第三巻　質量ギャップへ — 残る問いと本書の結果

第 23 部 一本目の道（前半）— 時間の方向から

Kiichi, Shiori and Rin · 2026-11-14 の版 · https://computoergosum.com/principia/yang-mills/

> この PDF は Web 版の各章をそのまま刷ったものです。動かせる図は刷った時点の姿で止まっています。章の間のリンクは Web 版へ飛びます。最新の内容は Web 版に在ります。

章		頁
23-00	入口 — 階段と、酔歩・物差し・時計	3
23-01	構成の筋と拡散型緩和時間の仮定	14
23-02	四次元格子で試した道と壁	42
23-03	階段の四段 — なぜ 0+1 次元から始めるか	63
23-04	二重井戸の経路の測度とキンク	72
23-05	一段目の言明 — 二重井戸の四条件と上界の命題	84
23-06	相内の局所 Poincaré の条件	101
23-07	鞍点の管の条件の地図 — 七つの道筋と環の継ぎ目	116
23-08	計算機援用とは何か — 窓の中の鎖の条件	128
23-09	区画の枠組みと、窓の対数 Sobolev の道筋の三本の筋	140
23-10	迂回策の一覧 — 壊れ方の型	156
23-11	箱への帰着と箱の中の隙間 — 芯の定数	171
23-12	統合表と依存グラフ	193
23-13	Lean の言明と機械検査の限界	212

章		頁
23-14	突き合わせ — 記録の数と既知の数	221
23-15	残件と費用 — 定理までの距離	231
23-16	主張しないこと	251
23-17	ひらめきと小さな問い	260

第 23 部の入口 — 階段と、酔歩・物差し・時計

この章は案内です（この部の入口）。

この部は検討の記録です。機械検査まで済んだ定理は第 20〜22 部、前提の今の一覧は 28-04 に在ります。

この章で分かること — 第 23 部は、拡散型緩和時間の仮定（揺らぎが均される時間は、相関長の二乗の冪で伸びる）を軸に置いて、質量ギャップへの道を検討する部です。拡散型緩和時間の仮定は、問題文の量（ユークリッドの時間の隙間）を、格子で計算でき機械検査の届く量（Langevin 力学の緩和の時間）に言い換えた一つの文です。この部では、その文を四段の階段に分けたときの一段目（0+1 次元の二重井戸の経路の測度）で、主張がどこまで組めているかを並べます。この章では、階段の絵と部の地図を見たあと、相関長 ξ・Poincaré 定数 C_P などの量を、酔歩・物差し・時計の比喩で一つずつ立てます。

前提となる章 — 2-10（緩和の時間と動的指数）・4-11（質量ギャップの定義と相関長）・2-07（経路積分と虚時間）。

先に言うこと — この章は比喩で量を並べる入口で、何も証明しません。緩和時間の仮定は証明されていない仮定です。正確な定義は 23-01（四次元格子の側）と 23-04（二重井戸の側）に置きます。

この章の順序

1. 部の地図 — 十八章の一覧と、札の読み方
2. 階段の四段 — 二重井戸から極限の質量ギャップまで（図 1）
3. 物差し — 相関長 ξ — 相関が何歩で消えるか
4. にじむ時間 — Poincaré 定数 C_P — 長さ L を均すのに L^2 歩（表 3）。寄り道：酔歩はなぜ二乗か
5. 縮尺と時計 — 残りの三つの量 — 縮尺の回数・時計の目盛り・遅れる時計
6. 緩和時間の仮定を一文で — にじむ時間 $\asymp$ 物差し^2。「ある f」と「すべての f」

7. 第 23 部の歩き方 — 比喩がどの章で正確な文になるか

01

部の地図 — 十八章の一覧と、札の読み方

この部は、緩和時間の仮定（揺らぎが均される時間は相関長の二乗の冪で伸びる）を軸に置いた検討です。緩和時間の仮定は質量ギャップそのものではなく、それを格子で測れる力学の量に言い換えた文で（23-01 §05）、この部はその文を、四段の階段の一段目——0+1 次元の二重井戸の経路の測度——で組み立てます。一段目の主張を四つの条件に割り、条件ごとに、証明を置いた行・原典を引く行・計算機援用の行・数値の読みの行・仮定の行を一つの表に並べます。

第 23 部の十八章

0. **23-00 入口 — 階段と、酔歩・物差し・時計** 〔二〕（この章）
1. 23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定 〔二〕〜〔三〕
2. 23-02 四次元格子で試した道と壁 〔三〕
3. 23-03 階段の四段 — なぜ 0+1 次元から始めるか 〔二〕
4. 23-04 二重井戸の経路の測度とキンク 〔二〕〜〔三〕
5. 23-05 一段目の言明 — 二重井戸の四条件と上界の命題 〔三〕
6. 23-06 相内の局所 Poincaré の条件 〔研〕
7. 23-07 鞍点の管の条件の地図 — 七つの道筋と環の継ぎ目 〔三〕
8. 23-08 計算機援用とは何か — 窓の中の鎖の条件 〔二〕〜〔三〕
9. 23-09 区画の枠組みと、窓の対数 Sobolev の道筋の三本の筋 〔研〕
10. 23-10 迂回策の一覧 — 壊れ方の型 〔三〕〜〔研〕
11. 23-11 箱への帰着と箱の中の隙間 — 芯の定数 〔研〕
12. 23-12 統合表と依存グラフ 〔三〕
13. 23-13 Lean の言明と機械検査の限界 〔二〕〜〔三〕
14. 23-14 突き合わせ — 記録の数と既知の数 〔三〕
15. 23-15 残件と費用 — 定理までの距離 〔三〕
16. 23-16 主張しないこと 〔二〕

17. 23-17 ひらめきと小さな問い 〔二〕〜〔三〕

章の順は、なぜこの仮定か（23-00〜23-02）、一段目の言明（23-03〜23-05）、四つの条件（23-06〜23-11）、全体の表（23-12・23-13）、突き合わせと残り（23-14〜23-17）です。印〔二〕〔三〕〔研〕は読者の水準で、〔二〕は 2 年生、〔三〕は 3 年生以上（測度・作用素・Poincaré 不等式を使う）、〔研〕は研究の水準です。この章は〔二〕です。緩和時間の仮定とは別の視点や、緩和時間の仮定を前提にした新しい見方は 第 24 部 一本目の道（後半） に置きます。

この部の札

この部では、主張の強さを五つの札で分けます（0-01 §03 の札を、この部の材料に合わせて細かくしたものです）。札は一つの文に一つで、二つ要る文は分けて書きます。

表 1　この部の五つの札（Lean は札の外の欄）

札	意味	保証しないこと
初	初等。証明を本文か章末に置く	誤りが無いこと（読者が確かめられる形で置く）
典	既知の定理を原典（または言明を確かめた二次資料）から引く	この本の成果であること
機	計算機援用。区間演算で、不等式として確かめた（丸めの規約などの前提を同じ行に書く）	計算した範囲の外で成り立つこと
読	読み。浮動小数の数値・Monte Carlo・当てはめ。種類（点の値・族の下界など）を添える	上界や下界の証明であること
仮	仮定。証明を持たずに置く行。名前を付ける	成り立つこと

Lean は五つの札とは別の欄です。Lean の定理は「仮定から結論への代数」を機械で検査したもので、定理名と、その定理の仮定を同じ行に書きます。仮定が正しいかどうかは検査の外です（23-13）。

02

階段の四段 — 二重井戸から極限の質量ギャップまで

緩和時間の仮定は「ある測度の族で、揺らぎの均される時間が相関長の二乗の冪で伸びる」という文で、次元によらずに述べられます。そこで、同じ形の文を易しい場所から難しい場所へ四段に並べます。

図 1　階段の四段。この部が扱うのは一段目の中で、二段目から上への矢印は「同じ形の文」を表し、含意の定理ではない

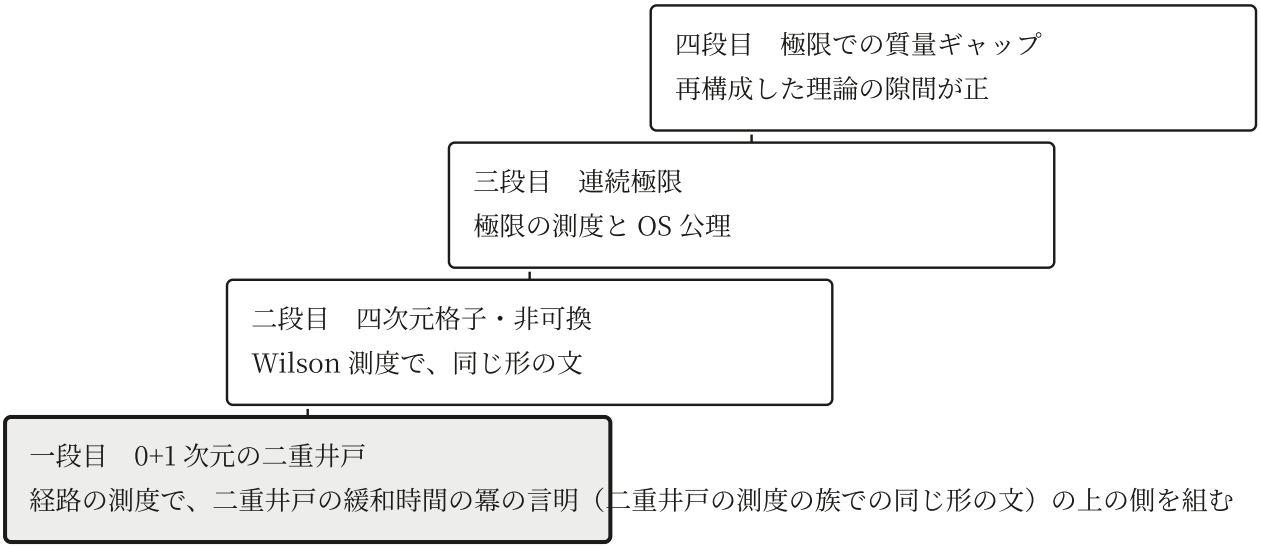

図 1 を文字で書くと次のとおりです。下から順に、一段目＝0+1 次元の二重井戸（量子力学の模型の虚時間の経路の測度）、二段目＝四次元格子の非可換ゲージ理論（Wilson 測度）、三段目＝格子間隔を 0 にした連続極限と、その極限が Osterwalder–Schrader の公理を満たすこと、四段目＝極限の理論の質量ギャップです。

表 2　四段の対象と、各段で「閉じた」と言えること

段	対象	閉じたと言える形	この本の状態
一段目	0+1 次元の二重井戸の経路の測度（径数 $\hbar$）	二重井戸の冪の言明の上の側（C_P の上界）を、有限個の仮定の行の表つきで示す	二重井戸の四条件に割り、その上の代数（二重井戸の緩和時間の上界の命題）まで。条件はどれも 仮 の行を残す
二段目	四次元格子の Wilson 測度（径数 β）	同じ形の文を $\beta \to \infty$ で	緩和時間の仮定は仮定のまま。下からの評価だけ（23-02）
三段目	格子間隔 $a \to 0$ の極限の測度	極限が在り、OS 公理を満たす	扱わない。四次元の Wilson の格子ゲージ理論の極限として Wightman の公理を満たす理論が作れることは、2026-11-10 に公開された構成が Lean で証明している、と委員会が評価した（第 6 部）。連続の理論の確率測度と、無限体積の極限の一意性は示されていない（6-04）
四段目	再構成した場の量子論	ハミルトニアンの隙間が正（4-11）	扱わない。公開された構成も示していない（6-04）

一段目を閉じても、二段目以後に持ち上がる保証はありません。持ち上がる見込みがあるのは「文の形」と「道具の形」で、定数や径数の範囲は持ち上がりません。理由は 23-03 §06 で両側から述べます。

```
03
```

物差し — 相関長 ξ

揺らぎは、近い場所どうしで似ていて、離れると無関係になります。どれだけ離れると無関係になるかの長さが相関長 ξ です。比喩で言えば、測度が持っている一本の物差しです。

式では、二点の相関（平均を引いた積の期待値）が距離 r とともに指数で減り、その減り方の長さが ξ です。

$$\langle O(0)\,O(r)\rangle - \langle O\rangle^2 \;\approx\; C\,e^{-r/\xi}, \qquad \xi = \frac{1}{m} \tag{1}$$

m は転送行列（または転送作用素）の隙間、つまり最も低い固有値と次の固有値の差で、r は虚時間の向きの距離です。相関の減り方と隙間が同じ量であることは 4-11 §02、相関長としての言い直しは 4-11 §07 にあります 典 。

例 1（自由場）。一次元の格子の自由場（隣どうしをばねで結んだガウスの鎖、質量 m_0）では、相関がちょうど $e^{-r/\xi}$ で減り、$m_0^2 = 2(\cosh(1/\xi) - 1)$ で ξ が決まります。$m_0 = 1$ で $\xi \approx 1.04$、$m_0 = 0.1$ で $\xi \approx 10.0$ です（18-03 §05）。

例 2（二重井戸）。量子力学の二重井戸（2-05 §07）では、隙間は二つの谷の間のすり抜けで決まるトンネル分裂 Δ で、山が高いほど指数で小さくなります。虚時間の経路で見ると、相関長は $\xi = \hbar/\Delta$ で、$\hbar$ を小さくすると $e^{S_0/\hbar}$ の速さで伸びます（S_0 は谷から谷へ移る道の作用）。物差しが指数で伸びる、というこの性質が、一段目の模型を選ぶ理由の一つです（23-03 §04・23-04 §03）。

格子の上で測れる ξ は、格子の一目盛りを単位にした数です（5-09 §01）。物理の長さは ξ に格子間隔 a を掛けた $a\xi$ で、連続極限では $a \to 0$ のまま $a\xi$ が有限に残らなければなりません。つまり格子単位の ξ は無限大へ伸びる必要があります（5-09 §05）。二重井戸の $\hbar \to 0$ は、この「物差しが目盛りに比べて無限に長くなる」体制の最小の見本です。

04

にじむ時間 — Poincaré 定数 C_P

紙の上に一滴のインクを落とすと、インクは少しずつにじんで広がり、最後は一様に薄くなります。にじみの正体は、インクの粒の酔歩です。各粒は毎刻み左右どちらかにでたらめに一歩動きます。t 歩のあとの粒の広がり（二乗平均の距離）は $\sqrt{t}$ で、長さ L の帯を一様にするには L^2 程度の歩数がかかります。

この「均し終わるまでの最も長い時間」を、揺らぎについて一般に定めたものが Poincaré 定数 C_P です。比喩で言えば、測度が持っている一個の時計の読み、にじむ時間です。

式で書きます。確率の測度 μ と、関数 f の「場所による変化の大きさ」$\mathcal{E}(f)$（Dirichlet 形）があるとき、

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \;\le\; C_P\,\mathcal{E}(f) \quad (\text{すべての } f), \qquad C_P = \sup_{f} \frac{\mathrm{Var}_\mu(f)}{\mathcal{E}(f)} \tag{2}$$

の最良の定数が C_P です（1-10 §07）。分散が大きいのに変化が小さい関数、つまり「大きくゆっくり変わる揺らぎ」があると C_P は大きくなります。μ を平衡に持つ拡散の力学（Langevin 力学）では、$1/C_P$ がその力学の隙間で、最も遅い揺らぎは時間 C_P ごとに $1/e$ に減ります 典 。

例：一本道の酔歩

升が L 個並んだ一本道（両端で跳ね返る）を考えます。μ は一様分布、$\mathcal{E}(f) = \frac{1}{L}\sum_{i}(f_{i+1}-f_i)^2$ です。このとき (2) の C_P は道のラプラス行列の 0 の次の固有値の逆数で、閉じた形に書けます。

$$C_P(L) = \frac{1}{2\,(1-\cos(\pi/L))} \;\approx\; \frac{L^2}{\pi^2} \qquad (L \to \infty) \tag{3}$$

初 証明：$f_i = \cos(\pi(i-\tfrac12)/L)$（$i = 1,\dots,L$）は、両端で跳ね返る道のラプラス行列の固有ベクトルで、固有値は $2(1-\cos(\pi/L))$ です（隣の二項の和に $\cos(A+B)+\cos(A-B) = 2\cos A\cos B$ を使い、両端では $f_0 = f_1$・$f_{L+1} = f_L$ となる鏡の条件が成り立つことを確かめる）。他の固有ベクトルは $\cos(\pi k(i-\tfrac12)/L)$（$k = 0,\dots,L-1$）で、固有値は k とともに増えます。μ が一様なので Var と $\mathcal{E}$ は同じ $1/L$ で割られ、比の上限は 0 の次の固有値の逆数です。∎

初 表 3　一道の酔歩の C_P（閉じた式 (3) の値）。C_P/L^2 は $1/\pi^2 \approx 0.10132$ に寄っていく

L	隙間 $2(1-\cos(\pi/L))$	C_P	C_P/L^2
16	0.0384294	26.02	0.10165
32	0.00963055	103.8	0.10140
64	0.00240909	415.1	0.10134
256	0.000150596	6640	0.10132

L を倍にすると、均し終わるまでの時間は 4 倍になります。

この部で使う C_P は、この一本道を「経路全体の配位の空間」に置き換えたものです。二重井戸では、虚時間の経路 $x(\tau)$ の全体の上の測度 $e^{-S/\hbar}$ が μ、$\mathcal{E}$ は経路を少し動かしたときの変化の二乗の期待値で、Langevin 力学は「人工的な時間」s に沿って経路全体を拡散させます（23-04 §01）。四次元格子では μ が Wilson 測度、動かすのはリンクの角度です（23-01・7-09）。

自由場では、いちばん遅い揺らぎは経路全体を一様にずらす向きで、その速さが質量の二乗 m_0^2 です。だから $C_P = 1/m_0^2$ で、例 1 の $m_0^2 = 2(\cosh(1/\xi) - 1)$ から C_P/ξ^2 は $\xi = 1, 4, 16, 256$ で $0.921 \cdot 0.995 \cdot 0.9997 \cdot 0.999999$ と 1 に寄ります 初 （閉じた式の値）。にじむ時間が物差しの二乗、というのが自由場の答えです。

正確には、ここで言う C_P は「時空（0+1 次元なら虚時間）の全体の配位の分布（経路の測度）」の Poincaré 定数です。一つの時刻の分布（基底状態の $|\psi_0|^2$）の Poincaré 定数は別の量で、そちらはハミルトニアンの隙間と結び付きます。三つの C_P の区別は 23-01 に置きます。C_P が ξ の何乗で伸びるかの冪 z（動的指数）が 2 からずれる既知の例は 2-10 にあります。

寄り道：酔歩はなぜ二乗か

飛ばしてよい小節です。一歩 ± 1 を独立に t 回足した位置 X_t は、平均 0 で、分散は一歩の分散 1 の t 倍です。独立なものの和では分散が足し算になるからです（1-08）。

$$\mathbb{E}[X_t^2] = \sum_{i=1}^{t} \mathbb{E}[\varepsilon_i^2] + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[\varepsilon_i]\,\mathbb{E}[\varepsilon_j] = t \tag{4}$$

広がりは $\sqrt{t}$ なので、距離 L に届くには $t \approx L^2$ です。波は一刻みで一歩進みますが、酔歩は行きつ戻りつするので、遠くへ届くのが二乗で遅れます。緩和時間の仮定の「二乗」は、この酔歩の二乗です。

05

縮尺と時計 — 残りの三つの量

物差し ξ とにじむ時間 C_P のほかに、四次元格子の記録で使ってきた量が三つあります。一段目（二重井戸）では主役になりませんが、緩和時間の仮定を「冪の文」に置く理由がここにあるので、比喩だけを並べます。

物差し	にじむ時間	縮尺の回数	時計の目盛り
相関長 ξ	Poincaré 定数 C_P	記帳の長さ ξ_{RG}	$\mathcal{E}$ の正規化
隙間 m の逆数（§03）	長さ L を均すのに L^2 歩（§04）	地図を粗くする段の数	同じ揺らぎを何の単位で測るか
遅れる時計			
確率時間の繰り込み			

縮尺の回数。四次元の格子ヤン–ミルズで ξ を結合 β の関数として式で求める手はありません。そこで地図の縮尺を一段ずつ粗くし、何回で決まった粗さの絵に着くかを数える長さ、記帳の長さ ξ_{RG} を別に作ります。一ループの勘定では β を少し上げるだけで記帳の長さは指数で伸びます（4-07）。記帳の長さと ξ が定数倍で揃うことは仮定です。定義と表は 23-01 と 23-02 に移しました。

時計の目盛り。(2) の C_P は、$\mathcal{E}$ をどの単位で測るかで値が変わります。$\mathcal{E}$ を c 倍すると C_P は $1/c$ 倍です。二重井戸でも同じことが起きます。経路を正準の場 $x/\sqrt{\hbar}$ で測る $\mathcal{E}$ と、位置 x のまま測る $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}/\hbar$ では、$C_P^{(x)} = \hbar\, C_P$ です 初 Lean `ratioR_x_normalisation`（仮定なし。$C_P^{(x)} = \hbar C_P$ なら比も $\hbar$ 倍）。目盛りの違いは「定数倍の幅」には映りますが、$\hbar$ の冪の因子は $\ln\xi$ に比べて小さいので「冪」には映りません。

遅れる時計。Langevin の時間そのものが、尺度を変えると伸び縮みします。確率量子化の摂動論では、確率時間の目盛りも繰り込む必要があります（7-09）典（摂動論の水準）。四次元格子での影響は β の端数の冪の因子で、これも冪には映りません。四つの時計の比べ方は 23-01 の寄り道に置きます。

正確には、縮尺の回数・時計の目盛り・遅れる時計の三つは「定数倍の幅」で言う文（帯の文）を動かし、「冪」で言う文を動かしません。だからこの部の緩和時間の仮定は冪の文です。

06

拡散型緩和時間の仮定を一文で — にじむ時間 ≃ 物差し²

量がそろったので、緩和時間の仮定を比喩で一文にします。「にじむ時間は、物差しの二乗と同じ冪で伸びる」。測度の族が一つの径数で並び、径数を動かすと物差しが無限に伸びるとき、

$$(\xi^2):\quad \frac{\ln C_P}{\ln \xi} \longrightarrow 2 \qquad (\xi \to \infty) \ (5)$$

です。四次元格子では径数は β で $\beta \to \infty$、二重井戸では径数は $\hbar$ で $\hbar \to 0$ です。自由場では §04 のとおり $C_P/\xi^2 \to 1$ で成り立ちます。相互作用のある四次元格子で成り立つかが問いで、それより易しい二重井戸で上の側を組むのが一段目です。

二重井戸では、(5) より強い「定数倍の幅」の文（$C_P \le K\xi^2$）は破れる側にあると読まれています。経路の C_P の下界が ξ^2 の 1 倍から 6.5 倍へ、$\hbar$ を下げるとともに伸びるからです 読（族の下界・刻み $\varepsilon = 0.25 \cdot \hbar \in [0.07, 0.4]$、23-04 §04）。伸び方は、キンクを数える物理の水準の勘定では $S_0/\hbar \approx \ln \xi$ の一次です（この範囲の数値だけでは、指数の伸びと区別できません）。一次なら冪の文 (5) は保たれます。だから一段目の目標は帯の文でなく、冪の文の上の側 $C_P \le K\xi^2 S_0/\hbar$ です（23-03 §05）。

「ある f」と「すべての f」

(2) の C_P は上限なので、下から押さえるのと上から押さえるのとでは難しさが違います。下から押さえる（C_P が大きい）には、$\mathrm{Var}(f)/\mathcal{E}(f)$ が大きい試験関数を一つ見せれば足ります。上から押さえる（C_P が大きすぎない）には、すべての f について不等式を示す必要があります。

$$C_P \ge c\,\xi^2 \iff \exists f:\ \frac{\mathrm{Var}(f)}{\mathcal{E}(f)} \ge c\,\xi^2, \qquad C_P \le C\,\xi^2 \iff \forall f:\ \frac{\mathrm{Var}(f)}{\mathcal{E}(f)} \le C\,\xi^2 \tag{6}$$

比喩で言えば、にじみが遅いことは一つのしみを見せれば言えますが、遅すぎないことはあらゆるしみについて言わなければなりません。質量ギャップの側にあるのは上の側（C_P が大きすぎない）で、試験関数や数値で届くのは下の側だけです。上の側を質量の下界に読み替える代数と、上下の半分（緩和時間の上界の仮定と緩和時間の下界の仮定）の定義は 23-01 に置きます。

正確には、二重井戸の下界 $C_P \ge \xi^2$ は、時刻に局所な試験関数（一つの時刻の関数を時間で足したもの）の族で等号まで届く、という形の命題です（23-04 §04 の一次元の片側の橋の命題）。上の側には、一段目でも条件つきの命題しかありません。

07

第 23 部の歩き方 — 比喩がどの章で正確な文になるか

この章の比喩は、第 23 部のどこかで一度ずつ正確な文に置き換わります。表 4 は比喩・記号・正確にする章の対応です。

表 4　比喩と正確な文の対応

比喩	記号	正確な定義・文	状態
階段	四段	23-03	この部の組み立て方の約束
物差し	$\xi = 1/m$（二重井戸は $\xi = \hbar/\Delta$）	4-11 §07・23-04 §02	典 定義

比喩	記号	正確な定義・文	状態
にじむ時間	C_P（経路の測度）	23-01・23-04 §01	典 定義。四次元格子での値は不明
縮尺の回数	ξ_{RG}	23-01・23-02	約束（ξ と揃うことは 仮 ）
時計の目盛り・遅れる時計	$\mathcal{E}$ の正規化・確率時間	23-01	約束・摂動論の水準
にじむ時間 $\asymp$ 物差し^2	緩和時間の仮定（冪の文）	23-01・23-03 §05	仮
一段目の上の側	$C_P \le K\xi^2 S_0/\hbar$（一段目の上界の命題）	23-05	四条件の上の代数。条件は 仮 の行を残す

筋を先に追うなら 23-03 → 23-04 → 23-05 → 23-12（統合表）→ 23-15（定理までの距離）、四次元格子との関係を先に見るなら 23-01 → 23-02、主張しないことを先に見るなら 23-16 が近道です。Lean の言明と仮定は 23-13、Lean の読み方は Lean の案内 にあります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
典 相関長と隙間が同じ量であること（(1)）、Poincaré 定数の定義と、拡散の力学の隙間がその逆数であること（(2)）	四次元の格子ヤン–ミルズで ξ が $\beta \to \infty$ で発散すること、C_P の値
初 一本道の酔歩の C_P の閉じた形 (3)、一次元の自由場で $C_P/\xi^2 \to 1$、酔歩の二乗平均の距離 $= t$（(4)）	相互作用のある模型で同じ比が冪で揃うこと（緩和時間の仮定）
初 正規化を $\hbar$ 倍すると C_P も $\hbar$ 倍になること（§05 の時計の目盛り） Lean `ratioR_x_normalisation`	四次元格子の記帳の長さ ξ_{RG} と相関長 ξ が定数倍で揃うこと
読 二重井戸の経路の C_P の下界が ξ^2 の 1 倍から 6.5 倍へ伸びること（族の下界・$\varepsilon = 0.25$・$\hbar \in [0.07, 0.4]$）	二重井戸の C_P の上界。一段目の上の側は四条件の上の条件つき（23-05）
階段の四段という組み立て方（約束）	一段目から二段目以後への含意。四段目（極限での質量ギャップ）について、この章は何も示さない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
相関長と隙間・虚時間の相関	典	4-11 の出典表。
Poincaré 定数・拡散の隙間	典	1-10 の出典表。
一本道の酔歩の C_P（(3)・表 3）	初	本文 §04 の証明。表の値は (3) の閉じた式の値。
二重井戸のトンネル分裂と S_0	典	2-05 §07 の (9)(10) と出典表。

もの	種別	出典・道具
経路の C_P の下界の読み（§06）	読	23-04 §04 と、その出典表。
正規化の読み替え（§05 の時計の目盛り）	初・Lean	定理 `ratioR_x_normalisation`（仮定なし）。言明は 23-13。
記帳の長さ・確率時間の繰り込み	約束・典（摂動論）	4-06・4-07・7-09 の出典表。詳しい式は 23-01。
図 1（階段）	約束	この部の組み立て方を描いた模式図。

この章で使った語 — 相関長・Poincaré 定数・Dirichlet 形・経路の測度・階段（四段）・緩和時間の仮定（冪の文）・五つの札（初・典・機・読・仮）・トンネル分裂。意味は A-02 用語集にあります。

次に読む章：23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定 — 問題を八つの言明に割り、拡散型緩和時間の仮定と上下の半分を定義する。一段目へ直接進むなら 23-03 階段の四段。

2026-10-09 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 23 部 一本目の道（前半）— 時間の方向から 構成の筋・緩和時間の仮定・片側の橋 · Kiichi, Shiori and Rin

構成の筋と拡散型緩和時間の仮定 — 八つの言明、格子版の質量ギャップの向き、緩和時間の仮定の六つの段

この章は本書の検討です。§02・§08 は未解決の地図、§03 は既存の知見です。

この章で分かること — クレイの問題を「格子 → 無限体積 → 連続極限 → OS 公理 → 質量ギャップ」の一本の筋に並べ、構成の八つの言明に割ります。格子の上の質量ギャップは「格子単位の隙間が一様に正」ではなく「物理単位の隙間が正に残る」ことです。この部の軸である拡散型緩和時間の仮定（揺らぎが均される時間 C_P は相関長の二乗と同じ冪で伸びる）を、何を測りたいか・なぜ力学の量に言い換えるか・言明（帯の文 → 冪の文 → 上下の半分〔緩和時間の上界の仮定と緩和時間の下界の仮定〕）・緩和時間の仮定が与えるもの・与えないもの・類例の六段で、各段に手で確かめられる例を添えて説明します。時間を連続に取った格子では片側の橋 $C_P \geq \kappa \xi^2$ が示せ、上界の仮定と合わせると格子の物理単位の隙間の下界が出ます。逆向きは一般には成り立たず、橋の仮定のもとで、上界の仮定は格子の物理単位の質量ギャップより強い文です。

前提となる章 — 0-03（問題文）・5-09（何を固定して極限を取るか）・4-11（隙間と相関長）・1-10（Poincaré 定数）・23-00（五つの量と五分類の札）。

先に言うこと — この章は問題を解きません。この章の筋（各 β で体積を先に無限にし、次に β→∞）で四次元で手にあるのは、反射正値性の保存の言明・OS 再構成の言明の定理と、小さい β の無限体積の一意性の言明だけです（公開された構成との関係は §02 の注）。緩和時間の仮定・上界の仮定・下界の仮定・三つの鎖はどれも仮定です。片側の橋は時間を連続に取った有限の空間格子での命題で、時間を刻む Wilson 測度と無限体積へは仮定の行が残ります。Lean で検査したのは、仮定から結論への代数だけです。

この章の順序

1. この章の約束 — 記号と、物差しの単位
2. 問題から構成の筋へ — 八つの言明（表 1）とそのつながり
3. 格子版の質量ギャップの向き — 一様な格子の隙間は反対側（表 2）
4. Poincaré 定数で言い直す — 三つの C_P（表 3）と自由場（表 4）
5. 緩和時間の仮定 — (1) 何を測りたいか・(2) なぜ言い換えるか・(3) 帯の文、冪の文、上下の半分（表 5）

6. 緩和時間の仮定が与えるもの・与えないもの — (4) 片側の橋（表 6）・(5) 逆向きの反例（円の上の自由な粒子の反例）と強結合の側（表 7）・(6) 類例・分類と依存グラフ（表 8）
7. 寄り道：縮尺の回数と四つの時計 — 冪に映らない対数（表 9・表 10）
8. 筋のうち手にあるもの — 23-02・23-03 へ

01

この章の約束 — 記号と、物差しの単位

この章は四次元の格子の側の話です。群は $SU(2)$、Wilson 作用は $S_W = \beta \sum_P (1 - \frac{1}{2}\operatorname{tr} U_P)$（5-01）、$\beta = 4/g^2$ は結合の逆数で、逆温度ではありません。量はすべて格子単位（格子間隔が 1）で数えます。

$m_{\mathrm{lat}}(\beta)$ は転送行列のゲージ不変な状態の上の隙間（格子単位の質量）、$\xi = 1/m_{\mathrm{lat}}$ は相関長、$a(\beta)$ は格子間隔を物理の単位で測った値です。物理単位の質量は

$$\xi = \frac{1}{m_{\mathrm{lat}}}, \qquad \Delta(\beta) = \frac{m_{\mathrm{lat}}(\beta)}{a(\beta)} \tag{1}$$

です。$a(\beta)$ の決め方は一つではありません。弦張力 σ を物理の単位に取れば $a\sqrt{\sigma}$ が格子間隔で、この部の四次元の記録では、格子を粗くする段を数えて決めた長さ、記帳の長さ ξ_{RG} の逆数を a に置きます（§07）。どちらを取るかは、§05 の三つの鎖のうち一尺度の鎖と記帳の長さの鎖の仮定の中に入ります。

例。$\beta = 2.60$ で $m_{\mathrm{lat}} = 0.514$（Lucini–Teper の Monte Carlo の値）なら $\xi = 1.95$ 格子間隔です 読 。Δ はこれを a で割ったときにだけ決まる量で、格子の上の数だけでは決まりません（5-09）。

02

問題から構成の筋へ — 八つの言明

問題文（0-03）は、$\mathbb{R}^4$ の上の非自明な量子ヤン–ミルズ理論が在ること、そしてその理論に質量ギャップ $\Delta > 0$ があることを求めます。格子から入る道では、これを一本の筋に並べます。

格子	無限体積	連続極限	OS 公理
有限の箱の Wilson 測度 各 β・各体積で確率測度	箱を無限に 無限体積の一意性の言明・反射正値性の保存の言明	$\beta \to \infty$（$a \to 0$） Wilson ループの極限の言明・回転の回復の言明	Hilbert 空間とハミルトニアン

			OS 再構成の言明・非自明性の言明
質量ギャップ 物理単位の隙間が正 物理単位の隙間の言明			

各 β の測度で先に体積を無限にし、次に $\beta \to \infty$ とする順です（Chatterjee 2018 の順。有限の箱で先に $a \to 0$ とする順もある、16-07）。筋の各段を言明にしたのが表 1 で、問題文の要求は次の見取り図になります。

$$\text{問題文の要求} \;\Longleftarrow\; (\mathrm{S1}) \wedge (\mathrm{S2}) \wedge (\mathrm{S3}) \wedge (\mathrm{S4}) \wedge (\mathrm{S6}) \wedge (\mathrm{S7}) \wedge (\mathrm{S8}) \tag{2}$$

(2) は見取り図で、定理ではありません。記帳の長さでの緩和時間の帯は (2) に入らない、物理単位の隙間の言明の言い直しです（§04）。

表 1　構成の八つの言明と四次元での現状（式の中では札 (S1)〜(S8) で書く）

言明	中身	四次元での現状	章
無限体積の一意性の言明（式の中の (S1)）	各 β で体積無限の極限測度が一つに決まる	典 極限点はコンパクト性から在る。小さい β で極限の存在（Osterwalder–Seiler 1978）と一意性（Shen–Zhu–Zhu 2023）。大きい β では 'in general unknown'（Chatterjee §3）	5-04
反射正値性の保存の言明（式の中の (S2)）	正の自己共役な転送作用素。弱極限で保たれる	典 Osterwalder–Seiler 1978・Lüscher 1977	5-03
Wilson ループの極限の言明（式の中の (S3)）	$a \to 0$ で繰り込んだ Wilson ループが自明でない極限を持つ	未解決（連続の弦張力の問題（Chatterjee の Problem 5.2)）	5-09・7-07
物理単位の隙間の言明（式の中の (S4)）	$\Delta(\beta) \to \Delta_\infty \in (0, \infty)$	未解決（格子の側の半分が、格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1)）	4-11・5-09
記帳の長さでの緩和時間の帯（揺らぎの遅さ）（式の中の (S5)）	$a^2 C_P \asymp 1$	仮 この部の定式化。証明は無い	§04・§05
回転の回復の言明（式の中の (S6)）	極限で $\mathbb{R}^4$ の回転と並進の不変性が戻る	この筋では未解決（二次元では示されている。公開された構成の側は下の注）	16-07
OS 再構成の言明（式の中の (S7)）	公理から Hilbert 空間とハミルトニアンを作る	典 定理（Osterwalder–Schrader）。この筋では極限が公理を満たすことが残る（公開された構成の側は下の注）	4-10

言明	中身	四次元での現状	章
非自明性の言明（式の中の (S8)）	極限がガウスでなく、短距離で漸近自由の予言と合う	未解決。格子で切った四次元の ϕ^4 は極限がガウス 典	0-03・7-08

注（公開された構成との関係）。表 1 の「四次元での現状」は、この章の筋（各 β で体積を先に無限にし、次に β→∞）での現状です。2026-11-10 に公開された構成は、別の組み立て（繰り込みの段を重ねて紫外の極限を取り、無限体積は部分列で取る）で、四次元の Wilson の格子ゲージ理論の極限として Wightman の公理を満たす場の量子論が作れることを Lean で証明している、と委員会が評価しました（第 6 部）。その構成では、Euclid 不変（回転の回復）と OS の公理・再構成は相ごとの理論について示されています（6-03）。示されていないのは、無限体積の極限の収束と一意性、連続の理論の確率測度、一様な質量ギャップ、Wilson ループと面積則、一粒子の状態です（6-04）。物理単位の隙間の言明と Wilson ループの極限の言明は、どちらの組み立てでも開いています。

八つは独立ではありません。「元が先の前提になる」矢印で書くと次のとおりです（この本の整理。帯の形の拡散型緩和時間の仮定の付いた矢印は、§05 の帯の文の下でだけ）。

$$\text{(S1)} \to \text{(S3)} \to \text{(S6), (S8)}; \qquad \text{(S1), (S2)} \to \text{(S4)} \xleftarrow{(\xi^{\prime})\text{band}} \text{(S5)}; \qquad \text{(S2), (S6)} \to \text{(S7)} \ \text{(3)}$$

この章の筋で四次元で手にあるのは、反射正値性の保存の言明と OS 再構成の言明（再構成の定理の部分）です。「極限さえ取れれば残りは自動」と言いたくなりますが、問題文の脚注は、コンパクト性だけによる弱い存在を、極限の性質（'such as the existence of a mass gap and the axioms'）を別に示さない限り解と認めません（Jaffe–Witten）典 。

$$\underbrace{\mu_{\beta_j} \to \mu \ \text{(部分列)}}_{\text{コンパクト性だけ}} \implies \text{(S2) は残る}\,; \ \text{(S4)}\cdot\text{(S6)}\cdot\text{(S8) については何も言えない} \tag{4}$$

例。物理単位の隙間の言明に入る矢印は三本で、記帳の長さでの緩和時間の帯からの一本だけが帯の文の下の矢印です。Wilson ループの極限の言明に入るのが無限体積の一意性の言明からだけなのは、体積を先に無限にする順だからです。

03

格子版の質量ギャップの向き — 一様な格子の隙間は反対側

格子の上の「質量ギャップ」を「格子単位の隙間 $m_{\mathrm{lat}}(\beta)$ がすべての β で一定値以上」と読むと、連続極限では反対の意味になります。(1) のとおり、物理単位の質量は格子単位の質量を格子間隔で割ったものだからです。

$$\inf_{\beta} m_{\mathrm{lat}}(\beta) \geq c > 0 \implies \Delta(\beta) \geq \frac{c}{a(\beta)} \to \infty \qquad (a \to 0) \tag{5}$$

初 (1) を $a(\beta)$ で割るだけです。比喩で言えば、定規の目盛りを細かくしていっても測る物がいつも目盛り数個分なら、物の実際の長さは 0 に縮みます。正確には、(5) の下では ξ が有界で、物理単位の相関長 $a\xi$ が 0 に向かいます。物理単位の隙間の言明が求めるのは反対に、m_{lat} が a と同じ速さで 0 に向かうことです。

$$\text{(S4)}:\quad m_{\mathrm{lat}}(\beta)\sim \Delta_{\infty}\, a(\beta),\qquad \text{特に}\ \ \xi(\beta)\to\infty\quad(\beta\to\infty) \tag{6}$$

この向きは Chatterjee（2018）の格子の相関長の問題そのものです：'Show that for any β > 0, there exists some ξ(β) ∈ (0, ∞) such that ⋯ Moreover, prove that $\lim_{\beta\to\infty}\xi(\beta)=\infty$.' 典 尺度の決め方は 5-09 にあります。

例。表 2 は弦張力 σ を物理の単位にし、$a\sqrt{\sigma}$ を格子間隔とみなしたものです。$\beta=2.25\to 2.60$ で a は 3.16 分の 1、m_{lat} は 2.70 分の 1 になり、$\Delta/\sqrt{\sigma}$ は 3.3〜3.8 にとどまります。最後の列は m_{lat} が $\beta=2.25$ の値で止まった場合で、a に反比例して増えます。

読 表 2　Lucini–Teper（2001）表 1 の Monte Carlo の値（$SU(2)$・格子 8^4〜24^4）と、その比（誤差は独立として伝播）

β	$a\sqrt{\sigma}$	m_{lat}	$\Delta/\sqrt{\sigma}$	m_{lat} を止めた場合
2.25	0.4231(25)	1.390(30)	3.285(74)	3.29
2.30	0.3108(17)	1.090(33)	3.507(108)	4.47
2.40	0.2634(14)	0.953(19)	3.618(75)	5.28
2.475	0.2016(13)	0.754(10)	3.740(55)	6.89
2.55	0.15896(63)	0.586(10)	3.686(65)	8.74
2.60	0.13395(62)	0.514(8)	3.837(62)	10.38

$\Delta/\sqrt{\sigma}$ はおおむね増えて、原典の外挿値 3.844(61) に下から近づきます（$\beta=2.475\to 2.55$ で一度、誤差の内で下がる）読。窓は $\xi\lesssim 2$ 格子間隔で、極限が在ることの証拠ではありません（16-08）。

04

Poincaré 定数で言い直す — 揺らぎの遅さの言明と三つの C_P

物理単位の隙間の言明を、格子の測度 μ_β の Poincaré 定数 C_P で言い直します。観測量の分散を、リンクの動きへの敏感さ（Dirichlet 形 $\mathcal{E}$）で割った比の上限で、リンクを揺すりながら作用の低い向きへ動かす Langevin 力学の、最も遅い揺らぎが均される時間です（1-10・23-00 §04）。

$$C_P=\sup_{f}\frac{\mathrm{Var}_{\mu_\beta}(f)}{\mathcal{E}(f)},\quad \mathcal{E}(f)=\mathbb{E}_{\mu_\beta}\Big[\sum_{\ell}|\nabla_\ell f|^2\Big],\qquad \text{(S5)}:\ a(\beta)^2\,C_P(\beta)\asymp 1 \tag{7}$$

∇_ℓ はリンク ℓ の向きの微分（リンクの角度で測る）、$A \asymp B$ は比が β に依らない正の定数で上下から押さえられることです。Langevin の時間は長さの二乗の次元を持つので（拡散）、$a^2 C_P$ は最も遅い緩和を物理の単位で測った値で、記帳の長さでの緩和時間の帯はそれが 0 にも無限大にも行かないと言います。

同じ記号 C_P で三つの量が呼ばれるので区別します（表 3）。この部の C_P は経路の C_P、経路の測度（時空のすべてのリンクの分布）の Poincaré 定数です。

表 3　三つの C_P（自由場の列は質量 m・時間を連続に取った場合）

	測度	結び付く量	自由場
真空の C_P	一つの時刻の真空の分布 $\lvert\psi_0\rvert^2$	ハミルトニアンの隙間 $\Delta = 1/(2C_P^{(\alpha)})$ 典 （基底状態変換、2-05・1-10）	$1/(2m)$
経路の C_P	時空のすべての場の分布（経路）	Langevin の隙間 $\lambda_1 = 1/C_P$。m とは緩和の鎖を介してだけ	$1/m^2$
目盛りで測った経路の C_P	経路の C_P と同じ測度	$\mathcal{E}$ の目盛り。$\mathcal{E}$ を c 倍すると C_P は $1/c$ 倍	角度で $C_P^{(\vartheta)} = \frac{q^2}{4}\xi^2$、場で $C_P^{(A)} = \xi^2$

自由場では $C_P^{(\beta)} = 4\,(C_P^{(\alpha)})^2$ です 初 （表 3 の自由場の列を二乗するだけ。格子間隔 1 の時間の格子では右辺に $1 + m^2/4$ が掛かる）。緩和時間の仮定は経路の C_P についての文なので、「経路の C_P と真空の C_P の二乗が揃う」と読み替えられます。ただしゲージ理論では一つの時刻の測度はゲージ軌道の空間の上にあり、この読み替えは自由場の形からの類推です。

自由場（場の変数で測る目盛り）では、C_P は共分散 $(-\Delta_{\mathrm{lat}} + m_{\mathrm{lat}}^2)^{-1}$ の最大固有値です（1-10） 典 。

$$C_P = \frac{1}{m_{\mathrm{lat}}^2} \quad \Longrightarrow \quad a^2 C_P = \frac{1}{\Delta^2} \tag{8}$$

自由場では物理単位の隙間の言明と記帳の長さでの緩和時間の帯が同じことになり、一様な格子の隙間 $m_{\mathrm{lat}} \geq c$ は $C_P \leq 1/c^2$、つまり $a^2 C_P \to 0$ の側です。表 4 は $\Delta = 1$ を止めて a を小さくした例です。

初 表 4　四次元の格子の自由場（$C_P = 1/m_{\mathrm{lat}}^2$、$\xi$ は $m_{\mathrm{lat}}^2 = 2(\cosh(1/\xi) - 1)$ から。閉じた式の値）

a	m_{lat}	C_P	ξ	$a^2 C_P$	$a\xi$
1	1	1	1.0390	1	1.0390
1/4	0.25	16	4.0104	1	1.0026
1/16	0.0625	256	16.003	1	1.0002
2^{-k}	1（止める）	1	1.0390	4^{-k}	$1.039 \cdot 2^{-k}$

a を半分にするごとに C_P は 4 倍、ξ は 2 倍になり、$a^2 C_P = 1$、$a\xi \to 1$ です。格子単位の質量を 1 に止めると $C_P = 1$ のまま $\Delta = 2^k$ が発散します。相互作用のある理論で C_P と ξ^2 が同じ冪で大きくなるかが次の節の緩和時間の仮定です。

寄り道：二つの時間

飛ばしてよい小節です。自由場で転送行列（ユークリッドの時間）の隙間は $\approx m_{\mathrm{lat}}$、Langevin 力学（「第五の時間」）の隙間 $1/C_P$ は m_{lat}^2 です。比喩で言えば波が届く距離とインクがにじむ時間の違いで、正確には Langevin 力学が拡散で、長さ ξ を均すのに ξ^2 程度かかるからです（18-03・23-00 の寄り道）。

05

拡散型緩和時間の仮定 — 何を測りたいか、なぜ言い換えるか、何を言うか

緩和時間の仮定は、一文で言えば「揺らぎが均される時間は、相関長の二乗と同じ冪で伸びる」という文です。この節と次の節で、この一文を六つの段に分けて説明します。(1) 何を測りたいか、(2) なぜ力学の量に言い換えるか、(3) 言明を段を踏んで、(4) 緩和時間の仮定が与えるもの、(5) 緩和時間の仮定が与えないもの、(6) 類例。各段に、手で確かめられる小さな例を置きます。

この部での位置づけ。緩和時間の仮定は、質量ギャップの問題に取り掛かるために選んだ一つの言い換えです。質量ギャップへの唯一の道でも、正しいと決まった道でもありません。緩和時間の仮定と別の視点や、緩和時間の仮定を前提にした新しい考え方は 第 24 部 で扱います。

この部で緩和時間の仮定を軸に置く理由。問題文が求める量は、ユークリッドの時間の向きの隙間（転送行列の隙間を物理の単位で測ったもの）です。緩和時間の仮定はこれを、格子の測度だけで定まり、「すべての f」の不等式を局所の部品から組み立てる道具がそろい、組み立ての代数を機械で検査できる量——Langevin 力学の緩和の時間 C_P と相関長の冪——に置き換えます。§06 で見るとおり、この置き換えは片側の橋を通って質量ギャップの側へ戻ることができ、しかも片側の橋の仮定のもとで、緩和時間の仮定の上の半分である上界の仮定は、格子の上の物理単位の隙間が正に残ることより強い文です。より強い文を、道具の多い言葉で言う。この取引がこの部の立脚点で、第 23 部の章はすべて緩和時間の仮定を軸に組み立てています。緩和時間の仮定を取っ掛かりとした検討、というこの部の題はこの意味です。

(1) 何を測りたいか — 物差しと、にじむ時間

問題文の要求のうち格子で述べられる部分は、(6) の「物理単位の隙間 $\Delta = m_{\mathrm{lat}}/a$ が $\beta \to \infty$ で正に残る」ことです。格子の上で見ると、二つのことが同時に起きなければなりません。物差し $\xi = 1/m_{\mathrm{lat}}$ が格子の目盛りに比べて無限に伸びること、そしてその伸び方が格子間隔の逆数と揃うこと（$a\xi$ が 0 にも無限大にも行かない）です。23-00 §05 の五つの量で言えば、問題文は物差しと縮尺の回数の関係を問う文です。

物差し	にじむ時間	縮尺の回数	時計の目盛り
相関長 $\xi = 1/m_{\mathrm{lat}}$	Poincaré 定数 C_P		$\mathcal{E}$ の正規化

ユークリッドの時間の隙間の逆数	Langevin 力学の隙間の逆数	記帳の長さ $\xi_{\mathrm{RG}} = 1/a$ 格子間隔の逆数（§07）	表 3 の目盛りで測った経路の C_P
遅れる時計 確率時間の繰り込み §07 の寄り道			

緩和時間の仮定は、この問いに、にじむ時間を持ち込みます。測度の中で最も遅い揺らぎが均される時間 C_P は拡散の時間なので、長さ ξ を均すには ξ^2 程度かかるはずです（23-00 の寄り道）。そこで「にじむ時間は物差しの二乗と釣り合う」を一つの文にし、物差しと縮尺の回数の関係を、にじむ時間を通して述べる。これが緩和時間の仮定の発想です。

例 1（一本道の酔歩を手で数える）。23-00 §04 の一本道（升が L 個・両端で跳ね返る・一様分布・$\mathcal{E}(f) = \frac{1}{L}\sum_i (f_{i+1} - f_i)^2$）では、物差しに当たるのは道の長さ L です。$L = 2$ では $f = (1, -1)$ が最も遅い揺らぎで、$\mathrm{Var}(f) = 1$、$\mathcal{E}(f) = \frac{1}{2}\cdot 2^2 = 2$、比は $\frac{1}{2}$ です。$L = 3$ では $f = (1, 0, -1)$ で $\mathrm{Var}(f) = \frac{2}{3}$、$\mathcal{E}(f) = \frac{1}{3}(1+1) = \frac{2}{3}$、比は 1 です。どちらも 23-00 の (3) の $C_P(L) = 1/(2(1-\cos(\pi/L)))$ の値と一致し、$L = 4$ では $1/(2-\sqrt{2}) \approx 1.707$ です 初 。L を倍にすると C_P はおよそ 4 倍になり、大きな L では $C_P \approx L^2/\pi^2$ です（23-00 の表 3）。「にじむ時間は物差しの二乗」を、いちばん小さな道で確かめたことになります。

正確には、一本道の L は外から与えた長さで、測度が自分で持つ物差し（相関長）ではありません。両者が一致する最も簡単な例は自由場で、$C_P = 1/m_0^2$ と $m_0^2 = 2(\cosh(1/\xi) - 1)$ から $C_P/\xi^2 \to 1$ です（23-00 §04、本章の表 4）。相互作用のある測度で、にじむ時間と物差しがどう釣り合うかが、緩和時間の仮定の問いです。

(2) なぜ力学の量に言い換えるか — 測れる・道具がある・検査が届く

物差しの側の量 m_{lat} は転送行列の隙間で、ゲージ不変な状態の Hilbert 空間の上の作用素の量です。試しの状態を一つ置けば m_{lat} の上界（ξ の下界）は出ますが、下界にはすべての状態が要ります。C_P の上界にも「すべての f」が要るので、難しさは同じ向きに残ります。それでも言い換える理由は三つあります。

(a) 格子の測度だけで測れる。C_P は (7) のとおり、分散と Dirichlet 形という μ_β の期待値だけで定まります。Hilbert 空間や再構成を経ずに、測度から直接定義でき、試験関数一つで下界が出て、Langevin 力学やマルコフ連鎖の自己相関から下界の読みも取れます（23-02 §04）。

(b) 「すべての f」を組み立てる道具がある。Poincaré 不等式には、局所の部品から全体の上界を組み立てる道具が、次元によらない形でそろっています。測度 $\mu \propto e^{-S}$、$\mathcal{E}(f) = \mathbb{E}|\nabla f|^2$ の規約

で

$$\operatorname{Hess} S \geq \rho \;\Rightarrow\; C_P(\mu) \leq \frac{1}{\rho}; \qquad \mu' \propto e^{-W}\mu \;\Rightarrow\; C_P(\mu') \leq e^{\operatorname{osc} W} C_P(\mu); \qquad C_P(\mu_1 \otimes \mu_2) = \max\{C_P(\mu_1), C_P(\mu_2)\} \tag{9}$$

です。左の二つは 典 （Bakry–Émery の凸性の判定と Holley–Stroock の有界な摂動。$\operatorname{osc} W = \sup W - \inf W$。書誌は 23-06 の出典表）、右は 初 （Efron–Stein の不等式 $\operatorname{Var}(f) \leq \mathbb{E}\operatorname{Var}_1(f) + \mathbb{E}\operatorname{Var}_2(f)$ の各項に成分の Poincaré 不等式を使えば $\leq \max$、片方の座標だけの関数で等号）。これに分散の分解（条件つきの分散と条件つき期待値の分散の和、23-05 §01）を加えた四つが、一段目の組み立ての部品です。対数 Sobolev 不等式（LSI）にも同じ型の道具があり、尺度ごとに分けた凸性の判定もその一つです（23-02 §05）。

(c) 機械検査が届く。部品の不等式を組み合わせる段は、実数の不等式の代数です。代数は Lean で検査でき、有限の窓の中の数値の不等式は区間演算（計算機援用）で確かめられます。検査するのは仮定から結論への組み立てで、仮定そのものではありません（23-13）。

例 2（二つのサイトのガウス測度で、道具がどこで効くか）。$\mathbb{R}^2$ の上の測度 $\mu \propto e^{-S}$、$S(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(x_1-x_2)^2 + \frac{1}{2}m_0^2(x_1^2+x_2^2)$ を考えます。Hesse 行列は $\begin{pmatrix} 1+m_0^2 & -1 \\ -1 & 1+m_0^2 \end{pmatrix}$ で、固有値は m_0^2（向き $(1,1)$）と m_0^2+2（向き $(1,-1)$）です。(9) の左の判定から $C_P \leq 1/m_0^2$。一方 $f = x_1 + x_2$ では、共分散が Hesse 行列の逆なので $\operatorname{Var}(f) = 2/m_0^2$、$\mathcal{E}(f) = |\nabla f|^2 = 2$ で、比は $1/m_0^2$ です。上界と下界が一致して $C_P = 1/m_0^2$ 初 。一本道（例 1）では行列を対角化して C_P を求めましたが、この例では対角化をしなくても (9) が答えを出しています。二重井戸 $V(x) = (x^2-1)^2/8$ では頂上で $V''(0) = -\frac{1}{2} < 0$ となり、(9) の凸性の判定は全体には使えません。そこで谷ごとに割る分散の分解と、割った先での凸性と摂動を組み合わせることになります（23-04 §06・23-05 §04）。対角化できない相互作用のある測度で、上界を部品から組み立てられること——これが言い換えの第一の得です。

(3) 緩和時間の仮定の言明を段を踏んで — 帯の文、冪の文、上下の半分

一段目：帯の文。素直に書けば、「C_P は物差しの二乗の定数倍の幅に入る」という文になります。物理の単位 a と、β に依らない定数倍の幅（帯）で比べると

$$\exists \beta_0,\ \exists 0 < c \leq C: \qquad c \leq a(\beta)^2\, C_P(\beta) \leq C \qquad (\beta \geq \beta_0) \tag{10}$$

です。数で言えば、$\xi_{\mathrm{RG}} = 1/a = 10$ のとき C_P は $100c$ から $100C$ の間、$\xi_{\mathrm{RG}} = 1000$ なら $10^6 c$ から $10^6 C$ の間にある、という文です。Langevin の時間は長さの二乗の次元を持つので（拡散）、$a^2 C_P$ は最も遅い緩和を物理の単位で測った値で、(10) はそれが 0 にも無限大にも行かないと言います。

例 3（一本道は帯の文を満たす）。例 1 の一本道で L を物差しにすると、$x = \pi/L$ と置いて $C_P(L)/L^2 = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{(x/2)^2}{\sin^2(x/2)}$ です。$t/\sin t$ は $(0,\pi/2]$ で増えるので、$L \geq 2$ で

$$\frac{1}{\pi^2} \;<\; \frac{C_P(L)}{L^2} \;\le\; \frac{1}{8} \tag{11}$$

（右の等号は $L=2$ の $C_P=\frac{1}{2}$）で、帯の文が $c=1/\pi^2\approx 0.101$・$C=1/8$ で成り立ちます 初 。

相関長を挟むと、帯の文は三つの因子に割れます。

$$a^2 C_P \;=\; \underbrace{(a\xi)^2}_{\text{鎖 (ii)(iii)}} \cdot \underbrace{\frac{C_P}{\xi^2}}_{\text{鎖 (i)}}, \qquad (a\xi)^2 = \frac{1}{m_{\mathrm{phys}}^2}, \qquad \frac{C_P}{\xi^2} = \frac{m_{\mathrm{lat}}^2}{\lambda_1} \tag{12}$$

第一の因子は物理単位の質量 $m_{\mathrm{phys}}=m_{\mathrm{lat}}/a$ で決まり、第二は「Langevin の隙間 λ_1 が質量の二乗と揃う」という緩和の鎖の因子です。第一の因子をさらに「質量の二乗と弦張力が揃う」（一尺度の鎖）と「弦張力と格子間隔の二乗が揃う」（記帳の長さの鎖）に割った三つの比が三つの鎖です（17-12）。三つとも仮定です 仮 。鎖の上下の半分がそれぞれ何を要るかは 23-02 §05 で見ます。

二段目：冪の文。帯の文は、$\mathcal{E}$ の目盛り・記帳の次数・確率時間の繰り込みが持ち込む対数の因子に動かされます（§07 の寄り道）。そこで定数倍だけでなく、$\ln\xi$ の冪の因子も無視する水準に下げたものが緩和時間の仮定です。

$$(\xi^2):\quad \lim_{\beta\to\infty} \frac{\ln C_P(\beta)}{\ln \xi(\beta)} = 2 \tag{13}$$

この文は、一段目の言明 23-03 §05 の (2)、$\lim_{\hbar\to 0}\ln C_P(\hbar)/\ln\xi(\hbar)=2$ と同じ形です。違うのは測度の族だけで、ここでは Wilson 測度 μ_β と $\beta\to\infty$、一段目では二重井戸の経路の測度と $\hbar\to 0$ です。だからこの部では (13) を、次元によらない冪の文として扱い、四次元格子の段では「拡散型緩和時間の仮定」、一段目では「二重井戸の緩和時間の冪の言明」と呼びます。冪の文なので、$\mathcal{E}$ を β の冪倍しても変わりません（$\ln\beta/\ln\xi\to 0$） 初 Lean `exponent_invariant_of_slowly_varying`（仮定：$X_n,\ell_n>0$、$\ln X_n/\ln a_n\to p$、$\ln\ell_n/\ln a_n\to 0$。結論：$\ln(X_n\ell_n)/\ln a_n\to p$。極限の和の代数）。

例 4（帯と冪の違いを数で）。$C_P=\xi^2\ln\xi$ という族を考えます。比 $C_P/\xi^2=\ln\xi$ は $\xi=10, 10^3, 10^6$ で $2.30,\ 6.91,\ 13.8$ と増え続けるので、帯の文は破れます。一方 $\ln C_P/\ln\xi = 2+\ln\ln\xi/\ln\xi$ は $2.362,\ 2.280,\ 2.190$ とゆっくり 2 に近づき、冪の文は成り立ちます 初 （$\ln\ln\xi$ の値 $0.834,\ 1.933,\ 2.626$ を $\ln\xi=2.303,\ 6.908,\ 13.82$ で割る）。逆に例 3 の一本道は帯の文を満たしますが、$\ln C_P/\ln L = 2-(\ln\pi^2+o(1))/\ln L$ は $L=256$ で $\ln 6640/\ln 256\approx 1.587$ と、2 から遠い所にいます。冪の文は「極限で 2」とだけ言い、定数の分だけゆっくり近づくことを許します。帯の文は冪の文を含意し（$\ln c/\ln\xi\to 0$）、逆は $C_P=\xi^2\ln\xi$ が示すとおり成り立ちません 初 。

(10) は緩和時間の仮定と一尺度の鎖・記帳の長さの鎖を合わせた文で、この本では緩和時間の仮定と呼びません。名前を表 5 のように固定します。

表 5 「C_P が長さの二乗と揃う」の読みと名前（詳しい八つの読みは A-06）

水準・比べる長さ	文	この本の名前	自由近似で
冪・ξ	$\ln C_P / \ln \xi \to 2$	拡散型緩和時間の仮定	成り立つ
冪・記帳の長さ	$\ln C_P / \ln \xi_{\mathrm{RG}} \to 2$	緩和時間の仮定と一尺度の鎖・記帳の長さの鎖（冪）	成り立つ
帯・ξ	$C_P \asymp \xi^2$	$(\xi^2)_{\mathrm{band}[\mathcal{E}_\vartheta]} \cdot (\xi^2)_{\mathrm{band}[\mathcal{E}_A]}$（目盛りを名指す）	場の目盛りで等号、角度の目盛りでは比 $g^2/4$ で下の半分が破れる
帯・記帳の長さ	$a^2 C_P \asymp 1$（(10)）	帯の文と一尺度の鎖・記帳の長さの鎖＝記帳の長さでの緩和時間の帯	記帳の次数で決まる（§07）

冪の水準の二行は、目盛りの選び方にも、§07 の対数の因子にも動かされません。この部が緩和時間の仮定を冪の文に置くのはこのためです。

三段目：上下の半分。帯の文 (10) の右と左を分けたものが上界の仮定・下界の仮定です。

$$(\xi^2)\uparrow:\ a^2 C_P \le C\ \ (C_P \lesssim \xi_{\mathrm{RG}}^2), \qquad (\xi^2)\downarrow:\ a^2 C_P \ge c\ \ (C_P \gtrsim \xi_{\mathrm{RG}}^2) \tag{14}$$

C_P は (7) の上限で、$\xi_{\mathrm{RG}} = 1/a$ は測度と別に決めた長さなので、二つは試験関数 f についての量化子が逆向きです。

$$(\xi^2)\downarrow \iff \forall \beta \ge \beta_0\ \exists f:\ \mathrm{Var}(f) \ge c\,\xi_{\mathrm{RG}}^2\,\mathcal{E}(f), \qquad (\xi^2)\uparrow \iff \forall \beta \ge \beta_0\ \forall f:\ \mathrm{Var}(f) \le C\,\xi_{\mathrm{RG}}^2$$

初 上限の定義をそのまま書いたものです。下界の仮定は試験関数を一つ見せれば済み、上界の仮定はすべての関数についての本物の Poincaré 不等式です。固有値で言う「上からは易しく、下からは難しい」（1-10）が、その逆数の C_P では「下からは易しく、上からは難しい」になります。この非対称が、23-02 の道と壁の全体を決めます。

例 5（片方だけが成り立つ族）。$C_P = \xi_{\mathrm{RG}}^2 \ln \xi_{\mathrm{RG}}$ の族では、$\xi_{\mathrm{RG}} \ge e$ で $a^2 C_P \ge 1$ なので下界の仮定は $c = 1$ で成り立ち、$a^2 C_P = \ln \xi_{\mathrm{RG}} \to \infty$ なので上界の仮定は破れます（冪の文は例 4 のとおり成り立つ）。逆に C_P が β によらず有界な族（強結合の側の定理の形、§06 の表 7）では、上界の仮定は成り立ち下界の仮定は破れます 初 。帯の文は、この二つの破れ方のどちらも起きない、という文です。

注 — 「緩和時間の仮定」と「二重井戸の四条件」

この部の「緩和時間の仮定」は冪の文 (13) だけを指します。上界の仮定・下界の仮定は帯の文の半分で、緩和時間の仮定とは別の名です。一段目で二重井戸の冪の言明の上の側を割った四つの条件は「二重井戸の四条件」と書き、必ず「条件」の語を添えます（23-03 §05・23-05）。相内の局所 Poincaré の条件は「緩和時間の仮定の一つ目の半分」ではなく、一段目の模型の「相の中の局所 Poincaré」という別の言明です。Lean の定理名に入っている字（H1 など）は替えません。

注 — 位相の区画と、体積を無限にする順

(7) の上限はすべての f を動かすので、連続極限で区画の間を移れなくなる位相電荷 Q（を滑らかにしたもの）も試験関数に入ります。周期境界の四次元格子では、Q の自己相関時間が ξ^2 より明らかに速く伸びると報告されています 読 （局所の熱浴・過緩和で Del Debbio–Panagopoulos–Vicari 2002、HMC 型で Schaefer–Sommer–Virotta 2011、局所の算法で Bonanno–Bonati–D'Elia 2021。冪なら指数は約 5、あるいは $1/a$ について指数的で、三つとも冪と指数をデータでは区別できないと書いています）。三本の原典の群はどれも $SU(3)$ 以上で、この本の緩和時間の仮定が述べられる $SU(2)$ で指数が 2 を越えるかは、探した範囲の一次資料では決まっていません。$SU(2)$ で位相電荷の自己相関の格子間隔への依存を測った一次資料は、探した範囲で一本です（Abe–Morikawa–Suzuki 2025。HMC・周期境界・物理の一辺を止めた小さな箱・三つの格子間隔）。そこでは積分自己相関時間が a^{-2} に近く伸びると報告されています 読 。このため、次の読みは $SU(3)$ 以上の原典の上の読みです。可逆な力学ではどの観測量の積分自己相関時間も C_P を越えないので（$\tau_{\mathrm{int}} \le C_P$ 典 、23-02 §05）、HMC と Langevin が同じ普遍類という予想 仮 の下で、上界の仮定は周期の箱では偽と読めます。開いた境界がこの障害を外すのは、物理の一辺を止めた有限の箱の中だけです（Lüscher–Schaefer 2011 では、開いた境界の Q^2 の自己相関時間は時間方向の長さにほぼ比例して伸びる 読 ）。先に体積を無限にするこの本の順では救いにならない見込みです 仮 。緩和時間の仮定を使い続けるなら、位相の区画ごとの言明か、台を相関長の数倍に限った局所の言明に直す方向が候補で、その検討は 第 24 部（24-03・24-04）で扱います。

06

拡散型緩和時間の仮定が与えるもの・与えないもの — 片側の橋、反例、類例

六段の残りの三つ、(4) 緩和時間の仮定が与えるもの、(5) 緩和時間の仮定が与えないもの、(6) 類例です。(4) と (5) は、問題文の量（ユークリッドの時間の隙間）と緩和時間の仮定の量（Langevin の緩和の時間）が別の量であることから始まり、二つをつなぐ片側の橋と、橋の反対向きが成り立たない例で、緩和時間の仮定と質量ギャップの関係を正確に決めます。

(4) 緩和時間の仮定が与えるもの — 質量への読み替えと片側の橋

等号の版。緩和の鎖を等号 $C_P = 1/m_{\mathrm{lat}}^2$ で置くと、(14) の二つの半分は物理単位の質量 $m_{\mathrm{phys}} = m_{\mathrm{lat}}\,\xi_{\mathrm{RG}}$ の言明に読み替わります。

$$(\xi^2)\uparrow \implies m_{\mathrm{phys}} \ge C^{-1/2}, \qquad (\xi^2)\downarrow \implies m_{\mathrm{phys}} \le c^{-1/2} \quad (16)$$

初 証明：上界の仮定の $1/m_{\mathrm{lat}}^2 \le C\xi_{\mathrm{RG}}^2$ の両辺に m_{lat}^2/C を掛けると $1/C \le (m_{\mathrm{lat}}\xi_{\mathrm{RG}})^2$。下界の仮定は不等号を逆にして同じ。∎ 証明の水準は代数で、Lean の二つの定理がこの代数を検査して

います。

```
theorem hup_is_gap_positivity {CP xi mlat K : ℝ}
    (hmlat : 0 < mlat) (hCP : CP = 1 / mlat ^ 2) (h : CP ≤ K * xi ^ 2) :
    1 ≤ K * (mlat * xi) ^ 2

theorem hdown_is_mass_finiteness {CP xi mlat c : ℝ}
    (hmlat : 0 < mlat) (hCP : CP = 1 / mlat ^ 2) (h : c * xi ^ 2 ≤ CP) :
    c * (mlat * xi) ^ 2 ≤ 1
```

Lean `LatticeGauge.hup_is_gap_positivity`（仮定：$m_{\mathrm{lat}} > 0$・$C_P = 1/m_{\mathrm{lat}}^2$・$C_P \le K\xi^2$。結論：$1 \le K(m_{\mathrm{lat}}\xi)^2$）と `LatticeGauge.hdown_is_mass_finiteness`（仮定：$m_{\mathrm{lat}} > 0$・$C_P = 1/m_{\mathrm{lat}}^2$・$c\,\xi^2 \le C_P$。結論：$c\,(m_{\mathrm{lat}}\xi)^2 \le 1$）。四つの文字はどれも Lean の中では名前の付いた実数で、それが Wilson 測度の Poincaré 定数であること、C_P が上限であること（すべての f を動かすこと）は Lean の外にあります（23-13）。上界の仮定は「質量が 0 に潰れない」、つまり質量ギャップの側の下界で、下界の仮定は「質量が無限大に逃げない」側です。

等号 $C_P = 1/m_{\mathrm{lat}}^2$ は自由場の値で、相互作用のある理論で置くには強すぎる仮定です。ところが上界の仮定から質量の下界を出す証明は、等号のうち片側 $C_P \ge \kappa/m_{\mathrm{lat}}^2$ しか使っていません。そしてこの片側は、時間を連続に取った格子では、仮定を名指しした命題として示せます。

片側の橋（連続の時間・有限の空間格子・$T = \infty$）

空間を有限の格子にし、一つの時刻の配位の空間を Q（$\mathbb{R}^n$、またはコンパクトで連結な多様体）、運動項の計量を M、$H = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta_M + V$、$A = (H - E_0)/\hbar$ とする。次を仮定する。(A1) 基底状態の仮定：H のスペクトルは離散で、基底状態 ψ_0 は重複せず滑らかで正、$\Delta = E_1 - E_0 > 0$。(A2) 定常な経路の測度の仮定：経路の測度は $T = \infty$ の定常な測度（一つの時刻の分布が ψ_0^2、推移が $e^{-\tau A}$）。(A3) 計量の比べの仮定：Langevin の Dirichlet 形 $\mathcal{E}_G(f) = \hbar \int \mathbb{E}\langle d_{q(\tau)}f, G\, d_{q(\tau)}f\rangle d\tau$ の計量が $G \le \lambda_G M^{-1}$ を満たし、$\kappa := 1/\lambda_G$。このとき $\xi = \hbar/\Delta$、$F = \psi_1/\psi_0$、$f_T = \int_0^T F(q(\tau))\,d\tau$ について、どの $T > 0$ でも

$$\frac{\mathrm{Var}(f_T)}{\mathcal{E}_G(f_T)} \;\ge\; \kappa\xi^2\Big[1 - \frac{\xi}{T}\big(1 - e^{-T/\xi}\big)\Big], \qquad \text{したがって} \qquad C_P \;\ge\; \kappa\xi^2 = \frac{\kappa\hbar^2}{\Delta^2} \tag{17}$$

が成り立つ。正準の選び方 $G = M^{-1}$（$\kappa = 1$）では、時刻に局所な試験関数の族の $T \to \infty$ の上限がちょうど ξ^2 である。

初 証明〔三〕。$m = \Delta/\hbar = 1/\xi$、$\varphi = (F - \langle F\rangle)\psi_0$ と置きます。$\langle F\rangle = \int \psi_0\psi_1 = 0$ なので $\varphi = \psi_1$、$A\varphi = m\varphi$ です。

(i) 分散。定常な経路の測度の仮定 (A2) の下で、測度の相関は $\mathrm{Cov}(F(q(s)),F(q(t))) = \langle \varphi, e^{-|s-t|A}\varphi\rangle = \|\varphi\|^2 e^{-m|s-t|}$ です 典 （転送作用素で相関を書く式、2-07 §08・23-04 §04 の (12) の型）。正方形 $[0,T]^2$ の上で積分すると $\mathrm{Var}(f_T) = \|\varphi\|^2\big(2T/m - 2(1-e^{-mT})/m^2\big)$ です（$\iint e^{-m|s-t|} = 2\int_0^T (T-u)e^{-mu}du$ を一回の部分積分で閉じる）。

(ii) Dirichlet 形。f_T を経路 $q(\tau)$ で微分すると、$\tau\in[0,T]$ で $dF(q(\tau))$、それ以外で 0 です。定常性と計量の比べの仮定 (A3) から $\mathcal{E}_G(f_T) = \hbar T\int \psi_0^2\langle dF, G\,dF\rangle \le \hbar T\lambda_G \int \psi_0^2 |dF|^2_{M^{-1}}$ です。

(iii) 基底状態変換の恒等式。滑らかな実関数 F について

$$\big\langle F\psi_0, (H-E_0)F\psi_0\big\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\int \psi_0^2\,|dF|^2_{M^{-1}} \tag{18}$$

です 初 。$(V-E_0)\psi_0 = \frac{\hbar^2}{2}\Delta_M\psi_0$ を使うと $(H-E_0)(F\psi_0) = -\frac{\hbar^2}{2}\big(\psi_0\Delta_M F + 2\langle dF, d\psi_0\rangle_{M^{-1}}\big) = -\frac{\hbar^2}{2\psi_0}\,\mathrm{div}_M(\psi_0^2\,\nabla_M F)$ となり、$F\psi_0$ を掛けて一回部分積分すれば右辺です（Q がコンパクトで境界が無いか、関数が無限遠で減衰するので境界の項は消える）。∎ 1-10 §08・2-05 §08 の一次元の計算と同じ形です。$F\psi_0=\psi_1$ なので左辺は $\Delta\|\varphi\|^2$ で、$\int\psi_0^2|dF|^2_{M^{-1}} = (2m/\hbar)\|\varphi\|^2$、よって $\mathcal{E}_G(f_T)\le 2\lambda_G m T\|\varphi\|^2$ です。

(iv) 比。(i) を (ii)(iii) で割ると $\mathrm{Var}\,/\mathcal{E}_G \ge \kappa\big(1/m^2 - (1-e^{-mT})/(Tm^3)\big)$、これが (17) の左です。$C_P$ は上限なので右辺以上で、$T\to\infty$ で $C_P\ge\kappa\xi^2$ です。正準のときの上限は、時刻に局所な任意の f で $\mathrm{Var}\,/T \to 2\langle\varphi, A^{-1}\varphi\rangle\cdot\mathcal{E}/T = 2\langle\varphi,A\varphi\rangle$ となり、A の固有値 $a\ge m$ について $1/a\le a/m^2$ を使えば ξ^2 以下で、等号は φ が固有値 m の固有空間にあるときです（23-04 §04 の (13) と同じ）。∎

Lean `LatticeGauge.HupBridge.cont_ratio_closed`（仮定：$0<m$・$0<T$。結論：(i) を (ii)(iii) で割った比が $1/m^2-(1-e^{-mT})/(Tm^3)$ に等しい）と `one_sided_bridge`（仮定：分散の下界・Dirichlet 形の上界・$\mathrm{Var}\,/\mathcal{E}\le C_P$、正の数。結論：$\kappa/m^2\le C_P$）は、(i)〜(iv) の数の代数だけを検査したものです。経路の測度・相関の式・(18)・C_P が上限であることは Lean の外です。

表 6　片側の橋の仮定と、どこで使うか

記号	仮定	どこで使うか
基底状態の仮定 (A1)	スペクトルが離散・$\Delta>0$・$\psi_0>0$ で滑らかで重複しない・ψ_1 が在る	$F=\psi_1/\psi_0$ が定義でき滑らか
定常な経路の測度の仮定 (A2)	$T=\infty$ の定常な経路の測度（一つの時刻の分布が ψ_0^2、推移が $e^{-\tau A}$）	(i) の相関の式
計量の比べの仮定 (A3)	$G\le\lambda_G M^{-1}$（$\kappa=1/\lambda_G$）	(ii) の比較
連続の時間	経路の運動項が $\frac12\|\dot q\|^2_M$ の形	(18) を経路の測度の $\mathcal{E}$ と同じ計量で使う
有限の空間格子	Q が有限次元	基底状態の仮定と (18) の部分積分

κ は時間の長さ T に依りません。T は (17) の因子 $1-(\xi/T)(1-e^{-T/\xi})\in(0,1)$ にだけ入り、$T/\xi\to\infty$ で 1 に近づきます。一次元の井戸で $G=M^{-1}=1$ と置いたものが一次元の片側の橋の命題（23-04 §04）で、片側の橋はその多次元・計量つきの版です。鎖の言葉で言えば、片側の橋は緩和の鎖の片側 $\lambda_1\le m_{\mathrm{lat}}^2/\kappa$（下界の仮定の側の半分）を、時間を連続に取った格子で示すものです。同じ形の主張が文献にあるかは確かめていません（既知かもしれません）。

冪が二次になる理由。分散は相関の時間の積分で $T\cdot(2/m)\|\varphi\|^2$、つまり $1/\Delta$ の一次で大きくなります。Dirichlet 形は、最も遅い励起の $F=\psi_1/\psi_0$ の勾配が小さい関数なので、(18) により $T\cdot 2m\|\varphi\|^2$、つまり Δ の一次で小さくなります。比が $1/\Delta^2$ です。勾配の小ささを見落として Dirichlet 形を Δ に依らない量と見積もると、c/Δ の一次の下界に落ち、次の (19) は出ません。

注（記号 Δ の二つの意味）。この章では Δ を二つの意味で使っています。(1) の $\Delta(\beta)=m_{\mathrm{lat}}/a$ は物理単位の質量です。片側の橋とこの節の例の $\Delta=E_1-E_0$ は、空間を有限の格子にしたハミルトニアンの隙間で、$\xi=\hbar/\Delta$ により格子単位の相関長に結ばれます（$\hbar=1$ で m_{lat} にあたり、(1) の $\Delta(\beta)$ はそれを格子間隔 a で割ったもの）。第 24 部では Δ を片側の橋の意味 E_1-E_0 に限り、物理単位の質量は m_{phys} と書きます（24-09 §02）。

例 6（二つのサイトの格子で、橋を手で確かめる）。例 2 と同じ二つのサイトを空間の格子にし、時間を連続に取ります（$\hbar=1$・$M=G=1$・$V=\frac12 x^{\mathsf T}Kx$、$K$ は例 2 の Hesse 行列）。基準振動は $u=(x_1+x_2)/\sqrt2$（角振動数 m_0）と $v=(x_1-x_2)/\sqrt2$（角振動数 $\sqrt{m_0^2+2}$）で、最初の励起は u の振動を一つ上げた状態なので $\Delta=m_0$、$\xi=1/m_0$、$F=\psi_1/\psi_0\propto u$ です。経路の上で $u(\tau)$ は定常なガウス過程で、$\mathbb{E}[u(s)u(t)]=e^{-m_0|s-t|}/(2m_0)$。$f_T=\int_0^T u\,d\tau$ について $\mathrm{Var}(f_T)=\frac{1}{2m_0}\big(\frac{2T}{m_0}-\frac{2(1-e^{-m_0T})}{m_0^2}\big)$、$|\nabla u|^2=\frac12+\frac12=1$ なので $\mathcal{E}(f_T)=T$、比は $1/m_0^2-(1-e^{-m_0T})/(Tm_0^3)$ で、(17) の右辺そのものです。数で、$m_0=\frac12$（$\xi=2$）・$T=20$ なら比は $4-0.99995/2.5\approx 3.600$、$T=200$ なら $4-1/25=3.96$ で、$\xi^2=4$ に下から近づきます。(18) も確かめられます：左辺は $\Delta\,\mathbb{E}[u^2]=m_0\cdot\frac{1}{2m_0}=\frac12$、右辺は $\frac12\,\mathbb{E}|\nabla u|^2=\frac12$ [初]。この例では経路の測度がガウスで、共分散 $(-\partial_\tau^2+K)^{-1}$ の最大固有値が $1/m_0^2$ なので $C_P=\xi^2$、橋は等号で成り立っています。

上界の仮定と橋を合わせる。上界の仮定の $C_P\le C\xi_{\mathrm{RG}}^2$ と片側の橋の $C_P\ge\kappa/m_{\mathrm{lat}}^2$ を並べると

$$\frac{\kappa}{m_{\mathrm{lat}}^2}\;\le\;C_P\;\le\;C\,\xi_{\mathrm{RG}}^2\qquad\Longrightarrow\qquad m_{\mathrm{phys}}^2=(m_{\mathrm{lat}}\,\xi_{\mathrm{RG}})^2\;\ge\;\frac{\kappa}{C}\tag{19}$$

です [初]。例えば $\kappa=1$・$C=4$ なら、物理単位の隙間はどの $\beta\ge\beta_0$ でも $\frac12$ 以上に留まります。(16) の等号の仮定を片側に弱めた形で、Lean では

```
theorem hup_is_gap_positivity_of_lower {CP xi mlat K κ : ℝ}
    (hmlat : 0 < mlat) (hCP : κ / mlat ^ 2 ≤ CP) (h : CP ≤ K * xi ^ 2) :
    κ ≤ K * (mlat * xi) ^ 2
```

Lean `LatticeGauge.HupBridge.hup_is_gap_positivity_of_lower`（仮定：$0 < m_{\mathrm{lat}} \cdot \kappa / m_{\mathrm{lat}}^2 \le C_P \cdot C_P \le K\xi^2$。結論：$\kappa \le K(m_{\mathrm{lat}}\xi)^2$）。$\kappa = 1$ と置くと (16) の左の定理が戻ります（`hup_is_gap_positivity_recovered`）。下界の仮定の側の (16) の右は $C_P \le 1/m_{\mathrm{lat}}^2$（難しい側）を使うので、片側の橋では弱められません。

(19) が質量ギャップの側の文になるための条件を並べます。第一に、κ が β に一様であること。場で測る目盛り $\mathcal{E}_A$ では κ は結合に依らない数で（値は群の計量の正規化の約束に依る）、条件は満たされます。リンクの角度で測る $\mathcal{E}_\vartheta$ では $\kappa \propto g^2 \to 0$ で、(19) は $m_{\mathrm{phys}}^2 \gtrsim g^2/C$、つまり対数の分だけ損をします（表 3 の目盛りで測った経路の C_P）。第二に、時間の扱いです。片側の橋は時間を連続に取った格子（空間だけを格子にした Hamiltonian の格子）の文で、時間も刻む Wilson 測度では、基底状態変換の恒等式 (18) にあたるものがありません。刻み 1 の時間の格子では、転送作用素 $\hat{T}$（最大固有値で割ったもの）の二番目の固有値を $q = e^{-\Delta}$ として、隣の時刻の増分と勾配を比べる仮定

$$\text{(D)}:\ \ \mathbb{E}_{\psi_0^2}|dF|_G^2 \le c_D \left\langle \varphi, (1-\hat{T})\varphi \right\rangle \qquad \Longrightarrow \qquad C_P \ \ge\ \frac{1+q}{c_D(1-q)^2} \ \ge\ \frac{2}{c_D\,\Delta^2} \tag{20}$$

を置けば同じ型の下界が出ます（時間を刻む片側の橋の命題）初（(D) の上で。分散は N サイトの窓で $\|\varphi\|^2 \sum_{s,t\le N} q^{|s-t|}$、Dirichlet 形は $N\,c_D(1-q)\|\varphi\|^2$ 以下で、$N \to \infty$ の比が中辺。右の不等号は $y = \Delta/2$ で $\sinh^2 y \le y^2 \cosh y\, e^y$ と同じで、$\tanh y \le y$ と $\cosh y \le e^y$ から従う）Lean `pairSum_closed`（窓の和の閉じた形）・`disc_limit_ge`（係数 1 の弱い版、仮定：$0 < \Delta \cdot 0 < c_D$）。$\hat{T} = e^{-(H-E_0)}$ がちょうど成り立つ場合は (18) から $c_D = 2\Delta/(1-e^{-\Delta}) \to 2$ で、連続の時間の片側の橋に戻ります。Wilson 測度の転送作用素はこの形ではないので、(D) は β に一様な c_D とともに仮定として残ります仮。第三に、体積です。片側の橋は有限の空間の箱の文で、無限体積の測度の C_P と箱の隙間の極限を結ぶ段は検討していません仮。

一段目で問いが片方になる理由。隙間で定めた相関長 $\xi = 1/m_{\mathrm{lat}}$（$\hbar = 1$）を使うと、橋 $\kappa\xi^2 \le C_P$ は冪の文の下の半分を自動で与えます。

$$\frac{\ln C_P}{\ln \xi} \ \ge\ 2 + \frac{\ln \kappa}{\ln \xi} \qquad (\xi > 1), \qquad \text{よって} \quad \liminf \frac{\ln C_P}{\ln \xi} \ge 2 \tag{21}$$

初（$\ln$ を取って $\ln\xi > 0$ で割る。κ が一様なら第二項は 0 へ）Lean `power_lower_half_of_bridge`（仮定：$0 < \kappa \cdot 1 < \xi \cdot \kappa\xi^2 \le C_P$。結論：(21) の左）。橋の仮定のもとでは、緩和時間の仮定の中身は上の半分 $\limsup \ln C_P / \ln \xi \le 2$ だけになります。二重井戸では一次元の片側の橋の命題がまさにこの橋（$\kappa = 1$、一次元）なので、一段目の冪の言明は「上の側を示せるか」という片方の問いになり、その目標が 23-05 の二重井戸の緩和時間の上界の命題 $C_P \le K\xi^2 S_0/\hbar$ です。

