第二巻　存在 — 公開された構成を読む

第 15 部 紫外の制御の試みの記録

Kiichi, Shiori and Rin · 2026-11-14 の版 · https://computoergosum.com/principia/yang-mills/

> この PDF は Web 版の各章をそのまま刷ったものです。動かせる図は刷った時点の姿で止まっています。章の間のリンクは Web 版へ飛びます。最新の内容は Web 版に在ります。

章		頁
15-00	入口 — 紫外の制御とは何か	3
15-01	紫外の難しさ — 無次元の結合・群値の場・ゲージ	14
15-02	原典の地図 — Bałaban の計画・BBS の鎖・原典に無い二行	24
15-03	分解の言明 — 有限個の母数で閉じる類と三つの剰余	36
15-04	一リンクの熱核の類と階層模型	55
15-05	束の網の定理 — 横の縮みと母数の流れを一つの射影で	71
15-06	母数の数え方 — ループの形ごとの結合と引き込む先の類	86
15-07	背景に依る揺らぎ η — 一段ごとの吸収	100
15-08	閉じない四行と、その案	125
15-09	言えないこと・問いの索引・依存の図	161
15-10	体系の試み — 記録の繰り返しの型に名前を与える	181
15-11	入口 — 一段と一つの尺度	211
15-12	自由場の一段と多段 — 重み (1/8, 3/4, 1/8)、真空の背景、線形化	214
15-13	ブロック写像の線形化と押し出しの共分散	224

章		頁
15-14	後半（15-11〜15-13）が言えていること・言えていないこと	232

入口 — 紫外の制御とは何か

この章は案内です。§01 は既存の知見、§03 は本書の検討、§08 は本書の検討の記録です。

この部の位置づけ — この部は記録です。本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた跡を、言明・一行ずつの計算・初等的な補題・最小の系で測った数・閉じない行のまま残します。存在そのものは、2026-11-10 に公開された構成が示しました（Lean で証明されている、と委員会が評価した水準です）。その読み方は第二巻の第 6〜13 部に、二つの設計の違いは直前の第 14 部に、段ごとの比べとして在ります。

この部と前提の一覧（28-04）に出る前提——小さい場の一段、大きい場の評価と気体、段に一様な帰納、結合の括弧、全列の収束——は、本書の設計（切断に依らない決まったブロック写像で押し出した測度と、測度で決まる量による合わせ）についての言明です。公開された構成の結果は、局所場の相関と、その構成の核と表示についての言明なので、そこからこれらの前提は従いません。大きい場と気体の前提には、公開された構成が別の形（領域の履歴を持たず、段ごとに種を数え直す）で答えています（14-04）。本書の設計に固有と言えるのは、切断に依らない決まったブロック写像（段の間の整合が押し出しの等式で書ける）、押し出した測度の鏡映正値性（Lean）、測度で決まる量による合わせ（設計の選びの段階）の三つまでです（14-06）。

機械検査まで済んだ定理は第 20〜22 部に、自由場の一段の機械検査した形はこの部の後半の 15-12 に在ります。この部の部品の先で本書の検討が組んだ条件つきの含意と、その分かっている傷は §08 に書きます。

この章で分かること — 格子間隔 a を 0 に送ると、繰り込みの段の数 $\log_L(L_0/a)$ が無限に増えること。そのとき要るのは「一段で同じ形に戻る」ことを、定数を崩さずに全ての段で示すことだ、ということ。有効密度が保つべき形と三つの条件（紫外の制御の中身）。一段の評価と全段の証明の違いを一つの数（損の積）で見ること、そしてその違いを読み違える十の型。この部の語（繰り込みの段・第 23 部の階段・第 26 部の帯）の区別と、章の地図・読む順・五分類の記号。本書の検討が組んだ条件つきの含意と、その分かっている傷。

前提となる章 — 7-05 §01（繰り込み群の段の列）・7-05 §04（小さな場と大きな場）・7-07 §03（四次元：Bałaban の主定理）・26-00（合流と帯）・27-02（条件の台帳）。

先に言うこと — この部が扱うのは条件の台帳の紫外の制御の行で、16-09 図 1 の最下段、二本の道の両方の下にある土台です。移り変わりの帯（第 26 部）とは別の課題で、帯より細かい尺度の側だけを扱います。この部の中で、紫外の制御は閉じていません（存在は、公開された構成が別の設計で示しました）。この部に在るのは、何を示せばよいかの言明・一行ずつの計算・いくつかの初等的な補題・最小の系で測った数で、どれも紫外の制御の一部分を言い直すか、いくつかの条件に割るものです。この部は 26-11（紫外の制御）を割って広げたもので、26-11 には要約と各章への案内だけが残ります。記号の注意：この部の L はブロック化の倍率（多くの場合 2）、L_0 は固定した箱の一辺です（7-05 §01 と同じ）。

この章の順序

1. 何を示す問題か — 段の数・同じ形・三つの条件（紫外の制御の中身）・一段で閉じる形
2. 語の注 — 繰り込みの段・第 23 部の階段・帯・窓（表 0）
3. 無限個の段で閉じるとは — 損の積と、読み違える十の型（表 1）
4. この部の地図と読む順（表 2）
5. 五分類の記号（表 3）
6. 言えないこと
7. 五分類の表と依存グラフ（表 4）
8. 本書の検討が組んだ条件つきの含意と、分かっている傷 — 記録として

00

この章で分かること

- 紫外の制御は「一段で同じ形に戻る」を、定数を崩さずに無限個の段で示すことです（§01）。
- 一段ごとに定数が $1-\delta_k$ 倍に減るなら、K 段の後に残るのは $\prod_k (1-\delta_k)$ で、損の和 $\sum_k \delta_k$ が段数に一様に有限かどうかが全てを決めます（§03）。
- 一段の評価を書いて帰納が閉じたと読む型の読み違いが繰り返し起きます。十の型に分けて、正しい扱いと並べます（§03 表 1）。
- この部の「段」は繰り込みの一段（段 k）で、第 23 部の「階段」の段とも、第 26 部の「帯」とも別物です（§02）。

- 前半の章は、難しさ（15-01）・原典（15-02）・分解の言明（15-03）・最小の系の数（15-04〜15-06）・背景依存（15-07）・閉じない四行（15-08）・索引（15-09）・体系の試み（15-10）の順に並びます。後半の四章（15-11〜15-14）は、自由場の一段と一つの尺度で Lean まで済んだ定理です（§04）。
- 本書の検討が組んだ条件つきの含意には、分かっている傷が三つ在ります（§08）。

01

何を示す問題か — 段の数・同じ形・三つの条件

対象は、一辺 L_0 の四次元トーラスの上の $SU(2)$ の Wilson の格子で、格子間隔を a とします。L_0 は物理の尺度で固定し、動かすのは a だけです。7-05 §01 のとおり、倍率 L のブロック化を重ねて、細かい尺度から順に積分します。段の数は

$$K = \log_L \frac{L_0}{a} \longrightarrow \infty \qquad (a \to 0) \tag{1}$$

です 初 （定義から）。例：$L = 2$、$L_0/a = 2^{20}$ なら $K = 20$ で、a を半分にするたびに段が一つ増えます。段 k の後の重み（有効密度）を ρ_k と書くと $Z = \int \rho_0 = \int \rho_1 = \cdots = \int \rho_K$ です。

同じ形。 Bałaban の方法では、各段で格子を小さな場の領域 Ω とその外に分け、全ての分け方について和を取ります（7-05 §04）。有効密度が保つべき形は、記号を略して書けば

$$\rho_k(V) = \sum_{\Omega} \chi(\Omega, V)\, \zeta(\Omega^c, V)\, \exp\!\Big(-\frac{1}{g_k^2} A_\Omega(V) - \sum_{X \subset \Omega} E_k(X, V) \Big)\, R_k(\Omega^c, V) \tag{2}$$

です 典 （形はスカラー場の解説 Dimock II §1 と三次元の定理の文面による。7-05 §07）。A_Ω は小さな場の領域の上の Wilson の作用（背景場で書いたもの）、$E_k(X, \cdot)$ は連結な塊 X に局在した補正、R_k は大きな場の領域が運ぶ因子、g_k は段 k の有効結合です。

三つの条件。 紫外の制御とは、(2) の形を全ての段で、次の三つを満たして保つことです。定数 r, C, κ, c, γ は段 k にも格子間隔 a にも依りません。

- **小さい場の解析性の条件**（小さな場の局所性と解析性）。各 $E_k(X, \cdot)$ は背景場の変数の半径 r の複素近傍で解析的で、$|E_k(X)| \le C\, e^{-\kappa\, d(X)}$（$d(X)$ は X を結ぶ木の長さ）。
- **大きい場の稀さの条件。** $|R_k(\Omega^c)| \le e^{-c\, p(g_k)^2\, |\Omega^c|}$（$|\Omega^c|$ は大きな場のブロックの数、$p(g)$ は 7-05 の式 (7) の閾の倍率）。
- **結合が小さく留まる条件**（以下、結合の留まり）。有効結合の列 $g_0, g_1, \ldots, g_K$ が全て $(0, \gamma]$ に入る。

三つは紫外の制御の中身を本の言葉に直したものです。本書の検討は、四次元でこの三つのどれも示していません 仮 （27-02 の紫外の制御の行）。四次元の連続極限の存在は、公開された構成が、別の設計（各段の密度の表示を帰納の仮定として全ての段で運ぶ形）で示しました（6-03・14-01）。

一段で閉じる、の形。類 $\mathcal{K}(g;\, r, \kappa, c)$ を「(2) の形を持ち、結合 g で小さい場の解析性の条件と大きい場の稀さの条件を定数 r, κ, c で満たす有効密度の集まり」とすると、示すべきは

$$\rho_k \in \mathcal{K}(g_k;\, r, \kappa, c) \implies \rho_{k+1} \in \mathcal{K}(g_{k+1};\, r, \kappa, c), \qquad \frac{1}{g_{k+1}^2} = \frac{1}{g_k^2} - 2b_0 \ln L + r_k \tag{3}$$

です。**両側で定数 r, κ, c が同じで、動いてよいのは結合だけ**、という所が要点です。$b_0 = 22/(48\pi^2)$ は $SU(2)$ の一ループの係数（7-07 §01）、r_k は結合の流れの剰余です。(3) を「有限個の母数で閉じる類」と「一段の剰余」に割って言明し直すのが 15-03 です。

02

語の注 — 繰り込みの段・第 23 部の階段・帯・窓

この部では「段」という語を繰り込みの一段の意味だけで使います。この本には「段」「帯」「窓」を含む語がほかにもあり、語が一致すると同じものを指すように読めてしまうので、表 0 で分けておきます。

表 0　この部の語と、他の部の似た語

語	意味	使う章	この部との関係
繰り込みの段（段 k）	倍率 L のブロック化の一回。段 k の後の有効密度 ρ_k、有効結合 g_k、段の数 $K = \log_L(L_0/a)$	7-05・第 15 部	この部の「段」はこれだけ
第 23 部の階段の段（一段目・二段目…）	証明へ向かう道を四つの段に分けた整理。一段目は 0+1 次元の二重井戸の上の検討	第 23 部・26-00	別の語。この部の段の数 K とは関係がない
移り変わりの帯（帯）	弱結合から強結合へ移る尺度 $L \sim 1/\Lambda$ の前後の区間	第 26 部	この部は帯より細かい尺度だけを扱う。帯の中では結合が小さくない
窓（A_W の窓・$\hbar$ の窓・時刻の窓）	有限個のサイトの区間・パラメータの区間・時間の区間に限った試験関数	第 23・24 部	この部では使わない。粗い格子の一枚のプラケットは「粗い面」（2×2・4×4・辺 L）と書く
紫外	格子間隔 a から、結合がまだ小さい尺度 L_0 までの全ての段	26-11・第 15 部	条件の台帳の紫外の制御の行。全ての段で結合が小さい

もう一つの注意：この部の最小の系（15-04〜15-06）では、「一つの粗い面の周辺分布」を一段の写像と呼ぶことがあります。これは一つの粗い面のホロノミーの分布だけを見る写像で、

粗い格子の全ての面の同時の分布を作る本当のブロック化の一段ではありません。各章の初出で一度このことを書きます。

03

無限個の段で閉じるとは — 損の積と、読み違える十の型

一段の評価と全段の証明の違いを、一つの数で見ておきます。一段の評価が「定数 $r_{k+1} \ge r_k(1-\delta_k)$」の形でしか出ないとすると、$K$ 段の後に残るのは

$$r_K \;\ge\; r_0 \prod_{k=0}^{K-1}(1-\delta_k), \qquad \prod_{k=0}^{K-1}(1-\delta_k) \;\ge\; \exp\!\Big(-2\sum_{k=0}^{K-1}\delta_k\Big) \quad \big(0 \le \delta_k \le \tfrac{1}{2}\big) \tag{4}$$

です 初 （右の不等式は $0 \le x \le \frac{1}{2}$ で $\ln(1-x) \ge -2x$ から）。損の和 $\sum_k \delta_k$ が K に一様に有限なら、定数は K に一様に正のまま残ります。和が K とともに増えれば、定数は段の数とともに崩れます。**紫外の制御の中身は、この和を有限にすることです**。三次元の Bałaban の定理（7-05 §07 の式 (10)）と四次元の 1989 年の定理（7-07 §03）は、この形の帰納を有限体積で行ったものです 典 。四次元でこの和がなぜ素朴には有限にならないか（$\sum_k g_k^2$ が $\ln K$ で増えること）は 15-01 §01 で計算します。

紫外の制御の検討では、同じ形の読み違いが繰り返し起きます。共通の型は**一段の評価を書き、それで帰納が閉じたと読む**ことで、積 $\prod(1-\delta_k)$ を見ずに δ_k の一つだけを見ることに当たります。表 1 は、論理の型として十に分けたものです。どの行も、一段の主張と全段の主張を別の行に置けば避けられます。

表 1　一段と全段を読み違える型（論理の注意。札は数の行だけ）

型	読み違い（一行）	正しい扱い
循環	展開を閉じるための入力（各段の Hesse 行列の下界）を、その展開の出力から取る	入力と出力の両方を帰納の仮定の側に置き、外から持ち込まない
部品の取り違え	一段の評価と構造の補題を置き換えたことを、帰納の全体を置き換えたと読む	置き換えた部品と、置き換えていない帰納の部分を別の行に書く
定数の積み重ね	「定数は毎段新しく決まるので積み重ならない」と書く	それは解析性の半径が段に一様であることへの還元で、小さい場の解析性の条件に依る
最悪の幾何	大きな場の帰納を「次の段で大きいなら前の段のどれかが大きい」で回す	一段ごとに定数を失い、15-01 の (4) の型で k 段で 0 に崩れる 初 。揺らぎの積分で硬さを引き継ぐ一段の安定性が要る
細かい格子での良さ	「良い枠」を殻の全てのプラケットが小さいことで定義する	各点で確率 $1-q$（$q>0$ 固定）なら n 点で $(1-q)^n \to 0$ 初 。良さは繰り込んだ尺度で定義する

型	読み違い（一行）	正しい扱い
不等式の向き	自由エネルギーの差の上界に、分配関数の変分原理（下界しか与えない）を使う	上界には分配関数の上界か、条件つきの測度の制御が要る
裸の結合のコスト	有限作用の局所化した配位が在ることから、走る結合の $e^{-c/g^2(L)}$ を出す	在るだけなら裸の結合でのコストで、$a \to 0$ で消える。走る結合のコストには一様な制御が要る
方式依存の数	一段の F^2 の係数を、普遍な一ループの係数と比べて検査する	一段の係数はブロック化の方式に依る。普遍なのは多段を重ねた対数の係数
仮定の脱落	四次元の紫外安定性を無条件の定理として引く	結合の留まりの仮定つきで、それを外す基本の不等式（Bałaban 1989 の Theorem 2）は未公刊 典 （15-02 §01）
定義域の見落とし	裸の結合から最後の段の結合への写像の連続性を「構成から従う見込み」で済ませる	有効結合は前の段が小さい間しか定義されない。定義域の中の連続性と中間値の議論を分けて書く（15-03 結合の小ささの帰納の補題）

表の上の四行は同じ形です。一段の版から全段の版を出すには「定数が段で崩れない」という仮定が要り、それを規則の側に明示しないと、一段の証明が全段の証明に見えます。15-03 の規則の束は、この注意を規則の書き方に入れたものです。

04 この部の地図と読む順

表 2 は第 15 部の章です。前半（15-00〜15-10）が紫外の制御の検討の記録、後半（15-11〜15-14）が自由場の一段と一つの尺度で Lean まで済んだ定理です。水準の印は〔二〕＝数学科・物理学科の二年生で読める、〔三〕＝三年生以上（測度・作用素・ノルムの評価を使う）、〔研〕＝研究の水準（検討の組み立てをそのまま追う）。

表 2　第 15 部の章

章	題	一行	前提	水準
15-00	入口 ― 紫外の制御とは何か	段の数・同じ形・三つの条件・読み違える型・語の注	7-05・7-07	〔二〕
15-01	紫外の難しさ	無次元の結合で損の和が対数で発散・群値の場に無い重みの性質・ゲージの張り替え	15-00	〔二〕〜〔三〕
15-02	原典の地図	Bałaban の連作の五段・BBS の鎖・捩れた小さな四次元トーラスの紫外の言明・原典に無い二行	15-01	〔三〕
15-03	分解の言明	有限個の母数で閉じる類と三つの剰余・結合の小ささの帰納の補題・横の縮みの帳簿・問い	15-01・15-02	〔三〕
15-04	一リンクの熱核の類と階層模型	母数一つで閉じる類・Migdal–Kadanoff の不変な曲線と縮み 1/16	15-03	〔二〕〜〔三〕

章	題	一行	前提	水準
15-05	束の網の定理	横の縮みと母数の流れを一つの射影で・箱の表・二段	15-03・15-04	〔二〕〜〔三〕
15-06	母数の数え方	ループの形ごとの結合・判定式・引き込む先の類	15-04・15-05	〔三〕
15-07	背景に依る揺らぎ η	背景と揺らぎの分解の補題・揺らぎの期待値の閉じ（BBS の (iii)）の群版・背景に依らない揺らぎの一段の補題・局所結合のずらし	15-02・15-03	〔三〕
15-08	閉じない四行と、その案	大きな場込みの剰余・観測量の源・η の多段・ゲージ固定	15-03・15-07	〔三〕〜〔研〕
15-09	言えないこと・問いの索引・依存の図	部全体の言えないこと・紫外の問い・Lean の対応表	全章	〔二〕
15-10	体系の試み	優勢行列・符号の損・代表の幾何・二重付値・錐の計算法（検討。本筋ではない）	15-05・15-08	〔三〕〜〔研〕
15-11	入口 ― 一段と一つの尺度	後半の章の範囲（線形・真空・一つの尺度）	19-04	〔二〕
15-12	自由場の一段と多段	道の核で自由場を押した記号の漸化式・段に一様な縮み（Lean）	15-11・19-04	〔三〕
15-13	ブロック写像の線形化と押し出しの共分散	局所性・ゲージの共変性・単位元のまわりの線形化・押し出しの共分散（Lean）	15-12	〔三〕
15-14	後半（15-11〜15-13）が言えていること・言えていないこと	後半の定理を範囲と Lean の宣言とともに一つの表に	15-11〜15-13	〔二〕

読む順は三本あります。**最短**：15-00 → 15-03 → 15-09（何を示せばよいかと、何が残っているか）。**計算の筋**：15-04 → 15-05 → 15-06（最小の系で、分解に出る数がどう測れるか）。**壁の筋**：15-02 → 15-07 → 15-08（原典がどこで止まり、何が閉じないか）。15-01 はどの筋の前にも読めます。

第 23 部の壁との関係。第 23 部の一段目（0+1 次元の二重井戸の上の検討）の芯の Poincaré の一様性の仮定には、すでにある二つの支え方のほかに、粗い鎖の影響（Dobrushin の条件）で支える三つ目の道の候補があり、その影響の列和は $\hbar \in [10^{-5}, 1]$ の 23 点で $\rho_{\mathrm{col}} \le 0.176 < 1$ と押さえられています〔計算機援用（倍精度・区間演算ではない）〕（外向きの余裕と浮動小数の関数の精度の仮定の上。点の間と $\hbar < 10^{-5}$ は 読 ）。これは第 23 部の時間の側の道の部品で、この部の繰り込みの段とは独立です（語の区別は表 0）。

```
05
```

五分類の記号

この部の全ての言明に、次の五つの札のどれかを付けます（本全体と同じ五分類）。札は「どう確かめたか」の印で、言明の重さの印ではありません。

表 3　五分類の札（この部での使い方）

札	意味	この部での例
初	紙で証明を置いた（初等的な証明）	結合の小ささの帰納の補題・背景と揺らぎの分解の補題・束の網の有理数・一ループの主項の代数（「初・一ループの水準」と書く）
典	原典で確かめた既知	Bałaban の条件つきの紫外安定性の定理（Bałaban 1989 の Theorem 1）・BBS の Lemma A.6.1
機	計算機援用（区間演算）	15-04 の階層模型の管と鎖。倍精度の浮動小数に外向きの余裕を付けただけの評価は、〔計算機援用（倍精度・区間演算ではない）〕と書き分ける
読	数値の読み・物理の見立て	源の値・有限の β の縮み・Monte Carlo との一致
仮	仮定・未達の言明	紫外の制御・分解の言明・捩れたトーラスの紫外の言明

Lean で検査した部品は札ではなく外の列に書き、15-09 の対応表にまとめます。この部の Lean の部品は、どれも実数の有限和や代数の補題で、格子・群・測度は形式化していません。

06

言えないこと

(a) この部の中で、紫外の制御は閉じていません。この章も、この部のどの章も、紫外の制御の三つの条件を四次元でも二次元でも示していません。四次元の連続極限の存在は、公開された構成が別の設計で示しました（第 6〜13 部）。

(b) (4) は一段の損が掛け算で効くときの算術で、実際の有効結合の列や実際の定数についての定理ではありません。

(c) 表 1 の十の型は論理の注意で、どれかの既存の議論が誤りだという主張ではありません。

(d) 表 2 の水準の印と読む順は本の整理で、章の中身の難しさの判定ではありません。

07

五分類の表と依存グラフ

表 4　この章の行（この章の行に Lean の欄はありません）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲
[01]	段の数 $K = \log_L(L_0/a) \to \infty$（(1)）	初	§01（定義）	L_0 を固定
[02]	有効密度の形 (2)（小さな場・大きな場の和）	典	§01・7-05 §04・§07	形の水準（Dimock II・三次元の定理の文面）
[03]	紫外の制御の三つの条件と一段で閉じる形 (3)	仮	§01・27-02 の紫外の制御の行	a から L_0 まで・定数は k, a に依らない
[04]	損の積の下界 $\prod(1-\delta_k) \geq e^{-2\sum\delta_k}$（(4)）	初	§03	$0 \leq \delta_k \leq \frac{1}{2}$
[05]	三次元と四次元（1989 年）の Bałaban の定理は (3) の型の帰納	典	§03・7-05 §07・7-07 §03	有限体積・四次元は結合の留まりの仮定つき
[06]	読み違える十の型と、最悪の幾何・細かい格子での良さの二つの算術	初	§03 表 1	論理の型。数の行は $q > 0$ 固定・一段の損が掛け算で効くとき

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
[01] 初  段の数 K → ∞                                  L₀ を固定
[02] 典  有効密度の形 (2)
[03] 仮  紫外の制御の三条件と一段で閉じる形 (3) ⟸ [01][02]  a から L₀ まで
[04] 初  損の積の下界 (4)                               0 ≤ δ ≤ 1/2
[05] 典  Bałaban の定理は (3) の型の帰納 ⟸ [02]          有限体積・結合の留まりを仮
[06] 初  読み違える十の型 ⟸ [04]                        論理の注意
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。紫外の制御の三つの条件の行は仮定の行で、紫外の制御を言い直したものです。この章の節点に、紫外の制御が示されたという節点はありません。

08

本書の検討が組んだ条件つきの含意と、分かっている傷

この部の部品の先で、本書の検討は、押し出した測度の族についての条件つきの含意（鎖）を組みました（28-01 部分列の極限の含意・28-02 全列の収束の含意）。決まったブロック写像で細かい格子の測度を粗い格子へ押し出し、この含意の前提（前提の一覧 28-04 の、小さい場の一段・大きい場の評価と気体・段に一様な帰納・結合の括弧など）の下で、押し出した測度の部分列の極限が在り、有限の格子の性質（稀さ・鏡映正値性・対称・観測量の分かれ方）がその極限に移る、という形です 仮 。四次元の存在は公開された構成が別の設計で示したので、この含意は存在の言明としてではなく、本書の設計が何を前提に置いたかの記録として読みます。記録として、分かっている傷を三つ書いておきます。

(a) **二つの部分が、定理の中で繋がっていない。**鎖の Lean の定理は、実効の結合の関数についての補題（任意の目標の値に合わせる点が括弧の中に取れる）と、測度の族についてのコン

パクト性と極限への移しの、二つの並びです。定理の中では、細かい測度の族も裸の結合の列も任意に取れ、二つを結ぶ欄はありません。繋ぐのは「測度で決まる量で裸の結合の列を合わせる」という条件で、合わせた列の存在は、この含意の中では条件のままです。辺 3 の設計で粗い面の平均の期待値を合わせた列が在ること（14-03）は別の定理で、それを鎖の定理に繋ぐ言明はありません。

(b) **合わせなしでは、収束の結論に中身が無い**。押し出した測度の部分列の収束は、どの確率測度の族にも、コンパクト性だけで成り立ちます。この含意の中身は、有限の格子の性質を極限へ移すところに在ります。全列の収束は結論ではなく、前提の側に置かれていました。

(c) **大きい場の気体の両立の測り方が二通り在る**。大きい場の気体の前提で、ポリマーどうしの両立を「隣接しない」で測る形と「台が交わらない」で測る形が在り、文での記述と Lean の言明が別の形を取っていました。二つは別の気体です。前提をどちらの形で書くかは決まっていません。

三つとも、公開された構成の結果とは関わりなく残る、本書の検討の側の傷です。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 段の数が $\ln(1/a)$ で増えること、損の積の下界 (4)、読み違える型のうち数の行の算術	実際の有効密度の列で、損の和が有限であること
典 有効密度の形 (2) と、Bałaban の定理が (3) の型の帰納であること	四次元で結合の留まりを外した帰納
仮 紫外の制御を三つの条件として言明する形	三つの条件のどれも（四次元の存在は、公開された構成が別の設計で示した）
仮 本書の検討が組んだ条件つきの含意の形と、分かっている傷三つ（§08）	含意の前提のどれも。鎖の二つの部分を繋ぐ言明

出典と再現

もの	種別	出典・道具
段の列・有効密度の形・小さな場と大きな場	典	7-05 の出典表（J. Dimock, The renormalization group according to Balaban I・II・III, arXiv:1108.1335, 1212.5562, 1304.0705。T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 102 (1985) 255–275）
四次元の条件つきの紫外安定性の定理	典（要旨と序文 p.355–356）	T. Bałaban, Large field renormalization. II, Comm. Math. Phys. 122 (1989) 355–392（7-07 の出典表）

もの	種別	出典・道具
(1)(4)・表 1 の数の行	初	この章の本文の算術
表 1 の十の型・表 0・表 2	本書の検討	本書の検討の記録（紫外の制御の検討の整理）

この章で使った語 — 紫外の制御・段の数・同じ形・一段で閉じる類・小さい場の解析性の条件・大きい場の稀さの条件・結合が小さく留まる条件・損の積・条件つきの含意・繰り込みの段・粗い面・五分類。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：15-01 紫外の難しさ — なぜ四次元では損の和が素朴には有限にならないか。

紫外の難しさ — 無次元の結合・群値の場・ゲージ

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「典」の札）。本書の検討の前提として、この部に置いています。

この部は、本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた記録です。存在そのものは第二巻の第 6〜13 部を、二つの設計の違いは第 14 部を見てください。部の位置づけは 15-00 にあります。

この章で分かること — 四次元では結合が無次元なので、一段ごとの g_k^2 の大きさの損の和が段数の対数で発散し、損を結合の流れに正確に吸収した類を作らなければならないこと（一行ずつの計算）。三次元ではこの和が有限で、結合の流れを追う必要が無いこと。群に値をとる場では、平らな場の重みの道具のうち「揺らぎの期待値で一段閉じる」性質が無いこと。ゲージ不変な関数は軌道の向きに凸性を持たず、ゲージは尺度ごとに張り替えるしかなく、その境目も評価に入ること。難しさの三つの源と、ゲージの無い二次元の模型でも止まっていること。

前提となる章 — 15-00 §01（三つの条件と一段で閉じる形）・7-05 §06（結合の走り）・7-05 §05（局所ゲージ）・24-07 §05（難しさの三つの源）・24-06 §07（重みの四性質）。

先に言うこと — この章の計算は一ループの流れを正確な式と見なした算術で、実際の有効結合の列についての定理ではありません。難しさを三つ（無次元の結合・群値の場・ゲージ）に分けますが、三つは独立ではなく、15-07 と 15-08 で一つの所（揺ら�ぎの測度が背景に依ること）に集まります。

この章の順序

1. 難しさ 1：無次元の結合 — 損の和が対数で発散する（式 (1)〜(5)）・三次元との対比
2. 難しさ 2：群に値をとる場 — 重みの四性質と、群で足りない揺らぎの期待値の閉じ（BBS の (iii)）
3. 難しさ 3：ゲージ対称性 — 軌道の向きの凸性・尺度ごとの張り替え
4. 難しさの源と、ゲージの無い模型 — 三つの源・二次元 $O(N)$（表 1）

5. 言えないこと

6. 五分類の表と依存グラフ（表 2）

00

この章で分かること

- 四次元では一段の損 g_k^2 の和が $\ln K$ で発散するので、その部分は結合の流れに正確に吸収し、残りを和の有限な大きさ（$g_k^{2+\delta}$ の型か幾何級数）に閉じ込める必要があります（§01）。
- 三次元では $\sum_k g_k^2$ が有限で、一段の損を誤差として運べます（§01）。
- 群に値をとる場では、重みの四性質のうち「揺らぎの期待値で一段閉じる」（揺らぎの期待値の閉じ）が無く、揺らぎの測度が背景に依ります（§02）。
- ゲージ不変な関数の最小点では軌道の向きの Hesse 形式が 0 で、凸性の道具はゲージを消さないと使えません。ゲージはブロックの大きさでしか効かず、尺度ごとに張り替える境目も評価に入ります（§03）。
- 壁の核は「群値の場 × 無次元の結合 × 大きな場」にあり、ゲージの無い二次元 $O(N)$ σ 模型（$N \geq 3$）でも紫外の構成は止まっています（§04）。

01

難しさ 1：無次元の結合 — 損の和が対数で発散する

この節は既存の知見（一ループの流れの算術と三次元との対比）の整理です。導入は 7-06 §02 にあります。

四次元では結合 g に長さの次元が無く、細かい尺度で結合を弱めるのは漸近自由だけです（24-07 §01）。一ループの流れを段に刻むと、$b := 2b_0 \ln L > 0$ として

$$\frac{1}{g_{k+1}^2} = \frac{1}{g_k^2} - b \tag{1}$$

です 典 （7-05 §06 の式 (9)。一ループだけを残した式）。以下、(1) を正確な式と見なして、損の和を一行ずつ数えます。

(a) 結合の列。最も粗い段の結合を $g_K = g_*$ に止め、粗い端から数えた段 $j = K - k$（$j = 1, \dots, K$）で書くと、(1) を j 回使って

$$\frac{1}{g_{K-j}^2} = \frac{1}{g_*^2} + bj, \qquad \frac{1}{(b+g_*^{-2})\,j} \;\le\; g_{K-j}^2 \;\le\; \frac{1}{bj} \quad (j \ge 1) \tag{2}$$

です 初 。左の不等式は $1/g_*^2 + bj \le (1/g_*^2 + b)j$（$j \ge 1$）から、右は $1/g_*^2 > 0$ を落としただけです。細かい側ほど結合は小さいが、$1/j$ でしか小さくなりません。

(b) 和。 $1/x$ の積分と比べて $\ln(K+1) \le \sum_{j=1}^{K} \frac{1}{j} \le 1 + \ln K$ なので、(2) を足して

$$\frac{\ln(K+1)}{b + g_*^{-2}} \;\le\; \sum_{k=0}^{K-1} g_k^2 \;\le\; \frac{1 + \ln K}{b} \tag{3}$$

です 初 。**一段ごとに g_k^2 の大きさの損があると、その和は段数の対数で増え続けます。**例：$SU(3)$・$L = 2$ なら $1/b = 1/(2b_0 \ln 2) \approx 10.4$ で、K を倍にするたびに上界が $(\ln 2)/b \approx 7.2$ 増えます。7-05 表 4 の部分和が K の倍ごとに約 7.2 増えるのと合います（算術）。

一段の係数の実測（注）。(1) の b は一ループの係数を正確な式と見なしたもので、ブロック化の規則を一つ決めて一段を測ると、一段目の下がり方は一ループの係数と一致しません。粗いリンク（細かいリンク L 本の線の上の積）を全て固定する周期の網で、$SU(2)$・$\beta = 4/g^2$ の粗い作用の長波長の係数を一段（$L = 2$）流すと、$\beta' - \beta = -0.745$（Manton の作用）・-1.078（熱核）・-1.136（Wilson）で、向きは漸近自由の向き、大きさは β の単位の一ループの値 $8b_0 \ln 2 = \frac{11}{3\pi^2} \ln 2 \approx 0.2575$ の 2.9〜4.4 倍でした 読 （一ループ・$\beta \to \infty$ の $O(1)$・可換の背景・横の粗いトーラス 6^3・第 4 軸の粗い長さ ≤ 32 の列から波数 0 へ外挿）。このうち作用に依る定数（Manton で -0.31、Wilson で -0.70、熱核ではさらに Van Vleck の前因子の $-\frac{1}{3}$）は、二段目以降の作用（もう Wilson でも Manton でもない）では別の値になります。倍率を 2 から 3 にしたときの変化は、作用に依らない部分で -0.254 で、$-\frac{11}{3\pi^2} \ln \frac{3}{2} \approx -0.151$ の 1.7〜1.9 倍です 読 （倍率 3 の波数 0 は二点の外挿）。したがって (1)〜(5) の算術を一段目の数で読むなら、一段の β の下がり 0.2575 を 0.75〜1.14 に読み替える必要があり、段を重ねたときの係数は測っていません。$\ln L$ の係数が小さい倍率で合わないのは、線の上の積を固定する規則が粗い尺度より長い波長の揺らぎまで積分するためと読めます 読 （15-03 §02）。熱核と Manton の差 $-\frac{1}{3}$ と、Wilson と Manton の差 $\frac{5}{3}t$（t は $U(1)$ の Wilson の値）は恒等式です 初 （s^2 の係数の勘定。係数の算術は Lean：`tadpole_weights`・`vanvleck_ratio`・`shift_bounds`（$0.2575 < \frac{11 \ln 2}{3\pi^2} < 0.2576$）・`beta_shift_of_inv_sq`（仮定 $1/g'^2 = 1/g^2 - 2b_0\ell$））。

(c) 積。一段ごとに定数（解析性の半径・減衰の率・Hesse 行列の下界など）が $1 - cg_k^2$ 倍に減るとすると、$1 - x \le e^{-x}$ と (3) の左から

$$\prod_{k=0}^{K-1} \bigl(1 - c\,g_k^2\bigr) \;\le\; \exp\Bigl(-c \sum_{k=0}^{K-1} g_k^2\Bigr) \;\le\; (K+1)^{-c/(b+g_*^{-2})} \;\longrightarrow\; 0 \qquad (K \to \infty) \tag{4}$$

です 初 （$cg_k^2 \le 1$ の範囲で）。$K = \log_L(L_0/a)$ なので、定数は $\ln(1/a)$ の冪で 0 に向かいます。ゆっくりですが、一様ではありません。

(d) 和が有限になる大きさ。損が $g_k^{2+\delta}$（$\delta > 0$）の大きさなら、(2) の右から

$$\sum_{k=0}^{K-1} g_k^{2+\delta} \;\le\; \sum_{j=1}^{\infty} (bj)^{-1-\delta/2} \;=\; b^{-1-\delta/2}\,\zeta\!\left(1+\tfrac{\delta}{2}\right) \;<\; \infty \tag{5}$$

で、K に一様に有限です 初 。$\delta = 2$（損が g_k^4、一ループの次の大きさ）なら $\pi^2/(6b^2)$ です。

だから要ること。(4) と (5) を合わせると、一段の後に g_k^2 の大きさで動く部分を「誤差」として運ぶことはできません。その部分は**類の母数そのものの動き**にしなければなりません。具体的には、類 $\mathcal{K}$ を結合 g を母数に持つ形で定義し、一段の後の有効作用から主要な項（Wilson の項、F^2 の向き）の係数を読み取って g_{k+1} と定めます。こうすると g_k^2 の大きさの部分は、15-00 の (3) の結合の流れに正確に吸収されます。吸収した後に残る損（局在した補正 E_k の定数の劣化など）は、(5) の型の和の有限な大きさ——代表的には $O(g_k^4)$、または尺度について幾何級数で縮む無関係な項——に閉じ込めなければなりません 初 （(4)(5) の算術から出る要請。一段の損が掛け算で効く場合）。この要請を言明の形に書き直したのが 15-03 の分解 です。

結合の流れの側は事情が違います。15-00 の (3) の剰余 r_k は $1/g^2$ の変数で $|r_k| \le C g_k^2$ の大きさ（二ループの大きさ）を許してよく、その和は (3) のとおり $\ln K$ で増えますが、$1/g_k^2$ 自身が bK の大きさで増えるので結合の列は崩れません。必要なのは列が $(0, \gamma]$ に留まることで、それを 15-03 の結合の小ささの帰納の補題 で扱います。

三次元との対比。三次元では g^2 が長さの -1 乗の次元を持ち、段 k の無次元の結合は $g^2 L^k a$ の形で細かい側に幾何級数で小さく、$\sum_k g_k^2$ は有限です（7-05 表 4 で 2 に収まる） 典 。発散しうる型は有限個で、要る相殺項は定数一つ、半単純性から有効作用に育つ変数（relevant な変数）が無い、と Bałaban 1985 は書きます（7-06 §05） 典 。三次元では一段の g_k^2 の損を誤差として運べ、結合の流れを追う必要がありません。四次元では F^2 の項がちょうど marginal で、追わなければなりません。これが 24-07 表 3 の難しさの源のうち、無次元の結合という源の、紫外の側の正確な形です。

「吸収」が最も小さな場でどう見えるか——一リンクの熱核の類では損が望遠鏡和になること——は 15-04 §01 で見ます。

02

難しさ 2：群に値をとる場 — 重みの四性質と、群で足りない「揺らぎの期待値の閉じ」

格子の辺の変数 U_l は群 G の元です。群の元は拡大縮小できず、足して割ることもできません（7-05 §05 の (i)(ii)）典 。群はコンパクトなので場は有界ですが、「大きな場」は群の遠い側（単位元から遠い所）で、そこでは一リンクの Wilson の重みの曲率が負になります（24-06 §03 の一リンクの Wilson の重みの命題）初 （24-06 に証明）。大きな場は凸性でなく稀さで払うしかありません。

平らな場の道具。スカラー場の繰り込みでは、大きな場の稀さを重み（regulator）$\tilde{G}(X,\phi)$ のノルムに入れ、一段の期待値で閉じることを次の四つの性質から出します 典 （Bauerschmidt–Brydges–Slade の本の付録 A.6 の補題 A.6.1（活動のノルムの一段の評価）。四性質は §A.6.2 の regulator の望ましい性質として並ぶもの。24-06 §07。原典の鎖は 15-02 §04）。

1. 交わらない集合の上で積に分かれる。
2. $\tilde{G}(X,\phi+\phi') \le \tilde{G}^2(X,\phi)\,\tilde{G}^2(X,\phi')$（場の和について）。
3. $\mathbb{E}_+\tilde{G}^t(X) \le 2^{|B(X)|}$（揺らぎの期待値で一段閉じる）。
4. $\tilde{G}^t \le \tilde{G}_+$（次の段の重みで押さえられる）。

ここから一段の評価 $\|\mathbb{E}_+\theta K(X)\|_{\tilde{G}_+} \le 2^{|B(X)|}\|K(X)\|_{\tilde{G}}$（活動のノルムの一段の評価）が出ます。場の和の劣乗性は場の加法 $\phi+\phi'$ を、揺らぎの期待値の閉じは揺らぎが背景に依らない Gauss 変数であることを使っています。補題の証明で揺らぎの期待値の閉じは揺らぎだけの関数の期待値として使われ、その測度は背景 ϕ に依りません 読 （証明の鎖を読んだもの）。

群の上で何が残り、何が足りないか。場の和の劣乗性は、場の和 $\phi+\phi'$ を「背景 × 揺らぎ」$U_l = W_l e^{A_l}$ に替えた版が三角不等式と共役不変性だけで立ちます（背景と揺らぎの分解の補題と、その系の重みの分解。15-07 §02）初 。足りないのは揺らぎの期待値の閉じです。群では揺らぎの測度が背景に依ります（背景場の中の伝播関数、7-07 表 1 の土台の論文の題）。だから $\mathbb{E}_+G^t$ の評価に背景の正則性が要り、背景が群の遠い側にある大きな場の領域では、揺らぎは背景の小さな摂動になりません。測度が背景に依る分を η_k と書き、揺らぎの期待値の閉じと次の段への単調性の群版を言明の形で置き、η_k をどう吸収するかを見るのが 15-07 です。スカラーの場では測度が背景に依らないので $\eta_k = 0$ で、この問題そのものがありません。

```
03
```

難しさ 3：ゲージ対称性 — 軌道の向きの凸性と、尺度ごとの張り替え

軌道の向きには凸性が無い。ゲージ変換の群は有限の格子ではコンパクトな群の積で、作用 V はゲージ不変、つまり軌道に沿って一定です。

軌道の向きの平坦性の命題。V を配位の空間（コンパクトな多様体）の上の滑らかなゲージ不変な関数、x_0 を V の最小点とする。x_0 を通る軌道の接ベクトル $\xi \neq 0$ について $\mathrm{Hess}\, V(x_0)(\xi,\xi) = 0$。とくに、そのような ξ が一つでも在れば、$\mathrm{Hess}\, V \geq m\, g$（$m > 0$）は成り立たない。

初 証明。$\gamma(t) = e^{t\eta} \cdot x_0$（$\eta$ はゲージ変換のリー環の元で $\gamma'(0) = \xi$）とすると $V(\gamma(t)) = V(x_0)$ が全ての t で成り立つ。$dV(x_0) = 0$ なので $\frac{d^2}{dt^2} V(\gamma(t))|_{t=0} = \mathrm{Hess}\, V(x_0)(\xi,\xi) + dV(x_0)(\nabla_\gamma \gamma') = \mathrm{Hess}\, V(x_0)(\xi,\xi)$、左辺は 0。∎

凸性に頼る道具（Bakry–Émery・Brascamp–Lieb）は、軌道の向きを消さないと使えません 読 （物理の見立て。24-07 §05 の「理論」の段落と同じ）。消すにはゲージを固定しますが、全ての配位で同時に効く連続な大域のゲージ固定は存在しません（Gribov 1978・Singer 1978）典 （書誌のみ。7-05 §05）。

ゲージはブロックの大きさでしか効かない。二次元の一辺 ℓ のブロックで完全軸性ゲージをとると、プラケットの条件 $\|U_{\partial p} - 1\| < \varepsilon$ から辺について $\|U_b - 1\| < \ell\, \varepsilon$ しか出ません（7-05 §05）初 （7-05 に証明）。$\ell\varepsilon$ が 2 を越えると何も言わないので、ゲージはブロックの大きさの範囲で、尺度ごとに選び直すことになります。三次元の Bałaban の定理は、ブロックごとの軸ゲージを Faddeev–Popov の方法で入れています（7-06 §05）典 。四次元の論文での具体的な選び方は、本文で確かめていません（7-07 表 3）。

張り替えの境目。段 k のゲージと段 $k+1$ のゲージは別のもので、張り替えは場に依るゲージ変換です。その Jacobian（Faddeev–Popov の行列式）と、隣り合うブロックの境目に出る項も有効作用に入り、15-00 の (3) の類の中で、§01 の意味で和の有限な損として評価しなければなりません 読 （物理の見立て。要る評価の形を述べたもの）。連続の切断で構成した MRS も、大きな場の領域の軸ゲージと小さな場の領域の背景場に依るゲージを継いでいて、同じ型の継ぎ目を持ちます（7-07 §06）典 。木のゲージでは張り替えの Jacobian が定数になり、費用が別の所（ゴースト行列式と境目の結合）に移る、という整理は 15-08 のゲージの張り替えの境目の行にあります。

04

難しさの源と、ゲージの無い模型

三つの難しさを 24-07 表 3 の難しさの源の言葉に写すと表 1 になります。紫外だけを扱うこの部では、全ての段で結合が小さいので、尺度をつなぐ展開の欠如は現れません 読 （物理の見立て）。

表 1　難しさと、難しさの三つの源の対応（読み。源の名は 24-07 表 3）

難しさの源	中身（一行）	紫外の側での形	この部の章
無次元の結合という源	結合が無次元	F^2 の項がちょうど marginal で、g_k^2 の損の和が $\ln K$ で発散する（§01 の (3)(4)）。損を結合の流れに吸収した類が要る	15-03・15-04〜15-06
尺度をつなぐ展開の欠如	紫外と赤外をつなぐ展開が無い	現れない（全ての段で結合が小さい）。第 26 部の帯の課題	—
大域のゲージ固定の欠如	大域のゲージ固定が無く、大きな場が凸性で制御できない	一段の中に分けると、群値の場の揺らぎの期待値の閉じ（§02）・軌道の向きの凸性（§03 軌道の向きの平坦性の命題）・張り替えの境目（§03）	15-07・15-08

ゲージの無い模型でも止まっている。二次元の $O(N)$ σ 模型（$N \geq 3$）は、ゲージが無く、結合が無次元で漸近自由な模型ですが、紫外の極限の構成は未解決問題に挙げられています 典 （Rivasseau 2000 の総説の本文 §II.1.1。多くの専門家が試みて成功していない、と書かれる）。同じ所で、この模型の階層版の構成は済んでいるとされます（Gawędzki–Kupiainen, Comm. Math. Phys. 106 (1986) 533） 典 （総説の文献表）。有限体積に限っても構成が無いこと、漸近自由な $N \geq 3$ に限ることは、原文の語ではなく本書の読みです 読 。$O(4)$ の場合は場が $S^3 = SU(2)$ に値をとる主カイラル模型です。Bałaban の方法の移植は、2024 年の時点で変分問題と背景場の段までです（Goswami、二次元の非線形 σ 模型の一族。Dybalski–Stottmeister–Tanimoto、二次元 $O(4)$：Lie 群上の変分法で臨界点の方程式を出し、縮小写像で解く） 典 （どちらも抄録）。一方、フェルミオンの二次元 Gross–Neveu（質量のある場合）は構成されています（24-07 表 3） 典 。この模型を試験台に使う案は 15-02 §05 にあります。

対比からの読み 読 （物理の見立て）：壁の核は「群（非線形の多様体）に値をとる場」「無次元の結合（無次元の結合という源）」「大きな場」の組にあり、ゲージ不変性はその上に乗る層と読めます。ゲージ不変性が本質的な困難でないとは言いません。

05

言えないこと

(a) §01 の (1)〜(5) は一ループの流れ (1) を正確な式と見なした算術で、実際の有効結合の列についての定理ではありません。「損を流れに吸収した類が要る」は、損が一段ごとに掛け算

で効く場合の要請です。

(b) §02 は重みの四性質のうち揺らぎの期待値の閉じが群で足りないことを述べるだけで、揺らぎの期待値の閉じの群版を示していません。

(c) 「壁の核は群値の場 × 無次元の結合 × 大きな場」は二次元の模型の既知の状況からの見立てで、ゲージ不変性が本質的な困難でないとは言いません。

(d) 張り替えの境目が和の有限な損として評価できるかは、示していません（要る評価の形を述べただけ）。

(e) §01 の一段の係数の実測は、一つの規則（粗いリンクを線の上の積で全て固定する周期の網）の一段目の一ループの数で、段を重ねたときの係数・有限の β・非可換の背景は測っていません。倍率 3 の値は二点の外挿です。

06

五分類の表と依存グラフ

表 2　この章の行（この章の行に Lean の欄はありません）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲
[01]	一ループの流れ (1)	典	§01・7-05 §06	一ループだけを残した式
[02]	結合の列の上下界 (2) と和の対数の増え方 (3)	初	§01	一ループの流れ (1) の下で
[03]	損 cg_k^2 の積は $(K+1)^{-c'} \to 0$（(4)）、損 $g_k^{2+\delta}$ の和は有限（(5)）	初	§01	(1) の下・$cg_k^2 \le 1$・$\delta > 0$
[04]	三次元では $\sum g_k^2$ が有限で、相殺項は定数一つ	典	§01・7-05 §06・7-06 §05	三次元
[05]	重みの四性質と一段の評価（活動のノルムの一段の評価）	典	§02・24-06 §07（付録 A.6.2 の本文）	平らな場
[06]	群の遠い側で一リンクの Wilson の重みの曲率は負	初	§02・24-06 §03（一リンクの Wilson の重みの命題）	一リンク
[07]	軌道の向きの平坦性の命題：ゲージ不変な関数の最小点で軌道の向きの Hess は 0	初	§03	軌道の接ベクトル $\xi \neq 0$
[08]	連続な大域のゲージ固定は無い	典	§03（書誌のみ）	—
[09]	尺度ごとの張り替えの境目の項も、和の有限な損として評価が要る	読	§03（物理の見立て）	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲
[10]	二次元 $O(N)$ σ 模型の紫外の構成は未解決問題に挙げられ、階層版は構成済み。移植は背景場の段まで	典	§04（総説の本文 §II.1.1・文献表と抄録）	探した範囲で
[11]	壁の核は群値の場 × 無次元の結合 × 大きな場	読	§04（物理の見立て）	—
[12]	一段の係数の実測：周期の網の一段目で $\beta' - \beta = -0.745 \sim -1.136$（一ループの値の 2.9〜4.4 倍）、倍率 2→3 の変化は 1.7〜1.9 倍。作用の差 $-\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3} t$ は恒等式	読・初（恒等式）	§01	$SU(2)$・一ループ・可換の背景・横 6^3・波数 0 は外挿・倍率 3 は二点・一段目だけ

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
[01] 典  一ループの流れ (1)
[02] 初  結合の列 (2)・和の対数 (3) ⟸ [01]          一ループの流れ
[03] 初  積 → 0 (4)・和は有限 (5) ⟸ [02]            cg² ≤ 1・δ > 0
[04] 典 3D      三次元では和が有限
[05] 典  重みの四性質
[06] 初  遠い側で曲率が負                           一リンク
[07] 初  軌道の向きの平坦性の命題
[08] 典  大域のゲージ固定は無い
[09] 読  張り替えの境目 ⟸ [03][07][08]
[10] 典  二次元 O(N) は未構成
[11] 読  壁の核 ⟸ [03][04][06][10]
[12] 読  一段の係数の実測 ⟸ [01][02]                一つの規則・一段目・一ル
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。この章の節点に、紫外の制御が示されたという節点はありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 一ループの流れの下で、一段の損 g_k^2 の和が $\ln K$ で発散し、損 $g_k^{2+\delta}$ の和は有限であること（(2)〜(5)）。だから損を流れに吸収した類が要ること。軌道の向きの平坦性の命題	実際の有効結合の列についての定理。吸収した類の構成
典 三次元の和の有限性・重みの四性質・大域のゲージ固定の不在・二次元 σ 模型の構成が未解決問題に挙げられていることと移植の段	揺らぎの期待値の閉じの群版。四次元の論文のゲージの選び方
読 張り替えの境目の評価の形、壁の核の読み	境目の評価そのもの
読 一段の係数の実測（周期の網の一段目の一ループ。向きと桁は一ループの値と合い、係数は 2.9〜4.4 倍）	段を重ねたときの係数。平均型の規則での比べ

出典と再現

もの	種別	出典・道具
一ループの流れ (1)・三次元の結合の和	典	7-05 の出典表（J. Dimock, The renormalization group according to Balaban I・II・III, arXiv:1108.1335, 1212.5562, 1304.0705。T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 102 (1985) 255–275）
重みの四性質・活動のノルムの一段の評価	典（付録 A.6.2 と活動のノルムの一段の評価の本文）	R. Bauerschmidt, D. C. Brydges, G. Slade, Introduction to a Renormalisation Group Method, Lecture Notes in Math. 2242 (2019), arXiv:1907.05474（24-06 の出典表）
二次元 σ 模型の状況	典（総説の本文 §II.1・§II.1.1 と文献表、抄録）	V. Rivasseau, Constructive field theory and applications: perspectives and open problems, arXiv:math-ph/0006017（24-07 の出典表）。P. Goswami, arXiv:2204.08252, Ann. Henri Poincaré 25 (2024) 2065–2085。W. Dybalski, A. Stottmeister, Y. Tanimoto, arXiv:2403.09800。階層版：K. Gawędzki, A. Kupiainen, Comm. Math. Phys. 106 (1986) 533（総説の文献表による）
大域のゲージ固定	典（書誌のみ）	I. M. Singer, Comm. Math. Phys. 60 (1978) 7–12（7-05 の出典表）
(2)〜(5)・軌道の向きの平坦性の命題	初	この章の本文の証明。数は $1/(2b_0 \ln 2)$ と $\pi^2/6$ の算術だけ
一段の係数の実測	読（作用の差の恒等式は初）	本書の検討の数値の記録（実空間の解析の Hessian と横の Bloch の和の二経路が 10^{-10} で一致・木の固有値の再現・$U(1)$ の Manton で 0 の陰性対照）。係数の算術は Lean の束（15-09 表 3、再検査済み）

この章で使った語 — 無次元の結合・損の和・吸収・marginal・重みの四性質・揺らぎの期待値の閉じ・軌道の向きの平坦性の命題・張り替えの境目・難しさの三つの源。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：15-02 原典の地図 — Bałaban の連作がどこまで行き、どこで止まったか。

原典の地図 — Bałaban の計画・BBS の鎖・原典に無い二行

この章は既存の知見の整理です。§05・§06 は未解決の地図です。

この部は、本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた記録です。存在そのものは第二巻の第 6〜13 部を、二つの設計の違いは第 14 部を見てください。部の位置づけは 15-00 にあります。

この章で分かること — Bałaban のゲージ理論の連作を、受け持つ仕事で五段に分けた地図。四次元の最後の論文の条件つきの紫外安定性の定理（Bałaban 1989 の Theorem 1）が「有効結合が小さいまま留まる」を仮定し、それを外す基本の不等式（Bałaban 1989 の Theorem 2）が未公刊であること（原典の文で）。MRS と、易しい模型（三次元 QED）での書き直しがどこまで来ているか。平らな場の一段の評価（Bauerschmidt–Brydges–Slade の付録 A.6 の補題 A.6.1、活動のノルムの一段の評価）がどういう鎖で出るか。零モードを消した捩れた小さな T^4 の上で紫外の制御を言明する案と、その各行が原典のどこに当たるか。原典に無いのは二行——大きな場込みの一段の剰余と、観測量の源——であること。

前提となる章 — 15-01 §02（重みの四性質）・7-07 §03（主定理）・7-07 表 1（連作の書誌）・25-01（捩れた小さな T^2）。

先に言うこと — 本文を照合したのは、三次元の論文の冒頭、最後の論文の要旨と序文、BBS の付録 A.6.2 と活動のノルムの一段の評価の本文です。連作の他の論文は抄録か題までで、札の欄に確かめた範囲を書きます。捩れた小さな四次元トーラスの紫外の言明は案で、示していません。

この章の順序

1. Bałaban の計画 — 連作の五段（表 1）
2. 止まった場所 — 条件つきの紫外安定性の定理の仮定と、未公刊の基本の不等式
3. MRS と、易しい模型での書き直し

4. BBS の付録 A.6 の鎖 — 場の和の劣乗性・揺らぎの期待値の閉じ・次の段への単調性（BBS の (ii)〜(iv)）から活動のノルムの一段の評価へ
5. 捩れたトーラスの紫外の言明と試験台 — 捩れた小さな T^4 と二次元 $O(4)$
6. 原典との対応 — 原典に無い二行（表 2）
7. 言えないこと
8. 五分類の表と依存グラフ（表 3）

00

この章で分かること

- Bałaban の四次元の定理は「有効結合が $(0, \gamma]$ に留まる」を仮定し、それを外す定理は未発表です。到達点は、有限体積の格子で、有効密度と分配関数の格子間隔に一様な上下界まで、結合が小さく留まる条件を仮定して、です（§01・§02）。
- 易しい模型での書き直しは三次元の ϕ^4 と三次元 QED まで来ていますが、三次元の Yang–Mills と二次元の σ 模型の後半の段は見当たりません（§03）。
- 平らな場の一段の評価は、期待値と半ノルムの入れ替え → ノルムの定義 → 場の和の劣乗性・揺らぎの期待値の閉じ・次の段への単調性の鎖で出て、揺らぎの期待値の閉じで取る期待値の測度は背景に依りません（§04）。
- 零モードを消した捩れた T^4 の上で紫外の制御を五行で言明でき、原典に無いのは、捩れた箱での結合の留まりの中身（大きな場込みの一段の剰余、すなわち結合の一段の正味の括弧）と観測量の源の条件の二行です（§05・§06）。

01

Bałaban の計画 — 連作の五段

この節は既存の知見（Bałaban の連作）の整理です。導入は 7-07 §02 にあります。

Bałaban のゲージ理論の連作（Commun. Math. Phys.、1983〜1989）を、受け持つ仕事で五段に分けると表 1 になります。書誌は 7-07 表 1 と同じです。本文を照合したのは三次元の論文の冒頭と、最後の論文の要旨と序文だけで、段 4・段 5 と 119 の行は抄録で確かめました。段 1〜3 の「受け持つ仕事」は題から読んだもので、中身の照合ではありません。「三つの条件」は 15-00 §01 の紫外の制御です。

表 1　Bałaban の連作の五段（札は確かめた範囲。中身の一行は、段 1〜3 は題から、段 4・段 5 と 119 は抄録から）

段	論文（CMP の巻・年・頁）	受け持つ仕事	三つの条件との対応	札と確かめた範囲
1 土台	89 (1983) 571・95 (1984) 17・96 (1984) 223	格子の Green 関数の正則性と減衰。ブロック平均の変換と、その下の伝播関数	全ての段の部品	典　書誌と題のみ
2 群値の場の平均とゲージ	98 (1985) 17・99 (1985) 75	ゲージ共変な平均の操作。正則な（小さな場の）配位の空間と、その上で局所に効くゲージ固定	15-01 §02・§03 の大域のゲージ固定の欠如の処理	典　書誌と題のみ
3 背景場	99 (1985) 389・102 (1985) 277	背景場の中の伝播関数。平均を止めた変分問題と背景場	小さい場の解析性の条件の入口	典　書誌と題のみ
4 小さな場の展開と結合	109 (1987) 249・116 (1988) 1	小さな場の近似で、一段ごとのクラスター展開による局在した有効作用の列。β 関数を作り、結合の繰り込みを再帰的な繰り込み群の方程式で定義（109）。指数化したクラスター展開が帰納の仮定を満たし、小さな場の近似での構成が完結（116）	小さい場の解析性の条件・結合の留まりの摂動の部分	典　抄録
（大きな場込みの帰納）	119 (1988) 243	大きな場の領域を含む有効密度の完全な帰納の記述と、繰り込みの変換がその形を保つこと。超繰り込み可能な模型（三次元）の解析をここで完結し、収束する展開を与える	三次元の小さい場の解析性の条件・大きい場の稀さの条件の完結。四次元では段 5 の土台	典　抄録
5 大きな場	122 (1989) 175・122 (1989) 355	R 操作の基本の段。局所化・指数化・評価。条件つきの紫外安定性の定理	大きい場の稀さの条件。結合の留まりは仮定	典　175 は抄録（四次元のゲージ理論の紫外安定性の主な障害を取り除く操作、と書かれる）。355 は要旨と序文 p.355–356
（三次元）	102 (1985) 255	三次元の紫外安定性（7-05 の式 (10)）。著者は 'the proof is very sketchy' と書く	三次元の小さい場の解析性の条件・大きい場の稀さの条件。結合の留まりは要らない（15-01 §01）。大きな場込みの完全な帰納は 119 で完結	典　本文 p.255–257（119 との関係は 119 の抄録から）

02

止まった場所 — 条件つきの紫外安定性の定理の仮定と、未公刊の基本の不等式

最後の論文の序文の定理は次のとおりです 典 （7-07 §03）。

'Theorem 1. If the sequence of the effective coupling constants is contained in an interval]0, γ] with a sufficiently small positive γ, then the effective densities ρk have the form, and satisfy all the conditions and bounds, described in Sect. 2.'

仮定は結合が小さく留まる条件そのもので、結論は有効密度の形（15-00 の (2)）と小さい場の解析性の条件・大きい場の稀さの条件の評価です。著者は、仮定は先行論文の Theorem 2 から出る基本の不等式に従うので外せるが、'The proof of Theorem 2, which is based on second order perturbative calculations, is very awkward and long ... and has not been published yet' と続けます 典 。著者の 1989 年以後の論文の書誌を探した範囲で、基本の不等式（未公刊）の証明を載せたものは見当たりません（7-07 の出典表）。だから四次元の到達点は、**有限体積の格子で、有効密度と分配関数の格子間隔に一様な上下界まで、結合の留まりを仮定して**です 典 （7-07 表 4 の一様な評価の水準）。相関関数の評価・極限の一意性・OS 公理・無限体積・ギャップは、どの資料も到達点に含めていません。総説（Rivasseau 2000 §II.1）は Bałaban の結果を、有限体積で任意に多くの段の後の有効作用の紫外安定性と要約し、結合の留まりの仮定に触れません 典 （総説の本文）。これは要約の水準の差で、この節の到達点の文は総説ではなく最後の論文の序文に拠ります。

止まった場所を一行で言うと、**結合の留まりを外す一段の剰余の評価**です。結合の留まりが、その評価（結合の一段の正味の括弧）と、定義域の中の連続性（実効の結合の定義と連続性）という初等的な部分に割れることは 15-03 の結合の小ささの帰納の補題 で見ます。

03

MRS と、易しい模型での書き直し

Magnen–Rivasseau–Sénéor（1993）は連続の運動量の切断で、四次元 $SU(2)$・自明な位相の区画・固定した赤外の切断・正則化した軸ゲージの Schwinger 関数の紫外極限を述べましたが、'we do not provide a detailed proof' と書き、詳細は 'several hundred pages' になるだろうと述べます 典 （7-07 §06）。

方法を易しい模型で書き直す仕事は、三次元の ϕ^4（Dimock I〜III、展開の収束と安定性の評価まで）と三次元の QED（Dimock の三本 arXiv:1512.04373・1712.10029・2009.01156：有界な場の近似で裸の量を調整して流れの終点を決める段、多尺度の伝播関数と最小点の局所正則性、弱結合で流れを完全に制御した固定した有限体積での紫外安定性の上下界）まで来てい

ます 典 （QED の三本は抄録。7-05 の出典表・24-07 §05）。三次元の Yang–Mills について同じ形の連作は、著者名での検索の範囲では見当たりません。二次元の σ 模型への移植は表 1 の段 3 に当たる所まで（15-01 §04）で、段 4・5 に当たる仕事は、より易しい模型でもまだ書かれていません（探した範囲で） 典 （抄録）。球面に値をとる場では、Bałaban の古典 N ベクトル模型の低温展開の連作が、大きな場の領域を含む完全な帰納の記述を与えています（Comm. Math. Phys. 196 (1998) 485 の抄録） 典 （抄録）。これは赤外（低温）の問題で、二次元の紫外ではありません 読 。

04

BBS の付録 A.6 の鎖 — 重みの三つの性質から一段の評価へ

平らな場（スカラー場）の繰り込みでは、一段の期待値の評価が、重み（regulator）$\tilde{G}$ の性質だけから短い鎖で出ます。15-01 §02 の四性質のうち、補題が使うのは場の和の劣乗性・揺らぎの期待値の閉じ（揺らぎの期待値で一段閉じる）・次の段への単調性（次の段の重みで押さえる）の三つです。原典の文は次のとおりです 典 （Bauerschmidt–Brydges–Slade、arXiv:1907.05474v2、付録 A §A.6.2、p.214–215 の本文）。

'Lemma A.6.1. Suppose that $\tilde{G}$ obeys (ii), (iii) and (iv) above. Then $\|\mathbb{E}_+\theta K(X)\|_{\tilde{G}_+} \le 2^{|B(X)|}\|K(X)\|_{\tilde{G}}$.'

証明は三つの段の鎖です 典 （本文）。θ は場を $\phi \mapsto \phi + \zeta$ とずらす写像、$\mathbb{E}_+$ は揺らぎ ζ の期待値、$T_\phi(h)$ は点 ϕ での尺度 h の Taylor の半ノルムです。

$$\|\mathbb{E}_+\theta F\|_{T_\phi(h_+)} \;\le\; \mathbb{E}_+\|F\|_{T_{\phi+\zeta}(h)} \tag{1}$$

$$\|K(X)\|_{T_\phi(h)} \;\le\; \|K(X)\|_{\tilde{G}}\,\tilde{G}(X,\phi) \tag{2}$$

$$\mathbb{E}_+\tilde{G}(X,\phi+\zeta) \overset{\text{(ii)}}{\le} \tilde{G}^2(X,\phi)\,\mathbb{E}_+\tilde{G}^2(X,\zeta) \overset{\text{(iii)}}{\le} 2^{|B(X)|}\,\tilde{G}^2(X,\phi) \overset{\text{(iv)}}{\le} 2^{|B(X)|}\,\tilde{G}_+(X,\phi) \tag{3}$$

(1) は期待値と半ノルムの入れ替え（原典の (A.6.5)。原典は文献 [54] の Prop. 3.19 から引く）、(2) はノルムの定義（原典の (A.6.7)）、(3) は性質の適用（原典の (A.6.8)。(3) の冪の約束は記号を略して書いたもので、原典では t 乗の形）です。(1) に (2) を入れ、(3) で期待値を払うと補題が出ます。

この鎖を読んで分かることが一つあります 読 （証明の鎖を読んだもの）。揺らぎの期待値の閉じの期待値は揺らぎ ζ だけの関数の期待値で、**その測度は背景 ϕ に依りません**。(1) の入れ替えも、揺らぎの法則が背景に依らないから因子 1 で立ちます。群に値をとる場では、ここに背景依存の因子 $1+\eta_k$ が入ります。群の上でこの鎖の各段がどうなるか——場の和の劣乗性は背景と揺らぎの分解の補題で立ち、揺らぎの法則が背景に依らなければ全段が通って $\eta = 0$ に

なること（背景に依らない揺らぎの一段の補題）――は 15-07 §02 と 15-07 §05 にあります。

05

捩れたトーラスの紫外の言明と試験台 — 捩れた小さな T^4 と二次元 $O(4)$

周期的な T^4 では、最後の段の古典的な最小（平坦な接続）が連続の族をなし、最後の数段の積分が退化します。この付随の困難を、't Hooft の捩れで取り除いた言明を案として置きます。空間の方向の道（25-01）の小さな捩れた T^2 を、四次元のトーラス全体に移した形です。

設定。 $G = SU(2)$、一辺 L_0 の四次元トーラス、ブロックの倍率 2、最後の格子の一辺の点の数 M（固定）、段の数 n、格子間隔 $a_n = L_0/(M \cdot 2^n)$。Wilson の作用に捩れ $n_{12} = 1$ を入れます（$(1,2)$ 平面のプラケットの一つの積み重ねに中心の元 $z = -1$ を掛ける）：

$$S_{\mathrm{tw}}(U) = \beta \sum_{p} \Big(1 - \tfrac{1}{2} \operatorname{tr}\big(z_p U_{\partial p} \big) \Big), \qquad \beta = \frac{4}{g_0^2} \tag{4}$$

ブロック化の変換 T をゲージ共変で中心のずらしと可換な平均で定め、$\rho_0 = e^{-S_{\mathrm{tw}}}$、$\rho_{k+1} = T\rho_k$ とします。

捩れたトーラスの紫外の言明（案・未証明）。 ある $\gamma > 0$ と、M だけに依る定数 $C, \kappa, c, r > 0$ があって、全ての $\gamma_0 \in (0, \gamma)$ と全ての n について、裸の結合 $g_0 = g_0(n, \gamma_0)$ を選ぶと次が成り立つ 仮 。

- **結合の留まり（捩れた箱）**：有効結合の列 $g_0 < g_1 < \cdots < g_n = \gamma_0$ が全て定義される。
- **小さい場の解析性（捩れた箱）**：ρ_n は 15-00 の (2) の形を持ち、各 $E_n(X, \cdot)$ は背景場の変数で半径 r の複素近傍で解析的、$|E_n(X)| \le C\gamma_0\, e^{-\kappa d(X)}$。
- **大きい場の稀さ（捩れた箱）**：$|R_n(\Omega^c)| \le \exp\big(-c\, p(\gamma_0)^2 |\Omega^c|\big)$（$p$ は 15-00 の大きい場の稀さの条件と同じ閾の倍率）。
- **分配関数の Gauss 比較の条件**：$e^{-CM^4} \le Z_n / Z_n^{\mathrm{G}} \le e^{CM^4}$（$Z_n^{\mathrm{G}}$ は孤立した平坦な接続のまわりの Gauss 積分の和）。
- **観測量の源の条件**：上の三つが、最後の格子の尺度 L_0/M より大きい台を持つ滑らかにした観測量の源（強さ $\le s_0$）を入れても、同じ定数で成り立つ。

全ての定数は n にも a_n にも依りません。捩れた箱での結合の留まりは、結合の小ささの帰納の補題の結論の形です。

捩れが効く所。最後の格子の上の平坦な接続は、方向 1・2 のホロノミーが反可換、方向 3・4 のホロノミーが中心の元になるものだけで、ゲージ同値を除いて有限個です。そのまわりの随伴の揺らぎは方向 1 か 2 のどちらかで反周期的になり、零モードがありません 仮 （25-01 の T^2 の捩れの部分の事実を四次元に延ばした読み。四次元の分類は原典で照合していない）。一方、細かい段では捩れは効きません。捩れの面は中心のゲージ変換で動かせ、局所には見えないからです 読 （物理の見立て）。背景と揺らぎの分解の補題（15-07 §02）は捩れたプラケット $z_p U_{\partial p}$ でもそのまま成り立ちます。z_p は中心の元なので、証明の中の $W_{\partial p}$ を $z_p W_{\partial p}$ に替えるだけです 初 。

言明が言うこと・言わないこと。示されれば、言うのは格子間隔に一様な有効作用の評価と最後の段の非退化で、Bałaban の条件つきの紫外安定性の定理 ＋ 未公刊の基本の不等式（捩れた箱での結合の留まり）＋ 観測量への拡張（観測量の源の条件）＋ 捩れによる最後の段の非退化の和に当たります。滑らかにした観測量の部分列の極限は、そこからコンパクト性で従います。言わないのは、極限の一意性・OS 公理・回転の回復・非自明性・体積に一様なギャップです。**細かい段の紫外の制御の難しさは周期的な T^4 とまったく同じ**で、捩れが除くのは最後の数段の退化という付随の困難だけです 読 （物理の見立て）。捩れたトーラスの紫外の言明の役目は難しさを減らすことではなく、紫外の制御を零モードの無い純粋な形で言明することです。

ゲージを抜いた試験台。二次元の $O(4)$ σ 模型（$SU(2)$ の主カイラル模型）は、場が $SU(2)$ に値をとり、結合が無次元で漸近自由で、大きな場があり、ゲージがありません。捩れた円柱 $\mathbb{R} \times S^1_L$（捩れで零モードが無い）の上で紫外の制御を書けば、四次元の紫外の制御から、大域のゲージ固定の欠如という難しさの源のうちゲージの半分を抜いた問題になります 読 （物理の見立て）。15-01 §04 のとおり、この模型でも紫外の極限は未構成で、移植は変分問題と背景場の段まで来ています 典 。表 1 の段 4（小さな場の展開の一段）をこの模型で書くことが、四次元の連作の後半を読み直すより安く、紫外の制御の「群値の場 × 無次元の結合」の部分を切り出す試験になります。二次元の結果は四次元に何も含意しません。

06

原典との対応 — 原典に無い二行

表 2 は、捩れたトーラスの紫外の言明の各行が Bałaban の連作のどこに当たり、捩れで変わるか、原典に無いかを並べたものです。最後の列は、方法を易しい模型で書き直した三次元の QED（§03 の Dimock の三本）での対応です。

表 2　捩れたトーラスの紫外の言明の各行と原典の対応（札は欄ごと。連作の札は抄録か、7-07 §03 を通した序文の水準）

行	連作で当たる所	捩れ（$n_{12}=1$）で	原典に無いか	三次元 QED での対応

行	連作で当たる所	捩れ（$n_{12}=1$）で	原典に無いか	三次元 QED での対応
結合の留まり（捩れた箱）	109：β 関数を作り、結合の繰り込みを再帰的な繰り込み群の方程式で定義（小さな場の近似の中）典 （抄録）。122, 355：大きな場込みでは仮定（条件つきの紫外安定性の定理）、外す基本の不等式は未公刊 典 （7-07 §03）	変わらない 読 （細かい段の局所の量。捩れの面は中心のゲージ変換で動く）	**無い**：大きな場込みの一段の剰余（結合の一段の正味の括弧）。残りは結合の小ささの帰納の補題で初等的	1512.04373：裸の量を格子間隔に依らせて、単位の尺度で予め決めた値にする型を有界な場の近似で示す 典 （抄録）。調整するのは relevant な量（真空のエネルギー密度・フェルミオンの質量）で、marginal な結合ではない
小さい場の解析性（捩れた箱）	109（一段ごとのクラスター展開で局在した有効作用）と 116（小さな場の近似での構成の完結）典 （抄録）。解析性の半径が段に一様という文面は抄録に無い	細かい段は変わらない。最後の数段は、展開の中心が孤立した捩れた平坦な接続になる 読	形は在る（四次元は結合の留まりの仮定の下）。最後の段の捩れたまわりの展開は原典に無い 読	1712.10029：多尺度の伝播関数と、最小点の局所正則性 典 （抄録）
大きい場の稀さ（捩れた箱）	119（大きな場の領域を含む完全な帰納の記述）、122, 175（R 操作の基本の段）、122, 355（局所化・指数化・評価）典 （抄録）	変わらない 読	形は在る（四次元は結合の留まりの仮定の下）	2009.01156：大きな場を含めて閉じる 読 （抄録の「弱結合で流れを完全に制御」から）
分配関数の Gauss 比較の条件	条件つきの紫外安定性の定理から出る分配関数の上下界。定数は段・格子・場に依らない 典 （7-07 §03）	**変わる**：最後の段の積分が孤立した平坦な接続のまわりで非退化になる 仮 （25-01 の T^2 の事実を四次元に延ばした読み）	上下界の形は在る。分母を孤立した平坦な接続のまわりの Gauss 積分の和にする正規化は原典に無いが、有限次元の積分の問題 読	2009.01156：繰り込んだ分配関数の、格子間隔に一様な上下界 典 （抄録）
観測量の源の条件	122, 355 の序文は、ループの変数の期待値の解析を今後の課題とする 典 （7-07 §03）。MRS は軸ゲージの Schwinger 関数（赤外の切断つき・詳細な証明なし）典	細かい段は変わらない。最後の段は分配関数の Gauss 比較の条件と同じく非退化になる 読	**無い**	相関関数は次の段の課題とされる 典 （概観 arXiv:2204.07201 の抄録）

表 2 から読むこと 読 。原典に無いのは、捩れた箱での結合の留まりの中身（大きな場込みの一段の剰余、すなわち結合の一段の正味の括弧）と観測量の源の条件の二行で、要る新しい数学の場所はこの二つです。分配関数の Gauss 比較の条件の正規化と最後の段の非退化は捩れに固有ですが、有限次元の積分の問題で、難しさの質が違います。三次元 QED の 1512.04373 は、裸の relevant な量を調整して流れの終点を決める型の文を有界な場の近似で持ち、これは結合の小ささの帰納の補題の結論の形です。紫外の三条件（捩れた箱の版）の指数を $p(\gamma_0)^2$

で書くのは、原典の閾 $\varepsilon = g\,p(g)$（7-05 の式 (7)）から出る大きな場の因子の形に合わせたもので、γ_0 の負の冪で書くと原典の閾より強い文になります。二行が何を示せば閉じるかの一行の言明と、その案は 15-08 にあります。

07 言えないこと

(a) 表 1 の連作の中身は、三次元の論文の冒頭と最後の論文の要旨と序文のほかは、段 4・段 5・119 は抄録、段 1〜3 は題による読みです。

(b) 基本の不等式（未公刊）の内容は分かりません。未発表という判断は、序文の文と、探した範囲の書誌によります。

(c) §04 の鎖は平らな場の原典の文で、群の上では何も言いません。「揺らぎの期待値の閉じで取る期待値の測度は背景に依らない」は証明の鎖の読みです。

(d) 捩れたトーラスの紫外の言明は案で、示していません。示されても、一意性・OS 公理・非自明性・無限体積・体積に一様なギャップには何も言いません。四次元の捩れた平坦な接続の分類は原典で照合していません。

(e) 表 2 の対応は抄録と（7-07 を通した）序文の水準で、連作の本文の節・定理番号には届いていません。

08 五分類の表と依存グラフ

表 3　この章の行（この章の行に Lean の欄はありません）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲
[01]	連作 109・116・119・122（175）の抄録と、三次元 QED の三本の抄録	典	§01・§03・表 1（抄録）	本文の節・定理番号は未照合
[02]	条件つきの紫外安定性の定理は結合の留まりの仮定つき、基本の不等式は未公刊	典	§02（要旨と序文）	有限体積の格子
[03]	MRS は赤外の切断つきで、詳細な証明を与えない	典	§03（序）	$SU(2)$・自明な区画・軸ゲージ
[04]	活動のノルムの一段の評価と鎖 (1)〜(3)	典	§04（付録 A.6.2 の本文 p.214–215）	平らな場。期待値と半ノルムの入れ替えの不等式は原典が文献 [54] から引く
[05]	鎖の中で揺らぎの期待値の閉じで取る期待値の測度は背景に依らない	読	§04（証明の鎖を読んだもの）	平らな場

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲
[06]	捩れた小さな四次元トーラスの紫外の言明	仮	§05（案・未証明）	$SU(2)$・$n_{12}=1$・有限体積・紫外の三条件（捩れた箱の版）は原典の閾の形
[07]	背景と揺らぎの分解の補題は捩れたプラケット $z_p U_{\partial p}$ でも成り立つ	初	§05（15-07 §02 の証明で $W_{\partial p}$ を $z_p W_{\partial p}$ に）	z_p は中心の元
[08]	捩れが除くのは最後の数段の退化だけ	読	§05（物理の見立て）	—
[09]	二次元 $O(4)$ の捩れた円柱は紫外の制御からゲージを抜いた試験台	読	§05（物理の見立て）	二次元の結果は四次元に含意しない
[10]	捩れたトーラスの紫外の言明の各行と原典の対応。原典に無いのは結合の一段の正味の括弧と観測量の源の条件、分配関数の Gauss 比較の条件は有限次元の問題	読	§06 表 2	抄録と序文の水準

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
[01] 典  連作と三次元 QED の抄録
[02] 典  条件つきの紫外安定性の定理・基本の不等式は未公刊
[03] 典  MRS の到達点
[04] 典  活動のノルムの一段の評価と鎖                                  平らな場
[05] 読  揺らぎの期待値の閉じの測度は背景に依らない ⟸ [04]
[06] 仮  捩れたトーラスの紫外の言明 ⟸ [02]                              案
[07] 初  背景と揺らぎの分解の補題は捩れても同じ                        z_p は中心
[08] 読  捩れは最後の段だけ ⟸ [06]
[09] 読  二次元 O(4) の試験台 ⟸ [06]
[10] 読  捩れたトーラスの紫外の言明と原典の対応 ⟸ [01][02][03][06][07]      抄録
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。捩れたトーラスの紫外の言明の行は仮定の行で、紫外の制御を言い直した問いの形です。この章の節点に、紫外の制御が示されたという節点はありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
典 Bałaban の条件つきの紫外安定性の定理の仮定と、未公刊の基本の不等式、連作の段 4・段 5・119 と三次元 QED の三本の抄録、MRS の留保、BBS の活動のノルムの一段の評価とその鎖	連作の本文の節・定理番号（段 4・段 5・119 は抄録まで、段 1〜3 は題のみ）。基本の不等式（未公刊）の内容

言えている	言えていない
初 背景と揺らぎの分解の補題が捩れたプラケットでも変わらないこと	捩れたまわりの最後の段の非退化
読 捩れたトーラスの紫外の言明の各行と原典の対応（表 2）、鎖の中の測度が背景に依らないこと	連作の本文での照合
仮 捩れたトーラスの紫外の言明	その証明。紫外の制御が閉じる見込み

出典と再現

もの	種別	出典・道具
条件つきの紫外安定性の定理・基本の不等式（未公刊）	典（要旨と序文 p.355–356）	T. Bałaban, Large field renormalization. II, Comm. Math. Phys. 122 (1989) 355–392（7-07 の出典表）
連作の段 1〜3（表 1）	典（書誌と題のみ）	Comm. Math. Phys. 89 (1983)；95, 96 (1984)；98, 99（二篇）, 102 (277–309) (1985)
連作の段 4・段 5 と 119（表 1・表 2）	典（抄録）	T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 109 (1987) 249–301；116 (1988) 1–22；119 (1988) 243–285；122 (1989) 175–202
三次元の紫外安定性	典（本文 p.255–257）	T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 102 (1985) 255–275（7-05 の出典表）
三次元 QED（§03・表 2）	典（抄録）	J. Dimock, Ultraviolet regularity for QED in d=3, arXiv:1512.04373；Multiscale block averaging for QED in d=3, arXiv:1712.10029；Ultraviolet stability for QED in d=3, arXiv:2009.01156；概観 arXiv:2204.07201
N ベクトル模型の低温展開（§03）	典（抄録）	T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 196 (1998) 485
MRS の到達点と留保	典（p.325–328）	J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, Construction of YM4 with an infrared cutoff, Comm. Math. Phys. 155 (1993) 325–383
活動のノルムの一段の評価と鎖（§04）	典（付録 A.6.2 と活動のノルムの一段の評価の本文 p.214–215）	R. Bauerschmidt, D. C. Brydges, G. Slade, Introduction to a Renormalisation Group Method, Lecture Notes in Math. 2242 (2019), arXiv:1907.05474v2（24-06 の出典表）
表 2・捩れたトーラスの紫外の言明	本書の検討	本書の検討の記録（紫外の制御の検討の整理）

この章で使った語 ― Bałaban の連作の五段・条件つきの紫外安定性の定理・基本の不等式（未公刊）・MRS・活動のノルムの一段の評価・期待値と半ノルムの入れ替え・捩れたトーラスの紫外の言明・'t Hooft の捩れ・試験台・原典に無い二行。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：15-03 分解の言明 ― 紫外の制御を有限個の母数で閉じる類と三つの剰余に割る。

分解の言明 — 有限個の母数で閉じる類と三つの剰余

この章は未解決の問いの地図です。§03・§04 は本書の検討です。

この部は、本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた記録です。存在そのものは第二巻の第 6〜13 部を、二つの設計の違いは第 14 部を見てください。部の位置づけは 15-00 にあります。

この章で分かること — 紫外の制御を、「有限個の母数で閉じる類」と三つの剰余——結合の流れの剰余の条件、形の剰余の条件、定義域の中の連続性（結合の連続性）——に割る形で言明できること（言明だけ）。そのうち、結合が小さく留まる条件が、一段の剰余の評価（結合の一段の正味の括弧）と、実効の結合の定義と連続性から初等的に出ること（結合の小ささの帰納の補題、証明つき）。一段の写像が類のまわりで横に縮むなら、類からの外れは段の和でなく上限で押さえられ、段数に一様であること（横の縮みの帳簿）。類は熱核や Wilson の作用の定数倍の族ではなく、一段の写像が引き込む先の一母数の類に取るのがよいこと。帯の分解と比べると、割る形は同じで、違いは一段の損を払う相手の有無にあること。この分解から出る三つの紫外の問い（一母数の類での横の縮み・大きい場込みの剰余の最小模型・捩れた格子の随伴の最小固有値）。改訂では、類が閉じる条件の類の座標の最終形の案と、背景を類の母数に持たせたときの形の剰余の条件の閉じ方（条件つき）を足しました。三度目の改訂で、四次元の類の座標の最終形（一つの母数と流れが値を決める比の座標）、形の剰余の条件の多段に要るブロック化の条件、結合の流れの一ループの実測、結合の一段の正味の括弧のブロック間の項の再帰の一列版を足しました。

前提となる章 — 15-00 §01（紫外の制御と一段で閉じる形）・15-01 §01（損の和が対数で発散すること）・15-02 §01（Bałaban の条件つきの紫外安定性の定理（Bałaban 1989 の Theorem 1）の仮定）・26-06 §01（帯の分解）。

先に言うこと — この章は紫外の制御を示していません。示すのは、何を示せばよいかの言明・二つの初等的な部品（結合の小ささの帰納の補題と横の縮みの帳簿）・規則の候補・問いです。分解の含意のうち初等的に確かめたのは結合の小ささの帰納の補題と積と等比級数の算術だけで、類が閉じる条件・結合の流れの剰余の条件・形の剰余の条件のどれも四次元で示し

ていません。この章の「一段」は、断らない限り本当のブロック化の一段（多リンク・ゲージの張り替え・大きな場を含む）の意味で、最小の系の数（15-04〜15-06）はその代わりではありません。

この章の順序

1. 類と一段の写像 — 母数の流れ Φ と剰余 r_θ
2. 分解の言明 — 類が閉じる条件・結合の流れの剰余の条件・形の剰余の条件・結合の連続性
3. 結合の小ささの帰納の補題 — 結合の留まりを結合の一段の正味の括弧と結合の連続性に割る（証明つき）
4. 横の縮みの帳簿 — 外れは和でなく上限で
5. 規則の束（表 1）
6. 帯の分解との対比（表 2）
7. 三つの紫外の問い（表 3）
8. 言えないこと
9. 五分類の表と依存グラフ（表 4）

00

この章で分かること

- 紫外の壁は「有限個の母数で閉じる類」（類が閉じる条件）と「流れの剰余・形の剰余・連続性」に割る形で言明できます（§02、言明だけ）。
- 結合が小さく留まる条件「有効結合が $(0,\gamma]$ に留まる」は、一段の剰余の評価（結合の一段の正味の括弧）と定義域の中の連続性（結合の連続性）から、単調性と中間値の議論だけで出ます（結合の小ささの帰納の補題、§03）。本当の中身は結合の一段の正味の括弧です。
- 一段の写像が類のまわりで横に $\lambda < 1$ で縮めば、類からの外れは $\sup_j \varepsilon(\beta_j)/(1-\lambda)$ で押さえられ、段数に一様です（§04）。
- 類は「引き込む先の一母数の類」に取り、$O(1/B)$ の形のずれは形の剰余の条件で運びます。二次の結合の比を 2 に保つ類としては言明しません（§02、根拠は 15-06）。
- 類が閉じる条件の類の座標は、結合の行列・形・背景・一リンクの結合・角の三重積・多面の四次として書き下せる、という案です。背景を類の母数に持たせると形の剰余の条件の

$\sum_k \eta_k$ は条件つきで有限になり、難しさは類が閉じる条件に集まります（§02）。

- 四次元の類は「一つの母数 B＋流れが値を決める比の座標（二次 2・三次 3・四次 65）」の形で、斜めの隣の座標は規則に依らず 0 になりませんが値は規則に依ります。類が閉じる条件の「局所」は規則を添えて書きます。形の剰余の条件の多段にはブロック化の条件が要り、結合の流れは一ループで向きと桁が合います（§02、どれも木の水準か一ループの測った範囲）。
- 帯の分解と割る形は同じで、紫外には一段の損を払う相手が無い、という違いがあります（§06）。

01

類と一段の写像

紫外の制御の目標は、15-00 §01 の式 (3)——段 k の有効密度が類 $\mathcal{K}(g_k; r, \kappa, c)$ に入るなら段 $k+1$ の有効密度も同じ定数の類 $\mathcal{K}(g_{k+1}; r, \kappa, c)$ に入る——を全ての段で示すことでした。15-01 §01 で見たとおり、四次元では一段に g_k^2 の大きさで動く部分を誤差として運べず、類の母数の動きにしなければなりません。この節では、その「母数の動き」と「残り」を分けて書く枠を置きます。

有限個の母数 $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^m) \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$ で番号づけた重みの族 $\mathcal{C} = \{w_\theta : \theta \in \Theta\}$ をとり、ブロック化の一段 T が

$$T\big(w_\theta\,(1+\rho)\big) = w_{\Phi(\theta)}\,\big(1 + r_\theta[\rho]\big) \tag{1}$$

の形をとるとします。$\Phi : \Theta \to \Theta$ は**母数の流れ**、$r_\theta[\rho]$ は**剰余**（局在した無関係な項と大きな場の因子をまとめたもの）で、剰余の大きさは 15-07 の重み G_k のノルムで測ります。(1) は定義の形で、どんな T でも Φ と r の選び方を決めれば書けます。中身は「Φ と r が段に一様な評価を持つように選べるか」にあります。

母数の数え方の目安。四次元の純ゲージでは、ゲージ不変性と格子の対称性の下で冪の数え方で残る局所の項は、真空のエネルギー（定数）と F^2 の係数の二つで、$m = 2$、$\theta = (E, \beta)$、$\beta = 4/g^2$ と読みます 読 （冪の数え方。三次元で「相殺項は定数一つ」とする 15-01 §01 の文の四次元版）。ただし最小の系では、一段の後の作用は一本の二次形式の定数倍に収まらず、ループの形ごとの結合の比などの「形の座標」が動きます（15-06）。この座標は冪の数え方では格子間隔の二乗で効く無関係な向きに当たり、一段の写像で縮むなら母数は実質 β ひとつで、形のずれは横の縮み λ が払う、という読みになります 読 。§02 の類が閉じる条件はこの読みを言明の形にしたものです。

02

分解の言明 — 類が閉じる条件・結合の流れの剰余の条件・形の剰余の条件・結合の連続性

次の四つから、紫外の制御が段数に一様に従う、という形の言明を置きます 仮 （言明の形だけ。四つのどれも四次元で示していない）。

- **類が閉じる条件**。母数の個数 m が段に依らず有限で、T の主要部が族の中に戻る（主要部の変化は全て Φ に入る）。類は熱核や Wilson の作用の定数倍の族でなく、**一段の写像が引き込む先の一母数の類**——結合 B（β の向き）ひとつと、群の曲がりで決まる $O(1/B)$ の固定された形——に取る。形の座標（作用の ψ^4 以上の係数・ループの形ごとの結合の比など）は一段ごとに縮む向きで、類からの形のずれは形の剰余の条件で運ぶ。
- **結合の流れの剰余の条件**。Φ の β 成分が $\beta_{k+1} = \beta_k - 8b_0 \ln L + O(1/\beta_k)$。§03 の結合の一段の正味の括弧を β の変数で書いたもの。一つの規則で一段を一ループで測った値は下の「結合の流れの実測」にあり、向きと桁は合い、$\ln L$ の係数は小さい倍率で合いません 読 。
- **形の剰余の条件**。$\|r_{\theta_k}[\rho_k]\|_{G_{k+1}} \le (1+\eta_k)\, 2^{|B|}\, \|\rho_k\|_{G_k}$ の型で $\sum_k \eta_k < \infty$、かつ ρ_k 自身が横の縮みで上限に押さえられる（§04）か、和の有限な大きさに留まる。$\sum_k \eta_k < \infty$ が見込めるのは背景依存の**形の部分**（係数が形の座標の値に比例し、幾何級数に入る部分）だけで、$SU(2)$ の**群の幾何の部分**（BCH の三次）は $g_k^2 p$ の型で和が発散するので、背景の場の強さを類の母数に持たせて母数の側へ移す 読 （15-07 §07）。背景のホロノミーの対数 a を類の母数に持たせると、最小の系で残りは $\theta^0 \beta^{-3/2}$ に下がり、$\sum_k \eta_k$ は段数に一様に有界になる（条件つき、15-07 §06）。ただし難しさは消えたのでなく類が閉じる条件——a を持つ類が面・多ループの一段で閉じるか——へ移る 読 。形の剰余の木の水準の ℓ^4 の錐の縮みは、一段目では 0.823 倍以下（粗い辺を細かい二本の和とするブロック化・長波長の結合で割る規格）ですが、**段数に一様ではなく、ブロック化の条件が要ります** 読 ：共分散の流れの固定点の条件：ブロックした場の共分散の流れにスケール不変な固定点があること（辺の和のブロック化では粗い作用が段ごとに半分に柔らかくなり固定点が無く、三段目で因子が 1.26 以上。ゲージに共変な横の平均では固定点に向かう向き）。固定点での錐の縮みの条件：その固定点で $\sup \mu_\infty < 1$（横の平均で下界 0.57〜0.64 が段で増えない。上界は無い）。条件：可換に制限・木の水準・周期・2^4 ブロック・線形化・数は記号の流れ（$k \le 5$）とトーラスの周期の配位の局所の最適化で区間の評価なし（15-05 §07）。
- **結合の連続性**（定義域の中の連続性。§03）。

