第三巻　質量ギャップへ — 残る問いと本書の結果

第 22 部 確かな定理 — 大きい面の稀さ

Kiichi, Shiori and Rin · 2026-11-14 の版 · https://computoergosum.com/principia/yang-mills/

> この PDF は Web 版の各章をそのまま刷ったものです。動かせる図は刷った時点の姿で止まっています。章の間のリンクは Web 版へ飛びます。最新の内容は Web 版に在ります。

章		頁
22-00	入口 — 大きい面の稀さ	2
22-01	大きい面の稀さ — チェス盤の評価	7
22-02	この部が言えていること・言えていないこと	15

入口 — 大きい面の稀さ

この章は案内です。

この章で分かること — 第 22 部の定理の一覧と、部の全体に掛かる範囲、道具であるチェス盤の評価の考え方が分かります。あわせて、公開された構成が同じチェス盤の評価をどう使っているか（観測量の大きさを測る半ノルムとして）と、この部の使い方（稀な事象の確率の評価として）の違いを並べます。

前提となる章 — 19-01 Wilson の測度、20-01 鏡映正値性、26-05 チェス盤の評価と同時の反転。

先に言うこと — この部の定理は、格子間隔を固定した細かい格子の Wilson の測度そのものについての、一つの尺度の言明です。体積（トーラスの大きさ）には一様ですが、繰り込んだあとの粗い尺度の測度については何も言いません。閾 $\beta \geq 81$ は証明の都合の値で、物理で興味のある帯から遠い値です。どれも鏡映正値性からのチェス盤の Peierls の議論という既知の型の形式化です[典]。

この章の順序

1. この部の定理の一覧 — 表 1
2. チェス盤の評価という道具 — 一様な模様と幾何平均
3. 二つの使い方 — 大きさを測るか、稀さを測るか — 公開された構成との違い
4. 部の全体に掛かる範囲
5. 読む順

札 — [源] ＝公開された構成の源を読んだ／[推] ＝本書の推し量り／[評] ＝委員会の評価書による（くわしくは 6-00 の「札」）。初・典・機・読・仮・Lean は本全体の札で、[読] は本書の数値の読み、[Lean] は本書の Lean の定理です。

01

この部の定理の一覧

面 p の「ずれ」を $1-\mathrm{Re}\,U_p \in [0,2]$ で測り、閾 y を越える面を**大きい面**と呼びます（$y=1$ では $\mathrm{Re}\,U_p<0$）。この部の言明は、大きい面がたくさん同時に現れる配位の確率が、面の枚数について指数的に小さく、その率がトーラスの大きさに依らない、というものです。

定理	範囲	言明の要点	Lean
チェス盤の評価	辺 $N=2m$（$m\geq 1$）、全ての実の β	ブロックごとに置いた関数の積の期待値は、一様な模様の期待値の幾何平均以下	`FoldWilson.wilson_chessboard_even`
体積に一様な稀さ	$\beta\geq 81$、$m\geq 2$	面の集合 X の全てで $\mathrm{Re}\,U_p<0$ の確率 $\leq q_1^{\lfloor\lvert X\rvert/6\rfloor}$、$q_1<1$ は N と X に依らない	`FoldCap.rarity_explicit`
率 $1/4$ の形	$0<y\leq 2$、存在する β_0 以上、$m\geq 1$	確率 $\leq q_4^{\lfloor\lvert X\rvert/24\rfloor}$	`FoldQuarter.rarity_uniform4`

表 1　第 22 部の定理。言明・証明・数は 22-01、範囲と言っていないことは 22-02。

02

チェス盤の評価という道具

導入は 26-05 と 20-01 です。鏡映正値な測度では、鏡で映した関数との積の期待値が 0 以上になり、そこから Cauchy–Schwarz の形の不等式「折りの不等式」が出ます。これを全ての鏡について繰り返すと、トーラスをブロックに分け、各ブロックに関数 f_w を置いた積の期待値について

$$\left|\left\langle \prod_{w} f_w \right\rangle\right| \;\leq\; \prod_{w} \left\langle \prod_{w'} f_w^{(w')} \right\rangle^{1/|\text{ブロック}|} \tag{1}$$

が成り立ちます（Fröhlich–Israel–Lieb–Simon のチェス盤の評価 典 ）。右辺の $\prod_{w'} f_w^{(w')}$ は、同じ関数 f_w を鏡映で全てのブロックに写した「一様な模様」です。左辺のどんな置き方も、一様な模様の期待値の幾何平均で押さえられる、というのが要点です。

右辺の各因子は、一つの関数 f ごとに決まる量

$$\|f\|_{\mathrm{cb}} := \left\langle \prod_{w'} f^{(w')} \right\rangle^{1/|\text{ブロック}|} \tag{2}$$

で、これを**チェス盤の根**と呼びます。体積を大きくしても、ブロック一つあたりの量なので体積に依らない形をとります。

03

二つの使い方 — 大きさを測るか、稀さを測るか

公開された構成の使い方。公開された構成は、Wilson の測度の鏡映正値性から、チェス盤の不等式（`Cells.Tiling.tiles`、`YM/Cells/Chess.lean:80`）と、チェス盤の根の三角不等式 $\|F+P\|_{\mathrm{cb}} \le \|F\|_{\mathrm{cb}} + \|P\|_{\mathrm{cb}}$（`Cells.Tiling.adds`、同 `:108`）を出しています源。根 `rootTest`（`YM/Cells/Tiling.lean:226`）は (2) の形の量です源。三角不等式があるので、根は観測量の空間の上の半ノルムのように使えます推。

