第二巻　存在 — 公開された構成を読む

第 13 部 ヤン–ミルズである証拠

Kiichi, Shiori and Rin · 2026-11-14 の版 · https://computoergosum.com/principia/yang-mills/

> この PDF は Web 版の各章をそのまま刷ったものです。動かせる図は刷った時点の姿で止まっています。章の間のリンクは Web 版へ飛びます。最新の内容は Web 版に在ります。

章		頁
13-01	応力テンソルは一本の直線の上に在る	2
13-02	跡の異常と、自由でないこと	9
13-03	短距離の自由な Maxwell 場	18
13-04	演算子積展開と接触項	27

応力テンソルは一本の直線の上に在る

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§07 は本書の検討、§08 は未解決の地図です。

この章で分かること — 公開された構成が、場の空間 F_4 に値を持つ応力テンソル T_{ab} を持つこと、そうしたテンソルの候補が実一次元の直線をなし、並進の Ward の恒等式がその上の一点を選ぶことです。Ward の恒等式は「点を囲む面を通る応力の流束が、座標の並進を生む」ことを、点の重なりに触れない形で言います。

前提となる章 — 8-03（場の空間 F_d）、8-05（相関と相）。古典の作用と保存則は 2-01・3-03。

先に言うこと — 応力テンソルは**公開の言明には出てきません**。在るのは構成の定理の側と、委員会の結合の目標の側です。Euclid 不変性を出すための使い方は 12-06 に置きます。この章で読むのは定義と言明の形までです。

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

この章の順序

1. 言明 — 応力テンソルの条件と一次元の直線
2. 並進の Ward の恒等式：窓の関数と、点を囲む面
3. 回転の Ward の恒等式：腕の長さを掛けた流束
4. 仕組みの骨子 — なぜ直線で、何が一点を選ぶか
5. 委員会の検査が確かめたこと・言っていないこと
6. どの目標に入っている言明か
7. 本書の検討で見えていたこと
8. 読めていない所

01

言明 — 応力テンソルの条件と一次元の直線

古典の Yang–Mills では、応力テンソル（エネルギー運動量テンソル）は作用を計量で変分して得ます（3-03）。量子論では、点ごとの場の積は意味を持たないので、そのまま定義できません。評価書 §7.1 は、構成の応力テンソルを次の性質で**一意に特定する**と書きます 評 。

> 場の空間 F_4 に成分を持つ対称なテンソル J_{ab} で、場の共役で変わらず、S^{mix} について中心化され（一点関数が 0）、座標の置換と符号の反転の下で二階のテンソルとして変換し、発散が F_5 の中で 0 であるものは、実一次元のベクトル空間をなす。応力テンソルは、この一次元の空間の中のベクトルで、正規化は Ward の恒等式で決まる。

構成の側の定義は次のとおりです 源 （`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028` の `YM/Euclid/Stress.lean`）。

- 応力の型：$J : \{0,1,2,3\}^2 \to F_4$（`Stress`、57 行）。
- 保存（`Conserved`、59〜62 行）：対称 $J_{ab} = J_{ba}$、実（共役で不変）、発散が零 $\sum_a \partial_a J_{ab} = 0$。ここで $\partial_a : F_d \to F_{d+1}$ は場の微分の写像で、発散は F_5 の元です。
- テンソルとしての変換：超立方の群（符号つきの置換）で二階のテンソル（`RawTensor`、68 行）。構成の応力は、四次元の直交群の作用でも二階のテンソル（`Tensorial`、64〜66 行）。

構成の応力テンソルは証人の欄 `energy`（`YM/Spec/Closed.lean` 31 行）で、局所の法則の束 `Locals` の中で `conserved`・`spin`・`charges`（41〜43 行）として三つの性質を持ちます 源 。

一次元であること。無条件の形は、構成の定理の結論に入る構造 `Pert.FirstExtension` の欄 `ranks` です 源 （`YM/Pert/FirstTarget.lean` 35〜36 行、`Construction.lean` 31 行）：証人の微分と回転のデータについて、発散の写像の核の実の次元が 1。同じ事実は、仮定 `Supplier`（紫外のデータ・Maxwell 場のデータ・尺度の列などの束。`YM/Pert/Weak.lean` 22〜32 行）の下の定理 `YM.Pert.one_line`（68 行）としても在ります 源 。核の空間（`KernelSpace`、`YM/Next/UV_STRESS/Tensor.lean` 75〜82 行）は、対称・実・テンソルの条件の空間に「期待値 0（中心化）」を足したものです。同じ仮定の下の `centered_line`（82 行）は、保存し、テンソルとして変換し、Ward の法則を満たす任意の J を中心化すると、`Supplier` の欄の応力 `I.J` の**零でない実数倍**になることを言います 源 。`I.J` が証人の応力 `energy` と同じものであることは読んでいません。

$$\Big\{ J :\ \text{対称・実・中心化・テンソル・}\ \textstyle\sum_a \partial_a J_{ab} = 0 \Big\} = \mathbb{R} \cdot T \tag{1}$$

02

並進の Ward の恒等式

(1) の直線の上で一点を選ぶのが、並進の Ward の恒等式です。互いに異なる点 $x_0, x_1, \dots, x_n$、中心の場 $B \in F_d$、傍観者の場 $q_1, \dots, q_n$ をとり、**窓の関数** χ を次のように選びます 源（`Window`、`Stress.lean` 72〜73 行）：滑らかでコンパクトな台、x_0 の近くで 1、他の点 $x_1, \dots, x_n$ を台に含まない。このとき

$$-\sum_{a=0}^{3} \int_{\mathbb{R}^4} \partial_a \chi(y)\, \big\langle T_{ab}(y)\, B(x_0)\, q_1(x_1) \cdots q_n(x_n) \big\rangle \, d^4y = \frac{\partial}{\partial x_0^b} \big\langle B(x_0)\, q_1(x_1) \cdots q_n(x_n) \big\rangle \tag{2}$$

です 評（評価書 §7.1 の式 (13)） 源（`StressLaws.translation`、92〜94 行。右辺はまず「微分した場 $\partial_b B \in F_{d+1}$ の相関」として書かれ、それが座標の微分に等しいことは別の法則）。

読み方。$\partial_a \chi$ は x_0 の近くでは 0（$\chi \equiv 1$）、他の点の近くでも 0（$\chi \equiv 0$）なので、(2) の左辺の被積分関数は点の重なりに触れません。χ の「段差」は x_0 を囲む厚みのある殻で、$-\int \partial_a \chi\, T_{ab}$ は、その殻を通る応力の流束です。古典の言葉では、Gauss の定理で

$$-\int \partial_a \chi\, T_{ab}\, d^4y = \int \chi\, \partial_a T_{ab}\, d^4y \tag{3}$$

で、$\partial_a T_{ab} = 0$ が挿入点の外で成り立つので、右辺は x_0 での「接触の寄与」だけを拾います 推。量子論では右辺は点の重なりに触れるので書けません。(2) はその寄与を、点の離れた相関だけで、並進の生成子 ∂_b として定めた形です。評価書の言い方では「点のまわりの応力の流束が座標の並進を生む」評。

(2) は線形なので、T を cT に替えると左辺が c 倍になります。(2) の右辺は恒等的に 0 ではない（ある配置で相関の微分が 0 でない）ので、(1) の直線の上で (2) を満たすのは $c = 1$ の一点だけで、これが正規化です 初。

03

回転の Ward の恒等式

回転についても同じ形の恒等式が、構成の法則の束に入っています 源（`StressLaws.rotation`、95〜97 行。殻の積分 `shellSpin`、84〜86 行）。四次元の反対称行列 g（回転の生成子）について

$$-\sum_{a,b}\int \partial_a\chi(y)\,(g\,(y-x_0))_b\,\langle T_{ab}(y)\,B(x_0)\cdots\rangle\,d^4y=\langle (A_gB)(x_0)\cdots\rangle \tag{4}$$

で、A_g は場の空間の上の回転の作用の微分です（`Rotation.lie`、24 行）。流束に x_0 からの腕の長さを掛けたものが、角運動量の流束として場の回転を生みます。評価書の本文は回転の恒等式に触れていませんが、構成の言明 `Locals` の `charges` の欄には入っています 源 。

定義の説明文は、この法則が「B の点での接触項を試さない」と書いています（88〜89 行）源 。

04

仕組みの骨子 — なぜ直線で、何が一点を選ぶか

なぜ候補が一次元になるかの直観を書きます 推 。重み 4 で対称な二階のテンソルを曲率から作ると、主なものは $\sum_c \mathrm{Tr}(F_{ac}F_{bc})$ と $\delta_{ab}\sum_{c,e}\mathrm{Tr}(F_{ce}F_{ce})$ と $\delta_{ab}\mathbf{1}$ です。中心化で $\mathbf{1}$ の部分が決まり、保存の条件が残りの組合せを縛ります。古典の Maxwell 場では、保存するのはエネルギー運動量テンソル（の定数倍）だけです。