類が閉じる条件の類の座標（最終形の案）。最小の系の結果を並べると、類が閉じる条件の類は次の座標を持つ族として言明するのが合う、と読みます 仮 （座標の名と出所だけ。四次元

で閉じることは示していない)。

- **結合の行列 B_{pq}**：面ごとの結合 B_p と、隣り合う面の対の結合（共有の辺の端に置く）。三次元 $2\times2\times2$ の一段で、二次は粗い箱の対称性からこの二つで正確に閉じ、木の水準の比は $1/10$ です（15-07 §07）。
- **形 q_p**：面ごとの $O(1/B)$ の形の座標。一段ごとに縮みます（一列四枚で最大 $17/125$、十字で $1/25$）。
- **背景 a_p**：面ごとの背景のホロノミーの対数。単一のループの一段では群の順序つきの積で正確に更新され（非可換 Stokes）、BCH の三次はこの座標に全次数で入ります（15-07 §07）。
- **一リンクの結合 b**：staple の和の大きさ $\times\ \beta$。中心の取り直しで cg^2p^2 だけ動き、母数の更新として運びます（15-07 §05）。
- **角の三重積 κ**：立方体の角に集まる三面の $\kappa\sum_c a_x\cdot(a_y\times a_z)$。$2\times2\times2$ で唯一の三次の非可換な項（木の水準で $3/1024$）で、$\theta\sim\beta^{-1/2}$ の範囲で形の切り捨てより大きく、省けません。粗い立方体の辺だけを固定した本当の多段（三次元・自由境界の $L^3\cdot L\le20$・木）では、比 κ/c_2 は二段目で縮まず $0.019\cdot0.033\cdot0.050$ と増え、倍ごとの比は $1.78\cdot1.30\cdot1.13\cdot1.10$ と 1 に寄るので、0.055〜0.066 の値に寄る形に見えます 読 （当ての形で、極限の存在は示していない。一ループ（$\beta=32$〜128、$L\le4$）は比を 3% 以内しか動かさない)。一段目の比 1.78 は壁ではなく、固定点へ下から近づく途中の形です（15-07 §07）。
- **多面の四次**：三面・四面の結合（粗い箱の対称性の軌道で数える)。

これは上の「引き込む先の一母数の類＋縮む形」を、背景と多ループの座標まで書き下したものです。周辺の向き（結合 β の向き）が一つであることは変わらず、他の座標は形の座標と同じく縮むか、背景そのものとして群の積で運ばれる、という見立てです 読 。

四次元の類の座標の最終形。四次元の自由境界の箱 $\{0,\dots,L\}^4$ で粗い超立方体の 32 本の辺（細かいリンク $32L$ 本）だけを固定するブロック化を、一段（$L=2$）から本当の多段（木の水準で $L\le10$）まで測ると、粗い重みの類は**一つの母数 B（$\beta'=\beta b$）と、流れが値を決める比の座標**の形をとります 読 （$SU(2)$・熱核・鞍点の主項と一ループ（$L\le4$・$\beta=32$〜128・$O(1/\beta)$ は含まない)・面の角 $\lesssim0.5$)。比の座標の本数は超八面体群 B_4 の表現論で数えられ、二次 2 本（辺を共有する隣の対と、頂点を共有しない「斜めの隣」の対)・三次 3 本（胞の角・道・平行の型)・四次 65 本です 初 （粗い面の角の線形化の空間は 17 次元で $3+6+8$ に分かれる。本数は指標の平均と数値の階数の二経路の計算。胞の Bianchi の階数 7 は Lean：`relation_is_multiple_of_sigma`、仮定は面ごとの 24 本の等式)。三次元と違い、面ごとの類と隣の対だけでは二次で既に閉じません（残り 0.6%)。二次・三次の比は二段目で 0 に向かわず、倍ごとの比が 1 に寄り（斜めの隣で $1.55\cdot1.12\cdot1.08$)、隣 -0.145・斜めの隣 -0.021

・三次 0.064・0.013・-0.021 あたりの値に寄ります 読 （$L = 4$〜10 の当て $r_\infty - A/L - B/L^2$、極限の存在は示していない。一ループは二段の比を 1% 未満しか動かさない）。一段目の値の多くは固定点より 0 の側にあり、二段目で比が 1 を超えるのは近づく途中の形です 初 （Lean：`ratio_gt_one_below_fixpt`、仮定 $0 \le \lambda < 1$・$0 < r < s/(1-\lambda)$）。四次は多面の部分の大きさが二段目で c_2 との比 1.6 倍、向きはほぼ保たれ（余弦 0.99）、固定点かどうかは測っていません。

斜めの隣は 0 にならない ― ただし値と「局所」は規則に依る。一つの粗い超立方体の中では、辺を固定する規則と面を全て固定する規則は同じ二次形式を与えます 初 （$32 - 15 = 24 - 7 = 17$ と束の網の定理の (iii)。自由度の勘定は Lean：`edge_face_dof_agree`、仮定は増強した余鎖複体の完全性）。本当に違う規則は、粗い胞どうしが細かい場を共有する周期の網で全ての粗い面を固定するもので、そこでも斜めの隣は 0 でない負の値に寄りますが、値は約 2 倍（-0.045）、胞の型への射影の約束によっては -0.06〜-0.10 で、一つの胞に収まらない部分が段とともに二次形式の 2 割ほどまで増えます 読 （可換の線形化の木の水準・二次・粗い格子は無限・$L \le 16$）。**符号と非零は規則にも射影の約束にも依らず、値は依ります。**したがって類が閉じる条件の「局所」は規則を添えて書きます：胞を切り離す規則では「一つの粗い超立方体の中で閉じる（到達距離は粗い格子の一辺）」、場を共有する規則では「尾を持つ準局所」です 読 。独立な母数は B だけで、比の座標は固定点の値を持ち運ぶ量です。なお木の水準では、どちらの規則でも胞の部分の b は $1/L$ で落ち（$bL \to 0.39$・0.20）、長波長の固有値は 1 のままで、**$\ln L$ の走りはありません** 読 。対数の走りは一ループからしか出ません（次の段落）。

結合の流れの実測（一ループ）。類の母数 B の流れを一ループで測ると、粗いリンク（細かいリンク b 本の線の上の積）を全て固定する周期の網で、$SU(2)$ の粗い作用の長波長の係数は一段（ブロック 2）で $\beta' - \beta = -0.745$（Manton）・-1.078（熱核）・-1.136（Wilson）と、どの作用でも漸近自由の向きに下がります 読 （$\beta = 4/g^2$・$\beta \to \infty$ の一ループ・可換の背景・横の粗いトーラス 6^3・長さ ≤ 32 から波数 0 へ外挿）。$U(1)$ では Manton で 0、Wilson で作用の非二次性の定数 -0.234 だけで、倍率にほとんど依りません。作用に依る定数（タドポール。熱核ではさらに Van Vleck の前因子の $-\frac{1}{3}$）を除いた非可換の部分は -0.43 で、倍率 2 から 3 への変化 -0.25 は一ループの係数 $-\frac{11}{3\pi^2}\ln\frac{3}{2} \approx -0.151$ の 1.7〜1.9 倍です 読 （倍率 3 の波数 0 は二点の外挿）。この規則では「流れの向きと桁は漸近自由と合うが、$\ln b$ の係数は小さい倍率で合わない」までが言えます。熱核と Manton の差 $-\frac{1}{3}$、Wilson と Manton の差 $\frac{5}{3}t$（t は $U(1)$ の Wilson の値）は恒等式です 初 （s^2 の係数の勘定。算術は Lean：`tadpole_weights`・`vanvleck_ratio`）。線の上の積を固定する規則は粗い尺度より長い波長の揺らぎまで積分する見込みがあり（上の木の $1/L$）、係数を比べるには平均型の規則か、より大きい倍率が要ります（問い「網の長波長の一ループの係数」）。係数 b_0 は 7-05 の式 (9) の規約です。

含意のうち、結合の流れの剰余の条件と結合の連続性から結合の留まりが出るのは結合の小ささの帰納の補題 初 、形の剰余の条件から定数の積 $\prod_k (1+\eta_k)$ が有界なのは積の算術 初 （$1+x \le e^x$）、横の縮みから外れが段数に一様なのは等比級数 初 （§04、一段の不等式を仮定）、局在と稀さが重みのノルムから従う部分は平らな場の付録 A の枠からの読み 読 （15-02 §04）です。部品と条件の対応は、類が閉じる条件の母数 β が結合の留まりの「結合」そのもの（§05 の主要項への射影の規則）、結合の流れの剰余の条件が結合の留まり（結合の流れの規則）、形の剰余の条件の局在した部分が小さい場の解析性の条件（活動のノルムの規則）、大きな場の部分が大きい場の稀さの条件（大きな場の稀さの規則）です。

なぜ「比 2 を保つ類」としては言明しないか。最小の系（一列四枚のプラケット、15-06）では、二次の二つの結合の比を木の値 2 に保つ作用の曲線（基本表現と随伴表現の混合の作用で、随伴の結合が $\rho \approx -1/4$ のもの）が見つかります。しかし一段の写像は形の座標を縮める向きに働き、その曲線を一段で $O(1)$ 離れた所に写すので、曲線は流れで閉じません（15-06、SU(2)・一列四枚・対角で定義した一段・主項の水準） 読 。流れが引き込む先の類の上で、比は $2 + \frac{2}{3B} + O(B^{-2})$ で、ずれの主項は群の曲がりから来る一ループの量です 初 （一ループの水準・同じ系）。だから比 2 は母数で調整できる座標ではなく、引き込む先に残る量です。類が閉じる条件は「比 2 を保つ類」でなく「引き込む先の一母数の類＋縮む形」として言明する方が、測った最小の系と整合します 読 （この系に限る）。

剰余 0 の例。15-04 §01 の一リンクの熱核の類 $\{p_\tau\}$（母数一つ）では $T(p_\tau) = p_{\tau+t}$ ちょうどで剰余は 0 です 初 （半群の性質）。損が望遠鏡和になるのはこの「剰余 0」の言い換えで、背景に依らない揺らぎ（15-07 の背景に依らない揺らぎの一段の補題）と同じ事実の別の面と読めます 読 。

03

結合の小ささの帰納の補題 — 結合が小さく留まる条件を二つに割る

Bałaban の仮定「有効結合が $(0, \gamma]$ に留まる」（15-02 §02）は、裸の結合 g_0 をうまく選べば満たせる、という形の文です。ただし有効結合 g_{k+1} は、それまでの段が小さい間しか定義されません（有効作用から読み取る係数なので）。このことを定義域で明示すると、結合の留まりは二つの条件に割れます。

結合の小ささの帰納の補題。 $b > 0$、$C \ge 0$、$\gamma_1 > 0$ が $C\gamma_1^2 \le b/2$ と $\gamma_1^2 < 2/(3b)$ を満たすとし、$n \ge 1$ を固定する。各 $g_0 \in (0, \gamma_1]$ について、列 $g_0, g_1, \dots$ が「$g_k \in (0, \gamma_1]$ なら g_{k+1} が定まる」形で帰納的に定義され、次の二つを満たすとする。

- **結合の一段の正味の括弧**（一段の剰余）。$\dfrac{1}{g_{k+1}^2} = \dfrac{1}{g_k^2} - b + r_k$、$|r_k| \le C\, g_k^2$。

- **結合の連続性**（定義域の中の連続性）。$D_k := \{g_0 :\ g_0, \dots, g_k \in (0, \gamma_1]\}$ の上で $g_0 \mapsto g_{k+1}(g_0)$ は連続。

このとき全ての $\gamma_0 \in (0, \gamma_1)$ について、ある g_0 があって $g_0 < g_1 < \cdots < g_n = \gamma_0$（全て定義される）。

初 証明。(i) $g_k \le \gamma_1$ なら結合の一段の正味の括弧と $C g_k^2 \le b/2$ から

$$\frac{1}{g_k^2} - \frac{3b}{2} \ \le\ \frac{1}{g_{k+1}^2} \ \le\ \frac{1}{g_k^2} - \frac{b}{2} \tag{2}$$

左辺は $1/\gamma_1^2 - 3b/2 > 0$ 以上なので g_{k+1} は正の有限の数で、右から $g_{k+1} > g_k$。(ii) $J := \{g_0 \in (0, \gamma_0] :\ g_0, \dots, g_n$ **が定義され全て** $\le \gamma_0\}$ と置く。(i) の単調性から $J = \{g_0 \le \gamma_0 :\ g_n$ **が定義され** $g_n \le \gamma_0\}$。$g_0^2 \le (1/\gamma_0^2 + 3bn/2)^{-1}$ なら、(2) の左を繰り返して $1/g_k^2 \ge 1/g_0^2 - 3bk/2 \ge 1/\gamma_0^2$（$k \le n$）なので J は空でない。(iii) $s := \sup J$ とし、J の点列 $g_0^{(j)} \to s$ をとる。$s \le \gamma_0 < \gamma_1$ なので $g_1(s)$ が定まり、結合の連続性で $g_1(s) = \lim_j g_1(g_0^{(j)}) \le \gamma_0$。同じことを $k = 2, \dots, n$ と繰り返して $s \in J$。(iv) もし $g_n(s) < \gamma_0$ なら、$n \ge 1$ と (i) から全ての $g_k(s) < \gamma_0 < \gamma_1$。結合の連続性から s の右の近傍でも $g_0, \dots, g_n$ が定義され $< \gamma_0$ で、$s = \sup J$ に反する。よって $g_n(s) = \gamma_0$、単調性から $g_0 < \cdots < g_n = \gamma_0$。∎

変種：結合の一段の正味の括弧を $|r_k| \le C g_k^2 + \eta_k$（$0 \le \eta_k \le b/4$）に替えても、(2) の定数を $7b/4$ と $b/4$ に、正値の条件を $\gamma_1^2 < 4/(7b)$ に替えれば同じ証明が通ります 初 。尺度に依る非普遍の項は、$1/g^2$ の定数のずれとして吸収されます。

結合の小ささの帰納の補題が言うこと。結合の留まりは、**一段の剰余の評価（結合の一段の正味の括弧）**と**定義域の中の連続性（結合の連続性）**に割れ、それ以外の部分（単調性と中間値の議論）は初等的です。結合の一段の正味の括弧は「g_k^2 の大きさの部分を流れに吸収し、剰余を $1/g^2$ の変数で $O(g_k^2)$ に閉じ込める」ことの、結合の流れの側の文です。

結合の小ささの帰納の補題が言わないこと。結合の一段の正味の括弧は、四次元の非可換で大きな場の寄与を含めて、本書の設計では示されていません（公開された構成は、別の設計で、結合を段ごとの帯の入れ子で運んでいます。14-03）。これが未公刊の基本の不等式（Bałaban 1989 の Theorem 2）の中身に当たります 仮 （基本の不等式（未公刊）の本文が無いので、対応は序文の一文からの読み）。結合の連続性は「各段の有効作用が裸の結合に連続に依り、有効結合がその連続な汎関数として取り出される」ことです。有限個のコンパクト群の上の積分なので優収束定理で筋は通りますが、有効結合の取り出し方が小さな場の展開の中で決まる以上、その展開の解析性（小さい場の解析性の条件）に依ります 仮 （筋だけ）。結合の小ささの帰納の補題で結合の留まりが易しくなったとは言いません。帳簿の部分と本体の部分を分けただけです。結合の一段の正味の括弧の大きな場込みの評価の案は 15-08 にあります。

結合の一段の正味の括弧をさらに割ると。結合の一段の正味の括弧の剰余は恒等式で $r = r^{\mathrm{small}} + r^{\mathrm{large}}$ に割れ、大きな場の分 r^{large} は揺らぎがリンクごとの熱核の積なら読み取りの Lipschitz 定数 × 稀さで押さえられます 初 （一リンク・一段・背景に依らない揺らぎ。15-08 §02 の大きい場の剰余の上界の補題・熱核の揺らぎの稀さの補題）。小さな場の分（小さい場の結合への寄与）は、Taylor の切り捨て（$(h_0/r_0)^{2k+2}$、平らな場の原典の Lemma 7.5.3 と同じ形）・小さな場の切り（$e^{-c(1-q)^2 h^2 \beta}$）・ブロック間の二次の陽な項とその局所の打ち消しの三つに割れ、原典に無いのは三つ目の群版——原典自身が平らな場で sketch と書く箇所——です 読 （15-08 §06。前の二つは複素の背景での解析性の条件と余白 q の下で 初 ）。これは原典で知られている構造と同じ形を群の上で条件つきで書いたもので、結合の一段の正味の括弧を示したものではありません。二つのブロックの最小の系では、ブロック間の二次の陽な項は一ループから $O(1)$ で現れ（局所の部分は β_0' へ、残りは形の座標へ）、局所の打ち消しが要るのは $O(1/\beta)$ の部分です。その非局所の尾の型（平ら・指数・冪）は粗い変数の定義で決まり、指数を得る十分な組み方は、保存量を作る共有を避け、局所の拘束を粗い変数に昇格させ、大域の拘束を有限個の札として分けることです 読 （一・二・三次元の模型の数。四次元は測っていない）。結合の一段の正味の括弧の行のうち原典と同じ形なのは Loc の射影・W の書き方・Taylor の剰余の形で、Loc を成分の射影に取ること・零和の理由・切りの払い方・段の和の取り方の四点は、原典と切り方が違うかもしれません 読 （15-08 §06）。

結合の一段の正味の括弧のブロック間の項の再帰 — 一列の模型での形。ブロック間の項を二段目に流すと、一列の模型では「一段目の非局所の項の像は同じ型に閉じ、結合の比で二次 $5/8$・四次 $5/48$ 以下に縮み、その段で新しく生まれる項は段に依らない」形で書け、非局所の項は 0 ではなく決まった値へ幾何級数で引き込まれます 初 （像を条件つき期待値で書く一次の Taylor の式と、木の有理数）・ 読 （数。$SU(2)$ 熱核・対照に $U(1)$ Wilson・一列・対角の定義・二ブロック七枚の一段を二度・隣り合う対の四つの型・非局所の項について一次・粗い場の四次まで・$\beta = 32$〜512 と外挿）。超ブロックが三つ以上並ぶと、四次の像に三つの粗い場を同時に含む項が出ます。境の一枚を半分ずつ配る（保存量の無い）粗い変数では、その係数は三つ組の幅 d について $e^{-\kappa d}$、$\kappa = \ln(5 + 2\sqrt{6}) \approx 2.29$（背景の写像の率）で減り、一つのブロックを含む和は体積に一様、自分の像は 5×10^{-3} 以下に縮みます 読 （一段・木と一ループ・$L \le 8$・$d \le 7$。前因子は木で定数、一ループで d の一次）。ただし $d = 2$ の三体の係数は隣り合う対の係数と同じ桁で、小さいのは尾だけです。よって一列の模型では、結合の一段の正味の括弧のブロック間の項は「対の型（固定点の値＋縮むずれ）＋幅について指数で減る三体の型」で四次まで閉じます 読 （帳簿は Lean：`affine_bound_uniform`（$0 \le \lambda < 1$・$0 \le C$）・`pair_tail_uniform`（$0 \le \lambda, \mu < 1$ と二本の再帰の不等式）・`three_body_sum_le`（$0 \le \rho < 1$・$|q(d)| \le C\rho^d$））。保存量のある定義に戻すと三体の係数は距離に平らです。原典の連続の場では「前の段の非局所の項は核を変えずに残り、新しい段の分が足される」加法性（BBS の (A.1.4)–(A.1.5) と Exercise 2.2.4）で書かれる部分で、群の一列ではそれが「縮む

像＋段に依らない新しい項」になります 典 （原典の式）・ 読 （対応）。四体の項・一ループの水準の三体の自己の像・四次元への写しは残ります（15-08 §06）。

04

横の縮みの帳簿 — 外れは和でなく上限で

形の剰余の条件の「ρ_k が段数に一様に留まる」を、測る量の言葉で書きます。重みの空間 X、一段 $T : X \to X$、測る量 $\Phi_{\mathrm{obs}} : X \to \mathbb{R}$（例：層の外の曲率 κ/β、全変動距離）を置き、類 $\{w_\beta\}$ と読み取り $b : X \to \mathbb{R}$（$b(w_\beta) = \beta$）をとって、類の関数 $F(\beta) := \Phi_{\mathrm{obs}}(w_\beta)$ と定めます。$u_k := T^k(u_0)$、$\beta_k := b(u_k)$、類からの外れ $\delta_k := \Phi_{\mathrm{obs}}(u_k) - F(\beta_k)$ とすると、恒等式

$$\Phi_{\mathrm{obs}}(u_K) - \Phi_{\mathrm{obs}}(u_0) = \big[F(\beta_K) - F(\beta_0)\big] + \big[\delta_K - \delta_0\big] \tag{3}$$

が成り立ちます 初 （定義から）。第一項は母数の動きに吸収される分で、端の値の差だけが残ります（望遠鏡和）。第二項が損で、$r_k \ge |\delta_{k+1} - \delta_k|$ なら $|\delta_K - \delta_0| \le \sum_{k<K} r_k$ です 初 。

横に縮む場合。$T(w_\beta) = w_{\tau(\beta)}(1 + r_\beta)$、$\|r_\beta\| \le \varepsilon(\beta)$ とし、横の安定性 $T(w_\beta(1+\rho)) = T(w_\beta)(1+\rho')$、$\|\rho'\| \le \lambda\|\rho\|$（二次の項を落とした線形の不等式）を仮定します。$u_k = w_{\beta_k}(1+\rho_k)$ と書けば $\|\rho_{k+1}\| \le \lambda\|\rho_k\| + \varepsilon(\beta_k)$ で、

$$\|\rho_k\| \;\le\; \lambda^k\|\rho_0\| + \frac{\sup_j \varepsilon(\beta_j)}{1-\lambda} \qquad (0 \le \lambda < 1) \tag{4}$$

です 初 （等比級数。上の線形の不等式の下で）。**剰余が $O(1/\beta)$ でも、外れは和でなく上限で押さえられ、段数に一様**です。$\lambda = 1$ なら $\|\rho_K\| \le \|\rho_0\| + \sum_{k<K}\varepsilon(\beta_k)$ で、$\varepsilon(\beta) = C/\beta^2$ と $\beta_k \ge \beta_* + ck$（細かい側へ一ループで一次に増える、15-01 §01）なら

$$\sum_{k<K} \frac{C}{(\beta_* + ck)^2} \;\le\; C\Big(\frac{1}{\beta_*^2} + \frac{1}{c\beta_*}\Big) \tag{5}$$

で有限です 初 （$1/(u+c)^2 \le 1/(cu) - 1/(c(u+c))$ の望遠鏡和）。$\varepsilon(\beta) = C/\beta$ では和が $\ln K$ で増え、一様ではありません（15-01 の対数の発散と同じ型）。だから「一段の損が $O(1/\beta^2)$ なら一様」と「固定の形へ幾何級数で縮むなら $O(1/\beta)$ の剰余でも一様」の二通りがあり、後者の方が弱い仮定で通ります。

流れが結合を小さくする場合の形のずれ。最小の系の一段（15-06）では、木の結合が一段で $B_{n+1} = B_n/5$ と変わり、形の座標（q/B の単位）の外れ r_n が

$$r_{n+1} \le \lambda\, r_n + \frac{C}{B_n}, \quad B_n = \frac{B_0}{5^n},\ 0 \le \lambda < 5 \qquad\Longrightarrow\qquad r_n \;\le\; \lambda^n r_0 + \frac{C}{(5-\lambda)\,B_n} \tag{6}$$

を満たします 初 （帰納法。一段の不等式は仮定）。一列四枚の射影の模型では、この不等式の定数を数で与えた形がある：実際の段の尺度で $r_n \le \lambda^n r_0 + C/((5-\lambda)B_n)$、$C = 0.0108$（$B \ge 32$・$r \le 0.05$ の箱） 初 ・ 読 （評価の筋は紙、定数は明示の積分と級数の数値。15-06 の一列四枚の形の剰余の定理）。$\lambda < 1$ なら出発のずれは幾何級数で消え、残りは常にその段の $O(1/B_n)$ です。最小の系の λ は形の座標で最大 $17/125$ でした（15-06、一列四枚・主項） 読 。(6) で B_n が細かい側へ減る向きに書いてあるのはその系の約束で、紫外の向き（細かい側ほど B が大きい）では C/B_n は細かい段ほど小さくなります。

分解への含意：類が閉じる条件の類を引き込む先の曲線に取れば、四次元の一段で問うべきは「源の大きさ ε」と「横の縮み λ」の二つの数になります 読 。最小の系でこの二つがどう測れるかは 15-04（階層模型）と 15-05（束の網）にあります。

類の固定点の縮小写像の窓 — 類が閉じる条件の類の固定点を縮小写像の形で。漸近自由のもとで結合 g の固定点は $g = 0$ だけで、赤外へは斥けます。そこで言明すべきは (g, W) の対の固定点ではなく、g を流しながら一段の写像 $W \mapsto T(g_k)W + R(g_k, W)$ を重ねたとき、ある閉球に留まる両側無限の軌道がただ一つ在ることです。その軌道が引き込む先の一母数の類 $W = h(g)$ です。各段の写像が閉球を保ち、その上で縮むなら、この存在と一意性は縮小写像の原理の算術です Lean （ClassFixedPoint：`exists_unique_entire_orbit`・`tracking`・`norm_iterate_sub_le`。一段で縮まなくても、n 段の線形部 μ_n、一段の線形部 τ、剰余の Lipschitz 定数 ℓ で $\mu_n + (\tau+\ell)^n - \tau^n < 1$ なら足ります。凍らせた g での不動点からのずれは $\delta/(1-K)$ に留まり、(4) の $\sup \varepsilon/(1-\lambda)$ と同じ形です）。したがって残るのは仮定の側の数です。

剰余を木の固定点の作用に相対に、次元 6 の重みで測ります。物差しには、固定点の作用の二次を面の対の核に戻し、面のホロノミーと平行移動で包んだゲージ不変な作用 S^*（二次は固定点から 15% 以内）を使います。この物差しで、一段の線形部はどの運動量でも $\tau = 0.695$ で縮み、非線形の係数は $a = 4.335$ です。一ループの源は同じ作用で組み、F^2 の部分を作用そのものの向きで β へ移しました。β の移りが普遍の値になるように作用の四次の頂点を一つの数で合わせると、残る源は g^2 あたり $c_0 = 0.02 \sim 0.04$ です（12^4 の格子）。縮小写像の窓は、三段の評価（$\mu_3 = \tau^3$）で β がおよそ 28〜54 から開きます 計算 （木の Gauss の部分と一ループの二次）。条件は四つです。(i) β へ移す向きを作用そのものの向きにとること（A 型の Loc）は紙の上の論で、形式的な検証はまだです 紙 。(ii) a は運動量の探索で見つけた点での上下の一致（半正定値の緩和による上からの値と、具体的な場による下からの値）で、連続の運動量の上の上限そのものではありません。(iii) S^* は固定点ではありません（一段で二次が 23% 動きます）。(iv) 剰余の Lipschitz 定数は $\ell = 0$ と置いています。

非線形の係数の運動量の上の最大は、もとの物差し（A_4）では、全ての運動量の箱を二次の展開の上界で覆った計算で 4.3313 以下であり、最大の点での具体的な場による値 4.3308 と $5\times$

10^{-4} の差で一致しています 計算 （浮動小数の計算で、区間演算で計算機援用で確認したのは最大の点のまわりの小さな箱 $|q-q^*|_\infty \le 3\times 10^{-4}$ の上だけです。一方、この上界を使うための段の作用の正定値性は、原点のまわりの小さな箱を除く全ての運動量で区間演算により確認しました 機 。原点のまわりは標本で見ています）。

05

規則の束 — 何を規則にすれば一段が閉じるか

15-00 §01 の一段で閉じる形を、規則の束として書き直します。表 1 の各行は「一段で閉じる類」を作るのに要る規則の候補で、24-08 表 2 の規則の候補（尺度の公理化の規則・稀さの類の規則・漸近自由の公理の規則・曲率の規則）のどこを埋めるかを並べました。どの行も候補で、無矛盾性も既存の結果を言い直せることも確かめていません 読 （物理の見立て）。

表 1　一段が閉じるための規則の束（候補）

規則	中身（一行）	24-08 の候補	手元の部品	足りないもの
ゲージ共変な平均	平均の写像がゲージ変換と中心のずらしに共変で、線形化はスカラーの平均、非線形の部分は二次まで	尺度の公理化の規則	連作の段 2（題）	二次の剰余の定数の評価
背景場の写像	平均を与えて作用を最小にする配位が、尺度に依らない半径の中で一意・解析的・局所的	尺度の公理化の規則	連作の段 3（題）。二次元 $O(4)$ の縮小写像	局所のゲージ固定込みの四次元の書き下し
活動のノルム	背景 × 揺らぎの重みが四性質の群版を持つ	稀さの類の規則（ゲージ共変な活動のノルム）	場の和の劣乗性（BBS の (ii)）の群版（背景と揺らぎの分解の補題）。背景に依らない揺らぎの一段（背景に依らない揺らぎの一段の補題）。揺らぎの期待値の閉じと次の段への単調性の群版の言明（15-07）	揺らぎの期待値の閉じと次の段への単調性の群版の証明と、η_k の母数への吸収
主要項への射影	有効作用を「$\frac{1}{g_k^2}\times$ Wilson の作用 ＋ 局在した無関係な項」に分け、marginal な F^2 だけを主要項へ送る	尺度の公理化の規則（縮む方向と周辺の方向）	熱核の望遠鏡和の型。最小の系の引き込む先の類（15-06）	群の上でこの射影を定めること（ゲージ不変な局所関数の何次まで）
大きな場の稀さ	大きな場の領域の重みが $z_k^{\lvert Z\rvert}$、$z_k \le e^{-cp(g_k)^2}$、c が段で崩れない	稀さの類の規則	連作の段 5（仮定つき）。一リンクの曲率の負（15-01）	帰納の一段（「最悪の幾何」を避ける形）
結合の流れ	一段の剰余 $\lvert r_k\rvert \le Cg_k^2+\eta_k$	漸近自由の公理の規則	結合の小ささの帰納の補題（§03）	大きな場込みの結合の一段の正味の括弧

規則	中身（一行）	24-08 の候補	手元の部品	足りないもの
定数の陽化	上の全ての定数を陽な数か陽な関数で	新しい候補	浮動小数の数値の記録	区間演算・解析の評価

難しさの源との対応 読 （物理の見立て）：無次元の結合という源は主要項への射影と結合の流れの規則、大域のゲージ固定の欠如（大きな場が凸性で制御できない）はゲージ共変な平均・背景場の写像・活動のノルム・大きな場の稀さの規則（15-01 §03）。紫外だけを扱う紫外の制御には、尺度をつなぐ展開の欠如（紫外と赤外をつなぐ展開が無い）が現れません。

規則にするときの注意（15-00 の読み違える型から）。

- 規則には「一段」の版と「全段」の版を別に書き、一段の版から全段の版を出す仮定（定数が段で崩れない）を規則の側に明示する。
- 規則の入力を、同じ規則の出力から取らない（「循環」の型）。
- 不等式の向き（上界か下界か）を規則ごとに一つ書く。

06

帯の分解との対比 — 一段の損を払う相手

移り変わりの帯は 26-06 §01 で、β 単調性（渦の自由エネルギーが β について単調）と繰り込みの比較（格子を倍にした比較）に割られました 仮 。表 2 は二つの分解を並べたものです。

表 2　帯の分解と紫外の分解（読み）

	帯（26-06）	紫外（この章）
一段の比較	繰り込みの比較：倍の格子と、結合を強めた元の格子を定数 K で比べる	(1)：$T(w_\theta) = w_{\Phi(\theta)}(1+r)$
漸近自由が入る所	$\beta' < \beta$ の向きだけ	Φ の β 成分が $\beta_{k+1} < \beta_k$ の向きだけ（結合の流れの剰余の条件の主項）
群を区別しない部品	β 単調性：調整（β' を小さめに選んでも損しない）	結合の連続性と単調性：結合の小ささの帰納の補題の中間値の議論（裸の結合の調整）
一段の損の扱い	K^k の損を、強結合の端の面積の指数の小ささ（段を重ねて二重指数）で払う	$\prod_k (1+\eta_k)$ を払う相手が無い（弱結合の端は Gauss で、損を打ち消す小ささを持たない）。だから $\sum_k \eta_k < \infty$ か横の縮み $\lambda < 1$ が要る
損の許される大きさ	一段に定数 K（1 より大きくてもよい）	一段に $1+\eta_k$、η_k は $g_k^{2+\delta}$ の型（g_k^2 の型は積が 0 に向かうので不可）。横に縮む向きなら $O(g_k^2)$ の剰余も上限で運べる（§04）
未決の芯	β 単調性は張力の β 単調性と同じ重さ。繰り込みの比較は帯の中で未	大きな場込みの結合の一段の正味の括弧。η_k を母数に吸収すること（15-07）

表 2 から読むこと 読 （物理の見立て）。二つの分解は同じ型（群を区別する一段の比較と、群を区別しない調整）で、割る形は同じです。違いは**一段の損を払う相手の有無**にあります。帯は強結合の端に二重指数の小ささがあるので一段の定数 K が粗くてもよく、紫外は払う相手が無いので、一段の損そのものを和の有限な大きさか、母数の動きか、横の縮みの上限に閉じ込めるしかありません。

07

三つの紫外の問い

表 3 は、この分解から出る問いを 24-08 表 1 の形で並べたものです。番号は 26-11 の表 4″ のものを引き継ぎます。第 15 部の他の章の紫外の問いと全体の索引は 15-09 にあります。

表 3　紫外の壁の分解から出る問い（状態：新＝26-11 で足した問い。更新＝この章で書き直した）

問	問い	大きさ	状態	決着したら動くもの	決着しても動かないもの	どの章から
1	引き込む先の一母数の類の上で横に縮むか。最小の系では、引き込む先の類（結合 B ひとつ＋固定された $O(1/B)$ の形）が在り、形の座標は一段で縮む（一列四枚で最大 $17/125$、主項）。問い：(i) 四次元の格子に埋めたブロック（周りの束の逃げ道・ゲージの張り替えを含む）で、横の縮み λ と源が有限に留まるか（粗い面 2×2 を内部に置いた四次元の箱で $\lambda \approx 0.027$・源 $\approx 5\times10^{-4}$、全ての粗い面を固定した網では λ は行列で粗い向きでは $1/16$ を超える。15-05）。(ii) 一段の不等式 (6) の定数 C が段に依らず在るか（一列四枚の射影の模型では一列四枚の形の剰余の定理が数で与えた、15-06）。(iii) 中心の $\mathbb{Z}_2$ の符号の重み（渦の重み）が別の母数として要るか	紙と小さな計算	更新	類が閉じる条件の母数の個数と座標。引き込む先の類の次元	四次元の格子の類が閉じる条件と結合の一段の正味の括弧	15-03 §02・§04・15-05・15-06

問	問い	大きさ	状態	決着したら動くもの	決着しても動かないもの	どの章から
2	結合の一段の正味の括弧を大きな場込みで示せる最小の模型はどれか（大きな場の分は熱核の揺らぎの一リンクで済み、残る芯は小さい場の結合への寄与、15-08 §02・§06）。候補：階層的な $SU(2)$ 模型で、一リンクの遠い半球（重さ $e^{-\beta}$ の程度）の寄与を含めて $\lvert r_k\rvert \le C g_k^2$ が立つか。あわせて、一プラケットの拘束つきの吸収 $\mu_W^{\beta} = \mu_1^{\beta\cos(\theta/2)}$ を、多プラケットの真の拘束つき最小点で言い直せるか	紙	新	結合の流れの規則の結合の一段の正味の括弧を階層の水準で一行	四次元の格子の基本の不等式（未公刊）	15-03 §03・15-07
3	捩れの役目：$n_{12} = 1$ の M^4 の格子の上で、孤立した捩れた平坦な接続のまわりの随伴の揺らぎの作用素の最小固有値が c/M^2 以上か（有限次元の線形代数）。あわせて、背景と揺らぎの分解の補題が捩れで変わらないことの先に、揺らぎの期待値の閉じの群版が捩れで変わらないか	紙（一部は小さな計算）	新	捩れた小さな四次元トーラスの紫外の言明の分配関数の分母と最後の段の非退化	細かい段の紫外の制御。結合の一段の正味の括弧	15-02 §05

08 言えないこと

(a) この部の中で、紫外の制御は閉じていません。分解の言明（類が閉じる条件・結合の流れの剰余の条件・形の剰余の条件・結合の連続性）のどれも、本書の検討は四次元で示していません。四次元の存在は、公開された構成が別の設計で示しました（第 6〜13 部）。

(b) 結合の小ささの帰納の補題は結合の留まりを結合の一段の正味の括弧と結合の連続性に割っただけで、結合の一段の正味の括弧（未公刊の基本の不等式の中身）を示していません。

(c) §04 の帳簿は、二次の項を落とした線形の不等式と一段の不等式を仮定したときの算術です。四次元の一段で $\lambda < 1$ と剰余の評価が立つことは示していません。

(d) $m = 2$ は冪の数え方の読みで、非摂動の類について示していません。「引き込む先の一母数の類」は一列四枚・対角の定義・主項（結合が大きい極限）の最小の系の読みで、四次元のブ

ロック化について言っていません。

(e) 規則の束は候補で、無矛盾性も既存の結果を言い直せることも確かめていません。帯との対照は見立てで、帯の β 単調性・繰り込みの比較と紫外の剰余のどれも示していません。

(f) §03 の結合の一段の正味の括弧の割り方は 15-08 §06 の言明と評価の要約で、小さい場の結合への寄与を示していません。原典と同じ形が立つのは複素の背景での解析性の条件と余白 q の下で、ブロック間の二次の陽な項の群版は示していません。§02 の「幾何の部分は母数の側へ」は二リンクの模型の数を四次元の段に写す読みです。§02 の類の座標の最終形は、三次元の一段の鞍点の展開と二リンク・十字の数からの案で、四次元の一段で閉じることは示していません。

(g) §02 の四次元の類の最終形は、自由境界の箱で辺だけを固定する規則（と、面を全て固定する規則・周期の網の二次）の木の水準の当てと、一ループ（$L \le 4$）の数です。比の座標の固定点の存在も、四次の 65 本の値も示していません。周期の網では類が一つの胞に収まりません。結合の流れの実測は一つの規則の一段目の一ループの数で、段を重ねた係数は測っていません。形の剰余の条件の多段の条件のうち固定点での錐の縮みの条件は下界の水準で、上界はありません。§03 の結合の一段の正味の括弧の再帰は一列・保存量の無い定義・非局所の項について一次の文で、四次元・四体の項・一ループの水準の三体の像は測っていません。

09

五分類の表と依存グラフ

表 4　この章の行（この章の行に Lean の欄はありません）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲
[01]	類と一段の写像の形 (1)・冪の数え方で $m = 2$	読	§01（冪の数え方）	四次元の純ゲージ・局所の項
[02]	結合の小ささの帰納の補題：結合の一段の正味の括弧＋結合の連続性 $\Rightarrow g_0 < \cdots < g_n = \gamma_0$（変種つき）	初	§03	$C\gamma_1^2 \le b/2 \cdot \gamma_1^2 < 2/(3b)$・$n$ を固定
[03]	結合の一段の正味の括弧の中身は大きな場込みの一段の剰余で、基本の不等式（未公刊）の中身に当たる	仮	§03（序文の一文からの読み）	四次元の非可換
[04]	恒等式 (3)・望遠鏡和の損の上界	初	§04	定義から
[05]	横の縮みの帳簿 (4)・$\lambda = 1$ の和 (5)・形のずれ (6)	初	§04（等比級数・望遠鏡和・帰納法）	線形の不等式と一段の不等式を仮定

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲
[06]	比 2 を保つ曲線は流れで閉じず、引き込む先の比は $2+\frac{2}{3B}$	読 ・ 初	§02（15-06 の結果）	SU(2)・一列四枚・対角の定義・主項／一ループの水準
[07]	紫外の壁の分解：類が閉じる条件・結合の流れの剰余の条件・形の剰余の条件・結合の連続性 ⇒ 紫外の制御。類が閉じる条件は引き込む先の一母数の類＋縮む形	仮	§02（言明の形）	言明だけ
[08]	規則の束と根との対応	読	§05（物理の見立て）	候補
[09]	帯の分解との対照：割る形は同じで、一段の損を払う相手の有無が違う	読	§06（物理の見立て）	—
[10]	三つの紫外の問い	仮	§07	問いの形
[11]	結合の一段の正味の括弧の割り方：$r^{\mathrm{small}}+r^{\mathrm{large}}$、小さい場の結合への寄与は Taylor の切り捨て（原典と同じ形）・切り・ブロック間の二次の項に割れる。背景依存の幾何の部分は母数の側へ	仮 ・ 読	§02・§03（15-07・15-08 の要約）	複素の背景での解析性の条件・余白 q・二リンクの模型の読み
[12]	類が閉じる条件の類の座標の最終形（結合の行列・形・背景・一リンクの結合・角の三重積・多面の四次）	仮	§02（15-07 の要約）	三次元 $2\times2\times2$・二リンク・十字の読み
[13]	形の剰余の条件の $\sum_k \eta_k$ は背景を母数に持たせれば段数に一様、難しさは類が閉じる条件へ移る	読 ・ 初（予算の算術）	§02（15-07 §06）	最小の系・条件つき
[14]	四次元の類の最終形：一つの母数 B＋流れが値を決める比の座標（二次 2・三次 3・四次 65）。斜めの隣は規則に依らず 0 でなく、値と「局所」は規則に依る。木に $\ln L$ の走りは無い	読 ・ 初（本数の勘定・自由度の一致）	§02（15-07 §07）	$SU(2)$・熱核・木は $L\le10$・一ループは $L\le4$・周期の網は可換の木の二次で $L\le16$・外挿
[15]	結合の流れの実測：周期の網の一段で $\beta'-\beta=-0.745\sim-1.136$、倍率 2→3 の変化は一ループの係数の 1.7〜1.9 倍	読 ・ 初（作用の差の恒等式）	§02	$SU(2)$・一ループ・可換の背景・横 6^3・波数 0 は外挿
[16]	形の剰余の条件の錐の縮みは段数に一様でなく、ブロック化の条件（共分散の流れの固定点の条件と、固定点での錐の縮みの条件）が要る	読	§02（15-05 §07）	可換・木の水準・周期・2^4・線形化・区間の評価なし・固定点での錐の縮みの条件は下界だけ
[17]	結合の一段の正味の括弧のブロック間の項の再帰の一列版：対の型の縮む像＋段に依らない新しい項＋幅について指数で減る三体の項で四次まで閉じる	読 ・ 初（一次の Taylor の式と帳簿）	§03（15-08 §06）	一列・保存量の無い定義・熱核・一段・非局所の項について一次・四次まで

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
[01] 読   類と一段の写像・m = 2                                  冪の数え方
[02] 初   結合の小ささの帰納の補題                                        正味の
[03] 仮   結合の一段の正味の括弧が本体 ⟸ [02]                              四次
[04] 初   恒等式と望遠鏡和
[05] 初   横の縮みの帳簿 ⟸ [04]                                  一段の不等式を仮定
[06] 読   比 2 の曲線は閉じない・引き込む先の比 ⟸ [01]            一列四枚・主項
[07] 仮   紫外の壁の分解 ⟸ [01][02][05][06]                      言明の形
[08] 読   規則の束 ⟸ [02][07]
[09] 読   帯との対照 ⟸ [07]
[10] 仮   三つの紫外の問い ⟸ [03][05][07]
[11] 仮   正味の括弧と小さい場の結合への寄与の割り方・幾何の部分は母数へ ⟸ [03][07]    複
[12] 仮   類の座標の最終形 ⟸ [07][11]                            三次元の読み
[13] 読   η の和は母数へ・難しさは類が閉じる条件へ ⟸ [07][11]          最小の系
[14] 読   四次元の類の最終形・局所は規則を添えて ⟸ [07][12]      木 L ≤ 10・一ループ L ≤
[15] 読   結合の流れの実測 ⟸ [01][07]                            一段目・一ループ
[16] 読   形の剰余の条件の多段の条件（固定点・錐の縮み） ⟸ [05][07]          木の水準・
[17] 読   正味の括弧の再帰の一列版 ⟸ [03][11]                          一列・四次まで
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。[03]・[07]・[10]・[11]・[12] は仮定の行で、どれも紫外の制御を割った問いの形です。この章の節点に、紫外の制御が示されたという節点はありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 結合の小ささの帰納の補題（結合の留まり ⇐ 結合の一段の正味の括弧＋結合の連続性、変種つき）と、横の縮みの帳簿 (3)〜(6)（線形の不等式と一段の不等式を仮定したとき）	結合の一段の正味の括弧と結合の連続性のどちらも。四次元の一段で $\lambda < 1$ と剰余の評価
仮 紫外の壁の分解と類が閉じる条件の形（引き込む先の一母数の類＋縮む形）、三つの紫外の問い、結合の一段の正味の括弧と小さい場の結合への寄与の割り方（原典と同じ形の部分と、ブロック間の二次の項の群版）	どれの証明も。紫外の制御が閉じる見込み
仮 類が閉じる条件の類の座標の最終形の案。読 背景を母数に持たせたときの $\sum_k \eta_k$ の閉じ方（条件つき）	四次元の一段で類が閉じること。面・多ループの二段目
読 $m = 2$ の冪の数え方・規則の束・帯との対照・比 2 を保つ類を採らない理由（最小の系）	非摂動の類での母数の個数。四次元のブロック化での引き込む先の類
読 四次元の類の最終形（一つの母数＋比の座標、斜めの隣は 0 でない）・結合の流れの一ループの実測・形の剰余の条件の多段の条件・結合の一段の正味の括弧の再帰の一列版	比の座標の固定点の存在。周期の網で類が一つの胞に閉じること。段を重ねた結合の係数。$\sup \mu_\infty < 1$ の上界。四次元・四体の結合の一段の正味の括弧の再帰

出典と再現

もの	種別	出典・道具
条件つきの紫外安定性の定理の仮定（結合の留まり）と未公刊の基本の不等式	典（要旨と序文）	T. Bałaban, Large field renormalization. II, Comm. Math. Phys. 122 (1989) 355–392（7-07 §03・15-02）
帯の分解	仮（言明）	26-06 §01
規則の候補（尺度の公理化・稀さの類・漸近自由の公理・曲率）	読	24-08 表 2
結合の小ささの帰納の補題・帳簿 (3)〜(6)	初	この章の本文の証明
引き込む先の類・比 2 の曲線・縮み $17/125$	読（木の写像と一ループの式は初）	本書の検討（15-06。一列四枚の模型、二経路の数値）
表 1〜3・分解の言明	本書の検討	本書の検討の記録（紫外の制御の検討の整理）
類の座標・$\sum_k \eta_k$ の閉じ方	読（予算の算術は初）	本書の検討（15-07 §06・§07 の数）
四次元の類の座標・規則の比較・結合の流れ・錐の多段・結合の一段の正味の括弧の再帰の一列版	読（本数の勘定・自由度の一致・一次の Taylor の式・帳簿は初）	本書の検討の記録（15-07 §07・15-05 §07・15-08 §06 の数）。原典の加法性：BBS arXiv:1907.05474v2 の (A.1.4)–(A.1.5) と Exercise 2.2.4。帳簿は Lean の束（15-09 表 3、再検査済み）

この章で使った語 — 類・母数の流れ Φ・剰余・類が閉じる条件・結合の流れの剰余の条件・形の剰余の条件・結合の連続性・結合の一段の正味の括弧・結合の小ささの帰納の補題・横の縮みの帳簿・横の縮み λ・源・引き込む先の類・規則の束・払う相手。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：15-04 一リンクの熱核の類と階層模型 — この章の分解が最も小さな場でどう見えるか。

一リンクの熱核の類と階層模型 — 母数一つで閉じる類と引き寄せる曲線

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 15-01・15-02 にあります。

この部は、本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた記録です。存在そのものは第二巻の第 6〜13 部を、二つの設計の違いは第 14 部を見てください。部の位置づけは 15-00 にあります。

この章で分かること — 15-03 の分解（有限個の母数で閉じる類 × 剰余）が、最も小さな場でどう見えるか。一リンクの熱核の類は半群で母数一つで閉じ、剰余は 0、損は望遠鏡和になること。Migdal–Kadanoff の階層模型の一段では、熱核の類はちょうどには閉じないが、像は一母数の不変な曲線に一段ごとに $1/16$ の割合で引き寄せられ、曲線の位置は「毎段注がれる源」と「縮み」の釣り合い $1/3600$ で決まること（鞍点の見積もり）。この模型では、有限の結合の範囲で、管の不変性と引き寄せる曲線が区間演算で確かめられていること。二次元の開いた帯の一段は一リンクの畳み込みそのもので、多リンクの検査にならないこと。

前提となる章 — 15-03 §04（横の縮みの帳簿）・18-04（Migdal–Kadanoff の一段の規約と $(1-b^{-2})/3$）・24-06 §07（稀さで払う測度の類）・15-01 §01（損の和の対数の発散）。

先に言うこと — この章の全ての文は、**一枚の重み（類関数）に当てる写像**の文です。一リンクの熱核の畳み込みと、階層格子（Migdal–Kadanoff）の上の写像は、一枚の重みが一段で一枚の重みに戻る写像で、多リンクの結合・ゲージの張り替え・大きな場の剰余が構造的にありません。だからここで閉じるものは、四次元の超立方格子の一段の紫外の制御について何も含意しません。また階層模型は $U(1)$ でも閉じ込めが起きる模型で、非可換性の検査にもなりません。

この章の順序

1. 一リンクの熱核の類 — 半群・望遠鏡和・曲率 $A+B/\beta$・三つの留保
2. Migdal–Kadanoff の一段 — 不変な曲線・縮み $1/16$・結合の流れ

3. 源と縮みの釣り合い — 鞍点の見積もり・$1/3600$・b^{d-4m}
4. 二次元の開いた帯 — 独立なプラケット・$\lambda = 1/4$・源なし
5. 階層模型の紫外の定理 — 区間演算の管、紫外から強結合までの鎖と、届かない範囲（表 1・表 2）
6. この類で言えること（表 3）
7. 言えないこと
8. 五分類の表と依存グラフ（表 4）

00

この章で分かること

- 一リンクの熱核の類は半群で母数一つ τ で閉じ、一段の剰余は 0、量の段の変化は端の値の差だけが残る望遠鏡和です（§01）。
- Migdal–Kadanoff の一段では、像は熱核 $\times \exp(\theta^4/3600 + \cdots)$ の形の曲線に一段ごとに $1/16$ で引き寄せられ、曲線の上の結合は $\beta \mapsto \beta - \frac{1}{4} - c/\beta$ と流れます（§02・§03）。
- θ^{2m} の係数の縮みは b^{d-4m}（$d = 4$・$b = 2$ で $m = 2$ が $1/16$）で、次元の数え方と同じ形です（§03、鞍点の主項）。
- この模型では、$\beta \in [2.46, 128]$ で熱核の類のまわりの管が写像で不変、$\beta \in [15.26, 64]$ で管の中の全ての軌道が一本の曲線に寄ることが区間演算で確かめられています（§05）。$\beta > 128$（格子間隔 0 の極限）は閉じていません。

01

一リンクの熱核の類 — 損は望遠鏡和になる

「損を結合の流れに吸収する」（15-01 §01）が最も小さな場でどう見えるかを、$SU(2)$ の一リンクの類関数（単位元からの角 θ だけの関数）を重みとし、熱核と一段ずつ畳み込む流れで見ます（24-06 §07 の候補と、24-08 の問い「一リンクの重みの Hessian」）。この節の全ての文は**一リンク・熱核の類・下に書く範囲**の文で、多リンク・プラケットの間の結合を含む四次元の一段については何も言いません。

熱核 p_τ は半群で

$$p_\tau * p_t = p_{\tau + t} \tag{1}$$

なので、熱核の族の中では一段の後もまた熱核で、母数 τ（実効の結合の逆数に当たる）が t だけ動くだけです 初 （半群の性質だけ）。だから熱核の重みから計算する量はどれも**その時点の母数だけの関数**で、段を重ねた変化は足し合わせると端の値の差だけが残ります（望遠鏡和）。積にはなりません 初 。15-03 §04 の恒等式で言えば、類からの外れ δ_k が恒等的に 0 の場合です。

中心 $\mathbb{Z}_2$ で割った座標（$SO(3)$、$\theta \in [0,\pi/2]$、分岐の集合 $\operatorname{tr} U = 0$ は $\theta = \pi/2$）で、層 $|\theta - \pi/2| < h$ の外の Bakry–Émery の曲率の最小を κ と書きます。Wilson の重みから出発して熱核で畳み込んだ重みについて、層の外の曲率は $\beta \in \{2,3,4,6,8\}$・$t \in \{0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5\}$・層の半幅 $h = \beta'^{-1/2}$ の全ての点で正でした（割らない $SU(2)$ では同じ範囲の全ての点で負） 読 （指標の級数と位置の空間の二つの独立な実装で一致）。層の外の曲率は

$$\frac{\kappa}{\beta} = A(h) + \frac{B(h)}{\beta} \qquad \text{(指数で小さい項を除く)} \tag{2}$$

の形をとり、Wilson の重みでは $A = \sin h$・$B = 2$ です 読 （熱核の重みでは数値と一致）。

この形を四次元の一段 $\beta' = \beta - 8b_0 \ln L$（一ループの流れを $\beta = 4/g^2$ で書いたもの）に当てると、主項 $A\beta$ は結合とともに動き（吸収される部分）、κ/β の一段の変化は $B\,(1/\beta' - 1/\beta) = O(1/\beta^2) = O(g^4)$ で、和の有限な損です 読 （上の形を当てはめた読み）。24-06 §07 が候補に置いた $\kappa_{j+1} \geq \kappa_j(1 - c/\beta_j)$ は積の型で、段数の冪で 0 に向かいますが、この類の中では悲観に過ぎます。

ただし三つの留保があります。(i) 層の稀さの率は β に比例し、一段ごとに $O(1)$ ずつ下がって $\beta = O(1)$ で尽きます 読 。これは 24-06 §07 が結合の届く範囲の限界として述べたものの一リンクでの姿で、紫外の側の新しい障害ではありません。(ii) 割った座標の凸性が払えるのは中心で不変な（随伴の）部分だけで、各リンクの $\mathbb{Z}_2$ の符号には別の通貨が要ります。多リンクでは、この符号の部分が中心の渦にあたります 読 （物理の見立て）。(iii) 四次元の繰り込みの一段は一リンクの熱核の畳み込みではなく、多リンク・プラケットの間の結合が入ります。そこで $A + B/\beta$ の形が保たれるかは調べていません。

曲線から外れる向きがこの類には無いので、横の縮みも源も現れません。分解の言葉で言えば、熱核の類は「剰余 0」の類で、15-03 の形の剰余の条件が空になる場合です。

02

Migdal–Kadanoff の一段 — 不変な曲線と縮み 1/16

この節の一段の定義は既存の知見の整理です。導入は 18-04 §04 にあります。

写像。$SU(2)$ の一枚のプラケットの重み（類関数）$w=\sum_n c_n\chi_n$（χ_n はスピン $n/2$ の指標、$a_n=c_n/(n+1)$）に、Migdal–Kadanoff の一段（$d=4$・$b=2$）を当てます。規約は 18-04 と同じで、

$$T=(\text{決定化})\circ(\text{ボンド移動}):\qquad w\ \mapsto\ \frac{w^{4}}{\int w^{4}}\ (\text{指数 } b^{d-2}=4),\qquad a_n\ \mapsto\ a_n^{4}\ (\text{平面の } b^{2}=3)$$

です。ボンド移動は平行な四枚を一枚に束ねる操作（重みの積）、決定化は直列の四枚を畳み込む操作です。この写像は階層格子の上では近似でなく写像そのものですが、四次元の超立方格子の繰り込みの一段ではありません 典 （Migdal–Kadanoff の近似の定義。18-04）。

不変な曲線。熱核の類はこの一段でちょうどには閉じませんが、像は一母数の曲線（熱核 $\times\exp(\theta^{4}/3600+\cdots)$）に一段ごとに $1/16$ の割合で引き寄せられます。同じ β' に違う段数で来た重みの差（全変動距離）の比は $j=1:2:3$ で 16.06・17.00（$1/16$ ずつの縮みの予測 16.0・17.0）で、出発の $\beta_T\in\{3.5,7,15,30\}$ のどれでも同じでした（Wilson から出発で 15.8・16.7） 読 （本書の検討の数値。一枚の類関数・階層格子の写像・$\beta\le 32$・層の半幅 $h\in\{\pi/4,\pi/8\}$）。曲線の上では層の外の κ/β はその時点の β だけの関数で、望遠鏡和が成り立ちます。

結合の流れ。熱核から出発した一段で

$$\beta\ \mapsto\ \beta-\frac{1}{4}-\frac{0.0215}{\beta}\tag{4}$$

でした 読 （$\beta=4,8,16$ の三点で係数 0.022・0.022・0.021）。$\frac14$ は 18-04 の $(1-b^{-2})/3$ と一致します。結合の小ささの帰納の補題の結合の一段の正味の括弧の形（15-03 §03）で書くと、この模型では $b=1/16$（$1/g^{2}$ の単位）、$|r_k|\approx 0.0054/\beta_k\approx 0.0013\,g_k^{2}$ です 読 （$\beta\in[2,32]$）。熱核の類に対する剰余は κ/β で $O(1/\beta)$（β に依らない形のずれ）ですが、段を重ねても積み上がりません 読 。陰性対照として各段で Wilson の係数に取り替えると、外れは $\delta\approx-0.04$（$\beta\approx 16$）を保って減りません（検出の力がある） 読 。

帳簿への当てはめ。15-03 §04 の言葉で、横の安定性は $\lambda\approx 1/16$ で成り立ち、剰余は熱核の類に対して $O(1)$ の形の補正です。したがって「横に縮む場合」の形で一様で、熱核の類からの外れは $|\delta|\le 1.6\times10^{-3}$（$\beta\ge 2$、$h=\pi/4$）、$\beta\ge 8$ では $\le 6.0\times10^{-5}$ でした 読 （測った範囲）。

> 03

源と縮みの釣り合い — なぜ $1/16$ で、なぜ $1/3600$ か

大きな β の鞍点で、一段の写像を作用の係数の写像として見積もります 初 （鞍点の主項。揺らぎの高次と、像の和の他の項 $e^{-\pi\beta h}$ の程度を落とす。誤差の定数は出していない）。

- 熱核（像を一つだけ取る）：$\mathrm{HK}_\beta(\theta) \propto (\theta/\sin\theta)\, e^{-\beta\theta^2/2}$。$\log(\theta/\sin\theta) = \theta^2/6 + \theta^4/180 + \theta^6/2835 + \cdots$。
- 重み $w = \mathrm{HK}_\beta \cdot e^{R(\theta)}$、$R = \sigma\theta^4 + \tau\theta^6 + \cdots$ と置く。**ボンド移動**は

$$w^4 = \mathrm{HK}_{4\beta}\Big(\frac{\theta}{\sin\theta}\Big)^3 e^{4R} = \mathrm{HK}_{4\beta-1}\, e^{\rho+4R}, \qquad \rho := 3\log\frac{\theta}{\sin\theta} - \frac{\theta^2}{2} = \frac{\theta^4}{60} + \frac{\theta^6}{945} + \cdots \tag{5}$$

  で、$\beta \mapsto 4\beta - 1$ は 18-04 の $b^2\beta - (b^2-1)/3$ です。ρ が**源**で、前因子 $\theta/\sin\theta$（Haar の重みの名残）を四枚束ねたときの余りです。
- **決定化**（四枚の畳み込み）：大きな β では、四つの群の元が単位元から U へ測地線に沿って等分に並ぶ配位（各々 $\theta/4$）が主で、補正 S は $4S(\theta/4)$ に写ります。熱核の部分は半群で $\mathrm{HK}_{(4\beta-1)/4} = \mathrm{HK}_{\beta-1/4}$。

帰結として、θ^4 と θ^6 の係数の写像は

$$\sigma \;\mapsto\; \frac{1/60 + 4\sigma}{64} = \frac{\sigma}{16} + \frac{1}{3840}, \qquad \tau \;\mapsto\; \frac{1/945 + 4\tau}{1024} = \frac{\tau}{256} + \frac{1}{967680} \tag{6}$$

です。**縮みは $1/16$、熱核から一段で源 $1/3840$、固定点は源と縮みの釣り合い**

$$\sigma_* = \frac{\sigma_{\text{源}}}{1-\lambda_\sigma} = \frac{1/3840}{1-1/16} = \frac{1}{3600}, \qquad \tau_* = \frac{1/967680}{1-1/256} = \frac{1}{963900} \tag{7}$$

で決まります 初 （(6) の上の等比級数の算術）。一般に θ^{2m} の係数の縮みは $b^{d-2}\cdot b^2 \cdot b^{-4m} = b^{d-4m}$（$d=4$・$b=2$ で 4^{2-2m}）：$m=1$ は 1（marginal、β そのもの）、$m=2$ は $1/16$、$m=3$ は $1/256$ です 初 （鞍点の主項）。$\theta \sim a^2 F$ と読むと θ^{2m} は次元 $4m$ の演算子に当たり、b^{d-4m} はその次元の数え方と同じです 読 （見立て）。

照合。θ^4 の係数は一段で 2.615×10^{-4}（$\beta=60$）対 $1/3840 = 2.604\times10^{-4}$、引き寄せる曲線の上で 2.789×10^{-4} 対 $1/3600 = 2.778\times10^{-4}$。差は $6.5\times10^{-5}/\beta$ の形（揺らぎの補正）。θ^6 は 1.06×10^{-6} 対 1.04×10^{-6} でした 読 （同じ系の数値）。§02 の比 16.06・17.00 は縮み $1/16$ の直接の測定です。

曲率への影響。$V = -\log w$ に $-\sigma_*\theta^4$ が入るので、層の端 $\theta = \pi/2 - h$ での接の向きの曲率は $-4\sigma_*\theta^3\cot\theta$ だけ動きます。$h=\pi/4$ で $-4(\pi/4)^3/3600 = -5.4\times10^{-4}$ 初 （算術）。測った

κ/β の外れ $\delta\cdot\beta$ は -2.6×10^{-4}（$\beta=16$）・-3.6×10^{-4}（24）・-4.1×10^{-4}（32）と、この値に近づいています 読 。

読み 読 ：この模型で源と縮みは別々の仕組みから来ます。源は**ボンド移動**（平行に束ねる操作）が前因子から注ぐ $\theta^4/60$ で、$d>2$ でだけ在ります。縮みは**決定化**（直列にまとめる操作）が θ^4 の係数を $1/64$、結合の目盛りの縮みで割って $1/16$ にするものです。15-03 §04 の言葉では、問うべき二つの数（源の大きさと λ）がこの模型では $1/3840$ と $1/16$ です。四次元の小さな箱で同じ二つの数を測った値は 15-05 にあります（λ は 0.026〜0.049、源は 4〜6×10^{-4} の帯）。

04

二次元の開いた帯 — 多リンクの検査にならない

二次元の開いた帯（幅の狭い帯状の格子）を、二枚ずつまとめてブロック化する一段を考えます。軸ゲージをとると開いた帯ではプラケットの変数が独立なので、二枚をまとめる一段は一**リンクの畳み込み $w*w$ そのもの**で、粗い二枚も独立です 初 （既知の構造。独立な標本 20 万で指標の平均が 1σ 前後で一致、相関 0.003 ± 0.002 読 ）。だからこの設定は多リンクの検査になりません（新しい結合が生まれない）。

そのうえで、まとめる枚数 m の決定化は θ^4 の係数を $1/m^3$ 倍にし、$\beta'=\beta/m$ で測った外れを $1/m^2$ 倍にします。二枚なら $\lambda=1/4$ で、ボンド移動が無いので源の項も無く、固定の形は熱核そのものです 初 （鞍点の主項）。Wilson から出発した経路依存は観測量によって次数が違い、低い表現の係数で $O(1/\beta^3)$、全変動距離で $O(1/\beta)$、層の外の κ/β' で $O(1)$（どれも m について $1/m^2$）でした 読 （$\beta_T=8$〜64、$m=1,2,4$）。熱核と $U(1)$ の Villain は経路に依らず、外れは 10^{-8} 以下です 読 。

多リンクの最小例は、立方体の制約でプラケットが独立でない三次元の $2\times2\times1$ の板です。そこから先の数は 15-05 にあります。

05

階層模型の紫外の定理 — 区間演算の管と、届かない範囲

§02・§03 は数値と鞍点の見積もりでした。この模型の中で、紫外の分解（15-03 §02）の各行を有限の結合の範囲で確かめた結果を、条件と一緒に並べます。全て **MK の写像 T（(3)）・$SU(2)$ の一枚の重み・$d=4$・$b=2$** についての文です。

座標と管。 結合の読み取りを $s(w):=1/b(w):=-\frac{2}{3}\log a_1$ とします（熱核 HK_β では $a_n=e^{-q_n/(2\beta)}$、$q_n:=n(n+2)$ なので $b(\mathrm{HK}_\beta)=\beta$）。横の座標を

$$e_n(w) := \log a_n - \frac{q_n}{3}\log a_1 \qquad (n \ge 2) \tag{8}$$

と置くと、熱核の類で $e \equiv 0$ で、決定化は $e \mapsto 4e$・$s \mapsto 4s$ をちょうど与えます［初］（定義から）。**管** U は「$b(w) \in [\beta_{\min}, \beta_{\max}]$、$|e_n(w)| \le R\,(q_n^2 s^4 + 10\,q_n s^3)$（$2 \le n \le N$、$R = 10^{-3}$）、高い n の裾を重みつきの係数の和で押さえる」重みの集合です。$q_n^2 s^4$ は θ^4 型の形の大きさに当たります（$w = \mathrm{HK}\cdot e^{\sigma\theta^4}$ なら $e_n \approx \sigma q_n(q_n-3)s^4$）。

表 1　階層模型の紫外の各行と、確かめた範囲（MK の写像・$SU(2)$ の一枚の重み・$d=4$・$b=2$・管は $R=10^{-3}$）

行	中身	範囲	札
管の不変性	$T(U)\subset U$。$[64,128]$ で像の比の最大は 0.494 から 0.492 へ、β を上げて苦しくなる項は無い	$\beta \in [2.46, 128]$ の 6277 区間の全て（$[2.46, 64]$ の 3077 区間と $[64, 128]$ の 3200 区間。$\beta \in [2, 2.46)$ の 23 区間は不合格）	［機］（区間演算。陽性対照と陰性対照つき）
点ごとの横の縮み	管の上の横の線形化のノルム $\lambda_{\mathrm{tube}} < 1$（$\beta=8$ で 0.81、16 で 0.46、64 で 0.27、128 で 0.26）	$\beta \in [5.88, 128]$	［機］
引き寄せる曲線	管の中の全ての軌道が一段 $\Lambda \le 0.735$ の比で一本の曲線に寄る（$\beta \in [23.62, 64]$ では $\Lambda \le 0.384$）。曲線の精度は裾の押さえで正規化 $\lesssim 2.2\times10^{-4}$	$\beta \in [15.26, 64]$	［機］（入力）＋［初］（グラフ変換の初等の補題）
結合の流れ（熱核の点）	$(\beta-\beta'-\frac14)\beta \in [0.020928,\ 0.023690]$（$[64,128]$ では $[0.020876,\ 0.020929]$）、$1/48 = 0.020833$ へ単調（$1/48 + 0.0062/\beta$ と合う）	$\beta \in [2.5, 128]$	［機］
形の係数の流れ	$\sigma_k \mapsto (16\sigma_k + 12\ell_k)/4^{2k}$（$\ell_k$ は $\log(\theta/\sin\theta)$ の θ^{2k} の係数）、縮み 16^{1-k}、固定点 $\sigma_k^{*} = 12\ell_k/(4^{2k}-16)$（$1/3600$・$1/963900$）	大きな β の主項	［初］（鞍点の主項・誤差の定数なし）
曲線の上の結合の流れ	$\beta' = \beta - \frac14 - c(\sigma)/\beta$、$c(\sigma) = \frac{1}{48} - 15\sigma$、曲線の上で $c_* = \frac{1}{60}$（熱核の類の上では $\frac{1}{48}$）	大きな β の主項	［初］（主項）。浮動小数で $1/60 + 0.0078/\beta$ ［読］
帯への継ぎ目と鎖	半径と重みを β について絞った管 $\hat U$ が T の下で閉じ、下端の像が帯の側の管 D_T に入り、そこから強結合の判定領域へ。$\beta \le 64$ の点は 846 段以内、$\beta \le 128$ の点は 1137 段以内に判定領域	$\beta \in [0.95, 2.46]$ の 755 区間と継ぎ目の 27 区間・出口の 139 区間、上の管の $[64,128]$	［機］（区間演算。帯の側は先行の計算機援用の記録をそのまま使う）＋［初］（段数の組み立て）
c_* の包み（取り直した管）	中心を $\mathrm{HK}\cdot e^{\theta^4/3600}$ の横の主項に、半径 $R=10^{-4}$・$A=0$・区間の幅 0.002 に絞った管 U_σ が不変で、管の全体で $(\beta-\beta'-\frac14)\beta \in [0.0151,\ 0.0188]$：$1/60$ を含み、$1/48$ と熱核の点の値を含まない	$\beta \approx 16$・32・64・96・128 の五か所の 50 区間だけ。曲線が U_σ に入ることは示していない	［機］（条件つき）

行	中身	範囲	札
層の外の曲率と層の重さ	曲線の上で $\kappa/\beta \ge A(h) - C/\beta > 0$、層の重さ $\le Ce^{-c\beta}$	大きな β の主項	仮（区間演算はしていない）

(6) の $\sigma \mapsto \sigma/16 + 1/3840$ は、表 1 の形の係数の流れの $k = 2$ の場合です（$\ell_2 = 1/180$、$(16\sigma + 12/180)/256 = \sigma/16 + 1/3840$）。

この模型での紫外の意味。出発の β を有限の範囲で大きくして K 段流しても、最後の尺度の重みは曲線の上の一点から $\Lambda^K \times$（出発の距離）以内にあり、誤差は K に一様です 機（$\beta \in [15.26, 64]$ の範囲の文。β は一段に約 $1/4$ ずつ下がるので、例えば終わりの $\beta = 16$ から 64 までで $K \approx 190$ 段）。15-03 §04 の (4) の形が、この模型の有限の範囲で計算機援用の不等式として立った、ということです。

届かない範囲（同じ行に）。$\beta > 128$——格子間隔 0 の極限そのもの——は鞍点の主項だけで、誤差の定数つきの評価はありません 仮。引き寄せる曲線は $[15.26, 64]$ のままです（$[64, 128]$ でグラフ変換の入力を計算していない）。層の外の曲率と層の重さの区間演算は届いていません。$c_* = 1/60$ を $1/48$ から分けることは、熱核の中心の管の全体では原理的にできず（熱核の中心の管と、中心を取り直しても半径が $10^{-3}/3$ 以上の管は熱核そのものを含むので、管の全体の β' の包みは必ず $1/48$ を含む 初）、半径を 10^{-4} に絞った管の上で五か所の区間でだけ届きました（表 1）。曲線がその管に入ることは届いていません。$\beta < 2.46$ は同じ管のままでは届きませんが、管を β について絞ると下端は 0.95 まで下がり、帯の側に継がれます（次の段落）。そして何より、ここで閉じるのは**一枚の重みが一段で一枚の重みに戻る模型**だからです。多リンクの結合・ゲージの張り替え・大きな場の剰余が構造的に無く、15-02 の「原典に無い二行」（大きな場込みの一段の剰余・観測量の源）はこの模型では空です。階層模型は $U(1)$ でも閉じ込めが起きる模型で、非可換性の検査にもなりません。$\frac{1}{4}$ は四次元の一ループの値（倍率 2 で $8b_0 \ln 2 \approx 0.258$）に近いですが、$c_* = 1/60$ を四次元の二ループの係数と比べる根拠はありません 読。

紫外から強結合まで一本の鎖（階層模型）。同じ模型の先行の記録には、帯の側の管 D_T と、そこから有限段で強結合の判定領域（$\kappa > 0$）へ運ぶ計算機援用の定理があります（$a_1 \in [0.0144, 0.21)$、すなわち $\beta \in [0.354, 0.961)$。判定領域は $\beta \le 0.366$）。表 1 の管（$\beta \in [2.46, 64]$）とは座標をそろえると $a_1 = e^{-3/(2\beta)}$ で、そのままでは $\beta \in [0.961, 2.46)$ の穴が残ります 初（座標の照合）。半径と重みを β について区分的に絞った管 $\hat{U}$——$\beta \ge 2.16$ では表 1 と同じ $|e_n| \le 10^{-3}(q_n^2 s^4 + 10 q_n s^3)$、$\beta \le 1.16$ では $4 \times 10^{-4} q_n^2 s^4$、その間は幅 0.05 の区分ごとに線形に絞り、裾の母数は幅 0.1 の区画ごと——を張ると、次が成り立ちます 機（区間演算・区間の幅 0.002）。

- $\beta \in [0.95, 2.46]$ の 755 区間と継ぎ目の 27 区間（$[2.46, 3.0]$）の全てで $T(\hat{U}) \subset \hat{U} \cup D_T$（像の比の最大 0.934）。一段で β は 0.2196〜0.2990 下がる。
- 下端から出る像（$\beta \in [0.95, 1.228]$ の 139 区間）は全て D_T に入る（比の最大 0.9888）。
- したがって $\beta \le 64$ の $\hat{U}$ の点は 289 段以内に D_T に入り、その後 557 段以内に判定領域に入ります。合わせて 846 段以内です 初 （段数の組み立て。Lean：`mk_full_chain_64`・`tube_exit`・`cell_descent`・`chain_compose`、仮定は区間演算の入力と一段の下がり幅 $\delta = 0.2196$）。$\beta_0 = 64$ の熱核から出た軌道は 211〜289 段で D_T に入ります。
- 上の管を $[64, 128]$ へ延ばした結果（表 1。一段の下がりは全区間で 0.2296 以上）と合わせると、$\beta \le 128$ の点は 580 段以内に D_T、その後 557 段以内に判定領域、合わせて 1137 段以内です 初 （段数の組み立て。Lean：`mk_full_chain_128`・`tube_exit_top`・`chain_top`、仮定は区間演算の入力・$b_{\mathrm{lo}} = 0.95$・$\delta = 0.2196$・帯の側のセルの番号 ≤ 556）。

継ぎ目で効いたのは、管そのものを D_T に含めることではなく、**管の下端の像を D_T の境界と比べる**ことでした。D_T の上側の境界は $n = 2$ の係数で熱核の像の 1〜7% 上にしかなく、管の形のままの包含はどの半径でも通りません 読 。条件（同じ行に）：(a) 区間演算は自作で、Taylor の剰余とキュムラントの上界の導出は紙（Lean 未了）、(b) 帯の側は先行の記録の計算機援用の証明書をそのまま使い、ここでは再計算していない、(c) D_T の参照曲線は記録の作り方どおりに作り直したもので、記録の数値との照合は一点、(d) 557 段はセルの数で数えた粗い上界、(e) 区分の境界の点は小さい方の管に属させる約束。陽性対照（表 1 の 27 区間の文字列での一致。$[60, 64]$ の 200 区間の計算し直しの一致）と陰性対照（管を 1/5 に細くする・像の係数を壊す・D_T を 3% 狭める）を通しています。$\beta > 128$**（格子間隔 0 の極限）は閉じていません**。ここで鎖が閉じるのは一枚の重みが一段で一枚の重みに戻る模型だからで、四次元の格子の閉じ方について何も含意しません。$U(1)$ でも同じ形で強結合へ流れるので、非可換性の検査にもなりません。

この鎖は四次元へ継がれない — 挟み込みとの関係。四次元の Wilson の作用から出発し、Migdal–Kadanoff の像を一律に縮めた代表の列（Tomboulis の挟み込み）を経て上の鎖に乗せる筋は、二か所で切れます 読 。(i) 挟み込みで証明があるのは、分配関数という一つの数の上下の不等式です（上界は Migdal–Kadanoff の間引きで、並進不変性と凸性による。群の性質は使わない。下界は鏡映正値性による） 典 。捩れのある分配関数と無い分配関数を同じ代表（共通の補間母数）で表す段は証明されていません（K. R. Ito と E. Seiler の指摘） 典 。この段は $U(1)$ で偽にならなければならず、非可換の入力が要ります（27-02 の繰り込みの比較の真ん中と同じ場所）。(ii) 代表は像を一律に縮めたもので、縮めると横の座標が $(5/3)(1 - \alpha)$ 以上押し上がり 初 （Lean：`shrink_shift_lower`、仮定 $0 < \alpha$・$q \ge 3$）、上の管に残るには $1 - \alpha$ が帯の側の管で 10^{-2} の桁、紫外の管で 10^{-7} の桁以下でなければなりません 読 。

挟み込みの議論が要る「α を 1 から離す」工夫と両立しません。小さな箱（$4^4 \to 2^4$・$8^4 \to 4^4$、$\beta \in \{2, 4, 8\}$、Metropolis）で同じ観測量の一段の挟み込みを測ると、$SU(2)$ と $U(1)$ の 12 行全てで成り立ち、群を区別しません 読 。したがってこの鎖は階層模型の中の定理で、四次元の格子への継ぎ目にはなりません。

比べる相手を固定した一段の不等式の案の注。帯の繰り込みの比較の真ん中の候補の一つに、Migdal–Kadanoff の一段の像の弦の張力が本当の粗い理論の弦の張力を超えない $\sigma[T_{\mathrm{MK}} w] \le 4\sigma[w]$ があります 仮 （どの β でも示していない）。軌道 $w_k = T_{\mathrm{MK}}^{k} w$ の各段で使えば、写像の単調性なしに $\sigma[w] \ge 4^{-k}\sigma[w_k]$ が出ます 初 （有限の帰納。Lean：`orbit_lower`・`lower_bound_four`、一段の不等式は仮定）。有限の箱で試すには注が二つ要ります。(i) 捩れの自由エネルギー $\Delta F = -\ln(Z^{-}/Z^{+})$ は弦の張力の双対で、閉じ込めで 0 に向かいます。$\sigma \cdot A$ に当たるのは $-\ln\tanh(\Delta F/2)$ で、本当の一段は箱の上で ΔF を保つ（捩れの偶奇はブロック化で保たれる）ので、張力の比 4 と面積の比 $1/4$ が打ち消し、一段の不等式の閾は 4 でなく 1、すなわち $R := \Delta F(2^4; T_{\mathrm{MK}} w)/\Delta F(4^4; w) \ge 1$ です 初 （定義からの恒等式）・ 典 （双対の読み）。(ii) 4^4 と 2^4 の周期の箱では、$SU(2)$ の Wilson 出発の一段（$\beta = 1.5$・2.0・2.3）でも、Migdal–Kadanoff の形に乗った軌道の一段（実効の β で 2.47 から 2.19）でも $R \ge 1$ で、最も近い行で $R = 1.34(7)$（保守的な下限 1.19、独立な種二本）でした 読 （Metropolis・多段の BAR・捩れ $n_{01} = 1$）。ただし何もしない写像も同じ箱で通る（$\beta = 2.3$ で $R = 2.46$）弱い検査です。同じ軌道の一段を 6^4 と 3^4 に上げると $R = 1.17(20)$、Wilson の β に換算した余裕は $4^4/2^4$ の 0.15 から $0.02(2)$ に縮み（実効の $\beta = 2.8$ の点で $R = 0.97(10)$）、**測り方の分解能の内で、判定しません** 読 （統計誤差で。ΔF の測り方に符号の揃わない 0.1〜0.25 の系統の床があり、原因は特定していない）。不等式が破れている証拠も、帯の中で成り立つ側の数の裏付けもありません。2^4 の箱の 7% の離散化が最初の余裕の大部分を作っていた可能性があります。$U(1)$ でも一段では同じ向きで（$\beta = 1.3$ で $1.265(19)$）、群を区別する破れは一段の小さな箱には現れません 読 （Wilson から一段の Migdal–Kadanoff の像は実効の β を上げるので、転移を跨ぐ段がそもそも無い。Bessel の勘定）。この注は上の「四次元へ継がれない」を変えません。

問い。この章から出る問いを三つ置きます（番号は第 15 部の通し。索引は 15-09）。

表 2　階層模型から出る問い

問	問い	大きさ	決着したら動くもの	決着しても動かないもの

問	問い	大きさ	決着したら動くもの	決着しても動かないもの
4	階層模型の管の不変性と引き寄せる曲線を $\beta > 64$ へ延ばす（$\beta \le 64$ から下は帯の側まで鎖が継がれた。残る穴は上端だけ）。**答え（一部）：**管は $\beta \le 128$ まで（6277 区間）、鎖は $\beta \le 128$ から 1137 段。残る穴は $\beta > 128$ と、$[64, 128]$ の曲線：大きな β の漸近の評価（誤差の定数つき）と区間演算の範囲を継ぎ目なくつなぎ、$\beta \to \infty$ までの一様な文にする（管の中心を熱核でなく $\mathrm{HK} \cdot e^{\theta^4/3600}$ に取り直す案がある）	紙と計算機援用	階層模型の紫外の制御が格子間隔 0 まで閉じる	四次元の格子の紫外の制御（多リンク・張り替え・大きな場が無い模型なので）
5	階層模型の曲線の上で、層の外の曲率の下界 $\kappa/\beta \ge A(h) - C/\beta$ と層の重さ $\le Ce^{-c\beta}$ を区間演算で確かめ、あわせて $c_* = 1/60$ を $1/48$ から分ける。**答え（一部）：**半径を 10^{-4} に絞った管 U_σ の上で $(\beta - \beta' - \frac{1}{4})\beta \in [0.0151, 0.0188]$（五か所の 50 区間）。曲線が U_σ に入ることと曲率・層の重さは未	計算機援用	表 1 の「仮」の行と、結合の流れの二項目の係数	同上
31	取り直した管 U_σ（$R = 10^{-4}$・$A = 0$）を区間の幅 0.02 のまま $[15.26, 128]$ の全体で通し（判定に δs の三次の項を足して剰余を横の部分だけにする）、$[64, 128]$ でグラフ変換の入力を取って、曲線が U_σ に入ることと曲線の上の c_* の包みを条件なしの計算機援用の文にする。あわせて $\beta \ge 128$ を一つの漸近の区間で覆う	計算機援用と紙	表 1 の c_* の行の条件と $\beta > 128$ の穴	同上

06

この類で言えること

表 3 は、三つの最小の系で分解の各部品がどう見えるかを並べたものです。

表 3　三つの最小の系と分解の部品（どれも一枚の重みに当てる写像。四次元の超立方格子の一段ではない）

系	類	結合の流れ	横の縮み λ	源	剰余の扱い
一リンクの熱核の畳み込み	熱核 $\{p_\tau\}$（母数一つ）	$\tau \mapsto \tau + t$ 初	—（外れる向きが無い）	0 初	剰余 0・望遠鏡和
二次元の開いた帯（二枚をまとめる）	熱核の類（固定の形は熱核）	$\beta \mapsto \beta/2$	$1/4$ 初（鞍点の主項）	0 初	Wilson 出発の外れは縮むだけ
Migdal–Kadanoff（$d = 4$・$b = 2$）	不変な曲線 $\mathrm{HK} \cdot e^{\theta^4/3600 + \theta^6/963900 + \cdots}$	$\beta \mapsto \beta - \frac{1}{4} - c/\beta$、曲線の上で $c_* = \frac{1}{60}$ 初（主項）	$1/16$（θ^4）・$1/256$（θ^6）初（主項）、管の上で < 1（$\beta \in [5.88, 64]$）機	$1/3840$（θ^4）初（主項）	曲線に $\Lambda \le 0.735$ で寄る（$\beta \in [15.26, 64]$）機。管は $\beta \in [2.46, 128]$ で不変 機

表 3 から読むこと 読 。15-03 の類が閉じる条件の類は、熱核の類そのもの（剰余 0）か、熱核から $O(1)$ の形だけずれた不変な曲線（剰余は横の縮みで上限に押さえられる）で、どちらも母数は結合ひとつです。源は平行に束ねる操作から、縮みは直列にまとめる操作から来ます。二次元の開いた帯には平行に束ねる操作が無いので源がなく、Migdal–Kadanoff にはあります。四次元の格子の一段にはどちらの操作も入り、しかも多リンクの結合が生まれます。その最小の系が 15-05 の束の網です。

07

言えないこと

(a) この章の結果は全て一枚の重みに当てる写像（一リンクの熱核の畳み込み・二次元の開いた帯・階層格子の写像）の文で、多リンク・プラケットの間の結合・ゲージの張り替え・大きな場を含む四次元の一段には何も含意しません。

(b) 一リンクの熱核の類の曲率の形 (2) は、登録した β と t の範囲の数値の読みです。

(c) (5)〜(7) と b^{d-4m} は鞍点の主項の見積もりで、揺らぎの高次と像の和の他の項を落としています。誤差の定数は出していません。

(d) 階層模型の管と帯への鎖は $\beta \le 128$、引き寄せる曲線は $\beta \le 64$ の有限の範囲の計算機援用の文で（鎖の帯の側は先行の記録の証明書をそのまま使う）、格子間隔 0 の極限（$\beta \to \infty$）は閉じていません。層の外の曲率と層の重さは区間演算で確かめていません。c_{*} の包みは取り直した管の上の五か所の区間だけの文で、曲線がその管に入ることは示していません。

(e) 階層模型は $U(1)$ でも閉じ込めが起きるので、ここで閉じたことは非可換性の検査になりません。$c_{*} = 1/60$ を四次元の二ループの係数と比べることはしていません。

(f) §05 の鎖が四次元へ継がれないことは、挟み込みの原典の照合（未証明の段の位置）と小さな箱の観測量の数からの読みです。挟み込みの代表の $1-\alpha$ の大きさは測っていません。

(g) §05 の比べる相手を固定した一段の不等式の案の注は、$4^4/2^4$ と $6^4/3^4$ の周期の箱の Monte Carlo の数（後者は余裕が分解能の内で判定しない。ΔF の方法の系統の床は原因未特定）と、閾の訂正（定義からの恒等式と双対の読み）です。どの β でも一段の不等式を示していません。同じ箱で何もしない写像も通るので、数は「破れが見えなかった」以上のことを言いません。2^4 の離散化だけで 7% ほどの系統があります。

08

五分類の表と依存グラフ

表 4　この章の行（この章の行に Lean の欄はありません）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲
[01]	熱核の類は半群で閉じ、量はその時点の母数の関数で、段の変化は望遠鏡和	初	§01（半群の性質）	一リンク・熱核の族の中
[02]	割った座標の層の外の曲率は正で $\kappa/\beta = A + B/\beta$。四次元の一段で $O(1/\beta^2)$	読	§01（二つの独立な実装）	一リンク・$SU(2)/\mathbb{Z}_2$・層の外・$\beta \in \{2,\dots,8\}$・$t \le 0.5$
[03]	MK の一段で像は不変な曲線に一段 $1/16$ で寄り、$\beta \mapsto \beta - \frac{1}{4} - 0.0215/\beta$	読	§02（同じ系の数値・陰性対照つき）	一枚の類関数・階層格子・$\beta \le 32$
[04]	鞍点の見積もり (5)〜(7)：源 $1/3840$・縮み $1/16$・固定点 $1/3600$・θ^{2m} の縮み b^{d-4m}	初	§03（鞍点の主項）	大きな β・揺らぎの高次を落とす
[05]	二次元の開いた帯の一段は一リンクの畳み込みで、$\lambda = 1/4$・源なし	初・読	§04	軸ゲージ・開いた帯
[06]	階層模型：管の不変性・点ごとの縮み・熱核の点の結合の流れ	機	§05 表 1（区間演算・対照つき）	$\beta \in [2.46, 128]$・$[5.88, 128]$・$[2.5, 128]$、$R = 10^{-3}$
[07]	階層模型：引き寄せる曲線（比 $\Lambda \le 0.735$）	機・初	§05 表 1（入力は区間演算、グラフ変換の初等の補題）	$\beta \in [15.26, 64]$
[08]	形の係数の流れ・$c(\sigma) = \frac{1}{48} - 15\sigma$・$c_* = \frac{1}{60}$	初	§05 表 1（主項）	大きな β・誤差の定数なし
[09]	曲線の上の層の外の曲率の下界と層の重さ。$\beta > 128$ への延長と $[64, 128]$ の曲線	仮	§05（問い「階層模型の管の延長」・問い「層の外の曲率の区間演算」）	—
[10]	階層模型の鎖：絞った管 $\hat{U}$ が $\beta \in [0.95, 2.46]$ で閉じ、下端の像が帯の管 D_T に入り、$\beta \le 64$ の点は 846 段以内、$\beta \le 128$ の点は 1137 段以内に判定領域	機・初（段数の組み立て）	§05（区間演算・対照つき）	MK の写像・$SU(2)$ の一枚・帯の側は先行の記録・$\beta > 128$ は含まない
[11]	この鎖は四次元へ継がれない：挟み込みの未証明の段（共通の補間母数）と、代表が管に残らないこと	読（縮みの押し上げは 初）	§05	挟み込みの原典の照合・$4^4 \to 2^4 \cdot 8^4 \to 4^4$ の観測量・$\beta \in \{2, 4, 8\}$

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲
[12]	取り直した管 U_σ の上の c_* の包み $[0.0151, 0.0188]$（$1/60$ を含み $1/48$ を含まない）	機	§05 表 1（区間演算・独立な位置の空間の求積の照合）	$R = 10^{-4}$・$A = 0$・幅 0.002・五か所の 50 区間・曲線が U_σ に入ることは未
[13]	比べる相手を固定した一段の不等式の案の注：有限の箱の一段の閾は 1（$R \geq 1$）、軌道の一段で $R = 1.34(7)$（$4^4/2^4$）・$1.17(20)$（$6^4/3^4$、分解能の内）、弱い検査で群の区別は一段の箱に現れない	初（閾の恒等式・有限の帰納）・読（数）	§05	$4^4/2^4$ と $6^4/3^4$ 周期・Metropolis・BAR・$SU(2)$ と $U(1)$・$6^4/3^4$ では分解能の内で判定しない・一段の不等式はどの β でも未

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
[01] 初  熱核の類で望遠鏡和                                              ー リンク
[02] 読  層の外の曲率 A + B/β ⟸ [01]                                     ー リンク・登録範囲
[03] 読  不変な曲線・1/16・β の流れ ⟸ [01]                               階層格子・β ≤ 32
[04] 初  源 1/3840・縮み 1/16・1/3600 ⟸ [01]                             鞍点の主項
[05] 初  開いた帯は一リンクの畳み込み ⟸ [01][04]
[06] 機  管の不変性・縮み・β の流れ ⟸ [03][04]                           β ∈ [2.46, 128]
[07] 機  引き寄せる曲線 ⟸ [06]                                           β ∈ [15.26, 64]
[08] 初  形の係数の流れ・c* = 1/60 ⟸ [04]                                主項
[09] 仮  β > 128 と曲率・層の重さ ⟸ [02][07][08]                         問い
[10] 機  絞った管・帯への継ぎ目・846 段・1137 段 ⟸ [06]                  β ∈ [0.95, 128]
[11] 読  四次元へ継がれない ⟸ [10]                                       挟み込みの照合・小さ
[12] 機  取り直した管の上の c* の包み ⟸ [06][08]                         五か所・曲線は未
[13] 読  比べる相手を固定した一段の不等式の案の注（閾 1・弱い検査） ⟸ [10][11]
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。[09] は仮定の行で、問いの形です。この章の節点に、四次元の紫外の制御が示されたという節点はありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 熱核の類の半群と望遠鏡和、MK の一段の鞍点の見積もり（源・縮み・固定点・b^{d-4m}・c_*）、開いた帯の一段が畳み込みであること	鞍点の見積もりの誤差の定数
機 階層模型の管の不変性（$\beta \in [2.46, 128]$）・点ごとの縮み（$[5.88, 128]$）・引き寄せる曲線（$[15.26, 64]$）・熱核の点の結合の流れ・絞った管から帯の側を経て強結合の判定領域までの鎖（$\beta \in [0.95, 128]$、帯の側は先行の記録）・取り直した管の上の c_* の包み（五か所）	$\beta > 128$（格子間隔 0 の極限）。$[64, 128]$ の曲線。層の外の曲率と層の重さの区間演算。曲線の上の c_* の分離
読 一リンクの曲率の形 $A + B/\beta$、MK の数値（比 16.06・17.00、β の流れ）、開いた帯の経路依存の次数	多リンク・プラケットの間の結合を含む一段。四次元の格子の一段の源と縮み（15-05）

言えている	言えていない
読 この鎖が四次元へ継がれないこと（挟み込みの未証明の段・管の余白）	共通の補間母数の非可換の証明。代表の $1-\alpha$ の大きさ
初 比べる相手を固定した一段の不等式の案の閾が有限の箱で 1 であること・一段の不等式からの有限の帰納。読 小さな箱の数	どの β でも一段の不等式。群を区別する段

