ささ）	倍率 $c_{\mathrm{ax}}=16$

05

なぜ二本立てか

源の説明文と定義から、二本立ての役割を次のように読みます[推]。

- **小さい場で最小化を使う理由**。最小元は一意で（§01）、対称な関数の一意な最小元なので対称の作用と可換です。さらに、配位について連続に（解析的に）動くと見込まれ、小さい場の一段の展開（11-09）に向きます。
- **大きい場で最小化を使わない理由**。輸送が大きいと最小元が一意とは限らず、選び方が配位について不連続になりえます。軸ゲージは陽な式 (3) で、一意性の問題がありません。
- **確率で引く理由**。軸ゲージは根と順の選びで対称を破ります。一つの規則で選ぶと、核は超立方の群で不変でなくなります。札を一様に引いて和を取れば、核のレベルで対称が戻ります。

説明文は、小さい場の枝を「開いた枝」と呼び（`Patch.lean` 108 行）、分岐の閾と一意性の存在を「証明の義務で、どのゲージ群についても仮定しない」と書いています（10〜12 行）[源]。分岐の境で枠は不連続に切り替わりますが、核は二つの枝の確率の和として可測に定まり（9-01 の `density_meas`）、それで足りる設計です[推]。

06

本書の検討で見えていたこと

本書の決定的なブロック写像（19-04 §道の族）は、ゲージ固定をしません。粗いリンクを、細かい道の積の重みつきの平均で作り、道の族そのものを横の向きの入れ替えと反転について対称に取ることで、写像を離散の対称と可換にしました。道の積は両端だけでゲージ変換を受けるので、ゲージ共変性は道の積から直接出ます。

公開された構成は、枠でゲージを固定してから平均を取ります（9-04）。目的は同じ（離散の対称との可換性とゲージ共変性）で、道は別です。

- 本書は「道を対称に平均する」、公開された構成は「枠を対称に最小化する（小さい場）／対称を破る選びを確率で引いて和を取る（大きい場）」。
- 本書のブロック写像は大きい場でも同じ式で、平均が小さくなると球の内側に引き戻すだけです（19-04）。大きい場を写像の定義の中で別の枝として扱う設計は、本書の検討には無かったものです。
- 本書の検討の段ごとのゲージは Landau の切り口・軸のゲージ・木のゲージが場所によって混在していました（28-05 §05）。公開された構成は一段の核の定義の中に、二つの枠を条件で切り替える形で一度に入れています。

本書の検討で、大きい場の枠を確率で引くという発想は持っていませんでした。比べは 14-02 と 14-05 にまとめます。

07

読めていない所

- `Branch.align`（`YM/Branch/Synchronize.lean` 232 行）の証明の中身と、枠の閾 δ_F の値。
- `Axial.existence`（`YM/Branch/Pick.lean` 80 行）の証明の細部（層ごとに面の和が最小の切り口を選んで帰納する形までは読んだ）。
- 枠が小さい場の中で配位について解析的に動くことの言明の在りか（予測子の微分の側 `YM/PREC/FrameResponse` の名前だけ見た）。
- 分岐の境での枠の不連続が、小さい場の一段の評価にどう効かないようにしてあるか。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
源 枠は二本立てで、中心の軸ゲージでの全ての座標の道の輸送の chord が閾未満なら対称な最小化 (2)、そうでなければ確率で引く軸ゲージ (3)	閾 δ_F の値
源 枠の閾が群だけで決まる値以下なら、小さい場の最小元は全てのパッチで一意（`RG.frame_unique`）	その証明の中身（読んでいない）
源 倍率 16 で引いてよい札の集合 (4) は空でない（`Axial.viable`・`Axial.eligible`）	倍率 16 が必要かどうか
推 大きい場で対称を破る選びを確率で引いて和を取ることで、核の対称が保たれる（言明は 9-05）	枠の不連続が評価に効かない仕組み

出典と再現

もの	種別	出典・道具
枠・札・score・分岐・引いてよい札	源	`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）`YM/RG/Patch.lean`：99〜155 行（`Frame`・`axial`・`via`・`usesMin`・`score`・`minimizing`・`selected`・`facesum`・`axialCost`・`eligible`・`frameMass`・`frame`）、義務 182〜185 行
座標の道と軸の順	源	同 `YM/Lattice/Box.lean` 30〜44 行（`axisRoute`・`Order`・`route`）
最小元の一意性	源	同 `YM/Branch/Uniform.lean` 18 行 `RG.frame_unique`、`YM/Branch/Synchronize.lean` 100 行 `self_consistent`・232 行 `align`

もの	種別	出典・道具
引いてよい札の存在	源	同 `YM/Branch/Pick.lean` 80 行 `Axial.existence`、119 行 `Axial.eligible`、137 行 `Axial.viable`
本書の道の族の対称な平均	Lean	19-04 の出典の表

この章で使った語 — 枠、対称な最小化、Landau ゲージ、軸ゲージ、札、引いてよい札、分岐の条件、chord、超立方の群。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：9-04 予測子と群への射影 — 枠で見直した輸送を重みで平均し、群へ射影して粗いリンクの予測子を作る手続きを読みます。

予測子と群への射影 — 輸送の重みつき平均を群へ

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討、§07 は未解決の地図です。

この章で分かること — 一段の核（9-01）の中心 $Q_b(U,\tau)$ の作り方。隣り合う二つのパッチの対応する点を結ぶ平行な直線の輸送、その重みつき平均、群への射影（最近点）、一本を確率で引く側へ切り替える条件（散らばりと、平均と群の距離の両方）。予測子が Bałaban 型の拘束つき最小化の背景場とは別物であること。

前提となる章 — 9-01 ブロックの核、9-02 パッチと重み、9-03 ゲージ固定の二本立て。

先に言うこと — 予測子の閾 δ_P の値と、予測子が配位について滑らかに動くことの評価は読んでいません。§05 の「背景場ではない」は定義の比べで、二つの対象の間の評価を言うものではありません。

この章の順序

1. **言明 — 予測子の定義**：`connector`、`bondCost`、`best`、`predict`
2. **平行な直線の輸送**：隣り合うパッチの対応する点を結ぶ
3. **重みつき平均の最小化は群への射影**：`Branch.min_iff` と、散らばり＋距離の恒等式
4. **一本を確率で引く側へ切り替える条件**：散らばりと、平均と群の距離の両方
5. **予測子は背景場ではない**：陽に作った中心値と、解析の中の停留点
6. **本書の検討で見えていたこと**：引き戻しと射影は SU(2) で一致する
7. **読めていない所**

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。源はリポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）、評価書は `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）です。公開された構成の定理は源 で言明の字句を、「証明されている」という水準は評 で書きます。

01

言明 — 予測子の定義

粗いリンク $b = (x, i)$（粗い点 x から向き i）の**予測子** $Q_b(U, \tau) \in G$ は、源の `StepData.prediction`（`YM/RG/Block.lean` 44 行）で、次の三段で作られます源 。

1. **輸送の組**（`connector`、39〜42 行）：パッチの点 z ごとに

$$Y_b(z) = h_x(z)\, U\big(Lx + z \;\to\; Lx + z + Le_i \text{ の直線}\big)\, h_{x+e_i}(z)^{-1}. \tag{1}$$

   h_x は粗い点 x のパッチの枠（9-03）、L は辺です。

2. **重みつきの費用**（`bondCost`、`YM/RG/Patch.lean` 159 行）：群の元 u について

$$\mathcal{C}_b(u) = \sum_{z} w_J(z)\ \mathrm{price}\big(Y_b(z)\, u^{-1}\big). \tag{2}$$

   その最小元の一つを u_b^{*}（`best`、169 行）とします。最小元はコンパクト性で在ります（`bond_min`、164 行）。

3. **枝分かれ**（`predict`、173〜175 行）：

$$Q_b = \begin{cases} u_b^{*} & \mathcal{C}_b(u_b^{*}) < \delta_P, \\ Y_b(r)\ \ (r \text{ を確率 } w_J(r) \text{ で引く}) & \text{そうでないとき.} \end{cases} \tag{3}$$

   δ_P は予測子の閾 `predictor_cut` です。一本を引く確率は `predictorMass`（177〜179 行）で、平均を使う枝では札 r は使われず、一様な確率が置かれます。

平均を使う枝で最小元が一つに決まることは、三つの義務 `Branches` の二つ目 `predictor_unique` です。`RG.predictor_unique`（`YM/Branch/Uniform.lean` 58 行）は、予測子の閾が群だけで決まるある値以下なら、全てのパッチで一意と言います源 。