鎖の側の代数。三つの鎖の帯の不等式を六本仮定すれば、$a^2 C_P = a^2/\lambda_1$ が正の帯に入ります。

$$c_1 m^2 \le \lambda_1 \le C_1 m^2,\ \ c_2\sigma \le m^2 \le C_2\sigma,\ \ c_3 a^2 \le \sigma \le C_3 a^2 \ \Longrightarrow\ c_1c_2c_3\,a^2 \le \lambda_1 \le C_1C_2C_3\,a^2 \tag{22}$$

初 Lean `chain_band` ・ `sq_times_poincare_band`（仮定：六つの帯の不等式と係数の正。結論：(22) と、a^2/λ_1 が $[1/C, 1/c]$ に入ること）。鎖そのものは仮定で、逆向き（帯の文から鎖）は出ません。片側の橋は緩和の鎖の右の不等式 $\lambda_1 \le C_1 m^2$（$C_1 = 1/\kappa$）を、連続の時間の格子で与えます。

(5) 緩和時間の仮定が与えないもの — 別の量・逆向き・極限

別の量であること。C_P は経路の測度の Poincaré 定数、つまり人工の時間で走る Langevin 力学の隙間の逆数で、問題文の質量は転送行列（ハミルトニアン）の隙間です（表 3 の経路の C_P と真空の C_P）。二つは別の量で、(4) の橋はその間に一方向の不等式を置いただけです。緩和時間の仮定を仮定しても、二つが同じものになるわけではありません。

逆向きは一般には成り立たない。(19) は「上界の仮定 ⇒ 物理単位の隙間が正」でした。その逆「物理単位の隙間が正 ⇒ 上界の仮定」は、次の例で崩れます。

> 円の上の自由な粒子の反例
>
> $Q = S^1$（周の長さ 2π の円）、$M = 1$、$V = 0$、$H = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{d^2}{dx^2}$ とする。隙間は $\Delta = \hbar^2/2 > 0$、$\xi = \hbar/\Delta = 2/\hbar$ だが、$T = \infty$ の経路の測度の正準の C_P は $+\infty$ である。

初 証明〔三〕。固有関数は e^{ikx}、固有値は $\hbar^2 k^2/2$ なので $\Delta = \hbar^2/2$ です。経路 $x(\tau)$ を実数直線に連続に持ち上げた $\tilde{x}(\tau)$ は、定数 $2\pi k$ の分を除いて決まります。台が $[0, L]$ で端で 0 になる w を取り、

$$f = \int w(\tau)\, d\tilde{x}(\tau) = -\int w'(\tau)\, \tilde{x}(\tau)\, d\tau, \qquad \mathrm{Var}(f) = \hbar \int w^2\, d\tau, \qquad \mathcal{E}(f) = \hbar \int w'^2\, d\tau \tag{23}$$

と置きます。$\int w' = 0$ なので持ち上げの定数の不定さは消え、f は経路の関数です。分散は、$\tilde{x}$ が強さ $\hbar$ のブラウン運動であることと Itô の等長性から 典、Dirichlet 形は $\delta f/\delta x(\tau) = -w'(\tau)$ からです。$w(\tau) = w_0(\tau/L)$ と伸ばすと比は $L^2 \int w_0^2 / \int w_0'^2$ で、$L \to \infty$ で限りなく大きくなります。∎ Lean `rotor_ratio_unbounded` ・ `rotor_gap_pos`（仮定：$0 < r$／$0 < \hbar$。結論：どの B にも $B < L^2 r$ となる $L > 0$ がある／$0 < \hbar^2/2$。円の上の自由な粒子の反例の骨の算術だけ）。

例 7（巻き数の酔歩）。$w_0(\tau) = \sin(\pi\tau)$（$0 \le \tau \le 1$）では $\int w_0^2 = \frac{1}{2}$ ・ $\int w_0'^2 = \pi^2/2$ なので、比は L^2/π^2 です。例 1 の一本道の $C_P \approx L^2/\pi^2$ と同じ数で、偶然ではありません。巻き数は円の上の粒子が何周したかを数える量で、それは果てのない一本道を酔歩しています。$\hbar = 0.1$ なら $\xi = 20$ ・ $\xi^2 = 400$ ですが、$L = 100$ で比は約 1013、$L = 1000$ で約 1.01×10^5 と、ξ^2 をいくらでも越えます。$\hbar \to 0$ の族で $a := 1/\xi$ と置けば、$m_{\mathrm{phys}} = m\,\xi = 1$ はどの $\hbar$ でも正なのに、$C_P = \infty$ なので上界の仮定はどの $\hbar$ でも破れます。

型を言えば、緩和が隙間より遅くなるのは、隙間に映らない時刻に局所でない量（巻き数・位相電荷・キンクの数）が拡散で運ばれるときです。保存する力学で $C_P = \infty$ になるのと同じ仕組みで（2-10 の寄り道）、ゲージ理論では周期の箱での位相電荷の凍結がこの型の候補です（23-02 §05）。範囲に注意します。有限の周期の箱の四次元 Wilson 測度では配位の空間がコンパクトで連結な有限次元の空間なので $C_P < \infty$ で、円の上の自由な粒子の反例はその類の反例ではありません。円の上の自由な粒子の反例が示すのは論理の隙間（隙間が正であることは C_P の有限ささえ含意しない）で、Wilson 測度の類の中で逆向きが偽かどうかは決まっていません。

まとめると、橋の仮定のもとで上界の仮定は格子の物理単位の隙間の下界を含意し、逆は一般には成り立ちません。**橋の仮定のもとで、上界の仮定は格子の物理単位の質量ギャップより強い文です**。緩和時間の仮定の道は、より強い文を、(2) の道具が使える言葉で言い換えた道です。

緩和時間の仮定は非自明性ではない

自由な質量つきの場では、表 4 のとおり $a^2 C_P = 1$ で、場の目盛りでは緩和時間の仮定も帯の文も下界の仮定も等号で成り立ちます [初]。だから下界の仮定は問題文の「非自明」（相互作用があること、0-03）とは別の条件で、緩和時間の仮定全体も非自明性を含みません。緩和時間の仮定が言うのは「質量ギャップのある極限に向かう測度の族なら、揺らぎの時間がどう伸びるか」の形だけです。

強結合の側は反対側

格子ゲージ理論の定理の多くは β が小さい側（強結合）にあり、示されるのは体積に一様な格子単位の隙間や Poincaré・対数 Sobolev 不等式、つまり $C_P = O(1)$ の形です。Shen–Zhu–Zhu（2023）は Langevin 力学で両不等式を示し、'the infinite volume measure has a strictly positive mass gap' と書きます [典]。条件を Wilson の β に直すと $\beta < N^2/(16(d-1)) = 1/12$（$N = 2, d = 4$）です。

表 7　定理が在る β と極限の側の β（$SU(2)$・$d = 4$。ξ は強結合展開の主項 $m_0 = -4 \ln u$、$u = I_2(\beta)/I_1(\beta)$ の目安）

領域	β	ξ	言えていること
Shen–Zhu–Zhu の条件	< 0.0833	0.065	[典] 一意性・両不等式・指数減衰
一リンク積分のあとの曲率	< 0.2722	0.093	曲率の下界 $-27\beta^2$ は [Lean] `StaplePerturbation.hess_gauge`（仮定：周期 L が偶数で $L \geq 3$・リンクは単位四元数・摂動は純虚）。判定法は [典]（Bakry–Émery）。隙間へ進む段は [仮]（5-11）
数値の窓（表 2）	2.25〜2.60	0.72〜1.95	[読] $\Delta/\sqrt{\sigma} \approx 3.3$〜$3.8$
二ループの外挿	3.24・4.14・5.02	10・100・1000	[読] 漸近スケーリングを仮定した目安

表 7 の ξ の列は 読 （主項の目安）です。強結合の定理は無限体積の一意性の言明を小さい β で与える大事な結果ですが、定数を改善しても β の範囲が有界なら物理単位の隙間の言明・記帳の長さでの緩和時間の帯には近づきません。そのまま β に一様に延びれば上界の仮定は満たし下界の仮定は破れ、$m_{\mathrm{phys}} \to \infty$ の自明な極限に落ちます（向きは (5) と同じ、例 5 の後半）。

極限と持ち上げ。緩和時間の仮定が四次元格子で閉じ、橋の仮定がそろっても、得られるのは各 $\beta \geq \beta_0$ での格子の物理単位の隙間の下界までです。$\Delta(\beta)$ が極限を持つこと（物理単位の隙間の言明の残り）、極限の測度の存在（無限体積の一意性の言明・Wilson ループの極限の言明）、回転の回復と OS 公理・再構成（回転の回復の言明・OS 再構成の言明）、非自明性の言明は、緩和時間の仮定の外にあります。また一段目（二重井戸）で緩和時間の仮定が閉じても、四次元格子の緩和時間の仮定への含意の定理は無く、持ち上がる見込みは文の形と道具の形だけです（23-03 §06）。

(6) 類例 — 同じ型の問いが定理になった模型

「力学の緩和の遅さが、相関長の冪と同じ形で伸びるか」は、ゲージ理論の外では定理の対象になっています。

例 8（Bauerschmidt–Bodineau の定理を一文で）。四次元の n 成分 $|\varphi|^4$ 模型の階層版（格子を入れ子の箱に置き換え、繰り込みの一段が書き下せるようにした模型）の、臨界点と高温側からそこへ近づく族で、Glauber 型の力学のスペクトルギャップは自由場の力学のギャップと同じ冪で 0 に近づく（$|\varphi|^4$ では対数の補正つき） 典 （Bauerschmidt–Bodineau, arXiv:1809.02075 の要旨と §1〜§2 を確認）。自由場の力学のギャップは質量の二乗、つまり ξ^{-2} の冪で消えるので、これは「C_P は ξ^2 の冪で、対数の因子を除いて伸びる」という、拡散型緩和時間の仮定と同じ型の文です（質量と相関長の対応は模型の中の定義に依るので、ここでは型の比較にとどめます）。

この例から読めることは三つあります。第一に、緩和時間の仮定の型の問いは数学として立ち、相互作用のある四次元の模型で答えが出た例があります。第二に、答えには対数の補正が付き、帯の文ではなく冪の文の形で成り立っています。緩和時間の仮定を冪の水準に置いた理由（§07 の寄り道）と同じ事情です。第三に、方法は、共分散を尺度ごとに分け、各尺度の測度のスペクトルギャップを次の尺度のスペクトルギャップから受け渡す、離散の尺度での Brascamp–Lieb の型の帰納です。結論はスペクトルギャップ（Poincaré 不等式）の形で、各尺度でポテンシャルが一様に凸に近いことを仮定に使い、平衡の繰り込みの結果を入力にとります。場が平らな空間に値をとるスカラー場の結果で、ゲージ場ではありません。群に値をとる場へどう移すかは、この部の外の問いとして第 24 部の 24-06 §05 で扱います。

拡散型緩和時間の仮定の行の分類と依存グラフ

(3)〜(6) の言明を、五分類の書式（23-00 §01）で一表にします。行の番号は下の依存グラフの節点の番号です。範囲の欄は、その行が何について言うか（β の範囲・空間の体積・時間の扱い）で

す。

表 8　緩和時間の仮定とその周りの行（「—」はどの範囲でも示されていない仮定の行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
[01]	上界の仮定：$a^2 C_P \le C$	仮	(14)(15)	—	—
[02]	下界の仮定：$a^2 C_P \ge c$	仮	(14)(15)	—	—
[03]	緩和時間の仮定（冪の文）：$\ln C_P / \ln \xi \to 2$	仮	(13)	—	—
[04]	三つの鎖（緩和の鎖・一尺度の鎖・記帳の長さの鎖）の帯	仮	(12)・17-12	—	—
[05]	緩和の鎖の等号 $C_P = 1/m_{\mathrm{lat}}^2$	仮	(16) の仮定（自由場の値）	—	—
[06]	基底状態の仮定 (A1)：スペクトルの離散・基底状態の単純さと正値	仮	片側の橋の仮定（原典の言明はこの部では確かめていない）	有限の空間格子	—
[07]	定常な経路の測度の仮定 (A2)：相関の式	典	(i)・2-07 §08	$T = \infty$	—
[08]	計量の比べの仮定の κ が β に一様	仮	(19) の後の第一の条件（$\mathcal{E}_A$ では結合に依らない数、$\mathcal{E}_\vartheta$ では $\propto g^2$）	—	—
[09]	(D) 離散の時間の増分と勾配の比較、c_D が β に一様	仮	(20)	—	—
[10]	箱の橋から無限体積の橋へ	仮	(19) の後の第三の条件（検討していない）	—	—
[11]	基底状態変換の恒等式 (18)	初	(iii) の証明	有限の空間格子	—
[12]	片側の橋：$C_P \ge \kappa \xi^2$	初	(17)・(i)〜(iv)（条件つき：(A1)〜(A3)・連続の時間）	有限の空間格子・連続の時間・$T = \infty$	`cont_ratio_closed`・`one_sided_bridge`（仮定：正の数・分散の下界・Dirichlet 形の上界）
[13]	時間を刻む片側の橋の命題：$C_P \ge 2/(c_D \Delta^2)$	初	(20)（条件つき：時間の刻みの比べの仮定 (D)）	有限の空間格子・刻み 1 の時間	`pairSum_closed`・`disc_limit_ge`（仮定：$0 < \Delta$・$0 < c_D$）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
[14]	円の上の自由な粒子の反例：$\Delta > 0$ で $C_P = \infty$（逆向きの否定）	初	(23)・例 7	円・全ての $\hbar$	`rotor_ratio_unbounded`・`rotor_gap_pos`（骨の算術だけ）
[15]	(16) 等号の版の読み替え	初	(16) の証明	$\beta \geq \beta_0$	`hup_is_gap_positivity`・`hdown_is_mass_finiteness`（仮定：$m_{\mathrm{lat}} > 0$・$C_P = 1/m_{\mathrm{lat}}^2$・(14) の片側）
[16]	(19) 上界の仮定と橋から $m_{\mathrm{phys}}^2 \geq \kappa / C$	初	(19)	$\beta \geq \beta_0$	`hup_is_gap_positivity_of_lower`（仮定：$0 < m_{\mathrm{lat}} \cdot \kappa / m_{\mathrm{lat}}^2 \leq C_P \cdot C_P \leq K\xi^2$）
[17]	(21) 冪の下の半分が自動	初	(21)	$\xi > 1$	`power_lower_half_of_bridge`（仮定：$0 < \kappa$・$1 < \xi \cdot \kappa\xi^2 \leq C_P$）
[18]	(22) 鎖の帯の代数	初	(22)	$\beta \geq \beta_0$	`chain_band`・`sq_times_poincare_band`（仮定：六つの帯の不等式と係数の正）
—	階層的 $\lvert\varphi\rvert_4^4$ の力学のギャップが自由場と同じ冪（対数つき）	典	例 8（類例。緩和時間の仮定の行には使わない）	階層模型・臨界とその近く	—

「初」の行は、どれも仮定の行を入力にとる代数か、仮定を名指した命題です。片側の橋は証明をこの節に置いた命題ですが、四次元の Wilson 測度にそのまま当てはまる定理ではありません（時間を刻む場合は時間の刻みの比べの仮定、無限体積は箱の橋から無限体積の橋へ移る段、目盛りは κ の一様さが残る）。

```
[01] 仮  緩和時間の上界の仮定：a²C_P ≤ C                                  —
[02] 仮  緩和時間の下界の仮定：a²C_P ≥ c                                  —
[03] 仮  拡散型緩和時間の仮定：ln C_P / ln ξ → 2                          —
[04] 仮  三つの鎖の帯                                                     —
[05] 仮  緩和の鎖の等号 C_P = 1/m_lat²                                    —
[06] 仮  基底状態の仮定：スペクトルの離散・基底状態の単純さと正値     有限の空間格子
[07] 典  定常な経路の測度の相関の式                                    T=∞
[08] 仮  κ が β に一様                                                    —
[09] 仮  時間の刻みの比べの仮定（c_D が一様）                             —
[10] 仮  箱の橋から無限体積の橋へ                                         —
[11] 初  基底状態変換の恒等式 (18) ⟸ [06]                          有限の空間格子
[12] 初  片側の橋：C_P ≥ κξ² ⟸ [06][07][11]                          連続の時間・T
         Lean cont_ratio_closed・one_sided_bridge（数の代数だけ）
[13] 初  時間を刻む片側の橋の命題：C_P ≥ 2/(c_D Δ²) ⟸ [06][07][09]   刻み 1
         Lean pairSum_closed・disc_limit_ge
[14] 初  円の上の自由な粒子の反例：Δ > 0 かつ C_P = ∞          全ての ħ
         Lean rotor_ratio_unbounded・rotor_gap_pos（骨の算術だけ）
[15] 初  (16) 上界の仮定 ⇒ m_phys ≥ C^(-1/2)、下界の仮定 ⇒ m_phys ≤ c^(-1/
         Lean hup_is_gap_positivity・hdown_is_mass_finiteness
[16] 初  (19) m_phys² ≥ κ/C ⟸ [01][08][10][12]（時間を刻むなら [12] の代わ
         Lean hup_is_gap_positivity_of_lower
[17] 初  (21) liminf ln C_P / ln ξ ≥ 2 ⟸ [08][12]（または [13]）
         Lean power_lower_half_of_bridge
[18] 初  (22) a²C_P が正の帯に入る ⟸ [04]
         Lean chain_band・sq_times_poincare_band
```

確かめ方。全ての「⟸」の行で、右の番号が左の番号より小さいことを目で見ます（[11] は [06]、[12] は [06][07][11]、[13] は [06][07][09]、[15] は [01][02][05]、[16] は [01][08][10][12]（または [13]）、[17] は [08][12]（または [13]）、[18] は [04]）。どの行も規則を守っているので、円はありません。葉の「仮」は [01]〜[06]・[08]〜[10] の九つ、「典」は [07] です。緩和時間の仮定 [03] はどの行の前提にも入っていません。橋があれば緩和時間の仮定の下の半分は [17] で自動に従い、[03] の中身は上の半分だけになる、というのが (4) の内容です。円の上の自由な粒子の反例 [14] は前提を持たない反例で、[16] の逆向きが一般には成り立たないことを示します。

正確には、このグラフは緩和時間の仮定と質量の関係の組み立ての依存で、緩和時間の仮定そのものを支える行（一段目では 23-05 §07 のグラフ）は入れていません。全てを一つに繋いだものが 23-12 の統合のグラフです。

07

寄り道：縮尺の回数と四つの時計 — 冪に映らない対数

飛ばしてよい節です。緩和時間の仮定を帯でなく冪の文に置く理由を、23-00 §05 の三つの比喩（縮尺の回数・時計の目盛り・遅れる時計）の式で見ます。

縮尺の回数 — 記帳の長さ ξ_{RG}

四次元の格子ヤン–ミルズで ξ を β の関数として式で求める手はありません。そこで地図の縮尺を一段ずつ粗くし、何回で決まった粗さの絵に着くかを数える長さを別に作ります。格子を b 倍に粗くする一段（繰り込み群の一段、7-05）で、結合が次のように下がると数えます。

$$\beta \longmapsto \beta - \kappa\,\big(\ln b - \delta(b)\big), \qquad \kappa = \frac{11}{3\pi^2} \approx 0.3715 \tag{24}$$

κ は一ループの係数（漸近的自由性、4-06）を格子の β で書き直したもの 典 、$\delta(b)$ は一段の記帳で取りこぼす分です（23-02 §02）。決まった値 β_* まで下がるのにかかる段数を $k(\beta)$ として

$$\xi_{\mathrm{RG}} = b^{\,k(\beta)}, \qquad a := \frac{1}{\xi_{\mathrm{RG}}}, \qquad \xi_{\mathrm{RG}} = e^{(\beta-\beta_*)/\kappa} \quad (\delta = 0) \tag{25}$$

と置きます。$\delta = 0$ なら段数は $(\beta - \beta_*)/(\kappa \ln b)$ で、記帳の長さは b に依りません。一ループの次元転移の式（4-07）と同じ形です。

初 表 9　縮尺の回数（一ループ・$\delta = 0$・$b = 2$・例として $\beta_* = 2.0$。閉じた式 (25) の値）

β	段数 k（半分にする回数）	$\log_{10} \xi_{\mathrm{RG}}$
2.5	1.94	0.58
4	7.77	2.34
6	15.53	4.68
10	31.07	9.35
20	69.90	21.04

β を 1 上げるごとに、半分にする回数が約 3.9 回増えます。β_* の選び方は定数倍にしか効きません。記帳の長さは測度から直接決まる長さではなく記帳の約束から決まる長さで、ξ と定数倍で揃うことは一尺度の鎖・記帳の長さの鎖の仮定です 仮 。記帳を一ループで打ち切ると、二ループの走り（純 $SU(N)$ で $b_1/(2b_0^2) = 51/121$）との差が $\beta^{51/121}$ の因子として残ります 典 （摂動論の水準、4-06）。

時計の目盛りと遅れる時計

$SU(2)$ のリンクを $U = e^{i\vartheta\cdot\sigma}$ と書くと、連続理論の場との関係は $A = \sqrt{\beta}\,\vartheta$ です。$\mathcal{E}$ は微分の二乗なので

$$\mathcal{E}_A = \frac{\mathcal{E}_\vartheta}{\beta}, \qquad C_P^{(A)} = \beta\, C_P^{(\vartheta)}, \qquad \text{自由近似で } C_P^{(A)} = \xi^2,\ C_P^{(\vartheta)} = \frac{g^2}{4}\,\xi^2 \tag{26}$$

です 初 。さらに Langevin の時間そのものが尺度で伸び縮みします。確率量子化（7-09）を摂動論で繰り込むと、場と結合のほかに確率時間の目盛りも乗法的に繰り込まれます 典 （摂動論の水準）。その一ループの係数を目盛りの言葉に移すと

$$C_P^{(A)} \propto \xi^{2}\,\beta^{13/22}, \qquad C_P^{(\vartheta)} \propto \xi^{2}\,\beta^{-9/22} \tag{27}$$

と読めます 仮 （一ループの主対数であること、格子の主対数が次元正則化の主対数と一致すること、五次元の理論の乗法的な繰り込み可能性、そして緩和時間の仮定そのものを前提とした読み）。角度の目盛りの冪 $\beta^{-9/22}$ は、Lüscher–Schaefer（2011）が自己相関時間に書く因子 $g_0^{9/11}$ と同じ冪です。同じ一ループの係数から来るので、独立な確かめではありません。

表 10 は目盛り二通りと遅れの有無二通りの四つの時計で C_P/ξ^2 を並べたものです。ξ は (25) の記帳の長さ ξ_{RG} で代用し（$\beta_*=0$）、定数は $\beta=2.5$ で 1 に揃えました。冪は $d\ln C_P/d\ln\xi = 2+\varepsilon\kappa/\beta$ です。

初 表 10　四つの時計（模式。$\xi=e^{\beta/\kappa}$ と (26)(27) の閉じた式の値）

β	$\log_{10}\xi$	場 A（$\varepsilon=0$）	角度 ϑ（$\varepsilon=-1$）	場 A・遅れ（$\varepsilon=13/22$）	角度 ϑ・遅れ（$\varepsilon=-9/22$）
2.5	2.92	1	1	1	1
4	4.68	1	0.625	1.32	0.8251
10	11.69	1	0.25	2.269	0.5672
100	116.90	1	0.025	8.844	0.2211
1000	1168.99	1	0.0025	34.48	0.0862
冪（$\beta=2.5$）	–	2.0000	1.8514	2.0878	1.9392
冪（$\beta=100$）	–	2.0000	1.9963	2.0022	1.9985

どの時計でも冪は 2 に寄り、定数倍は寄りません。正確には、表 10 は相互作用を一ループの対数の因子だけで表した模式で、四次元の格子ヤン–ミルズの C_P を計算したものではありません。目盛り・記帳の次数・確率時間の三つの対数は帯の文を動かし、冪の文 (13) を動かしません。

08

筋のうち手にあるもの — 23-02・23-03 へ

この章の言明を、筋の順に一本の矢印に並べます。

$$\underbrace{\text{一段の記帳}}_{\text{23-02}} \xrightarrow{(\xi^{\prime})\wedge\sum\delta<\infty} \text{(S5)} \xrightarrow{(\xi^{\prime})\text{band}} \text{(S4)} \xrightarrow{\text{(S3)(S6)(S7)(S8)}} \text{問題文の要求}$$

最初の矢印は冪の水準の文で、記帳の取りこぼしの和 $\sum\delta$ が有限であることを足したもの（23-02 §02）、次の矢印には帯の文が要ります。(28) のうち手にあるのは最初の箱の一部（一段の記帳の代数）だけで、矢印はどれも証明されていません。紫外の側は、2026-11-10 に公開された構成が別の道（繰り込みの段を重ねる構成）で越えています。四次元の Wilson の格子ゲージ理論の極限として Wightman の公理を満たす理論が作れることを、Lean で証明している、と委員会が評価しました（第 6 部）。それでも一様な質量ギャップは示されていません（6-04）。出題者が新しい

考えを名指すのも赤外です：'New ideas are needed to prove the existence of a mass gap that is uniform in the volume of space-time.'（Jaffe–Witten §6.5）[典]。

緩和時間の仮定が閉じたら何が従うか。 §06 のとおり、上界の仮定が四次元格子で閉じ、片側の橋の仮定（時間を連続に取った格子、または時間を刻む格子での時間の刻みの比べの仮定（論文「片側の橋」の (D)）、κ が β に一様なこと、箱から無限体積へ移る段）がそろえば、各 $\beta \geq \beta_0$ で格子の物理単位の隙間が $(\kappa/C)^{1/2}$ 以上に留まることが従います（(19)）。緩和時間の仮定だけ（冪の文。帯の文でない）からは、物理単位の隙間は出ません。C_P は人工の時間で走る Langevin 力学の隙間の逆数で、転送行列のハミルトニアンの隙間（質量）とは別の量です（表 3 の真空の C_P と経路の C_P）。橋はその間の一方向の不等式で、逆向きは一般には成り立ちません（円の上の自由な粒子の反例）。緩和時間の仮定と橋がそろっても、$\Delta(\beta)$ が極限を持つこと、極限の存在（無限体積の一意性の言明・Wilson ループの極限の言明）、OS 公理と再構成（回転の回復の言明・OS 再構成の言明）、非自明性の言明は従いません。また一段目（二重井戸）で緩和時間の仮定が閉じても、四次元格子の緩和時間の仮定への含意の定理は無く、持ち上がる見込みは文の形と道具の形だけです（23-03 §06）。

(28) の矢印を四次元格子のまま押した道と、それぞれが止まった場所は 23-02 にまとめます。そこで見るとおり、下界の仮定の側（ある f）には届く道がいくつも在り、上界の仮定の側（すべての f）には届く道具が見つかっていません。緩和時間の仮定は次元によらない文なので、同じ文を緩和時間の仮定の成り立つことが見込まれる最小の模型に移し、上の側の組み立てを先に作るのが階段の一段目です（23-03）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
[典] 八つの言明の割り方と四次元の現状（表 1）、問題文の脚注と §6.5、格子の相関長の問題の向き、強結合の定理（表 7）、三つの C_P の真空の C_P と隙間の関係、(9) の凸性と摂動の判定、階層的 $\lvert\varphi\rvert_4^4$ の力学のギャップ（例 8、類例として）	大きい β の無限体積の一意性の言明、Wilson ループの極限の言明・物理単位の隙間の言明・回転の回復の言明・非自明性の言明（この章の筋で。公開された構成との関係は §02 の注）。この章は何も示していない
[初] 一様な格子の隙間は物理の質量の発散（(5)）、自由場で物理単位の隙間の言明と記帳の長さでの緩和時間の帯が同じこと（(8)・表 4）、帯と冪の関係（(11)・例 4）、量化子の非対称（(15)）、例 1〜7 の手の計算、目盛りの換算 (26)、表 9・表 10 の閉じた式の値	相互作用のある理論で物理単位の隙間の言明と記帳の長さでの緩和時間の帯を結ぶこと（緩和時間の仮定・帯の文）

言えている	言えていない
初 片側の橋（$C_P \geq \kappa\xi^2$。条件：(A1)〜(A3)・連続の時間・有限の空間格子・$T=\infty$）と時間を刻む片側の橋の命題（条件：(D))、基底状態変換の恒等式 (18)、円の上の自由な粒子の反例（円の上で $\Delta>0$ かつ $C_P=\infty$）	橋を四次元の Wilson 測度に当てはめること（時間を刻む場合の (D)・κ の一様さ・無限体積の段)。Wilson 測度の類の中で「隙間が正 ⇒ 上界の仮定」が偽かどうか
初 上界の仮定・下界の仮定を質量の下界・上界に読み替える代数（(16)） Lean `hup_is_gap_positivity`・`hdown_is_mass_finiteness`（仮定：$m_{\mathrm{lat}}>0$・$C_P=1/m_{\mathrm{lat}}^2$・(14) の片側)。片側に弱めた版 (19) `hup_is_gap_positivity_of_lower`（仮定：$0<m_{\mathrm{lat}}\cdot\kappa/m_{\mathrm{lat}}^2\leq C_P\cdot C_P\leq K\xi^2$)。冪の下の半分 (21) `power_lower_half_of_bridge`（仮定：$0<\kappa\cdot 1<\xi\cdot\kappa\xi^2\leq C_P$)。鎖の帯の代数 (22) `chain_band`（仮定：六つの帯の不等式）	緩和時間の仮定・上界の仮定・下界の仮定・三つの鎖そのもの。$C_P=1/m_{\mathrm{lat}}^2$ が相互作用のある理論で成り立つこと
読 原典の Monte Carlo の値で $\Delta/\sqrt{\sigma}$ がほぼ一定（表 2)、表 7 の ξ の目安	外挿値が構成された理論の値であること
仮 確率時間の指数 $13/22$・$-9/22$（一ループ・前提つきの読み)、記帳の長さと ξ が定数倍で揃うこと、表 8 の仮の行	その指数が四次元の格子ヤン–ミルズの C_P に当てはまること。質量ギャップ・連続極限について、この章は何も示さない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
問題文・脚注・§6.5	典	A. Jaffe, E. Witten, Quantum Yang–Mills Theory, Clay Mathematics Institute (2000)。本文を確認（0-03 の出典表)。
格子の相関長の問題・連続の弦張力の問題（Chatterjee の Problem 5.1・5.2)・無限体積の一意性の言明の現状	典	S. Chatterjee, arXiv:1803.01950 §3・§5（Springer Proc. Math. Stat. 283, 2019)。本文を確認。
強結合の一様評価と条件の換算	典	H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, Commun. Math. Phys. 400 (2023) 805–851, arXiv:2204.12737（要旨・§1・式 (1.2) を確認)。K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（書誌のみ)。
転送作用素・OS 再構成・ϕ_4^4 の自明性	典	M. Lüscher, Commun. Math. Phys. 54 (1977) 283。K. Osterwalder, R. Schrader, Commun. Math. Phys. 31 (1973) 83・42 (1975) 281。M. Aizenman, H. Duminil-Copin, Ann. of Math. 194 (2021) 163。書誌のみ（各章の出典表)。
(9) の凸性の判定と有界な摂動	典	D. Bakry, M. Émery, LNM 1123 (1985)。Holley–Stroock の摂動の補題は M. Ledoux の再述で型を確認。書誌は 23-06 の出典表。
表 2 の値	読	B. Lucini, M. Teper, JHEP 0106 (2001) 050, hep-lat/0103027 表 1・表 5（本文を確認)。比は割り算と誤差の伝播。
表 4・表 9・表 10・例 1〜7・(8)(11)(26)	初	閉じた式 $C_P=1/m^2$・$m^2=2(\cosh(1/\xi)-1)$・$C_P(L)=1/(2(1-\cos(\pi/L)))$・(25)〜(27) の値と、本文の手の計算。

もの	種別	出典・道具
片側の橋・時間を刻む片側の橋の命題・円の上の自由な粒子の反例と (18)	初	本文 §06 の証明。片側の橋の相関の式は 2-07 §08、Itô の等長性は既知の事実として引く。同じ形の主張が文献にあるかは確かめていない。
階層的 $\lvert\varphi\rvert^4_4$ の力学のギャップ	典	R. Bauerschmidt, T. Bodineau, Commun. Math. Phys. 373 (2020) 1167–1206, arXiv:1809.02075（要旨と §1〜§2 を確認。方法は離散の尺度での Brascamp–Lieb の型の帰納、結論はスペクトルギャップ）。
一ループ・二ループの係数	典	D. J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1343。H. D. Politzer, 同 1346（書誌のみ。4-06 の出典表）。
確率時間の繰り込みと (27)	典・仮	L. Baulieu, D. Zwanziger, Nucl. Phys. B 581 (2000) 604, arXiv:hep-th/9909006。M. Lüscher, S. Schaefer, JHEP 04 (2011) 104, arXiv:1103.1810。J. Zinn-Justin, D. Zwanziger, Nucl. Phys. B 295 (1988) 297（要旨のみ）。(27) の読みの前提は §07 の本文。
(15)(16)(19)(21)(22) の代数と Lean の定理	初・Lean	定理 `hup_is_gap_positivity`・`hdown_is_mass_finiteness`・`chain_band`・`sq_times_poincare_band`（束 `LatticeGaugeOneScale`）、`exponent_invariant_of_slowly_varying`（束 `LatticeGaugePoincareNormalisation`）、`hup_is_gap_positivity_of_lower`・`hup_is_gap_positivity_recovered`・`power_lower_half_of_bridge`・`cont_ratio_closed`・`one_sided_bridge`・`pairSum_closed`・`disc_limit_ge`・`rotor_ratio_unbounded`・`rotor_gap_pos`（束 `LatticeGaugeHupBridge`）。言明と仮定は 23-13。
§05 の注（位相の区画と体積の順）	読・典・仮	L. Del Debbio, H. Panagopoulos, E. Vicari, arXiv:hep-th/0204125 §2。S. Schaefer, R. Sommer, F. Virotta, Nucl. Phys. B 845 (2011) 93, arXiv:1009.5228 §4.1・§5。C. Bonanno, C. Bonati, M. D'Elia, arXiv:2012.14000v2 §1・図 4。M. Abe, O. Morikawa, H. Suzuki, PTEP 2025 (2025) 063B03, arXiv:2501.00286 §3.2・図 6（$SU(2)$・HMC）。M. Lüscher, S. Schaefer, JHEP 07 (2011) 036, arXiv:1105.4749 §3・§5.3。$\tau_{\mathrm{int}} \le C_P$ は 23-02 §05 の Lean の定理。
構成の八つの言明・緩和時間の仮定・帯の文・三つの鎖・(A1)・(D)	仮・約束	この部の定式化。三つの鎖の出どころは 17-12。読みの一覧は A-06。

この章で使った語 — 構成の八つの言明・格子版の質量ギャップ・Poincaré 定数（三つの C_P）・拡散型緩和時間の仮定（冪の文）・帯の文・上界の仮定と下界の仮定・三つの鎖・片側の橋（連続の時間の版と、時間を刻む版）・基底状態変換の恒等式・円の上の自由な粒子の反例（巻き数）・記帳の長さ ξ_{RG}・目盛り（$\mathcal{E}$ の正規化）・確率時間の繰り込み・二重井戸の四条件（名前だけ）。意味は A-02 用語集 にあります。

次の章へ — 23-02 四次元格子で試した道と壁：(28) の矢印を四次元格子のまま押した十七の道と二十一の壁を一枚にし、下からは届くが上からは届かないこと、だから一段目へ降りることを見る。一段目へ直接進むなら 23-03 階段の四段。

次に読む章：23-02 四次元格子で試した道と壁。

2026-10-09 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 23 部 一本目の道（前半）— 時間の方向から 十七の道・二十一の壁（五つの型） · Kiichi, Shiori and Rin

四次元格子で試した道と壁 — 下からは届き、上からは届かない

> この章は本書の検討です。§01 は案内、§03・§06・§08 は未解決の地図です。

この章で分かること — 四次元格子の上で、拡散型緩和時間の仮定と構成の筋の矢印に向けて試した十七の道と、止まった二十一の場所（壁）を一枚にします。試験関数・ゲージ固定・分光の道はどれも C_P の下界か質量の上界で終わり、上の側（すべての f についての不等式）に届く道具は、曲率の効く強結合の側と、一つの仮定に移した形にしか在りませんでした。Lean で閉じたのは仮定から結論への代数です。この章の終わりで、なぜ一段目（0+1 次元の二重井戸）へ降りるかを、道具と壁の対応で述べます。

前提となる章 — 23-01（八つの言明・拡散型緩和時間の仮定・緩和時間の上界の仮定と緩和時間の下界の仮定・三つの鎖）・1-10（変分原理・Poincaré 定数）・4-11（隙間と有限の窓）・5-02（強結合展開）・7-05（繰り込み群の段）。記号は 23-01 と同じ（$SU(2)$・$d = 4$・$\beta = 4/g^2$・格子単位）。

先に言うこと — この章は問題を解きません。道の「止まった」は「その道具・その族ではこの矢印に届かないと確かめた」という意味で、届かなかった命題が偽だとは言っていません。この章の十七の道と二十一の壁は四次元格子の側の系列で、一段目の系列（二重井戸の四条件・道筋・筋・迂回策）とは別です。数値の多くは模型の中の読みで、四次元の $SU(2)$ の計算ではありません。

この章の順序

1. 地図の読み方 — 矢印の式と、道と壁の名
2. 一段の記帳 — 完全な族・一リンク積分・記帳の欠損・取りこぼしと答えの形（表 1）
3. 試した十七の道 — 一行ずつ（表 2）
4. 下からは届く — 試験関数・ゲージ固定・分光は上界で終わる
5. 上からは届かない — 曲率・管・尺度の一次元鎖・境界
6. 二十一の壁 — 五つの型（表 3）

7. 残ったもの — Lean で閉じた代数と、数値の読み（表 4）

8. 一段目へ降りる理由 — どの道具がどの壁で止まったか（表 5）

01

地図の読み方 — 矢印の式と、道と壁の名

この章の道と壁は、23-01 §08 の構成の筋の矢印のどれかを押そうとしたものです。帯の文を上下の半分に割って書き直すと次の形です。

$$\underbrace{\text{一段の記帳}}_{\S 02} \xrightarrow{\sum_k \delta(b_k)<\infty} \text{(S5)} \xrightarrow{(\xi^{\prime})\downarrow \wedge (\xi^{\prime})\uparrow} \text{(S4)} \xrightarrow{\text{極限の性質}} \text{問題文の要求}$$

$\delta(b)$ は一段の取りこぼし（§ 02）、式の中の (S5)（記帳の長さでの緩和時間の帯）は $a^2 C_P \asymp 1$、(S4)（物理単位の隙間の言明）は物理単位の隙間が正に残ること、極限の性質は無限体積の一意性の言明・反射正値性の保存の言明・Wilson ループの極限の言明・回転の回復の言明・OS 再構成の言明・非自明性の言明です（23-01 表 1）。下界の仮定は $C_P \gtrsim \xi_{\mathrm{RG}}^2$（一つの試験関数で足りる）、上界の仮定は $C_P \lesssim \xi_{\mathrm{RG}}^2$（すべての試験関数についての不等式）です。(1) のどの矢印も証明されていません。

道は、一つの問いと、それに当てた一組の道具の組で、問いの中身で名を付けます。投稿の欠陥との比べの道・尺度の一次元鎖の道は、元の問いを持ち直したものです。壁は、ある道がある道具で、ある矢印の手前で止まった理由を一文にしたもので、五つの型（原理・構造・道具・仮定・測定と文献）に分けます（§ 06）。

例。下界の試験関数の道（下界の仮定を与える試験関数）は (1) の下界の仮定を押し、試験関数の片側の壁（試験関数は C_P を下からしか押さえない）で上界の仮定の手前に止まりました。強結合の曲率の道は (1) に乗らず、左の外側に居ます。強結合の一様評価は $C_P = O(1)$ で、記帳の長さでの緩和時間の帯の反対側だからです（23-01 § 06）。

02

一段の記帳 — 完全な族から取りこぼしの和まで

一段は、格子間隔を a から ba に粗くし、細かい変数の一部を積分して粗い格子の作用を作る写像です（7-05）。ここでの記帳は (i) 閉じた形で積分できるリンクを選び、(ii) 残る作用を指標で書き、(iii) 粗いプラケットの基本表現の係数を β' と読む、の三手で、元のリンクの一部を

残す「間引き」の型です（同じ型の近似が Migdal–Kadanoff）。面積則・次元勘定・一ループの係数は既知の書き直しで、成果に数えません。

完全な族。 積分するリンクどうしが同じプラケットに乗らなければ、残りを止めたとき各リンクの重みは独立に分かれて積分できます。どのプラケットからも一本ずつ消す族を完全な族と呼びます。

$$F \subset E \text{ が完全} \iff \text{どのプラケット } P \text{ でも } |P \cap F| = 1; \qquad f_x \le 2,\ \frac{1}{|V|}\sum_x f_x = \frac{d}{2} \tag{2}$$

初 辺は $2(d-1)$ 枚のプラケットに乗るので、組 $(P, \ell \in P \cap F)$ を二通りに数えると族の密度は $|F|/|E| = 1/4$ です。同じ頂点に接する垂直な二辺は一枚のプラケットの隣り合う二辺なので、頂点 x に接する族の辺の本数 f_x は一つの軸の二本までで、平均 $d/2$ と比べて $d \le 4$ が出ます。存在まで含めた分類は表 1 で、Lean `PerfectFamily.perfectK_one_iff`（仮定：$2 \le d$。結論：周期 L の箱 $(\mathbb{Z}/L)^d$ に辺の完全な族が在る $\iff$ $d \le 4$ かつ L が偶数）と `no_perfectZ_of_five`（仮定：$d \ge 5$。$\mathbb{Z}^d$ に無い）が言明です。探した範囲で先行の記録は見当たりませんが、既知かもしれません。この 4 は格子の組合せの数で、時空の四次元とは関係のない一致です。

初 表 1　$(\mathbb{Z}/L)^d$ の辺の完全な族の存否（`perfectK_one_iff` の言明を書き並べたもの。括弧は一つの族の辺の本数＝辺の数の 1/4）

周期	$d=2$	$d=3$	$d=4$	$d=5$
$L=2$	在る（2）	在る（6）	在る（16）	無い
$L=3$	無い	無い	無い	無い
$L=4$	在る（8）	在る（48）	在る（256）	無い

一リンク積分。 族の辺 ℓ の乗る 6 枚には他の族の辺が無いので、U_ℓ はステープル（プラケットから ℓ を除いた三辺の積）の和 M とだけ組になり、積分は $|M|$ だけで決まります。

$$\int_{SU(2)} e^{\frac{\beta}{2}\operatorname{tr}(UM)}\,dU = \frac{2I_1(\beta|M|)}{\beta|M|} =: F(\beta|M|), \qquad \frac{\beta^2 t}{8} - \frac{\beta^4 t^2}{64} \le \ln F(\beta\sqrt{t}) \le \frac{\beta^2 t}{8} \tag{3}$$

左は $SU(2)$ の熱浴法の標準の式 典（5-07）、右の両側評価は Lean `log_F0_le`・`log_F0_ge`（仮定：引数が非負だけ）。残る辺の条件つき密度は六つの源の積で一リンクの型に閉じず、この技は一度きりです 仮（紙の議論はあるが、この本には証明を置かない）。

記帳の欠損。 完全な族を積分すると、4 辺が残る「無傷の」プラケットは一枚も無くなり、結合は壊れたプラケットから生まれ直すしかありません。残る辺の割合 e と無傷のプラケットの割合 q について、組を数えると

$$e - q = \frac{1}{4|\mathcal{P}|} \sum_{P \text{ は壊れている}} |P \cap E_K| \;\geq 0 \tag{4}$$

です 初 （二重の数え上げ） Lean `Incidence.intact_frac_le` （仮定：接続が正則。結論：$q \leq e$）。段を重ねても届きません：完全な段の列では残る辺が $(2^k+1)/2^{k+1} > 1/2$ で `no_blocking` （仮定：完全な段の列）、各段で消す割合が $1/4$ 以下の任意の列でも辺を $1/16$ まで減らすと残る 4-ループは $1/65536$ 以下です `blocking_shortfall` （仮定：割合 $\leq 1/4$）。記帳の壁は曲率でもパッキングでもなく、無傷のプラケットだけを数える記帳の仕方にあった、というのがこの小節の読みです。

円板と弱結合の一段。 円板の形の A 枚の内部を積分すると、指標展開のどのチャネルでも係数が A 乗されます：$u(\beta') = u(\beta)^A$、2×2 の円板で $\beta' = \beta^4/64 + O(\beta^6)$ 典 （強結合の面積則と二次元の間引きの書き直し、5-02・7-02）。面積について半群で全域で $\beta' < \beta$ Lean `discStep_semigroup` ・ `step_lowers_coupling` （仮定：円板の形の面）。弱結合のガウス近似では、円板の b^2 枚が直列、横の b^{d-2} 層が並列に効いて

$$\beta'_{\text{円板}} = \frac{\beta}{b^2}, \qquad \beta'_{\text{ツリー}} = \beta\, b^{d-4}, \qquad \kappa_{\text{disj}}(b) = \frac{1}{b^2} + \frac{2}{b^2+4b} < 1 \tag{5}$$

です。βb^{d-4} は結合の次元勘定で、$d=4$ で周辺的です 典 （4-04）。辺を共有しない面の寄与は 1 に届かず Lean `kappaDisj_lt_one` （仮定：$b \geq 2$）、面の記帳は $\beta' = \kappa(b)\beta$ の掛け算の形で、一ループの引き算の形 $\beta' = \beta - \kappa \ln b$ になりません。

一ループの傾きと取りこぼし。 ツリーの $\beta' = \beta$ の上に、速いモード（運動量が $\pi/(ba)$ と π/a の間）の一ループの補正が乗ります。これを格子の窓の積分で測ると

$$\beta' = \beta - \kappa L_{\text{eff}}(b), \qquad L_{\text{eff}}(b) = \ln b + C - \delta(b), \qquad \delta(b) = \frac{c_2}{b^2} + O(b^{-4}) \tag{6}$$

の形になります。$\kappa = 4Nb_0 = 11/(3\pi^2) = 0.3715110$ は既知の一ループの係数です 典 （4-06）。窓の差から読んだ傾きは $b = 32 \to 64$ で 1.000028、κ を掛けて 0.371521 で、$11/(3\pi^2)$ と相対 2.8×10^{-5} で合います 読 （一ループ核の模型の中の一致。非摂動の確かめではない）。取りこぼしの係数は $c_2 = 0.0197(5)$（重み w）・$0.4200(5)$（重み w^2）、$b=2$ で $\delta(2) = 0.1335$・0.2284 です 読 （同じ模型の当てはめ）。反対側で、実際の格子の $a\sqrt{\sigma}$（23-01 の表 2）から読む実効的な傾き $\Delta\beta/\ln(a_1/a_2)$ は $\beta = 2.25 \to 2.60$ で 0.304 で、一ループの 0.3715 にも二ループの 0.397 にも届いていません 読 。段ごとの形 $\xi(\beta - \kappa \ln b) = \xi(\beta)/b$ を全ての $b \geq 1$ で仮定すると $\xi(\beta) = \xi(0)e^{\beta/\kappa}$ が出ます 初 Lean `xi_eq_exp` （仮定：その関数等式。連続性も単調性も仮定しない）。物理の内容は仮定の関数等式（一ループの走りを等式として置いたもの）の側にあります。

答えの形。 b を固定して段を重ねると、取りこぼしは段ごとに同じ量ずつ溜まり、$\delta(b)\neq 0$ なら和は発散します。段の尺度を $b_k=k+2$ と大きくする列なら $\sum_k c_2/(k+2)^2<\infty$ で収まります 初 Lean `fixed_step_bounded_iff`（仮定：一定の誤差 $\varepsilon_j=d\geq 0$。結論：部分和が有界 $\iff d=0$）。例えば仮の値 $c_2=1$ で、$b=2$ 固定なら 1000 段で累計 250、$b_j=j+2$ なら累計は $\pi^2/6-1=0.645$ に収まります（閉じた式の値）。この取りこぼしを (1) の最初の矢印に結ぶのが、二つの冪の代数です。

$$C_P \asymp \xi^{\,2-\eta}, \qquad a\,\xi\propto a^{\theta} \quad\Longrightarrow\quad a^2 C_P \propto a^{p}, \qquad p=\eta+(2-\eta)\,\theta \tag{7}$$

θ は取りこぼしの溜まりの指数の指数（b 固定なら $\delta(b)/\ln b$）、η は動的な冪 η_{dyn} です。$0\leq\eta\leq 2$・$\theta\geq 0$ なら $p=0 \iff \eta=0\wedge\theta=0$ 初 Lean `drain_exponent`・`drainExp_eq_zero_iff`（仮定：(7) の冪の形と符号）。言葉で言えば「緩和時間の仮定（$\eta=0$）の下で、物理単位の隙間の言明 $\Longleftrightarrow \sum_k \delta(b_k)<\infty$」で、これが「答えの形」です。この言明は緩和時間の仮定のほかに、(7) の冪の形、段の誤差を加法的で有界とする模型、δ が一ループ核の模型の値であること、の上に立ちます 仮。段の誤差の部分和が有界なら $a_k^2 C_P^{(k)}$ が正の帯に留まる、という代数も閉じています Lean `S4_two_sided`（仮定：部分和 $|\sum_{j<k}\varepsilon_j|\leq M$・係数の正。これを $a_k^2 C_P^{(k)}$ と読むのは本文の側）。

核を替えて $\delta(2)=0$ にする道は、一径数の族 $c_1(q)=\alpha+(1-\alpha)\cos q$ の $\alpha_0=1.4400$ で在りますが、隣の重みが負です 読。正の重みの核では $c_2>0$ です Lean `c2_ge_of_nonneg_weights`（仮定：c_2 が核の量 $S\geq 0$ の増加するアフィン関数 $A+\kappa S$、$A,\kappa>0$、という測定した依り方。無条件の主張ではない）。負の重みは反射正値性とぶつかりうるので、調べた族の中では取りこぼしの消去と量子論に戻れる条件が両立しません。族の外は未決です。

03

試した十七の道 — 一行ずつ

表 2 は十七の道を一行ずつ並べたものです。「止まった所」の欄の名は §06 の壁で、「残ったもの」の欄は Lean で閉じた代数（仮定を括弧に）か、札つきの言明です。

表 2　四次元格子で試した十七の道

道	何を（押す矢印）	どの道具で	どこで止まったか	残ったもの

道	何を（押す矢印）	どの道具で	どこで止まったか	残ったもの
強結合の曲率の道	曲率の方法の効く β を広げる（(1) の外・強結合の側）	完全な族の一リンク積分のあとの Hesse 形式の下界と Bakry–Émery の判定法	$\beta < \sqrt{2/27} = 0.2722$ まで。相関長は一格子間隔の 1/10 程度で極限の反対側（上界の道具の壁）	Lean `hess_gauge`（仮定：周期 L が偶数で $L \geq 3$・単位四元数・純虚の摂動。結論：$\partial_\tau^2 \Phi \geq -27\beta^2 \sum \lvert X_e \rvert^2$）。隙間へ進む段は 仮
一段の記帳の道	連続極限を一段の列として記帳する（一段の記帳）	完全な族・指標展開・円板の段・一ループの窓	一リンク積分は一度きり（一段きりの積分の壁）。面の記帳は掛け算の形で一ループの傾きを出さない	§02 の `discStep_semigroup`・`step_lowers_coupling`・`kappaDisj_lt_one`・`intact_frac_le`・`no_blocking`・`blocking_shortfall`
取りこぼしの和の道	取りこぼし $\delta(b)$ の和は有限か（取りこぼしの総和可能性の仮定）	一ループ核の模型の窓の積分	b 固定では和が発散。$\delta(2) = 0$ の核は隣の重みが負（正の重みの核の壁）。ゲージの取り方による c_2 の違いは、二つのゲージで正と読めたところまで（取りこぼしのゲージ依存の壁）	`fixed_step_bounded_iff`・`c2_ge_of_nonneg_weights`（仮定：測定した依り方）。読 c_2
強結合の級数の道	強結合の級数から動的な冪 η が読めるか（緩和時間の仮定の η）	高次の強結合展開・Dlog-Padé	級数は極の近くで更新形 $G = A/(1-K(p))$ になり $\eta = 0$ を強制する。漸近自由の下の本質的特異点では指数が読めない（更新形の級数の壁）	Lean `renewal_chi_mul_massSq`・`renewal_residue_pos`（仮定：更新形の係数 $A, c_0 > 0$。結論：$\chi m_0^2 = A/c_0 > 0$）。更新形になることは 仮
完全な族の次元の道	辺・面の完全な族はどの次元で在るか（一段の記帳）	二重の数え上げ・完全被覆（exact cover）の総当たり	辺は $d \leq 4$ かつ偶数の周期でだけ。k 胞体では $d \leq 3k+1$ の上限があり、$k=3$ の $d=9$ は未決	`perfectK_one_iff`・`no_perfectZ_of_five`・`no_perfect_k4_d9`・`no_perfect_k5_d8`（仮定：周期 2 に限る）

道	何を（押す矢印）	どの道具で	どこで止まったか	残ったもの
次元の境目の道	なぜ四次元が境目か（取りこぼしの総和可能性の仮定）	段のずれの漸化式 $x_{k+1} = b^{d-4}x_k + \varepsilon_k$	$d<4$ で縮み $d=4$ で溜まる。標準の次元勘定と同じで、低次元の構成の再現ではない	Lean `dev_le_of_contracting`（仮定：$0 \le \lambda < 1$・$\lvert\varepsilon_j\rvert \le E$。結論：ずれ $\le E/(1-\lambda)$）・`dev_eq_of_marginal`（$\lambda = 1$・一定の E でずれ $= nE$）
反射正値性の道	反射正値性を下からの評価に使う（反射正値性の保存の言明・OS 再構成の言明）	転送行列の表示	最も軽い状態との重なり $\tilde{Z}$ に、下からほしい所で上界 $\tilde{Z} \le \chi m$ が出た。問いは下界の試験関数の道へ移った	Lean `overlap_le_susc_mul_gap`（仮定：$m>0$・$\tilde{Z}\ge 0$・$\tilde{Z}\coth(m/2) \le \chi$）
記帳の面積則の道	記帳の中に面積則の形が出るか（Wilson ループの極限の言明）	係数 $4(\beta/4)^A$	強結合の面積則の書き直しで、可換な群でも成り立つ。閉じ込めの証拠に数えない。中身は一尺度の下の半分の道へ	典（Wilson 1974・Osterwalder–Seiler 1978）
多リンク積分の道	k リンク積分の閉形は連続極限でも解析的か（一段の記帳）	一重の和の閉形	二リンクの補正は β^3 の大きさで障害ではない。解析性は示されていない	仮（強結合の展開の中の計算）
投稿の欠陥との比べの道	構成を主張する投稿の「小さな欠陥」は δ と同じ量か（取りこぼしの総和可能性の仮定）	型の比較	欠陥の和は縮む部門の量、δ は周辺部門の係数の取りこぼしで、言葉の位置は同じで量は別	投稿の正否は判定しない（16-01 の方針）

道	何を（押す矢印）	どの道具で	どこで止まったか	残ったもの
多重尺度の曲率の道	曲率の方法を尺度ごとに重ねて上界の仮定の道具にする（上界の仮定）	多重尺度の Bakry–Émery・Gribov 領域の上の曲率・一段の勾配流	二つの尺度の交差項から先が書けない（上界の道具の壁）。詳しくは §05	Lean `comp_class_eq_of_equivariant_bijection`（仮定：流れが全単射でゲージの作用と可換）・`autocov_sum_le_on_invariant`（仮定：不変な部分空間の上の Poincaré）
体積と境界の道	C_P の評価は体積と境界条件に一様か（無限体積の一意性の言明）	素のリンク角・境界条件の比較	素のリンク角で比は 1 で零モードの心配は消えた。代わりに境界条件が効き、周期の箱で上界の仮定が破れうる（周期境界の予想の壁）	仮（HMC と Langevin が同じ普遍類という予想の下の読み）
下界の試験関数の道	下界の仮定を与える試験関数は在るか（下界の仮定）	プラケット・素のリンク角・ゲージ固定した長波長モードの三つの族	局所演算子は次元 4 で $\eta \geq 2$（局所演算子の次元の壁）、リンク角は比 1、ゲージ固定は一価性（ゲージ固定の一価性の壁）	`profileQuotient_isGreatest`・`fisherEta_eq_zero_iff_canonical`・`eta_ge_two_of_bounded_susc`（仮定：感受率の一様有界）・`prop_at_gap_scale`（仮定：純冪の伝播関数）・`jump_energy_ge`
ゲージ固定の長波長の道	ゲージ固定した長波長モードを一価に作れるか（下界の仮定）	軌道の上の重み付き平均（Parrinello–Jona-Lasinio・Zwanziger の方式）	鋭ければ多価、鈍ければ長波長が消える（ゲージ固定の一価性の壁）。数値はコンパクト $U(1)$ の試験	`orbitAvg_gauge_invariant`・`orbitAvg_continuous`（仮定：有限群の軌道・正で連続な重み）
分光の道	平滑化した演算子と分光で隙間を押さえる（下界の仮定と上界）	Wilson 流・APE・変分・有効質量	上界で終わる（分光の上界の壁）。下界には重なりの下界が要る。分子の測定の費用は $\geq cL^{d+2}$（測定の費用の壁）	`meff_antitone`・`meff_ge_of_corr`・`gap_ge_of_overlap`（仮定：重なりの下界 q）・`light_admixture_invisible`・`cost_ge`・`sqQuotient_between`

道	何を（押す矢印）	どの道具で	どこで止まったか	残ったもの
一尺度の下の半分の道	一尺度の下の半分 $m^2 \gtrsim \sigma$ を作る（一尺度の鎖）	管のエントロピー・欠損 $D = m - 4\sigma$・柱の模型・Wulff 形	管の転送作用素の不等式（管の不等式）に移したが、その証明の型が無い（管の不等式の壁）	`mass_sq_ge_of_tube`（仮定：管の不等式の帰結のノルムの評価）・`mass_bound_localized`・`linear_regime_breaks_onescale`・`casimir_only_no_bound`・`linear_deficit_breaks_inv`
尺度の一次元鎖の道	上界の仮定を尺度の一次元鎖で挟む（上界の仮定）	ホログラフィーの動径の型・二重み Hardy 不等式・自己相関の挟み込み	尺度の一次元鎖への射影の仮定の下でだけ挟めた。射影の仮定は緩和時間の仮定より弱くなく、周期の箱では位相電荷で壊れる（射影の仮定の壁）	`conditional_scale_bound`（仮定：射影の仮定・非負で部分和が有界な取りこぼし・幾何級数の重み）・`const_defect_scale_unbounded`・`tau_int_le`・`rayleigh_le_tau`

押す矢印ごとに見ると偏りがあります。下界の仮定と (1) の外には、止まった道が集まっています。上界の仮定を狙った道は多重尺度の曲率の道と尺度の一次元鎖の道の二本だけで、多重尺度の曲率の道は交差項で止まり、尺度の一次元鎖の道は射影の仮定の下でだけ挟めています。回転の回復の言明と非自明性の言明には、この章のどの道も届いていません（公開された構成の側では、回転の回復は相ごとの理論で示されている、と委員会が評価した。6-03）。Wilson ループの極限の言明・回転の回復の言明は一段の写像を何回合成しても出てこない種類の主張です（極限の性質の壁）。

04

下からは届く — 試験関数・ゲージ固定・分光は上界で終わる

反射正値性の道・下界の試験関数の道・ゲージ固定の長波長の道・分光の道は、どれも下からの評価を狙い、同じ形の所で止まりました。C_P は試験関数についての上限、隙間は状態についての下限なので、一つの試験関数・一つの演算子が与えるのはどちらも片側だけです。

$$C_P = \sup_f \frac{\mathrm{Var}(f)}{\mathcal{E}(f)} \;\geq\; \frac{\mathrm{Var}(f_0)}{\mathcal{E}(f_0)}, \qquad E_{\mathrm{low}} = \inf_{\psi \perp \Omega} \frac{\langle \psi, H\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} \;\leq\; m_{\mathrm{eff}}(k) \tag{8}$$

典 変分原理（1-10）。Ω は真空、H は転送行列のハミルトニアン、$m_{\mathrm{eff}}(k) = \ln(C(k)/C(k+1))$ は時間 k の有効質量です。下界の仮定は「ある f」の言明なので試験関数で届きうる側、上界の仮定は「すべての f」なので届かない側です。

局所演算子（下界の試験関数の道）。一つの演算子 O_x を平行移動して重みで足した族では、重みの自由は最良の一運動量に潰れます Lean `profileQuotient_isGreatest`（仮定：運動量は有限個・分母の Fourier 変換が正）。分子は感受率で、半径 ξ までの積分で見積もると

$$\frac{\mathrm{Var}(f_O)}{\mathcal{E}(f_O)} \asymp \xi^{\,2-\eta_s}, \qquad \eta_s = \min\bigl(2\Delta_O - (d-2),\, 2\bigr), \qquad \Delta_O \geq 4 \Rightarrow \eta_s = 2 \tag{9}$$

です（相関の冪の形を仮定）。η_s は演算子ごとの静的な冪で、動的な η_{dyn} とは別の量です（18-05）。ゲージ不変な局所演算子の最低次元は $\mathrm{tr}\,F^2$ の 4 典 なので、比は ξ とともに伸びません Lean `eta_ge_two_of_bounded_susc`（仮定：感受率が一様に有界。有界性は相関の形と $\Delta = 4$ という物理の仮定から来る）。素のリンク角では、ゲージを固定しない測度で各リンク角が一様で独立になり、比は β にも体積にも依らず 1 です 初（Haar 測度の不変性からの直接の計算。Elitzur の定理と同じ機構）。

ゲージ固定（ゲージ固定の長波長の道）。ゲージ固定した長波長のモードは非局所で次元の壁を避けますが、代表の選び方が一価でなければなりません。軌道の上で温度 T の重み付き平均を取れば一価で連続です Lean `orbitAvg_gauge_invariant`・`orbitAvg_continuous`。いちばん小さい例の $U(1)$ の輪（辺 L 本）では、平均したモードの振幅が鈍い固定で $(I_1/I_0)^{L-1}$ と L とともに指数で消え、鋭い固定では一周の角 $\Phi = \pi$ で跳びます 初（Fourier 級数で閉じた式）。同じ汎関数が「コピーを選ぶ道具」と「長波長を均す道具」を兼ねるので、二つの要求が一本のつまみの両端に分かれます。四次元のコンパクト $U(1)$ で測った数値（コピー間の散らばりが標準偏差の 3.25 倍など）は 読 で、$SU(2)$ では測っていません。

分光（反射正値性の道・分光の道）。空間三方向だけの平滑化は一つの時刻の面に載り、相関は $C(k) = \sum_n w_n e^{-E_n k}$（$w_n \geq 0$）の形を保ちます 典（5-03）。この形があれば有効質量は単調に減り Lean `meff_antitone`（仮定：非負の重みの表示）、どの k でも最も低いエネルギーの上界です `meff_ge_of_corr`。下界には別の入力が要ります。

$$E_{\mathrm{low}} \;\geq\; \frac{1}{k}\Bigl[\ln q + \ln \frac{C(0)}{C(k)}\Bigr] \qquad (w_{\mathrm{low}} \geq q\, C(0) \text{ のとき}) \tag{10}$$

初 Lean `gap_ge_of_overlap`（仮定：非負の重みの表示と重なりの下界 q）。下界の値段は重なりの下界ちょうど一つで、q が無ければ重み ε の軽い状態はどの k でも相関を ε しか変えません `light_admixture_invisible`（二準位の具体例）。有限個の測定から隙間の下界が出ないことは、ギャップと指数的なクラスター性の同値という既知の枠組みの言い換えです 典（4-11）。数値の側では、平滑化した演算子の有効質量が $\beta = 2.6 \cdot 12^4$ で $\leq 0.501 \pm 0.071$ と、原典の $am(0^{++}) = 0.514(8)$ に下から接しました 読（Monte Carlo・上界の読み）。時間の向きにも均す四次元の流れは一つの面に載らず、有効質量が単調に増える形で上界の性質を壊しま

す 初 （自由場の閉じた式）。測る費用は、一辺 L の箱の最も柔らかいモードの緩和時間 $\propto L^2$ から $\geq cL^{d+2}$ です `cost_ge` （仮定：緩和時間の下界と、相対精度に要る掃引の回数）。

三つの道は同じ壁に着きました。どれも「ゲージ不変な演算子と最も軽い揺らぎの重なりが下から押さえられる」ことを要し、それは「軽い状態が他に隠れていない」ことを含む、すべての状態についての言明です。上界の仮定と同じ形です。

05

上からは届かない — 曲率・管・尺度の一次元鎖・境界

上界の仮定は C_P の上界です。上界を出す道具は型が限られ、代表は二つです。

$$\nabla^2 U \geq K > 0 \implies C_P \leq \frac{1}{K} \quad \text{(Bakry–Émery)}, \qquad B \leq C_P \leq 4B \quad \text{(一次元・Muckenhoupt)} \tag{11}$$

典 左は測度 e^{-U} の曲率の下界から（1-10）、右は一次元でだけ計算できる「その点より手前の質量 × その点から先の抵抗」の最大 B から C_P を 4 倍の幅で挟みます。

曲率を尺度ごとに（強結合の曲率の道・多重尺度の曲率の道）。上界の仮定の型の不等式が定理として立つ既知の場所は、曲率・直径・凸性・強結合と、二・三次元の連続のスカラー場の高温相で格子の正則化に一様な多重尺度の Bakry–Émery だけです 典 （Bauerschmidt–Dagallier の定理 1.1、判定は Bauerschmidt–Bodineau の定理 2.5）。四次元のゲージ場では、一リンク積分のあとの曲率は強結合でしか正になりません（強結合の曲率の道）。Gribov 領域の上の曲率を有限次元の模型で調べると、正になるのは強結合の側だけで、非凸性は零運動量のモードから来ました 読 （$L = 2, 3, 4$ の標本の上）。零モードを外したあとに残る紫外の揺らぎは、一段の勾配流では越えられません：流れは全単射でゲージの作用と可換なので関数の空間を小さくせず Lean `comp_class_eq_of_equivariant_bijection`、得は計量の取り替えにしか無く、押し出した測度の曲率は流れの時間とともに負に深くなりました 読 （開いた箱 $\ell = 3$ ・$\beta = 2.3, 4$ の典型点・$t \leq 0.5$ で測った範囲）。

管の欠損（一尺度の下の半分の道）。一尺度の鎖の下の半分 $m^2 \gtrsim \sigma$ を、閉じた管の転送作用素 $\mathcal{T}$ と周長の作用素 $\hat{\ell}$ の不等式に移しました。

$$T(c,1): \quad \mathcal{T} \;\leq\; \exp\!\Big(-\big(\sigma\hat{\ell} + c/\hat{\ell}\big)\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad m \;\geq\; \min_{\ell>0}\Big(\sigma\ell + \frac{c}{\ell}\Big) = 2\sqrt{c\sigma} \tag{12}$$

初 （右は相加相乗平均） Lean `mass_sq_ge_of_tube` （仮定：転送作用素のノルムが $e^{-2\sqrt{c\sigma}}$ 以下。結論：$m^2 \geq 4c\sigma$）。$1/\ell$ の冪は、係数 c が無次元になる唯一の冪です。中身は管の不等式の側にあり、それ自身の証明の型はありません。強結合の面の展開が収束する領域では一尺度の下の半分そのものが偽で `linear_regime_breaks_onescale` （仮定：収束域の挟み込み）、

柱の模型の数え上げでは欠損の符号が正にも負にもなり、Wulff 形は菱形で、管の不等式は異方性を引いたあとにだけ立ちます `linear_deficit_breaks_inv`（陰性対照）。最後の形は「短い輪での局所化した T・大きな輪での Casimir の床・その間のつなぎ目」の三つの仮定で `mass_bound_localized`、床だけでは下界は出ません `casimir_only_no_bound`。

尺度の一次元鎖（尺度の一次元鎖の道）。ホログラフィーの模型では隙間は動径の一変数の固有値問題で、その変数の上では帯の文 $C_P \asymp \xi^2$ が証明を要しない恒等式になります 初 （基底状態変換 $H = P^{\dagger}P$ と変分原理）。これを格子に持ち込むため、尺度 $s = \ln \ell$ の上に一次元の鎖を置き、(11) の右の離散版で C_P を挟みました。

$$(\mathrm{P}) \ \wedge \ \sum_{k} \delta(b_k) \le S_\delta \quad \Longrightarrow \quad e^{-2T} C_P \text{ は } T = \ln(1/a) \text{ に依らず有界} \tag{13}$$

Lean `conditional_scale_bound`（仮定：射影の仮定・非負で部分和が有界な取りこぼし・幾何級数の重み。有限鎖の Hardy の挟み込みは既知の再証明）。陰性対照として、一定の取りこぼしでは有界性が崩れます `const_defect_scale_unbounded`。中身は射影の仮定の側にあり、射影の仮定は「分散を尺度ごとに分けられる」「各段の条件つき Poincaré 定数が一様」「段をまたぐ伝導度が押さえられる」「状態空間が尺度の一本の線である」の四つに割れて、後の三つは示されていません 仮 。射影の仮定は緩和時間の仮定より弱くありません。一次元の鎖は上界の仮定を示したのではなく、上界の仮定を射影の仮定に言い換えました。

境界と位相電荷（体積と境界の道・尺度の一次元鎖の道）。周期の箱では、状態空間が位相電荷 Q ごとの枚に分かれ、紫外の端でだけつながります。可逆な力学では、どの観測量でも

$$R(f) = \frac{\operatorname{Var} f}{\mathcal{E}(f)} \ \le \ \tau_{\mathrm{int}}(f) \ \le \ C_P \tag{14}$$

が成り立ち 典 Lean `tau_int_le`・`rayleigh_le_tau`（有限の可逆な連鎖。既知の事実の再証明）、測った τ_{int} はどれも C_P の下界です。原典は HMC 型の力学で位相電荷の二乗の有効な動的指数を「約 5」と報告していて 読 （Schaefer–Sommer–Virotta 2011）、HMC と Langevin が同じ普遍類という予想 仮 と (14) を重ねると、周期の箱では $C_P \gtrsim a^{-5}$ で上界の仮定は破れます。予想の上の条件つきの読みです。「約 5」は $SU(3)$ の値で、$SU(2)$ の同じ測りは探した範囲で一本（HMC・周期境界・小さな箱・三点）、a^{-2} に近いと報告されています 読 （Abe–Morikawa–Suzuki 2025。23-01 §05 の注）。開いた境界がこの障壁を外すのは、物理の一辺を止めた有限の箱の中だけです（部分領域の電荷を試験関数にした勘定 仮 。原典でも、開いた境界の Q^2 の自己相関時間は時間方向の長さにほぼ比例して伸びる 読 ）。先に体積を無限にするこの本の順では救いにならない見込みで、緩和時間の仮定の言明そのものを、位相の区画ごとの文か、台を相関長の数倍に限った局所の文に直す方向が候補になります（23-01 §05 の注。直し方は 第 24 部 で扱います）。

こうして上の側の道は、どれも難しさの移った先を名指して止まりました。

$$m^2 \gtrsim \sigma \iff T_{\mathrm{loc}}(c) \wedge \text{床} \wedge \text{つなぎ目}, \qquad C_P \lesssim \xi^2 \iff (\mathrm{P}) \wedge \sum \delta < \infty \tag{15}$$

矢印は右から左の一方向だけで、右辺はどれも仮定です。

06

二十一の壁 — 五つの型

壁は、ある道がある道具で (1) のある矢印の手前で止まった理由を一文にしたものです。型は五つです：原理の壁は不等式の向きから出て道具の細部に依らないもの、構造の壁は選んだ族・記帳・級数の中で要求が両立しないもの（族の外は未決）、道具の壁は要る不等式の型は分かっているのに示す道具が無いもの、仮定の壁は条件つきの言明の足場、測定と文献の壁は数値・箱・一次資料で決まらなかったものです。どの壁も「越えられない」ことの証明ではありません。

表 3　二十一の壁（「動くには」は定義から出るもの）

番号	壁	一行	動くには	矢印
1	試験関数の片側の壁	試験関数は C_P を下からしか押さえない 典	試験関数でない型の不等式	上界の仮定
2	分光の上界の壁	分光は隙間の上界で終わる。重みの小さい軽い状態は有限の窓に見えない 典	最も軽い状態への重なりの下界	物理単位の隙間の言明
3	局所演算子の次元の壁	局所ゲージ不変演算子は次元 4 以上で $\eta_s = 2$（感受率の有界性の仮定の下の代数）	半径 ξ まで均す（→測定の費用の壁）	下界の仮定
4	ゲージ固定の一価性の壁	ゲージ固定：鋭ければ多価、鈍ければ長波長が消える 読 （$U(1)$）	選択と平滑化を分ける構成（案は無い）	下界の仮定
5	測定の費用の壁	均した演算子の分子は零運動量の感受率で、測る費用は $\geq cL^{d+2}$	分子を測定でなく評価で押さえる	下界の仮定
6	正の重みの核の壁	$\delta(2) = 0$ の核は隣の重みが負。正の重みの核では $c_2 > 0$（測定した依り方の下）	族の外の核	取りこぼしの総和可能性
7	更新形の級数の壁	強結合の級数は更新形で $\eta = 0$ を強制し、指数を読ませない	級数の外の情報	緩和時間の仮定の η
8	一段きりの積分の壁	完全な族の一リンク積分は一段きり	段を重ねる別の記帳	一段の記帳

番号	壁	一行	動くには	矢印
9	極限の性質の壁	Wilson ループの極限の言明・回転の回復の言明は一段の写像の合成からは出ない	極限の性質を示す別の道具	極限
10	上界の道具の壁	上界の仮定の型の道具が無い。尺度ごとに重ねる曲率の案は交差項で止まる	交差項の評価	上界の仮定
11	管の不等式の壁	$m^2 \gtrsim \sigma$ は管の不等式に移ったが、管の不等式に証明の型が無い	ループ空間の転送作用素のゲージ不変な定義	一尺度の鎖
12	射影の仮定の壁	射影の仮定は緩和時間の仮定より弱くない。下界の仮定は一次元に落ちない	射影の仮定をより弱い言明から出す	上界の仮定
13	検査の道具の壁	一リンクの議論のリーマン幾何、C_P の行列の変分の一般化固有値問題が、機械検査の道具に乏しい	ライブラリの整備	一段の記帳
14	仮定そのものの壁	緩和時間の仮定と三つの鎖（緩和の鎖・一尺度の鎖・記帳の長さの鎖）は証明されていない 仮	上界の仮定そのもの・射影の仮定・三つの鎖の下界のどれか	緩和時間の仮定の η・鎖
15	同値の足場の壁	物理単位の隙間の言明の同値の足場：冪の形・$\eta \geq 0$・加法的な段の誤差・一ループ核の δ 仮	各仮定を外す	取りこぼしの総和可能性
16	周期境界の予想の壁	周期境界での上界の仮定の破れは HMC と Langevin が同じ普遍類という予想に依る 仮	$SU(2)$・局所的な力学の動的指数	上界の仮定
17	当てはめの壁	$m/\sqrt{\sigma}$ の破れが $O(a^2)$ なのは数表への当てはめ 読	段の歪みの評価	一尺度の鎖
18	箱の大きさの壁	箱が小さい（8^4 は $\beta \gtrsim 2.45$ で小さい箱の相、12^3 は $L\sqrt{\sigma} < 3$）	物理体積を揃えた大きな箱	下界の仮定
19	取りこぼしのゲージ依存の壁	c_2 のゲージの取り方による違いは、一ループ核の模型の中で二つのゲージとも正と読めたまで 読	ゲージによらない δ の定義	取りこぼしの総和可能性
20	管の模型の符号の壁	管の模型で、有限の u の $1/P$ の係数の符号が未決	形の零モードの有効模型	一尺度の鎖
21	一次資料の壁	一次資料の欠け（$SU(2)$ の局所的な力学の動的指数、Bałaban・Magnen–Rivasseau–Sénéor・Osterwalder–Seiler の本文）	入手	物理単位の隙間の言明

原理の壁。試験関数の片側の壁と分光の上界の壁は (8) の二つの片側で、測定を何回重ねても動きません。例えば標準正規分布（$C_P = 1$、$f = x$ が等号）で、x を含まない奇数次の多項式の族の比の最大は族を大きくすると 1 に近づきますが、族の中の数だけでは 1 が最終の値か分かりません 読 （族の下界）。1 だと分かるのは族の外の入力（$V'' = 1$ の凸性から $C_P \leq 1$）があるからで、上界の仮定に要るのはこの種の入力です。

構造の壁。選んだ族の中の両立不能で、族の外については何も言いません。局所演算子の次元の壁・ゲージ固定の一価性の壁・測定の費用の壁は §04 の三つの道の止まり方、正の重みの核の壁は反射正値性と取りこぼしの消去の緊張で、問題文が連続の正則化について言う「反射正値性を失うと回復の方法が少ない」と向きの逆な同じ緊張です。更新形の級数の壁・一段きりの積分の壁・極限の性質の壁は、記帳と級数の形の限界です。

道具の壁。上界の仮定の列に集まります。上界の道具の壁・管の不等式の壁・射影の仮定の壁は §05 の三つの移り先で、検査の道具の壁だけは数学の障害ではなく検査の道具の不足です。曲率の定理が在る $\beta < 0.2722$ と分光が使う $\beta = 2.60$（相関長 1.95 格子間隔）は約 9.6 倍離れていて、そのあいだを一様に渡る評価が上界の道具の壁の中身です。

仮定の壁。帯の文 $a^2 C_P \asymp 1$ は三つの比の積 $(a^2/\sigma)(\sigma/m^2)(m^2/\lambda_1)$ に割れ、中心の同値は緩和時間の仮定のほかの足場にも立っています。各仮定は第 1〜5 部と第 7・17・18 部の概念に当たります：緩和時間の仮定と一尺度の鎖・記帳の長さの鎖は「尺度は一つ」（4-07）の Poincaré 定数での言い換えの候補、緩和の鎖は動的指数 $z = 2$（18-03）、一尺度の鎖は一尺度（17-12）、記帳の長さの鎖は漸近スケーリング（5-05）の記帳の長さでの特殊化です。類比であって数学的な同値ではありません。

測定と文献の壁。計算か入手で動きますが、動いても (1) の論理は変わりません。代表は箱の大きさで、$12 \times 0.15896 = 1.91$（$\beta = 2.55$）、$12 \times 0.13395 = 1.61$（$\beta = 2.60$）と、どちらも物理の長さ $1/\sqrt{\sigma}$ を 3 個含まない小さな箱です [読]。

上界の仮定の列の壁は試験関数の片側の壁・上界の道具の壁・射影の仮定の壁・周期境界の予想の壁で、測定と文献の壁がありません。上界の仮定の手前には、測れば動く壁が無いということです。出題者が「新しい考えが要る」と書いたのも体積に一様なギャップの側で（Jaffe–Witten §6.5）[典]、測定の動かない壁が集まった所と同じ場所です。

07

残ったもの — Lean で閉じた代数と、数値の読み

十七の道から残ったものの多くは、仮定を引数に明示した有限の不等式と代数です。表 4 は本文で引いた定理を、言明が何についての文かで並べたものです。どの定理も Lean の中では実数・数列・有限集合の上の和についての文で、それが Wilson 測度の量であることは本文が付けた読みです。Wilson 測度の期待値・相関・隙間についての定理はありません（23-13）。

表 4　四次元格子の側で Lean で閉じた主な定理（性格：再証明＝既知の事実を証明し直した／整理＝定義と仮定の代数／条件つき＝未証明の仮定から結論への矢印だけ／陰性対照＝仮定を外すと崩れる例／格子の定理＝格子の形だけを仮定した、辺の族や有効作用についての定理）

定理	仮定	言明	性格

定理	仮定	言明	性格
`log_F0_le`・`log_F0_ge`	引数が非負	一リンク積分の対数の両側評価 (3)	再証明
`Incidence.intact_frac_le`	接続が正則	無傷の面の割合 $\le$ 残る辺の割合 (4)	整理
`no_blocking`・`blocking_shortfall`	完全な段の列／各段で消す割合 $\le 1/4$	段を重ねても無傷の面は戻らない	整理
`discStep_semigroup`・`step_lowers_coupling`	円板の形の面	円板の段は面積について半群で $\beta' < \beta$	再証明
`kappaDisj_lt_one`	$b \ge 2$	辺を共有しない面の寄与は 1 未満 (5)	整理
`xi_eq_exp`	全ての段で $\xi(\beta - t) = \xi(\beta) e^{-t/\kappa}$	$\xi(\beta) = \xi(0) e^{\beta/\kappa}$	整理
`fixed_step_bounded_iff`・`S4_two_sided`	一定の誤差／部分和が有界	部分和が有界 $\iff$ $d = 0$／正の帯に留まる	整理・条件つき
`drain_exponent`・`drainExp_eq_zero_iff`	(7) の冪の形・$0 \le \eta \le 2$・$\theta \ge 0$	$p = 0 \iff \eta = \theta = 0$	整理
`c2_ge_of_nonneg_weights`	$c_2 = A + \kappa S$（測定した依り方）	$c_2 > 0$	条件つき
`PerfectFamily.perfectK_one_iff`・`no_perfectZ_of_five`	$2 \le d$／$d \ge 5$	辺の完全な族の分類（表 1）	格子の定理
`StaplePerturbation.hess_gauge`	周期が偶数で ≥ 3・単位四元数・純虚の摂動	有効作用の Hesse 形式 $\ge -27\beta^2$	格子の定理
`renewal_chi_mul_massSq`	更新形の係数が正	$\chi m_0^2 = A / c_0$	整理
`dev_le_of_contracting`・`dev_eq_of_marginal`	$0 \le \lambda < 1$／$\lambda = 1$	ずれは有界／段数に比例	整理
`overlap_le_susc_mul_gap`	$m > 0$・$\tilde{Z} \coth(m/2) \le \chi$	$\tilde{Z} \le \chi m$	整理
`profileQuotient_isGreatest`	運動量は有限個・分母が正	階数 1 の族の比の上限は成分ごとの比の最大	再証明
`eta_ge_two_of_bounded_susc`	感受率が一様に有界	$\eta_s \ge 2$	条件つき

定理	仮定	言明	性格
`orbitAvg_gauge_invariant`	有限群の作用	軌道の上の重み付き平均はゲージ不変	再証明
`meff_antitone`・`meff_ge_of_corr`	非負の重みの表示	有効質量は単調に減り、最低エネルギーの上界	再証明
`gap_ge_of_overlap`・`light_admixture_invisible`	重なりの下界 q／二準位の例	(10)／軽い状態は窓に見えない	条件つき・陰性対照
`cost_ge`	緩和時間の下界・掃引の回数	費用 $\geq cL^{d+2}$	条件つき
`mass_sq_ge_of_tube`・`mass_bound_localized`	管の不等式の帰結／局所化した T・床・つなぎ目	$m^2 \geq 4c\sigma$ (12)	条件つき
`linear_regime_breaks_onescale`・`casimir_only_no_bound`・`linear_deficit_breaks_inv`	収束域／床だけ／生の周長	それぞれの仮定では一尺度の下の半分が偽	陰性対照
`conditional_scale_bound`・`const_defect_scale_unbounded`	射影の仮定・有界な取りこぼし／一定の取りこぼし	(13)／有界性が崩れる	条件つき・陰性対照
`tau_int_le`・`rayleigh_le_tau`	有限の可逆な連鎖	(14)	再証明
`comp_class_eq_of_equivariant_bijection`	全単射・作用と可換	流した場の関数の類は不変関数の類と同じ	整理

条件つきの行の中身は仮定の側にあり、定理はその仮定を一歩も示しません。格子の定理の二行（完全な族の分類と有効作用の Hesse 形式の下界）だけが、格子の形だけを仮定した格子の上の定理です。前者は格子の組合せの事実、後者は相関長が格子間隔の 1/10 程度の強結合の側で効く評価で、どちらも連続極限からは遠い所の話です。

数値の側で残ったのは読みです 読 ：一ループ核の模型の傾きと既知の係数の一致（相対 2.8×10^{-5}、模型の中）、c_2 の値（二つの重みと二つのゲージ）、原典の格子の $a\sqrt{\sigma}$ から読む実効的な傾き 0.304、平滑化した演算子の有効質量の上界 0.501 ± 0.071（$\beta = 2.6 \cdot 12^4$）、コンパクト $U(1)$ のゲージ固定のコピーの散らばり、Gribov 領域の曲率が正になる強結合の範囲（有限次元の模型の標本）、勾配流の押し出し測度の曲率（測った典型点）。どれも上界・下界の証明には使っていません。

```
08
```

一段目へ降りる理由 — どの道具がどの壁で止まったか

§04〜§06 をまとめると、四次元格子のまま緩和時間の仮定の上の側（上界の仮定、すべての f）を攻める道具が無い、ということです。下の側の道具（試験関数・分光）は原理の壁で止まり、上の側の道具（曲率・管・一次元鎖）はどれも一つの仮定に難しさを移した所で止まりました。どこで止まったかは、道具ごとに次の表のとおりです。右の列は、同じ道具を一段目の模型（0+1 次元の二重井戸の経路の測度、23-04）に持ち込んだとき、何が替わるかの見込みです。

