第三巻　質量ギャップへ — 残る問いと本書の結果

第 19 部 対象と、示すべき言明

Kiichi, Shiori and Rin · 2026-11-14 の版 · https://computoergosum.com/principia/yang-mills/

> この PDF は Web 版の各章をそのまま刷ったものです。動かせる図は刷った時点の姿で止まっています。章の間のリンクは Web 版へ飛びます。最新の内容は Web 版に在ります。

章		頁
19-00	入口 — 対象・確かな定理・前提の読み方	2
19-01	格子・リンクの変数・Wilson の測度	7
19-02	捩れた境界条件・渦の比 θ・Polyakov ループ	18
19-03	鏡映・転送の作用素・再構成の器	26
19-04	ブロック写像と繰り込みの一段	35
19-05	フェルミオンの重み	45
19-06	対象と Lean の定義の対応表	53
19-07	示すべき言明 — 定義された対象だけで書く	60

入口 — 対象・確かな定理・前提の読み方

この章は案内です。

この章で分かること — 第 19〜22 部と第 28 部が何を載せ、何を載せないか。対象の定義、示すべき言明、機械検査した定理、前提の一覧が、それぞれどの部に在るか。読む順の三つの取り方。

前提となる章 — 0-03（問題文を一語ずつ読む）・16-09（証明が含むべき段）。格子の言葉は 第 5 部 に在ります。

先に言うこと — この五つの部は、質量ギャップを示していません。四次元のヤン–ミルズ理論の存在（Wilson の格子ゲージ理論の極限として Wightman の公理を満たす理論が作れること）は、2026-11-10 に公開された構成が Lean で証明している、と委員会が評価しました。それを読むのは第二巻の第 6〜13 部です。第 20〜22 部の定理は、どれも格子間隔を固定した一つの尺度についての言明で、知られている型の結果を、定義から機械検査したものです。大半は強結合の窓の中の言明で、公開された構成が残した問いとは反対の端に在ります。尺度を跨いで一様に成り立つことは、第 28 部の前提の側に在ります。横の大きさに率が依らない形は、強結合の窓の中の渦の自由エネルギーの上界（20-06）だけで、そこでも前の因子（横の面積）は残ります。

この章の順序

1. 三つに分ける — 対象・定理・前提
2. 部の地図（表 1）
3. 読む順 — 三つの取り方
4. 札の読み方
5. 第 23〜27 部と第 15 部との関係（表 2）
6. この五つの部が言わないこと

01

三つに分ける

第 23〜27 部と第 15 部は、検討を進めた順に書いてあります。そこでは、機械検査まで済んだ言明と、仮定として置いた言明と、数値で見ただけの見立てが、一つの章の中に並んでいます。第 19〜22 部と第 28 部は、同じ材料を三つに分けて置き直したものです。

分け	中身	在りか
対象	格子の上に定義するもの。測度、捩れ、渦の比、鏡映、ブロック写像、押し出した測度。定義だけで、主張はありません	第 19 部
定理	定義した対象についての等式と不等式。仮定は陽な範囲（結合の範囲、大きさの偶奇など）だけで、Lean 4 で機械検査してあります	第 20〜22 部
前提	「これが言えれば足りる」という側の言明。形が確定しているものと、まだ確定していないものを、札を付けて一覧にします	第 19 部の末尾の章と、第 28 部

定理と前提を分ける線は、対象が格子から定義されているかどうかです。定理の章に載せたのは、対象の定義を章に書けて、仮定が陽な範囲だけで、機械検査と別の目での照合が済んだものに限りました。

前提の側は、二つに分かれます。紫外の側の示すべき言明（合わせ・全列の収束・非退化・同程度連続）と、それを支える前提の木は、本書の設計（決まったブロック写像で押し出した測度）についての言明で、本書の設計での示すべき言明と十分条件の記録として残します。存在そのものは、公開された構成が別の設計で示しました（二つの設計の比べは 第 14 部、本書の紫外の試みの記録は 第 15 部）。赤外の側の示すべき言明（帯の言明と質量ギャップ）は開いたままで、こちらが第三巻の本題です。

02

部の地図

表 1　第 19〜22 部と第 28 部

部	題	載せるもの
第 19 部	対象と、示すべき言明	19-01 格子と Wilson の測度、19-02 捩れ・渦の比・Polyakov ループ、19-03 鏡映と再構成の器、19-04 ブロック写像と押し出した測度、19-05 フェルミオンの重み（寄り道）、19-06 対象と Lean の定義の対応表、19-07 示すべき言明
第 20 部	確かな定理 — 器と強結合	鏡映正値性、強結合の相関の減衰、無限体積の極限、再構成と質量ギャップ（強結合の窓の中で）、フェルミオンつきの器（寄り道）、20-06 強結合の面積則と、渦の自由エネルギーの上界
第 21 部	確かな定理 — 渦の床と Polyakov ループ	符号の系の三本、薄い渦の床、太い渦の床、渦の最小作用、渦の比の符号、Polyakov ループの対、21-07 渦の比の連続・極限・合わせ

部	題	載せるもの
第22部	確かな定理 ― 大きい面の稀さ	22-00 入口、22-01 チェス盤の評価による大きい面の稀さ、22-02 この部が言えていること・言えていないこと
第28部	前提の木	含意の三章、前提の一覧、設計の選びに依るもの、開いている所

自由場の一段と多段、ブロック写像の線形化（紫外の側の一つの尺度の定理）は、本書の紫外の試みの記録として第 15 部（15-12・15-13）に在ります。

03

読む順

- **何を示すのかを先に知る**：19-01〜19-04 の定義を拾い読みして、19-07 示すべき言明へ。そこから 第 28 部の木へ進みます。
- **確かな所から読む**：第 20 部 → 第 21 部 → 第 22 部。各章は、対象（第 19 部への参照）、定理、証明の道筋、言っていないこと、の順です。
- **検討の経緯を追う**：第 23〜27 部と第 15 部。同じ主題の章の対応は表 2 に在ります。

04

札の読み方

この五つの部の札は、第 23〜27 部と第 15 部と同じ五つです：初 典 機 読 仮 。意味は 15-00 の記号の表と同じです。公開された構成を引く所では、第二巻の札（源・推・評。6-00 の「札」）も使います。Lean で機械検査した言明は、札の外に、宣言の名と範囲を同じ行に書きます。

第 20〜22 部の定理には、ほとんどの行に典 が付きます。知られている型の結果を、この本の定義の上で機械検査した、という意味です。機械検査が保証するのは「書かれた定義と仮定から、書かれた結論が出る」ことで、定義が意図した対象を表していることは、別の目での照合に依ります。

前提には、もう一組の札（定理・紙・形は確定で未証明・形が未定・設計に依る・文献）を付けます。凡例は 28-00 に在ります。

05

第 23〜27 部と第 15 部との関係

第 23〜27 部と第 15 部は、検討の記録として残してあります。止まった道と、その理由が読めます。同じ主題の、今の整理の在りかは次のとおりです。

表 2　主題の対応

主題	検討の記録	今の整理
捩れた境界条件と渦	第 25 部	定義は 19-02、定理は第 21 部と 20-06
鏡映正値性とチェス盤	26-04・26-05	20-01、第 22 部
移り変わりの帯	第 26 部	言明は 19-07、前提は 28-04
条件つきの言明と台帳	第 27 部	第 28 部
紫外の制御	第 15 部	存在は第二巻（公開された構成を読む）、二つの設計の比べは第 14 部。本書の設計の自由場の一段は 15-12、本書の設計での前提は 28-04

06

この五つの部が言わないこと

- 質量ギャップについて、何も示していません。四次元のヤン–ミルズ理論の存在は、本書の定理ではなく、公開された構成の結果です（第二巻）。
- 定理は、格子間隔を固定した話です。格子間隔を 0 に送る極限についての定理は在りません。
- 強結合の定理は、結合の小さい窓の中だけの話です。窓の外については何も言いません。
- 強結合の窓の中では、渦の自由エネルギーの上界の率が横の大きさに依らない形が在ります（前の因子＝横の面積は残る。20-06）。窓の外では、渦の床の定理はどれも横の大きさを止めた話で、横の大きさに一様な評価は在りません。
- 前提の一覧は、日付つきの今の整理です。形が確定していない前提が在り、一覧は変わります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
この章は案内で、言明は在りません。第 19〜22 部と第 28 部の中身の在りかを示します	各部の言明の範囲は、部ごとの「言えていること・言えていないこと」の章（第 20 部・第 21 部・第 22 部）と 28-06 に在ります。自由場の一段の範囲は 15-14 です

出典と再現

もの	種別	出典・道具
部の地図・主題の対応	案内	この本の第 15 部と第 19〜28 部
機械検査した定理の一覧	案内	A-04

この章で使った語 — 対象、押し出した測度、前提の木。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：19-01 格子・リンクの変数・Wilson の測度 — 定義の一つ目。

格子・リンクの変数・Wilson の測度

この章は本書の検討です。§01〜§06 は既存の知見の整理で、§07 が本書の検討（Lean の側の約束と橋）です。

この章で分かること — 第 20〜22 部の定理が語る最も基本の対象 — 周期格子 $(\mathbb{Z}/N)^4$、リンクの変数 $U_\ell \in SU(2)$、Haar の測度の積、面のホロノミー U_p とその実部、Wilson の測度、分配関数 — の定義です。分配関数が正で有限であることも、ここで一度だけ示します。最後に、Lean の側で同じ対象が四通りの約束（強結合・渦・フェルミオン・紫外）で書かれていること、その間の橋を一つの表にまとめます。

前提となる章 — 5-01 Wilson の格子（導入）。確率測度の語は 1-08。

先に言うこと — この章は定義の章で、定理は書きません。格子間隔は 1 に固定し、体積は有限です。連続極限・無限体積の極限はこの章の外です（無限体積の配位の空間は 19-03）。

この章の順序

1. 格子とリンク — 周期の格子 $(\mathbb{Z}/N)^4$ と向きのついた辺
2. SU(2) を単位の四元数で — 行列の代わりに長さ 1 の四元数
3. Haar の測度とその積 — 群の上の一様な確率
4. 面とホロノミー — 四本のリンクの積と、その実部
5. Wilson の測度 — 重み $e^{\beta \sum_p \mathrm{Re}\, U_p}$ と期待値
6. 分配関数 — 正で有限であること
7. Lean の側の四つの約束と橋 — 同じ対象の四通りの書き方

01

格子とリンク — 周期の格子 $(\mathbb{Z}/N)^4$ と向きのついた辺

導入は 5-01 §02 にあります。ここでは以後の部が使う形に固定します。

正の整数 N をとり、四次元の周期格子（トーラス）を

$$\Lambda_N = (\mathbb{Z}/N)^4 \tag{1}$$

とします。格子間隔は 1 に固定します。向き μ の単位のずれを e_μ と書きます。**リンク**は組 $\ell = (x, \mu)$ で、点 x から点 $x + e_\mu$ へ向かう辺を表します。点 x をリンクの**基点**と呼び、時間の向きのリンクでは基点の時刻をそのリンクの時刻とします（第 28 部の前提の木の「根」〔示すべき言明〕とは別の語です）。リンクは全部で $4N^4$ 本です。

向きの番号は部によって二通りです。

- **第 20 部の 20-01〜20-05**（四方向が同じ大きさのトーラス $(\mathbb{Z}/N)^4$）：向きを $\mu \in \{0,1,2,3\}$ と番号づけ、0 を時間とします。座標は $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ です（Lean の `TorusRP.Lk` の添字と同じ）。19-03 の式もこの番号で書きます。
- **第 21 部・第 22 部と 20-06**（第 21 部の格子は $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$、19-02）：向きを $\mu \in \{1,2,3,4\}$ と番号づけ、$1,2$ が横、$3,4$ が縦です。座標は $x = (x_1, x_2; x_3, x_4)$ です（Lean の `TwistedWilson.Link` の添字 0〜3 が向き 1〜4）。20-06 と第 22 部は、四方向が同じ大きさのトーラスでも向きを 1〜4 で番号づけます（Lean の添字 0〜3 が向き 1〜4）。

この章の式は、どちらの番号にも当てはまるよう向きの組 $\mu < \nu$ で書きます。

逆向きの辺は別のリンクとして数えません。逆向きに辿るときは、そのリンクの変数の逆元を使います（§02）。周期なので、$x_i = N - 1$ の点から e_i へ進むと $x_i = 0$ に戻ります。

第 21 部では、向き 1・2 と向き 3・4 で大きさの違うトーラス $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ を使います。その定義は 19-02 に置きます。リンクと面の作り方はこの章と同じです。

もの	記号	数
格子点	$x \in (\mathbb{Z}/N)^4$	N^4
リンク（向きつきの辺）	$\ell = (x, \mu)$	$4N^4$
面（向きの組 $\mu < \nu$）	$p = (x; \mu, \nu)$	$6N^4$

$N = 1$ では一つの面の中に同じリンクが二度現れます。$N = 2$ では同じ二点を結ぶリンクが二本あります。どちらも別の添字のまま数えます（Lean の定義も同じです）。

リンクの変数と配位

各リンク ℓ に群 $SU(2)$ の元 U_ℓ を一つずつ置きます。これを**リンクの変数**と呼び、全てのリンクへの割り当て

$$U = (U_\ell)_\ell \ \in \ SU(2)^{\{\text{リンク}\}} \tag{2}$$

を**配位**と呼びます。配位の空間はコンパクトな群 $SU(2)$ の $4N^4$ 個の積で、それ自身コンパクトです。点 x から $x+e_\mu$ へ進むときに $U_{x,\mu}$ を、逆向きに進むときに $U_{x,\mu}^{-1}$ を掛けます。

02

SU(2) を単位の四元数で — 行列の代わりに長さ 1 の四元数

本書の Lean の定義は、$SU(2)$ を 2×2 の行列ではなく**単位の四元数**で書きます。四元数 $q = a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k}$（$a,b,c,d \in \mathbb{R}$、$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1$）のノルムを $\|q\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ とし、

$$SU(2) \ \cong \ S^3 = \{q \in \mathbb{H} : \|q\| = 1\} \tag{3}$$

と同一視します。対応は次の行列で与えられます [典]。

$$q = a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k} \ \longmapsto \ \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{4}$$

この行列の行列式は $\|q\|^2$、跡は $2a$ です。そこで次の三つが成り立ちます [初]。

- 四元数の積は行列の積に対応します。単位の四元数の積は単位の四元数です（$\|pq\| = \|p\|\|q\|$）。
- 逆元は共役です：$q^{-1} = \bar{q} = a - b\,\mathrm{i} - c\,\mathrm{j} - d\,\mathrm{k}$（行列ではエルミート共役）。
- 四元数の実部は跡の半分です：$\mathrm{Re}\,q = a = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,q$。単位の四元数では $|\mathrm{Re}\,q| \le 1$ です。

中心は $\{+1, -1\}$ です。第 21 部の捩れ（19-02）は、この中心の符号を面の重みに入れる操作です。

本書で $\mathrm{Re}\,U$ と書けば、四元数の実部 $= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,U$ のことです。5-01 の $SU(N)$ の $\frac{1}{N}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U$ で、群の N を 2 としたものと同じ量です（5-01 の N は群の大きさで、この章の格子の大きさ N とは別の量です）。

03

Haar の測度とその積 — 群の上の一様な確率

導入は 5-01 §06 にあります。コンパクトな群 G の上には、左からの掛け算で不変な確率測度がちょうど一つあります。これを正規化した **Haar の測度**と呼び、dU と書きます [典]。コンパクトな群ではこの測度は右からの掛け算と逆元をとる写像でも不変です [典]。

$SU(2) \cong S^3$ では、Haar の測度は $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ の上の一様な面積の測度を全体で 1 に正規化したものです [初]。理由：単位の四元数を左から掛ける写像は $\mathbb{R}^4$ の直交変換なので、一様な面積の測度を保ちます。左不変な確率測度は一つしかないので、両者は一致します。

配位の空間の上の参照の測度は、リンクごとの Haar の測度の積です。

$$dU = \prod_{\ell} dU_{\ell} \qquad (\text{リンクは } 4N^4 \text{ 本}) \tag{5}$$

これも確率測度で、各リンクの変数を独立に一様に選ぶことに当たります。各リンクで逆元をとる写像や、各リンクの値を他のリンクへ並べ替える写像もこの積の測度を保ちます。鏡映（19-03）はこの性質を使います。

Lean では、正規化した Haar の測度を `Measure.haarMeasure ⊤`（全体の集合で 1 をとる Haar の測度）として定義しています。名は `OSGap.haarProb`・`TwistedWilson.haarProb`（同じ定義）、確率測度であることは `OSGap.haarProb_isProbabilityMeasure`、左不変は `OSGap.haarProb_isMulLeftInvariant` です。

04

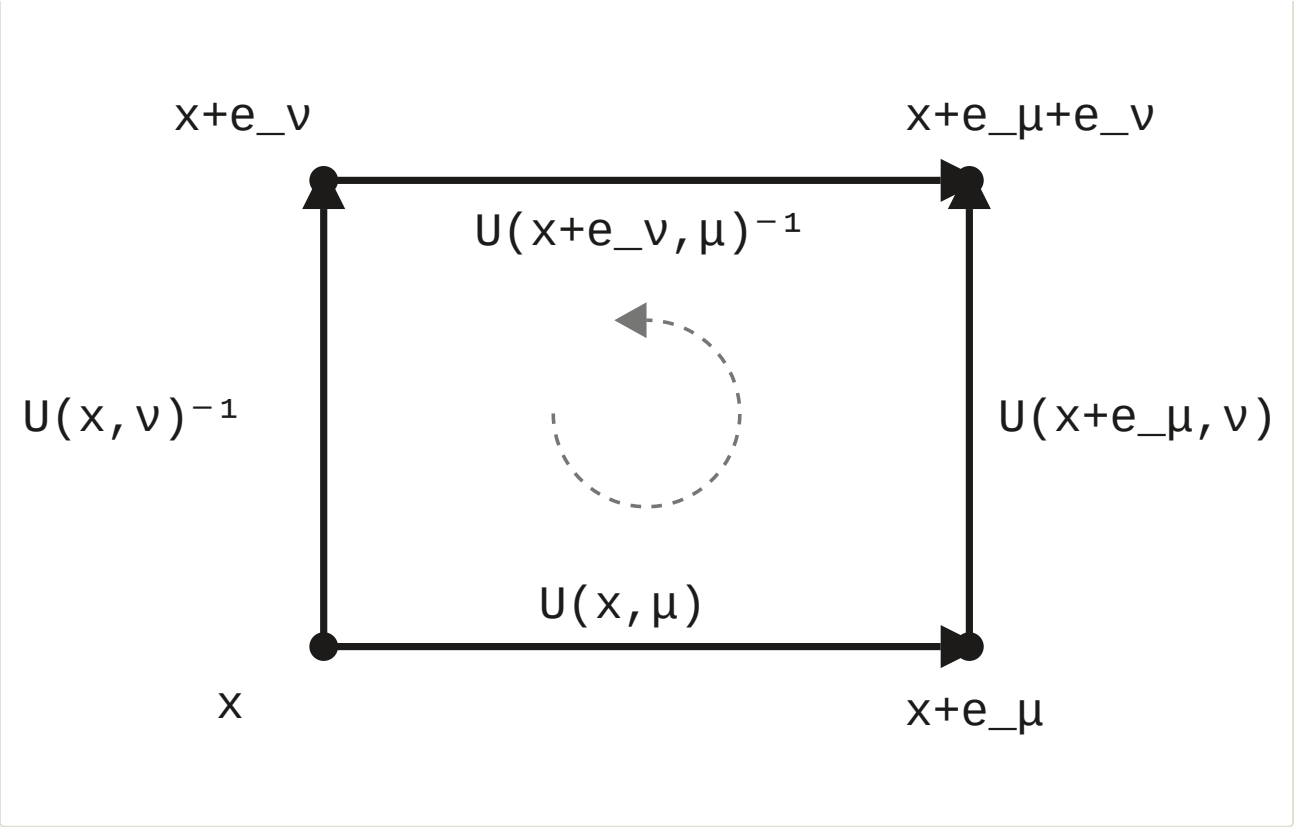
面とホロノミー — 四本のリンクの積と、その実部

導入は 5-01 §03 にあります。**面**（プラケット）は組 $p = (x;\mu,\nu)$（$\mu < \nu$）で、x、$x+e_\mu$、$x+e_\mu+e_\nu$、$x+e_\nu$ を角とする単位の正方形です。向きの組は六つ（第 21 部の番号で (1,2)・(1,3)・(1,4)・(2,3)・(2,4)・(3,4)、第 20 部の番号で (0,1)・(0,2)・(0,3)・(1,2)・(1,3)・(2,3)）なので、面は $6N^4$ 枚です。面の向きは μ から ν へ回る向きに固定し、逆向きの面は数えません。

面の**ホロノミー**は、縁を一周する四本のリンクの変数の積です。

$$U_p = U_{x,\mu}\, U_{x+e_\mu,\nu}\, U_{x+e_\nu,\mu}^{-1}\, U_{x,\nu}^{-1} \tag{6}$$

図 1　面 $p=(x;\mu,\nu)$ のホロノミー。矢印はリンクの向き。一周の向きと逆のリンクは逆元で掛ける



初 図の点線は一周の向き（$x \to x+e_\mu \to x+e_\mu+e_\nu \to x+e_\nu \to x$）です。上と左の辺はリンクの向きと逆に辿るので逆元が入ります。

U_p は単位の四元数で、その実部は $\mathrm{Re}\,U_p = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,U_p \in [-1,1]$ です 初 。$\mathrm{Re}\,U_p = 1$ は $U_p = 1$（面を一周しても何も変わらない）のときに限ります。

ゲージ変換と、実部の不変性

格子点ごとの $g_x \in SU(2)$ による**ゲージ変換**は、x から $y = x + e_\mu$ へのリンクを

$$U_{x,\mu} \;\longmapsto\; g_x\, U_{x,\mu}\, g_y^{-1} \tag{7}$$

に移します。このときホロノミーは $U_p \mapsto g_x U_p g_x^{-1}$ と共役で変わり、実部 $\mathrm{Re}\,U_p$ は変わりません 初 （$\mathrm{Re}(gqg^{-1}) = \mathrm{Re}\,q$、跡の巡回性）。Haar の測度の積もゲージ変換で不変です 初 （リンクごとに左右から掛けるだけなので）。Lean では、ゲージ変換を `act`（値 g(始点)$\,U\,g$(終点)*）として書いています。ゲージ不変な関数は第 20 部の真ん中の面の鏡映正値性（19-03）で使います。

