第三巻　質量ギャップへ — 残る問いと本書の結果

第 17 部 物理の側から

Kiichi, Shiori and Rin · 2026-11-14 の版 · https://computoergosum.com/principia/yang-mills/

> この PDF は Web 版の各章をそのまま刷ったものです。動かせる図は刷った時点の姿で止まっています。章の間のリンクは Web 版へ飛びます。最新の内容は Web 版に在ります。

章		頁
17-01	物理はどう見ているか	2
17-02	閉じ込めの機構	14
17-03	弦の絵	26
17-04	大 N	38
17-05	ひも理論と余剰次元	49
17-06	余剰次元が見えなくなる仕組み	60
17-07	ゲージ場はどこから来るか	70
17-08	ホログラフィー	81
17-09	質量ギャップが幾何になる	92
17-10	四次元に戻す	104
17-11	超対称と Seiberg–Witten	116
17-12	等価原理に当たる一文	126
17-13	物理の掘り方が数学と離れる場所	137

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 17 部 物理の側から 漸近自由・次元転移・閉じ込め

物理はどう見ているか — 短い距離の自由・一つの尺度・閉じ込めの管、そして「理論は在る」という前提

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 物理が純ヤン–ミルズ理論に描く絵を、漸近自由・次元転移・閉じ込めの三つの部品に分けて式と数値で見ます。格子のグルーボールの質量の比が「尺度は一つ」とどう結びつくかを読みます。絵のすべてが「理論は在る」という前提に立つこと、閉じ込めと質量ギャップが数学では別の主張であることを確かめます。

前提となる章 — 4-07 次元転移と Λ（とその前の 4-06）。あると読みやすい：3-02（ゲージ場）・5-01（格子と β）・4-11（隙間の定義）。Wilson ループと格子の言葉は、要る分をその場で定義します。第三巻の中では、第 16 部（現在地と残る問い）の次に読みます。

先に言うこと — 物理の水準の絵の章です。「閉じ込め」「尺度は一つ」「グルーボールの質量」は、四次元の連続理論の定理ではありません（札 物理 ）。この本は質量ギャップも連続極限の構成も自分では示していません。連続極限の構成は、2026-11-10 に公開されたもの（Wightman の公理を満たす理論。質量ギャップは示していない）を第二巻で読みます。格子の数値は一次資料の値で、比と換算だけをこの端末で計算し直しました。

この章の順序

1. 物理の問いと数学の問い — 在るかより、どうなっているか
2. 短い距離：結合は弱くなる — β 関数の負号
3. 尺度が一つ生まれる：次元転移 — 質量はすべて Λ の定数倍
4. 長い距離：Wilson ループと面積則 — 閉じ込めの定義と、その線形の場合
5. 電束の管と Lüscher 項 — 管の絵と、長い距離の補正
6. ギャップの物理の顔：グルーボール — 格子の比 $m/\sqrt{\sigma}$
7. 寄り道：MeV という単位はどこから来るか — 単位を借りる
8. 「理論は在る」という前提 — 数値のどの段で入るか

9. 閉じ込めとギャップは別の主張 — 片方だけの例と格子での含意
10. 物理の道具と、それぞれの岸 — 第 17 部の地図
11. 寄り道：隙間はなぜ最小値を持つか — 挟み撃ちの絵 — 大きい側は反遮蔽、小さい側は不確定性

01

物理の問いと数学の問い

懸賞問題は「理論が存在するか、スペクトルに隙間があるか」を問います（0-03）。物理の問いは「いちばん軽い粒子の質量はいくらか」「クォークの対を引き離すと力はどう変わるか」です。理論はもう在ると置いて、中身を問います。

Jaffe と Witten は、QCD（クォークを含むヤン–ミルズ理論）が量子論の水準で持たねばならない性質を三つ挙げています 既知 。(1) 質量ギャップ：'every excitation of the vacuum has energy at least Δ'。核力が強いのに短い距離にしか届かない理由です。(2) クォークの閉じ込め：物理的な粒子状態は SU(3) の変換で不変で、単独のクォークは見えません。(3) カイラル対称性の破れ。

純ヤン–ミルズにはクォークがないので (3) は出てきません。(1) が懸賞問題の本体で、(2) は問題文の §5 で「自然な拡張」に分けられています。物理の絵は (1)(2) を一枚で説明しようとし、三つの部品でできています。短い距離で結合が弱まること（§02）、尺度が一つ生まれること（§03）、長い距離で電束が管に閉じ込められること（§04・§05）です。

02

短い距離：結合は弱くなる

繰り込みでは、結合 g は見る尺度 μ（エネルギー。距離ならおよそ $1/\mu$）で値が変わります（4-04）。変わり方を決める β 関数は、純 SU(N) の一ループの計算で次の形です 既知 。

$$\beta(g) = \mu \frac{dg}{d\mu} = -b_0\, g^3 + O(g^5), \qquad b_0 = \frac{11N}{48\pi^2} \tag{1}$$

負号のために、μ を上げる（短い距離を見る）と g が小さくなります。これが**漸近自由**です（4-06）。PDG の総説は $\alpha = g^2/4\pi$ で $\mu^2 d\alpha/d\mu^2 = -b_0'\alpha^2 - \cdots$、$b_0' = 11N/(12\pi)$ と書き（同じもの 計算 ）、'The minus sign in Eq. (9.3) is the origin of "asymptotic freedom"' と述べます。最初の項だけなら $d(1/g^2)/d\ln\mu = 2b_0$ で一定なので、

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g^2(\mu_0)} + 2b_0 \ln \frac{\mu}{\mu_0} \tag{2}$$

です。SU(3) で $g^2(\mu_0) = 1$ なら、$\mu = 10\mu_0$ で $g^2 = 0.757$、$10^6\mu_0$ でも 0.342 です 計算 。弱まり方は対数的です。問題文の言い方では 'at short distances the field displays quantum behavior very similar to its classical behavior'。ただし (1) は摂動論の計算です。連続理論が短い距離で本当にこう振る舞うことは、問題文が解に要求する性質の一つです。

03

尺度が一つ生まれる：次元転移

(2) を μ を下げる向きに読むと、$1/g^2$ はある尺度 Λ で 0 になります。

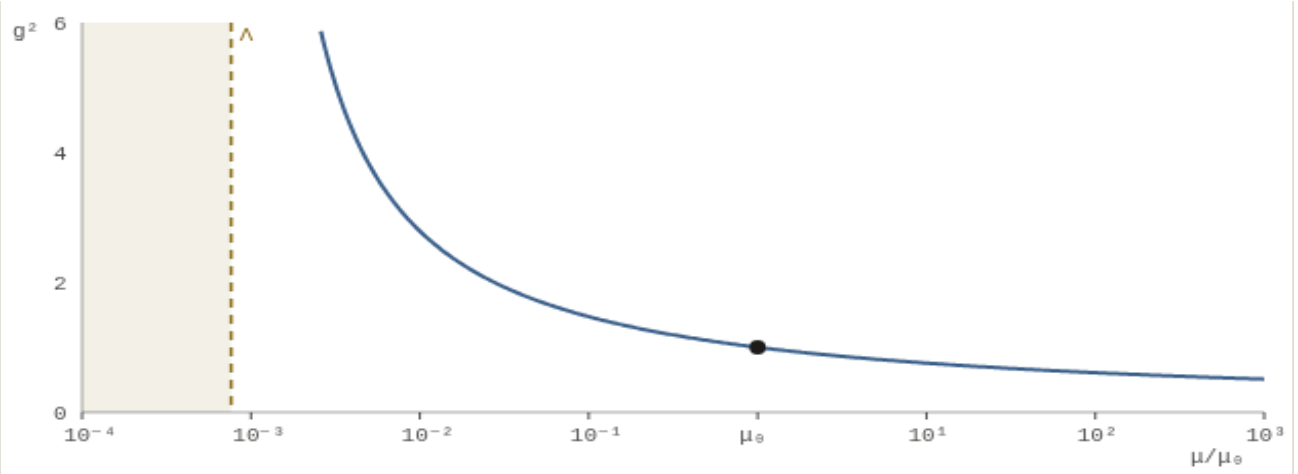
$$\Lambda = \mu \, \exp\!\Big(-\frac{1}{2b_0 \, g^2(\mu)} \Big) \tag{3}$$

(2) を代入すると $\ln(\mu/\mu_0)$ が打ち消し合い、Λ は μ に依りません（流れに沿った三点で、倍精度の丸めまで一致 計算 ）。古典の四次元ヤン–ミルズには質量の次元をもつ定数がありません（g は無次元、1-12）。それでも量子論では尺度 Λ が現れます。**次元転移**です（4-07）。PDG は Λ を 'a constant of integration, which corresponds to the scale where the perturbatively-defined coupling would diverge' と説明します。$\mu = \Lambda$ で壊れるのは一ループの式で、理論ではありません。物理はここから、次元をもつ量はすべて Λ の定数倍だと結論します 物理 。

$$m_{0^{++}} = c_1 \Lambda, \qquad \sqrt{\sigma} = c_2 \Lambda, \qquad \Delta = c_3 \Lambda \tag{4}$$

$m_{0^{++}}$ は最も軽いグルーボールの質量（§06）、σ は弦張力（§04）、c_i は N で決まる純数です。この「尺度は一つ」は、物理では次元解析として当然に見え、数学では証明されていません（本書の検討の記録の「拡散型緩和時間の仮定」。17-12・23-01）。また $\exp(-1/(2b_0 g^2))$ は $g = 0$ でテイラー係数がすべて 0 です。(4) を認めれば、Δ も摂動級数のどの次数にも現れません。問題文の 'the mass gap is not classically visible' と同じ向きの事情です（4-12）。

図1　つまみで基準の尺度 μ_0 での結合 $g^2(\mu_0)$ と N を変えると、走る結合 $g^2(\mu)$（実線）と、それが発散する尺度 Λ（破線）が動く。SU(3) で $g^2(\mu_0)$ を 0.5 から 1 に変えると、Λ/μ_0 は約 1300 倍（三桁）動く



SU(3)　g²(μ₀) = 1.00　→　Λ/μ₀ = 7.63×10⁻⁴　／　g² を 1% 増やすと Λ は 1.074 倍

表1　一ループの Λ/μ_0 と、g^2 を 1% 増やしたときの Λ の倍率

群	g²(μ₀)	Λ/μ₀	倍率
SU(2)	0.5	4.45×10⁻¹⁰	1.238
SU(2)	1.5	7.63×10⁻⁴	1.074
SU(3)	1.0	7.63×10⁻⁴	1.074
SU(3)	3.0	9.14×10⁻²	1.024

計算　この図の数値はこの端末で計算した。曲線はその場で式 (2)(3) から描き、表1 は同じ式を Python 3 で評価した（SU(3) の $g^2 = 0.5$ では $\Lambda/\mu_0 = 5.83 \times 10^{-7}$）。

結合が小さいほど Λ は指数的に小さく、変化に敏感です。SU(2) の $g^2 = 1.5$ と SU(3) の $g^2 = 1.0$ が同じ値なのは、一ループでは Ng^2（'t Hooft 結合、17-04）だけが効くからです。Λ の数値は g の定義の仕方で決まった倍率だけ変わりますが、(4) の形は保たれます。

04

長い距離：Wilson ループと面積則

クォークのない理論で力を測るには、動かない色の電荷の対を外から置きます（色の電荷はゲージ場の源になる荷です。3-02）。ユークリッド時空（4-02・符号が一つ違う）に幅 R・長さ T の長方形をとり、ゲージ場に沿って一周平行移動した行列（ホロノミー、1-07）のトレースを **Wilson ループ** $W_{R,T}$ と呼びます。長方形は「対を作り、時間 T 置いて消す」過程で、期待値はおよそ $e^{-V(R)T}$ で減るので、ポテンシャルを次で定めます（Wilson 1974。書き方は Chatterjee 2018 §4）既知 。

$$V(R) = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log \langle W_{R,T} \rangle \tag{5}$$

$R \to \infty$ で $V(R) \to \infty$ なら、対は決まった距離より先に離れられません。これが**閉じ込め**です（Chatterjee 2018 §4 の定義）。とくに $\langle W_{R,T} \rangle$ が面積 RT について $e^{-\sigma RT}$ で減る（**面積**

則）なら、$V(R) \approx \sigma R$ と線形に増えます。この線形の場合の係数 σ が**弦張力**です。四次元の非可換ヤン–ミルズで線形に増えることは 'it is believed that V(R) grows like a multiple of R' の水準です（同 §4）物理。

時空を点の網に置き換えた格子（5-01）では、結合の強さを**格子の逆結合** β で表します（標準的な Wilson 作用では $\beta = 2N/g^2$。大きい β が弱結合。§02 の β 関数とは別物）。β が小さい側（強結合）では面積則が証明されていますが、`U(1)` を含む全群で成り立つので、非可換の閉じ込めの証拠になりません。四次元の非可換群の弱結合側は 'remains elusive' です（Chatterjee 2018。5-02・5-06）既知。

05

電束の管と Lüscher 項

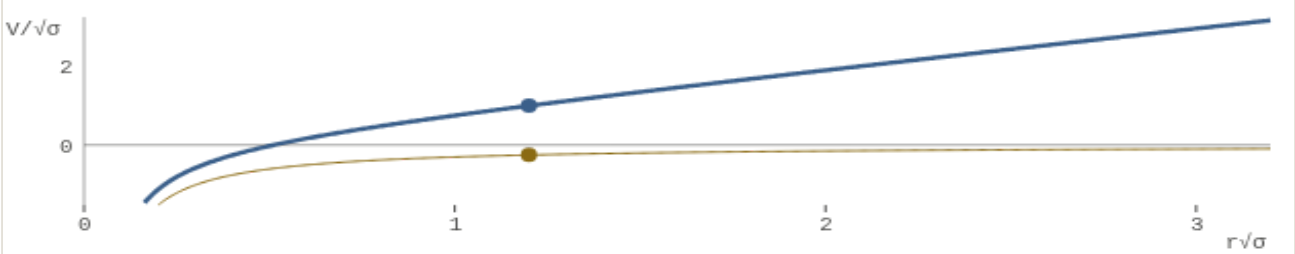
物理の絵は**電束の管**です。電磁気の力線は広がり、離してもエネルギーは一定値に近づきます（$V \sim -c/R$）。閉じ込めでは力線が太さの決まった管に絞られ、エネルギーは長さに比例します。比喩で言えば、伸ばしても張力が変わらないひもです。正確には、管は理論から導かれた事実ではなく格子の数値と合う絵で、管の揺らぎの有効理論（17-03）は管の存在を出発点に置き、長い距離の補正を次のように与えます 物理。

$$V(r) = \sigma r + c_0 - \frac{\pi}{12\, r} + \cdots \tag{6}$$

$-\pi/(12r)$ は Lüscher 項で、係数は理論の詳細に依らないとされます（d 次元で $-\pi(d-2)/24$）。c_0 は普遍でない定数です。格子の長さの基準 r_0（$F = dV/dr$ について $r_0^2 F(r_0) = 1.65$、Sommer 1994）に (6) を入れると $r_0\sqrt{\sigma} = \sqrt{1.65 - \pi/12} = 1.178$ で、格子の連続値 $1.160(6)$（Athenodorou–Teper 2020）との差は 1.6% です 計算。r_0 は管がまだ短い距離なので、これは式 (6) をその距離まで延ばした目安です。大筋は合いますが、差は格子の誤差の約 3 倍あり、細部までは合いません。

図2　つまみで電荷の距離 r を変えると、上の力線と下のエネルギー V(r) の点が動く。ボタンで「電磁気（広がる）」と「閉じ込め（管）」を切り替える





r√σ = 1.20（約 0.49 fm） 閉じ込め：V/√σ = 0.98　電磁気の見本：−0.25

r√σ	r（fm）	閉じ込め V/√σ	電磁気の見本 V/√σ
0.3	0.12	−0.57	−1.00
0.51	0.21	0.00	−0.59
3.0	1.22	2.91	−0.10

計算 この図の数値はこの端末で計算した。閉じ込めは (6) の $\sigma r - \pi/(12r)$（c_0 を除く）、電磁気は見本 $-0.3/r$、fm は $\sqrt{\sigma} = 485$ MeV（§07）で換算。0.51 は二つの項が釣り合う $\sqrt{\pi/12}$。

クォークを含む QCD では、長い管が切れる兆候が格子で報告されています（SESAM 2005）物理。純ヤン–ミルズには、途中で対を作って管を切るクォークがありません。

06

ギャップの物理の顔：グルーボール

純ヤン–ミルズの粒子は、グルーオンだけでできた色のない束縛状態**グルーボール**と考えられます。状態は J^{PC}（スピン・パリティ・荷電共役）で分類します。0^{++} はスピン 0 で、空間反転（パリティ）でも、粒子と反粒子の入れ替え（荷電共役）でも符号を変えない状態です。最も軽い 0^{++} の質量を、物理ではしばしば「質量ギャップ」と呼びます物理。Chatterjee 2018 は相関長（2-08）を 'the reciprocal of the mass of the lightest glueball' と説明し、存在は 'has not yet been experimentally verified' と書きます。

問題文の隙間はハミルトニアンのスペクトルの隙間として定義され（その上限を問題文は 'the mass' と呼びます）、粒子の存在を前提にしていません。最低の励起が孤立した一粒子状態であれば、隙間は最も軽いグルーボールの質量に一致します（4-11）。孤立した一粒子状態が在ることの証明は、問題文では「自然な拡張」の側に数えられています。

格子の計算は、時空を格子間隔 a（格子点の間の距離）の網で置き換えて行い、次元のない比 $m/\sqrt{\sigma}$ を出します。

表2　グルーボールの質量（連続極限）と、この端末で計算した比

J^{PC}	SU(2) m/√σ	SU(3) m/√σ	SU(∞) m/√σ	$m/m_{0^{++}}$：SU(2)・SU(3)・SU(∞)
0^{++}	3.781(23)	3.405(21)	3.072(14)	1・1・1

J^{PC}	SU(2) m/√σ	SU(3) m/√σ	SU(∞) m/√σ	$m/m_{0^{++}}$：SU(2)・SU(3)・SU(∞)
2^{++}	5.349(20)	4.894(22)	4.582(14)	1.415(10)・1.437(11)・1.492(8)
0^{-+}	6.017(61)	5.276(45)	4.711(25)	1.591(19)・1.549(16)・1.534(11)
0^{++*}	6.126(38)	5.855(41)	–	1.620(14)・1.720(16)・–

計算 比の誤差は独立とみなした素朴な伝播で、相関を無視した目安。SU(∞) は 1/N² で外挿した値。格子では回転の対称性が立方体の回転に減り、スピン 2 は二組（E・T_2）に分かれて測られる。SU(∞) の 2^{++} は E の値（T_2 では 4.578(11)。5-08）。0^{++*} は励起状態。

どの N でも 0^{++} が最も軽く、比は N でゆっくりしか変わりません（17-04）。一方、SU(3) の $m_{0^{++}}/\sqrt{\sigma}$ は 3.347(68)（Meyer 2005）、3.405(21)（Athenodorou–Teper 2020）、3.607(87)（Lucini–Teper 2001）と、表示の誤差より広く散っています。σ は閉じた管の質量から揺らぎの補正を引いて求めます。Lucini–Teper の式 (4) は $am_l = a^2\sigma L - \pi/(3L)$ で、m_l は周期的な箱を一周して閉じた電束の管の質量、L は箱の一辺を格子の点の数で数えたものです。著者は 'in using eqn(4) we are assuming that we have linear confinement' と断っています。連続極限は $m(a)/\sqrt{\sigma(a)} = m(0)/\sqrt{\sigma(0)} + c\,a^2\sigma$ を仮定した外挿です（5-08）。

07

寄り道：MeV という単位はどこから来るか

飛ばしてよい節です。

「最も軽いグルーボールは約 1.7 GeV」と言うとき、MeV はどこから来るのでしょう。純ヤン–ミルズには尺度が Λ 一つしかなく、単位は外から借ります。Athenodorou–Teper 2020 は、純ヤン–ミルズの $r_0\sqrt{\sigma} = 1.160(6)$ と、クォークを含む格子 QCD の $r_0 = 0.472(5)$ fm から $\sqrt{\sigma} = 485(6)$ MeV とし、0^{++} を 1653(26) MeV とします。この端末の再計算では $\sqrt{\sigma} = 484.96 \pm 5.7$ MeV、$0^{++} = 3.405 \times 485 = 1651 \pm 22$ MeV です 計算 。論文の表 18 の誤差は統計のみと断ってあり、こちらの ±22 は $\sqrt{\sigma}$ の誤差を含めた目安で、意味が違います。著者たちは 'Strictly speaking this is of course not possible: the pure gauge theory and QCD ... are two different theories' と添えています。純ヤン–ミルズの中で意味をもつのは 3.405 という比のほうです。

08

「理論は在る」という前提

ここまでの部品と数値は、四次元の純ヤン–ミルズ理論が確かに一つ存在する、という前提に立っています。格子の計算で前提が入る段を並べます。

段	していること	前提
有限の格子	有限次元の積分をモンテカルロ法で評価（5-07）	ない（定義の確かな確率測度）
σ の取り出し	管の揺らぎの補正を差し引く	線形の閉じ込めと揺らぎの普遍性
無限体積	一辺が $3/\sqrt{\sigma}$ 以上の箱だけを使う（Lucini–Teper）	そこから先で値が変わらないこと
連続極限	$c a^2 \sigma$ の形で $a \to 0$ に外挿	極限が在って一意で、近づき方がこの形

物理にとってこの前提は自然で、問題文も実験と計算機が 'have given strong encouragement' と書きます。しかし同じ段落は 'there does not exist a convincing, whether or not mathematically complete, theoretical computation demonstrating any of the three properties in QCD' と続け、数学の側は 'nor even a precise definition' の段階です 既知 。

比喩で言えば、物理は在ると確信している土地の詳しい地図を描き、数学はその土地が在ることを示すよう求められています。正確には、任意のコンパクト単純群について、非自明な量子ヤン–ミルズ理論を $\mathbb{R}^4$ 上に作り（公理は Wightman あるいは Osterwalder–Schrader と少なくとも同じ強さのもの。4-09・4-10）、$\Delta > 0$ を示すことです。よく取られる道は、ユークリッドの確率測度を正則化つきで作って極限をとる道です。部分列が収束するだけの弱い存在は、極限の性質を別に示さない限り認めない、と問題文の脚注にあります。物理の数値は、どれほど精密でも「存在を仮定したうえでの予言」です（5-09・7-10）。

2026-11-10 に公開された構成は、Wilson の格子ゲージ理論の極限として Wightman の公理を満たす理論が作れることを、Lean で証明されている、と委員会が評価しました（第二巻、6-01）。ただし無限体積の極限は部分列で、その一意性と質量ギャップは示されていません（6-04）。上の表の「連続極限」の行の前提（極限が在って一意）は、今も全部は満たされていません。

09

閉じ込めとギャップは別の主張

物理の絵では σ と m は同じ Λ の二つの顔で（式 (4)）、閉じ込めとギャップは一緒に語られます。数学では別々の主張です。

片方だけが成り立つ例があります。有限群の格子ゲージ理論では弱結合で相関の指数減衰が証明され、閉じ込めないことは 'believed' の水準です（5-10）。三次元の compact `U(1)` ではすべての結合で面積則が証明され、連続極限は自由なスカラー場になります（Göpfert–Mack 1982 の要旨）。逆向きには、格子の上の任意の境界条件での指数減衰から、群の中心に非自明に作用する表現の Wilson ループに面積則が出ます（Chatterjee 2021）既知 。表と正確な言明は 17-02 §02（この本の正本）にあります。

この逆向きの含意は「ギャップ ⇒ 閉じ込め」に近い形ですが、仮定は格子の上の強い形の減衰です。問題文の意味のギャップ（連続・無限体積の $\Delta > 0$）から閉じ込めを導く定理はありません。物理が主に見る変数（管と σ）と問題文の標的（Δ）は少しずれています。

10

物理の道具と、それぞれの岸

物理の道具には、それぞれ計算が制御できる「岸」があります。正確には、岸とはある極限（$g \to 0$、格子の $\beta \to 0$、$N \to \infty$ など）の近くで、計算の誤差が制御できる領域のことです。第 17 部の残りの章は表の行を掘ります。

道具	計算が効く岸	水準	章
摂動論	$g \to 0$。ギャップは映らない（(4) を認めれば）	既知	4-03〜4-07
強結合展開	格子の逆結合 β が小さい（強結合）。U(1) を含む全群で面積則	既知	5-02
格子の数値	有限の a・箱と、その外挿	物理	5-08
閉じ込めの機構・弦	ゲージを固定した変数／長い管（閉じ込めを仮定）	物理	17-02・17-03
大 N・ホログラフィー	$N \to \infty$（ホログラフィーは $g^2N \to \infty$ も）	物理	17-04・17-08〜17-10
超対称	物質場を伴う超対称な理論	物理	17-11

問題文の理論——任意のコンパクト単純群・有限の N・物質なし・連続の $\mathbb{R}^4$——は、どの岸にもありません。物理の絵は、岸と岸のあいだを「一つの理論がつないでいる」という前提（§08）で埋めています。その前提が数学から離れる場所は 17-13・16-05 にまとめます。

11

寄り道：隙間はなぜ最小値を持つか — 挟み撃ちの絵

飛ばしてよい節です。この章の三つの部品（§02 漸近自由・§03 次元転移・§04 閉じ込め）を、「なぜいちばん軽い励起がゼロでない重さを持つのか」という一つの問いに向けて組み直します。物理 絵であって証明ではありません。どの段も四次元の連続の理論では定理になっていません（27-02）。

一文で。場が自分の電荷で自分を縛るせいで、長い波になれず、短い塊にしかなれない。最小値は、励起の大きさが両側から挟まれる場所に出ます。

大きい側が塞がる。質量ゼロの自由場（光）に隙間が無いのは、波長をいくら長くしても波が作れ、そのエネルギー $E = |p|$ がゼロへ向かうからです。長い波には、場が長い距離にわたって向きを揃えてい

ることが要ります。ヤン–ミルズでは媒介する場そのものが色電荷を持つので、真空の揺らぎは場を遮蔽せず反遮蔽し、距離が伸びるほど結合が強くなります（§02、4-06）。結合が一の程度になる距離 $1/\Lambda$ を超えると、場は向きを保てず、ばらばらになります。だから波長が $1/\Lambda$ より長い波は状態として残れません。色の電束は広がれず、閉じた管に束ねられます（§05）。

小さい側も塞がる。$1/\Lambda$ より小さい領域では結合は弱く、場はほとんど自由ですが、大きさ R に局在した励起は不確定性関係で $\hbar c/R$ 程度より下のエネルギーを持てません（2-05、16-08 §09）。$R < 1/\Lambda$ なら $E > \Lambda$ です。

挟み撃ち。大きくなれない理由は反遮蔽、小さくなれない理由は不確定性で、いちばん軽い励起は大きさ $1/\Lambda$ 程度の閉じた電束の輪になります。その重さが Λ の程度で、これが隙間です（§06 のグルーボール）。起源を一語で言えば自己相互作用、最小値の理由を一語で言えば挟み撃ちです。

U(1) との違い。光子は電荷を持たないので真空は遮蔽しかせず、長い距離で結合は弱いままです。電束は広がり、長い波が許され、隙間はゼロです（5-06）。非可換性が効く場所は「場が自分に効くか」の一点で、一ループの $11/3 = -1/3 + 4$ がその顔です（26-03）。

格子の強結合の言葉で。Hamiltonian 格子（Kogut–Susskind）では、ハミルトニアンは電場の項 $\frac{g^2}{2}\sum E^2$ と磁場の項 $\frac{1}{g^2}\sum(1 - \operatorname{tr} U_{\square})$ の和で、結合が強いと電場の項が勝ちます。電束は一本のリンクに乗り、リンク一本ごとに g^2 の程度の費用がかかります。ゲージ不変な最小の励起は一枚の面を回る電束の輪で、その費用は有限の正の数です。これが強結合の隙間で、格子間隔を固定した強結合では定理です（5-02、5-04）。漸近自由が言うのは「距離 $1/\Lambda$ では有効結合が強い」ことなので、この絵がそのまま長い距離の絵になります。残る問いは、格子間隔をゼロにしてもこの絵が崩れないことで、それが台帳の紫外の制御の行（存在としては公開された構成が示し、本書の道の形は開いている）と、繰り込みの比較の行です（27-02、A-08）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 一ループの b_0、解 (2)、その中で Λ が μ に依らないこと（摂動論の計算として）。問題文の隙間の定義と、孤立した一粒子状態があれば隙間がその質量に一致すること。物理 尺度は一つ、面積則と管、Lüscher 項、表2 の値。	どれも四次元の連続理論の定理ではない（2026-11-10 に公開された構成は理論の存在を与えるが、閉じ込めと質量ギャップは示していない。6-04）。表2 は極限の存在を前提にした外挿で、σ は管の補正を通っている。
既知 強結合の面積則（全群）、有限群の弱結合での相関の減衰、中心対称性と閉じ込めの格子での含意、三次元 U(1) の全結合での面積則。	四次元の非可換群の弱結合側の面積則。問題文の意味のギャップから閉じ込めを導くこと。有限群が閉じ込めないこと（Chatterjee 2021 が 'believed' と書く水準）。
計算 表1・表2 の比、図1・2、$r_0\sqrt{\sigma}$ の見積もり 1.178、MeV の再計算。	一次資料の値の比・換算と一ループの式の評価で、測定ではない。比の誤差は相関を無視した目安。1.178 は長い距離の式を短い距離へ延ばした目安。

言えている	言えていない
物理 §11 の挟み撃ちの絵（大きい側は反遮蔽、小さい側は不確定性、最小は $1/\Lambda$ の輪）。強結合の格子では一枚の面の輪の費用が正であること。	絵のどの段も四次元の連続では定理でない。反遮蔽が長い波を消すこと、輪が最小の励起であること、格子間隔をゼロにしても絵が保たれること。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
三つの性質、短距離の要求、隙間の定義と 'the mass'、問題の要求（群・非自明・$\mathbb{R}^4$・公理）、拡張問題の区分、本文の引用、弱い存在を除く脚注	既知	A. Jaffe, E. Witten, "Quantum Yang–Mills Theory"（Clay Mathematics Institute の問題文）§1・§2・§4・§5・§6.6・脚注 2。本文を確認。
α の走り方、b_0'、負号、Λ の説明	既知	J. Huston, K. Rabbertz, G. Zanderighi, "Quantum Chromodynamics", Particle Data Group, Phys. Rev. D 110 (2024) 030001, §9.1.1。本文を確認。
漸近自由の原論文	既知	D. J. Gross, F. Wilczek, PRL 30 (1973) 1343。H. D. Politzer, PRL 30 (1973) 1346。書誌のみ（問題文の文献表）。
式 (5)、閉じ込めの定義、面積則・強結合・相関長・グルーボールについての記述と引用	既知	S. Chatterjee, "Yang–Mills for probabilists", arXiv:1803.01950 §4・§5。本文を確認。K. G. Wilson, PRD 10 (1974) 2445 は書誌のみ。Osterwalder–Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440 と Göpfert–Mack, CMP 82 (1982) 545 は要旨（INSPIRE。前者は強結合の無限体積の極限と Wilson の閉じ込めの評価、後者は Villain 作用と連続極限の記述。本文は未読。Göpfert–Mack の年は Crossref の発行年で、INSPIRE は 1981）。
中心と中心対称性の定義、中心対称性と閉じ込め、有限群の 'believed'	既知	S. Chatterjee, CMP (2021), arXiv:2006.16229。定義 2.1・定理 2.2・2.4 と 'believed' の引用は本文で確認。
有限群の弱結合での相関の減衰（四次元）	既知	A. Adhikari, S. Cao, arXiv:2202.10375, Ann. Probab. 53 (2025) 140–174（書誌は検索による）。要旨と本文の冒頭（四次元に限ること）を確認。
表2、$r_0\sqrt{\sigma}$、r_0、485(6) MeV、1653(26) MeV と誤差の断り、換算の断り	物理	A. Athenodorou, M. Teper, JHEP 11 (2020) 172, arXiv:2007.06422／JHEP 12 (2021) 082, arXiv:2106.00364。数値と引用は本文（表 17・18・23・31・34、式 (8)(9)）で確認。
3.607(87)、σ の取り出し（式 (4)）と外挿の形、Wilson ループの係数 π/12	物理	B. Lucini, M. Teper, JHEP 0106 (2001) 050, hep-lat/0103027 表 5・§4。本文を確認。
Lüscher 項、r_0 の定義、3.347(68)	物理	M. Lüscher, NPB 180 (1981) 317、R. Sommer, NPB 411 (1994) 839、H. B. Meyer, hep-lat/0508002 は書誌のみ（Meyer の値は Gürsoy–Kiritsis–Nitti, arXiv:0707.1349 の表を経由）。
QCD での管の切断の兆候	物理	G. S. Bali ほか（SESAM）, PRD 71 (2005) 114513, hep-lat/0505012。要旨を確認。

もの	種別	出典・道具
表1・図1、表2 の比、$r_0\sqrt{\sigma}$ の見積もり、図2 の表、MeV の再計算	計算	この端末の Python 3（標準ライブラリ・倍精度）。誤差は独立とみなした伝播。$\hbar c = 197.3269804$ MeV·fm。
§11 の絵（挟み撃ち）	物理	この本の書き手の一人（栞）が 2026-10-29 の問答で言葉にしたもの。部品の一次資料は Gross–Wilczek・Politzer（1973、上の行）、J. Kogut, L. Susskind, PRD 11 (1975) 395（Hamiltonian 格子と強結合の電束。書誌のみ）、K. G. Wilson, PRD 10 (1974) 2445。

次に読む章：17-02 閉じ込めの機構 ― §05 の管がなぜできるのかについての物理の説明（双対超伝導・単極子・中心渦・Gribov–Zwanziger）へ。

閉じ込めの機構 — 四つの絵を、何を主役に選び、どこで数学から切れるかで読む

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 閉じ込めの四つの絵（双対超伝導・アーベル射影・中心渦・Gribov–Zwanziger）の主役と支え、数学の言明として切れる場所。閉じ込めとギャップが別の文であること。

前提となる章 — 17-01。ほかに 5-02（Wilson ループ）、4-08（Gribov のコピー）、1-04（群の中心）。

先に言うこと — 四つの絵はどれも物理の描像で、四次元の非可換理論で閉じ込めを導いた定理はありません。この章は閉じ込めもギャップも示しません。図 2 の模型は玩具です。

この章の順序

1. 何を説明したいのか — 面積則
2. 閉じ込めとギャップは別の文 — 面積則と指数減衰、条件つきの含意
3. 双対超伝導 — 磁束の管を裏返す（図 1）
4. アーベル射影と単極子 — 対角化の特異点／寄り道：Elitzur の定理
5. 中心渦 — 中心元を掛ける膜
6. 渦の気体の模型 — 面積則と周長則（図 2）
7. Gribov の領域と地平 — ゲージを固定した側から
8. 伝播関数と正値性 — 粒子なら負にならない相関（図 3）
9. 四つの絵を並べる — 主役・支え・欠けているもの

01

何を説明したいのか

「閉じ込め」は、クォークを単独で取り出せないという観測から来た言葉です。純ヤン–ミルズ理論にはクォークが無いので、無限に重い試験電荷を二つ置き、引き離すエネルギーを問います（17-01）。格子では、閉じた道 C に沿ってリンク変数を掛けた行列の跡の期待値が Wilson ループで（5-01）、$R \times T$ の長方形では $W \approx e^{-V(R)T}$、$V(R)$ が電荷対のエネルギーです。

$$W(C) = \left\langle \frac{1}{N} \operatorname{tr} \prod_{\ell \in C} U_\ell \right\rangle, \qquad V(R) = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln W(R,T) \tag{1}$$

大きいループの減り方は二通りです。

$$W(R,T) \approx e^{-\sigma R T} \ \text{(面積則)}, \qquad W(R,T) \approx e^{-c\,(2R+2T)} \ \text{(周長則)} \tag{2}$$

面積則なら $V(R) \approx \sigma R$ で、エネルギーが距離に比例して増えます。σ が**弦張力**です。周長則なら V は有界です。例：$\sigma = c = 0.05$、$R = T = 10$ で $-\ln W$ は 5 と 2、辺を 20 にすると 20 と 4 です。見分けには Creutz 比を使い、純粋な面積則で σ、周長則で 0 になります既知 。

$$\chi(R) = -\ln \frac{W(R,R)\,W(R-1,R-1)}{W(R,R-1)\,W(R-1,R)} \tag{3}$$

「機構」を問うとは、面積則を**真空の中の何が**生むかを問うことです。小さい β（格子の逆結合。$SU(N)$ では $\beta = 2N/g^2$、小さいほど強結合）の面積則は定理ですが（5-02）、`U(1)` を含む全ての群で成り立つので非可換の説明になりません既知 。問いは連続極限へ向かう大きい β の側に残ります。

02

閉じ込めとギャップは別の文

質量ギャップは相関の指数的な減衰（4-11）、閉じ込めは面積則で、論理としては別の主張です。Clay の問題文が要求するのは $\Delta > 0$ で、閉じ込めは「自然な拡張」に分けられています既知 。

表 1　閉じ込め（面積則）とギャップ（指数減衰）の有無と水準

模型	面積則	指数減衰	水準
任意の群・小さい β	あり	あり	定理（5-02）
4 次元 `U(1)`・大きい β	なし	なし（光子）	定理（5-06）

模型	面積則	指数減衰	水準
有限群・大きい β	ないと信じられている	あり（弱い意味）	減衰は定理（5-10）
3 次元コンパクト `U(1)`	あり	物理では光子が質量を得る	面積則は定理（§03）
4 次元 `SU(N)`・連続極限	期待	期待	未証明

格子には一方向の含意があります。Chatterjee（2021）は次を示しました既知。Wilson ループを作る表現が群の中心（§05）に非自明に作用し（`SU(N)` の基本表現はそうです）、中心対称性が破れない（有限の厚みの板状の領域で、どの境界条件をとっても測度が中心の変換で不変であること。同論文の定義 2.1）なら、無限体積の格子 $\mathbb{Z}^d$ 上のどの測度でも、$R \to \infty$ で $V(R) \to \infty$ となるある関数 V について次が成り立ちます。

$$|\langle W(R \times T) \rangle| \le e^{-V(R)\,T} \tag{4}$$

これは V が非有界という意味で、$\sigma > 0$ ではありません。任意の境界条件での指数減衰という強い形のギャップを仮定すると面積則まで出ます（一様な減衰から面積則への定理。同論文の定理 2.4）。有限群で示された減衰は、特定の境界条件での二点相関の減衰で、この定理が仮定する「任意の境界条件での減衰」より弱いものです。このため表 1 の有限群の行と矛盾しません（同論文 §2.4）。Clay の意味のギャップから閉じ込めを導く定理はありません。

03

双対超伝導：磁束の管を裏返す

超伝導体は磁場を押し出し（Meissner 効果）、表面から入った磁場は侵入長 λ_L で減ります。無理に通すと細い管（Abrikosov の渦）に束ねられ、一本の磁束は $h/2e$ の整数倍です既知。

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mathbf{B}/\lambda_L^2, \qquad B(x) = B_0\, e^{-x/\lambda_L} \tag{5}$$

密度 $B^2/2$、断面積 S、磁束 $\Phi = BS$ の管は長さあたり $E/\ell = \Phi^2/(2S)$ を持ちます。真空では S を広げて 0 に近づけられますが、超伝導体では広げる損があり、E/ℓ は正の定数に留まります。単極子の対を埋めればエネルギーは距離に比例するはずです（模式的な見積もり）。

磁荷の流れ j^m を加えた Maxwell 方程式は、電と磁の入れ替えで対称です（$\tilde F$ は双対。ここだけ実時間の記法です）既知。

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = j^e_\nu, \quad \partial^\mu \tilde F_{\mu\nu} = j^m_\nu; \qquad \mathbf{E} \to \mathbf{B},\ \mathbf{B} \to -\mathbf{E},\ j^e \to j^m,\ j^m \to -j^e \tag{6}$$

真空が**色磁気単極子の凝縮**なら、押し出されるのは色電場で、色電束が管になり、クォークが閉じ込められる。これが双対超伝導の絵で、't Hooft（1975 年の講演）と Mandelstam（1976）が独立に提案したとされます物理。Nambu（1974）がその先駆とされます。正確に

は、単極子は作用に現れる場ではなく、ゲージを選んだときにだけ定義される対象で（§04）、「凝縮」を測度の言明として書く方法はまだありません。

図 1　左：真空では力線が広がる。右：単極子が凝縮した真空では電束が管になる（模式図）。



Di Giacomo ほか（2000、`SU(2)`）は単極子凝縮の秩序変数を格子で測り、「閉じ込めは双対超伝導体への転移として現れる」と報告しました物理。文脈は有限温度の脱閉じ込め転移で、機構が示されたわけではありません。「凝縮 ⇒ 面積則 ⇒ ギャップ」はどちらの段も四次元の非可換では未証明です。

可換な模型で機構が計算できる例

三次元のコンパクト `U(1)` では単極子がインスタントンとして働き、Polyakov（1977）が半古典で面積則を出し、Göpfert–Mack が（Villain 作用の格子で）全結合で $\sigma > 0$ を証明しました既知。ただし同じ仕事の要旨は、連続極限が自由スカラー場で物理の単位の弦張力が ∞ に行くとも述べます（本文は未読）。この機構からは「質量と弦張力は一つの尺度で決まる」（17-12）が出てきません。四次元では、$\mathcal{N}=2$ 超対称な理論を質量項で $\mathcal{N}=1$ に破った場合に、Seiberg–Witten（1994）が単極子の凝縮による閉じ込めを記述しました（17-11）物理。

04

アーベル射影と単極子

't Hooft（1981）は、作用に無い単極子を**ゲージの選び方の特異点**として見つけました。$X \mapsto gXg^{-1}$ と変わる量 $X(x)$（たとえば F_{12}）を選び、各点で対角にします。

$$g(x)\,X(x)\,g(x)^{-1} = \operatorname{diag}\big(\varepsilon_1(x),\dots,\varepsilon_N(x)\big) \tag{7}$$

ε_i は固有値です。残る対称性は $U(1)^{N-1}$ で、対角のグルーオンが「光子」です。固有値が重なる点では対角化が決まらず、そこが単極子です物理。例：`SU(2)` で $X = \sum_a X^a \sigma^a/2$ なら固有値は $\pm|X|/2$、重なるのは $X=0$ で、実の条件 3 本です。三次元では点、四次元では線（世界線）になります（一般の N も同じ、1-01 の寄り道）。零点の近くで $X \approx x$ なら $X/|X|$ は零点を囲む球面を一回覆い、その回数が磁荷です既知。

格子では最大アーベルゲージ（MAG、Kronfeld ほか 1987）でリンクを対角に近づけます。

$$R[U] = \sum_{x,\mu} \mathrm{tr}\left[\, U_\mu(x)\, \sigma^3\, U_\mu(x)^\dagger\, \sigma^3 \,\right] \;\to\; \text{最大} \tag{8}$$

大域的な最大を確実に見つける方法は知られておらず、実際には局所的な最大（Gribov のコピー）を使います。射影したリンクの弦張力が元の大部分を占めること（アーベル優勢）を Suzuki–Yotsuyanagi（1990）が報告し、Greensite の総説（2003）は `SU(2)` で $(92 \pm 4)\%$（Bali ほか 1996）を引きつつ「アーベル優勢はまだ単極子による閉じ込めの証明ではない」と書きます物理。

寄り道：Elitzur の定理

飛ばしてよい小節です。

リンク U_ℓ の始点だけでゲージ変換 g をすると $U_\ell \to g U_\ell$ です（その点に触れる他のリンクも変わりますが、作用と測度は不変です）。よって $\langle U_\ell \rangle = g \langle U_\ell \rangle$ が全ての g で成り立ち、Haar 測度（5-01）で平均すると

$$\langle U_\ell \rangle = \Big(\int_{SU(N)} g \, dg \Big) \langle U_\ell \rangle = 0 \tag{9}$$

です。Elitzur（1975）の定理は、無限体積でもゲージ不変でない局所量の期待値は 0 のままだと述べます既知。大域的な対称性（2-09）と違い、一点のゲージ変換には障壁がないからです。ゲージを固定して定義した単極子は、ゲージ固定の手続きを込めれば配位の関数にはなります。ただ、最大が一意でない（Gribov のコピー）ので関数として一つに定まらず、局所量でもありません。

05

中心渦：ループに中心元を掛ける膜

`SU(N)` の**中心**は全ての元と可換な $Z_N = \{ e^{2\pi i k/N} I \}$ です。中心元 z は表現ごとに z^k として働き、この $k \pmod N$ が **N-ality** です。基本表現は 1、随伴表現は 0 です既知。

出発点は、大きいループの弦張力が N-ality だけで決まり、随伴（グルーオン自身に遮蔽される）では 0 になる、という格子の観測です（Greensite の総説 §4.3）物理。中心渦は三次元で線、四次元で面で、絡んだループに中心元を一つ掛けます（`SU(2)` なら -1）。随伴のループは渦に気づきません。正確には、格子の上の最も細い渦は、ある領域を貫くリンクにまとめて中心元を掛けた配位で、変わるのは領域の縁に当たるプラケットだけです（内部では中心元が打ち消し合う）。この縁が渦で、縁と絡むループだけに中心元が掛かります。平面を面積

$\Sigma_{\min}$ の正方形に区切り、各正方形のループが拾う $Z(C_i)$ がほぼ独立なら、大きいループは積に分かれて面積則になります（同じ総説の式 (94)–(96)）。

$$\langle W_k(C)\rangle \approx e^{-\sigma(k)\,\Sigma}, \qquad \sigma(k) = -\ln\langle Z(C_i)^k\rangle / \Sigma_{\min} \tag{10}$$

閉じ込めは、渦の面が体積を貫いて広がる（パーコレートする）かどうかの問題になります。数値では、Del Debbio–Faber–Greensite–Olejník（1997）が射影した渦が弦張力の大部分を運ぶこと（中心優勢）を、de Forcrand–D'Elia（1999）が渦を取り除くと閉じ込めが失われることを報告しました物理。定理では、Tomboulis–Yaffe（1985、`SU(2)`）が Wilson ループを渦の自由エネルギーの関数で上から押さえました既知。渦の自由エネルギーは、一方向の境界条件に中心元のねじれを入れた分配関数 $\mathcal{Z}_{\mathrm{tw}}$ と、入れない分配関数 $\mathcal{Z}$ の比の $-\ln$、つまり $F_v = -\ln(\mathcal{Z}_{\mathrm{tw}}/\mathcal{Z})$ で、ゲージ不変です。同じ系統のゲージ不変な量に 't Hooft ループ（ループに沿って中心の渦を差し込む演算子）があります。式 (4) も中心対称性から Wilson ループを押さえる定理です。Tomboulis（2007）は `SU(2)` について全結合での証明を主張し、Ito–Seiler が論証の欠けを指摘しています。

射影で定義する渦はゲージに依存します。条件つきの定理の仮定は、四次元の弱結合で渦が凝縮すること（ゲージ不変には渦の自由エネルギーの減衰）の一点に集まり、これは証明されていません。

本書での使い方は 26-08 §03（渦の容器の平均と Migdal–Kadanoff の補間が、文献の中でどこで止まったか）。

06

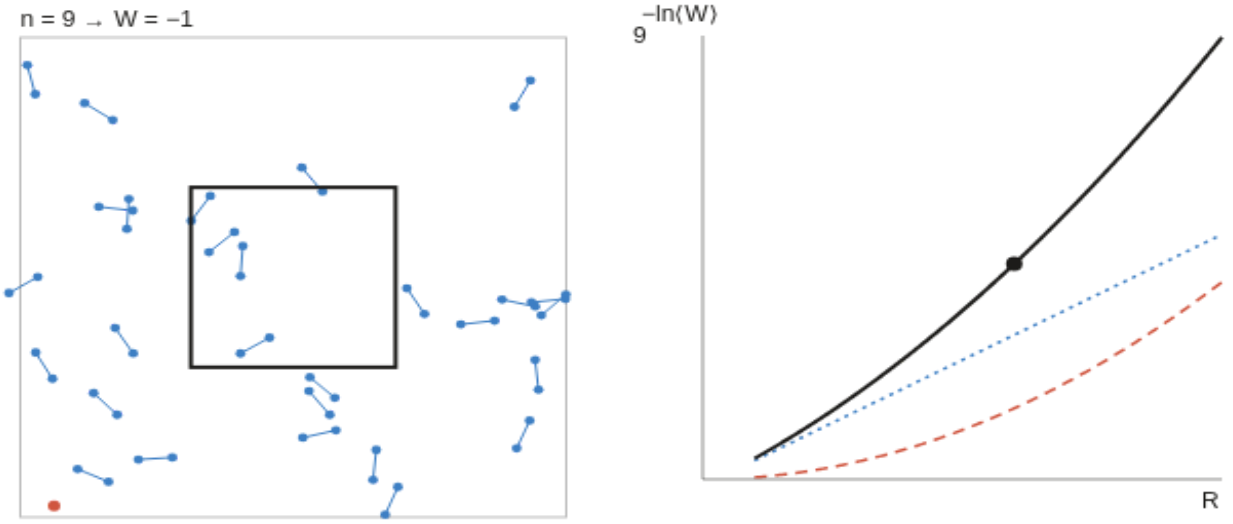
渦の気体の模型：面積則と周長則を数える

平面を `SU(2)` の渦が貫く点をばらまき、ループ内の点の数を n として $W = (-1)^n$ とします。点は二種類です。(a) 密度 ρ_f の独立な点（広がった渦の断面）。(b) 距離 d の二点の対、点の密度 ρ_p（平面を二回貫く小さな渦）。対が符号を変えるのは縁をまたぐときだけです。$I \times J$ の長方形で次が正確に成り立ちます（平行移動した二つの長方形の対称差の面積を向きで平均する）計算。

$$-\ln\langle W(I,J)\rangle = 2\rho_f\, IJ + 2\rho_p\Big[\frac{2d}{\pi}(I+J) - \frac{d^2}{\pi}\Big] \qquad (I,J \geq d) \tag{11}$$