この半ノルムで、紫外の側と赤外の側の接面に置かれる評価の一つが書かれています。繰り込んだ局所の観測量をチェス盤の根で測ると、全ての体積で一様に $A \cdot a_m^{-d-\varepsilon}$ 以下、という形です（`Extraction.Wcmain`、`YM/Extraction/Center.lean:38`）源。これが、無限体積の部分列を取るための局所の有界性と同程度連続性の入力になります（12-02・12-03）源。紫外の側から受け取る入力はこれだけではありません源。

この部の使い方。この部は、同じチェス盤の評価を、**稀な事象の確率**の評価に使います。関数として面の指示関数「この面が大きい」を置くと、一様な模様は「全ての場所でその面が大きい」事象になります。その重みは作用が大きく損をするので分配関数に比べて指数的に小さく（エネルギー）、分配関数は全てのリンクを単位元の近くに置く配位の重みで下から押さえられます（エントロピー）。比の $1/|\text{ブロック}|$ 乗が、面一枚あたりの率になります。これがチェス盤の Peierls の議論です典。

	公開された構成	この部
置く関数	繰り込んだ局所の観測量	面が大きいことの指示関数
根で測るもの	観測量の大きさ（$a_m^{-d-\varepsilon}$ の程度）	事象の稀さ（面一枚あたりの率 <1）
使う所	局所の有界性と同程度連続性 → 部分列の極限	大きい面が多い配位が稀であること
鏡	元の Wilson の測度について、格子点を通る面と辺の中点を通る面、四つの軸、$\beta \ge 0$ 源	同じ二種類（真ん中の面はゲージ不変な関数、$\beta \ge 0$、$m \ge 2$）
三角不等式	在る源	使わない

表 2　チェス盤の評価の二つの使い方。

根の言葉で言えば、この部の定理は「一つの向きの面が大きいことの指示関数の根は $q<1$ 以下」という形に言い直せる見込みです推（22-01 の証明の段 2〜5 が、この量を押さえています）。公開された構成は、大きい面の集合の確率の評価にはチェス盤を使っていません推（名前の検索の範囲）。大きい場は、繰り込みの各段の中で別の仕組みで扱われています（22-02）。

04

部の全体に掛かる範囲

- **一つの尺度**。格子間隔を固定した細かい格子の Wilson の測度そのものの言明です。ブロック写像で押し出した粗い尺度の測度（19-04）については何も言いません。
- **体積に一様、格子間隔には一様でない**。率は N に依りませんが、β は一つの格子の結合で、格子間隔を 0 にする列とは関係しません。
- **弱結合の側、陽な閾**。$\beta \geq 81$（$m \geq 2$）。率 $1/4$ の形の閾は存在だけです。物理で興味のある帯（β が 2〜3 ほど）については何も言いません。
- **偶数の辺、捩れ無し**。辺は偶数で、背景の捩れの無い測度だけです。
- **既知の型の形式化**。チェス盤の Peierls の議論（Fröhlich–Israel–Lieb–Simon の型）の SU(2) の Wilson の測度での形式化です。新しさは主張しません。

05

読む順

22-01（言明・証明の道筋・数）→ 22-02（言えていること・言えていないこと、公開された構成の大きい場の扱いとの関係）。この稀さを前提の側でどう使う計画だったかは 28-04 にあります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
Lean 表 1 の三つの定理（詳細は 22-01）	粗い尺度、$\beta < 81$、奇数の辺、捩れのある測度
源 公開された構成はチェス盤の不等式と根の三角不等式を持ち、根で測った観測量の大きさの評価を無限体積の極限の入力に使う	その評価が公開の定理の依存の鎖のどこに入るか（12-03 で読む）
推 公開された構成は大きい面の確率の評価にチェス盤を使っていない。この部の定理は根の言葉に言い直せる見込み	言い直しの Lean の形

出典と再現

もの	種別	出典・道具
チェス盤の評価とチェス盤の Peierls の議論	典	J. Fröhlich, R. Israel, E. H. Lieb, B. Simon（1978）の標準の議論。M. Biskup, arXiv:math-ph/0610025 の要旨で確認（原論文の本文は未入手）。22-01 と同じ
公開された構成のチェス盤と根	源	`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）：`YM/Cells/Chess.lean:80` `tiles`・`:108` `adds`、`YM/Cells/Tiling.lean:226` `rootTest`、`YM/Extraction/Center.lean:38` `Wcmain`
表 1 の定理	Lean	本書の検討の Lean の宣言（名は表 1。出典の詳細は 22-01）

この章で使った語 — 大きい面・チェス盤の評価・一様な模様・チェス盤の根・半ノルム・Peierls の議論・鏡映正値性・体積に一様。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：22-01 大きい面の稀さ — チェス盤の評価 — この部の三つの定理の言明と証明の道筋です。

