第三巻　質量ギャップへ — 残る問いと本書の結果

第 18 部 二つの言葉の辞書

Kiichi, Shiori and Rin · 2026-11-14 の版 · https://computoergosum.com/principia/yang-mills/

> この PDF は Web 版の各章をそのまま刷ったものです。動かせる図は刷った時点の姿で止まっています。章の間のリンクは Web 版へ飛びます。最新の内容は Web 版に在ります。

章		頁
18-01	辞書の読み方	2
18-02	理論そのものの辞書	14
18-03	質量と長さの辞書	29
18-04	尺度と極限の辞書	43
18-05	本書の仮定の物理側の対応	57

辞書の読み方 — 格を二列で付け、「同じ」の判定者を名指す

この章は案内です（辞書の読み方）。

この章で分かること — 辞書の各行の二つの格、(a) 定義としての対応と (b) 四次元ヤン–ミルズでの実在。
一列の格の食い違いが二列で解けること（図 1）。
「同じ」の判定者（定理・定義・慣習・予想・類比）と、条件の欄の読み方（図 2）。

前提となる章 — 0-03 問題文を一語ずつ読む。§03・§08 は 4-10・4-11 を読んでいると読みやすくなります。0-03 に無い語には初出で一句の説明を付け、詳しくはリンク先の章に譲ります。第三巻の中では、第 17 部（物理の側から）の次に読みます。

先に言うこと — この章は読み方を決めるだけです。表 2 の格はこの本の読みで、根拠は 18-02〜18-04 にあります。この本は質量ギャップの存在も連続極限の構成も自分では示していません（公開された連続極限の構成は第二巻で読みます）。

この章の順序

1. 二つの言葉で同じものを指す
2. 一行の欄 — 九つの欄（測定の列を含む）
3. 定義としての対応の列 — 確定・条件つき・未確定
4. 四次元での実在の列 — 構成済み・条件つき・無い（未構成）
5. 二列にすると食い違いが解ける — 図 1・表 2
6. どちらの言葉を主にするか
    - 寄り道：偽の友
7. 「同じ」を誰が判定しているか — 五つの判定者
8. 条件の欄の読み方 — 図 2・表 3
9. 実在の列が動いたら何がついてくるか

01

二つの言葉で同じものを指す — なぜ辞書が要るか

物理の「経路積分」「真空」「グルーボール」は、数学ではそれぞれ「確率測度」「再構成した Hilbert 空間（1-10）の単位ベクトル」「質量作用素 $M = \sqrt{H^2 - P^2}$（エネルギー H と運動量 P から静止質量を読む作用素）の孤立固有値」に当てられます。出所の違う語が同じものを指すかどうか、その対応がどこまで確かかは行ごとに違い、行ごとに確かめるしかありません。それがこの章の主題です。

答えは三通りです。定理で同じと言える、仮定の下でだけ言える、言えない。しかも四次元では、数学の側の対象がまだ作られていないことが多い（0-03 §04）。そこで一行を次の形にします。

$$\underbrace{\text{物理の語}}_{\text{出所}} \longleftrightarrow \underbrace{\text{数学の語}}_{\text{出所}} \qquad \big[\,(a)\ \text{定義としての対応}\ ;\ (b)\ \text{四次元 YM での実在}\,\big] \tag{1}$$

$\longleftrightarrow$ は対として並べるだけで、同じかどうかは二つの格で言います。例：「インスタントン $\longleftrightarrow$ 反自己双対接続」は (a) 確定・(b) 構成済み（古典）。古典の場には Wu–Yang（1975）の先例があります（要旨 'identification with the mathematical concept of connections'、1-07）。この本の記録の仮定を物理の言葉で読む試みは 18-05 です。

02

一行の欄 — 九つの欄と見本

欄は九つです：概念、物理の語と出所、数学の語と出所、定義の列、実在の列、測定の列、判定者、条件（同一視に要る仮定と残る隙間）、章。

見本は Feynman–Kac 公式です。$H = -\frac{1}{2}\Delta + V$（$\Delta$ はラプラシアンで、質量ギャップの Δ とは別）の虚時間の発展は、x から出る Brown 運動 B_s（独立なガウスの小さな変位を積み重ねた、でたらめな道。1-08）の期待値で書けます 既知 。

$$\big(e^{-tH} f\big)(x) = \mathbb{E}_x\Big[\exp\Big(-\int_0^t V(B_s)\,ds\Big) f(B_t)\Big] \tag{2}$$

欄を埋めると：概念は「e^{-tH} を道の上の積分で書く」、物理の語は経路積分（Feynman 1948）、数学の語は Feynman–Kac 公式（Kac 1949）、(a) 確定、(b) 対象外（有限自由度の量子力学の行なので問わない。§04）、判定者は定理、条件は「V が下に有界など。実時間の e^{iS} は測度にならない」、章 2-07。条件の欄には二種類のものが入ります。「V が下に有界など」

は定理の仮定で、「実時間の e^{iS} は測度にならない」は同一視しても残る隙間です。矢印は $\Longleftrightarrow$ が両向きの定理、$\Longrightarrow$ が片向きの定理で、$\longleftrightarrow$ は (1) と同じく対として並べるだけです。

測定の列：有限の測定で届く向き。(a)・(b) のほかに、もう一つ格を付けます。数学の側の量について、有限個の観測量・有限の時間 t・有限個の格子で測った数から、確かな不等式としてどちら向きが出るか、です。値は四つで、**上界まで・下界まで・両方・届かない**（極限・一様性・すべての観測量についての言明で、有限の測定ではどちら向きにも決着しない）です。量を名指さない行（定義や定理の対応だけの行）は「—」とします。判定の根拠は §08 の (8)・(9) です。重み $w_n \geq 0$ の指数関数の和は対数凸なので、有効質量 $m_{\mathrm{eff}}(t)$ は t について減りながら μ_O に上から近づき、どの有限の t でも $m \leq \mu_O \leq m_{\mathrm{eff}}(t)$ です 既知 （4-11 の (3)）。だから隙間とその仲間（固有値の位置・減衰率）は「上界まで」、その逆数にあたる長さと時間（相関長 ξ・Poincaré 定数 C_P）は「下界まで」に落ちます。1-10 の囲み「上界と下界の非対称」を辞書の欄にしたものです。見本の Feynman–Kac 公式の行は「—」です。

03

定義としての対応の列 — 確定・条件つき・未確定

定義の列は「**もし両方の対象が在るとしたら**、同じか」を問います。在るかどうかは実在の列の仕事です。

確定	条件つき	未確定
同じ対象を与える定理があるか、数学の側がそう定めている。	どちらの定義にも無い仮定の下でだけ同じ（仮定は条件の欄へ）。	同じものを指していそうだが、言う定理が無い。

確定でも矢印には向きがあります。見本は Osterwalder–Schrader（OS）の再構成定理です（4-10）。実時間の場の量子論の公理を Wightman の公理（4-09）、虚時間の相関（Schwinger 関数）に課す五つの条件を Osterwalder–Schrader の公理と呼びます。正則性（E0）・ユークリッド共変性（E1）・反射正値性（E2。時間の鏡に写した量との相関が負にならないこと）・置換対称性（E3）・クラスター性（E4）です。**線形増大**の条件（E0′）は正則性を強めた条件で、n 点関数の評価が n について階乗程度に収まることを求めます（4-10 §03） 既知 。

$$\text{行き：}\ \text{Wightman の理論} \Longrightarrow (\mathrm{E0}) \wedge \cdots \wedge (\mathrm{E4}), \qquad \text{帰り：}\ (\mathrm{E0}') \wedge (\mathrm{E1}) \wedge \cdots \wedge (\mathrm{E4}) \not\Longrightarrow (\mathrm{E3})$$

行きでは、Wightman の理論の相関をエネルギーが正であることを使って虚時間へ解析接続すると、五つの公理を満たします。帰りには線形増大の条件が要り、Wightman の理論から

この条件が出るかは知られていません（Summers §3、4-10 §03）。行きと帰りで条件が違うので、(a) は確定でも矢印は $\Longrightarrow$ の二本で書き、$\Longleftrightarrow$ にはしません。2026-11-10 に公開された構成が、この帰りの向きをどう使って Wightman の理論を再構成したかは 12-08 再構成と Wightman の公理 で読みます。

条件つきの見本は質量ギャップと相関の減衰です。問題文 §5 は 'An important consequence of the existence of a mass gap is clustering' と片向きに書きます。逆向きには、稠密な観測量の族が一様な率で減ることが要ります（§08）。

未確定には三つの型があります。(i) 数学の側に定義が無い：四次元の Λ。(ii) 定義は両側にあるが、同じとする定理が探した範囲で見当たらない：中心対称性（Chatterjee は、数理物理の文献に数学的な定義が無いと書いたうえで、格子での定義を Polyakov ループによる物理の定義から着想したと書く）。(iii) 予想や類比の中の対応：ホログラフィーの動径と繰り込みの尺度（17-08）。

二つに分けて読むなら、「確定」が**指していると確定している**対、「条件つき」と「未確定」が**数学の確かさからは言い切れていない**対です。質量と長さの辞書（18-03 §01）は、別の量だと分かっている対に四つ目の段「対応しない」を足します。表 2 の 9 行目（偽の友、§06 の寄り道）は、18-03 の「物理単位のギャップ」の項ではこの段で付けています。

04

四次元での実在の列 — 構成済み・条件つき・無い

実在の列は、数学の語が指す対象が四次元で作られているかを**水準**つきで書きます。水準は古典（滑らかな接続）、形式的冪級数（摂動の各次数）、格子（間隔 a を固定）、連続の量子論（$\mathbb{R}^4$ の上の測度と Hilbert 空間）の四つで、問題文は最後を求めます（0-03 §03）。

構成済み	条件つき	無い
行が名指す水準で作られている（水準を添える）。	範囲を限った版だけ（強結合・許容条件を満たす格子場など）。	名指す水準ではまだ作られていない。無いことが示されたのではない（低い水準の版は条件の欄へ）。

格はこの三つです。四次元ヤン–ミルズの対象でない行（有限自由度の量子力学、余剰次元など）では (b) を問わず、「対象外」と書きます（§02 の見本）。

最後の規則が要です。格の名の「無い」は「未構成」の意味で、存在しないことが示されたのではありません。問題はまさにその存在を問うています。有限の格子の測度はどの β（格子の作用の結合の係数）でも在りますが（5-01）、連続の測度はその極限で、四次元の非可換群ではまだ構成されていません 既知 。

$$d\mu_a(U) = \frac{1}{Z}\, e^{-S_W(U)} \prod_{\ell} dU_\ell \ \text{(在る)}, \qquad \mu = \lim_{a\to 0} \mu_a \ \text{(未構成)} \tag{4}$$

U_ℓ はリンク変数、S_W は Wilson の作用です。例：インスタントンは古典で構成済み（ADHM 1978）、転送行列（格子で虚時間を一刻み進める作用素、§08）は格子で構成済み（Lüscher 1977）。表 2 の 10 と 11 は同じ幾何を指しますが、10 は古典の水準、11 は格子の水準を名指します。滑らかな接続の第二 Chern 数は古典で在るので、11 の (b) が条件つきなのは、格子の場に整数を割り当てるのに許容条件（各プラケットで U_p が 1 に近いこと）が要るためです。強結合の格子では孤立した一粒子状態も示されていますが（Schor 1984）、格子の水準で、しかも連続極限の反対側です（5-09）。

05

二列にすると食い違いが解ける — 十四の見本

一列で格を付けると、「定義として同じか」と「四次元で在るか」が一つの格に混ざり、どちらで付けたかが行ごとに変わります。

$$\text{一列の格} = f\big((a),(b)\big), \qquad f \text{ が行ごとに暗に選ばれる} \tag{5}$$

例：表 2 の 4 と 5 は同じ対なのに、定義を問えば条件つき、四次元の実例を問えば未確定。6 と 7 も同じで、1（経路積分）は定義として確定なのに一列では条件つき。二列ではこれらが同じ枡に落ちます。「弱い方を取る」一列にすると、連続の量子論の行がほぼ「無い」に揃い、定義の対応が見えなくなります。

図 1　つまみ（左）で一列の格、（右）で二列（縦 (a)・横 (b)）。番号は表 2 の行で、点か行を押すと格が出る。破線は同じ対



位置は表 2 の格（この本の読み）。JavaScript が無効でも静止図と表で読めます。

表 2　十四の見本（詳細は 18-02〜18-04）。「一列」は二つの問いを分けずに付けた格。(c) は §02 の測定の列（有限の測定で届く向き）。

#	物理の語 ⟷ 数学の語	一列	(a)	(b)	(c)	判定者	章
1	経路積分 ⟷ ユークリッド確率測度	条件つき	確定	無い	—	定義	4-02・18-02
2	ウィック回転 ⟷ OS 再構成定理	確定	確定（⇒）	無い	—	定理	4-10
3	格子のハミルトニアンの存在（$T = e^{-aH}$ が正の自己共役） ⟷ Wilson 作用の反射正値性	確定	確定	構成済み（格子）	—	定理	5-03
4	一粒子状態 ⟷ 質量作用素の孤立固有値	条件つき	条件つき	無い	上界まで	定理＋条件	4-11・18-02
5	グルーボール ⟷ 質量作用素の孤立固有値	未確定	条件つき	無い	上界まで	定理＋条件・慣習	18-03
6	時空と格子 ⟷ $a\mathbb{Z}^4$ の $a \to 0$ 極限	未確定	条件つき	無い	届かない	定義＋条件	18-02
7	連続極限 ⟷ スケーリング極限	条件つき	条件つき	無い	届かない	定義＋条件	18-04・7-08

#	物理の語 ⟷ 数学の語	一列	(a)	(b)	(c)	判定者	章
8	質量ギャップ ⟷ スペクトルの隙間・相関の指数減衰	条件つき	条件つき	無い	上界まで	定理＋条件	4-11・18-03
9	物理単位のギャップ ⟷ 格子単位の一様なギャップ	未確定	未確定（偽の友）	条件つき（強結合など）	届かない	慣習	18-03
10	インスタントン ⟷ 反自己双対接続	確定	確定	構成済み（古典）	—	定理	3-05
11	位相電荷（格子） ⟷ 格子場の第二 Chern 数	条件つき	条件つき	条件つき（格子：各プラケットで U_p が 1 に近い場）	—	定理＋条件	3-05・18-04
12	繰り込み可能性 ⟷ BPHZ・Epstein–Glaser（YM では BRS・流れの方程式）	条件つき	条件つき	構成済み（形式的冪級数）	—	定理（YM は下の注）	4-04・4-05
13	Λ・「尺度は一つ」 ⟷ 拡散型緩和時間の仮定：$C_P \asymp \xi^2$	未確定	未確定	無い	下界まで（C_P。緩和時間の上界の仮定は届かない）	類比	23-01・18-05
14	ホログラフィーの動径 ⟷ Fefferman–Graham 展開	未確定	未確定	無い	—	予想	17-08・18-04

注：表 2 の (b) の列は、公開された構成（2026-11-10）より前の読みです。行 2・6・7 は、公開された構成で動きました（6-01・§09）。

表 2 の語の注。11 は格子の水準を名指す行です（§04）。12 の判定者の「定理」は、スカラー場では Hepp 1966、ゲージ理論では Becchi–Rouet–Stora 1976（半単純な群で、すべての場に質量が入るゲージの取り方のとき、ゲージ対称性の恒等式を摂動の全次数で示す）、質量の無い $SU(2)$ の純ヤン–ミルズでは Efremov–Guida–Kopper 2017（繰り込み群の流れの方程式による）です。一般のコンパクト群の純ヤン–ミルズの出典は未確認です。13 の Λ は理論が自分で生む質量の尺度（4-07）、C_P は Poincaré 定数（確率的な勾配の流れ＝Langevin 力学で配位が平衡に戻る遅さ。1-10・18-03）、ξ は相関長（相関が $e^{-r/\xi}$ で減る長さで、格子単位のギャップの逆数）、拡散型緩和時間の仮定は本書の検討の記録が置いた仮定 $C_P \asymp \xi^2$（両者が定数倍の範囲で比例すること。23-01）です。14 の Fefferman–Graham 展開は、境界からの深さの冪で内部の計量を展開する式です（18-04）。

06

どちらの言葉を主にするか — 引くのは物理の語、判定は数学の言明

辞書は、多くの読み手が先に知る物理の語から引けるように並べ、格は数学の言明に訳してから判定します（17-13 §01）。物理の語が二つの意味を持つときは行を割ります。割るかどうか

の基準は、二つの意味で定義の列の格が違うかどうかです。同じなら一行にまとめ、違えば割ります。見本は「ユニタリ性」です 既知 。

$$\begin{aligned} &\text{正ノルム性} \iff \text{反射正値性} && \text{(確定。OS と Wightman の対応の中} \\ &\text{正ノルム性} \wedge \text{漸近完全性} \implies \text{S 行列のユニタリ性} && \text{(条件つき。Haag–Ruelle の散乱理論} \end{aligned} \tag{6}$$

正ノルム性は、状態の内積が正定値であること（負のノルムの状態が無いこと）です。漸近完全性は、遠い過去と遠い未来の自由な粒子の状態（漸近状態）で Hilbert 空間が尽きることです（18-02 §05）。上の行は OS と Wightman の対応の中での言明で、反射正値性から正定値の Hilbert 空間と $H \geq 0$ が出ます（再構成）。逆は (3) の行きの向きで、Wightman の理論の正値性が Schwinger 関数の反射正値性になります（4-10）。下の行は、孤立した一粒子の質量殻を仮定して漸近状態を作る Haag–Ruelle の散乱理論の下での言明です。

一行にまとめると、確定の格が S 行列まで及ぶように読めてしまいます。「閉じ込め」も行を割る例です。三つの基準は、$V(R) \to \infty$（$V(R)$ は重いクォーク対を距離 R に置いたエネルギーで、Wilson ループの減り方から読む）、面積則 $\sigma > 0$（$\sigma = \lim_{R\to\infty} V(R)/R$ が弦張力）、中心対称性が破れない（群の中心による変換で不変なこと。物理では有限温度の Polyakov ループの期待値が 0）です。物理ではほぼ同じ意味ですが、数学の定理は格子の上の片向きのものです。Chatterjee の中心対称性から閉じ込めへの定理（Chatterjee 2021 の定理 2.2）は、格子 $\mathbb{Z}^d$ の上で結合を固定して「中心対称性が破れない $\Rightarrow V(R) \to \infty$」を示します（中心に非自明に作用する表現の Wilson ループで。18-03 §03）。

寄り道：偽の友

飛ばしてよい小節です。

見た目が似て意味の違う語を、外国語の学習では「偽の友」と呼びます。典型は「ギャップ」です。格子単位の一様なギャップは、物理単位では質量が無限大に向かう側、連続極限の反対側の性質なので、定義の列を未確定にし条件の欄に「偽の友」と書きます（表 2 の 9）。正確には、同じ語が二つの言葉（物理と数学）で違う条件の対象を指し、一方の成立が他方の成立を意味しない（むしろ反対側にある）という関係です。「連続極限」は偽の友とまでは言えませんが、含む条件が違う例です。物理の語が暗に含む「極限がガウス的でない」ことを、確率論のスケーリング極限は含みません（四次元の Ising 型と ϕ^4 ではガウス的：Aizenman–Duminil-Copin 2021、7-08）。この差は表 2 の 7 の条件の欄に入ります。「粒子の質量」とギャップの違いは 16-08・16-05。

07

「同じ」を誰が判定しているか — 五つの判定者

定理：両向きか片向きの定理がある（(2)・(3)・(6)）。**定義**：数学の側が物理の語の意味として対象を定めた。経路積分を可算加法的な確率測度とする定め方がそうです。Jaffe の総説 §4 は、経路積分に 'a true integral, given by a countably-additive Borel measure' としての定義が無かったことを、当時の「問題」として挙げています。この定め方は、別の計算との一致までは含みません。**慣習**：同じ名で呼ぶ習慣。格子で通路ごとに測る最低状態を「グルーボール」と呼ぶこと、格子単位の一様な指数減衰を 'strictly positive mass gap' と呼ぶこと（Shen–Zhu–Zhu）。**予想**：動径と尺度の対応では、物理の側も 'what cutoff on the field theory corresponds to a radial cutoff in the bulk?' は 'left unanswered' と書きます（Heemskerk–Polchinski）。**類比**：形の類似の指摘。「尺度は一つ」と緩和時間の仮定（17-12）。

$(a)=$ 確定 $\Rightarrow$ 判定者に定理か定義が在る，　　判定者が慣習・予想・類比だけ $\Rightarrow$ $(a)(\not{\mp})$

例：表 2 の 5 は「定理＋条件・慣習」。孤立固有値との対応は条件つきの定理（1-10）、最低状態を「粒子」と呼ぶのは慣習です。同居するときは両方を書き、定義の列は強い方で付けます。

08

条件の欄の読み方 — 一つの相関からはギャップの上界しか出ない

条件の欄は定理の仮定の置き場所です。表 2 の 8 を小さな模型で読みます。転送行列は、格子で虚時間を一刻み進める作用素 $T=e^{-H}$ です（刻みを 1 とする。4-10・5-03）。その準位を $0=E_0<E_1<E_2<\cdots$ とし、$E_0=0$ の状態 Ω が真空です。虚時間 t 離れた相関は、準位と、観測量 O の各準位への重なり $w_n\ge 0$ で書けます（準位が離散なら）既知 。

$$C_O(t)=\langle O(t)O(0)\rangle-\langle O\rangle^2=\sum_{n\ge 1} w_n e^{-E_n t},\qquad w_n=\left|\langle n|O|\Omega\rangle\right|^2 \tag{8}$$

ギャップは $m=E_1$。相関の減る速さは $w_n>0$ となる最初の準位で決まります。

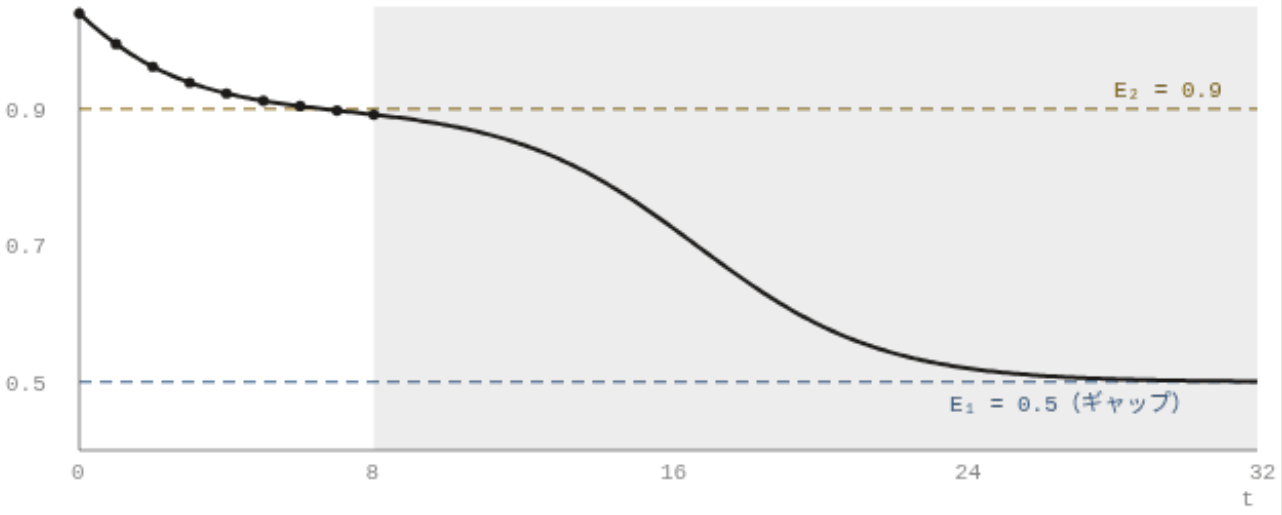
$$\mu_O=\min\{E_n : w_n>0\}\ \ge\ m,\qquad m_{\text{eff}}(t)=\log\frac{C_O(t)}{C_O(t+1)}\ \xrightarrow[t\to\infty]{}\ \mu_O \tag{9}$$

