第三巻　質量ギャップへ — 残る問いと本書の結果

# 第 16 部 現在地と残る問い

Kiichi, Shiori and Rin · 2026-11-14 の版 · https://computoergosum.com/principia/yang-mills/

> この PDF は Web 版の各章をそのまま刷ったものです。動かせる図は刷った時点の姿で止まっています。章の間のリンクは Web 版へ飛びます。最新の内容は Web 版に在ります。


| 章 | | 頁 |
|---|---|---|
| 16-01 | 世界はどこまで来ているか | 2 |
| 16-02 | 五つの開いた問い | 16 |
| 16-03 | 公開された構成の赤外の端 | 23 |
| 16-04 | この本の位置 | 31 |
| 16-05 | 二つの掘り方の切れ目 | 37 |
| 16-06 | 新しい概念の候補 | 49 |
| 16-07 | 課題の一覧 | 62 |
| 16-08 | よくある誤解 | 78 |
| 16-09 | 証明が含むべき段 — 七段の表 | 92 |
| 16-10 | 道具の地図 — 本書の検討が使う既知の道具の在りか | 103 |
| 16-11 | 帯を越える発想の地図 — 生きている発想・壊れた発想・要りそうな数学 | 114 |

# 世界はどこまで来ているか — 年表と、次元ごとの表で現在地を読む

この章の §01〜§06 は既存の知見、§07 は未解決の地図、§08 は案内です。

**この章で分かること** — 1954〜2026 年の主な結果の年表（37 行。2026 年に公開された四次元の構成を含む）。次元ごとに六つの段のどこまで定理があるかの盤面と、その塗られ方。可換群・スカラー場との比較。格子の定理が $\beta$ の数直線のどこにあるか。

**前提となる章** — 7-10 四次元で止まる場所。六つの段は 7-01、次元ごとの中身は 7-02・7-06・7-07。

**先に言うこと** — 既知の文献を並べ直した章で、示す定理はありません。四次元のヤン–ミルズの存在（Wilson の格子ゲージ理論の極限として Wightman の公理を満たす理論）は、2026 年に公開された構成が Lean による形式化として示し、委員会が「証明している」と評価しました[評]（第 6 部）。無限体積の極限の一意性と質量ギャップは示されていません（16-02）。年表は本文か要旨（一部は総説の文献表）で確かめた範囲で、網羅ではありません。このサイトの記事は、盤面のどの升目も動かしていません（札[評]は委員会の評価書による、の意味です。くわしくは 6-00 の「札」）。

この章の順序

1. 一つの結果を六つの軸で読む
2. 年表 I（1954–1999）
3. 年表 II（2000–2026）
4. 盤面：年を動かして見る — 動く図・計算
5. 次元ごとの表
6. 隣の理論との比較：「二・三次元ではできている」の範囲
7. 格子の定理は β の数直線のどこにあるか — 動く図・計算（β のつまみ）
8. 寄り道：年表に載せないもの

01

## 一つの結果を六つの軸で読む

ヤン–ミルズの定理は、どれも「どこで成り立つか」の条件を持ちます。条件を落とすと、二次元の定理が四次元の話に、格子の定理が連続の話に見えます。この章は条件を六つの軸にまとめ、**住所**と呼びます。

$$\text{住所} = \big(d,\ \text{格子か連続か},\ \text{体積},\ \text{結合の側},\ G,\ \text{物質場}\big) \tag{1}$$

$d$ はユークリッド化した時空の次元、結合の側は格子の逆結合 $\beta = 2N/g^2$（記号表）が小さい強結合か大きい弱結合かです。問題文の住所は「4・連続・$\mathbb{R}^4$・任意のコンパクト単純群・なし」で、そこで六つの段を全部通すことが求められます。既知 四次元の格子の連続極限は $\beta \to \infty$ の側にあると信じられています（Chatterjee 2018 §5）。物理

例：Driver 1989 は（2・連続・$\mathbb{R}^2$・—・連結コンパクト・なし）で紫外極限の段と無限体積の段まで、Shen–Zhu–Zhu 2022 は（任意・格子で間隔を固定・無限・強・$SU(N)$・なし）で格子の上の指数減衰です。年表の「範囲」はこの住所の略で、年は最初の公開年（arXiv があればその年）、括弧は出版年です。複数の論文をまとめた行は年の幅で書きます。

02

## 年表 I（1954–1999）：言葉と道具と、最初の構成

最初の半世紀の流れは三つです。物理では理論が書かれ（1954）、漸近自由が摂動論で分かりました（1973）。枠組みでは公理（1973・1975）と格子（1974）がそろいました。構成では、格子の強結合（1978）、三・四次元の紫外の評価（1985・1987–89）、二次元の連続の測度（1989）、四次元で紫外の切断を外し赤外の切断を残した構成の概略（1993）が出ました。既知 1974 年と 1973 年の式は次の二つです（5-01・4-06）。

$$S_W = \beta \sum_{P} \Big(1 - \tfrac{1}{N}\operatorname{Re}\operatorname{tr} U_P\Big), \qquad \mu \frac{dg}{d\mu} = -b_0\, g^3 + \cdots, \qquad b_0 = \frac{11N}{3}\cdot\frac{1}{16\pi^2} \tag{2}$$

例：$SU(2)$ で $\beta = 2.5$ は $g^2 = 2N/\beta = 1.6$。$b_0 > 0$ の符号が漸近自由です。「比較」の行は可換群・スカラー場という隣の理論で、升目は動かしません。物理の行は第 17 部に続きます（17-04・17-11・17-09、格子数値は 5-08）。

既知 表 1　年表 I（物理の札の行を除く）。行を押すと図 1 がその年になります。

| 年 | 出来事 | 範囲 |
|---|---|---|
| 1954 | Yang–Mills：非可換のゲージ場の古典論 | 古典 |

| 年 | 出来事 | 範囲 |
|---|---|---|
| 1973 | Gross–Wilczek・Politzer：漸近自由 | 摂動論の係数 |
| 1973・1975 | Osterwalder–Schrader：ユークリッドの公理と Wightman の理論の再構成（1975 年に条件を改めた） | 公理 |
| 1974 | Wilson：格子ゲージ理論（ゲージ不変な格子の作用） | 全次元・格子 |
| 1974 | 't Hooft：大 N の展開 | 物理 |
| 1976 | Feldman–Osterwalder：弱結合の $\phi^4_3$ で Wightman の公理と質量ギャップ | 比較・3D |
| 1978 | Osterwalder–Seiler：格子の反射正値性と転送行列。強結合で無限体積極限と面積則（クラスター展開の収束は概略） | 格子・強結合 |
| 1978 | Singer：大域的で連続なゲージ固定は一般には取れない | 幾何 |
| 1979–81 | Brydges–Fröhlich–Seiler：二次元の可換 Higgs 模型を OS の公理まで | 比較・2D |
| 1980・1982 | Guth・Fröhlich–Spencer：四次元 U(1) の格子に、大きい β で閉じ込めない相 | 比較・格子 |
| 1981–82 | Aizenman・Fröhlich：$\phi^4$ は $d \geq 5$ で自明 | 比較 |
| 1983–87 | Gross・King・Driver：U(1)（3D・4D、Higgs つきを含む）の連続極限 | 比較 |
| 1985 | Bałaban：三次元の格子で紫外安定性（トーラス、分配関数の一様な上下界） | 3D・格子・有限体積 |
| 1987–89 | Bałaban：四次元の格子で紫外安定性。最終論文の定理 1 は有効結合が小さいという仮定つき | 4D・格子・有限体積 |
| 1989 | Driver・Gross–King–Sengupta：平面 $\mathbb{R}^2$ の連続の測度（Driver は格子近似の収束も） | 2D・連続・無限体積 |
| 1992–93 | Sengupta：閉曲面の上の測度 | 2D・連続・有限体積 |
| 1993 | Magnen–Rivasseau–Sénéor：四次元 SU(2) の Schwinger 関数を、赤外の切断を固定したまま紫外の切断なしで（正則化した軸ゲージで）構成する「基礎」（詳細な証明は無い） | 4D・連続 |
| 1994 | Seiberg–Witten：超対称の理論でギャップと閉じ込め | 物理 |
| 1997–98 | Maldacena・Witten：ホログラフィーと、ギャップを幾何で見る模型 | 物理 |
| 1999 | Morningstar–Peardon：SU(3) のグルーボールの格子数値 | 物理 数値 |

03

## 年表 II（2000–2026）：問題文のあと

2000 年 5 月 24 日、Clay 数学研究所はパリでミレニアム懸賞問題を発表しました。問題文（Jaffe–Witten）は四次元の現状をこう書きます。 既知

> 'at present we do not know any non-trivial relativistic field theory that satisfies the Wightman (or any other reasonable) axioms in four dimensions.'（JW §6）

その後、二次元の新しい構成、三次元の状態空間と力学、格子の新しい定理が加わりましたが、2004 年の報告は 'The state of the art remains the works of Balaban and of Magnen, Rivasseau and Sénéor' と書きます。既知 2018 年の総説は格子の上の問いを式にしました（格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）。5-09）。$f_\beta(x)$ は原点と点 $x$ に最も近いプラケットの Wilson ループの相関です。

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{\log f_\beta(x)}{|x|} = -\frac{1}{\xi(\beta)}, \quad \xi(\beta) \in (0,\infty)\ (\text{すべての } \beta > 0), \qquad \lim_{\beta\to\infty} \xi(\beta) = \infty \qquad (3)$$

例：2000 年以後の行は 17 本（うち 2020 年代が 11 本）で、盤面の色を変えたのは 2022 年の 2 本（Shen–Zhu–Zhu と Adhikari–Cao）と、2026 年の公開された構成の 1 本（三つの升）です。計算 格子の相関長の問題は格子の問いで、問題文の要件（連続・$\mathbb{R}^4$・公理・非自明性）とは別物です（0-03）。

既知 表 2　年表 II。

| 年 | 出来事 | 範囲 |
|---|---|---|
| 2000 | Clay の懸賞問題（Jaffe–Witten の問題文） | 問題 |
| 2001（2003）–10 | Lévy：閉曲面の上のランダムなホロノミー場（2006 年に自明でない束） | 2D・連続 |
| 2004 | Douglas の報告：到達点は今も Bałaban と MRS | 評価 |
| 2013（2014） | Hairer：正則性構造（確率偏微分方程式の繰り込み） | 道具 |
| 2018 | Chatterjee の総説：格子の相関長の問題（Problem 5.1）と Wilson ループの連続極限の問題（5.2） | 格子の定式化 |
| 2019（2021） | Aizenman–Duminil-Copin：四次元の $\phi^4$ の極限はガウス | 比較 |
| 2020（2022） | Chandra–Chevyrev–Hairer–Shen（CCHS）：二次元の確率ヤン–ミルズ熱流とゲージ軌道の空間 | 2D・$T^2$ |
| 2021（2024） | Cao–Chatterjee：三次元の状態空間（理論がガウス自由場〔GFF。1-09〕のように振る舞うという仮定の下で） | 3D・条件つき |
| 2022（2024） | CCHS：三次元ヤン–ミルズ–Higgs の確率量子化（局所解と Markov 過程。測度には未到達） | 3D・$T^3$ |
| 2022 | Chevyrev の総説：三次元の測度は $T^3$ の上でも未構成 | 評価 |
| 2022（2023） | Shen–Zhu–Zhu：強結合の格子で、N によらない明示的な範囲で一意性と正の質量ギャップ | 格子・強結合 |

| 年 | 出来事 | 範囲 |
|---|---|---|
| 2022（2025） | Adhikari–Cao：有限群（非可換を含む）の四次元格子で、弱結合の相関の指数減衰 | 格子・弱結合 |
| 2023（2026） | Chevyrev–Shen：$T^2$ の測度は Langevin 力学の一意な不変測度。格子の作用によらない | 2D・$T^2$ |
| 2024（2026） | Chatterjee：SU(2) ヤン–ミルズ–Higgs の特殊なスケーリング極限はガウス場 | 比較・Higgs |
| 2025 | Cao–Nissim–Sheffield：'t Hooft 領域（作用に βN を掛ける 't Hooft の規約で、β を N によらず小さく取る側。7-10 §05）の面積則（未査読） | 格子・強結合 |
| 2026 | Chevyrev–Klose–Mohamed・Chhaibi ほか：二次元の測度の表示と、格子を経ない構成（未査読） | 2D |
| 2026 | 公開された構成（Lean による形式化。2026-10-28 提出、2026-11-10 に委員会の評価書とともに公開。委員会の声明は 2026-11-09）：任意のコンパクト単純群で、四次元の Wilson の格子ゲージ理論の極限として Wightman の公理を満たす理論を作る。周期の箱では切断の列の全体で収束し、無限体積へは部分列で移る。無限体積の極限の一意性と質量ギャップは示されていない 評 （6-00・16-02） | 4D・連続（委員会の評価） |

表 2 の言葉：**確率量子化**＝測度を、ある確率的な時間発展の不変測度（時間がたっても分布が変わらない測度）として作る方法。**Langevin 力学**＝測度を不変にする、雑音つきの勾配流。**確率ヤン–ミルズ熱流**＝ヤン–ミルズの作用を減らす向きの流れ（熱流）に雑音を加えたもの。**正則性構造**＝特異な確率偏微分方程式に意味を与え、繰り込む枠組み。いずれも 7-09。**Markov 過程**＝未来の分布が現在の状態だけで決まる確率過程（7-02）。

04

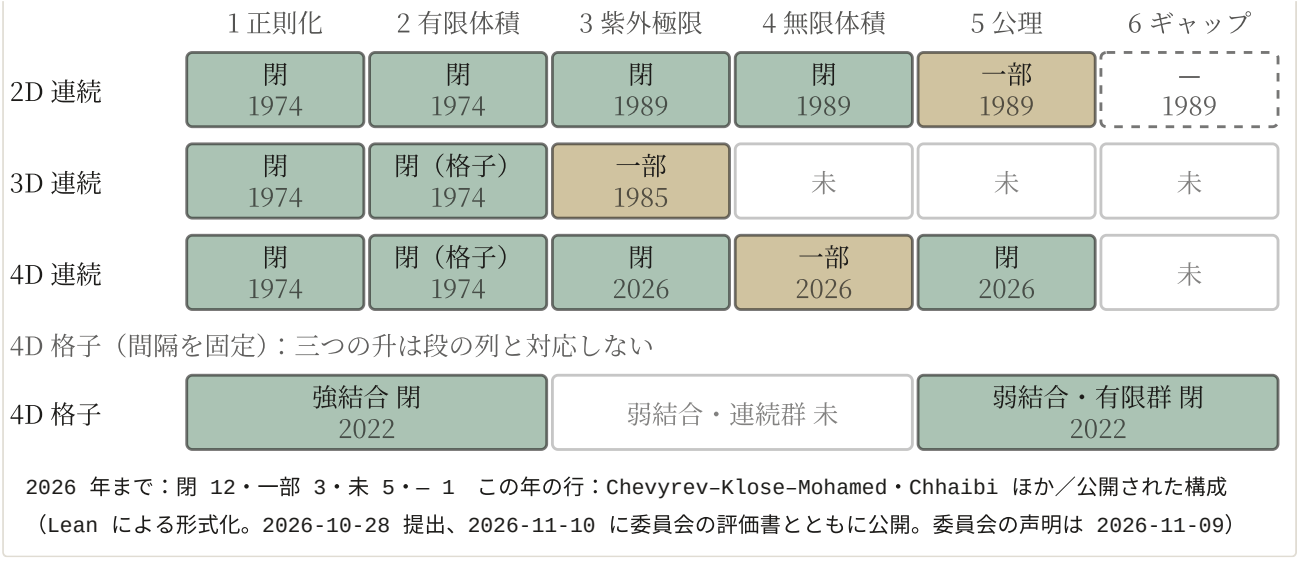
## 盤面：年を動かして見る

年表を升目に写します。行は連続の非可換ヤン–ミルズ（物質場なし）の $d = 2, 3, 4$ と四次元の格子、列は六つの段（7-01）です。正則化の段と有限体積の段は格子の上の測度 $\mu_{a,L}$ を作る段で、格子の上で閉じます（7-10 §03）。三次元・四次元では連続のまま有限体積の測度を作ることがまだできていないので、その有限体積の段を「閉（格子）」と書きます。2026 年の公開された構成も、連続の確率測度は作っていないので（16-02 §03）、四次元の有限体積の升は「閉（格子）」のままです。

状態の名前は 7-01 の表 2 と同じです。**閉**（定理がある）、**一部**（仮定つき・概略・分配関数の評価まで、または要件の一部だけ。7-10 の表 2 の「仮定つき」もここに入る）、**未**、—（問いがその形では立ちにくい。7-02）の四つです。年 $y$ の状態は、$y$ 以前の最後の変化の記録 $(y_k, c_k, v_k)$ で決まります。

$$s_c(y) = v_k, \qquad k = \max\{\, k :\ y_k \le y,\ c_k = c \,\} \tag{4}$$

図 1　つまみで年を動かすと、その年までの定理で升目が塗られる（表 1・表 2 の行を押すか、行を選んで Enter でその年へ）




計算 この図の数値はこの端末で計算しました（式 (4)）。升目の分け方と状態の決め方はこの章の選択です。

計算 表 3　2026 年の盤面（状態と、その状態になった年）。四次元の 2026 年の三つの升は、委員会の評価の水準です。格子の行の三つの升は、段の列と対応しません。

| | 1 正則化 | 2 有限体積 | 3 紫外極限 | 4 無限体積 | 5 公理 | 6 ギャップ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2D 連続 | 閉 1974 | 閉 1974 | 閉 1989 | 閉 1989 | 一部 1989 | — 1989 |
| 3D 連続 | 閉 1974 | 閉（格子） 1974 | 一部 1985 | 未 | 未 | 未 |
| 4D 連続 | 閉 1974 | 閉（格子） 1974 | 閉 2026（1989 年から一部） | 一部 2026 | 閉 2026 | 未 |
| **格子の升** | **強結合** | | **弱結合・連続群** | | **弱結合・有限群** | |
| 4D 格子（間隔固定） | 閉 2022（1978 年から一部） | | 未 | | 閉 2022 | |

例：盤面が動いた年は 1974・1978・1985・1989・2022・2026 の六つで、連続の升目は 1989 年から 2025 年まで動いていませんでした。21 升のうち閉 12・一部 3・未 5・— 1 です。計算 2026 年の三つの升（四次元の紫外極限・無限体積・公理）は、公開された構成を、委員会が「Lean で証明されている」と評価した水準で塗っています評。無限体積の升を「一部」にしたのは、極限が部分列で取られ、一意性が示されていないからです（16-02 §02）。 7-10 の表 2 は格子の無限体積の段を強結合で OS 1978 により「閉」とします。この章の格子の升は無限体積の段と一様なギャップの段（ギャップ）を一つに数えるので、1978 年は「一部」です。二次元の公理の段は、ゲージ不変な期待値のユークリッド不変性（Driver 1989 の系 6.7）までで、OS の公理の形の主張は無いので「一部」です。二次元の一様なギャップの段は伝播する自由度が無く、問いが立ちにくいので「—」です（どちらも 7-01 の表 2 と同じ）。既知

格子の強結合の升は、1978 年に「一部」、2022 年に「閉」になります。Osterwalder–Seiler 1978 はクラスター展開の収束を概略で与え、ギャップ（指数的なクラスター性）はその収束

から従います。明示的な範囲での一意性と正の質量ギャップの証明は Shen–Zhu–Zhu 2022 です（どちらも SZZ の序論による。OS 1978 の要旨は強結合での無限体積の極限の存在と解析性・Wilson の閉じ込めの評価を述べる。5-02 §08）。既知 1989 年から 2025 年まで連続の升目が動かなかったのは、進歩が無かったからではありません。二次元の測度の Langevin 力学による特徴づけや三次元の力学のような升目の*中*の進歩が、粗い盤面に映らなかったのです（この章の読み。段ごとの文献の言葉は 7-10）。

05

## 次元ごとの表

盤面の行を、住所の言葉で書き直します。列は格子（間隔を固定）、二重の極限（7-01）の内側と外側、公理とギャップです。$\mu_{a,L}$ は格子間隔 $a$・一辺 $L$ の箱の測度です。

$$\mu = \lim_{L\to\infty} \underbrace{\lim_{a\to 0} \mu_{a,L}}_{\text{連続・有限体積}} \tag{5}$$

既知 表 4　次元ごとの現在地（非可換・物質場なし）。

| $d$ | 格子（$a$ 固定） | 連続・有限体積 | 連続・無限体積 | 公理・ギャップ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 正確に解ける（7-02） | 閉曲面・$T^2$：Sengupta・Lévy・CCHS・Chevyrev–Shen | $\mathbb{R}^2$：Driver・Gross–King–Sengupta | 文献は主張しない（観測量はループ） |
| 3 | 強結合で無限体積と指数減衰 | 紫外安定性（分配関数の評価）。測度は未構成で、状態空間と力学まで | 未 | 未 |
| 4 | 強結合で無限体積と指数減衰。弱結合は有限群だけ | 周期の箱での連続極限（公開された構成、2026。相関関数が切断の列の全体で収束。連続の確率測度は作っていない）評 。それ以前は仮定つきの紫外安定性（Bałaban）と、赤外の切断つきの概略（MRS） | 部分列の極限と相の分解（公開された構成）。極限の収束と一意性は示されていない評 | 相ごとに Wightman の公理（公開された構成）評 。ギャップは未 |

**二次元**が連続・無限体積まで閉じているのは、正確に解ける構造（プラケットの独立性と群の熱核。7-02）によります。**三次元**は易しいとされますが、連続の測度は 'open, even in finite volume' です（7-06）。**四次元**は、2025 年までは紫外極限の段が有限体積で仮定つき・概略で、無限体積の段から一様なギャップの段までに定理がありませんでした（7-07）既知 。2026 年に公開された構成が、紫外極限の段・無限体積の段（部分列）・公理の段を埋めました評 （6-01）。一様なギャップの段は開いたままです（16-02 §04）。

例：表 4 の四次元の「連続・有限体積」は表 3 の紫外極限の段（2026 年から閉）に、「格子」の列は表 3 の格子の行に当たります。MRS の概略は紫外の切断を外していますが、赤外の切断は残したままです。公開された構成は周期の箱で紫外の極限を取り、そのあと無限体積へ部分列で移ります（8-05）。

06

## 隣の理論との比較：「二・三次元ではできている」の範囲

「二・三次元ではできている」という言い方は、非可換のヤン–ミルズについては二次元でだけ正しい言い方です。三次元まで当てはまるのは、可換群とスカラー場です（16-08）。年表の「比較」の行を並べます。どの行も盤面の升目は動かしません。既知

既知 表 5　隣の理論の到達点（年表の「比較」の行）。

| 理論 | $d$ | 到達点 |
|---|---|---|
| U(1) Higgs（可換のゲージ場と荷電スカラー場） | 2・3 | 二次元は OS の公理まで（Brydges–Fröhlich–Seiler）。問題文は「公理を満たす相互作用するゲージ理論の唯一の完全な例」と呼ぶ。三次元は連続・無限体積の極限（King） |
| $\phi^4_3$（弱結合） | 3 | Wightman の公理（JW §6.2）と質量ギャップ（Feldman–Osterwalder） |
| U(1) の純ゲージ | 4 | 格子から連続への極限（Driver 1987）。極限は自由な電磁場と見込まれる（7-10 の説明）。格子には大きい β で閉じ込めない相がある（Guth・Fröhlich–Spencer） |
| $\phi^4_4$ | 4 | 格子で紫外を切った $\lambda\phi^4$ の、無限体積・格子間隔 0 の極限はガウス（Aizenman–Duminil-Copin）。$d \geq 5$ の自明性は Aizenman・Fröhlich |
| 二次元 O(3)・O(4) シグマ模型（漸近自由・非可換の大域対称性） | 2 | 2026-10-06 公開の `github.com/openai/math`（結果群 215）に主張つきの原稿がある。格子の全温度の相関の指数減衰（n ≥ 3・有限の部分グラフに一様）は **Lean の形式化つき**。O(3) の連続極限（OS 公理・一意な真空・正の質量ギャップ・非ガウス）と O(4) の格子の質量の漸近 m ∼ 32e^(π/4−1/2)√β e^(−πβ)（Hasenfratz–Maggiore–Niedermayer 1990 の予言と同じ定数）は**紙の原稿のみで未検証** |

二次元のシグマ模型は、二次元 YM（7-02）と違って漸近自由と次元転移を持つので、四次元 YM と「同じ形の問題」としてはこちらが近い例です。ゲージ対称性と閉じ込めは持ちません。この行は、盤面（表 3）の四次元の升目を動かしません。

四次元の二つの行は、どちらも極限が自由場（ガウス）になる例です。漸近自由（4-06）なヤン–ミルズでは非自明な極限が期待されていますが、証明はありません（7-08）。物理 同じ四次元でも、$\phi^4$ は短距離で結合が強くなり、ヤン–ミルズは弱くなります。向きが逆なので、$\phi^4$ の自明性の定理はヤン–ミルズには当てはまりません。例：三次元で比べると、$\phi^4_3$ は六つの段を全部通っています（7-01 の表 2）。非可換のヤン–ミルズは紫外極限の段が一部で、無限体積の段から先は未です（表 3）。

07

## 格子の定理は β の数直線のどこにあるか

強結合では高温展開（小さい $\beta$ の冪で展開する方法。強結合展開とも呼ぶ。5-02）が定型的に効き、連続なリー群でも指数減衰が出ます（Adhikari–Cao と Shen–Zhu–Zhu の序論によ

る。Osterwalder–Seiler 1978 は要旨のみ）。弱結合では、格子ゲージ理論の無限体積極限の一意性は、$d > 2$ で $\beta$ が大きいとき一般には分かっていません（Chatterjee 2018 §3）。連続極限に要るのはこの側です（5-05）。既知

### 二つの定理の条件を一つの β に直す

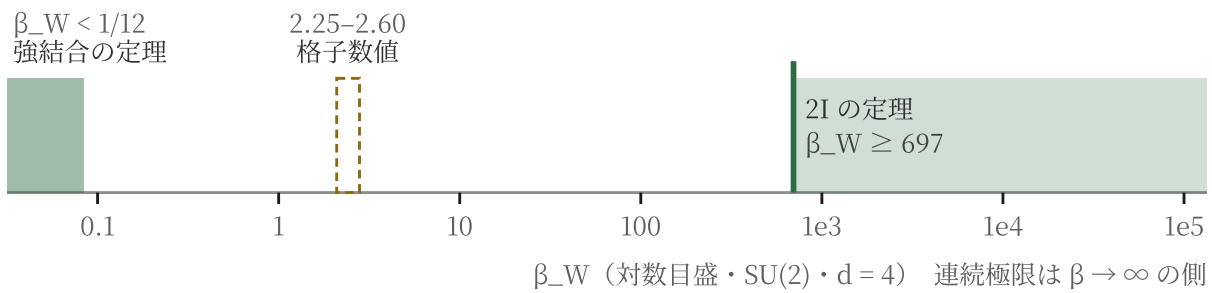
Shen–Zhu–Zhu の重み $\exp(N\beta \operatorname{Re}\sum_P \operatorname{Tr} U_P)$ と Adhikari–Cao の重み $\exp(-\beta\sum_P \operatorname{Re}(\chi(1)-\chi(U_P)))$（$\chi$ は表現の指標）の条件を式 (2) の $\beta_W$ に直すと

$$\beta_W = N^2\beta_{\mathrm{SZZ}} < \frac{N^2}{16(d-1)}, \qquad \beta_W = 2\beta_{\mathrm{AC}} \geq \frac{2\,(114+4\log|G|)}{\Delta_G}, \qquad \Delta_G = \min_{g\neq 1}\operatorname{Re}\bigl(\chi(1)-\chi(g)\bigr) \tag{6}$$

です（$\Delta_G$ は Adhikari–Cao の記号で、16-05・16-08 の質量ギャップ $\Delta_G$ とは別）。7-10 §05 の $\beta$（Chatterjee の規約 $e^{-\beta\sum_p \operatorname{Re}\operatorname{tr}(I-U_p)}$）とは $\beta_W = N\beta_{\mathrm{Ch}}$ の関係にあり、7-10 の $|\beta| < N/48$ はこの章の $\beta_W < N^2/48$（$d=4$）と同じ条件です。Adhikari–Cao は $G$ の任意のユニタリ表現 $\rho$ を許し、$\chi = \operatorname{tr}\rho$ です。ここでは $\rho$ を包含 $G \subset SU(2)$ に取った場合で、Wilson の模型のリンク変数を $G$ に制限したものになります（$\chi(1)=2$ なので $\beta_W = 2\beta_{\mathrm{AC}}$）。log は自然対数です。

前者は $SU(2)$ なら $d = 2, 3, 4$ で $\beta_W < 0.25,\ 0.125,\ 0.083$、$SU(3)$ ならその 9/4 倍です。計算 例：$d=4$ の $\beta_W < 1/12$ は、格子数値が連続へ外挿するのに使う $\beta_W = 2.25\text{〜}2.60$（$SU(2)$、Lucini–Teper 2001）物理 の 27 分の 1、二項正二十面体群の条件 $\beta_W \geq 697$ はその上端の 268 倍です。計算

図 2　つまみで有限群 $G \subset SU(2)$ を選ぶと、Adhikari–Cao の定理が効き始める位置（右の緑の左端）が動く。左の緑は強結合の定理、破線は格子数値




2I（位数 120）：Δ_G = 0.38197、β_W ≥ 697.2（β_AC はその半分。格子数値の上端の 268 倍）

計算 この図の数値はこの端末で計算しました（群を生成元から閉包で作って位数を確かめ、式 (6) を計算）。格子数値の範囲は文献の値です。

計算 表 6　$SU(2)$ の有限部分群（定義表現）と式 (6) の条件。定義表現は行列そのもので、指標はトレースです（1-02）。最小角は単位元に最も近い元の固有値 $e^{\pm i\theta}$ の $\theta$。

| 群 | 位数 | 最小角 | $\Delta_G$ | $\beta_W \geq$ |
|---|---|---|---|---|
| $\{\pm 1\}$ | 2 | 180° | 4 | 58.4 |
| 四元数群 $Q_8$ | 8 | 90° | 2 | 122.3 |
| 2T（二項正四面体群） | 24 | 60° | 1 | 253.4 |
| 2O（二項正八面体群） | 48 | 45° | 0.5858 | 442.1 |
| 2I（二項正二十面体群） | 120 | 36° | 0.3820 | 697.2 |
| $2D_{50}$（二項二面体群） | 200 | 3.6° | 0.00395 | 68512 |

### 表 6 の読み方

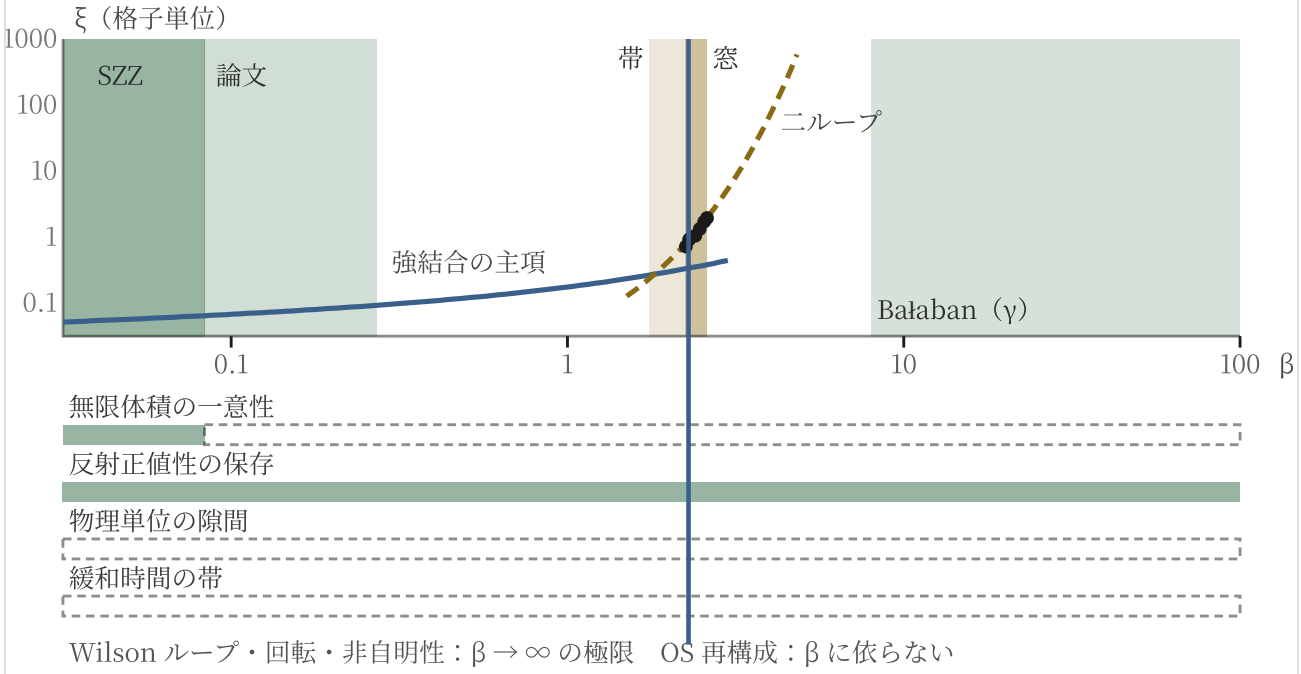
(a) 閾値は証明に出てくる定数で、相転移の位置ではありません。(b) $SU(2)$ の有限部分群は巡回群・二項二面体群と、位数 24・48・120 の三つの例外だけです。既知 名前に「二項」が付く群は、$SO(3)$ の中の回転群を二重被覆 $SU(2) \to SO(3)$（1-02）で引き戻した群です。二項正四面体群・正八面体群・正二十面体群は正多面体の回転群の、二項二面体群 $2D_n$ は正 $n$ 角形の回転群（位数 $2n$ の二面体群）の逆像で、位数はそれぞれ元の 2 倍です。$2D_n$（位数 $4n$）では $\Delta_G = 2 - 2\cos(\pi/n) \approx \pi^2/n^2$ なので、条件はおよそ $n^2$ に比例して遠のきます。計算 (c) 一ループの $\xi \propto e^{3\pi^2 \beta_W/11}$（$SU(2)$）では、格子間隔を 1/10 にするごとに $\beta_W$ が約 0.86 増えます（一ループの目安。二ループの補正と、この $\beta$ の範囲で漸近スケーリングがまだ成り立たないことは 5-05）。物理 有限群の結果が連続な群へ移らない理由は 5-10、強結合の展開は 5-02。

### β のつまみ — 二つの岸と帯を一本の軸に

図 2 の数直線に、格子単位の相関長 $\xi$ を重ねます。左の岸は強結合の定理（SZZ の条件 (9)・このサイトの論文 紙 。23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定）と強結合の主項 $\xi = -1/(4\ln u)$、右の岸は二ループの式（16-05 (10)、$C = 185$）と Bałaban の仮定です。仮定は有効結合が十分小さいことで、値は書かれていないので（7-07 §04）、$g^2 \leq \gamma$ を $\beta \geq 4/\gamma$ と読む目安を $\gamma$ のつまみで動かします。真ん中は数値の窓 2.25〜2.60（Lucini–Teper 2001）と、プラケットでどちらの主項も 5% に入らない帯 1.75〜2.6（16-05 図 1）です。物理

下段は 23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定 の言明が要る β の範囲です（この本の整理）。帯を渡る役は、各 β で要る無限体積の一意性の言明・物理単位の隙間の言明・記帳の長さでの緩和時間の帯です。反射正値性の保存の言明はどの β でも成り立ち、Wilson ループの極限の言明・回転の回復の言明・非自明性の言明は $\beta \to \infty$ の極限の言明、OS 再構成の言明は β に依らない定理です。既知 定理が在るのは左の端で、$\gamma$ を小さくするほど右の岸の目安は遠のきます。

図 3　β のつまみで縦線を動かすと、その β の ξ（強結合の主項・二ループ・数値）と在るものが下に出る。γ のつまみで Bałaban の仮定の側（β ≥ 4/γ の目安）が動く。横軸・縦軸は対数




β = 2.29　ξ：強結合の主項 0.339・二ループ 0.893・数値 0.92（Δ/√σ ≈ 3.507）　在るもの：帯・数値の窓　帯を渡る役：無限体積の一意性・物理単位の隙間・緩和時間の帯

計算 曲線は 16-05 の (9)(10) をその場で計算（ベッセル関数は級数。表 7 は scipy で同じ値）。点と窓の値は Lucini–Teper 2001 物理 。

計算 表 7　図 3 の β の目印と ξ（格子単位。ξ 数値の列は 16-05 表 3 の $1/(am)$）。

| β | ξ 強結合の主項 | ξ 二ループ（C=185） | ξ 数値 | この β にあるもの |
|---|---|---|---|---|
| 0.08333 | 0.065 | — | — | SZZ の条件 (9) の端（β < 1/12） |
| 0.2722 | 0.093 | — | — | このサイトの論文の条件の端（β < 0.2722） |
| 1.5 | 0.234 | 0.127 | — | 強結合の主項がブラケットで 5% 以内に入る右端 |
| 1.75 | 0.266 | 0.233 | — | 帯の左端（どちらの主項も 5% に入らない） |
| 2.25 | 0.333 | 0.806 | 0.72 | 数値の窓の左端 |
| 2.3 | 0.340 | 0.914 | 0.92 | |
| 2.4 | 0.354 | 1.17 | 1.05 | |
| 2.475 | 0.365 | 1.42 | 1.33 | |
| 2.55 | 0.375 | 1.72 | 1.71 | |
| 2.6 | 0.383 | 1.95 | 1.95 | 数値の窓と帯の右端 |
| 2.75 | 0.405 | 2.85 | — | 弱結合の主項がブラケットで 5% 以内に入る左端 |
| 3.243 | — | 10 | — | 二ループで ξ = 10（外挿の目安） |
| 4.136 | — | 100 | — | 二ループで ξ = 100（外挿の目安） |
| 5.022 | — | 1000 | — | 二ループで ξ = 1000（外挿の目安） |

| β | ξ 強結合の主項 | ξ ニループ（C=185） | ξ 数値 | この β にあるもの |
|---|---|---|---|---|
| 8 | — | 2.49×10^6 | — | γ = 0.5 なら Bałaban の仮定の側（β ≥ 4/γ の目安） |
| 20 | — | 1.8×10^20 | — | γ = 0.2 なら Bałaban の仮定の側（β ≥ 4/γ の目安） |

08

## 寄り道：年表に載せないもの

飛ばしてよい節です。

ヤン–ミルズ問題を証明したとする投稿を見かけます。この章が年表に行を載せる条件は二つです。

$$\text{載せる} \iff (\text{本文か要旨を確かめた}) \wedge (\text{住所 (1) が書ける}) \tag{7}$$

未査読のプレプリントは印を付けて載せます。懸賞問題そのものを証明したとする投稿は、専門家の検証を経た記録が無い限り載せません（arXiv の管理者が内容の水準を理由に取り下げた例もあります）。物理の数値やホログラフィーの模型は「理論が在る」と置いてから測るもので（17-13）、升目を動かしません。例：1999 年の格子数値の行は、どの升目の色も変えません。この本の第 23 部（23-01）の検討も盤面の外です。2026 年の公開された構成は、委員会の評価書と声明が在るので載せています。

## この章が言えている範囲

| | 内容 |
|---|---|
| 言えている | 年表 37 行の中身（確かめ方の種別は出典表）既知 。2026 年の公開された構成の行と、盤面の 2026 年の三つの升は、委員会の評価の水準評 |
| 言えている | この章の升目の決め方の下での盤面と行の数。式 (6) の換算、有限部分群の位数・$\Delta_G$・条件の値計算 。図 3・表 7 の ξ は本文の式と数値の再掲で、構成の八つの言明の β の範囲の割り当てはこの本の整理 |
| 言えていない | 年表の網羅。升目の別の分け方。強結合の升の 1978 年の判定の根拠は Shen–Zhu–Zhu と Adhikari–Cao の序論の記述で、Osterwalder–Seiler 1978 の本文は読んでいない。Driver 1987 の極限が自由な電磁場であること（本文は書誌のみ）。表 6 の閾値から有限群の模型と $SU(2)$ の弱結合の関係を結論すること。四次元の紫外極限の段から一様なギャップの段までのどれについても、このサイトは何も示していない（2026 年に升を動かしたのは公開された構成）。公開された構成の証明の当否（委員会の評価のまま引く） |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| §03 の問題文の引用、表 5 の $\phi^4_3$ と「唯一の完全な例」 | 本文 | A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*, Clay Math. Inst. (2000) §6・§6.2・§6.4。発表の日と場所は claymath.org |
| 2004 年の文 | 本文 | M. R. Douglas, Clay Math. Inst. の報告 (2004) |
| §01 の連続極限の側、§03 の格子の相関長の問題、§07 の一意性の文、表 5 の可換群の行 | 本文 §3・§4・§5・§6 | S. Chatterjee, arXiv:1803.01950 |
| 三次元の現状 | 本文 §1 | I. Chevyrev, arXiv:2202.13359／Chevyrev–Shen, arXiv:2302.12160 |
| 式 (6) の重みと条件。強結合の升の判定（OS 1978 のクラスター展開の収束は概略で、ギャップはその収束から従う） | 本文 §1 | Shen–Zhu–Zhu, arXiv:2204.12737, CMP 400 (2023) 805–851（式 (1.2)(1.3)・序論）／Adhikari–Cao, arXiv:2202.10375v3, Ann. Probab. 53 (2025) 140–174（式 (1.2)(1.3)・Theorem 1.1・序論） |
| Driver・Bałaban・MRS | 本文の冒頭（材料の検査） | Driver, CMP 123 (1989) 575–616（系 6.7。本文に公理の主張は無い）／Bałaban, CMP 102 (1985) 255–275・122 (1989) 355–392／Magnen–Rivasseau–Sénéor, CMP 155 (1993) 325–383（要旨と §I） |
| 四次元の Bałaban の年の幅 1987–89 | 書誌のみ（1987・1988 の論文） | 四次元の論文 CMP 109 (1987) 249–301 から CMP 122 (1989) 355–392 までを数えた（7-07・7-01 と同じ数え方。三次元と共通の土台 1983–85 は数えない） |
| 2000 年以後の他の行 | 要旨（材料の検査） | arXiv:2006.04987・2201.03487・2111.12813・math/0101239（Lévy。2001 年 1 月の投稿、Mem. AMS 166 no.790 (2003)。自明でない束は PTRF 136, 2006）・1303.5113・1912.07973・2401.10507・2509.04688・2607.22236・2607.24640 |
| 2026 年の公開された構成の行と、盤面の 2026 年の升 | 評 | 公開された構成のコード `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0、2026-10-28 提出）。評価書 `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）冒頭と §8。委員会の声明（Kavli Institute for Theoretical Physics の頁の第三の声明、2026-11-09。署名は Michael R. Douglas、David J. Gross（委員長）、Arthur Jaffe、Igor R. Klebanov、Nikita Nekrasov）。読み方は 6-00 |
| 格子数値の範囲 | 本文 表 1（材料の検査） | Lucini–Teper, JHEP 0106 (2001) 050 |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 2000 年以前の原論文：Yang–Mills 1954・Gross–Wilczek／Politzer 1973・Osterwalder–Schrader 1973／1975・Wilson 1974・'t Hooft 1974・Feldman–Osterwalder 1976・Osterwalder–Seiler 1978・Singer 1978・Brydges–Fröhlich–Seiler 1979–81・Guth 1980・Fröhlich–Spencer 1982・Aizenman 1981–82・Fröhlich 1982・Gross 1983・King 1986・Driver 1987・Gross–King–Sengupta 1989・Sengupta 1992–93・Seiberg–Witten 1994・Maldacena 1997・Witten 1998・Morningstar–Peardon 1999 | 書誌のみ | 中身は Jaffe–Witten の本文と文献表、Chatterjee §4・§6、Adhikari–Cao と Shen–Zhu–Zhu の序論の記述による。書誌の例：Osterwalder–Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471／Aizenman, PRL 47 (1981) 1・CMP 86 (1982)／Fröhlich, NPB 200 (1982)／Driver, CMP 110 (1987) 479–501／Maldacena, hep-th/9711200／Witten, ATMP 2, 505／Sengupta, JFA 108・Ann. Phys. 221／Singer, CMP 60／Fröhlich–Spencer, CMP 83／Morningstar–Peardon, PRD 60 |
| 表 7・図 3 | 計算 | Python と SciPy（beta_axis.py。16-05 (9)(10)、$C = 185$）。数値の窓は Lucini–Teper 表 1（16-05 表 3・23-01 表 2） |
| $SU(2)$ の有限部分群の分類 | 既知（書誌は未確認） | 標準的な分類。位数は閉包の計算で確かめた |
| 表 3・図 1・行の数（2026 年の三つの升を足して数え直した）／表 6・図 2・§07 の数 | 計算 | この端末の Python（式 (4) で年ごとに数えた）／Python と NumPy（四元数の生成元から閉包で群を作り、位数・行列式・ユニタリ性を検査。$\ln 10 \cdot 11/(3\pi^2) = 0.855$） |

