第三巻　質量ギャップへ — 残る問いと本書の結果

第 21 部 確かな定理 — 渦の床と Polyakov ループ

Kiichi, Shiori and Rin · 2026-11-14 の版 · https://computoergosum.com/principia/yang-mills/

> この PDF は Web 版の各章をそのまま刷ったものです。動かせる図は刷った時点の姿で止まっています。章の間のリンクは Web 版へ飛びます。最新の内容は Web 版に在ります。

章		頁
21-00	入口 — 捩れた箱の中の渦	2
21-01	符号の系の三本 — 被覆の不等式・単調性・比べ	6
21-02	薄い渦の床	17
21-03	太い渦の床 — 言明と道筋	26
21-04	太い渦の床 — 証明の部品	35
21-05	渦の最小作用 — 正であること・上界の証明書	44
21-06	θ の符号と Polyakov ループの対	53
21-07	渦の比の連続・極限・合わせ	63
21-08	この部が言えていること・言えていないこと	73

入口 — 捩れた箱の中の渦

> この章は案内です。

この章で分かること — 第 21 部の各章に在る定理の一覧と、部の全体に掛かる範囲（何を言っていないか）、「床」という語の向きが分かります。

前提となる章 — 19-02 横 N・縦 M のトーラス・渦の比・Polyakov ループ。

先に言うこと — この部の定理はどれも、格子間隔を固定した有限のトーラスの上の言明です。強結合の窓の中では、率が横の大きさに依らない形が在ります（前の因子＝横の面積は残ります。20-06）。窓の外では、この部の床（θ の上界）の率はどれも横の大きさ N に一様ではありません。21-07 の欠けの下界（対称な箱で、横の大きさに依らず 1/2）は、床とは逆向き（θ の下界の側）の言明です。帯にも質量ギャップにも届きません（示すべき言明は 19-07）。どれも既知の描像の片側の形式化です。

この章の順序

1. この部の定理の一覧
2. 部の全体に掛かる範囲
3. 「床」とは何か
4. 検討の記録への案内

01

この部の定理の一覧

対象は全て、横 N（向き 1・2）・縦 M（向き 3・4）のトーラス $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ の上の $SU(2)$ の Wilson 測度と、その捩れた分配関数 Z_0, Z_1、渦の比 $\theta_M = (Z_0 - Z_1)/(Z_0 + Z_1)$ です（定義は 19-02）。

章	定理（一行）
21-01 符号の系の三本	被覆の不等式・$\mathbb{Z}_2$ の単調性・$\mathbb{Z}_2$ との比べ（抽象の含意、仮定を全て見せる）と、その $SU(2)$ の Wilson 測度への当てはめ。θ_M を (3,4) の面の符号 η の平均で書く表示
21-02 薄い渦の床	全ての実の β、$N, M \geq 1$ で $\lvert\theta_M\rvert \leq \tanh(N^2\lvert\beta\rvert)^{M^2}$。$\beta \neq 0$ なら $\lvert\theta_M\rvert \leq e^{-\sigma_0 M^2}$、$\sigma_0 = -\ln\tanh(N^2\lvert\beta\rvert) > 0$
21-03 太い渦の床 — 言明と道筋	全ての $N \geq 1$ で、任意の $\varepsilon > 0$ に、十分大きい β ごとに十分大きい M で $\lvert\theta_{M+1}\rvert \leq \exp\bigl(-(M+1)^2 e^{-\beta(S_N+\varepsilon)}\bigr)$（$S_N$ は渦の最小作用。閾は陽でない）
21-04 太い渦の床 — 証明の部品	縦を一辺 m の塊に分けた評価 $\lvert\theta_M\rvert \leq \tanh(K_{\mathrm{eff}})^{k^2}$（$mk \leq M$）と、太い渦の床を組み立てる部品
21-05 渦の最小作用	全ての $N \geq 1$ で $S_N > 0$（塊の大きさ m に一様な下界。値は陽でない）。$N = 2, 3, 4$ で $S_N < 2N^2$（計算機の証明書）
21-06 θ の符号と Polyakov ループの対	M が偶数なら全ての実の β で $\theta_M \geq 0$（$Z_1 \leq Z_0$）。Polyakov ループの対の上界、たとえば $M \equiv 0 \pmod 4$ で $\lvert\langle P_b(0) P_{b'}(T)\rangle_0\rvert \leq 2\tanh(N^2\lvert\beta\rvert)^{M\min(T, M-T)}$
21-07 渦の比の連続・極限・合わせ	格子の大きさを止めて、渦の比は結合について連続で、結合 0 で 0、結合を大きくすると 1 に近づく。決めた目標の値（0 以上 1 未満）に合わせる結合が在る（最大の解）。二つの捩れを持つ箱に平らな配位は無く、対称な箱の欠けは横の大きさに依らず 1/2 以上
21-08 この部が言えていること・言えていないこと	定理ごとの範囲の表

どの定理も Lean で機械検査し、それに加えて定義と言明を別の目で照合しています（$N = 2, 3, 4$ の計算機の証明書は、それを使う系の側で照合）。宣言の名と範囲は各章にあります。

02

部の全体に掛かる範囲

- **格子間隔は固定。** 有限のトーラスの上の、正規化しない分配関数についての等式・不等式です。連続極限は扱いません。
- **窓の外では、床の率は横の大きさ N に一様でない。** 率（$\sigma_0 \approx 2e^{-2N^2\lvert\beta\rvert}$ や $e^{-\beta(S_N+\varepsilon)}$）は N を大きくすると 0 に近づきます。横を止めた、実質二次元の板の評価です。強結合の窓の中では、率が横の大きさに依らない形が在ります（前の因子＝横の面積は残ります。20-06）。21-07 の欠けの下界（対称な箱で、横の大きさに依らず 1/2）は、床とは逆向き（θ の下界の側）の言明で、床の率ではありません。
- **閾が陽でないものが在る。** 太い渦の床とそれに依る系では、β と M の閾は存在だけで、値は出ません。渦の最小作用の正の下界も値は陽でありません。
- **帯にも質量ギャップにも届かない。** 帯の言明も、四次元の面積則も、質量ギャップも、この部の定理からは出ません。帯と質量ギャップについて示すべき言明は 19-07 にあります。

- **既知の描像の片側の形式化**。 捩れた細い板の上の渦の気体という既知の描像（Mack–Petkova、Fröhlich らの線と言われるもの。書誌は章末の表、本文はこの本では未確認）のうち、上からの評価の側を、具体の $SU(2)$ の Wilson 測度の定理として Lean に載せたものです。この部の床の定理は上からの評価の側で、逆の側は、21-07 が格子を止めた $\beta \to \infty$ の極限での値を一つ与えるだけです。この本は新しさを主張しません。

03

「床」とは何か

渦の比は 't Hooft の流束の自由エネルギー $\Delta F = \ln(Z_0/Z_1)$（25-01・26-03 と同じ量。26-03 は渦の自由エネルギーとも呼びます）と $\theta_M = \tanh(\Delta F/2)$ で結ばれています。閉じ込めの描像では、ΔF は (3,4) の面積 M^2 について指数で 0 に近づき、その速さ（率）が張力に当たります。この部の定理は、θ_M を、したがって ΔF を、**上から**抑えます。それは率を**下から**抑えることで、この下からの評価を「床」と呼びます。率が少なくともこれだけある、という向きの言明で、床の定理は率の上限（ΔF の下界）を言いません。逆の側は、21-07 が格子を止めた $\beta \to \infty$ の極限での値（流束の自由エネルギーの傾きが最小の欠けに収束すること）を一つ与えるだけです。「薄い」「太い」は、床の率を、渦を一枚の面に集めた配位の費用 $2N^2$ で取るか、より安い太い渦の費用 S_N で取るかの違いです。

04

検討の記録への案内

捩れたトーラス・渦・帯について、この部の定理に至るまでの検討の記録は、この本の 第 25 部（空間の方向から — 小さな捩れた T^2 と閉じ込め）と 第 26 部（移り変わりの帯）にあります。構造だけの道具が出すのは床まで、という見方は 26-04 にあります。この部では書き直さず、必要な所で章を指します。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 この部の定理（一覧は §01。言明・仮定・証明の道筋は各章）	格子間隔を動かす話・N に一様な床の率・陽な閾・帯・質量ギャップ
機 $N = 2, 3, 4$ の $S_N < 2N^2$（計算機の証明書。解析の証明の支え、21-05）	一般の N での $S_N < 2N^2$

出典と再現

もの	種別	出典・道具
捩れた板の上の渦の描像と、$SU(2)$ と $\mathbb{Z}_2$ の比べ	典	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 123 (1979) 442・125 (1980) 117（26-01 と同じ書誌。本文はこの本では未確認）。J. Fröhlich, Phys. Lett. B 83 (1979) 195 は書誌のみ（未確認）。捩れた境界条件は G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141（25-01）
各章の定理	初	各章の本文の証明の道筋。Lean 4 で機械検査（各章の出典の表）

この章で使った語 — 渦の比・流束の自由エネルギー・床・薄い渦・太い渦・渦の最小作用・Polyakov ループ。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：21-01 符号の系の三本 — 床を出すための比べの道具から始めます。

符号の系の三本 — 被覆の不等式・単調性・比べ

> この章は本書の検討です。§02〜§05 の抽象の定理は条件つきの含意として書きます。

この章で分かること — SU(2) の渦の比を Z_2 の符号の系の渦の比で上から抑えるための、三本の抽象の不等式（被覆の不等式・Z_2 の単調性・Z_2 との比べ）と、その SU(2) の Wilson 測度への当てはめが分かります。渦の比 θ_M を、(3,4) の面の符号 η の平均として書く表示も置きます。

前提となる章 — 19-01 Haar の積・面とホロノミー、19-02 捩れ・渦の比。群の指標の言葉（準同型、±1 の値）を使います。

先に言うこと — §02〜§05 は抽象の定理で、仮定の欄を全て見せた「もし〜ならば」の形です。仮定を満たす具体の対象として、この章が結果に数えるのは SU(2) の Wilson 測度への当てはめ（§06）と η の表示（§07）だけです。三本とも「Z_2 の側から上へ」の片側の比べで、SU(2) の渦の比の下界（流束の自由エネルギーの下界）は出ません。非可換の群について単調性や被覆の不等式を示したものではありません。格子間隔は固定です。

この章の順序

1. 何のための三本か — 床の向き
2. 符号の系 — 指標・分配関数・捩れ・底の系
3. 被覆の不等式
4. Z_2 の単調性
5. Z_2 との比べ — 符号の定まらない結合と不変な測度
6. SU(2) の Wilson 測度への当てはめ
7. 渦の比を符号の平均で書く — η の表示
8. 言っていないこと
9. 寄り道：被覆の不等式を格子で読む

01

何のための三本か — 床の向き

第 21 部の対象は、横 N・縦 M のトーラス $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ の上の $SU(2)$ の Wilson 測度です（19-02）。(3,4) の面の一つの列に捩れを入れた分配関数 Z_1 と、入れない Z_0 の比から、渦の比

$$\theta_M = \frac{Z_0 - Z_1}{Z_0 + Z_1} = \tanh \frac{\Delta F}{2}, \qquad \Delta F := -\ln \frac{Z_1}{Z_0} \tag{1}$$

を作ります（定義は 19-02）。ΔF は 't Hooft の流束の自由エネルギーです（25-01・26-03 と同じ量。26-03 は渦の自由エネルギーとも呼びます）。閉じ込めの描像では ΔF は (3,4) の面積 M^2 について指数で 0 に近づき、その速さが張力です[典]（G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141 の捩れた境界条件の枠組み）。

この章の三本は、$SU(2)$ の系の比 Z_1/Z_0 を、面の符号だけを変数に持つ $\mathbb{Z}_2$ の系の比で**下から**抑えるための道具です。式 (1) で言い換えると、θ_M と ΔF を**上から**抑え、ΔF が M^2 について減る速さ（率）を**下から**抑えます。この下からの評価を、この部では「床」と呼びます。比べの相手の $\mathbb{Z}_2$ の系は、最後には二次元の閉じた式で計算できる系にまで落とします（21-02）。

三本の役目は次のとおりです。

名	比べるもの	この部での使い道
被覆の不等式	大きい $\mathbb{Z}_2$ の系と、それを写した小さい（底の）$\mathbb{Z}_2$ の系	四次元の符号の系を二次元の系へ落とす型
$\mathbb{Z}_2$ の単調性	同じ $\mathbb{Z}_2$ の系の、結合の大きさの違う二つ	結合を増やすと渦の比が減らないこと（比べの型の確認）
$\mathbb{Z}_2$ との比べ	中心 $\{\pm 1\}$ の作用で不変な測度の上の系（$SU(2)$ など）と、底の $\mathbb{Z}_2$ の系	$SU(2)$ の渦の比を $\mathbb{Z}_2$ の系の渦の比で抑える（§05）

どれも相関不等式の型の、周りに知られた道具の組み合わせです。$SU(2)$ と $\mathbb{Z}_2$ の比べの型は Mack–Petkova の線と言われます[典]（書誌は出典の表。本文はこの本では未確認）。この本は新しさを主張しません。

02

符号の系 — 指標・分配関数・捩れ・底の系

三本は、格子を忘れた抽象の形で書かれています。登場するものは四つです。

配位の群と面の添字。 G は有限群（格子では「リンクごとの符号の場」で、積は点ごとの積）、ι は有限集合（格子では面）です。

符号の指標。 関数 $\psi : G \to \mathbb{R}$ が符号の指標であるとは、乗法的 $\psi(gh) = \psi(g)\psi(h)$ で、値が ± 1 であることです（Lean：`CoveringInequality.IsSignChar`）。面ごとに一つ、指標の族 $\chi = (\chi_B)_{B \in \iota}$ を取ります。格子では $\chi_B(g)$ は面 B の四本のリンクの符号の積です。

分配関数と捩れ。 結合 $c : \iota \to \mathbb{R}$ について

$$Z_\chi(c) = \sum_{g \in G} \exp\Big(\sum_{B \in \iota} c_B \, \chi_B(g) \Big) \tag{2}$$

と置きます（Lean：`CoveringInequality.Z`）。捩れは $\zeta : \iota \to \{\pm 1\}$ で、結合 c を $\zeta c = (\zeta_B c_B)_B$ に替えます。捩れた比 $Z_\chi(\zeta K)/Z_\chi(K)$ の $-\ln$ が、この抽象の系の流束の自由エネルギーに当たります。

底の系と引き戻し。 もう一つの有限群 G_0 と指標の族 $\chi^0 = (\chi^0_B)_{B \in \iota}$（添字は**同じ** ι）、写像 $p : G_0 \to G$ で

$$\chi_B\big(p(t)\big) = \chi^0_B(t) \qquad (\text{全ての } B \in \iota,\ t \in G_0) \tag{3}$$

を満たすものを「底の系」と呼びます。p は準同型でなくてかまいません（証明は χ_B の乗法性しか使いません）。格子では、p は小さいトーラスの符号の場を大きいトーラスへ周期的に写す写像です。

出発点の補題は、Griffiths 型の第一の不等式です。非負の結合 $J \geq 0$ と捩れ ζ について $Z_\chi(\zeta J) \leq Z_\chi(J)$ 初 （Lean：`CoveringInequality.Z_flip_le`、仮定の欄は「各 χ_B が符号の指標」「$J_B \geq 0$」「$\zeta_B = \pm 1$」）。証明は $e^{c\chi} = \cosh c + \chi \sinh c$（$\chi = \pm 1$）で積を展開し、面の集合についての帰納法で「捩れた和の絶対値は捩れない和を越えない」を示します。底にあるのは、符号の指標の和 $\sum_g \psi(g)$ が 0 か $|G|$ で、負にならないことです。

03 被覆の不等式

被覆の不等式（Lean：`CoveringInequality.covering_ineq`）。次の五つを仮定します。

- (hχ) 各 χ_B は G の上の符号の指標。
- (hχ₀) 各 χ^0_B は G_0 の上の符号の指標。
- (hp) $p : G_0 \to G$ は式 (3) を満たす。
- (hK) 結合は非負：$K_B \geq 0$。

- (hζ) $\zeta_B = \pm 1$。

このとき

$$Z_\chi(K)\,Z_{\chi^0}(\zeta K) \;\le\; Z_\chi(\zeta K)\,Z_{\chi^0}(K) \tag{4}$$

です。比の形（`covering_ratio`）と $-\ln$ の形（`vfe_cover_le`）は

$$\frac{Z_{\chi^0}(\zeta K)}{Z_{\chi^0}(K)} \le \frac{Z_\chi(\zeta K)}{Z_\chi(K)}, \qquad -\ln\frac{Z_\chi(\zeta K)}{Z_\chi(K)} \le -\ln\frac{Z_{\chi^0}(\zeta K)}{Z_{\chi^0}(K)} \tag{5}$$

で、仮定は同じ五つです。初 証明は下の二段で、三つとも Lean で機械検査し、定義と言明を別の目で照合しています。道具は Griffiths 型の相関不等式と配位の置き換えという周りに知られた型で、この形の比べが文献のどこに在るかは、この本は確かめていません。

証明の道筋。 二段です。

1. **鍵の恒等式**（Lean：`Z_mul_Z`）。二つの和 $\sum_s \sum_t$ で、被覆の側の配位を $s = u \cdot p(t)$ と置き換えます。$\chi_B(u\,p(t)) = \chi_B(u)\chi_B^0(t)$ なので、任意の結合 J, J' で

$$Z_\chi(J)\,Z_{\chi^0}(J') = \sum_{u \in G} Z_{\chi^0}\big(J\chi(u) + J'\big) \tag{6}$$

   となります。積の二つの系が、u ごとの底の系一つの和に変わります初 。

2. **u ごとの比べ**。 式 (4) の左辺は $(J, J') = (K, \zeta K)$、右辺は $(\zeta K, K)$ です。底の結合はそれぞれ $K\chi(u) + \zeta K = \zeta\,a(u)$ と $a(u)$、ただし $a_B(u) = \zeta_B K_B \chi_B(u) + K_B \ge 0$ です。Griffiths 型の第一の不等式 $Z_{\chi^0}(\zeta a) \le Z_{\chi^0}(a)$ を u ごとに使って足せば (4) です初 。

極限も大きさの条件も使いません。全ての有限の系、全ての非負の結合で立ちます。

格子の実例（Lean：`TwistedWilson.z2_four_covers_two`・比の形 `z2_four_ratio`、仮定は $K \ge 0$ だけ）。横 N・縦 M のトーラスの四次元の $\mathbb{Z}_2$ のゲージ理論（一様な結合 K）を被覆の側に、縦の二次元のトーラスの $\mathbb{Z}_2$ のゲージ理論を底に取ると（底の指標は (3,4) の面で二次元の面の符号で、恒等的に 1 ではありません）、ζ を (3,4) の捩れとして

$$\frac{1 - \tanh(N^2K)^{M^2}}{1 + \tanh(N^2K)^{M^2}} \;\le\; \frac{Z_\chi(\zeta K)}{Z_\chi(K)}$$

です初 。四次元の符号の系を、縦の二次元の系へ落とす形で、寄り道の「横を n 倍に伸ばす被覆」そのものではありません。Lean の鎖の中で読まれていますが、$SU(2)$ の薄い渦の床の主定理の証明はこれを使わず、§06 の当てはめから直接、二次元の式へ進みます。

04

$\mathbb{Z}_2$ の単調性

$\mathbb{Z}_2$ の単調性（Lean：`CoveringInequality.mon_ineq`）。仮定は四つです。

- (hχ) 各 χ_B は符号の指標。
- (hK) $K_B \geq 0$。
- (hKK′) $K_B \leq K'_B$（項ごとに大きい結合）。
- (hζ) $\zeta_B = \pm 1$。

このとき

$$Z_\chi(\zeta K')\, Z_\chi(K) \;\leq\; Z_\chi(K')\, Z_\chi(\zeta K), \qquad \text{すなわち} \quad \frac{Z_\chi(\zeta K')}{Z_\chi(K')} \leq \frac{Z_\chi(\zeta K)}{Z_\chi(K)} \tag{7}$$

です（比の形は `mon_ratio`、仮定は同じ）。結合を項ごとに増やすと、捩れた比は増えず、流束の自由エネルギーは減りません。初 証明は下の道筋で、Lean で機械検査し、定義と言明を別の目で照合しています。型は強磁性の符号の系の相関不等式です。

証明の道筋。式 (6) を底＝被覆（$G_0 = G$、p は恒等写像）で使います。現れる結合を $\chi(u)\cdot\big(K' + \zeta\chi(u)K\big)$ の形に揃え、指標のずらし $Z_\chi(\chi(u)c) = Z_\chi(c)$（配位の置き換え $g \mapsto gu$。Lean：`Z_char_shift`）で $\chi(u)$ を外し、$K'_B + \zeta_B\chi_B(u)K_B \geq 0$ に Griffiths 型の第一の不等式を当てます初。

この単調性は $\mathbb{Z}_2$ の符号の系（非負の結合、捩れの背景なし）の言明です。$SU(2)$ の Wilson 測度で結合 β について同じ単調性が立つかは、この章は示していません（§08）。

05

$\mathbb{Z}_2$ との比べ — 符号の定まらない結合と不変な測度

被覆の不等式の仮定 (hK) を緩めると、符号の定まらない結合でも同じ形が出ます。

抑えられた結合の形（Lean：`CoveringInequality.dominated_covering_ineq`）。仮定は (hχ) (hχ₀)(hp)(hζ) と、

- (hJ) $|J_B| \leq K_B$（J の符号は任意）。

このとき

$$Z_\chi(J)\, Z_{\chi^0}(\zeta K) \;\leq\; Z_\chi(\zeta J)\, Z_{\chi^0}(K) \tag{8}$$

です。証明は §03 と同じで、底の結合 $K_B + \zeta_B J_B \chi_B(u)$ が (hJ) から非負になることだけが変わります[初]。$J = K$ が被覆の不等式、底＝被覆で $J = K \le K'$ が $\mathbb{Z}_2$ の単調性です。

不変な測度の上の形（$\mathbb{Z}_2$ との比べ）（Lean：`CoveringInequality.invariant_dominated`）。配位の空間 Ω と測度 μ、符号の群 G の Ω への作用 $g \cdot \omega$、面ごとの関数 $J_B : \Omega \to \mathbb{R}$ について、次を仮定します。

- (hinv) 積分が作用で不変：全ての $g \in G$ と全ての $f : \Omega \to \mathbb{R}$ で $\int f(g \cdot \omega)\, d\mu = \int f(\omega)\, d\mu$。
- (hχ)(hχ₀)(hp) は §03 と同じ。
- (hJ) 結合は指標で符号を変える：$J_B(g \cdot \omega) = \chi_B(g)\, J_B(\omega)$。
- (hK) $|J_B(\omega)| \le K_B$（全ての ω）。
- (hζ) $\zeta_B = \pm 1$。
- (hint) 全ての $c : \iota \to \mathbb{R}$ で $\omega \mapsto \exp\bigl(\sum_B c_B J_B(\omega)\bigr)$ が μ で可積分。

このとき

$$\Bigl(\int e^{\sum_B J_B(\omega)}\, d\mu\Bigr)\, Z_{\chi^0}(\zeta K) \;\le\; \Bigl(\int e^{\sum_B \zeta_B J_B(\omega)}\, d\mu\Bigr)\, Z_{\chi^0}(K) \tag{9}$$

です。[典] 型は中心を持つ群の系と中心の群の系の比べで、Mack–Petkova の線と言われるものです（書誌は出典の表、本文はこの本では未確認）。Lean で機械検査し、別の目の照合では含意として成り立つと判定されています。

証明の道筋。鍵は中心の平均です（Lean：`card_mul_integral_exp`）。(hinv) と (hJ) から、各 g で $\int e^{\sum J(\omega)} d\mu = \int e^{\sum \chi(g) J(\omega)} d\mu$ なので、g について平均すると

$$|G| \int e^{\sum_B J_B(\omega)}\, d\mu = \int Z_\chi\bigl(J(\omega)\bigr)\, d\mu \tag{10}$$

です[初]。右辺の被積分関数は、配位 ω を止めたときの**符号の系**の分配関数で、結合 $J(\omega)$ は (hK) で抑えられています。そこで ω ごとに (8) を使い、積分すれば (9) です（可積分性は (hint) から）。つまり、測度の上の系は「符号の定まらない結合を持つ $\mathbb{Z}_2$ の系の重ね合わせ」で、重ね合わせの一つ一つが底の $\mathbb{Z}_2$ の系と比べられます。

```
06
```