一つの相関から言えるのは上界 $m\le\mu_O$ だけです。上界には一つの観測量で足り、等号には $w_1>0$ が要ります。下界 $m\ge c$ には、真空と直交する部分で稠密な観測量の族のすべてが率 c 以上で減ること（一様性）が要ります。どの観測量が E_1 に重なるかは前もって分からないので、族が要ります。これが 8 の条件の中身です（4-11 §02・18-03。上からは易しく下から

は難しいのは変分原理と同じ形：1-10 の囲み「上界と下界の非対称」)。辞書の測定の列（§02）はこの非対称を各行に付けたものです。

例：$E = (0.5, 0.9, 1.4)$、$w_2 = 1$、$w_3 = 0.5$、$w_1 = 10^{-3}$ なら $m_{\text{eff}}(8) = 0.892$ でギャップの 1.78 倍、5% 以内に入るのは $t = 24$ からです 計算 。$t \le 8$ では $w_1 = 10^{-3}$ と $w_1 = 0$ の差が 1.3% 以下で 計算 、有限の t では重なりが小さいことと無いことを区別できません。

図 2　重なり w_1 と測る範囲 t_max を変えると、有効質量（線）と読める値（点）が変わる。破線は E_1（ギャップ）と E_2、網は未測定の範囲



w₁ = 1.0e-3　m_eff(8) = 0.892（ギャップの 1.78 倍）　5% 以内は t = 24 から

計算 この図の数値はこの端末で計算した（(8)・(9) をその場で計算）。

計算 **表 3**　$m_{\text{eff}}(t)$（上と同じ E・w_2・w_3）。右端は $m_{\text{eff}} \le 1.05 E_1$ となる最初の整数 t。

w_1	$t = 1$	8	16	32	5% 以内
1	0.7013	0.5132	0.5005	0.5000	7
0.1	0.9322	0.6018	0.5054	0.5000	13
0.01	0.9888	0.8108	0.5481	0.5001	18
0.001	0.9953	0.8918	0.7305	0.5009	24
0	0.9960	0.9036	0.9001	0.9000	–

09

実在の列が動いたら何がついてくるか — 辞書から問題を読む

問題が求めるのは、連続の量子論の水準で実在の列を「無い」から「構成済み」に動かすことです。ここでの「無い」は §04 の定義どおり、無いと示されたのではなく、まだ作られていないという意味です。そのとき何がついてくるかは定義の列が示します。

$$(b):\ \text{無い} \to \text{構成済み}\ \ \text{かつ}\ \ (a) = \text{確定} \implies \text{その行はそのまま使える} \qquad (10)$$

表 2 で実在の列が「無い」のは 9 行、「構成済み」の 3・10・12 も連続の量子論より低い水準です。(3) の帰りの条件 (E0′)〜(E4) を満たす四次元の測度が仮に作られれば、確定の 1・2 はそのまま使え、再構成定理が Hilbert 空間とハミルトニアンと真空を与えます。条件つきの 4・5 には上の隙間（問題文 §5 は 'an upper gap, in addition to the mass gap' を拡張に数える）、8 には一様な減衰率、つまりギャップそのものを別に確かめます。未確定の 13・14 と偽の友の 9 は、測度ができても決着しません。この本の読みでは、存在とギャップが問題文で一文に並ぶ理由もここにあります（0-03 §01）。

2026-11-10 に公開された構成は、このうちの一部を連続の量子論の水準で動かしました（Lean で証明されている、と委員会が評価した）。相の各成分ごとの Wightman の理論と、その Hilbert 空間・ハミルトニアン・真空、曲率の多項式に当たる局所作用素がそれです（6-01）。確率測度（表 2 の 1）、一粒子状態（4・5）、一様な減衰（8）は無いままです（6-04）。表 2 と 18-02〜18-04 の実在の列は、公開より前の読みのまま置いています。

この章が言えている範囲

	言えている	言えていない
既知	(2)・(3) の行きと帰り・(6)（添えた前提の下で）・(8)・(9)。ADHM・Lüscher 1977・Schor 1984 の構成	これらが四次元の連続のヤン–ミルズ理論で成り立つこと
この本の読み	二列の格・水準・判定者の定め方、測定の列の定め方、(7)・(10)、表 2 の格	格が唯一であること（根拠は 18-02〜18-04）
計算	三準位の模型の $m_{\mathrm{eff}}(t)$（表 3・図 2）	ヤン–ミルズの実際のスペクトル
全体	—	この本は質量ギャップの存在も連続極限の構成も自分では示していない（公開された連続極限の構成は第二巻）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
問題文・§07 の定義	本文	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”（Clay 数学研究所の公式の問題文。問題の発表は 2000 年）。所収：J. Carlson, A. Jaffe, A. Wiles (eds.), *The Millennium Prize Problems*, CMI／AMS, pp. 129–152（刊行年は未確認）／A. Jaffe, “Constructive Quantum Field Theory”, in *Mathematical Physics 2000*（Imperial College Press, 2000）111–127 の §4 “Quantum Theory as Statistical Physics”（掲載先は Crossref で確認）

もの	種別	出典・道具
(2)・表 2 の 12	書誌のみ	Feynman, RMP 20 (1948) 367／Kac, Trans. AMS 65 (1949) 1／'t Hooft, NPB 33 (1971) 173／Hepp, CMP 2 (1966) 301
表 2 の 12（YM の証明）	要旨	C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, “Renormalization of gauge theories”, Ann. Phys. 98 (1976) 287–321／A. N. Efremov, R. Guida, C. Kopper, “Renormalization of SU(2) Yang–Mills theory with flow equations”, J. Math. Phys. 58 (2017) 093503, arXiv:1704.06799
(3)	要旨・本文	Osterwalder–Schrader, CMP 31 (1973) 83・CMP 42 (1975) 281（要旨。第二論文の要旨は '(necessary and) sufficient' と必要性を括弧に入れる）／Glaser, CMP 37 (1974) 257（要旨：第一論文の誤りを指摘して直し、Minkowski 点の近くでの緩増加性には追加の仮定が要ると示唆）／S. J. Summers, “A Perspective on Constructive Quantum Field Theory”, arXiv:1203.3991 の §3・脚注 15（本文）／A. Jaffe, “Reflection Positivity Then and Now”, arXiv:1802.07880（本文）
(6)	本文・書誌のみ	Osterwalder–Schrader 1973/75（上）／Jaffe の総説（上）§4・§7.1（本文：反射正値性が Hilbert 空間と正のハミルトニアンを与えること、Haag–Ruelle の理論が孤立した一粒子の質量殻を仮定すること）／R. Haag, Phys. Rev. 112 (1958) 669・D. Ruelle, Helv. Phys. Acta 35 (1962)（書誌のみ）
表 2 の 3・4・5	要旨	Lüscher, CMP 54 (1977) 283／Osterwalder–Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440／Schor, NPB 231 (1984) 321
6・7・中心対称性の定義・中心対称性から閉じ込めへの定理（定理 2.2）	本文	Chatterjee, arXiv:1803.01950 §5／arXiv:2006.16229（CMP 385 (2021) 1007）
9・10・11・14・§07	要旨	Shen–Zhu–Zhu, arXiv:2204.12737／ADHM, Phys. Lett. A 65 (1978) 185／Lüscher, CMP 85 (1982) 39／Heemskerk–Polchinski, arXiv:1010.1264
§01・寄り道	要旨	Wu–Yang, PRD 12 (1975) 3845／Aizenman–Duminil-Copin, Ann. Math. 194 (2021) 163
表 2・図 1	この本の読み	一次資料は 18-02〜18-04。配置は `fig1_layout.py`
表 3・図 2	計算	この端末の Python（`meff.py`）

次に読む章：18-02 理論そのものの辞書。

理論そのものの辞書 — 確定の対は、一つの測度の手前に並ぶ

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 理論が載る空間・測度・状態の語を十九の対に並べた、二列の格付けとその根拠。
確定の対の多くが「条件を満たす測度が在れば」という一つの前提の内側にあること。
局所対称性が破れないこと（Elitzur の定理）を、外場を外す順序で見る計算。

前提となる章 — 4-02・4-10。格付けの二列は 18-01。ほかに 4-11（粒子・スペクトル）・5-03（転送行列）・3-04（軌道空間・Singer の定理）・2-08（外場を外す順序）・5-01（Haar 測度）の道具を引きます。前提の章に無い語は初出で定義します。

先に言うこと — 対を並べて格付けするだけで、四次元のヤン–ミルズ理論の測度も Hilbert 空間も作りません。実在の列の「無い」は 18-01 §04 のとおり「まだ作られていない」の意味で、存在しないことが示されたのではありません。例外は「ゲージ固定」の項で、大域的な連続なゲージ固定が（四次元の球面の上で）無いことは Singer の定理です（表 0 では「否定」）。

この章の順序

1. 見取り図 — 十九の対と一つの前提（表 0）
2. 器 — 経路積分・測度・状態の空間
3. 実時間と虚時間 — 相関の三つの顔
4. 中身 — 真空・ハミルトニアン・粒子
5. 散乱と正値性 — 二つの「ユニタリ性」
6. 近似 — 時空・正則化・繰り込み
7. 場は点の値を持たない — 作用素値超関数
8. ゲージ — 切り口と物理的状態

9. 局所対称性は破れない — Elitzur の定理（「局所対称性は破れない」の項）
    - 寄り道：$\beta = \infty$ のゲージ理論はイジング模型

01

見取り図 — 十九の対と一つの前提

格付けは 18-01 の二列です。(a) は「両方が在るとしたら同じか」、(b) は数学の対象が四次元のヤン–ミルズ理論で在るか（括弧に水準）です。判定者は「同じ」を支えているもの（定理・定義・慣習など。18-01 §07）、章は詳しく扱う章です。

表 0　理論そのものの辞書

#	物理の語	数学の語	(a) 定義	(b) 四次元 YM	(c) 有限の測定	判定者	章
1	経路積分（量子力学）	Feynman–Kac 公式	確定	対象外*	—	定理	2-07
2	汎関数積分	ユークリッドの確率測度	確定	無い（格子の水準では構成済み）	—	定義	4-02
3	状態の空間	再構成の Hilbert 空間	条件つき	無い（格子の水準では構成済み）	—	定理＋条件	4-10
4	ウィック回転	OS の再構成定理	確定（⇒）	無い	—	定理	4-02
5	Green 関数	Wightman・Schwinger 関数	確定（向き）	無い	—	定理	4-10
6	Källén–Lehmann 表示	スペクトル測度	確定	無い（格子の水準では構成済み）	上界まで	定理	4-11
7	真空と一意性	Ω・クラスター性	確定	無い（格子の水準では構成済み）	届かない	定理	4-11
8	ハミルトニアン	転送行列の対数	条件つき	構成済み（格子）	—	定理＋条件	5-03
9	一粒子状態	質量作用素の孤立固有値	条件つき	無い	上界まで	定理＋条件	4-11
10	S 行列	Haag–Ruelle 散乱理論	条件つき	無い	—	定理＋条件	4-09
11	正ノルム性	反射正値性	確定	構成済み（格子）	—	定理	4-10

#	物理の語	数学の語	(a) 定義	(b) 四次元 YM	(c) 有限の測定	判定者	章
12	S 行列のユニタリ性	正ノルム性＋漸近完全性	条件つき	無い	—	定理＋条件	18-01
13	時空と格子	$a\mathbb{Z}^4 \to \mathbb{R}^4$	条件つき	無い	届かない	定義＋条件	4-02
14	正則化	格子間隔 a の測度の族	条件つき	構成済み（格子）	—	定義＋条件	5-01
15	繰り込み可能性	BPHZ・Epstein–Glaser	条件つき	構成済み（形式的冪級数）	—	定理	4-05
16	場 $\phi(x)$	作用素値超関数	条件つき	無い	—	定義＋条件	1-11
17	ゲージ固定	軌道空間への切断	確定	無い（Singer の定理で否定）	—	定義	3-04
18	物理的状態	ゲージ不変量からの再構成	未確定	構成済み（格子）	—	慣習（格子では定理）	4-01
19	局所対称性は破れない	Elitzur の定理	確定	構成済み（格子）	—	定理	17-02

注：表 0 の (b) の列は、公開された構成（2026-11-10）より前の読みです。§01 の末のとおり、行 3・4・5・8 は公開された構成の水準で付け直す余地があります。

表 0 の語の注。(c) は 18-01 §02 の測定の列（有限の測定で届く向き）で、量を名指す行にだけ付けます。「Källén–Lehmann 表示」の項・「一粒子状態」の項は一つの相関から最低の点の上界が出る行（18-01 §08）、「真空と一意性」の項・「時空と格子」の項は極限の言明です。(b) の「無い」は連続の水準で未構成、「無い（格子の水準では構成済み）」は格子の水準でだけ作られている行です。「ゲージ固定」の項の「否定」だけは意味が逆で、大域的な切断が存在しないことの定理です。* 「経路積分（量子力学）」の項の「対象外」は、有限自由度の量子力学の対なので四次元の欄が立たないという意味です（18-01 §04）。

確定の対の多くは一つの前提の内側にあります。$\mathbb{R}^4$ の上に Osterwalder–Schrader（OS）の条件を満たす測度 μ が在れば、再構成定理が残りを与えます（4-10 §05） 既知 。

$$\mu \text{ が (E0′)〜(E4) を満たす} \implies (\mathcal{H},\ H \geq 0,\ \Omega), \quad \{S_n\} \to \{W_n\}, \quad d\rho_O \geq 0 \qquad (1)$$

左は OS の条件（増え方・ユークリッド共変性・反射正値性・対称性・クラスター性。4-10 §03）、右は Hilbert 空間・ハミルトニアン・真空、Schwinger 関数 S_n から Wightman 関数 W_n への移行、スペクトル測度の正値です。2026 年の公開より前は、四次元のヤン–ミルズ理論では左が無く、連続の水準では実在の列がほぼ「無い」に揃っていました（表 0 はその読みです）。例外は、前提があっても足りない行（「一粒子状態」の項・「S 行列」の項・「S 行列のユニタリ性」の項）と、前提の外で決まる行（「ゲージ固定」の項の Singer の定理、「局所対

称性は破れない」の項の Elitzur の定理）です。例：四次元の自由場では (1) の左が在り、ゲージ以外の全行の対象が揃います。

2026-11-10 に公開された構成は、測度ではなく相関（Schwinger 関数）の側から、相の各成分ごとに OS の公理の変種を示し、右の Hilbert 空間・ハミルトニアン・真空を再構成した、と委員会は評価しています（6-01・12-08）。「状態の空間」「ウィック回転」「Green 関数」「ハミルトニアン」の項の実在の列は、その水準で付け直す余地があります（18-01 §09）。測度・一粒子状態・S 行列は無いままです（6-04）。

02

器 — 経路積分・測度・状態の空間

「器」は比喩です。正確には、理論が載る空間（場の配位の全体）、その上の測度、そこから作る Hilbert 空間のことです。

経路積分（量子力学） ⟷ Feynman–Kac 公式

物理の語は「粒子のとりうる道すべてにわたる重みつきの和」、数学の語は Brown 運動の期待値です。同じと言えるのは、虚時間に移し、ポテンシャルが下に有界などの条件を置いたときです。

量子力学の e^{-tH} をこの形で書くのが Feynman–Kac 公式です（Kac 1949。18-01 の式 (2)・2-07 §05） 既知 。Feynman（1948）の和は実時間の重み $e^{iS/\hbar}$ で、それを虚時間に移したのがこの公式です。実時間の重みは測度になりません。

汎関数積分 ⟷ ユークリッドの確率測度

物理の語は場の配位すべてにわたる重み e^{-S} の和、数学の語は配位の空間の上の確率測度です。同じと言えるのは、数学の側が $\int \mathcal{D}A\, e^{-S}$ を可算加法的な確率測度として定義したからです（判定者は定義。Jaffe の総説 §4）。

$$\frac{1}{Z}\int \mathcal{D}\phi\; e^{-S(\phi)} F(\phi) \;\rightsquigarrow\; \int F\, d\mu, \qquad \mu:\ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4) \text{ などの上の確率測度} \tag{2}$$

例：自由場は共分散 $(-\Delta + m^2)^{-1}$（Δ はラプラシアンで、質量ギャップの Δ とは別）のガウス測度です（4-10 §02）。二次元のヤン–ミルズ理論でも構成済みです（Driver 1989、7-02）。格子では 4-02 の式 (9) が本物の測度です。四次元のヤン–ミルズの測度は未構成で（2026-11-10 に公開された構成も測度は作らない。6-04）、それが載る空間（接続をゲージで割った空間の完備化）もまだ決まっていません（3-04）。

状態の空間 ⟷ 再構成の Hilbert 空間

物理の語は Fock 空間（粒子の数ごとに状態を並べた空間、2-06）、数学の語は測度から作る Hilbert 空間 (3) です。同じと言えるのは、自由場のときと、相互作用があれば漸近完全性（§05）が成り立つときです。

$\mathcal{E}_+$ を正の時刻の場だけで決まる関数の全体、Θ を時間の反転とします（4-10 §05）。

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{E}_+ / \mathcal{N}}, \qquad \mathcal{N} = \{ F : \ \mathbb{E}[\overline{\Theta F}\, F] = 0 \} \tag{3}$$

$\mathcal{N}$ はノルムが 0 になる関数の全体で、割ってから完備化したものが $\mathcal{H}$ です。(i) 自由場では Fock 空間と一致します（4-10 §07）。(ii) 相互作用があると、時刻 0 の正準交換関係の表現が Fock 表現と非同値になります（ϕ^4_3、Jaffe §6）。物理の Fock 空間は漸近粒子の空間なので、一致には漸近完全性が要ります。

03

実時間と虚時間 — 相関の三つの顔

「三つの顔」は比喩です。正確には、同じ相関を一つの解析関数の違う場所（実時間・虚時間・時間順序つき）で読んだ値のことです（「Green 関数」の項）。

ウィック回転 ⟷ OS の再構成定理

物理の語は $t = -i\tau$ と置いて積分路を回す計算の手続き、数学の語は Schwinger 関数から Wightman の理論を作る定理です。同じと言えるのは、条件 (E0′)〜(E4) の下で、虚時間から実時間へ向かう向きです。

ウィック回転は Wick（1954）の手続きで（4-02 §02）、数学の対は向きのある再構成定理です 既知 。

$$\{S_n\} \text{ が (E0′)〜(E4) を満たす} \implies \text{Wightman の理論}, \qquad W_n\big(\dots, (-i\tau_j, x_j), \dots\big) = S_n\big(\dots\big) \tag{4}$$

時刻の順序の条件が要るのは、S_n は引数を入れ替えても変わらないのに、W_n は演算子の並ぶ順で変わるからです（「Green 関数」の項の例）。逆向きには注意が要ります。Wightman の理論から得た Schwinger 関数が (E0′) まで満たすとは限りません。OS の最初の論文（1973）は同値を主張しましたが、証明に誤りがあり、Glaser（1974）が直しました。二本目（1975）は (E0′) を足した十分条件の形で述べています（要旨は '(necessary and) sufficient' と括弧つき）。

Green 関数 ⟷ Wightman 関数・Schwinger 関数

物理の語「Green 関数」は時間順序積 G_T・Wightman 関数 W・Schwinger 関数 S のどれをも指し、数学はこの三つを別の関数として定義します。同じと言えるのは、三つが一つの解析関数の値だという定理の意味においてです。例：角振動数 ω の振動子（$\hbar = m = 1$）で

$$F(z) = \frac{e^{-\omega z}}{2\omega}\ (\mathrm{Re}\, z \geq 0): \qquad S(\tau) = F(|\tau|), \qquad W(t) = F(it), \qquad G_T(t) = F(i|t|) \tag{5}$$

W は虚軸での境界値、S は実軸への制限を $|\tau|$ で折り返したもの、G_T は符号で貼り合わせたものです（Wightman 1956・Symanzik 1966）。$\tau > 0$ では $W(-i\tau) = F(\tau) = S(\tau)$ で、これが (4) の二点の場合です。$\tau < 0$ では W の式をそのまま延ばすと $e^{\omega|\tau|}$ で増え、$S(\tau)$ と食い違います。$W \to S$ は正エネルギーだけから出ますが、$S \to W$ には $(\mathrm{E0}')$ が要ります。

Källén–Lehmann 表示 ⟷ スペクトル測度

物理の語は二点の相関をエネルギー（質量）の重ね合わせで書く式、数学の語はハミルトニアンのスペクトル測度です。同じと言えるのは、再構成で H が在るとき（(1) の前提の下）です。Källén（1952）・Lehmann（1954）の表示は、4-11 の式 (6) の形で

$$\left\langle O\Omega,\ e^{-\tau H} O\Omega \right\rangle = \int_{[0,\infty)} e^{-E\tau}\, d\rho_O(E), \qquad d\rho_O(E) = d\left\langle O\Omega,\ P_H(E)\, O\Omega \right\rangle \geq 0 \tag{6}$$

と書けます。$P_H(E)$ は H のエネルギー E 以下の部分への射影です（1-10 §05 のスペクトル定理）。重みの正は反射正値性から来ます（4-10 の表 2）。例：(5) は ρ が $E = \omega$ の一点に重みを持つ場合で、格子では $\rho_O = \sum_n |\langle n|O|\Omega\rangle|^2 \delta_{E_n}$（18-01 の式 (8)）。ゲージを固定したグルーオンの伝播関数の正値性の破れは 17-02 で扱います。

04

中身 — 真空・ハミルトニアン・粒子

「中身」も比喩です。正確には、§02 の Hilbert 空間の上で決まる特定のベクトル（真空）と作用素（ハミルトニアン・質量作用素）のことです。

真空と一意性 ⟷ Ω とクラスター性

物理の語は「何も無い状態」、数学の語は再構成で定数 1 の類として得る $\Omega = [1]$ です。同じと言えるのは、物理の真空を「最低エネルギーの状態」と読む場合です（(1) の前提の下で定理）。

一意性は H の固有値 0 が単純であること（Jaffe §2）で、ユークリッドの側ではクラスター性と対です 既知 。

$$\Omega \text{ が一意} \iff \lim_{|a|\to\infty} S_{n+m}\big(x_1,\dots,x_n,\, y_1+a,\dots,y_m+a\big) = S_n(x)\,S_m(y), \qquad a=(0,a) \tag{7}$$

無限体積の極限の非一意性・基底状態の縮退・相転移は同じ現象です（Jaffe §7.2）。例：二次元イジングの低温側では、最低の二準位の差が幅とともに閉じます（2-09 §08）。相互作用の無い真空から相互作用をゆっくり入れて真空を作る物理の手続き（Gell-Mann–Low の方法とされる）との同一視は、Haag の定理（Haag 1955 とされる）が相互作用表示（自由な場の空間の上で相互作用だけで時間発展させる書き方）の存在を一般には否定するので、数学的には正当化されていません。

ハミルトニアン ⟷ 転送行列の対数

物理の語は時間の進みを生む作用素（エネルギー）、数学の語は格子で虚時間を一刻み進める転送行列 T の対数です。同じと言えるのは格子の水準で、連続の H との一致は連続極限が条件です。

$$H_a = -\frac{1}{a}\log T, \qquad T = T^{*} > 0 \tag{8}$$

a は時間方向の格子間隔です。正の自己共役な T は Lüscher（1977）が作り（5-03 §05）、Kogut–Susskind（1975）の H へは時間の刻みを 0 にしてつながります（Creutz 1977、5-03 §07） 既知 。確率量子化の生成作用素 L とは別物です（18-03 §05）。

一粒子状態 ⟷ 質量作用素の孤立固有値

物理の語は Poincaré 群の既約表現として分類される粒子（Wigner 1939）、数学の語は質量作用素 M の孤立固有値です。同じと言えるのは、再構成された理論で、その固有値がスペクトルの中で孤立しているときです（4-11 §05）。

$$M=\sqrt{H^2-P^2}, \qquad m \text{ は } M \text{ の固有値で } (m-\delta,m+\delta)\cap\sigma\big(M|_{\Omega^{\perp}}\big)=\{m\}\ \ (\delta>0) \tag{9}$$