表 5　道具と壁の対応、一段目で替わるもの（右の列は見込みで、一段目での中身は各章）

道具	四次元格子で止まった壁	一段目で替わるもの
試験関数・分光（下の側）	試験関数の片側の壁・分光の上界の壁・局所演算子の次元の壁・ゲージ固定の一価性の壁・測定の費用の壁	下の側は時刻に局所な試験関数の族で $C_P \geq \xi^2$ の等号まで届く（一次元の片側の橋の命題、23-04 §04）。上の側には、一段目でも別の道具が要ることは変わらない
曲率（Bakry–Émery）	上界の道具の壁（強結合でしか正にならない・交差項）	測度全体は二つの谷を持ち凸でないが、キンクの無い一つの相の中では局所の Poincaré を区画の組み立てで問える（相内の局所 Poincaré の条件、23-06）
尺度の一次元鎖（射影の仮定）	射影の仮定の壁（射影の仮定は緩和時間の仮定より弱くない）	遅い自由度はキンクの位置で、一次元への射影の形が模型から見える。射影の仮定は、鞍点の族に沿う輸送（鞍点の管の条件）と箱の力学への帰着（箱への帰着の条件）に割れて名指しされる（23-07・23-11）
管の転送作用素（管の不等式）	管の不等式の壁（質量の下界に証明の型が無い）	質量の側は要らない：相関長 $\xi = \hbar/\Delta$ はトンネル分裂から独立に精度よく求まり、比べる相手がはっきりしている（23-04）
一段の記帳（取りこぼしの総和可能性の仮定）	正の重みの核の壁・一段きりの積分の壁・同値の足場の壁	記帳の長さを作らなくてよい：相関長が $\hbar$ について $e^{S_0/\hbar}$ の速さで伸び、比べる長さが測度から直接決まる
境界と位相電荷	周期境界の予想の壁（周期の箱の破れは予想の上）	経路の長さ T を先に無限大にする体制で述べるので、周期の箱の位相の枚は現れない形で問いを立てる
箱と一次資料	測定と文献の壁（箱の大きさ・取りこぼしのゲージ依存・管の模型の符号・一次資料）	転送作用素の数値・半古典の式・区間演算で、比べる量の多くが高い精度か不等式として得られる（23-08）

替わらないものもあります。上界の仮定が「すべての f」についての不等式であること、そして下の側の道具では原理的に届かないこと（試験関数の片側の壁）は一段目でも同じです。だから一段目でするのは、上の側の組み立てを、仮定の行を名指した命題の形で先に作ることです。緩和時間の仮定は次元によらない文なので（23-01 §05）、同じ文を、物差しが径数について指数で伸び、遅い動きが「相を移る」動きで、比べる量が正確に分かる最小の模型で組みます。

一段目を閉じても、四次元格子に持ち上がる保証はありません。持ち上がる見込みがあるのは文の形と道具の形で、定数や径数の範囲は持ち上がりません（23-03 §06）。この章の壁の表は、一段目の道具が二段目で再びどの壁に当たりうるかを読むための表として残します。

緩和時間の仮定は取っ掛かりとして選んだ一つの言い換えで、この章の道と壁も緩和時間の仮定を軸にした検討の範囲のものです。緩和時間の仮定と別の視点は第 24 部で扱います。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
十七の道と二十一の壁の整理（表 2・表 3）、道具と壁の対応（表 5）	(1) のどの矢印も証明されていない。「止まった」は質量ギャップや連続極限について何かを示した意味ではなく、届かなかった命題が偽だという意味でもない
典 変分原理と有限の窓、局所演算子の最低次元、反射正値性、強結合の面積則、一ループ係数、次元勘定、Bakry–Émery と Muckenhoupt の不等式、$R \le \tau_{\mathrm{int}} \le C_P$	これらを成果として数えること
初 完全な族の $d \le 4$ の数え上げ (2)、記帳の欠損の恒等式 (4)、(7) の冪の代数、(10)・(12) の代数、素のリンク角の比 1、輪のゲージ固定の閉じた式。Lean 表 4 の定理（仮定を同じ行に）	緩和時間の仮定・三つの鎖・管の不等式・射影の仮定・感受率の有界性・重なりの下界・測定した c_2 の依り方・段の誤差の模型の証明
読 一ループ核の模型の κ の一致と c_2、格子の実効的な傾き、分光の上界、$U(1)$ のゲージ固定、Gribov 領域と勾配流の曲率、位相電荷の有効指数	模型の数が四次元 $SU(2)$ の非摂動の量であること。読みを上界・下界の証明として使うこと
仮 一リンク積分が一度きりであること、更新形、周期の箱での上界の仮定の破れ（予想の上）、一段目で替わるもの（表 5 の右の列の見込み）	一段目の結果が二段目以後に持ち上がること。質量ギャップ・連続極限について、この章は何も示さない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
一リンク積分・熱浴法・強結合の面積則・二次元の間引き	典	5-07・5-02・7-02 の出典表（K. G. Wilson, Phys. Rev. D 10 (1974) 2445・K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440・A. A. Migdal, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 69 (1975) 810。書誌のみ）。
一ループ係数 b_0	典	D. J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1343。H. D. Politzer, 同 1346（書誌のみ）。
格子の $a\sqrt{\sigma}$・$am(0^{++})$	読	B. Lucini, M. Teper, JHEP 0106 (2001) 050, hep-lat/0103027 表 1（本文を確認）。

もの	種別	出典・道具
変分原理・有限の窓・Bakry–Émery	典	1-10・4-11 の出典表。D. Bakry, M. Émery, Lecture Notes in Math. 1123 (1985) 177–206（書誌のみ）。
多重尺度の Bakry–Émery の到達点	典	R. Bauerschmidt, B. Dagallier, arXiv:2202.02295 の定理 1.1（本文を確認）。R. Bauerschmidt, T. Bodineau, Comm. Pure Appl. Math. 74 (2021) の定理 2.5。
二重み Hardy 不等式	典	B. Muckenhoupt, Studia Math. 44 (1972) 31–38（書誌のみ）。
局所ゲージ対称性・Gribov・確率的ゲージ固定・軌道の上の平均	典	S. Elitzur, Phys. Rev. D 12 (1975) 3978。I. M. Singer, Commun. Math. Phys. 60 (1978) 7。C. Parrinello, G. Jona-Lasinio, Phys. Lett. B 251 (1990) 175。D. Zwanziger, Nucl. Phys. B 345 (1990) 461。D. Mehta, M. Schröck, Phys. Rev. D 89 (2014) 094512（要旨を確認、他は書誌のみ）。
Wilson 流・APE	典	M. Lüscher, JHEP 08 (2010) 071, arXiv:1006.4518（要旨を確認）。M. Albanese ほか, Phys. Lett. B 192 (1987) 163（書誌のみ）。
位相電荷の有効指数・HMC と Langevin	読・仮	S. Schaefer, R. Sommer, F. Virotta, Nucl. Phys. B 845 (2011) 93, arXiv:1009.5228。M. Lüscher, S. Schaefer, JHEP 07 (2011) 036, arXiv:1105.4749（どちらも要旨を確認）。M. Abe, O. Morikawa, H. Suzuki, PTEP 2025 (2025) 063B03, arXiv:2501.00286 §3.2・図 6（$SU(2)$ の HMC。本文を確認）。
ホログラフィーの模型	典（模型の中）	U. Gürsoy, E. Kiritsis, F. Nitti, JHEP 0802 (2008) 019, arXiv:0707.1349。C. Csáki, H. Ooguri, Y. Oz, J. Terning, JHEP 9901 (1999) 017, hep-th/9806021（要旨を確認）。17-09。
問題文 §6.5	典	A. Jaffe, E. Witten, Clay の問題文（0-03 の出典表）。
表 4 の定理と仮定	Lean	束 `LatticeGaugeCoarseGraining`・`LatticeGaugeRunning`・`LatticeGaugeMultiStep`・`LatticeGaugeSpectralHinge`・`PerfectFamilyEdges`・`LatticeGaugeOneLink`・`LatticeGaugeOverlapExponent`・`LatticeGaugeTubeEntropy`・`LatticeGaugeWulffCorrection`・`LatticeGaugeHardyLadder`・`LatticeGaugeAutocorrelationBound` ほか。各束の末尾の `#print axioms` が標準の三つの公理の部分集合。言明と限界は 23-13。
模型の数値（c_2・窓の傾き・ゲージ固定・曲率・流れ）	読	この部の四次元格子の記録の計算（一ループ核の模型・有限次元の模型・小さな箱の Monte Carlo）。値と条件は本文の各行。

この章で使った語 — 一段の記帳・完全な族・一リンク積分・取りこぼし $\delta(b)$・答えの形・四次元格子で試した十七の道・二十一の壁（五つの型）・更新形・重なりの下界・管の不等式・射影の仮定・位相電荷・陰性対照。意味は A-02 用語集 にあります。

次の章へ — 23-03 階段の四段 — なぜ 0+1 次元から始めるか：緩和時間の仮定を四段に分け、一段目に二重井戸を選ぶ条件と、一段目の言明（二重井戸の緩和時間の冪の言明と二重井戸の緩和時間の上界の命題）の形を決める。

次に読む章：23-03 階段の四段 — なぜ 0+1 次元から始めるか。

2026-10-09 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 23 部 一本目の道（前半）— 時間の方向から 階段・二重井戸の冪の言明・一段目の上界の命題の形 · Kiichi, Shiori and Rin

階段の四段 — なぜ 0+1 次元から始めるか

この章は本書の検討です。§03・§06 は未解決の地図、§07 は案内です。

この章で分かること — 拡散型緩和時間の仮定は「経路の測度の緩和の時間が、その測度の相関長の二乗の冪で伸びる」という、次元によらない形の文です。そこで拡散型緩和時間の仮定を四段（0+1 次元の二重井戸／四次元格子・非可換／連続極限と OS 公理／極限での質量ギャップ）に分け、一段目に二重井戸を選ぶ理由を述べます。一段目の言明は「二重井戸の緩和時間の冪の言明」（以下、二重井戸の冪の言明）$\ln C_P / \ln \xi \to 2$ で、その上の側を $C_P \le K \xi^2 S_0 / \hbar$ の形（一段目の上界の命題）にすることが一段目の組み立ての中心です。一段目の上界の命題は四つの条件の上の条件つきの命題で、証明されてはいません。一段目から二段目以後へ持ち上がる見込みと、持ち上がらない理由を両方述べます。

前提となる章 — 23-00（入口・五つの札）・2-07（経路積分と虚時間）・2-05 §07（二重井戸のトンネル分裂）。四次元格子の側の定義は 23-01。

先に言うこと — 緩和時間の仮定は四次元格子でも二重井戸でも仮定です。一段目の上界の命題は二重井戸の四条件の上の代数で、四つの条件はどれも仮定の行を残しています。この章は言明の形を決める章で、何も新しく証明しません。

この章の順序

1. 緩和時間の仮定は次元によらない形の文 — 測度の族・相関長・緩和の時間
2. 四段の定義 — 各段で「閉じた」と言える形（表 1）
3. 四次元格子のまま攻めない理由 — 上の側の道具が無い
4. 一段目に選ぶ模型の条件 — 指数で伸びる物差し・二つの相・比べられる量（表 2）
5. 冪の文と一段目の上界の命題の形 — 下界 ξ^2 と上界の目標
6. 持ち上がるもの・持ち上がらないもの（表 3）
7. 一段目の中の地図 — 23-04〜23-11 の案内

01

拡散型緩和時間の仮定は次元によらない形の文 — 測度の族・相関長・緩和の時間

緩和時間の仮定に出てくるものは三つです。一つの径数で並んだ確率の測度の族 μ_s、各 μ_s の相関長 $\xi(s)$、各 μ_s の Poincaré 定数 $C_P(s)$（その測度を平衡に持つ Langevin 力学の緩和の時間）。径数を動かすと $\xi(s) \to \infty$ となるとき、緩和時間の仮定は

$$(\xi^2): \quad \lim \frac{\ln C_P(s)}{\ln \xi(s)} = 2 \quad (1)$$

という一文です。この文は測度がどの空間の上にあるかを言いません。四次元格子では μ_s は Wilson 測度で $s = \beta \to \infty$（23-01）、0+1 次元の二重井戸では μ_s は虚時間の経路の測度 $e^{-S/\hbar}$ で $s = 1/\hbar \to \infty$ です（23-04）。同じ形の文を、対象を替えて並べられます。

例。自由場（質量 m_0 のガウスの鎖）では $C_P = 1/m_0^2$、$\xi \approx 1/m_0$ で、(1) は $m_0 \to 0$ で成り立ちます（23-00 §04）初。相互作用があると、緩和を遅らせる新しい仕組み（障壁を越える、位相の違う配位の間を移る）が入り、(1) は自明でなくなります。

正確には、この部の「緩和時間の仮定」は冪の水準の文 (1) だけを指します。定数倍の幅で言う文（帯の文）は別の名で呼び、緩和時間の仮定とは呼びません（23-01）。また、一段目の四つの条件は「二重井戸の四条件」と書き、緩和時間の仮定と取り違えないように必ず「条件」の語を添えます。Lean の定理名に入っている字（H1 など）は替えません。

02

四段の定義 — 各段で「閉じた」と言える形

易しい場所から難しい場所へ、四段を置きます。

- **一段目**：0+1 次元の二重井戸の経路の測度。径数 $\hbar \to 0$。
- **二段目**：四次元格子の非可換ゲージ理論（SU(2) または SU(3) の Wilson 測度）。径数 $\beta \to \infty$。
- **三段目**：格子間隔 $a \to 0$ の連続極限。極限の測度が在り、Osterwalder–Schrader の公理（4-10）を満たすこと。
- **四段目**：極限の理論の質量ギャップ（4-11）。

表 1　段ごとの対象・目標・道具・この本の状態

段	対象	「閉じた」と言える形	主な道具	この本の状態

段	対象	「閉じた」と言える形	主な道具	この本の状態
一段目	二重井戸の経路の測度	二重井戸の冪の言明の上の側を、有限個の名前の付いた仮定の行の表つきで述べ、各行を証明・原典・計算機援用で埋める	分散の分割・局所 Poincaré・箱への帰着・区間演算	一段目の上界の命題（二重井戸の四条件の上の代数）まで。四条件はどれも 仮 の行を残す（23-05・23-12）
二段目	四次元格子の Wilson 測度	同じ形の文 (1) を $\beta \to \infty$ で	一段目で作った型を写す見込み（§06）	緩和時間の仮定は 仮 。届いているのは下からの評価だけ（23-02）
三段目	連続極限の測度	極限の存在と OS 公理	繰り込み群の段の列・構成的場の理論（第 7 部）	扱わない。四次元の Wilson の格子ゲージ理論の極限として Wightman の公理を満たす理論が作れることは、2026-11-10 に公開された構成が Lean で証明している、と委員会が評価した（第 6 部）。無限体積の極限の一意性と連続の確率測度は示されていない（6-04）
四段目	再構成した場の量子論	ハミルトニアンの隙間が正	OS の再構成（4-10）	扱わない。公開された構成も示していない（6-04）

一段目の「閉じた」は、上の側の命題を「どの行が証明でどの行が仮定か」が一枚の表で読める形にすることを指します。全ての行が証明・原典・計算機援用で埋まり、一段目の上界の命題の段が一本の証明として通ってはじめて一段目は定理になります。いまはそうなっていません（23-12）。

二段目から上へ進むには、各段の間にもう一つずつ橋が要ります。二段目の文 (1) が成り立っても、それだけでは連続極限の存在（三段目）は出ませんし、極限の隙間（四段目）は、(1) の上の側に相関長と物理の長さを結ぶ仮定（23-01 の鎖）を足してはじめて読み替えられる形です。この部は、どの段の間の橋についても含意の定理を持ちません。

03

四次元格子のまま攻めない理由 — 上の側の道具が無い

四次元格子の記録（23-02）では、試験関数・ゲージ固定・分光のどの道も C_P の下界か質量の上界で終わり、上の側（すべての f について C_P が大きすぎない）に届く道具は見つかっていません。強結合の側の評価（C_P が有界）と、凸な測度に効く Bakry–Émery の型は在りますが、どちらも $\xi \to \infty$ の体制には届きません。体積に一様な既知の判定法を二重井戸の経路の格子に当てた例でも、出る上界は $e^{c\xi}$（$\hbar$ について二重指数）の型で、冪の文には遠いと読まれています 典 （判定法：Bauerschmidt–Dagallier の定理 2.1） 読 （$c \approx 1.4$〜1.8、$\varepsilon = 0.25 \cdot \hbar \in [0.1, 0.4]$ の数値）。そこで、緩和時間の仮定が成り立つことの見込まれる最小の試験台で、まず「上からの組み立て」を作ります。詳しい道と壁は 23-02 に置きます。

04

一段目に選ぶ模型の条件 — 指数で伸びる物差し・二つの相・比べられる量

一段目の模型に求める条件は三つです。

1. **物差しが径数について指数で伸びる**。四次元格子の相関長は、一ループの勘定では β について指数で伸びます（4-07）。冪と指数を取り違えない試験台にするには、同じ速さで伸びる物差しが要ります。
2. **遅い動きが「相を移る」動きである**。緩和を遅らせるのが、二つ（以上）の相の間を移る稀な出来事であること。二つの相の中の揺らぎは速く、相を移る動きだけが遅い、という二つの尺度があることです。
3. **比べる量が正確に分かる**。相関長が、独立な方法で高い精度で求まること。比べる相手がぼやけていると、C_P/ξ^2 の伸び方を読み違えます。

0+1 次元の二重井戸 $V(x)=(x^2-1)^2/8$ の経路の測度は、三つを満たします。物差しは $\xi = \hbar/\Delta \propto \hbar^{1/2}e^{S_0/\hbar}$ と指数で伸び（Δ はトンネル分裂、$S_0=2/3$ は谷から谷へ移る道の作用）、二つの相は「経路が右の谷にいる区間」と「左の谷にいる区間」で、相を移る出来事はキンク（作用 S_0 の短い遷移）です。Δ は半古典の式（2-05 §07 の (10)）と、転送作用素の数値の二つの道で求まります（23-04）。

キンク一本の作用 S_0 と、相関長 $\xi \propto e^{S_0/\hbar}$。この組が、四次元格子で「インスタントンの作用」と「指数で伸びる相関長」が並ぶ構造を、最も小さい次元で持っています。ただしこれは類比で、対応の定理ではありません。

表 2　二重井戸と四次元格子の並べ方（右の列は類比。対応の定理ではない）

項目	二重井戸（一段目）	四次元格子（二段目）
測度	経路の測度 $e^{-S/\hbar}$（虚時間の直線）	Wilson 測度（四次元の格子）
径数と極限	$\hbar \to 0$	$\beta \to \infty$
物差し	$\xi \propto \hbar^{1/2}e^{S_0/\hbar}$ 典 （半古典の主項）	一ループの記帳で $\propto e^{3\pi^2\beta/11}$（SU(2)。$\xi$ と揃うことは 仮 ）
遅い自由度	キンクの位置（作用 $S_0=2/3$）	インスタントンの位置・大きさ・向き、位相電荷の密度（類比）
下の側	$C_P \geq \xi^2$（一次元の片側の橋の命題、23-04 §04）	試験関数による下界（23-02）
上の側	四条件の上の条件つき（一段目の上界の命題）	無い

一段目は易しい模型ですが、易しすぎはしません。二重井戸の冪の言明の上の側を与える既知の定理は、探した範囲では見当たりません。区間の長さを止めて $\hbar \to 0$ とする Eyring–Kramers の型の定理は在りますが、経路の長さ T を先に無限大にする体制（$T \gg \xi$）は、その定理の範囲の外です 典 （Brooks–Di Gesù 2026 が、長さを無限大にする体制と平行移動の族を範囲の外と本文に明記している）。

05

冪の文と一段目の上界の命題の形 — 下界 ξ^2 と上界の目標

一段目の言明は、二重井戸の経路の測度（$T \to \infty$ を先に取る）について

$$\text{冪の仮定 } (\xi^2): \qquad \lim_{\hbar \to 0} \frac{\ln C_P(\hbar)}{\ln \xi(\hbar)} = 2 \quad (2)$$

です。$R := C_P/\xi^2$ と置くと $\ln C_P / \ln \xi = 2 + \ln R / \ln \xi$ なので、(2) は「$\ln R$ が $\ln \xi$ に比べて小さい」と同じです。

(2) の左の札「冪の仮定 (ξ^2)」は、本文で言う二重井戸の冪の言明（二重井戸の緩和時間の冪の言明）のことです。

下の側。$R \geq 1$、つまり $C_P \geq \xi^2$ は、どの 0+1 次元の井戸でも成り立ちます（一次元の片側の橋の命題。証明は 23-04 §04）。

上の側の目標。キンクの位置は拡散係数 $D = \hbar/S_0$ で動き、長さ ξ を拡散で渡る時間は $\xi^2/D = \xi^2 S_0/\hbar$ です（23-04 §03）。そこで上の側の目標を

$$C_P \;\leq\; K\,\xi^2\,\frac{S_0}{\hbar} \qquad (K \text{ は } \hbar \text{ に依らない}) \tag{3}$$

の形に置きます。物理の水準の勘定（キンクを希薄な気体として数える）では $C_P \approx \xi^2 S_0/\hbar$ と読まれ、(3) はその定数倍の余裕をとった形です 仮 （勘定は発見的で、証明ではない）。

(3) から (2) へ。(3) と $R \geq 1$ から $1 \leq R \leq K S_0/\hbar$。$\hbar$ が小さいとき $\ln \xi \geq s/\hbar$（ある $s > 0$）なので、

$$0 \;\leq\; \frac{\ln R}{\ln \xi} \;\leq\; \frac{\hbar\,\big(\ln(K S_0) + \ln(1/\hbar)\big)}{s} \;\longrightarrow\; 0 \qquad (\hbar \to 0) \tag{4}$$

となり、(2) が従います 初 Lean `power_H_of_kink_ratio` （仮定：$0 < K$・$0 < s$・$0 < \delta$、$0 < \hbar < \delta$ で $1 \leq R \leq K/\hbar$ と $s/\hbar \leq \ln \xi$。Lean の K は本文の KS_0）。$\ln \xi \geq s/\hbar$ は半古典の主項 $\ln \xi \approx S_0/\hbar$ から来る行で、格子の模型では 読 です。値は 23-04 §07 にあります。

一段目の上界の命題の形

(3) は証明されていません。一段目の組み立ては、(3) を次の四つの条件に割り、その上で (3) が従う、という条件つきの命題の形にしたものです。

一段目の上界の命題（条件つき・言明だけ）

0+1 次元の二重井戸の経路の測度で、二重井戸の四条件を仮定すると、$T \to \infty$ を先に取り $\hbar \to 0$ で $C_P \le K\xi^2 S_0/\hbar$（K は条件の定数だけに依る）。したがって二重井戸の冪の言明 (2) が従う。

- 相内の局所 Poincaré の条件（キンクの無い相の中の局所 Poincaré）
- 鞍点の管の条件（平らな鞍点の族に沿う輸送）
- 箱への帰着の条件（箱の力学への帰着）
- 箱の中の隙間の条件

四つの条件の中身、一段目の上界の命題の分散の分割の代数、示せた部分と仮定の行の分け方は 23-05 に置きます。条件ごとの現状は 23-06〜23-11、全ての行を一枚にした表は 23-12 です。

正確には、四つの条件はどれも、いまの時点で仮定の行を残しています。また、全ての条件の全ての行が同時に成り立つ $\hbar$ は、まだ一つもありません（23-12）。一段目の上界の命題は「何を示せば一段目が閉じるか」を名指した命題であって、一段目が閉じたことを言う命題ではありません。

06

持ち上がるもの・持ち上がらないもの

一段目で (3) が閉じても、二段目（四次元格子）の文が従うわけではありません。この節は、何が持ち上がる見込みがあり、何が持ち上がらないかを、理由とともに述べます。どちらも見込みの記述で、含意の定理ではありません。

表 3　一段目から二段目へ（見込み）

	持ち上がる見込み	持ち上がらない理由
形	文 (1)・(2) は次元によらない。「相の中は速い／相を移る動きは遅い」という二尺度の割り方も、遅い自由度がある測度なら同じ形で書ける	四次元格子の遅い自由度（インスタントンの集団座標・位相電荷の密度）は体積に比例して数が増える。一段目でも、経路が ξ より十分長いと、遅い変数を一つだけ取る割り方は使えない（23-04 §05 の帯）。四次元ではこの事情がさらに強まると見込まれる

	持ち上がる見込み	持ち上がらない理由
道具	分散の分割・二つの射影の補題・Efron–Stein の不等式・区画の和の段は、測度の空間の次元を使わない代数の段で、そのまま書ける	一段目の段の多くは、一次元の最近接の測度に固有の性質（転送作用素・相の境が点であること・キンクが希薄な気体として数えられること）に依る。ゲージ対称性と軌道の空間の幾何（3-04）は一段目に無い
定数	—	一段目の定数は、特定の $\hbar$ の節点や窓で計算機援用と数値の読みで決めたもので、四次元格子の β には何の情報も与えない。$\hbar$ と β の対応も類比である

それでも一段目から始めるのは、上の側の命題を「どの行が仮定か」が見える形に組む手順そのものが、二段目でも要るからです。仮定の行に名前を付け、依存の向きを確かめ（23-12）、機械検査が何を保証するかを分ける（23-13）手順は、模型によりません。一段目でその手順を通しておくと、二段目で同じ形の命題を立てたとき、どの行が新しく要るかを名指せます。

正確には、二段目に「同じ形の文」を立てることは、二段目の文が成り立つ証拠ではありません。一段目の模型では緩和時間の仮定が成り立つと読まれていても（物理の水準の勘定と下界の読み）、二段目で成り立つかは別の問いです（23-15）。

07

一段目の中の地図 — 23-04〜23-11 の案内

一段目の章

4. 23-04 二重井戸の経路の測度とキンク — 舞台の定義・キンク・下界 $C_P \geq \xi^2$〔二〕〜〔三〕
5. 23-05 一段目の言明 — 二重井戸の四条件と上界の命題 — 分散の分割と、上界の命題の組み立て〔三〕
6. 23-06 相内の局所 Poincaré の条件 — キンクの無い相の局所 Poincaré〔研〕
7. 23-07 鞍点の管の条件の地図 — 七つの道筋と環の継ぎ目〔三〕
8. 23-08 計算機援用とは何か — 窓の中の鎖の条件 — 区間演算で不等式を確かめる〔二〕〜〔三〕
9. 23-09 区画の枠組みと、窓の対数 Sobolev の道筋の三本の筋 — 頂上の台地の共通の壁〔研〕
10. 23-10 迂回策の一覧 — 壊れ方の型〔三〕〜〔研〕
11. 23-11 箱への帰着と箱の中の隙間 — 芯の定数 — 箱への帰着の条件・箱の中の隙間の条件と、芯の定数〔研〕

〔研〕の章は冒頭に〔三〕で読める要約の節を置くので、要約だけを読んで 23-12 へ進むこともできます。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
緩和時間の仮定を次元によらない形 (1) で書き、四段に分ける組み立て方（約束）	どの段の間の含意も。二段目の緩和時間の仮定・連続極限・極限の質量ギャップ
初 (3) と下界 $R \geq 1$ と $\ln \xi \geq s/\hbar$ から二重井戸の冪の言明 (2) が従う代数 (4) Lean `power_H_of_kink_ratio`（仮定は §05 の行）	(3) そのもの。一段目の上界の命題は二重井戸の四条件の上の条件つきで、条件はどれも仮定の行を残す
典 区間を止めた Eyring–Kramers の型の定理が、$T \to \infty$ を先に取る体制を範囲の外とすること	この体制で上の側を与える既知の定理が無いこと（探した範囲で見当たらない、まで）
持ち上がる見込みと持ち上がらない理由（表 3、見込み）	二段目で同じ形の命題が立つこと・成り立つこと

出典と再現

もの	種別	出典・道具
Poincaré 定数・相関長の定義	典	23-00 の出典表。
二重井戸のトンネル分裂と S_0	典	2-05 §07 の (9)(10) と出典表。
Eyring–Kramers の型の定理と、その範囲	典	G. Di Gesù, D. Le Peutrec, arXiv:1506.04434（定理 1.1）・B. Brooks, G. Di Gesù, arXiv:2606.16083（本文 p.4 の範囲の記述）。どちらも本文で確認。
体積に一様な判定法と、二重井戸の経路の格子での値	典・読	R. Bauerschmidt, B. Dagallier, arXiv:2202.02295（定理 2.1、本文で確認）。値は転送作用素の数値（刻み $\varepsilon = 0.25$・$T = \infty$）。
二重井戸の冪の言明の代数 (4)	初・Lean	本文 §05。定理 `power_H_of_kink_ratio`（仮定は §05）。言明は 23-13。
$C_P \approx \xi^2 S_0/\hbar$ の勘定	仮	キンクの希薄な気体と射影の拡散係数による物理の水準の勘定（23-04 §03）。
一段目の上界の命題の言明	仮定の表つき	中身は 23-05。

この章で使った語 — 階段（四段）・二重井戸の冪の言明・二重井戸の四条件・一段目の上界の命題・キンク・トンネル分裂・相（キンクの無い相）・局所 Poincaré・箱の力学（箱への帰着）。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-04 二重井戸の経路の測度とキンク ― 一段目の舞台を定義し、下界 $C_P \geq \xi^2$ と上界の目標の形を導く。

二重井戸の経路の測度とキンク

この章の §01〜§03 は既存の知見、§04 以降は本書の検討です。

この章で分かること — 一段目の舞台は、二重井戸 $V(x) = (x^2-1)^2/8$ の虚時間の経路の測度 $e^{-S/\hbar}$ です。相関長 $\xi = \hbar/\Delta$（Δ はトンネル分裂）は $\hbar^{1/2}e^{S_0/\hbar}$ の速さで伸び、$S_0 = 2/3$ は谷から谷へ移る道（キンク）の作用です。経路全体の Poincaré 定数 C_P は ξ^2 以上で（一次元の片側の橋の命題）、上の側の目標はキンクの拡散の時間 $\xi^2 S_0/\hbar$ の定数倍です。三つの $\hbar$ での $\ln \xi$ は 218／661／2213 です（読み）。

前提となる章 — 2-07（経路積分・虚時間・転送行列）・2-05 §07（二重井戸）・1-10 §07〜§09（Poincaré 不等式）・23-03（階段と二重井戸の緩和時間の冪の言明）。

先に言うこと — §01〜§03 と §07 は〔二〕、§04〜§06 は〔三〕で書きます。C_P の上界はここでは示しません。一次元の片側の橋の命題は下界で、上の側の目標 (15) は条件つきの二重井戸の緩和時間の上界の命題（23-05）の結論です。この章の数はすべて 0+1 次元の模型の数で、四次元のゲージ理論の数ではありません。

この章の順序

1. 設定 — 作用・経路の測度・格子 ε=½・Dirichlet 形・C_P
2. 二つの時間 — 相関長 ξ=ħ/Δ と Langevin の隙間 1/C_P
3. キンク — 作用 S_0=2/3・位置の自由度・拡散係数 D=ħ/S_0・ξ の伸び方
4. 下界 C_P ≥ ξ^2 — 一次元の片側の橋の命題と、その先の読み
5. 上の側の目標と、長い経路の帯 — 素朴な帰着が使えない理由
6. 頂上の台地 — 曲率が凸性に ¼ 足りない
7. 数の例 — 三つの ħ での ln ξ（表 2）。寄り道：トンネル分裂を Herring の式で

01

設定 — 作用・経路の測度・格子・Dirichlet 形

質量 1 の粒子が、二つの谷を持つ位置エネルギーの中にいます。

$$V(x)=\frac{(x^2-1)^2}{8},\qquad V'(x)=\frac{x(x^2-1)}{2},\qquad V''(x)=\frac{3x^2-1}{2} \tag{1}$$

谷は $x=\pm 1$ で、谷の底の曲率は $V''(\pm 1)=1$（谷の中の振動の角振動数が 1）、山の頂上は $x=0$ で $V''(0)=-\frac{1}{2}$ です。これは 2-05 §07 の (9) で $a=1$ と置いたものです。

虚時間 τ の経路 $x(\tau)$（$0\le\tau\le T$）に、ユークリッド作用

$$S[x]=\int_0^T\Big[\frac{1}{2}\dot{x}(\tau)^2+V\big(x(\tau)\big)\Big]\,d\tau \tag{2}$$

を付け、重み $e^{-S[x]/\hbar}$ で経路の上の確率の測度を作ります。これが 2-07 §05 の (7) の測度（質量 $m=1$）で、経路を輪にすれば 2-07 §06 の (9) の分配関数、つまり輪の長さ T が逆温度に当たる古典の鎖です。この部では $T\to\infty$（温度 0、基底状態の側）を**先に**取り、そのあとで $\hbar\to 0$ とします。順序を逆にした量（T を止めて $\hbar\to 0$）は別の量です。経路が短い場合（$T<2\pi\sqrt{2}$）には、谷を移る平均の時間が $e^{T/(8\hbar)}$ の速さで伸びるという既知の定理 典（Berglund–Gentz の定理 2.6、区間を止めた Eyring–Kramers の型）から、C_P/ξ^2 は指数で 0 へ落ちると読まれます 読（平均の時間から固有値への読み替えは二状態への縮約による）。

格子。この部の後の章の数は、虚時間を刻み $\varepsilon=\frac{1}{2}$ で刻んだ格子の上の数です。サイト $i\in\mathbb{Z}$ の値を x_i として

$$S_{\mathrm{lat}}=\sum_i\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2\varepsilon}+\varepsilon\sum_i V(x_i),\qquad \varepsilon=\frac{1}{2} \tag{3}$$

で、$T=\infty$ の測度は一次元の最近接の Gibbs 測度です。転送作用素の積分核（2-07 §08 の (13)）が正なので、測度は一つに決まると見込まれます 仮（2-07 §08 の Perron–Frobenius の定理の積分作用素版を $\mathbb{R}$ の上で使う。この形の原典の言明はこの部では確かめていないので、仮定の行に置く）。章によっては刻み $\varepsilon=0.25$ の数も引くので、その都度断ります。

Dirichlet 形と C_P。経路の関数 f の「動かしたときの変化の大きさ」を

$$\mathcal{E}(f)=\hbar\int\mathbb{E}\Big|\frac{\delta f}{\delta x(\tau)}\Big|^2 d\tau,\qquad \text{格子では}\quad \mathcal{E}(f)=\frac{\hbar}{\varepsilon}\sum_i\mathbb{E}\,|\partial_i f|^2 \tag{4}$$

と置き（正準の Dirichlet 形）、Poincaré 定数を $C_P = \sup_f \mathrm{Var}(f)/\mathcal{E}(f)$ とします（23-00 §04 の (2)）。$\mathcal{E}$ に付く $\hbar$ は、位置 x でなく正準の場 $x/\sqrt{\hbar}$ で微分した形に合わせた正規化です（23-00 §05 の時計の目盛り）。この $\mathcal{E}$ を持つ Langevin 力学は、格子では

$$dx_i = -\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial S_{\mathrm{lat}}}{\partial x_i}\,dt + \sqrt{\frac{2\hbar}{\varepsilon}}\,dW_i \tag{5}$$

（W_i は独立なブラウン運動）で、$e^{-S_{\mathrm{lat}}/\hbar}$ を平衡に持ち、その隙間が $1/C_P$ です 典 （1-10 §07）。人工的な時間 t に沿って経路全体がゆらゆらと揺れ、最も遅い揺らぎが時間 C_P ごとに $1/e$ に減ります。

例（自由場）。$V = \frac{1}{2}x^2$ にすると測度はガウスで、$C_P = 1$、相関長も $\xi = 1$、比 C_P/ξ^2 はちょうど 1 です 初 Lean `ratioR_free_eq_one` （仮定：$C_P = 1/m^2$・$m \neq 0$）。格子でも零運動量の向きで同じです。

正確には、(2)〜(5) の測度は 0+1 次元の量子力学の模型の経路の測度で、ゲージ場はどこにも入っていません。四次元のゲージ理論との関係は 23-03 §04 の類比だけです。

02

二つの時間 — 相関長 ξ=ħ/Δ と Langevin の隙間 1/C_P

この模型には、性格の違う二つの「時間」があります。

一つ目は虚時間の長さ、相関長 ξ です。量子力学のハミルトニアン $H = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V$ の最低の二つの準位の差を $\Delta = E_1 - E_0$（トンネル分裂）とすると、経路の上の二点の相関は

$$\langle x(0)\,x(\tau)\rangle - \langle x\rangle^2 \;\approx\; C\,e^{-\tau\Delta/\hbar}, \qquad m := \frac{\Delta}{\hbar}, \qquad \xi := \frac{1}{m} = \frac{\hbar}{\Delta} \tag{6}$$

で減ります（転送作用素の固有値の比、2-07 §07 と同じ筋） 典 。ξ は虚時間の向きの長さで、格子のサイトの数で数えるなら $\xi/\varepsilon = 2\xi$ です。

二つ目は人工的な時間、にじむ時間 C_P です。(5) の力学で経路全体が平衡に近づく時間で、虚時間とは別の向きの時間です。

二つを比べる量を

$$R := \frac{C_P}{\xi^2} = C_P\,m^2 \tag{7}$$

とします。自由場では $R = 1$、二重井戸の緩和時間の冪の言明（冪の文）は「$\ln R$ が $\ln \xi$ に比べて小さい」と同じです（23-03 §05）。

正確には、(6) の ξ は時間の連続な模型での定義で、格子の模型では転送作用素の上位二つの固有値 $\lambda_0 > \lambda_1$ から $\xi = \varepsilon/\ln(\lambda_0/\lambda_1)$ で定めます。$\hbar \to 0$ で格子の値と連続の値の差は作用の差 $S_0^{\mathrm{lat}} \neq S_0$ として指数に入るので、数を書くときは格子の値を使います（§03・§07）。

03

キンク — 作用 $S_0=2/3$・位置の自由度・拡散係数 $D=\hbar/S_0$

$\hbar$ が小さいとき、重み $e^{-S/\hbar}$ は作用の小さい経路に集まります。作用を 0 にするのは、ずっと右の谷にいる経路 $x \equiv 1$ と、ずっと左の谷にいる経路 $x \equiv -1$ です。その次に作用の小さい「谷から谷へ移る」経路が**キンク**です。

(2) の停留点の式は $\ddot{x} = V'(x)$（位置エネルギー $-V$ の中の運動、2-07 §05）で、$\tau \to \pm\infty$ で谷に落ち着く解はエネルギーの保存 $\frac{1}{2}\dot{x}^2 = V(x)$ を満たします。(1) から $\dot{x} = \sqrt{2V(x)} = (1-x^2)/2$ で、これを解くと

$$x_{\mathrm{cl}}(\tau) = \tanh\frac{\tau - \tau_0}{2}, \qquad S_0 = \int \dot{x}_{\mathrm{cl}}^2\, d\tau = \int_{-1}^{1} \sqrt{2V(x)}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{2}\, dx = \frac{2}{3} \tag{8}$$

です 初 （(2) に $\frac{1}{2}\dot{x}^2 = V$ を入れると被積分関数は $\dot{x}^2$ になり、$dx = \dot{x}\,d\tau$ で x の積分に直す）。キンクの幅は τ で 2 程度、作用は $\hbar$ に依らない数 $2/3$ です。これは 2-05 §07 の $S_0 = 2a^2/3$（$a=1$）、物理の言葉ではインスタントンの作用です（3-05）。

位置の自由度。(8) の τ_0 は何でもよく、キンクを虚時間の向きにずらしても作用は変わりません。作用の二階微分（ゆらぎの作用素）$-\partial_\tau^2 + V''(x_{\mathrm{cl}})$ は、$\dot{x}_{\mathrm{cl}}$ を固有値 0 の固有関数に持ちます 初 （停留点の式 $\ddot{x}_{\mathrm{cl}} = V'(x_{\mathrm{cl}})$ を τ で微分すると $\dddot{x}_{\mathrm{cl}} = V''(x_{\mathrm{cl}})\dot{x}_{\mathrm{cl}}$）。この平らな向き（零モード）が、キンクの位置という一つの遅い自由度です。次の固有値は $3/4$、その上は $[1,\infty)$ の連続の部分と知られています 仮 （Pöschl–Teller の型の作用素。原典の言明はこの部では確かめていない）。

拡散係数。(5) の雑音をキンクの位置の向きに射影すると、位置 X は拡散します。位置を一つずらす向きは $\dot{x}_{\mathrm{cl}}$ で、その長さの二乗が $\int \dot{x}_{\mathrm{cl}}^2 d\tau = S_0$ なので、雑音の強さ $\hbar$ が S_0 で割られて

$$\mathbb{E}\big[(X_t - X_0)^2\big] \approx 2Dt, \qquad D = \frac{\hbar}{S_0} \tag{9}$$

となります。典 同じ射影の勘定は、区間の上の確率的 Allen–Cahn 方程式で、単一の界面が拡散係数 $3/4$ のブラウン運動に収束するという定理（単一の界面の拡散の定理（Bertini–Brassesco–Buttà の定理 2.1））の係数を再現します。つまり (9) は「単一のキンクの動き」の水準では既知の定理の言い換えです。読 刻み $\varepsilon = 0.25$ の環で一本のキンクを追った

Langevin の数値では、$D/(\hbar/S_0)$ は 1.00 ± 0.03（$\hbar = 0.02$）・1.04（0.07）・1.14 ± 0.05（0.1）でした。

正確には、(9) は一本のキンクの位置の過程についての文で、経路全体の隙間 $1/C_P$ についての文ではありません。多くのキンクがある長い経路で、隙間がキンクの拡散で決まるかは、まさに上の側の問い（一段目の上界の命題）です。

物差しの伸び方

トンネル分裂 Δ は、虚時間の経路で言えば「キンクが一本入る重み」$e^{-S_0/\hbar}$ で決まります。半古典の主項は（2-05 §07 の (10) を $\hbar$ つきに書いたもの）

$$\frac{1}{\xi} = \frac{\Delta}{\hbar} \;\approx\; \frac{4}{\sqrt{\pi\hbar}}\, e^{-S_0/\hbar}, \qquad \xi^2 \approx \frac{\pi\hbar}{16}\, e^{2S_0/\hbar}, \qquad \ln \xi = \frac{S_0}{\hbar} + \frac{1}{2}\ln\hbar + O(1) \tag{10}$$

で 典 （主項の式は 2-05 の出典の写し。Δ を独立な二つの数値の方法で求めると、主項との比は $\hbar = 0.5$ の 0.47 から $\hbar = 0.05$ の 0.92 へと 1 に近づく 読 ）、相関長は $\xi \propto \hbar^{1/2} e^{S_0/\hbar}$ と指数で伸びます。格子の模型では S_0 の代わりに格子のキンクの作用 $S_0^{\mathrm{lat}} = 0.665266$（$\varepsilon = \frac{1}{2}$。$2/3$ との差は 0.2%）が指数に入ります 読 。$\hbar = 10^{-3}$ でこの差は $\ln\xi$ を 1.4 だけ動かすので、数を書くときは格子の値を使います。

04

下界 C_P ≥ ξ² — 一次元の片側の橋と、その先の読み

C_P は上限なので、一つの試験関数で下から押さえられます（23-00 §06）。最も素直な試験関数は、一つの時刻の関数 $h(x)$ を時間で足したもの

$$f = \int_0^T h\big(x(\tau)\big)\, d\tau \tag{11}$$

です（時刻に局所な試験関数）。この族では、下界は物差しの二乗にちょうど届きます。

一次元の片側の橋の命題（連続の時間・$T \to \infty$・どの一次元の井戸でも）

(11) の形の f の Rayleigh 商 $\mathrm{Var}(f)/\mathcal{E}(f)$ の $T \to \infty$ の極限の上限は、ちょうど $\xi^2 = 1/m^2$ で、$h = \psi_1/\psi_0$（ψ_0, ψ_1 は H の最低の二つの固有関数）で達する。したがって $C_P \geq \xi^2$、すなわち $R \geq 1$。

初 証明〔三〕。$\varphi := (h - \langle h\rangle)\psi_0$、$A := (H - E_0)/\hbar$ と置きます。A は虚時間の生成子で、ψ_0 に直交する関数の上で $A \geq m$ です。転送作用素で相関を書くと（2-07 §08）

$$\frac{\mathrm{Var}(f)}{T} \;\longrightarrow\; \int_{-\infty}^{\infty} \langle \varphi, e^{-|\tau| A}\varphi\rangle \, d\tau = 2\,\langle \varphi, A^{-1}\varphi\rangle \tag{12}$$

です。一方 $\delta f/\delta x(\tau) = h'(x(\tau))$ なので $\mathcal{E}(f)/T = \hbar \int \psi_0^2 h'^2\,dx$ で、基底状態変換の恒等式 $\langle \varphi, (H-E_0)\varphi\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\int \psi_0^2 h'^2\,dx$（2-05 §08・1-10 §08）から $\mathcal{E}(f)/T = 2\langle \varphi, A\varphi\rangle$ です。A の固有分解 $\varphi = \sum_k c_k e_k$（固有値 $a_k \ge m$）で、$1/a \le a/m^2$ から

$$\frac{\sum_k |c_k|^2/a_k}{\sum_k |c_k|^2 a_k} \;\le\; \frac{1}{m^2} = \xi^2 \tag{13}$$

で、等号は φ が固有値 m の固有空間にあるとき、つまり $h - \langle h\rangle \propto \psi_1/\psi_0$ のときです。∎ 転送作用素の式 (12) と基底状態変換の恒等式は既知の事実として引いています 典 。Lean `local_rayleigh_ratio_le_one`（仮定：$0 < m \cdot a_k \ge m \cdot c_k \ge 0 \cdot \sum c_k a_k > 0$）は (13) の有限和の骨だけを検査したもので、固有分解・(12)・基底状態変換は Lean の外です。

一次元の片側の橋の命題は、二重井戸に限らずどの一次元の井戸でも成り立ちます。同じ形の主張が文献にあるかは確かめていません（既知かもしれません）。

その先の読み。一次元の片側の橋の命題は「時刻に局所な試験関数では $R = 1$ が天井」とも言っています。$R > 1$ を見るには、時刻をまたぐ試験関数（例えば、経路を時間でぼかしてから符号を見る、キンクの集団の位置を数える）が要ります。そうした試験関数の Rayleigh 商を、転送作用素から直接引いた標本（マルコフ連鎖を回して近づける標本ではない）で評価すると、R の下界は $\hbar = 0.4$ の 1.06 から $\hbar = 0.07$ の 6.5 へ伸びました 読 （族の下界・刻み $\varepsilon = 0.25$・$T = \infty$ の測度の窓・種による差 ±10〜15%）。Langevin 力学で最も遅い観測量の減衰を測った値とも、$\hbar = 0.3$〜0.15 で揃いました 読 （どちらも下界で、上界ではない）。

伸び方の型は、キンクを数える物理の水準の勘定（希薄なキンクの気体・(9) の拡散係数）では $R \approx S_0/\hbar \approx \ln \xi$、つまり

$$C_P \;\approx\; \xi^2\,\frac{S_0}{\hbar} \;\approx\; \frac{\pi}{24}\,e^{4/(3\hbar)} \tag{14}$$

です 仮 （勘定は発見的で、証明ではない）。この範囲の数値だけでは、R が $1/\hbar$ で伸びるか $e^{c/\hbar}$ で伸びるかを区別できません。前者なら二重井戸の冪の言明は成り立ち、後者なら破れます。二重井戸でも、定数倍の幅で言う文 $C_P \le K\xi^2$ は破れる側にある、と読むのはこのためです。

05

上の側の目標と、長い経路の帯

(14) の形に合わせて、上の側の目標を

$$C_P \;\le\; K\,\frac{\xi^2}{D} = K\,\xi^2\,\frac{S_0}{\hbar} \qquad (K \text{ は } \hbar \text{ に依らない}) \tag{15}$$

と置きます。一次元の片側の橋の命題と合わせれば $1 \le R \le K S_0/\hbar$ で、二重井戸の冪の言明が従います（23-03 §05 の (4)）。(15) は二重井戸の四条件の上の一段目の上界の命題の結論で、証明されていません（23-05）。

(15) を示す素朴な道は、遅い変数を一つ（例えば経路の平均の位置、磁化）選び、「それに直交する関数は速く緩和する」ことを示す道です。短い経路（$T \ll \xi$、キンクが高々一対）ではこの形で正しい勘定が出ます。ところが長い経路（$T \gg \xi$）では、この道は使えません。

理由は一次元の Ising 鎖の Glauber 力学で見えます。一つのスピンの関数が張る空間は生成作用素で閉じ、波数 k のフーリエ成分 $S_k = \sum_j e^{ikj}\sigma_j$ は固有値 $\alpha(1-\gamma\cos k)$ の固有関数です（α は率、$\gamma = \tanh 2K$）。磁化は $k=0$ で、磁化に直交する最も遅い成分 $k = 2\pi/N$ との比は

$$\frac{1-\gamma\cos(2\pi/N)}{1-\gamma} = 1 + \frac{\gamma\,(1-\cos(2\pi/N))}{1-\gamma} \;\approx\; 1 + \Big(\frac{2\pi\xi}{N}\Big)^2 \tag{16}$$

で、鎖が相関長より十分長い（$N/\xi \to \infty$）と 1 に近づきます 初 （比の書き換え） Lean `glauber_band_ratio` （仮定：$\gamma \neq 1$）。固有値の式そのものは、$N = 8, 10$ の鎖の全状態の対角化で、二つの固有値がそのまま現れることを 8 桁で見ました 読 （Glauber の原典の言明はこの部では確かめていない）。最も遅い揺らぎは孤立した一つのモードではなく、連続な帯の下の端です。二重井戸の長い経路でも、キンクの密度の長い波の揺らぎが同じ帯を作り、磁化を固定した条件つきの測度の Poincaré 定数は ξ^2/D と同じ大きさのまま残ります。

だから長い経路では、遅い変数を体積に比例する数だけ取るか、長さ $C\xi$ の箱に問題を切り分ける必要があります。後者が箱への帰着の条件（箱の力学への帰着）と箱の中の隙間の条件です（23-11）。

06

頂上の台地 — 曲率が凸性に ¼ 足りない

測度 $e^{-S/\hbar}$ が凸な作用（対数凹な密度）を持てば、Bakry–Émery の判定で C_P は作用の曲率の逆数以下に押さえられ、長さにも $\hbar$ にも依りません 典 （1-10）。二重井戸の経路の測度は凸ではありません。どこで凸性が破れるかを格子 (3) で見ます。

作用 (3) の二階微分（Hessian）は、対角に $2/\varepsilon + \varepsilon V''(x_i)$、隣どうしに $-1/\varepsilon$ が並ぶ行列です。$\varepsilon = \frac12$ では対角は $4 + \frac12 V''(x_i)$、隣は -2 です。長い区間で一様に凸であるには、対角が隣の二つの和の大きさ 4 以上であれば足ります（対角優位）。谷の中（$|x_i|$ が 1 に近い）では $V'' \approx 1$ で対角は 4.5 と足りますが、山の頂上 $x_i = 0$ では $V''(0) = -\frac12$ なので

$$\underbrace{4+\tfrac{1}{2}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)}_{\text{頂上の一サイトの曲率}} = \frac{15}{4} = 4-\frac{1}{4} \tag{17}$$

で、$\frac{1}{4}$ 足りません 初 。全てのサイトが頂上にいる経路 $x \equiv 0$ では、Hessian の最も小さい固有値（一様な向き）がちょうど $\varepsilon V''(0) = -\frac{1}{4}$ です。

キンクの対の間、経路が頂上の近くにとどまる区間は、作用がほとんど変わらない平らな向き（台地）を作ります。逆に、谷の奥の凸な芯 $\{x_i \geq a\}$（$a > 1/\sqrt{3}$）に経路を閉じ込めれば、Bakry–Émery で $C_P \leq 2/(3a^2-1)$ が長さ・$\hbar$ に一様に出ます 初 （曲率の下界）典 （Bakry–Émery の型）Lean `convex_core_curvature`（仮定：$1/3 < a^2$・$0 \leq a \leq x$）。ただし芯から外へ出て戻る小旅行の作用 $2/3 - a + a^3/3$ はキンクの作用 $2/3$ より小さく（$a = 1/\sqrt{3}$ で 0.1535）Lean `excursion_action_lt_kink`（仮定：$0 < a < 1$）、長さ ξ の区間には小旅行が指数で多く入ります。凸な芯だけでは、相の中の局所 Poincaré（相内の局所 Poincaré の条件）は出ません。

この $\frac{1}{4}$ の不足は、上の側を組むどの道でも、形を変えて同じ場所に戻ってきます。後の章でこれを共通の壁と呼びます（23-09）。

07

数の例 — 三つの ħ での ln ξ

この部の後の章は、三つの $\hbar$ を代表に使います。順は必ず大から小で、$\hbar = 3\cdot10^{-3}/10^{-3}/3\cdot10^{-4}$ です。選ぶ理由は、$\ln\xi$ が約 218 から約 2213 まで大きく変わり、相関長が $\hbar$ について指数で伸びる体制の代表になるからです。表 2 は格子 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ の値です。

読 表 2　三つの $\hbar$ での $\ln\xi$ と $\ln(\xi^2 S_0/\hbar)$（格子 $\varepsilon = \frac{1}{2}$・$T = \infty$。$\xi$ は虚時間の長さ。浮動小数の値）

量	$\hbar = 3\cdot10^{-3}$	$\hbar = 10^{-3}$	$\hbar = 3\cdot10^{-4}$
$\ln\xi$	218.08	661.04	2212.72
$S_0^{\mathrm{lat}}/\hbar$	221.76	665.27	2217.55
$\ln\xi - S_0^{\mathrm{lat}}/\hbar - \frac{1}{2}\ln\hbar$	−0.774	−0.777	−0.778
$\ln(\xi^2 S_0/\hbar)$（上の側の目標の尺度）	441.6	1328.6	4433.1

$\ln\xi$ は転送作用素の上位二つの固有値の差を、引き算をしない Herring の式（次の寄り道）で求めた値です。中くらいの $\hbar$（0.2・0.05・0.04）では、行列の固有値を直接求める道と Herring の式の道が六桁まで一致しました 読 。三行目の残りが $\hbar$ に依らない数に寄ることは (10) の形 $\ln\xi = S_0/\hbar + \frac{1}{2}\ln\hbar + O(1)$ と整合し、連続の半古典の値 $\frac{1}{2}\ln(\pi/16) \approx -0.814$ との差は格子の補正と読まれます。

四行目は (15) の右辺の尺度で、$2\ln\xi$ との差は $\ln(S_0/\hbar)$ です。二つの列の比は 2 に近く、$\hbar$ を下げるほど 2 に寄ります。二重井戸の冪の言明の「2」が、この差の小ささの言い換えです。

正確には、表 2 は浮動小数の値で、区間演算で包んだ値ではありません。ξ は e^{218}〜e^{2213} の大きさで、Monte Carlo で直接測れる長さではなく、転送作用素の固有値から読む量です。三つの $\hbar$ は代表の点で、後の章の「節点」や「窓」とは別の役です（区別は 23-12）。

寄り道：トンネル分裂を Herring の式で

飛ばしてよい小節です。$\hbar = 10^{-3}$ では $\Delta/\hbar$ は e^{-661} の大きさで、二つの固有値 λ_0, λ_1 を別々に求めて引くと、浮動小数の桁は全て消えます。そこで差を直接書く式を使います。

転送作用素の積分核 $K(x,y)$ は対称で、$x \to -x$, $y \to -y$ で変わりません。半直線 $x, y > 0$ の上の二つの核 $A(x,y) = K(x,y)$、$C(x,y) = K(x,-y)$ を作ると、偶の固有関数は $A+C$、奇の固有関数は $A-C$ の固有関数（固有値 λ_e・λ_o）です。A と C はどちらも対称なので、偶の固有関数 u・奇の固有関数 v について

$$v\cdot(A+C)u - u\cdot(A-C)v = (\lambda_e-\lambda_o)\,u\cdot v \quad\Longrightarrow\quad \lambda_e-\lambda_o = \frac{2\,u\cdot Cv}{u\cdot v} \tag{18}$$

です 初 （左辺で $v\cdot Au = u\cdot Av$ が消え、$v\cdot Cu = u\cdot Cv$ が二つ残る）。右辺には引き算がありません。$A-C$ の核は $x,y>0$ で正（$(x+y)^2 > (x-y)^2$ なので $K(x,y) > K(x,-y)$）なので、奇の固有関数も半直線の上で正にとれ、対数の領域で尾まで相対の精度を保って計算できます。これが量子力学の Herring の公式（波動関数の重なりで分裂を書く式）の転送作用素の版です。

この章の言明の分類

この章の言明を、この部の五分類の書式（23-00 §01 の表 1）で一表にします。後の章の命題の表と同じ列です。

表 3　この章の言明（分類は一行に一つ。機械検査の欄は分類の外）

言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
キンクの形 $\tanh(\tau/2)$ と作用 $S_0 = 2/3$	初	§03 の (8)	$\hbar$ に依らない	—
ゆらぎの作用素が $\dot{x}_{\mathrm{cl}}$ を固有値 0 に持つ（位置の自由度）	初	§03	$\hbar$ に依らない	—
ゆらぎの作用素の次の固有値 $3/4$・連続の部分 $[1,\infty)$	仮	§03（Pöschl–Teller の型。原典は未確認）	$\hbar$ に依らない	—

言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
一本のキンクの位置の拡散係数 $D=\hbar/S_0$（過程の水準）	典	§03 の (9)。Bertini–Brassesco–Buttà の単一の界面の拡散の定理の係数の写し	$\hbar\to 0$	—
$D/(\hbar/S_0)=1.00$〜1.14	読	§03（Langevin の点の値・$\varepsilon=0.25$）	0.02・0.07・0.1	—
ξ の半古典の主項 (10)	典	§03・2-05 §07	$\hbar\to 0$	—
格子の $\ln\xi$（表 2）と $S_0^{\mathrm{lat}}=0.665266$	読	§07（転送作用素・Herring の式・浮動小数）	三点	—
一次元の片側の橋の命題：時刻に局所な族の天井は ξ^2、よって $C_P\ge\xi^2$	初	§04 の証明（(12) と基底状態変換は典として引く）。連続の時間・$T\to\infty$	全ての $\hbar$	`local_rayleigh_ratio_le_one`（仮定：$0<m$・$a_k\ge m$・$c_k\ge 0$・$\sum c_k a_k>0$。有限和の骨だけ）
R の下界が 1.06 から 6.5 へ伸びる	読	§04（族の下界・$\varepsilon=0.25$）	$[0.07,0.4]$	—
$C_P\approx\xi^2 S_0/\hbar$（(14)）	仮	§04（希薄な気体の勘定・発見的）	$\hbar\to 0$	—
磁化に直交する成分との比 (16) が 1 に近づく（帯）	初	§05（比の書き換え）	$\hbar$ に依らない	`glauber_band_ratio`（仮定：$\gamma\neq 1$）
Glauber の固有値 $\alpha(1-\gamma\cos k)$ が全状態のスペクトルに現れる	読	§05（$N=8,10$ の対角化・8 桁）	—	—
頂上の一サイトの曲率 $15/4=4-\frac{1}{4}$	初	§06 の (17)	$\hbar$ に依らない	—
凸な芯 $\{x_i\ge a\}$ で $C_P\le 2/(3a^2-1)$	初	§06（曲率の下界は初、Bakry–Émery の型は典として引く）	$\hbar$ に依らない	`convex_core_curvature`（仮定：$1/3<a^2$・$0\le a\le x$）
上の側の目標 (15) $C_P\le K\xi^2 S_0/\hbar$	仮	一段目の上界の命題の結論（二重井戸の四条件の上）。23-05	$\hbar\to 0$	(15) から二重井戸の冪の言明へは `power_H_of_kink_ratio`（仮定は 23-03 §05）

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 キンクの作用 $S_0=2/3$ と零モード、頂上の曲率の不足 $\frac{1}{4}$、Herring の式の転送作用素の版 (18)	ゆらぎの作用素の残りのスペクトル（次の固有値）の原典での確認

言えている	言えていない
初 一次元の片側の橋の命題：$C_P \geq \xi^2$（連続の時間・$T \to \infty$。(12) と基底状態変換は典として引く）	C_P の上界。R が $1/\hbar$ で伸びるか指数で伸びるか
典 一本のキンクの拡散係数 $D = \hbar/S_0$（過程の水準）、ξ の半古典の主項	経路全体の隙間がキンクの拡散で決まること（上の側の問い）
読 R の下界の伸び（1.06→6.5）、三つの $\hbar$ での $\ln \xi$（表 2）、D の数値	表 2 の値を区間演算で包むこと。$\varepsilon = 0.25$ の読みと $\varepsilon = \frac{1}{2}$ の読みの間の換算
仮 上の側の目標 (15) は一段目の上界の命題の結論の形として置いた	(15) そのもの。二重井戸の冪の言明。四次元のゲージ理論について、この章は何も示さない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
経路積分・虚時間の測度・転送行列	典	2-07 の出典表。
二重井戸のトンネル分裂の主項・S_0	典	2-05 の出典表（Zinn-Justin–Jentschura 2004 の式 (2.8)）。$\hbar$ つきへの写しと、主項との比の数値は記録の数値（二つの独立な方法・$\hbar = 0.5 \sim 0.05$）。
Poincaré 定数・Langevin の隙間・Bakry–Émery の型	典	1-10 の出典表。
単一の界面の拡散係数	典	L. Bertini, S. Brassesco, P. Buttà, arXiv:math-ph/0611076（単一の界面の拡散の定理、本文で確認）。
区間を止めた体制の遷移の時間	典	N. Berglund, B. Gentz, arXiv:1202.0990（定理 2.6、本文で確認）。固有値への読み替えは読み。
Glauber 力学の一スピンの固有値	仮・読	R. J. Glauber, J. Math. Phys. 4 (1963) 294（書誌は記憶で、この部では確かめていない）。$N = 8, 10$ の対角化で固有値を確認。
一次元の片側の橋の命題・(13) の有限和	初・Lean	本文 §04。定理 `local_rayleigh_ratio_le_one`（仮定は表 3 の一次元の片側の橋の命題）。
自由場の $R = 1$・帯の比・凸な芯・小旅行の作用	初・Lean	定理 `ratioR_free_eq_one`・`glauber_band_ratio`・`convex_core_curvature`・`excursion_action_lt_kink`（仮定は本文の各行）。言明の一覧は 23-13。
R の下界・D の数値・表 2	読	記録の浮動小数の計算（転送作用素から直接引いた標本の Rayleigh 商・Langevin・転送作用素と Herring の式）。値は区間演算で包んでいない。

この章で使った語 — 二重井戸・経路の測度・Dirichlet 形・キンク・零モード・キンクの拡散係数・トンネル分裂・相関長（二重井戸の）・Herring の式・台地・凸な芯・相（キンクの無い相）。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-05 一段目の言明 ― 二重井戸の四条件と上界の命題 ― 分散の分割の代数で上の側を四つの条件に割り、一段目の上界の命題を示せた部分と仮定の行に分けて述べる。

一段目の言明 — 二重井戸の四条件と上界の命題

この章は本書の検討です。§05 は既存の知見です。

この章で分かること — 二重井戸の経路の測度の上の側 $C_P \le K\xi^2 S_0/\hbar$ を、二重井戸の四条件（相内の局所 Poincaré の条件・鞍点の管の条件・箱への帰着の条件・箱の中の隙間の条件）に割ります。箱への帰着の条件で無限に長い経路を長さ $C\xi$ の箱に帰着させ、箱の中の隙間の条件で箱の中の隙間を押さえ、相内の局所 Poincaré の条件・鞍点の管の条件は箱の中の速い部分として箱の中の隙間の条件の中に入ります。その上で $R = C_P/\xi^2$ が $1 \le R \le K'/\hbar$ に挟まれ、二重井戸の緩和時間の冪の言明が従うまでを、段ごとに「何を使うか・どの分類か」を添えて一本の筋で述べます。章の終わりに、一段目の上界の命題の段を五分類の表と依存グラフにまとめます。

前提となる章 — 23-03 §05（二重井戸の冪の言明と一段目の上界の命題の形）・23-04（経路の測度・キンク・一次元の片側の橋の命題）・1-10 §07〜§09（Poincaré 不等式）・23-00 §01（五分類の札）。

先に言うこと — 水準は〔三〕です。一段目の上界の命題は四つの条件の上の代数で、四つの条件はどれも仮定の行を残しています。この章は一段目が閉じたことを述べる章ではなく、何を示せば閉じるかを名指す章です。この部は拡散型緩和時間の仮定を取っ掛かりとして選んだ検討で、四条件への割り方もその中の一つの組み立て方です。別の視点は第 24 部で扱います。

この章の順序

1. 分散の分割 — 二つの谷に割る代数と、それだけでは長い経路に足りない理由
2. 示せた部分 — 分割の代数・凸な芯・縮約した台地・キンクの拡散係数
3. 四つの条件の言明 — 何の測度の・何の定数が・何に一様か
4. 一段目の上界の命題を一本の筋で — 箱への帰着 → 箱の中 → $C_P \le K\xi^2 S_0/\hbar$ → $R \le K'/\hbar$ → 二重井戸の冪の言明
5. 既知の定理との距離 — 届く所と届かない所（表 1）

6. 五分類の表 — 一段目の上界の命題の段の行（表 2）
7. 依存グラフ — 番号で円が無いことを確かめる
8. 揃う $\hbar$ と四条件の現在地 — 23-06〜23-12 への案内

01

分散の分割 — 二つの谷に割る代数

設定は 23-04 §01 のとおりです。格子 $\varepsilon = \frac{1}{2}$、作用 S_{lat}、測度 $\mu \propto e^{-S_{\mathrm{lat}}/\hbar}$、Dirichlet 形 $\mathcal{E}(f) = (\hbar/\varepsilon)\sum_i \mathbb{E}|\partial_i f|^2$、$C_P = \sup_f \mathrm{Var}(f)/\mathcal{E}(f)$、キンクの拡散係数 $D = \hbar/S_0$、$S_0 = 2/3$ です。$T \to \infty$ を先に取り、そのあとで $\hbar \to 0$ とします。

上の側を組む最初の道具は、測度を二つの部分に割る代数です。配位の空間を二つに分け（例えば経路を均した値の符号で）、$\mu = Z_+\mu_+ + Z_-\mu_-$（$Z_\pm \ge 0$・$Z_+ + Z_- = 1$、$\mu_\pm$ は各部分に制限して規格化した測度）と書くと、どの f についても

$$\mathrm{Var}_\mu f = Z_+\,\mathrm{Var}_{\mu_+} f + Z_-\,\mathrm{Var}_{\mu_-} f + Z_+Z_-\big(\mathbb{E}_{\mu_+} f - \mathbb{E}_{\mu_-} f\big)^2 \tag{1}$$

が成り立ちます 初 （混合の分散の恒等式。$m_\pm = \mathbb{E}_{\mu_\pm} f$、$m = Z_+m_+ + Z_-m_-$ と置いて $\mathbb{E}_\mu(f-m)^2$ を各部分で $f - m_\pm$ と $m_\pm - m$ に分け、$Z_+(m_+-m)^2 + Z_-(m_- - m)^2 = Z_+Z_-(m_+ - m_-)^2$ を使う）。

右辺の三つの項に、それぞれ次の不等式があるとします。

$$\mathrm{Var}_{\mu_\pm} f \le C_{\mathrm{loc}}\,\mathcal{E}_\pm(f), \qquad \big(\mathbb{E}_{\mu_+} f - \mathbb{E}_{\mu_-} f\big)^2 \le C_{\mathrm{md}}\,\mathcal{E}(f), \qquad Z_+\mathcal{E}_+(f) + Z_-\mathcal{E}_-(f) \le \mathcal{E}(f) \tag{2}$$

一つ目は谷の中の局所 Poincaré、二つ目は谷と谷の平均の差を Dirichlet 形で押さえる「平均差の輸送」、三つ目は形の加法です。$Z_+Z_- \le \frac{1}{4}$ なので

$$C_P \;\le\; C_{\mathrm{loc}} + \frac{C_{\mathrm{md}}}{4} \tag{3}$$

です 初 Lean `split_poincare_le` （仮定：$Z_+ + Z_- = 1$・$Z_\pm \ge 0$・分割の式 (1)・二つの局所 Poincaré・平均差・形の加法・定数が非負）。分割の式 (1) は分散の分割の補題（Menz–Schlichting の補題 2.4）と同じ形です 典 （有限次元の Eyring–Kramers の Poincaré 版の骨組み）。

(3) の二つの定数のうち、C_{loc} が後で相内の局所 Poincaré の条件になり、C_{md} が鞍点の管の条件になります。ところが (3) をそのまま長い経路に当てることはできません。

長い経路では一つの粗い変数では足りない。(1) は「遅い変数を一つ（谷のどちらにいるか）取り、残りは速い」という割り方です。経路が相関長より十分長い（$T \gg \xi$）と、キンクの密度の長い波の揺らぎが連続な帯を作り、谷を一つ固定した条件つきの測度の Poincaré 定数は ξ^2/D と同じ大きさのまま残ります（23-04 §05 の Glauber の帯）。つまり C_{loc} が $O(1)$ になりません。そこで、遅い変数を体積に比例する数だけ取る代わりに、問題を長さ $C\xi$ の箱に切り分けます。これが箱への帰着の条件と箱の中の隙間の条件で、相内の局所 Poincaré の条件・鞍点の管の条件は箱の中で使われます（§04）。

02

示せた部分 — 分割の代数・凸な芯・縮約した台地・拡散係数

上の側の組み立てのうち、仮定の行を持たずに言える部分を先に並べます。

(a) 分割の代数。(1)〜(3) は §01 のとおりです 初 。

(b) 凸な芯。谷の奥の凸な領域 $\{x_i \ge a\ \forall i\}$（$a > 1/\sqrt{3}$）に制限した測度は、作用の Hessian が $\varepsilon\kappa_a$（$\kappa_a = (3a^2-1)/2$）以上なので、凸な領域の Bakry–Émery で $C_P \le 2/(3a^2-1)$ が長さ・$\hbar$・境界に一様に出ます 初 （曲率の下界） 典 （凸な領域の Bakry–Émery、Kolesnikov–Milman の定理 1.2）。証明と Lean の言明は 23-04 §06 にあります。ただし芯の外への小旅行はキンクより作用が小さく、長さ ξ の区間には指数で多く入るので、凸な芯だけでは相内の局所 Poincaré の条件は出ません。

(c) 縮約した台地の二状態の値。短い環（$T \ll \xi$）では、谷を移る道はキンクの対一組で、対の間隔 ℓ が遅い一つの座標になります。ℓ だけを残した一次元の模型（ℓ は拡散係数 $2D$ で動き、両端に谷の原子、間に台地の重み $\pi(\ell)$）では、平均差を Cauchy–Schwarz の不等式で押さえ、ℓ の両端の値の差を $\int f'(\ell)\,d\ell$ と書いて

$$\big(f(\text{右の谷}) - f(\text{左の谷})\big)^2 \;\le\; \int \frac{d\ell}{\pi(\ell)} \cdot \int \pi(\ell)\, f'(\ell)^2\, d\ell \tag{4}$$

から $C_{\mathrm{md}}/4 = J/(4D)$ の形の値が出て、等号は符号の試験関数でほぼ達します 初 （(4) は Cauchy–Schwarz の不等式） Lean `reduced_two_state_value` （仮定：$0 < T$・$0 < D$・$J = 4\xi^2 I/T$、I は台地の重みの積分）。縮約した模型そのもの（ℓ 以外を捨ててよいこと）は模型の仮定で、この値は「縮約した模型の上の値」です 仮 。

(d) キンクの拡散係数。一本のキンクの位置は拡散係数 $D = \hbar/S_0$ で動きます。これは単一の界面の過程の水準では既知の定理の係数の写しです 典 （23-04 §03 の (9)）。経路全体の隙間の文ではありません。

この四つで尽きます。残る部分、すなわち谷の中の局所 Poincaré が長さと $\hbar$ に一様なこと、平らな鞍点の族に沿う輸送が次元に一様なこと、長い経路を箱に帰着させること、箱の中の隙間は、既知の定理の仮定の外にあります（§05）。これを四つの条件として名指します。

03

四つの条件の言明 — 何の測度の・何の定数が・何に一様か

四つの条件を、測度・定数・一様性の三つを明示して書きます。どれも 0+1 次元の二重井戸 $V=(x^2-1)^2/8$、格子 $\varepsilon=\frac{1}{2}$、Dirichlet 形 $\mathcal{E}$ の上の文です。「一様」は、$\hbar\in(0,\hbar_0]$ のある $\hbar_0>0$ について、定数が $\hbar$ に依らない（$\hbar\to 0$ で増えない）ことを言います。

相内の局所 Poincaré の条件（相の中の局所 Poincaré）

測度：キンクの無い相の測度。経路が一つの谷の側にとどまる配位、例えば全てのサイトで $x_i\ge 0$ の配位に制限した測度 $\mu^{(+)}=\mu(\cdot\mid x_i\ge 0\ \forall i)$（壁 $x_i=0$ では反射）。**定数**：$\mu^{(+)}$ の Poincaré 定数 C_{loc}、すなわち $\mathrm{Var}_{\mu^{(+)}} f\le C_{\mathrm{loc}}\,\mathcal{E}(f)$。**一様性**：$C_{\mathrm{loc}}=O(1)$ が $\hbar$ と経路の長さに一様。箱の中で使うときは、端の値を持つ切れ端（長さ $\le C\xi$）の版（切れ端の局所 Poincaré の仮定）が要り、端の値にも一様であること。

鞍点の管の条件（平らな鞍点の族に沿う輸送）

測度：キンクと反キンクの対の族（対の中心 X と間隔 ℓ を径数とし、作用がほとんど平らな鞍点の族）の周りの管に入る配位の条件つきの測度。**定数**：その族に沿って谷から谷へ移る平均差の輸送の定数（(2) の C_{md} の型）と、管の中の Poincaré 定数。**一様性**：経路のサイトの数（次元）と $\hbar$ に一様。箱の中で使うときは、管の長さ $\le C\xi$ に一様な管の Poincaré（鞍点の管の Poincaré の仮定）と、管の中の芯（頂上の近くにとどまる区間）の Poincaré が芯の長さ k に一様なこと（芯の Poincaré の一様性の仮定）の二つの行になる。

箱への帰着の条件（箱の力学への帰着）

測度：$T=\infty$ の格子の直線 $\mathbb{Z}$ の上の測度 μ と、長さ L サイト（$L\varepsilon=C\xi$）の箱 B の両隣の値 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ を固定した条件つきの測度 $\mu_B^{a,b}$。**定数**：$C_{\mathrm{box}}(L):=\sup_{a,b\in\mathbb{R}} C_P(\mu_B^{a,b})$ と、箱の間の混合の定数 c_M。**言明**：$C_P(\mu)\le C_{\mathrm{box}}(L)/c_M$。**一様性**：$c_M$ は ξ を単位とした長さ（C と箱の重なりの割合）だけに依り、$\hbar$ と境界の値に依らない。

箱の中の隙間の条件

測度：長さ $C\xi$ の箱の条件つきの測度 $\mu_B^{a,b}$。箱の中のキンクの数は平均で $O(1)$（キンクの密度は $1/(2\xi)$ なので期待値は $C/2$）。**定数**：隙間 $1/C_P(\mu_B^{a,b})$。**言明**：$1/C_P(\mu_B^{a,b}) \geq c\,D/(C\xi)^2$、すなわち $C_{\mathrm{box}} \leq K_4 (C\xi)^2/D$（$K_4 = 1/c$）。**一様性**：$c$ は $\hbar$ と境界の値 (a,b) の全てに一様（C には依ってよい）。

四つは同じ重さの条件ではありません。箱への帰着の条件は「長い経路の問題を箱の問題に移す」段、箱の中の隙間の条件は「箱の中を遅い変数（キンクの配置）と速い変数に割る」段で、相内の局所 Poincaré の条件・鞍点の管の条件はその速い変数の側の文です。相内の局所 Poincaré の条件・鞍点の管の条件が箱の中の隙間の条件の中に入る場所を、次の節で一本の筋にします。

正確には、二重井戸の四条件は、緩和時間の仮定（冪の文、23-01 §05）とは別のものです。緩和時間の仮定は結論の側の文で、二重井戸の四条件はそれを一段目で導くために置いた条件です（23-03 §05）。

04

一段目の上界の命題を一本の筋で

一段目の上界の命題（条件つき）

0+1 次元の二重井戸の経路の測度（格子 $\varepsilon = \frac{1}{2}\cdot T \to \infty$ を先に取る）で、二重井戸の四条件と、下の段 0 の前提の行を仮定する。このとき $\hbar \to 0$ で

$$C_P \;\leq\; K\,\xi^2\,\frac{S_0}{\hbar} = K\,\frac{\xi^2}{D} \qquad (K \text{ は条件の定数だけに依り } \hbar \text{ に依らない}) \qquad (5)$$

が成り立ち、したがって $1 \leq R = C_P/\xi^2 \leq K S_0/\hbar$ で、二重井戸の冪の言明 $\ln C_P / \ln \xi \to 2$ が従う。

(5) は 23-04 §05 の (15)、23-03 §05 の (3) と同じ式です。以下、段ごとに「何を使うか」と分類を添えます。

段 0（仮定を揃える段） 前提の行

$T = \infty$ の測度 μ が一つに決まること（転送作用素の積分核が正であることからの主固有値の単純さ）仮（$\mathbb{R}$ の上の正の核の版の原典は確かめていない。23-04 §01 と同じ行）。有限の

環の $C_P(T)$ と $T=\infty$ の測度の C_P の関係（極限の段）と、以下の段で使う関数の正則性（条件つきの測度・キンクの座標の滑らかさ）仮。この三つは一段目の上界の命題の外に置いた前提で、統合表（23-12）でも仮定の行として数えます。

段 1（箱へ帰着する段） 箱への帰着 — 箱への帰着の条件を箱への帰着の命題の形で

直線 $\mathbb{Z}$ を長さ L サイトの箱で覆います。隣どうしの箱は l サイト重なり（$l \le L/3$）、箱を交互に偶の族 E と奇の族 O に分けます。$\mathcal{G}_E$ を偶の族の外のサイトの値が生成する σ-代数、$\mathcal{G}_O$ を同様に置き、二つの σ-代数の最大相関を

$$c_{\mathrm{alt}} := \sup\bigl\{\operatorname{corr}_\mu(F,G):\ F\in L^2(\mathcal{G}_E),\ G\in L^2(\mathcal{G}_O)\bigr\} \tag{6}$$

とします。

二つの射影の補題。$c=c(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2)<1$ なら、全ての $f\in L^2(\mu)$ で $\operatorname{Var} f \le (1-c)^{-1}\bigl(\mathbb{E}\operatorname{Var}(f\mid\mathcal{G}_1)+\mathbb{E}\operatorname{Var}(f\mid\mathcal{G}_2)\bigr)$。

初 証明。$\tilde f=f-\mathbb{E}f$、$a_i=\mathbb{E}[f\mid\mathcal{G}_i]-\mathbb{E}f$ と置きます。$s:=\|a_1\|^2+\|a_2\|^2=\langle \tilde f, a_1+a_2\rangle \le \|\tilde f\|\,\|a_1+a_2\|$、一方 $\|a_1+a_2\|^2\le s+2c\|a_1\|\|a_2\|\le (1+c)s$。よって $s\le(1+c)\|\tilde f\|^2$ で、$\mathbb{E}\operatorname{Var}(f\mid\mathcal{G}_i)=\|\tilde f\|^2-\|a_i\|^2$ を足すと $(1-c)\|\tilde f\|^2$ 以上です。∎ Lean `two_proj_var`（仮定：$A+B\le(1+c)V$。射影の幾何は Lean の外）。

箱の積。偶の箱どうしは $L-2l\ge 1$ サイト離れているので、最近接の相互作用の Markov 性により $\mathcal{G}_E$ の下で互いに独立です。独立な成分の関数の分散は成分ごとの条件つきの分散の和以下（Efron–Stein の型）なので

$$\mathbb{E}\operatorname{Var}(f\mid\mathcal{G}_E)\ \le\ C_{\mathrm{box}}(L)\sum_{B\in E}\mathcal{E}_B(f) \tag{7}$$

です 初（Markov 性と、独立な積の分散の不等式。証明は 23-11 に置く）。奇の族も同じです。各サイトは偶の族に高々一度・奇の族に高々一度入り、両方に入るのは重なりだけです。

ずらしの平均。箱の並びを l ずつ $n=\lfloor (L-l)/l\rfloor$ 通りずらすと、どのずらしも同じ c_{alt} を持ち、重なりのサイトはずらしの間で互いに素です。二つの射影の補題と (7) を各ずらしに当てて平均すると

$$C_P(\mu)\ \le\ \Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr)\frac{C_{\mathrm{box}}(L)}{1-c_{\mathrm{alt}}} \tag{8}$$

です 初 Lean `box_two_family`・`box_shift_average`（仮定：各ずらしで二族の不等式・$C_{\mathrm{box}}\ge 0$・重なりの形の和が $\mathcal{E}$ 以下）。これが箱への帰着の命題で、箱への帰着の条件の c_M

は $(1-c_{\mathrm{alt}})/(1+1/n)$ に当たります。この段は Poincaré 不等式だけを使い、対数 Sobolev 不等式を使いません。

(8) に残る仮定の行は一つ、交互の最大相関 $c_{\mathrm{alt}}<1$ が $\hbar$ に一様なことです（箱の交互の最大相関の仮定）。値は $C=2$・重なり $\theta=l/L=\frac14$ で $c_{\mathrm{alt}}\approx 0.73$ と読まれます 読 （二状態の電信の鎖の閉じた式の値を写した族の値。上界の証明ではない）。箱の帰着の型は、離散のスピンの Glauber 力学の箱の力学の命題（Martinelli の講義の命題 3.4・3.5）と同じ形です 典 （離散のスピン・全変動の結合の形。ここでは一次元・L^2・最大相関の形に書き直した）。

段 2（箱の中の段） 箱の中 — 箱の中の隙間の条件を箱の中の隙間の命題の形で、相内の局所 Poincaré の条件・鞍点の管の条件の入る場所

箱 B（$L\varepsilon=C\xi$）と境界の値 (a,b) を止めます。箱の中の遅い変数を Y＝キンクの配置（キンクの数と、キンクの多様体への射影で定めた各キンクの位置）とします。分散を Y で分けると

$$\operatorname{Var} f=\mathbb{E}\operatorname{Var}(f\mid Y)+\operatorname{Var}\big(\mathbb{E}[f\mid Y]\big) \tag{9}$$

です 初 （条件つき期待値の恒等式）。

第一項＝速い側。ここに相内の局所 Poincaré の条件と鞍点の管の条件が入る。Y を止めた条件つきの測度は、最近接の Markov 性で、次の部分の積に分かれます。(i) キンクとキンクの間の、キンクの無い相の切れ端（長さ $\le C\xi$、両端の値つき）。(ii) 各キンク・キンクの対の周りの管と、その中の芯（頂上の近くにとどまる区間）。積の測度の Poincaré 定数は成分の定数の最大なので（独立な積の分散の不等式）、

$$\mathbb{E}\operatorname{Var}(f\mid Y)\;\le\;C_{\mathrm{loc}}\,\mathcal{E}(f),\qquad C_{\mathrm{loc}}=\max\big(C_{(\mathrm{H1}^{\mathrm{seg}})},\,C_{(\mathrm{H2}^{\mathrm{tube}})},\,C_{(\mathrm{T0}'_{\mathrm{P}})}\big) \tag{10}$$

です 初 （積の測度の Poincaré 定数は成分の定数の最大。積に分かれることは Y の定め方に依り、その正則性は段 0 の行に含める）。(i) の定数が相内の局所 Poincaré の条件の切れ端の版、(ii) の定数が鞍点の管の条件の管と芯の行です 仮 （三つとも仮定の行）。

第二項＝遅い側。ここに鞍点の族に沿う縦の輸送が入る。$\mathbb{E}[f\mid Y]$ は Y だけの関数で、その揺らぎはキンクの位置の拡散と、キンクの対の生成・消滅で緩和します。Y の上の Dirichlet 形 $\mathcal{E}_Y$ は、キンク一本あたりの移動度が $D=\hbar/S_0$ の形です（キンクの拡散係数の行：射影の式、23-04 §03）。ここで二つの行を置きます。

- キンクの気体の隙間の仮定：縮約したキンクの気体の箱の Poincaré 定数 $C_{\mathrm{kg}}\le (C\xi)^2/\big(c_{\mathrm{kg}}(C)(1-\eta_{\mathrm{KG}})D\big)$、$\eta_{\mathrm{KG}}<1$ は $\hbar$ と境界の値に一様 仮 （キンクの気体が一次元 Ising の Glauber 力学と同じ型に入る、という仮定）。

- 交差項の一様性の仮定：交差項 $\mathcal{E}_Y(\mathbb{E}[f \mid Y]) \le (1+\chi)\,\mathcal{E}(f)$、$\chi$ は $\hbar$ と境界の値に一様 仮
  （二尺度の不等式の交差の定数の型。この形の言明は既知の定理から引いていない）。

キンクの気体の隙間の仮定の c_{kg} は、固定した端の Glauber の箱の隙間の閉じた式 $(1-\gamma)+\gamma(1-\cos(\pi/(L+1)))$ を連続の極限で読んだ

$$\frac{D}{\xi^2}+\frac{\pi^2 D}{L_\tau^2}=\left(C^2+\pi^2\right)\frac{D}{(C\xi)^2}\qquad (L_\tau=C\xi) \tag{11}$$

から $c_{\mathrm{kg}}=C^2+\pi^2$ です 初 （(11) の代数） Lean `kg_constant` （仮定：$C\xi\neq 0$）。第一項の D/ξ^2 が対の生成と消滅、第二項がキンクの位置の拡散です。境界の値が頂上の近くにあると箱の端に半分のキンクが座れ（自由端に当たる）、その場合を含む sup では $c_{\mathrm{kg}}=c_{\mathrm{ff}}(C)$、$C=2$ で 7.17 と読まれます 読 （一次元 Ising の自由端の箱の隙間を格子の値で求めた族の値）。

(9)(10) とキンクの気体の隙間の仮定・交差項の一様性の仮定を合わせると

$$C_{\mathrm{box}}\ \le\ C_{\mathrm{loc}}+(1+\chi)\,C_{\mathrm{kg}}\ \le\ K_4\,\frac{(C\xi)^2}{D},\qquad K_4=\frac{1+\chi}{c_{\mathrm{kg}}(1-\eta_{\mathrm{KG}})}+C_{\mathrm{loc}}\,\frac{D}{(C\xi)^2} \tag{12}$$

です 初 Lean `H4_two_scale` （仮定：分解 (9) の不等式・第一項 $\le C_{\mathrm{loc}}\mathcal{E}$・キンクの気体の隙間の仮定 $\le C_{\mathrm{kg}}\mathcal{E}_Y$・交差項の一様性の仮定・$C_{\mathrm{kg}}\ge 0$）・ `H4_gap_form` （仮定：$D>0$・$C\xi\neq 0$・$c_{\mathrm{kg}}>0$・$\eta_{\mathrm{KG}}<1$・$1+\chi\ge 0$・上の二つの不等式）。これが箱の中の隙間の命題です。