Lean の証明は、この直観を相互作用する理論で直接示す形ではありません。`one_line` の証明は `differential_rank` を呼び、その引数は Maxwell 場のデータ・尺度の列・その極限と当てはめ（`limit_`・`fit`）です 源 。短距離の尺度の列に沿う自由な Maxwell 場との比べ（13-03 §05）を通して核の次元を数える形と見えます 推 。中身は読んでいません。

流れをまとめます。

1. 場の空間 F_4・F_5 と微分の写像 ∂_a を、相関で定義する（8-03）。
2. 対称・実・テンソル・保存の条件を満たす J の空間が実一次元であることを示す（`ranks`。仮定つきの形は `one_line`）。
3. 構成の応力テンソル T を、その直線の上で並進の Ward の恒等式 (2) を満たす点として持つ（`energy` と `charges`）。
4. T を使って Euclid 不変性を連続の極限で上げる（12-06）。跡を取って跡の異常を調べる（13-02）。

05

委員会の検査が確かめたこと・言っていないこと

委員会の注釈つきの例 `TranslationWard-20261028.lean`（評価の側 `yang-mills-group/YM`・版 55ba9fc の `submissions/openai-20261028/docs/examples/`）は、並進の

Ward の恒等式について四つを Lean で示しています 評 。

確かめたこと	在りか
許される窓 χ が実際に在る（言明が空でない）。窓の大きさは配置に依ってよい	`admissible_shell_exists`、40 行
(2) の右辺が普通の座標の微分に等しい。全ての相 ξ・全ての次数の中心の場 B・全ての傍観者の並びで	`tensor_generates_translations`、64 行
(2) の被積分関数は実際に可積分（積分が Lean の約束の値に頼っていない）	`shell_integrand_is_integrable`、85 行
(2) の左辺は窓の選び方に依らない	`shell_charge_is_window_independent`、102 行

同じ例は、同じテンソルが全ての中心の場・傍観者・相に使われ、相関ごとに係数を合わせ直していないことを強調しています（12〜14 行）。評価書 §11 も、Ward の恒等式の変換器が全ての局所場と全ての成分を覆い、正規化を確かめるものだと書きます 評 。

言っていないこと 評 （同じ例の 111〜122 行）：

- 応力テンソルの**改良項**（並進の電荷を変えない足し算）が全て消えること。
- 点の重なりまで延ばした接触項の構成。
- 膨張（dilatation）の Ward の恒等式。
- 独立に選んだ Minkowski の符号の規約との比べ。

また、(2) は Euclid の座標と微分の規約に対する正規化で、それ以上の物理の正規化を独立に確かめたものではありません。

06

どの目標に入っている言明か

目標	応力テンソルについて在るもの
公開の定理 `JointExistence`	**無い**。公開の階層には跡の場 `centeredTrace`（F_4 の元）だけが在り、それが応力の跡であることも書かれていない（13-02 §01） 源
構成の定理 `constructed`	結論に `Pert.FirstExtension F X` が入り（`Construction.lean` 31 行）、その欄 `ranks`（`YM/Pert/FirstTarget.lean` 35〜36 行）が (1) の次元 1 を述べる。応力テンソルと Ward の法則は証人 F の欄に在る 源
委員会の結合の目標	並進の Ward の検査（評価書の [A6]）が入る。Ward の恒等式・スカラーの OS の検査・跡の法則が同じ応力テンソルと同じ相についてであることも確かめられている 評 （評価書 §9.3・§9.4）

目標	応力テンソルについて在るもの
検証の記録の見出しの定理	宣言 `YM.Pert.one_line` の記録は used で、最初に見つかった見出しは `YM.Pert.Parity.parityEndpoint`。存在の定理までの鎖は確かめていない 源（`verification/declaration-usage.tsv`）

検証の記録の used は「十七の見出しの定理のどれかから届く」という意味で、存在の定理が使うという意味ではありません。

07

本書の検討で見えていたこと

本書の研究と Lean には、応力テンソルも Ward の恒等式も**ありません**。本書の対象は格子の上の Wilson の測度と粗い段の観測量で、局所場の空間（8-03）を持たないので、応力テンソルを置く場所がありませんでした。

Euclid 不変性について、本書は格子の超立方の群の対称を押し出しの測度に運ぶこと（ブロック写像の対称な平均）までを扱い、連続の回転の不変性は示すべき言明の側に置いていました（19-07）。公開された構成が、回転の不変性を「応力テンソルの Ward の恒等式と、無限遠での流束の消滅」から上げる、という発想は本書に無かったものです（14-05）。

08

読めていない所

- `one_line` の核の空間（`KernelSpace`）と発散の写像 `currentDiv` の定義、証明の `differential_rank`（`YM/Pert/Weak.lean` 68〜88 行の先）。
- Ward の右辺を座標の微分に結ぶ「微分の法則」（委員会の例の `F.phase.phase.calculus`）の源。
- 回転の Ward の恒等式が、Euclid 不変性の証明のどこで使われるか（12-06 の範囲）。
- 構成の応力テンソル `energy` が、格子の側のどの観測量から作られるか（応力テンソルの構成そのもの）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
源 対称・実・テンソル・保存の条件を満たす F_4 値のテンソルの空間は実一次元（構成の定理の結論の `ranks`。`Supplier` の仮定の下で `one_line`）	公開の言明の中の応力テンソル（無い）

言えている	言えていない
評 並進の Ward の恒等式 (2) が全ての相・全ての場で成り立ち、窓に依らず、被積分関数は可積分	改良項が全て消えること、膨張の Ward の恒等式
源 回転の Ward の恒等式 (4) が構成の法則の束に入る	接触項（点の重なり）
初 (2) の線形性から、直線の上の正規化は一点に決まる	Minkowski の符号の規約との独立の比べ

出典と再現

もの	種別	出典・道具
応力の条件・窓・Ward の法則	源	`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0、版 3456e5e）の `YM/Euclid/Stress.lean` 22〜24・57〜97 行、`YM/Spec/Closed.lean` 27〜43 行
一次元であること	源	`YM/Pert/Weak.lean` 68・82 行、`YM/Pert/FirstTarget.lean` 26〜39 行、`Construction.lean` 15〜31 行、`verification/declaration-usage.tsv`
応力テンソルの特定・式 (13)・結合の目標	評	評価書 `yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）§7.1・§9.3・§9.4・§11
委員会の Ward の検査	評	評価の側の `submissions/openai-20261028/docs/examples/TranslationWard-20261028.lean` 12〜14・40・64・85・102・111〜122 行

この章で使った語 — 応力テンソル、Ward の恒等式、窓の関数、流束、改良項、接触項。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：13-02 跡の異常と、自由でないこと — 応力テンソルの跡が、短距離でどう振る舞うか。

跡の異常と、自由でないこと

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§07 は本書の検討、§08 は未解決の地図です。

この章で分かること — 選んだ相 ξ^* で、中心化した跡の場 Θ の二点関数が $r^8 \log^2(1/r)\,\langle \Theta(-\frac{r}{2}e_0)\Theta(\frac{r}{2}e_0)\rangle \to 3\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{g}/\pi^4$ と振る舞うこと、その係数が自由な曲率の二点関数と一ループの走りから出ること、そしてこの対数が「有限個の質量の自由場の多項式」という型の記述を除くことです。

前提となる章 — 13-01 応力テンソル、8-05 相関と相、8-01 規約（b_0 と $C_{\mathfrak{g}}$）。漸近自由は 4-06、次元転移は 4-07。

先に言うこと — 公開の言明が跡の場 Θ について言うのは、F_4 の元であることだけです。 Θ は存在量化（$\exists T$）の中の一つの元で、何の場かは書かれていません。それが応力テンソルの跡であることは、構成の定理の側と委員会の結合の目標の側に書かれています（§05）。また、この法則が除くのは自由場の記述の一つの型だけで、Gauss 場の合成による記述の全ては除きません。

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

この章の順序

1. 言明 — 跡の試験の四つの欄
2. 係数 3 dim g/π⁴ の由来：自由な二点関数と跡の異常の式
3. 短距離の法則の証明の骨子：格子の点で近づけ、単調性で挟む
4. 自由でないこと — 何が除かれ、何が除かれないか
5. 公開の言明の Θ は F_4 の一つの元：応力の跡であることの在りか
6. どの目標に入っている言明か