P は運動量、$\sigma(\cdot)$ はスペクトル、$\Omega^{\perp}$ は真空に直交する部分です。Jaffe は散乱理論がこれを仮定とし 'It entails both a lower gap and an upper gap' と書きます（§7.1。問題文 §5 も上の隙間を拡張に数える） 既知 。弱結合の $P(\phi)_2$ で示され（Glimm–Jaffe–Spencer 1974）、格子の強結合にも一粒子状態があります（Schor 1984）。例：自由場では m の上の連続スペクトルは $2m$ から始まります。グルーボールの行は 18-03 §04 です。

```
05
```

散乱と正値性 — 二つの「ユニタリ性」

物理の「ユニタリ性」は二つの意味で使われるので、「正ノルム性」の項（負のノルムの状態が無いこと）と「S 行列のユニタリ性」の項（散乱で確率が保存すること）に割ります（18-01 §06）。先に散乱の道具（「S 行列」の項）を置きます。

S 行列 ⟷ Haag–Ruelle の散乱理論

物理の語は遠い過去の粒子の組から遠い未来の粒子の組への振幅、数学の語は二つの等長写像から作る作用素です。同じと言えるのは、孤立した一粒子の質量（「一粒子状態」の項）が在るときです。

質量双曲面は運動量空間の面 $p^2 = m^2$（$p^0 = \sqrt{p^2 + m^2}$ の側）で、質量 m の一粒子状態はこの上に載ります。等長写像は内積を保つ写像、Ran は像（写像の値の全体）です。$\mathcal{F}$ は漸近粒子の Fock 空間で、遠い過去（または未来）に自由に飛ぶ粒子の状態を、粒子の数ごとに並べた空間です。Haag（1958）と Ruelle（1962 とされる）の散乱理論は、孤立した質量双曲面から等長写像 $W^{\mathrm{in}}, W^{\mathrm{out}} : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ を作ります。

$$S = (W^{\mathrm{out}})^* W^{\mathrm{in}}, \qquad \operatorname{Ran} W^{\mathrm{in}} = \operatorname{Ran} W^{\mathrm{out}} \implies S^*S = SS^* = 1 \tag{10}$$

(10) の右向きは初等的です。等長な W では $W^*W = 1$、WW^* は像への射影で、像が同じなら $W^{\mathrm{out}}(W^{\mathrm{out}})^*$ は W^{in} の値を変えないので、$S^*S = (W^{\mathrm{in}})^* W^{\mathrm{out}} (W^{\mathrm{out}})^* W^{\mathrm{in}} = (W^{\mathrm{in}})^* W^{\mathrm{in}} = 1$ で、$SS^* = 1$ も同じです [紙]。例：自由場では $W^{\mathrm{in}} = W^{\mathrm{out}}$、$S = 1$ です。漸近完全性は、二つの像が $\mathcal{H}$ 全体だという主張です。通常の意味の漸近完全性を一般に導く定理は、探した範囲では見当たりません。Dybalski–Gérard（2014）は上下の質量ギャップの下で「一般化した」形を示しました [既知]。個々の模型には部分的な結果があります（弱結合の $P(\phi)_2$ の、エネルギーが約 $4m$ 未満の偶の状態での S 行列のユニタリ性：Spencer–Zirilli 1976）。

正ノルム性 ⟷ 反射正値性

物理の語は負のノルムの状態が無いこと（Wightman の正値性）、数学の語は Schwinger 関数の反射正値性です。同じと言えるのは OS と Wightman の対応の中で、これは定理です。

反射正値性は Hilbert 空間と $H \geq 0$ を与え、極限でも保たれるので（Jaffe §4）、極限が在れば格子から持ち越せます。Wilson の格子で成り立ちます（Osterwalder–Seiler 1978・Lüscher 1977） [既知]。例：Pauli–Villars 型の負の重みはこれを壊します（4-10 §08）。

S 行列のユニタリ性 ⟷ 正ノルム性＋漸近完全性

物理の語は散乱で確率が保存すること（$S^{*}S=1$）、数学の側は「正ノルム性」の項に (10) の像の一致を足したものです。同じと言えるのは、漸近完全性が成り立つときです。

ゲージ理論では、Kugo–Ojima（1979）の要旨が、BRS 電荷（§08 の Q_B）の代数の表現にもとづき「物理的 S 行列のユニタリ性」が一般に（'quite generally'）示されると書きます。これは代数の表現と漸近場を仮定した一般論で、舞台は不定計量（負のノルムを許す内積）の空間です。その仮定が確かめられているのは摂動論の範囲です。

06

近似 — 時空・正則化・繰り込み

時空と格子 ⟷ $a\mathbb{Z}^4$ の $a\to 0$ 極限

物理の語は Minkowski 符号の四次元の時空（ユークリッド化すると $\mathbb{R}^4$）、数学の側は間隔 a の格子 $a\mathbb{Z}^4$ の上の測度の $a\to 0$ の極限です。同じと言えるのは、極限が在り、回転の対称性 $O(4)$ が戻るときです。

ユークリッド化した時空の回転不変性はユークリッド共変性（Osterwalder–Schrader の公理 E1）の $O(4)$ 不変性です（符号は既存の記事 時空）。格子に残るのは 90° の回転と鏡映で、Wilson（1974）の要旨は強結合の極限に 'no Lorentz (or Euclidean) invariance' と書きます 既知 。

$$\text{超立方体の対称性（位数 } 2^4\cdot 4!=384\text{）}\ \subset O(4),\qquad \mu_a \xrightarrow[a\to 0]{?} \mu\ \ (O(4)\text{ で不変}) \tag{11}$$

例：格子の自由場では、軸と対角の相関の差が a^2 で消えます（4-02 の表 2）。純粋ゲージ理論で格子の連続極限が示されているのは、二次元の非可換群と三次元・四次元の U(1) です（Driver 1989・Gross 1983・Driver 1987 など）。三次元の要旨は、Villain の作用で自由な電磁場に収束すると書きます。自由な電磁場は回転で不変なので、回転の対称性も戻っています。

正則化 ⟷ 格子間隔 a の測度の族

物理の語は無限大を一時的に止める仕掛け全般、数学の側で測度の族として扱えるのは主に格子です。同じと言えるのは、仕掛けを外した極限が仕掛けの選び方に依らないとき（普遍性）です。

問題文 §6.5 は、次元正則化や Pauli–Villars などで失った反射正値性を回復する方法は少ないと書きます。Reisz（1989）が示すのは、格子の連続極限が摂動の各次数で有限になること

です。

$$\lim_{a\to 0}\mu_a^{\text{Wilson}} \overset{?}{=} \lim_{a\to 0}\mu_a^{\text{Villain}} \overset{?}{=} \cdots \tag{12}$$

非摂動の (12) は二次元で示されています。Chevyrev–Shen（2023, arXiv:2302.12160）は二次元のトーラスの上で、連結なコンパクト群について、Wilson・Villain・Manton の作用の格子ゲージ理論が同じ極限を与えることを示しました。二次元の格子近似の収束は Driver（1989）にもあります。

繰り込み可能性 ⟷ BPHZ・Epstein–Glaser

物理の語は、有限個の定数を調整すれば摂動の各次数で無限大が消えること、数学の語は引き算の規則（BPHZ）と因果律からの帰納的な構成（Epstein–Glaser）の有限性の定理です。同じと言えるのは形式的冪級数の水準です（4-05）。

物理は Dyson（1949）、ヤン–ミルズは 't Hooft（1971）・Becchi–Rouet–Stora（1976）。数学は Bogoliubov–Parasiuk（1957）・Hepp（1966）・Zimmermann（1969）と Epstein–Glaser（1973）です。

$$S_n^{\text{ren}}(x;g) = \sum_{k\ge 0} c_{n,k}(x)\, g^k \in \mathbb{C}[[g]] \qquad (\text{各 } c_{n,k} \text{ は有限}) \tag{13}$$

Epstein–Glaser の要旨は、帰納的な構成が 'at each order, finite terms' を与え BPHZ と同値だと書きます 既知 。和の収束は含みません（級数は発散すると考えられています、4-12）。

07
場は点の値を持たない — 作用素値超関数

場 $\phi(x)$ ⟷ 作用素値超関数

物理の語は各点 x の演算子 $\phi(x)$、数学の語は試験関数 f でならした $\phi(f)$ だけを演算子とする作用素値超関数です。同じと言えるのは、$\phi(x)$ を「ならした値の、ならす幅を 0 にする手前の記号」と読む場合です。

超関数は 1-11 §04 です（場の読みは Jaffe §3） 既知 。質量 m の自由場（$\omega_p=\sqrt{p^2+m^2}$）で

$$\phi(f)=\int \phi(x) f(x)\, d^4x, \qquad \big\|\phi(f)\Omega\big\|^2 = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{|\hat f(\omega_p,p)|^2}{2\omega_p} < \infty \tag{14}$$

です。例：f を積分 1、幅 ε の山 $f_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-4}g(x/\varepsilon)$ にすると、$\hat f_\varepsilon(p)=\hat g(\varepsilon p)$ なので、四次元では右辺が ε^{-2} で発散します（1-09）。点の値 $\phi(x)$ は f を δ に近づけた極限なので、演算子としては無いのです。ヤン–ミルズの点の場は $\mathrm{Tr}\,F_{ij}F_{kl}(x)$ で、問題文 §4 はその演算子を要求します。問題文の局所場の脚注（Jaffe–Witten の脚注 1）は、古典の微分多項式と演算子の自然な 1 対 1 対応は 'does not exist' とし、次元 $\le d$ の空間どうしの対応は期待します（0-03 §08）。ここで次元は、長さの尺度を変えたときの冪です（F は 2、$\mathrm{Tr}\,F^2$ は 4。1-11 §06）。Wilson ループは曲線の上の量で、点の場の公理の外です（4-10 §09）。

08

ゲージ — 切り口と物理的状態

ゲージ固定 ⟷ 軌道空間への切断

物理の語は各ゲージ軌道から条件 $F(A)=0$ で代表を一つ選ぶこと、数学の語は軌道空間 $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ への射影の切断（各軌道に一点を連続に対応させる写像）で、定義として同じです。ただし四次元の球面の上では、大域的な切断が無いことが定理です。

切り口の幾何は 3-04 §05 です。Faddeev–Popov（1967）の規則の元は

$$1=\Delta_{\mathrm{FP}}(A)\int_{\mathcal{G}} dg\;\delta\big(F(A^g)\big),\qquad \Delta_{\mathrm{FP}}(A)=\Big|\det\frac{\delta F(A^g)}{\delta g}\Big|_{g=1} \tag{15}$$

です。(15) が成り立つのは、条件の面 $F=0$ が各軌道とちょうど一回交わるときです。(15) は行列式を $g=1$ の一点で評価して積分の外に出しているので、何回も交わると右辺は交点ごとの行列式の比の和になり、1 にも交点の数にもなりません。行列式を積分の中に入れると、交点の数 $N(A)$ になります。

$$N(A)=\int_{\mathcal{G}} dg\;\delta\big(F(A^g)\big)\,\Big|\det\frac{\delta F(A^g)}{\delta g}\Big| \tag{15a}$$

実際の Faddeev–Popov の規則は絶対値の付かない det を使うので、交点を符号つきで数えます（4-08 §05 の寄り道）。Gribov（1978）は非可換な理論で「ちょうど一回」が崩れることを指摘し、Singer（1978）の要旨は S^4 上で 'no continuous choice of exactly one connection on each orbit can be made' と書きます 既知 。格子は Haar 測度（群の上の、掛け算で変わらない一様な確率測度）で積分するのでゲージ固定が要らず、この行を避けます（5-01・4-08）。

物理的状態 ⟷ ゲージ不変量からの再構成

物理の語は Gauss 拘束を満たす状態、または BRST のコホモロジー、数学の語はゲージ不変な量だけで (3) を行って作る空間です。同じと言えるのは格子の水準までで、連続では未確定です。

Gauss 拘束は Gauss の法則 $\nabla \cdot E = 0$ の非可換版で、状態の側では「時刻を固定したゲージ変換で状態が変わらない」という条件です（Kogut–Susskind 1975、4-01）。格子では、時刻を固定したゲージ変換 g について $\psi(U^g) = \psi(U)$ です。BRST の Q_B は $Q_B^2 = 0$ を満たす演算子（BRST 電荷）で、$\mathrm{Ker}\, Q_B / \mathrm{Im}\, Q_B$ は「Q_B で消える状態を、Q_B の像の分だけ同一視したもの」です。不定計量は負のノルムを許す内積です。

$$\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}^{\mathrm{BRST}} = \mathrm{Ker}\, Q_B / \mathrm{Im}\, Q_B \ \text{(不定計量)}, \qquad \mathcal{H}_{\mathrm{inv}}^{\mathrm{OS}} = \overline{\mathcal{E}_+^{\mathrm{inv}} / \mathcal{N}} \ \text{(正定値)} \tag{16}$$

格子では、ゲージ不変な状態の間の遷移確率が負でなく（Lüscher 1977）、ゲージ固定はゲージ一重項（ゲージ変換で変わらない演算子）の Green 関数を変えません（Creutz 1977） 既知 。連続で (16) の左右が同じとは示されておらず、非摂動の BRST は Gribov のコピーのため定義しにくいままです。

09

局所対称性は破れない — Elitzur の定理

局所対称性は破れない ⟷ Elitzur の定理

物理の語は「ゲージ対称性（局所対称性）は自発的に破れない」という主張、数学の語はそれを外場の極限で述べた定理です。同じと言えるのは、「外場を入れ、体積を無限にしてから外す」順序で比べるときです。

Elitzur（1975）の要旨は、ゲージ固定の無い対称なゲージ理論で局所対称性が自発的に破れることは不可能だと 'It is argued that' の形で論じ、格子の上の可換なゲージ場の簡単な系で示すと書きます 既知 。数学的な後続には、可換な Higgs 模型の格子で、外場を外すと磁化が 0 になることの証明があります（De Angelis–de Falco–Guerra 1978） 既知 。外場が 0 なら、Haar 平均で期待値は 0 です（17-02 の式 (9)）。自発的な破れは外場を外す順序の問題です（2-08）。

外場を外す順序で比べる

Elitzur の論法を、d 次元の $\mathbb{Z}_2$ 格子ゲージ理論（リンク変数 $U_\ell = \pm 1$、U_p はプラケットを囲む四本の積）の重み $\exp(\beta \sum_p U_p + h \sum_\ell U_\ell)$ で書き下します。一点 x のゲージ変換は x に触れる $2d$ 本のリンクを反転し、$\sum_p U_p$ を変えません。そこで x に触れる ℓ について

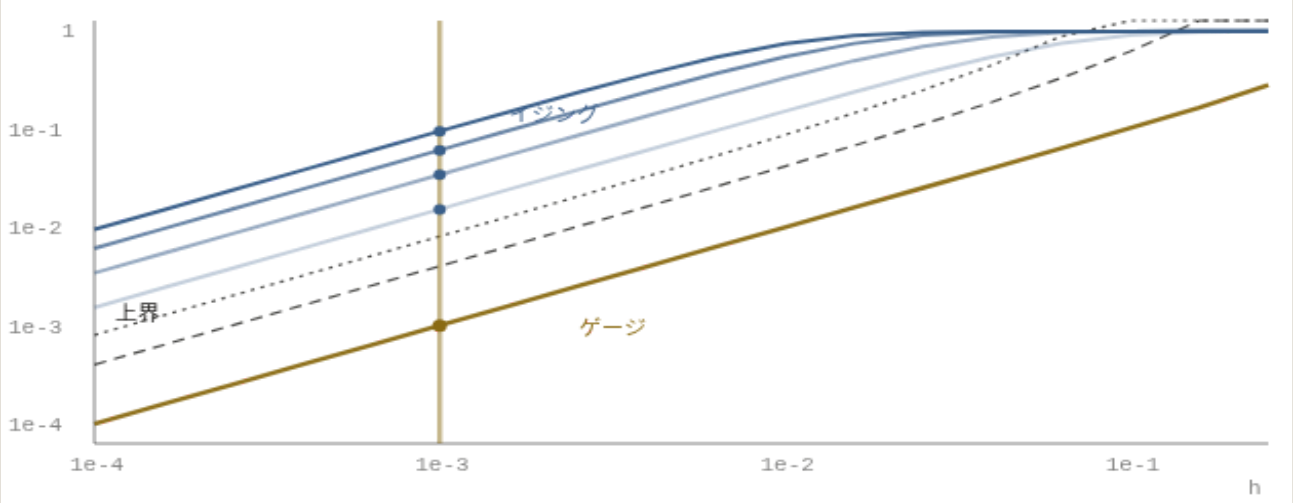
$$\langle U_\ell\rangle_h = -\big\langle U_\ell\, e^{-2hQ_x}\big\rangle_h, \quad Q_x=\sum_{\ell'\ni x} U_{\ell'} \quad\Longrightarrow\quad |\langle U_\ell\rangle_h| = \tfrac12\big|\langle U_\ell(1-e^{-2hQ_x})\rangle_h\big| \le \tfrac12\big(e^{4dh}-1\big) \tag{17}$$

です[紙]。右辺は体積にも β にも依りません。イジング模型（大域的な $\mathbb{Z}_2$）では全スピンの反転が要り、同じ論法の上界は $\frac12(e^{2h|\Lambda|}-1)$ で、体積とともに意味を失います。違いは、一回の対称変換が触れる変数が有限個か全部かだけです。$h=0$ での傾きは

$$\left.\frac{d\langle U_\ell\rangle_h}{dh}\right|_0 = \sum_{\ell'}\langle U_\ell U_{\ell'}\rangle_0 = 1, \qquad \left.\frac{d\langle \sigma_0\rangle_h}{dh}\right|_0 = \sum_{y}\langle \sigma_0\sigma_y\rangle_0 \approx M_0^2\,|\Lambda| \tag{18}$$

です。左では $\ell'=\ell$ の項が 1 です。$\ell'\neq\ell$ の項が 0 なのは、ℓ の端点のうち ℓ' に触れない方でゲージ変換すると、二つのうち U_ℓ だけが符号を変え、$U_{\ell'}$ は変わらないからです（一辺が 3 以上の箱なら、そういう端点が必ずあります）。右は低温側で、遠いスピンどうしも相関 M_0^2 を保つので体積に比例します。

図 1　外場 h（対数目盛）を選ぶと、二次元の L×L の周期的な箱の ⟨σ⟩（イジング、青、L = 4〜10 の順に濃く）と ⟨U⟩（$\mathbb{Z}_2$ ゲージ、黄土）が下の欄に出る。「動かす」で h を 0 へ下げる（外場を外す向き）。破線・点線は (17) の上界（d = 2・4）



h = 1.0e-3　⟨σ⟩：L=4 0.0152・L=6 0.0342・L=8 0.0607・L=10 0.0946　⟨U⟩ 0.00100　上界 0.00402

[計算] この図の数値はこの端末で計算した（転送行列の対角化による正確な値）。

[計算] 表 1　二次元の $L\times L$ の周期的な箱。イジング $\beta=0.6$（低温側）、ゲージ $\beta=2$

h	$\langle\sigma\rangle$ $L=4$	**6**	**8**	**10**	$\langle U\rangle$ $L=4$**〜10**	**(17)** $d=2$
10^{-4}	0.0015	0.0034	0.0061	0.0095	0.000100	0.00040
10^{-3}	0.0152	0.0342	0.0607	0.0946	0.001000	0.00402
10^{-2}	0.1512	0.3288	0.5396	0.7314	0.010002	0.04164
10^{-1}	0.8979	0.9792	0.9810	0.9810	0.1017〜0.1016	0.61277

イジングの列は L とともに持ち上がり、$h=10^{-4}$ での $\langle\sigma\rangle/(hL^2)$ は 0.9529・0.9505・0.9494・0.9489 と、自発磁化として引かれる式 $M_0=(1-\sinh^{-4}2\beta)^{1/8}$（Yang 1952 とされる）の二乗 0.9479 に近づきます[計算]。ゲージの列は $h\le10^{-2}$ で $L=4$〜10 が小数 6 位まで

一致し、傾きは (18) の 1 です。物理の「ゲージ対称性の破れ」はゲージ固定の後の大域的な対称性の破れなどとして読み直すものとされ 物理 、字面のまま引くと偽の友です（18-01）。

寄り道：β = ∞ のゲージ理論はイジング模型

飛ばしてよい小節です。

$\beta \to \infty$ では全プラケットが $U_p = +1$ に揃います（平坦な場）。単連結な領域では $U_{xy} = g_x g_y$（$g_x = \pm 1$）と書けるので、外場の項は

$$h \sum_{\langle xy \rangle} U_{xy} = h \sum_{\langle xy \rangle} g_x g_y \tag{19}$$

となり、結合 $K = h$ のイジング模型です。リンクの期待値はその近接相関（小さい h では約 $\tanh h$）で、磁化にはなりません。表 1 の周期的な箱（トーラス）は単連結ではありません。箱を一周するリンクの積（ホロノミー、1-07）には横・縦それぞれ ± 1 の四つの類があり、$\beta \to \infty$ の極限は、周期・反周期の境界条件のイジング模型四つの和になります。計算した $h = 0.1$・0.3（イジングの高温側）では、周期的なイジングだけとの差が L とともに指数的に小さくなります。

計算 表 2　$L \times L$ の周期的な箱での $\langle U \rangle$ とイジング（$K = h$）の近接相関。「差」は周期的なイジングだけと四つの類の和の差

h	ゲージ $\beta = 4$・8	四つの類の和	周期的なイジング	差 $L = 4$	6	8	10
0.1	0.101689	0.101689	0.101689	1.2e−3	1.4e−5	1.8e−7	2.3e−9
0.3	0.352256・0.352257	0.352257	0.356234	6.9e−2	1.7e−2	4.0e−3	9.8e−4

最初の三列は $L = 8$。$h = 0.1$ では小数 6 位まで一致し、$h = 0.3$ ではゲージ 0.35226 と周期的なイジング 0.35623 に差が見え、四つの類の和で一致します 計算 。

この章が言えている範囲

	言えている	言えていない
既知	(4)(6)(7)(8)(15)(15a)。引用した一次資料の主張	これらが四次元の連続のヤン–ミルズ理論で成り立つこと（対象がまだ無い）
紙 この章の導出（初等的。(17)(18) は Elitzur 1975 の論法による）	(10) の右向き（像が等しければ S はユニタリ）、(17) の上界、(18) の左	非可換群や連続の理論での同じ形の評価
この本の読み	表 0 の格付けと判定者、(1) の読み	格付けが唯一であること