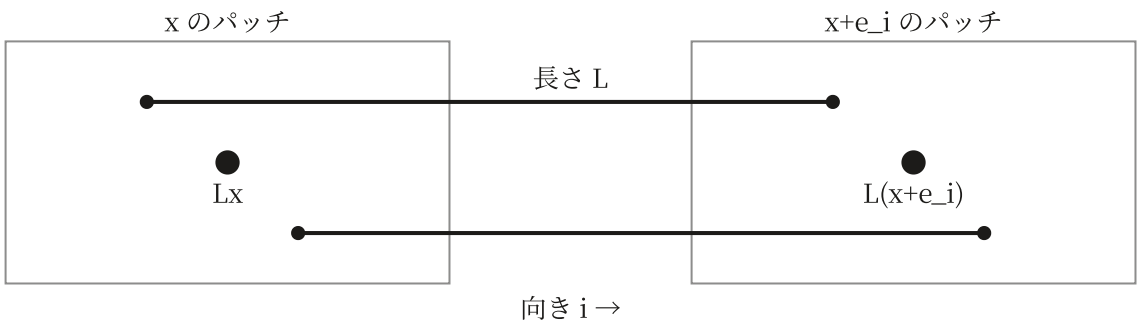
02

平行な直線の輸送

式 (1) の直線は、粗いリンクの始点のパッチの点 $Lx+z$ から、向き i にちょうど L 歩進んで、終点のパッチの**対応する点** $L(x+e_i)+z$ へ行きます源 。z はパッチ（半径 $(J+3)L$ の四次元の箱）の全ての点を動くので、直線は四次元の全ての平行移動を含みます。向き i に沿ったずれ（縦のずれ）も、横のずれも入ります源 。

輸送の両端に、それぞれのパッチの枠を掛けます。枠はパッチの上のゲージ変換なので、$Y_b(z)$ は「始点の枠で見た点 z から、終点の枠で見た点 z への輸送」です推 。細かい配位のゲージ変換 g を施すと、枠は $h_x(z) \mapsto g(Lx)\,h_x(z)\,g(Lx+z)^{-1}$ と動き（中心で $h=1$ と正規化しているので、粗い点の値 $g(Lx)$ が左に付く）、$Y_b(z)$ は $g(Lx)\,Y_b(z)\,g(L(x+e_i))^{-1}$ と、z **に依らない**両端の元だけで変わります（9-05 の `bond_gauge`）推 。だから z について平均してもゲージ共変性が崩れません。

図 1　粗いリンク $b=(x,i)$ の輸送の組。始点のパッチの点 z と終点のパッチの同じ点 z を、向き i の長さ L の直線で結ぶ（ここでは二本だけ描く）。



パッチの全ての点を使うので、一つの粗いリンクの予測子は、二つのパッチの和の領域の細かいリンクに依ります推 。重み w_J が効くのはその中心の半径 $J(L-1)/2$ の部分ですが（9-02）、枠はパッチの全体で決まります。

03

重みつき平均の最小化は群への射影

群の元を $d_G \times d_G$ の行列 $\mathrm{mat}(u)$ として見て、平均の行列を

$$M_b = \sum_{z} w_J(z)\ \mathrm{mat}\big(Y_b(z)\big) \tag{4}$$

と置きます。M_b は一般に群の元ではありません。源の `Branch.min_iff`（`YM/Branch/Center.lean` 72 行）は、重みの和が 1 のとき

$$u \text{ が } (2) \text{ の最小元} \iff \mathrm{mat}(u) \text{ は } M_b \text{ に Frobenius のノルムで一番近い群の元} \tag{5}$$

と言います源。「一番近い」は `Gauge.Nearest`（`YM/Gauge/Nearest.lean` 26 行）で、全ての v について $\|M - \mathrm{mat}\,u\|_F \le \|M - \mathrm{mat}\,v\|_F$ という意味です源。だから平均を使う枝の予測子は、平均の行列の**群への射影** $\Pi_G(M_b)$ です。

証明の芯は一つの恒等式です（`min_iff` の中の `hk`、76〜77 行）源。$\|\mathrm{mat}(u) - \mathrm{mat}(v)\|_F^2 = 2d_G\,\mathrm{price}(uv^{-1})$（`price_diff`、63 行）を使って展開すると、

$$2d_G\,\mathcal{C}_b(v) = \underbrace{\sum_z w_J(z)\,\big\|\mathrm{mat}\,Y_b(z) - M_b\big\|_F^2}_{\text{重みつきの散らばり}} \;+\; \big\|M_b - \mathrm{mat}(v)\big\|_F^2 \tag{6}$$

です初。第一項は v に依らないので、$\mathcal{C}_b$ の最小化は第二項、つまり M_b から群への距離の最小化と同じです。最小元が一意であることは、`Branch.weighted_unique`（`Center.lean` 95 行）が、$\mathcal{C}_b$ がある群の元で十分小さければ M_b は群の近くの管に入り、そこで最近点が一つに決まる（`nearest_tube`、`Nearest.lean` 141 行）ことから出しています源。

04 一本を確率で引く側へ切り替える条件

(3) の切り替えの条件は $\mathcal{C}_b(u_b^*) \ge \delta_P$ です（`usesBest` の否定、`Patch.lean` 171 行）源。(6) に最小元を入れると

$$2d_G\,\mathcal{C}_b(u_b^*) = \sum_z w_J(z)\big\|\mathrm{mat}\,Y_b(z) - M_b\big\|_F^2 + \mathrm{dist}_F\big(M_b, G\big)^2 \tag{7}$$

なので初、一本を引く側へ切り替わるのは

$$\text{重みつきの散らばり} + \text{平均と群の距離}^2 \;\ge\; 2d_G\,\delta_P \tag{8}$$

のときです初。**二つの項の両方が効きます**。「平均が群から遠いとき」だけと書くと、散らばりの寄与が落ちます。たとえば輸送の値が群の中で二つの離れた所に分かれていると、平均がたまたま群に近くても散らばりが大きく、一本を引く側に入ります推。

この枝では、点 r を重み $w_J(r)$ で引き、その一本の輸送 $Y_b(r)$ をそのまま予測子にします。群の元なので射影は要りません。引き方の確率は核の和の中に入り（9-01 の $P(\tau \mid U)$）、重みが超立方の群で不変なので、和を取った核は対称です（9-05）源。

枝	条件	予測子	札の確率
平均	(8) の左辺 $< 2d_G\delta_P$	$\Pi_G(M_b)$（一意）	一様（使われない）
一本	(8) の左辺 $\ge 2d_G\delta_P$	$Y_b(r)$	$w_J(r)$

05

予測子は背景場ではない

Bałaban の計画（7-07）では、粗い変数を固定したまま細かい作用を最小にする配位（拘束つきの最小化元、背景場）を作り、そのまわりで揺らぎを積分します。公開された構成の予測子は、それとは別の対象です源 。

- 予測子は、細かい配位から陽な規則（枠・平行な直線・重みつき平均・射影、または一本を引く）で作る**中心値**です。作用の最小化は入りません（枠の最小化は price の平均の最小化で、作用の最小化ではない）。
- 粗い配位は予測子に拘束されず、まわりにガウス型で揺らぎます（9-01）。

停留点にあたるものは、小さい場の一段の**解析**の中に別に出てきます。`YM/PCalc/Loop.lean` の `Kin`（74〜78 行）の欄 `stationary` は、細かい作用に罰の項を足した「結合の作用」の停留点で、その性質（実解析・Hessian の下界・粗い作用との 4 次までの jet の一致）は `Kin.Planned` の欄として運ばれます（93〜116 行）源 。これは積分の変数を置くための対象で、核の定義には入りません。詳しくは 11-09 で読みます。

06

本書の検討で見えていたこと

本書のブロック写像（19-04 §非線形のブロック写像）は、道の積の重みつきの平均 $q_b(U)$（四元数）を作り、閾 $r_0 \in (0,1]$ の引き戻し $\rho_{r_0}(q) = q/\max(|q|, r_0)$ で球へ戻します。SU(2) では、この二つの作り方の間に一つの関係があります初 。

SU(2) の元の実数係数の一次結合は、単位の四元数の実数係数の一次結合なので、四元数 q（2×2 の行列 $q_0\mathbf{1} + iq\cdot\sigma$）です。Frobenius のノルムは $\|q\|_F^2 = 2|q|^2$ で、SU(2) は $|q| = 1$ の球面です。だから $q \neq 0$ の最近点は $q/|q|$ です初 。つまり

$$\Pi_{SU(2)}(q) = \frac{q}{|q|} = \rho_{r_0}(q) \qquad (|q| \geq r_0). \tag{9}$$

平均が閾以上の所では、本書の引き戻しと公開された構成の射影は同じ写像です初 。違うのは三点です。

- **何を平均するか**：本書は固定した道の族（横に ± 1 ずれる道）の積、公開された構成は枠で見直した平行な直線の輸送（パッチの全ての点、縦のずれも含む）。
- **平均が使えない所**：本書は $|q| < r_0$ で球の内側の値 q/r_0 を返し、配位の空間を球に広げます。公開された構成は散らばり＋距離^2 で枝を切り替え、一本を確率で引いて群の値に留ま

ります。

- **中心値のあと**：本書は中心値そのものを粗いリンクにし（決定的）、公開された構成は中心値のまわりにガウス型の揺らぎを足します（9-01）。

本書の検討の解析の側（第 15 部・28-05 §05）は、背景として拘束つきの作用の最小化元を使っていました。陽に作った中心値で核を定義し、停留点は解析の道具にだけ使う、という分け方は、本書の検討に無かった発想です（14-05）。