大きい面の稀さ — チェス盤の評価

この章は本書の検討です。§01 は既存の知見です。

範囲 — この章の定理は、一つの尺度（格子間隔を固定した細かい格子）の SU(2) の Wilson の測度そのものについての言明です。ブロック化した粗い尺度の測度、背景つきの場（捩れなど）、段を跨ぐ一様な評価については何も言いません。体積（トーラスの大きさ）には一様ですが、格子間隔には一様ではありません。部の全体の範囲と言っていないことのまとめは 22-02 にあります。

この章で分かること — 偶数の辺 $N = 2m$ のトーラス $(\mathbb{Z}/N)^4$ の Wilson の測度で、(1) 単位の立方体のリンクの関数をブロックごとに並べた積の期待値についてのチェス盤の評価（全ての β、全ての $m \geq 1$）、(2) $\beta \geq 81$、$m \geq 2$ で、面の集合 X の全ての面が $\mathrm{Re}\, U_p < 0$ である確率 $\leq q_1^{\lfloor |X|/6 \rfloor}$、$q_1 < 1$ は N と X に依らない、(3) $m = 1$ を含む率 $1/4$ の形、の三つを読みます。

前提となる章 — 22-00 入口（この部の定理の一覧と、部の全体に掛かる範囲）、19-01 Wilson の測度・面とホロノミー・Haar の積、20-01 鏡映正値性、26-05 §チェス盤の評価。

先に言うこと — 範囲は題の直下に書いたとおりです。加えて三つあります。(1) (4) の q_1 は冠の真の体積 $h(1/20)$ で書かれていますが、Lean が数として押さえているのは $h(1/20) \geq 83^{-4}$ までで、q_1 の上界 $e^{-0.88\beta} 83^{16}$ は真の q_1 の約 $2.5 \cdot 10^{12}$ 倍です読 。閾 81 はこの上界から決まり、真の h なら約 48 です読 。(2) 閾 $\beta \geq 81$ は証明の都合の値で、物理で興味のある β（2〜3 の帯）から遠い値です。(3) 確率は分配関数 Z に対する比で、ほかの量（捩れた分配関数や小さい場に制限した分配関数）に対する比ではありません。どの定理も、鏡映正値性からのチェス盤の Peierls の議論という既知の型の形式化です典 。

この章の順序

1. チェス盤と Peierls の議論 — 鏡映で事象を一様な模様に広げ、エネルギーとエントロピーを比べる
2. 設定 — 大きい面と冠 — $\mathrm{Re}\, U_p < 1 - y$ の事象、冠の体積 $h(r)$
3. チェス盤の評価 — 全ての偶数の辺、全ての β

4. 体積に一様な稀さ — $\beta \geq 81$ — $q_1^{\lfloor |X|/6 \rfloor}$、$q_1 < 1$
5. 稀さの証明の道筋 — 鏡映正値性 → 一様な模様 → 作用の上界と分配関数の下界 → 鳩の巣
6. 寄り道：$48r^2$ と $h(r)^4$ の勘定 — 一つの格子点あたりの面とリンクの数
7. 率 $1/4$ の形 — $m = 1$ を含む — 閾は存在だけ
8. 強さ — 数で見る — 冠の体積の下界と真の値、閾の値
9. 言っていないこと — 粗い尺度、背景、$\beta < 81$、ほかの比

01

チェス盤と Peierls の議論

導入は 26-05 §チェス盤の評価 と 20-01 です。鏡映正値な測度では、ブロックごとに置いた関数の積の期待値を、全てのブロックに同じ関数を鏡映で写した「一様な模様」の期待値の幾何平均で押さえられます（チェス盤の評価、Fröhlich–Israel–Lieb–Simon）典。

これを稀な事象の評価に使うのが、チェス盤の Peierls の議論です典。評価したい事象（ある場所の面が大きい）を鏡映で全てのブロックに写すと、全ての場所で面が大きい「一様な模様」の事象になります。一様な模様の事象の重みは、作用が大きく損をするので、分配関数 Z に比べて指数的に小さい。その比の $1/|$**ブロックの数**$|$ 乗が、一枚あたりの率になります。率が体積に依らないことが、この議論の要点です。

この章の定理は、この議論を SU(2) の Wilson の測度で形式化したものです。新しい型の結果ではありません。

02

設定 — 大きい面と冠

格子は $(\mathbb{Z}/N)^4$、$N = 2m$。測度は 19-01 の Wilson の測度（正規化しない）

$$d\mu_W(U) = \prod_{\ell} dh(U_\ell)\ \exp\Big(\beta \sum_{p} \operatorname{Re} U_p\Big), \qquad Z = \mu_W(\text{全体}), \tag{1}$$

h は $SU(2)$ の Haar の確率測度、面の和は無向の面 $(x;\mu<\nu)$ の $6N^4$ 枚です。Lean：`TorusRP.wilsonMeasure`、Z は `FoldPeierls.Zw`（全質量）。この章は向きを 1〜4 で番号づけます（Lean の添字 0〜3 が向き 1〜4。19-01 §向きの番号）。