次に読む章：16-02 五つの開いた問い。公開された構成が残した問いを、評価書の五つに沿って読みます。物理と数学の掘り方が切れる場所は 16-05。

# 五つの開いた問い

> この章は未解決の地図です。§01 は既存の知見（評価書の引用）です。

**この章で分かること** — 2026 年に公開された四次元ヤン–ミルズの存在の構成について、委員会の評価書が「この仕事が扱っていない主な点」として挙げる五つの問いを、一つずつ読みます。各問いについて、(1) 答えるには数学として何が要るか、(2) 構成の Lean のコードの側に、その準備として何が在るか、(3) 何が無いか、を並べます。在るもの：相に一様な多項式の評価、成分ごとの真空の一意性、格子の道に沿う平行移動。無いもの：指数の減衰、連続の Wilson ループ、周期のほかの境界条件。

**前提となる章** — 6-04 示されていないこと、12-05 Arzelà–Ascoli と極限に移る性質、12-07 相の分解、4-11 質量ギャップの定義。

**先に言うこと** — 公開された構成の結果は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」水準で引きます。この本の検討が確かめたのは、源の定義と言明の形を読んだことまでです。「無い」は、名前と説明文を検索した範囲で見つからない、という意味で、別の名で同じ中身が在る可能性は除けません。この章は問いの地図で、どの問いにも答えていません。

この章の順序

1. 評価書の五つの問い — 評価書 §8 の要旨
2. 収束と一意性 — 紫外は列の全体、無限体積は部分列
3. 連続の確率測度 — 相関関数の表と再構成の空間
4. 一様な質量ギャップ — 多項式の評価と、成分ごとの真空の一意性
5. Wilson ループと面積則 — 格子の道の平行移動まで
6. 一粒子の状態 — 一点の挿入の状態の道具
7. 一覧（表 1） — 要るもの・在るもの・無いもの
8. 読み方の注意 — 「無い」の意味、問いどうしの関係

**札** ― 源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による（くわしくは 6-00 の「札」）。初・典・機・読・仮・Lean は本全体の札で、読 は本書の数値の読み、Lean は本書の Lean の定理です。

出典の名：公開された構成のコードは `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0、2026-10-28 提出）、評価書は `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）です。コードの在りかは、このリポジトリの中の相対パスと宣言の名と行で書きます。

01

## 評価書の五つの問い

評価書は冒頭で、提出が、任意の単純コンパクト群について、四次元 Wilson 格子ゲージ理論のスケーリング極限として Wightman の公理を満たす相対論的な場の量子論が構成できることを証明している、と判断し、無限体積の極限が一意であることと質量ギャップは証明していない、と書きます評（評価書 冒頭の要約）。相関関数はまず有限の物理的な体積で極限を取り、無限体積へはコンパクト性による部分列で移る、という構成の仕方も、同じ所で説明されています評。§8 は、構成が扱っていない主な点を五つに並べます評。要旨は次のとおりです。

1. **収束と一意性**。収束する部分列を見つけるのでなく、無限体積の極限の収束と一意性を示すこと。
2. **連続の確率測度**。適切な空間の上に連続の理論の確率測度を定義し、構成の Schwinger 関数がそこから出ること。
3. **一様な質量ギャップ**。一様な質量ギャップを示すこと。対応する相関の指数的な減衰と、Osterwalder–Schrader のハミルトニアンのスペクトルのギャップ。
4. **Wilson ループと面積則**。Wilson ループの観測量を作り、構成の局所の観測量と結ぶこと。Wilson ループの面積則を示すこと。
5. **一粒子の状態**。一粒子の状態を作り、エネルギー運動量のスペクトルを解析すること。二次元・三次元の多くの構成的な模型では、この解析が行われている、と評価書は添えます。

Jaffe–Witten の問題文（0-03）が求めるのは存在と質量ギャップです。五つのうち 3 がその後半に当たり、1・2・4・5 は、構成を「ヤン–ミルズ理論の完全な記述」に近づけるための問いです。以下、各問いを、数学として要るもの・コードの側に在るもの・無いもの、の順に読みます。

02

## 収束と一意性

**要るもの。**体積を大きくする列の全体（部分列を取らずに）で相関関数が収束し、その極限が列の取り方に依らないこと。言い換えると、無限体積の極限が一つに決まることです[初]。

**在るもの。**

- 紫外の極限（格子間隔を 0 にする極限）は、体積を止めれば切断の列の全体で取られています。構成の定理 `constructed`（`Construction.lean:15`）の結論に、列の全体（`Extraction.Sequence.full`）での位置の言明 `FullVolume.PositionsUV` が入っています[源]。公開の定理 `JointExistence`（`ChallengeSpec.lean:186`）でも、収束の欄 `Converges`（`PublicWilson.lean:85-90`）は、各体積で切断について列の全体の収束を求め、部分列になるのは体積の側だけです[源]。核と差分つきの強い形（`PositionsUV … Sequence.full`）は構成の定理 `constructed` にだけ在ります[源]。
- 無限体積の極限は、有界性と同程度連続性からの Arzelà–Ascoli で、部分列として取られています（`Extraction.first_surface`、`YM/Extraction/Lipschitz.lean:166`、`crops`、`YM/Extraction/Held.lean:136`）[源]。読み方は 12-05。
- 極限の一意性の補題 `Extraction.Order.unique`（`YM/Extraction/Orders.lean:70`）は、同じ部分列に沿う二つの極限が等しい、という Hausdorff 空間の一般の事実です[源]。体積の列の取り方に依らないことは言いません。宣言の使われ方の記録では、どの見出しの定理からも届きません（outside）[源]。

**無いもの。**体積を変えたときの差の評価、相関の減衰、極限の一意性の材料は、無限体積の極限を取る所に入っていません[源]。入力は有界性と同程度連続性の上界だけです。

体積の一意性と、相の分解（§04）の「成分ごとの真空の一意性」は別の問いです。前者は極限の測度の一意性、後者は一つの極限の中の成分ごとの真空の一意性です。

03

## 連続の確率測度

**要るもの。**超関数の空間（あるいは接続の空間の適切な商）の上の確率測度で、そのモーメントが構成の Schwinger 関数になるもの[初]。Wilson ループのような非局所の観測量を扱う土台にもなります。

**在るもの。**構成の対象は、局所場の札で添字づけた相関関数の表（`Table`）と、そこから作る Osterwalder–Schrader の空間です[推]（読み方は 12-08）。格子の側では、各格子間隔・各体

積の Wilson の測度は確率測度として定義されています（`YM/Wilson/Law.lean:87` の `law`）源。

**無いもの**。連続の理論の確率測度の定義は見つかっていません推（名前の検索の範囲）。格子の測度の列の極限を測度として取る言明も、極限の測度に名前を付ける定義もありません。固定した粗い段の有効な密度については、その列の収束までは在ります（16-03）。

04

## 一様な質量ギャップ

**要るもの**。ある $m > 0$ があって、再構成したハミルトニアン $H$ のスペクトルが真空の外で $[m, \infty)$ に入ること。同じことを相関の言葉で言えば、二点の相関が距離について率 $m$ 以上で指数的に減ること（4-11）。極限が成分（相）に分かれるなら、その $m$ が成分に一様であることも要ります初。

**在るもの**。

- **相に一様な多項式の評価**。有限の語 $w$ について、全ての相 $i$ と $u \in (0, 1]$ で、エネルギー $(0, u]$ のスペクトルの重みが $\leq M\, u^2$（`EveryPhase.light_bound`、`YM/EveryPhase/Light.lean:221`）。熱の半群について、全ての相と $s \geq 1$ で $0 \leq \langle A, (e^{-sH} - P_0) A \rangle \leq M\, s^{-2}$（`EveryPhase.inverse_square`、`YM/EveryPhase/Decay.lean:173`。$P_0$ は零エネルギーの空間への射影）源。定数 $M$ は相に依りません。
- **成分ごとの真空の一意性**。相の分解の各成分で、零エネルギーの空間が真空の倍数だけからなること（`UniqueHeat`、`YM/Phase/Mixture.lean:35`）が、全ての成分で言われています（`EveryPhase.every`、`YM/EveryPhase/Vacuum.lean:146`）源。速さ（率）は付いていません。

多項式の評価の出どころは、局所可換性から来る遠方の評価（`EveryPhase.late`、`YM/EveryPhase/Light.lean:208`）です源。$u^2$ の重みの評価は、スペクトルが 0 まで続く理論とも両立する形で、質量ギャップを含みません推。言い換えると、質量ギャップの問いは「この $u^2$ の重みを、ある $m$ 以下で 0 にする」ことです推。

**無いもの**。指数の減衰の言明（率つきのクラスター性、スペクトルのギャップ）は見つかっていません源（名前の検索の範囲）。

05

### Wilson ループと面積則

**要るもの**。(a) 連続の理論で Wilson ループの観測量（閉じた曲線に沿う平行移動の跡）を定義すること。格子では道に沿うリンクの積で書けますが、連続では接続そのものが超関数なので、正則化と極限の議論が要ります。(b) それを局所場（構成の基本の観測量）と結ぶこと。(c) 大きいループで期待値が囲む面積について指数的に小さくなること（面積則）初。

**在るもの**。格子の道に沿う平行移動 `Lattice.travel`（`YM/Lattice/Path.lean:105`）と、その連結・逆向き・ゲージ変換の補題が在ります源。格子の上で Wilson ループを書く材料はこれです。繰り込みの一段の確率核の予測子も、枠つきの平行移動から作られています（9-04）源。

**無いもの**。連続のループの観測量、面積則、ループと局所場の関係は見つかっていません推（名前の検索の範囲）。格子の Wilson の測度は周期のトーラスの上だけで定義されていて源、't Hooft の捩れのような別の境界条件や、渦の自由エネルギーに当たる量は見つかっていません推（名前の検索の範囲）。

この本の検討には、格子の上の強結合の窓での面積則（20-06）と、捩れた境界条件の渦の比の評価（第 21 部）があります。どちらも格子間隔を止めた言明で、この問いの (a)〜(c) に答えるものではありません。位置づけは 16-04 で述べます。

06

### 一粒子の状態

**要るもの**。質量 $m$ の孤立したスペクトルの殻（エネルギー運動量の $p^2 = m^2$）を持つ部分空間と、そこから散乱の状態を作る道具（Haag–Ruelle の型）初。普通は質量ギャップ（§04）を前提にします。

**在るもの**。一点の挿入の状態とスペクトル表示を扱うモジュール（`YM/TraceExtension/Damping.lean`、題は「Single insertion point states and spectral representation」）が在ります源。説明文は「質量ギャップや錐の台の結果は仮定しない」と書いています源。これが一粒子の解析の準備に当たるかは確かめていません推。

**無いもの**。一粒子の状態の定義、孤立した殻、散乱の状態は見つかっていません推（名前の検索の範囲）。

07

## 一覧（表 1）

| 問い | 要るもの | コードの側に在るもの | 無いもの |
|---|---|---|---|
| 収束と一意性 | 体積の列の全体での収束、極限の一意性 | 紫外（切断）は公開の定理でも列の全体、無限体積は Arzelà–Ascoli の部分列 源 。核と差分つきの強い形は `constructed` にだけ 源 。同じ部分列の上の一意性 `Order.unique` 源 | 体積を変えた差の評価、減衰、一意性の材料 源 |
| 連続の確率測度 | Schwinger 関数をモーメントに持つ測度 | 相関関数の表と再構成の空間 推 。格子の Wilson の測度 源 | 連続の測度の定義 推 （名前の検索の範囲） |
| 一様な質量ギャップ | 指数の減衰、スペクトルのギャップ、成分に一様な率 | 相に一様な多項式の評価 $u^2 \cdot s^{-2}$ 源 。成分ごとの真空の一意性（率なし） 源 | 指数の減衰の言明 源 （名前の検索の範囲） |
| Wilson ループと面積則 | 連続のループの観測量、局所場との関係、面積則 | 格子の道の平行移動 `travel` 源 | 連続のループ、面積則 推 （名前の検索の範囲）。周期のほかの境界条件 推 （名前の検索の範囲） |
| 一粒子の状態 | 孤立した殻、散乱の状態 | 一点の挿入の状態とスペクトル表示の道具 源 | 一粒子の状態の定義 推 |

表 1　五つの開いた問いと、コードの側の準備。問いの文は評価書 §8 評 。

08

## 読み方の注意

- **「無い」の意味**。名前・説明文（moddoc）・宣言の使われ方の記録を検索して見つからなかった、という意味です。別の名で同じ中身が在る可能性は除けません。
- **「在る」の水準**。在るものは「委員会が Lean で証明されていると評価した」ものの一部で、この本の検討は言明の形を読んだだけです。どの宣言が公開の定理の依存の鎖に入っているかは、鎖を辿って確かめたものだけをそう書きます（6-02）。この章で挙げた宣言の多くは、鎖を確かめていません。
- **問いどうしの関係**。3（質量ギャップ）は 1（一意性）と結びつきます。率つきのクラスター性は、普通は極限の一意性を導く道具になります 推 。5（一粒子）は普通 3 を前提にします。4（面積則）と 3 は別の言明で、一方から他方を導く一般の議論は知られていません 推 （16-09）。
- **この章は答えていない**。どの問いについても、この本は答えを示していません。この本の検討の持ち札と、問いとの距離は 16-03・16-04 で述べます。帯について本書の検討が試した発想の地図は 16-11 に在ります。

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 評 評価書は存在の構成を認め、無限体積の一意性と質量ギャップは証明されていないと書く。§8 の五つの問い | 評価書の判断の当否 |
| 源 公開の定理でも、紫外（切断）は列の全体、無限体積は部分列（`Converges`、`first_surface`・`crops`）。核と差分つきの強い形は構成の定理 `constructed` にだけ在る | 体積の一意性への道 |
| 源 相に一様な多項式の評価（`light_bound`・`inverse_square`）、成分ごとの真空の一意性（`UniqueHeat`・`every`）、格子の平行移動（`travel`）、一点の挿入の状態の道具（`TraceExtension/Damping.lean`）が在る | これらが公開の定理の依存の鎖に入っているか（確かめていない） |
| 推 連続の確率測度・連続の Wilson ループ・面積則・周期のほかの境界条件・一粒子の状態は見つからない。$u^2$ の評価は質量ギャップを含まない | 別の名で在る可能性の除外 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 五つの開いた問い、冒頭の判断 | 評 | 評価書（`yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`、2026-11-10）冒頭と §8 |
| 公開の定理・構成の定理 | 源 | `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）：`ChallengeSpec.lean:186` `JointExistence`、`Construction.lean:15` `constructed` |
| 無限体積の部分列と一意性の補題 | 源 | `YM/Extraction/Lipschitz.lean:166` `first_surface`、`YM/Extraction/Held.lean:136` `crops`、`YM/Extraction/Orders.lean:70` `unique` |
| 多項式の評価・真空の一意性 | 源 | `YM/EveryPhase/Light.lean:208` `late`・`:221` `light_bound`、`YM/EveryPhase/Decay.lean:173` `inverse_square`、`YM/Phase/Mixture.lean:35` `UniqueHeat`、`YM/EveryPhase/Vacuum.lean:146` `every` |
| 格子の平行移動・Wilson の測度・一点の挿入 | 源 | `YM/Lattice/Path.lean:105` `travel`、`YM/Wilson/Law.lean:87` `law`、`YM/TraceExtension/Damping.lean`（説明文） |
| 問題文 | 典 | A. Jaffe, E. Witten（Clay 数学研究所の公式の問題文）。0-03 |

**この章で使った語** — 開いた問い・無限体積の極限・一意性・部分列・確率測度・Schwinger 関数・質量ギャップ・スペクトルのギャップ・相の分解・真空の一意性・Wilson ループ・面積則・一粒子の状態。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：16-03 公開された構成の赤外の端 — 構成が止まる所（格子間隔 1 の段）で、何が言われ何が言われていないかを読みます。

# 公開された構成の赤外の端

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§05・§06 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 公開された構成の繰り込みの段の列がどこで終わるか、そこで何が言われているかを読みます。全ての段は弱結合の帯の中で運ばれ、最も粗い段は格子間隔 1 で、そこでの結合は大きい基準値 $\bar{\beta}$ に合わせてあります。その段の有効な密度は、体積を止めれば切断の列の全体で一様に収束します。一方、その極限の測度は対象として定義されておらず、鏡映正値性・粗い Wilson ループとの関係・体積に一様な評価・より粗い尺度への繰り込みは言われていません。残る問いを「格子間隔 1 の段の有効な理論の、長い距離の問い」と言い直すことは方向としては正しい見込みであること、ただしそう断定するには足りない言明が在ることを、正確に並べます。

**前提となる章** — 16-02 五つの開いた問い、8-02 間隔の列・体積の列、9-01 ブロックの核、11-10 固定した段の収束と、段を外す一段。

**先に言うこと** — 公開された構成の結果は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」水準で引き、この本の検討が確かめたのは源の定義と言明の形を読んだことまでです。「言われていない」は検索した範囲で見つからない、という意味です。この章は、残る問いの形を述べるもので、その問いに答える道を示すものではありません。

この章の順序

1. 段の地図 — 全ての段は弱結合、段 0 は間隔 1 — 結合の帯と基準値
2. 段 0 の有効な密度と、その収束 — 切断について一様、列の全体
3. 相関は細かい段から読む — 段 0 は単位を決める所
4. 段 0 の対象について言われていないこと — 五つ
5. 残る問いの言い直し — 正しい所と足りない所 — 方向、正確でない点、足りない言明
6. 弱結合から強結合へ — この本の「移り変わりの帯」との対応
7. この章が言っていないこと

**札** — 源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による（くわしくは 6-00 の「札」）。初・典・機・読・仮・Lean は本全体の札で、読 は本書の数値の読み、Lean は本書の Lean の定理です。 出典：`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）の相対パス・宣言の名・行、評価書は `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）。

01

## 段の地図 — 全ての段は弱結合、段 0 は間隔 1

構成は、切断 $N$（最も細かい段）の Wilson 測度から始めて、確率核による繰り込みの一段（9-01）を $N$ 回かけ、段 $N, N-1, \dots, 0$ と粗くしていきます。

- **格子**。段 $m$ の格子は一辺 $L_p \cdot D_m$ の周期の格子で、格子間隔は $a_m = 1/D_m$ です（`Schedule.side`、`YM/Lattice/Scale.lean:67`）源 。段 0 は一辺 $L_p$、格子間隔 1 で、最も粗い段です。体積 $L_p$ は段 0 の単位で測ります源 。
- **結合**。全ての段 $m \le N$ で、段 $m$ の結合 $\beta(N,p,m)$ は帯 $[\hat\beta_m/2,\, 2\hat\beta_m]$ に入ります（帰納の仮定の欄 `Conv.band`、`YM/RG/History.lean:218`）源 。$\hat\beta_m$ は基準値 $\bar\beta$ に一ループの走り $s\log(1/a_m)$ を足した値で（`Calendar.hatBeta`、`YM/RG/History.lean:79`、`scale`、`YM/Lattice/Scale.lean:115`）、段 0 では $a_0 = 1$ なので $\hat\beta_0 = \bar\beta$ です源 。$s$ は一ループの傾きで、値は $11C_g/(24\pi^2)$ です（`slopeConstant`、`YM/Gauge/Colors.lean:184`）源 。
- **段 0 の合わせ**。全ての $N, p$ で $\beta(N,p,0) = \bar\beta$ です（`Selected.reaches`、`YM/RG/History.lean:239`）源 。各切断の裸の結合は、射撃法でこの条件を満たすように選ばれます（10-04）。

**基準値の大きさ**。基準値 $\bar\beta$ は、構成の記録（`Paid.bar`、`YM/Price/Intent.lean:148`）で障壁の値 `Bar.value` に等しいと置かれ、障壁には「全ての $x \ge \bar\beta$ で $x^{-1/2}e^{(\log\log x)^2} \le 1$」という条件が課されています（`Bar.threshold`、`YM/Price/Intent.lean:127`）源 。この条件だけから、$\bar\beta$ はおよそ $9\times10^5$ 以上（境目は $8.97\times10^5$）と出ます読 （不等式が以後の全ての $x$ で成り立つ境目 $x \approx 8.97\times10^5$ の浮動小数の計算）。もう一つの条件は、入口の値 `betaEntry`（同 `:116`）が $\bar\beta$ 以下であること（同 `:126`）ですが、入口の値は源に式も数も無く、存在だけです源 。どの段の結合も $\hat\beta_m/2 \ge \bar\beta/2$ 以上なので源 、**どの段も弱結合の帯の中にあり、強結合の領域は通らない**と読めます推 。これは構成の設計の選びで、強結合の側の困難（どの帯でも同じ定数で効く評価が無いこと）を避ける形になっています推 。

02

## 段 0 の有効な密度と、その収束

**密度**。切断 $N$・体積 $p$ の段 $m$ の有効な密度 $\mathrm{eval}_{N,p,m}$ は、段 $m$ の粗い格子の配位の上の関数で、0 以上、基準の測度（リンクごとの Haar の確率測度の積）での積分は分配関数 $Z_N$ に等しい（`History.partition_eq`、`YM/RG/History.lean:242`）源。段の間は、段 $m+1$ の結合 $\beta(N,p,m+1)$ を使う確率核での押し出しの等式で結ばれます（`Transfer`、`YM/RG/History.lean:223`）源。測度の言葉で言えば、正規化した $\mathrm{eval}_{N,p,m}/Z_N$ は、裸の Wilson 測度を核で $N-m$ 回押し出した確率測度の密度です推（三つの等式を組んだもの。測度の等式という形の言明はありません）。

核は $\beta(N,p,m+1)$ に依るので、この押し出しは「固定した写像で Wilson 測度を送ったもの」ではなく、写像そのものが $N$ とともに動きます源。

**切断についての一様な収束**。段 $m$ と体積 $p$ を止め、真空の定数 $e^{-v|\Lambda|}$ を外した密度 $\mathrm{coals}_N$ を $N$ の列と見ると、

- 配位の空間の上の sup ノルムで一様に有界かつ一様に Cauchy（`FullVolume.Retreat.Flux.fanned`、`YM/FullVolume/Fields/Cement.lean:50`）源。
- その積分（規格化の定数）も Cauchy（`Flux.lacks`、同 `:56`）源。
- 構成の中では、これが全ての段 $m \geq 0$（段 0 を含む）・全ての $p$ で、切断の列の全体について（部分列なしで）出ています（`sees`、`YM/FullVolume/Fields/Filled.lean:30`）源。

正規化した密度 $\mathrm{eval}/Z_N$ の一様な収束は名前のついた言明としてはありませんが、分子の一様な Cauchy、分母の Cauchy、分母の $N$ に依らない正の下界（`lingers`、`YM/FullVolume/Fields/Till.lean:20`）から一行で出ます推。配位の空間はコンパクトで基準の測度は確率測度なので、sup ノルムの収束は全変動の収束を含み、弱収束より強い収束です推。

03

## 相関は細かい段から読む

連続の相関は、段 0 からではなく、細かい段 $j$ から読まれています。段 $j$ の表示の上で観測量の段 $j$ の像を使って計算した値と、真の格子の相関の差は、$N$ に依らない量で押さえられ（`Sever.echoes`、`YM/FullVolume/Fields/Peat.lean:42`）、点の隔たりの条件のもとで $j \to \infty$ で小さくなります源。これと固定した段 $j$ での Cauchy（`latter`、`YM/FullVolume/Fields/Timber.lean:58`）を組んで、真の格子の相関が $N$ について Cauchy になります（`arrives`、同 `:74`）源。

この筋の中で、段 0 は「$\bar{\beta}$ で単位を決める所」で、相関の評価には使われていません[推]。段 0 より長い距離は、体積 $L_p$ を段 0 の単位で置き、無限体積の極限を部分列のコンパクト性で取るだけです（12-05）[源]。

04

## 段 0 の対象について言われていないこと

1. **極限の測度**。段 0（あるいは任意の段）の測度の $N \to \infty$ の極限は、対象として定義されていません。極限の密度や極限の表示に名前を付けた定義は見つかっていません[源]（名前の検索の範囲）。在るのは、表示の材料（結合・活動・道のデータ）が $N$ について Cauchy、あるいはある極限へ収束する、までです[源]。極限が同じ形の表示を持つこと、段の間で整合することも言われていません。

2. **鏡映正値性**。鏡映正値性の言明（`Slice.reflected_positive`、`YM/Slice/Reflection.lean:98`）は、裸の Wilson 測度についてだけです[源]。段 0 の押し出しの測度の鏡映正値性は言われていません[源]（名前の検索の範囲）。核の支えは鏡の面をまたぐ大きさを持ちうる（`fitsPatch`、`YM/RG/History.lean:110`）ので、押し出しが鏡映正値性を自動では継がない、と推します[推]。

3. **粗い Wilson ループとの関係**。段 0 の配位の Wilson ループと、細かい場（あるいは連続）の Wilson ループの関係は言われていません[源]（名前の検索の範囲）。粗いボンドは、枠つきの平行移動からの予測に揺らぎを掛けたものなので（`connector`、`YM/RG/Block.lean:39`）、粗いループは「太い道の平行移動と揺らぎ」に近い、と推します[推]。

4. **体積に一様な評価**。段 0 の対象の評価は、規格化の定数の下界（`till`、`YM/FullVolume/Fields/Till.lean:9`）や差の評価の定数（`refreeze`、`YM/FullVolume/Fields/Flight.lean:28`）のように、格子の点の数 $|\Lambda|$ の指数を含み、体積 $p$ に一様ではありません[源]。体積に一様な評価として読めたのは、Wilson の測度の側のチェス盤の根で測った観測量の大きさ（`Extraction.Wcmain`、`YM/Extraction/Center.lean:38`。読み方は 12-02）などで、段 0 の測度の評価ではありません[源]。一段の帳簿そのもの（活動のノルムと縮小の定数）は点ごとの和で、体積に依りません[源]。

5. **より粗い尺度への繰り込み**。段の番号は自然数で、段 0 が最も粗い段です。段 0 より粗い尺度へ繰り込みを続ける定理は見つかっていません[源]（名前の検索の範囲）。名前に紫外の拡張を持つモジュール群（`YM/Extension/UV/`）は紫外の側の別の道で、粗い側への継続ではありません[源]（説明文）。

05

## 残る問いの言い直し — 正しい所と足りない所

評価書の開いた問いのうち、無限体積の一意性・質量ギャップ・面積則（16-02 の 1・3・4）は、どれも長い距離の振る舞いの問いです。それらを「段 0 の有効な格子の理論（結合は大きい $\bar{\beta}$、格子間隔 1）の、$L_p \to \infty$ での長距離の問い」と言い直すことを考えます。

**源から読める事実**源 。

- 全ての段が弱結合の帯のまま運ばれ、段 0 で $\beta = \bar{\beta}$ です。
- 体積 $L_p$ は段 0 の単位で測られます。
- 格子間隔 1 より長い距離の振る舞い（指数の減衰、面積則、体積の極限の一意性）は、どの定理でも扱われていません源 （名前の検索の範囲）。

これらの事実を根に、残る問いを「段 0 の理論（$\bar{\beta}$ は大きく、$L_p \to \infty$）の、長い距離での問い」と言い直すのは、方向として正しい見込みです推 。その段の結合は弱結合の側にあるので、さらに「間隔 1 の有効な格子の理論を、弱結合から強結合まで追う問い」と言い直せる、というのは本書の推し量りです推 。

どちらも断定はできません。段 0 の理論は Wilson の作用の理論ではなく、切った作用・活動・道のデータからなる表示つきの有効な作用の理論で、$\bar{\beta}$ はその表示の中の係数です。表示は一意ではありません源 。その測度の鏡映正値性も言われていません（§04）。書けるのは「残る問いの主な部分は、段 0 の有効な理論の、長い距離での指数の減衰に寄せられる見込み」までです推 。

**ただし正確でない所。**

- (a) 連続の相関は、段 0 の測度だけの関数ではありません。真の相関は、観測量を差し込んだ密度の押し出しとしては段 0 に送れますが、段 0 の測度の期待値として書くには、観測量の段 0 での像が要ります源 。
- (b) 観測量の段 $m$ への像の収束（`Rising.hail`、`YM/FullVolume/Fields/Capital.lean:57`）は、観測量ごとの基準の段以上の $m$ でだけ言われています。基準の段が 0 より上の観測量は、段 0 での像が扱われていません源 （仮定の欄）。
- (c) 細かい段と真の相関の差の評価（§03）は $j \to \infty$ の向きでだけ使われ、段 0 での読み出しの誤差は小さくありません源 。

**言い直すのに足りない言明**（§04 と同じ根）。

1. 段 0 の測度の $N \to \infty$ の極限の存在と名前。§02 の収束から出る見込みですが[推]、言明はありません。
2. 段 0（あるいは任意の段）の押し出しの測度の鏡映正値性。核の支えのため自明ではありません[推]。
3. 粗い配位の Wilson ループと、細かい場（あるいは連続）の Wilson ループの関係。
4. 体積 $p$ に一様な、段 0 の対象についての評価。
5. 段 0 での観測量の像の極限（全ての次数）と、段 0 の期待値と連続の相関を結ぶ等式。

とくに 1（極限の対象）・4（体積に一様な局所の評価）・5（段 0 での観測量の像）の三つが無いと、「残る問いは段 0 の有効な理論の長距離の問いである」とは言明できません。五つが揃えば、残る問いを「名前のついた一つの格子の測度の族についての問い」として言明できます。揃わないうちは、言い直しは方向の目安です。

06

## 弱結合から強結合へ

段 0 の結合 $\bar{\beta}$ は大きく（弱結合）、閉じ込めや質量ギャップが見える長さは、その段の単位でもさらにずっと先にあると見込まれます[推]。一ループの走りを段 0 より粗い側へ形式的に延ばすと、結合が 1 の程度になる長さは段 0 の単位で $e^{\bar{\beta}/s}$ の程度です[推]（外挿で、構成の言明ではありません）。そこへ行くには、段 0 からさらに粗い側へ、強結合の領域に入るまで流す新しい段が要ります[推]。その入口に要るのが、§05 の 1〜3（極限の測度、鏡映正値性、粗い Wilson ループとの関係）です[推]。言い直しを言明にするのに要る三つ（§05 の 1・4・5）とは別の組です。

この本は、弱結合と強結合をつなぐ途中の領域を「移り変わりの帯」と呼んできました（26-00）。残る問いを上のように言い直してよいなら、それはこの帯を越える問いに当たります[推]。この本の検討の持ち札は帯の両端に在り、間は開いたままです（16-04）。

注意を一つ。この本の検討の繰り込み（決定的なブロック写像の押し出し、19-04）と、公開された構成の押し出し（結合に依る確率核）は、対象が似ていても同じではありません。片方の収束から他方の収束は出ません[推]。

07

## この章が言っていないこと

- 段 0 の理論の長距離の振る舞いについて、何も示していません。

- §05 の五つの言明が成り立つとも、成り立たないとも言いません。2 については自明でない、と推すだけです。
- 「言われていない」は検索した範囲の結果です。別の名で同じ中身が在る可能性は除けません。
- 公開された構成の証明の当否は、委員会の評価の水準のままです。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 全ての段の結合は帯 $[\hat{\beta}_m/2, 2\hat{\beta}_m]$、段 0 は格子間隔 1 で $\beta = \bar{\beta}$（`Conv.band`・`Selected.reaches`・`Schedule.side`） | $\bar{\beta}$ の陽な値（条件から、およそ $9 \times 10^5$ 以上 読、入口の値は存在だけ） |
| 源 段 0 を含む各段の有効な密度が、体積を止めて切断の列の全体で sup ノルムで一様に Cauchy、規格化の定数も Cauchy（`Flux.fanned`・`lacks`・`sees`） | 体積に一様な収束 |
| 推 正規化した密度の全変動の収束は一行で出る | 名前のついた言明としての形 |
| 源 極限の測度・その鏡映正値性・粗い Wilson ループとの関係・段 0 の対象の体積に一様な評価・段 0 より粗い繰り込みは、検索の範囲で言われていない | 別の名で在る可能性の除外 |
| 源 全ての段が弱結合の帯の中、段 0 で基準の値、体積は段 0 の単位、間隔 1 より長い距離はどの定理でも扱われない（名前の検索の範囲）。推 それを根に、残る問いを「段 0 の理論の長距離の問い」と言い直すのが方向として正しい見込み。さらに「弱結合から強結合まで追う問い」と言い直せる。言明にするには五つの言明が足りない | その問いへの答え |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 段の格子・結合の帯・段 0 の合わせ・密度の質量・押し出し | 源 | `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`：`YM/Lattice/Scale.lean:67` `side`、`YM/RG/History.lean:218` `Conv.band`・`:223` `Transfer`・`:239` `Selected.reaches`・`:242` `partition_eq`・`:110` `fitsPatch` |
| 密度の一様な収束 | 源 | `YM/FullVolume/Fields/Cement.lean:50` `Flux.fanned`・`:56` `lacks`、`Filled.lean:30` `sees`、`Till.lean:9` `till`・`:20` `lingers` |
| 細かい段からの読み出し | 源 | `YM/FullVolume/Fields/Peat.lean:42` `Sever.echoes`、`Timber.lean:58` `latter`・`:74` `arrives`、`Flight.lean:28` `refreeze`、`Capital.lean:57` `Rising.hail` |
| 鏡映正値性・チェス盤の根・粗いボンドの予測 | 源 | `YM/Slice/Reflection.lean:98` `reflected_positive`、`YM/Extraction/Center.lean:38` `Wcmain`、`YM/RG/Block.lean:39` `connector` |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
| --- | --- | --- |
| 開いた問い | 評 | 評価書（`yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`、2026-11-10）§8 |

**この章で使った語** — 繰り込みの段・格子間隔・結合の帯・基準値・確率核・押し出し・有効な密度・一様な Cauchy・全変動・鏡映正値性・チェス盤の根・移り変わりの帯。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：16-04 この本の位置 — この本の検討の持ち札が、弱結合と強結合のどちらの端に在るかを並べ、第三巻の読み方を案内します。

# この本の位置

この章は案内です。§02 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — この本の検討が Lean で機械検査した定理を、結合の軸の上に並べます。持ち札は両端に在ります。強結合の端には、無限体積の極限・（格子の単位の）質量ギャップ・面積則・渦の自由エネルギーの上界が、どの結合でも成り立つものとして渦の床・渦の比の性質が、弱結合の側には大きい面の稀さが在ります。間（移り変わりの帯）は開いたままです。最後に、第三巻の各部が何を扱うかを案内します。

**前提となる章** — 16-02 五つの開いた問い、16-03 公開された構成の赤外の端。

**先に言うこと** — ここに並べる定理はどれも格子間隔を固定した言明で、既知の型の結果の形式化です。連続極限も、問題文の意味の質量ギャップも示していません。公開された構成が扱っていない種類の言明が含まれますが、そのことは開いた問いに答えたことを意味しません。

この章の順序

1. 結合の軸の上の持ち札 — 表 1
2. 間は開いたまま — 移り変わりの帯で足りないもの
3. 公開された構成との重なりと違い — 同じ向き、違う種類
4. 第三巻の読み方 — 部ごとの一行と、三つの読む順
5. この章が言っていないこと

---

**札** — 源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による（くわしくは 6-00 の「札」）。初・典・機・読・仮・Lean は本全体の札で、読 は本書の数値の読み、Lean は本書の Lean の定理です。

01

## 結合の軸の上の持ち札

格子ゲージ理論の結合 $\beta$ を一本の軸と見ます。$\beta$ が小さい側が強結合で、閉じ込めと質量ギャップが既知の型の展開で示せる領域です（5-02）。$\beta \to \infty$ が弱結合で、連続極限はこちらの端で取ります（5-05）。この本の検討の定理を、この軸の上に置くと表 1 になります。

| 場所 | 定理 | 範囲 | 章 |
|---|---|---|---|
| 強結合の端 | 相関の指数的な減衰（定数に体積なし） | $18 \tanh \lvert\beta\rvert < 1$ など | 20-02 |
| | 無限体積の極限（部分列なし）・並進不変・クラスター性 | $\beta \neq 0$、$18 \tanh \lvert\beta\rvert < 1$ | 20-03 |
| | 再構成の器の質量ギャップ（格子の単位、下界） | 同じ窓 | 20-04 |
| | Wilson ループの面積則（有限体積・無限体積） | 有限の箱で $\beta < 1.135 \cdot 10^{-3}$（定数 441 の版）、無限体積で $\beta < 1.22 \cdot 10^{-4}$（定数 4096 の版。ほかに $\beta > 0$ と $18 \tanh \beta < 1$） | 20-06 |
| | 渦の自由エネルギーの上界（面積あたりの率が横の大きさに依らない。前の因子 $N^2$（横の面積）は残る） | 基本の版（定数 4096）で $\beta < 1.22 \cdot 10^{-4}$、鋭い版（定数 441）で $\beta < 1.135 \cdot 10^{-3}$ | 20-06 |
| どの結合でも | 鏡映正値性（三つの形） | 全ての実の $\beta$（形による） | 20-01 |
| | 薄い渦の床（率は横の大きさ $N$ に依る） | 全ての $\beta$ | 21-02 |
| | 太い渦の床・渦の最小作用 | 十分大きい $\beta$ ごとに（閾は存在だけ） | 21-03・21-05 |
| | $\theta$ の符号、Polyakov ループの対 | 縦 $M$ が偶数 | 21-06 |
| | 渦の比の連続・$\beta \to \infty$ の極限・合わせの最大の解・捩れた箱の欠けの下界 | 格子を止めて | 21-07 |
| 弱結合の側 | 大きい面の稀さ（体積に一様） | $\beta \geq 81$（陽な閾） | 22-01 |

表 1　この本の検討の確かな定理の置き場所。どれも格子間隔を固定した、既知の型の結果の、本書の Lean での形式化です[Lean]。窓の値は浮動小数の読みです[読]。

読み方を二つ添えます。

- **強結合の端は「示しやすい側」です。**ここでの質量ギャップと面積則は、問題文が求める連続の理論の質量ギャップとは別の言明で、連続極限が要る弱結合の端とは反対側にあります。
- **どの結合でも成り立つものは、横の大きさに一様でありません。**渦の床の率は横の大きさ $N$ を大きくすると 0 に近づきます（薄い床）か、閾が $N$ に依ります（太い床）。強結合の

窓の中に限れば、率が $N$ に依らない形が在ります。前の因子 $N^2$（横の面積）は残り、窓の外では一様な形はありません（20-06）。

02

## 間は開いたまま

無限体積の極限と質量ギャップの強結合の窓は $|\beta| < 1/19$（$\approx 0.053$。18 $\tanh|\beta| < 1$ の陽な十分条件で、窓そのものは $\operatorname{artanh}(1/18) \approx 0.0556$。20-03）、稀さの閾は $\beta \geq 81$ で、物理で興味のある帯（$\beta$ が 2〜3 ほど）はどちらにも入りません。この間を「移り変わりの帯」と呼んできました（26-00）。帯を渡るのに足りないものを、定義された対象だけで書いた言明として 19-07 に置いてあります（合わせ・全列の収束・非退化・同程度連続・一様な減衰・帯）。どれも、格子間隔と箱の大きさに**一様な**評価を求めるもので、この本の確かな定理（どれも一つの格子間隔の言明）からは出ません。帯について本書の検討が試した発想の地図は 16-11、帯の議論を試す相手の一覧は 26-12 に在ります。

公開された構成の側から見ても、残る問いは同じ場所に在ります。構成は全ての段を弱結合のまま運び、格子間隔 1 の段で止まります（16-03）。残る問い（質量ギャップ・面積則・一意性）の主な部分は、その段の有効な理論の、長い距離での指数の減衰に寄せられる見込みです[推]。ただし段 0 の理論は Wilson の作用ではなく表示つきの有効な作用の理論で（基準の結合 $\bar{\beta}$ はその係数、表示は一意でない）、その鏡映正値性も言われていません[源]。そう言明するには、極限の対象・体積に一様な局所の評価・段 0 での観測量の像の三つが要ります。この見込みのもとでは、両方の側から問いは帯の辺りに集まります[推]。

帯について、この本の検討が持っているのは条件つきの含意と前提の一覧です（27-01・28-04）。前提を満たすことは示していません。

03

## 公開された構成との重なりと違い

**同じ向きのもの**。格子の Wilson の測度の鏡映正値性とチェス盤の評価は、どちらにも在ります[源]。公開された構成は、元の Wilson の測度について、格子点を通る面と辺の中点を通る面の鏡映正値性を四つの軸の全てで（$\beta \geq 0$）持ち、チェス盤の根の三角不等式も持ちます[源]（12-01・12-02）。部分列の極限を取って性質を移す筋も同じ型です。

**公開された構成に見当たらない種類のもの**（検索の範囲で）。

- **大きい面の稀さ**。公開された構成はチェス盤の評価を観測量の大きさを測るのに使い、大きい面の集合の確率の評価には使っていません[推]（22-00）。

- **捩れた境界条件と渦の自由エネルギー**。公開された構成の Wilson の測度は周期のトーラスの上だけで定義され、捩れの言明は見つかっていません[推]（名前の検索の範囲）。
- **強結合の窓の中の質量ギャップと面積則**。公開された構成は強結合の領域を通らない（16-03 §01）ので、この種類の言明は無いと見られます[推]（名前の検索の範囲）。

この違いは、どちらが先に進んでいるかの比べではありません。公開された構成は四次元の連続の理論の存在を、委員会の評価として与えています[評]。この本の検討はそれを持ちません。逆に、上の三つは格子を止めた言明で、評価書の開いた問い（16-02）のどれにも答えていません。本書の強結合の結果（無限体積の極限・質量ギャップ・面積則・渦の床）は、残る問い（連続の理論の、一様な質量ギャップなど）とは**反対の端**（強結合、格子間隔は固定）の言明です。同じ種類の量を別の領域で扱うもので、開いた問いへの道を与えるとは言いません。