SU(2) の Wilson 測度への当てはめ

$SU(2)$ の格子ゲージ理論は §05 の仮定を満たします。対応は次のとおりです（記号は 19-01・19-02）。

抽象の欄	$SU(2)$ の Wilson 測度	払う Lean の補題
$\Omega,\ \mu$	リンクの配位 U：リンク $\to SU(2)$、正規化した Haar 測度の直積	—
G とその作用	リンクごとの符号 $g_\ell \in \{\pm 1\}$、$(g\cdot U)_\ell = g_\ell U_\ell$（中心 ± 1 を掛ける）	`TwistedWilson.signAction`
(hinv)	Haar 測度は中心の元を左から掛けても不変	`TwistedWilson.haarCfg_inv`
χ_B、(hχ)	面 B の四本のリンクの符号の積（重なりは重なりのまま）	`TwistedWilson.chiB_isSignChar`
J_B、(hJ)	$J_B(U) = \beta_B \operatorname{Re} U_B$。符号を掛けると $\operatorname{Re} U_B$ は $\chi_B(g)$ 倍	`TwistedWilson.hol_smul`
(hK)	$\lvert\operatorname{Re} U_B\rvert \le 1$ なので $\lvert J_B\rvert \le \lvert\beta_B\rvert$	`TwistedWilson.abs_re_le_one`
(hint)	被積分関数は連続で有界	`TwistedWilson.integrable_exp`

残る仮定は底の系の側だけです。

$\mathbb{Z}_2$ との比べ（$SU(2)$、面ごとの結合、任意の底の系）（Lean：`TwistedWilson.su2_dominated_general`）。$N, M \ge 1$、面ごとの実の結合 β_B（符号は任意）、$\zeta_B = \pm 1$、底の系 (G_0, χ^0, p) が

- 各 χ^0_B は G_0 の上の符号の指標、
- $p : G_0 \to \{\pm 1\}^{\text{リンク}}$ は $\chi_B(p(t)) = \chi^0_B(t)$ を満たす、

なら

$$\left(\int e^{\sum_B \beta_B \operatorname{Re} U_B}\, dU\right) Z_{\chi^0}\big(\zeta\lvert\beta\rvert\big) \ \le\ \left(\int e^{\sum_B \zeta_B \beta_B \operatorname{Re} U_B}\, dU\right) Z_{\chi^0}\big(\lvert\beta\rvert\big) \tag{11}$$

です（dU は Haar の積、$\lvert\beta\rvert = (\lvert\beta_B\rvert)_B$）。[典] Mack–Petkova の線と言われる比べの形式化です（本文はこの本では未確認）。Lean で機械検査し、別の目の照合では底の系の三つの欄（指標であること・引き戻しの式・$\zeta = \pm 1$）に条件つきで成り立ち、満たす実例がある、と判定されています。

実例（Lean：`TwistedWilson.su2_dominated_general_instance`、仮定の欄なし）。底を縦の二次元のトーラス $(\mathbb{Z}/M)^2$ の $\mathbb{Z}_2$ のゲージ理論に取ります。p は、二次元のリンクの符号 t を、向き 3・4 のリンクへ (x_3, x_4) で写し（横の位置 (x_1, x_2) に依らない）、向き 1・2 のリンクには $+1$ を置く写像です（`TwistedWilson.pull`）。結合を $\beta_B = \beta\, z_B$（z は背景 n_{12} の捩れの符

号)、ζ を (3,4) の捩れの符号に取ると、(11) の二つの積分はちょうど 19-02 の分配関数 $Z_{N,M}(\beta; n_{12}, 0)$ と $Z_{N,M}(\beta; n_{12}, 1)$ になり（$n_{12} = 1$ のときがこの部の $Z_0,\ Z_1$）、

$$Z_{N,M}(\beta; n_{12}, 0) \cdot Z_{\text{底}}\big(\zeta|\beta|\big) \ \le\ Z_{N,M}(\beta; n_{12}, 1) \cdot Z_{\text{底}}\big(|\beta|\big) \qquad (\text{全ての実の } \beta,\ N, M \ge 1,\ n_{12} \in \{0,1\}) \tag{12}$$

が出ます（同じ式の Lean の名は `TwistedWilson.su2_dominated`）。底の側の比は二次元の閉じた式で計算でき、そこから薄い渦の床が出ます（21-02）。背景の捩れ n_{12} は J の符号に吸収されるので、(hK) の $|J_B| \le |\beta|$ は背景があっても変わりません。$\mathbb{Z}_2$ の系そのものでは背景の捩れは負の結合になり、被覆の不等式の (hK) が立たないのと対照的です。

07

渦の比を符号の平均で書く — η の表示

捩れ n_{34} は「(3,4) の面のどれか一つの列の符号を反転する」ものでした。反転する列の位置にも、反転の仕方にも、実は意味がありません。意味があるのは符号の積だけです。これを式にしたのが η の表示です。

$\eta : (\mathbb{Z}/M)^2 \to \mathbb{R}$ に対し、(3,4) の面 $((x_1, x_2), (x_3, x_4))$ の結合を $\eta(x_3, x_4)$ 倍した分配関数を $Z[\eta]$ と書きます（横の N^2 枚に同じ倍率。背景 n_{12} はそのまま。Lean：`TwistedWilson.ZEta`）。

η の偶奇（Lean：`TwistedWilson.ZEta_parity`）。仮定は $\eta_y = \pm 1$（全ての y）だけです。このとき

$$Z[\eta] = \begin{cases} Z_0 & \prod_y \eta_y = 1 \\ Z_1 & \prod_y \eta_y = -1 \end{cases} \tag{13}$$

です（全ての実の β、$N, M \ge 1$。ここではこの部の約束 $n_{12} = 1$ の記号で書きました。$n_{12} = 0$ でも、Z_0, Z_1 を $Z_{N,M}(\beta; 0, 0),\ Z_{N,M}(\beta; 0, 1)$ に替えた同じ式が立ちます。(14) も同じで、左辺は 19-02 の $\theta_M^{(n_{12})}$ です）。

θ は η の平均（Lean：`TwistedWilson.theta_eq_eta_average`、仮定の欄なし）。

$$\theta_M = \frac{Z_0 - Z_1}{Z_0 + Z_1} = \frac{\sum_\eta \big(\prod_y \eta_y\big) Z[\eta]}{\sum_\eta Z[\eta]} \tag{14}$$

和は $\eta : (\mathbb{Z}/M)^2 \to \{\pm 1\}$ の全て（2^{M^2} 個）を走り、正規化しない和の比です。右辺は、配位 (U, η) の同時の重み $\exp\big(\beta \sum_B z_B\, \eta_B\, \mathrm{Re}\, U_B\big)$ の下での $\prod \eta$ の期待値です。初 証明は下の道筋で、二つとも Lean で機械検査し、定義と言明を別の目で照合しています。捩れが中心の類だ

けで決まることは、捩れた境界条件の標準の事実です典（G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141）。

証明の道筋。 三つの部品です初。

1. 中心のゲージ不変性（Lean：`ZEta_gauge`）。二次元の符号の場 t で向き 3・4 のリンクを反転すると Haar 測度は変わらず、$Z[\eta] = Z[\eta \cdot \chi^{2D}(t)]$ です（$\chi^{2D}_y(t)$ は二次元の面 y の符号）。
2. 面の符号の実現（Lean：`TwistedPlane.exists_chi2_eq`）。$\eta = \pm 1$ で $\prod \eta = 1$ なら、$\chi^{2D}_y(t) = \eta_y$ となる t が在ります。数え上げで示します。
3. 対合 $\eta \mapsto \eta \cdot e_0$（面 0 だけ反転）で $\prod \eta = 1$ と -1 の個数が等しいこと。

1 と 2 から (13)、(13) と 3 から (14) が出ます。反転の位置に依らないこと（全ての位置 P で「面 P だけ反転」が Z_1 を与える：`ZEta_flip_any`）も同じ部品から出ます。この表示は太い渦の床（21-03）の出発点です。

08

言っていないこと

- **片側だけ。** 三本とも $\mathbb{Z}_2$ の側から $SU(2)$ の比 Z_1/Z_0 を下から抑える向きです。ΔF の下界（θ_M の下界）は、この型の比べからは出ません。
- **非可換の群の単調性・被覆の不等式ではない。** §03・§04 は $\mathbb{Z}_2$ の符号の系の定理です。$SU(2)$ について、結合 β についての単調性も、トーラスの大きさをまたぐ被覆の不等式も示していません。有限の非可換群 Q_8 では、捩れの背景が無いと被覆の不等式も単調性も弱結合で破れる点があります読（三次元の小さな格子の転送行列の浮動小数の値。例：被覆の数 3、$\beta = 1.25$ で $\Delta F_3(1.25) = 1.29498 > \Delta F_1(3.75) = 1.28758$。独立の二つの実装で一致）。$Q_8$ は $SU(2)$ の有限の部分群で、$SU(2)$ について同じことが起きるかは分かりません。
- **格子の辞書は紙。** §03・§04 の Lean の言明は抽象の形です。横の向きを n 倍に伸ばした四次元の $\mathbb{Z}_2$ のトーラスを大きいトーラスと底のトーラスの対に読む辞書（寄り道）は紙です。Lean の中の底が自明でない格子の実例は、§03 の末の「四次元の $\mathbb{Z}_2$ を縦の二次元の $\mathbb{Z}_2$ に落とす」形だけです。抽象の例で底の指標が恒等的に 1 のものは、この章の結果に数えません。
- **底の系の比は別に要る。** (11)(12) は底の $\mathbb{Z}_2$ の系との比べまでで、底の比の値は別の計算です（21-02 で二次元の閉じた式を使います）。

- **格子間隔は固定。** どれも有限のトーラスの上の有限の系の不等式で、連続極限・無限体積・質量ギャップについては何も言いません。

この型の道具が出せるのが床までである、という見方は 26-04 と 26-06 の検討の記録にあります。

寄り道：被覆の不等式を格子で読む

飛ばしてよい。四次元の $\mathbb{Z}_2$ のゲージ理論で、トーラス Λ が小さいトーラス Λ_0 を n 重に覆うとします（横の向きを周期的に伸ばす）。G を Λ のリンクの符号、G_0 を Λ_0 のリンクの符号、p を周期的な写し、ι を Λ の面とすると、式 (3) は「写した場の面の符号は、底の面の符号と同じ」という当たり前の事実です。底の側の結合は被覆の面の添字で数えるので、底の一つの面の上に n 枚の面が乗れば、その結合は足されて nK になります。被覆の不等式 (5) は

$$\Delta F_{\Lambda}(\beta) \;\le\; \Delta F_{\Lambda_0}(n\beta)$$

と読めます。横の二つの向きを n 倍にすると枚数は n^2 です。この読みは紙で、小さな格子の総当たりで確かめてあります 読 （浮動小数。枚数を取り違えた版は破れる、という陰性の対照つき）。$SU(2)$ の当てはめ（§06）は、この辞書を経ずに、同じ格子の底の系（縦の二次元のトーラス）を直接 Lean で組んでいます。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 被覆の不等式 (4)(5)：五つの仮定（符号の指標二つ・引き戻しの式・$K \ge 0$・$\zeta = \pm 1$）のもとで。Lean：`covering_ineq`・`covering_ratio`・`vfe_cover_le`	格子への読み（辞書）は紙。非可換の群の版はない
初 格子の実例：四次元の $\mathbb{Z}_2$ を縦の二次元の $\mathbb{Z}_2$ に落とす形（$K \ge 0$）。Lean：`z2_four_covers_two`・`z2_four_ratio`	横を n 倍に伸ばす被覆の Lean の実例
初 $\mathbb{Z}_2$ の単調性 (7)：$0 \le K \le K'$、$\zeta = \pm 1$。Lean：`mon_ineq`・`mon_ratio`	$SU(2)$ の β についての単調性。捩れの背景つきの $\mathbb{Z}_2$ の系
初 $\mathbb{Z}_2$ との比べ (8)(9)：$\lvert J\rvert \le K$、不変な測度、可積分性。Lean：`dominated_covering_ineq`・`invariant_dominated`	逆向き（ΔF の下界）
初 $SU(2)$ の当てはめ (11)：底の系の三つの欄のもとで。Lean：`su2_dominated_general`。実例 (12)（欄なし）：`su2_dominated_general_instance`・`su2_dominated`	底の比の値（21-02）。格子間隔は固定、連続極限なし
初 η の偶奇 (13)（欄 $\eta = \pm 1$）と θ は η の平均 (14)（欄なし）。Lean：`ZEta_parity`・`theta_eq_eta_average`	η の平均の評価そのもの（太い渦の床は 21-03）

言えている	言えていない
読 Q_8 で被覆の不等式・単調性が破れる点がある（背景なし、三次元の小さな格子）	破れの一般の形。浮動小数の値で、定理ではない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
$SU(2)$ と $\mathbb{Z}_2$ の比べの型	典	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 123 (1979) 442・125 (1980) 117（26-01 と同じ書誌。本文はこの本では未確認）。J. Fröhlich, Phys. Lett. B 83 (1979) 195 は書誌のみ（未確認）
捩れた境界条件・捩れが類だけで決まること	典	G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141（25-01 と同じ書誌）
三本と当てはめ・η の表示	初	Lean 4 で機械検査（宣言は各節に。標準の三つの公理だけ、sorry なし）。定義と言明を別の目で照合し、抽象の三本は「含意として成り立つ」、当てはめは「底の系の欄に条件つき、満たす実例あり」、η の表示は「成り立つ」と判定
Q_8 の破れ	読	本書の検討の数値の記録（三次元の格子の転送行列と総当たりの照合、二つの独立な実装で 4〜7 桁一致。D_4 も同じ値）
格子の辞書の確かめ	読	本書の検討の数値の記録（四次元の $\mathbb{Z}_2$ の小さな格子の全配位の和。枚数を取り違えた陰性の対照で破れる）

この章で使った語 — 符号の系・符号の指標・底の系・引き戻し・被覆の不等式・$\mathbb{Z}_2$ の単調性・$\mathbb{Z}_2$ との比べ・中心の平均・渦の比・流束の自由エネルギー・床・η の表示。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：21-02 薄い渦の床 — §06 の比べに二次元の閉じた式を入れて、$|\theta_M| \le \tanh(N^2|\beta|)^{M^2}$ を出します。

薄い渦の床

この章は本書の検討です。

この章で分かること — $SU(2)$ の Wilson 測度の渦の比が、全ての実の β と全ての $N, M \geq 1$ で $|\theta_M| \leq \tanh(N^2|\beta|)^{M^2}$ を満たすこと、その指数の形 $|\theta_M| \leq e^{-\sigma_0 M^2}$（$\sigma_0 = -\ln\tanh(N^2|\beta|)$）、「薄い」の意味、証明の五つの段が分かります。

前提となる章 — 19-02 横 N・縦 M のトーラス・捩れ・渦の比、21-01 符号の系の三本（§06 の当てはめ）。

先に言うこと — 格子間隔は固定です。率 $\sigma_0 \approx 2e^{-2N^2|\beta|}$ は横の大きさ N とともに 0 に近づき、N に一様ではありません。θ_M の符号（$Z_1 \leq Z_0$）はこの章では言いません（21-06）。$M \to \infty$ の率（極限）の定義はしていません。帯にも質量ギャップにも届きません（示すべき言明は 19-07）。既知の描像の片側の形式化です。

この章の順序

1. 言明 — 比の形・両側の形・指数の形
2. 数で見る — 右辺の大きさと、実際の比との差
3. 「薄い」とは何か — 一枚に集めた渦の費用
4. 証明の道筋 — 五つの段
5. 部品：二次元の Z_2 の閉じた式
6. 部品：底の分配関数を二次元へ移す
7. 算術の書き換え — 比の下界と流束の自由エネルギーの上界
8. 言っていないこと

01

言明 — 比の形・両側の形・指数の形

対象は横 N（向き 1・2）、縦 M（向き 3・4）のトーラス $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ の上の $SU(2)$ の Wilson 測度です。重みは $e^{\beta \sum_p z_p \operatorname{Re} U_p}$（$z_p = \pm 1$ は捩れの符号）、測度は正規化した Haar 測度の直積で、分配関数は正規化しません（19-01）。背景の捩れ n_{12}、(3,4) の捩れ n_{34} の分配関数を $Z_{N,M}(\beta; n_{12}, n_{34})$ と書き、背景 n_{12} の渦の比を $\theta_M^{(n_{12})} = \big(Z_{N,M}(\beta;n_{12},0) - Z_{N,M}(\beta;n_{12},1)\big) / \big(Z_{N,M}(\beta;n_{12},0) + Z_{N,M}(\beta;n_{12},1)\big)$ とします（19-02 の寄り道の記号）。この部の約束 $n_{12} = 1$ では Z_0, Z_1、$\theta_M = \theta_M^{(1)}$ です。下の定理は $n_{12} = 0$ でも立ちます。

薄い渦の床（比の形）（Lean：`TwistedWilson.twisted_vortex_bound`）。全ての実数 β、全ての $N, M \geq 1$、$n_{12} \in \{0, 1\}$ で

$$\theta_M^{(n_{12})} \;\leq\; \tanh\big(N^2|\beta|\big)^{M^2} \tag{1}$$

です。仮定の欄は $N, M \geq 1$ だけです。

薄い渦の床（両側の形）（Lean：`TwistedWilson.twisted_vortex_bound_abs`）。同じ範囲で

$$\big|\theta_M^{(n_{12})}\big| \;\leq\; \tanh\big(N^2|\beta|\big)^{M^2} \tag{2}$$

です。$\beta < 0$ では $\theta_M^{(n_{12})} < 0$ となる場合があり（§02 の表の $N = M = 1$、$\beta = -1.5$）、そこで中身があるのは (2) の方です。

薄い渦の床（指数の形）（Lean：`TwistedWilson.thin_vortex_floor`）。$\beta \neq 0$ なら

$$\sigma_0 := -\ln \tanh\big(N^2|\beta|\big) > 0, \qquad \big|\theta_M^{(n_{12})}\big| \;\leq\; e^{-\sigma_0 M^2} \quad (\text{全ての } M \geq 1) \tag{3}$$

です。仮定は $\beta \neq 0$ だけです（$\beta = 0$ では $\tanh 0 = 0$ で σ_0 が意味を失い、実際 $\theta_M^{(n_{12})} = 0$ です）。

初 三つとも、証明の道筋は §04〜§06 にあり、具体の $SU(2)$ の Wilson 測度の定理として Lean で機械検査し、定義と言明を別の目で照合しています。型は、$SU(2)$ の系を $\mathbb{Z}_2$ の系で抑える Mack–Petkova の線と言われるものです典（書誌は出典の表、本文はこの本では未確認）。照合の際に独立に書いた有限群の総当たりの和と $SU(2)$ の Metropolis では、違反は見つかっていません読。

この部の言葉で言うと、(3) は「θ_M が M^2 について少なくとも率 σ_0 で減る」という、率の下からの評価、すなわち**床**です（向きは 21-01 §01）。

02

数で見る — 右辺の大きさと、実際の比との差

右辺の $t = \tanh(N^2|\beta|)$ と率 $\sigma_0 = -\ln t$ を、いくつかの N, β で並べます 読 （浮動小数の値）。

N	$\lvert\beta\rvert$	$t = \tanh(N^2\lvert\beta\rvert)$	$\sigma_0 = -\ln t$	$2e^{-2N^2\lvert\beta\rvert}$
1	0.25	0.2449	1.407	1.213
1	0.5	0.4621	0.7719	0.7358
1	1	0.7616	0.2723	0.2707
2	0.25	0.7616	0.2723	0.2707
2	0.5	0.9640	0.03664	0.03663
2	1	0.99933	6.709×10^{-4}	6.709×10^{-4}
3	0.25	0.97803	0.02222	0.02222
3	0.5	0.999753	2.468×10^{-4}	2.468×10^{-4}
3	1	$1 - 3.05 \times 10^{-8}$	3.05×10^{-8}	3.05×10^{-8}

$N^2|\beta|$ が 1 を越えると、率は $2e^{-2N^2|\beta|}$ とほとんど同じになり、N が一つ増えるごとに桁で小さくなります。右辺は $N^2|\beta|$ だけで決まるので、$(N,\beta) = (1,1)$ と $(2,0.25)$ は同じ行です。

実際の比との差は、小さな格子で次のとおりです 読 （$SU(2)$ は Metropolis の推定、照合の際に独立に書いた実装）。

(N, M)	n_{12}	β	$\theta_M^{(n_{12})}$ **（推定）**	**右辺** t^{M^2}
(1,1)	1	1.5	0.7033 ± 0.0018	0.9051
(1,1)	0	-1.5	-0.0785 ± 0.0026	0.9051
(2,1)	0	0.5	0.4856 ± 0.0012	0.9640
(1,2)	0	1.0	0.0061 ± 0.0013	0.3364

$\mathbb{Z}_2$ の系（同じ格子で $SU(2)$ を $\{\pm 1\}$ に替えたもの）では、試した $N = 1$ か $M = 1$ の組で $|\theta_M|$ は右辺に一致します 読 （変数消去による有限和の浮動小数の値）。比べの相手が $\mathbb{Z}_2$ の系なので、$\mathbb{Z}_2$ に近い配位が効く所でほぼ等号になり、$SU(2)$ の連続な揺らぎが効く所で緩くなります。

03

「薄い」とは何か — 一枚に集めた渦の費用

率 σ_0 は、閉じた形で

$$\sigma_0 = -\ln\tanh x = \ln\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = 2\,\mathrm{artanh}\big(e^{-2x}\big), \qquad x = N^2|\beta| \tag{4}$$

です。したがって $2e^{-2x} \le \sigma_0 \le 2e^{-2x}/(1-e^{-4x})$ で、x が大きいと $\sigma_0 \approx 2e^{-2N^2|\beta|}$ です初 （artanh の冪級数の係数が正であることから）。

指数の $2N^2|\beta|$ には次の意味があります。(3,4) の面のうち、縦の位置 (x_3, x_4) を一つに固定し、横の N^2 枚の全ての符号を一度に反転した配位を考えます。横の向きに広がった一枚の面に渦を集めた配位で、これを**薄い渦**と呼びます。$\mathrm{Re}\,U_p$ が 1 から -1 に変わる面が N^2 枚なので、作用の費用は $2\beta\cdot N^2$ です。

証明の中では、この描像がそのまま式になっています。底の系（§04）は縦の二次元のトーラスの $\mathbb{Z}_2$ のゲージ理論で、その一つの面の結合は、上に乗る横の N^2 枚の結合の和 $N^2|\beta|$ です。二次元の $\mathbb{Z}_2$ のゲージ理論では、トーラスの上の面の符号は「全ての積が 1」という一つの拘束を除いて独立です。式 (7)（§05）を渦の比に直すと $\theta^{2D} = t^{M^2}$、$t = \tanh(N^2|\beta|)$ で、これは各面の符号を独立に平均 t の ±1 としたときの、全ての面の符号の積の平均です。面が反転している確率 $q = (1-t)/2 \approx e^{-2N^2|\beta|}$ から $t^{M^2} = (1-2q)^{M^2} \approx e^{-2qM^2}$ です初。

つまり (1) の右辺は、$SU(2)$ の渦が「横いっぱいの一枚に集まった薄い渦の希薄な気体」と同じ速さで M^2 について減ることまでを言っています。$SU(2)$ の渦は連続の群の中で広がって、より安い費用で縦の向きの捩れを運べます。そうした太い渦の費用 S_N が $2N^2$ より小さいとき、率はもっと大きく取れます。それが太い渦の床です（21-03、S_N は 19-02）。

04

証明の道筋 — 五つの段

証明は五つの段です。段 1・2 が 21-01 §06 の当てはめ、段 3・4 が底の計算、段 5 が算術です。この節と §06 はこの部の約束 $n_{12} = 1$ の記号 Z_0, Z_1 で書きますが、$n_{12} = 0$ でも同じ段で進みます。

