第三巻　質量ギャップへ — 残る問いと本書の結果

第 20 部 確かな定理 — 器と強結合

Kiichi, Shiori and Rin · 2026-11-14 の版 · https://computoergosum.com/principia/yang-mills/

> この PDF は Web 版の各章をそのまま刷ったものです。動かせる図は刷った時点の姿で止まっています。章の間のリンクは Web 版へ飛びます。最新の内容は Web 版に在ります。

章		頁
20-00	入口 — 一つの格子間隔で言えること	2
20-01	鏡映正値性 — 三つの形	6
20-02	強結合の相関の減衰	15
20-03	無限体積の極限 — 部分列なし・並進不変・クラスター性	24
20-04	再構成と質量ギャップ — 強結合の窓の中で	32
20-05	フェルミオンつきの器	40
20-06	強結合の面積則と、渦の自由エネルギーの上界	47
20-07	この部が言えていること・言えていないこと	61

入口 — 一つの格子間隔で言えること

この章は案内です（この部の入口）。

この章で分かること — 第 20 部の定理の一覧（章ごとに一行）と、部の全体に掛かる範囲。この部の定理は、格子間隔を固定した有限の格子、またはその無限体積の極限の上の言明で、再構成の器（Hilbert 空間・転送の作用素・真空）を立てる部品と、強結合の窓の中での質量ギャップです。

前提となる章 — 19-00（対象・確かな定理・前提の読み方）と、19-01・19-03（格子・Wilson の測度・鏡映・再構成の器）。

先に言うこと — 格子間隔は固定です。強結合の定理は窓 $18\tanh|\beta|<1$ か $24(1-e^{-4|\beta|})<1$ の中だけで、連続極限と弱結合については何も言いません。どの定理も既知の型の結果の Lean による形式化です。

この章の順序

1. この部の定理 — 章ごとに一行（表 1）
2. 部の全体に掛かる範囲
3. 読む順

01

この部の定理 — 章ごとに一行（表 1）

章	言えていること（一行）	Lean の主な名
20-01 鏡映正値性	$(\mathbb{Z}/2M)^4$ の Wilson 測度の鏡映正値性。格子点の面は全ての実の β、リンクの真ん中の面はゲージ不変な関数で $\beta\ge 0$・$M\ge 2$、四方向の格子点の面も全ての β。鏡映の対は対称	`TorusRP.wilson_rp`・`MidRP.wilson_rp_mid`・`PeierlsPerm.wilson_rp_dir`・`TorusRP.wilson_refl_symm`

章	言えていること（一行）	Lean の主な名
20-02 強結合の相関の減衰	$(\mathbb{Z}/N)^4$ で、時間の向きに離れた関数の共分散が指数的に小さい。窓 $18\tanh\lvert\beta\rvert<1$（一本ごとの変化で測る形）と $24(1-e^{-4\lvert\beta\rvert})<1$（台の離れた形）。定数に N なし	`LinkSpec.wilson_cov_dist`・`TorusRP.wilson_strong_coupling`
20-03 無限体積の極限	窓 $18\tanh\lvert\beta\rvert<1$（$\beta\neq0$）で、$(\mathbb{Z}/2(n+1))^4$ の正規化した Wilson 測度の周期の持ち上げは部分列を取らずに $\mathbb{Z}^4$ の一つの確率測度 ν_β に弱収束し（$(\mathbb{Z}/(m+1))^4$ の全ての大きさの列でも同じ極限）、ν_β は四方向の単位の並進で不変。極限点で、$e^{\lambda}\cdot 18\tanh\lvert\beta\rvert<1$ のとき四方向のクラスター性	`InfVol.wilson_infvol_unique`・`AllN.wilson_infvol_allN`・`TransI.wilson_infvol_translation`・`WilsonLimit.cluster_limit`
20-04 再構成と質量ギャップ	窓 $18\tanh\lvert\beta\rvert<1$ の極限の測度の再構成で、$\lVert T-P_\Omega\rVert\le(18\tanh\lvert\beta\rvert)^{1/2}$（質量の下界）と真空の補空間が 0 でないこと（$\beta\neq0$、ゲージ不変な部門でも同じ形）、$T\ge0$（$\beta\ge0$）。$0<\beta$ でこれらを一本にまとめた言明。T の像がゲージ不変な部門に入ることは別の定理	`InfMain2.wilson_infvol_main2`・`WilsonLimit.wilson_massGap_dob_exists`・`GaugeZ.wilson_massGap_gauge_exists`・`FullT.wilson_Tpos_full`・`Bind.T_range_gauge_all`
20-05 フェルミオンつきの器	空間 $(\mathbb{Z}/N)^3$・時間の輪 $\mathbb{Z}/2h$ の上で、Wilson のゲージの重みと Wilson–Dirac の行列式 $\mathrm{Re}[(\det D)^{2j}]$ の重みの積の測度は、格子点の時間の面の鏡映で正値（全ての β、質量 $m>-1$）、分配関数は正（全ての β・m・j）、行列式は大域のゲージ変換で不変、正規化した測度は格子の対称性の生成元で不変	`WilsonGauge.site_reflection_positive_wilson_full`・`WilsonGauge.partition_pos_wilson_full`・`GaugeDet.physDirac_det_conj`・`CubicSym.wfProb_lattice_generators`
20-06 強結合の面積則と、渦の自由エネルギーの上界	四方向が同じ大きさのトーラスで、強結合の窓の中、長方形の縁の Wilson ループの期待値が面積について指数で小さい（有限の箱と、無限体積の極限の測度で）。横 N・縦 M のトーラスで、捩れた分配関数の差が縦の平面の面積について指数で小さく、面積あたりの率は横の大きさに依らない（前の因子の横の面積は残る）	`AreaLaw.area_law_wilson`・`AreaLaw.area_law_infvol`・`VortexStrong.vortex_floor`・`VortexStrongMN.vortex_floor_MN_sharp`
20-07 言えていること・言えていないこと	この部の定理の範囲と、言っていないことの表	—

表 1　第 20 部の定理。各行の言明の仮定の全ては各章にあります。どの行も既知の型の結果の形式化です典（鏡映正値性と強結合の減衰・質量ギャップは Osterwalder–Seiler、無限体積の極限（部分列なしの収束）は Dobrushin の比較の型、面積則は Osterwalder–Seiler、渦の自由エネルギーの上界は 't Hooft・Münster の型）。

02

部の全体に掛かる範囲

- **格子間隔は固定**。どの定理も一つの格子間隔（1 に取る）の上の言明です。格子間隔を 0 に送る極限（連続極限）については、この部は何も言いません。
- **強結合の窓の中だけ**。減衰・無限体積の極限・質量ギャップの定理は、窓 $18\tanh|\beta|<1$（$|\beta|<0.0556$読 ）か $24(1-e^{-4|\beta|})<1$（$|\beta|<0.0106$読 ）の中だけです（面積則と渦の自由エネルギーの上界の窓は、定数の版ごとに 20-06 にあります）。定理によって $\beta\neq 0$ か $0<\beta$ を足し、$T\geq 0$ は $\beta\geq 0$ です。窓の外について、成り立つとも成り立たないとも言いません。
- **面積則は格子の Wilson ループの言明です**。連続の Wilson ループは、この部にも公開された構成にも在りません（14-06）。この部の強結合の定理は、公開された構成が残した問いとは反対の端（強結合・格子間隔は固定）の言明です。
- **弱結合については何も言いません**。連続極限で要るのは $\beta\to\infty$（弱結合）の側で、窓とは反対の端です。この部の質量ギャップは、強結合の窓の中の格子の転送の作用素の隙間で、四次元 Yang–Mills の質量ギャップの主張ではありません。
- **鏡映正値性とフェルミオンつきの器は窓に依りません**。20-01 と 20-05 の正値は全ての実の β（真ん中の面は $\beta\geq 0$、20-05 は質量 $m>-1$）で、有限のトーラスごとの言明です。
- **質量は下界だけ**。$\|T-P_\Omega\|$ の上界は質量の下界で、真の質量の値や上界は言いません。
- **既知の型の結果の形式化**。どの定理も、文献で知られた型の結果を、この本の対象（19-01）の上で Lean 4 で機械検査した形です。新しい数学の結果としては書きません。

03

読む順

器の柱は三本で、この順に読みます。鏡映正値性（20-01）で対が内積になり（真ん中の面の形はゲージの平均を挟んで $T\geq 0$ にも使われます）、強結合の減衰（20-02）で離れた相関が小さくなり、無限体積の極限（20-03）で体積に依らない一つの測度ができます。20-04 はこの三本を再構成の器に組み立て、質量ギャップを窓の中で出します。20-05 は同じ器をフェルミ

オンの重みつきの測度で立てる部品で、20-01 だけを前提に読めます。20-06 は強結合の窓の中の面積則と渦の自由エネルギーの上界で、20-03 の後に読めます。20-07 は表だけの章です。

この部の後、第 21 部は捩れた境界条件の格子の上の定理、第 22 部は弱結合での大きい面の稀さの定理で、どちらも同じく一つの格子間隔の言明です。何が言えれば連続極限の質量ギャップに届くかは第 28 部（28-00）にあります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
典 表 1 の各行（各章の言明、Lean で機械検査）	連続極限、弱結合、窓の外、真の質量の値
読 窓の値 $\lvert\beta\rvert < 0.0556$・$\lvert\beta\rvert < 0.0106$	浮動小数の値で、定理の一部ではない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
格子ゲージ理論の鏡映正値性・強結合のクラスター展開	典	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440。5-03・5-02
Osterwalder–Schrader の再構成	典	K. Osterwalder, R. Schrader, Comm. Math. Phys. 31 (1973) 83；42 (1975) 281。4-10
表 1 の Lean の宣言	Lean	各章の出典の表と 19-06。sorry 0、公理は標準の三つ

この章で使った語 — 再構成の器・鏡映正値性・強結合の窓・無限体積の極限・転送の作用素・質量ギャップ・格子間隔。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：20-01 鏡映正値性 — 三つの形 — 器の一つ目の柱です。

鏡映正値性 — 三つの形

この章は本書の検討です。§01 は既存の知見の要約です。

この章で分かること — 有限のトーラス $(\mathbb{Z}/2M)^4$ の SU(2) Wilson 測度について、鏡に映した関数との積の積分が負にならないこと（鏡映正値性）が、三つの形で Lean で機械検査されています。格子点の面では全ての実の β で、リンクの真ん中の面ではゲージ不変な関数について $\beta \geq 0$ で、四方向の格子点の面では全ての β で成り立ちます。加えて、鏡映の対は対称です。この章は四つの言明と、証明の道筋（作用を三つに分け、面の上の変数を止めると積分が平方になる）と、使い分けを示します。

前提となる章 — 19-01（格子・Wilson の測度）と 19-03（鏡映・正の側・対）。導入は 5-03（反射正値性と転送行列）と 4-10。

先に言うこと — どれも一つの有限のトーラスの上の言明で、格子間隔は固定です。連続極限については何も言いません。無限体積の極限の測度での正値性と、器の転送の作用素の正値 $T \geq 0$ は 20-04 にあり、真ん中の面の言明はゲージ変換の平均を挟んで $T \geq 0$ の元になります。どれも既知の型の結果（鏡映正値性は Osterwalder–Seiler）の形式化です。

この章の順序

1. なぜ鏡映正値性が要るか — 対から Hilbert 空間へ
2. 二つの鏡と閉じた正の半分（図 1）
3. 格子点の面の鏡映正値性 — 言明
4. 証明の道筋 — 作用を分け、面の上を止めると平方になる
5. リンクの真ん中の面 — ゲージ不変性と β ≥ 0 の役
6. 四方向の鏡映正値性と、対の対称性
7. 三つの形の使い分け
8. 言っていないこと

01

なぜ鏡映正値性が要るか — 対から Hilbert 空間へ

導入は 5-03 §01 と 4-10 です。格子の上の理論は確率測度だけで書かれ、Hilbert 空間も時間を進める作用素もありません。鏡の正の側だけに依る関数の対 $\langle F, G\rangle := \int F(\Theta U)\, G(U)\, d\mu$ が対称で $\langle F, F\rangle \geq 0$ なら、零の関数で割って完備化した Hilbert 空間と、時間の並進から来る転送の作用素 T と、真空 Ω が立ちます。格子ゲージ理論でこの正値が成り立つことは Osterwalder–Seiler によります[典]。対・器・質量ギャップの本書での定義は 19-03 の対・再構成の器 にあります。

鏡映正値性は器の一つ目の柱で、この章の四つの言明はそれを有限のトーラスの Wilson 測度について Lean で立てたものです。残りの柱と組み立ては 20-02〜20-04 にあります。

02

二つの鏡と閉じた正の半分（図 1）

格子は $(\mathbb{Z}/N)^4$、$N = 2M$ です。この部では向きを $\mu = 0, 1, 2, 3$ とし、0 を時間とします。強結合の側の Lean の添字の約束で、19-01 の本文の向き 1〜4 とは添字をずらした書き方です（19-01 の約束）。リンク $\ell = (x, \mu)$ は x から $x + e_\mu$ へ向かい、$U_\ell \in SU(2)$ は単位の四元数です（19-01）。重みは $w_\beta(U) = \exp\bigl(\beta \sum_p \mathrm{Re}\, U_p\bigr)$ で、この章の言明は正規化しない Wilson の測度 $w_\beta \prod_\ell dU_\ell$（19-01 の $\tilde{\mu}_{N,\beta}$）で書きます。正規化した測度 $\mu_{N,\beta}$ とは正の定数 $Z_N(\beta)$ 倍の違いだけで、不等式の符号は同じです（19-01）。

格子点の面の鏡映 Θ は $x_0 \mapsto -x_0$ です。$\vartheta x := (-x_0, x_1, x_2, x_3)$ とおくと

$$(\Theta U)_{(x,\mu)} = \begin{cases} U^{*}_{(\vartheta x - e_0,\, 0)} & (\mu = 0) \\ U_{(\vartheta x,\, \mu)} & (\mu \neq 0) \end{cases} \tag{1}$$

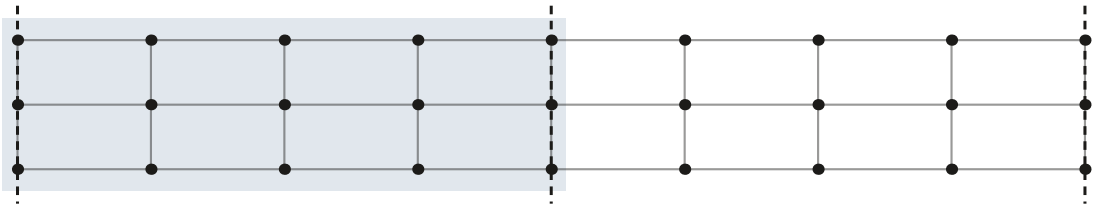
です。時間のリンクは向きが逆になるので逆元（四元数の共役 $*$）が付きます。$-M \equiv M$ なので面 $x_0 = 0$ と $x_0 = M$ が動きません。**閉じた正の半分** Λ_+ は、時刻 $0, \dots, M$ の空間のリンクと、基点の時刻が $0, \dots, M-1$ の時間のリンクです。

リンクの真ん中の面の鏡映 Θ' は $x_0 \mapsto 1 - x_0$ で、面は $x_0 = \frac{1}{2}$ と $x_0 = M + \frac{1}{2}$ です。基点の時刻が 0 か M の時間のリンクは面を**横切り**ます。閉じた正の半分 Λ'_+ は、横切るリンク、時刻 $1, \dots, M$ の空間のリンク、基点の時刻が $1, \dots, M-1$ の時間のリンクです（19-03 の正の側）。

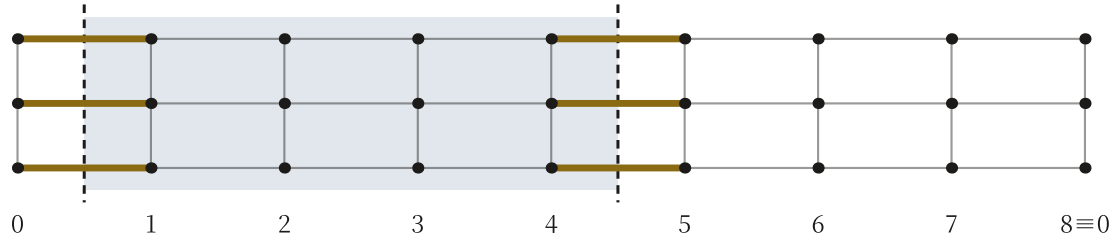
図 1　時間の向きに $N = 8$（$M = 4$）のトーラスを、時間（横）と空間の一つの向き（縦、3 点だけ）で切った絵。網をかけた所が閉じた正の半分です。(a) 面の上の空間のリンクは正の半分に入ります。(b) 太線の横切るリンクは面にまたがり、

時刻 0 と 5 の空間のリンクは負の側です。

(a) 格子点の面 $x_0 = 0$・$x_0 = M$（破線）。網は閉じた正の半分



(b) 真ん中の面 $x_0 = ½$・$x_0 = M + ½$（破線）。太線は面を横切る時間のリンク



初 図は (1) と本文の定義をそのまま描いたものです。時刻 8 は周期で 0 と同じ点です。

03

格子点の面の鏡映正値性 — 言明

言明（格子点の面の鏡映正値性）

$N = 2M$、β は任意の実数とします。有界で可測な実数値の関数 f が Λ_+ のリンクの変数だけに依るなら、

$$0 \;\le\; \int f(\Theta U)\, f(U)\, w_\beta(U) \prod_{\ell} dU_\ell . \tag{2}$$

典 Osterwalder–Seiler の格子点の面の鏡映正値性の形式化。Lean：`TorusRP.wilson_rp`（仮定は $N = 2M$、f の可測・有界・Λ_+ だけに依ること。β は全ての実数）。

意味。β の符号を問いません。証明のどこにも符号を使わないからです（§ 04）。

例。C を Λ_+ の中の閉じた道とし、Wilson ループの実部 $f(U) = \mathrm{Re} \prod_{\ell \in C} U_\ell^{\pm 1}$（$= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}$）を取ります。$f$ は Λ_+ のリンクだけに依り、$|f| \le 1$ で連続なので仮定を満たします。$f(\Theta U)$ は鏡に映した道 ϑC の Wilson ループの実部です。だから

$$\left\langle \mathrm{Re}\, W_{\vartheta C} \cdot \mathrm{Re}\, W_C \right\rangle_{N,\beta} \;\ge\; 0 \qquad \text{(全ての実の } \beta) \tag{3}$$

です 初 （(2) の当てはめ。$\langle\cdot\rangle_{N,\beta}$ は 19-01 の期待値）。

04

証明の道筋 — 作用を分け、面の上を止めると平方になる

考え方は 5-03 §04 の「サイト反射」と同じで、Lean ではそれを抽象の補題と具体の勘定に分けています。

段 1：作用を正の側・負の側・面の上に分ける

面 p に重み $w(p)$ を付けます。基点の時刻が $0,\dots,M-1$ の時間の面（向き 0 を含む面）と、時刻 $1,\dots,M-1$ の空間の面は 1、時刻 0 か M の空間の面（鏡の面の上の面）は $\frac{1}{2}$、残りは 0 です。$S_+(U) := \sum_p w(p)\,\mathrm{Re}\,U_p$ とおくと

$$\sum_p \mathrm{Re}\,U_p \;=\; S_+(U) + S_+(\Theta U). \tag{4}$$

鏡は面を面に写し、写した面のホロノミーは共役の巡回なので実部は変わりません。正の側の面は一度、負の側の面は写しとして一度、面の上の面は半分ずつ二度数えられます。Lean：`TorusRP.weight_factor`（$w_\beta = a(U)\,a(\Theta U)$、$a = e^{\beta S_+}$）。

段 2：被積分関数を一つの関数の対にする

$g := a\cdot f$ は Λ_+ だけに依り有界です。(4) から $f(\Theta U)\,f(U)\,w_\beta(U) = g(\Theta U)\,g(U)$ で、重みが消えて Haar の積の測度だけが残ります。β の符号はここまで使っていません。

段 3：面の上の変数を止めると完全平方になる

変数を、面の上のリンク U_0、正の側の内側 $U_>$、負の側 $U_<$ に分けます。$g(U) = G(U_0, U_>)$ と書けば $g(\Theta U) = G(U_0, V)$ で、V は負の側の変数を (1) で正の側へ運んだものです。Haar 測度は逆元で不変なので V は $U_>$ と同じ分布で、$U_>$ と独立です。よって

$$\int g(\Theta U)\,g(U)\prod_\ell dU_\ell \;=\; \int dU_0 \left(\int G(U_0,U_>)\,dU_>\right)^2 \;\ge\; 0. \tag{5}$$

