第二巻　存在 — 公開された構成を読む

第 12 部 無限体積と再構成

Kiichi, Shiori and Rin · 2026-11-14 の版 · https://computoergosum.com/principia/yang-mills/

> この PDF は Web 版の各章をそのまま刷ったものです。動かせる図は刷った時点の姿で止まっています。章の間のリンクは Web 版へ飛びます。最新の内容は Web 版に在ります。

章		頁
12-01	格子の鏡映正値性 — 二種類の面	2
12-02	チェス盤と、根の半ノルム	10
12-03	紫外から無限体積へ渡す評価 — 根の半ノルムで測った観測量の大きさ	18
12-04	転送作用素と同程度連続性	25
12-05	Arzelà–Ascoli と、極限に移る性質	32
12-06	Euclid 不変	40
12-07	相の分解	48
12-08	再構成と Wightman の公理	56

格子の鏡映正値性 — 二種類の面

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§05 は本書の検討、§06 は未解決の地図です。

この章で分かること — 公開された構成は、周期の格子の上の Wilson の測度について、鏡に映した関数との積の期待値が負にならないこと（鏡映正値性）を、格子点を通る面と辺の中点を通る面の両方で、四つの座標軸の全てについて、$\beta \geq 0$ で言明しています。この章は、その言明の形（関数の類）、証明の骨（面の上の切片を止め、面を横切る相互作用を正の核にする）、この部の後の章でどう使われるかを読みます。

前提となる章 — 5-03（反射正値性と転送行列）、4-10（OS の公理）、8-01（公開された構成の格子と Wilson の測度の規約）。本書の側の同じ主題は 20-01。

先に言うこと — ここに書く公開された構成の結果は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」水準のものです。本書が確かめたのは、源の定義と言明の形を読んだことまでで、証明の正しさは確かめていません。鏡映正値性は一つの有限の格子の上の性質で、言明は元の Wilson の測度についてだけです。繰り込みの段の測度（押し出しの測度）についての鏡映正値性は、読んだ範囲には在りません。

この章の順序

1. 札の凡例
2. 言明 — 面・関数の類・正値性
3. 二種類の面と四つの軸
4. 仕組みの骨子 — 切片に分け、面の上を止め、横切る相互作用を正の核にする
5. この部の中での使われ方
6. 本書の検討で見えていたこと
7. 読めていない所

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。公開された構成の定理が「Lean で証明されている」という水準は、委員会の評価によります評 。

01

言明 — 面・関数の類・正値性

導入は 5-03 です。舞台は、一辺 n（偶数、$n = 2h$）の周期の格子 $(\mathbb{Z}/n)^4$ と、その上のゲージ群 G（閉じた行列群 $G \subset U(m)$）の Wilson の測度です。面 p のホロノミー U_p に「値段」

$$\mathrm{price}(U_p) \;=\; 1 - \frac{\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U_p}{m} \tag{1}$$

を付け、Haar の積に密度 $Z^{-1}\exp\bigl(-\beta\sum_p \mathrm{price}(U_p)\bigr)$ を付けたものが Wilson の測度 μ_β^{W}、その期待値が $\langle\cdot\rangle_\beta$ です源 （構成の源 `YM/Gauge/MatrixGroup.lean:112` `Gauge.price`、`YM/Wilson/Law.lean:87` `law`、:99 `moment`）。本書の規約とは、重みの正の定数倍が違うだけです。SU(2) の二次元表現では $\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U_p/2$ が本書の $\mathrm{Re}\,U_p$（四元数の実部）なので、β の目盛りは同じです初 （規約の全体は 8-01）。

面 C は四つのデータで決まります：向き（座標軸）a、種類（格子点を通る面か、辺の中点を通る面か）、基準の位置 b、半分の長さ h（$n = 2h$）源 （`YM/Cells/Cut.lean:40` `Cut`）。面には「片側の帯」Λ_C（`sector`）が付きます。関数の類は次の四条件です。

定義（面の片側に局所な関数の類）

配位の関数 $F\colon (\text{リンクの配位}) \to \mathbb{C}$ が帯 Λ_C について**内側の関数**であるとは、(i) ゲージ不変、(ii) 可測、(iii) 両端が Λ_C に在るリンクだけに依る（局所）、(iv) 有界、の四つを満たすことです。

源 構成の源 `YM/Cells/Cut.lean:109` `Interior`（欄 `gauge`・`borel`・`localSites`・`cost`）。局所性は `YM/Lattice/Path.lean:196` `LocalOn`（両端が集合に在るリンクで一致する二つの配位で値が等しい）。

言明（格子の鏡映正値性）

$\beta \ge 0$ とします。全ての面 C（二種類・四つの軸・全ての基準の位置）と、Λ_C の内側の全ての関数 F について、

$$0 \;\le\; \big\langle F \cdot \overline{F \circ \Theta_C} \big\rangle_\beta . \tag{2}$$

ここで Θ_C は面 C での鏡映を配位に引き戻す写像、不等号は複素数の順序（左辺が非負の実数であること）です。

源 公開された構成の定理（Osterwalder–Seiler の型の鏡映正値性）。Lean：`YM.Slice.reflected_positive`（構成の源 `YM/Slice/Reflection.lean:98`。仮定は $0 \le \beta$ だけ）。正値の定義は `YM/Cells/Cut.lean:116` `Positive`。

源 言明の形と、関数の類の四条件は源で読みました。不等式 (2) が全ての C で成り立つという束は `YM/Cells/Certificate.lean:14` `Seam` の欄 `positive` にまとめられ、`laws`（同 :20）が $\beta \ge 0$ から束全体を出します。

どの目標に入っているか。宣言の使われ方の記録（`verification/declaration-usage.tsv`）では `reflected_positive` の状態は `used` です。この記録の `used` は「検証の記録が挙げる 17 の見出しの定理のどれかから届く」という意味で、公開の定理 `JointExistence` まで鎖を確かめたことにはなりません（記録が最初に見つけた見出しは `SharpGram.habitat`）。公開の定理への道は、§04 の `seamless` と `crops` を経る筋と推し量ります推。

02

二種類の面と四つの軸

向き a の座標を $x_a \in \mathbb{Z}/n$ とし、基準の位置を b とします。面の種類ごとに、鏡映と帯は次のとおりです源（`YM/Cells/Cut.lean` の `Kind.shift`・`Kind.Strict`・`reflect_here`）。

種類	面の位置	鏡映 $x_a \mapsto$	帯 Λ_C（$r := x_a - b \bmod n$）
格子点を通る面（site）	$x_a = b$ と $x_a = b + h$	$2b - x_a$	$0 < r < h$（面の上の点を含まない）
辺の中点を通る面（link）	$x_a = b - \frac{1}{2}$ と $x_a = b + h - \frac{1}{2}$	$2b - 1 - x_a$	$0 \le r < h$

他の三つの座標は動きません。向き a は四つの軸のどれでもよく、基準の位置 b も任意です。

格子点を通る面。鏡は格子点の層 $x_a = b$（と周期で向かい側の $x_a = b + h$）を固定します。帯は二枚の鏡の間の**開いた**部分で、鏡の上の点を含みません。関数は両端が帯に在るリンクだけに依るので、鏡の上のリンクにも、鏡から出る向き a のリンクにも依りません源（源の冒頭の注「site tilings do not read transverse links at seams」）。

辺の中点を通る面。鏡は向き a のリンクの真ん中を通り、格子点を固定しません。帯は $x_a = b, \dots, b + h - 1$ の h 枚の層で、鏡に写すと向かい側の h 枚に移ります（`Cut.link_switch`：帯の点の写しは帯に無い）。鏡を横切るリンク（$x_a = b - 1$ から b へ、$b + h - 1$ から $b + h$ へ）

は、どちらの帯の内側のリンクでもありません。源の注は $h = 1$ の退化した場合も含むと書いています源（`YM/Slice/Gate.lean` 冒頭）。

関数は複素数値で、ゲージ不変。公開された構成の類は複素数値の関数を許し、そのかわり両方の種類でゲージ不変を課します。(2) の左辺の共役は、複素数値の関数の対を半正定値にするためのものです初（$F = \sum_i c_i F_i$ と置けば、(2) は行列 $\left(\langle F_j \overline{F_i \circ \Theta} \rangle\right)$ が半正定値であることになります）。

03

仕組みの骨子 — 切片に分け、面の上を止め、横切る相互作用を正の核にする

考え方は 5-03 §04 と同じです。源の組み方を三段に分けて書きます源（言明と補題の名まで。各補題の証明の中身は読んでいません）。

段 1：配位を切片に分ける

向き a の座標で格子を層に切ります。一枚の層の中のリンク（向き a に垂直な三次元の格子のリンク）の配位を**切片**（`Leaf`）、隣り合う層をつなぐ向き a のリンクの組を**糸**（`Thread`）と呼びます。配位の全体を、次の四つに分けます。

- 鏡の上の切片（`Posts`、格子点を通る面のとき）
- 鏡を横切る糸（`Doors`、辺の中点を通る面のとき）
- 帯の内側の切片と糸（`Open`）
- その鏡の写し（`Open` の二つ目の写し。糸は逆元で読む）

この分け方が Haar の積の測度を保つ同型であることが補題です源（`YM/Slice/Independent.lean:165` `board`。糸を逆元で読む写しが測度を保つことは同 :149 `twisted`）。Haar の測度が逆元で不変なことを使います。

段 2：鏡の上を止めると、二つの写しが同じ分布で独立になる

鏡の上の切片と横切る糸を止めます。帯の内側とその写しは、Haar の積の下で独立で、同じ分布です。Wilson の重みの対数（作用）は、帯の内側の面・写しの側の面・鏡に触れる面に分かれます。鏡に触れない部分は $A(U_>) + A(U_<)$ の形で、F と同じ側にまとめられます。

段 3：鏡を横切る相互作用は正の核

格子点を通る面では、関数が鏡の上の切片と鏡から出る糸を読まないので、止めた鏡の上の値ごとに、被積分関数は $g(U_>)\,\overline{g(U_<)}$ の形になり、二つの写しで積分すると $\left|\int g\right|^2 \geq 0$ です（核

は定数 1)。

辺の中点を通る面では、鏡を横切る糸が帯の両側の切片をつなぎます。横切る糸を積分すると、両側の端の切片 X・Y の関数として、転送作用素の核

$$K_\beta(X,Y) \;=\; \int \mathrm{weight}_\beta(X,Y,u)\,du \tag{3}$$

が出ます（u は横切る糸、weight はその糸を辺に持つ面の重み）源（`YM/Slice/Positive.lean:54` `heat`）。$\beta \ge 0$ なら、この核は**正値の核**（任意の有限個の点 $X_1,\dots,X_k$ で行列 $K_\beta(X_i,X_j)$ が半正定値）です源（Lean：`YM.Slice.step_positive`、`YM/Slice/Positive.lean:81`。核の正値の定義は `YM/Analysis/Nonnegative.lean:18` `NNKernel`）。正値の核について、対の積分

$$\iint \overline{g(X)}\,K_\beta(X,Y)\,g(Y)\,d\nu(X)\,d\nu(Y) \;\ge\; 0 \tag{4}$$

が成り立つ、というのが最後の段です源（`NNKernel.integrated`、`YM/Slice/Reflection.lean:72` で使用。`portPos`、`YM/Slice/Gate.lean:94` が二種類の面の核をまとめて正値にする：格子点の面では核は 1、辺の中点の面では K_β の積）。

ゲージ不変と $\beta \ge 0$ の役。$\beta \ge 0$ は段 3 の核の正値に使われます。ゲージ不変は類の定義に入っていますが、格子点を通る面の段 1〜3 のどこでそれが要るかは読めていません推（辺の中点の面では、横切る糸の扱いに要る）。本書の側の証明（20-01 §05）では、辺の中点の面で、横切るリンクをゲージで 1 に消すためにゲージ不変を使いました。公開された構成は横切る糸を消さず、積分して核にします。

04 この部の中での使われ方

読んだ範囲では、鏡映正値性は構成の中で**元の格子の Wilson の測度**に対してだけ使われます源（名前の検索の範囲）。構成の族は、切断 N・体積 p ごとに一辺 $n = L_p/a_N$ の格子と結合 $\beta_{N,p}$ を持ち（8-02）、全ての (N,p) で $\beta_{N,p} \ge 0$ であることから束 `Seam` が立ちます源（Lean：`YM.Cells.seamless`、`YM/Cells/Packing.lean:81`。$\beta_{N,p}$ が非負なのは、結合が帯 $[\hat\beta/2,\,2\hat\beta]$ に入り $\hat\beta > 1$ であることから）。

使い道	何に当てるか	章
チェス盤の不等式と根の三角不等式	帯の面（`bandCut`）の全てでの正値	12-02
転送作用素の核の正値	辺の中点を通る面の核 (3)	12-04
連続の極限の鏡映正値性	格子点を通る面（座標 0）の Gram 行列の非負	12-05

使い道	何に当てるか	章
OS の Hilbert 空間	極限の表の鏡映正値性（連続の側）	12-07・12-08

押し出しの測度には使われない。繰り込みの段 m の測度（細かい格子の測度を確率の核で押し出したもの、9-01）の鏡映正値性の言明は、読んだ範囲には在りません源（名前の検索の範囲）。核のパッチが面をまたいで重なる設計なので、押し出しが鏡映正値性を自動では受け継がない、と推し量ります推。構成の観測量の評価（12-03）も、段 N の Wilson の測度 $\mu^{\mathrm{W}}_{N,p}$ の下の期待値として述べられています源。

評価書の言い方。評価書 §5 は、無限体積の極限での局所の有界性と同程度連続性が「鏡映正値性、チェス盤の評価、転送作用素の表示、Cauchy の評価に基づく一般の議論」から出ると書いています評。

05

本書の検討で見えていたこと

本書の Lean は、SU(2) の格子 $(\mathbb{Z}/2M)^4$ の Wilson の測度について、三つの形の鏡映正値性を持っていました（20-01）。

	公開された構成（`reflected_positive`）	本書
群	閉じた行列群 G の全て	SU(2)（単位の四元数）
格子点を通る面	$\beta \geq 0$、四つの軸、ゲージ不変・複素数値・帯（鏡の上を含まない）に局所	全ての実の β、四つの軸、ゲージ不変を課さない・実数値・閉じた正の半分（鏡の上を含む）に局所（`TorusRP.wilson_rp`・`PeierlsPerm.wilson_rp_dir`）
辺の中点を通る面	$\beta \geq 0$、四つの軸、ゲージ不変	$\beta \geq 0$、時間の向きだけ、ゲージ不変、$M \geq 2$（`MidRP.wilson_rp_mid`）
横切るリンクの扱い	積分して転送作用素の核にする（正値の核）	ゲージで 1 に消し、残った横切る面を座標の積の和にする

Lean 本書の三つの定理は Osterwalder–Seiler の型の結果の形式化です（Lean：`TorusRP.wilson_rp`・`MidRP.wilson_rp_mid`・`PeierlsPerm.wilson_rp_dir`。範囲は 20-01 の表のとおり）。

違いは二つです。一つ目、公開された構成は辺の中点を通る面を四つの軸の全てで持ち、本書は時間の向きだけでした。二つ目、公開された構成は格子点の面でもゲージ不変を課し $\beta \geq 0$

に限り、本書は格子点の面では β の符号もゲージ不変も問いませんでした。どちらの類が広いかは一方向ではありません。

押し出しの測度について、本書は別の設計（辺 3・中心に置いたブロック・一様な重みのブロック写像）で、格子点の面の鏡映正値性を Lean で持っていました（Lean：`Block3.rp_push`・`Block3.rp_push_prob`。任意の実の β、二枚の粗い格子点の面の間に厳に入るリンクだけに依る有界可測な関数）。公開された構成の設計とは段の作り方が違い（公開された構成は確率の核、本書は決定的な写像）、同じ対象の比べにはなりません。この設計は本書の本線ではありません（28-05）。

06

読めていない所

- **格子点の面でゲージ不変がどこで要るか**。段 1〜3 の補題の名までしか読んでいません（`YM/Slice/Reflection.lean` の `link_positive`・`insidePos`）。
- **核の正値の証明の中身**。`step_positive`（`YM/Slice/Positive.lean:81`）の証明は開いていません。重みが面ごとの $\exp(\beta\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(\cdot)/m)$ の積であることから、展開して正値の核の積にする筋と推し量ります推。
- **公開の定理への鎖**。記録の `used` は見出しの定理のどれかから届くという意味で、`JointExistence` までの鎖は一つずつは辿っていません。
- **押し出しの測度の鏡映正値性が無いこと**。名前（reflection・RP・positive）での検索の範囲での判断で、リポジトリ全体を読んだわけではありません。
- **回転させた面**。`YM/Euclid/OtherPlanes.lean` は連続の側の別の面を扱うようですが、記録では使われていない宣言の置き場です源（記録）。中身は読んでいません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
源 周期の格子の Wilson の測度は、$\beta \geq 0$ で、二種類の面・四つの軸の全てについて、ゲージ不変・可測・帯に局所・有界な複素数値の関数の類で鏡映正値（`YM.Slice.reflected_positive`）	$\beta < 0$。繰り込みの段の測度（押し出し）の鏡映正値性。連続極限そのもの
源 言明の形・関数の類の四条件・面と帯の定義・証明の段の補題の名を源で読んだ	補題の証明の中身。格子点の面でのゲージ不変の役