第一項は、独立な点の数 n が平均 $\mu = \rho_f IJ$ の Poisson 分布に従い $\mathbb{E}[(-1)^n] = \sum_n e^{-\mu}\mu^n(-1)^n/n! = e^{-2\mu}$ となることから出ます（1-08）。第一項が面積則、第二項が周長則で、Creutz 比は $2\rho_f$ です。小さい渦がいくら多くても弦張力に寄与しません。

図 2　R・ρ_f・ρ_p を変えると、左の一枚の例（赤＝独立、青＝対）と、右の −ln⟨W⟩（実線、式 (11)）・面積項（赤破線）・周長項（青点線）が変わる。



R = 6、ρf = 0.020、ρp = 0.20：−ln⟨W⟩ = 1.44（面積）+ 2.93（周長）= 4.37。Creutz 比 = 0.040。この一枚は n = 9

計算 曲線は式 (11) をその場で計算し、左の点は乱数の一例です。式 (11) はこの端末で 100 万標本のモンテカルロ（MC）と突き合わせました（表 2）。

表 2　−ln⟨W(R,R)⟩：式 (11) と MC（格子間隔 1、d = 1。括弧内は MC の標準誤差を最後の桁で書いたもの。「—」は測れない）

R	独立 0.05	MC	対 0.2	MC	混合	MC
2	0.400	0.399(1)	0.891	0.890(2)	1.051	1.052(3)
4	1.600	1.596(5)	1.910	1.920(7)	2.550	2.546(13)
6	3.600	3.574(36)	2.929	2.929(19)	4.369	4.255(70)
8	6.400	—	3.947	3.921(50)	6.507	—
Creutz 比	0.100		0.000		0.040	

混合は $\rho_f = 0.02$・$\rho_p = 0.2$。MC の標準誤差は $-\ln W$ が大きいほど増え、$-\ln W \le 3$ では 0.02 以下です。$R = 6$ の混合は誤差 0.070 で、正確な式との差 0.11 は標準誤差の約 1.6 倍です。$e^{-6.4} \approx 0.0017$ は ± 1 の平均の雑音 10^{-3} と同程度で測れません。この困難は実際の格子計算と同じです（5-07）。SU(3) で貫通ごとに $e^{\pm 2\pi i/3}$ を掛けると、弦張力は $k = 1, 2$ で $1.5\rho_f$、随伴で 0 です計算 。

本書での使い方は 25-03 §03（枠を止めると容器の符号が独立になる恒等式）。

07

Gribov の領域と地平：ゲージを固定した側から

四つ目の絵は、ゲージを固定した伝播関数の形から閉じ込めを読みます。Landau ゲージの面 $\partial_\mu A_\mu = 0$ は一つの軌道と複数回交わりうる（4-08）ので、Gribov（1978）は積分を Faddeev–Popov 作用素 $\mathcal{M}$ が正の領域 Ω に制限しました。境界が Gribov の地平です。

$$\mathcal{M}^{ab} = -\partial_\mu\big(\partial_\mu \delta^{ab} + g f^{acb} A^c_\mu\big), \qquad \Omega = \{A:\ \partial_\mu A^a_\mu = 0,\ \mathcal{M} > 0\} \tag{12}$$

「$\mathcal{M} > 0$」は、$\mathcal{M}$ の固有値（自己共役作用素のスペクトル、1-10）がすべて正という意味です。$A = 0$ では $\mathcal{M} = -\partial^2$ で、定数を除けば正です。A を大きくすると最小の固有値が下がり、0 に達したところが地平です。地平の上では、固有値 0 の向きへの無限小のゲージ変換がゲージの条件を保つので、限りなく近いコピーが現れます。

数学として確かなのは Dell'Antonio–Zwanziger（1991）の「どの軌道も地平の内側を通る」までです[既知]。Ω の中にもコピーは残り、コピーの無い領域を解析的に扱う方法は知られていません（内側のコピーは期待値に影響しない、と Zwanziger は主張しています[物理]）。

08

伝播関数と正値性

Zwanziger（1989）は、Ω への制限を局所的な作用として書きました。その木の近似（ループの寄与を入れない最低次、4-03）の伝播関数が下の左、凝縮を加えた版（RGZ、Dudal ほか 2008）が右です[物理]。

$$D_{\mathrm{GZ}}(p^2) = \frac{p^2}{p^4 + \lambda^4}, \qquad D_{\mathrm{RGZ}}(p^2) = \frac{p^2 + M^2}{p^4 + (M^2 + m^2)\,p^2 + \lambda^4 + M^2 m^2} \tag{13}$$

$\lambda^4 = 2g^2 N \gamma^4$ で、γ は地平の条件で決まります。ここでの λ は質量の尺度で、§03 の侵入長 λ_L とも、大 N の $\lambda = g^2 N$ とも別です。M^2 と m^2 は RGZ で加わる質量の母数です。GZ の形は $p = 0$ で 0、極は $p^2 = \pm i\lambda^2$ と複素で、質量 m_0 の自由な粒子の $1/(p^2 + m_0^2)$ とまるで違います。

グルーオンが物理的な粒子なら、伝播関数は正の密度 ρ の重ね合わせ（Källén–Lehmann 表示）で書け、時間方向の相関 $C(t)$ は負になりえません（Dudal ほか 2008 の式 (159)(160)、4-10）。ω は重ね合わせる質量です。

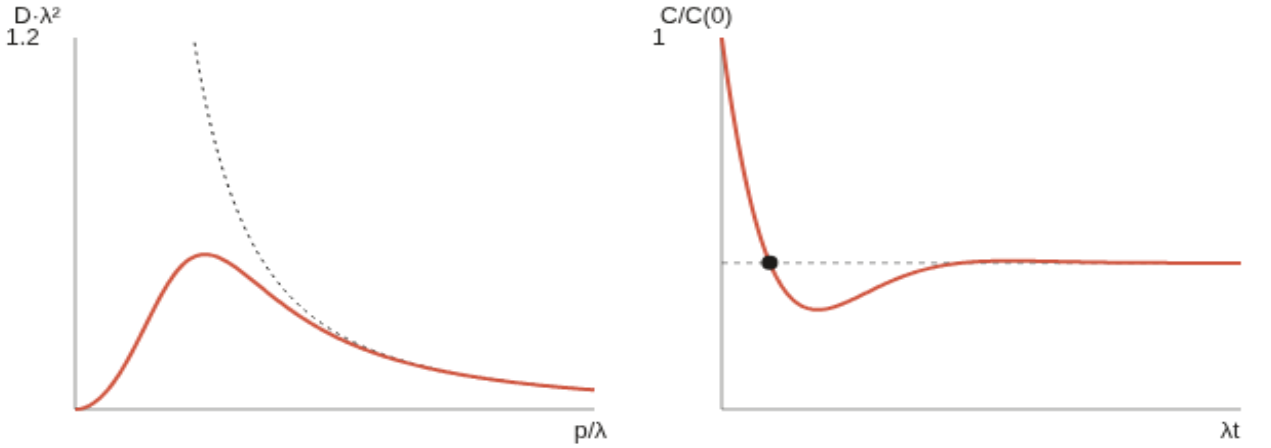
$$D(p^2) = \int_0^\infty d\omega^2\, \frac{\rho(\omega^2)}{p^2 + \omega^2}, \qquad C(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipt} D(p^2)\, dp = \int_0^\infty d\omega\, \rho(\omega^2)\, e^{-\omega t} \tag{14}$$

$m = 0$ では、複素関数の積分（留数）で計算すると閉じた形が出ます（数値積分でも確かめられます。図 3 の下）。$M^2 < 2\lambda^2$ で $\cos\varphi = M^2/(2\lambda^2)$ とおくと計算

$$C(t) = \frac{e^{-\lambda t\cos(\varphi/2)}}{2\lambda\sin\varphi}\,\sin\!\Big(\frac{3\varphi}{2} + \lambda t\sin\frac{\varphi}{2}\Big) \tag{15}$$

で、$t_* = (\pi - 3\varphi/2)/(\lambda\sin\frac{\varphi}{2})$ で最初に負になります。GZ では $t_* = \pi/(2\sqrt{2}\,\lambda) \approx 1.111/\lambda$。$M^2 > 2\lambda^2$ では $D = A/(p^2 + r_1) + B/(p^2 + r_2)$（$0 < r_1 < r_2$）と実の極に分かれ、$B$ が負（ρ は正でない）なのに $C(t) \geq e^{-\sqrt{r_2}\,t}C(0) > 0$ で負になりません。この判定は一方向にしか働きません。

図 3　M^2/λ^2（m = 0）を変えると、左の D(p^2)（点線は $1/p^2$）と右の C(t)/C(0) が変わる。0 が GZ、黒丸が最初の零点。



M²/λ² = 0.0（GZ）：D(0)·λ² = 0.0。極は複素共役。t* = 1.111/λ で負になる。

計算 曲線は式 (13)(15) と実根の部分分数をその場で計算したものです。閉じた式はこの端末で数値積分と突き合わせ、差は 2×10^{-11} 以下でした。

表 3　m = 0 の RGZ の木の近似（λ = 1）

M²	D(0)	極	C(0)	零点 t*
0（GZ）	0	複素共役	0.354	1.111
1.0	1.0	複素共役	0.577	3.142
1.9	1.9	複素共役	0.734	16.86
2.5	2.5	実（B = −0.333）	0.825	なし
4.0	4.0	実（B = −0.077）	1.021	なし

格子は当初の予言 $D(0) = 0$ と合いませんでした。Cucchieri–Mendes（SU(2)、128^4、約 $(27\ \mathrm{fm})^4$。1 fm = 10^{-15} m）は要旨で、運動量 0 で「有限で非零の値を示すように見える」と報告し、Bogolubsky ほか（SU(3)）も同じ向きです物理。RGZ はこれを再現するように作られています物理。BRST 対称性（ゲージを固定した後にも残る対称性、4-08）は GZ では柔

らかく破れます。柔らかな破れとは、破れの項の次元が低く、短距離では効かないことです。この破れは RGZ の代償ではなく、GZ の地平の項そのものの性質です物理。

切れ目

伝播関数はゲージに依存します。問題文の標的は $\mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$ のようなゲージ不変な局所場の相関で、伝播関数の赤外の形からそのギャップを導く定理はありません。連続な大域的ゲージ固定もできません（Singer、3-04）。

09

四つの絵を並べる

表 4　四つの絵の主役・支え・欠けているもの

絵	主役	ゲージ依存	支え	数学で言えること	欠けていること
双対超伝導	単極子の凝縮	単極子の定義で	秩序変数の数値	3 次元コンパクト `U(1)` の面積則	凝縮 ⇒ 面積則 ⇒ ギャップ
アーベル射影	MAG の単極子	強い	アーベル優勢	—（Elitzur の定理が制約になる）	一意に定まるゲージ不変な量として定義すること
中心渦	渦／その自由エネルギー	前者のみ	中心優勢・渦の除去	Tomboulis–Yaffe、式 (4)	4 次元弱結合での渦の凝縮
GZ	伝播関数	定義から	格子の伝播関数	軌道は地平の内側を通る	ゲージ不変な相関への橋

主役の変数はどれもゲージを選んだときにだけ見え、ゲージ不変な核は渦の自由エネルギーとその周りの不等式だけです。どの絵も説明するのは σ で、Δ は帰結として期待されているにすぎません（§ 02）。どの絵からも「尺度は一つ」は出ません。切れ目の整理は 16-05、発散以外の障害は 7-11。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 小さい β の面積則。格子で強い形のギャップ ⇒ 面積則	四次元の非可換理論の連続極限での面積則。Clay のギャップと閉じ込めの間の含意
計算 渦の気体の正確な式 (11) と MC の一致、Creutz 比 $= 2\rho_f$	この模型がヤン–ミルズの真空を記述すること（渦の分布は仮定）
計算 RGZ（$m = 0$）の木の近似の $C(t)$ の閉じた形 (15)	伝播関数から、ゲージ不変な相関のギャップを導くこと

言えている	言えていない
物理 単極子凝縮・アーベル優勢・中心優勢・渦の除去・$D(0) \neq 0$ の格子数値	どの機構が正しいかの判定（数値はゲージに依存）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
式 (1)(3)(6)(8)(10)、N-ality、(92 ± 4)%、双対超伝導の帰属	総説	Greensite, Prog. Part. Nucl. Phys. 51 (2003) 1, hep-lat/0301023（本文）
Wilson ループ	一次	Wilson, PRD 10 (1974) 2445（要旨）
閉じ込めは「自然な拡張」（§02）	一次	Jaffe–Witten, Clay の問題文（本文）
双対超伝導	一次	't Hooft, EPS 1975 講演（1976 刊）（書誌のみ）。Mandelstam, Phys. Rep. 23 (1976) 245（書誌のみ）。Nambu, PRD 10 (1974) 4262（書誌のみ）
3 次元コンパクト `U(1)`	一次	Polyakov, NPB 120 (1977) 429（書誌のみ）。Göpfert–Mack, CMP 82 (1982) 545（要旨。連続極限の記述は INSPIRE の要旨で確認、本文は未読。年は Crossref の発行年で、INSPIRE は 1981）
単極子凝縮の格子数値・SW	一次	Di Giacomo ほか, PRD 61 (2000) 034503（要旨）。Seiberg–Witten, NPB 426 (1994) 19（要旨）
アーベル射影・MAG・アーベル優勢	一次	't Hooft, NPB 190 (1981) 455（要旨）。Kronfeld–Schierholz–Wiese, NPB 293 (1987) 461（書誌のみ）。Kronfeld ほか, PLB 198 (1987) 516（書誌のみ）。Suzuki–Yotsuyanagi, PRD 42 (1990) 4257（書誌のみ）。Bali ほか, PRD 54 (1996) 2863（書誌のみ）
Elitzur の定理	一次	Elitzur, PRD 12 (1975) 3978（書誌のみ）
中心渦	一次	Del Debbio ほか, PRD 55 (1997) 2298（要旨）。de Forcrand–D'Elia, PRL 82 (1999) 4582（要旨）。Tomboulis, arXiv:0707.2179（要旨）。Ito–Seiler, arXiv:0711.4930（要旨）。Tomboulis–Yaffe, CMP 100 (1985) 313（書誌のみ）
式 (4)・表 1	一次	Chatterjee, arXiv:2006.16229（本文。定義 2.1、定理 2.2・2.4、§2.4）。Chatterjee, arXiv:1803.01950（本文）。Fröhlich–Spencer, CMP 83 (1982) 411（書誌のみ）。Adhikari–Cao, arXiv:2202.10375（要旨）。Osterwalder–Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（書誌のみ）。Shen–Zhu–Zhu, arXiv:2204.12737（要旨）
式 (12)–(14)	一次	Dudal ほか, PRD 78 (2008) 065047, arXiv:0806.4348（本文。式 (2)(3)(58)(59)(159)(160)(207)）。Gribov, NPB 139 (1978) 1（書誌のみ）。Zwanziger, NPB 323 (1989) 513（書誌のみ）
地平・内側のコピー・格子の伝播関数	一次	Dell'Antonio–Zwanziger, CMP 138 (1991) 291（書誌のみ）。Zwanziger, PRD 69 (2004) 016002（要旨）。Cucchieri–Mendes, arXiv:0710.0412, PoS LAT2007:297（要旨）。Bogolubsky ほか, arXiv:0901.0736（要旨）

もの	種別	出典・道具
式 (11)(15)・表 2・表 3	計算	python3（numpy・scipy）：対称差の面積の向き平均と 100 万標本の MC（標準誤差つき）／閉じた形と数値積分の突き合わせ、$C(t)/C(0)$ の最小値

次に読む章：17-03 弦の絵 ― 押し込められた管を一本の弦として扱い、その揺らぎを見ます。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 17 部 物理の側から 有効弦理論

弦の絵 — 閉じ込めの管を一本の弦とみなすと、揺らぎから普遍な補正と形が出てくる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 管の横揺れの零点エネルギーから Lüscher 項 $-\pi(d-2)/(24R)$ が出る筋道と、係数が理論の細部に依らない理由を追います。管の太さ、Nambu–Goto の準位、格子の弦の「硬い側」と「荒れた側」、向きに依る張力が選ぶ形（Wulff 形）を、式と動く図と計算で見ます。

前提となる章 — 17-01 物理はどう見ているか（Wilson ループ・面積則・弦張力 σ）。零点エネルギー（2-06）と強結合展開（5-02）は要る分をその場で書きます。

先に言うこと — 物理の水準の章です 物理 。弦の絵は長い管が在ること（閉じ込め）を出発点に置き、四次元の非可換ヤン–ミルズでそれは定理ではありません。この本は閉じ込めも質量ギャップも連続極限の構成も自分では示していません（公開された連続極限の構成は第二巻で読みます）。

この章の順序

1. 管を一本の弦とみなす — 面積の重み
2. Nambu–Goto 作用 — 揺らぎの展開
3. 零点エネルギーと Lüscher 項 — 開いた弦と閉じた弦
4. 寄り道：1+2+3+⋯ と −1/12 — 切り方に依らない部分
5. 管は対数で太る — 揺れる弦
6. Nambu–Goto の準位と短い管 — 普遍な範囲
7. 格子の弦は硬く、どこかで荒れる — 定理のある側
8. Wulff 形 — 向きに依る張力と形
9. 二次元イジング模型の滴 — 正確に分かる張力と、正方形から円へ
10. 弦の絵が数学に渡すもの・渡さないもの — 仮定の下で決まるものと、仮定そのもの

01

管を一本の弦とみなす

17-01 §05 の電束の管は、太さが対の距離 R よりずっと小さければ、遠目には一本の線です。ユークリッド時間の方向に伸ばすと、線は面（**世界面**）を掃きます。弦の絵は、この面の揺らぎで長い距離を書く有効理論です 物理 。Wilson ループの長方形 $R \times T$ を縁とする面 S に、面積 $A(S)$ で決まる重みを与えます。

$$\langle W_{R,T} \rangle \approx \sum_{S:\,\partial S = \text{長方形}} e^{-\sigma A(S)} \tag{1}$$

最小の面だけなら $e^{-\sigma RT}$、面積則です。問題は揺らぎで何が加わるかです。比喩で言えば張った膜の震えです。正確には、(1) はヤン–ミルズから導いた式ではなく、「長い管が在り、低い励起は横揺れだけ」という仮定の下での出発点です（Athenodorou–Bringoltz–Teper 2011 §2。以下 ABT）。

格子の強結合（5-02）では (1) に近い式が成り立ち、プラケット一枚の重み u が $e^{-\sigma_0}$ の役をします 既知 。ただし `U(1)` でも面積則が出るので、非可換の閉じ込めの証拠にはなりません（Chatterjee 2018 §4、5-06）。

02

Nambu–Goto 作用

面積に比例する作用を **Nambu–Goto 作用**と呼びます（名は Nambu と Goto にちなむとされます）。面を座標 t, x と、垂直な変位 $h(t,x) \in \mathbb{R}^{d-2}$ で表します（静的ゲージ。d は時空の次元）。曲面 $X(t,x)$ の面積は、多変数の微積分で学ぶ曲面積の公式 $\iint \sqrt{|X_t|^2 |X_x|^2 - (X_t \cdot X_x)^2}\, dt\, dx$（$X_t = \partial_t X$、$X_x = \partial_x X$）で与えられます。$X = (t, x, h)$ を入れると次の式です。

$$A = \int_0^T dt \int_0^R dx \, \sqrt{1 + |\partial_t h|^2 + |\partial_x h|^2 + |\partial_t h|^2 |\partial_x h|^2 - (\partial_t h \cdot \partial_x h)^2} \tag{2}$$

揺らぎが緩やかなら $\sqrt{1+z} \approx 1 + z/2$ で展開して

$$\sigma A = \sigma R T + \frac{\sigma}{2} \iint \left(|\partial_t h|^2 + |\partial_x h|^2 \right) dt\, dx + O\big((\partial h)^4\big) \tag{3}$$

第二項は $d-2$ 成分の質量のない自由場で、2-02 の弦の振動と同じ形です（端では $h = 0$）。高次の項は長い弦では $1/(\sigma R^2)$ の冪で抑えられます（ABT §2.1）。

例：波打ち $h = A_0 \sin(\pi x/R)$ の長さの増分は、二次の近似で $\pi^2 A_0^2/(4R)$ です。$R = 1$ fm、$A_0 = 0.2$ fm で 0.099 fm（正確には 0.092 fm）。$\sigma = 1192$ MeV/fm（$\sqrt{\sigma} = 485$ MeV、17-01 §07）を掛けて約 110 MeV です 計算 。

03

零点エネルギーと Lüscher 項

(3) の第二項は、ユークリッド化した自由場の作用です。T が長いとき $\langle W_{R,T} \rangle \approx e^{-V(R)T}$ なので、同じ場のハミルトニアンの基底エネルギーが $V(R)$ を与えます（4-02）。この場のモードは $k_n = n\pi/R$（$n = 1, 2, \ldots$）です。各モードは振動数 k_n の調和振動子で、最低の状態でも零点エネルギー $k_n/2$ を持ちます（2-06。$\hbar = c = 1$）。$d-2$ 成分を足すと次の式です。

$$E_0(R) = \sigma R + \frac{d-2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{R} \tag{4}$$

和は発散します。長さ a より細かい揺れは有効理論の外なので、$e^{-k_n a}$ で切ります。

$$\sum_{n \geq 1} n\, e^{-\varepsilon n} = \frac{e^{-\varepsilon}}{(1-e^{-\varepsilon})^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{12} + \frac{\varepsilon^2}{240} - \cdots, \qquad \varepsilon = \frac{\pi a}{R} \tag{5}$$

(5) を (4) に入れると、第一項は $(d-2)R/(2\pi a^2)$ で R に比例し、張力に吸収されます。残りが静的ポテンシャルです。

$$V(R) = \sigma R + c_0 - \frac{\pi (d-2)}{24 R} + \cdots \tag{6}$$

c_0 は普遍でない定数です。$d = 4$ で $-\pi/(12R)$、17-01 式 (6) の **Lüscher 項**です（Lüscher–Symanzik–Weisz 1980、Lüscher 1981）。長い管の有効理論の中で導かれる係数で、数学の定理ではありません 物理 。$1/R$ の項は発散しない有限の部分なので、係数は a に依りません。$R = 1$、$a = 0.2, 0.1, 0.05$ で残りは -0.2567, -0.2605, -0.2615 と $-\pi/12$ に近づきます 計算 。

閉じた弦と円筒の Casimir エネルギー

周期 L の方向に巻きついた管（周期境界を回る電束）では $k_n = 2\pi n/L$ が正負両向きにあり、同じ計算で次を得ます（ABT 式 (9)）。

$$E_0(L) = \sigma L - \frac{\pi (d-2)}{6 L} + \cdots \tag{7}$$

これは円筒の上の自由場の Casimir エネルギーです。Lucini–Teper 2001 は格子の σ を同論文の式 (4) $am_l = a^2\sigma L - \pi/(3L)$ で取り出し、'in using eqn(4) we are assuming that we have linear confinement' と断っています（5-08）。目安：$R = 1$ fm で $\pi/(12R) \approx 52$ MeV は σR の 4.3%、$L\sqrt{\sigma} = 3$（Lucini–Teper の下限。$\sqrt{\sigma} = 485$ MeV での換算で約 1.22 fm、Lucini–Teper 自身は $\simeq$1.3 fm と書く）で (7) の補正は主項の 11.6% です 計算 。

04

寄り道：1+2+3+⋯ と −1/12

飛ばしてよい節です。

標語「$1+2+3+\cdots = -1/12$」の和は発散します。正確な中身は次の式です。滑らかな切り方 f（$f(0)=1$、速く減る）について、$\varepsilon \to 0$ で

$$\sum_{n\ge 1} n\, f(\varepsilon n) = \frac{C_f}{\varepsilon^2} - \frac{1}{12} + O(\varepsilon^2), \qquad C_f = \int_0^\infty x f(x)\, dx \tag{8}$$

発散項の係数 C_f は切り方で変わり、$-1/12$ は変わりません。理由は **Euler–Maclaurin の公式**です。和と積分の差を端の点での微分で書く式で、g とその微分が無限遠で速く減るときは次の形です（$B_2 = 1/6$ は Bernoulli 数）。

$$\sum_{n\ge 0} g(n) = \int_0^\infty g(x)\, dx + \tfrac{1}{2} g(0) - \tfrac{B_2}{2!}\, g'(0) - \cdots$$

$g(x) = x f(\varepsilon x)$ では $g(0)=0$、$g'(0) = f(0) = 1$、積分は C_f/ε^2 なので、定数項は $-B_2/2 = -1/12$ です。残りの項は ε^2 以上の冪です。ゼータ関数の解析接続 $\zeta(-1) = -1/12$ も同じ数です 既知 。

計算 表1　和から C_f/ε^2 を引いた残り（指数型 $f = e^{-x}$、$C_f = 1$。ガウス型 $f = e^{-x^2}$、$C_f = 1/2$）

ε	指数型	ガウス型
0.1	−0.0832917	−0.0834169
0.01	−0.0833329	−0.0833342
→ 0	−0.0833333	−0.0833333

切り方で変わる部分は張力に吸収され、$-1/12$ だけが $1/R$ の係数に残ります（発散級数は 4-12・7-12 も）。

05

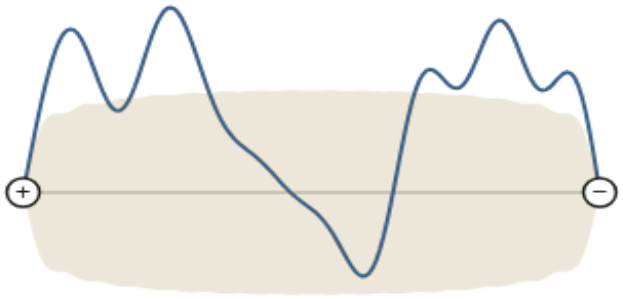
管は対数で太る

(3) のモード q_n は質量 σ・振動数 k_n の振動子で、基底状態の分散は $1/(2\sigma k_n)$ です。$h=\sum_n \sqrt{2/R}\, q_n \sin k_n x$ の中点では奇数の n だけが残り、$\langle h^2\rangle = \sum_{n\,\text{奇数}} 1/(\sigma\pi n)$ です。$n \lesssim R/a$ まで足すと対数になります（Lüscher–Münster–Weisz 1981。Gliozzi–Pepe–Wiese 2010 式 (3)）。長い管の有効理論の中で導かれる式です 物理 。

$$w^2\left(\tfrac{R}{2}\right) = \left\langle |h(R/2)|^2 \right\rangle \approx \frac{d-2}{2\pi\sigma}\ln\frac{R}{R_0} \tag{9}$$

普遍なのは $\ln R$ の係数で、R_0 は普遍ではありません。太さは際限なく増えますが $w/R \to 0$ で、遠目には細い線のままです。

図1　つまみで距離 R を変えると、弦に載るモードの数と揺れの幅（帯）が変わる。「動かす」で各モードを零点の大きさで振動させる



R√σ = 4.00 (1.63 fm)　モード 16 個　中点の w²σ = 0.644　(ln N+γ+ln2)/(2π) = 0.643

計算 この図の数値はこの端末で計算した。切断 $a = 0.25/\sqrt{\sigma}$、帯は $\pm w$、横方向 1 成分。振動は古典的な絵で、量子の揺らぎそのものではない。

表2　格子の帯（幅 R、両端で h=0、時間は無限）の中点での自由場の分散（1 成分、単位 1/σ）

R（格子間隔）	σ⟨h²⟩	R を倍にしたときの増分
8	0.516070	0.111626
1024	1.288650	0.110318
(9) の予言	—	ln2/(2π) = 0.110318

計算 モードごとの閉じた形 $1/\sqrt{m^2(m^2+4)}$ で正確に足した。増分は (9) と 6 桁で一致する。

$d=4$ の係数 $1/(\pi\sigma)$ は 0.053 fm^2 で、R を倍にしても w^2 は 0.037 fm^2 増えるだけです 計算 。対数の増え方は (2+1) 次元の `SU(2)` の格子で確かめられています（Gliozzi–Pepe–Wiese 2010） 物理 。

06

Nambu–Goto の準位と短い管

縦の運動量のない閉じた弦の準位は、Nambu–Goto では閉じた形で書けます（左右に回る励起の和がともに n。ABT 式 (21))。素朴な光円錐量子化から来る式です（Aharony–Komargodski はこの方法の出典として、端を固定した弦を扱った Arvis 1983 を挙げます)。

$$E_n(L) = \sqrt{\sigma^2 L^2 + 8\pi\sigma\left(n - \frac{d-2}{24}\right)} \tag{10}$$

展開すると $\sigma L + \frac{4\pi}{L}\left(n - \frac{d-2}{24}\right) + \cdots$ で、$n=0$ は (7) に戻ります。基底は $\sigma L^2 < \pi(d-2)/3$ で虚になり、$d=4$ では $L_H\sqrt{\sigma} = \sqrt{2\pi/3} = 1.447$ です。周期方向を時間とみれば $1/L$ は温度です（4-02)。弦の状態の数はエネルギーとともに指数的に増えるので、ある温度より上では分配関数の和が収束しなくなります。この点を **Hagedorn 転移**と呼びます（状態の増え方は 17-05 の寄り道）物理。ABT は L_H を 'the Hagedorn/deconfining transition in the Nambu-Goto model' とみなせると書き、続けて、大 N の純ゲージ理論ではこの長さに届かないと述べます。縮めていくと、その手前の $l_c\sqrt{\sigma} = \sqrt{\sigma}/T_c \simeq 1.65$ で一次の脱閉じ込め転移が起きるからです（表3 の下の l_c)。

表3　閉じた弦のエネルギー（$d=4$、単位 $\sqrt{\sigma}$）

L√σ	σL−π/(3L)	(10) の基底	近似のずれ	(10) の n=1	E₁−E₀
1.6	0.9455	0.6824	+38.6%	5.0595	4.377
3.0	2.6509	2.6279	+0.88%	5.6602	3.032
6.0	5.8255	5.8229	+0.04%	7.6836	1.861

計算 式 (10) による。格子で管が消える長さ $l_c\sqrt{\sigma}$ は ABT 表 3 の $a\sqrt{\sigma}$ と l_c/a の積で、SU(3) 1.544・1.559、SU(5) 1.636、SU(6) 1.676。いずれも L_H より少し長く、大きい N の二つは ABT の 1.65 の前後にある。

どこまで普遍か。Aharony–Komargodski 2013 によれば 'all the terms up to (and including) order 1/L^5 are universal' で、基底は $1/L^5$ まで (10) と一致し、$d>3$ の励起は $1/L^5$ で普遍にずれ、$1/L^7$ から理論ごとの項が入ります。長い管の有効理論の中で導かれる結果です物理。(10) の量子化には 'There is no rigorous derivation' とも書いています。ABT は四次元 SU(N) の格子で閉じた管の約 20 準位を測り、多くが $1/L$ 展開の収束しない短い長さまで (10) でよく記述されると報告しました。$J^P = 0^-$（J は管の軸のまわりの角運動量、P は鏡映に対する符号）の一部の状態は大きくずれます物理。

表3 の最後の列で、$L\sqrt{\sigma}=3$ の弦の最初の励起 $3.03\sqrt{\sigma}$ は、SU(3) の 0^{++} グルーボール $3.405\sqrt{\sigma}$（17-01 表2）と同じ桁に来ます計算（対応を意味するものではありません)。尺度が一つであることを数学の文にする話は 17-12 です。

07

格子の弦は硬く、どこかで荒れる

格子の強結合側では、面の一部を一格子ずらすとプラケットが増え、一枚ごとに小さな重み u が掛かります。横揺れは指数的に抑えられ、面は**硬い**（平ら）ままです。(9) の世界では分散が対数で発散し、面は**荒れて**います。

結晶の表面では、二つのあいだに**荒れの転移**（roughening）があります。Itzykson–Peskin–Zuber 1980 は、四次元の格子ゲージ理論でも、真空に相転移がないまま有限の結合で荒れが起き、$\sigma(\beta)$ がそこで真性特異点を持つと論じました。ここで真性特異点とは、関数もすべての階の微分も有限のまま、テイラー展開がその点で関数を表さなくなる型の特異点です。例は $x>0$ で e^{-1/x^2}、$x\le 0$ で 0 とおいた関数で、$x=0$ でのテイラー級数は係数がすべて 0 です。級数を何次まで延ばしても、この点は見えません。IPZ は 'The roughening transition is a natural barrier to the extrapolation of strong-coupling series for the string tension' と書いています。`SU(2)` の β_r はおよそ 2（誤差大）で、著者は 4 次元の議論を 'for the most part, intuitive' と断っています 物理 。

三次元の `Z(2)` ゲージ理論は、三次元のイジング模型と**双対**です。双対とは、変数の取り替えで二つの模型の分配関数が（簡単な因子を除いて）一致することです（2-09 の寄り道。IPZ は Wegner 1971 を引く）。この対応で Wilson ループの面はイジング模型の界面になります（IPZ 式 (8)） 既知 。ゲージ結合を $t=\tanh\beta$ で測ると（双対なイジング模型の温度では $t=e^{-2J/T}$。IPZ 式 (7)）、相転移は $t_c=0.6418$ です。荒れの点は、IPZ が引く級数の見積もりで $t_r\approx 0.46$、相転移の手前です 物理 。有効弦理論が当てはまるのは荒れた側だけです（Gliozzi–Pepe–Wiese 2010） 物理 。

要点

物理 強結合の面積則の定理（Osterwalder–Seiler 1978、5-04）は硬い側、Lüscher 項と対数の太さは荒れた側の話です。間には、強結合級数を延ばせない $\sigma(\beta)$ の特異点があると物理は考えます。

08

Wulff 形

§07 の硬い側では、張力は向きにも依ります。格子の軸と角 θ をなす Wilson ループの縁は階段になり、最小の面は $RT(|\cos\theta|+|\sin\theta|)$ 枚です。強結合の主項では次の式です。

$$\sigma(\theta)=\sigma_0\big(|\cos\theta|+|\sin\theta|\big) \tag{11}$$

45° で $\sqrt{2}$ 倍です 計算 。連続極限では回転対称が戻り、一定になると期待されます 物理 。

張力が向きに依る線で囲まれた、面積一定の領域（二次元の滴）はどんな形をとるか。法線 $\mathbf{n}$ ごとの張力 $\tau(\mathbf{n})$ で、囲む面積を固定して $\oint \tau\, ds$ を最小にします。答えは Wulff 1901 の作図で与えられます（作図が最小を与えることの証明の書誌は出典表） 既知 。

$$\mathcal{W}_\tau = \bigcap_{|\mathbf{n}|=1} \{\mathbf{x} :\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{n} \le \tau(\mathbf{n})\}, \qquad \min_{\text{面積}=A} \oint \tau\, ds = 2\sqrt{|\mathcal{W}_\tau|\, A} \tag{12}$$

張力が一定なら円、(11) の $\tau = |n_1| + |n_2|$ なら $\{\max(|x|,|y|) \le 1\}$ の正方形です。面積 1 での総和は正方形で 4、円形なら $8/\sqrt{\pi} = 4.51$ です 計算 。

09

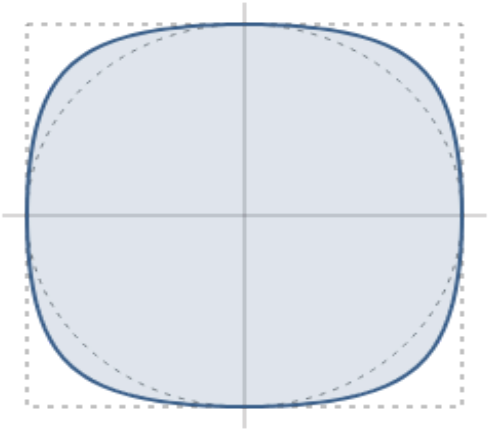
二次元イジング模型の滴

向きに依る張力が正確に分かっている例が、正方格子のイジング模型（結合 J、2-09）です。この節の $\beta = 1/T$ は逆温度です（$k_B = 1$。格子ゲージの β とは別物）。低温相の少数派の島（滴）の平衡形は次の曲線です（最初の正確な解析は Rottman–Wortis 1981 とされる） 既知 。

$$\cosh(\beta x) + \cosh(\beta y) = \sinh(2\beta J) + \frac{1}{\sinh(2\beta J)} \tag{13}$$

(13) は (12) の $\mathcal{W}_\tau$ の縁そのものです。大きさも (12) のとおりで、向き $\mathbf{n}$ への張り出し $\max \mathbf{x}\cdot\mathbf{n}$ が張力 $\tau(\mathbf{n})$（J の単位）に等しくなります。したがって x, y は位置ではなく、エネルギーの単位で測った座標です。x 軸との交点（軸方向の張力）は、Onsager の正確な解の $2J + \beta^{-1}\ln\tanh\beta J$ と 5 桁で一致します 計算 。$T \to 0$ で (13) は正方形になり、張力は (11) と同じ階段の数え上げです。$T \to T_c$ では右辺が 2 に近づき、$u = \beta x$、$v = \beta y$ について $\cosh u + \cosh v \approx 2 + (u^2+v^2)/2$ なので円になります。

図2　つまみで温度 T/T_c を変えると、二次元イジングの滴の平衡形（塗り）が正方形から円へ変わる。軸方向の張力を 1 にそろえ、点線は正方形と円



T/T_c = 0.30 τ(0°) = 1.9278 J（Onsager の式 1.9278） τ(45°)/τ(0°) = 1.1196（正方形 1.4142、円 1）

表4　二次元イジングの平衡形。等周比は 4π 面積/周長^2、最後の列は同じ面積の円形の滴に対する張力の総和の比

T/T_c	τ(45°)/τ(0°)	等周比	Wulff/円
→ 0	1.4142	0.7854	0.8862
0.2	1.1984	0.9406	0.9698
0.4	1.0690	0.9917	0.9958
0.8	1.0035	1.0000	1.0000

計算 この図と表の数値はこの端末で計算した（(13) を角度ごとに二分法で求めた）。

低温では対角の張力が先に下がります。階段の縁には並べ方の数（エントロピー）があり、角はそこから丸くなります。T_c に近づくと相関長が格子間隔よりずっと長くなり、格子の向きが忘れられて円になります。連続極限で回転対称が戻るという期待（5-05）の、正確に扱える模型での姿です。

低温の二次元イジングで滴が Wulff 形をとることは、微視的な模型から示されています（Dobrushin–Kotecký–Shlosman 1992・1993）既知 。

Wulff の問題が直接に当てはまるのは、このように面積の決まった二次元の相の滴です。ヤン–ミルズの閉じた電束の輪には面積を固定する拘束が無く、放っておけば縮みます。それでも格子の上の閉じた管は必ず角を曲がるので、そのエネルギーは $\sigma(\theta)$ を通して形に依ります 物理 。本書の検討の記録での使い方は 23-02 にあります。

10

弦の絵が数学に渡すもの・渡さないもの

渡すもの	渡さないもの
物理 長い管が在ると仮定すれば、Lüscher の係数、太さの $\ln R$ の係数、準位の $1/L^5$ までの形が、細部に依らずに決まります。 既知 低温の二次元イジングでは、向きに依る張力と滴の形の関係が定理です。	管が在ること（大きい β の面積則）は、四次元の非可換理論で 'remains elusive' です（Chatterjee 2018）。格子の σ は弦の補正を引いて取り出され、Lucini–Teper は二点だけの当てはめで 'we cannot claim to have evidence for both the 1/L functional form and for its coefficient' と断っています。

弦の絵は質量のない横揺れの話で、グルーボールの質量は直接には出てきません。ABT は (10) からずれる $J^P = 0^-$ の準位が 'the massive modes associated with the internal structure of the flux tube' を表す可能性を調べています 物理 。長さの尺度が $1/\sqrt{\sigma}$ だけなので $m \sim \sqrt{\sigma}$ は自然に見えますが、導かれてはいません（17-01 §09・17-12）。面の和としての見方は、次の 17-04 で $1/N$ の展開として出てきます。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
物理 長い管が在ると仮定した有効理論の中で導かれる、Lüscher の係数・太さの $\ln R$ の係数・$1/L^5$ までの準位の普遍性	四次元の非可換ヤン–ミルズに長い管が在ること（大きい β の面積則）
計算 正則化の違いが R に比例する項だけに入ること（表1）。格子の自由場の太さの増分（表2）	ヤン–ミルズの管の太さの定理
計算 (10) と Lüscher 近似の差、L_H、l_c（表3）	(10) がヤン–ミルズで正確であること
既知 Wulff の作図と低温の二次元イジングでの正当化。 計算 表4	四次元の連続極限で $\sigma(\theta)$ が一定になること
既知 強結合の面積則（Osterwalder–Seiler）。三次元の `Z(2)` ゲージ理論とイジング模型の双対性。Euler–Maclaurin による $-1/12$	強結合級数を荒れの点より先へ延ばすこと
物理 四次元の格子ゲージ理論の荒れの転移（IPZ の議論）と、三次元 `Z(2)` の t_r の級数による見積もり	荒れの転移の存在と位置の証明

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§01・(7)(10)・l_c・Hagedorn の文と $l_c\sqrt{\sigma}\simeq 1.65$・$J^P=0^-$	一次	Athenodorou–Bringoltz–Teper, JHEP 1102 (2011) 030, arXiv:1007.4720（本文）
普遍性の次数・(10) の注意・(10) が素朴な光円錐量子化から来ること	一次	Aharony–Komargodski, JHEP 05 (2013) 118, arXiv:1302.6257（本文）
Lüscher 項・(10) の原典	一次	Lüscher–Symanzik–Weisz, NPB 173 (1980) 365（書誌のみ）。Lüscher, NPB 180 (1981) 317（書誌のみ）。Arvis, PLB 127 (1983) 106「The Exact q Anti-q Potential In Nambu String Theory」（書誌のみ。書誌は Aharony–Komargodski の文献表 [19] による）。Nambu–Goto の名の原典は未確認
式 (9)・有効弦理論が荒れた側で当てはまること	一次	Lüscher–Münster–Weisz, NPB 180 (1981) 1（書誌のみ）。Gliozzi–Pepe–Wiese, PRL 104 (2010) 232001, arXiv:1002.4888（本文）
格子の σ の取り出し・$L\sqrt{\sigma}\geq 3$	一次	Lucini–Teper, JHEP 0106 (2001) 050, hep-lat/0103027 §4.1（本文）。原文は 'r ≥ 3/√σ ≃ 1.3 fm'。本文の 1.22 fm は $\sqrt{\sigma}=485$ MeV（17-01 と同じ）での換算
荒れの転移・$t=\tanh\beta$・t_c・t_r・双対性	一次	Itzykson–Peskin–Zuber, PLB 95 (1980) 259（本文）。$t=\tanh\beta=e^{-2/T}$ は同論文の式 (7)、$t_c=0.6418$ は同論文の本文。$t_r\approx 0.46$ は、IPZ が式 (13) で引く Weeks らの級数解析の値 $t_r\approx 0.4593$（1980 年当時の見積もり。Weeks らの原典は IPZ の文献 [7][9] で、一つは未公刊の書簡。未確認）。IPZ 自身の量では式 (19) で $t_r\approx 0.47$。双対性は Wegner, J. Math. Phys. 12 (1971) 2259（書誌のみ。IPZ の文献表による）
面積則の現状	一次	Chatterjee arXiv:1803.01950 §4（本文）。Osterwalder–Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（書誌のみ）
式 (12)・Wulff 形の微視的な正当化	一次	Wulff, Z. Kristallogr. 34 (1901) 449–530（書誌のみ。書誌は Fujimoto–Otsuka の文献表による）。作図が最小を与えることの証明の原典は未確認。作図の説明は Günther–Rikvold–Novotny, Physica A 212 (1994) 194, cond-mat/9406114（本文）と、そこに挙げられた総説 Rottman–Wortis, Phys. Rep. 103 (1984) 59（書誌のみ）。Dobrushin–Kotecký–Shlosman, Wulff Construction: A Global Shape from Local Interaction, AMS Transl. Math. Monographs 104 (1992)。同じ著者の短報 A microscopic justification of the Wulff construction, J. Stat. Phys. 72 (1993) 1–14（いずれも書誌のみ。書誌は Crossref で確認）
式 (13)	一次	Rottman–Wortis, PRB 24 (1981) 6274（書誌のみ。「最初の正確な解析」という帰属は Fujimoto–Otsuka arXiv:1906.01925 の序文）。あわせて Avron–van Beijeren–Schulman–Zia, J. Phys. A 15 (1982) L81、Zia–Avron, PRB 25 (1982) 2042（書誌のみ。同じ序文が 'see also' として挙げる）。形は Onsager の張力と照合
表1〜表4・図1・図2・本文の 計算	計算	python3（標準ライブラリ）：正則化した和／格子の自由場／(10) と ABT 表 3／(13) の二分法

次に読む章：17-04 大 N ― 面の和を $1/N$ で整理する見方です。

大 N — 色の数を無限大に送ると、ファインマン図は曲面に仕分けられる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — N を大きくすると図は種数ごとに N の冪で仕分けられ、平面図だけが残ること（'t Hooft 1974）。図の和がランダム曲面の和になり、揺らぎが消えること。二次元の格子で N=∞ にだけ現れる相転移と、四次元の格子の N 依存。

前提となる章 — 4-03 摂動論と Feynman ダイアグラム。3-02・7-02・17-01 は要る分をその場で書きます。

先に言うこと — 大 N は物理の水準の展開です。懸賞問題は有限の N を要求し、N→∞ から戻る道は知られていません。数学的に確かな結果は強結合の格子か二次元に限られます。この本は質量ギャップも連続極限の構成も自分では示していません（公開された連続極限の構成は第二巻で読みます）。

この章の順序

1. N を動かす発想 — 小さい数の代わりに 1/N
2. 二重線の記法 — 線は二本の添字
3. 't Hooft の勘定 — N の冪は種数で決まる
4. ガウス行列の種数展開 — 実際に数える（寄り道：カタラン数と半円）
5. ランダム曲面 — 弦の絵へ
6. マスター場 — 揺らぎは 1/N で消える
7. Gross–Witten の転移 — N=∞ だけの折れ目
8. 四次元の格子 — 比は N でゆっくり動く
9. 言えること・言えないこと — 強結合と二次元の岸

01

N を動かすという発想

四次元の純ヤン–ミルズには展開に使える小さい数がありません。質量の尺度 Λ は $e^{-1/(2b_0 g^2)}$ の形で（$b_0 = 11N/(48\pi^2)$、17-01 の式 (1)）、g のどの冪にも映りません（17-01 §03）。't Hooft（1974）は群の大きさ N をつまみとみなし、次の極限を考えました（原論文の群は U(N)） 既知 。

$$N \to \infty, \qquad \lambda = g^2 N \ \text{を固定} \tag{1}$$

要旨によれば 'only planar diagrams with the quarks at the edges dominate' で、1/N が当時の弦の模型の結合に当たります。比喩で言えば $N = 3$ を「$N = \infty$ に $1/9$ 程度の補正」と見る発想で、正確には補正の小ささは格子の数値で確かめるものです（§08）。問題文は、1/N 展開を通じてゲージ理論が $1/N$ を結合とする弦理論と同値かもしれないという双対性の予想を 'A prominent speculation' と呼び、そうした記述が 'perhaps a good starting point for a rigorous proof (for sufficiently large N)' になりうると書きます 既知 。ただし要求は有限の N です（0-03）。

02

ゲージ場は行列：二重線の記法

ゲージ場 A_μ は各点で $N \times N$ のエルミート行列で（3-02）、成分 $A_\mu{}^i{}_j$ の二つの添字を色の線の両端とみなします。作用は（ユークリッド）

$$S = \frac{1}{2g^2}\int \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\, d^4x = \frac{N}{2\lambda}\int \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\, d^4x, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]. \tag{2}$$

積のトレースは $\mathrm{tr}(ABC) = A^i{}_j B^j{}_k C^k{}_i$ のように添字を輪につなぎ、(2) の三点・四点の頂点はどれもこの形です。伝播関数（4-03）の色の部分は U(N) で

$$\left\langle A^i{}_j\, A^k{}_l \right\rangle \ \propto\ \frac{\lambda}{N}\,\delta^i{}_l\,\delta^k{}_j. \tag{3}$$

デルタ一つが添字の線一本なので、グルーオンの線は向きが逆の二本の線、細い帯になります。これが**二重線の記法**です。連続の作用では（リー代数の水準で）、単位行列の方向は交換子から落ち、トレース 0 の部分との交差項も消えるので、純ゲージ理論の U(N) は SU(N) に**相互作用しない自由な U(1) 場**を一つ足したものです 既知 。群としては U(N) は SU(N)×U(1) に分かれず（$e^{2\pi i k/N}$ 倍の単位行列が両方に入る）、格子の U(N)（§07）ではこの分離は成り立ちません。

03

't Hooft の勘定：N の冪は曲面の種数で決まる

(2)(3) から、頂点一つに N/λ、伝播関数一本に λ/N、閉じた添字の輪一つに $\sum_i \delta^i{}_i = N$ が掛かります。頂点 V・伝播関数 E・添字の輪 F の真空の図は

$$\left(\frac{N}{\lambda}\right)^{V}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^{E} N^{F} = N^{\,V-E+F}\,\lambda^{\,E-V} \tag{4}$$