大きい面。閾 $y \in (0,2]$ について、面 p が $1 - \operatorname{Re} U_p > y$ のとき「大きい」と呼びます。$y = 1$ では $\operatorname{Re} U_p < 0$ です。Lean：`FoldEntropy.bigP N y ω p`（指示関数、狭義の不等号）。$\operatorname{Re} U$ は $\frac{1}{2}\operatorname{tr} U$ で、$1 - \operatorname{Re} U = |U - 1|^2/2$ です（U を単位の四元数として）。

冠。単位元のまわりの開いた冠 $\{U \in SU(2) : |U - 1| < r\}$ の Haar の体積を $h(r)$ と書きます（$|\cdot|$ は四元数のノルム）。Lean：`FoldEntropy.ballQ r`、$h(r)$ は `haarBall.real (ballQ r)`。

面の集合 X について、$\int \prod_{p \in X} \mathbf{1}[p \text{ は大きい}]\, d\mu_W / Z$ は「X の面が全て大きい」事象の確率です。X の外の面には条件を付けません。

03

チェス盤の評価

ブロックは単位の立方体で、$(\mathbb{Z}/N)^4$ の点 w ごとに一つ、N^4 個あります。原点の立方体の中のリンク（始点の座標が全て 0 か 1、向きの座標が 0）だけに依る有界可測な関数を「原点のブロックの関数」と呼びます。Ψ_w は配位の写像で、各向きの座標について、w の座標が偶数なら並進、奇数なら鏡映を合成したものです。原点のブロックの関数 f に対し $f \circ \Psi_w$ はブロック w に運んだ関数です。

チェス盤の評価　Lean：`FoldWilson.wilson_chessboard_even`。$N = 2m$（$m \geq 1$）、全ての実の β、原点のブロックの関数の族 (f_i) と割り当て $F : (\mathbb{Z}/N)^4 \to I$ について、

$$V(F) = \int \prod_{w} f_{F(w)}\big(\Psi_w U\big)\, d\mu_W(U), \qquad |V(F)|^{N^4} \;\leq\; \prod_{w} V\big(\text{定数の割り当て } F(w)\big). \tag{2}$$

意味。どのブロックにどの関数を置いても、その積の期待値は、各関数を全てのブロックに置いた一様な模様の期待値の幾何平均で押さえられます。辺が 2 の冪である必要はありません。$f \equiv 1$ では両辺 Z^{N^4} で等号です。

証明の道筋は三段です。(i) 一方向の輪 $\mathbb{Z}/2m$ の上で、全ての面の鏡映について「折りの不等式」$V(F)^2 \leq V(F^+)V(F^-)$ と $V(\text{定数}) \geq 0$ から $|V(F)|^{2m} \leq \prod_t V(\text{定数 } F(t))$ を出す（`FoldChess.chess_one`）。2 の冪に限らないために、値域の有限の族の上で比の最大をとり、折りで最大が保たれることを使う Fröhlich–Israel–Lieb–Simon の議論を使います。一次元の転送の核の模型では、鏡映正値な核で結論の破れは無く、正値でない核では破れます読。(ii) 四方向に一回ずつ当てる（`FoldChess.chess_four`）。(iii) 折りの不等式を、格子点の面の鏡映正値性と Cauchy–Schwarz の形（20-01、全ての実の β）と、鏡映と並進で測度が変わらないことから出す（`FoldChess.chess_data`、具体の払いは `FoldWilson.data`）。

04

体積に一様な稀さ — $\beta \geq 81$

体積に一様な稀さの定理　Lean：`FoldCap.rarity_explicit`。

$$q_1 = \frac{e^{\beta(48\cdot(1/20)^2-1)}}{h(1/20)^4} = \frac{e^{-0.88\,\beta}}{h(1/20)^4} \tag{3}$$

とおくと、全ての $\beta \geq 81$ で $q_1 < 1$。かつ全ての $m \geq 2$（$N = 2m$）と、$(\mathbb{Z}/N)^4$ の無向の面の任意の集合 X について

$$\int \prod_{p \in X} \mathbf{1}\big[\operatorname{Re} U_p < 0\big]\, d\mu_W \;\leq\; Z \cdot q_1^{\lfloor |X|/6 \rfloor}. \tag{4}$$

量化の順は「β ごとに、β だけで決まる q_1 があり、全ての N と全ての X で」です。q_1 は N にも X にも依りません。

意味。結合が弱い（β が大きい）とき、多くの面が同時に大きく捩れている配位は、捩れた面の数について指数的に起こりにくく、その率は格子の大きさに依りません。中身があるのは $|X| \geq 6$ からです（$|X| < 6$ では右辺は Z）。事象は空ではありません。全ての面で $\operatorname{Re} U_p = -1$ となる配位（$\mathbb{Z}_2$ の完全にフラストレートした配位）があり、その近くの開集合に正の重みが載るので、左辺は全ての X で正です[初]。

途中の形（同じく Lean）：$0 < y \leq 2$ の一般の閾で、$r > 0$ と β_0 が在って（証明の中では $r = y/20$）、$\beta \geq \beta_0$ なら $q_1 = e^{\beta(48r^2-y)}/h(r)^4 < 1$ と (4) の形（`FoldMix.rarity_uniform_all_mix`、$m \geq 2$）。一つの向きの面だけなら一枚あたり率 1（`FoldMix.rarity_orient`）。