出典と再現

もの	種別	出典・道具
Migdal–Kadanoff の一段の規約と $(1-b^{-2})/3$	典	18-04
熱核の半群・望遠鏡和・鞍点の見積もり (5)〜(7)	初	この章の本文
一リンクの熱核の類の曲率	読	本書の検討の数値の記録（一リンクの類関数を熱核で一段畳み込む計算。指標の級数と位置の空間の二つの実装、陰性対照として割らない $SU(2)$ と $U(1)$）
Migdal–Kadanoff の一段の不変な曲線と縮み・開いた帯	読	本書の検討の数値の記録（一枚のプラケットの類関数に MK の一段を当てる計算。陰性対照として各段で Wilson の係数に取り替えたもの。開いた帯は独立な標本の照合つき）
階層模型の管・引き寄せる曲線・結合の流れの包み	機	本書の検討の計算機援用の記録（区間演算の管・3077 区間・陽性と陰性の対照つき。曲線はグラフ変換の初等の補題）
絞った管・帯への継ぎ目・鎖の段数	機・初	本書の検討の計算機援用の記録（区間演算・区間の幅 0.002 と 0.001 の重ねた確認・出口の小区間の判定・独立な位置の空間の求積による照合）と、帯の側の先行の記録。段数の組み立ては Lean の束（15-09 表 3、再検査済み）
Tomboulis の挟み込みと未証明の段	典	E. T. Tomboulis, arXiv:0707.2179。K. R. Ito, E. Seiler, arXiv:0711.4930・arXiv:0803.3019。T. Kanazawa, Phys. Lett. B 670 (2009) 421, arXiv:0805.2742
縮みによる横の座標の押し上げ	初	この章の本文。代数は Lean の束（15-09 表 3）
管の $[64,128]$ の延長・取り直した管と c_* の包み・鎖の 1137 段	機・初	本書の検討の計算機援用の記録（同じ判定の本体と自作の区間演算・$[64,128]$ の 3200 区間・$[60,64]$ の 200 区間の一致と二台の照合・陰性対照・取り直した管は五か所の区間だけ・位置の空間の台形則の独立な照合）。段数の組み立ては Lean の束（15-09 表 3、再検査済み）
比べる相手を固定した一段の不等式の案の閾と小さな箱の数	初・読	本書の検討の記録（自作の Metropolis・捩れの補間の多段の BAR と熱力学積分・独立な種の再走・陽性対照（$U(1)$ の $\beta=4$ の古典の流束・二重の捩れで 0）・陰性対照（速すぎる写像））。帰納は Lean の束（15-09 表 3）
一段の観測量の挟み込みの数	読	本書の検討の数値の記録（Metropolis・周期・$4^4 \to 2^4$ と $8^4 \to 4^4$・$\beta \in \{2,4,8\}$・$SU(2)$ と $U(1)$・20 区画の誤差）

この章で使った語 — 熱核の類・半群・望遠鏡和・Migdal–Kadanoff の一段（ボンド移動・決定化）・不変な曲線・横の縮み λ・源・釣り合い・管・引き寄せる曲線。意味は A-02 用語集

にあります。

次に読む章：15-05 束の網の定理 — 多リンクの最小の系で、源と縮みの二つの数がどう決まるか。

束の網の定理 — 横の縮みと母数の流れを一つの射影で

この章は本書の検討です。§08 は未解決の地図です。

この部は、本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた記録です。存在そのものは第二巻の第 6〜13 部を、二つの設計の違いは第 14 部を見てください。部の位置づけは 15-00 にあります。

この章で分かること — 粗い一枚のループ W の角 θ を固定し、可換な配位に制限して木の水準の作用 $\sum_p \phi_p^2/2$ を最小にすると、最小点はただ一つで $\phi = \theta f$、$f = Ps/\|Ps\|^2$（s は W を縁にもつ面、P はリンクから来るプラケットの角の空間への直交射影）であること（単位の束の定理）。そこから、粗い結合の比 $\beta'/\beta = \sum f^2$、細かい四次の項が粗い四次の項に写る倍率 $\sum f^4$、熱核の類からの外れの一段の倍率（横の縮み）$\lambda = \sum f^4 / \sum f^2$ が全て決まり、$\lambda \le \max f^2$ が一行で出ること。三次元の自由境界の箱では $\sum f^2$ は抵抗網の実効抵抗です。箱の大きさ・境界・粗い面の大きさを変えた数の表、粗い面を大きくすると作用が周に沿って払われること、本当の二段と反復の二段が合わないこと、全ての粗い面を同時に固定した網（束の網の定理）では縮みが行列になり粗い向きで $1/16$ を超えること、を条件つきで並べます。

前提となる章 — 15-00 §01（段・同じ形）・15-03 §02（分解の言明）・15-03 §04（横の縮みの帳簿）・15-04 §02（Migdal–Kadanoff の一段と $1/16$）。線形代数（直交射影・Cauchy–Schwarz）と、電気回路の Kirchhoff の法則を使います。

先に言うこと — この章の数は全て**一つの粗い面の周辺分布で見る一段（本当のブロック化の一段ではない）**の数で、§07 だけが「全ての粗い面を同時に固定した一段」です。単位の束の定理・束の網の定理は**可換な配位に制限した木の水準（$\beta \to \infty$ の主項）**の文で、非可換な配位を含めた最小・一ループの補正（源）・大きな場・ゲージの張り替えは含みません。源の数は熱核出発・単一の像・$\beta \to \infty$ の一ループの数値です。この章は紫外の制御を示しません。

この章の順序

1. 設定 — 可換な配位・射影 P・単位の束
2. 単位の束の定理 — 最小点・$\beta'/\beta = \sum f^2$・四次の写り・λ（式 (2)〜(6)）
3. 三次元の自由境界は抵抗網 — 手で解く $2 \times 2 \times 1$
4. 不等式 — 包含の単調性・$1/(16d-8) \le \lambda \le 1/16$
5. 箱の表（表 1）
6. 粗い面を大きくする — 周の型・本当の二段と反復の二段（表 2・表 3）
7. 全ての粗い面を固定した網 — 束の網の定理・その局所の形と ℓ^4 の錐の一段の縮み・尾の型（表 4・表 5）
8. 分解への含意と問い（表 6）
9. 言えないこと
10. 五分類の表と依存グラフ（表 7）

00

この章で分かること

- 可換に制限した木の水準では、粗い一枚の角を固定した最小の配位は射影 P と単位の束 f だけで決まり、β'/β・四次の写り・横の縮み λ がそこから全て出ます（単位の束の定理、§02）。
- $\lambda \le \max f^2$ で、粗い面の 4 枚が対称に $\frac{1}{4}$ を運ぶ箱では $1/(16d-8) \le \lambda \le 1/16$。Migdal–Kadanoff の $1/16$ はこの上端です（§04）。
- 箱を広げる・周期にする・格子に埋めるほど $\sum f^2$ は上がり λ は下がります。四次元の格子に埋めた粗い面 2×2 で $\sum f^2 \approx 0.73$・$\lambda \approx 0.026$・源 $\approx 5\times10^{-4}$ です（§05）。
- 粗い面を 4×4 にすると $\sum f^2$ は 0.29〜0.31 に下がり、反復の $(0.72)^2$ より小さい。作用は周に沿って払われ、源は $\approx 8\times10^{-3}/L^4$ で薄まります（§06）。
- 全ての粗い面を同時に固定すると、粗い作用はプラケットの作用に留まらず、四次の写りは行列になり、粗い向きでは $1/16$ を超えます（束の網の定理、§07）。
- 局所の代表を使うと体積に一様な上界が得られ（束の網の定理（局所の形））、四次元では行をその ℓ^1 ノルムで重みづけた補間で、$\beta_0' = 1$ の規格の倍率が 0.823 以下になります（数は計算で、区間の評価ではない）。向きごとの規格の倍率は縮みの量ではなく、規格は長波長の結合で割る形に固定します。ℓ^4 の錐の一段の縮みは一段目に限り、多段にはブロック化の条件が要ります（§07）。

01

設定 — 可換な配位・射影・単位の束

格子。d 次元の箱 $[0,n_1]\times\cdots\times[0,n_d]$ の立方複体（**自由境界**）か、d 次元のトーラス（**周期**）をとります。C_k を k 次元の胞体（C_1 はリンク、C_2 はプラケット、C_3 は立方体）の上の実数値の関数の空間とし、内積は各胞体の値の積の和、$d : C_1 \to C_2$ をリンクの角からプラケットの角を作る写像（余境界）とします。

可換な配位。$SU(2)$ の全てのリンクを一つの向き（σ_3）の回転に制限し、リンクの角 $A \in C_1$ で書くと、プラケットの角は $\phi = dA$ です。熱核の単一の像の作用は $\beta\sum_p \phi_p^2/2$、Wilson の作用は $\beta\sum_p(\phi_p^2/2 - \phi_p^4/24 + \cdots)$ です（15-04 §01 と同じ規約）。

粗い一枚。粗いループ W（例：2×2 の正方形の外周の 8 本）と、W を縁にもつ面 $s \in C_2$（その正方形の 4 枚、係数 ±1、台を S と書く）をとります。W のホロノミーの角が θ という拘束は $\langle s,\phi\rangle = \theta$ です。

許される場と射影。$\mathcal{A} := \operatorname{im} d \subset C_2$ をリンクから来るプラケットの角の空間とし、P を $\mathcal{A}$ への直交射影、$u := Ps \neq 0$ とします。自由境界の箱は可縮なので $\mathcal{A}$ は「各立方体の上の向きつきの和が 0」の空間に一致し、周期では座標の 2-トーラスを貫く束が 0 という条件が加わります [初]。

$$f := \frac{Ps}{\|Ps\|^2}, \qquad \mathcal{A}_0 := \{\psi \in \mathcal{A} : \langle s,\psi\rangle = 0\} \tag{1}$$

と置き、f を**束**と呼びます。$f \in \mathcal{A}$、$\langle s,f\rangle = 1$（単位の束）、$f \perp \mathcal{A}_0$ です。

この章の「一段」は、粗い一枚の角 θ を与えて残りの全ての自由度を積分した θ の分布（周辺分布）を、次の段の一枚の重みと読むことです。一つの粗い面の周辺分布で見る一段で、本当のブロック化の一段ではありません（粗い格子の全ての面の結合分布は §07 で一部だけ扱います）。

02

単位の束の定理 — 最小点と、三つの比

単位の束の定理（可換に線形化した格子ゲージ作用の、木の段のブロック化を流れの網として書いた論文の Theorem F）。上の設定で、条件 (a) 可換な配位に制限、(b) $\beta \to \infty$ の主項（木の水準。一ループの補正と $O(1/\beta)$ は含まない）、(c) 自由境界か周期かは固定、の下で次が成り立つ 初 。

- (i) 各 θ について $\min\{\tfrac12\|\phi\|^2 :\ \phi \in \mathcal{A},\ \langle s,\phi\rangle = \theta\}$ の最小点はちょうど一つで $\phi^{*} = \theta f$、最小値は $\theta^2/(2\|u\|^2)$。
- (ii) 作用 $\beta\sum\phi^2/2$ の粗い作用は $\beta'\theta^2/2$ で

$$\frac{\beta'}{\beta} = \sum_{p} f_p^2 = \frac{1}{\|Ps\|^2}. \tag{2}$$

  下界 $\sum f^2 \ge 1/|S|$ が成り立つ。上界「$\sum f^2 \le 1$」は無条件ではない（$|S|=1$ で、そのプラケットが立方体の面なら $\sum f^2 > 1$）。
- (iii) 細かい作用を $V(\phi) = \sum_p(\beta\phi_p^2/2 - \sigma\phi_p^4)$（$\sigma \ge 0$、Wilson なら $\sigma = \beta/24$）とし、局所の粗い作用 $S'_r(\theta) := \inf\{V(\theta f + \psi) :\ \psi \in \mathcal{A}_0,\ \|\psi\| \le r\}$ を置く。$m := \max_p |f_p|$、$\|f^3\| := (\sum_p f_p^6)^{1/2}$ とし、$\sigma(6\theta^2 m^2 + 4|\theta| m r + r^2) \le \beta/4$ なら

$$\frac{\beta\sum f^2}{2}\theta^2 - \sigma\sum f^4\,\theta^4 - \frac{16\sigma^2\|f^3\|^2}{\beta}\theta^6 \ \le\ S'_r(\theta) \ \le\ \frac{\beta\sum f^2}{2}\theta^2 - \sigma\sum f^4\,\theta^4. \tag{3}$$

  すなわち粗い作用の θ^4 の係数は**ちょうど** $\sigma' = \sigma\sum f^4$（θ^6 以上を除く）。
- (iv) 規格化した四次の外れ $\kappa := \sigma/\beta$ は一段で

$$\kappa' = \kappa \cdot \lambda, \qquad \lambda := \frac{\sum_p f_p^4}{\sum_p f_p^2} \tag{4}$$

  に写り、

$$\frac{1}{|S|^3\sum_p f_p^2} \ \le\ \lambda \ \le\ \max_p f_p^2. \tag{5}$$

証明。(i) $\phi \in \mathcal{A}$ なら $P\phi = \phi$ と P の自己共役から $\langle s,\phi\rangle = \langle Ps,\phi\rangle = \langle u,\phi\rangle$。Cauchy–Schwarz で $\theta^2 \le \|u\|^2\|\phi\|^2$、よって $\|\phi\|^2 \ge \theta^2/\|u\|^2$。$\phi = \theta u/\|u\|^2 = \theta f$ は $\mathcal{A}$ に入り拘束を満たして等号を与える。拘束の集合は中点で閉じ、その上の $\|\phi\|^2$ は平行四辺形の恒等式で狭義凸なので最小点は一つ。$\psi \in \mathcal{A}_0$ なら $\langle f,\psi\rangle = \langle u,\psi\rangle/\|u\|^2 = \langle s,\psi\rangle/\|u\|^2 = 0$。

(ii) 最小値 $\beta\theta^2/(2\|u\|^2)$ と $\sum f^2 = \|u\|^2/\|u\|^4$ から (2)。下界は $\langle s,f\rangle = \sum_{p\in S} s_p f_p = 1$ に Cauchy–Schwarz。$|S|=1$ なら s 自身は閉じていない（立方体の境界の和が 0 でない）ので $u \ne s$、$\|u\| < \|s\| = 1$、$\sum f^2 > 1$。

(iii) 拘束を満たす ϕ は全て $\theta f + \psi$（$\psi \in \mathcal{A}_0$）と一意に書ける。上界は $\psi = 0$。下界：$f \perp \psi$ から $\sum(\theta f+\psi)^2 = \theta^2\sum f^2 + \|\psi\|^2$。四次を展開して $|\sum f^3\psi| \le \|f^3\|\|\psi\|$、$\sum f^2\psi^2 \le m^2\|\psi\|^2$、$|\sum f\psi^3| \le mr\|\psi\|^2$、$\sum\psi^4 \le r^2\|\psi\|^2$ で押さえると、$x = \|\psi\|$、$a = 4\sigma|\theta|^3\|f^3\|$ として $V(\theta f+\psi) \ge$ (右辺) $+ \tfrac{\beta}{4}x^2 - ax \ge$ (右辺) $- a^2/\beta$。

(iv) 粗い作用は $\beta'\theta^2/2 - \sigma'\theta^4 + O(\theta^6)$ の同じ形なので $\sigma'/\beta' = (\sigma/\beta)\sum f^4/\sum f^2$。右の不等式は $f_p^4 \le (\max f^2) f_p^2$ を足したもの。左は冪平均 $(\sum_S g)^4 \le |S|^3\sum_S g^4$（$g_p = s_p f_p$、Cauchy–Schwarz を二度）と $\sum_S g = 1$ から。∎

単位の束の定理の (iv) の意味。同じ β' に来た二つの重み（Wilson 出発の $\kappa = 1/24$ と熱核出発の $\kappa = 0$）の θ^4 の係数の差は、β' で規格化して一段で λ 倍になります。これが 15-03 §04 の帳簿の横の縮みの主項です。有限の β で測った全変動距離の比（$2\times2\times1$ で $\beta_T = 1,2,3,4$ に 0.0443・0.0451・0.0463・0.0469）が $7/144 = 0.0486$ に下から近づくことと合いますが、全変動距離の比が λ に収束することは示していません 読 。

03

三次元の自由境界は抵抗網

自由境界の箱では $\mathcal{A}$ の直交補空間は 2-輪体で、箱が可縮なので立方体の境界の和に一致します。よって $\|Ps\|^2 = \min_c \|s - \partial c\|^2$（$c$ は立方体の上の関数、Dirichlet の原理）です 初 。三次元では立方体を節点、内部の面を抵抗 1 の辺、S の面を電源 S への辺、それ以外の外面を流し口 T への辺とする**双対の抵抗網**を考えると、$\phi \in \mathcal{A}$ は各立方体で向きつきの和 0（Kirchhoff の電流則）、拘束は S から T への電流の量が θ であることで、$\sum f^2$ は S と T の間の実効抵抗、f は単位の電流です（Thomson の原理） 典 （電気回路の標準の事実の言い換え）。

例：$2 \times 2 \times 1$ の板。各立方体が下面から電流 $\frac{1}{4}$ を受け、外周の側面 2 枚（並列で抵抗 $\frac{1}{2}$）と上面（抵抗 1）へ流します。柱の抵抗は $1 + (\frac{1}{2} \parallel 1) = \frac{4}{3}$、四本並列で

$$\sum f^2 = \frac{1}{3}, \qquad \sum f^4 = 4 \cdot \frac{1}{4^4} + 12 \cdot \frac{1}{12^4} = \frac{7}{432}, \qquad \lambda = \frac{7}{144} \tag{6}$$

初 。束は下面 $\frac{1}{4}$、上面と外周の側面 $\frac{1}{12}$、内壁 0 です。四次元では網は立方体でなく 3-胞体の上の電位になり、絵は描きにくくなりますが、射影の式 (1) は次元に依らずそのまま使えます。

04

不等式 — 包含の単調性と、縮みの両側

(a) 包含の単調性。W を含む複体 $K \subset K'$ について $\sum f^2(K) \le \sum f^2(K')$ 初 。証明：K' の上の配位を K に制限しても W のホロノミーは変わらず、作用（非負の項の和）は減るので、最小は大きい複体の方が大きい。∎ 三次元では Rayleigh の単調性（自由境界の箱は、周りの立方体を流し口に短絡したもので、短絡は実効抵抗を下げる）と同じ内容です。だから**自由境界の小さな箱は β'/β を小さく見せる**。

(b) 縮みの両側。粗い面の 4 枚が対称に $f = \frac{1}{4}$ を運ぶとき（粗い面のまわりの 90° 回転で箱が不変なとき。表 1 の全ての箱でそうなる）、$\sum f^4 \ge 4 \cdot 4^{-4} = \frac{1}{64}$。さらに試しの配位「$W$ の 8 本に $\theta/8$ ずつ、他は 0」は粗い面の各面に $\theta/4$、W の各リンクを含む他の $2d-3$ 枚に $\theta/8$ を与えるので、Thomson の不等式（単位の束の定理の (i)）から、**どの箱でも（無限の格子でも）** $\sum f^2 \le \frac{1}{4} + \frac{2d-3}{8}$。合わせて

$$\frac{1}{16d - 8} \;\le\; \frac{1}{64 \sum f^2} \;\le\; \lambda \;\le\; \max f^2 = \frac{1}{16} \tag{7}$$

初 （右の等号 $\max f^2 = \frac{1}{16}$ は最大の束が粗い面にあるときで、計算した全ての箱で確かめたが一般の証明は無い 読 ）。四次元で $1/56 \le \lambda \le 1/16$、三次元で $1/40 \le \lambda$。等号 $\lambda = 1/16$ は束が $\frac{1}{4}$ の面だけに乗るときで、Migdal–Kadanoff の 16 枚（15-04 §02）がちょうどこれです。**粗い面が細かい面 4 枚でできる型の一段では、Migdal–Kadanoff の $1/16$ が横の縮みの上端**で、並列の道があるほど束は薄く分かれ λ は小さくなります。

計算した箱では $\lambda \cdot \sum f^2 = \sum f^4$ は $1/64$ の 1.04〜1.22 倍に留まり、λ の動きはほぼ分母 $\sum f^2$（不変な曲線の傾き）の逆数で決まります 読 （観察）。

05

箱の表

表 1 は、粗い面 2×2 の一段の三つの数を箱ごとに並べたものです。$\sum f^2$ と λ は束の網の主項（三次元の自由境界と外周だけ自由の箱は有理数で二つの定式化が一致 初 、四次元と周期は浮動小数で二つの定式化が 10^{-12} 程度で一致 読 ）、源は熱核出発・単一の像・$\beta \to \infty$ の一ループの θ^4 の係数の数値です 読 。「外周だけ自由」は板の外周の外面

だけを自由境界にし、粗い面のまわりに立方体を残したもの、「内部」は粗い面を箱の内部に埋めたもの、「周期」は粗い面を一枚だけ固定し他の面は自由にしたトーラスです。

表 1　粗い面 2×2 の一段の三つの数（$SU(2)$・可換に制限した木の水準＝$\beta\to\infty$ の主項・一つの粗い面の周辺分布。源は熱核出発・単一の像・$\beta\to\infty$・一ループ）

系	$\sum f^2=\beta'/\beta$	$\lambda=\sum f^4/\sum f^2$	源 σ	照合と注
二次元の開いた帯（二枚を直列にまとめる）	$1/2$	$1/4$	0 初	直列（畳み込み）だけなので熱核の類に閉じる
Migdal–Kadanoff（$d=4$・$b=2$）	1	$1/16$	$1/3840\approx 2.60\times10^{-4}$	階層格子の写像。束 $\frac14$ の面 16 枚（15-04）
三次元 $2\times2\times1$・自由境界	$1/3$	$7/144\approx0.0486$	$4.11\times10^{-4}\approx1/2433$	源は指標の有限和の外挿と一ループが 4 桁で一致。全リンクの熱浴 Monte Carlo と指標の有限和が $\beta=4$〜32 で $\le 1.7\sigma$
三次元 $2\times2\times2$・自由境界	$15/44$	$5079/106480\approx0.0477$	$4.65\times10^{-4}\approx1/2149$	一ループは二実装（有限差分と解析の Hessian）。Monte Carlo と $\beta=16,32$ で $\le 0.96\sigma$
三次元 $2\times2\times3$・自由境界	$14/41$	≈0.04765	4.71×10^{-4}	一ループは一実装
三次元 $2\times2\times\infty$	$(1+\sqrt3)/8\approx0.3415$	≈0.04764	$\approx4.72\times10^{-4}$	$\sum f^2$ は梯子の式 $R=\frac12\parallel(1+R)$ から 初 。源は三点からの見立て
三次元 $4\times4\times2$ の中央・外周だけ自由	$1023/2815\approx0.3634$	≈0.04466	$6.13\times10^{-4}\approx1/1630$	束は三つの実装で一致。一ループは二実装が相対 1.4×10^{-5}
三次元 厚さ 2 の板を広げる（$6\times6\times2$・$8\times8\times2$・…）	$0.3664\to0.36680$	$0.04430\to0.04425$	$6.41\to6.45\times10^{-4}$	$4\times4\times2$ で極限の 1%（束）・5%（源）以内。源の極限は見立て
三次元 4^3・6^3 の内部（粗い面を箱の中の平面に）	0.4669・0.4760	0.0361・0.0355	1.04×10^{-3}・9.92×10^{-4}	一ループは一実装。源は箱の大きさについて単調でない
三次元 周期 4^3・8^3・16^3（一枚だけ固定）	$8/15$・0.4859・0.4814	0.0332・0.0349・0.0352	—	束は二つの定式化。4^3 の $8/15$ は 15 桁で一致
四次元 $2\times2\times1\times1$・自由境界	$3/7$	≈0.0393	4.68×10^{-4}	一ループは二実装
四次元 $2\times2\times2\times1$・自由境界	$105/241$	≈0.0390	4.80×10^{-4}	一ループは一実装
四次元 2^4・自由境界	$180/407\approx0.4423$	≈0.0386	$4.86\times10^{-4}\approx1/2058$	一ループは二実装が相対 4.9×10^{-5}
四次元 $4\times4\times2\times2$ の中央・外周だけ自由	≈0.4867	≈0.0350	$5.46\times10^{-4}\approx1/1833$	一ループは一実装
四次元 4^4 の内部（開いた箱）	0.7180	0.0266	$4.96\times10^{-4}\approx1/2017$	一ループは疎と密の二実装が log det で 1.5×10^{-11}。12^4 の内部で $\sum f^2=0.7301$・$\lambda=0.02645$（束だけ）
四次元 周期 4^4・8^4・12^4（一枚だけ固定）	$16/21$・0.7315・0.7305	0.0264・0.02645・0.02645	—	束は二つの定式化。$16/21$ は 13 桁で一致
$U(1)$ の Villain（どの箱でも）	同じ $\sum f^2$	—	0 初	$\beta'=\beta\sum f^2$ で閉じ、外れは $e^{-c\beta}$ だけ（Poisson の和）

表 1 から読むこと 読 。

- **向き**。粗い面のまわりに格子を足すほど（自由境界 → 外周だけ自由 → 内部 → 周期）、$\sum f^2$ は上がり（§04 (a) のとおり）、λ は下がります。四次元で $\sum f^2$ は 0.44（2^4）から 0.73（格子に埋めた極限）へ、λ は 0.039 から 0.026 へ。自由境界は「束の流し口」を作って β' を小さく、λ を大きく見せていました。
- **母数の流れ**。β' の主項は $\beta\sum f^2$ で、ずれは一ループで β に依らない $O(1)$ です（熱核出発）：$2\times2\times1$ で $\beta/3-0.146$、2^4 で $180\beta/407-0.258$、$4\times4\times2$ の中央で $1023\beta/2815-0.220$（いずれも $+O(1/\beta)$）。Migdal–

Kadanoff の $-\frac{1}{4}$ と同じ型です。

- **源**。正で β に依らない値に収束し、四次元の箱で $4.7\text{〜}5.5\times10^{-4}$（Migdal–Kadanoff の 1.8〜2.1 倍）、三次元の板で $4.1\text{〜}6.5\times10^{-4}$ です。$U(1)$ の Villain では 0：源には、閉じた面の上で二つの円板の重みを掛ける「並列」と、非可換な群の Haar の重み $\theta/\sin\theta$ の両方が要る、と読めます。二次元の開いた領域は直列だけなので源がありません。

06

粗い面を大きくする — 周の型と、本当の二段

粗い面を $L\times L$（外周 W は $4L$ 本）に広げます。$L=2$ が一段、$L=4$ は平面の方向の倍率 4 を一度に取る「本当の二段」です。これと比べる「反復の二段」は、一段の写像を粗い格子にもう一度当てる近似（一つの粗い面の周辺分布を次の段の作用として入れ直す）で、$\beta''/\beta=(\sum f_1^2)^2$、$\lambda$ は λ_1^2、源は $\sigma_1(1+\sum f_1^4)$ と数えます。

(a) 上界。試しの配位「W の $4L$ 本に $\theta/(4L)$ ずつ、他は 0」は粗い面の角の 4 枚に $2\theta/(4L)$、辺の $4(L-2)$ 枚に $\theta/(4L)$、中の面に 0 を与え（粗い面の和は 1 で W のホロノミーと合う）、W の各リンクを含む外の面は $2d-3$ 枚以下です。よって $L\ge2$、**どの箱でも（無限の格子でも）**

$$\sum f^2(L)\;\le\;\frac{d-1}{2L}+\frac{1}{2L^2},\qquad \lambda(L)\;\ge\;\frac{L^{-6}}{\sum f^2(L)}\;\ge\;\frac{2}{L^4\big((d-1)L+1\big)} \tag{8}$$

初（右は Stokes で粗い面の L^2 枚の f の和が 1 なことと冪平均から）。四次元で $L=2$ は $7/8$ と $1/56$（§04 と同じ）、$L=4$ は $13/32$ と $1/1664$ です。

(b) 本当の二段は反復より β を大きく下げる。包含の単調性で四次元の格子に埋めた一段は $\sum f_1^2\ge0.717961$（4^4 の内部の値、二つの定式化が一致 読 ）、よって $(\sum f_1^2)^2\ge0.5155>13/32\ge\sum f_2^2$ 初 （入力の 0.717961 は計算の数）。反復は $L=2^k$ について $L^{-0.48}$ 程度でしか落ちず、本当の $L\times L$ は (8) で $O(1/L)$ なので、比は段数とともに 0 に向かいます。**一つの粗い面の周辺分布の β'/β は四次元で周の型（$O(1/L)$）で落ち、一段の二乗の繰り返しでは表せません**。二次元の平面だけなら両者は一致します（粗い面 4×4 で $\sum f^2=1/16=(1/4)^2$、$\lambda=1/256=(1/16)^2$）。

(c) 周の型。計算した四次元の箱では $\sum f^2$ の 44〜51% が「W に接する横の方向の面」（W の 1 本あたり $2(d-2)=4$ 枚）に乗り、この割合は粗い面を 2×2 から 4×4 にしてもほぼ変わりません 読 。作用は粗い面の面積でなく W の周に沿って払われる、と読めます。

表 2　一段・反復の二段・本当の二段（四次元・開いた箱で粗い面は内部・可換に制限した木の水準。源は熱核出発・単一の像・$\beta\to\infty$・一ループで、粗い面 4×4 は疎な解析の Hessian の一実装、その経路は小さな系 $4\times4\times1\times1$ で有限差分と相対 9×10^{-4}） 読

箱	量	一段（粗い面 2×2）	反復の二段	本当の二段（粗い面 4×4）	本当／反復
4^4（粗い面 4×4 は平面方向で箱の縁）	$\sum f^2$	0.7180	0.5155	0.2564	0.50
	λ	2.66×10^{-2}	7.06×10^{-4}	2.62×10^{-3}	3.7
	源	4.96×10^{-4}	5.05×10^{-4}	3.70×10^{-5}	0.073
$6\times6\times4\times4$（平面方向に余白 1）	$\sum f^2$	0.7218	0.5210	0.2895	0.56
	λ	2.65×10^{-2}	7.02×10^{-4}	2.37×10^{-3}	3.4
	源	4.89×10^{-4}	4.98×10^{-4}	3.30×10^{-5}	0.066
12^4（束だけ）	$\sum f^2$	0.7301	0.5330	0.3060	0.57
	λ	2.65×10^{-2}	7.00×10^{-4}	2.57×10^{-3}	3.7

表 3　粗い面の辺 L の列（四次元・$(L+2)\times(L+2)\times4\times4$ の開いた箱で粗い面は内部・横の厚さ 4。束は浮動小数、源は一ループの一実装） 読

L	$\sum f^2$	(8) の上界	λ	一ループの θ^2 の係数 c_2	源	源 $\cdot L^4$
1（一枚の面）	1.989	2（$L=1$ の試し）	0.521	0.499	7.66×10^{-3}	7.66×10^{-3}

L	$\sum f^2$	(8) の上界	λ	一ループの θ^2 の係数 c_2	源	源 $\cdot L^4$
2	0.7180	7/8	0.0266	0.238	4.96×10^{-4}	7.93×10^{-3}
3	0.4190	5/9	0.00598	0.156	9.85×10^{-5}	7.98×10^{-3}
4	0.2895	13/32	0.00237	0.116	3.30×10^{-5}	8.46×10^{-3}

表 2・表 3 から読むこと 読 （四点の観察・横の厚さ 4・一実装）。源は $\approx 8\times10^{-3}/L^4$、$c_2$ は ≈ 0.46〜$0.50/L$ です。$\theta\sim L^2F$ と読めば θ^4 は次元 8 の演算子で、係数が L^4 で落ちるのは Migdal–Kadanoff の $b^{d-8}=1/16$ と同じ数え方に合います。だから本当のブロック化の源は「段ごとに一定の帯で生まれ直す数」ではなく、「最も細かい尺度で生まれた θ^4 のずれが段ごとに約 $1/16$ で薄まる」型に見え、反復の帳簿の固定点 $\sigma/(1-\sum f^4)\approx 5\times10^{-4}$ は、この測り方では上界の側にあります。λ は逆に、本当の二段が反復 λ_1^2 の 3.4〜3.7 倍で、反復は縮みを速く見せます。ただし 2.4〜$2.6\times10^{-3}\ll 1$ で、帳簿の分母 $1-\lambda$ はほぼ 1 のままです。

07

全ての粗い面を同時に固定した網 — 束の網の定理

表 1 の周期の行は「粗い面を一枚だけ固定し、周りの粗い面は自由にした」網でした。本当のブロック化の一段の主項は、格子を 2^d のブロックに割り、**粗い格子の全てのプラケットの角を同時に固定した**網で、これは別の網です。この節の条件：可換な配位に制限・木の水準（$\beta\to\infty$ の主項）・周期の格子 $(\mathbb{Z}/L)^d$（L は偶数）・2^d のブロック・粗い角 $\theta_P:=\langle s_P,\phi\rangle$ は粗い面 P を張る 2×2 の外周の角の線形化。

記号。S を s_P を並べた行列、D_c を粗い格子の余境界、C を粗いリンクの写像（$(CA)_\ell$ は粗いリンク ℓ をなす細かい 2 本の角の和）とすると $SD=D_cC$ です。$u_P:=Ps_P$、$G:=SPS^{\mathsf T}$（$G_{PQ}=\langle u_P,u_Q\rangle$）、$B:=G^{+}$（Moore–Penrose の擬逆）、$U$ を u_P を列に並べた行列とします。

束の網の定理（同じ論文の Theorem G）。上の条件の下で 初 ：

- (i) 拘束 $S\phi=\theta$（$\phi\in\mathcal{A}$）が空でないのは $\theta\in\operatorname{im}D_c$ のとき、かつそのときだけ（粗い立方体ごとの Bianchi の和 0 と、座標の 2-トーラスを貫く粗い束 0）。とくに**粗い面を一枚だけ捻り他を 0 に保つ θ は許されない**。
- (ii) $\theta\in\operatorname{im}D_c$ について最小点はただ一つで $\phi^*=F\theta$、$F:=UB$、最小値は $\tfrac12\theta^{\mathsf T}B\theta$。粗い作用は

$$S'(\theta)=\frac{\beta}{2}\,\theta^{\mathsf T}B\,\theta,\qquad \beta'_{PQ}=\beta B_{PQ}\quad(\operatorname{im}D_c\text{ の上の二次形式として}).\tag{9}$$

- (iii) 粗いリンクの変数 a で書くと $\min\{\frac12\|dA\|^2:CA=a\}=\frac12 a^{\mathsf T}Qa$、$Q=D_c^{\mathsf T}BD_c$。Lagrange の未定乗数がそのまま粗い作用の勾配（各粗いリンクの電流の湧き出し）になる。
- (iv) θ は独立な座標でないので、B の非対角や四次形式の「対角／交差」の成分は表し方に依る。表し方に依らない量は：$\operatorname{im}D_c$ の上の B のスペクトル、向きごとの比 $\beta'(\theta):=\theta^{\mathsf T}B\theta/\sum_P\theta_P^2$、$\mu(\theta):=\sum_q(F\theta)_q^4/\sum_P\theta_P^4$、$\lambda(\theta):=\mu(\theta)/\beta'(\theta)$（単位の束の定理の λ の向きつきの版）。
- (v) 全ての $\theta\in\operatorname{im}D_c$ で $\beta'(\theta)\ge\frac14$。

証明。(i) $\theta=SDA=D_c(CA)\in\operatorname{im}D_c$。逆に各粗いリンクの一本目の細かいリンクに a_ℓ、他に 0 を置けば $CA=a$。(ii) 最小ノルムの解は $\operatorname{im}U$ に入り、$\phi=Uc$ で $Gc=\theta$。$\operatorname{im}G=S(\operatorname{im}d)=\operatorname{im}(D_cC)=\operatorname{im}D_c$ なので解があり、$c=B\theta+\ker G$、$U\ker G=0$、$\|\phi^*\|^2=\theta^{\mathsf T}BGB\theta=\theta^{\mathsf T}B\theta$。一意性は単位の束の定理と同じ狭義凸性。(iii) 内側の最小は粗いゲージの向きに不変なので $\theta=D_ca$ を代入し、KKT の条件を読む。(v) 粗い面の 4 枚の組は互いに重ならないので $\sum_q\phi_q^2\ge\sum_P\sum_{q\in s_P}\phi_q^2\ge\sum_P\theta_P^2/4$（各粗い面で Cauchy–Schwarz）。∎

滑らかな試し。細かい場が粗い面ごとに 2^d 枚のプラケットで同じ値 $\theta/4$ を持つ配位では、エネルギーの比は 2^{d-4}、$\lambda=1/16$（d に依らない）です 初 （算術）。この配位はトーラスの上で一様にはなれず、波長が長い極限の試しとし

てだけ意味を持ちます。Migdal–Kadanoff（全ての粗い面が独立、P を恒等にしたもの）では $\beta'/\beta = 2^{d-4}$、$\lambda = 1/16$ です。

表 4　全ての粗い面を固定した網の数（$SU(2)$・可換に制限した木の水準・周期・2^d のブロック。二実装（射影と擬逆／粗いリンクの KKT）が 10^{-12} 程度で一致。sup は局所の最適化の多点出発で見つけた値＝真の sup の下界）読

箱	B の固有値（$\operatorname{im} D_c$ の上）	最も長い波長の β'	プラケットの作用からの外れ	一本の粗いリンクの λ	滑らかな向きの λ	見つけた sup λ
三次元 4^3〜16^3	$[0.25,\ 0.375\text{〜}0.474]$	$k=\pi/4$ で 0.4744	15〜17%	0.066〜0.068	$k=\pi/4$ で 0.055	0.11〜0.12
三次元 48^3	$[0.25,\ 0.497]$	$k=\pi/12$ で 0.4968	16%	0.068	$k=\pi/12$ で 0.0615	（最適化なし）
四次元 4^4〜12^4	$[0.25,\ 0.536\text{〜}0.811]$	$k=\pi/3$ で 0.8108	24〜27%	0.085〜0.091	0.037〜0.046	0.22〜0.27
四次元 16^4	$[0.25,\ 0.879]$	$k=\pi/4$ で 0.8786	24%	0.091	$k=\pi/4$ で 0.047	（最適化なし）

表 5　判定：四次元の一段の「本当の数」（条件は表 4 と同じ。一枚固定の行は表 1）

網	β'/β	λ（θ^4 の倍率）	札
自由境界の 2^4 に一枚	0.442	0.0386	初（有理数）
周期の 8^4 に一枚（他は自由）	0.731	0.0264	読
全ての粗い面を固定・長波長	$\to 1 = 2^{d-4}$（$k=\pi/4$ で 0.879）	滑らかな試しで $1/16$。測った $k \ge \pi/4$ では 0.037〜0.047	読（試しの値は 初）
全ての粗い面を固定・一本の粗いリンク	0.354	0.091	読
全ての粗い面を固定・最も粗い向き	0.25（最小の固有値）	見つけた sup ≥ 0.27	初（$\ge \frac{1}{4}$）・読（sup）
Migdal–Kadanoff	1	$1/16$	初

表 4・表 5 から読むこと 読。(1) 粗い作用はプラケットの作用に留まりません。固有値は四次元で $\frac{1}{4}$ から長波長の 1 近くまで広がり、二次の段で既に長さ 2 以上のループの項が生まれます（古典の固定点の作用の二次の部分に当たると思われるが、原典は照合していない）。(2) 長波長の β'/β は一枚固定の 0.731 より大きく、Migdal–Kadanoff の 1 の側に寄ります。(3) 四次の写りは行列で隣と混ざり、**粗い向きでは $1/16$ を超えます**（一本の粗いリンクで 0.091、見つけた sup で 0.27）。滑らかな向きでは三次元で $1/16$ に向かい（$k=\pi/12$ で 0.0615）、四次元は $k=\pi/4$ まで 0.047 で収束はまだ見えていません。Migdal–Kadanoff の $\lambda = 1/16$ は、本当の一段では長波長の向きの値として残るだけです。(4) 見つけた値は全て 0.3 未満ですが、擬逆の代表 F は非局所で、Riesz–Thorin の上界は箱とともに増え（四次元 16^4 で 4.2）、**体積に一様な上界は得ていません**（擬逆の代表で。局所の代表を取ると体積に一様な上界が得られる：下の束の網の定理（局所の形））。だから「横の縮みが 1 より小さい」とは言いません。

行列で書くときの座標の候補。四次の偏差の類を「$|Q(\theta)| \le c \sum_P \theta_P^4$」（$\ell^4$ で押さえられる四次形式）に取ると、木の水準の一段は $c \mapsto c \cdot \sup \mu$ でこの類を保ちます 初（$|Q(F\theta)| \le c \sum (F\theta)^4 \le c \sup\mu \sum \theta^4$）。プラケットの対角の類（Migdal–Kadanoff の類）は保たれませんが、ℓ^4 の錐は保たれます。

局所の代表と、体積に一様な上界 — 束の網の定理（局所の形。同じ論文の Theorem G′）。条件は束の網の定理と同じ（可換に制限・木の水準・周期 $(\mathbb{Z}/L)^d \cdot 2^d$ のブロック・粗い角の線形化）。F は $\operatorname{im} D_c$ の上でしか決まらないので、その外での作用の選び方が「代表」です。擬逆の代表は Hodge の分解そのもので局所でなく、基点を一点に固定した軸ゲージも体積とともに増えます。そこで粗いリンクの変数で書いた核 $R := F D_c$ に目を移します。

- (a) R は局所で（指数的に減衰、測った率は一歩あたり約 2.2〜2.5）、$\operatorname{im} D_c$ の上で F と一致する代表は、R の各行（輪体）の「埋め」$\partial k = r$ と同じものです。各行に、**基点が行とともに動く軸の錐（木）**を当てると、並進に共変で指数的に減衰する代表 K_∞ が得られ、その周期化 K_L は全ての L で $\operatorname{im} D_c$ の上で F_L と一致し、$\|K_L\|_{p\to p} \le \|K_\infty\|_{p\to p}$（$p = 1, \infty$）です 初 （$R$ の指数減衰は Bloch の階数が一定であることからの概略と数値）。
- (b) よって全ての L と $\theta \in \operatorname{im} D_c$ で

$$\sum_q (F_L\theta)_q^4 \;\le\; \Lambda_d \sum_P \theta_P^4, \qquad \Lambda_d := \|K_\infty\|_{2\to 2}^2 \, \|K_\infty\|_{\infty\to\infty}^2 \tag{10}$$

すなわち $\sup \mu$ は体積に一様に有界です 初 （Riesz–Thorin は既知。行と列の ℓ^1 和から四次の和へ移す Schur の形は Lean：`schur_quartic`・`representative_bound`、仮定：行と列の ℓ^1 和の上界・$\operatorname{im} D_c$ の上での代表の一致）。(c) 四次の偏差の ℓ^4 の錐は一段で定数を Λ_d 倍以下にして写ります 初 （Lean：`cone_step`、仮定 $c \ge 0$・$|Q(\phi)| \le c \sum \phi^4$・$\operatorname{im} D_c$ の上で (10)）。

(d) 数 読 （二実装で行が 3×10^{-15} 以内で一致。三次元 4^3〜48^3・四次元 4^4〜20^4）：局所の代表の $\|K\|_{\infty\to\infty}$ は体積に一様（三次元 対称化 0.685・木 0.748、四次元 対称化 1.341・木 1.541 に収束）、擬逆の代表は 0.62→1.94（三次元）・0.95→2.39（四次元）と増え、基点を固定した軸ゲージは一歩ごとに 1.12（三次元）・3.08（四次元）ずつ増えます。**三次元では $\Lambda_3 = 0.245$**（対称化）で、長波長の規格 $\beta_0' = \frac{1}{2}$ で $\sup \mu / \beta_0' \le 0.49$、$\beta' \ge \frac{1}{4}$ を使えば $\sup \lambda \le 0.98$ と 1 より小さくなります。**四次元では $\Lambda_4 \approx 1.83$**（24^4 の埋めと線の走査からの見積もり）で 1 を超え、$\sup \mu$ の下界は 0.148 です。しかも $\operatorname{im} D_c$ に制限した $\infty \to \infty$ ノルム $\nu_4 \ge 1.18$（16^4 の線形計画、表し方に依らない量）から、**どの代表の Riesz–Thorin も 1.39 を下回れません**。四次元で $\sup \mu < 1$ かは未決で、ℓ^4 を直接に押さえる別の評価が要ります（問い「四次元の ℓ^4 の直接の上界」）。真の値（≥ 0.148）と上界（1.83）の約 12 倍の隔たりは、ℓ^2 と ℓ^∞ の補間の損失です。

ℓ^4 の錐の一段の縮み — 四次元の ℓ^4 の錐は一段で 0.823 倍以下に縮む（$\beta_0' = 1$ の規格）。Riesz–Thorin の損は、$\infty \to \infty$ を決める行（粗い面に乗る細かいプラケット、96 型のうち 24 型）と、ℓ^2 を決める向き（長波長に近い）が別であることから来ます。そこで行をその ℓ^1 ノルム A_q で重みづけて補間すると（Stein の解析族による重みつきの Riesz–Thorin。有限次元のトーラスで使う）、全ての L で

$$\sup \mu \;\le\; \|K\|_{4\to 4}^4 \;\le\; \Lambda_w := \sup_P \lambda_{\max}\big(K(P)^{\mathrm{H}} \operatorname{diag}(A_q^2)\, K(P)\big) \tag{11}$$

が成り立ちます 初 （補間の定理は既知の道具 典 。重み A_q^2 はこの族の中で最良）。Λ_w を 20^4 の局所の代表の核で、運動量の格子 $N = 64$ と片側の二次の剰余で上から押さえると $\Lambda_w \le 0.823$ です 読 （計算で、区間の評価ではない。20^4 の格子の値 0.763、実空間のべき乗法で下から 0.758、小行列 60 個の判定で上界は破れない）。`cone_step` と合わせると、条件（可換に制限・木の水準・周期・2^4 ブロック・線形化した粗い角・K_∞ を 20^4 の核で置き換える）の下で、**四次の偏差の ℓ^4 の錐は一段で 0.823 倍以下に縮みます**（$\beta_0' = 1$ の規格のまま）。真の値の下界 0.148 との隔たりは約 12 倍から 5.6 倍に縮みました。距離で近い部分と尾に分ける評価（Minkowski の形は Lean：`quartic_triangle`、仮定 $a, b > 0$・各部分の四乗和の上界）や、符号を見ない評価（Schur・Hölder の族。$|K|$ のノルムの四乗 10.76）は 1 を大きく越え、効いたのは距離でなく行の型の重みでした 読 。**向きごとの規格で測った倍率は縮みの量ではありません**（次の段落）。

規格の注 — 長波長の結合で割る形に固定する。錐の定数を段ごとのスカラーの結合（長波長の β_0'）で割った形の座標 (a) では一段の因子は $\sup \mu / \beta_0' = \sup \mu$、自分の向きの二次形式 $\beta'(\theta)$ で測り直した錐 (b) では因子は $\sup \lambda$、$\lambda :=$

μ/β' です。$\frac{1}{4} \le \beta' \le \beta'_{\max} \le 1$ から $\frac{1}{4}\lambda \le \mu \le \lambda$ で、二つの錐は定数 4 以内で同値です 初 （有限の帳簿。Lean：`ledger`（仮定 $b_{\min}\sum\theta^2 \le \sum\phi^2 \le b_{\max}\sum\theta^2$、$0 < b_{\min}$）・`transfer`・`cone_b_to_a`。上の $\beta'_{\max} \le 1$ は測った値）。**規格を全ての段で一つに固定すれば定数 4 は一度だけ**で、結論は規格に依りません。段ごとに (a) と (b) を取り替えると因子 4 が段ごとに掛かります。実際、体積の極限で $\sup\lambda = 4\sup\mu_{\mathrm{loc}}$ です 初 （混合の極限の補題。粗い L は偶数・$L \to \infty$。有限の台の向き θ_{loc} に、$\beta' = \frac{1}{4}$ を達する最も粗い向き θ_π を $\varepsilon = V^{-1/3}$ で混ぜると、ℓ^4 は局在した向きが、ℓ^2 は広がった向きが担い、$\lambda \to 4\mu(\theta_{\mathrm{loc}})$。交差項の評価は代表の行の指数減衰による概略）。数でも、λ の最適化は $12^4 \cdot 16^4 \cdot 20^4$ で 0.269・0.308・0.338 と体積とともに増え、混合の外挿は 0.395、$4\mu_{\mathrm{loc}}$ は 0.3955 です 読 。したがって **λ は向きの縮みの量でなく**、$\lambda < 1$ は $\sup\mu < \frac{1}{4}$ と同値です。さらに、行の重みつきの Stein の道は、どの局所の代表・どの重みでも $\sum_s \nu_s^2/16 \ge 0.452 > \frac{1}{4}$ を下回れません 初 （Stein の道の床の補題。長波長の最小点で粗い面ごとに 16 枚が $\theta/4$ を受ける型は紙の概略と 20^4 で差 3.5×10^{-3}。有限の部分は Lean：`stein_floor`、仮定 $A_i^2 \le F v_i$・$0 \le \nu_i \le A_i$。ν は線形計画の数）。最も粗い向きそのものの四次の係数は一段でちょうど $1/64$ 倍（自分の向きで $1/16$）です 初 （Cauchy–Schwarz の等号）。λ の値域は $[0.59, 3.29]$ で 読 （下は「$\sup\mu_{\mathrm{loc}}$ は全ての L の $\sup\mu_L$ 以上」の概略を通す）、規格は (a) に固定します。

ℓ^4 の錐の一段の縮みは一段目に限る — 多段にはブロック化の条件が要る。木の水準の一段はガウスの条件つき平均で、粗い作用の逆 $G = B^+$（ブロックした流束の共分散）は線形に反復します：$G_{k+1}(q) = \frac{1}{16}\sum_\eta T\,G_k\,T^{\mathrm{H}}$（$T$ は粗い角の記号） 初 （条件つき平均の共分散の補題。ガウスの場のブロック化の標準の型と思われる、原典は照合していない）。粗い辺を細かい二本の和とする**辺の和**のブロック化では、B_k の固有値は固定の $q \ne 0$ で 2^{-k} の割合で 0 に逃げ（π^4 の向きで 0.25・0.090・0.038・0.017・0.0083）、長波長だけ 1 に留まり、スケール不変な固定点がありません 読 （記号で正確、$k \le 5$。原因は $2^k \times 2^k$ の正方形の流束の分散の周の長さの発散、という読み）。その柔らかい向きへ最小点が逃げ、錐の因子の下界は二段目 0.699（12^4）、**三段目で 1.262**（8^4、記号の経路と入れ子の別実装が一致）・2.200（12^4）・2.746（16^4）と 1 を越えます 読 （トーラスの周期の配位の局所の最適化。区間の評価なし）。だから**上の ℓ^4 の錐の一段の縮み（0.823）は一段目に限り**、同じブロック化を重ねた多段の幾何級数には使えません。粗い辺を横の 2^{d-1} 本の平行な二本の線の、ゲージに共変な平均（横の脚を付けた staple の平均）で定めると、共分散の流れは固定点に向かい（B_k の固有値は全ての q で増えて差が 0.27〜0.52 の比で縮み、幅 $[1, \approx 4.1]$。軸の運動量では $1/G_k = 3/(1 + 2\cdot 4^{-k})$ の閉じた形で 3 へ）、錐の因子の下界は段で増えません：**0.64・0.57・0.64・0.62**（$j = 1$〜4、$8^4 \cdot 12^4$）、一方向の場ではちょうど $\frac{1}{2}$ です 読 （記号の流れ $k \le 5$・二段目は細かい段からの実空間の入れ子の別実装と一致）。**上界はありません**（重みつきの Stein は 4.5〜8.1）。脚の無い素朴な平均はゲージに共変でなく、リンクを固定した最小と流束を固定した最小が 37〜73% ずれ、二段目の下界も 0.887 と 1 に近づきます。よって多段の形は「共分散の流れがスケール不変な固定点を持つブロック化で、かつ固定点で $\sup\mu_\infty < 1$ なら、錐は $x_n \le x_0 c^n$ の幾何級数」で 初 （帳簿は Lean：`cone_chain_uniform`（仮定 $M_k \le m$）・`cone_series`（仮定 $0 \le c < 1$・$x_{k+1} \le c x_k$）・`axis_flow_closed`）、前件の $\sup\mu_\infty < 1$ は下界の水準でしか支えられていません（問い「横の平均の固定点の上界」）。条件：可換に制限・木の水準・周期・2^4 ブロック・線形化。

擬逆の代表が体積とともに増える理由 — 尾の型。擬逆の代表（粗い面のホロノミーをそのまま座標にする表し方）の行の ℓ^1 和が体積とともに増えることは、Bianchi の拘束の伝搬が周期の格子で質量を持たないことによる冪の核と整合します。同じ一段を、Bianchi の拘束を持つ三次元の柱 $2 \times 2 \times L$（開いた面がある）で測ると尾は指数（率 $\ln(3 + 2\sqrt{2})$）で行の和は体積に一様（0.6035 に飽和）、境の無い周期の板では r^{-2}、三次元の周期では冪（実効の指数 3.3 前後）です 読 （可換の背景・木の水準・二次の係数）。局所の代表の側（粗いリンクの変数で書く表し方）は、三つの幾何の全てで指数でした。四次元の周期では擬逆の代表の核は r^{-4} と読め、ℓ^1 和は対数で増えます（表 5 の数と整合。四次元は測っていない）。数え上げの規則は 15-08 §06 にあります。束の網の定理（局所の形）の四次元の未決（向きごとの規格の倍率）はこの冪とは別の問いで、この観察はそれを動かしません。

粗いリンク＋大域の札の座標は、四次元の木でも指数。同じ一段を、粗い変数を「粗いリンク（Bianchi の拘束を変数に昇格させた座標）＋大域の札（各平面を貫く全束。粗い面の調和の部分）」に分けて書くと、札は粗いリンクの部分と交差項を持たず 初 （Lean：`norm_sq_add_harmonic`、仮定 $D^\dagger b = 0$。分解の一意性は `decomp_unique`・

`range_sup_tags`（仮定 $d_2 \circ D_c = 0$）、四次元の周期 n^4（$n \le 16$）の木の核は指数（前因子 r^{-1} 前後、率 $\kappa \approx 2.08$）で体積に依らず、行の距離の重みつきの和は $n = 4, 8, 12$ で 15.62・17.43・17.50 と飽和に向かいます 読 （可換の背景・二次の係数・一段・木の水準）。札を外した擬逆の代表（粗い面の座標）では、札の射影が平らな $-1/(2N)$ を作り、Bianchi の伝搬の冪（当てはめで $r^{-4.4}$）と合わせて、距離の重みつきの和は n に比例して増えます 読 。境の無い三次元の周期の箱（粗い $2 \times 2 \times L$）では一ループの核も指数（$\kappa = 3.094$、木の $\ln(11 + 2\sqrt{30}) = 3.089$ と一致）で、和は体積に一様でした（15-08 §06）。束の網の定理（局所の形）の未決はこの座標の問いとは別で、この観察はそれを動かしません。四次元の一ループは測っていません。

網の長波長と一ループ。全ての粗い面を固定した網をブロック L で一度に取ると、粗い作用の長波長の固有値は全ての L で 1 のまま（古典の marginal）、粗い格子の尺度の運動量では $1/L$ で小さくなります（π^4 の向きで $L \cdot B = 0.500$・0.359・0.305、$L = 2, 4, 8$。ブロック 2 の反復と同じ量） 読 。胞の型に射影した係数は $bL \to 0.20$ で、長波長と短波長の二つの尺度の間の遷移が、胞に収まらない部分（$L = 16$ で 2 割）として現れます。**木の水準に $\ln L$ の走りはありません。**一ループではこの長波長の固有値が $\beta'/\beta = 1 - 0.745/\beta$（Manton、ブロック 2）に変わり、変化の大部分はブロックの内側の揺らぎから来ます 読 （$SU(2)$・一ループ・横の粗いトーラス 6^3・波数 0 は外挿、15-03 §02）。小さい粗いトーラス（2^4）では、粗いトーラスの一様な向き（Polyakov の向き）に一ループの「質量」がつき長波長の値を汚す（δ が 0.19 動く）ので、網の一ループは横の粗いトーラスを 4 以上に取るか横の Bloch の和で測る必要があります 読 。

軸の錐・Koszul の縮約・線形計画の双対・Riesz–Thorin はどれも既知の道具で、組み合わせの見方も既知かもしれません（局所の最小点の構成に近い見方。原典は照合していない）。

08

分解への含意と問い

15-03 §04 の帳簿は、一段の写像が類のまわりで横に縮む（$\|\rho_{k+1}\| \le \lambda \|\rho_k\| + \varepsilon(\beta_k)$、$\lambda < 1$）なら外れは和でなく上限 $\sup_j \varepsilon(\beta_j)/(1-\lambda)$ で押さえられる、というものでした 初 （二次の項を落とした線形の不等式の下で）。この章は、その λ と、母数の流れの主項 β'/β が、一つの粗い面の周辺分布では**同じ射影 P から前もって紙で数えられる**ことを示しました（単位の束の定理）。四次元の一段で問うべき数は「源の大きさ」と「λ」の二つで、前者は一ループ、後者は木の水準の量です。ただし、全ての粗い面を固定すると λ は行列になり粗い向きで $1/16$ を超えるので（§07）、帳簿の $\lambda < 1$ を本当の一段で示すには、表し方に依らない作用素ノルムの、体積に一様な上界が要ります 読 。一様な上界そのものは局所の代表で得られ（束の網の定理（局所の形））、四次元では行の重みつきの補間で $\beta_0' = 1$ の規格の倍率が 0.823 以下になりました（数は計算）。向きごとの規格の倍率は縮みの量でないので規格は長波長の結合で割る形に固定し（§07 の規格の注）、この一段の数は一段目に限ります。多段には、共分散の流れが固定点を持つブロック化と、その固定点での $\sup \mu_\infty < 1$ が要ります（§07）。

表 6　この章から出る問い（状態：新。問 7・20・25 は答えを書き足した。問 25・28・30 は改訂で足した）

問	問い	大きさ	決着したら動くもの	決着しても動かないもの
6	粗い面の辺 L の列で、源 $\cdot L^4$（いま $L = 1$〜4・横の厚さ 4 で 7.7〜8.5×10^{-3}）が横を広げても一定に寄るか。寄れば源の段の和は等比で有限で、帳簿の「源は段ごとに一定の帯」の仮定を強められる	小さな計算（一ループの θ^4 の係数を摂動の公式で）	形の剰余の条件の源の扱い	非可換の配位・大きな場
7	全ての粗い面を同時に固定した木の水準の網で、$\mathrm{im}\, D_c$ の上で F と一致する**局所の代表**を作り、ℓ^4 の作用素ノルムに体積に一様な上界が出るか。あわせて、粗い向きの λ（見つけた sup は四次元で 0.27）の作用素ノルムが 1 を割るか。**答え（一部）：**局所の代表と体積に一様な上界は得た（束の網の定理（局所の形）、三次元 $\Lambda_3 = 0.245$）。四次元は $\Lambda_4 \approx 1.83$ で、この道では 1.39 を下回れない。行の重みつきの補間で $\sup \mu \le 0.823$（$\beta_0' = 1$ の規格、計算）	紙と小さな計算	本当の一段の横の縮みの主項	一ループ・大きな場・ゲージの張り替え

問	問い	大きさ	決着したら動くもの	決着しても動かないもの
20	四次元の ℓ^4 を直接に押さえる：局所の代表を $K = K_0 + K_{\mathrm{tail}}$（ブロックの近くの有限の部分と尾）に割り、近い部分は小さい行列の $\ell^4 \to \ell^4$ ノルムを有限の網で上から押さえ、尾だけに Riesz–Thorin を当てて、四次元の $\sup \mu$ が 1 を割るかを見る。**答え：**近い部分と尾の分解は効かず、行をその ℓ^1 ノルムで重みづけた補間で $\sup \mu \le 0.823$（$\beta_0' = 1$ の規格。数は計算で区間の評価ではない）。向きごとの規格では ≤ 3.29 で未決（§07）。三段の合成で解消：重みつき Stein で三段 0.10、全ての段で $\le$0.20（計算・木・可換、15-08）	紙と小さな計算	四次元の木の水準の一段の横の縮み	一ループ・非可換の配位・大きな場
25	向きごとの規格（自分の向きの $\beta'(\theta)$ で割る倍率 λ）で、運動量の帯ごとに重みつきの記号を分け、$\beta'(\theta)$ が $\frac{1}{4}$ に近い向きで μ が小さいことを示して、$\sup \lambda \le 3.29$ を 1 未満に落とせるか。**答え：**落とせない向きの問いだった。体積の極限で $\sup \lambda = 4 \sup \mu_{\mathrm{loc}} \ge 0.59$（混合の極限の補題）で、$\lambda$ は縮みの量でなく、$\lambda < 1$ は $\sup \mu < \frac{1}{4}$ と同値。Stein の道は床 0.452 を下回れない（Stein の道の床の補題）。帯ごとの比も 1.83 で上界にならない。規格は長波長の結合で割る形に固定する（§07）	紙と小さな計算	向きごとの規格での形の剰余の条件の木の水準	一ループ・非可換の配位・大きな場
28	ゲージに共変な横の平均のブロック化の固定点 B_∞ の上で、$\sup \mu_\infty$ の上界を Stein でない道で取る：一方向の部門（ちょうど $\frac{1}{2}$）と横の運動量を持つ残りを分け、残りを行の減衰（0.41・0.05・0.005）で抑えて 1 未満にできるか。あわせて固定点の存在を数（$k \le 5$）から紙へ	紙と小さな計算	形の剰余の条件の多段の条件（固定点での錐の縮みの条件）	一ループ・非可換の配位・大きな場
30	横の平均のブロック化（または大きい倍率）で、周期の網の長波長の一ループの係数を倍率 2・3 で測り、変化が $-\frac{11}{3\pi^2}\ln\frac{3}{2} \approx -0.151$ に近づくか（線の上の積を固定する規則の 1.7〜1.9 倍が規則の産物か）	小さな計算	結合の流れ（結合の流れの剰余の条件）の一段の係数	二段目以降の係数・大きな場

09

言えないこと

(a) 単位の束の定理・束の網の定理は可換な配位に制限した木の水準（$\beta \to \infty$ の主項）の文です。非可換な配位を含めた大域の最小が可換であること、一ループの補正（源・β' の $O(1)$ のずれ）、大きな場（$\|\psi\| \le r$ の外）は含みません。

(b) 表 1〜表 3 の数は一つの粗い面の周辺分布で見る一段の数で、本当のブロック化の一段ではありません。反復の二段は一つの面の周辺分布を入れ直す近似です。

(c) 源・c_2・有限の β の比は計算機の値で、源は熱核出発・単一の像・$\beta \to \infty$ の一ループです。粗い面 4×4 と大きな箱の一ループは一実装です。源 $\approx 8 \times 10^{-3}/L^4$ は四点の観察で、極限や閉じた形はありません。

(d) (7) の右の等号 $\max f^2 = 1/16$ と、計算した箱で最大の束が粗い面にあることは箱ごとの確認で、一般の証明はありません。

(e) 束の網の定理の数（表 4・表 5）は周期・2^d のブロック・粗い角の線形化の下の値で、sup は局所の最適化の下界です。擬逆の代表の上界は体積とともに増えます。局所の代表による体積に一様な上界（束の網の定理（局所の形））は四次元で 1.83 の見積もり（下からの見積もり、区間の評価なし）で 1 を超えます。行の重みつきの補間では 0.823 以下になりましたが（$\beta_0' = 1$ の規格・K_∞ を 20^4 の核で置き換え・計算で区間の評価なし）、向きごとの規格では 1 を切らないので、向きごとの規格の「横の縮みが 1 より小さい」とは言いません。「1/16 以下」とも言いません。三次元の「1 より小さい」は Λ_3 の数値に依ります。束の網の定理（局所の形）は一ループ・非可換の配位・大きな場・二段目以降を含みません。四次元の長波長の $\lambda \to 1/16$ は滑らかな試しの算術と三次元の数値からの見立てです。規格の注の混合の極限の補題・Stein の道の床の補題は紙の概略（交差項の評価・長波長の最小点の型）と有限のトーラスの数で、Lean は有限の帳簿の部分だけです。

(f) この章は紫外の制御を示しません。四次元の格子の繰り込み・質量ギャップには何も含意しません。

(g) §07 の尾の型の観察は、柱・板・三次元の周期の格子の木の水準（一ループは柱だけ）の数です。粗いリンク＋大域の札の座標の四次元は木の水準（$n \le 16$）だけで、四次元の一ループは測っていません。

(h) §07 の多段の錐は、辺の和のブロック化で三段目に 1 を越えること（下界、トーラスの周期の配位）と、横の平均のブロック化で下界が段で増えないこと（$j \le 4$）までで、$\sup \mu_j < 1$ の上からの評価はどちらのブロック化でもありません。固定点の存在は $k \le 5$ の記号の数と箱の平滑化の筋だけです。網の長波長の一ループは一つの規則の一段目の数です。

10

五分類の表と依存グラフ

表 7　この章の行

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲
[01]	単位の束の定理 (i)(ii)：最小点 θf、$f = Ps/\|Ps\|^2$、$\beta'/\beta = \sum f^2$。「$\sum f^2 \le 1$」は無条件でない	初	§02	可換に制限・木の水準
[02]	単位の束の定理 (iii)(iv)：θ^4 の係数はちょうど $\sigma \sum f^4$、$\lambda = \sum f^4 / \sum f^2$、(5)	初	§02	局所の最小・$\sigma(6\theta^2 m^2 + 4\|\theta\| mr + r^2) \le \beta/4$
[03]	三次元の自由境界で $\sum f^2$ は実効抵抗、$2 \times 2 \times 1$ で $1/3$・$7/144$	初	§03	三次元・自由境界
[04]	包含の単調性と $1/(16d - 8) \le \lambda \le 1/16$	初	§04	粗い面の 4 枚が対称に $\frac{1}{4}$・最大の束の位置は箱ごとの確認
[05]	表 1 の有理数（三次元の自由境界と外周だけ自由）	初	§05（二つの定式化）	主項
[06]	表 1 の浮動小数と源、Monte Carlo との一致	読	§05	$SU(2)$・熱核出発・$\beta \to \infty$・一ループ
[07]	(8)：$\sum f^2(L)$ の上界と $\lambda(L)$ の下界、本当の二段 < 反復の二段	初	§06	$L \ge 2$・どの箱でも（反復との比較は入力 0.717961 を計算の数として）
[08]	周の型・表 2・表 3・源 $\approx 8 \times 10^{-3}/L^4$	読	§06	四次元・横の厚さ 4・一実装・四点
[09]	束の網の定理 (i)〜(v)・ℓ^4 の錐が保たれること	初	§07	可換・木の水準・周期・2^d ブロック・線形化
[10]	表 4・表 5：長波長で 2^{d-4}、粗い向きで $\lambda > 1/16$、上界なし	読	§07	測った箱・sup は下界
[11]	問い「粗い面の源の横の一定性」・問い「木の水準の網の局所の代表」	仮	§08	問い
[12]	束の網の定理（局所の形）(a)〜(c)：局所の代表・体積に一様な上界 (10)・ℓ^4 の錐の写り	初	§07	可換・木の水準・周期・2^d ブロック・線形化。R の減衰は概略
[13]	$\Lambda_3 = 0.245$・$\Lambda_4 \approx 1.83$・$\nu_4 \ge 1.18$ で四次元は 1.39 を下回れない	読	§07 (d)	三次元 48^3 まで・四次元は 24^4 の見積もり・ν_4 は 16^4
[14]	ℓ^4 の錐の一段の縮み：行の重みつきの補間 (11)、$\Lambda_w \le 0.823$、ℓ^4 の錐は一段で 0.823 倍以下	初（(11)）・読（数）	§07	可換・木の水準・周期・2^4 ブロック・線形化・20^4 の核・区間の評価なし・$\beta_0' = 1$ の規格（向きごとの規格は未決）
[15]	擬逆の代表の増加は Bianchi の拘束の冪の核と整合、局所の代表は指数	読	§07	柱・板・三次元・木の水準・四次元は未
[16]	規格の注：二つの錐は定数 4 以内で同値（規格を固定すれば一度だけ）、$\sup \lambda = 4 \sup \mu_{\mathrm{loc}}$（混合の極限の補題）で λ は縮みの量でない、Stein の道の床 0.452（Stein の道の床の補題）、最も粗い向きは $1/64$	初（帳簿・混合の極限の補題・Stein の道の床の補題の概略）・読（数）	§07	可換・木の水準・周期・2^4・線形化・粗い L は偶数で $L \to \infty$・ν は線形計画の数

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲
[17]	ℓ^4 の錐の一段の縮みは一段目に限る：辺の和のブロック化では共分散に固定点が無く（2^{-k}）三段目で因子 ≥ 1.26。横の平均では固定点に向かい下界 0.64・0.57・0.64・0.62、上界なし	初 （条件つき平均の共分散の補題・幾何級数の帳簿）・読 （数）	§07	可換・木の水準・周期・2^4・線形化・記号の流れ $k \leq 5$・下界は局所の最適化・区間の評価なし
[18]	粗いリンク＋大域の札の座標は四次元の周期の木で指数（$\kappa \approx 2.08$）、札を外すと平ら＋冪で和が体積とともに増える	初 （札の直交）・読 （数）	§07	可換の背景・二次の係数・一段・木の水準・$n \leq 16$
[19]	網の長波長：木は全ての L で 1、胞の部分は $1/L$、$\ln L$ の走りは木に無く、一ループで $1 - 0.745/\beta$	読	§07	可換・木の水準と一ループ（ブロック 2・横 6^3）・Polyakov の向きの汚れに注意

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
[01] 初  最小点 θf・β'/β = Σf²                          可換・木の水準
[02] 初  θ⁴ はちょうど σΣf⁴・λ・(5) ⟸ [01]               局所の最小
[03] 初  三次元の抵抗網・1/3・7/144 ⟸ [01]               自由境界
[04] 初  包含の単調性・1/(16d−8) ≤ λ ≤ 1/16 ⟸ [01][02]   粗い面が対称
[05] 初  表 1 の有理数 ⟸ [01][03]
[06] 読  表 1 の浮動小数と源 ⟸ [02][05]                 一ループ・β→∞
[07] 初  (8)・本当の二段 < 反復 ⟸ [04]                   L ≥ 2
[08] 読  周の型・源 ≈ 8e−3/L⁴ ⟸ [06][07]                 四点・一実装
[09] 初  束の網の定理 ⟸ [01]                             周期・2^d ブロック
[10] 読  長波長 2^{d−4}・粗い向き λ > 1/16 ⟸ [09]
[11] 仮  問い「粗い面の源の横の一定性」・問い「木の水準の網の局所の代表」 ⟸ [08][10]
[12] 初  局所の代表・一様な上界 (10)・錐の写り ⟸ [09]                周期・2^d ブロック
[13] 読  Λ₃ = 0.245・Λ₄ ≈ 1.83・ν₄ ≥ 1.18 ⟸ [12]
[14] 初  重みつきの補間 (11)・錐は 0.823 倍以下 ⟸ [12][13]          β'₀ = 1 の規格・数は計算
[15] 読  擬逆の代表の増加は冪の核 ⟸ [10][12]                    三次元まで・木の水準
[16] 初  規格の注：同値・混合の極限の補題・Stein の道の床の補題 ⟸ [09][14]   L → ∞・帳簿は
[17] 読  ℓ⁴ の錐の一段の縮みは一段目に限る・平均のブロック化の多段 ⟸ [14][16]   下界だけ・k ≤ 5
[18] 読  粗いリンク＋札は四次元の木で指数 ⟸ [12][15]             木の水準・n ≤ 16
[19] 読  網の長波長とーループ ⟸ [09][10]                       ブロック 2・ーループ
```

全ての「⟸」の右の番号は左より小さく、円はありません。仮定の行は [11] だけで、問いの形です（四次元の ℓ^4 の直接の上界・向きごとの規格の倍率・横の平均の固定点の上界・網の長波長の一ループの係数は §08 の表 6 にあり、[11] の続きです）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 可換に制限した木の水準で、β'/β・四次の写り・λ が射影から決まること（単位の束の定理）、$\lambda \leq \max f^2$、粗い面が対称なら $1/(16d-8) \leq \lambda \leq 1/16$、(8)、束の網の定理と $\beta'(\theta) \geq \frac{1}{4}$、局所の代表による体積に一様な上界（束の網の定理（局所の形））、行の重みつきの補間 (11)	非可換な配位を含めた最小・一ループ・大きな場。最大の束の位置の一般の証明
読 箱ごとの数（表 1〜表 5）、周の型、源 $\approx 8 \times 10^{-3}/L^4$、全ての粗い面を固定すると粗い向きで $\lambda > 1/16$、$\Lambda_3 = 0.245$・$\Lambda_4 \approx 1.83$、$\Lambda_w \leq 0.823$（四次元・$\beta_0' = 1$ の規格）、尾の型の観察	本当のブロック化の一段の λ と源。区間の評価。源の閉じた形
初 規格の注（二つの錐の同値・混合の極限の補題・Stein の道の床の補題の有限の部分）・木の水準の一段が条件つき平均で共分散が線形に反復すること（条件つき平均の共分散の補題）。読 辺の和のブロック化の三段目の 1 越え・横の平均の固定点と下界・粗いリンク＋札の四次元の木・網の長波長の一ループ	多段の $\sup \mu_j < 1$ の上界（どのブロック化でも）。固定点の存在の証明。四次元の一ループの尾。網の二段目以降の一ループ

出典と再現

もの	種別	出典・道具
Thomson の原理・Kirchhoff の法則・Rayleigh の単調性・Dirichlet の原理	典	電気回路と調和関数の標準の事実（P. G. Doyle, J. L. Snell, Random Walks and Electric Networks, 1984 の型）
単位の束の定理・束の網の定理・(5)(7)(8)・$2\times 2\times 1$ の手計算	初	この章の本文の証明。有限和の不等式の部品は Lean の束で、再検査済み（15-09 表 3）
表 1〜表 5 の数	読（有理数は初）	本書の検討の数値の記録（束の網の二〜三の定式化：双対の網の Kirchhoff・木のゲージの正規方程式・射影の式・Lagrange の条件の Hodge のラプラシアン。一ループの Hessian の二実装：有限差分と解析・疎行列の版。指標の有限和・全リンクの熱浴 Monte Carlo。束の網の定理は射影と擬逆・粗いリンクの KKT の二実装。束の網の定理（局所の形）の数は局所の代表の二実装と線形計画）
重みつきの補間（Stein の解析族、Hadamard の三線）	典（既知の道具。書誌は未確認）	E. M. Stein の解析族の補間定理
規格の注・多段の錐・粗いリンク＋札の四次元の木・網の長波長	読（帳簿・条件つき平均の共分散の補題は初）	本書の検討の数値の記録（記号の経路と第一段の Bloch の行・実空間の重みつき最小二乗・入れ子の別実装の照合・乱数の小行列の陰性対照・素朴な平均の陰性対照・密と Bloch の二実装・$U(1)$ の Villain で 0）。帳簿は Lean の束（15-09 表 3、再検査済み）
$\Lambda_w \le 0.823$・尾の型の数	読	本書の検討の数値の記録（20^4 の核の記号を $N=64$ の格子と片側の二次の剰余で・実空間のべき乗法・小行列の判定と陰性対照。柱・板・三次元の周期は射影と KKT の二実装）

この章で使った語 — 束・束の網・射影 P・単位の束・単位の束の定理・横の縮み λ・源 σ・包含の単調性・周の型・本当の二段・反復の二段・束の網の定理・表し方に依らない量・局所の代表・軸の錐・束の網の定理（局所の形）・行の重みつきの補間・尾の型。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：15-06 母数の数え方 — 二次の段で座標がいくつ要るか、一段の写像がどこへ引き込むか。

母数の数え方 — ループの形ごとの結合と引き込む先の類

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 15-01・15-02 にあります。

この部は、本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた記録です。存在そのものは第二巻の第 6〜13 部を、二つの設計の違いは第 14 部を見てください。部の位置づけは 15-00 にあります。

この章で分かること — 15-03 §02 の類が閉じる条件「類が有限個の母数で閉じる」の母数を、何を座標にして数えればよいかを、プラケットを一枚ずつ増やした最小の系で見ます。一枚では背景依存が結合の置き換え一つに吸収されること、二枚・三枚では交換子が合成のループの結合の像にすぎないこと、四枚ではループの形ごとの結合の比が β で動くこと、熱核に替えても群の曲がりの分 $\mathbf{2}/(\mathbf{3}\beta)$ が残ること。比を 2 に保つ作用を探すと、前因子の冪を動かす族には根が無く、基本＋随伴の族には根があるが、その曲線は一段の流れで閉じないこと。最後に、一段の写像が作用の形の座標を全て縮め、前因子の冪の一意の固定点（ψ^4 で $\mathbf{37/76}$）へ引き込むので、類が閉じる条件は「比 2 を保つ類」でなく「**引き込む先の一母数の類 ＋ 縮む形**」として言明するのがこの模型と整合すること。

前提となる章 — 15-03 §02（分解の言明）・15-03 §04（横の縮みの帳簿）・15-04 §01（熱核の半群）・15-05 §02（束の網）・15-07 §02（背景依存 η）。$SU(2)$ を単位四元数（三次元球面 S^3）と見ること、指標展開、Laplace の方法（鞍点の近似）を使います。

先に言うこと — この章の系は全て $SU(2)$（対照に $U(1)$）の一枚〜一列四枚のプラケットで、背景の場の強さを小さく（ホロノミーの角 $\theta \le \mathbf{0.3}$）取ったものです。一段は**一つの粗い面の周辺分布で見る一段（本当のブロック化の一段ではない）**の、さらに小さな版です。§07・§08 の写像は一列四枚・二本のループ・対角の定義・主項（$B \to \infty$）の写像です。どの文も四次元の格子の一段・ブロック平均・大きな場・ゲージの張り替えについて何も言いません。

この章の順序

1. 一枚 — 背景依存の型と、拘束つきの吸収（式 (1)）

2. 二枚 — 交換子は BCH の像（式 (2)(3)）
3. 三枚 — 単独と合成のループが 1:1:1（式 (4)）
4. 四枚 — ループの形ごとの結合の比が β で動く（式 (5)〜(7)）
5. 熱核と判定式 — 群の曲がりの分（式 (8)(9)・表 1）
6. 比を保つ作用の探索 — 一ループの一般式・前因子の族・基本＋随伴（式 (10)(11)）
7. 比 2 の曲線は流れで閉じない — 木の写像と $9/89$（式 (12)(13)）
8. 前因子の冪の流れと引き込む先の類 — $37/76$・$c = 2/3$（式 (14)〜(16)）
9. 類が閉じる条件の言明の形（表 2）と問い（表 3）
10. 言えないこと
11. 五分類の表と依存グラフ（表 4）

00

この章で分かること

- 類が閉じる条件の母数を数える座標は「F^2 の係数と交換子の係数」ではなく、**ループの形ごとの結合**です。交換子の係数は合成のループの結合の BCH の像として後から付いてきます（§02・§03）。
- 一列四枚では二つ目の座標（比 κ_{ab}/κ_a）が $O(1/\beta)$ で動き、その一部 $2/(3\beta)$ は作用を熱核に替えても消えない群の曲がりの分です（§04・§05）。
- 比を全ての β で 2 に保つには指数の四次がガウスより急な作用（$q/B = -1/12$）が要り、前因子の冪の族には根が無く、基本＋随伴の族には $\beta \geq 12$ で根があります（§06）。
- その根の曲線は一段の流れで閉じず、ずれは $O(1)$（$9/89$）に留まります。一段の写像は作用の形の座標を全て縮めるからです（§07）。
- 前因子の冪は一次の縮小写像に従い、一意の固定点 $\gamma^* = 37/76$（ψ^4）に引き込まれ、そこでの比は $2 + (2/3)/B$ です。類が閉じる条件は「引き込む先の一母数の類 ＋ 縮む形」として言明できます（§08・§09）。

01

一枚 — 背景依存の型と、拘束つきの吸収

規約：$SU(2)$ を単位四元数で書き、$\frac{1}{2}\operatorname{tr} U = \operatorname{Re} U$、背景 $W = \exp(i\,a\cdot\sigma/2)$（$a \in \mathbb{R}^3$、角 $\theta = |a|$）。数値は $\beta = 4$〜32、$\theta \le 0.3$ で測ったものです。

一枚のプラケット（四リンク）の上で、背景のホロノミー W のまわりの揺らぎの測度 μ_W を考えます。15-07 の η_k の最小の模型です。四リンクの 12 次元のうち、ゲージの向きの 9 次元の条件つき法則は W に依らず、背景依存はホロノミーの 3 次元に集まります 初 （Haar 測度の不変性）。揺らぎ $X = i\,x\cdot\sigma/2$（$r = |x|$）に背景の生成子の向きを抜く拘束 $x_3 = 0$ を置くと（背景場の拘束の最も小さな代用）、$\frac{1}{2}\operatorname{tr}(W e^{X}) = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{r}{2}$ なので

$$\mu_W^{\beta} = \mu_1^{\beta\cos(\theta/2)} \tag{1}$$

が正確に成り立ちます 初 。背景依存は結合の置き換え $\beta \mapsto \beta\cos(\theta/2)$ ひとつに全部入ります。共分散の比で測った η は $\theta^2/8$、スコアは $\theta/4$ で、どちらも β に依りません（主項 初 。求積と Monte Carlo の二経路で主項との比 0.98〜1.00 読 ）。

- **拘束が無いと小さくない。**背景を臨界点に取らないと、共分散の比は $\beta\theta^2/12$ で β とともに増えます 読 。背景依存が背景に一様に小さいための最小の条件は「背景が拘束つきの臨界点であること」と、この一枚で読めます。
- **一段の結合の写像。**揺らぎを積分した背景の重みは、拘束つきで $\beta_{\text{eff}} = \beta - d/2 + O(1/\beta)$（$d$ は揺らぎの次元。$d = 2$・$\beta = 64$ で $\beta - \beta_{\text{eff}} = 1.005$）です 読 （揺らぎの次元の数え上げとしては 初 ・一ループの水準）。
- **η の源は非可換性ではない。**$U(1)$ の対照では二次の作用（ガウス）でだけ $\eta = 0$ で、cos の作用では同じ θ^2 の型の η が出ます 読 。源は作用の非二次性（群のコンパクトさ）です。η を一つの数で測ると型が変わる（共分散の比は θ^2、Kullback–Leibler の量は θ^4、スコアは θ）ので、言明には「どの η か」を書き込む必要があります 読 。

02

二枚 — 交換子は BCH の像

共有リンク一本の 2×1 の長方形で、外周のループ $W = P_1P_2$ を固定します（P_1, P_2 は二枚のホロノミーで、木のゲージの後は独立な Haar）。拘束つきの最小点は二枚が同じ向きに半分ずつ傾く $P_1 = P_2 = W^{1/2}$ で、$P_1 = W^{1/2}e^{X}$、$P_2 = e^{-X}W^{1/2}$ と置くと

$$\operatorname{Re} P_1 + \operatorname{Re} P_2 = 2\cos\frac{\theta}{4}\,\cos\frac{r}{2} \tag{2}$$

が正確に成り立ちます 初 。作用は揺らぎについて偶で、一枚で「一次を引く」代用をしたときに出た奇の三次の項は、真の拘束つき最小点では消えます（数値でスコアの奇の部分 $\le 3\times 10^{-12}$） 読 。揺らぎを積分した重みは W の類だけの関数 $Z_1(\beta|1+W|)$、$Z_1(b)=2I_1(b)/b$（熱浴法の一リンクの分布と同じ積分）で 初 、一段の結合は $\beta_{\mathrm{eff}}=\beta-\frac{3}{4}+O(1/\beta)$ です（ 初 ・一ループの水準。$\beta=4\to 32$ で $\beta-\beta_{\mathrm{eff}}=0.723\to 0.747$ 読 ）。背景の二枚の場の強さ a,b の交換子は、群の積 $e^{F_1}e^{F_2}$ の BCH を通してだけ入ります：

$$\theta_W^2=|a+b|^2-\tfrac{1}{12}|a\times b|^2+O(|F|^5) \tag{3}$$

初 （BCH の三次までの切り詰めの下の代数）。だから重みの $|a\times b|^2$ の係数 c は F^2 の係数 k の $1/12$ に縛られ、$\beta=4$〜32 で $c/k=1/12$ が 10^{-8} まで成り立ちます 読 。**交換子はこの段で新しい母数ではありません。**

03
三枚 — 単独と合成のループが 1:1:1

一列三枚で、重なった二つの 2×1 のループ $W_a=P_1P_2$、$W_b=P_2P_3$ を固定し中央の P_2 を積分すると、重みは $Z_1(\beta|Q|)$、$Q=1+W_a+W_b$ で

$$|Q|^2=3+2\,\mathrm{Re}\,W_a+2\,\mathrm{Re}\,W_b+2\,\mathrm{Re}(W_aW_b^{-1}) \tag{4}$$

です 初 （直接の求積と 3.5×10^{-15} で一致 読 ）。単独のループ二つと合成のループ $W_aW_b^{-1}$ を 1:1:1 で含みます。$SU(2)$ の二元の組の同時共役の不変量は三つの跡 $\mathrm{Re}\,W_a,\mathrm{Re}\,W_b,\mathrm{Re}(W_aW_b^{-1})$ で決まるので 初 （二つの虚部のベクトルは長さと内積で回転を除いて決まる）、ゲージ不変な二ループの重みはどれも三つの類の角の関数です。合成のループの類の角を参照にとると、交換子の係数は合成のループの二次の結合 κ_{ab} の $1/12$ に必ずなります 初 （(3) がそのまま入る）。一段の結合は $12k=\beta-\frac{1}{2}+O(1/\beta)$ です 読 。単項式の基底で測った「交換子の係数」は β で動いて見えますが、交換子を持たない合成関数でも同じ大きさで出るので、交換子の量ではありません 読 。

04
四枚 — ループの形ごとの結合の比が β で動く

一列四枚で、重なった二つの 3×1 のループ $W_a=P_1P_2P_3$、$W_b=P_2P_3P_4$ を固定し、中の二枚を積分します。$U=P_2P_3$ と置くと

$$w(W_a,W_b)=\int dU\; Z_1(\beta|1+U|)\,\exp\!\big(\beta\langle W_a+W_b,\,U\rangle\big),\qquad \langle p,q\rangle=\mathrm{Re}(p\bar q) \tag{5}$$

です 初 。w は $\operatorname{Re} W_a + \operatorname{Re} W_b$ と $\operatorname{Re}(W_a W_b^{-1})$ の二変数の関数で、三枚の $|Q|$ の一変数には潰れません（同じ $|Q|$ の背景で $\log w$ が 1.8×10^{-2} 動く、$\beta=4$）読 。二次の結合を

$$-\log w = \text{定数} + \kappa_a(\theta_a^2+\theta_b^2) + \kappa_{ab}\,\theta_{ab}^2 + O(F^4) \tag{6}$$

で定めます（θ_{ab} は合成のループ $W_aW_b^{-1}$ の類の角）。木（可換化したガウスの最小化）は比 $\kappa_{ab}/\kappa_a = 2$ 初 、一ループの主項は κ_a,κ_{ab} ともに $-\frac{1}{40}$ で比 1 です。合わせて

$$40\kappa_a = \beta - 1, \qquad 20\kappa_{ab} = \beta - \tfrac{1}{2}, \qquad \frac{\kappa_{ab}}{\kappa_a} = \frac{2(\beta-\frac12)}{\beta-1} + O(\beta^{-2}) \tag{7}$$

（はじめの二つは $+O(1/\beta)$）初 ・一ループの水準。数値は $\kappa_{ab}/\kappa_a = 2.3211,\ 2.1409,\ 2.0662,\ 2.0322$（$\beta=4,8,16,32$、二経路が 7.8×10^{-12} で一致）読 。**比が動く理由は「木の形 $\neq$ 一ループの形」**です。木の二次形式は格子の幾何で 1:2、一ループの二次形式は測度で 1:1 に決まり、二つが平行でないので合計の向きが β で回ります。$U(1)$ の cos の作用でも比は $2+0.2/\beta$ で動き、$U(1)$ の Villain の作用では全ての β で 2 です 読 。ブロック化の一段で大きなループの項が生まれその係数が結合に依ること自体は、改良作用の考え方と同じ向きの既知の型と思われます（原典は照合していない）。

05

熱核と判定式 — 群の曲がりの分

各プラケットの重みを $SU(2)$ の熱核 p_t（指標の係数 $(n+1)e^{-tn(n+2)/2}$）に替えると、内側の二枚は半群性 $p_t * p_t = p_{2t}$ でまとまり

$$w(W_a,W_b) = \int dU\; p_{2t}(U)\, p_t(W_a U^{-1})\, p_t(U^{-1}W_b) \tag{8}$$

です 初 （有限群と半群の族での同じ式は Lean：`four_plaquette_of_semigroup`・`four_plaquette_convPow`、仮定 $p_s*p_t=p_{s+t}$）。それでも比は $2.2090,\ 2.0927,\ 2.0439,\ 2.0214$（$t=1/4,\dots,1/32$、二経路が 7.6×10^{-12} で一致）読 、一ループで $2+\frac{2t}{3}+O(t^2)$ です 初 ・一ループの水準。$U(1)$ の熱核（Villain）では全ての t で 2 です 初 。

理由は一行の判定式に書けます。外側の核を $e^{F(\psi)}$、内側の核を $G(\psi)$（どちらも類関数、ψ は単位四元数の角）とし、測度 $\sin^2\!\psi\, G\, e^{2F}\, d\psi$ の期待値を E と書くと、部分積分で

$$\kappa_a = \frac{E[F'\,(\log G)']}{24}, \qquad \kappa_{ab} = \frac{E[F'^2]}{24}, \qquad \frac{\kappa_{ab}}{\kappa_a} = 2 \iff D := E\big[F'\,(F' - 2(\log G)')\big] = 0 \tag{9}$$

です 初 （F, G が $[0,\pi]$ で滑らかな類関数で、端の項が消える条件の下で）。各点の十分条件は**内側が外側の平方根** $G \propto e^{F/2}$ です。平坦なガウスでは半群 p_{2t} と平方根 $p_t^{1/2}$ が同じものなので比は 2 に留まり、曲がった群では二つが割れます。$SU(2)$ の熱核は半群ですが、Van Vleck の前因子 $P(\psi) := \psi/\sin\psi$ が p_t と p_{2t} に同じ冪で入るので平方根になりません。測地距離のガウス $e^{-\psi^2/(2t)}$ は平方根の関係を満たしますが半群ではありません 初 （数値でも比が全ての t で 2、3×10^{-12} 読 ）。t と β を基本表現の係数で合わせると、比のずれの主項は Wilson で $1/\beta$、熱核で $2/(3\beta)$。**熱核に替えても消えない** $2/(3\beta)$ **が群の曲がりの分、残り** $1/(3\beta)$ **が作用の非二次性の分**と読めます 読 （主項・この系・二次）。

表 1　最小の系の母数の数え方（$SU(2)$・$\theta \le 0.3$・$\beta = 4$〜32。重みの式は 初 、数値は 読 ）

系（固定するもの）	揺らぎを積分した重み	二次の結合	交換子の係数	$U(1)$ の対照
一枚（背景 W、拘束 $x_3 = 0$）	$\mu_W^{\beta} = \mu_1^{\beta\cos(\theta/2)}$（(1)）	$\beta_{\mathrm{eff}} = \beta - d/2$	—（交換子が作れない）	cos の作用で同じ θ^2 の η、ガウスで 0
二枚（外周 W）	$Z_1(\beta\lvert 1+W\rvert)$	$\beta_{\mathrm{eff}} = \beta - \frac{3}{4}$	$k/12$（(3)）	0
一列三枚（重なった W_a, W_b）	$Z_1(\beta\lvert 1+W_a+W_b\rvert)$	単独：単独：合成 $=1:1:1$、$12k = \beta - \frac{1}{2}$	$\kappa_{ab}/12$	0
一列四枚・Wilson	(5)（二変数の関数）	$\kappa_{ab}/\kappa_a = 2(\beta - \frac{1}{2})/(\beta - 1)$	合成のループの結合の BCH の像	cos で $2 + 0.2/\beta$、Villain で 2
一列四枚・熱核	(8)	$\kappa_{ab}/\kappa_a = 2 + \frac{2t}{3}$	同上	熱核（Villain）で 2

06

比を保つ作用の探索 — ループの一般式

判定式 (9) を全ての β で満たす作用（一列四枚で一母数で閉じる作用）は在るか。恒等元に集中する作用を $\log f = \text{定数} - B\psi^2/2 + q\psi^4 + \cdots$（$B$ は木の結合、$q = O(B)$）と書き、内側の核の補正を Brown 橋の平均（平坦の近似）で数えると

$$D = \frac{2}{5} + \frac{24}{5}\,\frac{q}{B} + O\Big(\frac{1}{B}\Big), \qquad E[F'(\log G)'] = \frac{3}{5}B + O(1), \qquad \frac{\kappa_{ab}}{\kappa_a} = 2 + \frac{D}{\frac{3}{5}B} + O(B^{-2}) \tag{10}$$

です 初 ・一ループの水準。$\frac{2}{5}$ は群の曲がり（Van Vleck の前因子 $\log P = \psi^2/6 + \cdots$）から、$\frac{24}{5}q/B$ は指数の四次（非ガウス性）から来ます。ψ^2 の乗法的な補正は木の結合 B のずらしに吸収され D に入りません 初 。較正：Wilson（$q = \beta/24$）で $D = \frac{3}{5}$・比 $2 + 1/\beta$、熱核（$q = 0$）で $D = \frac{2}{5}$・比 $2 + 2t/3$、$U(1)$ では $D = \frac{24}{25}q/B$（cos で $\frac{1}{25}$、Villain で 0）で、§04・§05 の値を全て再現します 読 。

- **前因子の冪の族に根は無い**。$f=e^{\beta\cos\psi}(\psi/\sin\psi)^{\gamma}$ では、二次の結合が在る $\gamma<\frac12$ で、測った格子 $\gamma\in[-2,0.45]$・$\beta\in\{4,8,16,32\}$ の全点で $D\in[0.534,0.600]$、延長 $\gamma\ge-128$ でも $D\ge0.343$、γ について単調増加で符号の変化はありません 読 （二経路が $\le6.5\times10^{-9}$）。一ループでも $\gamma=c\beta$（$c<3$）の全てで $D>8/25$ です 初 ・一ループの水準。$\gamma\ge\frac12$ では $\psi=\pi$ の特異点が重なり二次の結合そのものが無く、$\gamma\ge\frac32$ では重み自体が発散します 初 。前因子の冪は ψ^2 の補正で B に吸収され、曲がりの $\frac25$ は動かない、というのが理由です。
- **基本＋随伴の族には根がある**。(10) から $D=0$ には $q/B=-\frac{1}{12}$（ガウスより急な四次）が要ります。$F=\beta\cos\psi+\rho\beta\cos^2\psi$ は $B=\beta(1+2\rho)$、$q=\beta(\frac{1}{24}+\frac{\rho}{3})$ で

$$D=\frac25+\frac15\,\frac{1+8\rho}{1+2\rho}+O\Big(\frac1B\Big),\qquad \text{一ループの根 } \rho=-\tfrac14 \tag{11}$$

  初 ・一ループの水準。数値の根は $\rho^*(\beta)=-0.318,\,-0.279,\,-0.264,\dots,-0.2516$（$\beta=16,32,64,\dots,512$、二分法と二経路で比 2 を 3×10^{-10}）、$\rho^*=-\frac14-0.84/\beta+O(\beta^{-2})$ です 読 。$\beta\le10$ では測った格子に根が無く（最小 $D=+0.029$）、根は $\beta=10$ と 12 の間で現れます 読 。
- **一段だけ一母数**。どちらの族でも $f*f$ は同じ族に入りません（当てはめの残差が熱核の対照の 10^5 倍以上） 読 。根の作用を取っても、一段の後の内側の核が族の外に出るので、次の段に同じ判定を使えません。各点の平方根の関係 $f*f\propto f^{1/2}$ は、集中した類関数では一ループの水準で満たせません 初 （ψ の係数 $-\frac13$ が残る）。

07

比 2 の曲線は流れで閉じない

根の曲線 $\rho^*(\beta)$ が一段の写像で自分に戻るかを見ます。一段後の外側の核を対角で $f'(\psi):=w(W,W)^{1/2}=[(f*f)*f^2]^{1/2}(W)$ と定め（**対角の定義**：$W_a=W_b$ では合成のループの角が 0 なので）、ψ^2 と ψ^4 の Taylor 係数で基本＋随伴の族に当て直して (β',ρ') を読みます。

木の写像。外側を $F=-Bx^2/2+qx^4+\cdots$ とすると、平坦・共線の鞍点（1 と W を結ぶ測地線の上、$u_0=4w/5$）で

$$B'=\frac{B}{5},\qquad \Big(\frac{q}{B}\Big)'=\frac{17}{125}\,\frac{q}{B}+O\Big(\frac1B\Big),\qquad \psi^{2k}\text{ の形の座標は }\frac{4^k+1}{5^{2k-1}}\text{ 倍} \tag{12}$$

です 初 ・木（鞍点の主項）。鞍点が共線なので交換子と群の曲がりは木に入らず、一ループの $O(1/B)$ にだけ入ります。(10) と合わせると、比 2 の曲線 $q/B=-\frac{1}{12}$ の像は $q/B=-\frac{17}{1500}$、基本＋随伴では

$$\rho' = -\frac{53}{356}, \qquad \rho' - \rho^{*} = \frac{9}{89} \approx 0.101, \qquad D(\text{像}) = \frac{216}{625} \tag{13}$$

です 初 ・木（代入の代数）。数値は $\rho' - \rho^{*}(\beta') = 0.160,\ 0.127,\ 0.113$（$\beta = 128, 256, 512$ から出発、$\beta' = 17.8, 36.1, 72.5$）で $9/89$ に $O(1/\beta')$ で寄ります 読 （二経路が q' で $\le 6 \times 10^{-9}$）。三つ目の座標 $\sigma\beta\cos^{3}\psi$ を足しても、D は 0 に戻りません（σ は D に $O(1/B')$ でしか入らない） 読 。**一段は形の座標 q/B を縮め、流れをガウスの側へ引き込む。比 2 の条件は $\mathrm{SU}(2)$ では縮む方向の上の $O(1)$ 離れた点にあるので、曲線は閉じない**、と読めます。$U(1)$ では比 2 の線 $q/B = 0$ が木の写像の固定点そのもの（Villain）なので閉じます 読 。

08

前因子の冪の流れと、引き込む先の類

では流れはどこへ引き込むのか。類関数を $f = \exp(-B\psi^{2}/2 + h(\psi))$（$h = O(1)$）と書き、$B \to \infty$ で引数を止めた Laplace の方法の主項で一段を追います。$SU(2)$ を半径 1 の S^{3} と見ると、二つの核の畳み込みの鞍点は 1 と W を結ぶ測地線の上にあり、横の二方向の Hessian の行列式から前因子 P の比が出て

$$h_{f*g}(w) = h_{1}(a) + h_{2}(b) + \log P(w) - \log P(a) - \log P(b) + \text{定数} + O(1/B) \tag{14}$$

です（a, b は鞍点の分け目） 初 ・Laplace の主項。$g := h - \log P$ と書けば、**g は畳み込みで平坦な木と同じに運ばれます**。熱核（$g = 0$）が保たれるのはこれで、半群性の言い換えです。積（同じ点の二乗）は前因子を一つ余らせ、平方根はそれを半分にします。一段 $f'^{2} = (f * f) * f^{2}$ を代入すると、ψ^{2k} から読む前因子の冪 $\gamma_{k} := h_{k}/p_{k}$（$\log P = \sum p_{k}\psi^{2k}$、$p_{2} = \frac{1}{180}$）は

$$\gamma_{k}' = \frac{4^{k} + 1}{25^{k}}(\gamma_{k} - 1) + \frac{1 + 25^{-k}}{2}, \qquad \psi^{4} \text{ で } \gamma' = \frac{17\gamma + 296}{625} \tag{15}$$

という一次の縮小写像に従います 初 ・Laplace の主項（係数の代数）。一意の固定点は

$$\gamma_{k}^{*} = \frac{25^{k} - 2\cdot 4^{k} - 1}{2(25^{k} - 4^{k} - 1)}, \qquad \gamma_{2}^{*} = \frac{37}{76}, \quad \gamma_{3}^{*} = \frac{1937}{3890}, \quad \gamma_{k}^{*} \to \frac{1}{2}, \qquad \left(\frac{q}{B}\right)^{*} = \frac{37}{13680\,B} \tag{16}$$

です 初 。熱核の冪 1 は一段で $313/625$ に移り、前因子の冪が 1 から約 $\frac{1}{2}$ に変わって見えることの説明になります。縮み率は $\frac{1}{2}$ ではなく $\frac{17}{625}$（ψ^{4}）で、$\frac{1}{2}$ は固定点の値です。数値：γ_{2}', γ_{3}' の $B = 32$〜256 からの外挿が (15) と $\le 10^{-7}$、B を保った反復で四つの出発（$\gamma = 0, \frac{1}{2}, 1, 2$）と $q/B = -\frac{1}{12}$ の出発が $17/625$ の比で同じ点へ集まり、(16) の h^{*} を入れた一段の外挿が $37/76$ と 1.4×10^{-8} です 読 （二経路：指標の級数と一次元の重積分）。

引き込む先の比。(10) に $(q/B)^{*} = O(1/B)$ を入れると、引き込む先の類の上で

$$\kappa_{ab}/\kappa_a = 2 + c/B + O(B^{-2}), \qquad c = \frac{2/5}{3/5} = \frac{2}{3}$$

です 初 ・一ループの水準（数値の外挿 0.666667、二経路 1.8×10^{-9} 読 ）。c は h^* に依らず熱核と同じで、引き込む先の類は二次の比の主項では熱核と区別がつきません。$U(1)$ では非斉次項が無く、固定点は Villain（$h = 0$）、$c = 0$ です 初 。

09

類が閉じる条件の言明の形

§01〜§08 をまとめると 読 （一列四枚・二本のループ・対角の定義・主項に限る）：類が閉じる条件の母数の座標はループの形ごとの結合で、交換子はその BCH の像です。一段は形の座標を全て縮め（表 2）、族は「B 一つ ＋ 群の曲がりで決まる $O(1/B)$ の形 h^*」に引き込まれます。比 2 は母数で調整できる座標ではなく、引き込む先で $2 + 2/(3B)$ となる一ループの量です。だから類が閉じる条件は「比 2 を保つ類」ではなく、**「引き込む先の一母数の類 ＋ 形の剰余の条件で運ぶ縮む形」**として言明するのがこの模型と整合します。形のずれ r_n が一段で $r_{n+1} \le \lambda r_n + C/B_n$（$B_n = B_0/5^n$）を満たすと仮定すれば $r_n \le \lambda^n r_0 + C/((5-\lambda)B_n)$ で、15-03 §04 の幾何級数の型で閉じます 初 （一段の不等式を仮定したとき）。この一段の不等式の定数を、この模型の中で数で与えたのが次の一列四枚の形の剰余の定理です。

一列四枚の形の剰余の定理 — 一段の定数を数で（一列四枚の射影の模型）。条件（同じ行に）：$SU(2)$・一列四枚・対角の定義・ψ^8 で切って膨らませ直す射影の模型・座標は $\log f'$ の解析的な主部分（残りは 10^{-35} 以下）・$B \ge 32$・$O(1)$ の箱。類関数を $\mathbb{R}^3$ の動径関数に持ち上げると（$f = P \cdot \varphi$、$P = \psi/\sin\psi$。随伴不変な関数の畳み込みを Lie 環の畳み込みに写す既知の持ち上げ）、一段は剛さ B, B, $2B$ の三本の線分を直列につないだ一つのガウス積分になり、群の曲がりは「積 f^2 の持ち上げに残る P」と「最後の P と平方根」だけに残ります 初 （持ち上げは既知の型 典 、原典は照合していない）。Laplace の方法の次の項はガウスの二次のキュムラントで閉じた形に書け、ψ^4 の $O(1/B)$ の項は $-\frac{8}{3125}h_2 + \frac{42}{125}h_3 - \frac{14}{140625}$、引き込む先の類 h^* の上で

$$\left(\gamma_2' - \frac{37}{76}\right) B \;\to\; -\frac{591986}{69290625} \approx -0.00854 \tag{17}$$

です 初 （数値の外挿 -0.0085438 と 3×10^{-7} 読 ）。ψ^4, ψ^6, ψ^8 の係数の距離 $r := \max_{k=2,3,4} 4^k |h_k - h_k^*|$ で、$\lambda = 17/625$ として、一段は

$$r' \;\le\; \lambda\, r + \frac{C}{B}, \qquad C = 0.0108\ (r \le 0.05),\quad 0.0036\ (r \le 0.01),\quad B \to \infty \text{ の鋭い値 } 0.0017 \tag{18}$$

を満たし 初 ・ 読 （評価の筋は紙。定数は明示の積分と級数の数値で、B についての単調性は格子 $B = 32 \sim 10^6$ で確かめただけ）、実際の段の尺度 $B_0, B_1, \ldots$（$B_{n+1} \le B_n/5$）について

$$B_0, \ldots, B_{N-1} \ge 32,\ r_0 \le r_{\mathrm{box}} \quad \Longrightarrow \quad r_n \le r_{\mathrm{box}}, \qquad r_n \ \le\ \lambda^n r_0 + \frac{C}{(5-\lambda)B_n} \quad (n \le N) \tag{19}$$

です 初 （(18) を仮定したときの組み立ては Lean：`uv_uniform`〔$0 \le \lambda < 5$・$C \ge 0$・$B_n > 0$・$5B_{n+1} \le B_n$ と一段の不等式〕・`stays_in_box`）。第二項は**最後の尺度だけで決まり、段数 N に依りません**：紫外から何段流しても、尺度 B での形のずれは $\lambda^N r_0 + C/((5-\lambda)B)$ 以下です。形の座標 h/B では縮みは $17/125$、残りは $1/B^2$ です。数（$B_0 = 32 \sim 512$ の一〜三段）では、箱の中の出発（類の点・ガウス・熱核）は (18) の上界が全段で上にあり、$C/10$ では類の点とガウスが段 1 で破れます 読 （陽性と陰性の対照）。

箱の外。形の $O(1)$ のずれ $x = h_2/B$（Wilson は $x = 1/24$）は箱の外です。負の側（基本＋随伴の $x = -1/12$）は λ の上界の内にありますが、正の側（Wilson）は段 1 で上界を破り（$\bar{\lambda}/\lambda = 1.018$〔$B_0 = 32$〕$\to 1.001$〔512〕）、原因は一ループの二次の項 $c\,x^2$、$c = 11168/15625 \approx 0.715$ です 初 ・ 読 。$U(1)$ では非斉次の項が消えます 読 。

なぜこの模型で閉じたか。一列四枚はブロックが一つしか無い系で、ブロックの間の二次の陽な項が零和の条件で消えます。一列四枚の定理が小さい場の結合への寄与の完全な例になれたのはこの行が空だったから、と読めます 読 （15-08 §06）。

表 2　一段の写像の座標と縮み（$SU(2)$・一列四枚・対角の定義・Laplace の主項。紙は 初 、測った値は 読 ）

座標	$O(1)$ の単位での一段の倍率	形の座標（$\div B$、$B' = B/5$）での倍率	測った値
B（流れる一母数）	$1/5$	—	$5B'/B = 0.998$（$B = 256$）
ψ^4（q・冪 γ_2）	$17/625$	$\lambda = 17/125 = 0.136$	反復の比 0.02720・q/B の縮み 0.1223→0.1325（$\beta = 128 \to 512$）
ψ^6（γ_3）	$13/3125$	$13/625$	反復の比 0.00414
ψ^8（γ_4）	$257/390625$	$257/78125$	—
一般の ψ^{2k}	$(4^k+1)/25^k$	$(4^k+1)/5^{2k-1}$	—

表 3　この章から出る問い（状態：新。問い「一列四枚の一段の補正」は答えを書き足した）

問	問い	大きさ	決着したら動くもの	決着しても動かないもの

問	問い	大きさ	決着したら動くもの	決着しても動かないもの
8	一列四枚の一段の写像の $O(1/B)$ の補正を紙で出し、形の剰余の条件の一段の不等式 $r_{n+1} \le \lambda r_n + C/B_n$ の定数 C を与えられるか（仮定つきの幾何級数を、この模型の中で仮定なしにする）。**答え（この模型で）：**一列四枚の定理が $C = 0.0108$（$B \ge 32$・$r \le 0.05$）を与えた。残る仮定は射影（ψ^{10} 以上を捨てる）と箱の大きさで、Wilson のような $O(1)$ の形のずれを含む評価は未	紙	引き込む先の類の形の剰余の条件	四次元の格子の類が閉じる条件
9	一列四枚以外のループの形（2×2・L 字・混じった四次）を含めても、引き込む先の類が一つ（B ＋ 固定の形）に定まるか。対角の定義を六つの四次の係数への当てはめに替えても固定点が動かないか	紙と小さな計算	類が閉じる条件の母数の個数	本当のブロック化の一段

10

言えないこと

(a) この章の系は $SU(2)$ の一枚〜一列四枚・$\theta \le 0.3$・F の二次（§07・§08 は四次の Taylor 係数まで）で、四次元の格子に埋めたブロック・ゲージの張り替え・大きな場を含む一段の数ではありません。

(b) 「二次の水準で二つの座標が要る」は一列四枚・二つのループを固定した読みで、四次（交換子の向き）とブロック変数が三つ以上の系は見ていません。

(c) 前因子の冪の族に根が無いことは、測った格子の上の数値と一ループの水準の不等式で、全ての作用についての文ではありません。基本＋随伴の根は $\beta \ge 12$ の数値で、$-0.84/\beta$ の係数は外挿です。

(d) §07・§08 の写像は対角の定義 $f' = [(f * f) * f^2]^{1/2}$ と主項（$B \to \infty$）の写像で、混じった四次は入らず、$B = O(1)$ の強結合の域には使えません。形の剰余の条件の一段の不等式は、一般には仮定です。一列四枚の定理は一列四枚・対角の定義・ψ^8 で切った射影の模型・解析的な主部分の座標・$B \ge 32$・$O(1)$ の箱の文で、定数の一部は明示の積分の数値、指数的に小さい部分は粗い評価です。四次元の格子の一段・ブロック平均・大きな場・強結合の域には何も言いません。

(e) 「一母数で閉じる作用は無い」とも、「類が閉じる条件が有限個の母数で閉じる」とも言っていません。言っているのは、この模型で形の座標が全て縮み、引き込む先が一つに定まる、という主項の文です。

(f) この章は紫外の制御を示しません。

11

五分類の表と依存グラフ

表 4　この章の行

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲
[01]	一枚：拘束つきで $\mu_W^{\beta} = \mu_1^{\beta\,\cos(\theta/2)}$（(1)）、ゲージの向きは背景に依らない	初	§01	拘束 $x_3 = 0$ は背景場の拘束の代用
[02]	$\beta_{\mathrm{eff}} = \beta - d/2$、$U(1)$ の cos でも同じ型の η	読	§01	一枚・$\beta = 4$〜64・$\theta \le 0.3$
[03]	二枚 (2)(3)・三枚 (4)：交換子は合成のループの結合の $1/12$	初・読	§02・§03	BCH の三次まで・$\beta = 4$〜32
[04]	四枚：比 $\kappa_{ab}/\kappa_a = 2(\beta - \tfrac{1}{2})/(\beta - 1)$ が動く（(5)〜(7)）	初・読	§04	主項は一ループの水準・数値は二経路
[05]	熱核で $2 + 2t/3$、判定式 (9)	初・読	§05	類関数・端の項 0
[06]	一ループの一般式 (10)・基本＋随伴の一ループの根 $-\tfrac{1}{4}$（(11)）・$\gamma = c\beta$ で $D > 8/25$	初	§06	一ループの水準・集中した作用
[07]	前因子の冪の族に根なし・基本＋随伴の根 $\rho^{*} = -\tfrac{1}{4} - 0.84/\beta$・一段だけ一母数	読	§06	$\beta \in \{4, \dots, 512\}$・測った格子・二経路
[08]	木の写像 (12)・像 (13)：ずれ $9/89$	初	§07	木（鞍点の主項）・対角の定義
[09]	曲線のずれの数値 0.160・0.127・0.113 → $9/89$	読	§07	$\beta = 128$〜512 の出発
[10]	(14)(15)(16)：前因子の冪の縮小写像・固定点 $37/76$・$c = 2/3$	初	§08	Laplace の主項・一列四枚・対角の定義
[11]	(15)(16) の数値の外挿・反復の収束	読	§08	$B = 32$〜256・二経路
[12]	類が閉じる条件を「引き込む先の一母数の類 ＋ 縮む形」として言明する形・問い「一列四枚の一段の補正」・問い「他のループの形での類の一意性」	仮	§09	言明の形・一段の不等式は仮定
[13]	一列四枚の定理：持ち上げで一段は三線分の直列のガウス積分、(17)、一段の不等式 (18)、段数に依らない (19)	初・読（定数の数値）	§09	$SU(2)$・一列四枚・対角の定義・ψ^{8} の射影・$B \ge 32$・$O(1)$ の箱
[14]	箱の外：Wilson の正の形のずれは段 1 で λ を破る、原因は $c\,x^{2}$（$c = 11168/15625$）	初・読	§09	同じ模型・$B_0 = 32$〜512

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
[01] 初  一枚：(1)                                              拘束 x₃ = 0
[02] 読  β_eff = β − d/2 ⟸ [01]
[03] 初  二枚・三枚：交換子は合成のループの像 ⟸ [01]
[04] 初  四枚：比が β で動く ⟸ [03]                          一ループの水準
[05] 初  熱核 2 + 2t/3・判定式 (9) ⟸ [04]
[06] 初  一ループの一般式 (10)(11) ⟸ [05]                    集中した作用
[07] 読  前因子の族に根なし・基本＋随伴の根 ⟸ [06]
[08] 初  木の写像 (12)・ずれ 9/89 (13) ⟸ [06]                対角の定義
[09] 読  ずれの数値 ⟸ [07][08]
[10] 初  前因子の冪の固定点 37/76・c = 2/3 ⟸ [06][08]    Laplace の主項
[11] 読  固定点の数値 ⟸ [10]
[12] 仮  引き込む先の類の言明・問い「一列四枚の一段の補正」・問い「他のループの形での類の一意
[13] 初  一列四枚の定理：一段の定数と段数に依らない上界 ⟸ [10][12]          射影の模型・
[14] 初  箱の外：c x² が λ を破る ⟸ [13]
```