言えている	言えていない
源 構成の全ての (N,p) で $\beta_{N,p} \geq 0$ から束 `Seam` が立つ（`seamless`）	公開の定理 `JointExistence` までの鎖を宣言ごとに確かめたこと
`Lean` 本書の三つの形（20-01）との違い：公開された構成は辺の中点の面を四つの軸で持ち、本書は格子点の面で β の符号とゲージ不変を問わない	二つの類のどちらかが他方を含むこと（含まない）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
格子ゲージ理論の鏡映正値性	典	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440。導入は 5-03、文献は A-03
(2) と面・類の定義	源	構成の源 `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）：`YM/Slice/Reflection.lean:98` `reflected_positive`、`YM/Cells/Cut.lean:40` `Cut`・:109 `Interior`・:116 `Positive`、`YM/Lattice/Path.lean:196` `LocalOn`、`YM/Wilson/Law.lean:87` `law`、`YM/Gauge/MatrixGroup.lean:112` `price`
証明の段の補題	源	`YM/Slice/Independent.lean:165` `board`、`YM/Slice/Positive.lean:54` `heat`・:81 `step_positive`、`YM/Slice/Gate.lean:94` `portPos`、`YM/Analysis/Nonnegative.lean:18` `NNKernel`
束と、構成への当てはめ	源	`YM/Cells/Certificate.lean:14` `Seam`・:20 `laws`、`YM/Cells/Packing.lean:81` `seamless`。使われ方は `verification/declaration-usage.tsv`
評価書の記述	評	`yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）§5
本書の対応する定理	Lean	`TorusRP.wilson_rp`・`MidRP.wilson_rp_mid`・`PeierlsPerm.wilson_rp_dir`（20-01）、`Block3.rp_push`・`Block3.rp_push_prob`。sorry 0、公理は標準の三つ

この章で使った語 — 鏡映正値性・格子点を通る面・辺の中点を通る面・帯・内側の関数・ゲージ不変・切片・糸・転送作用素の核・正値の核・押し出しの測度。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：12-02 チェス盤と、根の半ノルム — 鏡映正値性を全ての帯の面で重ねて、箱ごとの大きさを測る半ノルムを作ります。

チェス盤と、根の半ノルム

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討、§07 は未解決の地図です。

この章で分かること — トーラスを同じ大きさの箱で敷き詰め、一つの箱に局所な関数を鏡映で全ての箱に写して掛け合わせると、その期待値の大きさは「各関数を全ての箱に写したときの期待値の、箱の数分の一乗（根）」の積で押さえられます（チェス盤の不等式）。公開された構成はこれに加えて、根が関数の和について三角不等式を満たすこと、つまり根が半ノルムであることを持っています。この章はその二つの言明、証明の骨、構成の中の使い道を読みます。

前提となる章 — 12-01（格子の鏡映正値性と関数の類）。チェス盤の評価の考え方は 22-01 にもあります。

先に言うこと — 公開された構成の結果は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」水準です。本書が確かめたのは定義と言明の形までです。チェス盤の不等式は一つの有限の格子の上の不等式で、仮定は「全ての帯の面での鏡映正値性」だけです。体積に一様な量が出るのは、根が箱一つあたりの量だからで、根そのものの大きさを押さえる仕事は別にあります（12-03）。

この章の順序

1. 札の凡例
2. 言明の前に — 敷き詰め・写し・根
3. 言明 (1) — チェス盤の不等式
4. 言明 (2) — 根の三角不等式（根は半ノルム）
5. 仕組みの骨子 — 最大化と鏡映、展開と根
6. 構成の中の使い道
7. 本書の検討で見えていたこと
8. 読めていない所

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。公開された構成の定理が「Lean で証明されている」という水準は、委員会の評価によります評 。

01

言明の前に — 敷き詰め・写し・根

一辺 n の周期の格子 $(\mathbb{Z}/n)^4$ を、一辺 s の箱で敷き詰めます。箱は $(\mathbb{Z}/P)^4$ で番号を付け（P は偶数、$n = Ps$）、箱の種類は鏡映の面の種類（格子点を通るか、辺の中点を通るか）と合わせます源 （構成の源 `YM/Cells/Tiling.lean:19` `Tiling` ：欄 `period` ＝P、`units` 、`widthHalf` ＝$P/2$、`kind` 、`base` ＝基準の箱の角）。箱 v の**内側**（`chamber v` ）は、12-01 の帯と同じ規則で、箱の縁を含まない（格子点の箱）か、縁の片側を含む（辺の中点の箱）点の集合です。

写し。基準の箱 0 の内側に局所な関数 F を、箱 v へ運びます。運び方は、各軸 j について v_j が奇数なら向き j の鏡映を一回入れ、そのうえで平行移動する、というものです源 （同 :58 `omega` 、:63 `translateBy` 、:65 `copyMap` ）。鏡映の回数が奇数の箱では複素共役を付けます：

$$\mathrm{copy}_v F(U) \;=\; \begin{cases} \overline{F(\vartheta_v^{*}U)} & \text{(鏡映の回数が奇数)} \\ F(\vartheta_v^{*}U) & \text{(偶数)} \end{cases} \tag{1}$$

ここで ϑ_v^{*} は箱 0 を箱 v に写す写像の配位への引き戻しです源 （同 :220 `hand` 、:222 `copy` ）。隣り合う二つの箱の写しは、その間の面について互いに鏡像です。チェス盤の白と黒のように、向きが一つおきに反転します。

根。一つの関数 F を全ての箱に写して掛けた期待値の大きさの、箱の数分の一乗を

$$\|F\|_{\square} \;:=\; \Big|\Big\langle \prod_{v} \mathrm{copy}_v F \Big\rangle_{\beta}\Big|^{1/P^4} \tag{2}$$

と書き、**チェス盤の根**と呼びます源 （同 :226 `rootTest` ）。添字の $\square$ は、どの敷き詰めで測るかを表します。根は箱一つあたりの量です。全ての箱に同じ関数が置かれるので、体積を大きくして箱の数が増えても、箱一つあたりの寄与として比べられます。

例 初 。$F \equiv c$（定数）なら $\|F\|_{\square} = |c|$ です。F が箱 0 の中のある事象の指示関数 $\mathbf{1}_E$ なら、$\|F\|_{\square}^{P^4}$ は「全ての箱で（写した）事象が同時に起きる確率」で、$\|F\|_{\square}$ はその確率の箱あたりの率です。

02

言明 (1) — チェス盤の不等式

言明（チェス盤の不等式）

敷き詰めの全ての帯の面（箱の縁を通る面。向き a・位置 p ごとに一枚）で鏡映正値性が成り立つとします。箱 0 の内側の関数（12-01 の類：ゲージ不変・可測・局所・有界）を箱ごとに F_v と選ぶと、

$$\left|\left\langle \prod_{v} \mathrm{copy}_v\, F_v \right\rangle_{\beta}\right| \;\le\; \prod_{v} \|F_v\|_{\square}. \tag{3}$$

源 公開された構成の定理（Fröhlich–Israel–Lieb–Simon の型のチェス盤の評価）。Lean：`YM.Cells.Tiling.tiles`（構成の源 `YM/Cells/Chess.lean:80`。源の説明文の名は WFS1。仮定は全ての `bandCut` での `Positive` と、各 F_v が箱 0 の内側の関数であること）。

源 帯の面は `YM/Cells/Tiling.lean:40` `bandCut`（半分の長さは $s \cdot P/2$、向き a、基準は箱 p の角）。左辺の期待値の大きさは `YM/Cells/Polar.lean:91` `rootPower`（$\|\langle \prod_v \mathrm{copy}_v\, F_v \rangle\|$）として書かれています。

意味。右辺は「各関数を全ての箱に複製したときの箱あたりの大きさ」の積です。違う関数を違う箱に置いた相関が、同じ関数を全部の箱に置いた相関で押さえられます。これは鏡映正値性から出る Cauchy–Schwarz の不等式を、全ての面について何度も重ねた結果です（§ 04）。

03

言明 (2) — 根の三角不等式（根は半ノルム）

言明（根の三角不等式）

同じ仮定のもとで、箱 0 の内側の二つの関数 F, F' について

$$\|F + F'\|_{\square} \;\le\; \|F\|_{\square} + \|F'\|_{\square}. \tag{4}$$

源 公開された構成の定理。Lean：`YM.Cells.Tiling.adds`（構成の源 `YM/Cells/Chess.lean:108`。説明文の名は WFS2）。

根は定数倍について $\|cF\|_{\square} = |c|\,\|F\|_{\square}$ を満たします初 （源の `rootPower_scale`、`YM/Cells/Chess.lean:70` は非負の実の倍だけを言う。複素の c へは、鏡映の回数が奇数の箱で共役を取る写しの定義 (1) から $|c|^{P^4}$ の倍になることで広がる）。(4) と合わせて、根は箱 0 の内側の関数の空間の上の**半ノルム**です（$\|F\|_{\square} = 0$ でも $F \neq 0$ はありうるので、ノルムとは限りません）初 。

束。鏡映正値性・チェス盤の不等式・根の三角不等式の三つは、一つの束 `Seam`（`YM/Cells/Certificate.lean:14`：欄 `positive`・`inequality`・`semi`）にまとめられ、$\beta \geq 0$ から `laws` が三つを同時に出します源 。構成の全ての切断 N と体積 p で、この束が成り立ちます（`seamless`、`YM/Cells/Packing.lean:81`。12-01 §04）。

なぜ半ノルムが役に立つか。観測量が「主な部分＋小さい残り」に分かれるとき、(4) で根を部分ごとに足せます。紫外の評価で、繰り込んだ観測量を多くの項の和として持つとき、各項の根を押さえて足すだけで全体の根が押さえられます（12-03）推 （使われている場所の名からの読み）。

04

仕組みの骨子 — 最大化と鏡映、展開と根

源の筋を、Fröhlich–Israel–Lieb–Simon の型の議論として書きます源 （補題の名と言明。細部は推し量り）。

段 1：一枚の面での Cauchy–Schwarz

一枚の帯の面 C は箱を二つの半分に分けます。箱の割り当て $F_\bullet$ の積を、面の正の側の部分 Π_+ と負の側の部分に分けると、負の側は正の側の別の割り当て Π'_+ の鏡像になります源 （`YM/Cells/Copies.lean:124` `reflect_equation`：割り当てを「半分は F、残り半分は Q の鏡像」に組み替えた積が $\Pi_+(F)\cdot\overline{\Pi_+(Q)\circ\Theta_C}$ になる）。鏡映正値性は対 $(X,Y)\mapsto\langle X\cdot\overline{Y\circ\Theta_C}\rangle$ を半正定値にするので、Cauchy–Schwarz により

$$\left|\langle \Pi_+(F)\,\overline{\Pi_+(Q)\circ\Theta_C}\rangle\right|^2 \;\leq\; \langle \Pi_+(F)\,\overline{\Pi_+(F)\circ\Theta_C}\rangle\,\langle \Pi_+(Q)\,\overline{\Pi_+(Q)\circ\Theta_C}\rangle. \tag{5}$$

右辺の二つの因子は、どちらも「片側の割り当てを鏡で反対側に複製した」割り当ての期待値です。

段 2：最大を取る割り当ては、鏡映で対称にしても最大のまま

関数の有限個の候補 $f_1, \dots, f_k$ から箱ごとに一つ選ぶ割り当て A を考え、$\|\langle \prod_v \mathrm{copy}_v\, f_{A(v)} \rangle\|$ を最大にする A を取ります。(5) から、最大の割り当てを任意の面で片側から複製しても最大のままです。これを全ての向きと位置の面について繰り返すと、全ての箱に同じ候補 f_c を置いた割り当てが最大の一つになります源 （`YM/Cells/Chess.lean:32` `maximize`：ある c があって、全ての割り当て A で値が f_c を全ての箱に置いた値以下）。

段 3：正規化して (3) へ

各 F_v を $\|F_v\|_{\square} + \varepsilon$ で割った関数に段 2 を当てると、左辺 ≤ 1 になり、$\varepsilon \to 0$ で (3) が出ます源 （`tiles` の証明の形：ε を足して割り、極限を取る）。

段 4：展開して根を取る

$\prod_v \mathrm{copy}_v(F + F')$ を展開すると、各箱に F か F' を選ぶ 2^{P^4} 個の割り当ての和になります。各項に (3) を当てると

$$\|F + F'\|_{\square}^{P^4} \;\le\; \sum_{\text{割り当て}} \prod_{v} \|F_{\text{選んだ方}}\|_{\square} \;=\; \left(\|F\|_{\square} + \|F'\|_{\square}\right)^{P^4} \tag{6}$$

で、P^4 乗根を取れば (4) です初 （源の `adds` は、割り当て $i\colon$ 箱 $\to \{$真, 偽$\}$ についての和への展開を補題として持っています）。

05

構成の中の使い道

中心に置いた敷き詰め。構成が使う敷き詰めは、段 m の格子間隔 a_m を一辺とする箱で、基準の箱を観測点 o の**真ん中**に置いたものです源 （`YM/Cells/Packing.lean:34` `center`：種類は辺の中点の箱、箱の一辺は細かい格子の点で奇数個、物理の一辺は a_m（`trueLength`）、箱の数の逆数は $(a_m/L_p)^4$（`root_fraction`））。この敷き詰めの根を $\|\cdot\|_{m,o}$ と書きます。

使い道	何をするか	在りか	章
紫外からの入力の形	繰り込んだ観測量の根 $\|\cdot\|_{m,o}$ に上界を課す	`YM/Extraction/Center.lean:21` `centeredBudget`・:38 `Wcmain`	12-03
局所の有界性	離れた点の観測量を別々の箱で囲み、(3) で相関を根の積で押さえる	`YM/Extraction/Held.lean:120` `Around.size_done`	12-03・12-05
同程度連続性	転送作用素の表示の「柱」のノルムを根で押さえる	`YM/Extraction/Difference.lean:51` `reading`	12-04

使い道	何をするか	在りか	章
紫外の側の評価	三角不等式（欄 `semi`）で項ごとの根を足す	`YM/FullVolume/Rent.lean` ほか、`.semi` を使う置き場源（検索）	第 11 部

評価書の言い方。評価書 §5 は、無限体積の極限の有界性と同程度連続性が鏡映正値性・チェス盤の評価・転送作用素の表示・Cauchy の評価という「Yang–Mills に固有でない一般の仕組み」から出て、構成に固有の入力は繰り込んだ格子の観測量の制御だ、と書いています評。

06

本書の検討で見えていたこと

本書の Lean にも、SU(2) の格子 $(\mathbb{Z}/2m)^4$ の Wilson の測度についてのチェス盤の評価が在りました。

Lean 単位の立方体のリンクだけに依る有界可測な関数の族を各ブロックに運んだ積の期待値 V について $|V(F)|^{N^4} \le \prod_w V(\text{定数の族 } F_w)$。全ての偶数の辺、全ての実の β。Fröhlich–Israel–Lieb–Simon の型の形式化。Lean：`FoldWilson.wilson_chessboard_even`（22-01）。

違いは三つです。

- **使い道が違いました**。本書はチェス盤を**大きい面の稀さ**（面の集合 X の全てで $\mathrm{Re}\,U_p < 0$ となる確率が $q^{\lfloor |X|/6 \rfloor}$ 以下、q は体積に依らない。Lean：`FoldCap.rarity_explicit`、$\beta \ge 81$）に使いました。公開された構成はチェス盤を観測量の大きさの評価にだけ使い、面の稀さの言明は読んだ範囲に在りません推（検索の範囲）。
- **根の三角不等式は、本書の検討に在りませんでした**。本書の評価は、指示関数の積という一つの形にだけ当てていて、根を関数の空間の半ノルムとして使う形にはしていませんでした。
- **箱の作り**。本書の箱は単位の立方体（格子間隔 1 の箱）で、公開された構成は段 m の間隔の箱を観測点の真ん中に置きます。

本書の稀さの言明は、根の言葉で言い直せる形をしています初：$F = \mathbf{1}\{\text{箱の中の決めた面で } \mathrm{Re}\,U_p < 0\}$ と置けば、稀さの評価は根 $\|F\|_{\square}$ の上界を述べています。この言い直しの細部（箱の大きさと面の選び方）は確かめていません。言い直しは第三巻の第 22 部で扱います。

07

読めていない所

- **最大化の議論の細部。** `maximize`（`Chess.lean:32`）の中の「鏡映で反射しても最大のまま」の型（`T.Reflects`）の言明は読みましたが、帯の面の全てを渡り歩く帰納の組み方は読んでいません。
- **辺の中点の箱の内側の正確な形。** `chamber` の定義（`Tiling.lean:36`）は読みましたが、二つの種類の箱の縁の扱いを全ての場合で確かめてはいません。
- **紫外の側の `semi` の使われ方。** 使う置き場を名前で見つけただけで、どの評価のどの段で使うかは読んでいません。
- **公開の定理への鎖。** `tiles`・`adds` は記録で `used`（見出しの定理のどれかから届く）です。公開の定理までの鎖を宣言ごとには辿っていません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
源 チェス盤の不等式 (3)：全ての帯の面での鏡映正値性から（`Tiling.tiles`）	鏡映正値性の無い測度（押し出しの測度など）への当てはめ
源 根の三角不等式 (4)、根は半ノルム（`Tiling.adds`）	根がノルムであること（零でない関数の根が 0 になりうる）
源 敷き詰め・写し・根・中心に置いた敷き詰めの定義を源で読んだ	最大化の帰納の細部
初 (4) は (3) の展開と根から出る（(6)）	—
Lean 本書のチェス盤の評価（`FoldWilson.wilson_chessboard_even`）と大きい面の稀さ（`FoldCap.rarity_explicit`）	稀さを根の言葉で書き直した形の細部。本書の側の根の三角不等式