04

## 第三巻の読み方

| 部 | 題 | 扱うこと |
|---|---|---|
| 第 16 部 | 現在地と残る問い | 年表、開いた問い、公開された構成の赤外の端、この本の位置、切れ目・課題・誤解・七段の表・道具の地図 |
| 第 17 部 | 物理の側から | 閉じ込めの機構、弦の絵、大きい $N$、幾何としての質量ギャップ。数学の定理ではない見方の整理 |
| 第 18 部 | 二つの言葉の辞書 | 物理の語と数学の語の対応、この本の仮定を物理の言葉で |
| 第 19 部 | 対象と、示すべき言明 | 格子・Wilson の測度・捩れ・鏡映・ブロック写像の定義（Lean の定義つき）と、示すべき言明 |
| 第 20 部 | 確かな定理 — 器と強結合 | 鏡映正値性、強結合の減衰、無限体積の極限、再構成と質量ギャップ、フェルミオンつきの器、面積則 |
| 第 21 部 | 確かな定理 — 渦の床と Polyakov ループ | 符号の系、薄い・太い渦の床、渦の最小作用、θ の符号、渦の比の連続・極限・合わせ |
| 第 22 部 | 確かな定理 — 大きい面の稀さ | チェス盤の評価と、弱結合での体積に一様な稀さ |
| 第 23・24 部 | 一本目の道 — 時間の方向から | 緩和の時間と相関の長さから帯へ向かう検討の記録 |
| 第 25 部 | 二本目の道 — 空間の方向から | 捩れた小さなトーラスと閉じ込めから帯へ向かう検討の記録 |
| 第 26 部 | 移り変わりの帯 | 帯の正しい形、還元、構造だけでは越えられないこと、繰り込みとの比べ |
| 第 27 部 | 閉じる — 条件つきの言明 | 条件つきの言明と条件の台帳、問いと言わないことの索引 |

| 部 | 題 | 扱うこと |
|---|---|---|
| 第 28 部 | 前提の木 | 含意三つ、前提の一覧、設計の選びに依るもの、開いている所 |

表 2　第三巻の部。

**読む順の案。**

- **確かなことだけを知りたいとき。**第 19 部（対象）→ 第 20〜22 部（確かな定理）。各部の最後の章に「言えていること・言えていないこと」の表が在ります。
- **残る問いの形を知りたいとき。**この部（16-02〜16-04）→ 19-07（示すべき言明）→ 第 26 部（帯）→ 第 28 部（前提の木）。
- **動機から入りたいとき。**第 17・18 部（物理の見方と辞書）→ この部 → 第 20〜22 部。

第 23〜25 部は、帯へ向かう二本の道の検討の記録で、書き直していません。結論の多くは第 26〜28 部に集めてあります。

05

## この章が言っていないこと

- 質量ギャップの本体（連続の理論の、格子間隔に一様な質量ギャップ）について、何かを示したとは言いません。
- 表 1 の定理はどれも既知の型の結果の形式化で、新しさを主張しません。
- 公開された構成に「見当たらない」ものは検索の範囲の結果で、別の名で在る可能性は除けません。
- 帯の言明が正しいとも、どの道で示せるとも言いません。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| Lean 表 1 の定理（強結合の端・どの結合でも・弱結合の側）が Lean で機械検査されている。詳細は各章 | 格子間隔に一様な評価、連続極限、帯 |
| 源 鏡映正値性とチェス盤は両方に在る。推 公開された構成は強結合の領域を通らない（$\beta$ の大きさに依る） | — |
| 推 大きい面の稀さ・捩れた境界条件は公開された構成に見当たらない（名前の検索の範囲）。本書の強結合の結果は、残る問いとは反対の端の言明 | 残る問いへの答え・道 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 表 1 の定理 | Lean | 各章の出典の表（Osterwalder–Seiler、Dobrushin、't Hooft、Fröhlich–Israel–Lieb–Simon の型）と Lean の宣言 |
| 公開された構成の赤外と鏡映正値性 | 源 | `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）。在りかは 16-03 と 12-01 |
| 存在の構成の評価、開いた問い | 評 | 評価書（`yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`、2026-11-10）冒頭と §8 |

**この章で使った語** — 強結合・弱結合・移り変わりの帯・面積則・渦の床・渦の自由エネルギー・大きい面の稀さ・示すべき言明・前提の木。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：16-05 二つの掘り方の切れ目 — 本書の検討の二つの道がどこで切れているかを地図にします。確かな定理から読むなら 19-00 へ。

# 二つの掘り方の切れ目 — 七つの seam で、二本のトンネルの食い違いを見る

この章は未解決の問いの地図です。§05 は本書の検討です。

**この章で分かること** — 七つの切れ目それぞれの物理の一文・数学の言明・部分的な橋と、三つの型。二つの岸が数値からどれだけ離れているかを、局所的な量と質量で比べること（この端末の計算）。

**前提となる章** — 7-11 発散以外の障害と17-13 物理の掘り方が数学と離れる場所。道具は 4-10（反射正値性）・5-01（格子）・4-07（次元転移）。

**先に言うこと** — 切れ目を名指しする章で、どれも埋めていません。七つの数え方と型はこの本の整理です。本書の検討の記録が手を付けたのは「尺度は一つ」の切れ目の周りだけで、定理には届いていません。質量ギャップの存在も連続極限の構成も、この章は示しません。存在の切れ目には、2026 年に公開された構成が橋を架けました（委員会の評価[評]。第 6 部）。札[評]は委員会の評価書による、の意味です（6-00 の「札」）。

この章の順序

1. 二つの掘り方 — 存在からか、値からか。壁の対訳表（六つの障害と七つの手つき）
2. 切れ目の地図 — 七つと三つの型（表 1）
3. 前提が目標になる型 — 存在・尺度は一つ
4. 極限と一様性の型 — 岸・有限と無限・余剰次元
5. 岸のあいだを測る — プラケットと質量（図 1・計算）
6. 同じ語が別のものを指す型 — 時空と空間・粒子
7. 二つの一覧を重ねる — 部分的な橋

---

01

## 二つの掘り方

この問題には掘る向きが二つあります（0-02）。数学は「理論はまだ無い」から出発して六つの段（7-01）を順に通し、物理は「理論は在る」から出発してその中の量を計算します。比喩で言えば同じ山を両側から掘る二本のトンネルで、正確には、片方の文をもう片方へそのまま渡せない場所がある、ということです。数学の目標は次の形です（0-03）既知 。

$$\forall G \;\; \exists \mathcal{T}_G : \;\; \text{公理} \;\wedge\; \text{非自明} \;\wedge\; \text{短距離で漸近自由と一致} \;\wedge\; \operatorname{spec}(H) \subset \{0\} \cup [\Delta_G, \infty), \;\; \Delta_G > 0 \tag{0-1}$$

$G$ はコンパクト単純群、$\mathcal{T}_G$ は $\mathbb{R}^4$ 上の量子ヤン–ミルズ理論、$H$ はそのハミルトニアンです。物理の文「$\mathcal{T}_G$ で量 $Q$ を計算すると $q$」は $\exists \mathcal{T}_G$ を前提に含みます。物理の一文 $P$ を数学の言明 $M$ に訳して、訳が定理にならない場所を**切れ目**（seam）と呼びます。

$$\text{切れ目} = (P, M) : \quad P \text{ は物理で使われている}, \quad M \text{ は定理でない、または } P \text{ と別のものである} \tag{0-2}$$

例：$SU(2)$ の $m_{0^{++}}/\sqrt{\sigma} = 3.844(61)$（Lucini–Teper 2001）物理 は、物理では予言、数学では構成した理論が合わせるべき的です（17-13 §01）。

### 壁の対訳表 — 数学の六つの障害と、物理の七つの手つき

表 1 の切れ目は、両側の一覧の行を対にして作りました。その前に、行どうしを名前で対訳しておきます。左は 7-11 表 4 の六つの障害、右は 17-13 表 5 の七つの手つきです。決まり文句は、それぞれの側がその壁を指して言う言い回しです。片側にしか無い行があります。

**対訳表**　壁の名前（対応の付け方はこの本の整理）

| 数学の名前（7-11） | 物理の名前（17-13） | 決まり文句（数学／物理） | 片側にしか無いか |
|---|---|---|---|
| 障害 1 赤外に小さな径数が無い | 隣の理論へ移り、つまみで戻る・小さい径数の側から見る | 「結合が $O(1)$ の尺度を渡る一様な評価が無い」／「$\Lambda$ より下は非摂動的」 | 両側 |
| 障害 2 摂動論に映らない | 小さい径数の側から見る・一つと見なす | 「$e^{-c/\alpha}$ のテイラー係数はすべて 0」／「$\Delta = c\Lambda$」 | 両側 |
| 障害 3 自由場に潰れないこと | 在ると置いてから測る | 「極限が自由場でないことを示す」／「理論は在る」 | 両側 |
| 障害 4 状態空間が曲がっている | ゲージを選んでから見る | 「大域的なゲージ固定は無い」／「ゲージを固定して計算する」 | 両側（表 4 の「表の外：ゲージ」） |
| 障害 5 反射正値性を保つ正則化が乏しい | — | 「正値性を保つ正則化」／— | **数学の側だけ**。物理の数値計算は、正値性を失う改善作用も使う（18-04 の「改善作用」の項） |

| 数学の名前（7-11） | 物理の名前（17-13） | 決まり文句（数学／物理） | 片側にしか無いか |
|---|---|---|---|
| 障害 6 無限自由度の構造 | — | 「表現が同値でない（Haag の定理）」／— | **数学の側だけ**。物理の摂動計算は相互作用表示を使って進む |
| — | 弦の絵で σ を取る（§03・§04） | —／「弦が張る・面積則」 | **物理の側だけ**。閉じ込め（面積則）は問題文の要求の外で、拡張問題（17-02） |
| —（六つの外：紫外の側） | 有限の β から外挿する | 「連続極限の構成」／「$a^2$ で外挿する」 | 7-11 の六つには無い。数学では紫外の側の問題（7-07・7-10） |

両側にある四行は、同じ壁を別の言葉で呼んでいます。片側にしか無い行は、その側の言葉では壁として見えない場所です。正値性と表現の同値性は、物理の手順では問われずに通り過ぎ、面積則は、数学の問題文では問われずに通り過ぎます。この対訳を切れ目に組み直したものが表 1、部分的な橋まで並べたものが §07 の表 4 です。

02

## 切れ目の地図 — 七つと三つの型

表 1 に七つの切れ目を並べます。数学の順（存在→公理→ギャップ）と物理の順（値→機構）は向きが逆なので、同じ位置の段どうしは対応しません。比喩で言えばトンネルの食い違いで、正確には、一方の側の前提が他方の側では最後の段の目標になる、ということです。

表 1　七つの切れ目（分け方と型はこの本の整理）

| 切れ目 | 物理の一文 | 数学の言明 | 型 |
|---|---|---|---|
| 1 存在の前提 | 理論は在ると置き、その中の量を計算する | 公理を満たす極限を、部分列でなく作る | 前提が目標になる型 |
| 2 尺度は一つ | 質量も弦張力も一つの Λ の定数倍 | 式 (5) が β に一様に成り立つ | 前提が目標になる型 |
| 3 岸が違う | g→0・β 小・N→∞ の側で計算する | 有限の N で、すべての尺度を制御する | 極限と一様性の型 |
| 4 有限と無限 | 有限の箱で測り、$a^2$ で外挿する | 体積に一様な隙間（Chatterjee の格子の相関長の問題、Problem 5.1） | 極限と一様性の型 |
| 5 時空と空間 | 粒子が飛び、因果がある時空で考える | ユークリッドの測度から反射正値性で戻る | 同じ語が別のものを指す型 |
| 6 「粒子」という語 | ギャップは最も軽いグルーボールの質量 | スペクトルの隙間（孤立した一粒子状態は拡張問題） | 同じ語が別のものを指す型 |
| 7 余剰次元 | 葉巻の幾何でギャップを出す | R→0（λ→0）の極限と、極限の入れ替え | 極限と一様性の型 |

**前提が目標になる型**は物理の前提が数学の目標になる切れ目、**極限と一様性の型**は物理が径数 $p$ の特定の値（岸）で計算し、数学は $p$ を問題文の値 $p_*$ へ動かす極限を要る切れ目、**同じ語が別のものを指す型**は同じ語が別の対象を指す切れ目です。極限と一様性の型は次の形です。

$$\text{物理：}\ F(p_{\text{岸}})\ \text{を計算},\qquad \text{数学：}\ \lim_{p\to p_*} F(p)\ \text{の存在と、}\ \inf_{p}\Delta(p)>0\ \text{のような一様な評価} \tag{3}$$

例：有限と無限の切れ目では $p=L$（箱の一辺）で $p_*=\infty$、余剰次元の切れ目では $p=R$（余剰次元の大きさ）で $p_*=0$ です。

以下の節は型ごとに並べます（前提が目標になる型が 1・2、極限と一様性の型が 3・4・7、同じ語が別のものを指す型が 5・6）。

03

## 前提が目標になる型

### 存在の前提の切れ目

物理の計算は理論（測度とヒルベルト空間）が在ることの上に立ち、数学はその存在を作らなければなりません。作る途中では質量も弦張力も定義されていません。問題文は 'one does not yet have a mathematically complete example of a quantum gauge theory in four-dimensional space-time, nor even a precise definition' と書きます 既知 。数学は $\exists\mathcal{T}$ を、格子間隔 $a$・一辺 $L$ の近似 $\mu_{a,L}$ の極限として示します。

$$\mu=\lim_{L\to\infty}\lim_{a\to 0}\mu_{a,L}\qquad\text{(部分列でなく、極限そのものが在って一つに決まる)} \tag{4}$$

コンパクト性による部分列の極限（弱い存在）だけでは解と認めない、と問題文は §6.5 の脚注 2 に書きます（別の手法で極限の性質を確立するなら別） 既知 。例：二次元は $\mathbb{R}^2$ の測度まで作られ（7-02）、三次元は 'a construction of the 3D YM measure and a description of its gauge-invariant observables, even on $T^3$, remains open'（Chevyrev 2022） 既知 、四次元は、2025 年までは有限体積の紫外安定性が仮定つきで得られた段階でした（7-07）。

2026 年に公開された構成は、四次元の Wilson の格子ゲージ理論の極限として、任意のコンパクト単純群で Wightman の公理を満たす理論を作りました。委員会はこれを「Lean で証明されている」と評価しています 評 （6-00）。式 (4) の内側の極限 $a\to 0$ は、周期の箱を止めて切断の列の全体で取られ、外側の極限 $L\to\infty$ はコンパクト性による部分列です（8-05・12-05）。無限体積の極限の収束と一意性は示されていない、と評価書は書きます 評 （16-02 §02）。この構成が脚注 2 の意味で何に当たるかを、この章は判定しません。物理の側から見れば、この切れ目の「理論が在る」の半分が、数学の言明になりました。残るのは、その理論

の中の量（質量ギャップ・弦張力）が数学として定まることで、それは「尺度は一つ」の切れ目と、有限と無限の切れ目の側の問いです。

### 尺度は一つの切れ目

物理では、次元を持つ量はすべて一つの尺度 $\Lambda$ の定数倍だと考えます（4-07）物理。数学に訳すと、例えば格子単位の質量 $m(\beta)$ と弦張力 $\sigma(\beta)$（$\beta = 2N/g^2$ は格子の逆結合で、逆温度ではありません）について次が成り立つことです。

$$0 < c \le m(\beta)^2/\sigma(\beta) \le C < \infty \qquad (\beta \ge \beta_0 \text{ で一様}) \tag{5}$$

これが四次元に特有なのは $[g^2] = (\text{質量})^{4-d}$ のためです 既知。$d < 4$ では理論が在れば次元解析で尺度は一つ、$d = 4$ では $\Lambda = \mu\, e^{-1/(2b_0 g^2(\mu))}$ が結合の走りから量子効果として生まれます物理。ただし次元解析が決めるのは形だけです。例えば $d = 3$ では $g^2$ が質量の次元を持つので $m = c_1 g^2$、$\sigma = c_2 g^4$ と書けますが、定数 $c_1, c_2$ が極限で 0 や $\infty$ に行くことまでは禁じません。例：一尺度が破れる例は、三次元の compact $U(1)$（質量を物理の単位で固定した連続極限で $\sigma/m^2 \to \infty$ とされる。Göpfert–Mack の要旨は $m_D$ を固定した連続極限で物理単位の弦張力が無限大と書く。本文は未読）と超重力の領域（$m^2/\sigma \sim 1/\lambda$）です物理（17-12 §08）。本書の検討の記録は (5) に近い一文を拡散型緩和時間の仮定として切り出し、三つの鎖に分けましたが（17-12・23-01）、定理にはなっていません。

## 04 極限と一様性の型

### 岸の違いの切れ目

定理や計算が効くのは三つの岸です。摂動論は $g \to 0$、強結合展開は小さい $\beta$、ホログラフィーは $N \to \infty$ かつ $\lambda = g^2 N \to \infty$ の岸で、問題文の理論はどの岸にもありません。格子の結合を 't Hooft の結合に直すと次のとおりです。

$$\lambda = g^2 N = 2N^2/\beta \tag{6}$$

強結合の側では、十分に小さい $\beta$ での無限体積極限と指数的なクラスター性（ギャップ）が Osterwalder–Seiler 1978 にさかのぼります（範囲は明示されない。Shen–Zhu–Zhu の序論による）既知。範囲を明示した定理（Shen–Zhu–Zhu。arXiv 2022、CMP 2023）の条件は、Wilson の規格化で $\beta < N^2/(16(d-1))$ です（16-01）既知。(6) で直すと $\lambda > 32(d-1)$、四次元で $\lambda > 96$ となり、$N$ によりません計算。連続極限は $\lambda \to 0$ の向きで、格子の数値は $SU(2)$ の $\beta = 2.25$〜$2.60$ で $\lambda = 3.6$〜$3.1$ です計算（規約が違うので目安）。例：二つの強

い岸はどちらも、切断と物理の尺度が分かれていない場所です（強結合の格子では相関長が格子間隔より短く、超重力では KK の塔がグルーボールと同じ高さに残る。17-10）。

### 有限と無限の切れ目

有限の箱・有限の $\beta$ では転送行列の成分が正なので、隙間はいつも正です（17-13）既知。問われるのは、箱を広げても潰れないことです。

$$\text{各 } L \text{ で } \Delta_L > 0 \qquad \text{と} \qquad \inf_L \Delta_L > 0 \qquad \text{は別の主張} \tag{7}$$

問題文は後者について 'no present ideas point the direction to establish the existence of a mass gap that is uniform in the volume' と書き既知、格子の上の形は Chatterjee 2018 の格子の相関長の問題です（16-08 §08）。物理は有限の箱で測り、$L\sqrt{\sigma} \geq 3$（$L$ は箱の一辺の物理の長さ）のような経験則で体積の影響を確かめ、格子間隔については $a^2$ で外挿します（17-13 §05）物理。例：二次元イジング模型の帯は臨界点で隙間が $1/L$ で閉じますが、どの $L$ でも隙間は正です（2-09）。有限の箱の数値から $\inf_L$ は読めません。

### 余剰次元の切れ目

ホログラフィーでは、ギャップは余剰次元の幾何（円が潰れる葉巻）から出ます（17-09）物理。四次元に戻すには余剰次元の大きさ $R = 1/M_{\mathrm{KK}}$ を 0 にして $\Lambda$ を固定しますが、一ループの見積もり

$$\Lambda / M_{\mathrm{KK}} \approx \exp\!\left(-24\pi^2/(11\lambda)\right) \qquad (\lambda \text{ は } M_{\mathrm{KK}} \text{ での値}) \tag{8}$$

から、$R \to 0$ は $\lambda \to 0$ と同じ向きです（17-10）物理。超重力が使えるのは $\lambda \gg 1$ で、Csáki らは 'This is the opposite of the limit that is required for the supergravity description to be valid' と書きます物理。例：Sakai–Sugimoto の当てはめから換算した $\lambda \approx 16.6$（クォークを含む模型の当てはめ値で、純ヤン–ミルズの値ではない。$N = 3$。規約で 2 倍程度ずれうる）では (8) は 0.27 で、尺度は分かれていません計算。極限の入れ替えの正当化は、探した範囲で見当たりません。

## 05 岸のあいだを測る — プラケットと質量

岸の遠さは量によって違います。四次元 $SU(2)$ の Wilson 作用 $S = \sum_P \left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{tr} U_P\right)$、重み $e^{-\beta S}$（$\beta = 4/g^2$。5-01）で、局所的な量（プラケット）と長い距離の量（質量）について、二つの岸の主項を数値と比べます。主項はどちらも標準の最低次の展開です（強結合展開は 5-02 で扱います）。

$$\left\langle \tfrac{1}{2}\operatorname{tr} U_P \right\rangle \approx u(\beta) = \frac{I_2(\beta)}{I_1(\beta)} \ \ (\beta \text{ 小}), \qquad \left\langle \tfrac{1}{2}\operatorname{tr} U_P \right\rangle \approx 1 - \frac{3}{4\beta} \ \ (\beta \text{ 大}) \tag{9}$$

### 二つの主項の中身

$I_n$ は変形ベッセル関数で、次の積分で定義します。

$$I_n(\beta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\beta\cos\theta}\cos n\theta \, d\theta$$

強結合の主項 $u$ は、プラケット一枚を周りと無関係な $SU(2)$ の変数とみなし、$\frac{1}{2}\operatorname{tr} U$ を重み $e^{\beta\cdot\frac{1}{2}\operatorname{tr}U}$ で平均した値です。群の上の Haar 測度（5-01 §06）では $\frac{1}{2}\operatorname{tr}U = \cos\theta$ の密度が $\sin^2\theta$ に比例し（$0 \le \theta \le \pi$）、この平均がちょうど $I_2/I_1$ になります 既知 （数値積分で 10 桁一致 計算 ）。$\beta$ が小さいと周りのプラケットとの結び付きが弱く、この一枚の平均が主項です 既知 。

弱結合の主項は**等分配**の勘定です。等分配とは、重み $e^{-\beta S}$ の下で、$S$ に二次の形で入る自由度一つが $\langle \beta S\rangle$ に $\frac{1}{2}$ ずつ寄与する、ということです（$\int x^2 e^{-\beta x^2}dx \big/ \int e^{-\beta x^2}dx = 1/(2\beta)$ から）。$\beta$ が大きいとプラケットは 1 の近くに押し込められ、$S$ はリンクの小さな揺れの二次式で近似できます。一格子点あたりリンクは 4 本、$SU(2)$ の向きは 3 つで 12 個です。そのうちゲージ変換の 3 つの向きは作用を変えないので数えず、9 個が残ります。一格子点あたりのプラケットは 6 枚なので、一枚あたり $\langle 1 - \frac{1}{2}\operatorname{tr}U_P\rangle \approx \frac{9/2}{6\beta} = \frac{3}{4\beta}$ です 既知 。

質量は相関の減り方の率です。強結合では、離れた二枚のプラケットを結ぶにはあいだを管の形のプラケットで埋める必要があり、管が一格子伸びるごとに側面の 4 枚ぶん $u^4$ を拾います。相関は距離 $t$ で $u^{4t} = e^{-(-4\ln u)t}$ のように減るので $am \approx -4\ln u$ です 既知 。弱結合の側では、$am$ を $g^2$ の冪級数に展開するとどの次数の係数も 0 で（$e^{-1/g^2}$ の形のため）、形だけが漸近自由から来ます 物理 。

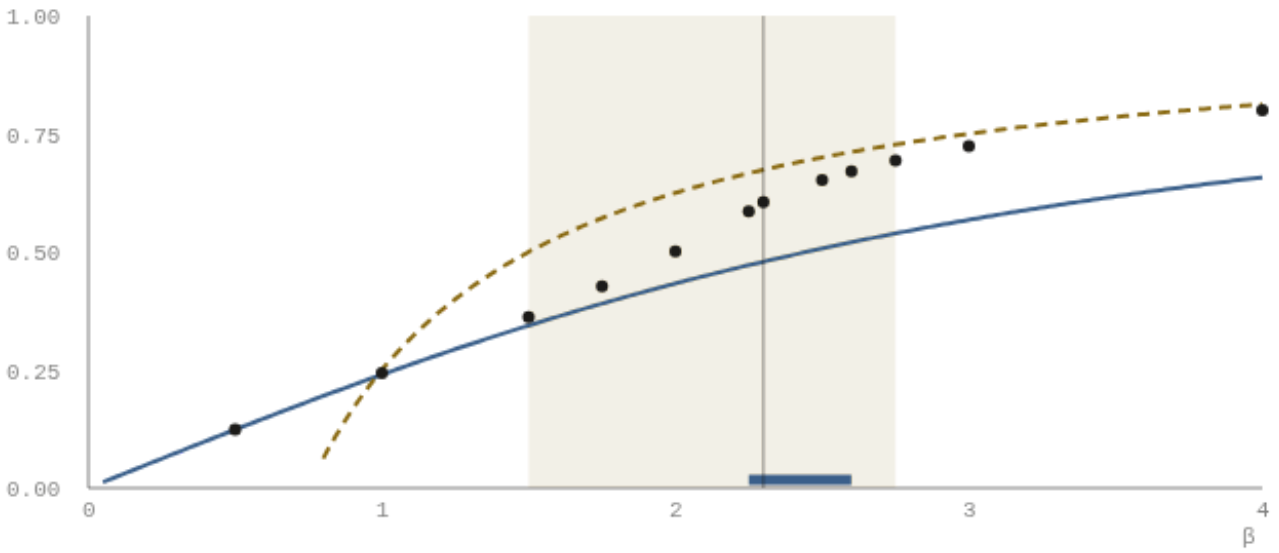
$$am \approx C\,(b_0 g^2)^{-51/121}\, e^{-3\pi^2\beta/11}, \qquad b_0 = \frac{22}{48\pi^2} \tag{10}$$

二ループの漸近スケーリングです（4-06）。定数 $C$ は漸近自由からは決まらず、それがギャップの情報そのものです。

### 数値と並べる

数値は、プラケットがこの端末の $6^4$ の格子での熱浴法 計算 、質量が Lucini–Teper 2001 の表 1 物理 です。熱浴法は、リンクを一本ずつ、周りのリンクを固定したときの条件つき分布から直接引き直す更新を繰り返すモンテカルロ法です（5-07）。

図 1　ボタンで量を選び、つまみで β を動かすと、縦線の位置の読みが変わる。実線は強結合の主項、破線は弱結合の主項（質量では (10) を β = 2.6 に合わせた形）、点は数値。プラケットの図だけに、網の帯（どちらの主項も 5% 以内に入らない測定点 β = 1.75〜2.6 を含む区間。両端の 1.5 と 2.75 では一方が 5% 以内に入る）と、下端の太線（質量の数値がある β = 2.25〜2.60）を描く




β = 2.30　強結合の主項 0.4793　弱結合の主項 0.6739　数値 0.6051（ずれ −20.8%・+11.4%）

計算 プラケットの点（表 2）と曲線（(9)・(10) をその場で計算）はこの端末で計算した。

物理 質量の点は Lucini–Teper 2001 の表 1。

計算 表 2　$\langle \frac{1}{2} \operatorname{tr} U_P \rangle$：$6^4$ の熱浴法（括弧は統計誤差の目安。測った 15 点から抜粋）と二つの主項。ずれは数値に対する百分率。

| $\beta$ | 数値 | 強結合 $u$ | ずれ | 弱結合 | ずれ |
|---:|---:|---:|---:|---:|---:|
| 0.50 | 0.1234(2) | 0.1237 | +0.3% | — | — |
| 1.00 | 0.2438(3) | 0.2402 | −1.5% | 0.2500 | +2.5% |
| 1.50 | 0.3616(4) | 0.3441 | −4.8% | 0.5000 | +38.3% |
| 1.75 | 0.4271(4) | 0.3906 | −8.6% | 0.5714 | +33.8% |
| 2.00 | 0.5010(7) | 0.4331 | −13.6% | 0.6250 | +24.7% |
| 2.25 | 0.5856(7) | 0.4720 | −19.4% | 0.6667 | +13.8% |
| 2.30 | 0.6051(9) | 0.4793 | −20.8% | 0.6739 | +11.4% |
| 2.50 | 0.6526(5) | 0.5072 | −22.3% | 0.7000 | +7.3% |
| 2.60 | 0.6705(4) | 0.5203 | −22.4% | 0.7115 | +6.1% |
| 2.75 | 0.6935(4) | 0.5391 | −22.3% | 0.7273 | +4.9% |
| 3.00 | 0.7235(2) | 0.5679 | −21.5% | 0.7500 | +3.7% |
| 4.00 | 0.7997(1) | 0.6580 | −17.7% | 0.8125 | +1.6% |

表 3　質量 $am$（格子単位）。物理 数値 $am$ の列は Lucini–Teper の表 1（この本で SU(2) の六点を引くときの正本。$a\sqrt{\sigma}$ と格子の大きさは 5-09 表 1）。計算 $\xi = 1/(am)$・強結合・(10) の列はこの端末の計算で、(10) は $\beta = 2.6$ の点に合わせた（$C = 185$）。

| $\beta$ | 数値 $am$ | $\xi$ | 強結合 $-4\ln u$ | 強結合／数値 | (10) | ずれ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.25 | 1.390(30) | 0.72 | 3.004 | 2.16 | 1.241 | −10.7% |
| 2.30 | 1.090(33) | 0.92 | 2.942 | 2.70 | 1.095 | +0.4% |
| 2.40 | 0.953(19) | 1.05 | 2.825 | 2.96 | 0.851 | −10.7% |
| 2.475 | 0.754(10) | 1.33 | 2.742 | 3.64 | 0.705 | −6.5% |
| 2.55 | 0.586(10) | 1.71 | 2.663 | 4.55 | 0.583 | −0.5% |
| 2.60 | 0.514(8) | 1.95 | 2.613 | 5.08 | 0.514 | 合わせた点 |

例：プラケットで数値の 5% 以内に入るのは、強結合の主項が $\beta \le 1.5$、弱結合の主項が $\beta \ge 2.75$ で（$\beta = 1$ の一致は曲線が交わるだけ）、$1.75 \le \beta \le 2.6$ の点ではどちらも入りません 計算。質量の連続値の外挿に使う $\beta = 2.25$〜$2.60$ はこの帯の中です。質量では強結合の主項が数値の 2.2〜5.1 倍で、(10) は他の五点を 11% 以内で再現しますが $C$ は合わせた数です 計算。局所的な量では二つの主項のあいだを数値が埋め、長い距離の量では弱結合の岸に値が無く（7-11 §03）、強結合の岸は届きません。

物理の連続値 3.844(61) は、この帯の中の六点（$\xi \le 2$）の比 $m/\sqrt{\sigma}$ を $a^2\sigma \to 0$ へ延ばした値です（Lucini–Teper 表 5。延ばし方は 17-13 §05）物理。これは連続極限（$a \to 0$）への外挿で、体積の影響は有限の箱の経験則で別に確かめています（有限と無限の切れ目）。

06

## 同じ語が別のものを指す型

### 時空と空間の切れ目

物理の直感は時空（ミンコフスキー）の上にあり、粒子が飛び、因果があります。数学の構成はユークリッドの $\mathbb{R}^4$ の上の確率測度で、光円錐も因果もありません（0-04）。戻り道は反射正値性です（4-10）。$\Theta$ を時間の反射、$F, G$ を正の時刻の側の関数、$\tau_t$ を時間の平行移動として

$$\langle F, G\rangle_{\mathcal{H}} := \big\langle \overline{\Theta F}\, G \big\rangle, \qquad \langle F, F\rangle_{\mathcal{H}} \ge 0, \qquad \langle F, e^{-tH} G\rangle_{\mathcal{H}} = \big\langle \overline{\Theta F}\, \tau_t G \big\rangle \tag{11}$$

の真ん中の不等式が反射正値性で、これがあってこそ $\mathcal{H}$ と $H \ge 0$ が作れます（Osterwalder–Schrader の再構成）既知。「時間」「エネルギー」「粒子」は (11) を通って意味を持つ語です。Wilson の作用が反射正値性を保つことは Osterwalder–Seiler 1978 によります 既知。一方で格子そのものは回転の対称性を壊します。問題文は、正則化で反射正値性が失われた場

合について、取り戻す方法は少ないと書きます（引用は 0-03 §03） 既知 。例：Pauli–Villars の二点関数では $\langle F, F\rangle_{\mathcal{H}} < 0$ となる $F$ が作れます（7-11 §06）。

### 「粒子」という語の切れ目

物理はグルーボールの質量を数えます 物理 。問題文が求めるのはスペクトルの隙間で、下端に孤立した一粒子状態が在ることは 'natural extensions' に分けられています（0-03 §09） 既知 。

$$\text{問題文：}\ \operatorname{spec}(H) \cap (0, \Delta) = \varnothing, \qquad \text{物理：}\ m_{0^{++}} \text{ は } \sqrt{H^2 - \mathbf{P}^2} \text{ の孤立した固有値} \tag{12}$$

（$\mathbf{P}$ は運動量）。例：格子で測る相関の減り方は、下端の位置を教えても、孤立した点か連続スペクトルの端かは教えません（16-08 §05）。GeV の単位も純ヤン–ミルズからは出ず、Athenodorou–Teper は 'Strictly speaking this is of course not possible: the pure gauge theory and QCD … are two different theories' と断っています 物理 。

07

## 二つの一覧を重ねる — 障害・手つき・部分的な橋

7-11 は数学の側の障害を、17-13 は物理の手つきを挙げました。切れ目はその行を対にしたものです。すでに在る部分的な橋は、どれも次の形です。

$$A \implies (M \text{ の一部}), \qquad A \text{ が四次元・弱結合・連続・無限体積・有限の } N \text{ で成り立つ} \tag{13}$$

例：Shen–Zhu–Zhu では $A$ が $\lambda > 96$（明示された範囲。Wilson の $\beta$ では $N^2/48$ 未満、換算は 5-01 の表 4）、結論が無限体積でのギャップで、$A$ は連続極限の向き $\lambda \to 0$ では成り立ちません。

既知 表 4　切れ目と 7-11 の障害・17-13 の手つき・部分的な橋（対応の付け方はこの本の整理）

| 切れ目 | 障害 | 手つき | 部分的な橋 |
|---|---|---|---|
| 1 存在 | 3・6 | 在ると置く | $\mathbb{R}^2$ の測度（7-02）。四次元は公開された構成（周期の箱での連続極限・部分列の無限体積・Wightman の公理。委員会の評価 評 、第 6 部）。無限体積の極限の一意性は無い |
| 2 一尺度 | 2 | 一つと見なす（尺度） | 探した範囲で見当たらない（17-12 は仮定として切り出す段階） |
| 3 岸 | 1 | 展開・隣の理論 | 強結合の無限体積極限・面積則・指数的クラスター性（Osterwalder–Seiler 1978。範囲は明示されない）。明示された範囲 $\lambda > 96$ でのギャップと log-Sobolev 不等式（Shen–Zhu–Zhu） |

| 切れ目 | 障害 | 手つき | 部分的な橋 |
|---|---|---|---|
| 4 有限と無限 | 1・6 | 外挿・弦の絵 | 有限群で弱結合の指数減衰（Adhikari–Cao）。連続な非可換群の格子の相関長の問題は開いたまま。公開された構成は無限体積へ部分列で移るが、体積に一様な隙間は無い（16-02） |
| 5 時空と空間 | 5 | すべての前提 | 有限の格子では Wilson 作用の反射正値性と正の転送行列（弱い極限でも保たれる）。回転の対称性の回復が残る |
| 6 粒子 | — | 一つと見なす（隙間を粒子の質量と見る。17-13 §09） | 探した範囲で、四次元には見当たらない |
| 7 余剰次元 | 1 | 隣の理論 | 背景を固定した後の固有値問題（17-09）。極限の入れ替えは見当たらない |
| 表の外：ゲージ | 4 | ゲージを選ぶ | 両側に共通の壁。ゲージを選ばず、ゲージ不変な量（Wilson ループ）で閉じ込めを言う条件つきの定理（Chatterjee 2021：中心対称性が破れなければ閉じ込める。17-13 §08・16-08 §06） |

存在の切れ目の橋を除くと、部分的な橋はどれも岸の側（強結合・低次元・有限の格子）にあり、問題文の側へ延びるものは探した範囲で見当たりません。存在の切れ目の橋（公開された構成）も、繰り込みの段を全て弱結合のまま運び、格子間隔 1 の段で止まります。長い距離の振る舞い（一様な隙間・面積則）には入っていません（16-03）。ゲージを七つに入れないのは、局所的なゲージの固定が数学（7-05）にも物理にも要る共通の壁だからです。Chatterjee 2021 の定理は、この壁の前でゲージを選ばずに進む道の一つです。位相のセクターと $\theta$（7-11）も、問題文が $\theta$ に触れない点で切れ目に数ええます。何が分かればどの行が動くかは 16-07 に、公開された構成のあとに残る問いの一覧は 16-02 に並べます。

---

## この章が言えている範囲

| | 言えている | 言えていない |
|---|---|---|
| 既知 | 各切れ目の物理の一文・数学の言明と、一次資料が述べる現状・部分的な橋 | 七つで尽きること（数え方・型・表 4 の対応はこの本の整理） |
| 計算 | $6^4$ のプラケットと、二つの主項が 5% 以内に入る $\beta$。強結合の主項と一次資料の質量の比。$u$ が一枚の平均 $I_2/I_1$ に等しいこと（数値積分）。(6)・(8) の換算 | 無限体積の値（有限体積の影響は見積もっていない）。5% の線はこの章の選び方 |
| 物理 | (8)・(10) の見積もりと、一尺度が破れる例の読み | 漸近スケーリングや極限の入れ替えが正しいこと |
| 全体 | — | どの切れ目もこのサイトは埋めていない（存在の切れ目の橋は公開された構成のもの）。質量ギャップの存在は示していない |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 問題文の引用・格子の相関長の問題・三次元 | 本文 | Jaffe–Witten, Quantum Yang–Mills Theory, Clay Math. Inst. (2000)／Chatterjee, arXiv:1803.01950 (2018)／Chevyrev, arXiv:2202.13359 (2022) |
| §03 の公開された構成 | 評 | 評価書 `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）冒頭・§5・§8。コードは `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（2026-10-28 提出） |
| 格子の数値・§06 の引用 | 本文 | Lucini–Teper, JHEP 0106 (2001) 050, hep-lat/0103027（表 1・表 5）／Athenodorou–Teper, arXiv:2007.06422 (2020) |
| 強結合の側の定理 | 要旨・本文の一部 | Osterwalder–Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471（要旨。ギャップ（指数的クラスター性）がクラスター展開の収束から従うことは、Shen–Zhu–Zhu の序論 'as explained in [OS78], the existence of a mass gap (exponential clustering) follows from convergence of the cluster expansion' による）／Adhikari–Cao, arXiv:2202.10375（要旨）／Shen–Zhu–Zhu, arXiv:2204.12737, CMP 400 (2023) 805–851（要旨・序論と式 (1.2)（作用の規格化）を確認。Wilson の $\beta$ への換算 $\beta = N^2\beta_{\mathrm{SZZ}}$ はこの端末の算術） |
| §04 の引用・KK の非分離・$m^2/\sigma \sim 1/\lambda$・$\lambda \approx 16.6$ | 本文 | Csáki–Ooguri–Oz–Terning, hep-th/9806021／Klebanov–Strassler, hep-th/0007191／KMMW, hep-th/0311270（式 (2.7)）／Sakai–Sugimoto, hep-th/0412141・hep-th/0507073（$\lambda$ への換算と (8) への代入はこの端末の算術） |
| 中心対称性・三次元 compact $U(1)$ | 本文・要旨 | Chatterjee, arXiv:2006.16229（本文）／Göpfert–Mack, CMP 82 (1982) 545–606（要旨（INSPIRE）：Villain 作用・全結合で弦張力が正・$m_D$ を固定した連続極限は自由スカラー場。本文は未読。年は Crossref の発行年で、INSPIRE は 1981） |
| (9)・$-4\ln u$・(10) の係数・(11) | 既知・書誌のみ | (9) と $-4\ln u$ は標準の最低次の強結合展開と等分配（強結合展開は 5-02 で扱う）。総説 Drouffe–Zuber, Phys. Rep. 102 (1983) 1–119（書誌のみ）／二ループの係数（4-06）／再構成定理（4-10） |
| 表 2・表 3・図 1・(6)・(8) | 計算 | この端末の Python：plaquette_mc.py（numpy。$6^4$、Kennedy–Pendleton の熱浴法、熱化 100・測定 300 掃引、種を固定、ビン平均）・shores.py（scipy）・one_plaquette.py（scipy。$u = I_2/I_1$ の数値積分）。質量の入力は Lucini–Teper の表 1 だけ |

次に読む章：16-06 新しい概念の候補。切れ目を越えるのに何が要りそうかを、概念の側から見ます。課題としての並べ直しは 16-07。

# 新しい概念の候補 — 何が「Ricci 流」に当たるか

この章は未解決の問いの地図です。§02・§03・§04 は既存の知見です。

**この章で分かること** — Ricci 流の三つの部品（流れ・単調量・手術）。二次元の σ 模型では繰り込み群が一ループで Ricci 流そのものになり、球が縮みきる尺度が $\Lambda$ になること。四次元で各部品の候補がどこで止まるか。

**前提となる章** — 7-09。7-05・4-07・7-11 も使います。Ricci 曲率・スカラー曲率などの幾何の道具は、球面の例でその場で定義します。

**先に言うこと** — 候補を並べる章で、どれが当たるかは言えません。「Ricci 流に当たるのは繰り込み群」「$R = T$ に当たるのは双対変換」は類推です（σ 模型の一ループだけは類推でなく一致します）。このサイトは質量ギャップも連続極限の構成も示していません。札[評]は委員会の評価書による、の意味です（6-00 の「札」）。

この章の順序

1. 出題者が「新しい考え」を求めた場所
2. Ricci 流：計量を曲率で動かす
3. Perelman の部品：流れ・単調量・手術
4. 繰り込み群が Ricci 流になる場所：二次元の σ 模型 — 縮みきる尺度が $\Lambda$。図 1・表 1。寄り道：平らな円は縮まない
5. 四次元で流れるもの — 結合の流れと場の勾配流
6. 単調量：二次元の $c$ と四次元の $a$ — 単調性は反射正値性から。図 2・表 2
7. 手術に当たるもの
8. もう一つの型：同一視
9. 候補を一枚に並べる

01

### 出題者が「新しい考え」を求めた場所

Clay の問題文（Jaffe–Witten 2000）§6 は $T^4$ 上の構成は既知の方法の延長で見込めるとしたうえで、"no present ideas point the direction to establish the existence of a mass gap that is uniform in the volume. Nor do present methods suggest how to obtain the existence of the infinite volume limit $T^4 \to \mathbb{R}^4$" と書きます。§6.5 は "New ideas are needed" です。ただし同じ §6 は $T^4$ 上の構成も未完としています。言えるのは「出題者が新しい考えを求めたのは赤外の側」までです（7-10 §01）。既知

その後、2026 年に公開された構成が、周期の箱での連続極限と、部分列による無限体積の理論（Wightman の公理を満たす）を与えました。委員会はこれを「Lean で証明されている」と評価しています評（第 6 部）。体積に一様な質量ギャップと無限体積の極限の一意性は、評価書が挙げる開いた問いに残っています（16-02）。出題者が新しい考えを求めた赤外の側は、今も開いたままです。

「体積に一様」を式にします。一辺 $L$ の箱の隙間 $\Delta_L$ について

$$\Delta_L > 0 \ (\text{どの } L \text{ でも}) \qquad \text{と} \qquad \inf_L \Delta_L > 0 \tag{1}$$

は別の主張です。例：質量 $m$ の自由場ならどの $L$ でも隙間は $m$ 以上で、右も成り立ちます。仮に $\Delta_L = 1/L$ なら左だけが成り立ちます。

他の大問題で働いた新しい概念には、流れと単調量（Perelman、ポアンカレ予想）と、二つの対象の同一視（Wiles、フェルマーの最終定理）の二つの型が見えます（この本の整理）。

02

### Ricci 流：計量を曲率で動かす

Riemann 計量 $g$ は各点の接空間（1-05）の内積で、成分を $g_{ij}$ と書きます。Ricci 曲率 Ric（成分 $R_{ij}$）は、長さ 1 の方向 $v$ について、$v$ を含む互いに直交する $n-1$ 枚の面の曲がり方（断面曲率）を足したものです（$n$ は多様体の次元）。平均の $n-1$ 倍と言っても同じです。正確には曲率テンソルの縮約です。使うのは次の例だけです。

$$\text{半径 } r \text{ の } n \text{ 次元球面：} \qquad \mathrm{Ric} = \frac{n-1}{r^2}\, g \tag{2}$$

半径 $r$ の球面では、どの面の曲がり方も $1/r^2$ です。それを $n-1$ 枚足すので係数が $n-1$ になります。Ric の跡（正規直交な基底で対角成分を足したもの）をスカラー曲率 $R$ と呼びます。この球面では $R = n(n-1)/r^2$ です。

Ricci 流は計量を Ricci 曲率で動かす方程式で、Perelman の論文は Hamilton（1982）が導入したこの式から始まります。既知

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2\,\mathrm{Ric}(g) \tag{3}$$