Lean：`LinkReflection.rp_core`（抽象の形）と `LinkReflection.rp_weighted`（重みを因数分解した形）。

寄り道：抽象の補題の六つの条件

飛ばしてよい。`rp_core` は、添字の集合の上の対合 θ、値の写像 σ_ℓ、二つの述語「面の上」「正」について次を仮定します。(i) θ は対合。(ii) 面の上のリンクは θ で動かず σ は恒等。(iii) 正のリンクは面の上にない。(iv) 正のリンクの写しは正でない。(v) 面の上でも正でもないリンクの写しは正。(vi) σ_ℓ は値

の測度を保つ。この六つから、変数の空間が「面の上 × 正 × 正（写し）」に測度を保って同型になり、(5) が出ます。トーラスでは (ii)・(iv)・(v) が $N = 2M$ を使う所で、(vi) は SU(2) の Haar 測度が逆元で不変なことです。

05

リンクの真ん中の面 — ゲージ不変性と β ≥ 0 の役

ゲージ変換 g とゲージ不変な関数は 19-01 のゲージ変換 のとおりです（格子点ごとの $g(x) \in SU(2)$、$(gU)_{(x,\mu)} = g(x)\, U_{(x,\mu)}\, g(x+e_\mu)^*$）。

言明（リンクの真ん中の面の鏡映正値性）

$N = 2M$、$M \geq 2$、$\beta \geq 0$ とします。有界で可測な実数値の関数 F が Λ'_+ のリンクの変数だけに依り、ゲージ不変なら、

$$0 \;\leq\; \int F(U)\, F(\Theta' U)\, w_\beta(U) \prod_\ell dU_\ell . \tag{6}$$

典 Osterwalder–Seiler のリンクの面の鏡映正値性の、ゲージ不変な関数の形の形式化。Lean：`MidRP.wilson_rp_mid`（仮定は $N = 2M$、$M \geq 2$、$\beta \geq 0$、F の可測・有界・Λ'_+ だけに依ること・単位の値の全ての g で不変）。

証明は四段です。

段 1：横切るリンクをゲージで 1 にする。横切るリンクは時刻 1 と $M+1$ の互いに違う点に入り、それらの点から出る横切るリンクはありません。$g(x)$ をその点に入る横切るリンクの値に取ると、横切るリンクは全て 1 になります。ゲージ不変な H について $\int H(U) \prod dU = \int H(U^\circ) \prod dU$（$U^\circ$ は横切るリンクを 1 にした配位）です。変数の取り替えは歪積で、各リンクの $V \mapsto aVb^*$（a, b は単位）が Haar を保つことから測度を保ちます。$M \geq 2$ は横切るリンクの始点（時刻 $0, M$）と受ける点（時刻 $1, M+1$）が重ならないために要ります。Lean：`GaugeFix.integral_gaugeFix`・`TorusGauge.wilson_gaugeFix`。これを $H = F \cdot (F \circ \Theta') \cdot w_\beta$ に使います（Θ' はゲージ変換を形を変えて写し、w_β はゲージ不変）。

段 2：作用を三つに分ける。$\sum_p \mathrm{Re}\, U_p = A(U) + A(\Theta' U) + C(U)$ で、A は正の側の面、C は横切る面（横切るリンクを辺に持つ時間の面）の和です。

段 3：横切る面を核の形にする。横切るリンクが 1 なら、基点の時刻 0 の横切る面のホロノミーは時刻 1 の空間のリンク V（正の側）と時刻 0 の空間のリンク W（V の写しの位置）だけで VW^* になります。基点の時刻 M の横切る面では、時刻 M のリンク（正の側）と時刻

$M+1$ のリンクで同じ形です。単位の四元数を $\mathbb{R}^4$ の点と見ると $\mathrm{Re}(VW^*)=\sum_{c=0}^{3} V_c W_c$ なので、

$$C(U^{\circ}) \;=\; \sum_{j} \psi_j(U)\,\psi_j(\Theta' U) \tag{7}$$

と、正の側の座標 ψ_j（時刻 1 と M の空間のリンクの四元数の成分）の対の和に書けます。

段 4：正定値の核。$\beta \ge 0$ なら

$$e^{\beta \sum_j \psi_j(U)\psi_j(\Theta' U)} \;=\; \sum_{n\ge 0} \frac{\beta^n}{n!} \Big(\sum_j \psi_j(U)\psi_j(\Theta' U) \Big)^n \tag{8}$$

は係数が 0 以上の $h(U)\,h(\Theta' U)$ の形の項の和で、各項は §04 の (5) と同じく平方の積分になります。Lean：`LinkReflection.rp_kernel`（核つきの抽象の鏡映正値性、$\beta \ge 0$）。

ゲージ不変性の役。段 1 のためです。横切るリンクは鏡で自分自身に写るので、§04 のように止めて平方にはできず、ゲージで 1 に消します。横切るリンクに依らない関数（正の側の内側だけに依る関数）なら、二つの独立なゲージ変換で平均してから (6) を使うことで、ゲージ不変を課さない形にもなります（Lean `FullT.full_rp_torus`：正規化した測度、$\beta \ge 0$、$M \ge 2$）。

$\beta \ge 0$ の役。段 4 で係数 $\beta^n/n!$ が 0 以上であることを使います。$\beta < 0$ では核 $e^{\beta\langle V,W\rangle}$ は S^3 の上で正定値でありません。二点 V、$-V$ で作る行列 $\begin{pmatrix} e^{\beta} & e^{-\beta} \\ e^{-\beta} & e^{\beta} \end{pmatrix}$ の行列式 $e^{2\beta}-e^{-2\beta}$ が負だからです[初]。これは証明の道具が使えないということで、(6) は $\beta<0$ について成り立つとも成り立たないとも言いません。

06

四方向の鏡映正値性と、対の対称性

四方向。向き 0 と ρ の入れ替えを τ とし、配位の付け替え $(P_\tau U)_{(x,\mu)} := U_{(x\circ\tau,\,\tau\mu)}$ を考えます。重み w_β は P_τ で不変です（向きが逆になる面はホロノミーが共役で、実部は同じ）。$\Theta_\rho := P_\tau\,\Theta\,P_\tau$ は向き ρ の格子点の面の鏡映 $x_\rho \mapsto -x_\rho$ です。

言明（四方向の格子点の面の鏡映正値性）

$N=2M$、$\rho \in \{0,1,2,3\}$、β は任意の実数とします。有界で可測な実数値の f が、向き ρ の閉じた正の半分（向き ρ のリンクは基点の x_ρ が $0,\dots,M-1$、他の向きのリンクは x_ρ が $0,\dots,M$）だけに依るなら、

$$0 \;\le\; \int f(\Theta_\rho U)\, f(U)\, w_\beta(U) \prod_\ell dU_\ell. \tag{9}$$

典 格子点の面の鏡映正値性（Osterwalder–Seiler の型）の四方向への形式化。Lean：`PeierlsPerm.wilson_rp_dir`（全ての ρ、全ての実の β。測度の不変は `PeierlsPerm.wilson_perm_invariant`）。

証明は (2) を $f \circ P_\tau$ に当て、測度の不変で戻すだけです。四方向が要るのはチェス盤の評価で、一つの塊の関数を四つの向きの鏡で全ての塊に運び、向きごとの Cauchy–Schwarz を重ねます（22-01）。

言明（鏡映の対の対称性）

$N = 2M$、β は任意の実数、f, g は可測な実数値の関数とします。

$$\int f(\Theta U)\, g(U)\, w_\beta(U) \prod_\ell dU_\ell \;=\; \int g(\Theta U)\, f(U)\, w_\beta(U) \prod_\ell dU_\ell. \tag{10}$$

典 鏡映の不変性からの既知の恒等式の形式化。Lean：`TorusRP.wilson_refl_symm`（有界も台の条件も要らない。可積分でないときは Lean の約束で両辺とも 0）。

部品は三つです：Θ は対合、Θ は Haar の積を保つ、w_β は Θ で不変（(4) を二度使う）。(10) は対の対称で、再構成の器の欄に当たります（19-03）。

07

三つの形の使い分け

形	範囲	関数の類	何に使うか
格子点の面（時間）	全ての実の β、$N = 2M$	Λ_+ の有界可測な関数	対の半正定値 → Hilbert 空間。無限体積の極限の測度の正値と器の組み立て（20-04）の元
リンクの真ん中の面	$\beta \ge 0$、$M \ge 2$	Λ'_+ のゲージ不変な有界可測な関数	転送の作用素の正値 $T \ge 0$ の元（20-04。ゲージの平均を挟む）
四方向の格子点の面	全ての実の β、全ての向き	向き ρ の閉じた正の半分の関数	チェス盤の評価（22-01）
対の対称性	全ての実の β	可測な関数	対の対称（器の欄）

格子点の面の形は条件が最も軽く、β の符号もゲージ不変性も問いません。代わりに、それだけでは転送の作用素は $T^2 \ge 0$ の型までで、T そのものの正値は言えません（5-03 §03 の二種類の「正」）。真ん中の面の形は $\beta \ge 0$ とゲージ不変を払って $T \ge 0$ の型の正値を与えます。

器の中の $T \geq 0$（20-04、Lean `FullT.wilson_Tpos_full`）は、(6) にトーラスの全てのゲージ変換の Haar 平均を挟んでゲージ不変を課さない、横切るリンクに依らない正の側の関数に広げ（`FullT.full_rp_torus`）、極限に移したものです。

捩れた境界条件の格子でも、格子点の面で同じ型の割れ（面の上を止めて平方）を使います（21-06）。第 21 部では時間の役は向き 4 で、そちらは第 21 部の格子の上の別の言明です。

08

言っていないこと

- **格子間隔は固定、体積は有限**。どの言明も一つの $(\mathbb{Z}/2M)^4$ の上の等式・不等式です。正値は各体積でちょうど成り立つ性質で、体積に一様な形は要りません。連続極限については何も言いません。
- **正規化しない測度**。正の定数倍なので符号は同じです。無限体積の極限の測度の正値は 20-04 の一本にまとめた言明と器の公理にあります（20-04）。
- **実数値の関数だけ**。複素数値の関数は言明の外です。
- **真ん中の面：**$\beta < 0$、$M = 1$、横切るリンクに依りゲージ不変でない F については何も言いません。
- **Lean の値の約束**。Lean ではリンクの値を四元数の閉じた単位球に取り、基準の測度は SU(2)（単位球面）の Haar 測度の像です。有界可測な関数の言明としては SU(2) の上の言明と同じです（19-01 の約束）。
- **新しい結果ではありません**。格子ゲージ理論の鏡映正値性は Osterwalder–Seiler の結果で、この章はその有限のトーラスの Wilson 測度での形式化です。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
典 格子点の面の鏡映正値性 (2)：$N = 2M$、全ての実の β、Λ_+ の有界可測な f。Lean `TorusRP.wilson_rp`	連続極限・格子間隔の変化、複素数値の f
典 リンクの真ん中の面の鏡映正値性 (6)：$M \geq 2$、$\beta \geq 0$、ゲージ不変な有界可測な F。Lean `MidRP.wilson_rp_mid`	$\beta < 0$、$M = 1$、横切るリンクに依りゲージ不変でない F
典 四方向の格子点の面の鏡映正値性 (9)：全ての向き ρ、全ての実の β。Lean `PeierlsPerm.wilson_rp_dir`	真ん中の面の四方向の形
典 鏡映の対の対称性 (10)：全ての実の β、可測な f, g。Lean `TorusRP.wilson_refl_symm`	—

言えている	言えていない
初 Wilson ループの対の正値 (3)：(2) の当てはめ	ループの大きさについての評価

出典と再現

もの	種別	出典・道具
格子ゲージ理論の鏡映正値性（格子点の面・リンクの面）と転送行列	典	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440。導入は 5-03、文献は A-03
Osterwalder–Schrader の再構成	典	K. Osterwalder, R. Schrader, Comm. Math. Phys. 31 (1973) 83；42 (1975) 281。4-10
(2)・(10) と部品（作用の分割、抽象の鏡映正値性）	Lean	`TorusRP.wilson_rp`・`TorusRP.wilson_refl_symm`・`TorusRP.weight_factor`・`LinkReflection.rp_core`・`LinkReflection.rp_weighted`。sorry 0、公理は標準の三つ。宣言の一覧は 19-06
(6) と部品（ゲージの固定、核つきの鏡映正値性）、$T \geq 0$ への道	Lean	`MidRP.wilson_rp_mid`・`TorusGauge.wilson_gaugeFix`・`GaugeFix.integral_gaugeFix`・`LinkReflection.rp_kernel`、`FullT.full_rp_torus`・`FullT.wilson_Tpos_full`
(9)	Lean	`PeierlsPerm.wilson_rp_dir`・`PeierlsPerm.wilson_perm_invariant`
Gram 行列の確かめ（Z_2・Z_4 の二次元・三次元、全ての配位の和：半正定値。陽性対照として Z_4 で時間のリンクの共役を外すと相対の最小固有値 −0.39〜−0.50）、真ん中の面の Metropolis（$(\mathbb{Z}/4)^4$、SU(2)、ゲージ不変な面の平均の対の共分散に負の兆しなし）	読	本書の検討の数値の記録（Lean の定義を写した計算。証明の代わりではない）

この章で使った語 — 鏡映正値性・格子点の面・リンクの真ん中の面・閉じた正の半分・横切るリンク・ゲージ不変・ゲージの固定・正定値の核・対・転送の作用素・チェス盤の評価。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：20-02 強結合の相関の減衰 — 器の二つ目の柱、離れた関数の共分散が小さいことを、強結合の窓の中で示します。

強結合の相関の減衰

この章は本書の検討です。

この章で分かること — $|\beta|$ が十分小さい（強結合の）とき、トーラス $(\mathbb{Z}/N)^4$ の SU(2) Wilson 測度で、時間の向きに離れた二つの関数の共分散が距離とともに指数的に小さくなること。その評価が Lean で二通りに機械検査されていて、どちらも定数に体積 N が入りません。一つは Dobrushin の窓 $18\tanh|\beta| < 1$ で、一本のリンクの条件つきの分布が周りのリンクにどれだけ依るか（係数 $\tanh|\beta|$、行の和が $18\tanh|\beta|$ 以下）から出ます。もう一つは窓 $24(1-e^{-4|\beta|}) < 1$ で、面を繋いだ鎖を数えて出ます。

前提となる章 — 19-01（Wilson の測度）、20-01（記号）。導入は 5-02（強結合）と 5-04（無限体積とクラスター性）。

先に言うこと — 格子間隔は固定で、強結合の窓の中だけの言明です。窓は $|\beta| < 0.0556$ 読 と $|\beta| < 0.0106$ 読 で、連続極限が要る弱結合（$\beta \to \infty$）とは反対の端です。窓の外については何も言いません（減衰しないとも言いません）。距離は時間の向きの距離だけで、各 N の有限体積の言明です。どれも Osterwalder–Seiler・Dobrushin の型の既知の結果の形式化です。

この章の順序

1. 二つの窓、二つの言明 — 概観
2. 期待値と時間の距離 — 設定
3. 一本のリンクが周りから受ける影響 — 係数 tanh|β| と数え 18
4. Dobrushin の窓での距離による減衰 — 言明
5. 証明の道筋 — 熱浴の掃引で G の振動を流し去る
6. もう一つの窓 — 二つの写しの入れ替えと面の鎖
7. 二つの窓の比べ（表 1）
8. 言っていないこと

01

二つの窓、二つの言明 — 概観

導入は 5-02 §01 と 5-04 です。$\beta = 0$ では Wilson の測度は Haar の積で、違うリンクは独立です。$|\beta|$ が小さいとき、リンクどうしの結合は弱く、離れたリンクの相関は「結合を一つずつ渡る」ごとに小さな因子を払うので、距離とともに指数的に減ります。これが強結合の相関の減衰で、格子ゲージ理論では Osterwalder–Seiler のクラスター展開による結果です[典]。

この章の二つの言明は、この描像を二つの違う勘定で形にしたものです。

- **距離による減衰**（§04）：一本のリンクの条件つきの分布が、周りのリンクを一本変えたときにどれだけ動くか（Dobrushin の影響の係数）を数えます。窓は $18 \tanh |\beta| < 1$ です。
- **有限体積の減衰**（§06）：二つの独立な写しを用意し、面の重みを展開して、二つの台を繋ぐ面の鎖を数えます。窓は $24(1 - e^{-4|\beta|}) < 1$ です。

どちらも各 N の有限体積の言明で、右辺の定数に N が入りません。体積に一様なこの形が、無限体積の極限（20-03）と再構成の器の質量ギャップ（20-04）の元になります。

02

期待値と時間の距離 — 設定

格子はトーラス $(\mathbb{Z}/N)^4$（$N \geq 1$）、リンクの変数 $U_\ell \in SU(2)$、重み w_β と正規化した測度 $\mu_{N,\beta}$ は 19-01 のとおりです。この章では 19-01 の期待値

$$\langle H \rangle_{N,\beta} := \int H \, d\mu_{N,\beta} = \frac{\int H \, w_\beta \prod_\ell dU_\ell}{\int w_\beta \prod_\ell dU_\ell} \tag{1}$$

を使い、共分散を $\mathrm{Cov}(F,G) := \langle FG \rangle_{N,\beta} - \langle F \rangle_{N,\beta} \langle G \rangle_{N,\beta}$ と書きます。β は実数で、符号は問いません（窓は $|\beta|$ で書かれます）。

時間の距離。時刻 $t_0 \in \mathbb{Z}/N$ を一つ決め、リンク $\ell = (x, \mu)$ の基点の時刻 x_0 と t_0 の巡回距離

$$d(\ell) := \min_{k \in \mathbb{Z}} \bigl| \, x_0 - t_0 + kN \, \bigr| \qquad (0 \leq d(\ell) \leq N/2) \tag{2}$$

を使います。空間の向きにどれだけ離れていても d には入りません。面を共有する二本のリンクは d が高々 1 しか違いません（面の四本の基点の時刻は二つの続いた時刻に収まるため）。この「隣の距離は 1 しか変わらない」ことが、両方の証明で距離を指数に変える所です。

関数の台。関数 F が有限集合 A のリンクだけに依るとは、A の上で一致する二つの配位で F の値が等しいことです。

03

一本のリンクが周りから受ける影響 — 係数 tanh|β| と数え 18

リンク x 以外を配位 ω に止めたときの、x の条件つきの分布（一本のリンクの熱浴の核）は

$$\gamma_x(dU \mid \omega) = \frac{\exp\bigl(\beta \sum_{p \ni x} \operatorname{Re} U_p(\omega[x \mapsto U])\bigr)\, dU}{\int \exp\bigl(\beta \sum_{p \ni x} \operatorname{Re} U_p(\omega[x \mapsto U'])\bigr)\, dU'} \tag{3}$$

です。和は x を含む面だけを走ります。四次元では一本のリンクは 6 枚の面に含まれます（残りの三つの向きそれぞれに、両側の二枚）。

影響の係数。別のリンク y だけが違う二つの配位 ω, ω' について、x の条件つきの分布の差を測ります。n_{xy} を x と y を両方含む面の数とすると、局所の作用の差 $h(U)$ は $|h| \le 2|\beta|\, n_{xy}$ で、密度を e^h だけ傾けた二つの確率測度の差は

$$\sup_S \bigl|\gamma_x(S \mid \omega') - \gamma_x(S \mid \omega)\bigr| \;\le\; \tanh\bigl(|\beta|\, n_{xy}\bigr) \tag{4}$$

で抑えられます。Lean：`LinkSpec.spec_coeff`（tanh は $(e^{2a}-1)/(e^{2a}+1)$ の形）。

数え 18。$\tanh(na) \le n \tanh a$（$a \ge 0$、Lean `LinkSpec.tanhForm_le`）と、x を含む 6 枚の面にそれぞれ x 以外のリンクが 3 本ずつあることから $\sum_{y \ne x} n_{xy} \le 18$ です。よって行の和は

$$\alpha_0 := \sum_{y \ne x} \sup \bigl|\gamma_x(\cdot \mid \omega') - \gamma_x(\cdot \mid \omega)\bigr| \;\le\; 18 \tanh |\beta| \tag{5}$$

で、全ての x・全ての N で成り立ちます。Lean：`LinkSpec.dobrushin_row`。$N \ge 3$ では隣は 18 本でどれも $n_{xy} = 1$、$N = 2$ では隣は 15 本で $\sum n_{xy} = 18$ です読 （数えの確かめ）。

意味。$\alpha_0 < 1$ は「一本のリンクの分布は、周りの全てのリンクを合わせても、変動の総量 1 未満しか動かされない」ことです。これが Dobrushin の一意性の条件の形で、窓 $18 \tanh |\beta| < 1$ は $|\beta| < \operatorname{artanh}(1/18) \approx 0.0556$ です読 。明示の十分条件として $|\beta| < 1/19$ が Lean にあります（`WilsonLimit.dob_window_strict`）。