出典と再現

もの	種別	出典・道具
チェス盤の評価（鏡映正値性から）	典	J. Fröhlich, R. Israel, E. H. Lieb, B. Simon の鏡映正値性とチェス盤の評価（書誌は 22-01 と A-03 に従う）
(3)・(4) と定義	源	構成の源 `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）：`YM/Cells/Chess.lean:80` `tiles`・:108 `adds`・:23 `powering`・:32 `maximize`、`YM/Cells/Tiling.lean:19` `Tiling`・:40 `bandCut`・:222 `copy`・:226 `rootTest`、`YM/Cells/Polar.lean:91` `rootPower`、`YM/Cells/Copies.lean:124` `reflect_equation`

もの	種別	出典・道具
束と中心に置いた敷き詰め	源	`YM/Cells/Certificate.lean:14` `Seam`、`YM/Cells/Packing.lean:34` `center`・:81 `seamless`
使い道	源	`YM/Extraction/Center.lean:38` `Wcmain`、`YM/Extraction/Held.lean:120` `size_done`、`YM/Extraction/Difference.lean:51` `reading`
評価書の記述	評	`yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf` §5
本書のチェス盤と稀さ	Lean	`FoldWilson.wilson_chessboard_even`・`FoldCap.rarity_explicit`（22-01）。sorry 0、公理は標準の三つ

この章で使った語 — チェス盤の評価・敷き詰め・箱の内側・写し・チェス盤の根・半ノルム・帯の面・中心に置いた敷き詰め・大きい面の稀さ。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：12-03 紫外から無限体積へ渡す評価 — 根の半ノルムで測った観測量の大きさ — 繰り込んだ観測量の根に、体積に一様な上界を課す入力の形を読みます。

紫外から無限体積へ渡す評価 — 根の半ノルムで測った観測量の大きさ

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§05 は本書の検討、§06 は未解決の地図です。

この章で分かること — 公開された構成は、繰り込んだ局所の観測量を観測点の真ん中に置いた箱の敷き詰めで写し、そのチェス盤の根（12-02）が $A\, a_m^{-d-\varepsilon}$ 以下である、という評価を、全ての体積で一様な形で持っています（Lean の名は `Wcmain`）。この評価が、無限体積の極限を取るコンパクト性の議論の入力になります。この章はその言明の形、それが局所の有界性へ変わる仕組み、そして「これは紫外から受け取る入力の一つで、ほかにも在る」ことを読みます。

前提となる章 — 12-02（根と中心に置いた敷き詰め）、8-04（繰り込んだ挿入）、8-02（間隔の列 a_m・体積の列 L_p）。

先に言うこと — 公開された構成の結果は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」水準で、本書が確かめたのは言明の形を読んだことまでです。`Wcmain` は無限体積のコンパクト性（`crops`）への入力で、紫外から赤外の側へ渡る入力の**全て**ではありません。同じ構成の走りから、ほかの評価（`Scrim` など）も同時に渡ります。`Wcmain` そのものをどう示しているか（紫外の側の評価の中身）は、この章では読みません。

この章の順序

1. 札の凡例
2. 言明 — 根で測った繰り込んだ観測量の大きさ
3. 言明の読み方 — 何に一様で、何に依るか
4. 仕組みの骨子 (1) — 根の上界から局所の有界性へ
5. 仕組みの骨子 (2) — コンパクト性への受け渡しと、ほかの入力
6. 本書の検討で見えていたこと
7. 読めていない所

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。公開された構成の定理が「Lean で証明されている」という水準は、委員会の評価によります評 。

01

言明 — 根で測った繰り込んだ観測量の大きさ

記号を決めます（8-02）。切断 N の格子間隔を a_N、体積の番号 p の箱の物理の一辺を L_p とし、切断 N・体積 p の格子の上の Wilson の測度を $\mu^{\mathrm{W}}_{N,p}$（結合 $\beta_{N,p}$）とします。段 $m \le N$ の間隔 a_m は粗い側の目盛りです。次数 d の局所場の札 v（係数のベクトル、8-03）に、繰り込んだ挿入 $O_{N,p}(v;o)$（格子点 o に置いた、有限個のリンクの多項式。8-04）が対応します源（構成の源の `C.seen v o`、`C.O N p v x`）。

格子点 o を真ん中に置き、一辺の物理の長さが a_m の箱で敷き詰めた敷き詰めの根を $\|\cdot\|_{m,o}$ と書きます（12-02 §05、`YM/Cells/Packing.lean:34` `center`）。

言明の形（根で測った繰り込んだ観測量の評価）

全ての次数 d、半径 $R>0$、$\varepsilon>0$ について、ある定数 $A \ge 0$ があって、基準の段 $r(d)$ 以上の全ての段 m で、十分大きい全ての切断 N について、全ての体積 p、$\|v\| \le R$ の全ての札 v、全ての格子点 o で

$$O_{N,p}(v;o)\ \text{は中心の箱の内側の関数で、}\quad \big\|O_{N,p}(v;o)\big\|_{m,o} \;\le\; A\,a_m^{-d-\varepsilon}. \qquad (1)$$

根は $\mu^{\mathrm{W}}_{N,p}$（結合 $\beta_{N,p}$）で取ります。

源 これは構成の源の述語 `YM.Extraction.Wcmain`（`YM/Extraction/Center.lean:38`（38〜40 行））の中身です。一つの箱の評価は同 :21 `centeredBudget`（$m \le N$、$r(d) \le N$、全ての o で「内側の関数であること」と「根 $\le$ 上界」）。

`Wcmain` は述語（性質の名）で、構成の族がそれを満たすことは別の定理が与えます。例えば `YM/FullVolume/Dusk/Graff.lean:20` の `oboes` や、`YM/MergeProof/Noel.lean:24` の `noel` の結論に `Wcmain C` が現れます源 。どの定理が公開の定理 `JointExistence` への道に載っているかは確かめていません。

02

言明の読み方 — 何に一様で、何に依るか

量	(1) での扱い	意味
体積 p	一様（$\forall$ p が $\exists$ A の内側）	無限体積へ渡すための肝心の一様性
観測点 o	一様	並進で動かしても同じ上界
切断 N	十分大きい N で（m ごとに閾が在る）	紫外の極限の側で言える形
段 m	$a_m^{-d-\varepsilon}$ の冪で依る	次数 d の場の素朴な次元 a^{-d} に、ε の損
札 v	$\|v\| \le R$ で一様	係数の有界な集合の上で

なぜ根で測ると体積に一様な量になりうるか。根は「同じ関数を全ての箱に写した期待値」の箱あたりの量です（12-02 (2)）。体積が大きくなると箱の数が増えますが、箱あたりの量は増えません。だから (1) のような体積に一様な上界が意味を持ちます初。ただし、上界が実際に体積に一様に成り立つことは (1) の**中身**で、それを示す仕事は紫外の側（第 11 部）にあります。紫外の側の一段の帳簿（活動のノルム、縮小の定数）は点ごとの和で書かれていて体積に依りませんが、密度や分配関数の水準の評価は体積の指数を含みます源（活動の帳簿 `EBound`・`KBound` は `YM/RG/Activities.lean:98-104` で格子点ごとの和、`refreeze` は `YM/FullVolume/Fields/Flight.lean:28` で格子点の数を指数に含む。11-10）。どの評価から (1) の体積への一様性が出るかの鎖は、読めていません（§06）。

a_m^{-d} の読み。次数 d の場（曲率に重み 2、微分に重み 1）は、長さの $-d$ 乗の次元を持ちます。一辺 a_m の箱の中に置いた場の「典型的な大きさ」が a_m^{-d} である、という次元の勘定に ε の余裕を足したものが (1) の右辺です推。

評価書の言い方。評価書 §5 は、無限体積の有界性と同程度連続性の議論で「構成に固有の入力は、繰り込んだ格子の観測量の、間隔に一様な制御である」と書いています評。(1) はその入力の形の一つです。

03

仕組みの骨子 (1) — 根の上界から局所の有界性へ

(1) から、点の離れた n 点関数の有界性が出ます。筋は次のとおりです源（`YM/Extraction/Held.lean:74` `fits_budget` と :120 `Around.size_done` の言明と証明の段）。

1. 連続の点 $x_1, \dots, x_n$ が互いに距離 r 以上離れているとします。$a_m < r$ となる段 m を選び、間隔 a_m の箱で敷き詰めます。

2. 各点が別々の箱の内側（縁から十分離れた所）に入るように、敷き詰めの位置をずらします。点が離れているので、二つの点が同じ箱に入ることはありません（`fits_budget` の中の単射 D）。
3. 各観測量 $O(v_i; x_i)$ は、基準の箱の内側の関数 f_i の箱 $D(i)$ への写しです。観測量の無い箱には定数 1 を置きます。
4. チェス盤の不等式（12-02 (3)）で、n 点関数の大きさは各 f_i の根の積以下です。定数 1 の根は 1 です。

$$\left| \left\langle \prod_{i=1}^{n} O_{N,p}(v_i; x_i) \right\rangle_{\mu^{\mathrm{W}}_{N,p}} \right| \;\le\; \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{\square} \;\le\; A^n. \tag{2}$$

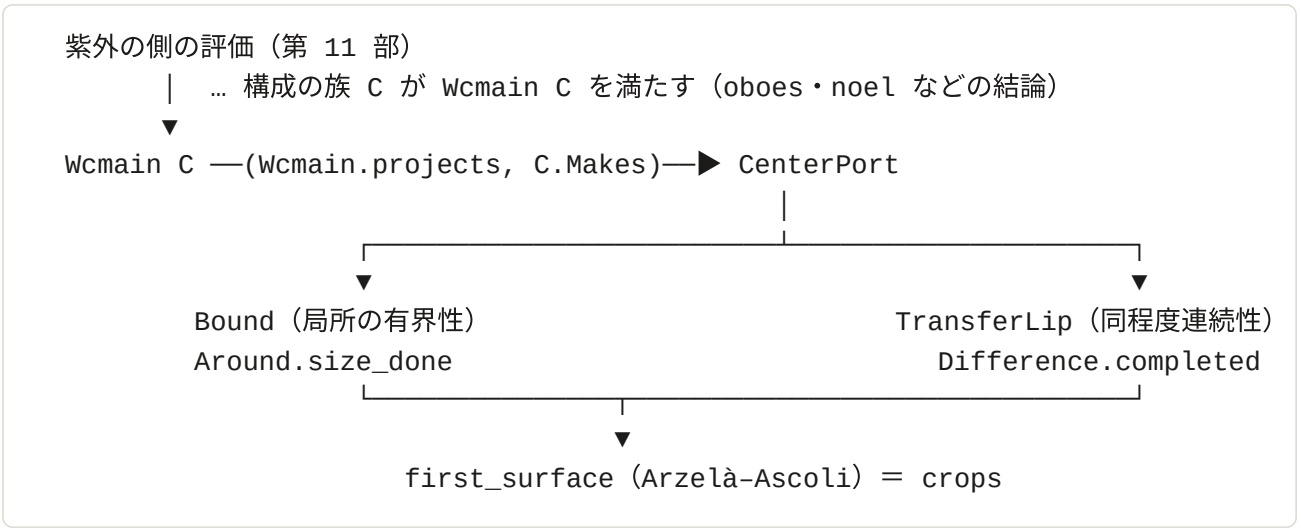
ここで A は (1) から来る箱あたりの上界です源（`fits_budget` の結論 $\|\cdot\| \le A^n$）。この上界は体積 p にも点の位置にも依りません。これが、評価書の式 (11) の一つ目（コンパクト集合の上の一様な有界性）に当たる `Extraction.Bound`（`YM/Extraction/Integrate.lean:25`）です源。`Bound` は二つの欄を持ちます：`cyclic`（体積を止め、切断に一様）と `volume`（体積にも切断にも一様、十分先の体積で）。

同程度連続性（評価書の式 (11) の二つ目）は、(1) を転送作用素の表示と組み合わせて出します。これは 12-04 で読みます。

04

仕組みの骨子 (2) — コンパクト性への受け渡しと、ほかの入力

受け渡しの形。(1) は、抽出の列（切断の部分列と体積の部分列の組）に沿った形 `CenterPort`（`Center.lean:30`：欄 `per` と `cells`）に直されます源（`Wcmain.projects`、同 :42。構成の証書 `C.Makes` を仮定に取る）。`cells` の欄 `CellHyp`（`YM/Cells/Packing.lean:68`）は、全ての (N, p) での束 `Seam`（12-01・12-02）と、根の上界を十分先の体積で η の余裕つきで述べたものを持ちます。`CenterPort` から、有界性 `Bound` と同程度連続性 `TransferLip` が出て、Arzelà–Ascoli の議論 `first_surface` に渡ります（`crops`、`YM/Extraction/Held.lean:136`。12-05）。



紫外からの入力は、これ一つではない。 `Wcmain` を使う補題 `MergeProof.Accent.rated`（`YM/MergeProof/Powder.lean:48`）は、`Wcmain C` と同時に、評価の束 `Scrim` と、階数と計量に関する仮定を取ります源。これが「ほかにも在る」の主な根拠です。補助に、構成の走りが紫外の側から一度に持ち出す束 `Run.Ties`（`YM/FullVolume/Cross.lean:65-71`）も、`control : Wcmain` と並べて `tabs`・`scrim`・`fridge`・`receipts`・`detectors` の欄を持ちます源（宣言の使われ方の記録では、`Run.Ties` と欄 `detectors` は `used`、欄 `control` は `outside`）。だから正確には、**`Wcmain` はコンパクト性（`crops`）への入力で、紫外からの入力はほかにも在る**、と読みます。ほかの入力が何に使われるか（場の空間の商、応力テンソル、演算子積展開など）は、この部の外の章（第 13 部）と第 11 部に関わります推。

また `Wcmain` は、紫外の側の補題の仮定としても現れます（例：`YM/FullVolume/Rent.lean:120` `primaries`）源。片方向の「出力」ではなく、構成の中で何度も参照される評価です。

05

本書の検討で見えていたこと

この形の言明は、本書の検討に在りませんでした。 本書の紫外の側の結果（第 15 部）は、自由場の一段の共分散の挟みや、ブロック写像の線形化など、一つの尺度の言明でした。繰り込んだ局所の観測量の大きさを、体積に一様な半ノルムで述べた評価はありません。本書の条件つきの鎖の定理（28-01、Lean：`BoxWalk.chain_end_to_end_box`）は、押し出しの測度についての稀さ・観測量の分かれ方・鏡映正値性などを仮定の欄に置き、部分列の極限の存在と性質を結論にする含意でした。そこで仮定に置いた量は、格子から定義されていません。

公開された構成の (1) は、「紫外の結果を、どういう形で赤外の議論に渡せば足りるか」の一つの答えです。本書の紫外の側の出力を置くべき位置として読めます推。本書の大きい面の稀さ（22-01、Lean：`FoldCap.rarity_explicit`）は、元の Wilson の測度の上の、単位の大き

さの箱の指示関数の根を押さえる形に言い直せます（12-02 §06）。ただしそれは繰り込んだ観測量の評価ではなく、(1) の代わりにはなりません。

体積に一様な評価の源について。本書の強結合の窓の中の無限体積の極限（20-03）は、Dobrushin の一意性の議論から体積に一様な減衰を得ていました。公開された構成の (1) は、チェス盤の根という箱あたりの量に上界を課す形で一様性を表します。一様性の言い表し方が違います（(1) の体積への一様性がどの評価から出るかは §06 のとおり読めていません）。

06

読めていない所

- **(1) の証明。**`Wcmain C` を結論に持つ定理（`oboes`・`noel`・`gardena` の使われ方）の中身は読んでいません。紫外の側のどの評価から体積への一様性が出るかの鎖も、確かめていません。
- **どの定理が公開の定理の道に載るか。**`Wcmain` を結論に持つ定理が複数在り、`JointExistence` の証明がどれを通るかは辿っていません。記録の `used` の見出しは `SharpGram.habitat` です。
- **ほかの入力の中身。**`Scrim`・`tabs`・`fridge`・`receipts` の欄が何を言っているかは、名前を見ただけです。
- **ε の損の出所。**$a_m^{-d-\varepsilon}$ の ε がどこから来るかは読んでいません。
- **基準の段 $r(d)$ の決め方。**次数ごとの基準の段（`C.ref d`）の定義は辿っていません（8-04 の材料）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
源 根で測った繰り込んだ観測量の評価 (1) の形：体積と観測点に一様、段 m について $a_m^{-d-\varepsilon}$、十分大きい切断で（`Wcmain`）	(1) の証明の中身。体積への一様性がどの評価から出るか
源 (1) とチェス盤の不等式から、点の離れた n 点関数が体積に一様に有界 (2)（`fits_budget`・`size_done`）	点が重なる所での評価（扱わない）
源 `Wcmain` はコンパクト性（`crops`）への入力。同じ走りから `Scrim` などのほかの入力も渡る（`rated`・`Run.Ties`）	「紫外からの入力は一つ」とは言えない。ほかの入力の中身
推 a_m^{-d} は次数 d の場の次元の勘定	ε の出所
本書に同じ形の評価は無い	本書の紫外の結果を (1) の形に言い直すこと

出典と再現

もの	種別	出典・道具
(1) の述語と箱の評価	源	構成の源 `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）：`YM/Extraction/Center.lean:21` `centeredBudget`・:30 `CenterPort`・:38 `Wcmain`・:42 `Wcmain.projects`、`YM/Cells/Packing.lean:34` `center`・:68 `CellHyp`
局所の有界性	源	`YM/Extraction/Held.lean:74` `fits_budget`・:120 `Around.size_done`・:136 `crops`、`YM/Extraction/Integrate.lean:25` `Bound`
ほかの入力	源	`YM/MergeProof/Powder.lean:48` `Accent.rated`、`YM/FullVolume/Cross.lean:65-71` `Run.Ties`、`YM/FullVolume/Rent.lean:120` `primaries`
(1) を結論に持つ定理	源（言明のみ）	`YM/FullVolume/Dusk/Graff.lean:20` `oboes`、`YM/MergeProof/Noel.lean:24` `noel`
評価書の記述	評	`yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf` §5 と式 (11)
本書の関連	Lean	`BoxWalk.chain_end_to_end_box`（含意、28-01）、`FoldCap.rarity_explicit`（22-01）