7. 本書の検討で見えていたこと

8. 読めていない所

01

言明 — 跡の試験の四つの欄

公開の階層 `Hierarchy` は、F_4 の元 `centeredTrace`（以下 Θ）を一つ持ちます 源 （`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028` の `ChallengeSpec.lean` 48 行）。選んだ相 ξ^*（`selected`）で、時間の軸の上の二点 $\mp\frac{r}{2}e_0$ に Θ を置いた二点関数を

$$G_\Theta(r) = S^{\xi^*}\left(\Theta(-\tfrac{r}{2}e_0)\,\Theta(\tfrac{r}{2}e_0)\right) \tag{1}$$

とします（`timePair`・`traceTwo`、145〜149 行）。公開の性質 `nonfree` は、構造 `TraceTest` の四つの欄です 源 （168〜175 行）。

1. `centered`：再構成した真空で、どの Schwartz の試験関数 f についても $\langle\Omega, \Phi_\Theta(f)\Omega\rangle = 0$。
2. `amplitudePositive`：$0 < 3\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{g}/\pi^4$。**理論を含まない定数の不等式**で、下流の証明で使えるように置かれたもの 評 （付録 A）。理論については何も言いません。
3. `shortDistance`：

$$\lim_{r\downarrow 0}\; r^8\log^2(1/r)\,G_\Theta(r) = \frac{3\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{g}}{\pi^4} \tag{2}$$

4. `excludes`：§04 の型の関数 W のどれとも、0 の近くで一致しない。

(2) は $r\downarrow 0$ の**全体での極限**（フィルタ $\mathcal{N}[>]0$）で、部分列ではありません。長さは構成の固定した単位（段 0 の間隔、8-02）で測ります 評 （評価書の定理 7.1 の式 (16)）。$SU(2)$ では $\dim\mathfrak{g} = 3$ で、右辺は $9/\pi^4 \approx 0.0924$ です 初 。

評価書は、Euclid の共変性から全ての方向の形 $|x|^8\log^2(1/|x|)\,K_\Theta(x) \to 3\dim\mathfrak{g}/\pi^4$（$x\to 0$、$K_\Theta(x) = \mathrm{Re}\,S^{\xi^*}_{\Theta,\Theta}(x,0)$）も述べ、委員会の短距離の変換器がこれを示したと書きます 評 （式 (17)、§11）。

02

係数 3 dim g/π⁴ の由来

古典の Yang–Mills は四次元で共形不変で、応力テンソルの跡は 0 です。量子論では繰り込みのために跡が残り、跡の異常と呼ばれます。評価書 §7.2 は「滑らかな接続では跡は 0 なので、この結果は奇妙に見えるかもしれないが、Θ は繰り込みの結果として一般に 0 でない」と書きます[評]。

係数の値は、委員会の注釈つきの例 `LeadingTrace-20261028.lean` の §5（195〜236 行）が、摂動論との非形式的な比べとして計算しています[評]。筋を追います。

(a) 自由な曲率の二点関数。正準に正規化したゲージ場で $Q=\sum_a\sum_{\mu,\nu}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}$（$\mu,\nu$ の両方の順を足す）と置きます。自由な場の強さの伝播関数は

$$\left\langle F^a_{\mu\nu}(x)F^b_{\rho\sigma}(0)\right\rangle=\delta^{ab}\,\frac{I_{\mu\rho}I_{\nu\sigma}-I_{\mu\sigma}I_{\nu\rho}}{\pi^2|x|^4},\qquad I_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}-\frac{2x_\mu x_\nu}{|x|^2}\tag{3}$$

です（Osborn–Petkou の式 (5.15)。例が引用）。Wick の定理で $\langle QQ\rangle$ の連結部分は交差の縮約二つの和で、反対称のテンソルのノルムの二乗 $\sum_{\mu\nu\rho\sigma}(I_{\mu\rho}I_{\nu\sigma}-I_{\mu\sigma}I_{\nu\rho})^2=2\cdot4\cdot3=24$ を使うと

$$\left\langle Q(x)Q(0)\right\rangle_{\text{free},c}=2\cdot24\cdot\frac{\dim\mathfrak{g}}{\pi^4|x|^8}=\frac{48\dim\mathfrak{g}}{\pi^4|x|^8}\tag{4}$$

です[初]（I は直交な鏡映の行列なので $\sum_{\mu\rho}I_{\mu\rho}^2=4$。二乗の和は $16+16-2\cdot4=24$。数値でも確かめました）。

(b) 跡の異常の式。$\beta(g)=dg/d\log M$（M は繰り込みの尺度）について $\sum_a T_{aa}=\frac{\beta(g)}{2g}[Q]$ です（Zoller–Chetyrkin の式 (4.3) を、この $\beta(g)$ に翻訳したもの。例が引用）。一ループで $\beta(g)=-b_0g^3$、走る結合は $g^2(1/|x|)\sim1/(2b_0\ell)$（$\ell=\log(1/(\Lambda|x|))$）なので

$$\frac{\beta(g)}{2g}=-\frac{b_0g^2}{2}\sim-\frac{1}{4\ell}\tag{5}$$

です[初]。

(c) 組み合わせる。(4) に (5) の二乗 $1/(16\ell^2)$ を掛けて

$$\left\langle\Theta(x)\Theta(0)\right\rangle_c\sim\frac{48}{16}\cdot\frac{\dim\mathfrak{g}}{\pi^4|x|^8\ell^2}=\frac{3\dim\mathfrak{g}}{\pi^4|x|^8\ell^2}\tag{6}$$

です[初]。一点関数を引く有限の補正は主の特異性を変えず、Λ を変えても ℓ は定数だけずれます。

読み方をまとめます。

- $|x|^{-8}$ は、次元 4 の場の二点関数の素朴な冪です。
- $\log^{-2}$ は、跡が $g^2 \cdot F^2$ の形で、g^2 が漸近自由で $1/\log$ のように小さくなることの痕跡です。
- **b_0 の数値は係数から消えます**。(5) の b_0 と走りの b_0 が打ち消すからです。だからこの法則だけでは $b_0 = 11C_{\mathfrak{g}}/(48\pi^2)$ の値は確かめられません。その値を決めるのは別の結果（13-03 の実効の結合、10-06 の走り）です 評 （評価書 §7.2、例 230〜236 行）。

Lean の側では、係数ははじめ $12\,(d_2^2/b_0^2)\dim\mathfrak{g}/\pi^4$ の形で書かれ、恒等式 $d_2 = -b_0/2$（`Trace.Over.force_b`）から $3\dim\mathfrak{g}/\pi^4$ に簡約されます 評 （例 170〜177 行、`coefficient_is_fixed` 261 行）。$12 \cdot \frac{1}{4} = 3$ です 初 。例は、この代数の簡約が実質の短距離の解析の最後の一歩にすぎない、と注意しています。

03

短距離の法則の証明の骨子

評価書の付録 A（`TraceTest.shortDistance` の項）は、証明の骨を次のように書きます 評 。$c(r) = r^8 \log^2(1/r)$ と置きます。

1. **格子の点で近づける**。ある列 $r_n \downarrow 0$ について、物理の距離 $r_n s$（s は 1 に近い定数）を近くの格子の点で近似した距離 $r_n \delta_n(s)$（$\delta_n(s) \to s$）で、紫外の比べ・対数の正規化・自由な二点関数の計算から $c(r_n)\, G_\Theta(r_n\delta_n(s)) \to A/s^8$（$A = 3\dim\mathfrak{g}/\pi^4$）を示す。
2. **単調性**。正のスペクトル表示（鏡映正値性から来る）により、時間の軸の上の G_Θ は実で、非増加。
3. **挟む**。$s_- < 1 < s_+$ をとると、いずれ $G_\Theta(r_n\delta_n(s_+)) \le G_\Theta(r_n) \le G_\Theta(r_n\delta_n(s_-))$。$c(r_n)$ を掛けて $n \to \infty$、そのあと $s_\pm \to 1$。

委員会の例は、証明の中で使う部分列が結論を部分列の収束に弱めるわけではない、と注意しています 評 （`LeadingTrace-20261028.lean` 186〜193 行。`YM.Trace.Verse.outside` が、制御された部分列の解析を正の距離の全体での極限へ上げる）。読む道筋として例が挙げる宣言は `YM.Trace.wick_norm`（自由な二点の係数の Wick の計算）、`YM.Trace.Over.Scribe`（自由場と対数の時計との尺度の比べ）、`YM.Trace.Verse.tagline`、`YM.Trace.Verse.border` です。本書はこれらの中身を読んでいません。