05

稀さの証明の道筋

1. **四方向の鏡映正値性**。向き 1・2 では格子点の面の鏡映（全ての実の β）、向き 3・4 ではリンクの真ん中の面の鏡映（ゲージ不変な関数、$\beta \geq 0$、$m \geq 2$）を使います（20-01）。真ん中の面を混ぜるとブロックは格子点になり、N^4 個のブロックの全てで運んだ面が相異なります。面の指示関数はゲージ不変です（$\operatorname{Re} U_p$ が不変）。これで §03 の器が作れます（`FoldMix.dataMix`）。$m \geq 2$ はこの段の条件です。
2. **一様な模様へ**。ブロック関数「原点の向き $(1,2)$ の面が大きい」を、一つの格子点の集合 S のブロックに置き、ほかに 1 を置いて (2) を使うと、確率は「全ての N^4 個の向き $(1,2)$ の面が大きい」事象の重みの $|S|/N^4$ 乗で押さえられます。

3. **一様な模様の重み（エネルギー）**。その事象の上では N^4 枚の面で $\mathrm{Re}\,U_p < 1-y$、ほかの面は $\mathrm{Re}\,U_p \le 1$ なので、作用 $\le 6N^4 - yN^4$、重み $\le e^{\beta(6N^4 - yN^4)}$ です（`FoldMix.action_le_mix` の形）。
4. **分配関数の下界（エントロピー）**。全てのリンクを冠 $|U-1| < r$ に置くと、面は四本の積で $|U_p - 1| \le 4r$、よって $\mathrm{Re}\,U_p \ge 1 - 8r^2$。この配位の集合の Haar の重みは $h(r)^{4N^4}$ なので $Z \ge e^{6N^4\beta(1-8r^2)} h(r)^{4N^4}$ です（`FoldEntropy.Zw_ge`）。
5. **比をとる**。3 を 4 で割って $1/N^4$ 乗すると一枚あたり $q = e^{\beta(48r^2 - y)}/h(r)^4$ です。
6. **向きを揃える**。六つの向きを $(1,2)$ に写す対合で測度は変わりません。一般の X には六つの向きのどれかの面が $\lfloor |X|/6 \rfloor$ 枚以上あり（鳩の巣）、指示関数は $[0,1]$ の値なので、その部分集合に落とせます（`FoldMix.rarity_all_mix`）。
7. **陽な閾**。$y = 1$、$r = 1/20$ では $48r^2 - 1 = -0.88$。冠の体積を格子 $(1/41)\mathbb{Z}^4$ の被覆で $h(1/20) \ge 83^{-4}$ と押さえ（`FoldCap.ballQ_ge`）、$e^{71} > 2.718^{71} > 83^{16}$ から $\beta \ge 81$ で $q_1 < 1$ です（`FoldCap.q_lt_one_explicit`）。

寄り道：$48r^2$ と $h(r)^4$ の勘定

飛ばしてよい。一つの格子点あたり、面は 6（向きの対 $\mu < \nu$ の数）枚、リンクは 4 本です。分配関数の下界では、一枚の面が最大で $1 - \mathrm{Re}\,U_p \le 8r^2$ だけ損をするので、格子点あたりの作用の損は $6 \cdot 8r^2 = 48r^2$、Haar の重みは $h(r)^4$ です。一様な模様の事象の側では、格子点あたり一枚の面が y 以上損をします。比をとると、格子点あたり $e^{\beta(48r^2 - y)}/h(r)^4$ が残ります[初]。r を小さくすると $48r^2$ は小さくなりますが $h(r)$ も r^3 の速さで小さくなるので、$q < 1$ にするには β を $\log(1/h(r))$ の数倍に取る必要があります。閾が大きくなる理由はここにあります。

06

率 $1/4$ の形 — $m = 1$ を含む

率 $1/4$ の稀さの定理　Lean：`FoldQuarter.rarity_uniform4`。$0 < y \le 2$ について、$r > 0$ と β_0 が在って、全ての $\beta \ge \beta_0$ で $q_4 = e^{\beta(48r^2 - y/4)}/h(r)^4 < 1$、かつ全ての $N = 2m$（$m \ge 1$、とくに $N = 2$ を含む）と面の任意の集合 X について

$$\int \prod_{p \in X} \mathbf{1}\big[1 - \mathrm{Re}\,U_p > y\big]\, d\mu_W \;\le\; Z \cdot q_4^{\lfloor |X|/24 \rfloor}. \tag{5}$$

違いは二つです。真ん中の面の鏡映を使わず格子点の面の鏡映だけで組むので $m \ge 2$ の条件が要らない代わりに、一様な模様で相異なる面は $N^4/4$ 枚になり、率が $1/4$ になります。一般の X は 24 の類（向き 6 × 外の向きの偶奇 4）に分けて鳩の巣を使います。

Lean の言明は r と β_0 の存在だけです。証明の中では $r = y/1000$、β_0 は $h(r)$ を含む式に取っていて、その数値は Lean にありません。冠の体積の公式で数値を入れると $y = 1$ で $\beta_0 \approx 357$ 読 です。陽な閾を Lean の中の数で持つのは §04 の $\beta \geq 81$（$m \geq 2$）だけです。