	言えている	言えていない
計算	表 1・表 2・図 1（二次元、$L \le 10$）	四次元・非可換群・$L \to \infty$
全体	—	この本は質量ギャップの存在も連続極限の構成も自分では示していない（公開された連続極限の構成は第二巻）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
Jaffe・問題文の引用	本文	Jaffe, *Constructive Quantum Field Theory*（2000、公開 PDF）§2–§7／Jaffe–Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*（Clay Mathematics Institute, 2000）§3–§6.5・局所場の脚注・弱い存在の脚注
要旨を確認	既知	Wick, PR 96 (1954) 1124／Wightman, PR 101 (1956) 860／Symanzik, JMP 7 (1966) 510／Osterwalder–Schrader, CMP 31 (1973) 83・42 (1975) 281／Glaser, CMP 37 (1974) 257／Lüscher, CMP 54 (1977) 283／Osterwalder–Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440／Creutz, PRD 15 (1977) 1128／Kogut–Susskind, PRD 11 (1975) 395／Schor, NPB 231 (1984) 321／Dybalski–Gérard, CMP 332 (2014) 1167／Spencer–Zirilli, CMP 49 (1976) 1／Kugo–Ojima, PTPS 66 (1979) 1／Wilson, PRD 10 (1974) 2445／Gross, CMP 92 (1983) 137／Driver, CMP 123 (1989) 575／Reisz, NPB 318 (1989) 417／Chevyrev–Shen, arXiv:2302.12160（2023）／Epstein–Glaser, AIHP A 19 (1973) 211／Faddeev–Popov, PLB 25 (1967) 29／Gribov, NPB 139 (1978) 1／Singer, CMP 60 (1978) 7／Neuberger, PLB 183 (1987) 337／Elitzur, PRD 12 (1975) 3978／De Angelis–de Falco–Guerra, PRD 17 (1978) 1624／Yang, PR 85 (1952) 808（M_0 の式は本文未確認）
書誌のみ	既知	Feynman, RMP 20 (1948) 367／Kac, Trans. AMS 65 (1949) 1／Driver, CMP 110 (1987) 479／Gell-Mann–Low, PR 84 (1951) 350（帰属は二次資料による）／Haag, Kong. Dan. Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd. 29 (12) (1955)・PR 112 (1958) 669／Ruelle, Helv. Phys. Acta 35 (1962) 147 とされる（書誌未確認）／Källén, Helv. Phys. Acta 25 (1952) 417／Lehmann, Nuovo Cim. 11 (1954) 342／Wigner, Ann. Math. 40 (1939) 149／Glimm–Jaffe–Spencer, Ann. Math. 100 (1974) 585／Dyson, PR 75 (1949) 486・1736／'t Hooft, NPB 33 (1971) 173／Becchi–Rouet–Stora, Ann. Phys. 98 (1976) 287／Bogoliubov–Parasiuk, Acta Math. 97 (1957) 227／Hepp, CMP 2 (1966) 301／Zimmermann, CMP 15 (1969) 208
表 0	この本の読み	一次資料は上の行と 18-01
表 1・表 2・図 1・(18) の傾き	計算	この端末の Python 3（numpy）：`elitzur.py`・`table.py`・`detour_beta_inf.py`・`holonomy_check.py`（四つの類）・`holonomy_brute.py`（3×3 の箱の全数え上げ）

次に読む章：18-03 質量と長さの辞書。

質量と長さの辞書 — 格子の上では重なり、極限の側でほどける対

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 「質量」と「長さ」の物理の語 20 項目を数学の語と対にし、格子を固定すれば重なる内側と、格子間隔を 0 に送る側で条件が集まる外側の二層を見ます。「二つの時間」と二つの η の区別もここで固定します。

前提となる章 — 4-11・5-08・2-08。Poincaré 定数は 1-10、格付けの二列は 18-01。前提の章に無い語（漸近自由・確率微分方程式・log-Sobolev・混合時間・Polyakov ループ・中心電荷など）は、使う場所で一行ずつ定義します。

先に言うこと — 対応を並べるだけで、質量ギャップも閉じ込めも連続極限も示しません。本書の検討の記録の仮定（拡散型緩和時間の仮定など）は仮定のままです。

この章の順序

1. 見取り図 — 二層と二列の格付け・表 0 の読み方
2. 質量ギャップと相関長 — 格子単位と物理単位
3. ポテンシャル・弦張力・閉じ込め — 片向きだけが定理
4. Λ・一尺度・グルーボール — 隙間と粒子の区別
5. 二つの時間 — H_T と L・時間の単位
6. 自己相関時間と Poincaré 定数 — 三つに割れる時間
7. 臨界減速 — z・従来理論・変分の下界・二つの η。寄り道：自由場では緩和時間と感受率が一致する
8. 管の揺らぎと位相の凍結 — 有効弦・Wulff・ボトルネック。寄り道：位相電荷の区画と細い通路

01

見取り図 — 二層と二列の格付け

物理では質量と長さは表と裏の関係にあります。正確には、$\hbar = c = 1$ の単位では質量の逆数が長さの次元をもち、質量 m の粒子が運ぶ力は距離 $1/m$ ほどで届かなくなり（湯川型、3-01）、相関は $e^{-r/\xi}$、$\xi = 1/m$ で薄れます。数学ではこの一つの数が、スペクトルの隙間・相関の減衰率・確率的な力学の緩和の速さ、という別々の量に割れます。

表 0 の対は二層に分かれます。内側は、格子間隔 a と力学を固定すれば、スペクトル定理（1-10）一本で同じものになる対です（転送行列の隙間と相関の減衰率など）。外側は、$\xi \to \infty$ と $a \to 0$ を結ぶところに現れる対で、条件と未確定はここに集まります。

表の二列は 18-01 の格付けです。(a) は「両方の対象が在るとしたら同じか」で、確定・条件つき・未確定の三段に、別の量だと分かっている対の「対応しない」（18-01 の「偽の友」）を加えます。(b) は 18-01 の実在の列を水準「格子（a 固定）」で付けたもので、構成済み＝有限体積ならどの β でも在る、条件つき＝強結合など範囲を限った版だけ、無い＝この水準で示されたものが無い（数値だけのものを含む）、と読みます。連続の四次元の水準では全行が「無い」です（2026-11-10 に公開された構成も、質量ギャップ・Wilson ループ・一粒子の状態は作っていません。6-04）。記号：$\beta = 2N/g^2$、長さは格子単位、$m_{\mathrm{lat}} = 1/\xi$、$\Delta = m_{\mathrm{lat}}/a$。$A \asymp B$ は比 A/B が上下とも正の定数で挟まれること（A-01）。

表 0　質量と長さの辞書の一覧（上から §02〜§08 の順）

#	物理の語	数学の語	(a) 定義	(b) 格子（a 固定）	(c) 有限の測定
1	質量ギャップ	スペクトルの隙間・一様な減衰	条件つき	条件つき（強結合）	上界まで
2	相関長 ξ	転送行列の隙間の逆数	条件つき	条件つき（強結合）	下界まで
3	物理単位のギャップ	格子単位の一様な下界	対応しない（偽の友。別の量と確定）	条件つき（強結合）	届かない
4	$V(R)$	Wilson ループの減衰率	条件つき	条件つき	上界まで
5	弦張力 σ	面積則の係数・連続の弦張力の問題（Chatterjee の Problem 5.2）の d	条件つき	条件つき（$\sigma > 0$ は強結合）	—
6	閉じ込め	片向きの定理	条件つき	条件つき	—
7	中心対称性	スラブでの中心不変性	未確定	無い（成否は未証明）	—
8	Λ・一尺度	対応語なし	未確定	無い	—
9	$m/\sqrt{\sigma}$	格子の相関長の問題と連続の弦張力の問題の組の極限	未確定	無い（数値のみ）	届かない

#	物理の語	数学の語	(a) 定義	(b) 格子（a 固定）	(c) 有限の測定
10	グルーボール	質量作用素の孤立固有値	条件つき	条件つき（強結合。注）	上界まで
11	Langevin の緩和	生成作用素 L	確定	構成済み（有限体積）	上界まで（$\mathrm{gap}(L)$）
12	$z = 2$	$\mathrm{gap}(L) \asymp \mathrm{gap}(H_T)^2$	未確定	無い（族の言明。注）	届かない
13	指数自己相関時間	Poincaré 定数 C_P	連続時間で確定	構成済み（有限体積）	下界まで
14	熱化時間	混合時間	条件つき	構成済み（有限体積）	下界まで
15	動的指数 z	$C_P \asymp \xi^z$	未確定	無い（族の言明。注）	届かない
16	$z = 2 - \eta_s$	変分の下界 $C_P \geq \chi$	条件つき	構成済み（下界だけ）	下界まで
17	非臨界では減速しない	一様な混合 $\Longleftrightarrow$ 一様な log-Sobolev	条件つき	条件つき（強結合）	届かない
18	Lüscher 項	帯の Casimir エネルギー	未確定	無い（数値のみ）	—
19	粗面化・管の形	Wulff 構成	未確定	無い（物理の描像）	—
20	位相電荷の凍結	状態空間のボトルネック	条件つき	無い（凍結は数値のみ）	下界まで

注：(c) は 18-01 §02 の測定の列（有限の測定で届く向き）。隙間の仲間（「質量ギャップ」の項・「V(R)」の項・「グルーボール」の項・「Langevin の緩和」の項）は一つの相関か試験関数で上界まで、その逆数の長さと時間（「相関長 ξ」の項・「指数自己相関時間」の項・「熱化時間」の項・「z=2-η_s」の項・「位相電荷の凍結」の項）は向きが入れ替わって下界までです。一様性・族・極限の言明（「物理単位のギャップ」の項・「m/√σ」の項・「z=2」の項・「動的指数 z」の項・「非臨界では減速しない」の項）は届きません。「位相電荷の凍結」の項の根拠は (14)（集合を一つ選べば C_P の下界が出る。§08）、「熱化時間」の項は混合時間の定義（§06。一つの事象で全変動距離が ε を超えれば、その時刻は混合時間より前）です。「弦張力 σ」の項（弦張力）は、有限の測定から片側を押さえる形をこの本の本文で扱っていないので「—」にしました。「グルーボール」の項の (b) は、格子には Lorentz 対称性が無く質量作用素 M がそのままでは定義されないので、運動量ごとにエネルギーのスペクトルから孤立した分散曲線がある、という形です（Schor 1984。§04）。「z=2」の項・「動的指数 z」の項の両辺は固定した格子で定義されますが、$\asymp$ は格子間隔を 0 に送る族についての言明なので、一つの格子では中身を持ちません。(b) の「無い」は、その族について示されたものが無いという意味です。

02

質量ギャップと相関長 — 格子単位と物理単位

問題文（Jaffe–Witten）は質量ギャップを、ハミルトニアン H が $(0, \Delta)$ にスペクトルを持たないことと定義し（§4）、帰結に同時刻のクラスター性を挙げます（§5） 既知 。OS 再構成（4-10）の後、真空 Ω が一意ならスペクトル定理から

$$\langle O\Omega, e^{-tH} O\Omega\rangle - |\langle \Omega, O\Omega\rangle|^2 = \int_{[\Delta,\infty)} e^{-tE}\, d\rho_O(E) \;\le\; e^{-t\Delta}\, \|O\Omega\|^2 \tag{1}$$

です（ρ_O は $O\Omega$ のスペクトル測度から 0 を除いたもの）。(1) の逆向きは、稠密な観測量の族が*一様な*率で減るときに限ります（「質量ギャップ」の項）。格子では反射正値性から正の自己共役な転送行列 $T = e^{-H_T}$ が作れ（Lüscher 1977、5-03）、固有値 $\lambda_0 > \lambda_1 \ge \cdots$ から

$$m_{\mathrm{lat}} = -\log \frac{\lambda_1}{\lambda_0}, \qquad \xi = \frac{1}{m_{\mathrm{lat}}} \tag{2}$$

です。Chatterjee（2018）のプラケット相関の相関長は一般に $\xi_{\mathrm{plaq}} \le 1/m_{\mathrm{lat}}$ です（等号には最低の状態への重なりが要る）。例：自由場では $\xi = 1/(2\,\mathrm{arsinh}(m/2))$（表 1）。

同じ語の二つの量

数学で「質量ギャップが正」と呼ばれる結果の多くは、格子単位の一様な下界 $m_{\mathrm{lat}} \ge c > 0$ です。確かめられる例は Shen–Zhu–Zhu（2023）で、要旨は強結合の格子ヤン–ミルズについて 'strictly positive mass gap' を述べます 既知 。このとき $\Delta = m_{\mathrm{lat}}/a \ge c/a \to \infty$ で、物理単位では質量が無限大に向かう側、連続極限の反対側の性質です。物理単位のギャップには $\xi \to \infty$ が $a \to 0$ を打ち消すことが要り、格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）も $\beta \to \infty$ で $\xi(\beta) \to \infty$ を求めます（5-09・16-08）。表 0 の「物理単位のギャップ」の項を「対応しない」とするのはこのためです。

03

ポテンシャル・弦張力・閉じ込め — 片向きの矢印だけが定理

静的ポテンシャル $V(R)$ は無限に重いクォーク対を距離 R に置いたエネルギーで、Wilson（1974）に従い $R \times T$ の Wilson ループ（5-01）から

$$V(R) = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log \langle W_{R,T}\rangle, \qquad \sigma = \lim_{R\to\infty} \frac{V(R)}{R} \tag{3}$$

と読みます。左を定義とすれば確定ですが、静的荷電の基底エネルギーと同一視するには $T \to \infty$ の極限と基底状態への重なりが要ります（「V(R)」の項）。Bachas（1986）の示した V の単調性と凹性から $\sigma \in [0,\infty)$ は在ります 既知 。面積則は強結合ならどの群でも成り立ちます（Osterwalder–Seiler 1978、5-02）。連続の弦張力は Chatterjee の連続の弦張力の問題の d として定義する提案です。

$$\log \langle W_{R/\varepsilon,\,T/\varepsilon}\rangle = -c\,(R+T) - d\,RT + o(1), \qquad \varepsilon(\beta)\to 0,\; c(\beta)\to\infty,\; d \neq 0 \tag{4}$$

周長の項が必要かは明らかでない、と本人が書いています。物理の目安は $\sqrt{\sigma} \approx 485(6)$ MeV です。これは SU(3) の純ゲージ理論の $r_0\sqrt{\sigma} = 1.160(6)$ に、QCD の格子計算で決めた長さの目盛り $r_0 = 0.472$ fm を仮に当てた換算で、著者自身が、純ゲージ理論と QCD は別の理論なので正確にはできない換算だと断っています（Athenodorou–Teper 2020） 物理 。

閉じ込めの三つの言い方

(a) $V(R) \to \infty$、(b) $\sigma > 0$、(c) 中心対称性が破れない、の三つです。(c) の物理の定義は有限温度のものです。時間方向を長さ $1/T$（T は温度）の輪にした格子で、一点から時間方向に一周するリンクの積のトレースを Polyakov ループと呼び、その期待値が 0 であることを閉じ込めの印とします（Polyakov 1978・Susskind 1979。中心の下で変換する秩序変数による普遍性の議論は Svetitsky–Yaffe 1982） 物理 。中心変換は、ゲージ群の中心の元（$SU(N)$ では単位行列の $e^{2\pi ik/N}$ 倍）を、ある時刻の面を横切る時間方向のリンクすべてに掛ける操作です。作用は変わらず Polyakov ループだけが $e^{2\pi ik/N}$ 倍されるので、この対称性が破れていなければ期待値は 0 です。

数学で示されているのは表 A の片向きだけです（Chatterjee 2021） 既知 。中心対称性の非破れの定義（Chatterjee 2021 の定義 2.1）は、ある $N \geq 1$ についてスラブ $\{0, \dots, N\} \times \mathbb{Z}^{d-1}$ に制限した理論がどの境界条件でも中心変換で不変なこと、強い減衰の定義（Chatterjee 2021 の定義 2.3）はどの立方体・境界条件でも一様な指数減衰（強い減衰）です。中心対称性から閉じ込めへの定理（Chatterjee 2021 の定理 2.2）の Wilson ループは中心に非自明に作用する表現のものです。

表 A　閉じ込めの言い方の間の含意（格子）

向き・例	状態
強い指数減衰（Chatterjee 2021 の定義 2.3）$\Longrightarrow$ 非破れ $\wedge$ 面積則	定理（一様な減衰から面積則への定理）
中心対称性の非破れ（Chatterjee 2021 の定義 2.1）$\Longrightarrow V(R) \to \infty$	定理（中心対称性から閉じ込めへの定理）
面積則 $\Longrightarrow V(R) \to \infty$	自明
$V \to \infty \Longrightarrow \sigma > 0$	示されていない
（特定の境界条件だけの）弱い減衰 $\Longrightarrow$ 閉じ込め	示されていない
有限群・弱結合：特定の境界条件の二点相関の減衰／閉じ込めない	定理（Adhikari–Cao 2025）／信念

ギャップと閉じ込めは別の主張です（17-02・16-08・5-10）。中心対称性について Chatterjee は、数学的な定義は「私の知る限り」無いとして中心対称性の非破れの定義を提案し、有限温度の類似に Borgs–Seiler（1983）を引いています。二つの定義が同じ相を分けるかは未証明です（「中心対称性」の項）。

> 04

Λ・一尺度・グルーボール — 隙間と粒子の区別

無次元の結合 g は、測る尺度 μ とともに値が変わります。漸近自由とは、μ が大きい（距離が短い）ほど g が小さくなることで（4-06）、その速さを決める一ループの係数が b_0 です。一ループの式を解くと

$$\Lambda = \mu \exp\!\left(-\frac{1}{2 b_0\, g^2(\mu)}\right), \qquad b_0 = \frac{11N}{3}\cdot\frac{1}{16\pi^2} \tag{5}$$

が μ に依らない質量の尺度になります（次元転移、4-07）。物理では質量はすべて Λ の定数倍で、$m/\sqrt{\sigma}$ は純数と読みます 物理 。数学の側に四次元の Λ の定義はありません（格子の Λ_L は 18-04）。本書の検討の記録は「尺度は一つ」を鎖 (ii) $m^2 \asymp \sigma$ と書き、等価原理に当たる一文と*類比*で呼びます（17-12）。証明はありません。連続の弦張力の問題が $\varepsilon(\beta)$ で成り立ち $\varepsilon\xi \to \ell \in (0,\infty)$ なら

$$\frac{m}{\sqrt{\sigma}} = \lim_{\beta\to\infty} \frac{1/(\varepsilon\,\xi)}{\sqrt{d}} = \frac{1}{\ell\sqrt{d}} \tag{6}$$

で、この組は Chatterjee の文面に無い読みです。数値は SU(2) 3.781(23)、SU(3) 3.405(21)、SU(∞) 3.072(14)（0^{++}、Athenodorou–Teper 2020・2021） 物理 。反対の例もあります。三次元のコンパクト U(1)（Villain 作用）では、どの結合でも弦張力が正で、連続極限は質量 m_D の自由場になり、物理単位の σ/m_D^2 は無限大に発散します（Göpfert–Mack、要旨） 既知 。閉じ込めても尺度が一つにならない例です（17-12）。

グルーボールは J^{PC}（スピン・パリティ・荷電共役）の通路ごとの最低の減衰率として測ります（5-08。SU(3) の 0^{++} は $r_0 m = 4.21(11)(4)$、Morningstar–Peardon 1999） 物理 。格子の回転の対称性は立方体を自身に重ねる 48 個の回転と反転（群 O_h）だけなので、通路は O_h の既約表現で分けます。連続のスピンへの対応は回転対称性の回復が前提です。数学の一粒子状態は質量作用素

$$M = \sqrt{H^2 - P^2} \;\geq 0 \tag{7}$$

の孤立固有値で（P は運動量。問題文 §6）、問題文は §5 で「孤立した一粒子状態（上のギャップ）」を拡張に数えます 既知 。隙間と粒子は別の主張です。格子には Lorentz 対称性が無く M はそのままでは定義されないので、格子の強結合で示されているのは、運動量ごとにエネルギーのスペクトルから孤立した分散曲線がある、という形です（Schor 1983・1984） 既知 。

05

二つの時間 — 転送行列の H_T と Langevin の L

時間は二つあります。一つは経路積分の虚時間で、相関は $T = e^{-H_T}$ で運ばれ、隙間は $1/\xi$ です。もう一つは確率量子化（Parisi–Wu 1981、7-09）の「人工的な第五の時間」s（Zwanziger 1981 の要旨）で、配位全体が次の確率微分方程式で動いて e^{-S}/Z に落ち着きます（モンテカルロ法の時間も同じ種類）。

$$d\phi_x = -\frac{\partial S}{\partial \phi_x}\, ds + \sqrt{2}\, dW_x(s) \tag{8}$$

$W_x(s)$ は点 x ごとに独立な Brown 運動（1-09）で、dW_x は時間 ds の間の平均 0・分散 ds のガウスの増分です。第一項は作用を下げる向きに動かし、第二項が揺らぎを足します。計算機では刻み h で $\phi_x \leftarrow \phi_x - h\,\partial S/\partial\phi_x + \sqrt{2h}\,Z_x$（$Z_x$ は独立な標準正規）と進め、これを Euler–Maruyama 法と呼びます。関数 f の期待値の時間変化を生む作用素（生成作用素）は

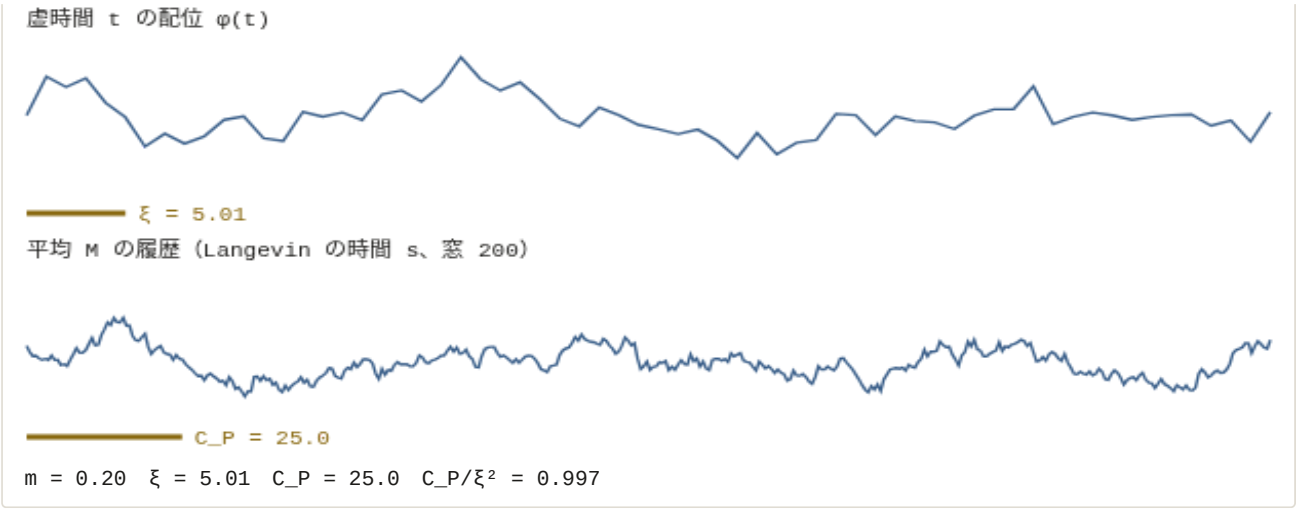
$$Lf = -\Delta f + \nabla S \cdot \nabla f, \qquad \langle f, Lf\rangle_\mu = \mathcal{E}(f) = \int |\nabla f|^2\, d\mu \tag{9}$$

で（$\mu = e^{-S}/Z$、$\mathcal{E}$ は Dirichlet 形。(9) の Δ はラプラシアンで、質量ギャップの Δ とは別）、0 の次の隙間の逆数が Poincaré 定数 C_P です（1-10）。有限の格子ならどちらも定義されますが（「Langevin の緩和」の項）、H_T は一時刻の切り口の Hilbert 空間に、L は配位全体の関数の空間 $L^2(\mu)$（μ について二乗可積分な関数）に作用し、両者を一般に結ぶ定理はありません。自由場では $\mathrm{gap}(H_T) = 2\,\mathrm{arsinh}(m/2) \approx m$、$\mathrm{gap}(L) = m^2$ で $C_P \approx \xi^2$ です（1-10）。

拡散型緩和時間の仮定と時間の単位

本書の検討の記録の緩和時間の仮定は、$\mathrm{gap}(L) \asymp \mathrm{gap}(H_T)^2$ が格子間隔に一様に成り立つという仮定です（23-01・18-05）。ただし L の時間の単位は、S と雑音の規格化で決まります。S を βS に替えると、ガウスの場合 L の隙間はちょうど β 倍になります。ゲージ理論で $S = \beta\times$（Wilson 作用）とすると、自由近似で $C_P \approx \xi^2/\beta$、すなわち C_P は $g^2(a)\,\xi^2$ に比例し、この因子は格子間隔とともに動きます。緩和時間の仮定を帯（定数倍）の水準で書くなら、この規格化を一つに固定したうえでの言明です（23-01）。記録の約束では緩和時間の仮定を冪の水準で置き、帯の水準は規格化を名指しした別の仮定に分けます（18-05 §03）。