05

Wilson の測度 — 重み $e^{\beta\sum_p \mathrm{Re}\,U_p}$ と期待値

導入は 5-01 §04 にあります。実数 β をとります。本書の第 19〜22 部と第 28 部では、配位 U の**重み**を

$$w_\beta(U) = \exp\Bigl(\beta \sum_p \operatorname{Re} U_p\Bigr) \tag{8}$$

とします。和は $6N^4$ 枚の面全てにわたります。5-01 の Wilson 作用 $S_W(U) = \beta \sum_p \bigl(1 - \frac{1}{2}\operatorname{tr} U_p\bigr)$ とは

$$e^{-S_W(U)} = e^{-6N^4\beta}\, w_\beta(U) \tag{9}$$

の関係にあります [初]。定数 $e^{-6N^4\beta}$ は正規化で消えるので、二つの書き方は同じ確率測度を与えます。β は 5-01 と同じ量で、$SU(2)$ では $\beta = 4/g^2$ です [典]。

Wilson の測度は、Haar の測度の積に重み w_β を掛け、全体を 1 に正規化した確率測度です。

$$d\mu_{N,\beta}(U) = \frac{1}{Z_N(\beta)} \exp\Bigl(\beta \sum_p \operatorname{Re} U_p\Bigr) \prod_\ell dU_\ell \tag{10}$$

記号を揃えます。正規化しない測度 $w_\beta(U)\prod_\ell dU_\ell$ を $\tilde{\mu}_{N,\beta}$（Lean の `TorusRP.wilsonMeasure N β`）、正規化した (10) を $\mu_{N,\beta}$（Lean の `TorusRP.wilsonProb N β`）と書きます。$\tilde{\mu}_{N,\beta} = Z_N(\beta)\,\mu_{N,\beta}$ です。

有界で可測な関数 F の**期待値**は

$$\langle F \rangle_{N,\beta} = \int F \, d\mu_{N,\beta} = \frac{1}{Z_N(\beta)} \int F(U)\, w_\beta(U) \prod_\ell dU_\ell \tag{11}$$

です。β の符号は定義の上では自由です。物理で普通に使うのは $\beta > 0$（面が 1 に揃うほど重い）ですが、第 20・21 部の定理の中には $\beta < 0$ も含めて成り立つものがあります。範囲は定理ごとに書きます。

重み (8) はゲージ不変です（§04）。そこで Wilson の測度もゲージ変換で不変です [初]。ゲージを固定しなくても積分は有限次元の、コンパクトな空間の上の積分です。

> 飛ばしてよい。正規化していない測度 $w_\beta \prod dU$ を本書では「正規化しない Wilson の測度」と呼びます。鏡映正値性のように「ある積分が 0 以上」を言う定理では、正の定数倍は結論を変えないので、Lean の多くの言明は正規化しない測度で書かれています（§07）。期待値や分散のように比をとる量では、正規化した測度 (10) を使います。

06

分配関数 — 正で有限であること

分配関数は正規化の定数です。

$$Z_N(\beta) = \int \exp\Big(\beta \sum_{p} \operatorname{Re} U_p\Big) \prod_{\ell} dU_\ell \tag{12}$$

定義 (10) が意味を持つには $0 < Z_N(\beta) < \infty$ が要ります。これは次の評価から出ます 初 。

$$e^{-6N^4|\beta|} \;\le\; Z_N(\beta) \;\le\; e^{6N^4|\beta|} \tag{13}$$

証明：各面で $|\operatorname{Re} U_p| \le 1$ なので、指数の中身の絶対値は $6N^4|\beta|$ 以下です。そこで被積分関数は $e^{-6N^4|\beta|}$ と $e^{6N^4|\beta|}$ の間にあり、参照の測度は全体で 1 です。（終）

この評価は体積とともに急に悪くなります。体積に一様なことは何も言っていません。無限体積の極限（第 20 部）では、Z そのものではなく期待値の比を扱います。

Lean では、被積分関数の両側の評価を `TorusRP.wilsonWeight_le` ・ `TorusRP.wilsonWeight_ge` （指数は面の数 × $|\beta|$。面の数が $6N^4$ であることは手で数えた）、それを積分した、正規化しない Wilson の測度の全体の質量 $\tilde{\mu}_{N,\beta}(\text{全体}) = Z_N(\beta)$ が正で有限であることを `TorusRP.wilsonMeasure_univ_pos` ・ `TorusRP.wilsonMeasure_univ_lt_top` 、捩れた格子の分配関数が正であることを `TwistedWilson.ZW_pos` （全ての実の β、捩れの全ての組）が述べます。

07

Lean の側の四つの約束と橋 — 同じ対象の四通りの書き方

本書の Lean の定理は、四つの系統（強結合・渦・フェルミオン・紫外）で別々に書かれました。対象は同じ $SU(2)$ の格子の配位とその測度ですが、格子の添字・リンクの値の空間・重みの符号の書き方が少しずつ違います。どの部の定理を読むときも、この表で約束を確かめてください。

	強結合の側（第 20 部）	渦の側（第 21 部）	フェルミオンの側（19-05）	紫外の側（19-04。
格子	$(\mathbb{Z}/N)^4$。リンク `Lk N` ＝（格子点）×（向き）。向きの添字 0 が時間（第 20 部の番号 0〜3 と同じ。鏡映 $x_0 \mapsto -x_0$）	$(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ 。 `Site N M` ・ `Link` ・ `Plaq` 。添字 0〜3 が向き 1〜4（第 21 部の番号）。**時間は添字 3**（x_4）（鏡映 $x_4 \mapsto -x_4$ は 19-03）	時間の輪 $\mathbb{Z}/2h$ × 空間 $(\mathbb{Z}/N)^3$。 `PhysLink N h` 。向きの添字 3 が時間。橋は $N = 2h$ のとき	段 m の箱 $(\mathbb{Z}/2^m I$ `BoxWalk.Site L` `BoxWalk.BoxLk L` `Fin 4` ）

	強結合の側（第 20 部）	渦の側（第 21 部）	フェルミオンの側（19-05）	紫外の側（19-04。
リンクの値	四元数の閉じた単位球 `QBall`（$\|q\| \le 1$）	単位球面 `SU2`（$\|q\| = 1$）	単位球面 `SU2`。作用の中では行列 (4) に移す	四元数の閉じた単 `ChainBlockMap.B` `ChainBlockMap.C` 像の値が球の内側 め、定義域と値域 04）
参照の測度	`haarBall`：球面の Haar の測度を球へ押し出したもの。積は `Measure.pi`	`haarCfg`：Haar の測度の積	Haar の測度の積	器の側で固定しな 測度 `ChainBlockM` の箱の型の配位の 測度の族を受け取
重み	$e^{\beta\,\mathrm{action}}$、`action` $= \sum_{\mu<\nu} \mathrm{Re}\,U_p$	$\exp\bigl(\beta \sum_p z_p \,\mathrm{Re}\,U_p\bigr)$、$z_p = \pm 1$ は捩れの符号（19-02）	$e^{-\beta S_W}$、$S_W = \sum_p \bigl(1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U_p\bigr)$	定義に重みは入ら 測度などを箱の型 す
正規化	しない（`TorusRP.wilsonMeasure`）。正規化した形は `wilsonProb`	測度の名は置かず、分配関数 `TwistedWilson.ZW` と、その比で書く	しない（`WilsonGauge.gaugeMeasure`）	受け取る測度は確 したもの）
この本の記号	正規化しない $\tilde{\mu}_{N,\beta}$、正規化した $\mu_{N,\beta}$（(10)）、$Z_N(\beta)$（(12)）	Z_0, Z_1、θ_M（19-02）	19-05 の記号	19-04 の記号

約束の違いの意味を順に述べます。

閉じた球と球面。強結合の側は、リンクの値を閉じた単位球 $\{\|q\| \le 1\}$ に置き、参照の測度を「球面の Haar の測度を球に押し出したもの」（`haarBall`）にしています。球にしたのは Lean の構成の上の選びです。参照の測度は球面に載っているので、ほとんど全ての配位は $SU(2)$ に値をとり、積分の値は球面の約束と変わりません 初 。逆元の代わりに共役（`star`）を書いていますが、球面の上で両者は一致します。

重みの符号。フェルミオンの側の重みは $e^{-\beta S_W}$ で、(9) により $e^{\beta \sum \mathrm{Re}\,U_p}$ の正の定数倍です。

橋 — Lean で示された同一視

橋	言っていること	Lean
作用の和	$N = 2h$ の四方向が同じ大きさのトーラスで、全ての配位について $\sum_{\mu<\nu} \mathrm{Re}\,U_p + S_W = 6(2h)^4$（向きの添字の付け替えと、球面から球への埋め込みを通して）	`WilsonGauge.action_add_wilsonAction`
参照の測度の一致	フェルミオンの側の Haar の測度の積を `pull` で押し出すと、強結合の側の `haarBall` の積になる	`WilsonGauge.map_pull`

橋	言っていること	Lean
測度の一致	強結合の側の `TorusRP.wilsonMeasure (2h) β` は、フェルミオンの側の `gaugeMeasure h β` を添字の付け替え `pull` で押し出したものの $e^{6(2h)^4\beta}$ 倍に等しい（全ての実の β、$2h > 1$）	`WilsonGauge.wilsonMeasure_eq_map`
鏡映の一致	同じ付け替えで、二つの側の格子点の面の鏡映が対応する	`WilsonGauge.refl_pull`（19-03）
測度の一致（強結合 ↔ 渦）	$M = N$、捩れなし（$z_p \equiv 1$）のとき、全ての $N \geq 1$ と全ての実の β で、強結合の側の `TorusRP.wilsonMeasure N β` は、渦の側の Haar の測度の積 `haarCfg N N` に密度 $\exp(\beta \sum_p \mathrm{Re}\, U_p)$ を掛けたものを、リンクの付け替え（格子点 $x \mapsto ((x_0,x_1),(x_2,x_3))$、向きの添字はそのまま）と球面から球への包含 `toBall` で押し出したものに等しい。定数の因子は無い（面の和はどちらも $\mu < \nu$ の $6N^4$ 枚）。`toBall` は一対一（`WilsonBridge.toBall_injective`）	`WilsonBridge.wilsonMeasure_eq_map`
期待値・全質量（強結合 ↔ 渦）	可測な F について $\int F\, d(\mathrm{wilsonMeasure}) = \int F(\mathrm{toBall}\, U)\, e^{\beta \sum_p \mathrm{Re}\, U_p}\, d(\mathrm{haarCfg})$。$F = 1$ で、全質量は `ZW N N β false false`（を $[0,\infty]$ の値に直したもの）	`WilsonBridge.integral_wilsonMeasure`・`WilsonBridge.wilsonMeasure_univ`
時間を揃えた対応と鏡映（強結合 ↔ 渦）	強結合の側の時間（添字 0）を渦の側の時間（添字 3、x_4）へ、添字 k を $k-1$ へ移す付け替え（格子点 $x \mapsto ((x_1,x_2),(x_3,x_0))$）でも同じ測度の等式が成り立つ。このとき二つの側の格子点の面の鏡映は同じ写像になる（強結合の側の $x_0 \mapsto -x_0$ と渦の側の $x_4 \mapsto -x_4$）。時間と空間の面は逆向きの面に移る（実部は同じ、ホロノミーは共役）	`WilsonBridgeT.wilsonMeasure_eq_mapT`・`WilsonBridgeT.refl_toBallT`・`WilsonBridgeT.action_toBallT`
渦の比（背景なし）	背景 $n_{12} = 0$、$M = N$ で、$Z_{N,N}(\beta;0,1)/Z_{N,N}(\beta;0,0)$ は、正規化した強結合の側の測度での $\exp\bigl(-2\beta \sum \mathrm{Re}\, U_p\bigr)$（$\Pi_{(0,0)}$ に当たる N^2 枚の時間と空間の面）の期待値に等しい	`WilsonBridgeV.vortex_ratio_eq`
Haar の測度の定義	強結合の側と渦の側の `haarProb` は同じ式 `Measure.haarMeasure ⊤` で定義される（別の名前空間の二つの定義。上の測度の一致の証明の中で、展開して一致が確かめられている）	`OSGap.haarProb`・`TwistedWilson.haarProb`

強結合の側と渦の側は、$M = N$ で捩れが無いとき、Lean の中で一つの測度として結ばれています。リンクの付け替えと球面から球への包含で、渦の側の Haar の測度の積に重み $\exp(\beta \sum_p \mathrm{Re}\, U_p)$ を掛けたものを押し出すと、強結合の側の Wilson の測度にちょうどなります（定数の因子は無く、面の和はどちらも $6N^4$ 枚）。付け替えは二通りあります。向きの添字をそのまま重ねるものは、測度・期待値・全質量の等式に使います。強結合の側の時間（添字 0）を渦の側の時間（添字 3、x_4）に重ねるものは、鏡映を使う章で使います。後者では二つの

側の格子点の面の鏡映が同じ写像になり、時間と空間の面は逆向きの面に移ります。実部だけで書いた重みや作用は変わりませんが、ホロノミーそのものを移すときは共役が入ります。向きの添字をそのまま重ねてよいのは測度の等式についてだけで、鏡映を使う所では時間を揃えた付け替えを使います。

この橋が言っていないこと：捩れた測度（背景 $n_{12} = 1$、または $n_{34} = 1$）を測度として強結合の側に移す等式はありません。第 21 部の θ_M と Polyakov ループの期待値 $\langle\cdot\rangle_0$ は背景 $n_{12} = 1$ の重みの量で、この橋の上の量ではありません（橋が移すのは、背景なしの比 $Z(0,1)/Z(0,0)$ を期待値として書く形だけです）。$M \neq N$ の格子は強結合の側に対応物がありません。有限の体積の等式で、無限体積の極限や質量ギャップの定理を言い直すものではありません。

紫外の側の Lean の定義は、箱の格子と球に値をとる配位の上の写像と押し出しだけで、Wilson の重みを含みません。紫外の側と他の三つの側の対応は 19-04 で扱い、この章の橋の表には挙げません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 $SU(2)$ は単位の四元数の群で、$\mathrm{Re}\, q = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\, q \in [-1,1]$	—（定義と初等の事実）
典 正規化した Haar の測度はただ一つで、左右と逆元で不変	Lean で名を挙げたのは確率測度であることと左不変だけ
初 $e^{-6N^4\lvert\beta\rvert} \le Z_N(\beta) \le e^{6N^4\lvert\beta\rvert}$。Lean：`TorusRP.wilsonWeight_le`・`wilsonWeight_ge`（被積分関数）、`TorusRP.wilsonMeasure_univ_pos`・`TorusRP.wilsonMeasure_univ_lt_top`・`TwistedWilson.ZW_pos`	体積に一様な評価ではない。無限体積の極限はこの章の外
初 Wilson の測度と $\mathrm{Re}\, U_p$ はゲージ不変	ゲージの固定の議論（第 20 部の真ん中の面の鏡映で使う）はこの章に無い
Lean：`WilsonGauge.wilsonMeasure_eq_map`（$N = 2h$、全ての実の β）で、強結合の側とフェルミオンの側の Wilson の測度は定数倍を除いて一致	—
Lean：`WilsonBridge.wilsonMeasure_eq_map`（$M = N$、捩れなし、全ての $N \ge 1$ と実の β）で、強結合の側と渦の側の Wilson の測度は付け替えのもとで等しい（定数の因子なし）。時間を揃えた付け替えで鏡映も一致（`WilsonBridgeT.refl_toBallT`）	捩れた測度（$n_{12} = 1$ や $n_{34} = 1$）の測度としての橋、$M \neq N$。第 21 部の θ_M（$n_{12} = 1$）を強結合の側の期待値として書く式は無い

出典と再現

もの	種別	出典・道具
格子の上のゲージ理論、Wilson の作用	典	K. G. Wilson, Phys. Rev. D 10 (1974) 2445。導入は 5-01
Haar の測度の存在と一意性、$SU(2) \cong S^3$	典	標準の事実。導入は 5-01 §06
正規化しない測度で鏡映正値性を書く形	典	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（要旨のみ）
四つの約束の定義と橋	Lean	本書の Lean の束（強結合 ↔ 渦の橋：`WilsonBridge.wilsonMeasure_eq_map`・`integral_wilsonMeasure`・`wilsonMeasure_univ`・`toBall_injective`、`WilsonBridgeT.wilsonMeasure_eq_mapT`・`refl_toBallT`・`action_toBallT`、`WilsonBridgeV.vortex_ratio_eq`。強結合の側：`TorusRP.QBall`・`haarBall`・`Lk`・`action`・`wilsonMeasure`・`wilsonProb`。渦の側：`TwistedWilson.SU2`・`haarCfg`・`hol`・`zt`・`ZW`。紫外の側：`BoxWalk.Site`・`BoxWalk.BoxLk`・`ChainBlockMap.Ball`・`ChainBlockMap.Cfg`・`ChainBlockMap.vP`。フェルミオンの側：`WilsonGauge.wilsonAction`・`gaugeMeasure`・`action_add_wilsonAction`・`wilsonMeasure_eq_map`）。定義の式は源を読んで写した

この章で使った語 — 格子、リンク、リンクの変数、配位、単位の四元数、Haar の測度、面（プラケット）、ホロノミー、ゲージ変換、Wilson の測度、正規化しない Wilson の測度、分配関数。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：19-02 捩れた境界条件・渦の比 θ・Polyakov ループ — 同じ格子の上で、面の符号を一枚ずつ反転した分配関数と、その比を定義します。

捩れた境界条件・渦の比 θ・Polyakov ループ

この章は本書の検討です。§01〜§04 は既存の知見の整理で、§05〜§07 が本書の検討（渦の最小作用の定義と Lean の約束）です。

この章で分かること — 第 21 部の定理が語る対象 — 横 N・縦 M のトーラス、捩れの符号 n_{12}, n_{34}、分配関数 Z_0, Z_1、渦の比 θ_M、Polyakov ループ $P_b(t)$、捩れた真空 V、渦の最小作用 $S_{\mathrm{v}}(N,m)$ と S_N — の定義です。定義がきちんとしていること（$|\theta_M| < 1$、$0 \le S_N \le 2N^2$）もここで述べます。

前提となる章 — 19-01（格子・面・Wilson の測度）。捩れの導入は 25-01 §01。

先に言うこと — この章は定義の章で、θ_M や Polyakov ループについての評価は書きません（評価は第 21 部と、強結合の窓の中の 20-06）。横の大きさ N は固定した有限の数で、N に一様なことは何も言いません。格子間隔は 1 です。

この章の順序

1. 横 N・縦 M のトーラス — 小さな横断面と大きな平面
2. 捩れの符号 — 面の重みの符号を反転する
3. 分配関数 Z_0・Z_1 と渦の比 θ_M — 捩れを一つ入れる値段
4. Polyakov ループ — 縦の向きを一周する積
5. 捩れた真空 — 作用 0 の配位
6. 渦の最小作用 — 塊の中に渦を一本通す値段
7. Lean の名との対応 — 添字と真偽の値の約束

01

横 N・縦 M のトーラス — 小さな横断面と大きな平面

導入は 25-01 §01 にあります。正の整数 N, M をとり、格子を

$$\Lambda_{N,M} = (\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2, \qquad x = (x_1, x_2;\, x_3, x_4) \tag{1}$$

とします。向き 1・2 を**横**（大きさ N）、向き 3・4 を**縦**（大きさ M）と呼びます。横は小さな二次元のトーラス T^2_N、縦は大きな平面 $(\mathbb{Z}/M)^2$ で、第 21 部では N を止めて M を大きくします。

リンク (x,μ)、面 $p = (x;\mu,\nu)$（$\mu<\nu$）、ホロノミー U_p、Haar の測度の積は 19-01 と同じ作り方です。リンクは $4N^2M^2$ 本、面は $6N^2M^2$ 枚です。

縦の平面の点 $q = (x_3, x_4)$ を一つ決めると、その上には横の N^2 個の格子点が並びます。この N^2 個の点を基点とする $(3,4)$ の面の束を Π_q と書きます。Π_q は平面の中では一点に見え、横には T^2_N を覆う面の集まりです（25-01 §01 の式 (3)）。

02

捩れの符号 — 面の重みの符号を反転する

't Hooft の捩れた境界条件は、格子では面の重みの符号 $z_p \in \{+1,-1\}$ で入れます 典 。二つの捩れ $n_{12}, n_{34} \in \{0,1\}$ に対して

$$z_p = \begin{cases} (-1)^{n_{12}} & p \text{ が } (1,2) \text{ の面で、基点の } (x_1,x_2) = (0,0) \\ (-1)^{n_{34}} & p \text{ が } (3,4) \text{ の面で、基点の } (x_3,x_4) = (0,0) \\ 1 & \text{それ以外} \end{cases} \tag{2}$$

と置きます。つまり、横の $(1,2)$ の平面（縦の点を止めた一枚の T^2_N）のそれぞれで、基点が原点の面の一枚の符号を反転するのが $n_{12}=1$ です。反転する面は全部で M^2 枚です。縦の $(3,4)$ の平面（横の点を止めた一枚の平面）のそれぞれで、基点が原点の面の一枚を反転するのが $n_{34}=1$ で、反転する面は $\Pi_{(0,0)}$ の N^2 枚です。

捩れた重みと分配関数を

$$Z_{N,M}(\beta; n_{12}, n_{34}) = \int \exp\Big(\beta \sum_p z_p \operatorname{Re} U_p\Big) \prod_\ell dU_\ell \tag{3}$$

とします。これは $0 < Z < \infty$ を満たします 初 （19-01 §06 と同じ評価。$|z_p \operatorname{Re} U_p| \le 1$）。

$N, M \ge 2$ のとき、反転する面の置き場所は分配関数に効きません。リンクの変数を $U_\ell \mapsto -U_\ell$ と取り替えると、そのリンクを含む面の符号が全て反転し、Haar の測度は保たれるから