K_4 の第二項は C_{loc} に $D/(C\xi)^2$ を掛けたもので、$D/\xi^2=\hbar/(S_0\xi^2)$ は三つの $\hbar$ で $e^{-441.6}/e^{-1328.6}/e^{-4433.1}$（$\hbar=3\cdot10^{-3}/10^{-3}/3\cdot10^{-4}$）の大きさです 読 （23-04 §07 の表 2）。C_{loc} が $\hbar$ について指数で増えない限り、この項は $\hbar\to 0$ で消えます。相内の局所 Poincaré の条件が $C_{\mathrm{loc}}=O(1)$ を要求するのは、この意味では余裕のある要求です。

鞍点の管の条件の行き先の注。 §01 の二つの谷の割り方では、鞍点の管の条件は平均差の定数 C_{md} そのものでした。箱の割り方では、鞍点の族に沿う向き（キンクの位置）を遅い変数 Y に取ったので、その向きの輸送は第二項のキンクの気体の隙間の仮定と交差項の一様性の仮定が受け持ち、鞍点の管の条件に残るのは Y を止めた管と芯の Poincaré です。この本では、管と芯の行を鞍点の管の条件の行、キンクの気体の隙間の仮定・交差項の一様性の仮定を箱の中の隙間の条件の行として数えます（統合表 23-12 と同じ数え方）。

段 3（合成の段） 合成 — $C_P\le K\xi^2 S_0/\hbar$

(8) の C_{box} に (12) を入れ、$L\varepsilon=C\xi$ と $D=\hbar/S_0$ を使うと

$$C_P(\mu)\ \le\ K\,\xi^2\,\frac{S_0}{\hbar},\qquad K=\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{C^2K_4}{1-c_{\mathrm{alt}}} \tag{13}$$

です 初 Lean `H3_H4_compose`（仮定：箱への帰着の命題の結論 (8)・箱の中の隙間の命題の結論 $C_{\mathrm{box}} \le K_4 (C\xi)^2/D \cdot D = \hbar/S_0 \cdot n > 0 \cdot \hbar > 0 \cdot S_0 > 0 \cdot c_{\mathrm{alt}} < 1$）。$K$ が $\hbar$ に依らないことは、$c_{\mathrm{alt}} \cdot \chi \cdot \eta_{\mathrm{KG}} \cdot c_{\mathrm{kg}} \cdot C_{\mathrm{loc}}$ の一様性、つまり仮定の行の中身そのものです。

縮約した模型の値（$\chi = \eta_{\mathrm{KG}} = 0 \cdot n = 3 \cdot \theta = \frac{1}{4}$）を入れると、$C = 2$ で $K \approx 2.76$（頂上の境界の値を含む sup）・1.43（端が井戸の側だけ）、$C = 4$ で $K \approx 1.78$ です 読 （族の値で、K の上界ではない） Lean `K_ff_C2` ・ `K_ff_C4`（仮定：測った c_{ff} と c_{alt} の値。算術だけ）。三つの $\hbar$ で同じ値なのは、縮約した模型に $\hbar$ が入らないからです。

段 4（比を挟む段） 比 R を挟む — $1 \le R \le K'/\hbar$

(13) を ξ^2 で割ると、$R = C_P/\xi^2 \le K S_0/\hbar =: K'/\hbar$ です 初 （割り算）。下からは一次元の片側の橋の命題（23-04 §04）で $R \ge 1$ です 初 （連続の時間・$T \to \infty$。証明は 23-04 に置いた）。合わせて

$$1 \;\le\; R \;\le\; \frac{K'}{\hbar}, \qquad K' = K S_0 \tag{14}$$

です。一次元の片側の橋の命題は条件を使わない下界で、(14) の左の不等号は二重井戸の四条件に依りません。

段 5（冪を読む段） 二重井戸の冪の言明 — $\ln C_P/\ln\xi \to 2$

$\ln C_P/\ln\xi = 2 + \ln R/\ln\xi$ で、(14) から $0 \le \ln R \le \ln K' + \ln(1/\hbar)$ です。残る入力は物差しの伸び方 $\ln\xi \ge s/\hbar$（ある $s > 0$ と小さい $\hbar$）で、これは $\xi \propto \hbar^{1/2} e^{S_0/\hbar}$ から来ます。連続の模型の半古典の主項は既知の式の写しで 典 、格子の模型では $\ln\xi - S_0^{\mathrm{lat}}/\hbar - \frac{1}{2}\ln\hbar$ が三つの $\hbar$ で $-0.774/-0.777/-0.778$ と一定に寄る読みです 読 （23-04 §07）。この入力の上で

$$0 \;\le\; \frac{\ln R}{\ln\xi} \;\le\; \frac{\hbar\big(\ln K' + \ln(1/\hbar)\big)}{s} \;\longrightarrow\; 0 \qquad (\hbar \to 0) \tag{15}$$

となり、二重井戸の冪の言明が従います 初 Lean `power_H_of_kink_ratio`（仮定：$0 < K$・$0 < s$・$0 < \delta$、$0 < \hbar < \delta$ で $1 \le R \le K/\hbar$ と $s/\hbar \le \ln\xi$。Lean の K は本文の K'）。

一本の筋の確かめ

段 1〜5 を一行に縮めると

$$\underbrace{(\mathrm{H1}^{\mathrm{seg}}),\ (\mathrm{H2}^{\mathrm{tube}}),\ (\mathrm{T0}'_{\mathrm{P}})}_{C_{\mathrm{loc}}} \xrightarrow{(9)(10),\ (\mathrm{KG}),\ (\mathrm{X})} \underbrace{C_{\mathrm{box}} \le K_4 \frac{(C\xi)^2}{D}}_{\text{命題 H4}} \xrightarrow{\text{命題 H3},\ (\mathrm{MIX}_{\mathrm{alt}})}$$

です。矢印の上に書いた入力のうち、仮定の行は切れ端の局所 Poincaré の仮定・鞍点の管の Poincaré の仮定・芯の Poincaré の一様性の仮定・キンクの気体の隙間の仮定・交差項の一様性の仮定・箱の交互の最大相関の仮定と段 0 の前提で、残りは初等の代数か既知の定理か読みです。

仮定の行の言明が結論の量を含んでいないことも、ここで確かめておきます。結論の量は $T = \infty$ の測度全体の $C_P(\mu)$ と比 R で、切れ端の局所 Poincaré の仮定・鞍点の管の Poincaré の仮定・芯の Poincaré の一様性の仮定は切れ端・管・芯の測度の定数、キンクの気体の隙間の仮定は縮約した気体の定数、交差項の一様性の仮定は形の比較、箱の交互の最大相関の仮定は相関の量で、どれも $C_P(\mu)$ や R を含みません。結論を前提に置く形（依存の円）は、この段の組み方には現れません（確かめ方は 23-13）。

正確には、一段目の上界の命題の結論は「Langevin 力学の緩和の時間 C_P が ξ^2 の冪で伸びる」という一段目の文です。C_P は転送作用素の隙間（トンネル分裂）とは別の量で、一段目の上界の命題の全ての行が揃っても、二段目以後の文は従いません（23-01 §08・23-03 §06）。

05

既知の定理との距離

一段目の上界の命題の上界 (5) を与える既知の定理は、探した範囲では見当たりません。近い定理がどこまで届き、どこで止まるかを表 1 にまとめます。

表 1　既知の定理が届く所と届かない所（分類は定理を引く行の分類）

既知の定理	届く所	届かない所	分類
Eyring–Kramers の Poincaré 版（Bovier–Gayrard–Klein・Menz–Schlichting の分散の分割の補題、定理 2.9・2.12）	次元を止めた Morse 関数で、分散の分割・局所 Poincaré・平均差の輸送から隙間の漸近と前因子まで	定数が次元に一様でない。キンクの平行移動のような退化した鞍点の族は仮定の外	典
区間を止めた確率的 Allen–Cahn 方程式の Eyring–Kramers（Di Gesù–Le Peutrec・Brooks–Di Gesù）	区間の長さを分岐の閾の手前に止めた隙間の漸近	区間の長さを無限にする体制と平行移動の族は、著者自身が本文で範囲の外と明記	典
短い経路の遷移の時間（Berglund–Gentz の定理 2.6）	$T < 2\pi\sqrt{2}$（一様な鞍点）で谷を移る平均の時間	長い経路（$T \gg \xi$）	典
単一の界面の拡散（Bertini–Brassesco–Buttà の定理 2.1）	キンク一本の位置が拡散係数 D の Brown 運動に近づくこと（過程の水準）	経路全体のスペクトルの隙間の文ではない	典

既知の定理	届く所	届かない所	分類
体積に一様な判定法（Bauerschmidt–Dagallier の定理 2.1）	経路の格子にそのまま当たり、体積に一様な上界を与える	値は $C_P \le e^{c\xi}$、$c \approx 1.4 \to 1.8$（$\varepsilon = 0.25$・$\hbar = 0.4 \to 0.1$）で、$\hbar$ について二重指数。二重井戸の冪の言明に届かない	典（定理）読（値）
箱の力学の命題（Martinelli の講義の命題 3.4・3.5）	離散のスピンで、全体の隙間を箱の力学と箱の中の隙間で押さえる型	非有界なスピン・境界の値の sup。段 1 は型だけを借り、一次元・L^2 の形に書き直した	典（型）

表 1 の最後の三行が示すように、既知の道具は「一本のキンク」と「体積に一様だが粗い上界」の両端にあり、その間（長い経路の上で、キンクの気体の拡散の時間 ξ^2/D まで鋭い上界）が一段目の上界の命題の場所です。Bauerschmidt–Dagallier の上界が $e^{c\xi}$ になるのは、判定法が感受率という一つの量だけを見るため、遅いが局所的な緩和と遅く大域的な緩和を区別できず、指数の中に ξ が入るからと読まれます 読 。

06

五分類の表 — 一段目の上界の命題の段の行

§04 の段を、五分類の書式（23-00 §01）で一表にします。分類は一行に一つで、機械検査の欄は分類の外です。行の番号は §07 の依存グラフの節点の番号です（式の中の札 $(\mathrm{H1}^{\mathrm{seg}})$・$(\mathrm{H2}^{\mathrm{tube}})$・$(\mathrm{T0}'_{\mathrm{P}})$・(KG)・(X) は、それぞれ [02]〜[06] の仮定）。

表 2　一段目の上界の命題の段の行（$\hbar$ の範囲の「—」は、どの $\hbar$ でも示されていない仮定の行）

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
[01]	$T = \infty$ の測度の一意性・極限の段・正則性	仮	§04 段 0（$\mathbb{R}$ の上の正の核の主固有値の原典は未確認）	—	—
[02]	切れ端の局所 Poincaré の仮定：キンクの無い切れ端の Poincaré が長さ・端の値・$\hbar$ に一様	仮	§03・§04 段 2 の (10)。環の版の節点の命題は 23-06	—	—
[03]	鞍点の管の Poincaré の仮定：管の Poincaré が長さ $\le C\xi$ に一様	仮	§03・(10)	—	—

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
[04]	芯の Poincaré の一様性の仮定：芯の Poincaré が芯の長さに一様	仮	§03・(10)。窓の下の端の仮定つきの命題は 23-09・23-11。区画の側の芯（両端が井戸の中）では、粗い鎖の Dobrushin の判定で $\hbar \in (0,1]$ の全てで支えられる：論文の証明（粗い鎖の Dobrushin の定理（論文の定理 CC））＋機（$\hbar \in [10^{-5},1]$、239 区間、区間演算、$\rho_{\mathrm{col}} \le 0.400$）＋紙の証明と機（小さい $\hbar$ の粗い鎖の命題（論文の命題 PIN）：$\hbar \le 10^{-5}$、$\rho_{\mathrm{col}} \le 0.874$）＋典（Bobkov–Ledoux 2000 の Helffer の判定の Poincaré 版（Ledoux の命題 3.1））・粗い鎖の Brascamp–Lieb の命題（論文の命題 BLc）の上の条件つき。読の行は無い。箱の側の芯は含まない（論文「粗い鎖の Poincaré」）	区画の側：$(0,1]$	—
[05]	キンクの気体の隙間の仮定：縮約したキンクの気体の箱の隙間 $\ge c_{\mathrm{kg}}(1-\eta_{\mathrm{KG}})D/(C\xi)^2$	仮	§04 段 2（Glauber の型に入る仮定）	—	—
[06]	交差項の一様性の仮定：交差項 $\mathcal{E}_Y(\mathbb{E}[f \mid Y]) \le (1+\chi)\mathcal{E}(f)$	仮	§04 段 2	—	—
[07]	箱の交互の最大相関の仮定：$c_{\mathrm{alt}} < 1$ が $\hbar$ に一様	仮	§04 段 1	—	—
[08]	キンク一本の移動度 $D = \hbar/S_0$	典	§02 (d)・23-04 §03（過程の水準の定理の係数の写し）	$\hbar \to 0$	—
[10]	二つの射影の補題	初	§04 段 1 の証明	$\hbar$ に依らない	`two_proj_var`（仮定：$A+B \le (1+c)V$）
[11]	偶の箱の条件つき独立と積の分散の不等式 (7)	初	§04 段 1（証明は 23-11）	$\hbar$ に依らない	—

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
[14]	箱への帰着の命題：(8) $C_P \le (1+1/n)C_{\mathrm{box}}/(1-c_{\mathrm{alt}})$	初	§04 段 1（二つの射影の補題・偶の箱の積の分散・ずらしの平均）	$\hbar$ に依らない	`box_two_family`・`box_shift_average`（仮定：二族の不等式・$C_{\mathrm{box}} \ge 0$・重なりの和 $\le \mathcal{E}$）
[12]	分散の分解 (9) と積への分解 (10)	初	§04 段 2（積への分解は Y の定め方に依り、正則性は共通の前提の行 [01]）	$\hbar$ に依らない	—
[13]	$c_{\mathrm{kg}} = C^2 + \pi^2$（(11) の代数）	初	§04 段 2（Glauber の閉じた式はキンクの気体の隙間の仮定の中）	$\hbar$ に依らない	`kg_constant`（仮定：$C\xi \ne 0$）
[15]	箱の中の隙間の命題：(12) $C_{\mathrm{box}} \le K_4 (C\xi)^2/D$	初	§04 段 2	$\hbar$ に依らない	`H4_two_scale`・`H4_gap_form`（仮定は §04 段 2 の各行）
[16]	一段目の上界の命題：(13) $C_P \le K\xi^2 S_0/\hbar$	初	§04 段 3	$\hbar \to 0$	`H3_H4_compose`（仮定：(8)・(12)・$D = \hbar/S_0$・$n, \hbar, S_0 > 0$・$c_{\mathrm{alt}} < 1$）
—	$K \approx 2.76/1.43$（$C=2$）・1.78（$C=4$）	読	§04 段 3（縮約した模型・$\chi = \eta_{\mathrm{KG}} = 0$・族の値）	$\hbar$ に依らない	`K_ff_C2`・`K_ff_C4`（仮定：測った値。算術だけ）
[17]	一次元の片側の橋の命題：$R \ge 1$	初	23-04 §04	全ての $\hbar$	`local_rayleigh_ratio_le_one`（有限和の骨だけ。仮定は 23-04 の表 3）
[18]	(14) $1 \le R \le K'/\hbar$	初	§04 段 4	$\hbar \to 0$	—
[09]	$\ln \xi \ge s/\hbar$（$\xi \propto \hbar^{1/2} e^{S_0/\hbar}$）	読	§04 段 5（連続の主項は典、格子の模型の値は読）	三点で読み・$\hbar \to 0$ は主項から	—
[19]	二重井戸の冪の言明：$\ln C_P / \ln \xi \to 2$	初	§04 段 5 の (15)	$\hbar \to 0$	`power_H_of_kink_ratio`（仮定：$0 < K, s, \delta$・$1 \le R \le K/\hbar$・$s/\hbar \le \ln \xi$）

表 2 の「初」の行は、どれも仮定の行を入力にとる代数です。「初」の行が並んでいることは、一段目の上界の命題の結論が示されていることを意味しません。結論が無条件になるのは、全ての「仮」の行と、「読」の行（相関長の伸び方の行 [09]）が置き換わったときだけです。

```
07
```

依存グラフ — 番号で円が無いことを確かめる

表 2 の行を、番号つきの節点の一覧にします。書式はこの部で共通で（23-12 の統合のグラフも同じ）、「⟸」**の右に並ぶ前提の番号は、左の結論の番号より必ず小さく**置きます。葉（仮定・既知・読み）が小さい番号、結論が最大の番号です。

```
[01] 仮  共通の前提の行：T=∞ の測度の一意性・極限の段・正則性          ħ：—
[02] 仮  切れ端の局所 Poincaré の仮定：キンクの無い切れ端の Poincaré    ħ：—
[03] 仮  鞍点の管の Poincaré の仮定：管の Poincaré（長さ ≤ Cξ）        ħ：—
[04] 仮  芯の Poincaré の一様性の仮定（芯の長さに一様）                 ħ：—
[05] 仮  キンクの気体の隙間の仮定：縮約したキンクの気体の箱の隙間       ħ：—
[06] 仮  交差項の一様性の仮定：交差項 ℰ_Y ≤ (1+χ)ℰ                    ħ：—
[07] 仮  箱の交互の最大相関の仮定：c_alt < 1                           ħ：—
[08] 典  キンクの拡散係数の行：キンク一本の移動度 D = ħ/S₀             ħ→0
[09] 読  相関長の伸び方の行：ln ξ ≥ s/ħ（ξ ∝ ħ^½ e^(S₀/ħ)）          三点
[10] 初  二つの射影の補題                                             ħ に
         Lean two_proj_var（仮定：A+B ≤ (1+c)V）
[11] 初  偶の箱の条件つき独立と積の分散 (7) ⟸ [01]                     ħ に依
[12] 初  分散の分解 (9)・積への分解 (10) ⟸ [01]                       ħ に
[13] 初  c_kg = C²+π²（(11) の代数）                                  ħ
         Lean kg_constant（仮定：Cξ ≠ 0）
[14] 初  箱への帰着の命題 (8) ⟸ [07][10][11]                          ħ
         Lean box_two_family・box_shift_average（仮定：二族の不等式・C_bo
[15] 初  箱の中の隙間の命題 (12) ⟸ [02][03][04][05][06][08][12][13]   ħ
         Lean H4_two_scale・H4_gap_form（仮定：分解・C_loc・[05]・[06]・[
[16] 初  一段目の上界の命題 (13) C_P ≤ Kξ²S₀/ħ ⟸ [08][14][15]         ħ→0
         Lean H3_H4_compose（仮定：(8)・(12)・D = ħ/S₀・n, ħ, S₀ > 0・c_
[17] 初  一次元の片側の橋の命題 R ≥ 1 ⟸ [01]                          全て
         Lean local_rayleigh_ratio_le_one（有限和の骨だけ）
[18] 初  (14) 1 ≤ R ≤ K'/ħ ⟸ [16][17]
[19] 初  二重井戸の冪の言明 ln C_P / ln ξ → 2 ⟸ [09][18]               ħ→
         Lean power_H_of_kink_ratio（仮定：0 < K, s, δ・1 ≤ R ≤ K/ħ・s/
```

確かめ方。全ての「⟸」の行で、右の番号が左の番号より小さいことを目で見ます。[11] と [12] は [01] だけ、[14] は [07][10][11]、[15] は [02]〜[06][08][12][13]、[16] は [08][14][15]、

[17] は [01]、[18] は [16][17]、[19] は [09][18] で、どの行も規則を守っています。規則が守られていれば、前提をたどると必ず番号が下がり、いずれ葉に着くので、円はありません。

葉のうち「仮」は [01]〜[07] の七つ、「典」は [08]、「読」は [09] です。一段目の上界の命題の結論 [16] は [01]〜[08] の全てに依り（[11][12] を通して [01] にも）、二重井戸の冪の言明 [19] はさらに [09] に依ります。一次元の片側の橋の命題 [17] だけは [01] にしか依らず、二重井戸の四条件を使いません。

正確には、このグラフは一段目の上界の命題の段の組み立ての依存で、各仮定の行の中身（例えば [02] を節点の上で支える六節点の相内 Poincaré の命題）は入れていません。それらは各条件の章のグラフにあり、全てを一つに繋いだものが 23-12 の統合のグラフです。

08

揃う $\hbar$ と四条件の現在地

全ての行が揃う $\hbar$ は無い。相内の局所 Poincaré の条件の節点の命題は $\hbar \geq 0.005$ の六点、芯の行を支える仮定つきの命題は $\hbar \leq 10^{-3}$ の桁の窓の下の端にあって交わらず、キンクの気体の隙間の仮定・交差項の一様性の仮定・鞍点の管の Poincaré の仮定はどの $\hbar$ でも仮定の行です。帯の図と揃え方は 23-12 に置きます。

四つの条件の現在地を一行ずつ並べます。詳細は各章です。

四条件の現在地

1. 相内の局所 Poincaré の条件 — 環の版の六節点の相内 Poincaré の命題：六つの節点 $\hbar \in \{0.2, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01, 0.005\}$・隣と端 $[0, 2.5]$ で余白 ≥ 0.067（計算機援用）。節点の間・$\hbar < 0.005$・端 > 2.5・切れ端の版が残る（23-06）
2. 鞍点の管の条件 — 七つの道筋に割った地図。窓の外の鎖の条件は窓 $[3 \cdot 10^{-4}, 3 \cdot 10^{-3}]$ の全体で計算機援用、区画の枠組みは五段が命題、残る一命題は三本の筋が頂上の一サイトの曲率の不足 $\frac{1}{4}$ で止まる（23-07〜23-10）
3. 箱への帰着の条件 — 箱への帰着の命題（§04 段 1）。箱の交互の最大相関の仮定と境界の値の sup が残る（23-11）
4. 箱の中の隙間の条件 — 箱の中の隙間の命題（§04 段 2）。交差項の一様性の仮定・キンクの気体の隙間の仮定・切れ端の局所 Poincaré の仮定・芯の行が残り、芯の定数は三段で押さえる（23-11）

この部は緩和時間の仮定を取っ掛かりとして選んだ検討で、一段目の上界の命題は一段目の上の側を組む一つの割り方です。別の視点は第 24 部で扱います。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 分散の分割の代数 (3)、二つの射影の補題、箱への帰着の命題 (8)、箱の中の隙間の命題 (12)、合成 (13)、比の挟み (14)、二重井戸の冪の言明への代数 (15)。どれも名指した仮定の行の上の代数 Lean（仮定は表 2 の各行）	仮定の行 [01]〜[07] のどれも。したがって (5) そのものと、一段目の二重井戸の冪の言明
初 一次元の片側の橋の命題：$R \geq 1$（条件を使わない）	R が $1/\hbar$ で伸びるか指数で伸びるか
典 キンク一本の拡散係数、既知の定理の届く範囲（表 1）	長い経路の上でキンクの気体の拡散の時間まで鋭い上界を与える既知の定理（探した範囲で見当たらない、まで）
読 $K \approx 2.76$ ほか（縮約した模型）、$c_{\mathrm{alt}} \approx 0.73$、$\ln \xi$ の伸び方	これらを上界・下界の証明に使うこと
依存グラフに円が無いこと（番号の規則）	全ての行が揃う $\hbar$。一段目から二段目以後への含意

出典と再現

もの	種別	出典・道具
分散の分割・Eyring–Kramers の Poincaré 版の骨組み	典	G. Menz, A. Schlichting, Ann. Probab. 42 (2014), arXiv:1202.1510（分散の分割の補題・定理 2.9・2.12、本文で確認）。A. Bovier, V. Gayrard, M. Klein, J. Eur. Math. Soc. 7 (2005) 69–99（書誌）。
凸な領域の Bakry–Émery	典	D. Bakry, M. Émery, LNM 1123 (1985)；A. V. Kolesnikov, E. Milman, J. Geom. Anal. 27 (2017), arXiv:1310.2526（定理 1.2、本文で確認）。
区間を止めた Eyring–Kramers	典	G. Di Gesù, D. Le Peutrec, arXiv:1506.04434（定理 1.1）；M. Brooks, G. Di Gesù, arXiv:2606.16083（範囲の外の明記、本文で確認）。
短い経路の遷移の時間・単一の界面の拡散	典	23-04 の出典表（Berglund–Gentz、Bertini–Brassesco–Buttà）。
体積に一様な判定法	典・読	R. Bauerschmidt, B. Dagallier, Comm. Pure Appl. Math. 77, arXiv:2202.02295（定理 2.1、本文で確認）。経路の格子への当てはめと $e^{\alpha\xi}$ の値は記録の浮動小数の計算（転送行列・$\varepsilon = 0.25$・調和の陽性対照で 1.0049）。
箱の力学の型	典	F. Martinelli, LNM 1717 (1999) 93–191（予稿の §3.6・命題 3.4・3.5 で確認）。
二つの射影の補題・Efron–Stein の型	初	本文 §04 段 1（Friedrichs の角・Efron–Stein の原典は書誌だけ）。

もの	種別	出典・道具
Glauber 力学の箱の隙間の閉じた式・自由端の値	仮・読	R. J. Glauber, J. Math. Phys. 4 (1963) 294（書誌だけ）。固定の端の式は小さな鎖の全状態の対角化と 6 桁で一致、自由端は格子の値（浮動小数）。
交互の最大相関の値	読	二状態の電信の鎖の閉じた式の値を写した族の値（浮動小数）。
段の代数	初・Lean	定理 `split_poincare_le`・`reduced_two_state_value`・`two_proj_var`・`box_two_family`・`box_shift_average`・`kg_constant`・`H4_two_scale`・`H4_gap_form`・`H3_H4_compose`・`K_ff_C2`・`K_ff_C4`・`power_H_of_kink_ratio`（仮定は表 2 と本文の各行）。言明の一覧は 23-13。

この章で使った語 — 分散の分割・局所 Poincaré・平均差の輸送・二重井戸の四条件・一段目の上界の命題・相（キンクの無い相）・切れ端・管・芯・箱の力学（箱への帰着）・最大相関・交互の最大相関・二つの射影の補題・Efron–Stein の不等式・縮約したキンクの気体・交差項・依存グラフ。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-06 相内の局所 Poincaré の条件 — キンクの無い相の測度の Poincaré 定数を、残したサイトと橋の二尺度の組み立てで六つの $\hbar$ の節点の命題にし、節点の間を埋める方法と費用を述べる。

相内の局所 Poincaré の条件

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 2-05・2-07 にあります。

この章で分かること — 相内の局所 Poincaré の条件は、キンクの無い相（経路が一つの谷の側にとどまる配位）に制限した測度の Poincaré 定数が、$\hbar$ と経路の長さに一様に $O(1)$ であるという文です。この章では、残したサイトと、その間の 11 サイトの橋に割る二尺度の組み立てで、環の上の版を六節点の相内 Poincaré の命題にします。六節点の相内 Poincaré の命題は $\hbar$ の六つの節点 $\{0.2, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01, 0.005\}$ で成り立ち、要の不等式（粗い側の余白 ≥ 0.067）は計算機援用です。節点の間の $\hbar$ を埋める方法と費用、$\hbar < 0.005$ と大きな端の値のように別の方法が要る残りを、最後に並べます。

前提となる章 — 23-05（四条件と二重井戸の緩和時間の上界の命題・五分類の表と依存グラフの書式）・23-04 §06（頂上の台地と凸な芯）・1-10 §07〜§09（Poincaré 不等式）。計算機援用の読み方は 23-08。

先に言うこと — §01 は〔三〕で読める要約で、§02 以降は研究の水準〔研〕です。要約だけを読んで 23-07 へ進めます。六節点の相内 Poincaré の命題は相内の局所 Poincaré の条件の証明ではありません。六つの節点の外の $\hbar$、端の値 > 2.5、箱の中で使う切れ端の版は、仮定の行に残ります。

この章の順序

1. 要約〔三〕 — 言明・組み立て・六節点の相内 Poincaré の命題・残り
2. 言明と相の測度 — 何が難しいか
3. 二尺度の組み立て — 残したサイト・橋・入れ子・粗い側の判定・率の代数
4. 六節点の相内 Poincaré の命題 — 六つの節点の余白（表 1）と定数
5. 五分類の表 — 六節点の相内 Poincaré の命題の行（表 2）
6. 節点の間の $\hbar$ — 方法と費用（表 3・表 4）
7. 残りの行 — 別の方法が要るもの（表 5）

8. 依存グラフ

01

要約〔三〕

言明。二重井戸の経路の格子（$\varepsilon = \frac{1}{2}$）で、全てのサイトを $x_i \geq 0$ に制限した測度 $\mu^{(+)}$ を考えます。相内の局所 Poincaré の条件は「$C_P(\mu^{(+)})$ が $\hbar$ と長さに依らない定数以下」です。凸な芯の Bakry–Émery は谷の奥（$x_i \geq a > 1/\sqrt{3}$）にしか効かず、谷の中の小旅行は長さ ξ の区間に指数で多く入るので、この測度は凸ではありません（23-04 §06）。

組み立て。12 サイトごとに一つのサイトを残し（粗い側）、その間の 11 サイトを、両端を固定した橋（細かい側）とします。分散を「残したサイトを止めた条件つきの分散」と「その期待値の分散」に分け、細かい側は橋の中をさらに三つの小さな橋と二つのサイトに割って押さえ、粗い側は残したサイトの鎖を一サイトの隙間と隣どうしの結合の強さで判定します。粗い側の判定の要は

$$\underbrace{\hbar\rho}_{\text{一サイトの隙間}} \;-\; 2 \;\underbrace{\hbar\kappa}_{\text{隣との結合}} \;>\; 0 \tag{1}$$

という余白の不等式で、これを端の値の全ての組について確かめるのに区間演算を使います。

六節点の相内 Poincaré の命題。$\hbar$ の六つの節点の各点で、端と隣の値 $[0, 2.5]$ の全てについて余白 ≥ 0.067 が計算機援用で確かめられ、残りの行（仮定と既知の定理）の上で $C_P(\mu^{(+)}) \leq C$、$C \leq 1.6 \times 10^{10}$（紙と区間演算の入力だけ）です。数値の読みを入力にすると $C \leq 658$ です。どちらも環の長さに依りません。

残り。節点の間の $\hbar$ は、$\beta = 1/\hbar$ を傾けの三つ目の向きにする方法で部分区間ごとに埋める型ができ、費用は一コアで数十時間の見積もりです。$\hbar < 0.005$ は部分区間が無限個要るので別の方法（$\hbar \to 0$ の漸近）が要り、端の値 > 2.5、定数の鋭さ、箱の中で使う切れ端の版、引いた定理の書誌の確認が残ります。

02

言明と相の測度 — 何が難しいか

相の測度。環 $N = 12n$ サイト（$n \geq 3$）の格子の作用

$$S = \sum_i \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2\varepsilon} + \varepsilon \sum_i V(x_i), \qquad V(x) = \frac{(x^2-1)^2}{8}, \qquad \varepsilon = \frac{1}{2} \tag{2}$$

から、全てのサイトで $x_i \geq 0$ の配位に制限した測度 $\mu^{(+)} \propto e^{-S/\hbar}\mathbf{1}\{x_i \geq 0\ \forall i\}$ を作ります。直交象限は凸なので、壁 $x_i = 0$ で反射する Langevin 力学（Neumann 条件）の平衡がこの測度です。Dirichlet 形は $\mathcal{E}(f) = (\hbar/\varepsilon)\sum_i \mathbb{E}|\partial_i f|^2$ です。経路は谷 $x = 1$ の側にとどまり、キンクを持ちません。これが「キンクの無い相」です。

相内の局所 Poincaré の条件（環の版）

ある $\hbar_0 > 0$ と $C < \infty$ があって、全ての $\hbar \in (0, \hbar_0]$ と全ての n で $\mathrm{Var}_{\mu^{(+)}} f \leq C\,\mathcal{E}(f)$。

箱の中で使う版（23-05 §04 の箱の中の段で使う切れ端の局所 Poincaré の仮定）は、環の代わりに両端の値を持つ長さ $\leq C\xi$ の切れ端で、端の値にも一様であることを求めます。

何が難しいか。三つの素朴な道がどれも $\hbar$ について指数の損を出します。

- 凸な芯：$x_i \geq a > 1/\sqrt{3}$ に制限すれば Bakry–Émery で $C_P \leq 2/(3a^2-1)$ ですが、芯の外への小旅行の作用（$a = 1/\sqrt{3}$ で 0.1535）はキンクの作用 $2/3$ より小さく、長さ ξ の区間に $e^{(S_0 - c_a)/\hbar}$ 個の小旅行が入ります 初 （23-04 §06）。
- 全体の摂動（Holley–Stroock の型）：凸な作用との差の振れ幅は経路の長さに比例し、定数は $e^{T\delta/\hbar}$ の型になります 典 （Holley–Stroock の摂動の補題。Ledoux の命題 6.1 の再述で型を確認）。
- 一サイトずつの摂動：一サイトあたりの非凸性は $\varepsilon/(8\hbar)$ ですが、隣どうしの結合 $(x_{i+1}-x_i)^2/(2\varepsilon)$ が強いので、一サイトずつ切り離して扱えません 読 。

数値は相内の局所 Poincaré の条件と矛盾しません。壁つきの環の Langevin 力学で磁化の積分自己相関の時間を測ると、$\hbar = 0.3/0.15/0.1/0.07$ で $0.86/1.40/1.50/1.39$ と $\hbar$ に依らない大きさでした 読 （観測量一つの自己相関は Poincaré 定数の下界しか与えず、上界の証拠ではない）。

03

二尺度の組み立て

残したサイトと橋。サイト $y_j := x_{12j}$ を残し、y_j と y_{j+1} の間の 11 サイト $x_{12j+1}, \dots, x_{12j+11}$ を、両端を y_j, y_{j+1} に固定した橋とします。分散を残したサイト y で分けると

$$\mathrm{Var}_{\mu^{(+)}} f = \mathbb{E}\big[\mathrm{Var}(f \mid y)\big] + \mathrm{Var}\big(\mathbb{E}[f \mid y]\big) \tag{3}$$

です（分散の分解の行：分散の分解は初等、使う関数の正則性・稠密性は仮定）。最近接の相互作用なので、y を止めると橋どうしは独立で、y の周辺の測度は残したサイトの最近接の鎖です（最近接の鎖の行：Markov 性）。

細かい側：橋の中の入れ子。11 サイトの橋は凸ではありません（橋の Hessian の最小固有値は $(1/\varepsilon)\lambda_{\min}(L_{11}) - \varepsilon/2 = -0.11$）。そこで橋の中のサイト 4 と 8 をもう一段残し、三つの小さな橋（3 サイト）と二つのサイト (x_4, x_8) に割ります。

- 3 サイトの小さな橋は対数凹です：Hessian $\geq (1/\varepsilon)\lambda_{\min}(L_3) - \varepsilon/2 = 2(2-\sqrt{2}) - \tfrac{1}{4} \approx 0.92$。Bakry–Émery で隙間 $\rho_f = 0.922$ 初 （曲率の下界）典 （凸な領域の Bakry–Émery）。
- 小さな橋と二つのサイトの交差は Brascamp–Lieb の不等式で $\kappa_f = 1.98$ 典 。
- 二つのサイト (x_4, x_8) の周辺の測度の隙間 $\lambda_c \geq 1.3 \times 10^{-4}$（端の値 $[0,4]^2$・$\hbar \in (0, 0.2]$）機 （二つのサイトの隙間の行）。

三つを入れ子の二尺度の代数で合わせると、橋の隙間は $t^2 - (\rho_f + \lambda_c + \kappa_f^2/\rho_f)t + \rho_f\lambda_c = 0$ の小さい根以上で、$\lambda_S \geq 2.3 \times 10^{-5}$ です 初 （根の算術）。

粗い側：一サイトの隙間と結合。隣の値 c, d を止めた y_j の一次元の条件つきの測度は $\propto e^{-U(t)/\hbar}$ で、

$$U'(t) = \varepsilon V'(t) + \frac{2t - e(c,t) - e(d,t)}{\varepsilon}, \qquad e(a,b) := \mathbb{E}_{a,b}\, x_{11} \tag{4}$$

です（$\mathbb{E}_{a,b}$ は両端 a, b の橋の期待値）。その Poincaré の隙間を $\hbar$ 倍したものを $\hbar\rho(c,d)$、橋の両端の結合の強さを

$$\hbar\kappa(a,b) := \frac{\mathrm{Cov}_{a,b}(x_1, x_{11})}{\varepsilon^2\hbar} = \frac{1}{\varepsilon}\,\partial_a e(a,b) \;\geq\; 0 \tag{5}$$

とします（二つ目の等号は $\partial_a \log Z(a,b)$ を b で微分する恒等式 初 、非負は e が a について増えることから 典 （FKG の相関不等式））。粗い側の鎖の隙間は、Helffer の判定の Poincaré 版を環の Gershgorin の形で使うと、余白

$$\lambda := \min_{c,d} \hbar\rho(c,d) - 2 \max_{a,b} \hbar\kappa(a,b) \tag{6}$$

以上です 典 （Helffer の判定の Poincaré 版、Ledoux の命題 3.1）初 （Gershgorin の形）Lean `ring_gershgorin`（環の二次形式の不等式、仮定：$\kappa \geq 0$）。(1) は $\lambda > 0$ のことです。

交差と率の代数。細かい側と粗い側をつなぐ交差の強さは $\kappa^2 = 2(v/\hbar)\lambda_S/\varepsilon^2$、$v/\hbar \leq 2\big(644/1455 + (60/97)^2/\lambda_c\big) \leq 5888$ です（交差の行）初 （算術）Lean `T4_paper_numeric`

（仮定：$\lambda_c \ge 1.3\times 10^{-4}$）典 （Brascamp–Lieb）。$\lambda$ と λ_S はどちらも平らな Dirichlet 形 $\int |\nabla f|^2$ に対する隙間を $\hbar$ 倍した単位です。このとき、$0 \le t < \lambda$ が

$$t\,\kappa^2 \;\le\; \lambda_S(\lambda_S - t)(\lambda - t) \tag{7}$$

を満たせば $C_P(\mu^{(+)}) \le \varepsilon/t$ です 初 Lean `H1_assembly`（仮定に名前をつけた代数：分解 (3)〔`hT5`〕・細かい側〔`hFine`、Lean の ρ は本文の λ_S〕・粗い側の判定の結論〔`hLedoux`〕・余白 $\lambda \le \hbar\rho - 2\hbar\kappa$〔`hT1`〕・$0<\lambda$・交差〔`hT4`〕・率の条件 (7)）。

組み立ての全体を、分散の分解の木にすると次のとおりです。

```
Var f = E[Var(f|y)] + Var(E[f|y])                                  （分
 ├ 細かい側：y を止めた 11 サイトの橋
 │      └ 入れ子 {4,8}：小さな橋 BE ρ_f=0.922・交差 BL κ_f=1.98・二つのサイト
 ├ 粗い側：残したサイトの環（最近接の鎖の行）── Helffer の判定の Poincaré 版（
 │      └ 余白の行：一サイトの隙間 ħρ（Muckenhoupt・FKG の帯・尾）− 2·結合 ħκ
 └ 交差：κ² = 2(v/ħ)λ_S/ε²（交差の行 ← 二つのサイトの隙間の行）
 → 率の条件 tκ² ≤ λ_S(λ_S−t)(λ−t)（H1_assembly）→ C_P ≤ ε/t
```

04

六節点の相内 Poincaré の命題 — 余白と定数

六節点の相内 Poincaré の命題（0+1 次元・環の版・仮定の表つき）

$V=(x^2-1)^2/8$、$\varepsilon=\frac{1}{2}$、環 $N=12n$（$n\ge 3$）、壁 $x_i\ge 0$ の相の測度 $\mu^{(+)}$、残したサイト $y_j=x_{12j}$、橋の中の入れ子のサイト $\{4,8\}$ とする。表 2 の「仮」と「典」の行の下で、$\hbar\in\{0.2,0.1,0.05,0.02,0.01,0.005\}$ の各点で

$$\mathrm{Var}_{\mu^{(+)}} f \;\le\; C\,\mathcal{E}(f), \qquad C\le 1.6\times 10^{10} \tag{8}$$

が n に依らずに成り立つ。数値の読みを入力にすると $C\le 658$。

要の行は余白 (6) で、隣と端の値 $[0,2.5]$ の全ての組について、六つの節点で表 1 の値が得られています。

機 表 1　節点ごとの粗い側の余白（隣と端の値 $[0,2.5]^2$。$\hbar\rho$ は下界、$\hbar\kappa$ は上界、外向きに切った値）

$\hbar$	$\hbar\rho \ge$	$\hbar\kappa \le$	**余白** $\hbar\rho - 2\hbar\kappa \ge$
0.2	0.7755	0.0358	0.7039

$\hbar$	$\hbar\rho \geq$	$\hbar\kappa \leq$	**余白** $\hbar\rho - 2\hbar\kappa \geq$
0.1	0.7140	0.0664	0.5812
0.05	0.8121	0.1222	0.5677
0.02	0.8846	0.2636	0.3574
0.01	0.8670	0.39996	0.0670
0.005	0.92182	0.41868	0.0844

区間演算の実装は、float64 の演算に外向きの幅を足す形です（非負の和の丸めを相対 10^{-10}、区間の四則を相対 10^{-12} だけ外へ広げ、e^{-700} を下回る重みは上から置き換え、$\varepsilon V/\hbar > 690$ の領域は尾の上界で覆う）。演算ごとに向きを指定した丸めではなく、IEEE の正しい丸めを前提にした幅の上乗せです。この前提は表 2 の行 [01] に同じ行で書きます。六組の値から余白 ≥ 0.067 が出る算術は Lean `T1_margin_six_nodes`（仮定なし・数）、一つの節点で区間の出力から余白へ渡る段は `T1_node_margin`（仮定：区間の出力の二つの不等式と $0.067 \leq r - 2k$）です。

区間を節点の連続体へ広げる道具。表 1 は「隣と端の値の全ての組」についての値で、有限個の箱の計算から連続体へ渡すのに三つの補題を使います。

- $\hbar\rho$ の側：一次元の測度の Poincaré 定数を Hardy 型の量 B で $B \leq C_P \leq 4B$ と挟む Muckenhoupt の評価 典、隣の値についての $e(c,t)$ の単調性（FKG）で節点の値から隣の連続体へ帯を作る補題 典（FKG）、t が大きい側の尾の補題（Holley の比較の連続版と傾けたガウスの橋） 仮（連続版の定理番号を原典で確かめていない）。
- $\hbar\kappa$ の側：端の値の箱の中心の測度を傾け、キュムラント母関数の二次の Taylor 展開と Hölder の剰余で箱の全体を押さえる傾けの二次 Taylor の補題 初（Taylor の剰余と Hölder の不等式）。この式は中心化の定数を何に選んでも正確です。
- 二つの上界の小さい方も上界、反転の対称性 $\hbar\kappa(a,b) = \hbar\kappa(b,a)$ で半分を覆う 初 Lean `min_of_two_upper`・`symm_upper`（仮定：二つの上界／対称性と片側の上界）。

$\hbar = 0.01$ と 0.005 で余白を正にした手。$\hbar$ が小さいと $\hbar\kappa$ の上界が膨らみ、粗い計算では $\hbar = 0.01$ で 0.634 と余白が負でした。律速は場所ごとに違い、三つの手で下げています。(i) 端の角 $(0,0)$ では、傾けの二次 Taylor の補題の中心化の定数を部分長方形ごとにその範囲の中央値で取り直す（式は任意の中心で正確なので、上界だけが下がる）。(ii) 二次の項は箱の幅 δ の二乗で効くので、δ を半分にする。(iii) 大きい端 $(2.5, 2.5)$ では、橋が一歩で井戸へ大きく跳ぶため求積の誤差が律速で、求積の刻みを半分にする。$\hbar = 0.005$ では $\hbar\rho$ の側の求積を細かくして下界が 0.6945 から 0.92182 へ上がります。表 1 の最後の二行がこれらの手の結果です 機。

定数。(8) の $C \le 1.6 \times 10^{10}$ は、紙と区間演算の入力（$\lambda \ge 0.067$・$\lambda_S \ge 2.3 \times 10^{-5}$・$v/\hbar \le 5888$）で率の条件 (7) を $t = 3.2 \times 10^{-11}$ が満たすことからの ε/t です 初 （算術） Lean `H1_rate_paper_six_nodes`（仮定なし・数）。二つのサイトの隙間を数値の $\lambda_c = 0.57$ にすると $\lambda_S \ge 0.093$・$v/\hbar \le 1.0015$ で $t = 7.6 \times 10^{-4}$、$C \le 658$ です 読 （入力が浮動小数の読み） Lean `H1_rate_numeric_six_nodes`（仮定なし・数）。二つの値の差の大半は λ_c の紙の値の弱さから来ます。

05

五分類の表 — 六節点の相内 Poincaré の命題の行

六節点の相内 Poincaré の命題の入力を五分類の書式で一表にします。紙の証明をこの本に置くものは「初」、置かないものは「仮」、区間演算は実装の前提を同じ行に書いて「機」、引く定理は書誌の確かめの水準で「典」か「仮」に分けます。行の欄の番号は §08 の依存グラフの節点の番号で、「—」はグラフに無い行です。

表 2　六節点の相内 Poincaré の命題の行（$\hbar$ の範囲の「六節点」は $\{0.2, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01, 0.005\}$）

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
[01]	余白の行：余白 $\hbar\rho - 2\hbar\kappa \ge 0.067$（隣と端 $[0, 2.5]^2$）	機	§04 表 1。float64 ＋外向きの幅（相対 10^{-10}・10^{-12}）、IEEE の正しい丸めを前提、尾は上界で覆う	六節点	`T1_margin_six_nodes`（数）・`T1_node_margin`（仮定：区間の出力）
[02]	傾けの二次 Taylor の補題（傾けの二次の Taylor と Hölder の剰余、中心は任意）	初	§04（Taylor の剰余・Hölder の不等式）	$\hbar$ に依らない	—
[03]	一次元の Poincaré 定数の挟み $B \le C_P \le 4B$（Muckenhoupt）	典	Barthe–Roberto の定理 1・2 の再述で言明を確認	$\hbar$ に依らない	—
[04]	$e(c,t)$ の単調性と $\hbar\kappa \ge 0$（MTP_2 の相関不等式）	典	Karlin–Rinott の命題 2.1（Fallat ほかの命題 3.5 の再述で確認）	$\hbar$ に依らない	—
[05]	尾の補題に使う Holley の比較の連続版	仮	§04（原典の定理番号は未確認）	六節点	—
[06]	Helffer の判定の Poincaré 版（粗い側の鎖の隙間 $\ge \lambda$）	典	Helffer の判定の Poincaré 版（Ledoux の命題 3.1。原典の本文で確認）	$\hbar$ に依らない	—

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
[14]	環の Gershgorin の形	初	§03 (6)	$\hbar$ に依らない	`ring_gershgorin`（仮定：$\kappa \geq 0$）
[11]	最近接の鎖の行：残したサイトの周辺は最近接の鎖	初	§03（Markov 性）	$\hbar$ に依らない	—
[07]	二つのサイトの隙間の行：$\lambda_c \geq 1.3 \times 10^{-4}$（端 $[0,4]^2$）	機	§03。区間演算（多倍長の区間と float64＋外向きの幅）	$(0, 0.2]$	—
[08]	二つのサイトの隙間の行の箱の被覆に使う Poincaré–Miranda の定理	仮	原典の言明は未確認（書誌だけ）	$(0, 0.2]$	—
[15]	入れ子：小さな橋 $\rho_f = 0.922$（Bakry–Émery）	初	§03（曲率の下界。Bakry–Émery は Kolesnikov–Milman の定理 1.2 で典）	$\hbar$ に依らない	—
[09]	入れ子：交差 $\kappa_f = 1.98$（交差の行でも使う。Brascamp–Lieb）	典	Brascamp–Lieb の定理 4.1（再述で確認）・凸な領域は Kolesnikov–Milman	$\hbar$ に依らない	—
[16]	交差の行：$v/\hbar \leq 5888$ ・$\lambda_S \geq 2.3 \times 10^{-5}$ の算術	初	§03	$(0, 0.2]$	`T4_paper_numeric`（仮定：$\lambda_c \geq 1.3 \times 10^{-4}$）
[12]	分散の分解の行：分散の分解 (3)	初	§03	$\hbar$ に依らない	—
[10]	分散の分解の行：使う関数の正則性・稠密性	仮	§03（原典で確かめていない）	—	—
[17]	率の代数 (7) $\Longrightarrow C_P \leq \varepsilon/t$	初	§03	$\hbar$ に依らない	`H1_assembly`（仮定は §03 の名前つきの七つ）
[18]	$C \leq 1.6 \times 10^{10}$	初	§04（[01]・[07]・[16] の値からの算術）	六節点	`H1_rate_paper_six_nodes`（数）
—	$C \leq 658$	読	§04（$\lambda_c = 0.57$ は浮動小数）	六節点	`H1_rate_numeric_six_nodes`（数）
—	余白の行（端が大きい側）：隣と端 > 2.5	仮	§07	—	—
—	余白の行（節点の間）：節点の間の $\hbar$	仮	§06（方法と費用）	$(0.005, 0.2)$ の節点の外	—

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
—	余白の行（小さい $\hbar$）：$\hbar < 0.005$	仮	§07	—	—
—	二つのサイトの隙間の行（端が大きい側）：二つのサイトの端 > 4	仮	§07	—	—
—	切れ端の局所 Poincaré の仮定：環から切れ端（端の値つき）へ	仮	§07（判定の鎖の版への写しは読み）	—	—

表 2 の「機」の行 [01]・[07] は、計算した節点と範囲の中の不等式です。範囲の外の $\hbar$ と端の値については何も言わず、それを受け持つのが表 2 の終わりの五つの「仮」の行（番号の欄が「—」）です。

06

節点の間の $\hbar$ — 方法と費用

六節点の相内 Poincaré の命題は六つの点の文です。相内の局所 Poincaré の条件は $\hbar$ の連続体の文なので、点の間を埋める必要があります。この節は、そのための方法と、方法を一つの部分区間で試した結果と、全域の費用の見積もりを述べます。

(a) β を傾けの三つ目の向きに。 $\beta = 1/\hbar$ は測度 $e^{-\beta S}$ に重みの指数として入るだけなので、$\hbar$ の区間 $[\hbar_1, \hbar_2]$ を β の区間 $[\beta_{\mathrm{lo}}, \beta_{\mathrm{hi}}]$ と見て、傾けの二次 Taylor の補題の端の値の二つの向きの傾けに、三つ目の向き（観測量 $-S$）を足します。余白 (6) の中で β が入る所は六つ（重み・傾けの幅・前因子・求積の刻み・尾・単調性の帯）で、どれも区間のどちらの端で最悪になるかが決まります 初 。一歩の比 $r = \beta_{\mathrm{hi}}/\beta_{\mathrm{lo}}$ の目安は、作用の揺らぎ $\mathrm{Var}(\beta S)$（橋の自由度のほぼ半分、$11/2$ の近く 読 ）から $r \approx 1.17$ で、$\hbar \in [0.005, 0.2]$ は 24 の部分区間で覆えます 初 （$0.2/1.17^{24} \le 0.005$） Lean `nodes_reach_117`（仮定なし・数）。

(b) 弦の形は壊れる。 端の値 (a, b) を止めると $f(\beta) = \hbar\kappa(a, b; 1/\beta)$ は β について滑らかで、二階微分の下界 $f'' \ge -C$ から弦の上界

$$f(\beta) \;\le\; \max\bigl(K2(\beta_{\mathrm{lo}}), K2(\beta_{\mathrm{hi}})\bigr) + \frac{(\beta_{\mathrm{hi}} - \beta_{\mathrm{lo}})^2}{8}\,\sup|f''| \tag{9}$$

が出ます 初 Lean `chord_beta_upper`（仮定：$f \in C^2$・$f'' \ge -C$・$0 \le C$・$\beta_{\mathrm{lo}} \le \beta_{\mathrm{hi}}$・端の上界）。ところが f'' は連結したキュムラントで、絶対値の積（Hölder）で押さえると真の値の 5×10^3〜1.8×10^6 倍になり 読 、$r = 1.17$ では剰余が 0.25〜0.64 と、許される量を大きく超えます Lean `holder_r117_exceeds`（数）。

(c) 段ごとの型（区間で $\hbar$ を持つ型）。規格化しない積分 $J_X(\beta)=\int X e^{-\beta H}dx$（$X\ge 0$ は端の観測量の積の重み）を β の三点で求め、二次式で補間します。補間の誤差は $|\omega(\tau)|/6\cdot\sup|J_X'''|$、$\max|\omega|=2\Delta^3/(3\sqrt{3})$ です 初 （ω は三つの節点で 0 になる三次式。$g(t)=J_X(t)-p_X(t)-K\omega(t)$ が補間の三点と τ の四点で 0 になるように K を選ぶと、Rolle の定理を三回使って g''' が零点を持ち、$K=J_X'''(\eta)/6$）。三階微分は $|y|^3\le c_3(\lambda_+)e^{\lambda_+ y}+c_3(\lambda_-)e^{-\lambda_- y}$ と J_X の対数凸性で、ずらした四つの β の積分の端の最大で押さえます 初 。β の区間をさらに小片に割ると、各小片の上で期待値は一次分数の形になり、その値は小片の両端の値の間にあるので、区間の hull で包めます 初 Lean `mobius_between`（仮定：分母が小片の両端で正）・`lebesgue_le`（仮定：$|u|\le 1$）・`cube_le_exp_split`（仮定：$\lambda_\pm>0$）。この型は単調性を一度も使いません。剰余は打ち消しを要しない生の積分の三次の量で入り、(b) の Hölder の損は現れません。

(d) 一つの部分区間での試し。$\hbar\in[0.008547,0.01]$（$r=1.17$）、端の値の長方形 $[0,0.18]^2$ で (c) を区間演算で走らせた結果が表 3 です 機 （表 1 と同じ実装の前提）。

機 表 3　一つの部分区間の試し（$\hbar\in[0.008547,0.01]$・長方形 $[0,0.18]^2$・最大の箱の値）

量	値	読み方
点 $\hbar=0.01$ の上界（照合）	`0.18996`	表 1 の計算と五桁で一致
部分区間の上界（剰余を含む）	`0.23638`	点の上界からの膨らみ $+0.0464$
剰余の分	`0.00968`	一様な取り分 0.0335 の内
膨らみの内訳	−	節点の上界が β とともに増える分 48%・補間と小片の hull 31%・剰余 21%

取り分。$\hbar=0.01$ の部分区間で要るのは、全ての箱で「点の上界＋膨らみ $\le\hbar\rho/2=0.4335$」です。全ての箱に同じ量を許すと、最悪の箱（上界 0.39996）が決める一様な取り分は $0.4335-0.39996\approx 0.0335$ で、表 3 の膨らみ 0.0464 はこれを超えます。一方、表 3 の長方形の中の箱の取り分は $0.4335-0.19\approx 0.24$ で、その内に入ります。

律速。剰余ではなく、節点の上界そのものが β とともに増える分（求積の幅が β で広がる）が律速です。最悪の箱の上界 0.39996 は大半が求積の幅で、同じ箱の浮動小数の値は 0.0076 です 読 。この箱を含む帯を細かい求積で計算し直すと、箱の上界は 0.0751 に下がりますが 機 、全域の最大は 0.39971 にしか下がりません。上界が 0.19 を超える箱が、端の値の正方形の四辺に沿った額縁に約 3.2 万個、粗い設定のまま残っているからです。

費用。全域 $\hbar\in[0.005,0.2]$ の見積もりが表 4 です（一コアの計算時間・どれもまだ走らせていない見積もり）。部分区間一つの費用は点の計算の約 3.4 倍（表 3 の試しの実測）、$\hbar$ が小さいほど一点の費用は大きくなります。

表 4　節点の間を埋める費用の見積もり（$\hbar\kappa$ の側。$\hbar\rho$ の側は別に要る）

道	前提	r	部分区間	計算時間
額縁を細かい求積で計算し直してから	額縁の点の上界が 0.318 以下に下がること（未計算）	1.17	24	約 23〜39 時間（＋額縁の計算し直し 30〜50 分）
点の上界は今のまま（膨らみが足し算で効く模型）	表 3 の膨らみが箱によらない	1.12	33	約 22 時間
点の上界は今のまま（膨らみが掛け算で効く模型）	表 3 の比 1.363 が箱によらない	1.04	94	約 63 時間

二つの模型のどちらが正しいかは、一つの長方形の試しからは決まりません。額縁を先に計算し直す道は、額縁の上界が 0.318 を割れば模型によらず $r = 1.17$ で通るので、費用の見積もりの幅も狭めます。$\hbar\rho$ の側（一次元の測度・自由度 23）は、同じ目安で $r \approx 1.12$・33 の部分区間と読まれます 読 。

正確には、表 3 は一つの部分区間の一つの長方形の結果で、その部分区間を閉じたことにはなりません。部分区間を閉じるには、その部分区間で全ての長方形を (c) の型で計算する必要があります。

07

残りの行 — 別の方法が要るもの

六節点の相内 Poincaré の命題から相内の局所 Poincaré の条件へ、また箱の中で使う切れ端の局所 Poincaré の仮定へ進むのに残る行を、表 5 に並べます。費用の欄は、見積もりがあるものだけに書きます。

表 5　相内の局所 Poincaré の条件の残りの行

行	中身	いまの状態	要るもの
節点の間の残件	節点の間の $\hbar \in (0.005, 0.2)$	§06 の方法の型ができ、一つの部分区間の一つの長方形で試した	額縁の計算し直しと、全ての部分区間・全ての長方形の計算（表 4）。$\hbar\rho$ の側も同じ型で
小さい $\hbar$ の残件	$\hbar < 0.005$	計算機援用の型は使えない：比 r を一定にすると部分区間の数 $\ln(0.005/\hbar)/\ln r$ が $\hbar \to 0$ で無限に増え、一つの費用も増える	$\hbar \to 0$ の漸近で一様な議論（別の方法）
大きい端の値の残件	隣と端の値 > 2.5	単調性で覆う道は閉じている：FKG が与えるのは尤度比の順序で、隙間は単調にならない（隙間の非単調の命題）。また $e(c,t)$ は c について有界でない（$c^{3^{-11}}$ の速さで増える）	大きい隣で一次元の U が一様に凸になることの紙の議論。有限の範囲 $[2.5, 4]$ は $\hbar \geq 0.05$ なら同じ計算で覆える見込み

行	中身	いまの状態	要るもの
定数の鋭さの残件	定数の鋭さ	紙の入力で 1.6×10^{10}、数値の入力で 658。差は二つのサイトの隙間 λ_c の紙の値の弱さが担う	二つのサイトの隙間の行の組み直し。相内の局所 Poincaré の条件の言明には定数の大きさは要らない（$\hbar$ に依らないことだけが要る）
切れ端の版の残件	切れ端の版（切れ端の局所 Poincaré の仮定）	六節点の相内 Poincaré の命題は環の言明。箱の中では両端の値を持つ切れ端が要る	判定の鎖の版（環より隣が少ない）への写し。いまは読みの水準
書誌の残件	引いた定理の書誌	Muckenhoupt・FKG は二次資料の再述で言明を確認、Ledoux は原典で確認。Holley の連続版の定理番号と Poincaré–Miranda の定理の原典は未確認	原典の取得。取れなければ「仮」のまま（表 2 の [05]・[08]）

隙間の非単調の命題は否定の型の小さな命題です。二点 $\{0,1\}$ の測度 $(1-p,p)$ の分散 $p(1-p)$ は、p を尤度比の順序で上げても単調ではありません（$3/16 < 1/4 > 3/16$）初 Lean `tilt_variance_not_monotone`（仮定なし・数）。対称な二重井戸を一次で傾けた族でも同じで、FKG だけからは「隙間が隣について単調」は出ません。

08

依存グラフ — 六節点の相内 Poincaré の命題

表 2 の行を、23-05 §07 と同じ書式で節点の一覧にします。前提の番号は結論の番号より必ず小さく置きます。

```
[01] 機  余白の行：余白 ≥ 0.067（隣と端 [0,2.5]²）                    ガ
[02] 初  傾けの二次 Taylor の補題（中心は任意）                      ħ に
[03] 典  Muckenhoupt の挟み B ≤ C_P ≤ 4B
[04] 典  MTP₂ の相関不等式（e の単調性・ħκ ≥ 0）                     ħ に
[05] 仮  Holley の比較の連続版（尾の補題）                           六節
[06] 典  Helffer の判定の Poincaré 版（Ledoux の命題 3.1）
[07] 機  二つのサイトの隙間の行：λ_c ≥ 1.3×10⁻⁴（端 [0,4]²）          (0,(
[08] 仮  Poincaré–Miranda の定理
[09] 典  Brascamp–Lieb（交差 κ_f・交差の行）                         ħ
[10] 仮  分散の分解の行：正則性・稠密性                              —
[11] 初  最近接の鎖の行：残したサイトは最近接の鎖                    ħ に依
[12] 初  分散の分解の行：分散の分解 (3) ⟸ [10]                       ħ
[13] 初  余白 λ の連続体の文 ⟸ [01][02][03][04][05]                  六
         Lean T1_margin_six_nodes（数）・T1_node_margin（仮定：区間の出力）
[14] 初  粗い側の隙間 ≥ λ（Gershgorin）⟸ [06][11][13]                六
         Lean ring_gershgorin（仮定：κ ≥ 0）
[15] 初  入れ子 λ_S ≥ 2.3×10⁻⁵ ⟸ [07][08][09]
[16] 初  交差の行：v/ħ ≤ 5888 ⟸ [07][09]
         Lean T4_paper_numeric（仮定：λ_c ≥ 1.3×10⁻⁴）
[17] 初  率の代数 C_P ≤ ε/t ⟸ [12][14][15][16]
         Lean H1_assembly（仮定：hT5・hFine・hLedoux・hT1・0 < λ・hT4・率
[18] 初  六節点の相内 Poincaré の命題：C ≤ 1.6×10¹⁰ ⟸ [17]           六
         Lean H1_rate_paper_six_nodes（数）
```

どの「⟸」の行でも右の番号が左より小さいので、円はありません。葉のうち「仮」は [05][08][10]、「機」は [01][07] です。数値の入力による $C \le 658$（表 2 の数値の入力の行）は [17] の代数に読みの値を入れたもので、このグラフの結論 [18] には入りません。表 2 の終わりの五つの行は六節点の相内 Poincaré の命題の前提ではなく、六節点の相内 Poincaré の命題から相内の局所 Poincaré の条件と切れ端の局所 Poincaré の仮定へ進むための行で、統合のグラフ（23-12）で [18] と相内の局所 Poincaré の条件の節点の間に入ります。

この章の組み立ては、拡散型緩和時間の仮定を取っ掛かりとした一段目の中の一つの条件の扱い方です。別の視点は第 24 部で扱います。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
機 六つの節点で、隣と端 $[0, 2.5]^2$ の全てについて余白 ≥ 0.067（表 1、実装の前提つき）。二つのサイトの隙間 $\lambda_c \geq 1.3 \times 10^{-4}$	節点の間の $\hbar$、$\hbar < 0.005$、$\hbar > 0.2$。隣と端 > 2.5
初 二尺度の組み立ての代数と率の条件 (7)、六節点の相内 Poincaré の命題の定数 1.6×10^{10}（表 2 の仮定の行の上） Lean （仮定は表 2）	相内の局所 Poincaré の条件そのもの（$\hbar$ の連続体で一様な文）。切れ端の版（切れ端の局所 Poincaré の仮定）
典 Muckenhoupt の挟み・MTP_2 の相関不等式・Helffer の判定の Poincaré 版・Bakry–Émery・Brascamp–Lieb	Holley の比較の連続版と Poincaré–Miranda の定理の原典での確認（表 2 の [05]・[08] は仮）
読 数値の入力での $C \leq 658$、壁つきの相の自己相関の時間、節点の間の一歩の比の目安	これらを上界に使うこと
節点の間を埋める方法の型と、一つの部分区間の一つの長方形の試し（表 3）・費用の見積もり（表 4）	部分区間を一つでも閉じたこと。表 4 の時間は見積もりで、走らせた時間ではない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
一次元の Poincaré 定数の挟み	典	B. Muckenhoupt, Studia Math. 44 (1972) 31–38（書誌）。言明は F. Barthe, C. Roberto, Potential Anal. 29 (2008) 167–193, arXiv:math/0612026 の定理 1・2 で確認。
MTP_2 の相関不等式・Holley の比較	典・仮	S. Karlin, Y. Rinott, J. Multivariate Anal. 10 (1980) 467–498 の命題 2.1（S. Fallat ほか, Ann. Statist. 45 (2017), arXiv:1510.01290 の命題 3.5 の再述で確認）。R. Holley, CMP 36 (1974) 227–231（連続版の定理番号は未確認）。
Helffer の判定の Poincaré 版	典	M. Ledoux, Sém. Probab. XXXV, LNM 1755 (2001) 167–194 のHelffer の判定の Poincaré 版（本文で確認）。原典 B. Helffer, Ann. IHP Probab. Statist. 35 (1999) 483–508。
Bakry–Émery・Brascamp–Lieb	典	D. Bakry, M. Émery, LNM 1123 (1985)；H. J. Brascamp, E. H. Lieb, J. Funct. Anal. 22 (1976) 366–389；凸な領域は A. V. Kolesnikov, E. Milman, J. Geom. Anal. 27 (2017), arXiv:1310.2526 の定理 1.2。
Poincaré–Miranda の定理	仮	W. Kulpa, Amer. Math. Monthly 104 (1997) 545–550（書誌だけ。言明は未確認）。
表 1・表 3 の区間の値	機	記録の区間演算（float64＋外向きの幅、表 2 の [01] の行の前提）。独立な経路（台形則・別の刻み）の浮動小数の値が、各長方形の無作為の箱と最大の箱で全て上界の下にあることを照合。
表 4 の費用	見積もり	表 3 の試しの実測（部分区間一つが点の約 3.4 倍）と、節点ごとの計算時間の $\hbar$ 依存の当てはめからの見積もり。

もの	種別	出典・道具
組み立ての代数・数	初・Lean	定理 `H1_assembly`・`ring_gershgorin`・`T1_margin_six_nodes`・`T1_node_margin`・`T4_paper_numeric`・`H1_rate_paper_six_nodes`・`H1_rate_numeric_six_nodes`・`min_of_two_upper`・`symm_upper`・`tilt_variance_not_monotone`・`chord_beta_upper`・`holder_r117_exceeds`・`nodes_reach_117`・`mobius_between`・`lebesgue_le`・`cube_le_exp_split`（仮定は本文と表 2 の各行）。言明の一覧は 23-13。

この章で使った語 — 相（キンクの無い相）・残したサイト・橋・入れ子・Helffer の判定・余白・節点・部分区間・取り分・膨らみ・額縁・切れ端の版（切れ端の局所 Poincaré の仮定）・計算機援用・区間演算。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-07 鞍点の管の条件の地図 — 七つの道筋と環の継ぎ目 — 鞍点の族に沿う輸送（鞍点の管の条件）を七つの道筋に割った地図と、環の継ぎ目（外の鎖は窓の全体で閉じ、内の鎖は有限の係数）を一枚にする。

2026-10-09 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 23 部 一本目の道（前半）— 時間の方向から 鞍点の管の条件・七つの道筋・環の継ぎ目 · Kiichi, Shiori and Rin

鞍点の管の条件の地図 — 七つの道筋と環の継ぎ目

この章は本書の検討です。§02 は未解決の地図、§07 は案内です。

この章で分かること — 鞍点の管の条件（平らな鞍点の族に沿う輸送）を、七つの道筋に割った地図として一枚にします。道筋ごとに、何を示そうとしているか・いまの分類（初・典・機・読・仮）・残件・詳しく扱う章を一行で並べます。後半では、周期的な経路の上でキンクと反キンクが出会う所（環の継ぎ目）を扱います。継ぎ目は頂上の台地そのもので、外の鎖は計算した $\hbar$ の窓の全体で計算機援用の不等式になり、内の鎖は 1 を越える有限の係数で残ります。

前提となる章 — 23-05 §03（四つの条件の言明）・23-05 §04 箱の中の段（鞍点の管の条件が箱の中に入る場所）・23-04 §06（台地）・23-00 §01（五分類の札）。

先に言うこと — 水準は〔三〕です。この部は拡散型緩和時間の仮定（揺らぎの均される時間が相関長の二乗の冪で伸びる、23-01）を検討の軸に置いています。拡散型緩和時間の仮定は、問題文の量を格子で計算でき機械検査つきで進められる量に言い換えたもので、鞍点の管の条件はその一段目を支える四つの柱の一つです。この章は鞍点の管の条件が閉じたことを述べる章ではなく、どの道筋がどこまで来て何が残っているかを一枚にする章です。別の視点は第 24 部で扱います。

この章の順序

1. 鞍点の管の条件の言明と二つの場所 — 箱の割り方で鞍点の管の条件に残る行、橋の管と環の継ぎ目
2. 七つの道筋の地図 — 一行ずつの分類と残件（表 1）
3. 環の継ぎ目 — 頂上の台地・外の鎖と内の鎖（表 2）
4. 窓の定数の数値の道筋の残る数値と費用 — 本数と時間の見積もり
5. 五分類の表 — 鞍点の管の条件の行（表 4）
6. 依存グラフ — 番号で円が無いことを確かめる
7. 23-08〜23-11 への案内

01

鞍点の管の条件の言明と二つの場所

鞍点の管の条件の言明は 23-05 §03 のとおりです。写しておきます。

鞍点の管の条件 — 平らな鞍点の族に沿う輸送（23-05 の写し）

測度：キンクと反キンクの対の族（対の中心 X と間隔 ℓ を径数とし、作用がほとんど平らな鞍点の族）の周りの管に入る配位の条件つきの測度。**定数**：その族に沿って谷から谷へ移る平均差の輸送の定数と、管の中の Poincaré 定数。**一様性**：経路のサイトの数（次元）と $\hbar$ に一様。箱の中で使うときは、管の長さ $\le C\xi$ に一様な管の Poincaré（鞍点の管の Poincaré の仮定）と、管の中の芯（頂上の近くにとどまる区間）の Poincaré が芯の長さ k に一様なこと（芯の Poincaré の一様性の仮定）の二つの行になる。

箱の割り方で鞍点の管の条件に残るもの。23-05 の箱の割り方では、鞍点の族に沿う向き（キンクの位置）を遅い変数に取ったので、その向きの縦の輸送は箱の中の隙間の条件の行（キンクの気体の隙間の仮定と交差項の一様性の仮定）が受け持ちます（23-05 §04 の箱の中の段の注）。鞍点の管の条件に残るのは、キンクの配置を止めた後の**管と芯の行**、すなわち鞍点の管の Poincaré の仮定と芯の Poincaré の一様性の仮定です。この章の地図はこの二つの行を支える道具の地図です。

なぜ難しいか。芯 $Q_k = (-x_c, 0)^k$（$x_c = 0.89$、谷 -1 の側から頂上 0 の手前までの箱を k サイト並べたもの）の上では、作用が頂上でほとんど平らで、一サイトの曲率が負になります（§05 の表 4 の頂上の曲率の不足の壁、詳しくは 23-09 §06）。凸性の道具（Bakry–Émery）は芯の全体には当たらず、芯の長さ k は相関長まで伸びるので、定数が k に一様であることを別の手で示す必要があります。

二つの場所 — 橋の管と環の継ぎ目

鞍点の管の条件の行は、経路の形の違う二つの場所で現れます。

- **橋の管**。両端を二つの谷に止めた区間（橋）にキンクが一本ある配位の、キンクの周りの管。芯は管の中で頂上の近くにとどまる区間です。箱の中の鞍点の管の Poincaré の仮定・芯の Poincaré の一様性の仮定はこちらの形です。
- **環の継ぎ目**。周期的な短い経路（環、長さ $T \ll \xi$）にキンクと反キンクが一対ある配位で、対の間隔 ℓ が縮んで二つが出会う所。対が消える直前の配位は頂上の台地そのものです

（§03）。橋の管の議論はキンクが離れていることを使うので、継ぎ目では別の扱いが要ります。

どちらの場所でも、芯の定数を押さえる道具は同じ型です。芯の中のサイトに「谷の側か頂上の側か」の粗い印を付け、ある一サイトの周りの 17 サイトの範囲（サイトの窓 W）の印の周辺の対数 Sobolev 定数 A_W と、窓の外へ伸びる鎖の縮みの比 q を組み合わせます。この「窓の外の鎖」の縮みの条件 $q<1$ が窓の外の鎖の道筋と環の継ぎ目の道筋の外の鎖、A_W の大きさが、窓の定数の数値の道筋・区画の枠組みの道筋・窓の対数 Sobolev の道筋の中心です。サイトの窓 W と、計算機援用で扱う $\hbar$ の範囲（$\hbar$ の窓 $[3\cdot10^{-4},3\cdot10^{-3}]$）は別のものです。「窓の外の鎖」「窓の中の段」の窓はサイトの窓、「窓の全体」「窓の下の端」の窓は $\hbar$ の窓で、紛れるときは「サイトの」を付けます。

02

七つの道筋の地図

鞍点の管の条件の芯の行を閉じるために立てた道筋は七つです。道筋は中身の名で呼びます。表の並べ順は順序や重さを表しません。表 1 の「分類」は 23-00 §01 の五分類の記号で、一つの道筋に二つ以上の分類が混ざるときは主なものから並べます。

表 1　七つの道筋（窓＝$\hbar\in[3\cdot10^{-4},3\cdot10^{-3}]$、三点＝$\hbar=3\cdot10^{-3}/10^{-3}/3\cdot10^{-4}$）

道筋	何を示すか	いまの分類	$\hbar$ の範囲	残件	章
窓の外の鎖の道筋（窓の外の鎖の縮み）	橋の芯で、サイトの窓の外へ伸びる印なしの鎖の Stein の核の比 $q_{\mathrm{free}}<1$	機 $q_{\mathrm{free}}\le 0.998854904$（float64＋外向きの幅・IEEE の正しい丸めを前提・$\hbar$ を区間に・25 の部分区間）	窓の全体	窓の外と $\hbar\to0$ には何も言わない	23-08
窓の定数の数値の道筋（残る数値）	サイトの窓の定数：最小の重み π_*・稀さ Λ・一サイトの Poincaré C_{1D}^{W}・印の動力学の隙間 gap_W・橋の窓の内の鎖の比	読（三点の浮動小数）仮（計算の本数に落とす紙の還元は本に置かない）	三点	区間演算の本数と時間（§04）。積の形の床のため走らせない判断	本章 §04
区画の枠組みの道筋	区画の和の五つの段（区画の和・Gibbs の分解・成分ごとの局所化・体積の局所性・区画の合成）と閉じる条件 $b(A_Wc_H+D_W+\ln2)<\kappa\ell_{\min}$	初（五段の証明を 23-09 に置く）。入力は 仮 ・ 読	段は $\hbar$ に依らない／入力は三点	入力（窓の周辺の対数 Sobolev の入力・橋の体積の局所性の入力・E_m・欠陥の行・正則性）	23-09 §02

道筋	何を示すか	いまの分類	$\hbar$ の範囲	残件	章
区画の入力の道筋（小さな仮定）	区画の入力の小さな仮定（十一の行。橋の体積の局所性の入力・芯の対数 Sobolev の一様性の仮定・縦の項・正則性のほか、中身の一行をまだ書いていない七つの行）	仮（一覧だけ・未着手）	—	各行	本章 §05
窓の対数 Sobolev の道筋（残る一命題）	窓の対数 Sobolev の閾の命題：サイトの窓の周辺の対数 Sobolev 定数が要る値 $A_{\max}(\hbar)$ の内	仮。三本の筋（成分ごと・スカラー・Feynman–Kac）はどれも閉じていない	窓（スカラーの筋の命題は $[3\cdot 10^{-4}, 10^{-3}]$）	三本の筋の残る一歩	23-09 §05
環の継ぎ目の道筋	環の上の芯：外の鎖の縮みと内の鎖の係数	外：機（ピン ≤ 0・継ぎ目の極限の仮定・端の値が分布で与えられる仮定は仮）／内：読 $q_{\text{in}} \approx 1.24$–$1.28$	窓	継ぎ目の極限の仮定・端の値が分布で与えられる仮定・台地で条件づけた比・境の段・内の鎖の区間化	本章 §03
$\hbar$ の範囲の道筋	窓の外と $\hbar \to 0$	この部の対象の外	—	紙の漸近	23-12・23-15

表 1 の読み方を三つ添えます。

(a) 計算機援用の行は二つだけ。窓の外の鎖の道筋と環の継ぎ目の道筋の外の鎖です。どちらも「計算した $\hbar$ の窓の中で、区間演算の出力の表を前提に不等式が成り立つ」という意味の閉じ方で、窓の外と $\hbar \to 0$ については何も言いません（23-08）。

(b) 窓の外の鎖の道筋が閉じても鞍点の管の条件は閉じない。窓の外の鎖の道筋の比 q_{free} は、サイトの窓の対数 Sobolev 定数 A_W の上界の一つの因子 $S_W = 1 + 2\big(16 + 1/(1 - q_{\text{free}})\big)$ に入るだけです（§06 の依存グラフの [12]）。いまの上界の組み立てでは A_W の上界は要る値の外にあり（17 サイトの窓の因子の積の形で 4〜5 桁、3 サイトの窓で要る側を上げた形でも 29〜74 倍、23-09 §03）、残る一命題（窓の対数 Sobolev の道筋）は別の筋で攻めています。

(c) $\hbar$ の範囲の道筋は対象の外と決めた。二重井戸の緩和時間の冪の言明は $\hbar \to 0$ の言明なので、最終的には二重井戸の四条件を $\hbar \to 0$ の漸近で言う必要があり、固定した窓の計算機援用だけでは届きません。窓の外は紙の漸近が要ります。この部では、窓の中の行の分類を確かめることを先にし、揃え方は 23-12・23-15 で述べます。

```
03
```

環の継ぎ目 — 頂上の台地と、外の鎖・内の鎖

環は長さ $T \ll \xi$ の周期的な経路で、キンクと反キンクが一対あり、負の側にいる弧の長さを ℓ とします。23-05 §02 (c) の縮約した台地の模型は、この ℓ だけを残したものでした。継ぎ目は ℓ が小さくなって対が消える所です。

継ぎ目は頂上の台地そのもの

負の弧の長さを ℓ に固定した連続の最小作用 $S(\ell)$ は、$\ell \to 0^{+}$ で 0 ではなく S_0 に近づきます（経路は頂上に触れて戻る）。$\ell \le \pi\sqrt{2}$ では最小の配位はキンクを持たず、頂上 0 の上に平らに乗る台地で、作用は $S_0 + \ell/8$ です。$\ell > \pi\sqrt{2}$ で窪みが生じ、作用は $2S_0$ に近づきます（$2S_0 - S \approx 8e^{-\ell}$）仮 （連続の変分の議論と格子の最小の浮動小数の照合。証明は本に置かない）。格子（$\varepsilon = \frac{1}{2}$）でも、負の側の長さ m サイトの最小は $m \le 9$ で $S_{\mathrm{lat}}(1) + (m-1)/16$ に乗ります 読 （浮動小数の最小、差 $\le 5 \times 10^{-11}$）。**継ぎ目の配位は、芯（頂上の近くにとどまる区間）そのもの**で、橋の管の芯と同じ難しさがここに現れます。

ℓ の向きは易しい。ℓ だけの一次元の輸送は、継ぎ目まで含めて押さえられます。継ぎ目の帯・襟・台地のそれぞれで、一次元の Poincaré 定数を 4 倍以内で挟む Muckenhoupt の量が $64 S_0 \hbar \cdot L_0^2/(8D) \cdot T^2/D$ 以下になり、代数は機械検査が通っています 仮 （一次元の模型の上の紙の評価。模型への縮約そのものが仮定）。難しいのは座標の側で、継ぎ目では符号の変わる回数が遅い変数になりません。そこで符号に依らない区画、すなわち $|z| < \theta$（$\theta = \frac{1}{2}$）のサイトの連なり（**塊**）を単位に畳みます。他を止めた k サイトの塊の作用は、$V'' \ge -\frac{1}{2}$ から $k \le 7$ で凸です 初 （三重対角の行列 $\mathrm{tridiag}(-2, 4+w, -2)$、$w \ge -\frac{1}{4}$ の最小固有値 $8\sin^2 \frac{\pi}{2(k+1)} - \frac{1}{4}$ は $k \le 7$ で正）。

外の鎖と内の鎖

環のサイトの窓 W（17 サイト）には、塊が一つ（長さ $k \le 7$、無くてもよい）・窓の他のサイトは谷の側・窓の外は符号の決まった側、という印を付けます。窓の対数 Sobolev 定数の組み立てには、二種類の鎖の縮みの比が入ります。

- **外の鎖**：サイトの窓の外へ伸びる鎖。符号の決まった領域 $[0, \infty)$ を動き、鏡像 $x \mapsto -x$ で $(-\infty, 0]$ に写すと、橋の芯の外の鎖と同じ型の鎖になります。作用は鏡像で不変ですが 初 （V が偶関数） Lean `chain_action_reflect` （仮定なし。測度の像と Stein の核の反転は Lean の外）、橋の鎖と同じ鎖ではありません。橋の箱には下の壁 $-x_c$ があり、環の外の鎖には無いからです。
- **内の鎖**：サイトの窓の中の段。段ごとに箱が「谷の側」「塊」と替わり、塊の箱 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ は 0 を跨ぎます。

二つの鎖の違いは、壁の角で読めます。壁の位置 b での古典の角の比は $r(b)=\Delta/(\Delta-\varepsilon^2V'(b))$ で、$V'(b)=0$ の壁（外の鎖の壁 0）でちょうど 1、力が箱の外へ押す壁で 1 を越えます 初 （比の符号の代数） Lean `corner_eq_one` （仮定：$\Delta\neq 0$）・`corner_gt_one` （仮定：$0<c<\Delta$）。比の式そのものは包絡線の計算から来ていて、その正則性は 仮 です。塊の上の壁 $+\frac12$ では $\varepsilon^2V'(\frac12)=-3/64$ で、力が壁へ向かうので角は 1 を越えます（孤立した壁の古典の値 1.2857）。

表 2　環の継ぎ目の外と内（三つ組は $\hbar=3\cdot10^{-3}/10^{-3}/3\cdot10^{-4}$ の順）

量	値	分類	条件
外の鎖（条件づけない形） q_{out}	窓の全ての $\hbar$ で ≤ 0.998888530（最大は窓の下の端、上の半分 $[10^{-3},3\cdot10^{-3}]$ では ≤ 0.996606914）	機	全てのピン $p\le 0$・評価点 $s\le 0$・端 $z_0=-1$。継ぎ目の極限の仮定・端の値が分布で与えられる仮定・正則性は 仮 。float64＋外向きの幅・IEEE の正しい丸めを前提
外の鎖の深い側（ピン $p<-3$）	≤ 0.592898559	機	同上（尾の分散の上界 ≤ 0.357608022 を使う）
境の段（ピン $\in(0,\frac12)$）	≈ 1.004–1.045（四点 $\hbar=3\cdot10^{-3}/10^{-3}/(3/9100)/3\cdot10^{-4}$ で $1.0043/1.0282/1.0436/1.0446$）	読	塊が窓の端に触れる配位だけに現れる有限の段。上の外の鎖の行はこのピンを覆わない
内の鎖 q_{in}	$1.2707/1.2765/1.2421$（三つ組の順。四点目の $\hbar=3/9100\approx 3.3\cdot10^{-4}$ で 1.2449）	読	浮動小数の転送・格子を細かくすると上がる向き。律速は塊の中の段でピンが塊の遠い壁の際
有限の係数 $\bar q=\max(q_{\mathrm{in}},1)$	$\bar q\approx 1.3$、$\bar q^{16}\approx 27$–67（S_W・T_W の各々に掛かる。積の A_W には $\bar q^{32}$）	読	$\bar q=1$ は立たない
$S_W=1+2\bar q^{16}\big(16+1/(1-q_{\mathrm{out}})\big)$	≤ 122745（$\bar q=1$ なら ≤ 1833）	初（算術）	入力 $q_{\mathrm{in}}\le 13/10$ は 読 、q_{out} は 機 。 Lean `sw_inner_le` （仮定：$q_{\mathrm{in}}\le 13/10$・$q_{\mathrm{out}}\le 0.998888530$）

表 2 を一行で言えば、**外は閉じ（窓の中・ピン ≤ 0 の条件つき）、内は有限の係数**です。ここでの「閉じ」は、計算した $\hbar$ の窓の中で外の鎖の縮みが計算機援用の不等式になったという意味で、環の上で鞍点の管の条件が閉じた意味ではありません。外の鎖の結果は、箱に条件づけた鎖で一度閉じ（上界 0.998888525）、その後に条件づけない鎖へ広げた（尾の項を区間演算の剰余に入れ、深いピンは閉じた形の上界で覆った）ものです。広げたことで、条件づけた鎖を元の測度へ戻すための四つの仮定の行が要らなくなりました。

内の鎖が 1 を越える理由と、区間化の費用。内の鎖の律速は、塊の箱の遠い壁の際にピンがある段で、上の外へ押す角そのものです（古典の値 1.2857 に近い）。外の鎖の区間の機械は、右の壁が 0 で $V'(0)=0$・箱が一つ・ピンと格子が同じ、という前提の上に組まれていて、入力を差し替えるだけでは内の鎖に使えません。内の鎖を区間演算に載せる費用の見積もりは、紙

1〜2 段＋台本 1〜2 本＋約 50 本・約 42 時間（一コア）で、得られるのは有限の係数 $\bar{q} \approx 1.3$ の上界だけです。この係数は A_W に $\bar{q}^{32} \approx 10^{3.6}$ 倍で入るので、区画の枠組みの閉じる条件（23-09 §02）を満たす道にはなりません。

環の継ぎ目に残る行。継ぎ目の極限の仮定（段を限りなく重ねた極限が各 $\hbar$ で不動点の囲いに入ること）・端の値が分布で与えられる仮定（鎖の端の値が一点でなく分布で与えられる場合）・台地で条件づけた比（台地の長さで条件づけた比）・境の段・内の鎖の区間化。どれも 仮 か 読 のままです。