07

読めていない所

- 予測子の閾 δ_P の値（`weighted_unique` が群の最近点の管の半径から作る、までは読んだ）。
- 予測子が小さい場の中で配位について滑らかに動くことの評価（`YM/PREC/FrameResponse` の名前だけ見た）。
- 一本を引く枝が、大きい場の評価（11-04）でどう払われるか。
- 平行な直線が縦のずれも含むことが、予測子の一次の部分（線形化）でどういう核になるか。本書の道の核（19-04）に当たるものの式は読んでいません（候補は `YM/Push/FREE_RESOLVENT/Flat.lean` の `probe`）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
源 予測子は、枠で見直した平行な直線の輸送 (1) の重みつき平均から作り、費用 (2) の最小値が閾以上なら一本を確率 w_J で引く	閾 δ_P の値
源 (2) の最小元は平均の行列 (4) の群への最近点（`Branch.min_iff`）、閾が十分小さければ一意（`RG.predictor_unique`）	最小元が配位について滑らかに動く評価
初 切り替えは「重みつきの散らばり＋平均と群の距離^2」が $2d_G\delta_P$ 以上のとき（両方の項が効く）	—
源 予測子は拘束つきの作用の最小化元ではない。停留点は解析の中の `Kin.stationary` として別に入る	予測子と停留点の差の評価
初 SU(2) では群への射影は $q/\lvert q\rvert$ で、本書の引き戻しと $\lvert q\rvert \geq r_0$ で一致する	平均する輸送の族の違いがどう効くか

出典と再現

もの	種別	出典・道具
輸送の組・予測子	源	`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）`YM/RG/Block.lean` 39〜45 行（`connector`・`prediction`）
費用・最小元・枝分かれ	源	同 `YM/RG/Patch.lean` 159〜179 行（`bondCost`・`bond_min`・`best`・`usesBest`・`predict`・`predictorMass`）
射影であること・恒等式	源	同 `YM/Branch/Center.lean` 63 行 `price_diff`、72 行 `min_iff`（76〜77 行の恒等式）、`weighted_unique`；`YM/Gauge/Nearest.lean` 26 行 `Nearest`、141 行 `nearest_tube`
予測子の一意性	源	同 `YM/Branch/Uniform.lean` 58 行 `RG.predictor_unique`
停留点（解析の中）	源	同 `YM/PCalc/Loop.lean` 74〜116 行（`Kin`・`Kin.Planned`）
(6)〜(9)	初	本文の計算
本書のブロック写像と引き戻し	Lean	19-04 の出典の表

この章で使った語 — 予測子、輸送、平行な直線、重みつきの費用、群への射影、最近点、散らばり、背景場、停留点、引き戻し。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：9-05 対称性 — 枠・重み・予測子の作りから、一段の核が超立方の群・粗い並進について不変で、ゲージについて共変であることを読みます。

対称性 — 超立方の群と粗い並進での不変性、ゲージの共変性

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討、§07 は未解決の地図です。

この章で分かること — 一段の核 $T_\beta(U, V)$ が満たす二つの等式（離散の時空の対称での不変性、ゲージ変換での共変性）の正確な形と、それがどの部品から出てくるか。大きい場で対称を破る選び方を確率で引いて和を取る仕組みが、ここで効きます。

前提となる章 — 9-01〜9-04。超立方の群は 1-02、ゲージ変換は 19-01。

先に言うこと — 対称の群は、粗い格子の点の写像 $x \mapsto s \cdot x + b$（s は符号つきの置換、b は粗い点）全体です。粗い格子点を通る面での鏡映も、粗いリンクの真ん中を通る面での鏡映も、この中に入ります（§02）。これは核の**対称としての共変性**の等式で、鏡映正値性の言明ではありません。連続の回転は格子の段では言われず、極限で別に上げます（12-06）。

この章の順序

1. **言明 — 二つの等式**：`StepData.channel` と `StepData.covary`
2. **群の作用の形**：符号つきの置換 384 元と粗い点だけのずらし、二種類の面での鏡映
3. **出どころ (1) — 重みとパッチの不変**
4. **出どころ (2) — 最小元の一意性と、札の和**
5. **出どころ (3) — 向きの反転と逆元、ゲージ共変性**
6. **本書の検討で見えていたこと**：対称な道の族と、辺 3 の設計の鏡映との交換
7. **読めていない所**

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。源はリポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）、評価書は `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）です。公開された構成の定理は源 で言明の字句を、「証明されている」という水準は評 で書きます。

01

言明 — 二つの等式

源の `YM/Branch/Covariant.lean` は、三つの義務 `Branches`（9-03・9-04）を仮定して、一段の核について二つの等式を示しています源 。

$$T_\beta\big(\mathrm{pull}_{s,Lb}\,U,\ \mathrm{pull}_{s,b}\,V\big) = T_\beta(U,V) \qquad (\texttt{StepData.channel},\ 50\ \text{行}) \tag{1}$$

$$T_\beta\big(g\cdot U,\ (g\circ\iota)\cdot V\big) = T_\beta(U,V) \qquad (\texttt{StepData.covary},\ 56\ \text{行}) \tag{2}$$

(1) は全ての符号つきの置換 s、全ての粗い点 b、全ての β で、(2) は細かい格子の全てのゲージ変換 g（点ごとの群の元）と全ての β で成り立ちます。ι は粗い点を細かい点 Lx へ写す埋め込み（9-02）、$g\cdot U$ はリンクごとに $U_{z,z+e}\mapsto g(z)U_{z,z+e}g(z+e)^{-1}$ とする作用です源 。

(2) は「細かい配位をゲージ変換し、粗い配位を粗い点での値 $g(Lx)$ でゲージ変換すれば、核は変わらない」と読めます。粗い格子のゲージ変換は細かいゲージ変換の粗い点への制限です推 。

この二つは、暦の構造 `Calendar.BlockControl`（`YM/RG/History.lean` 120〜128 行）の欄 `symmetric`・`gauge` として段ごとに要求され、`Calendar.blocks_go`（`Covariant.lean` 70 行）が (1)(2) から供給します源 。`BlockControl` は段の列の構造 `Levels` の欄なので、構成の定理の結論 `Family.Makes` の下にある `History` の段の列は、全ての段でこの対称を持つ核を使っています源 。

02

群の作用の形

符号つきの置換 s は、四つの軸の置換と軸ごとの符号の反転の組です（源の `Signed`、`YM/Space/Index.lean` 23 行）。元の数は $4!\times 2^4 = 384$ で、これは四次元の超立方体の対称の群（超八面体群）です初 。

配位への作用 $\mathrm{pull}_{s,b}$（`YM/Lattice/Path.lean` 147 行）は、点のアフィン写像 $x \mapsto s \cdot x + b$（`affine`、145 行）で配位を引き戻したものです。向きが反転するリンクでは、逆向きにたどった値、つまり逆元を読みます（`Step.pull_read`）源。

s は原点のまわりに働き、そのあと b だけずらします。粗い点 b の**まわり**の回転ではありません源。(1) の b は全ての粗い点を動くので、群は次の写像を全て含みます初。

- **粗い並進**：$s = 1$ なら $x \mapsto x + b$。細かい側では Lb だけの並進です。
- **格子点を通る面での鏡映**：s を軸 i の符号の反転（源の `Signed.mirror`、`YM/Space/Index.lean` 55 行）、$b = 0$ とすると $x_i \mapsto -x_i$。面 $x_i = 0$ での鏡映です。$b = 2c\,e_i$ なら面 $x_i = c$（粗い格子点を通る面）での鏡映です。
- **粗いリンクの真ん中を通る面での鏡映**：同じ s で $b = e_i$ とすると $x_i \mapsto 1 - x_i$。面 $x_i = \frac{1}{2}$ での鏡映で、粗いリンク $(0, e_i)$ の真ん中を通ります。細かい格子では面 $x_i = L/2$ で、L が奇数なのでブロックの境、つまり細かいリンクの真ん中を通る面です。$b = (2c+1)e_i$ なら面 $x_i = c + \frac{1}{2}$ です。
- **軸の入れ替えと、それと並進の組**：s が置換を含む場合。たとえば $b = 0$ で原点のまわりの超立方の回転です。

したがって (1) は、粗い格子の二種類の面（格子点を通る面と、リンクの真ん中を通る面）での鏡映を**両方**含みます初。この二種類は、元の Wilson の測度の鏡映正値性が言われる二種類の面（12-01）と同じ形です。ただし (1) は核が対称と可換であるという**共変性**の等式で、押し出した測度の鏡映正値性を言うものではありません源。一段の核の鏡映正値性の言明は、読んだ範囲に見当たりません（9-01 §07）。

03

出どころ (1) — 重みとパッチの不変

パッチは原点を中心とする箱で、重みは一様分布の畳み込みです（9-02）。どちらも符号つきの置換で不変です。源は箱の点の置換 `offset`（`YM/Branch/Transport.lean` 18 行）を作り、`weight_invariant`（135 行）で $w_J(s \cdot z) = w_J(z)$ を示しています源。