この章で使った語 — 繰り込んだ挿入・チェス盤の根・中心に置いた敷き詰め・体積に一様・局所の有界性・同程度連続性・抽出の列・コンパクト性。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：12-04 転送作用素と同程度連続性 — 挿入を動かしたときの相関の差を、転送作用素のトレースの表示と Hölder の不等式で押さえます。

転送作用素と同程度連続性

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§05 は本書の検討、§06 は未解決の地図です。

この章で分かること — 挿入の一つを格子の上で ℓ 歩動かしたとき、点の離れた相関がどれだけ変わるかを、公開された構成は $\left(\prod_i c_i\right) \ell / r$ の形で押さえています（r は点の間の余白、c_i は各挿入のチェス盤の根の上界）。道具は、格子の転送作用素の正値性、期待値を転送作用素の冪と挿入の作用素の積のトレースで書く表示、隙間の付け替え、Hölder の不等式です。この章はその言明の形と仕組みを読みます。体積に一様な同程度連続性が、Arzelà–Ascoli の議論（12-05）の二つ目の入力になります。

前提となる章 — 12-01（転送作用素の核の正値）、12-02（根）、12-03（根の上界）。転送行列の導入は 5-03。

先に言うこと — 公開された構成の結果は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」水準で、本書が読んだのは言明の形までです。隙間の付け替えの評価の本体（`TimeKernel.passage`）の証明は読めていません。格子の転送作用素は、構成の中では同程度連続性のためにだけ使われ、時間の向きの解析接続やスペクトルの条件は、極限の連続の側の半群から別に出します（12-07）。

この章の順序

1. 札の凡例
2. 言明 (1) — 転送作用素の核と正値性
3. 言明 (2) — 隙間を付け替えたときの差の評価
4. 仕組みの骨子 — トレースの表示、付け替え、Hölder
5. 挿入を一つ動かす形と、同程度連続性への組み立て
6. 本書の検討で見えていたこと
7. 読めていない所

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。公開された構成の定理が「Lean で証明されている」という水準は、委員会の評価によります評 。

01

言明 (1) — 転送作用素の核と正値性

導入は 5-03 です。時間の向き a（四つの軸のどれでもよい）を一つ選び、格子を向き a に垂直な層に切ります。一枚の層の中のリンクの配位を**切片** X、隣り合う層をつなぐ向き a のリンクの組を**糸** u と呼びます（12-01 §03）。隣り合う二枚の切片 X・Y と、その間の糸 u の面の重みを $\mathrm{weight}_\beta(X,Y,u)$ とし、糸を Haar で積分した

$$K_\beta(X,Y) \;=\; \int \mathrm{weight}_\beta(X,Y,u)\,du \tag{1}$$

が一段の転送作用素の核です源 （構成の源 `YM/Slice/Positive.lean:54` `heat`）。重みは正です（`YM/Slice/Hamilton.lean` `weight_pos`）。

言明（転送作用素の核の性質）

(i) $\beta \ge 0$ なら、核 K_β は正値の核：任意の有限個の切片 $X_1,\dots,X_k$ について行列 $\big(K_\beta(X_i,X_j)\big)$ は半正定値。(ii) 糸の向きを逆にすると核の引数が入れ替わる（時間の反転で随伴）。

源 公開された構成の定理。Lean：`YM.Slice.step_positive`（`YM/Slice/Positive.lean:81`、仮定 $0 \le \beta$）、`YM.Slice.transition_reflect`（`YM/Slice/Hamilton.lean:121`）。

(i) と (ii) から、核で積分する作用素 T は、切片の空間の L^2 の上の正の自己共役作用素です初 （(ii) で対称、(i) で正）。挿入（観測量）の作用素も、切片の関数を掛ける形や、何枚かの層をまたぐ「ブロック」（`Brick`：幅 w の層の帯に局所な関数を、転送作用素の積の間に挟む作用素）として書けます源 （`Brick` の名と使われ方。定義の全体は読んでいない）。

02

言明 (2) — 隙間を付け替えたときの差の評価

時間の円（長さ n）の上に、幅 w のブロック $B_1, \dots, B_k$ をこの順に置き、ブロックの間の隙間を $Y_1, \dots, Y_k$（層の数）とします（$kw + \sum_i Y_i = n$）。この配置の積の期待値を $\langle B; Y \rangle_\beta$ と書きます。

ブロック B_i の**柱**とは、B_i とその鏡像 ϑB_i を交互に p 組、時間の円を埋めるように並べた配置です（$n = 2pw$）源 （`YM/Slice/Calendar.lean:60` `column`）。柱は、時間の向きの一方向のチェス盤の写しです。

言明（隙間の付け替えの Lipschitz の評価）

$\beta \geq 0$、$n = 2pw$、全ての隙間が $2r$ より大きく（$Y_i > 2r$）、隙間の組 Z は Y から二つの隙間 $i \neq j$ の間で ℓ 層を移したもの（$Z_i = Y_i + \ell$、$Z_j = Y_j - \ell$、他は同じ）で、$\ell \leq r$ とします。柱の期待値の大きさの冪 $\|\langle \text{柱}(B_i) \rangle\|^{\rho_p}$（$\rho_p = 1/(2p)$、源の `Holder.rate p`、`YM/Complex/Gaps.lean:105`）が K_i 以下なら、

$$\left| \langle B; Z \rangle_\beta - \langle B; Y \rangle_\beta \right| \;\leq\; \frac{\prod_i K_i}{r}\, \ell. \tag{2}$$

ブロックの列を時間の円の上でどこから読み始めるか（基準の位置）は、両辺で違ってよい（源は二つの語を別の基準の位置 `b`・`c` で読む）。

源 公開された構成の定理。Lean：`YM.Slice.Time.powering`（`YM/Slice/Calendar.lean:72`）。本体の評価は `YM.TimeKernel.passage`（`YM/TimeKernel/Unit.lean:76`）。

意味。二つの挿入の間の距離を ℓ だけ縮め、その分だけ別の二つの挿入の間を広げても、相関は ℓ/r に比例する量しか変わりません。比例の定数は、各挿入を時間の向きに複製したときの箱あたりの大きさ（柱の冪）の積です。r は挿入どうしの余白で、余白が大きいほど差は小さくなります。

03

仕組みの骨子 — トレースの表示、付け替え、Hölder

段 1：期待値をトレースで書く

周期の格子の期待値は、時間の円を一周する作用素の積のトレースを分配関数で割ったものです源 （源の説明文と、`closed`・`along` の定義。`YM/TimeKernel/Unit.lean:17`）：

$$\langle B;Y\rangle_\beta \;=\; \frac{\operatorname{Tr}\bigl(B_1T^{Y_1}B_2T^{Y_2}\cdots B_kT^{Y_k}\bigr)}{\operatorname{Tr}T^{\,n}}. \tag{3}$$

分子と分母は T を正の定数倍しても同じ比で変わるので、$\|T\|=1$ と正規化してよい[初]。

段 2：隙間を付け替えた差は ℓ/r の程度

T は正で $\|T\|=1$ なので、固有値 $\lambda\in[0,1]$ について、$s\ge Y>2r$ で

$$\Bigl|\frac{d}{ds}\lambda^s\Bigr| \;=\; \lambda^s\,|\log\lambda| \;\le\; \frac{1}{e\,s} \;\le\; \frac{1}{2e\,r} \tag{4}$$

です[初]（$t\mapsto te^{-t}$ の最大値は $1/e$）。隙間を ℓ 動かすことは、二つの冪 $T^{Y_i}\cdot T^{Y_j}$ を $T^{Y_i+\ell}\cdot T^{Y_j-\ell}$ に替えることで、(4) から一つの冪あたりの変化は ℓ/r の程度です。これが (2) の ℓ/r の出所と推し量ります[推]。

段 3：残りの因子を Hölder で柱に分ける

(3) の分子の差は、まだ全てのブロックと冪の積のトレースです。トレースの Hölder の不等式で、これを各ブロックの「Schatten 型のノルム」の積に分けます。ブロック B_i と隙間の冪の組の Schatten ノルムを $2p$ 乗すると、B_i とその随伴を交互に並べた積のトレース、つまり柱の期待値（の分配関数倍）になります[推]（源の説明文「Read replica column strengths $\operatorname{Tr}((B^*B)^p)$」から）。だから定数は柱の期待値の冪 K_i の積になります。

源の説明文によれば、核を有限の行列で近似し（`Quad.shrink`）、近似の行列で評価してから極限に移しています。分配関数は下から実際の値で押さえ、基底状態についての仮定は置いていません[源]（説明文）。

段 4：柱は根で押さえられる

柱は時間の向きの一方向の写しなので、柱の期待値は、チェス盤の根（12-02）で押さえられます[源]（`YM/Extraction/Difference.lean:51` `reading`：観測量とその向き a の鏡像の根が c 以下なら、柱の冪が c 以下のブロックが作れる）。こうして (2) の K_i を、12-03 の根の上界 $A\,a_m^{-d-\varepsilon}$ で置き換えられます。

04

挿入を一つ動かす形と、同程度連続性への組み立て

言明（一つの挿入を一方向に動かす評価）

構成の族の切断 N・体積 p の格子で、$m+1$ 個の繰り込んだ挿入を点 $x_0,\dots,x_m$ に置き、向き a の座標が互いに $2h_{\square}+2r$ より離れているとします（$h_{\square}$ は中心の箱の一辺の格

子の点の数。源の字は `d` で、場の次数とは別の量)。各挿入とその向き a の鏡像の根が c_i 以下なら、一つの点 x_u を向き a に $\ell \le r$ 歩動かしたときの $(m+1)$ 点関数の差は $\left(\prod_i c_i\right) \ell / r$ 以下です。

源 公開された構成の定理。Lean：`YM.Extraction.Difference.primitive`（`YM/Extraction/Difference.lean:90`）。途中の形は `YM.Slice.Time.organized`（`YM/Slice/Ordered.lean:68`）。

なぜ向きの座標が離れている必要があるか。(3) の表示は、時間の向き a に挿入が順に並んでいることを使います。二つの挿入の向き a の座標が近いと、同じ層の帯に入ってしまい、ブロックに分けられません。だから同程度連続性の言明は、全ての座標軸で座標が互いに異なる配置（`generic`）の上で述べられます源。格子の超立方の対称で、時間の向きは四つの軸のどれにでも取れるので、四つの向きの動きを合わせて全方向の Lipschitz の評価になります推。

定義（同程度連続性の入力 `TransferLip`）

(i) 体積 p を止めて：周期の像まで含めて点の重ならないコンパクト集合 K の上で、任意の $\varepsilon > 0$ に $\delta > 0$ があり、十分細かい切断で、K の中の距離 δ 未満の二つの配置の格子の相関の差が ε 未満。(ii) 体積も動かして：全ての軸で座標の異なる配置のコンパクト集合 K の上で、同じことが十分先の体積と切断で一様に。

源 構成の源 `YM/Extraction/Lipschitz.lean:26` `TransferLip`（欄 `grid`・`expanding`）。

源 根の上界の束（`CenteredBook`）と構成の証書から `TransferLip` が出る、が公開された構成の定理です（Lean：`YM.Extraction.Difference.completed`、`YM/Extraction/Equicontinuity.lean:181`）。これは評価書の式 (11) の二つ目（コンパクト集合の上の一様な連続の度合い ω_K）に当たります評。

格子の転送作用素の役はここまで。構成の中で、格子の転送作用素は同程度連続性のために使われます。極限の理論の時間の発展 e^{-tH}・スペクトルの条件・解析接続は、極限の表の鏡映正値性から作る連続の側の OS の空間で扱います（12-07・12-08）推（名前と使われ方からの読み）。

> 05

本書の検討で見えていたこと

転送作用素の表示による同程度連続性は、本書の検討に在りませんでした。本書の転送の作用素は、再構成の器の中の抽象の作用素 T（19-03 の器）で、強結合の窓の中の無限体積の極限の測度から OS の再構成で作ったものです（20-04）。そこで示したのは $T \geq 0$ と $\|T - P_\Omega\| \leq e^{-m}$（質量ギャップの形）で、相関の連続の度合いに使ったことはありません。

Lean 本書の $T \geq 0$：$\beta \geq 0$ と Dobrushin の窓で、極限点の器の転送の作用素が正（Lean：`FullT.wilson_Tpos_full`。元は辺の中点の面の鏡映正値性をゲージ変換の平均で広げた `FullT.full_rp_torus`）。Osterwalder–Seiler の型の形式化で、格子間隔は 1 に固定、強結合の窓の中だけです。

公開された構成の (2) は、点の位置を連続に動かす連続極限の問題のための評価で、格子間隔 1 の本書の設定では、点の位置は離散で、同程度連続性という問い自体が立ちませんでした。本書の条件つきの鎖の定理（28-01）では、観測量の連続の度合いを「観測量の分かれ方」という**仮定**（Lean の欄 `split`・`lattice_vanishing`・`shift_vanishing`）として置いていました。公開された構成はそれを、転送作用素と根の上界から**出して**います。

06

読めていない所

- **`TimeKernel.passage` の証明**（`YM/TimeKernel/Unit.lean:76`）。§03 の段 2・段 3 は、説明文と言明の形からの推し量りです。Hölder の指数は `Holder.rate p` $= 1/(2p)$（`YM/Complex/Gaps.lean:105`）までは確かめました。
- **ブロック `Brick` の定義の全体**と、ブロックの作用素がトレースの中にどう入るか。
- **有限の行列での近似**（`Quad.shrink`）の組み方と、極限への移し。
- **四つの向きの合わせ方。** `primitive` から `completed` までの組み立て（`Equicontinuity.lean` の `stepTotal` など）は言明の名までです。
- **公開の定理への鎖。**記録では `completed` の直接の使い手は `crops` です。`crops` から公開の定理への道は 12-05 に書く範囲までしか辿っていません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
源 格子の転送作用素の核は $\beta \geq 0$ で正値、時間の反転で随伴（`step_positive`・`transition_reflect`）	$\beta < 0$。核のスペクトルについての量の評価
源 隙間を ℓ 付け替えた差 $\leq (\prod K_i)\,\ell/r$（`Time.powering`）	余白 r が無いとき（点が近いとき）
源 一つの挿入を一方向に動かす評価（`Difference.primitive`）と、同程度連続性の入力 `TransferLip`（`Difference.completed`）	向きの座標が一致する配置での評価
初 正規化と $\lvert d\lambda^s/ds\rvert \leq 1/(es)$	—
推 差の評価は「冪の微分 $\sim 1/r$」と「トレースの Hölder で柱へ」の二段	`passage` の証明の実際の組み方

出典と再現

もの	種別	出典・道具
転送行列と鏡映正値性	典	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440。5-03
核と正値	源	構成の源 `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）：`YM/Slice/Positive.lean:54` `heat`・:81 `step_positive`、`YM/Slice/Hamilton.lean:121` `transition_reflect`
(2) と本体	源	`YM/Slice/Calendar.lean:60` `column`・:72 `Time.powering`、`YM/TimeKernel/Unit.lean:17` `along`・:76 `passage`（言明と説明文のみ）
一つの挿入を動かす評価と組み立て	源	`YM/Slice/Ordered.lean:68` `organized`、`YM/Extraction/Difference.lean:51` `reading`・:90 `primitive`、`YM/Extraction/Equicontinuity.lean:181` `completed`、`YM/Extraction/Lipschitz.lean:26` `TransferLip`
評価書の記述	評	`yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf` §5、式 (11)
本書の $T \geq 0$	Lean	`FullT.wilson_Tpos_full`・`FullT.full_rp_torus`（20-04）

この章で使った語 — 転送作用素・切片・糸・正値の核・柱・トレースの表示・隙間の付け替え・Hölder の不等式・同程度連続性・全ての軸で座標の異なる配置。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：12-05 Arzelà–Ascoli と、極限に移る性質 — 有界性と同程度連続性から、二段の部分列で極限の相関を取り出します。

Arzelà–Ascoli と、極限に移る性質

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討、§05・§07 は未解決の地図です。

この章で分かること — 局所の有界性（12-03）と同程度連続性（12-04）から、公開された構成は二段の部分列で極限の相関を取り出します：一段目は全ての体積に共通の切断の部分列、二段目は体積の部分列です。切断の部分列は、紫外の側の収束を使って最後に列の全体へ戻されます。極限には、鏡映正値性・格子の超八面体群の対称・並進不変が移ります。この章はその組み立てと、極限の一意性や列の全体での収束がなぜ言えないかを読みます。

前提となる章 — 12-03・12-04、8-05（相関関数と極限の順）。Arzelà–Ascoli の定理は 1-09 の範囲の関数解析です。

先に言うこと — 公開された構成の結果は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」水準で、本書が確かめたのは言明の形を読んだことまでです。無限体積の極限は**体積の部分列に沿ってだけ**取られていて、極限が部分列の選び方に依らないこと（一意性）や、体積の列の全体での収束は示されていません。評価書もそれを開いた問いの一つ目に挙げています。

この章の順序

1. 札の凡例
2. 言明 — 部分列の極限の形
3. 仕組みの骨子 (1) — 二段の Arzelà–Ascoli
4. 仕組みの骨子 (2) — 切断の部分列を列の全体へ戻す
5. 極限に移る性質
6. 一意性と収束が言えない理由
7. 本書の検討で見えていたこと
8. 読めていない所