07

強さ — 数で見る

量	値	札
冠の体積 $h(1/20)$ の真の値（公式 $(\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta)/\pi$、$\vartheta = 2\arcsin(1/40)$）	$2.652 \cdot 10^{-5}$	読
Lean の下界 83^{-4}	$2.107 \cdot 10^{-8}$	読
比（真の値／下界）	1259	読
q_1 の上界の損（1259^4）	$\approx 2.5 \cdot 10^{12}$	読
$\beta = 81$ の q_1：Lean の上界／真の h で	$0.56 / 2.2 \cdot 10^{-13}$	読
$q_1 < 1$ の閾：Lean の下界で／真の h で	80.34／47.9	読
率 $1/4$ の形の閾（$y = 1$、証明の中の $r = y/1000$）	357	読

上界は真の確率から遠いはずですが、閾より上の β で真の確率を数値で比べた記録はありません。言えるのは率と閾の形までです。チェス盤を使わない直接の評価は、固定した X で $N \to \infty$ にすると発散するので体積に一様ではありません。小さい体積では直接の評価のほうが強いこともあります。この章の評価の値打ちは体積に一様なことで、その代わりに定数は弱くなっています。

08

言っていないこと

- **粗い尺度**。一つの尺度（細かい格子の Wilson の測度そのもの）の定理です。ブロック写像で押し出した粗い尺度の測度（19-04）の大きい場の評価には届きません。段を跨ぐ大きい場の評価は前提の側に在ります（28-04）。
- **格子間隔**。体積に一様ですが、β は固定の格子の結合で、格子間隔を 0 に送る極限とは関係しません。
- **β の範囲**。§04 は $\beta \geq 81$ だけ、§06 は存在だけの β_0 以上だけです。物理の帯（β が 2〜3）については何も言いません。81 は証明の都合の値です。
- **辺の偶奇**。偶数の辺だけです。§04 は $m \geq 2$、$m = 1$（$N = 2$）は §06 の率 $1/4$ の形だけが覆います。

- **比の相手**。確率は Z に対する比です。小さい場の事象に制限した分配関数や捩れた分配関数に対する比ではありません。
- **背景**。捩れ（19-02）のない Wilson の測度だけです。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
チェス盤の評価：$N = 2m$（$m \geq 1$）、全ての実の β、単位の立方体のリンクの関数の族で $\lvert V(F)\rvert^{N^4} \leq \prod_w V(\text{定数})$。Lean：`FoldWilson.wilson_chessboard_even`	奇数の辺。捩れのある測度
$\beta \geq 81$、$m \geq 2$：$P(X \text{ の面が全て } \mathrm{Re}\, U_p < 0) \leq q_1^{\lvert X\rvert/6\rfloor}$、$q_1 < 1$ は N・X に依らない。Lean：`FoldCap.rarity_explicit`	$\beta < 81$、$m = 1$。粗い尺度の測度。閾 81 は冠の体積の粗い下界から決まる値（真の h なら約 48 読 ）
$0 < y \leq 2$、存在する β_0 以上、全ての $m \geq 1$：率 $1/4$ の形 $\leq q_4^{\lvert X\rvert/24\rfloor}$。Lean：`FoldQuarter.rarity_uniform4`	β_0 の値（$y = 1$ で約 357 は 読 ）
$Z \geq e^{6N^4\beta(1-8r^2)} h(r)^{4N^4}$（$\beta \geq 0$）。Lean：`FoldEntropy.Zw_ge`	—
$h(1/20) \geq 83^{-4}$。Lean：`FoldCap.ballQ_ge`	冠の体積の真の値の Lean の形

出典と再現

もの	種別	出典・道具
チェス盤の評価とチェス盤の Peierls の議論	典	J. Fröhlich, R. Israel, E. H. Lieb, B. Simon（1978）の標準の議論。M. Biskup, Reflection positivity and phase transitions in lattice spin models, arXiv:math-ph/0610025 の要旨で確認（原論文の本文は未入手）。26-05 と同じ
鏡映正値性（格子点の面・真ん中の面）	典	20-01 の出典（K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471）
§03〜§06 の定理	—	本書の検討の Lean の宣言（名は本文と範囲の表。sorry なし・標準の三つの公理、核の再検査で確かめた）。一覧は 22-02
冠の体積の真の値・下界の浮動小数・比 1259・q_1 の値・閾 80.34・47.9・357	読	本書の検討の数値の記録（冠の体積の公式を Monte Carlo $2 \cdot 10^6$ 点で $r = 0.3, 0.5, 1$ に照合、閾は公式から）
チェス盤の一方向の芯が鏡映正値でない核で破れること（対照）	読	本書の検討の数値の記録（一次元の転送の核の模型、$n = 4, 6, 10$、正定値の核で破れ 0、正定値でない核で破れる）

この章で使った語 — 大きい面・冠・チェス盤の評価・一様な模様・鏡映正値性・格子点の面・真ん中の面・Peierls の議論・分配関数・鳩の巣。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：22-02 この部が言えていること・言えていないこと — 第 22 部の定理を一つの表に並べ、範囲と言っていないことを確かめます。