です[初]。分配関数が見るのは、各平面を貫く反転の個数の偶奇（流束）だけです。証明は 25-01 §02 の面を動かす補題 にあります（$N, M \geq 2$ の文。証明は一つの面が同じリンクを高々一度含むことに依ります）。25-01 は $(1,2)$ の反転を $(x_1, x_2) = (N-1, N-1)$ に置きますが、この補題により同じ分配関数を与えます。

25-01 の分配関数 $Z[z] = \int e^{-\beta S^z} \prod dU$（$S^z = \sum_p (1 - \frac{1}{2} z_p \operatorname{tr} U_p)$）とは $Z[z] = e^{-6N^2M^2\beta} Z_{N,M}(\beta; n_{12}, n_{34})$ の関係です[初]。この定数は次の節の比では消えます。

03

分配関数 Z_0・Z_1 と渦の比 θ_M — 捩れを一つ入れる値段

第 21 部では横の捩れを背景として $n_{12} = 1$ に止め、縦の捩れ n_{34} の有無で二つの分配関数を比べます。

$$Z_0 = Z_{N,M}(\beta; 1, 0), \qquad Z_1 = Z_{N,M}(\beta; 1, 1) \tag{4}$$

渦の比を

$$\theta_M = \theta_{N,M}(\beta) = \frac{Z_0 - Z_1}{Z_0 + Z_1} \tag{5}$$

と定義します。横 N は止めて書き、要るときは $\theta_{N,M}$ と書きます。$Z_0, Z_1 > 0$ なので θ_M は定まり、$|\theta_M| < 1$ です[初]。**流束の自由エネルギー** $\Delta F = \ln(Z_0/Z_1)$（25-01 の「区画と流束の自由エネルギーの定義」の語。26-03 の渦の自由エネルギー F_v と同じ量）を使えば $\theta_M = \tanh(\Delta F/2)$ です[初]。

意味：$\Pi_{(0,0)}$ の N^2 枚を反転することは、縦の平面を一本の中心の渦（-1 の流束）が貫く条件を課すことです。θ_M が 0 に近いことは、渦を一本入れても分配関数がほとんど変わらない、つまり渦が平面の中で安く湧いていることを表します。θ_M が M について e^{-cM^2} の速さで減ることが、Tomboulis–Yaffe の不等式を通して閉じ込めの議論の入口になります[典]（25-01 §02、26-01）。

$\theta_M \geq 0$（$Z_1 \leq Z_0$）は定義からは出ません。これは第 21 部の定理（M が偶数のとき）で、ここでは仮定しません。渦の比の、結合についての連続と極限、決めた値への合わせは 21-07 にあります。

> 飛ばしてよい。薄い渦の床（第 21 部）は背景 n_{12} を 0 と 1 のどちらに置いても成り立つ形で Lean に書かれています。そのときの比 $(Z_{N,M}(\beta; n_{12}, 0) - Z_{N,M}(\beta; n_{12}, 1))/(Z_{N,M}(\beta; n_{12}, 0) + Z_{N,M}(\beta; n_{12}, 1))$ を $\theta_M^{(n_{12})}$ と書きます。θ_M は $\theta_M^{(1)}$ のことです。

04

Polyakov ループ — 縦の向きを一周する積

横の位置 $b \in (\mathbb{Z}/N)^2$ と向き 4 の位置 $t \in \mathbb{Z}/M$ を決め、向き 3 を一周する M 本のリンクの変数を順に掛けます。

$$P_b(t) = \mathrm{Re}\Big(U_{(b;0,t),3}\, U_{(b;1,t),3} \cdots U_{(b;M-1,t),3} \Big) \tag{6}$$

これを **Polyakov ループ**と呼びます。実部は跡の半分なので $P_b(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\cdots) \in [-1,1]$ です 初 。閉じた道の積の跡なので、ゲージ変換で変わりません 初 。

捩れの背景 $n_{12}=1$、$n_{34}=0$ の重みで正規化した期待値を $\langle\cdot\rangle_0$ と書きます。

$$\langle F \rangle_0 = \frac{1}{Z_0} \int F(U) \exp\Big(\beta \sum_p z_p \,\mathrm{Re}\, U_p \Big) \prod_\ell dU_\ell \qquad (n_{12}=1,\ n_{34}=0) \tag{7}$$

第 21 部が評価するのは、向き 4 に T だけ離れた二本の Polyakov ループの対 $\langle P_b(0)\, P_{b'}(T) \rangle_0$ です。

一本の期待値は 0 です 初 ：$x_3 = 0$ の向き 3 のリンクを全て -1 倍すると、どの面もそのようなリンクを（重なりも数えて）0 本か 2 本含むので重みは変わらず、Haar の測度も保たれ、$P_b(t)$ だけが符号を変えます。そこで意味を持つのは対の相関です。

05

捩れた真空 — 作用 0 の配位

単位の四元数 i, j を使って、配位 V を次で定めます。

$$V_{x,1} = \begin{cases} \mathrm{i} & x_1 = 0 \\ 1 & x_1 \neq 0 \end{cases}, \qquad V_{x,2} = \begin{cases} \mathrm{j} & x_2 = 0 \\ 1 & x_2 \neq 0 \end{cases}, \qquad V_{x,3} = V_{x,4} = 1 \tag{8}$$

これを**捩れた真空**と呼びます。背景 $n_{12}=1$、$n_{34}=0$ の符号 (2) について、全ての面で

$$z_p \,\mathrm{Re}\, V_p = 1 \tag{9}$$

が成り立ちます 初 。たとえば基点が $(x_1,x_2)=(0,0)$ の $(1,2)$ の面では $V_p = \mathrm{i}\,\mathrm{j}\,\mathrm{i}^{-1}\mathrm{j}^{-1} = -1$ で、$z_p = -1$ と打ち消し合います。他の面ではホロノミーが 1 です。各面の作用 $1 - z_p \,\mathrm{Re}\, U_p$ は 0 以上なので、V は捩れた作用の最小（0）を与えます。Lean：`TwistBlocks.vac`、(9) は `TwistBlocks.vac_term`。

i と j が反交換する（$\mathrm{ij} = -\mathrm{ji}$）ことが、横の捩れを作用 0 で吸収する仕組みです。捩れた真空がゲージ変換と大域の変換を除いて一つであることは 25-01 §05 にあります。

06

渦の最小作用 — 塊の中に渦を一本通す値段

太い渦の床（第 21 部）の指数に現れる数 S_N を定義します。正の整数 m をとり、縦の大きさを $M = 2m$ とします。縦の平面 $(\mathbb{Z}/2m)^2$ を、線 $x_3 \in \{0, m\}$ と $x_4 \in \{0, m\}$ で一辺 m の四つの**塊**に分け、原点の塊 $b_0 = \{0, \dots, m-1\}^2$ を使います。

- **枠**：境の線の上に載るリンク。向き 3 のリンクは x_4 が線の上にあるもの、向き 4 のリンクは x_3 が線の上にあるもの、横の向き 1・2 のリンクは縦の点 (x_3, x_4) が線の上にあるもの。
- **内部**：枠でなく、縦の点が b_0 に入るリンク。
- **塊の面**：基点の縦の点が b_0 に入る全ての面（六つの向き、横の全ての位置）。

枠を捩れた真空 V に止め、内部を自由に動かし、角の点 $(x_3, x_4) = (0, 0)$ の上の $(3, 4)$ の面（$\Pi_{(0,0)}$ の N^2 枚）だけ符号を反転した作用の下限を

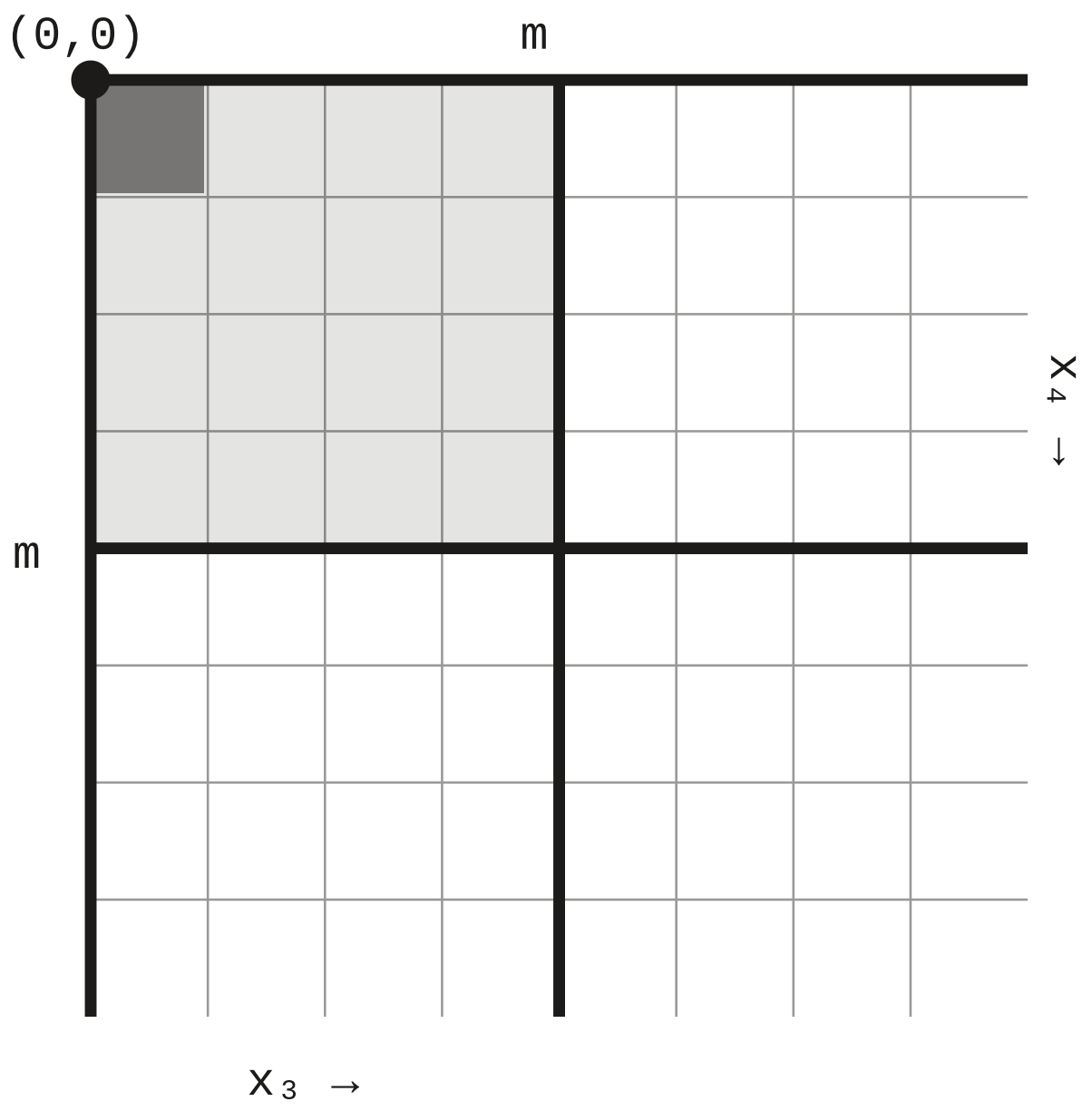
$$S_{\mathrm{v}}(N, m) = \inf_{\text{内部}} \sum_{p \in b_0} \bigl(1 - z_p\, \eta_p \operatorname{Re} U_p\bigr), \qquad \eta_p = \begin{cases} -1 & p \in \Pi_{(0,0)} \\ 1 & \text{それ以外} \end{cases} \tag{10}$$

とします。z_p は背景 $n_{12} = 1$、$n_{34} = 0$ の符号です。反転した $\Pi_{(0,0)}$ は縦の捩れ $n_{34} = 1$ と同じ面なので、$S_{\mathrm{v}}(N, m)$ は「縁を捩れた真空に止めた一辺 m の塊に、渦を一本通す最小の作用」です。m について下限をとった

$$S_N = \inf_{m \geq 1} S_{\mathrm{v}}(N, m) \tag{11}$$

を**渦の最小作用**と呼びます。

図 1　縦の平面 $(\mathbb{Z}/2m)^2$（$m = 4$）。太線が枠（捩れた真空に止める）、灰色が原点の塊 b_0、黒い点が符号を反転する角 $(0, 0)$。各点の上には横の T^2_N が載る



初 図は周期の平面の一周期分です（右と下の端は左と上の端に重なります）。濃い升は角の点 $(0,0)$ を基点とする升で、その上に $\Pi_{(0,0)}$ が載ります（図の黒い点と同じものを指します）。

定義がきちんとしていることを確かめます。各項 $1 - z_p \eta_p \operatorname{Re} U_p$ は 0 以上 2 以下なので下限は有限で、$S_{\mathrm{v}}(N,m) \geq 0$ です。内部も V にとると、反転しない面は全て 0（(9)）、反転した N^2 枚は各 2 なので $S_{\mathrm{v}}(N,m) \leq 2N^2$ です。したがって

$$0 \leq S_N \leq 2N^2 \tag{12}$$

です 初 。Lean：`TwistBlocks.Svortex_le` ・ `TwistBlocks.SN_bounds` 。(10) の下限は内部の配位で達成されます（内部の配位の空間がコンパクトなので。Lean：`TwistBlocks.Svortex_attained` ）。上界 $2N^2$ は薄い渦の床の指数と同じ数で、S_N がそれよ

り真に小さいかどうか、$S_N > 0$ かどうかは定義からは出ません。後者は 21-05 の定理、$N = 2, 3, 4$ の前者は同じ章の計算機の証明書です。

07

Lean の名との対応 — 添字と真偽の値の約束

渦の側の Lean の定義は、この章の記号と次のように対応します。向きの添字は 0 始まりで、0・1・2・3 がこの章の向き 1・2・3・4 です。捩れは真偽の値で、`true` が $n = 1$ です。

この章	Lean	注
$\Lambda_{N,M}$、リンク、面	`TwistedWilson.Site N M`・`Link`・`Plaq`	`Site N M = (ZMod N × ZMod N) × (ZMod M × ZMod M)`。面は向きの組 $\mu < \nu$
U_p	`TwistedWilson.hol`	四元数の積 $U_{x,\mu}U_{x+e_\mu,\nu}U^*_{x+e_\nu,\mu}U^*_{x,\nu}$
z_p（式 (2)）	`TwistedWilson.zt n12 n34`	反転の場所は基点の $(x_1, x_2) = (0,0)$・$(x_3, x_4) = (0,0)$
$Z_{N,M}(\beta; n_{12}, n_{34})$	`TwistedWilson.ZW N M β n12 n34`	正規化しない。参照の測度は `haarCfg`
Z_0、Z_1	`ZW N M β true false`、`ZW N M β true true`	
θ_M	`TwistBlocks.thetaM N M β`	式 (5) と同じ式
$P_b(t)$	`HalfSplit.polyLoop N M b t`	向き 3 は添字 2。積は $k = 0, 1, \ldots, M-1$ の順
$\langle P_b(s) P_{b'}(t) \rangle_0$	`PolyakovT.polyExp N M β b b' s t`	`PolyakovT.corr / ZW N M β true false`。`corr` の重み `HalfSplit.wE N M β (fun _ => 1)` は Z_0 の重みと同じ式（`PolyakovT.wE_one`）
V	`TwistBlocks.vac`	
$S_{\mathrm{v}}(N, m)$、S_N	`TwistBlocks.Svortex N m`、`TwistBlocks.SN N`	`Svortex N m = Smin N (2m) m 2 true (0,0)`（V を枠に）`true`。`SN N` は正の整数 m についての下限

Lean の `Smin` の塊の作用は、枠だけに載る面も含めて和をとります。その差は枠だけの関数で、内部についての下限には効きません。式 (10) の「塊の面」はこの約束に合わせてあります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 $0 < Z_{N,M}(\beta; n_{12}, n_{34}) < \infty$、したがって $\lvert\theta_M\rvert < 1$。Lean：`TwistedWilson.ZW_pos`	θ_M の大きさ・符号の評価（第 21 部）

言えている	言えていない
初 $N, M \geq 2$ で、反転の置き場所は分配関数に効かず、流束の偶奇だけが効く（25-01 §02 の面を動かす補題に証明）	この章の Lean の定義は置き場所を原点に固定している。置き場所を動かす補題は Lean の定理としては挙げていない
初 捩れた真空 V は全ての面で $z_p \operatorname{Re} V_p = 1$。Lean：`TwistBlocks.vac_term`	真空の一意性（25-01 §05）はこの章では扱わない
初 $\langle P_b(t) \rangle_0 = 0$（中心の変換）	Lean の定理としては挙げていない。対の相関の評価は第 21 部
初 $0 \leq S_N \leq 2N^2$、(10) の下限は達成される。Lean：`TwistBlocks.SN_bounds`・`Svortex_attained`	$S_N > 0$、$S_N < 2N^2$ は定義からは出ない（21-05）。N に一様なことは何も言わない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
捩れた境界条件	典	G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141。導入は 25-01
面の符号の場による格子の形	典	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 123 (1979) 442; 125 (1980) 117
Tomboulis–Yaffe の不等式	典	E. T. Tomboulis, L. G. Yaffe, Commun. Math. Phys. 100 (1985) 313。26-01
Polyakov ループ	典	標準の量。有限温度の秩序の変数としての扱いは Svetitsky–Yaffe, NPB 210 (1982) 423（書誌はこの本の引き方による）
定義（格子・捩れ・Z・θ_M・Polyakov ループ・捩れた真空・S_{v}・S_N）と (9)・(12)	Lean	本書の Lean の束（`TwistedWilson.ZW`・`zt`・`hol`・`haarCfg`、`TwistBlocks.thetaM`・`vac`・`vac_term`・`Svortex`・`SN`・`Svortex_le`・`SN_bounds`・`Svortex_attained`、`HalfSplit.polyLoop`・`PolyakovT.polyExp`・`PolyakovT.corr`）。定義の式は源を読んで写した

この章で使った語 — 捩れた境界条件、捩れの符号、流束、分配関数、渦の比、流束の自由エネルギー、Polyakov ループ、捩れた真空、塊、枠、渦の最小作用。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：19-03 鏡映・転送の作用素・再構成の器 — 鏡映と、それから Hilbert 空間と転送の作用素を作る器を定義します。

鏡映・転送の作用素・再構成の器

この章は本書の検討です。§01〜§04 と §06 は既存の知見の整理で、§05・§07・§08 が本書の検討（器と無限体積の空間の Lean の約束）です。

この章で分かること — 第 20 部の定理が語る対象 — 鏡映 Θ（格子点の面・真ん中の面）、正の側の関数、鏡映の対 $\langle F, G\rangle = \int F(\Theta\omega)G(\omega)\,d\mu$、時間の並進、再構成の器（対・並進・定数の三つ組）とそこから作る Hilbert 空間・真空 Ω・転送の作用素 T、質量ギャップの定義 $\|T - P_\Omega\| \le e^{-m}$、無限体積の配位の空間と周期の持ち上げ — の定義です。

前提となる章 — 19-01（格子と Wilson の測度）。導入は 4-10（反射正値性と再構成）、5-03（格子の上の鏡映と転送行列）、4-11（質量ギャップの定義）。

先に言うこと — この章は定義の章です。鏡映正値性（対が半正値であること）・無限体積の極限の存在・質量ギャップの評価はどれも第 20 部の定理で、ここでは仮定もしません。質量ギャップの定義は格子の一目盛りを単位にした、固定した格子間隔の量です。連続極限の質量ギャップの定義ではありません。

この章の順序

1. 鏡映 — 格子点の面と、リンクの真ん中の面
2. 正の側 — 鏡の片側だけに依る関数
3. 鏡映の対 — 鏡に映した関数との積の積分
4. 時間の並進 — 正の側を一目盛り奥へ
5. 再構成の器 — 対・並進・定数から Hilbert 空間と転送の作用素へ
6. 質量ギャップの定義 — 真空の外で T が e^{−m} 以下に縮む
7. 無限体積の配位の空間 — $\mathbb{Z}^4$ の上の配位と周期の持ち上げ
8. Lean の名との対応 — 三つの鏡と器の名

01

鏡映 — 格子点の面と、リンクの真ん中の面

導入は 5-03 §02 にあります。この章の式は 19-01 §01 の**第 20 部の番号**（向き $0,1,2,3$、0 が時間）で書き、時間の座標 x_0 を t と書きます。格子は時間の向きの大きさが偶数 $2M$ の周期格子です。Lean の鏡映（`TorusRP.thL`・`MidRP.thM`）は四方向が同じ大きさ $N=2M$ の $(\mathbb{Z}/2M)^4$ の上だけで定義されています。

鏡は二通りあります。

- **格子点の面の鏡映**：$t \mapsto -t$。鏡は格子点を通る二枚の面 $t=0$ と $t=M$ です（周期なので $-M \equiv M$）。
- **真ん中の面の鏡映**：$t \mapsto 1-t$。鏡は時間の向きのリンクの真ん中を横切る二枚の面 $t=\frac{1}{2}$ と $t=M+\frac{1}{2}$ です。