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。公開された構成の定理が「Lean で証明されている」という水準は、委員会の評価によります評 。

01

言明 — 部分列の極限の形

体積 p を止めて切断 $N \to \infty$ とした相関の核を $S_p(v;x)$ と書きます（8-05）。$x = (x_1, \dots, x_n)$ は互いに異なる点の配置、v は場の札の列です。

言明（部分列に沿う無限体積の極限、評価書の定理 5.1）

体積の番号の任意の狭義増加の列 $p(k)$ について、狭義増加の $q(k)$ と、点の重ならない配置の上で滑らかな核 $S^{\mathrm{mix}}(v;x)$ が在って、全ての札の列 v と、点の重ならない所に台を持つ全ての滑らかでコンパクトな台の試験関数 f について

$$\lim_{k\to\infty} S_{p(q(k))}(v;f) \;=\; \int f(x)\, S^{\mathrm{mix}}(v;x)\, dx. \tag{1}$$

一つの部分列 q が、全ての相関に共通に効きます。

評 評価書 §5 の定理 5.1。源 公開の定理 `JointExistence`（構成の源 `ChallengeSpec.lean:186`）の「任意の狭義増加の p に、狭義増加の q と表 T が在って $T.\mathrm{Properties}(p \circ q)$」の欄 `wilson`（`C.Converges (p∘q) …`）がこれに当たります。`Converges`（`PublicWilson.lean:85-90`）は「試験関数の収まる全ての体積で、切断の**列の全体**に沿った極限 $\mathrm{row}(p)$ が在り、$\mathrm{row}(p(q(k)))$ が $\int f\, S^{\mathrm{mix}}$ に収束する」という形です。

極限の記号 S^{mix} の「mix」は、のちに相の混ざりとして分解されることを先取りした名です（12-07）評 。

02

仕組みの骨子 (1) — 二段の Arzelà–Ascoli

抽出の列。構成は、切断の部分列 mesh と体積の部分列 per の組を**抽出の列**（`Extraction.Order`、`YM/Extraction/Orders.lean:34`）として持ち、細分（`refine`、同

:40）は二つの部分列をそれぞれ合成します源 。極限の意味（`limits`、同 :61）は「十分先の体積で、各体積を止めて mesh に沿って極限 $v(p)$ が在り、$v(\mathrm{per}(k))$ が極限に収束する」という二つの通常の極限です。

言明（共通の部分列の極限）

抽出の列 f について、局所の有界性（`Bound`）と同程度連続性（`TransferLip`）が成り立つなら、細分 g と、極限の表 S、体積ごとの表 P_p が在って：(i) S の読みは全ての軸で座標の異なる配置の上で連続、(ii) 各体積で格子の相関は $f \circ g$ の切断の部分列に沿って P_p に、点の重ならない（周期の像を含めて）コンパクト集合の上で一様に近づく、(iii) $P_{\mathrm{per}(k)}$ は S にコンパクト集合の上で一様に近づく、(iv) S の均した読みは格子の均した相関の二重の極限である。

源 公開された構成の定理（Arzelà–Ascoli の型）。Lean：`YM.Extraction.first_surface`（`YM/Extraction/Lipschitz.lean:166`、結論 `RawLimits`：同 :156）。構成の入力から呼ぶのは `YM.Extraction.crops`（`YM/Extraction/Held.lean:136`）。

証明は二段です源 （補題の言明と証明の段）。

1. **切断の部分列（全ての体積に共通）**。体積 p と札の列の組は可算個です。各組について、体積 p の格子の相関の族は、点の重ならないコンパクト集合の上で有界（`Bound.cyclic`）で同程度連続（`TransferLip.grid`）です。可算個の族に同時に Arzelà–Ascoli を当て、全ての体積に共通の切断の部分列 t と、体積ごとの極限 P_p を得ます（`setMeshes`、`Lipschitz.lean:78`）。
2. **体積の部分列**。今度は P_p の族（p が動く）を、全ての軸で座標の異なる配置の上で考えます。有界性（`Bound.volume`）と同程度連続性（`TransferLip.expanding`）は十分先の体積で一様なので、もう一度 Arzelà–Ascoli を当てて体積の部分列 u と極限 S を得ます（`localAscoli`、`YM/Extraction/Tame.lean:100`）。

`localAscoli` は、可算個の添字の関数の族について、各点の有界性と「振動」の制御（同程度連続性の局所の形、`oscillation`）から、全ての添字に共通の部分列と極限を選ぶ補題です。中身は、可算な稠密集合の上で対角線の部分列を取り、同程度連続性で全体へ広げる、という古典の筋です典 （Arzelà–Ascoli の定理）。源で読んだのは、補題の言明と、`simultaneous`・`growFrom` を使う証明の形です源 。

極限の核が**測度でなく相関関数の表**として取られていることに注意します。評価書は、連続の確率測度を定義することを開いた問い 2 に挙げています[評]。

03

仕組みの骨子 (2) — 切断の部分列を列の全体へ戻す

§02 の一段目で切断の部分列を取りましたが、公開の言明の `Converges` は、各体積で切断の**列の全体**に沿った極限を要求します（§01）。構成はこれを紫外の側の収束で払います[源]。

- 紫外の側は、体積を止めて、切断の列の全体に沿って格子の核が収束すること（差分の列も含めて）を、核の Cauchy 性から示します（`PositionsUV C e`、`YM/FullVolume/Profiles.lean:25`、列 e が全体のとき `Sequence.full`。第 11 部 11-10）。
- 部分列 f で作った最終の証書と `PositionsUV C full` から、「切断は列の全体、体積は f の体積の部分列」の抽出の列について、極限の表が二重の極限として読めることが出ます（`from_spec`、`YM/FullVolume/Finale/Program.lean:117`）。

極限の一意な数列について部分列で極限を取れば、列の全体の極限と一致します。体積を止めた紫外の極限は列の全体で在るので、切断の部分列は最後に外せます[初]。外せないのは体積の部分列のほうです。

どの目標に入っているか。公開の定理の欄 `wilson` でも、紫外（切断）は列の全体、無限体積は部分列 $p \circ q$ です。核と差分つきの強い形 `PositionsUV … Sequence.full` は構成の定理 `constructed` の結論にだけ在り、公開の定理には在りません[源]（6-02）。

04

極限に移る性質

有限の格子でちょうど成り立つ性質は、極限で非負性や等式として保たれます。構成は次の四つを移しています[源]。

性質	格子の側	極限の側	Lean（構成の源）
鏡映正値性	格子点を通る面（座標 0、四つの軸）の鏡映正値性（12-01）	正の時間に台を持つ均した語の Gram 行列が半正定値（`RPSmear`）	`Order.realPositive`（`YM/Extraction/Harvest.lean:46`）。格子の面は `Banks.plane`（`Banks.lean:19`：種類 site、基準 0）

性質	格子の側	極限の側	Lean（構成の源）
離散の対称	格子の超八面体群（座標の置換と符号）の共変性と実性	`RealSpin`	`Order.spin`（`YM/Extraction/Inherited.lean:124`）
並進不変	格子の並進での不変	連続の並進での不変（`Homogeneous`）	`Order.homogeneous`（`Inherited.lean:83`）
基本の性質	対称・0 点は 1・単位の場は外せる	`Basic`	`Order.limits_basic`（`Inherited.lean:151`）

四つとも、極限の表の滑らかさ（`S.Smooth`）を仮定に取ります（`realPositive` は対称 `S.Symmetric` も）源 。

鏡映正値性の移し方。格子の側の鏡映正値性は、有限個の語の一次結合 $\sum_i c_i F_i$ について Gram 行列 $\left(\langle F_j \overline{F_i \circ \Theta} \rangle\right)$ が半正定値であることと同じです（12-01 §02）。各成分が切断と体積の二重の極限で収束するので、半正定値の行列の極限として、極限の Gram 行列も半正定値です初 （源の `posVectors` と、和の極限）。連続の側の鏡映正値性の定義 `Table.RP`（`YM/Euclid/Words.lean:123`）は、全ての座標軸 a について、正の時間の語の族の Gram 行列が半正定値であることで、並進不変と合わせて座標面に平行な全ての面で成り立ちます源 。

極限の表の束。四つの性質に、点の重ならない所での滑らかさ（`Smooth`）と増大の条件（`Capped`）を足すと、公開された構成の版の Euclid の公理の束 `Table.Hierarchy`（`Words.lean:141`）になります（`Order.assembles`、`Harvest.lean:62`）源 。`assembles` は滑らかさと増大の条件を**仮定**として取ります。それらがどこから来るかは 12-08 に書く範囲までしか読んでいません。連続の回転（O(4)）の不変はこの束に入っていません（12-06）。

05

一意性と収束が言えない理由

§02 の入力は、有界性と同程度連続性という**上界だけ**です。コンパクト性は部分列の極限の存在を与えますが、極限が一つであることは与えません初 。極限の一意性や列の全体での収束を出すには、例えば次のような種類の言明が要ります：体積を変えたときの相関の差が小さくなること（体積についての Cauchy 性）、体積に一様な相関の減衰、境界条件への依存が消えること、DLR の型の一意性。読んだ範囲では、これらのどれも入力に入っていません源 （入力の型と、名前での検索の範囲）。

源の `Order.unique`（`YM/Extraction/Orders.lean:70`）は「同じ抽出の列に沿った二つの極限は等しい」（Hausdorff の空間での極限の一意性）を言うだけで、部分列の選び方への非依存ではありません。宣言の使われ方の記録で、この宣言の状態は `outside`（17 の見出しの定理のどれからも届かない）です源。

評価書は §5 で「部分列の極限が選んだ部分列に依るかは未解決」とし、§8 の開いた問い 1 に「部分列でなく収束を、無限体積の極限の一意性を示す」ことを挙げています評。同じ §5 は、Jaffe–Witten の問題の文はコンパクト性で得た部分列の極限を、極限の性質を示す別の議論が無い限り不十分とみなす、とも書いています評。

06

本書の検討で見えていたこと

(1) 部分列の極限と性質の移しの含意。本書の条件つきの鎖の定理（28-01）は、押し出しの測度の族について、コンパクト性から部分列の極限を取り、鏡映正値性・不変性・閉じた集合の質量の下界・観測量の連続の度合いを極限に移す部分を含んでいました。

Lean 含意として機械検査（仮定の欄は 28-01 の表のとおり）。Lean：`BoxWalk.chain_end_to_end_box`、`ChainBlockMap.chain_end_to_end_blockMap`。

部分列の極限と性質の移しという**骨組みは同じ向き**でした。違いは、本書は極限を**測度**で取り（コンパクトな配位の空間の上の確率測度の族は常に収束する部分列を持つ）、有界性・連続の度合いを**仮定の欄**に置いたのに対し、公開された構成は極限を**相関関数の表**で取り、有界性と同程度連続性を根の上界と転送作用素から**出して**いることです（12-03・12-04）。

(2) 強結合の窓の中の、部分列なしの極限。本書は、強結合の窓の中で、無限体積の極限を部分列なしで持っています。

Lean $0 < \beta$、$18 \tanh \beta < 1$ のとき、$(\mathbb{Z}/2(n+1))^4$ の SU(2) Wilson の測度の周期の持ち上げの列は、部分列なしで $\mathbb{Z}^4$ の上の一つの確率測度 ν_β に弱収束し、全ての大きさの列も同じ極限を持つ。Osterwalder–Seiler の強結合・Dobrushin の一意性の型の形式化。Lean：`InfVol.wilson_infvol_unique`、`AllN.wilson_infvol_allN`（20-03）。並進不変・鏡映正値性・質量ギャップまでを一本にまとめた言明は `InfMain2.wilson_infvol_main2`（20-04）です。

これは収束と一意性を持つ点で、公開された構成の部分列の極限より強い形です。ただし**別の領域**の話です：格子間隔は 1 に固定、結合は強結合の窓（$|\beta| < 0.0556$ ほど）の中だけで、連続極限は取っていません。公開された構成は全ての段を弱結合のまま運び、格子間隔 $a_N \to 0$ の連続極限を取ったあとで無限体積へ行きます。二つは対象も極限の順も違い、比べられるの

は「どういう種類の入力が一意性を与えるか」の型（本書は Dobrushin の条件による体積に一様な減衰）までです。

(3) 捩れた境界条件。公開された構成の格子は周期の境界条件だけです源 。本書は捩れた境界条件の分配関数と渦の自由エネルギーの上界と下界を持っています（第 21 部）。これらは格子間隔を固定した格子の上の言明で、公開された構成の赤外の部品とは重なりません。

07

読めていない所

- **Arzelà–Ascoli の補題の証明の細部**（`simultaneous`・`growFrom`・`components`）。
- **公開の定理への鎖**。記録では `crops` の直接の使い手は `MergeProof.Accent.rated` で、記録の見出しは `SharpGram.habitat` です。字面では、構成の鎖の `fromFunded`（`YM/R2I/Campaign/Accepted.lean:150`）が :157 で `Run.extractible17`（`YM/RG17/Joint.lean:61`）を呼び、それが構造体 `Chateau` の欄 `reception`（`YM/MergeProof/Almandine.lean:31`）を使い、その欄を満たす補題 `grantor`（同 :40）の証明の中（同 :79）で `rated` が呼ばれるので、公開の定理への道に載る見込みです推 。宣言ごとの鎖は確かめていません。
- **滑らかさと増大の条件の出所**。`assembles` の仮定 `Smooth`・`Capped` を誰が払うかは辿っていません。
- **体積についての Cauchy 性が無いこと**。入力の型と名前の検索からの判断で、リポジトリの全体を読んだわけではありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
源 有界性と同程度連続性から、二段の Arzelà–Ascoli で共通の部分列の極限（`first_surface`・`crops`）	極限の一意性。体積の列の全体での収束
源 切断の部分列は、紫外の側の列の全体での収束で最後に外す（`from_spec`・`PositionsUV … full`）	体積の部分列を外すこと
源 鏡映正値性・超八面体群の対称・並進不変・基本の性質が極限に移る（`realPositive`・`spin`・`homogeneous`・`limits_basic`）	連続の回転の不変（12-06 で別に）。極限の確率測度
評 評価書：部分列の極限、選び方への依存は未解決（§5、§8 の 1）	—
Lean 本書の強結合の窓の中の部分列なしの極限（`wilson_infvol_unique`・`wilson_infvol_allN`）	格子間隔を動かすこと。弱結合。連続極限

出典と再現

もの	種別	出典・道具
Arzelà–Ascoli の定理	典	関数解析の標準の定理（1-09）
抽出の列と二段の極限	源	構成の源 `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）：`YM/Extraction/Orders.lean:34` `Order`・:40 `refine`・:61 `limits`・:70 `unique`、`YM/Extraction/Lipschitz.lean:78` `setMeshes`・:156 `RawLimits`・:166 `first_surface`、`YM/Extraction/Tame.lean:100` `localAscoli`、`YM/Extraction/Held.lean:136` `crops`
列の全体へ戻す	源	`YM/FullVolume/Profiles.lean:25` `PositionsUV`、`YM/FullVolume/Finale/Program.lean:117` `from_spec`、`PublicWilson.lean:85-90` `Converges`、`ChallengeSpec.lean:186` `JointExistence`
極限に移る性質	源	`YM/Extraction/Harvest.lean:46` `realPositive`・:62 `assembles`、`YM/Extraction/Banks.lean:19` `plane`、`YM/Extraction/Inherited.lean:83` `homogeneous`・:124 `spin`・:151 `limits_basic`、`YM/Euclid/Words.lean:123` `Table.RP`・:141 `Table.Hierarchy`
評価書の記述	評	`yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf` §5（定理 5.1、式 (10)・(11)）、§8
本書の対応	Lean	`BoxWalk.chain_end_to_end_box`・`ChainBlockMap.chain_end_to_end_blockMap`（含意、28-01）、`InfVol.wilson_infvol_unique`・`AllN.wilson_infvol_allN`（20-03）、`InfMain2.wilson_infvol_main2`（20-04）

この章で使った語 — 抽出の列・切断の部分列・体積の部分列・Arzelà–Ascoli の定理・同程度連続性・部分列の極限・鏡映正値性・超八面体群・並進不変・一意性。意味は A-02 用語集にあります。

次に読む章：12-06 Euclid 不変 — 格子の離散の対称から、連続の回転の不変へどう上げるかを読みます。

Euclid 不変

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討、§07 は未解決の地図です。

この章で分かること — 格子は回転の対称を壊し、座標の置換と符号の反転からなる有限の群（超八面体群、384 個の元）だけを残します。公開された構成は、極限の理論が連続の回転と鏡映の群 O(4) で不変であることを、三つの部品で示している、と委員会は評価しています：(1) ゲージ固定を含めて格子の離散の対称を保ち、極限へ移す、(2) 発散の無い応力テンソルを作り、並進と回転の Ward の恒等式を立てる、(3) 回転の流束が遠くで消えることを示し、回転の不変が自発的に破れないことを出す。この章は、三つの部品の**言明**を読み、それらからなぜ O(4) の不変が出るかの筋を書きます。(3) の**証明の中身**は読めていません。

前提となる章 — 12-05 §04（極限に移る性質）、13-01（応力テンソルの一意性と正規化）、9-05（一段の対称性）。

先に言うこと — 公開された構成の結果は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」水準です。本書は、応力テンソル・Ward の恒等式・回転の不変の**定義と言明の形**を読みました。流束の消滅（`Outer.outer`）の証明は、座標軸ごとの約 40 本のファイルに分かれていて、その中身は読んでいません。§05 の筋のうち、言明から直接読めない段は推 です。