04

Dobrushin の窓での距離による減衰 — 言明

言明（Dobrushin の距離による共分散の減衰）

$N \ge 1$、β は実数、$\lambda \ge 0$ で $e^{\lambda} \cdot 18 \tanh |\beta| < 1$ とします。$t_0 \in \mathbb{Z}/N$、$r \in \mathbb{N}$、リンクの有限集合 A は全てのリンクで $d(\ell) \le r$ を満たすとします。F は有界（$|F| \le c_F$）・可測で A だけに依り、G は有界・可測とします。$\delta_y \ge 0$ は「リンク y だけを変えたときの G の変

化」の上界、つまり y の外で一致する全ての ω, ω' で $|G(\omega) - G(\omega')| \le \delta_y$ とします。このとき

$$\big|\mathrm{Cov}(F, G)\big| \;\le\; 2\, c_F\, e^{\lambda r} \sum_{y} e^{-\lambda\, d(y)}\, \delta_y. \tag{6}$$

典 Dobrushin の比較の型の、掃引の形による形式化。Lean：`LinkSpec.wilson_cov_dist`（仮定は上のとおり。右辺の定数に N は入らない）。

台の離れた二つの関数。 G が有限集合 A' のリンクだけに依り、$|G| \le c_G$、A' の全てのリンクで $d \ge r + 2 + k$ なら、$\delta_y = 2c_G$（$y \in A'$）、$\delta_y = 0$（他）と取れて

$$\big|\mathrm{Cov}(F, G)\big| \;\le\; 4\, c_F\, c_G\, |A'|\, e^{-\lambda(k+2)} \tag{7}$$

です初（(6) の当てはめ。同じ型の当てはめが Lean の `TorusRP.wilson_hdec_torus_dob` の中にあります）。λ は $-\ln(18 \tanh|\beta|)$ 未満なら何でもよく、たとえば $\beta = 0.001,\ 0.005,\ 0.01$ でその上限は $4.02,\ 2.41,\ 1.71$ です読。

言明で注意すること。 δ は仮定で G の真の変化以上に縛られるので、小さく取って偽の主張にはできません。G が定数なら $\delta \equiv 0$ で両辺 0 です。右辺の N は和の範囲と巡回距離の中にしか現れず、δ の台が N に依らなければ評価は N に一様です。

05

証明の道筋 — 熱浴の掃引で G の振動を流し去る

考え方は「F に触れずに G を平らにする」です。五段に分けます。

段 1：熱浴は測度を保つ。 熱浴の作用素 $P_x H(\omega) := \int H(\omega[x \mapsto U])\, \gamma_x(dU \mid \omega)$ について $\langle P_x H\rangle_{N,\beta} = \langle H\rangle_{N,\beta}$ です（一本のリンクの条件つきの分布が (3) であること。Lean `LinkSpec.hbSweep_invariant` とその繰り返しの `LinkSpec.iter_invariant`）。

段 2：A を避けて掃く。 L を A の外の全てのリンクを一度ずつ並べた列とし、$Q := \prod_{x \in L} P_x$（掃引）とします。F は A だけに依るので、P_x（$x \notin A$）は F を掛けたまま通り抜け、全ての K で

$$\langle F \cdot Q^K G\rangle_{N,\beta} = \langle FG\rangle_{N,\beta}, \qquad \langle Q^K G\rangle_{N,\beta} = \langle G\rangle_{N,\beta}. \tag{8}$$

Lean：`LinkSpec.iter_mul_invariant` ・ `iter_invariant`。

段 3：振動の流れ。H の一本ごとの変化の上界 δ は、P_x を一度当てると $\delta_x \mapsto 0$、$\delta_y \mapsto \delta_y + \delta_x C_{xy}$（$C_{xy}$ は (4) の係数）と動きます。重み $\rho_y := e^{-\lambda d(y)}$ を付けると、隣の d は 1 しか違わないので

$$\sum_{y \neq x} \rho_y \, C_{xy} \;\le\; \big(e^{\lambda} \cdot 18 \tanh|\beta|\big)\, \rho_x =: \alpha \, \rho_x \tag{9}$$

です（Lean `LinkSpec.row_weighted`）。$a := \sum_{y \in A} \rho_y \delta_y$、$b := \sum_{y \notin A} \rho_y \delta_y$ とすると、一回の掃引で b は α 倍以下に縮み、A の上の δ は減りません。K 回で $b_K \le \alpha^K b_0$ です（Lean `Sweep.iter_bound`）。要点は掃引を A を「処理済み」とした所から始めることで、そうすると A に流れ込んだ分 a が増えても b が確かに縮みます。

段 4：振動から共分散へ。$|H - c| \le S$、$|F| \le c_F$ なら $|\operatorname{Cov}(F, H)| \le 2 c_F S$ です（Lean `LinkSpec.cov_le`）。$H = Q^K G$ の全体の振れは $\sum_y \delta_y^{(K)}$ で抑えられ、A の上で $\rho \ge e^{-\lambda r}$ なので

$$\sum_y \delta_y^{(K)} \;\le\; e^{\lambda r} \sum_y \rho_y \delta_y \;+\; \Big(\sum_y \rho_y^{-1}\Big) \alpha^K b_0 . \tag{10}$$

段 5：$K \to \infty$。$\alpha < 1$ で N は固定なので第二項は 0 に行き、(8) と合わせて (6) が出ます。$\sum_y \rho_y^{-1}$ は N に依りますが、極限で消えるので右辺に残りません。

Dobrushin の一意性の定理そのものは道具として使っていません。熱浴の掃引でその比較の論法を有限のトーラスの上でたどっています。

数の確かめ 読 Z_2 のゲージ理論の二次元のトーラス（時間 6 × 空間 2、全ての配位の和）で、空間の Polyakov ループの対の共分散と (6) の形の評価の比は $\beta = 0.03$ で 6.2×10^{-4}（隔たり 1）〜3.1×10^{-8}（隔たり 3）、$\beta = 0.15$ で 3.1×10^{-3}〜3.8×10^{-6} で、全て評価の内でした（本書の検討の数値の記録）。SU(2) の四次元そのものでの確かめではなく、評価が鋭いかも見ていません。

06

もう一つの窓 — 二つの写しの入れ替えと面の鎖

言明（強結合の有限体積の相関の減衰）

$N \ge 1$、$c := 1 - e^{-4|\beta|}$ で $24c < 1$ とします。$t_0 \in \mathbb{Z}/N$、$r, k \in \mathbb{N}$、リンクの有限集合 A, A' は、A の全てのリンクで $d \le r$、A' の全てのリンクで $d \ge r + 2 + k$ とします。F（$|F| \le c_F$）は A だけに、G（$|G| \le c_G$）は A' だけに依る可測な関数とします。このとき

$$\bigl|\mathrm{Cov}(F,G)\bigr| \;\le\; 2\,c_F\,c_G\cdot 6|A|\cdot\frac{c\,(24c)^{k}}{1-24c}. \tag{11}$$

典 Osterwalder–Seiler の強結合のクラスター展開の型の形式化。Lean：`TorusRP.wilson_strong_coupling`（窓は字のまま $24(1-(e^{2|\beta|})^{-2})<1$。定数 $2c_Fc_G$、$6|A|$、$c/(1-24c)$、率 $24c$ に N は入らない）。

窓は $|\beta|<\frac14\ln\frac{24}{23}\approx 0.0106$ です読。証明は四段です。

段 1：面の重みを 1 以上にずらす。 $w_p:=e^{\beta\,\mathrm{Re}\,U_p+|\beta|}\in[1,e^{2|\beta|}]$ とすると $\prod_p w_p$ は Wilson の重みの正の定数倍で、期待値 (1) は変わりません。

段 2：二つの写し。 独立な二つの配位 U,V を取ると $2Z^2\,\mathrm{Cov}(F,G)=\iint (F(U)-F(V))(G(U)-G(V))\,W(U)W(V)$ です。$W(U)W(V)=\prod_p(1+\sigma_p)$、$\sigma_p:=w_p(U)w_p(V)-1\ge 0$ と展開し、面の集合 Γ についての和にします。

段 3：分けられる集合は消える。 A を含み A' と交わらないリンクの集合 T で、Γ のどの面も T の中か T の外に収まる（T の縁をまたがない）ものが在るとき、Γ は分けられると言います。そのとき T の上で二つの写しを入れ替えるとその項の符号が逆になり、和で消えます。残るのは A と A' を繋ぐ極小の面の集合 π を含む項で、$\sigma_p/(1+\sigma_p)\le 1-e^{-4|\beta|}=c$ から

$$\bigl|\mathrm{Cov}(F,G)\bigr| \;\le\; 2c_Fc_G\sum_{\pi} c^{|\pi|} \tag{12}$$

です。この段は全ての β・全ての N で成り立ちます（Lean `SwapDecay.covBound_minimal`、当てはめ `TorusRP.wilson_covariance`）。右辺の和はこの段だけでは体積に一様でなく、一様にするのが次の段の数えです。

段 4：鎖を数える。 極小の π は、A に触れる面から A' に触れる面まで、リンクを共有して続く面の列を含みます（数えの補題は、この列の長さと面の次数から上界を出します）。一本のリンクを含む面は 6 枚なので、一枚の面と台を共有する面は（自分を含めて）高々 24 枚、A に触れる面は高々 $6|A|$ 枚です。隣の面の時間の距離は 1 しか違わないので、鎖は少なくとも $k+1$ 枚の面を持ちます。長さ $m+1$ の鎖は高々 $6|A|\cdot 24^m$ 本なので、$\sum_\pi c^{|\pi|}\le 6|A|\sum_{m\ge k}c^{m+1}24^m=6|A|\,c(24c)^k/(1-24c)$ で (11) です（Lean `TorusRP.card_link_plaqs`・`plaq_degree`・`card_touch_le`・`height_lip`・`SwapDecay.minimalNonsep_sum_le`）。

数 4 は $\beta\,\mathrm{Re}\,U_p$ の振れ幅 $2|\beta|$ の二倍（二つの写し）から、24 は 4×6 から来ます。24 は上界で、一枚の面と台を共有する面の真の最大は $N\ge 3$ で 21、$N=2$ で 19 です読。

07

二つの窓の比べ（表 1）

	距離による減衰 (6)	有限体積の減衰 (11)
窓	$e^{\lambda}\cdot 18\tanh\lvert\beta\rvert<1$（$\lambda\to 0$ で $\lvert\beta\rvert<0.0556$ 読）	$24(1-e^{-4\lvert\beta\rvert})<1$（$\lvert\beta\rvert<0.0106$ 読）
勘定の元	一本のリンクの影響の行の和 $18\tanh\lvert\beta\rvert$	面の鎖の数 24^m と重み c^{m+1}
G への仮定	一本ごとの変化 δ_y（台は要らない）	台 A' が時間の距離 $r+2+k$ 以上
率（隔たり 1 あたり）	$-\ln(18\tanh\lvert\beta\rvert)$ 未満の任意の λ	$-\ln(24c)$
$\beta=0.001$ の率 読	上限 4.02	2.35
$\beta=0.005$ の率 読	上限 2.41	0.74
$\beta=0.01$ の率 読	上限 1.71	0.061
Lean	`LinkSpec.wilson_cov_dist`	`TorusRP.wilson_strong_coupling`

表 1　二つの言明の比べ。率は浮動小数の計算です。

窓の幅は Dobrushin の側が約 5.2 倍広く 読 、同じ β での率の上限も大きくなります。有限体積の減衰の側の利点は、G の一本ごとの変化を測らずに、台の離れた二つの関数をそのまま扱えることです。

強さの目安 読 ：(11) が自明な上界 $c_F c_G$（Cauchy–Schwarz）より小さくなるのは、$\lvert A\rvert=1$ で $\beta=0.008$ なら $k\ge 2$、$\beta=0.01$ なら $k\ge 35$ です。窓の端では評価はほとんど中身を持ちません。Z_2 の小さい格子では、真の共分散は (11) より 10^{8}〜10^{22} 倍小さい値でした（本書の検討の数値の記録）。

この部の後の章で、無限体積の極限（20-03）と質量ギャップ（20-04）は主に Dobrushin の窓の側を使います。

08

言っていないこと

- **窓の外については何も言いません。** 減衰が止まるとも言いません。窓は $\lvert\beta\rvert$ の小さい端だけで、連続極限に要る弱結合（$\beta\to\infty$）とは反対です。格子間隔は固定です。
- **時間の向きの距離だけ。** (6)・(11) の d は時間の座標の巡回距離です。四方向のクラスター性は無限体積の極限の測度についての別の言明です（20-03）。
- **各 N の有限体積。** 定数に N が入らないことは言いますが、無限体積の測度そのものはこの章にありません。

- **評価は鋭くありません**。(11) には $|A|$ が入り、窓の端ではほとんど自明です。(6) では δ を自分で与えます。
- **質量ギャップそのものではありません**。共分散の減衰から再構成の器の質量ギャップへ移るには、鏡映正値性（20-01）と極限の組み立てが要ります（20-04）。
- **新しい結果ではありません**。強結合の相関の減衰は Osterwalder–Seiler のクラスター展開と Dobrushin の一意性の型の既知の結果で、この章はその有限のトーラスの SU(2) Wilson 測度での形式化です。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
典 Dobrushin の距離による減衰 (6)：$e^{\lambda} \cdot 18 \tanh|\beta| < 1$、定数に N なし。Lean `LinkSpec.wilson_cov_dist`	窓の外、空間の向きの距離、無限体積の測度そのもの
初 台の離れた関数の形 (7)：(6) の当てはめ	—
典 有限体積の減衰 (11)：$24(1-e^{-4|\beta|}) < 1$、時間の距離 $r+2+k$、定数に N なし。Lean `TorusRP.wilson_strong_coupling`	窓の外、空間の向きの距離、$|A|$ に依らない形
読 窓の値 0.0556・0.0106、率の表 1、自明な上界を下回る隔たり、Z_2 での比べ	上界・下界の証明ではない。SU(2) の四次元での真の減衰の値

出典と再現

もの	種別	出典・道具
強結合のクラスター展開、相関の指数減衰	典	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440。導入は 5-02・5-04・7-04
Dobrushin の一意性・比較の条件	典	R. L. Dobrushin, Theory Probab. Appl. 13 (1968) 197（書誌のみ、未確認）。道具の位置づけは 16-10
(4)・(5)・(6) と部品（掃引、振動の流れ、共分散の上界）	Lean	`LinkSpec.spec_coeff`・`tanhForm_le`・`dobrushin_row`・`row_weighted`・`cov_le`・`iter_mul_invariant`・`iter_invariant`・`wilson_cov_dist`、`Sweep.iter_bound`、`WilsonLimit.dob_window_strict`。sorry 0、公理は標準の三つ。宣言の一覧は 19-06
(11)・(12) と部品（二つの写し、面の数え）	Lean	`SwapDecay.covBound_minimal`・`minimalNonsep_sum_le`、`TorusRP.wilson_covariance`・`card_link_plaqs`・`plaq_degree`・`card_touch_le`・`height_lip`・`wilson_strong_coupling`
窓・率の値、面の数え（19・21）、自明な上界を下回る隔たり	読	本書の検討の数値の記録（浮動小数。面の数えは Lean の定義を写した総当たり）

もの	種別	出典・道具
Z_2 の小さいトーラスでの真の共分散との比べ	読	本書の検討の数値の記録（全ての配位の和。二次元・三次元、破れなし）

この章で使った語 — 強結合・共分散・時間の距離・熱浴・影響の係数・Dobrushin の条件・掃引・二つの写し・面の鎖・クラスター展開。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：20-03 無限体積の極限 — この章の N に一様な減衰から、部分列なしの極限の測度を作ります。

無限体積の極限 — 部分列なし・並進不変・クラスター性

この章は本書の検討です。§03 の Dobrushin の条件の説明は既存の知見の紹介です。

この章で分かること — 強結合の窓 $18\tanh|\beta| < 1$、$\beta \neq 0$ で、トーラス $(\mathbb{Z}/2(n+1))^4$ の Wilson 測度を $\mathbb{Z}^4$ へ周期に持ち上げた列が、部分列を取らずに一つの確率測度 ν_β に弱収束すること。全ての大きさ $(\mathbb{Z}/(m+1))^4$ の列でも同じ極限になること。ν_β が四方向の単位の並進で不変なこと。極限の測度が四方向にクラスター性（離れた観測量の相関が指数で減ること）を持つこと。どれも Lean で機械検査した、既知の型の結果の形式化です。

前提となる章 — 19-01 Wilson の測度、19-03 無限体積の配位の空間と持ち上げ、20-02 強結合の相関の減衰。既存の知見としての無限体積の極限とクラスター展開は 5-04 にあります。

先に言うこと — 格子間隔は 1 に固定です。窓は $|\beta| < 0.0556$ 読 だけで、連続極限と弱結合については何も言いません。極限は「周期の持ち上げの列」についての言明で、ほかの境界条件や、DLR の意味での Gibbs 測度の一意性は言っていません。言明の「ただ一つ」の部分は位相から自明で、中身は部分列を取らない収束の方です。

この章の順序

1. 設定 — 配位の空間・周期の持ち上げ・弱収束：何の列が、どの意味で収束するか。
2. 四つの定理：部分列なしの極限の定理、大きさに依らない極限の定理、極限の並進不変、極限点のクラスター性。
3. Dobrushin の条件 — 一本のリンクが隣に与える影響：数 18 と tanh の出どころ。
4. 二つの大きさの比べ — 差は境までの距離で指数的に小さい：証明の芯。
5. Cauchy 列から極限へ：筒の関数が測度を決めることと、コンパクト性。
6. 並進不変とクラスター性：有限の箱の性質を極限に移す。
7. 寄り道：「ただ一つ」は何を言っているか：∃! の一意性と、収束の中身。
8. 言っていないこと：窓・境界条件・連続極限。

01

設定 — 配位の空間・周期の持ち上げ・弱収束

対象は 19-03 で定義したものです。ここでは要点だけを繰り返します。

配位の空間。$\mathbb{Z}^4$ のリンクの全体を $\Lambda = \mathbb{Z}^4 \times \{0,1,2,3\}$ とし、各リンクに SU(2) の元（単位の四元数）を一つ置いたものを配位と呼びます。配位の空間 $\mathcal{C}$ には積位相を入れます。各成分はコンパクトなので、$\mathcal{C}$ はコンパクトで距離づけ可能です。Lean の側では値を閉じた球 $\{q : |q| \le 1\}$ に取りますが、測度は単位球面（SU(2)）の上に載ります（19-01 の約束）。

周期の持ち上げ。トーラス $(\mathbb{Z}/N)^4$ の配位 ω から、$\mathbb{Z}^4$ の配位 $x_\ell = \omega_{\ell \bmod N}$ を作ります。正規化した Wilson 測度（19-01）をこの写像で押し出した確率測度を

$$\mu_n = \mathrm{lift}_*\, P_{N_n,\beta}, \qquad N_n = 2(n+1) \qquad (n = 0,1,2,\dots) \tag{1}$$

と書きます。Lean の名は `liftProb β n` です。全ての大きさ $m+1$ のトーラスの持ち上げ `liftS β m` も使います。

弱収束。確率測度の列 μ_n が ν に弱収束するとは、$\mathcal{C}$ の上の全ての有界連続関数 F について $\int F\,d\mu_n \to \int F\,d\nu$ となることです。Lean では Mathlib の確率測度の空間の位相での `Tendsto … atTop (𝓝 ν)` がこれに当たります。

筒の関数と台。有限個のリンクの集合 S の値だけで決まる関数を、台 S の筒の関数と呼びます。証明はまず筒の関数について行い、最後に測度へ移します。

窓と定数。本章を通じて

$$q(\beta) = 18\tanh|\beta| \qquad (\text{Lean の } \texttt{dobConst}\ \beta) \tag{2}$$

と置きます。窓 $q(\beta) < 1$ は $|\beta| < \operatorname{artanh}(1/18) = 0.055613$読 と同じです。陽な十分条件 $|\beta| < 1/19 \Rightarrow q(\beta) < 1$ は `WilsonLimit.dob_window_strict` として Lean にあります。

02

四つの定理

部分列なしの極限の定理

典 Dobrushin の一意性の型の結果の形式化。Lean：`InfVol.wilson_infvol_unique`（$\beta \neq 0$、$q(\beta) < 1$）。

$\beta \neq 0$ かつ $18 \tanh |\beta| < 1$ とします。このとき確率測度 ν_β がただ一つあって、列 μ_n（全ての n、部分列を取らない）は ν_β に弱収束します。

大きさに依らない極限の定理

典 同じ型の結果の形式化。Lean：`AllN.wilson_infvol_allN`（$\beta \neq 0$、$q(\beta) < 1$）。

同じ仮定のもとで、偶数の大きさの列 μ_n の極限 ν は、全ての大きさの列 `liftS β m`（トーラス $(\mathbb{Z}/(m+1))^4$）の極限でもあります。さらに $s(k) \to \infty$ となる任意の自然数の列 s について、`liftS β (s k)` も同じ ν に弱収束します。