図1　つまみで m を変えると、上（虚時間の配位 φ(t)）の棒 ξ は約 1/m、下（平均 M の Langevin 時間 s に沿った履歴）の棒 C_P は $1/m^2$ で伸びる。「動かす」で式 (8) を走らせる



計算 この図の数値はこの端末で計算した。揺らぎは刻み $h = 0.05$ の Euler–Maruyama。この刻みでは平均 M が毎刻み $1 - hm^2$ 倍されて雑音が足される一次の漸化式になり、その積分自己相関時間 $1/m^2 - h/2$ はつまみの全段（$0.1 \le m \le 1$）で $1/m^2$ と 2.5% 以内で合う。走らせた履歴の測定では $m = 0.3,\ 0.5,\ 1$ で確かめ、1 割以内で合う。JavaScript が無いときは表 1 で読める。

計算 表 1　格子の自由場の二つの隙間（零運動量の通路）

m	$\mathrm{gap}(H_T)$	ξ	$C_P = 1/m^2$	C_P/ξ^2
1.00	0.962424	1.039	1.00	0.9263
0.10	0.099958	10.004	100	0.9992
0.02	0.020000	50.001	2500	1.0000

隙間は長さ 8192 の輪での相関の傾きと 6 桁、C_P は 256 点の輪の $-\Delta_{\mathrm{lat}} + m^2$ の最小固有値と一致します 計算 。$C_P/\xi^2 \to 1$ が自由場の $z = 2$ です。

06

自己相関時間と Poincaré 定数 — 等号は連続時間でだけ

力学を平衡から走らせたとき、観測量 f の値が時間 t 離れて持つ相関を分散で割ったものを自己相関 $\rho_f(t)$ と呼びます。その最も遅い減衰の時間が $\tau_{\exp}$、$\tau_{\mathrm{int},f} = \frac{1}{2} + \sum_{t \ge 1} \rho_f(t)$ が積分自己相関時間で、標本平均の分散は約 $2\tau_{\mathrm{int},f}\mathrm{Var}(f)/n$ です（Wolff 2004） 既知 。連続時間では和を積分に替え、$\tau_{\mathrm{int},f} = \int_0^\infty \rho_f(s)\,ds$ とします。連続時間の可逆な力学では $\rho_f(s) = \int e^{-s\lambda} d\nu_f(\lambda)$、$\nu_f$ は $[\mathrm{gap}, \infty)$ に載るので

$$\tau_{\exp} = \frac{1}{\mathrm{gap}(L)} = C_P, \qquad \tau_{\mathrm{int},f} = \int \frac{d\nu_f(\lambda)}{\lambda} \;\le\; C_P \tag{10}$$

です。離散時間の可逆な連鎖（固有値 $1 > \lambda_2 \ge \cdots > -1$）では三つに割れます（Levin–Peres–Wilmer §12.2） 既知 。

$$C_P = \frac{1}{1-\lambda_2}, \qquad t_{\mathrm{rel}} = \frac{1}{1-\lambda_\star}, \qquad \tau_{\exp} = \frac{-1}{\log \lambda_\star}, \qquad \lambda_\star = \max_{\lambda \ne 1} |\lambda| \tag{11}$$

例：AR(1) 連鎖 $X_{n+1} = \rho X_n + \sqrt{1-\rho^2}\, Z$（固有値 ρ^k）で $\rho = -0.9$ なら $C_P = 5.263$、$t_{\mathrm{rel}} = 10$、$\tau_{\exp} = 9.491$ と三つとも違い、τ_{int} は x で 0.026、x^2 で 4.763 です。連続時間（Ornstein–Uhlenbeck）では三つとも 1 に揃います 計算 。怠惰な連鎖（毎回確率 1/2 でその場に留まる連鎖。固有値がすべて 0 以上になる）なら $\lambda_\star = \lambda_2$ で $C_P = t_{\mathrm{rel}}$ です（LPW §12.2・Exercise 12.3） 既知 。

力学の違いと混合時間

熱浴法（変数を一つずつ条件つき分布から引き直す方法）・Langevin・HMC（ハイブリッド・モンテカルロ、Duane ほか 1987。人工の運動量を足して古典力学で一定時間動かし、受理か棄却で補正する方法）は生成作用素が別で、HMC の時間を Langevin の C_P とみなすのは仮定です（5-07）。熱化時間と混合時間も条件つきの対です。混合時間 $t_{\mathrm{mix}}(\varepsilon)$ は、どの初期状態から始めても、分布と平衡分布 π の全変動距離（二つの分布が同じ事象に与える確率の差の最大）が ε 以下になるまでの歩数です。上界 $t_{\mathrm{mix}}(\varepsilon) \le t_{\mathrm{rel}} \log(1/(\varepsilon \pi_{\min}))$（LPW 定理 12.4。$\pi_{\min}$ は π の最小の確率）の $\log(1/\pi_{\min})$ は体積とともに増えます。これは有限状態の可逆な連鎖の定理で、連続な群に値をとるゲージ場では $\pi_{\min}$ が意味を持たず、log-Sobolev 定数（§07）など別の道具が要ります。

07

臨界減速 — z・従来理論・二つの η

ξ が伸びると力学の緩和も遅くなります（臨界減速）。物理は動的スケーリングの仮説 $\tau \propto \xi^z$ で書き、z を動的指数と呼びます（Halperin–Hohenberg 1969・Hohenberg–Halperin 1977）。z は力学と観測量で変わります。(8) は Hohenberg–Halperin の分類で model A と呼ばれる、保存量の無い緩和型の力学です。数学では $C_P \asymp \xi^z$ ですが、冪の存在そのものが仮説で、ヤン–ミルズで C_P の ξ 依存を冪として決めた定理はありません（「動的指数 z」の項）。

従来理論と RG

静的な指数は 2-08 のもので、$\xi \sim |t|^{-\nu}$、$\chi \sim |t|^{-\gamma}$（t は臨界点からの温度の隔たり）、η_s は臨界点の相関 $G(x) \sim |x|^{-(d-2+\eta_s)}$ が自由場の冪からずれる分（異常次元）です。スケーリングの関係 $\gamma = \nu(2-\eta_s)$ から $\chi \propto \xi^{\gamma/\nu} = \xi^{2-\eta_s}$ です 物理 。従来理論（van Hove の名で呼ばれる）は緩和時間を χ に比例させて $z = 2 - \eta_s$ とする、と整理されています 物理 。Wilson の展開法を運動論的 Ising 模型の連続版に使った Halperin–Hohenberg–Ma（1972）の要旨は、結果が 'disagree with the mode-mode coupling approach and the conventional (Van Hove) theory' と書きます。RG（ε 展開）と数値はどちらも $z > 2 - \eta_s$ を示唆します（表 2） 物理 。

表 2　動的指数 z と $2-\eta_s$（η_s は静的な異常次元）

模型・方法	$2-\eta_s$	z	$\eta_{\mathrm{dyn}}=2-z$
二次元 Ising・Glauber の数値	1.75	2.1665(12)	-0.1665
二次元 Ising・5 ループ（ε 展開）	1.75	2.14(2)	-0.14
三次元 Ising・Glauber の数値	1.9637	2.032(3)	-0.032
三次元 Ising・5 ループ（ε 展開）	1.9637	2.0235(8)	-0.0235
自由場・Langevin	2	2	0

計算 $2-\eta_s$（二次元は $\eta_s=1/4$、三次元は $\eta_s=2\Delta_\sigma-1$、スピンの尺度次元 $\Delta_\sigma=0.5181489(10)$）と η_{dyn} はこの端末で計算。z と Δ_σ は一次資料の値 物理 。Glauber はスピンを一つずつ確率的に更新する力学。

変分の下界

数学の側の対応は変分の下界です。(9) に $f=M=\sum_x \phi_x$ を入れると $|\nabla M|^2=|\Lambda|$（点の数）、$\mathrm{Var}(M)=|\Lambda|\chi_\Lambda$ なので

$$C_P \;\geq\; \frac{\mathrm{Var}(M)}{\mathcal{E}(M)} = \chi_\Lambda \tag{12}$$

で、有限体積のどの格子でも成り立つ定理です 既知 。自由場では $\chi=1/m^2=C_P$ で等号です（表 1）。ここから指数の下界に移るには二つの仮説が要ります。動的スケーリング $C_P \asymp \xi^{z}$ と静的スケーリング $\chi \asymp \xi^{\gamma/\nu}$ で、その下で $z \geq \gamma/\nu = 2-\eta_s$ です 物理 （モンテカルロ法の文献で標準とされる下界）。同じ型の不等式から確かな下界を出した例に、Swendsen–Wang 法の $z_{\mathrm{sw}} \geq \alpha/\nu$（$\alpha$ は比熱の指数。Li–Sokal 1989 の要旨）があります 既知 。従来理論の値はちょうどこの下界にあたり、表 2 の z はどれも下界より大きい側にあります。

ゲージ理論では、この形では ξ^2 に届きません 物理 。演算子の次元 Δ を、相関が短い距離で $|x|^{-2\Delta}$ のように振る舞うときの冪で測ると、ゲージ不変な局所演算子の最低の次元は 4 です。次元 4 の演算子の二点相関は $|x|^{-8}$ で減るので、四次元でのその和 χ は短い距離で決まり、ξ とともに増えません（23-01）。

二つの η

η は二つに分けます。静的な η_s は上の異常次元、動的なのは $\eta_{\mathrm{dyn}} := 2-z$ で、等しいのは従来理論の中だけです（表 2 では符号まで違う）。この本では添字を必ず付け、記録の η がどちらかは 18-05 で固定します。

非臨界では減速しない

逆に ξ が有限なら減速しない、というのが物理の前提です（「非臨界では減速しない」の項）。数学の形には二つの道具を使います。log-Sobolev 不等式は、分散の代わりにエントロピーを

$\mathcal{E}$ で抑える不等式

$$\int f^2 \log \frac{f^2}{\int f^2 \, d\mu} \, d\mu \;\le\; 2C_{LS}\,\mathcal{E}(f)$$

で、Poincaré 不等式より強く $C_P \le C_{LS}$ を導きます 既知 。Dobrushin–Shlosman の混合条件は、有限の箱にどんな境界条件を課しても、箱の中の相関が距離とともに一様な率で指数的に減ることです。非臨界で減速しないことの数学の形は、離散スピン系（有限のスピン空間・有限の到達距離）では「境界条件によらない一様な混合（Dobrushin–Shlosman）$\Longleftrightarrow$ 一様な log-Sobolev」という同値の定理です（Stroock–Zegarlinski 1992。書誌のみ） 既知 。相関長が有限なだけでは仮定が足りません。連続な群に値をとるゲージ場での同値は、この章の材料の範囲では見当たりません。格子ヤン–ミルズでは Shen–Zhu–Zhu（2023）が強結合で Poincaré・log-Sobolev・指数減衰を示しています。どちらの結果も $\xi \to \infty$ の側の冪は決めません。

寄り道：自由場では緩和時間と感受率が一致する

飛ばしてよい小節です。

自由場 $S = \frac{1}{2}\sum_x [(\phi_{x+1}-\phi_x)^2 + m^2\phi_x^2]$ で (8) を点について足し合わせると、隣との結合の項が打ち消し合い、平均 M は

$$dM = -m^2 M\, ds + \sqrt{2/N}\, dW(s)$$

に従います（N は点の数、W は一つの Brown 運動）。M は一つの Ornstein–Uhlenbeck 過程で、緩和時間は $1/m^2$、感受率 $\chi = \sum_x \langle \phi_x \phi_0 \rangle = 1/m^2$ と同じ値です（この端末の計算でも、表 1 のどの m でも χ と C_P が一致） 計算 。従来理論の「緩和時間 $\propto \chi$」は、自由場で正確なこの関係と同じ形です。相互作用があると両者はずれるとされ、表 2 の $z > 2 - \eta_s$ がそのずれにあたります 物理 。

08

管の揺らぎと位相の凍結 — 有効弦・Wulff・ボトルネック

有効弦と Lüscher 項

長い電束の管は横の並進を自発的に破り、Goldstone ボソンが 1+1 次元に住みます（Lüscher 1981）。Goldstone ボソンは、連続な対称性が自発的に破れたときに現れる質量ゼロの揺らぎで、ここでは管の横の位置の揺らぎです。その揺らぎは $V(R)$ に普遍な $1/R$ の項を足します（Lüscher–Symanzik–Weisz 1980、17-03）。

$$V(R) = \sigma R + \mu + \frac{\gamma}{R} + O(R^{-2}), \qquad \gamma = -\frac{\pi (d-2)}{24} \tag{13}$$

二次元の共形場理論（距離の拡大縮小を含む対称性をもつ二次元の場の理論）は中心電荷 c という数をもち、自由なボソン一つが $c = 1$ です。幅 R の帯に閉じ込めた揺らぎの基底エネルギーのうち幅に依る部分（Casimir エネルギー）は c に比例し（Blöte–Cardy–Nightingale 1986・Affleck 1986）、開いた帯で $-\pi c/(24R)$、周の長さ L の周期の帯で $-\pi c/(6L)$ です。$c = d - 2$ とおくと前者は γ、後者は $d = 4$ で $-\pi/(3L)$ で、格子で弦張力を取り出すときに差し引く補正と一致します（Lucini–Teper 2001） 計算 。格子の σ には「管の中心電荷は $d-2$」という物理の仮定が入っています（「Lüscher 項」の項）。

硬い管と粗面化

面積則が示されている強結合では、管は硬いとされます。正確には、面を一格子ずらすごとに小さな重みが掛かり、横の揺らぎが指数的に抑えられるという意味です（17-03）。強結合の管の形は、向きに依る張力から作る Wulff 構成との類比で読めます。Wulff 構成は、向きごとの張力 $\tau(\mathbf{n})$ の下で、囲む面積を固定して周の張力の総和を最小にする形を与える作図です（17-03）。揺らぐ管の領域とは粗面化転移（荒れの転移、roughening）で隔てられているとされます。これは Lüscher 1981 の題（要旨）にある物理の描像で、格子ゲージ理論でその存在を示した定理は、この章の材料には見当たりません 物理 （「粗面化・管の形」の項）。

位相電荷の凍結とボトルネック

純ゲージの HMC では、位相電荷の二乗の有効な動的指数が約 5 で、Wilson ループはこの遅いモードから切り離されます（Schaefer–Sommer–Virotta 2011 の要旨） 物理 。数学の言葉はボトルネックで、配位の集合 A（位相電荷が 1 に近い配位など）の指示関数をなめらかにした f を変分原理に入れると

$$C_P \;\geq\; \frac{\mathrm{Var}(f)}{\mathcal{E}(f)} \;\approx\; \frac{\mu(A)\bigl(1-\mu(A)\bigr)}{\mathcal{E}(f)} \tag{14}$$

で、A と外をつなぐ通路が細いほど C_P は大きくなります 既知 （二つの谷の模型、1-10）。正確には、A の境界付近の配位の測度が小さく、そのため $\mathcal{E}(f)$ が小さくなることです。(14) は定理ですが、それが凍結の原因であることと、HMC の現象を Langevin の C_P に移すことは確かめられていません（「位相電荷の凍結」の項、23-02）。

寄り道：位相電荷の区画と細い通路

飛ばしてよい小節です。

連続の場では位相電荷（第二 Chern 数、3-05・18-04）は整数で、値の違う配位の区画はなめらかな変形ではつながりません。格子では位相電荷は近似的にしか整数でなく、区画は格子間隔の大きさの粗い配位を通ってつながります。その通路が $a \to 0$ で細くなると見込まれています 物理 。(14) の A を「位相電荷が 1 に近い配位」に取ると、この見込みは C_P の下界が大きくなることに翻訳されます。通路がどの速さで細くなるかを示した定理はありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 (1) の片向き、(2)、σ の存在、中心対称性から閉じ込めへの定理と一様な減衰から面積則への定理（Chatterjee 2021）、(10)(11)、怠惰な連鎖で $C_P = t_{\mathrm{rel}}$、変分の下界 (12)(14)、離散スピン系での「一様な混合 $\Longleftrightarrow$ 一様な log-Sobolev」、三次元のコンパクト U(1) の結果（要旨）。	どの対も逆向きの定理。四次元の連続理論でこれらの量が在ること。「未確定」の対がどちらに動くか。連続な群に値をとるゲージ場での混合と log-Sobolev の同値。
計算 表 1、表 2 の差、図 1 と平均 M の自己相関時間、§06 の例、自由場で緩和時間と χ が一致すること、$\pi/(3L)$。	表 2 の z はこの端末の測定ではない。
物理 $m/\sqrt{\sigma}$・$\sqrt{\sigma}$・グルーボール・z の数値、二つのスケーリング仮説の下の $z \geq \gamma/\nu$、管の硬さと粗面化、位相の区画の通路。	定理ではない。外挿の形と $c = d - 2$ は仮定。$\sqrt{\sigma}$ の MeV への換算は別の理論からの借用。
緩和時間の仮定・鎖 (ii) がどの対に当たるか（「Λ・一尺度」の項・「z=2」の項）と、緩和時間の仮定が時間の規格化を固定した言明であること。	それらの証明。質量ギャップ・閉じ込め・連続極限については何も示さない。

出典と再現

もの	種別	出典・道具（確認の水準）
ギャップ・クラスター性・一粒子状態・転送行列	既知	Jaffe–Witten（Clay の問題文）§4–§6（本文）。Lüscher, CMP 54 (1977) 283（要旨のみ）；Osterwalder–Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（要旨：転送行列・強結合での無限体積極限と解析性・Wilson の閉じ込め評価。指数クラスター性は本文未確認）；Schor, NPB 222 (1983) 71・231 (1984) 321（要旨のみ）；Shen–Zhu–Zhu, CMP 400 (2023) 805（要旨のみ。'strictly positive mass gap'）。
ξ・V・σ・閉じ込め・中心対称性	既知	Chatterjee, arXiv:1803.01950；CMP 385 (2021) 1007, arXiv:2006.16229（本文）。Bachas, PRD 33 (1986) 2723；Wilson, PRD 10 (1974) 2445；Polyakov, PLB 72 (1978) 477；Susskind, PRD 20 (1979) 2610；Svetitsky–Yaffe, NPB 210 (1982) 423；Adhikari–Cao, Ann. Probab. 53 (2025)（要旨のみ）。Borgs–Seiler, CMP 91 (1983) 329（書誌のみ）。Göpfert–Mack, CMP 82 (1982) 545–606, doi:10.1007/BF01961240（要旨で確認。INSPIRE。本文は未読。年は Crossref の発行年で、INSPIRE は 1981）。
$m/\sqrt{\sigma}$・$\sqrt{\sigma}$・0^{++}・$\pi/(3L)$	物理	Athenodorou–Teper, JHEP 11 (2020) 172（$\sqrt{\sigma}$ の換算と断りは §5.2）・JHEP 12 (2021) 082；Lucini–Teper, JHEP 06 (2001) 050；Morningstar–Peardon, PRD 60 (1999) 034509（本文）。

もの	種別	出典・道具（確認の水準）
二つの時間・自己相関・混合時間・HMC	既知・物理	Levin–Peres–Wilmer, *Markov Chains and Mixing Times* 2nd ed. §12.2・Exercise 12.3・定理 12.4（本文）。Zwanziger, NPB 192 (1981) 259；Wolff, CPC 156 (2004) 143；Duane ほか, PLB 195 (1987) 216（要旨のみ）。Parisi–Wu, Sci. Sin. 24 (1981) 483（書誌のみ）。
臨界減速・表 2・変分の下界・非臨界の同値	物理・既知	Halperin–Hohenberg–Ma, PRL 29 (1972) 1548（要旨）。Nightingale–Blöte, PRB 62 (2000) 1089（書誌のみ。二次元の 2.1665(12) の出所）；Liu ほか, PRE 108 (2023) 034118（要旨：2.1665(12) の再確認と三次元の値）；Adzhemyan ほか, PLA 425 (2022) 127870, arXiv:2111.04719（要旨：5 ループの値）；Kos ほか, JHEP 08 (2016) 036（要旨）；Li–Sokal, PRL 63 (1989) 827（要旨）。Halperin–Hohenberg, Phys. Rev. 177 (1969) 952・RMP 49 (1977) 435（要旨のみ）。Stroock–Zegarlinski, CMP 144 (1992) 303（題：log-Sobolev 不等式と Dobrushin–Shlosman の混合条件の同値）・CMP 149 (1992) 175（題：離散スピン系の log-Sobolev 不等式）（書誌のみ）。van Hove の $z = 2 - \eta_s$ の形と下界 $z \geq \gamma/\nu$ の典拠は未確認。
有効弦・中心電荷・位相の凍結	物理	Lüscher–Symanzik–Weisz, NPB 173 (1980) 365；Lüscher, NPB 180 (1981) 317（題に roughening）；Blöte–Cardy–Nightingale・Affleck, PRL 56 (1986) 742・746；Schaefer–Sommer–Virotta, NPB 845 (2011) 93（要旨のみ）。
Wulff 構成・粗面化	物理	この章では出典未確認（Dobrushin–Kotecký–Shlosman は書誌未確認）。作図と例は 17-03 とその出典表。
緩和時間の仮定・鎖 (ii)	仮定・類比	本書の検討の記録の整理（23-01・17-12）。
表 1・表 2 の差・図 1・§06・§07 の寄り道・§08 の数値	計算	この端末の Python 3（numpy）：`two_times.py`・`zero_mode.py`・`ar1.py`・`exponents.py`。

次に読む章：18-04 尺度と極限の辞書。記録の仮定との対応は 18-05。

尺度と極限の辞書 — 流れの語は写像に、極限の語は存在の問いに訳される

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 尺度と極限の物理の語 23 項目を数学の語と対にし、18-01 の二列で格付けします。スキーム変換が一度きりのずれであること（表 1）と、Migdal–Kadanoff の近似再帰の流れ（図 1）も見ます。

前提となる章 — 4-06・7-05・17-08。二列は 18-01、質量と長さは 18-03。§04 の指標と Bessel 関数は 7-02 にあり、§04 で最小限を補います。

先に言うこと — 対応を並べるだけで、流れも連続極限も構成しません。図 1 は近似の再帰の計算で、四次元の格子の理論の主張ではありません。

この章の順序

1. 見取り図 — 表 0
2. 繰り込み群と β 関数 — 段の列と Polchinski の方程式
3. 格子の上の流れ — 表 1
4. Migdal–Kadanoff と階層格子 — 図 1／寄り道：一段の減りが $(1-b^{-2})/3$ になる理由
5. 連続極限と a(β) — 二つのスケーリング
6. 普遍性・Symanzik・周辺性 — 改善の代償
7. 大 N・マスター場・ホログラフィー・KK 塔
8. 位相・インスタントン・Wilson 流・Gribov 領域
9. 数学の側に語の無かったもの — トレース異常

01

見取り図 — 流れ・極限・幾何の尺度

語は三群に分かれます。**流れ**の語（繰り込み群・β 関数・Λ）は、段の写像の性質に訳されます。例：「β 関数が負」は「格子間隔を 2 倍にする一段が、弱結合の側で β をほぼ一定量ずつ下げる」になります（§02・§03）。

極限の語（連続極限・$a(\beta)$・普遍性）は、「極限が在るか、一つか」という問いに訳されます。例：「普遍性」は「作用の細部を変えても同じ極限の測度に行く」という一意性の主張です（§05・§06）。

幾何の尺度の語（N・余分な一方向・流れの時間・位相）は、別の尺度を足して理論を見る語です。古典なら定理で一致するものが多い群です。例：「インスタントン」は反自己双対接続そのものです（§07・§08）。

記号：$\beta = 2N/g^2$ は格子の結合の係数（統計力学の逆温度ではありません）、b は一段の倍率（格子間隔 a を b 倍にする）、$\kappa = 4Nb_0$（SU(2) で 0.3715、A-01）です。漸近自由（4-06）を格子の結合で書くと一段の走りになります。SU(2) で a を 2 倍にすると β は約 0.2575 下がり、a を半分にするには同じだけ上げます。

$$\beta(ba) = \beta(a) - \kappa \ln b + O(1/\beta) \qquad \text{(一ループ。} O(1/\beta) \text{ は二ループ以降)} \tag{1}$$