に比例します。添字の輪それぞれに円板を貼ると向きの付いた閉曲面ができ、$V-E+F$ は曲面だけで決まる**オイラー標数** $\chi = 2-2h$ になります（h は取っ手の数＝**種数**。球面上の四面体なら $4-6+4=2$）。したがって

$$\ln Z = \sum_{h\ge 0} N^{\,2-2h}\, f_h(\lambda) \tag{5}$$

で、f_0 は平面に描ける図（**平面図**）の和、補正は $1/N^2$ ずつです 既知 。クォークの線は一本の添字の線で、曲面に縁を開けて $1/N$ を掛けます。(5) は摂動級数の並べ替えで、収束は別の問題です（4-12）。λ を固定する理由は β 関数（結合定数が、見る尺度 μ とともにどう変わるかを表す式。17-01 §02）にあります。§01 の b_0 を使って λ で書くと N が消えます 計算 。

$$\mu\frac{d\lambda}{d\mu} = -\frac{11}{24\pi^2}\,\lambda^2, \qquad \Lambda = \mu\,\exp\!\Big(-\frac{24\pi^2}{11\,\lambda(\mu)}\Big) \tag{6}$$

左辺は尺度 μ を少し変えたときの λ の変わり方で、右辺が負なので短い距離（大きい μ）ほど λ は小さくなります。λ を固定すれば Λ も固定され、格子でもこの取り方でなめらかな極限が得られています（Lucini–Teper） 物理 。

04

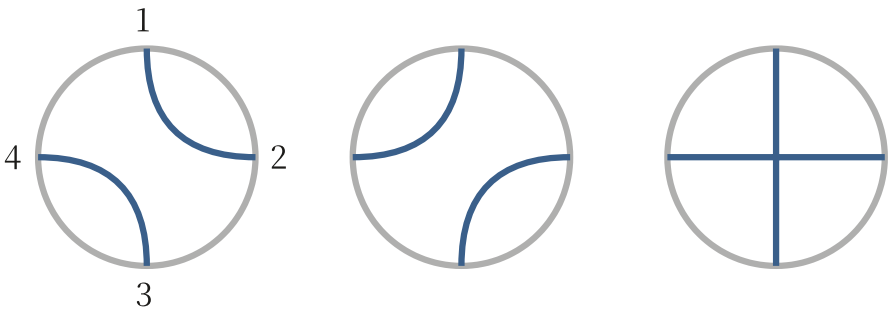
数えてみる：ガウス行列の種数展開

勘定 (4) は時空を一点に縮めた模型で確かめられます。エルミート行列 M を一つ、ガウス分布（1-08）に従わせます（dM は実成分のルベーグ測度）。

$$d\mu(M) \;\propto\; e^{-\frac{N}{2}\operatorname{tr} M^2}\,dM, \qquad \langle M_{ij}M_{kl}\rangle = \frac{1}{N}\,\delta_{il}\,\delta_{jk} \tag{7}$$

ガウス変数の積の期待値は、二つずつ組にする仕方の和です（Wick の定理、2-07）。$\frac{1}{N}\operatorname{tr} M^4$ の組み方は図0 の三通りで、(a)(b) が $\frac{1}{N}\cdot N^3\cdot N^{-2}=1$、(c) が N^{-2} です。

図0　$\operatorname{tr} M^4$ の足 1〜4 を二本ずつ結ぶ三通り。弦が交わらない (a)(b) は添字の輪が 3 つ、交わる (c) は 1 つ（球面に描けずトーラスが要る）



(a) 輪 3：1　　(b) 輪 3：1　　(c) 輪 1：1/N^2

一般に

$$\left\langle \tfrac{1}{N}\operatorname{tr} M^{4} \right\rangle = 2 + \frac{1}{N^{2}}, \qquad \left\langle \tfrac{1}{N}\operatorname{tr} M^{2k} \right\rangle = \sum_{g \ge 0} \varepsilon_g(k)\, N^{-2g} \tag{8}$$

で、$\varepsilon_g(k)$ は $(2k-1)!!$ 通りの組み方のうち種数 g（添字の輪が $k+1-2g$ 個）のものの数です。係数は Harer–Zagier（1986）の漸化式で出せます。

$$(k+1)\,\varepsilon_g(k) = (4k-2)\,\varepsilon_g(k-1) + (k-1)(2k-1)(2k-3)\,\varepsilon_{g-1}(k-2) \tag{9}$$

表1　$\varepsilon_g(k)$（組み方の全列挙。漸化式 (9) と一致）

k	g=0	g=1	g=2	g=3	合計
4	14	70	21		105
5	42	420	483		945
6	132	2310	6468	1485	10395
7	429	12012	66066	56628	135135

図1　N と k を動かすと、$\langle \frac{1}{N}\operatorname{tr} M^{2k} \rangle$ に占める種数 g の図の割合が変わる。N を上げると平面図（g=0）だけが残る



k = 4　N = 2.00　⟨(1/N)tr M^8⟩ = 32.81　平面の分 14（42.7%）

計算 表1 と図1 の数値はこの端末で計算した（$k \le 7$ は全列挙と漸化式の突き合わせ）。JavaScript が無効なら表1 で読める。

合計 $(2k-1)!!$ は平面図の数よりずっと速く増え、$k=9$、$N=1$ では平面図は 0.02% 未満です。大 N 極限は、数の少ない図だけを残す極限です。

寄り道：カタラン数と半円

飛ばしてよい小節です。

表1 の $g=0$ の列はカタラン数 $\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$ です。$N\to\infty$ で M の固有値の分布は半円 $\rho(x)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}$（$|x|\le 2$）に近づきます（Wigner の半円則） 既知 。この密度の $2k$ 次の積率 $\int x^{2k}\rho(x)\,dx$ を数値積分すると、$k\le 6$ で 10 桁までカタラン数と一致します 計算 。平面図を数えることは大 N の極限を求めることと同じで、Brézin–Itzykson–Parisi–Zuber（1978）はこれを数え方に使いました 既知 。

05
図の和はランダム曲面の和になる

帯の図を裏返して読みます。四点の頂点を正方形、三点の頂点を三角形、伝播関数を二辺の貼り合わせに置き換えると、図一つが多角形を貼った閉曲面一つになります。(5) は

$$\ln Z=\sum_{\Sigma} N^{\chi(\Sigma)}\,w_{\lambda}(\Sigma) \tag{10}$$

という**ランダム曲面**の和で、N が位相を、λ が多角形の数を数えます（w_λ は運動量の積分を含む重み）。比喩で言えば膜の形の和ですが、正確には (10) は級数の並べ替えで、曲面の和としての収束は別に示す必要があります。

物理はこの膜を、閉じ込めの管（17-03）が掃く弦の世界面と読みます。N^{2-2h} は弦の結合を $1/N$ とした弦の摂動展開の形で、問題文では 'may be equivalent to a string theory with 1/N as the string coupling constant' です 物理 。二次元 QCD では、$1/N$ 展開の係数が曲面の写像の和で決まり、閉じた弦の理論と読めます（Gross–Taylor 1993） 既知 。

06
揺らぎが消える：因数分解とマスター場

勘定 (4) からもう一つ、$\frac{1}{N}\operatorname{tr}$ で規格化した量どうしの共分散が $1/N^2$ だけ小さいことが出ます 既知 。

$$\left\langle \tfrac{1}{N}\operatorname{tr}A\cdot\tfrac{1}{N}\operatorname{tr}B\right\rangle=\left\langle \tfrac{1}{N}\operatorname{tr}A\right\rangle\left\langle \tfrac{1}{N}\operatorname{tr}B\right\rangle+O\!\left(N^{-2}\right) \tag{11}$$

これが**因数分解**で、$A=B$ なら標準偏差が $1/N$ で縮みます。

表2　行列 (7) の乱数による $\frac{1}{N}\operatorname{tr}M^4$ 計算

N	平均	$2+1/N^2$	N×標準偏差

N	平均	$2+1/N^2$	N×標準偏差
2	2.2541(80)	2.2500	7.19
8	2.0152(38)	2.0156	6.09
128	2.0003(15)	2.0001	6.06

$N=\infty$ では、トレースで作った量（行列模型 (7) なら共役 $M\to UMU^\dagger$ で変わらない量、ゲージ理論ならゲージ不変な量）が乱数でなくなり、測度が一つの配位に集まるかのように振る舞います。その集まる先を**マスター場**と呼ぶ習わしがあります。比喩で言えば揺れる海が凍る絵ですが、正確には凍るのはトレースで作った量の分布で、行列の成分は揺らぎ続けます。

ゲージ理論で因数分解が効く代表は **Wilson ループ**です。閉じた道 C に沿ってゲージ場で平行移動した行列（$N\times N$ のユニタリ行列）の $\frac{1}{N}\operatorname{tr}$ のことで、17-01 §04 で定義します。**Schwinger–Dyson 方程式**は、積分変数をずらしても積分が変わらないことから出る、期待値どうしの関係式です。Wilson ループについてのこの方程式に因数分解を入れると、ループの期待値だけで閉じた方程式になります（Makeenko–Migdal 1979）物理。平面 $\mathbb{R}^2$ では Lévy がヤン–ミルズ測度（7-02）の大 N 極限を構成し、各 Wilson ループが確率収束で決定的な極限に近づくこと、この方程式が有限の N でも極限でも成り立つことを示しました 既知 。

07

二次元の格子で見る大 N：Gross–Witten の転移

格子の言葉を要る分だけ書きます（詳しくは 5-01）。時空を格子点の網に置き換え、隣り合う二点を結ぶ辺 ℓ ごとに群の元 $U_\ell\in U(N)$ を置きます。格子の最小の正方形（**プラケット**）p の四辺の元を一周の順に掛けた積を U_p と書き、作用は $\operatorname{tr}U_p$ で作ります。閉じた道に沿って辺の元を掛けた積の $\frac{1}{N}\operatorname{tr}$ が格子の **Wilson ループ**です。各 U_ℓ は **Haar 測度**（群の上の一様な確率測度、1-08 §03）に作用の重みを掛けた分布に従います。

二次元の格子では、辺の元の一部を 1 にそろえる**木ゲージ**でプラケットが独立になり、n 枚の面を囲む Wilson ループは正確に w^n です（7-02 §02・§03）。大 N は一枚の積分で調べられます。U(N) の Haar 測度に重みを付けて

$$d\mu(U)\;\propto\;\exp\Big(\frac{N}{\lambda}\operatorname{tr}(U+U^\dagger)\Big)dU,\qquad w_N(\lambda)=\Big\langle\tfrac{1}{N}\operatorname{Re}\operatorname{tr}U\Big\rangle \tag{12}$$

とします（7-02 の β なら $\beta=2N/\lambda$）。有限の N では、Weyl の積分公式（トレースだけで決まる関数の Haar 積分を、固有値 $e^{i\theta_1},\dots,e^{i\theta_N}$ の積分に直す式）と Heine の恒等式（その固有値の積分を行列式に直す式）から、修正 Bessel 関数

$$I_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{x\cos\theta}\cos n\theta\,d\theta$$

を成分とする行列式が出ます 既知 。

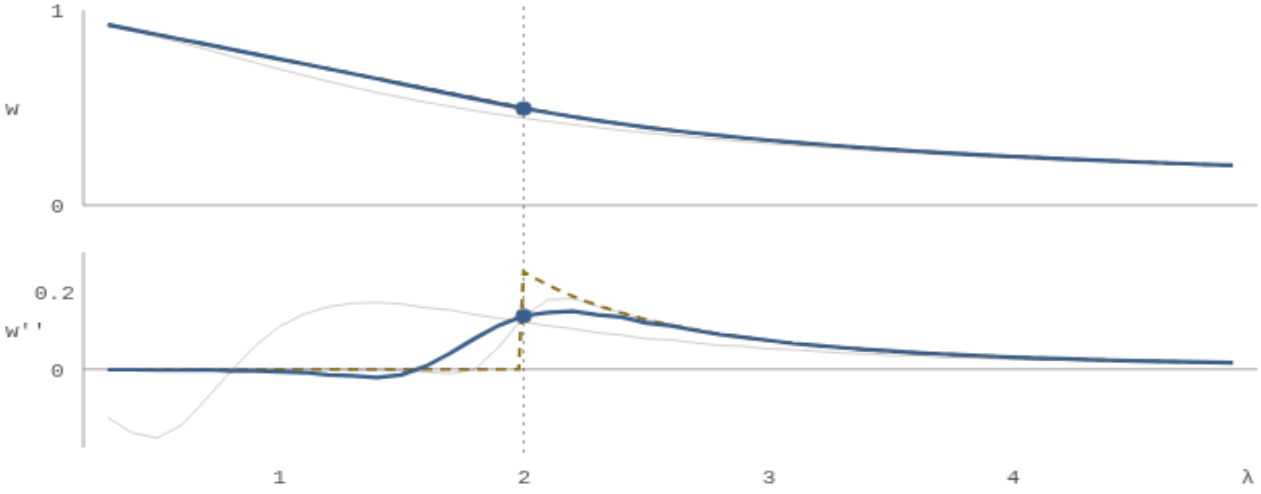
$$Z_N = \det\left[I_{j-k}(2N/\lambda)\right]_{j,k=1}^{N}, \qquad w_N = \frac{1}{2N}\frac{d\ln Z_N}{d(N/\lambda)} \tag{13}$$

Gross–Witten（1980）は $N\to\infty$ を**鞍点法**（大きいパラメータ N を含む $\int e^{Nf(x)}dx$ を、f が最大になる点のまわりで近似する方法）で評価し、$\lambda=2$ に三次の相転移を見つけました。同じ転移は Wadia の 1979 年の preprint にも現れます 既知 。この正規化での極限は次の形で、有限 N の値は表3 のようにここへ近づきます 計算 。

$$w_\infty(\lambda) = \begin{cases} 1-\lambda/4 & (\lambda \le 2) \\ 1/\lambda & (\lambda \ge 2) \end{cases} \tag{14}$$

$\lambda=2$ で値 1/2 も傾き −1/4 もつながり、二階微分が 0 から 1/4 へ跳びます（自由エネルギーでは三階微分）。弦張力は $\sigma = -\ln w$。

図2　N を選ぶと上段の $w_N(\lambda)$ と下段の w_N'' が太線になる（破線は N=∞）。N を上げると下段が λ=2 の段差に近づく



N = 10　λ = 2.0　w = 0.49634（N=∞：0.50000）　σ = 0.700　w" ≈ 0.14（N=∞：0→0.25 の段差）

表3　$w_N(\lambda)$。最後の列は式 (14)

λ	N=1	N=10	N=40	N=∞
1	0.69777	0.74937	0.74996	0.75000
2	0.44639	0.49634	0.49939	0.50000
4	0.24250	0.25000	0.25000	0.25000

計算 この図と表の数値はこの端末で計算した（(13) を 300 桁で評価、N=1,2 は直接積分と 10 桁一致。図の二階微分は刻み 0.1 の差分）。JavaScript が無効なら表3 で読める。

読み取れることは三つです 計算 。(i) 有限の N では Z_N は N/λ の整関数で正なので w_N はなめらかで、折れ目は $N=\infty$ でだけ現れます。(ii) 近づき方が相で違います。ずれは $\lambda=1$ でほぼ $-1/(16N^2)$、$\lambda=4$ では $N=20$ で 2×10^{-12} と指数的に小さく、$\lambda=2$ では N を倍にし

ても約 1/2.5 にしかなりません。(iii) 強結合側の式 $1/\lambda$ を $\lambda = 1$ に延ばすと 1 で、正しい 0.75 から外れます。強結合の展開が転移の向こうへ届かない例です（5-02）。

Wadia の preprint（arXiv に再録）はこの転移について 'seems to be a pathology of the infinite N limit' と書き、この模型では物理的な連続極限（$\lambda \to 0$ の側）とは関係しないとします。それでも $N \to \infty$ は有限の N に無い特異性を作りうるので、$N \to \infty$ と $a \to 0$ の入れ替えには理由が要ります。

08

四次元の格子：比は N でゆっくり動く

四次元では格子の数値に頼ります。Lucini–Teper（2001）は SU(2)〜SU(5) の $m_{0^{++}}/\sqrt{\sigma}$（最も軽いグルーボールと弦張力、17-01）の連続極限を $1/N^2$ の一次式で当てはめ、'all SU(N) gauge theories are close to SU(∞), at least as far as the low-lying mass spectrum is concerned' とまとめました 物理 。

$$\left.\frac{m_{0^{++}}}{\sqrt{\sigma}}\right|_{N} = a + \frac{b}{N^2} \tag{15}$$

論文の四点に (15) を誤差の重みで当てはめ直すと $a = 3.366 \pm 0.106$、$b = 1.93 \pm 0.54$、$\chi^2 = 0.26$（自由度 2）で、中心値は論文の $3.37(15) + 1.93(85)/N^2$ と同じです。定数だけでは $\chi^2 = 12.9$（自由度 3）で合いません 計算 。

表4　$m_{0^{++}}/\sqrt{\sigma}$ の連続極限の値と (15) の線（Athenodorou–Teper の列は、SU(3) が 2020 年、SU(2) と SU(∞) が 2021 年の論文）

N	Lucini–Teper	(15) の線	Athenodorou–Teper
2	3.844(61)	3.848	3.781(23)
3	3.607(87)	3.580	3.405(21)
4	3.49(14)	3.487	
5	3.38(16)	3.443	
∞	3.37(15)	3.366	3.072(14)

物理 一次資料の外挿値。 計算 「(15) の線」はこの端末の当てはめ（相関と系統誤差は無視）。

比の変化は SU(2) から SU(∞) まで、(15) の線では約 12.5%、Athenodorou–Teper の値では約 19% です 計算 。二つの一次資料の SU(∞) の値の差は約 2.0σ です 計算 。どれも連続極限の存在を前提にした外挿で、σ は弦の絵を通して取り出されています。「N=3 は N=∞ に近い」はその前提の中での観察です。

09

数学として言えること・言えないこと

定理になった大 N の結果は次の岸にあります 既知 。

- **平面図の理論**：'t Hooft（1983）は四次元のユークリッド空間で平面図だけの理論を扱い、'if all particles involved have non-vanishing masses' かつ結合が十分小さければ、絶対収束する手続きで Green 関数（場の積の期待値。伝播関数はその一つ）が得られ、それが Dyson–Schwinger 方程式（§06 の Schwinger–Dyson 方程式と同じもの）を一意に解く、としました（要旨：'an absolutely convergent procedure exists to obtain Green functions that uniquely solve the Dyson-Schwinger equations'）。ギャップは仮定です。
- **強結合の格子**：Chatterjee（2015）は強結合の SO(N) で大 N の Wilson ループの期待値を格子上の弦の軌跡の絶対収束する和として計算し、Chatterjee–Jafarov は同じ強結合の SO(N) で、Wilson ループの $1/N$ 展開を漸近展開として証明しました（初項は種数 0、高次ほど高い種数の曲面）。
- **すべての N と β**：Cao–Park–Sheffield は任意の行列の大きさ $N \geq 1$・$\beta > 0$・次元 $d \geq 2$ で、Wilson ループの期待値を**埋め込まれた地図**（曲面に描いたグラフを格子へ写したもの）の和で表しました。U(N) では、地図一つの重みは N^{χ} と格子の各辺の重み（Weingarten 関数。これ自体も N による）の積に比例します。
- **二次元**：平面のマスター場（§06）と全結合での面積則（7-02）。

> 切れ目
>
> (1) 曲面の和は全 β で成り立つが、連続極限の側（大きい β）で面積則やギャップを出す評価は無い。(2) $N \to \infty$ と $a \to 0$ の入れ替えは正当化されていない。(3) $N = \infty$ で何かが示せても、懸賞問題は有限の N を要求し、$1/N$ 展開に収束の保証は無い。問題文も四次元について 'there might some day be an asymptotic solution in a large N limit' と書くにとどめる。

大 N は弦（17-05）と、$\lambda \to \infty$ も取るホログラフィー（17-08）で再び使われます。有限の N への距離は 17-10 で。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 (4)(5)（級数の並べ替えとして）、U(N) と SU(N) の差。	f_h の収束。四次元で $1/N$ 展開が理論を近似すること。
計算 (6)、表1〜表3、図1・図2、半円の密度の積率、(13) の N=1,2 での突き合わせ、表4 の当てはめ。	表4 は一次資料の外挿値の再当てはめ。
既知 強結合 SO(N) の大 N と $1/N$ 展開、曲面和、平面のマスター場、質量正を仮定した平面図の理論。	弱結合側の面積則・ギャップ。$N \to \infty$ と $a \to 0$ の交換。有限の N への帰還。
物理 平面図の支配、弦の結合 $1/N$、ループ方程式、比の N 依存の小ささ。	四次元の連続理論の定理ではない。この本は質量ギャップも連続極限の構成も自分では示していない（公開された連続極限の構成は第二巻）。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
(1)、平面図	既知	G. 't Hooft, Nucl. Phys. B72 (1974) 461。要旨を確認。
問題文の引用	既知	A. Jaffe, E. Witten, "Quantum Yang–Mills Theory"（Clay）§6.1・§6.6。本文を確認。
行列の積分で数える	既知	E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi, J.-B. Zuber, CMP 59 (1978) 35。要旨を確認。
(9)／半円則	既知	J. Harer, D. Zagier, Invent. Math. 85 (1986) 457／E. P. Wigner, Ann. of Math. 62 (1955) 548。書誌のみ。
(11) の因数分解、U(N) と SU(N) の差	既知	大 N の標準的な事実として扱った（'t Hooft 1974・Brézin–Itzykson–Parisi–Zuber 1978 の枠内）。この二点について両論文の本文は書誌のみ。(11) は表2 の数値でも確かめた。
(13) の行列式	既知・計算	Weyl の積分公式と Heine の恒等式による標準的な書き換え（原典は書誌のみ・未確認）。この端末で N=1,2 の直接積分と突き合わせた。
2 次元 QCD と弦	既知	D. J. Gross, W. Taylor, NPB 400 (1993) 181, hep-th/9301068。要旨を確認。
ループ方程式	物理	Yu. M. Makeenko, A. A. Migdal, PLB 88 (1979) 135。要旨を確認。
平面のマスター場	既知	T. Lévy, arXiv:1112.2452。要旨を確認。
転移、Wadia の引用	既知	D. J. Gross, E. Witten, PRD 21 (1980) 446。要旨を確認。S. R. Wadia, arXiv:1212.2906（1979 年の preprint の再録）。要旨を確認。(14) は両論文の本文では未確認で、有限 N の値の極限として確認した。

もの	種別	出典・道具
表4、引用	物理	B. Lucini, M. Teper, JHEP 0106 (2001) 050, hep-lat/0103027（本文を確認）。A. Athenodorou, M. Teper, arXiv:2007.06422 表 17（SU(3)）／arXiv:2106.00364 表 23（SU(2)）・表 31（SU(∞)）。本文の表を確認。
§09 の定理	既知	G. 't Hooft, "Rigorous construction of planar diagram field theories in four-dimensional Euclidean space", CMP 88 (1983) 1。S. Chatterjee, arXiv:1502.07719。S. Chatterjee, J. Jafarov, arXiv:1604.04777。S. Cao, M. Park, S. Sheffield, arXiv:2307.06790。要旨を確認。
表・図・(6)・(13)	計算	この端末の Python 3（numpy、decimal 300 桁）。

次に読む章：17-05 ひも理論と余剰次元 — 曲面の和を弦の理論として読むと何が要るか。

ひも理論と余剰次元 — 26・10・11 は整合性の条件から出る数

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 弦を基本の対象として量子化すると、時空の次元が自由に選べなくなること。ボゾン弦の 26 を二通り（第一励起／中心電荷）で、超弦の 10 を同じ帳尻で導く筋道。11 が超重力から来る数であること。

前提となる章 — 17-04 大 N。17-03 の零点エネルギーと $-1/12$ を使います。群の表現（1-02）、ローレンツ変換（2-04）、調和振動子（2-06）は要る分をその場で書きます。

先に言うこと — 導出は物理の水準です。世界面の二次元の計算は正確ですが、弦の理論に非摂動的な定義は無く、M 理論は存在が仮説です。余剰次元の話は四次元のヤン–ミルズの構成にも質量ギャップにも何も示していません。この本は質量ギャップも連続極限の構成も自分では示していません（公開された連続極限の構成は第二巻で読みます）。

この章の順序

1. 弦を基本の対象にする — 管の弦との違い
2. 横の振動を数える — 質量の公式
3. なぜ 26 か（一） — 第一励起は質量ゼロ
4. 準位を数える — タキオンと増え方（寄り道：分割数と Hardy–Ramanujan・寄り道：状態の増え方と Hagedorn 温度）
5. なぜ 26 か（二） — 中心電荷の帳尻
6. なぜ 10 か — 世界面の超対称性（寄り道：$26 - 10 = 16$ とヘテロ弦）
7. なぜ 11 か — 超重力の数
8. 「臨界次元」は臨界中心電荷 — 幾何でなくてよい
9. ヤン–ミルズに戻る — 管の弦とホログラフィー

01

弦を基本の対象にする

17-03 は閉じ込めの管を一本の弦とみなし、17-04 §05 では $1/N$ が弦の結合の役をしました。弦の理論も中間子の模型（**双対共鳴模型**）から始まったとされます。出発点としてよく挙げられるのは Veneziano（1968）の散乱振幅で、たとえば Neveu–Schwarz（1971）の要旨は 'A new dual-resonance model of mesons is constructed …' と書き出します 既知 。中間子ではスピン J と質量の二乗が直線に並びます（Regge 軌跡）。張力 T、長さ $2R$ の弦が角速度 $1/R$ で回ると両端は光速で、エネルギーと角運動量（2-04）を積分すると $E=\pi T R$、$J=\pi T R^2/2$、つまり

$$J=\alpha' E^2, \qquad \alpha'=\frac{1}{2\pi T}. \tag{1}$$

量子化した開いた弦では準位 N の最大のスピンが $J_{\max}=\alpha' M^2+1$ です（Tong §3.1.3）。17-01 の $\sqrt{\sigma}=485$ MeV を T に入れると $\alpha'=0.677\ \mathrm{GeV}^{-2}$、$\sqrt{\alpha'}\approx 0.16$ fm です 計算 。この章の**基本の弦**は管の有効理論ではなく、どんなに短い距離でも矛盾なく量子化できることを要求されます。すると時空の次元 D が自由な入力でなくなります。この章では弦の文献に合わせて、時空の次元を D と書きます。17-03 や付録の記号表の d と同じもので、空間だけの次元ではありません。

02

横の振動を数える：質量の公式

弦は時空 $\mathbb{R}^{1,D-1}$ の中で面（**世界面**）を掃きます。**光円錐ゲージ**では、時間 X^0 と縦の一方向 X^{D-1} を組み替えた光円錐の座標 $X^{\pm}=(X^0\pm X^{D-1})/\sqrt{2}$ を使い、X^+ を世界面の時間 τ に比例させます（$X^+=x^+ +\alpha' p^+\tau$。x^+・p^+ は弦の重心の位置と運動量の $+$ 成分。Tong (2.13)）。X^- の振動は消えませんが、制約の式によって横の振動から決まります。独立に振動するのは $D-2$ 本の横の方向だけです（Goddard–Goldstone–Rebbi–Thorn 1973） 既知 。17-03 の横の変位 $h\in\mathbb{R}^{d-2}$ と同じ数え方です（$d=D$）。方向 i の n 番目の振動は調和振動子で（2-06）、生成演算子 α^i_{-n} を一つ掛けるごとに**準位** N が n 増えます。開いた弦の質量は

$$\alpha' M^2 = N - a \tag{2}$$

で、$-a$ は零点エネルギー（全振動子の $\frac{1}{2}n$ の和）です。有限部分は 17-03 の $-1/12$（17-03 §04）なので

$$a = -\frac{D-2}{2}\sum_{n\geq 1} n \;\longrightarrow\; -\frac{D-2}{2}\cdot\Big(-\frac{1}{12}\Big) = \frac{D-2}{24}. \tag{3}$$

17-03 の Lüscher 項 $-\pi(D-2)/(24R)$ と Nambu–Goto の準位の $(D-2)/24$（17-03 §06）は、この同じ数です 既知 。Tong はこの和の扱いを 'famously unconvincing' と認め、この章の §05 と同じ中心電荷の方法で導き直します（Tong §4.4.1）。閉じた弦は右向きの振動 α と左向きの振動 $\tilde{\alpha}$ を持ち、準位は $N = \tilde{N}$ です（Tong (2.26)）。

03

なぜ 26 か（一）：第一励起は質量ゼロでなければならない

粒子の内部の状態は、運動量を変えない回転（**小群**）の表現になります（1-02。Wigner 1939）。質量 $M > 0$ なら静止系に移れて小群は $SO(D-1)$、質量ゼロなら運動量 $(p, 0, \ldots, 0, p)$ を保つ $SO(D-2)$ です（正確には $D-2$ 次元の回転と平行移動からなる群 $ISO(D-2)$ ですが、有限個の状態に効くのは回転の部分 $SO(D-2)$ です）。四次元の光子の偏りは 2 つ、重いスピン 1 の粒子は 3 つです 既知 。開いた弦の準位 1 の $\alpha^i_{-1}|0\rangle$ は $D-2$ 状態の横のベクトルで、重いベクトルに要る $D-1$ 成分に一つ足りません。ローレンツ対称性を保つには質量ゼロでなければならず、

$$\alpha' M^2 = 1 - a = 0 \implies a = 1 \overset{(3)}{\implies} \frac{D-2}{24} = 1 \implies D = 26. \tag{4}$$

Tong は閉じた弦の第一励起（$(D-2)^2$ 状態）について同じ議論をし、'these states will have to be massless. And this is only the case if the dimension of spacetime is D = 26' と書きます 物理 。

ローレンツ代数で確かめる

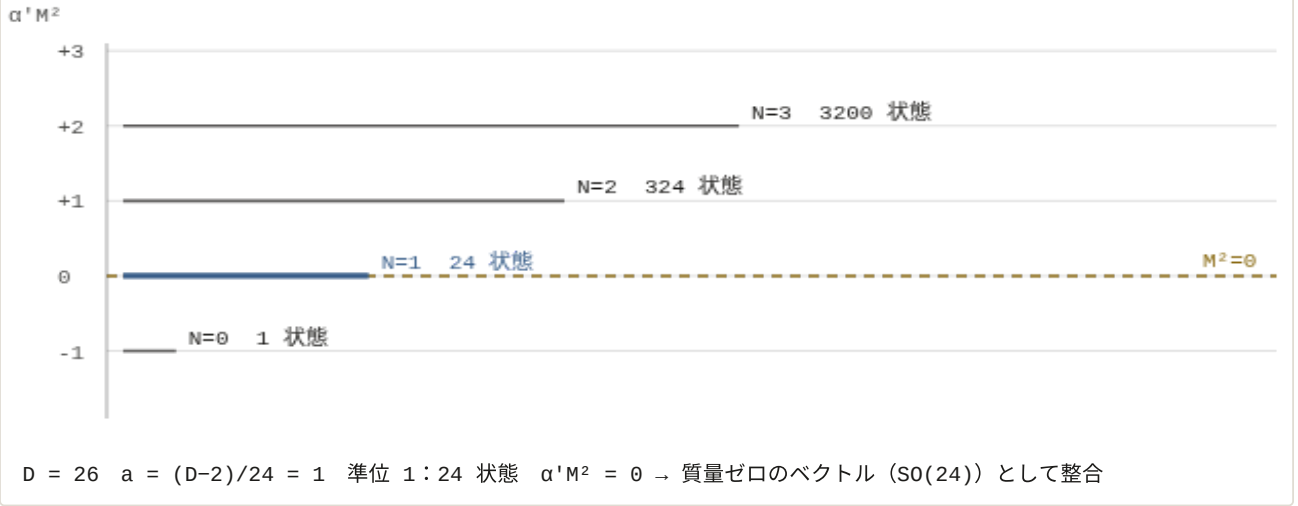
丁寧には、ローレンツ変換（回転とブースト）を生む保存量 $M^{\mu\nu}$ が、光円錐ゲージでもローレンツ代数の関係を満たすかを確かめます。$M^{\mu\nu}$ は弦の振動が持つ角運動量を含みます。要になるのは $[M^{i-}, M^{j-}] = 0$ で、i, j は横の方向、$-$ は光円錐の方向 X^- です（Tong §2.4）。X^- の振動が横の振動で決まるので、この交換子は横の振動子で書けます。

$$[M^{i-}, M^{j-}] \;\propto\; \sum_{n>0}\Big[\Big(\frac{D-2}{24}-1\Big)n + \frac{1}{n}\Big(a - \frac{D-2}{24}\Big)\Big]\big(\alpha^i_{-n}\alpha^j_n - \alpha^j_{-n}\alpha^i_n\big) + (\alpha \leftrightarrow \tilde{\alpha}) \tag{5}$$

比例係数 $2/(p^+)^2$ は省きました。これは閉じた弦の式で、$(\alpha \leftrightarrow \tilde{\alpha})$ は左向きの振動の同じ形の項です。すべての n で消えるのは $D = 26$ かつ $a = 1$ のときだけです 既知 。原典は Goddard–Goldstone–Rebbi–Thorn（1973）で、その要旨も、角運動量の演算子がローレンツ群 $O(D-1,1)$ を生成するのは 'only when the first excited state is a photon, i.e., a

spin-one massless state, and when D = 26' と述べています。閉じた弦の第一励起は $24^2 = 576 = 299 + 276 + 1$ 状態で 計算 、Tong はこれを $SO(24)$ の対称トレースなし・反対称・トレースの場 $G_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \Phi$ に当て、最初を質量ゼロのスピン 2、すなわち重力子と読みます 物理 。

図1　D を動かすと準位 $\alpha' M^2 = N - a$ が上下する（線の長さは状態数の対数）。太線の準位 1（超弦は 1/2）が $M^2 = 0$ に乗るのは、ボゾン弦で D=26、超弦で D=10 のときだけ



D = 26　a = (D−2)/24 = 1　準位 1：24 状態　α'M² = 0 → 質量ゼロのベクトル（SO(24)）として整合

計算 この図の数値はこの端末で計算した。JavaScript が無効なら (4) と表2 で読める。

04

準位を数える：タキオンと状態数の増え方

$D = 26$ の開いた弦の $N = 0$ は $\alpha' M^2 = -1$、質量の二乗が負の**タキオン**です（Tong §3.1.1）。質量の項の符号が逆の場（2-02）で、ポテンシャルの極大の周りで展開していることを意味します 物理 。準位 N の状態数 d_N は、N を「24 色の正の整数」の和に分ける仕方の数です。

$$\sum_{N \geq 0} d_N \, q^N = \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{-24} \tag{6}$$

準位 2 の 324 は $SO(25)$ の対称トレースなし 2 階の次元、準位 3 の 3200 は $2900 + 300$（対称トレースなし 3 階と反対称 2 階）です 計算 。Tong によれば全ての励起が $SO(D-1)$ の表現に収まり、条件は準位 1 だけです。準位 2・3 の数が $SO(D-1)$ の表現の次元の和に合うことは、$D = 4$〜39 で確かめました 計算 。どちらも D の三次以下の多項式なので、これで任意の D で成り立つ恒等式になります。

表2　開いたボゾン弦（$D = 26$）の準位。比は寄り道の Bessel 形との比（$n = N - 1$）

N	$\alpha' M^2$	d_N	比
0	−1	1	

N	$\alpha' M^2$	d_N	比
1	0	24	
2	1	324	1.000009
3	2	3200	0.999998
10	9	6.392×10^{8}	1.00000000
400	399	1.446×10^{91}	1.00000000

計算 この表の数値はこの端末で計算した。

寄り道：分割数と Hardy–Ramanujan

飛ばしてよい小節です。

1 色なら (6) の係数は分割数 $p(N)$ で（$4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1$ の $p(4)=5$）、Hardy と Ramanujan（1918）は $p(N)\sim\frac{1}{4\sqrt{3}\,N}e^{\pi\sqrt{2N/3}}$ を与えました 既知 。24 色の (6) では、$n=N-1$ と置くと $d_N\approx\frac{1}{\sqrt{2}}n^{-27/4}e^{4\pi\sqrt{n}}$ ですが、近づき方は遅く、比は $N=400$ でも 0.71 です。よく合うのは修正 Bessel 関数 I_{13} を使った形 $2\pi n^{-13/2}I_{13}(4\pi\sqrt{n})$ で、$N=2$ で既に 5 桁一致します（表2） 計算 。$I_\nu(x)$ は、x が大きいと $e^x/\sqrt{2\pi x}$ のように振る舞う関数です。これを入れると $2\pi n^{-13/2}\,e^{4\pi\sqrt{n}}/\sqrt{8\pi^2\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}n^{-27/4}e^{4\pi\sqrt{n}}$ となり、二つの式は大きな n で一致します。比 0.71 は、I_{13} をこの近似で置き換えたときのずれです。

寄り道：状態の増え方と Hagedorn 温度

飛ばしてよい小節です。

準位 N の開いた弦は $\alpha' M^2=N-1$ なので、上の寄り道と同じく $n=N-1$ と置くと $\alpha' M^2=n$、つまり $M=\sqrt{n/\alpha'}$ です。上の寄り道の漸近形から、状態の数は $e^{4\pi\sqrt{n}}=e^{4\pi\sqrt{\alpha' M}}$ の割で増えます（前に付く n のべきは、指数に比べてゆっくり変わります）。温度を Θ と書きます（張力の T と区別するため。ボルツマン定数を 1 とする単位）。質量 M の状態の重みはボルツマン因子 $e^{-M/\Theta}$（2-08）なので、数と重みの積は $e^{(4\pi\sqrt{\alpha'}-1/\Theta)M}$ の形になり、$\Theta>\Theta_H=1/(4\pi\sqrt{\alpha'})$ では M とともに増えて和が発散します。この Θ_H が **Hagedorn 温度**です 物理 。17-03 §06 の Hagedorn 長さ L_H（$\sigma L_H^2=\pi(d-2)/3$、σ は張力でこの章の T）に $d=D=26$、$\sigma=1/(2\pi\alpha')$ を入れると $L_H=4\pi\sqrt{\alpha'}$ で、その逆数 $1/L_H$ は Θ_H と一致します 計算 。17-03 で周期の方向を時間とみたとき $1/L$ が温度になったのと同じ読み方です。

05

なぜ 26 か（二）：中心電荷の帳尻

二つ目の導出は、世界面の上の D 個の場 X^μ を二次元の自由なスカラー場（2-02）として見ます。尺度を変えても形の変わらない二次元の理論（**共形場理論**）は**中心電荷** c を持ち、自由なスカラー 1 本で $c=1$ です。正確には、共形場理論は角度を保つ写像（**共形変換**）で不変な理論で、尺度の変更はその一部です。二次元ではこの写像が無限に多く、それが理論を強く縛ります。c は周 L の円筒の上の基底エネルギーに現れます（左右の c が等しい場合）。

$$E_0(L) = -\frac{\pi c}{6L} \tag{7}$$

（Blöte–Cardy–Nightingale 1986、Affleck 1986。Tong §4.4.1）既知。17-03 の閉じた管の $-\pi(D-2)/(6L)$ は $c=D-2$ の場合で、端のある管の $-\pi c/(24R)$ について Tong は 'c counts the number of degrees of freedom of the QCD flux tube' と書きます。Lüscher の係数は管の中心電荷を測っています。

Polyakov の定式化では世界面の計量も積分する場で、座標の取り替えと計量の尺度の変更（Weyl 変換）がゲージ対称性です。ゲージを固定すると補助の場（ゴースト。4-08 の Faddeev–Popov と同じ仕組み）が入り、中心電荷 -26 を持ちます。ゲージ対称性に量子的な破れ（アノマリー）は許されないので、合計は 0 でなければなりません（Tong §5.3）物理。

$$c_{\text{物質}} + c_{\text{ゴースト}} = D\cdot 1 + (-26) = 0 \;\Longrightarrow\; D = 26 \tag{8}$$

光円錐の $D-2$ 本と $-1/12$、共変な形の D 本とゴーストの -26 が、同じ 26 を選びます。正確には、(8) は計量の尺度（Weyl）をゲージ対称性として保つ限りの条件です。$D\neq 26$ では尺度の自由度が消えずに残り、Liouville 場と呼ばれる新しい場として振る舞います（Tong §5.3.2 の非臨界弦）。Polyakov（1981）の要旨も 'At D = 26 the string dynamics is that of harmonic oscillators …, otherwise it is described by the nonlinear integrable theory' と、$D\neq 26$ の側を別の理論として書いています。

06

なぜ 10 か：世界面の超対称性

ボゾン弦にはフェルミオン（電子やクォークの仲間）が無く、タキオンがあります。世界面に X^μ の相棒のフェルミオン ψ^μ（1 本で $c=1/2$）を加え、両者を入れ替える**世界面の超対称性**をゲージ対称性にすると、ゴーストが中心電荷 $+11$ を足します。

$$D\left(1+\frac{1}{2}\right) + (-26+11) = 0 \;\Longrightarrow\; D = 10 \tag{9}$$

Tong §5.3.1 では 'c = 26 − 11 = 15'、'D(1 + 1/2) = 15' です 物理 。光円錐でも確かめます。フェルミオンの振動は境界条件により半整数 $r = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$（Neveu–Schwarz、NS）か整数（Ramond、R）の番号を取り、零点エネルギーは符号が逆の $-\frac{1}{2}\sum r$ です。有限部分は表1です。

表1　和から $1/\varepsilon^2$ を引いた残り（切り方 $e^{-\varepsilon r}$）

ε	整数 $\sum n e^{-\varepsilon n}$	半整数 $\sum r e^{-\varepsilon r}$
0.1	-0.0832917	0.0416302
0.001	-0.0833333	0.0416667
→ 0	-1/12	+1/24

計算 この表の数値はこの端末で計算した（閉じた形と直接の和を突き合わせ）。

横一方向あたりの零点エネルギーは NS で $-\frac{1}{24} - \frac{1}{48} = -\frac{1}{16}$、R で $-\frac{1}{24} + \frac{1}{24} = 0$ です 計算 。NS の準位は $\alpha' M^2 = N - \frac{D-2}{16}$（$N$ は半整数も取る）で、第一励起 $\psi^i_{-1/2}|0\rangle$ はまた $D-2$ 成分のベクトルです。質量ゼロの条件 $\frac{1}{2} - \frac{D-2}{16} = 0$ は $D = 10$ で、(9) と一致します（図1 の「超弦」）。NS の基底 $\alpha' M^2 = -\frac{1}{2}$ のタキオンは、状態の一部を捨てる規則（Gliozzi–Scherk–Olive 1977 に帰される）で除かれるとされます 物理 。

寄り道：26 − 10 = 16 とヘテロ弦

飛ばしてよい小節です。

Green–Schwarz（1984）は 10 次元のゲージ場と重力のアノマリーが相殺される群として $SO(32)$ と $E_8 \times E_8$ を挙げ、Gross–Harvey–Martinec–Rohm（1985）はヘテロ弦を 'a chiral combination of the closed D=26 bosonic and D=10 fermionic strings' として作りました 既知 。26 と 10 の差は 16 で、$SO(32)$ と $E_8 \times E_8$ はともに階数 16、次元 496 です（E_8 は根 240 本と階数 8 で 248。1-04） 計算 。この 16 がゲージ群になる仕組みは 17-07 です。

07

なぜ 11 か：弦ではなく超重力の数

11 は弦の臨界次元ではありません。Cremmer–Julia–Scherk（1978）の要旨は 'We present the action and transformation laws of supergravity in 11 dimensions' です 既知 。**超重力**は重力子とその超対称な相棒（グラビティーノ）を含む場の理論で、11 がその上限であることは Nahm（1978）の分類の帰結とされます。

骨組みはこうです 物理 。**超電荷**は、ボソンとフェルミオンを入れ替える対称性（超対称性）の生成子で、Q はその実成分の数です。超電荷が Q 個あると、質量ゼロの多重項のヘリシティ

（進む向きの周りの回転量）の幅は $Q/8$ で、スピン 2 以下（幅 4 以下）なら $Q \le 32$。11 次元がこれに収まる最後の次元とされます。

11 次元の超重力の場は、重力子と **3-形式**とグラビティーノです。3-形式は添字を三つ持つ反対称な場で、電磁ポテンシャル A_μ（2-03）の添字を三つにしたものです。自由度を小群 $SO(9)$（$D=11$ の $SO(D-2)$）で数えると、重力子 $45-1=44$ と 3-形式 $\binom{9}{3}=84$ のボソン 128 が、グラビティーノ $9\cdot 16-16=128$ と釣り合います 計算 。グラビティーノの勘定では、$SO(9)$ の**スピノル**（フェルミオンの内部の自由度を運ぶ量）が 16 成分であることを、数としてだけ使いました。

Witten（1995）は要旨で 'It is argued … that eleven-dimensional supergravity arises as a low energy limit of the ten-dimensional Type IIA superstring' と論じました。**IIA 弦**は 10 次元の閉じた超弦の一種で、右向きと左向きの振動が持つ超対称性の向き（カイラリティ）が逆のものです。IIA 弦の結合を λ とすると、11 番目の円の半径は 11 次元の単位で

$$r(\lambda)=\lambda^{2/3} \tag{10}$$

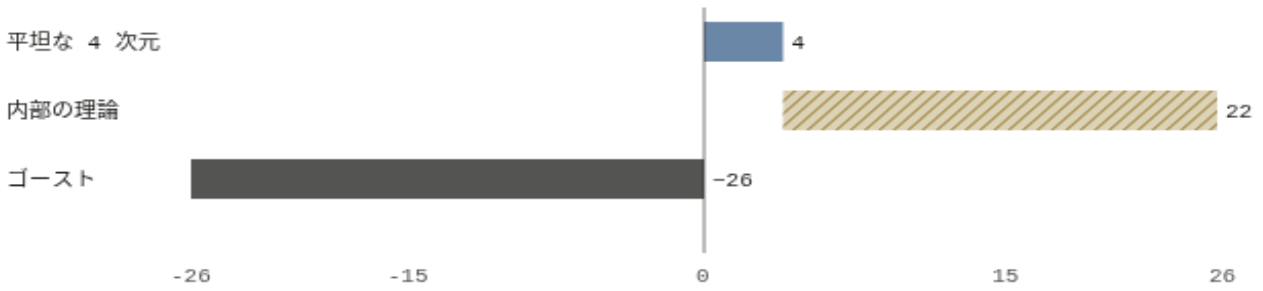
です（同論文 式 (2.13)） 物理 。弱結合では円が縮み、円を回る運動量 n の状態は弦の計量で質量 $\sim |n|/\lambda$（式 (2.14)）と重くて見えません。比喩で言えば、弦の 10 次元は細い 11 次元の筒を遠くから見た姿です。正確には、低エネルギーの議論による予想で、強結合の IIA 弦に独立な定義はありません。Hořava–Witten（原稿 1995、掲載 1996）はヘテロ弦と 11 次元の結びつきを 'We propose' の形で**提案**しました。続く論文（1996）は、境界ごとにゲージ群が E_8 一つずつに決まることを論じ、それが 'the hypothesis that there is a consistent quantum M-theory' を新たに試す材料になると書いて、M 理論の存在を仮説として扱っています。この 11 次元の理論（M 理論）に完全な定義はありません。

08

「臨界次元」は臨界中心電荷：余剰次元は幾何でなくてもよい

(8)(9) が要求しているのは次元ではなく中心電荷です。Tong は 'the "critical dimension" of string theory is something of a misnomer: it is really a "critical central charge"' と書きます 既知 。四次元の平坦な時空なら、ボゾン弦では $X^0,\dots,X^3$ の $c=4$ に $c=22$ **の任意の共形場理論**を足せばよく、Tong は 'It is what we really mean when we talk about the "extra hidden dimensions of string theory"' と続けます。超弦では平坦な四次元が $c=6$ で、残りは $c=9$ です 計算 。比喩で言えば、帳簿の総額だけが決まっていて品目は自由です。正確には、内部の理論は他の条件（世界面の超対称性など）も満たす必要があり、多様体として幾何に読めるのは特別な場合です。そのとき余剰次元がどう見えなくなるかは 17-06、ゲージ場が出る仕組みは 17-07 です。

図2　平坦な次元の数 $d_{\text{平坦}}$ を動かすと中心電荷の帳簿の内訳が変わる。減らした分を内部の理論（斜線）が引き受け、合計は 0 のまま



ボゾン弦　平坦な 4 次元 c = 4　内部 c = 22　ゴースト c = −26　合計 0

計算 この図の算術はこの端末で確かめた。JavaScript が無効なら $d_{\text{平坦}} + c_{\text{内部}} = 26$（超弦は $\frac{3}{2}d_{\text{平坦}} + c_{\text{内部}} = 15$）で読める。

09

ヤン–ミルズに戻る：四次元の管と、ホログラフィーの次元

では 17-03 の四次元の管の弦は、26 次元でないので矛盾するのでしょうか。Polchinski–Strominger（1991）の要旨は、'QCD strings' などの四次元の弦の長い距離の有効理論が 'an interacting Poincaré-invariant conformal field theory with four bosons and c=26' だと述べ、両立を摂動の二次まで示しました 物理。自由なら $c = 4$ の 4 本のボソンが、相互作用で $c = 26$ を持つ形です。臨界次元が縛るのは基本の弦で、長い管の有効理論は四次元のまま整合します。ただし有効理論は短い距離で壊れ、数学的な導出もありません（17-03 §06）。

基本の弦の余剰次元がヤン–ミルズに戻るのはホログラフィー（17-08）を通してで、内訳は模型ごとに違います。Maldacena の $AdS_5 \times S^5$（AdS_5 は負の定曲率の五次元時空で、四次元の方向と動径の方向を持つ。S^5 は五次元球面）は 10 = 4 + 動径 + S^5、Witten 1998 §4 は 11 = 4 + 円 2 つ + 動径 + S^4（IIA に下ろすと円が一つ減って 10）、Gürsoy–Kiritsis の改良ホログラフィック QCD は 5 = 4 + 動径です。ギャップを作る次元も模型で違い、Witten の型では動径と潰れる円が作る二次元の葉巻、ボトムアップ型では動径一本と赤外の特異点です（17-09）物理。これらの余剰次元は双対な記述の道具で、実在の次元だとは主張されておらず、実験の下限（17-06）とは別の話です。