04

自由でないこと — 何が除かれ、何が除かれないか

除かれる型。質量 $m \geq 0$、時間の階数 $q \geq 0$、連続で斉次（次数 $j \geq 0$）の実関数 h をとり、核

$$K_{m,q,h}(r) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{E_m(p)^q \, h(p)}{2E_m(p)} \, e^{-rE_m(p)} \, d^3p, \qquad E_m(p) = \sqrt{m^2 + |p|^2} \tag{7}$$

を考えます 源 （`Mode` ・ `Mode.kernel`、`ChallengeSpec.lean` 152〜161 行） 評 （評価書 §7.3 の式 (18)）。これは質量 m の自由場の二点関数（と、その微分）の時間方向の表示です。このような核の有限個の積の有限な複素一次結合

$$W(r) = \sum_{a=1}^{N} c_a \prod_{b=1}^{n_a} K_{m_{ab},q_{ab},h_{ab}}(r) \tag{8}$$

（`wickProfile`、165〜166 行）について、`excludes` は「どんな W と $\delta > 0$ についても、ある $r \in (0, \delta)$ で $G_\Theta(r) \neq W(r)$」を言います 源 （175 行。評価書の言い方と同値 評 ）。(8) は、有限個の質量を持つ自由場の多項式の観測量（微分を含む）の二点関数を含みます。

なぜ除かれるか 評 （付録 A の `excludes` の項）。構成は、どの W の実部も 0 の近くで

$$\operatorname{Re} W(r) = \sum_{\nu} a_\nu \, r^{\alpha_\nu} (\log r)^{k_\nu} + O(1), \qquad \alpha_\nu \in \mathbb{Z}, \; k_\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \tag{9}$$

と展開できることを示し、$r^8 \log^2(1/r) \operatorname{Re} W(r)$ の有限な極限は 0 しかありえないことを示します。もし $W = G_\Theta$ なら (2) の正の極限と矛盾します。直観は、(9) のどの項も $r^{-8}(\log r)^{-2}$ のようには振る舞わないことです 推 ：対数の冪は非負なので、$r^8 \log^2$ を掛けた各項は 0 に行くか、発散するかで、和の極限が有限ならそれは 0 です。$\log^{-2}$ の形の項は (9) には現れません。

除かれないもの 評 （評価書 §7.3、`LeadingTrace-20261028.lean` 337〜341 行）：

- Gauss 場の合成による記述の全て（評価書は「全てを除くものではない」と明記）。
- 一般化された自由場の全て。
- 固有の質量の尺度 Λ の決定。全次数の摂動論との一致。真空の構造。

正の主係数は、跡の相関が恒等的に 0 であることを除きます。評価書は、とくに十分小さい r で二点関数が 0 でなく、ある均した $\Phi_\Theta(f)$ が 0 でないことを導いています 評 。

構成の定理の側の強い形 `Headline.TraceExclusions`
（`YM/Nonperturbative/HeadlineSpec.lean` 84〜120 行）は、さらに `identified` （§05）・

`wick`・`maxwell`・`invariant` の欄を持ちます 源 （欄の名と型まで）。`wick` 以下の欄の意味は読んでいません。

05

公開の言明の Θ は F_4 の一つの元

ここが、この章で一番注意の要る所です。

公開の言明だけを読むと、`centeredTrace` は、公開の定理の存在量化 $\exists T$ で与えられる階層 T の欄の一つで、言明がそれについて言うのは型が F_4（`Field 4`）であることだけです 源 （`ChallengeSpec.lean` 48・186〜188 行）。公開の性質 `nonfree` が言うのは「選んだ相で中心化された、ある次数 4 の場 Θ が在って、その二点関数が (2) と `excludes` を満たす」ことです。それが応力テンソルの跡であることは、公開の言明には書かれていません。

応力の跡であることの在りかは二つです。

- **構成の側**。公開の階層を作る定義で `centeredTrace := TraceExtension.center F`（`HierarchyBridge.lean` 42 行） 源 。構成の定理の結論 `Headline.TraceExclusions` の欄 `identified`（`HeadlineSpec.lean` 87〜91 行）は、跡の場の作用素が「応力テンソル `F.sector.energy` の跡の場から、選んだ相での一点関数 × 恒等を引いたもの」に等しいことを言います 源 。評価書の式 (14) $\Theta = \sum_\mu T_{\mu\mu} - S^{\xi^*}\left(\sum_\mu T_{\mu\mu}\right)\mathbf{1}$ はこれです 評 。
- **委員会の結合の目標**。短距離の検査（評価書の [A4]）は、Ward の恒等式で正規化を確かめたのと同じ応力テンソルの跡を、同じ選んだ相で使うことを確かめています 評 （評価書 §9.4・§11。例 `LeadingTrace-20261028.lean` の `centering_uses_the_phase_mean` 61 行、`source_and_OS_fields_agree` 97 行）。

評価書 §2 は「構成は応力テンソルの跡 `centeredTrace` を定義し、その性質を `nonfree` で示す」と書きます。これは構成の側を含めた読みで、**公開の言明の字面だけからは「応力の跡」は出てこない**、という区別を本書では保ちます。まとめると、公開の定理が言うのは「ある次数 4 の場について (2) が成り立つ」ことで、その場を応力テンソルの跡と同一視するのは構成の定理と委員会の結合の目標です。

選んだ相 ξ^* の選び方にも条件が入ります。評価書の付録 A は、基底状態の空間が一次元で、跡の場のある極限の性質を満たす相の集合が、相の測度（8-05 の (4) の確率測度）について測度 1 であることを示し、その中から ξ^* を選ぶ、と書きます 評 （`Hierarchy.selected` の項）。

06

どの目標に入っている言明か

目標	在るもの
公開の定理 `JointExistence`	`TraceTest` の四つの欄。Θ について言うのは F_4 の元であることだけ 源
構成の定理 `constructed`	`Headline.TraceExclusions`（`identified`・`shortDistance`・`positive`・`wick`・`maxwell`・`invariant` を含む）源 （`Construction.lean` 28 行）
委員会の結合の目標	短距離の検査 [A4]（全ての方向の形 (17))、跡の場の階層についての OS の公理の独立の検査 [A1]、零でない格子の極限 [A5]（8-05 の (5)）評

委員会の OS の公理の独立の検査は、**Θ だけの階層**について行われています（評価書 §10・§10.1)。全ての場についてではありません 評 。

07

本書の検討で見えていたこと

本書の研究と Lean には、跡の異常も、短距離の法則も、自由場の除外も**ありません**。

- 本書の非自明性の観点は赤外の側（渦の比 θ_M の符号と床、Polyakov ループの対、面の平均の非退化）にありました（第 21 部)。公開された構成の非自明性は紫外の側（漸近自由の対数）です。二つは補い合う側に在ります 推 。
- 本書の渦の比 θ_M の θ は、跡の場 Θ とは無関係の記号です。
- 「自由でないことを跡の異常の対数で言う」という発想は、本書に無かったものです（14-05)。

08

読めていない所

- (2) の証明の本体（`wick_norm`・`Scribe`・`tagline`・`border`・`outside`)。
- (9) の展開の証明（`YM.TraceExtension.Wick.real_profile` ほか)。
- `TraceExclusions` の `wick`・`maxwell`・`invariant` の欄の意味（`HeadlineSpec.lean` 96〜120 行)。
- 選んだ相の集合が測度 1 であることの証明（`YM.OS.Cluster.lifts` ほか)。
- (3) の伝播関数と (b) の跡の異常の式は、委員会の例が引く文献の式で、本書は原典を確かめていません（出典の表で書誌のみ)。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
源 公開の `nonfree` は、選んだ相で中心化された F_4 の元 Θ について、全体の極限 (2) と自由場の型の除外を言う	公開の言明だけからの「Θ は応力の跡」
源 応力の跡であることは構成の定理（`identified`）に、 評 同じ応力・同じ相であることは委員会の結合の目標に在る	OS の独立の検査が全ての場について在ること（Θ の階層だけ）
初 係数 $48/16 = 3$ の勘定（自由な二点関数 × 跡の異常の一ループの係数の二乗）。b_0 は消える	この法則による b_0 の値の確かめ
評 有限個の質量の自由場の多項式の二点関数の型は除かれる	Gauss 場の合成・一般化された自由場の全ての除外、固有の尺度、全次数の摂動との一致