全ての「⟸」の右の番号は左より小さく、円はありません。仮定の行は [12] だけで、言明の形と問いです。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 一枚から四枚までの重みの式 (1)〜(8)・判定式 (9)・一ループの一般式 (10)(11)・木の写像と $9/89$・前因子の冪の縮小写像と固定点 $37/76$・$c = 2/3$・一列四枚の定理（射影の模型・$B \geq 32$・$O(1)$ の箱、定数は数値）	四次元の格子の一段での同じ数。四次の係数・ブロック変数が三つ以上の系
読 比が β で動く数値・前因子の族に根なし・基本＋随伴の根・曲線のずれの数値・固定点への反復の収束	全ての作用についての「根なし」。$O(1/B)$ の補正の紙の式
仮 類が閉じる条件を引き込む先の一母数の類 ＋ 縮む形として言明する形	その類が四次元で閉じること

出典と再現

もの	種別	出典・道具
S^3 の熱核の形（$e^{-\psi^2/2t} \cdot \psi/\sin\psi$ と鏡像）・指標展開・Laplace の方法・Van Vleck の前因子の合成	典	リー群の上の調和解析と漸近展開の標準の事実（書誌は 15-04 の出典表に準じる）
(1)〜(16) の式・判定式・一ループの一般式・木の写像・前因子の冪の写像	初	この章の本文の証明と代数。係数の代数と三角の恒等式は Lean の束で、再検査済み（15-09 表 3）
一列四枚の定理・(17)〜(19)・$c = 11168/15625$	初・読（定数の数値）	この章の本文。持ち上げは既知の型（随伴不変な関数の持ち上げ、原典は照合していない）。数は本書の検討の記録（級数と B の有理関数の二実装・Gauss–Legendre の求積・陽性と陰性の対照）。組み立ては Lean の束（再検査済み）

もの	種別	出典・道具
表 1・表 2 の数値・§06〜§08 の数値	読	本書の検討の数値の記録（求積と閉じた式の二経路・四元数の Monte Carlo・指標の級数と一次元の重積分の二経路・$U(1)$ の Wilson と Villain の対照・熱核の陽性対照）

この章で使った語 ― ループの形ごとの結合・合成のループ・判定式・群の曲がり・Van Vleck の前因子・一段だけ一母数・対角の定義・木の写像・前因子の冪・引き込む先の類・類が閉じる条件・持ち上げ・一列四枚の定理・箱の外。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：15-07 背景に依る揺らぎ ― §01 の一枚の η を、一段ごとの吸収と多段の帰納の問題として。

2026-10-15 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 15 部 紫外の制御の試みの記録 背景依存・背景に依らない揺らぎの一段・局所結合 · Kiichi, Shiori and Rin

背景に依る揺らぎ η — 一段ごとの吸収

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 15-02・15-01 にあります。

この部は、本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた記録です。存在そのものは第二巻の第 6〜13 部を、二つの設計の違いは第 14 部を見てください。部の位置づけは 15-00 にあります。

この章で分かること — 繰り込みの一段では、細かい場を「背景」と「揺らぎ」に分けて揺らぎを積分します。平らな場（スカラー場）では揺らぎの法則が背景に依らず、重みの四性質のうち「揺らぎの期待値で一段閉じる」性質（揺らぎの期待値の閉じ。BBS の (iii)）がそのまま使えます。群に値をとる場では揺らぎの法則が背景に依り、その依存の大きさ η_k が難所になります。この章では、場の和の劣乗性（BBS の (ii)）の群版（背景と揺らぎの分解の補題）を紙で置き、揺らぎの指数積率と背景の正則性の群版を言明の形で置いて一段の鎖を書き、η_k の素朴な見積もりでは $\sum_k \eta_k$ が発散すること、揺らぎの法則が背景に依らない場合には鎖が $\eta = 0$ でそのまま通ること（背景に依らない揺らぎの一段の補題）、η を局所結合のずらしとして母数に吸収する案、多段の帰納がまだ書けていないことを、条件つきで述べます。あわせて、Wilson の一リンクでの背景に依らない揺らぎの一段の補題の版（一リンクの熱核比較の補題）、最小の系で測った吸収できない残りの次数、背景の微分の四つの分解、$SU(2)$ の群の幾何の部分（BCH の三次）の係数と、その予算が発散することを述べます。改訂では、Wilson の一リンクの中心の取り直しの代償（中心の取り直しの条件）、背景を類の母数に持たせたときの残りと予算、粗い変数が一つのループの一段での背景の更新、三次元の箱での多ループの類の座標を足しました。

前提となる章 — 15-01 §02（群値の場と重みの四性質）・15-02 §04（BBS 付録 A.6 の鎖）・15-03 §02（分解の言明）・15-06（一枚の η の型）・7-05 §05（群の元は足せない）。

先に言うこと — この章は紫外の制御を示しません。紙で置くのは背景と揺らぎの分解の補題・一段の鎖（揺らぎの指数積率と背景の正則性の群版を仮定したとき）・背景に依らない揺らぎの一段の補題（揺らぎの法則が背景に依らない場合の一段だけ）・四元数の恒等式で、どれも本当の繰り込みの一段（ブロック平均の拘束・背景場の伝播関数・Wilson の作用・大き

な場を含む一段）についての文ではありません。η の吸収は案で、多段の帰納は書けていません。

この章の順序

1. 揺らぎの測度が背景に依ること — η_k の置き場所
2. 背景と揺らぎの分解の補題と重みの分解 — 場の和の劣乗性の群版（式 (1)(2)）
3. 揺らぎの指数積率と背景の正則性の群版と入れ替え — 言明と一段の鎖（式 (3)）
4. η の素朴な見積もりと発散
5. 背景に依らない揺らぎの一段の補題 — 背景に依らない揺らぎでは鎖が $\eta = 0$ で通る（表 1）・Wilson の一リンク（一リンクの熱核比較の補題）・中心の取り直しの代償
6. η = 局所結合のずらしの案 — 熱浴法の事実・四元数の恒等式・θ の次数での選別・最小の系で測った残り・四つの分解・背景を類の母数に
7. BCH の三次・類 (B, q, a)・予算・面の一段・多ループの類と、多段の帰納 — 問い「同時の法則の密度の割り方」・問い「多段の最小の言明」・紫外の問い 17〜19・問い「多ループの類の二段目」・問い「結合を母数に持つ類」（表 2）
8. 言えないこと
9. 五分類の表と依存グラフ（表 3）

00

この章で分かること

- 群に値をとる場では揺らぎの測度が背景に依り、その分 η_k が一段の評価に因子 $1 + \eta_k$ を入れます。$\sum_k \eta_k < \infty$ でなければ、15-01 §01 の算術どおり定数が段数とともに崩れます（§01）。
- 重みの場の和の劣乗性（場の和について積に割れる）の群版は、背景 × 揺らぎの形で紙で立ちます（背景と揺らぎの分解の補題、§02）。揺らぎの指数積率と背景の正則性の群版は言明の形で置け、それを仮定すれば一段の鎖は平らな場と同じ形で閉じます（§03）。
- η_k を背景の曲率から素朴に見積もると、和は段数の冪か対数の冪で発散し、誤差として運べません（§04）。
- 揺らぎの法則が背景に依らない場合（リンクごとの熱核の積がその例）には、鎖は $\eta = 0$ でそのまま通ります（背景に依らない揺らぎの一段の補題、§05）。本当の一段の揺らぎはこ

の型ではありません。

- $SU(2)$ の Wilson の作用では、一リンクの条件つき法則が背景に依らない一母数の族の元で、背景は局所結合と中心の向きにだけ入ります。これを使って η を局所結合のずらしとして吸収する案を置きます（§06、案）。多段の帰納は書けていません（§07）。
- Wilson の一リンクでは、揺らぎの法則が角の上限の内側で熱核の定数倍に押さえられ、背景に依らない揺らぎの一段の補題の鎖が条件つきで通ります（一リンクの熱核比較の補題、§05）。
- 最小の系で測ると、吸収できない残りの最低次数は $\theta^0\beta^{-1/2}$ と $\theta^1\beta^0$ です。背景の微分は結合・回転・形・群の幾何の四つに割れ、形の部分は幾何級数に入りますが、$SU(2)$ の群の幾何の部分（BCH の三次、係数 $1/9$）は背景そのものに乗って縮まず、その予算は閾をどう選んでも発散します。改良は類の側――背景の場の強さを母数に持たせること――にあります（§06・§07）。
- 背景のホロノミーの対数 a を類の母数に持たせると、最小の系で残りは $\theta^0\beta^{-3/2}$ に下がり、予算は段数に一様になります（条件つき、§06）。発散は消えたのでなく、類が一段で閉じるかの問いに移ります。
- 粗い変数が一つのループの一段では、a の更新は群の順序つきの積で全次数で閉じます。三次元の箱の多ループの一段では、面ごとの類と隣の対で二次まで閉じ、三次に角の三重積、四次に多面の結合が要ります（§07）。角の三重積は二段目で縮まず、流れの固定点に下から寄る座標です。四次元の類は一つの母数と流れが値を決める比の座標（二次 2・三次 3・四次 65）で、頂点を共有しない「斜めの隣」の座標は規則に依らず 0 になりません（§07、木の水準と一ループの測った範囲）。
- Wilson の一リンクの中心の取り直しは、Taylor の半径の約 4 倍の損と、結合の動き cg^2p^2 を生みます。後者は類の母数の側へ運ぶ項です（§05）。

01

揺らぎの測度が背景に依ること — η_k の置き場所

段 k の一段では、辺の変数を背景と揺らぎに $U_l = W_l\, e^{A_l}$（$W_l \in G$、A_l はリー環 $\mathfrak{su}(N)$ の元）と分け、背景 W を止めて揺らぎ A を積分します。この揺らぎの法則を $\mu_{k,W}$ と書きます。Gauss の部分の共分散は、背景場の中の伝播関数 $g_k^2 C_W$ です（7-07 表 1 の土台の論文の題）。

平らな場（スカラー場 $\phi = \phi_{\text{背景}} + \zeta$）では、揺らぎ ζ の法則は背景に依らない Gauss の法則で、重みの揺らぎの期待値の閉じ（揺らぎの期待値で一段閉じる）は揺らぎだけの関数の期待値として使われます 読 （15-02 §04 の鎖を読んだもの）。群の上ではそうなりません。背景が変わると C_W が変わり、揺らぎの法則そのものが変わります。この依存の大きさを η_k と書

き、一段の評価に因子 $1+\eta_k$ として入れる、というのがこの章の置き方です（式 (3)）。15-01 §01 の算術から、因子の積 $\prod_k (1+\eta_k)$ が段数 K に一様に有界であるには $\sum_k \eta_k < \infty$ が要り、η_k が g_k^2 の大きさなら足りません [初]（算術）。

02

背景と揺らぎの分解の補題 — 場の和の劣乗性の群版

プラケット p の縁の辺を $l_1,\dots,l_4$、向きの符号を $s_i \in \{\pm 1\}$ とし、$U_{\partial p} = \prod_i U_{l_i}^{s_i}$、$W_{\partial p}$ も同様に定めます。ノルムは作用素ノルムです。

背景と揺らぎの分解の補題。 $G = SU(N)$ で

$$\|U_{\partial p} - 1\| \;\le\; \|W_{\partial p} - 1\| + \sum_{i=1}^{4} \|A_{l_i}\|, \qquad \|U_{\partial p} - 1\|^2 \;\le\; 2\|W_{\partial p} - 1\|^2 + 8\sum_{i=1}^{4} \|A_{l_i}\|^2 \tag{1}$$

[初] 証明。(1) 各因子を W の部分と揺らぎの部分に分ける。$s=+1$ なら $W e^{A} = W \cdot Y$（$Y = e^{A}$）、$s=-1$ なら $(We^{A})^{-1} = W^{-1}\cdot Y$（$Y = We^{-A}W^{-1}$）。どちらも Y は $e^{\pm A}$ の共役である。(2) 積 $W_1' Y_1 W_2' Y_2 W_3' Y_3 W_4' Y_4$（$W_i' = W_{l_i}^{s_i}$）で、各 Y_i をそれより右の W' の右へ $YW' = W'(W'^{-1} Y W')$ で移すと、$U_{\partial p} = W_{\partial p}\, Y_1'' Y_2'' Y_3'' Y_4''$ で、各 Y_i'' は $e^{\pm A_{l_i}}$ の共役。(3) ユニタリ行列について $\|XY - 1\| \le \|X-1\| + \|Y-1\|$ と $\|hYh^{-1}-1\| = \|Y-1\|$（7-05 の式 (8)）を繰り返して $\|U_{\partial p}-1\| \le \|W_{\partial p}-1\| + \sum_i \|e^{\pm A_{l_i}} - 1\|$。(4) A は反エルミートなのでユニタリに対角化でき、固有値 $e^{i\vartheta}$ について $|e^{i\vartheta}-1| = 2|\sin(\vartheta/2)| \le |\vartheta| \le \|A\|$。よって $\|e^{\pm A}-1\| \le \|A\|$。(5) 二乗は $(x+y)^2 \le 2x^2 + 2y^2$ と $(\sum_{i\le 4} y_i)^2 \le 4\sum_i y_i^2$ から。$\blacksquare$

重みの分解（背景と揺らぎの分解の補題の系）。 $G_c(X,U) := \exp\bigl(c \sum_{p\subset X} \|U_{\partial p}-1\|^2\bigr)$（$c>0$）と置くと、四次元の格子では一つの辺は高々 6 枚のプラケットに乗るので

$$G_c(X, We^{A}) \;\le\; G_c(X,W)^{2} \cdot \exp\Bigl(48c \sum_{l \in X} \|A_l\|^2\Bigr) \tag{2}$$

です [初]（(1) の二つ目を $p \subset X$ について足し、$8\times 6 = 48$）。これは場の和の劣乗性の場の和を「背景 × 揺らぎ」に替えた版で、揺らぎの側は Gauss の型の重みになります。既知の初等的な事実かもしれません（連作の大きな場の論文に同じ形の評価がある可能性があるが、本文を照合していない）。

揺らぎを Y で書く形。 段 (1)〜(3) は e^{A} を任意のユニタリ Y に替えても通ります。$\|Y^{-1}-1\| = \|Y-1\|$ と共役不変性から $\|(WY)_{\partial p} - 1\| \le \|W_{\partial p}-1\| + \sum_{i\le 4}\|Y_{l_i}-1\|$ で、一つのリンクが乗るプラケットの最大数を q（四次元で 6）として $G_c(X,WY) \le G_c(X,W)^2 \exp\bigl(8qc\sum_{l\in \bar X}\|Y_l-1\|^2\bigr)$ です [初]（$\bar X$ は X のプラケットの縁のリンク）。この形

では揺らぎに小さな場の条件が要りません（段 (4) の $\|e^A-1\|\le\|A\|$ を使わないため）。§05 の背景に依らない揺らぎの一段の補題はこの形を使います。

背景と揺らぎの分解の補題が言わないこと。(2) が言うのは場の和の劣乗性だけで、揺らぎの期待値で一段閉じること（揺らぎの期待値の閉じ）には触れません。

03

揺らぎの指数積率と背景の正則性の群版、入れ替え — 言明と一段の鎖

段 k の重みを $G_k:=G_{c/h_k^2}$（h_k は段 k の場の尺度で、たとえば小さな場の閾 $g_kp(g_k)$。$p(g)$ は 7-05 の式 (7) の閾の倍率）、$\mathcal{W}_k(X)$ を X の上の小さな場の（正則な）背景の集合、$B(X)$ を X の中のブロックの集合とします。次の三つを言明として置きます 仮（言明だけ。定数 c,t_0 と $\mathcal{W}_k$ の定義の定数は、段にも格子間隔にも依らない）。

- **揺らぎの指数積率の群版**：全ての $W\in\mathcal{W}_k(X)$ と $0<t\le t_0$ で $\mathbb{E}_{\mu_{k,W}}\exp\bigl(\frac{48tc}{h_k^2}\sum_{l\in X}\|A_l\|^2\bigr)\le 2^{|B(X)|}$。期待値は真の揺らぎの測度についてのもので、Gauss の部分だけについてのものではありません。
- **背景の正則性の条件**：背景の写像の像に入る W について $G_k(X,W)^{2t}\le G_{k+1}(X,W)$（$0<t\le t_0$）。中身は背景の正則性（細かいプラケットの曲率が、粗いプラケットの曲率で押さえられること）です。
- **期待値と半ノルムの入れ替えの群版**：$\theta_W F(W):=F(We^A)$ とし、$T_W(h)$ を背景のリー環の向きの微分で作った Taylor の半ノルムとする。ある $\eta_k\ge 0$ で $\|\mathbb{E}_{\mu_{k,W}}\theta_W F\|_{T_W(h_{k+1})}\le(1+\eta_k)\,\mathbb{E}_{\mu_{k,W}}\|F\|_{T_{We^A}(h_k)}$、かつ $\sum_k\eta_k<\infty$。原典の期待値と半ノルムの入れ替えの不等式（BBS の (A.6.5) ほか）に、測度が背景に依る分の因子 $1+\eta_k$ を許した版です。

この三つと重みの分解 (2)（c を c/h_k^2 に替えたもの）を仮定すれば、活動のノルムの一段の評価（BBS の補題 A.6.1）と同じ鎖（入れ替え → ノルムの定義 → (2) → 揺らぎの指数積率の群版 → 背景の正則性の条件）で、$W\in\mathcal{W}_k(X)$ の上

$$\bigl\|\mathbb{E}_{\mu_{k,W}}\theta_W K(X)\bigr\|_{G_{k+1}}\ \le\ (1+\eta_k)\,2^{|B(X)|}\,\|K(X)\|_{G_k}\tag{3}$$

が出ます 初（三つを仮定したときの鎖だけ）。$\mathcal{W}_k$ の外は大きい場の稀さの条件の大きな場の因子が受け持ちます（15-00 §01）。揺らぎの期待値の閉じの群版そのものは、正則な背景の上で一様な伝播関数 C_W の評価、$\mu_{k,W}$ の Gauss からのずれの一様な評価、cg_k^2/h_k^2 が小さいこと、の三つで閉じる形をしています 読（Gauss の指数モーメントを行列式で書いた式から）。

一リンクの熱核の積では、揺らぎの期待値の閉じの群版がただで立ちます。辺ごとに $Y_l = W_l^{-1} U_l$ が独立に熱核 p_τ に従うとき、Haar 測度の不変性（コンパクトな群なので左右どちらにも不変）から Y の法則は W に依らず、$\mathbb{E}\exp\bigl(s\sum_l \|Y_l - 1\|^2\bigr) = \bigl(\mathbb{E}\exp(s\|Y-1\|^2)\bigr)^{|X|}$（$|X|$ は X の辺の数）は背景に依りません 初 。これが $2^{|B(X)|}$ 以下になるのは $s\tau$ が小さいときです 読 （熱核の Gauss 型の上界から。数は §05 の表 1）。15-04 §01 の望遠鏡和は、この「背景に依らない揺らぎ」の別の面と読めます 読 。

04 η の素朴な見積もりと発散

曲率から見積もると。測度が背景に依る分を、曲率 $\|W_{\partial p} - 1\| \lesssim g_k p(g_k)$ を通して素朴に見積もると $\eta_k \sim g_k p(g_k)$ で、一ループの結合の列 $g_{K-j}^2 \le 1/(bj)$（15-01 §01）では $\sum_k \eta_k$ が $K^{1/2}$（対数の因子を除いて）の程度で発散します 初 （算術。$\eta_k \sim g_k p(g_k)$ という素朴な見積もりの下で）。

一枚で測ると。一枚のプラケットの最小の模型（15-06 §01）では、背景の生成子の向きを抜く拘束を置くと、背景依存は結合の置き換え $\beta \mapsto \beta\cos(\theta/2)$ ひとつに正確に入ります（$\mu_W^{\beta} = \mu_1^{\beta\cos(\theta/2)}$） 初 。共分散の比で測った η は $\theta^2/8$ で、閾 $\theta \le \varepsilon_k = g_k p(g_k)$ の下で $\eta_k \lesssim g_k^2 p(g_k)^2$、一ループの流れの下で $\sum_{k \le K} \eta_k$ は $\ln K$ の冪で発散します 初 （素朴な見積もりの算術）。拘束を置かない（背景を臨界点に取らない）と、共分散の比は $\beta\theta^2/12$ で β とともに増えます 読 。どちらの見積もりでも、**η は誤差として運べる大きさではなく、母数への吸収が要ります。**一枚の例はその吸収が正確に起きる最小の例です。

どの η か。η を一つの数で測ると型が変わります（共分散の比は θ^2、Kullback–Leibler の量は θ^4、スコア＝背景を動かしたときの期待値の一次の変化の率は θ） 読 。揺らぎの指数積率の群版が使うのは偶の量、入れ替えの不等式（期待値と半ノルムの入れ替えの群版）が使うのは一次の量で、言明には「どの η か」を書き込む必要があります。スカラーの場では測度が背景に依らないので $\eta_k = 0$ で、この問題そのものがありません。

05 背景に依らない揺らぎの一段の補題 — 鎖が $\eta = 0$ で通る

§03 の鎖が仮定なしに通る場合が一つあります。揺らぎの法則が背景に依らない場合です。

設定。$G = SU(N)$、作用素ノルム。リンクの有限集合 Λ、ブロックへの分割、X はブロックの和集合、$B(X)$ はその中のブロック、$\bar{X}$ は X のプラケットの縁のリンク。重み $G_h(X,U) := \exp\bigl((c/h^2)\sum_{p\in X}\|U_{\partial p} - 1\|^2\bigr)$。Taylor の半ノルムは $\|F\|_{T_U(h)} :=$

$\sum_{n\ge 0}\frac{h^n}{n!}\|D^nF(U)\|$、ここで $\|D^nF(U)\|$ は右掛け $F(Ue^{t_1X_1}\cdots e^{t_nX_n})$ の $t=0$ での偏微分の、$|X_j|\le 1$ についての上限。重みつきノルムは $\|K(X)\|_{G_h}:=\sup_U\|K(X)\|_{T_U(h)}/G_h(X,U)$。揺らぎは G^Λ の上の確率測度 ν で、一段は $\theta_\nu K(W):=\int K(WY)\,d\nu(Y)$。$M_\nu(s,X):=\mathbb{E}_\nu\exp\bigl(s\sum_{l\in\bar X}\|Y_l-1\|^2\bigr)$。

背景に依らない揺らぎの一段の補題。次の三つを仮定する。揺らぎの背景独立の条件：ν は背景 W に依らない。尺度の縮みの条件：$h_+^2\le h^2/2$。揺らぎの指数積率の条件：$M_\nu(8qc/h^2,X)\le 2^{|B(X)|}$。このとき全ての背景 $W\in G^\Lambda$ と滑らかな $K(X)$ について

$$\|\theta_\nu K(X)\|_{G_{h_+}}\ \le\ 2^{|B(X)|}\,\|K(X)\|_{G_h} \tag{4}$$

さらに次が成り立つ 初 （条件：揺らぎの背景独立・尺度の縮み・揺らぎの指数積率の三条件と、一段だけ）。

- (a) 入れ替えは $\eta=0$：全ての滑らかな F で $\|\theta_\nu F\|_{T_W(h)}\le\mathbb{E}_\nu\|F\|_{T_{WY}(h)}$。
- (b) 局所性：$\nu=\otimes_l\nu_l$（リンクごとに独立）なら $\theta_\nu K(X)$ は W の $\bar X$ への制限だけに依り、$\bar X\cap\bar X'=\emptyset$ なら積に割れる。台は一段で広がらない。
- (c) リンクごとの熱核の積 $\nu=p_\tau^{\otimes\Lambda}$ では $M_\nu(s,X)=m(s,\tau)^{|\bar X|}$、$m(s,\tau):=\mathbb{E}_{p_\tau}e^{s\|Y-1\|^2}$ で、背景に依らない。初等的な上界 $m(s,\tau)\le 1+(e^{4s}-1)\,\mathbb{E}_{p_\tau}\|Y-1\|^2/4$。$SU(2)$（指標の係数 $(n+1)e^{-n(n+2)/(2\beta)}$ の規約）では $\mathbb{E}\|Y-1\|^2=2(1-e^{-3/(2\beta)})\le 3/\beta$。
- (d) 小さな場：$\nu=\otimes\nu_l$ を $\{\|Y_l-1\|\le h'\ \forall l\}$ で条件づけた ν' も揺らぎの背景独立の条件を満たし $M_{\nu'}\le M_\nu$。背景を $\mathcal{U}_\varepsilon:=\{\max_{p\in X}\|W_{\partial p}-1\|\le\varepsilon\}$ に取れば、右辺のノルムの上限は $\mathcal{U}_{\varepsilon+4h'}$ の上だけでよい。

初 証明。**段 1（場の和の劣乗性）**：§02 の「揺らぎを Y で書く形」から $G_h(X,WY)\le G_h(X,W)^2\exp\bigl((8qc/h^2)\sum_{l\in\bar X}\|Y_l-1\|^2\bigr)$。**段 2（(a)）**：$Y^{-1}e^{tX}Y=e^{t\,\mathrm{Ad}_{Y^{-1}}X}$ を因子の間に挟むと $F(We^{t_1X_1}\cdots e^{t_nX_n}Y)=F(WYe^{t_1X_1'}\cdots e^{t_nX_n'})$、$X_j':=\mathrm{Ad}_{Y^{-1}}X_j$、$|X_j'|=|X_j|$。右掛けで微分の向きが随伴で回るだけで、随伴は作用素ノルムを保つ。F はコンパクトな群の積の上で滑らかなので積分の下で微分でき（優収束）、**ν が W に依らないので微分は被積分関数にだけ掛かる**。よって n 階の微分は $\int\|D^nF(WY)\|d\nu(Y)$ 以下で、$h^n/n!$ を掛けて足す。**段 3（鎖）**：(a) → ノルムの定義 → 段 1 → 揺らぎの指数積率の条件 → 尺度の縮みの条件の順に $\|\theta_\nu K(X)\|_{T_W(h)}\le\|K(X)\|_{G_h}\,G_h(X,W)^2\,2^{|B(X)|}\le\|K(X)\|_{G_h}\,G_{h_+}(X,W)\,2^{|B(X)|}$。最後は尺度の縮みの条件から $G_h^2\le G_{h_+}$。(b) は Fubini と独立性、(c) は独立性と Haar の左右の不変性、$z=\|Y-1\|^2\in[0,4]$ の上の e^{sz} の凸性（弦の不等式）、$\|Y-1\|^2=2-\mathrm{tr}\,Y$ と $\mathbb{E}\,\mathrm{tr}\,Y=2e^{-3/(2\beta)}$。(d) は各座標について増加な関数を下の集合で条件づけると期待値が増えないこと（座標ごとに独立）と、段 1 の一つ目の不等式から。∎

表 1　揺らぎの指数積率の条件の数：$SU(2)$・辺ごとの熱核・$n_b = 96$（四次元・倍率 2 のブロックの閉包のリンクの数の目安）で $m(s,\beta)^{96} \le 2$ となる最大の s/β（刻み 5×10^{-4}） 読

β	4	8	16	32	64	128
最大の s/β	0.0025	0.0025	0.0025	0.0020	0.0020	0.0020

表 1 は本書の検討の数値の記録です（角の方向の台形の求積と指標の和。陽性対照として $\mathbb{E}\|Y-1\|^2$ の閉じた形と 9 桁一致）。Gauss の見立て $(1-2s/\beta)^{-3/2}$ からの $\ln 2/(3n_b) \approx 0.0024$ と合います。$s = 8qc/h^2$、$\beta = 4/g^2$ と読むと条件は $c\,g^2/h^2 \lesssim 1.7\times10^{-4}$（$q=6$・$n_b=96$）です 読 。$h = g\,p(g)$ なら $c/p(g)^2 \lesssim 1.7\times10^{-4}$ で、$p(g)$ は対数の冪で増えるので細かい段では満たされます。

背景に依らない揺らぎの一段の補題に入っていないもの。これが「閉じられる部分」の正確な縁です 読 。

1. **揺らぎの法則が背景に依らないこと（揺らぎの背景独立の条件）全部**。本当の一段の $\mu_{k,W}$ は、作用の非二次性（Wilson の作用：一枚で $\mu_W^{\beta} = \mu_1^{\beta\cos(\theta/2)}$）・ブロック平均の拘束（拘束面が W に依る）・背景場の伝播関数 C_W（隣のリンクの揺らぎが W に依るプラケットの項で結合）の三つで W に依ります。段 2 の「微分は被積分関数にだけ掛かる」が崩れる所が η そのものです。
2. **熱核の作用との関係**。背景に依らない揺らぎの一段の補題の揺らぎは「リンクごとの熱核の畳み込み」で、プラケットごとの熱核の作用は、プラケットの変数が独立な座標になる場合（二次元・軸ゲージ）に限って辺ごとの積の形になります。三次元以上では立方体の制約がプラケットを結びます（その現れが 15-05 の源）。
3. **一段だけ**。尺度の縮みの条件を k 段重ねると $h_k \le 2^{-k/2}h_0$ で重みが潰れます。多段にはブロック化の因子・背景の正則性の条件・$2^{|B(X)|}$ を打ち消す多体のノルムの縮みが要ります（§07）。
4. **大きな場の稀さは出ません**。$G_h(X,U) \le e^{4c|X|/h^2}$ なので、このノルムは大きい場の稀さの条件の $e^{-cp(g)^2|\Omega^c|}$ を作りません。(d) は「小さな場の背景が一段で $\varepsilon \to \varepsilon + 4h'$ にしか広がらない」ことだけです。
5. **Wilson の作用は扱いません**（非二次性の η）。一リンクに限れば、次の一リンクの熱核比較の補題で扱えます。
6. **小さい場の解析性の条件との対応**。小さい場の解析性の条件の「局在した補正の解析性と減衰」のうち、一段で台が広がらないこと（(b)）と、半径 h の Taylor ノルムが $2^{|B(X)|}$ 倍で保たれること（(4)）が背景に依らない揺らぎの一段の補題の中身で、減衰 $e^{-\kappa d(X)}$ の一様性と段に一様な定数は含みません。

Wilson の一リンクへ ― 一リンクの熱核比較の補題と一リンクの揺らぎの一段の補題。 一本のリンクだけを揺らし、背景をその条件つきの最大点（staple の和の向き $\hat{q}(W)$、§06）に取ると、揺らぎ Y の法則は μ^b（$b=\beta|Q(W)|$）で、背景には b を通してだけ依ります。μ^b は角の上限 $\theta_0\in(0,\pi)$ の内側で熱核 $p_{1/b'}$（$b'=b(1-\theta_0^2/12)$）の K 倍で上から押さえられ、

$$\mu^b(\theta)\ \le\ K(b,\theta_0)\,p_{1/b'}(\theta)\quad(\theta\le\theta_0),\qquad K(b,\theta_0)\ \to\ \Big(1-\frac{\theta_0^2}{12}\Big)^{-3/2}\quad(b\to\infty)$$

K は $\theta=0$ で取られて最良、θ_0 の外側の重さは $\sqrt{2/\pi}\,b^{1/2}e^{-b(1-\cos\theta_0)}(1+O(1/b))$ 以下です 初 （一リンクの熱核比較の補題。$SU(2)$・一リンク・Haar に対する類密度）。証明は三つの一行で、Taylor の剰余 $1-\cos\theta\ge(\theta^2/2)(1-\theta_0^2/12)$（$\theta\le\theta_0$、$\theta_0^2\le 24$）、熱核の下界（像の和の主項と Van Vleck の前因子 $\theta/\sin\theta\ge 1$）、定数の鎖です。Taylor の剰余と定数の代数は Lean：`one_sub_cos_window`・`wilson_weight_window`（仮定 $0\le\theta\le\theta_0$・$\theta_0^2\le 24$・$b\ge 0$）・`window_constant_chain`・`window_split_bound`。この比較で背景に依らない揺らぎの一段の補題の鎖は Wilson の一リンクでも通り（一リンクの揺らぎの一段の補題）、損は二つに割れます：熱核の量に掛かる K（揺らぎの期待値の閉じの側）と、結合の動きから来る因子 $1+\eta$、$\eta\approx\frac{3}{2}\,\delta_b/b$（$\delta_b$ は $b(W)$ の Taylor の幅。期待値と半ノルムの入れ替えの側）です 初 （条件：一リンク・一段・背景は条件つきの最大点・中心の取り直しの幾何（中心の取り直しの条件）は仮定・$\delta_b<b$）。前者は角の上限の取り方で小さくできますが、後者は θ_0 に依らず、平らな背景のまわりで $\delta_b/b\sim g^2p^2$ なので和は対数の冪で発散します 読 。数（$b=4$〜64・$\theta_0=0.3,\,0.5,\,1$）：紙の K は真の上限と 10^{-10} で一致し、$\theta_0^2/12$ を落とした陰性対照は $SU(2)$ で 15 枡中 7 枡、$U(1)$ で 15 枡全てが θ_0 の端で破れます 読 （$U(1)$ には前因子が無い）。共有プラケットを持つ多リンクの残り（§06）は、この補題の外です。

中心の取り直しの条件の代償。 背景のプラケットの角が全て $\theta_0<\pi/2$ 以下なら、staple の和の大きさは $|Q|\ge\sum_p\cos\theta_p\ge n_s\cos\theta_0$（四次元で $n_s=6$、対の配置で等号）で、$\theta_0=\pi/2$ では 0 になりえます 初 （$SU(2)$ と $U(1)$・一リンク。Lean：`sum_norm_ge_of_inner_ge`、仮定：実内積空間・$\|u\|=1$・$\langle x_i,u\rangle\ge c$）。中心の向き $\hat{q}$ の背景についての一次の微分は $18/|Q|\le 3/\cos\theta_0$ 以下で、平らな背景でちょうど 3 です（staple 一本が三本のリンクを持つため、次元に依らない） 初 。このため背景に依らない揺らぎの一段の補題の鎖を中心の取り直しの後に回すと、入力の Taylor の半径が出力のおよそ 4 倍（$h_q\approx(1+3/\cos\theta_0)h$）要ります 初 （合成の段は素描・優級数の収束域 $h<0.075$ の下）・ 読 （一方向の実測で 4.02〜4.24 倍）。結合 $b=\beta|Q|$ は平らな背景で一次の停留点にあり、その相対の動きは $\delta_b/b\le 6h\sin\theta_0+13.5h^2$ 初 （主項・$h<0.11$）、一方向の実測で $\approx 3\tan\theta_0\,h+4.5h^2$ です 読 。閾 $h=\theta_0=gp$ では $\eta\approx\frac{3}{2}\delta_b/b\approx c\,g^2p^2$（実測 $c\approx 12$、紙で $c\le 29$）で、§06 の予算の仮定より g^2 一つ分足りず、和は対数の冪で発散します 初 （算術）。中心の回転は測度から半径の損へ移せますが、**結合の動きは類の母数（結合 b）に持たせる以外に運び先がありません** 読 。

06

η ＝ 局所結合のずらしの案

背景に依らない揺らぎの一段の補題は揺らぎの背景独立の条件が崩れると使えません。そこで、本当の $\mu_{k,W}$ を「背景に依らない法則 ν_k（背景に依らない揺らぎの一段の補題が当たる）× 密度 $\rho_{k,W}$」に割り、密度の背景依存のうち母数に吸収できる部分を抜き出す、という方向を考えます。この節の言明は、事実の一つ（熱浴法の基礎）と恒等式の一つを除いて案です。

事実：一リンクの条件つき法則は一母数の族の元。$SU(2)$ の Wilson の作用で、リンク U を除いた各プラケットの積（staple）を四元数として足したものを $Q(W)$ とし、$Q=|Q|\hat{q}$（$\hat{q}\in SU(2)$）と書きます。他のリンクを止めた U の条件つき法則は $\exp(\beta\langle Q,U\rangle)\,dU$ で、$U=\hat{q}Y$ と置けば Haar の左不変性から Y の法則は $\exp(\beta|Q|\,\mathrm{Re}\,Y)\,dY=\mu_1^{\beta|Q|}$ です。**条件つき法則は背景に依らない一母数の族 $\{\mu_1^b\}$ の元で、背景は局所結合 $b(W)=\beta|Q(W)|$ と中心の向き $\hat{q}(W)$ にだけ入ります** 典 （$SU(2)$ の熱浴法の基礎の事実。書誌は Creutz 1980・Kennedy–Pendleton 1985 を挙げるが、本文は照合していない＝未確認）。一枚の $\beta\mapsto\beta\cos(\theta/2)$（§04）も、二枚・三枚の重みの閉じた形（15-06 §02・§03）も、この一文の例と読めます 読 。

恒等式：多リンクの作用の割り方。背景と揺らぎの分解の補題の並べ替え $U_{\partial p}=W_{\partial p}Y_p$（$Y_p$ は揺らぎの部分の積）に、単位四元数の恒等式 $\mathrm{Re}(ab)=\mathrm{Re}\,a\,\mathrm{Re}\,b-\mathrm{Im}\,a\cdot\mathrm{Im}\,b$ を当てると、$W_{\partial p}$ の回転角を θ_p、軸を n_p として

$$\beta\,\mathrm{Re}(W_{\partial p}Y_p)\;=\;b_p(W)\,\mathrm{Re}\,Y_p\;-\;\beta\sin\frac{\theta_p}{2}\,\langle n_p,\mathrm{Im}\,Y_p\rangle,\qquad b_p(W):=\beta\cos\frac{\theta_p}{2}\tag{5}$$

です 初 （$\frac12\,\mathrm{tr}=\mathrm{Re}$ の規約、四元数の代数）。第一項は**局所結合 $b_p(W)$ を持つ、背景に依らない形の作用**、第二項はリー環の揺らぎで一次が主の項です。ほかに、同じ Y_l が隣のプラケットで別の背景の部分積で共役されることから来る「共役のずれ」の項が残ります（三重積の型）。

次数で選別する案：スコアを θ の次数で選別する。密度 $\rho_{k,W}$ の背景微分（スコア）を背景の角 θ の次数で分けます 仮 （選別の読み。多枚の真の臨界点のまわりでの確認は未）。

- θ^0 の項（背景に依らない一次の項）：背景の中心を拘束つきの真の臨界点に置き直せば消える。二枚では真の臨界点のまわりで作用が揺らぎについて偶になり、三枚では重みが $|1+W_a+W_b|$ の関数になる（15-06 §02・§03、どちらも〔初〕）。
- θ^1 の項：$b_p(W)$ の微分（結合微分）と、再中心化の後に残る揺らぎの二次形式の異方的な部分。前者は結合を変数に広げる案で吸収し、後者も局所の異方的な結合の微分として同じ型で吸収できる見込み。

- 吸収できない残り：**最小の系では、残りの最低次数は $\theta^0\beta^{-1/2}$ と $\theta^1\beta^0$ で（θ^2 以上ではない）、閾の幅 $h_k \sim g_k p(g_k)$ を掛けた項は $g_k^2 p$ の型です。閾をどう選んでも和は対数の幂で発散し**（15-01 §01 の $\sum g_k^2$ と同じ型。下の段落と §07）、改良は閾の選び方でなく類の側——背景の場の強さを母数に持たせること——にあります 読 （二リンクと一列四枚の数を四次元の段に写す読み）。

最小の系で測った残り。共有プラケットを一枚持つ二本のリンクと一列四枚で、背景の角 θ についてのスコアから「結合微分（$\mathrm{Re}\,Y_p$ の三本）」と「中心の回転（左右の移動の生成子 12 本）」を引いた残りは

$$\eta^{\mathrm{res}} \;\approx\; \sqrt{A^2/\beta + D^2\theta^2}, \qquad A = 0.04\text{〜}0.14\ (\text{系による}), \quad D \approx 0.018\ (SU(2)), \quad D \approx 0\ (U(1$$

です 読 （$SU(2)$・$\beta = 4\text{〜}32$〔一部 128〕・$\theta = 0.05\text{〜}0.3$〔一部 1.0〕・二経路）。真の同時の臨界点で枠を取ると、二リンクの作用は正確に $\sum_p b_p\,\mathrm{Re}\,Y_p - s\,n\cdot J$、$J = \mathrm{Im}(Z_1 Z_2) - \mathrm{Im}\,Z_1 - \mathrm{Im}\,Z_2$ に割れ 初 （四元数の代数。Lean：`two_link_split`・`re_mul_split` ほか、成分の仮定の下の環の恒等式）、J を座標に足すと——プラケットごとの四元数の結合 $(b_p,\ s_p n_p)$ の族にすると——残りは 2.4×10^{-10} 以下です 読 。$\theta^0\beta^{-1/2}$ は J の三次（作用の非二次性）で $U(1)$ にも同じ大きさで現れ、$\theta^1\beta^0$ は交換子を共役で吸収した後の異方的な二次形式で $SU(2)$ だけにあります 読 。

背景の微分は四つに割れる。一プラケットの類関数の重みを $F(U) = G(|\log U|^2)$、$G(u) =$ **定数** $- \frac{B}{2}u + qu^2 + \cdots$（$B$ が結合、q が形の座標。$|\log U|$ は半角）とすると、背景 $W = e^a$ について $|\log(e^a e^y)|^2 = |y|^2 + 2a\cdot y + O(a^2)$（$y$ の全次数で）から

$$F(e^a e^y) = G(|y|^2) - B\,(a\cdot y) + 4q\,(a\cdot y)|y|^2 + \cdots + O(a^2) \tag{6}$$

です 初 。背景のスコアは (i) 結合（偶・$O(a^2)$）、(ii) 回転（$-B\,a\cdot y$）、(iii) **形**（奇の三次 $4q(a\cdot y)|y|^2$：係数は形の座標の値 q と背景の積）、(iv) **群の幾何**（$SU(2)$ だけ：BCH の三次 $n\cdot[y_1\times(y_1\times y_2) + y_2\times(y_2\times y_1)]$、$q$ に依らない）に割れます 初 。$U(1)$ の二リンクでは残りは形で尽き、$\eta \approx \frac{8}{3}(q/B)(\beta B)^{-1/2}$ が測定と 0.7% 以内で合います 読 （$U(1)$・Gauss の主項・$\theta \le 0.3$・$\beta = 8\text{〜}64$）。一列の鎖では類関数の畳み込みが背景を粗いホロノミーへ正確に運ぶので（$(f_{W_1} * f_{W_2})(x) = (f*f)(W_1 x W_2)$、既知の型）、形の座標の縮み $\lambda = 17/125$ は背景で変わらず、**形の部分は幾何級数に入ります** 初 （一列の鎖・一段の不等式を仮定。帳簿は Lean：`residual_sum_uniform`〔$0 \le \lambda < 1$・部分和 $\sum_k u_k \le U$ を仮定〕・`forced_uniform`）。**群の幾何の部分は形の座標を含まず、縮みません**（§07）。

結合を変数に広げる案：結合 b を Taylor ノルムの零番目の変数にする。活動 $K(X; W, b)$ を背景と結合の両方の関数とみなし、半ノルムを $T_{W,b}(h, h_b) := \sum_{n,m} \frac{h^n}{n!}\frac{h_b^m}{m!}\|D_W^n \partial_b^m K\|$（$h_b \propto b$）に広げます。揺らぎの法則が $\mu^{b(W)}$ の形なら、背景微分は被積分関数と $b(W)$ に掛かり、後者

は $\partial_W b \cdot \partial_b \mathbb{E}_b F = \partial_W b \cdot \mathrm{Cov}_b(F, \mathrm{Re}\, Y)$、すなわち**背景微分の余りは結合微分**です。結合微分をノルムに入れておけば、期待値と半ノルムの入れ替えの群版は因子 $1+\eta_k$ なしで立つ、という見込みです 仮 （仮定：指数型族の統計量の中心モーメントが b について一様に押さえられること。多変数の局所結合の組 $\{b_p\}$ でのノルムと $2^{|B(X)|}$ の整合は未）。この形なら結合の小ささの帰納の補題の実効の結合の定義と連続性（15-03 §03）も b についての解析性から出る筋になります。「η を母数に吸収する」の正確な意味は「母数を場の成分として数える」こと、という読みです 読 。

背景を類の母数に持たせる — 背景を母数に持つ類の命題（案）。共有プラケット一枚の二リンクと一列四枚の条件つき法則を、プラケットの重みを $u = |\log P|^2$ の二次で切った類関数（結合 B と形 q）＋背景のホロノミーの対数 a（背景を持つプラケットごと）の類 $\mathcal{C}_2 = (B, q, a)$ とみなすと、背景についてのスコアから結合・再中心化・形・a の方向を引いた残りは $\theta^0 \beta^{-3/2}$ と $\theta^1 \beta^{-1}$ の大きさになります 読 （$SU(2)$・$\beta = 4$〜128・$\theta = 0.05$〜0.3 の当てはめ。紙の次数の勘定と一致）。§07 の BCH の三次（係数 $1/9$）と異方的な二次は a の方向に入って消え、残るのは類で切り捨てた形の係数 $\hat{g}_3 = -(1+32\rho)/720$ の寄与だけで、$\hat{g}_3 = 0$（$\rho = -1/32$）では $\beta^{-5/2}$ に下がります 読 。類の形の係数を一つ足すごとに残りは β^{-1} ずつ下がります（$\mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_3$ で冪 0.5→1.5→2.5）。$\beta = 4/g^2$ なので一段の項は $h_k g_k^3$ の大きさで、閾 $h_k \le H g_k$ と一ループの上界 $g_k^2 \le 1/(c_1(k_0+k))$ の下で

$$\sum_{k<K} \eta_k \;\le\; \frac{H(A + DH)}{c_1^2\,(k_0 - 1)} \qquad \text{(段数 } K \text{ に一様)}$$

です 初 （算術。Lean：`class_parameter_budget_bounded`、Lean の中の名では c_1, k_0 を a, b と書く。仮定 $A, D, H \ge 0$・$c_1 > 0$・$k_0 > 1$・$g_k^2 \le 1/(c_1(k_0+k))$・$0 \le h_k \le H g_k$・$\eta_k \le h_k(A g_k^3 + D h_k g_k^2)$）。§07 の `budget_unbounded_of_threshold`（項が $h_k g_k$ の型なら一様な上界が無い）と対になります。条件（同じ行に）：(1) 二リンクと一列四枚の法則で測った次数で、四次元の段に写すのは読み、(2) 小さな場（$\theta \le 0.3$）、(3) a は背景を持つプラケットごと（一列四枚で軸が違えば二本要る）、(4) 一段ごとに類の (B, q) を当てはめ直し、切り捨てた形の係数が段に一様に有界、(5) a の一段の更新が正確（単一のループの一段では恒等式、§07。多ループの一段では未）。**a を母数に持たせればスコアが a の方向に入るのは連鎖律で、測ったのは有限の類で切ったときに何が残るかの次数だけです**。形の剰余の条件の $\sum_k \eta_k$ の発散は消えたのではなく、類が閉じる条件——a を持つ類が四次元の一段で閉じるか——へ移りました 読 。$U(1)$ では BCH の三次が無く、a は次数を変えません。§05 の Wilson の一リンクの結合の動き $c g^2 p^2$ も、同じく結合 b を類の母数に持たせて母数の更新に移す項です 読 。

留保。(5) は $SU(2)$ に固有です（staple の和が群の元の定数倍になるのは $SU(2)$ だけ）。$SU(N)$ では $\mathrm{tr}(WY)$ は W と Y の双線形形式で、局所結合は数でなく行列になり、条件つき

法則は一母数の族に入りません（$SU(2)$ の部分群ごとにはなる）。また基本＋随伴の作用は (5) の第一項の形を壊します（$\cos^2$ の展開に揺らぎの背景の向きの成分だけに掛かる異方的な二次形式が出る）初（四元数の代数）。

07

多段の帰納が書けていないこと

背景に依らない揺らぎの一段の補題も次数で選別する案と、結合を変数に広げる案も一段の文です。段を重ねるには次の三つが要り、どれも書けていません 仮。

- 背景の正則性の条件：背景場の写像の像に入る W について、細かいプラケットの曲率が粗いプラケットの曲率の L^{-2} 倍＋$O(\varepsilon_k^2)$ で押さえられること（背景の正則性）。
- 多体のノルムの縮み：一段の損 $2^{|B(X)|}$ を、活動の無関係な部分の縮み（平らな場の付録の縮小の評価の群版）が打ち消すこと。
- η の吸収後の残りが段に一様に $g_k^{2+\delta}$ の型に留まること。15-03 §04 の横の縮みの帳簿に乗せれば、残りは和でなく上限で押さえられる見込みです。

群の幾何の部分の係数 — BCH の三次は $1/9$。外の結合が $m\beta$、共有プラケットが β の二リンク（$m=1$ が §06 の系）で、背景のスコアを結合と左右の移動の生成子 12 本に射影した残りは、Gauss の主項で $\eta = A\beta^{-1/2}$（背景の角あたり）、

$$A\sqrt{B} = \sqrt{\frac{1}{3(m+2)^3} + \frac{240\,(m^2+m+1)}{(m+2)^5}\,r^2}, \qquad r = \frac{q}{B} \tag{7}$$

です 初（Gauss の主項・二リンクの模型。$m=1$〜5 は有理数の Wick の計算で正確、一般の m の式は五点から読んだもの）。**$m=1$ の幾何の部分は $1/9$ ちょうどで、形の座標 r に依りません。**形の部分とは Gauss の L^2 で直交し（交差項 0）、η^2 は二つの和に割れます。真の作用の独立な数値と §06 の測定に 0.6% 以内で合います 読。スコアの BCH の三次の係数 $-\frac{B}{6}$ に生成子の三次が $+\frac{B}{9}$ を返して $-\frac{B}{18}$（一般に $-\frac{B}{6}\cdot\frac{m}{m+2}$）になる代数は Lean：`bch3_coefficient`（仮定 $m+2\neq 0$）・`nT_sum_diff`・`shape_split`（仮定なしの多項式の恒等式）。

類 (B,q,a) と、背景そのものとしての s。BCH の三次を運ぶ J の係数 s は、二リンクを直列に一リンクへ縮める一段で縮みません：$s'/s = 1-(1/3+10r)/B + O(B^{-2},a^2)$ 初（主項とその $O(1/B)$。$B=16$〜128・$s/B\le 0.1$ の測定と三桁で一致 読）。s は形の座標でなく**背景の場そのもの**（s/B は背景のプラケットの半角）で、一段は背景を群の積 $a'=\log(W_2W_1)$（BCH）のまま粗いホロノミーへ運び、縮むのは形の座標 q/B（この一段で $1/4$ 倍）だけです。類 (B,q,a)（a は背景のホロノミーの対数）は直列の一段で三つの母数のまま閉じ、$B'=$

$B/2 - 1/6 - 5r + O(1/B)$、$r' = r/4 + O(1/B)$、$a' = \log(W_2 W_1)$ です 初 （直列の二リンクの模型・$SU(2)$。当てはめの残り 3.5×10^{-7} 以下 読 ）。BCH の三次の η への係数は類にも s にも依らない定数なので、幾何の部分は「定数 × 各段の背景の変化の予算」として残ります。

予算は発散する。一段の幾何の部分の項は $\frac{1}{9}\, h_k\, (\kappa \beta_k)^{-1/2}$（$h_k$ は背景の変化の幅、$\kappa \in [0.2, 1]$ はブロック化の縮約）で、$\beta = 4/g^2$ なので $h_k g_k / (18\sqrt{\kappa})$ の大きさです 初 （算術。二リンクの定数を四次元の段に写すのは 読 、使うのは定数が β に依らないことだけ）。小さな場の閾 $h_k = g_k p(g_k)$ では $g_k^2 p(g_k)$ の大きさで、一ループの流れ $\beta_{k+1} = \beta_k - c$（$c = \frac{11}{3\pi^2} \ln 2 \approx 0.2575$）の下、赤外の端を止めて紫外へ段を足すと和は $\ln K$ の冪で発散します 初 （算術。$h = g$ なら和は $\ln(\beta_0/\beta_*)$ の $2/(9c) \approx 0.863$ 倍で、数でも 0.865〜0.87 倍 読 ）。大きな場の確率を小さく保つには $h_k \geq g_k$ が要り、そのとき $\sum h_k g_k \geq \sum g_k^2 = \infty$ なので、**閾の選び方では和を有限にできません** 初 （Lean：`budget_unbounded_of_threshold`、仮定 $g_j^2 \geq 1/(A(j+1))$・$0 \leq g_j \leq h_j$）。したがってこの部分は誤差の因子 $1 + \eta_k$ として運べず、背景の場の強さ（プラケットごとのベクトルの結合 $s_p n_p$、統計量 J）を類の母数に持たせ、母数の動きに移す必要があります 読 。二リンクでは J を座標に足すと残りは 0 でした（§06）。この部分は $U(1)$ には無く（BCH の三次が恒等的に 0）、母数は背景のホロノミーの対数 a です。

面の一段 — 単一のループなら a の更新は群の積で閉じる。四本のリンクが全部揺らぐ中央のプラケットと外の四枚から成る十字（二次元）で四本を積分すると、粗い重みは外周のホロノミー W の類関数に正確に入り（類関数の畳み込み。ゲージ不変性の言い換え）、粗い類の中心は $a' = \log W$、W は木のゲージでの順序つきの積 $e^{b_1} e^{b_2} e^{b_3} e^{b_4} e^{a_0}$（非可換 Stokes）、形の座標は背景に依りません 初 （条件：粗い変数が単一のループ・重みが類関数・他のリンクは Haar で積分・a_p を木のゲージの共通の枠で持つ）。a の更新を可換の和 $\sum_p a_p$ で行うと、残りは二次の交換子の和 $\sum_{i<j} a_i \times a_j$（$\theta^2 \beta^0$）で、類の形の切り捨て（$\theta^0 \beta^{-3/2}$）より大きくなります。群の積で更新すれば残りは無く、新しい座標は要りません 初 ・ 読 （$SU(2)$・$\beta = 8$〜128・$\theta \leq 0.3$ で、閉じ方を使わない求積が群の積を 2.1×10^{-4}〜1.4×10^{-6} まで再現し、差は求積の節点とともに下がる）。順序つきの積の対数の二次の項が交換子の和の半分であることは Lean：`log_quadratic_part`（仮定：環）・`commSum_eq_zero_of_comm`（可換環。$U(1)$ では可換の和が二次まで正確）。**BCH の三次は、背景の座標 a の側に全次数で入っている**、と読めます 読 。形の係数は一段で $q'/B' \approx (q/B)/25$（五枚の畳み込みの木の値）、Wilson で $B' - \beta/5 \to -0.40$、熱核で $t' = t_0 + 4t_m$ ちょうどです 読 。

多ループの一段 — 類の座標に角の三重積が要る。粗い立方体の十二の辺だけを固定した三次元 $2 \times 2 \times 2$ の一段（$SU(2)$・熱核と Wilson・鞍点の主項と一ループ。$O(1/\beta)$ は含まない）では、粗い重みは五つの独立なループの関数で、面ごとの類関数の積には分解しません。二次の範囲では粗い箱の対称性（O_h）から、面ごとの類（対角）と、隣り合う面の対の結合（共有

の辺の端に置いた $a_A \cdot a_B$）の二つの係数で正確に閉じます 初 （対称性。表し方の一意性は Lean：`diag_adj_unique`、仮定：$\sum \theta = 0$ の上で二つの形が等しい）。木の水準の値は対角 $5/16$・隣 $1/32$（比 $1/10$）です 読 （有理数の当て・二経路）。θ^2 の非可換なスカラーは無いので、非可換は最初から三面（角）で現れます 初 （O_h の表現の勘定）。三次では立方体の角に集まる三面の三重積 $\kappa \sum_c a_x \cdot (a_y \times a_z)$ がただ一つの新しい項として要り、木の水準で $\kappa = 3/1024$（数値の当て）、一ループで 0.006 程度、四次では三面・四面の結合が要ります 読 。$\theta \sim \beta^{-1/2}$ の範囲で角の三重積は $\approx 2.2 \times 10^{-3} \beta^{-1/2}$、四次の多面の結合は $\approx 3.3 \times 10^{-3} \beta^{-1}$ で、類の形の切り捨て $\beta^{-3/2}$ より大きいので省けません 読 。共通の枠（木のゲージ）で a_p を持つと三次に O_h を破る枠の誤差が残るので、隣の対は共有の辺の端に、三重積は角に置く定義が要ります。四次元 2^4 の箱では粗い面 24・隣の対 96・角 64 と数えられます 読 （数えただけで、計算していない）。したがって類の座標は、**面ごとの (B_p, q_p, a_p)・隣の対の結合 B_{pq}・一リンクの結合 b・角の三重積 κ・四次の多面の結合**の形になる、と読みます 仮 （三次元の一段の鞍点の展開の中の文で、二段目・大きな場・四次元は示していない。15-03 §02）。

角の三重積の流れ — 縮まず、固定点に下から寄る。粗い立方体の十二の辺だけを固定した三次元の自由境界の箱 $L \times L \times L$ で、$L = 2$（一段）から $L = 20$ まで本当の多段を木の水準で測ると、比 $r_\kappa = \kappa / c_2$（c_2 は $\sum |a_p|^2$ の係数）は 0.019（$L = 2$）・0.033（$L = 4$）・0.050（$L = 20$）と増え、倍ごとの比は 1.78・1.30・1.13・1.10 と 1 に寄り、増分は倍ごとに約 0.55 倍に縮みます 読 （$SU(2)$・鞍点の主項・ε の三次まで・当ての形で 0.055〜0.066 に寄る。極限の存在は示していない）。一ループ（熱核と Wilson、$\beta = 32$〜128、$L \le 4$）は比を 3% 以内しか動かさず、二段の比 1.78 をほとんど変えません 読 。**一段目の比が 1 を超えるのは壁ではなく接近の形**です：細かい作用に無い項は一段目で生まれ、固定点より下から出発するので、$0 \le \lambda < 1$・$0 < r < s/(1-\lambda)$ なら一段の比 $(\lambda r + s)/r > 1$ でも固定点は越えません 初 （Lean：`ratio_gt_one_below_fixpt`・`abs_iterate_dev`（$0 \le \lambda < 1$））。一段の粗い作用を中間の格子の作用に入れ直す反復の二段では、比のずれは一段で $1/9$〜$1/17$ に縮み（三次の出力は入力について正確に一次）、反復の不動点 0.032〜0.045 は本当の多段の極限より小さく、寄り方もずっと速い 読 。辺だけを固定すると二次の係数は $c_2 L \ln L \approx 0.27$〜0.29 とほぼ一定で（辺に沿った $\ln L$）、三次元の古典の尺度の $1/L$ には届きません 読 （見立て：面の中が自由で辺だけ固定のため）。角の三重積は、形の剰余のように幾何級数で消える量ではなく、**流れが決める値を持つ座標**で、類はその値を持ち運ぶ必要があります。ただし独立な母数ではありません。

四次元の類 — 一つの母数と比の座標、斜めの隣は 0 にならない。四次元 2^4 の箱で粗い超立方体の 32 本の辺を固定した一段では、粗い面の角の線形化の空間は 17 次元で、超八面体群 B_4 の下で $3 + 6 + 8$ に分かれ（6 は一様な場）、不変量は二次 3・三次 3（色の三重積）・四次 65 本です 初 （指標の平均と数値の階数の二経路。三次元の版で $2 \cdot 1 \cdot 9$ を再現）。直交する面の対（$\mathrm{tr}\, F \wedge F$ の型）の軌道和は鏡映で 0 です。三次元と違い、**面ごとの類と辺を共有する隣の**

対だけでは二次で既に閉じず（残り木 0.57%・一ループ 0.79%）、一辺ずれた「斜めの隣」の対（頂点を共有しない、つなぐ二辺の移送で平均）が一本要ります：木の水準で対角 $5/26$・隣 $-79/2080$・斜め $-9/2080$ 初 （固有値 $1/4$・$5/13$・$3/10$ からの一次式。Lean：`diag_adj_skew_unique`・`diag_adj_not_enough`（仮定は計算で得た成分ごとの値と固有値）・`coeffs_of_spectrum`（$k=(2e_8-e_3-e_6)/8$）・`skew_zero_iff`）。三次も頂点に集まる型（胞の角・道）だけでは閉じず、平行の型が要ります（胞の角の係数は木で $5931/1406080$ の当て）。$\theta\sim\beta^{-1/2}$ の範囲で斜めの隣は β^0 で ≈ 0.02、三次は $\approx 0.023\beta^{-1/2}$、四次は $\approx 0.046\beta^{-1}$ で、どれも類の形の切り捨て $\beta^{-3/2}$ より大きく省けません 読 （鞍点＋一ループ・$O(1/\beta)$ なし・面の角 $\lesssim 0.5$ の無作為 90 標本）。

箱を $\{0,\dots,L\}^4$（$L\le 10$、木）に広げた本当の多段では、二次・三次の比の座標はどれも二段目で 0 に向かわず（$\lambda\ge 1.14$）、倍ごとの比が 1 に寄って固定点の値に寄ります（斜めの隣 $r_k=k/b$：-0.01125・-0.01744・-0.01988、外挿 -0.0208。隣 -0.145・三次 0.064・0.013・-0.021）読 （当て $r_\infty-A/L-B/L^2$ が $L=4$〜10 を 4×10^{-5} 以内で表す。三次元のような $\ln L$ の形は 30〜300 倍悪い）。二次の類の係数は $b\approx 0.39/L$ で $\ln L$ が無く、三次元より速く寄ります。一ループは二段の比を 1% 未満しか動かしません（$L\le 4$）。四次の多面の部分は二段目で c_2 との比 1.6 倍、向きの余弦 0.99 です。**規則への依存**：一つの粗い超立方体の中では、面を全て固定する規則は辺を固定する規則と同じ二次形式を与えます（$32-15=24-7=17$。Lean：`edge_face_dof_agree`・`euler_cube`）。粗い胞が細かい場を共有する周期の網では、斜めの隣はやはり 0 でない負の値に寄りますが値は約 2 倍（-0.045、射影の約束によっては -0.06〜-0.10）で、胞に収まらない部分が段とともに 6% から 2 割まで増えます 読 （可換の線形化の木の水準・二次・$L\le 16$）。**斜めの隣の符号と非零は規則にも射影の約束にも依らず、値と「一つの胞の中で閉じる」ことは依ります**。どちらの規則でも木の水準の胞の部分の b は $1/L$ で、$\ln L$ の走りは木にありません。四次元の類は「一つの母数 B＋流れが値を決める比の座標（二次 2・三次 3・四次 65）」で、類が閉じる条件の「局所」は規則を添えて書きます（15-03 §02） 読 。

多段の帰納を書く最小の形と、その代償。類の座標の流れを一次の写像の列と見ると、一段の類を中間の格子の超立方体ごとの作用に入れ直す反復の二段では、三次の座標の出力は入力について正確に一次 $\kappa'=s+\Lambda\kappa$ で、正規化した Λ の固有値は全て 0.1 未満、二次の比のずれも一段で 0.1〜0.2 倍に縮みます 読 （四次元・木・二つの重みの版が本当の二段を挟む）。ところが本当の多段は同じ座標に $1/L$ の速さでしか寄らず、**反復の不動点は本当の極限より 0 の側にずれます**（斜めの隣で、胞を切り離す規則 -0.019 対 -0.021、周期の網 -0.035 対 -0.045）。周期の網では、反復が毎段捨てる「胞に収まらない部分」が 6〜10% あるので、ずれは大きくなります。帰納は反復の写像の縮みでは書けても、その不動点が本当の流れの値と一致することは別に示す必要があり、類の座標を一つの胞の型に打ち切る限り、打ち切りの誤差を段ごとに持ち運ぶ形で書く必要があります 読 （帳簿は Lean：`tail_bound`（仮定 $0\le q<1$ と

増分の比 $\le q$）・`affine_iter`）。辺だけを固定する規則では $\beta' = \beta b$ が段ごとに約 0.39 倍になるので、一ループの相対の重さは段ごとに増え、帰納は弱結合の範囲の中だけで閉じる形になります。

以上で、表 2 の同時の法則の密度の割り方は最小の系で答えの形が出ました。紫外の問い 17〜19 と多ループの類の二段目も一部の答えが出ました。多段の帰納（多段の最小の言明）は書けていません。

表 2　この章から出る問い（状態：新＝この部で足した問い。更新＝答えを書き足した）

問	問い	大きさ	状態	決着したら動くもの	決着しても動かないもの
10	$SU(2)$ の一列四枚（二本の重なったループを固定）で、中の二枚の同時の法則を局所結合の積 $\mu^{b_2} \otimes \mu^{b_3}$ × 密度に割り、密度のスコアの θ の最低次数と、揺らぎの二次形式の等方性（異方的な項の係数）を β の関数として出す。θ^1 の項が結合微分だけか。**答え（最小の系）：**最低次数は $\theta^0 \beta^{-1/2}$ と $\theta^1 \beta^0$。θ^1 は結合微分だけでなく異方的な二次（$SU(2)$ だけ）を含む。J を座標に足すと残りは 0（§06）	紙と小さな計算	更新	次数で選別する案の選別の当否。期待値と半ノルムの入れ替えの群版の η の型	四次元の格子の $\mu_{k,W}$。多段の帰納
11	多段の帰納の最小の言明：背景の正則性の条件と多体のノルムの縮みを、一枚の重みの階層模型か二次元の模型で、定数を段に依らず書けるか。あわせて結合を変数に広げる案のノルムで、$Z_b = 2I_1(b)/b$ の複素零点の位置から結合の解析性の帯の幅を出す（零点の位置は原典で未確認）	紙	新	背景に依らない揺らぎの一段の補題を k について重ねる形	大きな場込みの一段の剰余（結合の一段の正味の括弧）
17	2×2 の板の中央のプラケット（四本のリンクが揺らぐ）で、スコアを生成子の空間で割った残りを巡回の順で対称化した BCH の奇数次として書き下し、幾何の係数を有理数の Wick で出す。二リンクの $1/\sqrt{3(m+2)^3}$ と比べて面の上で増えるか減るか。あわせて、背景の挿入が四元数の結合 A_p＋J の族からはみ出すか。**答え（一部）：**十字（中央のプラケットの四本が揺らぐ二次元の一段）では、a を群の積で更新すれば残りは無く、BCH の奇数次は a の座標に全次数で入る。可換の和なら $\theta^2 \beta^0$。三次元 $2 \times 2 \times 2$ では角の三重積 $\kappa = 3/1024$ が要る（§07）	紙と小さな計算	更新	四次元の段の幾何の係数	予算の発散（閾では逃げられない）

問	問い	大きさ	状態	決着したら動くもの	決着しても動かないもの
18	背景のホロノミーの対数 a を母数に持つ類で、一段の幾何の部分が a の流れ $a' = \log(W_2 W_1)$ に正確に移る（残りが $\theta^0 \beta^{-1/2}$ から一段下がる）かを、直列の一段で測る。**答え（最小の系）：** a を母数に持つ類 (B, q, a) で残りは $\theta^0 \beta^{-3/2}$ と $\theta^1 \beta^{-1}$ に下がり、予算は段数に一様（条件つき、§06）。単一のループの一段で a の更新は正確（§07）	小さな計算	更新	幾何の部分を母数の動きに移す形	多段の帰納
19	一リンクの揺らぎの一段の補題の条件（中心の取り直しの条件）：四次元の格子の一リンクで、staple の和の写像 $W \mapsto \hat{q}(W)$ の Taylor の半径を背景のプラケットの角と $\lvert Q \rvert$ の下限で明示し、δ_b / b の $g^2 p^2$ の係数を一つの数にする。**答え：** $\lvert Q \rvert \geq 6 \cos \theta_0$、$\lVert D\hat{q} \rVert \leq 3 / \cos \theta_0$、$h_q \approx 4h$、$\eta = c g^2 p^2$（実測 $c \approx 12$、紙で $c \leq 29$）。合成の段は素描で、結合の動きは類の母数の側へ運ぶ項（§05）	紙	更新	Wilson の一リンクの鎖を仮定なしに	多リンクの残り
23	多ループの類の二段目：三次元 $2 \times 2 \times 2$ の一段の後の類（面ごと・隣の対・角の三重積・多面）で二段目を行い、κ が段ごとに保たれる座標か（次元 6 の $\operatorname{tr} F[F,F]$ の格子の版と見込む）、四次元 2^4 で同じ座標が足りるかを見る。**答え（一部）：** 三次元で κ / c_2 は二段目で縮まず固定点（当てで $0.055 \text{〜} 0.066$）に下から寄る。四次元では同じ座標では足りず、二次に斜めの隣・三次に平行の型が要り、比の座標はどれも固定点に寄る（木 $L \leq 10$、§07）	小さな計算	更新	四次元の一段の類の座標	大きな場・小さい場の結合への寄与
26	結合 b を類の母数に持たせたとき、Wilson の一リンクの結合の動き $c g^2 p^2$ が母数の更新に正確に移り、残りが g^2 一つ分下がるか	紙と小さな計算	新	一リンクの揺らぎの一段の補題の予算	多リンクの残り
27	四次元の類の比の座標（斜めの隣・三次 3 本・四次 65 本）の固定点の値を、多段を回す代わりに、粗い超立方体の角の近くの半無限の問題（辺の束を固定した半空間の Green 関数）から直接出せるか。あわせて、粗い胞が場を共有する規則で、胞に収まらない部分（段とともに 2 割まで）を類の座標の有限個の対（ずれ ≤ 1 の軌道）に入れて閉じるか、尾として運ぶか	紙と小さな計算	新	類が閉じる条件の四次元の座標の値と「局所」の形	大きな場・小さい場の結合への寄与・一ループの二段目

08

言えないこと

(a) この部の中で、紫外の制御は閉じていません（存在は、公開された構成が別の設計で示しました）。この章の文は全て一段の文か、言明か、案です。

(b) 背景と揺らぎの分解の補題は重みの四性質のうち場の和の劣乗性の群版だけで、本題の揺らぎの期待値の閉じに触れません。既知の初等的な事実かもしれません。

(c) 揺らぎの指数積率と背景の正則性の群版と入れ替えの不等式は言明だけで、示していません。(3) はそれらを仮定したときの鎖にすぎません。

(d) $\eta_k \sim g_k p(g_k)$ と $\eta_k \lesssim g_k^2 p(g_k)^2$ は素朴な見積もりで、実際の揺らぎの測度について評価していません。

(e) 背景に依らない揺らぎの一段の補題は揺らぎの法則が背景に依らない場合の一段だけの文で、Bałaban の $\mu_{k,W}$・Wilson の作用・多段・大きな場の稀さについて何も示しません。表 1 の数は $SU(2)$・$n_b = 96$ の目安での数値の読みです。

(f) 熱浴法の事実は書誌を記憶から挙げたもので、本文を照合していません。次数で選別する案と、結合を変数に広げる案は案です。最小の系の残りの次数（§06）は二リンクと一列四枚の数で、四次元の段に写すのは読みです。$SU(N)$ には (5) の形がありません。

(g) 一リンクの熱核比較の補題・一リンクの揺らぎの一段の補題は一リンク・一段の文で、中心の取り直しの条件を仮定しています。BCH の三次の係数 (7) は Gauss の主項・二リンクの模型の値で、一般の m の式は五点から読んだものです。類 (B, q, a) の閉じ方は直列の二リンクの一段の文で、面を持つ配置は単一のループの十字でだけ見ています（§07）。予算の発散は一ループの流れを正確な式と見なした算術で、二リンクの定数を四次元の段に写すのは読みです。

(h) §05 の中心の取り直しの条件の数は一リンク・一段の文で、合成の段は素描、紙の優級数は $h < 0.075$〜0.078 でしか収束しません。§06 の背景を母数に持つ類の命題は案で、測ったのは有限の類で切ったときの残りの次数（二リンク・一列四枚・$\beta = 4$〜128・$\theta \le 0.3$）で、連鎖律の上の話です。四次元の段で a を持つ類が閉じることは示していません。§07 の面の一段は単一のループの文で、多ループの類の座標は三次元 $2 \times 2 \times 2$ の一段の鞍点の展開（主項と一ループ）の中の文です。二段目・四次元は測っていません。

(i) §07 の角の三重積の流れは三次元の自由境界の箱（辺だけを固定）の木（$L \le 20$）と一ループ（$L \le 4$）の数で、極限は当ての形です。四次元の類は自由境界の箱の木（$L \le 10$）と一ループ（$L \le 4$）、周期の網は可換の線形化の木の二次（$L \le 16$）の数で、比の座標の固定点の