04

窓の定数の数値の道筋 — 残る数値と費用

サイトの窓の対数 Sobolev 定数の上界は、いまの組み立て（窓の対数 Sobolev の積の上界）では因子の積 $A = c_W \cdot C_{\mathrm{1D}}^{W} \cdot S_W \cdot T_W$ の形です。c_W は印の周辺の測度の定数で、最小の重み π_* と印の動力学の隙間 gap_W から作り、S_W・T_W は鎖の縮みの比から作ります。窓の定数の数値の道筋は、因子の値を三点の浮動小数から区間演算へ移すための紙の還元と本数の見積もりです。

表 3　窓の定数の数値の道筋の数値と、区間演算へ移す本数（本数と時間は見積もりで、まだ一本も走らせていない）

量	紙の還元（本に置かない）	本数の見積もり	いまの値
最小の重み π_*	印の周辺の測度は MTP_2 で、最小の重みを与える列は端の列（全て谷の側）に寄る（Karlin–Rinott の保存定理 典 、二次資料の再述で言明を確認）	2〜3 本	読 三点で全て谷の側が最小
稀さ Λ	単調な関数の境界値についての sup は端の一本の鎖で取れる（MTP_2 の関連性）	1〜2 本	読
一サイトの Poincaré C_{1D}^{W}	Muckenhoupt の判定量 典 （二次資料の再述で確認）を境界値のセルごとに	約 20 本	読 ≤ 0.66 の桁
隙間 gap_W	一つの印が界面の相互作用を遮ることから、流れの混雑度を端の列の鎖で押さえる	4 本	読 0.959–1.000
橋の窓の内の鎖の比	Stein の核の比は印の列について単調でない（数え上げた 665 組のうち 300 組前後で破れる）ので、列の型ごとと遠い側の帯に分ける	約 13 本	読 三点で < 1

合計 約 42 本・約 21 時間（一コア）の見積もりです。**この 42 本は走らせない判断にしました。**理由は積の形そのものの床です。$S_W \ge 1 + 2/(1 - q_{\mathrm{free}})$・$T_W \ge |W|$・$c_W \ge \ln\bigl(1/\nu(\sigma_i = \text{谷の側})\bigr) \approx E_U/\hbar$ から、因子の真の値を入れても $A \gtrsim 1.4 \times 10^{4}$–$1.4 \times 10^{6}$ で 読 （見積もり）、区画の枠組みの要る値（23-09 §03、数十〜数百）の数十倍から数万倍の外にあります。区間演算で因子を確かめても、この形のままでは閉じる条件に届きません。窓の定数の数値の道筋の紙の還元（遮蔽・端の列）は、積でない形の上界（窓の対数 Sobolev の道筋の筋）にもそのまま入る道具として残します。

05

五分類の表 — 鞍点の管の条件の行

表 1〜表 3 の行を、五分類の書式で一表にします。分類は一行に一つで、機械検査の欄は分類の外です。行の番号は §06 の依存グラフの節点の番号で、「—」はグラフに無い行です。

表 4　鞍点の管の条件の芯の行（$\hbar$ の範囲の「—」は、どの $\hbar$ でも示されていない仮定の行）

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
[01]	区間演算の前提：IEEE 754 の四則の正しい丸め・和の誤差の上界・自前の指数関数の誤差の上界	仮	23-08 §03	—	—
[02]	継ぎ目の極限の仮定・端の値が分布で与えられる仮定・正則性	仮	§03	—	—
[03]	窓の対数 Sobolev の閾の命題：$A_W < A_{\max}(\hbar)$	仮	窓の対数 Sobolev の道筋・23-09 §03	—	—
[04]	区画の入力の道筋の小さな仮定の全て	仮	表 1	—	—
[05]	窓の対数 Sobolev の積の上界：$A_W \le c_W C_{1\mathrm{D}}^{W} S_W T_W$（積の形）	仮	§04（紙の組み立ては本に置かない）	—	—
[06]	窓の定数の数値の道筋の定数 π_*・Λ・$C_{1\mathrm{D}}^{W}$・gap_W・橋の窓の内の鎖の比	読	表 3（三点の浮動小数）	三点	—
[07]	環の内の鎖 $q_{\mathrm{in}} \approx 1.24\text{–}1.28$	読	表 2（浮動小数の転送・上界ではない）	四点	—
[08]	境の段 $q \approx 1.004\text{–}1.045$	読	表 2	四点	—
[09]	窓の外の鎖の縮みの行：$q_{\mathrm{free}} \le 0.998854904$	機	23-08 §05（前提は区間演算の前提の行）	窓	`win_qfree_window_le_of_interval_table`（仮定：25 の部分区間の区間演算の出力の表）

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
[10]	環の外の鎖 $q_{\mathrm{out}} \le 0.998888530$（ピン ≤ 0）	機	23-08 §06（前提は区間演算の前提の行・継ぎ目の極限の仮定の行）	窓	`unc_window_lt_one_of_table`（仮定：25 の部分区間の区間演算の出力の表）
[11]	区画の枠組みの五つの段	初	23-09 §02（入力は小さな仮定の行・継ぎ目の極限の仮定の行）	$\hbar$ に依らない	`cell_sum_sup`・`comp_close`（仮定は 23-09 の表）
[12]	橋の $S_W \le 1 + 2(16 + 1/(1-q)) \approx 1779.6$	初	等比級数の和（23-08 §02）	窓	—
[13]	環の $S_W \le 122745$	初	表 2（入力の q_{in} は読）	窓	`sw_inner_le`（仮定：$q_{\mathrm{in}} \le 13/10$・$q_{\mathrm{out}} \le 0.998888530$）
[14]	積の形の A_W の値 $\approx 2.5 \times 10^6/5.4 \times 10^6/4.7 \times 10^7$	読	§04（c_W の一点は外挿を含む見積もり）	三点	—
[15]	芯の隙間の k に一様な正の下界（区画の合成の形）	初	23-09 §02（窓の対数 Sobolev の閾の行・区画の枠組みの行の上で）	—	`comp_close`（仮定：Barta・成分ごとの局所化・Bochner の三つの不等式）
—	頂上の一サイトの曲率が 4 に $\frac{1}{4}$ 足りない（共通の壁）	初	23-09 §06	$\hbar$ に依らない	—

表 4 の「機」の二行（[09]・[10]）は、どれも前提の区間演算の前提の行の上の計算機援用で、Lean が確かめたのは「区間演算の出力の表を仮定に置いた組み立て」です（23-08 §08）。「初」の芯の下界の行は、仮定の窓の対数 Sobolev の閾の行の上の代数で、芯の隙間の下界が示されたことを意味しません。

06

依存グラフ — 番号で円が無いことを確かめる

表 4 の行を番号つきの節点にします。「$\Longleftarrow$」**の右の前提の番号は、左の結論の番号より必ず小さく**置きます（この部で共通の書式、23-05 §07）。

```
[01] 仮  区間演算の前提の行（IEEE の正しい丸め・和の誤差・自前の exp）    ħ：—
[02] 仮  継ぎ目の極限の仮定・端の値が分布で与えられる仮定・正則性      ħ：—
[03] 仮  窓の対数 Sobolev の閾の命題：A_W < A_max(ħ)                  ħ：
[04] 仮  区画の入力の小さな仮定                                       ħ：
[05] 仮  窓の対数 Sobolev の積の上界（A_W ≤ c_W·C_1D·S_W·T_W）         ħ
[06] 読  窓の定数の数値の道筋の定数                                   ħ：ヨ
[07] 読  環の内の鎖 q_in ≈ 1.24〜1.28
[08] 読  境の段 q ≈ 1.004〜1.045
[09] 機  窓の外の鎖の縮みの行：q_free ≤ 0.998854904 ⟸ [01]           ħ：
         Lean win_qfree_window_le_of_interval_table（仮定：区間演算の出力
[10] 機  環の外の鎖 q_out ≤ 0.998888530（ピン ≤ 0）⟸ [01][02]
         Lean unc_window_lt_one_of_table（仮定：区間演算の出力の表）
[11] 初  区画の枠組みの五つの段 ⟸ [02][04]                            ħ
         Lean cell_sum_sup・comp_close（仮定は 23-09 の表）
[12] 初  橋の S_W ≤ 1779.6 ⟸ [09]
[13] 初  環の S_W ≤ 122745 ⟸ [07][08][10]
         Lean sw_inner_le（仮定：q_in ≤ 13/10・q_out ≤ 0.998888530）
[14] 読  積の形の A_W ≈ 2.5·10⁶〜4.7·10⁷ ⟸ [05][06][12]
[15] 初  芯の隙間の k に一様な正の下界 ⟸ [03][11]
         Lean comp_close（仮定：Barta・成分ごとの局所化・Bochner の三つの不
[16] 初  23-05 の芯の Poincaré の一様性の仮定の形 ⟸ [02][15]
```

確かめ方。[09] は [01]、[10] は [01][02]、[11] は [02][04]、[12] は [09]、[13] は [07][08][10]、[14] は [05][06][12]、[15] は [03][11]、[16] は [02][15] だけを右に持ち、どの行も右の番号が左より小さいので、円はありません。

このグラフで読むこと。(1) 芯の行 [16] に至る道は [15] を通り、[15] は仮定の行 [03]（窓の対数 Sobolev の道筋の残る一命題）に依ります。(2) 計算機援用の [09][10] は [12][13] を通して積の形の値 [14] に入るだけで、[14] は [03] を満たしません（要る値の外）。つまり**計算機援用の二行は、いまのグラフでは [16] への道の上にありません**。積でない形の上界が [03] を満たしたとき、その上界の中に q の比が入れば、[09][10] は [03] の根拠の一部になります。(3) 読みの行 [06][07][08] は、どれも上界の証明には使っていません。

仮定の行の言明が結論の量を含んでいないことも確かめておきます。結論の量は芯の測度の隙間（[15]）と芯の Poincaré の一様性の仮定の定数（[16]）です。[03] はサイトの窓の印の周辺

の対数 Sobolev 定数、[04] は区画の入力の定数、[05] は積の形の上界の組み立て、[02] は極限と正則性で、どれも芯の隙間そのものを含みません。

07

23-08〜23-11 への案内

この章の後に読む章

1. 23-08 計算機援用とは何か — 窓の外の鎖の道筋と環の継ぎ目の道筋の外の鎖を例に、区間演算が浮動小数の値を不等式に変える仕組みと前提、言わないこと
2. 23-09 区画の枠組みと、窓の対数 Sobolev の道筋の三本の筋 — 区画の枠組みの道筋の五段の証明、要る値 $A_{\max}$ の導出、三本の筋と共通の壁
3. 23-10 迂回策の一覧 — 窓の対数 Sobolev の道筋で試した迂回策と、繰り返し現れた壊れ方の型
4. 23-11 箱への帰着と箱の中の隙間 — 芯の定数 — 芯の定数を箱の側から三段で押さえる組み立て

この部は緩和時間の仮定を検討の軸に置き、鞍点の管の条件はその一段目の柱の一つとして扱っています。別の視点は第 24 部で扱います。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
機 窓 $[3\cdot10^{-4}, 3\cdot10^{-3}]$ の全ての $\hbar$ で $q_{\text{free}} \le 0.998854904$、環の外の鎖（ピン ≤ 0）で $q_{\text{out}} \le 0.998888530$。区間演算の前提の上で	窓の外と $\hbar \to 0$ の縮み。境の段（ピン $\in (0, \frac{1}{2})$）
初 区画の枠組みの五段と、仮定の行（窓の対数 Sobolev の閾の命題）の上の芯の隙間の下界（23-09）。S_W の算術	窓の対数 Sobolev の閾の命題そのもの。したがって芯の Poincaré の一様性の仮定・鞍点の管の Poincaré の仮定と鞍点の管の条件
読 環の内の鎖 $q_{\text{in}} \approx 1.24$–$1.28$、窓の定数の数値の道筋の定数	これらの上界。内の鎖の区間の機械
依存グラフに円が無いこと（番号の規則）	計算機援用の行が鞍点の管の条件の芯の行に届く道（いまのグラフには無い）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
窓の外の鎖の縮み・環の外の鎖	機・Lean	Python の float64 の区間演算（演算ごとに外向きの幅・自前の指数関数）。手順と照合は 23-08 の出典表。Lean は `win_qfree_window_le_of_interval_table`・`unc_window_lt_one_of_table`・`vt_window_of_table`（仮定：区間演算の出力の表）。
MTP_2 の保存	典	S. Karlin, Y. Rinott, J. Multivariate Anal. 10 (1980) 467–498；言明は S. Fallat et al., Ann. Statist. 45 (2017) 1152–1184, arXiv:1510.01290（命題 3.5 で確認）。
Muckenhoupt の判定量	典	B. Muckenhoupt, Studia Math. 44 (1972) 31–38；言明は F. Barthe, C. Roberto, Potential Anal. 29 (2008) 167–193（定理 1・2 で確認）。
環の継ぎ目の台地・塊の凸性・壁の角	仮・初・読	連続の変分の議論と浮動小数の最小（仮・読）、三重対角の最小固有値（初）、角の比の符号（初、`corner_eq_one`・`corner_gt_one`）。
環の内の鎖・境の段	読	浮動小数の転送（格子 $h = 2^{-10}$、2^{-11} で律速の組を検算）。正規の Gauss の鎖で $2/3$ を 3 桁で再現（陽性対照）、壁を外へ押す向きに動かした鎖で > 1.2（陰性対照）。
鏡像	初・Lean	`chain_action_reflect`（作用の各項の対称性）。

この章で使った語 — 道筋・芯・サイトの窓・窓（$\hbar$ の）・窓の外の鎖・Stein の核の比・環・継ぎ目・塊・外の鎖・内の鎖・境の段・壁の角・計算機援用・積の形の床。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-08 計算機援用とは何か — 窓の中の鎖の条件 — 区間演算で浮動小数の計算を不等式の証明に変える仕組みと前提を、窓の外の鎖の縮みの条件を例に説明する。

計算機援用とは何か — 窓の中の鎖の条件

この章は本書の検討です。§01・§03 は既存の知見です。

この章で分かること — この部で「計算機援用」の札（機）が付いた結果が、何を保証し何を保証しないかを読めるようにします。例は、芯の外へ伸びる鎖の縮みの条件 $q < 1$ です。浮動小数の値をそのまま書くのではなく、全ての数を真の値を含む区間で持ち、$\hbar$ そのものも区間にして、計算した $\hbar$ の窓 $[3 \cdot 10^{-4}, 3 \cdot 10^{-3}]$ の全ての点で不等式が成り立つことを確かめる仕組みと、その前提（丸めの規約）を述べます。最後に、計算機援用が「否」を返す例と、窓の外については何も言わないことを確かめます。

前提となる章 — 23-07 §02（窓の外の鎖の道筋と環の継ぎ目の道筋）・23-00 §01（五分類の札）・23-04 §01（経路の測度）。

先に言うこと — 水準は〔二〕〜〔三〕です。§01〜§03 は〔二〕で読めるように書き、§04 以降は〔三〕寄りです。この章で扱う不等式は、拡散型緩和時間の仮定を軸に置いた一段目の組み立ての中の一つの入力で、それ自身は鞍点の管の条件を閉じません（23-07 §06）。

この章の順序

1. 浮動小数の値と、区間で書いた不等式 — 手で確かめられる小さな例
2. 鎖の条件 $q < 1$ が保証すること — Stein の核の比と、影響の幾何級数
3. 区間演算の前提 — 丸めの規約と自前の指数関数
4. $\hbar$ を区間にする — 素朴には壊れる理由と三つの補題
5. 例 1：橋の芯の外の鎖 — 25 の部分区間（表 1）
6. 例 2：環の外の鎖 — 条件づけた鎖から条件づけない鎖へ
7. 照合・対照・事前登録 — 別の実装との再現と、陽性・陰性の対照
8. Lean が確かめたこと — 区間演算の出力の表を仮定に置いた組み立て
9. 計算機援用が「否」を返す例 — 内の鎖と、一次の傾けの部分区間
10. 計算機援用が言わないこと・費用 — 札の読み方（囲み）

01

浮動小数の値と、区間で書いた不等式

この節と §03 は既存の知見（浮動小数と区間演算の一般論）の整理です。数値と定理の境目の導入は 5-07 §09 にあります。

計算機の実数は浮動小数で、ほとんどの演算の結果は真の値を一番近い表せる数に丸めたものです。例えば $0.1 + 0.2$ は倍精度で 0.30000000000000004 になります。丸めは毎回小さいので、多くの計算では気にしなくてよいのですが、「$q < 1$ である」という不等式を、$q \approx 0.9989$ のように 1 に近い値について主張するときには、丸めが積もって不等号の向きを変えないことを示す必要があります。

区間演算は、全ての数を「真の値を必ず含む区間」で持つ計算です。足し算は $[a,b] + [c,d] = [a+c, b+d]$、掛け算は四つの端の積の最小と最大、のように区間から区間を作り、端を計算するときの丸めは**外向き**（下の端は下へ、上の端は上へ）に取ります。こうすると、最後に出た区間 $[q^-, q^+]$ は真の q を必ず含み、$q^+ < 1$ なら $q < 1$ が不等式として従います。この部では、こうして得た不等式に 機 （計算機援用）の札を付けます。浮動小数の値をそのまま書いたものは 読 です。

手で確かめられる例。$g(x) = x - x^2$ の $x \in [0,1]$ での値の範囲は真には $[0, \frac{1}{4}]$ です。区間演算で素朴に評価すると、$x \in [0,1]$・$x^2 \in [0,1]$ から $x - x^2 \in [0-1, 1-0] = [-1, 1]$ になります。真の値を含みますが、幅が 8 倍に広がりました。原因は、x と x^2 が同じ x から来るという**依存**を区間が忘れることです。直し方は二つあります。

- **細かく割る**。$[0, \frac{1}{2}]$ と $[\frac{1}{2}, 1]$ に割ると、$[0 - \frac{1}{4}, \frac{1}{2} - 0] = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ と $[\frac{1}{2} - 1, 1 - \frac{1}{4}] = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$、合わせて $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ で幅は 1.25 に縮みます。
- **中心で展開する**。$g(x) = g(c) + g'(\xi)(x-c)$、$c = \frac{1}{2}$、$g'(\xi) = 1 - 2\xi \in [-1, 1]$ とすると $\frac{1}{4} + [-1,1] \cdot [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] = [-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ で幅は 1 です。依存の一次の部分を、区間の外に出した形です。

§04 で $\hbar$ を区間にするときに出会うのは、この二つの直し方の大がかりな版です。$\hbar$ の窓を 25 の部分区間に割り（細かく割る）、各部分区間の中では期待値を $\hbar$ について展開して一次と二次の動きを区間の外に出します（中心で展開する）。

02

鎖の条件 $q<1$ が保証すること

芯の中のあるサイトから見て、片側へ伸びる鎖 $x_{i-1}, x_{i-2}, \dots$ を考えます。作用の隣どうしの項は $(x_{i-1}-x_i)^2/(2\varepsilon)$ で、測度は $e^{-S/\hbar}$ です。$x_i = y$ を止め、さらに遠い側を積分して畳むと、x_{i-1} の条件つきの法則は

$$\rho_y(x) \;\propto\; \exp\!\Big(-\frac{1}{\hbar}\Big[\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon} + U(x)\Big]\Big) \qquad (x \text{ は箱 } [L,R] \text{ の中}) \tag{1}$$

の形になります（U は遠い側を畳んだ有効な位置エネルギーで y に依らない）。ρ_y の平均を $m(y)$、Stein の核を

$$\tau_y(x) = \frac{1}{\rho_y(x)} \int_L^x \big(m(y) - t\big)\rho_y(t)\,dt \quad \geq 0 \tag{2}$$

と置きます。部分積分で $\mathrm{Cov}_y(\varphi(X), X) = \mathbb{E}_y[\varphi'(X)\tau_y(X)]$ です（境界の項は $\int_L^R (m-t)\rho_y\,dt = 0$ で消える）。一方 (1) の y についての対数微分は $(x-m(y))/(\varepsilon\hbar)$ なので

$$\frac{d}{dy}\,\mathbb{E}_y[\varphi(X)] = \frac{\mathrm{Cov}_y(\varphi(X),X)}{\varepsilon\hbar} = \frac{\mathbb{E}_y[\varphi'(X)\tau_y(X)]}{\varepsilon\hbar}, \qquad \Big|\frac{d}{dy}\,\mathbb{E}_y[\varphi(X)]\Big| \;\le\; q\,\sup|\varphi'|, \quad q := \sup_y \frac{\sup\tau_y}{\varepsilon\hbar} \tag{3}$$

です [初]（積分記号の下の微分と部分積分。箱は有界で密度は滑らか）。(3) は「一段さかのぼるごとに、関数の傾き（Lipschitz 定数）が q 倍以下になる」と読めます。d 段さかのぼれば q^d 倍以下です。**$q<1$ なら、遠いサイトの揺らぎが手前のサイトに及ぼす影響は幾何級数で減ります**。これが「鎖の条件」の中身で、q を Stein の核の比と呼びます。

確かめの例。ρ_y が分散 σ^2 の正規分布なら、(2) を計算すると $\tau_y \equiv \sigma^2$ で、$q = \sigma^2/(\varepsilon\hbar)$ です。調和の鎖（U が二次式）では、この比が段ごとに一定の値へ収束することを手で確かめられます。

何に使うか。サイトの窓の対数 Sobolev 定数の組み立て（23-07 §04 の積の形）では、窓の外の全ての段の影響を足した量 S_W が因子として入ります。窓の中の段の寄与と、窓の外の段の寄与 $\sum_{d\ge 0} q^d = 1/(1-q)$ を左右の二つの側で足して

$$S_W = 1 + 2\Big(16 + \frac{1}{1-q}\Big) \tag{4}$$

です（窓の中の段の比を 1 と置いた形。組み立ての紙は本に置かないので、(4) を使う段は [仮] の行の上にあります）。$q<1$ なら S_W は有限で、$q \le 0.998854904$ なら $1/(1-q) \le 873.3$、$S_W \le 1779.6$ です [初]（算術）。

なぜ q は 1 に近いのか。芯の外の鎖の箱の右の壁は頂上 0 で、そこで $V'(0)=0$ です。この壁の角では古典の比がちょうど 1 になり（23-07 §03 の壁の角）、1 からの離れは壁の近くの薄

い層の幅 $\eta \approx 0.5\hbar$ で決まり、$1-q \approx \eta \ln(1/\eta)$ の大きさです 読 （古典の写像の展開と転送行列の値の照合）。$\hbar$ が小さいほど q は 1 に近づきます。**固定した $\hbar$ の窓の中で $q<1$ を確かめても、$\hbar \to 0$ での振る舞いは別の問い**であることが、ここからも分かります。

03

区間演算の前提

この部の計算機援用は、Python の倍精度の浮動小数（float64）で組んだ区間演算です。前提を一か所にまとめます。

- **丸めの規約**。四則の各演算は、IEEE 754 の規格どおり真の値に最も近い浮動小数を返す（正しい丸め）と仮定します。各演算の結果を、隣の浮動小数へ一つずつ外へ動かして（下の端は一つ下へ、上の端は一つ上へ）区間にします。正しい丸めの誤差は半目盛り以下なので、一目盛り外へ動かせば真の値を含みます。演算ごとに丸めの向きを切り替える方式ではありません。融合積和（FMA）は使いません。
- **和の誤差**。長い和は、和の誤差の既知の上界で外向きに広げます。
- **指数関数**。標準の数学関数の誤差は保証されていないので、指数関数は自前の実装を使い、その誤差の上界を区間に足します。上界の定数の算術は Lean で確かめています。
- **積分**。格子のセルごとに被積分関数の上下の包み（凹性の補正つき）を作り、積分を外向きに挟みます。積分の打ち切り（重みが最大の e^{-40} 未満のセル）は、打ち切った質量の上界として区間に入れます。

この前提の行は、この部では 仮 です（23-07 §05 の区間演算の前提の行）。計算機と処理系が IEEE 754 の正しい丸めを守っていることは、前提として置いており、確かめた事柄ではありません。計算機援用の結果を引くときは、この前提を同じ行に書きます。

04

$\hbar$ を区間にする — 素朴には壊れる理由と三つの補題

点の $\hbar$（例えば $\hbar = 3\cdot 10^{-3}$）で $q^{+}<1$ を出すだけなら、§03 の区間演算で足ります。窓 $[3\cdot 10^{-4}, 3\cdot 10^{-3}]$ の**全ての** $\hbar$ について言うには、$\hbar$ そのものを区間に入れる必要があります。三点で値が下がる傾向が見えても、上界が $\hbar$ について単調であることは紙では導けないからです（上界の式の中に、$\hbar$ の逆の端で最大になる二つの項がある）。

記号を決めます。$\beta = 1/(\varepsilon\hbar) = 2/\hbar$、部分区間 $\hbar \in [\hbar_1, \hbar_2]$ に対して $\beta \in [\beta_2, \beta_1]$、中点 $\beta_0 = (\beta_1+\beta_2)/2$、半幅 $\Delta = (\beta_1-\beta_2)/2$、$\tau = \beta - \beta_0 \in [-\Delta, \Delta]$ です。$\hbar$ は β を通してしか入りま

せん。

素朴な区間は壊れる。β の区間をそのまま密度の指数 $\beta(sx-A(x))$ に掛けると、格子の各セルの重みが互いに独立に $e^{\pm\Delta|sx-A|}$ 倍ずつ動いてよいことになり、指数の幅は 10^2 の桁になります。§01 の $x-x^2$ と同じ依存の喪失です。実際、二重井戸の鎖では二段目で平均の区間が箱の全体（幅 0.89）に広がり、段の写像が意味を失いました。

一次分数の補題（期待値を τ の一次分数にする）。$h=g-g^{*}$（g^{*} は定数）、$\varphi_0=\beta_0 h$ と置くと、$\beta=\beta_0+\tau$ で

$$\mathbb{E}_{\beta}[f]=\frac{\int f e^{\beta g}}{\int e^{\beta g}}=\frac{S_0+\tau S_1+R_S(\tau)}{Z_0+\tau Z_1+R_Z(\tau)},\qquad 0\le e^{\tau h}-1-\tau h\le\frac{(\Delta|h|)^2 e^{\Delta|h|}}{2} \tag{5}$$

です（$S_0=\int f e^{\varphi_0}$・$S_1=\int f h e^{\varphi_0}$・$Z_0=\int e^{\varphi_0}$・$Z_1=\int h e^{\varphi_0}$、$R$ は剰余の積分）。剰余の値を止めると、$t\mapsto(S_0+R_S+tS_1)/(Z_0+R_Z+tZ_1)$ は一次分数で、分母が $t=\pm\Delta$ で正なら $[-\Delta,\Delta]$ の上で単調です。したがって全ての $|\tau|\le\Delta$ で、期待値は両端 $t=\pm\Delta$ の二つの値の間にあり、その二つを区間で評価すれば囲えます 初 Lean `mobius_between`（仮定：分母が $t=\pm\Delta$ で正・$-\Delta\le t\le\Delta$）。一次の項 $\tau S_1/Z_0$ は真の $\hbar$ による変化を表し、区間の幅には求積の誤差の Δ 倍と剰余（Δ^2 の桁）しか残りません。

傾けた囲いの補題（第一と第二の形。囲いを τ について傾けて持つ）。段の写像の不動点（鎖の段ごとの条件つきの平均 m_k）は、$\hbar$ とともに真に動きます。部分区間の幅が 3% のとき、その動きだけで 1.5×10^{-4} あり、それを囲いの幅に入れると下流の評価を壊します。そこで囲いを「$m_k-\tau\mu_k-\tau^2\nu_k$ が区間に入る」の形で持ちます（μ_k・ν_k は浮動小数の列）。出力の側は恒等式

$$\frac{A+tB}{C+tD}=\frac{A}{C}+t\,\frac{B-(A/C)D}{C+tD} \tag{6}$$

で一次の動きを取り出します 初 Lean `shear_identity`（仮定：$C\neq0$・$C+tD\neq0$）。二次まで傾けると、残る幅は Δ^3 の桁になります。§01 の「中心で展開する」の形です。

動く中心の補題（中心を τ とともに動かす）。分散の上界は二つの片側の和 $\beta\,\mathbb{E}[(X-c)_+^2]+\beta\,\mathbb{E}[(c-X)_+^2]$ の形で、平均が $\tau\mu$ だけ動くと一方が増え他方が減ります。二つを τ の端で別々に最大にすると、真には打ち消す動きを足すことになります。中心を $c_\tau=c+\tau\kappa$ と動かし、$(y-t)_+^2\le y_+^2-2ty_++t^2$ で押さえると、この損は 3.6×10^{-3} から 2.2×10^{-4} に下がりました 初 Lean `dvtau_pos`（仮定なし）。

不変集合。鎖は無限に長いので、段の写像を有限回回して終わりにはできません。部分区間の写像 $\Phi_{[\hbar_1,\hbar_2]}$ は全ての $\hbar\in[\hbar_1,\hbar_2]$ の写像 $\Phi_\hbar$ の結果を含むように作るので、ある囲い E^{*} で

$\Phi_{[\hbar_1,\hbar_2]}(E^*) \subset E^*$ を区間演算で確かめれば、全ての $\hbar$ で $\Phi_\hbar(E^*) \subset E^*$ です 初 （包含の推移）。それより先の段は全て E^* の中にあり、q の上界を E^* の上で一度評価すれば足ります。

表 1　一つの部分区間での釣り合い（橋の芯の外の鎖、点の $\hbar = 3\cdot 10^{-3}$ の上界は 0.995611069）

版	$\hbar \in [3/1030, 3/1000]$（幅 3%）	$\hbar \in [3/1100, 3/1000]$（幅 10%）
素朴な区間	二段目で壊れる	二段目で壊れる
一次分数の補題だけ	機 $q^+ = 0.998757877$	—
一次分数の補題＋一次の傾け＋動く中心の補題	機 $q^+ = 0.996449644$	上界が 1.00114 で 1 を越え、証明書は出ない（§09）
一次分数の補題＋二次の傾け＋動く中心の補題	—	機 $q^+ = 0.997808483$

二次の傾けで幅 10% の部分区間が使えるようになり、窓 $[3\cdot 10^{-4}, 3\cdot 10^{-3}]$ は端を $\hbar = 3/N$（$N = 1000, 1100, 1210, \dots, 9100, 10000$、隣の比 ≤ 1.1）とする 25 の部分区間で覆えました。格子の幅は 2^{-11}、段の数は上の半分で 20、下の半分で 25 です。

05

例 1：橋の芯の外の鎖 — 窓の全体で $q_{\mathrm{free}} \le 0.998854904$

橋の芯（箱 $(-x_c, 0)$、$x_c = 0.89$）の、サイトの窓の外へ伸びる印なしの鎖の比を q_{free} と書きます（23-07 §02 の窓の外の鎖の道筋）。25 の部分区間の各々で、段の写像の囲いと不変集合を区間演算で作り、全ての鎖の長さ $n \ge 2$・箱の全てのピン（鎖の端の値）について q の上界 q_i^+ を出しました。結果が表 2 の左の列です。

結果（計算機援用）

0+1 次元の二重井戸（$V = (x^2-1)^2/8$・$\varepsilon = \frac{1}{2}$・$x_c = 0.89$・印の閾 $\theta = \frac{1}{2}$）の経路の測度で、§03 の前提の下、窓 $\hbar \in [3\cdot 10^{-4}, 3\cdot 10^{-3}]$ の全ての $\hbar$ について

$$q_{\mathrm{free}}(\hbar) \;\le\; \max_i q_i^+ \;=\; 0.998854904 \;<\; 1 \tag{7}$$

上の半分 $\hbar \in [10^{-3}, 3\cdot 10^{-3}]$ では ≤ 0.998098180。最大は窓の下の端の部分区間。正則性と区画の枠組みの入力は 仮 。

表の値（9 桁で切り上げ）は、$\hbar$ を下げると増え、上の端の二つだけ盛り上がります。律速の場所は、鎖の端の値が壁 0 のすぐ下にあるセルです。§02 の「壁の角がちょうど 1」の場所そのものです。

表 2　25 の部分区間の上界（$\hbar$ の大きい側から。左＝橋の芯の外の鎖 q_i^+、右＝環の外の鎖・条件づけない形 Q_i^{unc}。と

もに 9 桁で切り上げ、計算機援用）

#	$\hbar$ の部分区間	橋 q_i^{+}	環 Q_i^{unc}
01	$[3/1100,\ 3/1000]$	0.997808483	0.993773312
02	$[3/1210,\ 3/1100]$	0.998098180	0.993531447
03	$[3/1330,\ 3/1210]$	0.996740073	0.993402112
04	$[3/1460,\ 3/1330]$	0.995689889	0.993847141
05	$[3/1600,\ 3/1460]$	0.994979345	0.994267993
06	$[3/1760,\ 3/1600]$	0.995310186	0.994690320
07	$[3/1930,\ 3/1760]$	0.995450880	0.995072576
08	$[3/2120,\ 3/1930]$	0.995739245	0.995442678
09	$[3/2330,\ 3/2120]$	0.996022449	0.995791525
10	$[3/2560,\ 3/2330]$	0.996294103	0.996116234
11	$[3/2810,\ 3/2560]$	0.996551317	0.996416208
12	$[3/3000,\ 3/2810]$	0.996695721	0.996606914
13	$[3/3300,\ 3/3000]$	0.996969923	0.996887371
14	$[3/3630,\ 3/3300]$	0.997198625	0.997139630
15	$[3/3990,\ 3/3630]$	0.997410737	0.997371392
16	$[3/4380,\ 3/3990]$	0.997607042	0.997583254
17	$[3/4810,\ 3/4380]$	0.997791698	0.997780790
18	$[3/5290,\ 3/4810]$	0.997966990	0.997966387
19	$[3/5810,\ 3/5290]$	0.998126215	0.998135077
20	$[3/6390,\ 3/5810]$	0.998276990	0.998293614
21	$[3/7020,\ 3/6390]$	0.998414660	0.998437926
22	$[3/7720,\ 3/7020]$	0.998559421	0.998572746
23	$[3/8490,\ 3/7720]$	0.998691543	0.998697045
24	$[3/9100,\ 3/8490]$	0.998741829	0.998780022
25	$[3/10000,\ 3/9100]$	**0.998854904**	**0.998888530**

06

例 2：環の外の鎖 — 条件づけた鎖から条件づけない鎖へ

環の継ぎ目の外の鎖（23-07 §03）は、符号の決まった領域を動く鎖で、鏡像で $(-\infty, 0]$ に写すと例 1 と同じ型になります。ただし橋の箱の下の壁 $-x_c$ が無いので、例 1 の証明書はそのま

まは使えません。同じ機械の格子を差し替え、二段で閉じました。

1. **箱に条件づけた鎖**。部分区間ごとに有限の箱（上の半分で $[-7/5, 0]$、下の半分で $[-6/5, 0]$）に条件づけた鎖で、窓の全体の上界 0.998888525 機 。このままでは、箱の外へ出る配位を別に払う仮定の行が四つ要ります。
2. **条件づけない鎖**。箱を $[-3, 0]$ に広げ、$(-\infty, -3]$ の尾の寄与を、尾の凸性からの接線の上界で区間演算の剰余に入れます。尾の分散の上界は、法則を尾の端の一行に押し込む形で、全ての $\hbar$ で ≤ 0.357608022（凸性に要る < 5.25・相関不等式に要る ≤ 1 の内）。ピンが -3 より深い所は閉じた形の上界で覆い、≤ 0.592898559。結果が表 2 の右の列で、最大は 0.998888530 です 機 （全てのピン $p \le 0$・評価点 $s \le 0$、端の値 $z_0 = -1$、継ぎ目の極限の仮定・端の値が分布で与えられる仮定・正則性は 仮 ）。

二つの列を比べると、橋の上界は上の端の二つで盛り上がり、環の上界は三番目の部分区間で最小になってから単調に増えます。下の端では環の方がわずかに 1 に近く（差 3.4×10^{-5}）、浮動小数の点の値の順序（環の方が 1 に近い）がそのまま上界にも出ています。条件づけない鎖の各行は、条件づけた鎖の対応する行より 2.4×10^{-9}〜6.7×10^{-7} だけ上で、律速の場所と形は同じでした。

境の段は覆っていない。右の列の主張はピン $p \le 0$ の上の主張です。塊が窓の端に触れる配位では、外の最初の段のピンが $(0, \frac{1}{2})$ に入り、そこでは浮動小数の読みで $q \approx 1.004$–1.045 です 読 。有限の段一つなので組み立ての有限性は壊しませんが、表 2 の右の列を引くときは「ピン ≤ 0」の条件を落とせません。

07

照合・対照・事前登録

区間演算の台本そのものの正しさは、形式的には検証していません。代わりに、次の検査を通しています。どれも「確かめたつもりのものが、確かめたいものとずれていないか」を見るための検査です。

- **別の実装との照合**。例 1 の全ての部分区間で、段の写像を区間演算とは別の浮動小数の再帰で、部分区間の両端と中点の三つの $\hbar$ について回し、全ての段・全ての格子点でその値が区間の囲いに入るかを数えました（75 本、外れ 0）。環の条件づけない鎖では各部分区間の一つの $\hbar$ で同じ検査（25 本、外れ 0）。
- **点の値との照合**。転送行列で求めた浮動小数の点の値（26 個の端）は、全て、その端を含む部分区間の上界の下にありました（差の最小は窓の下の端で 2.85×10^{-4}）。

- **陽性対照**。答えが閉じた式で分かる場合に、機械がそれを再現するか。純ガウスの鎖（段ごとの分散 $v_k = (k-1)/k$、平均 $m_k(s) = (k-1)s/k$、どちらも $\hbar$ に依らない）で、$\hbar$ の区間のまま全ての点が囲いの中に入りました。$\hbar$ の区間の幅を 0 にすると、点の $\hbar$ の機械と 10^{-12} の桁で同じ値を出しました。環の条件づけない機械は、箱に条件づけた版と同じ部分区間で、律速の場所と形を再現し、値は 10^{-8} の桁の上向きの差に収まりました（同じ鎖ではないので一致ではなく再現の検査です）。
- **陰性対照**。成り立たないはずの主張を機械が拒むか。律速のセルで目標の上界を 10^{-7} だけ下げると Lean の検査が閉じない、表の一本を 1 に置き換えると窓の全体の < 1 が閉じない、尾の分散を凸性の線より大きく置くと尾の段が止まる、を確かめました。
- **事前登録**。計算を走らせる前に、予想する値の範囲・律速の場所・陽性と陰性の対照の合格の線を書いておき、結果の後に当否を記録しました。例 1 では、部分区間の数を 60〜120 と予想して 25 で済み（外れ）、律速が窓の下の端に来ることは当たりました。予想が外れたことは結果を弱めませんが、結果を見てから合格の線を動かしていないことの記録になります。

08

Lean が確かめたこと — 区間演算の出力の表を仮定に置いた組み立て

計算機援用の結果に付けた Lean の欄は、次の三つの層に分かれます。

1. **代数の核**。一次分数の補題の一次分数の単調性（`mobius_between`）、傾けの恒等式（`shear_identity`）、動く中心の補題の不等式（`dvtau_pos`）、被覆から窓の全体へ移る代数（`cover_le`、仮定：各部分区間で $f \le c$）。
2. **セルの再計算**。区間演算が出した入力の値（浮動小数の正確な値）と部分区間の端の有理数から、律速のセルと無作為に選んだセル（例 1 で 46、環の条件づけた版で 23）について、最後の段の上界の式を Lean の中で計算し直し、区間演算の値 $+ 2 \times 10^{-9}$ 以下を閉じました。全てのセルの検証ではありません（一つの部分区間に数百万を越えるセルがある中の数十）。
3. **表の組み立て**。`win_qfree_window_le_of_interval_table`（例 1）・`unc_window_lt_one_of_table`（例 2）・`vt_window_of_table`（尾の分散）は、**仮定**として「各部分区間の全ての $\hbar$ で $q(\hbar) \le q_i^{+}$」（区間演算の出力の表。q は抽象の関数）を置き、結論として「窓の全ての $\hbar$ で $q \le \max_i q_i^{+} < 1$」を出します。

Lean の外にあるのは、段の写像（一次分数の補題・傾けた囲いの補題・動く中心の補題の区間の評価）、求積、不変集合、q の上界の式の層、評価点の選び方の全てです。したがって機械

検査の欄は「区間演算の出力が正しいなら、窓の全体の結論は代数として正しい」を保証し、「区間演算の出力が正しい」ことは §03 の前提と §07 の検査に依ります。

09

計算機援用が「否」を返す例

区間演算の上界が 1 を越えたとき、言えるのは「この組み立てでは証明書が出ない」ことだけで、「真の値が 1 を越える」ことではありません。二つの場合を区別します。

(a) 道具の側で出ない例。 表 1 の幅 10% の部分区間で、一次の傾けまでの版は上界が 1.00114 になりました。真の値は同じ部分区間で二次の傾けの版により ≤ 0.997808483 と分かっているので、この「否」は道具の幅（真の m の $\hbar$ についての曲がりを区間に入れていたこと）から来ています。部分区間を細かくするか、展開の次数を上げれば消える種類の「否」です。

(b) 対象の側で出ない例 — 環の内の鎖。 環のサイトの窓の中の段（内の鎖）では、浮動小数の転送で q_{in} を測ると $\hbar = 3\cdot 10^{-3}/10^{-3}/3\cdot 10^{-4}$ で $1.2707/1.2765/1.2421$ 読 で、格子を細かくすると上がる向きでした。律速は塊の箱の遠い壁の際にピンがある段で、壁の力が箱の外へ向かう角（古典の値 1.2857）です（23-07 §03）。ここでは区間演算の機械を作っても $q^{+} < 1$ は出ず、得られるのは $\bar{q} = \max(q_{\mathrm{in}}, 1) \approx 1.3$ の有限の上界だけの見込みです。この「否」は道具を細かくしても消えない種類で、組み立ての側（$q_{\mathrm{in}} < 1$ を要らない形にする、または $S_W \cdot T_W$ の各々に係数 $\bar{q}^{16}$、A_W に $\bar{q}^{32}$ を払う）で受けるしかありません。

読者が計算機援用の結果を読むときは、上界が 1 を越えた報告を見たら、(a) と (b) のどちらかが書かれているかを確かめてください。

10

計算機援用が言わないこと・費用

囲み：計算機援用の札の読み方

機 の付いた不等式は、次の全てが揃ったときにだけ付けます。(1) 全ての数を外向きの区間で持った計算の出力で、浮動小数の値をそのまま書いたものではない。(2) 前提（IEEE 754 の正しい丸め・和の誤差の上界・自前の指数関数の誤差の上界・正則性）を同じ行に書いた。(3) 主張の範囲（$\hbar$ の窓・鎖の長さ・ピンの範囲）を同じ行に書いた。$\hbar$ の窓の外、$\hbar \to 0$、範囲の外のピンについては、何も言っていない。

言わないこと。(i) 窓 $[3\cdot10^{-4},3\cdot10^{-3}]$ の外の $\hbar$。§02 で見たとおり q は $\hbar\to0$ で 1 に近づくので、窓を下へ延ばすほど部分区間は細かく、格子は細かく要り、有限の計算で $\hbar\to0$ の全体を覆うことはできません。二重井戸の緩和時間の冪の言明は $\hbar\to0$ の言明なので、そこは紙の漸近の仕事です。(ii) 格子 $\varepsilon=\frac12$ の模型の外（連続の経路の測度との差）。(iii) 正則性（固有関数・条件つきの期待値の滑らかさ）と区画の枠組みの入力。(iv) 例 2 の境の段（ピン $\in(0,\frac12)$）。(v) 鞍点の管の条件そのもの（23-07 §06）。

表 3　費用（一コア。「見積もり」は走らせていない）

計算	本数	時間	一本の大きさ
例 1 橋の芯の外の鎖（窓の全体）	27 本	約 4 時間 10 分	6〜16 分・107 MB 以下
例 2 環の外の鎖・箱に条件づけた形	25 本	約 3 時間 19 分	5〜12 分・114 MB 以下
例 2 環の外の鎖・条件づけない形	25 本	約 6 時間 44 分	13〜22 分・123 MB 以下
環の内の鎖の区間化（見積もり）	約 50 本	約 42 時間	約 50 分
窓の定数の数値の道筋の残る数値（見積もり・走らせない判断）	約 42 本	約 21 時間	30 分以内

この部は拡散型緩和時間の仮定を軸に置いた検討で、計算機援用はその中で、窓の中の個々の不等式を浮動小数の読みから不等式へ上げる道具として使っています。別の視点は第 24 部で扱います。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
機 窓の全ての $\hbar$ で $q_{\mathrm{free}}\le0.998854904$、環の外の鎖（ピン ≤0）で ≤0.998888530。§03 の前提の上で	窓の外・$\hbar\to0$・境の段
初 鎖の条件 (3) の導出、一次分数の補題・傾けた囲いの補題・動く中心の補題の代数、不変集合の包含 Lean （代数の核と表の組み立て）	区間演算の台本の形式的な正しさ（照合と対照で確かめた範囲だけ）
読 環の内の鎖 $q_{\mathrm{in}}\approx1.24$–$1.28$	その区間の上界

出典と再現

もの	種別	出典・道具
区間演算の考え方・依存の喪失と中心形	—	標準の方法（区間演算・Taylor の形の囲い）。この章では書誌を引かず、§01 の例と §04 の補題を本文に置いた。
Stein の核と鎖の条件	初	§02 の (2)(3)（部分積分と積分記号の下の微分）。
区間演算の実装	機	Python の float64、演算ごとに隣の浮動小数へ外向きに一つ、自前の指数関数、格子 2^{-11}、段 20／25、部分区間 25。
照合	読	別の浮動小数の再帰（三つの $\hbar$）・転送行列の点の値（26 点）。
Lean	Lean	`mobius_between`・`shear_identity`・`dvtau_pos`・`cover_le`・`win_qfree_window_le_of_interval_table`・`unc_window_lt_one_of_table`・`vt_window_of_table`（仮定は本文の各行）。言明の一覧は 23-13。

この章で使った語 — 計算機援用・区間演算・外向きの丸め・依存の喪失・中心で展開する・Stein の核の比・鎖の条件・部分区間・傾け・不変集合・照合・陽性対照と陰性対照・事前登録・境の段。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-09 区画の枠組みと、窓の対数 Sobolev の道筋の三本の筋 — 区画の和の五つの段と閉じる条件を述べ、要る値の導出、残る一命題を攻めた三本の筋の到達点、頂上の一サイトの曲率の不足という共通の壁を述べる。

2026-10-09 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 23 部 一本目の道（前半）— 時間の方向から 区画の枠組み・閉じる条件・共通の壁 · Kiichi, Shiori and Rin

区画の枠組みと、窓の対数 Sobolev の道筋の三本の筋

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 2-05・2-07 にあります。

この章で分かること — 芯の隙間を芯の長さ k に一様に押さえる組み立て（区画の枠組み）を五つの段に分けて証明し、それが閉じる条件 $b(A_W c_H + D_W + \ln 2) < \kappa \ell_{\min}$ と、そこから決まる要る値 $A_{\max}$ を導きます。条件の各定数が構造から来るのか道具の選び方から来るのかを仕分け、要る値を上げる方向と、足りない側を下げる方向を並べます。残る一命題（サイトの窓の対数 Sobolev 定数が要る値の内にあること）を攻めた三本の筋（成分ごと・スカラー・Feynman–Kac）の到達点を一表にし、三本が同じ場所で止まる理由——頂上の一サイトの曲率が凸性に $\frac{1}{4}$ 足りないこと——を、対角優位の一行で述べます。

前提となる章 — 23-07（区画の枠組みの道筋・窓の対数 Sobolev の道筋の位置）・23-08 §02（鎖の条件）・23-05 §03（鞍点の管の条件と芯の Poincaré の一様性の仮定）・1-10 §07〜§09（Poincaré 不等式）。

先に言うこと — 水準は〔研〕で、§01 だけ〔三〕で読めるように書きます。§02 以降は研究の水準の節で、飛ばして §05 の表 4 と §06 の共通の壁に進んでも、この章の結論は読めます。この部は拡散型緩和時間の仮定を検討の軸に置いていて（23-01）、この章はその一段目の鞍点の管の条件の芯の行を、どこまで組めたかを述べる章です。区画の枠組みは示せましたが、残る一命題は三本の筋のどれでも閉じていません。

この章の順序

1. 要約 — 〔三〕で読める一節
2. 区画の枠組みの五つの段 — 区画の和・周辺の形の Gibbs・成分ごとの局所化・体積の局所性・合成
3. 閉じる条件と要る値 $A_{\max}$ — 定数の出所と、二つの方向（表 1・表 2）
4. 閾値の不一致 — 条件が字義どおりには何も与えていなかった例
5. 窓の対数 Sobolev の道筋の三本の筋 — 成分ごと・スカラー（スカラーの筋の命題、表 3）・Feynman–Kac、到達点（表 4）

6. 共通の壁 — 頂上の一サイトの曲率 $15/4$ と 4
7. 五分類の表（表 5）
8. 依存グラフ

01

要約

芯 $Q_k = (-x_c, 0)^k$ は、経路が頂上の近くにとどまる k サイトの区間で、ここでは作用の Hessian が負の向きを持ちます。芯の測度の隙間（芯の Poincaré の一様性の仮定）を k に一様に押さえるには、負の曲率のある場所が**稀**であることを使って払う必要があります。区画の枠組みは、その払い方を五つの段に分けたものです。

1. **区画の和**。配位の空間を箱の直積に割っても、Dirichlet 形・分散・エントロピーは区画ごとの和に分かれ、区画の数は定数に入りません。
2. **周辺の形の Gibbs**。稀な集合 B（測度 $e^{-\ell}$ 以下）の上の重みは、エントロピーと $\ln 2$ で払えます：$\ell \int_B g^2 \le \mathrm{Ent} + \ln 2 \int g^2$。
3. **成分ごとの局所化**。勾配の成分ごとに、そのサイトの周りの 17 サイト（サイトの窓）の印の周辺の対数 Sobolev 定数 A_W で周辺の形の Gibbs の段を当てると、和に k が入りません。
4. **体積の局所性**。稀さの指数 $\ell_{\min}$ は k に依りません。
5. **合成**。以上と Barta・Bochner の二つの不等式を組むと、芯の隙間 λ について $\lambda(1 + bA_W/\ell_{\min}) \ge \kappa - b(A_W c_H + D_W + \ln 2)/\ell_{\min}$ です。右辺が正になる条件が**閉じる条件** $b(A_W c_H + D_W + \ln 2) < \kappa \ell_{\min}$ です。

閉じる条件を A_W について書き直したものが要る値 $A_{\max} = (\kappa \ell_{\min}/b - D_W - \ln 2)/c_H$ で、三つの $\hbar = 3\cdot 10^{-3}/10^{-3}/3\cdot 10^{-4}$ で欠陥を三サイトで定める道の元の形は $3\cdot 10^{-3}$ で負（どの A_W でも閉じない）・0.20・7.13 で、道具の選び方を二つ直すと $25.1/90.3/312.3$ まで上がります 読 （測った稀さの指数の上の算術）。一方 A_W の上界は、いまの組み立てでは $1857/2794/9106$ の桁で 読 （見積もりを含む）、29〜74 倍足りません。

残る一命題「$A_W < A_{\max}$」は三本の筋で攻めました。成分ごとの筋は要る値の 1.4〜5.5 倍の所で止まり、スカラーの筋は $\hbar \in [3\cdot 10^{-4}, 10^{-3}]$ で仮定の表つきの命題（スカラーの筋の命題）になり、Feynman–Kac の筋は Monte Carlo の読みで閾の 0.54 倍の内にありますが上界は閾

の 10^3 倍です。三本とも、頂上で一サイトの対角 $4-\frac14=15/4$ が隣との結合の和 4 に届かない、という同じ場所で止まります（§06）。

02

区画の枠組みの五つの段

設定。 芯 $Q_k=(-x_c,0)^k$（$x_c=0.89$）、両端の値 $z_0,z_{k+1}\le -x_c$ を止め、$\mu\propto e^{-S/\hbar}\mathbf{1}_{Q_k}$、$\mathcal{E}(f)=\hbar\int|\nabla f|^2d\mu$（箱の面では Neumann）とします。$-L$ の最初の非零の固有値を λ、固有関数を f、$u=\nabla f$ とし、

$$X=\int|u|^2d\mu,\qquad Z=\hbar\int\|\nabla u\|^2d\mu,\qquad Y=\sum_{j=1}^{k}\int_{N_j}u_j^2\,d\mu \tag{1}$$

と置きます。N_j はサイト j の欠陥の集合（j とその隣のどれかが閾 $-\theta_B$ より頂上の側にある配位、$\theta_B=0.57$）です。各サイトに印 $\sigma_j=\mathbf{1}[z_j>-\theta]$ を付け、サイト j の周りの窓 W_j の印の組を σ_{W_j} と書きます。区画とは、印の型ごとの箱の直積 $\Omega_\sigma=\prod_j I_{\sigma_j}$ です。

区画の和

任意の箱の直積の分割 $\mathcal{P}$ について、(a) $\sum_P\mu(P)\mathcal{E}_P(f)=\mathcal{E}(f)$（面は測度 0 で、$|\nabla f|^2$ は各区画の上で同じ関数）、(b) $\mathrm{Var}_\mu f=\sum_P\mu(P)\,\mathrm{Var}_{\mu_P}f+\mathrm{Var}_\nu(\mathbb{E}[f\mid\mathcal{P}])$（全分散の公式。エントロピーも同じ形の連鎖律）、(c) 区画ごとに $\mathrm{Var}_{\mu_P}f\le C_P\mathcal{E}_P(f)$ なら第一項は $(\sup_P C_P)\,\mathcal{E}(f)$ 以下です 初 。区画の数は、和が 1 になる重み $\mu(P)$ にしか現れません。 Lean `var_split_cells`（仮定なし）・`cell_sum_sup`（仮定：$w_i\ge0$・$E_i\ge0$・$C_i\le C_{\max}$）。

Gibbs の分解 — 周辺の形の Gibbs の段

Gibbs の変分不等式。 確率測度 ν、$G\ge0$、関数 F について

$$\int FG\,d\nu\;\le\;\mathrm{Ent}_\nu(G)+\Big(\int G\,d\nu\Big)\ln\int e^F\,d\nu \tag{2}$$

初 証明。$\tilde G=G/\int G$ と置き、Jensen の不等式で $\ln\int e^F d\nu\ge\ln\int_{\tilde G>0}e^{F-\ln\tilde G}\tilde G\,d\nu\ge\int(F-\ln\tilde G)\tilde G\,d\nu$。両辺に $\int G$ を掛けると (2) です。∎

(2) で $F=t\mathbf{1}_B$、$p=\nu(B)\le e^{-\ell}$ とすると $\ln\int e^F=\ln(1-p+pe^t)$ で、$t=\ell$ なら $\le\ln 2$ です Lean `gibbs_ln2_cell`（仮定：$p\ge0$・$\ell\ge0$・$pe^\ell\le1$）。B が粗い変数 $\mathcal{F}$ で決まる集合なら、$G=\mathbb{E}[g^2\mid\mathcal{F}]$ と取って

$$\ell \int_B g^2 \, d\mu \;\le\; \mathrm{Ent}_\nu\big(\mathbb{E}[g^2 \mid \mathcal{F}]\big) + \ln 2 \int g^2 \, d\mu \tag{3}$$

です。稀な集合の上の重みを、粗い変数の周辺のエントロピーで払う形です。

成分ごとの局所化

入力として、全ての j と g で窓の周辺の対数 Sobolev 不等式

$$(\mathrm{LS}_W) \qquad \mathrm{Ent}_{\nu_{W_j}}\big(\mathbb{E}[g^2 \mid \sigma_{W_j}]\big) \;\le\; A_W \, \mathcal{E}(g) + D_W \int g^2 \tag{4}$$

を仮定し 仮 、$N_j \subset B_j$（B_j は σ_{W_j} で決まる集合、$\ell_{\min} = \min_j \ln(1/\mu(B_j))$）とします。(3) を $g = u_j$ に当てて j で足すと、$\sum_j \mathcal{E}(u_j) = Z$・$\sum_j \int u_j^2 = X$ から

$$\ell_{\min}\, Y \;\le\; A_W \, Z + (D_W + \ln 2)\, X \tag{5}$$

です 初 Lean `comp_sum_le`（仮定：$0 < \ell \le \ell_j$・各成分の不等式）。**k が入りません**。対照として、勾配を成分に分けずにスカラーの g のまま一つの和集合 $\bigcup_j B_j$ に (3) を当てると、定数関数 $g \equiv 1$ を入れるだけで欠陥の項が $\sum_j \mu(B_j)$ 以上になり、k に一様になりません 初 Lean `scalar_not_uniform`（仮定：$p > 0$。結論は「全ての k で $kp \le d$ となる d は無い」）。**k に一様であることと、条件に A_W が入ることは交換条件**です。

体積の局所性

$\ell_{\min}$ は欠陥の集合の稀さの指数で、k に依りません。欠陥を三サイトで定める道では、測った値 $\hbar \ln \mu(N_j)$ から $\ell_{\min} = 38.3/121.9/406.8$（$\hbar = 3 \cdot 10^{-3}/10^{-3}/3 \cdot 10^{-4}$）です 読 （転送行列の浮動小数。$3 \cdot 10^{-4}$ は外挿で、測り直した値は 420.0）。欠陥を長さ 8 以上の塊で定める道では $\ell_{\min} \ge E_8/\hbar - \ln V_{\mathrm{loc}}$（$E_8 = 0.402$・$\ln V_{\mathrm{loc}} = 2.3$） 読 。橋の上で同じことを言うには、切れ端の転送作用素の剰余が端の値に一様に小さいこと（橋の体積の局所性の入力）が要ります 仮 。

区画の合成

次の三つの不等式を組みます。

- **Barta**：$\lambda X \ge \kappa X - bY$。成分ごとの作用素 $\mathcal{M} = -L + \mathrm{Hess}\, S$（$u = \nabla f$ は $\mathcal{M} u = \lambda u$ を満たす）に重み ψ を当てた行の不等式 $(\mathcal{M}\psi)_j \ge (\kappa - b\mathbf{1}_{N_j})\psi_j$ から来ます。$\kappa = 3/1000$ は欠陥の外での行の下界、$b = 493/1000$ は箱の全体での最悪の行から決まる欠陥の深さです 仮 （行の評価の紙は本に置かない）。
- **(5)**：成分ごとの局所化そのもの。

- **Bochner**：$Z = \lambda X - \int u \cdot \mathrm{Hess}\, S\, u \, d\mu \le (\lambda + c_H) X$、$\mathrm{Hess}\, S \ge -c_H$、$c_H = \frac{1}{4}$。恒等式は Bochner の公式の積分形 典 （Ledoux の講義の命題 1.3、原典の本文で確認）で、箱の平らな面で境界の項が消えることと固有関数の角までの滑らかさは 仮 です。

(5) に Bochner を入れ、それを Barta に入れると

$$\lambda\left(1 + \frac{b A_W}{\ell_{\min}}\right) \;\ge\; \kappa - \frac{b\,(A_W c_H + D_W + \ln 2)}{\ell_{\min}} \tag{6}$$

です 初 Lean `comp_close` （仮定：$X > 0$・$b, A \ge 0$・$\ell > 0$・Barta・(5)・Bochner の三つの不等式）。右辺が正、すなわち

$$b\,(A_W c_H + D_W + \ln 2) \;<\; \kappa\, \ell_{\min} \tag{7}$$

なら、芯の隙間 λ は k に依らない正の数で下から押さえられます。(7) が**閉じる条件**です。五つの段のうち、区画の和・Gibbs の分解・成分ごとの局所化・区画の合成の組み立ては初等の証明を本文に置き、仮定として残るのは窓の周辺の対数 Sobolev の入力・橋の体積の局所性の入力・Barta の行・Bochner の正則性と、(7) を満たすほど A_W が小さいかどうか、です。**仮定として残るのは構造ではなく定数の大きさです。**

03

閉じる条件と要る値 $A_{\max}$

(7) を A_W について解くと、要る値

$$A_W \;<\; A_{\max}(\hbar) := \frac{\kappa \ell_{\min}/b - D_W - \ln 2}{c_H} \tag{8}$$

が出ます 初 （(7) の移項）。A_W がこれより小さいことが残る一命題（窓の対数 Sobolev の閾の命題）で、23-07 §02 の窓の対数 Sobolev の道筋です。

定数の出所。(7) の六つの定数を、構造から来るものと道具の選び方から来るものに仕分けます。

表 1　閉じる条件 (7) の定数の出所

定数	値	出所	側
κ	$3/1000$	Barta の行の、欠陥の外での下界（閾 $\theta_B = 0.57$ を一サイトの閾 0.5653 のすぐ上に置いたので小さい）	構造
b	$493/1000$	同じ行の箱の全体での最悪の値（頂上の側の -0.49）	構造
$\ell_{\min}$	表 2	欠陥の集合の稀さの指数（長さではない）	構造

定数	値	出所	側
c_H	$\frac{1}{4}$	Bochner の段で、負の曲率 $w=\varepsilon V''$ の最小 $w(0)=-\frac{1}{4}$ を芯の**全体で一様に**払った値	道具の選び方
$\ln 2$	0.693	Gibbs の段で傾き t を $t=\ell$ に固定した値	道具の選び方
D_W	0	窓の周辺の対数 Sobolev の入力の欠陥の項を置かない組み立て	—

A_W が c_H と掛かって条件に入る理由は、(5) の右辺の $A_W Z$ を Bochner で $(\lambda+c_H)X$ に替えるとき、λ の部分は左辺に移せますが $c_H X$ は λ を掛けずに残り、κ で払うしかないからです。$b/\kappa \approx 164$ の増幅が、ここで $A_W c_H$ に掛かります。

二つの方向 — 要る側を上げる・足りない側を下げる

要る側を上げる（道具の選び方を直す）。

- **Bochner を局所化する。** 負の曲率 $-w(z)=(1-3z^2)/4$ は $z>-1/\sqrt{3}$ にしか無く、そこは既に欠陥の集合 N_j の中です。区間の一行 $-w(z)\le \delta+\gamma\,\mathbf{1}[z>-\theta_R]$（$\delta=\max(0,(1-3\theta_R^2)/4)$・$\gamma=c_H-\delta$）から 初 Lean `negw_le_localized`（仮定：$\theta\ge 0$・$z\le 0$・$(1-3\theta^2)/4\le\delta\le\frac{1}{4}$）、運動の項 $2T_k$ が半正定値であることを使って

$$Z \;\le\; (\lambda+\delta)X+\gamma Y \tag{9}$$

  が出ます 初 Lean `bochner_localized`（仮定：恒等式 $Z=\lambda X-H$・$-H\le\delta X+\gamma Y$）。Y は (5) が既に払っている項なので、A_W の係数が $bc_H=0.123$ から $b\delta+\kappa\gamma=0.0038$（$\theta_R=0.57$、約 32 分の 1）に下がります。
- **Gibbs の傾きを最適にする。** (2) の t は $t<\ell$ でもよく、$\kappa t-b\ln(1+e^{t-\ell})$ を最大にする $t^*=\ell-\ln((b-\kappa)/\kappa)=\ell-5.10$ で、費用 $b\ln 2=0.342$ が 0.0183 に替わります 初（一変数の凹関数の最大）。Lean の `tilt_cost_le`（仮定：$b\ge 0$・$L\le 1/178$）が示すのは、最適の点ではなく $t=\ell-5.2$ での費用の上界 0.0184 までです Lean（最適化そのものは Lean に在りません）。

二つを合わせた閉じる条件は $b(A_W\delta+D_W+L(t^*))<\kappa(t^*-A_W\gamma)$ で、要る値は $A_{\max}=(\kappa\ell_{\min}-0.0183-bD_W)/(b\delta+\kappa\gamma)$ です。さらに閾 θ を $1/\sqrt{3}$ の近くまで上げると $\delta\le 0$ になり、条件は実質 $A_W\lesssim 4\ell_{\min}$ に変わります。

表 2　要る値 $A_{\max}$（$D_W=0$。三つ組は $\hbar=3\cdot10^{-3}/10^{-3}/3\cdot10^{-4}$。値は測った $\ell_{\min}$ の上の算術で 読 ）

形	$A_{\max}$	備考
元の形（欠陥を長さ 8 以上の塊で定める道）	0.43/6.96/29.8	$\ell_{\min}\ge E_8/\hbar-\ln V_{\mathrm{loc}}$

形	$A_{\max}$	備考
元の形（欠陥を三サイトで定める道）	負／0.20／7.13	$3\cdot10^{-3}$ では $A_W=0$ でも閉じない
Gibbs の傾きだけ	0.78/2.82/9.75	三サイトの道
Bochner の局所化だけ	負／6.23／228	同上
二つを合わせる	25.1/90.3/312.3	同上。値は読 。Lean の `judge_i_inside` が示すのは、ħ の小さい側の二つ（ℓ の下界が 406 と 121 の場合）で、$0 \le A \le 22$ なら閉じる条件が成り立つこと（要る値、すなわち閉じる A の上限が 22 以上であること）までです Lean 。三つ目の ħ と、値そのものは Lean に在りません（仮定：$\ell \ge 406$・$\ell \ge 121$・$0 \le A \le 22$・$0 \le L \le 1/178$）
閾を $1/\sqrt{3}$ に上げる	128/452/1604	$\kappa(\theta)\cdot\ell(\theta)$ は格子の浮動小数

足りない側を下げる（A_W の上界を作り直す）。三サイトの窓 $|W|=3$ での A_W の上界は、いまの組み立てで 1857/2794/9106 読 （見積もりを含む）で、二つを合わせた要る値と比べて **74／31／29 倍**、閾を上げた要る値と比べて 14.5／6.2／5.7 倍外です（後者は同じ上界の技法が閾を上げても同じ値を出すと置いた見積もり）。一方、試験関数で測った A_W の下界は 1.71/1.74/2.59 で、要る値を排除しません。**真の A_W が要る値の内にあることは排除されておらず、足りないのは上界の作り方の側**です。これが窓の対数 Sobolev の道筋の三本の筋の出発点です。

04

閾値の不一致 — 条件が字義どおりには何も与えていなかった例

成分ごとの局所化は $N_j \subset B_j$ で、B_j が窓の印 σ_{W_j} だけで決まる集合であることを使います。表 1 の $\kappa\cdot b\cdot\ell_{\min}$ は欠陥の閾 $\theta_B=0.57$ で測った値で、A_W は印の閾 $\theta_\sigma=\frac{1}{2}$ で測った値でした。$\theta_\sigma<\theta_B$ だと、「窓の印が全て谷の側」という印の原子は $z_i\in(-\theta_B,-\theta_\sigma]$ の点、つまり N_j の点を含みます。印で決まる集合で N_j を含むものは全空間しかなく、$\mu(B_j)=1$、$\ell=0$ です 初 （可測性の一行）。**二つの閾が食い違ったままでは、(7) は字義どおりには何も与えていません**。直し方は θ_B を $\frac{1}{2}$ に下げることではなく（$\theta=\frac{1}{2}$ では Barta の行の下界 κ が負になる）、A_W を $\theta_\sigma=\theta_B$ の印で測ることで、これは足りない側への注文です。数値の組み立てを重ねるとき、合成する条件の一つ一つが同じ定義の上で成り立っているかを、字義どおりに確かめる段が要る、という例です。

05

窓の対数 Sobolev の三本の筋

残る一命題を、条件の関数形の違う三つの形で攻めました。どの筋も区画の合成・芯の Poincaré の一様性の仮定・鞍点の管の条件を示していません。数は全て 0+1 次元の二重井戸・$\varepsilon = \frac{1}{2}$ の格子の上の値です。迂回策の全体の一覧と壊れ方の型は 23-10 に送ります。

成分ごとの筋 — 成分ごとの形

Bochner の局所化と Gibbs の傾きの上に、各点の負の曲率をその点の稀さで払う形（曲率を高さの関数 $h = (-w(z_j))_+$ で払う）を載せると、要る値は $537/1754/6052$ まで上がります 読。上界は「粗い段」と「伝播の段」の積の形で作ります。

- **粗い段は詰んだ。**中央だけ多値の印の鎖で、粗い段の対数 Sobolev 定数は $\le 3.584/3.544/3.613$、一点の指示関数の下界との比 $1.016/1.005/1.003$ 読（倍精度のデータの上の有理数の分解）。この段からはもう取れません。
- **伝播の段に上界が無い。**残りを重みつきの条件つき Poincaré 定数 C_w に移すと、要る値は $C_w \le 39.3/138.2/476.3$、試験関数の族の下界は 15.4–15.6（$\hbar$ にほぼ依らない）読。Lyapunov 関数の判定法（Bakry–Barthe–Cattiaux–Guillin の型 典、二次資料の再述で確認）で、遠い端に依らない Lyapunov 関数の族は頂上の面 $x \equiv 0$ で要る値の $16.6/14.7/14.7$ 倍外でした。遠い端まで延ばした分かれた族の最良を双対で測ると、この主項は越えますが、最も細かい格子で $215/355/654$＝要る値の $5.5/2.6/1.4$ 倍で止まります 読（格子の値、$\hbar$ を下げる側ほど格子に敏感）。全ての Lyapunov 関数に効く床は 31（$\hbar$ に一様）で 読 `Lean` `tilt_g1`（仮定：$\hat{\theta}\,\mathrm{Var} \le \hbar b$）、判定法の形そのものは要る値を割りえます。

残る一歩：隣どうしの結合の項を持つ Lyapunov 関数で、有限の $\hbar$ の補正を下げること。分類は 読 と 仮。

スカラーの筋 — スカラーの形と、スカラーの筋の命題

勾配を成分に分けず、凸な底（谷の側の箱）に Bakry–Émery を当て、頂上の帯は各サイトの Gibbs の段で払う形です。条件は $\ln k < \ell$帯 だけで $A_W \cdot \kappa \cdot b \cdot c_H$ は要りませんが、k が $\ln k$ で入るので、芯の長さには有限の範囲でしか効きません。芯の Poincaré 定数は $C_P^{(1)} \approx 50$–64 と剰余 (Rem_2) の和になり、剰余は最初の固有関数に限れば小ささ $R_2(f)/\int g^2 < \frac{1}{4}$ が要るだけです。これを仮定の表つきの命題にしたのがスカラーの筋の命題です。

スカラーの筋の命題（仮定の表つき）

0+1 次元の二重井戸・$\varepsilon = \frac{1}{2}$・$x_c = 0.89$・芯の長さ $k = 20$・中央の塊 $\{9, 10\}$・f は最初の非零固有関数。表 3 の行の下で、$\hbar \in [3 \cdot 10^{-4}, 10^{-3}]$ の節点 $\{3, 4, \dots, 10\} \cdot 10^{-4}$ の各点で、剰余の量 R は $R \le 2A$、$A = 2kP_v e^{-E_v} \int f^2$、$2kP_v e^{-E_v} \le \frac{1}{4} e^{-3}$。

Lean `path5_conditional`（仮定：剰余の不等式・代理の比・稀さ・算術の余裕 $c_0 + q_g + l_\mu \le -0.7$ を名前つきで）・`p5_assembly`（仮定：代理の比・稀さ・閾・算術・単調性）。

表 3　スカラーの筋の命題の行（五分類）

行	言明（一行）	分類	注
スペクトルの正則性	離散のスペクトル・固有関数の存在と正則性・λ_1 の単純さ	仮	角のある箱の Neumann 問題の正則性は標準の定理から出ない
帯の一サイトの対数 Sobolev	帯の一サイトの欠陥つき対数 Sobolev	仮	未
凸な底と帯の伝播	凸な底と帯の伝播（$C_P^{(1)} \approx$ 50–64）	仮	紙は本に置かない
λ_1 の上界	λ_1 の k に一様な上界（Rayleigh 商）	読	区間演算の型（節点ごとに 1 本）、未
射出の向きの局所化	射出の向きの局所化の評価	仮	紙の見積もり。節点ごとに閉じた式 1 本の区間演算の型、未。IMS の局所化の公式は 典 （二次資料で確認）
標的の稀さ	標的の稀さ $\mu(\mathrm{Rem}_v) \le e^{l_\mu(\hbar)}$、$l_\mu \le -4.97$	読	転送の浮動小数。節点ごとに 7 本の区間演算の型、未
非凸な繊維の稀さ	非凸な繊維の上の稀さ（f^2 の割合が e^{-7} 以下）	仮	Markov の不等式と転送。節点ごとに 2 本の区間演算の型、未。作用の差 ΔS_{nc} の下界は区間演算の形に無い
代理の比の持ち上げ	代理の比 $c_1 \le c_*(\hbar)$（$c_* \ge 5.39$、$\hbar \le 10^{-3}$）	仮	**測った範囲の外へ持ち上げる唯一の仮定**：二サイトの塊の測った値 0.002–0.033 と一段 $+0.048$ の線形の持ち上げ（許容 ≥ 0.67）
水準集合の比べ	水準集合の比べ $\ln \Phi \le -4.209$	読	節点ごとに 3 本の区間演算の型、未
余裕の算術	余裕の算術 $c_1 + \ln \Phi \le -3.7$	初	算術
節点の間の包み	節点の間の $\hbar$ の包み	仮	未。範囲 $[3 \cdot 10^{-4}, 10^{-3}]$ は 8 節点の点の値

区間演算に移す本数は、節点ごとに λ_1 の上界 1・射出の向きの局所化 1・標的の稀さ 7・非凸な繊維の稀さ 2・水準集合の比べ 3 の 14 本、8 節点で 112 本と節点の間の包みで、まだ一本も走らせていません。10^{-3} を少し越えると二つの条件が同じ窓で両立しなくなり（$1.35 \cdot 10^{-3}$ で両立しない 読 ）、$\hbar \to 0$ へも、射出の向きの評価が $\hbar^{-1/2}$ で一様でないため延びません。**スカラーの筋の命題は窓の下の端の有限の範囲の、仮定の表つきの命題**です。

Feynman–Kac の筋 — Feynman–Kac の形

比較の対角に Feynman–Kac の重みを残す形で、要るのは芯の全体の対数 Sobolev 定数が $A_{\mathrm{core}} \lesssim a/\hbar$、$a < 1.29/1.47/1.55$（$1/\hbar$ の係数まで問われる）です。試験関数の族の下界は $\hbar A_{\mathrm{core}} \approx 0.78$–$0.83$ 読 で、余裕は 1.6〜1.9 倍です。半径の鎖に分けると、鎖の定数は要る値の 0.54–0.56 倍（模型の鎖の上で）読 、残るのは Helffer–Sjöstrand の表示 典 （書誌だけ、言明は未確認のため本書では 仮 として扱う）の中の量 $K^2 = \sup |\nabla\psi|^2$ で、閾は $1 + K^2 \le W$、すなわち $K^2 \le W - 1 = 0.83$–0.86（W は要る値と鎖の定数の比）です。

- **Monte Carlo の読み**：出発点を探索した後の下からの値で $L = 0.4333 \pm 0.0067$（10^{-3}）・0.4163 ± 0.0079（$3 \cdot 10^{-4}$）、3σ を足して 0.453＝閾 0.835 の **0.54 倍** 読 （出発点の上の最大で、ファイバー全体の上界ではない＝探索した出発点の最大で足りる仮定）。
- **紙の上界**：同じ点・同じ経路で数えた経路ごとの Grönwall 型の上界は $U^2 = 798$＝閾の約 10^3 倍 読 。幅のほとんどは、スカラーの Grönwall が勾配の向きを捨て、全ての向きを最も柔らかい率で減らす段から来ます。時間平均した行列の最小固有値で縮みを押さえる版は偽です Lean `mbar_bound_false` （二次元の反例、仮定なし）。

残る一歩：向きを保つ上界（経路に沿った行列の Lyapunov 関数、または柔らかい部分空間と硬い部分空間に分けた評価）。

三本の並び

表 4　三本の筋の到達点（三つ組は $\hbar = 3 \cdot 10^{-3}/10^{-3}/3 \cdot 10^{-4}$）

筋	到達点	分類	$\hbar$ の範囲	残る一歩
2 スカラー	スカラーの筋の命題（仮定の表つき・持ち上げの仮定一つ・区間演算 112 本は未）	仮 ＋ 読	$[3 \cdot 10^{-4}, 10^{-3}]$ の 8 節点	節点ごとの区間演算・節点の間の包み・持ち上げの仮定の明示
3 Feynman–Kac	Monte Carlo の読みで閾の 0.54 倍。紙の上界は閾の 10^3 倍	読	10^{-3}・$3 \cdot 10^{-4}$	向きを保つ上界
1 成分ごと	Lyapunov の判定法の主項は越えたが要る値の 5.5／2.6／1.4 倍。全ての Lyapunov 関数の床は 31	読	三点	結合の項を持つ Lyapunov 関数

表 4 は、どの筋が「近い」かの順位ではありません。スカラーの筋は窓の下の端でしか形を持たず、窓の全体を覆う形は成分ごとの筋か Feynman–Kac の筋にしかありません。進み具合は行ごとの分類で読んでください。

```
06
```

共通の壁 — 頂上の一サイトの曲率 $15/4$ と 4

芯の作用の Hessian は、格子 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ で三重対角の行列

$$\operatorname{Hess} S = \begin{pmatrix} 4+w_1 & -2 & & \\ -2 & 4+w_2 & -2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -2 & 4+w_k \end{pmatrix}, \qquad w_j = \varepsilon V''(z_j) = \frac{3z_j^2 - 1}{4} \tag{10}$$

です（隣どうしの項 $(z_{j+1}-z_j)^2/(2\varepsilon)$ が対角に 4、隣に -2 を与える）。一つの行を見ると、対角は $4 + w_j$、隣との結合の絶対値の和は $2 + 2 = 4$ です。頂上 $z_j = 0$ では $w_j = -\frac{1}{4}$ なので

$$\text{対角} \;=\; 4 - \tfrac{1}{4} \;=\; \tfrac{15}{4} \;<\; 4 \;=\; \text{結合の和} \tag{11}$$

で、**対角優位が $\frac{1}{4}$ だけ破れます** 初 。行ごとの評価（Gershgorin の円）から言えるのは最小固有値 $\geq \min_j w_j = -\frac{1}{4}$ までで、実際に全てのサイトが頂上にある面 $x \equiv 0$ の上では、両端を止めた k サイトの塊の最小固有値は $8\sin^2\frac{\pi}{2(k+1)} - \frac{1}{4}$ で、$k \geq 8$ で負です 初 （$\operatorname{tridiag}(-2, 4, -2)$ の固有値の閉じた式）。手で確かめるなら、$k = 7$ で $8\sin^2(\pi/16) \approx 0.304 > \frac{1}{4}$、$k = 8$ で $8\sin^2(\pi/18) \approx 0.241 < \frac{1}{4}$ です。

三本の筋は、この一行の不足に形を変えて戻ってきました。

- Barta の重みをどう選んでも、一サイトの重みの行の床は頂上で $F(0,0) = w(0) = -\frac{1}{4}$ です。
- 成分ごとの筋の一様な道の判定は、対角 $A = 4 - \frac{1}{4}$ と結合 $B = 2$ で $A - 2B = -\frac{1}{4}$ でした。
- 成分ごとの筋の Lyapunov の判定法が止まった頂上の面は、作用の勾配が 0 になる面 $x \equiv 0$ そのものです。
- Feynman–Kac の筋で $1/\hbar$ の係数が住むのは、頂上の角からの半径（台地の非凸な向き）でした。

壁が普遍である理由（一行）。凸性（Hessian の正の下界）を入口に持つ道具——Bakry–Émery・Brascamp–Lieb・Barta の行・対角優位——は、頂上の台地で Hessian が本当に負の向きを持つ以上、どこかでこの $\frac{1}{4}$ を台地の稀さ（エントロピー）で払う必要があり、その払い方に $\hbar$ が入ります。この見方の詳しい検討と、凸性に頼らない別の視点は第 24 部（24-06）で扱います。

07

五分類の表 — 区画の枠組みと窓の対数 Sobolev の道筋の行

表 5　この章の行（$\hbar$ の範囲の「—」は、どの $\hbar$ でも示されていない仮定の行。行の欄の番号は §08 の依存グラフの番号）

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
[01]	窓の周辺の対数 Sobolev の入力（窓の周辺の対数 Sobolev 不等式の形）	仮	§02 (4)	—	—
[02]	橋の体積の局所性の入力（橋の上の体積の局所性）	仮	§02 体積の局所性	—	—
[03]	Barta の行 $\kappa = 3/1000$・$b = 493/1000$	仮	§02 区画の合成（紙は本に置かない）	$\hbar$ に依らない	—
[04]	Bochner の境界の項の消滅と固有関数の正則性	仮	§02 区画の合成	—	—
[05]	スカラーの筋の命題の持ち上げの仮定と表 3 の他の仮の行	仮	§05 表 3	—	—
[07]	Bochner の公式の積分形	典	Bochner の公式の積分形（Ledoux の講義の命題 1.3。原典の本文で確認）	$\hbar$ に依らない	—
[08]	$\ell_{\min} = 38.3/121.9/406.8$	読	§02 体積の局所性（転送行列・外挿を含む）	三点	—
[09]	A_W の上界 $1857/2794/9106$・下界 $1.71/1.74/2.59$	読	§03（見積もりを含む／族の値）	三点	—
[10]	区画の和	初	§02	$\hbar$ に依らない	`var_split_cells`（仮定なし）・`cell_sum_sup`（仮定：$w_i, E_i \ge 0$・$C_i \le C_{\max}$）
[11]	Gibbs の分解：Gibbs の変分不等式 (2) と (3)	初	§02 の証明	$\hbar$ に依らない	`gibbs_ln2_cell`（仮定：$p \ge 0$・$\ell \ge 0$・$pe^{\ell} \le 1$）
[12]	成分ごとの局所化 (5) ⟸ [01]	初	§02	$\hbar$ に依らない	`comp_sum_le`（仮定：$0 < \ell \le \ell_j$・各成分の不等式）
[13]	スカラーの形は k に一様でない	初	§02 成分ごとの局所化	$\hbar$ に依らない	`scalar_not_uniform`（仮定：$p > 0$）
[17]	区画の合成 (6) と閉じる条件 (7)	初	§02	$\hbar$ に依らない	`comp_close`（仮定：$X > 0$・$b, A \ge 0$・$\ell > 0$・Barta・(5)・Bochner）

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
[18]	要る値 (8)	初	§03（値は測った ℓ_min の上の算術で読）	三点	—
[15]	局所化した Bochner (9)	初	§03	$\hbar$ に依らない	`negw_le_localized`・`bochner_localized`（仮定は §03 の本文）
[16]	Gibbs の傾きの最適化	初	§03	$\hbar$ に依らない	`tilt_cost_le`（$t=\ell-5.2$ での費用の上界まで。仮定：$b\ge 0$・$L\le 1/178$）
[19]	二つを合わせた要る値 $25.1/90.3/312.3$	読	§03 表 2	三点	`judge_i_inside`（二つの $\hbar$ で、$A\le 22$ なら閉じること。仮定：測った ℓ の下界・$A\le 22$）
[20]	閾が食い違うと $\ell=0$	初	§04	$\hbar$ に依らない	—
[21]	スカラーの筋の命題	仮	§05 スカラーの筋（代理の比の持ち上げの仮定・スペクトルの正則性の行の上の組み立て）	$[3\cdot 10^{-4},10^{-3}]$ の 8 節点	`path5_conditional`・`p5_assembly`（仮定は §05）
[22]	成分ごとの筋の到達点（要る値の 1.4〜5.5 倍・床 31）	読	§05 成分ごとの筋	三点	`tilt_g1`（仮定：$\hat\theta\,\mathrm{Var}\le\hbar b$）
[23]	Feynman–Kac の筋の到達点（読み 0.54 倍・紙の上界 10^3 倍）	読	§05 Feynman–Kac の筋	二点	`mbar_bound_false`（反例、仮定なし）
[24]	頂上の一サイトで対角優位が $\frac14$ 破れる	初	§06 (11)	$\hbar$ に依らない	—
[06]	窓の対数 Sobolev の閾の命題 $A_W<A_{\max}$	仮	窓の対数 Sobolev の道筋	—	—

表 5 の「初」の行は、どれも仮定の行の上の代数か、本文に証明を置いた一般の不等式です。芯の隙間の下界が無条件に示されたことは意味しません。

08 依存グラフ

書式は 23-05 §07 と同じで、「⟸」**の右の番号は左の番号より必ず小さく**置きます。

[01] 仮　窓の周辺の対数 Sobolev の入力　ħ：—

[02] 仮　橋の体積の局所性の入力　ħ：—

[03] 仮　Barta の行 κ = 3/1000・b = 493/1000　ħ に

[04] 仮　Bochner の境界の項と正則性　ħ：—

[05] 仮　スカラーの筋の命題の仮の行（持ち上げの仮定ほか）　ħ：—

[06] 仮　窓の対数 Sobolev の閾の命題：A_W < A_max　ħ：—

[07] 典　Bochner の公式の積分形　ħ に依

[08] 読　ℓ_min = 38.3／121.9／406.8　ħ：

[09] 読　A_W の上界と下界　ħ：三

[10] 初　区画の和　ħ に

Lean var_split_cells・cell_sum_sup

[11] 初　Gibbs の分解（Gibbs の変分不等式）　ħ に依

Lean gibbs_ln2_cell（仮定：p ≥ 0・ℓ ≥ 0・p·e^ℓ ≤ 1）

[12] 初　成分ごとの局所化 (5) ⟸ [01][10][11]　ħ に

Lean comp_sum_le

[13] 初　スカラーの形は k に一様でない　ħ に依ら

Lean scalar_not_uniform（仮定：p > 0）

[14] 読　体積の局所性：ℓ_min は k に依らない ⟸ [02][08]　ħ：三点

[15] 初　局所化した Bochner (9) ⟸ [04][07]　ħ

Lean negw_le_localized・bochner_localized

[16] 初　Gibbs の傾きの最適化　ħ に依

Lean tilt_cost_le（上界まで）

[17] 初　区画の合成 (6)・閉じる条件 (7) ⟸ [03][04][07][12][14]　ħ に依

Lean comp_close（仮定：Barta・(5)・Bochner）

[18] 初　要る値 (8) ⟸ [17]　ħ

[19] 読　要る値 25.1／90.3／312.3 ⟸ [08][15][16][18]　ħ：

Lean judge_i_inside（二つの ħ で A ≤ 22 まで。仮定：測った ℓ の下

[20] 初　閾が食い違うと ℓ = 0　ħ に依

[21] 仮　スカラーの筋の命題 ⟸ [05]　ħ：8

Lean path5_conditional・p5_assembly

[22] 読　成分ごとの筋の到達点 ⟸ [19]　ħ：三

[23] 読　Feynman–Kac の筋の到達点　ħ：二

[24] 初　頂上で対角優位が ¼ 破れる　ħ に依ら

[25] 初　芯の隙間の k に一様な正の下界 ⟸ [06][17]　ħ：—

確かめ方。$\Longleftarrow$ を持つ行は [12]（[01][10][11]）・[14]（[02][08]）・[15]（[04][07]）・[17]（[03][04][07][12][14]）・[18]（[17]）・[19]（[08][15][16][18]）・[21]（[05]）・[22]（[19]）・[25]（[06][17]）で、どれも右の番号が左より小さく、円はありません。