切れ目

(1) 弦の理論には非摂動的な定義が無く、M 理論は存在そのものが仮説です。(2) ホログラフィーの計算が効くのは $N \to \infty$、't Hooft 結合 $\to \infty$ の側で、四次元の純ヤン–ミルズへ戻す極限とは向きが逆です（17-10）。(3) 問題文（Jaffe–Witten、2000）は、四次元で Wightman などの公理（4-09）を満たす非自明な相対論的場の理論を 'at present we do not know' と書きます。四次元の理論は、2026 年に公開された構成が Wilson の格子の

極限として作りました（委員会の評価。第二巻）。余剰次元の道は、四次元の理論をこの意味で構成していません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 (3)(5) の数え上げ（光円錐での世界面の二次元の計算として）。	弦の理論の非摂動的な定義。M 理論の存在。
物理 (4) の読み（第一励起を質量ゼロと読む）と (8)(9) の帳尻（ゴーストの中心電荷とアノマリーの議論）。	$D \neq 26$ の非臨界弦（Liouville 場）の扱い。
計算 表1・表2、図1・図2、576・496・128、Hagedorn 温度（17-03 の $1/L_H$）、α'。	表2 の Bessel 形がよく合う理由。
物理 重力子とタキオンの読み、11 次元と IIA の関係、Hořava–Witten（提案）。	「11 が上限」の原典での確認。
物理 四次元の管の有効理論が $c = 26$ で整合すること（摂動の二次まで）。模型の次元の内訳。	有効な弦の全次数での整合性。四次元のヤン–ミルズに管が在ること。余剰次元から四次元の理論を構成すること。この本は質量ギャップも連続極限の構成も自分では示していない（公開された連続極限の構成は第二巻）。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
$J_{\max}$、(2)〜(9)、各引用	既知・物理	D. Tong, "String Theory", arXiv:0908.0333 §2.2–2.4・§3.1・§4.4.1・§5.3（§5.3.2 の非臨界弦を含む）。本文を確認。
光円錐量子化と $D = 26$（(4)(5) の原典）／'At D = 26 …'	既知・物理	P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebbi, C. B. Thorn, Nucl. Phys. B56 (1973) 109／A. M. Polyakov, Phys. Lett. B103 (1981) 207。要旨を確認。
中間子の模型、NS と R／タキオンを除く規則	既知・物理	G. Veneziano, Nuovo Cim. A57 (1968) 190（書誌のみ。双対共鳴模型の出発点という位置づけは未確認）／A. Neveu, J. H. Schwarz, Nucl. Phys. B31 (1971) 86／P. Ramond, Phys. Rev. D3 (1971) 2415（要旨を確認）／F. Gliozzi, J. Scherk, D. Olive, Nucl. Phys. B122 (1977) 253（要旨のみ。射影の帰属は未確認）。
小群／式 (7)	既知	E. P. Wigner, Ann. of Math. 40 (1939) 149／H. W. J. Blöte, J. L. Cardy, M. P. Nightingale, PRL 56 (1986) 742／I. Affleck, PRL 56 (1986) 746。書誌のみ（内容は Tong で確認）。

もの	種別	出典・道具
アノマリー相殺／ヘテロ弦	既知	M. B. Green, J. H. Schwarz, Phys. Lett. B149 (1984) 117／D. J. Gross, J. A. Harvey, E. J. Martinec, R. Rohm, PRL 54 (1985) 502。要旨を確認。
11 次元超重力／上限	既知	E. Cremmer, B. Julia, J. Scherk, Phys. Lett. B76 (1978) 409（要旨を確認）／W. Nahm, Nucl. Phys. B135 (1978) 149（要旨のみ。「11 が上限」は未確認）。
(10)、KK 質量、Hořava–Witten	物理	E. Witten, Nucl. Phys. B443 (1995) 85, hep-th/9503124（本文を確認。式 (2.13) (2.14)）／P. Hořava, E. Witten, Nucl. Phys. B460 (1996) 506, hep-th/9510209（原稿 1995-10）と Nucl. Phys. B475 (1996) 94, hep-th/9603142（要旨を確認）。
四次元の管と $c = 26$	物理	J. Polchinski, A. Strominger, PRL 67 (1991) 1681。要旨を確認。
分割数の漸近形	既知	G. H. Hardy, S. Ramanujan, Proc. London Math. Soc. (2) 17 (1918) 75。書誌のみ。
模型の内訳／問題文	物理・既知	J. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 231, hep-th/9711200／E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 505, hep-th/9803131 §4／U. Gürsoy, E. Kiritsis, JHEP 02 (2008) 032, arXiv:0707.1324（要旨）／A. Jaffe, E. Witten, "Quantum Yang–Mills Theory"（Clay の問題文、2000）。Witten 1998 §4 と問題文は本文を確認。
表・図・算術	計算	この端末の Python 3。zero_point.py（表1）、levels.py（表2・$SO(D-1)$・Hagedorn・α'）、counts.py（576・128・496・帳尻）。

次に読む章：17-06 余剰次元が見えなくなる仕組み ― 幾何として読める余剰次元が、なぜ四次元の実験に映らないか。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 17 部 物理の側から 余剰次元・Kaluza–Klein

余剰次元が見えなくなる仕組み — 小さな円の上の波は、重い粒子の塔として見える

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 余剰次元が見えないとは、その方向の揺れが重い粒子の列（KK 塔）になり、低いエネルギーでは作れないことです。塔の最低段はラプラシアンの第一固有値で、曲率が非負なら直径で押さえられること（Zhong–Yang）。Calabi–Yau と膜という二つの隠し方と、実験の下限。

前提となる章 — 17-05 ひも理論と余剰次元。2-02 §06・2-05 §08・1-10 §07 を使います。フーリエ級数とレイリー商はその場で書き、計量・ラプラシアン・Ricci 曲率・Einstein 方程式は使う分だけその場で定義します。

先に言うこと — 現実の世界に余剰次元があるかは分かっておらず、実験の数値は下限です。KK 塔の隙間は内部空間が小さいことから来るもので、ヤン–ミルズの質量ギャップ（$\mathbb{R}^4$ の上で相互作用から生じるもの）とは別物です。この本は質量ギャップも連続極限の構成も自分では示していません（公開された連続極限の構成は第二巻で読みます）。

この章の順序

1. 「見える」とは — 分解能は ħc/E
2. 円の上の場 — 一つの場が塔になる
3. 塔の最低段 — 第一固有値と直径（計量・ラプラシアン・Ricci 曲率の最小限）
4. Kaluza と Klein — 電荷は運動量
5. 弦の六次元 — Calabi–Yau
6. 膜に閉じ込める — ADD と RS（寄り道：隙間の無い余剰次元）
7. 実験の下限 — ニュートン則と加速器
8. ヤン–ミルズに戻る — KK の隙間は質量ギャップではない

01

「見える」とは — 分解能は ħc/E

物理で見るとは、粒子をぶつけて跳ね返りを調べることです。大きさ ℓ の構造を見分けるには波長が ℓ より短い探り針、つまり高いエネルギーが要ります（2-05）。

$$\ell \approx \frac{\hbar c}{E}, \qquad \hbar c = 197.327\ \mathrm{MeV}\cdot\mathrm{fm} \tag{1}$$

1 TeV なら 2.0×10^{-19} m、LHC の衝突エネルギー 13.6 TeV なら 1.5×10^{-20} m、プランク質量 1.22×10^{19} GeV なら 1.6×10^{-35} m です 計算 。以下 $\hbar = c = 1$ とします（2-04 §08）。比喩で言えば、遠くから見た庭のホースは線ですが、近づくと一周する方向が見えます。正確には、この章で言うのは「小さな円に沿った揺れには高いエネルギーが要る」ということです。

02

円の上の場 — 一つの場が塔になる

空間の各点に半径 R の円が付いた五次元の時空 $\mathbb{R}^{1,3}\times S^1$ を考えます（円の座標 y は $y+2\pi R$ と同一視）。質量ゼロのスカラー場 $\Phi(x,y)$ は波動方程式に従い（2-02）、y について周期的なのでフーリエ級数に展開できます（1-11）。

$$\left(\partial_t^2 - \nabla^2 - \partial_y^2\right)\Phi = 0, \qquad \Phi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_n(x)\, e^{iny/R} \tag{2}$$

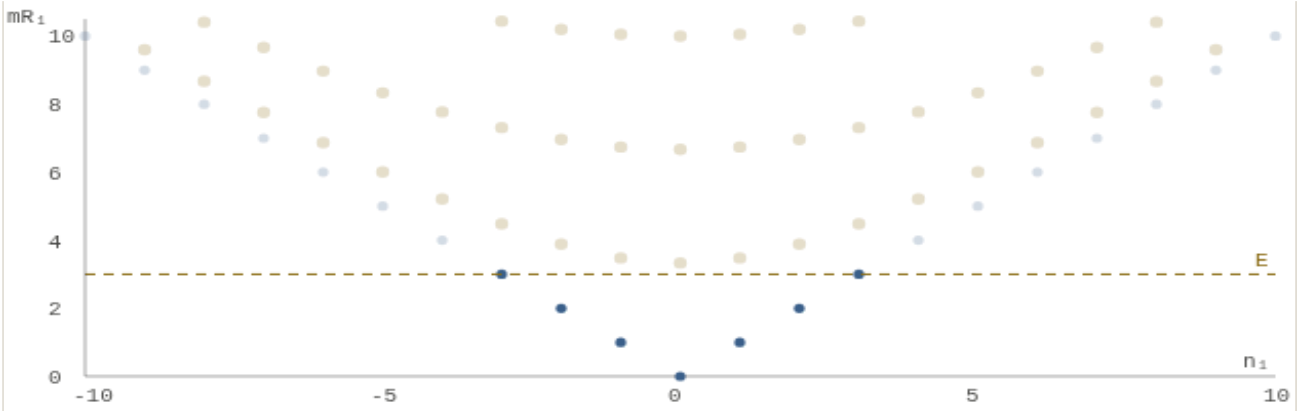
代入すると ∂_y^2 が $-n^2/R^2$ に置き換わり、係数ごとに方程式が分かれます。

$$\left(\partial_t^2 - \nabla^2 + \frac{n^2}{R^2}\right)\phi_n = 0, \qquad m_n = \frac{|n|}{R} \tag{3}$$

質量 m_n の Klein–Gordon 方程式です（2-02 §06）。五次元の場一つが、四次元では質量ゼロの**ゼロモード** ϕ_0 と、質量 $1/R, 2/R, \dots$ の場の無限の列に見えます。これが **Kaluza–Klein 塔**（KK 塔）です 既知 。PDG は 'At energies smaller than 1/R, the KK modes can be neglected, leaving the zero-mode action' と書きます。ゼロモードの結合は薄まり、四次の相互作用なら $\lambda_4 = \lambda_5/(2\pi R M_5)$（PDG 式 84.6）で、円が大きいほど弱くなります。M_5 は五次元の理論の基本の質量尺度で、λ_5 を無次元にするために入ります。

δ 個の円の積（トーラス T^δ、半径 R_i）なら、整数の組 n ごとに $m^2 = \sum_i n_i^2/R_i^2$ の場が出ます。図1 は円二つの場合です。

図1　円二つ（$R_1 \ge R_2$）の KK 塔。点は四次元の場（横 n_1、縦は質量）。E（破線）と半径の比を動かすと E より下の場が変わる



E·R₁ = 3.00　R₂/R₁ = 0.30　E 以下の場 7 個（Weyl の見積もり 8.5）　細い方向はまだ見えない

表1　質量 E 以下の四次元の場の個数（ゼロモードを含む）。括弧は Weyl の見積もり $\pi R_1 R_2 E^2$（面積 $4\pi^2 R_1 R_2$ に $E^2/4\pi$ を掛けたもの。1-10 の寄り道）

R_2/R_1	$ER_1 = 2$	**5**	**10**	**30**
1	13 (12.6)	81 (78.5)	317 (314.2)	2821 (2827.4)
0.1	5 (1.3)	11 (7.9)	23 (31.4)	267 (282.7)
円一つ	5	11	21	61

計算　表1 と図1 の数値はこの端末で計算した（図は (3) の式からその場で描く）。JavaScript が無効なら表1 を。

$R_2/R_1 = 0.1$ の行は $ER_1 \le 5$ で円一つと同じで、細い方向は $E \gtrsim 1/R_2$ になってから現れます。個数は E の（見えている余剰次元の数）乗で増えます。

03

塔の最低段 — 第一固有値と直径

最低段 $1/R$ は不等式として言い直せます。平均 0 の周期関数 $f = \sum_{n\neq 0} c_n e^{iny/R}$ では、Parseval の等式から（Wirtinger の不等式）既知

$$\int_0^{2\pi R} |f'|^2\, dy = 2\pi R \sum_{n\neq 0} \frac{n^2}{R^2}|c_n|^2 \;\ge\; \frac{1}{R^2}\int_0^{2\pi R} |f|^2\, dy \tag{4}$$

2-05 §08・1-10 §07 の Poincaré 不等式の最も簡単な例で、最良の定数 R^2 は隙間 $1/R^2$（塔の最低段の二乗）の逆数です。

長さを測る — 計量・直径・ラプラシアン

円を一般のコンパクトな多様体 K（1-05）に替えるには、長さの測り方が要ります。各点の接空間（1-05 §06）に内積を一つずつ、点について滑らかに与えたものを**計量**と言います。長さと角の測り方です。計量があれば曲線の長さが測れ、二点を結ぶ最短の道の長さが二点の距離になります。その距離の、全ての二点についての最大が**直径** d です（周の長さ $2\pi R$ の円なら

$d = \pi R$。この章の d は直径で、他の章の時空の次元 d とは別)。関数の勾配の大きさ $|\nabla f|$ も計量で決まり、$\int_K |\nabla f|^2 = \int_K \bar{f}\,(-\Delta_K f)$ となる作用素 $-\Delta_K$ を**ラプラシアン**（Laplace–Beltrami 作用素）と言います。平坦なトーラスでは、長さで測った座標 y_i で $-\Delta_K = -\sum_i \partial^2/\partial y_i^2$ です。

時空が歪みの無い直積 $\mathbb{R}^{1,3} \times K$、場がスカラーなら、$-\Delta_K$ の固有関数（固有値 $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \cdots$）で展開して $m_j^2 = \lambda_j$。最初の KK 質量はレイリー商の最小値です（1-10 §06）。

$$m_1^2 = \lambda_1(K) = \inf\left\{ \frac{\int_K |\nabla f|^2}{\int_K |f|^2} \;:\; \int_K f = 0,\ f \neq 0 \right\} \tag{5}$$

形式・スピノルの場や歪みのある背景では、別の作用素（Hodge ラプラシアン、Dirac 作用素など）の固有値になります。この章では「余剰次元が見えない」を、ゼロモードを除いた部分の Poincaré 不等式 $\int |\nabla f|^2 \ge \lambda_1 \int |f|^2$ と言い直します。

直径で足りる条件 — Ricci 曲率

計量を s^2 倍する（長さを全部 s 倍する）と λ_1 は s^{-2} 倍なので、縮めれば塔は持ち上がります。「小さい」を直径 d だけで測ってよいことは、Ricci 曲率が非負なら定理です。

Ricci 曲率は、比喩で言えば、一点から一つの向きのまわりに出た測地線（局所的に最短の道）の束が、進むにつれてどれだけ寄り集まるかの平均です。球面では正（経線は極で集まる）、平坦なトーラスでは 0、鞍の形の面では負（広がる）です。正確には、長さ 1 の向き v について、v と、v に直交する向き e_i とで張る $n-1$ 個の断面の曲がり（断面曲率）の和 $\mathrm{Ric}(v,v) = \sum_i K(v, e_i)$ で、平均の $n-1$ 倍です。二次元では断面が一つなので Gauss 曲率と同じです。曲がりそのものは、接空間の束に計量から決まる接続を入れたときの、1-07 §05 の意味の曲率（小さな輪を回ったときのずれ）です。$\mathrm{Ric}_K \ge 0$ は、どの点のどの向きでもこの和が 0 以上だという条件です 既知 。

$$\mathrm{Ric}_K \ge 0 \implies \lambda_1(K) \;\ge\; \frac{\pi^2}{d^2} \qquad \text{(Zhong–Yang。等号は円だけ：Hang–Wang)} \tag{6}$$

表2　比 $\lambda_1 d^2/\pi^2$。(6) はこれが 1 以上だと言う 計算

K	比	K	比
円	1	正方形のトーラス	2
長方形のトーラス 1×0.2	1.04	六角形のトーラス	1.7778
長方形のトーラス 1×0.05	1.0025	球面 $S^2 \cdot S^3 \cdot S^6$	2・3・6

トーラスは数値で求め、閉じた式（長方形 $1+\rho^2$、六角形 $16/9$）と 5 桁で一致。球面は既知の値。

細いトーラスの比は 1 に近づきますが 1 にはなりません。曲率の条件は外せません。二つの球を細い首でつなぎ、片方で $+1$、他方で -1 の関数を (5) に入れると、分子は首からしか来ない

ので、首を細くすれば直径はほぼそのままでレイリー商はいくらでも小さくなります。首の付け根では曲率が大きく負になり、$\mathrm{Ric} \geq 0$ が破れます。よく知られた例です 既知 。

04

Kaluza と Klein — 電荷は円を回る運動量

余剰次元の考えは 1920 年代の Kaluza と Klein にさかのぼります（PDG の序文）。五次元の時空にも §03 の意味の計量があります（時空では、各点の内積に当たるものの符号が 2-04 の $\eta = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ のように一つだけ負で、それが点ごとに変わってよいもの）。その成分 15 個は、四次元の計量 $g_{\mu\nu}$ の 10・ベクトル A_μ の 4・スカラー ϕ の 1 に分かれます。Overduin–Wesson の総説の式 5・8 を符号 $(-,+,+,+,+)$ で書き直すと[注1]

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \phi^2\big(dy + \kappa A_\mu dx^\mu\big)^2, \qquad \kappa = \sqrt{16\pi G} \tag{7}$$

Einstein 方程式は、計量の曲がり（曲率）を物質のエネルギーに結ぶ重力の方程式です。ここでは中身に立ち入らず、成分の数え方だけを使います。どの成分も y によらないとすると、五次元の Einstein 方程式は四次元の 10＋4＋1＝15 本の方程式に分かれます（同 式 6）。ϕ を定数とおくと、15 本のうち計量とベクトルの成分の方程式が四次元の Einstein 方程式と Maxwell 方程式になります（同 式 7） 既知 。ただし残るスカラーの方程式は $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0$ のときしか $\phi =$ 定数と両立しません（Jordan・Thiry の指摘、同 §3.4）。座標の付け替え $y \mapsto y + \kappa\lambda(x)$ は $A_\mu \mapsto A_\mu - \partial_\mu\lambda$ を引き起こし、ゲージ変換（2-03）が円の方向の座標の取り直しとして現れます。

Klein（1926）は Kaluza の理論を波動力学と結びつけ（要旨）、円を小さくしました。(2) の n 番目の成分の運動量 n/R が、(7) の下で電荷になります（同 式 25、$\phi = 1$）。

$$q_n = \frac{n\sqrt{16\pi G}}{R}, \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{8}$$

電荷は q_1 の整数倍に限られます（Klein の同年の短信の題は 'The Atomicity of Electricity as a Quantum Theory Law'）。比喩で言えば電荷は見えない円を回る運動量で、正確には運動量 n/R に規約で決まる定数 κ を掛けたものです。

$q_1 = e$（$e^2/4\pi = \alpha \approx 1/137.036$）と置くと $R = 2\ell_P/\sqrt{\alpha} \approx 3.8 \times 10^{-34}$ m（プランク長の約 23 倍）で、塔の一段目は $1/R \approx 5.2 \times 10^{17}$ GeV、電子の質量の約 10^{21} 倍です 計算 。Overduin–Wesson は半径をプランク長とおいて食い違いを約 22 桁と見積もり、それが 'played a large role in the abandonment of five-dimensional Kaluza-Klein theory' と書きます。内部空間に非可換な対称性があれば非可換なゲージ場が出てきえます（17-07） 物理 。

05

弦の六次元 — Calabi–Yau に丸める

超弦理論の時空は十次元なので（17-05 §06）、四次元に見せるには六次元の内部空間 K が要ります。Candelas–Horowitz–Strominger–Witten（1985）は四次元に超対称性を一つ残す真空を調べ、要旨で 'This condition permits only a few possibilities' と書きました。条件を満たす K は Ricci 曲率が 0 の Kähler 多様体（計量と複素構造がかみ合った複素多様体）で、ホロノミー（1-07）が SU(3) に収まるもの、**Calabi–Yau 多様体**だとされます 物理 。

そうした計量が在ることは数学の定理です。Yau は 1977 年に 'We announce a proof of Calabi's conjectures on the Ricci curvature of a compact Kähler manifold' と告知しました（論文は 1978 年）。帰結として、第一 Chern 類が 0 のコンパクトな Kähler 多様体は Ricci 平坦な Kähler 計量を持ちます 既知 。Ricci 平坦なら (6) が使えるので、直径 d の Calabi–Yau の上のスカラーの KK 塔は π/d より上から始まります。

大きさについて PDG の序文は 'The extra dimensions were supposed to be compactified at a scale close to the Planck scale, and thus not testable experimentally in the near future' と書きます。形は粒子の中身を左右します（CHSW の模型は 'an E6 gauge group with four standard generations of fermions'）。

06

膜に閉じ込める — ADD と RS

1998 年、Arkani-Hamed–Dimopoulos–Dvali（ADD）は、標準模型の場を三次元の膜（3 ブレーン）に閉じ込め、重力だけを $4+\delta$ 次元に広げる隠し方を提案しました。重力でしか探れないので、余剰次元は大きくてもかまいません。要旨は 'The observed weakness of gravity on distances $\gtrsim 1$ mm is due to the existence of n ≥ 2 new compact spatial dimensions large compared to the weak scale' です 物理 。重力の弱さは §02 の λ_4 と同じ薄まり方で、基本の尺度 M_D と換算プランク質量 $M_P \approx 2.4 \times 10^{18}$ GeV は（PDG 式 84.10）

$$M_P^2 = R^{\delta} M_D^{2+\delta} \tag{9}$$

表3　(9) から決まる R（PDG 式 84.11 の「10^9 km, 0.5 mm, ⋯, 0.1 MeV^{-1}」を再現） 計算

δ	$M_D = 1$ TeV	$M_D = 4$ TeV
1	1.2×10^{12} m	1.8×10^{10} m
2	4.8×10^{-4} m	3.0×10^{-5} m
6	2.6×10^{-14} m	4.2×10^{-15} m

$\delta = 1$ は太陽系の大きさで 'clearly ruled out'（PDG）、$\delta = 2$ で 0.5 mm です。翌 1999 年、Randall–Sundrum（RS）は五次元の反 de Sitter 空間の一片を使いました（PDG 式 84.16）。

$$ds^2 = e^{-2ky}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2, \qquad 0 \le y \le \pi R \tag{10}$$

反 de Sitter 空間は、負の一定の曲率を持つ時空です（17-08）。(10) の計量は、曲率の半径が $1/k$ のその時空の、$0 \le y \le \pi R$ の一片です。$y = \pi R$ の端の尺度は $e^{-k\pi R}$ 倍に赤方偏移します。PDG は $k \sim M_P$、$R \simeq 11/k$ で TeV が出ると書き、$kR = 11$ で $ke^{-k\pi R} \approx 2.4$ TeV、kR を 10 から 12 に変えると 55 TeV から 0.1 TeV まで動きます 計算 。大きな比を指数で作る点は次元転移（17-01）に似ています。正確には、RS では指数が幾何（kR）から、次元転移では結合の走り（$1/g^2$）から来ます。歪んだ余剰次元と四次元の強結合の理論を結ぶ見方は AdS/CFT（17-08）で、予想の水準です 物理 。

寄り道：隙間の無い余剰次元

飛ばしてよい小節です。

RS の同年の論文は、余剰次元が無限に長くても四次元の重力が再現されうると論じました：'even without a gap in the Kaluza-Klein spectrum, four-dimensional Newtonian and general relativistic gravity is reproduced to more than adequate precision' 物理 。見えないことに塔の隙間は必須ではありません。

07

実験の下限 — ニュートン則と加速器

ニュートン則からのずれは湯川型で表す習わしです（PDG 式 84.12）。

$$V(r) = -G_N \frac{m_1 m_2}{r}\left(1 + \alpha\, e^{-r/\lambda}\right) \tag{11}$$

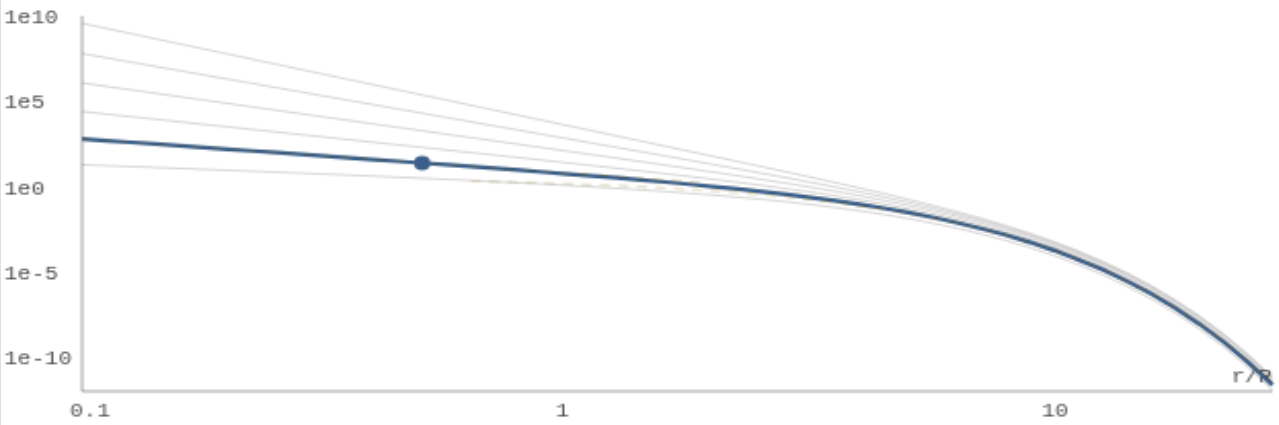
質量 m の場のやり取りは湯川ポテンシャル e^{-mr}/r を与え、KK モード一つにつき一項が足されます。スカラー（ニュートン型）の模型で T^δ（半径 R）の塔を全部足すと

$$\frac{V(r)}{V_{\mathrm{N}}(r)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^\delta} e^{-|k|\,r/R} \xrightarrow{\;r \gg R\;} 1 + 2\delta\, e^{-r/R} \tag{12}$$

2δ は一段目の場の個数、$\delta = 1$ では和は $\coth(r/2R)$ です。$r \ll R$ では $V \propto r^{-1-\delta}$、$3+\delta$ 次元の空間の法則になります。重力子では係数が変わります。重力子の KK モードは質量を持つスピン 2 の場で、偏極の寄与により一段目の係数が 4/3 倍になるとされ、PDG は二次元トーラ

スで $\alpha = 16/3$（(12) の 4 の 4/3 倍）、$\lambda = R$ とします 物理 。(12) は重力の式そのものではなく、塔を足すと湯川型のずれが出る仕組みを見るための模型です。

図2　(12) の $V/V_{\mathrm{N}} - 1$（対数目盛）。δ と r/R を動かすと、ずれと読める空間の次元が変わる。破線は二つの近似



δ = 2　r/R = 0.501　V/V_N = 25.13　読める空間の次元 ≈ 5.0（遠くで 3、近くで 5）

表4　(12) の比 V/V_{N}

δ	$r/R = 0.1$	**1**	**10**
1	20.02	2.164	1.000091
2	628.3	6.507	1.000184
6	3.72×10^{9}	3721	1.000593

計算 図2 と表4 の数値はこの端末で計算した（$|k| \le 420$ の和。$\delta = 1$ は coth と 12 桁、$r \to 0$ は積分の近似と 5 桁で一致）。JavaScript が無効なら表4 を。

$r \gg R$ でずれが $e^{-r/R}$ で消えることが、「見えない」の定量的な中身です。

表5　PDG 2025 の下限（長さは (1) で換算 計算 ）

何を探したか	下限
逆二乗則（ねじれ秤）	$\delta = 2$ で $R < 30$ μm、$M_D > 4.0$ TeV
超新星 SN1987A／中性子星	$\delta = 2$ で $M_D > 27$／1700 TeV
LHC の重力子放出（ATLAS／CMS）	$M_D > 5.9$–11.2／5.5–10.7 TeV（$\delta = 2$–6）
RS の最も軽い KK 重力子	ATLAS 4.5 TeV（$k/M_P = 0.1$）、CMS 2.2–5.6 TeV
ゲージ場が平坦な余剰次元を走る	$1/R > 4.16$ TeV（ATLAS の読み替え。4.7×10^{-20} m）、LEP2 から $\gtrsim 6$ TeV
全部の場が走る（UED）	$1/R > 1.4$–1.5 TeV。最小の模型は暗黒物質と合わせて排除

逆二乗則の実験の一つ（Tan ほか 2016）は $|\alpha| \le 1$ を $\lambda = 59$ μm まで確かめています（要旨）。観測されているゲージ場は 5×10^{-20} m 程度まで四次元的で、重力は数十 μm まで逆二乗則に従っています。余剰次元は見つかっていませんが、無いと示されたわけでもありません。

08

ヤン–ミルズに戻る — KK の隙間は質量ギャップではない

KK の隙間は質量ギャップではありません。塔の最低段は内部空間がコンパクトなことだけから出る隙間で、自由な場にもあり、ゼロモードには隙間がありません。箱の中の自由な場の隙間（2-02 §06・2-05 §06）と同じ計算です。懸賞問題が求めるのは、コンパクトな方向の無い $\mathbb{R}^4$ の上で相互作用から生じる隙間で（4-11）、Jaffe–Witten は 'no present ideas point the direction to establish the existence of a mass gap that is uniform in the volume' と書いています。

二種類の余剰次元を混ぜないこと。§07 の下限は現実の余剰次元についてです。ホログラフィーの模型（17-08・17-09）の余剰次元（反 de Sitter 空間の動径、S^5、Witten の模型の補助の円）は双対な記述や正則化の道具で、実在の次元だとは主張されていません。

模型の中では塔が見えています。ギャップを幾何から読む模型では、余剰次元の KK 塔がグルーボールと同じ高さに来ます（$\mathcal{N}=1$ 超対称ヤン–ミルズの Maldacena–Núñez の模型では、重力近似が有効なら 'comparable to the masses of Kaluza Klein states'。著者は、この背景の上で弦を量子化できれば KK 状態を分離できそうだとも書いています）物理。塔を消すには余剰次元を縮めねばならず、そのとき結合は弱くなるので（四次元では漸近自由のため）、それは計算の効く領域の反対側です（Csáki らは Witten の三次元の模型について：'This is the opposite of the limit that is required for the supergravity description to be valid'）。極限の順序は 17-10 で扱います。

切れ目

「見えない」が定理として言えるのは、固定した内部空間の上の線形の揺らぎ（(4)〜(6)）だけです。相互作用する理論で塔が分離すること、とくに四次元に戻す極限でそうなることを正当化した結果は、探した範囲で見当たりません。

注1　Overduin–Wesson は四次元の符号を $(+,-,-,-)$ にとり、$\kappa \equiv 4\sqrt{\pi G}$（式 8）と置きます。(7) は符号を本書の $(-,+,+,+)$ に揃えたもので、$\kappa = \sqrt{16\pi G}$ は同じ値です。本文へ

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 (2)〜(8)、Yau の定理。	歪みのある背景や形式・スピノルの塔の一般の下界。ϕ を定数に保つことの整合性（スカラーの方程式が $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=0$ を要求する）。
計算 表1〜表5、図1・図2、Klein の半径、(9) による PDG の数値の再現。	(12) はスカラー模型。重力子の 16/3 は PDG の引用で、4/3 倍の由来はこの章では導いていない。
物理 Calabi–Yau の条件、ADD・RS、非可換なゲージ場、模型の塔の高さ。	現実の余剰次元の有無。模型の塔が四次元に戻す極限で分離すること。この本は質量ギャップも連続極限の構成も自分では示していない（公開された連続極限の構成は第二巻）。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
(2)(3)・(9)〜(11)・16/3・表5・引用	既知・物理	Z. Demiragli, A. Pomarol, "84. Extra Dimensions"（PDG, PRD 110 (2024) 030001 の 2025 年 8 月改訂）。本文を確認。
(7)(8)、Kaluza・Klein	既知	J. M. Overduin, P. S. Wesson, Phys. Rep. 283 (1997) 303, gr-qc/9805018 §3・§4（本文を確認。式 5〜8・25、§3.4 の ϕ 定数の条件）。Th. Kaluza, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. (1921) 966（書誌のみ）。O. Klein, Z. Phys. 37 (1926) 895（要旨を確認）；Nature 118 (1926) 516（書誌のみ）。
(6)	既知	J. Q. Zhong, H. C. Yang, Sci. Sinica Ser. A 27 (1984) 1265（書誌のみ。主張は Ling–Lu の概説による。概説の書誌は未確認）。F. Hang, X. Wang, IMRN 2007, rnm064, doi:10.1093/imrn/rnm064（書誌のみ）。
Calabi–Yau の条件	物理	P. Candelas, G. T. Horowitz, A. Strominger, E. Witten, NPB 258 (1985) 46。要旨を確認（Calabi–Yau の語と SU(3) ホロノミーは本文未確認）。
Yau の定理	既知	S.-T. Yau, PNAS 74 (1977) 1798（要旨を確認）；CPAM 31 (1978) 339（書誌のみ）。
ADD・RS・逆二乗則	物理	N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, PLB 429 (1998) 263。L. Randall, R. Sundrum, PRL 83 (1999) 3370；同 4690。W.-H. Tan ほか, PRL 116 (2016) 131101。要旨を確認。
§08 の引用	既知・物理	A. Jaffe, E. Witten, "Quantum Yang–Mills Theory"（Clay の問題記述。Clay 公開の PDF。本文を確認）。J. Maldacena, C. Núñez, PRL 86 (2001) 588, arXiv:hep-th/0008001（要旨を確認）。C. Csáki, H. Ooguri, Y. Oz, J. Terning, JHEP 9901 (1999) 017, arXiv:hep-th/9806021（本文を確認）。
表・図・数値	計算	この端末の Python 3（numpy）：kk_count.py、zhong_yang.py、units_klein.py、add_rs.py、newton_kk.py（図2 に埋めた値は同じ計算を小数 4 桁で出したもの）。

次に読む章：17-07 ゲージ場はどこから来るか — 膜と幾何からゲージ群を取り出す。

ゲージ場はどこから来るか — 群は膜の枚数・格子・特異点の形から読み取られる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 余剰次元の側でゲージ群が出力になる四つの仕組み（内部空間の対称性・重なった膜・弦の内部の格子・潰れる球）。膜の位置が行列の固有値になり、ADE が「負定値」という線形代数から出ること。純ヤン–ミルズへ下りる道と、それが頼る期待。

前提となる章 — 17-06 余剰次元が見えなくなる仕組み。根（1-04）、ホロノミー（1-07）、中心電荷（17-05）を使います。交差数と格子はその場で定義します。

先に言うこと — 仕組みはすべて物理の水準で、弦の理論にも M 理論にも数学的な定義はありません。群が幾何から出ることと、四次元の量子ヤン–ミルズ理論が存在して質量ギャップを持つことは別の問題です。この本は質量ギャップも連続極限の構成も自分では示していません（公開された連続極限の構成は第二巻で読みます）。

この章の順序

1. 群は入力か出力か — 四つの出どころ
2. 内部空間の対称性 — 非可換な Kaluza–Klein
3. 膜の上の弦 — N 枚で U(N)
4. 位置が行列になる — 固有値が膜の位置
5. ヘテロ弦 — 16 次元の格子（寄り道：同じ塔、違う群）
6. Calabi–Yau に巻く — 可換な部分
7. 潰れる球と ADE — 負定値
8. 折りたたみと幾何工学
9. 十一次元から純ヤン–ミルズへ — 二つの円と期待
10. ヤン–ミルズに戻る — 群は難しさの在りかではない

01

群は入力か出力か — 四つの出どころ

四次元のヤン–ミルズ理論では、ゲージ群 G は手で選ぶ入力です。懸賞問題の文（Jaffe–Witten）も 'for any compact simple gauge group G' と書き、1-04 の一覧のどれでもよいとします（0-03）。余剰次元を持つ理論では、群が別のものから読み取られる出力になります 物理 。

対称性	膜の枚数	格子	特異点
内部空間の等長変換	D ブレーン N 枚で U(N)	ヘテロ弦の余った 16 次元	潰れる球の並びで ADE
§02	§03–04	§05–06	§07–08

どの道でも決まるのは低いエネルギーで見える場の組と群で、四次元の量子論の存在ではありません。四つのうち膜・格子・特異点の三つは超対称な設定（ボソンとフェルミオンを入れ替える対称性を持つ理論）の中の話で、そのことが純ヤン–ミルズにとって何を意味するかは §10 で振り返ります。

02

内部空間の対称性 — 非可換な Kaluza–Klein

17-06 §04 では円の回転が U(1) になりました。内部空間 K の距離を変えない変換（等長変換）の群 $\mathrm{Isom}(K)$ が大きければ、その無限小の生成元（キリングベクトル場）一本ごとにゲージ場が一本出て、生成元の交換子が構造定数（1-03）になります 物理 。球面の回転の生成元 $L_a = \varepsilon_{abc} x_b \partial_c$ では

$$[L_a, L_b] = -\varepsilon_{abc}\, L_c, \qquad \dim SO(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

で（左の式は数値で確かめた 計算 ）、S^n からは $n(n+1)/2$ 本、$\mathbb{CP}^2$（$\mathbb{C}^3$ の原点を通る複素直線全体。実 4 次元）からは SU(3) の 8 本のゲージ場が出ます 既知 。等長変換の群が局所的に（リー環として）SU(3)×SU(2)×U(1)（3-07）になる七次元の空間の一例が $\mathbb{CP}^2 \times S^2 \times S^1$（$4+2+1=7$ 次元）で、四次元と合わせて全体は $4+7=11$ 次元になります。

Witten（1981）は十一次元の超重力を七次元の空間に丸める道を調べ、要旨で 'It is possible to obtain an SU(3) × SU(2) × U(1) gauge group, but the proper fermion quantum

numbers are difficult to achieve' と書きました。Witten が調べた七次元の空間が上の例と同じとは限りません。

03

膜の上の弦 — N 枚重ねると U(N)

開いた弦の端を部分空間に張り付ける境界条件を課すと、その部分空間が **D ブレーン**です（Polchinski 1995：'extended objects defined by mixed Dirichlet-Neumann boundary conditions in string theory'）物理。空間 p 次元のものを Dp ブレーンと呼びます。弦の両端に膜の番号 $1, \dots, N$ を付けると、状態は $N \times N$ 行列を係数に持ち、質量ゼロのベクトルは U(N) の随伴表現（1-04）になります（Polchinski の講義 1996：'this global symmetry of the world-sheet theory is elevated to a gauge symmetry in spacetime'）。弦は N^2 種類、$\dim U(N) = N^2$ です。

膜を離すと間の弦は重くなります（Witten 1995b §3。T は弦の張力、a_i は膜の位置）。

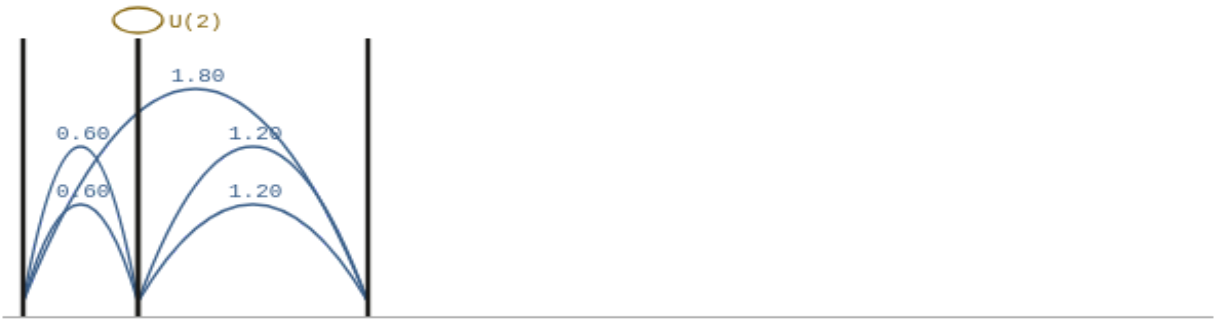
$$m_{ij} = T\,|a_i - a_j| \tag{2}$$

$n_1, n_2, \dots$ 枚ずつ重なれば、残る群は $U(n_1) \times U(n_2) \times \cdots$ で

$$\#\{\text{質量ゼロのベクトル}\} = \sum_k n_k^2, \qquad \#\{\text{重い W}\} = N^2 - \sum_k n_k^2 \tag{3}$$

です（Polchinski の講義にも同じ勘定）。膜を離すことは、ヒッグス機構を幾何の側から見たものです。正確には、§04 の随伴スカラー X^i が対角の値 $\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_N)$ を取ると、非対角のゲージ場が (2) の質量を得ます。スカラーの値でゲージ場が重くなるこの仕組みをヒッグス機構と呼びます（3-07）物理。

図1　四枚の膜（縦線）の間隔 d_1, d_2, d_3 を動かすと、残る群と W の質量が変わる。弧は重い弦（数字は質量/T）、上の輪は重なった膜の間の弦。重い弦は向きが二通り（$i \to j$ と $j \to i$）あるので、弧一本・質量一つにつき 2 本と数える



群 U(2)×U(1)²　質量ゼロ 6・重い 10　W の質量/T（各 2 本）：0.60, 0.60, 1.20, 1.20, 1.80

表1　四枚の膜の重なり方と (3) の数（重い弦は向きが二通りあるので、W の質量一つにつき 2 本）

重なり方	4	3+1	2+2	2+1+1	1+1+1+1
残る群	U(4)	U(3)×U(1)	U(2)×U(2)	U(2)×U(1)^2	U(1)^4
質量ゼロ／重い	16／0	10／6	8／8	6／10	4／12

計算 表1 はこの端末で数え、図1 は (2)(3) からその場で描く。JavaScript が無効なら表1 を。

離れた四枚の W の質量は d_1, d_2, d_3 とその連続した和の 6 通りで、SU(4)（A_3）の単純根 3 本と正の根 6 本の関係です。§07 では同じ構造が球の面積として現れます。

04

位置が行列になる — 膜の上の理論

重なった膜の上の理論は 'the dimensional reduction of ten-dimensional supersymmetric Yang-Mills theory with gauge group U(n) from ten to p+1 dimensions' です（Witten 1995b §3）物理。十次元のゲージ場の成分を膜に沿う方向と垂直な方向に分けると

$$A_M = \big(A_0, \dots, A_p;\, X^{p+1}, \dots, X^{9}\big), \qquad V = -\frac{T^2}{2} \sum_{i,j} \operatorname{tr}\big([X^i, X^j]^2\big) \;\geq 0 \tag{4}$$

で、X^i は随伴表現の $9-p$ 本のスカラー（$N \times N$ エルミート行列）、V はそのポテンシャルです。X はエルミートなので $[X^i, X^j]$ は反エルミートで、$\operatorname{tr}[X^i, X^j]^2 \leq 0$。したがって $V \geq 0$ です。$V = 0$ なら行列は同時に対角化でき、Witten は対角成分を膜の位置と読みます。非対角成分が膜の間の弦で、写像 $\delta \mapsto \sum_k [X^k, [X^k, \delta]]$ の固有値は $|a_\lambda - a_\mu|^2$（T^2 を掛ければ (2) の二乗）です。ユニタリ行列で共役にした二方向の例で 4×10^{-15} 以内の一致を確かめました計算。

D3 ブレーンの上は、6 本のスカラーとフェルミオンを伴う四次元 $\mathcal{N} = 4$ の U(N) 超対称ヤン–ミルズで（17-08 の出発点）、純ヤン–ミルズではありません。行列の添字は 17-04 の二重線と同じ構造です。

05

ヘテロ弦 — 16 次元の格子が群になる

ヘテロ弦は、閉じた弦の右向きを超弦（中心電荷 15）、左向きをボゾン弦（26）の帳簿に従わせたものです（17-05 §06、Gross–Harvey–Martinec–Rohm 1985）。左向きは平坦な十次元の 10 に対して 16 足りず、Polchinski の講義（1994）は超対称なヘテロ弦について 'an additional (0, 16) is needed from another unitary CFT' と書き、解は $E_8 \times E_8$ か SO(32) だけだと続けます物理。

16 次元の格子

格子の描像では、この 16 を左向きの 16 本のボソンを巻いたトーラス $\mathbb{R}^{16}/\Gamma$ と見ます 物理 。運動量 P は格子 Γ に乗り、$P\cdot P=2$ の状態が質量ゼロのベクトルになります。トーラスに巻いたヘテロ弦について、Witten（1995 §4.6）は 'The gauge symmetry is extended precisely when $V^{\perp}$ contains some P of $d_P=1$' と書きます。Witten の $V^{\perp}$ は左向きの電荷の空間です。Witten は内積の符号を本章と逆に取って $d_P=-(P,P)/2$ と書くので、$d_P=1$ は本章の符号で $P\cdot P=2$ に当たります。Γ は**偶**（$P\cdot P$ がすべて偶数）で**自己双対**（全点と整数の内積を持つ点がちょうど Γ）でなければなりません。この条件は、世界面がトーラスになる一ループの振幅が、トーラスの形の取り方に依らないという要請（モジュラー不変性）から来るとされ、Polchinski の講義も 'The constraints of modular invariance are strong' と書きます。

$$\dim G = 16 + \#\{P\in\Gamma:\ P\cdot P=2\} \tag{5}$$

16 次元の偶で自己双対な格子は二つだけです 既知 。どちらも「$x\in\mathbb{Z}^n\cup(\mathbb{Z}+\frac12)^n$、$\sum x_i$ が偶数」で書け、$n=8$ を二つ並べたのが $E_8\oplus E_8$、$n=16$ が D_{16}^{+} です。根はどちらも 480 本で (5) は 496 ですが、内積が 0 でない根を結ぶと、前者は 240 本ずつ二つに分かれ（$E_8\times E_8$）、後者は一つにつながります（$\mathfrak{so}(32)$） 計算 。十次元の群は正確には $\mathrm{Spin}(32)/\mathbb{Z}_2$ と書かれます。$\mathrm{Spin}(32)$ は SO(32) の二重被覆で、1-02 の SU(2)→SO(3) と同じ関係です（割る $\mathbb{Z}_2$ は、SO(32) に戻すものとは別の元です）。D_{16}^{+} の根が張る格子は D_{16}^{+} の中で指数 2 の部分格子で、この $/\mathbb{Z}_2$ はその差に対応するとされます。

十一次元から見ると、Hořava–Witten は二つの E_8 が線分 $S^1/\mathbb{Z}_2$ の両端の壁に一つずつ載ると**提案**しました（1995 年の要旨は 'We propose'、1996 年の要旨は群が 'a copy of E8 for each boundary component' に決まると書き、'the hypothesis that there is a consistent quantum M-theory' を前提と明示） 物理 。

寄り道：同じ塔、違う群

飛ばしてよい小節です。

平らなトーラス $\mathbb{R}^n/\Gamma$ のラプラシアンの固有値は双対格子の点 v ごとに $4\pi^2\,v\cdot v$ で（17-06 §02 の n 次元版） 既知 、自己双対なら KK 塔の各段の個数は長さの二乗が $2k$ の点の数です。数えると、$E_8\oplus E_8$ と D_{16}^{+} でともに $k=1,2,3$ で 480・61920・1050240 個、$k\le 6$ のすべての段で一致し、$480\,\sigma_7(k)$（σ_7 は約数の 7 乗の和）とも一致しました 計算 。

全段で一致することが知られ、Milnor（1964）はこの二つのトーラスを、固有値が重複度まで同じなのに等長でない例として挙げたとされます 既知 。塔は同じでも、ヘテロ弦に載せた群は違います。

06

Calabi–Yau に巻く — ホロノミーと可換な部分

$E_8 \times E_8$ を四次元に下ろすには六次元の Calabi–Yau 多様体 K に丸めます（17-06 §05）。K のホロノミー（1-07）は SU(3) に収まり、標準的な構成ではゲージ場のホロノミーも E_8 の中の SU(3) にそろえるとされます 物理 。四次元で見えるゲージ変換は K 全体で一定の g で、どの閉じた道の平行移動でも変わらない、つまりホロノミーのすべての元と可換でなければなりません 既知 。

$$G_4 = \{\, g \in E_8 :\ gh = hg \ \text{ for all } h \in SU(3) \,\} \tag{6}$$

E_8 の根 240 本のうち SU(3) の根と直交するものは 72 本で、E_6（次元 78）になります 計算 。Candelas–Horowitz–Strominger–Witten（1985）の要旨は 'a model that in four dimensions has an E6 gauge group with four standard generations of fermions' と書きます。

表3　E_8 の中で SU(n) と可換な部分（248 = 残る群 + SU(n) + 余り）

ホロノミー	SU(2)（K3）	SU(3)（Calabi–Yau）	SU(4)	SU(5)
残る群	E_7	E_6	SO(10)	SU(5)
内訳	133+3+112	78+8+162	45+15+188	24+24+200

計算 表3 は E_8 の根 240 本を座標で作って数え、型は階数・根の数・Cartan 行列の行列式で決めた。

余りの 162 本は $\mathbf{2} \times \mathbf{27} \times \mathbf{3}$（$E_6$ の 27 次元と SU(3) の 3 次元の組とその共役）で、四次元のフェルミオンはここから来るとされます。

07

潰れる球と ADE — 負定値の線形代数

K3 曲面は複素二次元（実四次元）の Calabi–Yau 多様体で、ホロノミーは SU(2) です（表3 の左端） 既知 。Witten（1995 §4.6）は、トーラスに巻いたヘテロ弦と K3 曲面に巻いた IIA 弦の対応で 'Whenever the heterotic string on a four-torus gets an enhanced gauge group G, the corresponding K3 gets an orbifold singularity of type G' と書きます 物理 。そのとき 'a configuration of r two-spheres S_i (with an intersection matrix given by the Dynkin diagram of G) collapses to a point' で（Dynkin 図はこの節の後半で定義します）、球一つにつき U(1) が一つ出ます。W ボソンは潰れる球に巻きついた二次元の膜です（Bershadsky–Sadov–Vafa 1996 §1 の記述による）。質量は膜の張力×球の面積とされ、§03 の $T|a|$ と同じ形です。