この章の順序

1. 札の凡例
2. 何が問題か — 格子に残る対称は有限の群
3. 部品 (1) — 離散の対称を保ち、極限へ移す
4. 部品 (2) — 応力テンソルと Ward の恒等式
5. 部品 (3) — 直線の上の配置で局所の回転の流束が零になること
6. 仕組みの骨子 — 三つの部品から O(4) の不変へ
7. 本書の検討で見えていたこと
8. 読めていない所

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。公開された構成の定理が「Lean で証明されている」という水準は、委員会の評価によります評 。

01

何が問題か — 格子に残る対称は有限の群

OS の公理（4-10）は、Euclid の相関関数が並進と回転・鏡映の群 $E(4) = \mathbb{R}^4 \rtimes O(4)$ で不変であることを求めます。格子 $a\mathbb{Z}^4$ が保つのは、格子の並進と、座標の置換と符号の反転からなる超八面体群（位数 $2^4 \cdot 4! = 384$）だけです。連続極限で並進の不変は戻りますが（12-05 §04）、回転の不変は自動では戻りません。極限が回転の不変を持つことは示すべき性質で、しかも極限の状態で回転の不変が**自発的に破れる**可能性も除く必要があります。

評 評価書 §6.3：証明は三つの主な部分から成る。一つ目はゲージ固定が格子の対称を保つこと（例えば軸ゲージの固定ではそうならない）で、対称を破る選び方について平均して行う。二つ目は発散の無い応力テンソルの場が在ることを示し、それで局所の Ward の恒等式を立てること。最後に、極限の状態で Euclid 不変が自発的に破れないことを示す。これは応力エネルギーの流束が無限遠で十分速く落ちれば従い、複数の直交する面での鏡映正値性を使う込み入った議論で示されている。

02

部品 (1) — 離散の対称を保ち、極限へ移す

一段の対称。繰り込みの一段の核は、超八面体群の符号つきの置換（384 個）・粗い格子の並進・細かい格子のゲージ変換で不変（共変）です。大きい場でのゲージの選び方は対称を破りますが、選び方を確率で引いて平均することで、核全体の対称を保ちます（9-03・9-05）。この部ではそれを前提に読みます。

極限への移し。格子の超八面体群の共変性と実性は、極限の表の性質 `RealSpin` に移ります源 （構成の源 `YM/Extraction/Inherited.lean:124` `Order.spin` ）。`RealSpin` は、極限の相関が超八面体群の元で点と場の札を同時に動かしても変わらないこと（場の札には群の表現が掛かる）と、実性を言う欄です源 （名前と使われ方。定義は `YM/Euclid/Table.lean:80` の構造体 `RealSpin` で、全文は読んでいない）。

03

部品 (2) — 応力テンソルと Ward の恒等式

場の空間 F_d（次数 d の局所場、8-03）を使います。**応力テンソル**は、添字 $a, b \in \{0,1,2,3\}$ ごとに次数 4 の場 $T_{ab} \in F_4$ を与える組です源（`YM/Euclid/Stress.lean` の `Stress S` $=$ $\mathrm{Axis} \to \mathrm{Axis} \to F_4$）。

定義（保存する応力テンソル）

(i) 対称 $T_{ab} = T_{ba}$、(ii) 実（場の共役で不変）、(iii) 発散が零：$\sum_a \partial_a T_{ab} = 0$（$\partial_a$ は場の空間の上の微分 $F_4 \to F_5$）。加えて、回転の作用 R について二階のテンソルとして変換すること（`Tensorial`）。

源 構成の源 `YM/Euclid/Stress.lean:59` `Conserved`（欄 `symmetric`・`real`・`divergence`）、:64 `Tensorial`。回転の場への作用 `Rotation`（:22、欄 `act`・`lie`）と、その法則 `Rotation.Laws`（:31：連続、群の作用、符号つきの置換では格子の鏡映と一致、実性、単位の場を保つ、微分と整合、無限小の生成子 `lie`）。

応力テンソルの一意性（保存する対称テンソルの空間が実 1 次元）と、その正規化は 13-01 で扱います（Lean：`YM.Pert.one_line`、`YM/Pert/Weak.lean:68`）源。

窓。点の配置 $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$（互いに異なる）について、関数 χ が**窓**であるとは、滑らかでコンパクトな台を持ち、x_0 の近くで 1 に等しく、ほかの点 $x_1, \dots, x_n$ を台に含まないことです源（`Stress.lean` の `Window`）。$\partial\chi$ は全ての挿入点から離れた所に台を持ちます。窓は、x_0 を囲む面の滑らかな版です。

言明の形（並進と回転の Ward の恒等式）

中心の場 $B \in F_d$ を x_0 に、傍観者の場の列 q を $x_1, \dots, x_n$ に置き、χ を窓とします。

$$-\sum_a \int \partial_a \chi(y)\, \big\langle T_{ab}(y)\, B(x_0)\, q \big\rangle \, dy \;=\; \big\langle (\partial_b B)(x_0)\, q \big\rangle, \tag{1}$$

$$-\sum_{a,b} \int \partial_a \chi(y)\, \big(g\,(y - x_0)\big)_b \, \big\langle T_{ab}(y)\, B(x_0)\, q \big\rangle \, dy \;=\; \big\langle (\mathrm{lie}_g B)(x_0)\, q \big\rangle. \tag{2}$$

(1) は並進、(2) は無限小の回転 g（反対称の行列）の恒等式です。lie_g は場への回転の作用の微分です。

源 構成の源 `YM/Euclid/Stress.lean:90` `StressLaws`（欄 `translation`・`rotation`）、左辺は同ファイルの `shellGrad`・`shellSpin`。極限の表 S の性質とし

て、構成の証書の束 `Spec.Locals`（`YM/Spec/Closed.lean`、欄 `conserved`・`spin`・`charges`）に入り、選んだ相を含む全ての相の表についても証書 `OS.Selection.Certificate`（`YM/Phase/Mixture.lean:136`、欄 `flux`）に入ります。

(1) は、χ の段差が x_0 を囲む面の役をする Gauss の定理の形です。$\partial\chi$ は挿入点の近くで消えるので、積分は点の重なりに触れません。委員会の例の検査は、(1) の右辺が普通の座標の微分に一致すること、全ての相・全ての場で成り立つこと、被積分関数が可積分であること、χ の取り方に依らないこと、許される χ が実際に在ることを確かめています[評]（評価の側 `submissions/openai-20261028/docs/examples/TranslationWard-20261028.lean`）。同じ検査は、改良項が全て消えること・接触項・膨張の Ward の恒等式は確かめていない、と書いています[源]。

04

部品 (3) — 直線の上の配置で局所の回転の流束が零になること

回転の不変を述べる述語は、全ての $K \in O(4)$ について、点を K で動かし場の札を回転の作用で動かしても相関が変わらないことです[源]（`YM/Euclid/Stress.lean:46` `Rotation.Oriented`：点の重ならない全ての配置で $S(Kx;\, R_K v) = S(x; v)$）。

言明の形（直線の上の配置で、局所の回転の流束が消える）

極限の表が Euclid の束（`Table.Hierarchy`）を満たし、微分の計画と向きの条件、応力テンソル J、ほかの前提 `Pre` が成り立つとします。このとき、次の二つが成り立ちます。(i) 和の条件 `Bid.LineSum`（`YM/Bid/Angular.lean:35`：直線の上の配置で、ある図式の値が零。中身は読んでいない）。(ii) ある座標軸 a に平行な一本の直線の上に全ての点が並ぶ配置 x（点は互いに異なる）では、全ての回転 K と場の列 q について、局所の回転の流束 `localTurn` が零。

[源] 公開された構成の定理。Lean：`YM.Outer.outer`（構成の源 `YM/Next/ROTATIONS/Route.lean:114`）。これを全ての構成の対象に当てた形が `YM.Outer.miles`（同 :123）で、述語 `YM.Bid.Miles`（`YM/Bid/Town.lean:13`）を満たします。

(ii) が評価書 §6.3 の「応力エネルギーの流束が無限遠で十分速く落ちる」に当たる、という結びは[推]です（`localTurn` の定義を読んでいないため）。

源 言明の形は読みました。`outer` の仮定 `Pre`（`Climb.Pre`）の中身と、局所の回転の流束 `localTurn` の定義は読んでいません。源の注は「解析の評価は連続の回転のブートストラップより前に在り、それを使わない」「直線の上の傍観者と空の組を全て含む」と書いています 源（説明文）。

回転の不変がどこで結論になるか。極限の表の回転の不変は、構成の証書の束 `Spec.Locals` の欄 `motion`（`Rotation.Oriented S`）として、各相の表の回転の不変は証書 `Certificate` の欄 `sym`（`YM/Phase/Mixture.lean:142`）として現れます 源。`outer` から欄 `motion` までの鎖は辿っていません。O(4) の不変は、公開された構成の Euclid の公理の束 `Table.Hierarchy` の**外**で別に要求されています（12-08）。そして相の分解の可換性の証明に、この不変が仮定として使われます（12-07）。順序は「Euclid 不変 → 相の分解」です。

05

仕組みの骨子 — 三つの部品から O(4) の不変へ

三つの部品から O(4) の不変が出る筋を、標準の議論として書きます。源がこの順で組んでいるかは確かめていません 推。

1. **窓を大きくする**。(2) で、窓 χ を全ての点 $x_0, \dots, x_n$ を含む大きい球で 1 に取ることはできません（窓は傍観者を台に含まない）。代わりに、各点のまわりの小さい窓の (2) を全ての点について足し、それを大きい球の窓の式と比べます。大きい球の窓では、$\partial\chi$ が全ての点から遠い球殻に台を持ち、左辺は**遠くの球殻を通る回転の流束**です 推。
2. **流束が消えれば、無限小の不変**。球殻を遠くへやったときに流束が零に近づけば、各点での回転の生成子の作用の和（場の札への lie_g と、点の位置の回転＝並進の Ward の恒等式 (1) からの微分の項）が零になります。これは相関が無限小の回転で変わらないことです 推。
3. **無限小から群へ**。$SO(4)$ は連結なので、一つの径数の部分群に沿って積分すれば $SO(4)$ の不変が出ます。鏡映（行列式 -1）は部品 (1) の超八面体群に含まれるので、合わせて $O(4)$ です 初（相関が点について滑らかであること、12-05、を使う）。

源の `outer` の結論は「直線の上の配置で局所の流束が零」で、一般の配置ではありません。直線の上の配置から一般の配置へどう広げるか、流束が遠くで消えることを鏡映正値性からどう出すか（評価書の「複数の直交する面での鏡映正値性」）は、`Next/ROTATIONS/` の約 40 本のファイル（座標軸ごとのスペクトルの核、Cauchy の評価の名が並ぶ）の中身で、読んでいません。

なぜ流束が問題か。無限体積の極限は部分列で取ったもので、無限遠での相関の減衰は一様には示されていません（12-05 §05）。減衰が無ければ、遠くの球殻を通る流束が消えるとは限

らず、回転の不変が自発的に破れる余地が残ります。流束の消滅は、減衰の代わりに回転の不変だけに必要な量を押さえる言明です[推]。

06

本書の検討で見えていたこと

無い。本書の Lean には、応力テンソル、Ward の恒等式、連続の回転の不変のどれもありません。本書の格子の結果は格子間隔を固定した言明で、対称は格子の対称だけです。

- 強結合の窓の中の無限体積の極限 ν_β は、四方向の単位の並進で不変です（Lean：`TransI.wilson_infvol_translation`、20-03）。回転は扱っていません。
- フェルミオンつきの器の測度は、超立方の対称の一部（空間の平面の 90° 回転、軸の鏡映、時間の鏡映）で不変です（20-05）。
- 押し出しの測度の対称のうち、辺 3 の設計の粗い並進と、境の面の鏡映との交換は Lean に在りますが、格子の対称の範囲です（`Block3.down_trans`・`Block3.down_reflB`、28-05）。軸の入れ替えとの交換は、数値で確かめただけです（14-02）。

Euclid 不変を、応力テンソルの Ward の恒等式と流束の消滅から上げるという組み方は、本書の計画（構成の段の表の、再構成に向かう段）に無かった発想です（14-05）。

07

読めていない所

- **`outer` の証明の中身**（`Next/ROTATIONS/` の 43 本のファイル）。仮定 `Pre` の中身と `localTurn` の定義。
- **`outer`・`miles` から回転の不変（`Locals.motion`・`Certificate.sym`）までの鎖**。記録では `miles` の直接の使い手は `MergeProof.Acme.glistens` で、見出しは `SharpGram.habitat` です。
- **評価書の「複数の直交する面での鏡映正値性」**が、源のどの補題に当たるか。
- **対称を保つゲージ固定の在りか**（9-03 の材料）と、それが極限の `RealSpin` へどう届くか。
- **`RealSpin` の定義の全文**（`YM/Euclid/Table.lean:80`）。
- **回転させた面での鏡映正値性**（`YM/Euclid/OtherPlanes.lean`）：import はされていますが、記録では使われていない宣言の置き場です[源]（記録）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
源 格子の超八面体群の共変性と実性が極限へ移る（`Order.spin`）	`RealSpin` の定義の全文（`Euclid/Table.lean:80`）
源 保存する応力テンソルの定義と、窓を使う並進・回転の Ward の恒等式の形 (1)(2)（`Conserved`・`StressLaws`）。構成の証書と各相の証書に入る	改良項が全て消えること、接触項、膨張の Ward の恒等式
源 直線の上の配置で局所の回転の流束が零（`Outer.outer`）	証明の中身。一般の配置への広げ方
評 評価書 §6.3 の三つの部分と「複数の直交する面での鏡映正値性」	源の補題との対応
推 流束の消滅＋Ward ⇒ 無限小の不変 ⇒ O(4) の不変、という標準の筋	源がこの順で組んでいること
本書に応力テンソル・Ward・回転の不変は無い	—

出典と再現

もの	種別	出典・道具
OS の公理の Euclid 不変	典	K. Osterwalder, R. Schrader, Comm. Math. Phys. 31 (1973) 83；42 (1975) 281。4-10
応力テンソル・Ward・回転	源	構成の源 `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）：`YM/Euclid/Stress.lean:22` `Rotation`・:31 `Rotation.Laws`・:46 `Rotation.Oriented`・:59 `Conserved`・:64 `Tensorial`・:90 `StressLaws`、`YM/Spec/Closed.lean` `Locals`、`YM/Phase/Mixture.lean:136` `Selection.Certificate`
離散の対称の移し	源	`YM/Extraction/Inherited.lean:124` `Order.spin`
流束の消滅	源（言明のみ）	`YM/Next/ROTATIONS/Route.lean:114` `outer`・:123 `miles`、`YM/Bid/Town.lean:13` `Miles`
一意性の言明	源	`YM/Pert/Weak.lean:68` `YM.Pert.one_line`（13-01）
評価書と委員会の例	評	`yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf` §6.3、`submissions/openai-20261028/docs/examples/TranslationWard-20261028.lean`
本書の格子の対称	Lean	`TransI.wilson_infvol_translation`（20-03）、`Block3.down_trans`・`Block3.down_reflB`

この章で使った語 — 超八面体群・Euclid 不変・応力テンソル・保存・Ward の恒等式・窓・回転の流束・自発的な破れ・無限小の生成子。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：12-07 相の分解 — Euclid 不変を使って、零エネルギーの空間の上の作用素の環を可換にし、混ざった理論を相に分けます。

相の分解

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討、§07 は未解決の地図です。

この章で分かること — 部分列で取った極限の理論 S^{mix} は、群がり（遠く離した二組の相関が積に分かれること）を持つとは示されていません。群がりが無いと、OS の再構成で出る真空は一意とは限りません。公開された構成はこれを、零エネルギーの空間に圧縮した作用素の可換な C*-環を作り、その Gelfand のスペクトルを「相」の空間とすることで回り道しています：$S^{\mathrm{mix}} = \int S^{\xi}\, d\mu(\xi)$ と分解し、各成分 S^{ξ} では真空が一意になります。この章は、その組み立てと、混ざった理論と成分について言っていること・いないことを読みます。

前提となる章 — 12-05（極限の表と、移る性質）、12-06（Euclid 不変）、4-10（OS の再構成）、1-10（Hilbert 空間とスペクトル）。

先に言うこと — 公開された構成の結果は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」水準で、本書は言明の形と証明の段の補題の名を読みました。各成分の真空の一意性には**速さが付いていません**（指数の減衰ではない）。混ざった理論そのものの群がり、相の空間が一点であること、成分どうしが等しいことは、どれも示されていません。

この章の順序

1. 札の凡例
2. なぜ分解が要るか
3. 言明 (1) — 零エネルギーの空間に圧縮した作用素の環
4. 言明 (2) — 可換性、Gelfand 表現、確率測度
5. 言明 (3) — 成分の相関と、各成分での真空の一意性
6. 混ざった理論と成分について、言っていること・いないこと
7. 本書の検討で見えていたこと
8. 読めていない所

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。公開された構成の定理が「Lean で証明されている」という水準は、委員会の評価によります評 。

01

なぜ分解が要るか

極限の表 S^{mix} は鏡映正値性を持つので、OS の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ と時間の半群 $E(t) = e^{-tH}$（自己共役・縮小）が立ちます源 （構成の源 `YM/OS/Dynamics.lean:57` `Chamber` ：正の時間の語から作る GNS の空間、時間の半群 `flow.E` 、空間の並進 `flow.U` ）。全ての t で $E(t)$ に固定される部分空間を**零エネルギーの空間** $\mathcal{H}_0 = \ker H$ と呼び（ `YM/OS/Core.lean:14` `ground` ）、その直交射影を P_0 とします。$t \to \infty$ で $E(t)x \to P_0 x$ です（同 :38 `emerges` ）源 。