この部が言えていること・言えていないこと

この章は案内です。§03・§04 は未解決の地図です。

この章で分かること — 第 22 部の定理を一つの表に並べ、範囲と言っていないことを確かめます。そのうえで、この稀さが「一つの尺度の言明」であることの意味、公開された構成が大きい場を繰り込みの各段の中で数え直して扱うこととの関係、この型の言明と残る問いとの距離（推し量りとして）を述べます。

前提となる章 — 22-00 入口、22-01 大きい面の稀さ — チェス盤の評価。公開された構成の大きい場の扱いは 11-03・11-04。

先に言うこと — この章は新しい定理を足しません。§03・§04 の比べと見立ては、公開された構成の源の言明を読んだこと 源 と、そこからの推し量り 推 です。この部の稀さが、無限体積の極限の一意性や質量ギャップを導くとは言いません。

この章の順序

1. 定理の一覧 — 範囲と言っていないこと — 表 1
2. 一つの尺度の言明 — 繰り込んだあとの尺度については何も言わない
3. 公開された構成の大きい場 — 段ごとの数え直し — 作用の側の不等式と、測度の側の稀さ
4. 残る問いとの距離 — 大きい場を抑える型の評価（推し量り）
5. 部の全体で言っていないこと

札 — 源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による（くわしくは 6-00 の「札」）。初・典・機・読・仮・Lean は本全体の札で、読 は本書の数値の読み、Lean は本書の Lean の定理です。出典：`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）。

01

定理の一覧 — 範囲と言っていないこと

定理	範囲	言っていないこと	Lean
チェス盤の評価	$N = 2m$（$m \geq 1$）、全ての実の β、単位の立方体のリンクの関数の族	奇数の辺、捩れのある測度、粗い尺度の測度	`FoldWilson.wilson_chessboard_even`
体積に一様な稀さ	$\beta \geq 81$、$m \geq 2$、面の任意の集合 X：確率 $\leq q_1^{\lfloor \lvert X\rvert /6\rfloor}$、$q_1 < 1$ は $N \cdot X$ に依らない	$\beta < 81$、$m = 1$、粗い尺度。81 は冠の体積の粗い下界から決まる値（真の体積なら約 48 読 ）	`FoldCap.rarity_explicit`
率 $1/4$ の形	$0 < y \leq 2$、存在する β_0 以上、全ての $m \geq 1$：確率 $\leq q_4^{\lfloor \lvert X\rvert /24\rfloor}$	β_0 の値（$y = 1$ で約 357 は 読 ）	`FoldQuarter.rarity_uniform4`
分配関数の下界	$\beta \geq 0$：$Z \geq e^{6N^4\beta(1-8r^2)}h(r)^{4N^4}$	—	`FoldEntropy.Zw_ge`
冠の体積の下界	$K \geq 2$、$2/K < r$ で $h(r) \geq 1/(2K+1)^4$。$K = 41$、$r = 1/20$ を入れて $h(1/20) \geq 83^{-4}$	冠の体積の真の値の Lean の形	`FoldCap.ballQ_ge`

表 1　第 22 部の定理。どれも鏡映正値性からのチェス盤の Peierls の議論の型の、本書の Lean での形式化です Lean 。記号は 22-01。

確率は分配関数 Z に対する比です。小さい場の事象に制限した分配関数や、捩れた分配関数に対する比ではありません。上界は真の確率から遠いはずですが、閾より上の β で真の確率と数値で比べた記録はありません。言えるのは率と閾の形までです（22-01 §07）。

02

一つの尺度の言明

この部の定理は、格子間隔を固定した細かい格子の Wilson の測度そのものについての言明です。β はその格子の結合で、格子間隔を変える操作は入っていません。

- **繰り込んだあとの尺度については何も言いません**。ブロック写像で粗い格子へ押し出した測度（19-04）で、粗い面の大きいものが稀かどうかは、この部の定理からは出ません。押し出しは面のずれを平均したり合成したりするので、細かい面の稀さがそのまま粗い面の稀さになる保証はありません 初 。

- **段を跨ぐ一様な稀さは前提の側に在ります。**繰り込みの全ての段で同じ形の稀さ（定数が段と格子間隔に依らないもの）は、この本の検討では前提として置かれ、示されていません（28-04、大きい場の稀さの条件）。
- **体積に一様、格子間隔には一様でない。**連続極限では β を格子間隔とともに動かすので、固定した β の言明は、そのままでは連続極限の列のどの段の評価にもなりません初 。

03

公開された構成の大きい場 — 段ごとの数え直し

公開された構成も、大きい場（面のずれが閾を越える所）を扱わなければなりません。その扱いは、この部の稀さとは種類が違います。

- **密度の形。**各段の有効な密度は、閾までは二次で閾を越えると一次に切った作用の指数と、大きい場の活動の気体（強制された活動）の積の形で持ち運ばれます源 （11-01）。
- **段ごとの数え直し。**大きい場の「種」は、各段で、その段の場から数え直されます。一度大きい場になった領域を以後固定する型ではありません源 。持続する欠陥は、各段で値段を払い直すことになります推 。
- **種一つあたりのエネルギー。**一段の要は、ハロの中の作用の差が種の数に比例して下から押さえられる、という配位ごとの不等式です（`Next.Fluctuations.grants`、`YM/Next/FLUCTUATIONS/Grants.lean:24`。ゲージの切り口（`SliceSet`）・区画（`Plot`）・`Funds` などの仮定つき）源 。宣言の使われ方の記録では、この不等式は見出しの定理の一つ（`SharpGram.habitat`）から届きます源 。読み方は 11-04。この不等式が公開の定理の依存の鎖のどこに入るかは確かめていません。