正に曲がった方向は縮みます。スカラー曲率は流れに沿って $\partial_t R = \Delta R + 2|\mathrm{Ric}|^2$ に従います。$\Delta$ は多様体の上のラプラシアン（質量ギャップの $\Delta$ とは別）で、平らな座標では $\sum_i \partial^2/\partial x_i^2$ です（§01 の隙間 $\Delta_L$ とは別の記号）。$|\mathrm{Ric}|^2$ は正規直交な基底での Ric の成分の二乗和です。

右辺が $\Delta R$ だけなら熱方程式で、熱が温度をならすように $R$ の山を削り谷を埋めます。正確には、非負の項 $2|\mathrm{Ric}|^2$ がどこでも上向きに足されています。熱方程式の型の式では、解が内部に新しい最小値を作れません（最大値原理）。このため $R$ の最小値は流れに沿って減りません。Perelman の序文は Hamilton の仕事の紹介として、この式と結論をこの形で書いています。既知

例：初めの半径が $r(0)$ の球面は、丸いまま半径だけが変わります。$g = r^2 \hat{g}$（$\hat{g}$ は単位球面の計量）と (2) から

$$\frac{d(r^2)}{dt} = -2(n-1), \qquad r(t)^2 = r(0)^2 - 2(n-1)\,t, \qquad t_* = \frac{r(0)^2}{2(n-1)} \tag{4}$$

で、時刻 $t_*$（消滅時刻）に点に縮みます。単位の二次元球面なら $t_* = 1/2$ です。一般の形では曲率がどこかで無限大になります。Perelman は "The most natural way of forming a singularity in finite time is by pinching an (almost) round cylindrical neck" と書き、細い首を切って小さな蓋をかぶせる手術で流れを続けます。

03

## Perelman の部品：流れ・単調量・手術

Perelman の証明を三つの部品に分けて見ます。一つ目の流れは §02 の式 (3) です。二つ目は、流れに沿って単調に増える量です。道具を先に定義します。$M$ は閉多様体（境界の無いコンパクトな多様体）、$f$ は $M$ の上の補助の関数、$dV$ は計量から決まる体積要素（$\int_M dV$ が $M$ の体積）です。$\nabla f$ は $f$ の勾配で、$|\nabla f|^2$ はその長さの二乗です。$\nabla_i \nabla_j f$ は $f$ の二階微分で、平らな座標では $\partial_i \partial_j f$ です。

$$\mathcal{F}(g, f) = \int_M \left(R + |\nabla f|^2\right) e^{-f}\, dV$$

計量を (3) で動かすとき、$f$ も同時に $\partial_t f = -\Delta f + |\nabla f|^2 - R$ で動かします。これは座標の取り替えを除いて測度 $e^{-f}dV$ を保つ動かし方で、全体の積分 $\int_M e^{-f}dV$ は変わりません。このとき

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = 2\int_M \left|R_{ij} + \nabla_i\nabla_j f\right|^2 e^{-f}\,dV \;\geq 0 \tag{5}$$

が成り立ちます（Perelman §1.2）。右は二乗の積分なので負になりません。既知

流れは $\mathcal{F}$ の坂を上るように振る舞います。正確には、測度 $e^{-f}dV$ を止めたままの流れ $\partial_t g_{ij} = -2(R_{ij} + \nabla_i\nabla_j f)$ が $\mathcal{F}$ を増やす向きの勾配流で、座標の取り替えをすると (3) と上の $f$ の式の組に移ります（Perelman §1.1–1.2）。止めておく測度の選び方について Perelman は "the choice of $m$ is analogous to the choice of gauge" と書きます。原文の $m$ はこの測度のことで、§06 の質量とは別です。どう選んでも、座標の取り替えを除いて同じ流れになります。既知

さらに、座標と尺度の取り替えを除いて見ると、流れは自明でない周期軌道を持ちません（Perelman §2・§3）。自明なものはソリトン（座標と尺度の取り替えだけで形を保つ解）と呼ばれ、この見方では固定点に当たります。既知 例：平らなトーラスでは $R_{ij} = 0$ で、$f$ を定数に取ると (5) の右辺は 0、流れは止まっています（固定点）。

三つ目の部品は、曲率の大きい領域の形を先に分類し、分類したものだけを手術で取り除くことです。ヤン–ミルズで同じ役をしうるのは、流れには繰り込み群と勾配流（§05）、単調量には $c$ と $a$（§06）、分類と手術には大きい場・インスタントン・位相のセクター（§07）です。別の型として同一視があります（§08）。どの対応も類推です。

04

## 繰り込み群が Ricci 流になる場所：二次元の σ 模型

一ループの摂動の範囲で、対応が類推でなくなる場所が、二次元の非線形 σ 模型です。場 $\phi$ は平面から多様体 $M$ への写像です。$M$ の計量をこの節では $h$（成分 $h_{ij}$）と書きます。

$$S[\phi] = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} h_{ij}(\phi)\,\partial_\mu\phi^i\,\partial_\mu\phi^j\,d^2x \tag{6}$$

結合定数は数ではなく計量 $h$ そのものです。Friedan（1980）の要旨は "the renormalization group acting on the infinite-dimensional space of Riemannian metrics" と書きます。一ループでは、尺度 $\ell = \ln(\mu_0/\mu)$（大きいほど粗く見る）について

$$\frac{dh_{ij}}{d\ell} = -\frac{1}{2\pi}\,R_{ij}(h) + \cdots \tag{7}$$

で、$t=\ell/4\pi$ と置けば (3) そのものです。物理 「$\cdots$」は二ループ以上の補正です。二ループからは曲率の二次の項（$R_{iklm}R_{j}{}^{klm}$ の形。$R_{iklm}$ は曲率テンソルの成分）が加わり、流れは Ricci 流から外れます。Friedan（1985）の要旨は、繰り込み群の係数を二ループの近似で計算したと書きます。物理

例：$M$ を半径 $r$ の球面 $S^{N-1}$ にすると $O(N)$ 模型で、$r^2=1/g^2$ です。(2) で $n=N-1$ として

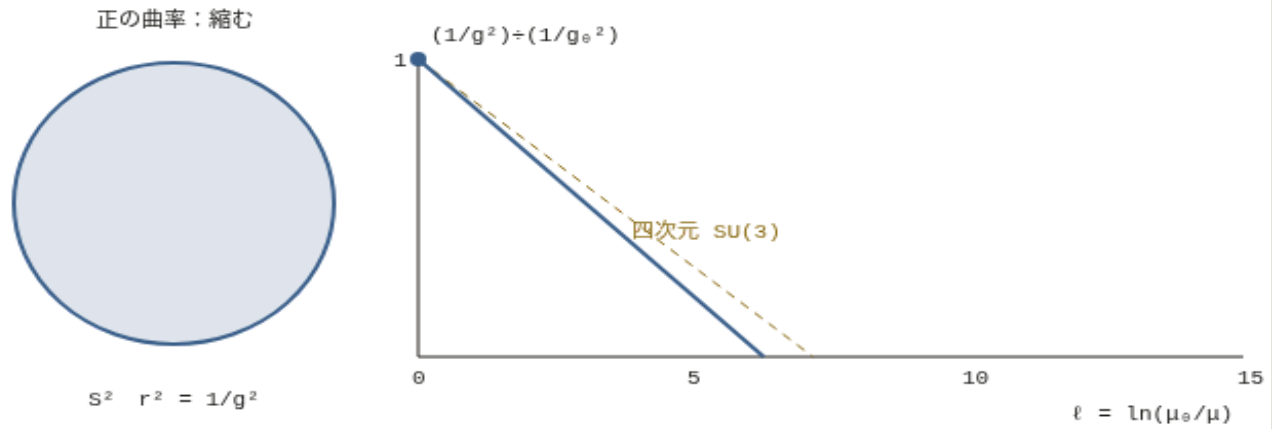
$$\frac{d}{d\ell}\Big(\frac{1}{g^2}\Big)=-\frac{N-2}{2\pi},\qquad \ell_*=\frac{2\pi}{(N-2)\,g_0^2},\qquad \Lambda=\mu_0\,e^{-\ell_*}\tag{8}$$

粗く見るほど球が縮み結合が強くなる。Polyakov（1975）の要旨の言う "asymptotic freedom" です。縮みきる尺度 $\ell_*$ は (4) の消滅時刻 $t_*$ の $4\pi$ 倍で、一ループの $\Lambda$ を決めます（4-07）。四次元の $SU(N)$ でも $1/g^2$ は直線 $1/g_0^2-2b_0\ell$ で減ります。

Perelman は序文の 2 でこの関係に触れ、"this connection between the Ricci flow and the RG flow suggests that Ricci flow must be gradient-like; the present work confirms this expectation" と書きます。流れが勾配的である（ある量の坂に沿って動く）ことは繰り込み群の直観から予想されており、(5) がそれを確かめた、というのが Perelman の言い方です。

既知

図 1　つまみで $N$ と $g_0^2$ を変え、「動かす」で $\ell$ を進める。左は半径の二乗が $1/g^2$ の球の断面、右は $1/g^2$ の比。点線は四次元 $SU(3)$




N = 3  g₀² = 1.0  ℓ = 0.00  1/g² = 1.000  ℓ* = 6.28  Λ/μ₀ = 1.87×10⁻³  SU(3)：ℓ* = 7.18

計算 図の直線は式 (8) と $b_0=11N/(48\pi^2)$ をその場で描いたもの。表 1 はこの端末で計算した。

| 模型 | $g_0^2$ | $\ell_*$ | $\Lambda/\mu_0$ | 注 |
|---|---|---|---|---|
| $O(2)$ | 任意 | $\infty$ | — | 円は平らで流れない |
| $O(3)$ | 1 | 6.283 | 1.87×10⁻³ | Ricci 流の $t_*=0.5$ |
| 四次元 $SU(2)$ | 1 ／ 2 | 10.77 ／ 5.38 | 2.11×10⁻⁵ ／ 4.59×10⁻³ | $b_0=0.04644$ |

| 模型 | $g_0^2$ | $\ell_*$ | $\Lambda/\mu_0$ | 注 |
|---|---|---|---|---|
| 四次元 $SU(3)$ | $1\,/\,2$ | 7.178 ／ 3.589 | 7.63×10⁻⁴ ／ 2.76×10⁻² | $b_0 = 0.06966$ |

表 1　一ループの $1/g^2$ が 0 に届く尺度。$\ell_* = 4\pi t_*$ を式 (4) と照合した。計算

直線が 0 に届く手前で結合は大きくなり、一ループの式は使えなくなります。Ricci 流の特異点の近くと同じく、肝心なのは結合が $O(1)$ になった後です。二次元 $O(N)$ 模型（$N \geq 3$）のギャップは物理の水準の結論です。物理 Douglas（2004）の報告は、正則化した版の $O(N)$ 模型でギャップが示された例（Kopper 1999）を挙げるにとどまります。その後の定理としての状態は、この章では確かめていません。

### 寄り道：平らな円は縮まない

飛ばしてよい小節です。

$N = 2$ では標的が円で曲率は 0、係数 $N-2$ が消えます。二次元の $O(2)$ 模型は低温で質量ゼロの相を持ちます。高温では相関が距離とともに指数で減り（質量がある）、低温では距離のべきでしか減りません（質量ゼロ）。この二つの相の間の転移を Kosterlitz–Thouless（KT）転移と呼びます。Fröhlich–Spencer（1981）は、二次元の格子の回転子模型（$O(2)$）やクーロン格子気体などで、この転移の存在を証明しました。既知 四次元の $U(1)$（5-06）と並べると「曲がっている（非可換）から縮む」という絵が浮かびますが、類推です。

05

## 四次元で流れるもの：結合の流れと場の勾配流

四次元の「流れ」には別物が二つあります。**理論の空間の流れ**（繰り込み群、7-05）には球の絵はありませんが、一ループの $1/g^2$ は同じ形の直線です（表 1）。Bałaban の $T^4$ の紫外安定性は仮定つきで、極限は部分列までです（7-07）。2026 年に公開された構成は、結合に依る確率核の一段を多段に重ねて、周期の箱での連続極限まで運びました評（第 9 部〜第 11 部）。ただし全ての段を弱結合の帯のまま運び、格子間隔 1 の段（結合は大きい基準の値）で止まります（16-03）。Bauerschmidt–Brydges–Slade の方法が $d = 4$ で届いたのは結合が赤外で 0 に流れる側（$|\phi|^4$ 模型と弱自己回避歩行）で、ヤン–ミルズの赤外とは正反対です。欠けているのは「結合が $O(1)$ に達した後の、制御された一段」です（この本の整理）。

**場の空間の流れ**（勾配流）は一つの配位を作用の坂に沿って滑らかにします。可換な場で、作用 $S = \frac{1}{4}\int F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\,d^4x$ の勾配を逆向きにたどると

$$\partial_t A_\mu = -\frac{\delta S}{\delta A_\mu} = \Delta A_\mu - \partial_\mu(\partial_\nu A_\nu), \qquad \frac{dS}{dt} = -\int \left|\frac{\delta S}{\delta A}\right|^2 \leq 0 \tag{9}$$

です（非可換なら $\partial$ を共変微分に）。勾配流なので作用は必ず減ります。例：フーリエ変換すると、波数 $k$ に垂直な成分は $e^{-k^2 t}$ で減り、$|k| \gg 1/\sqrt{t}$ の揺らぎが消えます。$k$ に平行な成分（ゲージの方向）は動きません。Ricci 流でも座標の取り替えの不変性で同じことが起き、DeTurck（1983）が項を足して直しました。同じ工夫はヤン–ミルズの確率量子化にもあります（7-09 §07）。

Lüscher（2010）の要旨は、流れた場が "a smooth renormalized field" であることを理論と数値が "suggest" すると書き、Carosso–Hasenfratz–Neil（2018）はこれを連続的な実空間の繰り込み群として数値に使いました。Waldron（2019）は、閉じた四次元多様体の上の滑らかな初期値について、ヤン–ミルズ流に有限時間の特異点が無いことを示しています。既知 二つの流れの関係は示唆と数値の水準です。

06

## 単調量：二次元の $c$ と四次元の $a$

道具を二つ用意します。応力テンソル（エネルギー運動量テンソル）$T_{\mu\nu}$ は、エネルギーと運動量の流れを表す場です。その跡 $\Theta = T^{\mu}{}_{\mu}$（二次元なら $T_{11}+T_{22}$）は、尺度を少し変えたときに作用がどれだけ変わるかを測ります。尺度を変えても変わらない理論（固定点）では $\Theta = 0$ です。中心電荷 $c$ は固定点の理論が持つ数で、おおまかには質量ゼロの自由度を数えます（自由なスカラー場一つで 1）。この章では名前だけを使い、値は下の和則 (10) を通して見ます。

二次元には Zamolodchikov（1986）の $c$ 定理があり、流れに沿って減り、固定点では中心電荷に一致する関数が作られます。物理 計算できる形として、$\Theta$ の相関の和則を距離 $r_0$ で切ったものを見ます。

$$c(r_0) = 3\pi \int_{|x|>r_0} |x|^2 \, \langle \Theta(x)\Theta(0)\rangle \, d^2x \tag{10}$$

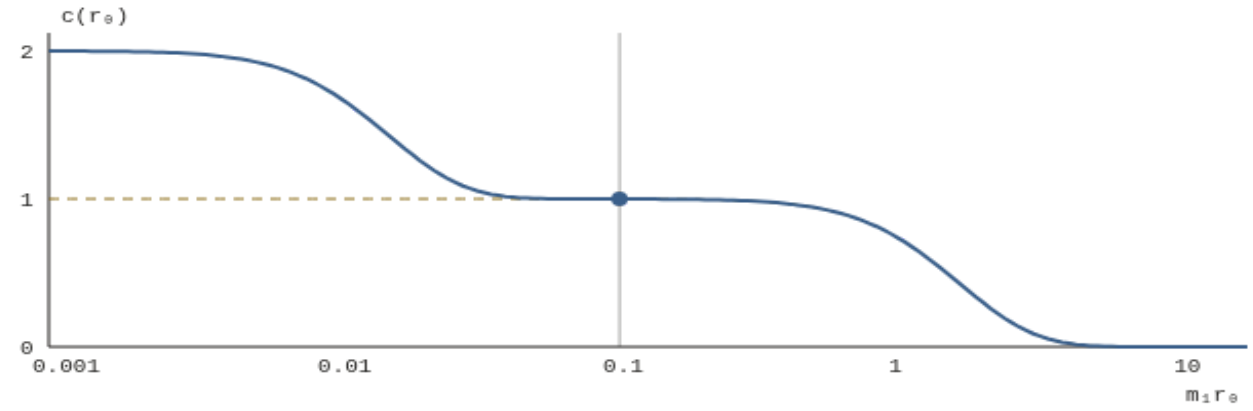
ここで $\Theta$ は作用からそのまま作った応力テンソルの跡です（$\Theta = 2\pi T^{\mu}{}_{\mu}$ と置く規格化では、前の係数は $3/4\pi$ になります）。$r_0 \to 0$ の値が紫外と赤外の中心電荷の差になる、というのが和則の内容です。この和則は Cardy（1988）によるとされます。物理

質量 $m$ の自由なスカラー場では $\Theta = -m^2\phi^2$、$\langle\Theta(x)\Theta(0)\rangle = 2m^4 G(x)^2$ です。$G(x) = K_0(m|x|)/2\pi$ は伝播関数（1-11）で、$K_0$ は変形 Bessel 関数（遠くで $e^{-m|x|}$ のように減る）です。したがって

$$c(r_0) = 3\int_{m r_0}^{\infty} u^3 K_0(u)^2 \, du, \qquad c(0) = 1, \quad c(\infty) = 0 \tag{11}$$

です。$c(0)=1$ は数値積分で $1-8\times10^{-12}$ と確かめました。計算 被積分関数が負にならないので $c(r_0)$ は減ります。一般に $x\neq0$ で $\langle\Theta(x)\Theta(0)\rangle\geq0$ は、並進・回転不変性と反射正値性（4-10）から従います。正則化で失われやすい性質（7-11 正値な正則化の障害）が単調性の出どころです。既知

図 2　つまみで質量の比 $m_2/m_1$ と尺度 $r_0$ を変え、「動かす」で $r_0$ を伸ばす。実線は自由場二つの $c(r_0)$、点線は一つのとき




m₂/m₁ = 100  m₁r₀ = 0.10  c(r₀) = 0.999（場が一つなら 0.999）

計算 曲線は式 (11) をこの端末で数値積分した 85 点の表（末尾の 0 を省いて埋め込み）の補間。

| $mr_0$ | 0.1 | 0.5 | 1 | 2 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $c(r_0)$ | 0.99946 | 0.93639 | 0.70823 | 0.25841 | 0.06861 | 0.00313 |

表 2　場が一つのときの $c(r_0)$。質量の比が 100 の二つの場では $m_1r_0=10^{-3},10^{-2},0.1,1$ で 1.999・1.708・0.999・0.708 と、途中で 1 の段に留まる。計算

段は、流れが途中の固定点（軽い場だけが質量ゼロに見える尺度）の近くを通ることを表し、ギャップのある赤外では $c=0$ です。

四次元の固定点を曲がった背景に置くと、$\Theta$ の期待値に Euler 密度（曲率の二次式で、積分すると多様体の Euler 数に比例する量）が係数つきで現れます。その係数が Euler アノマリー $a$ です（格子間隔の $a$ とは別。この章では名前だけ）。Komargodski–Schwimmer（2011）の要旨は、紫外と赤外の $a$ を結ぶ単調減少関数を導き "establishing the $a$-theorem" と書きます。物理 自由な場の $a$ は正で、実スカラー・Weyl フェルミオン・ゲージ場の寄与の比は $1:\frac{11}{2}:62$ です（同論文の付録 A）。既知

純ヤン–ミルズの紫外は自由なグルーオンに近づくので $a>0$ です。赤外にギャップがあれば、質量ゼロの自由度が残らないので $a=0$ です。物理 二つは矛盾しませんが、$a_{\text{紫外}}>a_{\text{赤外}}$ はギャップを強制しません。赤外にギャップがあること自体が、この本の主題の未証明の部分です。特異点の分類に当たる「赤外の終点の分類」が別に要ります（類推）。

07

## 手術に当たるもの：大きい場と位相のセクター

四次元のヤン–ミルズでは、作用が尺度の取り替えで変わらないことが、曲率が一点に集まる特異点と同じ種類の困難を生みます。$A_\lambda(x)=\lambda A(\lambda x)$ なら $F_\lambda(x)=\lambda^2 F(\lambda x)$ で

$$\int_{\mathbb{R}^d} |F_\lambda|^2\, d^dx = \lambda^{4-d}\int_{\mathbb{R}^d} |F|^2\, d^dx \tag{12}$$

です。$d=4$ では $\lambda$ に依りません。例：大きさ $\rho$ のインスタントンは $\rho$ によらず作用 $8\pi^2/g^2$ を持ち（3-05）、$\rho\to 0$ で曲率が一点に集まっても作用は減りません。

曲率の大きさを測る物差しに $\|F\|_{L^p}=\left(\int |F|^p\, d^dx\right)^{1/p}$ を使います（$p=2$ が 1-10 の $L^2$ で、二乗すると作用）。Uhlenbeck（1982）のコンパクト性（曲率の $L^p$ が抑えられた接続の列から、ゲージを取り替えれば弱い意味で収束する部分列が取れること）は $p>d/2$ の $L^p$ 評価で働き、$d=4$ の $L^2$（作用そのもの）はちょうど境目です。境目では、曲率が有限個の点に集まり、小さなインスタントンが泡のように抜け出すことがあります（泡立ち。この章では名前だけ）。既知

量子の側で手術に当たりうるのは、Bałaban の方法で別扱いにする大きい場の領域（7-05 §04）、小さいインスタントン、位相のセクター（7-11 寄り道）です。どれも「分類してから取り除く」段には届いていません。

08

## もう一つの型：ギャップが見える対象との同一視

Wiles 型は、二つの対象を同じだと示し、片方で見えない性質をもう片方から持ち込む型です（$R=T$。通説の水準の要約）。Jaffe–Witten §6.6 は、ギャップが古典的に見えないので "a nonclassical change of variables or “duality transformation”" が要るかもしれないと書きます。既知

この型でギャップが示された例は、ガウス積分の恒等式から始まります。共分散 $V$ のガウス場 $\varphi$ について

$$\mathbb{E}\Big[e^{\,i\sum_j q_j\varphi(x_j)}\Big]=\exp\Big(-\tfrac12\sum_{j,k} q_j q_k\, V(x_j-x_k)\Big) \tag{13}$$

右辺は電荷 $q_j$ の粒子がポテンシャル $V$ で相互作用する重み、左辺は場の期待値です。電荷の気体を足し合わせると、左辺は $\cos\varphi$ を含む場の理論になります。これを sine-Gordon 模型と呼びます（作用に $\cos\varphi$ の項を持つ場の理論。この章では名前だけ）。Brydges–Federbush

（1980）はこの変換で、低密度または高温のクーロン気体の相関の指数減衰（Debye 遮蔽）を証明しました。[既知] 可換な統計力学の模型です。

ヤン–ミルズ自身の断片は、Chatterjee（2019）の強結合・大 $N$ の $SO(N)$ でのゲージと弦の双対、Cao–Park–Sheffield の Wilson ループの曲面の和の表示（17-04 §09。絵は §05）、Chatterjee（2021）の「中心対称性が破れない ⇒ 閉じ込め」（含意であって同値ではない）です。物理の水準では Seiberg–Witten（17-11）とホログラフィー（17-09）があります。問題は固定した $N$ で求めるので、大 $N$ だけでは足りません。

09

## 候補を一枚に並べる

$1/0$ に記号を与える案は、運ぶ情報が少ないので入れていません（7-12 §10）。

表の読み方を先に言います。「部品」の列は、その候補が §03 の三つの部品のどれに当たるかです。流れ（i〜iii）・同一視（v・vi）・手術（vii）に分かれ、(iv) はどれにも当たりません。「どこまで」は定理として届いた範囲、「どこで止まるか」は届かない最初の場所です。

止まる場所を並べると、おおむね二つに集まります。一つは、結合が $O(1)$ になる赤外で小さい数が無くなることです。(i) はそこでの一段を持たず（公開された構成も、その手前の格子間隔 1 の段で止まります）、(iii) で得られた連続極限は結合を 0 へ連動させた設計のもので、(iv) は冪級数なので $e^{-1/g^2}$ に届きません。もう一つは、$N \to \infty$ や強結合という別の極限でしか働かないことで、(v) と (vi) がこれに当たります。(i) は紫外の側から赤外へ進もうとして止まり、(vi) は赤外の絵を持ちながら有限の $N$ へ戻れずに止まります。止まる向きが逆です（この本の整理）。

| | 候補 | 何を新しくするか | どこまで | どこで止まるか | 部品 |
|---|---|---|---|---|---|
| i | 構成的な繰り込み群（Bałaban・MRS・BBS、2026 年に公開された構成） | 一段を理論空間の写像として扱う | 公開された構成：周期の箱での連続極限と部分列の無限体積、Wightman の公理[評]。Bałaban：$T^4$ の紫外安定性（仮定つき） | 結合が $O(1)$ に達した後の一段。公開された構成は格子間隔 1 の段（結合は大きい）で止まる（16-03） | 流れ |
| ii | 確率量子化と正則性構造（Hairer・CCHS） | 測度を力学の不変測度に、軌道の空間を状態空間に | $T^2$ の測度は力学の一意な不変測度（Chevyrev–Shen）。三次元 YMH は局所解 | 劣臨界 $d < 4$（7-09） | 流れ |
| iii | 新しい極限の取り方（Chatterjee ほか） | 極限の住む空間を先に決める | 強結合の格子のギャップ（格子単位）。YMH のガウス極限（結合を 0 へ連動させた設計） | 非ガウスの極限 | 流れ |

| | 候補 | 何を新しくするか | どこまで | どこで止まるか | 部品 |
|---|---|---|---|---|---|
| iv | 代数的な定式化（Connes–Kreimer・Costello） | 繰り込みを代数の構造で書く | 摂動論の範囲での定式化（形式的冪級数の水準） | $e^{-1/g^2}$ のような摂動で見えない量に届かない | — |
| v | 双対・変数変換（JW §6.6） | ギャップが見える対象と同一視 | Debye 遮蔽（可換）。ゲージと弦の断片 | 純ヤン–ミルズで働く双対変換は、調べた範囲で見当たらない | 同一視 |
| vi | 大 $N$ とホログラフィー | 余剰次元の幾何でギャップを見る | 物理の水準 物理 | $N \to \infty$・強結合 | 同一視 |
| vii | 幾何解析の古典 YM（Uhlenbeck・Waldron） | 臨界次元の解析（泡立ち、§07） | 古典は既存の方法の射程（JW §2） | 量子の配位は滑らかでないと期待される | 手術 |

第 23 部で扱う本書の検討（拡散型緩和時間の仮定、23-01）は (i) の型に最も近く、「尺度は一つ」という物理の前提を格子の上の不等式に切り出したものです（近さの判定はこの本の整理）。

---

## この章が言えている範囲

| | 内容 |
|---|---|
| **言えている** | 出題者が新しい考えを求めたのは一様なギャップと無限体積極限。Perelman の単調式 (5)（$f$ も同時に動かすときの式）と、流れの勾配性が繰り込み群の直観から予想されていたという記述（いずれも原文） 既知 |
| **言えている** | $O(N)$ 模型の一ループの流れ (8) は球面の Ricci 流 (4) と $t = \ell/4\pi$ で一致し、縮みきる尺度が一ループの $\Lambda$（表 1）。二ループからは Ricci 流から外れる 計算 物理 |
| **言えている** | 自由な質量 $m$ のスカラー場で $c(r_0)$ は 1 から 0 へ単調に減り、単調性は反射正値性から来る 計算 既知 |
| **言えていない** | どの候補が当たるか（対応は類推）。二次元 $O(N)$ 模型のギャップの、2004 年より後の定理としての状態。純ヤン–ミルズの赤外にギャップがあるか（$a = 0$ はその条件の下）。四次元の、定理としての単調量の有無。2025 年以降の網羅 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| §01・§08 の引用 | 本文で確認（検査済みの調査の逐語照合） | A. Jaffe, E. Witten, Quantum Yang–Mills Theory, Clay Math. Inst. (2000) |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 式 (3)・(5)、$f$ の発展式、$R$ の発展式と最小値、序文の 2、§1.1・§1.2、§2・§3 の周期軌道とソリトン、首の切断 | 本文で確認 | G. Perelman, arXiv:math/0211159 (2002) |
| Ricci 流の導入・DeTurck・Uhlenbeck・Wiles 型 | 書誌のみ | R. S. Hamilton, J. Differential Geom. 17 (1982) 255–306。D. DeTurck, 同 18 (1983)。K. Uhlenbeck, CMP 83 (1982) 11–29, 31–42。A. Wiles, Ann. of Math. 141 (1995) 443–551。Taylor–Wiles, 同 553–572 |
| σ 模型の繰り込み群・漸近自由 | 要旨で確認（係数 $(N-2)/2\pi$ は標準の一ループの勘定） | D. Friedan, PRL 45 (1980) 1057。A. M. Polyakov, Phys. Lett. B 59 (1975) 79 |
| 二ループの係数（Ricci 流からのずれ） | 要旨で確認（二ループの計算まで。項の形 $R_{iklm}R_j{}^{klm}$ は標準の二ループの勘定） | D. Friedan, Ann. Phys. 163 (1985) 318 |
| 二次元 $O(N)$ 模型のギャップの状態 | 検査済みの調査（Douglas は本文の逐語、Kopper は書誌のみ） | M. R. Douglas, Report on the Status of the Yang–Mills Millenium Prize Problem, Clay Math. Inst. (2004)。C. Kopper, CMP 202 (1999) 89 |
| KT 転移・Debye 遮蔽・$a$ 定理・勾配流 | 要旨で確認 | Fröhlich–Spencer, CMP 81 (1981) 527。Brydges–Federbush, CMP 73 (1980) 197。Komargodski–Schwimmer, JHEP 12 (2011) 099, arXiv:1107.3987。Lüscher, JHEP 08 (2010) 071。Carosso–Hasenfratz–Neil, arXiv:1806.01385。Waldron, Invent. Math. 217 (2019) 1069 |
| 自由な場の $a$ の値（$1:\frac{11}{2}:62$ と正であること） | 本文で確認（付録 A） | Z. Komargodski, A. Schwimmer, arXiv:1107.3987 |
| $c$ 定理・和則 (10) | 書誌のみ（和則 (10) は Cardy 1988 によるとされる。要旨は二次モーメントの普遍量までで、和則の形は未確認。係数 $3\pi$ と $3/4\pi$ の規格化と、自由場の $c=1$ は計算で照合） | A. B. Zamolodchikov, JETP Lett. 43 (1986) 730。J. L. Cardy, PRL 60 (1988) 2709 |
| §05 の Bauerschmidt–Brydges–Slade | 要旨で確認 | R. Bauerschmidt, D. C. Brydges, G. Slade, CMP 338 (2015) 169–193, arXiv:1403.7268（四次元の弱自己回避歩行）。同, arXiv:1403.7424（四次元の $n$ 成分 $\lvert\phi\rvert^4$）。同, Introduction to a Renormalisation Group Method, Lecture Notes in Math. 2242 (2019), arXiv:1907.05474。D. C. Brydges, G. Slade, J. Stat. Phys. 159 (2015) 530, arXiv:1403.7255（方法の第 IV 部） |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| §09 表 (ii)・(iii) | 検査済みの調査（Chevyrev–Shen は本文、Chatterjee は要旨） | I. Chevyrev, H. Shen, Comm. Pure Appl. Math. (2026), arXiv:2302.12160。S. Chatterjee, A scaling limit of SU(2) lattice Yang–Mills–Higgs theory, Prob. Math. Phys. 7 (2026) 339–381, arXiv:2401.10507 |
| §01・§05・表の (i) の公開された構成 | 評 | 評価書 `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）冒頭と §8。コードは `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（2026-10-28 提出）。読み方は第 6 部と 16-03 |
| §05・§08・§09 の候補 | 検査済みの調査（要旨、Chevyrev は本文） | Bałaban, CMP 122 (1989)。Magnen–Rivasseau–Sénéor, CMP 155 (1993)。Hairer, arXiv:1303.5113。CCHS, arXiv:2006.04987・2201.03487。Chevyrev, arXiv:2202.13359。Connes–Kreimer, CMP 210 (2000)。Costello, arXiv:0706.1533。Shen–Zhu–Zhu, CMP 400 (2023)。Chatterjee, CMP 366 (2019)・CMP 385 (2021)。Cao–Park–Sheffield, arXiv:2307.06790 |
| 表 1・図 1 | 計算 | この端末の Python：`sigma_rg.py`（式 (8) と四次元の一ループ、$\ell_* = 4\pi t_*$ の照合） |
| 表 2・図 2・式 (11) | 計算 | この端末の Python：`c_function.py`（scipy の quad。$\int_0^\infty u^3 K_0^2 du = 1/3$ を $10^{-11}$ の桁で確認） |

次に読む章：16-07 課題の一覧（何が分かれば何が動くか）。

# 課題の一覧 — 開いた問いを「分かれば何が動くか」の矢印でつなぐ

この章の §01〜§08 は未解決の地図、§09 は案内です。

**この章で分かること** — 十二の開いた課題と、いまある最も近い結果。課題をつなぐ矢印の三つの強さ（定理・道筋・物理の期待）。課題を仮に分かったことにして問題文のどの要件が動くかを、図と数えで確かめること。

**前提となる章** — 16-05 二つの掘り方の切れ目。7-10（四次元の段ごとの到達点）・7-11（六つの障害）・16-01（盤面）の言葉を使います。

**先に言うこと** — 課題を並べてつなぐ章で、どの課題も片づけていません。矢印の選び方と数え方はこの本の整理で、一次資料で確かめた矢印だけを使っています。このサイトは質量ギャップの存在も連続極限の構成も示していません。2026 年に公開された構成が触れた課題は、表 1 の「最も近い結果」の欄と §02 の終わりに書きます（委員会の評価[評]。札[評]の意味は 6-00 の「札」）。公開された構成のあとに残る問いの一覧は 16-02 です。

この章の順序

1. 課題を「ならば」で書く — 要件と矢印
2. 十二の課題 — 連続と格子（表 1）
3. 定理でつながる矢印 — 反射正値性・一様な隙間・中心
4. 道筋の矢印 — 出題者と総説が書く順
5. 仮に分かったとする — 課題の地図（図 1・表 2）
6. 地図を数える — どの道にも要る課題（表 3・計算）
7. すべての群で — 群を替えると消える矢印
8. 問題文の外の課題 — 一粒子状態・一般の多様体
9. 本の座標系 — 辞書・切れ目・課題・壁を九つの枡に（図 2・表 4）

01

## 課題を「ならば」で書く

この章の**課題**は、まだ定理になっていない言明です。課題が分かったとき何が動くかは「A が分かれば B が言える」という矢印で書け、強さを三つに分けます。**定理**（証明された含意か定義）、**道筋**（問題文や総説が「これが分かれば次へ進めるはず」と書く見込み）、**期待**（物理の水準の含意）です。比喩で言えば鍵と扉の対応表で、正確には、前提がすべてそろえば結論が出る形の規則の一覧です。

$$X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_k \overset{\ell}{\Longrightarrow} Y, \qquad \ell \in \{0\ (\text{定理}),\ 1\ (\text{道筋}),\ 2\ (\text{期待})\} \tag{1}$$

行き先は問題文（Jaffe–Witten 2000、以下 JW。0-03）です。群 $G$ を一つ固定し、要求を四つの**要件**に分けます[既知]（JW §4 の要約。四つへの分け方はこの本の整理）。

$$\mathsf{P} = \bigwedge_{G} \mathsf{P}_G, \qquad \mathsf{P}_G = \mathsf{E} \wedge \mathsf{A} \wedge \mathsf{N} \wedge \mathsf{M} \tag{2}$$

存在の要件（E）は $\mathbb{R}^4$ の上の理論の存在、公理の要件（A）は公理（JW が挙げる Streater–Wightman の本 [45] と Osterwalder–Schrader の論文 [35] の公理と同等以上）、非自明性の要件（N）は非自明性・局所場・短距離で漸近自由と一致すること（JW §4）、隙間の要件（M）は隙間 $\Delta > 0$ と $m < \infty$ です。

もう一つ、問題文の外の要件として弦張力の要件（C）を置きます。弦張力の要件は、連続の理論の弦張力 $d$ が 0 でないことです。$d$ は Chatterjee 2018 の連続の弦張力の問題（Chatterjee の Problem 5.2）の定数で、7-10 §04 では $\sigma$ と書きました。物理の期待では $d$ は正です。

例：Chatterjee（2021）の一様な減衰から面積則への定理（Chatterjee 2021 の定理 2.4）は定理の矢印です。格子ゲージ理論が任意の境界条件の下で一様に指数減衰するなら（強い減衰の定義（Chatterjee 2021 の定義 2.3）。定数は群・$\beta$（格子の作用の結合の係数。逆温度ではない）・格子の次元だけにより、箱と境界条件によらない）、中心対称性は破れません。さらに、中心に自明でなく作用する既約表現の、長方形の Wilson ループは、どの Gibbs 測度（無限の格子の上で、どの箱の中も外を固定すれば格子の重みに従う分布）でも面積則に従います[既知]（16-08 §06）。道筋の例は JW §6.5 の 'Such a result presumably would enable the study of the limit as T4 → R4'（一様なギャップから無限体積極限へ）です。

02

## 十二の課題 — 連続の六つと格子の六つ

表 1 の上の六つ（$\mathrm{T}^4$ の構成の課題から局所場と短距離の課題まで）は連続の理論の課題で、構成の六つの段（7-01）のうち紫外極限の段から一様なギャップの段までと、問題文の追加の条件に当たります。下の六つ（格子の相関長の問題から三次元の測度の課題まで）は格子の課題と、低い次元・物理の前提を数学にした課題です。この章では極限を列全体で求めることにします（この本の整理）。JW の弱い存在の脚注（Jaffe–Witten の脚注 2。0-03 §08）は、コンパクト性だけによる弱い存在は、極限の性質（ギャップや公理）を別の方法で示さない限り、存在の部分の解と認めない、と書きます[既知]。最初の三つ（順に $\mathrm{T}^4$ の構成の課題・無限体積への課題・一様なギャップの課題）は次の形です（記号は 7-10）。

$$\lim_{a\to 0}\langle W_{\gamma_a}\rangle^{\mathrm{ren}}_{a,L} \text{ が列全体で在る}, \qquad \lim_{L\to\infty}\mu_L \text{ が在る}, \qquad \inf_{L}\Delta_L>0 \tag{3}$$

$W_{\gamma_a}$ は格子の道の Wilson ループ、$\langle\cdot\rangle^{\mathrm{ren}}$ は対数から周の長さに比例する項を取り除いたもの（Chatterjee 2018 の式 (5.2)。7-10 §04）、$\mu_L$ は一辺 $L$ の箱 $T^4$ の測度、$\Delta_L$ はその隙間です。$\mathrm{T}^4$ の構成の課題と無限体積への課題で極限を列全体で求めるのは、この本の整理です。

[既知] 表 1　十二の課題

| | 課題 | 言明 | 最も近い結果 | 分かれば動くもの |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\mathrm{T}^4$ の構成の課題 | ゲージ不変な量の期待値が $a\to 0$ で列全体として収束（列全体はこの本の整理） | 局所場の相関関数については、2026 年に公開された構成が、周期の箱で切断の列の全体での収束を示した[評]（8-05）。この行の言明の形（繰り込んだ Wilson ループ）では無い（16-02 §05）。それ以前は仮定つきの紫外安定性と部分列（Bałaban）、概略（MRS） | 紫外極限の段・存在の要件の半分 |
| 2 | 無限体積への課題 | $L\to\infty$ の極限が列全体で在る（同じくこの本の整理） | 公開された構成に在るのは、部分列の極限と相の分解まで[評]。列全体の収束と一意性は評価書の開いた問い（16-02 §02）。問題文の時点では 'Nor do present methods suggest how to obtain the existence of the infinite volume limit'（JW §6）で、一様なギャップの課題が道を開くだろう、と §6.5 が書く段階。格子では強結合で示されている | 無限体積の段・存在の要件の残り |
| 3 | 一様なギャップの課題 | $\inf_L \Delta_L>0$ | 'New ideas are needed'（JW §6.5）。公開された構成に在るのは相に一様な多項式の評価までで、指数の減衰は無い（16-02 §04） | 一様なギャップの段・道筋で無限体積への課題 |

| | 課題 | 言明 | 最も近い結果 | 分かれば動くもの |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 残りの公理の課題 | 回転の対称性の回復と、再構成に要る正則性 | 公開された構成で、相ごとに Wightman の公理（Euclid 不変を含む）評（12-06・12-08）。反射正値性は格子から残る。回転は二次元で Driver の系 6.7 | 公理の段・時空と空間の切れ目 |
| 5 | 非自明性の課題 | 極限がガウスでない | 格子で切った四次元の $\phi^4$（Ising 型を含む）のスケーリング極限はガウス（Aizenman–Duminil-Copin 2021。非自明性とは逆向きの結果）。公開された構成では、跡の場の二点関数の短距離の法則が「有限個の質量の自由場の多項式」という型の記述を除く評（13-02）。Gauss 場の合成による記述の全てを除くものではない | 非自明性の要件の半分 |
| 6 | 局所場と短距離の課題 | $\mathrm{Tr}\, F_{ij}F_{kl}(x)$ などの局所場。短距離で漸近自由と一致 | 摂動論の水準。自然な一対一対応は無い（JW の局所場の脚注）。公開された構成は局所場の札（8-03）を持ち、短距離では一ループの走りと跡の係数を確かめている。全ての次数での摂動論との一致は示されていない評（6-04 §06） | 非自明性の要件の残り |
| 7 | 格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1） | $\xi(\beta) \in (0,\infty)$（全 $\beta$）、$\xi \to \infty$ | 強結合では指数減衰（$\xi$ の上界）が示されている。有限群では弱結合でも指数減衰（Adhikari–Cao。格子の相関長の問題の対象外で、$\xi \to \infty$ も無い） | 格子の升目だけ |
| 8 | 連続の弦張力の問題（Chatterjee の Problem 5.2） | Wilson ループの連続極限で弦張力 $d \neq 0$ | 未。周の項が要るかも開いている。公開された構成にも連続の Wilson ループは無い（16-02 §05） | 弦張力の要件 |
| 9 | 強い減衰の課題 | 任意の境界条件で一様な指数減衰（全 $\beta$） | 小さい $\beta$ では Dobrushin–Shlosman の方法で示せる、と Chatterjee 2021 が注する。大きい $\beta$ で強い版が期待されるかは明らかでない（同） | 格子の面積則の問題 |
| 10 | 格子の面積則の問題（Chatterjee の Problem 4.1） | 全 $\beta$ で面積則 | 小さい $\beta$ はどの群でも（Osterwalder–Seiler 1978）。三次元 $U(1)$ は全 $\beta$（Göpfert–Mack 1982） | 格子の閉じ込めだけ |
| 11 | 一尺度の課題 | $\beta \geq \beta_0$ で $c\,\sigma(\beta) \leq m(\beta)^2 \leq C\,\sigma(\beta)$（定数 $c, C > 0$ は $\beta$ によらない。$m, \sigma$ は格子単位の質量と弦張力で、$m > 0$ も $\sigma > 0$ も仮定しない） | 定理なし。本書の検討の記録は 17-12 式 (3) の形で仮定として置いた段階（拡散型緩和時間の仮定は別の式 (6)、17-12 §05） | 期待の水準で弦張力の要件と隙間の要件を結ぶ |
| 12 | 三次元の測度の課題 | $T^3$ の上の測度の構成 | 'remains open'（Chevyrev 2022） | 3D の紫外極限の段だけ |