1. **中心の平均。** Haar 測度はリンクごとの符号 ±1 の掛け算で不変で、$\mathrm{Re}\,U_p$ は面の四本の符号の積の倍だけ変わります（`haarCfg_inv`・`hol_smul`）。そこで $SU(2)$ の分配関数は「結合 $J_p(U) = \beta z_p\,\mathrm{Re}\,U_p$ を持つ $\mathbb{Z}_2$ の符号の系の、U についての積分」に書けます。$|J_p| \le |\beta|$ です。
2. **$\mathbb{Z}_2$ との比べ。** 底の系を縦の二次元のトーラス $(\mathbb{Z}/M)^2$ の $\mathbb{Z}_2$ のゲージ理論に取り、二次元のリンクの符号を向き 3・4 のリンクへ横の位置に依らず写す写像で結びます（`pull`）。21-01 §05 の $\mathbb{Z}_2$ との比べから

$$Z_0\cdot Z_{\text{底}}\big(\zeta|\beta|\big) \le Z_1\cdot Z_{\text{底}}\big(|\beta|\big) \tag{5}$$

（`su2_dominated`）。ζ は (3,4) の捩れの符号です。

3. **底を二次元へ。** 底の系の分配関数は、定数の因子を除いて、結合 $N^2|\beta|$ の二次元の $\mathbb{Z}_2$ のゲージ理論の分配関数です。捩れた方は、面 0 だけ符号を変えた結合のものです（`Z_base_const`・`Z_base_flip`。§06）。
4. **二次元の閉じた式。** 二次元の $\mathbb{Z}_2$ のゲージ理論の分配関数は $|\text{配位}| \cdot \left(\prod \cosh + \prod \sinh\right)$ と閉じた形で書けます（`Z_plane`。§05）。
5. **算術。** $L = N^2|\beta|$、$C = \cosh(L)^{M^2}$、$S = \sinh(L)^{M^2}$ と置くと、段 3・4 で (5) は $Z_0(C - S) \le Z_1(C + S)$ となり、整理すると $(Z_0 - Z_1)C \le (Z_0 + Z_1)S$、すなわち (1) です（`bound_of_base`）。

両側の形 (2) は、段 2 を役を入れ替えて使います。捩れた側 $n_{34} = 1$ を「元」の系とし、結合 $\beta_p = \beta\, z_p^{(n_{12},1)}$ で `su2_dominated_general` を使うと、$\zeta^2 = 1$ から $Z_1 \cdot Z_{\text{底}}(\zeta|\beta|) \le Z_0 \cdot Z_{\text{底}}(|\beta|)$ が出ます（`su2_dominated_swap`）。段 5 を両方に当てれば $|Z_0 - Z_1|/(Z_0 + Z_1) \le t^{M^2}$ です 初 。指数の形 (3) は $t^{M^2} = e^{M^2 \ln t}$ と、$\beta \neq 0$ で $0 < t < 1$ であることからの書き換えです 初 。

05

部品：二次元の $\mathbb{Z}_2$ の閉じた式

縦の二次元のトーラス $(\mathbb{Z}/M)^2$ の上の $\mathbb{Z}_2$ のゲージ理論を考えます。点 y、リンク (y, d)（$d = 1, 2$）、リンクの符号の場 t、面 y の符号 $\chi_y^{2D}(t)$（四本の符号の積、重なりは重なりのまま）です（Lean：`TwistedPlane.chi2`）。

閉じた式（Lean：`TwistedPlane.Z_plane`、仮定の欄は $M \ge 1$ だけ）。任意の面ごとの結合 c_y で

$$Z_{\chi^{2D}}(c) = \sum_t \exp\Big(\sum_y c_y \chi_y^{2D}(t)\Big) = |\text{配位}| \cdot \Big(\prod_y \cosh c_y + \prod_y \sinh c_y\Big) \tag{6}$$

です。一様な結合 L と、面 0 だけ符号を変えた結合では（`Z_plane_const`・`Z_plane_flip`）

$$\frac{Z_{\chi^{2D}}(\text{面 } 0 \text{ を反転した } L)}{Z_{\chi^{2D}}(L)} = \frac{\cosh^{M^2} L - \sinh^{M^2} L}{\cosh^{M^2} L + \sinh^{M^2} L} = \frac{1 - \tanh(L)^{M^2}}{1 + \tanh(L)^{M^2}} \tag{7}$$

です（`TwistedPlane.plane_flip_ratio`）。初 二次元の格子ゲージ理論が解けることは古くから知られた事実で、その $\mathbb{Z}_2$ の場合の機械検査です。

証明。 $e^{c\chi}=\cosh c+\chi\sinh c$ で積を展開すると

$$Z_{\chi^{2D}}(c)=\sum_{A\subseteq\text{面}}\Big(\prod_{y\in A}\sinh c_y\Big)\Big(\prod_{y\notin A}\cosh c_y\Big)\sum_{t}\prod_{y\in A}\chi_y^{2D}(t)$$

です。どのリンクもちょうど二枚の面の辺なので、A が空でも全体でもなければ、A の縁に「片側だけが A に入るリンク」が在り、そのリンクの符号を反転する置き換えで内側の和は自分の符号を変えて 0 になります（`sum_FA_eq_zero`）。$A=\emptyset$ では積は 1、$A=$全体でも各リンクが二回現れて積は 1 です（`prod_chi2_univ`）。残る二項が (6) です[初]。

06

部品：底の分配関数を二次元へ移す

段 2 の底の系は、四次元の面の添字のまま、二次元の符号の場 t を変数に持つ系です。その面の指標 $\chi_B^0(t)$ は、四次元の面 B の四本のリンクに引き戻した符号の積で、次のとおりです（Lean：`TwistedWilson.chi0_eq`）。

$$\chi_B^0(t)=\begin{cases}\chi^{2D}_{(x_3,x_4)}(t) & B\text{ が }(3,4)\text{ の面で、縦の位置が }(x_3,x_4)\\ 1 & \text{それ以外の面}\end{cases}\tag{8}$$

向き 1・2 のリンクには $+1$ を置き、向き 3・4 のリンクの符号は横の位置に依らないので、(3,4) 以外の面ではリンクの符号が二回ずつ現れて消えます。そこで、(3,4) 以外の面の結合が一様な K なら

$$Z_{\chi^0}(c)=e^{A}\cdot Z_{\chi^{2D}}\Big(y\mapsto\sum_{(x_1,x_2)}c_{((x_1,x_2),y),(3,4)}\Big),\qquad A=\sum_{B\notin(3,4)}K\tag{9}$$

です（`Z_base`）。縦の位置 y の上に乗る横の N^2 枚の結合が足されて、二次元の面 y の結合になります。一様な $K=|\beta|$ なら二次元の結合は $N^2|\beta|$ で（`Z_base_const`）、(3,4) の捩れ ζ を掛けたものは、面 0 だけ符号を変えた結合 $N^2|\beta|$ です（`Z_base_flip`）。どちらにも同じ定数 e^A が掛かるので、比では消えます[初]。

ここで、捩れ n_{34} の面の集合（縦の位置 $(0,0)$ の (3,4) の面、横の N^2 枚）が、ちょうど二次元の面 0 の上に乗る N^2 枚であることが効いています（19-02 の捩れの定義）。§03 の薄い渦は、この N^2 枚の束です。

07

算術の書き換え — 比の下界と流束の自由エネルギーの上界

(1) は、$s = \tanh(N^2|\beta|)^{M^2}$ と置いて、次の二つの形にも書けます。どちらも仮定の欄は $N, M \geq 1$ だけで、全ての実の β で立ちます。この部の約束 $n_{12} = 1$ の記号で書きますが、$n_{12} = 0$ でも Z_0, Z_1 を $Z_{N,M}(\beta; 0, 0)$, $Z_{N,M}(\beta; 0, 1)$ に替えた同じ式が立ちます。

比の下界（Lean：`TwistedWilson.twisted_ratio_lower`）。

$$\frac{Z_1}{Z_0} \;\geq\; \frac{1 - s}{1 + s} \tag{10}$$

(1) と同値です初 。

流束の自由エネルギーの上界（Lean：`TwistedWilson.vortex_free_energy_bound`）。

$$\Delta F = -\ln \frac{Z_1}{Z_0} \;\leq\; \ln \frac{1 + s}{1 - s} \;\leq\; \frac{2s}{1 - s} \tag{11}$$

ΔF は 't Hooft の流束の自由エネルギーです（25-01・26-03 と同じ量）。$0 \leq s < 1$ と $\ln x \leq x - 1$ からの算術で、(10)(11) とも Lean で機械検査しています初 。

(11) は、ΔF を上から $2s/(1 - s) \approx 2e^{-\sigma_0 M^2}$ で抑える、有限の M ごとの形です。ΔF の上界であって下界ではありません（$\Delta F \geq 0$ は M が偶数のとき 21-06 の符号から出ます）。床という語は、ΔF の減る速さ（率）を下から抑える、という向きで使っています。

08

言っていないこと

- **符号。** $Z_1 \leq Z_0$（$\theta_M \geq 0$）はこの章の定理には入っていません。M が偶数なら全ての実の β で $\theta_M \geq 0$ です（21-06）。$\beta < 0$ で $\theta_M < 0$ となる例があるので（§02 の表）、$\beta < 0$ で中身があるのは両側の形 (2) です。
- **N に一様な率は無い。** $\sigma_0 \approx 2e^{-2N^2|\beta|}$ は $N \to \infty$ で 0 です。横の大きさを止めた、実質二次元の板の評価で、四次元の張力の正の下界ではありません。
- **$M \to \infty$ の率は定義していない。** (3) は有限の M ごとの不等式です。lim や lim inf で定めた張力 $\sigma_N(\beta)$ について「$\sigma_N(\beta) \geq \sigma_0$」を Lean の言明として持ってはいません（(3) から読み取れるのは M ごとの評価までです）。
- **大きい $N^2|\beta|$ では弱い。** 率は $2N^2|\beta|$ の費用の薄い渦の値で、太い渦の床（21-03）の方が大きい β でよい場合があります（$N = 2, 3, 4$ で $S_N < 2N^2$：21-05）。

- **格子間隔は固定。** 連続極限、無限体積、四次元の面積則、帯、質量ギャップについては何も言いません（帯と質量ギャップの示すべき言明は 19-07）。

この不等式を「構造だけの道具が出すのは床まで」という見方の中に置いた議論は、検討の記録の 26-04 にあります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 薄い渦の床 (1)：$\theta_M^{(n_{12})} \le \tanh(N^2\lvert\beta\rvert)^{M^2}$、全ての実の β、$N, M \ge 1$、$n_{12} \in \{0,1\}$、仮定の欄なし。Lean：`TwistedWilson.twisted_vortex_bound`	$Z_1 \le Z_0$（21-06）。$\beta < 0$ では片側の形は中身が無い場合がある
初 両側の形 (2)：$\lvert\theta_M^{(n_{12})}\rvert \le \tanh(N^2\lvert\beta\rvert)^{M^2}$、同じ範囲。Lean：`TwistedWilson.twisted_vortex_bound_abs`	θ_M の下界
初 指数の形 (3)：$\beta \neq 0$ で $\sigma_0 > 0$、$\lvert\theta_M^{(n_{12})}\rvert \le e^{-\sigma_0 M^2}$。Lean：`TwistedWilson.thin_vortex_floor`	N に一様な率。$M \to \infty$ の率の定義と、その下界の言明
初 比の下界 (10)・流束の自由エネルギーの上界 (11)。Lean：`twisted_ratio_lower`・`vortex_free_energy_bound`	ΔF の下界
初 二次元の $\mathbb{Z}_2$ の閉じた式 (6)(7)。Lean：`TwistedPlane.Z_plane`・`plane_flip_ratio`	非可換の群の二次元の比（この章では使わない）
初 $\sigma_0 = 2\,\mathrm{artanh}(e^{-2N^2\lvert\beta\rvert}) \approx 2e^{-2N^2\lvert\beta\rvert}$	—
読 小さな格子での θ_M と右辺の差（§02）	大きい格子での強さ

出典と再現

もの	種別	出典・道具
$SU(2)$ と $\mathbb{Z}_2$ の比べの型	典	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 123 (1979) 442・125 (1980) 117（26-01 と同じ書誌。本文はこの本では未確認）。J. Fröhlich, Phys. Lett. B 83 (1979) 195 は書誌のみ（未確認）
捩れた境界条件と流束の自由エネルギー	典	G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141（25-01 と同じ書誌）
(1)(2)(3)(10)(11) と部品	初	本文の証明の道筋。Lean 4 で機械検査（宣言は各節。標準の三つの公理だけ、sorry なし）。定義と言明を別の目で照合し「成り立つ」と判定（定義の一行ずつの読み）
照合の際の数値の確かめ	読	独立に書いた有限群の総当たりの和と $SU(2)$ の Metropolis で違反 0

もの	種別	出典・道具
§02 の表	読	本書の検討の数値の記録（tanh の浮動小数の値。$SU(2)$・Q_8 の Metropolis：鎖 2000 本 × 250 掃引、Z_0 の測度で Z_1/Z_0 を推定。$\mathbb{Z}_2$・Q_8・二元の正四面体群の変数消去の和）

この章で使った語 — 薄い渦の床・薄い渦・渦の比・流束の自由エネルギー・床・率・底の系・二次元の Z_2 の閉じた式・中心の平均。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：21-03 太い渦の床 — 言明と道筋 — 渦を一枚に集めず、より安い太い渦の費用 S_N で率を取り直します。

太い渦の床 — 言明と道筋

この章は本書の検討です。

この章で分かること — 横 N・縦 M の捩れたトーラスの上の SU(2) の Wilson 測度で、渦の比 θ_M について「どの $\varepsilon > 0$ にも、十分大きい β ごとに、十分大きい M で $|\theta_{M+1}(\beta)| \le \exp(-(M+1)^2 e^{-\beta(S_N+\varepsilon)})$」という上界（太い渦の床）が、全ての $N \ge 1$ で仮定の欄なしに Lean で機械検査されていること。量化の順の読み方、薄い渦の床（指数 $2N^2$）との違い、証明の七つの段の道筋。

前提となる章 — 19-02（捩れたトーラス・渦の比 θ・渦の最小作用 S_N）、19-01（Wilson の測度）、21-02 薄い渦の床。極限の言葉（「十分大きい」）と、コンパクト集合の上の連続関数の最小を使います。

先に言うこと — これは**格子間隔を固定し、横の大きさ N を止めた**上界です。β の閾も、β ごとの M の閾も陽ではありません。S_N の値は一般の N では Lean にありません。逆向き（率の下界）は示していません。帯（19-07 の言明）・四次元の面積則・質量ギャップ・連続極限には届きません。形は、捩れた細い板の上の渦の描像（Mack–Petkova の線、枠を止めた塊の条件つきの独立）の、既知の型の結果の形式化です。

この章の順序

1. 対象の再掲 — 捩れたトーラス、θ_M、作用の数え方、S_v(N,m) と S_N
2. 言明 — 太い渦の床と、量化の順の読み方
3. 意味 — 薄い渦と太い渦 — 指数 $2N^2$ が S_N に下がること。図 1
4. 道筋の地図 — 七つの段と、どの段がどの章にあるか
5. 前半 — 塊に割り、作用の差に直す — 塊ごとの評価と Laplace の段
6. 後半 — 安い窓に渦を入れ替える — 鳩の巣、コンパクト性、局所の模型、剛性、移し替え
7. 組み立て — 量化の順はどこから来るか — ε から m、β、M へ。寄り道：なぜ捩れの背景が要るか

8. 言っていないこと — 閾・S_N の値・逆向き・N = 1・帯

01

対象の再掲

定義は第 19 部にあります。ここでは言明に要る分だけを一行ずつ再掲します。

- 格子は $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ です。向き 1・2 が横（一辺 N）、向き 3・4 が縦（一辺 M）です（19-02）。
- 背景の捩れ $n_{12} = 1$ を常に入れます。Z_0・Z_1 は、(3,4) の面の捩れ $n_{34} = 0$・1 の分配関数です（捩れの符号）。測度は正規化しない Wilson の重み $e^{\beta \sum_p z_p \operatorname{Re} U_p}$ と Haar の積です。
- 渦の比は $\theta_M(\beta) = (Z_0 - Z_1)/(Z_0 + Z_1)$ です（19-02）。分母は正です。
- 作用は β を掛ける前の形 $S(U;\eta) = \sum_p \bigl(1 - z_p \eta_p \operatorname{Re} U_p\bigr) \geq 0$ で数えます。$\eta_p = \pm 1$ は (3,4) の面にだけ掛かる符号です。
- 捩れた真空 V は、$x_1 = 0$ の向き 1 のリンクを i、$x_2 = 0$ の向き 2 のリンクを j、他を 1 とした配位です。$ij\,i^{-1}j^{-1} = -1$ なので、捩れた (1,2) の面でも $z_p \operatorname{Re} U_p = 1$ で、作用は 0 です。
- $S_{\mathrm{v}}(N,m)$ は、格子 $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/2m)^2$ の上で一辺 m の塊の枠を V に止め、塊の角の (3,4) の面（横の N^2 枚）の符号を反転したときの、塊の作用の下限です。$S_N = \inf_{m \geq 1} S_{\mathrm{v}}(N,m)$ です（19-02）。

内部を V のままにして角の面を反転すると、横の N^2 枚の面の作用がそれぞれ 0 から 2 に上がります。だから $S_{\mathrm{v}}(N,m) \leq 2N^2$、$S_N \leq 2N^2$ です。初 Lean：`TwistBlocks.SN_bounds`（$0 \leq S_N \leq 2N^2$、全ての $N \geq 1$）。

02

言明

太い渦の床。 $N \geq 1$ を止めます。任意の $\varepsilon > 0$ に対し、十分大きい全ての β について、十分大きい全ての M で

$$\bigl|\theta_{M+1}(\beta)\bigr| \;\leq\; \exp\Bigl(-(M+1)^2\, e^{-\beta(S_N+\varepsilon)}\Bigr). \tag{1}$$

Lean：`TwistBlocks.thick_vortex_floor`（全ての $N \geq 1$、仮定の欄なし。言明は `ThickVortexFloorAbs N`）。定義を開いた形は `TwistBlocks.thick_vortex_floor_unfolded` です。既知の型の結果の形式化で、型は Mack–Petkova の線と言われます[典]（書誌は章末の表。本文はこの本では未確認）。

Lean の言明は、フィルタの言葉で $\forall \varepsilon > 0,\ \forall^{\mathrm{f}} \beta \in \mathrm{atTop},\ \forall^{\mathrm{f}} M \in \mathrm{atTop}$ の順です。これを量化子に開くと次の順になります。

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \beta_0\ \ \forall \beta \geq \beta_0\ \ \exists M_0(\beta)\ \ \forall M \geq M_0(\beta) : \quad (1). \tag{2}$$

読むときの注意を四つ挙げます。

1. β_0 **は** ε **に、** M_0 **は** ε **と** β **に依ってよい**形です。どちらの閾も値は言明に現れません（§07）。
2. **絶対値つき**です。θ の符号を使わずに、$|\theta|$ を上から抑えます。符号（M が偶数で $\theta \geq 0$）は別の定理です（21-06）。
3. $M + 1$ と書くのは $M = 0$ を避けるためだけです。「十分大きい全ての M」と読んで同じです。
4. β は大きい側だけです。$\beta < 0$ や有限の β については何も言いません。

(1) を率の形に直すと、$\theta_M \neq 0$ の M について $-\frac{1}{M^2} \ln |\theta_M| \geq e^{-\beta(S_N + \varepsilon)}$ です。板の張力を $\sigma_N(\beta) = \liminf_M -\frac{1}{M^2} \ln |\theta_M|$ と置けば、$\limsup_{\beta \to \infty} \frac{1}{\beta} \ln \frac{1}{\sigma_N(\beta)} \leq S_N$ が出ます。[初] この言い換えは Lean の外の一行の算術です。

03 意味 — 薄い渦と太い渦

薄い渦の床（21-02）は、全ての実の β と全ての $N, M \geq 1$ で $|\theta_M| \leq \tanh(N^2 |\beta|)^{M^2}$ を言います。β が大きいとき $-\ln \tanh(N^2 \beta) \approx 2 e^{-2N^2 \beta}$ なので、指数の中の率は $e^{-2N^2 \beta}$ の程度です。**率の指数は** $2N^2$ です。

太い渦の床 (1) では、率は $e^{-\beta(S_N + \varepsilon)}$ です。**率の指数が** $2N^2$ **から** S_N **に下がります**。$S_N < 2N^2$ なら、β が大きい所で太い渦の床の方が強い上界です。

絵で言います。渦は (3,4) の面の符号 η の反転一枚を、横の T^2_N の全体に通したものです。

- **薄い渦**：一枚の (3,4) の面の位置だけで反転を受け止めます。横の N^2 枚がそれぞれ 2 の作用を払うので、費用は $2N^2$ です。

- **太い渦**：反転を一辺 m の塊の中で (3,4) の面の方向に広げ、横の T^2_N にも広げます。リンクを少しずつ回して面ごとの負担を薄くします。最小の費用が $S_{\mathrm{v}}(N,m)$、$m\to\infty$ の下限が S_N です。

正確には、S_N は「捩れた真空を縁に止めた塊に、渦を一本通す最小作用」の下限です。トーラス全体の最小作用ではありません。

図 1 縦の (3,4) の面 T^2_M を一辺 m の塊に割る（左）。一つの塊の拡大（右）：枠（太線）は止め、角の面（濃い升）で符号を反転する。渦の費用は、この一枚を塊の中に広げて払う。各点の上には横の T^2_N が載る。

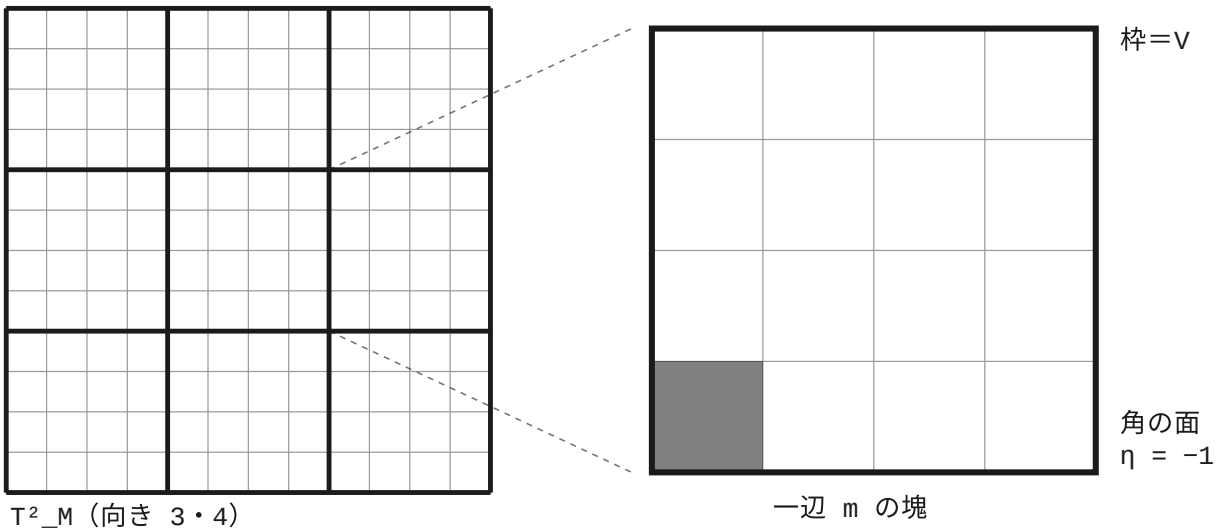


図 1 は模式図です。数は描いていません。

S_N の数は次のとおりです。

N	薄い渦の指数 $2N^2$	S_N について言えること	札・Lean
1	2	$S_1=2$（数値の冷却）。差は無い	読 Lean の中は $S_1\le 2$ だけ
2	8	$S_2\le 6.67401$、$S_2<8$	機 21-05（`VortexCert.SN_two_le`・`SN_two_lt`）
3	18	$S_3<18$（上界 9.09321）	機 21-05（`VortexCert.SN_three_lt`）
4	32	$S_4<32$（上界 12.02057）	機 21-05（`VortexCert.SN_four_lt`）
一般	$2N^2$	$0<S_N\le 2N^2$	Lean：`VortexPos.SN_pos`、`TwistBlocks.SN_bounds`（21-05）