この不変性が予測子の側に効きます。費用 $\mathcal{C}_b(u) = \sum_z w_J(z)\,\mathrm{price}(Y_b(z)u^{-1})$（9-04 の (2)）は、輸送の組を $z \mapsto s \cdot z$ で並べ替えても値が変わらないので、最小元と一本を引く確率が並べ替えと可換です（`bond_pull`、`YM/Branch/Predict.lean` 37 行）源。

04

出どころ (2) — 最小元の一意性と、札の和

枠（9-03）の二つの枝で、対称の出方が違います源。

- **小さい場**：最小化する関数 $\mathcal{S}_U(h)$（9-03 の (2)）は、全ての点の対と全ての軸の順についての平均なので、符号つきの置換で不変です（`via_channel`、`Transport.lean` 26 行）。分岐の条件も不変です（`min_channel`、34 行）。**最小元が一意**なので、回した配位の最小元は、最小元を回したものに等しくなります（`selected_channel`、56 行）。一意でなければ、選んだ最小元が対称と可換になる保証はありません推。
- **大きい場**：軸ゲージの札 (r, l) は、群の元 s で $(s \cdot r,\ s \circ l)$ に移ります（`orient`、20 行）。引いてよい札の集合も一対一に移ります（`frames_channel` の証明の中、77〜90 行）。札の確率は集合の上の一様分布なので、回した配位の札の確率は、札を移した確率に等しくなります。そこで核の和 $\sum_\tau$ の変数を $\tau \mapsto s \cdot \tau$ と取り替えると（`withinChoice`、`Predict.lean` 88 行、`Equiv.sum_comp`）、核の値が戻ります（`mass_channel`、`Covariant.lean` 22 行）。

一つの札で決めた軸ゲージは対称を破りますが、**札を引く確率ごと核に入れて和を取る**ことで、核は等式として不変になります推。一本を引く予測子の枝（9-04）も、重み w_J が不変なので同じ形で戻ります。

05

出どころ (3) — 向きの反転と逆元、ゲージ共変性

符号の反転で、粗いリンク b が負の向きのリンクに移ることがあります。そのときは、反対の向きの粗いリンクの予測子が逆元になることを使います。`bond_inv`（`Predict.lean` 44 行）は、輸送の組を逆元にすると予測子が逆元になり、一本を引く確率は変わらない、と言います源。証明は $\mathrm{price}(k^{-1}u) = \mathrm{price}(ku^{-1})$（price の逆元と共役での不変性 `price_inv`・`price_conj`）です源。雑音の因子も同じ不変性で戻ります（`noise_channel`、`Covariant.lean` 37 行）。

ゲージ共変性 (2) は、三つの部品からです源。

1. 枠：細かいゲージ変換で、枠は粗い点の値を左に付けた形で動き、札の確率は変わりません（`frame_gauged`、`Transport.lean` 111 行）。分岐の条件と引いてよい札の集合はゲージ不変です。
2. 予測子：輸送の組を両側から定数 u, v で挟むと、予測子も同じ u, v で挟まれ、一本を引く確率は変わりません（`bond_gauge`、`Predict.lean` 54 行）。

3. 雑音：$\mathrm{price}\big(uxv^{-1}(uyv^{-1})^{-1}\big) = \mathrm{price}(xy^{-1})$（共役での不変性、`covary` の証明の最後）。

9-04 §02 で見たとおり、輸送の組 $Y_b(z)$ は z に依らない両端の元 $g(Lx)\cdot g(L(x+e_i))^{-1}$ で挟まれるので、予測子の部品（bond_gauge）の形がそのまま使えます[初]。

核の部品	時空の対称 (1) の出どころ	ゲージ (2) の出どころ
重み w_J・パッチ	`weight_invariant`・`offset`	—
小さい場の枠	score の不変＋最小元の一意（`selected_channel`）	`frame_gauged`
大きい場の枠	札の置換 `orient`＋札の和	`frame_gauged`
予測子（平均・一本）	`bond_pull`・`bond_inv`	`bond_gauge`
雑音	`noise_channel`（price の逆元・共役不変）	price の共役不変

この対称は表示の側にも引き継がれます。主な作用は符号つきの置換で平均した形で書かれ（9-06 の `inChannels`）、活動の族は置換で移り合う（`Activities.Moves`）ことが表示の条件に入っています[源]。小さい場の一段で、曲率の方向の対数 Hessian の和が $\delta_{ab}\Delta$ の形になる（等方になる）のも、この対称からです（11-09）[推]。

06

本書の検討で見えていたこと

本書のブロック写像は、道の族を横の向きの入れ替えと反転について対称に取ることで、離散の対称と可換にしました（19-04 § 道の族）。ゲージ共変性は道の積が両端だけでゲージ変換を受けることから出ます。

本書の Lean で閉じている対称の言明は次のとおりです[Lean]。

- 今の設計（辺 2）：細かい側の段が十分大きいとき、押し出した Wilson の測度は粗い並進で不変（有界で連続な関数の期待値について。Lean：`hsym_translation`、結合に仮定なし）。
- 辺 3・中心の設計：格子点の面の鏡映との交換（全ての段、ゲージ変換なし、Lean：`Block3.blockMap_refl_cfg`・`Block3.down_refl`）、粗い並進（`Block3.blockMap_trans`・`down_trans`）、符号の反転（`Block3.blockMap_flip`）、境の鏡映（`Block3.down_reflB`）。

本書の写像は決定的なので、対称は写像の等式（$B(\Theta U)=\Theta B(U)$ の形）で言えます。公開された構成は核なので、対称は核の等式 (1) で言われ、配位ごとに対称を破る選び（軸ゲージの札・一本を引く点）を確率ごと核に入れて和で戻します。目的は同じで、道が違います。本書の検討には、対称を破る選びを確率で平均して戻すという発想はありませんでした（14-05）。

07

読めていない所

- 一段の核について、鏡映正値性（鏡映についての正値型）が言われているか。(1) は対称としての共変性で、正値性の言明は読んだ範囲に見当たりません。鏡映正値性は元の Wilson の測度について、二種類の面で言われています（12-01）。
- `selected_channel`・`min_channel`・`good_channel` の証明の細部（言明と使われ方だけ読んだ）。
- (1)(2) が、表示の対称（`Activities.Moves`）を段から段へ運ぶ証明のどこで使われているか（`Push/SectorMeasure` の `push_columns` が使う、という記録まで）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
源 義務 `Branches` のもとで、核は粗い格子の点の写像 $x \mapsto s \cdot x + b$（符号つきの置換 384 元と粗い点 b）について不変で、粗い並進と、格子点を通る面・粗いリンクの真ん中を通る面の両方の鏡映を含む（`StepData.channel`）	一段の核の鏡映正値性（この等式は対称としての共変性で、正値性ではない）
源 同じ仮定で、核は細かいゲージ変換と粗い点への制限について共変（`StepData.covary`）	—
源 段ごとの `BlockControl` が二つの等式を要求し、`blocks_go` が供給する	表示の対称を段から段へ運ぶ証明の細部
推 出どころは、重みとパッチの不変、小さい場の最小元の一意性、大きい場の札の和、price の逆元・共役での不変	—

出典と再現

もの	種別	出典・道具
二つの等式と供給	源	`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）`YM/Branch/Covariant.lean`：`prediction_channel` 13 行、`mass_channel` 22 行、`noise_channel` 37 行、`channel` 50 行、`covary` 56 行、`Calendar.blocks_go` 70 行
段ごとの要求	源	同 `YM/RG/History.lean` 120〜134 行（`BlockControl`・`Levels`）
符号つきの置換とアフィンの引き戻し	源	同 `YM/Space/Index.lean` 23 行 `Signed`、`YM/Lattice/Path.lean` 145〜147 行 `affine`・`pull`
パッチと札の置換、枠の対称とゲージ	源	同 `YM/Branch/Transport.lean`：`orient` 20 行、`offset` 18 行、`via_channel` 26 行、`min_channel` 34 行、`selected_channel` 56 行、`frames_channel` 77 行、`frame_gauged` 111 行、`weight_invariant` 135 行

もの	種別	出典・道具
予測子の対称とゲージ	源	同 `YM/Branch/Predict.lean`：`bond_pull` 37 行、`bond_inv` 44 行、`bond_gauge` 54 行、`withinChoice` 88 行
本書の対称の言明	Lean	本書の Lean の束（`hsym_translation`、`Block3.blockMap_refl_cfg`・`down_refl`・`blockMap_trans`・`down_trans`・`blockMap_flip`・`down_reflB`）。Lean の核の検査を通った束

この章で使った語 — 符号つきの置換、超八面体群、粗い並進、ゲージの共変性、最小元の一意性、札の和、向きの反転。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：9-06 密度の表示 — 一段で運ばれる密度を、真空の項・主な作用・正則な活動・強制された活動の気体に分けて書く「表示」を読みます。