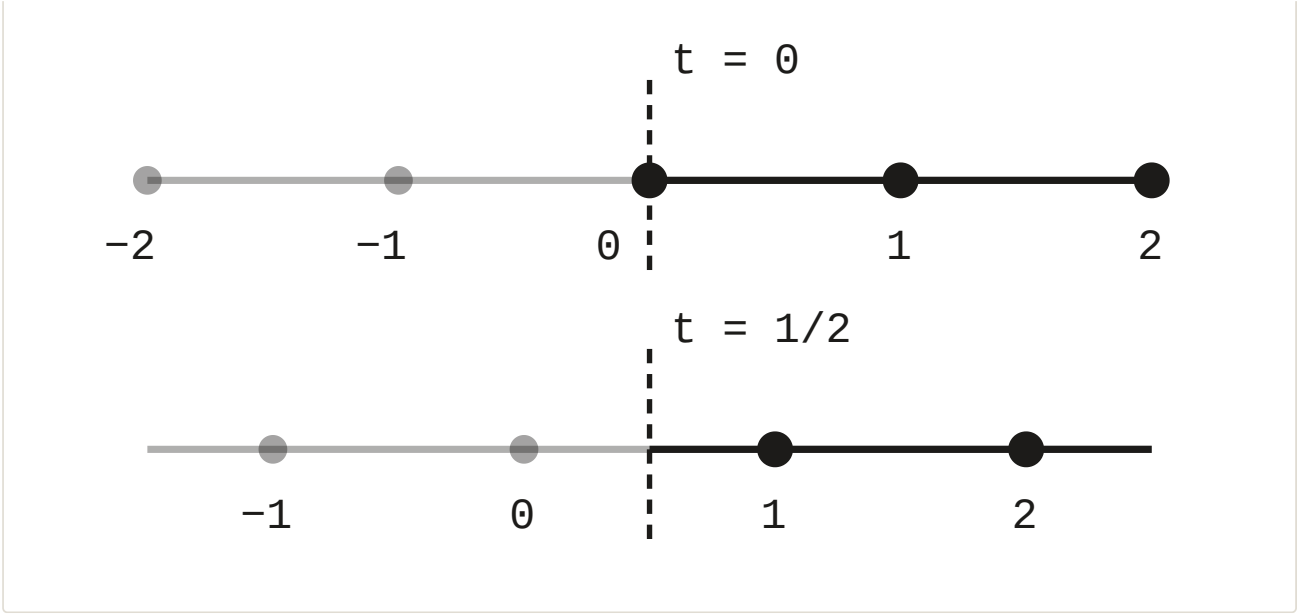
格子点の写し方 $x \mapsto \vartheta x$ から、リンクの変数の写し方を次で定めます。空間の向きのリンク (x,ν) は $(\vartheta x,\nu)$ へ移り、値はそのままです。時間の向きのリンクは向きが逆になるので、映した先のリンクの**逆元**をとります。

$$(\Theta U)_{x,\nu} = U_{\vartheta x,\nu} \quad (\nu \text{ は空間}), \qquad (\Theta U)_{x,0} = \big(U_{\vartheta(x+e_0),0}\big)^{-1} \tag{1}$$

格子点の面の鏡映では $\vartheta(x+e_0)=\vartheta x - e_0$、つまり t から $t+1$ へのリンクは $-t-1$ から $-t$ へのリンクに移ります。真ん中の面の鏡映では t から $t+1$ へのリンクが $-t$ から $1-t$ へのリンクに移り、$t=0$ と $t=M$ の時間のリンク（鏡を横切るリンク）は自分自身の逆元に移ります。

どちらの Θ も配位の空間の上の写像で、二度施すと元に戻り、Haar の測度の積を保ちます 初（リンクの並べ替えと、リンクごとの逆元。19-01 §03）。面は面に移り、$\mathrm{Re}\,U_p$ の値は映した面の値に等しいので、Wilson の重みも保たれます 初（格子点の面の鏡について Lean：`TorusRP.holQ_refl`。真ん中の面の鏡はそれに一目盛りの並進を合わせたもので、並進の不変性から同じことが出ます）。

図 1　時間の向きの一列で見た二つの鏡。点は格子点（その上に空間のリンクが載る）、線分は時間のリンク。上：格子点の面 $t=0$。下：真ん中の面 $t=\frac{1}{2}$。濃い部分が正の側



初 上の段では鏡の上の点 $t = 0$ の空間のリンクは動かず、正の側にも負の側にも数えます。下の段では鏡の上に格子点は無く、0 から 1 への時間のリンクが鏡を横切ります。

渦の側（第 21 部）の格子 $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ では、向き 4 の格子点の面の鏡映 $x_4 \mapsto -x_4$（M が偶数、鏡は $x_4 = 0$ と $x_4 = M/2$）を同じ規則 (1) で使います（第 21 部の番号で、時間の役を向き 4 が担います）。$M = N$ のとき、強結合の側の時間を渦の側の向き 4 に重ねる付け替えで、二つの側の格子点の面の鏡映は同じ写像になります（Lean：`WilsonBridgeT.refl_toBallT`、19-01 §07）。

02

正の側 — 鏡の片側だけに依る関数

鏡の片側を**正の側**と呼び、正の側のリンクだけに依る関数を考えます。正確には、正の側のリンクの集合 L_+ を決め、二つの配位が L_+ の上で一致すれば値が一致する関数 F を「L_+ だけに依る」と言います。

鏡	正の側のリンク L_+
格子点の面（$t = 0, M$）	時刻 $0 \le t \le M$ の空間のリンクと、基点の時刻が $0 \le t \le M-1$ の時間のリンク（閉じた正の半分）
真ん中の面（$t = \frac{1}{2}, M+\frac{1}{2}$）	時刻 $1 \le t \le M$ の空間のリンクと、基点の時刻が $0 \le t \le M$ の時間のリンク（鏡を横切る $t = 0$・$t = M$ のリンクを含む）

Θ は正の側を負の側へ移します。そこで F が正の側だけに依れば、$F \circ \Theta$ は負の側（と鏡の上）だけに依ります 初 。

第 20 部の定理が使う関数の類は、正の側だけに依り、**有界で可測**な実数値の関数です。真ん中の面の鏡では、これに**ゲージ不変**（19-01 §04）を加えた類を使う定理があります。どの類

を使うかは定理ごとに書きます。

03

鏡映の対 — 鏡に映した関数との積の積分

導入は 4-10 §04 にあります。配位の空間の上の有限な測度 μ（第 20 部では Wilson の測度）と鏡映 Θ について、正の側の有界な関数 F, G の**鏡映の対**を

$$\langle F, G \rangle_\mu = \int F(\Theta\omega)\, G(\omega)\, d\mu(\omega) \tag{2}$$

と定義します。F, G について双一次です。μ が Θ で不変なら対称です 初 （$\omega \mapsto \Theta\omega$ と変数を取り替え、$\Theta^2 = \mathrm{id}$ を使う。Wilson の測度では Lean：`TorusRP.wilson_refl_symm`）。

鏡映正値性は、全ての正の側の F で $\langle F, F \rangle_\mu \geq 0$ となる性質です。これは定義ではなく測度の性質で、Wilson の測度について成り立つことは第 20 部の定理です（20-01）。この章では仮定しません。

正の定数 c を掛けた測度 $c\mu$ では対も c 倍になるので、半正値かどうかは正規化に依りません。Lean の鏡映正値性が正規化しない Wilson の測度で書かれているのはこのためです（19-01 §05）。

04

時間の並進 — 正の側を一目盛り奥へ

配位を時間の向きに一目盛りずらす写像を S とし、関数に $(\tau F)(\omega) = F(S\omega)$ で働かせます。向きは、F が時刻 $[0, R]$ のリンクに依れば τF は時刻 $[1, R+1]$ のリンクに依るように選びます。こうすると τ は正の側の関数を正の側の関数に移します。

測度が並進で不変で、$\Theta S = S^{-1}\Theta$ が成り立つとき、τ は対について対称です 初 。

$$\langle \tau F, G \rangle_\mu = \langle F, \tau G \rangle_\mu \tag{3}$$

格子の上でこの τ が引き起こす作用素が**転送の作用素**（転送行列）です。5-03 はこれを時間ゲージで直接書きます（5-03 §05）。この本の第 20 部は、次の節の器を通して、対と τ だけから作ります。

05

再構成の器 — 対・並進・定数から Hilbert 空間と転送の作用素へ

導入は 4-10 §05 にあります。Osterwalder–Schrader の再構成から、測度に依らない部分だけを取り出したものを**再構成の器**と呼びます。器は実ベクトル空間 V の上の次の組です。

欄	条件	測度から作るとき
対 B（双一次形式）	半正値 $B(x,x)\geq 0$、対称 $B(x,y)=B(y,x)$	鏡映の対 (2)
並進 τ（線形写像）	B について対称 $B(\tau x,y)=B(x,\tau y)$	時間の並進（§04）
定数 $\mathbf{1}\in V$	$B(\mathbf{1},\mathbf{1})=1$、$\tau\mathbf{1}=\mathbf{1}$	定数関数 1（確率測度）
軌道の有界	各 x に C が在り、全ての k で $B(\tau^k x,\tau^k x)\leq C$	有界な関数なら $C=\|F\|_\infty^2$

器から次のものを作ります。

1. **Hilbert 空間 $\mathcal{H}$**：V に半内積 B を入れて完備化したもの。$B(x,x)=0$ のベクトルは完備化の中で 0 に潰れます。V の元 x の像を $[x]$ と書きます。
2. **真空 $\Omega=[\mathbf{1}]$**。$\|\Omega\|=1$ です。
3. **転送の作用素 T**：$T[x]=[\tau x]$ を連続に延ばしたもの。延ばせるのは $B(\tau x,\tau x)\leq B(x,x)$（$\tau$ は縮む）だからです。これは対称性・半正値・軌道の有界から出ます 初 。道筋：$a_k=B(\tau^k x,\tau^k x)$ は Cauchy–Schwarz により対数凸（$a_{k+1}^2\leq a_k a_{k+2}$）なので比 a_{k+1}/a_k は増えます。$a_1>a_0$ なら a_k は指数的に増えて有界に反します（Lean：`OrbitGrowth.contraction_of_bounded`）。

こうして作った T は自己共役で、$\|T\|\leq 1$、$T\Omega=\Omega$ です 初 。Lean では、器を構造 `OSGap.Datum`、Hilbert 空間を `Datum.Hilb`、T を `Datum.T`、Ω を `Datum.Ω` と書き、性質を `Datum.contraction`・`Datum.T_symm`・`Datum.T_Ω`・`Datum.norm_Ω` が述べます。

測度から器を作る組み立ては `OSGap.measureDatum` です。確率測度 ν、鏡映、並進について、三つの欄 — 対が半正値（鏡映正値性）、対が対称、並進が対称 — を仮定として受け取り、残りの欄（定数・軌道の有界）を自分で満たします。第 20 部の定理は、Wilson の測度の極限についてこの三つの仮定を払います。

> 飛ばしてよい。器の欄を全て満たす例は小さなものでも作れます。Lean の `OSGap.exampleDatum` は二次元の $V=\mathbb{R}^2$ の上で、$|r|\leq 1$ に対して T が真空の補空間で r 倍になる器です（`example_opNorm_eq`）。器の欄が矛盾しない（空でない）ことの確かめです。

06

質量ギャップの定義 — 真空の外で T が e^{−m} 以下に縮む

導入は 4-11 §01 にあります。真空への射影を $P_\Omega v = \langle \Omega, v \rangle\, \Omega$ とします。実数 m について、器 D が**質量ギャップ m を持つ**とは

$$\|T - P_\Omega\| \le e^{-m} \tag{4}$$

のこととします（作用素ノルム）。Lean：`OSGap.Datum.HasMassGap D m`。単位は格子の一目盛りで、格子間隔は固定です。T は自己共役の縮小で $T\Omega = \Omega$ なので $\|T - P_\Omega\| \le 1$ が常に成り立ち、$m \le 0$ では (4) は自動的に成り立ちます 初 。意味を持つのは $m > 0$ のときです。

意味：T は Ω を動かさず自己共役なので、真空の直交補空間を保ちます。(4) はその補空間の上で $\|T\| \le e^{-m}$ と同じです 初 。$T > 0$（$T \ge 0$ で核が無い）なら $T = e^{-H}$ と書け、(4) は H の真空の補空間の上のスペクトルが $[m, \infty)$ に入ること、つまり 4-11 の意味の隙間が m 以上であることになります。第 20 部の T は核を持ちます（20-04）。その場合は $T = e^{-H}$ とは書けず、(4) は真空の補空間の上で $\|T\| \le e^{-m}$ という形で読みます。

(4) は、正の側の全ての x について切断した相関が一様な速さで減ることと同値です。

$$\|T - P_\Omega\| \le e^{-m} \iff \forall x \in V\ \exists C_x\ \forall k:\ B(\tau^k x, \tau^k x) - B(\mathbf{1}, x)^2 \le C_x\, e^{-2mk} \tag{5}$$

Lean：右から左は `OSGap.Datum.hasMassGap_of_decay`、左から右は `OSGap.Datum.decay_of_hasMassGap`（定数は $C_x = B(x,x) - B(\mathbf{1},x)^2$）。4-11 §02 の「隙間は全ての相関が一様に減ることと同値」の、器の上の形です。

この定義だけでは言えないことが二つあります。

- **非退化**：$\mathcal{H}$ が Ω の張る一次元だけなら $T - P_\Omega = 0$ で、(4) は全ての m で成り立ちます 初 。そこで第 20 部の定理は、真空に直交する長さ 1 のベクトルが在ること（真空の補空間が 0 でないこと）を別に結論に書きます。
- $T \ge 0$：定義は T の負のスペクトルを禁じません。$T \ge 0$ も第 20 部の別の結論です。

07

無限体積の配位の空間 — $\mathbb{Z}^4$ の上の配位と周期の持ち上げ

導入は 5-04 §01 にあります。大きさの違うトーラスの測度を比べるため、全てを一つの空間に載せます。$\mathbb{Z}^4$ のリンク (x, μ)（$x \in \mathbb{Z}^4$）全体の上の配位の空間を

$$\mathcal{C} = \prod_{\ell \in \mathbb{Z}^4\ \text{のリンク}} \{q \in \mathbb{H} : \|q\| \le 1\} \tag{6}$$

とし、積の位相を入れます。閉じた単位球はコンパクトなので $\mathcal{C}$ もコンパクトです 典（Tychonoff の定理）。ここで値を閉じた球にとるのは 19-01 §07 の約束です。

周期の持ち上げ：トーラス $(\mathbb{Z}/L)^4$ の配位 ω を、$\mathbb{Z}^4$ のリンクの座標を L で割った余りで読んで $\mathcal{C}$ の点にします。正規化した Wilson の測度 $\mu_{L,\beta}$（19-01 (10)）をこの写像で押し出した $\mathcal{C}$ の上の確率測度を、$L = 2(n+1)$ について

$$\mu^{\mathrm{lift}}_{n,\beta} = \big(\text{周期の持ち上げ}\big)_{*}\,\mu_{2(n+1),\beta} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{7}$$

と書きます。Lean：`WilsonLimit.liftProb β n`。全ての大きさ L の列は `AllN.liftS` です。

$\mathcal{C}$ の上の確率測度の収束は**弱収束**（有界で連続な全ての F について $\int F$ が収束）で測ります 典。強結合の窓で列 (7) が一つの確率測度 ν_β に収束することは第 20 部の定理（20-03）で、ここでは極限の存在を仮定しません。

$\mathcal{C}$ の上でも、鏡映（格子点の面 $t \mapsto -t$、規則 (1)）と時間の並進が同じ式で定まります。正の側の関数の空間は

$$W = \{F : \mathcal{C} \to \mathbb{R} \text{ 有界で連続 ： } F \text{ は基点の時刻が } [0, R] \text{ の有限個のリンクだけに依る}\} \tag{8}$$

です。W は定数 1 を含み、並進で閉じます。ゲージ不変なものに限った部分空間 W_{gi} も使います。第 20 部の器は $V = W$（または W_{gi}）、対は ν_β についての (2)、並進は §04、定数は 1 です。

08 Lean の名との対応 — 三つの鏡と器の名

この章	Lean	注
鏡映した配位 $\Theta\omega$	`LinkReflection.linkRefl θ σ ω`	$(\Theta\omega)_\ell = \sigma_\ell(\omega_{\theta\ell})$。$\theta$ はリンクの並べ替え、σ は値の写像
格子点の面の鏡（$(\mathbb{Z}/2M)^4$）	`TorusRP.thL` ・ `TorusRP.sig`	時間のリンクに共役（`star`）。正の側は `TorusRP.fixP`（鏡の上の空間のリンク）と `TorusRP.posP`
真ん中の面の鏡	`MidRP.thM` ・ `MidRP.sigT`	`thM` は格子点の面の鏡に一目盛りの並進を合わせたもの。正の側は `TorusGauge.cr`（横切るリンク）と `MidRP.posM`
渦の側の鏡（第 21 部の向き 4）	`HalfSplit.Th`（`HalfSplit.thL` ・ `HalfSplit.sgL`）	M が偶数。鏡の上のリンクは `HalfSplit.fixL`。`HalfSplit.thL` は `TorusRP.thL` と同じ名の別の定義

この章	Lean	注
フェルミオンの側の鏡	`WilsonGauge.thetaPhys`	強結合の側の鏡と `WilsonGauge.refl_pull` で対応（19-05）
器、Hilbert 空間、T、Ω	`OSGap.Datum`、`Datum.Hilb`、`Datum.T`、`Datum.Ω`	器の欄は `B`・`τ`・`one` と六つの条件（`nonneg`・`symm`・`τ_symm`・`one_one`・`τ_one`・`bounded`）
測度から作る器	`OSGap.measureDatum`	仮定の欄：鏡映正値性・対の対称・並進の対称
質量ギャップ	`OSGap.Datum.HasMassGap D m`	`‖D.T - vacProj D.Ω‖ ≤ Real.exp (-m)`
$\mathcal{C}$、鏡、並進	`WilsonLimit.Cfg`、`zRefl`、`zShift`	`Cfg` は $\mathbb{Z}^4$ のリンクから `QBall` への写像
周期の持ち上げ、(7)	`WilsonLimit.perLift`、`WilsonLimit.liftProb`	トーラスの大きさは `WilsonLimit.Nn n = 2(n+1)`
W、W_{gi}	`WilsonLimit.Wsub`、`GaugeZ.Wgi`	`Wgi = Wsub ⊓ Winv`（ゲージ不変）

第 20 部の定理は、器の欄 `B`・`τ`・`one` を結論の中で式 (2)・§04・定数 1 に縛った形で述べます。器があることだけを言う形では、欄を自明に選んで質量ギャップを満たせてしまうからです（§06 の非退化の注意と同じ理由）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 二つの鏡映は対合で、Haar の測度の積と Wilson の重みを保つ。Lean：`TorusRP.holQ_refl`（格子点の面）	鏡映正値性（20-01 の定理）はこの章では仮定もしない
初 測度が Θ で不変なら対は対称。Wilson の測度では Lean：`TorusRP.wilson_refl_symm`	—
Lean：器から T が作れ、自己共役・縮小・$T\Omega = \Omega$（`Datum.contraction`・`T_symm`・`T_Ω`）	具体の測度で器の仮定が満たされること（第 20 部）
Lean：質量ギャップ (4) と相関の一様な減衰 (5) は同値（`hasMassGap_of_decay`・`decay_of_hasMassGap`）	(4) は非退化も $T \geq 0$ も含まず、$m \leq 0$ では自動的に成り立つ。格子間隔は固定で、連続極限の質量ギャップの定義ではない
典 $\mathcal{C}$ はコンパクト	列 (7) の収束（20-03 の定理）は仮定しない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
反射正値性と再構成	典	K. Osterwalder, R. Schrader, CMP 31 (1973) 83–112; 42 (1975) 281–305。導入は 4-10

もの	種別	出典・道具
格子ゲージ理論の鏡映（格子点の面・リンクの面）と転送行列	典	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（要旨のみ）。導入は 5-03
質量ギャップの定義	典	4-11 と同じ定義を、格子の一目盛りを単位に器の上で書いたもの
Tychonoff の定理、確率測度の弱収束	典	標準の事実
器・鏡・無限体積の空間の定義と、§05・§06 の性質	Lean	本書の Lean の束（`OSGap.Datum`・`measureDatum`・`exampleDatum`・`HasMassGap`・`hasMassGap_of_decay`・`decay_of_hasMassGap`、`LinkReflection.linkRefl`、`TorusRP.thL`・`sig`・`fixP`・`posP`、`WilsonLimit.Cfg`・`liftProb`・`Wsub`、`MidRP.thM`・`posM`、`HalfSplit.Th`）。定義の式は源を読んで写した

この章で使った語 — 鏡映、格子点の面、真ん中の面、正の側、鏡映の対、鏡映正値性、時間の並進、転送の作用素、再構成の器、真空、質量ギャップ、非退化、周期の持ち上げ、弱収束。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：19-04 ブロック写像と繰り込みの一段 — 同じ格子の上で、粗い格子へ移す写像と押し出しの測度を定義します。

ブロック写像と繰り込みの一段 — 道の族・平均・押し出し

この章は本書の検討です。§01 は既存の知見です。

この章で分かること — 細かい格子 $(\mathbb{Z}/2^{m+1}L)^4$ から粗い格子 $(\mathbb{Z}/2^{m}L)^4$ への写像 B を、道の族・重み・平均・群へ戻す操作で定義し、その一次の部分 C、押し出し $B_*\mu$、自由場の多段の族 $\mathcal{M}$・G_k を置きます。第 15 部の後半（15-12・15-13）の定理はこれらについて語ります。

前提となる章 — 19-01 リンクの変数・SU(2) を単位の四元数で、7-05 §02 一段の変換。

先に言うこと — 定義の章で、定理は書きません（最小限の事実だけを Lean の名とともに添えます）。B は数ある作り方の一つで、重みと閾 r_0 は設計の選びです（§08）。格子間隔の 0 への極限は扱いません。このブロック写像は本書の設計です。公開された構成の繰り込みの一段は別の設計で、存在はそちらが示しました（二つの設計の比べは 14-02）。

この章の順序

1. 繰り込みの一段の考え方
2. 二つの格子と粗いリンク
3. 道の族 — 重み $(1/8, 3/4, 1/8)$ と六通りの順
4. 非線形のブロック写像 B — 平均を retract で球へ戻す
5. 道の核 C — 一次の部分
6. 測度の押し出し
7. 自由場の側の多段の族
8. 重みは設計の選び

01

繰り込みの一段の考え方

導入は 7-05 §02・§05 です。繰り込みの一段は、細かい変数から粗い変数を一つの規則で作り、測度をその規則で粗い格子へ運ぶ操作です[典]。ゲージ場では、粗いリンクの変数を細かいリンクの「道に沿った積」で作ります（ゲージ変換で両端だけが動く）。ただし群の元は足して割れず、道の積の平均は一般に $SU(2)$ から外れるので、平均を群へ戻す手続きが要ります[典]。

この章の B は、道の族を一つ固定し、道ごとの積を重みつきで平均し、その値を半径方向に縮めて単位の球に戻すものです。抽象の一段 T（15-03）の具体の一つの形です。

以下、四元数を $\mathbb{H}$、その閉じた単位の球を $\mathbb{B} = \{q \in \mathbb{H} : |q| \le 1\}$ と書きます。$SU(2)$ は球面 $|q| = 1$ です（19-01）。共役 q^* は $SU(2)$ の上では逆元です。