交差数と負定値

なぜ ADE だけか。球の**交差数** $M_{ij} = S_i \cdot S_j$ を見ます。二つの球については、交わる点を向きの符号 ± 1 付きで数えた和です。自分自身との交差数（自己交差数）は、球を少しずらした写しとの交点を同じように数えたもので、K3 の中の球では -2 になります 既知 。球の類どうしの「内積」をこの交差数で定めると、K3 ではこの内積は三方向で正・十九方向で負です（符号 $(3, 19)$）既知 。Witten によれば、潰れる極限で球の類はこの内積が負定値になる部分空間 $V^{\perp}$ に入るので、M は負定値（すべての $x \neq 0$ で $x^{\mathsf{T}} M x < 0$）です。潰れる球 S_i は**正則な曲線**（局所的に複素座標の正則関数の零点として書ける、複素一次元の曲線）にとれ、異なる正則な曲線どうしの交点は複素構造のためにどれも正の数として数えられるので $M_{ij} \geq 0$ です 既知 。$x = e_i + e_j$ で $-4 + 2M_{ij} < 0$ から $M_{ij} \leq 1$。よって $M = -(2I - A)$ で、A は球を頂点、交わりを辺とするグラフの隣接行列です。このグラフを **Dynkin 図**と呼びます（ここに出るのは辺がすべて一重の「単純レース型」）。次が要ります。

$$x^{\mathsf{T}}(2I - A)\,x = 2\sum_{i} x_i^2 - 2\sum_{\text{辺}\,ij} x_i x_j \;>\; 0 \qquad (x \neq 0) \tag{7}$$

グラフが連結でなければ成分ごとに考えます（成分ごとに群の積になります）。連結なグラフに輪があれば、輪の上で 1 のベクトルで左辺が 0 以下なので、木に限られます。頂点 10 個以下の木 201 個を調べると、残るのは A 型（一直線）・D 型（端が二股）・E_6, E_7, E_8 だけでした（表4）計算 。一般の頂点数でもこれだけであることは、単純リー環の分類（1-04）の一部として知られます 既知 。

図2　型を選ぶと、潰れる球の並び（丸が球、線が交わり）と (7) の最小固有値・群の次元が変わる。「折りたたむ」は §08 の入れ替えの軌道を色で示す



E₈：球 8 個　根 240 本　群の次元 248　最小固有値 0.010956（正定値）

表4　頂点 n 個の木の数と、(7) を満たす型（$n \leq 3$ は一直線だけ）

n	4	5	6	7	8	9	10
木の数	2	3	6	11	23	47	106
満たす型	A D	A D	A D E	A D E	A D E	A D	A D

計算 表4 と図2 の数はこの端末で計算した。最小固有値は $2 - 2\cos(\pi/h)$（h は根の数÷階数）と 6 桁で一致し、図はこの式で描く。E_8 の一つ先には (7) を 0 にする整数ベクトル（中心 6、腕 3／4・2／5・4・3・2・1）がある。JavaScript が無効なら表4・表5 を。

08

折りたたみと幾何工学 — A〜G がそろう

ADE は根の長さがそろった型だけです。B・C・F・G は、特異点をさらに別の方向に束ねると出ます。Bershadsky ほか（1996 §3）は、別のパラメータの上を一周すると潰れる球が Dynkin 図の自己同型（辺を保つ頂点の入れ替え）で入れ替わることがあり、そのとき 'the actual gauge group will be smaller' と書いて次を挙げます（最後は三本の足の巡回）物理 。

$$A_{2n-1} \to C_n, \qquad D_n \to B_{n-1}, \qquad E_6 \to F_4, \qquad D_4 \to G_2 \tag{8}$$

これで A から G までのすべての型が幾何から出ます。入れ替えで正の根を束ねた軌道の数は、折りたたんだ代数の正の根の数と一致します（表5）計算 。

表5　折りたたみ：正の根の軌道の数 ＝ 後の代数の正の根の数

前 → 後	$A_5 \to C_3$	$D_5 \to B_4$	$E_6 \to F_4$	$D_4 \to G_2$
次元	35 → 21	45 → 36	78 → 52	28 → 14
正の根（動かない）→ 軌道	15 (3) → 9	20 (12) → 16	36 (12) → 24	12 (3) → 6

計算 表5 は Cartan 行列から根を生成して数えた（$A_3 \to C_2$・$A_7 \to C_4$・$D_6 \to B_5$ も一致）。

ただし同じ論文は 'a given A-D-E singularity may *not* correspond to an enhanced gauge symmetry' と断っています。この仕組みで場の理論を計算するのが**幾何工学**で、Katz–Klemm–Vafa（1997）は四次元 $\mathcal{N}=2$ の数学的に確かな結果（17-11）を弦の T 双対性（半径 R の円と半径 α'/R の円に巻いた弦が同じ理論を与えること。α' は 17-05 の (1)）に帰着させ、'This construction is not based on any duality conjecture' と書きます物理 。扱えるのは超電荷（17-05 §07）8 個以上（四次元の $\mathcal{N}=2$ 以上に当たる）の超対称な理論で、非超対称の純ヤン–ミルズの質量ギャップを幾何工学で扱った例は、探した範囲で見当たりません。

09

十一次元から純ヤン–ミルズへ — 二つの円

十一次元から四次元の**純**ヤン–ミルズに下りる道を Witten（1998 §4）が述べています物理 。出発点は M5 ブレーン（M 理論の、空間五次元に広がった膜）の上の六次元 (2,0) 理論（(2,0) は六次元の超対称性の型の名前。Witten は 'exotic' と呼ぶ）で、$AdS_7 \times S^4$（AdS_7 は負の一定の曲率を持つ七次元の時空。17-08 で扱う）の M 理論として 'can apparently be interpreted' とされます（Maldacena の予想による）。ラグランジアンによる記述は知られていないとされ、数学的な定義もありません。これを二つの円に巻きます。

$$(2,0)\ \xrightarrow{C_1(R_1)}\ 5\text{ 次元 }SU(N),\ g_5^2=R_1\ \xrightarrow{C_2(R_2)}\ 4\text{ 次元 }SU(N),\ g_4^2=\frac{R_1}{R_2}\tag{9}$$

C_2 でフェルミオンを反周期（一周で符号が反転）にすると、フェルミオンは質量 $1/R_2$ 程度を得て、スカラーも 'very plausibly' 一ループで重くなり、'If this is so, the low energy theory will be the pure SU(N) theory without supersymmetry' です。IIA 弦で言えば $\mathbb{R}^4\times S^1$ に巻いた N 枚の D4 ブレーンで、§03–04 の膜の上の理論が四次元に降りてきます。

Witten は $\eta=g_4^2N$ を小さく保ち、円の尺度では弱結合、ずっと長い距離で強結合になるようにしたいと書きます。一ループの目安は、17-01 の (3) で $b_0=11N/(48\pi^2)$（17-01 の (1)）、$\mu=1/R_2$、$g^2(\mu)=g_4^2=\eta/N$ と置くと

$$\Lambda R_2\ \sim\ \exp\!\Big(-\frac{24\pi^2}{11\,\eta}\Big)\tag{10}$$

で、$\eta=1$ なら 4×10^{-10}、$\eta=10$ なら 0.12 です 計算 。係数は結合の規約と $\mu=1/R_2$ の取り方で変わるので、これは桁の目安です。しかし超重力で計算できるのは 'at least if η is large' のときで、小さい η への接続を Witten は 'This looks like a tall order' と書きます。極限の順序は 17-10、ギャップが幾何に見える仕組みは 17-09 へ。

10

ヤン–ミルズに戻る — 群は難しさの在りかではない

どの道でも群には余分な場や超対称性が付いてきます（膜の上の $9-p$ 本のスカラー、二つの円の質量 $1/R_2$ の場など）物理 。そして懸賞問題にとって、群は難しさの在りかではありません。問題文はどのコンパクト単純群でもよく、問われるのはその量子ヤン–ミルズ理論が $\mathbb{R}^4$ で公理（4-10）を満たして存在し、質量ギャップを持つこと（4-11）です。幾何は A〜G の名前をすべて作れますが超対称な設定の中でのことで、純ヤン–ミルズへの道（§09）は期待と極限の順序に頼っています。

切れ目

(1) どの構成も弦の理論か M 理論の上に立ち、どちらにも非摂動的な数学的定義はありません。(2) 余剰次元の側から四次元の理論を定義しようとすると、出発点（(2,0) 理論など）の定義のほうが難しくなります。(3) 群が幾何から出ることと、四次元の量子論が存在して隙間を持つことを結ぶ結果は、探した範囲で見当たりません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 (1)、(6) の可換性、(7) を満たす図が ADE に限ること、K3 の交差数の符号と正値性、16 次元の格子の分類と Milnor の例（後の二つは書誌のみ）。	分類と交差数の性質の証明は書いていない。
計算 表1〜表5、図1・図2、(4) まわりの固有値、(10) の数値。	格子の点の数は $k \le 6$ まで。(10) は一ループの目安で、規約で係数が変わりうる。
物理 D ブレーンの U(N)、ヘテロ弦の群、E_6、Hořava–Witten の提案、ADE と折りたたみ、幾何工学、(9) の純 SU(N)。	どれも数学の定理ではない。弦の理論・M 理論・(2,0) 理論の存在。スカラーが一ループで重くなること。この本は質量ギャップも連続極限の構成も自分では示していない（公開された連続極限の構成は第二巻）。

出典と再現

もの	種別	出典・道具（本文＝原稿の本文を確認、要旨＝要旨を確認）
§01・§10	既知	A. Jaffe, E. Witten, "Quantum Yang–Mills Theory", Clay Mathematics Institute の公式の問題記述（本文）。
§02	物理	E. Witten, NPB 186 (1981) 412（要旨。七次元の空間の選び方は未確認）。
§03・§04	物理	J. Polchinski, PRL 75 (1995) 4724, hep-th/9510017（要旨）；TASI Lectures on D-Branes, hep-th/9611050（本文）。E. Witten, NPB 460 (1996) 335, hep-th/9510135 §3（本文）。
§05	物理	D. J. Gross ほか 3 名, PRL 54 (1985) 502；NPB 256 (1985) 253（要旨）。J. Polchinski, "What is String Theory?"（1994 年の講義）, hep-th/9411028 §2.6（本文）。P. Hořava, E. Witten, NPB 460 (1996) 506；NPB 475 (1996) 94（要旨）。
§05・§07	物理	E. Witten, NPB 443 (1995) 85, hep-th/9503124 §4.6（本文）。M. Bershadsky, V. Sadov, C. Vafa, NPB 463 (1996) 420, hep-th/9511222 §1（本文。膜の質量＝張力×面積の式は未確認）。
§07 の交差数	既知	E. Witten, hep-th/9503124 §4.6（本文。球の類の長さの二乗が -2、潰れる球が正則）。K3 の交差形式の符号と、正則な曲線の交点の正値性の一般論は W. Barth ほか 3 名, *Compact Complex Surfaces*, Springer（書誌のみ）。
格子・寄り道	既知	J. H. Conway, N. J. A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*。J. Milnor, PNAS 51 (1964) 542。いずれも書誌のみ。
§06	物理	P. Candelas ほか 3 名, NPB 258 (1985) 46（要旨。ホロノミーをそろえる構成は未確認）。
§08	物理	M. Bershadsky ほか 5 名, NPB 481 (1996) 215, hep-th/9605200 §3（本文）。S. Katz, A. Klemm, C. Vafa, NPB 497 (1997) 173, hep-th/9609239（要旨）。
§09	物理	E. Witten, ATMP 2 (1998) 505, hep-th/9803131 §4（本文）。(10) は 17-01 の (1)(3)（$b_0 = 11N/(48\pi^2)$）に $g^2 = \eta/N$ を入れた算術。

もの	種別	出典・道具（本文＝原稿の本文を確認、要旨＝要旨を確認）
表・図・数値	計算	この端末の Python 3（numpy）：branes.py、ade.py、e8_commutant.py、lattice16.py、scales.py。

次に読む章：17-08 ホログラフィー ― 膜の上の $\mathcal{N}=4$ の理論と、動径が尺度になる対応。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 17 部 物理の側から AdS/CFT・動径と尺度

ホログラフィー — 四次元の場の理論を、一次元多い重力の幾何で読む

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — AdS/CFT は、四次元の場の理論と五次元（に球を掛けた）重力の理論が同じだとする予想です。境界からの深さが尺度を測ること、質量と次元を結ぶ辞書、垂らした弦で計算する Wilson ループ、正確に書ける対応の線引き。

前提となる章 — 17-05。17-04 の 't Hooft 結合 λ、17-03 の Nambu–Goto 作用も使います。D ブレーンは 17-07 を参照してください。計量・測地線・源など、前提の章に無い道具はその場で一行ずつ定義します。

先に言うこと — AdS/CFT は予想で、定理ではありません。代表例の $\mathcal{N}=4$ 超対称ヤン–ミルズ理論は共形で質量ギャップを持たず、純ヤン–ミルズ理論ではありません。ホログラフィーで質量ギャップが数学の定理として示された例は無く（物理の水準でギャップを持つ模型は 17-09）、この本も質量ギャップや連続極限の構成について自分では何も示していません（公開された連続極限の構成は第二巻で読みます）。

この章の順序

1. 何が主張されているか（寄り道：なぜ「ホログラム」か）
2. D3 ブレーンの二つの顔
3. 反ド・ジッター空間
4. 動径＝尺度 — 深さは大きさを測る（図1）
5. 辞書 — 質量と次元
6. 弦を垂らす — Wilson ループ（図2）
7. 尺度を一つ入れる — 面積則の模型
8. 正確に書ける対応 — 定理と提案
9. ヤン–ミルズまでの距離

01

何が主張されているか — 境界の理論と内部の重力

ホログラフィーの主張はこうです。**d 次元の重力を含まない場の理論が、$d+1$ 次元の重力を含む理論と同じ物理を別の言葉で書いている**。増えた一次元は境界からの「深さ」で、前者を境界の理論、後者を内部（バルク）の理論と呼びます。代表例は Maldacena（1997、ATMP 1998。前の年は arXiv に出た年、後ろは掲載誌の年）です。

$$\mathcal{N}=4 \text{ SYM } \left(U(N),\, g_{\mathrm{YM}}\right) \quad \overset{\text{予想}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{IIB 型弦理論 on } AdS_5\times S^5 \ \left(N,\, g_s\right) \tag{1}$$

左は四次元の $\mathcal{N}=4$ 超対称ヤン–ミルズ理論（以下 SYM）、右は十次元の弦理論です。**IIB 型**は十次元の超弦理論の一つで、17-05 の IIA 型とは超対称性の向き（カイラリティ）の組み合わせが違います。次元は $10=4$（境界）$+1$（深さ）$+5$（S^5）です（17-05 §09）。原論文は 'We are led to the conjecture' と書き、(1) は今も予想です 物理 。この章は入口を扱い、質量ギャップが幾何に化ける模型は 17-09 に回します。

寄り道：なぜ「ホログラム」か — 面積で数える

飛ばしてよい小節です。

ブラックホールのエントロピーは、体積ではなく地平面の面積 A に比例します（Bekenstein 1973・Hawking 1975） 既知 。

$$S/k_B = A/(4\ell_P^2), \qquad \ell_P^2 = G\hbar/c^3 \tag{2}$$

太陽質量なら半径 2953 m、$S/k_B = 1.05\times10^{77}$で、体積をプランク長さの三乗で割った 2.6×10^{115} よりはるかに少ない 計算 。't Hooft（1993）と Susskind（1994、J. Math. Phys. 1995）はここから自由度を面積で数える考えを立て、Susskind は 'much like a holographic image' と書きました 物理 。比喩で言えば立体像を平らな乾板に記録するホログラムです。正確には、(1) は二つの量子論が同値だという主張で、「乾板」は時空の無限遠にあります。

02

D3 ブレーンの二つの顔 — 予想はどこから来たか

N 枚重ねた D3 ブレーン（開いた弦の端が乗る、空間三次元の膜）に端を持つ開いた弦は、低いエネルギーで $U(N)$ のゲージ場になります（17-07）。同じ膜は重力から見ると時空を曲げます。Maldacena は低エネルギーの極限で、膜の上の理論と膜のすぐ近くの時空が同じものを

記述すると読みました[物理]。**計量**（線素）ds^2 は、座標が少しずれたときの距離の二乗を与える式で、曲線の長さは $\int ds$ です（平らな空間なら $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots$）。膜が作る計量は

$$ds^2 = f^{-1/2} dx_{\parallel}^2 + f^{1/2}\left(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2\right), \qquad f = 1 + \frac{4\pi g_s N \alpha'^2}{r^4} \tag{3}$$

です。$x_{\parallel}$ は膜に沿う四つの座標（$dx_{\parallel}^2$ は時間の方向だけ符号が逆。2-04）、r は膜からの距離、$\alpha' = \ell_s^2$ は弦の長さの二乗、g_s は弦の結合です。$r \to 0$ では $f \approx R^4/r^4$（$R^4 = 4\pi g_s N \alpha'^2$）で、$z = R^2/r$ と置くと

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}\left(dx_{\parallel}^2 + dz^2\right) + R^2 d\Omega_5^2 \tag{4}$$

となり、半径 R の AdS_5 と S^5 の積です[既知]。結合の対応には二つの書き方があります。今日広く使われる規約では $g_{\mathrm{YM}}^2 = 4\pi g_s$ で $R^4/\alpha'^2 = 4\pi g_s N = \lambda$（$\lambda = g_{\mathrm{YM}}^2 N$）、原論文の規約 $g_{\mathrm{YM}}^2 = 2\pi g_s$ では $R^4/\alpha'^2 = 2\lambda$ です[既知]。違いは作用の規格化だけで、今日の規約はインスタントンの作用が $8\pi^2/g_{\mathrm{YM}}^2$ になる規格化です（Aharony–Gubser–Maldacena–Ooguri–Oz の総説 (3.8)・§4.2）。17-04 の (2)（行列のトレースで $\frac{1}{2g^2}\int \mathrm{tr}\, F^2$、$\lambda = g^2 N$）も同じ規格化なので、17-04 の λ で $R^4/\alpha'^2 = \lambda$ です。この章では λ を直接使わず、$R^2/\alpha' = \sqrt{4\pi g_s N}$ で書きます。

超重力（弦理論の低いエネルギーで残る、重力を含む場の理論）が信頼できるのは $R \gg \ell_s$、つまり $g_s N \gg 1$ のときで、内部の量子効果はゲージ理論の $1/N$ の補正に当たります（原論文）[物理]。$g_s \ll 1$ と両立させるには $N \gg g_s N \gg 1$ が要ります。

表1　半径 R に要る弦の結合 $g_s = (R/\ell_s)^4/(4\pi N)$

R/ℓ_s	$N = 3$	$N = 100$
2	0.424	0.0127
3	2.15	0.0645
5	16.6	0.497
10	265	7.96

例：曲率半径を弦の長さの 5 倍にとると、$N = 3$ では $g_s = 16.6$ で弦の結合が強く、$N = 100$ でやっと 0.5 です[計算]。

03

反ド・ジッター空間 — 境界は無限の彼方にある

反ド・ジッター空間 AdS_{d+1} は、計量（§02）の符号が $(-,-,+,\ldots,+)$ の平らな空間の中の双曲面

$$-X_{-1}^2 - X_0^2 + X_1^2 + \cdots + X_d^2 = -R^2 \tag{5}$$

で、(5) を保つ群 $SO(2,d)$ がそのまま対称性です（Maldacena の付録）。座標を選び直すと (4) の前半の形になります（Poincaré 座標）。以下は虚時間（2-04）に移したユークリッド版で考えます。境界の座標を $x=(x_1,\dots,x_d)$ と書くと

$$ds^2 = R^2\,\frac{\sum_{i=1}^{d} dx_i^2 + dz^2}{z^2} \qquad (z>0) \tag{6}$$

$d=1$ のときは上半平面で、図1 はこの場合を描きます。例：$x=0$ に沿って $z=1$ から $z=\varepsilon$ まで上がる長さは $\int_\varepsilon^1 R\,dz/z = R\ln(1/\varepsilon)$ で、$\varepsilon\to 0$ で無限大です。境界 $z=0$ は無限の彼方にあります 既知 。対称性の次元は $SO(2,4)$ が $6\cdot 5/2 = 15$（ユークリッド版では $SO(1,5)$ で、次元は同じ 15。1-03）、四次元の共形変換が並進 4・ローレンツ 6・拡大 1・特殊共形 4 の 15 で、Witten（1998a）の言葉で 'SO(2, d) … acts on $\mathrm{M_d}$ as the conformal group' です 既知 。

04

動径＝尺度 — 深さは大きさを測る

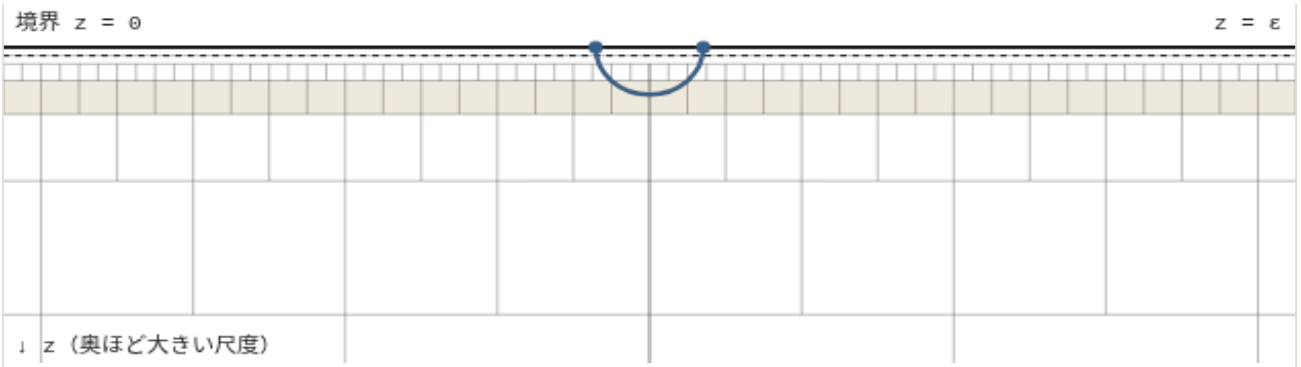
(6) で $(x,z)\mapsto(sx,sz)$ とすると分子も分母も s^2 倍で、ds^2 は変わりません。この内部の**等長変換**（長さを保つ変換）は境界では拡大 $x\mapsto sx$ で、「境界で s 倍大きいものを見る」と「s 倍深い所を見る」が同じ操作になります。Susskind–Witten（1998）の言葉では 'scale size gets transmuted into a spatial dimension' です 既知 。

(6) の**測地線**（二点を結ぶ最短の曲線）は境界に直交する半円で、境界の区間 $[-\ell/2,\ell/2]$ から垂れる半円は深さ $\ell/2$ まで潜ります。深さ ε で切った長さは ℓ の対数です。

$$L(\ell) = 2R\ln\frac{\ell+\sqrt{\ell^2-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon} \approx 2R\ln\frac{\ell}{\varepsilon}, \qquad e^{-mL}\approx\left(\frac{\varepsilon}{\ell}\right)^{2mR} \tag{7}$$

質量 m の粒子が内部を伝わる振幅はおよそ e^{-mL} なので、指数関数の減衰が境界ではべき乗則に化けます。Susskind–Witten (2.5) も同じ考え方で、球の模型の上で係数を落とした形 $\delta^m/|X_1-X_2|^m$ で書いています。指数 $2mR$ は mR が大きいときの近似で、正確には (9) です 物理 。

図1　上半平面 (6) と二進の敷き詰め（タイルの面積はどれも $R^2/2$）。つまみで区間 ℓ を変えると半円の深さと (7) の L が変わる。色の帯は底のある段



計算 この図の数値はこの端末で計算した。

表2　(7) の L（$R=1$、半円に沿った数値積分と一致）。ℓ を 2 倍にするごとに L は $2\ln 2 = 1.386$ 増える

ℓ/ε	L	$2\ln(\ell/\varepsilon)$
10	4.584863	4.605170
100	9.210140	9.210340
1000	13.815509	13.815511

境界の近く $z=\varepsilon$ で切ることは、境界の理論の紫外の切断です。Susskind–Witten は 'the infrared regulator δ in the bulk theory also plays the role of an ultraviolet regulator in the boundary super Yang Mills theory' と書きます（δ はこの章の ε に当たる）。そのうえで、切った球面を大きさ δ の格子に区切り、格子一つに場一つにつき一自由度と仮定して、自由度を N^2/δ^3 と数えました（同論文 (3.1)）物理。図1 で一段潜るごとにタイルの幅は 2 倍になり、ブロックを二つずつまとめる繰り込み群の一段（7-05）を思わせます。正確には、de Boer–Verlinde–Verlinde（1999、JHEP 2000）が古典超重力の動径方向の発展を表す Hamilton–Jacobi 方程式（作用を端の値の関数とみて立てる方程式）から、Callan–Symanzik 方程式（尺度を変えたときに相関関数がどう変わるかを表す式。4-04）の形を導き、'We propose a direct correspondence' と提案した水準です 物理。

05

辞書 — 内部の場と境界の演算子

Gubser–Klebanov–Polyakov（1998）と Witten（1998a）の処方では、内部の場 ϕ の境界値 ϕ_0 を境界の演算子 $\mathcal{O}$ の**源**（$\int \phi_0 \mathcal{O}\, d^dx$ の形で作用に足す外場）と読み、次を等しいとおきます。右端は超重力が使える極限（$N,\lambda\to\infty$）での古典解の作用 I です。GKP の要旨は 'We suggest' で始まり、提案です 物理。

$$\left\langle \exp\int \phi_0\,\mathcal{O}\,d^dx \right\rangle_{\text{境界}} = Z_{\text{内部}}\big[\phi\to\phi_0\big] \approx e^{-I[\phi_0]} \tag{8}$$

帰結の一つが質量と次元の関係です。x に依らない解では、質量 m の場の方程式は $z^{d+1}(z^{1-d}\phi')' = m^2R^2\phi$ で（Witten 1998a (2.37)）、$\phi = z^\alpha$ を入れると $\alpha(\alpha-d) = m^2R^2$ です。大きい根を Δ と書きます（文献の慣習の字で、質量ギャップの Δ とは別）。

$$\Delta(\Delta - d) = m^2R^2, \qquad \Delta = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2R^2} \tag{9}$$

境界の近くで $\phi \approx \phi_0 z^{d-\Delta}$ の解が内部で滑らかに延びます。拡大 $(x,z)\mapsto(sx,sz)$ で ϕ_0 は $s^{\Delta-d}$ 倍されるので、$\int \phi_0\mathcal{O}$ が不変であるには $\mathcal{O}$ の**スケーリング次元**（拡大 $x\mapsto sx$ で演算子が $s^{-\Delta}$ 倍になるときの Δ）が Δ でなければならず、二点関数は $|x|^{-2\Delta}$ に比例します 物理 。実根の条件 $m^2R^2 \geq -d^2/4$ は、負の質量の二乗もここまでは許すという Breitenlohner–Freedman の下限です 既知 。

表3　(9) の Δ（$d=4$）。右端は方程式を $z=1$ から e^{-25} まで数値で解いて読んだ冪（$d-\Delta$ に一致）

m^2R^2	**−3**	**0**	**5**	**12**
Δ	3	4	5	6
数値の冪	1.000000	0.000000	-1.000000	-2.000000

例：質量ゼロなら $\Delta = 4 = d$ で、$\int \phi_0\mathcal{O}\,d^4x$ の ϕ_0 が無次元の数、つまり結合の役をします。ディラトン（期待値が弦の結合を決めるスカラー）は $\mathrm{tr}\,F^2$ に対応します。$\mathcal{N}=4$ の理論では Witten（1998a §2.6）が、ラグランジアン密度を結合で微分した演算子（$\mathrm{tr}\,F^2$ を含む）が $m^2=0$ のディラトンに当たると述べ、Csáki–Ooguri–Oz–Terning は先行文献を引いて 'the operator tr F^2 in four dimensions corresponds to the dilaton field ⋯' と書きます 物理 。$\mathrm{tr}\,F^2$ は 0^{++} グルーボール（17-01）を作るので、17-09 ではディラトンの方程式からグルーボールの質量を読みます。

06

弦を垂らす — Wilson ループの計算

距離 L の重いクォーク対のエネルギー $E(L)$ は Wilson ループ（5-01）から読みます。Maldacena（1998）と Rey–Yee（1998、EPJC 2001）が同じ時期に出した処方では、クォークは境界に端を持つ弦の端点で、内部に垂れた弦の面積（Nambu–Goto）が E を与えます 物理 。(4) では張力 $1/(2\pi\alpha')$ に R^2/z^2 が掛かります。

$$E = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{R^2}{z^2}\sqrt{1+z'^2}\,dx, \qquad L = 2z_0\int_0^1\frac{y^2dy}{\sqrt{1-y^4}} = \frac{2\sqrt{2}\,\pi^{3/2}}{\Gamma(1/4)^2}z_0 = 1.19814\,z_0 \tag{10}$$

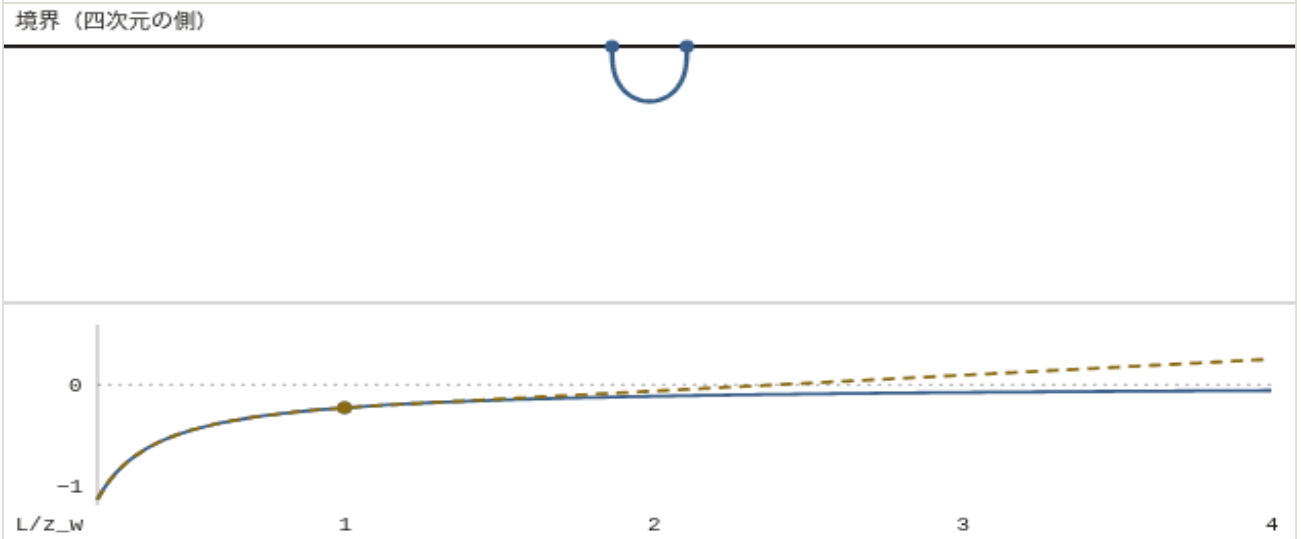
被積分関数が x を含まないので $z^2\sqrt{1+z'^2} = z_0^2$（z_0 は底の深さ）が保存され、右の式が出ます。弦は L に比例する深さ $z_0 = 0.8346L$ まで潜ります。境界での発散（点電荷の自己エネル

ギー）をまっすぐな二本の弦の分で引くと

$$E(L) = -\frac{4\pi^2}{\Gamma(1/4)^4}\,\frac{R^2}{\alpha'}\,\frac{1}{L} = -0.22847\,\frac{\sqrt{4\pi g_s N}}{L} \tag{11}$$

で、定数は数値積分と閉じた形が 8 桁一致し、原論文の (4.6)(4.8) と同じです 計算 。原論文は 'the energy goes as 1/L, a fact which is determined by conformal invariance. Notice that the energy goes as $(\mathrm{gN})^{1/2}$ as opposed to gN which is the perturbative result' と書きます 物理 。

図2　上：境界に両端を持つ弦。下：$E(L)$（実線 (11)、破線は壁のある (12)）。L を変えると深さと E が変わり、「壁を置く」で弦が壁に沿って寝る



L = 1.00 z_w　深さ 0.83 z_w　E（単位 R²/(α'z_w)）：共形 −0.228　壁あり −0.228

計算 この図の数値はこの端末で計算した（弦の形は (10) の積分の表、E は (11)(12)）。

表4　E（単位 $R^2/(\alpha' z_w)$）と壁の無いときの深さ。$L_c = 1.19814\,z_w$

L/z_w	共形 (11)	壁あり (12)	z_0/z_w
0.5	−0.45695	−0.45695	0.4173
1.19814	−0.19069	−0.19069	1.0000
2	−0.11424	−0.06307	1.6693
4	−0.05712	0.25524	3.3385
8	−0.02856	0.89186	6.6770

```
07
```

尺度を一つ入れる — 幾何を切ると面積則が出る

(11) の $1/L$ は共形性の帰結なので、閉じ込め（$E \approx \sigma L$、17-01）には尺度が一つ要ります。最も粗い模型は内部を深さ z_w で切ることです。Polchinski–Strassler（2001、PRL 2002）は、ギャップがあれば 'the gravitational redshift has a nonzero lower bound' と述べて幾何を切る近似を使いました 物理 。この模型で (10) を最小にすると、$L \le L_c = 1.19814 z_w$ では共形の解（底の深さ $0.8346L \le z_w$）がそのまま使えます。$L > L_c$ では弦の底が壁に届きます。壁に触れる点で弦は壁に接する（傾き 0）ので、保存量 $z^2\sqrt{1+z'^2}$ は z_w^2 になり、下りの部分は $z_0 = z_w$ の共形解の半分です。両側の半分で幅 L_c を使い、残りの $L - L_c$ を壁に沿う直線でつなぎます。

$$E(L) = -0.19069\,\frac{R^2}{\alpha' z_w} + \sigma(L - L_c), \qquad \sigma = \frac{\sqrt{4\pi g_s N}}{2\pi z_w^2} \qquad (L > L_c) \tag{12}$$

L に比例する部分（面積則）が現れ、$L = L_c$ で (11) と値も傾きもつながります 計算 。例：表 4 の $L = 8 z_w$ では共形の -0.029 に対し $+0.892$ です。(12) のとおり $\sigma(L - L_c)$ に一定の数を足した形で、L が大きいと傾き σ の直線に乗ります。弦張力には $\sqrt{4\pi g_s N}$ が掛かり、壁までの箱で決まるグルーボールの質量（$\sim 1/z_w$）には掛からないので、結合が大きいほど二つの尺度は離れます（比の λ 依存と出典は 17-09 §08）。模型の中の算術で、実際の幾何は 17-09・17-10 で扱います。

08

正確に書ける対応 — 何が定理で、何が提案か

「正確」には二つの意味があります。片側だけで閉じた数学（双曲幾何・リー群・常微分方程式）として正しいことと、模型の中で両辺の定義が一致することです。どちらも四次元のヤン–ミルズ理論の定理ではなく、(1) も証明されていません。

表5　対応と水準

境界の側	内部の側	水準
共形群・拡大	$SO(2,4)$・$(x,z) \mapsto (sx, sz)$	既知
$\ln(\ell/\varepsilon)$	測地線の長さ (7)	長さの式は既知 （数値は計算 ）、境界の対数との同一視は物理
次元 Δ	(9) の冪	冪は既知 、同一視は物理
Callan–Symanzik の形	動径の Hamilton–Jacobi	物理 （提案）
$E(L)$	弦の最小面積	処方は物理 、(10)(11) は計算

境界の側	内部の側	水準
—	境界の連結性	既知 数学の定理

最後の行は Witten–Yau（1999）の定理です。言葉を三つ用意します。**Einstein 多様体**は、Ricci 曲率（曲率を方向ごとに平均したもの）が計量の定数倍になる多様体で、ここではその定数が負です（(6) の空間が例）。**共形境界**（Penrose の意味）は、無限の彼方にある境界のことで、計量に境界で零になる関数の二乗を掛けると境界までなめらかに延びるときに付けられます（(6) なら $z^2 ds^2$ が $z=0$ まで延びる）。$H_n(M;\mathbb{Z})=0$ は、大まかに言えば M に n 次元の「穴」が無いことです。M を $n+1$ 次元、N をその n 次元の共形境界とし、M が完備（どの方向にも途中で切れない）で、N のスカラー曲率（曲率をさらに一つの数にまとめたもの）が正なら

$$H_n(M;\mathbb{Z})=0, \qquad \text{特に } N \text{ は連結} \tag{13}$$

です（要旨 'Let M be a complete Einstein manifold of negative curvature … N must be connected'）既知 。この章で使うのは結論の「境界 N は一続き（連結）」だけです。AdS/CFT が動機ですが、双対そのものの定理ではありません。例：表5 の物理の行は、どれも (1) を前提に使います。

09

ヤン–ミルズまでの距離 — 共形・極限・現在地

(1) の境界の理論は純ヤン–ミルズ理論ではありません。六本のスカラー場とフェルミオンを持ち、共形で結合が走らず（4-06 と対照的）、尺度 Λ が生まれません（4-07）。重力の計算が効く $N,\lambda\to\infty$ は、問題文（0-03）が求める任意のコンパクト単純群と、短い距離で漸近自由（$\lambda\to 0$）に一致する理論とは逆の側です。共形ならギャップはありません。質量 $m>0$ の状態があれば、拡大で質量 sm（任意の $s>0$）の状態もあるからです。

$$m^2\in\operatorname{spec}(P^2)\ \Rightarrow\ s^2m^2\in\operatorname{spec}(P^2)\ (s>0)\ \Rightarrow\ \inf\big(\operatorname{spec}(P^2)\setminus\{0\}\big)=0 \tag{14}$$

P^2 は四元運動量の二乗（2-04）で、(11) の $1/L$ はこの事情の別の顔です 既知 。例：Clay の問題の頁は今も質量ギャップについて 'no proof of this property is known' と書きます。ホログラフィーで質量ギャップが数学の定理として示された例は無く（物理の水準でギャップを持つ模型は 17-09）、弦理論に非摂動的な定義が無いこと、(1) が予想であること、極限が問題文の外にあることが重なっています（16-05）。四次元に戻す道は 17-10、超対称性のもとで双対からギャップが見える例は 17-11 です。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 (4)〜(6) の幾何、$SO(2,4)$ と共形群、(9) の冪と下限、(13)(14)。	(1) の証明。(8) の数学的な定義（内部の量子論が未定義）。
計算 表1〜表4、図1・図2、(10)(11) の定数、(2) の数値。	(12) の壁は模型で、実際の閉じ込めの幾何ではない。
物理 (1)(8)、Wilson ループの処方、動径と繰り込み群、壁の模型。	SYM にギャップは無い。純ヤン–ミルズ・有限の N・漸近自由への橋。この本は質量ギャップも連続極限の構成も自分では示していない（公開された連続極限の構成は第二巻）。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
(1)(3)〜(5)・§02 の引用・原論文の規約	物理・既知	J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 231, hep-th/9711200。本文を確認。
§02 の今日の規約 $g_{\mathrm{YM}}^2 = 4\pi g_s$	既知	O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri, Y. Oz, Phys. Rept. 323 (2000) 183, hep-th/9905111。(3.8) と §4.2 の本文を確認。
§03 の引用・(2.37)・下限 $m^2R^2 \geq -d^2/4$・§05 のディラトンと結合の演算子	既知・物理	E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 253, hep-th/9802150。(2.35)〜(2.37)、下限と実根の条件（(2.35) の直後と §2.6）、ディラトンの記述（§2.6）の本文を確認。
(8)	物理	S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov, Phys. Lett. B 428 (1998) 105, hep-th/9802109。要旨を確認。
下限の名前	既知	P. Breitenlohner, D. Z. Freedman, Phys. Lett. B 115 (1982) 197；Ann. Phys. 144 (1982) 249。書誌のみ。
(7) の考え方・§04 の引用	物理	L. Susskind, E. Witten, hep-th/9805114。(2.5)・(3.1) と §2〜§3 の本文を確認。J. de Boer, E. Verlinde, H. Verlinde, JHEP 0008 (2000) 003, hep-th/9912012。本文を確認。
$\mathrm{tr}\, F^2$ とディラトン	物理	C. Csáki, H. Ooguri, Y. Oz, J. Terning, JHEP 9901 (1999) 017, hep-th/9806021。本文を確認（この対応は同論文が先行文献に帰している）。
(10)(11)・§06 の引用	物理・計算	J. M. Maldacena, Phys. Rev. Lett. 80 (1998) 4859, hep-th/9803002。本文を確認。
§06 の処方（同時期のもう一つ）	物理	S.-J. Rey, J.-T. Yee, Eur. Phys. J. C 22 (2001) 379, hep-th/9803001。要旨を確認。
§07 の引用	物理	J. Polchinski, M. J. Strassler, Phys. Rev. Lett. 88 (2002) 031601, hep-th/0109174。本文を確認。

もの	種別	出典・道具
(13)	既知	E. Witten, S.-T. Yau, Adv. Theor. Math. Phys. 3 (1999) 1635, hep-th/9910245。要旨と本文の冒頭（M が $n+1$ 次元、N が n 次元）を確認。
寄り道	既知・物理	J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D 7 (1973) 2333；S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. 43 (1975) 199（書誌のみ）。G. 't Hooft, gr-qc/9310026；L. Susskind, J. Math. Phys. 36 (1995) 6377, hep-th/9409089（要旨を確認）。
§09 の引用	既知	Clay Mathematics Institute, “Yang–Mills & the Mass Gap”（Web ページ）。本文を確認。
§09 の問題文の要件	既知	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”（Clay の公式の問題記述、PDF）。本文の照合は 0-03 の出典表。
表・図・数値	計算	この端末の Python 3（scipy）：params.py、geodesic.py、delta.py、wilson.py、bh_entropy.py。

次に読む章：17-09 質量ギャップが幾何になる ― 潰れる円の幾何で、グルーボールの質量を固有値として読む。

質量ギャップが幾何になる — 円が潰れて時空が終わると、スペクトルに隙間が開く

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 円が潰れる「葉巻」で時空が終わると、面積則と、正で離散的なグルーボールの質量（動径の固有値）が出る論法。この端末で追い直した数値と、格子との成績。比べる相手のスカラーをどれに取るかで、比が大きく動くこと。

前提となる章 — 17-08（AdS・辞書・弦の計算）。変分原理は 2-05 §08・1-10、グルーボールは 17-01 §06。

先に言うこと — ここのギャップは $N \to \infty$・$\lambda \to \infty$ の超重力の近似で、固定した背景の上の線形の固有値問題です。AdS/CFT は予想で、模型は純ヤン–ミルズ理論ではありません。この章は質量ギャップ問題を解いておらず、この本も自分では何も示していません。

この章の順序

1. 何を幾何に翻訳するか
2. 温度で尺度を入れる
3. 円が潰れる（図1・寄り道：ブラックホールの温度）
4. 弦は底で寝る
5. グルーボールは固有値（図2）
6. なぜ正で、なぜ離散か
7. 格子と比べる（後の解析：どのスカラーが最も軽いか）
8. 二つの尺度
9. 別の閉じ方

01

何を幾何に翻訳するか — 隙間と面積則

AdS の境界の理論は共形でギャップを持たず（17-08 (14)）、17-08 §07 では手で置いた壁で尺度を入れました。この章では**幾何そのものが有限の深さで終わる**模型を見ます。Witten（1998）はそこから二つを読みました 物理 。面積則は、境界の方向 dx_i^2 の係数が内部で正の定数以上であることから。ギャップは、内部の波動方程式が正で離散的な固有値 $m_1^2 < m_2^2 < \cdots$ だけを持つことから。後者を境界で言えば、$\mathrm{tr}\, F^2$ などの二点関数が自由な伝播関数の和になります。

$$\langle \mathcal{O}(x)\, \mathcal{O}(0) \rangle = \sum_{n \geq 1} |c_n|^2 \, \frac{e^{-m_n |x|}}{4\pi |x|} \qquad \text{(境界は三次元)} \tag{1}$$

右の分数は三次元の質量 m の伝播関数で 既知 、遠方は最初の項が支配し、相関長は $1/m_1$ です（2-05 §05・4-11）。例：§05 の模型で $\mathrm{tr}\, F^2$ の二点関数を見ると（ディラトンの最低モード）、温度が $T = 1/\pi$ となる §03 の規格化で $m_1 = 3.404$、相関長 0.294 です 計算 。ただし超重力の場全体では、計量のゆらぎから来る別のスカラーのほうが軽く、$m^2 = 5.457$（ディラトンは 11.588）です（Brower–Mathur–Tan 2000。§07）物理 。(1) は $1/N$ の主項で、相互作用で離散性は失われるがギャップは残る、と Witten は書いています。

02

温度で尺度を入れる — 虚時間の円と反周期

温度 T の熱平衡は、虚時間を周期 $\beta = 1/T$（逆温度。この章の β は格子の逆結合ではない）の円に巻いた経路積分です（2-07 §06）。ボソンは一周で元に戻り、フェルミオンは符号が変わる（反周期）ので、円の方向の運動量は

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta} \ \text{(ボソン)}, \qquad \omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta} \ \text{(フェルミオン)}, \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

です 既知 。フェルミオンには $\omega = 0$ が無く、長い距離から外れます。Witten は $\mathcal{N} = 4$ 理論を $\mathbb{R}^3 \times S^1$ に置いて超対称性を壊し、スカラーも一ループで重くなるので、長い距離では三次元のゲージ場が残るとしました 物理 。Csáki–Ooguri–Oz–Terning（1998、以下 COOT）はこれを QCD_3 と呼びます。比喩で言えば円は型枠です。正確には、円の半径 R は三次元の理論の紫外の切断です（17-06 §08）。例：フェルミオンの最低の運動量は πT、ボソンの 0 でない最低は $2\pi T$ です。

03

円が潰れる — 葉巻の幾何

境界に円があると、内部は AdS のブラックホールになります。Witten はその解を拡大して次の計量を得ました（全体の R^2 は省く）物理。

$$ds^2 = g\,d\tau^2 + \frac{d\rho^2}{g} + \rho^2 \sum_{i=1}^{3} dx_i^2, \qquad g = \frac{\rho^2}{b^2} - \frac{b^2}{\rho^2}, \qquad \rho \geq b \tag{3}$$

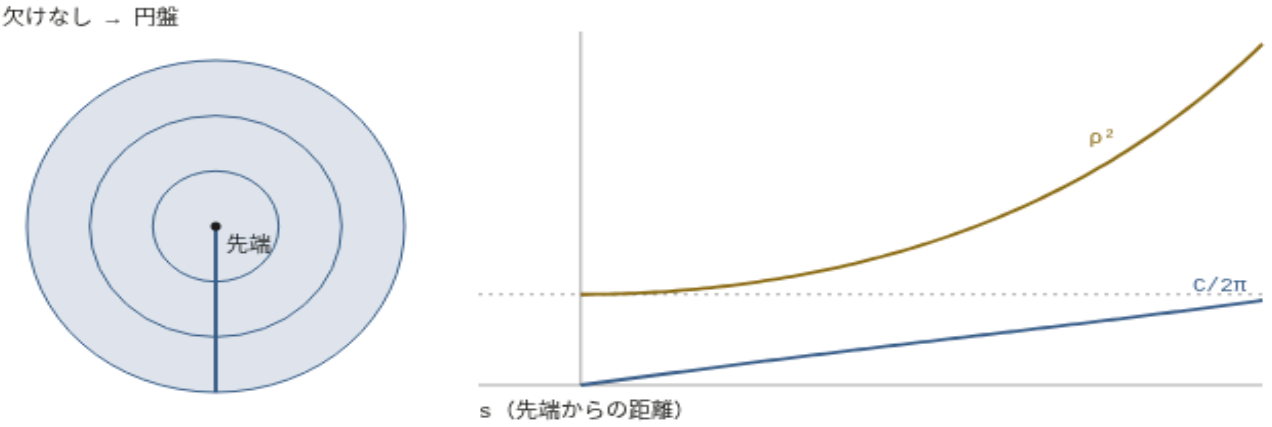
b は曲率半径、$\rho \to \infty$ が境界で AdS（17-08 §03）に戻ります。$\rho = b$ で $g = 0$ となり円が潰れます。先端からの距離 r（$\rho \approx b + r^2/b$）で書くと

$$g\,d\tau^2 + \frac{d\rho^2}{g} \;\approx\; dr^2 + r^2\,d\theta^2, \qquad \theta = \frac{2\tau}{b} \tag{4}$$

で平面の極座標です。ただし τ の周期が πb からずれると先端は円錐の頂点（特異点）です。滑らかさが周期を πb に固定します。境界の近くで計量を ρ^2 で割ると $d\tau^2/b^2 + \sum dx_i^2$ なので、境界で測った円周は $\pi b/b = \pi$ で、温度は b に依らず $T = 1/\pi$ に決まります 既知。この章の数値はこの規格化（円周 π、$T = 1/\pi$）で書きます。表の「$b = 1$」は b を 1 と置いたという意味で、(7) の固有値は $\rho = bu$ と置くと b が消えるので b に依りません。

(ρ, τ) は葉巻（cigar）形の円盤です。比喩で言えば時空が「そこで終わる」。正確には先端は円盤の中心です。$b = 1$ では $\rho^2 = \cosh 2r$ と書け、数値積分と 8 桁で一致します 計算。