密度の表示 — 真空の項・主な作用・正則な活動・強制された活動の気体

> この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討、§07 は未解決の地図です。

この章で分かること — 段 m の密度 ρ_m を書く形 `Rep` の四つの部分と、その上に課される条件（正規化・帳簿・対称）。β がこの表示の中の運動項の係数として定義されること。一番細かい段で表示が裸の Wilson の重みに一致すること。表示は一つに決まるとは言われていないこと。

前提となる章 — 9-01 ブロックの核、9-05 対称性。ポリマー（塊）の気体は 7-04。

先に言うこと — ここは表示の**定義**と条件の形の章です。段から段へこの形が保たれることの証明は第 11 部（11-01〜11-09）で読みます。小さい場の閾と切った作用の細部は 9-07。

この章の順序

1. **言明 — 表示の形**：`Rep` と `Rep.eval`
2. **主な作用**：切った面の項・輸送した曲率の二乗・三次と四次の原子・一ループの原子
3. **二つの正規化**：運動項の係数 `metric_zero` と一ループの部分 `loop_jets`
4. **正則な活動と強制された活動の気体**：`Activities` と `gas`
5. **表示に課される条件と、言っていないこと**：`Conv`・`Lawful`、一意性なし
6. **本書の検討で見えていたこと**：押し出しの測度そのものと、表示の中の係数
7. **読めていない所**

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。源はリポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）、評価書は `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）です。公開された構成の定理は源 で言明の字句を、「証明されている」という水準は評 で書きます。記号：一ループの傾きを $s = 11C_g/(24\pi^2)$（評価書では一ループの係数の二倍として書かれる量、源の `slopeConstant`）と書きます。

01

言明 — 表示の形

一段の核（9-01）で密度を運ぶと、密度は配位の任意の関数になりえます。公開された構成は、各段の密度を**決まった形**で書けることを、段の列の構造の欄として要求します。その形が `YM/RG/History.lean` の `Rep`（165〜171 行）で、六つの欄（道のデータ・切りの母数・活動・帳簿の点・β・v）の組です源 。`Rep.eval`（179 行）は

$$\rho(U) = \exp\Big(v\,|\Lambda| \;-\; S^{\mathrm{ch}}_{\beta}(U) \;-\; \sum_{i} \mathbf{1}\big[\text{支え } X_i \text{ が健康}\big]\, E_i(U) \Big) \cdot \mathrm{gas}(U) \tag{1}$$

です源 。四つの部分を名前で呼びます。

部分	名前	源	この本の章
$v\lvert\Lambda\rvert$	真空の項（$\lvert\Lambda\rvert$ は点の数）	`Rep.v`	本章
S^{ch}_{β}	主な作用（符号つきの置換で平均したもの）	`PathData.inChannels`	§02・§03、9-07
$\sum \mathbf{1}[\cdot]E_i$	正則な活動の和（健康な所だけ）	`Activities.additive`	§04、11-09
gas	強制された活動の気体	`Activities.gas`	§04、11-06

「健康」は、支えの点に旗が立っていないことです。旗は、面の chord が段の閾 t_m を超える面に触れる点です（9-07）源 。

段の列 `History` は、全ての (N, p, m) に表示を一つずつ持ちます（204〜206 行）。構造 `History.Selected`（234〜240 行）の欄 `represents` は全ての段 $m \le N$ で表示が条件 `Conv` を満たすこと、`starts` は一番細かい段 $m = N$ で $v = 0$ かつ表示が裸の Wilson の重み $e^{-\beta_N S_{\mathrm{W}}(U)}$ に等しいこと、`steps` は一段の等式（9-01 の (4)）を要求します源 。`Selected` は構成の定理の結論 `Family.Makes` の欄 `wilson` です（`YM/Source/Construction.lean` 45 行）源 。

02

主な作用

主な作用は `PathData.principal`（`YM/RG/PathActions.lean` 236〜238 行）を、符号つきの置換 R（384 元、9-05）で平均したものです（`inChannels`、241〜242 行）源。

$$S_\beta^{\mathrm{ch}}(U) = \frac{1}{384}\sum_{R} S_\beta^{\mathrm{pr}}(\mathrm{pull}_{R,0}\,U), \tag{2}$$

$$S_\beta^{\mathrm{pr}}(U) = \beta\Big[\sum_{p}\Big(\mathrm{clip}_t\big(\mathrm{chord}\,U_p\big) + \mathbf{1}[\mathrm{kept}]\,\tfrac{1}{2}\|\ell_p(U)\|^2\Big) + \sum_{x}\big(\text{三次の原子} + \text{四次の原子}\big)\Big] \tag{3}$$

四つの材料を順に読みます源。

- **切った面の項** $\mathrm{clip}_t(\sigma)$（`clipped`、218 行）：面の $\mathrm{chord}\,\sigma = \mathrm{chord}\,U_p$ が閾 t 以下なら $c_{\mathrm{dir}}\sigma^2/2$、超えれば一次の $c_{\mathrm{lin}}\,t\,\sigma$。形と折れ目の条件 $c_{\mathrm{lin}} < c_{\mathrm{dir}}/16$ は 9-07 で読みます。
- **輸送した曲率の二乗** $\frac{1}{2}\|\ell_p\|^2$：面 p ごとの Lie 環の値 $\ell_p(U) = \sum_k r_{p,k}\,\mathrm{Ad}\big(U(\gamma_k)\big)F(U_{p_k})$（`ell`、190 行）。$F(u)$ は $(u-u^{-1})/2$ の Lie 環への射影（`Gauge.curvature`、`YM/Gauge/Colors.lean` 173 行）、γ_k は道、p_k は別の面で、係数の並び $r_{p,k}$ が道のデータの「行」です（`PathData.row`、151 行、`Slot`、38〜56 行）。離れた面の曲率を道で運んで足す項です。この項は配位が条件 kept（全ての面で chord が $t\,e^{\mathrm{dist}/\text{緩和長}}$ 以下、210〜211 行）を満たすときだけ入ります。
- **三次・四次の原子**：Lie 環の値の三つ・四つの積の、係数つきの和（`Atom`、84〜105 行）。旗の立った所では 0 にします（`placed` が `masked` を使う、107〜108 行）。
- **一ループの原子**：二つの脚の原子で、**β が掛かりません**。β に依らない一ループの寄与を持つ部分です。

主な作用の係数（行・原子）は、段 m と切断 N ごとの道のデータ `PathData` に入っていて、体積の番号 p に依りません（`Selected.path_shared`、235 行）源。

03

二つの正規化

表示 (1) の β は、主な作用の前に掛かる**一つの実数**です。そのままでは β と一ループの原子や正則な活動の間で F^2 の項を付け替えられるので、二つの正規化で付け替えを止めています（道のデータの条件 `PathData.Bounds`、173〜185 行の欄 `metric` と `loop_normal`）源。

運動項の係数（`metric_zero`、161〜162 行）。行の係数の零運動量の和を $S^{(0)}_{k,i} = \sum_{\text{行のうち面の型 } i \text{ のもの}} r$（`symbol0`、158 行）として、全ての面の型 i, j で

$$c_{\mathrm{dir}}\,\delta_{ij} + \sum_{k} S^{(0)}_{k,i}\,S^{(0)}_{k,j} = \delta_{ij}. \tag{4}$$

滑らかで小さい配位では $\mathrm{chord}\,U_p \approx |F_p|$、$\ell_p \approx \sum_j S^{(0)}_{p,j} F_j$（零運動量）なので、主な作用の二次の部分は零運動量で $\frac{\beta}{2}\sum_{ij}\big(c_{\mathrm{dir}}\delta_{ij} + (S^{(0)\mathsf{T}}S^{(0)})_{ij}\big)F_iF_j = \frac{\beta}{2}\sum_i F_i^2$ になります推。(4) は「β をちょうど運動項の係数として読む」ための正規化です。

一ループの部分（`loop_jets`、167〜169 行）。一ループの原子の係数について、面の型と色の組ごとに、係数の和が 0、各向きの一次のモーメント（二つの脚の位置の差を掛けた和）も 0 であることを要求します源。これは、一ループの部分に零運動量と一次の運動量の F^2 の項が残らないこと、つまり限界的な F^2 の項が全て β に集まることを意味します推。

源の説明文（`History.lean` 25〜33 行）は、β を「表示の基の部分の中の実際のスカラーで、平らな係数の配列と運動項の計量の正規化、先頭の Fourier の係数を除いた一ループの核、affine な剰余の消滅の条件のもとでのもの。測度に独立に結びついた数ではない」と書いています源。この定義から始まる「段 m の結合」の話は 10-01 で読みます。

04

正則な活動と強制された活動の気体

活動の族 `Activities`（`YM/RG/Activities.lean` 62〜66 行）は、番地を自然数で付けた二種類の関数の列です源。

正則な活動 E_i：番地は錨の点と支え（`RegularAddress`、37〜40 行）。表示の中では支えが健康なときだけ入ります（`regularOccurrence` が `masked`、131 行）。条件 `RegularFamily`（70〜75 行）は、支えの上の局所性・ゲージ不変・健康な所での C^{order} の滑らかさ、**平らな配位で 0**（$E_i(1) = 0$）、**affine な方向の対数 Hessian が 0** を要求します。後の二つは、定数は真空の項 v へ、限界的な二次の項は β へ移した**後の姿**であることを表します（小さい場の一段の読み直し、11-09）推。