出典と再現

もの	種別	出典・道具
跡の試験・核・`wickProfile`	源	`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0、版 3456e5e）の `ChallengeSpec.lean` 48・145〜175 行
応力の跡との同一視	源	`HierarchyBridge.lean` 42 行、`YM/Nonperturbative/HeadlineSpec.lean` 84〜120 行、`Construction.lean` 28 行
定理 7.1、式 (14)〜(18)、自由場の除外、証明の骨子、選んだ相	評	評価書 `yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）§2・§7.2・§7.3・§9.4・§10・§11・付録 A
係数の計算と読む道筋	評	評価の側 `yang-mills-group/YM`・版 55ba9fc の `submissions/openai-20261028/docs/examples/LeadingTrace-20261028.lean` 61・97・170〜236・261・337〜341 行
自由な場の強さの伝播関数（式 (5.15)）	典	H. Osborn, A. C. Petkou, Ann. Phys. 231 (1994) 311、arXiv:hep-th/9307010 — 書誌のみ（未確認。委員会の例が引用）
跡の異常の式（式 (4.3)）	典	M. F. Zoller, K. G. Chetyrkin, JHEP 12 (2012) 119、arXiv:1209.1516 — 書誌のみ（未確認。委員会の例が引用）
位置空間の繰り込み群で改良した計算	典	M. Bochicchio, S. P. Muscinelli, JHEP 08 (2013) 064、arXiv:1304.6409 — 書誌のみ（未確認。委員会の例が引用）
一ループの係数	典	D. J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1343；H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1346
24 と 48/16 の勘定	初	本書の検討の数値の記録（`numcheck.py`。無作為の鏡映の行列で (4) の二乗の和を数えた）

この章で使った語 — 跡の異常、中心化した跡、短距離の法則、選んだ相、自由場の除外、Wick の積。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：13-03 短距離の自由な Maxwell 場 — 短距離で、理論が自由な Maxwell 場にどう近づくか。

短距離の自由な Maxwell 場

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§07 は本書の検討、§08 は未解決の地図です。

この章で分かること — 漸近自由が二つの形で現れることです。一つは有効作用から読む結合 $g_W(r)$ が $\log(1/r)\, g_W(r)^2 \to 1/(2b_0)$ と振る舞うこと（評価書の定理 7.2）。もう一つは、ある共通の列 $r_k \downarrow 0$ に沿って相関を尺度で縮めると、$\dim \mathfrak{g}$ 個の独立な自由 Maxwell 場の相関に、全ての階の微分まで近づくことです。

前提となる章 — 8-02（段と間隔）、13-01（応力テンソル）。「段 m の結合」の定義は 10-01、裸の結合の走りは 10-06。漸近自由の導入は 4-06。

先に言うこと — 評価書は定理 7.2（実効の結合）の Lean の名を挙げていません。近い内容の言明は三か所に在ります（§03）：依存の外の `Running.ratio`、依存の中で跡の解析の途中の段として使われる `wilson_link`（評価書の言明に字句が近い）、見出しの定理 `YM.Pert.Asymptotics.comparison`（切断つきの段の結合の走りで、g_W とは別の量）。g_W の形の言明は、公開の定理・構成の定理の結論には残りません。委員会の結合の目標の検査の一覧にもありません。Maxwell 場との比べは構成の定理の結論に入っています。どちらも、摂動論の全ての次数との一致は言っていません。

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

この章の順序

1. 言明 — 評価書 §7.4 の三つの結果
2. 実効の結合の定義と、走りの出し方
3. 実効の結合の Lean の在りかと目標：依存の外と中
4. 第二の結合 — 連続の相関で測る
5. 自由な Maxwell 場との比べ：共通の列に沿う、全ての階の微分

6. 三つの短距離の結果の違い
7. 本書の検討で見えていたこと
8. 読めていない所

01

言明 — 評価書 §7.4 の三つの結果

評価書 §7.4「漸近自由と摂動論との一致」は、三つの結果を挙げます [評]。

1. **実効の結合（定理 7.2）**。長さ r より細かい揺らぎを積分すると、有効作用の曲率の二乗の項の係数が変わる。固定した正規化でのその逆平方根が走る結合である。提出物は、定理 4.1 の裸の結合の Wilson の理論の族から始め、r を下回る最初の格子間隔までブロックし、初めの切断を 0 にし、体積の部分列の極限を取ったあとで、正規化した作用の係数の逆平方根を $g_W(r)$ と定める。小さい r と、選んだ任意の体積の部分列の極限について $g_W(r) > 0$ で、

$$\log(1/r)\, g_W(r)^2 \;\longrightarrow\; \frac{1}{2b_0} \qquad (r \downarrow 0), \qquad b_0 = \frac{11 C_{\mathfrak{g}}}{48\pi^2} = \frac{s}{2} \tag{1}$$

   （この章で b_0 は一ループの係数で、$2b_0 = s$ は一ループの傾きです。ブロックの辺 b_i の $i = 0$ ではありません。） $g_W(r)$ が体積の部分列の選び方に依らないことは示されていない。
2. **第二の結合**。点の離れた連続の相関で結合を定め、それと g_W の比が $r \downarrow 0$ で 1 に近づく。走りの法則は有効作用だけでなく連続の観測量にも見える。
3. **自由な Maxwell 場との比べ**。一つの共通の列 $r_k \downarrow 0$ に沿って、平均した n 点の応力テンソルの相関に r_k^{4n} を掛けて $r_k x_1, \dots, r_k x_n$ で評価したものは、$\dim \mathfrak{g}$ 個の独立な自由 Maxwell 場の相関に近づく。固定した任意の階の微分まで、点の重なりを避けるコンパクト集合の上で一様に。Maxwell 場とは、$\mathfrak{g}$ 値の 1-形式の Gauss の自由場の外微分として得た Gauss の 2-形式の曲率である。

評価書は、Maxwell 場との比べは混ざった理論で特定の列に沿うもの、定理 7.1（跡の法則、13-02）と 7.2 は $r \to 0$ の任意の近づき方で、7.1 は選んだ相についてのもの、と区別し、合わせて「主の短距離の証拠」になると書きます [評]。

02

実効の結合の定義と、走りの出し方

ここでは、依存の中に在る形（§03 の `Pilot.wilson_link`）で定義を読みます 源 （`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028` の `YM/TraceExtension/Atlas/Sink.lean`、`YM/TraceExtension/Terrace/Dusk.lean`）。

段 i の極限の結合。$\beta(N,p,i)$ は切断 N・体積 p の軌道の段 i の結合（有効作用の表示の中の F^2 の係数。10-01）です。(N,p) の上の超フィルタ $\mathcal{L}$ を一つとり（体積の部分列の極限の取り方に合わせたもの）、その極限

$$Z_\beta(i)=\lim_{\mathcal{L}}\beta(N,p,i) \tag{2}$$

を段ごとに取ります（`Arch`・`steep`、`Dusk.lean` 65〜72 行）。各段で $Z_\beta(i)\in[\hat\beta_i/2,\,2\hat\beta_i]$（`holds`、79 行）、$\hat\beta_i=\bar\beta+2b_0\log(1/a_i)$ は一ループの走り（8-02）で、さらに $Z_\beta(i)/\hat\beta_i\to1$（`gamut`、89 行）です。

r の直下の段。$i(r)$ を $a_i<r$ となる最初の段とします（`glen`、`Sink.lean` 14 行）。実効の結合は

$$g_W(r)=Z_\beta\big(i(r)\big)^{-1/2} \tag{3}$$

です（`wilson`、44 行）。

走り。二つの極限を掛け合わせます 源 （言明） 初 （組み合わせ）。

- `pace_log`（21 行）：$\log(1/r)/\hat\beta_{i(r)}\to1/(2b_0)$。間隔は $a_{i(r)}<r\le a_{i(r)-1}$ で、証明は暦の追加の条件 `PostT` の欄 `bloom`（$b_i\le\log\hat\beta_i$、`YM/TraceExtension/Terrace/Base.lean` 29〜34 行）と $\hat\beta$ の単調性を使い、$\log(1/r)$ と $\log(1/a_{i(r)})$ の差を $\log\hat\beta$ の程度に抑えます 源 （`Sink.lean` 21〜41 行の `H.bloom`・`monoBeta`）。
- `gamut`：$Z_\beta(i)/\hat\beta_i\to1$。

割り算で $\log(1/r)\,g_W(r)^2=\log(1/r)/Z_\beta(i(r))\to1/(2b_0)$ です（`wilson_link`、50 行。結論の型 `Coupling`、45〜47 行は「いずれ正」と「$\log(1/r)\,u(r)^2\to1/(\text{傾き})$」の二つ）。さらに $g_W(r)\to0$（`Coupling.conforms`、55 行）。`wilson_link` の仮定は、G が単純、暦の条件 `PostT`、超フィルタの極限 `steep`、超フィルタが抽出の順に従うこと（$\mathcal{L}\le X.\mathrm{fuse}$）です 源 。`PostT` は跡の解析の側で課す条件です。