02

二つの格子と粗いリンク

正の整数 L と段の番号 $m \ge 0$ をとり、

$$\Lambda_m = (\mathbb{Z}/2^m L)^4, \qquad \Lambda_{m+1} = (\mathbb{Z}/2^{m+1} L)^4 \tag{1}$$

とおきます。Λ_{m+1} が細かい格子、Λ_m が粗い格子です。番号の大きい方が細かいことに注意してください。粗いリンクは組 $b = (y, \mu)$（$y \in \Lambda_m$、向き $\mu \in \{1,2,3,4\}$）で、y から $y + e_\mu$ へ向かいます。この章の向きは 1〜4 で書き、Lean の添字 0〜3 に順に対応させます（二つの番号の約束は 19-01 §01）。四つの向きを同じに扱うので、どの向きを時間と呼ぶかは定めません。細かいリンクも同じ形 (x, ν)、$x \in \Lambda_{m+1}$ です。

粗い点 y は細かい点 $2y$ に座ります。写像 $y \mapsto 2y$ は $\mathbb{Z}/2^m L \to \mathbb{Z}/2^{m+1} L$ として矛盾なく定まります（$2^m L \equiv 0$ が $2 \cdot 2^m L \equiv 0$ に移るため）[初]。粗いリンク $b = (y, \mu)$ は、細かい格子の上では長さ 2 の区間 $2y \to 2y + 2e_\mu$ に対応し、その終点 $2y + 2e_\mu$ は次の粗い点 $y + e_\mu$ の像 $2(y + e_\mu)$ です[初]。

配位は、リンクごとに球の値をとる関数 $U : \{\text{リンク}\} \to \mathbb{B}$ とします。Wilson の測度が載るのは $SU(2)$ に値をとる配位ですが、平均の結果が球の内側に入りうるので、写像の定義域と値域は球に値をとる配位の空間にしておきます。

Lean：粗いリンク `BoxWalk.BoxLk L m`、球 `ChainBlockMap.Ball`（ほかの名は 19-06）。配位は正の向きのリンクにだけ値をとり、逆向きのリンクの値は共役 U^* で読む約束です。

03

道の族

粗いリンク $b=(y,\mu)$ ごとに、$2y$ から $2y+2e_\mu$ へ行く細かい道の有限の族を一つ決めます。μ と異なる三つの向きを番号の小さい順に n_1,n_2,n_3 とし、これを**横の向き**と呼びます。

- **ずれ** $A=(A_1,A_2,A_3)$：横の向き n_t ごとに、ずれ $d_t\in\{-1,0,+1\}$ を一つ選びます（27 通り）。
- **順** o：三つの横の向きを動く順を、三文字の置換で選びます（6 通り）。

道 $\gamma_{o,A}(b)$ は次の三つの区間をつないだものです。

1. $2y$ から、順 o に従って横の向き n_t に d_t だけ一歩ずつ進む（$d_t=0$ の向きでは動かない）。着いた点を $z=2y+\sum_t d_t e_{n_t}$ とします。
2. z から向き μ に二歩進み、$z+2e_\mu$ に着く。
3. 出たときと逆の順で横のずれを一歩ずつ戻し、$2y+2e_\mu$ に着く。

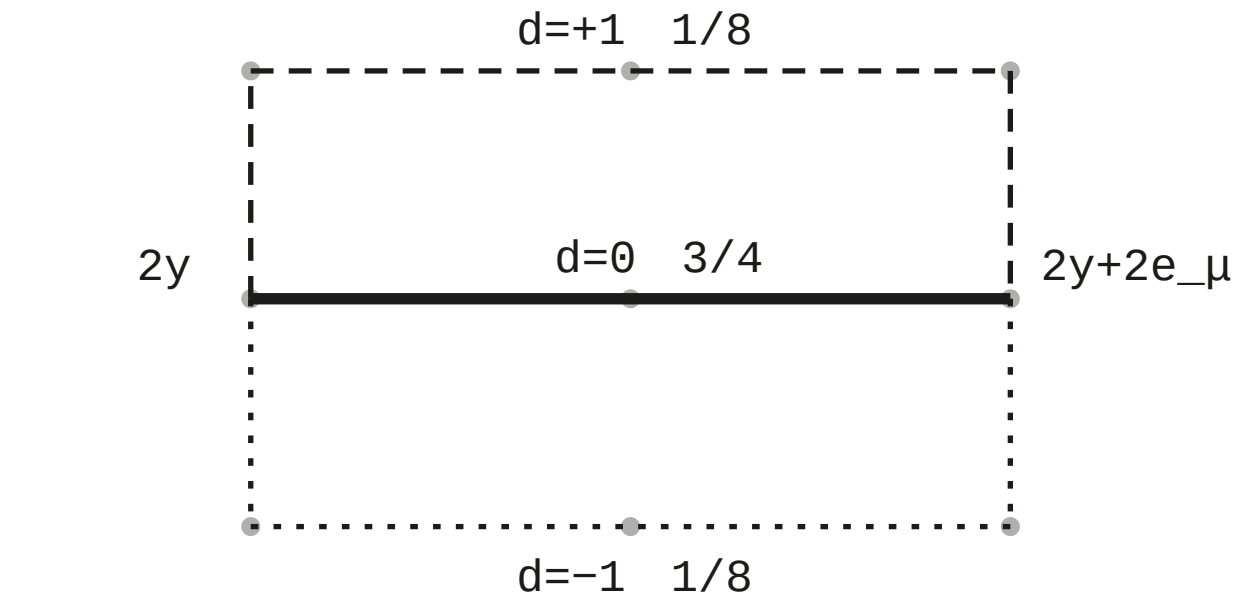
横のずれが全て 0 なら、道は μ に二歩進むだけの**真っ直ぐな道**です。長さは $2+2\#\{t:d_t\neq 0\}$ で、8 以下です。道の一歩はリンクとその向き（順向き・逆向き）の組で、逆向きの一歩はそのリンクを終点から始点へたどります。

道の重みは、横の向きごとの重み $\mathrm{wt}(-1)=\frac18$, $\mathrm{wt}(0)=\frac34$, $\mathrm{wt}(+1)=\frac18$ の積を六つの順で等分したものです。

$$w(o,A)=\frac{1}{6}\prod_{t=1}^{3}\mathrm{wt}(d_t),\qquad \sum_{o}\sum_{A}w(o,A)=1. \tag{2}$$

初 重みは非負で、総和は 1 です（$\sum_d \mathrm{wt}(d)=1$ の三乗を六つの順で等分）。Lean：`ChainBlockMap.sixWeight_total`。

図 1　粗いリンク一本（$2y\to 2y+2e_\mu$）と、横の向き一つに限って描いた三本の道。横の向きは三つあり、向きごとに独立にずれを選んで重みを掛けます



四次元では三つの横の向きで独立にこの選びをするので、真っ直ぐな道の重みは $(3/4)^3 = 27/64$ です[初]。

寄り道：同じ道が二度数えられること

飛ばしてよい。添字 (o, A) は $6 \times 27 = 162$ 通りですが、ずれが 0 の向きは順を変えても道が変わらないので、同じ道が複数の添字から出ます。Lean ではこれを道の有限集合と、合流した重み（同じ道を与える添字の重みの和）に直して扱います（`BoxWalk.boxPaths`・`BoxWalk.boxW`）。合流させても平均の値は変わりません。$\mathbb{Z}^4$ の上で数えると、0 でないずれの数が k の道は $\binom{3}{k}2^k k!$ 本で、合わせて $1 + 6 + 24 + 48 = 79$ 本です（長さ 2・4・6・8 の道がそれぞれ 1・6・24・48 本）[初]。小さいトーラスでは、$\mathbb{Z}^4$ で異なる道が同じ道に落ちることがあります。

六通りの順で平均すると、族は横の三つの向きの入れ替えについて対称になります。ずれの重みが $d \mapsto -d$ で対称なので、族は横の向きの反転についても対称です[初]。逆向きの粗いリンク（$y + e_\mu$ から y へ）の値は、§02 の約束どおり共役で読みます。同じ横の一歩・$-\mu$ への二歩・同じ戻りの族で平均を作り retract しても、値はその共役に一致し、約束と道の族は両立します（Lean：`BoxWalk.boxMap_rev`）。

Lean：道 `WalkCast.walk`（$\mathbb{Z}^4$ の上）、重み `ChainBlockMap.sixWeight`。

> 04

非線形のブロック写像 B

道に沿った積。道 $\gamma = (s_1, \dots, s_\ell)$ と配位 U について、順向きの一歩 s には U_s、逆向きの一歩には U_s^* を割り当て、道の順に掛けます。

$$U(\gamma) = \prod_{i=1}^{\ell} U_{s_i}^{\pm} \quad \text{(左から順に)}, \qquad U_s^{+} = U_s,\ U_s^{-} = U_s^{*}. \tag{3}$$

重みつきの平均。粗いリンク b の値の素は、道の積の重みつきの平均です。

$$q_b(U) = \sum_{o} \sum_{A} w(o, A)\, U\big(\gamma_{o,A}(b)\big) \ \in \mathbb{H}. \tag{4}$$

初 全ての $|U_\ell| \le 1$ なら $|q_b(U)| \le 1$ です（四元数のノルムは積で掛け算になり、重みは非負で総和 1）。Lean：`ChainBlockMap.norm_sixAvg_le`。

球へ戻す操作（retract）。閾 $r_0 > 0$ を固定し、

$$\rho_{r_0}(q) = \frac{q}{\max(|q|,\, r_0)} \tag{5}$$

とおきます。$|q| \ge r_0$ なら $\rho_{r_0}(q) = q/|q|$ は単位の四元数（$SU(2)$ の元）、$|q| < r_0$ なら $\rho_{r_0}(q) = q/r_0$ で、ノルムは $|q|/r_0 < 1$ です。どちらでも $|\rho_{r_0}(q)| \le 1$ で、ρ_{r_0} は連続です初。$r_0 = 1$ では、球の上で ρ_1 は恒等写像です。Lean の定義は全ての $r_0 > 0$ で意味を持ちますが、本書は $0 < r_0 \le 1$ をとります（$r_0 > 1$ では $|q_b| \le 1 < r_0$ なので値はいつも球の内側に入り、$SU(2)$ に落ちません初）。

定義（ブロック写像）。細かい格子の球に値をとる配位 U に、粗い格子の配位

$$B(U)_b = \rho_{r_0}\big(q_b(U)\big) \qquad (b \text{ は } \Lambda_m \text{ の粗いリンク}) \tag{6}$$

を対応させる写像 $B = B_m :\ \mathbb{B}^{\{\Lambda_{m+1}\text{のリンク}\}} \to \mathbb{B}^{\{\Lambda_m\text{のリンク}\}}$ を、段 m の**非線形のブロック写像**と呼びます。

初 B は連続です。平均 $q_b(U)$ が閾以上の「小さい場」の事象 $|q_b(U)| \ge r_0$ の上では $B(U)_b = q_b(U)/|q_b(U)| \in SU(2)$ で、閾の下では値は球の内側に入ります。Lean：`ChainBlockMap.continuous_blockMap`・`ChainBlockMap.blockMap_of_small_field`。

Lean の定義は `ChainBlockMap.blockMap r₀ hr (BoxWalk.boxPaths L) (BoxWalk.boxW L) m` です（`hr : 0 < r₀`）。段を重ねた写像 $B_m \circ B_{m+1} \circ \cdots \circ B_{n-1}$（段 n から段 m へ）は `ChainBlockMap.down` です。

閾の下の事象は場の大きな事象で、別に扱います（7-05 §04、第 22 部と第 28 部）。

05

道の核 C — 一次の部分

U が単位元 1 に近いときの B の形を見ます。細かいリンクの上の虚の四元数の場 a（$\mathrm{Re}\, a_\ell = 0$。リー環 $\mathfrak{su}(2)$ の元）と実数 ε をとり、$U_\ell = \exp(\varepsilon a_\ell) \in SU(2)$ とおきます（Lean：`BlockLinearKernel.expCfg`）。道の積を ε で展開すると、一次の項は道に沿った場の符号つきの和です。それを重みで平均したものを

$$(Ca)_b = \sum_{o} \sum_{A} w(o,A) \sum_{s \in \gamma_{o,A}(b)} \pm\, a_s \qquad \text{(順向きの一歩は}+\text{, 逆向きは}-\text{)} \tag{7}$$

と書き、C を**道の核**と呼びます。Lean の名は `BlockLinear.sixSgn` です。$0 < r_0 \le 1$、$\varepsilon \ge 0$、$|a_\ell| \le M$、$\varepsilon M \le 1/32$ のとき $B(e^{\varepsilon a})_b$ と $\exp(\varepsilon (Ca)_b)$ の差が $257(\varepsilon M)^2$ 以下であることは、第 15 部の定理です（15-13、Lean：`BlockLinearKernel.blockMap_exp_linear_le_one`）。retract は一次の部分を変えません。

係数の形。C は色（i,j,k の成分）ごとに働く実線形写像で、係数の表で書けます。細かい格子 $\Lambda_{m+1} = (\mathbb{Z}/2^{m+1}L)^4$ の上で

$$(Ca)_\mu(X) = \sum_{r \in \Lambda_{m+1}} \sum_{\nu=1}^{4} c(r)_{\mu\nu}\, a_\nu(2X + r), \tag{8}$$

$$c(r)_{\mu\nu} = \sum_{o} \sum_{A} w(o,A) \sum_{\substack{s \in \gamma_{o,A} \text{ の一歩で} \\ \text{向き } \nu,\ \text{底の点} \equiv r}} \pm 1. \tag{9}$$

ここで $\gamma_{o,A}$ は原点から向き μ に出る $\mathbb{Z}^4$ の上の道です。Lean：係数 `LatticeTorus.pathKernel`（一辺 $2^{m+1}L$ の形）、(8) の形の作用素 `TorusFourier.Cop`（$X \mapsto 2X$ の写像と係数の表から作る）。一つの色だけをとった実線形写像は `PushCov.blockLin` で、これが `Cop` と一致することは `PushCov.lattice_pushCov` の前半です。

例（定数の場）。場 a が全ての点で同じ値 a_ν をとるとき、横の一歩とその戻りは同じ向きの二つのリンクを逆の符号でたどるので打ち消し、μ の二歩だけが残ります。よって $(Ca)_\mu = 2a_\mu$ です。粗いリンクは細かいリンク二本分の長さなので、これは「長さに比例する」という期待どおりの形です。初 係数で言えば $\sum_r c(r)_{\mu\nu} = 2\delta_{\mu\nu}$ です。この和の形は、道の核の記号を運動量 0 でとったもの（`LatticePath.pathSym_closed` の $k = 0$）でもあります。真っ直ぐな道からの寄与は $c(0)_{\mu\mu}$ と $c(e_\mu)_{\mu\mu}$ の $27/64$ ずつです。

C は単位元のまわりの一次だけで（可換な配位の見方は 15-05）、背景の場 $U \neq 1$ のまわりの線形化は定義しません。

06

測度の押し出し

細かい格子の配位の上の確率の測度 μ について、**押し出し** $B_*\mu$ を

$$(B_*\mu)(E) = \mu\big(B^{-1}(E)\big) \qquad (E \text{ は粗い配位の可測な集合}) \tag{10}$$

で定めます。B は連続なので可測で、$B_*\mu$ は粗い配位の上の確率の測度です[初]。言い換えると、U が μ に従うときの粗い場 $B(U)$ の分布です。Lean では `Measure.map`（確率の測度の形は `ProbabilityMeasure.map`）です。

多段の押し出し。段 n の細かい格子の測度 μ_n を、段を重ねた写像で段 $m \le n$ まで押したものを $\nu_{n,m}$ と書きます。段を一つずつ押しても、まとめて押しても同じ測度です：$m < n$ で $(B_m)_*\nu_{n,m+1} = \nu_{n,m}$、$\nu_{n,n} = \mu_n$[初]。Lean：`ChainBlockMap.vP`、一致は `ChainBlockMap.hcons_blockMap`・`ChainBlockMap.vP_self`。

押し出す元の μ_n は、箱 Λ_n の球に値をとる配位の上の確率の測度です（Lean の型が箱の形）。Wilson の測度（19-01）やフェルミオンつきの測度（19-05）は格子の型が違うので、正規化して箱の格子の配位へ添字を付け替えたものを入れます（フェルミオンの側は Lean で `BoxFermion.fermProbBox`）。

この押し出しの測度だけで書いた示すべき言明は 19-07 にあります。

共分散。線形の場については、押し出しの共分散を次の形で扱います。実の内積空間 E の上の測度 μ の**共分散の形**を

$$\mathrm{cov}_\mu(u,v) = \int \langle u,x\rangle\langle v,x\rangle \, d\mu(x) - \int \langle u,x\rangle \, d\mu(x) \int \langle v,x\rangle \, d\mu(x) \tag{11}$$

とします（Lean：`PushCov.covForm`。意味を持つのは二次の積率があるとき）。$\mathrm{cov}_\mu(u,v) = \langle u, Tv\rangle$ の T を共分散の作用素と呼びます。線形の C で押すと $CTC^\dagger$ になることは 15-13 の定理で、非線形の B ではこの形になりません。

07

自由場の側の多段の族

第 15 部の「自由場の一段」（15-12）は、自由場の共分散の作用素に一段の写像 $T \mapsto CTC^\dagger$ を繰り返した作用素について語ります。これが Gauss の自由場を C で押した場の共分散であることは、一段・一色の形では Lean（`PushCov.lattice_pushCov`）にあり、段を重ねた形は線

形写像の押し出しを繰り返す一行の議論で、紙の上にあります。対象を、格子の側と運動量の側の二つの形で置きます。

格子の側。粗い側の一辺を N とし、トーラス $(\mathbb{Z}/N)^4$ の上の四成分の場 $\phi_\nu(X)$ を考えます（この節の N は粗い側の一辺です）。

- **自由場の共分散**（Feynman ゲージ）$\mathrm{freeCov}_N$：格子の Laplacian $-\Delta$ の逆を成分ごとにとったもの（定数の成分では 0）。Lean：`LatticePush.freeCov`。
- **一段**：$T \mapsto CTC^{\dagger}$（$(\mathbb{Z}/2L)^4$ の作用素から $(\mathbb{Z}/L)^4$ の作用素へ）。Lean：`LatticePush.stepOp`。
- **段 k の共分散**：$(\mathbb{Z}/2^kN)^4$ の自由場の共分散を k 回の一段で $(\mathbb{Z}/N)^4$ まで押したもの $\mathrm{stageCov}_{k,N}$。Lean：`LatticePush.stageCov`。
- **面の共分散**：面の場 $(\mathrm{curl}\,\phi)_{(a,b)}(X) = \big(\phi_a(X+e_b)-\phi_a(X)\big) - \big(\phi_b(X+e_a)-\phi_b(X)\big)$ の共分散 $\mathrm{curl}\circ\mathrm{stageCov}_{k,N}\circ\mathrm{curl}^{\dagger}$。Lean：`LatticeFace.faceCov`。

運動量の側。格子の運動量を $q=(q_1,\dots,q_4)$、$q_\nu = 2\pi n_\nu/N$ とします。

$$\omega(q) = \sum_{\nu} 4\sin^2\frac{q_\nu}{2}, \qquad s_\nu(q) = \sin\frac{q_\nu}{2}, \qquad P(q) = 1 - \frac{s(q)s(q)^{\mathsf{T}}}{|s(q)|^2}. \tag{12}$$

$\omega(q)$ は $-\Delta$ の固有値、$P(q)$ は $s(q)$ に直交する向きへの射影です。微分の記号は $1-e^{iq_\nu} = -2ie^{iq_\nu/2}\sin(q_\nu/2)$ なので、P は勾配（ゲージ）の向きを落とした「物理の部分」への射影です[初]。

細かいトーラス（一辺 $2N$）の運動量のうち、$y \mapsto 2y$ で粗い運動量 q に落ちるものは $r_\zeta(q) = q/2 + \pi\zeta$（$\zeta \in \{0,1\}^4$、16 個）で、これを**別名**と呼びます。**一段の写像** $\mathcal{M}$ は、運動量ごとの 4×4 の行列の族 G に

$$(\mathcal{M}G)(q) = \frac{1}{16}\sum_{\zeta\in\{0,1\}^4} A_\zeta(q)\, G\big(r_\zeta(q)\big)\, A_\zeta(q)^{\mathsf{T}} \tag{13}$$

を対応させます。$A_\zeta(q)$ は q と ζ から陽に作る 4×4 の実行列です。段 k の族は

$$G_0 = P/\omega, \qquad G_k = \mathcal{M}^k(P/\omega). \tag{14}$$

定義域は $\omega(q)>0$ の運動量です（$\omega=0$ は定数の成分）。

Lean は運動量を $\theta = q/4$ で持ちます（$\sin 2\theta_\nu = \sin(q_\nu/2)$）。芯の名は $\mathcal{M}$ の `OneStepBridge.Mfam` と G_k の `TauSplit.Gs` で、他の名は 19-06 にあります。

二つの側の関係：格子の側の $\mathrm{stageCov}_{k,N}$ が運動量ごとに位相の形の記号をもつこと（`LatticePush.stageCov_phase`）、その記号の物理の部分 PXP が G_k に等しいこと（`LatticePush.projFam_stage`）、面の共分散が運動量の側から作った作用素に等しいこと（`LatticeFace.faceCov_eq_posC`）は Lean で確かめてあり、第 15 部（15-12）で使います。ここで押しているのは線形の C で、非線形の B ではありません。

08

重みは設計の選び

この章の B は、次の選びを固定して定義しました。

選び	この章の値	他に取れるもの（例）
横の向きごとの重み $(\alpha, 1-2\alpha, \alpha)$	$\alpha = 1/8$	他の $\alpha \in [0, 1/2]$。$\alpha = 0$ は真っ直ぐな道だけ
横に動く順	六通りの等しい平均	一つの順に固定（対称性は弱くなる）
球へ戻す操作	retract ρ_{r_0}、$0 < r_0 \le 1$	他の閾、他の射影の仕方