表 0　尺度と極限の辞書の一覧（(a) 定義としての対応・(b) 四次元での実在・(c) 有限の測定で届く向き。水準と条件は本文）

#	物理の語	数学の語	(a)	(b)	(c)
1	繰り込み群	段の列・UV 安定性	条件つき	条件つき	—
2	β 関数	有効結合の再帰式	条件つき	条件つき	—
3	Polchinski の方程式	測度の分解の Polchinski 方程式（熱流）	確定	無い	—
4	MCRG の Δβ	一段の写像	条件つき	無い	—
5	Λ のスキーム変換	結合の再径数化	確定	構成済み（形式的冪級数）	—
6	Migdal–Kadanoff	階層格子の正確な再帰	条件つき	構成済み（階層格子）	—
7	連続極限	スケーリング極限	条件つき	無い	届かない
8	a(β)・尺度の設定	ε(β)（連続の弦張力の問題）	未確定	無い	—
9	スケーリング	無次元比の極限	未確定	無い	届かない

#	物理の語	数学の語	(a)	(b)	(c)
10	漸近スケーリング	ε(β) の漸近形	未確定	無い	届かない
11	普遍性	極限の一意性	条件つき	無い	届かない
12	Symanzik の $O(a^2)$	段の取りこぼし δ(b)	未確定	無い	—
13	改善作用	反射正値性の喪失（負の重みの寄与）	確定（次元 6 の演算子を足した作用）	構成済み（格子）	—
14	周辺的な結合	Sobolev の臨界指数	確定	構成済み（古典）	—
15	大 N・平面図	平面地図・弦の和	条件つき	条件つき	—
16	マスター場	非可換分布の極限	条件つき	無い	—
17	ホログラフィーの動径	Fefferman–Graham 展開	未確定	無い	—
18	KK 塔	内部ラプラシアンの λ_1	条件つき	対象外	上界まで
19	位相電荷	第二 Chern 数	条件つき	条件つき（格子）	—
20	インスタントン	反自己双対接続	確定	構成済み（古典）	—
21	Wilson 流	ヤン–ミルズ熱流	確定	構成済み（古典）	—
22	Gribov 領域	FP 作用素の正値域	確定	構成済み（古典）	—
23	トレース異常	対応語なし	未確定	無い	—

注：表 0 の (b) の列は、公開された構成（2026-11-10）より前の読みです。§02・§09 のとおり、連続極限（行 7）とトレース異常（行 23）の行は、公開された構成で動く候補です。

(c) は 18-01 §02 の測定の列（有限の測定で届く向き）。極限と一意性の行（「連続極限」「スケーリング」「漸近スケーリング」「普遍性」の項）は届かず、「KK 塔」の項の λ_1 は試験関数一つで上界が出ます（1-10）。(b) の「無い」は 18-01 §04 のとおり「まだ作られていない」の意味です。「MCRG の Δβ」の項・「スケーリング」の項・「漸近スケーリング」の項には格子の数値（物理の水準）があり、§03・§05 で扱います。

02

繰り込み群と β 関数 — 写像の列に訳す

繰り込み群は、短い尺度の揺らぎを積分して、長い尺度の有効な作用に移る操作です。Wilson（1971）は Kadanoff のスケーリングの理論を微分方程式の形に書き直しました（要旨 'The Kadanoff theory of scaling … is cast in differential form'）既知 。写像の存在と不動点への収束は、物理では前提です。数学では、一段の写像 R_b の合成を一様に評価する**段の列**になります（7-05）。

$$\mu_a \xrightarrow{R_b} \mu_{ba} \xrightarrow{R_b} \mu_{b^2 a} \to \cdots, \qquad \text{有効作用 } S_k \text{ を } k \text{ に一様に制御する} \tag{2}$$

四次元の純ゲージで Bałaban（1987・1989）は有効作用の列を作り、有限体積の UV 安定性を示しました。Chatterjee（2018）§6 は収束する部分列の存在を UV 安定性と呼びます[既知]。Bałaban の方法では、軌道の収束と観測量の極限は未証明です（7-07）。2026-11-10 に公開された構成は、別の設計の繰り込みの段の列で、局所の観測量の相関の極限を取っています（第 9〜11 部）。β 関数（「β 関数」の項）の符号と正確な流れの一致は、二次元の Gross–Neveu で定理です（Gawędzki–Kupiainen 1985）。四次元では Bałaban の小場近似の再帰までです。

Polchinski の方程式

Polchinski（1984）は、四次元の $\lambda\phi^4$ で運動量の切断を連続に動かしたときの有効作用の変化を、正確な繰り込み群の方程式に書きました。そのうえで、摂動の繰り込み可能性を示しました[既知]。数学の側にも同じ方程式があります。ガウス測度の共分散を尺度ごとの和に分け、細かい尺度から一枚ずつ積分すると、残りの有効な作用 V_t がこの方程式に従います。e^{-V_t} に直すと、ガウスの核による畳み込み、つまり熱方程式の流れです[既知]。対は方程式どうしなので、「Polchinski の方程式」の項の (a) は確定です。

この方程式の上に立つ判定法もあります。log-Sobolev 不等式は $\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \le 2C \int |\nabla f|^2 d\mu$ の形の不等式です。Poincaré 不等式 $\mathrm{Var}_\mu(f) \le C \int |\nabla f|^2 d\mu$（1-10）の分散をエントロピー $\mathrm{Ent}_\mu(g) = \int g \ln g \, d\mu - \int g \, d\mu \, \ln \int g \, d\mu$ に替えた、より強いもので、確率的な力学が平衡に戻る速さを保証します。Bauerschmidt–Bodineau（2021）は Polchinski の方程式の制御によって Bakry–Émery の判定法（1-10）を多重スケールに広げました。そして、質量つきの連続 sine-Gordon 模型（二次元の模型、その結合 $\beta_{\mathrm{sG}} < 6\pi$）で漸近的に最適な log-Sobolev 不等式を示しました[既知]。判定法は対の上に立つ道具なので、条件の側に置きます。四次元への適用は無いので、(b) は「無い」です。

03 格子の上の流れ — MCRG と一度きりのずれ

MCRG（Swendsen 1979）は、$b = 2$ でブロック化した観測量が結合 $\beta - \Delta\beta$ の格子と合うよう $\Delta\beta$ を決めます。SU(3) の最初の結果（Gupta ほか 1984）は、基本表現の結合 $K_F < 6.1$ で漸近スケーリングが無いと報告しました[既知]。$\Delta\beta$ は a を 2 倍にしたときの β の下げ幅で、4-06 の表 4 の「a を半分にする上げ幅」と同じ量を、別の方法で測るものです。数学の対は一段の写像 $\beta \mapsto \beta - \Delta(b)$（$\Delta(b)$ は一段の減りで、質量ギャップの Δ とは別）で、同じ射影（Wilson 形への合わせ方）を選べば同じ量です（「MCRG の Δβ」の項）。

同じ定め方（スキーム）の中の一段を考えます。弱結合（$\beta \to \infty$）の主項で Δ が β に依らないとすると、二段続けても一度に $b_1 b_2$ 倍しても同じなので

$$\Delta(b_1 b_2) = \Delta(b_1) + \Delta(b_2) \quad \Longrightarrow \quad \Delta(b) = C \ln b \tag{3}$$

です（単調性の下の Cauchy の関数方程式）。定数 C は加法性だけでは決まらず、(1)（一ループ）と比べて $C = \kappa$ です。二ループ以降では Δ に $O(1/\beta)$ の β 依存が残り、(3) はそれを無視した主項の式です。

(1) を積分した一ループの式は $\beta = -\kappa \ln(a\Lambda)$ です（4-06 の式 (8) の一ループの部分）。定め方の取り替え $\tilde{\beta} = \beta - c + O(1/\beta)$ は、写像を共役で移すだけで Δ の主項を変えません。変わるのは Λ の読みで、$\tilde{\beta} = -\kappa \ln(a \Lambda e^{c/\kappa})$ から $\tilde{\Lambda} = \Lambda e^{c/\kappa}$、つまり Λ が一度だけ $e^{c/\kappa}$ 倍になります（「Λ のスキーム変換」の項）。Dashen–Gross（1981）はこの比を $\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}/\Lambda_{\mathrm{L}} = 38.852704\, e^{-3\pi^2/(11N^2)}$（N = 2 では 19.823）（Wilson 作用）と求めました既知 。

計算 表 1　Dashen–Gross の比と、それに当たる β のずれ $c_N = \kappa_N \ln$(比)（$\kappa_N = 11N^2/12\pi^2$）。c_N は β を下げる量で、$\beta_{\overline{\mathrm{MS}}} = \beta_{\mathrm{L}} - c_N$（$\mu = 1/a$ で比べた一ループの関係）。段数は $c_N/(\kappa_N \ln 2)$

N	比	c_N	段数
2	19.823	1.1096	4.309
3	28.809	2.8092	4.848
∞	38.853	–	5.280

SU(2) では $c_2 = 1.1096$ が、$b = 2$ の一段の走り $\kappa \ln 2 = 0.2575$ の約 4.3 段ぶんです。Wilson 作用から $\overline{\mathrm{MS}}$ へ移ることは、β を一度だけ約 4.3 段ぶん下げること、つまり a を 2 倍にする段を一度だけ約 4.3 回余計に進めるのと同じです。段ごとに定数がずれる写像 $\Delta(b) = \kappa(\ln b - \delta(b))$ は (3) を破り、Λ の読みを段ごとに動かします。本書の検討の記録はこの形で $\delta(b)$ を「取りこぼし」と呼びます（23-02・18-05）。

04

Migdal–Kadanoff と階層格子 — 近似を別の格子の正確な再帰と読む

Kadanoff（1976）は Migdal（1975）の再帰式を決定化（decimation）の近似として導き直し、ポテンシャル（ボンド）移動の方式を提案しました（要旨）既知 。ここでは一段を二つの操作の組として書きます。**ボンド移動**は b^{d-2} 枚のプラケットを一か所に集め、重み f を $f^{\,b^{d-2}}$ にします。**決定化**は平面の $b \times b$ 枚を一枚にまとめます。決定化は二次元で正確です（7-02）。

記号を一行ずつ置きます。SU(2) の元 U の固有値を $e^{\pm i\theta}$ とし、Wilson 作用の一枚の重みを $e^{\beta \cos\theta}$（$\beta = 4/g^2$）と書きます。χ_n は n 次元の既約表現（スピン $(n-1)/2$）の指標で、$\chi_n(U) = \sin n\theta / \sin\theta$、次元は $d_n = n$ です。I_n は修正 Bessel 関数 $I_n(x) =$

$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\theta}\cos n\theta\,d\theta$ です。重みを指標で $f=a_1\sum_n d_n c_n \chi_n$ と展開した係数 c_n（$c_1=1$）を規格化した係数と呼び、決定化は $c_n \mapsto c_n^{b^2}$ です。7-02 は重みを $e^{\beta\,\mathrm{Re\,tr}\,U}$ と書くので、7-02 の β はこの章の $\beta/2$ です。

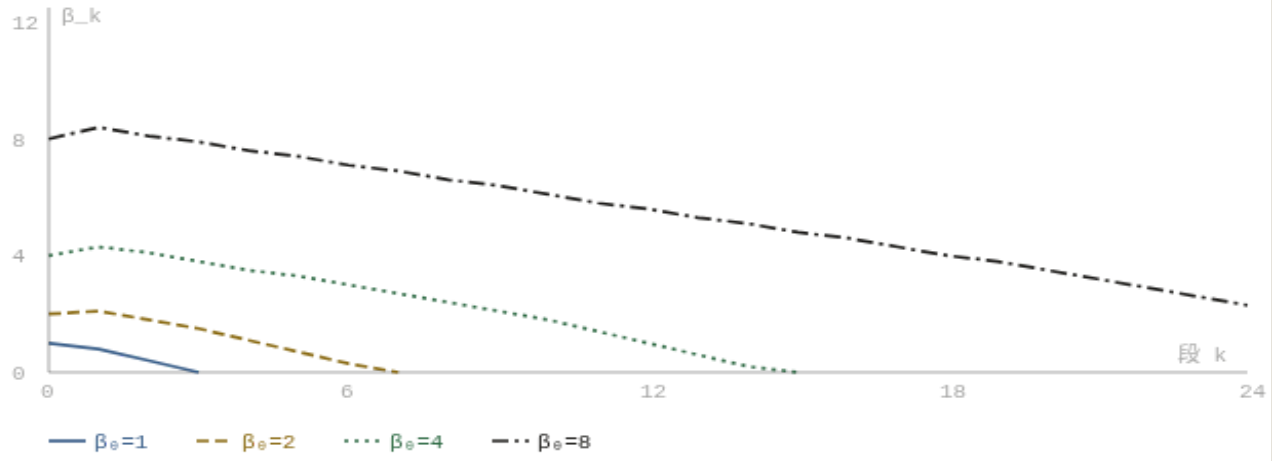
$$c_n \longmapsto \left[c_n\left(f^{\,b^{d-2}}\right)\right]^{b^2}, \qquad \text{SU(2) の Wilson 作用では } c_2=\frac{I_2(\beta)}{I_1(\beta)} \tag{4}$$

近似はボンド移動にだけあります。二つの操作を入れ子に繰り返して作った格子（階層格子）の上では、(4) は構成から正確になります。スピン系の階層格子には Griffiths–Kaufman（1982）があります。ゲージ理論では Ito（1985）が、MK の再帰が正確に成り立つ四次元の階層格子のゲージ理論で、SU(N) などの群について永久閉じ込めを示しました（要旨 'hierarchical lattice gauge theories in which the Migdal-Kadanoff approximate renormalization recursion formulas hold exactly'）既知。物理の「近似」は、数学では「別の格子の上の正確な写像」です（「Migdal–Kadanoff」の項。(b) はこの階層格子の水準）。

例：強結合では $c_2\approx\beta/4$ なので、$d=4$・$b=2$ の一段は $\beta'\approx 4\beta^4$、決定化だけなら $\beta^4/64$ です（$\beta=0.1$ で 3.895×10^{-4}・1.560×10^{-6}）計算。後者は記録の一段の記帳（23-02）の強結合の式で、因子 b^{d-2} の不足は記録でも既知です。

流れの行き先と一段の減り

図 1　Migdal–Kadanoff の流れ（$b=2$）。つまみで d、ボタンで群を変えると、四つの出発点からの β_k の行き先が変わる。「動かす」で段を進める。線の色と破線の型は、下端の凡例の出発点 β_0 に対応する



d = 4・SU(2)：1 → 強結合へ　2 → 強結合へ　4 → 強結合へ　8 → 24 段で 2.3 まで下がる

計算 この図の数値はこの端末で計算した（重み関数を 8000 点・指標 400 個で反復し、β は (4) の c_2、U(1) は I_1/I_0 で読む）。JavaScript が無ければ次の二段落で読める。

$d<4$ では強結合へ、$d>4$ では弱結合へ流れ、$d=4$ が境目です。$d=4$ の SU(2) は、調べた出発点（$\beta_0\le 20$）ではすべて強結合へ向かいます（$\beta_0=8$ は 31 段、20 は 79 段で $\beta<0.05$

）計算。U(1) は、出発点が $\beta_0 \geq 1$ なら $\beta \approx 1.4$ 以上の値で止まり、固定点の線に乗ります（5-06）。一段目は Wilson 形から再帰の決まった形へ移るので上がり、これも一度きりのずれです。

弱結合で形が落ち着いた後の一段の減り（$d=4$・SU(2)、$\beta_0 = 60$ から 10 段目）は、$b = 2, 3, 4$ で 0.2503・0.2965・0.3126 です計算。一ループが与える一段 $\kappa \ln b$ は 0.2575・0.4081・0.5150 です。MK の値は、下の寄り道の式 $(1 - b^{-2})/3$（0.2500・0.2963・0.3125）に合います計算。$b = 2$ では一ループの値の 97% ですが、$b = 2$ の二段（0.5006）と $b = 4$ の一段（0.3126）が違い、(3) を満たしません。MK の $a(\beta)$ は b に依ります。

寄り道：一段の減りが (1−b⁻²)/3 になる理由

飛ばしてよい小節です。

決定化 $c_n \mapsto c_n^{b^2}$ で形を保つ重みがあります。係数が $c_n = e^{-(n^2-1)/(2\beta)}$ の重みで、SU(2) の**熱核**と呼ばれます（7-02 §04 の Q_t で $t = 4/\beta$ としたもの）。決定化はこれを $\beta \mapsto \beta/b^2$ と動かすだけです。θ が小さいとき、この重みは

$$f_\beta(\theta) \propto \frac{\theta}{\sin\theta}\, e^{-\beta\theta^2/2}, \qquad \frac{\theta}{\sin\theta} = 1 + \frac{\theta^2}{6} + \cdots \approx e^{\theta^2/6}$$

と書けます既知。Wilson の重み $e^{\beta\cos\theta} \approx e^{\beta} e^{-\beta\theta^2/2}$ とは、前因子 $\theta/\sin\theta$ だけが違います。ボンド移動で b^2 乗すると（$d=4$）、前因子も b^2 個掛かります。熱核の形に要るのは一個なので、余分な $b^2 - 1$ 個が $e^{(b^2-1)\theta^2/6}$ として指数に入ります。

$$f_\beta^{b^2} \propto \frac{\theta}{\sin\theta}\, e^{-\left(b^2\beta - \frac{b^2-1}{3}\right)\theta^2/2}: \qquad \beta \;\mapsto\; b^2\beta - \frac{b^2-1}{3} \xrightarrow{\text{決定化}} \beta - \frac{1-b^{-2}}{3}$$

一段の減りは $(1-b^{-2})/3$ で、β に依りません。$\kappa \ln b$ と違って b について加法的でないのは、減りが対数からでなく、$\theta/\sin\theta$ の θ^2 の係数 $1/6$ から来ているからです。この計算は小さい θ の主項だけなので、本文の数値との一致（0.2500 と 0.2503 など）は計算で確かめた範囲です計算。

本書での使い方は 15-04 §02（同じ一段の写像の不変な曲線と縮み）。

05

連続極限と a(β) — 二つのスケーリング

連続極限（「連続極限」の項）について、Chatterjee（2018）§5 は物理の用法をまとめます。臨界点 β_c で相関長が発散すれば 'the model has a continuum limit' と言う、という用法です既知。スケーリング極限は、格子を $\varepsilon\mathbb{Z}^d$ に縮め、場を規格化して分布として弱収束させる操作で（2-08）、何を固定するかと規格化を指定すれば同じ操作です。物理の語が含む非自

明性は定義に入らず、四次元の Ising 型と ϕ^4 の極限はガウス的です（Aizenman–Duminil-Copin 2021、7-08）。

$a(\beta)$（「a(β)・尺度の設定」の項）の選び方は二通りあります。§5 の説明は相関長を固定し、連続の弦張力の問題は Wilson ループで存在量化します（18-03 の式 (4) と同じ式）。

$$\log\langle W_{R/\varepsilon,\,T/\varepsilon}\rangle = -c\,(R+T) - d\,RT + o(1), \qquad \varepsilon(\beta)\to 0,\ c(\beta)\to\infty,\ d\neq 0 \tag{5}$$

ここの d は面積則の係数（連続の弦張力に当たる数）で、(8) の次元 d とは別の記号です。連続の弦張力の問題は格子の相関長の問題（Problem 5.1）を前提にせず、どちらの $\varepsilon(\beta)$ も存在は未証明です。物理は弦張力（Creutz 1980）や r_0（Sommer 1994）で尺度を決めます物理。

スケーリング（「スケーリング」の項）は無次元の比が a に依らなくなること、**漸近スケーリング**（「漸近スケーリング」の項）は $a(\beta)$ が二ループの式に従うことです。

$$\frac{m_{\mathrm{lat}}(\beta)}{\sqrt{\sigma_{\mathrm{lat}}(\beta)}} \to \text{定数} \qquad \text{と} \qquad a\Lambda_{\mathrm{L}} = (b_0 g^2)^{-b_1/(2b_0^2)} e^{-1/(2b_0 g^2)}\bigl(1+O(g^2)\bigr) \tag{6}$$

格子の数値では、二つは別々に振る舞います。右のずれは、SU(3) の MCRG が $K_F<6.1$ で漸近スケーリングを見ないという報告（Gupta ほか 1984）に現れます。4-06 の表 4 でも、a を半分にする上げ幅のデータ（0.35〜0.52）が二ループの値（約 0.61）に届きません物理。左は、a^2 の補正を仮定した外挿で無次元比が一つの値に揃うことで支持されています（Lucini–Teper 2001 の $m/\sqrt{\sigma}$、Lüscher 2010 の $\sqrt{8t_0}/r_0$）物理。SU(N)・$N>4$ の当てはめは、$a(\beta)$ を $\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}$ 単位で決め切りません（Allton–Teper–Trivini 2008）物理。数学の対は、左が格子の相関長の問題と連続の弦張力の問題の組の極限（18-03 の「m/√σ」の項）、右が $\varepsilon(\beta)$ の漸近形で、どちらも定理はありません（5-05・5-09）。

06

普遍性・Symanzik・周辺性 — 変数の違う二つの誤差

普遍性（「普遍性」の項）は、作用の細部に依らず同じ極限が出ることです。Griffiths（1970）らが仮説として述べ、Wilson（1971）が無関係変数で説明しました。数学では極限の一意性で、定理は二次元にあります。等径グラフ上の Ising（Chelkak–Smirnov）と、二次元トーラス上の自明束の YM 測度で Wilson・Villain・Manton の作用が同じ測度に行くこと（Chevyrev–Shen）です既知。四次元では、Wilson 作用と改善作用が同じ理論を与えるのは前提です。

Symanzik（1983）の改善（「Symanzik の O(a²)」の項）は、無関係な項を足して有限の a の誤差を系統的に減らす考えです。一つの作用のもとで、無次元の比の誤差を a で展開します。

$$R(a) = R(0)\big(1 + s\,a^2 + \cdots\big)\ \ (a \to 0 \text{ で消える}) \qquad \text{対} \qquad \sum_{j<k} \kappa\,\delta(b_j)\ \ (\text{段ごとに溜まる}) \tag{7}$$

ヤン–ミルズでは a^2 の対数補正も弱いとされます（Husung–Marquard–Sommer 2020）既知。記録の $\delta(b) = c_2/b^2 + c_3/b^3 + O(b^{-4}\ln b)$ は倍率 b の展開で変数が違い、Symanzik との対は類比にとどまります（未確定）。例：20 段で、左は $4^{-20}s \approx 9\times10^{-13}s$、右は b 固定なら $20\kappa\delta(2)$ です。倍率を段ごとに一つずつ大きくした例 $b_j = j+2$ では、主項だけで $2.39\kappa\delta(2)$（段を限りなく続けた極限は $4(\pi^2/6-1) \approx 2.58$ 倍）です計算。

改善の代償（「改善作用」の項）

Lüscher–Weisz（1984）は、次元 6 の演算子を Wilson 作用に足すと 'physical positivity is lost in general' と書き、それでも転送行列は定義できることを示しました。その性質は二つです。複素固有値は現れうる（'may occur'）。二点関数のスペクトル分解には、負の重みの寄与が必ずある（'there are always contributions … that come with a negative weight'）既知。反射正値性（5-03）の言葉で言えば、「改善作用」の項の数学の語は「反射正値性の喪失（負の重みの寄与）」で、根拠は 'always' の側です。(a) は、次元 6 の演算子を足した作用について確定です（判定者は定理）。記録で $\delta(2)=0$ にする核も負の重みを持ち、同じ型かは 18-05 で扱います。

周辺性（「周辺的な結合」の項）

$A_\lambda(x) = \lambda A(\lambda x)$ と縮めると

$$\int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{tr} F_\lambda^2\, d^dx = \lambda^{4-d} \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{tr} F^2\, d^dx, \qquad g^2 \sim (\text{長さ})^{d-4} \tag{8}$$