読み方の注意を二つ書きます。

- $Z_\beta(i)$ は超フィルタ $\mathcal{L}$ に依ります。評価書の「部分列の選び方に依らないことは示されていない」はこのことです。
- $\beta(N,p,i)$ は有効作用の**表示の中の係数**で、測度だけから読める不変量ではありません（10-01）。だから g_W も、構成の表示の選び方を通して定義された量です。

03

実効の結合の Lean の在りかと目標

評価書は定理 7.2 の Lean の名を挙げていません。近い内容の言明が三か所に在ります 源 。評価書の言明（$r \downarrow 0$、r を下回る最初の間隔、いずれ正）に字句が近いのは `wilson_link` です 推 。

宣言	中身	検証の記録（`verification/declaration-usag`
`YM.PertExtension.Running.ratio`（`YM/PertExtension/Running.lean` 145 行）	比の形 $g(\mu)\cdot(2b_0\log\mu)^{1/2}\to 1$（$\mu\to\infty$）。$g$ は `gLedger`（130 行）で、段の極限 B の、$\log\mu\le\log(1/a_m)$（$a_m\le 1/\mu$）となる最初の段での値の逆平方根。正であることは全ての μ で（`ledger_positive`、139 行）	**outside**（依存の外）。結合の部分（`isLimit` `discrete` 66・`choose` 86・`band` 133・`gLe` 130・`ledger_positive` 139・`ratio`・`vanis` 165 など）は全て outside。この module で u のは、抽出の `extraction`（40 行）と `clock` 行）、非公開の補助 `cut`（24 行）・`compact_d`（27 行）
`YM.Trace.Pilot.wilson_link`（`YM/TraceExtension/Atlas/Sink.lean` 50 行）	$\log(1/r)\,g_W(r)^2\to 1/(2b_0)$（$r\downarrow 0$）、いずれ正。$g_W$ は (3)。仮定に `PostT`（$b_i\le\log\hat\beta_i$ など）	used。最初に見つかった見出しは `continuum_with_position_tests`、直接の使い `crest_ready`。跡の解析の途中の段
`YM.Pert.Asymptotics.comparison`（`YM/Pert/Asymptotics/RawAxis.lean` 36 行）	$N_i\ge i$（いずれ）と任意の体積の列 k_i について、切断つきの段 i の結合 $\beta(N_i,k_i,i)^{-1/2}$（`regulatorRun`、35 行）に $\sqrt{\log(1/a_i)}$ を掛けたものが $(2b_0)^{-1/2}$ に近づく。極限を取る前の、段の目盛りでの走りで、$g_W(r)$ とは別の量	**headline**（見出しの定理そのもの）

`Running.lean` の冒頭の説明文は、この module の結合が「表示された作用から読む補助の観察」で、主の同値は「位置の結合を特定しない」「図形の剰余を評価しない」と書いていま

す（6〜10 行）。

`wilson_link` の結論は、跡の短距離の解析の途中の構造 `Crest` の欄 `charts`（`YM/TraceExtension/Belfry.lean` 20〜22 行）と、比べの構造 `FieldComparison` の欄 `wilson`（`YM/TraceExtension/Endpoint.lean` 50 行）に現れます 源 。跡の法則（13-02）の証明が、結合の走りを途中の段として使っている、と読めます 推 。ただし、これらの構造から公開の跡の試験へ移るとき（`Integration.ManuscriptTraceTests.of_result`）に、比べの欄は落とされています 源 （`YM/Integration/ManuscriptTraceTests.lean` 62〜89 行）。

目標についてのまとめ。

- 公開の定理 `JointExistence`：実効の結合は入っていない。在るのは裸の結合の走り `WilsonRegularity.running`（8-02 の (1)）だけ 源 。
- 構成の定理 `constructed`：結論の欄に g_W の形の言明は無い 源 （`Construction.lean` 15〜31 行）。結論の `Independent.Core` は欄 `trace` に跡の試験 `ManuscriptTraceTests.Tests` を持ち（`YM/Independent/Core.lean` 18〜22 行）、`FieldComparison` を含む `Trace.Target.Result`（`YM/TraceExtension/Endpoint.lean` 99〜120 行）は `of_result` で落ちます。`continuum_with_position_tests` の結論も同じ `Core` を持ちます（`YM/Nonperturbative/Continuum.lean` 28〜41 行） 源 。
- 委員会の結合の目標：評価書 §9.3 の検査の一覧に結合の検査は無い 評 。委員会の例は、跡の検査とその例が定理 7.2 の独立の検査を加えない、と書いています 評 （`LeadingTrace-20261028.lean` 233〜236 行）。
- 見出しの定理：段の結合の走り `YM.Pert.Asymptotics.comparison` は見出しの定理そのものです。g_W の形では、`Running.ratio` は依存の外、`wilson_link` は依存の中の途中の段です 源 。

04

第二の結合 — 連続の相関で測る

評価書によれば、第二の結合は点の離れた連続の相関で定めます 評 ：スカラーの二点の微分と、積分したテンソル–スカラー–スカラーの相関を自由な値に正規化し、テンソル–スカラーの相関の微分で結合を測る。提出物は、この結合と g_W の比が $r \downarrow 0$ で 1 に近づくことを示す。

Lean の側では、この結合は `Sundial.glo`（`YM/TraceExtension/Sundial/Noon.lean` 28 行、used）で、比が 1 に近づくことは `FieldComparison` の欄 `calibrationX`（`Endpoint.lean` 49 行）です 源 。`FieldComparison` は他に、係数の一ループの部分が

$-b_0/2$ であること（`coefficient_O`・`traced_O`：$d(r) - d_2\, g^2 = O(g^4)$ の形）を欄に持ちます。中身は読んでいません。

05

自由な Maxwell 場との比べ

構成の定理の結論には `Pert.FirstExtension F X` が入っています 源 （`Construction.lean` 31 行）。X は相関の表 S の上の尺度の列（`Climb.Scaling`）で、共通の列 $r_k = X.r\, k \downarrow 0$ を持ちます。構造 `FirstExtension`（`YM/Pert/FirstTarget.lean` 26〜39 行）の欄は次のとおりです。

- `jets`（29〜34 行）：全ての点の数 n、微分の階 j、自由な表の札の並び、どの位置が応力かの印とその添字、点の重なりを避けるコンパクト集合 K、$\varepsilon > 0$ について、十分大きい k で、K の全ての点で

$$\left\| D^j \left[z \mapsto \widetilde{S}_k(r_k z) \right](x) - D^j S_{\mathrm{free}}(x) \right\| \le \varepsilon \tag{4}$$

  ここで $\widetilde{S}_k$ は尺度を合わせた構成の相関（`scaledPhysical`）、S_{free} は自由な表の相関で、応力の位置には自由な Maxwell 場の応力 `freeStress` $= -$ `Free.original`（16 行）を置く。
- `ranks`（35〜36 行）：応力の候補の直線が一次元（13-01）。
- `derivatives`・`rotations`（37〜39 行）：場の微分と回転の作用が、尺度の列に沿って自由場のものに近づく。

(4) は「短距離で、構成の理論が $\dim \mathfrak{g}$ 個の独立な自由 Maxwell 場に見える」ことの、任意の階の微分までの形です。説明文は、これが混ざった理論（階層）の相関だけについての最初の到達点で、「固定した札の増幅や、合わせた結合についての評価はまだ含まない」と書いています（4〜5・21〜25 行） 源 。応力でない位置の場は、尺度の列ごとの枠 `X.U k` で測ります。評価書の「応力テンソルでない場との比べも含む」はこの部分と読めます 推 。

尺度の因子 r_k^{4n}（評価書）が Lean のどこで入るかは、`scaledPhysical`（`YM/Pert/Lifted.lean` 81 行）の中と推しますが、確かめていません。

宣言 `FirstExtension.jets` の検証の記録は used（最初の見出しは `parityEndpoint`）、`ranks` の射影は outside ですが、どちらも構成の定理の結論の構造の欄なので、言明としては構成の定理に入っています 源 。

06

三つの短距離の結果の違い

	跡の法則（13-02）	実効の結合 (1)	Maxwell 場との比べ (4)
$r \to 0$ の取り方	全体の極限	全体の極限	一つの共通の列 r_k
状態	選んだ相 ξ^{*}	体積の部分列の極限（超フィルタ）	混ざった理論
測るもの	中心化した跡の二点関数	有効作用の表示の係数	相関（応力と他の場）、全ての階の微分
b_0 の値	係数から消える	$1/(2b_0)$ に現れる	現れない（自由場との比べ）
目標	公開（Θ は F_4 の一つの元とだけ）・構成・委員会	g_W の形はどの結論にも無い（見出しの定理は段の結合の走り `comparison`）	構成の定理の結論