読むこと。結論 [25] は [17] を通して構造の段（[10]〜[14]）と入力の仮定（[01]〜[04]）に依り、さらに仮定の行 [06]（残る一命題）に依ります。[06] を支える候補が三本の筋 [21][22][23] で、どれも [06] を示していません（[21] は窓の下の端の仮定の表つきの命題、[22][23] は読み）。[20] は、[01] と [03] を同じ閾で測らないと [12] が空になる、という確かめの行です。[24] は三本の筋が止まった場所の説明で、どの結論の前提でもありません。

仮定の行の言明が結論の量を含まないことも確かめます。結論の量は芯の測度の隙間 λ です。[01][06] は窓の印の周辺の対数 Sobolev 定数、[02] は切れ端の転送作用素の剰余、[03] は重みの行の下界、[04] は境界の項と正則性、[05] は剰余の量と代理の比で、どれも λ を含みません。

09

次の章へ

窓の対数 Sobolev の道筋で試した迂回策（二十二本と途中で生まれた二本、その派生）の全体の一覧と、繰り返し現れた壊れ方の型は 23-10 で扱います。芯の定数を箱の側から三段で押さえる組み立ては 23-11 です。この部は拡散型緩和時間の仮定を検討の軸に置き、この章はその一段目の鞍点の管の条件の芯の行がどこまで組めたかを述べました。頂上の負の曲率を凸性に頼らずに扱う視点は第 24 部（24-06）で扱います。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 区画の枠組みの区画の和・Gibbs の分解・成分ごとの局所化・区画の合成の組み立て、閉じる条件 (7)、要る値 (8)、局所化した Bochner と Gibbs の傾き、閾の食い違いの帰結、頂上での対角優位の破れ Lean （代数）	入力（窓の周辺の対数 Sobolev の入力・橋の体積の局所性の入力・Barta の行・正則性）
読 要る値 $25.1/90.3/312.3$、A_W の上界との差 29〜74 倍、三本の筋の到達点	残る一命題（窓の対数 Sobolev の閾の命題）。したがって芯の行（芯の Poincaré の一様性の仮定）と鞍点の管の条件
仮 スカラーの筋の命題（$\hbar \in [3\cdot 10^{-4}, 10^{-3}]$ の 8 節点、仮定の表つき）	スカラーの筋の命題の区間演算・節点の間・窓の上の半分と $\hbar \to 0$

出典と再現

もの	種別	出典・道具
Bochner の公式の積分形	典	M. Ledoux, Sém. Probab. XXXV, LNM 1755 (2001) 167–194（Bochner の公式の積分形、本文で確認）。
Lyapunov 関数と局所 Poincaré の判定法	典	D. Bakry, F. Barthe, P. Cattiaux, A. Guillin, Electron. Commun. Probab. 13 (2008)；D. Bakry, P. Cattiaux, A. Guillin, J. Funct. Anal. 254 (2008) 727–759（定理 3.6 を二次資料の再述で確認）。
IMS の局所化の公式	典	H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, B. Simon, *Schrödinger Operators*, Springer 1987（§3 の再述で確認）。
Helffer–Sjöstrand の表示	仮	B. Helffer, J. Sjöstrand, J. Stat. Phys. 74 (1994) 349–409（書誌だけ、言明は未確認）。
Gibbs の変分不等式・区画の和・成分ごとの局所化・合成	初・Lean	本文 §02 の証明。`var_split_cells`・`cell_sum_sup`・`gibbs_ln2_cell`・`comp_sum_le`・`comp_close`・`scalar_not_uniform`。
要る側の二つの直し	初・読・Lean	§03。`negw_le_localized`・`bochner_localized`・`tilt_cost_le`・`judge_i_inside`。稀さの指数は転送行列（中点則・格子 600 と 1200 の小さい方）。
三本の筋の数	読・Lean	成分ごとの筋：浮動小数の格子の双対と主の問題（格子 40〜160）、`tilt_g1`。スカラーの筋：転送の浮動小数、`path5_conditional`・`p5_assembly`。Feynman–Kac の筋：随伴の推定量の Monte Carlo（経路 32、出発点の探索）、`mbar_bound_false`。

この章で使った語 — 区画の枠組み・区画・印・サイトの窓・欠陥の集合・稀さの指数・Gibbs の変分不等式・成分ごとの局所化・閉じる条件・要る値・道具の選び方と構造・閾値の不一致・三本の筋・スカラーの筋の命題・持ち上げの仮定・共通の壁・対角優位。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-10 迂回策の一覧 — 壊れ方の型 — 迂回策を「殺した一行」つきの一表にし、要る側・形・床の三つの側と、繰り返し現れた壊れ方の型を読む。

迂回策の一覧 — 壊れ方の型

この章は未解決の問いの地図です。§04 は本書の検討、§07 は案内です。

この章で分かること — 窓の対数 Sobolev の道筋の閉じる条件 $b(A_W c_H + D_W + \ln 2) < \kappa \ell_{\min}$ のどの因子を動かすかで、試した迂回策二十四本（迂回策の一覧）を一表にします。各行に「殺した一行」（死んだ案）か「残る仮定」（生きている案）と、動かした因子が構造から来るのか道具の選び方から来るのかを書きます。表から、繰り返し現れた七つの壊れ方の型を抜き出し、型ごとに当たった案と、読者が自分の案を当てて確かめるための問いを添えます。

前提となる章 — 23-09 §03（閉じる条件・要る値・定数の出所の表 1）・23-09 §06（共通の壁）・23-07 §02（窓の対数 Sobolev の道筋の位置）。

先に言うこと — 水準は〔三〕〜〔研〕で、§01・§02 と §04 の型の名と問いは〔三〕で読めます。この部は拡散型緩和時間の仮定を検討の軸に置いていて（23-01）、この章はその一段目の鞍点の管の条件の芯の行に向けて試した案の後始末です。どの案も鞍点の管の条件を示していません。数は全て 0+1 次元の二重井戸・格子 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ の上の値で、三つ組は $\hbar = 3 \cdot 10^{-3}$ / 10^{-3} / $3 \cdot 10^{-4}$ の順です。

この章の順序

1. 要約 — 〔三〕で読める一節
2. 出発点 — 閉じる条件と、三つの側
3. 迂回策の一覧（表 1・数え）
4. 壊れ方の型 — 七つの型と、自分の案を当てる問い（表 2）
5. 生き残ったものの行き先 — 三本の筋へ（表 3）
6. 五分類の表 — 型ごとの主な補題（表 4）

01

要約

窓の対数 Sobolev の道筋の残る一命題は、サイトの窓の対数 Sobolev 定数 A_W が要る値 $A_{\max}$ の内にあることでした（23-09 §03）。迂回策は、この不等式の両辺のどちらか、または不等式の形そのものを動かす案です。

- **二十四本の結果**。最初に並べた二十二本は、死 13・保留 2・条件つき 3・生 4 に分かれました。生の 4 本のうち 2 本（迂回策「負の曲率の局所化」・迂回策「Gibbs の傾きの最適化」）は以後の全ての形に部品として入り、残りの 2 本（迂回策「スカラーの払い」・迂回策「関数の不等式の取り替え」）と途中で生まれた迂回策「高さの関数の払い」が、23-09 の三本の筋になりました。
- **道具の側と構造の側**。要る値を大きく動かしたのは、道具の選び方を直した案（負の曲率の局所化・Gibbs の傾きの最適化：10^{-3} で $0.20 \to 90.3$、約 460 倍）で、構造から来る因子（欠陥の深さ b・欠陥の集合の稀さ ℓ）を動かした案は、どれも 1.15 倍の天井の下で止まりました。
- **七つの壊れ方の型**。源は一つ（頂上の一サイトの曲率）・比で入る構造の因子の天井・同じ場所を二度払う・通貨の取り違え・$1/\hbar$ の住所・揺れの向きと柔らかい向きのずれ・移しかえ。死んだ 13 本のうち 12 本は、このどれかに当たります。

02

出発点 — 閉じる条件と、三つの側

23-09 の写し。芯 Q_k の隙間 λ を芯の長さ k に一様に押さえる区画の枠組みは、Barta・成分ごとの局所化・Bochner の三つの不等式を組んで、次の条件の下で閉じます（23-09 (7)）。

$$b\,(A_W c_H + D_W + \ln 2) \;<\; \kappa\,\ell_{\min}, \qquad A_W \;<\; A_{\max} = \frac{\kappa \ell_{\min}/b - D_W - \ln 2}{c_H} \tag{1}$$

六つの定数のうち、$\kappa = 3/1000$・$b = 493/1000$・$\ell_{\min}$ は模型と欠陥の集合の定め方が決める**構造**の量で、$c_H = \tfrac{1}{4}$（負の曲率を芯の全体で一様に払った値）と $\ln 2$（Gibbs の傾きを $t = \ell$ に固定した値）は**道具の選び方**の量です（23-09 表 1）。元の形で要る値は負／0.20／7.13、一方 A_W の上界は $1857/2794/9106$ 読 （見積もりを含む）、下界は $1.71/1.74/2.59$ 読 （試験関数の族の値）でした。

迂回策とは。(1) を閉じるには、要る値を上げるか、上界を下げるか、条件の形を替えるかです。この章では案をその向きで三つの側に分けます。

図 1　三つの側（テキストの三列）

要る側	形	足りない側（床）
$A_{\max}$ を大きくする。(1) の右辺の κ・$\ell_{\min}$ を大きく、左辺の b・c_H・$\ln 2$ を小さく	(1) の関数形を替える。A_W が条件に入らない組み方・対数 Sobolev でなく Poincaré の組み方	A_W の上界を下げる。上界の組み立ての構造の損（床）を減らす
負の曲率の局所化・Gibbs の傾きの最適化・閾の引き上げ・欠陥の深さの層分け・欠陥の集合の絞り込み・長い塊の欠陥・非線形の Barta の重み・古典の極限への延長・Hölder と超縮小の段・高さの関数の払い	スカラーの払い・迂回策「Agmon の型の払い」・迂回策「下流の洗い直し」・関数の不等式の取り替え	頂上の帯の払い・粗い段と伝播の段の一括・塊を固定した対数 Sobolev・頂上の帯だけの摂動・既知の一様な対数 Sobolev・有限体積の判定・Glauber の対数 Sobolev・二段の塊展開・一・二サイトの窓・塊の芯の局所化

もう一つの軸が、動かした因子の性格です。**構造**の因子は模型が決める量で、動かすには欠陥の集合や重みの定義を替える必要があります。**道具**の因子は証明の段の選び方で、同じ集合のまま替えられます。表 1 の「構造／道具」の列はこの軸で、「道具 → 構造の床」は道具を替えたが構造の床に当たって止まった案です。

03

迂回策の一覧

表 1 の判定の語は次の意味です。**生**＝その形で要る値の内に入った（それでも (1) の証明ではなく、残る仮定がある）。**条件つき**＝残る仮定を名指しできる。**保留**＝紙で決まらない。**死**＝殺す検査で要る値の外に出たか、形が出なかった。殺した一行は、その案を止めた事実を一行に縮めたもので、数は全て浮動小数の格子か転送行列の読みです 読 （下界は試験関数の族の中の値）。

表 1　迂回策の一覧（三つ組は $\hbar = 3\cdot 10^{-3}/10^{-3}/3\cdot 10^{-4}$。「型」は §04 の壊れ方の型）

迂回策	案（一行）	何を動かす	構造／道具	結果	殺した一行（死）／残る仮定	型・章
負の曲率の局所化	Bochner の負の曲率を欠陥の集合に局所化	c_H（要る側）	道具	生（部品として吸収）	Gibbs の傾きの最適化と合わせて要る値 $25.1/90.3/312.3$。残る：Bochner の段の正則性・A_W を欠陥と同じ閾の印で測ること	二度払いの型・23-09 §03
Gibbs の傾きの最適化	Gibbs の傾きを $t^* = \ell - 5.10$ に	$\ln 2$（要る側）	道具	生（吸収）	費用 $b\ln 2 = 0.342 \to 0.0183$。残る仮定なし（一行の不等式）	二度払いの型・23-09 §03

迂回策	案（一行）	何を動かす	構造／道具	結果	殺した一行（死）／残る仮定	型・章
閾の引き上げ	閾を $1/\sqrt{3}$ に上げ、局所化の残り δ を 0 に	δ・κ（要る側）	道具	条件つき	要る値は実質 $A_W \lesssim 4\ell$：$128/452/1604$ 対 上界 $1629/2444/8153$（12.8／5.41／5.08 倍外）。残る：窓の外の尾	構造の因子の天井の型
欠陥の深さの層分け	欠陥の深さ b を層に分ける	b（要る側）	構造	死	倍率 $1.05/1.01/1.004$。集合を変えず b・κ だけを動かす案は $A_{\max} < 4\ell$（いまの値からの天井 $1.15/1.04/1.01$ 倍）	構造の因子の天井の型
欠陥の集合の絞り込み	欠陥の集合を、行が κ を下回る集合に絞る	$\ell_{\min}$（要る側）	構造	死	集合は 1.40 倍稀になったが、Barta の側の稀さは $\kappa/(\beta_0-\kappa) \approx 1/47$ を掛けてしか効かない（倍率 $1.11/1.05/1.02$）	構造の因子の天井の型
長い塊の欠陥	欠陥を長さ 8 以上の塊で定める道へ	$\ell_{\min}$（要る側）	構造	死	長さ ≥ 2 の短い塊で Barta の行の最良の下界が負（長さ 2 で -0.0096）	頂上の曲率の型
頂上の帯の払い	頂上の帯を欠陥に払う	床	構造	死	帯の稀さと帯を通る尾が両方 $\propto 1/\hbar$ で打ち消し、帯に触れて出る道の尾が全体の尾に等しい	1/ħ の住所の型
スカラーの払い	区画の欠陥をスカラーの形で払う	形	道具	生（条件つき）	条件は $\ln k < \ell_{\text{帯}}$ だけで A_W・κ・b・c_H が要らない。残る：スカラーの筋の命題の表の行	23-09 スカラーの筋
非線形の Barta の重み	Barta の重みを非線形に	b（要る側）	道具 → 構造の床	死	最悪の行は $-0.4865 \to -0.25$ に上がるが、頂上の床 $F(0,0)=w(0)=-\frac{1}{4}$ はどの一サイトの重みにもある（倍率 $1.02/1.006/1.002$）	頂上の曲率の型
Agmon の型の払い	真の固有関数の勾配だけで欠陥の重みを払う（Agmon の型）	形	道具 → 構造の床	死	Agmon の利得は曲率が正の余白を持つ所だけで、欠陥の集合は曲率が負になる唯一の場所＝最も許された側	頂上の曲率の型
下流の洗い直し	下流で要るものを洗い直す	形	道具	保留 → スカラーの払いに吸収	下流は「k に一様・$\hbar$ について多項式」で足りるが、入力を k に一様に出す道具が対数 Sobolev の型しか無かった	23-09 スカラーの筋

迂回策	案（一行）	何を動かす	構造／道具	結果	殺した一行（死）／残る仮定	型・章
粗い段と伝播の段の一括	粗い段と伝播の段を積に分けず一度に	床	道具	条件つき	粗い段は下界との比 $1.016/1.005/1.003$ で詰んだ。残る：伝播の段の重みつき条件つき Poincaré 定数 C_w	23-09 成分ごとの筋
関数の不等式の取り替え	対数 Sobolev でなく Poincaré／修正 LSI／Φ-エントロピー	形	道具	Poincaré は生（条件つき）・他の二つは死	修正 LSI は $\ln(1/\pi_*)$ がエネルギーの側へ移るだけ、Φ-エントロピーは Poincaré の端点に勝てない	移しかえの型・スカラーの筋
塊を固定した対数 Sobolev	塊の状態を固定した条件つき測度の対数 Sobolev	床	道具	死	条件づけた後は欠陥の集合の測度が 0 か 1 で、$\ell = 0$	通貨の取り違えの型
頂上の帯だけの摂動	窓の外に Bakry–Émery、頂上の帯だけ Holley–Stroock の摂動	床	道具	死	一サイトの振れ $\mathrm{osc}/\hbar = 3.7/11/37$ が指数に入り鎖で長さ倍、欠陥の項に払うと許容の 2000〜4900 倍	$1/\hbar$ の住所の型
既知の一様な対数 Sobolev	一次元の一様な対数 Sobolev の既知の定理	床	道具	死	一様な定数は相関の長さを覆う箱（長さ $\gtrsim 230$–810）の有限体積の定数で、窓の定数を下回らない	移しかえの型
有限体積の判定	有限体積の判定（Martinelli–Olivieri・Lu–Yau の型）	床	道具	死	迂回策「既知の一様な対数 Sobolev」と同じ：判定の箱が相関の長さを覆う必要がある	移しかえの型
Glauber の対数 Sobolev	Glauber 力学の既知の対数 Sobolev	床	道具	死	粗い段は律速でなく、Glauber の定数 ≥ 39–400 はむしろ悪い	—
二段の塊展開	二段の塊展開・ブロックスピン	床	道具	死	最大の道のピンは頂上に残り、尾の利得 ≤ 1.8（10^{-3}）・≤ 3（$3 \cdot 10^{-3}$）で、要る 5〜13 倍に届かない	移しかえの型
古典の極限への延長	$\hbar$ を窓の下へ（古典の極限）	要る側（範囲）	構造	保留	帯を外すと境の写像の縮み $0.976/0.952/0.929 < 1$（帯の幅 $0.1/0.2/0.3$）で尾は $\hbar$ に依らず有界。残る：境の自己閉路の補題と帯の補題（迂回策「頂上の帯の払い」は死）	—

迂回策	案（一行）	何を動かす	構造／道具	結果	殺した一行（死）／残る仮定	型・章
一・二サイトの窓	窓を一・二サイトに（半分の行）	床	道具	条件つき（利得は小）	効き目は約 2/3、倍差 $8.45/3.59/3.38$。伝播の尾は残る	移しかえの型
塊の芯の局所化	窓でなく塊の芯で局所化	床	道具	死	窓の尾を 1 にした極限でも $4.2/1.8/1.7$ 倍外（床の出所は窓の選び方に依らない）	移しかえの型
Hölder と超縮小の段	Gibbs の段を Hölder と超縮小に	要る側	道具	単独は迂回策「閾の引き上げ」に支配	$\sqrt{k}$ は出ないが A は $\ln C^2$ に一次で入り、天井は同じ $\approx 4\ell$（要る値は閾の引き上げの 0.80〜0.91 倍）。取り柄は印の集合の可測性が要らないこと	構造の因子の天井の型
高さの関数の払い	負の曲率を高さの関数 $h=(-w(z_j))_+$ で払う（各点の曲率をその点の稀さで）	要る側	道具	条件つき	要る値 $537/1754/6052$（閾の引き上げの 3.8〜4.2 倍）。Rothaus の補題のままでは死。残る：伝播の尾	成分ごとの筋・迂回策「Hölder と超縮小の段」と合わせて Feynman–Kac の筋

数え。最初の二十二本（表 1 の負の曲率の局所化から塊の芯の局所化まで）は、生 4（負の曲率の局所化・Gibbs の傾きの最適化は部品として吸収、スカラーの払い・関数の不等式の取り替えの Poincaré の形は条件つき）・条件つき 3（閾の引き上げ・迂回策「粗い段と伝播の段の一括」・迂回策「一・二サイトの窓」）・保留 2（下流の洗い直しはスカラーの払いに吸収・迂回策「古典の極限への延長」）・死 13 です。死んだ 13 本の側は、床の側 8（頂上の帯の払い・塊を固定した対数 Sobolev・頂上の帯だけの摂動・既知の一様な対数 Sobolev・有限体積の判定・Glauber の対数 Sobolev・二段の塊展開・塊の芯の局所化）・要る側 4（迂回策「欠陥の深さの層分け」・迂回策「欠陥の集合の絞り込み」・迂回策「長い塊の欠陥」・迂回策「非線形の Barta の重み」）・形 1（Agmon の型の払い）です。途中で生まれた二本は、Hölder と超縮小の段が単独では閾の引き上げに支配され、高さの関数の払いは条件つきで成分ごとの筋に入り、Hölder と超縮小の段と合わせた形がFeynman–Kac の筋になりました。

道具の側と構造の側の対比。表 1 の「構造／道具」の列を結果の列と並べると、要る値を大きく動かした行は全て「道具」です。負の曲率の局所化・Gibbs の傾きの最適化は同じ欠陥の集合のまま、負の曲率の払い方と Gibbs の傾きの選び方を直しただけで、要る値を負／0.20／7.13 から $25.1/90.3/312.3$ へ動かしました（10^{-3} で約 460 倍、$3\cdot10^{-4}$ で約 44 倍、$3\cdot10^{-3}$ では負から正へ）読。一方「構造」の行（欠陥の深さの層分け・欠陥の集合の絞り込み・長い塊の欠陥・頂上の帯の払い）と構造の床に当たった行（非線形の Barta の重み・Agmon の型の払い）は、倍率が 1.15 を越えないか、形が出ませんでした。要る側の損の大半は、模型の

構造ではなく道具の選び方にあった、ということです。逆に、道具を直し尽くした後に残る差（閾の引き上げの形で 5〜13 倍）は、§04 の頂上の曲率の型の構造の床に帰ります。

▶ 派生の一覧（筋の中で試した形、折りたたみ）

04

壊れ方の型

表 1 と表 1′ の殺した一行を並べると、同じ理由が形を変えて繰り返し現れます。それを七つの型にまとめます。各型に、当たった案、なぜその型で壊れるかの一段落、自分の案を当てて確かめるための問いを置きます。型は互いに排他ではなく、一つの案が二つの型に当たることもあります。

頂上の曲率の型 — 源は一つ（頂上の一サイトの曲率）

当たった案：長い塊の欠陥・非線形の Barta の重み・Agmon の型の払い、表 1′ の一様な道と区画に分けない Lyapunov の判定。

芯の作用の Hessian の一つの行は、頂上で対角 $4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$ が隣との結合の和 4 に $\frac{1}{4}$ 届きません（23-09 (11)）。この不足は、Barta の重みの行・鎖の縮みの判定・Lyapunov 関数の判定のどれにも、頂上の面 $x\equiv 0$（全てのサイトが頂上）で同じ値として現れます。例えば一サイトの重み $\psi_j=\phi(z_j)$ の Barta の行は $F(z,n)=w(z)+(\text{重みの対数微分})\times(\text{漂流})$ の形で、頂上 $z=0$ と隣 $n=0$ では漂流 $\varepsilon V'(0)+8(0-0)$ が 0 なので、重みをどう選んでも 初

$$F(0,0)=w(0)=-\tfrac{1}{4} \tag{2}$$

です（行の形は 23-09 の Barta の行と同じ仮定の行の上の一行の計算）Lean `floor_top`（仮定：重みの値 $\neq 0$）。Agmon の型の払いの Agmon の型は、曲率が正の余白を持つ所で利得を得る道具で、欠陥の集合はちょうど曲率が負の場所なので、そこでの利得の係数は ≤ 0 です Lean `agmon_no_gain_on_negative_curvature`（仮定：曲率 $w\le 0$・$\lambda\ge 0$ ほか。Agmon の評価の枠組みは本に置かない）。長い塊の欠陥では、欠陥を長い塊で定めると、長さ 2 以上の短い塊の行が負になり、同じ不足が短い塊の側に出ました。

当てる問い：その案は、頂上の面 $x\equiv 0$ の上で何を払っていますか。そこで払う量が $\hbar$ に依らない定数なら、$\frac{1}{4}$ の不足がそのまま残ります。この不足を払えるのは、頂上の台地の稀さ（エントロピー）だけで、その払い方に $\hbar$ が入ります。

構造の因子の天井の型 — 比で入る構造の因子には天井がある

当たった案：欠陥の深さの層分け・欠陥の集合の絞り込み・Hölder と超縮小の段、閾の引き上げの天井。

閾を上げて局所化の残りを $\delta \geq 0$、残りの係数を γ、Gibbs の傾きを t、$L(t) = \ln(1 + e^{t-\ell})$ とした閉じる条件は $b(A\delta + D_W + L(t)) < \kappa(t - A\gamma)$ です（負の曲率の局所化・Gibbs の傾きの最適化・閾の引き上げの形）。

天井の補題。$0 < \kappa < b$、$\delta, D_W \geq 0$ なら、この条件を満たす $A \geq 0$ は $A\gamma < \ell$ を満たす。

初 証明。左辺は $bL(t) > 0$ 以上なので $t - A\gamma > 0$ です。$b > \kappa$ から $b(t - A\gamma) > \kappa(t - A\gamma) > bL(t) \geq b(t - \ell)$（$\ln(1 + e^x) \geq x$）。$b$ で割ると $A\gamma < \ell$。∎ Lean `ceiling_same_set`（仮定：$0 < \kappa < b$・$t - A\gamma > 0$・$t - \ell \leq L$・閉じる条件）

欠陥の集合（したがって ℓ）を変えずに b・κ だけを動かす案は、要る値を ℓ/γ（閾の引き上げの形で 4ℓ）より上に出せません。閾の引き上げの形の要る値はすでに天井の $1/1.15/1/1.04/1/1.01$ の所にあり 読、欠陥の深さの層分けの $1.05/1.01/1.004$ 倍はその内です。集合を変える欠陥の集合の絞り込みでは、Barta の側の稀さ（行が κ を下回る集合の ℓ_B）は $\kappa/(\beta_0 - \kappa) \approx 1/47$ を掛けてしか条件に入らず 仮（紙は本に置かない）Lean `ceiling_split`、集合を 1.40 倍稀にしても倍率は 1.11 止まりでした。Hölder と超縮小の段は Gibbs の段の道具を替えましたが、A が同じ形で入るので天井は同じです。

当てる問い：その案は欠陥の集合を変えますか。変えないなら、要る値は ℓ/γ を越えません。変えるなら、新しい集合の稀さが条件のどの係数と掛かって入るかを先に書いてください。

二度払いの型 — 同じ場所を二度払っていた

当たった案（直した側）：負の曲率の局所化・Gibbs の傾きの最適化、表 $1'$ の窓の組み立て。

元の組み立ての Bochner の段は、負の曲率 $-\frac{1}{4}$ を芯の全体 X で払っていました。ところが負の曲率は $z > -1/\sqrt{3}$ にしか無く、そこは Gibbs の段が既に Y として払っている欠陥の集合の中です。同じ場所を X の側でもう一度払ったために、$b/\kappa \approx 164$ の増幅を通って A_W の係数が $bc_H = 0.123$ になっていました。局所化（負の曲率の局所化）で係数は 0.0038 に下がります（23-09 (9)）。Gibbs の傾き $t = \ell$ の固定（Gibbs の傾きの最適化）と、伝播の段の組み立ての $(1 + \sqrt{C_w})^2$（同じ量を二度数える）も同じ型です。この型は、直すと大きく効く型です。

当てる問い：その段で払っている量は、前の段がすでに払った集合の上にありませんか。二つの段の払う場所を同じ図に描くと見えます。

通貨の取り違えの型 — 出口の速さと稀さ

当たった案：迂回策「塊を固定した対数 Sobolev」、表 $1'$ の帯を稀さで払う形と二重閾値、23-11 §04 の素朴な分散の分解。

Poincaré 不等式が測るのは出口の速さ（分散を Dirichlet 形で割った比）で、稀さ $\mu(B) \le e^{-\ell}$ を払えるのはエントロピーの通貨です（23-09 (3)：$\ell \int_B g^2 \le \mathrm{Ent} + \ln 2 \int g^2$）。分散と Dirichlet 形の比は関数の定数倍で変わらないので、稀な集合に台を持つ関数を入れると、稀さは分子と分母で打ち消します。「帯に張り付いているから揺らぎは小さい」は分散についての直観で、稀さを払う段に要るのはエントロピーの評価です。塊を固定した対数 Sobolev はもっと直接で、欠陥の集合が条件づけの σ-代数で決まるなら、条件つきの測度ではその集合の測度は 0 か 1 で 初 （条件つき確率の定義）、払う稀さ ℓ がもう残っていません。

当てる問い：稀さ $\mu(B)$ を払っている段は、エントロピー（またはそれと同じ型の不等式）を通っていますか。分散と Dirichlet 形だけなら、稀さは効きません。条件づけの後に稀さが残っているかも確かめてください。

1/ħ の住所の型 — $1/\hbar$ の住所

当たった案：頂上の帯の払い・迂回策「頂上の帯だけの摂動」、表 $1'$ の線形の集団座標・区画した鎖・壁で切る多段・壁の印の鎖・平均の高さを足す鎖。

Feynman–Kac の筋で要るのは芯の対数 Sobolev 定数の $1/\hbar$ の係数でした。その $1/\hbar$ がどの量に住むかを見誤ると、案は $1/\hbar$ を別の場所へ移すだけになります。三つの事実が繰り返し出ました。

- **$1/\hbar$ は $\sum z$ でなく半径に住む。** 頂上の台地での作用は、線形の集団座標 $\sum_j z_j/\sqrt{k}$ の向きではなく、頂上の角からの半径（$\sum_j z_j^2$ の向き）に沿って変わり、その長さは交差の長さ $\ell_\times \approx 0.34/\hbar$ です 読 。集団座標と横方向に分ける二尺度は、頂上の面で集団座標に直交する向きの最小の曲率 $4 - 4\cos(2\pi/(k+1)) - \frac{1}{4}$ が $k = 17$ で負になり 初 （三重対角の固有値の閉じた式） Lean `transverse_fails_k17` （仮定なし）、$k \le 16$ でしか凸性を持ちません。
- **区画で切っても $1/\hbar$ は割り振られるだけ。** エントロピーの鎖則 $\mathrm{Ent} = \mathrm{Ent}(\text{印の周辺}) + \mathbb{E}\,\mathrm{Ent}(\text{区画の中})$ は恒等式で 初 Lean `chain_rule_cells` （仮定：鎖則・二つの項の上界）、台地を壁の位置で切ると $\approx 0.8/\hbar$ が印の側と区画の側に割り振られます 読 。和は減りません。
- **印は面をまたぐ一歩しか表さない。** 壁の印の鎖では鎖そのものの定数は小さくなりますが、印は台地の上の位置を見分けず面をまたぐ一歩だけを表すので、$1/\hbar$ は印の鎖と元の測度を比べる定数 $\ge 13/26/66$ に移りました 読 。鎖に足す変数の良し悪しは、その変数の率関数

が極値で平らかどうかで決まり（平らなら足す費用が $O(1)$）Lean `S_ext_01_iff`（代数）、平均の高さは平らでなく $\propto 1/\hbar$ を払い、半径は通りました。

頂上の帯の払い（帯の稀さと帯を通る尾が両方 $\propto 1/\hbar$ で打ち消す）と頂上の帯だけの摂動（Holley–Stroock の摂動の費用 $e^{\mathrm{osc}/\hbar}$）も、$1/\hbar$ を払う場所を移しただけの例です。

当てる問い：その案で $1/\hbar$ はどの量に掛かっていますか。区画・印・比較の定数・摂動の費用のどれかに移っただけなら、消えていません。足す変数の率関数を、極値の近くで描いてみてください。

揺れの向きのずれの型 — 揺れの向きと柔らかい向きのずれ

当たった案：表 1′ の半径と球面の角・三段・分散版の二尺度・内部の半径、Feynman–Kac の筋の紙の上界。

二尺度の合成で、ファイバーの外の勾配を sup で取り（揺れの向き）、それをファイバーの最も柔らかい向きの定数で払う（$\kappa \times A_{\mathrm{fib}}$ の型）と、二つの向きが揃っていない所で上界が桁で過大になります。分散に替えた版でも、損の下界 0.66–1.8 が要る 0.18–0.50 の外でした 読 。払うべき量は、ファイバーの上の Poisson 方程式の解の勾配（Helffer–Sjöstrand の表示の $|M^{-1}\nabla_{\perp}G|$）で、向きを保ったまま評価する必要があります。Feynman–Kac の筋で Monte Carlo の読みが閾の 0.54 倍、紙の上界が閾の 10^3 倍と開いたのも、スカラーの Grönwall が勾配の向きを捨て、全ての向きを最も柔らかい率で減らす段から来ました（23-09 Feynman–Kac の筋）。

当てる問い：上界のどこかで、ベクトルの量をスカラーに潰していませんか。潰した段があれば、そこで最も柔らかい向きの率で払っています。揺れが大きい向きと柔らかい向きを同じ図に描いてください。

移しかえの型 — 重さは別の列へ移るだけ

当たった案：関数の不等式の取り替えの修正 LSI・既知の一様な対数 Sobolev・迂回策「有限体積の判定」・迂回策「二段の塊展開」・一・二サイトの窓・迂回策「塊の芯の局所化」、表 1′ の代理の系列。

既知の一様性の定理（既知の一様な対数 Sobolev・有限体積の判定）は、定数を作るのではなく、問題を相関の長さを覆う箱（長さ $\gtrsim 230$–810）の有限体積の定数へ移します。窓は有限なので存在は元から自明で、効かない理由は大きさです。窓の取り方を替える案（一・二サイトの窓・塊の芯の局所化）は、窓の損を減らしても伝播の段の床が残りました。塊展開（二段の塊展開）では最大の道のピンが頂上に残り、修正 LSI（関数の不等式の取り替え）では $\ln(1/\pi_*)$ がエネルギーの側へ移りました。スカラーの筋の命題の代理の系列では、代理や向き

を替えて仮定の列が軽くなったとき、計算する列が同じだけ重くなっていました（二つの列の和が向きに依らない恒等式）仮 （定義は本に置かない）Lean `threshold_gap_invariant`（仮定：二つの和の恒等式）。

当てる問い：その案で軽くなった列の分だけ、別の列（箱の大きさ・伝播の段・計算する量）が重くなっていませんか。和が不変量なら、余裕は動いていません。

表 2　壊れ方の型（一行ずつ）

型	一行	当たった案	当てる問い
頂上の曲率の型	頂上の一サイトの対角 $15/4$ が結合 4 に $\frac{1}{4}$ 届かない	長い塊の欠陥・非線形の Barta の重み・Agmon の型の払い、一様な道、区画しない Lyapunov	頂上の面 $x \equiv 0$ で何を払うか
構造の因子の天井の型	集合を変えず $b \cdot \kappa$ を動かしても $A\gamma < \ell$	閾の引き上げ・欠陥の深さの層分け・欠陥の集合の絞り込み・Hölder と超縮小の段	欠陥の集合を変えるか
二度払いの型	前の段が払った場所を後の段がもう一度払う	負の曲率の局所化・Gibbs の傾きの最適化（直した側）、窓の組み立て	払う場所を同じ図に描いたか
通貨の取り違えの型	Poincaré は出口の速さ、稀さはエントロピーの通貨	塊を固定した対数 Sobolev、帯を稀さで、二重閾値、素朴な分散の分解	稀さを払う段がエントロピーを通るか
$1/\hbar$ の住所の型（$1/\hbar$ の住所）	$1/\hbar$ は半径に住み、区画・印では割り振られるだけ	頂上の帯の払い・頂上の帯だけの摂動、集団座標、区画した鎖、多段、印の鎖、平均の高さ	$1/\hbar$ はどの量に掛かっているか
揺れの向きのずれの型	sup の勾配を最も柔らかい向きで払うと桁で過大	角と半径、三段、分散版、内部の半径、Grönwall	ベクトルをスカラーに潰していないか
移しかえの型	軽くなった列の分だけ別の列が重くなる	関数の不等式の取り替え・既知の一様な対数 Sobolev・有限体積の判定・二段の塊展開・一・二サイトの窓・塊の芯の局所化、代理の系列	和が不変量になっていないか

死んだ案と保留の案のうち、表 1 で型の列が「—」なのは、律速でない段を直した迂回策「Glauber の対数 Sobolev」と、保留の古典の極限への延長です（生と条件つきの案の列は行き先の章）。死んだ案ごとに殺した一行を残しておくこの表の型は、他の問題で迂回策を洗い出した後の後始末にも、そのまま使えます。

05

生き残ったものの行き先 — 三本の筋へ

生と条件つきの案は、要る値の表と三本の筋にまとまりました。三本の筋の到達点と残る一歩は 23-09 表 4 にあり、ここでは案からの対応だけを並べます。

表 3　生き残った案の行き先

案	行き先	そこで残っていること

案	行き先	そこで残っていること
負の曲率の局所化・Gibbs の傾きの最適化（・閾の引き上げ）	要る値の表（23-09 表 2）。以後の全ての形の部品	Bochner の段の正則性・A_W を欠陥と同じ閾の印で測ること（23-09 §04）
高さの関数の払い・粗い段と伝播の段の一括（と表 1′ の成分ごとの筋の派生）	成分ごとの筋　成分ごとの形	伝播の段の C_w の上界（結合の項を持つ Lyapunov 関数）
スカラーの払い・関数の不等式の取り替えの Poincaré の形・下流の洗い直し	スカラーの筋　スカラーの形（スカラーの筋の命題）	区間演算の行・節点の間・持ち上げの仮定一つ
Hölder と超縮小の段と高さの関数の払いを合わせた形	Feynman–Kac の筋 Feynman–Kac の形	向きを保つ上界（揺れの向きのずれの型）

三本の筋がどれも止まった場所は頂上の曲率の型の源で、23-09 §06 の共通の壁と同じものです。芯の定数を区画の枠組みでなく箱の側から押さえる別の組み立ては、23-11 で扱います。

06

五分類の表 — 型ごとの主な補題

この章は一覧の章なので、行は型を支える補題と、表 1 の値に限ります。どの行も窓の対数 Sobolev の道筋の結論の前提ではなく、結論への依存は 23-09 §08 のグラフにあります。そのためこの章には依存グラフを置きません。

表 4　この章の行

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
頂上の床	一サイトの重みの Barta の行の床 $F(0,0)=w(0)=-\frac{1}{4}$	初	§04 (2)（行の形は 23-09 の仮の行（Barta の行の仮定）の上）	$\hbar$ に依らない	`floor_top`（仮定：重みの値 $\neq 0$）
Agmon の利得	負の曲率の所で Agmon の利得の係数は ≤ 0	仮	§04 頂上の曲率の型（Agmon の評価の枠組みは本に置かない）	—	`agmon_no_gain_on_negative_curvature`（代数）
天井の補題	集合を変えない案の天井 $A\gamma<\ell$	初	§04 構造の因子の天井の型の証明	$\hbar$ に依らない	`ceiling_same_set`（仮定：$0<\kappa<b$・$t-A\gamma>0$・$t-\ell\le L$・閉じる条件）
Barta の側の稀さ	Barta の側の稀さは $\kappa/(\beta_0-\kappa)$ を掛けてしか入らない	仮	§04 構造の因子の天井の型（紙は本に置かない）	—	`ceiling_split`（代数）

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
二度払いの直し	局所化した Bochner と Gibbs の傾き（二度払いの直し）	初	23-09 §03	$\hbar$ に依らない	`bochner_localized`・`tilt_cost_le`（仮定と範囲は 23-09）
条件づけの後の稀さ	条件づけの σ-代数で決まる集合の条件つき測度は 0 か 1	初	§04 通貨の取り違えの型	$\hbar$ に依らない	—
横方向の凸性	頂上の面で集団座標に直交する最小の曲率は $k = 17$ で負	初	§04 $1/\hbar$ の住所の型（閉じた式）	$\hbar$ に依らない	`transverse_fails_k17`（仮定なし）
エントロピーの鎖則	エントロピーの鎖則（区画で切っても和は減らない）	初	§04 $1/\hbar$ の住所の型（恒等式）	$\hbar$ に依らない	`chain_rule_cells`（仮定：鎖則・二項の上界）
$1/\hbar$ の住所の値	$1/\hbar$ の住所（交差の長さ $0.34/\hbar$・割り振り $\approx 0.8/\hbar$・比較の定数 $\geq 13/26/66$）	読	§04 $1/\hbar$ の住所の型	三点	—
向きのずれの損	向きのずれの損（下界 0.66–1.8 対 要る 0.18–0.50）	読	§04 揺れの向きのずれの型	三点	—
代理の系列の不変	代理の系列の二つの列の和の不変	仮	§04 移しかえの型（定義は本に置かない）	—	`threshold_gap_invariant`（仮定：二つの和の恒等式）
既知の一様性の読み	一次元の一様な対数 Sobolev の既知の定理は箱の定数を与える	仮	§04 移しかえの型（原典の言明は確かめていない）	—	—
表 1 の値	表 1・表 1′ の倍率・天井・要る値	読	§03（浮動小数の格子と転送行列、下界は族の中）	三点	—

「初」の行は、型を言い当てる一般の事実で、どの迂回策の成功も意味しません。表 4 のどの行も、閉じる条件 (1) を示していません。

```
07
```

次の章へ

芯の定数を、区画の枠組みでなく箱への帰着の条件と箱の中の隙間の条件の側から三段で押さえる組み立てと、端の集合の線引きは 23-11 です。この部は拡散型緩和時間の仮定を検討の軸に置いていて、この章はその一段目の鞍点の管の条件の芯の行に向けた案の後始末でした。頂上の負の曲率を凸性に頼らずに扱う別の視点は第 24 部（24-06）で扱います。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 頂上の床 (2)、集合を変えない案の天井、条件づけの後の稀さの消失、横方向の凸性の閾、エントロピーの鎖則 Lean （代数）	閉じる条件 (1)。したがって窓の対数 Sobolev の道筋の残る一命題と鞍点の管の条件
読 表 1 の倍率と要る値、道具の側の案が要る値を 44〜460 倍に動かし構造の側の案が 1.15 倍の天井の下で止まったこと	型が全ての案を尽くすこと。型に当てはまらない案（Glauber の対数 Sobolev・古典の極限への延長）がある
仮 Agmon の利得・Barta の側の稀さの掛かり方・代理の系列の不変・既知の一様性の定理の読み	死んだ案の命題が偽であること（死は道具の性質で、命題の真偽ではない）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
Bochner の公式の積分形	典	M. Ledoux, Sém. Probab. XXXV, LNM 1755 (2001) 167–194（命題 1.3、本文で確認）。
Holley–Stroock の摂動	典	R. Holley, D. Stroock, J. Stat. Phys. 46 (1987) 1159–1194（型は Holley–Stroock の摂動の補題（Ledoux 2001 の命題 6.1）の再述で確認）。
Rothaus の補題	典	O. S. Rothaus, J. Funct. Anal. 64 (1985) 296–313（再述で言明を確認）。
非有界スピンの一様な対数 Sobolev・有限体積の判定	仮	Th. Bodineau, B. Helffer, J. Funct. Anal. 166 (1999) 168–178；F. Martinelli, E. Olivieri, Comm. Math. Phys. 161 (1994) 447–486・487–514（書誌だけ、言明は未確認）。
一次元 Ising の Glauber 力学	仮	R. J. Glauber, J. Math. Phys. 4 (1963) 294–307（書誌だけ。値は格子の対角化の読み）。
Helffer–Sjöstrand の表示	仮	B. Helffer, J. Sjöstrand, J. Stat. Phys. 74 (1994) 349–409（書誌だけ、言明は未確認）。
型の補題	初・Lean	本文 §04。`floor_top`・`ceiling_same_set`・`ceiling_split`・`agmon_no_gain_on_negative_curvature`・`transverse_fails_k17`・`chain_rule_cells`・`S_ext_O1_iff`・`threshold_gap_invariant`。

もの	種別	出典・道具
表 1 と表 1′ の数	読	浮動小数の格子・転送行列（中点則）・試験関数の族の下界・有理数の分解。区間演算は使っていない。

この章で使った語 — 迂回策・殺した一行・要る側・形・足りない側（床）・構造と道具の選び方・天井・壊れ方の型・二度払い・通貨（出口の速さとエントロピー）・$1/\hbar$ の住所・交差の長さ・揺れの向きと柔らかい向き・移しかえ。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-11 箱への帰着と箱の中の隙間 — 芯の定数 — 箱への帰着と箱の中の隙間を命題にし、芯の定数を三段で押さえる。

箱への帰着と箱の中の隙間 — 芯の定数

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 2-05・2-07 にあります。

この章で分かること — 一段目の二重井戸の緩和時間の上界の命題の段 1（箱への帰着）・段 2（箱の中）を（23-05 §04）、それぞれ箱への帰着の命題（箱への帰着、Poincaré 不等式だけを使う）と箱の中の隙間の命題（箱の中の隙間、仮定の表つき）として述べ、23-05 で「初」とした箱の積の不等式の証明を置きます。次に、箱の中の隙間の命題の速い側に入る芯の定数を、芯の長さで三段に分けて押さえ（凸性・二つのブロック・箱の帰着を芯に当てる形）、最後に芯の端の値の集合をどこまで覆えているかと、頂上を越えた端で現れる双安定を作用の障壁の余裕で払う形を述べます。

前提となる章 — 23-05 §03・§04（箱への帰着の条件・箱の中の隙間の条件の言明と一本の筋）・23-04（経路の測度・相関長 ξ・キンク）・23-09 §06（頂上の一サイトの曲率）。

先に言うこと — 水準は〔研〕で、§01 だけ〔三〕で読めるように書きます。§02 以降は研究の水準の節で、飛ばして §07 の残る行の表に進んでも、この章の結論は読めます。この部は拡散型緩和時間の仮定を検討の軸に置いていて（23-01）、この章はその一段目の箱への帰着の条件と箱の中の隙間の条件をどこまで命題の形にできたかを述べる章です。箱への帰着の命題・箱の中の隙間の命題は仮定の行を残した命題で、箱への帰着の条件・箱の中の隙間の条件を示したものではありません。数は全て 0+1 次元の二重井戸 $V=(x^2-1)^2/8$・格子 $\varepsilon=\frac{1}{2}$ の上の値で、三つ組は $\hbar=3\cdot10^{-3}/10^{-3}/3\cdot10^{-4}$ の順です。

この章の順序

1. 要約 — 〔三〕で読める一節
2. 箱への帰着の命題 — 箱への帰着（図 1・表 1）
3. 箱の積の不等式の証明 — Markov 性と Efron–Stein
4. 箱の中の隙間の命題 — 箱の中の隙間（表 2）
5. 芯の定数の三段 — 芯の定数の三区分の命題（表 3・表 4）
6. 端の集合 — 覆えている所と、双安定の払い方

7. 残る行の一覧（表 5）
8. 五分類の表（表 6）
9. 依存グラフ

01

要約

長い経路の Poincaré 定数を、長さ $C\xi$ の箱の Poincaré 定数で押さえるのが箱への帰着の条件、その箱の中の隙間を $D/(C\xi)^2$ の桁で押さえるのが箱の中の隙間の条件です。

1. **箱への帰着の命題**。直線を重なりのある箱で覆い、偶の箱と奇の箱に分けると、$C_P \le (1+1/n)\,C_{\mathrm{box}}/(1-c_{\mathrm{alt}})$ です。使うのは二つの射影の補題・箱の積の不等式・ずらしの平均だけで、対数 Sobolev 不等式は使いません。残る仮定の行は、偶と奇の間の最大相関 $c_{\mathrm{alt}}<1$ が一様なことと、境界の値についての sup です。相関長は $\xi \propto \hbar^{1/2} e^{S_0/\hbar}$ と読まれ、箱は頂上の台地を切りません。
2. **箱の中の隙間の命題**。箱の中をキンクの配置 Y で分けると、$C_{\mathrm{box}} \le C_{\mathrm{loc}} + (1+\chi) C_{\mathrm{kg}}$。縮約したキンクの気体を一次元 Ising の Glauber 力学と同じ型と置くと、隙間は「対の生成と消滅」と「キンクの拡散」の和 $(C^2+\pi^2)D/(C\xi)^2$ になります。残る行は交差項（交差項の一様性の仮定）・気体の型（キンクの気体の隙間の仮定）・切れ端の版（切れ端の局所 Poincaré の仮定）と、芯の定数です。
3. **芯の定数の三段**。芯の長さ $k \le 7$ は凸性で ≤ 9.18（$\hbar$ と端の値に依らない）、$8 \le k \le 14$ は二つのブロックの補題で、$k \ge 15$ は箱の帰着を芯に当てる形で押さえます。端の値を $[0, x_c]$ の標本に取ると $\sup_k C_P(\text{芯}) \le 22.1/30.5/66.4$ 読 です。
4. **端の集合**。区画の枠組みの芯は端が井戸の側だけで、穴はありません。箱の側の芯は端が頂上を越えることがあり、そこでは条件づけの壁が双安定を作りますが、その障壁 $\Delta S_* \approx 10^{-2}$ は $2S_0$ に対して約 95 倍小さく、箱の中の隙間の命題の局所の項は $\hbar \to 0$ で消えます（$\hbar = 0$ の読みの上で）。

02

箱への帰着の命題

設定。$T=\infty$ の格子の直線 $\mathbb{Z}$（刻み $\varepsilon = \frac{1}{2}$）の上の作用 $S = \sum_i (x_{i+1}-x_i)^2/(2\varepsilon) + \varepsilon \sum_i V(x_i)$、$e^{-S/\hbar}$ の無限体積の測度 μ、Dirichlet 形 $\mathcal{E}(f) = (\hbar/\varepsilon)\sum_i \mathbb{E}_\mu |\partial_i f|^2$ を取ります（

μ の一意性と最近接の Markov 性は共通の前提の行（23-05 §04 の段 0）にある）。箱 B は L サイトの区間、境界の値 (a,b) は B の左右の隣のサイトの値、$\mu_B^{a,b}$ はそれを止めた条件つきの測度、$\mathcal{E}_B$ は B のサイトだけの和で、

$$C_{\mathrm{box}}(L) := \sup_{a,b\in\mathbb{R}} C_P\big(\mu_B^{a,b};\mathcal{E}_B\big)$$

と置きます。二つの σ-代数の最大相関を $c(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2) := \sup\{\mathrm{corr}_\mu(F,G) : F\in L^2(\mathcal{G}_1),\, G\in L^2(\mathcal{G}_2)\}$ とします。

二つの射影の補題。$c = c(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2) < 1$ なら、全ての $f\in L^2(\mu)$ で

$$\mathrm{Var}\, f \;\le\; \frac{1}{1-c}\Big(\mathbb{E}\,\mathrm{Var}(f\mid\mathcal{G}_1) + \mathbb{E}\,\mathrm{Var}(f\mid\mathcal{G}_2)\Big) \tag{1}$$

初 （証明は 23-05 §04 の段 1） Lean `two_proj_sum_le`（仮定：Cauchy–Schwarz と最大相関の不等式）・`two_proj_var`（仮定：$A+B\le(1+c)V$）。

箱の族。L サイトの箱 B_m を、隣どうしが l サイト重なるように並べ（$l\le L/3$）、偶の番号の箱の族を E、奇の番号の族を O とします。$\mathcal{G}_E$ は E の外のサイトの値が生成する σ-代数、$\mathcal{G}_O$ も同じで、$c_{\mathrm{alt}}(L,l) := c(\mathcal{G}_E,\mathcal{G}_O)$ です（平行移動に依らない）。

図 1　偶奇の箱とずらし（L = 8・l = 2 の例。各列の一文字が 1 サイト）

```
サイト        ....|....|....|....|....|....|....|....
偶の族 E     [ B0   ]       [ B2   ]       [ B4   ]
奇の族 O          [ B1   ]       [ B3   ]
重なり            ^^     ^^      ^^     ^^          ← l サイトずつ
ずらし s=1   箱の並び全体を l サイト右へ（重なりの位置が別のサイトへ移る）
n = ⌊(L−l)/l⌋ 通りのずらしで、重なりのサイトは互いに素
```

箱の積。偶の箱どうしは $L-2l\ge 1$ サイト離れていて、次の不等式が成り立ちます（証明は §03）。

$$\mathbb{E}\,\mathrm{Var}(f\mid\mathcal{G}_E) \;\le\; C_{\mathrm{box}}(L)\sum_{B\in E}\mathcal{E}_B(f) \tag{2}$$

箱への帰着の命題。$n := \lfloor (L-l)/l\rfloor$。$c_{\mathrm{alt}}(L,l)<1$ なら

$$C_P(\mu) \;\le\; \Big(1+\frac{1}{n}\Big)\frac{C_{\mathrm{box}}(L)}{1-c_{\mathrm{alt}}(L,l)} \tag{3}$$

初 証明。ずらし s を一つ固定し、その偶奇の族を E^s, O^s とします。(1) と、二つの族の (2) から $(1-c_{\mathrm{alt}})\operatorname{Var} f \le C_{\mathrm{box}}\big(\sum_{B\in E^s}\mathcal{E}_B + \sum_{B\in O^s}\mathcal{E}_B\big)$。箱は直線を覆い、各サイトは偶の族に高々一度・奇の族に高々一度入り、両方に入るのは重なりのサイトだけなので、括弧の中は $\mathcal{E}(f)+\mathcal{E}_{\mathrm{ov}^s}(f)$（重なりのサイトだけの和）です。ずらし $s=0,\dots,n-1$ で平均すると、重なりのサイトはずらしの間で互いに素なので $\sum_s \mathcal{E}_{\mathrm{ov}^s} \le \mathcal{E}$、よって $(1-c_{\mathrm{alt}})\operatorname{Var} f \le C_{\mathrm{box}}(1+1/n)\mathcal{E}(f)$。∎ Lean `box_two_family`（仮定：二つの射影の補題・各族の (2)・$\mathcal{E}_E+\mathcal{E}_O \le \mathcal{E}+\mathcal{E}_{\mathrm{ov}}$・$C_{\mathrm{box}}\ge 0$）・`box_shift_average`（仮定：各ずらしの二族の不等式・重なりの和が $\mathcal{E}$ 以下）。

(3) は Poincaré 不等式だけで組まれていて、対数 Sobolev 不等式を使いません。相内の局所 Poincaré の条件・鞍点の管の条件は C_{box} を通してだけ入ります（§04）。箱の中の隙間の条件の $C_{\mathrm{box}} \le K_4(C\xi)^2/D$ と $L\varepsilon = C\xi\cdot D = \hbar/S_0$ を入れると、$C_P \le (1+1/n)K_4C^2/(1-c_{\mathrm{alt}})\cdot\xi^2 S_0/\hbar$ で、一段目の上界の命題の形です Lean `H3_with_H4`・`H3_H4_compose`（仮定：(3)・箱の中の隙間の条件・$D=\hbar/S_0$・$n>0$・$c_{\mathrm{alt}}<1$）。離散のスピンの Glauber 力学の箱の力学（Martinelli の講義の命題 3.4・3.5）と同じ型で 典、ここではそれを一次元・L^2・最大相関の形に書き直しています。

残る仮定の行と、数

- **箱の交互の最大相関の仮定：$c_{\mathrm{alt}}<1$ が $\hbar$ に一様。**紙の証明はありません 仮。値は、遅い部分が符号の二状態の鎖（電信の鎖）であるという読みの上で、$\theta = l/L = \frac14$ の箱で $C=2/4/8$ に $c_{\mathrm{alt}} = 0.731/0.410/0.138$ 読（二状態の鎖の閉じた式の値を写した族の値）。この値は §05 の交互の最大相関の閉じた式の $\varphi(s,t)$ で $s=e^{-C\theta}$・$t=e^{-C(1-2\theta)}$ と置いたものと一致します（$C=2$ で $\varphi=0.7308$）。
- **境界の値の sup。**C_{box} は全ての実数の境界の値について sup を取ります。頂上に近い境界の値が最悪になることを §04 で見ます。
- **ξ の大きさ。**転送作用素の偶奇の固有値の差を対数の領域で求めると $\ln\xi = 218.08/661.04/2212.72$、$\ln\xi - S_0^{\mathrm{lat}}/\hbar - \frac12\ln\hbar \to -0.778$ 読（二つの独立な計算の経路が中くらいの $\hbar$ で六桁一致）。つまり $\xi \propto \hbar^{1/2}e^{S_0/\hbar}$ で、頂上の台地の長さ（交差の長さ $\ell_\times \approx 0.34/\hbar$、23-10 1/ħ の住所の型）との比は $\xi/\ell_\times \ge e^{213}$ Lean `xi_over_ellx`（仮定：測った $\ln\xi - \ln\ell_\times \ge 213$）。**長さ $C\xi$ の箱は台地を切らず、丸ごと含みます。**その代わり、箱の中の芯の定数は芯の長さに一様である必要があります（§05）。

表 1　箱への帰着の命題の不等式の陽性対照（閉じた式か対角化で両辺が分かる模型）

模型	何を比べたか	結果

模型	何を比べたか	結果
純ガウス（$V = x^2/2$）	右辺 $(1 + 1/n)C_{\mathrm{box}}/(1 - c_{\mathrm{alt}})$ と $C_P = 1$	右辺 1.10–1.33 ≥ 1（$L = 4$–128） 読 。$l/L \to 0$・$l \to \infty$ で 1 に近づく Lean `gauss_box_le_one`
一次元 Ising の熱浴 Glauber（環 12・16 サイト、結合 $K = 0.3, 0.6, 1.0$）	(3) の両辺	9 例の全てで成立、損は 1.17〜1.35 倍 読 （$c_{\mathrm{alt}} = 0.87$ でも） Lean `ising_K1_holds`（仮定：測った値）
陰性対照	$\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2$（$c = 1$）	帰着は何も言わない Lean `no_bound_when_c_one`・`blowup_as_c_to_one`

Glauber 力学の例では、環の隙間（帯の下端）が箱の隙間の 6 分の 1 ほどしかない場合も、その差を $1 - c_{\mathrm{alt}}$ がちょうど担っていました。キンクの気体の帯の構造は、箱の形を壊しません。

03

箱の積の不等式の証明

23-05 の (7)（この章の (2)）の証明を置きます。23-05 の五分類の表で箱の積の不等式の行を「初」としたのは、この節の証明によります。

命題（箱の積）

偶の族 E の箱どうしが $L - 2l \geq 1$ サイト離れているとき、有限個のサイトにだけ依る滑らかな関数 f について、(2) が成り立つ。

段 (a)　条件つきの独立。作用 S は隣どうしの項 $(x_{i+1} - x_i)^2/(2\varepsilon)$ と一サイトの項 $\varepsilon V(x_i)$ の和です。箱 B の外の全ての値を止めると、x_B の条件つき密度は $e^{-S/\hbar}$ のうち x_B を含む項だけで決まり、それは B の中の項と、B の両端と両隣 a_B, b_B をつなぐ二つの項です。よって条件つきの法則は $\mu_B^{a_B, b_B}$ で、B の外の値には両隣を通してしか依りません（最近接の Markov 性）。偶の箱どうしの間には $\mathcal{G}_E$ が止めたサイトが少なくとも一つあるので、$\mathcal{G}_E$ を与えたとき、偶の箱たちの条件つき密度は箱ごとの因子の積

$$\prod_{B \in E} \frac{1}{Z_B} \exp\!\left(-\frac{S_B(x_B; a_B, b_B)}{\hbar}\right)$$

に分かれ、偶の箱の値 $(x_B)_{B \in E}$ は互いに独立で、法則は積 $\bigotimes_{B \in E} \mu_B^{a_B, b_B}$ です 初 （有限の体積で密度が積に分かれることの一行。$T = \infty$ の測度でも同じ条件つき法則を持つことは共通の前提の行）。

段 (b)　積の測度の Efron–Stein の不等式。$\nu = \nu_1 \otimes \cdots \otimes \nu_m$ を $X_1 \times \cdots \times X_m$ の上の積の測度、$F \in L^2(\nu)$、$\mathrm{Var}_j F$ を j 番目の座標だけを動かした分散（他の座標は止める）とすると

$$\mathrm{Var}_\nu F \;\le\; \sum_{j=1}^{m} \mathbb{E}_\nu\big[\mathrm{Var}_j F\big] \tag{4}$$

初 証明。$F_j := \mathbb{E}[F \mid X_1, \dots, X_j]$（$F_0 = \mathbb{E}F$・$F_m = F$）、$\Delta_j := F_j - F_{j-1}$ と置きます。Δ_j は互いに直交するので $\mathrm{Var}\, F = \sum_j \mathbb{E}\Delta_j^2$ です。座標が独立なので、F_{j-1} は F_j を j 番目の座標について ν_j で積分したもので、$\mathbb{E}\Delta_j^2 = \mathbb{E}[\mathrm{Var}_j F_j]$ です。さらに F_j は F を後ろの座標 $X_{j+1}, \dots, X_m$ について平均したもので、$G \mapsto \mathrm{Var}_j G = \|G - \int G\, d\nu_j\|^2_{L^2(\nu_j)}$ は凸（半ノルムの二乗）なので、Jensen の不等式から $\mathrm{Var}_j F_j \le \int \mathrm{Var}_j F \, d\nu_{j+1} \cdots d\nu_m$。期待値を取って $\mathbb{E}\Delta_j^2 \le \mathbb{E}\,\mathrm{Var}_j F$、$j$ について足すと (4) です。∎

段 (c)　箱の Poincaré。段 (a) の条件つきの積に (4) を当てます（座標 X_j を箱 B の値 x_B とする）。箱 B の座標だけを動かした分散は、測度 $\mu_B^{a_B,b_B}$ の分散なので

$$\mathrm{Var}_B f \;\le\; C_P\big(\mu_B^{a_B,b_B}\big)\,\frac{\hbar}{\varepsilon}\sum_{i\in B}\int |\partial_i f|^2 \, d\mu_B^{a_B,b_B} \;\le\; C_{\mathrm{box}}(L)\,\frac{\hbar}{\varepsilon}\sum_{i\in B}\int |\partial_i f|^2 \, d\mu_B^{a_B,b_B}$$

です（C_{box} の定義の sup）。

段 (d)　まとめ。(4) と段 (c) から $\mathrm{Var}(f \mid \mathcal{G}_E) \le C_{\mathrm{box}} \sum_{B\in E} \mathbb{E}\big[(\hbar/\varepsilon)\sum_{i\in B}|\partial_i f|^2 \,\big|\, \mathcal{G}_E\big]$。期待値を取ると、条件つき期待値の塔の性質で右辺の各項は $\mathcal{E}_B(f)$ になり、(2) です。f が有限個のサイトにだけ依るので、関わる箱は有限個で、f の台に触れない箱の項は 0 です。∎

$\mathcal{E}$ の定義域の一般の f への延長（有限個のサイトに依る関数による近似）は、共通の前提の行に含めます。奇の族も同じです。段 (b) の (4) は Efron–Stein の不等式（Efron–Stein 1981）の形で、ここでは証明を置いたので分類は「初」です。

04

箱の中の隙間の命題

箱 B（$L\varepsilon = C\xi$）と境界の値 $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ を止め、$\mu = \mu_B^{a,b}$、$D = \hbar/S_0$ とします。箱の中のキンクの数の期待値は、キンクの密度 $1/(2\xi)$ から $C/2$ で $O(1)$ です 初 Lean `pair_fugacity`（仮定：$\xi \neq 0$）。

素朴な割り方は回る。稀な集合 E（例えば長い芯がある配位）で割ると、$p = \mu(E)$ として $\mathrm{Var}\, f = p\,\mathrm{Var}_E f + (1-p)\,\mathrm{Var}_{E^c} f + p(1-p)(m_E - m_{E^c})^2$ です 初 （恒等式）。第二項は E^c の上の定数で払えますが、第一項は f が E に集まれば $\mathrm{Var}\, f$ と同じ大きさで、p の小ささは出ません。払えるのは $p \cdot \mathrm{osc}(f)^2/4$ までで、これは隙間ではなく弱い形の Poincaré 不等式で

す Lean `naive_split_weak`（代数）。稀さは分散では払えない、という 23-10 通貨の取り違えの型 の例です。そこで割り方を、稀な集合でなく遅い変数で取ります。

遅い変数で割る。Y を箱の中のキンクの配置（キンクの数と、キンクの多様体への射影で定めた各キンクの位置）として、条件つき期待値の恒等式 初

$$\operatorname{Var} f = \mathbb{E}\operatorname{Var}(f \mid Y) + \operatorname{Var}\big(\mathbb{E}[f \mid Y]\big)$$

から始めます。

- **第一項（速い側）**。Y を止めた条件つきの測度は、最近接の Markov 性で、キンクの無い相の切れ端（長さ $\le C\xi$・両端の値つき）と、キンクの周りの管、その中の芯の積に分かれます。積の測度の Poincaré 定数は成分の定数の最大以下（(4) と各成分の Poincaré）なので、$\mathbb{E}\operatorname{Var}(f \mid Y) \le C_{\mathrm{loc}}\,\mathcal{E}(f)$、$C_{\mathrm{loc}} = \max(C_{(\mathrm{H1}^{\mathrm{seg}})}, C_{(\mathrm{H2}^{\mathrm{tube}})}, C_{(\mathrm{T0}'_{\mathrm{p}})})$ 初 （積の代数）。三つの定数は仮定の行で 仮、芯の $C_{(\mathrm{T0}'_{\mathrm{p}})}$ を §05・§06 で押さえます。
- **第二項（遅い側）**。$\mathbb{E}[f \mid Y]$ は Y だけの関数で、キンクの位置の拡散（移動度 D、キンクの拡散係数の行 典）と、キンクの対の生成・消滅で緩和します。キンクの気体の隙間の仮定：縮約したキンクの気体の箱の Poincaré 定数 $C_{\mathrm{kg}} \le (C\xi)^2/(c_{\mathrm{kg}}(1-\eta_{\mathrm{KG}})D)$ 仮。交差項の一様性の仮定：交差項 $\mathcal{E}_Y(\mathbb{E}[f \mid Y]) \le (1+\chi)\mathcal{E}(f)$ 仮 （二尺度の不等式の交差の定数の型。この形の言明は既知の定理から引いていない）。

箱の中の隙間の命題。上の行の下で、全ての (a,b) について

$$C_{\mathrm{box}} \;\le\; C_{\mathrm{loc}} + (1+\chi)\,C_{\mathrm{kg}} \;\le\; K_4\,\frac{(C\xi)^2}{D}, \qquad K_4 = \frac{1+\chi}{c_{\mathrm{kg}}(1-\eta_{\mathrm{KG}})} + C_{\mathrm{loc}}\,\frac{D}{(C\xi)^2} \tag{5}$$

初 （上の二項の和）Lean `H4_two_scale`（仮定：分解の不等式・第一項 $\le C_{\mathrm{loc}}\mathcal{E}$・キンクの気体の隙間の仮定・交差項の一様性の仮定・$C_{\mathrm{kg}} \ge 0$）・`H4_gap_form`（仮定：$D > 0$・$C\xi \ne 0$・$c_{\mathrm{kg}} > 0$・$\eta_{\mathrm{KG}} < 1$・$1+\chi \ge 0$）。(5) は 23-05 (12) と同じ式です。

一次元 Ising の Glauber 力学との対照

キンクの気体の隙間の仮定の定数 c_{kg} を決めるのは、縮約したキンクの気体を一次元 Ising の熱浴 Glauber 力学と同じ型と置く仮定です。両端のスピンを止めた L サイトの箱の隙間は、閉じた式

$$\mathrm{gap}_{\mathrm{box}} = 1 - \gamma\cos\frac{\pi}{L+1} = (1-\gamma) + \gamma\Big(1-\cos\frac{\pi}{L+1}\Big), \qquad \gamma = \tanh 2K \tag{6}$$

を持ちます 仮 （原典は書誌だけ。格子の対角化で表示の 6 桁まで一致、境界の値が $(+,+)$ でも $(+,-)$ でも同じ 読 ）Lean `glauber_split`（右の等号、仮定なし）。相関長が長い極限

で、第一項 $1-\gamma \approx 1/(2\xi^2)$ は無限体積の隙間＝**対の生成と消滅**、第二項 $\approx \pi^2/(2L^2)$ は長さ L の区間の**キンクの拡散**で、Glauber の単位 $D=\frac{1}{2}$ で書くと $D/\xi^2+\pi^2 D/L^2=(C^2+\pi^2)D/(C\xi)^2$、すなわち $c_{\mathrm{kg}}=C^2+\pi^2$ 初 （代数） Lean `kg_constant` （仮定：$C\xi\neq 0$）。対の項は小さな摂動ではなく、隙間の主な項の一つとして足し算で入ります。キンクの無い部分の局所の項は、隙間の下端には現れません。

境界の値が頂上の近くにあると、箱の端に半分のキンクが座れます。これは Ising の自由端に当たり、閉じた式がありません。格子の対角化で読むと、どの境界の型でも隙間は $1-\gamma$ を割りませんが（比 ≥ 1.17）、自由端は固定の端より遅くなります。

表 2　縮約した気体の箱の定数 $c_{\mathrm{kg}}=\mathrm{gap}\cdot(C\xi)^2/D$ と一段目の上界の命題の係数 K（$\chi=\eta_{\mathrm{KG}}=0$・$n=3$・$\theta=\frac{1}{4}$。どれも $\hbar$ に依らない模型の値で 読 ）

C	**1**	**2**	**3**	**4**	**6**
固定の端 $C^2+\pi^2$	10.87	13.87	18.87	25.87	45.87
自由端 c_{ff}（格子の値）	2.86	7.17	12.94	20.32	39.07
c_{alt}（二状態の鎖）	0.915	0.731	0.550	0.410	0.234
K（固定の端だけ）	1.44	1.43	1.41	1.40	1.37
K（頂上の境界の値を含む sup）	5.46	2.76	2.06	1.78	1.60

$K=(1+1/n)C^2/(c_{\mathrm{kg}}(1-c_{\mathrm{alt}}))$ Lean `K_fixed_C2`・`K_ff_C2`・`K_ff_C4`（仮定：測った c_{ff} と c_{alt}。算術だけ）。K_4 が C とともに減るので、固定の端だけなら K は C にほとんど依らず、頂上の境界の値を含めると C を大きく取るほど良くなります。

箱の中の隙間の条件に残る行。交差項の一様性の仮定・キンクの気体の隙間の仮定（Glauber の型と自由端）・切れ端の局所 Poincaré の仮定（23-06 の六節点の相内 Poincaré の命題は環の言明で、端の値を持つ切れ端の版は無い）・鞍点の管の Poincaré の仮定・芯の行。K_4 の第二項 $C_{\mathrm{loc}}D/(C\xi)^2$ は、D/ξ^2 が $e^{-441.6}/e^{-1328.6}/e^{-4433.1}$ の大きさなので 読 、C_{loc} が $e^{2S_0/\hbar}$ より十分小さければ消えます。この余裕を §06 で芯に使います。

05

芯の定数の三段の命題

設定。芯は、経路が頂上と井戸の間 $(0,x_c)$（$x_c=0.89$）にとどまるサイトの極大な区間です。この章では対称性で向きを替え、芯を $(0,x_c)^k$ と書きます（23-09 の $Q_k=(-x_c,0)^k$ の鏡映）。芯の測度 $\mu_k^{\alpha,\beta}$ は、両端の外の値 α,β を止めた $e^{-S/\hbar}$ を $(0,x_c)^k$ に Neumann の境界で制限したもの、Dirichlet 形は $\mathcal{E}=(\hbar/\varepsilon)\sum_i \mathbb{E}|\partial_i f|^2$ です（23-09 の $\hbar\int|\nabla g|^2$ の規約とは $C^{(23\text{-}09)}=C/\varepsilon=2C$ で換算）。箱の中の隙間の条件の速い側に要るのは、$C_P(\mu_k^{\alpha,\beta})$ が芯の長さ k と端の値に一様に押さえられることです（芯の Poincaré の一様性の仮定の行）。

短い芯の段　$k \le 7$：凸性（短い芯の凸性の補題）

芯の作用の Hessian は

$$\operatorname{Hess} S = \frac{1}{\varepsilon} T_k + \varepsilon \operatorname{diag} V''(x_i), \qquad T_k = \operatorname{tridiag}(-1, 2, -1)$$

で、端の値 α, β は S の一次の項にしか入らないので Hessian に現れません。$\lambda_{\min}(T_k) = 4\sin^2 \frac{\pi}{2(k+1)}$ 初 （三重対角の固有値の閉じた式）と $\inf V'' = V''(0) = -\frac{1}{2}$ から、$\varepsilon = \frac{1}{2}$ で

$$\operatorname{Hess} S \;\ge\; \kappa(k) := 8\sin^2 \frac{\pi}{2(k+1)} - \frac{1}{4} \tag{7}$$

です。これは 23-09 §06 で頂上の面の最小固有値として出た式と同じもので、$k \le 7$ で正、$k = 8$ で負になります（$8\sin^2(\pi/16) \approx 0.304 > \frac{1}{4}$、$8\sin^2(\pi/18) \approx 0.241 < \frac{1}{4}$） Lean `kappa7_pos` ・ `kappa8_neg` （仮定なし）。

短い芯の凸性の補題。$\kappa(k) > 0$ なら、全ての端の値 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ と全ての $\hbar > 0$ で $C_P(\mu_k^{\alpha,\beta}) \le \varepsilon/\kappa(k)$。

初 証明。(7) から $S/\hbar$ は $\kappa/\hbar$ で一様に凸です。凸な領域（箱 $(0, x_c)^k$）に Neumann で制限した一様に対数凹な測度は $\operatorname{Var} f \le (\hbar/\kappa)\int |\nabla f|^2$ を満たし 典 （凸な領域の Bakry–Émery、Kolesnikov–Milman の定理 1.2 (1) で確認）、$\mathcal{E} = (\hbar/\varepsilon)\int |\nabla f|^2$ に直すと $\le (\varepsilon/\kappa)\mathcal{E}$。∎ Lean `lemma_BV` （仮定：Hessian の下界が端の値に依らず $\ge \kappa > 0$・各点の Bakry–Émery の不等式）。

値は $\varepsilon/\kappa(k) = 0.133/0.286/0.543/0.973/1.749/3.42/9.18$（$k = 1, \dots, 7$）で、$\hbar$ にも端の値にも依りません。$k = 1, 2$ で測った sup（0.128・0.26）はこの内です 読 。**ブロックを 7 サイト以下に刻めば、端の値の sup の難しさは凸性で消えます**。代価は、刻んだブロックの継ぎ目の相関の側へ移ります。

中くらいの芯の段　$8 \le k \le 14$：二つのブロック（二つのブロックの補題）

端への縮約の補題。鎖 $x_1, \dots, x_k$ が Markov なら、$a < b$ について
$c\big(\sigma(x_1, \dots, x_a), \sigma(x_b, \dots, x_k)\big) = c\big(\sigma(x_a), \sigma(x_b)\big)$。

初 証明。右辺 $\le$ 左辺は σ-代数の包含から。逆に F を前の片の、G を後ろの片の中心化した関数とします。Markov 性から $\mathbb{E}[G \mid x_1, \dots, x_a] = \mathbb{E}[G \mid x_a] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[G \mid x_b] \,\big|\, x_a\big]$ なので、$\hat{F} = \mathbb{E}[F \mid x_a]$・$\hat{G} = \mathbb{E}[G \mid x_b]$ と置くと $\mathbb{E}[FG] = \mathbb{E}[\hat{F}\,\mathbb{E}[\hat{G} \mid x_a]] = \mathbb{E}[\hat{F}\hat{G}] \le c(\sigma(x_a), \sigma(x_b))\|\hat{F}\|\|\hat{G}\| \le c(\sigma(x_a), \sigma(x_b))\|F\|\|G\|$。∎

二つのブロックの補題。$1 \le a < b \le k$、$k - a \le 7$、$b - 1 \le 7$ とすると

$$C_P(\mu_k^{\alpha,\beta}) \;\le\; \frac{M(a,b)}{1-c(x_a,x_b)}, \qquad M(a,b)=\begin{cases}\varepsilon/\kappa(k-a)+\varepsilon/\kappa(b-1) & (b\ge a+2)\\ \max\bigl(\varepsilon/\kappa(k-a),\,\varepsilon/\kappa(b-1)\bigr) & (b=a+1)\end{cases} \tag{8}$$

初 証明。$\mathcal{G}_1=\sigma(x_1,\dots,x_a)$・$\mathcal{G}_2=\sigma(x_b,\dots,x_k)$ に二つの射影の補題を当てます。端への縮約の補題で $c(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2)=c(x_a,x_b)$。$\mathcal{G}_1$ を与えた条件つき法則は、$x_{a+1},\dots,x_k$ の長さ $k-a\le 7$ の鎖（端 x_a と β）を箱に制限したもので、短い芯の凸性の補題から $\mathrm{Var}(f\mid\mathcal{G}_1)\le(\varepsilon/\kappa(k-a))(\hbar/\varepsilon)\sum_{i>a}\mathbb{E}[|\partial_i f|^2\mid\mathcal{G}_1]$。$\mathcal{G}_2$ も同じく $\sum_{i<b}$ と $\varepsilon/\kappa(b-1)$ です。期待値を取って (1) に入れると、サイト i の係数は $[i>a]\varepsilon/\kappa(k-a)+[i<b]\varepsilon/\kappa(b-1)$ で、両方が立つのは $a<i<b$ のときだけ、それは $b\ge a+2$ のときだけです。∎ Lean `tb_far`・`tb_adjacent`（仮定：二つの射影の補題の結論・各ブロックの短い芯の凸性の補題・$\mathcal{E}_i\le\mathcal{E}$・$c<1$）。

条件 $k-a\le 7$・$b-1\le 7$・$a<b$ から $k\le 14$ で、$k=15$ では (a,b) がありません Lean `tb_range`・`tb_none_at_15`（自然数の算術）。入力は**二点**の最大相関 $c(x_a,x_b)$ 一つで、これは二サイトの同時分布を正規化した行列の第二特異値です 典（Witsenhausen・Rényi の特異値の表示、再述で確認）。格子の上の測度では、この値を転送行列の積から計算できます。

値。端を $[0,x_c]$ の標本に取ると、$8\le k\le 14$ の上界（二つのブロックの補題）の sup は $22.1/30.5/66.4$ で、10^{-3}・$3\cdot10^{-4}$ では $k=8$・両端 0 で、$3\cdot10^{-3}$ では $k=13$ で取られます（$3\cdot10^{-3}$ の $k=8$・両端 0 の値は 15.5）。多項式の試験関数による下界（Rayleigh–Ritz）は $8.39/17.3/38.5$ です 読。$k=8$ は凸性の閾のすぐ外で、$\hbar=0$ の読みでは制約つきの最小点の Hessian の最小固有値が 0.0175、$C_P\to\varepsilon/\lambda_{\min}=28.55$ へ向かいます。$\hbar\approx10^{-4}$ には峰があり（下界 57・上界 99）読、$\hbar$ について単調ではありません。

なぜ長い芯の段の形をここで使わないか。$k=8$・両端が頂上の芯では、長さ 5 の副箱の交互の最大相関が $0.879/0.938/0.971$ まで上がり、長い芯の段の係数が 76 以上になります 読 Lean `coeff_k8`（仮定：測った $\bar c\ge 0.9713$）。柔らかい向き（$\lambda_{\min}=0.0175$）が継ぎ目の相関を 1 に近づけるためで、二つのブロックの形は交互の相関を避けて二点の相関だけで払えます。

長い芯の段　$k\ge 15$：箱の帰着を芯に当てる（長い芯の箱の帰着の不等式）

芯の測度も一次元・最近接の Markov なので（積の箱への制限は Markov 性を保つ）、§02・§03 の組み立てを芯の中で字義どおりに使えます。副箱を長さ $L_c=5$・重なり $l_c=1$（$n_c=4$）に取ると、副箱（端で切られた短いものを含め全て 5 サイト以下）の定数は短い芯の凸性の補題で端の値に一様に $\le\varepsilon/\kappa(5)=1.749$ なので、全ての k と全ての端の値で

$$C_P(\mu_k^{\alpha,\beta}) \;\le\; \Bigl(1+\frac{1}{4}\Bigr)\frac{\varepsilon/\kappa(5)}{1-\bar c_{\mathrm{core}}} = \frac{2.186}{1-\bar c_{\mathrm{core}}} \tag{9}$$

です 初 （箱への帰着の命題の証明を芯に写したもの） Lean `core_uniform_L5` （仮定：箱への帰着の命題の結論・$C_{\mathrm{box}} \le 7/4$・測った $\bar{c}_{\mathrm{core}}$）。$\bar{c}_{\mathrm{core}}$ は芯の中の偶奇の副箱の間の交互の最大相関で、$k \ge 15$ で測った値は端の値（頂上を越えた負の端を含む）について ≤ 0.535、$k = 20$–30 で 7 桁まで飽和しています 読 （多項式の加法の関数と継ぎ目の二点による最大相関の**下界**の測り）。これを入れると $C_P \le 4.70$ です。

交互の最大相関の形（交互の最大相関の閉じた式）。片の内側の相関 t、継ぎ目の相関 s の定常なガウスの鎖 $\ldots, L_j, R_j, L_{j+1}, R_{j+1}, \ldots$（$\mathrm{corr}(L_j, R_j) = t$・$\mathrm{corr}(R_j, L_{j+1}) = s$・$|s|, |t| < 1$。鎖は両側に無限に続くものとします）で、偶の片と奇の片の最大相関は $\varphi(|s|, |t|)$ です。ここで

$$\varphi(s,t) = \frac{s(1+t)}{1+s^2 t}, \qquad 1 - \varphi(s,t) = \frac{(1-s)(1-st)}{1+s^2 t} \tag{10}$$

です。導き方：一様な型 $F = \sum_{j\,\text{偶}}(L_j + R_j)$・$G = \sum_{j\,\text{奇}}(L_j + R_j)$ の一周期あたりの共分散は、Markov 性で二点の相関が途中のリンクの相関の積になることから $S_{AB} = 2s(1+t)^2/(1-s^2t^2)$、分散は $S_{AA} = 2(1+t) + 2(1+t)^2 s^2 t/(1-s^2t^2)$ で、比が φ です 初 （等比級数の和） Lean `gauss_mode0`・`one_sub_phi`。この比は、ガウスの目標分布に対する二ブロックの Gibbs 標本化の収束率の枠に入ります 典 。偶の片の全体と奇の片の全体を交互に引き直す Gibbs 標本化の率は、ブロック Jacobi の行列の最大固有値の二乗で（Roberts–Sahu 1997 の二ブロックの Gibbs 標本化の率の定理（Roberts–Sahu の定理 5）と §2.4）、その最大固有値が二つの片の最大相関 φ です。片の長さが 1 の場合（$L_j = R_j$。(10) で $t = 1$ と置いた値 $2s/(1+s^2)$）は、その二乗が鎖の長さを無限にした極限の率として、Pitt–Shephard 1999 の定理 1 と Mider–Jenkins–Pollock–Roberts 2022 の系 2 にあります 典 。一般の片の長さでの (10) の値は、数値線形代数でいう line Jacobi 反復の収束半径と同じ量です（その側の書誌は照合していません）。ガウスの鎖で最大相関が線形の正準相関に等しいことは 典 （Kolmogorov–Rozanov、再述で確認）、その中で一様な型が最大であることは計算で確かめただけです 読 。$\varphi \ge s \ge st$ なので、素朴な積 $c \le s \cdot t$ は偽です Lean `naive_product_false` （仮定：$0 < s, t < 1$）。§02 の二状態の鎖の $c_{\mathrm{alt}} = 0.7308$ は $s = e^{-1/2}$・$t = e^{-1}$ の φ です。

二点の量には縮まない。芯では、二点の最大相関から作るガウスの代理 φ_G が測った値と 10^{-4} の桁で一致します 読 。それでも、一般の Markov 鎖では二点の量だけで交互の最大相関を押さえる不等式はありません。三変数の鎖 X_1–X_2–X_3：$X_2 \sim \mathrm{Bern}(p)$、$X_2 = 1$ なら $X_1 = X_3 = 1$、$X_2 = 0$ なら X_1, X_3 は独立に確率 e で 1、$p = 10^{-4}$・$e = 10^{-3}$。二値の変数の関数は一次なので二値どうしの最大相関は $|\,\mathrm{corr}\,|$ で、$\mathrm{corr}(X_1, X_2)^2 = p(1-p)(1-e)^2/(m_1(1-m_1)) \le 1/10$（$m_1 = p + (1-p)e$）。ところが $Z = X_1 X_3$ は $\mathrm{corr}(Z, X_2)^2 = p(1-p)(1-e^2)^2/(m_Z(1-m_Z)) \ge 98/100$（$m_Z = p + (1-p)e^2$） 初 （共分散の計算） Lean

`rareR_pair`・`rareR_joint`（有理数の算術）。稀な状態を両側から挟む非線形の関数が効く例で、芯の交互の最大相関の仮定の行の紙は、芯の条件つき法則が対数凹に近いことを使う比較の定理を要ります。

芯の定数の三区分の命題と三段の表

芯の定数の三区分の命題。 端の値の集合 $\mathfrak{E}$ について、$B_2(\hbar;\mathfrak{E}) := \sup_{8\le k\le 14}\sup_{(\alpha,\beta)\in\mathfrak{E}^2}\min_{(a,b)} M(a,b)/(1-c_{k,\alpha,\beta}(x_a,x_b))$、$B_3(\hbar;\mathfrak{E}) := 2.186/(1-\bar{c}_{\ge 15}(\mathfrak{E}))$ とすると、全ての $k\ge 1$ と $(\alpha,\beta)\in\mathfrak{E}^2$ で

$$C_P(\mu_k^{\alpha,\beta}) \;\le\; \max\bigl\{\varepsilon/\kappa(7),\; B_2(\hbar;\mathfrak{E}),\; B_3(\hbar;\mathfrak{E})\bigr\} \tag{11}$$

初 （k で場合を分けて三つの段を当てる）Lean `three_stage`（仮定：各段の上界）。

表 3　芯の長さと段（端は $[0,x_c]$ の標本。三つ組は $\hbar = 3\cdot 10^{-3}/10^{-3}/3\cdot 10^{-4}$）

段	k	道具	分類	上界	下界
1	≤ 7	短い芯の凸性の補題（凸性）	初 ＋典 （凸な領域の Bakry–Émery）	≤ 9.18（$\hbar$ と端に依らない）	—
2	8–14	二つのブロックの補題＋二点の最大相関	初 ＋読	$22.1/30.5/66.4$	$8.39/17.3/38.5$
3	≥ 15	長い芯の箱の帰着の不等式＋交互の最大相関	初 ＋読 ＋仮 （芯の交互の最大相関の仮定）	≤ 4.70（$\bar{c}$ は下界の測り）	—