図1　左：先端の近く（角 $2\pi\beta/\beta_1$ の扇形の縁を同一視）。右：円の半径 $C/2\pi$（青）と dx^2 の係数 ρ^2（黄）。周期を動かすと、1 以外で先端が円錐になる



β/β₁ = 1.00　円周/(2π×距離) → 1.00　滑らか（円盤の中心）　dx² の係数の最小値 b² = 1

図1 の曲線の値（$\beta/\beta_1 = 1$、$b = 1$。s は先端からの距離）

ρ	s	$C/(2\pi s)$	ρ^2
1.001	0.0316	0.9997	1.002
1.1	0.3186	0.9719	1.210

ρ	s	$C/(2\pi s)$	ρ^2
2	1.0317	0.9385	4.000
4	1.7324	1.1522	16.00

計算 この図の数値はこの端末で計算した（曲線は $\rho^2=\cosh 2s$。表は数値積分の値で、先端に近いほど $C/(2\pi s)$ は 1 に近づく）。

寄り道：ブラックホールの温度も同じ計算

飛ばしてよい小節です。

虚時間の Schwarzschild 計量 $f\,d\tau^2+dr^2/f+\cdots$（$f=1-r_s/r$）が $r=r_s$ で滑らかなら周期は $4\pi r_s$。これを $\hbar c/(k_BT)$ と読むと

$$T=\frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B} \tag{5}$$

で、太陽質量なら $T=6.17\times10^{-8}$ K 計算。この導き方は Gibbons–Hawking（1977）の方法とされます 既知。

04

弦は底で寝る — 面積則

Wilson ループは内部の面の正則化した面積 $\alpha(D)$ で $e^{-\alpha(D)}$ と決まります（17-08 §06） 物理。(3) では面は $\rho\ge b$ にしか入れず、dx_i^2 の係数 ρ^2 は b^2 以上なので、囲む面積を A として

$$\alpha(D)\ \ge\ b^2A-(\text{縁と正則化の項}),\qquad \sigma=b^2\times(\text{弦の張力}) \tag{6}$$

で面積則（17-01 §04）が出ます（Witten）。距離 L の二点を結ぶ弦の単位長さあたりの面積 $E(L)$ を、17-08 (10) と同じ方法で求めました。

表1　葉巻の中の弦（単位 $R^2/(2\pi\alpha')$、$b=1$）。共形は 17-08 (11)

L	$E(L)$	**共形** $-1.4355/L$	$E-L$
0.1	−14.355	−14.355	—
1	−1.307	−1.436	−2.307
2	−0.032	−0.718	−2.032
6	4.000	−0.239	−2.000

短い距離では共形の $1/L$、長い距離では $E\approx L-2.000$ で、傾き 1 が $\sigma=b^2$ です 計算。弦は底 $\rho=b$ まで下りて水平に寝ます。壁（17-08 §07）は要りません。例：境界の尺度を s 倍に

取り直すと温度は T/s、張力は $1/s^2$ 倍で、$\sigma \propto T^2$ です（Witten）。

05

グルーボールは固有値 — ディラトンの動径方程式

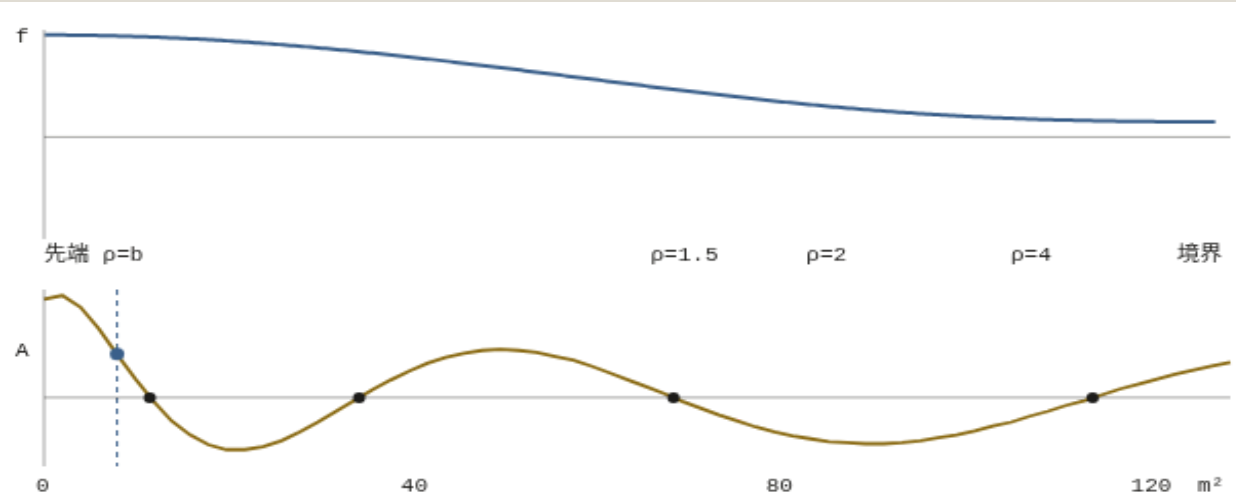
$\mathrm{tr}\,F^2$ にはディラトンが対応します（17-08 §05）。Witten は (3) の上で τ に依らない波 $\phi = f(\rho)e^{ik\cdot x}$ を調べました（τ 方向の運動量を持つ波はより重い。同じ場の中の比較。§08）。方程式は

$$-\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^3 g\,\frac{df}{d\rho}\right) = m^2 f, \qquad m^2 = -k^2 \tag{7}$$

で（$b=1$ なら $\rho^3 g = \rho^5 - \rho$）物理、m は三次元の粒子の質量です。条件は二つ。**先端で滑らか**：片方の解は $\log(\rho-b)$ で発散し、滑らかな解は定数倍を除いて一つ。**無限遠で規格化できる**：解 $f\sim 1$ と $f\sim\rho^{-4}$ のうち後者。定数の成分は境界の源（17-08 (8)）です。

先端での滑らかさは、平面の極座標の動径 r（(4)）で測った傾きが 0 という条件です。$\rho - b \propto r^2$ なので、ρ で測ると傾きは 0 にならず、(7) から $f'(1) = -m^2 f(1)/4$（$b=1$）、第一固有関数で $-2.90 f(1)$ です 計算 。de Mello Koch ら（1998）の要旨も、地平面で ρ の傾きが 0 になる滑らかな解は無い、とこの条件を述べています。求め方は撃ち込みで、先端の滑らかな解が無限遠に残す定数成分 $A(m^2)$ の零点が固有値です。

図2　上：先端（左）から撃ち出した解 f（横軸 θ、$\rho=\sec\theta$）。下：境界に残る定数成分 A（$1+m^2/4$ 倍）。m^2 を動かすと $A=0$ で解が境界に 0 で着地する



m² = 8.0　境界に残る定数成分 A = +0.148（先端で f=1）　節 0 個

計算 この図の数値はこの端末で計算した（下は精密な積分の表。上は同じ式のページ内の Runge–Kutta 積分で、表と 4 桁で一致）。

表2　(7) の固有値 m_n^2（$b=1$）。節は $n-1$ 個。T_L は (9)

n	この端末	COOT	$6n(n+1)$	$(\pi/T_L)^2(n+\frac12)^2$
1	11.5877	11.59	12	12.92
2	34.5270	34.53	36	35.89
3	68.9750	68.98	72	70.34
6	241.237	241.2	252	242.61

撃ち込みと Chebyshev 選点法（$u=1/\rho^2$ に移す）が 7 桁一致し、COOT の表 1 の 6 行を再現します 計算 。温度との比は $m_1/T=10.69$ です。

06

なぜ正で、なぜ離散か — 変分と箱の長さ

正であること。(7) に ρf を掛けて部分積分すると、先端（$\rho^3 g=0$）と無限遠の境界項が消えて

$$m^2=\frac{\int_b^\infty \rho^3 g\,(f')^2\,d\rho}{\int_b^\infty \rho\,f^2\,d\rho} \tag{8}$$

です。分子が 0 なら f は定数ですが、定数は規格化できない（$\int^\infty \rho\,d\rho=\infty$）ので $m^2>0$ 既知 。右辺の最小値が m_1^2 で、ギャップは Poincaré 不等式の最良定数です（1-10・2-05 §08）。

離散であること。変数を $t=\int_1^\rho d\rho'/\sqrt{\rho'^4-1}$ に、未知関数を $\psi=(\rho^6-\rho^2)^{1/4}f$ に取り替えると（Liouville 変換。$b=1$）、(7) は区間 $[0,T_L]$ の Schrödinger 方程式

$$-\frac{d^2\psi}{dt^2}+V(t)\,\psi=m^2\psi,\qquad T_L=\int_1^\infty\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^4-1}}=\int_0^1\frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}=1.31103 \tag{9}$$

になります 既知 。$V=(\rho^6-\rho^2)^{-1/4}\frac{d^2}{dt^2}(\rho^6-\rho^2)^{1/4}$ は両端で発散し、先端で $V\approx -1/(4t^2)$、無限遠の端で $V\approx(15/4)/(T_L-t)^2$ です 計算 。それでも箱の長さ T_L が有限なので、箱の中の粒子と同じく固有値は飛び飛びです。

端の型は近似の位相も決めます。ポテンシャルが $(\nu^2-\frac14)/u^2$（u は端からの距離）の端では、許される解は $\sqrt{u}\,J_\nu(mu)$（J_ν は次数 ν の Bessel 関数）で、端から離れると $\cos(mu-\nu\pi/2-\pi/4)$ のように振動します。先端は $\nu=0$ で位相 $\pi/4$、無限遠の端は $\nu=2$ で $5\pi/4$ を持ち込むので、n 番目の固有値は $m_nT_L\approx\pi(n-1)+\pi/4+5\pi/4=\pi(n+\frac12)$、つまり $m_n\approx(\pi/T_L)(n+\frac12)$ です。$n=6$ で差は m^2 で 0.6%（m で 0.3%）まで縮みます 計算 。表2 の $6n(n+1)$ は、COOT が Takei–Koike の私信として引く、完全 WKB 解析による近似式です。完全 WKB 解析は、大きなパラメータで展開した発散級数に Borel の方法で和を与えて数学的

に扱う理論で（4-12）、この式はその総和可能性を仮定しています（COOT は、この場合の証明は無いと断っています）。

AdS では下端 $\rho = 0$ までの長さ $\int_0 d\rho/\rho^2$ が無限で、解は奥で振動し、スペクトルは 0 から連続します（Witten）。「時空が終わる」は、ここでは「Liouville の長さが有限」です。Gürsoy–Kiritsis–Nitti（2007）の五次元の模型でも、奥のポテンシャルの増え方の指数 α について、閉じ込めとギャップは $\alpha \geq 1$、スペクトルが純粋に離散なのは $\alpha > 1$（$\alpha = 1$ ではギャップの上に連続スペクトル）と、模型の中の解析で述べられています。同じ論文には 'confinement and discrete spectra imply each other' という一文もあります 物理 。

07

格子と比べる — 三次元と四次元

超重力が出すのは一つの尺度を単位にした数なので、COOT はディラトンの最低状態を格子（5-08）の 0^{++} に合わせ（三次元では格子の $N \to \infty$ の値 4.065。COOT の表では 4.07 と印字）、残りを比べました。0^{--} は二形式の場の方程式から出ます。

表3　三次元（単位 $\sqrt{\sigma}$）。格子は Teper（COOT が引く値）

状態	格子 $N = 3$	格子 $N \to \infty$	COOT	この端末
0^{++*}	6.52(9)	6.18(13)	7.02	7.02
0^{++**}	8.23(17)	7.99(22)	9.92	9.92
0^{--}	6.48(9)	5.91(25)	6.10	6.10

ディラトンを基準にすると、比 $0^{--}/0^{++} = 1.50$ は格子の 1.45 ± 0.03 と 3% で合い、励起は $N \to \infty$ の格子より 14%・24% 高く出ます 計算 。基準をどのスカラーに取るかは、下の「後の解析」で扱います。

四次元は 17-07 §09 の D4 ブレーンの背景（反周期の円の半径 R_2）です。COOT のディラトン型スカラーの方程式は、$y^2 = \rho$（原論文の λ）とし、先端を $y = 1$ に置く単位（このとき $M_{\mathrm{KK}} = 1/R_2 = 3$）で次です（無限遠の解は 1 と y^{-9}）物理 。

$$(y^7 - y)\, f'' + (10y^6 - 4)\, f' + m^2 y^3 f = 0 \tag{10}$$

表4　四次元（GeV、0^{++} を 1.61 に合わせる）。右端は $M_{\mathrm{KK}} = 1/R_2$ 単位で、0^{++} と 0^{++*} は COOT の式 (10) による値、0^{-+} は COOT の三形式の式による値

状態	格子（COOT が引く値）	COOT	この端末	m/M_{KK}
0^{++}	1.61(15)	入力	入力	2.03
0^{++*}	2.8（誤差なし）	2.38	2.38	3.01
0^{-+}	2.19(32)	1.83	1.93	2.44

$0^{-+}/0^{++}$ は COOT で 1.14、当時の格子で 1.36 ± 0.32 です。COOT は 0^{-+} を 11 次元の三形式の場の成分から出します。この端末でその式から求めると最低値は $m^2 = 53.376$（(10) の 0^{++} を 1.61 GeV とすると 1.93 GeV、比 1.20）で、Brower–Mathur–Tan（2000、以下 BMT）の表2 にある同じ方程式（N4）の値と一致します 計算 。COOT の表の 1.83 GeV は、この式からは再現できません。格子の 0^{++*} は二グルーボールの束縛状態の可能性が注記されています。

後の解析 — どのスカラーが最も軽いか

BMT は超重力の場をすべて（計量・三形式・球面の大きさ）動径の固有値問題にしました。四次元のスカラー型のモードを並べます。「割り当て」は、そのモードが結合する演算子から読んだ量子数 J^{PC} です。

表5　四次元の最低モード（先端を 1 に置く単位の m^2。右端は M_{KK} 単位）

方程式	由来の場	割り当て	この端末	BMT 表2	m/M_{KK}
S4	計量の $\tau\tau$ 成分	0^{++}（最も軽い）	7.3083	7.308	0.901
T4	計量・ディラトン	2^{++}・0^{++} など（0^{++} は $\mathrm{tr}\,F^2$ に結合）	22.0966	22.097	1.567
V4	計量の τi 成分など	1^{-+}・0^{-+}	31.9853	31.985	1.885
COOT の (10)	ディラトン	0^{++}（COOT）	37.1699	–	2.032
N4	三形式	1^{+-}・0^{+-}（BMT）、0^{-+}（COOT）	53.3758	53.376	2.435

T4 の方程式は (10) と一階の項だけが違います。

$$(y^7 - y)\,f'' + (7y^6 - 1)\,f' + m^2 y^3 f = 0 \tag{10'}$$

後の解析では、$\mathrm{tr}\,F^2$ に結合するディラトン型の 0^{++} は 2^{++} と縮退して $1.567\,M_{\mathrm{KK}}$、最も軽い 0^{++} は別のモード S4 の $0.901\,M_{\mathrm{KK}}$ です 物理 。表4 の 2.03 は COOT の式 (10) による値です。三次元でも、ディラトン（11.588）より軽いスカラー（BMT の S3、5.457）があります 計算 。BMT は 'the lowest mass scalar comes from the gravitational multiplet, not the dilaton' と書き、数 % の比の一致を 'a misconception' と評しています。同時に、スピンと質量の並び全体は格子の結果とよく対応するとも書いています 物理 。

そのため比は、分子と分母にどのモードを取るかで動きます。三次元の $0^{--}/0^{++}$ は S3 を基準にすると 2.19 です。四次元では、COOT の三形式の値を T4 で割ると 1.55、BMT の割り当て（0^{-+} は V4）では V4/T4 が 1.20、V4/S4 が 2.09 です 計算 。今日の格子の $SU(3)$ では $0^{-+}/0^{++} = 1.549(16)$、$0^{++*}/0^{++} = 1.720(16)$ です（17-01 の表）。COOT の基準のホログラフィーの比（1.14、1.20、1.48）は、それぞれ 26%・23%・14% 小さくなります 計算 。

> 08

二つの尺度 — 張力は予言されず、円の尺度も消えない

グルーボールの質量は固有値問題で決まり、結合 $\lambda = g_{\mathrm{YM}}^2 N$ に依りませんが、弦張力は λ に比例します。D4 の模型では Kruczenski–Mateos–Myers–Winters（2003）の式 (2.7) から 物理

$$\sigma = \frac{2}{27\pi}\,\lambda\, M_{\mathrm{KK}}^2, \qquad \frac{m_{0^{++}}}{\sqrt{\sigma}} = \frac{m_{0^{++}}}{M_{\mathrm{KK}}}\sqrt{\frac{27\pi}{2\lambda}} \tag{11}$$

です（λ の規約で 2 倍ずれうる）。右辺の $m_{0^{++}}/M_{\mathrm{KK}}$ には、COOT の式 (10) による 2.03、BMT の T4（ディラトン型）の 1.567、S4（最も軽い）の 0.901 のどれを入れるかで値が変わります。

表6　(11) の $m_{0^{++}}/\sqrt{\sigma}$。格子の $SU(\infty)$ は 3.072(14)

$m_{0^{++}}/M_{\mathrm{KK}}$	$\lambda = 1$	$\lambda = 10$	$\lambda = 30$	$\lambda = 100$	$\lambda = 1000$	3.072 に合う λ
2.03（COOT の式 (10)）	13.2	4.19	2.42	1.32	0.42	19
1.567（BMT の T4）	10.2	3.23	1.86	1.02	0.32	11
0.901（BMT の S4）	5.87	1.86	1.07	0.59	0.19	3.7

超重力が信頼できる $\lambda \gg 1$ で比は $\lambda^{-1/2}$ で 0 に向かいます 計算。3.072 に合う λ は 3.7〜19 と、どのモードを取るかで 5 倍ほど動き、いずれも当てはめで予言ではありません。Klebanov–Strassler も張力とグルーボールの 'large separation of scales' を認めています。格子では 3〜4 です（17-03）。

壁で切る模型では、比の λ 依存は $\lambda^{-1/4}$ です。硬い壁（17-08 の (12)）では張力が $\sigma = \sqrt{\lambda}/(2\pi z_w^2)$、グルーボールの質量が $\sim 1/z_w$ です（壁で Dirichlet 条件を課す Boschi-Filho–Braga 2003）。柔らかい壁では、張力が Andreev–Zakharov（2006）の (19) と $g = R^2/\alpha'$ から $\frac{R^2}{\alpha'}\frac{e}{4\pi}c$、質量の二乗が c に比例します（Karch–Katz–Son–Stephanov 2006 の (15)。中間子の場合）。どちらも張力が $\sqrt{\lambda}$ に比例するので比は $\lambda^{-1/4}$ で、D4 の模型の $\lambda^{-1/2}$ との違いは (11) の張力が λ に比例することから来ます 物理。

もう一つは円の尺度です。三次元では、§03 の規格化で境界の円周は π なので $R = 1/2$、$m_1 = 3.404 = 1.70/R$ です（COOT は地平面の位置を $b = 1/(2R)$ と置く別の規格化を使います）。四次元では 0^{++} が $0.90/R_2$〜$2.03/R_2$ で、どのモードを取ってもグルーボールは円と同じ桁です 計算。球面の上の KK モード（17-06 §02）も 'of the same order' で（COOT）、グルーボールとみなす状態は手で選ばれています。消すには $\lambda \to 0$ が要り、それは超重力が効く向きの 'opposite' です。Witten 自身、小さい $\eta = g_4^2 N$ での計算を 'a tall order' としました 物理。極限の順序は 17-10 へ。

09

別の閉じ方 — Klebanov–Strassler と成績表

Klebanov–Strassler（2000）は D3 ブレーン（17-08 §02）を六次元の錐（コニフォールド）の上に置き、先端の特異点が IR で変形されて有限の球面が残る背景を作りました。

$$\sum_{i=1}^{4} z_i^2 = 0 \ \text{（コニフォールド）} \longrightarrow \sum_{i=1}^{4} z_i^2 = \epsilon^2 \ \text{（変形）}, \qquad z_i \in \mathbb{C} \tag{12}$$

例：z_i を実数に限ると右は半径 ϵ の S^3 で、先端に残る球です 既知 。錐の断面を貫く五形式の場の流束（D3 ブレーンの枚数に当たる量）は $\mathcal{K}(r) = N + a\, g_s M^2 \ln(r/r_0)$ と動径 r で対数的に変わります。g_s は弦の結合（17-08 (3)）、M は錐の中の球に巻いた「分数ブレーン」の枚数、a は 1 の程度の定数です（原論文）。著者たちはこの減少を、ゲージ群 $SU(N+M) \times SU(N)$ が $N \to N - M$ と段々に小さくなる列（カスケード）と読みます 物理 。先端の変形は、IR に残る $\mathcal{N} = 1$ 超対称ヤン–ミルズの R 対称性（この理論のカイラル対称性）$\mathbb{Z}_{2M} \to \mathbb{Z}_2$ の破れが幾何として見えたもの、とされます 物理 。先端で dx^2 の係数が有限なので §04 と同じく面積則が出ます。ただし理論は $\mathcal{N} = 1$ 超対称、UV のカスケードは 'goes on forever'、S^3 の KK モードとグルーボールは 'both scale as $m/(g_s M)$' です。

表7　成績表（年は arXiv）

模型	合うもの	入力	外れる・予言しない
Witten・QCD_3	$0^{--}/0^{++}$ 1.50 対 1.45(3)（ディラトンを基準にした場合。S3 を基準にすると 2.19）	0^{++}	励起 14〜24%・張力・円
Witten・QCD_4	$0^{-+}/0^{++}$ 1.14 対 1.36(32)（1998 年。COOT の式 (10) のディラトンを基準にした場合）	0^{++}	今日の格子と 14〜26%・モードの選び方で比が 1.14〜2.09・$m/\sqrt{\sigma}$
Klebanov–Strassler（2000）・Maldacena–Núñez（2000）	面積則・R 対称性（カイラル対称性）の破れ（幾何）	—	$\mathcal{N} = 1$・KK と同じ尺度
Gürsoy–Kiritsis–Nitti（2007）	$2^{++}/0^{++}$ 1.40 対 1.46(5)	$0^{++*}/0^{++}$	ポテンシャルは当てはめ・$N = \infty$

どの模型でもギャップは「固定した背景の上の線形の固有値問題」として示され、背景が $\mathbb{R}^4$ の純ヤン–ミルズ理論を記述する部分は予想のままです。Clay の頁も 'no proof of this property is known' と書いています。問題文（0-03）との距離は 17-10、切れ目は 16-05 です。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 (4)(8)(9)(12)。固定した背景の上の数学。	背景が純ヤン–ミルズ理論を記述すること。
計算 表1〜表6、図1・図2、(5)、(9) の V の両端の振る舞い。COOT の QCD_3 と QCD_4 の 0^{++} の表の再現。BMT の表2 の S4・T4・V4・N4 と、三次元の S3 の最低値の再現。	QCD_4 の 0^{-+}（1.83 GeV）の再現。(11) の λ の規約。どのモードをどの状態とみなすかの決着。
物理 (1)(3)(6)(7)(10)(10′)(11) の読み、グルーボール＝固有値、量子数の割り当て、表3・4・5・7 の比較。	$N, \lambda \to \infty$ の外。この本は質量ギャップも連続極限の構成も自分では示していない（公開された連続極限の構成は第二巻）。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
Witten の式と引用	物理・既知	E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 505, hep-th/9803131。本文を確認。
(10)・表2〜4・COOT の引用・$6n(n+1)$	物理	C. Csáki, H. Ooguri, Y. Oz, J. Terning, JHEP 9901 (1999) 017, hep-th/9806021。本文を確認（$6n(n+1)$ は同論文が Y. Takei, T. Koike の私信として引くもの）。
表5・(10′)・§07 の後の解析	物理	R. C. Brower, S. D. Mathur, C.-I. Tan, Nucl. Phys. B 587 (2000) 249, hep-th/0003115。本文を確認（表1・表2・QCD_3 の表・§4 の量子数・§5.1）。
格子	物理	M. J. Teper, hep-lat/9804008, hep-lat/9711011；C. Morningstar, M. Peardon, PRD 56 (1997) 4043（COOT 経由。書誌のみ）。A. Athenodorou, M. Teper, JHEP 11 (2020) 172；JHEP 12 (2021) 082（照合済みの調査記録から）。
先端の条件・(11)	物理	R. de Mello Koch ほか, PRD 58 (1998) 105009, hep-th/9806125（要旨、照合済みの調査記録から）；M. Kruczenski, D. Mateos, R. C. Myers, D. J. Winters, JHEP 0405 (2004) 041, hep-th/0311270 の式 (2.7)（本文を確認：$\sigma = \frac{2}{27\pi} g_{\mathrm{YM}}^2 N_c M_{\mathrm{KK}}^2$）。
§08 の壁の模型の $\lambda^{-1/4}$	物理	H. Boschi-Filho, N. R. F. Braga, JHEP 0305 (2003) 009, hep-th/0212207（要旨を確認）；O. Andreev, V. I. Zakharov, Phys. Rev. D 74 (2006) 025023, hep-ph/0604204 の (19) と $g = R^2/\alpha'$（本文を確認）；A. Karch, E. Katz, D. T. Son, M. A. Stephanov, Phys. Rev. D 74 (2006) 015005, hep-ph/0602229 の (15)（本文を確認）。硬い壁の張力は 17-08 の (12)（この端末の計算。壁で線形の項が出ることは H. Boschi-Filho, N. R. F. Braga, C. N. Ferreira, Phys. Rev. D 73 (2006) 106006, hep-th/0512295 の (12)〜(16) でも確認）。指数 $-1/4$ はこれらを組み合わせたこの端末の算術。
(12)・§09・表7	物理・既知	I. R. Klebanov, M. J. Strassler, JHEP 0008 (2000) 052, hep-th/0007191（本文を確認）；J. M. Maldacena, C. Núñez, PRL 86 (2001) 588（要旨）。
§06 の指数 α・表7	物理	U. Gürsoy, E. Kiritsis, F. Nitti, JHEP 0802 (2008) 019, arXiv:0707.1349（本文を確認）。

もの	種別	出典・道具
寄り道・Clay	既知	G. W. Gibbons, S. W. Hawking, 'Action integrals and partition functions in quantum gravity', Phys. Rev. D 15 (1977) 2752（書誌のみ）。Clay の問題の頁（照合済みの調査記録から）。
表・図・数値	計算	この端末の Python 3（scipy）：glueball.py・cigar_wilson.py・fig_shoot.py・rev_bmt.py（表5・表6）・rev_liouville.py（(9) の V）ほか 5 本。

次に読む章：17-10 四次元に戻す ― 極限の順序と問題文との距離。

四次元に戻す — 余剰次元を消す向きと、幾何で計算できる向きは反対にある

この章は既存の知見の整理です。§03 は本書の検討です。

この章で分かること — 余剰次元を消す $R \to 0$ が、次元転移のため $\lambda \to 0$ と同じ向きであること。幾何で計算できるのは反対の $\lambda \to \infty$ で、KK の塔がグルーボールと同じ高さに残ること。極限の入れ替えに要る一様性が欠けていること。

前提となる章 — 17-09。17-01 の次元転移、17-04 の 't Hooft の勘定、2-08 の Curie–Weiss 模型も使います。

先に言うこと — (2)(3) と表の算術は物理の見積もりで、定理ではありません。模型から四次元の理論へ移る極限を正当化した結果は探した範囲で見当たらず、この本も質量ギャップや連続極限の構成について自分では何も示していません（公開された連続極限の構成は第二巻で読みます）。

この章の順序

1. 三つのつまみ — N・λ・R と問題文
2. 次元転移が向きを決める — $R \to 0$ は $\lambda \to 0$
3. 超重力が効くのは反対の向き — 窓と床（図1）
4. 余分なものが残る — KK の塔と超対称性
5. $N \to \infty$ — 群を一つに固定すると
6. 極限の順序 — 入れ替えには一様性が要る
7. 寄り道：一様でない収束を目で見る（図2）
8. 問題文との距離 — 五つの要求
9. 何が残るか — 問題は場所を移す

01

三つのつまみ — N・λ・R と問題文

17-09 の模型を**懸賞問題の四次元の理論に戻せるか**が、この章の問いです。つまみは $SU(N)$ の N、尺度 M_{KK} での 't Hooft 結合 $\lambda = g^2 N$（17-04）、余剰次元の円の半径 $R = 1/M_{KK}$（KK の塔の間隔、17-06）の三つです。グルーボールの質量を Λ とすると、比 ΛR が余剰次元の見え方を測ります。問題文（Jaffe–Witten §4、0-03）の要求は

$$G \text{ は一つずつ固定 (例: } SU(3)), \qquad \text{空間は } \mathbb{R}^4 \ (R = 0), \qquad \text{短い距離で漸近自由に一致} \tag{1}$$

で、三つ目は相関関数が短い距離で漸近自由と摂動的な繰り込み理論の予言に合うことです（§4。引用は 0-03 §07）既知。模型が計算できるのは逆に $N = \infty$、$\lambda \gg 1$、ΛR が 1 の程度の場所です（§03・§05）。

例：Sakai–Sugimoto の模型は $M_{KK} \simeq 949$ MeV と $\kappa = \lambda N_c/(216\pi^3) \simeq 7.45 \times 10^{-3}$ を実験値から決めます。$N_c = 3$ なら $\lambda \approx 16.6$ 計算。これは Sakai–Sugimoto の結合の規約での値で、次の節の (2) の λ とは規約の違いで 2 倍程度ずれえます。以下で (2) に入れる数は目安です。ρ 中間子の 776 MeV は M_{KK} の 0.82 倍で、塔と同じ高さです。

02

次元転移が向きを決める — $R \to 0$ は $\lambda \to 0$

余剰次元を消すとは、Λ を固定して $R \to 0$ とすることです。Λ は結合の走りから生まれます（17-01・4-07）。17-01 の (1) の一ループの式 $\mu\, dg/d\mu = -b_0 g^3$（$b_0 = 11N/(48\pi^2)$）を $\lambda = g^2 N$ で書き直すと

$$\mu \frac{d\lambda}{d\mu} = 2gN\, \mu \frac{dg}{d\mu} = -2b_0 N\, g^4 = -\frac{2b_0}{N}\, \lambda^2 = -\frac{11}{24\pi^2}\, \lambda^2$$

です。両辺を λ^2 で割ると $d(1/\lambda)/d\ln\mu = 11/(24\pi^2)$ なので、$1/\lambda$ は $\ln\mu$ の一次式です。以下、引数の無い λ は $\mu = M_{KK}$ での値です。

$$\frac{1}{\lambda(\mu)} = \frac{1}{\lambda} + \frac{11}{24\pi^2} \ln \frac{\mu}{M_{KK}}$$

μ を下げると右辺は減り、$\mu = M_{KK} \exp\big(-24\pi^2/(11\lambda)\big)$ で 0 になります（一ループの結合がここで発散します）。結合が強くなるこの尺度が Λ の目安で

$$\Lambda R \ \sim\ \exp\!\Big(-\frac{24\pi^2}{11\,\lambda}\Big) \tag{2}$$

です 物理 。$\sim$ は「定数倍を除いて等しい」の意味で、定数は Λ の定義（Λ パラメータか、グルーボールの質量か）と規約で変わります。逆に解くと

$$\lambda(M_{KK}) \simeq \frac{24\pi^2/11}{\ln\big(1/(\Lambda R)\big)} \xrightarrow[R\to 0]{} 0 \tag{3}$$

で（定数倍は分母に定数を足すだけなので、$R\to 0$ の向きには効きません）、**余剰次元を消すことは $\lambda\to 0$ と同じ向き**です。Witten（1998 §4）は 'Asymptotic freedom should say that as η→0, the particle masses become exponentially small'（η はこの章の λ）と書き、Csáki–Ooguri–Oz–Terning は質量を $M^2 = f(\lambda)\Lambda_{UV}^2$ と置いて 'To take the continuum limit $\Lambda_{\rm UV}\to\infty$, we have to simultaneously take $\lambda\to 0$' と述べます 物理 （(2) は 17-07 の (10)）。比喩で言えば R は格子の刻み幅の役で、正確には、刻み幅 $a\to 0$ で裸の結合を 0 に送る（5-05）のと同じ論理です。

表1　ΛR の見積もり（(2) の定数倍を 1 と置いた値）と弦の補正の目安 $\lambda^{-3/2}$

λ	一ループ (2)	二ループ	$\lambda^{-3/2}$
1	4.45×10⁻¹⁰	2.17×10⁻⁹	1
5	0.0135	0.0334	0.0894
10	0.116	0.215	0.0316
16.6	0.274	0.409	0.0147
100	0.806	0.565	0.0010

計算 二ループは、17-01 の式に次の項を足した $\mu\,dg/d\mu = -b_0 g^3 - b_1 g^5$（$b_1 = \frac{34N^2}{3(16\pi^2)^2}$）から、(2) の右辺に $(11\lambda/48\pi^2)^{-51/121}$（$51/121 = b_1/(2b_0^2)$）を掛けたもの。規約で係数は変わりえ、大きな λ の行は (2) の使える範囲の外の目安です（$\lambda = 100$ で二ループの列が一ループより小さいのもそのためです。§03）。例：$\Lambda R = 10^{-3}$ には $\lambda \le 3.12$（二ループ 2.66）、10^{-6} には $\lambda \le 1.56$（1.41）が要ります。

03

超重力が効くのは反対の向き — 窓と床

重力の幾何で計算できるのは $\lambda \gg 1$ のときです（17-08）。Csáki らは §02 の $M^2 = f(\lambda)\Lambda_{UV}^2$ の f について先頭の弦の補正を評価し、**三次元**の純ヤン–ミルズ（QCD_3）の 0^{++} グルーボールで

$$f(\lambda) = c_0 + c_1\lambda^{-3/2} + \cdots, \qquad c_1 < 0 \tag{4}$$

を得ました（0^{++} の最低状態と、最初の五つの励起準位）物理 。$c_1<0$ は、紫外の切断 Λ_{UV} を固定して λ を減らすと質量が下がる、という意味で、連続極限への期待と合う向きです。四

次元での冪はこの論文にはありません。以下では $p = 3/2$ を四次元の目安として借ります。

同じ論文は三次元の場合について、$R \to 0$ で $g_4^2 N \to 0$ とする（QCD_3 の結合 $g_3^2 N = g_4^2 N / R$ を一定に保つため）ことを 'This is the opposite of the limit that is required for the supergravity description to be valid' と書きます。四次元についての根拠は、§02 の Witten の文と、Csáki らの序論の 'To take the continuum limit …' の文です。Witten も、小さい η で漸近自由を示し質量を計算することを 'This looks like a tall order, given our limited knowledge of worldsheet field theory with Ramond-Ramond fields in the Lagrangian' と書いています（世界面の場の理論は §09 で説明します）。

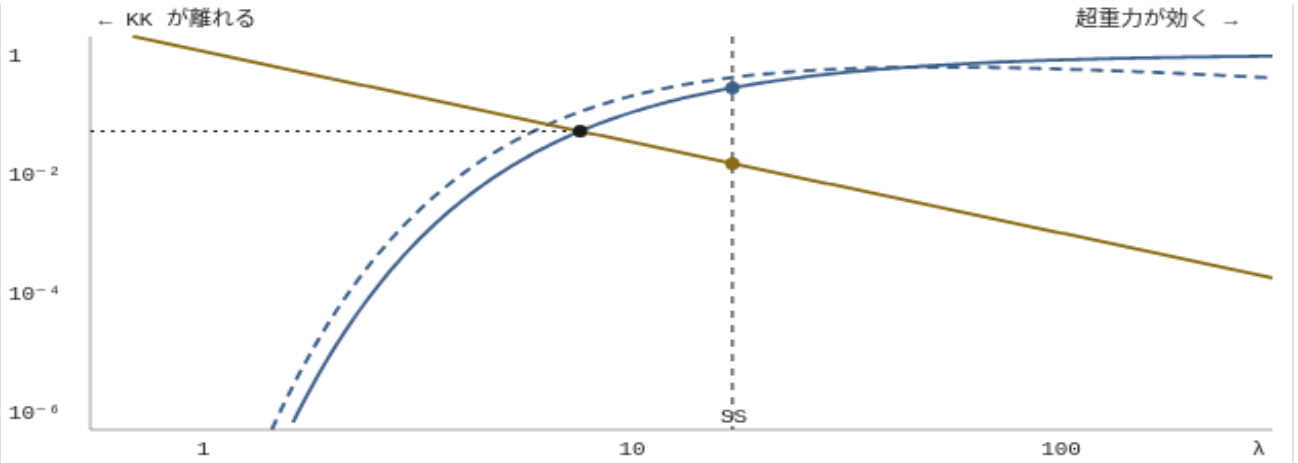
塔の見え方を $e_{KK} = \Lambda R$（(2) の定数倍を 1 と置く）、弦の補正の目安を係数 1 の $e_{\mathrm{str}} = \lambda^{-p}$（(4) を借りれば $p = 3/2$）として綱引きを数で見ます。二つの曲線の交点 λ^* での値を**床**と呼びます。

$$F_p = e_{KK}(\lambda^*) = e_{\mathrm{str}}(\lambda^*) \tag{5}$$

$\log e_{KK} + p \log \lambda$ は λ について増加する（一ループでも二ループでも、$p \geq 1$ なら）ので、交点はただ一つです。一ループの e_{KK} は増加して 1 に近づき、e_{str} は減少するので、交点の左では e_{str}、右では e_{KK} が F_p を上回ります。つまり一ループの見積もりでは $F_p = \min_\lambda \max(e_{KK}, e_{\mathrm{str}})$ で、**どの λ でも二つの目安のうち大きいほうは F_p を下回りません** 計算 。

二ループの式では事情が違います。e_{KK} は $\lambda \approx 51$ で最大 0.61 になり、その先では減って $\lambda \to \infty$ で 0 に向かいます。そのため λ の上限を外すと、max の最小値は 0 に近づきます（$p = 3/2$ で、$\lambda \leq 10^4$ までなら 0.067、$\lambda \leq 10^5$ で 0.038、$\lambda \leq 10^6$ で 0.014）計算 。これは結合の走りの摂動の式を λ の大きい側へ延ばした振る舞いで、(2) の使える範囲の外です。表2の二ループの行は交点の値で、$\lambda \leq 316$（図1 の範囲）に限った max の最小値とも一致します。

図1　λ を動かすと、その点での ΛR（青。実線は一ループ、破線は二ループ）と λ^{-p}（黄）の値が読める。水平の点線は一ループの床 F_p。SS は Sakai–Sugimoto の λ（規約で 2 倍程度ずれうる）。破線が $\lambda \approx 51$ より右で下がるのは (2) の使える範囲の外



λ = 16.63　ΛR：一ループ 0.274・二ループ 0.409　λ^−3/2 = 0.015　床 F = 0.051（二ループの交点 0.067）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（曲線は式をその場で計算。床は表2 と一致）。

表2　床 F_p（交点の値）と交点 λ^*

ΛR の式	p	λ^*	F_p
一ループ	1	9.55	0.105
一ループ	3/2	7.25	0.051
二ループ	1	7.77	0.129
二ループ	3/2	6.09	0.067

両方が 5〜13% 程度になる**窓**はあり、比が格子と数 % で合うこと（三次元の $0^{--}/0^{++}$ をディラトン基準で比べた場合。基準のモードや状態を替えると 14〜26% ずれる：17-09）と矛盾しません。しかし定理に要るのは誤差を 0 に送る**極限**で、一ループの見積もりでは床がそれを阻みます。どちらの目安も係数 1 の粗いもので、床の値そのものではなく、二つを同時に小さくする向きが無いことが要点です。例：Sakai–Sugimoto の $\lambda \approx 16.6$ を (2) にそのまま入れると $e_{KK} = 0.27$（二ループ 0.41）、$e_{\mathrm{str}} = 0.015$ です。規約の違いを見込んで λ を半分（8.3）や 2 倍（33）にしても、e_{KK} は 0.075〜0.52、e_{str} は 0.042〜0.005 で、大小は入れ替わりません 計算 。塔の側が大きく残ることを示唆する目安です。

04

余分なものが残る — KK の塔と超対称性

$\lambda \gg 1$ では KK の塔がグルーボールと同じ高さに来ます。固定した背景の上の揺らぎの質量の二乗はラプラス型の作用素の固有値で、計量を $g \mapsto s^2 g$ とすると固有値はすべて s^{-2} 倍になります。

$$m_n^2 = \frac{c_n}{R^2} \qquad (c_n \text{ は背景の形だけで決まる数}) \tag{6}$$

背景の長さが R 一つなら、グルーボールも KK モードも $1/R$ の何倍かです（冪の勘定は 既知 、背景がヤン–ミルズを記述するという部分は 物理 ）。ただし弦張力には λ が入り、Klebanov–Strassler は $T_s \sim g_s M\, m_{\text{glueball}}^2$ と書いています（17-08 §07 と同じ事情）。塔が離れないことは、表3 の著者たちが認めています（Witten の背景については Csáki らと Klebanov–Strassler による）物理 。

表3　残るものと、著者の文

模型	残るもの	著者の文
Csáki ら（Witten の背景）	$SO(6)$ 非一重項	'their masses are of the same order as the SO(6) singlet states … Presumably λ^{-1} corrections make them heavy'。一部の場は手で除く
Maldacena–Núñez	五ブレーン上の KK	'the masses of glueballs are comparable to the masses of Kaluza Klein states on the fivebrane'
Klebanov–Strassler	S^3 上の KK	'in the SUGRA limit both scale as m/(g_sM)'。Witten の背景にも余分なモードがあると明記
Polchinski–Strassler	$\mathcal{N}=4$ の物質	'the N=4 matter cannot be decoupled within the supergravity regime'
Sakai–Sugimoto	質量 M_{KK} の塔・$SO(5)$	'the same energy scale of the mass of the vector mesons'。脚注に 'believed somewhat optimistically' と（後者は hep-th/0507073 の脚注）

超対称性の残り方

Witten 型（1998 §4。円でフェルミオンを反周期にする）では、フェルミオンは木の水準で質量 $1/R$ 程度を得て、スカラーは 'very plausibly get masses … at one-loop level' とされ、'If this is so, the low energy theory will be the pure SU(N) theory without supersymmetry' と続きます（三次元の場合を述べた §2.2 にも、弱結合では長い距離の振る舞いが 'very plausibly' 三次元のゲージ場だけになる、という同じ趣旨の文があります）。Klebanov–Strassler と Maldacena–Núñez は $\mathcal{N}=1$ 超対称性を保つので、さらにグルーイノ（グルーオンの超対称性の相棒のフェルミオン）を重くする極限が要ります。Gürsoy–Kiritsis の五次元の模型は、弦理論の背景から導くのではなく五次元の重力の模型を直接置く（ボトムアップ型の）もので、β 関数を入力します（'using input … as well as QCD'）物理 。例：調べた範囲で、弦理論の背景から組む（トップダウン型の）模型のうち超対称性の無い純ヤン–ミルズが出るのは Witten 型だけで、それも塔と同じ尺度です。

> 05

$N \to \infty$ — 群を一つに固定すると

重力の幾何が古典的になるのは $N \to \infty$ のときです。ゲージ理論の量は 't Hooft の勘定（17-04）で種数 h の和に並びます。

$$\log Z = \sum_{h \geq 0} N^{2-2h} F_h(\lambda) \tag{7}$$

重力の計算が与えるのは F_0 の λ が大きい側の先頭で、$SU(3)$（$1/N^2 = 1/9$）には残りの項すべてが効きます。格子で比が N でゆっくり動くこと（17-04）物理 も、固定した N の理論の存在は与えません。群の種類にも隔たりがあり、D ブレーンから出るのは $U(N)$・$SU(N)$、オリエンティフォールド（弦の向きを反転する操作で割った背景）で SO・Sp です（17-07）。例外群 $G_2, F_4, E_{6,7,8}$ の四次元純ヤン–ミルズのホログラフィー双対は探した範囲で見当たらず、幾何工学は ADE 型と、外部自己同型（Dynkin 図の自己同型）による折りたたみで B・C・F・G 型を作れますが、超対称な理論の中でのことです（17-07）。例：問題文では $SU(2)$ も G_2 も、それぞれ一つの理論です。

06

極限の順序 — 入れ替えには一様性が要る

重力の計算は、弦を古典的にする $N \to \infty$ の後で超重力の $\lambda \to \infty$ を取り、R を単位にしています。

$$N \to \infty \ \longrightarrow\ \lambda \to \infty, \qquad R \text{ は固定} \tag{8}$$

問題文の側は N を固定し、$R \to 0$、つまり (3) により $\lambda \to 0$ を取ります。二つの極限を入れ替えてよい条件は、解析学の標準的な定理が与えます 既知 。二重の添字の数列 $a_{m,n}$ が $n \to \infty$ で b_m に m **について一様に**収束するとは

$$\sup_{m} \left| a_{m,n} - b_m \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

のこと、つまり一つの n でどの m の誤差も同時に小さくなることです。このとき次が成り立ちます。

$$a_{m,n} \xrightarrow[n\to\infty]{} b_m \ (m \text{ について一様}), \quad a_{m,n} \xrightarrow[m\to\infty]{} c_n \ \Longrightarrow\ \lim_{m\to\infty} b_m = \lim_{n\to\infty} c_n \tag{9}$$

一様でなければ入れ替えは一般に許されません。例：$a_{m,n} = m/(m+n)$ では $\lim_m \lim_n a_{m,n} = 0$、$\lim_n \lim_m a_{m,n} = 1$ です（$\sup_m m/(m+n) = 1$ なので、$n \to \infty$ での 0 への収束は一様ではありません）。

要るのは、$1/N$ の補正が λ について一様に小さいこと、弦の補正が N について一様に小さいこと、そして $\lambda \to 0$ まで途切れない道です。(4) は三次元での補正の先頭の一項で、一様性でも極限でもありません。**この入れ替えを正当化した結果は、探した範囲で見当たりません**。比喩で言えば、超重力の領域（'fixed ultraviolet cutoff … in the strong ultraviolet coupling regime'）は強結合の粗い格子の位置です。正確には、強結合の格子では無限体積極限の存在が証明されています（Osterwalder–Seiler 1978、5-04）が、この対応は比喩にとどまります。

07

寄り道：一様でない収束を目で見る

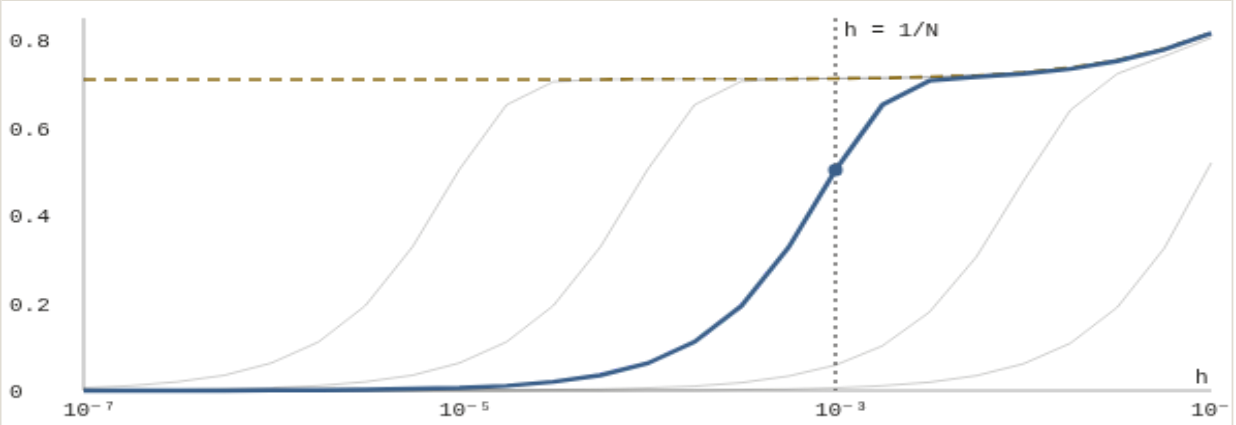
飛ばしてよい節です。

自発磁化は $h \to 0$ と $N \to \infty$ の順序で値が変わります（2-08 の (10)）。Curie–Weiss 模型（$J = 1$、逆温度 $\beta = 1.25$）で一様でない場所を数えます。一スピンあたりの磁化は、2-08 と同じく質量と区別して $\bar{m}$ と書きます。有限の N では二項係数の和で正確に書けます。

$$\langle \bar{m} \rangle_{N,h} = \frac{\sum_{k} \binom{N}{k} \bar{m}_k \, e^{\beta N (\bar{m}_k^2/2 + h\bar{m}_k)}}{\sum_{k} \binom{N}{k} \, e^{\beta N (\bar{m}_k^2/2 + h\bar{m}_k)}}, \qquad \bar{m}_k = \frac{2k - N}{N} \tag{10}$$

全反転の対称性で $\langle \bar{m} \rangle_{N,0} = 0$ なので $\lim_N \lim_{h \to 0} = 0$、一方 $\lim_{h \downarrow 0} \lim_N = \bar{m}^* = 0.71041$ です。

図2　N を大きくすると、$\langle \bar{m} \rangle_{N,h}$（青）が $N = \infty$ の曲線（黄の破線）に張り付く範囲が左へ延びる。縦の点線は $h = 1/N$



N = 10³　h = 1/N での ⟨m̄⟩ = 0.503（(11) の x = 1：0.505）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（(10) を正確に評価し、$\log_{10} h$ の刻み 0.25 で埋め込んだ）。

表4　$\langle \bar{m} \rangle_{N,h}$（$\beta = 1.25$）。太字は $h = 1/N$ の欄

N	$h = 10^{-2}$	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	$h = 0$
10^2	**0.4780**	0.0579	0.0058	0.0006	0
10^3	0.7231	**0.5028**	0.0625	0.0063	0