三つとも、**摂動論の全ての次数との一致は主張しません** 評 （評価書 §7.5 の「全次数の摂動との一致は未証明」）。二ループの係数、$\log\log$ の補正も扱っていません（10-06）。

07

本書の検討で見えていたこと

本書には、実効の結合の定理も、自由な Maxwell 場との比べも**ありません**。

- 本書は、一段のブロックでの結合の移りを数値で測り、向きは漸近自由と合い、大きさは β の単位の一ループの値 $\frac{11}{3\pi^2}\ln 2 \approx 0.2575$ の 2.9〜4.4 倍、と記録しました（15-01、札は読）。公開された構成の傾き $11C_{\mathfrak{g}}/(24\pi^2)$ に $\ln 2$ を掛けた値が、この一ループの値です（8-01 §04）。
- 本書の「合わせ」は、測度だけで定義できる観測量（粗い面の期待値、渦の比）を固定の値に合わせる形でした。公開された構成の結合は表示の中の係数で、(3) はそれを実効の結合として読む形です。どちらが連続の極限で意味を持つかの比べは 14-03 です。

08

読めていない所

- `wilson_link` から存在の定理までの鎖の全体（`crest_ready` の先）。`PostT` の他の欄（`cropK`・`share`・`purse`・`jig`）の意味。
- 第二の結合 `glo` の定義（`lampX`）と、`calibrationX` の証明。
- `scaledPhysical` と尺度の因子、自由な表 `freeTable` の作り方、枠 `X.U k` の意味。

- `Running.lean` の極限 B（`isLimit` の順序つきの抽出 `f.fuse`）が体積の極限まで含むか。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
源 $g_W(r)$ を (2)(3) で定めると $\log(1/r)\, g_W(r)^2 \to 1/(2b_0)$（`wilson_link`）	g_W が体積の部分列に依らないこと、測度だけで定まること
源 `Running.ratio` は依存の外、`wilson_link` は依存の中の途中の段。g_W の形の言明は公開・構成の結論に無い（見出しの `comparison` は切断つきの段の結合の走りで別の量）	`wilson_link` から存在の定理までの鎖の全体
源 構成の定理の結論に、共通の列に沿う自由な Maxwell 場との比べ（全ての階の微分、コンパクト集合で一様）	全ての $r \to 0$ での比べ、選んだ相での比べ
評 第二の結合と g_W の比は 1 に近づく	全次数の摂動論との一致、二ループの係数

出典と再現

もの	種別	出典・道具
実効の結合（依存の中）	源	`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0、版 3456e5e）の `YM/TraceExtension/Atlas/Sink.lean` 14・21・44〜55 行、`YM/TraceExtension/Terrace/Dusk.lean` 65〜89 行、`YM/TraceExtension/Belfry.lean` 16〜22 行
実効の結合（依存の外）	源	`YM/PertExtension/Running.lean` 6〜10・40・59・66・130・145・165 行、`verification/declaration-usage.tsv`
第二の結合・比べの構造	源	`YM/TraceExtension/Sundial/Noon.lean` 28 行、`YM/TraceExtension/Endpoint.lean` 36〜64 行、`YM/Integration/ManuscriptTraceTests.lean` 62〜89 行
Maxwell 場との比べ	源	`YM/Pert/FirstTarget.lean` 4〜39 行、`Construction.lean` 15〜31 行
定理 7.2、第二の結合、Maxwell の比べ、摂動との一致	評	評価書 `yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）§7.4・§7.5、評価の側 `yang-mills-group/YM`・版 55ba9fc の `submissions/openai-20261028/docs/examples/LeadingTrace-20261028.lean` 230〜236 行

この章で使った語 — 実効の結合、走る結合、超フィルタの極限、自由な Maxwell 場、尺度の列、全ての階の微分。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：13-04 演算子積展開と接触項 ― 点が近づくときの相関の展開と、点の重なりへの延長。

演算子積展開と接触項

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§07 は本書の検討、§08 は未解決の地図です。

この章で分かること — 点 o の近くに集めた場の積の相関を、o に置いた単一の場の相関の一次結合で近似する展開 — 演算子積展開 — が、公開の言明に係数と残りの冪の上界として入っていることです。残りの上界は混ざった理論と全ての相に一様で、係数は傍観者・状態・切る次数に依りません。点の重なりまで延ばした分布は「在る」ことだけが言われています。

前提となる章 — 8-03（場の空間と次数）、8-05（相関と相）、13-02（短距離の対数）。

先に言うこと — D は場の次数で、ループの次数ではありません。$D \to \infty$ での収束、係数が摂動論の値と一致すること、係数が体積の部分列の選び方に依らないことは言われていません。共通の係数から相が等しいことも出ません。

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

この章の順序

1. 言明 — 配置の条件と二つの上界
2. 冪の読み方：次元の勘定と、ε の損
3. 係数とチャンネルの作り方
4. 状態への一様性と、共通の係数から言えないこと
5. 接触項の延長 — 存在だけ
6. どの目標に入っている言明か・言っていないこと
7. 本書の検討で見えていたこと
8. 読めていない所

01

言明 — 配置の条件と二つの上界

配置。展開の中心 $o \in \mathbb{R}^4$、尺度 $r > 0$、定数 $M \geq 0$、$\eta, c > 0$ をとります。入力の場 $A_1, \dots, A_n$（次数 d_i、合計の次数 $w = \sum d_i$）を点 x_i に、傍観者の場 $B_1, \dots, B_\ell$ を点 y_ℓ に置き、次を課します 源 （`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028` の `ChallengeSpec.lean`：`Within` 65〜66 行、`Clear` 67〜68 行）評 （付録 A の `Properties.ope`）。

$$\|x_i - o\| \leq M r, \qquad \|x_i - x_j\| \geq \eta r \ (i \neq j), \qquad \|y_\ell - o\| \geq c, \qquad \|y_\ell - y_m\| \geq c \ (\ell \neq m) \tag{1}$$

入力の場は o のまわりに大きさ r で集まり、互いの形は崩れず（点どうしは ηr 以上離れる）、傍観者は o からも互いからも c 以上離れています。

出力の場。次数 j ごとに有限のチャンネルの集合と、各チャンネル $\alpha = (j, i)$ の出力の場 $O_\alpha \in F_j$（`actor`）、係数 $c_\alpha(A; x, o) \in \mathbb{C}$（`coefficient`）が、階層 T の欄として在ります（43〜47 行）。

二つの上界。構造 `OperatorProductExpansion`（70〜80 行）は次を言います 源 。全ての $\varepsilon > 0$ について、十分小さい全ての $r > 0$ で、

$$|c_\alpha(A; x, o)| \leq r^{\,d_\alpha - w - \varepsilon} \qquad \text{(配置は (1) の最初の二つ)} \tag{2}$$

$$\Big| S^s\Big(\prod_i A_i(x_i)\, B\Big) - \sum_{d_\alpha \leq D} c_\alpha(A; x, o)\, S^s\big(O_\alpha(o)\, B\big) \Big| \leq r^{\,D+1-w-\varepsilon} \qquad \text{(配置は (1) の四つ全て)} \tag{3}$$

(3) は全ての切る次数 D について、s は混ざった理論 S^{mix} か任意の相 S^ξ です。$B = \prod_\ell B_\ell(y_\ell)$ です。評価書は $o = 0$、$x_i = r\tilde{x}_i$ と置いた形 (20) で書きます 評 （§ 7.5）。

公開の言明の欄 `ope` がこの構造です（`Properties`、180 行）。構成の定理は、さらに入れ子の OPE（`Headline.NestedOPE`、`YM/Nonperturbative/HeadlineSpec.lean` 128〜138 行。木の形に分けた集まりについての係数と残りの評価）を結論に持ちます 源 （`Construction.lean` 28 行）。評価書は「追加の分離と尺度の条件の下で入れ子の展開が成り立つ」と書きます 評 。

02

冪の読み方

(2)(3) の冪は、工学的な次元の勘定と同じ形です 推 。もし次数 d の場がちょうど長さの $-d$ 乗で尺度が変わるなら、$\prod A_i(x_i)$ は長さの $-w$ 乗、$O_\alpha(o)$ は $-d_\alpha$ 乗で、係数は $r^{d_\alpha - w}$ の大き

さになります。次数 D までを足した残りは、次の次数 $D+1$ の項の大きさ r^{D+1-w} です。

任意に小さい損 $\varepsilon > 0$ は、対数のような振る舞いを吸うためのものです 評 （委員会の例 `CommonOPE-20261028.lean` 48〜52 行）。漸近自由の理論では、場の実際の尺度は工学的な次元から log の冪だけずれます（13-02 の $\log^{-2}$ がその例）。冪の上界は log の冪を区別しないので、ε の損で足ります。委員会の例は、前の因子 1 は半径を縮めて得たもので、半径の陽な値や摂動の係数の計算ではない、と注意しています。