$N=2$ の $S_2\le 6.67401$ は、Lean の核で検査した有理数の配位による計算機の証明書です。解析の証明の支えとして使います。$N=2$ で、太い渦の床の率 $e^{-6.675\beta}$ が薄い渦の床の率 $-\ln\tanh(4\beta)$ を上回る（上界が小さくなる）のは、係数まで比べて $\beta>0.523$ の程度からで

す読。ただし太い渦の床の閾は陽でないので、具体の (β, M) で太い方の上界が小さいとは言えません。比べられるのは $\beta \to \infty$ の率だけです。

04

道筋の地図

証明は「$|\theta|$ を塊ごとの量で抑え、その量の $\beta \to \infty$ の率を渦の最小作用で抑える」二つの半分に分かれます。段に分けると次のとおりです。

```
段 1 塊ごとの評価          |θ| ≤ tanh(K_eff)^{k²}                  （前半、§05）
  │                          K_eff ＝ 枠を止めた塊の (+)/(−) の比の対数の上限
段 2 Laplace の段          K_eff ≤ ½(β(κ_c + 2δ) + D)              （前半、§05）
  │                          κ_c ＝ 塊の最小作用の (+)/(−) の差の上限
  │
段 3 符号の標準形          塊の符号の場は作用を変えずに標準の形へ      （後半、§06）
段 4 鳩の巣                塊の中に作用の小さい窓が在る
段 5 コンパクト性          「作用が小さい」を「作用が 0」の主張へ
段 6 局所の模型と剛性      作用 0 の配位は捩れた真空のゲージ変換
段 7 移し替え              窓に S_v(N, m₀) の最小の配位を入れる
  │                          ⇒ 十分大きい m で κ_c ≤ S_N + ε
  ▼
組み立て                   ε → m → β₀ → M₀ の順に閾を取る            （§07）
```

段 3〜7 の出力は「十分大きい塊の一辺 m で、全ての枠について $\kappa_c \le S_N + \varepsilon$」です。Lean の中ではこれに名を付けた中間の形があり、そこから (1) までは算術です（21-04）。部品の言明と範囲は 21-04 に置きます。この章は流れだけを書きます。

05

前半 — 塊に割り、作用の差に直す

段 1：塊ごとの評価

縦の面 T^2_M を一辺 m の塊に $k \times k$ 個割ります（$mk \le M$。最後の行と列だけ幅を広げます）。塊の境の線に載るリンクを**枠**と呼びます。どの面も、枠のリンクと高々一つの塊の内部のリンクしか含みません。だから枠を止めると、重みは塊ごとの積に割れます。

各塊で、(3,4) の面の符号の積が $+1$ の類と -1 の類の分配関数 $Z^F_B(\pm)$ を比べます。その比の対数の、塊と枠についての上限の半分を K_{eff} と置くと

$$|\theta_M| \le \tanh(K_{\mathrm{eff}})^{k^2}. \tag{3}$$

Lean：`TwistBlocks.block_bound_abs`（全ての実の β、$mk \le M$、背景 n_{12} は任意）。比は $e^{\pm 2N^2|\beta|}$ の中に在るので $K_{\mathrm{eff}} \le N^2|\beta|$ です（`TwistBlocks.Keff_le`）。$m = 1$ ではこれで薄い渦の床の形に戻ります。

段 2：Laplace の段

β が大きいとき、$Z_B^F(\pm)$ は塊の作用の最小値 $S_{\min}^F(\pm)$ でほぼ決まります。上からは自明に $e^{-\beta S_{\min}}$ で抑えます。下からは、最小点のまわりの小さい球の Haar 測度で抑えます。こうして、$\beta \ge 0 \cdot \delta > 0$ で

$$K_{\mathrm{eff}} \le \tfrac{1}{2}\big(\beta(\kappa_c + 2\delta) + D(\delta)\big), \qquad \kappa_c = \sup_{b,F} \big| S_{\min}^F(+) - S_{\min}^F(-) \big|. \tag{4}$$

Lean：`TwistBlocks.Keff_le_laplace`（$\beta \ge 0$、$\delta > 0$）。$D(\delta)$ は β に依らず、塊の大きさだけで決まる量で上から抑えられます（M に一様）。$-\ln\tanh K \ge e^{-2K}$ と合わせると、(3)(4) から $|\theta_M| \le \exp(-k^2 e^{-\beta(\kappa_c+2\delta)-D})$ です。あとは κ_c を S_N に近づければ済みます。

06

後半 — 安い窓に渦を入れ替える

示したいのは、十分大きい m で、**どの枠 F についても** $S_{\min}^F(-) \le S_{\min}^F(+) + S_N + \varepsilon$（と逆向き）が立つことです。つまり「(+) の最小に近い配位から、費用 $S_N + \varepsilon$ 以下で類を反転できる」ことです。五つの段で示します。

段 3：符号の標準形

塊の中の符号の場 η は多数あります。しかし中心の $\mathbb{Z}_2$ によるリンクの反転を内部に施すと、作用を変えずに η を標準の形（全て $+1$、または角の一枚だけ -1）に移せます。類は積 $\prod \eta$ だけで決まります。Lean：`TwistBlocks.canon_holds`（全ての $N, M \ge 1$、$mk \le M$）。

段 4：鳩の巣で安い窓を選ぶ

どちらの類でも、最小に近い配位の塊の作用は、枠に触れる面だけが寄与するので $144N^2m$ 以下です。塊の中に一辺 $m_0 + 2$ の窓を T^2 個、面を共有しないように並べます。窓の作用の和は塊の作用以下なので、どれかの窓の作用は $144N^2m/T^2$ 以下です。T を大きく取ると、この窓の作用は好きなだけ小さくなります。

段 5：コンパクト性

窓の周りの配位の空間はコンパクトで、作用は連続です。だから「作用が 0 の配位について、費用 c 以下で類を反転できる」ことが言えれば、「作用が十分小さい配位について、費用 $c+\varepsilon$ 未満で反転できる」ことが出ます。距離を使わず、費用の形で言います。小ささ γ は値が陽でありません（段 2 の δ とは別の量です）。Lean：`ThickFloor.small_action_cost`。

段 6：局所の模型と、捩れたトーラスの剛性

窓の周りを、M に依らない一つの有限の模型（横の T^2_N × 一辺 m_0+2 の正方形）に持ち上げます。この模型で作用が 0 の配位は、**面に現れるリンクの上で**、局所の捩れた真空のゲージ変換です。芯は横の T^2_N の問題です。捩れの一枚つきで平坦な T^2_N の配位は、二つの生成元 a, b で決まり、捩れから $ab=-ba$ が出ます。反交換する単位四元数の組は、共役で (i,j) に写ります。だから配位は真空のゲージ変換です。Lean：`TwistBlocks.rigidT_all`（全ての $N\geq 1$）、`ThickFloor.anticomm_conj`。

段 7：最小の配位を移し替える

$S_{\mathrm{v}}(N,m_0)$ の最小の配位を、ゲージで合わせて窓に入れます。窓の外の面は変わりません。窓の中で類が一回反転し、費用は $S_{\mathrm{v}}(N,m_0)$ 以下です。m_0 を $S_{\mathrm{v}}(N,m_0)<S_N+\varepsilon/4$ となるように選べば、費用は S_N に近づきます。Lean：`TwistBlocks.thick_vortex_floor_zero_of_rigid`（剛性から零作用の主張へ。21-04）。

07

組み立て — 量化の順はどこから来るか

閾は次の順に決まります。

1. ε を与えます。
2. $S_{\mathrm{v}}(N,m_0)<S_N+\varepsilon/4$ となる m_0 を選びます（下限の定義から存在だけ）。
3. 段 5 のコンパクト性から $\gamma>0$ を得ます。**値は陽ではありません**。
4. $\gamma T>144N^2(m_0+3)+\varepsilon/4$ となる自然数 T を取り、塊の一辺を $m=(m_0+2)T+1$ とします。段 4 の窓の作用が γ を下回り、$M\geq m$ の全てで κ_c が S_N に ε の程度まで近づきます。
5. β_0 を、D と $\ln(4m^2)$ を $\beta\varepsilon/2$ で吸える大きさに取ります。D は小さい球の Haar 測度を含むので、**これも陽ではありません**。

6. M_0 を取ります。この証明の中では $M \geq m$ で足ります。ただし言明 (2) は M_0 が β に依ってよい形で、それ以上は言いません。

だから言明は「$\forall \varepsilon\ \exists \beta_0\ \forall \beta \geq \beta_0\ \exists M_0\ \forall M \geq M_0$」の形になり、どの闘も数で書けません。

寄り道：なぜ捩れの背景が要るか

飛ばしてよい。背景の捩れ $n_{12} = 1$ が効くのは段 6 の一か所です。捩れの面がちょうど一枚あるので、二つの生成元が反交換します。反交換する単位四元数の組は、どれも共役で (i, j) に写り、零作用の配位はゲージを除いて一つになります。捩れが無いと、平坦な配位の生成元は可換で構いません。たとえば全てのリンクを 1 にした配位と、向き 1 の輪のホロノミーを i にした平坦な配位は、ホロノミーの共役類が違うのでゲージで移り合いません。初 このとき段 6 の剛性は立たず、この道筋はそのままでは通りません。

08

言っていないこと

- **闘は陽でない**。$\beta_0(\varepsilon)$ も $M_0(\varepsilon, \beta)$ も数で書けません。有限の β・M の数値とは比べられません。
- **S_N の値は一般の N では Lean に無い**。Lean に在るのは $0 < S_N \leq 2N^2$ です。$S_N < 2N^2$ は $N = 2, 3, 4$ の証明書だけです（21-05）。N に一様な上界も下界も示していません。
- **$N = 1$ では薄い渦の床より良くならない**。$S_1 = 2 = 2N^2$ 読 で、薄い渦の床と同じ指数です。
- **逆向きは無い**。$|\theta_M|$ の下界（率の上界 $\sigma_N \leq e^{-\beta(S_N - \varepsilon)}$）は示していません。
- **$\beta \to \infty$ の率だけ**。前因子は塊の自由度の数の程度の次数で β に効きます。帯（19-07 の言明）には使えません。
- **格子間隔は固定**。連続極限、四次元の Wilson ループの面積則、質量ギャップには届きません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 太い渦の床 (1)：全ての $N \geq 1$、量化は (2) の順。Lean：`TwistBlocks.thick_vortex_floor`（仮定の欄なし）	β_0・M_0 の値。有限の β での比べ。率の下界

言えている	言えていない
初 $S_N \le 2N^2$。Lean：`TwistBlocks.SN_bounds`	一般の N での $S_N < 2N^2$。N に一様な評価
機 $N = 2, 3, 4$ で $S_N < 2N^2$（21-05）	具体の (β, M) で太い方が小さいこと
初 道筋の七つの段（§05・§06）。各段の部品は 21-04 で Lean の名と範囲つき	段 2 の前因子の鋭い形（β の冪の次数）
読 $S_1 = 2$、$N = 2$ で太い方の率が薄い方の率を上回るのは $\beta > 0.523$ の程度	これらの数の証明

出典と再現

もの	種別	出典・道具
捩れた境界条件と流束	典	G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141（書誌は 25-01 と同じ）
枠を止めた塊の条件つきの独立、渦の容器	典	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 123 (1979) 442・125 (1980) 117（本文はこの本では未確認。型は 25-03 の容器と同じ）。T. G. Kovács, E. T. Tomboulis, arXiv:hep-lat/0108017
太い渦の床と道筋の段（Lean 4 で機械検査）	初	上の型の形式化。Lean：`TwistBlocks.thick_vortex_floor` とその鎖（部品は 21-04）。標準の三つの公理、sorry なし
$S_1 = 2$、$\beta > 0.523$ の閾	読	本書の検討の数値の記録（冷却による S_v の数値、薄い渦の床との係数の比べ、浮動小数）
$N = 2, 3, 4$ の S_N の上界	機	21-05（Lean の核で検査した有理数の配位の証明書）

この章で使った語 — 太い渦の床・薄い渦の床・渦の比 θ・捩れた真空・渦の最小作用 S_N・塊・枠・窓・実効の結合 K_eff・剛性・量化の順。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：21-04 太い渦の床 — 証明の部品 — 段ごとの Lean の言明と範囲、方法の限界を示す定理。

太い渦の床 — 証明の部品

この章は本書の検討です。

この章で分かること — 太い渦の床（21-03）の証明に使う部品の言明と範囲です。塊の評価と実効の結合 K_{eff}、Laplace の段、符号の標準形の補題、コンパクト性の段、反交換する組の共役と捩れたトーラスの剛性。部品をつなぐ途中の含意の形と、最後の定理でその仮定が全て払われたこと。そして、この方法の率は S_N より良くならないことを示す定理です。

前提となる章 — 21-03 §04（道筋の地図）、19-02（渦の最小作用）、19-01（Haar の積）。四元数の積と、コンパクト集合の上の連続関数の最小を使います。

先に言うこと — 部品は全て、格子間隔と横の大きさ N を止めた有限の格子の上の言明です。途中の含意は「もし〜ならば」の形で、仮定を全て見せます。それらの仮定は最後の定理で払われていますが、途中の含意そのものが中身を示すわけではありません。方法の限界を示す定理は、この証明の中間の言明が $S < S_N$ で偽になることを言うだけです。床そのものを否定せず、真の率が S_N であることも言いません。

この章の順序

1. 塊・枠・類の分配関数 — 塊に割る約束と、$Z_B^F(\pm)$・K_{eff} の定義
2. 塊の評価 — $|\theta| \le \tanh(K_{\text{eff}})^{k^2}$ と $K_{\text{eff}} \le N^2|\beta|$
3. Laplace の段 — 小さい球の Haar 測度と、K_{eff} の κ_c による上界
4. 符号の標準形の補題 — 塊の符号の場を作用を変えずに標準の形へ
5. コンパクト性の段 — 「作用 0 なら」から「作用が小さいなら」へ
6. 剛性 — 反交換する組の共役と、捩れたトーラスの零作用の配位
7. 途中の含意の形と、仮定が払われるまで — 鎖の六つの環
8. 方法の限界を示す定理 — $S < S_N$ では中間の言明は偽

01

塊・枠・類の分配関数

格子は横 N・縦 M の捩れたトーラスです（19-02）。縦の面 T^2_M を $k \times k$ 個の塊に割ります。条件は $mk \le M$ だけです。塊の辺は m で、最後の行と列の塊だけ幅を $M-(k-1)m$ にします。

- **枠**：塊の境の線に載るリンクです。向き 3 のリンクは x_4 が線の上、向き 4 のリンクは x_3 が線の上、向き 1・2 のリンクはどちらかが線の上のものです。
- **内部**：枠でないリンクのうち、その塊に属するものです。
- **類**：塊の中の (3,4) の面の符号 η の積 $\prod \eta$ が $+1$ か -1 かです。

どの面も、枠のリンクと高々一つの塊の内部のリンクしか含みません。だから枠 F を止めると、重みは塊ごとの積に割れます。塊 b で枠 F を止め、類 $s=\pm 1$ について和を取った分配関数を $Z_B^F(s)$ と書きます（内部のリンクについて Haar の積で積分します）。

$$K_{\mathrm{eff}} = \tfrac{1}{2}\sup_{b,\,F}\left|\ln\frac{Z_B^F(+)}{Z_B^F(-)}\right|. \tag{1}$$

上限は全ての塊 b と全ての枠の値 F について取ります。Lean：`TwistBlocks.Keff`・`TwistBlocks.ZB`。Lean の $Z_B^F(s)$ は、面ごとの符号の和を先に取った被積分関数 $C_b + sS_b$ の積分です。類の中の和と同じものです。

02

塊の評価

塊の評価。 $mk \le M$、全ての実の β、背景 n_{12} の両方で

$$\left|\frac{Z_0 - Z_1}{Z_0 + Z_1}\right| \le \tanh(K_{\mathrm{eff}})^{k^2}, \qquad 0 \le K_{\mathrm{eff}} \le N^2|\beta|. \tag{2}$$

初 Lean：`TwistBlocks.block_bound_abs`（$mk \le M$ のほか仮定なし）、`TwistBlocks.Keff_le`（$mk \le M$）、`TwistBlocks.Keff_nonneg`。枠を止めた塊の条件つきの独立と、塊ごとの上限の積の形です。

典 型は、枠を止めた塊の条件つきの独立（Mack–Petkova の線。出典は章末の表）の形式化です。

証明の流れは三行です。(i) 枠を止めると、η の類の和の重みは塊ごとの積になります。(ii) 各塊で、類 $\pm$ の重みの比は $e^{\pm 2K_{\mathrm{eff}}}$ の中に在ります。比が $e^{\pm 2K}$ の中に在る二つの正の数 $Z_\pm$ は

$|Z_+ - Z_-| \le \tanh K\,(Z_+ + Z_-)$ を満たします。(iii) 積分の三角不等式で、塊の数 k^2 だけ tanh が掛かります。$K_{\mathrm{eff}} \le N^2|\beta|$ は、一つの類の反転で変わるのが横の N^2 枚の面の符号だけだからです。

(2) と $-\ln\tanh K \ge e^{-2K}$（$K>0$）から $|\theta_M| \le \exp(-k^2 e^{-2K_{\mathrm{eff}}})$ です。Lean：`TwistBlocks.abs_block_bound_exp`。

言っていないこと。 K_{eff} は塊についても上限を取るので、塊の形が混ざると塊ごとの積 $\prod_b \tanh K_b$ より弱くなります。たとえば $\mathbb{Z}_2$ の小さい模型で、右辺 $\tanh(1)^4 = 0.3364$ に対し塊ごとの積は 0.0862 です読。率には効きません。

03 Laplace の段

粗い Laplace の下界。 ι を有限集合、ν を $SU(2)^\iota$ の上の Haar の確率測度の積とします。距離は成分ごとの距離の最大です。f が連続で L-Lipschitz（$L>0$）なら、全ての x_0、$\beta \ge 0$、$\delta > 0$ で

$$e^{-\beta(f(x_0)+\delta)}\,\mu_1\big(\delta/L\big)^{|\iota|} \le \int e^{-\beta f}\,d\nu, \qquad \mu_1(r) = \mathrm{Haar}\big(\{g:\ |g-1|<r\}\big) > 0. \tag{3}$$

初 Lean：`CoarseLaplace.laplace_lower`（$\beta\ge0$、$\delta>0$、$L>0$）。証明は x_0 の周りの半径 δ/L の球の上で $f \le f(x_0)+\delta$ とするだけです。球の測度が中心に依らないのは、左の積が等長で、Haar 測度が左不変だからです。前因子は β に依りません。Laplace の方法の、定数を陽にしない弱い形です。

これを塊の作用に当てはめます。作用 S_B は内部のリンクについて Lipschitz で、定数は塊の面の数 n_b から $L_b = 4n_b + 1$ と取れます。$S^F_{\min}(\pm)$ を類 $\pm$ と内部についての作用の下限とし、

$$\kappa_c = \sup_{b,F}\big|S^F_{\min}(+) - S^F_{\min}(-)\big|, \qquad D(\delta) = \max_b\Big(\ln \#\{\text{塊 } b \text{ の符号の場}\} - \#\{\text{内部のリンク}\}\cdot$$

と置くと、$\beta \ge 0$・$\delta > 0$ で

$$K_{\mathrm{eff}} \le \tfrac{1}{2}\big(\beta(\kappa_c + 2\delta) + D(\delta)\big). \tag{4}$$

初 Lean：`TwistBlocks.Keff_le_laplace`（$mk \le M$、$\beta\ge0$、$\delta>0$）。$D(\delta)$ は $M < (k+1)m$ のとき、N, m, δ だけで決まる量 $D^*(N,m,\delta)$ で抑えられます（`TwistBlocks.Dmax_le`）。つまり M に一様です。κ_c の自明な上界として $\kappa_c \le 2N^2$（`TwistBlocks.kappaC_le_two`、全ての m）も在ります。

言っていないこと。$\mu_1(r)$ の値（r^3 の程度であること）は使っておらず、D は陽ではありません。前因子の鋭い形（β の冪の次数）は扱いません。$\beta < 0$ は扱いません。

04

符号の標準形の補題

類の下限 $S^{F}_{\min}(\pm)$ は、類の中の全ての符号の場 σ と内部の全ての値についての下限です。これを「η を一つに止めた下限」と同じにするのが次の補題です。

符号の標準形の補題。 $mk \le M$ とします。塊 b、枠 F、内部の値 y、塊の符号の場 σ（$\prod \sigma = +1$ なら $t=0$、-1 なら $t=1$）について、内部の値 y' が在って、標準の場（$t=0$ なら全て $+1$、$t=1$ なら塊の角の一枚だけ -1）での塊の作用が、σ での作用に等しくなります。

初 Lean：`TwistBlocks.canon_holds`（言明は `TwistBlocks.Canon N`、全ての $N, M \ge 1$ と $mk \le M$。塊の形の条件なし）。構成は櫛の形の反転です。$\rho = \sigma \cdot (\text{標準の場})$ とします。列ごとに下から上へ ρ の積を積んで向き 3 のリンクの符号 κ_3 を決め、角の行だけで右から左へ列の総積を積んで向き 4 の符号 κ_4 を決めます。このとき面ごとに κ の積が ρ になり、塊の中の ρ の積が 1 なので枠では $\kappa = 1$ です。向き 1・2 と向き 3・4 にまたがる面では、同じ κ が二回現れて消えます。

この補題で、Lean の κ_c は η を止めた版の κ と等しくなります（`TwistBlocks.kappaC_eq_kappa`、$mk \le M$）。

05

コンパクト性の段

費用の形のコンパクト性。 X をコンパクト空間、$S, \Phi : X \to \mathbb{R}$ を連続とします。$S(x) \le 0$ の点で $\Phi(x) \le c$ なら、全ての $\varepsilon > 0$ に $\gamma > 0$ が在って、$S(x) < \gamma$ の点で $\Phi(x) < c + \varepsilon$ です。

初 Lean：`ThickFloor.small_action_cost`（Mathlib だけで閉じる）。証明：$K = \{\Phi \ge c + \varepsilon\}$ は閉じていてコンパクトです。空なら $\gamma = 1$ で済みます。空でなければ S は K の上で最小値 $S(x_0)$ を取り、仮定から $S(x_0) > 0$ です。$\gamma = S(x_0)$ と取ります。

使い方：X を窓の周りの局所の模型の配位の空間、S を局所の作用、Φ を「内部を取り替え、一枚を反転した作用」の下限とします。反転の位置は有限個なので Φ は連続です。これで「作用が十分小さい窓では費用 $S_{\mathrm{v}} + \varepsilon$ で類を反転できる」ことが、「作用 0 の局所の配位では費用 S_{v} で反転できる」ことに帰着します（`TwistBlocks.localVortexL_of_zero`）。

言っていないこと。γ の値（§03 の δ とは別の量です）。γ は N・m_0・ε だけに依りますが、陽ではありません。太い渦の床の閾が陽でない主な理由はここです。

06

剛性

反交換する組の共役

反交換する単位四元数の組。 単位四元数 A, B が $AB = -BA$ を満たすなら、$g \neq 0$ の四元数が在って $gAg^{-1} = i$、$gBg^{-1} = j$ です。

初 Lean：`ThickFloor.anticomm_conj`。まず $\mathrm{Re}\, A = \mathrm{Re}\, B = 0$ で虚部は直交します（`ThickFloor.anticomm_unit`）。次に $L(h) = h - ihA - jhB - kh(AB)$ と置くと、$A^2 = B^2 = -1$ と $AB = -BA$ だけから $L(h)A = iL(h)$、$L(h)B = jL(h)$ です。$e \in \{1, i, j, k\}$ について $\sum_e \mathrm{Re}(\bar{e}\, L(e)) = 4$ なので、どれかの e で $L(e) \neq 0$ です。$g = L(e)$ と取ります。g を $g/|g|$ に替えれば単位四元数の共役です。

捩れたトーラスの剛性

横の $T^2_N = (\mathbb{Z}/N)^2$ の上の配位 (A, B)（A は向き 1、B は向き 2）で、面の積が捩れの符号（原点で -1、他で $+1$）に等しいものを考えます。

捩れたトーラスの剛性。 全ての $N \geq 1$ で、そのような (A, B) は、T^2_N の真空（$a_1 = 0$ で $A = i$、$a_2 = 0$ で $B = j$、他は 1）のゲージ変換です。すなわち $R : T^2_N \to SU(2)$ が在って、全ての a で $R(a)A(a)R(a + e_1)^{-1}$ と $R(a)B(a)R(a + e_2)^{-1}$ が真空の値に等しくなります。