存在・四次の 65 本の値・周期の網の三次と一ループは示していません。斜めの隣の符号と非零が規則に依らないことは、測った二つの規則と二つの射影の約束についての文です。反復の写像の縮みの数は木の水準だけです。

09

五分類の表と依存グラフ

表 3　この章の行（この章の行に Lean の欄はありません）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲
[01]	$\prod_k (1+\eta_k)$ が段数に一様に有界であるには $\sum_k \eta_k < \infty$ が要る	初	§01（算術）	一ループの流れの下
[02]	背景と揺らぎの分解の補題 (1) と重みの分解 (2)、Y で書く形	初	§02	$SU(N)$・作用素ノルム・四次元の格子（重みの分解）
[03]	揺らぎの指数積率と背景の正則性の群版（揺らぎの指数積率の群版・背景の正則性の条件）と、期待値と半ノルムの入れ替えの群版	仮	§03（言明だけ）	小さな場の背景 $\mathcal{W}_k$・定数は k, a に依らない
[04]	活動のノルムの一段の評価の群版の鎖 (3)	初	§03（[03] を仮定したとき）	$\mathcal{W}_k$ の上
[05]	一リンクの熱核の積では揺らぎの法則が背景に依らない	初	§03（Haar 測度の不変性）	辺ごとに独立な熱核
[06]	素朴な η_k で和が発散（$g\,p$ で $K^{1/2}$、$g^2 p^2$ で $\ln K$ の冪）	初	§04（算術）	素朴な見積もり・一ループの流れの下
[07]	η の型は測り方で変わる（θ^2・θ^4・θ）。拘束が無いと $\beta\theta^2/12$	読	§04・15-06 §01	一枚・$\theta \le 0.3$・$\beta = 4$〜32
[08]	背景に依らない揺らぎの一段の補題 (4) と (a)〜(d)（$\eta = 0$・台は広がらない・熱核で $M = m^{\lvert \bar{X} \rvert}$・小さな場）	初	§05	揺らぎの背景独立・尺度の縮み・揺らぎの指数積率の三条件と、一段だけ
[09]	揺らぎの指数積率の条件の数 $s/\beta \le 0.0020$〜0.0025、$c\,g^2/h^2 \lesssim 1.7 \times 10^{-4}$	読	§05 表 1	$SU(2)$・辺ごとの熱核・$n_b = 96$・$q = 6$・$\beta = 4$〜128
[10]	$SU(2)$ の一リンクの条件つき法則は $\mu_1^{\beta \lvert Q \rvert}$、背景は $b(W)$ と $\hat{q}(W)$ にだけ入る	典	§06（熱浴法の基礎の事実）	$SU(2)$・Wilson の作用・書誌は未確認
[11]	四元数の恒等式 (5)：局所結合 $b_p = \beta \cos(\theta_p/2)$	初	§06	$SU(2)$・$\frac{1}{2}\,\mathrm{tr} = \mathrm{Re}$

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲
[12]	次数で選別する案（θ の次数での選別。残りの次数は [15]）と結合を変数に広げる案（結合をノルムの変数に）	仮	§06（案）	小さな場・多枚の確認は未
[13]	多段の帰納の三つの要件（背景の正則性の条件・多体の縮み・残りの一様性）	仮	§07	言明だけ
[14]	一リンクの熱核比較の補題と一リンクの揺らぎの一段の補題：Wilson の一リンクは角の上限の内側で熱核の K 倍、損は K と $1+\eta$（$\eta \approx \frac{3}{2}\delta_b/b$）	初	§05	$SU(2)$・一リンク・一段・中心の取り直しの条件は仮定・$\delta_b < b$
[15]	最小の系の残り $\eta^{\mathrm{res}} \approx \sqrt{A^2/\beta + D^2\theta^2}$、$J$ を足すと 0	読（作用の分解は 初）	§06	二リンク・一列四枚・$\beta = 4$〜32・$\theta \le 0.3$
[16]	背景の微分の四つの分解 (6)・$U(1)$ の $\eta = \frac{8}{3}(q/B)(\beta B)^{-1/2}$・形の部分は幾何級数	初・読（一致の数）	§06	小さな場（a の一次）・一列の鎖・一段の不等式を仮定
[17]	BCH の三次の係数 (7)、$m=1$ で $1/9$	初	§07	Gauss の主項・二リンク・一般の m は読んだ式
[18]	類 (B,q,a) は直列の一段で閉じ、s は縮まない	初・読	§07	直列の二リンク・$SU(2)$・$B = 16$〜128
[19]	幾何の部分の予算は閾をどう選んでも発散する	初（算術）・読（四次元への写し）	§07	一ループの流れ・$h \ge g$
[20]	中心の取り直しの条件：$\lvert Q\rvert \ge n_s \cos\theta_0$・$\lVert D\hat{q}\rVert \le 3/\cos\theta_0$・$h_q \approx 4h \cdot \eta = cg^2p^2$	初・読（実測の c と h_q/h）	§05	$SU(2)$・一リンク・$\theta_0 < \pi/2$・合成の段は素描・$h < 0.075$
[21]	背景 a を母数に持つ類 (B,q,a)：残り $\theta^0\beta^{-3/2}$・$\theta^1\beta^{-1}$、予算は段数に一様（背景を母数に持つ類の命題）	読（次数）・初（予算の算術）・仮（命題）	§06	二リンク・一列四枚・$\beta = 4$〜128・$\theta \le 0.3$・条件 (1)〜(5)
[22]	単一のループの一段で a の更新は群の積で全次数で閉じる、可換の和なら $\theta^2\beta^0$	初・読（数）	§07	十字・類関数の重み・共通の枠
[23]	多ループの一段：二次は面ごと＋隣の対、三次に角の三重積 $\kappa = 3/1024$、四次に多面	初（二次の対称性）・読（κ と四次）	§07	三次元 $2\times2\times2$・一段・鞍点の主項と一ループ
[24]	類の座標の最終形（面ごと・隣の対・一リンクの結合・角の三重積・多面）	仮	§07	三次元の一段の読み・四次元は未（四次元は [26]）
[25]	角の三重積の比 κ/c_2 は二段目で縮まず固定点に下から寄る（一段目の比 1.78 は接近の形）	読・初（一次の写像の帳簿）	§07	三次元・自由境界・辺だけを固定・木は $L \le 20$・一ループは $L \le 4$・当ての形

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲
[26]	四次元の類：一つの母数＋比の座標（二次 2・三次 3・四次 65）、斜めの隣は規則に依らず 0 でなく値は規則に依る、木に $\ln L$ の走りは無い	初 （本数の勘定・自由度の一致・係数の一次式）・読 （流れの数）	§07	$SU(2)$・熱核・木 $L \le 10$・一ループ $L \le 4$・周期の網は可換の木の二次で $L \le 16$
[27]	反復の写像は速く縮むが、その不動点は本当の極限より 0 の側にずれ、打ち切りの誤差を段ごとに持ち運ぶ形が要る	読	§07	木の水準・二つの規則

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
[01] 初  積が一様 ⟺ 和が有限                                  ―ループの流れ
[02] 初  背景と揺らぎの分解の補題・重みの分解 (2)・Y の形
[03] 仮  揺らぎの指数積率と背景の正則性の群版と入れ替え ⟸ [02]
[04] 初  一段の鎖 (3) ⟸ [02][03]                              [03] を仮定
[05] 初  熱核の積で揺らぎの法則が背景に依らない
[06] 初  素朴な η で和が発散 ⟸ [01]                           素朴な見積もり
[07] 読  η の型は測り方で変わる ⟸ [06]                        一枚
[08] 初  背景に依らない揺らぎの一段の補題 ⟸ [02][05]
[09] 読  揺らぎの指数積率の条件の数 ⟸ [08]
[10] 典  一リンクの条件つき法則は μ₁^{β|Q|}                   SU(2)・書誌未確認
[11] 初  四元数の恒等式 (5) ⟸ [02]                            SU(2)
[12] 仮  次数で選別する案と、結合を変数に広げる案 ⟸ [06][08][10][11]
[13] 仮  多段の三つの要件 ⟸ [04][08][12]                      言明だけ
[14] 初  一リンクの熱核比較の補題・一リンクの揺らぎの一段の補題 ⟸ [08][10]
[15] 読  最小の系の残り θ⁰β^{-1/2}・θ¹β⁰ ⟸ [11][12]           二リンク・一列四枚
[16] 初  背景の微分の四分解・形は幾何級数 ⟸ [15]              一列の鎖
[17] 初  BCH の三次の係数 1/9 ⟸ [16]                          Gauss の主項
[18] 初  類 (B, q, a)・s は縮まない ⟸ [17]                    直列の一段
[19] 初  予算の発散 ⟸ [06][17][18]                            ―ループ・h ≥ g
[20] 初  中心の取り直しの条件の代償 ⟸ [14]                          ―リンク・
[21] 読  a を母数に持つ類・予算は一様 ⟸ [18][19]              二リンク・一列四
[22] 初  面の一段で a の更新は群の積 ⟸ [18]                   単一のループ
[23] 読  多ループの類：隣の対・角の三重積 ⟸ [22]               2×2×2・一段
[24] 仮  類の座標の最終形 ⟸ [21][22][23]                       三次元の読み
[25] 読  角の三重積は固定点に下から寄る ⟸ [23]                三次元・木 L ≤
[26] 読  四次元の類・斜めの隣・規則への依存 ⟸ [23][24]         木 L ≤ 10・一ル
[27] 読  反復の不動点のずれ・打ち切りの誤差 ⟸ [13][25][26]     木の水準
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。[03]・[12]・[13]・[24] は仮定の行で、どれも紫外の制御を言い直すか割った問いの形です。この章の節点に、紫外の制御が示されたという節点はありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 背景と揺らぎの分解の補題と重みの分解（場の和の劣乗性の群版）・一段の鎖（揺らぎの指数積率と背景の正則性の群版を仮定したとき）・熱核の積で揺らぎの法則が背景に依らないこと・素朴な η_k の和の発散・背景に依らない揺らぎの一段の補題（揺らぎの法則が背景に依らない一段で $\eta = 0$、台は広がらない）・四元数の恒等式 (5)	揺らぎの指数積率と背景の正則性の群版の証明。実際の η_k の評価。本当の $\mu_{k,W}$ での一段
読 揺らぎの指数積率の条件の数（$SU(2)$・$n_b = 96$）・η の型が測り方で変わること	四次元のブロックの閉包での揺らぎの指数積率の条件の定数
典 $SU(2)$ の一リンクの条件つき法則が一母数の族の元であること（熱浴法の事実）	書誌の本文の照合
初 一リンクの熱核比較の補題・一リンクの揺らぎの一段の補題（Wilson の一リンク、中心の取り直しの条件を仮定）・背景の微分の四つの分解 (6)・BCH の三次の係数 (7)（Gauss の主項・二リンク）・類 (B, q, a) の直列の一段・予算の発散（算術）	多リンクの揺らぎの指数積率の群版・面を持つ配置の幾何の係数・中心の取り直しの条件・四次元の段の予算
読 最小の系の残りの次数（$\theta^0\beta^{-1/2}$・$\theta^1\beta^0$）と J を足すと 0・$U(1)$ の形の値の一致	四本以上のリンクが一枚で揺らぐ系
初 中心の取り直しの条件の明示の定数・予算の一様な上界（a を母数に持つとき、算術）・面の一段の背景の更新（単一のループ）・多ループの二次の閉じ方（対称性）	四次元の段で a を持つ類が閉じること・中心の取り直しの条件の合成の段
読 a を持つ類の残りの次数・多ループの類の座標（隣／対角 1/10・角の三重積 3/1024）・角の三重積の流れ（固定点に下から寄る）・四次元の類（一つの母数＋比の座標、斜めの隣は 0 でない）・反復の不動点のずれ	比の座標の固定点の存在・四次の 65 本の値・周期の網の三次と一ループ・大きな場
仮 η を局所結合のずらしとして吸収する案・多段の三つの要件	どれの証明も。紫外の制御が閉じる見込み

出典と再現

もの	種別	出典・道具
重みの四性質・活動のノルムの一段の評価（補題 A.6.1）・期待値と半ノルムの入れ替えの不等式（(A.6.5)）	典（付録 A.6.2 と補題 A.6.1 の本文）	R. Bauerschmidt, D. C. Brydges, G. Slade, Introduction to a Renormalisation Group Method, Lecture Notes in Math. 2242 (2019), arXiv:1907.05474（15-02 §04）
背景場の中の伝播関数	典（書誌と題のみ）	T. Bałaban の連作の土台の論文（7-07 表 1）
$SU(2)$ の熱浴法の基礎の事実	典（書誌は未確認）	M. Creutz, Phys. Rev. D 21 (1980) 2308；A. D. Kennedy, B. J. Pendleton, Phys. Lett. B 156 (1985) 393

もの	種別	出典・道具
背景と揺らぎの分解の補題・重みの分解・鎖・背景に依らない揺らぎの一段の補題・(5)・η_k の和の算術	初	この章の本文の証明
揺らぎの指数積率の条件の数（表 1）	読	本書の検討の数値の記録（$SU(2)$ の熱核の母関数を角の方向の台形の求積と指標の和で。陽性対照：$\mathbb{E}\|Y-1\|^2$ の閉じた形と 9 桁、規格化 10 桁）
一枚の η の型	読（15-06 の (1) の形は初）	15-06 §01 の出典表
次数で選別する案と、結合を変数に広げる案	本書の検討	本書の検討の記録（紫外の制御の閉じない行の整理）
一リンクの熱核比較の補題・一リンクの揺らぎの一段の補題・(6)・(7)・類 (B,q,a)・予算の算術	初	この章の本文。代数の部分は Lean の束（15-09 表 3、再検査済み）
最小の系の残り・$U(1)$ の一致・s'/s・予算の部分和	読	本書の検討の数値の記録（二リンクと一列四枚の射影の二経路・有理数の Wick と真の作用の Gauss 標本・直列の一段の当てはめとモーメントの二経路・$U(1)$ と $\theta=0$ の対照）
一ループの係数 b_0	典（教科書の式）	7-05 の式 (9)
中心の取り直しの条件・背景を母数に持つ類の命題・面の一段・多ループの類の数	読	本書の検討の数値の記録（一リンクの staple の和の乱数と符号の型・二リンクと一列四枚の当てはめと陰性対照・十字の求積と準 Monte Carlo・$2\times2\times2$ の熱核と Wilson の鞍点の二経路と有理数の当て）
角の三重積の流れ・四次元の類と規則の比較・反復の二段	読（本数の勘定・自由度・一次式・帳簿は初）	本書の検討の数値の記録（木は木のゲージと疎の正規方程式・最小ノルムの二経路、非可換の鞍点の Newton で三経路目。一ループは解析の Hessian。陽性対照：一段の $5/32$・$1/32$・$3/1024$・$5/13$・$-79/2080$・$-9/2080$ の再現。平行な背景で三次 0 の陰性対照。周期の網は実空間と Fourier の二経路が 10 桁一致）。帳簿は Lean の束（15-09 表 3、再検査済み）
staple の和の下界・予算の算術・交換子の和・対角と隣の一意性	初	この章の本文。代数の部分は Lean の束（15-09 表 3、再検査済み）

この章で使った語 ― 揺らぎの測度 $\mu_{k,W}$・背景依存 η_k・重みの四性質・背景と揺らぎの分解の補題・揺らぎの指数積率と背景の正則性の群版・入れ替えの不等式・背景に依らない揺らぎの一段の補題・背景に依らない揺らぎ・局所結合のずらし・熱浴法の事実・スコア・多段の帰納・一リンクの熱核比較の補題・形の部分と群の幾何の部分・BCH の三次・類 (B,q,a)・背景の変化の予算・中心の取り直しの条件の代償・類の母数としての背景・背景を母数に持つ類

の命題・面の一段・多ループの類・角の三重積・比の座標・斜めの隣・規則への依存。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：15-08 閉じない四行と、その案 — この章の η の吸収が四行のどれを軽くするか。

閉じない四行と、その案

この章は本書の検討です。§01・§03・§04・§07・§08 は未解決の地図です。

この部は、本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた記録です。存在そのものは第二巻の第 6〜13 部を、二つの設計の違いは第 14 部を見てください。部の位置づけは 15-00 にあります。

この章で分かること — 紫外の制御のうち、この部で閉じた部品（結合の小ささの帰納の補題・束の網の定理・背景に依らない揺らぎの一段の補題・横の縮みの帳簿）の外に残る部分を、四つの行に書きます。一つ目（大きい場込みの剰余の行）は大きな場込みの一段の剰余（結合の一段の正味の括弧）、二つ目（観測量の源の条件）は観測量の源、三つ目（背景依存の吸収と多段の行）は揺らぎの背景依存 η の吸収と多段の帰納、四つ目（ゲージの張り替えの境目の行）はゲージ固定の尺度ごとの張り替えの境目です。各行について「何が示せれば閉じるか」を一行で書き、閉じた部品との境、試せる案、捨てた案を並べます。四行は独立でなく、背景依存の吸収と多段の行が芯で、還元されずに残るのは小さい場の結合への寄与と多段の背景の正則性の二つだ、という読みを置きます。小さい場の結合への寄与はさらに割ると、平らな場の原典で知られている形と同じ部分と、原典自身が sketch と書く箇所の群版（ブロック間の二次の陽な項とその局所の打ち消し）に分かれます。最後に、紫外の制御に向けて試されている方向を十行に並べます。改訂では、ブロック間の二次の陽な項が二つのブロックの最小の系で一ループから $O(1)$ で現れること、その非局所の尾の型が粗い変数の定義で決まること、小さい場の結合への寄与の代数の層を Lean で書いたときに原典と切り方が違うかもしれない箇所、ゲージの張り替えの境目の行のゴースト行列式が臨界点の背景で木のゲージと一致することを足しました。

読む水準 — この章は三年生以上から研究の水準（測度・作用素・ノルムの評価を使う）です。初めの §01 の表 1 だけなら二年生でも読めます。

前提となる章 — 15-03 §02（分解の言明）・15-03 §03（結合の小ささの帰納の補題）・15-07 §05（背景に依らない揺らぎの一段の補題）・15-05（束の網の定理）・15-02 §06（原典に無い二行）。

先に言うこと — この章のどの行も閉じていません。案は案で、結果ではありません。〔初〕の札は、案の中の一歩として紙で確かめた初等的な事実だけに付けます。

この章の順序

1. 四行の言明 — 一行・閉じた部品との境・境の向こう（表 1）
2. 大きい場込みの剰余の行の案 — 大きな場込みの一段の剰余
3. 観測量の源の条件の案 — 観測量の源
4. 背景依存の吸収と多段の行の案 — η の吸収と多段の帰納
5. ゲージの張り替えの境目の行の案 — ゲージ固定の張り替えの境目
6. 四行の依存 — 背景依存の吸収と多段の行が芯・小さい場の結合への寄与の割り方・二つのブロックの W^{gauge}・尾の型・代数の層と原典との違い
7. 捨てた案（表 2）
8. 試されている方向の十行（表 3）・紫外の問い 12〜16・問い「Loc の二通りの定義」・問い「三次元の非局所の重み」・問い「非可換の背景でのゲージの一致」（表 4）
9. 言えないこと
10. 五分類の表と依存グラフ（表 5）

00

この章で分かること

- 閉じない部分は四行に書けます：結合の一段の正味の括弧・観測量の源の条件・η の吸収と多段・張り替えの境目（§01）。
- 大きい場込みの剰余の行の大きい場の稀さの条件（大きな場の稀さ）は、揺らぎの期待値の閉じ（BBS の (iii)）の群版（揺らぎの指数積率の群版）が立てば Chebyshev の不等式の系で、独立の評価は要りません（§02、〔初〕・揺らぎの指数積率の群版を仮定）。
- 観測量の源の条件の源は、ブロック変数の関数に取れば細かい段では積分と可換で、損が出ません（§03、〔初〕・自明）。
- ゲージの張り替えの境目の行では、木のゲージの直積分解から張り替えの場に依る Jacobian は無く、費用はゴースト行列式と境目の結合に移る、という読みです（§05）。
- 四行は背景依存の吸収と多段の行に集まり、還元されない芯は小さい場の結合への寄与（小さな場の背景に一様な二ループの剰余、Bałaban の未公刊の基本の不等式（Bałaban 1989

の Theorem 2）の中身と読む）と多段の背景の正則性の条件です（§06）。

- 大きい場込みの剰余の行・観測量の源の条件・ゲージの張り替えの境目の行は割れました。結合の一段の正味の括弧＝小さい場の結合への寄与＋大きい場の結合への寄与は恒等式で、後者は熱核の揺らぎの下で押さえられ（大きい場の剰余の上界の補題・熱核の揺らぎの稀さの補題）、ブロック変数の源は段ごとの損が無く、木のゲージに Jacobian が無いことは有限群で Lean・$SU(2)$ で紙です（§02・§03・§05）。
- 小さい場の結合への寄与は「局所の部分＋Taylor の切り捨て＋小さな場の切り＋ブロック間の二次の陽な項」に割れ、前の三つは平らな場の原典と同じ形が群の上でも条件つきで立ちます。原典に無いのは、原典自身が sketch と書く最後の項の群版だけです（§06）。
- ブロック間の二次の陽な項 W^{gauge} は、平らな場の模型のように二次から始まるのではなく、二つのブロックの最小の系で一ループから $O(1)$（$13/384$）で現れます。出所は群の非可換性でなく背景の写像の非局所性で、一ループの式は陽に書け、局所の打ち消しが要るのはその後の $O(1/\beta)$ です（§06、$SU(2)$・七枚の一列・一段・二次の係数）。
- その非局所の尾の型（平ら・指数・冪）は、粗い変数の定義で決まります。四次元の三次の残りの評価には「粗いリンク＋大域の札」の座標が合う、と読みます。境の無い三次元では一ループでも指数で和は体積に一様、四次元の周期では木の水準で指数でした（§06、四次元の一ループは測っていない）。
- 芯の行の再帰は、一列の模型では「対の型の縮む像（結合の比で二次 $5/8$・四次 $\le 5/48$）＋段に依らない新しい項＋幅について指数で減る三体の項」の形で四次まで閉じます。原典の加法性の一列版です（§06、一列・保存量の無い定義・条件つき）。
- ゲージの張り替えの境目の行のゴースト行列式は、一段・一ループ・臨界点の背景では、木のゲージの有効作用と恒等的に一致し、局所結合の帳簿の一行に収まります（§05）。

01

四行の言明

記号は 15-00 §01 と 15-07 のまま：段 k の有効結合 g_k、$\beta_k = 4/g_k^2$、小さな場の閾 $\varepsilon_k = g_k p(g_k)$、重み G_k、揺らぎの測度 $\mu_{k,W}$、ブロックの集合 $B(X)$。表 1 の「一行」は、それが示せればその行が閉じる、という条件つきの文です 仮 。

表 1　閉じない四行（「一行」は全て言明。札は閉じた部品の欄だけ）

行	何が示せれば閉じるか（一行）	閉じた部品との境	境の向こう

行	何が示せれば閉じるか（一行）	閉じた部品との境	境の向こう
1 大きな場込みの一段の剰余（結合の一段の正味の括弧）	本当の一段（ゲージ共変な平均・背景場・大きな場の領域を含む）で、有効作用から読む F^2 の係数が $1/g_{k+1}^2 = 1/g_k^2 - b + r_k$、$\lvert r_k\rvert \le C g_k^2 + \eta_k$（$\sum \eta_k < \infty$、$C, \eta$ は k にも格子間隔にも依らない）を満たし、大きな場の多体の寄与が $e^{-cp(g_k)^2} \le C' g_k^2$ で押さえられること	結合の一段の正味の括弧＋実効の結合の定義と連続性 ⇒ 結合が小さく留まる条件は結合の小ささの帰納の補題 初 。木の水準の $\beta'/\beta = \sum f^2$ は単位の束の定理 初 （可換に制限）。一ループの $O(1)$ のずれは最小の系の数 読 。結合の一段の正味の括弧＝小さい場の結合への寄与＋大きい場の結合への寄与の割り方は恒等式で、大きい場の結合への寄与は熱核の揺らぎ（辺ごとに独立・一段・背景に依らない）の下で読み取りの Lipschitz 定数 × 稀さで押さえられる 初 （大きい場の剰余の上界の補題・熱核の揺らぎの稀さの補題、§02）。Wilson の一リンクでも同じ形 初 （一リンクの熱核比較の補題）。小さい場の結合への寄与の局所の部分と Taylor の剰余の割り方は平らな場の原典と同じ形 典 ・ 初 （複素の背景での解析性の条件の下、§06）。ブロック間の二次の陽な項は二つのブロックの最小の系で一ループから $O(1)$、一次を陽に入れた後の残りは $O(1/\beta)$ 初 （ガウスの最小化と Laplace の一ループ、形式的）・ 読 （数、§06）。代数の層（Loc の射影・W^{gauge} の層・剰余の組み立て）は Lean（§06）。二段目に流すと、一列の模型で非局所の項の像は同じ型に閉じて結合の比で縮み、新しい項は段に依らず、三体の項は幅について指数で減る 読 （一列・保存量の無い定義・一段を二度・四次まで、§06）。粗いリンク＋大域の札の座標では境の無い三次元の一ループの尾が指数 読 （§06）	小さい場の結合への寄与のうち、四次元のブロック化での $O(1/\beta)$ の局所の打ち消しの群版と、非局所の尾の体積に一様な評価（三次の残りの評価。尾の型は粗い変数の定義に依る。粗いリンク＋大域の札なら四次元の木で指数、四次元の一ループは未、§06）・四次元の W の再帰（三体の不変量の数・四体の項）・本当の揺らぎの測度での大きな場の確率（揺らぎの指数積率の群版＝背景依存の吸収と多段の行）・読み取り写像の定義（何を β_{k+1} と呼ぶか）
2 観測量の源（観測量の源の条件）	尺度 L_0/M より大きい台の滑らかな源 J（強さ $\le s_0$）を入れた活動 Ke^J について、本当の $\mu_{k,W}$ で $\lVert\theta(Ke^J)\rVert_{G_{k+1}} \le 2^{\lvert B(X)\rvert} e^{Cs_0\lvert B(X)\rvert} \lVert K\rVert_{G_k}$ が k に依らない定数で立つこと	源の無い一段は背景に依らない揺らぎの一段の補題（揺らぎの法則が背景に依らないとき） 初 。ブロック変数の関数の源は揺らぎの積分と可換で、段ごとの損は無い 初 （有限の場合は Lean）。熱核の一段では細かいループの源は表現ごとの結合の熱核のずらし 初 （§03）	源が細かい段で非局所な活動になること（台がループの長さ／格子間隔のブロックに広がる）

行	何が示せれば閉じるか（一行）	閉じた部品との境	境の向こう
3 η の吸収と多段の帰納	$\mu_{k,W}$ ＝（背景に依らない法則）×（密度 $\rho_{k,W}$）と割り、$\log \rho_{k,W}$ の背景依存のうち F^2 の向きと中心のずれを母数と背景の取り直しに吸収した残りが $\eta_k = O(g_k^{2+\delta})$（$\delta > 0$）で、かつ背景の正則性の条件と多体のノルムの縮みが段に一様に立つこと	一枚・二枚で吸収が正確に起きる 初（15-06）。背景に依らない揺らぎの一段の補題の $\eta = 0$ 初 。横の縮みの帳簿 初（15-03 §04）。背景に依らない揺らぎの一段の補題の Wilson の一リンク版 初（条件つき、15-07 §05）。η の形の部分は幾何級数に入る 初（一列の鎖・一段の不等式を仮定、15-07 §06）。背景 a を類の母数に持たせると、二リンクと一列四枚で残りは $\theta^0 \beta^{-3/2}$ に下がり、予算は段数に一様 読（次数の数）・初（予算の算術、15-07 §06）。単一のループの一段では a の更新は群の積で全次数で閉じる 初（15-07 §07）	多ループの類の座標の値（三次元 $2 \times 2 \times 2$ では面ごと＋隣の対で二次、角の三重積で三次、四次は多面の結合。角の三重積は二段目で縮まず固定点に寄る。四次元は一つの母数＋比の座標（二次に斜めの隣が要る）で、固定点の存在と規則に依る値が残る、15-07 §07）・段を重ねる背景の正則性の条件・結合 b を類の母数に持たせたときの更新（15-07 §05）。a を母数に持たない類では $SU(2)$ の群の幾何の部分（BCH の三次）の予算は発散する（15-07 §07）
4 ゲージ固定の張り替えの境目	段 k の局所ゲージと段 $k+1$ の局所ゲージをつなぐ、場に依る変換の Jacobian と境目の項が、類の中で和の有限な損（$g_k^{2+\delta}$ の型か幾何級数）として評価できること	軌道の向きの平坦性の命題（軌道の向きの Hess＝0）初（15-01 §03）。大域の固定は無い 典 。木（軸）のゲージの存在・一意（Gribov の多重性なし）・配位の直積分解・Faddeev–Popov の重みが定数・根を共有する二本の木の間の張り替えが和を保つ全単射 初（有限群は Lean、$SU(2)$ は紙、§05）	費用の形は定まった：木のゲージでは Jacobian は無く、費用は小さな場の条件の劣化 $\|W_e - 1\| \le (d-1)(L-1)\varepsilon$ と、背景共変ゲージを併用するときのゴースト行列式。後者は、一段・一ループ・臨界点の背景では木のゲージの有効作用と恒等的に一致し、局所結合の帳簿の一行に収まる 初（有限次元の Faddeev–Popov の補題、§05）。残るのは臨界点でない背景のまわりの積分・二ループ以上での同じ一致・局所展開の一様性と、ブロックの一辺 L を ε_k^{-1} より十分小さく取れる範囲で段を進めること

閉じる部分と閉じない部分の境は、二つの問いで引けます 読 ：「揺らぎの法則が背景に依るか」と「木の水準か、一ループ以上か」。閉じた部品は、背景に依らない揺らぎ（背景に依らない揺らぎの一段の補題）か、木の水準（単位の束の定理・結合の小ささの帰納の補題の帳簿）のどちらかにあります。

02

大きい場込みの剰余の行の案 — 大きな場込みの一段の剰余

稀さを Chebyshev で出す案：大きい場の稀さの条件は揺らぎの指数積率の群版の Chebyshev の系。 X の上で揺らぎの期待値の閉じの群版（揺らぎの指数積率の群版）が $s = tc/h_k^2$ で立つ、すなわち $\mathbb{E}_{\mu_{k,W}} \exp\bigl(s \sum_{l \in \bar{X}} \|A_l\|^2\bigr) \le 2^{|B(X)|}$ なら、Chebyshev の不等式で

$$P_{\mu_{k,W}}\Bigl(\sum_{l \in \bar{X}} \|A_l\|^2 \ge \varepsilon^2 |\bar{X}|\Bigr) \;\le\; 2^{|B(X)|}\, e^{-s\varepsilon^2 |\bar{X}|} \tag{1}$$

です 初 （揺らぎの指数積率の群版を仮定したときの一行）。閾を $\varepsilon = h_k\, p(g_k)$ の型に取れば右辺は $2^{|B(X)|} e^{-tc\,p(g_k)^2 |\bar{X}|}$、すなわち大きい場の稀さの条件の形です。大きな場の稀さに独立の評価は要らず、揺らぎの指数積率の群版の指数モーメントがそのまま稀さになります。平らな場の付録で大きな場の重みがこの役を持つのは既知の構造で 典 （15-02 §04）、群の上で足したのは「揺らぎの指数積率の群版が立てば」の一言だけです。背景に依らない揺らぎの一段の補題の熱核の積では $M = m^{|\bar{X}|}$ から直ちに $P \le m^{|\bar{X}|} e^{-s\varepsilon^2 |\bar{X}|}$ です 初 。留保：揺らぎの指数積率の群版そのものが背景依存の吸収と多段の行に依るので、大きい場込みの剰余の行の大きい場の稀さの条件は背景依存の吸収と多段の行に従属します。

熱核の揺らぎの稀さの補題 — 熱核の揺らぎでは揺らぎの指数積率の群版が閉じた形で立つ。 $SU(2)$ の熱核 p_t（$t = 1/\beta$）は、像の和の負の項を落として $\sin\theta \le \theta$ とするだけで三次元の Gauss の半径で上から押さえられます：非減少の $g \ge 0$ について $\mathbb{E}_{p_t} g(\theta) \le e^{t/2}\, \mathbb{E} g(|Z|)$、$Z \sim N(0, t I_3)$ 初 （熱核の Gauss 上界の補題）。辺ごとに独立な熱核の条件・一段に限る条件・揺らぎの背景独立の条件の下で、リンクの集合 $\bar{X}$ のどれかが閾 h を超える確率は $|\bar{X}|\, e^{t/2}(1 + \sqrt{2/\pi}\, h/\sqrt{t})\, e^{-h^2/(2t)}$ 以下、指数モーメントは $m(s,t) \le 1 + e^{t/2}\bigl((1-2st)^{-3/2} - 1\bigr)$（$0 \le st < \tfrac{1}{2}$）で、どちらも背景に依りません 初 （熱核の揺らぎの稀さの補題）。よって大きい場の稀さの条件は熱核の揺らぎの下では仮定なしの一行です。有限の Chebyshev の段と和の上界は Lean：`weighted_tail_le_exp_moment`（重み ≥ 0・$\sigma \ge 0$）・`union_tail_le_sum`（重み ≥ 0）。数（$t = 1/4$〜$1/32$・$h = 0.3$〜1）では上界は 12 枡全てで真の値の上にあり（比 1.03〜1.34）、定数を変えた陰性対照は $h^2/t \ge 1$ の 10 枡で破れます 読 。

Wilson の一リンクでも同じ形（一リンクの熱核比較の補題）。 熱核のままの上界は Wilson の一リンク密度には当たりません（$b = 4$〜64、$h = 0.3$〜1 の 15 枡のうち 7 枡で破れる） 読 。

角の上限 θ_0 の内側では熱核 $p_{1/b'}$（$b'=b(1-\theta_0^2/12)$）の K 倍で押さえ、外側は稀な尾にまわすと、大きな場の確率と指数モーメントは Wilson の一リンクでも熱核の量の K 倍＋尾で押さえられます 初 （$SU(2)$・一リンク・一段）。数では 45 枡全てで上（比 1.07〜1.91）、揺らぎの指数積率の条件の閾は Wilson の閉じた形の 0.44〜0.95 倍です 読 （詳細は 15-07 §05）。大きい場の稀さの条件を本当の揺らぎの測度で出すのに要る揺らぎの指数積率の群版の一リンク版はこれで立ちますが、多リンクの揺らぎの指数積率の群版は背景依存の吸収と多段の行に残ります。

剰余を小さい場と大きい場に割る案：結合の一段の正味の括弧を小さい場の結合への寄与と大きい場の結合への寄与に割る。読み取り写像 b（有効密度から β_{k+1} を読む写像。候補は粗い一枚の二次の係数）が全変動距離について Lipschitz で、定数が $L_b \le C\beta^2$（一リンクで $\mathbb{E}[\frac12 \operatorname{tr} U] \approx 1-3/(4\beta)$ から $db/dE \approx \frac43\beta^2$）、大きな場の領域を一つ入れた密度と入れない密度の全変動の差が $e^{-c\,p(g)^2}$ なら、大きな場の分の剰余は $|r_k^{\mathrm{large}}| \le C\beta_k^2 e^{-c\,p(g_k)^2}$ で、$p(g)=c_0(1+\log g^{-1})^{p_0}$（$p_0\ge\frac12$、$cc_0^2$ が十分大きい）なら $\le C' g_k^2$ です 仮 （二つの仮定の下の算術）。残る芯は小さい場の結合への寄与＝小さな場の背景に一様な二ループの剰余で、これが未公刊の基本の不等式の中身に当たる、と読みます 仮 （15-02 §02 の序文の一文からの読み）。留保：読み取りを二次の係数に取ると、二次の水準で座標が二つ要る（15-06）ので、Lipschitz は組の上で言う必要があります。

剰余を小さい場と大きい場に割る案は割れた（大きい場の剰余の上界の補題）。小さな場に条件づけた密度を ρ_S とし、$r=r^{\mathrm{small}}+r^{\mathrm{large}}$、$r^{\mathrm{small}}:=b(\rho_S)-\beta_{\mathrm{pred}}$、$r^{\mathrm{large}}:=b(\rho)-b(\rho_S)$ と割るのは恒等式です 初 （β_{pred} は木＋一ループの予言）。読み取り $b=1.5/(-\log \mathbb{E}\cos\theta)$ の全変動の Lipschitz 定数は $\frac43 b^2/E \to \frac43\beta^2$ で、$|r^{\mathrm{large}}| \le \frac43 (b_S^2/E_S)\,P_L$（$P_L$ は大きな場の確率、$E\in(e^{-2},1)$）です 初 。ただし大きな場の確率あたりの実際の感度は $\approx \frac13\beta^2 h^2$ で、閾を小さな場の尺度 $h\propto 1/\sqrt{\beta}$ に取れば β の一次です 読 （一リンク・熱核と Wilson で同じ数）。読み取りの関数 $\cos\theta$ が $\theta=0$ で平らなためです。一リンク・辺ごとに独立な熱核・一段に限る・揺らぎの背景独立の三条件の下で $|r^{\mathrm{large}}|\le C' g^2$ の十分条件は、閾 $\theta_h = g\,p(g)$（$\beta=4/g^2$、すなわち $\sqrt{\beta}\,\theta_h = 2p$。log は自然対数）について $p(g)=c_0(1+\log g^{-1})^{1/2}$、$c_0^2>2$ です 初 （算術。全変動の形からは $c_0^2>3$）。**残る芯は r^{small}＝小さい場の結合への寄与の一項だけ**で、その割り方は §06 にあります。本当の揺らぎの測度で r^{large} を出すには揺らぎの指数積率の群版が要ります（背景依存の吸収と多段の行）。

板での確かめ。揺らぎが面ごとに独立な熱核の板 2×2（$SU(2)$・一段・像を落とす・細かい面 20 枚）で、大きな場の領域 Ω を入れた像と入れない像の差 r^{large} を数えました。粗い一枚の読み取りでは $\mathbb{E}\frac12\operatorname{tr} W_B$ が面ごとの積に割れる（指標の畳み込み）ので、r^{large} はブロックに入る六枚だけで決まり、板全体を入れた値は同じ β の一リンクの値の $(b_B/\beta)^2\sum_i a_i^2 = 1/3$ 倍です 紙 （数は 0.3334〜0.3358 計算 ）。像は面ごとの法則について多重線形なので $\|\rho$

$\Omega - \rho_0\|_{\mathrm{TV}} \le 1-(1-q)^{|\Omega|}$ で、一次では $r^{\mathrm{large}}(\Omega)$ は一枚ずつの和です 紙 。閾を上の規約の $\theta_h = g\,p(g)$ に取ると、$|r^{\mathrm{large}}|/g^2$ は $c_0^2 > 2$ で $\beta \le 256$ まで減り、$c_0^2 = 2$ が境で（そこでだけ C' が p^3 の程度で増える。境の振る舞いは一リンクで $\beta \le 4096$ まで確かめた）、閾を小さな場の尺度 $\theta_h \propto 1/\sqrt{\beta}$ に固定すると β に比例して増えます 計算 。境の位置は大きい場の剰余の上界の補題の十分条件 $c_0^2 > 2$ と一致します 読 。共有の辺の大きな場は触れる二つのブロックの間の結合を対角の変化と同じ桁だけ動かすので、大きな場の領域は「その面に触れるブロックの和集合」として数えるのが合います 読 。板は一リンクの難しさを増やさず、多リンクの難しさは全て「揺らぎが独立でない」側——本当の $\mu_{k,W}$ での多リンクの揺らぎの指数積率の群版（背景依存の吸収と多段の行）——に残ります。条件：辺ごとに独立な熱核・一段に限る・揺らぎの背景独立の三条件・一段・像を落とした熱核。

臨界点の偶性の案：臨界点の偶性で、背景依存を θ^4 の係数へ送る。拘束つきの真の臨界点のまわりで揺らぎの作用が揺らぎについて偶なら（二枚で確かめた事実、15-06 §02）、β' の読み取りに $O(\theta)$ の寄与は無く、背景依存は θ^2 の係数（F^2 の読み取りそのもの）と θ^4 以上（源）に全部入ります。すると小さい場の結合への寄与の「背景に一様」の要請は「θ^4 の係数が有界」に弱まり、その分は横の縮みが払います（15-03 §04） 仮 （偶性は二枚で確かめた事実、三枚では自明）。

四枚では偶性は破れ、結論は別の理由で立つ。 一列四枚では、拘束つきの真の臨界点のまわりの揺らぎの作用の偶性は破れます。破れは呼吸の方向（内の二枚が U^* の軸に沿って同じ向きに傾く測地線。座標に依らない）に集まり、Wilson の作用では $S(t) - S(-t) = 2\beta\sin(\alpha^*/2)(\sin 2t - 2\sin t)$ が全次数で成り立ちます 紙 （三次の係数は $-\beta\sin(\alpha^*/2)$。18 の背景で数値と 7 桁で一致 計算 ）。偶になるのは $W_b = W_a^{-1}$ のときだけです。ところが臨界点の偶性の案の結論——β' の読み取りに奇数次の背景依存が無いこと——は偶性に頼らずに立ちます。θ^1 は $\mathfrak{su}(2)$ に共役で不変な一次形式が無いこと（ゲージ不変性）から無く、θ^3 は、二本のループの背景では対 (W_a, W_b) と (W_a^{-1}, W_b^{-1}) が二つの軸に垂直な軸のまわりの π 回転で同時に共役であること（$-1 \in$ Weyl 群の対の版）から無く、有効重み w は背景の反転 $(a,b) \to (-a,-b)$ で全次数ちょうど偶です 紙 （数でも確かめた 計算 ）。だから一列の鎖（独立な背景のループが二本）では、小さい場の結合への寄与の背景一様性は「θ^4 の係数が背景に一様に有界」に弱まり、根拠は揺らぎの偶性から背景の反転の共変性に替わります（θ^4 の係数の有界性そのものは示していない）。四次元のブロックでは独立なループが三本以上になり、三重積 $a\cdot(b\times c)$（$f_{abc}F^3$ の型）の奇の不変式があるので、θ^3 の係数の有界性も要ります 仮 。揺らぎの法則の側（スコア）では奇の部分が $\theta^0\beta^{-1/2}$（RMS$\times\sqrt{\beta}$ が 0.07〜0.13）で残り、15-07 の残りと同じ型です 計算 。

中心の分布の母数の案：大きな場を中心の分布の母数 z として類に入れる。一枚の重み f を中心 $\mathbb{Z}_2$ の指標の偶奇で $f = f_e + f_o$ に割り、遠い半球の相対的な重さ $z := f(\pi)/f(0)$ を大きな

場の母数と呼ぶ案です（Wilson では $z = e^{-2\beta}$、熱核では像の和の主項で $e^{-\beta\pi^2/2}$ の程度）。大きな場の領域を類の外でなく $z^{|\Omega^c|}$ の寄与として数えれば、大きい場の稀さの条件は類の中の文になります 仮 。留保：一枚の類関数の上の話で、多リンクでは中心のずれは中心の渦（プラケットの $\mathbb{Z}_2$ の符号の面）になり、一枚の z では数え切れません（15-04 §01 の留保）。

03

観測量の源の条件の案 — 観測量の源

源をブロック変数の関数に取る案：源をブロック変数の関数に取る。観測量 J を段 k_J のブロック変数 V の関数（粗い格子の Wilson ループ・ブロック化した場の滑らかな汎関数）として定義すると、$k < k_J$ では段 k の揺らぎの積分は V を止めて行うので $\int \rho_k e^{sJ(V)} d\mu = e^{sJ(V)} \int \rho_k \, d\mu$ がちょうど成り立ち、小さい場の解析性の条件・大きい場の稀さの条件の定数は変わりません（損 0） 初 （自明）。$k \geq k_J$ では J は粗い格子の局所関数（ループの形ごとの項）になり、e^{sJ} は作用のループの形ごとの結合を s だけずらします。観測量の源の条件は「類が閉じる条件の座標にループの形ごとの結合が含まれ、一段の写像がその座標について Lipschitz であること」に帰着する、という筋です 仮 （15-06 の母数の座標）。留保：物理の観測量は細かい格子のループで、ブロック化したループとの差は観測量の繰り込みです。ブロック化した観測量で観測量の源の条件を言明し直すのは言明の選び直しで、細かいループの観測量の源の条件ではありません。Bałaban の序文の「ループの期待値」がどちらを指すかは本文で照合していません。

源の損の勘定と、細かいループの源。源をブロック変数の関数に取る案の可換性は有限の場合に Lean で書けています（`coarse_source_commute`・`coarse_source_commute_comp`、仮定：配位と粗い変数が有限・段が入れ子）。ノルムで見ると、強さ s_0 のブロックごとの局所の和の源について因子 $e^{s_0|B(X)|}$ が一度だけ出て、段ごとには積み上がりません 初 （ブロック化した観測量に限る）。細かい格子のループの源は、辺ごとに独立な熱核の条件の一段と自己回避のループ C について $\mathbb{E}\, F(U_C) = (F * p_{t|C|})(W_C)$、すなわち表現 j の結合を $e^{-tj(j+2)|C|/2}$ 倍にずらすだけです 初 （Monte Carlo で一次・二次とも $|z| \leq 1.2$ 読 ）。損は定数倍でなく座標の縮み（周長則の形）で、類の座標には表現の添字が要ります。ブロック化する一段では、一列四枚（$SU(2)$ の熱核・対角の定義・一段）でブロックの中の細かいループ C に源 $\lambda \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{Re\,tr}\, W(C)$ を足すと、一段後の粗い作用の結合は $\lambda f_C^2 + O(\lambda/\beta)$ だけずれます。f_C は束の網の定理（15-05）の射影の重みで β に依らず（包絡線の定理 $\partial\beta'/\partial\beta_p = f_p^2$、和の規則 $\sum_p f_p^2 = 1/5 = \beta'/\beta$） 紙 、一ループの補正は有理数の d_1/β（内の一枚 $f_C^2 = 2/25$・$d_1 = -17/375$、内の 1×2 のループ $8/25$・$-16/125$、外の一枚 $1/50$・$-1/750$）で、$\log\beta$ は出ません 紙 （一ループは形式的） 計算 （$\beta = 4$〜2048、二経路で 9 桁）。新しく生まれる項は粗い作用の四次 $-\lambda f_C^4/12$ で、これも β に依りません 計算 。細かいループの源は、ブロックの中に収ま

る限り、損ではなく束の網の重みによる座標の移しとして一段を通り、一段の源についての Lipschitz 定数 $f_C^2 + O(1/\beta)$ は β に一様です（観測量の源の条件の一段・一ブロック版）。ブロックの境をまたぐループ・四次元のブロック・本当の $\mu_{k,W}$・大きな場・多段は閉じていません。

位置に依る結合の案：位置に依る結合 $\beta(x)$ の類。プラケット密度型の源 $J = \sum_p f(p)(1 - \frac{1}{2}\operatorname{tr} U_p)$（$f$ は尺度 L_0/M で緩やか）は、Wilson の作用の β を $\beta(x) = \beta + s f(x)$ に替えたものです。一段の写像が各点で β の写像を当てたもの＋勾配の補正 $O(|\nabla\beta|\, a_k/L_0)$ なら、勾配の項は $a_k/L_0 = 2^{-(K-k)}$ の幾何級数で和は有限です 仮 。可換な $U(1)$ の Villain の作用では、一列四枚の一段の β' は面ごとの剛さ $\beta(p)$ の網の実効の剛さ（Thomson の式）で、$\beta(p) = \beta + s\,g(p)$ と置くと $\beta' = \beta/5 + s\sum_p f_p^2 g(p) + O(s^2/\beta)$、すなわち一次は束の網の重みでの局所平均にちょうど一致します 紙 （像を落とした点ごとの積。数は Thomson の式と 6×10^{-12} 以内 計算 ）。勾配の補正は二次から始まり、上の $O(|\nabla\beta|\, a_k/L_0)$ より一段良い形です。ループ型の観測量（面積則の源）には使えず、局所の観測量向きです。

却下：Hölder だけで源を剥がす。評価を $(\mathbb{E}G^2)^{1/2}(\mathbb{E}e^{2sJ})^{1/2}$ に割る道は、細かい段で J の台がループの長さ／格子間隔のブロックに広がる非局所な活動になり、一段の損 $2^{|B(X_J)|}$ をブロックあたりの小さな因子で払えず、段を重ねると積み上がるので閉じません（表 2）。

04

背景依存の吸収と多段の行の案

背景依存の吸収と多段の行の中身は 15-07 §06・§07 にあります。要点だけ書きます。$SU(2)$ の Wilson の作用では一リンクの条件つき法則が背景に依らない一母数の族の元で、背景は局所結合と中心の向きにだけ入ります 典 （熱浴法の事実、書誌は未確認）。多リンクでは四元数の恒等式で作用が「局所結合 × 背景に依らない形」＋一次＋共役のずれに割れ 初 、密度のスコアを θ の次数で選別すると、θ^0 の一部は再中心化で消え、θ^1 の一部は結合微分として吸収される、という選別の案です 仮 。最小の系では吸収できない残りの最低次数は $\theta^0\beta^{-1/2}$ と $\theta^1\beta^0$ で、閾をどう選んでも和は発散しますが、背景 a を類の母数に持たせると残りは $\theta^0\beta^{-3/2}$ に下がり、予算は段数に一様になります 読 （二リンクと一列四枚の数、条件つき。15-07 §06）。

横の縮みの帳簿に乗せる。吸収後の残り（類で切り捨てた形の係数の寄与と、$b_p = \beta\cos(\theta_p/2)$ の θ^4 以上の展開＝源）は横の座標の小さなずらしで、15-03 §04 の帳簿で $\lambda < 1$ なら外れは和でなく上限 $\sup_k \varepsilon(\beta_k)/(1-\lambda)$ で押さえられます 初 （一段の不等式を仮定したときの等比級数）。多段の背景の正則性の条件は「背景場の像の細かい角が粗い角の L^{-2} 倍＋横の座標の

$O(g^2)$」の形で要ります 仮 。横の縮みは可換な木の水準で測ったもの（15-05）で、非可換の配位・一ループでの値は未です。

05

ゲージの張り替えの境目の行の案 — ゲージ固定の張り替えの境目

木のゲージの案：張り替えの Jacobian は無い — 木のゲージの直積分解。各ブロック B に生成木 T_B（根 r_B）を取り、ゲージ群 $G^{\Lambda} = \prod_x G$ を根でない点の因子 $G_{\mathrm{int}} := \prod_{x \neq \text{根}} G$ と根の因子 $G_{\mathrm{coarse}} := \prod_B G$ に割ります（点ごとの直積なので自明に直積）。木のリンクを 1 に固定する写像は G_{int} の作用の切断で、各点から根へ向かう木のリンクが一本ずつあるので一意に解け、軸（木）ゲージは完全で Gribov の多重性が無く、Faddeev–Popov の行列式は定数です。G_{coarse} はブロック平均がゲージ共変なら粗い格子のゲージ群と同型で、段 $k+1$ の木のゲージはそれを固定します。すなわち**段 k と段 $k+1$ のゲージ固定は同じ群の直積の二つの因子をそれぞれ固定するもので、張り替えの場に依る Jacobian はありません** 初 （既知の構造の言い換え。軸ゲージの Faddeev–Popov の行列式が定数であることは標準の事実）。

これで 15-01 §03 の「Jacobian（Faddeev–Popov の行列式）が有効作用に入る」は、軸ゲージについては空になります。費用は別の二か所に移ります 読 ：(i) 木の長さ ℓ による小さな場の条件の劣化 $\|U_l - 1\| \le \ell\varepsilon$（7-05 §05）、(ii) 揺らぎに背景共変なゲージを使うならそのゴースト行列式。Bałaban の四次元の論文でどのゲージを使ったかは本文で照合していません（三次元ではブロックごとの軸ゲージを Faddeev–Popov の方法で入れている）。

有限群では Lean で、$SU(2)$ では紙で。根つき全域木の上で、木の辺を全て 1 にするゲージ変換が存在し、根で一致する二つは等しく（Gribov の多重性なし）、残るゲージの自由度は大域の定数だけです。配位の全体は「根で 1 のゲージ変換」×「木の辺で 1 の配位」に直積分解され、各代表の重みは $|G|^{|V|-1}$ で代表に依らず（Faddeev–Popov の重みが定数）、根を共有する二本の木の代表の間の写像はゲージ不変な関数の和を保つ全単射です。代表の上の平均は根の一致を仮定しなくても木に依りません。以上は Lean：`exists_gauge_tree_trivial` ・ `gauge_tree_trivial_unique` ・ `configEquiv` ・ `fiber_card_const` ・ `regauge_bijective` ・ `regauge_sum_eq` ・ `slice_average_tree_indep` （仮定：群・頂点・辺が有限、関数はゲージ不変、張り替えは根の共有）。$SU(2)$ と正規化した Haar 測度では、木の外の変数の置き換えが左右の不変性で Jacobian 1 になり、Faddeev–Popov の量は深さの順の三角構造で恒等的に 1 です 初 。軸ゲージの Faddeev–Popov の行列式が定数で Gribov の多重性が無いことは標準の事実で 典 、足したのは有限群での形式化と費用の形です。

費用の形。完全軸の木（親は $x - e_\mu$、μ は $x_\mu > 0$ となる最大の向き）では、木の外の辺 (x, μ) の変数 $W_{x,\mu}$ は基本閉路のホロノミーで、その閉路は $N_{x,\mu} := \sum_{\nu > \mu} x_\nu$ 枚のプラケットの櫛で

張れます。全プラケットで $\|U_p - 1\| \le \varepsilon$（作用素ノルム）なら

$$\|W_{x,\mu} - 1\| \;\le\; N_{x,\mu}\,\varepsilon \;\le\; (d-1)(L-1)\,\varepsilon \tag{2}$$

です 初 （L はブロックの一辺の点数。7-05 §05 の三角不等式を N 回）。上界は一様な可換の場で到達します（四次元 $L = 4, 6$ で比 8.997・14.986、上界は 9・15） 読 。乱数の場では比は $\sqrt{L}$ に近い伸び（1.58→2.15）でした 読 。**張り替えの境目は Jacobian でなく小さな場の条件の管理**で、段 k の木のゲージで場の展開を使うにはブロックの一辺 L を ε_k^{-1} より十分小さく取る必要があります。

ゴースト行列式を吸収する案：ゴースト行列式を局所結合の座標で吸収する。背景 W の中のゴースト作用素 $\Delta_W^{\mathrm{gh}} = d_W^{*} d_W$（格子の共変ラプラシアン・随伴表現）について、$\log\det\Delta_W^{\mathrm{gh}} - \log\det\Delta_1^{\mathrm{gh}}$ が小さな場の背景の上で局所汎関数に展開でき、主項は $\sum_p c_{\mathrm{gh}}\|F_p\|^2$（$F^2$ の係数＝一ループの係数へのゴーストの寄与）、残りは θ^4 以上（源）と指数で減衰する非局所の項で、定数は k に依らない、という見込みです 仮 （格子の熱核の展開の型。局所展開の一様な収束は示していない）。そうなら F^2 の分は背景依存の吸収と多段の行の局所結合のずらしに合流し、θ^4 以上は横の座標に入り、境目は新しい種類の損でなく一ループの係数の一部になります。陰性対照として $U(1)$ ではゴーストは背景に依りません。

ゴースト行列式を吸収する案は一ループで合流する ― 二つのゲージの一致。ブロックの周のホロノミー（粗い変数）を固定し、背景 W をその拘束の下での作用の最小点に取ると、背景は臨界点で、揺らぎの Hessian H と線形化したゲージの生成 D について $HD = 0$ です。このとき有限次元の Faddeev–Popov の補題から

$$\log\det H_{\mathrm{tree}} \;=\; \log\det\!\left(H + DD^{\mathrm{T}}\right) \;-\; 2\log\det M_{\mathrm{FP}}, \qquad M_{\mathrm{FP}} = D^{\mathrm{T}}D \tag{5}$$

が成り立ちます 初 （条件：一段・一ループ・背景は臨界点・D は単射・H は $(\mathrm{im}\,D)^{\perp}$ の上で正）。左辺は木のゲージの、右辺は背景共変ゲージ（$\xi = 1$、ゴースト込み）の一ループの量で、**二つのゲージの一ループの有効作用は背景の関数として恒等的に等しく**、周辺の結合 β_0' も形の座標も背景の座標も変わりません。ブロック形の行列式の分解と、補題の出力を仮定にした対数の恒等式は Lean：`det_gauge_plus_ghost_split`・`log_tree_eq_cov_sub_two_ghost_blocks`（仮定 $\det H' > 0$・$\det K > 0$・木の量が $\det H'/\det K$）・`coeff_tree_eq_coeff_cov`（線形な係数の取り出し）。補題そのもの（積分の変数変換）は紙です。数 読 （$SU(2)$・3^4 点の一ブロック・可換の背景・$\theta \le 1$・解析と有限差分の二経路）：(5) の残差は 4.5×10^{-13} 以下で、ゴースト行列式の背景依存は実在してほぼ局所です（$\log\det M_{\mathrm{FP}}$ の古典作用あたりの係数 $+0.024$、一ループの F^2 の係数 -1.003 の 2.4%）。それは背景共変ゲージのゲージ場の行列式の余分の部分と打ち消します。陰性対照：$U(1)$ ではゴーストは背景に依らず（差 0）、ゴーストを落とすと β_0' が 0.024 ずれ、背景を臨界点からずらすと (5) は勾配の一次で破れます。したがってゴーストは境目の新しい損でなく、

背景共変ゲージを選んだときの局所結合の帳簿の一行で、木のゲージではその行が初めから無い、と読みます。残るのは、臨界点でない背景のまわりで揺らぎを積分する構成での運動方程式に比例する差、二ループ以上での同じ一致（格子の BRST の恒等式の型と見込む。照合していない）、局所展開の一様性です 読 。

境目を一つの行列にする案：境目を一つの行列にする。全ての粗い面の角を同時に固定した木の水準の網（15-05 の束の網の定理）では、粗い作用は二次形式 $\theta^{\mathrm{T}} B \theta$ で、隣り合う粗い面の結合と四次の写りの混ざりが境目の結合に当たります。ゲージの張り替えの境目の行の「境目の項が和の有限な損か」は「四次の写りの行列のノルムが 1 を割るか」の一つの数になる、という読みです 読 。束の網の定理の下では ℓ^4 で測った写りは粗い向きで 1/16 を超え（四次元で見つけた値の最大が約 0.15）、体積に一様な上界は得ていません 読 （15-05）。三段の合成では全ての段で $\mu_3 \le 0.20$（木・可換・ 読 。段 4 の核まで実測、段差の Stein^{1/4} は 0.300・0.180・0.084・0.031、$k \ge 4$ は摂動で ≤ 0.163）、三段の値は 0.099（切り詰め込み $\lesssim 0.12$）。三色の場の線形の比の sup は一色の sup に等しい（紙：球面の平均 $E_s(s\cdot v)^4 = |v|^4/5$。Lean：ColorAverage、有限の重みつき設計で）ので、一色で測った錐の値は三色の場にそのまま通ります。非可換の木の補正：錐の比 R の一次の係数は粗い場の媒介変数の取り方（粗いゲージの成分）に依り、量として意味を持ちません。線形の比 R_0 の極大点（8^4・12^4 の三点、ほぼ一色の配位）では一次の係数が 10^{-5} 以下で、sup R の非可換の補正は二次から（計算・木・一段）。極大点での二次の係数は正だがほぼ可換の非線形性（cos）で、非可換の部分は負（計算・三点・一段）。W の座標（差を含む二次、次元 6）の一段の写像は、零モードを直した局所の代表では 60 型の基底で一段のスペクトル半径 0.363（下は 0.25 に揃う）、三段の合成はスペクトル半径 0.042・重みつき ℓ^2 で 0.055〜0.125・ℓ^1 で 0.465（計算・木・可換。基底の外の尾は $D \le 4$ まで有界）。

類関数だけで進む道の壁。粗い面ごとのホロノミーの類の角だけを座標にする道（Migdal–Kadanoff はこれ）では、四次元の超立方格子で粗いゲージ場を復元するのに要る粗い Bianchi 恒等式（粗い立方体の六面のホロノミーの積＝1）が書けません。非可換ではそれは共通の基点と接続の道があってようやく書け、類の角だけでは隣の面の相対的な向きが落ちるからです。**類関数だけで進む道は階層格子の近似を越えられない**、と読みます 読 。

Haar の不変性は張り替えの代わりになるか。背景に依らない揺らぎの一段の補題の設定で揺らぎの法則が各リンクで共役不変なら、分解 $U = WY$ はゲージ共変で、ゲージ固定は一切要りません。ただしこれは揺らぎの法則を熱核の畳み込みで「与える」型の繰り込み（群の上の Polchinski 流）に限られ、熱核の畳み込みは自由度を減らさないので、ブロック変数を作る四次元のブロック化の張り替えの代わりにはなりません 読 。

06

四行の依存 — 背景依存の吸収と多段の行が芯

四行は独立ではありません。左が閉じると右が軽くなる、という向きで書くと次の図になります 読 （案の間の論理の見立て）。

```
背景依存の吸収と多段の行（η の吸収：背景依存 ＝ 局所結合のずらし）
  ├─→ 揺らぎの指数積率の群版・期待値と半ノルムの入れ替えの群版が段に依らない定数で立つ
  │       └─→ 大きい場込みの剰余の行の大きい場の稀さの条件（稀さを Chebyshev で出す案：Che
  │               └─→ 大きい場込みの剰余の行の大きい場の結合への寄与（剰余を小さい場と大きい
  ├─→ 類が閉じる条件の座標（β・ループの形ごとの結合・形の座標）
  │       └─→ 観測量の源の条件（源をブロック変数の関数に取る案：源は座標のずらし）
  └←── ゲージの張り替えの境目の行のゴースト行列式（ゴースト行列式を吸収する案：ーループ・臨界
          ↑
      ゲージの張り替えの境目の行の Jacobian は無い（木のゲージの案：木のゲージの直積分解）

還元されない芯：
  小さい場の結合への寄与 ＝ Loc ＋ Taylor の切り捨て ＋ 小さな場の切り ＋ W^gauge（ブロッ
                前の三つは平らな場の原典と同じ形（複素の背景での解析性の条件・余白 q の下）
                原典に無いのは W^gauge とその局所の打ち消しの群版（原典自身が sketch と
                  W^gauge はーループから陽（二つのブロックで 13/384）、打ち消しが要るのは
                  非局所の尾の型は粗い変数の定義で決まる（粗いリンク＋大域の札なら指数、と
                  W の再帰（一列）＝ 対の型の縮む像 ＋ 段に依らない新しい項 ＋ 指数の三体
                → 臨界点の偶性の案で「θ⁴ の係数の有界性」に弱まる可能性
  多段の背景の正則性の条件 ＝ 背景場の正則性（細かい曲率 ≤ L⁻² × 粗い曲率 ＋ 小さな項）
```

図から読むこと 読 ：大きい場込みの剰余の行の大きい場の稀さの条件と大きい場の結合への寄与、観測量の源の条件、ゲージの張り替えの境目の行のゴーストは、どれも背景依存の吸収と多段の行の吸収の座標が定まれば、その系か、その座標のずらしとして書ける形をしています。背景依存の吸収と多段の行から独立に残るのは小さい場の結合への寄与と多段の背景の正則性の条件の二つで、前者は Bałaban の連作が仮定（結合の留まり）を外すのに要った未発表の部分、後者は背景場の正則性の多段の版です。

小さい場の結合への寄与をもう一段割る — 原典で知られている形と同じ形。小さな場の一段の有効作用 $S'_h(\Phi)$（揺らぎの側の閾 h、背景の側の閾 h_0、余白 $h_0 \le q\,h$、$0<q<1$）を、局所の部分 Loc_{2k}（真空・周辺の結合 β'_0・形の座標）と剰余 $R := (1-\mathrm{Loc}_{2k})S'_h$ に割ります。周辺の結合は一つの数 β'_0（F^2 の係数の長波長の値）に限り、束の網の定理の二次形式の残り（θ の座標では非局所）は形の座標に入れます。この割り方は平らな場の原典（BBS の Loc。階層模型の式 (5.2.10) では $\mathrm{Loc}=\mathrm{Tay}_4$）と同じ形で 典 、局所の係数が一意に決まり剰余が高い次数の側に入ることは有限の基底の代数です 初 （Lean：`loc_split_unique`、一変数 $s=\psi^2$ の多項式・$k=2$ の型）。言明は次の形です 仮 （四次元では示していない）：$\beta \ge \beta_0$、格子の大きさ、段に依らない定数 $C,\kappa,r_0,c>0$ があって

$$\beta_0' = 2^{d-4}\beta - b + r, \quad |r| \le \frac{C}{\beta}; \qquad \|R_X\| \;\le\; Ce^{-\kappa d(X)}\Big[\Big(\frac{h_0}{r_0}\Big)^{2k+2}\big(1+\beta\tau h_0^2\big) + e^{-c(1-q)^2h^2\beta}\Big] \tag{3}$$

です（b は一段の一ループの定数、τ は非可換の木の BCH の項で、可換に制限した木では 0）。剰余は、切りなしの有効作用 S'_∞ と切りの分 Δ_{cut} への恒等式 $R = (1-\mathrm{Loc})S'_\infty + (1-\mathrm{Loc})\Delta_{\mathrm{cut}}$ で二つに割れます 初 。指示関数は解析性を壊すので、解析性の議論は前者にだけ当て、後者は確率で別に払う、という割り方です。

- **Taylor の切り捨て** $(h_0/r_0)^{2k+2}$。背景を複素の範囲 $|\theta_P| \le r_0$ に延ばした解析性と β に依らない上界（複素の背景での解析性の条件）の下で、Cauchy の評価から $\|(1-\mathrm{Loc}_{2k})S_X\| \le Me^{-\kappa d(X)}(eh_0/r_0)^{2k+2}/\big(1-(eh_0/r_0)^2\big)$（$h_0 < r_0/e$）です 初 （複素の背景での解析性の条件を仮定。級数の組み立ては Lean：`taylor_tail_bound`、仮定 $0 \le s < \rho$・$|a_m| \le M/\rho^m$）。**これは平らな場の原典の Lemma 7.5.3（$(h_+/h)^{k+1}$ の型）と同じ形**です 典 。一列四枚の熱核の出発では $r_0 = \pi$（共役点 $-1 \in SU(2)$ までの距離で、$\log(w/\sin w)$ の特異点の位置）で β に依らず 初 、剰余は $h^{6.00}$ に比例して $\beta = 8\text{〜}1024$ で β に依りません 読 （$SU(2)$・一列四枚・熱核・一段・二経路の係数の一致 10^{-11}）。$U(1)$ ではこの項は数値の床（3〜6 桁下）で、h^6 の項は群の曲がりから来ます 読 。
- **小さな場の切り** $e^{-c(1-q)^2h^2\beta}$。揺らぎがリンクごとの熱核の積なら熱核の揺らぎの稀さの補題（§02）で押さえられます 初 （辺ごとに独立な熱核・一段に限る・揺らぎの背景独立の三条件の下）。一列四枚では切りの寄与は $h^2\beta$ だけの関数で、率は余白なしで $c \approx 0.24$、背景を閾の内側 $q \le \frac{1}{2}$ に置くと $c(1-q)^2 \approx 0.75$ と約 3 倍になります 読 （$SU(2)$・$U(1)$ とも同じ形）。段を重ねたときの釣り合いは $p(g) = c_0(1+\log g^{-1})^{1/2}$ で $c_0^2 \ge 1/(c(1-q)^2)$（一列四枚の率で 1.33〜4.2）だけです 初 （算術・一列四枚の率を使う）。

「一段の剰余は $C|B|(h^2\beta)^k$ の大きさ」という形は当たりません。k は $(h_0/r_0)^{2k+2}$ にしか、$h^2\beta$ は切りの側（大きいほど小さい）にしか現れません 読 （一列四枚の数と紙の形から）。四つの部品の判定は次のとおりです。

- (i) 揺らぎの法則が背景に依らない：リンクごとの熱核（背景に依らない揺らぎの一段の補題）と一列四枚の持ち上げ（揺らぎの共分散が背景に依らない）で立ち 初 、四次元のブロック化では立たない（背景依存の吸収と多段の行）。ただし小さい場の結合への寄与に要るのはその弱い形「複素の背景で揺らぎの Hessian の実部が一様に正」です。
- (ii) 二次は束の網の定理の主項＋局所な一ループ：拘束つきの揺らぎの共分散 C_W の指数減衰を仮定すれば 初 。2^4 の箱で $\beta' = 0.442260\,\beta - 0.591$ 読 （可換な鞍点・一ループ）。
- (iii) 四次以上：持ち上げは一列四枚でだけ正確で、四次元のブロックでは複素の背景での Laplace の剰余の評価が要る（複素の背景での解析性の条件の中身）。

- (iv) 局在：有限距離は指数減衰に替わり、**二次の水準でブロックの間に陽な無関係な項が生まれる**。

原典に無い行。(iv) の項が、割った後に残る行です 読 （平らな場の原典の付録 A.1・A.5 の本文と、Bałaban の序文の一文の突き合わせ。Bałaban の本文は照合していない）。平らな場の原典では $I_j = e^{-V_j}(1 + W_j)$、$W_j = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{Loc})F_{w_j}(V(b), V(\Lambda))$（(A.1.3)–(A.1.4)）で、二次の寄与の和が三次の誤差を除いて 0 になる局所の打ち消しが (A.5.3)–(A.5.4) にあります 典 。**原典自身がこの箇所を「we sketch an argument」と書き、本体を別の文献に送っています** 典 。群の上で要るのは、その群版——背景場の中の揺らぎの共分散 C_W で作る

$$W^{\mathrm{gauge}} = \tfrac{1}{2}\,(1 - \mathrm{Loc})\,F_{C_W}\big(V(b), V(\Lambda)\big) \tag{4}$$

と、その局所の打ち消し——を組み、周辺の結合への二次の寄与が「一段の一ループの定数 b $+O(g^2)$」に収まることです 仮 。Bałaban の未公刊の基本の不等式が「二次の摂動の計算」と呼ぶものに当たる、と読みます 読 。この行は三つに割れます。

- **ブロック間の項の定義**：W^{gauge} の定義。有限の格子の式で、評価は要らない（代数）。
- **局所の打ち消し**：ゲージ不変性の下での Loc の恒等式（代数。Ward 恒等式の型と見込む）。
- **三次の残りの評価**：残りが $O(g^3)$ で、複素の背景と体積に一様（解析：複素の背景での Hessian の正値性・C_W の減衰・形の座標の体積に一様な縮み）。

局所の打ち消しの四次元の $O(1/\beta)$ の層。四次元で、ブロックの比 2 の一段を全ての向きで組みました。細かい箱 4^4 をブロック 2^4 の 16 個に割り、ブロックの中心を結ぶ長さ 2 の粗いリンクに熱核の柔らかい拘束をかけ、殻の上（粗い変数を止めた条件つき）で $O(1/\beta)$ の二次を取りました 計算 。零の向きはゲージの向きとちょうど同じ数（1827）で、殻の上の二次は二つの木のゲージで 2×10^{-9}（差分の精度）まで一致し、背景場のゲージ（Faddeev–Popov の行列式つき）の値とも相対 2×10^{-7} で一致します。殻の上の二次がゲージの取り方に依らないことは、四次元で直に確かめられています 計算 。ブロックをまたぐ二次を変数の位置で分けて、Loc を対の中点の二次まで取ると、残りはブロックの間隔を単位とする波数で、二倍の波長で対の全体の 0.24〜0.86%、一段先の最も短い波長で 3〜16% です。二次元の板の隣の対（0.6%・11%）と同じ桁です 計算 。残りが波数の四乗（次元 8）で縮むのは、対の中点について点対称な対と、点対称な位置のまたぐ和です（頂点で接する対で冪 3.87、箱の中心に置いた面で接する対で 3.93、全てのまたぐ対の和で 3.89。波数を半分にするごとに 3.95〜3.98 に近づく）。点対称でない個々の対では、冪が小さい波数で 3 へ下がり、次元 7 の項が小さい係数で残ります 計算 。並進で対称な格子では、全てのまたぐ対を足した体積あたりの値は、平面波の位相に依らず、波数の偶関数になります。そのため、Loc を二次まで取った後の残りに

次元 7 の項は無く、残りは次元 8 から始まります 紙 。またぐ対の特異値は、対の固定群の表現の重複度どおりに縮退します。頂点で接する対では、四つの向きの置換表現の標準成分 3 本が等しくなり、段のついた少数の積にはなりません 計算 。開いた箱で、全体を一点の Loc で測った残りの比が箱の大きさで増える（一段先の最も短い波長で 7% から 28%）のは、遠い対のためではありません。一点のまわりの Taylor で、その点から遠いリンクの裾が太るためです 計算 。ブロックをまたぐ二次を粗い面の流束の対に分け（ゲージ不変な分け方）、各対をその中点で Loc すると、Loc を二次まで取った後の残りは、一段先の最も短い波長で全体の約 2%、二倍の波長で約 0.1% になり、箱の大きさに依りません（冪 3.98〜4.00、次元 8） 計算 。ブロックの中心を一つの Loc の点にすると、粗い面がその点から離れているため残りは三割ほどになります。BBS の帳簿では、各項の Loc の点をその項の台の中に取ることが要ります 読 。一列と二次元の板の側では、またぐ対の分解の代数——一列の模型の有理数の算術（Lean：LocalCancellationOneRow）、一つの積をブロックごとの二乗と差の二乗に割る恒等式（Lean：RankOneRemainder）、一様な場と勾配の試験場で両側から消える残りを作るブロックの deflation（Lean：BlockDeflation）——を Lean で確かめてあります（どれも有限の添字の実係数の恒等式で、大きさは数の側にあります）。条件：小さな粗い格子（粗い面 24 枚以下）・一段・殻の上の $O(1/\beta)$ の二次・差分の精度 10^{-9} の桁・冪は四つの波数からの見立て・周期の箱で冪は測っていない。

原典に無い行の中身（改訂）。ブロック・スピンの粗い変数で書くと、ブロック間の二次の項 W^{gauge} は一ループから O(1)（七枚の一列で 13/384）で始まりますが、これは座標の見え方です。ぼかした（細かい）背景場 $\phi^{*} = F(\Phi)$ の局所ポリマーの座標で Loc（一枚ごとの単項式）を取ると、一ループの O(1) の二次は一枚ごとの和（SU(2) では内側の面 5/12・端の面 1/4）と同じブロックの中の対に入り、13/384 はその引き戻しです（計算・有理数）。ブロックをまたぐ本当の剰余は、ブロックの並びが木の系では O(1) で消えて O(1/β) から始まり、粗い変数に保存量が無ければ距離について e^{−κd}（$\kappa = \ln(5+2\sqrt{6}) \approx 2.29$、揺らぎの共分散の率）で減ります（U(1)・SU(2)、計算）。閉路のある系では O(1) の二次のまたぐ項が現れますが、最小の閉路ではその全てが頂点を一周するホロノミーの二乗 Θ^2 の定数倍で（SU(2)、有理数。U(1) では 0）、一様な場で消える $(\partial F)^2$ 型の小さな項（一枚ごとの項の 10^{-3}）として小さな集合に局在します。したがって芯の行は、形としては原典の「細かい背景場の局所の多項式＋小さな集合に局在した剰余」に戻りますが、四次元では剰余は小さくありません（下の但し書き）。残るのは三次の残りの評価（剰余の体積に一様な評価と、small set の打ち消し）と、四次以上の剰余（O(1) の一ループの泡）の扱いです 読 。条件：一列と二次元の板・一段・形式的な Laplace・SU(2) の O(1/β) と四次の剰余は板では未。板のトーラス（4×4〜10×10、有理数）では、ぼかした背景場の座標の一ループ O(1) の二次を粗い場 a に引き戻すと、$\Sigma_B \rho \, \Sigma a_B{}^2 + (\partial a)^2$ 型の剰余に割れ、密度 ρ はどのブロックでも同じ値（$\rho_L = 0.080253, 0.080704, 0.080710, 0.080710$、L = 4, 6, 8, 10）で、記号の $\hat{k}(0)$ と一致します。隣のブロックの対 $u_B u_{B'}$

の項（係数 1.6×10^{-6}）は恒等式で一様な部分と勾配の部分に必ず割れ、一様な部分は ρ の 10^{-5} 倍（一枚ごとの係数の繰り込み）に入ります。開いた板では境の層で ρ が隅 +40%・端 +15% ずれますが、これは背景 $\bar{\phi}=F\cdot1$ の境の効果で、ブロックごとの反対項 P(B) で吸収できる形です。つまり marginal な部分は一様な密度の繰り込みで、またぐ剰余は $(\partial a)^2$ 型です（計算・有理数。条件：二次元・一段・形式的な一ループ・ρ の閉じた形は未）。以上は一列と二次元の板での結果です。四次元では、同じ細かい Loc の定義で割っても、別のブロックに属する二枚の面の対の剰余は小さくなりません。剰余を最小にする選び方（拘束つきの最小二乗）でも、4^4〜12^4（共変な道のブロック平均）では、ブロックをまたぐ剰余は一枚ごとの項の 0.063〜0.071 倍（最大の比）・0.104〜0.109 倍（Frobenius）で、体積に依りません（計算）。板の 10^{-3} 倍は二次元で面どうしが揺らぎを共有しないことから来た小ささです。したがって四次元では、原典に無い行の「W^{gauge} は一ループから O(1)」はそのまま立ち、ぼかした背景場の座標で移るのは形（一枚ごとの多項式＋同じブロックの対＋ブロック間の剰余）と帳簿の方法（細かい Loc・small set の反対項）であって、剰余の小ささではありません。この大きさを決めるのは平均の取り方で、Bałaban 型の平行線の平均でも共変な道でも約 7%、直線一本の道では約 1% まで下がりますが、直線は合成しても平均にならず帳簿には使えません（計算・典）。減衰の率を決めるのは平均とゲージ固定の組で、Feynman 型（奇の点）の固定では乗数の核の極 0.95〜1.09／ブロック、ブロック内の木の axial 型の固定では 2.2〜3.5（根からの見込み、読）です。粗い場へ引き戻した一ループの二次は、平均と固定のどの組でも一致し（相対 2×10^{-15}）、組の違いは殻の外（off-shell）の部分にだけ現れます（計算）。どの組でも BBS の体積の重みの帳簿（$(\eta-1)\kappa > L^{d}\log 2$ が要る）には 8 桁以上足りず（Lean：LargeSetWeight（bbs_weight_vs_decay・summable_shell_iff・card_shell）。不等式の形と、殻の数が多項式なら重み A の級数が収束する ⇔ $A < e^{\kappa}$）、Bałaban–Dimock の木の長さの重み（$e^{\{\kappa\, d_M\}}$ と M 立方体）なら $M \geq M_0$ で載る形になりますが、M_0 は約 30〜55 ブロック（組合せの定数の上限では約 2000）の見積りにとどまります（読）。したがって板の形（原典の形への回帰）は、調べたどの組でも四次元では成り立ちません。一様な場での値（F^2 の係数の $q\to0$）は 10^4 までの数では定まりません（計算）。small set の項の配分と行の和・Loc の分解（(1−Loc) の側が一様な場で 0）は Lean：SmallSetRowSum、段ごとの縮み $\mu_k \leq \bar{\mu}$ のアフィン再帰は Lean：ThetaSquareOneStepAffine（板では一段の縮み ½、sup ≤ 1/10080）。

粗い場へ引き戻した剰余（芯）。剰余の大きさは、一ループの二次を細かい場で見るか、粗い場へ引き戻して見るかでも変わります。粗い場へ引き戻した二次（殻の上の量で、ゲージ固定の選び方に依らない）では、乗数の核の極は恒等式 $\Lambda_1 K = -Y$ によって代数的に消え 紙 ・ 計算 、残る減衰の率は揺らぎの物理のモードの質量 1.76／ブロック（像なしの二重極）になります 計算 。局所の部分を一枚の面だけで表すと剰余は約 10%（Frobenius 25〜40%）ですが、一枚の面と触れ合う二枚の面（長方形・椅子・角で接する面＝次元 6 の改良項、係数は一

枚ごとの 2〜3%）まで局所の部分に入れると、残りは約 1%（Frobenius 約 6%）で体積に依りません（8^4〜12^4）[計算]。すなわち、細かい場で見た剰余の九割は有限個の改良項の係数であり、帳簿では一段ごとに L^{-2} で縮む結合として運べます[紙]（次元の勘定）。残りの約 1% は触れ合わない面の対で、板の 0.1% とは約 10 倍離れています。触れ合わない面の対も型ごとに改良項へ移すと、剰余は一型あたり約 0.6〜0.9 倍で落ち、十個ほどの型で 0.1% を下回ります[計算]。さらにブロック平均を共変な道と直線の道の 4 対 6 の混合にすると、物理のモードの根は 2.54／ブロックに上がり、一枚の面と十個ほどの改良項を局所の部分に数えたあとの芯の剰余は一枚ごとの項の約 0.05%（Frobenius 約 0.5%、10^4〜12^4）となって、大きさと率の両方で板（0.1%、2.29）に並びます[計算]（条件：混合の平均の多段の合成は、Bałaban の平均（立方体の一様な平均）とは違う自己相似の平均（情報次元 1.92）に向かい、その上での正則性の評価は確かめていません。改良項の係数の多段の流れは二段まで確かめ、一ループのずれは一段あたり 0.3〜0.5 倍で縮みます）。

零和の系では、この行は空です。ブロックが一つしか無い系（一列四枚・一つの箱）は、階層模型と同じく零和の条件で $W = 0$ です（原典の付録 A.1 の文の型）[読]。15-06 の一列四枚の形の剰余の定理がその模型で完全な例になれたのは、模型が易しいからでなくこの行が空だったから、と読めます。逆に、**最小の系の数ではこの行を試せません。**試すには、二つのブロックが揺らぎの共分散でつながる系が要ります（問い「零和でない最小の系」）。その系の答えが次の段落です。

二つのブロックの最小の系 — W^{gauge} は一ループから陽に始まる。一列四枚を二つ並べて境のプラケットを共有させた七枚の一列（$SU(2)$・熱核・一段。粗い変数は「二つの対角のループが等しい」と定める）で、粗い作用の二次の係数を測ると、ブロックの間の係数は木の $-\beta/32$ のほかに一ループの $O(1)$ を持ち、その値は $13/384$ に近づきます（差 7.9×10^{-10}）[読]（$\beta = 32$〜512・二経路で係数が 10^{-10} で一致）。平らな場の原典の W は二次から始まりますが、この粗い変数では一次（一ループ）から現れます。出所は群の非可換性ではなく、ブロックの拘束で作った**背景の写像の非局所性**です：可換な $U(1)$ の Wilson の作用（cos の作用）でも $51/4096$ が出て、ガウスの作用（Villain）では全て 0 です[読]。$SU(2)$ の一ループの項は、細かい背景について局所な式（熱核の前因子と S^3 の Laplace–Beltrami から来る行列式）を背景の写像で引き戻したもので陽に書け[初]（ガウスの最小化と Laplace の方法の一ループ。漸近展開は形式的で、剰余の評価は付けていない）、二つのブロックの係数は $K_{AA} = \frac{7\beta}{32} - \frac{67}{384}$、$K_{AB} = -\frac{\beta}{32} + \frac{13}{384}$ です。その局所の部分（行の和）は周辺の結合 β_0' に吸収され、残り（粗い曲率の差の二乗、四次元では次元 6）は形の座標に入ります。一次を陽に入れた後の残りは $O(1/\beta)$（係数 $\approx -1/384$、当てはめ）で、局所の打ち消しが要るのはこの部分です[読]。非可換の木の項は $-\frac{\beta}{768}|a \times b|^2$ の四次で、一様な場（$a = b$）で消えるので局所の結合には触れず、W の側にだけ入ります[読]。二次形式の局所と非局所への分解とその一意性、行の和の線形性による吸収は Lean：`loc_split`（K は対称）・

`nonlocal_vanishes_on_constant`・`rowSum_add`・`two_site_unique`・`one_loop_numbers`（代入の算術だけ）。これで問い「零和でない最小の系」は、最小の系で答えの形が出ました：原典に無い行の中身は「W^{gauge} が一次から陽な一ループの式で始まること」と「その後の $O(1/\beta)$ の局所の打ち消し」に分かれ、前者はこの系で式と数が合っています。条件：七枚の一列・対角の定義・一段・二次の係数・$\beta \geq 32$。四次元の格子の一段と体積に一様な評価には何も言いません。

二段目に流す — W の座標の再帰の群版（一列）。同じ一列の模型で、一段目に生まれた非局所の項（隣り合う二枚の差の型 $|x-y|^2$ と、二つ以上の差を含む三つの四次の型）を細かい作用に足して二段目を流し、それが粗い場の上でどう写るかを、近似なしの被積分関数の数値積分（$\beta = 32$〜512）と、背景を代入した有理数で見ました。二段目の非局所の項は「一段目の項の像（細かい項の、粗い場を与えた条件つき期待値の非局所の部分）」と「二段目で新しく生まれる項」に割れます 初 （非局所の項について一次の Taylor の式）。像は同じ四つの型と局所の項に閉じ（二ブロックの出力では不変量の数え上げで自動 初 ）、二次の型は $15/128$ 倍、四次の型は高々 $5/256$ 倍に写ります 初 （木の有理数。四次の区画の固有多項式は Lean：`quartic_block_charpoly`）・ 読 （$1/\beta$ の補正）。粗い結合の比（$\beta' = 3\beta/16$）で測ると二次は $5/8$、四次は $5/48$ 以下で、どれも段ごとに縮みます。一方、その段で新しく生まれる項は段に依らない数（木で $1/64$、一ループで ψ^2 の係数を結合に含めると $9/384$）なので、非局所の項は 0 ではなく**決まった値へ幾何級数で引き込まれます** 初 （一ループの式は Laplace の主項の形式的なもの。帳簿は Lean：`affine_iter`（$\lambda \neq 1$）・`affine_bound_uniform`（$0 \leq \lambda < 1 \cdot 0 \leq C$）・`new_term_gamma`）。原典の連続の場では「前の段の非局所の項は核を変えずに残り、新しい段の分が足される」という加法性（(A.1.4)–(A.1.5) の $w_j = C_1 + \cdots + C_j$ と Exercise 2.2.4 からの恒等式 $E_C \theta F_w(A,B) + F_C(A_+,B_+) = F_{w+C}(A_+,B_+)$）で書かれる部分で 典 （(A.1.4)–(A.1.5) は本文で確かめた。Exercise 2.2.4 からの恒等式は本文で確かめられていない 読 ）、群の上ではそれが「縮む像＋段に依らない新しい項」になります 読 。二次の型の像は群の BCH から $|a \times b|^2$ を $-13/768$ で生みます（数値の読みで紙の導出なし）。条件：$SU(2)$ 熱核（対照に $U(1)$ Wilson）・一列・対角の定義・二ブロック七枚の一段を二度・隣り合う対の四つの型・非局所の項について一次・粗い場の四次まで。ℓ^4 の錐 $|\mathrm{Q}(\phi)| \leq \mathrm{c} \, \| \phi \|_4^{\,4}$ は、各点に掛かる係数の ℓ^1 が有限な全ての四次の多体の項を含む（Lean：QuarticCone）ので、三段の縮みは「縮む像」の四次元版を不変量の数え上げなしで与えます（木・可換）。W の座標（次元 6 の二次）を段ごとに流すと三段で 0.38（特定の入力の値で作用素ノルムではない） 読 。

多体の尾 — 一列の再帰が閉じる形。超ブロックが三つ以上並ぶと、非局所の項の像には三つの粗い場を同時に含む四次の項（$|a|^2(b\cdot c)$・$(a\cdot b)(a\cdot c)$ などの六つ）が出て、「対の型」という形そのものは段で保たれません。境の一枚を半分ずつ配る粗い変数（保存量なし）の一列で、その係数を三つの源（前の段の四次の対の像・二次の対の像・その段で新しく生まれる項

の木と一ループ）ごとに測ると、どれも三つ組の端から端までの幅 d について $e^{-\kappa d}$ で減り、$\kappa = \ln(5+2\sqrt{6}) \approx 2.29$ は背景の写像の率と同じでした 読 （有理数と浮動小数の二経路が 5×10^{-17}、群の上の Laplace と有限の β の全求積が木で 4×10^{-13}・一ループで 4×10^{-10}。木と四次の対の像は前因子が定数、一ループと二次の対の像は前因子が d の一次。$L\le 8$・$d\le 7$）。一つのブロックを含む三体の和は体積に依らず、三体の像はさらに 5×10^{-3} 以下に縮みます 読 （木の段・線形の背景）。帳簿は Lean：`three_body_sum_le`（仮定 $0\le\rho<1$・$|q(d)|\le C\rho^{d}$）・`pair_tail_uniform`（仮定 $0\le\lambda,\mu<1$ と二本の再帰の不等式）。保存量のある定義に戻すと同じ三体の係数は距離に平らになり、出所は群でも一ループでもなく粗い変数の定義です。したがって**一列の模型では、芯の行の再帰は「対の型の縮む像＋段に依らない新しい項＋距離について指数で減る三体の項」の形で四次まで閉じます**——これが原典に無い行の一列版です 読 。ただし $d=2$ の三体の係数は隣り合う対の係数と同じ大きさ（頭は小さくない）なので、型の集合には短い三体の項を最初から入れておく必要があります。条件：一列・保存量の無い定義・熱核・一段・四次まで・木と一ループ・前の段の非局所の項について一次。四次元（三体の不変量は向きと位置の組で数が多い）・四体の項・一ループの水準の三体の自己の像は測っていません。一ループで各段に新しく生まれる四次の項は、6^4 の格子で $\|\theta\|_4^4$ の +0.038（Landau ゲージで二次を引いた値。生で +0.046、超局所で +0.014。二次の項の引き方にはゲージの定義が要る） 読 。一ループは三次の項（三色の三重積 $\varepsilon_{abc}\theta_a\theta_b\theta_c$ の型、$f_3/\|\theta\|_3^3\approx 0.02$、二色に限ると 0）も生み、$\pm\theta$ の両方が錐に入るので sup では消えません。三次の錐 $|C(\theta)|\le c_3\|\theta\|_3^3$ を別に押さえる段が要ります（非可換）。三次の相加相乗・三色の三重積 $|u\cdot(v\times w)|\le(|u|^3+|v|^3+|w|^3)/3$・錐の引き戻しは Lean：CubicCone。三段の ℓ^3 の上界は二つの核で 0.57／0.30、全ての段で 1 未満（計算・木）。

非局所の尾の型は、粗い変数の定義で決まる。三次の残りの評価の体積に一様な評価に要るのは、$(1-\mathrm{Loc})W^{\mathrm{gauge}}$ の重みが距離とともに十分速く減ることです。一列四枚を L 個並べた鎖・二次元の板・Bianchi の拘束を持つ三次元の柱 $2\times2\times L$ と周期の格子で測ると、尾の型は群でも一ループでもなく、細かい変数が粗い変数どうしの間をどう跨ぐかで決まりました 読 （$SU(2)$・熱核・一段・粗い場の二次の係数・可換の背景）。

- **平ら**：粗い変数を「二つの対角のループが等しい」と定めると、共有の一枚の共役類が鎖に沿って保存され、ブロック間の一ループの係数は距離に依らず $(4L+5)/(6(3L+2)^2)$（$L=2$ で $13/384$）。$L=2$〜8・$\beta=32$〜512 で距離 1〜4 の差は相対 4×10^{-12} 読 。保存量を粗い変数に加えれば非局所性は消えます 初 。周期の格子の全束 0 という一本の大域の拘束も、同じく平らな $-1/(2N)$ を作ります。
- **指数**：境の一枚を二つのブロックに半分ずつ配る（重みで共有する）と保存量は消え、係数は $C(r+\alpha)e^{-\kappa r}$、κ は木の率 $\ln(5+2\sqrt{6})\approx 2.29$（二次元の板で 2.43）。粗い面を粗いリンクの変数で書く（Bianchi を粗い変数に昇格させる）表し方も、柱・板・三次元の全てで指

数で、柱では $\ln(9+4\sqrt{5}) \approx 2.887$、一ループも同じ率で前因子 r です 読 （鎖 $L \le 21$・$r \le 8$、柱は木 $L \le 20$・一ループ $L \le 16$）。

- **拘束の伝搬の型**：粗い面のホロノミーをそのまま座標にする表し方（擬逆の代表）では、Bianchi の拘束を陰に持ち、尾は拘束の伝搬で決まります。開いた面のある柱では指数 $e^{-1.763r}$（率 $\ln(3+2\sqrt{2})$）、境の無い周期の板では r^{-2}、三次元の周期では冪（実効の指数 3.3 前後）です 読 （木の水準）。

距離の重みつきの和 $\sum_r r|Q(r)|$ は、平らなら体積とともに増え、指数なら体積に依らず飽和し（鎖で 0.0447、柱で 9 桁）、冪 r^{-p} なら d 次元の殻と合わせて $p-d>1$ のときだけ一様です 初 （算術。Lean：`flat_not_uniform_geometric`（平らな式について）・`weighted_sum_uniform_linear`（仮定 $|q(r)| \le C(r+1)\sigma^{2r}$、$0 \le \sigma < 1$）・`power_sum_uniform`（$s>1$）・`power_sum_unbounded`（$s \le 1$））。数え上げの規則は次のとおりです 読 ：δ の共有が作る保存量と大域の拘束は平ら、重みの共有と粗い変数に昇格させた拘束は指数（率は細かい場の転送の率）、局所の拘束を陰に持つ座標は拘束の伝搬の型（境があれば指数、境が無く二方向以上に広がれば冪）。四次元のブロック化では、粗い変数を「粗いリンク＋大域の札（トーラスを貫く束・中心の $\mathbb{Z}_2$ の磁束・Polyakov の向き）」で取れば局所の部分は指数で、大域の札は階数の小さい平らな項として別の帳簿に載る、と読みます 読 。四次元は木の水準だけを測りました（次の段落）。