で、$d=4$ で作用が尺度不変です（図 1 の境目）。数学では Sobolev の臨界指数です。L^p ノルム $\|F\|_{L^p} = (\int |F|^p\, d^dx)^{1/p}$ は p が大きいほど強い制御で、縮めると $\|F_\lambda\|_{L^p}^p = \lambda^{2p-d}\|F\|_{L^p}^p$ です。尺度を変えても変わらない指数 $p = d/2$ が臨界指数です（1-11・1-12）。Uhlenbeck（1982）の弱コンパクト性（接続の列から収束する部分列を取り出す定理）は、曲率の L^p の有界性で $p > d/2$ を要します。四次元の作用は $p = 2 = d/2$ で、ちょうど閾値です既知。問題文は、Sobolev 不等式が境界にある場合を漸近自由が救うという見通しを書きます（0-03）。一致は古典の次元勘定までです（7-09・四次元の記事）。

```
07
```

大 N・マスター場・ホログラフィー・KK 塔 — 別の尺度を足す語

この節の四つの語は、四次元の時空の外に尺度を一つ足して理論を見ます。足すのは、群の大きさ N、境界から内部への深さ、丸めた余剰次元の大きさです。

大 N と平面図（「大 N・平面図」の項）

't Hooft（1974）は、$\lambda = g^2 N$ を固定して $N \to \infty$ とすると平面図が支配すると示しました（摂動論、17-04）。定理として一致するのは二つです。行列模型の平面地図（Guionnet–Maurel-Segala）と、強結合の SO(N) 格子の Wilson ループを弦の軌跡の和で書いたもの（Chatterjee・Basu–Ganguly）です[既知]。

マスター場

$N \to \infty$ で揺らぎが消え、ゲージ不変量が一つの配位で決まる、という考えです。数学では非可換分布の決定的な極限に当たります。非可換分布は、$N \times N$ の確率的な行列の組 $X_1, X_2, \ldots$ について、積のトレースの期待値 $\frac{1}{N}\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(X_{i_1}\cdots X_{i_k})$ の全体を、行列の「分布」とみなしたものです（自由確率論の言葉）。平面の二次元ヤン–ミルズでは、Wilson ループがこの意味で決定的な極限に近づくことを Lévy が示しました（17-04）[既知]。

ホログラフィーの動径

内部の赤外が境界の紫外に映る（Susskind–Witten 1998）ことから、動径は境界の尺度と読まれます（17-08）。数学で確かなのは、境界近くの計量の展開（Fefferman–Graham）だけです。これは境界からの深さ z の冪で内部の計量を展開する式で、$ds^2 = (dz^2 + g_z)/z^2$、$g_z = g_{(0)} + z^2 g_{(2)} + \cdots$（$g_{(0)}$ が境界の計量）の形をとります[既知]。物理の側も、切断との対応を 'left unanswered' とします（Heemskerk–Polchinski 2010）[物理]。

KK 塔

余剰次元を内部空間 K に丸めると、質量の列が現れます。歪みの無い直積上の質量ゼロのスカラーなら

$$m_1^2 = \lambda_1(\Delta_K) \qquad (\text{半径 } R \text{ の円なら } 1/R^2) \tag{9}$$

です（17-06）[既知]。$\lambda_1(\Delta_K)$ は K の上のラプラシアンの 0 でない最小の固有値です。KK 塔を Λ から離しつつ幾何の計算を保つ構成は知られていません（17-10）。純ヤン–ミルズには余剰次元が無いので、(b) は対象外です。

08

位相・インスタントン・Wilson 流・Gribov 領域 — 古典では確定する語

この節の四つの語は、古典の場について定理で数学の語と一致します。量子の場に持ち込むところで、条件か物理の水準になります。

インスタントン

この節の規約は A-01 と同じで、g を作用の前に出し、F には含めません：$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]$（$A_\mu = A_\mu^a T^a$）。エルミートな生成子は $\operatorname{tr} T^a T^b = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ と規格化するので、作用は $S = \frac{1}{2g^2}\int \operatorname{tr} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{4g^2}\int F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}$ です。双対を $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$（$\varepsilon$ は完全反対称で $\varepsilon_{1234} = 1$）と置くと、$\int (F^a \mp \tilde{F}^a)^2 \geq 0$ から作用は位相電荷で下から抑えられます。

$$S \geq \frac{8\pi^2}{g^2}|Q|, \qquad Q = \frac{1}{32\pi^2}\int F^a_{\mu\nu}\tilde{F}^a_{\mu\nu}\, d^4x \in \mathbb{Z} \tag{10}$$

等号は（反）自己双対のときに限ります（3-03）。3-03 の (12) は $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$ の正準規格化で書かれていて、$A = gA_{\text{3-03}}$（したがって $F = gF_{\text{3-03}}$）と書き換えると (10) と一致します。BPST（1975）の解、ADHM（1978）の全解の構成、Uhlenbeck（1982）の「$\mathbb{R}^4$ 上の有限作用の場は S^4 から来る」で、古典の対象として確定です[既知]。インスタントンの和で経路積分を近似するのは別の、量子の主張です。

位相電荷

位相電荷は第二 Chern 数です。第二 Chern 数は、閉じた四次元多様体（例：S^4）の上の接続について $\frac{1}{8\pi^2}\int \operatorname{tr} F \wedge F$ で決まる整数で（A を反エルミートに取る書き方、A-01）、接続を連続に変えても変わりません（1-07 の第一 Chern 数の四次元版）。(10) の Q とは符号の約束だけが違います（3-05 の寄り道）。格子では、各プラケット U_p が単位元に十分近い（作用密度が閾値より小さい、admissible な）場から束を作れて、整数になります（Lüscher 1982、3-05）[既知]。それ以外ではセクターは 'a dynamical property of the theory' です（Lüscher 2010、SU(3)）[物理]。

Wilson 流

Wilson 流は、流れの時間 t を足して場をならす方程式 $\dot{B}_\mu = D_\nu G_{\nu\mu}$、$B_\mu|_{t=0} = A_\mu$ です。$G_{\mu\nu}$ は B の場の強さ、D_ν は B による共変微分です。作用の最急降下で、方程式はヤン–ミルズ熱流そのものです。半径 $\sqrt{8t}$ は、熱核 $e^{t\Delta}$ の広がり $\langle |x|^2 \rangle = 2dt$ の $d = 4$ の値です。量子の場への作用は、三次元の GFF 仮定の下（Cao–Chatterjee）と、確率量子化による二次元の YM・三次元の YMH（Higgs 場を含む模型、CCHS）までです[既知]。四次元は Lüscher の 'suggest' の段です[物理]。

Gribov 領域

Gribov（1978）は Landau ゲージ $\partial_\mu A_\mu = 0$ の曖昧さに対し、FP 行列式が正の場に積分を制限しました（3-04・4-08）。FP 作用素 $M(A) = -\partial_\mu D_\mu(A)$ は、ゲージ変換で場を少し動かしたときのゲージ条件の変化を表す作用素で、その行列式が経路積分に掛かる Faddeev–Popov の行列式です。$D_\mu(A)X = \partial_\mu X - i[A_\mu, X]$ は A について一次なので

$$\Omega = \{A:\ \partial_\mu A_\mu = 0,\ M(A) \geq 0\}, \qquad M\big(tA_1 + (1-t)A_2\big) = tM(A_1) + (1-t)M(A_2) \tag{11}$$

から Ω は凸です（$M \geq 0$ は作用素として半正定値の意味）。Zwanziger（1982）は 'bounded in every direction' を示し、Dell'Antonio–Zwanziger（1991）はどの軌道もこの領域に入ることを示しました[既知]。その上の測度が閉じ込めを生むという絵は物理の水準です（17-02）。

09

数学の側に語の無かったもの — トレース異常

古典の四次元ヤン–ミルズでは、(8) の尺度不変性から、エネルギー運動量テンソルの跡 $T^\mu{}_\mu$ が消えます（3-03）。跡は、場を $x \mapsto \lambda x$ で縮めたときの作用の変化を局所的に測る量で、尺度を変えても作用が変わらなければ 0 になります。量子論では、揺らぎを積分するのに切断（格子間隔など）が要り、そこで一つの長さが入ります。結合 $g(\mu)$ はその長さに対して走るので、尺度不変性は壊れます。壊れ方を局所的に書いたのがトレース異常です。

ここでは F を正準規格化（$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$、3-03 の規約）で書きます。(10) の規約の場とは $F_{(10)} = gF$ の関係で、(12) を (10) の規約で書くと係数は $\frac{\mu\, dg/d\mu}{2g^3}$ になります。

$$T^\mu{}_\mu = \frac{\mu\, dg/d\mu}{2g}\, F^a_{\mu\nu} F^{a\,\mu\nu}, \qquad \mu\frac{dg}{d\mu} = -b_0 g^3 + O(g^5) \tag{12}$$

これは標準形として引く式で（規格化は文献で異なる。Collins–Duncan–Joglekar 1977）[物理]、係数は β 関数そのものです。漸近自由（$\mu\, dg/d\mu < 0$）のもとで跡は 0 になりません。これが次元転移（4-07）の局所的な機構です。2026 年の公開より前は、数学の側に対応語がありませんでした。四次元の連続理論が無く、この演算子を置く場所が無かったからです（18-03 の Λ と同じ）。2026-11-10 に公開された構成は、繰り込んだ局所作用素として応力テンソルとその跡を定義し、その性質を示した、と委員会は評価しています（13-02 跡の異常と、自由でないこと）。摂動論との全ての次数での一致は示されていません（6-04）。表 0 の (a) が確定の 7 行は方程式・定義・古典の一致で、(b) が四次元の連続の量子論で「在る」行は、公開より前の読みでは一つもありません（付け直すなら「トレース異常」の項が動く候補です。18-01 §09）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 (3) の主項（$O(1/\beta)$ を除く）と共役によるスキーム変換、Dashen–Gross の比、(8)(10)(11)、階層格子の上で MK が正確なこと（Ito 1985）、(a) が確定の行。	(b) が「無い」行の対象の存在。条件つき・未確定の対の行方。
計算 表 1・図 1、§ 04・§ 06 の数値。物理 (12)・漸近スケーリングとスケーリングの数値・動径。	MK と物理の札は定理ではない。
記録の $\delta(b)$ と Symanzik は展開の変数が違うこと。	δ の総和可能性（18-05）。流れ・連続極限・質量ギャップは何も示さない。

出典と再現

もの	種別	出典・道具（確認の水準）
流れ（§ 02・§ 03）	既知	要旨で確認：Wilson, PRB 4 (1971) 3174；Bałaban, CMP 109 (1987) 249・122 (1989) 355；Gawędzki–Kupiainen, PRL 54 (1985) 2191；Polchinski, NPB 231 (1984) 269；Bauerschmidt–Bodineau, CPAM 74 (2021) 2064；Swendsen, PRL 42 (1979) 859；Gupta ほか, PRL 53 (1984) 1721；Dashen–Gross, PRD 23 (1981) 2340。本文：Chatterjee, arXiv:1803.01950。
MK・階層格子（§ 04）	既知	要旨で確認：Kadanoff, Ann. Phys. 100 (1976) 359；Ito, PRL 55 (1985) 558。書誌のみ：Migdal, JETP 42 (1975) 413；Griffiths–Kaufman, PRB 26 (1982) 5022（スピン系の階層格子）。
極限・普遍性・改善（§ 05・§ 06）	既知・物理	要旨で確認：Aizenman–Duminil-Copin, Ann. Math. 194 (2021) 163；Creutz, PRD 21 (1980) 2308；Sommer, NPB 411 (1994) 839；Allton–Teper–Trivini, JHEP 07 (2008) 021；Griffiths, PRL 24 (1970) 1479；Chelkak–Smirnov, arXiv:0910.2045；Chevyrev–Shen, arXiv:2302.12160；Symanzik, NPB 226 (1983) 187；Lüscher–Weisz, NPB 240 (1984) 349；Husung–Marquard–Sommer, EPJC 80 (2020) 200；Uhlenbeck, CMP 83 (1982) 11・31。本文：Lucini–Teper, JHEP 06 (2001) 050；Lüscher, JHEP 08 (2010) 071；Jaffe–Witten（Clay の問題文）。
§ 07	既知・物理	要旨で確認：'t Hooft, NPB 72 (1974) 461；Guionnet–Maurel-Segala, arXiv:math/0503064；Chatterjee, arXiv:1502.07719；Basu–Ganguly, arXiv:1608.04379；Lévy, arXiv:1112.2452；Susskind–Witten, hep-th/9805114；Heemskerk–Polchinski, arXiv:1010.1264；Fefferman–Graham, arXiv:0710.0919。Fefferman–Graham の原典は 1985 年とされる（書誌のみ・未照合）。
§ 08・§ 09	既知・物理	要旨で確認：Lüscher, CMP 85 (1982) 39；BPST, PLB 59 (1975) 85；ADHM, Phys. Lett. A 65 (1978) 185；Cao–Chatterjee, arXiv:2111.12813；CCHS, arXiv:2006.04987・2201.03487；Gribov, NPB 139 (1978) 1；Zwanziger, NPB 209 (1982) 336；Dell'Antonio–Zwanziger, CMP 138 (1991) 291；Collins–Duncan–Joglekar, PRD 16 (1977) 438（要旨に式は無く、(12) の規格化は未照合。(12) は標準形として物理の札）。本文：Lüscher, JHEP 08 (2010) 071。
$\delta(b)$・一段の記帳	記録	本書の検討の記録の整理（23-02・18-05）。

もの	種別	出典・道具（確認の水準）
表 1・図 1・数値	計算	この端末の Python 3：`mk_flow.py`・`mk_steady.py`・`mk_long.py`・`dg_shift.py`・`sym_delta.py`（§06 の 2.39・2.58・9×10^{-13}）。

次に読む章：18-05 本書の仮定の物理側の対応。

本書の仮定の物理側の対応 — 記録の仮定は物理の仮説より強いか

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 18-03・18-04 にあります。

この章で分かること — 本書の検討の記録が数学の言葉で置いた仮定を物理の仮説と一行ずつ突き合わせ、「同じ」「条件つきの言い換え」「類比」を問いの形で付けます。記録の η は $\eta_{\mathrm{dyn}} = 2 - z$ に固定します。

前提となる章 — 18-03（二つの時間・臨界減速）・18-04（スキーム変換）・17-12（尺度は一つ・拡散型緩和時間の仮定・三つの鎖）。二列の格は 18-01。緩和時間の仮定の詳しい扱いは後の部の 23-01 にあります。

先に言うこと — 対応は問いと類比として置くもので、仮定はどれも証明されていません。どの行も質量ギャップや連続極限について何も示しません。

この章の順序

1. 見取り図 — 仮定を物理の仮説に当て、同じ・条件つき・類比に分ける（表 0）
2. 記録の η を一つに固定する — 冪の形の η は動的な η_dyn = 2 − z
3. 拡散型緩和時間の仮定と z = 2 — 冪は同じでも、定数倍の一様性は正規化しだいで対数で破れる（表 1）。寄り道：拡散はなぜ ξ^2 か
4. 緩和時間の上界の仮定と z ≤ 2 — 言い換えが成り立つための三つの条件（図 1）
5. 緩和時間の下界の仮定と臨界減速の下界 — 不等式は同じで、次元 4 の演算子は ξ^2 に届かない（表 2）
6. 取りこぼしの総和可能性 — 段ごとのずれとスキーム変換・MCRG・負の重みの核
7. 物理単位の隙間の言明の同値 — 質量の不変性と z = 2 の積として読め、前提を外すと打ち消しが起きる（図 2・表 3）
8. 尺度が一つと余剰次元 — 模型の中の次元解析で、類比にとどまる
9. 既知と確定したもの — 成果に数えない五つの行

01

見取り図 — 仮定を一行ずつ物理の仮説に当てる

本書の検討の記録は、連続極限へ向かう筋を「段の記帳」の列として書き（23-01）、途中で数学の言葉の仮定を置きました。物理の古い仮説に当てた答えは三通りで、**同じ**（同じ不等式か定義に帰着する）、**条件つきの言い換え**（冪の形や力学の選び方を足せば同じ）、**類比**（形は似ているが結ぶ定理が無い）です。18-01 の定義の列の確定・条件つき・未確定に当たります（実在の列はどの行も「無い」）。中心の緩和時間の仮定は上下の二つに割れます。

$$(\xi^2)\ (C_P \asymp \xi^2)\ =\ (\xi^2)\uparrow\,(C_P \lesssim \xi^2)\ \wedge\ (\xi^2)\downarrow\,(C_P \gtrsim \xi^2)$$

式の中の (ξ²) は拡散型緩和時間の仮定、(ξ²)↑ は上界の仮定、(ξ²)↓ は下界の仮定です。

表 0　記録の仮定と物理の側の候補（「強い」は記録の仮定のほうが強いこと。γ・ν は感受率・相関長の指数で 18-03 §07）

記録の仮定	物理の側の候補	(a)・強さ
緩和時間の仮定：$C_P \asymp \xi^2$	動的指数 $z=2$（model A）	未確定・強い
上界の仮定：$C_P \lesssim \xi^2$	冪の形の下での $z \le 2$	条件つき・同じ
下界の仮定：$C_P \gtrsim \xi^2$	下界 $z \ge \gamma/\nu$	条件つき・強い
$\sum_k \delta(b_k) < \infty$	スキーム変換・MCRG・射影の誤差	未確定
物理単位の隙間の言明 $\Longleftrightarrow \sum\delta<\infty \wedge \eta_{\mathrm{dyn}}=0$	質量の繰り込み群不変性＋$z=2$	未確定
尺度が一つ $\Longleftrightarrow$ 余剰次元が見える	KK の非分離	未確定

02

記録の η を一つに固定する — $\eta_{\mathrm{dyn}} = 2 - z$

記録の η は二つの量を指していました（18-03 §07）。**静的な** η_s は演算子 O の尺度次元 Δ（質量ギャップの Δ とは別）から $\eta_s(O) = 2\Delta - (d-2)$ と決まる相関の冪で、記録の Lean の定理のうち静的な指数を扱うもの（定理名と仮定は 23-13）はこちらです。C_P と相関長 ξ の冪の形に入っているのは**動的な**指数です。

$$C_P \asymp \xi^{\,2-\eta} \quad \text{と} \quad C_P \asymp \xi^{\,z} \quad\Longrightarrow\quad \eta = 2 - z =: \eta_{\mathrm{dyn}} \tag{1}$$

この本は冪の形と物理単位の隙間の言明の同値（§07）の η を η_{dyn} に固定し、η_s は試験関数の下界（§05）にだけ使います。二つが等しいのは従来理論 $z = 2 - \eta_s$ の中だけです。

代償が一つあります。記録は同値の前提 $\eta \geq 0$ を、Källén–Lehmann の正値性（18-02）を根拠に仮定として置いていました。その正値性から出るのは $\eta_s \geq 0$ です（ユニタリ性の限界）物理。二次元 Ising の Glauber 力学では $\eta_s = 1/4$ でも $\eta_{\mathrm{dyn}} = -0.1665$ です（18-03 表 2）。前提 $\eta_{\mathrm{dyn}} \geq 0$ は $z \leq 2$、つまり冪の形の上界の仮定（§04）を前提に含めることです。

03

緩和時間の仮定と $z = 2$ — 冪は同じでも、定数倍の一様性が違う

緩和時間の仮定は、Langevin 力学の最も遅い緩和の時間 C_P が、相関長の二乗と格子間隔に依らない定数倍で並ぶという仮定です（18-03 §05・23-01）。

$$c\,\xi^2 \;\leq\; C_P \;\leq\; C\,\xi^2 \qquad (0 < c \leq C \text{ は格子間隔に依らない}) \tag{2}$$

(2) は帯の水準の書き方で、$\mathcal{E}$ の正規化に依ります（下の (3)）。記録の約束では緩和時間の仮定を冪の水準 $\lim \ln C_P / \ln \xi = 2$ で置き、帯の水準は正規化を名指しした別の仮定として分けます（§03 の末尾・23-01）。

物理で一番近いのは、動的スケーリングの仮説 $\tau \propto \xi^z$（Halperin–Hohenberg 1969・Hohenberg–Halperin 1977）で、Langevin 力学（その分類で model A）の z を 2 と置くことです物理。場 A の正規化（下の $s^2 = 1$）の自由場では (2) がちょうど成り立ちます（18-03 表 1）。

問い：緩和時間の仮定は「$z = 2$」と同じか。答え：緩和時間の仮定のほうが強い。仮説は冪だけを言い、定数倍の一様性を言いません。そのうえ (2) は Dirichlet 形 $\mathcal{E}$ の正規化を含みます。ガウス測度 $N(0, s^2(K + m^2)^{-1})$（K は格子のラプラス作用素 $-\Delta$ 〈ここの Δ はラプラシアン〉、s^2 は振幅、m は質量）に $\mathcal{E}(f) = \mathbb{E}|\nabla f|^2$ を取ると C_P は共分散の最大固有値 s^2/m^2 で、相関長は s に依りません（1-10）既知。リンクの角度 ϑ（$U = e^{i\vartheta \cdot \sigma}$）で書くと $s^2 \propto g^2$、場 $A = \sqrt{\beta}\,\vartheta$（この章の $\beta = 4/g^2$ の規約で $A = 2\vartheta/g$）で書くと $s^2 = 1$ です。この章の β は SU(2) の格子の逆結合 $\beta = 4/g^2$（記号表の $2N/g^2$）で、逆温度ではありません。

ここでの自由近似は、質量 $1/\xi_{\mathrm{RG}}$ を手で入れたガウスの場で代用した模型で、ゲージの向き（零モード）は入れていません。記帳の長さは一ループの走りから決まる格子単位の相関長です（記録は格子間隔を $a := 1/\xi_{\mathrm{RG}}$ と置く、§07）。

$$C_P^{(\vartheta)} = \frac{g^2}{4}\, C_P^{(A)}, \qquad C_P^{(A)} = \xi^2 \quad \text{(自由近似)} \tag{3}$$

記録の $\mathcal{E}$ はリンクの角度で書かれています。一ループの $\ln \xi_{\mathrm{RG}} = 3\pi^2\beta/11 + \text{定数}$（SU(2)、4-06）を入れると、$C_P/\xi^2 \propto 4/\beta$ は $1/\ln \xi$ のように 0 へ落ち、実効指数は $z_{\mathrm{eff}} = 2 - \kappa/\beta$（$\kappa = 4Nb_0 = 11/(3\pi^2)$）です。

計算 表 1　自由近似・SU(2)・リンクの角度の正規化

β	C_P/ξ^2（$\beta=2.5$ で 1）	z_{eff}
2.5	1.000	1.8514
4	0.625	1.9071
100	0.025	1.9963

冪では $z=2$ ですが、リンクの角度の正規化では (2) の下側が対数で破れます。緩和時間の仮定を立てるには、$\mathcal{E}$ を場 A の正規化で書く（$\mathcal{E}_A=\mathcal{E}/\beta$、つまり角度の $\mathcal{E}$ に $g^2/4$ を掛ける。C_P は逆に β 倍になる）か、緩和時間の仮定を冪の水準（$\lim \ln C_P/\ln\xi=2$）で置いて帯の水準の言明は正規化を名指しした別の仮定として分けるか、を先に決める必要があります。相互作用のある理論では確率時間の尺度も繰り込まれるので 既知 （摂動論の水準。23-00 入口 — 階段と、酔歩・物差し・時計・23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定。超対称ヤン–ミルズの一ループで確認された例もあります 物理 ）、どちらの正規化でも対数が消える保証はありません。

辞書の測定の列（有限の測定で届く向き。18-01 §02）で言うと、下界の仮定は「下界まで」の側で、試験関数を一つ示せば C_P の下界が出ます（§05）。**上界の仮定は「届かない」側**です。C_P の上界はすべての f についての不等式なので、試験関数をいくつ足しても、自己相関の測定を有限の時間まで重ねても届きません（1-10 の囲み「上界と下界の非対称」）。上界の仮定と質量ギャップは同じ言明ではありませんが、どちらも下界の側に立つ点で同じ型です。