標準の OS の再構成では、群がりから $\mathcal{H}_0$ が真空 Ω の倍だけになり、真空が一意になります（4-10）。部分列で取った極限は群がりを示されていないので、$\mathcal{H}_0$ は一次元とは限りません。物理の言葉では、極限が二つ以上の「純粋な相」の混ざりである可能性が残ります。

評 評価書 §6：OS の再構成をこの Euclid の理論に直接当てるのではなく、群がりを満たす成分に分解し、成分ごとに再構成を当てる、という回り道をとる。§6.2：混ざった極限の理論にも OS の再構成は当てられるが、出る Wightman の理論の真空が一意とは示されていない。

02

言明 (1) — 零エネルギーの空間に圧縮した作用素の環

時間の帯 $0 < t < s$ に点を持つ語（有限個の場の札と挿入点の列）A について、作用素 $B_{s,A}$ を、正の時間の語で表されたベクトルの挿入を s だけ未来へずらし、空いた帯に A の挿入を前置するもの、とします評 （評価書の用語集 `YangMills.Hierarchy.Character` ）源 （ `Spread` の `place` ）。これを零エネルギーの空間に圧縮した

$$M_A \;=\; P_0\, B_{s,A}\big|_{\mathcal{H}_0} \colon\; \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0 \tag{1}$$

たちが生成する、ノルムで閉じた単位つきの *-環を $\mathcal{A}$ とします。

源 構成の源 `YM/Phase/Mixture.lean` の `Spread.atom`（$P_0 \circ \mathrm{place}\, d\, w$ を $\mathcal{H}_0$ に制限）、`generators`、:54 `Spread.algebra`（生成した *-部分環の閉包）。

意味。$\langle \Omega_0, M_A \Omega_0 \rangle = \langle \Omega_0, B_{s,A} \Omega_0 \rangle = S^{\mathrm{mix}}(A)$ です（Ω_0 は混ざった理論の真空ベクトル）源（`insertValue`）。M_A は「語 A を挿入して、無限に長い時間のあとに残る部分」を零エネルギーの空間の上で見る作用素です。混ざった理論が純粋な相の混ざりなら、各相で M_A はスカラー（その相での A の期待値）として働くはずで、$\mathcal{A}$ は相の空間の上の関数の環になるはずです推（動機）。

03

言明 (2) — 可換性、Gelfand 表現、確率測度

言明（零エネルギーの環の可換性）

極限の表が Euclid の束（`Table.Hierarchy`）を満たし、回転の作用 R について O(4) で不変（`R.Oriented S`、12-06 §04）で、$\mathcal{H}_0$ が空間の並進で不変（`Steady`）なら、$\mathcal{A}$ は可換：全ての $x, y \in \mathcal{A}$ で $xy = yx$。

源 公開された構成の定理。Lean：`YM.OS.Ground.adjunction`（`YM/Ground/Permute.lean:149`。節の変数 `Steady V`・`S.Hierarchy`・`Rotation S`・`R.Oriented S` を使う：同 :12-13）。

なぜ回転の不変が要るか。二つの生成元 M_A・$M_{A'}$ の積の順序を入れ替えるには、時間の帯に並べた二つの語の時間の順序を入れ替える必要があります。O(4) の回転（例えば時間の軸と空間の軸を入れ替える回転と、空間の並進）を使えば、時間に並んだ二つの語を空間に並べ直し、また時間に戻すことで順序を入れ替えられる、という筋と推し量ります推（補題の名 `orbit`・`gens` からの読み）。どちらにしても、源の言明は O(4) の不変を**仮定**として取ります。だから順序は「Euclid 不変（12-06）→ 相の分解」です。

言明（Gelfand 表現と相の測度）

上の仮定と、$\mathcal{A}$ の稠密な列のもとで、コンパクトな距離空間 X、その上のボレル測度 μ、各点 $\xi \in X$ の指標（*-準同型）$\xi \colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ が在って：$\mathcal{A}$ は可換、μ は確率測度で全台（空でない開集合の測度は正）、X から指標の全体への写像は全単射、$\xi \mapsto \xi(a)$ は連続、そして

$$\int_X \xi(a)\, d\mu(\xi) \;=\; \langle \Omega_0,\, a\, \Omega_0 \rangle \qquad (a \in \mathcal{A}). \tag{2}$$

源 公開された構成の定理（可換 C*-環の Gelfand 表現と Riesz–Markov の表現定理の当てはめ。相の測度の記号は、評価書では ν、この部では μ です）。Lean：`YM.OS.Ground.resolution`（`YM/Ground/Spectrum.lean:127`）、結論の型 `Spread.Resolution.Out`（`YM/Phase/Mixture.lean:78`：欄 `abelian`・`normalized`・`support`・`onto`・`values`・`weak`・`ground`）。

道具は Mathlib の可換 C*-環の Gelfand 変換と Riesz–Markov–Kakutani の表現定理です 源（評価書の用語集と源の import）。$\mathcal{A} \cong C(X)$ で、真空の状態 $a \mapsto \langle \Omega_0, a\Omega_0 \rangle$ が X の上の確率測度 μ として表されます。全台であることは、$\mathcal{A}$ の零でない元が Ω_0 を消さないことから出ます 評（評価書の用語集 `fullSupport`）。

04

言明 (3) — 成分の相関と、各成分での真空の一意性

成分の相関。点 $\xi \in X$ の**相**の相関を、語 A を正の時間の帯へ平行移動したうえで

$$S^{\xi}(A) \;=\; \xi(M_A) \tag{3}$$

と定めます。値は平行移動と帯の幅に依りません 評（評価書の用語集 `Character`） 源（`Spread.Resolution.receives`、`Mixture.lean:89`）。(2) を $a = M_A$ に当てると、混ざった理論は相の平均です：

$$\int_X S^{\xi}(A)\, d\mu(\xi) \;=\; S^{\mathrm{mix}}(A). \tag{4}$$

源 Lean：`YM.OS.Spread.Resolution.barycenter`（`Mixture.lean:113`。仮定に並進不変 `S.Homogeneous`）。公開の言明の欄 `Reconstructed.mixture`（`ChallengeSpec.lean:133`）に当たります。

各成分は OS の束を満たす。相の選びの証書 `OS.Selection.Certificate`（`Mixture.lean:136`）の欄は、各相の表が Euclid の束を満たすこと（`states`）、O(4) で不変なこと（`sym`）、場の零空間が混ざった理論と同じこと（`retains`）、応力テンソルの法則（`flux`）、選んだ相で真空が一意なこと（`heat`）を含みます 源。

言明（各成分での真空の一意性）

相 ξ の OS の空間の零エネルギーの空間 $\mathcal{H}_0^{\xi}$ が一次元（真空 Ω^{ξ} の倍だけ）であることを `UniqueHeat` と書きます（`Mixture.lean:35`）。(i) μ について殆ど全ての ξ で `UniqueHeat`。(ii) 構成の相の束では、全ての ξ で `UniqueHeat`。

源 Lean：(i) `YM.OS.Cluster.lifts`（`YM/Phase/Unique.lean:91`）、(ii) `YM.EveryPhase.every`（`YM/EveryPhase/Vacuum.lean:146`）。(ii) は構成の結論 `EveryPhase.Completed` の欄 `euclid`（`YM/EveryPhase/Extension.lean:51` の構造体の欄）に入ります。

(i) の筋源（補題の名と言明）。正の時間の語 b について、$\|P_0^\xi b\|^2$ の ξ での積分と $\int |\xi(M_b)|^2\,d\mu$ は、どちらも $\|P_0 b\|^2$ に等しい（`trail`・`at_M`・`almost`）。$\|P_0^\xi b\|^2 \geq |S^\xi(b)|^2 = |\xi(M_b)|^2$ なので（真空成分は $P_0^\xi b$ の一部）、非負の差 $\|P_0^\xi b - S^\xi(b)\Omega^\xi\|^2$ の積分が 0 になり、殆ど全ての ξ でこの差は 0 です（`exp_real`）。全空間を張る可算個の語の族について合わせると、殆ど全ての ξ で $\mathcal{H}_0^\xi$ は Ω^ξ の倍だけです推（不等式の向きと可算の族の取り方の細部）。(ii) の「殆ど全て」から「全て」への広げ方は読んでいません推。

速さは付いていない。真空の一意性は、時間の発展で $E^\xi(t)x \to \langle\Omega^\xi, x\rangle\Omega^\xi$ となる（委員会の検査は、時間の向きに離した語の群がりを、速さの前提なしで出している：評価の側 `submissions/openai-20261028/checks/ClusterCore.lean` `chamber_word_cluster`）こととつながりますが、近づく速さは言われていません源。指数の速さがあれば質量ギャップですが、それは言明に無く、在るのは多項式の評価です（12-08 §05）。

選んだ相。構成は $\mu(E) = 1$ となる集合 E（零エネルギーの空間が一次元で、跡の二点関数の短距離の極限が成り立つ相の集合）から一つの相 ξ^* を選び、Wightman の理論をその相から作ります評（評価書の用語集 `selected`）。

05

混ざった理論と成分について、言っていること・いないこと

言っていること（評価の水準）	言っていないこと
$S^{\mathrm{mix}} = \int S^\xi\,d\mu$（点の重ならない所で）	S^{mix} 自身の群がり
μ は確率測度で全台	X が一点であること（相が一つ）
各 x で $\xi \mapsto S^\xi(x)$ は連続	成分どうしが等しいこと
全ての ξ で真空が一意（速さなし）	群がりの速さ（減衰の率）
各成分が OS の束と O(4) 不変を満たす	異なる部分列の極限の比べ
—	成分を格子の測度から直接近似すること

源 左の列は公開の言明の欄（`ChallengeSpec.lean:117-135` の `Reconstructed`：`normalized`・`fullSupport`・`characterContinuity`・`mixture`）と構成の結論 `Completed` の欄に在ります。

もし混ざった理論が群がりを持てば。評価書 §6.2 は、S^{mix} が群がりを満たすなら短い計算で $\int |S^{\xi}(A) - S^{\mathrm{mix}}(A)|^2 \, d\mu = 0$ となり、連続性と全台から全ての成分が一致する、と書いています。そして、群がりがあっても無限体積の極限の一意性を出すだけの赤外の制御にはならない、とも書いています[評]。成分が全て等しいことは「一つの部分列の極限の中で相が一つ」であり、異なる部分列の極限が等しいこととは別の問いです[初]。

06

本書の検討で見えていたこと

相の分解は、本書の検討の計画にだけ在りました。本書の構成の段の表（16-09）は、再構成と真空の一意性を後の段の計画として置いていて、Lean の言明は在りません。零エネルギーの空間に圧縮した可換な環で相を分けるという組み方は、本書の検討に無かった発想です（14-05）。

強結合の窓の中では、分解が要らない形で持っていました。窓の中の極限 ν_β は部分列なしの一つの測度で、再構成の器の転送の作用素 T について $\|T - P_\Omega\| \le (18 \tanh \beta)^{1/2}$ と、四方向の指数の速さの群がりを持ちます。

Lean `InfMain2.wilson_infvol_main2`（質量ギャップの形と非退化、20-04）、`WilsonLimit.cluster_limit`（極限点での四方向の群がり）。Osterwalder–Seiler の強結合・Dobrushin の型の形式化で、格子間隔は 1 に固定、強結合の窓の中だけ、連続極限は無し。

群がりに速さが付いていれば真空は一意で、分解は一点になります[初]。本書の窓の中の結果はその形ですが、領域が違います（格子間隔は固定、強結合）。公開された構成の相の分解は、群がりが示せない弱結合の連続極限のための道具です。

公開された構成の「相」を、本書の捩れた境界条件や渦の自由エネルギーで区別できるか、という問いは立てられます（第 21 部）。それは第三巻の問いです（16-03）。

07

読めていない所

- **可換性の証明で O(4) をどう使うか。**`adjunction` の中の `orbit`・`gens` までしか読んでいません。
- **`EveryPhase.every` の証明。**殆ど全ての相から全ての相への広げ方。

- **$\mathcal{H}_0$ が空間の並進で不変であること**（`Steady`）は、`resolution` の中で `inert` から出していますが、その中身は読んでいません。
- **選んだ相の集合 E の構成**（評価書の用語集が挙げる `YM.Trace.submits` ほか）。
- **公開の定理への鎖。** `EveryPhase.all_characters` は、構成の鎖の `R2IGoals.fromFunded`（`YM/R2I/Campaign/Accepted.lean:150`）の中、:158 で直接呼ばれているのを読みました 源 。`resolution`・`adjunction` から `all_characters` までの鎖は宣言ごとには辿っていません（記録の見出しは `SharpGram.habitat`）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
源 零エネルギーの空間に圧縮した作用素 M_A の環 $\mathcal{A}$ の定義（`Spread.algebra`）	—
源 O(4) の不変などを仮定に、$\mathcal{A}$ は可換（`Ground.adjunction`）	可換性の証明の中の O(4) の使い方
源 Gelfand 表現と全台の確率測度、$S^{\mathrm{mix}} = \int S^{\xi} d\mu$（`Ground.resolution`・`barycenter`）	X が一点であること。成分の一致
源 殆ど全ての相で、さらに全ての相で真空が一意（`Cluster.lifts`・`EveryPhase.every`）	群がりの速さ。`every` の証明
評 混ざった理論が群がれば成分は全て一致するが、それでも無限体積の極限の一意性は出ない（評価書 §6.2）	混ざった理論の群がり
Lean 本書の窓の中の極限は部分列なしで、指数の速さの群がりを持つ（`wilson_infvol_main2`・`cluster_limit`）	格子間隔を動かすこと。弱結合

出典と再現

もの	種別	出典・道具
Gelfand 表現、Riesz–Markov の表現定理	典	可換 C*-環と測度論の標準の定理（1-10）。Lean では Mathlib
OS の空間と零エネルギー	源	構成の源 `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）：`YM/OS/Dynamics.lean:57` `Chamber`、`YM/OS/Core.lean:14` `ground`・:38 `emerges`
環・可換性・分解	源	`YM/Phase/Mixture.lean:35` `UniqueHeat`・:54 `algebra`・:78 `Resolution.Out`・:89 `receives`・:113 `barycenter`・:127 `Selection`・:136 `Selection.Certificate`、`YM/Ground/Permute.lean:149` `adjunction`、`YM/Ground/Spectrum.lean:127` `resolution`

もの	種別	出典・道具
真空の一意性	源	`YM/Phase/Unique.lean:91` `lifts`、`YM/EveryPhase/Vacuum.lean:146` `every`、`YM/EveryPhase/Extension.lean:51` `Completed`・:75 `all_characters`、`ChallengeSpec.lean:117-135` `Reconstructed`
委員会の検査	源	`yang-mills-group/YM` `submissions/openai-20261028/checks/ClusterCore.lean` `chamber_word_cluster`
評価書の記述	評	`docs/assessment-1.pdf` §6・§6.1・§6.2、用語集 `Character`・`phaseMeasure`・`selected`・`fullSupport`
本書の窓の中の群がり	Lean	`InfMain2.wilson_infvol_main2`・`WilsonLimit.cluster_limit`（20-03・20-04）

この章で使った語 — 群がり（クラスター性）・零エネルギーの空間・圧縮・可換 C*-環・Gelfand 表現・指標・相・相の測度・全台・真空の一意性。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：12-08 再構成と Wightman の公理 — 選んだ相から Wightman の理論を作り、出る公理と言っていないこと（質量ギャップ）を読みます。

再構成と Wightman の公理

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§05 は未解決の地図（第三巻への橋）、§06 は本書の検討、§07 は未解決の地図です。

この章で分かること — 公開された構成は、極限の表が満たす Euclid の公理を自前の束として定め（増大の条件は「点の間隔 $r \le 1$ で r^{-A}」の形）、全ての相について Wightman の公理（並進のスペクトルと真空の一意、共通の定義域と巡回性、Poincaré の共変、局所可換）を満たす相対論的な場の理論を作り、解析接続・純虚の時間での一致・境界値・忠実性という付帯の性質は、選んだ相について言っています。委員会は、選んだ相の、中心化した応力テンソルの跡という**一つのスカラーの場**の相関について、独立に定式化された標準の OS の公理と増大の条件を確かめました。この章は、公理の束、出る公理の一覧、検査の範囲を読み、最後に、質量ギャップの言明が無く、在るのは相に一様な多項式の評価であることを確かめます。

前提となる章 — 4-09（Wightman の公理）、4-10（OS の公理と再構成）、12-07（相の分解）。

先に言うこと — 公開された構成の結果は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」水準です。委員会の独立の検査が標準の OS の公理に照らして確かめたのは、**選んだ相の、中心化した跡のスカラー**の相関についてで、全てのテンソルの場を別に訳して確かめたものではありません。構成は質量ギャップについて何も言っていません（評価書 §2 の 4）。

この章の順序

1. 札の凡例
2. 言明 (1) — 公開された構成の版の Euclid の公理の束
3. 言明 (2) — 相からの再構成 — 全ての相と、選んだ相
4. 出る Wightman の公理と付帯の性質の一覧
5. 委員会の独立の検査が確かめた範囲
6. 質量ギャップの言明は無い — 相に一様な多項式の評価（第三巻への橋）
7. 本書の検討で見えていたこと

8. 読めていない所

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。公開された構成の定理が「Lean で証明されている」という水準は、委員会の評価によります評 。

01

言明 (1) — 公開された構成の版の Euclid の公理の束

導入は 4-10 です。構成は、極限の相関の表 S（点の重ならない配置の上の関数）が満たす性質を、次の七つの欄の束として定めています源 （構成の源 `YM/Euclid/Words.lean:141` `Table.Hierarchy`）。