重みが非負で総和 1 の道の族と、球を球に移す連続な戻し方を選ぶ限り、§03〜§06 の最小限の事実（値が球に留まる、連続、押し出しが確率の測度）は同じ形で立ちます[初]。閾なしの $q \mapsto q/|q|$ は $q = 0$ で定まらず連続でないので、この条件を満たしません。横のずれの幅やブロックの倍率の選びは 28-05 で扱います。

選びに依るのは、道の核 C の係数 (9) と、それから作る $A_\zeta \cdot \mathcal{M} \cdot G_k$ です。第 15 部の後半の定理に出る具体の定数（一段の縮みの率や面の共分散の比の上界など）は、この章の選び（$\alpha = 1/8$、倍率 2）で計算したもので、別の選びではそのまま使えません。重みを変えると何が変わるか、どの選びが前提を満たしやすいかの論点は、28-05 設計の選びに依るものに回します。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
[初] 重みは非負で総和 1。Lean：`ChainBlockMap.sixWeight_total`	この重みが他より良いこと（28-05）
[初] B は球の配位の間の連続写像で、閾以上の事象では $SU(2)$ に値をとる。Lean：`ChainBlockMap.continuous_blockMap`・`ChainBlockMap.blockMap_of_small_field`	B が $SU(2)$ の配位を $SU(2)$ の配位に移すこと。閾の下の事象の確率の評価
[初] 逆向きのリンクを共役で読む約束は道の族と両立。Lean：`BoxWalk.boxMap_rev`	局所のゲージ変換との両立の全ての形

言えている	言えていない
初 多段の押し出しは段ごとの押し出しと一致（$m < n$）。Lean：`ChainBlockMap.hcons_blockMap`	押し出した測度の減衰・一様性（19-07・第 28 部）
初 定数の場で $(Ca)_\mu = 2a_\mu$	背景の場 $U \neq 1$ のまわりの線形化

出典と再現

もの	種別	出典・道具
一段の変換・ゲージ場で平均が群から外れること	典	7-05 §05 の出典（T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 98 (1985) 17–51 は書誌のみ。J. Dimock, arXiv:1108.1335）
§02〜§07 の対象	Lean	本書の検討の Lean の定義（名は本文と 19-06）。定理は 15-12・15-13
道の数 79・27/64・係数の和	初	手の数え上げ（式は本文の寄り道）。定義から $\mathbb{Z}^4$ の上で道を列挙する台本でも同じ数

この章で使った語 — ブロック写像・道の族・横の向き・retract・閾・小さい場の事象・道の核・押し出し・共分散の形・別名・一段の写像・段の共分散・面の共分散。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：19-05 フェルミオンの重み — 押し出す元の測度の一つ、Wilson–Dirac の作用素の行列式を重みにした測度を定義します。

フェルミオンの重み — Wilson–Dirac の作用素と行列式つきの測度

この章は本書の検討です。§01 は既存の知見です。

この章で分かること — 時間の輪 $\mathbb{Z}/2h$ と空間のトーラス $(\mathbb{Z}/N)^3$ の格子の上で、Wilson–Dirac の作用素 $D_m(U)$ を定義し、ゲージの重み $e^{-\beta S_W}$ に $\mathrm{Re}\det D_m(U)^{2j}$ を掛けた測度 $\mu^{\mathrm{wf}}_{\beta,m,j}$ を置きます。第 20 部のフェルミオンつきの器（20-05）の定理は、この測度について語ります。

前提となる章 — 19-01 面とホロノミー・Wilson の測度・Lean の約束、5-01 §Wilson 作用。

先に言うこと — この章は定義の章です。フェルミオンは Grassmann の変数として積分した後の行列式の形でだけ現れ、Grassmann の積分そのものは定義しません。質量 m と結合 β は格子の上の裸の母数で、連続極限での意味（質量の繰り込み、カイラル対称性）は扱いません。

この章の順序

1. なぜ行列式の重みか — フェルミオンを積分すると、ゲージの配位ごとの行列式が残る
2. 格子と物理のリンク — 時間の輪 $2h$ と空間 N^3。この章の格子の形
3. ゲージの作用の約束 — $S_W=\sum_p(1-\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U_p)$ と、19-01 の重みとの関係
4. Wilson–Dirac の作用素 — $r=1$、四方向に反周期、γ の表現
5. 行列式の重み — $\mathrm{Re}\det D^{2j}$ は非負
6. フェルミオンつきの測度 — 正規化しない測度と、確率の測度 μ^{wf}
7. 質量の範囲 — 定義は全ての m、鏡映正値性の定理は $m>-1$
8. ゲージ場の測度の約束との関係 — 五つの違いと、$j=0$ で Wilson の測度に戻ること

01

なぜ行列式の重みか

格子の上のクォークの場は、点ごとにスピン（4 成分）と色（$SU(2)$ では 2 成分）を持つ Grassmann の変数 $\psi, \bar{\psi}$ で表します[典]。作用が $\bar{\psi} D(U) \psi$ の形の二次式なら、Grassmann の変数の積分は配位 U ごとに行列式 $\det D(U)$ を与えます。種類（香り）が n_f 個あれば $\det D(U)^{n_f}$ です[典]。

こうしてフェルミオンを積分した後の測度は、ゲージの配位の上の測度で、重みは $e^{-\beta S_W(U)} \det D(U)^{n_f}$ です。行列式は複素数になりうるので、確率の測度にするには重みが非負の実数であることが要ります。この章では香りの数を偶数 $n_f = 2j$ にとり、重みの実部 $\mathrm{Re} \det D^{2j}$ を使います（§05 で非負であることを見ます）。

格子の上の Dirac の作用素の素朴な差分には、余分な粒子（ダブラー）が現れます。Wilson の名で呼ばれる二階の差分の項を足すと、これが重くなります[典]。その作用素が D です。格子ゲージ理論にフェルミオンを入れた場合の鏡映正値性は Osterwalder–Seiler が扱っています[典]（5-03 §Wilson 作用の反射正値性）。

02

格子と物理のリンク

この章の格子は、時間の輪の長さ $2h$（$h \geq 1$）と空間の一辺 $N \geq 1$ の

$$\Lambda_{N,h}^{\mathrm{wf}} = (\mathbb{Z}/2h) \times (\mathbb{Z}/N)^3 \tag{1}$$

です。点を (t, x)、$t \in \mathbb{Z}/2h$、$x \in (\mathbb{Z}/N)^3$ と書きます。リンクは (t, x, μ) で、$\mu = 1, 2, 3$ は時刻 t の切り口の中の空間のリンク $x \to x + e_\mu$、$\mu = 4$ は時間のリンク $(t, x) \to (t + 1, x)$（$t + 1$ は $2h$ を法として）です。これを**物理のリンク**と呼び、その全体を $\mathcal{L}_{N,h}$ と書きます。

配位は $U : \mathcal{L}_{N,h} \to SU(2)$ で、$SU(2)$ は単位の四元数です（19-01）。配位の空間の上の基準の測度は、リンクごとの Haar の確率の測度の積 $\prod_\ell dU_\ell$ です（19-01）。

時間の向きを長さ $2h$ の偶数にしておくのは、鏡映 $t \mapsto -t$ の面が $t = 0$ と $t = h$ の二枚になるようにするためです（19-03）。$2h = N$ にとれば四方向が同じ大きさのトーラスです。

Lean：物理のリンクの型 `FermionSU2Config.PhysLink N hT`（`Fin (2 * hT) × (Fin 3 → Fin N) × Fin 4`。Lean の向きの番号 0・1・2 が空間、3 が時間）、$SU(2)$ は `FermionSU2Config.SU2`（四元数の単位球面）、基準の測度は `Measure.pi fun _ => Measure.haarMeasure ⊤`、時間の次の時刻 $t \mapsto t + 1 \bmod 2h$ は `FermionSliceBlock.sc`。

03

ゲージの作用の約束

この章の Wilson の作用は、向きを区別しない各面を一度ずつ数えた

$$S_W(U)=\sum_{p}\Big(1-\tfrac{1}{2}\operatorname{Re}\operatorname{tr}U_p\Big),\qquad U_p=U_\mu(z)\,U_\nu(z+e_\mu)\,U_\mu(z+e_\nu)^{\dagger}\,U_\nu(z)^{\dagger} \tag{2}$$

で、ゲージの重みは $e^{-\beta S_W(U)}$（$\beta\in\mathbb{R}$）です。面は、各時刻の切り口の中の空間の面 (μ,ν)（$\mu<\nu\le 3$）と、時刻 t と $t+1$ の切り口を結ぶ時間の面 $(\mu,4)$ です。トレースは四元数を 2×2 の行列 $q=a+bi+cj+dk\mapsto\begin{pmatrix}a+ib & c+id\\ -c+id & a-ib\end{pmatrix}$ で表してとります。

初 この表現は積を保ち、$\frac{1}{2}\operatorname{tr}$ は四元数の実部です。よって $\frac{1}{2}\operatorname{Re}\operatorname{tr}U_p=\operatorname{Re}U_p$ で、面の数を $|\mathcal{P}|$ とすると

$$e^{-\beta S_W(U)}=e^{-\beta|\mathcal{P}|}\,e^{\beta\sum_p\operatorname{Re}U_p}. \tag{3}$$

定数 $e^{-\beta|\mathcal{P}|}$ は正規化で消えるので、正規化した測度は 19-01 の Wilson の測度の約束 $e^{\beta\sum_p\operatorname{Re}U_p}$ と同じです。

Lean：作用 `WilsonGauge.wilsonAction N hT`、面ごとの量 `WilsonGauge.plaqE`（$1-\frac{1}{2}\operatorname{Re}\operatorname{tr}(ABC^{\dagger}D^{\dagger})$）、四元数の行列 `FermionSU2Config.quatMat`、配位の空間の行列としてのリンク `WilsonGauge.physSp`（空間）・`WilsonGauge.physT`（時間）。

04

Wilson–Dirac の作用素

フェルミオンの場 $\psi(t,x)$ は、点ごとにスピンの 4 成分と色の 2 成分を持つ複素ベクトルです。作用素 $D_m(U)$ は $\mathbb{C}^{2h\cdot N^3\cdot 4\cdot 2}$ の上の正方行列で、Wilson の $r=1$ の形

$$(D_m(U)\psi)(z)=(m+4)\,\psi(z)-\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{4}\Big[(1-\gamma_\mu)\,U_\mu(z)\,\psi(z+e_\mu)+(1+\gamma_\mu)\,U_\mu(z-e_\mu)^{\dagger}\,\psi(z-e_\mu)\Big], \tag{4}$$

をとります。$U_\mu(z)$ は色の添字に 2×2 の行列として、γ_μ はスピンの添字に働きます。$m\in\mathbb{R}$ は裸の質量です。

γ の行列。 スピンの添字を $(s,r)\in\{0,1\}^2$ の対で書きます。s を γ_4 の固有値 $+1$（$s=1$）、-1（$s=0$）の順に並べ、Pauli の行列 $\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$、$\sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\ i&0\end{pmatrix}$、$\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ を使って

$$\gamma_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\qquad \gamma_i=\begin{pmatrix}0&-i\sigma_i\\ i\sigma_i&0\end{pmatrix}\quad(i=1,2,3) \tag{5}$$

（塊は $s=1,0$ の順、各塊は r の 2×2）です。これは Lean の定義のとおりの並びです。$\gamma_\mu^2=1$、$\gamma_\mu\gamma_\nu=-\gamma_\nu\gamma_\mu$ $(\mu\neq\nu)$ を満たします[初]。

境界の条件。四方向とも反周期です。空間の向き i では $x_i=N-1$ から出るリンク、時間の向きでは $t=2h-1$ から 0 へのリンクで、跳びの項に符号 -1 を掛けます。ゲージのリンクの変数そのものは周期で、符号は作用素の跳びの側に付きます。

Lean：作用素 `WilsonGauge.physDirac N hT m ω`。中身は時間の切り口ごとの形 `FermionSliceBlock.std4`（(4) の $r=1$ の作用素。切り口の中は `FermionSliceBlock.stdSlice`）に、空間の跳び `FermionSliceBlock.torusX`（境界の符号は `FermionSliceBlock.torusLink`）と、時間の跳び（境界の符号 `FermionSliceBlock.eps`）を入れたものです。γ は `FermionSliceBlock.gammaT`（γ_4）・`FermionSliceBlock.gammaSp`（γ_i）。

成分の式は Lean にあります：`WilsonGauge.physDirac_apply` は physDirac の各成分が (4) の形であることを言います。

[読] $2^3\times2$ では $m\in\{0.3,-0.7,-4.0\}$、$2^3\times4$ では $m\in\{0.3,-0.7\}$ の乱数の配位で、`physDirac` の字句どおりの写しと、(4) を別の γ の表現で独立に書いた作用素（表現の取り替えの行列で写して）を比べ、成分の差は 3.6×10^{-15} 以下でした（本書の検討の数値の記録。時間の境界の符号を外すと差は 2.0 で、照合が効いていることの確かめになります）。

05

行列式の重み

香りの数を $2j$（$j=0,1,2,\ldots$）として、フェルミオンの重みを

$$F_{m,j}(U)=\mathrm{Re}\big(\det D_m(U)\big)^{2j} \tag{6}$$

とします。$j=0$ では $F\equiv1$ です[初]。

[初] 全ての $m\in\mathbb{R}$、全ての j と配位で、$(\det D_m(U))^{2j}$ の虚部は 0、実部は 0 以上です。Lean：`FermionSliceReflection.wilson_weight_nonneg_std4`（トーラスの形 `FermionSliceReflection.wilson_weight_nonneg_torus`）、配位の上の形は `WilsonGauge.fermWeight_nonneg`。よって (6) は実部をとる前から非負の実数で、Re は書き方の上の約束です。

$F_{m,j}$ は配位の連続関数です（行列の成分が U の成分の多項式なので）[初]。Lean の `WilsonGauge.continuous_fermWeight` は分けた座標（下の段落）の上の連続性で、配位の上

の連続性は分ける写像の連続性と合わせて読みます。重みの大域のゲージ変換での不変性と格子の対称性での不変性は、第 20 部の定理です（20-05）。

Lean の `WilsonGauge.fermWeight` は、鏡映の面で配位を「面・正の側・負の側」に分けた座標の上で (6) を書いたもので、分けない配位の上の作用素で書いた形と同じです（`WilsonGauge.physDirac_eq_split`）。分け方は 19-03 の正の側の定義に合わせてあります。

06

フェルミオンつきの測度

ゲージの重みとフェルミオンの重みの積

$$W_{\beta,m,j}(U) = e^{-\beta S_W(U)}\, F_{m,j}(U) \;\geq 0 \tag{7}$$

を密度にした、配位の空間の上の測度を

$$\mu^{\mathrm{wf},0}_{\beta,m,j}(dU) = W_{\beta,m,j}(U) \prod_{\ell \in \mathcal{L}_{N,h}} dU_\ell, \qquad Z^{\mathrm{wf}}_{\beta,m,j} = \int W_{\beta,m,j}(U) \prod_{\ell} dU_\ell \tag{8}$$

とおきます（正規化しない）。分配関数 Z^{wf} は全ての β, m, j で正です。これは第 20 部の定理です（20-05、Lean：`WilsonGauge.partition_pos_wilson_full`、密度 W の形は `WilsonGauge.wf_partition_pos`）。そこで

$$\mu^{\mathrm{wf}}_{\beta,m,j} = \left(Z^{\mathrm{wf}}_{\beta,m,j}\right)^{-1} \mu^{\mathrm{wf},0}_{\beta,m,j} \tag{9}$$

を**Wilson–フェルミオンの測度**と呼びます。確率の測度です[初]。

Lean：密度 `WilsonGauge.wfWeight N hT j m β`、正規化しない測度 `WilsonGauge.wfMeasure`（密度は非負の実数への切り詰め `toNNReal` で入れる。(7) が非負なので値は変わらない：`WilsonGauge.wfWeight_nonneg`）、正規化した測度 `WilsonGauge.wfProb N hT j m β`、確率の測度であることは `WilsonGauge.wfProb_isProbability`（$h \geq 1$）。

この測度は、ブロック写像で押し出す元の測度の一つにもなります（19-04 §06）。

07

質量の範囲

定義 (4)〜(9) は全ての実数 m で意味を持ちます。重みの非負と $Z^{\mathrm{wf}} > 0$ も全ての m で立ちます。範囲が狭くなるのは、定理の側です。

対象・性質	質量 m の範囲	どこで
作用素 D_m、重み $F_{m,j} \geq 0$、測度 μ^{wf}	全ての $m \in \mathbb{R}$	この章
$Z^{\mathrm{wf}} > 0$、格子の対称性での不変	全ての m	20-05
格子点の時間の面についての鏡映正値性	$m > -1$	20-05

$m > -1$ は $m = 0$ と小さい負の質量を含みます。$m \leq -1$ の鏡映正値性は、この本の Lean の言明の外です。m は裸の母数で、物理の質量との関係（臨界の質量への調整）はこの章では定義しません。

08

ゲージ場の測度の約束との関係

第 19 部の他の章の測度（19-01）と、この章の測度の違いをまとめます。

項目	19-01 の Wilson の測度	この章の測度
格子	$(\mathbb{Z}/N)^4$ または横 N・縦 M のトーラス	$(\mathbb{Z}/2h) \times (\mathbb{Z}/N)^3$
ゲージの重み	$e^{\beta \sum_p \mathrm{Re}\, U_p}$	$e^{-\beta S_W}$。定数倍だけ違う（式 (3)）
Haar の測度	強結合の側は球面の Haar の測度を閉じた球へ押し出したものの積（19-01 §Lean の約束）	$SU(2)$ の単位球面の上の Haar の確率の測度の積
正規化	正規化しない $\tilde{\mu}_{N,\beta}$（`TorusRP.wilsonMeasure`）と、正規化した $\mu_{N,\beta}$（`TorusRP.wilsonProb`）。渦の側は分配関数の比で書く	正規化しないもの (8) と、正規化したもの (9) の両方を置く
境界	ゲージのリンクは周期（捩れは 19-02）	ゲージのリンクは周期、フェルミオンは四方向に反周期

初 $j = 0$ では $F \equiv 1$ なので、$\mu^{\mathrm{wf}}_{\beta,m,0}$ は格子 $\Lambda^{\mathrm{wf}}_{N,h}$ の上の正規化した Wilson の測度で、m に依りません。

この章の宣言は `WilsonGauge`・`FermionSliceBlock`・`FermionSU2Config` の名前空間にあり、19-01 の `TorusRP.wilsonMeasure`・`TwistedWilson.ZW` とは別の定義です。四方向が同じ大きさ（空間の一辺 $N = 2h$、$2h > 1$）のとき、純ゲージの測度 `WilsonGauge.gaugeMeasure`（j を持たない定義で、密度は $j = 0$ の $\mu^{\mathrm{wf},0}$ と同じ初）を添字の付け替えで押し出すと、強結合の側の Wilson の測度の定数倍になることが Lean で示され

ています（`WilsonGauge.wilsonMeasure_eq_map`、19-01 §橋）。捩れのある渦の側と、この章の測度を結ぶ定理はありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 $\frac{1}{2}\operatorname{Re}\operatorname{tr} U_p = \operatorname{Re} U_p$ で、ゲージの重みは 19-01 の約束と定数倍だけ違う（$N = 2h$ の Lean の橋は 19-01）	$N \neq 2h$ の格子や捩れのある測度と Lean の定理で結ぶこと
初 全ての $m \cdot j$ で $(\det D_m)^{2j}$ は非負の実数。Lean：`FermionSliceReflection.wilson_weight_nonneg_std4`	$\det D_m$ そのもの（$2j$ 乗する前）の符号
初 正規化した μ^{wf} は確率の測度（$Z > 0$ は 20-05）。Lean：`WilsonGauge.wfProb_isProbability`	奇数個の香り、Grassmann の積分そのもの
読 `physDirac` と (4) の独立な写しの差 $\leq 3.6 \times 10^{-15}$（小さい格子）	数値の比べは小さい格子だけ。一般の N, h の成分の式は Lean（`WilsonGauge.physDirac_apply`）
初 $j = 0$ で Wilson の測度に戻る	質量の繰り込み・カイラル対称性・連続極限

出典と再現

もの	種別	出典・道具
Wilson の作用	典	K. G. Wilson, Phys. Rev. D 10 (1974) 2445（この本の書誌）。5-01
Wilson の項（ダブラーを重くする二階の差分）	典	書誌のみ（未確認）
フェルミオンつきの格子ゲージ理論の鏡映正値性	典	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（書誌のみ）。5-03
Grassmann の積分が行列式を与えること・ダブラー	典	格子の場の理論の標準の事実。教科書の書誌は未確認
格子・作用・作用素・重み・測度（§02〜§06）	Lean	本書の検討の Lean の定義（`WilsonGauge`・`FermionSliceBlock`・`FermionSU2Config`・`FermionSliceReflection` の宣言。名は本文）。対応表は 19-06
作用素の数値の照合（§04）	読	本書の検討の数値の記録：Lean の字句から書き写した作用素と、(4) を独立に書いた作用素の比べ（時間の境界の符号を外すと差 2.0 で、照合が効いていることの確かめ）

この章で使った語 — Wilson–Dirac の作用素・Wilson の項・反周期・物理のリンク・裸の質量・香り・フェルミオンの重み・Wilson–フェルミオンの測度。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：19-06 対象と Lean の定義の対応表 — 第 19 部の全ての対象を、記号・意味・Lean の名・使う部の表で引けるようにします。

対象と Lean の定義の対応表

この章は索引です。

この章で分かること — 第 19 部の対象を、本の記号から Lean の宣言の名へ、また Lean の名から本の記号へ引けます。各行に、定義を置いた章の錨と、その対象について定理を述べる部を添えます。

前提となる章 — なし。各行の錨から定義の章へ進んでください。

先に言うこと — この表は定義の対応だけを載せます。定理の名は各部の章にあります。Lean の名は宣言の名で、置き場（ファイル）は載せません。同じ対象が複数の系統（強結合・渦・フェルミオン・紫外の四つ）で別々に定義されている所は、系統ごとに行を分けました（約束の違いは 19-01 §07）。