極限の並進不変

典 形式化。Lean：`TransI.wilson_infvol_translation`（$\beta \neq 0$、$q(\beta) < 1$）。

上の ν_β は、四つの向き $i = 0, 1, 2, 3$ の単位の並進 $x \mapsto x(\cdot + e_i)$ で不変です：全ての有界連続な F について

$$\int F(x(\cdot + e_i))\, d\nu_\beta(x) = \int F \, d\nu_\beta. \tag{3}$$

極限点のクラスター性

典 Dobrushin の条件のもとの指数的な混合の型の結果の形式化。Lean：`WilsonLimit.cluster_limit`（$\lambda \geq 0$、$e^{\lambda} q(\beta) < 1$、ν は μ_n のどれかの部分列の弱い極限）。

向き i を一つ決めます。F, G は有界連続な筒の関数で、台 S_F, S_G の各リンクの基点の第 i 座標が $[0, R]$ に入るとします（ほかの座標は任意）。G_k を G を向き i に k だけずらしたもの $G_k(x) = G(x(\cdot + k e_i))$ とすると、$k \geq R$ で

$$\left| \int F\, G_k \, d\nu - \int F \, d\nu \int G_k \, d\nu \right| \;\leq\; 4 \|F\|_\infty \|G\|_\infty |S_G|\, e^{-\lambda(k-R)}. \tag{4}$$

定数は k、ν、ほかの座標に依りません。ν_β について $\lambda = -\frac{1}{2} \log q(\beta)$ と取った形が、一本にまとめた言明（20-04）に入っています。

03

Dobrushin の条件 — 一本のリンクが隣に与える影響

導入は 5-04 です。コンパクトな配位の空間では、測度の列は必ず収束する部分列を持ちます。けれども極限が一つとは限りません。一つに決めるには、遠くの影響が弱いことを言う必要があります。Dobrushin の条件はそれを「一本ずつ」測ります。

影響の係数。リンク x の条件つきの分布（ほかの全てのリンクを止めたときの x の分布）は、x を含む面の重み $e^{\beta \operatorname{Re} U_p}$ だけで決まります。別のリンク y の値を変えたとき、x の条件つきの分布が全変動でどれだけ動くかの上限を C_{xy} とします。x と y が n_{xy} 枚の面を共有するとき、Lean では

$$C_{xy} = \tanh\bigl(|\beta|\, n_{xy}\bigr) \tag{5}$$

と取ります（`coef`）。y を変えたときの x の局所の作用の差は、共有する面一枚あたり $[-2|\beta|, 2|\beta|]$ に入り（幅 $4|\beta|$）、指数の重みを幅 w だけ傾けたときの全変動の動きは $\tanh(w/4)$ 以下だからです[初]。

行の和。四次元では一本のリンクは 6 枚の面に入り、各面にほかのリンクが 3 本あります。だから $\sum_y n_{xy} = 18$ で、$\tanh(|\beta| n) \le n \tanh|\beta|$ から

$$\sum_{y \neq x} C_{xy} \;\le\; 18 \tanh|\beta| = q(\beta) \tag{6}$$

が全てのトーラスの大きさで成り立ちます[初]。Dobrushin の条件はこの行の和が 1 より小さいことで、窓 $q(\beta) < 1$ はそのまま「一本のリンクが隣の全体に与える影響の和が 1 未満」と読めます。

重みつきの形。証明では距離 d の重み $\rho_y = e^{\lambda d(y)}$ を付けた行の和 $\sum_{y \neq x} \rho_y C_{xy} \le \alpha \rho_x$、$\alpha = e^{\lambda} q(\beta)$ を使います。面を共有する二本のリンクで d が 1 しか違わないので、重みは高々 e^{λ} 倍しか変わらないからです[初]。$\alpha < 1$ を保てる $\lambda > 0$ が取れることが、窓の役目です。

04 二つの大きさの比べ — 差は境までの距離で指数的に小さい

証明の芯は「大きさの違う二つのトーラスの期待値が、どちらも N に依らない一つの数に近い」ことです。段に分けます。

段 1：熱浴の掃引。トーラスの上で、リンク x の値を条件つきの分布で引き直す操作を熱浴 P_x といいます。Wilson 測度は各 P_x で不変です。原点のまわりの箱 A（基点の各座標が $|\cdot| \le L$ のリンク）を一本ずつ順に引き直す操作を Q とし、Q を K 回繰り返します。関数 f の振動のベクトル δ_y（y 一本だけ変えたときの f の差の上限）は、掃引のたびに影響の係数 C で運ばれます。重み $e^{\lambda d(y)}$（d は原点からの巡回距離の最大）で測ると、箱の中の部分は毎回 α 倍以下に縮み、箱の外へ漏れた部分は重み $e^{\lambda(L+1)}$ で割られます。結論は、全ての配位 ω で

$$\bigl|E_N f - (Q^K f)(\omega)\bigr| \;\le\; \bigl(\alpha^K + e^{-\lambda(L+1)}\bigr) \sum_y e^{\lambda d(y)} \delta_y \tag{7}$$

です（`LinkSpec.torus_box`）。右辺に N は入りません。

段 2：箱の中は $\mathbb{Z}^4$ と同じ。 $2(L+1) < N$ なら、箱 $L+1$ の中のリンクはトーラスへの射影で一対一に写り、箱の中のリンクを含む面は巻き付きません。だから、箱 $L+1$ のリンクだけに依る F について、トーラスの掃引を持ち上げたものは $\mathbb{Z}^4$ の上で同じ掃引をしたものと一致します：$Q_N^K(F \circ \mathrm{lift}) = (Q_{\mathbb{Z}}^K F) \circ \mathrm{lift}$（`ZHeat.iter_lift`）。右辺の $Q_{\mathbb{Z}}^K F$ は N に依らない関数です。

段 3：N に依らない数との比べ。 段 1 と段 2 を、台 S が箱 R_0 に入る有界連続な筒の関数 F に当てます。$L \geq R_0$、$n \geq L+1$ なら

$$\left| \int F \, d\mu_n - c_{K,L}(F) \right| \;\leq\; \left(\alpha^K + e^{-\lambda(L+1)}\right) \cdot 2\|F\|_\infty \, |S| \, e^{\lambda R_0} \tag{8}$$

が成り立ちます（`InfVol.lift_close`、$\lambda \geq 0$、$\alpha \leq 1$、$\beta \neq 0$）。比べる数 $c_{K,L}(F) = (Q_{\mathbb{Z}}^K F)(\mathbf{0})$ は n に依りません。$\mathbf{0}$ は全てのリンクの値が 0（閉じた球の中心）の配位です。比べの点は何でもよく、n に依らないことだけが要ります。SU(2) の配位である必要もありません。

段 4：二つの大きさの差。 (8) を二つの $n, n' \geq L+1$ に当てて引き、$K \to \infty$ とすると（$\alpha < 1$）

$$\left| \int F \, d\mu_n - \int F \, d\mu_{n'} \right| \;\leq\; 4\|F\|_\infty \, |S| \, e^{\lambda R_0} \, e^{-\lambda(L+1)} \qquad (L \geq R_0,\; L+1 \leq \min(n, n')) \tag{9}$$

が出ます[初]。L は「台から、二つのトーラスが違って見え始める所までの距離」です。差はこの距離について指数的に小さい。これが見出しの意味です。この段は読みのための系で、Lean の鎖には入っていません。収束の証明（段 5）は (8) から直接に行きます。

05 Cauchy 列から極限へ

段 5：Cauchy 列。 $\lambda = -\frac{1}{2}\log q(\beta)$ と取ると $\alpha = q(\beta)^{1/2} < 1$ です。与えられた ε について α^K と $e^{-\lambda j}$ を小さくし、$L = \max(R_0, j)$ と置けば、(8) から筒の関数の期待値の列 $\int F \, d\mu_n$ は Cauchy 列です（`InfVol.cauchy_cyl`）。実数は完備なので、各筒の関数について極限があります。

段 6：筒の関数は測度を決める。 $\mathcal{C}$ の上の二つの有限測度が、全ての有界連続な筒の関数で同じ積分を与えれば、二つは等しい（`CylDet.ext_of_cyl`）。有限個のリンクの周辺分布が一致し、射影極限の一意性（Mathlib）から全体が一致します。

段 7：部分列のない収束。$\mathcal{C}$ はコンパクトで距離づけ可能なので、確率測度の空間もコンパクトです。どの部分列にも収束する部分列があり、その極限は筒の関数の上で段 5 の極限と一致し、段 6 で同じ測度です。全ての部分列が同じ極限への部分列を持つので、列そのものが収束します（`CylDet.tendsto_of_cyl_cauchy`）。

全ての大きさ。(8) の評価は大きさの偶奇を使わず、全ての大きさ $m+1$ の持ち上げにも同じ数 $c_{K,L}(F)$ を挟んで成り立ちます（`AllN.lift_closeS`）。だから全ての大きさの列も、任意の部分的な大きさの列も、同じ極限を持ちます初 。

段	何を言うか	Lean の名
1	箱の掃引の評価 (7)、定数に N なし	`LinkSpec.torus_box`
2	$2(L+1)<N$ で箱の中の掃引が $\mathbb{Z}^4$ と一致	`ZHeat.iter_lift`
3	N に依らない数との比べ (8)	`InfVol.lift_close`
5	筒の関数の期待値が Cauchy	`InfVol.cauchy_cyl`
6	筒の関数が測度を決める	`CylDet.ext_of_cyl`
7	Cauchy から列の収束	`CylDet.tendsto_of_cyl_cauchy`

仮定が満たせることの例として、$\beta = 1/20$ の場合が `InfVol.infvol_example` として Lean にあります（$18\tanh(1/20) = 0.8993$読 ）。

06

並進不変とクラスター性

並進不変。各トーラスの Wilson 測度は、トーラスの単位の並進で不変です。持ち上げは並進と交換するので、各 μ_n は $\mathbb{Z}^4$ の単位の並進で不変です（`TransI.lift_shiftI_invariant`）。F が有界連続なら $F(x(\cdot + e_i))$ も有界連続なので、弱収束で両辺の極限を取れば (3) が出ます（`TransI.limit_shiftI_invariant`）。逆向きの並進も全単射なので、ν_β は $\mathbb{Z}^4$ の全ての並進で不変です初 。

クラスター性。トーラスの上の共分散の評価（20-02 の Dobrushin の距離の形）は、距離 d について「面を共有する二本で 1 しか変わらない」ことしか使いません。そこで d を基点の第 i 座標の巡回距離に替えます（`LinkSpec.coordLip`）。F の台は $d \le R$、ずらした G_k の台は $d \ge k$ にあり、トーラスが十分大きければ（$n \ge k + R$）

$$\left|\mathrm{Cov}_{P_N}(F, G_k)\right| \;\le\; 2\|F\|\, e^{\lambda R}\, |S_G|\, e^{-\lambda k} \cdot 2\|G\|$$

です。$F \cdot G_k$、F、G_k はどれも有界連続なので、評価は弱い極限に移り、(4) になります初 。極限点が一つかどうかは使いません。

例。$\beta = 1/20$ では $q = 0.8993$、$\lambda = -\frac{1}{2}\log q = 0.0531$読 です。(4) の右辺の指数の因子 $e^{-\lambda(k-R)}$ が 0.1 になるのは $k - R \approx 43$ のときです読 。窓の端に近いほど減り方は遅くなります。真の相関の減り方との比は記録がありません。

寄り道：「ただ一つ」は何を言っているか

飛ばしてよい。Lean の言明は $\exists!\,\nu,\ \mu_n \to \nu$ の形です。確率測度の空間の弱収束の位相は Hausdorff なので、一つの列の極限は、在れば必ず一つです。だから「ただ一つ」の部分は位相から自明で、何の情報も足しません。言明の中身は「部分列を取らずに列そのものが収束する」ことです。
コンパクト性だけなら「収束する部分列がある」までしか言えません。その場合、部分列ごとに違う極限があり得ます。部分列なしの極限の定理は、その可能性をこの列について閉じます（列が収束すれば、どの部分列の極限も同じ ν_β です。Lean の `CylDet.subseq_limit_eq`）。
列は定数ではありません。$n = 0$（2^4 のトーラス）の持ち上げは周期 2 で、全ての配位で $x_{\ell+2e_1} = x_\ell$ です。$n = 1$（4^4）ではこの二本は別のリンクで、一致する確率は 0 です初 。だから $\mu_0 \neq \mu_1$ です。
「ただ一つ」を、ほかの境界条件から来る極限も含めた Gibbs 測度の一意性と読まないでください。それはこの定理の外です（§07）。

07

言っていないこと

- **格子間隔は 1 に固定**。連続極限、格子間隔を 0 に送る操作については何も言いません。
- **窓は狭い**。$|\beta| < 0.0556$読 だけです。弱結合については何も言いません。
- **$\beta = 0$ は言明の外**。仮定は $\beta \neq 0$ です（$\beta = 0$ は Haar の積で、極限は自明です）。
- **境界条件は周期だけ**。周期の持ち上げの列の収束であって、自由境界・固定境界の列や、DLR の方程式を満たす測度の一意性は言っていません。
- **並進は単位の並進の生成元**。回転などの格子の対称性での不変は、この章の定理には入っていません。20-05 の生成元での不変は、別の測度（有限の格子のフェルミオンつきの測度）についての定理です。
- **クラスター性の評価は上界だけ**。(4) は相関の上界（減り方の率の下界）で、真の相関の減り方がどれだけ速いかは言いません。λ は $e^{\lambda} q(\beta) < 1$ の範囲で選ぶもので、$-\frac{1}{2}\log q$ の $\frac{1}{2}$ は選び方です。
- **新しい結果ではない**。Dobrushin の一意性の型、Osterwalder–Seiler の強結合の型の既知の結果を、具体の SU(2) Wilson 測度の上で Lean に書いたものです。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
典 部分列なしの極限の定理：$\beta \neq 0$、$18 \tanh \lvert\beta\rvert < 1$ で、μ_n（大きさ $2(n+1)$）は列のまま一つの ν_β に弱収束（`InfVol.wilson_infvol_unique`）	窓の外、$\beta = 0$、ほかの境界条件、Gibbs 測度の一意性。「ただ一つ」は位相から自明
典 大きさに依らない極限の定理：全ての大きさ $m+1$、任意の $s(k) \to \infty$ で同じ極限（`AllN.wilson_infvol_allN`）	収束の速さの陽な形（(9) の形の評価はあるが、言明には入っていない）
典 極限の並進不変：四方向の単位の並進で不変（`TransI.wilson_infvol_translation`）	回転・鏡映での不変
典 極限点のクラスター性：(4)、四方向、どの極限点でも（`WilsonLimit.cluster_limit`、$\lambda \geq 0$、$e^{\lambda} q(\beta) < 1$）	真の減衰の速さ、窓の外
初 二つの大きさの差の評価 (9)（Lean の (8) からの一行の帰結）	(9) そのものは Lean の宣言ではない
読 窓 $\lvert\beta\rvert < 0.055613$、$\beta = 1/20$ で $q = 0.8993$、$\lambda = 0.0531$	浮動小数の値（区間の評価ではない）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
強結合の格子ゲージ理論の反射正値性・転送行列・強結合の型	典	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（要旨）。5-04
Dobrushin の一意性の条件（影響の係数の行の和が 1 未満）	典	R. L. Dobrushin の一意性の条件の原典（書誌のみ・未確認。年と誌は本書で照合していない）
格子ヤン–ミルズの確率論の言葉での定義と強結合の結果の概観	典	S. Chatterjee, arXiv:1803.01950（本文）
四つの定理と証明の段	Lean	Lean 4 で機械検査（核の再検査で全て通過、公理は標準の三つ）。宣言は本文の表と 20-07 の表、A-04
窓の端・率・$18 \tanh(1/20)$	読	本書の検討の数値の記録（倍精度の浮動小数）

この章で使った語 — 周期の持ち上げ、弱収束、筒の関数、Dobrushin の条件、影響の係数、熱浴、掃引、クラスター性、強結合の窓。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：20-04 再構成と質量ギャップ — 強結合の窓の中で — この章の ν_β から Hilbert 空間と転送の作用素を組み立て、真空の外の状態が在ることと、ギャップの下界を読みます。

再構成と質量ギャップ — 強結合の窓の中で

この章は本書の検討です。

この章で分かること — 強結合の窓で、無限体積の測度 ν_β から再構成した Hilbert 空間の上の転送の作用素 T が、真空の直交補空間の上で $\|T\| \le (18 \tanh|\beta|)^{1/2}$ を満たすこと。その補空間が 0 でないこと（非退化）。同じことがゲージ不変な観測量の部門でも成り立つこと。$\beta \ge 0$ で $T \ge 0$ であること。T の像がゲージ不変な部門に入ること。そして、これらを一本にまとめた言明。どれも Lean で機械検査した、既知の型の結果の形式化です。

前提となる章 — 19-03 再構成の器・質量ギャップの定義、20-03 無限体積の極限、20-01 鏡映正値性。既存の知見としての再構成と質量ギャップの定義は 4-10・4-11 にあります。

先に言うこと — ここでの「質量ギャップ」は $\|T - P_\Omega\| \le e^{-m}$ という上界、つまり質量の**下界**だけです。質量が有限であること（$T \ne P_\Omega$）は言いません。格子間隔は 1 に固定、窓は $|\beta| < 0.0556$ 読 だけで、連続極限での質量ギャップについては何も示していません。

この章の順序

1. 器 — 対・並進・定数から Hilbert 空間と T を作る：言明が縛る三つのデータ。
2. 非退化つきの質量ギャップ：二つの窓の二つの定理。
3. なぜ非退化を言明に入れるか：一点の模型でも立つ形を避ける。
4. 証明の道筋：相関の減衰から作用素のノルムへ。
5. ゲージ不変な部門と T の像：面の観測量と、核に入る F_0。
6. T ≥ 0：真ん中の面の鏡映とゲージの平均。
7. 一本にまとめた言明：$0 < \beta$、窓の中の全て。
8. 言っていないこと：下界だけ、窓、格子間隔。

01

器 — 対・並進・定数から Hilbert 空間と T を作る

器の定義は 19-03 にあります。導入は 4-10 です。ここでは使う形だけを書きます。

観測量の空間 W。有界連続な関数で、時間の座標が 0 から R の基点を持つ有限個のリンクだけに依るもの（R は関数ごとに有限）の全体です。閉じた正の半分の筒の関数と言っても同じです。Lean の名は `Wsub` です。

三つのデータ。ν を確率測度とし、

$$B(F,G)=\int F(\Theta x)\,G(x)\,d\nu(x),\qquad (\tau F)(x)=F(x(\cdot+e_0)),\qquad \mathbf{1}=\text{定数 }1 \tag{1}$$

と置きます。Θ は時間の鏡映 $x_0\mapsto -x_0$（時間のリンクは一つずらして向きを逆にする。19-03）です。B が半正値・対称で、τ が B について対称、$\tau\mathbf{1}=\mathbf{1}$、$B(\mathbf{1},\mathbf{1})=1$、並進の軌道が有界であるとき、組 $(B,\tau,\mathbf{1})$ を**再構成の器**と呼びます（Lean の `OSGap.Datum`）。

作るもの。W に半内積 B を載せ、零の元で割って完備化したものを $\mathcal{H}$、W の元の像を $[F]$、真空を $\Omega=[\mathbf{1}]$、τ の連続な延長を T、真空への射影を $P_\Omega v=\langle\Omega,v\rangle\Omega$ とします。

質量ギャップの定義。定義は 19-03 にあります。

$$\texttt{HasMassGap}\ m\quad:\Longleftrightarrow\quad \|T-P_\Omega\|\le e^{-m}. \tag{2}$$

$T\Omega=\Omega$ で T は対称なので、これは「Ω の直交補空間の上で $\|T\|\le e^{-m}$」と同じです[初]。時間の一歩で、真空以外の成分が少なくとも e^{-m} 倍に縮む。m は質量（エネルギーの隙間）の下界です。

言明はデータを縛る。以下の定理は全て「器 D が在って、D の B は (1) の積分、τ は時間の一歩の並進、$\mathbf{1}$ は定数 1 で、かつ …」という形です。データの欄は三つとも結論の中で決まっているので、D は ν から決まります[初]。T を勝手な作用素に取り替えて結論を満たすことはできません。

02

非退化つきの質量ギャップ

$F_0(x)=\operatorname{Re}x_{\ell_0}$ と置きます。ℓ_0 は原点を基点とする向き 1（空間）のリンクで、$F_0\in W$ です。$q(\beta)=18\tanh|\beta|$ と書きます（20-03）。