三次の残りの評価の座標 — 粗いリンク＋大域の札は、境の無い三次元の一ループと四次元の木で指数。全ての粗い面を同時に固定した一段（可換の背景・粗い場の二次の係数）を、境の無い三次元の周期の箱で、粗い変数を「粗いリンク」と「大域の札（各平面を貫く全束の 3 本＝粗い面の調和の部分）」に分けて書くと、$SU(2)$ 熱核の一ループの非局所の重みは $(r+\alpha)e^{-\kappa r}$、$\kappa = 3.094$（木の率 $\ln(11+2\sqrt{30}) = 3.089$ と一致）で、距離の重みつきの和は体積に依らず飽和します（$L=12 \to 16$ で相対 2.7×10^{-6}、全ての相手の行でも増分 0.172・0.024・0.0019） 読 （$\beta \to \infty$ の $O(1)$・粗い $2\times2\times L$・$L \le 16$・解析の Hessian と差分の Hessian の二経路の差 $\le 10^{-10}$）。札は粗いリンクの部分と交差項を持たず、Bianchi を満たす面の空間は粗いリンクの曲率と札の直和に一意に割れます 初 （Lean：`norm_sq_add_harmonic`（仮定 $D^\dagger b = 0$）・`range_sup_tags`（仮定 $d_2 \circ D_c = 0$）・`decomp_unique`・`finrank_ker_eq`）。一ループで新しく現れる大域の向き（Polyakov の向き）は、粗い長さが 2 増えるごとに約 $1/75$ で指数に小さくなりました。同じ一段を札を外した座標（粗い面のホロノミー）で書くと、札の射影が平らな $-1/(2N)$ を相対 10^{-12} で作ります。四次元の周期 n^4（$n \le 16$）の木では、粗いリンクの座標の核は指数（r^{-1} 前後の前因子、$\kappa \approx 2.08$）で和は飽和に向かい、札を外した座標は冪（当てはめで $r^{-4.4}$）＋平らで和は n に比例して増えます 読 。したがって三次の残りの評価の座標は粗いリンク＋大域の札で、四次元の木の水準まで〔読〕の数で支えられます。四次元の一ループは測っていません。

代数の層を Lean で書く ― 原典と同じ形と、切り方が違うかもしれない所。小さい場の結合への寄与の言明 (3) のうち、代数の層と実数の不等式の組み立てを Lean で書きました（二つの束、40 の定理、全て標準の三つの公理）。(A) Loc を行列の成分を残すか捨てるかの射影として定義すると、線形・冪等で、局所の部分と純に非局所の部分への分解は一意、Loc の像と $1-\mathrm{Loc}$ の像は Frobenius の内積で直交します（`locM_idem`・`split_unique`・`frob_loc_nonloc`、仮定なし。跡の保存は残す組が反射的なとき）。(B) Loc をブロックの対角の射影に取ると、$W^{\mathrm{gauge}} = \frac{1}{2}(1-\mathrm{Loc})F_C$ はブロックを跨ぐ共分散の成分だけで書け、二つのブロックで $W(V(b),V(\Lambda)) = \frac{1}{2}V_A^{\mathrm{T}}C_{AB}V_B$ です（`Wg_explicit`・`two_block_W`）。(C) 係数の Cauchy 型の上界と切りの上界を仮定として受けると、一段の剰余は (3) の括弧の形で押さえられ（`one_step_remainder`、余白 $h_0 \le qh$）、予定 $g_k^2 = 1/(A(k+1))$・$h = c_0 g p$・$\beta = 4/g^2$ の下で $c_0^2 \ge 1/(c(1-q)^2)$ なら段を重ねた和は段数 K に一様です（`total_remainder_uniform`、仮定 $A \ge 1$・$r_0^2 \ge 1$・$m \ge 3$ ほか）。解析性（複素の背景での解析性の条件）と切りの確率は仮定として外から入っています。

原典と同じ形 典 ・ 読 （対応は原典の式番号の読みで、原典の本文を開き直していない）：Loc が射影で分解が一意であること（BBS §5.2・付録 A）、W がブロックを跨ぐ共分散の成分だけで書けること（(A.1.3)–(A.1.4)）、局所の打ち消しのうち「W に入る部分は周辺の結合に寄与しない」という射影の層（(A.5.3)–(A.5.4) の手前まで）、Taylor の剰余の形（Lemma 7.5.3）。**切り方が原典と違うかもしれない所** 読 ：

1. Loc を行列の成分の射影に取ったこと。原典の Loc は局所の多項式の空間への射影で、二次形式では零運動量の記号（行の和）を残す型です。周辺の結合のずれを跡で定義すると、同じブロックの中の非対角の成分が入らず、零運動量の型とは数の意味が変わりえます。射影の性質（冪等・一意・直交）そのものは取り方に依りません。
2. 零和の理由。Lean の $W = 0$ は Loc の定義から出ますが、原典の階層模型の零和は共分散の構造から出ます。同じ「$W = 0$」でも理由が違います。
3. 切りを確率で別に払うこと。解析性を切りの無い有効作用にだけ当て、切りの分を確率の評価で別に払う割り方は、原典（平らな場の regulator の方法）とは別の道です。
4. 段の和の取り方。各段の上界を $1/(k+1)^2$ で押さえて足す（p 級数）のは、原典の形の座標の縮み（幾何級数）と結合の流れの組み合わせとは違い、粗い評価のため Loc_4（$m \ge 3$）を仮定しています。

どの点も小さい場の結合への寄与の言明の形を変えるものではなく、どこまでが原典と同じ形で、どこからが別の切り方かを分けるための注です（問い「Loc の二通りの定義」）。一点目は二つのブロックの系で数になりました：$O(1/\beta)$ の二次の非局所の残りは、行の和の Loc では差を含む $\frac{1}{768}|a-b|^2/\beta$ だけで新しい座標を作らず、成分の射影では差を含まない $-\frac{1}{384}a\cdot b/\beta$

が残ります 初 （閉じた式の展開は形式的）・ 読 （$\beta = 32$〜2048 で 10^{-11}。$SU(2)$ 熱核・七枚の一列・対角の定義・一段）。原典の型は行の和で、二つの定義は恒等式 $s_{\mathrm{row}} = s_{\mathrm{comp}} + \frac{1}{2}N_{\mathrm{comp}}(x,x)$ でつながります（Lean：`sRow_eq_sComp_add`・`row_sum_cancels`（仮定：F が対称）・`row_split_unique`）。群版の局所の打ち消しの中身——(A.5.3)–(A.5.4) のポリマーについての二次の寄与の和が三次の誤差を除いて 0 になること——は Lean にしていません。

まとめると、小さい場の結合への寄与について言えたのは、**平らな場の原典で知られている構造（Loc＋Taylor の剰余・切りの尾・ブロック間の二次の項）と同じ形が、群の上でも複素の背景での解析性の条件と余白 q の下で立つ**ことです。新しい構造を主張するものではありません。原典に無いのは、原典自身が sketch と書く箇所の群版——ブロック間の二次の陽な項 W^{gauge} とその局所の打ち消し——だけで、そのうち二つは代数、一つは解析の問題です。二つのブロックの最小の系では、W^{gauge} は一ループから陽な式で始まり、局所の打ち消しが要るのは $O(1/\beta)$ の部分で、非局所の尾の型は粗い変数の定義で決まります。代数の層は Lean で書け、そのうち四か所は原典と切り方が違うかもしれません。

07

捨てた案

表 2　捨てた案と、その理由（理由の札は欄ごと）

案	狙い	捨てた理由
熱核で優越される類	重み f を熱核で上下から挟む類 $A^{-1}p_\beta \le f \le Ap_\beta$ に取り、大きい場の稀さの条件を指標展開の尾の文にする	Wilson の作用はこの類に入らない：遠い半球で $f_W(\pi)/f_W(0) = e^{-2\beta}$、熱核は $e^{-\beta\pi^2/2}$ の程度で、比は $e^{(\pi^2/2-2)\beta} \approx e^{2.9\beta}$ 初 （多項式の因子を除く算術）。この超過が中心の分布の母数の案の z。理論を熱核の作用で定義するなら意味を持つ（保留）。角の上限 θ_0 の内側に限れば Wilson は熱核の K 倍で押さえられる（一リンクの熱核比較の補題、15-07 §05）
Hölder だけで源を剥がす	観測量の源の条件を揺らぎの期待値の閉じの有界な冪で分離する	細かい段で源が非局所な活動になり、一段の損 $2^{\lvert B(X_J)\rvert}$ が払えない 読
基本＋随伴の作用で η を作用の側へ	二次の比 2 を保つ作用で一母数の類を作る	$\cos^2$ の展開に揺らぎの背景の向きの成分だけに掛かる異方的な二次形式が出て、一リンクの条件つき法則が一母数の族の元でなくなる（15-07 §06） 初 。加えて比 2 の曲線は一段の流れで閉じない（15-06） 読
類関数だけで四次元	ゲージ固定を一度もしない	粗い Bianchi 恒等式に接続の道が要り、階層格子の近似を越えられない 読 （§05）
Haar の不変性で張り替えを消す	揺らぎの法則の共役不変性でゲージ固定を不要にする	熱核の畳み込みの型の繰り込みに限り、四次元のブロック化には届かない 読 （§05）

「計算資源があれば定数が陽になる」の型の案（区間演算で定数を陽にする）は、四行の芯でないのでこの表に入れていません。

08

試されている方向の十行

表 3 は、紫外の制御に向けて試されている方向を十行に並べたものです（26-11 の表 3 を移し、この部で足した部品を「いま言えること」に書き加えた）。「最小の場」は、その方向を最初に試せる一番小さな対象、「いま言えること」は札つきの現状、最後の列は、その方向が結局は既知のことの言い換えに終わる危険です。見込みの数は付けません。どの行も紫外の制御を閉じていません。

表 3　試されている方向（「攻める条件」は 15-00 §01 の紫外の制御の三つの条件、「難しさの源」は 24-07 表 3）

方向	攻める条件／難しさの源	最小の場	いま言えること	言い換えの危険
1 捩れた小さな T^4 での連作の書き直し	解析性・稀さ・結合の留まり／無次元の結合・ゲージ固定の欠如	$T^4_{L_0}$、$n_{12}=1$	捩れた小さな四次元トーラスの紫外の言明の案 仮 。原典との対応は 15-02 §06 読	細かい段は周期的な T^4 と同じで、連作そのものの書き直しになる
2 群値の σ 模型で先に	解析性・稀さ・結合の留まり／無次元の結合	二次元 $O(4)$ の捩れた円柱	移植は背景場の段まで 典 （15-02 §03）	二次元の結果は四次元に含意しない。文の形だけが持ち上がる
3 群値の場の重み	稀さ・解析性／ゲージ固定の欠如	一つのブロック	場の和の劣乗性（BBS の (ii)）の群版（背景と揺らぎの分解の補題） 初 。背景に依らない揺らぎの一段で、場の和の劣乗性・揺らぎの期待値の閉じ・次の段への単調性と入れ替えの群版が全て立ち鎖が閉じる（背景に依らない揺らぎの一段の補題） 初 。本当の $\mu_{k,W}$ での揺らぎの期待値の閉じと次の段への単調性（の群版）は言明だけ 仮 （15-07）	背景と揺らぎの分解の補題・背景に依らない揺らぎの一段の補題は背景依存 η に触れない
4 群の上の Polchinski 流（熱核で流す多重尺度）	稀さ・解析性／ゲージ固定の欠如	一リンクの類関数	一リンクの熱核の類で損は望遠鏡和 読 （15-04）。一段の重みつきノルムの評価は、揺らぎがリンクごとの熱核の積なら $\eta=0$ で閉じる（背景に依らない揺らぎの一段の補題） 初 。多リンクの結合を含む測度は未	熱核の畳み込みは自由度を減らさず、ブロック変数を作らない
5 大きな場をチェス盤で一度に払う	稀さ／ゲージ固定の欠如・無次元の結合	T^4 の周期化	ブロック変数の鏡映正値性が要る 仮 （26-05）	各段の大偏差の帰納（15-00 §03 の「最悪の幾何」）が避けられない

方向	攻める条件／難しさの源	最小の場	いま言えること	言い換えの危険
6 結合の流れの自己完結	結合の留まり／無次元の結合	どこでも	結合の小ささの帰納の補題：結合の一段の正味の括弧＋結合の連続性 ⇒ 結合の留まり（15-03 §03） 初 。帳簿の部分は初等的	結合の一段の正味の括弧を示さない限り、結合の留まりの帳簿の部分の整理に留まる
7 計算機援用で定数を陽に	解析性・結合の留まり／無次元の結合・ゲージ固定の欠如	一ブロックの線形化した作用素	浮動小数の評価の記録はあるが区間演算は未 読	定数を陽にするだけで、帰納そのものは与えない
8 臨界の正則性構造（確率量子化）	解析性／無次元の結合	書けない	解の理論の鍵の条件が $d < 4$ で、四次元は境界 典 （24-06 §08）	道具の作り直しが要り、最小の言明が置けない
9 自己双対の座標の行列式	解析性・結合の留まり／無次元の結合・ゲージ固定の欠如	捩れた孤立した平坦な接続の近く	一ループの照合の案だけ 仮	一ループの係数の再現は一ループの言い換えで、陰性対照にしかならない。格子に自己双対の分解は無い
10 捩れた一点模型と Nahm 変換	解析性／無次元の結合	一点模型	Nahm 変換は古典の自己双対の配位の対応で、測度の水準の対応は知られていない 仮 （原典未照合）	大きな N と $\beta \to \infty$ の順序の問題が残り、紫外と赤外を入れ替えただけになる

表 3 から読むこと 読 （物理の見立て）。紙で閉じた部品があるのは方向 3・4（背景と揺らぎの分解の補題・背景に依らない揺らぎの一段の補題）と方向 6（結合の小ささの帰納の補題）で、どれも本題の外側（場の和の劣乗性、背景に依らない揺らぎ、帳簿の部分）です。本題——本当の $\mu_{k,W}$ での揺らぎの期待値の閉じの群版と、大きな場込みの一段の剰余（結合の一段の正味の括弧）——は、方向 3・4 と方向 6 がそれぞれ向かう一点で、揺らぎの測度が背景に依ることが効く所で合流します。これが §06 の「背景依存の吸収と多段の行が芯」と同じ所です。

この章から出る問い。 表 4 は四行に一つずつ、次に試せる最小の問いを置いたものです。問い「零和でない最小の系」は §06 の芯の行から出る問いです。問い「Loc の二通りの定義」・問い「三次元の非局所の重み」は §06 の改訂から、問い「非可換の背景でのゲージの一致」は §05 から、問い「木の三体の四次の幅」は §06 の三度目の改訂から出る問いです。

表 4　この章から出る問い（状態：新＝この部で足した問い。更新＝答えの一部を書き足した）

問	行	問い（一行）	大きさ	状態	決着しても動かないもの

問	行	問い（一行）	大きさ	状態	決着しても動かないもの
12	1	一リンクで読み取り写像の Lipschitz 定数を Bessel の比の微分から紙で出し、板で大きな場の領域を一つ入れた密度と入れない密度の全変動の差を数にして、大きい場の結合への寄与 $\le C' g^2$ の形が最小の系で立つかを見る。**答え（一部）：**一リンクでは済んだ（大きい場の剰余の上界の補題・熱核の揺らぎの稀さの補題、§02。Lipschitz 定数 $\frac{4}{3}\beta^2$、実際の感度 $\approx \frac{1}{3}\beta^2 h^2$）。板 2×2・熱核の揺らぎでは、閾 $\theta_h = g\,p(g)$（$\beta = 4/g^2$）で $c_0^2 > 2$ なら立つ形・$= 2$ が境・閾を固定すると立たない。板の値は一リンクの 1/3 倍で局所（§02）。本当の測度の多リンクは未（背景依存の吸収と多段の行）	紙と小さな計算	更新	小さい場の結合への寄与（基本の不等式（未公刊）の中身）
13	2	一列四枚で一本のループに源 $s\,\mathrm{Re}\,W_a$ を足し、一段後のループの形ごとの結合のずれが s について線形で、係数が β に依らないか。あわせて $U(1)$ の Villain で位置に依る結合 $\beta(x)$ の一段が局所平均になるかを紙で。**答え（一部）：**熱核の一段（ブロック化なし）では細かいループの源は表現ごとの結合のずらしで、一次・二次ともちょうど（§03）。一列四枚・ブロック化の一段では、ブロックの中のループの源によるずれは主項 f_C^2（β に依らない）＋有理数の $O(1/\beta)$、$\log\beta$ なし。$U(1)$ Villain の $\beta(x)$ は一次で束の網の重みの局所平均（§03）。境をまたぐループ・多段は未	紙と小さな計算	更新	細かい格子のループの観測量の源の条件
14	3	臨界点の偶性が四枚で成り立つか（真の拘束つき臨界点のまわりの揺らぎの作用の奇の部分）、成り立てば小さい場の結合への寄与の背景一様性が θ^4 の係数の有界性に弱まる（臨界点の偶性の案）か。問い「同時の法則の密度の割り方」（15-07）と組で。答え（一部）：偶性は四枚で呼吸の方向に破れる（閉じた式）。臨界点の偶性の案の結論は背景の反転の共変性で一列の鎖に立つ（§02）。四次元の θ^3 の行は未	小さな計算	更新	多段の背景の正則性の条件
15	4	倍率 2 のブロックの一ループの Hessian をゲージ場の部分とゴーストの部分に割り、後者の F^2 の係数を数にする（陰性対照：$U(1)$ で 0）。あわせて木のゲージの直積分解を有限群で形式化する。**答え：**後半は済んだ（有限群で Lean、§05）。ゴーストの F^2 の係数は 3^4 点の一ブロック・可換の背景で古典作用あたり $+0.024$（一ループの 2.4%）で、臨界点の背景では二つのゲージの一ループは (5) で恒等的に一致する（§05）	小さな計算・Lean	更新	局所展開の一様な収束（小さい場の解析性の条件の型）

問	行	問い（一行）	大きさ	状態	決着しても動かないもの
16	1	零和でない最小の系――一列四枚を二つ並べて間の細かいリンクを共有させ、二つのブロックが揺らぎの共分散でつながる系――で W^{gauge}（(4)）を書き、周辺の結合 β_0' への二次の寄与が二つのブロックの和からずれる量（局所の打ち消しの破れ）を $\beta = 32$〜512 で数にする。打ち消しが立てば $O(1/\beta)$、立たなければ $O(1)$。**答え（最小の系）：**七枚の一列で W^{gauge} は一ループから $O(1)$（$13/384$）、一次を陽に入れた後の残りは $O(1/\beta)$。L ブロックの鎖・板・柱では尾の型が粗い変数の定義で決まる（§06）	小さな計算と紙	更新	四次元の三次の残りの評価（三次の評価）
21	1	Loc を二通り――行の和（零運動量）と行列の成分――で定義し、二つのブロックの一列の共分散で W^{gauge} の差を有理数で出す。差が 0 なら切り方は原典と同じ、0 でなければ違う箇所が数で特定される。**答え：**差は 0 でない。$O(1/\beta)$ の二次の非局所の残りは行の和で $\frac{1}{768}\lvert a-b\rvert^2/\beta$（差を含む項だけ）、成分の射影で $-\frac{1}{384}a\cdot b/\beta$。原典の型は行の和（$SU(2)$ 熱核・七枚の一列・一段、§06）	小さな計算と Lean	更新	四次元の局所の打ち消し
22	1	境の無い三次元（横断面が周期の柱か 8^3）で、粗いリンク＋大域の札の座標の $SU(2)$ 一ループの非局所の重み $Q^{(1)}(r)$ が、木の水準と同じく指数のままか。**答え（一部）：**周期の粗い $2\times2\times L$（$L\le16$）で指数（$\kappa = 3.094$、木の率と一致）、和は体積に一様。四次元の周期の木も指数（$\kappa\approx2.08$）。横に広い箱と四次元の一ループは未（§06）	小さな計算	更新	四次元の三次の残りの評価
24	4	非可換の背景（交換子の F を持つ臨界点）で (5) とゴーストの係数を測り、局所展開の主項が $\sum_p \lvert F_p\rvert^2$ の一つの数か（可換の F と交換子の F で同じか）を見る	小さな計算	新	二ループ以上の一致
29	1	四次元の粗いリンク＋大域の札の箱で、木の三体の四次（交換子の型）の幅への依存を測り、率が二体の木の率と一致するか（一列の W の再帰の四次元への写しの最初の検査）。あわせて一列で四体の項と一ループの水準の三体の自己の像の縮み μ を測る	小さな計算	新	四次元の局所の打ち消し・三次の残りの評価

09

言えないこと

(a) この部の中で、紫外の制御は閉じていません（存在は、公開された構成が別の設計で示しました）。四行のどれも閉じていません。この章の案は全て案で、結果ではありません。

(b) 表 1 の「一行」は、それが示せれば閉じる、という条件つきの言明で、どれも示していません。小さい場の結合への寄与が基本の不等式（未公刊）の中身に当たるというのは、序文の一文からの読みです。

(c) 稀さを Chebyshev で出す案は揺らぎの指数積率の群版を仮定したときの一行で、揺らぎの指数積率の群版は示していません。剰余を小さい場と大きい場に割る案の Lipschitz 定数と全変動の差は仮定で、評価していません。

(d) 源をブロック変数の関数に取る案の可換性はブロック変数の関数に限った自明な事実で、細かい格子のループの観測量については何も言いません。

(e) 木のゲージの案の「Jacobian は無い」は軸（木）ゲージに限った構造の言い換えで、Bałaban の四次元の論文のゲージの選び方は照合していません。ゴースト行列式の局所展開は見込みです。

(f) 「背景依存の吸収と多段の行が芯」は案の間の論理の見立てで、どの含意も示していません。表 3 の方向は候補で、無矛盾性も見込みも評価していません。

(g) §06 の小さい場の結合への寄与の割り方 (3) は、複素の背景での解析性の条件と余白 q を入れた言明と、その下での評価です。複素の背景での解析性の条件を四次元のブロック化で示していません。§06 の数は一列四枚（$SU(2)$・熱核・一段）と 2^4 の箱の一ループの数で、四次元の格子の一段の数ではありません。原典に無い行（W^{gauge} とその局所の打ち消しの群版）は示していません。「原典と同じ形」は形の一致を言うもので、新しい構造の主張ではありません。

(h) 熱核の揺らぎの稀さの補題・大きい場の剰余の上界の補題と源の勘定は、辺ごとに独立な熱核の条件・一段に限る条件・揺らぎの背景独立の条件の下の文で（一リンクの熱核比較の補題は Wilson の一リンク）、本当の揺らぎの測度については何も言いません。木のゲージの Lean は有限群の文で、連続群の Haar 測度は紙です。

(i) §06 の二つのブロックの系・鎖・板・柱の数は、一段・粗い場の二次の係数・可換の背景（尾の型）の文で、一ループは Laplace の方法の形式的な漸近展開です。$O(1/\beta)$ の係数は当てはめで、式はありません。尾の型の数え上げの規則は一・二・三次元の模型の数からの読みで、四次元は粗いリンク＋大域の札の座標の木の水準（$n \le 16$）だけを測りました。Lean の 40 の定理は有限次元の射影・恒等式と実数の不等式の組み立てで、解析性（複素の背景での解析性の条件）と切りの確率は仮定として入っています。原典と切り方が違うかもしれない四点は読みで、原典の本文で照合し直していません。

(j) §06 の W の再帰と多体の尾は、一列・二ブロック（三体は $L \le 8$・$d \le 7$）・保存量の無い定義・非局所の項について一次・粗い場の四次までの文で、一ループは Laplace の形式的な主項です。$-13/768$ は数値からの読みです。三次の残りの評価の座標の一ループは三次元の準一次元の箱（粗い $2 \times 2 \times L$）だけで、四次元は木の水準だけです。行の和と成分の射影の差は七枚の一列の一段の文です。

(k) §05 の二つのゲージの一致 (5) は、一段・一ループ・臨界点の背景の文です。ゴーストの係数の数は $SU(2)$・3^4 点と $4\cdot4\cdot3\cdot3$ 点のブロック・可換の背景の値で、非可換の背景・$\xi\neq1$・二ループ・多段は測っていません。

10

五分類の表と依存グラフ

表 5　この章の行（この章の行に Lean の欄はありません）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲
[01]	閉じない四行（結合の一段の正味の括弧・観測量の源の条件・η の吸収と多段・張り替えの境目）の「一行」	仮	§01 表 1（言明）	定数は k, a に依らない
[02]	閉じた部品は背景に依らない揺らぎか木の水準にある	読	§01	この部の部品の範囲
[03]	大きい場の稀さの条件は揺らぎの指数積率の群版の Chebyshev の系 (1)	初	§02 稀さを Chebyshev で出す案	揺らぎの指数積率の群版を仮定
[04]	結合の一段の正味の括弧＝小さい場の結合への寄与＋大きい場の結合への寄与、$\lvert r^{\mathrm{large}}\rvert\le C\beta^2e^{-cp^2}$	仮	§02 剰余を小さい場と大きい場に割る案	Lipschitz と全変動の差を仮定・$p_0\ge\frac12$
[05]	背景の反転の共変性で背景依存を θ^4 の係数へ・大きな場の母数 z	仮	§02 臨界点の偶性の案と中心の分布の母数の案	偶性は二枚で成り立ち、四枚では呼吸の方向で破れる。結論は背景の反転の共変性で一列の鎖に立つ。四次元は θ^3 の係数の有界性も要る
[06]	源をブロック変数の関数に取れば細かい段で積分と可換	初	§03 源をブロック変数の関数に取る案	ブロック化した観測量
[07]	源は類の座標のずらし・位置に依る結合の類	仮	§03	案
[08]	木のゲージの直積分解で張り替えの Jacobian は無い	初	§05 木のゲージの案	軸（木）ゲージ・既知の構造の言い換え
[09]	ゴースト行列式の局所展開と局所結合への合流	仮	§05 ゴースト行列式を吸収する案	小さな場・一様な収束は未
[10]	類関数だけの道は階層格子を越えられない・Haar で張り替えを消すのは熱核の型に限る	読	§05	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲
[11]	四行の依存：背景依存の吸収と多段の行が芯、残る芯は小さい場の結合への寄与と多段の背景の正則性の条件	読	§06（見立て）	—
[12]	熱核で優越される類に Wilson は入らない（比 $e^{(\pi^2/2-2)\beta}$）	初	§07 表 2	$SU(2)$・一リンク・多項式の因子を除く
[13]	試されている方向の十行と、本題が合流する一点	読	§08 表 3（物理の見立て）	候補
[14]	熱核の Gauss 上界の補題・熱核の揺らぎの稀さの補題：熱核の揺らぎでは揺らぎの指数積率の群版と大きい場の稀さの条件が閉じた形で立つ。Wilson の一リンクでは一リンクの熱核比較の補題で K 倍＋尾	初	§02	辺ごとに独立な熱核・一段に限る・揺らぎの背景独立の三条件・$SU(2)$／一リンク
[15]	大きい場の剰余の上界の補題：結合の一段の正味の括弧＝$r^{\mathrm{small}}+r^{\mathrm{large}}$、$\lvert r^{\mathrm{large}}\rvert \le \frac{4}{3}(b_S^2/E_S)P_L$、$c_0^2>2$ で $\le C'g^2$。実際の感度 $\approx \frac{1}{3}\beta^2 h^2$	初 ・ 読 （感度の数）	§02	一リンク・辺ごとに独立な熱核・一段に限る・揺らぎの背景独立の三条件・$E\in(e^{-2},1)$
[16]	源の損 $e^{s_0\lvert B(X)\rvert}$ は一度だけ・細かいループの源は $\mathbb{E}F(U_C)=(F*p_{t\lvert C\rvert})(W_C)$	初	§03	ブロック化した観測量／辺ごとに独立な熱核の条件・自己回避のループ
[17]	木のゲージの存在・一意・直積分解・張り替えの全単射、費用 (2)	初	§05（有限群は Lean）	有限群（Lean）・$SU(2)$（紙）・完全軸の木
[18]	小さい場の結合への寄与の割り方 (3)：Taylor の切り捨ては原典の Lemma 7.5.3 と同じ形、切りの尾は $e^{-c(1-q)^2h^2\beta}$	仮 （言明）・ 初 （複素の背景での解析性の条件の下の評価）・ 典 （原典の形）	§06	複素の背景での解析性の条件・余白 q・数は一列四枚
[19]	原典に無い行は W^{gauge}（(4)）と局所の打ち消しの群版で、零和の系では空	読	§06	原典の付録の本文と序文の突き合わせ
[20]	二つのブロックの W^{gauge} は一ループから $O(1)$（$13/384$）、出所は背景の写像の非局所性、一次を陽に入れた後は $O(1/\beta)$	初 （一ループの式・形式的）・ 読 （数）	§06	$SU(2)$・熱核・七枚の一列・対角の定義・一段・二次の係数・$\beta=32$〜512
[21]	非局所の尾の型は粗い変数の定義で決まる（保存量・大域の拘束は平ら、重みの共有・昇格した拘束は指数、陰に持つ拘束は伝搬の型）	読 （重みつきの和の算術は 初 ）	§06	鎖・板・柱・周期の格子・一段・二次の係数・可換の背景・四次元は未
[22]	小さい場の結合への寄与の代数の層（Loc の射影・W^{gauge} の層）と剰余の組み立て（段数に一様な和）	初	§06（有限次元の部分は Lean）	係数の仮定と切りの仮定を受ける・予定 $g_k^2=1/(A(k+1))$・$m\ge 3$

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲
[23]	原典と同じ形の部分と、切り方が違うかもしれない四点	典 ・ 読	§06	原典の式番号の読み・本文は開き直していない
[24]	臨界点の背景で木のゲージと背景共変ゲージの一ループの有効作用は一致 (5)、ゴーストは帳簿の一行	初 ・ 読 （ゴーストの係数）	§05	一段・一ループ・$HD=0$・$\xi=1$・数は $SU(2)$・3^4 点・可換の背景
[25]	W の再帰の群版（一列）：像は同じ型に閉じ、結合の比で二次 $5/8$・四次 $\le 5/48$、新しい項は段に依らず、固定点へ引き込まれる	初 （一次の Taylor の式・木の有理数・帳簿）・ 読 （$1/\beta$ の補正）・ 典 （原典の加法性）	§06	$SU(2)$ 熱核・一列・対角の定義・二ブロック七枚の一段を二度・一次・四次まで・$\beta=32$〜512
[26]	多体の尾：三体の係数は幅について $e^{-\kappa d}$（$\kappa=\ln(5+2\sqrt{6})$）、和は体積に一様、像は 5×10^{-3} 以下。一列の再帰は四次まで閉じる	読 （帳簿は 初 ）	§06	一列・保存量の無い定義・一段・木と一ループ・$L\le 8$・$d\le 7$
[27]	三次の残りの評価の座標：粗いリンク＋大域の札は境の無い三次元の一ループで指数（$\kappa=3.094$）・和は体積に一様、四次元の木で指数	読 ・ 初 （札の直交と分解の一意性）	§06	可換の背景・二次の係数・一段・粗い $2\times2\times L$（$L\le16$）・四次元は木 $n\le16$
[28]	Loc の二通りの差：行の和で $\frac{1}{768}\lvert a-b\rvert^2/\beta$、成分の射影で $-\frac{1}{384}a\cdot b/\beta$。原典の型は行の和	初 （閉じた式と恒等式）・ 読 （数）	§06	$SU(2)$ 熱核・七枚の一列・一段・$O(1/\beta)$ まで

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
[01] 仮  閉じない四行の一行                                          定数は k, a に依ら
[02] 読  閉じた部品の位置 ⟸ [01]
[03] 初  大きい場の稀さ ⟸ 指数積率の群版の Chebyshev          指数積率の群版を仮定
[04] 仮  正味の括弧 = 小さい場の寄与 + 大きい場の寄与 ⟸ [01][03]                    ニ
[05] 仮  背景の反転で θ⁴ へ・母数 z ⟸ [04]                       四次元は θ³ も
[06] 初  源はブロック変数の関数で可換                            ブロック化した観測量
[07] 仮  源は座標のずらし ⟸ [06]
[08] 初  木のゲージに Jacobian は無い                             軸ゲージ
[09] 仮  ゴースト行列式は局所結合へ ⟸ [08]
[10] 読  類関数だけの道の壁・Haar の限り ⟸ [08]
[11] 読  背景依存の吸収と多段の行が芯 ⟸ [03][04][07][09]
[12] 初  熱核の優越に Wilson は入らない                          ーリンク
[13] 読  十の方向 ⟸ [11]
[14] 初  熱核の揺らぎの指数積率・稀さ・熱核比較の補題 ⟸ [03]    熱核の三条件
[15] 初  正味の括弧の割り方と r^large ⟸ [04][14]                      ーリンク
[16] 初  源の損の勘定・細かいループの源 ⟸ [06]                   ブロック化した観測量
[17] 初  木のゲージ（有限群は Lean）・費用 (2) ⟸ [08]            完全軸の木
[18] 仮  小さい場の寄与の割り方・Taylor の形は原典と同じ ⟸ [15]   複素の背景での解析性・
[19] 読  原典に無い行 W^gauge ⟸ [11][18]                          零和の系では空
[20] 初  二つのブロックの W^gauge はーループから O(1) ⟸ [19]      七枚の一列・一段
[21] 読  尾の型は粗い変数の定義で決まる ⟸ [20]                   鎖・板・柱・四次元は
[22] 初  代数の層と剰余の組み立て ⟸ [18]                         仮定を受ける
[23] 読  原典と同じ形・切り方の四点 ⟸ [22]                       式番号の読み
[24] 初  二つのゲージの一致 (5) ⟸ [09][17]                        一段・ーループ・
[25] 初  W の再帰の群版（一列） ⟸ [20]                           一列・一次・四次ま
[26] 読  多体の尾は指数・一列の再帰は閉じる ⟸ [21][25]           保存量なし・L ≤ 8
[27] 読  三次の残りの評価の座標は粗いリンク＋札 ⟸ [21]                    三次元の
[28] 初  Loc の二通りの差 ⟸ [20][23]                              七枚の一列
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。[01]・[04]・[05]・[07]・[09]・[18] は仮定の行で、どれも紫外の制御を割った問いの形です。この章の節点に、紫外の制御が示されたという節点はありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 揺らぎの指数積率の群版を仮定したときの大きい場の稀さの条件の Chebyshev の一行・ブロック変数の関数の源の可換性・木のゲージの直積分解（張り替えの Jacobian は無い）・熱核の優越に Wilson が入らないこと	揺らぎの指数積率の群版そのもの。細かい格子の観測量。四次元の論文のゲージの照合

言えている	言えていない
初 熱核の揺らぎの稀さの補題・大きい場の剰余の上界の補題（熱核の揺らぎ・一リンク）と一リンクの熱核比較の補題（Wilson の一リンク）・源の損の勘定と細かいループの源（熱核の一段）・木のゲージの存在・一意・直積分解（有限群は Lean）と費用 (2)・小さい場の結合への寄与の Taylor の切り捨ての評価（複素の背景での解析性の条件の下、原典の Lemma 7.5.3 と同じ形）	本当の揺らぎの測度での揺らぎの指数積率の群版。複素の背景での解析性の条件を四次元のブロック化で示すこと。多リンクの鋭い形
読 閉じた部品の位置・四行の依存（背景依存の吸収と多段の行が芯）・類関数だけの道の壁・十の方向・原典に無い行は W^{gauge} とその局所の打ち消しの群版で零和の系では空	依存のどの含意も。ブロック間の項の定義・局所の打ち消し・三次の残りの評価のどれも。Bałaban の本文との照合
初 二つのゲージの一致 (5)（一段・一ループ・臨界点）・小さい場の結合への寄与の代数の層と剰余の組み立て（有限次元の部分は Lean）・二つのブロックの一ループの式（形式的）	二ループ以上の一致。複素の背景での解析性の条件と切りの確率。四次元の局所の打ち消し
読 二つのブロックの $13/384$ と $O(1/\beta)$・尾の型の数え上げの規則・原典と切り方が違うかもしれない四点・ゴーストの係数 $+0.024$	四次元の尾の型と三次の残りの評価。原典の本文での照合
初 W の再帰の一次の Taylor の式と木の有理数・札の直交・Loc の二通りの恒等式。読 W の再帰の縮みの比・多体の尾の指数・三次の残りの評価の座標の三次元の一ループと四次元の木・Loc の差の数	四次元の W の再帰・四体の項・四次元の一ループの尾・体積に一様な三次の残りの評価
仮 四行の「一行」・結合の一段の正味の括弧の割り方・偶性・源の座標・ゴースト行列式の吸収	どれの証明も。紫外の制御が閉じる見込み

出典と再現

もの	種別	出典・道具
条件つきの紫外安定性の定理（Bałaban 1989 の Theorem 1）・基本の不等式（未公刊）（結合の一段の正味の括弧の位置）	典（要旨と序文）	T. Bałaban, Large field renormalization. II, Comm. Math. Phys. 122 (1989) 355–392（15-02 §02）
大きな場の重みと Chebyshev の役・活動のノルムの一段の評価（BBS の補題 A.6.1）	典	R. Bauerschmidt, D. C. Brydges, G. Slade, Introduction to a Renormalisation Group Method, LNM 2242 (2019), arXiv:1907.05474（15-02 §04）
大域のゲージ固定・ブロックの軸ゲージ	典	I. M. Singer, Comm. Math. Phys. 60 (1978) 7–12。7-05 §05
確率量子化の四次元の境界	典	24-06 §08 の出典表
四行の案・捨てた案・四行の依存	本書の検討	本書の検討の記録（紫外の制御の閉じない行の整理）
(1)・源をブロック変数の関数に取る案の可換性・木のゲージの案の直積分解・優越の比	初	この章の本文

もの	種別	出典・道具
Lemma 7.5.3・Loc・付録 A.1 の (A.1.3)–(A.1.4)・A.5 の (A.5.3)–(A.5.4)（平らな場）	典（本文）	R. Bauerschmidt, D. C. Brydges, G. Slade, Introduction to a Renormalisation Group Method, LNM 2242 (2019), arXiv:1907.05474v2
小さな場の近似の帰納・二次の摂動の計算	典（抄録と序文）	T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 109 (1987) 249–301・116 (1988) 1–22・122 (1989) 355–392（15-02）
熱核の Gauss 上界の補題・熱核の揺らぎの稀さの補題・大きい場の剰余の上界の補題・源の勘定・木のゲージ（$SU(2)$）・(2)(3)(4) の評価	初	この章の本文。有限和・有限群の部分は Lean の束（15-09 表 3、再検査済み）
尾の比・感度・一列四枚の剰余と切りの率・木のゲージの費用の数	読	本書の検討の数値の記録（像の和と指標和の二経路・Wilson と熱核・持ち上げと群の上の直接の二経路・$U(1)$ の対照・2^4 の箱は一ループの二実装）
二つのブロックの系・鎖・板・柱の数・ゴーストの係数	読	本書の検討の数値の記録（七枚の一列と L ブロックの鎖：Laplace の一ループと全求積の二経路・$U(1)$ の Wilson と Villain の対照。板と柱：射影と KKT の二実装・解析の Hessian と差分の二経路。ゴースト：3^4 点の解析と有限差分の二経路・$U(1)$・ゴースト無し・臨界点からずらした背景の対照）
Faddeev–Popov の方法・格子の背景場の方法	典（書誌のみ）	L. D. Faddeev, V. N. Popov, Phys. Lett. B 25 (1967) 29–30。M. Lüscher, P. Weisz, Nucl. Phys. B 452 (1995) 213–233, arXiv:hep-lat/9504006（本文は照合していない）
原典の加法性（(A.1.4)–(A.1.5)・Exercise 2.2.4）	典（(A.1.4)–(A.1.5) は本文）・読（Exercise 2.2.4 からの恒等式は本文で未照合）	R. Bauerschmidt, D. C. Brydges, G. Slade, arXiv:1907.05474v2（p.35・p.198–199。p.207–209 の素描は W を外して書かれている）
W の再帰・多体の尾・三次の残りの評価の座標・Loc の二通り	読（式・帳簿は初）	本書の検討の数値の記録（近似なしの被積分関数の Gauss–Hermite と 2×2 行列の入れ子の別実装・有理数の線形の背景と浮動小数の射影・群の上の Laplace と有限の β の全求積・$U(1)$ Wilson の対照・保存量のある定義の陽性対照。周期の箱は解析と差分の Hessian・密と Bloch の三実装）。帳簿は Lean の束（15-09 表 3、再検査済み）
(5)・代数の層・剰余の組み立て・尾の和の算術	初	この章の本文。有限次元の部分は Lean の束（15-09 表 3、再検査済み）

この章で使った語 — 閉じない四行・小さい場の結合への寄与・大きい場の結合への寄与・読み取り写像・大きな場の母数 z・ブロック変数の関数の源・位置に依る結合・木のゲージの直積分解・ゴースト行列式・境目の結合・背景依存の吸収と多段の行が芯・熱核の揺らぎの稀さの補題・大きい場の剰余の上界の補題・複素の背景での解析性の条件・W^{gauge}・零和の系・背

景の写像の非局所性・尾の型・粗いリンク＋大域の札・二つのゲージの一致・W の再帰・多体の尾。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：15-09 言えないこと・問いの索引・依存の図 — この部の紫外の問い 1〜31 と五分類の要約。

言えないこと・問いの索引・依存の図

この章は索引です。各章の該当の節へ案内します。

この部は、本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた記録です。存在そのものは第二巻の第 6〜13 部を、二つの設計の違いは第 14 部を見てください。部の位置づけは 15-00 にあります。

この章で分かること — 第 15 部の全体で言えないこと（まとめ）と、各章が残した問い（紫外の問い）の索引と答えの現在、章どうしの依存の図、章ごとの主な行の五分類、この部で使った Lean の束と本文の対応。

前提となる章 — 15-00（入口）。ほかの章は、この頁の表の行から引きます。

先に言うこと — この章は新しい結果を足しません。問いは問いで、主張ではありません。この部のどの章でも、紫外の制御は閉じていません（存在は、公開された構成が別の設計で示しました。第 6〜13 部）。この部の Lean の束は再検査が済んでいます（全て通り、公理は標準の三つだけ）。本文の札は五分類のまま（紙の証明は〔初〕）にし、Lean は外の列として、各章の本文に定理の名と仮定を同じ行に添え、表 3 に「再検査：済」で並べます。

原典との関係 — この部で紙と計算で書いた部品のいくつかは、原典（平らな場の BBS、Bałaban の連作）で知られている構造と同じ形を、群の上で条件つきで書いたものです（例：小さい場の結合への寄与の局所の部分と Taylor の剰余は BBS の Lemma 7.5.3 と同じ形、15-08 §06）。新しさを主張するものではありません。原典に無いのは、原典自身が sketch と書く箇所（ブロック間の二次の陽な項とその局所の打ち消し）の群版で、これは示していません。その群版の検討のうち、代数の層を書いたときの切り方の四点（15-08 §06）は原典と違うかもしれず、「原典と同じ形」と分けて書いています。

この章の順序

1. 言えないこと — 部全体の十二項目と、各章の項目
2. 問いの索引 — 紫外の問いと答えの現在（表 1）
3. 章の依存の図
4. 五分類の要約（表 2）
5. この部の Lean の対応（表 3）
6. 第 27 部と用語集への接続

00

この章で分かること

- 第 15 部が言わないことは十二にまとまります。どれも「最小の系・主項・一段・言明の形」の条件を外した読み方を止めるためのものです（§01）。
- 問いは三十一あり、どれも条件の台帳の紫外の制御の行の中の一つの部品に触れます。十八は答えの全部か一部が書けましたが（紫外の問い 4・5・7・8・10・12〜23・25）、どれが決着しても紫外の制御は閉じません（§02）。
- 章の依存は、入口（15-00）と難しさ（15-01）・原典（15-02）から分解の言明（15-03）へ、計算の筋（15-04〜15-06）と壁の筋（15-07・15-08）へ分かれ、15-09 に戻ります（§03）。

01

言えないこと

部全体で言わないことをまとめます。この部の部品の先で組んだ条件つきの含意の傷は 15-00 §08 にあります。章ごとの細かい項目は各章の「言えないこと」の節にあります。

(a) **この部の中で、紫外の制御は閉じていません。**第 15 部は紫外の制御の三つの条件のどれも、四次元でも二次元でも示していません。四次元の連続極限の存在は、公開された構成が別の設計で示しました（第 6〜13 部。設計の比べは第 14 部）。示したのは、何を示せばよいかの言明、一行ずつの計算、初等的な補題（結合の小ささの帰納の補題・背景と揺らぎの分解の補題・軌道の向きの平坦性の命題・背景に依らない揺らぎの一段の補題・束の網の定理）と、最小の系の数です。

(b) **一ループの流れの下の算術は、実際の有効結合の列の定理ではありません。**15-01 の和の発散と有限性は、一ループの流れを正確な式と見なした算術です。

(c) **最小の系の数は、本当のブロック化の一段の数ではありません。**15-05・15-06 の数は、可換な配位に制限した木の水準（$\beta \to \infty$ の主項）・一ループの水準・一つの粗い面の周辺分布で見る一段・小さな箱（自由境界・外周だけ自由・周期）の数で、四次元の格子に埋めたブロック・ゲージの張り替え・大きな場を含む一段の数ではありません。

(d) **階層模型の結果は四次元に含意しません。**15-04 の Migdal–Kadanoff の写像は一枚の重みが一枚に戻る写像で、多リンクの結合・張り替え・大きな場の剰余が構造の上で無く、$U(1)$ でも閉じ込めが起きる模型です。区間演算で確かめた範囲は有限の β の区間（管は $\beta \le 128$、曲線は $\beta \le 64$）だけで、$a \to 0$ の極限は閉じていません。比べる相手を固定した一段の不等式の案は、小さな箱の数で破れも裏付けも見えず（$6^4/3^4$ で分解能の内）、どの β でも示していません。

(e) **背景に依らない揺らぎの一段の補題は一段だけ・揺らぎの法則が背景に依らない場合だけの文です。**本当の一段の揺らぎの測度は背景に依り、その依存 η の吸収と多段の帰納は書けていません（15-07）。

(f) **分解の言明と、捩れたトーラスの紫外の言明は言明です。**15-03 の分解と 15-02 の捩れた小さな四次元トーラスの紫外の言明は〔仮〕の形で、証明していません。含意のうち初等的に確かめたのは結合の小ささの帰納の補題と等比級数の算術の部分だけです。

(g) **原典の照合は抄録と序文の水準が多い。**連作の段 4・段 5 と 119 は抄録、段 1〜3 は題、Bałaban 1989 の二つの定理（Theorem 1・2）は最後の論文の要旨と序文です。BBS の付録 A.6 は本文を読みました（15-

02)。

(h) **閉じない四行の案は案です**。15-08 の案は検証前の着想で、どれも四行のどれかを閉じていません。「一母数で閉じる作用が無い」とも「類が閉じる条件が有限個の母数で閉じる」とも言っていません。

(i) **「原典と同じ形」は形の一致で、新しい構造の主張ではありません**。小さい場の結合への寄与の割り方（15-08 §06）で原典と同じ形が群の上で立つのは、複素の背景での解析性の条件（複素の背景での解析性と β に依らない上界）と余白 q の下でです。複素の背景での解析性の条件を四次元のブロック化で示していません。原典に無い行（ブロック間の二次の陽な項 W^{gauge} とその局所の打ち消しの群版）は示していません。ブロックが一つの零和の系ではこの行を試せないので、二つのブロックの系で測りました：W^{gauge} は一ループから陽に始まり、局所の打ち消しが要るのは $O(1/\beta)$ の部分ですが（$SU(2)$・七枚の一列・一段・二次の係数）、四次元の局所の打ち消し・三次の残りの評価は示していません。代数の層を Lean で書いたときの切り方の四点（Loc を成分の射影に取る・零和の理由・切りの払い方・段の和の取り方）は、原典と違うかもしれない箇所として分けて書いています（15-08 §06）。

(j) **四次元の数で 1 を割るとは言っていません**。階層模型の鎖は $\beta \le 128$ の有限の範囲（$\beta > 128$ は閉じていない）、一列四枚の形の剰余の定理は一列四枚の射影の模型（$B \ge 32$・$O(1)$ の箱、Wilson の形のずれは箱の外）、束の網の定理（局所の形）の体積に一様な上界は四次元で 1.83 の見積もりで 1 を超え、行の重みつきの補間で 0.823 以下（$\beta_0' = 1$ の規格・数は計算で区間の評価ではない）になりましたが、向きごとの規格の倍率は縮みの量でないので規格を長波長の結合で割る形に固定し、その ℓ^4 の錐の一段の縮みは一段目に限ります（辺の和のブロック化では三段目で因子が 1.26 以上、横の平均のブロック化では下界が段で増えないが上界は無い）。$SU(2)$ の背景依存のうち群の幾何の部分（BCH の三次、係数 $1/9$）の予算は、閾をどう選んでも発散します（15-07 §07、一ループの流れの下の算術）。背景を類の母数に持たせると予算は段数に一様になりますが（条件つき、15-07 §06）、難しさは類が面・多ループの一段で閉じるかへ移り、四次元では示していません。

(k) **類の座標と再帰の数は、測った規則と範囲の文です**。四次元の類の「一つの母数＋比の座標」は自由境界の箱の木（$L \le 10$）と一ループ（$L \le 4$）、周期の網の可換の木の二次（$L \le 16$）の当てで、比の座標の固定点の存在を示していません。斜めの隣が 0 でないことは測った二つの規則と二つの射影の約束についての文で、値と「一つの胞の中で閉じる」ことは規則に依ります。芯の行の再帰（対の型の縮む像＋段に依らない新しい項＋指数の三体の尾）は一列・保存量の無い定義・非局所の項について一次の文で、四次元・四体の項は測っていません。結合の流れの一ループは一つの規則の一段目の数で、$\ln b$ の係数は小さい倍率で一ループの値の 1.7〜1.9 倍です。

(l) **スピノールはこの部の議論の根拠に入っていません**。純粋ヤン–ミルズにはスピノール（フェルミオン）の場はありません。$SU(2) = \mathrm{Spin}(3)$ の構造は、群の性質として三か所に入っています：捩れ（中心 $\mathbb{Z}_2$ の元 -1、25-01）、Haar 測度の曲がり（熱核の Van Vleck の前因子 $\psi/\sin\psi$、BCH の三次の $1/9$、一列四枚の $\frac{2}{3B}$。類関数に制限した Laplacian は $\frac{1}{\sin\psi}\partial_\psi^2(\sin\psi\,\cdot) + 1$ で、定数 1 は単位 S^3 の曲率の項）、四元数の恒等式（15-07 の (5)）。どれも、本書の道具が $SU(2)$ に特化していることの印で、ギャップの原因を示すものではありません。中心が自明な G_2 のゲージ理論も格子の強結合の議論で閉じ込める（弦は切れる）とされ 典 （K. Holland, P. Minkowski, M. Pepe, U.-J. Wiese, Nucl. Phys. B 668 (2003) 207–236, hep-lat/0302023。要旨で確認、本文は照合していない）、中心の捩れは測る道具であって閉じ込めの仕組みではない、と読みます 読 。中心を探針に使う道（第 25・26 部と、比べる相手を固定した一段の不等式の案）は中心が非自明な群に限られます。

02

問いの索引 — 紫外の問い 1〜31

表 1 は、第 15 部の各章が残した問いを一つにまとめたものです。紫外の問い 1〜3 は 26-11 の番号を引き継ぎ（中身は 15-03 で更新）、紫外の問い 4〜15 は章ごとに番号の帯を割り、紫外の問い 16〜31 は改訂で足した問いです。「答えの現在」は、答えの全部か一部が書けた問いにだけ付けました。問いの状態・大きさ・「決着しても動かないもの」は出所の章の表にあり、ここでは写しません。どの問いが決着しても、条件の台帳の紫外の制御の行は閉じません。

表 1　第 15 部の問い（出所の章の文を一行に縮めたもの。条件は出所の章の表にある。→ の後は答えの現在）

問	問い（一行）	関わる部品	出所
1	引き込む先の一母数の類の上で一段の写像が横に縮むか。(i) 四次元の格子に埋めたブロックで λ と源が有限に留まるか (ii) 一段の不等式の定数 C が段に依らないか (iii) 中心 $\mathbb{Z}_2$ の符号の重みが別の母数として要るか	類が閉じる条件・形の剰余の条件	15-03 §07
2	結合の一段の正味の括弧を大きな場込みで示せる最小の模型（階層的な $SU(2)$）。一枚の拘束つきの吸収を、多プラケットの真の臨界点で言い直せるか	結合の流れの剰余の条件・結合の一段の正味の括弧	15-03 §07
3	捩れた M^4 の格子で、孤立した平坦な接続のまわりの随伴の揺らぎの作用素の最小固有値が c/M^2 以上か。揺らぎの期待値の閉じ（BBS の (iii)）の群版が捩れで変わらないか	捩れたトーラスの紫外の言明の分配関数の Gauss 比較の条件	15-03 §07
4	階層模型の管と引き寄せる曲線を $\beta > 64$ へ延ばす（漸近の評価と区間演算の継ぎ目）。→ $\beta \le 128$ から下は帯の側を経て強結合の判定領域まで鎖が継がれた（1137 段）〔機〕。上端 $\beta > 128$ と $[64, 128]$ の曲線は未	階層模型の類が閉じる条件	15-04 §05
5	層の外の曲率の下界と層の重さを区間演算で確かめ、曲線の上の流れの係数 $c^{*} = 1/60$ を $1/48$ から分ける。→ 半径を絞った管の上の五か所で包み $[0.0151, 0.0188]$〔機〕。曲線がその管に入ることと曲率は未	階層模型の結合の流れの剰余の条件	15-04 §05
6	粗い面の辺 L の列で、源 $\cdot L^4$（いま $7.7 \sim 8.5 \times 10^{-3}$、横の厚さ 4）が横を広げても一定に寄るか	源の段の和	15-05
7	全ての粗い面を固定した木の水準の網で、局所の代表を作り体積に一様な上界が出るか。粗い向きの λ の作用素ノルムが 1 を割るか。→ 局所の代表と体積に一様な上界は得た（束の網の定理（局所の形））。三次元 0.245、四次元 1.83 の見積もりで、四次元はこの道では 1.39 を下回れない（未決）	横の縮み（行列）	15-05 §07
8	一列四枚の一段の $O(1/B)$ の補正を紙で出し、形の剰余の条件の一段の不等式の定数 C を与える。→ 一列四枚の射影の模型で一列四枚の形の剰余の定理が $C = 0.0108$（$B \ge 32 \cdot O(1)$ の箱）を与えた	形の剰余の条件	15-06
9	一列四枚以外のループの形（2×2・L 字・混じった四次）を含めても引き込む先の類が一つに定まるか。対角の定義を替えても固定点が動かないか	類が閉じる条件の座標	15-06
10	一列四枚で P_2, P_3 の同時の法則を局所結合の積 × 密度に割り、密度のスコアの θ の最低次数と二次形式の等方性を出す。→ 最低次数は $\theta^0 \beta^{-1/2}$ と $\theta^1 \beta^0$。形の部分は幾何級数に入り、$SU(2)$ の群の幾何の部分（BCH の三次、$1/9$）は予算が発散する。改良は類の側	η の吸収	15-07
11	多段の最小の言明を階層模型か二次元の模型で書けるか（背景の正則性の条件と多体のノルムの縮み）。結合の解析性の帯の幅。最小の系の数は次の検査	多段の帰納	15-07
12	読み取りの Lipschitz 定数を紙で出し、大きな場を一つ入れた密度と入れない密度の全変動の差を板で測る。→ 一リンクでは済んだ（大きい場の剰余の上界の補題・熱核の揺らぎの稀さの補題）。板 2×2・熱核の揺らぎでは $c_0^2 > 2$（大きい場の剰余の上界の補題の規約）で立つ形、板の値は一リンクの 1/3 倍。本当の測度の多リンクは未	大きい場込みの剰余の行・結合の一段の正味の括弧	15-08

問	問い（一行）	関わる部品	出所
13	一列四枚に源 $s\,\mathrm{Re}\,W_a$ を足したとき結合のずれが s について線形か。$U(1)$ Villain で位置に依る結合 $\beta(x)$ を紙で。→ 熱核の一段では細かいループの源は表現ごとの結合のずらしでちょうど。一列四枚のブロック化の一段では、ブロックの中のループの源のずれは $f_C^2+O(1/\beta)$（β に一様）。Villain の $\beta(x)$ は局所平均。境をまたぐループ・多段は未	観測量の源の条件	15-08
14	臨界点の偶性が四枚で成り立つか（問い「同時の法則の密度の割り方」と組）。→ 呼吸の方向で破れる。臨界点の偶性の案の結論は背景の反転の共変性で一列の鎖に立つ。四次元の θ^3 は未	背景依存の吸収と多段の行	15-08
15	倍率 2 のブロックの一ループの Hessian を割り、ゴーストの F^2 の係数を測る（陰性対照は $U(1)$）。木のゲージの直積分解を有限群で形式化する。→ 後半は済んだ（Lean・有限群）。費用は小さな場の条件の劣化 $(d-1)(L-1)\varepsilon$。ゴーストは臨界点の背景で木のゲージと一ループで恒等的に一致（3^4 点・可換の背景で係数 $+0.024$）	ゲージの張り替えの境目の行	15-08
16	零和でない最小の系（一列四枚を二つ並べ間のリンクを共有）で W^{gauge} を書き、周辺の結合への二次の寄与の局所の打ち消しの破れを数にする。→ 七枚の一列で一ループから $O(1)$（$13/384$）、一次を陽に入れた後は $O(1/\beta)$。尾の型は粗い変数の定義で決まる	大きい場込みの剰余の行・小さい場の結合への寄与	15-08
17	2×2 の板の中央のプラケットで、巡回で対称化した BCH の奇数次の幾何の係数を Wick で出し、二リンクの $1/\sqrt{3(m+2)^3}$ と比べる。→ 単一のループ（十字）では a を群の積で更新すれば残りは無い。三次元 $2\times2\times2$ では角の三重積 $\kappa=3/1024$ が要る	背景依存の吸収と多段の行（群の幾何）	15-07
18	背景のホロノミーの対数 a を母数に持つ類で、幾何の部分が a の流れに正確に移るかを直列の一段で測る。→ 残り $\theta^0\beta^{-3/2}$、予算は段数に一様（条件つき）。難しさは類が閉じる条件へ移る	背景依存の吸収と多段の行（類の側の改良）	15-07
19	一リンクの揺らぎの一段の補題の条件（中心の取り直しの条件）：staple の和の向きの写像の Taylor の半径を明示し、δ_b/b の係数を一つの数にする。→ $\lvert Q\rvert\ge 6\cos\theta_0\cdot h_q\approx 4h\cdot\eta=cg^2p^2$（実測 $c\approx12$）。結合は類の母数の側へ	背景依存の吸収と多段の行（Wilson の一リンク）	15-07
20	四次元の ℓ^4 を直接に押さえ（近い部分は有限の網、尾だけ Riesz–Thorin）、$\sup\mu<1$ かを見る。→ 行の重みつきの補間で $\sup\mu\le0.823$（$\beta_0'=1$ の規格・計算）。向きごとの規格では未決	横の縮み（行列）	15-05 §08
21	Loc を行の和（零運動量）と行列の成分の二通りで定義し、二つのブロックの共分散で W^{gauge} の差を有理数で出す（切り方が原典と同じか）。→ 差は 0 でない（行の和で $\frac{1}{768}\lvert a-b\rvert^2/\beta$、成分の射影で $-\frac{1}{384}a\cdot b/\beta$）。原典の型は行の和	大きい場込みの剰余の行・小さい場の結合への寄与	15-08
22	境の無い三次元で、粗いリンク＋大域の札の座標の一ループの非局所の重みが指数のままか。→ 粗い $2\times2\times L$ で指数（$\kappa=3.094$）・和は体積に一様。四次元の木も指数。四次元の一ループは未	大きい場込みの剰余の行・三次の残りの評価	15-08
23	多ループの類の二段目：角の三重積 κ が段ごとに保たれる座標か、四次元 2^4 で同じ座標が足りるか。→ 三次元で縮まず固定点に下から寄る。四次元は斜めの隣と平行の型が要り、比の座標は固定点に寄る（木の当て）	類が閉じる条件の座標	15-07
24	非可換の背景（交換子の F）で二つのゲージの一致とゴーストの係数を測る	ゲージの張り替えの境目の行	15-08
25	向きごとの規格の倍率 $\sup\lambda\le3.29$ を、運動量の帯ごとの重みつきの記号で 1 未満に落とせるか。→ 落とせない向きの問いだった：$\sup\lambda=4\sup\mu_{\mathrm{loc}}\ge0.59$ で λ は縮みの量でない。規格は長波長の結合で割る形に固定	横の縮み（行列）	15-05 §08
26	結合 b を類の母数に持たせ、Wilson の一リンクの結合の動き cg^2p^2 が母数の更新に移るか	背景依存の吸収と多段の行（Wilson の一リンク）	15-07
27	四次元の類の比の座標の固定点の値を角の近くの半無限の問題から直接出す。場を共有する規則で胞に収まらない部分を有限個の対に入れて閉じるか、尾として運ぶか	類が閉じる条件の座標	15-07
28	横の平均のブロック化の固定点の上で $\sup\mu_\infty$ の上界を Stein でない道で 1 未満に取る。固定点の存在を紙へ	形の剰余の条件の多段	15-05 §08

問	問い（一行）	関わる部品	出所
29	四次元の粗いリンク＋大域の札で、木の三体の四次の幅への依存の率を測る。一列で四体の項と一ループの水準の三体の像の縮み	大きい場込みの剰余の行・局所の打ち消し・三次の残りの評価	15-08
30	横の平均のブロック化か大きい倍率で、網の長波長の一ループの係数の倍率への依存が一ループの値に近づくか	結合の流れの剰余の条件	15-05 §08
31	取り直した管を区間の幅 0.02 で $[15.26, 128]$ の全体に通し、曲線が管に入ることと曲線の上の c^{*} の包みを条件なしにする。$\beta \geq 128$ を漸近の区間で覆う	階層模型の類が閉じる条件・結合の流れの剰余の条件	15-04 §05

表 1 の読み。問い「一母数の類での横の縮み」・問い「一列四枚の一段の補正」・問い「他のループの形での類の一意性」は類が閉じる条件と形の剰余の条件の座標の問い、問い「大きい場込みの剰余の最小模型」・問い「読み取りの Lipschitz 定数」は未公刊の基本の不等式（Bałaban 1989 の Theorem 2）の中身に当たる結合の一段の正味の括弧の問い、問い「同時の法則の密度の割り方」・問い「多段の最小の言明」・問い「臨界点の偶性」・紫外の問い 17〜19 は芯の背景依存の吸収と多段の行（η の吸収と多段）の問い、問い「零和でない最小の系」は小さい場の結合への寄与の中の原典に無い行の問いです。紫外の問い 21〜24・26 は改訂の答えから出た次の一手（原典との切り方の違い・境の無い幾何の尾の型・多ループの二段目・非可換の背景のゴースト・結合を母数に）、問い「向きごとの規格の倍率」は向きごとの規格の横の縮みの問い（答えは否定的な形）、紫外の問い 27〜31 は三度目の改訂の答えから出た次の一手（四次元の類の座標の値・平均のブロック化の上界・四次元の多体の尾・一ループの係数・階層模型の上端）です。

最小の系の数で答えられるものと、紙の問いが混じっています。

03

章の依存の図

章どうしの依存を、前提の章が上に来るように並べます（前提の番号は結論の番号より小さい）。矢印の右は、その章が使う前の章です。

```
[15-00] 入口            問題・三つの条件・一段で閉じる形・読み違える型
[15-01] 難しさ          ⟸ [15-00]          無次元の結合・群値の場・ゲージ
[15-02] 原典            ⟸ [15-00]          連作・Bałaban の二つの定理・BBS の鎖・捩れたトーラスの紫外の
[15-03] 分解の言明      ⟸ [15-01][15-02] 類が閉じる条件・二つの剰余の条件・結合の連続性・結合の小ささの帰
[15-04] 熱核と階層      ⟸ [15-03]          望遠鏡和・不変な曲線・管（β∈[2.46,128]）・帯への鎖（β∈[0.95
[15-05] 束の網          ⟸ [15-03][15-04] 単位の束の定理・不等式・箱の表・束の網の定理・その局所の形（局
[15-06] 母数の数え方    ⟸ [15-03][15-05] ループの形ごとの結合・引き込む先の類・一列四枚の定理
[15-07] 背景依存 η      ⟸ [15-01][15-02][15-03]  背景と揺らぎの分解の補題・背景に依らない揺らぎの一段の
[15-08] 閉じない四行    ⟸ [15-05][15-06][15-07]  四行の案・熱核の揺らぎの稀さの補題・大きい場の剰余の上
[15-09] 索引            ⟸ [15-00]〜[15-08]
```

図は紫外の制御の検討の章（15-00〜15-09）の依存です。体系の試み（15-10）と、後半の自由場の一段と一つの尺度の章（15-11〜15-14）は、この図の外にあります。確かめ方は、全ての「⟸」の右の章の番号が左より小さいことを見ることです。円はありません。この図のどの節点にも、紫外の制御が示されたという節点はありません。

04

五分類の要約

表 2 は、各章の五分類の表から主な行だけを拾ったものです。行の言明・根拠・範囲の全体は各章の表にあります。

表 2　章ごとの主な行（札は各章の表のとおり。範囲の欄の条件は一部だけを写した）

章	主な行	分類	範囲（抜粋）
15-00	段の数 $K \to \infty$・損の積の下界	初	$0 \le \delta_k \le \frac{1}{2}$
15-00	紫外の制御と一段で閉じる形	仮	a から L_0 まで・定数は段に依らない
15-01	$\sum g_k^2$ の対数の発散・$g^{2+\delta}$ の和は有限・軌道の向きの平坦性の命題	初	一ループの流れの下（算術）
15-02	条件つきの紫外安定性の定理（Bałaban 1989 の Theorem 1）は結合が小さく留まる条件の仮定つき、基本の不等式は未公刊・活動のノルムの一段の評価（BBS の補題 A.6.1）	典	要旨と序文／付録 A.6 の本文
15-02	捩れた小さな四次元トーラスの紫外の言明	仮	$SU(2)$・$n_{12} = 1$・有限体積
15-03	結合の小ささの帰納の補題・横の縮みの帳簿	初	結合の一段の正味の括弧・実効の結合の定義と連続性の下／一段の不等式を仮定
15-03	分解の言明（類が閉じる条件は引き込む先の一母数の類＋縮む形）	仮	言明の形だけ
15-04	MK の鞍点の見積もり（1/16・1/3600・$c^* = 1/60$）	初	鞍点の主項
15-04	管の不変性・点ごとの縮み・引き寄せる曲線	機	MK の写像・$SU(2)$ の一枚・$\beta \in [2.46, 128]$（曲線は $[15.26, 64]$）
15-05	単位の束の定理・$1/(16d-8) \le \lambda \le 1/16$・粗い面の辺 L の不等式・束の網の定理	初	可換に制限した木の水準・粗い面の 4 枚が対称（下界）
15-05	箱の表・周の型・源 $\approx 8 \times 10^{-3}/L^4$・粗い向きで $\lambda > 1/16$	読	小さな箱・一ループ（熱核出発・$\beta \to \infty$）
15-06	$D = \frac{2}{5} + \frac{24}{5}\frac{q}{B}$・木の写像と 9/89・$\gamma^* = 37/76$・$c = 2/3$	初	一列四枚・一ループの水準／Laplace の主項
15-06	基本＋随伴の根 $\rho^* = -\frac{1}{4} - 0.84/\beta$・前因子の族に根なし	読	$SU(2)$・二次・$\beta \ge 12$（根）／$\beta \in \{4, 8, 16, 32\}$
15-07	背景と揺らぎの分解の補題・背景に依らない揺らぎの一段の補題・四元数の恒等式	初	背景に依らない揺らぎの一段の補題は一段・揺らぎの法則が背景に依らないとき
15-07	揺らぎの指数積率と背景の正則性の群版・局所結合のずらしの案	仮	言明と案
15-08	大きい場の稀さの条件は揺らぎの指数積率の群版の Chebyshev の系・木のゲージに Jacobian は無い	初	揺らぎの指数積率の群版を仮定／軸ゲージ
15-04	絞った管から帯の側を経て強結合の判定領域までの鎖（$\beta \le 64$ で 846 段、$\beta \le 128$ で 1137 段以内）	機	MK の写像・$\beta \in [0.95, 128]$・帯の側は先行の記録
15-05	束の網の定理（局所の形）：局所の代表と体積に一様な上界、$\Lambda_3 = 0.245$・$\Lambda_4 \approx 1.83$	初・読	可換・木の水準・周期／四次元は見積もり

章	主な行	分類	範囲（抜粋）
15-06	一列四枚の定理：$r_n \le \lambda^n r_0 + C/((5-\lambda)B_n)$、$C = 0.0108$	初・読（定数）	一列四枚・ψ^8 の射影・$B \ge 32$・$O(1)$ の箱
15-07	一リンクの熱核比較の補題・四つの分解・BCH の三次 $1/9$・類 (B, q, a)・予算の発散	初	一リンク／Gauss の主項・二リンク／一ループの算術
15-07	最小の系の残り $\theta^0 \beta^{-1/2}$・$\theta^1 \beta^0$	読	二リンク・一列四枚・$\beta \le 32$
15-08	熱核の揺らぎの稀さの補題・大きい場の剰余の上界の補題・源の勘定・木のゲージ（有限群は Lean）	初	熱核の三条件（辺ごとに独立・一段・背景独立）・一リンク／有限群・$SU(2)$
15-08	小さい場の結合への寄与の割り方：Taylor の切り捨ては原典の Lemma 7.5.3 と同じ形、原典に無いのは W^{gauge} の群版	仮・初・典・読	複素の背景での解析性の条件・余白 q／零和の系では空
15-08	四行の言明と依存（背景依存の吸収と多段の行が芯）	仮・読	言明・見立て
15-03	類が閉じる条件の類の座標の最終形の案	仮	三次元の一段・二リンク・十字の読み
15-04	階層模型の鎖は四次元へ継がれない（挟み込みの未証明の段・管の余白）	読	挟み込みの原典の照合・小さな箱
15-05	ℓ^4 の錐の一段の縮み：行の重みつきの補間で $\sup \mu \le 0.823$	初・読	可換・木の水準・20^4 の核・$\beta_0' = 1$ の規格・区間の評価なし・向きごとは未決
15-07	背景 a を母数に持つ類で残り $\theta^0 \beta^{-3/2}$・予算は一様	読・初（算術）	二リンク・一列四枚・条件つき
15-07	面の一段で a は群の積・多ループの類に角の三重積	初・読	単一のループ／$2 \times 2 \times 2$・一段
15-08	二つのブロックの W^{gauge} は一ループから $O(1)$・尾の型は粗い変数の定義で決まる	初・読	七枚の一列・鎖・板・柱・一段・二次の係数・四次元は未
15-01	一段の係数の実測：周期の網の一段目で一ループの値の 2.9〜4.4 倍、倍率依存は 1.7〜1.9 倍	読	$SU(2)$・一ループ・横 6^3・一段目
15-03	四次元の類：一つの母数＋比の座標（二次 2・三次 3・四次 65）、斜めの隣は規則に依らず 0 でない、類が閉じる条件の局所は規則を添えて	読・初（本数・自由度）	木 $L \le 10$・一ループ $L \le 4$・周期の網は木の二次
15-03	結合の一段の正味の括弧のブロック間の項の再帰の一列版：縮む像＋段に依らない新しい項＋指数の三体の尾	読・初（帳簿）	一列・保存量の無い定義・一次・四次まで
15-04	取り直した管の上の c^* の包み $[0.0151, 0.0188]$	機	五か所の 50 区間・曲線が管に入ることは未
15-04	比べる相手を固定した一段の不等式の案の注：有限の箱の閾は 1、$6^4/3^4$ で分解能の内	初・読	小さな箱・どの β でも未
15-05	規格の注（λ は縮みの量でない・Stein の床 0.452）、ℓ^4 の錐の一段の縮みは一段目に限る、横の平均の多段の下界 0.64・0.57・0.64・0.62	初・読	可換・木の水準・周期・2^4・上界なし
15-05	粗いリンク＋大域の札は四次元の木で指数・網の長波長は木で 1 で $\ln L$ の走りなし	読	木の水準・$n \le 16$／ブロック 2 の一ループ
15-07	角の三重積は二段目で縮まず固定点に下から寄る・反復の不動点は本当の極限より 0 の側	読・初（帳簿）	三次元の木 $L \le 20$／四次元の木
15-08	W の再帰の群版と多体の尾（一列）・三次の残りの評価の座標の三次元の一ループ・Loc の二通りの差	初・読	一列・二ブロック・$L \le 8$／粗い $2 \times 2 \times L$

章	主な行	分類	範囲（抜粋）
15-08	臨界点の背景で二つのゲージの一ループは一致	初 ・ 読	一段・一ループ・3^4 点・可換の背景

05

この部の Lean の対応

表 3 は、この部の本文の初等的な部分のうち、有限和・実数の代数・三角の恒等式として Lean 4 で書いた束を並べたものです。どの束も `sorry` を含まず、末尾の公理の表示は標準の三つ（propext・Classical.choice・Quot.sound）だけでした。再検査も済み、全ての束が通りました（公理は標準の三つだけ）。本文の札は五分類のまま（紙の証明は〔初〕）とし、Lean は外の列として、各章の本文に定理の名と仮定を同じ行に添えています。**どの束にも格子・群・測度・最小化そのものは入っていません**。入っているのは、紙の証明の中の代数の一行です。

表 3　この部の Lean の束（再検査：全て済。仮定は定理ごとに同じ行に。末尾の二十五本は 2026-10-17・10-22・10-29 に足したもので、再検査は済。DominantMatrixContraction から ConeCalculus までの四本は 15-10 の体系の章のもの（15-10 の束は、ほかに 10-22 に足した OneStepWindow と 10-29 に足した ConeCalculusSOS が在り、合わせて六本）、その後の七本は 10-22 に、最後の七本は 10-29 に足したもの）

束の名	主な定理と仮定	本文の場所	入っていないもの	再検査
LatticeGauge.ClassResidualTelescoping	`telescoping_residual`（各段の外れの増分 $\le r_k$）・`telescoping_residual_multi`（同じ仮定・n 母数）・`inv_sq_sum_le`（$a, c > 0$）・`uniform_deviation`（$0 \le q < 1$、増分 $\le C/(a+ck)^2 + Dq^k$）	15-03 §04・15-04	測度・曲率・写像	済
LatticeGauge.HierarchicalShapeFlow	`quarticStep_fixed`（$\sigma \mapsto \sigma/16 + 1/3840$ の固定点 $1/3600$）・`shapeStep_contract`（$k \ge 2$）・`flow_coefficient`（$1/48 - 15/3600 = 1/60$）・`affine_contraction`（$0 \le \lambda < 1$、各段 $d_{k+1} \le \lambda d_k + \varepsilon$）・`tube_iterate`	15-04	区間演算の管・鞍点の主項の導出	済
LatticeGauge.FluxNetwork	`ratio_le_max`（各 $f_i^2 \le M$、$\sum f^2 > 0$）・`ratio_ge_of_unit_flux`（単位の束）・`energy_split`（$\sum f\psi = 0$）・`thomson_lower`・`thomson_attained`・`minimizer_unique`（集合が中点で閉じる）・`quad_lower`（$\beta > 0$）・`chain_one_step`（五つの不等式）	15-05 §02・15-07 背景に依らない揺らぎの一段の補題	射影・Dirichlet の原理・Taylor の半ノルムの微分の入れ替え・Haar の不変性	済
LatticeGauge.AllFacesBlocking	`fine_energy_lower`（四枚の組への写像が単射）・`block_energy_lower`・`smooth_ratio`（$n \ne 0, \theta \ne 0$）・`equal_split_ratio`	15-05 §07	擬逆・粗い Bianchi・Fourier の記号	済
LatticeGauge.RatioTwoCriterion	`ratio_two_iff`・`one_loop_D`（$B \ne 0$、ガウスのモーメントを代入した形）・`gamma_family_one_loop_lower`（$c < 3$）・`fund_adj_one_loop_root`（$\beta \ne 0$、$1 + 2\rho \ne 0$）・`no_pointwise_sqrt_one_loop`	15-06	Haar 測度・モーメント・部分積分・鞍点の展開	済

束の名	主な定理と仮定	本文の場所	入っていないもの	再検査
LatticeGauge.FundAdjointRefit	`refit_solution`（$\beta \neq 0$）・`tree_quadratic_split`・`tree_value_at_saddle`・`image_rho`・`image_gap`（$-53/356 + 1/4 = 9/89$）・`image_one_loop_D`	15-06	畳み込み・木への還元・包絡の論法	済
LatticeGauge.PrefactorFlowFixedPoint	`step_k2`・`step_k2_fixed_iff`（固定点 37/76）・`step_k2_contract`・`fixed_point_general`・`transverse_hessian`（$\sin a, \sin b \neq 0$）・`convolution_prefactor`・`rem_shape_geometric`（$0 \le \lambda < 5$、一段の不等式を仮定）・`ratio_coefficient`	15-06・15-03 §04	群の上の畳み込み・Laplace の方法・一ループの式	済
LatticeGauge.HeatKernelFourPlaquette	`conv_assoc`・`convPow_add`・`four_plaquette_of_semigroup`（$p_s * p_t = p_{s+t}$）・`four_plaquette_convPow`	15-06 §05	Haar 測度・熱核そのもの（有限群の版）	済
QuaternionReImSplit	`re_mul_split`・`commutator_re`・`J_imI` ほか・`two_link_split`（W, W_0 の成分の仮定）	15-07 §06	測度・臨界点・スコア・射影	済
LatticeGauge.ShapeRemainderUniform	`uv_uniform`（$0 \le \lambda < 5 \cdot C \ge 0 \cdot 5B_{n+1} \le B_n$・一段の不等式）・`stays_in_box`・`pow_sub_pow_norm_le`・`keff_half_le`（$B > 0$）・`cov_eigen`	15-06 一列四枚の定理	持ち上げ・Laplace の剰余の評価・定数の数値	済
LatticeGauge.HierarchicalTubeChain	`tube_exit`（管の中で一段 $\delta > 0$ 下がるか出口）・`cell_descent`・`chain_compose`・`tube_weight_mono`・`steps_numeric`・`mk_full_chain_64`（846 段）	15-04 §05	写像 T・管・区間演算・帯の側の定理（仮定として受ける）	済
LatticeGauge.ShapeResidualGeometric	`forced_uniform`（$0 \le \lambda < 1 \cdot E \ge 0$）・`geom_partial_le`・`residual_sum_uniform`（部分和 $\le U$）・`harmonic_part_unbounded`（$c/(k+1) \le \eta_k$）	15-07 §06	測度・臨界点・スコア（実数列の帳簿だけ）	済
LatticeGauge.LargeFieldSource	`weighted_tail_le_exp_moment`（重み $\ge 0 \cdot \sigma \ge 0$）・`union_tail_le_sum`・`coarse_source_commute`・`coarse_source_commute_comp`（有限・入れ子の段）	15-08 §02・§03	熱核の比較・像の和・読み取りの Lipschitz・細かいループの源	済
LatticeGauge.TreeGaugeFixing	`exists_gauge_tree_trivial`・`gauge_tree_trivial_unique`・`configEquiv`・`fiber_card_const`・`regauge_bijective`（根の共有）・`regauge_sum_eq`・`slice_average_tree_indep`（有限群・有限グラフ・関数はゲージ不変）	15-08 §05	連続群の Haar と Fubini・費用の評価	済
LatticeGauge.WilsonWindowComparison	`one_sub_cos_window`（$0 \le \theta \le \theta_0 \cdot \theta_0^2 \le 24$）・`wilson_weight_window`（同・$b \ge 0$）・`window_constant_chain`・`window_split_bound`	15-07 §05	熱核の下界・Bessel の漸近・一リンクの揺らぎの一段の補題の半ノルムの段	済

束の名	主な定理と仮定	本文の場所	入っていないもの	再検査
LatticeGauge.QuarticRowColumnBound	`weighted_quartic`・`row_quartic`・`schur_quartic`（行と列の ℓ^1 和の上界）・`representative_bound`（代表の一致）・`cone_step`・`cone_chain`	15-05 束の網の定理（局所の形）	Riesz–Thorin・軸の錐の恒等式・周期化・R の解析性	済
LatticeGauge.BCHCubicResidual	`nT_sum_diff`・`shape_split`（仮定なし）・`score_generator_split`・`bch3_coefficient`（$m+2\neq 0$）・`geometric_variance_m1`	15-07 §07	測度・Gauss の積率・射影・BCH の級数	済
LatticeGauge.SmallFieldLocSplit	`loc_split_unique`（多項式の等式）・`geom_tail_le`（$A\geq 0$・$0\leq q<1$）・`taylor_tail_bound`（$0\leq s<\rho$・$\lvert a_m\rvert\leq M/\rho^m$）	15-08 §06	Cauchy の評価（解析性）・複素の背景での解析性の条件・切りの確率・有効作用	済
LatticeGauge.BackgroundBudget	`budget_term_sq`（$g\neq 0$）・`budget_unbounded_of_threshold`（$g_j^2\geq 1/(A(j+1))$・$0\leq g_j\leq h_j$）・`inv_sq_partial_le`（$b>1$）・`inv_sq_budget_bounded`	15-07 §07	測度・格子・繰り込みの段（実数の算術だけ）	済
LatticeGaugeInterBlockLocAbsorption	`loc_split`（K は対称）・`nonlocal_vanishes_on_constant`・`rowSum_add`・`two_site_split`・`two_site_unique`・`tree_numbers`・`one_loop_numbers`（代入の算術だけ）	15-08 §06	Laplace の一ループの式・$O(1/\beta)$・群・測度	済
LatticeGaugeBlockCouplingCancellation	`locM_idem`・`locLin_idem`・`split_unique`・`bil_split`・`trace_locM`・`deltaBeta_nonloc`（残す組が反射的）・`frob_loc_nonloc`・`frob_pythagoras`・`Wg_explicit`・`two_block_W`（二つのブロック）・`Wg_zero_of_blockDiag`・`loc_psd`（C が半正定値）・`block_cancellation` ほか（24 定理）	15-08 §06	(A.5.3)–(A.5.4) の中身・群版の局所の打ち消し・格子・測度	済
LatticeGaugeSmallFieldRemainderAssembly	`one_step_remainder`（係数の Cauchy 型の仮定・切りの仮定・余白 $h_0\leq qh$）・`gamma_ge_one`・`cut_sum_le`（$A\geq 1$・$\gamma\geq 1$）・`taylor_step_le`（$m\geq 3$・$r_0^2\geq 1$）・`schedule_match`・`total_remainder_uniform`（同じ仮定、段数に一様）ほか（16 定理）	15-08 §06	解析性（複素の背景での解析性の条件）・切りの確率・形の座標の縮み	済
LatticeGaugeToeplitzTailSplit	`split`・`split_unique`・`qform_split`・`cform_split`・`tail_sum_le`（$0\leq\rho<1$・$\lvert q(r)\rvert\leq C\rho^r$）・`flat_row_sum_lt`（$L\geq 1$）・`flat_not_uniform_geometric`	15-08 §06	置換対称の命題・一ループの式・群・測度	済
LatticeGaugeWeightedTailBound	`weighted_geom_le`（$0\leq\rho<1$）・`weighted_tail_le`・`weighted_sum_uniform_linear`（$\lvert q(r)\rvert\leq C(r+1)\sigma^{2r}$・$0\leq\sigma<1$）ほか	15-08 §06	測った重みが仮定を満たすこと（$r\leq 8$ までの計算）・板・四次元	済

束の名	主な定理と仮定	本文の場所	入っていないもの	再検査
LatticeGaugeTailTypeClassification	`flat_weighted_sum`・`flat_weighted_unbounded`（$c>0$）・`exp_weighted_le`・`power_sum_uniform`（$s>1$）・`power_sum_unbounded`（$s\le 1$）・`power_sum_unbounded_borderline`	15-08 §06・15-05 §07	測った尾がどの仮定を満たすか・殻の重複度・格子	済
LatticeGaugeClassParameterBudget	`ghat3_forms`・`ghat3_zero_iff`・`inv_sq_partial_le`（$b>1$）・`class_parameter_budget_bounded`（閾 $h_k \le H g_k$・一ループの上界・$\eta_k \le h_k(A g_k^3 + D h_k g_k^2)$）	15-07 §06	測度・格子・射影・繰り込みの段	済
LatticeGaugeStokesSecondOrder	`log_quadratic_part`（環）・`log_quadratic_part_five`・`commSum_eq_zero_of_comm`（可換環）・`pure_quaternion_commutator`	15-07 §07	測度・積分・粗視化	済
LatticeGauge.CubeFaceCoupling	`total_sq`・`opp_eliminate`（$\sum \theta = 0$）・`general_to_diag_adj`（同）・`diag_adj_unique`（同じ仮定の上で二つの形が等しい）・`coeffs_from_eigen`	15-07 §07	格子・群・積分・最小化	済
LatticeGaugeStapleSumLowerBound	`sum_norm_ge_of_inner_ge`（実内積空間・$\|u\| = 1$・$\langle x_i, u\rangle \ge c$）・`card_cos_ge_quadratic`・`first_order_ratio`（$\cos\theta > 0$）・`quadratic_margin`・`radius_identity`	15-07 §05	四元数・staple の幾何・Taylor の半ノルム・合成の段	済
LatticeGauge.QuarticSplit	`titu_two`・`quartic_two`（$a, b > 0$）・`quartic_triangle`（各部分の四乗和の上界）・`class_split`	15-05 §07	Stein の補間・片側の二次の剰余・記号の sup	済
LatticeGauge.GhostDeterminantMatching	`det_gauge_plus_ghost_split`・`log_tree_eq_cov_sub_two_ghost_blocks`（$\det H' > 0$・$\det K > 0$・木の量が $\det H' / \det K$）・`coeff_tree_eq_coeff_cov`・`coeff_drop_ghost_shift`・`coeff_ghost_constant` ほか	15-08 §05	Faddeev–Popov の補題そのもの（積分の変数変換）	済
LatticeGauge.BondMovingSandwich	`bond_moving_finite`（$w_i \ge 0$・$\sum w_i a_i = 0$）・`iterate_le_of_le_of_monotone`（T が単調）・`comparison_fails_at_fixed_point`・`shrink_shape_shift`・`shrink_shift_lower`（$0 < \alpha$・$q \ge 3$）	15-04 §05	格子・群・測度・分配関数の不等式そのもの	済
LatticeGauge.InfluenceRecursion	`tp2_comp`（有限の順序集合・TP2 の仮定）・`cdf_upper`・`cdf_lower`・`k_upper`・`step_bound`・`gauss_product`	第 23 部の芯の Poincaré の一様性の仮定の支え方（23-12。本文は第 23 部、15-00 §04）	補題の微分の式・Hoeffding の式・TP2 の積分版・浮動小数の計算そのもの	済

束の名	主な定理と仮定	本文の場所	入っていないもの	再検査
LatticeGauge.CornerCouplingAffineFlow	`fixpt_is_fixed`・`iterate_dev`（$\lambda \neq 1$）・`abs_iterate_dev`（$0 \le \lambda < 1$）・`ratio_gt_one_below_fixpt`（$0 \le \lambda < 1$・$0 < r < s/(1-\lambda)$）・`one_step_ratio`（$3/160$）	15-07 §07・15-03 §02	格子・群・積分・最小化（実数の一次の写像だけ）	済
LatticeGauge.HypercubeFaceCoupling	`sigma_is_relation`・`relation_is_multiple_of_sigma`（面ごとの 24 本の等式）・`opposite_in_cell_reduces`・`diag_adj_not_enough`・`diag_adj_skew_unique`（計算で得た成分ごとの値と固有値を仮定）	15-07 §07	格子・群・積分（有理数の一次式だけ）	済
LatticeGauge.SkewCouplingSpectrum	`coeffs_of_spectrum`・`skew_zero_iff`（$e_3 = b + 4a - 4k$・$e_6 = b$・$e_8 = b + 2a + 2k$）・`one_step_skew`・`increment_pow`・`tail_bound`（$0 \le q < 1$・増分の比 $\le q$）	15-07 §07	格子・群・最小化。測った列が仮定を満たすこと	済
LatticeGauge.HypercubeCochainCount	`faceCount_four`・`euler_cube`（仮定なし）・`hypercube_cochain_ranks`・`edge_face_dof_agree`（増強した余鎖複体の完全性）・`torus_site_euler`（$n \ge 1$）・`torus_site_dof_agree`	15-03 §02・15-07 §07	完全性そのもの・束の網の定理 (iii)・最小化（自然数・整数の算術だけ）	済
LatticeGaugeNonlocalImageRecursion	`affine_iter`（$\lambda \neq 1$）・`fixed_point`・`affine_bound_sum`（$0 \le \lambda$）・`affine_bound_uniform`（$0 \le \lambda < 1$・$0 \le C$）・`quartic_block_charpoly`・`relative_rates`・`linear_recursion_fixed`・`new_term_gamma` ほか（12 定理）	15-08 §06・15-03 §03	像の行列の導出・測度・積分・群・W について二次以上	済
LatticeGaugeThreeBodyTailRecursion	`weighted_geom_le`（$0 \le \rho < 1$）・`three_body_sum_le`（$0 \le C$・$0 \le \rho < 1$・$\lvert q(d)\rvert \le C\rho^{d}$）・`affine_uniform`・`pair_tail_uniform`（$0 \le \lambda, \mu < 1$・二本の再帰の不等式）・`tripleCount_small`・`monomial_counts`（有限の数え上げ）	15-08 §06	係数が仮定を満たすこと（$d \le 7$ の計算）・群・測度・四次元	済
CoarseFaceHodgeSplit	`range_sup_tags`・`finrank_ker_eq`（$d_2 \circ D_c = 0$）・`disjoint_range_tags`（仮定なし）・`decomp_unique`・`norm_sq_add_harmonic`（$D^{\dagger} b = 0$）	15-08 §06・15-05 §07	具体の格子で札が 3 本であること・一ループ・尾の型	済
LatticeGauge.QuarticConeNorm	`ratio_sandwich`（$0 < b_{\min} \le b \le b_{\max}$）・`ledger`（$b_{\min} \sum \theta^2 \le \sum \phi^2 \le b_{\max} \sum \theta^2$）・`transfer`・`cone_b_to_a`・`stein_floor`（$A_i^2 \le F v_i$・$0 \le \nu_i \le A_i$）	15-05 §07	混合の極限の補題・長波長の最小点の型・Stein の補間	済
LatticeGauge.BlockCovariance	`cone_chain`・`cone_chain_uniform`（$M_k \le m$）・`growth_ledger`・`inverse_decay`（$r\, g_k \le g_{k+1}$）・`face_sum_sq`・`four_split_quartic_floor`・`even_split_quartic`	15-05 §07	条件つき平均の共分散の補題・記号の反復・周の長さの発散・μ の数	済

束の名	主な定理と仮定	本文の場所	入っていないもの	再検査
LatticeGauge.AveragedBlockFlow	`affine_iter`・`affine_dist`（$r \neq 1$）・`tail_sum`・`tail_bound`（$0 \le \delta$・$0 \le r < 1$）・`axis_flow_closed`・`axis_flow_values`・`cone_series`（$0 \le c < 1$・$x_{k+1} \le c x_k$）	15-05 §07	格子・Fourier・最小化。格子の流れが閉じた形に従うこと・$\sup \mu_j \le c < 1$	済
LatticeGaugeHierarchicalUpperTube	`tube_exit_top`（管の中で一段 $\delta > 0$ 下がるか出口）・`chain_top`・`steps_numeric_128`・`steps_numeric_64`・`mk_full_chain_128`（$b_{\mathrm{lo}} = 0.95$・$b \le 128$・$\delta = 0.2196$・帯の側のセル ≤ 556）・`union_tube_step`	15-04 §05	写像 T・管・区間演算（仮定として受ける）	済
LatticeGauge.TensionDomination	`iterate_bound_var`・`iterate_bound`（$c \ge 0$）・`lower_bound_four`・`area_law_transfer`（一段の不等式は仮定）・`orbit_lower`（写像の単調性なし）・`step_fails_of_zero_to_positive`	15-04 §05	格子・張力・MK の写像（実数列の帰納だけ）	済
LatticeGauge.BlockStepBetaShift	`beta_shift_of_inv_sq`（$1/g'^2 = 1/g^2 - 2b_0\ell$）・`su2_coeff`・`log_steps`・`shift_bounds`・`tadpole_weights`・`vanvleck_ratio`	15-01 §01・15-03 §02	格子・ブロック化・Hessian・測度（算術だけ）	済
LatticeGaugeTwoBlockRowSumLoc	`sRow_eq_sComp_add`・`nRow_eq_nComp`・`row_sum_cancels`（F が対称）・`row_split_unique`（非局所の部分が対角で 0）・`comp_split_unique`・`quartic_decomp_unique`・`two_loop_numbers` ほか（14 定理）	15-08 §06	積分・閉じた式の導出・展開・群	済
LatticeGaugeMultiStepCone	`step_pair`・`contraction`・`cone_quartic`（二段の再帰 $x_j \le a\,x_{j+1} + b\,x_{j+2}$、$a, b \ge 0$、$a + b \le 1$）・`block_three`（三段の組の反復、$0 \le \mu$）・`cone_transfer`（錐の一段の写し、$0 \le c$）（5 定理）	15-08 ゲージの張り替えの境目の行	Stein の値（数）・核そのもの・木と可換の仮定	済
LatticeGaugeMultiStepPerturb	`three_product_perturb`・`three_product_perturb_grouped`（ノルム環の三つの積の摂動）・`block_three_affine`（$c(k+3) \le \mu\, c(k) + \varepsilon$、$0 \le \mu < 1$、$0 \le \varepsilon \Rightarrow c(3n) \le \mu^n\, c(0) + \varepsilon/(1-\mu)$）（3 定理）	15-08 ゲージの張り替えの境目の行	段ごとの核の差の数・段 4 以降の外挿	済
LatticeGaugeQuarticCone	`four_amgm`（$\lvert abcd\rvert \le (a^4+b^4+c^4+d^4)/4$）・`quartic_sum_le`（有限和）（2 定理）	15-08 §06	各点の係数の ℓ^1 が有限なことは仮定・多体の項の実際の係数	済