欄	中身	標準の OS の公理との対応
`laws`（`Basic`）	点と札の同時の置換で対称、0 点の相関は 1、単位の場は外せる	対称（E3）と正規化
`spin`（`RealSpin`）	超八面体群（座標の置換と符号）の共変と実性	Euclid の共変（E1）の離散の部分と実性
`translations`	連続の並進で不変	E1 の並進
`positive`・`onTests`	座標の軸ごとの鏡映正値性（語の形と、試験関数で均した形）	鏡映正値性（E2）
`smooth`	点の重ならない所で C^∞	（正則性）
`order`（`Capped`）	増大の条件（下の (1)）	（増大の条件の一つの形）

増大の条件の形。点の配置 x が「間隔 r」（全ての二点の距離が r 以上、立方体のノルムで）で $0 < r \le 1$ のとき、相関の j 階の微分について

$$\left\| \nabla^{j} S(v;x) \right\| \;\le\; C\, r^{-A} \tag{1}$$

となる A と $C \ge 0$ が（札と次数ごとに）在ること源 （`YM/Euclid/Table.lean:97` `Capped`）。r を 1 で頭打ちにするので、点が遠く離れた所でも右辺は C のままで、**無限遠での増大を許しません**。点が近づくときの特異性だけを冪で許す形です。

束の外の性質。連続の回転の不変（O(4)）は束に入っておらず、相の証書の欄 `sym` で別に要求されます（12-06 §04）。群がり（真空の一意）も束の外で、各相の `UniqueHeat` として別に要求されます（12-07 §04）源 。極限の表が束を満たすことは、極限に移る性質（12-05 §04）に滑らかさと増大の条件を足して組まれます（`Order.assembles`、`YM/Extraction/Harvest.lean:62`）。

02

言明 (2) — 相からの再構成 — 全ての相と、選んだ相

相 ξ（12-07）の相関 S^ξ を複素の時間へ解析接続し、虚部を 0 に近づけた境界値（Schwartz の試験関数で均したあと）として、実時間の Wightman の分布 W^ξ を作ります。場の札 v_i と Schwartz の試験関数 f_i の形式的な積の一次結合の空間 $\mathcal{P}$ に $\langle u, w\rangle_\xi = W^\xi(u^* w)$ を入れ、零ノルムの部分で割って完備化したものが Hilbert 空間 $\mathcal{H}^\xi$、空の語が真空 Ω^ξ、語の前に (v, f) を付ける操作が均した場の作用素 $\Phi^\xi_v(f)$ です評 （評価書 §6.1）。

言明（成分の理論の再構成、評価書の定理 6.1）

評価書の言い方では、全ての指標 $\xi \in X$ について、成分の相関 S^ξ は $\mathcal{H}^\xi$ の上の Wightman の理論（真空 Ω^ξ、定義域 $\mathcal{D}^\xi$ の上の場 Φ^ξ）を再構成し、次を満たす：1. 並進のスペクトル、正のエネルギー、真空の一意。2. 共通の定義域、正則性、随伴、巡回性。3. Poincaré の共変。4. 局所可換。5. 解析接続と相関の回復。6. 場の忠実性。

評 評価書 §6.1 の定理 6.1（1〜6 を全ての ξ に付ける言い方は評価書のもの）。

源 Lean の言明で分けると次のとおりです。**全ての相**で Wightman の公理（構成の結論 `Headline.Reconstruction`、`YM/Nonperturbative/HeadlineSpec.lean:75` の欄 `characters`。中身の構造体 `WightmanAxioms`、同 :52-71 は、真空の正規化・定義域の稠密と巡回・試験関数についての連続・随伴・相関の一致・正値・局所可換・対称性・強連続・スペクトル・前向きの光円錐・真空の一意で、忠実性と解析接続の欄は持たない）。**付帯の性質**（忠実 `faithful`・解析接続 `analytic`・純虚の時間での一致 `root`・境界値 `boundary`）は、公開の言明の欄 `Hierarchy.Reconstructed`（`ChallengeSpec.lean:117-143`）の中で**選んだ相**についてだけ言われ、構成の側の `YangMills.publicReconstruction`（`HierarchyBridge.lean:79`）がそれを満たします。

どの目標に入っているか。公開の定理 `JointExistence` の結論の欄 `reconstruction : T.Reconstructed` は、**選んだ相** ξ^* の Wightman の理論についての言明です（欄 `axioms`・

`analytic`・`root`・`boundary` は選んだ相の連続の T.continuation と T.theory について）。全ての相についての Wightman の公理は、構成の定理 `constructed` の結論（`Headline.Reconstruction.characters`）に在ります源 。`publicReconstruction` は記録で `used`（見出しの定理 `su2Theory` から届く）で、直接の使い手は `constructed` です源 。

03

出る Wightman の公理と付帯の性質の一覧

公開の言明の欄 `Reconstructed`（Wightman の公理の欄 `axioms` と付帯の欄は選んだ相についての言明。全ての相の Wightman の公理は §02 のとおり別の結論）の中身を、評価書の用語集に従って並べます源 （欄の名と型）評 （意味の説明）。

欄	中身
`axioms`：並進のスペクトルと真空の一意	並進の強連続なユニタリ表現と射影値のエネルギー運動量測度、測度の台は閉じた前向きの光円錐、全ての並進で不変なベクトルは真空の倍
`axioms`：共通の定義域・正則性・随伴・巡回性	定義域は稠密で真空を含み場で保たれる、$f \mapsto \Phi_v(f)\psi$ は Schwartz の位相で連続、随伴は札の共役で、定義域は真空に場の語を当てたものの張る空間
`axioms`：Poincaré の共変	固有直交 Poincaré 群の強連続なユニタリ表現（並進は上と同じ）、札への作用 $\rho(g)$、場の変換則 $U(g)\Phi_v(f)\psi = \Phi_{\rho(g)v}(f_g)U(g)\psi$
`axioms`：局所可換	台が空間的に離れた二つの場は交換する
`faithful`・`acts`・`injective`・`covers`・`represents`	零でない札には零でない場、少なくとも一つの場が零でない（忠実が空でないこと）、札への写像が単射で全射、どの場も格子の札の像
`normalized`・`fullSupport`・`characterContinuity`・`mixture`	相の測度は確率で全台、相関は相について連続、相の平均が混ざった相関（12-07 §05）
`permutation`・`smooth`	混ざった相と各相の相関の置換の対称と滑らかさ
`analytic`・`root`・`boundary`	選んだ相の解析接続が $\operatorname{Im} z_1 < \cdots < \operatorname{Im} z_n$ で正則、純虚の時間で Euclid の相関に一致、実時間への境界値が真空期待値（Wightman の分布）に一致

評価書の用語集によれば、真空の一意は次の筋です：Wightman の側の Hilbert 空間から選んだ相の OS の空間への等長な写像が真空を真空へ写し並進と可換、OS の空間の非負のエネルギーと Lorentz の共変で前向きの光円錐のスペクトル条件、並進で不変なベクトルは等長な写像で OS の側の零エネルギーの空間へ写り、そこは一次元（`UniqueHeat`）なので真空の倍評 。

04

委員会の独立の検査が確かめた範囲

委員会は、構成の定義とは独立に定式化された OS の公理（評価書の文献 [DMY]、リポジトリ `xiyin137/OSreconstruction`）に照らして、構成の出力を確かめています評（評価書 §10）。

- **対象**。選んだ相 ξ^* の、中心化した応力テンソルの跡 Θ という**一つのスカラーの場**の n 点関数の階層。全てのテンソルの場を別に上流の定式化へ訳したものではない評（§10.1）。
- **試験関数**。`ZeroDiagonalSchwartz`：全ての対角（$x_i = x_j$）の上で全ての階の微分が消える Schwartz の関数。対角の近くで 0 である必要も、コンパクトな台も要らない。格子からの収束の言明に使う、点の重ならない所に台を持つコンパクトな台の試験関数を含む評（§10、式 (21)）。
- **確かめた公理**。E0（緩増加・線形）、E1（並進と回転の不変）、E2（鏡映正値性）、E3（対称）、E4（空間の向きの群がり、選んだ相で）と、OS-II の型の線形の増大条件 E0′源（評価の側 `submissions/openai-20261028/checks/CompleteOS.lean` の `verifiedOS`・`verifiedOS_growth`・`constructed_OS_family`、`checks/RemainingObligations.lean` の `completeOS`・`E0_prime`、`checks/ReflectionPositivity.lean` の `E2_reflection_positive`）。
- **言っていないこと**。対角で平らな試験関数は対角の上の接触項を見ないので、接触項の延長の一意性や、制限の無い試験関数の空間での OS の正値性は確かめていない評（§10）。E4 は選んだ相についての言明で、混ざった表が群がるという主張ではない源（評価の側 `submissions/openai-20261028/docs/examples/OSAxioms-20261028.lean` の説明文）。

源 評価の側の `constructed_OS_family` は、構成の走り（罰の係数 $b > 0$）と任意の抽出の列 p について、細分 q・表 S・最終の証書 F が在って、「切断は列の全体、体積は $(p \circ q)$ の体積の部分列」の抽出で極限が読め、E4 の群がりと E0′ が成り立つ、という形です。

05

質量ギャップの言明は無い — 相に一様な多項式の評価（第三巻への橋）

質量ギャップは、ハミルトニアン $H \geq 0$ のスペクトルが $\{0\} \cup [\Delta, \infty)$（$\Delta > 0$）に入ることです（4-11）。評価書は「構成は質量ギャップについて、在るとも無いとも証拠を与えない」と書き（§2 の 4）、開いた問い 3 に「一様な質量ギャップ（対応する相関の指数の減衰と、OS のハミルトニアンのスペクトルのギャップ）」を挙げています評。

構成が持っているのは、**全ての相に一様な多項式の評価**です源。

言明（相に一様な低エネルギーと熱の評価）

有限個の語の和 w について、(i)・(ii) のそれぞれに定数 $M \geq 0$ が在って（大きい方を取れば一つにできる初）、全ての相 i で：(i) $0 < u \leq 1$ なら、w の状態のエネルギーが $(0, u]$ に在るスペクトルの重み $\leq M u^2$。(ii) $\tau \geq 1$ なら

$$0 \;\leq\; \big\langle A,\; (e^{-\tau H} - P_0)\, A \big\rangle \;\leq\; M\, \tau^{-2} \tag{2}$$

（A は w の状態、P_0 はエネルギー 0 の射影）。

源 公開された構成の定理。Lean：`YM.EveryPhase.light_bound`（`YM/EveryPhase/Light.lean:221`）、`YM.EveryPhase.inverse_square`（`YM/EveryPhase/Decay.lean:173`）。構成の結論 `EveryPhase.Completed` の欄 `light`・`heat` に入ります。

読み方。(i) から (ii) は初等に出ます初：$\langle A, (e^{-\tau H} - P_0)A\rangle = \int_{(0,\infty)} e^{-\tau E}\, d\sigma_A(E)$ で、$(0,1]$ の部分は二進の区間に分けて $\sigma_A((0,u]) \leq M u^2$ から $O(\tau^{-2})$、$(1,\infty)$ の部分は $e^{-\tau}$ で押さえられます。ここで σ_A は状態 A のスペクトルの測度です（相の測度 μ とは別）。源で読めるのは、`light_bound` の証明が `late`（空間の遠くで交換子の平均が 0、`Light.lean:208`）と二進の分割 `dyadic` を使うことまでです源。これが局所可換と光円錐の台の一般の帰結だ、という読みは推です。この形は、質量の無い理論とも両立します推。指数の速さ $e^{-\Delta\tau}$ とは別物です。

第三巻への橋。質量ギャップの問いは、この言葉で言い直せます：「低エネルギーの重みの評価 $\sigma_A((0,u]) \leq M u^2$ を、ある $\Delta > 0$ 以下で $\sigma_A((0,\Delta)) = 0$ に強める」。熱の評価 (2) の右辺を $M\tau^{-2}$ から $M e^{-\Delta\tau}$ に強めることと同じです初。これは評価書の開いた問いの 3 で、第三巻の 16-02（五つの開いた問い）と 16-03（公開された構成の赤外の端）で扱います。

06

本書の検討で見えていたこと

Wightman の理論への再構成は、本書の検討に在りませんでした。本書の Lean の再構成は、Euclid の側の器（19-03 の再構成の器：鏡映の対の半正値の双一次形式、時間の並進、真空、転送の作用素 T）までで、解析接続も Wightman の分布も扱っていません。

強結合の窓の中では、質量ギャップの形を持っていました。窓の中の極限の器で $\|T - P_\Omega\| \leq e^{-m}$、$m = -\log(18 \tanh \beta)/2$、真空の補空間が零でないこと、$T \geq 0$ です。

Lean `InfMain2.wilson_infvol_main2`（20-04）。Osterwalder–Seiler の強結合の型の形式化。格子間隔は 1 に固定、$|\beta| < 0.0556$ ほどの窓の中だけ、質量の数は下界だけ、連続極限は無し。

公開された構成は弱結合の連続極限で Wightman の理論までを持ち、質量ギャップの言明を持ちません。本書は格子間隔を固定した強結合の窓で質量ギャップの形を持ち、連続極限を持ちません。二つの結果は別の領域に在り、つながっていません（14-06）。

07

読めていない所

- **公開された構成の版の OS の再構成の証明**（`YM/Boundary/*`・`YM/EveryPhase/*`）。解析接続の組み方と境界値の取り方は、評価書の用語集の説明までです。
- **増大の条件 (1) がどこから来るか**。`assembles` の仮定 `Capped` を誰が払うかは辿っていません。
- **委員会の検査の中の、構成の評価からの入力**。評価書 §10.1 は「解析の入力は提出された証明から」と書いています。どの評価が使われたかは読んでいません。
- `light_bound` **の証明**。`late`・`annulus`・`dyadic`・`fee` の名までです。
- **連続の Wilson ループ**。連続の Wilson ループの観測量と面積則は、読んだ範囲（名前の検索の範囲）の言明に在りません源。格子の道に沿う平行移動 `travel`（`YM/Lattice/Path.lean:105`）は在ります。評価書 §8 は、Wilson ループを作り局所の観測量と関係づけ、面積則を示すことを開いた問い 4 に挙げています評。
- **混ざった理論の再構成**。評価書 §6.2 は、混ざった極限の理論にも OS の再構成を当てられると書いています（真空の一意は示されない）。源のどの宣言かは確かめていません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
源 公開された構成の版の Euclid の公理の束（七つの欄）と、増大の条件 (1) の形（間隔 $r \le 1$ で r^{-A}、無限遠での増大なし）	(1) の出所。O(4) と群がりは束の外
源 全ての相で Wightman の公理（`Headline.Reconstruction.characters`）、付帯の性質（忠実・解析接続・純虚の時間での一致・境界値）は選んだ相について（`publicReconstruction`）。委員会の評価の水準	付帯の性質を全ての相で言うこと
評 委員会の検査：選んだ相の中心化した跡のスカラーについて、標準の OS の公理 E0〜E4 と E0′（対角で平らな Schwartz の試験関数）	全てのテンソルの場の検査。接触項の延長の一意性

言えている	言えていない
源 相に一様な多項式の評価：低エネルギーの重み $\le Mu^2$、熱 $\le M\tau^{-2}$（`light_bound`・`inverse_square`）	質量ギャップ。指数の減衰。一粒子の状態
初 低エネルギーの評価から熱の評価が出ること。質量ギャップの言い直し	—
源 （名前の検索の範囲）格子の道に沿う平行移動 `travel`（`YM/Lattice/Path.lean:105`）は在る	連続の Wilson ループの観測量と面積則（言明に無い。評価書 §8 の開いた問い 4）
Lean 本書の窓の中の質量ギャップの形（`wilson_infvol_main2`）	連続極限。Wightman の理論

出典と再現

もの	種別	出典・道具
Wightman の公理と OS の再構成	典	K. Osterwalder, R. Schrader, Comm. Math. Phys. 31 (1973) 83；42 (1975) 281。4-09・4-10、文献は A-03
公理の束と増大の条件	源	構成の源 `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）：`YM/Euclid/Words.lean:123` `Table.RP`・:141 `Table.Hierarchy`、`YM/Euclid/Table.lean:97` `Capped`、`YM/Extraction/Harvest.lean:62` `assembles`
再構成の言明	源	`ChallengeSpec.lean:117-143` `Hierarchy.Reconstructed`・:186 `JointExistence`、`HierarchyBridge.lean:79` `publicReconstruction`、`PublicView.lean:102` `view_axioms`、`YM/Nonperturbative/HeadlineSpec.lean:75` `Headline.Reconstruction`
多項式の評価	源	`YM/EveryPhase/Light.lean:208` `late`・:221 `light_bound`、`YM/EveryPhase/Decay.lean:173` `inverse_square`、`YM/EveryPhase/Extension.lean:51` `Completed`
委員会の検査	源・評	`yang-mills-group/YM` `submissions/openai-20261028/checks/CompleteOS.lean`・`RemainingObligations.lean`・`ReflectionPositivity.lean`・`ClusterCore.lean`、`submissions/openai-20261028/docs/examples/OSAxioms-20261028.lean`。評価書 §6.1・§10・§10.1、用語集 `Reconstructed.*`
評価書の開いた問い	評	`docs/assessment-1.pdf` §2・§8
本書の器と質量ギャップの形	Lean	`InfMain2.wilson_infvol_main2`（20-04）

この章で使った語 — OS の公理・Wightman の公理・増大の条件・解析接続・境界値・スペクトル条件・局所可換・相・中心化した跡・対角で平らな試験関数・質量ギャップ・多項式の評価。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：13-01 応力テンソルは一本の直線の上に在る — 再構成された理論が Yang–Mills であることの証拠を、応力テンソルの一意性から読み始めます。