詳細は $\mathrm{T}^4$ の構成の課題が 7-07（公開された構成は 6-01）、非自明性の課題が 7-08、格子の相関長の問題・格子の面積則の問題が 16-01 §07、三次元の測度の課題が 7-06。例：盤面（16-01 表 3）の四次元の升目を動かすのは表 1 の上の四つ（$\mathrm{T}^4$ の構成の課題から残りの公理の課題まで）と格子の相関長の問題、三次元の行は三次元の測度の課題です。連続の弦張力の問題・強い減衰の課題・格子の面積則の問題・一尺度の課題は升目を持たない、切れ目の側の課題です。条件の台帳（27-02）では、一様なギャップの課題の格子の側はブロック観測量の一様な減衰の行（ブロック観測量の相関が $L$ と格子間隔に一様な率で減ること。前提は紫外の制御・小さな $\mathrm{T}^2$ のギャップ・帯の比較（ギャップの言葉））に当たります 紙 。台帳の紫外の制御の行は、周期の立方の箱の連続極限としては公開された構成が示し、本書の道の形は開いたままです（27-02 表 1）。本書の道で残るのは、紫外の結果を赤外の議論が使える形にする継ぎ目です（16-03・16-04） 推 。面積則（格子の面積則の問題）から一様なギャップの課題への矢印は一般には立ちません。面積則は荷電セクター（電束 $e \neq 0$）の隙間、一様なギャップの課題は中性セクター（$e = 0$）の隙間で、転送行列はこの分解を保ちます 紙 。既知の定理は逆向き（一様な指数減衰 ⇒ 面積則、§01 の Chatterjee 2021 の一様な減衰から面積則への定理）です 既知 。

**公開された構成のあと。** 2026 年に公開された構成は、表 1 の上の六つのうち、$\mathrm{T}^4$ の構成の課題を局所場の相関関数について、残りの公理の課題を相ごとに満たし、無限体積への課題には部分列の形で、非自明性の課題と局所場と短距離の課題には短距離の確かめの形で触れています 評 。この章の言葉では、存在の要件は極限を列全体で求める形では満たされず（体積の側が部分列）、隙間の要件（質量ギャップ）には何も与えていません 推 。§05 の図と §06 の数えは課題の間の論理の地図で、公開された構成によって規則は変わりません。どの課題が残っているかの一覧は、評価書の五つの開いた問いに沿って 16-02 に、構成が止まる所は 16-03 に置きます。

03

## 定理でつながる矢印

証明のある矢印は多くありません。三つを順に見ます。

### 反射正値性が極限に残る

一つ目は反射正値性です。Wilson の格子で成り立ち（Osterwalder–Seiler 1978）、不等式なので、測度の列 $\mu_n$ が**弱く収束**すれば極限にも残ります 既知 （4-10）。弱く収束するとは、有界で連続な量の期待値がすべて収束することです（0-03 §08）。

$$\left\langle \overline{\Theta F}\, F \right\rangle_{\mu} = \lim_{n\to\infty} \left\langle \overline{\Theta F}\, F \right\rangle_{\mu_n} \geq 0 \tag{4}$$

$\Theta$ は時間の反射、$F$ は正の時刻の側だけで決まる、有界で連続な量です。残りの公理の課題と合わせれば、Osterwalder–Schrader の再構成でヒルベルト空間と $H \geq 0$ が立ちます（公理の規則。JW も 'Establishing a quantum mechanical Hilbert space is part of the solution to this Millennium problem' と書く）。

### 一様な隙間が極限に残る

二つ目は、一様な隙間が極限に残ることです（隙間の規則）。$\tau_t$ を時間の向きに $t$ ずらす操作とし、$F$ が作るベクトルから真空の成分を引いたもののスペクトル測度を $\nu_F$ と書きます。$\nu_F$ は 4-11 §02 の $\mu_F$ と同じものです。この章では $\mu$ を測度の列に使うので、記号を替えます。

$$\left\langle \overline{\Theta F}\, \tau_t F \right\rangle - \left|\langle F \rangle\right|^2 = \int_{[0,\infty)} e^{-tE}\, \mathrm{d}\nu_F(E) \tag{5}$$

左辺がすべての有界な $F$ で $e^{-\Delta t}$ の定数倍以下になることと、真空に直交する向きで $H \geq \Delta$ であることは同じです[既知]（4-11 §02）。積分に $E = 0$ の点も入っているので、真空が一つであることも一緒に出ます。

箱ごとの評価（7-10 式 (7)）で、減る速さ $\Delta_L \geq \Delta_*$ が $L$ によらなければ、評価は極限に残って隙間になります（標準の議論）。(7) の前の因子 $\|A^* \Omega_L\|\, \|B\, \Omega_L\|$ は、$|F| \leq 1$ なら 1 以下です。この議論には三つの前提が要ります。(i) 使う $F$ の期待値が $L \to \infty$ の列に沿って収束すること（存在の要件の一部）。(ii) その $F$ のベクトルが、再構成したヒルベルト空間で稠密であること。(iii) $T^4$ は時間の向きにも周期的なので箱の相関に加わる $e^{-\Delta_L (L-t)}$ の項が、$L \to \infty$ で消えること（$\Delta_L \geq \Delta_*$ なら消えます）。隙間の規則が出すのは $\Delta > 0$ だけで、$m < \infty$ は理論が真空だけではないこと（7-10 §06）から別に出ます。

例：一つの $F$ の減り方が教えるのは $\nu_F$ の台の下端だけです。格子の相関長の問題の $\xi(\beta)$ はプラケットの相関の減り方です。Chatterjee は $|x| \to \infty$ をすべての向きで取る極限で $\xi$ を定義しますが、転送行列（5-03）のスペクトルに結びつくのは時間の向きの減り方です。時間の向きの減り方で読むと、分かるのはプラケットが作る部分空間での $H$ の下端です（この章の読み）。

### 中心対称性から面積則へ

三つ目は §01 の Chatterjee（2021）の一様な減衰から面積則への定理です（減衰から面積則への規則）。その序論は、次元が一つ低い非線形 σ 模型の指数減衰からゲージ理論の閉じ込めを導く Durhuus–Fröhlich（1980）と、$\mathbb{Z}_n$ の理論から $SU(n)$ の理論へ閉じ込めを運ぶ Fröhlich（1979）も挙げます[既知]（書誌のみ）。Fröhlich の論文の題名では行き先は $SU(n)$ の格子 Higgs 理論で、Chatterjee 2021 の序論は「$SU(n)$ の理論」と紹介しています。

04

## 道筋の矢印 — 出題者と総説が書く順

JW は課題の順序に見込みを書いています。$\mathrm{T}^4$ の構成の課題は既知の方法を延ばせば届く兆候が十分にあるとし、'One presumably needs to revisit known results at a deep level, simplify the methods, and extend them' と書きます。一様なギャップの課題には 'New ideas are needed' と書き、それが無限体積への課題を可能にするだろうと続けます。§5 も、一様なギャップが無限体積極限の証明で 'may play a fundamental role' と書きます既知。これが出題者の道筋の規則です。

$$\text{一様なギャップの課題} \overset{1}{\Longrightarrow} \text{無限体積への課題}: \qquad \inf_{L} \Delta_L \geq \Delta_* > 0 \quad \rightsquigarrow \quad \text{離れた量の相関} \tag{6}$$

正確には、(6) の右は極限の存在ではなく、極限を取るための一様な評価の材料で、組み立て方は書かれていません（'presumably'）。

例：出題者の道筋の規則が結ぶ二つ（一様な減衰と無限体積極限）は、小さい径数のある模型ではクラスター展開から同時に得られました。弱結合の $\phi^4_2$・$\phi^4_3$ がその例です既知（7-04 §08）。一様な隙間から無限体積極限を導く順に通ったのではありません。四次元のヤン–ミルズの長い距離にはその径数がありません（7-11 赤外の径数の障害）。格子の側では Chatterjee（2018）が連続の弦張力の問題を、Wilson ループによる道筋の 'the most basic question that needs to be solved before making any further progress' と位置づけます既知。これは「先に要る」という必要の向きの文で、連続の弦張力の問題から要件への十分の矢印ではありません。

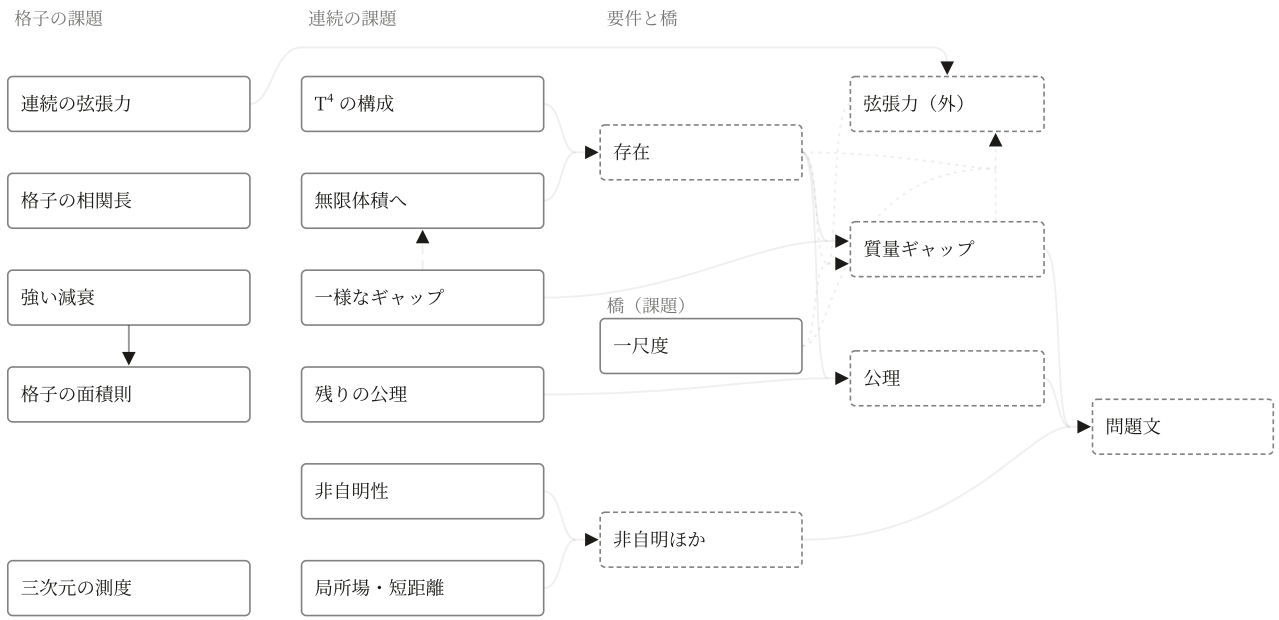
05

## 仮に分かったとする — 課題の地図

表 2 の規則を一枚の図にします。課題の箱を押すとその課題が「仮に分かった」ことになり、前提がそろった規則から結論が点きます。点く範囲は、前提がすべて入れば結論も入る集合のうち最小のもの（閉包）です。

$$\mathrm{cl}_{\ell}(S) = \bigcap \big\{ X \supseteq S : \text{水準} \leq \ell \text{ のどの規則でも、前提} \subseteq X \ \Rightarrow \ \text{結論} \in X \big\} \tag{7}$$

図 1　課題の箱を押すと「仮に分かった」になり、動く要件と盤面の升目が点く。つまみで矢印の強さ（定理だけ／＋道筋／＋期待）を、ボタンで中心が自明な群を選ぶ。実線は定理、破線は道筋、点線は期待。G は固定




仮に分かった：なし。問題文まで：あと T⁴ の構成・一様なギャップ・残りの公理・非自明性・局所場・短距離。盤面で動く升目：なし（矢印：定理・道筋・物理の期待）

計算 この図の点き方は、表 2 の規則の閉包 (7) をその場で計算したもの（矢印の選び方はこの本の整理）。

既知 表 2　規則（前提がすべてそろえば結論）。上の七つ（存在の規則から弦張力の規則まで）は定理か定義、出題者の道筋の規則は道筋、弦張力から隙間への規則・隙間から弦張力への規則は物理の期待 物理 。規則の選び方はこの本の整理。弦張力の要件は §01 の、連続の弦張力 $d$ が 0 でないこと（問題文の外）

| 規則 | 前提 ⇒ 結論 | 強さ | 根拠 |
|---|---|---|---|
| 存在の規則 | $T^4$ の構成の課題 ∧ 無限体積への課題 ⇒ 存在の要件 | 定義 | JW §6.5 |
| 公理の規則 | 存在の要件 ∧ 残りの公理の課題 ⇒ 公理の要件 | 定理 | 式 (4) と OS の再構成 |
| 隙間の規則 | 存在の要件 ∧ 一様なギャップの課題 ⇒ 隙間の要件 | 定理 | 式 (5) と 7-10 式 (7)（標準の議論。前提は §03） |
| 非自明性の規則 | 非自明性の課題 ∧ 局所場と短距離の課題 ⇒ 非自明性の要件 | 定義 | JW §4 |
| 問題文の規則 | 公理の要件 ∧ 非自明性の要件 ∧ 隙間の要件 ⇒ 問題文の要件（$\mathsf{P}_G$） | 定義 | 式 (2) |
| 減衰から面積則への規則 | 強い減衰の課題 ⇒ 格子の面積則の問題 | 定理 | Chatterjee 2021 一様な減衰から面積則への定理 |
| 弦張力の規則 | 連続の弦張力の問題 ⇒ 弦張力の要件 | 定義 | Chatterjee 2018 §5（弦張力の要件は連続の弦張力の問題の $d \neq 0$ そのもの） |
| 出題者の道筋の規則 | 一様なギャップの課題 ⇒ 無限体積への課題 | 道筋 | JW §5・§6.5 |

| 規則 | 前提 ⇒ 結論 | 強さ | 根拠 |
|---|---|---|---|
| 弦張力から隙間への規則 | 存在の要件 ∧ 弦張力の要件 ∧ 一尺度の課題 ⇒ 隙間の要件 | 期待 | 尺度は一つ（17-12） |
| 隙間から弦張力への規則 | 存在の要件 ∧ 隙間の要件 ∧ 一尺度の課題 ⇒ 弦張力の要件 | 期待 | 同じ一文の逆向き |

例：「格子の課題」のボタンで格子の相関長の問題・連続の弦張力の問題・強い減衰の課題・格子の面積則の問題と三次元の測度の課題を仮に分かったことにしても、点くのは弦張力の要件だけで、要件は一つも点きません。16-08 §08 の「格子で示せば足りる」を矢印の言葉で言い直したものです。

06

## 地図を数える — どの道にも要る課題

問題文の要件に届く課題の組のうち、一つでも抜くと届かなくなるものを**極小の組**と呼びます。部分集合 4096 個を三つの水準で調べ、極小の組をすべて数えました[計算]。

$$\mathcal{S}_\ell = \left\{ S :\ \mathrm{P}_G \in \mathrm{cl}_\ell(S),\ \ S \text{ から一つ抜くと } \mathrm{P}_G \notin \mathrm{cl}_\ell \right\} \tag{8}$$

定理だけなら表 1 の上の六つ（$\mathrm{T}^4$ の構成の課題から局所場と短距離の課題まで）の一組、道筋を足すと {$\mathrm{T}^4$ の構成の課題・一様なギャップの課題・残りの公理の課題・非自明性の課題・局所場と短距離の課題} の一組、物理の期待まで足すと {$\mathrm{T}^4$ の構成の課題・無限体積への課題・残りの公理の課題・非自明性の課題・局所場と短距離の課題・連続の弦張力の問題・一尺度の課題} が加わって二組です。中心が自明な群でも同じでした。

[計算] 表 3　課題ごとに、問題文の要件への極小の組のすべてに入るか（必須）、どれかに入るか、どれにも入らないか

| 課題 | 定理だけ | ＋道筋 | ＋物理の期待 | 単独で動くもの（物理の期待まで・中心が自明でない群） |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{T}^4$ の構成の課題・残りの公理の課題・非自明性の課題・局所場と短距離の課題 | 必須 | 必須 | 必須 | なし |
| 無限体積への課題 | 必須 | — | 入る | なし |
| 一様なギャップの課題 | 必須 | 必須 | 入る | 無限体積への課題（道筋） |
| 連続の弦張力の問題 | — | — | 入る | 弦張力の要件 |

| 課題 | 定理だけ | ＋道筋 | ＋物理の期待 | 単独で動くもの（物理の期待まで・中心が自明でない群） |
|---|---|---|---|---|
| 一尺度の課題 | — | — | 入る | なし |
| 格子の相関長の問題・強い減衰の課題・格子の面積則の問題・三次元の測度の課題 | — | — | — | 強い減衰の課題だけで格子の面積則の問題（中心が自明でない群） |

例：(a) $\mathrm{T}^4$ の構成の課題・残りの公理の課題・非自明性の課題・局所場と短距離の課題はどの道にも要ります。(b) 物理の期待の水準では、一様なギャップの課題の代わりに「連続の弦張力の問題と一尺度の課題」で質量ギャップに届きます。質量と弦張力を一つの尺度の二つの顔と見る物理の一文（17-12 の式 (3)）が一様なギャップの課題の役を肩代わりする形です。(c) 格子の相関長の問題・強い減衰の課題・格子の面積則の問題・三次元の測度の課題はどの極小の組にも入りません。一次資料で確かめた矢印だけの数えなので、格子から連続の要件へ延びる矢印が定理になれば数え直しです。

07

## すべての群で — 群を替えると消える矢印

問題文はすべてのコンパクト単純群 $G$ で問題文の要件を求めます（式 (2)）。リー環の候補は四つの系列と五つの例外で、同じリー環に中心で割った形の群も並びます[既知]（1-04 表 6）。一つの群の結果を別の群へ運ぶ一般の定理は、この章が読んだ範囲に見当たりません。群によって消える矢印もあります。減衰から面積則への規則は、有限次元の既約ユニタリ表現 $\pi$ が中心に自明でなく作用すること、つまり $\pi(z) \neq I$ となる中心の元 $z$ があることを使います。中心の元はすべての $\pi(g)$ と可換なので、既約な $\pi$ では Schur の補題（1-04 §06）によりスカラーとして働きます。

$$\exists z \in Z(G): \qquad \pi(z) = \omega I, \quad \omega \neq 1 \qquad (\pi \text{ は既約}) \tag{9}$$

例：$SU(N)$ の基本表現では $z = e^{2\pi i/N} I$ で $\omega = e^{2\pi i/N}$ です（1-04 §07）。中心が自明な群では (9) を満たす表現がありません。単連結な $G_2$・$F_4$・$E_8$ のほか、中心で割った形の $SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}_2$ や $PSU(N) = SU(N)/\mathbb{Z}_N$ もそうで、中心で割った群はどれも中心が自明です[既知]。理由を一行で書きます。連結なリー群では、中心は随伴表現の核です（1-04 §06）。$G/Z(G)$ は随伴表現の像 $\mathrm{Ad}(G) \subset GL(\mathfrak{g})$ と同じ群で、その随伴表現は $\mathfrak{g}$ の上の $\mathrm{Ad}(g)$ そのものです（単純なリー環では ad が単射）。核は $\mathrm{Ad}(g) = I$ の元、つまり単位元だけです。図 1 の「中心が自明な群」はこの場合で、強い減衰の課題から格子の面積則の問題への矢印が消えます。Chatterjee は、中心が自明な群（例に $SO(3)$）では弱結合で閉じ込めないかもしれな

いと信じられている、と注します[物理]。問題文はそうした群にも隙間を求めるので、閉じ込めを経る道はすべての群には使えません。一方、一ループの係数 $16\pi^2 b_0 = \frac{11}{3} C_A$ はどの群でも正で（4-06 §02）、摂動論の漸近自由は群によりません[既知]（0-03）。

**SU(N) への置き換え。** 本書の条件の台帳（27-02）の行を一つずつ $SU(N)$ に移すと、三種に分かれます[紙]。(i) 群に依らない行：二重井戸の一様なギャップ（二重井戸）、't Hooft の張力の正値性と z の鏡映正値性（代数）、挿入の一様な受理（恒等式）、$\mathrm{R}^4$ への極限。(ii) 中心 $\mathbb{Z}_N$ の言葉にそのまま移る行：小さな $\mathrm{T}^2$ のギャップの捩れの部分では、25-01 の反可換の対の剛性の補題（反可換な対）が時計と移動の対の一意性に替わり（捩れが原始的なら共役を除いて一意で、中心化群は $\mathbb{Z}_N$。González-Arroyo の総説 hep-th/9807108 §4.2–4.3[既知]）、捩れた $T^2$ の随伴のギャップは $4\sin^2(\pi/(NL))$ になります（$SU(3)$、$L = 3$〜$6$ で固有値の計算と一致し、値は $NL$ だけで決まる[計算]）。小さな $\mathrm{T}^2$ の基点の原典は $SU(N)$、z の鏡映正値性と枠の減相関は Osterwalder–Seiler の一般の群の形です。一ループの $\beta - \beta'$ は $11N^2 \ln 2/(12\pi^2)$（$N = 2$ で 0.2575、$N = 3$ で 0.5794）[紙]。色の平均の補題は $\mathfrak{su}(N)$ の $n = N^2 - 1$ 色で通り、定数 5 は $n(n+2)/3$ になります（重みつきの四次の球面 design の存在を含めて Lean：ColorAverageN（colorAverage・design_identity）。$\mathfrak{su}(N) \cong \mathbb{R}^n$ への当てはめは[紙]）。Tomboulis–Yaffe の不等式の $SU(N)$ 版は Kanazawa arXiv:0808.3442（未公刊）の Theorem 2 にあります[既知]（本書の板への当てはめは未）。(iii) やり直しの要る行：$SU(2) = S^3$ の性質と $-1 \in$ Weyl 群（類関数の偶性）を使った紫外の部品——一リンクの条件つき法則が一母数になること（15-07 (5)）、熱核の像の和の負の項を落とす上界（15-08 の熱核の揺らぎの稀さの補題）、偶性の段（階層模型の $SU(3)$ では三次の不変式 $\mathrm{tr}\, X^3$ で壊れる）——と、帯の数値（26-09 は $SU(2)$ と $U(1)$ だけ）です。したがって本書の道を $SU(N)$ へ移すには、$SU(2)$ で開いている行（繰り込みの比較など）に、この三つの群版の補題と数値のやり直しを加える必要があります。紫外の側の存在は、公開された構成が任意のコンパクト単純群で与えています[評]。本書の紫外の部品は、存在のためではなく、本書の道の継ぎ目のための部品として読みます[推]（16-04）。中心が自明な群（$G_2$・$F_4$・$E_8$ と中心で割った群）では捩れの道具が無く、$Sp(n)$（$n \geq 2$）では捩れを食う対の中心化群が連続で、$T^2$ の捩れ一つでは零モードが消えません[紙]（一例）。全てのコンパクト単純群への道は、本書の範囲では開いています。

08

## 問題文の外の課題

JW §5 は 'natural extensions' を挙げます。孤立した一粒子状態（ギャップに加えて上の隙間）、閉じ込め、漸近自由を保つ場を足した他の四次元ゲージ理論とその力学、$\mathbb{R}^4$ から一般の四次元多様体への拡張です[既知]。どれも要件ではなく、図 1 では弦張力の要件だけを外側に

置きました。孤立した一粒子状態は、質量の作用素 $\sqrt{H^2-\mathbf{P}^2}$（$\mathbf{P}$ は運動量）のスペクトルで書けます（16-05 粒子の語の切れ目）。

$$\operatorname{spec}\sqrt{H^2-\mathbf{P}^2}\ \cap\ (0,\,m+\delta)=\{m\}\qquad(\text{ある }\delta>0)\tag{10}$$

例：質量 $m$ の自由場では、Fock 空間（2-06）の一粒子状態が $m$、二粒子以上が $[2m,\infty)$ を埋め、スペクトルは $\{0\}\cup\{m\}\cup[2m,\infty)$、上の隙間は $m$ です既知。JW §5 は、ギャップから出るクラスター性（7-10 §08）が $\mathbb{R}^4$ の結果を一般の四次元多様体へ運ぶかもしれない（'may make it possible'）とも書きます。

09

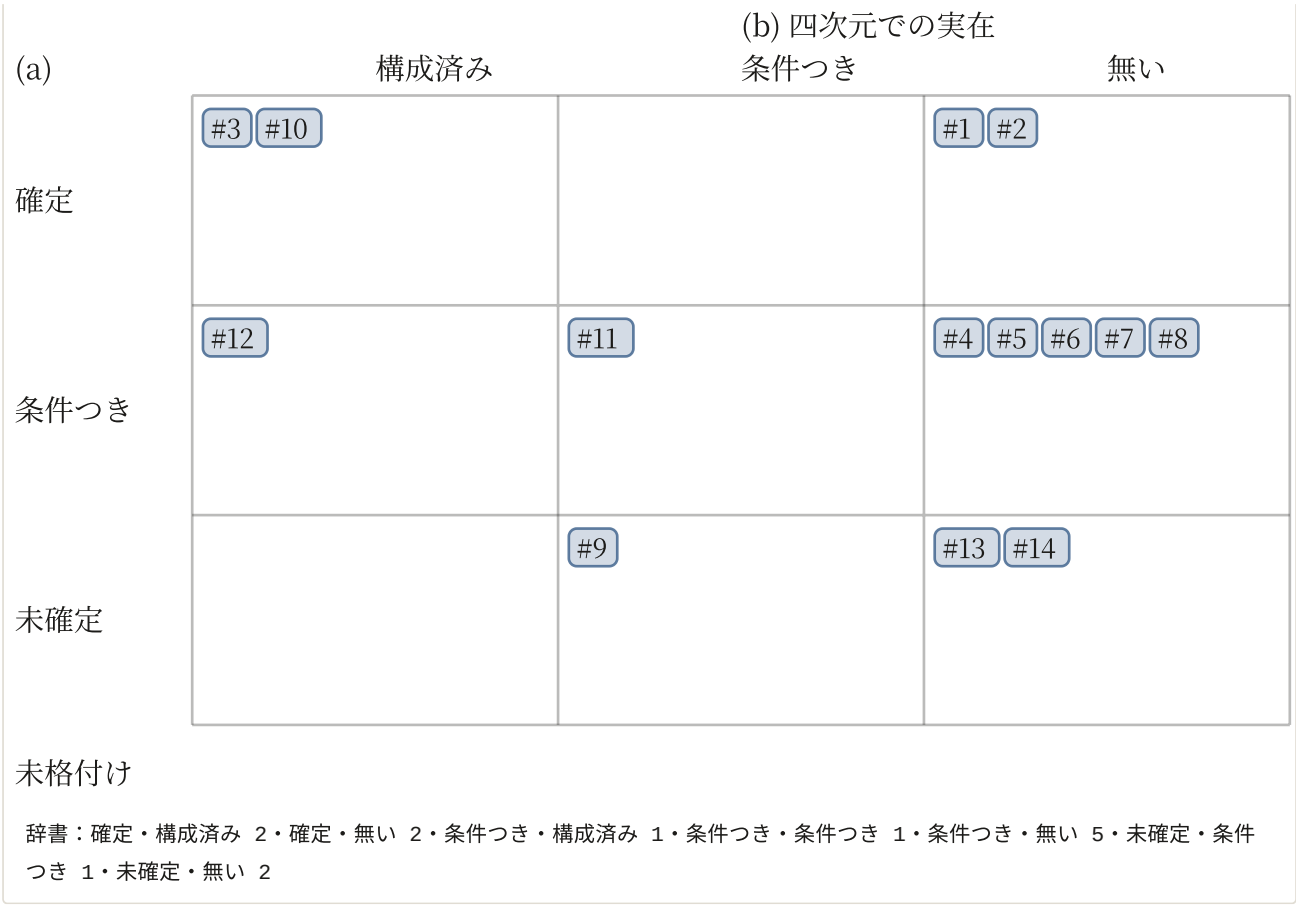
## 本の座標系 — 辞書・切れ目・課題・壁を一つの枡に

辞書の二列の格（18-01 §05）を共通の座標にし、九つの枡に四つの一覧を打ちます。(a) は「両方が在るとしたら同じか」、(b) は「四次元で在るか」です。辞書の行の格は 18-01 のままで、切れ目・課題・壁の格はこの本の整理です。根拠は次のとおりです。

切れ目：16-05 表 1 の一文の対に当たる辞書の行の格を引き継ぐ（1→1・2→13・3→9・4→8・5→2・6→5・7→14）。課題：(a) は表 2 で課題から出る規則の強さ（定理か定義＝確定、群の条件つき＝条件つき、期待＝未確定。規則の無い格子の相関長の問題・格子の面積則の問題・三次元の測度の課題は未格付け）、(b) は表 1 の「最も近い結果」（範囲を限った版があれば条件つき）。壁：23-02 四次元格子で試した道と壁 の列が名指す辞書の行の格（緩和時間の上界の仮定・緩和時間の下界の仮定・η・鎖→13、物理単位の隙間の言明→8、極限→7。一段と取りこぼしの総和可能性の仮定は辞書に行が無く未格付け）。

例。拡散型緩和時間の仮定に掛かる十三の壁は、辞書の 13（$\Lambda$・「尺度は一つ」）・尺度は一つの切れ目・一尺度の課題と同じ「未確定・無い」の枡に集まります。壁の型（23-02 四次元格子で試した道と壁）は原理・構造・道具・仮定・測定と分かれても、辞書の上では同じ一つの対に掛かっています。「確定・条件つき」に入るのは課題だけで、範囲を限った版が在り、要件への矢印が定理か定義のもの（$\mathrm{T}^4$ の構成の課題・無限体積への課題・残りの公理の課題）です。

図 2　ボタンで一覧を選ぶと、その行が (a)×(b) の九つの枡に打たれる。「重ねる」で四つを同時に打つ。枠の下は未格付け




計算 格の割り当ては、18-01 表 2・16-05 表 1・この章の表 1 と表 2・23-02 表 3 から上の規則でこの端末で作り、数（14・7・12・21）を照合しました。

**表 4**　九つの枡と未格付けに入る行（番号は各表の行。壁は 23-02 表 3 の番号。図では辞書に #、切れ目に「切」を付ける）。

| (a)・(b) | 辞書（18-01 表 2） | 切れ目（16-05 表 1） | 課題（表 1） | 壁（23-02 表 3） |
|---|---|---|---|---|
| 確定・構成済み | 3・10 | | | |
| 確定・条件つき | | | $T^4$ の構成の課題・無限体積への課題・残りの公理の課題 | |
| 確定・無い | 1・2 | 1・5 | 一様なギャップの課題・非自明性の課題・局所場と短距離の課題・連続の弦張力の問題 | |
| 条件つき・構成済み | 12 | | | |
| 条件つき・条件つき | 11 | | 強い減衰の課題 | |

| (a)・(b) | 辞書（18-01 表 2） | 切れ目（16-05 表 1） | 課題（表 1） | 壁（23-02 表 3） |
|---|---|---|---|---|
| 条件つき・無い | 4・5・6・7・8 | 4・6 | | 2・9・21 |
| 未確定・構成済み | | | | |
| 未確定・条件つき | 9 | 3 | | |
| 未確定・無い | 13・14 | 2・7 | 一尺度の課題 | 1・3・4・5・7・10・11・12・14・16・17・18・20 |
| 未格付け | | | 格子の相関長の問題・格子の面積則の問題・三次元の測度の課題 | 6・8・13・15・19 |

## この章が言えている範囲

| | 言えている | 言えていない |
|---|---|---|
| 既知 | 課題の言明と現状（一次資料の範囲）。公理の規則・隙間の規則・減衰から面積則への規則の含意（隙間の規則は標準の議論で、§03 の前提 (i)〜(iii) つき）と JW の道筋の文 | 十二で尽きること。矢印の選び方と、極限を列全体で求めること（この本の整理）。確かめていない矢印は数えていない |
| 計算 | 表 2 の規則の下での極小の組と表 3 | 別の規則の下での数え。隙間の規則を四次元のヤン–ミルズの観測量で細部まで書くこと |
| 物理 | 弦張力から隙間への規則・隙間から弦張力への規則を認めれば、連続の弦張力の問題と一尺度の課題が一様なギャップの課題の役を肩代わりすること | 弦張力から隙間への規則・隙間から弦張力への規則が定理であること |
| 整理 | 図 2・表 4 の打点は §09 の規則の下で各表から機械的に出る | 規則の選び方そのもの（切れ目・課題・壁の格は定理ではない） |
| 全体 | — | どの課題もこのサイトは片づけていない。質量ギャップの存在は示していない。表 1 に書いた公開された構成の到達点は委員会の評価の水準（評）で、その証明の当否はこの章の外 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 問題文の引用（§4・§5・§6・§6.5・脚注1・2）、無限体積への課題・一様なギャップの課題・局所場と短距離の課題の現状 | 本文 | A. Jaffe, E. Witten, Quantum Yang–Mills Theory, Clay Math. Inst. (2000) |
| 公理の文献 [45]（式 (2) の公理の要件） | 書誌のみ | R. Streater, A. Wightman, PCT, Spin and Statistics and All That, W. A. Benjamin (1964)（書誌は JW の文献表による） |
| Problem 4.1・5.1・5.2（格子の面積則の問題・格子の相関長の問題・連続の弦張力の問題）と §4・§5・§6 の文、弦張力の要件の定義 | 本文 | S. Chatterjee, Yang–Mills for probabilists, arXiv:1803.01950 (2018) |
| 定理 2.2・2.4、強い減衰の定義とその注（強い減衰の課題）、$SO(3)$ の注、序論の紹介 | 本文 | S. Chatterjee, A probabilistic mechanism for quark confinement, arXiv:2006.16229, Comm. Math. Phys. 385 (2021) 1007–1039 |
| $SO(3)$ の注の出典／強い減衰の課題の小さい $\beta$ | 書誌のみ | J. Greensite, B. Lautrup, Phys. Rev. Lett. 47 (1981) 9–11／R. L. Dobrushin, S. B. Shlosman, Constructive criterion for the uniqueness of Gibbs field, in Statistical Physics and Dynamical Systems, Birkhäuser (1985) 347–370（どちらも書誌は Chatterjee 2021 の文献表による） |
| σ 模型から閉じ込め／$\mathbb{Z}_n$ から $SU(n)$ Higgs | 書誌のみ | B. Durhuus, J. Fröhlich, CMP 75 (1980) 103–151／J. Fröhlich, Phys. Lett. B 83 (1979) 195–198（題名と Chatterjee 2021 の紹介） |
| 反射正値性・再構成、格子の面積則の問題の小さい $\beta$ | 要旨・書誌のみ | K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471（要旨：強結合での無限体積の極限の存在と解析性・Wilson の閉じ込めの評価）／K. Osterwalder, R. Schrader, CMP 31 (1973) 83–112; 42 (1975) 281–305 |
| 表1の公開された構成の到達点 | 評 | 評価書 `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）冒頭・§5・§7・§8。コードは `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（2026-10-28 提出）。読み方は第 6・8・12・13 部 |
| $T^4$ の構成の課題の現状 | 要旨と序文／本文 pp.325–328（7-07） | T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 122 (1989) 355–392／J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, Comm. Math. Phys. 155 (1993) 325–383 |
| 無限体積への課題・格子の相関長の問題の強結合、格子の相関長の問題の有限群 | 本文 §1（16-01） | H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, arXiv:2204.12737, Comm. Math. Phys. 400 (2023) 805–851／A. Adhikari, S. Cao, arXiv:2202.10375, Ann. Probab. 53 (2025) 140–174 |
| 残りの公理の課題の Driver の系 6.7 | 本文の序論 | B. K. Driver, CMP 123 (1989) 575–616 |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 非自明性の課題の現状 | 本文（7-08） | M. Aizenman, H. Duminil-Copin, Marginal triviality of the scaling limits of critical 4D Ising and $\phi^4_4$ models, Ann. of Math. 194 (2021) 163, arXiv:1912.07973 |
| 格子の面積則の問題の三次元 $U(1)$ | 要旨 | M. Göpfert, G. Mack, Proof of confinement of static quarks in 3-dimensional U(1) lattice gauge theory for all values of the coupling constant, CMP 82 (1982) 545–606（要旨（INSPIRE）：Villain 作用・全結合で弦張力が正・$m_D$ を固定した連続極限は自由スカラー場。本文は未読。年は Crossref の発行年で、INSPIRE は 1981） |
| 一尺度の課題の言明と現状 | 本書の検討の記録 | 17-12 の式 (3)・(6) と出典表 |
| 三次元の測度の課題の現状 | 本文 §1.1（7-06） | I. Chevyrev, Stochastic quantisation of Yang–Mills, J. Math. Phys. 63 (2022) 091101, arXiv:2202.13359 |
| 本文で引いた本書の章 | 既知 | 0-03 §08（局所場の脚注・弱い存在の脚注・弱収束）、1-04 §06・§07（Schur の補題・中心）、4-06 §02（$b_0$）、4-10・4-11 §02（再構成と $\mu_F$）、7-04 §08（クラスター展開）、7-10 §04・§06・§07（ren・$m<\infty$・式 (7)） |
| 式 (5)・(10) | 既知 | スペクトル定理と再構成（4-10・4-11）、Fock 空間（2-06） |
| 表 3・図 1 | 計算 | この端末の Python：graph.py（部分集合 4096 個 × 三水準 × 中心の有無で閉包と極小の組）。図は同じ規則 |
| 表 4・図 2 | 計算 | Python（coord.py。18-01 表 2・16-05 表 1・表 1・表 2・23-02 表 3 を読んで割り当て、行の数を照合） |

次に読む章：16-08 よくある誤解。課題を取り違えた言い方を問題文の言葉に戻します。本書の検討の記録の側の課題は 23-15。

# よくある誤解 — 半分正しい言い方を、問題文の言葉に戻す

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

**この章で分かること** — よく見る九つの言い方の、正しい核とずれ。群と次元で証明の状況がどう変わるか（図 1）。相関の減り方が粒子の有無までは言わないこと（図 2）。

**前提となる章** — 0-03（4-11・5-02・7-11・17-01 があると速い。使う言葉は §01 の末尾で一行ずつ定義します）。

**先に言うこと** — 直すのは言い方の水準までです。質量ギャップの存在も連続極限の構成も、この章は示しません。2026 年に公開された四次元の構成（委員会の評価[評]。札の意味は 6-00 の「札」）で変わった言い方は、§02・§03・§08 に書きます。

この章の順序

1. 誤解の読み方 — 問題文の一文に戻す・この章で使う言葉
2. 「難しさの中心は無限大」 — 無限大を消しても残る
3. 「二次元・三次元ではもうできている」 — 非可換では二次元だけ
4. 「非可換だからギャップが出る」 — 定理は群と次元で分かれる（図 1）
5. 「質量ギャップはいちばん軽い粒子の質量」 — 減り方は粒子を言わない（図 2）
6. 「閉じ込めを示せばギャップも出る」 — 別の主張
7. 「格子の数値計算で確かめられている」 — 在ると置いた予言
8. 「格子で示せば足りる」「有限の箱で作れば残りは技術」 — 格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）と $T^4$
9. 「質量ギャップは不確定性原理から出る」 — 定理は長さを質量に換えるだけ
10. 寄り道：ほかに見かける言い方 — 1/0・ホログラフィー・自明性・QCD

01

## 誤解の読み方

よく見る言い方の多くは半分正しく、そのぶんずれが見えにくくなります。この章は各項を**言い方・正しい核・ずれ・正確な言い方**に分けます。基準は問題文の一文で（0-03）、条件を並べると

$$\forall G \ \exists \mathcal{T}_G : \quad \text{公理} \ \wedge \ \text{非自明} \ \wedge \ \text{短距離で漸近自由と一致} \ \wedge \ \Delta_G > 0 \tag{1}$$

です。各語を一行ずつ読みます 既知 。

- $G$：コンパクト単純群。$SU(2)$・$SU(3)$ から例外群 $G_2$ まで全部です（0-03）。
- $\mathcal{T}_G$：$\mathbb{R}^4$ 上の量子ヤン–ミルズ理論。格子でも有限の箱でもなく、無限に広い連続の四次元の上の理論です（0-03）。
- 公理：量子場の理論が満たすべき条件の一覧（Wightman の公理や Osterwalder–Schrader の公理）です（0-03）。
- 非自明：相互作用の無いガウスの理論（自由場）に潰れていないことです（0-03）。
- 短距離で漸近自由と一致：短い距離での振る舞いが、摂動論の予言（漸近自由。§04 の (4)）と合うことです（0-03）。
- $\Delta_G > 0$：ハミルトニアン $H$ のスペクトルが、真空のエネルギー 0 の上の区間 $(0, \Delta_G)$ に点を持たないことです（0-03）。

ずれの多くは (1) の一語を近い語に取り替えて起きます。例。「$\Delta$」→「粒子の質量」（§05）、「存在」→「数値が収束して見える」（§07）、「$\mathbb{R}^4$」→「格子」（§08）。

### この章で使う言葉

第 4 部・第 5 部の言葉を先に借ります。ここでは一行ずつの定義にとどめ、詳しくは右の章に譲ります 既知 。

| 言葉 | この章での意味 | 詳しくは |
|---|---|---|
| $\beta$（格子の結合） | 格子の作用 (2) に掛かる数で、$\beta \propto 1/g^2$。小さい $\beta$ が強結合、大きい $\beta$ が弱結合で、連続極限は大きい $\beta$ の側にある | 5-01 |
| 指数減衰・相関長 | 二つの観測量の相関が、距離 $r$ とともに $e^{-r/\xi}$ のように減ること。$\xi$ を相関長と呼ぶ。格子間隔で測った隙間は $1/\xi$ に当たる | 2-08・4-11 |
| Wilson ループ | 閉じた道 $\gamma$ に沿ってリンクの群の元を掛け、表現の行列のトレースを取った量 $W_\gamma$ | 5-01 |
| 面積則 | 大きい長方形のループで $\langle W_\gamma \rangle$ が $e^{-\sigma \times \text{面積}}$ のように減ること。$\sigma$ を弦張力と呼ぶ。閉じ込めの格子での目印 | 5-02 |

| 言葉 | この章での意味 | 詳しくは |
|---|---|---|
| 周長則 | $\langle W_\gamma \rangle$ が $e^{-c\times\text{周長}}$ の程度にしか減らないこと。面積則より遅い | 5-02 |
| 群の中心 | 群のすべての元と可換な元の集まり。$SU(N)$ では $e^{2\pi ik/N}I$ の $N$ 個、$SO(3)$ や $G_2$ では単位元だけ | 1-04 |
| Casimir 数 $C_A$ | 群ごとに決まる数で、(4) の係数に入る。$SU(N)$ で $N$、$U(1)$ で 0 | 1-04 |
| スペクトル測度 | (5) の $\rho$。状態 $O\Omega$ がエネルギー $E$ の成分をどれだけ持つかの重み | 1-10 |
| 転送行列 | 格子の時間の向きに一段進める作用素 $T$。$T = e^{-H}$ として格子の上のハミルトニアン $H$ を与える | 5-03 |
| 反射正値性 | 時間を裏返す鏡についての正値性。これがあると転送行列が正の作用素になり、ヒルベルト空間とハミルトニアンが戻る | 5-03 |
| 境界条件 | 有限の箱の縁のリンクに、あらかじめ固定しておく群の元の置き方 | §06 の (7) |
| 無限体積極限 | 箱を $\mathbb{Z}^d$ の全体へ広げたときの測度の極限（部分列の極限でもよい）。極限の測度を Gibbs 測度と呼ぶ | 5-04 |
| 相転移 | $\beta$ を動かしたとき、無限の系の性質が折れ曲がるように変わる点 | 2-08 |

02

## 「難しさの中心は無限大」

**言い方**：物理は途中の無限大をうまく処理して進むが、数学はそれを許さない。だから難しい。

**正しい核**：連続の理論には、格子間隔 $a \to 0$ で発散する量を抑える繰り込み（4-04）が要ります。Bałaban の仕事は主にこの紫外の制御に向けられています（7-07）既知 。

**ずれ**：出題者は $T^4$ 上の構成には既知の方法の延長の見込みを認めたうえで、'no present ideas point the direction to establish the existence of a mass gap that is uniform in the volume' と書きます（問題文 §6）既知 。格子間隔を固定した有限の周期格子では、理論は有限次元の積分で、無限大はありません（7-11）。

$$\langle F \rangle = \frac{1}{Z}\int F(U)\, e^{-\beta S_W(U)} \prod_{\ell} dU_\ell, \qquad 0 < Z \le 1 \tag{2}$$