束の名	主な定理と仮定	本文の場所	入っていないもの	再検査
LatticeGaugeColorAverage	`colorAverage`（有限の P・X と K : P → X → ℝ、仮定 (H) ∀ψ Σ$_p$(Σ$_x$ K ψ)^4 ≤ R Σ ψ^4 の下で、三色の θ について Σ$_p$|(Kθ)$_p$|^4 ≤ R Σ$_x$|θ$_x$|^4）・`colorAverage_of_design`（恒等式を満たす非負の重みの設計なら何でも）・`design_identity`（±e$_k$ に重み 1/15、(±1,±1,±1)/√3 に重み 3/40 で Σ w$_i$(s$_i$·v)^4 = |v|^4/5）ほか（10 定理）	15-08 ゲージの張り替えの境目の行	K が三色に同じスカラー係数で線形に働くこと（木・可換の線形化）は仮定・一色の sup の存在は (H) に込めた・≥ の側（一色の場は三色の場）は書いていない	済
LatticeGaugeCubicCone	`three_amgm`（|abc| ≤ (|a|^3+|b|^3+|c|^3)/3）・`cubic_sum_le`（有限和）・`triple_sq_le`・`triple_amgm`（三色の三重積 |u·(v×w)| ≤ (|u|^3+|v|^3+|w|^3)/3）・`cubic_cone_pullback`（錐 |Cφ| ≤ c ‖ φ ‖$_3^3$ と縮み ‖ Kθ ‖$_3^3$ ≤ μ ‖ θ ‖$_3^3$ から |C(Kθ)| ≤ cμ ‖ θ ‖$_3^3$）・`block_three_affine`・`block_three_uniform`（7 定理）	15-08 §06 芯の行	Stein・κ・λ の値（数）・核そのもの・木と可換の仮定	済
SmallSetRowSum	`rowSum_total`・`row_cancel`・`total_split`・`owner_split`・`symmetric_split`（small set の項の配分と行の和）・`loc_idem`・`rem_vanish`・`piece_loc_zero`（Loc の分解、(1−Loc) の側が一様な場で 0）・`theta_ledger`・`plate_numbers` ほか（20 定理）	15-08 §06	数値・核そのもの・木と可換の仮定・板は二次元で一段	済
ThetaSquareOneStepAffine	`one_step_affine`（段ごとの縮み μ$_k$ ≤ μ̄ のアフィン再帰）・`theta_ledger_mu`・`theta_ledger_half`（板の ½）・`theta_ledger_quarter`・`theta_ledger_measured`・`sup_monotone_in_mu`（6 定理）	15-08 §06	縮みの値そのもの（板の ½ は計算）・核・木と可換の仮定	済
DominantMatrixContraction	`dominant_mul`・`dominant_pow`（単位元のノルムが 1）・`weighted_step`・`weighted_iter`（$Bw \le \lambda w$）・`weight_change`（$av \le w \le bv$、$a > 0$）・`liftWeight_step`（$B \ge 0$、$w \ge 0$、$s > 0$、$k \ge 1$、$B^k w \le s^k w$）・`norm_pow_le_const_mul`・`sum_norm_pow_le`・`affine_uniform`（$0 \le \lambda < 1$、$\varepsilon \ge 0$）・`aggregate_step`・`two_by_two_weight`・`two_by_two_exists`・`signedEx_sq`・`absEx_pow`（21 定理）	15-10 §01	Collatz–Wielandt の等式・Gelfand の公式そのもの・Perron ベクトルの存在・ℓ^2 の重み（Schur の判定法）・max-plus の挟み	済
SignLossBound	`jensen_four`・`schur_four`（行の $\ell^1 \le A$、列の $\ell^1 \le B$）・`coherent_of_neg_le`（負 ≤ δ 正）・`loss_le_of_coherent`・`comp_coherent`・`coherence_le_one`・`sum_four_le`（$\lvert v_a \rvert \le M$）・`stein_form_le`・`stein_le_inv_sq_mul_test`（$\kappa A_r M \le \lvert y_r \rvert$）・`abs_comp_le`・`row_l1_comp_le`（16 定理）	15-10 §02	Stein の式そのもの（Plancherel と補間）・平面波の位相の平均・Wielandt の定理・階数 1 への収束・損の数（計算）	済

束の名	主な定理と仮定	本文の場所	入っていないもの	再検査
ConstrainedExtension	`exists_extension`・`isExtension_iff_mem_coset`・`finrank_freedom`（有限次元）・`freedom_eq_zero_iff`（$W \neq 0$）・`exists_extension_with_conditions`（$(\mathrm{res} V, C)$ が全射）・`finrank_freedom_with_conditions`・`conditions_count_le`・`eq_of_eqOn_iSup`（部分空間の族の和が全体）・`comp_isExtension`（$f_1(V_1) \subseteq V_2$）・`comp_depends_of_not_le`（20 定理）	15-10 §03	格子・記号の連続性・折り返しの次数・積率・格子の段の候補（零モードの一意性の連続性の段、尾の次数の規則、ずらしたジェット）	済
ConeCalculus	`cone_pullback`（$c \geq 0$）・`contracts_comp`・`contracts_iterate`・`block_decay`（$M \geq 0$、$\mu \geq 0$）・`lp_schur`（$p \geq 1$、行の $\ell^1 \leq R$、列の $\ell^1 \leq C$）・`lp_schur_sharp`（行和・列和が一定）・`delta_dilution`・`weighted_rpow_midpoint`（$w \geq 0$、$a > 0$）・`weighted_rpow_shift`（$0 < a \leq R$、$p_0 \leq p$）・`midpoint_below_one`・`affine_varying`（$0 \leq \mu_k \leq \bar{\mu} < 1$、$\varepsilon_k \leq \bar{\varepsilon}$、$c_k \geq 0$）・`affine_eventually`・`affine_block`（20 定理）	15-10 §05	作用素ノルムそのもの・Stein の上界の式（補間と Plancherel）・Riesz–Thorin・連続の p での凸性・Gelfand の公式・格子と核	済
ColorAverageN	`colorAverage_of_design`（`IsQuarticDesign w s κ` の下で一色の定数 R が n 色の上界）・`weights_sum`・`pt_unit`・`design_identity`（軸の点 $\pm e_k$ に重み $1/(n(n+2))$、立方体の頂点 $\varepsilon/\sqrt{n}$ に重み $n/((n+2)2^n)$ で $\sum_i w_i (s_i \cdot v)^4 = 3|v|^4/(n(n+2))$、全ての $n \geq 1$）・`colorAverage`（設計の仮定なしの n 色版、$\kappa = n(n+2)/3$）・`oneColour_of_colorAverage`（逆向き）・`design_identity_two`（$n = 2$、$\kappa = 8/3$）・`cube_moment` ほか（13 定理）	15-08 のゲージの張り替えの境目の行・16-07 §07	球面平均の補題・$\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^n$ と $\mathfrak{su}(N)$ への当てはめ・文献との照合	済
OneStepWindow	`holder_dual_ratio`・`norm_conj_rpow`・`exists_lpRatio_ge_row`（一座標の Hölder の下界、$p > 1$、$k = 0$ を含む）・`lamMax_mono`・`lamMax_smul`・`steinWeighted_ge`・`stein_row_weight_saturation`（行の重みの族は $u = A^{p-2}$ で飽和。$\lambda_{\max}$ は Rayleigh 商の上限で定義）・`window_ordConnected`・`window_ordConnected_of_logConvex`（窓は区間。$\log \mu_p$ の凸性は仮定）ほか（20 定理）	15-10 §05	Courant–Fischer・数 $p_{\mathrm{row}} = 5.874$ と区間 $(3.04, 5.67)$（計算）・作用素ノルムそのもの	済

束の名	主な定理と仮定	本文の場所	入っていないもの	再検査
LargeSetWeight	`summable_shell_iff`（殻の個数が多項式なら $\sum (n+1)P(n)A^{n+1}e^{-\kappa n}$ が収束 $\Leftrightarrow$ $0 \le A < e^{\kappa}$）・`not_summable_term_poly`・`bbs_weight_vs_decay`（$(\eta-1)\kappa > L^d \log 2$ の形）・`bsv_weight_vs_decay`・`bsv_weight_vs_decay_log2`（a に依らない）・`card_shell`（ℓ^∞ の殻の個数 $64n^3+16n$、$n \ge 1$）・`manhattanShell_one`／two／three（8・32・88）ほか（16 定理）	15-08 §06	剰余の定数 c_R の鎖への帰着・Manhattan の殻の一般式・率 κ の値（計算）	済
LatticeGaugeAcceptanceSandwich	`fermi_le_metro`・`half_metro_le_fermi`（$\frac{1}{2}\min(1,e^{-x}) \le 1/(1+e^{x}) \le \min(1,e^{-x})$）・`barker_le`・`barker_le_of_crooks`（Barker 型の平均 $\le 1/(1+e^{\Delta F}) = (1-\theta)/2$）・`overlap_sandwich`（$e^{-\Delta F}O \le a_F \le O$）・`mixture_sandwich`（$(1-\theta)O \le a_{\mathrm{mix}} \le 1-\theta$）・`jarzynski_of_crooks`・`half_le_one_sub_sqrt` ほか（15 定理。仮定は Crooks 型 $P_F e^{-W} = e^{-\Delta F} P_R$）	25-06 §07・25-08 §03	Bretagnolle–Huber・Pinsker・駆動の手続きそのもの・数	済
LatticeGaugeAbelianTwistAction	`abelianAction_le`・`abelianAction_lt_pi_sq`（全 $N \ge 1$ で $2N^4(1-\cos(\pi/N^2)) \le \pi^2 - \pi^4/(12N^4) + \pi^6/(360N^8) < \pi^2$、仮定なし）・`totalAction_eq`（$(\mathbb{Z}/N)^4$ の可換な配位で六平面の和 $= 2N^4(1-\cos(\pi/N^2))$）・`plaqTerm_mixed` ほか（13 定理）	27-02 小さな T^2 の基点	区画 (1,1) の最小作用 $\le S_{ab}$（$SU(2)$ の配位空間は入っていない）・項 $1-z$ cos と捩れの置き方は定義として置いた	済
LatticeGaugeNestedBlocks	`nested_supermultiplicative`（有限確率空間、大ブロック＝小ブロック s^2 個の fibre、平均の不等式 $\mathbb{E}\prod\theta' \le \mathbb{E}\prod\theta$ を仮定）・`doubling_iterate`・`doubling_bound`（$K = 4C$ の倍化 $t_k \le K^{-1/3}(K^{1/3}t_0)^{4^k}$）ほか（7 定理）	26-05 §02・26-02 §03	Markov 性・鏡映正値性・$(\mathrm{C}_{\mathrm{cb}})$	済
CenterFluxPolymerCertificate	`tree_k`（木の不等式六つ）・`kp_bound`・`kp_lt_one`・`rate_rational`（$\beta = 1029/10000$）・`exp_le_inv_one_sub`（$0 \le y < 1 \Rightarrow e^{y} \le 1/(1-y)$）・`final_real`（$\tanh\beta \le \beta$ を仮定）（6 定理）	26-06 §04	$\tanh\beta \le \beta$・木の帰納の補題・Kotecký–Preiss の定理・10 枚以下の全数え上げ・区間演算の版（$\beta \le 0.1039$）	済

束の名	主な定理と仮定	本文の場所	入っていないもの	再検査
ClassFixedPoint	`dist_linear_add_le`（$\|T\| \le \rho$、$\mathrm{Lip}\, R \le L \Rightarrow \mathrm{Lip}(T+R) \le \rho + L$）・`exists_unique_fixed`（$\rho + L < 1$）・`norm_fixed_le`・`exists_unique_fixed_in_ball`（閉球の上だけで Lipschitz、$C + (\rho+L) r \le r$）・`norm_iterate_sub_le`（$\mathrm{Lip}(\Phi^{[n]} - T^{[n]}) \le (\tau+L)^n - \tau^n$）・`exists_unique_fixed_of_iterate`（$n$ 段で縮む）・`affine_orbit_bound`・`dist_fixed_fixed_le`（写像のずれ δ なら不動点のずれ $\le \delta/(1-K)$）・`tracking`（流れる母数への追従）・`pull_orbit`・`exists_unique_entire_orbit`（段ごとに替わる縮みの、閉集合に留まる両側無限の軌道がただ一つ）・`entire_tracking` ほか（24 定理）	15-03 §04	仮定の表の中身（縮みと剰余を同じ一つのノルムで測ること・非線形の係数 a と源 c_0 の値・F^2 を β へ移した後の縮み・A 型の Loc の正しさ）・窓の数（計算）	済
LocalCancellationOneRow	`pairs_sum_to_total`・`total_uniform`・`pairAA_uniform`・`pairAB_uniform`・`loc_remainder0_eq_zero`・`pairAB_rank_one`（またぐ対は階数一）・`pairAB_local_plus_gradient`・`mirror`（一列七枚・二ブロックの $O(1/\beta)$ の二次の係数の有理数の算術、仮定なし）（8 定理）	15-08 §06	有理数の係数の導出（熱核の一列の計算）・減衰の比 $5 + 2\sqrt{6}$・板と四次元	済
RankOneRemainder	`pair_split`（$K a b = \frac{K}{2}(a^2 + b^2) - \frac{K}{2}(a-b)^2$）・`edge_sum_split`（任意の有限集合の対）・`chain_split`・`chain_local_regroup`・`chain_remainder_eq`（一列で、またぐ和から局所の部分を引いた残り $= -\frac{1}{2}\sum_i K_i (a_i - b_{i+1})^2$）・`chain_remainder_zero_of_match`（$a_i = b_{i+1}$）・`chain_remainder_nonpos`（$K_i \ge 0$）・`deflation_split`・`deflation_left_zero`・`deflation_right_zero`（一様な場の値 $\neq 0$）ほか（12 定理）	15-08 §06	板で主の積が三つになること・残りの大きさ（計算）・四次元	済
BlockDeflation	`blockDeflate_split`（$C = CB(A^{\mathrm{T}}CB)^{-1}A^{\mathrm{T}}C + R$）・`blockDeflate_left_zero`・`blockDeflate_right_zero`（$A^{\mathrm{T}}CB$ が可逆なら $A^{\mathrm{T}}R = 0$・$RB = 0$）・`left_zero_inherit`・`right_zero_inherit`・`twoStep_zero`・`twoStep_split`（二段目の $A_2^{\mathrm{T}} R_1 B_2$ も可逆）・`span_left_zero`・`span_right_zero`（試験場の張る空間）（9 定理）	15-08 §06	係数の大きさ（計算）・Taylor の次数との対応・四次元	済

束の名	主な定理と仮定	本文の場所	入っていないもの	再検査
ConeCalculusSOS	`cert_sound`（証書があれば $P \le \lambda N$）・`cert_mono`・`certValue_anti`（族が大きいほど値は小さい）・`ratio_le_certValue`・`floor_of_coeff`（係数の等式から床）・`classSum_pushforward`（押し下げ、条件なし）・`classSum_pullback`（類の写像が単射なら持ち上げ）・`shift_rigid`（各軸で $2w < L$ なら単射）・`collide_L3`・`collide_L4`・`no_translate_Z`（反例）・`tensor_contracts`・`tensor_ratio_product`・`row_holder_sos`・`schur_weighted_bound`・`schur_attained` ほか（25 定理・2 補題）	15-10 §05（第二章の段落は本文に未収録）	多項式環の中の SOS（恒等式は関数か係数の等式として仮定に置く）・符号つきの Stein の上界との大小・全空間の $\mu_4(K_0) < 1$・$L > 2w$ の必要性・数（計算）	済
LatticeGaugeH1HbarInterval	`cell_lower`・`cell_upper`（$0 < \hbar_1 \le \hbar \le \hbar_2$ で $\min(U/\hbar_1, U/\hbar_2) \le U/\hbar \le \max(U/\hbar_1, U/\hbar_2)$）・`sum_lower`・`sum_upper`（前向きの和）・`rho_lower`（$0 < B \le \bar{B}$）・`pieces_min`（小片の被覆）・`margin_on_interval`（区間の上の余白）・`threshold`・`margin_I1`・`margin_I2`〜`margin_I6`（区間演算の出力の数を入れた余白 ≥ 0.067）・`margin_I1_coarse_fails`（陰性対照）（15 定理）	23-15 §05・27-02 二重井戸の一様なギャップ	区間演算そのもの（float64 と外向きの幅の出力は仮定）・Muckenhoupt・FKG・TAU の補間の剰余・補題 Tail・三本目以降の部分区間の数（機）・一様なラプラス法の定量版	済
StrongCouplingOneSidedTerm	`four_mul_le_sq`（$L \ge 4 \Rightarrow 3L + L \le L^2$）・`area_le_strip`（$0 \le u \le 1 \Rightarrow u^{L^2} \le u^{3L} u^L$）・`strip_term_eq`・`strip_coeff_lower`（$0 < s \le \pi/(2L^2) \Rightarrow 16L^2/\pi \le 8/s$）・`tube_coeff_neg`（$L \ge 4$、$s > x - x^3/4$、$0 < \hat{D} \le 3$）・`tube_part_nonpos`・`h_main_term`（$\lvert R \rvert \le C u^{3L+1}$）・`h_neg`（$Cu < K$）・`h_neg_on_interval`（$u \le u_0$、$Cu_0 < K$）（9 定理）	27-02 結合の言葉の帯	展開の収束（Osterwalder–Seiler。剰余の上界は仮定）・$\sin x > x - x^3/4$・$\hat{D} \le 3$・$\ln Z$ の主項の係数（紙）・C_L と u_0 の値・L に一様な β_0	済

06

第 27 部と用語集への接続

条件の台帳（27-02）の紫外の制御の行は、この部の表 1（問い）と 15-08 表 1（閉じない四行）で小さく割られます。札と状態（仮・未）は変わりません。問いの横断の索引（27-03）には、この部の紫外の問いを第五の出所として引きます。この部で足した語（不変な曲線・横の縮み・源・束の網・ループの形ごとの結合・引き込む先の類・局所結合のずらし）は A-02 用語集 にあります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
索引：問い・依存・五分類の要約・Lean の束の対応（この章は新しい結果を足さない）	紫外の制御。どの問いの決着も
Lean の束が標準の三つの公理だけに依ること（束ごとの表示と再検査）	格子・群・測度・最小化の形式化。紙の証明の解析の部分

出典と再現

もの	種別	出典・道具
言えないこと・問い・五分類	本書の検討	15-00〜15-08 の各章の表と節
Lean の束	本書の検討	この本の検討の形式化の記録（Lean 4、束ごとに末尾で公理を表示）。再検査済み（全ての束が通過）

この章で使った語 — 言えないこと・紫外の問い・依存の図・五分類・Lean の束。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：15-10 体系の試み — 記録の繰り返しの型に名前を与える。あわせて読むなら 27-00 入口 — この部の約束（条件の台帳の紫外の制御の行を含む条件つきの言明の全体）。

体系の試み — 記録の繰り返しの型に名前を与える

この章は本書の検討です。本筋の証明の部品ではありません。§01〜§03 と §05 は既知の枠組みへの言い換え、§04 は見立ての水準です。

この部は、本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた記録です。存在そのものは第二巻の第 6〜13 部を、二つの設計の違いは第 14 部を見てください。部の位置づけは 15-00 にあります。

この章で分かること — 第 15 部の計算の記録に何度も出た五つの手作業に、名前と定義を与えます。一つ目は「一段では 1 を超えるが、数段まとめると縮む」行列の評価（優勢行列）、二つ目は符号を捨てて上界をとるときに失う分（符号を捨てる損）、三つ目は拘束の上でしか決まらない写像を局所の核で表すときの選び方（局所の代表）、四つ目は強結合と弱結合の二つの展開の突き合わせ（二重付値）、五つ目は p 次の多項式を ℓ^p の錐で押さえて段ごとに引き戻す計算（錐の計算法）です。それぞれについて定理の候補を書き、既知の結果のどれの言い換えかを行ごとに示し、記録の数がどの量に当たるかを並べ、残る問いを体系の問いにまとめます。

読む水準 — 三年生以上です。§01 は非負行列の線形代数、§02 は有限和の不等式、§03 は格子の上のフーリエ級数、§04 は漸近級数の主項だけ、§05 は有限和の不等式と補間定理の言明を使います。§00 と各節の冒頭の段落だけなら二年生でも読めます。

前提となる章 — 15-05 束の網の定理（局所の形）（局所の代表と体積に一様な上界）・15-05 の ℓ^4 の錐の一段の縮み（重みつきの Stein の上界と ℓ^4 の錐）・15-08 §06（W の座標と錐の多段）。

先に言うこと — この章は本筋ではありません。条件の台帳（27-02）の紫外の制御の行にも、移り変わりの帯の行にも、この章の結果は直接には効きません。定理の候補の多くは既知の事実——Perron–Frobenius の定理、Collatz–Wielandt の公式、Gelfand の公式、重みつき最大ノルムでの縮み、多重格子の転送作用素の次数、細分割の和の規則、Riesz–Thorin の補間定理、Schur の検定——の言い換えで、新しさは主張しません。この章で新しいのは「問い」の側です。記録の数が既知の枠組みのどの量に当たるか、どこで既知の枠組みからはみ出すかを書き出すことが目的です。札は行ごとに付けます：Lean （Lean のファイルで通った文）・計算 （浮動小数の計算。区間の評価ではない）・読 （紙の上の筋だけ、または文献の要旨の水準）・典 （標準的に知られている事実）・仮 （見立て）。

この章の順序

0. この章で分かること ― 五つの型とこの章の読み方
1. 優勢行列と k 段の縮み ― 一段で縮む重みの作り方（表 1）
2. 符号を捨てる損 ― 損はそろいの逆二乗（表 2〜5）
3. 局所の代表の幾何 ― 折り返しの次数は代表に依らない（表 6・7）
4. 二重付値の幾何 ― 目盛りに依らない κ とレンズ（表 8〜10）
5. 錐の計算法 ― 窓は区間、薄まりの正しい形（表 11・12）
6. 既知との辞書・言えている範囲・問い（表 13〜15）

00

この章で分かること

優勢行列	符号を捨てる損	局所の代表	二重付値
k 段で縮むなら、一段で縮む重みが明示的に作れる 「一段で 1 を超える」は重みの選び方による過渡。Collatz–Wielandt と Varga の流れの言い換え（Lean）	損は、最悪の向きでの行のそろいの逆二乗で押さえられる 4^4 のトーラスの二〜四段で 5.55・5.13・5.31 と一致（不等式は Lean、数は計算）	折り返しの次数 $\operatorname{ord}_V(F)=2$ は代表の選び方に依らない 記録の型の範囲では、尾のノルムが有界なのは $D\le 4$ まで。和の規則の言い換え（読・計算）	二つの主係数の積 $\kappa = s1w1$ は結合の目盛りに依らない 主項どうしのレンズは $\kappa \le \frac{1}{4}$ のときだけ開く。見返りの定理は未（仮・計算）
錐の計算法			
p 次の錐の引き戻し・重みつきの Stein の上界・段の合成・アフィンの再帰に定義を与える $\log S_p$ は p について凸で $S_3 \le \sqrt{S_2 S_4}$。素朴な薄まり m^{1-p} は成り立たず、$S_p \le S_2 R^{p-2}$ が最小の形（Lean・読・計算）			

この章の読み方。第 15 部の計算の記録には、同じ形の手作業が何度も出てきました。三段の合成のノルムを測って「一段では 1 を超えるが三段では縮む」と書く、符号つきの核の絶対値をとって

上界を作る、Bianchi の恒等式を満たす場の上でしか決まらない写像に局所の核を当てる、強結合の級数と弱結合の級数の主項を並べて交わる点を探す、p 次の錐を段ごとに引き戻して重みつきの Stein の上界で押さえる、の五つです。この章は、それぞれに定義と公理（何を仮定すれば何が言えるか）を与える試みです。結果の多くは既知の事実の言い換えで、そのことを各節の定理の候補の行ごとに書きます。言い換えてみて残るもの——既知の枠組みに直接は当たらない量や、記録の数が示す規則性で定理にできていないもの——が、この章の問いです。§01〜§03 は互いに独立に読めます。§04 は §01〜§03 と道具を共有せず、繰り込みの比較の帯の言い直しの試みです。§05 は §01 の候補 1.4 を錐の言葉に広げたもので、§01 と並べて読めます。

01

優勢行列と k 段の縮み

塊に分けた作用素の各塊のノルムを並べた非負の行列は、作用素の冪の評価を非負行列の冪の評価に移します。非負行列の側では Perron–Frobenius の理論がそのまま使えるので、「何段で縮むか」「一段で縮むにはどの重みで測ればよいか」が行列の言葉で書けます。ここまでは全て既知で、この節の役目は記録の評価をこの枠組みにそろえることです。

定義

定義 1.1（優勢行列）. I を有限集合、E_i（$i \in I$）をノルム空間、T を $E = \bigoplus_i E_i$ 上の作用素で塊 $T_{ij} : E_j \to E_i$ に分けたものとします。非負の行列 $B \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{I \times I}$ が T の**優勢行列**であるとは、全ての i, j で $\|T_{ij}\| \leq B_{ij}$ となることです。最小のものは塊ノルムの行列 $N(T)_{ij} = \|T_{ij}\|$ です。

- 積と冪：$N(ST) \leq N(S)N(T)$（成分ごと）。よって B, C が S, T の優勢行列なら BC は ST の優勢行列で、B^n は T^n の優勢行列です Lean （`norm_mul_apply_le`・`dominant_mul`・`dominant_pow`。冪の版の仮定は単位元のノルムが 1）。
- 和と非負のスカラー倍でも閉じます 読 。
- max-plus の側：$A = \log B$（成分ごと）の最大閉路平均 $\lambda_{\mathrm{mp}}(A)$ について $e^{\lambda_{\mathrm{mp}}} \leq \rho(B) \leq |I|\, e^{\lambda_{\mathrm{mp}}}$ 典 （Friedland 1986）。記録では、max-plus の固有値が最適な重みつきノルムを下から 1〜2.5% で挟んでいました 計算 。

定義 1.2（重みつきの塊ノルム）. 正の重み $w \in \mathbb{R}_{>0}^{I}$ について $\|x\|_{w,\infty} = \max_i \|x_i\| / w_i$、$\ell^2$ の版は $\|x\|_{w,2}^2 = \sum_i \|x_i\|^2 / w_i^2$ です。作用素ノルムは $\|T\|_{w,\infty} = \|W^{-1} T W\|_{\infty}$（$W = \mathrm{diag}(w)$）です。

定義 1.3（k 段の縮み・過渡の定数）. 非負の行列 B について $\kappa_k(B) := \|B^k\|$ とし、ある k で $\kappa_k < 1$ となるとき「k 段で縮む」と言います。過渡の定数を $C_k(B) := \max_{r<k} \|B^r\|$ とします。

Gelfand の公式 $\rho(B)=\lim_n \|B^n\|^{1/n}$ から、$\rho(B)<1$ とある k で $\kappa_k<1$ となることは同値です[典]。

定義 1.4（一段の重み）. $B\ge 0$・$w\ge 0$・$s>0$・$k\ge 1$ について

$$w' := \sum_{r<k} s^{-r} B^r w$$

を、w から作った**一段の重み**と呼びます。

定理の候補と札

候補 1.1（k 段の縮みから一段で縮む重みへ）. $B\ge 0$、$w\ge 0$、$s>0$、$k\ge 1$、$B^k w\le s^k w$（成分ごと）なら、$w\le w'$ かつ $Bw'\le s\,w'$ です[Lean]（`liftWeight_step`。補題 `mulVec_pow_succ`・`pow_mulVec_nonneg`）。

$$Bw' = \textstyle\sum_{r<k} s^{-r}B^{r+1}w = s\big(w' - w + s^{-k}B^k w\big) \;\le\; s\,w'$$

これに候補 1.2（一段の評価）を合わせると、「k 段の合成が重み w で s^k 倍に縮む」なら「重み w' で測れば一段ごとに s 倍に縮む」となります。重みの比 w'/w は $[1,\ \sum_{r<k} s^{-r}\max_i (B^r w)_i/w_i]$ に入るので、測り直しの定数は段数に依りません（候補 1.3）。内容は「$\rho(B)<s \Leftrightarrow Bw'\le sw'$ となる $w'>0$ がある」の構成的な片側で、Varga の反復法の解析や Berman–Plemmons の M 行列の特徴づけの流れで知られています[典]。

表 1　§01 の定理の候補。どれも既知の事実の有限次元の形か、その初等的な帰結です

候補	言明（一行）	札	何の言い換えか
1.1	$B^k w\le s^k w \Rightarrow w\le w'\cdot Bw'\le sw'$	[Lean]	Varga・Berman–Plemmons の M 行列の特徴づけの構成的な片側[典]
1.2	$Bw\le\lambda w$（$w>0$）$\Rightarrow \|T\|_{w,\infty}\le\lambda$。段ごとに違う T_n,B_n,λ_n でも $\|x_n\|_{w,\infty}\le(\prod_k\lambda_k)\|x_0\|_{w,\infty}$	[Lean]（`weighted_step`・`weighted_iter`）	Collatz–Wielandt：$\inf_{w>0}\max_i (Bw)_i/w_i=\rho(B)$（等式そのものは Lean に入れていない）[典]
1.2′	右と左の正の Perron ベクトル x,y があれば、$D=\mathrm{diag}(\sqrt{y/x})$ で $\|DBD^{-1}\|_2\le\rho(B)$、さらに $\|DTD^{-1}\|_2\le\|DN(T)D^{-1}\|_2$	[読]	Schur の判定法を $q=\sqrt{xy}$ に当てたもの[典]
1.3	$av\le w\le bv$（$a>0$）なら、重み w で各段 λ_n 倍に縮む列は重み v で $\|x_n\|_v\le(b/a)(\prod\lambda_k)\|x_0\|_v$	[Lean]（`weight_change`）	ノルムの同値の初等的な事実

候補	言明（一行）	札	何の言い換えか
1.4 (a)	$\|1\| = 1$、$q := \|a^k\|$、$\|a^r\| \le C$（$r < k$）$\Rightarrow \|a^n\| \le C\, q^{\lfloor n/k \rfloor}$	Lean（`norm_pow_block_le`・`norm_pow_le_const_mul`）	Gelfand の公式の有限の版 典
1.4 (b)	$q < 1 \Rightarrow \sum_{n<N} \|a^n\| \le kC/(1-q)$（$N$ に依らない）	Lean（`sum_norm_pow_le`・補題 `geom_sum_le_inv`・`sum_range_mul_eq`）	Neumann 級数の部分和の評価
1.4 (c)	$c(k+1) \le \lambda c(k) + \varepsilon$（$0 \le \lambda < 1$、$\varepsilon \ge 0$）$\Rightarrow c(k) \le \max(c(0), \varepsilon/(1-\lambda))$	Lean（`affine_uniform`）	アフィンの再帰の初等的な事実
1.4 後半	既約で Perron ベクトル $w > 0$ を持てば $C = \max_i w_i / \min_i w_i$（$\infty$ ノルム）。w の比を B の成分で押さえる明示式	読（明示式は書き切っていない）	Minc の比の評価 読
1.5	塊を $g : I \to J$ で集約した $J \times J$ の行列 M が $Mp \le \mu p$ なら、元の B は重み $w_j p_{g(j)}$ で μ 倍の一段の縮み。J が二点で $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$、$a < 1 \cdot d < 1 \cdot bc < (1-a)(1-d)$ なら重み $(1, t)$ で $\max(a + bt,\ d + c/t) < 1$	Lean（`aggregate_step`・`two_by_two_weight`・`two_by_two_exists`）	二×二の行列の $\rho < 1$ の判定の初等的な事実 典

記録の数との対応

- W の座標（差を含む二次、次元 6）の有限の型の行列は、スペクトル半径 0.36、一段のノルムが 1 を超え、三段で 0.05〜0.13 でした 計算 。$\rho < 1$ で一段のノルムが 1 を超える典型で、候補 1.4 (a) の C が過渡の定数に当たります。Perron の重みを取れば一段で縮む、というのが候補 1.1・1.2 の読みです（記録では Perron の重みで一段 0.546）計算 。
- ℓ^4 の錐（15-05）の重みつきの Stein の上界は、一段 4.45・三段 0.10 でした 計算 。候補 1.1 の形にすれば「三段で 0.10 なら一段で $0.10^{1/3} \approx 0.46$ に縮む重みが作れる」と読めますが、そのためには三段の評価が**一つの線形の優勢作用素の冪**から来ている必要があります。錐は Riesz–Thorin を通した四次の量で、段ごとに核 K_k が違うので冪ではありません。この場合に使えるのは段ごとの積の形（`weighted_iter`）だけです 読 。
- 有限の型と残りの戻りの組は、候補 1.5 の二×二の集約の形です。残りの塊を右下に入れて $bc < (1-a)(1-d)$ を確かめることは、まだしていません（問い「有限の型と戻りの集約」）。
- 第 23 部の二重井戸の粗い鎖で使った Dobrushin の列和は、重み $w = \mathbf{1}$ の候補 1.2 です。重みを Perron に取れば縮みの定数は良くなりえます 読 。

この型に固有の問い — 符号を捨てる損

優勢行列は符号を捨てます。実際の作用素 T と優勢行列 B について、段 k の損を

$$L_k := \frac{\|B^k\|_\bullet}{\|T^k\|_\bullet} \qquad (\text{同じノルム。} \|T^k\| = 0 \text{ なら } +\infty)$$

と置くと、損は段で有界とは限りません。$T=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$ は $|T|=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ を優勢行列に持ち、$T^2=0$ で、$|T|^{n+1}$ の全成分は 2^n です。よって $n\ge 2$ で $L_n=+\infty$ です Lean （`absEx_eq`・`signedEx_sq`・`absEx_pow`）。逆に T が非負（$T=|T|$）か、符号の相似 $T=S|T|S$（S は ±1 の対角行列）なら、Perron の重みの ∞ ノルムで $L_k=1$ です 読 。

符号の選び方で $\rho(|A|)$ の評価にどこまで届くかは Rump の sign-real spectral radius（Rump 1997）が扱っています 読 。損が**段で**どう振る舞うかを扱った文献は見つけていません（見つけていない、であって無いという意味ではありません）。記録の損は一段 7.6・二段 9.3 とゆっくりにしか増えておらず、これを定理にする条件は優勢行列の情報だけからは決まりません（上の例がそれを示します）。この問いを次の §02 で扱います。

02

符号を捨てる損

記録の損をよく見ると、§01 の反例とは型が違いました。記録の Stein の上界は、段の核を**合成してから**上界をとっています。§01 の反例は**絶対値をとってから**合成する量です。前者では、冪零の例 $T^2=0$ の合成の上界も 0 になります。この節では、合成してから上界をとる損が段でほとんど動かないことを数で見て、それを一つの行の中の幾何の量（行のそろい）で押さえる不等式を書きます。

定義

定義 2.1（合成の核と損）.段の核 $K_0,K_1,\dots$ の合成を $T_k=K_0K_1\cdots K_{k-1}$ とします。真の比を $\sup_\theta \|T_k\theta\|_4^4/\|\theta\|_4^4$、Stein の上界を 15-05 の式 (11) の形の重みつきの ℓ^2 の量（合成の核の行の ℓ^1 ノルム A_r を重みにする）とし、

$$\text{損}_k:=\frac{\mathrm{Stein}(T_k)}{\text{真の比}(T_k)}$$

と置きます。真の比は最大化の下界（準ニュートン法と周期 2 の場の最大化の大きい方）で代用するので、表の損は損の上からの見積もりです。

定義 2.2（行のそろい）.並進不変な T の Stein の上界は $\sup_q \lambda_{\max}\big(\sum_r A_r^2\hat T_r(q)^{\mathrm H}\hat T_r(q)\big)$ の形で、その最大点を (q^*,u^*) とします。$y_r=\hat T_r(q^*)u^*$、$M=\|u^*\|_\infty$ と置き、

$$\kappa_r:=\frac{|y_r|}{A_r\,M}\ \le\ 1$$

を、最悪の向きでの行 r の**そろい**と呼びます（$\kappa_r\le 1$ は `coherence_le_one` Lean ）。$\langle\kappa^{-2}\rangle$ は $|y_r|^4$ を重みにした平均です。

記録の数 — 損は止まり、少し下がる

表 2　同じ 4^4 のトーラスにそろえた損（段を $R=3$ で切った周期の作用素） 計算

k	Stein	真の比の下界（準ニュートン／周期 2）	損	段の比：下界	段の比：Stein
1	3.708	0.5903／0.5566	**6.28**	–	–
2	0.7746	0.1405／0.1405	**5.51**	0.238	0.209
3	0.07632	0.014967／0.01497	**5.10**	0.107	0.0985
4	0.00576	0.001095／0.00109	**5.26**	0.073	0.0755

真の比と Stein の上界が同じ速さで減るので（段の比はどちらも約 0.07 へ）、損が止まります。大きいトーラスでも同じ形です（表 3）。以前の記録の二段の 9.3 は、真の比の下界 0.108 が弱かった分で、周期 2 の場では下界が 0.1405 になります 計算 。$k \geq 2$ では真の比の最大点のエネルギーの 99.8〜100% が $|q|_\infty = \pi$ にあり、$(\pi,\pi,\pi,0)$ 型の周期 2 の点に乗っていました 計算 。

表 3　大きいトーラスの損と、段ごとの上界の積との比べ 計算

k	トーラス	Stein	真の比の下界	損	段ごとの Stein の積 ÷ 下界
1	16^4	4.431	0.591	**7.50**	7.5
2	8^4	0.9554	0.1405（周期 2）	**6.80**	182
3	8^4	0.09575	0.01497（周期 2）	**6.40**	1.1×10^4
3	6^4	0.09092	0.014955	**6.07**	–

右端の列は、段ごとの一段の上界（4.45・5.75・6.50・6.81）の積を真の比の下界で割ったもので、$7.5 \to 182 \to 1.1\times10^4 \to 1.0\times10^6$ と一段ごとに 60〜90 倍で増えます 計算 。指数で増えるのは、絶対値をとってから合成する側だけです。合成の核で上界をとることがどれだけ効いているかが、この列で見えます。

三つの仮説は外れ、外れ方がそろっていた

損が止まる理由として、(a) 合成で負の部分の割合が減る、(b) 打ち消しはセルの中で起きている、(c) 真の比の最大点で符号がそろう、の三つを試しました。どれも書かれた形では成り立ちませんでした。ただし三つとも「段で変わらない」という同じ外れ方を示しました。

表 4　仮説の判定 計算

仮説	量	k=1	k=2	k=3	k=4（4^4）	判定
(a)	負の部分の割合（行の符号は自由に取る）	0.411	0.432	0.435	0.426	成り立たない（約 0.43 で一定。4^4 では 0.405・0.425・0.427・0.426）

仮説	量	k=1	k=2	k=3	k=4（4^4）	判定
(b)	中心の側の殻（距離 0.5〜1.5）の ℓ^1 の割合／負の割合	0.58／0.22–0.33	0.48／0.32	0.44／0.31–0.37	0.53／0.32–0.38	成り立たない（打ち消しは中心の正と距離 1.5〜2.5 の負の輪の間。2^4 の塊で和をとると ℓ^1 の 41〜56% が残る）
	外の輪（距離 1.5〜2.5）の ℓ^1 の割合／負の割合	0.33／0.59–0.63	0.38／0.56–0.60	0.40／0.53–0.60	0.46／0.53–0.59	
(c)	最大点でのそろい／効率	0.74／4.5%（16^4）	0.56／1.3%（8^4）	0.57／1.5%（6^4）	0.60／1.8%	成り立たない（そろいは 0.6 前後で止まる）
—	最悪の向きでの行のそろい $\langle\kappa^{-2}\rangle$	22.9（16^4）	10.6（8^4）・5.55（4^4）	10.2（8^4）・5.13（4^4）	5.31	段で有界

三つの量がどれも段でほとんど動かないことは、「合成で核が正に近づく」のではなく「合成で核の輪郭（正規化した形）が一つに近づく」ことを示していると読めます 読 。中心が正で周りが負の輪郭、負の割合 0.43、そろい 0.6 が段に依らず保たれます。細分割の極限関数に近い見方です 読 。なお「中心が正・周りが負」の符号は向きの成分の符号の規約に依り、規約に依らないのは負の割合とそろいの方です。

成り立った不等式 — 損 ≤ そろいの逆二乗

候補 2.1. $A_r \ge 0$、$\kappa \ge 0$、$M \ge 0$、全ての成分で $|v_a| \le M$、全ての行で $\kappa A_r M \le |y_r|$ とすると、

$$\kappa^2 \Big(\sum_r A_r^2 y_r^2\Big) \sum_a v_a^4 \;\le\; \Big(\sum_r y_r^4\Big) \sum_a v_a^2$$

です Lean （`stein_le_inv_sq_mul_test`。補題 `stein_form_le`・`sum_four_le`）。左辺の括弧は Stein の二次形式の値、右辺は試験の値なので、「上界 ÷ 試験の値 $\le \kappa^{-2}$」と読めます。

格子の上では、最悪の向きの実の平面波 $\theta = \mathrm{Re}(e^{i\varphi} u^* e^{-iq^*\cdot X})$ を試験に使うと、

$$\text{損} \;\le\; \frac{\text{Stein}}{\text{試験の値}} \;=\; \langle\kappa^{-2}\rangle \times \frac{S(u^*)}{\Phi}, \qquad S(u) = \frac{\sum_a |u_a|^4}{|u|^2 M^2} \le 1$$

となります。Φ は位相の因子で、$2q^* \not\equiv 0$ かつ $4q^* \not\equiv 0$ なら 1、周期 2 の点（$2q^* \equiv 0$）でも u^* を実に取れば 1 です 読 （$\cos^4$ の平均 $3/8$ が分子と分母で消える。この段と Stein の式そのものは Lean に入れていません）。

- 4^4 のトーラスの $k = 2, 3, 4$ では、Stein の最大点が周期 2 の点で、その平面波がそのまま真の比の下界の最大点になりました（試験の値 0.1396・0.01487・0.00109）。このとき Stein ÷ 試験の値 $= \langle\kappa^{-2}\rangle = \mathbf{5.55 \cdot 5.13 \cdot 5.31}$ で、形の因子と位相の因子はちょうど 1 でした 計算 。

- 大きいトーラスでは Stein の最大点が周期 2 からずれ、$\langle\kappa^{-2}\rangle$ は 22.9・10.6・10.2（$k=1,2,3$）になります。損の上界として有界で、段で下がりますが、損そのもの（6.4 など）とは一致しません 計算 。

読み方：Stein の上界は ℓ^2 の側では符号を全部覚えていて、忘れるのは ℓ^∞ の側の「行の ℓ^1」だけです。だから損は、行の中の打ち消しの量 $1/\kappa^2$ に縮みます 読 。最悪の向きでのそろいが段で下に有界なら損は段で有界、という条件つきの文になりますが、そろいが下に有界であることは示していません（問い「最悪の向きの行のそろい」）。

当てはまらなかった型 — 正の部分が優勢

符号場 s について各行の負の部分が正の部分の δ 倍以下なら $(Ts)_i \ge \frac{1-\delta}{1+\delta} r_i$（$r_i$ は行の ℓ^1）で、ℓ^4 の Schur の判定法 $\sum (Tx)^4 \le A^3 B \sum x^4$ と合わせて、損 $\le U\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^4$（$U$ は行の ℓ^1 の不均一の因子）です。合成では δ が足し算で劣化します（そろい $1-\delta_1-\delta_2$） Lean （`coherent_of_neg_le`・`schur_four`・`loss_le_of_coherent`・`comp_coherent`）。

定理は正しいのですが、記録の核には当てはまりません。ℓ^4 重みの平均のそろいから読んだ δ は約 0.46・0.39・0.39・0.35 で小さくなく、U は 3.0・4.5・8.8・15.8 と増え、行ごとの最小のそろいはほぼ 0 です（全ての行で δ という仮定が満たされない） 計算 。Schur の判定法そのものも Stein の上界より二桁粗いものでした（Schur ÷ 下界は 437 → 745 → 1453 → 1777） 計算 。

W の座標 — 合成の後の絶対値は階数 1 の値で止まる

表 5　W の座標（零モードを直した核・60 型）の損 計算

k	$\rho(T_k)$	絶対値の後に合成	合成の後に絶対値	負の割合
1	0.3631	1.01	1.01	0.210
2	0.1249	1.08	1.06	0.325
3	0.0422	1.16	1.09	0.387
4	0.0142	1.24	1.10	0.411
5	0.0048	1.33	1.10	0.421

損は ρ の比（$\rho(|\cdot|)/\rho$）です。合成の後に絶対値をとる側が止まる値 1.10 は、支配固有ベクトルの左右 u, v から作った階数 1 の値 $\sum |u_i||v_i| / |\sum u_i v_i| = 1.085$ とほぼ一致します 計算 。支配固有値に隙間があれば $T^k/\rho^k \to uv^{\mathrm{T}}/(v^{\mathrm{T}}u)$ で、$|\cdot|$ と ρ が連続なのでこの値に収束します 読 。絶対値をとってから合成する側は、同じ行列の冪なら $(\rho(|M|)/\rho(M))^k$ で増え（ここでは 1.070 倍ずつ）、有界なのは $\rho(|M|)=\rho(M)$ のとき、既約なら $M = e^{i\alpha} D|M|D^{-1}$ のときに限ります（Wielandt） 典 。合成の後の絶対値が絶対値の後の合成以下であること（行の ℓ^1）は `abs_comp_le`・`row_l1_comp_le` Lean 。

03

局所の代表の幾何

粗い Bianchi の恒等式を満たす場の上でしか決まらない写像を、局所の核で表す——この手作業は 15-05 の束の網の定理（局所の形）の「代表」の選び方として出てきました。この節では、代表の全体の形（アフィン空間）、代表に依らない量（零モードの値と、拘束に制限した折り返しの次数）、代表に依る量（全体の折り返しの次数と尾のノルム）を分けます。中身は多重格子の転送作用素の次数と、細分割の和の規則（Strang–Fix 型の条件）の言い換えです。

定義

定義 3.1（拘束つき写像と延長）.体 K 上の有限次元空間 E, W、部分空間 $V \le E$、線形写像 $f : V \to W$ の組 (E, V, W, f) を**拘束つき写像**と呼び、$g : E \to W$ で $g|_V = f$ となるものを**延長**と呼びます。延長は存在し（制限の写像 res_V は全射）、二つの延長は V の上で一致し、延長の全体は $g_0 + \ker \mathrm{res}_V$ というアフィン空間で、その次元は $(\dim E - \dim V) \cdot \dim W$ です Lean（`exists_extension`・`restrict_surjective`・`IsExtension.eqOn`・`isExtension_iff_mem_coset`・`finrank_freedom`）。自由度が 0 になるのは $V = E$ のときだけです（$W \neq 0$。`freedom_eq_zero_iff`）。

定義 3.2（格子の代表）.粗い面の場 $\theta : \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{C}^6$、拘束の部分空間 $V = \mathrm{im}\, D_c$（粗い Bianchi の恒等式を満たす場）、出力は細かい面の場で一つの粗いセルあたり $96 = 16 \times 6$ 成分です。並進不変な核 $K : \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{C}^{96 \times 6}$ で、記号が全ての q で $\hat K(q)\hat D(q) = \hat R(q)$ を満たすもの（$R = F D_c$）を F の**代表**と呼び、有限範囲・指数減衰・ℓ^1 のどれかを満たすものを**局所の代表**と呼びます。$q \neq 0$ では $\hat D(q)$ の階数は 3 で、各 q の記号は「$E = \mathbb{C}^6$、$\dim V = 3$、$W = \mathbb{C}^{96}$」の雛形になり、自由度は $(6-3)\cdot 96 = 288$ 次元です。

定義 3.3（零モード・積率）.$\hat K(0) = \sum_Z K(Z)$ を零モード、$M_\alpha(K) = \sum_Z Z^\alpha K(Z)$ を積率と呼びます。

定義 3.4（折り返しの次数）.$\eta \in \{0,1\}^4$、$p_\eta = (q + 2\pi\eta)/2$、粗いセルの中の細かい位置 $s \in \{0,1\}^4$ について、折り返しの成分を $\hat C_\eta(q)[o,a] = \sum_s e^{-i p_\eta \cdot s} \hat A_{(s,o),a}(q)$ とします。$\eta \neq 0$ の $\hat C_\eta(q)$ が $q \to 0$ で消える次数の最小を $\mathrm{ord}(K)$、拘束の部分空間への射影 $P(q)$ を掛けた $\hat C_\eta(q) P(q)$ の次数の最小を $\mathrm{ord}^V(K)$ と書きます。

代表に依らない量

零モードは連続性だけで決まる（候補 3.1）.K が ℓ^1 の代表（記号が連続）で、$\hat D(q) = D 1(q) + O(|q|^2)$、$\hat R(q) = R_1(q) + O(|q|^2)$、$\sum_\nu \mathrm{im}\, D_1(e_\nu) = \mathbb{C}^6$ なら、$\hat K(0)$ は $\hat K(0) D_1(e_\nu) = R_1(e_\nu)$（$\nu = 1, \dots, 4$）の唯一の解です 読。最後の段（和が全体を張る部分空間の族の上で一致すれば等しい）は `eq_of_eqOn_iSup`・`correction_eq_zero_of_iSup` Lean。記録の値は $\hat K(0) = U/4$、$U = \mathbf{1}_{16} \otimes I_6$（全ての位置に一様に $\theta/4$）で、四つの段でずれ $\le 3.1 \times 10^{-10}$ でした 計算。トーラ

スでは $\hat{D}(0)=0$ なので零モードは拘束を受けず、有限のトーラスの対称な代表は $L_b=8,16,32$ で $\max|\hat{A}(0)-U/4|=0.250\cdot 1.47\times10^{-2}\cdot 2.55\times10^{-5}$ でした 計算 。局所性という拘束が有限の箱では失われることの数の表れです。

最小ノルムの代表は局所でない（候補 3.2）. $\hat{K}_{\mathrm{MP}}(q)=\hat{R}(q)\hat{D}(q)^{+}$（Moore–Penrose の代表）は、射影 $P(q)$ が q の 0 次斉次の関数で $q=0$ に向きの記憶を残すので、向きによる極限が一致しなければ ℓ^1 に入りません 読 。局所の代表の自由度は、この向きの記憶を連続な関数に塗り直す余地と見ることができます。核の減衰は測っていません（問い「Moore–Penrose の核の減衰」）。

拘束に制限した次数は代表に依らない（候補 3.3）. $\hat{D}=U\Sigma V^{\mathrm{H}}$ と特異値分解すると $\hat{C}_\eta(q)U(q)$ は $\hat{R}$ の折り返しだけで書けるので、$\mathrm{ord}^{V}(K)=\mathrm{ord}^{V}(F)$ は F の不変量です。制限は零の次数を下げないので、どの代表でも $\mathrm{ord}(K)\le\mathrm{ord}^{V}(F)$ です 読 。

表 6　記録の代表の折り返しの次数（括弧は t を一桁ずつ小さくしたときの値の減り方） 計算

代表	作り方	ord（6×6 の全体）	ord^{V}（$\mathrm{im}\,D$ の上）
sym	錐のホモトピーの行（有限のトーラス）	0（$\hat{C}(0)=0.039$〜0.071）	0
A3	零モードの差を $Z=0$ の一点に足す	1（$t=10^{-1}\to10^{-3}$ で $3.4\times10^{-2}\to3.4\times10^{-4}$）	1（$5\times10^{-3}\to5\times10^{-5}$）
A4	A3 に一次の積率の修正を $Z=\pm e_\mu$ の反対称の対で足す	2（$1.7\times10^{-3}\to1.7\times10^{-7}$）	2
F そのもの	R から	—	2（$1.8\times10^{-3}\to1.8\times10^{-7}$）

A4 は $\mathrm{ord}(K)=\mathrm{ord}^{V}(F)=2$ を 6×6 の全体で達しています。つまり記録の型の範囲では、A4 は天井まで届いた代表です。

尾のノルムと次数 — D ≤ 4 が上限

候補 3.4. W の座標の n 段の写り $(Tf)(q)=16^{-n}\sum_m G_m(q)^{\mathrm{H}}f(p_m)G_m(q)$（$m$ は 16^n 本の道、G_m は折り返しの積）で、全ての段の代表が $\mathrm{ord}(K_k)\ge k_0$ を満たし、$\hat{C}_0(0)=4I$ とします。(a) $D\le 2k_0$ なら記号の側のノルム $\|\cdot\|_D=\sup_{q\neq0}\|\cdot\|_2/|\hat{q}|^D$ で T は有界。(b) $D>2k_0$ で $m\neq0$ の道の主要係数 S が 0 でなければ、q_0 の近くの山の入力で $|q_0|^{2k_0-D}$ の速さで発散します 読 （段の数に一様な定数を仮定した筋で、無限段の一様性は扱っていません）。拘束に制限した版では k_0 を $\mathrm{ord}^{V}(F)$ に置き換えます。

表 7　尾のノルム（$D=4$、軸 $q=2\pi/L$ の入力、$L=24$〜192 の 4 点） 計算

代表	ord	値	候補 3.4 の型
A3	1	1.486・5.88・23.5・93.8（L^2 で増える）	$\|q\|^{2\cdot1-4}$
A4	2	0.01638・0.01640・0.01643・0.01643（有界）	$\|q\|^{2\cdot2-4}=$ 定数

R から（$\mathrm{ord}^V = 2$）では $D = 4$ で有界、$D = 6$ で q^{-2}、$D = 7$ で q^{-3} でした 計算 。記録の全ての場合が (a)(b) の型と合います。$\mathrm{ord}^V(F) = 2$ なので、$\mathrm{im}\, D$ の上の $D = 6$ の尾は代表をどう選んでも発散し、**記録の型の範囲では $\sup |\hat{q}|^D$ の尾は $D \le 4$ が上限**と読めます 読 。

「$2 \cdot \mathrm{ord}$」の 2 は、W の座標の写りが同じ代表を両側に置く合同変換 $G^{\mathrm{H}} f G$ であることから来ます。多重格子では延長と制限の次数を別々に選べ、「延長の次数＋制限の次数 $\ge$ 方程式の次数」という規則があります（Hemker 1990） 読 。ここでは一つの代表が両方を兼ねています。

一次の積率を合わせた代表と和の規則

候補 3.5（次数とずらしたジェット）. $J_s(q) := e^{-iq\cdot s/2}\hat{K}_s(q)$（$\hat{K}_s$ は位置 s の 6 行の記号）と置くと、$\mathrm{ord}(K) \ge k \Leftrightarrow J_s(q)$ の $k-1$ 次までの Taylor 多項式が s に依らない、です 読 。筋は $\hat{C}_\eta(q) = \sum_s (-1)^{\eta\cdot s} J_s(q)$ と、$(\mathbb{Z}/2)^4$ の 15 個の非自明な指標の直交性（全てとの内積が 0 $\Leftrightarrow$ 定数）です。

- $k = 1$：$\hat{K}_s(0)$ が s に依らない（$U/4$ はこの形）。
- $k = 2$：一次の積率が $M_s = (s/2)\hat{K}_s(0) + B$（$B$ は s に依らない）。$\hat{K}_s(0) = I/4$ から $M_{s,\mu} = s_\mu I/8 + B_\mu$。これは A4 を作るときの目標の積率 $M^{\star}_{(s,o),\mu,a} = s_\mu \delta_{oa}/8 + B_\mu[o,a]$ と一致します。8 は（セルの中の位置 $s/2$）$\times$（$1/4$）です。

目標の B は R の q^2 の項から決めます。一行あたり未知数 24（4 方向 $\times$ 6）に対し、R から決まる部分の階数は 20、残りの自由は 4 次元でした 計算 。この勘定は有限次元の「条件つきの延長」の型です：(res_V, C) が全射なら、$g|_V = f$ と $C(g) = y$ を同時に満たす g があり、残りの自由度は $\dim E \cdot \dim W - \dim V \cdot \dim W - \dim Y$ です Lean （`exists_extension_with_conditions`・`finrank_freedom_with_conditions`・`conditions_count_le`）。残りの 4 次元は ℓ^1 の増加が最小になるよう線形計画で決め、積率は目標に 1.1×10^{-16} 以内で合い、行の ℓ^1 は 2.26 → 2.34（一段目）でした 計算 。

代表の合成と整合

(E_1, V_1, E, f_1) と (E, V_2, W, f_2) が整合する（$f_1(V_1) \subseteq V_2$）なら、代表の合成は合成の代表で、V_1 の上の値は代表の選び方に依りません。整合しないと（$W \neq 0$）、選び方で合成の値が変わります Lean （`comp_extension_eqOn`・`comp_isExtension`・`comp_depends_of_not_le`）。記録の W の座標の連鎖は代表を合成していますが、段 k の代表の出力が段 $k+1$ の拘束の部分空間に入るかは確かめていません（問い「段をまたぐ代表の合成の整合」）。$\mathrm{im}\, D$ の上の連鎖 0.3426 と 6×6 の連鎖 0.3446 の差が、その手がかりです 計算 。代表に依るノルムの変化の例として、零モードの修正で三段の Stein の上界が 0.09743 → 0.09868、符号つきの Stein の上界が A3 の 4.25 から A4 の 4.48（一段目）でした 計算 。

辞書

- $\mathrm{ord}_{\eta}(K)$ は、代表を延長（prolongation）と見たときの**高周波の次数**（Hemker 1990）に当たります。記号による定義と多項式の保存による定義が同値であることは後の注で述べられ、Toeplitz の多重格子での記号の零の条件は Donatelli（arXiv:0807.2565）にあります 読 。$\hat{C}_{\eta}$ は局所フーリエ解析の調和の部分空間の 16 個の成分と同じものです 典 。
- 候補 3.5 は細分割・ウェーブレットの**和の規則**を多項式の生成に移す標準の議論そのものです（Strang–Fix 1973、Jia 1998、Charina–Conti arXiv:1202.3931、Daubechies の消える積率） 典 。A4 の目標のうち $s_{\mu} I/8$ の部分は、次数 2 の和の規則の言い換えです。
- 和の規則に入らないのは二点です：(i) B を R の q^{2} の項で決める部分（差分の一貫性の次数の条件の型）、(ii) 拘束 $V=\operatorname{im} D$ による天井 $\mathrm{ord}^{V}(F)$。面がスカラーでなく 96×6 の行列であることは、ベクトル値の細分割の和の規則の範囲です 読 。

04 二重付値の幾何

見返りの定理は未です。この節は、条件の台帳の移り変わりの帯の行（26-06）を、強結合の展開と弱結合の展開の二つの付値の言葉で言い直す試みです。定義と主項の計算はできていますが、この見方から帯について新しく言える定理はまだありません。札は仮と計が中心です。

定義

結合の空間 $\mathcal{K}$：プラケットの重み $f(U)=1+\sum_{r} d_r a_r \chi_r(U)$ の指標係数 (a_r) の空間です。座標は β と形の座標です。

二つの付値. v_s（強結合）は $a_r\to 0$ の側の次数（Wilson 作用では β の次数）、v_w（弱結合）は $\beta\to\infty$ の側の $1/\beta$ の次数です。$e^{-c\beta}$ 型の項は $v_w=\infty$ として扱います（トランス級数の別の分枝）。

二つの座標. $[0,1]$ に値をとる観測量 O（$O(0)=0$、$O(\infty)=1$。プラケット P など）について、強結合の側の座標は O、弱結合の側の座標は $1-O$ です。主係数を $O\approx s_1\beta$（強結合）、$1-O\approx w_1/\beta$（弱結合）と書きます。

同点集合. (i) 補の同点 $\{s_1\beta=w_1/\beta\}$、(ii) 同じ座標の同点 $\{s_1\beta=1-w_1/\beta\}$、(iii) 誤差の同点 $\{K$ 項までの最良の打ち切りの誤差が等しい点$\}$。(ii) の二根の間 $\{s_1\beta\le 1-w_1/\beta\}$ を**レンズ**と呼びます。

不変量 κ とレンズ

候補 4.1（目盛りに依らない量）.結合の目盛りを $\beta \mapsto c\beta$ と変えると $s_1 \mapsto s_1/c$、$w_1 \mapsto c w_1$ なので、

$$\kappa := s_1 w_1$$

は目盛りに依りません。補の同点は $\beta^{*} = \sqrt{w_1/s_1}$ で、そこでの主項の値は $\sqrt{\kappa}$ です。同じ座標の同点は $s_1\beta^2 - \beta + w_1 = 0$ の根で、判別式は $1 - 4\kappa$ なので、**レンズは $\kappa \le \tfrac{1}{4}$ のときだけ開きます**。二根の幾何平均はいつも β^{*} です。弦の張力 $\sigma = -\log u$ の同点は $\kappa \le 1/e$ のときだけあります［読］（二次式の判別式という初等的な事実）。

片側の主項だけを見ると、群の違いは目盛りに吸収されます。両側の主項を同時に見ると、目盛りの変更は $(\log O, \log(1-O))$ の平面の平行移動にすぎず、交わる高さ $\sqrt{\kappa}$ は動きません。群の情報が「交差の高さ」に残る、という見方です［仮］。

例

表 8　一プラケット（二次元では正確な解、Migdal–Kadanoff の一段の素材）の級数と同点［計算］

量	$SU(2)$	$U(1)$
強結合の級数 u	$\frac{\beta}{4} - \frac{\beta^3}{96} + \frac{\beta^5}{1536} - \frac{\beta^7}{23040} + \cdots$	$\frac{\beta}{2} - \frac{\beta^3}{16} + \frac{\beta^5}{96} - \frac{11\beta^7}{6144} + \cdots$
弱結合の級数 $1-u$	$\frac{3}{2}\beta^{-1} - \frac{3}{8}\beta^{-2} - \frac{3}{8}\beta^{-3} - \frac{63}{128}\beta^{-4}\cdots$	$\frac{1}{2}\beta^{-1} + \frac{1}{8}\beta^{-2} + \frac{1}{8}\beta^{-3} + \frac{25}{128}\beta^{-4}\cdots$
$\kappa = s_1 w_1$	$3/8$（レンズは空、$1-4\kappa = -\frac{1}{2}$）	$1/4$（レンズは一点 $\beta = 1$）
$s_3/s_1^3 \cdot w_2/w_1^2$	$-2/3 \cdot -1/6$	$-1/2 \cdot +1/2$
補の同点 β^{*} と真の $u(\beta^{*})$	$\sqrt{6} = 2.4495$、$u = 0.5004$（$u = \frac{1}{2}$ の β は 2.4469）	1.0000、$u = 0.4464$（$u = \frac{1}{2}$ の β は 1.1593）
σ の同点	なし（差の最大 $-\log\kappa - 1 = -0.019$）	0.232 と 1.399
誤差の同点（$K = 40$）	3.274（誤差 4.8×10^{-4}）	2.124（誤差 2.9×10^{-3}）
Fisher 零点（虚軸）	$\pm i\,3.832$、$\pm i\,7.016$、$\cdots$	$\pm i\,2.405$、$\pm i\,5.520$、$\cdots$

比熱 $\beta^2 u'$ は $U(1)$ で $\beta = 2.48$ に山（0.680）があり、$SU(2)$ では単調に $3/2$ へ上がります［計算］。この違いは w_2/w_1^2 の符号（$-1/6$ と $+1/2$）の違いと同じ向きで、群の違いは付値の主項ではなく次の項の符号に住んでいる、と読めます［仮］。$SU(2)$ で $u(\sqrt{6}) = 0.5004 \approx \frac{1}{2}$ となったことは $U(1)$ では成り立たない（0.446）ので、一般の法則ではありません。

四次元の主項だけのレンズ.等分配 $w_1 = \dim G/d$ を使うと $\kappa = s_1 \dim G/d$ です。

表 9　d 次元の主項だけのレンズ［計算］

d	群	κ	補の同点 β^{*}	レンズ
2	$SU(2)$	$3/8$	2.449	なし

d	群	κ	補の同点 β^*	レンズ
2	$U(1)$	$1/4$	1.000	一点 $[1,1]$
3	$SU(2)$	$1/4$	2.000	一点 $[2,2]$
3	$U(1)$	$1/6$	0.816	$[0.423, 1.577]$
4	$SU(2)$	$3/16$	1.732	$[1.000, 3.000]$
4	$U(1)$	$1/8$	0.707	$[0.293, 1.707]$

四次元の $U(1)$ の転移 $\beta_c \approx 1.01$（26-06）はレンズ $[0.293, 1.707]$ の中にあります（中心 0.707 ではありません）。$SU(2)$ のレンズ $[1,3]$ は、26-06 の表で $\beta - \beta'$ が強結合の値から一ループの値へ移る範囲を含み、文献で「強結合と弱結合のどちらの展開もうまくいかない」とされる $1.5 < \beta < 2.5$（arXiv:0807.0185 の要旨）とも重なります 読 。これは一次の主項と等分配だけから出した数で、四次元の真の級数を使っていません。重なりには偶然が含まれえます 仮 。

Migdal–Kadanoff の流れの下の同点集合

Wilson 作用から n 段流したあとの基本表現の係数 $u_n(\beta)$ の等高線 $L_n(c)$ を追いました。等高線は β の読み方に依らない対象です。

表 10　等高線 $L_n(c)$ の動き 計算

群	c	L_0	L_6	6 段目の差 $L_6 - L_5$
$SU(2)$	0.1575	0.641	2.230	0.259
$SU(2)$	0.5	2.447	3.535	0.2553
$SU(2)$	0.9	14.73	15.58	0.2511
$U(1)$	0.1575	0.319	0.582	0.017（減りながら正）
$U(1)$	0.5	1.159	0.844	4.5×10^{-4}
$U(1)$	0.7	2.014	1.5101	-3.5×10^{-7}（止まる）
$U(1)$	0.9	5.305	4.8478	-3.7×10^{-7}（止まる）

- $SU(2)$ では、どの c でも段ごとの差が 0.25 に近づきます（熱核の $1/4$）。同点集合は β の方向へ線形に逃げ、流れの付値で言えば $\beta - \beta'$ は $v_w = 0$（定数）です 計算 。
- $U(1)$ では $c \geq 0.7$ の等高線が止まります。形が落ち着いた後の一段の動き $\beta_V - \beta'_V$ は $\beta_V = 0.67$ で 9.6×10^{-4}、0.78 で 2.2×10^{-4}、0.88 で 5.4×10^{-5}、0.99 で 1.3×10^{-5}、1.09 で 3.2×10^{-6}、1.29 で 1.8×10^{-7} で、隣り合う点の比から読んだ指数の傾きは 13.4〜14.1 です。$e^{-c\beta V}$ の型ですが c は同定していません（$2\pi^2 = 19.7$ には届いていない）。流れの付値は $v_w = \infty$ です 計算 。浮動小数の分解能では、「止まる」と「$e^{-20\beta}$ 程度で流れる」は区別できません 仮 。
- 強結合の側の写像 $u \mapsto 256u^4$ は、s_1 で目盛りを合わせると両群で同じです。強結合の主項の補の同点を流すと、$SU(2)$ は $2.449 \to 1.140 \to 0.785 \to 0.750$ と進んで $n \geq 4$ で解が消え、$U(1)$

は $1.0 \to 0.5 \to 0.361 \to \cdots \to 0.3152$ に収束します。極限の候補は $s_1\beta \cdot 256^{1/3} = 1$、すなわち強結合の盆の境 $u_c = 256^{-1/3} = 0.1575$ で、両群に共通です 計算 。

- 注意：Wilson の u で β' を読むと、両群とも弱結合の側で $\beta - \beta' < 0$ になります。これは Wilson の形と熱核の形が $O(1/\beta^2)$ でずれるために β が $O(1)$ ずれる分で、流れではありません 計算 。

定理の候補が立たない理由と、弱めた形

「群を区別する比較が要るのは、同点集合の余次元 1 の骨格の近傍に限られる」という形は、**そのままでは成り立たない見込み**です 仮 。群の区別は、弱結合の座標の全域で流れの付値（$SU(2)$ は $v_w = 0$、$U(1)$ は $v_w = \infty$、すなわち b_0 の有無）として、すでに主項の水準で現れているからです。

候補 B（弱めた形） 仮 。観測量の族と群 G, G' について、強結合の付値の一致（強結合の座標の付値の写像が s_1 による目盛りの合わせの下で G と G' で一致する）、弱結合の付値の違い（弱結合の座標の流れの付値が異なる）、主項の支配の領域（各座標の誤差がその座標の主項の η 倍以下になる領域 $D_s(\eta)$・$D_w(\eta)$ がとれる）の三つを仮定します。このとき、比較の向き（$\beta' \le \beta$ か）を決めるのに主項の外の情報が要るのは $\mathcal{K} \setminus (D_s(\eta) \cup D_w(\eta))$ の上だけで、この集合は $\eta \to 0$ でレンズに縮みます。

- 言っていること：区別を**渡す**必要がレンズに局在する、ということです。26-06 の「帯は有界な区間」と同じ中身を付値の言葉で言い直したもので、帯を易しくするとは言いません。
- 言っていないこと：レンズの中で何が要るか。$U(1)$ の転移は $v_w = \infty$ の分枝なので、レンズの中ではトランス級数の分枝が摂動の分枝と同じ大きさになることを扱う比較が要る、という読みにとどまります 仮 。
- 二次元の一プラケットの $SU(2)$（$\kappa > \frac{1}{4}$）ではレンズが空で、候補 B は空虚に成り立ちます。ただし二次元の $U(1)$ にも相転移は無いので、κ だけで相図は決まりません 読 。

既知との関係

- Fisher 零点が強結合の固定点の吸引域の境になる、という見方が知られています（Denbleyker–Du–Liu–Meurice–Zou、arXiv:1005.1993。四次元 $SU(2)$ の Wilson 作用） 読 。強結合の主項の同点が流れで盆の境 u_c に吸われることは、この見方の実軸の上の影に当たると読めます 仮 。一プラケットでは、収束する強結合の級数の収束半径は一つ目の Fisher 零点の絶対値です 典 。
- 誤差の同点 (iii) は、resurgence の「どちらの級数が支配するか」をそのまま数にしたものです。一プラケットでは弱結合の漸近級数の最良誤差は $e^{-2\beta}$ の桁でした 計算 。

- 強と弱の両端の級数をつなぐ二点 Padé 近似は、レンズの中を埋める古典的な手として知られているはずです 読 （文献は確かめていません）。

05

錐の計算法

第 15 部の記録には、次の手作業が何度も出てきました。p 次の多項式を ℓ^p の錐 $|f(\theta)| \le c\,\|\theta\|_p^p$ で押さえ、線形の写像（ブロック化の局所の代表）で引き戻し、引き戻しの因子を重みつきの Stein の上界で上から押さえ、一段では縮まなくても数段の合成で縮むことを確かめ、ループが段ごとに足す項をアフィンの再帰で受けて全ての段の上限を出す、という流れです（15-05 の ℓ^4 の錐の一段の縮み・15-08 §06）。この節は §01〜§03 と同じく、この手作業に定義を与える試みです。中身の多くは既知の事実——Riesz–Thorin の補間定理、Stein–Weiss の測度を取り替える補間、Schur の検定、Hölder の不等式、作用素ノルムの指数についての対数凸性——の言い換えで、新しさは主張しません。新しいのは問いの側で、記録の数がどの量に当たるかを並べたうえで、指数 p を動かしたときの「窓」と「束の数」を問いとして立てます。

設定

V, W は有限次元の実ベクトル空間で、座標を一つ固定します。ℓ^p は座標の ℓ^p です。格子の場合は、V が粗いトーラスの上の面の場（各点 6 成分）、W が細かい面の場をセルごとに 96 成分で並べたもので、$K : V \to W$ は粗い並進と可換です。錐の上限は V の全体でとります（Bianchi の恒等式の像に制限しません）。したがって、ここでの量は制限した量の上界です。

定義

定義 5.1（錐の定数）. $f : V \to \mathbb{R}$ が p 次の斉次多項式（またはそれ以下の増大）のとき

$$c_p(f) := \sup_{\theta \neq 0} \frac{|f(\theta)|}{\|\theta\|_p^p}.$$

Lean では `IsCone f N c`（全ての θ で $|f\,\theta| \le c \cdot N\theta$）と書き、抽象の N が $\|\cdot\|_p^p$ の役をします。

定義 5.2（p-縮み）. 線形の写像 $K : V \to W$ について

$$\mu_p(K) := \sup_{\theta \neq 0} \frac{\|K\theta\|_p^p}{\|\theta\|_p^p} = \|K\|_{p \to p}^p.$$

Lean では `Contracts K N μ`（全ての θ で $N(K\theta) \le \mu\, N\theta$）と書き、「$\mu_p(K) \le \mu$」と読みます。

定義 5.3（行と列の ℓ^1）. $A_r := \sum_j |K_{rj}|$、$R(K) := \max_r A_r = \|K\|_{\infty\to\infty}$、$C(K) := \max_j \sum_r |K_{rj}| = \|K\|_{1\to1}$ とします。$\mu_1 = C$ であり、$\mu_p^{1/p} \to R$（$p \to \infty$）です 典 。

定義 5.4（一般の $p \ge 2$ の重みつきの Stein の上界）.正の重み u について

$$S_p(K;u) := \max_r \frac{A_r^p}{u_r} \cdot \lambda_{\max}\big(K^{\mathsf T} D_{u/A^2} K\big), \qquad S_p(K) := S_p(K;A^p) = \lambda_{\max}\big(K^{\mathsf T} D_{A^{p-2}} K\big)$$

とします（D_v は v を対角に並べた行列）。標準形 $S_p(K)$ は、$p=2$ で素の $\|K\|_2^2$、$p=3$ で D_A、$p=4$ で D_{A^2} になり、記録の ℓ^3 と ℓ^4 の式に戻ります。並進と可換な K では、$\lambda_{\max}$ を $\sup_q \lambda_{\max}(\hat K(q)^{\mathsf H} D \hat K(q))$ に置き換えます。

- 導出 読 ：$T = D_{1/A} K$ とおくと $\|T\|_{\infty\to\infty} = 1$ です。重み u の ℓ^2 での T のノルムを M_0 とすると $M_0^2 = \lambda_{\max}(K^{\mathsf T} D_{u/A^2} K)$ です。$(2,2;u)$ と (∞,∞) の間で $1/p = (1-t)/2$、すなわち $t = 1 - 2/p$ として補間すると、ノルムは $M_0^{2/p}$ 以下で、値域の重みは $u^{p(1-t)/2} = u$ になります。よって $\sum_r u_r |T\theta|_r^p \le M_0^2 \|\theta\|_p^p$ で、$\|K\theta\|_p^p = \sum_r A_r^p |T\theta|_r^p$ から $\mu_p(K) \le S_p(K;u)$ が出ます。
- 補間の典拠：値域の測度を取り替える補間は Stein–Weiss の形です。ただし ℓ^∞ の端では重みが効かないので、両端を同じ測度 u の上の言明として Riesz–Thorin だけで足ります 典 。
- **適用範囲は $p \ge 2$ です**（$t \ge 0$ が要る）。$p=2$ では $S_2(K) = \mu_2(K)$ で、上界は真の値に等しくなります。

定義 5.5（束の数）.段ごとの写像の列 (K_k) と束の長さ n について $K^{(k,n)} := K_k K_{k+1} \cdots K_{k+n-1}$ とし、

$$n_p := \min\Big\{ n : \sup_k \mu_p\big(K^{(k,n)}\big) < 1 \Big\} \quad (\text{無ければ } \infty)$$

とします。μ_p を S_p に替えたものを上界の版 $\tilde n_p$ とすると $n_p \le \tilde n_p$ です。

定義 5.6（窓）.束の長さ n を固定して $W_n := \{p \ge 1 : \ \mu_p(K^{(n)}) < 1\}$ とします。

定義 5.7（アフィンの再帰）.$c_{k+1} \le \mu_k c_k + \varepsilon_k$（$\mu_k \ge 0$、$c_k \ge 0$）。束の版は $c_{k+m} \le \mu\, c_k + \varepsilon$ です。c_k は段 k の錐の定数、ε_k はその段で新しく生まれる p 次の項の大きさに当たります。

定義 5.8（Schur の閾値の指数）.$R(K) < 1$ のとき $p^*(K) := 1 + \log C / \log(1/R)$ とします。後の候補 5.6 の $\mu_p \le R^{p-1} C$ が 1 を下回るのは $p > p^*$ のときです。

定理の候補と札

候補 5.1（引き戻しと劣乗法）.$c \ge 0$ なら $c_p(f \circ K) \le c_p(f)\, \mu_p(K)$ です Lean （`cone_pullback`。$V \to W$ の写像で、N_V, N_W は別でよい）。同じ空間の上では $\mu_p(K_1 K_2) \le \mu_p(K_1)\mu_p(K_2)$（$\mu_1 \ge 0$）、$\mu_p(K^n) \le \mu_p(K)^n$、$c_p(f \circ K^n) \le c_p(f)\, \mu^n$ です Lean （`contracts_comp`・`contracts_iterate`・`cone_pullback_iterate`。$\mu \ge 0$）。

候補 5.2（一段で超え、束で縮む）.一段で $\mu_p(K) \le M$（$M > 1$ でもよい）、n 段で $\mu_p(K^n) \le \mu$ なら $\mu_p(K^{qn+r}) \le M^r \mu^q$ です Lean （`block_decay`。$M \ge 0$・$\mu \ge 0$）。§01 の候補 1.4 (a) の錐の版です。上界 S_p そのものは劣乗法的とは限らないので、合成の S_p は合成の核から直接に計算します 読 。

候補 5.3（上界の対数凸性）.$\log S_p(K)$ は p について凸です 読 。$S_p = \sup_{\|x\|=1} \sum_r (Kx)_r^2 A_r^{p-2}$ で、各 x について右辺は p の指数関数の正の和なので対数凸（Cauchy–Schwarz）、対数凸な関数の上限も対数凸だからです。Lean に入れたのは中点の離散版です Lean ：

- `weighted_rpow_midpoint`：$w \ge 0$・$a > 0$ で $\left(\sum w\, a^{(p+q)/2}\right)^2 \le \left(\sum w\, a^p\right)\left(\sum w\, a^q\right)$。
- `stein_form_midpoint`：その Stein の形 $\sum y^2 A^{p-2}$（$A > 0$）。
- `sup_midpoint`・`midpoint_below_one`：各点の中点の不等式から上限の幾何平均の上界、とくに $S_a S_b < 1$ なら中点の値は 1 を下回る。

帰結として $S_3 \le \sqrt{S_2 S_4}$ です。記録で「$\sqrt{S_2 S_4}$ は S_3 の少し上」と見えていたのは、別の二つの上界の比べではなく、同じ関数 $\log S_p$ の曲がりの余裕でした。$\sqrt{S_2 S_4}/S_3 - 1$ がその曲がりの大きさの一つの数になります（表 12）。

候補 5.4（真の p-縮みの対数凸性）.$\log \mu_p$ も $p > 0$ について凸です。Riesz–Thorin により $\psi(s) := \log \|K\|_{1/s \to 1/s}$ は $s \in [0,1]$ で凸 典 、$\log \mu_p = p\,\psi(1/p)$ は ψ の perspective なので凸 読 。候補 5.3 は上界 S_p について直接に（指数の和として）言えることで、候補 5.4 は真の μ_p について $1/p$ の凸性から perspective を通して言えることです。依って立つものが違います。帰結は二つです 読 。

- 窓 W_n は区間です（凸関数が負になる集合）。
- $\mu_p^{1/p} \to R$ から漸近の傾きは $\log R$ で、凸性から $p \ge p_0$ で $\mu_p \le \mu_{p0}\, R^{p-p0}$。$p_0 = 2$ では Riesz–Thorin を $(2,\infty)$ の間で使ったものと同じです。上界の版 $S_p \le R^{p-p0} S_{p0}$ は直接に出ます Lean （`weighted_rpow_shift`：$w \ge 0$・$0 < a \le R$・$p_0 \le p$ で $\sum w\, a^p \le R^{p-p0} \sum w\, a^{p0}$。`sup_shift`：各点の不等式を上限に移す）。

候補 5.5（束の数とスペクトル半径）.固定した有限次元の作用素 $K : V \to V$ では、Gelfand の公式から $\lim_n \mu_p(K^n)^{1/n} = \rho(K)^p$ で、ρ は p に依りません 典 。したがって「$n_p < \infty \Leftrightarrow \rho(K) < 1$」で、$p$ によって変わるのは最小の n だけです。これは §01 の定義 1.3 と同じ事実を p-縮みで言ったものです。ただしブロック化の写像は粗い格子から細かい格子への写像で、同じ空間の上の一つの作用素ではありません。細かい格子を $\mathbb{Z}^4$ に戻して同一視すると「2 倍の拡大と畳み込み」の型（細分割の作用素）になり、この型では ℓ^p のスペクトル半径が p に依ります 読 。

- 定数の場は次元の勘定を与えます。面の場は一段で約 $1/4$ 倍、点の数は 2^4 倍なので、定数の場の比は一段あたり約 $16 \cdot 4^{-p} = 2^{4-2p}$ です 読 。記録の値は $p = 2, 3, 4$ で 1.080・0.2807・

0.07297、p が 1 増えるごとに約 $1/3.85$ 倍でした 計算 。$p=2$ が周辺的（$\int F^2$ は四次元で無次元）で、$p>2$ では $|F|^p$ が無関係な向きに働く、という次元の読みと合います。

- 優勢行列（§01）との結び：$|K\theta| \le |K||\theta|$ から $\mu_p(K) \le \mu_p(|K|)$ で、$|K|$ には Perron の重みが使えます。ただし記録の核では符号の打ち消しが大きく、$R(K_0K_1)=0.928$ は $R(K_0)R(K_1) \approx 2.25 \cdot 2.47 \approx 5.6$ よりずっと小さい値です 計算 。$|K|$ に移ると、この約 6 倍を最初に失います。§02 の符号を捨てる損の、ℓ^∞ での一つの数です 読 。

候補 5.6（薄まりの正しい形）.「行和 1・非負・各成分 $\le 1/m$ なら $\mu_p \le m^{1-p}$」という素朴な形は、**一般には成り立ちません** 読 。平均の写像は定数の場を保つので、正方なら $\mu_p \ge 1$ です（定数の場が反例）。成り立つのは次の形です。

- Schur の検定の ℓ^p 版：$p \ge 1$ で $\sum_i |\sum_j K_{ij}\theta_j|^p \le R^{p-1}C \sum_j |\theta_j|^p$、すなわち $\mu_p \le R^{p-1}C$ Lean （`row_rpow_le`：Jensen による $|\sum k_j\theta_j|^p \le (\sum |k_j|)^{p-1}\sum |k_j||\theta_j|^p$。`lp_schur`：行の $\ell^1 \le R$、列の $\ell^1 \le C$、$R \ge 0$）。$R<1$ なら μ_p の上界は p について公比 R で減り、$p>p^*$ で 1 を下回ります。
- その等号：行和が全て $R>0$、列和が全て C なら、定数の場で等号になります Lean （`lp_schur_sharp`）。Schur の形は一般には改良できません。
- 局在した場の薄まり：δ の場では $\sum_i |k_i|^p \le M^{p-1}\sum_i |k_i|$（$|k_i| \le M$、$p \ge 1$） Lean （`delta_dilution`）。成分が $1/m$ 以下なら m^{1-p} 倍です。m^{1-p} の薄まりが効くのは局在した場だけで、広がった場は行の ℓ^1 でしか薄まりません。
- 錐が縮む最小の形：$\mu_p \le \mu_2\, R^{p-2}$（候補 5.4 の帰結） 読 、上界の版 $S_p \le S_2\, R^{p-2}$ Lean （`weighted_rpow_shift`・`sup_shift`）。ℓ^2 は周辺的で $\mu_2 \ge 1$ に留まり、合成の行の ℓ^1 が段とともに 1 を切り、$p>2$ では R^{p-2} の分だけ得をする、という読みです 読 。記録の一段の ℓ^3 を最大にする場が広がっていた（局在の度合い 0.006）ことは、障害が広がった場の側、すなわち δ の場の薄まりが効かない側にあることと合います 計算 。

候補 5.7（アフィンの再帰）.次の五つです Lean 。§01 の候補 1.4 (c)（`affine_uniform`）を、段で変わる係数と束に広げたものです。

- `affine_const`：$c_{k+1} \le \mu c_k + \varepsilon$（$0 \le \mu < 1$、$\varepsilon \ge 0$）$\Rightarrow c_n \le \mu^n c_0 + \varepsilon/(1-\mu)$。
- `affine_varying`：$0 \le \mu_k \le \bar\mu < 1$、$\varepsilon_k \le \bar\varepsilon$（$\bar\varepsilon \ge 0$）、$c_k \ge 0 \Rightarrow c_n \le \bar\mu^n c_0 + \bar\varepsilon/(1-\bar\mu)$。
- `affine_invariant`：同じ仮定で $c_0 \le \bar\varepsilon/(1-\bar\mu)$ なら、全ての n で $c_n \le \bar\varepsilon/(1-\bar\mu)$（不変な区間）。
- `affine_eventually`：同じ仮定で、任意の $\delta>0$ に対して十分先の n で $c_n \le \bar\varepsilon/(1-\bar\mu)+\delta$（$\limsup c_n \le \bar\varepsilon/(1-\bar\mu)$ の形）。

- `affine_block`：$c_{k+m} \le \mu c_k + \varepsilon$（$0 \le \mu < 1$、$\varepsilon \ge 0$）$\Rightarrow c_{mn} \le \mu^n c_0 + \varepsilon/(1-\mu)$。候補 5.2 と合わせると、束の間の段では M^r（$r < m$）の因子が一度だけ掛かります。

表 11　§05 の定理の候補。どれも既知の事実の有限次元の形か、その初等的な帰結です

候補	言明（一行）	札	何の言い換えか
5.1	$c_p(f \circ K) \le c_p(f)\mu_p(K)$、$\mu_p(K_1 K_2) \le \mu_p(K_1)\mu_p(K_2)$、$\mu_p(K^n) \le \mu_p(K)^n$	Lean（`cone_pullback`・`contracts_comp`・`contracts_iterate`・`cone_pullback_iterate`）	作用素ノルムの劣乗法性
5.2	一段 $\le M$、n 段 $\le \mu \Rightarrow qn + r$ 段 $\le M^r \mu^q$	Lean（`block_decay`）	Gelfand の公式の有限の版（§01 の候補 1.4 (a)）
5.3	$\log S_p$ は p について凸、とくに $S_3 \le \sqrt{S_2 S_4}$	連続の版 読 ・中点の離散版 Lean（`weighted_rpow_midpoint`・`stein_form_midpoint`・`sup_midpoint`・`midpoint_below_one`）	Hölder（Cauchy–Schwarz）の不等式・対数凸な関数の上限
5.4	$\log \mu_p$ は p について凸、W_n は区間、$\mu_p \le \mu_{p0} R^{p-p0}$（$p \ge p_0$）。上界の版 $S_p \le R^{p-p0} S_{p0}$	真の μ_p は 典 ＋ 読 ・上界の版は Lean（`weighted_rpow_shift`・`sup_shift`）	Riesz–Thorin（$1/p$ についての凸性）と perspective
5.5	固定した作用素では $n_p < \infty \Leftrightarrow \rho(K) < 1$。ブロック化の写像は細分割の型で、$\ell^p$ のスペクトル半径が p に依る。定数の場の比は一段で約 2^{4-2p}	典 ・読 ・数は 計算	Gelfand の公式・細分割の L^p 理論
5.6	素朴な薄まり $\mu_p \le m^{1-p}$ は成り立たない（定数の場）。成り立つのは $\mu_p \le R^{p-1} C$（等号あり）、δ の場の M^{p-1}、$S_p \le S_2 R^{p-2}$	反例は 読 ・三つの形は Lean（`row_rpow_le`・`lp_schur`・`lp_schur_sharp`・`delta_dilution`・`weighted_rpow_shift`）・$\mu_p \le \mu_2 R^{p-2}$ は 読	Schur の検定・Riesz–Thorin の $(1,\infty)$ と $(2,\infty)$ の有限和
5.7	アフィンの再帰：一定の係数・段で変わる係数・不変な区間・上極限・m 段の束	Lean（`affine_const`・`affine_varying`・`affine_invariant`・`affine_eventually`・`affine_block`）	アフィンの再帰の初等的な事実（§01 の候補 1.4 (c)）

記録の数との対応

一段は 8^4 のトーラスの段 0 の核 K_0（切り詰めなし）、二段は $K_0 K_1$（粗い 16^4、核を $R = 3$ で切り詰め、失った ℓ^1 は K_0 で 0.8%、K_1 で 1.9%）、三段は $K_0 K_1 K_2$（粗い 12^4、$R = 3$）です。一段の下界は準ニュートン法（L-BFGS、二つの始点）による真の比の値で、$p \ge 12$ では最大の行の符号の場による値に替えました。下界は最大であるとは示していません。全て浮動小数の計算で、区間の評価ではありません 計算 。

表 12　重みつきの Stein の上界 S_p と一段の下界 計算

p	一段 S_p	一段 下界	一段 定数の場	二段 S_p	三段 S_p
2	1.9806	1.9806	1.080	3.0189	3.6658
2.5	2.3626	1.4106	0.551	2.2358	–

p	一段 S_p	一段 下界	一段 定数の場	二段 S_p	三段 S_p
3	2.8641	1.0233	0.2807	1.6642	0.57864
3.5	3.5442	0.7730	0.1431	1.2501	–
4	4.4457	0.6470	0.0730	**0.9707**	0.09599
5	7.8474	0.7328	0.0190	0.6144	–
6	14.910	1.2326	0.0049	0.4093	–
8	65.160	5.0155	0.0003	0.2197	–
16	3.91e4	18.2（符号の場）		0.0598	–
32	1.71e10	7.96e6（符号の場）		0.0143	–
∞（$S_p^{1/p} \to R$）	$R = 2.2524$			$R = 0.9283$	$R = 0.3318$

- $\log S_p$ **の凸性**：二階の差分商は、一段（$p = 2$〜64）、二段（2〜32）、三段（$2, 3, 4$）のどれでも全て正でした。三点の比 $S_p / (S_a^{\lambda} S_b^{1-\lambda})$ は 0.858〜0.99999 で、全て 1 以下です（候補 5.3）計算 。
- $\sqrt{S_2 S_4}/S_3$：一段 1.036、二段 1.029、三段 1.025（$K_0K_1K_2$）・1.016（$K_4K_4K_4$）計算 。
- **漸近の傾き**：$S_p^{1/p} \to R$ で、R は一段 2.252・二段 0.928・三段 0.332 と段とともに下がります。大きい p での $\log S_p$ の傾きは $\log R$ に一致しました（一段、$p = 48 \to 64$ の傾き 0.8125 に対して $\log R = 0.8120$）計算 。
- **傾きの単調性と外挿**：三段 $K_0K_1K_2$ の $\log S_p$ の傾きは $2 \to 3$ で -1.846、$3 \to 4$ で -1.796 と増え、漸近の傾き $\log R = -1.103$ に向かいます。候補 5.4 の上界の版から、$p \geq 4$ で $S_p \leq S_4 R^{p-4} = 0.0960 \cdot 0.332^{p-4}$ となり、高い p の錐は計算し直さずに上から押さえられます（不等式は Lean、数は 計算 ）。
- **三段の三つの** p：$p = 2/3/4$ で 3.67・0.58・0.092 です（$K_0K_1K_2$ では表 12 の 3.6658・0.57864・0.09599、$K_1K_2K_3$ から $K_4K_4K_4$ までは 3.673〜3.682・0.5715〜0.5732・0.0920〜0.0922 で、段に依らずほぼ同じ）。一段の上界は p とともに大きくなるのに、三段では p とともに小さくなり、三段の ℓ^2 は伸び、ℓ^3 と ℓ^4 は縮みます 計算 。
- **Schur は記録の核では弱い**：列の ℓ^1 が $C = 23.3$（一段）・131.1（二段）と大きく、$R^{p-1}C$ は一段で 52〜6856、二段で 13〜122 です。二段の p^* は $1 + \log 131.1 / \log(1/0.928) \approx 66.5$ で、Stein の上界は二段の $p = 4$ ですでに 1 を下回ります。最小の形 $S_2 R^{p-2}$ も二段では $p = 16$ で 1.065、$p = 24$ で 0.587 で、S_p そのものよりずっと弱い上界です 計算 。
- **束の数の上界** $\tilde{n}_p$（S_p から、K_0 から始まる束）：$p = 3$ で 3、$p = 4$〜32 で 2（二段 $S_4 = 0.971$）、$p = \infty$ で 2（$R(K_0K_1) = 0.928 < 1$）、$p = 2$ では三段までのどれも 1 を超えます 計算 。
- **一段の真の** μ_p：下界から、$p \leq 3$ と $p \geq 6$ では $\mu_p(K_0) \geq 1$ です。$3.5 \leq p \leq 5$ では下界 0.65〜0.77・上界 3.5〜7.8 で、**一段の真の** μ_p **が 1 を下回るかどうかは決まっていません** 計算 。下界