初 Lean：`TwistBlocks.rigidT_all`（言明は `TwistBlocks.RigidT N`、全ての $N \geq 1$）。捩れた平坦な接続がゲージを除いて一つであるという形です。証明：前からの積の木でゲージを取ると、木のリンクは 1 になります。面の平坦さの帰納で、残りのリンクは二つの生成元 $a = A(N-1, 0)$、$b = B(0, N-1)$ で決まります（`TwistBlocks.cfA`・`cfB`）。捩れの面がちょうど一枚なので $ab = -ba$ です（`TwistBlocks.cf_comm`）。反交換する組の共役で (a, b) を (i, j) に写す定数 u を取り、真空を同じ木でゲージを取った形と比べます（`TwistBlocks.uniqT`）。$N = 1$ は一点なので直接です（`TwistBlocks.rigidT_one`）。

局所の模型への持ち上げ

窓の周りの局所の模型は、横の T^2_N と一辺 $V + 1$ の正方形の積です。この模型には、**どの面にも現れないリンク**が在ります（正方形の端の向き 3・4 のリンクと、角の向き 1・2 のリン

ク)。これらは作用に効かないので、作用 0 の配位でも任意の値を取れます。だから局所の剛性は次の範囲で言います。

局所の剛性。 局所の作用が 0 の配位は、**面に現れる全てのリンクの上で**、局所の捩れた真空のゲージ変換に等しい。

初 Lean：`TwistBlocks.rigidL_of_rigidT`（RigidT $N \Rightarrow$ RigidL N $(V+1)$、全ての V）。向き 3・4 の極大の木でゲージを取ると、向き 3・4 のリンクは全て 1 になり、向き 1・2 のリンクは縦の位置に依らなくなります。残りが T^2_N の問題で、上の剛性で閉じます。リンク全体の関数の等式としては偽なので、範囲を「面に現れるリンク」に限るのが正しい形です。

07

途中の含意の形と、仮定が払われるまで

Lean の証明は、仮定を一つずつ弱い主張に置き換えていく含意の鎖で組まれています。各環は「もし〜ならば太い渦の床」の形です。ここでは仮定を全て見せて並べます。Floor(S) は 21-03 の (1) で S_N を S に替えた言明です。

環	Lean	仮定（もし〜ならば）	結論
1	`thick_vortex_floor_abs_of_H4`	反転の費用の上界：ある S で：全ての $\varepsilon > 0$ に m が在り、全ての $M \geq m$ で $\kappa_c(N, M, m, \lfloor M/m \rfloor) \leq S + \varepsilon$	Floor(S)
2	`H4_of_local`	符号の標準形の補題（`Canon N`）と、全ての m_0 で「窓の作用が小さければ費用 $S_{\mathrm{v}}(N, m_0) + \varepsilon$ で類を反転できる」（`LocalVortex`）	$S = S_N$ の反転の費用の上界
1+2	`thick_vortex_floor_abs_of_local`	環 2 の仮定のうち、全ての m_0 での `LocalVortex`（`Canon N` は中で `canon_holds` により払う）	Floor(S_N)
3	`thick_vortex_floor_abs_of_localL`	同じ主張を、M に依らない局所の模型の上で（`LocalVortexL`）	Floor(S_N)
4	`thick_vortex_floor_abs_of_zero`	全ての m_0 で、局所の作用が 0 の配位について費用 $S_{\mathrm{v}}(N, m_0)$ 以下で反転できる（`ZeroVortexL`）	Floor(S_N)
5	`thick_vortex_floor_abs_of_rigid`	全ての m_0 で局所の剛性（`RigidL N (m₀+2)`）	Floor(S_N)
6	`thick_vortex_floor_abs_of_rigidT`	捩れたトーラスの剛性（`RigidT N`）	Floor(S_N)

(名は全て `TwistBlocks.` の下です。Lean の名に残る `H4` は源の名のままで、本文ではこの中間の言明を「反転の費用の上界」と呼びます。) 環と環をつなぐ定理は次のとおりです。

- 2 の `Canon N` は `canon_holds` で払われます（§04）。鳩の巣（`exists_win_le`）は 2 の証明の中で閉じています。

- 3 → 1+2：局所の模型の答えを塊の内部に書き戻します（`localVortex_of_local`）。
- 4 → 3：コンパクト性の段です（`localVortexL_of_zero`、§05）。
- 5 → 4：$S_{\mathrm{v}}(N, m_0)$ の最小の配位を局所の模型に引き戻し、剛性のゲージで窓に移し替えます（`thick_vortex_floor_zero_of_rigid`）。最小の配位が在ることは `Svortex_attained` です。
- 6 → 5：局所の模型への持ち上げです（`rigidL_of_rigidT`、§06）。

最後の定理 `TwistBlocks.thick_vortex_floor` は、環 6 に `rigidT_all` を入れたものです。これで鎖の仮定は全て払われ、仮定の欄は残っていません。機械の健全さの確かめとして、仮定が偽で空になる中間の定理が鎖に無いことも見てあります。環 4・5 の内側の欄「局所の作用 ≤ 0」は局所の真空で満たされ（`SL_vacL`）、環 6 の内側の欄「平坦な T^2_N の配位」は T^2_N の真空で満たされます（`flatT_nonempty`）。これは欄が空でないことの確かめで、中身の無い充足の例です。

> 途中の環 1〜6 は、それだけでは中身を示しません。たとえば環 1 は S が大きければ容易に満たせます。中身があるのは、仮定を払った最後の定理と、S_N の値の評価（21-05）の組です。

08

方法の限界を示す定理

環 1 の仮定（反転の費用の上界）の S を、S_N より小さく取れないかを考えます。取れないことが Lean で示されています。

枠を真空にした塊の比べ。 全ての $m \geq 1$ で $S_{\mathrm{v}}(N, m) \leq \kappa_c(N, 2m, m, 2)$。初 Lean：`TwistBlocks.kappaC_ge_Svortex`。$M = 2m$、塊 $(0, 0)$、枠を捩れた真空にすると、(+) の下限は 0、(−) の下限は $S_{\mathrm{v}}(N, m)$ だからです。

中間の言明の否定。 $S < S_N$ なら反転の費用の上界は偽です。初 Lean：`TwistBlocks.H4_fails_below`（仮定 $S < S_N$）。反転の費用の上界を $\varepsilon = (S_N - S)/2$ と $M = 2m$ に当てはめると、上の比べと $S_N \leq S_{\mathrm{v}}(N, m)$ に矛盾します。

読み方を三つ挙げます。

1. これは**この証明の方法の限界**です。中間の言明である反転の費用の上界（κ_c の上界）を通る限り、得られる率の指数は S_N より良くなりません。

2. これは**太い渦の床の否定ではありません**。床 (1) 自体は $S < S_N$ の S でも成り立つかもしれず、この定理はそれについて何も言いません。
3. これは**真の率が S_N であることも言いません**。率の下界（逆向き）は無いままです。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 塊の評価 (2)：全ての実の β、$mk \le M$。Lean：`TwistBlocks.block_bound_abs`・`Keff_le`	塊の形が混ざるときの塊ごとの積の形
初 粗い Laplace の下界 (3) と K_{eff} の上界 (4)：$\beta \ge 0$、$\delta > 0$。Lean：`CoarseLaplace.laplace_lower`・`TwistBlocks.Keff_le_laplace`	D の値。前因子の鋭い形。$\beta < 0$
初 符号の標準形の補題：$mk \le M$。Lean：`TwistBlocks.canon_holds`	—
初 費用の形のコンパクト性。Lean：`ThickFloor.small_action_cost`	γ の値
初 捩れたトーラスの剛性：全ての $N \ge 1$。Lean：`TwistBlocks.rigidT_all`、`ThickFloor.anticomm_conj`	局所の模型のリンク全体での等式（面に現れるリンクの上だけ）
初 途中の含意の環 1〜6（と 1+2）と、最後の定理で仮定が払われたこと（§07）	途中の環だけで中身が出ること
初 方法の限界：$S < S_N$ で反転の費用の上界は偽。Lean：`TwistBlocks.H4_fails_below`	床そのものの否定。真の率が S_N であること
読 塊の形が混ざる例の数（0.0862 対 0.3364）	—

出典と再現

もの	種別	出典・道具
枠を止めた塊の条件つきの独立	典	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 123 (1979) 442・125 (1980) 117（本文はこの本では未確認。型は 25-03 の容器と同じ）。T. G. Kovács, E. T. Tomboulis, arXiv:hep-lat/0108017
捩れた平坦な接続	典	G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141（書誌は 25-01 と同じ）
Laplace の方法の下界	初	Laplace の方法の、定数を陽にしない弱い形。証明は本文 §03
各部品の言明（Lean 4 で機械検査）	初	Lean の束（塊の評価、Laplace、標準形、コンパクト性、四元数、剛性、移し替え、方法の限界）。標準の三つの公理、sorry なし
塊の形が混ざる例	読	本書の検討の数値の記録（$\mathbb{Z}_2$ の小さい模型の総当たり）

この章で使った語 — 塊・枠・内部・類・実効の結合 K_eff・粗い Laplace の下界・符号の標準形の補題・費用の形のコンパクト性・反交換する組・捩れたトーラスの剛性・局所の剛性・

途中の含意・方法の限界。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：21-05 渦の最小作用 — 正であること・上界の証明書 — 床の指数 S_N の値について言えること。

渦の最小作用 — 正であること・上界の証明書

この章は本書の検討です。§05 の上界は計算機援用の証明書で、解析の証明の支えとして置きます。

この章で分かること — 太い渦の床の指数に現れる量 S_N（渦の最小作用）について、Lean で機械検査した二つの事実を読みます。一つは、全ての $N \geq 1$ で $S_N > 0$ であり、しかも塊の大きさ m に一様な正の下界があること。もう一つは、$N = 2, 3, 4$ で S_N が薄い渦の値 $2N^2$ より小さいことを示す上界の証明書です。

前提となる章 — 19-02 渦の最小作用の定義・渦の比 θ_M、21-02 薄い渦の床、21-03 太い渦の床

先に言うこと — 言えたのは「正であること」と「上界」だけです。S_N の値は分かっていません。下界 δ はコンパクト性から来るので陽な数ではなく、横の大きさ N に一様でもありません。上界は $m = 8$（$N = 4$ は $m = 4$）の一つの配位の作用で、m についての下限の値ではありません。格子間隔は固定で、連続極限・質量ギャップについては何も言いません。

この章の順序

1. 渦の最小作用 — 定義の要点と自明な上下
2. S_N は正 — 言明と意味
3. 正であることの道筋 — ラベルと望遠鏡の積
4. 寄り道：背景の捩れが効く場所
5. N = 2・3・4 の上界 — 言明
6. 証明書の作り — 有理数の単位四元数と上への丸め
7. 薄い渦の床との比べ — 率の比べとその限り
8. 言っていないこと

01

渦の最小作用 — 定義の要点と自明な上下

定義は 19-02 にあります。ここでは要点だけを繰り返します。

格子は横 $(\mathbb{Z}/N)^2$、縦 $(\mathbb{Z}/2m)^2$ のトーラスです。縦の $(3,4)$ の平面の中に原点の塊 $b_0 = \{0,\dots,m-1\}^2$（面の根もとの縦の点の集合）を取り、横のトーラス T^2_N との積を考えます（記号は 19-02 と同じ）。塊の枠（線 $x_3 \in \{0,m\}$ と $x_4 \in \{0,m\}$ の上のリンク）は**捩れた真空** V に止めます。V は、向き 1 のリンクが $x_1 = 0$ で四元数の i、向き 2 のリンクが $x_2 = 0$ で j、他は全て 1 の配位です。背景の捩れ $n_{12} = 1$ のもとで、V の作用は 0 です。

塊の角 $(x_3,x_4) = (0,0)$ の $(3,4)$ の面を横の N^2 個の位置の全てで集めたものを $\Pi_{(0,0)}$ とし、その符号を反転します（$p \in \Pi_{(0,0)}$ で $\eta_p = -1$、他は $\eta_p = +1$）。根が b_0 に入る全ての面の作用の和を

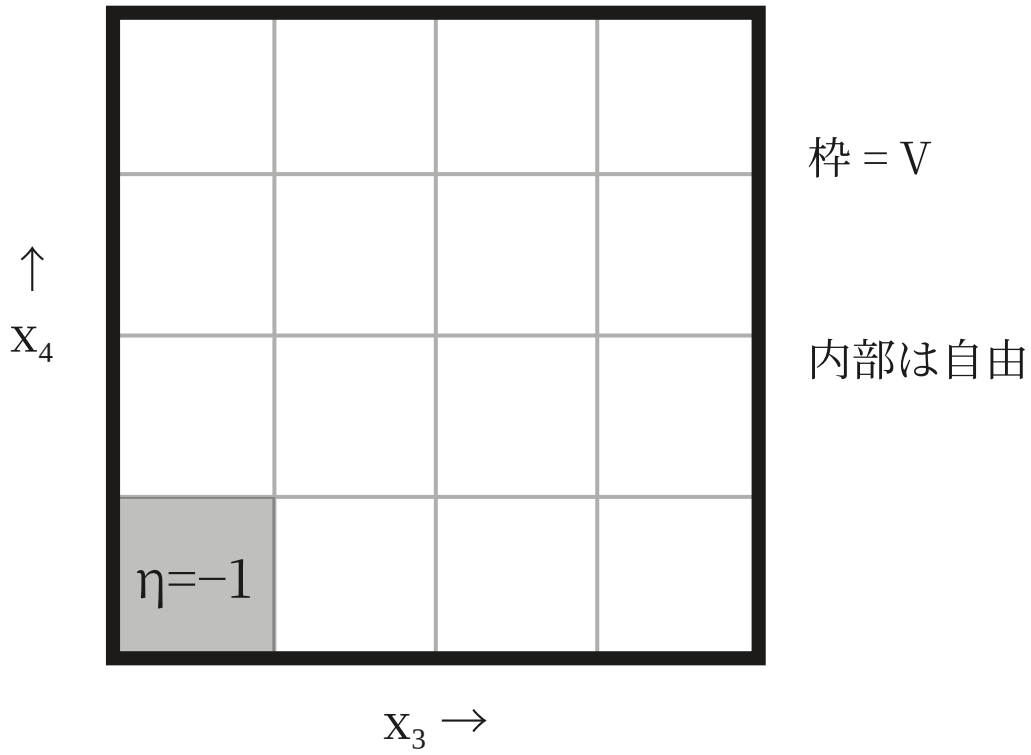
$$S(U;\eta) = \sum_{p:\ \mathrm{root}\in b_0} \bigl(1 - z_p\,\eta_p\,\mathrm{Re}\,U_p\bigr) \tag{1}$$

とします（作用の記号は 21-03 と同じ）。z_p は背景の捩れの符号です。β は掛けていません。内部のリンクの全ての配位についての下限と、塊の大きさについての下限を

$$S_{\mathrm{v}}(N,m) = \inf_{\text{interior}} S(U;\eta), \qquad S_N = \inf_{m\ge 1} S_{\mathrm{v}}(N,m) \tag{2}$$

と書きます。Lean の定義は `TwistBlocks.Svortex` と `TwistBlocks.SN` です。枠が真空なのに角の符号が一つ反転しているので、塊の中のどこかで渦の面が横のトーラスを一周して通らなければなりません。$S_{\mathrm{v}}(N,m)$ は、その渦を一本通す最小の作用です。

図 1　$(3,4)$ の平面の塊（$m=4$ の例）。塊 b_0 の升に、枠の線 $x_3,x_4\in\{0,m\}$ を太線で描く（捩れた真空に固定）。影の升が角の反転 $\Pi_{(0,0)}$ の位置。各点の上に横のトーラス T^2_N が載る



自明な上下が二つあります。初 $|\mathrm{Re}\,U_p| \le 1$ なので (1) の各項は 0 以上で、$S_{\mathrm{v}}(N,m) \ge 0$ です。初 内部も V にした配位では、反転した N^2 枚の面だけが $1-(-1)\cdot 1 = 2$ ずつを出し、他は 0 なので、作用はちょうど $2N^2$ です。よって $0 \le S_N \le 2N^2$ です（Lean：`TwistBlocks.Svortex_le`・`TwistBlocks.SN_bounds`）。この $2N^2$ は、反転を一層の面に集めた「薄い渦」の値で、薄い渦の床の指数に当たります。読 $N=1$ では $S_1 = 2 = 2N^2$ で、太い渦は得をしません（本書の検討の数値の記録）。

S_N は 太い渦の床 の指数に $e^{-\beta(S_N+\varepsilon)}$ の形で現れます。この章の二つの事実は、その指数の数について、下から（正であること）と上から（$N=2,3,4$ の証明書）言えることです。太い渦の床の Lean の証明は、この章の二つの事実を使っていません。

02

S_N は正 — 言明と意味

渦の最小作用の正値性。 全ての $N \ge 1$ について、N だけに依る $\delta > 0$ が在り、

$$\delta \le S_{\mathrm{v}}(N,m) \quad (\text{all } m \ge 1), \qquad \text{hence} \qquad S_N > 0. \tag{3}$$

Lean：`VortexPos.Svortex_ge_unif`（$\exists\,\delta>0,\ \forall m \ge 1,\ \delta \le S_{\mathrm{v}}(N,m)$。全ての $N \ge 1$、仮定の欄なし）と `VortexPos.SN_pos`（$0 < S_N$）。

量化の順が要点です。δ は先に決まり、m に依りません。塊をどれほど大きくして渦を広げても、作用は δ より小さくなりません。もし m ごとに正なだけなら、$m \to \infty$ で 0 に近づく可能性が残り、下限 S_N は 0 になりえます。

δ の値は分かりません。証明は「作用が小さければ配位は真空のゲージ軌道に近い」という事実を、距離の陽な評価ではなく**コンパクト性**で使います。だから δ は在ることだけが言え、数は出ません。読 数値では $S_{\mathrm{v}}(2,m)$ は $m=3$ から 8 で 7.0 から 6.67 ほどで（本書の検討の数値の記録）、δ はそれよりずっと小さいかもしれません。

典 この定理は、捩れた箱の中で渦（分数インスタントン）の作用が正である、という既知の描像（'t Hooft の捩れた境界条件、25-02）の、格子の上での形式化です（Lean：`VortexPos.SN_pos`）。道具はコンパクト性と剛性だけです。

03

正であることの道筋 — ラベルと望遠鏡の積

背理法で進みます。作用がとても小さい配位を一つ取り、それが角の反転と両立しないことを示します。

段 1　部品に分ける。 塊の (3,4) の平面の点 $s=(i,j)$（$0 \le i,j \le m$）ごとに、その上の横のトーラス T^2_N（向き 1・2 のリンク）を**繊維**と呼びます。作用 (1) を三種の部品に分けます。

- 繊維の作用 a_s：繊維の (1,2) の面の項の和。
- リンクの欠け b_λ：隣り合う二点を結ぶ向き 3・4 のリンク（N^2 本）が、二つの繊維をどれだけうまく結んでいないか。単位四元数では $\|X-Y\| = \sqrt{2(1-\mathrm{Re}\,XY^*)}$ なので、$b_\lambda \le 2N^2\sqrt{2S}$（$S$ は塊の作用）です 初 。Lean の証明の中でもこの評価を使います（`VortexPos.linkH_le`・`linkV_le`）。
- 升の部分 p_P：(3,4) の平面の升 P の上の N^2 枚の面の項の和。

繊維の作用と升の部分は (1) の部分和なので S 以下です。

段 2　繊維は真空に近い。 捩れた T^2_N の上で作用 0 の配位は、捩れた真空のゲージ軌道にあります（Lean：`TwistBlocks.rigidT_all`）。コンパクト性から、繊維の作用が小さければ繊維は真空のゲージ軌道に近い、が出ます。真空を止めるゲージ変換は定数 ± 1 だけで、これもコンパクト性で「ほぼ止めるなら ± 1 に近い」に延ばします。

段 3　ラベルを付ける。 各点 s で繊維を真空に合わせるゲージ g_s を取ります。枠の上では繊維がちょうど真空なので $g_s = 1$ に取ります。各リンク λ で $g_s^{-1}U_\lambda g_{s'}$ は定数 $+1$ か -1 に近

く、その符号をラベル $c(\lambda) \in \{\pm 1\}$ とします。枠の線の上のリンクは真空で 1 なので $c = +1$ です。

段 4　升ごとの両立。 升 P の上の面の積は、ゲージで挟むと $h_1 h_2 h_3^{*} h_4^{*}$ の形で、それは $\prod_{\lambda \in \partial P} c(\lambda)$ に近い値です。もし $\eta(P) \neq \prod_{\partial P} c$ なら、面の項は $2 - 4\varepsilon$ 以上になります（$\varepsilon = 1/8$ で $3/2$）。部品が全て小さいなら、全ての升で $\eta(P) = \prod_{\partial P} c$ です。

段 5　望遠鏡の積。 全ての升について $\prod_{\partial P} c$ を掛けると、内部のリンクは二回ずつ現れ、枠のリンクは 1 なので、積は 1 です[初]。ところが η は角の一つの升だけ -1 なので $\prod_P \eta(P) = -1$ です。矛盾します。

段 6　結論。 よってどれかの部品が閾 δ_0 以上です。繊維・升なら $S \geq \delta_0$、リンクなら $2N^2\sqrt{2S} \geq \delta_0$ です。合わせて

$$S_{\mathrm{v}}(N, m) \;\geq\; \delta := \min\!\left(\delta_0,\; \frac{\delta_0^2}{32N^4 + 1}\right) \tag{4}$$

が全ての $m \geq 1$ で成り立ちます。δ_0 は段 2 のコンパクト性から来るので陽ではありません。Lean の芯は `TwistBlocks.grid_vortex_floor` の形の補題で、部品の欄を `VortexPos.Svortex_ge_unif` の中で全て払っています。

寄り道：背景の振れが効く場所

飛ばしてよい。段 3 でラベルが $\{\pm 1\}$ に落ちるのは、捩れた真空を止めるゲージ変換が定数 ± 1 だけだからです（Lean：`TwistBlocks.stab_vacT`）。捩れた真空のリンクには i と j が現れ、i と j の両方と可換な単位四元数は ± 1 だけです[初]。だから各リンクの「ずれ」は中心 $\{\pm 1\}$ の元に近くなり、升ごとの両立と望遠鏡の積という $\mathbb{Z}_2$ の勘定に乗ります。角の反転は $\mathbb{Z}_2$ の勘定では消せない、というのが証明の芯です。

04

N = 2・3・4 の上界 — 言明

上からの側は、具体の配位を一つ示せば言えます。$S_{\mathrm{v}}(N, m)$ は下限なので、どの配位の作用もその上界です。Lean で機械検査した上界は次の三つです[機]。

N	塊の一辺 m	上界	系	Lean の宣言
2	8	$S_{\mathrm{v}}(2,8) \leq 667401/100000$	$S_2 < 8 = 2 \cdot 2^2$	`VortexCert.Svortex_two_eight_le` ・ `SN_two_le` ・ `SN_two_lt`
3	8	$S_{\mathrm{v}}(3,8) \leq 909321/100000$	$S_3 < 18 = 2 \cdot 3^2$	`VortexCert.Svortex_three_eight_le` ・ `SN_three_le` ・ `SN_three_lt`

N	塊の一辺 m	上界	系	Lean の宣言
4	4	$S_{\mathrm{v}}(4,4) \le 1202057/100000$	$S_4 < 32 = 2\cdot 4^2$	`VortexCert.Svortex_four_four_le` ・ `SN_four_le` ・ `SN_four_lt`

どれも仮定の欄はありません。$S_N \le S_{\mathrm{v}}(N,m)$ は下限の定義から出ます（Lean：`VortexCert.SN_le_Svortex`）。

太い渦の床に入れると、指数が陽な数になります。Lean：`TwistBlocks.thick_vortex_floor_two`（仮定の欄なし）は、十分大きい β ごとに十分大きい M で

$$|\theta_{M+1}(\beta)| \;\le\; \exp\!\big(-(M+1)^2\, e^{-6.675\,\beta}\big) \tag{5}$$