$dU_\ell$ は重さ 1 の Haar 測度、$S_W \ge 0$ は Wilson の作用です（5-01）。例。一辺 32 の格子の $SU(3)$ では、リンクが $4\cdot 32^4$ 本、各リンクの変数が 8 個（$SU(3)$ の次元）で、積分の変数は $4\cdot 32^4 \times 8 = 33{,}554{,}432$ 個です 計算 。多くても有限です。

難しいのは、箱を $\mathbb{Z}^4$ へ広げた理論です。講義資料（Chatterjee 2020）は 'In 3D and 4D, mass gap has not been established at large β for any theory.' と書きました 既知 。その後、有限群では Adhikari–Cao が大きい $\beta$ での指数減衰を示しました（§04）既知 。連続な非可換群では、三・四次元の大きい $\beta$ の隙間は今も示されていません 既知 。欠けているのは無限大の値ではなく、箱と $\beta$ に一様な評価です。ギャップ自体も摂動に映らない $e^{-1/(2b_0 g^2)}$ の形と考えられています（0-02）物理 。

**紫外の側の今**：2025 年までは「紫外はもう片づいた」も言い過ぎでした。Bałaban の四次元の定理（1989）は仮定つきで、仮定を外す定理は 'has not been published yet' でした。ゲージ不変な観測量の極限も、コンパクト性で部分列を取る水準でした（Magnen–Rivasseau–Sénéor 1993 の序文。7-07 §05）既知 。2026 年に公開された構成は、周期の箱で切断の列の全体に沿う連続極限を取り、無限体積へは部分列で移って、Wightman の公理を満たす理論を作りました。委員会はこれを「Lean で証明されている」と評価しています評 （第 6 部）。それでも「紫外が片づいたから残りは赤外だけ」とまでは言えません。無限体積の極限の一意性は示されておらず、構成は全ての段を弱結合のまま運んで格子間隔 1 の段で止まります。その段の結果を赤外の議論が使える形にする継ぎ目（極限の対象・体積に一様な局所の評価・観測量の像）は、まだ言明になっていません（16-03）推 。

正確な言い方

紫外の側は、2026 年に公開された構成が、周期の箱での連続極限として与えた（委員会の評価）。出題者が新しい考えを求めたのは、体積に一様なギャップと $T^4 \to \mathbb{R}^4$ の極限、つまり赤外の側で、そこは今も開いている。二つをつなぐ継ぎ目も残っている。

03

## 「二次元・三次元ではもうできている」

**言い方**：次元を下げればできていて、残るのは四次元だけ。

**正しい核**：$\varphi^4$ は二・三次元で構成済みで（問題文 §6.2）、二次元の可換 Higgs 模型は公理まで示されています。問題文はこれを 'the only complete example of an interacting gauge theory satisfying the axioms' と呼びます 既知 。

**ずれ**：非可換ヤン–ミルズでは話が違います。二次元の構成（7-02）は、ゲージを固定するとプラケットが独立になる、正確に解ける構造に負い、伝播する自由度もありません。三次元は 'a construction of the 3D YM measure … even on T3, remains open'（Chevyrev 2022）で、Bałaban（1985）は有限の格子の分配関数の一様な評価までです（7-06）既知 。違いの芯は結合定数の次元です。

$$[g^2] = (\text{質量})^{4-d} \tag{3}$$

例。$d = 3$ では $g^2\ell$（$\ell$ は長さ）が次元の無い結合で、短い距離ほど小さくなります。短い距離で相互作用が弱まることが、構成の足場になります。$d = 4$ ではこの足場が対数のゆっくりした変化にしか残りません。正確には、$d = 4$ では $g^2$ が無次元になり、尺度への依存は一ループの走り（§04 の (4)）による対数だけになります 既知 （次元ごとの表は 16-01）。

正確な言い方

非可換では、二次元は構成されている（正確に解ける構造に負う）。三次元は有限体積でも連続の測度が構成されていない。四次元は結合定数が無次元になる臨界の次元で、2026 年に公開された構成が、Wilson の格子の極限として Wightman の公理を満たす理論を作った（委員会の評価）。その四次元でも、質量ギャップと無限体積の極限の一意性は示されていない。

二次元でも、漸近自由なシグマ模型の連続極限と質量ギャップには、2026 年 10 月まで主張のある証明がありませんでした（2026-10-06 公開の主張つきの原稿は未検証。16-01 表 5）。

04

## 「非可換だからギャップが出る」

**言い方**：光子（$U(1)$）は質量ゼロだが、グルーオンは非可換で自己相互作用するからギャップが出る。

**正しい核**：四次元の $U(1)$ 格子理論では、大きい $\beta$ で面積則が破れ（Guth 1980。完全な証明は Fröhlich–Spencer 1982）、質量ゼロの相になります（Fröhlich–Spencer 1982） 既知 。いずれも主に Villain 型の作用（(2) の Wilson 作用とは形の違う作用）での結果とされます。一ループの係数も群で決まります。

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = -b_0\, g^3 + \cdots, \qquad b_0 = \frac{11}{3} \cdot \frac{C_A}{16\pi^2} \tag{4}$$

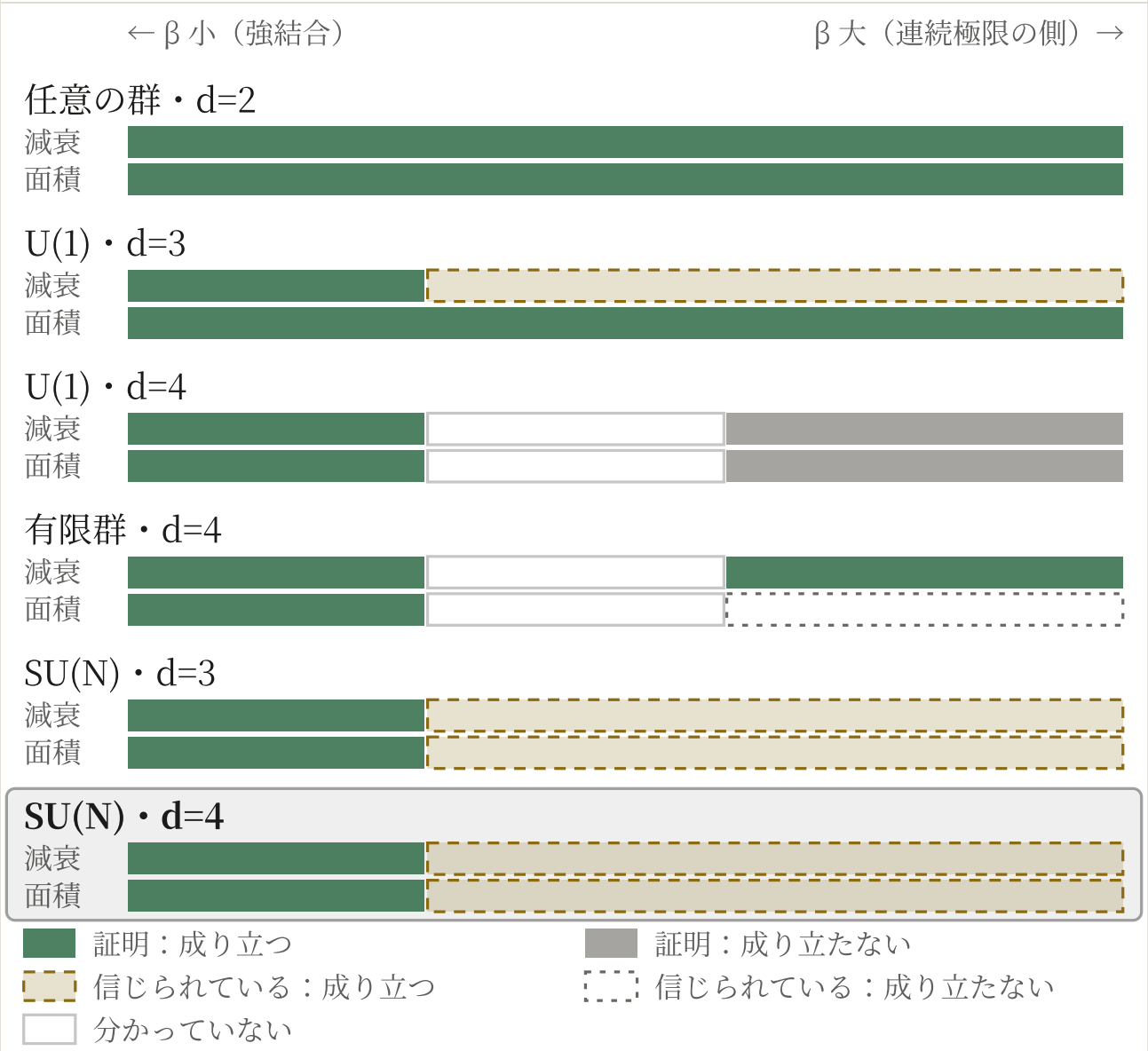
随伴表現の Casimir 数 $C_A$ は $SU(N)$ で $N$、$U(1)$ で 0 で、物質場の無い理論が漸近自由なのは非可換のときだけです（4-06） 既知 。

**ずれ**：格子の定理は群と次元で分かれます（図 1・表 1）。強結合（小さい $\beta$）では、どの群でも指数減衰が成り立ち、中心に自明でなく作用する表現のループでは面積則も成り立ちます（Osterwalder–Seiler 1978） 既知 。中心が自明な群（$G_2$・$SO(3)$・中心が自明な有限群）では、グルーオンによる遮蔽で、大きいループは強結合でも周長則になるとされます 物理 。

強結合の面積則は、閉じ込めの証拠になりません。閉じ込めない四次元の $U(1)$ でも、小さい $\beta$ では成り立つからです（Chatterjee 2018）。例。三次元の $U(1)$ は可換なのに、すべての $\beta$ で面積則が成り立ちます（Göpfert–Mack 1982。Villain 型の作用とされる）既知。四次元の有限群（非可換を含む）は大きい $\beta$ でも指数減衰しますが（Adhikari–Cao）既知、閉じ込めないと信じられています物理。

効いているのは次の点です。連続な非可換群では、有限の $\beta$ に相転移が無く、$\beta \to \infty$ で相関長が発散すると信じられています物理。その極限で、格子間隔で測った隙間 $1/\xi$ は 0 に近づきますが、物理の単位の隙間（例えば $m/\sqrt{\sigma}$）は正のまま残る、と物理では考えます物理。これを示すことが要ります（5-06・5-10）。群を区別しない議論は、四次元の $U(1)$ にも隙間があると誤って結論してしまいます。

図 1　ボタンか表 1 の行で群と次元を選ぶと、その行が強調され、中身と出典が下に出る。各行の上の帯は指数減衰、下の帯は面積則。横は β（区切りは模式）




SU(N)・d=4：定理は強結合の側だけ（Osterwalder–Seiler、Shen–Zhu–Zhu）。

既知 表1　図1の中身（一次資料の定理と「信じられている」見込み。表の欄は大きい $\beta$ の側）。小さい $\beta$ では、指数減衰はどの行も定理で、面積則は中心に自明でなく作用する表現のループで定理です（有限群の行では中心が自明でない群・表現のとき）。中間の $\beta$ の振る舞いは群によって違い、四次元の $\mathbb{Z}_N$（$N$ が大きいとき）には質量ゼロの相があるとされます（出典表の注）。

| 群・次元 | 指数減衰（ギャップ） | 面積則（閉じ込め） |
|---|---|---|
| 任意の群・$d=2$ | あり | あり（すべての $\beta$） |
| $U(1)$・$d=3$ | 講義資料（2020）の時点では示されていないとされる（物理では在る） | あり（Göpfert–Mack。Villain 型の作用とされる） |
| $U(1)$・$d=4$ | なし（質量ゼロの相。Fröhlich–Spencer） | なし（面積則が破れる。Guth、Fröhlich–Spencer） |
| 有限群・$d=4$ | あり（Adhikari–Cao） | 無いと信じられている |
| $SU(N)$・$d=3$ | 未証明（在ると信じられている） | 同 |
| $SU(N)$・$d=4$ | 未証明（在ると信じられている） | 同 |

正確な言い方

四次元では $U(1)$ は弱結合で質量ゼロ、非可換な群は漸近自由で、その意味で群は効く。しかし「非可換だから隙間がある」は証明の筋にならない。有限群は弱結合でも指数減衰が示されており、連続な非可換群の弱結合の側は三・四次元で未証明である。

05

## 「質量ギャップはいちばん軽い粒子の質量」

**言い方**：質量ギャップとは最も軽いグルーボール（グルーオンの束縛状態）の質量で、約 1.7 GeV。

**正しい核**：物理では隙間の下端に孤立した一粒子状態（$0^{++}$ のグルーボール）が在ると考え、格子で測ります。純 $SU(3)$ で $r_0 m = 4.21(11)(4)$（Morningstar–Peardon 1999）です（5-08）物理 。

**ずれ**は三つです。一つ目。問題文が求めるのはスペクトルの隙間で、孤立した一粒子状態は 'natural extensions' の一つです（0-03）既知 。二つ目。格子が測るのは相関の減り方です。ゲージ不変な演算子 $O$ を真空 $\Omega$ に作用させた状態 $O\Omega$ を考えます。$\rho$ は、この状態がエネル

ギー $E$ の成分をどれだけ持つかの重み（スペクトル測度）です。虚時間 $\tau$ だけ離れた $O$ どうしの連結相関は、$\rho$ で次のように書けます（0-04 §07・4-11）既知 。

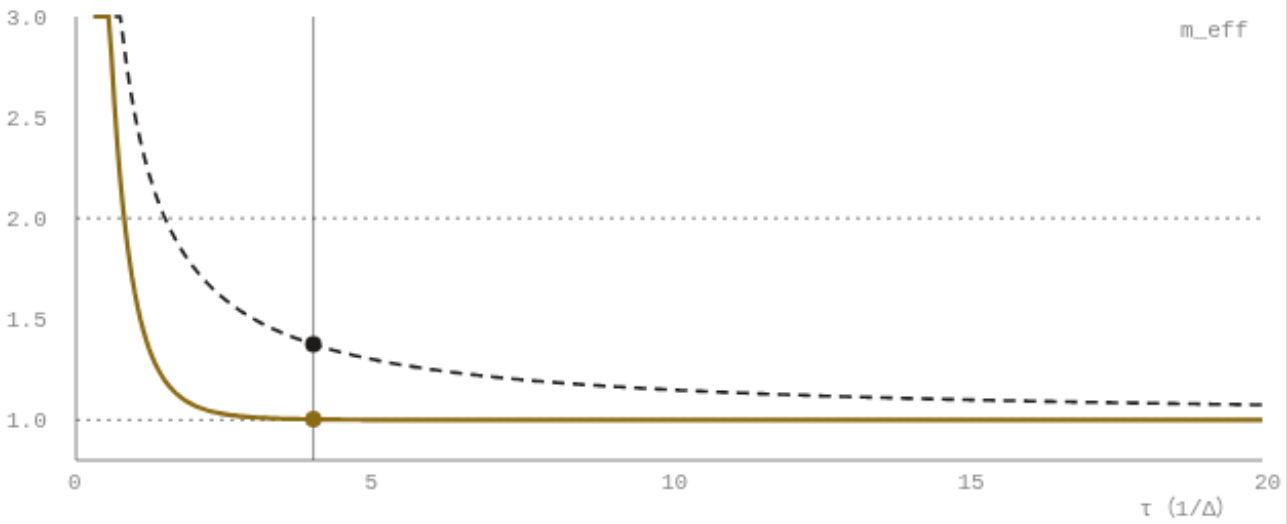
$$C(\tau) = \int_{[\Delta,\infty)} e^{-E\tau}\, d\rho(E), \qquad m_{\mathrm{eff}}(\tau) = -\frac{d}{d\tau}\log C(\tau) \tag{5}$$

$m_{\mathrm{eff}}$ は $\tau \to \infty$ で $\rho$ の台の下端に近づきますが、下端が孤立した点か連続スペクトルの端かは教えません。二つの模型で比べます（$\Delta = 1$）。

A（粒子あり）：$d\rho = Z\,\delta(E-1)\,dE + c\,(E-2)_+^{1/2}\,dE$,　　B（粒子なし）：$d\rho = (E-1)_+^{1/2}\,dE$. (6)

$(x)_+^{1/2}$ は $x>0$ で $\sqrt{x}$、他で 0。$\int_{E_0}^{\infty}(E-E_0)^{1/2}e^{-E\tau}dE = \Gamma(\tfrac{3}{2})e^{-E_0\tau}\tau^{-3/2}$ から、B は $m_{\mathrm{eff}} = 1 + \frac{3}{2\tau}$ です。例。A は $\tau \approx 3.2$（$c=1$）〜$4.2$（$c=5$）で 1% 以内に入り、B は $\tau = 150$ でようやく入ります（表 2）。途中の窓に指数関数を一つ当てはめると、B には $\Delta$ より重い「粒子」が見えます 計算 。平らな部分を一粒子の質量と読むのは物理の水準の解釈です 物理 。

図 2　A の連続部分の重み c（Z = 1）と時刻 τ を変えると、有効質量（実線 A：粒子あり、破線 B：粒子なし）の曲線と読み値が変わる。点線は 1 と 2




c = 1.0、τ = 4.0：A 1.0028、B 1.3750（Δ = 1）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（(6) の閉じた形をその場で計算）。

計算 表 2　$m_{\mathrm{eff}}(\tau)$（$\Delta=1$、$Z=1$）。最後の行は 1% 以内に入る最初の $\tau$。閉じた形と数値積分の差は $\tau \le 16$ で $4\times10^{-5}$ 未満。

| $\tau$ | A（$c=1$） | A（$c=5$） | B |
|---|---|---|---|
| 1 | 1.6147 | 2.5495 | 2.5000 |
| 2 | 1.0712 | 1.3061 | 1.7500 |
| 4 | 1.0028 | 1.0138 | 1.3750 |
| 8 | 1.0000 | 1.0001 | 1.1875 |

| $\tau$ | A（$c=1$） | A（$c=5$） | B |
|---|---|---|---|
| 16 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0938 |
| 1% 以内 | 3.15 | 4.23 | 150 |

三つ目。GeV の単位は純ヤン–ミルズの中からは出ず、クォークを含む格子 QCD の尺度 $r_0$ を借ります。格子の論文も、純ゲージ理論と QCD は別の理論だと断っています（Athenodorou–Teper）物理。「グルーオンに質量が付く」も別の話で、質量項 $m^2 \operatorname{tr} A_\mu A_\mu$ はゲージ不変ではありません 既知。

正確な言い方

質量ギャップはスペクトルの隙間である。物理はその下端に孤立した粒子（グルーボール）が在ると考えて質量を測る。相関の減り方が教えるのは下端の位置までである。

06

## 「閉じ込めを示せばギャップも出る」

**言い方**：閉じ込め（クォークを単独で取り出せないこと）とギャップは同じことで、片方を示せばもう片方も出る。

**正しい核**：物理では弦張力 $\sigma$ と隙間 $m$ を一つの尺度の二つの顔と見ます（17-01）。正確には、比 $m/\sqrt{\sigma}$ が $\beta$ や格子間隔に依らない有限の正の数に近づく、と物理では考えます 物理。格子には条件つきの定理もあります。Chatterjee（2021）は、$G$ が $U(n)$ の閉じた連結部分群のとき、次の強い形の減衰を仮定しました 既知。

$$\exists\, K_1, K_2 > 0 \;\; \forall B, \delta, f, g: \quad \left| \langle fg \rangle_{B,\delta} - \langle f \rangle_{B,\delta} \langle g \rangle_{B,\delta} \right| \le K_1 e^{-K_2 \operatorname{dist}(f,g)} \tag{7}$$

$B$ は立方体の箱、$\delta$ は箱の境界条件、$f, g$ は $[-1,1]$ に値を取る局所的な関数（一本のリンクの近くの変数だけで決まる関数）、$\operatorname{dist}(f,g)$ はその間の距離です。定数 $K_1, K_2$ は $B$・$\delta$・$f$・$g$ に依らず、$G$・$\beta$・$d$ だけで決まります。この順序が要で、定数が箱や境界条件ごとに違ってよいなら、仮定はほとんど何も言いません。

一様な減衰から面積則への定理（Chatterjee 2021 の定理 2.4）は、(7) が成り立てば中心対称性は破れず、中心に自明でなく作用する表現の長方形のループで面積則が成り立つ、というものです 既知。著者は、小さい $\beta$ ではほぼどの格子ゲージ理論でも (7) が示せると書く一方、四次元で信じられている減衰がこの強い形を含むかは明らかでないと書きます。

**ずれ**：(a) 問題文は閉じ込めを求めず、'natural extensions' に挙げるだけです 既知。(b)「任意のコンパクト単純群」には中心が自明な $G_2$ なども入り 既知、そうした群は弱結合で閉

じ込めないかもしれないと信じられています（同論文の $SO(3)$ の注）物理。問題文はそこにも隙間を求めます。(c) 例。三次元の $U(1)$ は面積則が示されました（Göpfert–Mack。Villain 型の作用とされる）。一方で大きい $\beta$ の隙間は、講義資料（2020）の時点では示されていないとされます。有限群では、大きい $\beta$ の指数減衰が定理で（Adhikari–Cao）既知、閉じ込めないと信じられています物理（図 1）。

ただし、有限群などの理論で言われる「減衰」は、特定の境界条件での二点相関の減衰を指し、(7) の強い形（任意の境界条件で一様）とは違う、と著者は注意しています（Chatterjee 2021 の定理 2.4 の後の注）既知。だから、減衰しても閉じ込めない理論があることは、一様な減衰から面積則への定理と矛盾しません。

正確な言い方

閉じ込めとギャップは別の主張で（17-02 §02）、四次元の連続の理論ではどちら向きの含意も定理ではない。格子では、$U(n)$ の閉じた連結部分群について、強い形の減衰 (7) から、中心に自明でなく作用する表現のループの面積則が出る。問題文が求めるのはギャップだけである。

07

## 「格子の数値計算で確かめられている」

**言い方**：大規模な計算でグルーボールの質量が精密に出ているから、ギャップの存在は分かっている。

**正しい核**：例。$SU(2)$ の $m_{0^{++}}/\sqrt{\sigma}$ は 3.844(61)（Lucini–Teper 2001）と 3.781(23)（Athenodorou–Teper 2021）で、よく合います物理。

**ずれ**：確かめているのは、在ると仮定したうえでの整合性です（17-13）。有限の箱・有限の $\beta$ では隙間は必ず正で（17-13）既知、正の数が出ても主張は試されていません。連続での値は

$$\frac{m(a)}{\sqrt{\sigma(a)}} = \frac{m(0)}{\sqrt{\sigma(0)}} + c\,a^2\sigma \tag{8}$$

の形を仮定した外挿で物理、分母の $\sigma$ は電束の管を Nambu–Goto の弦とみなす補正を通ります（17-13）。

正確な言い方

格子の数値は、在ると仮定したうえでの精密な予言で、ギャップの強い物理的な証拠である。数学の証明の一部ではないが、構成された理論が合わせるべき的になる。

08

## 「格子で示せば足りる」「有限の箱で作れば残りは技術」

**言い方（格子）**：格子の上で、すべての $\beta$ で相関長が有限だと示せば懸賞の解になる。

**正しい核**：Chatterjee（2018）の格子の相関長の問題は、四次元の非可換なコンパクト Lie 群 $G \subseteq U(N)$（$N \geq 2$）の任意の無限体積極限で、プラケットの相関の減る長さ $\xi(\beta)$ について次を示せという、一様な隙間の格子版です 既知 。

$$0 < \xi(\beta) < \infty \quad (\text{すべての } \beta > 0), \qquad \lim_{\beta \to \infty} \xi(\beta) = \infty \tag{9}$$

**ずれ**：連続極限、$\mathbb{R}^4$ の上の公理、非自明性、短距離での一致は (9) に入らず、(9) だけでは懸賞の解になりません。逆の含意も自明ではありません（5-09） 既知 。

**言い方（有限の箱）**：有限の箱 $T^4$（連続の四次元トーラス）の上で作れれば、あとは箱を広げるだけ。

**ずれ**：問題文はコンパクトな空間の上の構成だけでも 'would represent a major breakthrough' と書き、その先に一様なギャップの壁を置きます 既知 。例。格子の周期箱（格子の $T^4$）でも、反射正値性から転送行列が得られ、有限の箱の隙間は正になります 既知 。有限の箱の隙間は、あって当然の量です。要るのは $T^4 \to \mathbb{R}^4$ と、そこで潰れない隙間です（7-10）。2026 年に公開された構成は、周期の箱での構成と部分列の無限体積の理論を与えましたが 評 、相関について在るのは相に一様な多項式の評価までで、指数の減衰はありません（16-02 §04）。この項の言い方の「残りは技術」が当たらない、今の例です。

正確な言い方

(9) は一様な隙間の格子版だが、懸賞の要件（連続・$\mathbb{R}^4$・公理・非自明）には届かない。$T^4$ の上の構成も大きな一歩で、その先に一様な隙間と無限体積の極限が残る。

09

## 「質量ギャップは不確定性原理から出る」

**言い方**：粒子を小さい領域に押し込めば、不確定性原理で運動量がばらつき、エネルギーは下がらない。質量ギャップはその最低のエネルギーで、起源は不確定性原理だ。

**正しい核**：不確定性関係は定理です 既知 。ヒルベルト空間の状態 $\psi$ と自己共役作用素 $A, B$ について

$$\Delta_\psi A \, \Delta_\psi B \;\geq\; \tfrac{1}{2} \left| \langle \psi, [A, B] \psi \rangle \right| \tag{10}$$

が成り立ち（Robertson 1929、Schrödinger 1930）、証明は Cauchy–Schwarz の不等式一つです。$A = x,\ B = p$ に当てると $\Delta x\,\Delta p \geq \hbar/2$（Kennard 1927）で、等号はガウス関数、調和振動子の基底状態がその例です（2-06 §03）。フーリエ解析の言葉では、関数とその変換を同時に狭くできないという定理です（1-11。Hardy・Beurling の強い形もあります）。大きさ $R$ の領域に局在した状態の運動エネルギーは $\hbar^2/(2mR^2)$ 程度、相対論的には $\hbar c/R$ 程度より下がりません。物理 物理の絵では、グルーボールは大きさ $1/\Lambda$ 程度の色の電束の塊で、その質量が $\Lambda$ 程度になるのはこの勘定です（17-01〜17-03）。

**ずれ**：(a) 定理が言うのは「長さ $R$ を与えればエネルギー $\hbar c/R$ を保証する」ことで、$R$ そのものは与えません。自由な質量ゼロの場（光子、U(1)）も (10) に従いますが隙間は 0 です。質量 $m$ の自由場の隙間は手で入れた $m$ そのものです（2-06 §08）。ヤン–ミルズの作用には質量項も長さの物差しもありません（3-02）。長さ $1/\Lambda$ は無次元の結合から対数の流れで一つの尺度が生まれること（次元転移、4-07）から、局在は色の電束が閉じた管に押し込められること（17-02・26-03）から来ます。どちらも四次元の連続の理論では定理ではありません。(b) ユークリッドの測度の言葉では、不確定性は原理ではなく双対性です。相関の指数減衰と軽いモードの不在は同じことの二つの顔で（4-11）、(10) の内容は隙間の定義そのものに入っています。原因ではなく言い換えです。本書の道では隙間は真空の測度の Poincaré 定数で（24-05）、不確定性はその不等式の中に溶けています。(c) $\hbar = c = 1$ の単位で (10) が与えるのは $E \gtrsim 1/R$ で、隙間が正であるためには $R$ が有界であること、つまり尺度が一つしか無いこと（17-12）が要ります。

正確な言い方

不確定性関係は定理で、長さ $R$ を与えればエネルギー $1/R$ を保証する。質量ギャップに要るのは $R$ の側である。尺度が一つ生まれ、励起がその尺度に局在することは、四次元の連続な非可換群では示されていない。

10

## 寄り道：ほかに見かける言い方

飛ばしてよい節です。

ほかによく見る言い方を四つ、短く直します。

- 「無限大に記号（1/0）を与えれば片づく」。発散に値を与える仕事は摂動論の内側ですでに数学として整っていて、それでも問題は残っています（7-12）。
- 「ホログラフィーでギャップは示された」。計算できるのは $N \to \infty$・強結合の側の模型で、対応自体が物理の予想です（17-10）物理 。

- 「$\varphi^4_4$ が自明だから潰れる」／「漸近自由だから非自明は自動」。どちらも違い、非自明性は別に示す条件です（7-08）。
- 「QCD の問題だ」。対象は純ヤン–ミルズです（0-03）。

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 既知 九つの言い方の正しい核とずれを、問題文と一次資料の定理に照らして分けたこと | 質量ギャップの存在。未解決で、この章は何も示していない（連続極限の存在は公開された構成が示し、委員会が評価した評 。その証明の当否はこの章の外） |
| 既知 格子の定理が群と次元で分かれること（図 1・表 1。表の時点は出典表のとおり） | 物理 四次元の連続な非可換群の、大きい $\beta$ の隙間と閉じ込め。未証明 |
| 計算 相関の減り方だけでは粒子の有無が決まらないこと（模型 (6)・表 2） | 物理 格子の数値の連続値（(8) の外挿を通った値）が、構成された理論の値であること |
| 既知 (7) の強い形の減衰から面積則が出ること（$U(n)$ の閉じた連結部分群・中心に自明でなく作用する表現） | 三次元の $U(1)$ の大きい $\beta$ の隙間の現状（講義資料（2020）による）と、中間の $\beta$ の $\mathbb{Z}_N$ の相（未確認） |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 変数の数（§02）・表 2・図 2 | 計算 | python3（表 2 は数値積分で検算）。図 2 はブラウザで (6) を計算 |
| 問題文・講義資料・(7)・(9) | 既知 | Jaffe–Witten, Clay の問題解説（2000）。Chatterjee のスライド “Yang–Mills on the lattice”（2020。§02 の引用は 2020 年時点の記述）。Chatterjee, arXiv:1803.01950（§4・格子の相関長の問題）。Chatterjee, arXiv:2006.16229, Comm. Math. Phys. 385 (2021) 1007–1039（定義 2.3・定理 2.2・2.4 と注）。本文を確認 |
| 紫外・三次元・(4) | 既知 | Bałaban, CMP 122 (1989) 355–392；CMP 102 (1985) 255–275。Magnen–Rivasseau–Sénéor, CMP 155 (1993) 325–383（序文の引用は 7-07 による）。Chevyrev, arXiv:2202.13359（冒頭を確認）。(4) は PDG 2024 の QCD の総説 |
| $U(1)$ | 既知 | Guth, Phys. Rev. D 21 (1980) 2291–2307。Guth は書誌のみで、内容は Chatterjee 2018 §4 による。Göpfert–Mack, CMP 82 (1982) 545–606（要旨（INSPIRE）：Villain 作用・全結合で弦張力が正・$m_D$ を固定した連続極限は自由スカラー場。本文は未読。年は Crossref の発行年で、INSPIRE は 1981）。Fröhlich–Spencer, CMP 83 (1982) 411–454（書誌を確認。内容は Chatterjee 2018 §4 による）。Guth・Fröhlich–Spencer の作用の型（Villain 型）と、中間の $\beta$ の $\mathbb{Z}_N$ の質量ゼロの相は未確認 |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 強結合・有限群 | 既知 | Osterwalder–Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471（要旨：強結合での無限体積の極限の存在と解析性・Wilson の閉じ込めの評価。強結合の面積則に付けた条件〈中心に自明でなく作用する表現〉と、中心が自明な群の周長則は、本文では未確認）。Shen–Zhu–Zhu, CMP 400 (2023)（要旨を確認）。Adhikari–Cao, arXiv:2202.10375, Ann. Probab. 53(1) (2025)（定理 1.1 を確認） |
| 格子の数値 | 物理 | Morningstar–Peardon, PRD 60 (1999)。Lucini–Teper, JHEP 06 (2001)。Athenodorou–Teper, JHEP 11 (2020)；12 (2021)（表を確認） |

次に読む章：16-09 証明が含むべき段。本書の検討の側から読むなら 23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定。

# 証明が含むべき段 — 七段の表

この章は未解決の問いの地図です。§02・§05・§06 は案内です。

**この章で分かること** — 四次元のヤン–ミルズの質量ギャップの証明が、どこから出発する道であっても含まなければならない七つの段（器・紫外・小さな $T^2$ のギャップ・小さな $T^2$ の閉じ込め・移り変わりの帯・$R^4$・一般の群）。段ごとに、世界に既知のこと・この本で示したこと・まだ示されていないこと（調べた範囲で）を、札つきで一つの表に並べます。質量ギャップと閉じ込め（面積則）が別の言明であること。二本の道が帯で合流する図。第 23 部以降の各章が表のどの欄を埋めるかの索引と、16-07 の連続の六つの課題との対応。2026 年に公開された構成が受け持つ段（器の一部・紫外の存在・$R^4$ の存在と公理・全ての群での存在）と、残る段。

**前提となる章** — 16-07 課題の一覧（十二の課題と矢印の三つの強さ）と 16-08 §06（閉じ込めとギャップは別の主張）。段の言葉は 7-10（四次元の段ごとの到達点）に合わせます。公開された構成のあとに残る問いは 16-02、本書の持ち札の位置は 16-04 です。

**先に言うこと** — この章は段を並べる章で、どの段も片づけていません。証明が含むべき七つの段への分け方は構成的場の理論でよく使われる整理を、この本の第 25・26 部の検討に合わせて切り直したものです。表の ■◐□ は記録の状態の印で、証明の程度の目盛りではありません（§02）。このサイトは質量ギャップの存在も連続極限の構成も示していません。札[評]は委員会の評価書による、の意味です（6-00 の「札」）。

この章の順序

1. 証明が含むべき七つの段の表 — 段ごとの既知・この本・未知（表 1）
2. ■◐□ の読み方 — 記録の状態の印であって、目盛りではない
3. 質量ギャップと閉じ込めは別の言明 — それぞれへの道と、二つを結ぶ矢印の欠け
4. 二本の道が帯で合流する — 論理の流れ（図 1）
5. どの章がどの欄を埋めるか — 第 23〜27 部の索引（表 2）
6. 16-07 の課題との対応 — 連続の六つの課題と証明が含むべき七つの段（表 3）

01

## 証明が含むべき七つの段の表 — 段ごとの既知・この本・未知

格子から出発して $\mathbb{R}^4$ の上の理論と質量ギャップに着くまでを、七つの段に割ります。順に、(1) 器（格子の上の測度と、そこから量子論を組み立てる仕組み）、(2) 紫外（格子間隔 $a$ を 0 に送っても崩れない、全ての尺度での一様な制御。存在としては公開された構成が示し、本書の道に残るのは継ぎ目）、(3) 小さな $\mathrm{T}^2$ のギャップ、(4) 小さな $\mathrm{T}^2$ の閉じ込め、(5) 移り変わりの帯（略して帯）、(6) $\mathrm{R}^4$ の理論、(7) 一般の群、です。

小さな $\mathrm{T}^2$ の二つの段（表 1 の 3・4）の「小さな $\mathrm{T}^2$」は、四次元を $\mathbb{R}^2 \times T^2$ と書いて、$\mathrm{T}^2$ の一辺 $L$ を物理の長さ $1/\Lambda$ よりずっと小さく取った場合です（$\Lambda$ は理論が自分で生む質量の尺度、4-07）。$\mathrm{T}^2$ に 't Hooft の捩れ（向かい合う辺を、群の中心の元だけずらして貼る境界条件）を入れると、零モード（作用を上げずに動ける方向）が消え、$L$ までの尺度で結合が弱いままに保てる見込みがあります。そこまでの段（小さな $\mathrm{T}^2$ の二つの段）と、$\mathrm{T}^2$ を広げていく段（帯の段）とに、問題を分けるための経由地です。中身は第 25 部（25-00）で扱います。

帯の段の帯は、結合が弱い尺度から強い尺度へ移る中間の尺度 $L \sim 1/\Lambda$ のことです。四次元では、この尺度をどの道具も非摂動的に渡れていません（26-00）。帯を渡る言明は、空間の道の言葉では次の形を取ります。

$$\ln \frac{1}{\theta(L, L)} \;\geq\; c\, L^2 \qquad (\text{全ての } L \text{ で同じ } c > 0) \tag{1}$$

$\theta(L, L)$ は、一辺 $L$ の容器の中で $\mathrm{T}^2$ を巻く渦を一つ入れたときの、区画の偏り（渦が「安い」ほど 1 から離れる量）です。(1) は 't Hooft の判定の形の面積則で、「$\theta$ が 1 から離れる」だけでは足りないことは 26-01 で扱います。

**2026 年に公開された構成のあと。**公開された構成は、器の段の一部（元の Wilson の測度の鏡映正値性・チェス盤の評価・再構成。12-01・12-02・12-08）、紫外の段の存在（周期の箱での連続極限。第 8〜11 部）、$\mathrm{R}^4$ の段の存在と公理（部分列の無限体積・相の分解・相ごとの Wightman の公理。12-05・12-07）、一般の群の段の存在（任意のコンパクト単純群）を受け持ちます。委員会はこれを「Lean で証明されている」と評価しています[評]。表 1 の「世界で既知」の欄に、この受け持ちを書き込みました。受け持たないのは、小さな $\mathrm{T}^2$ の二つの段（捩れた境界条件は扱われていない）、帯の段、一様な質量ギャップ、無限体積の極限の一意性です（16-02）。紫外の段については、存在が示されたあとも、紫外の結果を赤外の議論が使える形にする継ぎ目が残ります（16-03）[推]。

表 1　証明が含むべき七つの段（段の名の右は印：■ 記録では閉じている／◐ 部分的／□ 開いている。札は行の中の主

張ごと。「章」は表 2 の索引と同じ）

| 段と中身 | 世界で既知 | この本で示したこと（札つき） | 未知・埋める章 |
|---|---|---|---|
| **1 器** ◐<br>格子・鏡映正値性・ブロックの観測量・コンパクト性。稠密な集合での減衰から転送行列のギャップ | 典 鏡映正値性と転送行列（Osterwalder–Seiler 1978、5-03）・再構成（4-10）。評 公開された構成が示した：元の Wilson の測度の、格子点を通る面と辺の中点を通る面の鏡映正値性、チェス盤の評価、再構成（第 12 部） | 初 z の鏡映正値性（捩れの和を取った集団の、格子点を通る鏡映での正値性。核の代数は Lean：ReflPos（`ReflPos.refl_pos`・`ReflPos.refl_cs`）、非負の重みの有限和）。Lean：GapFromDecay（`GapFromDecay.gap_of_decay_dense`）（有界な自己共役作用素で、稠密な集合の上の一様な減衰を仮定に置いた抽象の補題） | 器の組み立て全体の書き下し（いまは筋）<br>章：5-03・26-04・26-05 |
| **2 紫外** ◐<br>格子間隔 $a$ から尺度 $L$ まで、$a$ に一様な多重尺度の解析（有効作用の局所性・大きな場の稀さ・結合の流れ）。存在は公開された構成、残るのは継ぎ目 | 評 公開された構成が示した：周期の箱で、切断の列の全体に沿う連続極限（第 8〜11 部）。全ての段を弱結合のまま運び、格子間隔 1 の段で止まる（16-03）。典 それ以前は Bałaban の連作（CMP、1980 年代。中心の段に原典が「未発表」とする部分が残る、7-07） | 初 一ループの水準の部品だけ（摂動の水準）。これまでの記録は紫外の制御の全体を 仮 として仮定に置いていた | 継ぎ目：間隔 1 の段の理論を対象として定めること、体積に一様な局所の評価、観測量の橋（連続の相関を間隔 1 の段の期待値として書くこと）。本書の道ではさらに、測度で決まる量との読み替え、捩れた境界条件と細長い箱での構成、鏡映正値性の持ち方 推<br>章：16-03・7-07・25-00・26-11・27-02 紫外の制御 |
| **3 小さな $\mathrm{T}^2$ のギャップ** ◐<br>捩れで零モードが消え、$\mathrm{T}^2$ の大きさ $L$ まで弱結合のまま。転送行列の隙間 $\geq c/L$ が $a$ に一様 | 典 't Hooft の捩れた境界条件と流束（1979・1981） | 初 捩れの部分：捩れを食う真空の一意性・格子の二次元 Laplacian のギャップ $4\sin^2(\pi/2N)$・(1,1) の区画で $S_{\min} > 0$（SU(2)・格子・$N$ 固定）。$a$ に一様な形は、捩れた境界条件の箱での紫外の構成を仮定に置いた下でだけ | その仮定を外した、$a$ に一様な隙間の下界。公開された構成は周期の立方の箱だけを扱うので、捩れた箱での構成は、本書の道の最初の問いになる 推<br>章：25-00・25-01・27-02 小さな $\mathrm{T}^2$ のギャップ |

| 段と中身 | 世界で既知 | この本で示したこと（札つき） | 未知・埋める章 |
|---|---|---|---|
| **4 小さな $T^2$ の閉じ込め** ◐<br>容器の評価と挿入の評価で、閉じ込めを「一つの渦の挿入」と「領域の間の独立性」に帰着 | 典 容器の恒等式（Mack–Petkova 1980） | 初 帰着（有限の配位空間・正の重み・区画を反転する全単射の上で。Lean：Containers（`Containers.container_bound`）・InsertionIdentity（`Insertion.mean_one`・`Insertion.mean_rho_sigma`）、有限和の代数）。初 板の閉じ込め（格子間隔と $T^2$ を固定すれば全ての β で面積則。連続極限では張力が 0） | 二つの入力：挿入の一様な受理・枠の減相関 仮<br>章：25-03・25-04・25-05・25-06 |
| **5 帯** □<br>$T^2$ を広げても (1) が同じ $c$ で成り立つこと。中間の尺度 $L \sim 1/\Lambda$ を非摂動的に渡る | 典 'New ideas are needed'（Jaffe–Witten §6.5、一様なギャップの課題）。公開された構成は帯の中に手がかりを与えない（全ての段を弱結合のまま運ぶ） 推 。Tomboulis–Yaffe（1985）の不等式（'t Hooft の判定から面積則へ） | 初 正しい形（$\theta \le \theta_0$ では足りない）。初 横広げの不等式への条件つきの還元（基点・枠の減相関・横広げの三つを仮定。反復の代数は Lean：Doubling（`Doubling.iterate`））。初 構造の入力だけでは渡れないという否定の補題。初 繰り込みの比較の一ループの水準（$\beta - \beta' = 0.258$）。読 数値の兆候（26-09） | 繰り込みの比較を非摂動で。帯そのもの。帯の両端を同じ量・同じ作用の類で言うこと（強い側は本書の Lean の窓で Wilson の作用の β、弱い側は公開された構成の一段の評価の入口で有効な作用の係数） 推<br>章：26-01〜26-07・26-09 |
| **6 $R^4$** ◐<br>無限体積の極限・OS 公理・回転不変性の回復・非自明性 | 典 反射正値性は弱い極限に残る・OS の再構成（16-07 §03）。評 公開された構成が示した：部分列の無限体積の極限・相の分解・相ごとの Wightman の公理（第 12 部）。短距離の確かめ（第 13 部） | 仮 帯の段の下で大部分は標準の議論、という筋だけ | 無限体積の極限の一意性（一つの理論の質量ギャップには要らない見込み 推 ）。減衰を捩れた境界条件や純粋な相で出すなら、その状態から作る理論の同定 推<br>章：16-07・27-01・27-02 別枠 |
| **7 一般の群** □<br>SU(N) と、中心の無い群（$G_2$ など） | 典 中心が自明な群では、中心を使う矢印が消える（16-07 §07）。評 存在は、公開された構成が任意のコンパクト単純群で示した | なし（この本の第 25・26 部は SU(2) で書く） | 質量ギャップの側の全て。中心の無い群には渦の道具が使えない<br>章：16-07 §07・27-02 別枠 |

表 1 から読むこと。(a) 「□」の段は帯と、群を替える一般の群の段です。紫外の段の「◐」は、周期の立方の箱での連続極限は公開された構成が示したが、捩れた箱・細長い箱での構成と、継ぎ目の言明は無い、という意味です（27-02 表 1 と同じ印）。紫外の段で今開いているのは存在ではなく継ぎ目で、帯はこの分野の長年の未解決問題のままです。(b) 小さな $T^2$ の二つの段の「◐」は、どちらも捩れた境界条件の箱での紫外の構成を仮定に置いた下での「◐」です。その構成が無い限り、この二つの段の印は上がりません。(c) この本で「初」と書いた