N	$h=10^{-2}$	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	$h=0$
10^4	0.7255	0.7117	**0.5045**	0.0629	0
10^5	0.7257	0.7120	0.7105	**0.5047**	0
∞	0.7257	0.7120	0.7106	0.7104	$\bar{m}^*$（$h\downarrow 0$）

行を右へたどると 0 に、列を下へたどると $\bar{m}^*$ の近くに行き、対角線は約 0.5 です。大きな N では分布が $\pm\bar{m}^*$ の二つの山に割れ、重みの比が $e^{2\beta h N\bar{m}^*}$ なので

$$\langle \bar{m}\rangle_{N,\,x/N} \;\longrightarrow\; \bar{m}^*\tanh(\beta\bar{m}^* x) \qquad (N\to\infty) \tag{11}$$

です。$x=1$ の値 0.50468 に対し $N=10^5$ の正確な値は 0.50467 でした 計算 。**一様でない場所は $h\sim 1/N$ の帯で、N を大きくすると左へ逃げていきます**。ここでは (10) が正確に書けるので帯の位置が分かりますが、(8) の二つのつまみについては確かめる手段がまだありません。

08

問題文との距離 — 五つの要求

問題文は 'Prove that for any compact simple gauge group G, a non-trivial quantum Yang–Mills theory exists on R^4 and has a mass gap $\Delta > 0$' で、存在には公理的な性質を満たすことが含まれます（Jaffe–Witten §4） 既知 。

表5　要求と、余剰次元の模型の現在地（どの行も 物理 の水準）

要求	現在地
群 G を固定	$SU(N)$ で $N\to\infty$。例外群の双対は見当たらない（§05）
$\mathbb{R}^4$ の上	$\mathbb{R}^4\times$（余剰次元）で ΛR が 1 の程度（§03）
短い距離で漸近自由	紫外は五次元の理論や (2,0) 理論（17-07）。Klebanov–Strassler のカスケードは 'goes on forever as the scale is increased'
公理（4-10）を満たして存在	AdS/CFT は予想（17-08 §08）。弦理論の側に非摂動的な定義が無い
質量ギャップ	超重力の固有値問題（半古典）。Witten：'A mass gap likewise can be demonstrated … by using the large λ behavior of the metric'（この λ は計量の動径座標）

表5 のどの行も、まだ満たされていません。Jaffe–Witten §6 は 'at present we do not know any non-trivial relativistic field theory that satisfies the Wightman (or any other reasonable) axioms in four dimensions' と書きました（2000 年の文。四次元の理論の存在は、2026 年に公開された構成が Wilson の格子の極限として与え、委員会が評価しています。第二巻）。質量ギャップについては、Clay 数学研究所の問題の頁は今も 'no proof of this property is known' と書いています 既知 （ギャップの定義は 4-11）。例：模型が数 % で当て

る比（17-09。ディラトン基準の三次元の比に限る）も、表5 のどの行も満たさないまま得られた数です。

09

何が残るか — 問題は場所を移す

問題は消えずに場所を移します。Witten は $\eta \to 0$ で幾何に特異点が現れることを述べて 'Apparently, in this approach, the mysteries of four-dimensional quantum gauge theory are encoded in the behavior of string theory near this singularity' と書き、Csáki らは予想のもとで大きな N の QCD の問題が 'that of controlling the α′ corrections to the two-dimensional sigma-model with the Ramond-Ramond background' に帰着すると書きます 物理 。語の意味を短く書きます。α' は弦の長さの二乗です（弦の張力は $1/(2\pi\alpha')$、17-05 の (1)）。二次元のシグマ模型は、弦が掃く二次元の面（**世界面**）の上の場の理論で、場は世界面から時空への写像です。Ramond–Ramond 場は D ブレーンが源になる場です。α' の補正は、時空の曲率半径が弦の長さに比べて有限であることから来る補正で、(4) はこの展開の先頭を評価したものです。§03 で Witten が挙げた 'worldsheet field theory with Ramond-Ramond fields'（世界面の場の理論で、ラグランジアンに Ramond–Ramond 場を含むもの）もこの二次元の理論です。

$$\text{四次元の純 YM} \xleftarrow{\text{極限 (3)}} \text{余剰次元の模型} \xleftarrow{\text{予想}} \text{弦・M 理論} \tag{12}$$

例：(12) の矢印はどちらも数学の定理ではなく（左は未正当化、右は予想）、右端の対象にも非摂動的な定義がありません（17-13・16-05）。

本書の検討の着想（検証前）

超重力場の線形揺らぎに限れば、(6) の「長さが一つ」は塔が離れない理由で、固定した背景の上で「尺度は一つ」（17-12・23-01）を自明にする理由でもある、と見ています。ただし弦張力には λ が入り（§04 の Klebanov–Strassler の式）、弦まで含めると長さは一つに尽きません。四次元に戻すことは R から Λ への乗り換えで、問いはそのあとに残ります。定理でも文献の主張でもありません（23-17）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 (6) の冪、(9)、問題文の引用。	背景が四次元の純ヤン–ミルズ理論を記述すること（予想）。
計算 表1・表2・表4、図1・図2、(5) の床（交点の値）と、一ループの式でそれが max の最小値であること、二ループの式の最大（$\lambda \approx 51$）、$\lambda \approx 16.6$ とその 2 倍の幅、(11) の照合。	規約に依らない係数。e_{str} は目安で、実際の弦の補正ではない。(4) の冪は三次元の 0^{++} のもので、四次元の冪は与えられていない。二ループの式の $\lambda \gtrsim 51$ の振る舞いは (2) の範囲外。
物理 $R \to 0$ と $\lambda \to 0$ が同じ向きであること、塔が離れないこと（著者たちの文）、(8) の順序。	極限の入れ替えの正当化（探した範囲で見当たらない）。この本は質量ギャップも連続極限の構成も自分では示していない（公開された連続極限の構成は第二巻）。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
(1)・§08 の問題文と §6 の文	既知	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory” §4・§6（Clay の問題記述）。PDF 本文を確認。
§08 の Clay の頁の文	既知	Clay Mathematics Institute, “Yang-Mills & the Mass Gap”（Millennium Prize Problems の頁）。https://www.claymath.org/millennium/yang-mills-the-maths-gap/。該当の文を読んで確認。
(2) の b_0／二ループの b_1	既知	4-06 の出典／W. E. Caswell, Phys. Rev. Lett. 33 (1974) 244（書誌のみ）。
Witten の文・Witten 型	物理	E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 505, hep-th/9803131 §2.2・§4。arXiv の原稿を確認。
(4)・Csáki らの文	物理	C. Csáki, H. Ooguri, Y. Oz, J. Terning, JHEP 9901 (1999) 017, hep-th/9806021（要旨・序論の (1.1)(1.2)・§2 の QCD_3 の文・結びの文）。arXiv の原稿を確認。
表3・表5 の Klebanov–Strassler	物理	I. R. Klebanov, M. J. Strassler, JHEP 0008 (2000) 052, hep-th/0007191。TeX 原稿を確認。
表3・§04 の他の模型	物理	J. M. Maldacena, C. Núñez, Phys. Rev. Lett. 86 (2001) 588, hep-th/0008001；J. Polchinski, M. J. Strassler, hep-th/0003136；U. Gürsoy, E. Kiritsis, JHEP 0802 (2008) 032, arXiv:0707.1324。いずれも要旨を確認。
§01・表3 の Sakai–Sugimoto	物理	T. Sakai, S. Sugimoto, Prog. Theor. Phys. 113 (2005) 843, hep-th/0412141；同 Prog. Theor. Phys. 114 (2005) 1083, hep-th/0507073。TeX 原稿を確認。
§06 の強結合の格子	既知	K. Osterwalder, E. Seiler, “Gauge Field Theories on the Lattice”, Ann. Phys. 110 (1978) 440。要旨を確認。
(9)	既知	一様収束と極限の交換（例えば W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis 第 7 章）。書誌のみ。

もの	種別	出典・道具
表・図・数値	計算	この端末の Python 3（numpy・scipy）：scale_window.py（表1・表2）、floor_crossing.py（(5) の交点の一意性、二ループの式の最大、$\lambda \le 316$ での max の最小値、$\lambda \approx 16.6$ の 2 倍の幅）、floor_twoloop_check.py（二ループの式で λ の上限を外したときの max の最小値）、curie_weiss_order.py（表4・図2・(11)）。

次に読む章：17-11 超対称と Seiberg–Witten ― 超対称性のもとで、双対からギャップが見える例。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 17 部 物理の側から 超対称と電気磁気の双対

超対称と Seiberg–Witten — 双対に持ち替えると、強結合の真空が弱結合の単極子の理論になる

> この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — N=2 超対称な `SU(2)` 理論の低エネルギーが、一本の正則関数とその特異点・モノドロミーで決まること。
強結合の点で単極子の質量が 0 になり、N=1 へ崩すと単極子の凝縮で閉じ込めとギャップが弱結合の計算として見えること。
どこまでが物理の議論で、どこからが数学の定理か。

前提となる章 — 17-08。道具は 17-02 の双対超伝導・17-01 の次元転移・1-04 の SU(2)。正則関数・調和関数・トーラスの周期はその場で定義します。

先に言うこと — この章の理論は純ヤン–ミルズではありません（スカラー場とフェルミオンを含む）。中心の結果は物理の水準で、N=2 の理論そのものは数学的に構成されていません。問題文の質量ギャップについては何も示しません。

この章の順序

1. 隣の理論で何が見えるか — 一ループの係数
2. 超対称性の最小限 — 場の組・平らな方向・座標 u
3. 一本の正則関数 — 一ループとインスタントン
4. 正値性の矛盾 — 調和関数は内側で最小にならない
5. 電気と磁気の入れ替え — $\tau \to -1/\tau$ と BPS 質量
6. 特異点とモノドロミー — 単極子が軽くなる点（図1）
7. 曲線の周期で書く — トーラスの周期と $\mathrm{Im}\,\tau > 0$（図2・寄り道：$u = 3$ で $\tau = i$ になる）
8. 正確な解からインスタントンの係数を読む — 有理数の級数と一ループの照合
9. N=1 への摂動 — 単極子の凝縮と質量ギャップ

10. 純ヤン–ミルズとの距離 — 物理と数学の境目

01

隣の理論で何が見えるか — 三つの理論とループの係数

純ヤン–ミルズが難しいのは、ギャップの決まる低いエネルギーで結合が強くなり、摂動論が効かないからでした（17-01）。超対称性を二組持つ（N=2）ゲージ理論は、強結合の側まで計算できる**隣の理論**の代表で、Seiberg と Witten（1994、以下 SW）は `SU(2)` の場合に低エネルギーの有効理論を正確に決める提案をしました。要旨は 'The "strongly coupled" vacuum turns out to be a weakly coupled theory of monopoles, and with a suitable perturbation confinement is described by monopole condensation' と書きます 物理 。

三つの理論は場の組と、一ループの走りの係数 b（純ヤン–ミルズで $11N/3$ の規約）が違います。随伴表現の Weyl フェルミオン（二成分のフェルミオン。電子の Dirac フェルミオンは四成分）一つが $-2N/3$、複素スカラー一つが $-N/3$ を足します 既知 。

$$b_{\mathrm{YM}} = \tfrac{11}{3}N, \qquad b_{\mathcal{N}=1} = \tfrac{11}{3}N - \tfrac{2}{3}N = 3N, \qquad b_{\mathcal{N}=2} = \tfrac{11}{3}N - 2\cdot\tfrac{2}{3}N - \tfrac{1}{3}N = 2N \tag{1}$$

例：`SU(2)` では順に $22/3,\ 6,\ 4$ です。N=2 の理論は質量 0 の光子が残るのでギャップを持たず、ギャップが現れるのは §09 で N=1 へ崩したときです。問題文 §6.6 も、物質を伴う理論でギャップを理解する道の例として Seiberg–Witten を挙げます（'for example, see [41]'） 既知 。

02

超対称性の最小限 — 場の組・平らな方向・座標 u

超対称性はボソンとフェルミオンを入れ替える対称性で、N はその生成子（超電荷）が何組あるかを数えます。超対称で互いに移り合う場の組を**多重項**と呼びます。N=2 のゲージ理論の最小の組は、ゲージ場 A_μ、二つの Weyl フェルミオン λ, ψ、複素スカラー ϕ で、どれも随伴表現に属します（1-04）。スカラーのポテンシャルは

$$V(\phi) = \frac{1}{g^2}\,\mathrm{tr}\,[\phi, \phi^\dagger]^2 \tag{2}$$

で、ϕ と $\phi^\dagger$ が可換なら 0 です。`SU(2)` ではゲージ変換で $\phi = \tfrac{1}{2}a\sigma^3$（$a \in \mathbb{C}$）にでき、$a$ と $-a$ は移り合うので、ゲージ不変な座標は $u = \mathrm{tr}\,\phi^2 = \tfrac{1}{2}a^2$ です 既知 。$V = 0$ の真空は複素数

u で番号付けられる族（モジュライ空間）を成し、量子論でもこの族は持ち上がらない、と SW は論じます 物理 。

$a \neq 0$ では ϕ と可換な元は対角の `U(1)` だけで、残る二つのゲージ場（W ボソン）は **Higgs 機構**（値を持ったスカラー場がゲージ場に質量を与える仕組み。3-07）で質量を得ます。`U(1)` の光子は質量 0 のまま残るので、ギャップはありません。例：$\phi = \sigma^{+} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ なら $[\phi, \phi^{\dagger}] = \sigma^{3}$ で $V = 2/g^{2} > 0$、$\phi = \frac{1}{2} a \sigma^{3}$ なら $V = 0$ です。

03

一本の正則関数 — プレポテンシャル・ループ・インスタントン

複素数の関数が**正則**とは、複素数として微分できることです。N=2 超対称性のもとで、低いエネルギーの有効理論は一本の正則関数 $\mathcal{F}(a)$（**プレポテンシャル**）で書けます（Seiberg 1988、SW §2）物理 。結合 g と θ 角をまとめた複素数

$$\tau(a) = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g^{2}} = \mathcal{F}''(a), \qquad ds^{2} = \operatorname{Im} \tau(a)\, |da|^{2} \tag{3}$$

が、光子の結合と真空の族の上の距離（計量）を与えます。$|a|$ が大きい所は漸近自由で弱結合です（4-06）。原文は

$$\mathcal{F}(a) = \frac{i}{2\pi}\, a^{2} \ln \frac{a^{2}}{\Lambda^{2}} + \sum_{k \geq 1} \mathcal{F}_{k} \Big(\frac{\Lambda}{a} \Big)^{4k} a^{2} \tag{4}$$

と書き、'Higher order perturbative corrections are absent. Instantons lead to new terms.' と続けます。第一項が一ループ、第 k 項が k 個のインスタントン（3-05）の寄与です 物理 。

冪 $4k$ は (1) の $b = 4$ から来ます。17-01 の (3) の規約で $b_{0} = b/16\pi^{2} = 1/4\pi^{2}$ とすると

$$\Lambda^{4} = \mu^{4} \exp\Big(- \frac{8\pi^{2}}{g^{2}(\mu)} \Big) \tag{5}$$

で、指数はインスタントン一個の重みです。$(\Lambda/a)^{4}$ は摂動のどの次数にも現れません（4-12） 既知 。例：特異点を $u = \pm 1$ に置く単位では、一ループは $\operatorname{Im} \tau \approx (2/\pi) \ln(2|a|)$ です（§07 の数値から）。係数 $2/\pi = 8\pi b_{0}$ は (5) の走りと一致します 計算 。

04

正値性の矛盾 — 調和関数は内側で最小にならない

(3) の計量は正でなければなりません。ところが正則関数の虚部は**調和関数**です。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\operatorname{Im}\tau = 0 \qquad (a = x+iy) \tag{6}$$

調和関数は円の中心の値が円周上の平均に等しく、定数でなければ領域の内側で最小になれません（最小値原理）既知。

τ が a 平面全体で一つの関数なら、$\operatorname{Im}\tau$ は $|a|\to\infty$ で $+\infty$ に行くのでどこかで最小になり、原理と矛盾します。原文は 'if Im τ(a) is globally defined it cannot be positive definite as the harmonic function Im τ cannot have a minimum' と書き、a による記述は局所的にしか正しくないと結論します物理。例：一ループの $(2/\pi)\ln(2|a|)$ は $|a|<1/2$ で負で、$|a|=1/4$ では -0.44、つまり「$4\pi/g^2$ が負」です計算。強結合の側では別の変数が要ります。

05

電気と磁気の入れ替え — $\tau\to-1/\tau$ と BPS 質量

磁荷を加えた Maxwell 方程式は電と磁の入れ替えで対称でした（17-02 の (6)）。θ 角を含めると入れ替えは $\tau\to-1/\tau$、θ を 2π ずらすと $\tau\to\tau+1$ で、二つで群 $SL(2,\mathbb{Z})$（整数成分・行列式 1）を生みます既知。SW は $a_D=\partial\mathcal{F}/\partial a$ を置き、計量を a と a_D について対称に書きました。

$$ds^2=\operatorname{Im}\left(da_D\,d\bar{a}\right),\qquad \tau_D=-\frac{1}{\tau} \tag{7}$$

a_D を座標にしても同じ形で、結合が $-1/\tau$ に変わります。原文は同じ理論の別の記述だと強調します物理。電荷 n_e・磁荷 n_m の粒子の質量には下限があり、下限に等しい粒子（BPS 状態）の質量 m_{BPS} は

$$m_{\mathrm{BPS}}=\sqrt{2}\,|n_e\,a+n_m\,a_D| \tag{8}$$

です（Witten–Olive 1978、SW §4）物理。W ボソンは $(n_m,n_e)=(0,1)$、単極子は $(1,0)$、ダイオンは $(1,n)$ です。例：古典では $a_D=\tau_{\mathrm{cl}}a$ で、単極子は W の $|\tau_{\mathrm{cl}}|\approx 4\pi/g^2$ 倍、$g=1$ なら約 12.6 倍重い。強結合の側では比が逆転します（図2）。

06

特異点とモノドロミー — 単極子が軽くなる点

(4) の一ループの項を微分すると $a_D \approx \frac{i}{\pi} a\left(\ln \frac{a^2}{\Lambda^2} + 1\right)$ です。大きな u では $a \approx \sqrt{2u}$ なので、u が大きな円を一周すると $a \to -a$、$\ln a^2 \to \ln a^2 + 2\pi i$ となり、$a_D \to -a_D + 2a$ です。列ベクトル $(a_D, a)^{\mathsf{T}}$ に掛かる行列（**モノドロミー**）で書くと

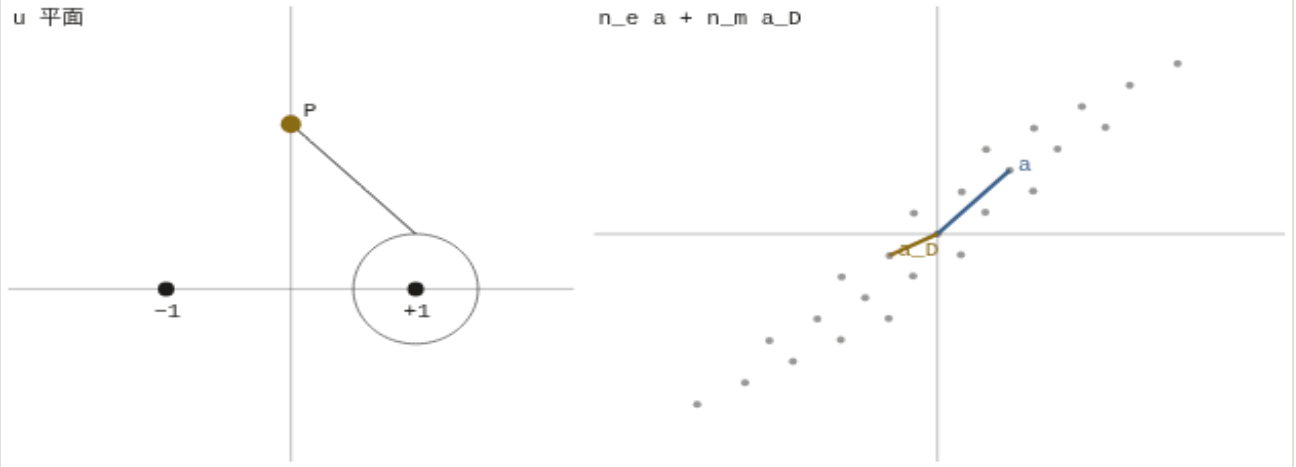
$$\mathsf{M}_\infty = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

です。モノドロミーがすべて M_∞ と可換なら a^2 が大域的な座標になり、§04 の矛盾に戻ります。そこで SW は、有限の所に特異点が二つ（単位を選んで $u = \pm 1$）あり、そこで単極子やダイオンの質量が 0 になると提案しました 物理。$u = 1$ の近くでは軽い単極子の効果で $a \approx a_0 + (i/\pi) a_D \ln a_D$ となり、一周で $a \to a - 2a_D$ です。

$$\mathsf{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{M}_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{M}_1 \mathsf{M}_{-1} = \mathsf{M}_\infty \tag{10}$$

（SW の式。SW は同じ図 1 で、先に回る輪の行列を右に置く順で積を書く。）質量 0 になる粒子の電荷 $q = (n_m, n_e)$ は $q\mathsf{M} = q$ を満たし、M_1 では $q = (1, 0)$、つまり単極子です。

図1 「動かす」で u が $P = 1.5i$ から特異点を一周し（左）、a（青）と a_D（黄）が動く（右。点は $n_e a + n_m a_D$）。一周後の組は行列で書き換わる



u = 0.000+1.500i a = 1.256+1.256i a_D = −0.832−0.424i

計算 この図の数値はこの端末で計算した（§07 の方程式 (PF) を P から道に沿って Runge–Kutta 法で解く。行列は表1 と一致）。

表1　基点 $P = 1.5i$ から反時計回りに一周したときの行列（整数からのずれ 10^{-12} 以下）

回る点	行列	$q\mathsf{M} = q$ の $q = (n_m, n_e)$
$u = 1$：$\mathsf{M}(1)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	$(1, 0)$ 単極子

回る点	行列	$q\mathsf{M}=q$ の $q=(n_m,n_e)$
$u=-1$：$\mathsf{M}(-1)$	$\begin{pmatrix}3&2\\-2&-1\end{pmatrix}$	$(1,1)$ ダイオン
両方：$\mathsf{M}(\infty)$	$\begin{pmatrix}-1&2\\0&-1\end{pmatrix}$	なし

表1では、道 A のあと道 B を回った行列を $\mathsf{M}_A\mathsf{M}_B$ と書きます（解析接続の順）。P から見ると大きな輪は「-1 のあと $+1$」なので $\mathsf{M}(-1)\mathsf{M}(1)=\mathsf{M}(\infty)$ で、$\mathsf{M}(-1)=\mathsf{M}_\infty\mathsf{M}_1^{-1}=\mathsf{M}_\infty\mathsf{M}_{-1}\mathsf{M}_\infty^{-1}$ です 計算 。SW の M_{-1} とは共役で、質量 0 のダイオンの電荷は $(1,-1)$ から $(1,1)$ に変わります。原文の 'complete democracy among dyons'（M_∞ で共役を取ると電荷が 2 ずつずれる）の一例です。

07

曲線の周期で書く — トーラスの周期と $\mathrm{Im}\,\tau>0$

SW §6 は各 u に曲線

$$E_u:\ y^2=(x-1)(x+1)(x-u) \tag{11}$$

を対応させます。$y=\pm\sqrt{\cdots}$ の二枚の平面を、分岐点 $-1,1,u,\infty$ を結ぶ二本の切れ目で貼ると、穴一つの曲面（**トーラス**）になります。トーラスは平面を格子 $\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2$ で割ったもので、$\tau=\omega_2/\omega_1$ の向きをそろえると $\mathrm{Im}\,\tau>0$ です 既知 。分岐点が重なるのは $u=\pm1,\infty$ だけで、特異点と一致します。周期を

$$a=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}}\,dx,\qquad a_D=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{1}^{u}\frac{\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}}\,dx,\qquad \tau=\frac{da_D/du}{da/du} \tag{12}$$

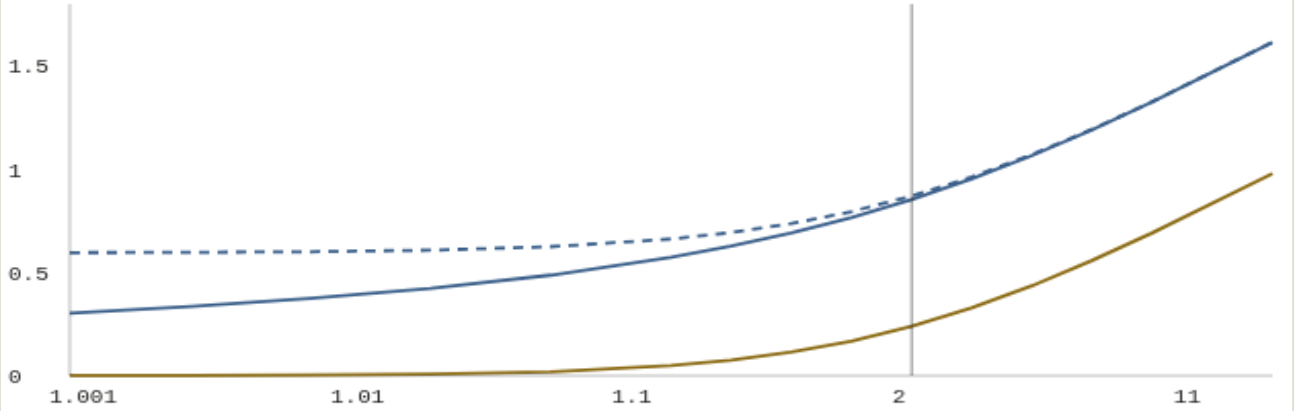
と置きます。u で微分すると被積分関数は dx/y の定数倍になり、da/du・da_D/du はトーラスの二本の輪に沿った積分、つまり格子の周期（の同じ定数倍）です。τ はその比なので $\mathrm{Im}\,\tau>0$ が自動的に成り立ちます（曲線の性質は 既知 、理論との対応は 物理 ）。二つの周期は同じ方程式 $4(u^2-1)\Pi''+\Pi=0$（Picard–Fuchs 方程式、以下 (PF)）を満たします（実軸 $u>1$ で相対残差 10^{-15} 以下 計算 ）。図1 はこの方程式を道に沿って数値で積分したものです。$u=1$ の近くでは

$$a_D\approx\frac{i(u-1)}{2},\qquad a\approx\frac{4}{\pi}-\frac{(u-1)\ln(u-1)}{2\pi} \tag{13}$$

で、(10) の $a\to a-2a_D$ が出ます。例：(12) の数値積分は超幾何関数の閉じた式と 10^{-8} 以内で一致し、$a(1)=4/\pi$ でした 計算 。

図2　つまみで実軸上の $u\,(>1)$ を選ぶと、単極子と W の質量比 $|a_D|/a$（黄）と結合 $\mathrm{Im}\,\tau=4\pi/g^2$（青。破線は一ループ

$(2/\pi)\ln 2a$）が読める



u = 1.989　W：√2a = 2.773　単極子：√2|a_D| = 0.662　比 0.239　Im τ = 0.853（一ループ 0.870）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（(12) の数値積分を 15 点埋め込み）。

表2　実軸 $u>1$ の周期と結合（特異点を $u=\pm1$ に置く単位）

u	a	$\lvert a_D\rvert/a$	$\operatorname{Im}\tau$	一ループ
1.001	1.2750	0.0004	0.303	0.596
1.5	1.6776	0.1448	0.735	0.771
3	2.4320	0.3727	1.000	1.007
100	14.1421	1.4912	2.128	2.128

一ループの列は $(2/\pi)\ln 2a$ です。$u\to 1$ で $\operatorname{Im}\tau$ は 0 に向かい、電気の結合が発散します。

寄り道：$u=3$ で $\tau=i$ になる

飛ばしてよい小節です。

$x\mapsto(x+1)/2$ で分岐点は $0,1,2,\infty$ に移り、曲線は $y^2=x(x-1)(x-2)$ になります。$x\mapsto 2-x$ で右辺は符号を変えるので、$(x,y)\mapsto(2-x,\,iy)$ は曲線を自分に移し、4 回で元に戻ります。これは格子を 90° 回して格子に重ねる対称で、そういう格子は正方形です 既知 。正方形なら τ は $SL(2,\mathbb{Z})$ で i に移る値で、(12) の規格化ではちょうど $\tau(3)=i$ でした 計算 。$-1/\tau=\tau$ なので、電気と磁気の結合が等しい点です。

08

正確な解からインスタントンの係数を読む — 有理数の級数と一ループの照合

(12) を大きい u で展開して a について逆に解くと、有理数の係数 c_k を持つ級数になります 計算 。

$$u = \frac{a^2}{2} + \sum_{k\ge 1} c_k\, a^{2-4k}, \qquad c_1 = \tfrac{1}{4},\quad c_2 = \tfrac{5}{64},\quad c_3 = \tfrac{9}{128},\quad c_4 = \tfrac{1469}{16384} \tag{14}$$

Matone（1995）は $\mathcal{G} = \pi i\big(\mathcal{F} - \tfrac{1}{2} a\, a_D\big)$ を導入し、要旨はそれがモジュラー不変だと書きます。$\mathcal{G} = u$ として (4) に入れると、一ループの項は $a^2/2$ を、第 k 項は $2\pi i k$ 倍の a^{2-4k} の項を与えるので、(4) の a^{2-4k} の係数は $c_k/(2\pi i k)$ と読めます。要旨の方程式 $(1-\mathcal{G}^2)\mathcal{G}'' + \tfrac{1}{4} a\, \mathcal{G}'^3 = 0$ も、$\mathcal{G} = u$ と置くと (PF) と同じ式です 計算 。

この読みを a_D で照合します。例：$u = 2$ で a_D/i の数値積分は 0.473434 です。一ループだけでは 0.462621、$k = 1$ までで 0.473083、$k = 3$ までで 0.473432 と、項を一つ足すごとに差が一桁以上縮みます 計算 。Dorey–Khoze–Mattis（1996）は一個と二個のインスタントンを直接計算し、'precise agreement' を報告しました 物理 。

09

N=1 への摂動 — 単極子の凝縮と質量ギャップ

N=1 の言葉では、N=2 の組は (A_μ, λ) の組（ベクトル多重項）と、ϕ, ψ の組 Φ に分かれます。Φ に質量を与える項 $m\,\mathrm{tr}\,\Phi^2$ を足すと、低いエネルギーには N=1 の理論が残ります。原文はこの理論を 'strongly believed to generate a mass gap' と書き、閉じ込めと $\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2$ の破れ、真空がちょうど二つであることを挙げます（Witten 1982 を引く） 物理 。$\mathbb{Z}_4$ は λ の位相を i 倍する変換が生む対称で、残る $\mathbb{Z}_2$ は -1 倍です。

$u = 1$ の近くでは、双対の光子の組 A_D と単極子の場 $M, \tilde{M}$（質量ではなく場の名前）を使います。相互作用を決める正則関数（超ポテンシャル）と真空の条件は

$$\widehat{W} = \sqrt{2}\, A_D M\tilde{M} + m\, U(A_D); \qquad \sqrt{2}\, M\tilde{M} + m\,\frac{du}{da_D} = 0, \quad a_D M = a_D \tilde{M} = 0 \tag{15}$$

で、$U(A_D)$ は座標 u を A_D の関数として組ごと書いたものです。$m \neq 0$ かつ $du/da_D \neq 0$ なら $M, \tilde{M} \neq 0$ が要り、$a_D M = 0$ から $a_D = 0$、つまり $u = 1$ です。(13) から $du/da_D = -2i$ なので、$|M| = |\tilde{M}|$ の解で $|M|^2 = \sqrt{2}\,|m|$（§06 の単位）です 計算 。

単極子が凝縮します。双対の光子は Higgs 機構で質量を得て、原文は 'Expanding around this vacuum, it is easy to see that there is a mass gap' と書きます。凝縮しているのは磁荷なので電場が管に押し込められ、電荷は閉じ込められます（17-02 の絵そのもの） 物理 。$u = -1$ ではダイオンが凝縮し、真空は二つです。例：$m = 0.01$ なら $|M| = 0.119$ 計算 。尺度は Λ と m の二つで、純ヤン–ミルズの「尺度は一つ」（17-12）とは事情が違います。

10

純ヤン–ミルズとの距離 — 物理の議論と数学の定理の境目

純ヤン–ミルズへ行くには、$m \to \infty$ で Φ を切り離し、フェルミオン λ の質量も無限大に送る、二つの極限が要ります。§09 の弱結合の記述は m が小さい所のもので、極限に沿ってギャップと閉じ込めが途切れないことは期待にとどまり、制御する手段はありません（17-10）物理。議論全体も、N=2 の理論が存在することを前提にしています。SW の例は四次元で双対から閉じ込めが物理の水準で導かれた代表例ですが（半古典の計算は三次元の Polyakov などにもある。17-02）、数学の側に残ったものは別の形をとりました。

表3　主張と水準

主張	水準
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$（四次元の回転の二つのパラメータ）を入れたインスタントンの空間上の積分の、$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ の極限が SW のプレポテンシャルに一致する（Nekrasov の予想）	既知 定理：Nakajima–Yoshioka・Nekrasov–Okounkov（$SU(N)$）、Braverman–Etingof（一般の単純群）
Seiberg–Witten 方程式の解を数えて作る、四次元多様体の不変量（数学の定義）	既知 （3-06・四次元の記事）
その不変量が Donaldson 不変量と同等であること（Witten 1994 の要旨：'Recent developments … suggest a new point of view'、'one can define equivalent four-manifold invariants'）	物理 （数学の側での証明の現状はこの章では調べていない）
(11)・(12) が N=2 の理論の低エネルギーを記述し、$m \neq 0$ で凝縮・閉じ込め・ギャップが出る	物理
純ヤン–ミルズのギャップ	この章は何も言わない

表3 の数学は、インスタントンの空間上の積分や方程式の解についての定理と定義で、スペクトル（4-11）についての主張ではありません。例：(14) の係数は、規約をそろえれば、インスタントンの空間上の積分として定理で保証される数です。同じ数が「N=2 の場の量子論の性質」であることは、理論の構成（7-01）が無いため言えません。問題文 §6.6 の「双対変換」の、物理の水準での実例として読むのが正確です（17-13・16-05）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 (1)、曲線 (11) とトーラスの性質、Nekrasov の予想の証明、SW 不変量の定義、問題文 §6.6。	N=2・N=1 の理論が場の量子論として存在すること（構成されていない）。
計算 表1・表2、図1・図2、(PF)、(14)、一ループの定数、$\tau(3) = i$、単極子の場の $\lvert M\rvert^2 = \sqrt{2}\lvert m\rvert$。どれも (12) が出発点。	(11)・(12) が N=2 の理論から導かれること（正則性と双対による決定は物理の議論）。SW 不変量と Donaldson 不変量の同等性が数学としてどこまで示されているか（この章では調べていない）。

言えている	言えていない
物理 単極子の質量が 0 になる点、$m \neq 0$ での凝縮・閉じ込め・ギャップ、インスタントンの直接計算との一致。	純ヤン–ミルズへ戻す二つの極限の制御と、そのギャップへの含意。この本は質量ギャップも連続極限の構成も自分では示していない（公開された連続極限の構成は第二巻）。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
SW の式と引用（(2)〜(4)・(7)〜(13)・(15)）	物理	N. Seiberg, E. Witten, Nucl. Phys. B426 (1994) 19–52（Erratum B430 (1994) 485）, hep-th/9407087。TeX 原稿の本文を確認。同論文の文献表から（書誌のみ）：Seiberg, Phys. Lett. 206B (1988) 75；Witten–Olive, Phys. Lett. 78B (1978) 97；Witten, Nucl. Phys. B202 (1982) 253。
問題文 §6.6	既知	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”（Clay の問題記述）§6.6。PDF 本文を確認。
(1)・(5)	既知	17-01 の出典。$b = 4$ は SW の $(\Lambda/a)^{4k}$・$\mathbb{Z}_{4N_c}$ と照合。
§08 の Matone	物理	M. Matone, Phys. Lett. B357 (1995) 342–348, hep-th/9506102。要旨のみ（$\mathcal{G}$ の定義・モジュラー不変性・$\mathcal{G}$ の方程式・'we find u=u(a)'）。$\mathcal{G} = u$ は本文未読で、§08 の照合による。
§08 の Dorey–Khoze–Mattis	物理	N. Dorey, V. V. Khoze, M. P. Mattis, Phys. Rev. D 54 (1996) 2921, hep-th/9603136。要旨を確認。
表3 の Nekrasov の予想と証明	既知	N. Nekrasov, Adv. Theor. Math. Phys. 7 (2004) 831, hep-th/0206161；H. Nakajima, K. Yoshioka, Invent. Math. 162 (2005) 313–355, doi:10.1007/s00222-005-0444-1, math/0306198；N. Nekrasov, A. Okounkov, in *The Unity of Mathematics*（Progress in Mathematics, Birkhäuser）525–596, hep-th/0306238；A. Braverman, P. Etingof, math/0409441。要旨を確認。
表3 の Seiberg–Witten 不変量	既知・物理	E. Witten, “Monopoles and Four-Manifolds”, Math. Res. Lett. 1 (1994) 769–796, hep-th/9411102。要旨を確認。数学の教科書：J. W. Morgan, *The Seiberg–Witten Equations and Applications to the Topology of Smooth Four-Manifolds*, Princeton University Press, doi:10.1515/9781400865161（書誌のみ・刊行年は未確認）。
表1・表2・図1・図2・(PF)・(14)・§07〜§08 の数値	計算	この端末の Python 3（numpy・scipy）：`sw_periods.py`（(12) の照合・一ループの定数・表2・図2）、`sw_monodromy.py`（表1・図1 の出発値・$\tau(3) = i$）、`sw_pf_check.py`（(PF) の残差・Matone の方程式との一致）、`sw_instanton.py`（(14) と a_D の照合）。

次に読む章：17-12 等価原理に当たる一文 — 「尺度は一つ」を一文の仮定として切り出す。

等価原理に当たる一文 — 「尺度は一つ」を一つの仮定として切り出す

この章は本書の検討です。§01・§02・§08・§09 は既存の知見、§10 は未解決の地図です。

この章で分かること — 一般相対論の出発点の等価原理と同じ位置にある一文「閉じ込めの管には、弦張力のほかに長さの径数が無い」を、純ヤン–ミルズの道筋から取り出します。四つの長さを三つの鎖でつなぐと「拡散型緩和時間の仮定」になることを式で追い、格子の数表と、一尺度が破れる例・保たれる例で確かめます。

前提となる章 — 17-01 物理はどう見ているかと 4-07 次元転移と Λ。Poincaré 定数（1-10）と相関長（2-08）は要る分をその場で定義します。

先に言うこと — 等価原理との対応は類比で、数学の同値ではありません。「尺度は一つ」は四次元の連続理論の定理ではなく、緩和時間の仮定と三本の鎖はどれも証明されていません。この章は質量ギャップを示さず、証明されずに残る一文を名指しします。格子の数値は一次資料の値です。

この章の順序

1. 一般相対論は一文から始まった — 第二種の質量は無い
2. 寄り道：第二種の質量を測る — MICROSCOPE の 10^{-15}
3. 尺度は一つ — 二種類の長さ — 球と弦の長さが揃う
4. 格子の数表で見る — 外挿の形は外から入る
5. 四つの長さと三つの鎖 — 緩和時間の仮定を比の積に割る
6. どの鎖が等価原理に当たるか — 対応表（類比）
7. 候補を落とす — ほかの三つの候補
8. 一尺度が破れる例 — U(1)・超重力・強結合の主項
9. 一尺度が保たれる例と、要る入力 — 三次元 $\mathbb{Z}_2$ と I・R
10. 等価原理と違うところ — 仮定として置けない

01

一般相対論は一文から始まった

一般相対論は、**等価原理・光速度不変・一般共変性**（どの座標でも法則の形が同じ）**・リーマン幾何学**の組み合わせとして説明されることがあります。リーマン幾何学は数学の道具、光速度不変は特殊相対論から引き継ぐ前提（$c = 1$ と置くのは単位の約束）、一般共変性は法則の書き方への要請です。そのうえで、重力について新しく足された物理の一文が等価原理です。ニュートンの力学で落下を書きます。

$$m_{\mathrm{i}}\, a = m_{\mathrm{g}}\, g \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{m_{\mathrm{g}}}{m_{\mathrm{i}}}\, g \tag{1}$$

m_{i} は**慣性質量**（動かしにくさ）、m_{g} は**重力質量**（重力に引かれる強さ）で、別々の実験で定義され、等しい理由は理論にありません。等価原理は、比 $m_{\mathrm{g}}/m_{\mathrm{i}}$ がどの物体でも同じ、つまり**第二種の質量は無い**と言います。すると自由落下する箱の中で重力が局所的に消え、重力を時空の幾何として書けます（Einstein 1907 に始まるとされる。時空の記事）物理。例：比が物質で η だけ違えば、加速度の差は約 ηg です（§02）。

問いは、**質量ギャップへの道筋にも「物理的には当然で、数学では証明されていない一文」が在るか**です。在ります。「閉じ込めの管には、弦張力のほかに長さの径数が無い」です。ただし役目は等価原理と違います（§10）。

02

寄り道：第二種の質量を測る

飛ばしてよい節です。

二つの物体の落ち方の違いを、符号つきの量 $\eta = 2(a_1 - a_2)/(a_1 + a_2)$（$a_1, a_2$ は二つの物体の加速度）で測ります。古くは Eötvös たちのねじれ秤（1922 年の論文とされる）があり、人工衛星 MICROSCOPE はチタンと白金で最終結果をこう報告しました 既知。

$$\eta(\mathrm{Ti}, \mathrm{Pt}) = \left[-1.5 \pm 2.3\,(\mathrm{stat}) \pm 1.5\,(\mathrm{syst}) \right] \times 10^{-15} \tag{2}$$

誤差を二乗和で合わせると $\pm 2.75 \times 10^{-15}$ で、0 と両立します 計算。正確には、実験は幅を狭めるだけで $\eta = 0$ は示せません。物理はこの一文を公理として置き、確かめ続けます。

03

尺度は一つ — 二種類の長さ

古典の四次元ヤン–ミルズには質量の次元の定数がなく、量子論で尺度 Λ が一つ現れます（4-07）。物理は、質量の次元が k の量を Λ^k の定数倍と考えます（例：最も軽いグルーボールの質量 $m = c_1\Lambda$、弦張力 $\sigma = c_2\Lambda^2$。17-01 §03）物理。すると比 $m/\sqrt{\sigma} = c_1/\sqrt{c_2}$ は群だけで決まる純数です。格子（5-01）で測るのは格子単位の am と $a\sqrt{\sigma}$ で、$\beta \to \infty$ でどちらも 0 に向かい、比では a が消えます。以下 m, σ は格子単位の数です。「尺度は一つ」を β に一様な不等式にすると次の一文です（本書の検討の記録の書き方）。

$$c\,\sigma(\beta) \;\le\; m(\beta)^2 \;\le\; C\,\sigma(\beta) \qquad (\beta \ge \beta_0) \tag{3}$$

定数 $c, C > 0$ は β に依りません。$m > 0$ も $\sigma > 0$ も仮定せず、0 に向かうなら同じ速さで、とだけ言います。長さで言えば、最も軽いグルーボール（グルー＝糊、ボール＝球）の長さ $\xi = 1/m$ を、以下**球の長さ**と呼びます（相関長。相関が $e^{-|x|/\xi}$ で減る距離、2-08 §03）。$\xi_\sigma = 1/\sqrt{\sigma}$ は**弦の長さ**です。$A \asymp B$ は、比 A/B が β に依らない正の定数で上下から押さえられることを表します。(3) は $\xi \asymp \xi_\sigma$ と同じです。「二種類の質量」と同じ形の主張で、物理の言葉では**第二の無次元の径数が現れない**という言明です。第二の径数 z があれば比は $F(z)$ となり、0 にも無限大にも行けます。

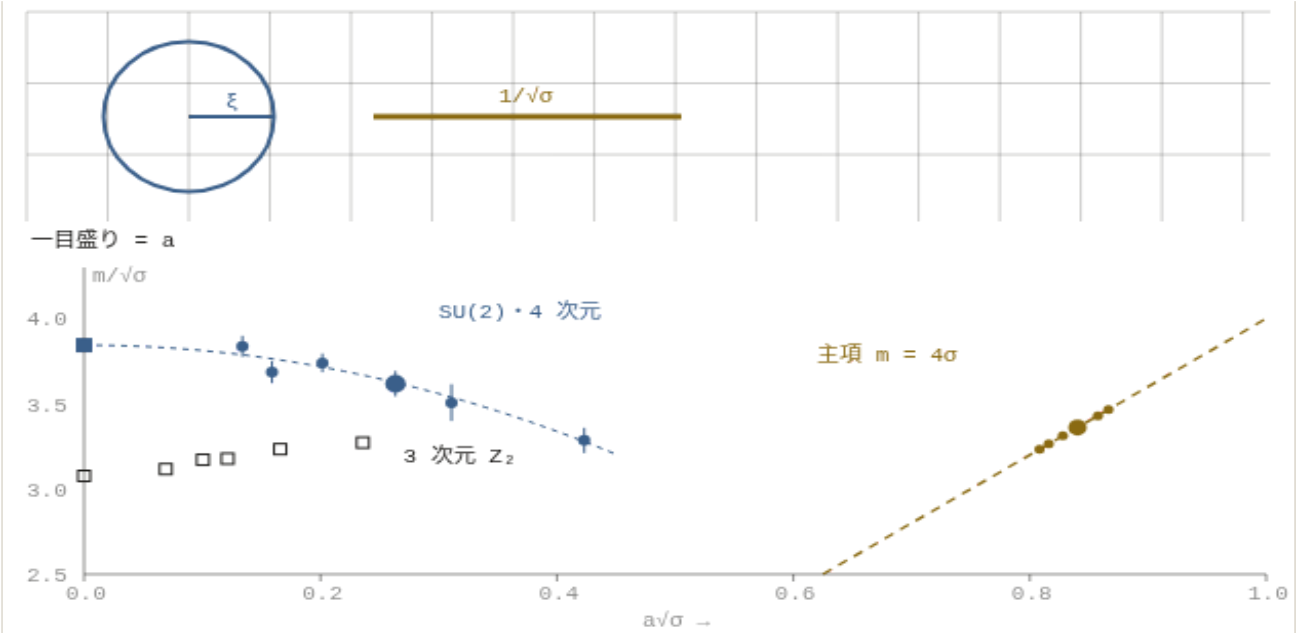
例：SU(2)・$\beta = 2.60$（24^4）では $a\sqrt{\sigma} = 0.13395$、$am = 0.514$（Lucini–Teper）で、格子単位の $\xi_\sigma = 7.47$、$\xi = 1.95$、比は 3.837 です計算。この比が有界にとどまることが (3) の中身です。

04

格子の数表で見る — 外挿の形は外から入る

Lucini–Teper（2001）の SU(2) の六点です。σ は、周期方向に一周巻きついた糊の管の質量 am_l に、弦の揺らぎの補正 $\pi/(3L)$ を足して長さ L（格子の歩数）で割った値です（原論文の式 (4)：$am_l = a^2\sigma L - \pi/(3L)$）。この式を使うにあたり、著者は 'we are assuming that we have linear confinement' と断っています（17-01 §06）。

図1　上は物理の単位（弦の長さ $1/\sqrt{\sigma}$ を棒の長さに固定）で描く。つまみで β を上げると格子の目（間隔 a）だけが細かくなり、球の長さ ξ（円の半径）はほぼ変わらない。下は比 $m/\sqrt{\sigma}$（四角は三次元 $\mathbb{Z}_2$）。ボタンで強結合の主項（破線）を重ねる



β = 2.4（12^4） a√σ = 0.2634　am = 0.953　格子単位で 1/√σ = 3.80、ξ = 1.05　m/√σ = 3.618　主項 3.361

表A　SU(2) の $m/\sqrt{\sigma}$（Lucini–Teper 表 1 から。六点の am の正本は 16-05 表 3、$a\sqrt{\sigma}$ は 5-09 表 1）

β	格子	$a\sqrt{\sigma}$	am	$m/\sqrt{\sigma}$
2.25	8^4	0.4231(25)	1.390(30)	3.285(74)
2.30	10^4	0.3108(17)	1.090(33)	3.507(108)
2.40	12^4	0.2634(14)	0.953(19)	3.618(75)
2.475	16^4	0.2016(13)	0.754(10)	3.740(55)
2.55	20^4	0.15896(63)	0.586(10)	3.686(65)
2.60	24^4	0.13395(62)	0.514(8)	3.837(62)

計算　この図と表の数値はこの端末で計算した（一次資料の値の比。誤差は独立とみなした目安）。

格子単位の弦の長さ $1/(a\sqrt{\sigma})$ は 2.36 から 7.47 へ伸びますが、比は 3.29〜3.84 にとどまり、おおむね増えて下から近づきます（2.475→2.55 で一度下がる。誤差の内）。a に依らない定数での当てはめは $\chi^2 = 38.6$（自由度 5）で退けられ、比は a に依ります 計算 。連続値は依り方の形を決めて外挿します。

$$\frac{m}{\sqrt{\sigma}}(a) = r_0 + c\,(a\sqrt{\sigma})^{p} \tag{4}$$

表B　(4) の当てはめ（誤差で重みを付けた最小二乗、全 6 点）

p	連続値 r_0	χ^2／自由度
2	3.844(43)	2.39 / 4
1	4.053(73)	2.73 / 4
一次資料（表 5）	3.844(61)	—

$p=2$ は一次資料と中心値が一致しますが、$p=1$ でも χ^2 は同じくらい良く、連続値は 4.05 になります 計算 。**データだけでは外挿の形を選べません**。著者は 'the functional form of such corrections is known' と書き、$O(a^2)$、つまり $p=2$ を使います（5-05）。3.844 は、極限が在り近づき方がこの形だという前提の上の数です（17-01 §08） 物理 。