を言います。`TwistBlocks.thick_vortex_floor_three` は指数の数 9.094、`TwistBlocks.thick_vortex_floor_four` は 12.021 です。証明は、太い渦の床（21-03、`TwistBlocks.thick_vortex_floor`）の ε を「指数の数 $-\,S_N$」に取るだけです。上界の証明書から $\varepsilon > 0$ が出ます。

読み方の注意を一つ。言えたのは**上界だけ**です。「$S_2 = 6.674$」とは書けません。$m=8$（$N=4$ は $m=4$）の一点の配位なので、m についての下限の値でもありません。読 $N=4$ の配位は $m=4$ の、収束しきっていない数値の最小化から来ていて、S_4 の本当の値はもっと小さいかもしれません。

05

証明書の作り — 有理数の単位四元数と上への丸め

証明書は計算機援用です機。解析の証明の柱ではなく、「上界を与える配位を一つ示す」ための支えとして置きます。作りは四段です。

(a) 配位を有理数にする。 数値の最小化（冷却）で得た内部のリンクの値 $q=(q_0,\mathbf{q})$ を、$\tau = \mathbf{q}/(1+q_0)$ にしてから $t/2^{16}$（$t\in\mathbb{Z}^3$）に丸めます。そこから Cayley の形

$$q = \frac{\big(s^2-|t|^2,\; 2s\,t\big)}{s^2+|t|^2}, \qquad s = 2^{16} \tag{6}$$

で四元数を作ります。初 $(s^2-|t|^2)^2 + 4s^2|t|^2 = (s^2+|t|^2)^2$ なので、ノルムは**ちょうど** 1 です。平方根は要りません（Lean：`VortexCert.normSq_cay`）。

(b) 面ごとに上へ丸める。 面の項 $1 - z_p\eta_p\,\mathrm{Re}(ABC^*D^*)$ は、四本のリンクが有理数なので有理数です。これを 2^{-32} の単位で**上へ**丸めた整数を足します。上への丸めなので、整数の和 $/2^{32}$ は塊の作用の上界です。

(c) 核で数える。 整数の不等式、たとえば $N=2$ では「和 $\times 100000 \le 667401 \cdot 2^{32}$」を、Lean の核での有限の計算（`decide +kernel`）で確かめます（Lean：`VortexCert.certN2`・`certN3`・`certN4`）。面の数は $N=2$ で 1536 枚、$N=3$ で 3456 枚、$N=4$ で 1536 枚です。

(d) 実の上界に写す。 健全性の定理 `VortexCert.Svortex_le_of_cert` は、整数の不等式から $S_{\mathrm{v}}(N,m) \le b_n/b_d$ を出します。仮定は整数の不等式（と分母が正であること）だけです。表の値がどうであれ、(6) の形なので各リンクは単位四元数で、枠の値は定義の側で V に固定され、背景と角の符号は定義と一致することが Lean の中で示されています。だから証明書の配位は、(2) の下限を取る集合に**構成の上で**入っています。

読 有理数の配位の作用は $N=2$ で 6.6740076、$N=3$ で 9.0932068、$N=4$ で 12.0205673 で、丸めで増えた分は 4×10^{-7} 未満です（本書の検討の数値の記録、分数で丸めなしに計算）。Lean の上界は、それぞれ 10^{-5} 刻みで通る最小の数です。

Lean が確かめているのは整数の多項式の評価だけです。配位がどこから来たか（冷却が最小に近いかどうか）は、上界の正しさに関係しません。

06

薄い渦の床との比べ — 率の比べとその限り

薄い渦の床は $|\theta_M| \le \tanh(N^2|\beta|)^{M^2} = \exp(-M^2\sigma_0)$、$\sigma_0 = -\ln\tanh(N^2|\beta|)$ です。初 $\beta \to \infty$ で $\sigma_0 = 2e^{-2N^2\beta}(1+o(1))$ なので、薄い方の係数の減り方の率は $2N^2$ です。太い渦の床 (5) の率は $S_N + \varepsilon$ です。$N=2$ では $6.675 < 8$ で、$\beta \to \infty$ の率として、太い方の係数が指数的に大きくなります。

この比べには三つの限りがあります。

- **Lean の定理ではありません。** Lean に在るのは数の不等式 $6675/1000 < 2 \cdot 2^2$（`TwistBlocks.thick_vortex_floor_two_rate_lt`）と、二つの床のそれぞれだけです。「太い渦の床が薄い渦の床より強い」こと自体は、手で並べた数の比べです。
- **β が小さいと逆です。** 読 $e^{-6.675\beta}$ が $-\ln\tanh 4\beta$ を上回るのは $\beta > 0.523$ からです。$\beta=1$ で 1.26×10^{-3} 対 6.71×10^{-4}、$\beta=2$ で 1.59×10^{-6} 対 2.25×10^{-7} です。
- **闘が陽でありません。** 太い渦の床の β_0 と $M_0(\beta)$ は陽でないので、「$\beta > 0.523$ の具体の (β, M) で太い方が小さい」とは言えません。言えるのは $\beta \to \infty$ での率の比べです。

N	薄い渦の率 $2N^2$	S_N の上界（Lean）	太い渦の床の指数の数（Lean）
1	2	—（読 $S_1 = 2$）	—

N	薄い渦の率 $2N^2$	S_N の上界（Lean）	太い渦の床の指数の数（Lean）
2	8	6.67401	6.675
3	18	9.09321	9.094
4	32	12.02057	12.021

一般の N で $S_N < 2N^2$ は Lean にありません。$N = 1$ では得がありません。

07

言っていないこと

- S_N の値。言えたのは $0 < S_N$（陽でない δ で）と、$N = 2, 3, 4$ の上界だけです。
- δ の数。剛性の定量の評価（作用と真空からの距離の陽な関係）が要ります。
- N に一様な下界・上界。N を変えると繊維の配位の空間が変わり、この議論は N ごとです。
- 太い渦の床の逆向き（θ の下界、率の上界）。逆向きの定理はありません。
- 帯（渦の比 θ が箱の面積の指数で小さくなること、すなわち $-\ln\theta$（板の張力に面積を掛けた量に当たる）が面積に比例して増えることを、横と縦の大きさと結合を一緒に動かして一つの定数で言う言明。19-07）。この章の量は格子間隔と横の大きさ N を止めた形です。21-08 で距離を見ます。
- 格子間隔は固定で、連続極限・四次元の面積則・質量ギャップのどれも言っていません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
Lean `TwistBlocks.Svortex_le`・`TwistBlocks.SN_bounds`：$0 \le S_{\mathrm{v}}(N,m) \le 2N^2$、$0 \le S_N \le 2N^2$（真空に反転を入れた配位）	S_N の値
Lean `VortexPos.Svortex_ge_unif`・`SN_pos`：全ての $N \ge 1$ で、m に一様な $\delta > 0$ があり $S_N \ge \delta > 0$	δ の数（コンパクト性から）。N に一様な下界
機 $S_{\mathrm{v}}(2,8) \le 6.67401$、$S_{\mathrm{v}}(3,8) \le 9.09321$、$S_{\mathrm{v}}(4,4) \le 12.02057$、よって $S_N < 2N^2$（$N = 2, 3, 4$）	m についての下限の値。一般の N で $S_N < 2N^2$
Lean `TwistBlocks.thick_vortex_floor_two`・`_three`・`_four`：十分大きい β ごとに十分大きい M で、指数の数 6.675・9.094・12.021 の床	β_0・$M_0(\beta)$ の値
読 $N = 2$ の太い渦の床の係数が薄い方を上回るのは $\beta > 0.523$ から	「太い渦の床が強い」こと自体は Lean の定理ではない（率の比べ）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
捩れた境界条件と流束の自由エネルギー	典	G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141（書誌は 25-01 と同じ）
分数インスタントンの作用と希薄な気体の描像	典	Y. Tanizaki, M. Ünsal, arXiv:2201.06166（25-02 で確認した範囲）
正であることの道筋（段 1〜6）	初	本文 §03。Lean：`VortexPos.Svortex_ge_unif`・`VortexPos.SN_pos`、芯の補題 `TwistBlocks.grid_vortex_floor`、繊維の剛性 `TwistBlocks.rigidT_all`
上界の証明書	機	Cayley の形の有理数の配位（$s = 2^{16}$）、面ごとに 2^{-32} で上へ丸めた整数の和、Lean の核での評価（`decide +kernel`）。健全性 `VortexCert.Svortex_le_of_cert`。`VortexCert.certN2`・`certN3`・`certN4`
作用の値・$S_1 = 2$・$\beta > 0.523$	読	本書の検討の数値の記録（Lean の定義から書き起こした台本で、分数で丸めなしに作用を計算。上界の最後の桁を一つ下げると通らないことも確かめた。交わりの β は浮動小数の根の探索）
太い渦の床の系	—	Lean：`TwistBlocks.thick_vortex_floor_two`・`_three`・`_four`、数の不等式 `TwistBlocks.thick_vortex_floor_two_rate_lt`。本体は 21-03

この章で使った語 — 渦の最小作用 $S_{\mathrm{v}}(N, m)$・S_N・捩れた真空・繊維・リンクの欠け・ラベル・望遠鏡の積・Cayley の形・上への丸め・証明書・率の比べ。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：21-06 θ の符号と Polyakov ループの対 — 渦の比 θ が負にならないことと、θ が Polyakov ループの相関を抑えること。

θ の符号と Polyakov ループの対

この章は本書の検討です。

この章で分かること — 横 N・縦 M のトーラスで、M が偶数なら全ての実の β で $Z_1 \le Z_0$、すなわち $\theta_M \ge 0$ であること。同じ鏡映の道具で、向き 3 を一周する二本の Polyakov ループの相関が、距離 $M/2$ では $2\sqrt{\theta}/(1+\theta)$ で、一般の時間差 T では $2\tanh(N^2|\beta|)^{M\min(T,M-T)}$ で抑えられること。どれも Lean で機械検査した、既知の型の評価の形式化です。

前提となる章 — 19-02 捩れ・渦の比・Polyakov ループ、19-03 鏡映、21-02 薄い渦の床、21-03 太い渦の床

先に言うこと — 期待値 $\langle\cdot\rangle_0$ は、背景の捩れ $n_{12}=1$ つき・(3,4) の捩れなしの、有限の格子の Wilson 測度についてのものです。言えるのは横 $N\times N$ の管の中の、エネルギーの線形の**下界**で、N に一様ではありません。格子間隔は固定です。四次元の閉じ込め・面積則・質量ギャップのどれも言っていません。M が奇数の場合は入っていません。

この章の順序

1. 期待値 $\langle\cdot\rangle_0$ と Polyakov ループ
2. 時間の向きの鏡映で格子を二つの半分に割る
3. θ ≥ 0 — 言明と証明
4. 距離 M/2 の Polyakov ループの対と θ
5. 一般の時間差 — 鏡映を繰り返す
6. 寄り道：M・N の偶奇と β の符号の範囲
7. 読み方 — 管の中のエネルギーの線形の下界
8. 言っていないこと

01

期待値 $\langle\cdot\rangle_0$ と Polyakov ループ

格子は横 $(\mathbb{Z}/N)^2$（向き 1・2）、縦 $(\mathbb{Z}/M)^2$（向き 3・4）のトーラスです。定義は 19-02 にあります。背景の捩れ $n_{12}=1$ のもとで、(3,4) の捩れなし・ありの分配関数を Z_0・Z_1 とし、渦の比を $\theta_M=(Z_0-Z_1)/(Z_0+Z_1)$ と書きます（19-02）。

この章の期待値は

$$\langle F\rangle_0=\frac{1}{Z_0}\int F(U)\,w_0(U)\,dU,\qquad w_0(U)=\exp\Big(\beta\sum_p z_p^{(0)}\,\mathrm{Re}\,U_p\Big) \tag{1}$$

です。dU は Haar の積、$z_p^{(0)}$ は背景の捩れ $n_{12}=1$ だけの符号です。**(3,4) の捩れは入っていません**。Lean では重み `wE N M β (fun _ => 1)`、割る数 `ZW N M β true false` です。

Polyakov ループは、横の位置 $b=(x_1,x_2)$・向き 4 の位置 t で、向き 3 を一周するリンクの積の実部です（19-02）。

$$P_b(t)=\mathrm{Re}\prod_{k=0}^{M-1}U_3\big((b),(k,t)\big) \tag{2}$$

四元数の実部は基本表現の $\frac12\,\mathrm{tr}$ で、$|P_b(t)|\le 1$ です。Lean では `HalfSplit.polyLoop`、対の期待値は `PolyakovT.polyExp` です。

初 一本の期待値 $\langle P_b(t)\rangle_0$ は 0 です。$x_3=0$ の向き 3 のリンクを全て -1 倍すると、どの面も反転するリンクを 0 本か 2 本含むので w_0 は変わらず、$P_b(t)$ だけが符号を変えるからです。意味のある量は対の相関 $\langle P_b(0)P_{b'}(T)\rangle_0$ です。

02

時間の向きの鏡映で格子を二つの半分に割る

M が偶数のとき、鏡映 $\Theta:\ x_4\mapsto -x_4$ は二枚の格子点の面 $x_4=0$ と $x_4=M/2$ を止めます。向き 1・2・3 のリンクは位置だけを写し、向き 4 のリンクは向きを逆にして値を逆元にします（鏡映の一般の形は 19-03）。

面が格子点を通るので、面を横切る升はありません。二枚の面の上の升（向き 4 を含まない升）は、上と下の半分に半分ずつ配ります。そうして作った**半分の重み**

$$a_\eta(U)=\exp\Big(\beta\sum_p c_p\,z_p\,\eta_p\,\mathrm{Re}\,U_p\Big),\qquad c_p\in\{1,\tfrac12,0\} \tag{3}$$

（上の半分で 1、面の上で $\frac{1}{2}$、下で 0）は、閉じた上の半分のリンクだけに依ります。そして重み全体が

$$w_\eta(U) = a_{\eta_1}(U)\, a_{\eta_2}(\Theta U) \tag{4}$$

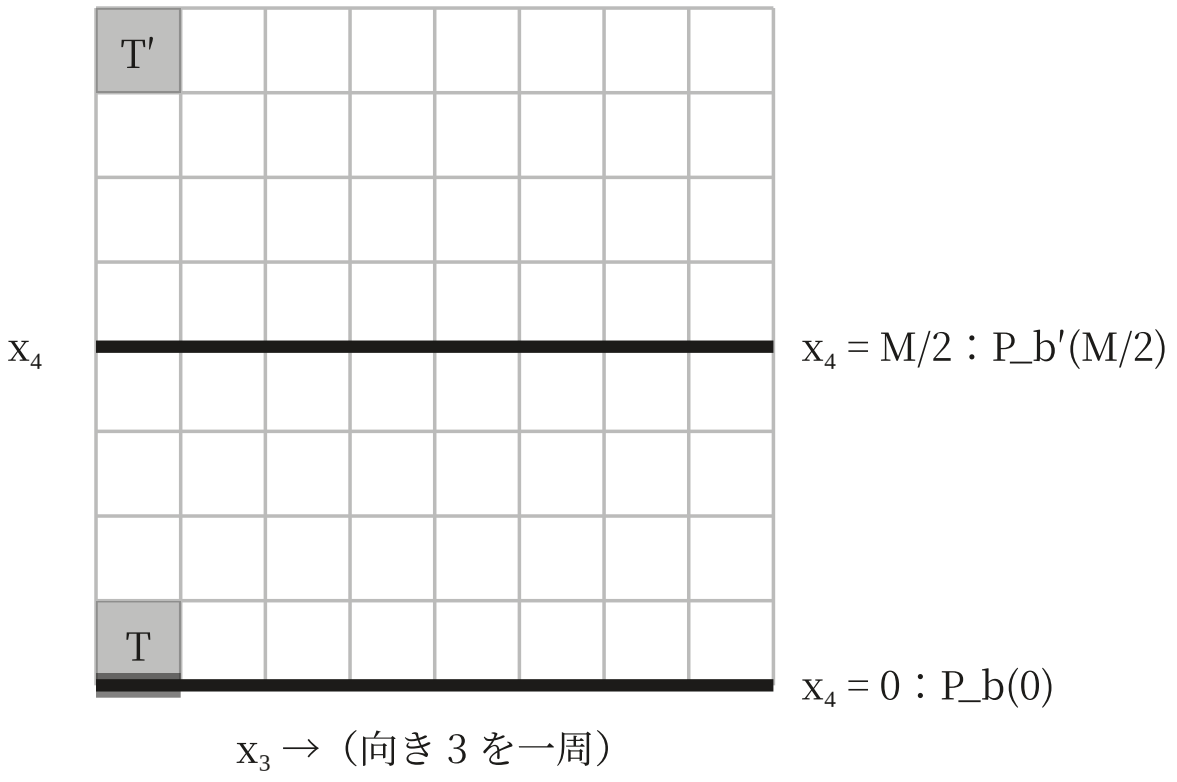
と割れます。ここで η は、上の半分の (3,4) の面の符号を η_1、下の半分を η_2 の鏡像で与えたものです（Lean：`HalfSplit.half_split`）。

Haar の積は鏡映で不変で、閉じた上の半分だけに依る有界可測な g について

$$\int g(\Theta U)\, g(U)\, dU \;\geq\; 0 \tag{5}$$

が成り立ちます（鏡映正値性。Lean：`HalfSplit.half_pairing_nonneg`）。重みは (4) で g の側に吸い込まれるので、β の符号の条件は要りません。[典] この形は Osterwalder–Seiler の鏡映正値性の型で、`HalfSplit.half_pairing_nonneg` はその捩れつきの格子での形式化です（19-03）。

図 1　縦の (3,4) の平面（$M = 8$ の例、横の T^2_N は省略）。太い横線が鏡映の面 $x_4 = 0$ と $x_4 = M/2$。その上に二本の Polyakov ループが載る。影の升が反転 T（$(0,0)$）と、その鏡像 T'（$(0,-1) = (0, M-1)$）。印のリンクが §04 の符号の反転 c



図は二枚の面と、§03・§04 で使う反転の位置を示すだけで、数値はありません。

03

θ ≥ 0 — 言明と証明

渦の比の符号。 M が偶数なら、全ての実の β と全ての $N \geq 1$ で

$$Z_1 \leq Z_0, \qquad \text{equivalently} \qquad 0 \leq \theta_M(\beta). \tag{6}$$

Lean：`HalfSplit.Z1_le_Z0`（M が偶数、全ての実の β）、`TwistBlocks.theta_nonneg`（同じ範囲で $0 \leq \theta_M$）。

証明。 角の (3,4) の面 $(x_3, x_4) = (0, 0)$ の符号を横の全ての位置で反転したものを T とし、$g = a_1 - a_T$ を (5) に入れます。(4) で展開すると

$$0 \leq \int g(\Theta U) g(U)\, dU = Z[1] - Z[T] - Z[T'] + Z[TT'] \tag{7}$$

です。T' は T の鏡像の位置 $(0, -1)$ の反転、TT' は二枚の反転です。初 分配関数は反転の位置に依らず、反転の積 $\prod \eta$ だけで決まります（反転の位置は、切り口のリンクの符号を変える変数変換で動かせます。Lean：`TwistedWilson.ZEta_flip_any`・`TwistedWilson.ZEta_parity`）。よって $Z[T] = Z[T'] = Z_1$、$Z[TT'] = Z_0$ で、(7) は $0 \leq 2Z_0 - 2Z_1$ です。□

この評価は 太い渦の床 の絶対値を外します。Lean：`TwistBlocks.thick_vortex_floor_signed`（全ての $N \geq 1$）は、任意の $\varepsilon > 0$ について、十分大きい β ごとに十分大きい M で、$M + 1$ が偶数なら

$$0 \leq \theta_{M+1}(\beta) \leq \exp\!\left(-(M+1)^2 e^{-\beta(S_N + \varepsilon)}\right) \tag{8}$$

を言います。β と M の閾は陽でありません。

M が奇数は入っていません。二枚目の面 $x_4 = M/2$ が格子点に来ないからです。しかも M が奇数・$\beta < 0$ では $\theta \geq 0$ は破れえます。読 $N = 1$・$M = 1$・$\beta = -1.5$ で $\theta = -0.055 \pm 0.005$ でした（SU(2) の Monte Carlo、本書の検討の数値の記録）。$\beta \geq 0$ なら転送行列の正値性から偶奇に依らず成り立つ見込みですが、この本では確かめていません。初 なお $\theta_M < 1$ は全ての M で $Z_1 > 0$ から出ます（Lean：`TwistBlocks.theta_lt_one`）。

04

距離 M/2 の Polyakov ループの対と θ

θ による Polyakov ループの対の評価。 M が偶数なら、全ての実の β と全ての横の位置 b, b' で

$$\left|\langle P_b(0)\,P_{b'}(M/2)\rangle_0\right| \;\le\; \frac{2\sqrt{\theta_M}}{1+\theta_M}. \tag{9}$$

Lean：`HalfSplit.polyakov_pair_theta`（M が偶数、全ての実の β）。左辺は (1) の期待値で、割る数は Z_0 です。

θ は流束の自由エネルギー $\Delta F = \ln(Z_0/Z_1)$ から $\theta = \tanh(\Delta F/2)$ で決まる量で（19-02。この本の 26-03 は ΔF を「渦の自由エネルギー」とも呼びます）、(9) はそれが**長い距離のループの相関を上から抑える量**であることを言います。典 捩れた分配関数の比で長いループを抑える評価は、Tomboulis–Yaffe の流束の自由エネルギーの議論の系統に属し、`HalfSplit.polyakov_pair_theta` はその系統の、Polyakov ループの対の $T = M/2$ の形の形式化です（原論文の不等式は Wilson ループについてのもので、本文は未確認）。

道筋。

1. **中心の符号の反転 c。** $(x_3, x_4) = (0,0)$ の向き 3 のリンク（横の N^2 本）を -1 倍します。Haar の積は変わりません。(1,3)・(2,3) の面は反転するリンクを二本含むので変わらず、(3,4) の面では T と T' の二枚だけが符号を変えます（図 1 の印のリンク）。よって $w_0(cU) = w_{TT'}(U)$ です。
2. **ループの偶奇。** $P_b(0)$ は一周の最初のリンクだけが反転して符号を変え、$P_{b'}(M/2)$ は変わりません。積 $\psi = P_b(0)P_{b'}(M/2)$ は $\psi(cU) = -\psi(U)$ なので、$\int \psi w_0 = \frac{1}{2}\int \psi\,(w_0 - w_{TT'})$ です。
3. **和と差に書く。** $a_\pm = a_1 \pm a_T$ とすると、(4) から $w_0 - w_{TT'} = \frac{1}{2}\big[(a_+ \circ \Theta)a_- + (a_- \circ \Theta)a_+\big]$ です。
4. **Cauchy–Schwarz。** ψ は二枚の面の上のリンクだけに依り（図 1）、Θ で変わらず、$|\psi| \le 1$ です。ψ を挟んだ鏡映の対で Cauchy–Schwarz を使い、$\langle a_\pm, a_\pm\rangle = 2(Z_0 \pm Z_1)$ を入れると $|\int \psi w_0| \le \sqrt{Z_0^2 - Z_1^2}$ です（Lean：`HalfSplit.odd_fix_bound`）。
5. **割る。** $\sqrt{Z_0^2 - Z_1^2}/Z_0 = 2\sqrt{\theta}/(1+\theta)$ です初。□

読 強さの目安：$\mathbb{Z}_2$ の部分群・$N = 1$・$M = 2$ の全ての配位の和では (9) は等号です。SU(2) の標本では右辺は左辺の 3〜6 倍でした（本書の検討の数値の記録）。

(9) に床を入れると、ループの相関の床になります。$2\sqrt{\theta}/(1+\theta) \le 2\sqrt{\theta}$ と 薄い渦の床 $\theta \le \tanh(N^2|\beta|)^{M^2}$ から $|\langle P_b(0)P_{b'}(M/2)\rangle_0| \le 2\tanh(N^2|\beta|)^{M^2/2}$（$M$ が偶数、全ての実の β。Lean：`PolyakovT.half_pair_tanh`）。符号つきの床 (8) からは、Lean：`HalfSplit.polyakov_pair_floor`（全ての $N \ge 1$）で、任意の $\varepsilon > 0$ について十分大きい β ごとに十分大きい M で、$M+1$ が偶数なら

$$\left|\langle P_b(0)\,P_{b'}\left(\tfrac{M+1}{2}\right)\rangle_0\right| \;\le\; 2\exp\!\Big(-\tfrac{1}{2}(M+1)^2 e^{-\beta(S_N+\varepsilon)}\Big) \tag{10}$$