非退化つきの質量ギャップ — Dobrushin の窓

典 Dobrushin と Osterwalder–Seiler の強結合の型の結果の形式化。Lean：`WilsonLimit.wilson_massGap_dob_exists`（$\beta \neq 0$、$q(\beta) < 1$）。

$\beta \neq 0$、$18 \tanh|\beta| < 1$ とします。このとき μ_n のある部分列の弱い極限 ν と、ν から (1) で作った器 D が在って、

$$\|T - P_\Omega\| \le \big(18 \tanh|\beta|\big)^{1/2}, \qquad B(F_0, F_0) - B(\mathbf{1}, F_0)^2 \;\ge\; \tfrac{1}{4} e^{-12|\beta|}, \qquad \exists\, v \perp \Omega,\ \|v\| = 1 \tag{3}$$

一つ目が $m = -\frac{1}{2}\log q(\beta)$ の **HasMassGap**、二つ目と三つ目が非退化です。

非退化つきの質量ギャップ — 全ての極限点で

典 同じ型の結果の形式化。Lean：`WilsonLimit.wilson_massGap_nondegenerate`（$\beta \neq 0$、$24(1 - e^{-4|\beta|}) < 1$、$\nu$ は μ_n の任意の部分列の弱い極限）。

窓 $24(1 - e^{-4|\beta|}) < 1$（$|\beta| < 0.0106$ 読）では、**どの**極限点 ν についても、器 D が **HasMassGap**$\big(-\log 24(1 - e^{-4|\beta|})\big)$ と、(3) の二つの非退化を満たします。この窓の評価は 20-02 の有限体積の減衰から来ます。

二つの定理は窓と率が違います。Dobrushin の窓の形は、言明では極限点を一つ選んでいますが、同じ評価は全ての極限点で成り立ちます（`WilsonLimit.wilson_massGap_dob`、§04 段 4）。しかも窓の中では極限点は ν_β ただ一つです（20-03）。狭い窓の形は、有限体積の減衰（20-02）から別の道で同じ型の結論を出したもので、率は $-\log 24(1 - e^{-4|\beta|})$ です。部分列なしの極限 ν_β について Dobrushin の窓の形をまとめたものが §07 です。狭い窓の率は §07 には入っていません。

一つの例。$\beta = 1/20$ では $q = 0.8993$、$\|T - P_\Omega\| \le 0.948$、質量の下界は $m = 0.053$ です読。非退化の下界は $\frac{1}{4}e^{-0.6} = 0.137$ です読。窓の端に近いほど、ギャップの下界は 0 に近づきます。

03

なぜ非退化を言明に入れるか

(2) だけでは中身が薄くなる場合があります。$\mathcal{H}$ が Ω の張る一次元の空間なら、$T = P_\Omega$ で、$\|T - P_\Omega\| = 0$ です。このとき全ての m で (2) が立ちます。たとえば ν が一点の測度なら、そうなります。だから「ギャップが在る」は、「真空の外に状態が在る」と組にしないと、一点の模型でも立つ言明になります。非退化の無い形の定理は、この理由で本書には載せません。

非退化の二つの形。(3) の二つ目は「鏡映の対で測った F_0 の分散が正」、三つ目は「Ω に直交する単位ベクトルが在る」です。三つ目は二つ目から出ます：$y = F_0 - B(\mathbf{1}, F_0)\mathbf{1}$ は $B(\mathbf{1}, y) = 0$、$B(y, y) > 0$ なので、$v = [y]/\|[y]\|$ が単位ベクトルです（`OSGap.Datum.exists_unit_orth`）。三つ目は一次元の $\mathcal{H}$ を型の上で排除します。

分散の下界の出どころ。段に分けます。

1. ℓ_0 は時間 0 の空間のリンクなので Θ で動かず、$F_0 \circ \Theta = F_0$。だから $B(F_0, F_0) - B(\mathbf{1}, F_0)^2 = \mathrm{Var}_\nu(F_0)$初 。
2. SU(2) の Haar 測度では、左の不変性 $q \mapsto -q,\ iq,\ jq,\ kq$ から $E\,\mathrm{Re}\,U = 0$、$E(\mathrm{Re}\,U)^2 = \tfrac{1}{4}$。よって全ての c で $E(\mathrm{Re}\,U - c)^2 \geq \tfrac{1}{4}$（`HaarRe.integral_sq_sub_ge`）。
3. 一本のリンクの条件つきの分布の密度は、そのリンクを含む 6 枚の面の重みで、$e^{\pm 6|\beta|}$ の間に挟まれます。だから条件つきの分散は $\tfrac{1}{4}e^{-12|\beta|}$ 以上で、積分して全てのトーラスで $\mathrm{Var}(F_0) \geq \tfrac{1}{4}e^{-12|\beta|}$（`LinkSpec.wilsonProb_sq_sub_ge`）。
4. F_0 と F_0^2 は有界連続なので、下界は弱い極限に移ります（`WilsonLimit.var_limit_ge`）。

04 証明の道筋

質量ギャップの部分は、相関の減衰を作用素のノルムに直す一般の補題と、Wilson 測度の減衰の評価を組み合わせます。

段 1：器の公理。B の半正値は、各トーラスの格子点の面の鏡映正値性（20-01）を弱い極限に移して出ます。τ の対称性は並進不変と Θ の関係から、軌道の有界は $|F| \leq \|F\|_\infty$ から出ます。

段 2：減衰から作用素のノルムへ。器の上で、全ての $F \in W$ について定数 C_F が在って

$$B(\tau^k F, \tau^k F) - B(\mathbf{1}, F)^2 \;\leq\; C_F\, r^{2k} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots) \tag{4}$$

なら $\|T - P_\Omega\| \leq r$ です（`OSGap.Datum.opNorm_gap`）。左辺は $\|T^k[F] - P_\Omega[F]\|^2$ なので初 、稠密な集合の上の評価を対称な作用素のスペクトルの評価に直す議論です。

段 3：Wilson 測度の減衰。$B(\tau^k F, \tau^k F) = \int F(\Theta\tau^k x) F(\tau^k x)\, d\nu$ は、時間に約 $2k$ 離れた二つの観測量の相関です。トーラスの上の Dobrushin の距離の共分散の評価（20-02、`LinkSpec.wilson_cov_dist`）を当てると、N に依らない定数で $C_F e^{-2\lambda k}$ が出ます（`TorusRP.wilson_hdec_torus_dob`）。λ は $\lambda \geq 0$、$e^{\lambda} q(\beta) < 1$ を満たす任意の数です（段 4

では $\lambda > 0$）。この形の減衰が `WilsonLimit.dec_eventually_dob` です。評価は極限点に移ります。

段 4：率の選び方。段 2 を $r = e^{-\lambda}$ で当てると **HasMassGap** λ です（`WilsonLimit.wilson_massGap_dob`）。(3) の $\lambda = -\frac{1}{2}\log q(\beta)$ は $e^{\lambda} q = q^{1/2} < 1$ を満たす一つの選び方で、$\frac{1}{2}$ に物理の意味はありません。同じ定理から $-\log q(\beta)$ に任意に近い率が取れます。

段 5：非退化。§03 の四段です。

05

ゲージ不変な部門と T の像

導入は 4-11 です。ゲージ変換 $g : \mathbb{Z}^4 \to SU(2)$ は $(g \cdot x)_\ell = g(b)\, x_\ell\, g(b + e_\mu)^*$（$\ell$ の基点 b、向き μ）と働きます。全ての g で不変な W の元の全体を W_{gi} とします。$F_p = \mathrm{Re}\, U_p$（原点の $(1,2)$ 面のホロノミーの実部）は W_{gi} に入ります。

ゲージ不変な部門の質量ギャップ

典 形式化。Lean：`GaugeZ.wilson_massGap_gauge_exists`（$\beta \neq 0$、$q(\beta) < 1$）。

(3) と同じ形が、W を W_{gi} に、F_0 を F_p に替えて成り立ちます。ある極限点 ν について、W_{gi} の上の器で $\|T - P_\Omega\| \le q(\beta)^{1/2}$、$\mathrm{Var}_\nu(F_p) \ge \frac{1}{4} e^{-12|\beta|}$、真空に直交する単位ベクトルが在る。分散の下界は、面の一本のリンク U を動かすと $U_p = UV$（V は残りの三本の積で単位）となり、$\mathrm{Re}(UV)$ の Haar の分散が $\mathrm{Re}\, U$ と同じことから出ます。

なぜ部門を分けるか。全体の W の非退化の証人 F_0 は、ゲージ不変ではありません。一本にまとめた言明（§07）には $T[F_0] = 0$ が入っています。つまり $[F_0]$ は真空に直交する 0 でないベクトルですが、T に消されます。格子点 e_0 に中心の元 -1 を置くゲージ変換で、$\int G(\Theta x) F_0(\tau x)\, d\nu = 0$ が全ての $G \in W$ で出るからです初。これは Elitzur の定理（局所ゲージ対称性は破れない）と同じ仕組みです典。ゲージ不変な部門の非退化（証人 F_p）の方が、中身のある非退化です。F_p は T に消されると分かっているベクトルではありません。ただし $T[F_p] \neq 0$（この部門で T が補空間の上で 0 でないこと）も、Lean の言明には入っていません。

T の像はゲージ不変な部門に入る

典 形式化。Lean：`Bind.T_range_gauge_all`（$\lambda > 0$、$e^{\lambda} q(\beta) < 1$、ν は任意の極限点）。

W の器 D と W_{gi} の器 D'（どちらもデータを (1) で縛ったもの）について、両方が **HasMassGap** λ を満たし、等長な線形写像 $\iota : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ が在って

$$\iota \Omega' = \Omega, \qquad \iota T' = T \iota, \qquad \text{全ての } u \in \mathcal{H} \text{ について } Tu \in \iota(\mathcal{H}'). \tag{5}$$

ゲージ不変な部門は全体の Hilbert 空間に等長に埋め込まれ、T と交換し、T の像は全てその中に入ります。証明は、τF の台の端点の上でゲージ変換の Haar 平均を取ったものが W_{gi} に入り、対の値を変えないことからです。ι の像は閉じていて T は連続なので、稠密な集合から全ての u に延びます。

06

T ≥ 0

典 形式化。Lean：`FullT.wilson_Tpos_full`（$\beta \ge 0$、$\lambda > 0$、$e^{\lambda} q(\beta) < 1$、ν は任意の極限点）。

$\beta \ge 0$ とします。W の上の器 D（データを (1) で縛ったもの）が在って、**HasMassGap** λ、(3) の二つの非退化、そして

$$\langle v, Tv \rangle \;\ge\; 0 \qquad (\text{全ての } v \in \mathcal{H}) \tag{6}$$

を満たします。

道筋。$\langle [F], T[F] \rangle = B(F, \tau F) = \int F(\Theta x) F(\tau x)\, d\nu$ です。$\tau \circ \Theta' = \Theta$（$\Theta'$ はリンクの真ん中の面 $x_0 \mapsto 1 - x_0$ での鏡映）なので、これは真ん中の面の鏡映の対です。真ん中の面の鏡映正値性（20-01）はゲージ不変な関数についてで、$\beta \ge 0$ を使います。そこでトーラスの全ての格子点の上のゲージ変換の Haar 平均 A を挟みます（G は正の側だけに依る有界可測な関数）。測度はゲージ変換で不変なので $\int G(\Theta' \omega) G(\omega) = \int (AG)(\Theta' \omega)(AG)(\omega)$ となり、AG はゲージ不変です。こうして各トーラスで正、極限で正、稠密な集合から全ての v へ延びます。

読み。$T \ge 0$、$T\Omega = \Omega$、$\| T - P_{\Omega} \| \le e^{-m}$ を合わせると、Ω の補空間の上で T のスペクトルは $[0, e^{-m}]$ に入ります初 。$-\log T$ と書けば補空間で $-\log T \ge m$ です（T の核の上では $+\infty$ と読む）。$\beta < 0$ については何も言いません。

07

一本にまとめた言明

典 Dobrushin の一意性の型と Osterwalder–Seiler の強結合の型の結果の形式化。Lean：`InfMain2.wilson_infvol_main2`（$0 < \beta$、$18 \tanh \beta < 1$）。

$0 < \beta$、$18 \tanh \beta < 1$ とし、$m = -\frac{1}{2} \log(18 \tanh \beta)$ と置きます。確率測度 ν_β がただ一つあって、次の全てが成り立ちます。

1. $\mu_n \to \nu_\beta$（部分列なしの弱収束。20-03）。
2. ν_β は四方向の単位の並進で不変。
3. 全ての $F \in W$ で $\int F(\Theta x) F(x)\, d\nu_\beta \geq 0$（鏡映正値）。
4. W の上の器（データを (1) で縛る）で、$\mathtt{HasMassGap}\ m$、$\mathrm{Var}(F_0) \geq \frac{1}{4} e^{-12\beta}$、$\Omega$ に直交する単位ベクトルの存在、$T[F_0] = 0$、$T \geq 0$。
5. W_{gi} の上の器（同じく縛る）で、$\mathtt{HasMassGap}\ m$、$\mathrm{Var}(F_p) \geq \frac{1}{4} e^{-12\beta}$、$\Omega$ に直交する単位ベクトルの存在、$T \geq 0$。
6. 四方向のクラスター性：20-03 の (4) を率 m で。

「ただ一つ」の部分は位相から自明で、中身は 1 の収束です（20-03 の寄り道）。T の像がゲージ不変な部門に入ること（§05 の (5)）は、この言明には入っていません。別の定理 `Bind.T_range_gauge_all` です。

08

言っていないこと

- **質量は下界だけ。** $\|T - P_\Omega\| \leq e^{-m}$ は、T が補空間で 0（「質量が無限大」）でも成り立ちます。質量が有限であること、$T \neq P_\Omega$ は言っていません。数 $-\frac{1}{2} \log(18 \tanh \beta)$ は下界で、$\frac{1}{2}$ は選び方です。真の質量との比の記録はありません。
- **窓は狭い。** $|\beta| < 0.0556$読 （全ての極限点の形は $|\beta| < 0.0106$読 ）。弱結合、物理の結合の範囲については何も言いません。
- **格子間隔は 1 に固定。** 格子の単位で測った質量の下界です。連続極限で質量ギャップが残るかどうかは、この部の定理の外です。
- **符号。** 一本にまとめた言明は $0 < \beta$、$T \geq 0$ は $\beta \geq 0$ です。ギャップと非退化だけなら $\beta \neq 0$ の両符号です。
- **部門の読み。** W_{gi} は「筒の関数で、かつゲージ不変」なものの全体です。その閉包が物理のゲージ不変な状態の空間と一致するかは言っていません。
- **新しい結果ではない。** Osterwalder–Seiler の強結合の型の既知の結果を、具体の SU(2) Wilson 測度の上で Lean に書いたものです。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
典 非退化つきの質量ギャップ（Dobrushin の窓、ある極限点）：(3)（`WilsonLimit.wilson_massGap_dob_exists`、$\beta \neq 0$）	質量が有限であること、窓の外
典 非退化つきの質量ギャップ（全ての極限点、窓 $24(1-e^{-4\lvert\beta\rvert}) < 1$）（`WilsonLimit.wilson_massGap_nondegenerate`）	同上。窓はさらに狭い
典 ゲージ不変な部門の質量ギャップと非退化（証人 F_p）（`GaugeZ.wilson_massGap_gauge_exists`）	W_{gi} の閉包と物理の状態の空間の一致
典 $T \geq 0$（全体の W の上）（`FullT.wilson_Tpos_full`、$\beta \geq 0$）	$\beta < 0$
典 T の像はゲージ不変な部門に入る、(5)（`Bind.T_range_gauge_all`）	一本にまとめた言明には入っていない
典 一本にまとめた言明（`InfMain2.wilson_infvol_main2`、$0 < \beta$、$18 \tanh \beta < 1$）	連続極限、格子間隔を変えること、質量の上界
初 $T \geq 0$ とギャップから、補空間の上のスペクトルが $[0, e^{-m}]$ に入るという読み	読みそのものは Lean の宣言ではない
読 $\beta = 1/20$ で $\lVert T - P_\Omega \rVert \leq 0.948$、$m = 0.053$、非退化の下界 0.137	浮動小数の値

出典と再現

もの	種別	出典・道具
格子ゲージ理論の反射正値性・転送行列・強結合の質量ギャップの型	典	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（要旨）。5-03・5-04
ユークリッドの公理と再構成	典	K. Osterwalder, R. Schrader, Comm. Math. Phys. 31 (1973) 83；42 (1975) 281（要旨）。4-10
局所ゲージ対称性は自発的に破れない（$T[F_0] = 0$ の読み）	典	S. Elitzur, Phys. Rev. D 12 (1975) 3978（要旨）
Dobrushin の一意性の条件	典	原典は書誌のみ・未確認（年と誌は本書で照合していない）
本章の定理と部品	Lean	Lean 4 で機械検査（核の再検査で全て通過、公理は標準の三つ）。宣言の一覧は 20-07、A-04
$\beta = 1/20$ の数、窓の端	読	本書の検討の数値の記録（倍精度の浮動小数）

この章で使った語 — 再構成の器、転送の作用素、真空、質量ギャップ（下界）、非退化、ゲージ不変な部門、Elitzur の定理、鏡映正値性、強結合の窓。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：20-05 フェルミオンつきの器 — Wilson–Dirac の行列式を重みに足した有限の格子で、鏡映正値性・Z > 0・対称性を読みます。

フェルミオンつきの器

この章は本書の検討です。

この章で分かること — 有限の格子 $(\mathbb{Z}/N)^3 \times \mathbb{Z}/2h$ の上で、Wilson のゲージの重み $e^{-\beta S_W}$ に Wilson–Dirac の作用素の行列式 $\mathrm{Re}\big[(\det D)^{2j}\big]$ を掛けた測度が、格子点の時間の面の鏡映について正値であること（質量 $m > -1$、全ての β）。分配関数が正であること（全ての β・m・j）。$\det D$ が大域のゲージ変換で不変なこと。正規化した測度が格子の対称性の生成元で不変なこと。どれも Lean で機械検査した、既知の型の結果の形式化です。

前提となる章 — 19-05 Wilson–Dirac の作用素・フェルミオンつきの測度、20-01 鏡映正値性。既存の知見としての格子の鏡映正値性と転送行列は 5-03 にあります。

先に言うこと — 全て一つの有限の格子の上の言明です。無限体積の極限、連続極限、カイラル対称性、質量の繰り込みについては何も言いません。対称性は生成元ごとの不変で、群としての閉包は言明の外です。フェルミオンつきの質量ギャップもこの章にはありません。

この章の順序

1. 対象 — 格子・作用・行列式の重み：何の測度か。
2. 格子点の面の鏡映正値性：$m > -1$、全ての β。
3. 鏡映正値性の証明の道筋：作用の割れ方と、面の行列の正値。
4. 分配関数が正であること：正規化が定義できる。
5. 行列式の大域ゲージ不変：定数の g で共役。
6. 格子の対称性の生成元での不変：並進・回転・鏡映・時間の鏡映。
7. 言っていないこと：有限の格子、連続極限、カイラル対称性。

01

対象 — 格子・作用・行列式の重み

定義は 19-05 にあります。ここでは定理を読むのに要る所だけを書きます。

格子とリンク。空間は三次元のトーラス $(\mathbb{Z}/N)^3$、時間は輪 $\mathbb{Z}/2h$（$h \geq 1$）です。リンクは時刻 t の空間のリンク $x \to x + e_i$（$i = 1, 2, 3$）と、時間のリンク $t \to t + 1$ です。各リンクに SU(2) の元を置いたものを配位 ω とし、配位の空間にはリンクごとの Haar 測度の積を入れます。

ゲージの作用。向きを忘れた面を一枚ずつ数えて

$$S_W(\omega) = \sum_{p} \Big(1 - \tfrac{1}{2} \operatorname{Re} \operatorname{tr} U_p \Big) \tag{1}$$

と置き、重みを $e^{-\beta S_W}$ とします。$\frac{1}{2} \operatorname{tr} U$ は四元数の実部と同じなので、これは 19-01 の重み $e^{\beta \sum_p \operatorname{Re} U_p}$ の定数倍です[初]。β の向きも同じです。

Wilson–Dirac の作用素。$D = D(\omega)$ は Wilson の項の係数 $r = 1$、質量 m の作用素で、四方向に反周期の境界条件を持ちます（Lean の `WilsonGauge.physDirac`）。

$$D = (4 + m)\,\delta - \tfrac{1}{2} \sum_{\mu} \Big[(1 - \gamma_\mu)\, U_\mu(x)\, \delta_{x + \hat{\mu}} + (1 + \gamma_\mu)\, U_\mu(x - \hat{\mu})^{\dagger}\, \delta_{x - \hat{\mu}} \Big] \tag{2}$$

フェルミオンつきの重み。自然数 j を一つ決め、

$$w(\omega) = e^{-\beta S_W(\omega)} \cdot \operatorname{Re}\big[(\det D(\omega))^{2j} \big] \tag{3}$$