05

四つの長さと三つの鎖 — 拡散型緩和時間の仮定

長さは四つで、どれも格子の何歩分かで数えます。**記帳の長さ** ξ_{RG}、弦の長さ ξ_σ、球の長さ ξ、**揺らぎが均される長さ** $\sqrt{C_P}$ です。

記帳の長さは、格子を b 倍に粗くする一段（繰り込み群の一段、7-05）ごとに結合 β がどれだけ下がるかを書き留め、段を重ねて決める長さです。k 段で長さは b^k 倍になるので、決まった強さの結合まで下がるのに要る段数から「格子の何歩が物理の一単位か」が決まります。それを記帳の長さとし、この単位で格子間隔を $a:=1/\xi_{\mathrm{RG}}$ と置きます（本書の検討の記録の定義。23-02）。一ループの走り（4-06）だけで数えれば、SU(2) では定数倍を除いて $\xi_{\mathrm{RG}}\approx e^{3\pi^2\beta/11}$ です（$\beta=4/g^2$＝記号表の $2N/g^2$。指数の係数は一ループの係数 b_0 の書き直し） 既知 。

C_P は、格子のゲージ場の確率分布 μ（SU(2)・Wilson 作用・無限体積・ゲージ固定なし）について

$$\mathrm{Var}_\mu(f)\ \le\ C_P\,\mathcal{E}(f),\qquad \mathcal{E}(f)=\mathbb{E}_\mu\Big[\sum_{\ell}|\nabla_\ell f|^2\Big] \tag{5}$$

がすべての f で成り立つ最良の定数（Poincaré 定数）です。Var_μ は μ での分散、∇_ℓ はリンク ℓ の SU(2) の向きの微分です。微分をリンクの角度 ϑ（$U=e^{i\vartheta\cdot\sigma}$）で取るか、場 $A=\sqrt{\beta}\,\vartheta$ で取るかで $\mathcal{E}$ は $\mathcal{E}_A=\mathcal{E}/\beta$ と変わり、C_P は β 倍違います。自由近似では前者で $C_P=(g^2/4)\xi^2$、後者で $C_P=\xi^2$ です。下の (6) の帯が成り立つかはこの選び方に依ります（角度の正規化では自由近似でも下側が対数で破れる：18-05 §03）。最良の定数は隙間の逆数です（1-10 §07）。効いている力学は **Langevin 力学**で、各リンクに小さなランダムな揺さぶりを加えながら作用が下がる向きに少しずつ動かす確率的な時間発展です。長く走らせると分布は μ に落ち着きます。$\lambda_1=1/C_P$ はこの力学の隙間、C_P は最も遅い戻りの時間です。正確には、C_P が戻りの時間に等しいのは連続時間の可逆な力学（Langevin）でだけで、離散時間の更新や HMC では別の量です（18-03 §06）。本書の検討の記録が置く仮定は、揺らぎの長さが記帳の長さと同じ尺度にあることで、帯の形では次の (6) です。名前は A-06 名前の索引に従います。**緩和時間の仮定**は冪の水準の文 $\lim \ln C_P/\ln\xi=2$ で、(6) は帯の文 H_{band}（正規化を名指して $H_{\mathrm{band}}[\mathcal{E}_\vartheta]$ か $H_{\mathrm{band}}[\mathcal{E}_A]$）と鎖 (ii)(iii) を合わせた文です。

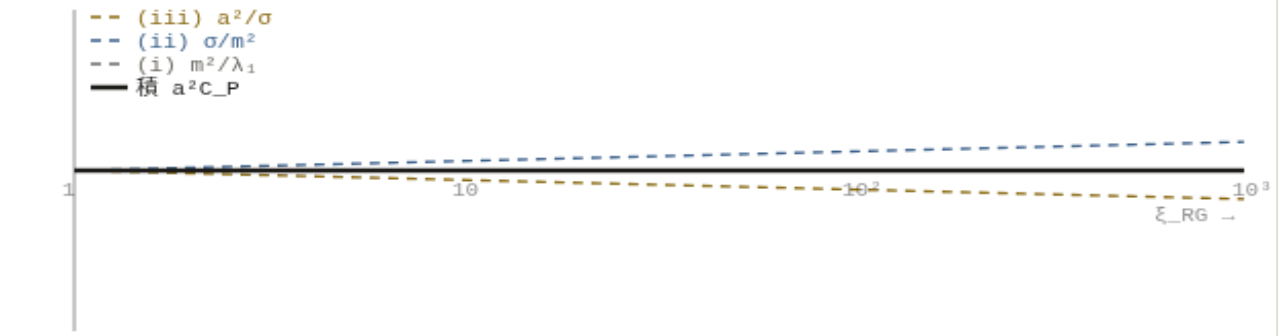
$$a^2 C_P \asymp 1 \qquad (\text{つまり } \sqrt{C_P} \asymp \xi_{\mathrm{RG}}) \tag{6}$$

これを三つの比の積に割ります。

$$a^2 C_P \;=\; \underbrace{\frac{a^2}{\sigma}}_{\text{(iii)}} \cdot \underbrace{\frac{\sigma}{m^2}}_{\text{(ii)}} \cdot \underbrace{\frac{m^2}{\lambda_1}}_{\text{(i)}} \tag{7}$$

各因子が $\asymp 1$ であることを、一本の**鎖**と呼びます。(i) $\lambda_1 \asymp m^2$：揺らぎと球の長さが揃う（緩和の鎖）。Langevin 力学は拡散的なので、長さ ξ の揺らぎを均すのに ξ^2 程度の時間がかかります（動的指数 $z = 2$）物理。だから λ_1 を m ではなく m^2 と比べます。(ii) $m^2 \asymp \sigma$：球と弦の長さが揃う（一尺度 (3)）。(iii) $\sigma \asymp a^2$：弦と記帳の長さが揃う（閉じ込めが記帳の尺度で起きる）。三本とも成り立てば (6) が出ます。(ii)(iii) の下で (6) は帯の文 $C_P \asymp \xi^2$ と同じで、二重井戸の緩和時間の冪の言明はそこから出ます（A-06）。逆は出ず、因子が打ち消し合えば鎖が切れていても積は一定です（図2）。(7) から (6) が出る向きの代数は機械検査済みですが Lean （`chain_band`・`sq_times_poincare_band`、`LatticeGaugeOneScale.lean`。仮定は三つの帯の不等式、結論は $a^2 C_P$ が正の帯に入ること。一覧は 23-13）、三本の鎖そのものはどれも証明されていません。

図2　つまみで三つの因子の冪 p（因子 $\propto \xi_{\mathrm{RG}}^{p}$）を変えると、点線の三本と実線の積 $a^2 C_P$ が傾く。積が水平なら (6) が成り立つ。初めの位置（(iii) −0.3・(ii) +0.3）では、鎖が二本切れているのに積は水平



積 a²C_P ∝ ξ_RG^(+0.00)　(6)：成り立つ　鎖：(i) ○　(ii) ×　(iii) ×

計算 (7) の対数の和をその場で描く模式図（実測ではない）。

06

どの鎖が等価原理に当たるか

(i) は道具として選んだ力学と理論の隙間（転送行列の隙間、5-03）の関係で、力学を替えれば言明も替わります。(iii) は段の記帳の仕方に依ります。粗くする一段ごとに数え落とす小さな誤差を**取りこぼし**と呼ぶと、(iii) には一ループの係数と、取りこぼしを段ごとに足し上げた和が効きます（23-02）。記録の整理では、(ii) だけが、道具にも記帳にも依らない理論の一文です。

この道筋の上の一文

閉じ込めの管には、弦張力のほかに長さの径数が無い（$m^2 \asymp \sigma$、式 (3)）。

「第二種の質量は無い」と同じ型で、記録は次の対応表を作りました。

一般相対論	この道筋（類比）
リーマン幾何学（舞台）	格子ゲージ理論（有限次元の確率測度）
一般共変性（法則の書き方への要請）	繰り込み群の一段（格子を粗くしても中身は同じ）
光速度不変から来る単位の約束（$c=1$）	尺度設定の規約（$\sqrt{\sigma}=1$ と置く単位の約束。17-01 §07）
等価原理（物理の一文）	(ii) 一尺度（第二の長さの径数は無い）

比喩で言えば、一般相対論が「重さ」を一種類にしたように、この一文は「長さ」を一種類にします。正確には、表は類比で左右を結ぶ定理はなく、等価原理は各点の等式、(3) は一様な不等式です。

07

候補を落とす — 双対超伝導・中心渦・漸近スケーリング

(a) 双対超伝導と**(b) 中心渦**（17-02）は、ゲージを固定して射影した配位の言明です。生の形では固定の仕方（Gribov のコピー、17-02 §04）に依り、確率測度の一文になりません。ゲージ不変に書ける核（'t Hooft の渦の自由エネルギー）は σ の言明で、鎖 (iii) に合流します。**(c) 非摂動的な漸近スケーリング**は、格子単位の長さが摂動論の予言どおりに伸びるという一文です。二ループの予言は次の f_2 です（SU(N)、$g^2 = 2N/\beta$）既知 。

$$f_2(\beta) = (b_0 g^2)^{-b_1/(2b_0^2)} \exp\!\Big(-\frac{1}{2b_0 g^2}\Big), \qquad b_0 = \frac{11N}{48\pi^2}, \quad b_1 = \frac{34N^2}{3(16\pi^2)^2} \tag{8}$$

係数は PDG の総説の値（クォークなし）と一致します（$N=3$ で照合 計算 ）。(c) は「格子単位のあらゆる長さの逆数、たとえば am/f_2 や $a\sqrt{\sigma}/f_2$ が正の定数に収束する」と言います。f_2 を物理の単位の目盛りと読めば、am/f_2 の収束はそのまま物理単位の質量ギャップが正で有限であることです。示したい結論を含むので、記録は循環として外しました。

数値でも違います。SU(2)・裸の結合 $g^2 = 4/\beta$ で $\beta = 2.40 \to 2.60$ のとき、$a\sqrt{\sigma}/f_2$ は 57.26→48.23（−15.8 %）、比は 3.618→3.837（+6.1 %）です 計算 。比は動きが小さく、摂動論も使いません。

裸の結合 β には格子に特有の大きな補正が混じります。Lucini–Teper は平均場で改良した結合 $\beta_I = \beta \cdot \frac{1}{N}\langle \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,U_p \rangle$（$U_p$ はプラケットの行列）を使い、'Transforming this to β_I is known to remove a large part of the lattice corrections at small a.' と書いています（原論

文 §5、式 (11) の後の文。この結合の出所として原論文は先行文献を挙げる）物理 。その結合で二ループの Λ を求めて連続極限へ外挿した値が原論文の表 6 ですが、SU(2) の外挿については 'the best continuum fit is very poor' とあります。

08 一尺度が破れる例

(3) が当然でないことは、破れる例で分かります。**三次元のコンパクト U(1)**：Göpfert–Mack は全結合で $\sigma > 0$ を証明し 既知 、連続極限では、質量を物理の単位で固定したとき弦張力が無限大に行く（$\sigma/m^2 \to \infty$）とも述べます（同論文の要旨。Villain 作用。本文は未読）。その記述どおりなら、閉じ込めはあるのに比 $m/\sqrt{\sigma}$ は 0 に向かいます（17-02 §03）。**ホログラフィーの超重力の領域**：比は $\lambda^{-1/2}$ で 0 に向かい、$\lambda = g^2 N$ が第二の径数です（17-09 §08） 物理 。

強結合展開の主項は反例ではなく、傾きが逆の近似です。作用を $S = \beta \sum_p \left(1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{Tr} U_p\right)$（和はすべてのプラケット、5-01）とすると、SU(2) の主項では $u = I_2(\beta)/I_1(\beta)$（変形ベッセル関数の比）として $\sigma = -\ln u$、最も軽い状態は $m = -4 \ln u = 4\sigma$ なので（5-02） 既知 、

$$\frac{m}{\sqrt{\sigma}} = 4\, a\sqrt{\sigma} \tag{9}$$

で、図1 の破線（延ばせば原点を通る直線）です。$a\sqrt{\sigma} \to 0$ に延ばすと比は 0 に落ち、格子の数値と逆向きです。$\beta = 2.40$ の主項は $a\sqrt{\sigma} = 0.840$（実測 0.2634）で 計算 、展開の収束域の外です。

09 一尺度が保たれる例と、要る入力

保たれる例：三次元の $\mathbb{Z}_2$ ゲージ模型。群は可換ですが、双対変換で三次元イジング模型に写り、グルーボールの質量は相関長の逆数に、弦張力は界面張力になります。Agostini–Carlino–Caselle–Hasenbusch（1997）は、スケーリング極限では $\sigma\xi^2$ が定数になるはずだとして連続値 $0.1056(19)$ を求め、ϕ^4 理論の予言 $0.1024(88)$ と合うことを確かめたうえで、$m/\sqrt{\sigma} = 3.08(3)$ を得ました 物理 。

比 $1/\sqrt{\sigma\xi^2}$ は $a\sqrt{\sigma} = 0.236$ で 3.272(11)、0.069 で 3.117(52)、連続値で 3.077(28) と、上から近づきます（原論文の表 6 から 計算 ）。物理の説明はこうです。**関連する方向**とは、格子を粗くするほど効きが大きくなる結合の向きのことです。$\mathbb{Z}_2$ 対称を保つ（イジング模型で言えば磁

場の無い）範囲では、臨界点の近くに関連する方向が一本しかないので、m と $\sqrt{\sigma}$ が同じ一つの ξ で決まります（2-08 §07）物理。定理ではありません。

三次元 U(1) の連続極限の記述が正しければ、可換な U(1) で破れ、可換な $\mathbb{Z}_2$ で保たれるので、**非可換かどうかでは決まりません**。要るのは「第二の小さな径数を禁じる入力」です。記録は、四次元 SU(2) でのこの入力を一ループの係数が正であること（漸近自由、4-06）と見ていて、それを二つの形に書き直しました。I：関連する方向が一本で、m と $\sqrt{\sigma}$ が同じ ξ で決まる。R：格子で壊れた回転の対称性が長い距離で戻る（管の形が効く。17-03 §08）。この二つで足りるかは分かっていません。

10

等価原理と違うところ — 仮定として置けない一文

一般相対論では等価原理は公理です。懸賞問題は定義から存在と隙間を*証明*せよと言うので、(ii) を公理として足せず、定理にするか迂回するかです。

問題文は、$(0, \Delta)$ にスペクトルが無いことを隙間 Δ と定義し、'The supremum of such Δ is the mass m, and we require m < ∞.' と続けます 既知。(ii)(iii) の下での (6) の形 $C_P \asymp \xi^2$（帯の文 H_{band}）を上下に割ると、記録の読み替えでは $C_P \lesssim \xi^2$（緩和時間の上界の仮定）が $\Delta > 0$ の側、$C_P \gtrsim \xi^2$（緩和時間の下界の仮定）が質量が無限大に潰れない側（$m < \infty$ の形）に当たります。緩和時間の仮定そのものの形で上下に割る正確な扱いは 23-01 で行います。下界の仮定は Clay の意味の「非自明」（相互作用があること）とは別物です。

(ii) の下の半分 $m^2 \gtrsim \sigma$ は、管の欠損が周長 ℓ に対して c/ℓ 以上だという作用素の不等式（記録の呼び名で管の転送作用素の不等式）に還元されます Lean（`mass_sq_ge_of_tube`、`LatticeGaugeTubeEntropy.lean`。仮定：転送作用素のノルムが $e^{-2\sqrt{c\sigma}}$ 以下、つまり管の不等式の帰結。結論：$m^2 \geq 4c\sigma$。一覧は 23-13）。管の不等式そのものの証明の型はありません（23-02）。有限個の測定からは m の上界しか出ません（既知の関係の言い換え。23-02）。一文は名指しできても、定理にする道具はまだありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
物理「尺度は一つ」を (3) に書けること、(ii) が道具にも記帳にも依らない唯一の鎖であること（記録の整理）。	対応表が数学の同値であること（類比）。(ii) が緩和時間の仮定に十分な入力であること。

言えている	言えていない
計算 表A・表B、図1・図2、§02・§07・§08・§09 の数値。	一次資料の値の比と当てはめで、測定ではない。外挿の形はデータだけでは選べない。
Lean (7) から (6) が出る向きの積の代数（`chain_band`・`sq_times_poincare_band`）。(ii) の下の半分の管の不等式への還元（`mass_sq_ge_of_tube`）。	鎖 (i)(ii)(iii)・緩和時間の仮定・(3)・管の不等式の証明。四次元の連続理論の一尺度・質量ギャップ・構成について、この章は何も示さない。
既知 三次元 U(1) の全結合での面積則、主項の形。	三次元 U(1) の連続極限（本文未確認）。$\mathbb{Z}_2$ と SU(2) の一尺度は数値と物理の水準。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
隙間と $m < \infty$ の定義	既知	A. Jaffe, E. Witten, "Quantum Yang–Mills Theory"（Clay の問題文）§4。本文を確認。
等価原理の出発点、ねじれ秤	物理	A. Einstein, Jahrb. Radioakt. Elektron. 4 (1907) 411–462。R. v. Eötvös, D. Pekár, E. Fekete, Ann. Phys. (Leipzig) 68 (1922) 11。どちらも書誌のみ（二次資料）。
式 (2)	既知	P. Touboul ほか（MICROSCOPE）, PRL 129 (2022) 121102, arXiv:2209.15487。要旨を確認。
表A・表B・§07 の入力、引用、平均場で改良した結合	物理	B. Lucini, M. Teper, JHEP 0106 (2001) 050, hep-lat/0103027 表 1・5・6、原論文の式 (4)(5)、§5 の式 (11) の後の文。本文を確認。
§09 の $\mathbb{Z}_2$ の入力、双対変換、ϕ^4 の予言 0.1024(88)、3.08(3)	物理	V. Agostini, G. Carlino, M. Caselle, M. Hasenbusch, NPB 484 (1997) 331, hep-lat/9607029 原論文の式 (4)(15)(16)・表 6。本文を確認。
強結合展開の主項（$u = I_2/I_1$、$m = 4\sigma$）	既知	J.-M. Drouffe, J.-B. Zuber, Phys. Rep. 102 (1983) 1–119。書誌のみ。導き方は 5-02。
't Hooft の渦の自由エネルギー（§07）	既知	G. 't Hooft, NPB 138 (1978) 1–25。Tomboulis–Yaffe, CMP 100 (1985) 313。どちらも書誌のみ。17-02。
一ループ係数	既知	D. J. Gross, F. Wilczek, PRL 30 (1973) 1343。H. D. Politzer, PRL 30 (1973) 1346。書誌のみ。
(8) の係数の照合	既知	J. Huston, K. Rabbertz, G. Zanderighi, "Quantum Chromodynamics", PDG, PRD 110 (2024) 030001, 式 (9.3)。本文を確認。
三次元コンパクト U(1)	既知	M. Göpfert, G. Mack, CMP 82 (1982) 545–606。要旨（INSPIRE）。本文は未読。年は Crossref の発行年で、INSPIRE は 1981。
超重力の領域	物理	17-09 の出典表。

もの	種別	出典・道具
(3)・緩和時間の仮定・三つの鎖・対応表・候補の判定・I と R	類比・仮定	本書の検討の記録の整理。鎖と緩和時間の仮定は仮定、対応表は類比。Lean は (7) の代数（`chain_band`・`sq_times_poincare_band`、`LatticeGaugeOneScale.lean`）と (ii) の下の半分の還元（`mass_sq_ge_of_tube`、`LatticeGaugeTubeEntropy.lean`）だけ。定理の一覧は 23-13。
表A・表B、図1・図2、§07・§08・§09 の数値、照合	計算	この端末の Python 3（numpy・scipy）：`onescale.py`（誤差の伝播、(4) の最小二乗、(8)、I_2/I_1、$\mathbb{Z}_2$ の比）。

次に読む章：17-13 物理の掘り方が数学と離れる場所 — 物理と数学が離れる場所を、第 17 部全体から拾います。緩和時間の仮定の詳しい形は 23-01 へ。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 17 部 物理の側から 物理と数学の切れ目

物理の掘り方が数学と離れる場所 — 物理の一文を数学の一文に訳すと、仮定が表に出る

> この章は既存の知見の整理です。§04 は本書の検討です。

この章で分かること — 物理の一文を数学の言明に訳すと付く前提。前提が入る七つの手つきと、それぞれで定理が途切れる場所。格子の比 $m/\sqrt{\sigma}$ の分母に弦の絵がどれだけ入っているか（一次資料の表からの再計算）。

前提となる章 — 17-10（あわせて 17-01〜17-03・5-01・4-10）。

先に言うこと — 物理の結果の水準を定理と取り違えないための整理で、物理の方法の良し悪しは論じません。質量ギャップの存在も連続極限の構成も、この章は示しません。数値は一次資料の表の再計算です。

この章の順序

1. 物理の一文を数学の一文に訳す
2. 在ると置いてから測る
    - 寄り道：有限の箱の隙間はなぜ易しいか
3. 分母に弦の絵が入る
4. 弦の絵を外すと比はどれだけ動くか（図1）
5. 有限の β から外挿する
6. 小さい径数の側から見る
7. 隣の理論へ移り、つまみで戻る（図2）
8. ゲージを選んでから見る
9. 物理が一つと見なすもの
10. 離れる場所の一覧

01

物理の一文を数学の一文に訳す

Lucini–Teper 2001 の表5 は $SU(2)$ の最も軽いグルーボールの質量 $m_{0^{++}}$ と弦張力 σ の比の連続値を 3.844(61) と与えます 物理 。この一文を数学の言明に訳すと

$$\lim_{\beta \to \infty} \frac{m(\beta)}{\sqrt{\sigma(\beta)}} = 3.844\ldots \tag{1}$$

です（$\beta = 2N/g^2$、m・σ は格子間隔 a を単位にした量、5-01）。(1) は四つの前提を持ち込みます。

a. 各 β で無限体積の極限が在り、一つに決まる。部分列の極限はコンパクト性から常に在るので、問題は一意性です。

b. 各 β で $m(\beta) > 0$、$\sigma(\beta) > 0$。

c. $\beta \to \infty$ の極限が在る。

d. 極限が、公理（4-10）を満たす連続の理論の量の比になる。

四次元の $SU(2)$ で大きい β について、(a)〜(d) のどれも定理ではありません（§05） 既知 。「(61)」は数値の推定誤差で、不等式による誤差限界ではありません。この章で「離れる」と呼ぶのは、物理の手順のある段に対応する定理が無く、仮定として置くしかない場所です。

02

在ると置いてから測る

物理の計算は、四次元の純ヤン–ミルズ理論が一つ在ることを前提にしています。有限の箱 B（格子点の有限な立方体）と有限の β では、リンク変数 $U_\ell \in G$ の上の確率測度

$$d\mu_{B,\beta}(U) = \frac{1}{Z_{B,\beta}} \exp\Big(\frac{\beta}{N} \sum_{P \subset B} \operatorname{Re}\operatorname{tr} U_P\Big) \prod_{\ell \subset B} dU_\ell \tag{2}$$

がきちんと定義されます（U_P はプラケット P を一周するリンク変数の積、dU_ℓ は Haar 測度） 既知 。前提が入るのは極限です。問題文は、コンパクト性（部分列の収束）による弱い存在だけでは、極限の性質（ギャップや公理）を別の方法で示さない限り解と認めません（問題文 §6.5 の脚注 2、17-01）。さらに問題文は §5 で 'the existence of a uniform gap for finite-volume approximations may play a fundamental role in the proof of existence of the infinite-volume limit' と**一様な**隙間を名指しします 既知 。物理の数値は「在ると仮定したうえでの予言」です。2026-11-10 に公開された構成は、Wilson の格子ゲージ理論の極限として Wightman の公理を満たす理論が作れることを、Lean で証明されてい

る、と委員会が評価しました。ただし体積の極限は部分列で、その一意性と、物理の数値が載る質量ギャップは示されていません（上の (a) は格子の各 β での言明で、この構成の外です）（6-04）。

寄り道：有限の箱の隙間はなぜ易しいか

飛ばしてよい小節です。

この寄り道の β はイジング鎖の逆温度です（格子ゲージの β とは別）。一次元のイジング鎖（重み $e^{\beta s_i s_{i+1}}$、$s_i = \pm 1$）の転送行列は

$$T = \begin{pmatrix} e^{\beta} & e^{-\beta} \\ e^{-\beta} & e^{\beta} \end{pmatrix}, \qquad \lambda_0 = 2\cosh\beta,\ \ \lambda_1 = 2\sinh\beta,\ \ \ln\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \ln\coth\beta \tag{3}$$

で、相関は $(\tanh\beta)^{|i-j|}$ と減衰します。成分がすべて正の行列の最大固有値は単純で他より真に大きい（Perron–Frobenius）既知。例：$\beta = 1, 2, 3$ で隙間は 0.272・0.0366・0.00496 計算。どの有限の β でも正です。

格子ゲージ理論でも、有限の箱の隙間は正です。正確には、リンク変数は連続な群に値をとるので、転送行列は行列ではなく、正の連続な核をもつ積分作用素です。有限の箱では、核が連続で群がコンパクトなので、この作用素はコンパクトです。そこで Perron–Frobenius の無限次元版（Jentzsch の定理の一般化。出典は 5-03）から、最大固有値は単純で孤立します（転送行列の構成は Lüscher 1977・Osterwalder–Seiler 1978。5-03）既知。問われるのは $a \to 0$ で (隙間)$/a$ が体積に一様に正のまま残るかです（二次元は 2-09）。

03

分母に弦の絵が入る

(1) の分母の σ は直接には測れません。測るのは、周期的な箱（一辺 L 格子点）を一周して閉じた電束管の質量 m_l で、Lucini–Teper は管を弦とみなし Lüscher 項（17-03 §03）を差し引きます 物理。

$$a m_l = a^2 \sigma L - \frac{\pi}{3L} \tag{4}$$

著者は 'in using eqn(4) we are assuming that we have linear confinement …, that the effective string theory … is in the Nambu-Gotto universality class, and that our string is in fact long enough' と書き、'with only two values of L … we cannot claim to have evidence for both the 1/L functional form and for its coefficient' とも断ります。Nambu–Goto の基底状態の全形（Athenodorou–Bringoltz–Teper の式 (23)）は

$$E_0(l)^2 = (\sigma l)^2 - \frac{\pi\sigma(d-2)}{3}, \qquad d = 4 \tag{5}$$

です（$l = aL$ は管の長さ、d は時空の次元。一次資料は D と書きます）。平方根をとって $1/l$ で展開した最初の二項が (4) です 既知 。つまり (4) は長い弦の近似で、管が短いほど後ろの項が効きます。一次資料の格子では管の長さは $L\sqrt{\sigma} \approx 3.1\text{〜}3.4$（$1/\sqrt{\sigma}$ を単位とした長さ） 計算 で、この長さで (4) が足りることは、上の引用のとおり著者も仮定として置いています。

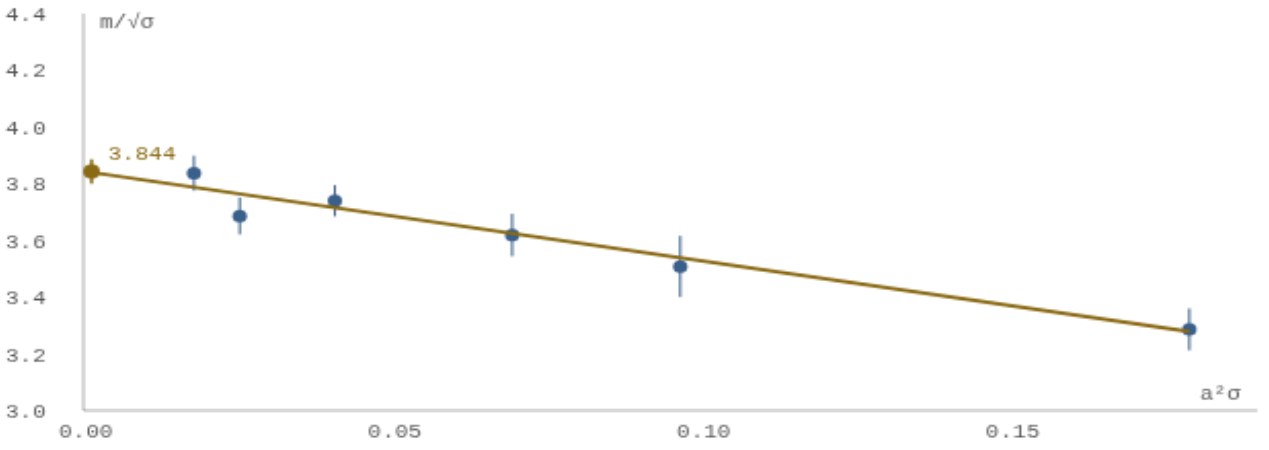
04

弦の絵を外すと比はどれだけ動くか

一次資料の表1 の管の質量から σ を三通り（補正なし $a^2\sigma = am_l/L$・(4)・(5)）に取り出し、比を計算し直しました 計算 。補正なしは、弦の絵の寄与を測る物差しです。

当てはめの読み方 — 各 β の比を横軸 $a^2\sigma$（格子の粗さ）に並べ、各点を誤差の二乗の逆数で重み付けして直線を引きます（重み付き最小二乗。直線の形は §05 の (6)）。左端 $a^2\sigma = 0$ の値が連続値です。χ^2 は、点と直線のずれを各点の誤差で割って二乗した和で、自由度（点の数 − 2）と同じ程度なら、直線は誤差の範囲で点に合っています。表1 の比の誤差は、$am_{0^{++}}$ と $a\sqrt{\sigma}$ の誤差を互いに独立とみなし、相対誤差を二乗して足した平方根です。

図1　σ の取り方と除く粗い点の数を変えると、当てはめの直線と連続値（左端）が変わる。破線は式 (4)・全点



式 (4)・除く点 0 個 → 連続値 3.844(43)、χ²/自由度 2.38/4、式 (4)・全点との差 0.0 %

計算 この図の数値はこの端末で計算した（表1 と同じ計算の結果を埋め込んだ）。

表1　$SU(2)$ の $m_{0^{++}}/\sqrt{\sigma}$：σ の取り方ごと（Lucini–Teper 表1 から。六点の am の正本は 16-05 表 3。誤差の出し方は上の「当てはめの読み方」）

β	$L\sqrt{\sigma}$	補正なし	(4)	(5)
2.25	3.38	3.447(78)	3.286(74)	3.278(73)
2.30	3.11	3.715(115)	3.508(108)	3.496(108)

β	$L\sqrt{\sigma}$	補正なし	(4)	(5)
2.40	3.16	3.825(80)	3.619(75)	3.608(74)
2.475	3.23	3.943(59)	3.740(55)	3.729(54)
2.55	3.18	3.894(69)	3.686(65)	3.676(64)
2.60	3.21	4.048(66)	3.837(62)	3.826(62)
連続値（全点）		4.059(45)	3.844(43)	3.833(42)

(4)・全点の中心値 3.844 は一次資料の表5 と一致します。Lüscher 項の有無で連続値は 5.6%（一次資料の誤差 0.061 の約 3.5 倍）動き、(4) と (5) の差は 0.3% です 計算 。表1 の格子で補正は主項 σL の 9〜11% です。比の精度は弦の絵の**先頭の補正が正しい**ことの上に立ちます（Athenodorou–Bringoltz–Teper は低い状態の多くが Nambu–Goto でよく記述されると報告） 物理 。

数学に訳すと、弦の絵の出発点は長い閉じ込めの管、つまり閉じ込めです。四次元の非可換群で大きい β の面積則は 'remains elusive'、小さい β の面積則は $U(1)$ を含む全群で成り立つので証拠にならない、と Chatterjee 2018 は書きます 既知 。

05

有限の β から外挿する

一次資料は、プラケット作用の格子の補正が a^2 から始まると見込み、

$$\frac{m(a)}{\sqrt{\sigma(a)}} = \frac{m(0)}{\sqrt{\sigma(0)}} + c\,a^2\sigma \tag{6}$$

を当てはめ（c は定数とみなす）、当てはめが悪ければ最も粗い点を除きます 物理 。図1 のつまみはこの手順の再現で、(4) なら連続値は 3.84〜3.86 に留まります 計算 （当てはめの形による動きは 17-12）。

数学の側では、Chatterjee 2018 の格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）が次を示せと求めます。$W_P = \operatorname{tr} U_P$ と置き、原点のプラケット P_0 と、点 $x \in \mathbb{R}^4$ に最も近いプラケット P_x の相関（共分散）を $f_\beta(x) = \langle W_{P_0} W_{P_x}\rangle - \langle W_{P_0}\rangle\langle W_{P_x}\rangle$ とします。四次元の非可換格子ゲージ理論の任意の無限体積極限で、どの $\beta > 0$ でも

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{\log f_\beta(x)}{|x|} = -\frac{1}{\xi(\beta)}, \quad \xi(\beta) \in (0,\infty), \qquad \lim_{\beta\to\infty} \xi(\beta) = \infty \tag{7}$$

となること（ξ は格子単位の相関長。連続の弦張力の問題（Chatterjee の Problem 5.2）は Wilson ループの連続極限）。言葉にすると、相関は遠くで $e^{-|x|/\xi}$ のように減り、その長さ ξ はどの β でも有限で正、しかも連続極限に近づくと格子間隔に比べて限りなく長くなる、という

ことです。著者は 'Since none of the above has been proved' と書き、2 次元より高い次元の大きい β では無限体積極限の一意性も分からず、四次元で $\beta_c = \infty$ は 'It is believed' の水準だと述べます 既知 。例：最も細かい点（$\beta = 2.6$、24^4）でも $\xi = 1/(am_{0^{++}}) = 1.95$ 格子間隔で、六点の ξ は 0.72〜1.95 です 計算 。外挿は、この範囲の傾きを $\xi \to \infty$ まで延ばす仮定です。

06

小さい径数の側から見る

摂動論も半古典も $g \to 0$ のまわりの展開ですが、次元転移（4-07）の尺度は一ループで

$$\Lambda = \mu \, \exp\Big(-\frac{1}{2b_0 g^2(\mu)} \Big), \qquad b_0 = \frac{11N}{48\pi^2} \tag{8}$$

です。$e^{-1/x}$ は $x \to 0^+$ でどの冪より速く 0 に近づき、テイラー係数はすべて 0 です 既知 。$\Delta = c\Lambda$ なら、ギャップは g^2 の級数のどの次数にも現れません（期待）物理 （7-12・4-12）。例：$SU(3)$、$g^2 = 0.5$ で $\Lambda/\mu = 5.8 \times 10^{-7}$、$g^{20}$ はまだ 9.8×10^{-4} です 計算 。

半古典がギャップまで届く例は、どれも問題文の理論ではありません。三次元の compact $U(1)$ では単極子が閉じ込めを起こし（Polyakov 1977、半古典）、Göpfert–Mack が Villain 作用の格子で全結合の面積則を証明しました 既知 （連続極限では物理の単位の弦張力が無限大に行く、と同論文の要旨。本文は未読）。$\mathbb{R}^3 \times S^1$ では、Ünsal–Yaffe 2008 が変形した $SU(N)$ 理論について、小さい N で円周 L が十分小さい領域の半古典の解析から、ギャップと線形の閉じ込めを導きました（物理の水準）物理 。$L \to \infty$ の途中に相転移が無いことは、小さい L と大きい L を区別する秩序変数が無いという議論に基づく予想です。数学に要るのは g について非摂動的な評価で、構成的な方法も強結合へ渡る所で止まっています（7-10）。

07

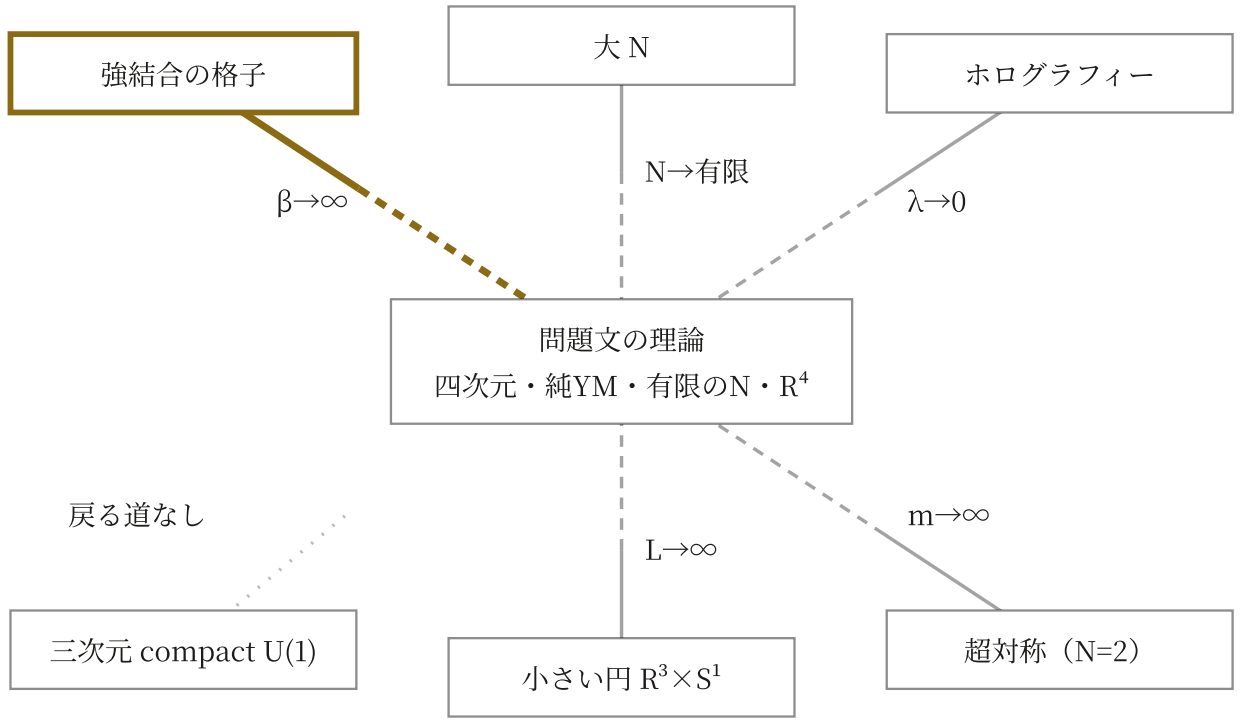
隣の理論へ移り、つまみで戻る

計算できる**隣の理論**へ移り、つまみを回して戻る手つきで、途中で何も起きないと置くのが仮定です。数学に訳すと極限の入れ替えで、一様性が要ります（17-10 §06）。大 N なら無次元の比 F について

$$\lim_{a\to 0}\lim_{N\to\infty} F(N,a) \overset{?}{=} \lim_{N\to\infty}\lim_{a\to 0} F(N,a) \tag{9}$$

で、問題文が要るのは N 固定の極限です。

図2　岸（ボタン・箱・表3 の行）を選ぶと戻る道が強調される。実線は計算が制御できる部分、破線は戻る道、点線は戻る道の無い岸



強結合の格子　小さい β で無限体積極限と面積則（Osterwalder–Seiler）。U(1) も含む 既知　戻るつまみ：β→∞　途中で要ること：収束域が弱結合に届かない

図2 は表3 の内容を絵にしたもので、数値はない。

表3　隣の理論と戻るつまみ

岸	数学として言えていること	戻るつまみ	途中で要ること
強結合の格子	小さい β で無限体積極限と面積則（Osterwalder–Seiler）。U(1) も含む 既知	β→∞	収束域が弱結合に届かない
大 N	強結合の SO(N) で弦の和（Chatterjee）。全 β で曲面和の表示（Cao–Park–Sheffield） 既知	N を有限へ	1/N の補正の一様性
ホログラフィー	背景を固定した後の固有値問題 既知 。対応は予想（17-08）	λ→0	超重力の外。弦理論の定義
超対称（N=2）	インスタントンの積分がプレポテンシャルを与える（17-11） 既知	質量→∞	ギャップが途切れないこと
小さい円 $R^3\times S^1$	小さい N・小さい L の半古典（Ünsal–Yaffe） 物理	L→∞	相転移が無いこと
三次元 compact U(1)	全結合で面積則（Göpfert–Mack、Villain 作用） 既知	無い	尺度が一つにならない（同論文の要旨）

大 N では、't Hooft 1983 が平面図の場の理論を「粒子の質量がすべて非零で結合が十分小さい」条件で構成したとされ（書誌と検索要約のみ）、ギャップは入力です。問題文は §6.6 で 1/N を 'perhaps a good starting point for a rigorous proof (for sufficiently large N)' と書きます 既知 。例：格子の比は $SU(3)$ で 3.405(21)（Athenodorou–Teper 2020・2021）、

$SU(\infty)$ で 3.072(14)（同 2021）です 物理 。物理はこれを「大 N は近い」と読みますが、数学に要るのは (9) の一様性の証明です。

08

ゲージを選んでから見る

閉じ込めの機構の多くは、ゲージを選んでから定義される変数（単極子・中心渦・Landau ゲージの伝播関数）で語られます（17-02） 物理 。数学の側では、大域的に連続なゲージ固定は一般に無く（Singer、3-04）、局所的な条件にも複数の解が残ります（Gribov、4-08） 既知 。格子では、局所的な量の期待値は、その量をゲージ変換について平均したもの（ゲージ不変な部分）の期待値に等しく、ゲージ変換で変わる成分の期待値は 0 です（Elitzur。例：$\langle U_\ell \rangle = 0$） 既知 。

問題文の標的はゲージ不変な局所場です。例えば $O = \operatorname{tr} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$（$\mu,\nu$ について和をとる）について

$$\left| \langle O(x)\, O(0) \rangle - \langle O \rangle^2 \right| \le C\, e^{-\Delta |x|} \tag{10}$$

がギャップ Δ の現れ方の一つです（4-11）。伝播関数は大きな格子で $D(0)$ が有限で非零に見える（'seems to'）と報告され（Cucchieri–Mendes）、Zwanziger は領域内のコピーは期待値に効かないと主張します 物理 。$D(p)$ から (10) を導く定理はありません。

ゲージ不変な橋もあります。群 G の**中心**は、すべての元と可換な元の集まりで、$SU(N)$ では 1 の N 乗根倍の単位行列 $e^{2\pi i k/N} I$ です。**中心対称性**は、一つの層のリンクすべてに同じ中心の元を掛ける変換（プラケットの値を変えない）についての対称性で、測度がどれもこの変換で変わらないとき「破れない」と言います（正確には厚さ有限の板の上で、どの境界条件でも。17-02）。Tomboulis–Yaffe 1985 は $SU(2)$ で Wilson ループを中心渦の自由エネルギーで上から押さえたとされます（検索要約のみ）。Chatterjee 2021 は格子で、中心に非自明に作用する表現（中心のある元が単位行列以外に写る表現。例：$SU(N)$ の基本表現）の Wilson ループについて二つを証明しました 既知 。中心対称性が破れなければ閉じ込めること（$V(R) \to \infty$ の意味で、面積則より弱い）と、任意の境界条件での相関の指数減衰を仮定すれば中心対称性は破れず面積則が出ることです。欠けているのは四次元の弱結合でその仮定が成り立つことです（Tomboulis 2007 の主張には 'missing links' の指摘、Ito–Seiler）。

09

物理が一つと見なすもの

物理は、次元転移の後の尺度は一つと見て、別々の量を一つの尺度の顔として扱います（17-01 §03）。数学に訳すと一文が割れます。

表4　物理の一文と、訳した言明

物理の一文	数学の言明と現状
質量と弦張力は同じ Λ の定数倍	m^2/σ が β に一様に上下から押さえられること（17-12 の拡散型緩和時間の仮定）。破れる例：三次元 compact $U(1)$・超重力の領域（17-09） 物理
閉じ込めとギャップは一つの現象	別の主張。問題文は $\Delta > 0$ だけを求め、閉じ込めは拡張問題（問題文 §5 の 'natural extensions'）。問題文の意味のギャップから閉じ込めを導く定理は無い（17-02 §02）。格子では、任意の境界条件での指数減衰という強い形から、中心が非自明な群で面積則が出る（Chatterjee 2021 Thm 2.4） 既知 。有限群では、ゲージ不変な量の相関の指数減衰が弱結合で証明されている（Adhikari–Cao。境界に条件を課さない箱の上での形で、強い形とは別物） 既知 。閉じ込めないことは信じられている段階（Chatterjee 2021 が 'believed' と書く。5-10） 物理
ギャップは最も軽いグルーボールの質量	隙間と、その上の孤立した一粒子状態は別。後者は拡張問題（4-11） 既知

10

離れる場所の一覧

どの行でも、欠けているのは物理の筋ではなく対応する定理です。

表5　七つの手つきと、訳した言明の現在地

手つき（節）	数学の言明に訳すと	現状
在ると置く（§02）	公理を満たす極限の構成	2026-11-10 に公開された構成（Lean で証明されている、と委員会が評価。体積の極限は部分列、一意性と質量ギャップは無し。6-01）
弦の絵で σ を取る（§03・§04）	大きい β での面積則	'remains elusive' 既知
外挿する（§05）	(7) と Wilson ループの連続極限	問題として立てられた段階（格子の相関長の問題・連続の弦張力の問題） 既知
小さい径数で展開する（§06）	g について非摂動的な評価	$e^{-1/x}$ のテイラー係数はすべて 0 既知 。$\Delta = c\Lambda$ は物理の期待 物理
隣の理論から戻る（§07）	(9) の一様性	正当化は探した範囲で見当たらない
ゲージを選ぶ（§08）	ゲージ不変な相関 (10)	条件つきの格子の定理まで 既知
一つと見なす（§09）	別々の言明と一様な比較	仮定として切り出す段階 物理

離れる場所の大半は発散ではなく**極限と一様性**にあり（7-11）、物理の数値は数学にとって証明の段ではなく**標的と検査**です。訳がうまくいった場所は格子の上の**条件つきの定理**です。数学の側と並べた全体図は 16-05、名前の対訳は 16-05 の対訳表です。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
計算 表1 から、Lüscher 項の有無で連続値が 5.6% 動き、(4) と (5) の差は 0.3% であること。(4)・全点の中心値が 3.844 と一致すること。	弦の絵が正しいか。閉じ込めそのもの。一次資料の誤差 0.061 の内訳（この端末の当てはめでは 0.043）。
既知 七つの手つきの、訳した言明と一次資料が述べる現状。	七つで尽きること（分け方はこの章の整理）。条件つきの定理の仮定が成り立つこと。
物理 §06・§07 の半古典・大 N・ホログラフィー・超対称の読み。	つまみを回す極限の存在。質量ギャップと連続極限の構成（この本は示していない）。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
(1)(4)(6)・表1 の入力	物理	Lucini–Teper, JHEP 0106 (2001) 050, hep-lat/0103027。本文（表1・表5・§4）を確認。
(5)・§03・§04 の報告	物理	Athenodorou–Bringoltz–Teper, JHEP 1102 (2011) 030, arXiv:1007.4720。本文（式 (23)・要旨）を確認。
§02・§07・表4 の問題文	既知	Jaffe–Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”（Clay の問題記述）§5（'uniform gap'・'natural extensions'）・§6.5（脚注 2）・§6.6（1/N）。本文を確認。
(7)・面積則・一意性	既知	Chatterjee, arXiv:1803.01950 §4・§5（Problem 5.1・5.2）。本文を確認。
寄り道の転送行列・表3 の強結合	既知	Lüscher, CMP 54 (1977) 283（自己共役で正の転送行列の構成）；Osterwalder–Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（いずれも書誌のみ）。Perron–Frobenius と Jentzsch の定理：O. Perron, Math. Ann. 64 (1907) 248–263／R. Jentzsch, J. reine angew. Math. 141 (1912) 235–244（書誌のみ）。一般化は H. H. Schaefer, *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer (1974) p. 337（書誌のみ、主張は二次資料で確認。詳しくは 5-03 の出典表）。
§08・表4 の中心対称性と有限群	既知	Chatterjee, CMP 385 (2021) 1007–1039, arXiv:2006.16229。本文（Thm 2.2・2.4、有限群についての 'believed' の段落）を確認。Adhikari–Cao, Ann. Probab. 53 (2025) 140–174, arXiv:2202.10375。本文（Theorem 1.1）を確認。

もの	種別	出典・道具
§06 の半古典	既知／物理	Göpfert–Mack, CMP 82 (1982) 545–606（Villain 作用。要旨（INSPIRE）。本文は未読。年は Crossref の発行年で、INSPIRE は 1981）。Polyakov, NPB 120 (1977) 429（書誌のみ）。Ünsal–Yaffe, PRD 78 (2008) 065035, arXiv:0803.0344（要旨）。
§07 の大 N	既知／物理	't Hooft, CMP 88 (1983) 1（書誌と検索要約のみ）。Chatterjee, arXiv:1502.07719・Cao–Park–Sheffield, arXiv:2307.06790（要旨）。Athenodorou–Teper, arXiv:2007.06422（$SU(3)$。本文の表 14・17 を確認）・arXiv:2106.00364（本文の表 24・34〔$SU(3)$〕と表 31・38〔$SU(\infty)$〕を確認）。
§08 のゲージ	既知／物理	Singer, CMP 60 (1978) 7；Gribov, NPB 139 (1978) 1；Elitzur, PRD 12 (1975) 3978（いずれも書誌のみ）；Tomboulis–Yaffe, CMP 100 (1985) 313（書誌と検索要約のみ）。Cucchieri–Mendes, arXiv:0710.0412；Zwanziger, hep-ph/0303028；Tomboulis, arXiv:0707.2179；Ito–Seiler, arXiv:0711.4930（要旨）。
表1・図1・(3)・§03〜§06 の数値	計算	この端末の Python 3（標準ライブラリ）：string_sigma.py・extra.py。入力は一次資料の表の値だけ。(3) と Perron–Frobenius は標準的な事実。

次に読む章：18-01 辞書の読み方（物理の語と数学の語を、定義と実在の二列の格で並べる第 18 部の入口）。