（格子は縦 $M+1$）。閾は陽でなく、係数 $e^{-\beta(S_N+\varepsilon)}$ は $\beta\to\infty$ で指数的に小さくなります。

05

一般の時間差 — 鏡映を繰り返す

一般の時間差の Polyakov ループの対。 $M\equiv 0 \pmod 4$ なら、全ての実の β、全ての $0\le T\le M$、全ての b,b' で

$$\left|\langle P_b(0)\,P_{b'}(T)\rangle_0\right| \;\le\; 2\,\tanh(N^2|\beta|)^{\,M\cdot\min(T,\,M-T)}. \tag{11}$$

Lean：`PolyakovT.polyakov_pair_all`（$M\equiv 0 \bmod 4$、全ての実の β）。

典 有限の横断面の管の中での相関の減衰は、Mack–Petkova・Tomboulis–Yaffe の線の既知の型の評価で、`PolyakovT.polyakov_pair_all` はその形式化です。

$T=M/2$ の場合は §04 から出ます。一般の T は、鏡映の面を動かして Cauchy–Schwarz を繰り返し、相関の対数の凸性に持ち込みます。$G_{bb'}(T)=\int P_b(0)P_{b'}(T)\,w_0\,dU$（正規化しない）と書きます。

段 1　並進。 向き 4 の並進 $x_4\mapsto x_4+1$ は Haar の積と w_0 を保つので、$\int P_b(s)P_{b'}(t)\,w_0$ は $t-s$ だけに依ります（Lean：`PolyakovT.corr_shiftZ`）。だから鏡映の面を好きな時刻に置けます。また $G_{bb'}(T)=G_{b'b}(M-T)$ です（`PolyakovT.Gc_swap`）。

段 2　重みつきの鏡映の対。 閉じた上の半分だけに依る有界な F,G について $\langle F,G\rangle_w=\int F(\Theta U)G(U)\,w_0\,dU$ は、(4) で $w_0=a_1\cdot(a_1\circ\Theta)$ と割れるので半正定値で、Cauchy–Schwarz が成り立ちます（全ての実の β。Lean：`PolyakovT.wpair_nonneg`・`PolyakovT.wpair_cs`）。

段 3　偶数の隔たりの中点の凸性。 $F=P_b(u)$、$G=P_{b'}(v)$ と取り、$P_b(u)\circ\Theta=P_b(-u)$ と並進を使うと、$2u,2v\le M$ で

$$G_{bb'}(u+v)^2 \;\le\; G_{bb}(2u)\,G_{b'b'}(2v), \qquad G_{bb}(2u)\ge 0 \tag{12}$$

です（Lean：`PolyakovT.cs_even`、非負の側は `PolyakovT.Gc_even_nonneg`）。

段 4　弦の不等式。 初 $g\ge 0$ が $g(k)^2\le g(k-1)g(k+1)$（$1\le k\le m-1$）を満たせば $g(k)^m\le g(0)^{m-k}g(m)^k$ です（Lean：`LogChord.chord`）。これを $g(k)=G_{bb}(2k)$、$m=M/4$ に使うと、$T=2k\le M/2$ で $G(T)$ が $G(0)\le Z_0$ と $G(M/2)$ の間の重みつきの幾何平均で抑えられます。

段 5　端を入れる。 $G(M/2)$ は §04 と薄い渦の床で $2\,t^{M\cdot M/2}Z_0$（$t=\tanh(N^2|\beta|)$）以下です（`PolyakovT.half_pair_tanh`）。偶数の $T\le M/2$ で $b=b'$ の場合はこれで (11) になります。$b\neq b'$ は (12) を $u=v=T/2$ で使い、$G_{bb'}(T)^2\le G_{bb}(T)G_{b'b'}(T)$ に戻します。奇数の $T<M/2$ は、$M/2$ が偶数なので $T+1\le M/2$ で、(12) を $u=(T-1)/2$、$v=(T+1)/2$ で使います。$T>M/2$ は段 1 の対称で戻します。

定数 2 は β・N・M・T に依りません。転送行列の跡と Hölder の不等式を使えば θ の形 $(\theta^{T/M}+\theta^{1-T/M})/(1+\theta)$ が見込まれますが、Lean にはありません。(11) はそれより、定数 2 の分と、θ を薄い渦の床の t^{M^2} で置き換えた分の二つだけ弱い形です。

寄り道：M・N の偶奇と β の符号の範囲

飛ばしてよい。格子点の面の鏡映だけでは、$M\equiv 2 \pmod 4$ で奇数の隔たりが入りません。リンクの真ん中を通る面の鏡映を足すと入りますが、その面は升を横切るので $\beta\ge 0$ が要ります（Lean：`PolyakovT.link_rp`、M が偶数 ≥ 4、$\beta\ge 0$）。N と M がともに偶数なら、千鳥の符号の変数変換で $\beta\mapsto-\beta$ としても対の期待値は変わりません（`PolyakovT.polyExp_neg`）。

Lean の宣言	M	N	β
`PolyakovT.polyakov_pair_all`	$M\equiv 0 \bmod 4$	任意	全ての実数
`PolyakovT.polyakov_pair_evenM`	偶数、$M\ge 4$	任意	$\beta\ge 0$
`PolyakovT.polyakov_pair_evenNM`	偶数、$M\ge 4$	偶数	全ての実数

結論はどれも (11) と同じ形です。入っていないのは、M が奇数の場合と、$M\equiv 2 \pmod 4$ かつ N が奇数かつ $\beta<0$ の場合です。

06

読み方 — 管の中のエネルギーの線形の下界

$V(T)=-\frac{1}{M}\ln|\langle P(0)P(T)\rangle_0|$ と置くと、(11) は

$$V(T)\ \ge\ \sigma_0\cdot\min(T,M-T)-\frac{\ln 2}{M},\qquad \sigma_0=-\ln\tanh(N^2|\beta|)\tag{13}$$

です。Polyakov ループの対は、向き 3 を時間と見たときの静的な電荷の対で、$V(T)$ は対を距離 T に離すエネルギーに当たります。(13) は、**横 $N\times N$ の管の中での、エネルギーの線形の下界**です。

- **下界だけです。** V が線形であることも、上界も言っていません。
- **N に一様ではありません。** $\sigma_0\approx 2e^{-2N^2|\beta|}$ は $N\to\infty$ で 0 に行きます。管が太くなるほど下界は弱くなります。

- **格子間隔は固定です。** N を止めた系は実質二次元で、典 二次元の格子ゲージ理論では全ての β で面積則が出るのが普通です。四次元の閉じ込め・面積則・質量ギャップの主張ではありません。

自明でない範囲の目安。 $|\langle P(0)P(T)\rangle_0| \le \langle P^2\rangle_0$ は自明です。読 $\langle P^2\rangle_0$ は 0.25〜0.3 ほどです（$\beta=0$ で $1/4$）。(11) の右辺が $1/4$ を下回るのに要る指数 $X = M\min(T, M-T)$ の最小値は次のとおりです読 。

N	β = 0.1	0.3	0.5	1	2
1	1	2	3	8	57
2	3	12	57	3100	$9.2\cdot10^{6}$
3	7	231	8425	$6.8\cdot10^{7}$	$4.48\cdot10^{15}$

読 $X \le M^2/2$（等号は $T = M/2$）なので、たとえば $N=2$・$\beta=1$ では $X \ge 3100$ から $M \ge 78.74$ が要り、$M \equiv 0 \pmod 4$ では実際は $M \ge 80$、しかも T が $M/2$ の近くでだけ右辺が $1/4$ を下回ります。大きい β と大きい N では (11) は緩く、その側は (10) のような太い渦の床の形が受け持ちます。

07

言っていないこと

- M が奇数の $\theta \ge 0$、M が奇数の Polyakov ループの対。
- Hölder の形そのもの（(11) は定数 2 と、θ を t^{M^2} に替えた分だけ弱い）。
- $V(T)$ の上界、V が線形であること、張力の値。
- 横の大きさ N に一様な評価。帯（渦の比 θ が箱の面積の指数で小さくなること、すなわち $-\ln\theta$（板の張力に面積を掛けた量に当たる）が面積に比例して増えることを、横と縦の大きさと結合を一緒に動かして一つの定数で言う言明。19-07）には届きません。この章の評価は格子間隔と横の大きさを止めた形です（21-08）。
- (8)・(10) の β・M の閾の値。
- 連続極限、四次元の閉じ込め・面積則・質量ギャップ。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
Lean `HalfSplit.Z1_le_Z0`・`TwistBlocks.theta_nonneg`：M が偶数、全ての実の β で $0 \le \theta_M$	M が奇数（読 $\beta < 0$ で破れる例がある）
Lean `TwistBlocks.thick_vortex_floor_signed`：大きい β・大きい M（$M+1$ が偶数）で $0 \le \theta_{M+1} \le \exp(-(M+1)^2 e^{-\beta(S_N+\varepsilon)})$	閾の値
Lean `HalfSplit.polyakov_pair_theta`：M が偶数、全ての実の β で $\lvert\langle P_b(0) P_{b'}(M/2)\rangle_0\rvert \le 2\sqrt{\theta}/(1+\theta)$	距離 $M/2$ 以外（それは次の行）
Lean `PolyakovT.polyakov_pair_all`：$M \equiv 0 \bmod 4$、全ての実の β、$0 \le T \le M$ で $\lvert\langle P_b(0) P_{b'}(T)\rangle_0\rvert \le 2\tanh(N^2\lvert\beta\rvert)^{M\min(T,M-T)}$。`_evenM`（$M$ 偶数 ≥ 4、$\beta \ge 0$）・`_evenNM`（N, M 偶数、全ての β）	Hölder の形（定数 2 と $\theta \to t^{M^2}$ の分だけ弱い）。M が奇数。N に一様な張力
Lean `HalfSplit.polyakov_pair_floor`：太い渦の床と合わせた距離 $(M+1)/2$ の床	閾の値。四次元の閉じ込め
Lean `PolyakovT.half_pair_tanh`：M が偶数（$M=2$ を含む）、全ての実の β で $\lvert\langle P_b(0) P_{b'}(M/2)\rangle_0\rvert \le 2t^{M\cdot M/2}$	$M \equiv 2 \bmod 4$ の他の T（$M \ge 4$ なら `_evenM`）
読 自明でない範囲（$N=2$・$\beta=1$ で $M \ge 80$、T が $M/2$ の近く）	—

出典と再現

もの	種別	出典・道具
鏡映正値性（格子点の面）	典	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471（書誌は 19-03）。Lean：`HalfSplit.half_split`・`HalfSplit.half_pairing_nonneg`
流束の自由エネルギーで長いループを抑える議論の系統	典	E. T. Tomboulis, L. G. Yaffe, Commun. Math. Phys. 100 (1985) 313（本文は未確認。書誌は 25-04 と同じ）
有限の横断面での渦と閉じ込めの議論の系統	典	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 125 (1980) 117（本文は未確認。書誌は 25-01 と同じ）
二次元の格子ゲージ理論の面積則	典	A. A. Migdal, Sov. Phys. JETP 42 (1975) 413（書誌のみ）
捩れた境界条件と流束の自由エネルギー	典	G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141（25-01）
$\theta \ge 0$、距離 M/2 の対（§03・§04 の道筋）	初	本文。Lean：`PolyakovT.half_pair_tanh`・`TwistBlocks.theta_lt_one`・`HalfSplit.Z1_le_Z0`・`TwistBlocks.theta_nonneg`・`HalfSplit.odd_fix_bound`・`HalfSplit.polyakov_pair_theta`・`TwistBlocks.thick_vortex_floor_signed`・`HalfSplit.polyakov_pair_floor`

もの	種別	出典・道具
一般の時間差（§05 の段 1〜5）	初	本文。Lean：`PolyakovT.cs_even`・`PolyakovT.Gc_even_nonneg`・`LogChord.chord`・`PolyakovT.polyakov_pair_all`・`PolyakovT.link_rp`・`PolyakovT.polyakov_pair_evenM`・`PolyakovT.polyExp_neg`・`PolyakovT.polyakov_pair_evenNM`
M が奇数で $\theta < 0$ の例、強さの比、自明でない範囲の表	読	本書の検討の数値の記録（SU(2) の Monte Carlo と一様な標本の重みつき平均、$\mathbb{Z}_2$ の全ての配位の和、$2t^X < 1/4$ の浮動小数の計算）

この章で使った語 — 期待値 $\langle\cdot\rangle_0$・Polyakov ループ・渦の比 θ_M・鏡映正値性・半分の重み・中心の符号の反転・偶数の隔たりの中点の凸性・弦の不等式・千鳥の符号・管の中のエネルギーの線形の下界。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：21-07 渦の比の連続・極限・合わせ — 格子を止めたときの渦の比の、結合についての連続と極限、決めた値への合わせです。

渦の比の連続・極限・合わせ

この章は本書の検討です。

この章で分かること — 横 N・縦 M のトーラスの SU(2) Wilson 測度の渦の比 $\theta_{N,M}(\beta) = (Z_0 - Z_1)/(Z_0 + Z_1)$ について、格子を止めたときに Lean で機械検査されている五つのことを読みます。(1) $\beta \mapsto \theta$ は連続で $\theta(0) = 0$。(2) 二つの捩れを持つ箱には、全ての面のホロノミーが捩れの符号に等しい配位（平らな配位）が無い。(3) その箱の欠け（作用の損）には正の下界があり、対称な箱では N に依らず $1/2$ 以上。(4) $\beta \to \infty$ で $\theta \to 1$、流束の自由エネルギーの傾きは最小の欠けに収束する。(5) $0 \le \kappa_0 < 1$ の全ての κ_0 に、$\theta(\beta) = \kappa_0$ となる $\beta \ge 0$ が在り、解の中に最大のものが在る（合わせ）。

前提となる章 — 19-02 横 N・縦 M のトーラス・捩れの符号・渦の比・捩れた真空、21-02 薄い渦の床。導入は 25-01。

先に言うこと — 格子間隔は 1 に固定で、連続極限については何も言いません。どの定理も**格子の大きさ N, M を止めた**言明です。$\theta \to 1$ の速さ、欠けの下界から来る評価の定数、合わせの解 β^* は N, M に依り、N と β を同時に動かす列（合わせた列）については何も言いません。θ の単調性、合わせの解の一意性、β^* の κ_0 についての連続性、$\kappa_0 = 0$ の最大の解が 0 であることも言いません。最小の欠けの真の値と、連続の理論の値との比べも言いません。どれも、't Hooft の捩れた箱の既知の描像の格子の形の形式化です[典]。

この章の順序

1. 設定 — 渦の比・流束の自由エネルギー・欠け — 二つの捩れの背景と、その最小の欠け
2. 言明 — 連続と β = 0 の値 — θ(0) = 0
3. 言明 — 捩れた箱に平らな配位は無い — 片方の捩れでは在る
4. 言明 — 欠けの下界 — $2N^2M^2/(N^2+M^2)^2$、対称な箱で 1/2
5. 言明 — $\beta \to \infty$ で $\theta \to 1$ — 下界の形と、自由エネルギーの傾き
6. 言明 — 合わせの最大の解 — 全ての $\kappa_0 \in [0, 1)$、右からの下の包絡

7. 証明の道筋 — 離散の Stokes、四元数の反可換、開集合の Haar の正値、中間値

8. 問いとして — 格子を倍にしたときの写り方 — 定理ではないこと

9. 言えていること・言えていないこと

札 — 初・典・機・読・仮・Lean は本全体の札です（読 は数値の読み、Lean は本書の Lean の定理）。

01

設定 — 渦の比・流束の自由エネルギー・欠け

格子は横 N（向き 1・2）、縦 M（向き 3・4）のトーラス $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$（$N, M \geq 1$）、重みは $e^{\beta \sum_p z_p \operatorname{Re} U_p}$、基準の測度は正規化した Haar の積です（19-02）。背景の捩れ $n_{12} = 1$ のもとで、縦の捩れ n_{34} の無い分配関数と在る分配関数を

$$Z_0 = Z_{N,M}(\beta; 1, 0), \qquad Z_1 = Z_{N,M}(\beta; 1, 1) \tag{1}$$

とし、渦の比と流束の自由エネルギーを

$$\theta = \theta_{N,M}(\beta) = \frac{Z_0 - Z_1}{Z_0 + Z_1}, \qquad \Delta F = \ln \frac{Z_0}{Z_1} = \ln \frac{1+\theta}{1-\theta} \tag{2}$$

と書きます（19-02。右の等式は Lean `ThetaLimit.phi_theta_eq`）。Lean：`TwistBlocks.thetaM N M β`、Z_0・Z_1 は `ZW N M β true false`・`ZW N M β true true`。この章では $\beta \geq 0$ を主に扱います。

欠け。二つの捩れ $(n_{12}, n_{34}) = (1, 1)$ の背景で、配位 ω の欠けを

$$D(\omega) := \sum_p \big(1 - z_p \operatorname{Re} U_p(\omega)\big) \;\geq 0 \tag{3}$$

とします（z_p はこの背景の捩れの符号）。作用の最大値（面の数）から実際の作用までの損です。$D(\omega) = 0$ は全ての面で $U_p = z_p$、つまり捩れに合った平らな配位です。最小の欠けを

$$D_{\min}(N, M) := \inf_{\omega} D(\omega) \tag{4}$$

と書きます。Lean：`TwistFlat.defect11`・`ThetaLimit.Smin`。

注意。$D_{\min}$ は、捩れた箱の全体での最小の欠けです。渦の最小作用 S_N（19-02・21-05。一辺 m の塊の縁を捩れた真空に止めた量）とは別の量です。

02

言明 — 連続と β = 0 の値

言明（渦の比の連続）

$N, M \geq 1$ とします。$\beta \mapsto Z_{N,M}(\beta; n_{12}, n_{34})$ は実数の全体で連続で、$\beta \mapsto \theta_{N,M}(\beta)$ も連続です。$\beta = 0$ では $Z = 1$、$\theta = 0$ です。

Lean 有界な指数の積分の連続性。Lean：`ThetaTuning.ZW_continuous`・`thetaM_continuous`・`ZW_zero`・`thetaM_zero`（仮定は $N, M \geq 1$ だけ）。

証明は優収束です。$|\beta| \leq |\beta_0| + 1$ の範囲で、被積分関数は $\exp((|\beta_0| + 1) \cdot \text{面の数})$ で押さえられます。分母 $Z_0 + Z_1$ は正なので θ も連続です。$\beta = 0$ では基準の測度が確率測度なので $Z = 1$ です。

値の範囲は $-1 < \theta \leq 1$ で（`ThetaLimit.theta_gt_neg_one`・`theta_le_one`）、縦 M が偶数なら $\theta \geq 0$ です（21-06、`TwistBlocks.theta_nonneg`）。$\beta > 0$ で $\theta > 0$ は Lean にありません。

03

言明 — 捩れた箱に平らな配位は無い

言明（二つの捩れを持つ箱に平らな配位は無い）

$N, M \geq 1$（$N = 1$・$M = 1$ の退化した格子を含む）とします。背景 $(n_{12}, n_{34}) = (1, 1)$ では、全ての面で $z_p \operatorname{Re} U_p = 1$ となる SU(2) の配位は在りません。

Lean 「向き 1・2 と 3・4 に捩れを一つずつ持つ箱に平らな接続は無い」という既知の型（'t Hooft）の格子の形。Lean：`TwistFlat.no_flat_twist11`（仮定なし）。

片方の捩れだけの背景 $(1, 0)$ では、同じ形の言明は偽です。捩れた真空（19-02：$x_1 = 0$ の向き 1 のリンクに単位の四元数 $\mathbf{i}$、$x_2 = 0$ の向き 2 のリンクに $\mathbf{j}$、他は 1）が欠け 0 の配位です（`ThetaLimit.flat_exists_10`）。この対照があるので、言明は捩れの符号の置き方のせいで自明に立つものではありません。

意味。二つの捩れを持つ箱では、捩れた分配関数 Z_1 に寄与する配位は全て正の作用の損を払います。一方 Z_0（片方の捩れ）には損 0 の配位があります。この差が、$\beta \to \infty$ で $Z_1/Z_0 \to 0$、すなわち $\theta \to 1$ の元です（§05）。

04

言明 — 欠けの下界

言明（最小の欠けは正で、達せられる）

$N, M \geq 1$ とします。ある配位 $\omega^\star$ があって $0 < D(\omega^\star) \leq D(\omega)$（全ての ω）。したがって $D_{\min}(N, M) > 0$。

Lean コンパクト性と §03 から。Lean：`TwistFlat.defect11_floor`・`minDefect11_pos`（仮定なし）。

言明（欠けの一様な下界）

$N, M \geq 1$ の全てと全ての配位 ω で

$$D(\omega) \;\geq\; \frac{2N^2M^2}{(N^2+M^2)^2}. \tag{5}$$

とくに対称な箱 $N = M$ では $D(\omega) \geq 1/2$ で、$D_{\min}(N, N) \geq 1/2$ が N に依らず成り立ちます。

Lean 捩れた箱の作用の下界という既知の型の、格子の上の粗い一様な版。Lean：`TwistFloor.defect11_ge_two`・`defect11_sym_half`・`defect11_uniform_half`・`Smin_sym_half`（仮定なし）。

片方の捩れの背景では、同じ形の正の下界は在りません（`TwistFloor.no_floor_10`）。

(5) の芯は四元数の不等式です。単位の四元数 a, b, c, d について

$$\|ab + ba\| + \|cd + dc\| + \|ac - ca\| + \|bc - cb\| \;\geq\; 2 \tag{6}$$

（Lean `QuadFloor.quad_floor_two`）。左辺は「a, b が反可換、c, d が反可換、c が a とも b とも可換」という四つの関係の崩れの和で、SU(2) ではこの四つは両立しません。定数 2 は $(a, b, c, d) = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, 1, \mathbf{k})$ などで達せられ、これ以上は上がりません。

数で見る読。$N=M=1$ の欠けの最小は数値で 2.000、$N=M=2$・4 では冷却で見つけた配位の欠けが 7.84・9.80 で、これらは最小の上界です。下界 $1/2$ とはまだ 16〜20 倍の開きがあります。連続の理論で対応する区画の作用の下限は、自己双対の評価と分数の位相数 $1/2$ から $\beta = 4/g^2$ の単位で $\pi^2 \approx 9.87$ です典。$D_{\min}(N,N)$ が N とともにどう変わるかは分かっていません。

05

言明 — β → ∞ で θ → 1

言明（渦の比の極限）

$N, M \geq 1$ を止めると、$\beta \to \infty$ で $\theta_{N,M}(\beta) \to 1$。さらに $\beta \geq 0$ の全てで

$$\theta_{N,M}(\beta) \;\geq\; 1 - \frac{2}{v}\, e^{-D_{\min}\beta/2} \tag{7}$$

で、$v > 0$ は片方の捩れの背景で捩れた真空を含むある開集合の Haar の体積です（β に依らず、N, M に依り、陽な値は無い）。

Lean 欠けの下界と開集合の Haar の正値から。Lean：`ThetaLimit.tendsto_theta_one`・`theta_lower`・`Z11_le`・`Z10_ge`・`volV_pos`・`ratio_tendsto_zero`。

言明（流束の自由エネルギーの傾き）

$N, M \geq 1$ を止めると

$$\frac{\Delta F}{\beta} = \frac{1}{\beta} \ln \frac{Z_0}{Z_1} \;\longrightarrow\; D_{\min}(N,M) \qquad (\beta \to \infty). \tag{8}$$

対称な箱では、この極限は N に依らず $1/2$ 以上です。

Lean 同じ部品の両側の評価。Lean：`ThetaLimit.tendsto_logratio_div`、`TwistFloor.logratio_limit_half`。

意味。格子を止めて結合を弱くしていくと、二つの捩れの区画は欠けの分だけ指数的に重みを失い、渦の比は 1 に近づきます。その指数の傾きがちょうど最小の欠けです。これは格子を止めた $\beta \to \infty$ で、連続極限（κ_0 を止めて格子を細かくする向き）ではありません。