この章の順序

1. この表の読み方 — 列の意味と、名前空間
2. 格子・リンク・測度（19-01）
3. 捩れ・渦の比・Polyakov ループ（19-02）
4. 鏡映・器・無限体積（19-03）
5. ブロック写像と多段の族（19-04）
6. フェルミオンの重み（19-05）
7. 系統どうしの対応（橋） — Lean で閉じた同一視
8. 名前空間の一覧 — Lean の名の頭から系統を引く

01

この表の読み方

各表の列は「記号」「意味」「Lean の宣言」「定義の章」「使う部」です。記号は本文の記号、Lean の宣言は `名前空間.名` の形で書きます。引数（`N`・`M`・`β` など）は省いた所があります。「使う部」は、その対象についての定理や前提を述べる部です。

Lean の束は、19-01 §Lean の約束の四つの系統（強結合の側・渦の側・フェルミオンの側・紫外の側）で書かれています。向きの番号の約束は 19-01 §01（20-01〜20-05 は 0〜3 で 0 が時間、第 21・22 部と 20-06 は 1〜4）です。紫外の側の格子は一辺 $2^m L$ の箱で、リンクの値は閉じた単位球です（19-04 §02）。同じ数学の対象でも、系統が違えば別の宣言です。系統の間を Lean で結んだ橋は 19-01 §橋 にまとめてあります。

字 m は章ごとに意味が違います：19-02 では渦の塊の一辺、19-04 では段の番号（Lean の `stageCov m L` の m も段）、19-05 では裸の質量です。

02

格子・リンク・測度（19-01）

記号	意味	Lean の宣言	定義の章	使う部
$(\mathbb{Z}/N)^4$ のリンク	四方向が同じ大きさのトーラスのリンク（点×向き）	`TorusRP.Lk`	19-01 #lattice	20
$(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$	横 N・縦 M のトーラスの点	`TwistedWilson.Site`	19-01 #lattice・19-02	20・21
$U_\ell \in SU(2)$	リンクの変数。単位の四元数	`OSGap.SU2`・`TwistedWilson.SU2`・`FermionSU2Config.SU2`	19-01 #su2	15・20・21・22
$\{\lvert q\rvert \le 1\}$	四元数の閉じた単位球（強結合の側と紫外の側のリンクの値）	`TorusRP.QBall`・`ChainBlockMap.Ball`	19-01 #conventions	15・20
dU	正規化した Haar の測度とその積	`OSGap.haarProb`・`TwistedWilson.haarProb`・`TorusRP.haarBall`・`TwistedWilson.haarCfg`	19-01 #haar	15・20・21・22
U_p、$\mathrm{Re}\,U_p$	面のホロノミーと実部	`TorusRP.hol`・`TwistedWilson.hol`	19-01 #plaquette	15・20・21・22
$\sum_p \mathrm{Re}\,U_p$	強結合の側の作用（符号は正）	`TorusRP.action`	19-01 #wilson-measure	20・22

記号	意味	Lean の宣言	定義の章	使う部
$\tilde{\mu}_{N,\beta}$、$\mu_{N,\beta}$	Wilson の測度（正規化しない $\tilde{\mu}$）と正規化した $\mu_{\circ}$ $\tilde{\mu}_{N,\beta} = Z_N(\beta)\mu_{N,\beta}$	`TorusRP.wilsonMeasure`・`TorusRP.wilsonProb`	19-01 #wilson-measure	20・22
$Z_N(\beta)$	分配関数（$\tilde{\mu}_{N,\beta}$ の全体の質量）	`TorusRP.wilsonMeasure` の全体の値	19-01 #partition	20・22

03

捩れ・渦の比・Polyakov ループ（19-02）

記号	意味	Lean の宣言	定義の章	使う部
n_{12}, n_{34}、z_p	捩れの有無と、面ごとの符号	`TwistedWilson.zt`	19-02 #twist	20・21
Z_0, Z_1	背景 $n_{12} = 1$ のもとの分配関数（$n_{34} = 0, 1$）	`TwistedWilson.ZW`	19-02 #twist	20・21
θ_M	渦の比 $(Z_0 - Z_1)/(Z_0 + Z_1)$	`TwistBlocks.thetaM`	19-02 #theta	20・21
$P_b(t)$	向き 3 を一周する Polyakov ループと、その対の期待値	`HalfSplit.polyLoop`・`PolyakovT.polyExp`	19-02 #polyakov	21
$S_{\mathrm{v}}(N, m)$、S_N	渦の作用の下限と、その m についての下限（渦の最小作用）	`TwistBlocks.Svortex`・`TwistBlocks.SN`	19-02 #vortex-action	21

04

鏡映・器・無限体積（19-03）

記号	意味	Lean の宣言	定義の章	使う部
Θ	鏡映（格子点の面・真ん中の面）。リンクの添字の写像と値の写像の組で書く一般の形	`LinkReflection.linkRefl`、具体の鏡映 `TorusRP.thL`・`TorusRP.sig`（格子点の面）・`MidRP.thM`（真ん中の面）・`HalfSplit.Th`（渦の側）	19-03 #reflection	20・22
正の側	鏡映の正の側のリンク（格子点の面・真ん中の面）と、鏡の面の中のリンク	`TorusRP.posP`・`TorusRP.fixP`・`MidRP.posM`	19-03 #positive-side	20
対	$\int F(\Theta\omega)G(\omega)\,d\mu$ の形の双一次形式	`OrbitGrowth.pairingForm`（器の欄 `OSGap.Datum.B`、測度から作る器 `OSGap.measureDatum`）	19-03 #pairing	20

記号	意味	Lean の宣言	定義の章	使う部
T, Ω, P_Ω	再構成の器（対の形・時間の並進・定数）と、転送の作用素・真空・真空への射影	`OSGap.Datum`（欄 `B`・`τ`・`one`）、作る対象 `OSGap.Datum.Hilb`・`OSGap.Datum.T`・`OSGap.Datum.Ω`、射影 `OSGap.vacProj`	19-03 #datum	20
質量ギャップ m	$\lVert T - P_\Omega \rVert \le e^{-m}$	`OSGap.Datum.HasMassGap`	19-03 #mass-gap-def	20・28
ν_β	$(\mathbb{Z}/2(n+1))^4$ の正規化した測度の $\mathbb{Z}^4$ への周期の持ち上げと、その極限	`WilsonLimit.liftProb`	19-03 #infinite-volume-space	20

05

ブロック写像と多段の族（19-04）

記号	意味	Lean の宣言	定義の章	使う部
Λ_m の粗いリンク $b = (y, \mu)$	一辺 $2^m L$ のトーラスのリンク。$y \mapsto 2y$ で細かい格子へ	`BoxWalk.BoxLk`・`BoxWalk.double`・`BoxWalk.base`	19-04 §02	15
$\gamma_{o,A}(b)$	道の族（順 o、横のずれ A）	`WalkCast.walk`・`BoxWalk.boxPathsIdx`・`BoxWalk.boxPaths`	19-04 #paths	15
$w(o, A)$	道の重み $\frac{1}{6}\prod_t \mathrm{wt}(d_t)$、$\mathrm{wt} = (1/8, 3/4, 1/8)$	`ChainBlockMap.wt`・`ChainBlockMap.sixWeight`・`BoxWalk.boxW`	19-04 #paths・#weights	15・28
$U(\gamma)$、$q_b(U)$	道に沿った積と、その重みつきの平均	`ChainBlockMap.pathProd`・`ChainBlockMap.sixAvg`・`ChainBlockMap.coarseAvg`	19-04 #block-map	15
ρ_{r_0}	閾 r_0 の retract $q/\max(\lvert q\rvert, r_0)$	`ChainBlockMap.retract`	19-04 #block-map	15
B	非線形のブロック写像と、段を重ねた写像	`ChainBlockMap.blockMap`・`ChainBlockMap.down`	19-04 #block-map	15・28
C	道の核（B の単位元のまわりの一次の部分）と、その係数・作用素	`BlockLinear.sixSgn`・`LatticeTorus.pathKernel`・`TorusFourier.Cop`・`PushCov.blockLin`	19-04 #path-kernel	15
$e^{\varepsilon a}$	虚の四元数の場の指数の配位	`BlockLinearKernel.expCfg`	19-04 #path-kernel	15
$B_*\mu$、$\nu_{n,m}$	押し出しの測度と、多段の押し出し	`Measure.map`・`ChainBlockMap.vP`	19-04 #pushforward	15・28

記号	意味	Lean の宣言	定義の章	使う部
cov_{μ}	共分散の形	`PushCov.covForm`	19-04 #pushforward	15
$\mathrm{freeCov}_N$、$\mathrm{stageCov}_{k,N}$	自由場（Feynman ゲージ）の共分散と、C で k 回押した段の共分散	`LatticePush.freeCov`・`LatticePush.stepOp`・`LatticePush.pushOp`・`LatticePush.stageCov`	19-04 #family	15
curl、面の共分散	面の場と、その共分散	`LatticeFace.curl`・`LatticeFace.faceCov`	19-04 #family	15
$\omega(q)$、$P(q)$	$\sum_{\nu} 4\sin^2(q_\nu/2)$ と、物理の部分への射影	`OneStepET.omF`・`OneStepBridge.Pfam`	19-04 #family	15
$\omega > 0$ の運動量、$r_\zeta(q)$	定義域（座標 $\theta = q/4$）と 16 個の別名	`OneStepFinal.Qpos`・`OneStepBridge.thR`・`OneStepFinal.rqPos`	19-04 #family	15
$\mathcal{M}$、A_ζ	運動量ごとの一段の写像と、その行列	`OneStepBridge.Mfam`・`OneStepBridge.AM`	19-04 #family	15
G_k	$\mathcal{M}^k(P/\omega)$	`TauSplit.Gs`・`TorusLam.Gst`	19-04 #family	15

06

フェルミオンの重み（19-05）

記号	意味	Lean の宣言	定義の章	使う部
$\mathcal{L}_{N,h}$	時間の輪 $2h$ × 空間 $(\mathbb{Z}/N)^3$ の物理のリンク	`FermionSU2Config.PhysLink`	19-05 §02	20
S_W	$\sum_p (1 - \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U_p)$（符号は負の約束）	`WilsonGauge.wilsonAction`・`WilsonGauge.plaqE`	19-05 §03	20
$D_m(U)$	Wilson–Dirac の作用素（$r = 1$、四方向に反周期）	`WilsonGauge.physDirac`・`FermionSliceBlock.std4`	19-05 #wilson-dirac	20
γ_μ	γ_4 と γ_i	`FermionSliceBlock.gammaT`・`FermionSliceBlock.gammaSp`	19-05 #wilson-dirac	20
$F_{m,j}$	$\mathrm{Re}(\det D_m)^{2j}$	`WilsonGauge.fermWeight`	19-05 §05	20
$W_{\beta,m,j}$、μ^{wf}	密度と、Wilson–フェルミオンの測度（正規化しない・した）	`WilsonGauge.wfWeight`・`WilsonGauge.wfMeasure`・`WilsonGauge.wfProb`	19-05 #fermion-measure	15・20
純ゲージの測度	$e^{-\beta S_W}$ を密度にした測度（j を持たない定義、$N = 2h$）	`WilsonGauge.gaugeMeasure`	19-01 #橋・19-05 §08	20

記号	意味	Lean の宣言	定義の章	使う部
Θ（フェルミオンの側）	時間の鏡映 $t \mapsto -t$ の配位への作用	`WilsonGauge.thetaPhys`	19-03 #reflection	20・22

07

系統どうしの対応（橋）

系統の違う二つの定義が同じ対象であることを Lean で示した宣言です。説明は 19-01 §橋 にあります。

結ぶもの	言っていること	Lean の宣言	範囲
強結合の側 ↔ 渦の側（測度）	$\tilde{\mu}_{N,\beta}$（`TorusRP.wilsonMeasure N β`）は、渦の側の Haar の積に重みを掛けた測度を、定義で与えた一対一の対応で写したものに等しい。定数の因子なし	`WilsonBridge.wilsonMeasure_eq_map`	$M = N$、捩れなしのときだけ。捩れた測度（背景 $n_{12} = 1$）の橋は無い
同（期待値・全質量）	可測な観測量の期待値と、全質量 $Z_N(\beta)$ が二つの側で一致	`WilsonBridge.integral_wilsonMeasure`・`WilsonBridge.wilsonMeasure_univ`	
同（時間を揃えた対応）	強結合の側の時間（添字 0）を渦の側の添字 3 に重ねる対応でも測度が一致し、二つの側の格子点の面の鏡映が同じ写像になる	`WilsonBridgeT.wilsonMeasure_eq_mapT`・`WilsonBridgeT.refl_toBallT`	
同（渦の比）	背景の捩れなし（$n_{12} = 0$）の渦の比を、強結合の側の確率測度の期待値として書く。本の θ_M（$n_{12} = 1$）ではない	`WilsonBridgeV.vortex_ratio_eq`	
強結合の側 ↔ フェルミオンの側	$\tilde{\mu}_{2h,\beta}$ は純ゲージの測度 `WilsonGauge.gaugeMeasure` を添字の付け替えで写したものの $e^{6(2h)^4\beta}$ 倍	`WilsonGauge.wilsonMeasure_eq_map`	空間の一辺 $N = 2h$、$2h > 1$

紫外の側と他の系統を一つの定理で結ぶ宣言は、この表には入れていません（測度の型の付け替えは 19-04 §06）。

08

名前空間の一覧

Lean の名の頭（名前空間）から、どの系統の宣言かを引けます。

名前空間	系統	主な対象
`TorusRP` ・ `OSGap` ・ `LinkReflection` ・ `MidRP` ・ `OrbitGrowth` ・ `WilsonLimit`	強結合の側	$(\mathbb{Z}/N)^4$ の Wilson の測度、器、無限体積
`TwistedWilson` ・ `TwistBlocks` ・ `HalfSplit` ・ `PolyakovT`	渦の側	捩れたトーラス、θ_M、渦の作用、Polyakov ループ
`WilsonBridge` ・ `WilsonBridgeT` ・ `WilsonBridgeV`	強結合の側と渦の側の橋	$M = N$・捩れなしの測度の一致
`WalkCast` ・ `ChainBlockMap` ・ `BoxWalk`	紫外の側（非線形）	道の族、ブロック写像、押し出し
`BlockLinear` ・ `BlockLinearKernel` ・ `LatticeTorus` ・ `TorusFourier` ・ `PushCov`	紫外の側（一次の部分）	道の核、共分散の形
`LatticePush` ・ `LatticeFace` ・ `OneStepBridge` ・ `OneStepET` ・ `OneStepFinal` ・ `TauSplit` ・ `TorusLam`	紫外の側（自由場）	段の共分散、運動量ごとの族
`WilsonGauge` ・ `FermionSliceBlock` ・ `FermionSU2Config` ・ `FermionSliceReflection`	フェルミオンの側	物理のリンク、Wilson–Dirac の作用素、Wilson–フェルミオンの測度

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 第 19 部の対象と Lean の宣言の名の対応（定義の章の錨つき）	系統の間の同一視は §07 の橋の範囲だけ（捩れた測度の橋は無い）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
Lean の宣言の名と名前空間	Lean	本書の検討の Lean の束の源を読んで写した。各対象の定義と説明は 19-01〜19-05

この章で使った語 — 対象・宣言・名前空間・系統・橋。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：19-07 示すべき言明 — ここで定義した対象だけで書いた、示すべき言明の一覧です。

示すべき言明 — 定義された対象だけで書く

この章は本書の検討です。§01 と §08 の問題文の読みは既存の知見の整理です。

この章で分かること — 連続極限と質量ギャップに向けて「何を示せばよいか」を、第 19 部で定義した対象だけで書いた言明です。まず裸の結合の列 β_n の決め方（合わせ）を定め、その列について五つの言明 — 全列の収束、非退化、同程度連続、質量ギャップ（一様な減衰）、帯 — を書きます。どれも一行の式で書け、未定義の量（実効の結合や活性など）を使いません。最後に、問題文との差と、すでに定理になっている近い形を表にします。

前提となる章 — 対象の定義は 19-01 Wilson の測度・19-02 渦の比・19-03 質量ギャップの定義・19-04 押し出しの測度。問題文は 0-03、質量ギャップの定義は 4-11。

先に言うこと — この章の言明は、どれも証明を持たずに置く言明です仮。本書はこのどれも示していません。前半の四つ（合わせ・全列の収束・非退化・同程度連続）は紫外の側の言明で、本書の設計（決まったブロック写像で押し出した測度）について書いたものです。四次元のヤン–ミルズ理論の存在は、2026-11-10 に公開された構成が別の設計で示し、Lean で証明されている、と委員会が評価しました（第二巻。二つの設計の比べは 第 14 部、本書の紫外の試みの記録は 第 15 部）。そこで前半の四つは、本書の設計での示すべき言明の記録として残します。後半の二つ（一様な減衰とその帰結の質量ギャップ、帯）は赤外の側の言明で、開いたままです。こちらが第三巻の本題です。五つの言明は、合わせで決めた列 β_n について読むときだけ中身を持ちます。列を自由に選べる形で読むと、結合を 0 に置くだけで質量ギャップと帯の言明が立ってしまいます（§01）。合わせ方には選びが残ります。問題文の要求のうち、細かい観測量と回転不変は、言明を書くための対象がまだ定義されていません（§08）。

この章の順序

1. 設定 — 一つの箱と、細かくなる格子の列
2. 合わせ — 裸の結合の列の決め方
3. 全列の収束 — 合わせた列で、部分列を取らずに
4. 非退化 — 粗い場が小さい場に留まる
5. 同程度連続 — 物理の位置について一様に
6. 一様な減衰 — 格子間隔と箱について一様に（帰結は質量ギャップ）
7. 帯 — 渦の比が面積の指数で小さくなること
8. 問題文との差 — 別の段と、対象がまだ無い段
9. すでに定理になっている近い形（表 2）

01

設定 — 一つの箱と、細かくなる格子の列

問題文が求めるのは、無限に広い連続の四次元の上の理論です（0-03 §03）。この章では、その手前の一段として、**大きさを止めた一つの箱**の上で格子間隔を 0 に近づけることを考えます。言明に使う対象は、第 19 部で定義したものだけです。

箱の大きさを正の整数 L とします。§02 の合わせだけは、一つ固定した**基準の大きさ** L_{ref} の箱で行います。§03〜§05 の言明は一つ止めた大きさ L の箱について（$L = L_{\mathrm{ref}}$ に限らない）、§06・§07 では大きさ $L \cdot L_0$ を走らせます。段 $n \geq 0$ の格子を

$$\Lambda_n = (\mathbb{Z}/2^n L)^4 \tag{1}$$

とし、段 n の格子間隔を $a_n = 2^{-n}$ と読みます。こう読むと、どの段の格子も一辺 L の同じ箱を刻んだものになります。段の番号が大きいほど細かい格子です（19-04 §02 と同じ向き）。時間の役をする向きは、19-01 の第 20 部の番号の向き 0 とします（19-04 の向きの番号 1〜4 では向き 1。19-04 自身は時間の向きを定めていません）。

使う対象は四つです。

記号	中身	定義
μ_n^β	Λ_n の上の正規化した Wilson の測度（結合 β）。結合の列 (β_n) を決めたとき $\mu_n := \mu_n^{\beta_n}$	19-01。Lean：`TorusRP.wilsonProb`
$\nu_{n,m}$	μ_n をブロック写像で段 $m \le n$ まで押し出した測度。粗い格子 Λ_m の配位の上の確率の測度	19-04。Lean：`ChainBlockMap.vP`
$\theta_{N,M}(\beta)$	背景の捩れ $n_{12} = 1$ を止めた、横 N・縦 M のトーラスの、(3,4) の捩れなし・ありの分配関数の比 $(Z_0 - Z_1)/(Z_0 + Z_1)$	19-02。Lean：`TwistBlocks.thetaM`
器と質量ギャップ	測度から作る Hilbert 空間・転送の作用素 T・真空 Ω。$\|T - P_\Omega\| \le e^{-m}$ を質量 m のギャップと呼ぶ	19-03。Lean：`OSGap.Datum.HasMassGap`

$\nu_{n,m}$ は、段 n の細かい格子の理論を、段 m の決まった解像度で眺めたものです。段 m を止めて $n \to \infty$ とすると、格子間隔 a_n が 0 に近づく極限を、同じ粗い格子の上で見ることになります。押し出しは粗い場を作る規則であって、実効の作用への分解（表現）は使っていません。

配位の空間はコンパクトです（球の有限個の積）。そこで、各段 m で $\nu_{n,m}$ は部分列に沿って弱収束し、対角線の論法で全ての段に共通の部分列が取れます[初]。**部分列の極限は前提なしに在る**ので、示すべき言明はそれより強い形でなければ意味を持ちません。以下の六つは、どれもその形です。

合わせと組にして読むこと。 §03〜§07 の五つの言明は、どれも結合の列 (β_n) を含みます。列を自由に選べる形で読むと、言明は中身を失います。

- $\beta_n \equiv 0$ と置くと、細かい測度は Haar の測度の直積です。ブロック写像は局所なので、時間に離れた粗い変数は独立で、共分散は 0 です。だから質量ギャップの言明（§06）はこの列で立ちます[初]。また $\beta = 0$ では捩れの有無で分配関数が変わらず $Z_0 = Z_1$ なので $\theta = 0$ で、帯の言明（§07）も立ちます[初]。
- β_n を大きく取ると、細かい測度は平らな配位に寄り、非退化の言明（§04）は立ちやすくなる見込みです。

逆に「全ての列について」と読めば、偽になる列がある見込みです（たとえば強結合の端と弱結合の端を交互に行き来する列では、全列の収束は期待できません）。だからこの章では、まず §02 で列 (β_n) を**合わせ**で一つに決め、§03〜§07 の五つは**その列について**書きます。強結合の窓での定理（§09）は、質量ギャップの言明の自明に立つ側の向きに在ることにも注意してください。

02

合わせ — 裸の結合の列の決め方

格子の上の結合 β は、連続極限では「入力」ではなく、格子間隔を目盛るために調整する数です（導入は 5-05 §02）。ここでは、その調整を定義された対象だけで書きます。

合わせの規則。 段 m_0 と、段 m_0 の粗い配位の有界連続な関数 Y_0（たとえば粗い面の $\mathrm{Re}\,U_p$ の平均）と、目標の値 κ_0 を選びます。段 $n \ge m_0$ ごとに

$$f_n(\beta) = \int Y_0 \, d\nu_{n,m_0}^{\beta}, \qquad \beta_n \text{ は } f_n(\beta_n) = \kappa_0 \text{ の解} \tag{2}$$