強制された活動 K_i：番地は支えと「在庫」（旗を担当する点の空でない集合、`ForcedAddress`、42〜47 行）。条件 `ForcedFamily`（77〜84 行）の欄 `permit` は、$K_i \neq 0$ なら支えの中の旗がちょうど在庫に一致することを要求します源。気体は

$$\mathrm{gas}(U) = \sum_{\substack{b:\ \text{支えが互いに素},\\ \bigcup_{i\in b}\text{在庫}_i = \text{旗}(U)}} \ \prod_{i\in b} K_i(U) \tag{5}$$

です（`admissible`・`gasOccurrence`・`gas`、114〜129 行）源。旗の全体を、支えが重ならない強制された活動で**ちょうど覆う**組だけの和です。旗が一つも無ければ空の組だけが残り、$\mathrm{gas} = 1$ です（`gas_one`、135 行）源。大きい場の寄与は全てこの気体に入り、旗の無い小さい場では表示は (1) の指数の部分だけになります。

大きさの帳簿は、点ごとの重みつきの和で測ります（`EBound`・`KBound`、98〜104 行）源。正則な活動は錨の点ごとに、強制された活動は支えが含む点ごとに、$e^{c_{\mathrm{sup}}\cdot(\text{被覆数})} \times (\text{大きさ})$ を足して帳簿以下にします。c_{sup} は段の定数 `supportExponent`、被覆数は、格子の最大値の距離で半径 $B_m = \lceil (\log \hat{\beta}_m)^2 \rceil$ の球（中心を持つ辺 $2B_m + 1$ の立方体）を、和がつながるように並べて支えを覆う最小の数で（`coverNumber`、`YM/Lattice/Support.lean` 71 行。`BudgetPoint.mass`、`YM/RG/Masks.lean` 144 行）、正則な活動の「大きさ」は健康な配位での、大きさ t_m の方向への有限階の微分の上限です（`supBounds`、164〜166 行）。点ごとの和なので、帳簿は体積に依らない形です推。

05

表示に課される条件と、言っていないこと

段 m の表示が満たす条件 `History.Conv`（`History.lean` 213〜218 行）は四つです源。

欄	中身
`vac`	帳簿の点（閾 t_m、被覆の尺度 B_m、次数）は段 m の決まった値 `budget m`
`clip`	切りの母数は段の定数
`good`	道のデータの帳簿（`Bounds`）と活動の帳簿（`Valid`）。正則な活動の帳簿は $\hat{g}_m^{11/5}$（`allowance`）、強制された活動の帳簿は $e^{-P_m^{1/5}}$（`forcedAllowance`）
`band`	$\beta(N,p,m) \in [\hat{\beta}_m/2,\ 2\hat{\beta}_m]$

ここで $\hat{\beta}_m = \bar{\beta} + s \log D_m$、$\hat{g}_m = \hat{\beta}_m^{-1/2}$、$P_m = \exp((\log\log \hat{\beta}_m)^2)$ です（`Calendar` の定義、79〜86 行）源。活動の帳簿には対称の条件（`Activities.Moves`、87〜96 行：符号つきの置換で番地ごと移り合う）も入っています。

一番細かい段の表示は裸の Wilson の重みそのもので（`starts`）、道のデータの主な作用の 4 次までの jet が Wilson のエネルギーに一致し、一ループの原子の係数は 0 です（`Kin.Planned` の欄 `peak`・`initial`、`YM/PCalc/Loop.lean` 100・102 行）源。粗い段の主な作用は、「細かい段の主な作用に罰の項を足した作用の停留値と、平らな配位で 4 次までの jet が一致する」という条件（`ClassicalMatch`、同 108 行の欄）で細かい段と結ばれますが、これは条件で、主な作用を停留値の展開として定めるものではありません源。

言っていないこと。源の説明文は二か所で、表示が一つに決まることを言わない、と書いています[源]。

- `PathActions.lean` 25〜26 行：あてはめた表示が関数として一意であることは主張も使用もしない。
- `History.lean` 29〜31 行：そのような表示と継続が**在る**という形の定式化で、一意性も、実装の道の選びの再現も要求しない。

同じ測度（同じ密度 ρ_m）が別の表示を持ちうるので、表示の中の β は測度だけからは決まりません。この点は 10-01 の主題です。

06

本書の検討で見えていたこと

本書の検討の繰り込みの一段は、押し出しの測度 $B_*\mu$ そのものを対象にしていました（19-04 §押し出し）。粗い段の理論を、決まった形の表示で書くことはしていません。示すべき言明（19-07）も、押し出しの測度と観測量の期待値だけで書いています。

前提の一覧（28-04）の側では、実効の結合の定義に「ブロック化した作用の係数として読む」案と「繰り込んだ結合として読む」案が紙に二つあり、未定でした（28-05 §06）。公開された構成は前者の形を、二つの正規化 (4)・`loop_jets` つきで決め、表示の存在を各段で要求する、という形を取っています。代わりに、表示が一つに決まることは言わず、β は表示に依る数になります。

強制された活動を「旗をちょうど覆う」気体として表示に持つ形は、本書の検討の大きい場の扱い（前提の一覧の大きい場の評価と気体の行）と比べる軸になります。比べは 14-04 に置きます。

07

読めていない所

- 道のデータの行 $r_{p,k}$ と道 γ_k の具体的な作り方（主な項の「陽な繰り込みの写像」の本体）。候補の在りかは `YM/Push/BETA_TRANSPORT`・`LOOP_COEFFICIENT`・`FREE_RESOLVENT`・`STATIONARY_UNIFORM` で、読んでいません。
- 条件 kept の緩和長（`Clip.relaxation`）の値と、それが段の定数のどこから来るか。
- 一段の後に強制された活動を帳簿 $e^{-P_m^{1/5}}$ に収め直す構成（11-06 の主題。本書の検討でも帳尻は確かめていない）。

- (4) の正規化を満たす道のデータが各段で在ることの証明。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
源 各段の密度は (1) の形の表示で書かれることが、段の列の構造の欄として要求される（構成の定理の結論に入る）	表示の一意性（源が言わないと明記）
源 主な作用は切った面の項・輸送した曲率の二乗（kept のときだけ）・三次と四次の原子・β の掛からない一ループの原子を、符号つきの置換で平均したもの	道のデータの具体的な作り方
推 正規化 (4) は β を零運動量の運動項の係数として読ませ、`loop_jets` は限界的な F^2 を一ループの部分に残さない	正規化を満たす道のデータの存在の証明（読んでいない）
源 旗が無ければ気体は 1（`gas_one`）。気体は旗をちょうど覆う支えの重ならない組の和	一段の後の強制された活動の収め直し
源 一番細かい段で表示は裸の Wilson の重み、帳簿は $\hat{g}^{11/5}$ と $e^{-P^{1/5}}$、β は帯 $[\hat{\beta}_m/2, 2\hat{\beta}_m]$	帳簿が段から段へ保たれる証明（第 11 部）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表示・段の列・条件	源	`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）`YM/RG/History.lean`：説明文 25〜33 行、`Calendar` 79〜86 行、`Rep` 165〜179 行、`History` 204 行、`Conv` 213〜218 行、`Selected` 234〜240 行
主な作用と正規化	源	同 `YM/RG/PathActions.lean`：説明文 25〜26 行、`Slot` 38 行、`Atom` 84 行、`Clip` 139 行、`PathData` 150 行、`symbol0` 158 行、`metric_zero` 161 行、`loop_jets` 167 行、`Bounds` 173 行、`ell` 190 行、`kept` 210 行、`clipped` 218 行、`principal` 236 行、`inChannels` 241 行
曲率	源	同 `YM/Gauge/Colors.lean` 173 行 `curvature`
活動・気体・帳簿	源	同 `YM/RG/Activities.lean` 37〜135 行；`YM/RG/Masks.lean` 125〜166 行（`BudgetPoint`・`mass`・`Regular`・`supBounds`）
一番細かい段の条件・粗い主な作用の条件	源	同 `YM/PCalc/Loop.lean` 100・102・108 行（`Kin.Planned` の欄）
構成の定理の結論との関係	源	同 `YM/Source/Construction.lean` 44〜45 行 `Family.Makes.wilson`

もの	種別	出典・道具
本書の押し出しの測度と示すべき言明	Lean	19-04、19-07 の出典の表

この章で使った語 ― 表示、真空の項、主な作用、切った面の項、輸送した曲率、原子、一ループの原子、運動項の正規化、正則な活動、強制された活動、在庫、旗、健康、気体、帳簿、被覆数。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：9-07 小さい場の閾と、切った作用 ― 表示の中で大きい場と小さい場を分ける段ごとの閾と、面の項を一次に切る形を読みます。