表 3 から $\sup_k C_P(\text{芯}) \le 22.1/30.5/66.4$ 読 Lean `three_stage_3em4`（仮定：測った中くらいの芯の段・長い芯の段の値）。上界と下界の比は $2.6/1.76/1.72$ です。中くらいの芯の段の入力（二点の最大相関）は、行列の積と第二特異値なので区間演算に載る型ですが、格子の測度と連続の測度の差の紙の評価が要り、走らせる費用は 10^3 CPU 時間の桁の見積もりです（未）。長い芯の段は測っているのが下界で、上界の紙がありません。

06

端の集合 — 覆えている所と、双安定の払い方

表 3 は端の値を $[0,x_c]$ の標本に取った値でした。芯は $(0,x_c)$ に入るサイトの**極大な**区間なので、その外の隣のサイトは本来 $(-\infty,0]\cup[x_c,\infty)$ の値を取ります。どの組み立てでどの端が要るかを分けます。

区画の枠組みの芯 — 端は井戸の側だけ

区画の枠組み（23-09）の芯は、両端の値が井戸の側（この章の向きで $[x_c,\infty)$）にあるものとして定義されています。したがって頂上を越えた端はそこには入らず 初 （定義から）Lean

`p5_end_not_negative`（仮定：$x_c = 0.89$）、端の集合に穴はありません。定常な鎖では、長さ k の連の質量の $1 - e^{-0.63/\hbar}$ がこの型で、$\hbar = 0$ の読みの最小点は全てのサイトを壁 x_c に押しつけた形一つです 読 。

箱の側の芯 — 頂上を越えた端と、条件づけの壁

箱の中の隙間の命題の速い側の芯（キンクの配置で割った後の芯）では、外の隣が頂上を越えた負の値を取りえます。そこでは $k = 9, 10$ の芯に $\hbar = 0$ の局所の最小点が二つ現れ、障壁は $\Delta S \in [1.1 \cdot 10^{-4}, 2.5 \cdot 10^{-3}]$（端の値に依る）、$k = 9$・端 $(-0.035, -0.035)$ の C_P の下界は $13.9/44.6/526$ と $e^{\Delta S/\hbar}$ の型で増えます 読 。

- **二つの最小点はどちらも条件づけの壁の上**。一つは芯の区間そのままの瘤、もう一つは両端の零点が一サイトずつ内へ動いた形です。芯の区間を「ちょうどこの区間」と条件づけたので、零点が動きたい向きに壁が立ち、二つの型が競り合っています。離散のキンクの Peierls–Nabarro の障壁はこの格子では 10^{-12} 以下で、双安定の障壁 $0.5\text{–}2.0 \cdot 10^{-3}$ と桁が違います 読 Lean `pn_vs_bistab`（仮定：測った値）。**双安定は物理の準安定ではなく、条件づけの選び方が作るもの**です。
- **瘤の二値で切れば繊維は戻る**。頂上の近くのサイト x_m が閾 θ^* 以上か（瘤があるか）の二値 Y_3 で割ると、各繊維の C_P は二つのブロックの補題（区間の直積にも同じ証明で当たる）で上界 $25.8/46.2/101$、下界 $8.9/17.4/32.8$ と、表 3 の中くらいの芯の段と同じ桁に戻ります 読 。
- **$e^{\Delta S/\hbar}$ は移るだけ**。その代わり、二値 Y_3 の周辺の Poincaré 定数が $e^{\Delta S/\hbar}$ を受け持ち、$\mathrm{Var}(\mathbb{E}[f \mid Y_3]) \geq 470\,\mathcal{E}(f)$（$3 \cdot 10^{-4}$）です 読 Lean `y_side_k9_3em4`（仮定：測った値）。切っても障壁は消えず、23-10 移しかえの型 の移しかえの形になります。芯の定数を $O(1)$ のまま本来の端の集合に広げることは、この割り方ではできません。

作用の障壁の余裕で払う — 芯の作用の障壁の行

箱の中の隙間の命題で芯の定数は C_{loc} に入り、K_4 には $C_{\mathrm{loc}} \cdot D/(C\xi)^2$ の形でしか現れません（(5)）。$D/(C\xi)^2$ は $e^{-2S_0/\hbar}$ の桁なので、芯の定数は $O(1)$ でなくても、作用の障壁が $2S_0$ より小さければ足ります。これを仮定の行として置きます。

芯の作用の障壁の仮定の行。ある $c_*, p \geq 0$・$\Delta S_* < 2S_0$ があって、箱の側の芯と、それを含む窓（芯・両隣・外の m サイト、外の端は任意）の条件つき測度について $C_P \leq c_* \hbar^{-p} e^{\Delta S_*/\hbar}$（小さい $\hbar$ で） 仮 。

読み。$\hbar = 0$ の読み（停留と正定値を確かめた数値の最小点と、連絡の高さを上下から挟んだ値）で、$k = 8\text{–}14$・$m \leq 12$・外の端 $[-1.3, -0.01]$ の範囲の非大域の最小点の深さの sup は

$\Delta S^0_* \in [9.6\cdot10^{-3}, 1.4\cdot10^{-2}]$、$2S_0 = 4/3$ との比は $\le 1.05\cdot10^{-2}$、余裕は約 95 倍です 読 Lean `measured_ratio`（仮定：測った上界 $\Delta S^0 \le 0.01401$）。端を固定した値（$1.77\cdot10^{-3}$）より 5〜8 倍深く、sup は外の端を動かして二つの型を縮退させる所で取られます。$\hbar \ln C_P$ の下界は ΔS^0 へ下から近づきますが（当てはめで $0.97\Delta S^0$）、上界の前因子 $\hbar^{-p}$ は測っていません。

命題（局所の項が消える）。芯の作用の障壁の仮定と、ξ の読み $D/(C\xi)^2 \le d\,e^{-2S_0/\hbar}$ の下で、任意の $\delta > 0$ について

$$C_{\mathrm{loc}} \cdot \frac{D}{(C\xi)^2} \;\le\; c_* d\, \frac{p!}{\delta^p}\, e^{-(2S_0 - \Delta S_* - \delta)/\hbar} \tag{12}$$

初 証明。$e^x \ge x^p/p!$（$x = \delta/\hbar > 0$）から $\hbar^{-p} \le (p!/\delta^p) e^{\delta/\hbar}$。これと二つの仮定を掛けると $e^{\Delta S_*/\hbar} e^{-2S_0/\hbar} e^{\delta/\hbar}$ が出て (12) です。∎ Lean `cloc_term_poly`・`cloc_term_vanishes`（仮定：芯の作用の障壁の仮定・ξ の読み・$\Delta S_* < 2S_0$）、陰性対照 `no_vanish_if_no_gap`（$\Delta S_* \ge 2S_0$ なら評価は消えない）。

δ を $2S_0 - \Delta S_*$ より小さく取れば (12) の右辺は $\hbar \to 0$ で 0 へ行き、測った値では $2S_0 - \Delta S^0_* \ge 1.319$ の余裕があります。**箱の側の芯の双安定は、条件づけてもしなくても、一段目の上界の命題の係数 K に効きません**（芯の作用の障壁の仮定と $\hbar = 0$ の読みの上で）。負の端の芯は、区画の枠組みではキンクの位置の区画（橋）の中に現れ、定常な鎖での質量は $e^{-1.13/\hbar}$（$k = 9$）の稀さです 読 。

07 残る行の一覧

表 5　箱への帰着の条件・箱の中の隙間の条件と芯に残る行

行	何が残っているか	いまある支え	分類
共通の前提の行	$T = \infty$ の測度の一意性・最近接の Markov 性・局所関数からの延長・条件つきの測度とキンクの座標の正則性	転送作用素の核が正であること（$\mathbb{R}$ の上の版の原典は未確認）	仮
箱の交互の最大相関の仮定	箱の間の交互の最大相関 $c_{\mathrm{alt}} < 1$ が $\hbar$ と境界の値に一様（箱の混合の紙）	二状態の鎖の読み 0.731（$C = 2$）・交互の最大相関の閉じた式の形	仮
境界の値の一様性	境界の値の sup：頂上の近く（自由端の型）と遠方（急な降り）	自由端の c_{ff} の読み、遠方は隙間が消えない見込みだけ	仮
交差項の一様性の仮定	交差項 $\mathcal{E}_Y(\mathbb{E}[f \mid Y]) \le (1+\chi)\mathcal{E}(f)$、$\chi$ が一様	無し（二尺度の不等式の型）	仮
キンクの気体の隙間の仮定	縮約したキンクの気体が Glauber の型に入ること・自由端の損	Ising の閉じた式と対角化	仮

行	何が残っているか	いまある支え	分類
切れ端の局所 Poincaré の仮定	端の値を持つ切れ端の局所 Poincaré	環の版の六節点の相内 Poincaré の命題（23-06）	仮
鞍点の管の Poincaré の仮定	管の Poincaré が管の長さ $\le C\xi$ に一様	無し	仮
中くらいの芯の段の機械化	二点の最大相関を区間演算で包むこと・格子と連続の差の紙	浮動小数の転送（費用は 10^3 CPU 時間の桁の見積もり）	読
芯の交互の最大相関の仮定	長い芯の段の $\bar{c}_{\ge 15} < 1$ の上界	下界の測り ≤ 0.535。二点の量に縮まない（反例）	仮
芯の作用の障壁の仮定	箱の側の芯と窓の $C_P \le c_* \hbar^{-p} e^{\Delta S_*/\hbar}$、特に前因子 $\hbar^{-p}$ と $k \ge 15$・$m > 12$ の窓	$\hbar = 0$ の読み $\Delta S_*^0 \le 1.4 \cdot 10^{-2}$・下界の $\hbar \ln C_P$	仮

箱への帰着の条件・箱の中の隙間の条件の段の組み立てそのもの（(1)〜(5)・(7)〜(12)）は初等の証明を置いた代数で、仮定として残るのは表 5 の行です。四条件の全ての行が同時に揃う $\hbar$ はまだありません（23-05 §08）。

08

五分類の表 — 箱への帰着・箱の中の隙間と芯の行

表 6　この章の行（$\hbar$ の範囲の「—」は、どの $\hbar$ でも示されていない仮定の行。行の欄の番号は §09 の依存グラフの番号で、「—」はグラフに無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
[01]	共通の前提の行（一意性・Markov 性・延長・正則性）	仮	§03・23-05 §04 の段 0	—	—
[16]	二つの射影の補題 (1)	初	23-05 §04 の段 1 の証明	$\hbar$ に依らない	`two_proj_var`（仮定：$A + B \le (1+c)V$）
[17]	積の測度の Efron–Stein (4)	初	§03 段 (b) の証明	$\hbar$ に依らない	—
[18]	箱の積 (2) $\Longleftarrow$ [01]・[17]	初	§03 段 (a)〜(d)	$\hbar$ に依らない	—
[19]	箱への帰着の命題 (3)	初	§02 の証明	$\hbar$ に依らない	`box_two_family`・`box_shift_average`（仮定：二族の不等式・$C_{\mathrm{box}} \ge 0$・重なりの和 $\le \mathcal{E}$）
[02]	箱の交互の最大相関の仮定	仮	§02	—	—
[12]	$c_{\mathrm{alt}} = 0.731/0.410/0.138$（$C = 2/4/8$）	読	§02（二状態の鎖の値を写した族の値）	$\hbar$ に依らない模型	—

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
[11]	$\ln \xi = 218.08/661.04/2212.72$、$\xi/\ell_{\times} \geq e^{213}$	読	§02	三点	`xi_over_ellx`（仮定：測った差）
—	陽性対照（ガウス・Ising）	読	表 1	—	`gauss_box_le_one`・`ising_K1_holds`（仮定：測った値）
[20]	分散の分解と速い側の積	初	§04	$\hbar$ に依らない	—
[03]・[04]	切れ端の局所 Poincaré の仮定・鞍点の管の Poincaré の仮定	仮	§04	—	—
[05]・[06]	キンクの気体の隙間の仮定・交差項の一様性の仮定	仮	§04	—	—
[09]	キンク一本の移動度 $D = \hbar/S_0$	典	23-04 §03・23-05 の箱の中の段	$\hbar \to 0$	—
—	固定の端の Glauber の箱の隙間 (6)	仮	§04（原典は書誌だけ、格子の対角化で 6 桁の読み）	—	`glauber_split`（等式）
[21]	$c_{\mathrm{kg}} = C^2 + \pi^2$	初	§04（(6) の極限の代数）	$\hbar$ に依らない	`kg_constant`（仮定：$C\xi \neq 0$）
—	自由端の c_{ff} と K の値（表 2）	読	§04	$\hbar$ に依らない模型	`K_ff_C2`・`K_ff_C4`（仮定：測った値）
[31]	箱の中の隙間の命題 (5)	初	§04	$\hbar$ に依らない	`H4_two_scale`・`H4_gap_form`（仮定は §04）
[10]	凸な領域の Bakry–Émery	典	Kolesnikov–Milman 定理 1.2 (1)	$\hbar$ に依らない	—
[22]	短い芯の凸性の補題（$k \leq 7$ で $C_P \leq \varepsilon/\kappa(k)$）	初	§05 (7) と証明	$\hbar$ に依らない	`lemma_BV`・`kappa7_pos`・`kappa8_neg`
[23]	端への縮約の補題	初	§05 の証明	$\hbar$ に依らない	—
[24]	二つのブロックの補題 (8)・$k \leq 14$ だけ	初	§05 の証明	$\hbar$ に依らない	`tb_far`・`tb_adjacent`・`tb_range`・`tb_none_at_15`
—	最大相関の特異値の表示	典	Witsenhausen 1975・Rényi 1959（再述で確認）	—	—

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
[13]	中くらいの芯の段の二点の最大相関と B_2（$22.1/30.5/66.4$）	読	§05 表 3	三点	—
[27]	長い芯の箱の帰着の不等式 (9)	初	§05（箱への帰着の命題の写し）	$\hbar$ に依らない	`core_uniform_L5`（仮定：測った $\bar{c}$）
[07]	芯の交互の最大相関の仮定：$\bar{c}_{\geq 15} < 1$ の上界	仮	§05	—	—
[14]	$\bar{c}_{\geq 15} \leq 0.535$（下界の測り）	読	§05	三点	—
[25]	交互の最大相関の閉じた式の比 (10)	典（枠）＋初（閉じた式）	§05（等比級数）・Roberts–Sahu 1997 の二ブロックの Gibbs 標本化の率の定理	$\hbar$ に依らない	`gauss_mode0`・`one_sub_phi`・`naive_product_false`
—	ガウスで最大相関＝線形の正準相関	典	Kolmogorov–Rozanov（再述で確認）	—	—
[26]	二点の量では交互の最大相関を押さえられない（三変数の例）	初	§05	—	`rareR_pair`・`rareR_joint`（有理数の算術）
[28]	芯の定数の三区分の命題 (11)	初	§05	$\hbar$ に依らない	`three_stage`（仮定：各段の上界）
[29]	区画の枠組みの芯の端は井戸の側だけ	初	§06（定義から）	$\hbar$ に依らない	`p5_end_not_negative`
[15]	箱の側の芯の双安定・瘤の二値の繊維・Y_3 の周辺	読	§06	三点	`pn_vs_bistab`・`y_side_k9_3em4`（仮定：測った値）
[08]	芯の作用の障壁の仮定	仮	§06	—	—
—	$\Delta S_*^0 \leq 1.4 \cdot 10^{-2}$、$2S_0$ との比 $\leq 1.05 \cdot 10^{-2}$	読	§06（$\hbar = 0$ の読み）	$\hbar = 0$	`measured_ratio`（仮定：測った上界）
[30]	局所の項が消える (12)	初	§06 の証明	$\hbar \to 0$	`cloc_term_poly`・`cloc_term_vanishes`（仮定：[08]・[11]・$\Delta S_* < 2S_0$）

表 6 の「初」の行は、仮定の行の上の代数か、本文に証明を置いた一般の不等式です。箱への帰着の条件・箱の中の隙間の条件が示されたこと、芯の定数が無条件に押さえられたことは意味しません。

```
09
```

依存グラフ

書式は 23-05 §07 と同じで、「⟸」**の右の番号は左の番号より必ず小さく**置きます。

[01] 仮　共通の前提の行：T=∞ の一意性・Markov 性・延長・正則性

[02] 仮　箱の交互の最大相関の仮定：箱の間の c_alt < 1　　ħ

[03] 仮　切れ端の局所 Poincaré の仮定

[04] 仮　鞍点の管の Poincaré の仮定：管の Poincaré

[05] 仮　キンクの気体の隙間の仮定：縮約したキンクの気体の箱の隙間　　ħ：

[06] 仮　交差項の一様性の仮定：交差項 $\mathcal{E}_Y \le (1+\chi)\mathcal{E}$

[07] 仮　芯の交互の最大相関の仮定：$\bar{c} < 1$

[08] 仮　芯の作用の障壁の仮定：芯と窓の C_P ≤ c ħ^(−p) e^(ΔS/ħ)

[09] 典　キンクの拡散係数の行：移動度 D = ħ/S_0

[10] 典　凸な領域の Bakry–Émery

[11] 読　相関長の伸び方の行：ξ ∝ ħ^½ e^(S_0/ħ)・D/(Cξ)² ≤ d e^(−2S_0/ħ)

[12] 読　c_alt の値

[13] 読　中くらいの芯の段の二点の最大相関

[14] 読　$\bar{c}$ ≤ 0.535（下界の測り）

[15] 読　双安定・瘤の二値の繊維

[16] 初　二つの射影の補題 (1)
　　Lean two_proj_var

[17] 初　積の Efron–Stein (4)

[18] 初　箱の積 (2) ⟸ [01][17]

[19] 初　箱への帰着の命題 (3) ⟸ [02][16][18]
　　Lean box_two_family・box_shift_average

[20] 初　分散の分解 ⟸ [01]

[21] 初　c_kg = C²+π²
　　Lean kg_constant

[22] 初　短い芯の凸性の補題 (7) ⟸ [10]
　　Lean lemma_BV（仮定：Hessian の下界・凸な領域の Bakry–Émery）

[23] 初　端への縮約の補題 ⟸ [01]

[24] 初　二つのブロックの補題 (8) ⟸ [16][22][23]
　　Lean tb_far・tb_adjacent・tb_range

[25] 初　交互の最大相関の閉じた式の比 (10)

[26] 初　二点の量に縮まない例

[27] 初　長い芯の箱の帰着の不等式 (9) ⟸ [01][16][17][22]

[28] 初　芯の定数の三区分の命題 (11) ⟸ [07][13][14][22][24][27]
　　Lean three_stage（仮定：各段の上界）

[29] 初　区画の枠組みの芯の端は井戸の側

```
[30] 初  局所の項が消える (12) ⟸ [08][11]
         Lean cloc_term_poly・cloc_term_vanishes
[31] 初  箱の中の隙間の命題 (5) ⟸ [03][04][05][06][09][17][20][21]
         Lean H4_two_scale・H4_gap_form
[32] 初  K_4 が ħ に依らない ⟸ [28][30][31]
[33] 初  合成 C_P ≤ Kξ²S₀/ħ ⟸ [19][32]
         Lean H3_H4_compose
```

確かめ方。⟸ を持つ行は [18]（[01][17]）・[19]（[02][16][18]）・[20]（[01]）・[22]（[10]）・[23]（[01]）・[24]（[16][22][23]）・[27]（[01][16][17][22]）・[28]（[07][13][14][22][24][27]）・[30]（[08][11]）・[31]（[03]〜[06][09][17][20][21]）・[32]（[28][30][31]）・[33]（[19][32]）で、どれも右の番号が左より小さく、円はありません。

読むこと。結論 [33] は、仮定の行 [01]〜[08] の全てに依ります（[07][08] は芯の定数 [28]・局所の項 [30] を通して）。[12][15][25][26][29] はどの結論の前提でもなく、値の読み・双安定の正体・交互の相関の形・端の線引きを説明する行です。[28] の $\hbar$ の範囲が「三点」なのは、中くらいの芯の段・長い芯の段の値が三つの $\hbar$ の読みだからで、(11) の形そのものは $\hbar$ に依りません。

仮定の行の言明が結論の量を含まないことも確かめます。結論の量は $T = \infty$ の測度全体の $C_P(\mu)$ です。[02][07] は相関の量、[03][04][08] は切れ端・管・芯と窓の定数、[05] は縮約した気体の定数、[06] は形の比較、[01] は測度の性質で、どれも $C_P(\mu)$ を含みません。

23-05 のグラフとの対応。統合のグラフ（23-12）では、23-05 の葉 [02]（切れ端の局所 Poincaré の仮定）・[03]（鞍点の管の Poincaré の仮定）・[05]（キンクの気体の隙間の仮定）・[06]（交差項の一様性の仮定）・[07]（箱の交互の最大相関の仮定）がこの章の [03][04][05][06][02] と同じ節点で、23-05 の [04]（芯の Poincaré の一様性の仮定）はこの章の [28]（芯の定数の三区分の命題）と [30]（局所の項）に置き換わり、葉が [07][08] に移ります。23-05 の [11]（偶の箱の積の分散）・[14]（箱への帰着の命題）・[15]（箱の中の隙間の命題）・[16]（一段目の上界の命題）は、この章の [18]・[19]・[31]・[33] です。

10

次の章へ

23-05〜23-11 の依存グラフを一つに繋ぎ、全ての行を五分類の一表にして、全ての行が揃う $\hbar$ がまだ無いことを帯の図で見るのが 23-12 です。この部は拡散型緩和時間の仮定を検討の軸に置いていて、この章はその一段目の箱への帰着の条件・箱の中の隙間の条件を命題の形にした

段でした。箱の帰着の形を四次元格子や別の量へ持ち出す視点は第 24 部（24-03）で扱います。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 箱の積 (2) とその証明、箱への帰着の命題 (3)、箱の中の隙間の命題 (5)、短い芯の凸性の補題・端への縮約の補題・二つのブロックの補題、長い芯の箱の帰着の不等式、交互の最大相関の閉じた式の比、二点の量に縮まない例、芯の定数の三区分の命題の組み立て、局所の項が消える (12) Lean （代数）	箱への帰着の条件・箱の中の隙間の条件。箱の交互の最大相関の仮定・交差項の一様性の仮定・キンクの気体の隙間の仮定・切れ端の局所 Poincaré の仮定・鞍点の管の Poincaré の仮定・芯の交互の最大相関の仮定・芯の作用の障壁の仮定の行
読 ξ の大きさ、c_{alt}・c_{ff}・K の値、芯の定数 $22.1/30.5/66.4$、双安定の障壁と余裕 95 倍	芯の定数の上界の機械化・$\hbar \to 0$ での一様性・芯の作用の障壁の仮定の前因子
典 凸な領域の Bakry–Émery・最大相関の特異値の表示・ガウスの最大相関・箱の力学の型	四条件の全ての行が揃う $\hbar$

出典と再現

もの	種別	出典・道具
凸な領域の Bakry–Émery	典	D. Bakry, M. Émery, Sém. Probab. XIX, LNM 1123 (1985) 177–206；A. V. Kolesnikov, E. Milman, J. Geom. Anal. 27 (2017) 1680–1702（定理 1.2 (1)、本文で確認）。
箱の力学（離散のスピン）	典	F. Martinelli, "Lectures on Glauber dynamics for discrete spin models", LNM 1717 (1999) 93–191（命題 3.4・3.5、予稿の本文で確認）。
最大相関の特異値の表示	典	H. S. Witsenhausen, SIAM J. Appl. Math. 28 (1975) 100–113；A. Rényi, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 10 (1959) 441–451（再述で言明を確認）。
ガウスで最大相関＝線形の正準相関・定常な鎖の最大相関	典	A. N. Kolmogorov, Yu. A. Rozanov, Theory Probab. Appl. 5 (1960) 204–208；R. C. Bradley, Probab. Surveys 2 (2005) 107–144（再述で確認）。
二ブロックの Gibbs 標本化の率（交互の最大相関の閉じた式の枠と、片の長さ 1 の場合）	典	G. O. Roberts, S. K. Sahu, J. R. Stat. Soc. B 59 (1997) 291–317, doi:10.1111/1467-9868.00070（二ブロックの Gibbs 標本化の率の定理（定理 5）・系 3・§2.4、本文で確認）；M. K. Pitt, N. Shephard, J. Time Series Anal. 20 (1999) 63–85（定理 1。1996 年の作業論文版の本文で確認、出版版は未照合）；M. Mider, P. A. Jenkins, M. Pollock, G. O. Roberts, arXiv:2009.10440v2 (2022)（定理 2・系 2、本文で確認）。line Jacobi の側の書誌は未照合。
Efron–Stein の不等式	初	B. Efron, C. Stein, Ann. Statist. 9 (1981)（書誌。証明は §03 に置いた）。
一次元 Ising の Glauber 力学	仮	R. J. Glauber, J. Math. Phys. 4 (1963) 294–307（書誌だけ。値は格子の対角化の読み）。

もの	種別	出典・道具
Eyring–Kramers の型（障壁と $\hbar \ln C_P$）	典	G. Menz, A. Schlichting, Ann. Probab. 42 (2014)（境界の無い場合の言明を本文で確認。壁の上の最小点の版は未取得で、芯の作用の障壁の仮定は仮定の行）。
組み立ての代数	初・Lean	本文の証明。`two_proj_var`・`box_two_family`・`box_shift_average`・`H4_two_scale`・`H4_gap_form`・`H3_H4_compose`・`lemma_BV`・`tb_far`・`tb_adjacent`・`three_stage`・`gauss_mode0`・`cloc_term_poly`。
数	読	転送作用素の浮動小数（対数の領域の冪乗法と密な固有値の二つの経路）・Ising の格子の対角化・多項式の Rayleigh–Ritz・$\hbar = 0$ の数値の最小点と連絡の高さ。区間演算は使っていない。

この章で使った語 — 箱の力学（箱への帰着）・偶奇の箱・ずらしの平均・最大相関・交互の最大相関・二つの射影の補題・Efron–Stein の不等式・縮約したキンクの気体・自由端・交差項・芯・凸性の閾・二つのブロックの補題・端への縮約・芯の定数の三区分の命題・条件づけの壁・瘤の二値・作用の障壁。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-12 統合表と依存グラフ — 四条件の全ての行を五分類の一表にし、段の依存グラフで円が無いことを確かめる。

統合表と依存グラフ

この章は本書の検討です。§01・§08 は案内、§06・§07 は未解決の地図です。

この章で分かること — 一段目の二重井戸の四条件について、23-05・23-06・23-07・23-09・23-11 の五分類の表の全ての行を一枚の表にし、五つの依存グラフを番号を振り直して一つに繋ぎます。番号の規則（前提の番号は結論の番号より小さい）で円が無いことを読者が確かめられる形にし、計算機援用の行が結論への道のどこにあるか、全ての行が同時に揃う ħ がまだ無いことを図で見ます。

前提となる章 — 23-05 §07（依存グラフの書式）・23-06 §05・23-07 §05・23-09 §07・23-11 §08（各条件の表）・23-00 §01（五分類の札）。

先に言うこと — 水準は〔三〕です。統合表は「どこまで示し、どこから仮定か」の地図で、進み具合を測る物差しではありません。この部は拡散型緩和時間の仮定を検討の軸に置いた部で、この章はその一段目の組み立ての全体を一枚に並べます。

この章の順序

1. 統合表の作り方 — 五つの表を一枚にする規則・同じ行の合わせ方・列の意味
2. 統合表 — 一段目の全ての行（表 1）と、分類ごとの行の数（表 2）
3. 依存グラフ — 幹（図 1）と全体・円が無いことの確かめ方・仮定の行が結論の量を含まないこと
4. 橋の族 — 一次元と多次元の片側の橋
5. 計算機援用の行の位置 — 結論への道の上にあるもの・無いもの
6. 全ての行が揃う ħ は無い — 範囲の帯（図 2・表 4）と、揃えるために要るもの
7. 冪の文に届くのに要る行 — 芯の行の二つの支え方（表 5）
8. 読み方の注 — 地図であって分数ではない

01

統合表の作り方 — 五つの表を一枚にする

一段目の主張は、二重井戸の緩和時間の上界の命題（23-05 §04）：二重井戸の四条件と前提の行の上で $C_P \le K\xi^2 S_0/\hbar$、したがって二重井戸の冪の言明 $\ln C_P/\ln\xi \to 2$ です。四つの条件はそれぞれの章で、五分類（初・典・機・読・仮）の行の表と、番号つきの節点の依存グラフに書かれています。この章では、それらを次の規則で一枚にします。

1. **行で数える**。条件の名（相内の局所 Poincaré の条件が「閉じた」かどうか）ではなく、表の行の一つ一つを単位にします。一つの条件の中に、証明を置いた行と仮定の行が混ざっているのが普通だからです。
2. **同じ行は一つにする**。二つの章に同じ言明が現れるときは一つの行にし、出所の欄に両方の章の節点を書きます。例えば 23-05 の [14] と 23-11 の [19] はどちらも箱への帰着の命題、23-07 の窓の対数 Sobolev の閾の行と 23-09 の [06] はどちらも残る一命題（窓の対数 Sobolev の閾の命題）です。23-05 の芯の Poincaré の一様性の仮定（[04]）は、23-11 では芯の定数の三区分の命題と局所の項の組で、23-07・23-09 では区画の側の芯の下界で支えられるので、二つの支え方の「または」を持つ一つの節点にしました。
3. **入れない行**。迂回策の一覧（23-10）の行は入れません。どれも、いまの組み立てのどの結論の前提でもないからです。23-04 の行のうち、測度の一意性は共通の前提の行に含め、ゆらぎの作用素の残りのスペクトル（Pöschl–Teller の型）は説明の行として一行だけ入れました。
4. **橋の族を並べる**。一次元の片側の橋の命題（23-04 §04）と片側の橋（23-01 §06）は、同じ「経路の測度の緩和の時間は相関長の二乗以上」という橋の一次元版と多次元版なので、隣り合う節点の族として入れました（§04）。23-01 の表 8 の他の行（緩和時間の上界の仮定・緩和時間の下界の仮定と質量の読み替え、鎖、時間を刻む版、無限体積の段）は、一段目の結論への道に入らないので、23-01 のグラフに残します。

表 1 の列は次のとおりです。**番号**は §03 の依存グラフの節点の番号、**分類**は五分類の札、**$\hbar$ の範囲**はその行が何について言うか（節点・窓・三点・$\hbar$ に依らない・$\hbar \to 0$・どの $\hbar$ でも示されていない「—」）、**条件**はどの条件の行か、**どの結論の前提か**は、その行を直接の前提にとる節点の番号と、含意の辺をたどって最後の結論（二重井戸の冪の言明）に着くかどうか、**出所**は各章の表とグラフの節点です。機械検査（Lean の定理名と仮定）は §03 のグラフの各行の下に置きました。

02

統合表 — 一段目の全ての行

表 1 は、分類ごとに五つの塊に分けて並べています（塊の中はグラフの番号の順）。番号が若いほど葉（仮定・既知・計算機援用・読み）、大きいほど組み立ての段で、最後の [111] が二重井戸の冪の言明です。

表 1　統合表（一段目の全ての行。番号は §03 の依存グラフの節点の番号で、表の並びはグラフと同じ。「二重井戸の冪の言明まで」は、その行から含意の辺をたどって結論 [111] に着くか）

番号	内容（一行）	分類	ħ の範囲	条件	どの結論の前提か	出所（章の節点）
仮 **仮定の行（証明を持たずに置く）（30 行）**						
[001]	T=∞ の測度の一意性・Markov 性・局所関数からの延長・極限の段・正則性	仮	—	共通	[071][073][077][081][106]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [01]・23-11 [01]・23-04 §01
[002]	鞍点の管の Poincaré の仮定：管の Poincaré が管の長さ ≤ Cξ に一様	仮	—	鞍点の管の条件	[075]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [03]・23-11 [04]
[003]	キンクの気体の隙間の仮定：縮約したキンクの気体の箱の隙間が Glauber の型	仮	—	箱の中の隙間の条件	[075]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [05]・23-11 [05]
[004]	固定の端の Glauber の箱の隙間の閉じた式（原典は書誌だけ）	仮	—	箱の中の隙間の条件	どの節点の前提でもない。キンクの気体の隙間の仮定の中身の一部（グラフでは独立の節点にしない読み）	23-11 表 6（固定の端の Glauber の行）
[005]	交差項の一様性の仮定：交差項 Ɛ_Y(E[f|Y]) ≤ (1+χ)Ɛ(f)、χ が一様	仮	—	箱の中の隙間の条件	[075]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [06]・23-11 [06]
[006]	箱の交互の最大相関の仮定：箱の間の交互の最大相関 c_alt < 1 が一様	仮	—	箱への帰着の条件	[072]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [07]・23-11 [02]
[007]	芯の交互の最大相関の仮定：芯の交互の最大相関 c̄ < 1 の上界（k ≥ 15）	仮	—	鞍点の管の条件	[082]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-11 [07]
[008]	芯の作用の障壁の仮定：芯と窓の C_P ≤ c ħ^(−p) e^(ΔS/ħ)	仮	—	鞍点の管の条件	[084]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-11 [08]
[009]	Holley の比較の連続版（尾の補題）	仮	六節点	相内の局所 Poincaré の条件	[061]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [05]

番号	内容（一行）	分類	ħ の範囲	条件	どの結論の前提か	出所（章の節点）
[010]	Poincaré–Miranda の定理（箱の被覆）	仮	(0,0.2]	相内の局所 Poincaré の条件	[063]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [08]
[011]	分散の分解の行：使う関数の正則性・稠密性	仮	—	相内の局所 Poincaré の条件	[060]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [10]
[012]	余白の行（端が大きい側）：隣と端の値 > 2.5	仮	—	相内の局所 Poincaré の条件	[068]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 表 2
[013]	余白の行（節点の間）：節点の間の ħ（一様な形で）	仮	節点の外	相内の局所 Poincaré の条件	[068]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 表 2
[014]	余白の行（小さい ħ）：ħ < 0.005（一様な形で）	仮	—	相内の局所 Poincaré の条件	[068]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 表 2
[015]	二つのサイトの隙間の行（端が大きい側）：二つのサイトの端の値 > 4	仮	—	相内の局所 Poincaré の条件	[068]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 表 2
[016]	環から切れ端（端の値つき）への写し	仮	—	相内の局所 Poincaré の条件	[068]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 表 2
[017]	区間演算の前提（IEEE の正しい丸め・和の誤差・自前の exp）	仮	—	鞍点の管の条件	[042][043]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-07 [01]・23-08 §03
[018]	継ぎ目の極限の仮定・端の値が分布で与えられる仮定・環の継ぎ目の正則性	仮	—	鞍点の管の条件	[043][099][103]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-07 [02]
[019]	区画の入力の道筋の小さな仮定（区画の入力）	仮	—	鞍点の管の条件	[099]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-07 [04]
[020]	窓の対数 Sobolev の積の上界（積の形の A_W の上界の組み立て）	仮	—	鞍点の管の条件	[102]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-07 [05]
[021]	窓の周辺の対数 Sobolev の入力（サイトの窓の周辺の LSI の形）	仮	—	鞍点の管の条件	[087]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-09 [01]

番号	内容（一行）	分類	ħ の範囲	条件	どの結論の前提か	出所（章の節点）
[022]	橋の体積の局所性の入力（橋の上の体積の局所性）	仮	—	鞍点の管の条件	[089]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-09 [02]
[023]	Barta の行 κ = 3/1000・b = 493/1000	仮	ħ に依らない	鞍点の管の条件	[092]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-09 [03]
[024]	Bochner の境界の項と固有関数の正則性	仮	—	鞍点の管の条件	[090][092]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-09 [04]
[025]	スカラーの筋の命題の仮の行（持ち上げの仮定・スペクトルの正則性ほか）	仮	—	鞍点の管の条件	[096]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-09 [05]
[026]	窓の対数 Sobolev の閾の命題：A_W < A_max(ħ)。窓の対数 Sobolev の道筋の残る一命題	仮	—	鞍点の管の条件	[099]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-09 [06]・23-07 [03]
[027]	ゆらぎの作用素の次の固有値 3/4（Pöschl–Teller の型）	仮	ħ に依らない	説明	どの節点の前提でもない。一段目の結論の前提に入らない説明の行	23-04 表 3
[028]	基底状態の仮定：スペクトルの離散・基底状態の単純さと正値（有限の空間格子）	仮	—	橋	[107][108]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-01 [06]
[029]	計量の比べの仮定の κ が β に一様（多次元版の目盛り）	仮	—	橋	[109]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-01 [08]
[096]	スカラーの筋の命題（窓の下の端・仮定の表つき）	仮	8 節点	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない。残る一命題（窓の対数 Sobolev の閾の命題）を支える候補で、含意の辺は無い	23-09 [21]
典 **原典を引く行（10 行）**						
[030]	キンク一本の移動度 D = ħ/S_0（過程の水準）	典	ħ→0	箱の中の隙間の条件	[075][105]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [08]・23-11 [09]
[031]	凸な領域の Bakry–Émery（Kolesnikov–Milman）	典	ħ に依らない	鞍点の管の条件	[076]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-11 [10]
[032]	Muckenhoupt の挟み B ≤ C_P ≤ 4B	典	ħ に依らない	相内の局所 Poincaré の条件	[061]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [03]

番号	内容（一行）	分類	ħ の範囲	条件	どの結論の前提か	出所（章の節点）
[033]	MTP_2 の相関不等式（e の単調性・$\hbar\kappa \geq 0$）	典	ħ に依らない	相内の局所 Poincaré の条件	[061]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [04]
[034]	Helffer の判定の Poincaré 版（Ledoux の命題 3.1）	典	ħ に依らない	相内の局所 Poincaré の条件	[062]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [06]
[035]	Brascamp–Lieb（交差 κ_f・交差の行）	典	ħ に依らない	相内の局所 Poincaré の条件	[063][064]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [09]
[036]	Bochner の公式の積分形（Ledoux の命題 1.3）	典	ħ に依らない	鞍点の管の条件	[090][092]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-09 [07]
[037]	最大相関の特異値の表示（Witsenhausen）	典	—	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない。中くらいの芯の段の読みの値の求め方に使う表示	23-11 表 6
[038]	ガウスで最大相関＝線形の正準相関（Kolmogorov–Rozanov）	典	—	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない。交互の最大相関の閉じた式の読み方に使う	23-11 表 6
[039]	定常な経路の測度の仮定：定常な経路の測度の相関の式	典	T=∞	橋	[108]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-01 [07]
機 **計算機援用の行（4 行）**						
[040]	余白の行：余白 $\hbar\rho - 2\hbar\kappa \geq 0.067$（隣と端 $[0,2.5]^2$）	機	六節点	相内の局所 Poincaré の条件	[061]。二重井戸の冪の言明まで：届く（[068] で [012]〜[016] の仮と合わさる道だけ）	23-06 [01]
[041]	二つのサイトの隙間の行：$\lambda_c \geq 1.3\times10^{-4}$（端 $[0,4]^2$）	機	(0,0.2]	相内の局所 Poincaré の条件	[063][064]。二重井戸の冪の言明まで：届く（[068] で [012]〜[016] の仮と合わさる道だけ）	23-06 [07]
[042]	$q_{\mathrm{free}} \leq 0.998854904$（窓の外の鎖）	機	窓	鞍点の管の条件	[100]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-07 [09]
[043]	$q_{\mathrm{out}} \leq 0.998888530$（環の外の鎖・ピン ≤ 0）	機	窓	鞍点の管の条件	[101]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-07 [10]
読 **読みの行（19 行）**						

番号	内容（一行）	分類	ħ の範囲	条件	どの結論の前提か	出所（章の節点）
[044]	$\ln \xi \geq s/\hbar$（$\xi \propto \hbar^{1/2} e^{(S_0/\hbar)}$）・$D/(C\xi)^2$ の大きさ	読	三点・主項	結論	[084][111]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [09]・23-11 [11]
[045]	$c_{alt} = 0.731 / 0.410 / 0.138$（C = 2／4／8）	読	模型	箱への帰着の条件	どの節点の前提でもない	23-11 [12]
[046]	中くらいの芯の段の二点の最大相関と B_2（22.1／30.5／66.4）	読	三点	鞍点の管の条件	[082]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-11 [13]
[047]	$\bar{c}_{(\geq 15)} \leq 0.535$（下界の測り）	読	三点	鞍点の管の条件	[082]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-11 [14]
[048]	箱の側の芯の双安定・瘤の二値の繊維	読	三点	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない	23-11 [15]
[049]	箱への帰着の命題の陽性対照（純ガウス・Ising）	読	—	箱への帰着の条件	どの節点の前提でもない	23-11 表 6
[050]	$K \approx 2.76 / 1.43$（C = 2）・1.78（C = 4）と自由端の c_{ff}	読	模型	箱の中の隙間の条件	どの節点の前提でもない	23-05 表 2・23-11 表 6
[051]	$\Delta S^{\circ}_{*} \leq 1.4 \cdot 10^{-2}$（$2S_0$ との比 $\leq 1.05 \cdot 10^{-2}$）	読	$\hbar = 0$	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない	23-11 表 6
[052]	窓の定数の数値の道筋の定数 π_*・Λ・C_{1D}・gap_W・橋の内の鎖	読	三点	鞍点の管の条件	[102]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-07 [06]
[053]	環の内の鎖 $q_{in} \approx 1.24〜1.28$	読	四点	鞍点の管の条件	[101]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-07 [07]
[054]	境の段 $q \approx 1.004〜1.045$	読	四点	鞍点の管の条件	[101]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-07 [08]
[055]	$\ell_{min} = 38.3 / 121.9 / 406.8$	読	三点	鞍点の管の条件	[089][094]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-09 [08]
[056]	A_W の上界 1857／2794／9106・下界 1.71／1.74／2.59	読	三点	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない	23-09 [09]
[057]	Feynman–Kac の筋の到達点（読み 0.54 倍・紙の上界 10^3 倍）	読	二点	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない	23-09 [23]
[067]	$C \leq 658$（数値の入力）	読	六節点	相内の局所 Poincaré の条件	どの節点の前提でもない	23-06 表 2
[089]	体積の局所性：ℓ_{min} は k に依らない	読	三点	鞍点の管の条件	[092]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-09 [14]

番号	内容（一行）	分類	ħ の範囲	条件	どの結論の前提か	出所（章の節点）
[094]	要る値 25.1／90.3／312.3	読	三点	鞍点の管の条件	[097]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-09 [19]
[097]	成分ごとの筋の到達点（要る値の 1.4〜5.5 倍）	読	三点	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない	23-09 [22]
[102]	積の形の A_W ≈ $2.5\cdot10^{6}$〜$4.7\cdot10^{7}$	読	三点	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない	23-07 [14]
初 証明を置いた行（初等の証明・名指した前提の上の代数）（48 行）						
[058]	傾けの二次 Taylor の補題（傾けの二次の Taylor と Hölder の剰余）	初	ħ に依らない	相内の局所 Poincaré の条件	[061]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [02]
[059]	最近接の鎖の行：残したサイトの周辺は最近接の鎖	初	ħ に依らない	相内の局所 Poincaré の条件	[062]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [11]
[060]	分散の分解の行：分散の分解	初	ħ に依らない	相内の局所 Poincaré の条件	[065]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [12]
[061]	余白 λ の連続体の文	初	六節点	相内の局所 Poincaré の条件	[062]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [13]
[062]	粗い側の隙間 ≥ λ（環の Gershgorin）	初	六節点	相内の局所 Poincaré の条件	[065]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [14]
[063]	入れ子 λ_S ≥ 2.3×10^{-5}	初	(0,0.2]	相内の局所 Poincaré の条件	[065]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [15]
[064]	交差の行：v/ħ ≤ 5888	初	(0,0.2]	相内の局所 Poincaré の条件	[065]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [16]
[065]	率の代数 C_P ≤ ε/t	初	六節点	相内の局所 Poincaré の条件	[066][067]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [17]
[066]	六節点の相内 Poincaré の命題：C ≤ 1.6×10^{10}（環の版）	初	六節点	相内の局所 Poincaré の条件	[068]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [18]

番号	内容（一行）	分類	ħ の範囲	条件	どの結論の前提か	出所（章の節点）
[068]	相内の局所 Poincaré の条件・切れ端の局所 Poincaré の仮定：[012]〜[016] の行が一様な形で成り立つときの合わせ	初	(0,0.2]	相内の局所 Poincaré の条件	[075]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [02]・23-11 [03]・23-06 §07
[069]	二つの射影の補題	初	ħ に依らない	箱への帰着の条件	[072][078][081]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [10]・23-11 [16]
[070]	積の測度の Efron–Stein（鞅の差と Jensen）	初	ħ に依らない	箱への帰着の条件	[071][075][081]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-11 [17]
[071]	箱の積の不等式（偶の箱の条件つき独立）	初	ħ に依らない	箱への帰着の条件	[072]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [11]・23-11 [18]
[072]	箱への帰着の命題：C_P ≤ (1+1/n)C_box/(1−c_alt)	初	ħ に依らない	箱への帰着の条件	[105]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [14]・23-11 [19]
[073]	分散の分解と速い側の積への分解	初	ħ に依らない	箱の中の隙間の条件	[075]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [12]・23-11 [20]
[074]	c_kg = $C^2+\pi^2$（閉じた式の極限の代数）	初	ħ に依らない	箱の中の隙間の条件	[075]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [13]・23-11 [21]
[075]	箱の中の隙間の命題：C_box ≤ C_loc + (1+χ)C_kg	初	ħ に依らない	箱の中の隙間の条件	[104]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [15]・23-11 [31]
[076]	短い芯の凸性の補題（k ≤ 7 で凸性）	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	[078][081][082]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-11 [22]
[077]	端への縮約の補題	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	[078]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-11 [23]
[078]	二つのブロックの補題（8 ≤ k ≤ 14 の二つのブロック）	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	[082]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-11 [24]
[079]	交互の最大相関の閉じた式の比（等比級数）	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない	23-11 [25]
[080]	二点の量では交互の最大相関を押さえられない例	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない	23-11 [26]
[081]	長い芯の箱の帰着の不等式（k ≥ 15）	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	[082]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-11 [27]
[082]	芯の定数の三区分の命題	初	三点	鞍点の管の条件	[103]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-11 [28]
[083]	区画の枠組みの芯の端は井戸の側だけ	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない	23-11 [29]

番号	内容（一行）	分類	ħ の範囲	条件	どの結論の前提か	出所（章の節点）
[084]	局所の項が ħ→0 で消える	初	ħ→0	鞍点の管の条件	[103]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-11 [30]
[085]	区画の和	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	[087]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-09 [10]
[086]	Gibbs の分解：Gibbs の変分不等式	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	[087]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-09 [11]
[087]	成分ごとの局所化	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	[092]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-09 [12]
[088]	スカラーの形は k に一様でない	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない	23-09 [13]
[090]	局所化した Bochner	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	[094]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-09 [15]
[091]	Gibbs の傾きの最適化	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	[094]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-09 [16]
[092]	区画の合成と閉じる条件	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	[093][099]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-09 [17]・23-07 [11]
[093]	要る値 A_max の式	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	[094]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-09 [18]
[095]	閾が食い違うと ℓ = 0	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない	23-09 [20]
[098]	頂上の一サイトで対角優位が ¼ 破れる	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない	23-09 [24]・23-07 表 4
[099]	芯の隙間の k に一様な正の下界（区画の側）	初	—	鞍点の管の条件	[103]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-09 [25]・23-07 [15]
[100]	橋の S_W ≤ 1779.6	初	窓	鞍点の管の条件	[102]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-07 [12]
[101]	環の S_W ≤ 122745	初	窓	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない	23-07 [13]

番号	内容（一行）	分類	ħ の範囲	条件	どの結論の前提か	出所（章の節点）
[103]	芯の Poincaré の一様性の仮定：芯の Poincaré が芯の長さと端の値に一様	初	—	鞍点の管の条件	[104]。二重井戸の冪の言明まで：届く。区画の側の芯（両端が井戸の中）では、粗い鎖の Dobrushin の判定で ħ ∈ (0,1] の全てで支えられる：論文の証明（粗い鎖の Dobrushin の定理（論文の定理 CC））＋機（ħ ∈ [10⁻⁵,1]、239 区間、区間演算、ρ_col ≤ 0.400）＋紙の証明と機（小さい ħ の粗い鎖の命題（論文の命題 PIN）：ħ ≤ 10⁻⁵、ρ_col ≤ 0.874）＋典（Bobkov–Ledoux 2000 の Helffer の判定の Poincaré 版（Ledoux の命題 3.1））・粗い鎖の Brascamp–Lieb の命題（論文の命題 BLc）の上の条件つき。読の行は無い。箱の側の芯は含まない（論文「粗い鎖の Poincaré」）	23-05 [04]・23-07 [16]・23-11 [28][30]
[104]	K_4 が ħ に依らない	初	ħ→0	箱の中の隙間の条件	[105]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-11 [32]
[105]	一段目の上界の命題：$C_P \le K\xi^2 S_0/\hbar$	初	ħ→0	結論	[110]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [16]・23-11 [33]
[106]	橋の族・一次元版：一次元の片側の橋の命題（$R \ge 1$）	初	全ての ħ	橋	[110]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [17]・23-04 §04
[107]	基底状態変換の恒等式	初	有限の空間格子	橋	[108]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-01 [11]
[108]	橋の族・多次元版：片側の橋（$C_P \ge \kappa\xi^2$）	初	連続の時間・T=∞	橋	[109]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-01 [12]
[109]	多次元版の冪の下の半分	初	$\xi > 1$	橋	どの節点の前提でもない	23-01 [17]
[110]	$1 \le R \le K'/\hbar$	初	ħ→0	結論	[111]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [18]

番号	内容（一行）	分類	$\hbar$ の範囲	条件	どの結論の前提か	出所（章の節点）
[111]	二重井戸の冪の言明：$\ln C_P / \ln \xi \to 2$	初	$\hbar \to 0$	結論	最終の結論	23-05 [19]

行を分類で数えると表 2 です。

表 2　表 1 の行の数（分類ごと。条件の欄の内訳は、条件の名でなく行で数えたもの）

分類	行	主な中身
仮	30	共通の前提の行・鞍点の管の Poincaré の仮定・キンクの気体の隙間の仮定・交差項の一様性の仮定・箱の交互の最大相関の仮定・芯の交互の最大相関の仮定・芯の作用の障壁の仮定・相内の局所 Poincaré の条件を節点の外へ延ばす [012]〜[016]・区間演算の前提・区画の入力・残る一命題（窓の対数 Sobolev の閾の命題）・スカラーの筋の命題（仮定の表つき）ほか
典	10	キンクの移動度・凸な領域の Bakry–Émery・Muckenhoupt・MTP_2・Helffer の判定・Brascamp–Lieb・Bochner・最大相関の表示二つ・定常な相関の式
機	4	相内の局所 Poincaré の条件の余白（六節点）・二つのサイトの隙間・窓の外の鎖・環の外の鎖
読	19	相関長の伸び方・最大相関と芯の段の値・窓の定数の数値の道筋の定数・内の鎖・稀さの指数・要る値・縮約した模型の係数 K ほか
初	48	六節点の相内 Poincaré の命題の組み立て・二つの射影の補題・箱の積・箱への帰着の命題・箱の中の隙間の命題・芯の定数の三区分の命題・区画の五段・一段目の上界の命題・一次元の片側の橋の命題・二重井戸の冪の言明への代数ほか
計	111	条件の内訳：相内の局所 Poincaré の条件 25・鞍点の管の条件 57・箱への帰着の条件 7・箱の中の隙間の条件 9・共通 1・橋の族 7・結論 4・説明 1

表 2 で鞍点の管の条件の行が多いのは、鞍点の管の条件の芯の行を二つの側（箱の側の三段と、区画の側の五段）から組んでいるからで、鞍点の管の条件が他より進んでいることを意味しません。逆に箱への帰着の条件の行が少ないのは、箱への帰着の命題の組み立てが短く、残る仮定の行が箱の交互の最大相関の仮定一つに集まっているからです。行の数は、どこに証明があり、どこに仮定が残っているかを数えたもので、四つの条件のうち幾つが済んだかを測るものではありません（§ 08）。

03 依存グラフ — 五つのグラフを一つに繋ぐ

表 1 の 111 行を、23-05 § 07 と同じ書式の節点の一覧にします。**「⟸」の右の前提の番号は、左の結論の番号より必ず小さく**置きます。一つだけ、二つの支え方のどちらかがあれば足りる節点 [103]（芯の Poincaré の一様性の仮定）があり、そこでは「(…) または (…)」と書きます。どちらの括弧の番号も [103] より小さいので、規則は同じように働きます。

全体は長いので、先に幹だけを抜き出した図 1 を置きます。幹の番号は全体のグラフと同じです。

図 1　統合のグラフの幹（全体の 111 節点のうち、結論 [111] への主な道の節点だけ。番号は全体と同じ）

```
[001] 仮　共通の前提の行（一意性・Markov 性・延長・極限・正則性）
[002][003][005] 仮 鞍点の管の Poincaré の仮定・キンクの気体の隙間の仮定・交差
[006] 仮 箱の交互の最大相関の仮定　　[007][008] 仮 芯の交互の最大相関
[012]〜[016] 仮 相内の局所 Poincaré の条件を節点の外・端の外・切れ端へ延ばす行
[026] 仮 窓の対数 Sobolev の閾の命題（残る一命題）
[040][041] 機 相内の局所 Poincaré の条件の余白・二つのサイトの隙間（六節点・(0
[044] 読 ln ξ ≥ s/ħ
[066] 初 六節点の相内 Poincaré の命題（環の版・六節点） ⟸ [065]（その下に [
[068] 初 相内の局所 Poincaré の条件・切れ端の局所 Poincaré の仮定 ⟸ [066][
[072] 初 箱への帰着の命題 ⟸ [006][069][071]
[075] 初 箱の中の隙間の命題 ⟸ [068][002][003][005][030][070][073][074]
[082] 初 芯の定数の三区分の命題（箱の側の芯） ⟸ [007][046][047] …
[084] 初 局所の項が消える ⟸ [008][044]
[099] 初 芯の下界（区画の側） ⟸ [026][092][019][018]
[103] 初 芯の Poincaré の一様性の仮定 ⟸ （[082][084]）または（[099][018]）
[104] 初 K₄ が ħ に依らない ⟸ [103][075]
[105] 初 一段目の上界の命題 ⟸ [030][072][104]
[106] 初 橋の族・一次元の片側の橋の命題（一次元版）⟸ [001]　[108] 片側の橋
[110] 初 1 ≤ R ≤ K'/ħ ⟸ [105][106]
[111] 初 二重井戸の冪の言明 ⟸ [044][110]

（脇道）[042][043] 機 窓の外の鎖・環の外の鎖 → [100][101] S_W → [102] 読 積
```

▶ 全体のグラフ（111 節点）を開く

確かめ方。読者が自分で確かめる手順は三つです。(1) 全体のグラフの「⟸」を持つ行を一つずつ見て、右に並ぶ番号が全て左の番号より小さいことを確かめます。[103] では二つの括弧の両方を見ます。(2) この規則が全ての行で守られていれば、前提をたどるたびに番号が真に下がるので、いずれ葉（「⟸」を持たない行）に着き、元の行に戻ることはありません。これが「円が無い」ことの全てです。(3) 規則を守れない辺が一本でも見つかったら、それが依存の円の候補で、どの段がどの段の結論を前提にしているかを本文で名指す必要があります。この章のグラフでは、そのような辺はありませんでした（111 節点の全ての辺を、番号の比較で確かめた）。

仮定の行が結論の量を含まないこと。番号の規則は、仮定の行の*中身*に結論が紛れ込んでいる形（結論を前提に置く形）は防ぎません。そこで仮定の行の言明を一つずつ読みます。結論の量は、$T=\infty$ の測度全体の Poincaré 定数 $C_P(\mu)$、比 $R=C_P/\xi^2$、冪 $\ln C_P/\ln\xi$ の三つです。30 の仮定の行は、(i) 測度の性質（[001]・[011]・[018]・[024]）、(ii) 部分の測度の定数（切れ端・管・芯・サイトの窓：[002]・[008]・[012]〜[016]・[021]・[022]・[026]）、(iii) 相関の量（[006]・[007]）、(iv) 縮約した模型と形の比較（[003]・[004]・[005]）、(v) 計算と引用の前提（[009]・[010]・[017]・[019]・[020]・[023]・[025]・[096]）、(vi) 多次元版と説明の行（[027]・[028]・[029]）に分かれ、どれも $C_P(\mu)$・R・冪を含みません。(ii) の行が含む Poincaré 定数は、切れ端・管・芯・窓という*部分*の測度のもので、全体の測度の定数ではありません。この確かめは目で行うもので、機械検査は代わりになりません（23-13 §05）。

04 橋の族 — 一次元と多次元の片側の橋

[106] 一次元の片側の橋の命題と [108] 片側の橋は、同じ形の文の一次元版と多次元版です。どちらも「経路の測度で、時刻に局所な試験関数の Rayleigh 商の天井は相関長の二乗」で、そこから緩和の時間の下界 $C_P\ge\xi^2$（一次元の片側の橋の命題）・$C_P\ge\kappa\xi^2$（片側の橋）が出ます。

表 3　橋の族の二つの版

版	言明	前提	この部での役目
一次元版 [106]	一次元の片側の橋の命題：0+1 次元の二重井戸で $R=C_P/\xi^2\ge 1$	[001]（連続の時間・$T\to\infty$。証明は 23-04 §04）	(14) の左の不等号。二重井戸の冪の言明の下の半分を条件なしで与える
多次元版 [108]	片側の橋：有限の空間格子で $C_P\ge\kappa\xi^2$	[028] スペクトルの仮定・[039] 相関の式・[107] 基底状態変換（23-01 §06）	[109] 多次元版の冪の下の半分（[029] の目盛りの一様性つき）。一段目の結論 [111] への道には入らない

二つを並べると、拡散型緩和時間の仮定の中身が「上の半分」だけであることが同じ形で読めます。下の半分は橋が自動に与え（一次元版は前提 [001] だけ、多次元版は [028][039] と目盛りの一様性 [029]）、二重井戸の四条件が受け持つのは上の半分 $C_P\le K\xi^2 S_0/\hbar$ です。多次元版が四次元の Wilson 測度に当てはまるには、時間の刻み・無限体積・目盛りの行が残ります（23-01 のグラフの [08][09][10]）。

05 計算機援用の行の位置 — 結論への道の上にあるもの・無いもの

表 1 の「機」の四行について、結論 [111] への道を見ます。

- **[040] 余白・[041] 二つのサイトの隙間（相内の局所 Poincaré の条件）**。[061] 余白の連続体の文 → [062]・[063]・[064] → [065] 率の代数 → [066] 六節点の相内 Poincaré の命題 → [068] 相内の局所 Poincaré の条件 → [075] 箱の中の隙間の命題 → … → [111] と道があります。ただし [068] で [012]〜[016]の仮定の行と合わさる道だけで、[068] を通らずに結論へ着く道はありません。六つの節点の計算機援用は、節点の外・端の外・切れ端へ延ばす仮定の行と組んだときにだけ結論の前提になります。
- **[042] 窓の外の鎖・[043] 環の外の鎖（鞍点の管の条件、窓の外の鎖の道筋と環の継ぎ目の道筋）**。[042] → [100] 橋の S_W → [102] 積の形の A_W（読）で止まり、[043] → [101] 環の S_W で止まります。**どちらも結論への道の上にありません**。積の形の A_W の値は、残る一命題 [026] が求める要る値の外にあるからです（23-09 §03）。

この二行は、窓 $\hbar \in [3 \cdot 10^{-4}, 3 \cdot 10^{-3}]$ の全体で鎖の縮みを不等式にしたもので、それ自体が窓の中の計算機援用の結果として立っています（23-08）。ただ、いまの組み立てでは結論の前提に使われていません。道の上に入るのは、積でない形の A_W の上界が [026] を満たし、その上界の中に鎖の比 q が入るときです（23-07 §06）。逆向きに言えば、計算機援用の行の数は、結論にどれだけ近いかを表しません。

06

全ての行が揃う $\hbar$ は無い

行ごとの $\hbar$ の範囲を一本の数直線に重ねます（図 2）。範囲が「—」の仮定の行（[002]・[003]・[005]・[006] など、30 の仮定の行の大半）は、どの $\hbar$ でも示されていない行なので図には描かず、範囲を持つ行だけを描きます。

図 2　$\hbar$ の範囲の帯（横軸は $\log_{10} \hbar$、10^{-4} から 1）。実線と丸は計算機援用、破線は仮定、四角は読み、小さな点は仮定の表つきの命題の節点の値

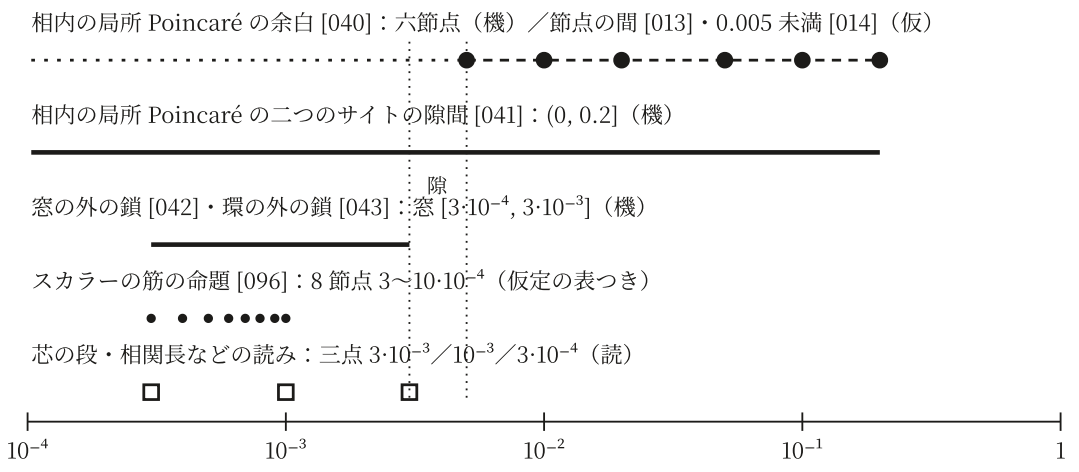

図 2 から読むことは三つです。(a) 相内の局所 Poincaré の条件の余白の計算機援用は $\hbar \geq 0.005$ の六つの節点にあり、いちばん小さい節点 0.005 は窓の上の端 $3 \cdot 10^{-3}$ より大きい（図の縦の点線の間の「隙」）。(b) スカラーの筋の命題は窓の下の端 $[3 \cdot 10^{-4}, 10^{-3}]$ の 8 節点の点の値で、10^{-3} を少し越えると二つの条件が同じ窓で両立しなくなります（$1.35 \cdot 10^{-3}$ で両立しない読み、23-09 §05）。(c) 相内の局所 Poincaré の条件の六節点とスカラーの筋の命題の 8 節点は交わらず、窓の中に相内の局所 Poincaré の条件の節点はありません。そのうえ、範囲が「—」の仮定の行（鞍点の管の Poincaré の仮定・キンクの気体の隙間の仮定・交差項の一様性の仮定・箱の交互の最大相関の仮定など）は、どの $\hbar$ でも仮定のままです。したがって**四つの条件の全ての行が同時に揃う $\hbar$ は、まだ一つもありません。**

表 4　$\hbar$ の範囲の三つの種類（混ぜないこと。23-04 §07 の三点と合わせて四種類）

種類	範囲	どの行	分類
相内の局所 Poincaré の条件の節点	$\{0.2, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01, 0.005\}$	[040]・[061]〜[066]	機・初（節点の間と 0.005 より下は [013][014] の 仮）
計算機援用の窓	$[3 \cdot 10^{-4}, 3 \cdot 10^{-3}]$（25 の部分区間）	[042]・[043]・[100]・[101]	機・初
スカラーの筋の命題の範囲	$[3 \cdot 10^{-4}, 10^{-3}]$ の 8 節点（節点の間の包みは無い）	[096]	仮（仮定の表つきの命題）
読みの三点	$\hbar = 3 \cdot 10^{-3} / 10^{-3} / 3 \cdot 10^{-4}$	[044]・[046]・[047]・[052]〜[056] ほか	読

揃えるために要るもの。同じ $\hbar$ の範囲で揃えるには、次のどちらかが要ります。

1. **相内の局所 Poincaré の条件を $\hbar \leq 10^{-3}$ へ延ばす。**行 [014]（$\hbar < 0.005$）を示すことです。部分区間ごとの計算機援用の型は、比を一定にすると部分区間の数が $\ln(0.005/\hbar)/\ln r$ で $\hbar \to 0$ に無限に増えるので使えず、$\hbar \to 0$ で一様な紙の議論が要ります（23-06 §07 の小さい ħ の残件）。
2. **スカラーの筋の命題を $\hbar \geq 0.005$ へ延ばす。**ħ の範囲の道筋（窓の外）に当たり、この部の対象の外と決めた道です（23-07 §02）。スカラーの筋の命題の形そのものも $1.35 \cdot 10^{-3}$ で止まります。

どちらが済んでも、固定した範囲で揃うだけです。二重井戸の冪の言明は $\hbar \to 0$ の言明なので、最終的には全ての行を $\hbar \to 0$ で一様な形で言う必要があり、窓の計算機援用だけでは届きません。窓の外は紙の漸近が要ります。範囲が「—」の仮定の行は、範囲を揃える前に、まず一つの $\hbar$ で示す段から残っています。

> 07

冪の文に届くのに要る行 — 芯の行の二つの支え方

グラフを結論 [111] から前提の向きにたどると、結論に要る葉が全て拾えます。分かれ道は [103]（芯の Poincaré の一様性の仮定）の「または」の一か所だけなので、要る葉の組は二通りです（表 5）。仮定の行を「仮に成り立つ」と置いたとき結論に届く組を数える考え方を、一段目のグラフに当てたものです（四次元格子の側の壁の一覧は 23-02 §06）。

表 5　結論 [111] に要る葉（[103] の支え方ごと。どちらの組も、記載の全ての行が要る）

葉の分類	支え方 A：箱の側の芯（[082] と [084]）	支え方 B：区画の側の芯（[099]）
仮	15 行：[001]・[002]・[003]・[005]・[006]・[007]・[008]・[009]・[010]・[011]・[012]〜[016]	20 行：[001]・[002]・[003]・[005]・[006]・[009]・[010]・[011]・[012]〜[016]・[018]・[019]・[021]・[022]・[023]・[024]・[026]
典	[030]・[031]・[032]・[033]・[034]・[035]	[030]・[032]・[033]・[034]・[035]・[036]
機	[040]・[041]	[040]・[041]
読	[044]・[046]・[047]	[044]・[055]（と、それに依る [089]）

表 5 から読むこと。(1) 二つの支え方に共通の仮定の行は、共通の前提 [001]、箱の中の行 [002][003][005]、箱の間の [006]、相内の局所 Poincaré の条件を延ばす [009]〜[016] です。これらはどちらの道を取っても残ります。(2) 支え方 A は芯の交互の最大相関 [007] と作用の障壁 [008] を仮定に置き、中くらいの芯の段・長い芯の段の読み [046][047] を上界に置き換える必要があります。支え方 B は残る一命題 [026] と区画の入力 [019]・[021]・[022]・[024]・Barta の行 [023] を仮定に置きます。(3) どちらの組にも「読」の行が残ります。結論が無条件になるには、全ての「仮」の行が証明に、全ての「読」の行が上界（初・典・機のどれか）に置き換わる必要があります。

08

読み方の注 — 地図であって分数ではない

統合表は、一段目の主張のどこに証明があり、どこに仮定が残っているかを示す地図です。「111 行のうち 48 行が初」のような割合は、進み具合を表しません。理由は二つです。一つは、行の重さが揃っていないこと（[001] の一行には測度の一意性から正則性までが入り、[074] の一行は二項の和の代数です）。もう一つは、「初」の行の多くが仮定の行を入力にとる代数で、仮定の行が一つ残る限り結論は条件つきのままだということです（23-05 の表 2 の後の注と同じ）。

地図として読むときは、次の順が役に立ちます。(a) 結論 [111] から図 1 の幹をたどり、(b) 表 5 で要る葉の組を見て、(c) その中の「仮」の行を表 1 の出所の欄から各章の本文へ追う。残件と費用は 23-15 で、この表の行ごとに並べます。

この部は緩和時間の仮定を検討の軸に置き、一段目の上の半分を四つの条件に割って組みました。全体を一枚にしたこの地図も、その割り方の中の地図です。別の視点は第 24 部で扱います。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
一段目の五つの章の行を一枚にした統合表（111 行、仮 30・典 10・機 4・読 19・初 48）と、番号の規則を全ての辺で守る依存グラフ（円が無い）	仮定の行 30 のどれも。したがって一段目の上界の命題の結論と一段目の二重井戸の冪の言明
仮定の行の言明が結論の量 $C_P(\mu)$・R・冪を含まないこと（言明を読んだ確かめ）	仮定の行が互いに両立すること、どれかが偽でないこと
計算機援用の四行の位置：相内の局所 Poincaré の条件の二行は [012]〜[016] と合わさる道でだけ結論の前提になり、鞍点の管の条件の二行は結論への道の上に無い	計算機援用の結果を窓の外や $\hbar \to 0$ へ持ち出すこと
全ての行が同時に揃う $\hbar$ が無いこと（範囲の比較）と、揃えるために要る二つのもの	揃える二つのどちらか。$\hbar \to 0$ で一様な形の行
結論に要る葉の組が二通りであること（表 5）	二つの支え方のどちらが易しいか

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1 の各行の言明・分類・範囲	本書	23-05 表 2・23-06 表 2・23-07 表 4・23-09 表 5・23-11 表 6・23-04 表 3・23-01 表 8。引いた定理の原典は各章の出典表
依存グラフの辺	本書	各章の依存グラフの「$\Longleftarrow$」をそのまま写し、同じ行を合わせた（§01 の規則）。[103] の「または」は 23-05・23-07・23-11 の対応の注から
番号の規則の確かめ・行の数え・要る葉の組	文字の処理	表の行と辺を書き写したデータから、全ての辺で番号の大小を比べ、分類ごとに行を数え、結論から前提の向きに葉を集める小さな台本（数学の計算ではない）
Lean の定理名と仮定	Lean	グラフの各行の下。言明の一覧と検査の限界は 23-13

この章で使った語 — 統合表・依存グラフ・節点・葉・幹・番号の規則・依存の円・結論を前提に置く形・橋の族・支え方・要る葉の組・$\hbar$ の範囲の帯（節点・窓・スカラーの筋の命題の範囲・読みの三点）。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-13 Lean の言明と機械検査の限界 — 機械検査が保証する「書いてある命題から結論が出ること」と、保証しないもの（仮定の正しさ・対象の符号化・結論を定義に置く閉じ方・依存の円）を、束の一覧と例で見る。

Lean の言明と機械検査の限界

この章は案内です。§01・§02・§05 は既存の知見です。

この章で分かること — 機械検査（Lean）が保証するのは「書いてある命題（仮定の並び）から結論が出ること」だけで、仮定が正しいことも、Lean の中の実数が物理の量を表していることも保証しない、という約束を、一段目の束の一覧で確かめます。`#print axioms` が標準の三つの公理に収まっていても見抜けない二つの型（結論を定義に置く・依存の円）を、出典を伏せた例で見て、読者が自分で言明を点検する手順を置きます。

前提となる章 — A-04 Lean と機械検査（札「Lean」の意味）・23-12 §03（依存グラフと番号の規則）・23-08 §08（区間演算の出力を仮定に置いた組み立て）。Lean そのものの読み方は Lean の案内。

先に言うこと — 水準は〔二〕〜〔三〕です。§01〜§02 と §06 は〔二〕で読めます。この部は拡散型緩和時間の仮定を検討の軸に置いた部で、Lean はその組み立ての代数の段を確かめる道具として使っています。この章は質量ギャップも連続極限も示しません。

この章の順序

1. 機械検査が保証すること — 仮定の並びから結論への矢印（例：二重井戸の緩和時間の上界の命題の合成）
2. 三つの公理と `#print axioms` — 清さの基準・`native_decide` を使わない理由
3. 一段目の束 — 束ごとの定理の数・何の代数か・仮定の置き方（表 1）・四次元格子の側（表 2）
4. 仮定は定理名の隣に — 読み方の規律と、区間演算の層が Lean の外にあること
5. 四つの限界 — 仮定の正しさ・対象の符号化・結論を定義に置く・依存の円（表 3）
6. 読者が自分で点検する手順 — 六つの問い
7. 規約の翻訳 — 同じ文字・同じ名前が別の量を指す所（表 4）
8. 束の分け方 — 記事・論文・主題ごと

01

機械検査が保証すること — 仮定の並びから結論への矢印

Lean は、数学の言明を型として書き、その証明を型の項として書くと、小さな核（カーネル）がその証明が言明に合っているかを機械的に検査する仕組みです（Lean の案内 01）。この本で「`Lean`」の札を付けた行は、その検査を通った定理を指します。札が保証することは一つだけです。

この本の約束

札「Lean」が付いた行で保証されているのは、**定理の文に書いてある仮定が全て成り立てば、書いてある結論が成り立つ**ことです。仮定が成り立つこと、文の中の記号が本文の量を表していること、その文が本文の主張と同じ意味であることは、保証されていません。

例として、一段目の上界の命題の合成（23-05 §04 の段 3（合成））の定理の文を写します。

```
theorem H3_H4_compose (CP Cbox n ca K4 C ξ D hbar S0 : ℝ) (hn : 0 < n) (hca : ca < 1)
    (hh : 0 < hbar) (hS : 0 < S0) (hD : D = hbar / S0)
    (hH3 : CP ≤ (1 + 1 / n) * Cbox / (1 - ca)) (hH4 : Cbox ≤ K4 * (C * ξ) ^ 2 / D) :
    CP ≤ (1 + 1 / n) * K4 * C ^ 2 / (1 - ca) * (ξ ^ 2 * S0 / hbar)
```

読み方。一行目の括弧の中は全て実数（`ℝ`）で、`CP` も `ξ` も名前の付いただの実数です。`hH3` は箱への帰着の命題の結論 $C_P \le (1+1/n)C_{\mathrm{box}}/(1-c_{\mathrm{alt}})$、`hH4` は箱の中の隙間の命題の結論 $C_{\mathrm{box}} \le K_4(C\xi)^2/D$ を、**仮定**として受け取っています。定理が確かめたのは、この二つと $D=\hbar/S_0$ から (13) $C_P \le K\xi^2 S_0/\hbar$ が出る代数です。`CP` が $T=\infty$ の経路の測度の Poincaré 定数であること、箱への帰着の命題・箱の中の隙間の命題の結論が実際に成り立つこと（つまり二重井戸の四条件と前提の行）は、Lean の外にあります。

この「矢印だけ」という性格は弱点ではなく、使い方の前提です。依存グラフ（23-12 §03）の「初」の節点の多くは、仮定の行を入力にとる代数で、その代数に写し間違いや符号の誤りが無いことを Lean が確かめます。何が仮定として入っているかが文の中で名指されるので、仮定の行の一覧（統合表）と突き合わせることができます。

02

三つの公理と `#print axioms`

この節は既存の知見（Lean の三つの公理と #print axioms）の整理です。導入は A-04 §04 にあります。

Lean の核の型理論の上に、標準の道具立ては三つの公理を足します。命題の外延性 `propext`（同値な命題は等しい）、商の健全性 `Quot.sound`（同値な元は商で等しい）、選択 `Classical.choice`（存在の証明から元を取り出す）です。ある定理がどの公理に依るかは、命令 `#print axioms 定理名` で一覧になります。

この本の束では、各ファイルの末尾に主な定理の `#print axioms` を置き、その出力の**全ての行が三つの公理の部分集合**であることを、清さの基準にしています。証明を飛ばす `sorry` を使うと一覧に `sorryAx` が加わり、自分で `axiom` を宣言するとその名が加わるので、この基準は「証明に穴が無く、勝手な公理も足していない」ことの機械的な確認になります。表 1 の全ての束（「公理の写し」の欄。2026-10-09 に別の計算機で取り直した写しを含む）で、三つ以外の公理の名が一つも無いことを読み直しました。三つのうち `Classical.choice` を使わない定理もあります（例えば `tb_range` は `propext` と `Quot.sound` だけ）。

`native_decide` を使わない理由。
`decide` は、有限の場合分けで決まる命題を核の中の計算で確かめます。`native_decide` は同じ計算を、Lean のプログラムとして翻訳して機械語で走らせ、その答えを信頼します。速い代わりに、信頼の範囲が核から翻訳器と実行環境にまで広がり、その信頼は一覧に追加の公理として現れます（版によっては宣言ごとに別の名前の公理が生える）。この本の束では

`native_decide` を使わず、清さの基準を「一覧の全ての行が三つの公理の部分集合」に置いています。特定の公理の名の有無で見ると、名前の付き方が版で変わったときに見落とすからです。

03

一段目の束 — 何の代数を確かめたか

一段目の Lean の定理は、主題ごとのファイル（束）に分かれています。表 1 は主な束を、本文で引いた章の順に並べたものです。「定理の数」はファイルの中の `theorem` ／ `lemma` の宣言の数、「代表の定理」の欄には定理名と、その定理の仮定を同じ欄に書きます。

表 1　一段目の主な束（定理の数は宣言の数。公理の写し：○＝末尾の `#print axioms` の出力が別に残っていて、全ての行が三つの公理の部分集合であることを読み直した。2026-10-09 に別の計算機で取り直した写しを含む）

束	定理の数	何の代数か	代表の定理（仮定）	章	公理の写し
`LatticeGaugeOneScale`	12	緩和時間の上界の仮定・緩和時間の下界の仮定と質量の読み替え（等号の版）	`hup_is_gap_positivity`（$0 < m \cdot C_P = 1/m^2 \cdot C_P \le K\xi^2$）	23-01	○
`LatticeGaugeHupBridge`	18	片側の橋・冪の下の半分・陰性対照	`hup_is_gap_positivity_of_lower`（$0 < m_{\mathrm{lat}} \cdot \kappa/m_{\mathrm{lat}}^2 \le C_P \cdot C_P \le K\xi^2$）・`first_power_does_not_bridge`（陰性対照）	23-01	○
`LatticeGaugeDoubleWellTestbed`	7	一次元の片側の橋の命題の有限和の骨	`local_rayleigh_ratio_le_one`（$0 < m \cdot a_k \ge m \cdot c_k \ge 0 \cdot \sum c_k a_k > 0$）	23-04	○
`LatticeGaugeTwoScalePoincare`	8	分散の分割・凸な芯の曲率・縮約した二状態の値・Glauber の帯の比	`split_poincare_le`（分割の式・二つの局所 Poincaré・平均差・形の加法・定数が非負）	23-04・23-05	○
`LatticeGaugeDoubleWellKramers`	10	比の挟みから二重井戸の緩和時間の冪の言明へ	`power_H_of_kink_ratio`（$0 < K, s, \delta \cdot 1 \le R \le K/\hbar \cdot s/\hbar \le \ln \xi$）	23-04・23-05	○
`LatticeGaugeH1Assembly`	17	六節点の相内 Poincaré の命題の率の代数・六節点の余白の算術・環の Gershgorin	`H1_assembly`（名前つきの七つ：分解・細かい側・Helffer の判定・余白・$0 < \lambda$・交差の行・率の条件）	23-06	○
`LatticeGaugeCoarseSideUniform`	20	交差の行の算術・Muckenhoupt の両側の形	`T4_paper_numeric`（$\lambda_c \ge 1.3 \times 10^{-4}$）	23-06	○

束	定理の数	何の代数か	代表の定理（仮定）	章	公理の写し
`LatticeGaugeIntervalQfreeWindow`	150	一次分数の補題の一次分数・傾けの恒等式・被覆から窓へ・律速のセルの再計算	`win_qfree_window_le_of_interval_table`（区間演算の出力の表）	23-08	○
`LatticeGaugeRingUnconditionedWindow`	20	環の外の鎖の窓の組み立て	`unc_window_lt_one_of_table`（区間演算の出力の表）	23-07・23-08	○
`LatticeGaugeRingInnerChain`	22	壁の角の比・環の S_W	`sw_inner_le`（$q_{\mathrm{in}} \le 13/10$・$q_{\mathrm{out}} \le 0.998888530$）	23-07	○
`LatticeGaugePartitionFramework`	14	区画の和・Gibbs の段・合成と閉じる条件	`comp_close`（$X>0$・$b, A \ge 0$・$\ell > 0$・Barta・成分ごとの局所化・Bochner の三つの不等式）	23-09	○
`LatticeGaugeRemVProxy`	23	スカラーの筋の命題の組み立て	`path5_conditional`（剰余の不等式・代理の比・稀さ・算術の余裕を名前つきで）	23-09	○
`LatticeGaugeDetourKills`・`…2`	17・16	迂回策の「殺した一行」の算術	型ごとの補題（23-10 表 4）	23-10	○
`LatticeGaugeBoxReduction`	23	二つの射影の補題・偶奇の箱・ずらしの平均・陽性と陰性の対照	`box_shift_average`（各ずらしで二族の不等式・$C_{\mathrm{box}} \ge 0$・重なりの和 $\le \mathcal{E}$）	23-05・23-11	○
`LatticeGaugeBoxGap`	18	箱の中の隙間の命題・c_{kg} の代数・箱への帰着の命題と箱の中の隙間の命題の合成	`H3_H4_compose`（§01 の文）	23-05・23-11	○
`LatticeGaugeCoreMixing`・`CoreMaxCorr`・`CoreThreeStage`	15・20・18	芯の三段（短い芯の凸性の補題・交互の最大相関の閉じた式・二つのブロックの補題・三段の合わせ）	`three_stage`（各段の上界）	23-11	○
`LatticeGaugeCoreActionGap`	15	局所の項が消えること・端の線引き	`cloc_term_vanishes`（芯の作用の障壁の仮定・ξ の読み・$\Delta S_* < 2S_0$）	23-11	○
`LatticeGaugeGlobalLyapunov`	21	Lyapunov の判定の代数と一次元ガウスの陽性対照	`gauss1d_bbcg`・`gauss1d_equality`（仮定なし）	23-14	○

表 1 の定理は、どれも実数・有限の和・数列の上の不等式と等式です。測度・作用素・経路の空間を型として持つ定理はありません。区間演算の束（`IntervalQfreeWindow` の 150 の宣言の大半）は、最後の段の上界の式を

セルごとに有理数で計算し直したもので、数は多いが中身は算術です。全ての束の索引は 付録 A-04 と分担します。

四次元格子の側。四次元格子で試した道の定理（23-02 §07 表 4）は、言明が直接に語る対象の型で分けると表 2 です。

表 2　四次元格子の側の定理の対象の型と性格（行は定理、性格の記号は 23-02 の表 4 の分類に対応：R＝再証明・A＝整理・C＝条件つき・N＝陰性対照・M＝格子の定理）

対象の型	定理の数	例
実数（と自然数）だけ	23	`chain_band`・`drain_exponent`
数列・実関数	11	`S4_two_sided`・`conditional_scale_bound`
有限集合・有限群の上の和	8	`intact_frac_le`・`meff_ge_of_corr`
内積空間の作用素	1	`tau_int_le`
格子のゲージ場（四元数・Haar 測度）	3	`one_link`・`hess_gauge`
計	46	性格で数えると（対にした二つの定理を一行として 41 行）R 11・A 15・C 7・N 5・M 3

格子のゲージ場を型として持つ定理は三つで、Wilson 測度の期待値・相関・隙間についての定理はありません。性格の対応は、23-02 の表 4 の「再証明・整理・条件つき・陰性対照・格子の定理」が、この表の R・A・C・N・M に一つずつ当たります。

04

仮定は定理名の隣に

この部の本文と表では、定理名を書くときに**その定理の仮定を同じ欄に並べます**（例：`H1_assembly`（仮定：名前つきの七つ））。定理名だけを書くと、要約の段で「Lean で確定」と読まれ、条件つきの代数が無条件の結果に膨らむからです。統合表（23-12）でも、グラフの各節点の下に定理名と仮定を書きました。

計算機援用の行では、Lean の欄は三つの層に分かれます（23-08 §08）。(1) 代数の核（一次分数の単調性・傾けの恒等式・被覆から窓への代数）、(2) 律速のセルと無作為に選んだセルの再計算（全てのセルではない）、(3) 区間演算の出力の表を**仮定**に置き、窓の全体の結論を出す組み立てです。区間演算そのもの（段の写像の区間の評価・求積・不変集合・丸めの規約）は Lean の外にあり、その正しさは照合と対照の検査（23-08 §07）に依ります。表を仮定に置いた定理の札は、「区間演算の出力が正しいなら、窓の全体の結論は代数として正しい」と読みます。

05

四つの限界 — 三つの公理に収まっていても見抜けないもの

清さの基準（§02）を満たす定理でも、次の四つは保証されません。前の二つは §01 の約束の言い換えで、後の二つは、言明の書き方そのものが結論を空にしてしまう型です。

(1) 仮定の正しさ。定理は仮定を一歩も証明しません。`H3_H4_compose` の `hH4` が偽なら、結論は何も言いません。

(2) 対象の符号化。Lean の中の `CP` は名前の付いた実数で、それが経路の測度の Poincaré 定数であることは本文の読みです。同じ名前が別の束で別の量を指しても検査は通ります。例えば `measured_ratio` という名の定理は一段目の二つの束（`CoreActionGap` と `HierarchicalLink`）にあり、別の名前空間の別の量についての文です。名前は内容の保証になりません。

(3) 結論を定義に置く。欲しい性質をそのまま定義の中に書き、その定義を仮定に取ると、結論は仮定の書き写しになり、証明は一行で閉じます。次は型だけを示す擬似の Lean です。

結論を定義に置くと何でも閉じる（擬似の Lean・型の例）

```
def InSpectrum (E : ℝ) : Prop := E = 0 ∨ c ≤ E          -- 欲しい性質を「スペクトル」の定義に書く
theorem gap (E : ℝ) (h : InSpectrum E) : E = 0 ∨ c ≤ E := h   -- 仮定をそのまま返すだけ
def massGap : ℝ := 1 / 2                                  -- 値を字面で置けば正であることも閉じる
```