主張のうち、紙の証明を本に置く章の多くはこれから書く章です（第 25・26 部）。置くまでは、台帳（27-02）の行は消えません。

02

## ■◐□ の読み方 — 記録の状態の印であって、目盛りではない

表 1 の印は、この本の検討の記録がその段をどう扱っているかの印です。■ は記録の上で閉じている（紙の証明があり、Lean の欄があればその算術も閉じている）、◐ は一部が閉じていて残りが筋か数値の兆候にとどまる、□ は開いている、という意味です。

この印は証明の程度の目盛りではありません。理由は三つです。第一に、■ はその段の全体ではなく、行に書いた条件の範囲の中で閉じていることしか言いません。第二に、◐ の段が □ の段より「残りが少ない」とは限りません。小さな $\mathrm{T}^2$ のギャップの段の ◐ は捩れの部分が閉じていることを言いますが、残りは紫外の段の継ぎ目（捩れた箱での構成。開いている）に依存します。第三に、本の札（初・典・機・読・仮）は主張ごとに付き、印は段ごとに付きます。同じ段に「初」と「仮」が並ぶことは普通です。印を足し合わせて「証明が含むべき七つの段のうちいくつ」と読むことはしません。

例。器の段の z の鏡映正値性は、記録では閉じています（■ に当たる主張）。それでも器の段の印は ◐ です。器の組み立て全体（ブロックの観測量から転送行列のギャップまで）の書き下しが筋のままだからです。

03

## 質量ギャップと閉じ込めは別の言明 — それぞれへの道と、結ぶ矢印の欠け

問題文が求めるのは質量ギャップ（量子論のハミルトニアン $H$ のスペクトルが、真空の上で $\Delta > 0$ だけ離れていること、4-11）で、閉じ込め（Wilson ループの面積則）は求めていません。16-08 §06 のとおり、閉じ込めとギャップは別の主張で、四次元の連続の理論ではどちら向きの含意も定理ではありません 典 。物理ではこの二つを一つの尺度の二つの顔と見ます（比 $m/\sqrt{\sigma}$ が有限の正の数に近づく）が、それは期待の水準の文です 読 （物理）。面積則から質量ギャップへの含意は、一般の含意としては成り立ちません。面積則は荷電セクターの隙間、質量ギャップは中性セクターの隙間の言明だからです（16-07 §02）。

この本の二つの道は、着く言明が違います。

- **ギャップへの道**（小さな $\mathrm{T}^2$ のギャップの段＋転送行列）：小さな $\mathrm{T}^2$ の転送行列の隙間（小さな $\mathrm{T}^2$ のギャップの段）を、帯を通して $\mathbb{R}^4$ まで同じ定数で運ぶ。運べれば、隙間は極限

に残ります（16-07 §03 の隙間の規則。前提 (i)〜(iii) つき）。第 23 部の道（時間の方向から）も、同じギャップの言明に、拡散型緩和時間の仮定と片側の橋を通して向かいます。

- **閉じ込めへの道**（小さな $T^2$ の閉じ込めの段・帯の段・$R^4$ の段）：小さな $T^2$ の閉じ込めを、帯で $T^2$ の大きさに一様にし、$\mathbb{R}^4$ の理論（$R^4$ の段）で面積則にする。

二つの道を結ぶ矢印、つまり「面積則から質量ギャップへ」の既知の道はありません。何を足せば面積則からギャップが出るかの言明そのものが、まだ決まっていません（27-01 の最後の矢印、27-02 の別枠）。だから、閉じ込めへの道が全て閉じても、それだけでは問題文の要件に届きません。この章は二本の道を並べますが、閉じ込めからギャップへの矢印を「結ぶ道」としては数えません。

正確な言い方

質量ギャップと閉じ込め（面積則）は別の言明である。この本の空間の道は、小さな $T^2$ のギャップの段から転送行列を通してギャップへ、小さな $T^2$ の閉じ込めの段・帯の段・$R^4$ の段を通して閉じ込めへ、と二つの言明へ別々に向かう。面積則からギャップを出す一般の定理は無く、この本もそれを示していない。本書の強結合の面積則（20-06）は格子間隔を固定した強結合の窓の中の言明で、残る問いとは反対の端に在る。

04

## 二本の道が帯で合流する — 論理の流れ

図 1 は、第 16 部から第 27 部までの論理の流れです。一本目の道は時間の方向から（第 23・24 部）、二本目の道は空間の方向から（第 25 部）、どちらも四次元の目標の水準では「全ての尺度で同じ定数」という一つの型の言明に着きます。その言明が帯を渡る言明で、第 26 部が扱います。

図 1　二本の道が帯で合流する。一本目の道の欄は二行に割ってあり、帯へ流れ込む矢印は「四次元の目標」の行からだけ出る（一段目の残件は帯の縮図で、帯そのものではない）。最下段の紫外の側（存在は公開された構成、本書の道に残るのは継ぎ目）は二本の道の両方の下にある

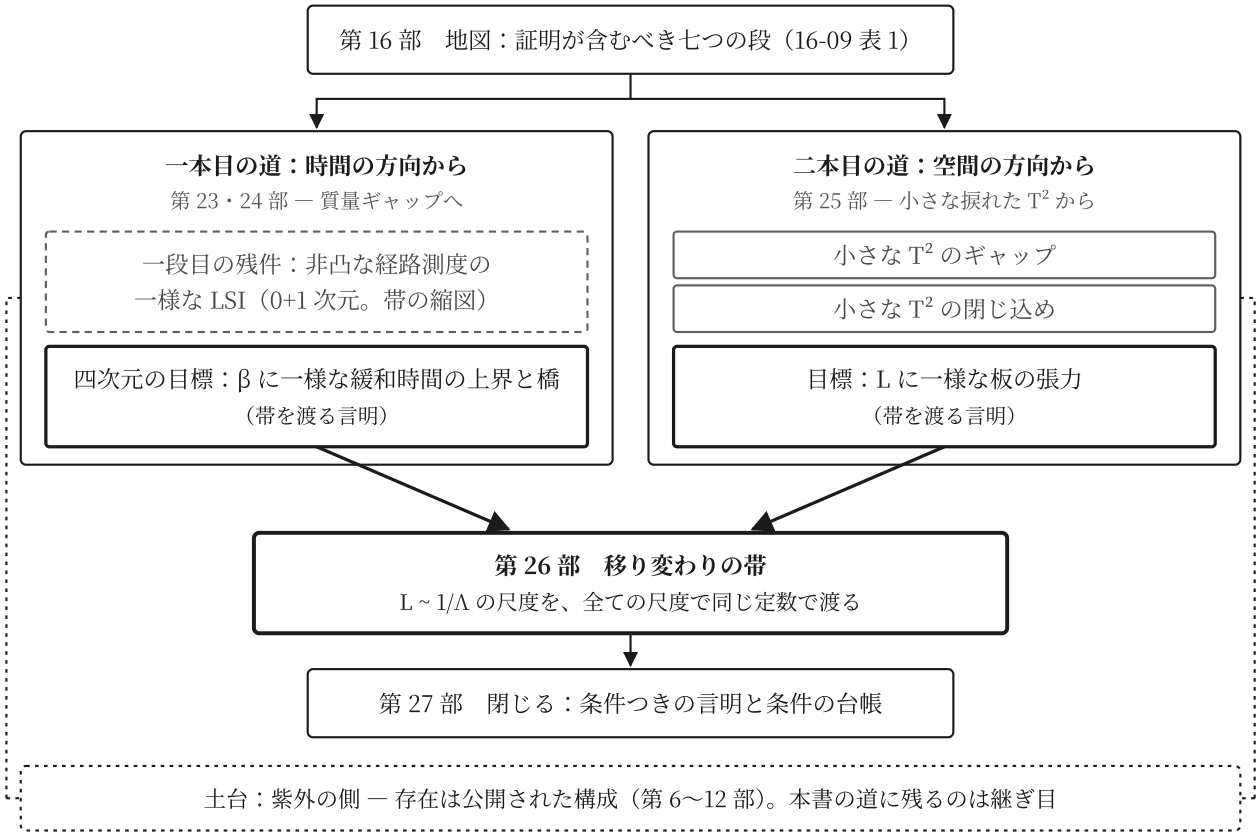



図 1 から読むこと。(a) 一本目の道の「一段目の残件」（0+1 次元の二重井戸の経路の測度で、非凸な所を含む測度の一様な対数 Sobolev 不等式、23-15 表 1）は、帯と同じ型の壁（両端に別の道具があり、真ん中で最悪の配位の評価が止まる）ですが、帯ではありません。一段目で移り変わる長さは、頂上での Jacobi の方程式の最初の共役点という古典的な量で決まり、$\hbar$ に依らず、格子の単位で有限です。四次元で移り変わる長さ $1/\Lambda$ は量子的に生まれ（4-07）、格子の単位で発散します。この違いは、一段目の側の共役点の計算の証明とともに 26-07 で扱います（証明を置くまでは 仮 ）。(b) 帯へ流れ込むのは、二本の道のどちらでも「四次元の目標」の行です。一本目では $\beta \to \infty$ に一様な拡散型緩和時間の仮定の上側（緩和時間の上界の仮定）と片側の橋（23-15 §07 の物理単位の目標の水準）、二本目では $L$ に一様な板の張力です。(c) 紫外の側は帯の外にあります。存在は公開された構成が与えました 評 。本書の二本の道は、紫外の結果を自分の対象（捩れた箱・板の張力・経路の測度）に使える形にする継ぎ目を、仮定に置いて進みます 推 。

図 1 の合流は「目標の水準で同じ型の言明に着く」という意味で、二本の道の今の壁が同じ場所にあるという意味ではありません。帯の部の「帯」と、第 23・24 部の「窓」（サイトの窓・$\hbar$ の窓・時刻の窓）は別のものです（26-00 の語の注）。

```
05
```

## どの章がどの欄を埋めるか — 第 23〜27 部の索引

表 2 は、第 23 部以降の章が表 1 のどの段のどの欄に材料を入れるかの索引です。公開された構成が受け持つ段は第二巻の第 6〜13 部で読み、本書の確かな定理は第 19〜22 部に在ります（16-04 §04）。「欄」は表 1 の列（既知・この本・未知）です。第 25〜27 部には執筆中の章があり、リンクは章の番号で張ってあります。

表 2　第 23〜27 部の章と、表 1 の段・欄（この本の整理）

| 章 | 段 | 欄 | 一言 |
|---|---|---|---|
| 23-00〜23-17 | 5（時間の側） | この本・未知 | 一本目の道。四次元の目標（物理単位の目標の水準）の言明と、一段目（0+1 次元、帯の縮図）の行の一覧 |
| 24-00〜24-08 | 5（時間の側）・6 | この本・未知 | 一本目の道（後半）。仮定の形の直しと時間を連続にする話。24-07 は帯の部から引く |
| 25-00 | 2・3 | 既知・未知 | なぜ小さな捩れた $T^2$ を経由するか |
| 25-01 | 3 | 既知・この本 | 捩れと流束、捩れの部分の三つの事実 |
| 25-02 | 4・5 | 既知・この本 | 渦と分数インスタントン、弦の張力の形 |
| 25-03・25-04 | 4 | 既知・この本 | 容器の恒等式と板の閉じ込め |
| 25-05・25-06 | 4 | この本 | 挿入の恒等式・駆動した挿入と流れの補題 |
| 25-07 | 5 | この本 | 決まった写像が失敗する理由（一ループの水準） |
| 25-08 | 4 | この本（読） | 空間の道の測った記録 |
| 25-09 | 5 | 未知 | この道が止まる場所＝$T^2$ を広げること |
| 26-00〜26-02 | 5 | この本・未知 | 合流・帯の正しい形・一つの不等式への還元 |
| 26-03・26-04・26-05 | 1・5 | この本 | 非可換が効く場所・構造だけでは渡れない・チェス盤 |
| 26-06・26-07 | 5 | この本・未知 | 繰り込みの比較・時間の側から見た帯 |
| 26-08・26-09・26-10 | 5 | 既知・この本（読）・未知 | 試して止まった道・測った記録・見方の候補 |
| 26-11 | 2 | 既知・この本・未知 | 紫外の制御：一段で閉じるとは何か・連作の五段と止まった場所・言明の案 |
| 27-00〜27-04 | 全て | 未知（条件の欄） | 条件つきの言明・条件の台帳・問いと主張しないことの索引 |
| A-06・A-07 | 全て | — | 名前の索引・この本から出た論文の草稿 |

```
06
```

## 16-07 の課題との対応 — 連続の六つの課題と証明が含むべき七つの段

16-07 表 1 の連続の六つの課題は、連続の理論に要る課題を問題文の要件から割ったものです。表 1 の証明が含むべき七つの段は、格子から出発する一つの道の段を割ったものです。割り方の軸が違うので、一対一には対応しません。表 3 はその対応で、この本の整理です。

表 3　証明が含むべき七つの段と 16-07 の課題（この本の整理。矢印の強さは 16-07 のまま）

| 段 | 16-07 の課題 | 注 |
|---|---|---|
| 1 器 | 残りの公理の課題の一部 | 鏡映正値性と転送行列。残りの公理の課題の残り（回転の回復）は $\mathrm{R}^4$ の段。公開された構成が相ごとに満たした[評] |
| 2 紫外 | $\mathrm{T}^4$ の構成の課題・非自明性の課題・局所場と短距離の課題 | 連続極限の存在・非自明性・短距離での漸近自由との一致は、どれも紫外の側の課題。存在は局所場について公開された構成が示し、非自明性と短距離は確かめの水準（第 13 部）[評] |
| 3・4 小さな $\mathrm{T}^2$ | $\mathrm{T}^4$ の構成の課題の部分の問題 | 小さな体積の上の構成と評価。$\mathrm{T}^4$ の構成の課題は $T^4$ の上の課題で、小さな $\mathrm{T}^2$ の二つの段は $\mathbb{R}^2 \times T^2$ の小さな $\mathrm{T}^2$ の上の課題なので、同じ課題ではない |
| 5 帯 | 一様なギャップの課題 | 一様なギャップ $\inf_L \Delta_L > 0$。出題者が 'New ideas are needed' と書く課題 |
| 6 $\mathrm{R}^4$ | 無限体積への課題・残りの公理の課題 | 無限体積の極限と、残りの公理 |
| 7 一般の群 | 16-07 §07 | 中心が自明な群では、中心を使う矢印が消える |
| （閉じ込めの側） | 連続の弦張力の問題・格子の面積則の問題 | 連続の弦張力と格子の面積則。問題文の要件の外（16-07 の C）で、小さな $\mathrm{T}^2$ の閉じ込めの段と帯の段の着く先に当たる |

表 3 から読むこと。16-07 の数え（16-07 §06）では、道筋の矢印まで認めると要る極小の組は {$\mathrm{T}^4$ の構成の課題・一様なギャップの課題・残りの公理の課題・非自明性の課題・局所場と短距離の課題} の一つでした。証明が含むべき七つの段の言葉では、紫外の段（$\mathrm{T}^4$ の構成の課題・非自明性の課題・局所場と短距離の課題）と帯の段（一様なギャップの課題）と、器の段と $\mathrm{R}^4$ の段の公理（残りの公理の課題）です。公開された構成のあとでは、紫外の側は存在として埋まり（局所場について）、残りの公理の課題も相ごとに満たされました[評]。二つの割り方のどちらでも、残るのは帯（一様なギャップの課題）と、紫外の結果を赤外の議論へ渡す継ぎ目です[推]（16-02・16-03）。

前提の一覧は 28-04 に在ります（公開の前に書いた一覧で、紫外の側の前提は、存在としては公開された構成に入りました）。

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 典 各段の「世界で既知」の欄（原典の範囲は各章の出典表）。閉じ込めとギャップが別の主張であること | 証明が含むべき七つの段で尽きること。段の分け方はこの本の整理 |
| 初 表 1 の「この本」の欄の主張（行に書いた条件の範囲で。紙の証明を置く章は表 2） | 紫外の段の継ぎ目・帯の段・一般の群の段の質量ギャップのどれも。小さな $T^2$ の二つの段の $a$ に一様な形（捩れた箱での紫外の構成の仮定の外） |
| Lean の欄の定理名の算術（有限和と抽象の作用素の補題。物理の測度は形式化されていない） | Lean の欄が段の主張そのものを検査したこと |
| 図 1 の合流は、四次元の目標の水準で同じ型の言明に着くという意味での合流 | 二本の道の今の壁が同じであること。面積則からギャップへの矢印 |
| 評 表 1 の「公開された構成が示した」の欄は委員会の評価の水準 | 公開された構成の証明の当否（この章の外） |
| 全体 | このサイトは質量ギャップの存在も連続極限の構成も示していない（連続極限の存在は公開された構成のもの） |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 段の分け方 | 本書 | 構成的場の理論の段（7-01・7-10）を、第 25・26 部の材料（段の表・証明までの課題の一覧・仮定の一覧）に合わせて切り直した |
| 器の段の既知 | 典 | K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471（要旨。16-07 の出典表） |
| 紫外の制御の段の既知 | 典 | T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 122 (1989) 355–392 ほかの連作（7-07 の出典表） |
| 小さな $T^2$ のギャップの段の捩れ・小さな $T^2$ の閉じ込めの段の容器の恒等式 | 典 | 't Hooft の捩れた境界条件と流束（1979・1981）、Mack–Petkova の容器の恒等式（1980）。書誌は 25-01・25-03 の出典表に置く |
| 帯の段の既知 | 典 | A. Jaffe, E. Witten, Quantum Yang–Mills Theory, Clay Mathematics Institute (2000) §6.5。E. T. Tomboulis, L. G. Yaffe, Comm. Math. Phys. 100 (1985)（書誌は 26-01 の出典表） |
| 表 1 の「公開された構成が示した」 | 評 | 評価書 `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）冒頭・§5・§6・§8。コードは `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（2026-10-28 提出）。紫外の継ぎ目は 16-03 |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| $R^4$ の段と一般の群の段の既知、表 3 の課題 | 本書 | 16-07 表 1・表 2・§07 |
| 閉じ込めとギャップ | 本書 | 16-08 §06・17-02 |
| 表 1 の「この本」の欄 | 初 | 第 25・26 部の各章（表 2）と、論文の草稿 'Exact centre-vortex insertion identities in the twist-summed ensemble, and bounded, averaged and driven confinement bounds'・'Where the twisted-slab route to confinement stops: a corrected window target, a reduction to transverse widening, and SU(2) versus U(1) numerics'・'Fractional instantons confine on the lattice: a rigorous semiclassical bound for SU(2) gauge theory on a twisted small torus'（どれも 2026-10 の草稿、A-07） |
| Lean | Lean | GapFromDecay（`GapFromDecay.gap_of_decay_dense`）・ReflPos（`ReflPos.refl_pos`・`ReflPos.refl_cs`）・Containers（`Containers.container_bound`）・InsertionIdentity（`Insertion.mean_one`・`Insertion.mean_rho_sigma`）・Doubling（`Doubling.iterate`）。束が保証するのは有限和の代数と抽象の作用素の不等式だけ（A-04） |
| 図 1 | 本書 | 手で描いた図（数値の計算は無い） |

**この章で使った語** — 証明が含むべき七つの段（器・紫外・小さな $T^2$ のギャップ・小さな $T^2$ の閉じ込め・帯・$R^4$・一般の群）・移り変わりの帯（帯）・'t Hooft の捩れ・区画の偏り $\theta$・記録の状態の印（■◐□）・ギャップへの道と閉じ込めへの道・四次元の目標・帯の縮図。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：16-10 道具の地図。本書の検討の側から読むなら 23-00 入口 — 一本目の道（時間の方向から）。条件の一覧から読むなら 27-02 条件の台帳。

# 道具の地図 — 本書の検討が使う既知の道具の在りか

この章は案内です（道具の地図）。本書の検討が使う既知の道具の家と、止まった所を一覧にします。

**この章で分かること** — 第 23 部以降の検討が使う二十二の道具（Poincaré 不等式・Bakry–Émery・対数 Sobolev・鏡映正値性・強結合展開・繰り込みの一段・Migdal–Kadanoff・一ループの摂動・区間演算・Lean など）を一つの表にし、道具ごとに、(1) 家＝最初に定義と既知の結果を置いた章（第 1〜5 部と第 7・17・18 部）と原典、(2) 本書での使い方＝第 23 部以降のどの章で何に使うか、(3) 群に写して止まった所・注意、を札つきで並べます。同じ話が二つ以上の部にあるときにどちらを先に読むか、読む順の三本、道具どうしの依存、道具の限界の一覧も置きます。

**前提となる章** — 16-09 証明が含むべき段 — 七段の表（段と札）と 0-01 §03 札の凡例。

**先に言うこと** — この章は案内の章で、新しい主張を置きません。表の各欄の主張は、そこに挙げた章のものをその章の札のまま写しています（条件は各章の本文にあります）。「止まった所」の欄は、その道具が使えないという主張ではなく、本書の検討の範囲でその使い方が届かなかった所の記録です。このサイトは質量ギャップの存在も連続極限の構成も示していません。2026 年に公開された構成が使う道具の在りかは (6) に書きます（札 評 は委員会の評価書による、の意味。6-00 の「札」）。

この章の順序

1. この章の役割 — 五行で
2. 道具の表 — 家・使い方・止まった所（表 1）と、二か所にある話の割り振り（表 2）
3. 読む順の三本 — 道具から・結果から・地図から
4. 道具どうしの依存 — 先に要る道具と、後で使う道具（表 3）
5. 言えないこと — 道具の限界の一覧

---

00

## この章の役割

(1) 第 23 部以降の章は、第 1〜5 部と第 7・17・18 部の道具を「群の上の格子ゲージ理論」に持ち込んで使います。道具の定義と既知の結果がどこにあるかを、一つの表で引けるようにします。

(2) 同じ道具が二つ以上の部に出てくるとき（例：Bakry–Émery は 5-11 と 24-06 と第 23 部、Migdal–Kadanoff は 18-04 と 26-08 と 15-04）、「家」と「使い方」に割り振って、先に読む章を一つに決めます。

(3) 道具を群に写したときに止まった所を、道具の側から並べます。どの部の章で止まったかは、表の第三列から引けます。

(4) 札は 16-09 と同じ五分類です。初 ＝本書が紙で証明を置いた、典 ＝原典で確かめた既知、機 ＝計算機援用（区間演算）、読 ＝数値の読み・物理の見立て、仮 ＝仮定。第 1〜5 部と第 7・17・18 部の章の札（Lean・紙・計算・既知・物理）との対応は 0-01 §03 にあります。

(5) 読み方は三通りあります（§02）。道具から入る、結果から入る、地図から入る、のどれでも、この表に戻れば家の章へ行けます。

(6) 2026 年に公開された構成は、表 1 のうち鏡映正値性（行 5）・繰り込み群の一段（行 10）・ループの係数（行 12）・Lean（行 21）と、表に無い道具（結合に依る確率核・射撃法による結合の合わせ・多段の帳簿・Arzelà–Ascoli のコンパクト性・相の分解・再構成）を組んで、周期の箱での連続極限と部分列の無限体積の理論を作りました。委員会はこれを「Lean で証明されている」と評価しています評。その道具の在りかは第二巻です：一段の核は 第 9 部、結合の合わせは 10-04、多段の評価は 第 11 部、鏡映正値性・チェス盤・コンパクト性・相の分解・再構成は 第 12 部。本書の道具との比べは 第 14 部です。

01

## 道具の表 — 家・使い方・止まった所

表 1 は一行一道具です。第一列の「家」は、その道具の定義と既知の結果を最初に置いた章で、二年生が最初に読む場所です。第二列は第 23 部以降でその道具を使う章と、使う目的です。第三列は、その道具を群 $SU(2)$ の上の格子に写したときに止まった所と、読むときの注意です。数と条件は同じ行に書き、詳しい条件は挙げた章にあります。

表 1　本書の検討が使う道具（家・使い方・止まった所。札は欄の中の主張ごと）

| 道具 | 家（第 1〜5 部と第 7・17・18 部・原典） | 本書での使い方（第 23 部以降） | 群に写して止まった所・注意 |
|---|---|---|---|

| 道具 | 家（第 1〜5 部と第 7・17・18 部・原典） | 本書での使い方（第 23 部以降） | 群に写して止まった所・注意 |
|---|---|---|---|
| **1 Poincaré 不等式と隙間**<br>分散を勾配の二乗で押さえる定数 $C_P$。隙間は $1/C_P$ | 1-10 §08（直線上で $V'' \geq \kappa > 0$ なら $C_P \leq 1/\kappa$）典 。緩和の時間としての読みは 2-10 | 23-06（相の中の局所 Poincaré の条件）。24-05（時間を連続にした格子で隙間 $\Delta = \hbar^2/(2C_P(\nu))$、$\nu$ は真空の測度）初 | Langevin の時間の隙間と転送行列の隙間は別の量（18-03）。24-05 の恒等式は言い換えで、真空の測度の $C_P$ を結合に一様に押さえる道具はありません |
| **2 Bakry–Émery の判定法**<br>曲率＋ポテンシャルの二階微分 $\geq K > 0$ なら隙間 $\geq K$ | 5-11 §02（判定法と証明の筋）典 。5-04 §08 は結論だけを使う | 5-11 §05〜§07（完全な族を先に積分し、曲率の下界 $2 - 27\beta^2$）初 。23-02（四次元格子の族）。24-06 §02 | 一本のリンクでは判定法が言えるのは $\kappa < 2$ だけで、本当の隙間は $\kappa$ とともに増えます 読 。格子全体で $\beta < 1/12$ 典 、先に積分して $\beta < \sqrt{2/27} \approx 0.272$（格子間隔を固定した強結合側）。群の曲率は $\beta$ で動かないので閾は $O(1)$ を超えません。弱結合の尺度では群の上の凸性そのものが立ちません（24-06 §03 の群の上の凸性の天井の補題）初 |
| **3 対数 Sobolev 不等式**<br>エントロピーを勾配で押さえる。Poincaré より強い | 5-11 §02（判定法から対数 Sobolev も出る）典 。測度の言葉は 1-08 | 24-06 §06（凸性の代わりに稀さで払う道具。エントロピーの通貨）。23-10 通貨の取り違えの型 | Poincaré は出口の速さの通貨で、稀さを払えるのはエントロピーの通貨、という整理は見立てです 読 。「稀さで払う測度の類」は候補の規則で、三段目を閉じる見込みを約束しません 仮 |
| **4 Brascamp–Lieb と階層模型の帰納**<br>各尺度で条件つきの測度が一様に凸、を入口にする帰納 | 第 1〜5 部と第 7・17・18 部に家はありません。定義と原典の条件は 24-06 §02（Bauerschmidt–Bodineau）典 | 24-06 §05（帰納を群に写すと、当たる・変わる・当たらない） | 凸性の仮定は群の上で弱結合の尺度に原理的に立ちません 初 。凸でない場所が平らな $\phi^4$ と逆（群では単位元から遠い半球）で、壁は確率 $e^{-c\beta}$ の所へ押し込まれるだけです 初 。階層模型の結果は四次元のヤン–ミルズに何も含意しません |
| **5 鏡映正値性と転送行列** | 5-03（Osterwalder–Seiler）・4-10（再構成）典 。公開された構成の側は 12-01（二種類の面）・12-02（チェス盤）評 | 26-04（捩れの和の集団 z の、格子点を通る鏡映での正値性）初 。26-05（チェス盤の評価の入力）。16-09 器の段 | 横向きの鏡映は捩れで崩れます（26-04 横向きの鏡映の非正値の補題）初 。構造の入力（鏡映正値性・双対・転送行列・中心の恒等式）は $\mathbb{Z}_2$ と $U(1)$ でもそのまま成り立ち、この組だけでは横広げの不等式は出ません（否定の補題。最後の一段は 26-03 の 読 を引き継ぐ） |

| 道具 | 家（第 1〜5 部と第 7・17・18 部・原典） | 本書での使い方（第 23 部以降） | 群に写して止まった所・注意 |
|---|---|---|---|
| **6 Kogut–Susskind のハミルトニアン格子**<br>空間だけを格子にし、時間は連続 | 5-03・4-01 典 | 24-05 §04（隙間を直接扱う道）。色の一重項で真空の測度の Poincaré 定数が主項で半分 初 | 局所から大域への隙間の定理は、この格子ではそのまま当たりません（理由は 24-05 §04）。24-05 の Kogut–Susskind の形の定義は 5-03 を先に読みます |
| **7 強結合展開とクラスター展開**<br>弱い結びつきを補正として足し込み、収束を判定条件で保証する | 5-02・5-04・7-04（Kotecký–Preiss・Dobrushin・Fernández–Procacci の条件） 典 | 26-06（強結合の端）。15-04 §05（階層模型の鎖の出口＝強結合の判定領域） 機 | 届くのは格子間隔を固定した強結合の岸だけです。帯（中程度の結合）には届きません。強結合の範囲の比べ方は 5-11 §07。本書の Lean の強結合の定理（無限体積の極限・質量ギャップ・面積則）は 20-02〜20-06 で、格子間隔を固定した強結合の窓の中の言明です。残る問いとは反対の端に在ります |
| **8 指標展開と類関数**<br>群の上の重みを既約表現の指標で展開する。共役で不変な関数＝類関数 | 5-02（指標展開）・7-02（二次元の熱核）・1-04 典 | 15-04 §01（一リンクの熱核の類は半群で、母数一つで閉じる） 初 。15-06（ループの形ごとの結合と引き込む先の類） | 閉じるのは一枚の重みが一段で一枚の重みに戻る模型だからです。多リンクの結合・ゲージの張り替え・大きな場の剰余が構造的に無く、四次元の超立方格子の一段について何も含意しません（15-04 の先に言うこと） |
| **9 Dobrushin の影響係数**<br>一サイトへの隣の影響の和が 1 未満なら相関が減衰する型の判定 | 7-04（Dobrushin の条件、気体の例で 4/27） 典 | 26-07 §03（一段目の頂上の一サイト）。26-05 §04。26-10 箱の磁束の混合 | 一段目の頂上では、条件つきの一サイトの測度が $\frac{15}{4}$-凸で隣への結合が 2 なので、影響は二つの隣で $\frac{16}{15} > 1$ になり、$\frac{15}{4}$ 対 4 の不足に戻ります 初 。枠を固定すると連続な場が境界に追随し、影響係数がほぼ 1 になります 読 （物理・原論文は照合未了） |

| 道具 | 家（第 1〜5 部と第 7・17・18 部・原典） | 本書での使い方（第 23 部以降） | 群に写して止まった所・注意 |
|---|---|---|---|
| **10 繰り込み群の一段（ブロック化）**<br>細かい変数を積分して、粗い尺度の作用を作る | 7-05（段の列・ブロック化・小さい場と大きい場）典 。到達点は 7-07。公開された構成の一段（結合に依る確率核）は 9-01〜9-07、多段は第 11 部評 | 15-03（分解の言明・横の縮みの帳簿）。15-05。15-07（背景に依る揺らぎ $\eta$） | 15-05 の数は一つの粗い面の周辺で見た一段で、本当のブロック化の一段ではありません。本当の二段は反復した二段と合いません（縮み $\lambda$ が 3.4〜3.7 倍）読 。全ての粗い面を同時に固定すると縮みは行列になり、粗い向きで $1/16$ を超えます（束の網の定理。可換な配位・木の水準）初 。$\eta$ の多段の帰納は書けていません 仮 |
| **11 Migdal–Kadanoff と階層模型**<br>ブロック化を一枚の重みの写像に近似した再帰 | 18-04 図 1（近似の再帰・近似の性格）典 | 15-04 §02〜§05（不変な曲線に一段ごと $1/16$ で引き寄せられ、位置は源と縮みの釣り合い $1/3600$：鞍点の主項初 。管の不変性 $\beta \in [2.46, 64]$ 機 ）。26-08 道 30 | MK の流れは群がアーベルか非可換かに依らず強結合へ向かい、$U(1)$ と $SU(2)$ を区別しません（Kanazawa）典 。Tomboulis の補間は、捩れの無い区画と捩れた区画で共通の $t^*$ が取れることに頼り、それは補間母数の共通性の不等式（Ito–Seiler の (3.5)）に帰着して強結合の外で示されていません典 。階層模型は $U(1)$ でも閉じ込める模型で、非可換性の検査になりません |
| **12 一ループの摂動と係数 11/3**<br>背景の場のまわりのガウスの揺らぎ。$\frac{11}{3} = 4 - \frac{1}{3}$ | 4-03・4-06（漸近自由と係数の内訳）典 | 25-07（等長的な写像は $\beta' \geq \beta + 0.023$ しか出せず、揺らぎを整形する写像は $\beta - \beta' = 0.258$ を再現）初 。26-03・26-06・15-06 | 全て一ループ（ガウス）の水準の文です。中程度の結合と大きな場で、整形した写像の誤差を押さえることは開いています。表の頭の $\frac{11}{3}$ は 4-06 の再掲で、内訳の説明は 4-06 を先に読みます |
| **13 次元転移と $\Lambda$**<br>無次元の結合から質量の尺度 $\Lambda$ が生まれる | 4-07 典 | 24-07（四次元だからこそ）。26-00・26-07（帯の位置 $L \sim 1/\Lambda$） | 帯の位置を $L \sim 1/\Lambda$ に置くのは物理の尺度の読みです 読 。24-07 の大部分は既知の整理で、第 4・7 部だけで読めます |

| 道具 | 家（第 1〜5 部と第 7・17・18 部・原典） | 本書での使い方（第 23 部以降） | 群に写して止まった所・注意 |
|---|---|---|---|
| **14 Gibbs の変分原理と相対エントロピー**<br>写像で測度を運ぶと、自由エネルギーの差の評価の余りが相対エントロピーになる。Crooks・Jarzynski もこの型 | 2-08（自由エネルギー・相対エントロピー）典 | 25-06（力学で駆動した挿入）。25-07 輸送の恒等式（向きの原理）初 | 決まった写像の挟み撃ちでは、余りの相対エントロピーが渦の面の面積とともに増え、$e^{-\sigma A}$ の形は出ません 読 （物理。26-08 の止まった道「決定論的な挟み撃ち」）。使えるのは定性的な目標 $\Delta F(L,L)\to 0$ です |
| **15 捩れた境界条件・中心・'t Hooft の流束** | 3-05（位相）・5-01（格子）・1-04（中心）典 。捩れの定義そのものは 25-01 典 | 25-01（捩れを食う真空の一意性など三つの事実）初 。25-04・26-01・26-04 | 中心が自明な群（$G_2$ など）では、中心を使う矢印が消えます（16-09 一般の群の段）典 。第 25・26 部は $SU(2)$ で書きます |
| **16 中心渦と分数インスタントン** | 17-02（閉じ込めの絵）・3-05（インスタントン）典 | 25-02（定義と作用・格子の最小作用の上界）。26-03（非可換が効く場所の見立て） | 希薄な気体の勘定は物理の読みです 読 。26-03 の渦は 25-02 の定義を先に読みます |
| **17 容器の恒等式と Tomboulis–Yaffe の不等式**<br>枠を止めると容器どうしが独立になる。't Hooft の判定から面積則へ | 土台は 5-02・5-04（面の和）。恒等式は 25-03 §03（Mack–Petkova）、不等式は 26-01 典 | 25-03〜25-05（区画の和のアンサンブルでの書き直し・入れ子）初 。26-02（一つの不等式への還元） | 長さの決まった容器を独立に並べると、四次元では $V(R)\gtrsim R/\ln R$ までしか出ません（Kovács–Tomboulis）典 。面積則にはループの大きさの容器が一つ要り、それは帯を渡ることと同じ条件です。区画の偏り $\theta$ が 1 から離れるだけでは足りません（26-01）初 |
| **18 束の網 — Thomson の原理・Kirchhoff の法則・直交射影** | 1-01（線形写像と射影）典 。電気回路の標準の事実は 15-05 の出典表 | 15-05 単位の束の定理（最小点は射影で決まり、縮み $\lambda\le \max f^2$、$1/(16d-8)\le\lambda\le 1/16$）初 | 可換な配位に制限した木の水準（$\beta\to\infty$ の主項）の文です。非可換な配位・一ループの源・大きな場・ゲージの張り替えを含みません |
| **19 BCH の公式と四元数**<br>$\log(e^Xe^Y)$ の交換子の級数。$SU(2)$ は長さ 1 の四元数 | 1-03（BCH の三次まで）・1-02・1-04 典 | 5-11（四元数の内積と一リンク積分）。15-06（交換子は BCH の像）。15-07（群の幾何の部分＝BCH の三次の係数 $1/9$、Gauss の主項・二リンク）初 | $SU(2)$ の群の幾何の部分は背景そのものに乗って縮まず、その予算は闘をどう選んでも発散します（一ループの流れを正確な式と見なした算術）初 。$U(1)$ では BCH の三次は恒等的に 0 です |

| 道具 | 家（第 1〜5 部と第 7・17・18 部・原典） | 本書での使い方（第 23 部以降） | 群に写して止まった所・注意 |
|---|---|---|---|
| **20 計算機援用 ― 区間演算・証明書・倍精度の規律**<br>全ての数を真の値を含む区間で持ち、丸めを外向きに取る | 第 1〜5 部と第 7・17・18 部に家はありません。一般論は 23-08 §01〜§03（丸めの規約・区間で持つ・陽性と陰性の対照）典 | 23-07・23-08（$\hbar$ の窓の全ての点で鎖の条件 $q<1$）機 。15-04 §05（階層模型の管）機 。23-15 | 区間演算で不等式を囲えたのは、一段目の窓と、一枚の重みの写像である階層模型です（ほかに 25-02 の具体的な配位の作用の上界 機 。上界の向きだけ）。階層模型でも $\beta>64$（格子間隔 0 の極限）は閉じていません。有限個の $L$ を区間演算で確かめる道は、四次元では計算の規模が届きません（26-08 道 3）読 。計算機援用は窓の外について何も言いません（23-08 §10） |
| **21 Lean による形式化**<br>言明を型、証明を項として、小さな核が検査する | A-04（核の検査・標準の三つの公理の基準）典 。公開された構成の Lean の読み方は 6-00 | 5-11（曲がりの下界と族の組合せ）。23-13（一段目の束）。16-09 表 1 の Lean の欄 | 保証されるのは、書いてある仮定から書いてある結論への矢印だけです。物理の測度は形式化されていません。区間演算の層は Lean の外にあります（23-13 §04）。一般論は A-04、束の一覧と例は 23-13 |
| **22 Monte Carlo の読み**<br>格子の配位を確率的に作って平均を測る | 5-07・5-08 典 | 25-08・26-09（測った記録）読 。15-05・15-07 の数 読 | 測った数は全て「読」の札で、定理の根拠にしません。格子の大きさ・$\beta$・種・誤差は各章の同じ行にあります。測り方を変えると数が動く例があります（15-05 の本当の二段と反復の二段） |

表 1 から読むこと。(a) 第 1〜5 部と第 7・17・18 部に家の無い道具が二つあります（階層模型の帰納と計算機援用）。どちらも第 23 部以降の章（24-06 §02・23-08 §01〜§03）が家を兼ねています。(b) 第三列の止まり方には型があります。曲率と凸性の道具（行 2〜4・9）は群の閉じた形と頂上の一サイトで止まり、繰り込みの道具（行 10・11・19）は一段を多段に重ねる所で止まり、構造の道具（行 5・17）は $U(1)$ と区別できない所で止まります。(c) 計算機援用と Lean（行 20・21）は、どちらも書いた範囲の外について何も言いません。

## 二か所以上にある話の割り振り

同じ道具が複数の部に出てくるとき、表 2 の「家」を先に読み、「使い方」は家を読んだ後で読みます。家の章だけで定義と既知の結果は揃います。

表 2　同じ話が二か所以上にあるもの（家＝先に読む章、使い方＝後で読む章）

| 話 | 家 | 使い方 | 表 1 の行 |
|---|---|---|---|

| 話 | 家 | 使い方 | 表 1 の行 |
|---|---|---|---|
| Bakry–Émery の判定法 | 5-11（判定法と一リンクの例） | 24-06 §02〜§03（群の上で弱結合で立たない理由）・23-02・23-06 | 2 |
| Migdal–Kadanoff | 18-04 図 1（近似の性格） | 15-04（不変な曲線と区間演算）・26-08 道 30（Tomboulis の主張と批判） | 11 |
| Kogut–Susskind の格子 | 5-03 | 24-05（隙間と真空の測度） | 6 |
| 鏡映正値性と転送行列 | 5-03 | 26-04・26-05（$\mathbb{Z}_2$・$U(1)$ で確かめる） | 5 |
| 一ループの係数 $\frac{11}{3}$ | 4-06 | 25-07・26-03・26-06 | 12 |
| 次元転移 | 4-07 | 24-07・26-00・26-07 | 13 |
| 渦（中心渦・分数インスタントン） | 絵は 17-02、定義と作用は 25-02 | 26-03（見立て） | 16 |
| 繰り込みの段と Bałaban の連作 | 7-05・7-07（到達点） | 15-02（連作の内部と BBS の鎖）・15-03 | 10 |
| 区間演算 | 23-08 §01〜§03 | 23-07・23-15・15-04 | 20 |
| Lean | A-04（一般論） | 23-13（一段目の束と二つの型の例） | 21 |

02

## 読む順の三本 — 道具から・結果から・地図から

三本とも、途中で表 1 に戻って家の章を引けば、前提が欠けずに読めます。0-01 §07 の読む順と並べて使えます。

読む順の三本（矢印の順に読む。〔〕は表 1 の行）

| 入り方 | 読む順 | 読み終えたときに分かっていること |
|---|---|---|
| **道具から入る**<br>数学の側の読者 | 1-10 → 5-03 → 5-11 → 7-04 → 7-05 → 18-04 → 23-08 §01〜§03 → A-04 → 24-06 → 15-04 → 15-05<br>〔1・2・5・7・10・11・20・21・3・4・18〕 | 各道具が何を要り、群の上の格子のどこで止まったか。止まり方の三つの型（表 1 の後の (b)） |
| **結果から入る**<br>本書の条件つきの言明から | 16-09 → 27-01 → 27-02 → 25-04 → 26-02 → 15-03、読みながら表 1 の「本書での使い方」の列から家の章へ戻る | 条件つきの言明の各矢印がどの道具に頼っているか。条件の台帳の行と道具の対応 |
| **地図から入る**<br>未解決の全体を先に見る | 0-02 → 16-05 → 16-07 → 16-09 → この章 → 26-08 → 15-08 → 27-04 | 証明が含むべき七つの段のどこが開いていて、どの道具がどこで止まり、本書が何を主張しないか |

03

## 道具どうしの依存 — 先に要る道具と、後で使う道具

表 3 は、表 1 の道具を「先に要る道具」でつないだものです。番号は表 1 の行です。先に要る道具の番号が後の行に来ることがありますが、輪はありません。家の章を読む順は、この列を左から辿れば決まります。