次数 j が入力の合計の次数 w より小さいチャンネル（たとえば恒等の場 $j = 0$）では、(2) の冪は負で、係数は $r \to 0$ で大きくなってよいことになります。これは二つの場が近づくと相関が特異になることの、展開の側の表現です。

03 係数とチャンネルの作り方

評価書の付録 A は、構成の作り方を次のように書きます 評 。

- **チャンネル**（`Channel`）：$F_d = F_{d-1} \oplus E_d$ と分け、E_d の基底（各元は共役で不変）に番号を振る。次数 d のチャンネルの数は $\dim E_d$。出力の場 `actor` はその基底の元。
- **係数**（`coefficient`）：入力の場と、追加の試験の挿入との有限個の相関から F_d の場を作り、四次元の直交群で平均し、共役について対称化し、次数の低い成分を除き、基底 $O_{(d,i)}$ での座標を取る。

係数は入力の場と位置だけから作られ、傍観者・状態・切る次数を引数に持ちません。これは型の上で読めます 源 （`coefficient` の型、`ChallengeSpec.lean` 46〜47 行：引数は入力の札の並び、出力の次数とチャンネル、入力の位置、中心）。

委員会の例は、チャンネルの座標を足し戻すと係数の場に戻ること（`channel_assembly`、128 行）、一つの挿入の展開がその場自身を返すこと（`single_insertion_recovered`、133 行）を、辞書の確かめとして示しています 評 。相互作用する多点の OPE の値の計算ではない、と例は書いています。

04 状態への一様性と、共通の係数から言えないこと

一様性。(3) の Lean の形では、「十分小さい r」の量化（$\forall^{f} r$）の**内側**に状態 s の全称が在ります 源 （`ChallengeSpec.lean` 76 行）。つまり半径は状態を聞く前に決まり、残りの上界は混ざった理論と全ての相に一様です。委員会の例は、この順を半径 ρ の形で明示しています 評

（`remainder_uniform_in_state`、79 行。「ρ は s と全ての許される位置の前に選ばれる。札・D・幾何の定数には依ってよいが、相には依らない」）。

共通の係数から相の一致は出ない。二つの状態 s, t の展開を引くと、係数は同じなので

$$\left| \left(S^{s} - S^{t}\right)\left(\prod A_i \, B\right) - \sum_{d_\alpha \le D} c_\alpha \left(S^{s} - S^{t}\right)\left(O_\alpha(o)\, B\right) \right| \le 2\, r^{\,D+1-w-\varepsilon} \tag{4}$$

です 初 （三角不等式） 評 （`difference_of_states`、99 行）。差は出力の場の相関の差で展開され、それが 0 である理由はありません。傍観者が無いときを考えると分かりやすい、と評価書は書きます：係数が共通でも、一点関数 $S^{s}(O_\alpha(o))$ は相ごとに違ってよいからです 評 （§ 7.5）。

05

接触項の延長 — 存在だけ

8-05 の相関は、点が互いに異なる所だけで定まった関数です。OPE を使うと、点の重なりを含む試験関数の上の分布へ延ばせます。公開の名前空間に置かれた定義 `Hierarchy.Contacts`（公開の定理の結論には無い）は次の形です 源 （`ContactSpec.lean` 12〜15 行）。

$$\forall s,\ n,\ v \quad \exists\, D :\ C_c^{\infty}\!\left((\mathbb{R}^4)^n\right) \to \mathbb{C} \ \text{連続線形}, \quad \operatorname{supp} f \subset \{x_i \neq x_j\} \ \Rightarrow\ D(f) = \int f(x)\, S^{s}(x)\, dx \tag{5}$$

つまり、点の離れた所で元の相関と一致する分布が**在る**ことだけを言います。構成は `contactDistribution`（`ContactBridge.lean` 14 行）でこれを与え、構成の定理の結論に `(hierarchy F Q).Contacts` が入っています 源 （`Construction.lean` 22 行）。

延長は一意ではありえません：対角線の上に台を持つ分布（デルタ関数とその微分）を足しても、点の離れた所での値は変わらないからです（4-04）。評価書は、この延長の一意性、制限のない試験関数の空間での完全な OS の公理（正値性）、格子からの収束は示されていない、と書きます 評 （§ 7.5、§ 10）。委員会の OS の独立の検査は、対角線の上で全ての階の微分が消える試験関数を使うので、接触項は見えません（8-05 § 04）。

06

どの目標に入っている言明か・言っていないこと

目標	在るもの
公開の定理 `JointExistence`	OPE の二つの上界 (2)(3)（欄 `ope`） 源 。接触項の延長は**入っていない**

目標	在るもの
構成の定理 `constructed`	(2)(3) に加え、点の離れた OPE `SeparatedOPE`、入れ子の OPE `NestedOPE`、接触項の延長 `Contacts` 源 （`Construction.lean` 22・28 行）
委員会の目標	OPE の言明の整合の検査 [A8] は、結合の目標とは**別の終点**で、別の Comparator の実行で通った 評 （評価書 §9.3・§11）。言明 `CommonOPE` は、源の述語を使わずに二つの上界を直接述べる

言っていないこと 評 （評価書 §7.5、`CommonOPE-20261028.lean` 159〜165 行）：

- $D \to \infty$ での展開の収束。
- 場の正規化や OPE の処方を変えたときの係数の一意性。
- 摂動論の Yang–Mills の係数の数値（全次数の摂動との一致は未証明）。
- 係数が体積の部分列の選び方に依らないこと。
- 係数の一致から相を同一視すること。
- 接触項の延長の一意性・OS の正値性・格子からの収束。

D は場の次数の切り方で、ループの次数ではありません 評 。

07

本書の検討で見えていたこと

本書には OPE も接触項も**ありません**。本書は局所場の空間を持たなかったので（8-03 §06）、点の近づく展開を立てる対象がありませんでした。

本書の観測量のうち、小さい Wilson ループの先頭は F^2 の挿入です 推 。公開された構成の言葉では、ループの大きさを 0 に縮める展開は OPE に似た問いですが、ループは局所の札の空間に入らないので、(2)(3) の形のままでは語れません。評価書の開いた問いの四つ目「Wilson ループの観測量を作り、局所の観測量と関係づける」は、この隙間を指しています（16-02、14-06）。

08

読めていない所

- 係数の構成（`YM.OPE.Prescription.ope`・`YM.OPE.Orbits.averageV` ほか）の中身と、(2)(3) の証明（`coefficient_separated`・`quantitative_separated`）。
- 入れ子の OPE の木の条件（`Accept`・`Tapered`）の意味。
- `contactDistribution` の作り方（OPE で特異な部分を引いて延ばすのか）。

- 出力の場の次数の分け方 $F_d = F_{d-1} \oplus E_d$ の補空間の選び方。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
源 公開の言明に OPE の係数の上界 (2) と次数 D で切った残りの上界 (3)	$D \to \infty$ での収束、摂動の係数との一致
源 残りの上界は混ざった理論と全ての相に一様（半径は状態より先に決まる）	係数の体積の部分列への非依存
源 係数は傍観者・状態・D を引数に持たない	正規化や処方を変えたときの係数の一意性
初 共通の係数からは、二つの状態の差の展開 (4) しか出ず、相の一致は出ない	相の同一視
源 構成の定理に接触項の延長の存在 (5)	延長の一意性・OS の正値性・格子からの収束。公開の言明への延長の言明

出典と再現

もの	種別	出典・道具
OPE の言明・配置・係数の型	源	`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0、版 3456e5e）の `ChallengeSpec.lean` 43〜80・177〜181 行
接触項・入れ子の OPE・構成の結論	源	`ContactSpec.lean` 12〜15 行、`ContactBridge.lean` 14 行、`YM/Nonperturbative/HeadlineSpec.lean` 128〜138 行、`Construction.lean` 15〜31 行
式 (20)、チャンネルと係数の作り方、言っていないこと、別の終点	評	評価書 `yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）§7.5・§9.3・§10・§11・付録 A（`Channel`・`actor`・`coefficient`・`Properties.ope`）
委員会の OPE の例	評	評価の側 `yang-mills-group/YM`・版 55ba9fc の `submissions/openai-20261028/docs/examples/CommonOPE-20261028.lean` 48〜52・79・99・128・133・159〜165 行
接触項の任意性	典	導入は 4-04

この章で使った語 — 演算子積展開、チャンネル、傍観者、残りの上界、状態への一様性、接触項の延長。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：14-01 骨組みの比べ — 第 14 部では、公開された構成と本書の Lean を段ごとに比べます。