06

言明 — 合わせの最大の解

言明（渦の比の合わせ）

$N, M \geq 1$ を止めます。$0 \leq \kappa_0 < 1$ の全ての κ_0 について、$\theta_{N,M}(\beta) = \kappa_0$ となる $\beta \geq 0$ が在り、その解の集合は $\beta \geq 0$ の中に最大の元 $\beta^*(\kappa_0; N, M)$ を持ちます。$\kappa_0 > 0$ なら $\beta^* > 0$ です。

Lean 連続と中間値の定理とコンパクト性。Lean：`ThetaLimit.tuning_all`・`tuning_all_pos`（仮定は $0 \leq \kappa_0 < 1$ だけ）。仮定が満たせる例：$N = M = 2$、$\kappa_0 = 1/2$ に正の解（`ThetaLimit.sanity_half`）。

弱い形として、$0 \leq \kappa_0 \leq \theta(\beta_1)$ なら $[0, \beta_1]$ に解と最大の解が在る、という言明もあります（`ThetaTuning.tuning_exists`・`tuning_max_exists`）。§05 で全ての $\kappa_0 < 1$ にその β_1 が取れるので、上の全体の形になります（`ThetaLimit.exists_theta_gt`）。

右からの下の包絡。 θ が β について単調かどうかは分かっていません。そこで $\underline{\theta}(\beta) := \inf_{\beta' \geq \beta} \theta(\beta')$ を使います。$\underline{\theta}$ は単調に増え、最大の解 β^* で $\underline{\theta}(\beta^*) = \kappa_0$、$\beta > \beta^*$ では $\underline{\theta}(\beta) > \kappa_0$ で、β^* は $\underline{\theta} = \kappa_0$ の解の中でも最大です（`ThetaLimit.thetaLow`・`thetaLow_mono`・`envelope_max_sol`）。単調でない θ でも、最大の解はこの単調な関数で特徴づけられます。$\underline{\theta}$ の連続性は言いません。

何のための合わせか。 示すべき言明（19-07）の合わせは、細かくなる格子の列で裸の結合をどう決めるかの言明です。この章の合わせは、その候補の一つ「各格子で渦の比を決めた値 κ_0 に合わせる」の、各格子での存在の部分です。列として何が成り立つか（β^* の N への依り方）は言いません。

07

証明の道筋

平らな配位が無いこと（§03）。 二段です。

1. **離散の Stokes。** 加法群 G の上の四元数の場 A, B が、各点で交換の関係 $A(x)B(x+e) = s(x)\,B(x)A(x+f)$（$s(x)$ は符号）を満たし、$Le = 0$、$L'f = 0$ とします。e の向きに一周する線の積と f の向きに一周する線の積は、切り口の全ての s の積を掛けて交換します（Lean `FlatStokes.torus_commutator`）。一列ずつ、次に一枚ずつの二段の帰納で示されます。欠け 0 の配位では、面ごとに $U_p = z_p$ がこの交換の関係そのものです。

2. **四元数の矛盾**。原点を通る四本の周回 W_1, W_2（横）、W_3, W_4（縦）について、切り口の符号の積は、向き 1・2 の切り口と 3・4 の切り口で -1、向き 1・3 と 2・3 の切り口で $+1$ です。よって $W_1 W_2 = -W_2 W_1$、$W_3 W_4 = -W_4 W_3$、W_3 は W_1 とも W_2 とも可換です。反可換な単位の四元数の対 (W_1, W_2) と可換なのは実数だけなので $W_3 = \pm 1$、すると $W_3 W_4 = -W_4 W_3$ と矛盾します（`FlatStokes.no_twisted_quadruple`）。使う向きの対は四つだけです。

欠けの下界（§04）。(6) を量の形に広げます。場が単位なら、交換の関係の崩れが各点で $d(x)$ 以下のとき、周回の交換の崩れは切り口の d の和以下です（`FlatStokes.approx_torus_commutator`。一枚剥がすごとに誤差が一つ増える）。面の崩れは $\|U_p - z_p\| = \sqrt{2(1 - z_p \operatorname{Re} U_p)}$ です。各基点の四つの周回に (6) を使い、基点で和を取り、並進で数え直して Cauchy–Schwarz を二度使うと (5) です。$N \neq M$ では向き 1・2 の切り口（N^2 枚）と 3・4 の切り口（M^2 枚）の重みが揃わず、比 $\rho = N/M$ について $2/(\rho + 1/\rho)^2$ になります。$\rho \to 0$ や $\rho \to \infty$ で 0 に近づくのは方法の弱さだと見ています[仮]。根拠は、$N = 1$ の退化した格子で $M = 1, 2, 3$ の欠けの最小が数値で 2.000 のまま下がらない、という小さい例だけです[読]。

$\theta \to 1$（§05）。$\beta \geq 0$ で、作用 = 面の数 $-D$ なので $Z_1 \leq e^{\beta(|P| - D_{\min})}$（$|P|$ は面の数）。一方、片方の捩れの背景の作用は連続で、捩れた真空で最大値 $|P|$ をとるので、作用が $|P| - D_{\min}/2$ を越える配位の集合は捩れた真空を含む開集合です。Haar の積は空でない開集合に正の重みを置くので、その体積 v は正で、$Z_0 \geq v\, e^{\beta(|P| - D_{\min}/2)}$ です。比をとって $Z_1/Z_0 \leq v^{-1} e^{-D_{\min}\beta/2}$、$\theta = 1 - 2Z_1/(Z_0 + Z_1) \geq 1 - 2Z_1/Z_0$ で (7) です。(8) は同じ部品を、最小点のまわりの開集合で上下から使います。Laplace の型の精密な評価は要りません。

合わせ（§06）。$\theta(0) = 0$、θ は連続、$\theta \to 1$ なので、中間値の定理で解が在ります。解の集合は閉で、ある b_0 より先には解が無い（$\theta > \kappa_0$）ので、有界な閉集合として最大の元を持ちます。

08

問いとして — 格子を倍にしたときの写り方

以下は定理ではなく、この章の定理の先に在る問いです。

- **倍化の写り方**。辺 N の対称な箱で $\theta = \kappa_0$ に合わせた結合（最大の解 $\beta^*(\kappa_0; N)$）で、辺 $2N$ の箱の渦の比を測ると、値 $\Sigma(\kappa_0; N) := \theta_{2N}(\beta^*(\kappa_0; N))$ が決まります。$N \to \infty$ で $\Sigma(\cdot; N)$ が一つの関数に近づくか、近づくならその関数が 0 と 1 の間でどう振る舞うかは、問いのままです。二次元の SU(2) では、連続の側の式で対応する関数が書け、小さい κ_0 で

κ_0^4 のように振る舞います読 （Bessel の係数を使った式と数値。証明は置きません）。四次元の小さい格子のモンテカルロの数は誤差が大きく、何かを言える段にありません。

- **格子を止めた向きの限り**。§05 から言えるのは、格子を止めた $\beta \to \infty$ での ΔF の傾きが $D_{\min}(N,N)$ で、それが $1/2$ 以上であることまでです。$D_{\min}(N,N)$ と $D_{\min}(2N,2N)$ が違えば、格子を止めた形で $\Delta F_N - \Delta F_{2N}$ を一様に押さえる言明は立ちません。等しくても、β について一次より遅い項の比べが残ります。冷却の数はどれも上界なので、違うかどうかは分かっていません。
- **帯との関係**。帯の言明（19-07、正しい形は 26-01）は、渦の比が縦の面積の指数で小さくなることを、格子間隔と箱の大きさに一様に言うものです。この章の定理はどれも格子を止めた言明で、帯の言明には届きません。

09

言えていること・言えていないこと

- **格子を止めた言明**。v・$D_{\min}$・β^*・(7) の収束の速さは N, M に依ります。N と β を同時に動かす列で θ がどうなるかは言いません。
- **θ の形**。単調性、$\beta > 0$ での $\theta > 0$、合わせの解の一意性、β^* の κ_0 についての連続性、$\kappa_0 = 0$ の最大の解が 0 であること、は言いません。
- **欠けの値**。$D_{\min}$ の真の値、π^2 との比べ、N への依り方は言いません。下界 $1/2$ は粗い一様な版です。$N \neq M$ の下界は縦横の比が偏ると 0 に近づきます。
- **帯にも質量ギャップにも届かない**。格子間隔は固定で、連続極限は扱いません。
- **新しい結果ではありません**。捩れた箱に平らな接続が無いこと、その作用の下界、渦の自由エネルギーの弱結合での振る舞いは既知の描像で、この章はその格子の上の形式化です。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
Lean 連続と $\theta(0) = 0$、$-1 < \theta \leq 1$。Lean `ThetaTuning.ZW_continuous`・`thetaM_continuous`・`ZW_zero`・`thetaM_zero`、`ThetaLimit.theta_gt_neg_one`・`theta_le_one`	単調性、$\beta > 0$ で $\theta > 0$
Lean 背景 $(1,1)$ に平らな配位は無い（全ての $N, M \geq 1$、仮定なし）。Lean `TwistFlat.no_flat_twist11`。対照 `ThetaLimit.flat_exists_10`	—

言えている	言えていない
Lean 欠けの下界 $2N^2M^2/(N^2+M^2)^2$、対称な箱で $1/2$。最小は正で達せられる。Lean `TwistFloor.defect11_ge_two`・`defect11_sym_half`・`defect11_uniform_half`・`Smin_sym_half`、`TwistFlat.defect11_floor`・`minDefect11_pos`、部品 `QuadFloor.quad_floor_two`・`FlatStokes.approx_torus_commutator`	$D_{\min}$ の真の値と N への依り方、π^2 との比べ
Lean $\theta \to 1$、下界 (7)、$\Delta F/\beta \to D_{\min}$（対称な箱で極限 $\geq 1/2$）。Lean `ThetaLimit.tendsto_theta_one`・`theta_lower`・`tendsto_logratio_div`、`TwistFloor.logratio_limit_half`	速さが N に一様なこと、有限の β での一様な評価
Lean 全ての $\kappa_0 \in [0,1)$ に最大の解 β^*、$\kappa_0 > 0$ で $\beta^* > 0$、右からの下の包絡による特徴づけ。Lean `ThetaLimit.tuning_all`・`tuning_all_pos`・`envelope_max_sol`	一意性、κ_0 についての連続、β^* の N への依り方、合わせた列の性質
読 欠けの最小の数値（2.000、上界 7.84・9.80）、二次元の倍化の関数の振る舞い	上界・下界の証明ではない。四次元の倍化の関数

出典と再現

もの	種別	出典・道具
捩れた境界条件、捩れた箱の平らな接続と作用の下界	典	G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141。G. 't Hooft, Commun. Math. Phys. 81 (1981) 267（書誌のみ、本文は未確認）。導入は 25-01
§02 の連続と合わせの弱い形	Lean	`ThetaTuning.ZW_continuous`・`thetaM_continuous`・`ZW_zero`・`thetaM_zero`・`tuning_exists`・`tuning_max_exists`
§03〜§06 の言明と部品	Lean	`TwistFlat.no_flat_twist11`・`defect11`・`defect11_floor`・`minDefect11_pos`、`FlatStokes.torus_commutator`・`no_twisted_quadruple`・`approx_torus_commutator`、`QuadFloor.quad_floor_two`、`TwistFloor.defect11_ge_two`・`defect11_sym_half`・`defect11_uniform_half`・`Smin_sym_half`・`logratio_limit_half`・`no_floor_10`、`ThetaLimit.Smin`・`Z11_le`・`Z10_ge`・`volV_pos`・`theta_lower`・`tendsto_theta_one`・`exists_theta_gt`・`tuning_all`・`tuning_all_pos`・`sanity_half`・`ratio_tendsto_zero`・`flat_exists_10`・`phi_theta_eq`・`tendsto_logratio_div`・`thetaLow`・`thetaLow_mono`・`envelope_max_sol`。sorry 0、公理は標準の三つ、核の再検査で確認、言明は源の字句で確かめた
$\theta \geq 0$（M 偶数）	Lean	`TwistBlocks.theta_nonneg`（21-06）

もの	種別	出典・道具
欠けの最小の数値・冷却の上界・二次元の倍化の関数	読	本書の検討の数値の記録（四元数の最小化、冷却、Bessel の係数の式の数値。冷却の値は上界）

この章で使った語 — 渦の比・流束の自由エネルギー・'t Hooft の捩れ・欠け・平らな配位・捩れた真空・離散の Stokes・反可換・開集合の Haar の正値・合わせ・最大の解・右からの下の包絡。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：21-08 この部が言えていること・言えていないこと — 第 21 部の定理を一つの表に並べます。強結合の窓で横の大きさに依らない率の渦の床（前の因子 N^2 は残る）は 20-06 にあります。

この部が言えていること・言えていないこと

この章は本書の検討です。§01 の表は第 21 部の定理の一覧です。

この章で分かること — 第 21 部の定理を、範囲・言っていないこと・Lean の宣言とともに一つの表で見ます。そのあと、この部の床が帯からどれだけ離れているかを短く見ます。

前提となる章 — 21-00 入口 と第 21 部の各章。対象の定義は 19-02

先に言うこと — この部の定理は、一つ目の抽象の含意を除いて全て、横 N・縦 M の有限の格子の上の、格子間隔を固定した等式・不等式です。強結合の窓の中では、率が横の大きさに依らない形が在ります（前の因子＝横の面積は残ります。20-06）。窓の外では、この部の床（θ の上界）の率はどれも横の大きさ N に一様ではありません。21-07 の欠けの下界（対称な箱で、横の大きさに依らず 1/2）は、床とは逆向き（θ の下界の側）の言明です。連続極限・四次元の閉じ込め・質量ギャップについては何も言いません。

この章の順序

1. 定理の一覧 — 範囲と言っていないこと
2. 何が横の大きさ N に依るか
3. 床から帯までの距離

01

定理の一覧 — 範囲と言っていないこと

対象は全て横 $(\mathbb{Z}/N)^2$・縦 $(\mathbb{Z}/M)^2$ のトーラスの SU(2) の Wilson 測度で、背景の捩れ $n_{12} = 1$ です（19-02）。$\theta_M = (Z_0 - Z_1)/(Z_0 + Z_1)$、$t = \tanh(N^2|\beta|)$ と書きます。どれも既知の型の結果・描像の形式化です（各章の典 の行）。

最初の行だけは抽象の含意で、仮定の欄があります。他の行は具体の対象の定理で、仮定の欄は表に書いた範囲だけです。

定理	範囲	言っていないこと	Lean の宣言	章
符号の系の三本（被覆の不等式・$\mathbb{Z}_2$ の単調性・$\mathbb{Z}_2$ との比べ）	抽象の群と符号の指標。仮定の欄つきの含意	それだけでは具体の測度の評価ではない（当てはめは次の行の中）	`CoveringInequality.covering_ineq`・`mon_ineq`・`dominated_covering_ineq`・`invariant_dominated`	21-01
薄い渦の床（比の形）	全ての実の β、$N, M \geq 1$、背景の捩れは任意：`twisted_vortex_bound` は符号つきの形 $(Z_0 - Z_1)/(Z_0 + Z_1) \leq t^{M^2}$、`_abs` は絶対値の形 $\lvert Z_0 - Z_1\rvert/(Z_0 + Z_1) \leq t^{M^2}$	符号（$Z_1 \leq Z_0$ は別の行）。N に一様な率	`TwistedWilson.twisted_vortex_bound`・`twisted_vortex_bound_abs`	21-02
薄い渦の床（指数の形）	$\beta \neq 0$：$\sigma_0 = -\ln t > 0$、$\lvert\theta_M\rvert \leq e^{-\sigma_0 M^2}$	$\sigma_0 \to 0$（$N \to \infty$）	`TwistedWilson.thin_vortex_floor`	21-02
塊の評価	$mk \leq M$、全ての実の β：$\lvert\theta_M\rvert \leq \tanh(K_{\text{eff}})^{k^2}$	形の違う塊が混ざると塊ごとの積より弱い	`TwistBlocks.block_bound_abs`	21-04
太い渦の床	全ての $N \geq 1$、任意の $\varepsilon > 0$、十分大きい β ごとに十分大きい M：$\lvert\theta_{M+1}\rvert \leq \exp(-(M+1)^2 e^{-\beta(S_N+\varepsilon)})$	β・M の閾の値。S_N の値。逆向き（率の下界）	`TwistBlocks.thick_vortex_floor`	21-03
渦の最小作用の正値性	全ての $N \geq 1$：m に一様な $\delta > 0$ で $\delta \leq S_{\text{v}}(N, m)$、$S_N > 0$	δ の数（陽でない）。N に一様な下界	`VortexPos.Svortex_ge_unif`・`VortexPos.SN_pos`	21-05
上界の証明書 機	$S_{\text{v}}(2,8) \leq 6.67401$、$S_{\text{v}}(3,8) \leq 9.09321$、$S_{\text{v}}(4,4) \leq 12.02057$、よって $S_N < 2N^2$（$N = 2,3,4$）	S_N の値（上界だけ、一点の配位）。一般の N	`VortexCert.Svortex_two_eight_le`・`Svortex_three_eight_le`・`Svortex_four_four_le`・`SN_two_lt`・`SN_three_lt`・`SN_four_lt`（健全性 `VortexCert.Svortex_le_of_cert`）	21-05
陽な指数の太い渦の床	$N = 2,3,4$、十分大きい β ごとに十分大きい M：指数の数 6.675・9.094・12.021	閾の値。「薄い渦の床より強い」は率の比べで Lean の定理ではない（読 $N = 2$ で $\beta > 0.523$ から）	`TwistBlocks.thick_vortex_floor_two`・`_three`・`_four`	21-05
渦の比の符号	M が偶数、全ての実の β：$Z_1 \leq Z_0$、$\theta_M \geq 0$	M が奇数（読 $\beta < 0$ で破れる例）	`HalfSplit.Z1_le_Z0`・`TwistBlocks.theta_nonneg`	21-06

定理	範囲	言っていないこと	Lean の宣言	章
符号つきの太い渦の床	太い渦の床の範囲で $M+1$ が偶数：$0 \le \theta_{M+1} \le \exp(-(M+1)^2 e^{-\beta(S_N+\varepsilon)})$	閾の値	`TwistBlocks.thick_vortex_floor_signed`	21-06
渦の比の連続と合わせ	格子の大きさを止めて、全ての実の結合：渦の比は結合について連続、結合 0 で 0、結合を大きくすると 1 に近づく。0 以上 1 未満の全ての目標の値に、合わせる結合が在る（最大の解）	単調性、解の一意性、横の大きさと結合を同時に動かす列	`ThetaTuning.thetaM_continuous`・`ThetaLimit.tendsto_theta_one`・`ThetaLimit.tuning_all`	21-07
捩れた箱の欠けの下界	直交する二つの面に捩れを持つ箱に平らな配位は無い。対称な箱の欠けは横の大きさに依らず 1/2 以上	最小の欠けの真の値	`TwistFlat.no_flat_twist11`・`TwistFloor.defect11_sym_half`	21-07
θ による Polyakov ループの対の評価	M が偶数、全ての実の β、全ての b, b'：$\lvert\langle P_b(0) P_{b'}(M/2)\rangle_0\rvert \le 2\sqrt{\theta}/(1+\theta)$	距離 $M/2$ だけ	`HalfSplit.polyakov_pair_theta`	21-06
一般の時間差の Polyakov ループの対	$M \equiv 0 \bmod 4$、全ての実の β、$0 \le T \le M$：$\lvert\langle P_b(0) P_{b'}(T)\rangle_0\rvert \le 2t^{M \min(T, M-T)}$	Hölder の形（定数 2 と、θ を t^{M^2} に替えた分だけ弱い）。M が奇数。線形であること・上界	`PolyakovT.polyakov_pair_all`	21-06
同（他の偶奇）	M が偶数 ≥ 4 で $\beta \ge 0$／N, M が偶数（$M \ge 4$）で全ての β	M が奇数。$M = 2$（次の行の $T = M/2$ だけ）。$M \equiv 2 \bmod 4$ かつ N 奇数かつ $\beta < 0$	`PolyakovT.polyakov_pair_evenM`・`polyakov_pair_evenNM`	21-06
距離 $M/2$ の対と薄い渦の床	M が偶数（$M = 2$ を含む）、全ての実の β：$\lvert\langle P_b(0) P_{b'}(M/2)\rangle_0\rvert \le 2t^{M \cdot M/2}$	他の時間差（上の二行）	`PolyakovT.half_pair_tanh`	21-06
太い渦の床と合わせた Polyakov ループの対	十分大きい β ごとに十分大きい M、$M+1$ が偶数：距離 $(M+1)/2$ の対 $\le 2\exp(-\frac{1}{2}(M+1)^2 e^{-\beta(S_N+\varepsilon)})$	閾の値。四次元の閉じ込め	`HalfSplit.polyakov_pair_floor`	21-06

全ての行に共通して、格子間隔は固定で、連続極限・四次元の面積則・質量ギャップのどれも言っていません。Polyakov ループの評価は、横 $N \times N$ の管の中の、エネルギーの線形の**下界**

です。

02

何が横の大きさ N に依るか

この部の定理は、どれも N を止めて M と β を動かす形です。N への依り方を並べます。

量	N への依り方	分かっていること
薄い渦の床の率 $\sigma_0 = -\ln\tanh(N^2\lvert\beta\rvert)$	初 $\approx 2e^{-2N^2\lvert\beta\rvert}$、$N\to\infty$ で 0	陽
太い渦の床の指数 S_N	$0 < S_N \le 2N^2$（`VortexPos.SN_pos`・`TwistBlocks.SN_bounds`）	値は不明。$N=2,3,4$ の上界だけ
太い渦の床の閾 $\beta_0(N)$・$M_0(\beta,N)$	不明	陽でない
正値性の下界 $\delta(N)$	不明	陽でない
強結合の渦の床の率（20-06。第 20 部の定理）	依らない（強結合の窓の中だけ。前の因子の横の面積は残る）	陽。窓の外では言わない
管の中の張力の下界（21-06 の (13)）	σ_0 と同じ、$N\to\infty$ で 0	陽
捩れた箱の最小の欠け $D_{\min}(N,N)$（21-07。床ではなく θ の下界の側）	下界 $1/2$ は N に依らない。v・β^* は N に依る	下界は陽。真の値は不明

強結合の窓の外では、床の陽な量は N とともに 0 に行きます。S_N から来る率は N への依り方が分からず、閾も陽でありません。

03

床から帯までの距離

この部の床は、横の大きさ N ごとの、θ の**上界**です。板の張力 $\sigma_N(\beta) = \liminf_M -\frac{1}{M^2}\ln\lvert\theta_M\rvert$（21-03）を、$N$ ごとに下から抑えます。

帯の言明は 19-07 にあります。仮 合わせで決めた裸の結合の列 β_n について、ある $c>0$ があって、全ての L_0 で、十分大きい全ての n で $\theta_{2^nL_0,\,2^nL_0}(\beta_n) \le \exp(-c\,L_0^2)$。横と縦の大きさを一緒に細かく刻み、結合も動かして、渦の比を面積の指数で一つの定数 c で抑える形です。

この部の床は、格子間隔と横の大きさ N を止め、縦の M を動かす話で、この形には届きません。帯を言うには、横と縦の大きさと結合に一様な評価が要ります。§02 の表のとおり、この部の床の定理はどれも N ごとで、その一様性を含みません（21-07 の欠けの下界は横の大きさに依りませんが、θ の下界の側の言明で、床ではありません）。強結合の窓の中の 20-06 の形は、率が横の大きさに依りませんが、結合が窓の中に止まるので、結合が大きくなる側の合わせた列には届きません。

この一様な評価は、本書では前提の側に置いています。前提の一覧と含意の形は 第 28 部 で見ます。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
§01 の表の各行（Lean で機械検査。最初の行は抽象の含意）	各行の「言っていないこと」の欄
初 薄い渦の床の率と管の中の張力の下界は $N \to \infty$ で 0 に行く	N と結合に一様な評価（帯の言明、19-07）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
各行の定理	—	各章の「出典と再現」の表（21-01〜21-07）。Lean の宣言は §01 の表
$\sigma_0 \approx 2e^{-2N^2\lvert\beta\rvert}$	初	$\tanh x = 1 - 2e^{-2x} + O(e^{-4x})$ と $-\ln(1-y) = y + O(y^2)$

この章で使った語 — 渦の床・渦の比 θ_M・渦の最小作用 S_N・Polyakov ループ・帯・横の大きさに一様な評価。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：22-00 入口 — 大きい面の稀さ — 弱結合の側の、一つの尺度の稀さの定理へ。