この部の稀さとの違いは、表 2 のとおりです推 。

	公開された構成の大きい場	この部の稀さ
言明の種類	配位ごとの作用の不等式（全ての配位で、条件つき）	測度の言明（事象の確率）
尺度	繰り込みの各段、段ごとに数え直す	細かい格子の一つの尺度
結合	全ての段で弱結合の帯の中	$\beta \geq 81$（一つの格子の結合）
体積	一段の帳簿は点ごとの和で体積に依らない。密度の水準の評価は体積の指数を含む源	率は体積に一様
道具	作用の分解・区画・一の分割・塊の和	鏡映正値性・チェス盤・Peierls

表 2　大きい場の二つの扱い。

どちらからも、他方は出ません[推]。公開された構成の不等式は段の中の作用の言明で、測度の稀さを言いません。この部の稀さは一つの尺度の測度の言明で、段を跨ぐ評価を言いません。公開された構成が体積に一様な評価として使うのは Wilson の測度の側のチェス盤の根の評価などで（22-00 §03）、そこでもチェス盤は大きい面の確率には使われていません[推]（名前の検索の範囲）。

04

残る問いとの距離

この節は推し量りです[推]。

評価書の開いた問いの一つは、無限体積の極限の収束と一意性です（16-02）。公開された構成は無限体積の極限をコンパクト性の部分列で取り、体積を変えたときの差の評価や一意性の材料を入れていません[源]。

一意性を示す議論は、普通、体積に一様な何らかの「乱れの少なさ」を部品にします。強結合の窓での一意性（20-03）では、それが Dobrushin の条件（一本のリンクが周りから受ける影響の小ささ）でした。この部の稀さは、弱結合の側で「大きい面が多い配位は、体積に依らない率で稀」という形の乱れの少なさを、測度の言明として与えます。これは、大きい場を抑える型の評価で、強結合の窓の Dobrushin の条件と同じく、体積に一様な乱れの少なさの形です。ただし対象は一つの格子間隔の測度で、評価書の問い（連続の理論の無限体積の極限）の対象とは別です。

次の三つの理由で、この部の稀さは一意性を導きません。

1. 稀さだけでは、小さい場（大きくない面）の側の長距離の相関について何も言いません。一意性には、その側の減衰か、それに代わる議論が要ります。
2. $\beta \geq 81$ の一つの格子の言明で、公開された構成が無限体積を取る対象（連続極限を先に取った相関関数）とは別の対象です。
3. 繰り込んだ尺度での稀さ（§02）が無いので、連続極限の列に沿って使える形になっていません。

同じ型の言明が質量ギャップ（一様な減衰）の議論の部品になるか、も同じく開いたままです。

05

部の全体で言っていないこと

- **粗い尺度**。押し出した測度の稀さ、段を跨ぐ一様な稀さは言いません。
- **β の範囲**。$\beta \geq 81$（陽）と存在だけの β_0 以上。物理の帯（β が 2〜3 ほど）については何も言いません。
- **辺と背景**。偶数の辺、捩れの無い測度だけです。
- **比の相手**。確率は Z に対する比です。
- **一意性・質量ギャップ・連続極限**。どれもこの部の定理からは出ません。
- **新しい結果ではありません**。チェス盤の Peierls の議論の、SU(2) の Wilson の測度での形式化です。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
Lean 表 1 の五つ（チェス盤の評価、体積に一様な稀さ、率 1/4 の形、分配関数の下界、冠の体積の下界）。詳細は 22-01	粗い尺度、$\beta < 81$、奇数の辺、捩れのある測度
源 公開された構成は大きい場を各段で数え直し、種一つあたりのエネルギーの配位ごとの不等式で扱う	その不等式が公開の定理の鎖に入る経路（確かめていない）
推 二つの扱いはどちらも他方を導かない。この部の稀さは大きい場を抑える型の評価（体積に一様な乱れの少なさの形）	一意性・質量ギャップへの道

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1 の定理	Lean	本書の検討の Lean の宣言（名は表 1）。チェス盤の評価は Fröhlich–Israel–Lieb–Simon（1978）の標準の議論。出典の詳細は 22-01
閾 48・357 の値	読	本書の検討の数値の記録（冠の体積の公式から。22-01 §07）
公開された構成の大きい場の扱い	源	`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`：`YM/Next/FLUCTUATIONS/Grants.lean:24 grants`。密度の形と数え直しの読みは 11-01・11-03・11-04
開いた問い（収束と一意性）	評	評価書（`yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`、2026-11-10）§8 の 1

この章で使った語 — 大きい面・稀さ・一つの尺度・押し出し・切った作用・強制された活動・種・数え直し・体積に一様・一意性。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-00 入口 ― 階段と、酔歩・物差し・時計 ― ここからは、帯へ向かう検討の記録です。確かな定理の部をまとめて見るなら 16-04 の表 1 へ。