表 3　道具の依存（この本の整理。「後で使う」は第 23 部以降で組み合わせて使う所）

| 道具（表 1 の行） | 先に要る道具 | 組み合わせて使う所 |
|---|---|---|
| 1 Poincaré 不等式 | —（1-10 の線形代数とスペクトル） | 2・3 の結論の形。24-05 の恒等式 |
| 2 Bakry–Émery | 1、19（群の曲率は $SU(2)$ が三次元の球面であることから） | 3 を出す。4 の入口。5-11 で 21 と組む |
| 3 対数 Sobolev | 2 | 24-06 の稀さで払う道具 |
| 4 階層模型の帰納 | 2・10 | 24-06 §05 で 11 と比べる |
| 5 鏡映正値性 | —（4-10 の公理） | 26-05 のチェス盤。15・17 と組んで 26-04 の否定の補題 |
| 6 Kogut–Susskind の格子 | 5 | 24-05 で 1 と組む |
| 7 強結合展開 | 8 | 15-04 の鎖の出口。9 と同じ型の判定 |
| 8 指標展開と類関数 | 19 | 15-04・15-06 で 10・11 と組む |
| 9 Dobrushin の影響係数 | 7 | 26-07 で 2 と並べる（同じ不足に戻る） |
| 10 繰り込みの一段 | 12 | 11・18 の枠。15-03 の分解 |
| 11 Migdal–Kadanoff | 10・8 | 15-04 で 20 と組む。26-08 道 30 |
| 12 一ループ | —（4-03 の摂動論） | 25-07 で 14 と組む。26-06・15-06 |
| 13 次元転移 | 12 | 帯の位置の読み（26-07） |
| 14 Gibbs の変分原理 | —（2-08） | 25-06・25-07 で 12 と組む |
| 15 捩れ・中心・流束 | —（3-05・5-01） | 16・17 の舞台。26-04 |
| 16 渦 | 15 | 25-02・26-03 |
| 17 容器と Tomboulis–Yaffe | 15・7 | 25-03〜25-05・26-02 |
| 18 束の網 | 10・11（$1/16$ との比べ） | 15-05 の単位の束の定理・束の網の定理 |
| 19 BCH と四元数 | —（1-03・1-04） | 15-07 の群の幾何の部分 |
| 20 区間演算 | —（23-08 §01〜§03） | 23-07・23-08・15-04 で、11 などの写像の不等式を囲う |
| 21 Lean | —（A-04） | 2・5・17・19 などの代数の段を確かめる。20 の出力は仮定に置く |
| 22 Monte Carlo | —（5-07） | 25-08・26-09・15-05・15-07 の数（読） |

表 3 から読むこと。先に要る道具の無い行（1・5・12・14・15・19・20・21・22）が、二年生が最初に読める家です。そのうち 20 と 21 は家が第 23 部と付録にあるので、表 2 の割り振りで先に読みます。

04

## 言えないこと — 道具の限界の一覧

道具ごとの限界を、表 1 の第三列から一行ずつ抜き出します。部ごとの「主張しないこと」は 27-04 主張しないこと（横断の索引）に、第 15 部の紫外の道具の限界は 15-09 言えないことにあります。

1. 曲率の道具（Bakry–Émery・Brascamp–Lieb・Dobrushin）は、格子間隔を固定した強結合の側と一段目の窓でだけ効きます。弱結合の尺度では群の上の凸性そのものが立たず（24-06 §03）、一段目の頂上では同じ $\frac{15}{4}$ 対 4 の不足に戻ります（26-07 §03）。
2. 強結合展開とクラスター展開は強結合の岸の道具で、帯（中程度の結合）を渡りません。
3. 繰り込みの一段の文（15-04・15-05・15-06）は、一枚の重みの写像・一つの粗い面の周辺・可換な配位の木の水準のどれかに限られ、四次元の超立方格子の本当の一段を多段に重ねる文ではありません（15-09）。
4. Migdal–Kadanoff の流れと階層模型は $U(1)$ と $SU(2)$ を区別しません。そこで閉じることは非可換性の検査になりません。
5. 構造の入力（鏡映正値性・双対・転送行列・中心の恒等式）だけでは横広げの不等式は出ません（26-04 の否定の補題、「この入力の組だけでは」の形）。
6. 一ループの道具と Gibbs の変分原理の比べは一ループ（ガウス）の水準の文で、非摂動の評価ではありません。
7. 区間演算は書いた区間の外について何も言いません。Lean は書いた仮定から書いた結論への矢印だけを保証し、物理の測度は形式化されていません（23-13・A-04）。
8. Monte Carlo の数は読みで、定理の根拠にしません。
9. この表のどの道具を組み合わせても、本書の検討は質量ギャップの存在も連続極限の構成も示していません（27-04）。連続極限の存在は、公開された構成が (6) の道具の組で示しました[評]。質量ギャップの存在は、どちらにもありません（16-02）。

### この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| [典] 表 1 の「家」の列の既知の結果（原典の範囲は各章の出典表） | 表 1 の二十二で本書の道具が尽きること。道具の分け方はこの本の整理 |

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 初 機 読 仮 表 1 の第二・第三列の主張（挙げた章の札と条件のまま） | 第三列の「止まった所」が、その道具の原理的な限界であること（本書の使い方の範囲の記録） |
| 表 2 の割り振りと表 3 の依存（この本の整理） | 依存の表が論理の含意の全てを尽くすこと |
| 全体 | このサイトは質量ギャップの存在も連続極限の構成も示していない |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 表 1 の各行の主張と数 | 各章の札のまま | 行に挙げた章の本文と出典表（この章は写しで、新しい計算はしていない） |
| Bakry–Émery の判定法 | 典 | D. Bakry, M. Émery, Diffusions hypercontractives, Séminaire de Probabilités XIX (1985) 177–206（書誌は 5-11 の出典表） |
| 格子全体の閾 $1/12$ | 典 | H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, Commun. Math. Phys. 400 (2023) 805–851（5-11 の出典表） |
| 階層模型の帰納の仮定 | 典 | Bauerschmidt–Bodineau（24-06 の出典表） |
| Tomboulis の補間とその批判 | 典 | E. T. Tomboulis, arXiv:0707.2179。K. R. Ito, E. Seiler, arXiv:0711.4930（(3.5)）。T. Kanazawa, arXiv:0805.2742（26-08 の出典表） |
| 容器の恒等式と $R/\ln R$ | 典 | Mack–Petkova（1980）、Kovács–Tomboulis hep-lat/0108017（25-03 の出典表） |
| Thomson の原理・Kirchhoff の法則 | 典 | 電気回路の標準の事実（15-05 の出典表） |
| Dobrushin の条件 | 典 | 7-04 の出典表。26-05 の判定の原論文は照合未了 |
| 表 2・表 3・読む順の三本 | 本書 | 章の前提の段落と本文の参照から整理した（数値の計算は無い） |

**この章で使った語** — 家（道具の定義と既知の結果を最初に置いた章）・使い方・止まった所・Bakry–Émery の判定法・対数 Sobolev 不等式・階層模型・鏡映正値性・類関数・影響係数・ブロック化・Migdal–Kadanoff・束の網・BCH・区間演算・証明書。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：16-11 帯を越える発想の地図 — 生きている発想・壊れた発想・要りそうな数学。あわせて読むなら 23-00 入口 — 一本目の道（時間の方向から）。道具から読むなら 5-11 寄り道：Bakry–Émery と一リンク積分。

# 帯を越える発想の地図 — 生きている発想・壊れた発想・要りそうな数学

この章は未解決の地図です。§02・§03 の導出は本書の検討です。

**この章で分かること** — 移り変わりの帯（26-00）を越えるために本書の検討が試した発想を、一枚の地図にします。まず帯の両端と、その間の距離の桁の目安を置き、芯を二つの仕事に分けます（公開された構成の制御を、結合が数の程度になる所まで誤差の和を有限に保って延ばす仕事と、そこから強結合への最後の区間の言明）。次に、損失のある不等式の鎖が切断に一様な結論を出せない理由を導きます。続いて、本書の Lean に在る SU(2) に固有の事実がどれも配位の作用についての事実（エネルギーの側の事実）であること、帯に要るのは揺らぎと配置の数を尺度に一様に下から数える評価であること（エントロピーの側の不足）、変分の型で書ける評価の向きを見ます。そのうえで発想を、生きている・壊れた・判定できない、の三つの表に分け、いちばん小さい次の一歩を問いの形で、要りそうな数学を名前で並べます。試験の相手を七つに増やす話と、小さい格子の計算は 26-12 に在ります。

**前提となる章** — 16-03 公開された構成の赤外の端、16-04 この本の位置、26-00 入口 — 合流、26-06 繰り込みの比較、A-08 §05 赤外の側。

**先に言うこと — この章は、帯を越える道を与えません。証明は在りません。**在るのは、発想の地図と、手の勘定と小さい格子の計算で確かめた事実と、「この型の議論では越えられない」という見取り図です。ここに書く観察（芯の二分け、損失のある鎖、エントロピーの側の不足）は、専門家には知られていることかもしれません。本書はこれを新しい結果としてではなく、本書の検討が使う見取り図として書きます。距離の数（倍化の回数・尺度の比）は桁の目安で、定量の主張ではありません。

この章の順序

1. 帯の両端と、二つに分けた芯 — 距離の桁の目安、紫外の延長と強結合への最後の区間の言明
2. 損失のある鎖は、切断に一様な結論を出さない — 率は一様、前の因子が育つ

3. エネルギーの側の事実と、エントロピーの側の不足 — 変分の向き — 本書の SU(2) に固有の事実、渦の床が数えるもの、足りないもの
4. 発想の一覧 — 生きている（表 1）・壊れた（表 2）・判定できない（表 3）
5. いちばん小さい次の一歩 — 問いの形で
6. 要りそうな数学 — 七つ
7. この章が言っていないこと

---

**札** — 初 ＝この章に導出を置いた手の勘定／典 ＝原典か総説の当の箇所を確かめた文献の事実／読 ＝本書の小さい格子の数値の読み（格子・掃引・種を添える）／仮 ＝推し量り・見込み／Lean ＝本書の Lean の定理（強結合の窓の中だけ、格子間隔は固定）。くわしくは 6-00 の「札」。確かめていない文献の記述は「文献の記述（本書は未確認）」と書き、主張の根拠にしません。

記号は本書の決めに合わせます。一ループの傾きは $s = 11C_g/(24\pi^2)$、SU(2) で $s = 11/(3\pi^2) \approx 0.3715$（第 25・26 部では同じ量を $8b_0$ と書く。26-06 の $s(N)$ は別の量）。公開された構成の基準の結合（有効な作用の係数）を $\bar{\beta}$、SU(2) の Wilson の作用の結合を $\beta = 4/g^2$ と書きます。

01

## 帯の両端と、二つに分けた芯

**両端**。強い側の端は、本書の Lean の窓です：無限体積の極限と質量ギャップは $|\beta| < 1/19$（$18 \tanh|\beta| < 1$ の陽な十分条件。窓そのものは $|\beta| < 0.0556$。20-03）、面積則は有限の箱で $\beta < 1.1 \times 10^{-3}$、無限体積で $\beta < 1.2 \times 10^{-4}$ Lean （20-06。格子間隔は固定、Wilson の作用だけ）。弱い側の端は、公開された構成の一段の評価が求める閾で、これは有効な作用の係数についての下限であって、Wilson の $\beta$ ではありません。閾そのものの値は源に数として書かれておらず、閾に課される条件の一つだけから、閾は少なくとも $9 \times 10^5$（$e^{13.7065}$）と出ます（16-03 §01）。両端は別の量・別の作用の類で言われています。

**距離の桁の目安**。一ループの式では、格子間隔を二倍にするごとに結合は $s \ln 2 \approx 0.2575$ だけ減ります。この一段の歩みを、信頼できない所（結合が 1 の程度）まで真っ直ぐ延ばし、しかも有効な作用の係数と Wilson の $\beta$ を同じ軸に置くと、$9 \times 10^5$ から $1/19$ までの倍化の回数は

$$k \;\approx\; \frac{9\times 10^{5}-1/19}{0.2575} \;\approx\; 3.5\times 10^{6}, \qquad 2^{k} \;\approx\; 10^{1.05\times 10^{6}} \tag{1}$$

です 初 （割り算と $k\log_{10}2$ の計算）。これは**桁の目安**です。一ループの式は結合が 1 の程度では使えず、二つの軸は別の作用の係数なので、(1) は定量の主張ではありません。言えるのは、弱い側の端と強い側の端の間が、段 0 の単位で天文学的な尺度の比を隔てている見込み、ということまでです 仮 。

**芯の二分け**。帯の芯を、次の二つの仕事に分けて見ます 仮 。

1. **紫外の延長**。公開された構成の制御を、いまの閾（少なくとも $9\times 10^{5}$）から、結合が数の程度になる値 $\beta_{*}$ まで、段ごとの誤差の和を有限に保ったまま延ばす仕事。公開された構成と同じ種類の仕事ですが、量は丸ごと残っています（(1) の桁）。
2. **強結合への最後の区間の言明**。$\beta_{*}$ から強結合の窓までの、少ない段数の言明。結合が 1 の程度の所の、非摂動の言明です（26-06 の「有限の段数で帯を渡る系」とは別のものです）。

境 $\beta_{*}$ をどこに置くかで、難しさの配分が変わります。閾をいまの値のまま止めると、二つ目の言明が扱う「物理の大きさが $1/\Lambda$ の程度の箱」は、段 0 の単位で (1) の桁の辺を持ち、小さい箱の言明ではなくなります。二つ目が小さい箱の言明になるのは、一つ目の仕事で閾を数の程度まで下げたときだけです 仮 。なお、周期の箱では、体積を止めれば段 0 の有効な密度が切断の列の全体で収束することが公開された構成に在ります（16-03 §02。極限の測度そのものは対象として定義されていない）。$1/\Lambda$ の大きさでの量の情報はありません。

この見方には、もう一つの読み方が付きます。物理の大きさを止めた線（箱の辺と相関長の比が一定）の上では、繰り込みの比較（26-06）の一段は「同じ物理の大きさの箱を、格子間隔を半分にして比べる」言明です。だから倍化の段の列は、赤外へ走る段であると同時に、紫外の一様性（連続極限の制御）の言明の列でもあります 仮 。§02 の結論は、この読み方と合っています。

02

## 損失のある鎖は、切断に一様な結論を出さない

繰り込みの比較（26-06）を、毎段 $K\ge 1$ 倍の損失を許す形で考えます。$\Delta F(N,M,\beta)$ を横 $N$・縦 $M$ の板の渦の自由エネルギー（19-02）、$f(\beta)=\beta-c$（$c>0$）として

$$\Delta F(2N,2M,\beta) \;\le\; K\,\Delta F(N,M,f(\beta)) \qquad (N\ge N_{1},\; M\ge M_{0},\; \beta_{s}\le\beta\le\beta_{0}) \tag{2}$$

が、鎖が通る全ての $\beta$（強結合の窓の端 $\beta_s$ から、始めの $\beta_0$ まで）で成り立つとします（仮定。示されていません）。ここで $\beta_s$ は、前の因子が横の面積の、面積の指数の評価が使える窓（20-06 の有限の箱の窓、$\beta < 1.1 \times 10^{-3}$）の端です。§01 の $1/19$（無限体積の極限と質量ギャップの窓）とは別の窓です。

**導出** 初 。(2) を $k_0$ 回つなぎます。$k_0$ は、$\beta$ から始めて結合が強結合の窓の端 $\beta_s$ に着くまでの段数で、$k_0 \approx (\beta - \beta_s)/c$ です。任意の $N' \geq N_1$・$M' \geq M_0$ で

$$\Delta F(2^{k_0} N',\, 2^{k_0} M',\, \beta) \;\leq\; K^{k_0}\, \Delta F(N', M', \beta_s).$$

窓の端での面積の指数の評価 $\Delta F(N', M', \beta_s) \leq C\, N'^2 e^{-\sigma_s M'^2}$（20-06 の型。前の因子は横の面積、$\sigma_s$ は窓の端での率）を入れ、$L := 2^{k_0} M'$、$\xi := 2^{k_0}$ と置くと

$$\Delta F(\xi N',\, L,\, \beta) \;\leq\; C\, N'^2\, K^{k_0}\, \exp\!\Big(-\sigma_s\, \frac{L^2}{\xi^2}\Big) \tag{3}$$

です。ここから三つのことが読めます。

- **率は一様**。面積あたりの率は $\sigma_s/\xi^2$ で、$K$ に依りません。$\xi$ を「$\beta$ の格子と窓の端の格子の、尺度の比」（相関長の程度）と読めば、物理の単位での率は $\sigma_s$ で、切断に依りません。
- **前の因子が育つ**。$K^{k_0} = \xi^{\log_2 K}$（等号）で、前の因子は相関長（格子の単位で見た切断）の冪で発散します。(3) の右辺が 1 より小さくなるのは $\sigma_s (L/\xi)^2 \gtrsim k_0 \ln K + \ln(C N'^2)$ からで、物理の単位の長さ $L/\xi$ で $\sqrt{k_0 \ln K / \sigma_s}$ の程度、$k_0$ は $\beta$ に比例するので $\sqrt{\beta}$（$= \sqrt{\ln \xi}$ の程度）に延びます。
- **一様に言うための条件**。前の因子が切断に依らないためには、段ごとの損失 $K_i$ の積が有界、すなわち $\sum_i \ln K_i < \infty$（$K_i = 1 + \varepsilon_i$、$\sum_i \varepsilon_i < \infty$）が要ります。

読み。損失が段に一様な定数 $K > 1$ の鎖は、**各 $\beta$ での閉じ込め**（固定した格子間隔での面積の指数）までは運べますが、**切断に一様な定数**は運べません 初 。一様に言うには損失の和が有限でなければならず、これは不等式の工夫ではなく、連続極限の制御の種類の仕事です（§01 の一つ目） 仮 。

**加法で見ると、区別は主項に在る**。弱結合の側では、渦の自由エネルギーは準古典に $\Delta F \approx \pi^2 \beta_{\text{eff}}(L)$（$\pi^2$ は連続の理論の区画の作用の下限。25-02）の型です。一ループで $\beta_{\text{eff}}$ が倍化ごとに $s \ln 2$ 減るなら、倍化あたりの変化は

$$\Delta F(2L) - \Delta F(L) \;\approx\; -\pi^2 s \ln 2 \;=\; -\tfrac{11}{3} \ln 2 \;\approx\; -2.54 \tag{4}$$

です 初 （$\pi^2 \cdot 11/(3\pi^2) = 11/3$。一ループの水準）。U(1) の Coulomb の相では同じ型の量は走りません。だから「弱い側の差は $O(1/\beta)$ で小さい」は相対の言い方で、加法の物差しでは

区別は一段ごとに $O(1)$ です。本書の測定の記録（26-09 の表 8・10、種 1〜3 本）の引き算では、SU(2) の $4^4 \to 8^4$ は $\beta = 2.7, 2.9, 3.0$ で $1.61, 1.88, 1.80$ です 読 （各値に $\pm 0.3$〜$0.7$ の散らばり）。記録の値は $\Delta F(L) - \Delta F(2L)$（減り方）で、(4) の大きさ 2.54 と比べると同じ桁です。

ただし (2) の $K$ 倍の損失は $\Delta F \approx \pi^2 \beta$ に掛かるので、$(K-1)\pi^2\beta$ が (4) の 2.54 を一段で食います。近似の式の上で見ると、損失の無い加法の比べ $\Delta F(2L, \beta) \le \Delta F(L, \beta - c')$ は、小さい箱では格子の人工物のため偽になります：冷却で見た区画の最小作用 $S(L)$ は $L$ とともに増え（$2 \times 2$ で 7.84、$4 \times 4$ で 9.80、連続の $\pi^2 \approx 9.87$ へ下から。25-02 表 1） 読 、$\Delta F(2L) - \Delta F(L) \approx \beta\,(S(2L) - S(L)) - 2.54$ の第一項が正なので、損失の無い形は箱の辺に $\sqrt{\beta}$ の程度の下限を付けた形でしか書けません 初 。記録の $2^4 \to 4^4$ の減り方が $\beta = 2.5, 2.75, 3.0$ で $1.83, 0.85, 0.55$ と 2.54 から離れていく向きは、この人工物の向きと合います 読 。

03

## エネルギーの側の事実と、エントロピーの側の不足 — 変分の向き

**1. 本書の SU(2) に固有の事実** 仮 （本書の Lean の定理（A-04 表 4g と、21-05・21-07・20-06 の頁）を読んだ範囲。各定理の証明を U(1) へ移して確かめてはいません）。SU(2) の非可換性に依り、U(1) へそのまま移らないとはっきり読めるのは、次の四つです。

- 片方の向きだけの捩れの背景には、作用 0 の配位（捩れた真空）が在る Lean （`ThetaLimit.flat_exists_10`、21-07）。四元数の $\mathbf{i}$ と $\mathbf{j}$ が反可換だからです。可換な群では、一つの捩れを作用 0 では満たせません 初 （面の積を閉じた面の上で掛けると捩れの符号だけが残るため）。
- 捩れた真空を止めるゲージ変換は $\pm 1$ だけ Lean （`TwistBlocks.stab_vacT`・`TwistBlocks.rigidT_all`、21-05 の寄り道）。
- 二つの向きの捩れを同時に入れた箱には作用 0 の配位が無く（`TwistFlat.no_flat_twist11`、21-07）、渦の最小作用は正 $S_N > 0$（`VortexPos.SN_pos`、21-05） Lean 。
- $N = 2, 3, 4$ で、太い渦は薄い渦より安い：$S_N < 2N^2$ Lean （計算機の証明書。`VortexCert.SN_two_lt` ほか、21-05）。

どれも**配位の作用についての事実（エネルギーの側の事実）**です。向きは両方在ります：一つ目と四つ目は「捩れは只で入る」「渦は安くできる」と言い、三つ目は「渦は只ではない」と言います。

**2. 本書の渦の床が数えているもの**。薄い渦の床・太い渦の床（21-02・21-03）は、渦の比 $\theta$ の上界、すなわち閉じ込めの向きの評価で、率は、薄い渦で $-\ln\tanh(N^2\beta)$、太い渦で $e^{-\beta(S_N+\varepsilon)}$ です Lean （太い渦の床は、十分大きい $\beta$ と、$\beta$ ごとに十分大きい $M$ での言明で、閾は陽でない）。この率は、渦一本の作用（古典の値）と、渦が縦の面を貫く位置の数（$M^2$ の因子）から来る、と読めます 仮 。横の大きさ $N$ を止めた上の値で、$N$ に一様ではなく、$\beta$ が大きい所での減り方も古典の作用の指数のままです。上界の証明書 $S_N < 2N^2$ は、この率を良くする向きに使われています（`TwistBlocks.thick_vortex_floor_two` ほか、21-05）。

**3. 足りないもの** 仮 。帯に要るのは、横の大きさを物理の長さを越えて広げても率が保たれることです（26-01・26-02）。物理の見立てでは、そこで効くのは、渦の揺らぎと配置の数（エントロピー）が尺度とともに走ることです（26-00 図 2 の余裕 $5/3 = 11/3 - 2$ の読み）。U(1) では、この走りがありません。渦の床も位置の数を数えていますが、それは横の大きさを止めた上の数えです。配位の作用についての事実をいくら積んでも、この走りは出ない見込みです。必要なのは、揺らぎと配置の数を、尺度に一様に、下から数える評価です。本書はこれを**エントロピーの側の不足**と呼びます。

**4. 変分の向き** 初 。電場の流束 $e \in \{0,1\}$ の分配関数 $Y_0, Y_1$ で書くと、捩れの無い・在る分配関数は $Z_{n_{34}=0} = Y_0 + Y_1$、$Z_{n_{34}=1} = Y_0 - Y_1$、渦の比は $\theta = Y_1/Y_0$ です（26-06 §02・26-04）。閉じ込めに要るのは $\theta$ の上界、すなわち流束の部門のエネルギーの**下界**です。試しの状態（変分）が与えるのはエネルギーの**上界**、すなわち $Y_1$ の下界と $\theta$ の下界で、閉じ込めに要る向きと逆です。磁気の側では、捩れた分配関数 $Z_{n_{34}=1}$ の下界（試しの配位の集団と Jensen の不等式）が $\theta$ の上界を与え、閉じ込めの向きになります。変分の型で閉じ込めの向きを書けるのは磁気の側だけです。ただし、帯の証明がこの型だけに限られる、とは言いません。

04

## 発想の一覧

各行に、理由と確かめた範囲を書きます。七つの試験の相手と、それぞれが落とす議論の型は 26-12 にまとめ、ここでは名前と結論だけを置きます。言葉を三つ先に置きます：**混合作用**は、Wilson の作用（基本表現の項）に随伴表現の項を足した SU(2) の作用、**一次の転移**は、面の平均などが結合について跳ぶ転移、**臨界の端点**は、一次の転移の線が終わる点です。**平坦な接続**（平らな配位。21-07 の言い方）は全ての面のホロノミーが単位元（捩れが在るときは捩れの符号）に一致する配位、**凍った相**は、有限群のゲージ理論で大きい $\beta$ の側の、平坦な接続の近くに張り付いた相です。

**表 1　生きている発想**（どれも帯を越えていません。「生きている」は、壊す理由がまだ無いという意味です）

| 名前 | 中身 | 理由と確かめた範囲 |
|---|---|---|
| 七つの試験の相手 | 帯の議論を、U(1) の弱結合だけでなく七つの相手で試す | U(1) だけでは、落とせる議論の型が粗い。有限の非可換群・随伴 Higgs の極限・SU(2) 自身の混合作用が、別の型の議論を落とす。数え・一次の線の痕跡は 26-12 §05 読 、相手の性質のうち文献で確かめた所は 26-12 の出典の表 典 |
| 芯の二分け | 紫外の延長（誤差の和を有限に保って閾を $\beta_*$ まで）と、強結合への最後の区間の言明 | §01・§02。前の因子の勘定 初 。境の置き方は 仮 |
| 物理の大きさの箱の混合の言明 | 箱の辺を物理の長さ $C/\Lambda$ に取ると、枠（箱の境界のリンク）を替えたときの、内側のゲージ不変な観測量の法則の全変動が閾より小さい。$\beta$ に一様に | 群・中心・作用の類に依らずに書け、U(1) の Coulomb の相でも、混合作用の端点の型の点でも（端点でギャップが閉じるなら。SU(2) では本書は未確認）成り立たないはずの形 仮 。ただし質量ギャップ（強い形）の言い換えで、道ではない。強い側の入力の向き（有限の箱の混合 ⇒ 一様な指数の減衰）は既知の型の定理の組 仮 （ゲージ理論の形では書き下していない） |
| エネルギーの側とエントロピーの側を分けて見る | 本書の SU(2) に固有の事実は配位の作用についての事実（エネルギーの側）で、向きは両方在る。帯に要るのは、揺らぎと配置の数を尺度に一様に下から数える評価（§03 の見立ての名で、エントロピーの側の不足） | §03。一覧を読んだ範囲 仮 、変分の向き 初 |
| 値の水準の三分類 | 対称な箱・捩れ一つの量が、弱結合で U(1) は $\beta$ に比例、有限の非可換群の凍った相は定数、SU(2) は $\frac{3}{2}\ln\beta$ の型 | 有限群の数え 読 、$1^4$ の SU(2) の冪 初 読 （26-12 §05）。値の水準の区別で、帯は越えない |
| 量化を明記する | 繰り込みの比較で、縦横比を止めるか、横を止めて縦を延ばすかで、U(1) が落ちる場所が変わる | 縦横比を止めた形は弱い側で U(1) でも一様な定数で立つ 初 読 、縦横比を延ばすと定数が育つ（26-12 §02） |

**表 2　壊れた発想**（「この型の議論は、〇〇の理由で通らない」）

| 発想 | 通らない理由 |
|---|---|
| 捩れた分配関数と捩れない分配関数の比で、測度で決まる結合を置く | 捩れの無い周期の箱には平坦な接続の連続族が在り、中心の近くでその寄与が対数で効くので、比の分母が汚れる（26-12 §05 の $1^4$ の冪） 初 読 。二つの捩れた部門の比である本書の $\Delta F$ で足りる |
| 開かつ閉の二分法で帯を渡る（「或る箱で渦の比が閾より小さければ以後は面積の指数で減る」と、減衰の在る $\beta$ の集合の連結性） | 「閉の側が空」を示すことに走りの全部（(1) の桁の段）が入り、開かつ閉にする形では「転移が無い」ことの言い換えに戻る 初 （論理） |
| 損失 $K>1$ が段に一様な鎖で、切断に一様な結論を出す | 前の因子が $\xi^{\log_2 K}$ で育つ（§02） 初 。各 $\beta$ での閉じ込めまでなら害は無い |

| 発想 | 通らない理由 |
|---|---|
| 「$\beta$ の軸に転移が無い／段の写像に不動点が無い」を、有効な作用の類で使う | SU(2) の基本＋随伴の混合作用の類の中に、一次の転移の線と臨界の端点が在る（26-12 §02）[典] [読]。線の両側が閉じ込めの相であることは、線が端点で終わり Wilson の軸の閉じ込めの相と滑らかにつながることからの推論 [仮]。Wilson の軸に固有の事実で、公開された構成の段 0 の有効な作用の類へ延びない |
| 「代数としての非可換」だけ、または「群が連続で非可換・中心の対称性・重みの正値性」だけを入力にする議論 | 前者は有限の非可換群で落ちる。後者は随伴 Higgs の族で落ちる：族の全ての $J$ でこれらは同じで、$J=\infty$ は U(1) の Wilson の作用になり [初]、その閉じ込めない相 [典]（Fröhlich–Spencer。主に Villain の近似で示し、全ての結果を Wilson の作用へ延ばせると本文で述べる。延長は別の論文の技法による）を持つ（26-12 §03） |
| 一つの尺度での凸性（Bakry–Émery の型）を弱結合で使う | Haar の測度の曲率は $O(1)$、作用の Hessian は $O(\beta)$ なので、一つの尺度の入力は相対 $O(1/\beta)$ で弱結合では消える [初]（次数の勘定）。段ごとに積もる形は表 3 |
| 電場の側の変分（試しの状態）で閉じ込めの向きを出す | 試しの状態が出すのは流束の部門のエネルギーの上界で、向きが逆（§03） [初] |
| トーラスの上の大域の対数 Sobolev 不等式を、どの群でも通るギャップの量とする | $\mathrm{Z}_2$ の弱結合の相にギャップが在る、という文献の記述（本書は未確認）が正しければ、そこでホロノミーの部門の間の混合が遅く大域の形は成り立たない見込みなので、ギャップの量として通らないことになる [仮]。境界条件つきの局所の混合（空間の混合）に直して表 1 に残した |
| 押し出した測度の鏡映正値性と決まったブロック写像を、帯に生かせる非可換に固有の部品とする | 押し出しの等式は、U(1) の Wilson の測度を同じ写像で押し出しても同じに成り立つ。器であって、群を区別する入力ではない [初] |
| 板の張力の、尺度の対数についての凸性 | 捩れた板では、準古典の希薄な領域で $N^2\sigma_N$ の対数の傾きが $11/3$、大きい $N$ で 2 と見込まれ、傾きは減る側 [仮]（26-00 図 2 の見立てに基づく） |
| 連続の側の $a$ 定理・跡の異常の和則で、赤外が自由な光子でないことを言う | $a$ の値は紫外（三つのグルーオン）から赤外（光子一つ）へ減る向きと矛盾しないので、自由な光子を排除しない [仮] |

## 表 3　判定できない発想

| 発想 | いまの状態 |
|---|---|
| 捩れた部門での、項ごとの符号の不等式（面ごとの結合 $\beta_p$ について $\partial\Delta F/\partial\beta_p \geq 0$） | SU(2) の $1^4$ で 48 個とも正 [読]（26-12 §05）。有限群 $Q_8$ では似た単調性が破れる点が在る（21-01：三次元・背景なしの $\beta$ についての単調性） [読]。格子が一点なので「立つ」とは言えない |
| 枠を替えたときの全変動についての、有限の箱の判定（ゲージ不変な観測量の上で） | 本書の Lean の強結合の窓の証明は、ゲージを固定せずに全てのリンクの上で Dobrushin の条件を使っている（20-02・20-03 の証明の読み）。窓の外で、ゲージ不変な部分にだけ在る減衰を捉える判定は、本書に先例が無い。枠に触れない内側の領域ではこの区別が要らない見込みもある（§05 の 5、未検算） |
| 物理の強結合（$\beta \lesssim 2.2$）と証明の窓（$1/19$）の差を、有限の箱の判定とループ方程式の証明書で埋める | ループ方程式と正値性から格子の面の平均に上下の評価を出す方法は在る（大きい $N$ の極限で） [典]。SU(2) の小さい箱で必要な規模は分からない |

| 発想 | いまの状態 |
|---|---|
| 熱浴の生成子を射影の和と見て、量子スピン系の「有限の鎖の隙間が閾を越えれば無限でも隙間」の判定を借りる | 判定そのものは一次元の並進不変な系（と二次元の正方格子）で在る 典 。四次元のリンクの射影で閾の形が合うかは確かめていない |
| 二項正二十面体群を、帯の有限版に使う | 平坦な接続の数えは在る 読 。凍る $\beta$ の値と、SU(2) の振る舞いを真似るかは文献の記述（本書は未確認） |
| 段ごとに積もる曲率 | 階層の模型では一段の歩み $(1-b^{-2})/3$（$b=2$ で $0.25$）が群の曲率の因子から出る 初 （下の注）。四次元の $11/3$ の大半は曲率から来ない見込みで、芯にはならない見込み 仮 |
| 張力からギャップへ、作用の類の中の柔らかい議論で | 混合作用の一次の線の端点に近づくとスカラーの質量が格子の単位で下がる、という報告が SU(3) に在る 典 。SU(2) では本書は未確認で、端点の位置も文献で揺れている（小さい格子での見かけの端点と、大きい格子での見直し。26-12 §02）。格子間隔を止めた上の話で、連続の理論のギャップについては何も言わない |
| 「率が一様に正」を、有効な作用の類で使う | 一次の線をまたいでも張力は跳ぶだけで正のままでありうるので、混合作用の一次の線はこれを破らない。破るのは端点でギャップが閉じる場合で、SU(2) では本書は未確認 |
| 純ゲージ・局所の作用では 't Hooft ループは面積則を持てない（だから SU(2) ではギャップと閉じ込めが離れにくい） | 推し量り 仮 |
| 繰り込まれた作用の軌道は、混合作用の端点から離れた所を通る | 文献の記述（本書は未確認） |
| 相対エントロピーが 0 へ向かう、配位に合わせた渦の挿入（エントロピーの側の下界） | 形の案だけ。最初の関門は一ループの $11/3$ を再現すること 仮 |
| 跡の異常を欠損とする単調性公式 | 形の案だけ 仮 |

**注（段ごとに積もる曲率の一段）** 初 。SU(2) の面の重みを熱核 $K_t(\theta)$（$\theta$ は面のホロノミーの角）で近似すると、小さい $t$ で $K_t(\theta) \propto \frac{\theta}{\sin\theta}\, e^{-\theta^2/(4t)}$ です。$n$ 枚を束ねる（重みの $n$ 乗）と $K_t^{\,n} \propto (\theta/\sin\theta)^{n-1} K_{t/n}$ で、$\ln(\theta/\sin\theta) \approx \theta^2/6$ を指数に入れると、Wilson の $\beta$（$1-\cos\theta \approx \theta^2/2$ から $\beta = 1/(2t)$）は $n\beta - (n-1)/3$ になります。四次元で $b=2$ の階層（$n = b^2 = 4$ 枚を束ね、面の中で $b^2$ 枚を畳み込んで $t \to b^2 t$）では、一段で $\beta \mapsto \beta - (1-b^{-2})/3 = \beta - 0.25$ です。一ループの一段 $s\ln 2 \approx 0.2575$ との近さは偶然と読みます 仮 。

05

## いちばん小さい次の一歩

問いの形で書きます。どれも答えは出ていません。

1. **篩の表を埋める**。26-12 表 2 の「—」の欄の各々について、その相手の模型で、言明は真か・偽か・定義されないか。芯の候補として残すのは、U(1) の弱結合で偽になり、かつ混合作用の端点の型の点で偽になる（端点でギャップが閉じるなら。SU(2) では本書は未確認）言明だけ、という基準で選び直せるか。
2. **紫外の延長の最小形**。背景の捩れ $n_{12} = 1$ の箱で、箱の辺と相関長の比を止めた $\Delta F(N, M, \beta)$ は、$\beta \to \infty$ で収束するか。最初の一歩は読むこと：公開された構成の、周期の箱での列の全体の収束の証明のうち、境界条件に依る所はどこか。
3. **符号の不等式の試験**。SU(2)・背景 $n_{12} = 1$・非負の面の結合で $\partial \Delta F / \partial \beta_p \geq 0$ か。$1^4$ の次は細長い箱（有限群の破れが横の長い幾何で出ているため）、そのあと二次元の閉じた式と $2^4$。$Q_8$ で破れる最小の例を SU(2) へ持ち上げ、どこで破れが消えるかを見る。
4. **弱い側の加法の比べ**。$\beta \geq \beta_0$、$L \geq N_1(\beta)$（$N_1$ は $\sqrt{\beta}$ の程度）で $\Delta F(2L, \beta) \leq \Delta F(L, \beta - c')$（$0 < c' < 0.2575$）を、一ループの水準の命題として書けるか。倍化あたりの余裕は (4) の 2.54。
5. **強い側の有限の箱の判定の見本** 仮 （未検算）。二次元の SU(2) の箱で、枠を替えたときの、枠に触れない内側の領域の法則の全変動は、全ての $\beta$ で、間に挟まる面の数 $n$ について $C(\beta)\,(I_2(\beta)/I_1(\beta))^n$ 以下か（$I_\nu$ は変形 Bessel 関数）。また、内側のリンクの法則が内側の点のゲージ変換で不変なとき、その全変動は全てのリンクの上で測ってもゲージ不変な部分の上で測っても同じか。どちらも本書の検討の中で確かめられていない案で、確かめれば「一本のリンクの判定が失敗する $\beta$ でも箱の判定は働く」いちばん小さい見本になる見込みです。
6. **一枚の面の物差し** 仮 （未検算）。一枚の面の基本表現の係数の比で乱れを測ると、SU(2) の $I_2(\beta)/I_1(\beta)$ が U(1) の転移点の $I_1(1.01)/I_0(1.01) \approx 0.450$ に並ぶのは $\beta \approx 2.105$ です（Bessel 関数の比の数値。本書の台本で計算し直した）。この物差しで二つの群を並べることに意味があるか、SU(2) の移り変わりの場所との近さが偶然でないかは、確かめていません。

06

## 要りそうな数学

どれも本書の推し量りです 仮 。名前は内容を表すように付けました。

- **捩れた箱の連続極限の制御**。測度で決まる量・捩れた（枠つきの）箱での、誤差の和が有限な尺度の比べ。公開された構成の型の延長で、§01 の一つ目の仕事の道具。
- **ゲージ不変な観測量の法則の結合**。リンクごとではなく、ゲージ不変な関数の条件つきの法則を結ぶ作り方と、その上の Dobrushin–Shlosman の型の有限の箱の判定。

- **エントロピーの側の下界の計算法**。相対エントロピーが 0 へ向かう、配位に合わせた挿入。最初の関門は一ループの $11/3$ の再現。§03 のエントロピーの側の不足を埋める道具。
- **捩れた部門での作用の順序**。面の結合について $\Delta F$ が増えることを言う、非可換の Ginibre の型の不等式か、その代わりになる作用の間の順序。
- **結合が 1 の程度の所の、展開に依らない道具**。有限の箱の判定と、計算の証明書の組。
- **跡の異常を欠損とする単調性公式**。四次元でちょうど自明になる古典の単調性の、量子の版。
- **中心の無い群のための渦の自由エネルギーの代役**。境界の場への応答など。$G_2$ では渦の道具が使えない（26-12 §02）。

07

## この章が言っていないこと

- 帯を越える道を与えていません。どの発想も帯を越えていません。証明は在りません。
- (1) の倍化の回数と尺度の比は桁の目安で、定量の主張ではありません。閾は少なくとも $9 \times 10^5$ という下限から計算した値です。
- 「残る問いは格子間隔 1 の格子の理論の問いである」とは言いません（16-03 §05）。
- 混合作用の端点の話は格子間隔を止めた上の話で、連続の SU(2) の理論に質量ギャップが無い、という意味ではありません。
- 本書の SU(2) に固有の事実の数え上げ（§03）は、Lean の定理の一覧を読んだ範囲のもので、証明を U(1) へ移して確かめたものではありません。
- 「壊れた」は、その型の議論が通らないことで、目標そのものが偽だという意味ではありません。
- ここに書いた観察が新しいとは言いません。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| Lean 強い側の端：強結合の窓での無限体積の極限・質量ギャップ・面積則（20-06）。SU(2) に固有の事実：片方の捩れの真空、その固定群 $\pm 1$、二つの捩れの箱に作用 0 の配位が無いこと、$S_N > 0$、$S_N < 2N^2$（$N = 2, 3, 4$）（21-05・21-07） | 窓の外。有効な作用の類での同じ言明。横の大きさに一様な率 |

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 初 (1) の割り算（桁の目安として）。(3)：前の因子がちょうど $K^{k_0} = \xi^{\log_2 K}$ で、率 $\sigma_s/\xi^2$ は $K$ に依らず、一様には $\sum \ln K_i < \infty$ が要ること。(4) の一ループの倍化あたり 2.54。変分の向き。階層の一段 0.25 | (1) の定量の意味。(2) が成り立つこと。損失の和が有限な比べの存在 |
| 読 記録の減り方 $4^4 \to 8^4$：1.61・1.88・1.80。区画の最小作用 7.84・9.80。<br>典 表 2・表 3 の文献の行（26-12 の出典の表） | 小さい格子の値から大きい格子の結論 |
| 仮 芯の二分け、エントロピーの側の不足、表 1〜3 の分け方、§05・§06 | 帯を越える道 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 強い側の端の定理、SU(2) に固有の事実（§03） | Lean | 20-03・20-04・20-06・21-05・21-07 の宣言（`InfMain2.wilson_infvol_main2`・`AreaLaw.area_law_wilson`・`AreaLaw.area_law_infvol`・`ThetaLimit.flat_exists_10`・`TwistFlat.no_flat_twist11`・`TwistBlocks.stab_vacT`・`TwistBlocks.rigidT_all`・`VortexPos.SN_pos`・`VortexCert.SN_two_lt`・`TwistBlocks.thick_vortex_floor_two` ほか）。A-04 表 4g と 21-05・21-07・20-06 の頁で言明を確かめた |
| 公開された構成の閾の下限 | 初 | 16-03 §01（閾に課される条件の一つから。浮動小数の計算） |
| (1) の割り算 | 初 | 本書の検討の台本（浮動小数。この章のために走らせ直した） |
| 記録の $\Delta F$ の差、区画の最小作用 | 読 | 26-09 表 8・10、25-02 表 1 |
| U(1) の Wilson の作用の閉じ込めない相 | 典 | J. Fröhlich, T. Spencer, “Massless phases and symmetry restoration in abelian gauge theories and spin systems”, Commun. Math. Phys. 83 (1982) 411（前刷り IHES/P/81/40 の要旨と §1 で確かめた。主に Villain の近似で示し、全ての結果を Wilson の作用の模型へ延ばせると述べる。延長は別の論文の技法による） |
| ループ方程式と正値性による面の平均の評価 | 典 | V. Kazakov, Z. Zheng, arXiv:2203.11360（大きい $N$ の極限、$D = 2, 3, 4$。要旨で確かめた） |
| 有限の鎖の隙間の閾 | 典 | D. Gosset, E. Mozgunov, “Local gap threshold for frustration-free spin systems”, J. Math. Phys. 57 (2016) 091901, arXiv:1512.00088（要旨で確かめた。一次元と二次元の正方格子。先行の閾は Knabe による、と同所） |
| 混合作用の一次の線と端点、端点の位置の見直し、端点に近づくスカラーの質量（SU(3)） | 典 | G. Bhanot, M. Creutz, Phys. Rev. D 24 (1981) 3212。R. V. Gavai, Nucl. Phys. B 474 (1996) 446。U. M. Heller, Phys. Lett. B 362 (1995) 123（くわしくは 26-12 の出典） |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 表 1〜3 の文献の記述のうち確かめていないもの（$Z_2$ の弱結合の相のギャップ、二項正二十面体群の凍る $\beta$、繰り込まれた軌道の位置、SU(2) の端点のスカラーの質量、Stroock–Zegarlinski の型の同値） | — | 文献の記述（本書は未確認）。本文の主張の根拠にしていない |

**この章で使った語** — 移り変わりの帯・芯の二分け・紫外の延長・強結合への最後の区間の言明・損失のある鎖・前の因子・エネルギーの側の事実・エントロピーの側の不足・物理の大きさの箱の混合の言明・七つの試験の相手・値の水準の三分類・混合作用・一次の転移・臨界の端点・平坦な接続・凍った相・捩れた箱の連続極限の制御・ゲージ不変な観測量の法則の結合。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：17-01 物理はどう見ているか。帯の議論を試す相手の表は 26-12 に在ります（第 26 部を読んだあとに）。