と置きます（`wfWeight`）。19-05 のとおり $(\det D)^{2j}$ は非負の実数で、Re は書き方の上の約束です。$\det D^{2j}$ は、同じ質量の $2j$ 個の種類のフェルミオンを Grassmann 変数で積分したものに当たります。Lean では Grassmann 変数は置かず、行列式そのものを重みとして定義します。正規化した測度 $P = w\, d\omega / Z$、$Z = \int w\, d\omega$ が `wfProb` です（19-05）。

02

格子点の面の鏡映正値性

導入は 5-03 です。時間の鏡映 $\Theta : t \mapsto -t \pmod{2h}$ は、時刻 $t = 0$ と $t = h$ の二枚の格子点の面を動かしません。配位を三つに分けます：二枚の面の上の空間のリンク c、正の側 a_+（$0 < t < h$ の空間のリンクと、$0 \leq t < h$ から出る時間のリンク）、負の側 a_-（残りを Θ で正の側の形に写し、時間のリンクは逆元にしたもの）。

Wilson–フェルミオンの重みの鏡映正値性

典 Osterwalder–Seiler の型の結果の形式化。Lean：`WilsonGauge.site_reflection_positive_wilson_full`（$h > 0$、$m > -1$、全ての $\beta \in \mathbb{R}$、全ての j）。

φ を (c, a_+) の有界可測な実数値関数とすると

$$\int \varphi(c, a_+)\, \varphi(c, a_-)\, e^{-\beta S_W(\omega)}\, \mathrm{Re}\big[(\det D(\omega))^{2j}\big]\, d\omega \;\geq\; 0. \tag{4}$$

$\varphi(c, a_-)$ は φ を鏡映した配位で読んだもの、つまり $(\Theta\varphi)$ です。(4) は「$\langle \Theta\varphi \cdot \varphi \rangle \geq 0$」の形の鏡映正値性で、正規化しない測度の言明です。Lean では積分を分けた座標 (c, a_+, a_-) で書き、その座標で組み立てた作用素が物理の配位の D と同じであることを `WilsonGauge.physDirac_eq_split` が言います。$Z > 0$（§04）なので正規化しても符号は同じです初。

なぜ β の符号を問わないか。格子点の面の鏡映では、面をまたぐ面（プラケット）がありません。どの面も、二枚の固定された面の上か、正の側か、負の側のどれかに入ります。だから $e^{-\beta S_W}$ は「面だけの因子 × 正の側の因子 × 負の側の因子」に割れ、因子の符号の条件が要りません初。リンクの真ん中の面の鏡映では、またぐ面の因子を正の核として展開するのに $\beta \geq 0$ が要ります。この章の定理はそちらを扱いません。

なぜ $m > -1$ か。フェルミオンの側では、固定された面の上の作用素のブロック（面の行列）が正定値であることを使います（`FermionSliceBlock.wilsonPlane_posDef`）。面の行列は $(m+1) + \sum_i \big(1 - \tfrac{1}{2}(T_i + T_i^\dagger)\big)$（$T_i$ はユニタリな跳び）の形で、各項 $1 - \tfrac{1}{2}(T_i + T_i^\dagger)$ が半正定値なので $m + 1$ 以上です初。$m > -1$ はこのための十分条件です。必要かどうかはこの定理からは分かりません。

03 鏡映正値性の証明の道筋

段 1：作用の割れ方。$S_W(\omega) = K(c) + H(c, a_+) + H(c, a_-)$ で、H は正の側と負の側で**同じ関数**です（`WilsonGauge.wilsonAction_split`）。負の側の時間の面は、時間のリンクを逆元にして二つの時刻を入れ替えると正の側の形になり、$\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}$ は tr の巡回性と $\mathrm{tr}\, M^\dagger = \overline{\mathrm{tr}\, M}$ で変わりません（`WilsonGauge.plaqE_reflect`）。

段 2：抽象の鏡映正値性。重みが $k(c)\, w_+(c, a_+)\, w_+(c, a_-)$（$k \geq 0$、$w_+$ は実で有界）の形で、フェルミオンの行列式の側が面の行列の正値などの作用素の条件を満たせば、(4) の形の積分

は非負です（`FermionSliceReflection.site_reflection_positive_phys`）。ゲージの重みは段 1 で $k = e^{-\beta K}$、$w_+ = e^{-\beta H}$ の形に入ります。

段 3：作用素の一致。物理の配位で書いた D（式 (2)）と、割った配位で組み立てた作用素が一致します（`WilsonGauge.physDirac_eq_split`）。これで段 2 の作用素の条件を具体の D で払えます。

仮定が満たせることの例：$h = 1$、$m = 0$、$\varphi = 1$ で全ての仮定が立ちます。言明は空ではありません。

04

分配関数が正であること

典 形式化。Lean：`WilsonGauge.partition_pos_wilson_full`（$h > 0$、全ての β・m・j）。

$$Z = \int e^{-\beta S_W(\omega)}\, \mathrm{Re}\big[(\det D(\omega))^{2j}\big]\, d\omega \;>\; 0. \tag{5}$$

質量 m に条件はありません。$Z > 0$ なので、正規化した確率測度 `wfProb` が定義できます。$Z > 0$ は自明ではありません。$\mathrm{Re}\big[(\det D)^{2j}\big]$ が全ての配位で 0 になることはない、という中身を含みます。

05

行列式の大域ゲージ不変

初 既知の事実の Lean による形式化（証明は下の一文）。Lean：`GaugeDet.physDirac_det_conj`（全ての N・h・m・g・ω、仮定なし）。

定数の $g \in SU(2)$ で全てのリンクを共役した配位 $(g \cdot \omega)_\ell = g\,\omega_\ell\,g^{-1}$ について

$$\det D(g \cdot \omega) = \det D(\omega). \tag{6}$$

$D(g \cdot \omega)$ は $D(\omega)$ を色の添字に定数の g を掛ける行列で挟んだ相似で、行列式が変わらないことです。g は格子点に依らない定数です。格子点ごとに違う $g(x)$ を取る局所のゲージ変換は、この宣言の外です。

06

格子の対称性の生成元での不変

初 既知の事実の Lean による形式化（証明の道筋は下）。Lean：`CubicSym.wfProb_lattice_generators`（$h > 0$、全ての N・j・m・β）。

正規化した測度 P（`wfProb`）は、次の各生成元 R について押し出しで不変です：$R_* P = P$。

生成元	配位への働き	Lean の名
大域のゲージ変換	全てのリンクを定数の g で共役	`conjPhys g`
空間の単位の並進（三方向）	$x \mapsto x + e_k$	`transPhys k`
時間の単位の並進	$t \mapsto t + 1$	`tshiftPhys`
空間の平面の 90° の回転	$e_a \mapsto e_b \mapsto -e_a$（$a \neq b$、向きつき六通り）	`rotPhys a b`
空間の軸の鏡映	$x_k \mapsto N - 1 - x_k$	`reflPhys k`
時間の鏡映	$t \mapsto 2h - 1 - t$、時間のリンクは逆元（リンクの真ん中の面 $t = h - \frac{1}{2}$ についての反転で、§02 の格子点の面の Θ とは別。Lean に在るのはこの反転での測度の不変で、鏡映正値性ではない）	`treflPhys`

初 同じく形式化。Lean：`CubicSym.wfProb_hypercubic_generators`（等方の格子 $N = 2h$、$h > 0$）。空間と時間の大きさが等しい格子では、上の全てに加えて、(空間, 時間) の平面の 90° の回転（`trotPhys a`）でも不変です。

道筋。どの生成元についても、測度の不変は三つに分かれます。(i) リンクごとの Haar の積が、リンクの付け替えと一部のリンクの逆元 $g \mapsto g^{-1}$ で保たれる。(ii) S_W が不変。(iii) $\det D$ が不変。(iii) は Clifford の形で示します。D を $1 \otimes M + \sum_\mu \gamma_\mu \otimes A_\mu$ と書き、格子の置換 W とスピンの行列 S（回転では $S = 1 + \gamma_b \gamma_a$、軸 k の鏡映ではほかの三つの γ の積）で $(S \otimes W)\, D(\omega)\, (S \otimes W)^{-1} = D(R\omega)$ となることから出ます（`CubicSym.cliffOp_conj`・`CubicSym.det_cliffOp_perm`）。

時間の鏡映と行列式。時間の鏡映についても、行列式そのものが不変です：$\det D(\Theta_t \omega) = \det D(\omega)$（`CubicSym.physDirac_det_trefl`、全ての N・h・m・ω、等方は要らない）。スピンの行列は $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ です初。

反周期の切れ目。座標の反転を $z \mapsto N - 1 - z$ に取ると、反周期の符号が付くリンク（$N - 1 \to 0$）は自分自身に（向きを逆にして）移ります。だから格子の側の置換 W に符号の補正が要りません初。$z \mapsto -z$ に取ると切れ目が動き、符号つきの置換が要ります。

07

言っていないこと

- **一つの有限の格子**。全ての定理は固定した N・h の上の言明です。無限体積の極限も、そこでの鏡映正値性も、この章にはありません。
- **連続極限なし**。格子間隔は固定です。連続極限、質量の繰り込み（m をどう調整するか）については何も言いません。
- **カイラル対称性なし**。Wilson の項はカイラル対称性を陽に破ります。その回復や、フェルミオンの倍化の扱いについては何も言いません。
- **対称性は生成元ごと**。立方群・超立方群としての閉包（生成元の積で群の全ての元が出ること）は言明の外です。時間を含む回転は等方の格子 $N = 2h$ だけです。ゲージ不変は大域の定数の g についてで、局所のゲージ変換での $\det D$ の不変は宣言に入っていません。
- **鏡映は格子点の面だけ**。リンクの真ん中の面の鏡映正値性（フェルミオンつき）は Lean にありません。$m \leq -1$ は範囲の外です。
- **ギャップなし**。フェルミオンつきの測度の転送の作用素の質量ギャップは、この章の定理に入っていません。
- **新しい結果ではない**。Osterwalder–Seiler の型の鏡映正値性と、格子の対称性の既知の事実を、具体の作用素の上で Lean に書いたものです。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
典 Wilson–フェルミオンの重みの鏡映正値性 (4)（`WilsonGauge.site_reflection_positive_wilson_full`、$m > -1$、全ての β）	$m \leq -1$、リンクの真ん中の面の鏡映、無限体積
典 分配関数が正 (5)（`WilsonGauge.partition_pos_wilson_full`、全ての β・m・j）	Z の大きさの評価
初 行列式の大域ゲージ不変 (6)（`GaugeDet.physDirac_det_conj`、無条件）	局所のゲージ変換
初 格子の対称性の生成元での測度の不変（`CubicSym.wfProb_lattice_generators`）	群としての閉包、時間を含む回転（非等方の格子）、ブロックの水準への持ち上げ
初 等方の格子での超立方の生成元での不変（`CubicSym.wfProb_hypercubic_generators`、$N = 2h$）	群としての閉包、ブロックの水準への持ち上げ
初 時間の鏡映での行列式の不変（`CubicSym.physDirac_det_trefl`）	この反転についての鏡映正値性

言えている	言えていない
—	連続極限、カイラル対称性、質量の繰り込み、フェルミオンつきの質量ギャップ

出典と再現

もの	種別	出典・道具
格子ゲージ理論（フェルミオンを含む）の反射正値性と転送行列	典	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（要旨）。5-03
Wilson の格子の定式化	典	K. G. Wilson, Phys. Rev. D 10 (1974) 2445（要旨）。Wilson の項を持つ Dirac の作用素の原典は書誌のみ・未確認
本章の定理と部品	Lean	Lean 4 で機械検査（核の再検査で全て通過、公理は標準の三つ）。宣言の一覧は 20-07、A-04
作用素の式 (2) と Lean の定義の一致、生成元の働きの幾何	読	本書の検討の数値の記録（小さな格子で、Lean の定義を写した作用素と教科書の式の差を倍精度で比べた。差は丸めの大きさ）

この章で使った語 — Wilson–Dirac の作用素、Wilson の項、反周期の境界条件、格子点の面の鏡映、鏡映正値性、分配関数、大域のゲージ変換、超立方群、生成元、カイラル対称性。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：20-06 強結合の面積則と、渦の自由エネルギーの上界 — 強結合の窓の中の、Wilson ループと捩れた分配関数の評価です。

強結合の面積則と、渦の自由エネルギーの上界

この章は本書の検討です。

この章で分かること — 結合 $\beta \geq 0$ が小さい（強結合の）窓で、四次元のトーラス $(\mathbb{Z}/N)^4$ の SU(2) Wilson 測度について、二つの評価が Lean で機械検査されていることを読みます。(i) **面積則**：辺 $R \cdot T$ の長方形の縁に沿う Wilson ループの期待値が $\leq C\,(Kq)^{\text{面積}}$（$Kq < 1$、K は 441 か 4096、$q = 1 - e^{-2\beta}$）で、定数に $N \cdot R \cdot T$ が入りません。任意の角と向きの長方形で成り立ち、標準の長方形については無限体積の極限の測度でも成り立ちます。(ii) **渦の自由エネルギーの上界**：中心 -1 の 't Hooft の捩れを入れた分配関数 Z_1 と捩れ無しの Z_0 の差が、面積あたり N に依らない率で小さいこと。前の因子 N^2 は残ります。証明は、正の混合・中心の符号の反転で消える項・支配の補題・極小の面の連結性と面積の下界と数え上げ、の四つの部品でできています。

前提となる章 — 19-01 Wilson の測度・面とホロノミー・Haar の積、19-02 捩れの符号・渦の比、20-03 無限体積の極限。導入は 5-02（強結合と面積則）と 25-01（捩れたトーラスと流束）。

先に言うこと — 格子間隔は 1 に固定で、強結合の窓の中だけの言明です。窓は定数の版によって $\beta < 1.22 \cdot 10^{-4}$ または $\beta < 1.135 \cdot 10^{-3}$ です[読]。連続極限・弱結合（$\beta \to \infty$）・帯については何も言いません。公開された構成の評価書が開いた問いに挙げる「連続の Wilson ループと面積則」[評]とは別の、格子の上の言明です。定数は粗く、率は真の値よりずっと小さい側です。どれも Osterwalder–Seiler（面積則）と 't Hooft・Münster（渦の自由エネルギー）の型の既知の結果の形式化です[典]。

この章の順序

1. 設定 — Wilson ループと捩れた分配関数 — 長方形の縁の閉じた道、q と窓
2. 言明 (i) — 有限体積の面積則 — 五つの版（表 1）
3. 言明 (ii) — 無限体積の極限の測度で — 列全体の極限と、全ての極限点
4. 言明 (iii) — 渦の自由エネルギーの上界 — 面積あたりの率が横の大きさに依らない
5. 証明の道筋 — 四つの部品と一本の和 — 全体の流れ

6. 証明の部品 (1) — 正の混合と支配の補題 — 正値の要らない一段の不等式
7. 証明の部品 (2) — 中心の符号の反転で消える項 — 張る集合、よい集合と悪い集合
8. 証明の部品 (3) — 極小の面の連結性・面積の下界・数え上げ — 根・$R\min(T, N-T)$・N^2・$\Delta^{2(n-1)}$
9. 寄り道：行の余鎖の偶奇から面積の下界へ — 列ごとの差分の式
10. 数で見る — 窓、自明でない範囲、薄い渦の床との比べ
11. 言えていること・言えていないこと

札 — 源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による（くわしくは 6-00 の「札」）。初・典・機・読・仮・Lean は本全体の札で、読 は本書の数値の読み、Lean は本書の Lean の定理です。Lean の宣言の名は札の外に、範囲と同じ行に書きます。

01

設定 — Wilson ループと捩れた分配関数

導入は 5-02 です。強結合（β が小さい）では、Wilson ループの期待値は、ループを縁とする面を面一枚ずつ敷き詰める項から始まり、面積について指数的に小さくなります。これが強結合の面積則で、格子ゲージ理論の閉じ込めの描像の出発点です典。この章は、その評価を有限のトーラスの SU(2) Wilson 測度の定理として読みます。

測度。格子は $(\mathbb{Z}/N)^4$、リンクの変数 $U_\ell \in SU(2)$（単位の四元数）、面のホロノミー U_p、その実部 $s_p := \operatorname{Re} U_p = \frac{1}{2}\operatorname{tr} U_p \in [-1,1]$ は 19-01 のとおりです。面は向きを区別しない $i<j$ の $6N^4$ 枚です。Wilson 測度は Haar の確率測度の積に密度 $e^{\beta\sum_p s_p}$ を掛けたもので、期待値は

$$\langle F\rangle_{N,\beta} := \frac{\int F\, d\mu^{\mathrm{W}}}{\int 1\, d\mu^{\mathrm{W}}}, \qquad d\mu^{\mathrm{W}} = e^{\beta\sum_p s_p}\prod_\ell dU_\ell \tag{1}$$

です（Lean の `wilsonMeasure N β` とその全質量の比）。β は標準の SU(2) の $\beta = 4/g^2$ と同じ規約です。

長方形の縁。二つの向き $i\neq j$、角 a、辺 R,T（$1\le R,T<N$）を決め、a から i 向きに R 歩、j 向きに T 歩進み、i 向きに R 歩、j 向きに T 歩戻る閉じた道を C とします。$W(C)$ はこの道に沿うリンクの順序つきの積（逆にたどるリンクは共役）で、$\operatorname{Re} W(C) = \frac{1}{2}\operatorname{tr} W(C)$

はゲージ不変です。標準の長方形は角が原点で、向き 1・2 の張る面の中にあります（Lean の添字では 0・1）。この章は第 21・22 部と同じく向きを 1〜4 で番号づけます。20-01〜20-05 は Lean の添字のまま向きを 0〜3 で書いていて、そこでの向き 0・1 がこの章の向き 1・2 です。Lean：`AreaLaw.rectWord`（標準）・`AreaLaw.rectWordG`（一般）、積は `wordHol`。$R = T = 1$ では一枚の面の縁に字のまま一致します（`AreaLaw.rectWord_one_one`）。$R, T < N$ なので道はトーラスを巻きません。

捩れた分配関数。面の集合 D の上で s_p の符号を反転した重み $e^{\beta \sum_p \eta_p s_p}$（$\eta_p = -1$（$p \in D$）、$\eta_p = 1$（他））の全質量を Z_D と書きます。$(\mathbb{Z}/N)^4$ では D を「向き 1・2 の面で $x_1 = x_2 = 0$ のもの」（x_3, x_4 は任意、N^2 枚）に取り、$Z_0 := Z_\varnothing$（通常の分配関数）、$Z_1 := Z_D$ とします。これは中心 -1 の 't Hooft の捩れを一つ入れた分配関数です（19-02 の捩れと同じ面の置き方）。Lean：`VortexStrong.Ztw`、`VortexStrong.twist`。

窓。この章を通して

$$q := 1 - e^{-2\beta} \qquad (\beta \geq 0) \tag{2}$$

と置きます。$q \approx 2\beta$ です。窓は $Kq < 1$ の形で、$K = 4096$ では $\beta < 1.22085 \cdot 10^{-4}$、$K = 441$ では $\beta < 1.13507 \cdot 10^{-3}$ です読 。

02

言明 (i) — 有限体積の面積則

言明（強結合の面積則、有限体積）

$N \geq 2$、$\beta \geq 0$ で $4096q < 1$ とします。$1 \leq R, T < N$ の標準の長方形の縁 C について

$$\left|\langle \operatorname{Re} W(C) \rangle_{N,\beta}\right| \;\leq\; 16\, \frac{(4096\, q)^{R \cdot \min(T,\, N-T)}}{4096\, (1 - 4096\, q)}. \tag{3}$$

Lean Osterwalder–Seiler の強結合の面積則の型の形式化。Lean：`AreaLaw.area_law_wilson`（仮定は $\beta \geq 0$、$1 \leq R, T < N$、$4096q < 1$ だけ。定数 16・4096 は N・R・T に依らない）。

$2T \leq N$ なら $\min(T, N-T) = T$ で、指数は面積 RT です（`AreaLaw.area_law_wilson_area`）。同じ形の版が四つあります（表 1）。

版	長方形	窓	右辺	Lean
基本	標準	$4096q < 1$	$16\,(4096q)^{R\min(T,N-T)}/(4096(1-4096q))$	`AreaLaw.area_law_wilson`
位置と向き	任意の角 a、任意の $i \neq j$	$4096q < 1$	同じ	`AreaLaw.area_law_wilson_general`
定数を締めた	標準	$441q < 1$	$6\,(441q)^{R\min(T,N-T)}/(441(1-441q))$	`AreaLaw.area_law_wilson_sharp`
締めた・位置と向き	任意の角・向き	$441q < 1$	同じ	`AreaLaw.area_law_wilson_general_s`
指数の最大	標準	$441q < 1$	$6\,(441q)^{\max(R\min(T,N-T),\,T\min(R,N-R))}/(441(1-441q))$	`AreaLaw.area_law_wilson_max_sharp`