と定めます。ν_{n,m_0}^{β} は、基準の大きさ L_{ref} の箱の結合 β の Wilson の測度を押し出したものです。

解の存在。 f_n は β について連続です[初]。理由：$f_n(\beta)$ は、Haar の測度の積についての二つの積分 $\int (Y_0 \circ B)\, e^{\beta S}$ と $\int e^{\beta S}$ の比です（$S = \sum_p \mathrm{Re}\,U_p$、$B$ は段 n から段 m_0 への合成の写像）。被積分関数は有界で β について連続、配位の空間はコンパクトなので、どちらの積分も優収束の定理で連続になり、分母は正です。だから κ_0 が二つの値 $f_n(\beta')$, $f_n(\beta'')$ の間に在れば、中間値の定理で解が $[\beta', \beta'']$ の中に在ります[初]。全ての n で κ_0 がこの範囲に入るかは、Y_0 と m_0 の選びに依ります。

選びが残る所。 (i) Y_0・m_0・κ_0 の取り方。(ii) 解が一つとは限らないので、どの解を取るか（たとえば決めた区間の中の最大の解）。この二つは設計の選びで、28-05 の表に載せます。

示すべき言明。 合わせの規則は、全ての n で解が在れば列を一つ定めます。解の存在は端の値の確かめに掛かっていて、まだ確かめていません。その上で示すべきは、こうして決めた列が**結合の走り方の括弧**に入ることです。

> [仮] 合わせ：ある β_* と $0 < b_- \le b_+$ があって、全ての n で $\beta_* + b_- \, n \le \beta_n \le \beta_* + b_+ \, n$

格子間隔を半分にするごとに β がほぼ一定の幅で増える、という形です。一ループの漸近自由が予言する対数の走り方 $\beta \sim$ **定数** $\times \log(1/a)$ を、$n = \log_2(1/a_n)$ で書いたものにあたります（導入は 5-05 §03）。本書の検討が組んだ条件つきの含意（小さな箱の弱い紫外の存在）では、$b_\pm$ を一ループの係数の定数倍に取った括弧（裸の結合の合わせの括弧）が、実効の結合についての仮定（結合の一段の括弧の仮定）から出る形で置かれていました（28-01）。

結合の列の扱いは、その含意と Lean で違います。その含意は、細かい測度を「裸の結合の合わせの括弧で選んだ β_n の Wilson の測度」と定義して使います（その含意の β_n は実効の結合を目標の値に合わせて選んだもので、この節の規則 (2) とは別の合わせ方です）。Lean の定理は裸の結合の列を任意に取り、その選びと結びつけていません。

以下の約束。合わせは基準の大きさ L_{ref} の箱で一度だけ行い、得た列 β_n（段 n の格子間隔 $a_n = 2^{-n}$ での結合）を、全ての大きさの箱に使います。§03〜§07 では、β_n はこの列、$\mu_n = \mu_n^{\beta_n}$ は考えている大きさの箱の Wilson の測度、$\nu_{n,m}$ はその押し出しです。§06 と §07 で大きさを動かすときも、列は同じです。

03

全列の収束 — 部分列を取らずに

仮 全列の収束：合わせで決めた列 β_n について、全ての段 m と、Λ_m の配位の全ての有界連続な関数 F について、数列 $n \mapsto \int F \, d\nu_{n,m}$（$n \geq m$）が収束す

言い換えると、各段 m で $\nu_{n,m}$ が部分列を取らずにある測度 ν_m へ弱収束することです。このとき、ブロック写像が連続なので押し出しと極限は入れ替わり、ν_m は整合の関係 $(B_m)_* \nu_{m+1} = \nu_m$ を満たします初。整合な族 (ν_m) が、大きさ L の箱の上の「連続極限の理論」を、全ての解像度で同時に与えます。

§01 のとおり、部分列の極限は前提なしに在ります。この言明の中身は「どの部分列でも同じ極限になる」ことです。極限が部分列に依ると、理論が一つに決まりません。

この言明は結合の列を縛らないので、§02 の合わせで決めた列について読みます。合わせが決まっていないと、極限が何の理論の極限なのかが決まりません。

本書の検討が組んだ条件つきの含意の結論は、部分列に沿った収束までです（28-01）。その含意には全列の収束に関わる仮定（増分の総和可能性の仮定）が在りますが、これは**この言明と同じものではありません**。増分の総和可能性の仮定は、ゲージ不変な関数の可算で稠密な族について、観測量の値の段ごとの増分が総和可能、という仮定です。総和可能なぶんこの言明より強く、関数の族も違います。ゲージ不変な関数から全ての有界連続な関数へ移る一段は紙の議論で、極限の測度がゲージ変換で不変であることを介します（28-02）。

04

非退化 — 粗い場が小さい場に留まる

段 m の粗い格子の決まった有限の領域 R_m（箱の全体ではなく、物理の大きさを止めた領域）を選びます。R_m の中の粗いリンクが単位の長さに近く、粗い面がほぼ平らな配位の集まりを、**小さい場の集合** C_m と呼びます。たとえば閾 $y_m > 0$ を選んで

$$C_m = \{U :\ R_m \text{ の全ての粗いリンク } b \text{ で } |U_b| \geq 1 - \epsilon_m,\ \ R_m \text{ の全ての粗い面 } p \text{ で } \beta_m (1 - \mathrm{Re}\, U_p) \leq y_m\} \tag{3}$$

とします（閉集合です）。β_m は合わせで決めた列の第 m 項です（$m \geq m_0$）。$\epsilon_m < 1$ と y_m は、**言明より先に**、後の段（摂動の展開）が使える小ささに固定します（たとえば、小さい場の閾を決める決まった角 φ_c について、面の値の角が φ_c 以下になる床 $y_m \leq \beta_m(1 - \cos\varphi_c)$ の下）。粗いリンクの値は単位の閉球に在り $1 - \mathrm{Re}\, U_p \leq 2$ なので、$\epsilon_m \geq 1$、$y_m \geq 2\beta_m$ と取れば C_m は配位の全体になり、言明は自明に立ちます初。R_m の取り方も選びです。箱の全体で書くと、体積とともに η_m が 1 に近づきうるので、領域の形で書きます。

仮 非退化：合わせで決めた列 β_n と、先に固定した (R_m, ϵ_m, y_m) について、全ての段 m に $\eta_m < 1$ があって、十分大きい全ての n で $\nu_{n,m}(C_m) \geq 1 - \eta_m$

意味：どれだけ細かい格子から押し出しても、段 m の粗い場は、決まった確率以上で小さい場の領域に居ます。極限 ν_m でも同じ下界が残るので（C_m は閉集合）、極限の測度は小さい場の領域に正の重みを持ちます初。後の段（摂動の展開の使える範囲）に入るための入口の条件です。

$\eta_m < 1$ が言明の中身です。$\eta_m = 1$ を許すと、どの測度でも立ちます。また、この言明は結合を大きく取るほど立ちやすくなる向きのものと見込まれます（§01）。合わせで決めた列について読むのはそのためです。

05

同程度連続 — 物理の位置について一様に

連続極限の理論は、格子点だけでなく、箱の中の任意の位置で観測量を持つべきです。そのための言明です。

観測量の族を一つ選びます。箱 $(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})^4$ の中の位置 x のうち、ある段 $\mathrm{lev}(x)$ の格子点になっているもの（二進の有理点）を集めた可算で稠密な集合を D とし、各 $x \in D$ に段 $\mathrm{lev}(x)$ の粗い配位の有界連続な関数 G_x（決まった、定数でない局所の観測量 G を位置 x に置いたもの）を対

応させます。言明は、局所の観測量 G の全てについて要ります。G を定数に取ると言明は自明に立つので、一つの G だけでは中身がありません。

$$s_n(x) = \int G_x \, d\nu_{n,\mathrm{lev}(x)} \qquad (n \geq \mathrm{lev}(x)) \tag{4}$$

仮 同程度連続：合わせで決めた列 β_n について、$\tau_n \to 0$ と、$r \to 0$ で 0 に行く関数 $\Omega(r)$ があって、全ての $x, x' \in D$ と $n \geq \mathrm{lev}(x), \mathrm{lev}(x')$ で $|s_n(x) - s$

意味：観測量の期待値が、位置について n に一様な連続度を持ちます（格子の刻みから来る誤差 τ_n を除いて）。全列の収束と組になると、極限 $s(x) = \lim_n s_n(x)$ が D の上で一様連続になり、箱の全ての位置へ連続に延びます初。

観測量の族 (D, G) の選び方は、本書の検討が組んだ条件つきの含意の形に従ったもので、定義と言明を別の目で照合する点検はまだです（28-04 の観測量の族と小さい場の集合）。

06

一様な減衰 — 格子間隔と箱について一様に（帰結は質量ギャップ）

段 m の格子の時間の向き（§01 の約束：19-01 の第 20 部の番号で向き 0）に t 目盛りずらす並進を τ_t と書きます。箱は周期なので、τ_t は粗い配位の上の写像として定まります。物理の時間では $a_m t$ のずれです。

仮 一様な減衰：合わせで決めた列 β_n について、ある $m_* > 0$ があって、全ての大きさ L、全ての段 m、時刻 $[-r, r]$ の有限個の粗いリンクだけに依る（r

時間差 t は周期の半分までに限ります。周期の箱では τ_t が周期 $2^m L$ で元に戻り、t が周期に等しいと共分散は $\mathrm{Var}(F)$ に戻るからです初。定数は $C_F = c_F \|F\|_\infty$ の形に取り、c_F は F が依るリンクの数だけで決まり、n・L に依りません。m_* は物理の単位の質量で、格子間隔にも箱の大きさにも依りません。これが言明の芯です。

言明の形には選びが在ります。定数を観測量ごとに取るか（この章の形）、一つの定数 C で $C\|F\|_\infty\|G\|_\infty$ と一様に取るか。観測量を時刻 0 の近くのリンクに依るものにするか、時刻がちょうど 0 のリンク（体積とともに数が増える）に依るものにするか。器の質量ギャップを出すには、どちらの形でも足ります初。

この減衰から、極限の測度の再構成の器で質量ギャップ（19-03 の $\|T - P_\Omega\| \leq e^{-m}$）が出る、という含意は 28-03 に書きます。器を作るには、極限の測度の鏡映正値性と対称性も要ります。細かい格子の鏡映正値性は第 20 部の定理ですが、押し出しの測度への移しは前提の側に在ります（28-04 の粗い水準の鏡映正値性・測度の対称）。

問題文の質量ギャップ（4-11 §01）は無限体積の理論のハミルトニアンのスペクトルの隙間です。この言明は、そこへ向かう段のうち「大きさを止めた箱で、格子間隔に一様」の部分を、箱の大きさについても一様にした形です。無限体積へ移る段は §08 の表の別の行です。

この言明はこの章では本書の押し出しの測度で書いてありますが、問いの芯（繰り込んだ格子の観測量の相関が、物理の単位で、切断と体積に一様に、指数の速さで減ること）は設計に依らず開いています。これが出れば、極限の理論の質量ギャップと真空の一意性は既知の一般論で従います。公開された構成に在るのは、長い距離について多項式の速さの評価までです（16-03）。

07

帯 — 渦の比が面積の指数で小さくなること

渦の比 $\theta_{N,M}(\beta)$（19-02）は、捩れを一枚入れたときの分配関数の相対の差です。$Z_1 > 0$ なので $\theta_{N,M} \leq 1$ です初。M が偶数なら $0 \leq \theta_{N,M}$ も成り立ちます（21-06 の定理）。19-02 の約束では、渦（流束）の自由エネルギーは $\Delta F = \ln(Z_0/Z_1)$ で、$\theta = \tanh(\Delta F/2)$ です。だから θ が小さいとき、$-\ln\theta$ は ΔF の対数の符号を変えたもの $-\ln(\Delta F/2)$ にほぼ等しくなります（導入は 25-01）。

物理の大きさ L_0 の正方の箱を、段 n の格子間隔で刻むと、一辺の格子点の数は $2^n L_0$ です（$n \geq 1$ で偶数）。結合は §02 で基準の箱で合わせた列 β_n を、全ての L_0 に同じく使います。

仮 帯：合わせで決めた列 β_n について、ある $c > 0$ があって、全ての L_0 で、十分大きい全ての n で $\theta_{2^n L_0, 2^n L_0}(\beta_n) \leq \exp(-c\, L_0^2)$

対数 $-\ln\theta$ を使わずに書くのは、$\theta = 0$（いちばん良い場合）を言明が壊さないためです。c を少し下げれば、$\liminf_n(-\ln\theta) \geq c\, L_0^2$ の形と同じことです。

意味：連続極限で、渦の自由エネルギー ΔF が箱の面積の指数で小さくなります（$-\ln\theta$ が面積に比例して増える）。これは渦の言葉での閉じ込めの形（面積の指数）で、帯を「θ が 1 から一様に離れる」という素朴な形で書くと足りないことは 26-01 §04 にあります。弱結合の側（小さい箱）と強結合の側（大きい箱）の移り変わりを一つの c で跨ぐことが、この言明の中身です。

帯の言明は θ と Z だけで書け、押し出しの測度を使いません。この言明から質量ギャップへ移る矢印は、この本には在りません（28-03・28-06）。

08

問題文との差 — 別の段と、対象がまだ無い段

問題文（0-03）が求めるものと、§02〜§07 の六つの言明の間には、まだ段があります。

表 1　問題文の要求と、この章の言明の関係（2026-11-13 の時点）

問題文の要求	この章の言明との関係	言明を書くための対象
$\mathbb{R}^4$ の上（0-03 §03）	この章は大きさ L の箱。箱を大きくする段は別	定義を一つ足せば書ける（箱の中の窓への制限か周期の延長）。強結合の窓では周期の持ち上げで書けて定理（20-03）
局所の場・Schwinger 関数（4-10 §02）	この章の観測量は段 m の粗い配位の関数で、点の場ではない	**まだ無い**。格子の勾配流と流した観測量の定義が要る
回転不変（Euclid の群）	格子の対称は超立方の群だけ	**まだ無い**。超立方より細かい回転が作用する観測量か、回した格子から標準の格子へのブロック写像が要る
非自明（0-03 §05）	この章に無い	書けるが、どの量で言うかが未定（例：段 m_0 で合わせたとき、別の段 m_1 の同じ観測量の極限値）
質量ギャップ（0-03 §06）	§06 の一様な減衰が、箱の上で格子間隔と箱に一様な形	在る（器は 19-03）
短距離での一致（0-03 §07）	§02 の括弧は結合の走り方だけで、相関の短距離の形は言っていない	—
任意のコンパクト単純群（0-03 §02）	この章は $SU(2)$ だけ	—

細かい観測量と回転の二つは、言明の形を議論する前に、対象の定義が要ります。その一覧は 28-06 にあります。

09

すでに定理になっている近い形

第 20〜22 部の定理は、六つの言明のどれかに近い形（別の尺度・別の対象での形）です。文字どおりの特別な場合になっているものはありません。どれも**格子間隔を止めた一つの尺度**（または線形化した一段）の定理で、六つの言明そのものには届いていません。各行の右の欄が、届いていない所です。

表 2　六つの言明と、すでに定理になっている形（2026-11-13 の時点）

言明	定理になっている形	章・Lean	言明に届いていない所
一様な減衰	典 強結合の窓 $0<\beta$、$18\tanh\beta<1$ で、無限体積の極限の測度の再構成の器に質量 $-\frac{1}{2}\log(18\tanh\beta)$ のギャップ、四方向のクラスター性。既知の型の結果の形式化	20-04。`InfMain2.wilson_infvol_main2`	β は小さい窓の中に止まり、合わせた列 $\beta_n\to\infty$ ではない。格子間隔は 1 に固定。質量は格子の単位で、下界だけ。強結合は §01 の自明に立つ側の向きで、言明が満たせる例ではあるが中身の確かめではない
全列の収束	典 同じ窓で、周期の箱の Wilson の測度の持ち上げが、箱の大きさの全ての列について部分列なしに同じ測度へ弱収束する。既知の型の結果の形式化	20-03。`AllN.wilson_infvol_allN`・`InfVol.wilson_infvol_unique`	動かすのは箱の大きさで、格子間隔ではない（この章の n の向きでない）。窓の中だけ
帯	典 薄い渦の床：全ての実の β、$N,M\geq 1$ で $\theta_{N,M}(\beta)\leq\tanh(N^2\lvert\beta\rvert)^{M^2}$。既知の描像の片側の形式化	21-02。`TwistedWilson.twisted_vortex_bound`	格子間隔と横の大きさ N を止めて M を大きくする形。指数 $-\ln\tanh(N^2\lvert\beta\rvert)$ は $N\to\infty$ で 0 に行き、$N=M=2^nL_0$ の形には届かない
帯	典 太い渦の床：任意の $\varepsilon>0$ に、十分大きい β ごとに十分大きい M で $\lvert\theta_{N,M+1}(\beta)\rvert\leq\exp\bigl(-(M+1)^2e^{-\beta(S_N+\varepsilon)}\bigr)$（$S_N$ は渦の最小作用、19-02）。既知の描像の片側の形式化	21-03。`TwistBlocks.thick_vortex_floor`	同じく N と格子間隔を止めた形。β と M の閾は陽でない。指数は $\beta\to\infty$ で 0 に行く
帯	典 強結合の渦の床（渦の自由エネルギーの上界）：強結合の窓の中で、横 N・縦 M のトーラスの捩れた分配関数の差が縦の平面の面積について指数で小さく、面積あたりの率は横の大きさにも縦の大きさにも依らない。前の因子（横の面積）は残る。既知の型の形式化	20-06。`VortexStrongMN.vortex_floor_MN_sharp`	結合は強結合の窓の中に止まり、合わせた列は窓の外へ出る。格子間隔は 1 に固定。強結合は §01 の自明に立つ側の向きで、言明が満たせる例ではあるが中身の確かめではない

言明	定理になっている形	章・Lean	言明に届いていない所
非退化（近い形）	典 一つの尺度の稀さ：$\beta \geq 81$ で、偶数の辺 ≥ 4 の全てのトーラスと面の全ての集合 X について、X の面が全て $\mathrm{Re}\,U_p < 0$ となる確率 $\leq q_1^{\lvert X\rvert/6}$、$q_1 < 1$ は体積に依らない。チェス盤の評価の形式化	22-01。`FoldCap.rarity_explicit`	細かい格子の測度そのもの（押し出しなし、$m = n$）の、閾を $\mathrm{Re}\,U_p < 0$ に止めた評価。$\nu_{n,m}$（$m < n$）の粗い面についての評価ではなく、非退化の特別な場合にもなっていない
（どの言明でもない）	自由場の一段：Gauss の自由場を線形化したブロック化で m 回押した場の、面の強さの共分散の評価（比 $\leq 640/9$）と、17 段の縮み $< 1/170$ が段に一様。Lean で機械検査	15-12。`LatticeFace.lattice_face_T1h`・`TorusLam.stage_tau_17`	Wilson の測度でなく自由場、非線形のブロック写像でなく一次の部分。重み $(1/8, 3/4, 1/8)$ に依る。六つの言明の十分条件（28-04 の紫外の安定性の前提）の、自由場での材料

表 2 の右の欄は、どれも同じ一つのことを言っています。**定理は格子間隔を止めた形か、自由場・線形化の形で、合わせた結合の列 β_n のもとで $n \to \infty$ とする形の定理は一つもありません**。六つの言明から定理までの距離は、前提の一覧（28-04）で、どの前提が何の札にあるかとして見えます。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
仮 合わせの括弧と、合わせで決めた列についての五つの言明（全列の収束・非退化・同程度連続・一様な減衰・帯）を、第 19 部の対象だけで書いた	どの言明も示していない
初 列を自由に選ぶと、$\beta_n \equiv 0$ で一様な減衰と帯の言明が立つ	合わせで決めた列でこれらが立つかどうか
初 部分列に沿った極限は、配位の空間のコンパクト性だけで在る	極限が部分列に依らないこと（全列の収束）
初 合わせの関数 $f_n(\beta)$ は β について連続で、目標の値が端の値の間に在れば解が在る	全ての n で目標の値が範囲に入るか。解の一意性。合わせた列が括弧に入ること
初 全列の収束のもとで、極限の族は押し出しについて整合する	極限の非自明性。極限が合わせの選びにどう依るか
表 2：強結合の窓、格子間隔と横の大きさを止めた渦の床、一つの尺度の稀さ、自由場の一段は Lean で機械検査した定理	どれも六つの言明そのものではない（格子間隔を止めた形か、自由場・線形化の形）
問題文との差（表 1）	細かい観測量と回転不変は、言明を書く対象がまだ無い。無限体積・非自明性の段の言明はこの章に無い

出典と再現

もの	種別	出典・道具
問題文	典	A. Jaffe, E. Witten（Clay 数学研究所の公式の問題文, 2000）。読みは 0-03
Osterwalder–Schrader の再構成	典	K. Osterwalder, R. Schrader, Comm. Math. Phys. 31 (1973) 83；42 (1975) 281。導入は 4-10
漸近スケーリングと格子の β 関数	典	導入と出典は 5-05
六つの言明の形	仮	本書の検討（前提の棚卸し、2026-11-13）。本書の検討が組んだ条件つきの含意（小さな箱の弱い紫外の存在）の仮定と結論を、定義された対象の言葉に書き直したもの
使った対象の定義	Lean	本書の Lean の束：`TorusRP.wilsonProb`・`ChainBlockMap.vP`・`TwistBlocks.thetaM`・`OSGap.Datum.HasMassGap`。各定義は第 19 部の各章
表 2 の定理	Lean	各章の出典の表（20-03・20-04・21-02・21-03・15-12・22-01）

この章で使った語 — 示すべき言明、合わせ、裸の結合、結合の走り方の括弧、押し出しの測度、全列の収束、部分列の極限、非退化、小さい場の集合、同程度連続、一様な減衰、渦の比、面積の指数、帯。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：20-00 入口 — 一つの格子間隔で言えること — 表 2 の定理を、定義から順に読みます。前提の一覧へ先に進むなら 28-00。