小さい場の閾と、切った作用 — 段に依る閾

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討、§07 は未解決の地図です。

この章で分かること — 段 m の表示（9-06）の中で、面が「大きい」かどうかを決める閾 t_m の式と性質。閾を超える面に触れる点に立つ旗と、旗の無い「健康な」支え。主な作用の面の項を閾の上で一次に切る形と、折れ目の条件 $c_{\mathrm{lin}} < c_{\mathrm{dir}}/16$。閾が段とともに 0 へ行き、しかも揺らぎの大きさ $\hat{\beta}_m^{-1/2}$ よりずっと大きいこと。

前提となる章 — 9-06 密度の表示、8-02 段取り。

先に言うこと — 切った作用は表示の主な部分の**形**で、測度を変えるものではありません。一段の等式は等式のままで、切った差は活動に入ります。切ることで大きい場の困難が消える、とは読めません。大きい場の評価そのものは第 11 部（11-03・11-04）で読みます。

この章の順序

1. **言明 — 段の閾**：`Calendar.threshold` と暦の条件
2. **閾の大きさ**：0 へ行くが、揺らぎの大きさより因子 P_m だけ大きい
3. **旗と健康な配位**：`flags`・`Healthy`・`masked`
4. **切った作用**：`clipped` の形と折れ目の条件
5. **閾が段に依ること**：一段の中の二つの閾
6. **本書の検討で見えていたこと**：固定の閾と、段の閾
7. **読めていない所**

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。源はリポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）、評価書は `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）です。公開された構成の定理は源 で言明の字句を、「証明されている」という水準は評 で書きます。記号：一ループの傾きを $s = 11C_g/(24\pi^2)$（評価書では一ループの係数の二倍として書かれる量、源の `slopeConstant`）と書きます。

01

言明 — 段の閾

源の `YM/RG/History.lean` の暦 `Calendar`（79〜86 行）は、段 m ごとに次の量を定義しています源。

$$\hat\beta_m = \bar\beta + s\log D_m, \qquad \hat g_m = \hat\beta_m^{-1/2}, \qquad P_m = \exp\big((\log\log\hat\beta_m)^2\big), \qquad t_m = \hat g_m\, P_m. \quad (1)$$

$\bar\beta$ は段 0 で合わせる値（10-01）、D_m は段 m の格子間隔の逆数、$s = 11C_g/(24\pi^2)$ は一ループの傾きです（`hatBeta`・`hatCoupling`・`monitor`・`threshold`）。$\hat\beta_m$ は一ループの走りで予想される段 m の結合、$\hat g_m$ はその結合の大きさです。t_m が段 m の**小さい場の閾**で、表示の帳簿の点（`budget m`）の閾として使われます（`Levels.budget`、141〜156 行）源。

暦の条件 `Calendar.Fits` は、全ての段で $1 < \hat\beta_m$（`delayed`）と $t_m \le 1$（`smallField`）を要求します（107〜108 行）源。後者は、$\bar\beta$ の条件 `Supply.Bar.threshold`（`YM/Price/Intent.lean` 127 行）：$x \ge \bar\beta$ なら $x^{-1/2}e^{(\log\log x)^2} \le 1$、から供給されます源。$\hat\beta_m \ge \bar\beta$ なので、全ての段で閾は 1 以下です初。

同じ暦は、被覆の尺度 $B_m = \lceil(\log\hat\beta_m)^2\rceil$（`coverSize`）、正則な活動の帳簿 $\hat g_m^{11/5}$（`allowance`）、強制された活動の帳簿 $e^{-P_m^{1/5}}$（`forcedAllowance`）も、同じ $\hat\beta_m$ の関数として定めます（82〜85 行）源。

02

閾の大きさ

$P(x) = e^{(\log\log x)^2}$ は、$\log x$ のどの冪よりも速く、x のどの正の冪よりも遅く育ちます初。$\log P = (\log\log x)^2$ が、$\log(\log x)^k = k\log\log x$ より速く、$\log x^\epsilon = \epsilon\log x$ より遅いからです。源の `YM/SectorNext/LARGE_FIELD_REMAINDERS/Delay.lean` の `cover_pay`・`inactive_price` は、この性質の形（$b^n/P^a \to 0$ など）を言明しています源。

したがって、$\hat{\beta} \to \infty$ で

$$t = \hat{g}\,P \;\longrightarrow\; 0, \qquad \frac{t}{\hat{g}} = P \;\longrightarrow\; \infty, \qquad \hat{\beta}\,t^2 = P^2 \;\gg\; (\log \hat{\beta})^k \ \text{(全ての } k\text{)} \tag{2}$$

です[初]。弱結合の段では、面の典型的な揺らぎの大きさは $\hat{g}$ 程度です[推]。閾はそれより因子 P だけ大きいので、閾を超える面は「典型から大きく外れた面」です。一方で $t \to 0$ なので、閾の下では作用の小さい場の展開が使えます[推]。閾を超える面一枚の作用の重さは $\beta t^2 \approx P^2$ 程度で、これが被覆の数え上げの損（$\log \hat{\beta}$ の冪の程度）を上回るように選ばれた形です[推]。

$\hat{\beta}$	P	$t = \hat{\beta}^{-1/2} P$	$\hat{\beta} t^2 = P^2$	$B = \lceil (\log \hat{\beta})^2 \rceil$	$e^{-P^{1/5}}$
10^{5}	392	1.24	1.5e5	133	3.7e-2
10^{6}	987	0.987	9.7e5	191	1.9e-2
10^{8}	4.86e3	0.486	2.4e7	340	4.2e-3
10^{12}	6.08e4	0.0608	3.7e9	764	1.2e-4
10^{24}	9.79e6	9.8e-6	9.6e13	3054	1.4e-11

表は (1) を電卓で評価した値です（有効数字 2〜3 桁）[初]。$t \le 1$ には $\hat{\beta}$ がおよそ 10^6 以上要ります。$\bar{\beta}$ は大きく取る、という暦の作り（10-05）と合っています。$\bar{\beta}$ の具体的な値は源に無く、存在の形で選ばれます[源]。

03 旗と健康な配位

閾 t を超える面に触れる点に**旗**が立ちます。源の `flags`（`YM/RG/Masks.lean` 34〜36 行）は

$$\mathrm{flags}_t(U) = \left\{ x : \exists p \ \text{（面）}, \ x \in \partial p \ \text{かつ} \ \mathrm{chord}(U_p) > t \right\} \tag{3}$$

です。∂p は面の四つの頂点です[源]。面の値は配位のゲージ変換で共役を受けるだけなので、旗はゲージ不変です（`gauge_flags`、43 行）[源]。点の集合 X が**健康**とは、X に旗が無いことです（`Healthy`、41 行）[源]。

旗は表示の三か所で使われます[源]。

- 正則な活動 E_i と、三次・四次・一ループの原子は、支え（原子では足跡）が健康なときだけ入り、そうでなければ 0 にします（`masked`、70〜72 行。`Atom.placed`、`Activities.regularOccurrence`）。
- 強制された活動の気体は、旗の全体をちょうど覆う組の和です（9-06 の (5)）。旗が無ければ気体は 1 です。

- 輸送した曲率の項 $\frac{1}{2}\|\ell_p\|^2$ は、全ての面 q で $\operatorname{chord} U_q \le t\, e^{\operatorname{dist}(p,q)/\text{緩和長}}$ のとき（kept）だけ入ります（`PathActions.lean` 210〜211 行）。遠い面ほど緩い閾で、配位の全体を見る条件です。

正則な活動の大きさは、健康な配位で、大きさ t の方向（`dirBound`：リンク e の方向の大きさが $t(1+\operatorname{dist}(e,o))^{\text{power}}$ 以下）への有限階の微分の上限で測ります（`Masks.lean` 141〜166 行）源。閾 t は、旗の判定と、活動の大きさの物差しの両方に入っています。

04

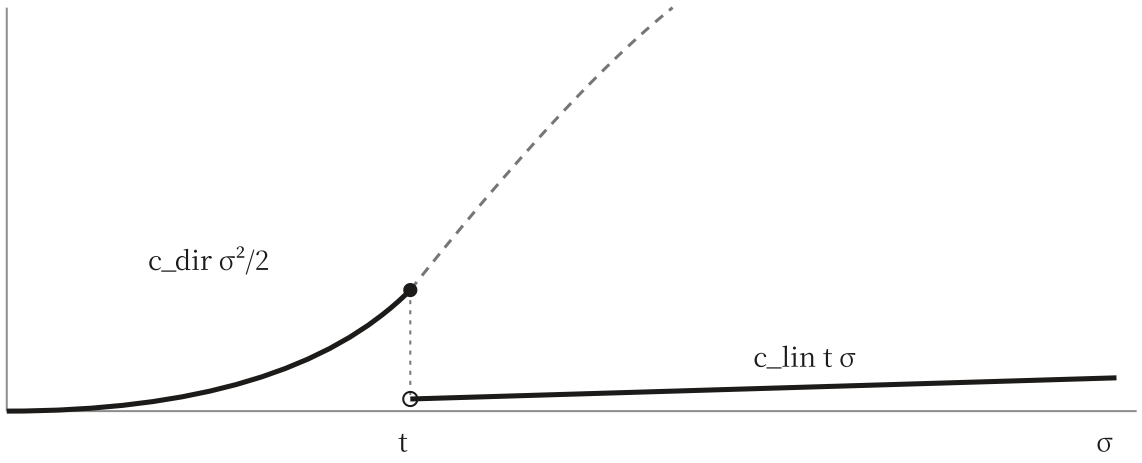
切った作用

主な作用の面の項は、$\operatorname{chord}\sigma = \operatorname{chord} U_p$ の関数として、閾 t の上で一次に切られます（`clipped`、`PathActions.lean` 218〜219 行）源。

$$\operatorname{clip}_t(\sigma) = \begin{cases} \dfrac{c_{\text{dir}}}{2}\,\sigma^2 & \sigma \le t, \\ c_{\text{lin}}\, t\, \sigma & \sigma > t, \end{cases} \qquad 0 < c_{\text{lin}} < \frac{c_{\text{dir}}}{16}. \tag{4}$$