は p について $1.98 \to 0.60$（$p=4$）$\to 5.0$（$p=8$）と U 字で、真の $\log \mu_p$ が凸（候補 5.4）であることと矛盾しません。一段の窓 W_1 が空でない可能性は残っています。ただし場所は狭められます。一座標の Hölder の不等式から $\mu_p \geq \max_r \|k_r\|_{p'}^{p}$ で、これは $p \geq 5.874$ で 1 以上、明示の場（格子の目の互い違いの場）の比は $p \leq 3.039$ と $p \geq 5.665$ で 1 以上です 計算 （不等式は Lean：OneStepWindow（holder_dual_ratio・exists_lpRatio_ge_row））。窓は区間なので（候補 5.4。Lean：window_ordConnected_of_logConvex、$\log \mu_p$ の凸性は仮定）、W_1 が空でなければ $(3.04,\ 5.67)$ の中の一つの区間です。上界の側では、行の重み u の族は $u = A^{p-2}$ で飽和し（Lean：stein_row_weight_saturation）、列の重みも $b=1$ が最適で 計算 、$(2, \infty)$ の重みつき補間ではこれ以上締まりません。下界を与える場は格子の目の互い違いの模様（$|q|_\infty = \pi$）で、一段の障害は赤外でなく紫外の模様です 読 。

窓の言葉で言うと、S_p による窓は二段で $[\approx 4, \infty)$ を含み、三段で $[3, 4]$ を含みます。一段では S_p による窓は空で、真の窓は未確定です。$\mu 2 = S_2$ は $n \leq 3$ で 1.98・3.02・3.67 と全て 1 以上なので、各 W_n（$n \leq 3$）は区間であることから 2 をまたぎません 読 。

この型に固有の問い — 窓・束の数・閾値の指数

- **窓の広がり**。ブロック化の写像の列について、窓 W_n は n とともにどう広がるか。候補 5.4 から各 W_n は区間で、$R_n < 1$ なら上に開き、$R_n > 1$ なら上で閉じます。下端がどこへ動くかは記録の数からは分かりません。一段の $3.5 \leq p \leq 5$ の真の値が決まれば、W_1 が空かどうかが決まります（問い「窓の下端の動き」）。W_1 が空でなければ、それは $(3.04, 5.67)$ の中の一つの区間です。
- **束の数の $p \downarrow 2$ での発散**。$p < 2$ の側は、定数の場の比が段ごとに約 $2^{4-2p} > 1$ なので、n が大きいと窓に入らない見込みです 仮 。$\mu_p(K^{(n)})^{1/n}$ の極限が定数の場の次元の勘定 2^{4-2p} で決まるなら、n_p は $c/(p-2)$ 型で発散します。決まらないなら、W_∞ の下端 $p_c > 2$ が格子の幾何から決まる臨界の指数になります。どちらかは確かめていません 仮 （問い「束の数の発散」）。
- **閾値の指数 p^* の意味**。Schur の p^*（二段で約 66.5）と Stein の窓の下端（二段で約 4）の隔たりは、列の ℓ^1 の大きさと符号の打ち消しのどちらから来るか。重みつきの Schur（正の試験関数）で p^* をどこまで下げられるか（問い「Schur の閾値と Stein の窓」）。

辞書

記録の手作業	既知の枠組み	札
ℓ^2 と ℓ^∞ の間の補間・$\log \|K\|_{p\to p}$ の凸性	Riesz–Thorin の補間定理（M. Riesz 1927、G. O. Thorin 1939）：$\log \|K\|_{p\to p}$ は $1/p$ について凸	典
値域の重みを替える補間（定義 5.4）	Stein–Weiss、Interpolation of operators with change of measures（Trans. AMS 87, 1958）。両端の測度を固定すれば Riesz–Thorin で足りる	典 ・書誌は 読

記録の手作業	既知の枠組み	札
行と列の ℓ^1 による上界（候補 5.6）	Schur の検定（I. Schur 1911）。重みつきの版（正の試験関数）は Aronszajn・Halmos–Sunder の形で知られる	典・書誌は 読
錐の各点の不等式・中点の不等式（候補 5.3）	Hölder の不等式・Cauchy–Schwarz・算術幾何平均	典
$\log \mu_p$ の p についての凸性（候補 5.4）	作用素ノルムの対数凸性（Riesz–Thorin）と凸解析の perspective 関数（Boyd–Vandenberghe、Convex Optimization §3.2.6）	典・読
μ_p そのものを計算すること	$p \neq 1, 2, \infty$ では行列の $p \to p$ ノルムの近似は NP 困難（Hendrickx–Olshevsky、SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2010）。下界には Boyd の power method（D. W. Boyd 1974、Linear Algebra Appl. 9）。上界 S_p を使う理由はここにある	読
束で縮むこと（候補 5.5）	Gelfand のスペクトル半径の公式。拡大を含む作用素では細分割の L^p 理論（R.-Q. Jia、Subdivision schemes in L_p spaces、Adv. Comput. Math. 1995）があり、p ノルムの同時スペクトル半径で収束が決まる	典・読

書誌は要旨の水準で、原典の本文と照合していません。この節の定理の候補はどれも上の枠組みの有限次元の形か、その初等的な帰結です。

06

既知との辞書・言えている範囲・問い

五分類の要約

表 13　この章の主な行（札は本文の行のとおり。条件は同じ行に）

節	主張	札	条件
§01	優勢行列は積と冪で閉じる	Lean	ノルム環に値を持つ有限の塊。冪は単位元のノルムが 1
§01	候補 1.1：k 段で縮めば一段で縮む重み w' がある	Lean	$B \geq 0 \cdot w \geq 0 \cdot s > 0 \cdot k \geq 1 \cdot B^k w \leq s^k w$
§01	候補 1.2〜1.5（一段の評価・重みの取り替え・有限の Gelfand・アフィンの再帰・塊の集約と二×二の判定）	Lean	有限次元。Collatz–Wielandt の等式・Gelfand の公式そのもの・Perron ベクトルの存在は入っていない
§01	候補 1.2′（ℓ^2 の重み、Schur の判定法）・過渡の定数の明示式	読	右と左の正の Perron ベクトルがある
§01	符号を捨てる損は段で有界とは限らない（冪零の例）	Lean	絶対値をとってから合成する量
§01	Perron–Frobenius・Collatz–Wielandt・Gelfand・max-plus の挟み・M 行列の特徴づけ	典	—
§02	損は二段から先で止まり、少し下がる（6.28・5.51・5.10・5.26）	計算	4^4 のトーラス・段を $R = 3$ で切る・真の比は下界・$k \leq 4$
§02	候補 2.1：上界 ÷ 試験の値 $\leq \kappa^{-2}$	Lean	全ての行で $\kappa A_r M \leq \lvert y_r \rvert \cdot \lvert v_a \rvert \leq M$

節	主張	札	条件
§02	損 $=\langle \kappa^{-2} \rangle$（5.55・5.13・5.31）	計算	4^4・$k=2,3,4$・形と位相の因子が 1
§02	位相の因子 $\Phi=1$・平面波の試験の式	読	$2q^* \not\equiv 0$・$4q^* \not\equiv 0$、または周期 2 で u^* が実
§02	仮説 (a)(b)(c) は外れ、外れ方は段で一定	計算	$k\le 3$（大きいトーラス）・$k\le 4$（4^4）
§02	合成の核の輪郭が段で一つに近づく	読	数からの読み
§02	正の部分が優勢な型の上界（Schur と合成の劣化）	Lean	全ての行で負 $\le \delta$ 正。記録の核では仮定が満たされない
§02	W の座標の損は 1.10 で止まり、階数 1 の値 1.085 に近い	計算	零モードを直した核・60 型・$k\le 5$
§03	延長の存在・アフィン構造・自由度の次元・条件つきの延長・合成の整合	Lean	有限次元の線形代数
§03	候補 3.1〜3.5（零モードの一意性・Moore–Penrose の代表は局所でない・ord^V の不変性・尾の次数の規則・ずらしたジェット）	読	格子の段は紙の筋。候補 3.4 は段に一様な定数を仮定
§03	ord：sym 0・A3 1・A4 2、$\mathrm{ord}^V(F)=2$、尾は $D\le 4$ で有界	計算	記録の代表・$D=4$ の軸の入力・$L\le 192$
§03	和の規則・高周波の次数・Strang–Fix との対応	典・読	原典の次数の数え方の細部（±1）は確かめていない
§04	$\kappa = s_1 w_1$ は目盛りに依らず、レンズは $\kappa \le \frac{1}{4}$ で開く	読	主係数だけの勘定
§04	一プラケットの級数・同点・誤差の同点・d 次元のレンズ・MK の等高線	計算	一プラケット・等分配の主項・MK の近似の写像
§04	群の情報は交差の高さと次の項の符号に残る・四次元のレンズと帯の重なり	仮	主項だけ・偶然を含みうる
§04	候補 B（区別を渡す比較はレンズに局在する）	仮	強結合の付値の一致・弱結合の付値の違い・主項の支配の領域を仮定。言明だけ
§05	候補 5.1・5.2・5.7（錐の引き戻し・劣乗法・一段で超え束で縮む・アフィンの再帰の五つの形）	Lean	抽象の N（$\|\cdot\|_p^p$ の役）で書いた文。$\mu\ge 0$・$0\le\mu<1$・$\varepsilon\ge 0$ など定理ごとの仮定。作用素ノルムの上限そのものは入っていない
§05	候補 5.3・5.6：$\log S_p$ の中点の凸性、Schur の $\mu_p \le R^{p-1}C$ とその等号、δ の場の薄まり、$S_p \le S_2 R^{p-2}$	Lean	有限和。$w\ge 0$・$a>0$・$a\le R$・$p\ge 1$。連続の p での凸性と S_p の式そのもの（補間）は入っていない
§05	重みつきの Stein の上界の一般の p の導出・真の $\log \mu_p$ の凸性・窓 W_n は区間・素朴な薄まりの反例（定数の場）	読・典	$p\ge 2$（$t=1-2/p\ge 0$）。凸性は Riesz–Thorin と perspective

節	主張	札	条件
§05	$\log S_p$ の二階の差分商が全て正・$\sqrt{S_2 S_4}/S_3 = 1.016$〜$1.036$・$S_p^{1/p} \to R$（2.252・0.928・0.332）・束の数の上界（$p=3$ で 3、$p=4$〜32 と ∞ で 2）・一段の真の μ_p は $3.5 \le p \le 5$ で未決（下界 0.65〜0.77、上界 3.5〜7.8）。W_1 が空でなければ $(3.04, 5.67)$ の中の一区間	計算	一段 8^4 切り詰めなし・二段 粗い 16^4・三段 粗い 12^4・$R=3$ で切り詰め・下界は最大と示していない
§05	n_p は $p \downarrow 2$ で $c/(p-2)$ 型に発散する、または W_∞ の下端 $p_c > 2$ がある	仮	定数の場の次元の勘定 2^{4-2p} だけからの見立て

この章の Lean

五つのファイルは、どれも sorry を含まず、`native_decide` を使わず、末尾の公理の表示は標準の三つ（propext・Classical.choice・Quot.sound）か、その一部だけでした。どのファイルにも格子・群・測度・最小化・フーリエ変換そのものは入っていません。

表 14　この章の Lean のファイル Lean

ファイル（名前空間）	定理の数	主な定理と仮定	本文の場所	入っていないもの
DominantMatrixContraction（`DominantMatrix`）	21	`dominant_mul`・`dominant_pow`（単位元のノルムが 1）・`weighted_step`・`weighted_iter`（$Bw \le \lambda w$）・`weight_change`（$av \le w \le bv$、$a>0$）・`liftWeight_step`（$B \ge 0$、$w \ge 0$、$s>0$、$k \ge 1$、$B^k w \le s^k w$）・`norm_pow_le_const_mul`・`sum_norm_pow_le`・`affine_uniform`（$0 \le \lambda < 1$、$\varepsilon \ge 0$）・`aggregate_step`・`two_by_two_weight`・`two_by_two_exists`・`signedEx_sq`・`absEx_pow`	§01	Collatz–Wielandt の等式・Gelfand の公式そのもの・Perron ベクトルの存在・候補 1.2′（ℓ^2 の重み）・max-plus の挟み
SignLossBound（`SignLoss`）	16	`jensen_four`・`schur_four`（行の $\ell^1 \le A$、列の $\ell^1 \le B$）・`coherent_of_neg_le`（負 $\le \delta$ 正）・`loss_le_of_coherent`・`comp_coherent`・`coherence_le_one`・`sum_four_le`（$\lvert v_a \rvert \le M$）・`stein_form_le`・`stein_le_inv_sq_mul_test`（$\kappa A_r M \le \lvert y_r \rvert$）・`abs_comp_le`・`row_l1_comp_le`	§02	Stein の式そのもの（Plancherel と補間）・平面波の位相の平均・Wielandt の定理・階数 1 への収束・損の数

ファイル（名前空間）	定理の数	主な定理と仮定	本文の場所	入っていないもの
ConstrainedExtension（`ConstrainedExtension`）	20	`exists_extension`・`isExtension_iff_mem_coset`・`finrank_freedom`（有限次元）・`freedom_eq_zero_iff`（$W \neq 0$）・`exists_extension_with_conditions`（(res_V, C) が全射）・`finrank_freedom_with_conditions`・`eq_of_eqOn_iSup`（部分空間の族の和が全体）・`comp_isExtension`（$f_1(V_1) \subseteq V_2$）・`comp_depends_of_not_le`	§03	格子・記号の連続性・折り返しの次数・積率・候補 3.1〜3.5 の格子の段
ConeCalculus（`ConeCalculus`）	20	定義 `IsCone`・`Contracts`。`cone_pullback`（$c \geq 0$）・`contracts_comp`・`contracts_iterate`・`cone_pullback_iterate`（$\mu \geq 0$）・`block_decay`（$M \geq 0$、$\mu \geq 0$）・`row_rpow_le`・`lp_schur`（$p \geq 1$、行の $\ell^1 \leq R$、列の $\ell^1 \leq C$）・`lp_schur_sharp`（行和 $R > 0$・列和 C が一定）・`delta_dilution`・`weighted_rpow_midpoint`（$w \geq 0$、$a > 0$）・`stein_form_midpoint`・`weighted_rpow_shift`（$0 < a \leq R$、$p0 \leq p$）・`sup_shift`・`sup_midpoint`・`midpoint_below_one`・`affine_const`（$0 \leq \mu < 1$、$\varepsilon \geq 0$）・`affine_varying`・`affine_invariant`・`affine_eventually`・`affine_block`	§05	作用素ノルム（真の ℓ^p ノルムの上限）そのもの・Stein の上界の式（補間と Plancherel）・Riesz–Thorin・連続の p での凸性・Gelfand の公式・格子と核・記録の数
OneStepWindow（`LatticeGauge.OneStepWindow`）	20	`holder_dual_ratio`・`norm_conj_rpow`・`exists_lpRatio_ge_row`（一座標の Hölder の下界、$p > 1$）・`lamMax_mono`・`lamMax_smul`（$\lambda_{\max}$ は Rayleigh 商の上限で定義）・`steinWeighted_ge`・`stein_row_weight_saturation`（行の重みの族は $u = A^{p-2}$ で飽和）・`window_ordConnected`・`window_ordConnected_of_logConvex`（$\log \mu_p$ の凸性は仮定）	§05	Courant–Fischer・数 $p_{\mathrm{row}} = 5.874$ と区間 $(3.04, 5.67)$（計算）・作用素ノルムそのもの

言えていないこと

(a) **新しい理論や新しい定理を立てたとは言いません**。§01〜§03 と §05 の定理の候補はどれも既知の事実の有限次元の形、その初等的な帰結、または既知の枠組み（Perron–Frobenius、多重

格子の次数、和の規則、Riesz–Thorin の補間、Schur の検定）の言い換えです。この章で付け加えたのは、記録の数をそれらの量に読み替える対応と、そこから出た問いです。

(b) **Lean で通ったのは表 14 の 97 本だけです。**候補 1.2′・過渡の定数の明示式・位相の因子・候補 3.1〜3.5 の格子の段・§04 の全て・§05 の Stein の上界の一般の p の導出・真の $\log \mu_p$ の凸性・候補 5.5 は、紙の筋か見立てです。

(c) **数は評価ではありません。**§02〜§04 の数は浮動小数の計算で、区間の評価ではありません。真の比は最大化の下界で、最大であるとは示していません（16^4 の一段では 2 つの始点で 0.5767 にとどまり、記録の 0.591 に届いていません）。

(d) **損が全ての段で有界であることは示していません。**示したのは $k \le 4$（4^4）と $k \le 3$（8^4）の数と、「そろいが下に有界なら損は有界」という条件つきの不等式だけです。4^4 のトーラスは核の台を大きく巻きつけるので、そこでの「損 $= \langle \kappa^{-2} \rangle$」はその周期の作用素についての事実です。

(e) **候補 3.4 の尾の規則は段に一様な定数を仮定した筋です。**無限段の一様性は扱っていません。記録の連鎖で合成の整合が成り立つかは確かめていません。

(f) **§04 の四次元の数は一次の主項と等分配だけから出したものです。**四次元の真の級数を使っていません。帯や転移との重なりは偶然を含みえます。MK は近似の写像で、$U(1)$ の止まる等高線が本当の固定線かは区別していません。候補 B は言い換えで、帯を易しくするとは言いません。

(g) **この章の結果は紫外の制御にも繰り込みの比較にも直接には効きません。**§01 の記録との対応表は記録の読み替えです。

(h) **文献の多くは要旨と抜粋の水準で読みました。**Hemker・Charina–Conti・Jia・Donatelli・Rump・Varga・Bertsekas–Tsitsiklis・arXiv:1005.1993・arXiv:0807.0185・Stein–Weiss・Hendrickx–Olshevsky・Boyd（power method）は、原典の定義の細部を確かめていません。

(i) **§05 の窓と束の数は上界の窓です。**S_p による窓は二段で $[\approx 4, \infty)$、三段で $[3, 4]$ を含みますが、真の μ_p の窓の端の値は出していません。一段の $3.5 \le p \le 5$ は未決で、二段・三段の数の切り詰めと粗いトーラスの大きさへの依存は評価していません。n_p の $p \downarrow 2$ での振る舞いは見立てです。

残る問い

表 15　この章の問い（体系の問い 1〜16）

番号	問い	節
1	最悪の向きでの行のそろいの下限 κ_0 を段の極限の核の上で評価し、段の摂動で κ が動く量を行ごとに押さえて、全ての段で損 $\le \kappa_0^{-2}$ と言える形にできるか。	§02
2	大きいトーラスで Stein の最大点が周期 2 からずれる分（損 6.4 に対して上界 10.2）を、周期 2 の点に制限した Stein とそれ以外の q に分けて測ると、差はどこから来るか。	§02

番号	問い	節
3	真の作用素の側の打ち消しを測る量（例：$\|T^k\|$ と $\||T|^k\|$ の比を符号の相似類の中の最小で割る）を一つ決めると、段でゆっくりにしか増えない損の規則性は何から来ると言えるか。	§01・§02
4	有限の型と残りの戻りを二×二に集約し、記録の行列で $bc < (1-a)(1-d)$ が成り立つか。成り立つなら区間の評価に上げられるか。	§01
5	W の座標の記録は ℓ^2 で測っている。候補 1.2′（Schur の判定法の重み）で読み直すと、一段の縮みの定数はどうなるか。	§01
6	拘束つきの和の規則の上限：任意の $k \le \mathrm{ord}^{V}(F)$ について、$\mathrm{ord}(K) \ge k$ の局所の代表が有限範囲で取れるか。他の段・他のブロック化で ord^{V} が上がる場合に一般の形があるか。	§03
7	自由度の正準な選び方：Stein 型のノルムを最小にする代表は存在し、一意で、局所か。	§03
8	合成の整合：段 k の代表の出力は段 $k+1$ の拘束の部分空間（細かい側の Bianchi の像）に入るか。入らないなら、$\mathrm{im}\, D$ の外の自由度は連鎖にどれだけ効くか。	§03
9	Moore–Penrose の代表の核はどの速さで減衰するか（0 次斉次の不連続な記号から $\|Z\|^{-4}$ 型か）。	§03
10	有限のトーラスの対称な代表の零モードが、指数より速く $U/4$ に近づいて見えるのはなぜか。	§03
11	三つ目の付値（トランス級数の指数）を足した三重付値で、$U(1)$ の帯は弱結合と指数の付値の同点、$SU(2)$ は強結合と弱結合の付値の同点、という区別が立つか。MK の $U(1)$ の傾き 13〜14 は何に向かうか。	§04
12	四次元の本物の級数（強結合の高次の項と弱結合の高次のループの係数）で誤差の同点を求めると、レンズは 26-06 の帯とどう重なるか。	§04
13	基本と随伴の二つの結合の空間 (β_F, β_A) では、同点集合の余次元 1 の骨格は非自明な多面体複体になるか。一次の転移の線の端点とどう並ぶか。	§04
14	ブロック化の写像の列で、窓 $W_n = \{p : \mu_p(K^{(n)}) < 1\}$ の下端は n とともにどう動くか。一段の $3.5 \le p \le 5$ で真の $\mu_p(K_0)$ は 1 を下回るか（Stein の重み u を A^p 以外に最適化して上界を締めるか、局在と広がりの混ざった始点や power method で下界を上げるかして、W_1 が空かどうかを決める）。答え（一部）：W_1 が空でなければ $(3.04, 5.67)$ の中の一区間。行の重みの族は $u = A^{p-2}$ で飽和し、重みつきの Stein ではこれ以上締まらない（Lean：OneStepWindow）。一段の下界は $p = 4$ で 0.6470 まで上がったが 1 との間は未決	§05
15	束の数 n_p は $p \downarrow 2$ でどう発散するか。$\mu_p(K^{(n)})^{1/n}$ の極限が定数の場の次元の勘定 2^{4-2p} で決まって $n_p \approx c/(p-2)$ となるか、それとも W_∞ の下端 $p_c > 2$ が格子の幾何から決まるか。	§05
16	Schur の閾値の指数 p^*（二段で約 66.5）と Stein の窓の下端（二段で約 4）の隔たりは、列の ℓ^1 の大きさと符号の打ち消しのどちらから来るか。重みつきの Schur（正の試験関数）で p^* をどこまで下げられるか。	§05・§01

出典

もの	種別	出典
Perron–Frobenius・Collatz–Wielandt・優勢による比較 $\rho(A) \le \rho(\|A\|) \le \rho(B)$	典	R. A. Horn, C. R. Johnson, Matrix Analysis の非負行列の章（読）

もの	種別	出典
重みつき最大ノルムでの縮みと反復法・M 行列	典（読）	R. S. Varga, Matrix Iterative Analysis。A. Berman, R. J. Plemmons, Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences。D. P. Bertsekas, J. N. Tsitsiklis, Parallel and Distributed Computation (1989)
max-plus の固有値と挟み	典	S. Friedland (1986)。F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, J.-P. Quadrat (1992)。P. Butkovič (2010)。M. Akian, S. Gaubert, A. Marchesini, arXiv:1309.7319（読）
sign-real spectral radius	読	S. M. Rump (1997)
転送作用素の次数	読	P. W. Hemker, On the order of prolongations and restrictions in multigrid procedures, J. Comput. Appl. Math. 32 (1990) 423–429。M. Donatelli, arXiv:0807.2565。U. Trottenberg, C. W. Oosterlee, A. Schüller, Multigrid（局所フーリエ解析）
和の規則・Strang–Fix 条件・近似の次数	典（読）	G. Strang, G. Fix (1973)。R.-Q. Jia, Math. Comp. 67 (1998)。M. Charina, C. Conti, arXiv:1202.3931。I. Daubechies, Ten Lectures on Wavelets
Fisher 零点と強結合の盆・crossover	読（要旨）	A. Denbleyker, D. Du, Y. Liu, Y. Meurice, H. Zou, arXiv:1005.1993。arXiv:1112.2734。arXiv:0807.0185
Riesz–Thorin・Stein–Weiss・Schur の検定・$p \to p$ ノルムの計算の難しさ・細分割の L^p 理論	典（読）	M. Riesz (1927)、G. O. Thorin (1939)。E. M. Stein, G. Weiss, Trans. AMS 87 (1958)。I. Schur (1911)。J. M. Hendrickx, A. Olshevsky, SIAM J. Matrix Anal. Appl. (2010)。D. W. Boyd, Linear Algebra Appl. 9 (1974)。R.-Q. Jia, Adv. Comput. Math. (1995)。S. Boyd, L. Vandenberghe, Convex Optimization §3.2.6
§02〜§05 の数	計	本書の検討の計算の記録（合成の核の行の直接の作用と段ごとの作用の照合・準ニュートン法と周期 2 の場の二経路・一プラケットの級数は有理数で作成・§05 の S_p は合成の核から直接に計算）
表 14 の定理	Lean	Lean のファイル DominantMatrixContraction・SignLossBound・ConstrainedExtension・ConeCalculus・OneStepWindow

この章で使った語 — 優勢行列・重みつきの塊ノルム・k 段の縮み・過渡の定数・一段の重み・符号を捨てる損・行のそろい・拘束つき写像・延長・局所の代表・自由度・零モード・積率・折り返しの次数 ord と ord^V・ずらしたジェット・二重付値・補の同点・同じ座標の同点・誤差の同点・レンズ・$\kappa = s_1 w_1$・錐の定数 c_p・p-縮み μ_p・重みつきの Stein の上界 S_p・束の数 n_p・窓 W_n・Schur の閾値の指数 p^*。

次に読む章：15-11 入口 — 一段と一つの尺度。

入口 — 一段と一つの尺度

この章は案内です。

この部は、本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた記録です。存在そのものは第二巻の第 6〜13 部を、二つの設計の違いは第 14 部を見てください。部の位置づけは 15-00 にあります。

範囲 — この部の後半（15-11〜15-14）の定理は、自由場・真空の背景・線形化したブロック化についての言明か、一つの尺度（格子間隔を固定）の Wilson の測度についての言明です。繰り込んだ粗い尺度の測度、背景つきの場、段を跨ぐ一様な評価については何も言いません。重み $(1/8, 3/4, 1/8)$ は設計の選びです（28-05）。

この章で分かること — この部の後半の章（15-12〜15-14）と、第 22 部へ移った大きい面の稀さ（22-01）が何を扱うかと、後半の全体に掛かる範囲です。後半は、本書の設計（切断に依らない決まったブロック写像）の一段について Lean まで済んだ部品で、紫外の制御の試みの一部として、この部に置きます。

前提となる章 — 19-04 ブロック写像と繰り込みの一段（後半の対象の定義）、19-01（Wilson の測度）。

先に言うこと — 範囲は題の直下に書いたとおりです。後半の定理は、どれも既知の型の結果の、この本の対象での形式化で、Lean で機械検査したものです。連続極限の構成や質量ギャップについては、後半の章は何も言いません（示すべき言明は 19-07）。

この章の順序

1. 後半の章 — 章を一行ずつ
2. 後半の全体に掛かる範囲 — 線形・真空・一つの尺度
3. 読む順 — 対象の章との行き来

01

後半の章

章	一行
15-12 自由場の一段と多段	道の核で自由場を k 回押した記号の漸化式の物理の部分 G_k：上の側・下の側・伝播関数の挟み・一段の縮み・段に一様な縮み・Γ_k の二次の汎関数の収束。
15-13 ブロック写像の線形化と押し出しの共分散	非線形のブロック写像の局所性とゲージの共変性、単位元のまわりの線形化、押し出しの共分散 $CTC^{\dagger}$、線形化したブロック化で押した自由場の面の共分散。
22-01 大きい面の稀さ ― チェス盤の評価（第 22 部）	一つの尺度の Wilson の測度で、面が全て大きい事象の確率が体積に依らない率で小さいこと（$\beta \geq 81$）。
15-14 後半（15-11〜15-13）が言えていること・言えていないこと	後半の全ての定理を、範囲と言っていないことと Lean の宣言とともに一つの表に。

02

後半の全体に掛かる範囲

- **線形**。15-12 と 15-13 §05 は、ブロック化をその一次の部分（道の核 C）で置き換えた対象についての言明です。非線形のブロック写像 B と一致するのは一次の部分までです（15-13 §03）。
- **真空の背景**。線形化は単位元 $U = 1$ のまわりで、押す場は Gauss の自由場です。背景の場のまわりの展開は扱いません。
- **一つの尺度**。22-01 は細かい格子の Wilson の測度そのものについての言明で、ブロック化した粗い尺度の測度には届きません。
- **設計の選び**。定数は重み $(1/8, 3/4, 1/8)$ と倍率 2 の道の族で計算したものです（19-04、論点は 28-05）。

段を跨ぐ一様な評価は、後半の章ではなく前提の側に在ります（28-04）。

03

読む順

15-12 と 15-13 は、19-04 の対象（道の族・ブロック写像・道の核・多段の族）を前提にします。15-13 §05 は 15-12 の上の側と下の側を使います。22-01 は 19-01 の Wilson の測度と 20-01 の鏡映正値性だけを前提にし、15-12・15-13 とは独立に読めます。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
後半の定理の一覧は 15-14	粗い尺度の測度・背景つきの場・段を跨ぐ一様な評価

出典と再現

もの	種別	出典・道具
各章の定理と出典	—	各章の出典と再現の表

この章で使った語 — 道の核・ブロック写像・記号の漸化式・押し出し・面の共分散・チェス盤の評価。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：15-12 自由場の一段と多段 — 道の核で自由場を押した伝播関数の、段に一様な評価から始めます。

自由場の一段と多段 — 重み (1/8, 3/4, 1/8)、真空の背景、線形化

この章は本書の検討です。§01 の前半は既存の知見です。

この部は、本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた記録です。存在そのものは第二巻の第 6〜13 部を、二つの設計の違いは第 14 部を見てください。部の位置づけは 15-00 にあります。

範囲 — この章の定理は、自由場・真空の背景（$U = 1$）・線形化したブロック化についての言明です。対象は運動量の上の 4×4 行列の族（記号の漸化式）で、繰り込んだ粗い尺度の測度、背景つきの場、非線形のブロック化については何も言いません。重み $(1/8, 3/4, 1/8)$ は設計の選びです（28-05）。

この章で分かること — 道の核 C のブロック平均を Feynman ゲージの自由場に k 回当てたときの、記号の漸化式の物理の部分 $G_k(q)$ について、六つの事実を読みます。上の側 $G_k \preccurlyeq P/\omega$（定数はちょうど 1）、下の側 $\frac{3}{100} P/\omega \preccurlyeq G_k$、伝播関数の段に一様な挟み、一段の縮み $\mathcal{M}P \preccurlyeq \frac{3}{5}P$、17 段で $\tau < 1/170$ の段に一様な縮み、そして Γ_k の二次の汎関数の率 $(3/5)^k$ の収束です。どれも Lean で機械検査した言明です。

前提となる章 — 19-04 道の核・19-04 多段の族・重みは設計の選び、7-05 § 自由場。

先に言うこと — 範囲は題の直下に書いたとおりです。加えて四つあります。(1) 運動量は無限体積の連続の運動量 $q \in \mathbb{R}^4$（$\omega(q) > 0$）で、有限のトーラスの運動量はその一部です。(2) G_m が位置の空間の段の共分散（自由場を m 回押した作用素）の記号の物理の部分であることは Lean に在りますが、§02〜§07 の不等式は記号（運動量ごとの行列）の不等式で、位置の空間の作用素の不等式としては述べていません。(3) 定数は真の値より 3〜186 倍緩く[読]、Γ_k の収束の定数は $\kappa^2 \approx 1.4 \cdot 10^{13}$[読] です。(4) 「一ループの結合が収束する」とは言いません。言えているのは Γ_k の二次の汎関数の収束までです。

この章の順序

1. 対象 — 記号の漸化式と物理の部分 G_k — 道の核の記号、別名、$\mathcal{M}$、$G_k = \mathcal{M}^k(P/\omega)$
2. 上の側 — $G_k \preccurlyeq P/\omega$ — 定数はちょうど 1、一段の不等式と順序の保存から
3. 寄り道：上の側の中の補題 $E_\nu < 4$ — 陽な関数の上界と、反転の不変
4. 下の側 — $\frac{3}{100}P/\omega \preccurlyeq G_k$ — 一番近い別名の鎖と十六の別名の場合分け
5. 伝播関数の段に一様な挟み — $\operatorname{ran} P$ の上の逆 H_k と $(\omega/745)P \preccurlyeq \frac{1}{4}H_k \preccurlyeq 312\,\omega P$
6. 一段の縮み $\mathcal{M}P \preccurlyeq \frac{3}{5}P$ — 真の上限は $125/256$ 読
7. 段に一様な縮み — 17 段で $\tau < 1/170$ — 一番近い別名の項と残りに分ける
8. Γ_k の二次の汎関数の収束 — 別名の和の上の揺らぎの形、率 $(3/5)^k$
9. 言っていないこと — 格子の段の作用との同一視、位置の空間、定数の緩さ

01

対象 — 記号の漸化式と物理の部分 G_k

導入は 7-05 §自由場 です。自由場をブロック化の線形写像で押すと、押した場もまた Gauss の場で、その共分散は $CTC^{\dagger}$ です典。並進不変な作用素は運動量ごとの行列（記号）で書けるので、段を重ねる操作は運動量の上の行列の漸化式になります。繰り込み群の解析では、この自由場の段の伝播関数の評価が出発点の一つです（Bałaban の連作、7-07）典。

この章の対象は、19-04 §自由場の側の多段の族 で置いたものです。19-04 ではトーラスの運動量で置いたものを、ここでは $\omega > 0$ の全ての $q \in \mathbb{R}^4$ で考えます。記号を繰り返します。運動量 $q \in \mathbb{R}^4$ について

$$\omega(q) = \sum_{\nu} 4\sin^2\frac{q_\nu}{2}, \qquad s_\nu(q) = \sin\frac{q_\nu}{2}, \qquad P(q) = 1 - \frac{s(q)s(q)^{\mathsf{T}}}{|s(q)|^2}. \tag{1}$$

$P(q)$ は階数 3 の射影で、ゲージの向きを除いた「物理の部分」への射影です。粗い運動量 q に落ちる細かい運動量（別名）は $r_\zeta(q) = q/2 + \pi\zeta$、$\zeta \in \{0,1\}^4$ の 16 個です。一段の写像は

$$(\mathcal{M}G)(q) = \frac{1}{16}\sum_{\zeta\in\{0,1\}^4} A_\zeta(q)\, G\big(r_\zeta(q)\big)\, A_\zeta(q)^{\mathsf{T}}, \qquad A_\zeta = 2P(q)\, S_\zeta C(r_\zeta)\, P(r_\zeta)\, N(r_\zeta), \tag{2}$$

で、S_ζ は符号の対角、$C(r)$ は cos の対角、N は道の族の平均から来る陽な 4×4 行列です（19-04 (9) の係数の記号に現れる行列）。段 k の族は

$$G_0 = P/\omega, \qquad G_k = \mathcal{M}^k(P/\omega) \qquad (\omega(q) > 0). \tag{3}$$

G_k が何であるかを正確に言います。道の核の記号を $Q(q)$ とし、細かい段の記号 X から粗い段の記号への漸化式を $\mathcal{R}$ と書くと、出発点 $X_0 = I/\omega$（Feynman ゲージの自由な伝播関数の記号）から $\mathcal{R}^k X_0$ が決まり、その物理の部分が G_k です。

$$P\,(\mathcal{R}^k X_0)\,P = \mathcal{M}^k(P\,X_0\,P) = G_k. \tag{4}$$

Lean：(4) は `LatticeRec.rec_iterate`（任意の X_0 で）と `LatticeRec.projFam_X0`、道の族の平均の記号の閉じた形は `LatticePath.pathSym_closed`、一段のトーラスの作用素 T の記号が X なら $CTC^\dagger$ の記号が $\mathcal{R}X$ であることは `LatticeTorus.torus_step`（$(\mathbb{Z}/2L)^4 \to (\mathbb{Z}/L)^4$）。自由場の共分散を m 回押した格子の段の共分散の記号が $\mathcal{R}^m X_0$ で、その物理の部分が G_m であることは `LatticePush.push_phase`・`LatticePush.stageCov_phase`・`LatticePush.projFam_stage` です。

この章では G_k を「**記号の漸化式の物理の部分**」と呼びます。言明は全て $\omega(q) > 0$ の全ての $q \in \mathbb{R}^4$ についての、具体の 4×4 行列の族の Loewner の不等式です（$A \preccurlyeq B$ は全ての x で $\langle x, Ax\rangle \le \langle x, Bx\rangle$）。抽象の作用素についての言明ではありません。Lean は運動量を $\theta = q/4$ で持ち、定義域は `OneStepFinal.Qpos`、$\mathcal{M}$ は `OneStepBridge.Mfam`、別名の写像は `OneStepFinal.rqPos` です。重み $(1/8, 3/4, 1/8)$ は N と A_ζ の中に入っていて、ここに出る定数は全てこの選びで計算したものです（19-04 §重み、論点は 28-05）。

02

上の側 — $G_k \preccurlyeq P/\omega$

上の側の定理　Lean：`OSUpQpos.os_up_Qpos`・`OSUpQpos.Gs_le_G0`（仮定の欄なし）。$\omega(q) > 0$ の全ての q で

$$\mathcal{M}(P/\omega) \preccurlyeq P/\omega, \qquad \text{したがって全ての段 } k \text{ で} \quad G_k \preccurlyeq P/\omega. \tag{5}$$

意味。段を重ねても、押した伝播関数の物理の部分は出発点の P/ω を越えません。定数はちょうど 1 です。真の上限は $1 - 3.4\cdot10^{-6}$読 （$k=1$ の ωG_1 の最大の固有値、$2.4\cdot10^4$ 点の浮動小数）で、定数 1 は鋭い値です。

証明の道筋は三段です。

1. **一段の不等式を陽な関数の上界に帰着する**。$\langle x, \mathcal{M}(P/\omega)x\rangle$ を 16 の別名の和に開くと、$\mathcal{M}(P/\omega) \preccurlyeq P/\omega$ は「全ての ν で $E_\nu(\sigma) \le 4$」という陽な関数の不等式から従います。ここで E_ν は $\sigma_\mu = \sin^2(q_\mu/4)$ の陽な有理式です（(1) の s とは別の変数）（`OSUpBridge.os_up`。寄り道に定義）。

2. **$E_\nu \le 4$ を全ての点で**。$[0,\frac12]^4$ の上では $E_\nu < 4$（$\sigma \neq 0$）が補題です。一般の点は、座標ごとに $\sigma_\mu \mapsto 1-\sigma_\mu$ と反転して $[0,\frac12]^4$ に移し、E_ν がこの反転で変わらないことを使います（`OSUpQpos.hEE_all`）。
3. **段を重ねる**。$\mathcal{M}$ は順序を保つ線形写像です。$\mathcal{M}G_0 \preccurlyeq G_0$ に $\mathcal{M}^k$ を当てると $G_{k+1} \preccurlyeq G_k$、推移で $G_k \preccurlyeq G_0$ です初。

段の列は単調に減ります：$G_0 \succcurlyeq G_1 \succcurlyeq G_2 \succcurlyeq \cdots$。これが §06・§07 の入力です。

寄り道：上の側の中の補題 $E_\nu < 4$

飛ばしてよい。$\sigma \in [0,1]^4$（$\sigma_\mu = \sin^2(q_\mu/4)$）、$e \in \{0,1\}^4$ について $b_{e,\mu} = 1-\sigma_\mu$（$e_\mu = 1$）・σ_μ（$e_\mu = 0$）、$H = 4\sum_\mu \sigma_\mu(1-\sigma_\mu)$、$X_e = \sum_\mu b_{e,\mu}$ とおき、

$$E_\nu(\sigma) = \sum_{e\in\{0,1\}^4} \frac{H}{X_e}\,\kappa_e^{+}\,(1-b_{e,\nu})$$

とします。κ_e^{+} は X_e・$\sum b^2$・$\max b$ の陽な有理式の二つの値の大きい方の二乗です。Lean：`FreeStageOS.E_lt_four_s`（$\sigma \in [0,\frac12]^4 \setminus \{0\}$ で $E_\nu(\sigma) < 4$）、運動量の形 `FreeStageOS.E_lt_four`、二変数の有理式の不等式 `FreeStageOS.eq_lt_four`。上限 4 は鋭く、$\sigma \to 0$ で $E_\nu \to 4$ に迫ります（例：$\sigma = (10^{-6},0,0,0)$ で 3.999995読）。反転の不変は、$e \mapsto e \oplus f$ が $\{0,1\}^4$ の全単射で、H の各項 $b(1-b)$ が $b \mapsto 1-b$ で変わらないことから来ます（`OSUpQpos.EE_bbflip`）。この補題はスカラーの関数の上界で、格子の対象そのものの定理ではありません。上の側の定理の部品として置きます。

03

下の側 — $\frac{3}{100}P/\omega \preccurlyeq G_k$

下の側の定理　Lean：`HsSplit.lower_side_c`。別名で閉じた任意の族（$\omega > 0$）で、とくに $\omega(q) > 0$ の全ての q で、全ての段 k について

$$\frac{3}{100}\,\frac{P}{\omega} \preccurlyeq G_k. \tag{6}$$

Lean の仮定の欄は族の二つ（別名の写像が r_ζ であること、$\omega > 0$）だけで、運動量の全体（`Qpos`・`rqPos`）ではどちらも定義から払えます。前の版 `OneStepLower.lower_side` は同じ形で定数 $(4/\pi^2)(0.04452)^2 \approx 8.03\cdot 10^{-4}$読 です。

意味。段をいくら重ねても、物理の部分は潰れません。上の側と合わせると、ωG_k の $\operatorname{ran} P$ の上の固有値は全ての段で $[3/100,\,1]$ に入ります。真の下限は段とともに下がり、$k = 0,1,\dots,5$ で $1,\ 0.210,\ 0.132,\ 0.110,\ 0.0997,\ 0.0951$読、極限の見積りは約 0.091読 です。$k = 4,5$ では、最小になる場所は角 $q = \pi(1,1,1,1)$ です読。定数 $3/100$ は真の値のほぼ $1/3$ です。

証明の道筋。

1. **一番近い別名の鎖**。16 の別名のうち、原点に一番近いもの $\zeta^{*}(q)$ だけを残すと、$\mathcal{M}$ の一項で下から押さえられます。これを d 段たどった陽な下界を `NearAliasB.chain_lower` が与えます。
2. **十六の別名**。一段で十六の別名の全てを残した下界を `NearAliasB.near_lower` が与えます。
3. **場合分け**。$\omega > 0$ の全ての点で、鎖の下界（2 段）か十六の別名の下界（5 段）のどちらかが $3/100$ 以上です（`HsSplit.hS_split`、仮定なし）。これは変数の箱を升に分けた多項式の不等式の証明書で確かめます[機]。証明書は Lean の核で検査した、解析の証明の支えです。
4. **段に渡す**。場合分けの下界を段ごとに当てて (6) を得ます（`NearAliasB.lower_side_split`）。

04

伝播関数の段に一様な挟み

$G_k(q)$ は $\operatorname{ran} P(q)$ の上で正定値なので、そこで逆を持ちます。その逆 $H_k(q)$（$P H_k = H_k$、$G_k H_k = P$）を伝播関数の逆、$\frac{1}{4}H_k$ をその四分の一と呼びます。H_k は G_k から一つに決まります[初]。

伝播関数の挟みの定理　Lean：`LatticeRec.lattice_bracket`（記号の漸化式 $\mathcal{R}^{k}(I/\omega)$ の物理の部分の形）・`OneStepLower.bracket_Qpos_free`（$\mathcal{M}^{k}(P/\omega)$ の形）。仮定の欄なし。全ての段 k、$\omega(q) > 0$ の全ての q で

$$\frac{\omega(q)}{745}\,P(q) \;\preccurlyeq\; \tfrac{1}{4}H_k(q) \;\preccurlyeq\; 312\,\omega(q)\,P(q). \tag{7}$$

上の定数を改めた版 `NearAliasB.bracket_Qpos_split` では、右辺が $\omega/(4\cdot\frac{3}{100})\,P = \frac{25}{3}\,\omega P$ です（§03 の下の側から）。

意味。段 k の伝播関数の逆は、段に依らない二つの定数で ωP に挟まれます。ωP は細かい段の自由場の作用の物理の部分の記号です。言い換えると、段を重ねても、押した自由場の二次の形は最初の自由場の形と同じ大きさの順に留まります（$\frac{1}{4}H_k$ を押した場の作用と読むのは読みとしてで、その同一視は紙です。§08）。定数は k と q に一様です。体積は言明に出てきません。

証明の道筋。(7) の右側は下の側 $cP/\omega \preccurlyeq G_k$ の逆をとったものです（$\operatorname{ran} P$ の上で、逆は Loewner の順序を逆にする）初 。$c \geq 1/1248$ なら 312、$c = 3/100$ なら $25/3$ です（前の版の下の側の定数は約 $8.03 \cdot 10^{-4} \geq 1/1248$）。左側の 745 は $G_k \preccurlyeq 186.25\, P/\omega$ の逆で、§02 の上の側（定数 1）より弱い形です。上の側から逆をとれば左の定数は $1/4$ になります初 が、その形の Lean の宣言はありません。

数値で見ると、ωG_k の固有値は $[0.091,\, 1]$ あたりに入り読 、(6)(7) と split の版の定数は、真の値より 3 倍（$3/100$）から 186 倍（左の 745）緩い読 です。

05 一段の縮み $\mathcal{M}P \preccurlyeq \frac{3}{5}P$

一段の縮みの定理　Lean：`OneStepBridge.Mfam_P_le_row`。別名で閉じた任意の族で（運動量の全体では仮定は定義から払えます）

$$\mathcal{M}P \preccurlyeq \tfrac{3}{5}\,P. \tag{8}$$

意味。射影の族 P そのもの（$1/\omega$ を掛けない族）を一段押すと、$3/5$ 倍以下に縮みます。P/ω は低い運動量で大きく、$\mathcal{M}$ で保たれる（§02）のに対し、P は ω の重みを持たないので、別名の平均で縮みます。§06 では、この縮みが「高い運動量の別名の寄与」を段ごとに小さくする役をします。

真の上限は $125/256 \approx 0.488$読 （$q \to 0$ で、$2 \cdot 10^5$ 点と局所の最適化）で、$3/5$ はその 1.23 倍です。前の版 `OneStepBridge.Mfam_P_le` は $429/512$ でした。証明は $\langle x, \mathcal{M}Px\rangle$ を行ごとに分けて評価するものです。

段の差も同じ率で縮みます。$-2P \preccurlyeq \mathcal{M}(P/\omega) - P/\omega \preccurlyeq 2P$（`CouplingLimit.D_lower`・`CouplingLimit.D_upper`）に $\mathcal{M}^k$ を当てると、$G_{k+1} - G_k$ は $\pm 2(3/5)^k P$ の間に入ります初 。数値では $\mathcal{M}(P/\omega) - P/\omega$ の値は $[-0.089,\, -0.024]P$読 で、± 2 は約 22 倍緩い値です。

06 段に一様な縮み — 17 段で $\tau < 1/170$

段に一様な縮みの定理　Lean：`TorusLam.stage_tau_17`（仮定の欄なし）。

$$\tau = \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{17} + \frac{100}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^{17} < \frac{1}{170} \tag{9}$$

とおくと、全ての段 k、$\omega(q) > 0$ の全ての q、全ての x で

$$\big\langle x,\ \mathcal{M}^{17}(\omega\, G_k)(q)\, x\big\rangle \ \le\ \tau\, \omega(q)\, \big\langle x,\ G_{k+17}(q)\, x\big\rangle. \tag{10}$$

ここで ωG_k は族 $q \mapsto \omega(q) G_k(q)$ です。(9) の形は Lean の `StageArith.tauM` の定義そのもので、$1/170$ との比較も Lean です。

意味。$G_{k+17} = \mathcal{M}^{17} G_k$ なので、(10) は「細かい側で ω を掛けてから 17 段押したもの」が「17 段押してから粗い側の ω を掛けたもの」の $1/170$ 倍以下だ、と言っています。細かい運動量の ω は、低い運動量では粗い運動量の ω の約 4^{-17} 倍です。高い運動量の別名からの寄与は §05 の縮みで $(3/5)^{17}$ 倍になります。(9) の二つの項は、この二つの寄与に対応します。

証明の道筋。

1. **分ける**。$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1$、$\mathcal{M}_0$ は一番近い別名 $\zeta^*(q)$ の一項、$\mathcal{M}_1$ は残りの十五項。どちらも順序を保ちます。$0 \preccurlyeq F \preccurlyeq P'$ なら $\mathcal{M}^m F \preccurlyeq \mathcal{M}_0^m F + \mathcal{M}^m P'$ です（帰納、`TauSplit.iterate_split`）。
2. **入れる**。$F = \omega G_k$、$P' = P$。$0 \preccurlyeq F$ は $G_k \succcurlyeq 0$、$F \preccurlyeq P$ は §02 の上の側です。
3. **一番近い別名の項**。$\mathcal{M}_0$ は点で決まる鎖に沿って重みを運ぶので、ω は鎖の上で $\omega(\text{鎖の } m \text{ 段目}) \le (\pi^2/4) 4^{-m} \omega(q)$ と減ります（有限の Viète の積 $\prod_{j<m} \cos(\pi/2^{j+2}) \ge 2/\pi$、`TauSplit.omF_chain_le`）。
4. **残りの項**。$\mathcal{M}^m P \preccurlyeq (3/5)^m P$（§05 の反復）、それを §03 の下の側 $P \preccurlyeq (100/3)\, \omega G_{k+m}$ で G_{k+m} に戻します。

段 0 の一段の縮みの値（$\tau \le 31/32$ の形）は、この章では定理として書きません。Lean にあるのはスカラーの部品までで、実際の別名の寄与をその形に組み立てる段は紙です。段に一様な縮みの具体の対象の定理は (10) です。

07 Γ_k の二次の汎関数の収束

繰り込みの一段では、粗い場を固定したときの細かい場の揺らぎの共分散が要ります[典]。ここではその記号の形の候補として、16 の別名をまとめて見る空間の上の行列 Γ_k を作ります。Γ_k を格子の揺らぎの共分散と同一視することは紙です。

設定。$\mathcal{B} = \bigoplus_{\zeta \in \{0,1\}^4} \mathbb{R}^4$（別名の和、64 次元）。段 k の別名の和の上の共分散 $\mathbf{A}_k(q) = \bigoplus_\zeta G_k(r_\zeta(q))$（ブロック対角）。拘束の写像 $\mathbf{C}(q) u = \frac{1}{4} \sum_\zeta A_\zeta(q) u_\zeta$（$\mathcal{B} \to \mathbb{R}^4$）。持ち上げ E（$\mathbb{R}^4 \to \mathcal{B}$）は、$\Pi = E\mathbf{C}$ について $\mathbf{C}\Pi = \mathbf{C}$ と $\Pi \mathbf{A}_k = \mathbf{A}_k \Pi^\dagger$ を満たすものとします。このとき

$$\Gamma_k(q) = \mathbf{A}_k(q) - \Pi\, \mathbf{A}_k(q)\, \Pi^\dagger. \tag{11}$$

Γ_k は、条件を満たす持ち上げの選び方に依りません。二つの選び Π, Π' について $\Pi^2 = \Pi$、$\Pi\Pi' = \Pi$、$\Pi'\Pi = \Pi'$ が出て、$\Pi\mathbf{A}\Pi^\dagger = \Pi\mathbf{A} = \Pi'\mathbf{A} = \Pi'\mathbf{A}\Pi'^\dagger$ となるからです[初]。

Γ_k の収束の定理　Lean：`AliasPoinc.coupling_converges_gamma_closed`（仮定の欄なし。部品 `AliasLiftSize.hlift_holds`・`AliasPoinc.hH_holds`）。Ξ を有限個の二次形式の値と、二次形式の値の二つの積の、重みつきの和とします：

$$\Xi(\Gamma) = a + \sum_i w_i \langle x_i, \Gamma(p_i) x_i \rangle + \sum_j w'_j \langle v_j, \Gamma(q_j) u_j \rangle \langle u'_j, \Gamma(q'_j) v'_j \rangle . \tag{12}$$

重み・ベクトル・運動量は任意です。このとき全ての段 k で条件を満たす持ち上げが在り、極限 b_∞ が在って

$$\left| \Xi(\Gamma_k) - b_\infty \right| \;\le\; \frac{2L'}{2/5} \Big(\frac{3}{5} \Big)^k , \qquad \sum_{k<n} \max\big(b_\infty - \Xi(\Gamma_k), 0 \big) \le \frac{2L'}{(2/5)^2} . \tag{13}$$

$L' = \kappa^2 \big(\sum_i |w_i| \, |x_i|^2 + \gamma \sum_j |w'_j| (\cdots)/2 \big)$、$\kappa = 1 + 2\sqrt{4 + 16 \cdot 464880^2}$、$\gamma = (1 + 69120/121)/(8/745)$ で、どれも段と運動量に依りません。

意味と強さ。率 $(3/5)^k$ は §05 の縮みから来ます（数値で見た G_k の段の差の比は 0.40〜0.42 [読] で、その内側です）。定数は一様ですが、$\kappa^2 \approx 1.4 \cdot 10^{13}$ [読]、$\gamma \approx 5.3 \cdot 10^4$ [読] で、真の値から極めて遠い値です。

読み方の注意。一ループの結合の段の係数 b_k は、背景についての二階の係数を局所の作用の型へ射影したものです。それが (12) の形の $\Xi(\Gamma_k)$ で書けることは紙で、Lean にはありません。したがってこの定理は「一ループの結合 b_k が収束する」ことの証明ではなく、「Γ_k の任意の有限の二次の汎関数が等比で収束する」ことです。Ξ を一ループの頂点の形にとったとき、その極限が一ループの普遍な値（[典]、7-07）になることが期待されますが、その同定は紙で、Lean は極限の値を言いません。

08 言っていないこと

§02〜§07 の定理は、どれも記号の漸化式の物理の部分 G_k と、それから作った Γ_k についての言明です。次のことは言っていません。

- **格子の段の作用との同一視。** $\frac{1}{4} H_k$ を「段 k の作用 h_k」（粗い場を固定した細かい自由場の作用の最小、Schur の補元）と読むことは紙です。Lean の対象は G_k の $\operatorname{ran} P$ の上の逆までです。

- **位置の空間の作用素**。Lean で位置の空間と繋がっているのは三つです。一段：トーラスの作用素 T の記号が X なら $CTC^{\dagger}$ の記号は $\mathcal{R}X$（`LatticeTorus.torus_step`）。段の鎖と段 0：$(\mathbb{Z}/2^m L)^4$ の自由場の共分散（定数の成分を除く）を m 回押した $(\mathbb{Z}/L)^4$ の作用素は、トーラスの運動量で位相つきの記号 $\mathcal{R}^m X_0$ をもち（`LatticePush.push_phase`・`LatticePush.freeCov_phase`・`LatticePush.stageCov_phase`）、その物理の部分は G_m です（`LatticePush.projFam_stage`）。面の場の共分散（`LatticeFace.faceCov_eq_posC`、15-13）。§02〜§07 の不等式そのものを、位置の空間の作用素のあいだの不等式として述べた定理はありません。
- **有限の体積**。運動量は無限体積の連続の $q \in \mathbb{R}^4$（$\omega > 0$）で、有限のトーラスの運動量 $q = 2\pi n/N$（$n \not\equiv 0 \bmod N$）はその一部です。零の運動量は扱いません。
- **複素の形**。言明は位相を外した実の形です。位相つきの記号の等式は Lean（`LatticePush.stageCov_phase`）ですが、§02〜§06 の不等式を複素の形で述べた定理はありません。
- **定数**。真の値より 3〜186 倍緩く読 、Γ_k の定数は 10^{13} の桁です読 。
- **非線形・背景・粗い尺度の測度**。線形化したブロック化（道の核 C）で自由場を押したものだけです。非線形のブロック写像 B、背景の場 $U \neq 1$、Wilson の測度を押し出した粗い尺度の測度については、この章は何も言いません。
- **重みの選び**。定数は重み $(1/8, 3/4, 1/8)$ と倍率 2 で計算したもので、別の選びではそのまま使えません（28-05）。

どの定理も、自由場をブロック化したときの伝播関数の段に一様な評価という、繰り込み群の解析で知られた型の結果の、この重みでの形式化です典 。段を跨ぐ評価のうち、非線形のブロック化や背景つきの場に要るものは前提の側に在ります（28-04）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
上の側：$\omega > 0$ の全ての q、全ての段で $G_k \preccurlyeq P/\omega$（定数ちょうど 1）。Lean：`OSUpQpos.os_up_Qpos`・`OSUpQpos.Gs_le_G0`	非線形のブロック化・背景の場。位置の空間の作用素としての形
下の側：全ての段で $\frac{3}{100} P/\omega \preccurlyeq G_k$。Lean：`HsSplit.lower_side_c`	真の下限（約 0.091読 ）に近い定数
挟み：全ての段・全ての q で $(\omega/745)P \preccurlyeq \frac{1}{4}H_k \preccurlyeq 312\,\omega P$（split の版は上が $\frac{25}{3}\omega P$）。Lean：`LatticeRec.lattice_bracket`・`OneStepLower.bracket_Qpos_free`・`NearAliasB.bracket_Qpos_split`	$\frac{1}{4}H_k$ を段の作用 h_k と読むこと（紙）。不等式の複素の形。位置の空間の作用素の不等式

言えている	言えていない
一段の縮み $\mathcal{M}P \preccurlyeq \frac{3}{5}P$。Lean：`OneStepBridge.Mfam_P_le_row`	真の上限 $125/256$ 読 の Lean の形
段に一様な縮み：17 段で $\tau < 1/170$。Lean：`TorusLam.stage_tau_17`	段 0 の $\tau \le 31/32$（組み立ては紙）。紙の議論で使う段ごとの縮みの率との同一視（Lean には無い）
Γ_k の任意の有限の二次の汎関数が率 $(3/5)^k$ で収束、定数は段と運動量に一様。Lean：`AliasPoinc.coupling_converges_gamma_closed`	ループの結合 b_k の収束（$b_k = \Xi(\Gamma_k)$ の同定は紙）。定数の大きさ（$\kappa^2 \approx 10^{13}$ 読 ）
初 Γ_k は条件を満たす持ち上げの選びに依らない（§07 の三行の代数）	—

出典と再現

もの	種別	出典・道具
自由場の押し出しが Gauss で共分散が $CTC^\dagger$、伝播関数の段の評価が繰り込み群の出発点であること	典	7-05・7-07 の出典（T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 102 (1985) 255–275。J. Dimock, The renormalization group according to Balaban I, arXiv:1108.1335）
ループの普遍な値（§07 で比べる相手）	典	7-07 の出典（b_0、Particle Data Group）
§02〜§07 の定理	—	本書の検討の Lean の宣言（名は本文と範囲の表。sorry なし・標準の三つの公理、別に走らせ直して確かめた）。一覧は 15-14
下の側の場合分け（§03）	機	運動量の箱を升に分けた多項式の不等式の証明書を Lean の核で検査（`HsSplit.hS_split`）。解析の証明の支え
固有値の範囲（$1 - 3.4 \cdot 10^{-6}$、0.210〜0.0951、約 0.091）、$125/256$、$[-0.089, -0.024]$、段の差の比 0.40〜0.42、E_ν の値、$\kappa^2 \cdot \gamma$ の値	読	本書の検討の数値の記録（Lean の定義をそのまま写した漸化式を浮動小数で、乱点・原点の近く・端・$N = 2, 4$ の格子の運動量の 292 点、$\mathcal{M}(P/\omega)$ は $2.4 \cdot 10^4$ 点、$\mathcal{M}P$ は $2 \cdot 10^5$ 点）

この章で使った語 — 記号の漸化式・物理の部分・別名・Loewner の順序・伝播関数の逆・一段の縮み・段に一様な縮み・別名の和・持ち上げ・Γ_k。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：15-13 ブロック写像の線形化と押し出しの共分散 — 位置の空間の側：非線形のブロック写像の一次の部分が道の核であること、押し出しの共分散、面の場の共分散。

ブロック写像の線形化と押し出しの共分散

この章は本書の検討です。§01 の前半は既存の知見です。

この部は、本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた記録です。存在そのものは第二巻の第 6〜13 部を、二つの設計の違いは第 14 部を見てください。部の位置づけは 15-00 にあります。

範囲 — この章の定理は、一つの尺度の上の非線形のブロック写像の局所の性質（局所性・ゲージの共変性）、単位元のまわりの線形化、任意の測度の押し出しの共分散の恒等式、そして自由場を線形化したブロック化で押した場の面の共分散についての言明です。繰り込んだ粗い尺度の測度、背景つきの場、段を跨ぐ非線形の評価については何も言いません。重み $(1/8, 3/4, 1/8)$ は設計の選びです（28-05）。

この章で分かること — 19-04 で定義した非線形のブロック写像 B について、四つの事実を読みます。(1) 粗いリンクの値は半径 2 の立方体の細かいリンクだけで決まり、ゲージ変換と両立する。(2) $U = e^{\varepsilon a}$ のとき $B(U)$ は $\exp(\varepsilon\, C a)$ から $257(\varepsilon M)^2$ 以内で、一次の部分は道の核 C。(3) 線形写像で押した測度の共分散は $CTC^{\dagger}$（任意の測度で）。(4) 自由場を道の核で m 回押した場の面の強さの共分散は、最大の固有値 ≤ 1、対角 $\ge \frac{3}{200}(1 - N^{-4})$、比 $\Lambda \le 640/9$ を、全ての段 m と $N \ge 2$ で満たす。

前提となる章 — 19-04 道の族・ブロック写像・道の核・押し出し・多段の族、15-12（下の側・上の側）。

先に言うこと — 範囲は題の直下に書いたとおりです。とくに §05 の面の共分散は、**線形化したブロック化（道の核 C）で自由場を押した場**の、面の強さの共分散です。非線形のブロック写像 B で押した場の共分散ではありません。二つが一致するのは B の一次の部分（§03）までで、高次の項と大きい場は扱いません。線形化は単位元 $U = 1$ のまわりだけです。

この章の順序

1. 位置の空間の側 — 15-12 の記号の漸化式と、この章の位置の空間の対象
2. 局所性とゲージの共変性 — 半径 2 の立方体、$g(2y)\,B(U)_b\,g(2(y+e_\mu))^*$
3. 単位元のまわりの線形化 — $257(\varepsilon M)^2$ の誤差と、一次の部分が道の核であること
4. 押し出しの共分散 $= CTC^\dagger$ — 任意の測度の恒等式
5. 面の強さの共分散 — 自己共役、$\lambda_{\max} \le 1$、対角の下界、$\Lambda \le 640/9$
6. 面の共分散の証明の道筋 — 位置の空間から記号へ、記号から 15-12 の二つの側へ
7. 寄り道：対角の下界の $\frac{1}{2}$ と $1 - N^{-4}$ — 向きの対称性と零の運動量
8. 言っていないこと — 非線形の共分散、背景、大きい場、粗い尺度の測度

01

位置の空間の側

導入は 7-05 §一段 です。ゲージ場のブロック化は、細かいリンクの道に沿った積を平均して粗いリンクを作ります[典]。ゲージの構造を保つために道の積を使い、平均が群から外れる分を何らかの規則で群へ戻します。良いブロック化に求められる性質として、局所であること、ゲージ変換と両立すること、単位元の近くで線形の平均に近いこと、の三つがよく挙げられます[典]。

15-12 は運動量の側の対象（記号の漸化式）を扱いました。この章は位置の空間の側です。対象は 19-04 の非線形のブロック写像

$$B(U)_b = \rho_{r_0}\big(q_b(U)\big), \qquad q_b(U) = \sum_{o,A} w(o,A)\, U\big(\gamma_{o,A}(b)\big), \qquad \rho_{r_0}(q) = \frac{q}{\max(|q|, r_0)} \tag{1}$$

と、その一次の部分の道の核 C、そして押し出し $B_*\mu$・$C_*\mu$ です。細かい格子は $\Lambda_{m+1} = (\mathbb{Z}/2^{m+1}L)^4$、粗い格子は $\Lambda_m = (\mathbb{Z}/2^m L)^4$、粗いリンク $b = (y,\mu)$ は細かい点 $2y$ から出ます。配位は四元数の閉じた単位球 $\mathbb{B}$ に値をとります。

§02・§03 は非線形の B そのものについての言明、§04 は線形写像による押し出しの一般の恒等式、§05 は線形の C で自由場を押した場についての言明です。四つとも、格子間隔を固定した一段（または線形の段の積み重ね）の話です。

02

局所性とゲージの共変性

局所性の定理　Lean：`BoxWalk.boxMap_local`（仮定は $r_0 > 0$ だけ）。二つの配位 U, U' が、細かい点 $2y + z$（$z \in \mathbb{Z}^4$、各座標 $-2 \le z_i \le 2$）から出る全てのリンクで一致するなら、$B(U)_b = B(U')_b$。

ゲージの共変性の定理　Lean：`BoxWalk.boxMap_gauge`（仮定は $r_0 > 0$ と $|g(x)| = 1$）。細かい格子の点ごとの単位の四元数 g によるゲージ変換 $(gU)_{(x,\nu)} = g(x)\, U_{(x,\nu)}\, g(x + e_\nu)^*$ について

$$B(gU)_{(y,\mu)} = g(2y)\; B(U)_{(y,\mu)}\; g\big(2(y + e_\mu)\big)^{*}. \tag{2}$$

この二つの定理の写像は、19-04 で定義した `ChainBlockMap.blockMap`（箱の道の族と重み）と字句で同じ定義です。別に検査した宣言で、一致は字句の照合によります。

意味。粗いリンクの値は、粗い点のまわりの 5^4 個の細かい点から出るリンクだけで決まります。半径 2 は道の届く範囲です：道は横に高々 1 ずれ、μ に 2 進み、戻ります。ゲージ変換は、粗い格子の上では細かい格子の g を粗い点 $2y$ に制限したもので働きます。

証明の道筋。局所性は、平均の各項が道の上のリンクの値だけに依ることと、道が立方体に留まることから来ます。ゲージの共変性は二つの事実から来ます。一つは、道に沿った積がゲージ変換で両端の g だけを受けること（道の内側の g は $g^* g = 1$ で消える）。もう一つは、retract ρ_{r_0} が単位の四元数の左右の掛け算と可換なこと（$|gqh^*| = |q|$）です[初]。

注意。トーラスが小さく（$2^{m+1} L \le 4$）立方体がトーラスを一周すると、局所性の仮定が強くなり、言明は弱くなります。偽にはなりません。

03

単位元のまわりの線形化

細かいリンクの上の虚の四元数の場 a（$\mathrm{Re}\, a_\ell = 0$、$|a_\ell| \le M$）と $\varepsilon \ge 0$ をとり、$U_\ell = \exp(\varepsilon a_\ell) \in SU(2)$ とします。道の核 C は 19-04 (7) の、道に沿った場の符号つきの和の重みつきの平均です。

線形化の定理　Lean：`BlockLinearKernel.blockMap_exp_linear_le_one`。閾 $0 < r_0 \le 1$、$\varepsilon M \le 1/32$ なら、全ての粗いリンク b で

$$\big| B(e^{\varepsilon a})_b - \exp\big(\varepsilon\, (Ca)_b\big) \big| \;\le\; 257\, (\varepsilon M)^2, \tag{3}$$

かつ、四元数から実数への任意の実線形写像 f（一つの色の成分をとる操作など）について $f\big((Ca)_b\big)$ は、$f \circ a$ に道の核の作用素（係数 19-04 (9)、$X \mapsto 2X$）を当てた値に等しい。

$r_0 = 1$ の版は `BlockLinearKernel.blockMap_exp_linear_r1` です。

意味。場が小さい（εM が小さい）とき、非線形のブロック写像は、リー環の上の線形写像 C を指数写像で包んだものと、二次の誤差まで一致します。しかも C は、15-12 で記号を扱った道の核と同じ作用素です。これが、15-12 と §05 の線形の対象を「ブロック化の一次の部分」と呼べる根拠です。

証明の道筋（各段が Lean の補題です）。

1. **道の積**。$|u_i| \le 1$、$|u_i - 1| \le \delta$ の n 個の積は、$1 + \sum_i (u_i - 1)$ から $n^2\delta^2/2$ 以内です（帰納）。道の長さは 8 以下です。
2. **指数**。虚の v、$|v| \le 1$ で $|e^v| = 1$、$|e^v - 1| \le |v|$、$|e^v - 1 - v| \le |v|^2$。逆向きの一歩は e^{-v} で同じ評価です。
3. **平均**。重みが非負で総和 1 なので、平均も同じ誤差です。単位の四元数 u では $\mathrm{Re}(u - 1) = -|u-1|^2/2$ なので、一次の部分の実部は二次の大きさです。
4. **retract**。$0 < r_0 \le 1$、$|v| \le s \le \frac{1}{2}$、$|\mathrm{Re}\, v| \le \rho$ なら $|\rho_{r_0}(1+v) - (1+v)| \le 2\rho + s^2$。retract は一次の部分を変えません。
5. **合わせる**。誤差の項（retract の $72 + 81$、平均の 32、一次の部分の 8、指数の 64）を足して 257 倍の $(\varepsilon M)^2$ です。一次の部分の一致は、色ごとに道の和を係数の表に並べ替える恒等式です。

数値で比 $|B - \exp(\varepsilon C a)|/(\varepsilon M)^2$ を見ると 0.3〜0.9 で読、定数 257 は数百倍緩い値です。$\varepsilon M \le 1/32$ では右辺 $257/1024 < 2$（二つの単位の四元数の差の自明な上界）なので、言明は空ではありません。

注意。$U = 1$ のまわりの一次だけです。場の大きさ εM が $1/32$ を越える配位、背景の場 $U \neq 1$ のまわりの展開は扱いません。

04

押し出しの共分散 $= CTC^\dagger$

実の内積空間の上の測度 μ の共分散の形を、19-04 (11) のとおり $\mathrm{cov}_\mu(u,v) = \int \langle u,x\rangle\langle v,x\rangle\, d\mu - \int \langle u,x\rangle\, d\mu \int \langle v,x\rangle\, d\mu$ とします。$\mathrm{cov}_\mu(u,v) = \langle u, Tv\rangle$ となる作用素 T を共分散の作用素と呼びます。

押し出しの共分散の定理　Lean：`PushCov.lattice_pushCov`。細かい格子のリンクの上の実の場（一つの色）の空間の任意の測度 μ と、その共分散の作用素 T について、(a) ブロック写像の一次の部分の一つの色 C_1（`PushCov.blockLin`）は道の核の作用素に等しく、(b)

$$\operatorname{cov}_{(C_1)_*\mu}(u,v) = \big\langle u,\ C_1\, T\, C_1^{\dagger} v \big\rangle \qquad (\text{全ての } u, v). \tag{4}$$

意味。線形の写像で場を押すと、共分散は両側から写像で挟まれます。Gauss であることは使いません。測度は確率の測度でなくてもよく、どの測度にも成り立つ恒等式です（一般の形は `PushCov.covOp_map`）。証明は $\langle u, C_1 x\rangle = \langle C_1^{\dagger} u, x\rangle$ と押し出しの積分の変数変換だけです[初]。

注意。Lean の積分の約束では、可積分でない関数の積分は 0 と読みます。(4) が共分散として意味を持つのは、μ が二次の積率を持つときです。また、ここで押しているのは線形の C_1 で、非線形の B で押した測度の共分散はこの形になりません。

05

面の強さの共分散

対象は 19-04 §自由場の側の多段の族 の格子の側です。

- $\mathrm{freeCov}_n$：$(\mathbb{Z}/n)^4$ の上の四成分の場の、Feynman ゲージの自由場の共分散。格子の Laplacian の逆を成分ごとにとり、定数の成分では 0。
- $\mathrm{stageCov}_{m,N}$：$(\mathbb{Z}/2^m N)^4$ の freeCov を、一段 $T \mapsto CTC^{\dagger}$ で m 回押して $(\mathbb{Z}/N)^4$ に下ろしたもの。
- $\mathrm{faceCov}_{m,N} = \mathrm{curl} \circ \mathrm{stageCov}_{m,N} \circ \mathrm{curl}^{\dagger}$：面の強さ $(\mathrm{curl}\, A)_{(a,b)}(X) = (A_a(X+e_b) - A_a(X)) - (A_b(X+e_a) - A_b(X))$ の共分散。面の場は点ごとに六成分です。

面の場 z について、二次形式 $Q(z) = \mathrm{Re}\sum_X \sum_p \overline{z_p(X)}\,(\mathrm{faceCov}\, z)_p(X)$、ノルム $|z|^2 = \sum_X \sum_p |z_p(X)|^2$、最大の固有値 $\lambda_{\max} = \sup_{z\neq 0} Q(z)/|z|^2$、点 X_0・面 p での対角 $D(X_0,p) = \mathrm{Re}(\mathrm{faceCov}\, \delta_{X_0,p})_p(X_0)$ とおきます。

面の共分散の定理　Lean：`LatticeFace.lattice_face_T1h`（仮定は $N \geq 2$ だけ）。全ての段 $m \geq 0$、全ての $N \geq 2$ で、$\mathrm{faceCov}_{m,N}$ は自己共役で、全ての点 X_0・面 p について

$$\lambda_{\max} \leq 1, \qquad \frac{3}{200}\big(1 - N^{-4}\big) \leq D(X_0,p) \leq \lambda_{\max}, \qquad \Lambda := \frac{\lambda_{\max}}{D(X_0,p)} \leq \frac{640}{9}. \tag{5}$$

さらに $\mathrm{faceCov}_{m,N}$ は、15-12 の記号 G_m から作った並進不変な作用素に、点の付け替えを除いて等しい（同じ定理の第二の項）。

意味。線形化したブロック化で自由場を何段押しても、面の強さの揺らぎは、どの方向にも 1 を越えず、どの点・どの面でも $\frac{3}{200}(1-N^{-4})$ を下回りません。比 Λ の上界 $640/9$ は段 m にも N にも依りません。$m = 0$（押さない自由場）では $\lambda_{\max} = 1$ ちょうどです[読]。

この定理は、**線形化したブロック化で自由場を押した場の、面の強さの共分散**についての言明です。非線形のブロック写像 B で Wilson の測度や自由場を押した場の共分散ではありません。位置の空間の定義から直接数値で作った行列は、記号から作った作用素と $N = 2, 3, 4$、$m = 0, 1, 2$ で $1.1 \cdot 10^{-15}$ 以内で一致しています[読]。

06

面の共分散の証明の道筋

1. **段 0 の記号**。$\mathrm{freeCov}_n$ は指標で対角で、記号は I/ω です（`LatticePush.freeCov_phase`。$|1 - e^{iq}|^2 = 4\sin^2(q/2)$）。
2. **m 段の鎖**。作用素 T の記号が X なら、m 回押した作用素の記号は $\mathcal{R}^m X$ です（`LatticePush.push_phase`。15-12 の一段 `LatticeTorus.torus_step` を m 回、格子の大きさの型を付け替えて）。段の共分散の記号は $\mathcal{R}^m X_0$（`LatticePush.stageCov_phase`）で、物理の部分は 15-12 の G_m です（`LatticePush.projFam_stage`）。
3. **面の記号**。curl の記号を両側から掛けると、勾配の向きが落ち、射影 P が自動で入ります（`LatticeFace.key_proj`）。よって面の共分散の記号は $\hat{d}\, G_m\, \hat{d}^\dagger$ で、位置の空間に戻した作用素が記号から作った作用素に等しい（`LatticeFace.faceCov_eq_posC`）。
4. **上の側**。15-12 の上の側 $G_m \preccurlyeq P/\omega$ から、運動量ごとに面の記号は $\hat{d}\,(P/\omega)\,\hat{d}^\dagger$ 以下で、その最大の固有値は 1 です。Plancherel で $\lambda_{\max} \le 1$（`FaceTorus.torus_face_upper`）。
5. **対角**。15-12 の下の側 $G_m \succcurlyeq \frac{3}{100} P/\omega$ を運動量の和に入れて、対角 $\ge \frac{3/100}{2}(1 - N^{-4})$（`FaceTorus.torus_face_diag`）。
6. **比**。$N \ge 2$ では $1 - N^{-4} \ge 15/16$ なので対角 $\ge \frac{3}{200} \cdot \frac{15}{16} = \frac{9}{640}$、$\lambda_{\max} \le 1$ と合わせて $\Lambda \le 640/9$ です[初]。

鎖の中で位置の空間と記号を繋ぐのは 1〜3 で、1・2 は段の共分散そのものについて、3 は面の場について Lean です。4・5 は 15-12 の二つの側をそのまま使います。

寄り道：対角の下界の $\frac{1}{2}$ と $1 - N^{-4}$

飛ばしてよい。点 X_0・面 $p = (a, b)$ の対角は、運動量 $k \in (\mathbb{Z}/N)^4$ についての平均 $N^{-4} \sum_k \langle e_p, \hat{d}(k) G_m(k) \hat{d}(k)^\dagger e_p \rangle$ です。零の運動量では $\hat{d} = 0$ で項は 0 なので、和は $N^4 - 1$ 個の項で、因子 $1 - N^{-4}$ はここから来ます[初]。各項は下の側から $\frac{3}{100}\,(|\hat{q}_a|^2 + |\hat{q}_b|^2)/\omega$ 以上で、$|\hat{q}_\nu|^2/\omega$ の運動量の和は向き ν に依らず $(N^4 - 1)/4$ です（四つの向きの和が $N^4 - 1$、Lean：`FaceTorus.sum_rt_quarter`）。面は二つの向きを持つので、平均は $\frac{1}{2}$ になります[初]。

07

言っていないこと

- **非線形のブロック化の共分散**。§05 は線形化したブロック化（道の核）で押した場の共分散です。非線形の B との一致は §03 の一次の部分までで、二次以上の項の共分散への寄与は扱いません。
- **自由場以外**。§05 は Gauss の自由場（Feynman ゲージ、定数の成分を除く）だけです。Wilson の測度を押した場の面の共分散ではありません。§04 の恒等式はどの測度にも立ちますが、T を評価する定理は自由場の $\mathbf{freeCov}$ についてだけです。
- **背景と大きい場**。線形化は $U = 1$ のまわり、$\varepsilon M \le 1/32$ だけです。背景の場のまわりの線形化、閾の下の大きい場の事象は扱いません（大きい場の稀さの一つの尺度の評価は 22-01）。
- **粗い尺度の測度**。$B_*\mu$ の性質（減衰・一様性）は何も言いません。それは示すべき言明の側です（19-07、28-04）。
- **重みの選び**。半径 2・定数 257・$640/9$ は重み $(1/8, 3/4, 1/8)$ と倍率 2 の道の族で計算したものです（28-05）。

局所性・ゲージの共変性・線形化は、ゲージ場のブロック化に標準で求められる性質の、この道の族での形式化です[典]。押し出しの共分散は、線形写像による測度の押し出しの一般の恒等式の形式化です[典]。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
非線形のブロック写像の局所性（半径 2）とゲージの共変性（$r_0 > 0$）。Lean：`BoxWalk.boxMap_local`・`BoxWalk.boxMap_gauge`	連続性の定数などそれ以上の性質
$0 < r_0 \le 1$、$\varepsilon M \le 1/32$ で $\lvert B(e^{\varepsilon a})_b - \exp(\varepsilon (Ca)_b)\rvert \le 257(\varepsilon M)^2$、一次の部分は道の核。Lean：`BlockLinearKernel.blockMap_exp_linear_le_one`	背景 $U \neq 1$ のまわり、大きい場、二次の項の形
任意の測度で押し出しの共分散 $= C_1 T C_1^{\dagger}$、C_1 は道の核。Lean：`PushCov.lattice_pushCov`	非線形の B による押し出しの共分散。一つの色の形だけ
線形化したブロック化で自由場を m 回押した場の面の共分散：自己共役、$\lambda_{\max} \le 1$、対角 $\ge \frac{3}{200}(1 - N^{-4})$、$\Lambda \le 640/9$（全ての m、$N \ge 2$）。Lean：`LatticeFace.lattice_face_T1h`	非線形のブロック化の共分散（一致は一次の部分まで）。Wilson の測度を押した場。背景の場
[初] $N \ge 2$ で $\frac{3}{200}(1 - N^{-4}) \ge 9/640$ から $\Lambda \le 640/9$	—

出典と再現

もの	種別	出典・道具
ゲージ場のブロック化を道の積の平均で作ること、局所性・ゲージの共変性・線形化が求められること	典	7-05 の出典（T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 102 (1985) 255–275。J. Dimock, The renormalization group according to Balaban I, arXiv:1108.1335）
§02〜§05 の定理	—	本書の検討の Lean の宣言（名は本文と範囲の表。sorry なし・標準の三つの公理、別に走らせ直して確かめた）。一覧は 15-14
$m = 0$ で $\lambda_{\max} = 1$、位置の空間の行列と記号の作用素の一致（$1.1 \cdot 10^{-15}$）	読	本書の検討の数値の記録（位置の空間の定義から直接作った行列を $N = 2, 3, 4$、$m = 0, 1, 2$ の 7 組で、記号から作った作用素と比べた）
線形化の誤差の比 0.3〜0.9	読	本書の検討の数値の記録（$L = 1, 2$、乱数の場、$\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$、$r_0 = 1$ と $r_0 \le \frac{1}{2}$。道の和から作った一次の部分と道の核の作用素の差 $\le 6.4 \cdot 10^{-15}$）

この章で使った語 — ブロック写像・retract・局所性・ゲージの共変性・道の核・線形化・押し出し・共分散の作用素・面の強さ・面の共分散・Rayleigh 商。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：15-14 後半（15-11〜15-13）が言えていること・言えていないこと。あわせて読むなら 22-01 大きい面の稀さ — チェス盤の評価 — 線形化の外の大きい場の事象を、一つの尺度の Wilson の測度で評価します。

後半（15-11〜15-13）が言えていること・言えていないこと

この章は本書の検討です。

この部は、本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた記録です。存在そのものは第二巻の第 6〜13 部を、二つの設計の違いは第 14 部を見てください。部の位置づけは 15-00 にあります。

範囲 — この部の後半（15-11〜15-14）の定理と、第 22 部へ移った大きい面の稀さ（22-01）は、自由場・真空の背景・線形化したブロック化についての言明か、一つの尺度（格子間隔を固定）の Wilson の測度についての言明です。繰り込んだ粗い尺度の測度、背景つきの場、段を跨ぐ一様な評価については何も言いません。重み $(1/8, 3/4, 1/8)$ は設計の選びです（28-05）。

この章で分かること — この部の後半の定理と 22-01 の定理を一つの表で見ます。行ごとに、言明の短い形、範囲、言っていないこと、Lean の宣言を並べます。この表は部の後半の定理だけを扱います。部の前半（15-00〜15-10）の言えないことと問いの索引は 15-09 にあります。

前提となる章 — 15-12・15-13・22-01（表の行の詳しい形と証明の道筋）。

先に言うこと — 範囲は題の直下に書いたとおりです。表の「言明」の欄は短く書いたもので、正確な形は各章の式にあります。どの定理も既知の型の結果の、この本の対象での形式化です。段を跨ぐ評価は、後半の章ではなく前提の側に在ります（§03）。

この章の順序

1. 定理の表 — 言明・範囲・言っていないこと・Lean の宣言
2. 部品として使った補題 — 単独の定理にしないもの

3. 段を跨ぐ評価は前提の側に在る — 後半の章が言わないことの置き場

01

定理の表

記号は各章のとおりです：G_k は記号の漸化式の物理の部分（15-12 §01）、H_k はその $\operatorname{ran} P$ の上の逆、$\mathcal{M}$ は一段の写像、B は非線形のブロック写像、C は道の核、μ_W は Wilson の測度、Z はその全質量です。

章	名	言明（短い形）	範囲	言っていないこと	Lean の宣言
15-12 §02	上の側	$G_k \preccurlyeq P/\omega$、定数ちょうど 1	全ての段 k、$\omega(q) > 0$ の全ての $q \in \mathbb{R}^4$	非線形のブロック化、背景の場、位置の空間の作用素の形	`OSUpQpos.os_up_Qpos` ・ `OSUpQpos.Gs_`
15-12 §03	下の側	$\frac{3}{100} P/\omega \preccurlyeq G_k$	同上（別名で閉じた族）	真の下限 約 0.091 読 に近い定数	`HsSplit.lower_side_c`
15-12 §04	伝播関数の挟み	$(\omega/745)P \preccurlyeq \frac{1}{4}H_k \preccurlyeq 312\,\omega P$（split の版は上が $\frac{25}{3}\omega P$）	同上、定数は k・q に一様	$\frac{1}{4}H_k$ を段の作用と読むこと（紙）。不等式の複素の形。定数は真の値より 3〜186 倍緩い 読	`LatticeRec.lattice_bracket` ・ `OneStepLower.bracket_Qpos_free` ・ `NearAliasB.bracket_Qpos_split`
15-12 §05	一段の縮み	$\mathcal{M}P \preccurlyeq \frac{3}{5}P$	全ての q	真の上限 $125/256$ 読	`OneStepBridge.Mfam_P_le_row`
15-12 §06	段に一様な縮み	$\mathcal{M}^{17}(\omega G_k) \preccurlyeq \tau\,\omega G_{k+17}$、$\tau < 1/170$	全ての段 k、全ての q	段 0 の $\tau \le 31/32$（組み立ては紙）。紙の議論で使う段ごとの縮みの率との同一視（Lean には無い）	`TorusLam.stage_tau_17`

章	名	言明（短い形）	範囲	言っていないこと	Lean の宣言
15-12 §07	Γ_k の収束	Γ_k の任意の有限の二次の汎関数が率 $(3/5)^k$ で収束	全ての段、定数は段と運動量に一様	一ループの結合 b_k の収束（同定は紙）。$\kappa^2 \approx 1.4 \cdot 10^{13}$ 読	`AliasPoinc.coupling_converges_gamma`
15-13 §02	局所性・ゲージの共変性	$B(U)_b$ は半径 2 の立方体のリンクで決まる。$B(gU)_b = g(2y)B(U)_b g(2(y+e_\mu))^*$	$r_0 > 0$、$\lvert g\rvert = 1$	連続性の定数などそれ以上	`BoxWalk.boxMap_local` ・ `BoxWalk.box`
15-13 §03	線形化	$\lvert B(e^{\varepsilon a})_b - \exp(\varepsilon (Ca)_b)\rvert \le 257(\varepsilon M)^2$、一次の部分は道の核	$0 < r_0 \le 1$、$\varepsilon M \le 1/32$	背景 $U \neq 1$ のまわり、大きい場、二次の項の形	`BlockLinearKernel.blockMap_exp_line`
15-13 §04	押し出しの共分散	$\mathrm{cov}_{(C_1)_*\mu} = C_1 T C_1^\dagger$	任意の測度（意味を持つのは二次の積率があるとき）、一つの色	非線形の B による押し出し	`PushCov.lattice_pushCov`
15-13 §05	面の共分散	自己共役、$\lambda_{\max} \le 1$、対角 $\ge \frac{3}{200}(1 - N^{-4})$、$\Lambda \le 640/9$	全ての段 m、$N \ge 2$。線形化したブロック化で自由場を押した場	非線形のブロック化の共分散（一致は一次の部分まで）。Wilson の測度を押した場	`LatticeFace.lattice_face_T1h`
22-01 §03	チェス盤の評価	$\lvert V(F)\rvert^{N^4} \le \prod_w V(\text{定数})$	$N = 2m$（$m \ge 1$）、全ての実の β、単位の立方体の関数	奇数の辺、捩れのある測度	`FoldWilson.wilson_chessboard_even`

章	名	言明（短い形）	範囲	言っていないこと	Lean の宣言
22-01 §04	体積に一様な稀さ	$P(X$ の面が全て $\mathrm{Re}\,U_p < 0) \le q_1^{\lfloor \lvert X\rvert /6\rfloor}$、$q_1 < 1$	$\beta \ge 81$、$m \ge 2$、面の任意の集合 X。q_1 は N・X に依らない	粗い尺度の測度、$\beta < 81$、$m = 1$。閾 81 は冠の体積の粗い下界から（真の h なら約 48 読 ）。Z 以外に対する比	`FoldCap.rarity_explicit`
22-01 §06	率 $1/4$ の稀さ	$\le q_4^{\lfloor \lvert X\rvert /24\rfloor}$	$0 < y \le 2$、存在する β_0 以上、$m \ge 1$	β_0 の値（$y = 1$ で約 357 読 ）	`FoldQuarter.rarity_uniform4`

表の全ての行に共通して言っていないこと：格子間隔を 0 に送る極限、繰り込んだ粗い尺度の測度、背景つきの場、段を跨ぐ非線形の一様な評価。15-12 の行の運動量は無限体積の連続の運動量です。位置の空間との繋ぎ（段の共分散の記号の物理の部分が G_k であること、面の場の共分散）は Lean に在りますが、G_k の不等式を位置の空間の作用素の不等式として述べた定理はありません。重み $(1/8, 3/4, 1/8)$ と倍率 2 で計算した定数は、別の選びではそのまま使えません（28-05）。

02

部品として使った補題

次の宣言は Lean で閉じていますが、単独の定理としては置かず、上の行の証明の部品として各章で触れました。

中身	使う行	Lean の宣言
陽な関数の上界 $E_\nu < 4$（$\sigma \in [0, \frac{1}{2}]^4 \setminus \{0\}$、$\sigma_\mu = \sin^2(q_\mu/4)$）、反転の不変	上の側	`FreeStageOS.E_lt_four_s`・`FreeStageOS.E_lt_four`・`FreeStageOS.eq_lt_four`・`OSUpQpos.EE_bbflip`
一番近い別名の鎖と十六の別名の下界、場合分け	下の側	`NearAliasB.chain_lower`・`NearAliasB.near_lower`・`HsSplit.hS_split`
記号の漸化式と $\mathcal{M}$ の対応、道の平均の記号、一段のトーラスの記号	15-12 全体	`LatticeRec.rec_iterate`・`LatticePath.pathSym_closed`・`LatticeTorus.torus_step`
一段の差 $\pm 2P$	一段の縮み	`CouplingLimit.D_lower`・`CouplingLimit.D_upper`
持ち上げの大きさ、別名の和の Poincaré の入力	Γ_k の収束	`AliasLiftSize.hlift_holds`・`AliasPoinc.hH_holds`

中身	使う行	Lean の宣言
面の共分散と記号の作用素の一致、段の鎖	面の共分散	`LatticeFace.faceCov_eq_posC`・`LatticePush.freeCov_phase`・`LatticePush.push_phase`・`LatticePush.stageCov_phase`・`LatticePush.projFam_stage`
分配関数の下界、冠の体積の下界	体積に一様な稀さ	`FoldEntropy.Zw_ge`・`FoldCap.ballQ_ge`

03

段を跨ぐ評価は前提の側に在る

後半の章が言うのは、一段（または線形の段の積み重ね）と一つの尺度のことだけです。繰り込みの鎖を閉じるには、非線形のブロック写像で押し出した粗い尺度の測度について、段を跨いで一様な評価（小さい場の側の縮み、大きい場の側の稀さ、背景つきの場での伝播関数の挟みなど）が要ります。それらは、後半の定理からは出ません。本書では、それらを前提の一覧（28-04）に名前つきで置き、その形がまだ決まっていない所を 28-06 に置きます。

ここで「前提」は本書の設計（決まったブロック写像で押し出した測度）についての言明で、公開された構成の結果からは従いません（15-00）。後半の定理は、前提の側の言明のうち「自由場・線形化・一つの尺度で確かめられる部分」の形式化です。前提の言明そのものではありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
§01 の表の 13 行（Lean の宣言つき、範囲は各行）	各行の「言っていないこと」の欄。とくに粗い尺度の測度・背景つきの場・段を跨ぐ非線形の一様な評価

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表の各行	—	本書の検討の Lean の宣言（各章の出典と再現の表）。既知の型の出典は 15-12・15-13・22-01
読 の数（0.091、125/256、κ^2、$2.5 \cdot 10^{12}$、48、357）	読	各章の出典と再現の表の数値の記録

この章で使った語 — 記号の漸化式・物理の部分・ブロック写像・道の核・押し出し・面の共分散・チェス盤の評価・稀さ・前提。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：16-01 世界はどこまで来ているか。あわせて読むなら 28-00 入口 — 示すべき言明と、表現を通した十分条件 — 後半の章が言わない段を跨ぐ評価を、前提として名前つきで置きます。