表 1　面積則の五つの版。$\langle\cdot\rangle$ は (1) の正規化した期待値。全て $\beta \geq 0$、$1 \leq R, T < N$。

意味。Wilson ループの期待値は、ループが囲む面積について、少なくとも率 $-\ln(441q)$ で指数的に小さい。率と前の因子は格子の大きさ N にも、長方形の大きさにも依りません。位置と向きの版は、Wilson 測度が並進と向きの入れ替えで変わらないことからの系です（`AreaLaw.wilson_cfgShift_invariant`・`expect_perm`）。

指数について。$R \leq N/2$ か $T \leq N/2$ なら、最大の版の指数は面積 RT です。R と T がともに $N/2$ を越えるときは、指数は $\max(R(N-T), T(N-R))$ で RT より小さくなります。このとき向き 1・2 の平面の全体から長方形を除いた $N^2 - RT$ 枚の面も、mod 2 で同じ縁を持つので、真に必要な面の枚数も RT より小さいことがあります（二次元と三次元の $N = 4$、$R = T = 3$ の格子で 7 枚[読]。整数計画の記録。四次元の 4^4 では確かめていません）。定理の指数はその枚数を越えず、差は残ります。$\min(T, N-T)$ の $N - T$ は証明の道具（§ 08 の寄り道）から来る弱さで、$R \times (N-T)$ の面が縁 C を張るという意味ではありません。

03

言明 (ii) — 無限体積の極限の測度で

無限体積の配位の空間、周期の持ち上げの列 μ_n（トーラス $(\mathbb{Z}/2(n+1))^4$ の Wilson 測度を $\mathbb{Z}^4$ へ持ち上げたもの、Lean の `liftProb β n`）と弱収束は 20-03 のとおりです。$\mathbb{Z}^4$ の標準の長方形の縁を $C_{R,T}$ と書きます（Lean の `zRectWord`）。

言明（強結合の面積則、無限体積）

$\beta > 0$、$18 \tanh \beta < 1$、$4096q < 1$ とします。このとき確率測度 ν_β が在って、列 μ_n の全体が ν_β に弱収束し、全ての $R, T \geq 1$ で

$$\left| \int \operatorname{Re} W(C_{R,T}) \, d\nu_\beta \right| \;\leq\; 16 \, \frac{(4096\,q)^{RT}}{4096\,(1 - 4096\,q)}. \tag{4}$$

Lean 強結合の面積則の型の形式化。Lean：`AreaLaw.area_law_infvol`（ν_β の存在は 20-03・20-04 の強結合の無限体積の定理 `InfMain2.wilson_infvol_main2` から取る）。

二つの窓の交わりは $0 < \beta < 1.22085 \cdot 10^{-4}$ で、面積則の窓が Dobrushin の窓（$\beta < 0.0556$）にすっかり入ります読。

全ての極限点で。極限の存在を使わない形もあります。$\beta \geq 0$、$4096q < 1$ で、狭義に増える φ について $\mu_{\varphi(n)} \to \nu$（弱収束）なら、ν について (4) が成り立ちます（`AreaLaw.area_law_limit_sub`。$\varphi = \mathrm{id}$ が列全体の場合 `AreaLaw.area_law_limit`）。証明は、$n \geq R + T$ で有限体積の (3) の $2T \leq N$ の版を使い、有界連続な関数 $\operatorname{Re} W(C_{R,T})$ の積分の極限で不等式を保つだけです。

無限体積の版は、定数 16・4096 と標準の長方形（原点、向き 1・2）だけで言われています。締めた定数・任意の角と向きの版は有限体積だけです。

04

言明 (iii) — 渦の自由エネルギーの上界

言明（強結合の渦の床、等方のトーラス）

$N \geq 1$、$\beta \geq 0$、$4096q < 1$ とします。$(\mathbb{Z}/N)^4$ の Z_0、Z_1（§01）について

$$|Z_0 - Z_1| \;\leq\; N^2 \, \frac{(4096\,q)^{N^2}}{4096\,(1 - 4096\,q)} \, (Z_0 + Z_1). \tag{5}$$

Lean 't Hooft の渦の自由エネルギーの強結合の評価（Münster ほか）の型の形式化。Lean：`VortexStrong.vortex_floor`（仮定は $\beta \geq 0$、$4096q < 1$ だけ）。定数を締めた版 `VortexStrong.vortex_floor_sharp`（$441q < 1$ で 4096 を 441 に）、分母を Wilson 測度の全質量で書いた 441 の版 `VortexStrong.vortex_floor_wilson`（$441q < 1$）。

右辺の係数を ε とし $\varepsilon < 1$ なら $|Z_0 - Z_1| \le \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} Z_0$ です（`VortexStrong.vortex_floor_rel`。算術の書き換え）。

第 21 部の格子（横 N、縦 M のトーラス、19-02）でも同じ形があり、渦の比 θ_M（19-02）と同じ量を扱います。

言明（強結合の渦の床、横 N・縦 M のトーラス）

$N, M \ge 1$、$\beta \ge 0$、$441q < 1$、背景の捩れ $n_{12} \in \{0,1\}$ は任意とします。$Z_k := Z_{N,M}(\beta; n_{12}, k)$（$k = 0, 1$）について

$$|Z_0 - Z_1| \;\le\; N^2 \,\frac{(441\,q)^{M^2}}{441\,(1 - 441\,q)}\,(Z_0 + Z_1). \tag{6}$$

Lean 同じ型の形式化。Lean：`VortexStrongMN.vortex_floor_MN_sharp`（定数 9216 の版は `VortexStrongMN.vortex_floor_MN`）。

$|Z_0 - Z_1|/(Z_0 + Z_1) = |\theta_M^{(n_{12})}|$ なので、(6) は

$$\left|\theta_M^{(n_{12})}\right| \;\le\; N^2 \,\frac{(441\,q)^{M^2}}{441\,(1 - 441\,q)} \tag{7}$$

と同じです初。

意味。渦を一本入れても分配関数はほとんど変わらず、その差は縦の平面の面積 M^2 について指数的に小さい。**面積あたりの率 $-\ln(441q)$ は横の大きさ N にも縦の大きさ M にも依りません**。前の因子 N^2（捩れの面の数）は残ります。薄い渦の床（21-02）$|\theta_M| \le \tanh(N^2|\beta|)^{M^2}$ は全ての β で成り立ちますが、面積あたりの率 $-\ln\tanh(N^2|\beta|)$ は $N \to \infty$ で 0 に近づきます。(7) は強結合の窓の中だけですが、率が N に依らない点が違います（§ 09 の比べ）。

この節の言明は差 $|Z_0 - Z_1|$ の上界で、$Z_1 \le Z_0$ の向き（$\theta_M \ge 0$）は言いません。その向きは縦 M が偶数のときの別の定理です（21-06）。

05

証明の道筋 — 四つの部品と一本の和

面積則 (3) と渦の床 (5)・(6) は同じ筋で示されています。面積則で書きます。

1. **正の混合（§ 06）**。面の重みを $e^{\beta s_p} = e^{-\beta}(1 + \sigma_p)$、$0 \le \sigma_p \le t := e^{2\beta} - 1$ と書き、$\prod_p (1 + \sigma_p)$ を面の集合 X についての和 $\sum_X \prod_{p \in X} \sigma_p$ に展開します。分子と分母が、全ての X にわ

たる和 $\sum_X \int W \prod_X \sigma$、$\sum_X Z_X$（$Z_X := \int \prod_{p\in X} \sigma_p \, dU \ge 0$）になります。

2. **消える項（§07）**。リンクの集合の上で $U_\ell \mapsto -U_\ell$ と符号を反転する変換は Haar の積を保ちます。X の面の縁が $\bmod 2$ で C を張らない項は、この変換で符号が逆になり、0 です。
3. **支配（§06）**。$Z_{X\cup\{p\}} \le t\, Z_X$ から、面の集合 Y を含む X の重みの和は $q^{|Y|}\sum_X Z_X$ 以下です。
4. **一本の和**。$|W| \le 1$ なので、残る項は「C を張る極小の面の集合 Y」ごとに $q^{|Y|}$ で押さえられ、

$$\bigl|\langle \operatorname{Re} W(C)\rangle\bigr| \;\le\; \sum_{Y:\,C\text{ を張る極小の集合}} q^{|Y|} \tag{8}$$

です。全ての $\beta \ge 0$・全ての N で成り立ちます（Lean `AreaLaw.abs_wordExpect_le`。極小の集合の族 `minSpanC` は定義の中に具体に置かれ、仮定ではありません）。

5. **極小の面の幾何（§08）**。極小の Y はリンクを共有する意味で連結で、決めた一本のリンクに触れる面を含み、$|Y| \ge R\min(T, N-T)$ です。根に触れる大きさ n の連結な集合は $16\cdot 64^{2(n-1)}$ 個以下なので、(8) の右辺は $16\sum_{n\ge A} 4096^{n-1} q^n$（$A = R\min(T,N-T)$）以下になり、等比級数の和で (3) です。

渦の床では、段 2 を「よい集合では捩れた重みと捩れ無しの重みが一致する」に、段 4 を「悪い集合の和」に、段 5 の面積の下界を「悪い集合は N^2 枚以上」に置き換えます（§07・§08）。

この筋はクラスター展開の多体の和を使いません。使う不等式は、各点の $0 \le \sigma_p \le t$ と、有限集合の上の帰納だけです。強結合の相関の減衰の「二つの写しと面の鎖」（20-02 §06）と同じ系統の勘定です。

06

証明の部品 (1) — 正の混合と支配の補題

正の混合。$s \in [-1,1]$ について

$$e^{\beta s} = e^{-\beta}\bigl(1+\sigma\bigr), \qquad \sigma := e^{\beta(s+1)} - 1 \in [0,\, e^{2\beta}-1] \tag{9}$$

です（$\beta \ge 0$）。Lean：`AreaLaw.exp_eq_mix`・`mixVar_mem`。有限集合の上の積は $\prod_p (1+a_p) = \sum_X \prod_{p\in X} a_p$（`AreaLaw.prod_one_add_univ`）で、積分の中で展開する形は `AreaLaw.integral_mul_prod_one_add` です。展開した各項の σ が 0 以上であることが、後の支配の補題で重みを「足すほど増える」量として扱う所の元です。

一段の不等式。$Z_X := \int \prod_{p\in X}\sigma_p \prod_\ell dU_\ell$ について、$\sigma_p \le t$ を各点で使えば

$$Z_{X\cup\{p\}} \;\le\; t\, Z_X \qquad (p \notin X) \tag{10}$$

です（`AreaLaw.ZX_insert_le`）。

支配の補題（Lean：`AreaLaw.sum_superset_le`）。有限集合 P の部分集合の上の実数値の関数 Z と $t \ge 0$ が、全ての S と $p \notin S$ で $Z(S\cup\{p\}) \le t\, Z(S)$ を満たすなら、全ての Y で

$$\sum_{X\supseteq Y} Z_X \;\le\; \Big(\frac{t}{1+t}\Big)^{|Y|} \sum_X Z_X \tag{11}$$

です。$t/(1+t) = 1 - e^{-2\beta} = q$ です（`AreaLaw.q_eq`）。

証明の芯は一行です。$a_Y := \sum_{X\supseteq Y} Z_X$ とし、$p \notin Y$ について a_Y を「p を含む X」と「含まない X」に分けると $a_Y = a_{Y\cup\{p\}} + b$（b は含まない側）で、(10) を項ごとに使うと $a_{Y\cup\{p\}} \le t\, b$ です。合わせて $(1+t)\, a_{Y\cup\{p\}} \le t\, a_Y$、つまり $a_{Y\cup\{p\}} \le q\, a_Y$。$Y$ の大きさについての帰納で (11) です。$Z \ge 0$ **は使いません**。分割と一段の不等式だけで出ます。

07

証明の部品 (2) — 中心の符号の反転で消える項

反転。リンクの上の $\mathbb{F}_2$ の値の関数（余鎖）T について、$T_\ell = 1$ のリンクで $U_\ell \mapsto -U_\ell$ とする変換を flip_T とします。-1 は SU(2) の中心で、$-U$ の分布は U の分布と同じなので、flip_T は Haar の積を保つ可測な対合です（`AreaLaw.flipZ_preserving`）。道 w に沿う積は

$$W(\mathrm{flip}_T\, U) = (-1)^{\langle T,\, \partial w\rangle}\, W(U) \tag{12}$$

と変わります。∂w は道 w が各リンクを通る回数の mod 2 で、$\langle T, \partial w\rangle$ はその和です（`AreaLaw.wordHol_flip`。格子の大きさの条件は要りません）。面のホロノミーは面の縁を一周する道の積なので（`hol_eq_wordHol`）、s_p も $(-1)^{\langle T,\partial p\rangle}$ 倍になります。

消える項（Lean：`AreaLaw.integral_word_mul_prod_eq_zero_of_not_mem_span`）。∂C が $\{\partial p : p \in X\}$ の $\mathbb{F}_2$ の上の張る空間に入らなければ、任意の関数 g について

$$\int \mathrm{Re}\, W(C) \prod_{p\in X} g(s_p) \prod_\ell dU_\ell \;=\; 0. \tag{13}$$

$\mathbb{F}_2$ の線形代数の双対（`AreaLaw.not_mem_span_iff_exists_sep`）から、張る空間に入らないことは「X の全ての面で $\langle T, \partial p\rangle = 0$、$C$ で $\langle T, \partial C\rangle = 1$ となる T が在る」ことと同値です。

その T で反転すると、被積分関数の $\prod g(s_p)$ は変わらず W だけが符号を変えるので、積分は自分の符号を逆にしたものに等しく、0 です。g は任意で、可測性も要りません。

「X が C の面を含む」ではなく「張る空間に入る」が正しい判定です。たとえば周期のトーラスでは、一枚の面の縁は、その面を除いた残りの面全体の縁の和に $\bmod 2$ で等しくなります。四元数の群 Q_8、二次元の 2×2 のトーラスの全ての配位の和では、張らない 7 通りの X の項はちょうど 0、張る 9 通りは 0 でなく、面 0 を含まない $\{1,2,3\}$ も 0 でありませんでした読。

渦の床の側：よい集合と悪い集合。捩れた重みは、面ごとの符号のマスク $m : \text{面} \to \mathbb{F}_2$（$D$ の上で 1）を使って $e^{\beta\sum_p (-1)^{m_p} s_p}$ と書けます。反転 flip_T はマスクを $m \mapsto m + \delta T$（δT は T の余境界、$(\delta T)_p = \langle T, \partial p\rangle$）に変えます（`VortexStrong.ZM_gauge`）。面の集合 X の上でマスクが余境界に等しい、つまり $m_p = \langle T, \partial p\rangle$（$p \in X$）となる T が在るとき、X を**よい**集合と呼びます（Lean `VortexStrong.Good`）。よい集合では反転一つで捩れた項と捩れ無しの項が一致し（`VortexStrong.ZM_good`）、$Z_0 - Z_1$ には**悪い**集合の項だけが残ります。両方の重みに支配の補題を使って

$$|Z_0 - Z_1| \;\le\; \Bigg(\sum_{Y:\ \text{極小の悪い集合}} q^{|Y|}\Bigg)(Z_0 + Z_1) \tag{14}$$

です（`VortexStrong.abs_Z_sub_le`）。渦の床では双対は使いません。よい・悪いの定義そのものが余境界の存在で書かれているからです。

08

証明の部品 (3) — 極小の面の連結性・面積の下界・数え上げ

連結性（面積則）。二枚の面がリンクを共有するとき隣と呼びます。C を張る極小の集合 Y を二つに分け、その間に隣の対が無いとすると、片方の縁の和は閉じていて（$\partial\partial = 0$、`AreaLaw.div_plaqBd`）、台が長方形の縁に入ります。長方形の縁は単純な閉路なので、そういう閉じた鎖は 0 か ∂C 自身だけです（`AreaLaw.rect_closed_cases`、$1 \le R, T < N$）。どちらでも Y の極小性に反するので、極小の Y は連結です（`AreaLaw.minSpan_rect_conn`）。また Y は長方形の決めた一本のリンクに触れる面を含みます（根）。

連結性（渦の床）。極小の悪い集合が隣を共有しない二つの部分に分かれるなら、両側の余鎖を「一方の台の上」と「その外」で貼り合わせて全体の余鎖が作れ、全体がよくなって矛盾します（`VortexStrong.minBad_conn`）。

面積の下界（面積則）。C を張る面の集合は $R\min(T, N-T)$ 枚以上です（`AreaLaw.card_ge_of_spans_rect`）。証明は寄り道に置きます。向き 1 と 2 を入れ替えた同

じ議論で $T\min(R, N-R)$ も下界で（`AreaLaw.wordBd_swap_rect`）、その最大が表 1 の最後の版です。

面積の下界（渦の床）。 D を平行移動した $D_{a,b}$（向き 1・2 の面で $x_1 = a$、$x_2 = b$）のマスクと D のマスクは、行と列の余鎖の余境界の分だけしか違いません（`VortexStrong.good_twist_iff`）。だから悪い集合は N^2 個の互いに素な $D_{a,b}$ の全てと交わり、N^2 枚以上です（`VortexStrong.card_bad_ge`）。下界は達せられます：向き 1・2 の平面 $x_3 = x_4 = 0$（N^2 枚）は悪い集合です（`VortexStrong.plane_bad`）。悪い集合は D の面を含むので、根は D の N^2 枚です。これが (5) の前の因子 N^2 です。

数え上げ。 対称な隣の関係で各点の隣が Δ 個以下なら、決めた根を含む大きさ n の連結な集合は $\Delta^{2(n-1)}$ 個以下です（`AreaLaw.card_conn_le`）。閉じた歩道に「隣へ行って戻る」迂回を差し込む帰納で、全域木を作らずに出ます。粗い数えでは隣は 64 個以下、根は 16 個以下で、$64^2 = 4096$ です。締めた数えでは、一本のリンクを含む面は 6 枚、一枚の面とリンクを共有する面は自分を含めて 21 枚以下（$1 + 4\cdot 5$）で、$21^2 = 441$、根は 6 です（`AreaLaw.card_rootP_le`・`card_nbQ_le`）。等比級数

$$\sum_{n \ge A} c_0\, \Delta^{2(n-1)} q^n = \frac{c_0}{\Delta^2} \cdot \frac{(\Delta^2 q)^A}{1 - \Delta^2 q} \qquad (\Delta^2 q < 1) \tag{15}$$

で (3)・(5)・(6) の右辺になります（c_0 は根の数）。

寄り道：行の余鎖の偶奇から面積の下界へ

飛ばしてよい。標準の長方形（向き 1・2 の面）で、列 $0 \le a < R$ と行 $y \in \mathbb{Z}/N$ について、「向き 1 のリンクのうち、向き 1・2 の座標が (a, y) のもの」で 1 をとる余鎖 $\rho_{a,y}$ を考えます（他の座標は全て）。面の縁との対は $\langle \rho_{a,y}, \partial p \rangle = [p \in Q(a,y)] + [p \in Q(a,y-1)]$（$Q(a,y)$ は座標 (a,y) の向き 1・2 の面の類。向き 1・3 や 1・4 の面は二回当たって消えます）、長方形の縁との対は $\langle \rho_{a,y}, \partial C \rangle = [y = 0] + [y = T]$ です。X が C を張るなら、$n(y)$ を $Q(a,y)$ に入る X の面の数として、$\bmod 2$ で $n(y) + n(y-1) = [y = 0] + [y = T]$ が全ての y で成り立ちます。この差分の式を解くと、n は $[0,T)$ の全てで奇数か、$[T,N)$ の全てで奇数です。どちらでも列 a に $\min(T, N-T)$ 枚以上の面が要り、R 列で $R\min(T, N-T)$ 枚以上です[初]。$[T,N)$ の側の解は偶奇の式の解であって、その側の面が縁 C を張ることは意味しません。

09 数で見る

量	値	札
窓 $4096q < 1$	$\beta < 1.22085 \cdot 10^{-4}$	読

量	値	札
窓 $441q < 1$	$\beta < 1.13507 \cdot 10^{-3}$	読
無限体積の版の窓（$18 \tanh \beta < 1$ との交わり）	$0 < \beta < 1.22085 \cdot 10^{-4}$	読
(3) が全ての面積 ≥ 1 で自明でない（右辺 < 1）範囲	$\beta < 1.2161 \cdot 10^{-4}$	読
(5) の係数が全ての N で < 1 の範囲（4096 の版／441 の版）	$\beta < 1.2093 \cdot 10^{-4}$／$\beta < 1.1025 \cdot 10^{-3}$	読
面積あたりの率 $-\ln(441q)$：$\beta = 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}$	`4.73`、`2.43`、`0.127`	読
小さい β の主要項の率 $-\ln(\beta/4)$：同じ β	`12.9`、`10.6`、`8.29`	読