$c_{\text{dir}}, c_{\text{lin}}$ と緩和長は段の定数 `Clip`（139〜146 行）で、折れ目の条件 `kink` が $c_{\text{lin}} < c_{\text{dir}}/16$ です源。c_{dir} は運動項の正規化（9-06 の (4)）にも入ります。

図 1　切った面の項 (4) の形（$c_{\text{lin}} = c_{\text{dir}}/20$ の例）。$\sigma = t$ で値が下へ跳び、その先は傾き $c_{\text{lin}}t$ の直線。破線は切らない二次の項。



(4) は $\sigma = t$ で連続ではありません。左からの値 $c_{\text{dir}}t^2/2$ から、右の値 $c_{\text{lin}}t^2 < c_{\text{dir}}t^2/16$ へ下に跳びます初。作用は σ について単調でも凸でもありません初。閾を超えた面の項は $c_{\text{lin}}t\,\sigma \ge c_{\text{lin}}t^2$ で下から抑えられ、β を掛けると $\beta c_{\text{lin}}t^2 \approx c_{\text{lin}}P^2$ 程度です（帯 $\beta \in [\hat\beta/2, 2\hat\beta]$ のもとで）推。

切った作用の意味を、源の定義に沿って書きます源。

- 切るのは**表示の主な部分**だけです。一段の等式 $\rho_m = \mathcal{T}_{\beta_{m+1}}\rho_{m+1}$ は等式のままで、測度は変わりません。切った差は正則な活動と強制された活動の側に入ります。
- 大きい場の評価は、切った作用を使って、ゲージの切り口と区画の条件を満たす配位について一様な不等式を立てる形で書かれています（11-04 の `Teller.Grants`。資金の仮定つき）。

一次の尾は、閾の上で面の項が二次で育たないようにする形です。大きい場の領域で二次の作用を使うと、一段の中の作用の分解（細かい面・罰・粗い面の釣り合い）で負の項が二次で育ちうるので、それを一次に抑えていると読めます推。折れ目の数 16 の出どころは読んでいません。

05

閾が段に依ること

$\hat{\beta}_m$ は m とともに増えるので（細かい段ほど大きい）、t_m は細かい段ほど小さくなります初。閾は格子の単位で測った chord の閾で、物理の単位の量ではありません推。段ごとに閾・被覆の尺度・帳簿・切りの母数（`Conv.clip` は段の定数 `(params m).clip`）が決まり直します（9-06 の `Conv`）源。

一段（段 $m+1$ から段 m）の中では、**二つの閾**が同時に現れます源。

閾	値	使われる所
細かい側	t_{m+1}（小さい）	入ってくる表示の旗。大きい場の評価で、種（大きい場の印）の判定と細かい面の側の不等式の左辺（源の `fiery`）
粗い側	t_m（大きい）	出ていく表示の旗。粗い面の側の不等式の右辺、区画の余白 $5\lceil(\log\hat{\beta}_m)^2\rceil$

どの不等式でどちらの閾を使うかは、本書の検討で源の言明を一つずつ確かめました（11-03・11-04 で引きます。第 11 部の章ごとの閾の字は 11-01 の閾の字の対応の表）。前の段から来た大きい場の活動が載る所は、必ずこの段の種になる、という形で二つの閾がつながっています（`Allocation` の `flagged`）源。

閾が段に依ることで、帳簿は毎段その段の結合の関数として定義し直されます。一段の証書は「出口が次の段の決まった帳簿に入る」ことだけを示す形です（11-07）推。段の数に一様な条件は、暦の側（辺・定数を選ぶ順）で払われます（10-05）源。

06

本書の検討で見えていたこと

本書の検討で「大きい面」を分ける閾は、段に依らない固定の値でした初。

- 大きい面の稀さの定理（22-01）は、$\mathrm{Re}\,U_p < 0$ の面を数えます。Wilson の測度だけで書け、閾は固定です。
- ブロック写像の引き戻しの閾 $r_0 \in (0,1]$（19-04）も固定の母数です。
- 前提の一覧の側では、段ごとの閾を置く行がありましたが、その形は決まっていませんでした（28-05 §08 表 3）。

公開された構成の閾 (1) は、段の結合の関数として陽に決まり、揺らぎの大きさ $\hat{g}$ と 1 の間に、多重対数の損を吸う余白 P を両側に残す形です推。帳簿の指数 $11/5$（二次の 2 と最初の限界でない次数 3 の間）と $e^{-P^{1/5}}$ も同じ $\hat{\beta}_m$ の関数です。閾と帳簿を段ごとに結合の関数として置き直す設計は、本書の検討には無かったものです（14-05）。本書の検討で大きい場の評価が詰まった所との関係は 14-04 で扱います。

07

読めていない所

- 折れ目の条件の 16 と、軸ゲージの倍率 16（9-03）の関係。同じ数ですが、つながりは確かめていません。
- 緩和長（`Clip.relaxation`）の値と、条件 `slow_selector`（$12 \le$ 緩和長 $\times$ 幅、`History.lean` 59 行）の役割。
- 指数 $(\log\log)^2$ の 2 と帳簿の $1/5$ が、どの評価で最初に要るか。読んだのは、$0 \le \delta < 2$ の任意の指数で十分大きい結合について $e^{-AP^{\delta}}$ の形の上界を言う `dictionary_fit`（`YM/AnalyticNext/CONNECTED_ACTIVITY_JETS_E6/Bulkhead.lean` 78 行）の言明までです。
- $\bar{\beta}$ の下限の陽な形（存在の形で選ばれ、源に数は無い）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
源 段 m の閾は $t_m = \hat{\beta}_m^{-1/2} e^{(\log\log\hat{\beta}_m)^2}$、暦の条件で全ての段で $t_m \le 1$	$\bar{\beta}$ の陽な下限

言えている	言えていない
初 $t_m \to 0$、$t_m/\hat{g}_m = P_m \to \infty$、$\hat{\beta} t^2 = P^2$ は $\log \hat{\beta}$ のどの冪より大きい	指数 2 と $1/5$ がどの評価で要るか
源 旗は閾を超える面に触れる点（ゲージ不変）。正則な活動と原子は健康な支えでだけ入る	—
源 面の項は閾の上で一次に切られ、$c_{\mathrm{lin}} < c_{\mathrm{dir}}/16$。$\sigma = t$ で下に跳び、単調でも凸でもない	16 の出どころ
源 切るのは表示の主な部分で、一段の等式は等式のまま。差は活動に入る	切ることで大きい場の困難が消える、という読み（そうは書けない）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
段の量と閾・暦の条件	源	`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）`YM/RG/History.lean` 79〜86 行（`hatBeta`・`hatCoupling`・`monitor`・`coverSize`・`threshold`・`allowance`・`forcedAllowance`）、107〜108 行（`delayed`・`smallField`）、141〜156 行 `Levels.budget`
$\bar{\beta}$ の閾の条件	源	同 `YM/Price/Intent.lean` 123〜127 行 `Supply.Bar`
P の増え方	源	同 `YM/SectorNext/LARGE_FIELD_REMAINDERS/Delay.lean`（`cover_pay`・`inactive_price`。言明だけ）
旗・健康・覆い	源	同 `YM/RG/Masks.lean` 34〜72 行（`flags`・`Healthy`・`gauge_flags`・`masked`）、141〜166 行
切った作用と kept	源	同 `YM/RG/PathActions.lean` 139〜146 行 `Clip`、210〜219 行 `kept`・`clipped`
表 1 の数	初	(1) を浮動小数で評価した値
本書の固定の閾	Lean	22-01、19-04 の出典の表

この章で使った語 — 小さい場の閾、旗、健康、切った作用、折れ目の条件、被覆の尺度、帳簿、多重対数の余白、細かい側の閾と粗い側の閾。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：10-01 「段 m の結合」とは何か — 表示の中の係数として定義された β と、その二つの正規化が、測度だけからは決まらない数であることを読みます。