寄り道：拡散はなぜ ξ^2 か

飛ばしてよい小節です。

酔歩で距離 ξ を均すには ξ^2 歩かかります。自由場の Langevin 力学はフーリエ成分ごとに独立です。

$$d\hat{\phi}_k=-\big(\hat{k}^2+m^2\big)\hat{\phi}_k\,ds+\sqrt{2}\,d\hat{W}_k(s) \tag{4}$$

s は Langevin の時間で、上の振幅 s^2 とは別です。$\hat{k}^2=\sum_\mu 4\sin^2(k_\mu/2)$ は格子の上の $|k|^2$ です。最も遅いのは $k=0$ の速さ m^2、時間にして ξ^2 です。比喩で言えば、長い波ほど遅く均されます。正確には自由場の等式で、相互作用があると揃う保証はなく、揃うと置くのが緩和時間の仮定です。

04

緩和時間の上界の仮定と $z\le 2$ — 言い換えに要る三つの条件

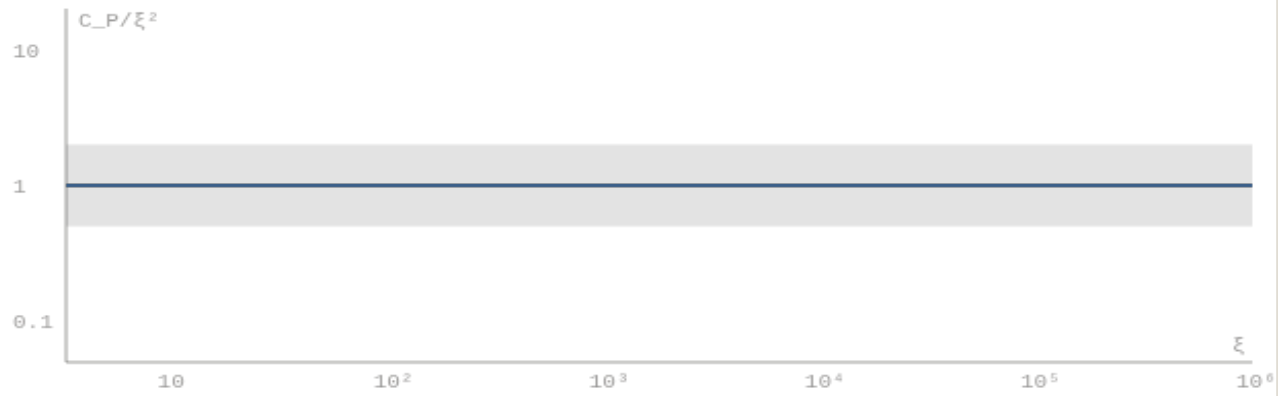
上界の仮定（$C_P\lesssim\xi^2$）は、記録の読み替えで「質量ギャップが正」の側です（17-12 §10）。記録はこれを $z\le 2$ と言い換えます。問い：動的スケーリング仮説の下での言い換えか。答

え：三つの条件の下でなら。(i) 冪の形 $C_P \asymp \xi^{z}$ が在る。(ii) 力学が連続時間の可逆な Langevin である（$C_P = \tau_{\mathrm{exp}}$ はそこでだけ等号、18-03 §06）。(iii) $\mathcal{E}$ の正規化を決めている（§03）。対数の因子の冪を q と書くと、判定は次のとおりです。

$$C_P = \xi^{\,z} (\ln \xi)^{q} \;\Longrightarrow\; \Big((\xi^2)\!\uparrow \;\Longleftrightarrow\; z < 2 \text{ または } (z = 2,\ q \le 0) \Big) \quad (5)$$

Hohenberg–Halperin の仮説は z の存在を仮定するだけで、$z \le 2$ を主張しません。18-03 表 2 の Ising の Glauber 力学は二次元・三次元とも $z > 2$ です物理。上界の仮定を物理の予想として読むには「関係する不動点で $\eta_s = 0$」の条件が要り、四次元ヤン–ミルズでそれを述べた一次資料は確かめていません。

図 1　$C_P = \xi^{z} (\ln \xi)^{q}$ のときの C_P / ξ^2（$\xi = 10$ で 1 とした比）。つまみで z と q を変えると、曲線と上界の仮定・下界の仮定の判定が変わる。帯は定数倍 $[1/2, 2]$



z = 2.0000・q = 0.00：ξ = 10⁶ で C_P/ξ²（ξ = 10 で 1）= 1.00　冪の形 はい・z ≤ 2 はい・上界の仮定 成り立つ・下界の仮定 成り立つ・緩和時間の仮定 成り立つ

計算 式 (5) をその場で描く模式図。JavaScript が無いときは次の段落で読める。

例（$\xi \to \infty$）：ξ^2 は両方成り立ち、$\xi^2 / \ln \xi$（角度の正規化）と $\xi^{1.9}$ は上界の仮定だけ、$\xi^2 \ln \xi$ と $\xi^{2.1665}$ は下界の仮定だけです。$\xi^2 \ln \xi$ では冪は 2 なのに上界の仮定が破れ、(i) を外すと「上界の仮定 $\Longrightarrow z \le 2$」の片向きしか残りません。

05

緩和時間の下界の仮定と臨界減速の下界 — 同じ不等式、届かない演算子

下界の仮定（$C_P \gtrsim \xi^2$）は試験関数で示せる側で、どの f でも $C_P \ge \mathrm{Var}(f) / \mathcal{E}(f)$ です（1-10）。物理では「局所的な力学は感受率より速く緩和できない」と言います。磁化を f にすると $C_P \ge \chi$ です（18-03 の式 (12)）既知。動的スケーリングと静的スケーリングの二つの仮説の下では $z \ge \gamma / \nu = 2 - \eta_s$ です（γ は感受率の指数、ν は相関長の指数。18-03）物理。モンテカルロ法の文献で標準とされる下界で、典拠は確かめていません。

問い：下界の仮定はこの下界と同じか。答え：不等式は同じで、届く先が違います。尺度次元 Δ の局所演算子の和を f にすると、下界は感受率 χ_O で決まります。

$$\frac{\mathrm{Var}(\sum_x O_x)}{\mathcal{E}(\sum_x O_x)} \asymp \chi_O \sim \begin{cases} \xi^{\,2-\eta_s(O)} & 2\Delta < d \\ \ln \xi & 2\Delta = d \\ \text{有界} & 2\Delta > d \end{cases} \tag{6}$$

ξ^2 に届くのは $\eta_s(O) = 0$、つまり正準次元 $\Delta = (d-2)/2$ の演算子があるときだけです。四次元の自由場で確かめます。

計算 表 2　四次元格子の自由場で試験関数が与える C_P の下界

m	ξ	次元 1：$\sum \phi$（$= C_P$）	次元 2：$\sum \phi^2$	次元 4：$\sum (\nabla\phi)^2$
1.0	1.04	1	0.0783	0.0537
0.1	10.0	100	0.1719	0.0624
0.01	100.0	10000	0.2657	0.0625

次元 2 は $\ln \xi$ の傾き 0.0408 で伸び（連続の見積もり $1/(16\pi^2 G(0)) = 0.0409$）、次元 4 は $1/16$ で止まります計算。無限体積の積分を一次元に直して計算し、$m = 0.5$ で 24^4 の格子の和と有効数字 5 桁で合わせました。

ヤン–ミルズのゲージ不変な局所演算子は $\mathrm{tr}\, F^2$ の類で次元 4 なので、(6) の三段目に落ちます（23-01）。リンクの角度は次元 1 ですが、ゲージ固定の無い測度では、端点を共有しないリンクの角度どうしの相関は、ゲージ変換で平均すると正確に 0 です（Elitzur の定理と同じ機構、18-02）。下界の仮定は同じ不等式を局所の秩序変数の無い理論で ξ^2 まで押し上げる要求で、その分だけ強いものです。記録は三つの試験関数の族（一部は U(1) の計算）で届かないと確かめましたが、下界の仮定が偽とは言っていません（23-02）。

下界の仮定は記録の読み替えで「物理単位の質量が有限」の側で、Clay の問題文の「非自明」（相互作用がある）とは別の条件です。自由な質量つきの場でも満たされます。

06

取りこぼしの総和可能性 — 段ごとのずれは一回のスキーム変換に収まるか

記録は b 倍に粗くする一段を $\beta \mapsto \beta - \kappa(\ln b - \delta(b))$ と書き、$\delta(b)$ を取りこぼしと呼びます（23-02・18-04 §03）。δ は一ループ核の模型で測った数で、記録の測定では四次元で $c_2/b^2 + c_3/b^3 + \cdots$ の形です計算（$\ln b/b^2$ の項が無いことは検出限界の範囲での話）。倍率 $b_1, b_2, \ldots$ で k 段進むと

$$\beta_k = \beta_0 - \kappa \ln\Big(\prod_{j=1}^{k} b_j\Big) + \kappa \sum_{j=1}^{k} \delta(b_j) \tag{7}$$

です。同じスキームの正確な一段なら第三項は無く（18-04 の式 (3)）、スキームの取り替えは β を一度だけ c ずらします（Dashen–Gross、18-04 表 1）。第三項が収束すれば、段ごとのずれは合わせて $c=\kappa\sum\delta$ の一度きりのずれで、取り替え一回と区別できません。

$$\sum_{j}\delta(b_j)<\infty \iff \text{段ごとのずれが一回のスキーム変換に収まる} \quad \text{(記録の模型の中で)} \tag{8}$$

目安：SU(2) の $\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}/\Lambda_{\mathrm{L}}=19.82$ は $\sum\delta$ で $\ln 19.82=2.987$ に当たります計算 。b を固定すると、有界なのは $\delta(b)=0$ のときだけですLean （`fixed_step_bounded_iff`。仮定：段の誤差が毎段一定）。

問い：(8) は物理のどれか。候補は三つで、どれも類比です。(i) Symanzik の $O(a^2)$ ではありません。展開の変数が a と b で違い、前者は段ごとに溜まりません（18-04 §06）。(ii) MCRG（モンテカルロ繰り込み群。Swendsen 1979 がスピン系で導入）の方法でゲージ理論の $\Delta\beta$ を測った最初の SU(3) の結果は、$K_F<6.1$（K_F は Wilson 作用の結合）で 'no asymptotic scaling' でした（Gupta ほか 1984）既知 。この $\Delta\beta$ と記録の一段の減りは、同じ射影なら定義の上で対応する量です（同定はこの辞書の読み）。(iii) Wilson 形への切り詰めの誤差：切り詰めない完全作用について Hasenfratz–Niedermayer（1994）は 'There exist lattice actions which give cut-off independent physical predictions even on coarse grained lattices' と書きます。δ はこの誤差に近い、というのが一つの読みです。

負の重みの核と反射正値性

記録の計算で $\delta(2)=0$ になったブロック化の核は、隣への重みが負でした計算 。重みが非負なら $c_2>0$ ですLean （`c2_ge_of_nonneg_weights`。仮定：c_2 が重みの量の増加するアフィン関数で重み 0 で正、という測定）。Lüscher–Weisz（1984）の要旨は 'When operators of dimension 6 are added to the standard Wilson action in lattice gauge theories, physical positivity is lost in general.' と書きます既知 。主項を消す負の係数が正値性を奪う、という型は同じです。違いは対象で、向こうは作用（5-03）、記録はブロック化の核です。負の重みの核が反射正値性を壊すかは確かめていません。

07

物理単位の隙間の言明の同値 — 「質量は繰り込み群で不変」と「$z=2$」の積か

記録は物理単位の隙間の言明（物理単位の質量ギャップ）を「a^2C_P が格子間隔 $a=1/\xi_{\mathrm{RG}}$ に依らない正の帯に入る」形で扱い、二つの冪を置きます。

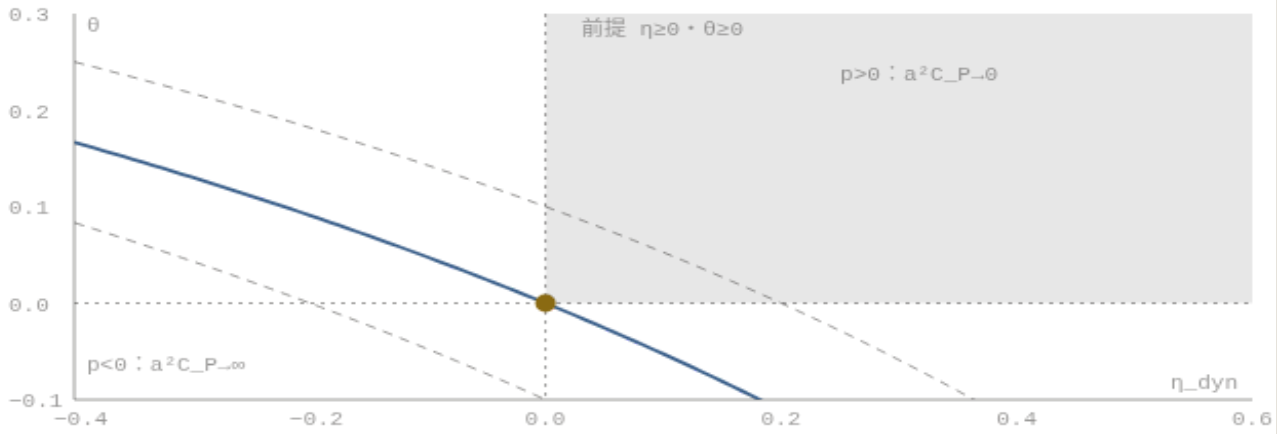
$$C_P\asymp\xi^{\,2-\eta_{\mathrm{dyn}}},\quad \xi_{\mathrm{phys}}=a\,\xi\propto a^{\theta}\ \Longrightarrow\ a^2C_P\propto a^{p},\quad p=\eta_{\mathrm{dyn}}+(2-\eta_{\mathrm{dyn}})\,\theta \tag{9}$$

θ は取りこぼしの溜まりの指数で、b を固定した模型では $\theta = \delta(b)/\ln b$、$\sum \delta < \infty$ なら $\theta = 0$ です。$\eta_{\mathrm{dyn}} \geq 0$・$\theta \geq 0$ なら $p = 0$ は両方 0 と同値で、これが記録の「物理単位の隙間の言明 $\Longleftrightarrow \sum \delta < \infty \wedge \eta = 0$」（記録の η は η_{dyn}、§02）の中身です Lean （`drain_exponent`・`drainExp_eq_zero_iff`。仮定：(9) の冪の形と符号の条件）。段の誤差が加法的で有界なことと、δ が一ループ核の模型の値であることも前提です。

問い：物理の二つの言明の積か。答え：模型の代数の中では、そう読めます。$\theta = 0$ は「物理の質量は繰り込み群で不変で $m_{\mathrm{lat}}(\beta) \propto a(\beta)\Lambda$」という言明です。連続理論が在ると前提すれば、異常次元を持たない量についての Callan–Symanzik 方程式（4-04）から $\theta = 0$ が従う、と物理では扱います（次元転移は 4-07） 物理 。物理はこれを名前の付いた仮説にしていません。数学では Chatterjee（2018）の格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1。$\xi(\beta) \in (0, \infty)$、$\beta \to \infty$ で $\xi \to \infty$）が同じ向きを求めます 既知 。$\eta_{\mathrm{dyn}} = 0$ は $z = 2$ で、§03・§04 の見込みです。

$\eta_{\mathrm{dyn}} \geq 0$ を外すと、$\theta^* = -\eta_{\mathrm{dyn}}/(2 - \eta_{\mathrm{dyn}})$ で $p = 0$ になり、$a^2 C_P$ は一定の帯に入るのに緩和時間の仮定も $\theta = 0$ も成り立ちません（17-12 の図 2 と同じ型）。

図 2　$(\eta_{\mathrm{dyn}}, \theta)$ の平面。つまみで点を動かすと $a^2 C_P$ の行き先と判定が変わる。「動かす」で点が実線 $p = 0$ の上を左へ進み、薄い塗りの外で打ち消しが起きる



`η_dyn = 0.000（z = 2.0000）・θ = 0.000：p = 0.000　a²C_P は 一定の帯　緩和時間の仮定 成り立つ・θ = 0 成り立つ`

計算 式 (9) をその場で描く模式図。薄い塗りは前提の領域、破線は $p = \pm 0.2$。JavaScript が無いときは表 3 で読める。

計算 表 3　打ち消しの例（z は 18-03 表 2）

例	z	η_{dyn}	打ち消す θ^*
二次元 Ising・Glauber	2.1665	−0.1665	0.0769
自由場・Langevin	2	0	0

a を半分にする段を 20 回重ねると、$a^2 C_P$ は $p = -0.1665$ で約 10 倍、打ち消しの点では 1 倍のままです 計算 。数表だけでは緩和時間の仮定の破れと取りこぼしの溜まりの指数を見分け

られません。

08

尺度が一つと余剰次元 — KK の非分離の類比か

この節は 17-09・17-10（葉巻・M_{KK}・超重力）を読んでいると追いやすくなります。記録には「尺度が一つ $\Longleftrightarrow$ 余剰次元が見えている（半径 $R \sim 1/\Lambda$）」という一文があります。問い：KK の非分離と同じものか。ホログラフィーの模型（Witten 1998 の葉巻、17-09）では背景の長さは $R = 1/M_{\mathrm{KK}}$ 一つで、計量を s^2 倍すると揺らぎの固有値はすべて s^{-2} 倍です。だから $m_n = c_n M_{\mathrm{KK}}$ です。長さの尺度が R 一つしか無いので、長さの二乗の次元を持つ量（ξ^2 も、Langevin の時間で測る C_P も）はすべて R^2 に比例し、緩和時間の仮定は模型の中の次元解析で恒等式になります[物理]。正確には、模型に C_P を定義したうえでの次元の勘定です。同じ理由で KK モードはグルーボールから離れません。クォークを含む QCD の模型の Sakai–Sugimoto（2005）も、中間子について 'our D4/D8 model deviates from QCD at the energy scale of M_KK, which is, unfortunately, the same energy scale of the mass of the vector mesons' と書きます。

$$\Lambda \approx M_{\mathrm{KK}}\, e^{-24\pi^2/(11\lambda)} \qquad (\lambda \text{ は } M_{\mathrm{KK}} \text{ での 't Hooft 結合。係数は規約に依る}) \qquad (10)$$

$\lambda = 30,\ 16.6,\ 10,\ 5$ で $\Lambda/M_{\mathrm{KK}} = 0.49,\ 0.27,\ 0.12,\ 0.013$ です[計算]（16.6 は Sakai–Sugimoto の当てはめを $N_c = 3$ で直した値で、その規約での λ です。一ループの式 (10) に入れるのは目安で、規約で 2 倍ずれえます）。超重力が使えるのは λ の大きい側で、Witten は小さい側を 'This looks like a tall order' と書きます（17-10）。

答え：類比です。「長さが一つ $\Longrightarrow$ 尺度が一つ」は模型の中で自明ですが、逆向きと $R \to 0$ への移行はありません。純ヤン–ミルズの一尺度の物理名は次元転移（4-07）で、$\Longleftrightarrow$ は本書の検討の記録の定式化です。

09

既知と確定したもの — 成果に数えない行

次の行は既知として扱い、後の部（本書の検討）で成果として並べません。(1) 格子単位の一様なギャップは $m_{\mathrm{phys}} \to \infty$ の自明な側、という向きの訂正は、相関長が発散する所で連続極限を取る定義と格子の相関長の問題の向きそのものです（確定、5-09）。(2) $\kappa = 11/(3\pi^2)$ は $4Nb_0$（Gross–Wilczek・Politzer 1973）で、実測との 5 桁一致は一ループ模型の中の一致です（確定、4-06）。(3) 記録の一段の記帳のうち、強結合の $\beta' = \beta^4/64$ は Migdal–Kadanoff の決定化の段だけに当たり（ボンド移動の因子 b^{d-2} を含む MK の一段は $\beta' \approx 4\beta^4$、18-04

§04)、弱結合の $\beta' = \beta\, b^{d-4}$ は次元勘定です（条件つき）。(4) 反射正値性の保存の言明（23-01 の構成の八つの言明の一つ）の反射正値性・転送作用素と強結合の面積則は Osterwalder–Seiler 1978・Lüscher 1977・Wilson 1974 です（確定、5-03）。(5) 無限体積の一意性の言明は真空の一意性の格子版、$R \le \tau_{\mathrm{int}} \le C_P$ は同じ可逆な力学の中での誤差解析です（条件つき、18-02・18-03）。

同じと言い切れなかったのは、緩和時間の仮定の定数倍の一様性（§03）と、段ごとの溜まりが一回のスキーム変換に収まること（§06）で、どちらも類比までです。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 変分の下界 (6) の型、(3)(7)(9) の代数、§09 の行が既知であること。	記録の仮定が物理の仮説と同じだという定理。どの仮定も証明されていない。
計算 表 1〜3・図 1・図 2、§06・§08 の数値（自由場と模型の中）。	四次元ヤン–ミルズで $z = 2$ か、対数の因子があるか。負の重みの核が反射正値性を壊すか。
物理 z の数値（18-03 表 2）、(10) の見積もり、KK の非分離の証言。	質量ギャップ・連続極限・一尺度について、この章は何も示さない。

出典と再現

もの	種別	出典・道具（確認の水準）
動的スケーリング・臨界減速・下界	物理・既知	Halperin–Hohenberg, Phys. Rev. 177 (1969) 952；Hohenberg–Halperin, RMP 49 (1977) 435（どちらも要旨のみ）。Sokal, "Monte Carlo Methods in Statistical Mechanics: Foundations and New Algorithms", DeWitt-Morette・Cartier・Folacci 編 *Functional Integration: Basics and Applications*（NATO ASI Series, 1997）131–192, doi:10.1007/978-1-4899-0319-8_6（書誌のみ。下界 $z \ge \gamma/\nu$ の典拠は未確認）。z の数値は 18-03 表 2 の出典（18-03 の照合による）。ユニタリ性の限界 $\eta_s \ge 0$（§02）は原典未照合。
スキーム変換・MCRG・完全作用・改善作用	既知	Dashen–Gross, PRD 23 (1981) 2340（要旨）；Swendsen, PRL 42 (1979) 859（要旨）；Gupta ほか, PRL 53 (1984) 1721（要旨。引用の逐語は INSPIRE で確認）；Hasenfratz–Niedermayer, NPB 414 (1994) 785（要旨。引用の逐語を確認）；Lüscher–Weisz, NPB 240 (1984) 349（要旨。引用の逐語を確認）。
質量の繰り込み群不変性・格子の相関長の問題	既知・物理	Callan, PRD 2 (1970) 1541；Symanzik, CMP 18 (1970) 227（どちらも要旨。4-04 の照合による）。Chatterjee, arXiv:1803.01950（§5 の本文。18-04 の照合による）。
KK・ホログラフィー	物理	Witten, ATMP 2 (1998) 505；Sakai–Sugimoto, PTP 113 (2005) 843（逐語は 17-09・17-10 の照合による）。

もの	種別	出典・道具（確認の水準）
§09 の行・Elitzur の定理	既知	Gross–Wilczek, PRL 30 (1973) 1343；Politzer, PRL 30 (1973) 1346（どちらも書誌のみ）。Osterwalder–Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440；Lüscher, CMP 54 (1977) 283；Wilson, PRD 10 (1974) 2445（いずれも要旨。他章の照合による）。Kadanoff, Ann. Phys. 100 (1976) 359（要旨は 18-04 の照合による。本文は未入手で、式の水準の照合は未了）；Migdal, Sov. Phys. JETP 42 (1975) 413（書誌のみ。式の水準の照合は未了）。Elitzur, PRD 12 (1975) 3978（要旨。18-02 の照合による）。
記録の仮定	仮定・類比	本書の検討の記録の整理（23-01・23-02・23-13・17-12）。
表 1〜3・§06・§08 の数値	計算	この端末の Python 3（numpy・scipy）：`free_log.py`・`testfn_dim.py`・`cancel.py`。

次に読む章：19-00 入口 — 対象・確かな定理・前提の読み方（第三巻の中で、ここから対象と確かな定理に入ります）。年表と次元ごとの表で現在地を読むのは 16-01 世界はどこまで来ているか。η_s と η_{dyn} の約束は A-01 記号表。