表 2　窓と率。浮動小数の計算です。主要項の率は、一枚の面の平均 $I_2(\beta)/I_1(\beta) = \beta/4 + O(\beta^3)$ から読んだ目安で、評価ではありません。

上界の率は、主要項の率よりずっと小さい側です。定数 441（あるいは 4096）は連結な集合の数えの粗さから来ていて、窓の幅もそれで決まります。

薄い渦の床との比べ読 。$N = M$ で、(7) と薄い渦の床 $\tanh(N^2\beta)^{N^2}$ の上界の常用対数を比べると、$\beta = 10^{-5}$ と 10^{-4} では $N \geq 30$、$\beta = 10^{-3}$ では $N \geq 38$ で (7) のほうが小さく（強く）なります。たとえば $\beta = 10^{-5}$、$N = 100$ で薄い床 $-1.00 \cdot 10^4$ 対 (7) $-2.05 \cdot 10^4$、$N = 10$ では薄い床 -300 対 (7) -206 です。薄い床は全ての β で言えるのに対し、(7) は窓の中だけです。

小さい格子の確かめ読 。悪い集合の最小の大きさを、Lean の定義を写した別の台本の総当たりと整数計画で見ました。三次元 2^3 で 4、四次元 2^4 で 4、3^4 で 9（いずれも N^2）、横 N・縦 M の格子 $(N, M) = (2,3)$・$(3,2)$・$(2,4)$ で 9・4・16（$= M^2$）で、Lean の下界と同じ値でした。

10 言えていること・言えていないこと

- **格子間隔は 1 に固定**。有限のトーラスと、その無限体積の極限の測度の言明です。連続極限・格子間隔を 0 にする列については何も言いません。
- **強結合の窓だけ**。$\beta < 1.135 \cdot 10^{-3}$（締めた定数）、無限体積と渦の床の基本の版では $\beta < 1.22 \cdot 10^{-4}$ です。窓の外については何も言いません（面積則が破れるとも言いません）。物理で興味のある β（2〜3 の帯）からは遠い端です。
- **長方形だけ**。一般の閉じた道のループは扱いません。無限体積の版は標準の長方形と粗い定数だけです。
- **指数の差**。R・T がともに $N/2$ を越えるとき、指数は真に必要な面の枚数より小さいままです。

- **率は粗い**。面積あたりの率は小さい β の主要項の率よりずっと小さく、張力の値の評価ではありません。下からの評価（Wilson ループの下界、張力の上界）は言いません。
- **渦の床の前の因子**。(5)・(6) の率は N・M に依りませんが、前の因子 N^2 は残ります。$Z_1 \le Z_0$ の向きは言いません。
- **帯にも質量ギャップにも届かない**。強結合の窓の中の質量ギャップは 20-04 の別の定理です。弱結合へ続く帯の言明（19-07）は、この章の定理からは出ません。
- **評価書の開いた問いとは別**。公開された構成の評価書が挙げる問い「Wilson ループの観測量を作り、局所の観測量と結び、面積則を示す」評 は連続の理論の問いです。この章は格子の上の強結合の言明で、その問いに答えるものではありません。
- **新しい結果ではありません**。強結合の面積則（Osterwalder–Seiler）と渦の自由エネルギーの強結合の評価（'t Hooft、Münster ほか）の型の、SU(2) Wilson 測度での形式化です。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
Lean 有限体積の面積則 (3)：$\beta \ge 0$、$4096q < 1$、$1 \le R, T < N$、定数に N・R・T なし。任意の角と向き、定数 6・441 の版、指数 $\max(R\min(T, N-T), T\min(R, N-R))$ の版。Lean `AreaLaw.area_law_wilson`・`area_law_wilson_general`・`area_law_wilson_sharp`・`area_law_wilson_general_sharp`・`area_law_wilson_max_sharp`	窓の外。一般のループ。$R, T > N/2$ の両方での真の指数。Wilson ループの下界
Lean 無限体積の面積則 (4)：$\beta > 0$、$18\tanh\beta < 1$、$4096q < 1$、列全体の極限 ν_β。全ての極限点でも（$\beta \ge 0$、$4096q < 1$）。Lean `AreaLaw.area_law_infvol`・`area_law_limit`・`area_law_limit_sub`	締めた定数・任意の角と向きの無限体積の版
Lean 渦の自由エネルギーの上界 (5)：$(\mathbb{Z}/N)^4$、$\beta \ge 0$、$4096q < 1$（締めた版 $441q < 1$）、面積あたりの率が N に依らない。Lean `VortexStrong.vortex_floor`・`vortex_floor_sharp`・`vortex_floor_rel`・`vortex_floor_wilson`（441 の版）	前の因子 N^2 の除去。$Z_1 \le Z_0$ の向き。窓の外
Lean 横 N・縦 M の版 (6)：全ての背景 n_{12}。締めた版 `vortex_floor_MN_sharp` は $441q < 1$（441 の窓）、締めない版 `vortex_floor_MN` は 9216q < 1（9216 の窓）。Lean `VortexStrongMN.vortex_floor_MN_sharp`・`vortex_floor_MN`	帯の言明。連続極限
初 (7)：(6) を渦の比で書いた形。寄り道の偶奇の議論	—
読 窓・自明でない範囲・率（表 2）、薄い渦の床との比べ（境目 $N = 30$・38）、小さい格子の最小の集合	上界・下界の証明ではない。SU(2) 四次元の真の率

出典と再現

もの	種別	出典・道具
強結合の面積則と格子ゲージ理論の土台	典	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440。K. G. Wilson, Phys. Rev. D 10 (1974) 2445。導入は 5-02
捩れた境界条件と渦の自由エネルギー	典	G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141。G. Münster, Nucl. Phys. B 180 (1981) 23–60（書誌のみ、本文は未確認）。導入は 25-01
公開された構成の開いた問い（Wilson ループと面積則）	評	評価書（`yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`、2026-11-10）§8 の 4。読み方は 16-02
(3) と表 1 の版、部品（混合・支配・反転・双対・連結・下界・数え上げ・並進と向き）	Lean	`AreaLaw.area_law_wilson`・`area_law_wilson_area`・`area_law_wilson_general`・`area_law_wilson_sharp`・`area_law_wilson_general_sharp`・`area_law_wilson_max_sharp`・`abs_wordExpect_le`・`exp_eq_mix`・`mixVar_mem`・`prod_one_add_univ`・`ZX_insert_le`・`sum_superset_le`・`q_eq`・`flipZ_preserving`・`wordHol_flip`・`not_mem_span_iff_exists_sep`・`integral_word_mul_prod_eq_zero_of_not_mem_span`・`rect_closed_cases`・`minSpan_rect_conn`・`card_ge_of_spans_rect`・`wordBd_swap_rect`・`card_conn_le`・`card_rootP_le`・`card_nbQ_le`・`wilson_cfgShift_invariant`・`rectWord_one_one`。sorry 0、公理は標準の三つ、核の再検査で確認、言明は源の字句で確かめた
(4)	Lean	`AreaLaw.area_law_infvol`・`area_law_limit`・`area_law_limit_sub`、極限の存在は `InfMain2.wilson_infvol_main2`（20-03）
(5)・(6) と部品（よい集合・悪い集合・貼り合わせ・平行移動）	Lean	`VortexStrong.vortex_floor`・`vortex_floor_sharp`・`vortex_floor_rel`・`vortex_floor_wilson`・`ZM_gauge`・`Good`・`ZM_good`・`abs_Z_sub_le`・`good_twist_iff`・`card_bad_ge`・`minBad_conn`・`plane_bad`、`VortexStrongMN.vortex_floor_MN_sharp`・`vortex_floor_MN`
窓・率・自明でない範囲・薄い渦の床との比べ	読	本書の検討の数値の記録（浮動小数。別の台本でも計算し直した）
張る集合の判定（Q_8、2×2）、悪い集合と張る集合の最小の大きさ	読	本書の検討の数値の記録（全ての配位の和、総当たり、整数計画。四次元 4^4 は最適の証明なし）

この章で使った語 — 強結合・Wilson ループ・面積則・正の混合・支配の補題・中心の符号の反転・張る集合・余鎖・余境界・よい集合・悪い集合・根・連結な集合の数え上げ・'t Hooft の捩れ・渦の自由エネルギー。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：20-07 この部が言えていること・言えていないこと ― 第 20 部の定理を一つの表に並べます。渦の床の他の形は 21-02 と 21-07 にあります。

この部が言えていること・言えていないこと

この章は本書の検討です。一覧の章です。

この章で分かること — 第 20 部の定理を、範囲（β の範囲・格子の大きさ・窓）と、言っていないことと、Lean の宣言の名で一つの表にまとめます。

前提となる章 — 20-00 入口。各行の中身は 20-01〜20-06 にあります。

先に言うこと — この部の定理は全て、格子間隔を 1 に固定した格子の上の言明で、既知の型の結果の形式化です。連続極限、弱結合、質量の上界については、どの行も何も言いません。

この章の順序

1. 表の読み方：記号と欄。
2. 鏡映正値性（20-01）：三つの形と対の対称性。
3. 強結合の減衰（20-02）：有限体積の二つの評価。
4. 無限体積の極限と再構成（20-03・20-04）：極限・並進・クラスター性・ギャップ・非退化・$T \geq 0$。
5. フェルミオンつきの器（20-05）：有限の格子の四つの定理。
6. 強結合の面積則と、渦の自由エネルギーの上界（20-06）：面積則の有限体積と無限体積、渦の自由エネルギーの上界。
7. 部全体で言っていないこと：全ての行に共通の限界。

01

表の読み方

各行は一つの定理です。「範囲」は Lean の言明の仮定と、結論の主な形を写したもの、「言っていないこと」はその行に固有の限界です。全ての行は Lean 4 で機械検査されています。20-01〜20-05 の行（§02〜§05）の札は典（文献の既知の型の結果の形式化）です。ただし

§05 の行列式と格子の対称性の行は初（本文に証明を置いた既知の事実の形式化）です。20-06 の行（§06）の札は Lean（本書の Lean の定理。20-06 の凡例のとおり）です。記号は第 19 部に従います。

- $q(\beta) = 18 \tanh|\beta|$。窓 $q(\beta) < 1$ は $|\beta| < 0.0556$ 読。
- 狭い窓 $24(1 - e^{-4|\beta|}) < 1$ は $|\beta| < 0.0106$ 読。
- μ_n：トーラス $(\mathbb{Z}/2(n+1))^4$ の Wilson 測度の $\mathbb{Z}^4$ への周期の持ち上げ。ν_β：その部分列なしの極限（20-03）。
- 「極限点」：μ_n のある部分列の弱い極限。
- W：閉じた正の半分の筒の関数。W_{gi}：その中のゲージ不変なもの（20-04）。

02

鏡映正値性（20-01）

定理	範囲	言っていないこと	Lean の宣言
格子点の面の鏡映正値性	$(\mathbb{Z}/2M)^4$、全ての β、閉じた正の半分だけに依る有界可測な f	リンクの真ん中の面、時間の向きだけ	`TorusRP.wilson_rp`
真ん中の面の鏡映正値性	$(\mathbb{Z}/2M)^4$、$M \geq 2$、$\beta \geq 0$、ゲージ不変な有界可測な F	ゲージ不変でない F、$\beta < 0$。この定理だけでは器に入らない（器の $T \geq 0$ は 20-04 の別の定理）	`MidRP.wilson_rp_mid`
四方向の格子点の面の鏡映正値性	$(\mathbb{Z}/2M)^4$、全ての β、向き ρ ごと	リンクの真ん中の面の四方向の形	`PeierlsPerm.wilson_rp_dir`
鏡映の対の対称性	$(\mathbb{Z}/2M)^4$、全ての β、可測な f, g	—	`TorusRP.wilson_refl_symm`

03

強結合の減衰（20-02）

定理	範囲	言っていないこと	Lean の宣言
有限体積の強結合の相関の減衰	狭い窓、有限の N ごと、定数に N なし、時間の距離	空間の向きの距離、窓の外	`TorusRP.wilson_strong_coupling`
Dobrushin の距離による共分散の減衰	$\lambda \geq 0$、$e^{\lambda} q(\beta) < 1$、有限の N、定数に N なし	窓の外、真の減衰の速さ	`LinkSpec.wilson_cov_dist`

04

無限体積の極限と再構成（20-03・20-04）

定理	範囲	言っていないこと	Lean の宣言
部分列なしの極限の定理	$\beta \neq 0$、$q(\beta) < 1$	ほかの境界条件、Gibbs 測度の一意性。「ただ一つ」は位相から自明で、中身は列の収束	`InfVol.wilson_infvol_unique`
大きさに依らない極限の定理	$\beta \neq 0$、$q(\beta) < 1$、全ての大きさ $m+1$、任意の $s(k) \to \infty$	収束の速さ（言明の外）	`AllN.wilson_infvol_allN`
極限の並進不変	$\beta \neq 0$、$q(\beta) < 1$、四方向の単位の並進	回転・鏡映	`TransI.wilson_infvol_translation`
極限点のクラスター性	$\lambda \geq 0$、$e^{\lambda} q(\beta) < 1$、どの極限点でも、四方向	真の減衰の速さ	`WilsonLimit.cluster_limit`
非退化つきの質量ギャップ（Dobrushin の窓）	$\beta \neq 0$、$q(\beta) < 1$、言明は極限点を一つ選ぶ（同じ評価は全ての極限点で：`WilsonLimit.wilson_massGap_dob`）、$\lVert T - P_{\Omega} \rVert \leq q(\beta)^{1/2}$、$\mathrm{Var}(F_0) \geq \frac{1}{4} e^{-12\lvert\beta\rvert}$	質量が有限であること（下界だけ）、$\frac{1}{2}$ は選び方	`WilsonLimit.wilson_massGap_dob_e`
非退化つきの質量ギャップ（全ての極限点）	$\beta \neq 0$、狭い窓、全ての極限点、率 $-\log 24(1 - e^{-4\lvert\beta\rvert})$（一本にまとめた言明には入っていない）	同上	`WilsonLimit.wilson_massGap_nonde`
ゲージ不変な部門の質量ギャップ	$\beta \neq 0$、$q(\beta) < 1$、言明は極限点を一つ選ぶ、証人 $F_p = \mathrm{Re}\, U_p$	W_{gi} の閉包と物理の状態の空間の一致	`GaugeZ.wilson_massGap_gauge_exis`
$T \geq 0$（全体の W の上）	$\beta \geq 0$、$\lambda > 0$、$e^{\lambda} q(\beta) < 1$、全ての極限点	$\beta < 0$	`FullT.wilson_Tpos_full`
T の像はゲージ不変な部門に入る	$\lambda > 0$、$e^{\lambda} q(\beta) < 1$、全ての極限点	一本にまとめた言明には入っていない	`Bind.T_range_gauge_all`
一本にまとめた言明	$0 < \beta$、$18 \tanh \beta < 1$。収束・並進・鏡映正値・二つの部門のギャップと非退化・$T[F_0] = 0$・$T \geq 0$・クラスター性	連続極限、質量の上界、窓の外	`InfMain2.wilson_infvol_main2`

```
05
```

フェルミオンつきの器（20-05）

格子は $(\mathbb{Z}/N)^3 \times \mathbb{Z}/2h$（$h > 0$）、重みは $e^{-\beta S_W}\,\mathrm{Re}\big[(\det D)^{2j}\big]$、$D$ は Wilson–Dirac の作用素（$r = 1$、四方向に反周期）です。

定理	範囲	言っていないこと	Lean の宣言
Wilson–フェルミオンの重みの鏡映正値性	$m > -1$、全ての β・j、格子点の時間の面	$m \le -1$、真ん中の面、無限体積	`WilsonGauge.site_reflection_positive_wilson_full`
分配関数が正	全ての β・m・j	Z の大きさ	`WilsonGauge.partition_pos_wilson_full`
行列式の大域ゲージ不変	無条件、定数の g	局所のゲージ変換	`GaugeDet.physDirac_det_conj`
格子の対称性の生成元での不変	全ての N・j・m・β：大域のゲージ、四方向の並進、空間の $90°$ の回転、空間の軸の鏡映、時間の鏡映	群としての閉包、ブロックの水準への持ち上げ	`CubicSym.wfProb_lattice_generators`
超立方の生成元での不変	等方の格子 $N = 2h$、上に (空間, 時間) の $90°$ の回転を足したもの	非等方の格子での時間を含む回転	`CubicSym.wfProb_hypercubic_generators`
時間の鏡映での行列式の不変	無条件（全ての N・h・m・ω）、反転 $t \mapsto 2h - 1 - t$	この反転についての鏡映正値性	`CubicSym.physDirac_det_trefl`

06

強結合の面積則と、渦の自由エネルギーの上界（20-06）

$q = 1 - e^{-2\beta}$ と置きます。窓は定数の版ごとに違います（くわしくは 20-06）。

定理	範囲	言っていないこと	Lean の宣言
有限体積の面積則	$\beta \geq 0$、$4096q < 1$（締めた版は $441q < 1$）、長方形の縁の Wilson ループ、率と前の因子は格子の大きさにも長方形の大きさにも依らない	窓の外、一般のループ、Wilson ループの下界、連続の Wilson ループ	`AreaLaw.area_law_wilson`・`AreaLaw.area_law_wilson_sharp`・`AreaLaw.area_law_wilson_max_sharp`
無限体積の面積則	$\beta > 0$、$18 \tanh \beta < 1$ と $4096q < 1$ の交わり、極限の測度（全ての極限点でも）	締めた定数・任意の角と向きの無限体積の版	`AreaLaw.area_law_infvol`・`AreaLaw.area_law_limit_sub`
渦の自由エネルギーの上界	$\beta \geq 0$。横 N・縦 M のトーラス・全ての背景で $441q < 1$（`VortexStrongMN.vortex_floor_MN_sharp`）。等方のトーラスでは $4096q < 1$（`VortexStrong.vortex_floor`）、締めた版は $441q < 1$（`VortexStrong.vortex_floor_sharp`）。差は縦の平面の面積 M^2 について指数で小さく、面積あたりの率は横の大きさにも縦の大きさにも依らない	前の因子 N^2（横の面積）の除去、差の符号の向き、窓の外、帯の言明	`VortexStrongMN.vortex_floor_MN_sharp`・`VortexStrong.vortex_floor`・`VortexStrong.vortex_floor_sharp`

どれも Osterwalder–Seiler（面積則）と 't Hooft・Münster（渦の自由エネルギー）の型の既知の結果の形式化です[典]。面積則は格子の Wilson ループの言明で、連続の Wilson ループは、この部にも公開された構成にも在りません。

07

部全体で言っていないこと

- **格子間隔は 1 に固定**。どの行も、連続極限や、格子間隔を変えたときの一様性について何も言いません。
- **強結合の窓だけ**。面積則と渦の自由エネルギーの上界の行（§06）も強結合の窓の中だけです。無限体積の行は $|\beta| < 0.0556$[読]（狭い窓は $|\beta| < 0.0106$[読]）だけで、弱結合については何も言いません。
- **質量は下界だけ**。質量ギャップの行は $\|T - P_\Omega\|$ の上界です。質量が有限であること、真の質量との比は言っていません。

- **既知の型の形式化**。Osterwalder–Seiler の強結合の型、Dobrushin の一意性の型、強結合の面積則と渦の自由エネルギーの型の既知の結果を、具体の SU(2) Wilson 測度の上で Lean に書いたものです。四次元の Yang–Mills の質量ギャップの問題について、何かを示したものではありません。公開された構成が残した問い（収束と一意性、一様な質量ギャップ、連続の Wilson ループと面積則）とは反対の端（強結合・格子間隔は固定）の言明です（14-06）。

次の部では、捩れのある格子の上の渦の床と Polyakov ループを、同じ「一つの格子間隔」の水準で扱います。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
典 §02〜§05 の表の各行、Lean §06 の表の各行（どれも Lean で機械検査、範囲は各行のとおり）	格子間隔を変えること、連続極限、窓の外、質量の上界
読 窓の端 $\lvert\beta\rvert < 0.055613$・$\lvert\beta\rvert < 0.010640$	浮動小数の値（区間の評価ではない）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
各行の型の原典	典	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（要旨）。Dobrushin の一意性の条件の原典は書誌のみ・未確認。各章の出典の表
各行の宣言	Lean	Lean 4 で機械検査（核の再検査で全て通過、公理は標準の三つ）。A-04
窓の端の数	読	本書の検討の数値の記録（倍精度）

この章で使った語 — 強結合の窓、極限点、質量ギャップ（下界）、非退化、ゲージ不変な部門、鏡映正値性、生成元。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：21-00 入口 — 捩れた箱の中の渦 — 第 21 部へ。捩れのある格子の上の渦の床と Polyakov ループを扱います。