三行とも検査を通り、`#print axioms` の一覧も空か三つの公理の中に収まります。それでも「スペクトル」がどの作用素のスペクトルとも結ばれていないので、数学の内容はありません。ある文書は、主定理の連言の一つをこの型で書き、別の一つを字面で置いた数で書いていました。定理名に「質量ギャップ」が入り、検査は全て通っていても、言明が対象を符号化していない例です。

(4) 依存の円。Lean は定理を一つずつ検査します。定理 A が B の結論を仮定に取り、定理 B が A の結論を仮定に取っていても、二つとも検査を通ります。どちらの結論も無条件には出ていないのに、二つを並べると「示された」ように見えます。証明が文章で書かれた場合も同じで、ある文書では、隙間が正であるという最後の結論を、途中の段（クラスター性・真空の一意性）の前提に「後で示す」として置いていました。依存グラフに描くと、大きな番号の結論から小さな番号の段へ辺が戻り、番号の規則（23-12 §03）が破れます。

表 3　四つの限界と、この本の防ぎ方

限界	検査で見えるか	この本の防ぎ方
(1) 仮定の正しさ	見えない（仮定は引数）	仮定を定理名の隣に書く（§04）・仮定の行を統合表で一つずつ数える（23-12 表 1）
(2) 対象の符号化	見えない（実数に名前を付けただけ）	Lean の対象の型を本文で言う（§03 の「実数・有限の和」）・規約の翻訳（§07）・本文の量と定理の文の記号の対応を章ごとに書く
(3) 結論を定義に置く	見えない（三つの公理に収まる）	定理の文を本文に写し、定義を遡って読む（§06 の問い 3・4）・陰性対照の定理（仮定を外すと崩れる例）を置く
(4) 依存の円	見えない（定理は一つずつ検査される）	依存グラフの番号の規則・仮定の行が結論の量を含まないことの確かめ（23-12 §03）

陰性対照の定理は、(3) への防ぎとして働きます。例えば `no_bound_when_c_one`（二つの σ-代数が同じ $c = 1$ なら箱への帰着は何も言わない）や `first_power_does_not_bridge`（一乗の冪では橋が架からない）は、仮定を外したときに結論が崩れることを示し、仮定が飾りでなく結論に効いていることの確かめになります。

06

読者が自分で点検する手順 — 六つの問い

Lean の札の付いた主張を読むとき、次の六つを順に問います。この本の定理にも、他の文書の定理にも同じように使えます。

1. **清さ**。`#print axioms` の出力の全ての行が `propext`・`Classical.choice`・`Quot.sound` の部分集合か。出力が手元に無ければ、それは「未確認」です。
2. **仮定の一覧**。定理の文の、コロンより前の括弧（型が命題の引数）を全て書き出す。本文が「無条件」と言っている主張に、命題の引数が残っていないか。
3. **結論の定義を遡る**。結論に現れる名前（`InSpectrum` のようなもの）の定義を開き、それが結論と同じ文を中に持っていないか。仮定と結論が同じ命題の展開になっていないか。
4. **対象の型**。主張が語るはずの対象（測度・作用素・場）が、定理の文の中に型として現れているか。現れているのが実数・自然数・有限の和だけなら、対象との結び付きは本文の読みにあります。
5. **依存の向き**。複数の定理をつないだ主張なら、どの定理がどの定理の結論を仮定に取っているかを番号つきの節点に並べ、前提の番号が結論の番号より小さく置けるか。置けなければ円の候補です。
6. **陰性対照**。仮定を一つ外すと結論が崩れる例が示されているか。示されていなければ、その仮定が結論に効いているかを自分で確かめる。

例。§01 の `H3_H4_compose` に当てると、(1) 三つの公理の部分集合、(2) 命題の引数は `hn`・`hca`・`hh`・`hS`・`hD`・`hH3`・`hH4` の七つ、(3) 結論は実数の不等式で、定義の遡りは要らない、(4) 対象は全て実数、(5) `hH3`・`hH4` は箱への帰着の命題・箱の中の隙間の命題の結論で、統合のグラフでは [072]・[075]・[104] が [105] より小さい、(6) $c_{\mathrm{alt}} = 1$ では箱への帰着が何も言わないことを `no_bound_when_c_one` が示す（`hca` は飾りでない）、となります。答えは「箱への帰着の命題と箱の中の隙間の命題が成り立てば、一段目の上界の命題の不等式が代数として出る」で、それ以上ではありません。

07

規約の翻訳 — 同じ文字・同じ名前が別の量を指す所

Lean の定理は記号の意味を知らないので、同じ文字が別のファイルで別の量を指しても検査は通ります。表 4 は、定理の中の規約を本書の記号表（付録 A-01）に翻訳し、食い違いを食い違いとして書いたものです。上の六行は四次元格子の側、下の五行は一段目の側です。

表 4　Lean の中の規約と本書の記号

量	Lean の中	本書	食い違い
β	一リンク積分の $e^{\beta\langle u,M\rangle}$、$\langle u,M\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(UM^{\dagger})$	$\beta = 2N/g^2$	無い（$N=2$ で $\beta = 4/g^2$）。Shen–Zhu–Zhu の規約とは $\beta = 4\beta_{\mathrm{SZZ}}$
tr と角度	リンク角 $U = e^{i\vartheta\cdot\sigma}$	$T^a = \sigma^a/2$、$U = e^{i\theta^a T^a}$	$\theta = 2\vartheta$、$C_P^{(\theta)} = 4C_P^{(\vartheta)}$。定数倍なので冪には効かない
a	`drain_exponent` の `a`	格子間隔	Lean の a は記帳の長さの逆数 $1/\xi_{\mathrm{RG}}$
η	静的な冪・感受率の冪・重なりの冪	η_s と η_{dyn} を添字で分ける	在る（同じ文字が三つの量）
κ	一ループの傾き・模型の係数・Casimir 項の係数・辺を共有しない面の寄与	一ループの傾き $11/(3\pi^2)$ だけ	在る（同じ文字が四つの量）

量	Lean の中	本書	食い違い
C_P（四次元）	名前の付いた実数	Langevin の Poincaré 定数。正規化を名指す	場 A と角度 ϑ の正規化で $C_P^{(A)} = \beta C_P^{(\vartheta)}$
$\hbar$ と ε	`hbar`（実数）。格子の刻みは数として入る	$\mathcal{E}(f) = (\hbar/\varepsilon)\sum_i \mathbb{E}\lvert\partial_i f\rvert^2$、$\varepsilon = \frac{1}{2}$	無い。$\varepsilon = 0.25$ の読みと $\varepsilon = \frac{1}{2}$ の読みの間の換算は書いていない（23-14 §05）
芯の C_P の目盛り	芯の段の定理の C_P	23-11 は $\mathcal{E}$ の規約、23-09 は $\hbar\int\lvert\nabla g\rvert^2$ の規約	$C^{(23\text{-}09)} = C/\varepsilon = 2C$（23-11 §05）
K	`power_H_of_kink_ratio` の `K`	一段目の上界の命題の K と $K' = KS_0$	Lean の K は本文の K'（23-05 §04 の段 5）
定理名	`measured_ratio`	—	二つの束に同じ名の別の定理（§05 の (2)）
読みの値	`K_ff_C2`・`three_stage_3em4` などの数の定理	読	測った値を仮定に置いた算術。値の分類は「読」のまま（Lean の札で「初」にならない）

08

束の分け方 — 記事・論文・主題ごと

束（ファイル）は、一つの主題（一つの命題とその補題）ごとに分けています。一つの章や記事が引く定理が複数の束にまたがるのは普通で、表 1 の「章」の欄がその対応です。分け方の規律は四つです。

- **一つの束に一つの主題。**箱への帰着の命題と箱の中の隙間の命題のように依り合う主題も、束を分け、合成は合成の束に置きます。束の境目が依存グラフの節点の境目になり、どの束がどの束の結論を仮定に取るかが追えます。
- **末尾に `#print axioms`。**各束の末尾に主な定理の `#print axioms` を置き、出力を束と同じ名で残します（表 1 の「公理の写し」）。
- **名前に内部の名を入れない。**束の名と定理名は数学の内容で付け（`LatticeGauge…` の後に主題の名）、読者から見える名前に作業の名や人の名を入れません。
- **記事・論文に渡す束を決める。**記事や論文がある束の定理を引くときは、引いた定理を含む束の一覧を記事の側にも置き、束の版（いつの検査の出力か）を書きます。束を後から直したら、引いている記事の側の一覧も直します。

この部は拡散型緩和時間の仮定を検討の軸に置き、Lean は一段目の組み立ての代数の段に使いました。証明の検査を別の形（例えば対象そのものを型にした形式化）で行う視点は、第 24 部で扱います。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
`Lean` 表 1 の束の定理は、仮定を引数に明示した形で機械検査を通っている。表 1 の全ての束で、残っている `#print axioms` の出力の全ての行が三つの公理の部分集合	仮定の行の正しさ。Lean の実数を経路の測度の量と読むことそのものの検査
一段目の Lean の定理は全て実数・有限の和・数列の上の文で、測度・作用素を型として持つ定理は無い	測度や作用素を型にした形式化
四つの限界と防ぎ方（表 3）・点検の六つの問い	六つの問いを通った主張が正しいこと（問いは必要な確かめで、十分ではない）

言えている	言えていない
区間演算の層が Lean の外にあり、表を仮定に置いた組み立てだけが Lean の中にあること	区間演算の実装の形式的な検証

出典と再現

もの	種別	出典・道具
束の定理の宣言と数	Lean	各束の原稿（Lean 4・Mathlib）の宣言を読み、`theorem`／`lemma` の行を数えた。定理名と仮定は本文の各行
公理の写し	Lean	各束の `#print axioms` の出力の写しを読み、三つ以外の公理の名（`sorryAx` など）が無いことを、それを含む対照の写しで検出できることを確かめてから数えた
三つの公理と `#print axioms`	典	J. Avigad, L. de Moura, S. Kong, S. Ullrich ほか『Theorem Proving in Lean 4』の章 Axioms and Computation
四次元格子の側の型の層と性格（表 2）	本書	23-02 §07 の定理の数え（同じ 46 定理）
結論を定義に置く型・依存の円の型の例	本書	構成や証明を主張する外部の二つの文書の読み（出典は伏せ、型だけを書いた。文書の正否は判定しない）

この章で使った語 — 機械検査・束・清さの基準・三つの公理・`#print axioms`・`native_decide`・対象の符号化・結論を定義に置く・依存の円・陰性対照の定理・規約の翻訳。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-14 突き合わせ — 記録の数と既知の数 — 一段目の各条件に最も近い既知の定理との距離、書誌の確かめの要約、陽性対照に使った既知の数を、記録の数と一行ずつ並べる。

2026-10-09 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 23 部 一本目の道（前半）— 時間の方向から 突き合わせ・既知の定理との距離・書誌 · Kiichi, Shiori and Rin

突き合わせ — 記録の数と既知の数

> この章は本書の検討です。§01・§07 は案内、§02 は既存の知見、§05 は未解決の地図です。

この章で分かること — 一段目の四つの条件のそれぞれについて、最も近い既知の定理がどこまで届き、どこで止まるか。一段目で引いた既知の定理の言明を原典・二次資料で確かめた結果の要約と、確かめる前に起きていたずれの型。陽性対照として使った既知の数（閉じた式）と記録の数を一行ずつ並べ、一致・条件つきの一致・不一致・比べられないに分けます。四次元格子の側の十九行の照合は、そのまま残します。

前提となる章 — 23-05 §05（既知の定理が届く所）・23-12（統合表）・23-13 §07（規約の翻訳）。

先に言うこと — 水準は〔三〕です。数が合うことは、仮定が正しいことも質量ギャップが在ることも示しません。合った数の多くは、既知の値を別の道で計算し直した確かめです。この部は拡散型緩和時間の仮定を検討の軸に置いた部で、この章はその組み立てに使った数と道具を、外の数と道具に照らします。

この章の順序

1. 突き合わせの約束 — 四つの判定と、そろえる三つのこと
2. 既知の定理との距離 — 条件ごとに最も近い既知の結果と、何が違うか（表 1）
3. 書誌の確かめの要約 — 主要な引用の支えと、ずれの型（表 2）
4. 記録の数と既知の数 — 陽性対照に使った閉じた式との照合（表 3）
5. 比べられない行 — 照合の相手が無い数
6. 四次元格子の側の十九行 — 照合の一表（表 4）
7. 外の文書から学んだ依存グラフの見方 — 二つの型

01

突き合わせの約束 — 四つの判定と、そろえる三つのこと

判定は四つです。

- **一致**：同じ量を同じ条件で比べ、誤差か表示の桁の内で合う。
- **条件つきの一致**：合うが、合い方が一つの選択（格子の刻み・箱・規約・外挿の形）に依る。
- **不一致**：同じ量として比べると誤差を超えてずれる。理由が分かっていても不一致と書く。
- **比べられない**：量・条件が違い、照合の相手が見当たらない。

比べる前に三つをそろえます。**規約**（同じ C_P が Dirichlet 形の正規化で値を変える、23-13 の表 4）、**条件**（格子の刻み ε・境界・模型の中か外か）、**数の種類**（閉じた式・計算機援用の上界・浮動小数の読み・族の下界）です。とくに一段目では、照合の相手が「閉じた式で答えの分かる模型」であることが多く、そこで合うことは道具が正しく動くことの確かめ（陽性対照）で、二重井戸の上の主張の確かめではありません。

02

既知の定理との距離 — 条件ごとに

この節は既存の知見（Poincaré 不等式の既知の判定法と定理）の整理です。導入は 1-10 §08 にあります。

23-05 の表 1 は二重井戸の緩和時間の上界の命題全体について既知の定理の届く所を並べました。表 1 はそれを条件ごとに割り、各条件で最も近い既知の結果と、何が違うかを一行で書いたものです。

表 1　条件ごとに最も近い既知の結果（分類は既知の定理を引く行の分類。本文で言明を確かめたもの）

条件	最も近い既知の結果	届く所	何が違うか	分類
相内の局所 Poincaré の条件	Helffer の判定の Poincaré 版（Ledoux の命題 3.1）・凸な領域の Bakry–Émery（Kolesnikov–Milman の定理 1.2）	粗い側の鎖と細かい側の橋の二尺度の組み立て、谷の奥の凸な芯	判定の入力（余白・二つのサイトの隙間）が $\hbar$ の節点ごとの値で、$\hbar$ に一様な入力は与えない	典
鞍点の管の条件（鞍点の族に沿う輸送）	Eyring–Kramers の Poincaré 版（Menz–Schlichting の補題 2.4・定理 2.9・2.12）	Morse 関数の谷の間の隙間の漸近と前因子	**次元を止める**：定数が次元に一様でなく、キンクの平行移動のような退化した鞍点の族は仮定の外	典

条件	最も近い既知の結果	届く所	何が違うか	分類
鞍点の管の条件（同上）	区間を止めた確率的 Allen–Cahn の Eyring–Kramers（Di Gesù–Le Peutrec・Brooks–Di Gesù）	区間の長さを分岐の閾の手前に止めた隙間の漸近	**族を除く**：区間を無限に長くする体制と平行移動の族は、著者自身が範囲の外と明記	典
箱への帰着の条件	Glauber 力学の箱の力学（Martinelli の講義の命題 3.4・3.5）	全体の隙間を箱の力学と箱の中の隙間で押さえる型	離散のスピン・全変動の結合の形。一次元・L^2・最大相関の形への書き直しは本書の側（23-11 §02）	典（型）
箱の中の隙間の条件	一次元 Ising の Glauber 力学の閉じた式・単一の界面の拡散（Bertini–Brassesco–Buttà の定理 2.1）	固定の端の箱の隙間の式、キンク一本の位置の拡散係数 D	前者は離散のスピンで、縮約したキンクの気体がその型に入ることは仮定（キンクの気体の隙間の仮定）。後者は過程の水準の文で、多キンクの箱の隙間の文ではない	仮（閉じた式は原典を確かめていない）・典
全体（体積に一様）	体積に一様な判定法（Bauerschmidt–Dagallier の定理 2.1）	経路の格子にそのまま当たり、長さに一様な上界	**体積に一様だが二重指数**：値は $C_P \le e^{c\xi}$（$c \approx 1.4 \to 1.8$、$\varepsilon = 0.25$・$\hbar = 0.4 \to 0.1$ の読み）で、ξ が $\hbar$ について指数で伸びるので $\hbar$ について二重指数。二重井戸の緩和時間の冪の言明に届かない	典・読（値）
全体（同じ型の定理の類例）	階層的 $\lvert\varphi\rvert_4^4$ の力学の隙間（Bauerschmidt–Bodineau）	隙間が自由場と同じ冪で（対数の補正つきで）消えるという、拡散型緩和時間の仮定と同じ型の定理	**階層的**：入れ子の箱の模型で、格子の模型そのものでも二重井戸の経路の測度でもない。この型の問いが数学として立つ証拠として引く（23-01 §06）	典

表 1 から、既知の道具は「次元を止めた谷の間の漸近」「一本のキンク」「体積に一様だが粗い上界」「別の模型での同じ型の定理」の四か所にあり、長い経路の上でキンクの気体の拡散の時間 ξ^2/D まで鋭い上界を与える定理は、探した範囲で見当たりません。どの行も、四つの条件の一つを丸ごと既知の定理に置き換えることはできず、条件の中の段（判定法・型・係数）を引く形になります。

03

書誌の確かめの要約 — 支えと、ずれの型

一段目の四つの条件の仮定の表で「既知の定理を引く」とした行を全て拾い、原典か、言明を再述した二次資料で確かめました。拾った項目は 55 で、そのうち条件の表の列に直接入る主要な項目が 26 です。表 2 は主要な 26 の行き先です。

表 2　主要な引用 26 の行き先（確かめの水準。「仮定に改めた」は、引用の行でなく仮定の行として名を改めたもの）

行き先	項目	中身
原典の本文で言明を確かめた	4	Helffer の判定の Poincaré 版（Ledoux）・凸な領域の Bakry–Émery と Brascamp–Lieb（Kolesnikov–Milman の一つの定理で）・Sturm の振動定理
二次資料の再述で言明を確かめた	8	Muckenhoupt の挟み（Barthe–Roberto の形）・MTP_2 の相関不等式（Karlin–Rinott）・Lyapunov と局所 Poincaré の型・指数分布の Poincaré 定数・IMS の局所化・bathtub の原理・可逆な鎖の n 歩の最大相関・ガウスの最大相関
本書の中で証明を置く（初等）	7	分散の分解とその周りの段・min-max の向き・基底状態変換（部分積分）・二つの射影の補題・Efron–Stein の型
原典の取得が要る	4	Poincaré–Miranda の定理・箱の上の重みつき Neumann 作用素の正則性・確率的単調性（Herbst–Pitt）・$\mathbb{R}$ の上の正の積分核の主固有値
仮定に改めた	3	交差項（交差項の一様性の仮定）・キンクの気体の型（キンクの気体の隙間の仮定）・壁の上の最小点の Eyring–Kramers（芯の作用の障壁の仮定）
計	26	支えのあるもの 19（上の三行）

取得が要る 4 項目は、統合表では「仮」の行（23-12 表 1 の [010]・[024]・[001] の一部など）として数えています。原典の本文で確かめられない引用は「典」に入れない、というのがこの部の規則（23-00 §01）です。

ずれの型 — 設定の一語。確かめる前の記録と原典の間に、ずれが 15 件ありました。数学が変わらない付け替え（凸な領域の版を別の定理で引く・帰属を直す・頁を直す）が 12 件、仮定の行の書き直しが要るものが 3 件です。書き直しの 3 件は、(a) 箱の上の固有関数の角までの正則性を「標準」として置いていた行（角のある箱と非対称な重みでは標準の結果から出ないので、仮定の行に分けた）、(b) 端の値についての単調性の連続版の定理番号が未確認の行（未確認と行に残した）、(c) 対数 Sobolev の補題を中心化しない形で使っていた行（原典の再述は中心化した形）です。

ずれは、どれも**設定の一語**——境界があるか、有限か、中心化するか——で起きていました。そして、ずれが出たのは、記録の側で出典を「記憶」と書いていた行よりも、「標準」と書いていた行でした。「標準」と書いた行は確かめる動機が弱いからです。この部の五分類に「標準」という分類が無いのは、このためです。引く定理は「原典か二次資料で言明を確かめた（典）」「本書で証明を置く（初）」「確かめていない（仮）」のどれかに必ず割ります。

04

記録の数と既知の数 — 陽性対照に使った閉じた式

一段目の道具（判定法・区間演算の機械・箱への帰着）は、答えが閉じた式で分かる模型に先に当てて、正しく動くことを確かめてから二重井戸に当てました。表 3 はその照合の一覧で、

比は「記録の側 ÷ 既知の側」です。

表 3　一段目の陽性対照と較正（記録の側の分類は札で。行番号は §06 の表 4 の後に続ける）

#	量	記録の側	既知の側	比	判定	条件・注
20	一次元ガウスに Lyapunov と局所 Poincaré の判定（BBCG の型）を当てた最良の定数	読 重みの走査で 5.828427（$u = 0.41422$）	閉じた式 $3 + 2\sqrt{2}$（$u = \sqrt{2} - 1$）	1.000000	一致	6 桁。双対の形でも 8 桁。Lean `gauss1d_bbcg`・`gauss1d_equality`（仮定なし）
21	同じ模型の真の Poincaré の上限	読 4.4979（有限要素 400）・4.4994（800）	判定法の値 $3 + 2\sqrt{2}$	0.77	条件つきの一致	判定法の損は 1.30 倍で、向き（判定法 ≥ 真の値）は正しい
22	純ガウス $V = x^2/2$ の C_P と箱への帰着の命題の右辺	読 右辺 1.10〜1.33（$L = 4$〜128）	$C_P = 1$（Bakry–Émery の等号）	1.10〜1.33	一致	不等式の向きの照合。重なりの割合 $\to 0$ で 1 に近づく Lean `gauss_box_le_one`
23	一次元 Ising の熱浴 Glauber で箱への帰着の命題の両辺	読 9 例の全てで成立、損 1.17〜1.35 倍	全状態の対角化の隙間	–	一致	環 12・16 サイト、結合 0.3・0.6・1.0。不等式の向きの照合
24	固定の端の Glauber の箱の隙間	読 小さな鎖の全状態の対角化	閉じた式 $1 - \gamma\cos(\pi/(L+1))$	1.00000	一致	表示の 6 桁。境界の値 $(+,+)$ でも $(+,-)$ でも同じ。原典は書誌だけ
25	交互の最大相関（$C = 2 \cdot \theta = \frac{1}{4}$）	初 交互の最大相関の閉じた式の $\varphi(e^{-1/2}, e^{-1})$	二状態の電信の鎖の閉じた式 0.7308	1	一致	同じ量の二つの表示（23-11 §02）
26	格子のキンクの作用	読 $S_0^{\mathrm{lat}} = 0.665266$（$\varepsilon = \frac{1}{2}$）	連続の $S_0 = 2/3$	0.998	条件つきの一致	差 0.2% は格子の刻みの分。連続と格子の差の評価は無い
27	相関長の対数 $\ln\xi$	読 固有値の差と Herring の式の転送作用素の版、二つの経路	半古典の主項 $\xi \propto \hbar^{1/2} e^{S_0/\hbar}$	–	条件つきの一致	二つの経路は中くらいの $\hbar$ で 6 桁一致。$\ln\xi - S_0^{\mathrm{lat}}/\hbar - \frac{1}{2}\ln\hbar$ は $-0.774/-0.777/-0.778$ と一定に寄り、主項の形と合う。定数項の比べる相手は無い
28	キンク一本の拡散係数	読 $D/(\hbar/S_0) = 1.00$〜1.14	$D = \hbar/S_0$（過程の水準の定理の係数）	1.00〜1.14	条件つきの一致	$\varepsilon = 0.25$・$\hbar = 0.02, 0.07, 0.1$ の点の値。有限の $\hbar$ の補正と刻みの分

#	量	記録の側	既知の側	比	判定	条件・注
29	体積に一様な判定法の当てはめの機械	読 調和の模型で 1.0049	閉じた式 1	1.005	一致	判定法を経路の格子に当てる転送行列の計算の陽性対照（$\varepsilon = 0.25$）
30	区間演算の機械：純ガウスの鎖	機 $\hbar$ の区間のまま全ての点が囲いの中	段ごとの分散 $(k-1)/k$・平均 $(k-1)s/k$	1	一致	区間の幅を 0 にすると点の機械と 10^{-12} の桁で同じ（23-08 §07）
31	区間演算の機械：別の実装と点の値	機 上界	読 浮動小数の再帰 75 本・転送行列の点の値 26 個	−	一致	外れ 0。点の値は全て上界の下（差の最小は 2.85×10^{-4}）
32	階層的な Gauss 自由場の隙間	—	入れ子の箱の深さ N で L^{-2N}（既知）		比べられない	比べる相手として置いた既知の数。リンクの Langevin の自由場の側の数は、まだ計算していない

表 3 の一致の行は、どれも「答えの分かる模型で道具が正しく動いた」ことの確かめで、二重井戸の上の行の正しさを示すものではありません。条件つきの一致の行の条件は、格子の刻み（行 26・28）、有限の $\hbar$（行 28）、比べる相手の定数項の欠け（行 27）です。行 21 は、判定法が真の値より 1.30 倍大きく出る損を、答えの分かる模型で測った行で、二重井戸の上で判定法の上界と要る値を比べるときの目安になります（23-09 §05）。

05

比べられない行 — 照合の相手が無い数

一段目の数のうち、照合の相手が見当たらないものを並べます。どれも、組み立てが拡散型緩和時間の仮定の上の半分に最も近づいた所にある数で、そこにだけ照合の相手がありません。

- **二つの格子の刻みの間の換算**。キンクの拡散係数と比 R の下界の読みは刻み $\varepsilon = 0.25$、相関長の表と一段目の上界の命題の段は $\varepsilon = \frac{1}{2}$ で、二つの刻みの間の換算は書いていません（23-04 の範囲の表）。
- **芯の対数 Sobolev 定数の $1/\hbar$ の係数**。Feynman–Kac の筋で要る量で、Monte Carlo の読みと経路ごとの上界の幅が三桁あります（23-09 §05）。
- **$\sup |\nabla \psi|^2$ の読み**。閾の 0.54 倍の内という読みで、上界ではありません。同じ量の既知の値は探した範囲で見当たりません。
- **スカラーの筋の命題の持ち上げの仮定**。二サイトの塊の測った値を測った範囲の外へ線形に持ち上げる仮定で、比べる相手は持ち上げた先の値そのものです（23-09 §05）。
- **階層的な自由場との比べ**。表 3 の行 32。既知の数 L^{-2N} は在り、記録の側の数がまだありません。

06

四次元格子の側の十九行

四次元格子の側で記録が計算した数（一ループの傾き κ・取りこぼし $\delta(b)$・比 $m/\sqrt{\sigma}$・質量の上界・C_P と自己相関の時間・強結合の閾値・確率時間の指数）を、既存の計算と格子の一次資料の数に照らした一表を残します。比は「記録の側 ÷ 既存の側」で、比べられない行は空けます。各行の詳細と規約の換算は、四次元格子の側の章（23-02）と第 5 部の出典表にあります。

表 4　四次元格子の側の照合（行 1〜19）

#	量	記録の側	既存の側	比	判定	条件・注
1	κ（窓の模型）	0.371521	0.371511	1.00003	一致	一ループ模型の中
2	二ループの指数	51/121	$b_1/(2b_0^2)$	1	一致	有理数の算術
3	格子の傾き／一ループ	0.304(2)	0.3715	0.819	不一致	β≤2.60、漸近スケーリング前
4	格子の傾き／二ループ	0.304(2)	0.3972	0.766	不一致	二ループはずれを広げる
5	δ(b) の c_2	0.0197・0.4200	—		比べられない	Symanzik・MCRG と変数が違う
6	m/√σ（p=2）／LT	3.844(43)	3.844(61)	1.000	条件つきの一致	同じ数表・p=2 を選ぶ
7	m/√σ（p=1）／LT	4.053(73)	3.844(61)	1.054	条件つきの一致	χ^2 で p を選べない
8	m/√σ（p=2）／AT	3.844(43)	3.781(23)	1.017	条件つきの一致	合成誤差の 1.3 倍
9	上界 β=2.40（APE）	1.025(140)	0.953(19)	1.076	一致	空間の一辺が同じ 12（L√σ≈3.2）
10	上界 β=2.55（APE）	0.531(50)	0.586(10)	0.906	条件つきの一致	−1.1σ。$12^3\times24$（L√σ≈1.9）と 20^4
11	上界 β=2.60（APE）	0.558(51)	0.514(8)	1.086	条件つきの一致	$12^3\times24$（L√σ≈1.6）と 24^4

#	量	記録の側	既存の側	比	判定	条件・注
12	上界 β=2.60（流れ）	0.501(71)	0.514(8)	0.975	条件つきの一致	12^4（L√σ≈1.6）と 24^4
13	比 m(2.40)/m(2.60)	1.837(302)	1.854	0.991	条件つきの一致	β=2.60 は L√σ≈1.6 の小さな箱
14	直線の閾値／SZZ	1/12	1/48（β=4β_SZZ で換算）	1.000	一致	既知の再導出
15	一リンク積分後の閾値	√(2/27)=0.2722	—		比べられない	周辺測度の閾値。同じ判定法の中で定数が 3.27 倍動く。範囲を広げた主張ではない
16	自由場の C_P	C_P^(A)=ξ^2・4C_P(時刻 0)^2	ガウス測度・基底状態変換	1	一致	計算し直し
17	Langevin の τ_int/ξ^2	0.5〜1.4	—		比べられない	ゼロ温度で連続極限に向かう同じ量の一次資料は、探した範囲で見当たらない
18	確率時間の極	13/6・−11/3	Baulieu–Zwanziger	1	一致	独立な一次資料は一つ
19	指数 s	−9/22	g_0^{9/11}（Lüscher–Schaefer 式 (1.1)）	1	条件つきの一致	一ループの主対数と緩和時間の仮定が条件。独立な確かめではない

四次元格子の側は、一致 6・条件つきの一致 8・不一致 2・比べられない 3 です（行 3 と 4 は同じ不一致の二つの読み）。一段目の側（表 3 の行 20〜32）は、一致 8・条件つきの一致 4・比べられない 1 です。二つを合わせて読むと、一致の行は既知の値の計算し直しか、答えの分かる模型での道具の確かめで、照合の相手が無い行は、どちらの側でも緩和時間の仮定に最も近づいた数（四次元格子の側の $\tau_{\mathrm{int}}/\xi^2$、一段目の側の芯の係数と持ち上げの仮定）に集まっています。

07

外の文書から学んだ依存グラフの見方

ヤン–ミルズの存在と質量ギャップの解決を主張する外部の文書を二つ読み、その中身の正否ではなく、**主張の組み立ての読み方**として役に立つ型を二つ取り出しました。出典は書かず、型だけを書きます。この本は、それらの文書の正否を判定しません。

1. **結論を途中の段の前提に置く型**。ある文書は、定理と証明の形で段を積み、途中の段（クラスター性・真空の一意性・指数減衰）が「後で示す」質量ギャップの正を前提に置き、質量ギャップの正そのものは物理の関係式と次元解析で支えていました。段ごとに読むと各段は前提から結論を導いていますが、段を番号つきの節点に並べると、最後の結論から途中の段へ戻る辺ができ、番号の規則が破れます。**段ごとの検査では見えず、依存グラフに並べると見える**型です。
2. **名前は対象、中身は数の型**。もう一つの文書は、主定理を Lean で閉じていました。主定理の連言を定義まで遡ると、「スペクトルに入る」が結論と同じ命題として定義されていたり、隙間の値が字面で置いた有理数だったりして、作用素・場・測度は名前としてだけ現れていました。**機械検査を通り、公理の一覧が清くても見えず、定義を遡ると見える**型です（23-13 §05）。

この二つの型は、この本の組み立てにも同じように当てて確かめるべきものです。一段目の統合のグラフでは、全ての辺で番号の規則を確かめ、仮定の行の言明が結論の量を含まないことを読んで確かめました（23-12 §03）。Lean の定理は、結論の側に定義を遡る必要のある名前が無いこと（実数の不等式だけ）を、23-13 の六つの問いで確かめられます。

この部は緩和時間の仮定を検討の軸に置き、その一段目の数と道具を外の数と道具に照らしました。別の視点は第 24 部で扱います。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
典 各条件に最も近い既知の結果がどこで止まるか（表 1）。長い経路の上でキンクの気体の拡散の時間まで鋭い上界を与える既知の定理は、探した範囲で見当たらない	そのような定理が無いこと（探した範囲の外）
主要な引用 26 のうち 19 は原典・二次資料・本書の証明のどれかで支えられ、4 は取得が要り、3 は仮定の行に改めたこと（表 2）。ずれの型は設定の一語	取得が要る 4 項目の言明
陽性対照の照合（表 3 の行 20〜32）：答えの分かる模型で道具が正しく動いたこと	それが二重井戸の上の行の正しさを示すこと
四次元格子の側の十九行の照合（表 4）	格子の数表の傾きと一ループの値の不一致を、漸近スケーリングの前という理由以上に説明すること
外の文書から取り出した二つの型と、それを本書の組み立てに当てた確かめ	外の文書の正否

出典と再現

もの	種別	出典・道具
既知の定理の言明（表 1）	典	G. Menz, A. Schlichting, Ann. Probab. 42 (2014), arXiv:1202.1510。G. Di Gesù, D. Le Peutrec, arXiv:1506.04434；M. Brooks, G. Di Gesù, arXiv:2606.16083。F. Martinelli, LNM 1717 (1999) 93–191。L. Bertini, S. Brassesco, P. Buttà, Arch. Ration. Mech. Anal. 190 (2008) 307–345。R. Bauerschmidt, B. Dagallier, Comm. Pure Appl. Math. 77, arXiv:2202.02295。R. Bauerschmidt, T. Bodineau, arXiv:1809.02075。M. Ledoux, LNM 1755 (2001) 167–194。A. V. Kolesnikov, E. Milman, J. Geom. Anal. 27 (2017), arXiv:1310.2526。各章の出典表と同じ
Glauber 力学の閉じた式	仮	R. J. Glauber, J. Math. Phys. 4 (1963) 294（書誌だけ）。式は小さな鎖の全状態の対角化で独立に確かめた
書誌の確かめの要約（表 2）	本書	一段目の仮定の表に引いた 55 項目を、原典・二次資料・書誌の照会で確かめた表の要約。項目ごとの書誌は各章の出典表
表 3 の記録の側の数	読・機・初	浮動小数の計算（転送行列・有限要素・全状態の対角化）・区間演算・本文の閉じた式。それぞれの章の出典表
表 4 の十九行	本書	四次元格子の側の照合の一表（第 5 部・23-02 の出典表に原資料の書誌）
二つの型	本書	構成や証明を主張する外部の二つの文書の読み（出典は伏せた）

この章で使った語 — 突き合わせ・一致・条件つきの一致・不一致・比べられない・陽性対照・較正・既知の定理との距離・設定の一語・結論を途中の段の前提に置く型・名前は対象、中身は数の型。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-15 残件と費用 — 定理までの距離 — 統合表の仮定の行ごとに残件と費用を並べ、一段目の中の距離と二段目以後の距離を分ける。

残件と費用 — 定理までの距離

この章は未解決の問いの地図です。閉じた部品と閉じない部品の境を示します。

この章で分かること — 一段目の結論（二重井戸の緩和時間の冪の言明の上の側）に届くのに要る行が、統合表のただ一つの分かれ道で二通りに割れること。二つの道（箱の側の芯・区画の側の芯）ごとに、要る仮定と読みの行、各行を閉じるのに要る作業の種類と費用の見積もり。全ての行が揃う $\hbar$ を作るのに要るもの。一段目の外、二段目以後の距離を、四次元格子の目標の三つの水準で測ったときの姿と、「足りないのは一様性」という一行の意味。

前提となる章 — 23-12 表 1（統合表）と 23-12 §07（要る葉の組）。各行の中身は 23-05〜23-11 の各章。二段目以後は 23-01・23-03 §06。

先に言うこと — 水準は〔三〕です。費用はどれも見積もりで、走らせていません。行の数や時間を足し合わせて「あと何割」と読むことはしません。行の重さが揃っていないうえ、時間の見積もりがあるのは計算で閉じる見込みの行だけで、やり方の分からない行には見積もりそのものがないからです。この部は拡散型緩和時間の仮定を検討の軸に置いた部で、この章が測るのは、その軸の上の一段目の残りです。

この章の順序

1. この章の約束 — 距離は一覧、費用は見積もり
2. 分かれ道と二つの道 — 箱の側の芯・区画の側の芯（表 1）
3. 二つの道を比べる — 作業の種類で数える（表 2・図 1）
4. 結論への道の上に無い残件 — 持っておく値打ちのある仕事（表 3）
5. 揃う $\hbar$ を作るのに要るもの — 窓の計算機援用では届かない理由／分かれ道の第三の枝（ブロックと混合の道）（表 C1・表 C2）
6. 四つの条件に共通する条件 — 五つの前提（表 4）
7. 二段目以後の距離 — 目標の三つの水準と、β の上の段の数（表 5・表 6）／寄り道：φ^4_4 の教訓

8. 距離の読み方 — 一行の結び

01

この章の約束 — 距離は一覧、費用は見積もり

定理までの「距離」は比喩です。この章では、目標の命題の前提のうち、証明の無いものの一覧を距離と呼びます。

距離 ＝ {目標の命題の前提のうち、証明の無い行}　　(集合。大きさで近い遠いを言わ

一段目の目標は、二重井戸の経路の測度で二重井戸の冪の言明の上の側、すなわち二重井戸の緩和時間の上界の命題の結論 $C_P \le K\xi^2 S_0/\hbar$ と、そこから従う $\ln C_P / \ln \xi \to 2$ です（23-05 §04）。前提の全体は統合表の 111 行で（23-12 表 1）、証明の無い行は「仮」と「読」の行です。「読」の行は数値としては手元にありますが、上界や下界の命題ではないので、結論の前提としては証明の無い行に数えます。

各行には、閉じるのに要る作業の種類を付けます。**区間演算**（計算機援用の不等式に置き換える。23-08）、**紙**（証明を書く）、**書誌**（既知の定理を原典で確かめて「典」に上げる）、**測定**（まだ測っていない量を測る）、**別の方法**（いまの道具では届かないことが分かっていて、別の道具が要る）、**方法未定**（どの道具で攻めるかがまだ決まっていない）の六つです。時間の見積もりは、記録に見積もりがある行だけに書き、「見積もり無し」の行は空けておきます。

例。相内の局所 Poincaré の条件の節点の間の行 [013] には「部分区間 24・計 23〜39 時間」という見積もりがあります。一方、管の行 [002] には見積もりがありません。前者が後者より「近い」と読むのは誤りです。前者は計算すれば閉じる見込みの仕事で、後者は何をすれば閉じるかがまだ分からない仕事です。計算の時間を足し上げた数は、距離の大きさを表しません。

02

分かれ道と二つの道 — 箱の側の芯・区画の側の芯

統合表の依存グラフで、結論 [111] から前提の向きにたどると、「または」の分かれ道が一か所だけあります。芯の Poincaré の一様性の仮定（芯の Poincaré 定数が芯の長さと端の値に一様、[103]）です。この行は二通りに支えられます（23-12 §07）。区画の側の芯の道については、この本から出た論文「粗い鎖の Poincaré」が、両端が井戸の中にある芯で芯の Poincaré の一様性の仮定を $\hbar \in (0,1]$ の全てで支えました：論文の証明（粗い鎖の Dobrushin の定理

（論文の定理 CC)）＋機（ħ ∈ [10⁻⁵,1] を 239 区間の区間演算で、ρ_col ≤ 0.400）＋紙の証明と機（小さい ħ の粗い鎖の命題（論文の命題 PIN）：ħ ≤ 10⁻⁵、ρ_col ≤ 0.874）＋典（Bobkov–Ledoux 2000 の Helffer の判定の Poincaré 版（Ledoux の命題 3.1））・粗い鎖の Brascamp–Lieb の命題（論文の命題 BLc）の上の条件つきで、読の行はありません。箱の側の芯（箱の側の芯の道で箱の中の隙間の命題に入る芯）は含みません。

- **箱の側の芯の道**：芯の定数の三区分の命題（芯の定数の三段、[082]）と、局所の項が ħ → 0 で消えること（[084]）で支える（23-11 §05）。
- **区画の側の芯の道**：区画の枠組みの芯の隙間の一様な下界（[099]）と、継ぎ目の正則性（継ぎ目の極限の仮定）で支える（23-09 §02）。

どちらの道を取っても、結論に要る行は一つの集合に決まります。表 1 は、二つの道の和に入る「仮」「読」「機」の行を全て並べ、各行を閉じるのに要る作業と費用を書いたものです。表とグラフと数えは、統合表と同じ一つのデータ（行・辺）に費用の列を足して作りました。

表 1　結論 [111] に要る仮定・読み・計算機援用の行と、閉じるのに要る作業（番号と内容は統合表のまま。A＝箱の側の芯の道、B＝区画の側の芯の道。費用はどれも見積もりで、走らせていない）

番号	内容（統合表）	A	B	閉じるのに要る作業	種類	費用の見積もり	本文
仮	**仮定の行（22 行）**						
[001]	T=∞ の測度の一意性・Markov 性・局所関数からの延長・極限の段・正則性	○	○	測度の一意性（ℝ の上の正の積分核の主固有値）・Markov 性・延長・極限の段・正則性を、原典で引くか紙で示す	書誌・紙	原典の取得 1 件（正の核）と紙。時間の見積もりは無い	23-05
[002]	鞍点の管の Poincaré の仮定：管の Poincaré が管の長さ ≤ Cξ に一様	○	○	管の Poincaré 定数が、管の長さ ≤ Cξ に一様	方法未定	見積もり無し（未着手）	23-07
[003]	キンクの気体の隙間の仮定：縮約したキンクの気体の箱の隙間が Glauber の型	○	○	縮約したキンクの気体の箱の隙間を、一次元 Ising の値を写さずに示す	別の方法	見積もり無し（比較の定理が要る）	23-11
[005]	交差項の一様性の仮定：交差項 Ɛ_Y(E[f|Y]) ≤ (1+χ)Ɛ(f)、χ が一様	○	○	交差項の χ が一様	方法未定	見積もり無し（未着手）	23-11

番号	内容（統合表）	A	B	閉じるのに要る作業	種類	費用の見積もり	本文
[006]	箱の交互の最大相関の仮定：箱の間の交互の最大相関 c_alt < 1 が一様	○	○	箱の間の交互の最大相関 c_alt < 1 を一様に	別の方法	見積もり無し（二点の量に縮まない例を避ける比較の定理が要る）	23-11
[007]	芯の交互の最大相関の仮定：芯の交互の最大相関 c̄ < 1 の上界（k ≥ 15）	○	—	芯の交互の最大相関 c̄ < 1 の上界（k ≥ 15）	別の方法	見積もり無し（飽和は浮動小数の読みだけ）	23-11
[008]	芯の作用の障壁の仮定：芯と窓の C_P ≤ c ħ^(−p) e^(ΔS/ħ)	○	—	芯と窓の C_P ≤ c ħ^(−p) e^(ΔS/ħ)	紙・測定	前因子 ħ^(−p) は未測。次の一手は縮退点の容量（見積もり無し）	23-11
[009]	Holley の比較の連続版（尾の補題）	○	○	Holley の比較の連続版	書誌	版と定理番号の確認	23-06
[010]	Poincaré–Miranda の定理（箱の被覆）	○	○	Poincaré–Miranda の定理	書誌	原典の取得 1 件	23-06
[011]	分散の分解の行：使う関数の正則性・稠密性	○	○	使う関数の正則性・稠密性	書誌・紙	見積もり無し	23-06
[012]	余白の行（端が大きい側）：隣と端の値 > 2.5	○	○	隣と端の値 > 2.5	紙	見積もり無し（単調性の道は閉じず、凸な尾の接線の補題は余白から遠い）	23-06
[013]	余白の行（節点の間）：節点の間の ħ（一様な形で）	○	○	六つの節点の間の ħ（0.005〜0.2）	区間演算	額縁の流し直し 1 回（30〜50 分）の後、部分区間 24・計 23〜39 時間（一コア。一本 25 分以内に切って 60〜170 本）	23-06

番号	内容（統合表）	A	B	閉じるのに要る作業	種類	費用の見積もり	本文
[014]	余白の行（小さい ħ）：ħ < 0.005（一様な形で）	○	○	ħ < 0.005	紙＋区間演算	区間演算だけでは部分区間が無限個要る。紙で余白の行の余白 ħρ − 2ħκ ≥ 0.067 の ħ→0 だけに帰着し、極限の余白は ≥ 0.758（区間演算＋紙）。一様なラプラス法の定量版と ħρ の側の一次元の補題が要る（未）。明示の $\hbar_0$ があれば無限個は有限個に変わる（§05）。上の端の側は、ħ∈[0.001949, 0.005] を六本の部分区間で区間演算により埋めた（余白 ≥ 0.067。部分区間の上の算術は Lean：LatticeGaugeH1HbarInterval）。その下は、この計算の機械では角の尾の評価が閉じず、機械の取り替えが要る（§05）	23-06
[015]	二つのサイトの隙間の行（端が大きい側）：二つのサイトの端の値 > 4	○	○	二つのサイトの端の値 > 4	紙	見積もり無し	23-06
[016]	環から切れ端（端の値つき）への写し	○	○	環の言明から切れ端（端の値つき）の言明へ	紙	見積もり無し	23-06
[018]	継ぎ目の極限の仮定・端の値が分布で与えられる仮定・環の継ぎ目の正則性	—	○	継ぎ目の極限の仮定・端の値が分布で与えられる仮定・継ぎ目の正則性	紙	見積もり無し	23-07
[019]	区画の入力の道筋の小さな仮定（区画の入力）	—	○	区画の入力の道筋の小さな仮定（縦の項・区画の入力の小さな仮定・正則性）	紙	一覧だけで未着手（見積もり無し）	23-07
[021]	窓の周辺の対数 Sobolev の入力（サイトの窓の周辺の LSI の形）	—	○	窓の周辺の対数 Sobolev の入力	紙	見積もり無し	23-09
[022]	橋の体積の局所性の入力（橋の上の体積の局所性）	—	○	橋の体積の局所性の入力（橋の上の体積の局所性）	紙	見積もり無し	23-09
[023]	Barta の行 κ = 3/1000・b = 493/1000	—	○	Barta の行 κ = 3/1000・b = 493/1000（閾 0.57 で）	紙・区間演算	見積もり無し（行の評価の紙はこの本に置いていない）	23-09

番号	内容（統合表）	A	B	閉じるのに要る作業	種類	費用の見積もり	本文
[024]	Bochner の境界の項と固有関数の正則性	—	○	Bochner の境界の項と固有関数の正則性（角まで C^3 は標準の結果から出ない）	別の方法	見積もり無し	23-09
[026]	窓の対数 Sobolev の閾の命題 A_W < A_max(ħ)。窓の対数 Sobolev の道筋の残る一命題	—	○	窓の対数 Sobolev の道筋の残る一命題 A_W < A_max(ħ)	方法未定	見積もり無し。三本の筋はどれも頂上の一サイトの曲率の不足 ¼ で止まる	23-09
読	**読みの行（上界・下界の命題に置き換える必要がある）（5 行）**						
[044]	ln ξ ≥ s/ħ（ξ ∝ ħ^½ e^(S_0/ħ)）・D/(Cξ)² の大きさ	○	○	ln ξ ≥ s/ħ を下界の命題に	書誌・紙	トンネル分裂の半古典の漸近の原典を確かめれば「典」に上がる見込み（見積もり無し）	23-04
[046]	中くらいの芯の段の二点の最大相関と B_2（22.1／30.5／66.4）	○	—	中くらいの芯の段の二点の最大相関（8 ≤ k ≤ 14）を上界に	区間演算・紙	k の七つの値ごと・ħ の点ごとの区間演算と、格子と連続の差の紙（時間の見積もり無し）	23-11
[047]	c̄_(≥15) ≤ 0.535（下界の測り）	○	—	c̄_(≥15) ≤ 0.535 を上界に	別の方法	見積もり無し（いまは下界の測りだけ）	23-11
[055]	ℓ_min = 38.3／121.9／406.8	—	○	ℓ_min = 38.3／121.9／406.8 を下界に	区間演算	見積もり無し	23-09
[089]	体積の局所性：ℓ_min は k に依らない	—	○	体積の局所性：ℓ_min が k に依らない	紙	見積もり無し	23-09
機	**計算機援用の行（節点・範囲の中で済）（2 行）**						
[040]	余白の行：余白 ħρ − 2ħκ ≥ 0.067（隣と端 $[0,2.5]^2$）	○	○	（済）六つの節点で計算機援用	—	節点の中では閉じている。節点の外は [013][014]	23-06
[041]	二つのサイトの隙間の行：λ_c ≥ 1.3×10^{-4}（端 $[0,4]^2$）	○	○	（済）計算機援用の行	—	ħ の範囲は統合表の欄のとおり	23-06

表 1 から読むこと。(1) 二つの道に共通の行は、仮定 13 行と読み 1 行です。共通の前提 [001]、箱の中の行 [002][003][005]、箱の間の [006]、相内の局所 Poincaré の条件を延ばす [009]〜[016]、相関長の伸び方の読み [044] で、どちらの道を取っても残ります。(2) 箱の側の

芯の道だけに要るのは、芯の交互の最大相関 [007] と作用の障壁 [008]、中くらいの芯の段・長い芯の段の読み [046][047] の四行です。(3) 区画の側の芯の道だけに要るのは、窓の対数 Sobolev の道筋の残る一命題 [026] と、区画の入力 [019][021][022][024]・Barta の行 [023]・継ぎ目の正則性 [018] の仮定 7 行と、読み [055][089] の二行です。(4) 計算機援用の二行 [040][041] は、節点と範囲の中では済んでいて、両方の道に共通です。

03

二つの道を比べる — 作業の種類で数える

二つの道の費用を、行の数でなく作業の種類で比べます（表 2）。

表 2　表 1 の仮定と読みの行を、閉じるのに要る作業の種類で数えたもの（一つの行が二つの種類を持つときは両方に数える。計算機援用の二行は済なので除く）

作業の種類	二つの道に共通	A だけ	B だけ
区間演算	1　[013]	1　[046]	2　[023]・[055]
紙	6　[001]・[011]・[012]・[015]・[016]・[044]	2　[008]・[046]	6　[018]・[019]・[021]・[022]・[023]・[089]
書誌	5　[001]・[009]・[010]・[011]・[044]	0	0
測定	0	1　[008]	0
別の方法	3　[003]・[006]・[014]	2　[007]・[047]	1　[024]
方法未定	2　[002]・[005]	0	1　[026]

読み方は三つです。

第一に、**時間の見積もりが付くのは、どちらの道でも共通の [013] だけ**です（部分区間 24・23〜39 時間、走らせていない）。区間演算で閉じる見込みのある行は他にもありますが（[046]・[023]・[055]）、本数と時間の見積もりはまだありません。そして共通の行には、区間演算では届かないと分かっている [014]（$\hbar < 0.005$、部分区間が無限個要る）があります。だから「計算機の時間さえあれば閉じる」道は、二つのどちらにもありません。

第二に、**箱の側の芯の道の追加は「別の方法」に偏り、区画の側の芯の道の追加は「紙」に偏ります**。箱の側の芯の道の [007][047] は、芯の交互の最大相関を k に一様に押さえる比較の定理を要し、それは二点の量に縮まない例（23-11 §05）を避ける形でなければなりません。区画の側の芯の道の追加の多くは区画の入力の紙ですが、その奥に「方法未定」の [026] が一つあります。窓の対数 Sobolev の道筋の残る一命題で、三本の筋がどれも頂上の一サイトの曲率の不足 $\frac{1}{4}$ で止まった場所です（23-09 §06）。

第三に、**行の数の多い区画の側の芯の道が重いとは限りません**。区画の側の芯の道の追加の紙は、どれも何を示せばよいかが言明として決まっている行です。箱の側の芯の道の追加の二行 [007][047] と区画の側の芯の道の一行 [026] は、どれも「何を示せばよいか」は決まっていても「どう示すか」が決まっていない行です。二つの道の差は、このやり方の分からない行が、芯の最大相関の側にあるか、頂上の曲率の側にあるかの違いです。

図 1 は、二つの道それぞれで結論の祖先だけを残した依存グラフです。統合表のグラフ（111 節点）から、[103] の「または」の片方を選んで前提の向きにたどった節点だけを、同じ番号で並べています。

> 図 1　道ごとの依存グラフ（番号・分類・記号・内容・⟸ の右は前提の番号。番号の規則は統合表と同じで、前提の番号は結論より小さい）
> ▶ 箱の側の芯の道：箱の側の芯（55 節点）
> ▶ 区画の側の芯の道：区画の側の芯（59 節点）

例。箱の側の芯の道のグラフで [103] の前提は [082][084]、区画の側の芯の道のグラフでは [099][018] です。それ以外の幹（[104] 以下の箱の隙間と合成）は二つのグラフで同じ節点で、分かれ道の手前の仕事はどちらの道でも共通に効きます。

04

結論への道の上に無い残件 — 持っておく値打ちのある仕事

統合表には、結論への道の上に無いのに残件として名前の付いた仕事があります。どれも閉じても結論 [111] は動きませんが、数の確かさや別の道の材料として持っておく値打ちがあります。

表 3　結論への道の上に無い残件（費用は記録の見積もりの写し。どれも走らせていない）

残件	統合表の行	作業と費用の見積もり	閉じたら何が言えるか	本文
環の内の鎖を区間演算に載せる	[053]・[054]	紙の検討 1〜2 回と台本 1〜2 回で、ピンの格子と位置の格子を分けた機械・外へ押す壁の層の命題を作り、窓の 25 部分区間で約 50 本・約 42 時間（帯の紙が無ければ約 85 時間）	内の鎖の係数 $\bar{q} \approx 1.3$ が上界になる。区画の閉じる条件（23-09 の (7)）を満たす道ではない	23-07 §03
境の段のピンを $(0, \frac{1}{2})$ へ延ばす	[054]	上の機械の一部（外の機械の定義域を延ばす）	外の鎖の「ピン ≤ 0」の条件が外れる	23-07 §03
窓の定数の数値の道筋の残る数値	[052]	窓の定数・最小の重み・混雑度で約 42 本・約 21 時間。積の形の床が要る値より 4〜5 桁上なので、走らせない判断	積の形の上界が機になる（結論には届かない）	23-07 §04

残件	統合表の行	作業と費用の見積もり	閉じたら何が言えるか	本文
閾値をそろえて A_W を測り直す	[056]	A_W を欠陥の閾 $\theta_B = 0.57$ の印で測る（見積もり無し）	23-09 の閉じる条件 (7) が字義どおりに意味を持つ	23-09 §04
スカラーの筋の命題の行を計算機援用に	[025]・[096]	節点ごとに 12 本（bathtub の列 3・稀さ 7・非凸なファイバー 2）、節点 60〜250 の見積もり。非凸なファイバーの作用の差の下界は区間演算の形にまだ無い。持ち上げの仮定は残る	窓の下の端のスカラーの筋の命題の行が機になる。残る一命題 [026] への含意の辺は無い	23-09 §05
相内の局所 Poincaré の条件の定数を鋭く	[066]	二つのサイトの隙間の行の組み直し（見積もり無し）	$C \le 1.6 \times 10^{10}$ が小さくなる（結論の形は変わらない）	23-06 §07
二つの刻みの換算	—	格子の刻み $\varepsilon = 0.25$ の読みと $\varepsilon = \frac{1}{2}$ の表をつなぐ（見積もり無し）	突き合わせの「比べられない」行が一つ減る	23-14 §05
書誌の取得	[010] ほか	要取得 4 件（Poincaré–Miranda・箱の上の Neumann の楕円型の正則性・確率的単調性・正の積分核の主固有値）	取得できた行が「仮」から「典」へ上がる	23-14 §03

表 3 の最初の三行は、計算の量で言えば表 1 の [013] より大きい仕事です。それでも結論への道の上に無いのは、閉じても統合表の「仮」の行が一つも減らないからです（23-12 §05 の「鞍点の管の条件の機の二行は結論への道の上に無い」と同じ理由）。計算の量の大きさと、結論への近さは別の物差しです。

05

揃う $\hbar$ を作るのに要るもの — 窓の計算機援用では届かない理由

表 1 の行が全部閉じても、それぞれの行が成り立つ $\hbar$ の範囲が交わらなければ、結論は一つの $\hbar$ でも言えません。いまの範囲は四種類です（23-12 §06）：相内の局所 Poincaré の条件の節点 $\{0.2, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01, 0.005\}$、計算機援用の窓 $[3 \cdot 10^{-4}, 3 \cdot 10^{-3}]$、スカラーの筋の命題の範囲 $[3 \cdot 10^{-4}, 10^{-3}]$ の節点、読みの三点 $\hbar = 3 \cdot 10^{-3} / 10^{-3} / 3 \cdot 10^{-4}$。相内の局所 Poincaré の条件の側は 0.005 より下に無く、鞍点の管の条件の側は $3 \cdot 10^{-3}$ より上に無いので、交わりは空です。

揃える道は二つしかありません。(a) 相内の局所 Poincaré の条件を $\hbar \le 10^{-3}$ へ延ばす（行 [014]）か、(b) 鞍点の管の条件の側を $\hbar \ge 0.005$ へ延ばすかです。(b) はこの部の対象の外と決めました（$\hbar$ の範囲の道筋、23-07 表 1）。(a) は区間演算では届きません。部分区間の幅は $\hbar$ とともに縮み、$\hbar \to 0$ までを覆うには部分区間が無限個要るからです。要るのは $\hbar \to 0$ の漸近を紙で書く別の方法です。その筋は次の形まで来ています。六節点の相内 Poincaré の命題の入力のうち二つのサイトの隙間の行・交差の行・λ_S・入れ子は $\hbar \in (0, 0.2]$ で閉じ、率の条件

は余白について単調なので、残るのは余白の行の余白 $\hbar\rho - 2\hbar\kappa \ge 0.067$ を $\hbar \to 0$ で示すことだけです [紙]。極限の公式は $\kappa_0(a,b) = (H^{-1})_{1,11}/\varepsilon^2$（11 サイトの橋の最小点の Hessian）で、端 $(a,b) \in [0,2.5]^2$ の全てで大域の最小点がただ一つ内部にあり $\lambda_{\min} H \ge 0.2$、$\kappa_0 \le 0.1282$、粗い景色では $U_0''(t^*) \ge 1.943$ です [機]（区間演算。前提の紙の補題——KKT・切り詰め $x \le \max(a,b,1)$・Jacobi の首座小行列式——は本に置いていない。作用の隙間 g は浮動小数 [計算]）。これから余白の極限は $\ge 1.014 - 2 \times 0.1282 = 0.758$（Muckenhoupt で払った後）で、六節点の 0.067 より大きく、有限の $\hbar$ の真の余白（1.67〜1.79）もほぼ平らです [計算]。$\hbar \to 0$ の極限を有限の $\hbar$ に降ろすには、一様なラプラス法の定量版と、$\hbar\rho$ の側の一次元の Muckenhoupt の漸近の補題が要ります [仮]（一様なラプラス法の定数は Katsevich arXiv:2406.12706 の定理 2.12 では明示されない [典]）。明示の $\hbar_0$ が得られれば、[014] の無限個の部分区間は $[\hbar_0, 0.005]$ の有限個に変わります [読]（$\hbar_0$ の見積りは 4×10^{-4}〜8×10^{-4}）。

上の端からの部分区間。窓 $[\hbar_0, 0.005]$ のうち上の端の側は、六節点と同じ区間演算の機械を $\hbar$ の区間ごとに延ばして埋めました。$\hbar\kappa$ の側は、三点の β の補間と三次の剰余の型で、11 サイトの橋の共分散を $\hbar$ の区間で上から押さえます。$\hbar\rho$ の側は、境界の値の期待値の帯を同じ型で $\hbar$ の区間に延ばし、帯つき Muckenhoupt の指数に現れる前向きの和をセルごとに $\hbar$ の両端で比べて、区間の全ての $\hbar$ で正しい下界にしました [紙]。結果、六本の部分区間 $[0.001949, 0.002281]$・$[0.002281, 0.002668]$・$[0.002668, 0.003122]$・$[0.003122, 0.003653]$・$[0.003653, 0.004274]$・$[0.004274, 0.005]$ の全てで、隣と端 $[0,2.5]^2$ の全ての箱について余白 $\hbar\rho - 2\hbar\kappa$ が 0.067 を上回ります（下の区間から 0.367・0.353・0.321・0.240・0.154・0.077）[機]（float64 と外向きの幅。部分区間の上のセルの指数の比べ・小片の被覆・余白の算術は Lean：LatticeGaugeH1HbarInterval、15 定理。数を入れて確かめたのは上の二本）。したがって余白の行の余白は $\hbar \in [0.001949, 0.005]$ で区間演算により立ちます。一様なラプラス法の定量版の $\hbar_0$（浮動小数で約 5.5×10^{-4}）とは重ならず、間は開いたままです。この機械の費用は $\hbar$ についておよそ -3.5 乗で増え [計算]、さらに次の部分区間からは、重みの打ち切りのために角 $(a,b) = (2.5, 2.5)$ の尾の上界が積分を上回り、float64 の一つの重みの尺度では閉じません [読]。窓をつなぐには、重みを対数で持つか角の尾の評価を見直す機械の取り替えか、一様なラプラス法の定量版の定数を鋭くすることが要ります。

さらに、揃う $\hbar$ が一点でも作れたとしても、二重井戸の冪の言明は $\hbar \to 0$ の極限の文です。

$$\lim_{\hbar \to 0} \frac{\ln C_P(\hbar)}{\ln \xi(\hbar)} = 2 \tag{2}$$

(2) は、どんな有限の窓の上の不等式からも出ません。窓の計算機援用は、窓の中の各 $\hbar$ で不等式を確かめるだけで、窓の外については何も言わないからです（23-08 §10）。だから一段目を閉じるには、表 1 の全ての行を「$\hbar \to 0$ で一様な形」で言う必要があり、計算機援用の役

は、その一様な形の命題の中の有限の部分（例えば $\hbar \ge \hbar_1$ の側）を受け持つことに限られます。

例。[013] を 23〜39 時間かけて閉じても、閉じるのは $0.005 \le \hbar \le 0.2$ の連続体です。[014] は手つかずのまま残り、(2) の極限には一歩も近づきません。計算の時間で買えるのは「節点の間」であって「$\hbar \to 0$」ではありません。

分かれ道の第三の枝 — ブロックの対数 Sobolev の道

分かれ道 [103]（芯の Poincaré の一様性の仮定）を支える道として、箱の側の芯の道・区画の側の芯の道のほかに第三の候補が提案されています。区画の枠組みのサイトの窓の LSI 定数 A_W（[026]）も、芯の定数の三区分の命題の芯の最大相関（[007]・[046]・[047]・[082]）も経由しない道で、この節ではブロックと混合の道と呼びます。証明の書かれていない段が多いので、この節は主張の文ではなく、提案された道を行の表（表 C1）と依存グラフで置くものです。表 1・表 2・図 1 の数えは変えません。

設定。対象は 23-09 と同じ芯 $Q_k = (-x_c, 0)^k$（$x_c = 0.89$、面は Neumann、$\varepsilon = \frac{1}{2}$、$V(z) = (z^2-1)^2/8$）の上の、両端の外の値 a, b を止めた条件つきの測度 $\mu_k^{a,b} \propto e^{-S/\hbar}$ です。Dirichlet 形は 23-09 の規約 $\mathcal{E}(f) = \hbar \int |\nabla f|^2 \, d\mu$（過減衰の Langevin 力学 $dz = -\nabla S \, dt + \sqrt{2\hbar}\, dW$ の形）で、23-11 の $(\hbar/\varepsilon)\sum_i \mathbb{E}|\partial_i f|^2$ とは定数 ε 倍だけ違います。だから「$\hbar$ に一様」はどちらの規約でも同じ意味です。目標は、芯の長さ k・$\hbar$・端の値の全てに一様な対数 Sobolev 不等式（LSI）で、LSI からは Poincaré 不等式が従う [典] ので、目標が示されれば芯の Poincaré の一様性の仮定が出ます。

三段の筋。

1. ブロックの LSI。長さ $\ell_B \ge 12$ のブロック（凸性の閾のすぐ外の長さ 8 を避ける）で、端の値と $\hbar$ に一様な LSI。入力は、下の隠れた凸性の命題（箱の上の極小は一つ）、最悪の端の値での最小点の曲率 $\lambda_*(12) \ge 0.255$、一つの非退化な極小の下では指数的に小さい固有値が無いという Witten の Morse 理論（Neumann の箱）と、一つの極小の場合の Menz–Schlichting の分解です。
2. 強い混合。$\hbar \to 0$ の最適な道が全ての出発点から 7 歩以内に箱の角 $-x_c$ に着き、鎖はその道のまわりに幅 $\sqrt{\hbar}$ の程度で集中し、角の境界層で Doeblin の条件が $\hbar$ に一様に立つ。結論は $\mathrm{TV}(n) \le (1-\delta)^{\lfloor n/10 \rfloor}$、$\delta$ は $\hbar$ に依らない、という形です。
3. 一次元の鎖の標準の定理（Zegarlinski、Martinelli–Olivieri の型：ブロックの LSI と強い混合から長さに一様な LSI）で 1 と 2 を合わせる。

この道は最悪の配位を入口にしません。最悪の配位で評価する道具が頂上の一サイトの曲率の不足 $\frac{1}{4}$ で一様に止まること（23-09 §06）の外にあり、平均の混合で $\hbar$ への一様性を取りにいく道です。

隠れた凸性の命題（箱の上の極小はちょうど一つ）

$\varepsilon>0$、$c>0$、$l\ge 1$、端の値 $a,b\in[-c,0]$ とし、$z_0=a$、$z_{l+1}=b$ として

$$S(z)=\sum_{i=0}^{l}\frac{(z_{i+1}-z_i)^2}{2\varepsilon}+\varepsilon\sum_{i=1}^{l}V(z_i),\qquad V(z)=\frac{(z^2-1)^2}{8}\tag{C1}$$

を箱 $Q=[-c,0]^l$ の上で考える。S は Q の上で局所的な極小をちょうど一つ持ち、それは大域的な最小である。

初 証明。$z_i=-\sqrt{\rho_i}$（$\rho_i\in[0,c^2]$、$i=1,\dots,l$）、端も $a=-\sqrt{\rho_0}$、$b=-\sqrt{\rho_{l+1}}$（ρ_0,ρ_{l+1} は固定）と置きます。$(z_{i+1}-z_i)^2=\rho_{i+1}+\rho_i-2\sqrt{\rho_i\rho_{i+1}}$ で、幾何平均 $(x,y)\mapsto\sqrt{xy}$ は $[0,\infty)^2$ の上で凹なので $-\sqrt{\rho_i\rho_{i+1}}$ は凸です。端の項 $-\sqrt{\rho_0}\sqrt{\rho_1}$ も、$\sqrt{\cdot}$ が凹で係数が ≥ 0 なので凸です。ρ について一次の項は凸で、$V(z_i)=(\rho_i-1)^2/8$ は ρ_i について二階微分が $\frac{1}{4}$ の狭義凸です。よって $\tilde S(\rho):=S(-\sqrt{\rho})$ は凸関数と $\varepsilon\sum_i(\rho_i-1)^2/8$ の和で、$[0,c^2]^l$ の上で狭義凸です。成分ごとの $\rho\mapsto-\sqrt{\rho}$ は $[0,c^2]^l$ から Q への同相写像なので、局所的な極小は互いに対応します。凸な集合の上の狭義凸関数の局所的な極小は大域的な最小で、高々一つです。S はコンパクトな Q の上で連続なので最小は在ります。∎

隠れた凸性の命題が言うのは、z の座標で凸でない作用（頂上の Hessian は長さ 8 以上で正定値でない、次の段落）が、$\rho=z^2$ の座標では長さに依らず凸だということです。ただし Poincaré 定数と LSI 定数は z の平らな計量の量なので、ρ の凸性がそのまま Bakry–Émery の判定を与えるわけではありません。ρ で書いた密度にはヤコビアン $\prod_i(2\sqrt{\rho_i})^{-1}$ が掛かり、ポテンシャルに足される $\frac{1}{2}\ln\rho_i$ は二階微分が $-1/(2\rho_i^2)$ の凹な項です。$\tilde S/\hbar$ の凸性の下界 $\varepsilon/(4\hbar)$ でこれを打ち消せるのは $\rho_i\ge\sqrt{2\hbar/\varepsilon}$ の所だけで、それより薄い層では凸性が保証されません 初 （一行の計算）。非凸性が「長さ 8 以上の頂上の塊」から「サイトごとの稀な薄い層」に移る、という見方です。端の値が箱の下にある場合（$a,b\le -x_c$）に閉じた芯の上の KKT 点が底の角だけであることを示した記録の命題（閉じた芯の KKT 点の命題）は、数列の凸性と KKT の条件による別の方法で、ブロックと混合の道の結論の祖先には入りません。

凸性の閾は頂上の最初の共役点。頂上 $z\equiv 0$ での S の Hessian は三重対角 $\operatorname{tridiag}(-1/\varepsilon,\ 2/\varepsilon+\varepsilon V''(0),\ -1/\varepsilon)$ で、$V''(0)=-\frac{1}{2}$、$\varepsilon=\frac{1}{2}$ では $\operatorname{tridiag}(-2,\frac{15}{4},-2)$ です。長さ l のときの固有値は $\frac{15}{4}-4\cos\frac{\pi j}{l+1}$（$j=1,\dots,l$）で、最小の $j=1$ が正なのは $\cos\frac{\pi}{l+1}<\frac{15}{16}=1-\frac{\varepsilon^2}{4}$、すなわち $l+1<\pi/\theta$（$\cos\theta=1-\varepsilon^2/4$）のときに限ります 初 。$\theta=0.3554$、

$\pi/\theta - 1 = 7.839$ で、最小の固有値は長さ 7 で 0.0545、長さ 8 で -0.0088 です。頂上で線形化した Euler–Lagrange の方程式（Jacobi の方程式）$-2u_{n-1} + \frac{15}{4}u_n - 2u_{n+1} = 0$ の解は $\sin(\theta n)$ で、π/θ はその最初の零点、変分法の言葉で最初の共役点です。短い芯の凸性の補題（23-11 §05）の「長さ ≤ 7 は凸、8 から壊れる」は、区間に共役点が入るかどうかの判定そのものです。この長さは古典的に決まり、$\hbar$ に依りません。

表 C1　ブロックと混合の道の行（番号は統合表の番号と区別して C を付ける。札は第 23 部の五分類。どの行も費用の見積もりは無い）

行	言明（一行）	札	根拠・残り	閉じるのに要る作業
C01	凸性の閾 7.84 は頂上の最初の共役点 $\pi/\theta - 1$（$\cos\theta = 1 - \varepsilon^2/4$）	初	上の段落	—
C02	長さ $k \le 7$ の芯は全ての配位で $\mathrm{Hess}\, S \ge \kappa(k)$（$\kappa(7) = 0.0545$）、$\hbar$ と端の値に一様な Poincaré（短い芯の凸性の補題、統合表 [076]）	初	23-11 §05。凸な領域の Bakry–Émery（Kolesnikov–Milman）は 典 。LSI の形も同じ凸性から出る見込みで、書誌の照合を残す。ブロックと混合の道の結論の祖先には入らない（ブロックは長さ 12 以上）	書誌（LSI の形）
C03	隠れた凸性の命題：端の値 $a, b \in [-c, 0]$ なら、箱の上の局所的な極小はちょうど一つ	初	上の枠の証明	—
C04	最悪の端の値での最小点の曲率 $\lambda_*(12) \ge 0.255$・$\lambda_*(16) \ge 0.305$（$\varepsilon = \frac{1}{2}$、全ての端の値）	読	最小点の端の値についての単調性（Topkis の定理）と Weyl の不等式による細胞ごとの下界。細胞の四隅の最小点は浮動小数の最適化	区間演算（四隅の KKT の残差を区間で確かめれば機）
C05	一つの非退化な極小 ⇒ 指数的に小さい固有値が無く、$\hbar \to 0$ で LSI の定数が λ_* で決まる	仮	典の候補（Helffer–Nier、Le Peutrec の Neumann 版、Menz–Schlichting）。箱の角での形は照合していない	書誌
C06	ブロック（$\ell_B \ge 12$）の LSI が端の値と $\hbar$ に一様	仮	C03・C04・C05 と、有限の $\hbar$ の範囲・端の値のコンパクト性の上の組み立ての筋	紙
C07	$\hbar \to 0$ の最適な道は全ての出発点から 7 歩以内に角 $-x_c$ に着く	読	頂上からの道を 50 桁の浮動小数で解き（勾配の残差 3×10^{-51}）、KKT の符号を確かめた記録。一意性は C03、出発点についての単調性は Topkis の定理。区間演算ではないので機にしない	区間演算（解の存在を区間で囲む）で機
C08	一歩の作用の凸性 $\kappa_0 \ge 0.055$（$\hbar \to 0$、全ての出発点）	仮	記録に証明の筋（自由なサイトが 6 以下なら、一歩の作用の二階微分は長さ 7 の最悪の三重対角の最小固有値 0.0545 以上）。本に証明を置いていない。C01・C07 に依る。有限の $\hbar$ で測った $\kappa_\hbar \ge 1.88$（$\hbar = 10^{-2}$〜10^{-5}）は 読	紙

行	言明（一行）	札	根拠・残り	閉じるのに要る作業
C09	$\lvert W_\hbar - W_0\rvert = O(\hbar \ln(1/\hbar))$（$W_\hbar = -\hbar \ln \varphi_0$、$[-x_c, 0]$ で一様）	仮	典の候補（Varadhan 型の極限）。原典の照合未了	書誌
C10	幅 $\sqrt{\hbar}$ への集中と、角の境界層の Doeblin の条件（出発点に一様）	仮	拘束つきの Laplace の方法の筋。出発点に一様な形と、壁の乗数が 0 になる有限個の出発点の扱いが残る	紙
C11	強い混合 $\mathrm{TV}(n) \le (1-\delta)^{\lfloor n/10 \rfloor}$、$\delta$ は $\hbar$ に依らない	仮	C07〜C10 の上の組み立ての筋	紙
C12	混合の長さ $\approx$ 9〜10（最悪の端の値で全変動 $< 10^{-2}$、$\hbar = 10^{-2}$〜10^{-5}）・Langevin の緩和の目安 ≈ 0.46（$k \ge 16$、$\hbar = 10^{-2}$〜10^{-4}）	読	転送作用素の数値（端の値 41 点の最大）と、過減衰 Langevin の数値（256 本の鎖・端は頂上）。結論の祖先には入らない裏づけの行	—
C13	ブロックの LSI ＋ 強い混合 ⇒ 長さに一様な LSI	仮	典の候補（Zegarlinski、Martinelli–Olivieri）。コンパクトな連続スピンの版の照合未了	書誌
C14	芯の LSI が k・$\hbar$・端の値に一様、よって芯の Poincaré の一様性の仮定	仮	C06・C11・C13 の上の組み立て	紙

依存グラフ（番号の規則は図 1 と同じで、前提の番号は結論より小さい。C02 と C12 は結論の祖先に入らない節点）：

```
[C01] 初　凸性の閾 π/θ − 1 = 7.84 は頂上の最初の共役点
[C02] 初　短い芯の凸性の補題：k ≤ 7 で凸（統合表 [076]）　　祖先の外
[C03] 初　隠れた凸性の命題：箱の上の極小はちょうど一つ（ρ = z² で狭義凸）
[C04] 読　λ*(12) ≥ 0.255・λ*(16) ≥ 0.305
[C05] 仮　一つの非退化な極小 ⇒ 小さい固有値が無い（Neumann の箱の角）
[C06] 仮　ブロックの LSI（ℓ_B ≥ 12）が端の値と ħ に一様 ⟸ [C03][C04][C05]
[C07] 読　ħ→0 の最適な道は ≤ 7 歩で角に着く（50 桁の浮動小数） ⟸ [C03]
[C08] 仮　一歩の凸性 κ₀ ≥ 0.055 ⟸ [C01][C07]
[C09] 仮　|W_ħ − W₀| = O(ħ ln(1/ħ))
[C10] 仮　√ħ の幅への集中・角の境界層の Doeblin ⟸ [C03][C07][C08][C09]
[C11] 仮　強い混合 TV(n) ≤ (1−δ)^⌊n/10⌋ ⟸ [C10]
[C12] 読　混合の長さ ≈ 9〜10・Langevin ≈ 0.46　　祖先
[C13] 仮　ブロックの LSI ＋ 強い混合 ⇒ 長さに一様な LSI
[C14] 仮　芯の LSI が k・ħ・端の値に一様 ⟸ [C06][C11][C13]
[103] 初　芯の Poincaré の一様性の仮定 ⟸ [C14]（LSI ⇒ Poincaré は典）
```

表 C2　第 23 部の量と、ブロックと混合の道での扱い

第 23 部の量	意味	ブロックと混合の道での扱い
芯の Poincaré の一様性の仮定（[103]）	芯の Poincaré 定数が芯の長さと端の値に一様（23-09・23-11）	ブロックと混合の道の結論 C14 から従う（LSI ⇒ Poincaré）。規約は 23-09 の $\hbar \int \lvert\nabla f\rvert^2 d\mu$ で揃えてある
窓の対数 Sobolev の閾の命題（[026]）	$A_W < A_{\max}(\hbar)$：窓の対数 Sobolev の道筋の残る一命題	通らない。ブロックと混合の道を選べば [026] と、区画の側の芯の道の区画の入力 6 行（[018]・[019]・[021]〜[024]）と読み [055]・[089] は結論の祖先から外れる
A_W	サイトの窓の印の周辺の LSI 定数	使わない
[007]・[008]・[046]・[047]・[082]	箱の側の芯の道の芯の行（芯の定数の三区分の命題とその入力）	使わない
共通の行（[001]・[002]・[003]・[005]・[006]・[009]〜[016]・[044]）	管・縮約したキンクの気体・交差項・箱の間の最大相関・相内の局所 Poincaré の条件の延長ほか	残る

数えと、閉じないもの。ブロックと混合の道を選ぶと、結論 [111] の祖先にある証明の無い行は、共通の仮定 13 行と読み 1 行（[044]）に、ブロックと混合の道の仮定 8 行（C05・C06・C08・C09・C10・C11・C13・C14）と読み 2 行（C04・C07）を足したものです。行の数は箱の側の芯の道（仮定 15・読み 3）・区画の側の芯の道（仮定 20・読み 3）より少なくありません。違いは作業の種類で、ブロックと混合の道の行は書誌（C05・C09・C13）・区間演算（C04・C07）・紙（C06・C08・C10・C11・C14）に分かれ、表 2 の「別の方法」「方法未定」に当たる行がありません。ただしこれは各行の筋を読んだ上での分類で、書き下しの途中で新しい障害が出ないことは保証されません。

ブロックと混合の道は分かれ道 [103] の一行を支える道で、[104] から先の幹は箱の側の芯の道・区画の側の芯の道と同じです。**共通の 13 行はブロックと混合の道を選んでも残ります。**そのうち [002]（管の Poincaré）と [005]（交差項の χ が一様）は方法未定、[003]・[006] と [014]（$\hbar < 0.005$ で一様な形、区間演算では届かない）は別の方法を要する行です（表 2）。だからブロックと混合の道が閉じても一段目は閉じません。§05 の「揃う $\hbar$」の問題も、[014] を通して残ります。

混合の長さに $\ln(1/\hbar)$ が残る場合。数値では、最悪の端の値からの影響が 10^{-2} 未満になる長さは $\hbar = 10^{-2}$ から 10^{-5} まで 9〜10 で動きませんが、全変動が 0.5 を切る位置は 5 から 8 へ対数的にゆっくり動きます 読 。$\ln(1/\hbar)$ の依存が残る可能性は消えていません。残った場合、ブロックと混合の道の結論の定数は $\hbar$ について $\ln(1/\hbar)$ の多項式で増え、二つの文で扱いが分かれます。(2) の冪の文は影響を受けません。C_P に $(\ln(1/\hbar))^p$ の因子が掛かっても、[044] の $\ln \xi \geq s/\hbar$ の下で $p \ln\ln(1/\hbar)/\ln \xi \to 0$ だからです 初 （[044] の上の代数）。一方、一段目の

上界の命題の $C_P \le K\xi^2 S_0/\hbar$ で K が $\hbar$ に依らないという形は許しません。K の一様性は交差項の χ が一様であること（交差項の一様性の仮定、[005]）を含み、交差項の一様性の仮定を標準の二尺度の議論で示すと χ は局所の定数 C_{loc} の二乗に比例して出る見込みなので、C_{loc} に対数の因子が入れば χ の一様性が崩れます 仮 。23-05 の (12) の第二項 $C_{\mathrm{loc}} D/(C\xi)^2$ は $D/(C\xi)^2$ が $e^{-2S_0/\hbar}$ の程度で小さいので対数の因子を許します。したがってブロックと混合の道の目標は、対数の因子を含まない形の芯の Poincaré の一様性の仮定と置くのが正しく、対数が残った場合に届くのは冪の文までです。

06

四つの条件に共通する条件 — 五つの前提

表 1 の行ごとの作業とは別に、四つの条件の全てに掛かる前提が五つあります。どれも一つの行を閉じても消えず、一段目を「閉じた」と言える形にするときに、文の側に書き込む条件です。

表 4　四つの条件に共通する前提

記号	前提	いまの状態	閉じるのに要るもの
C1	数の種類	読みの行は浮動小数の値（統合表の読 19 行）	結論の前提にある読みの行を、区間演算か紙の上界・下界に置き換える（表 1 の読みの行）
C2	引いた定理の書誌	主要な引用 26 のうち 19 は原典か二次資料で言明を確かめた。要取得 4・仮定に改めた行 3（23-14 表 2）	要取得の 4 件を取得して言明を確かめる。取れなければ「仮」のまま
C3	機械検査の範囲	Lean は代数と算術だけ。解析の定理は仮定として入力する（23-13 §05）	機械検査の範囲を広げることは結論の条件を減らさない。仮定の行を減らすのは紙と書誌
C4	揃う $\hbar$	全ての行が成り立つ $\hbar$ は無い（§05）	相内の局所 Poincaré の条件を $\hbar \to 0$ へ延ばす別の方法
C5	極限と正則性	$T \to \infty$ の極限の存在・正則性・最初の固有値の単純さは仮定（統合表の [001]）	表 1 の [001] と同じ

07

二段目以後の距離 — 目標の三つの水準と、β の上の段の数

一段目の距離は、表 1 の行の一覧でした。二段目（四次元格子・非可換）から先の距離は、行の一覧として書けるほどには言明が割れていません。この節は、四次元格子の目標を三つの水準で書いたときの姿と、β の上の段の数を、物理の外挿の目安として並べます。一段目から二段目以後へ持ち上がる見込みがあるのは文の形と道具の形だけで、定数や $\hbar$ の範囲が持ち上がらない理由は 23-03 §06 にあります。

「最も軽い粒子の質量が正」は、量子論のハミルトニアン H のスペクトルの言明 $\mathrm{spec}(H) \subset \{0\} \cup [\Delta, \infty)$、$\Delta > 0$ です（4-11）。格子から入る道では、同じ目標が三つの水準に割れます。

$$\text{(T1)}\ \ \xi(\beta) < \infty\ (\forall \beta),\ \ \xi(\beta) \to \infty\ (\beta \to \infty); \qquad \text{(T2)}\ \ \frac{m_{\mathrm{lat}}(\beta)}{a(\beta)} \to \Delta_\infty \in (0, \infty); \qquad \text{(T3)}\ \text{連}$$

表 5　目標の三つの水準と、緩和時間の仮定との関係

水準	中身	上の水準から足すもの	四次元での状態	緩和時間の仮定との関係
格子の目標の水準（式の (T1)）	各 β で相関長が有限、$\beta \to \infty$ で発散	—	未解決（格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）） 典	緩和時間の仮定は格子の目標の水準の後半を前提に置く文
物理単位の目標の水準（式の (T2)）	m_{lat}/a が正の有限値へ	格子間隔 $a(\beta)$ の決め方	未解決	緩和時間の上界の仮定と片側の橋（23-01 §06）がそろえば下の半分が従う
連続の目標の水準（式の (T3)）	$\mathbb{R}^4$ の上の非自明な理論で隙間が正	極限の存在（Wilson ループの極限の言明）・回転の回復の言明・OS 再構成の言明・非自明性の言明	未解決（問題文）。極限の存在と公理の側は、2026-11-10 に公開された構成が Wilson の格子ゲージ理論の極限として示している、と委員会が評価した（第 6 部）。隙間は示されていない（6-04）	緩和時間の仮定と橋がそろっても従わない（23-01 §08）

次に、証明の在る β と連続極限の側の β の隔たりを、格子を 2 倍に粗くする段の数で測ります。二ループの漸近スケーリングを、Lucini–Teper の $\beta = 2.60$ の値 $\xi = 1/0.514$ に合わせて延ばした物理の外挿で、定理の距離ではありません。

$$\xi(\beta) \ \propto\ \left(\frac{6\pi^2 \beta}{11}\right)^{-51/121} e^{3\pi^2 \beta/11}, \qquad k = \log_2 \frac{\xi_{\mathrm{target}}}{\xi_{\mathrm{start}}} \tag{4}$$

表 6　目標の相関長と、要る β・段の数 読 （二ループの外挿の値。窓の端は数値の窓の端 $\xi = 1.95$、曲率の端は一リンク積分の後の曲率の下界から出る $\beta < 0.2722$ の端 $\xi \approx 0.093$）

ξ_{target}	β（二ループ）	窓の端から	曲率の端から
10	3.243	2.36	6.75
100	4.136	5.68	10.07
1000	5.022	9.01	13.39
10^4	5.903	12.33	16.72
10^6	7.654	18.97	23.36

表 6 の数はどれも有限です。それでも距離が縮まらないのは、定理に要るのが「ある目標まで」ではなく「すべての目標で、同じ定数で」だからです。比喩で言えば、階段の段数ではな

く、どの段でも踏み外さないという保証が欠けています。強結合の側の定理（Shen–Zhu–Zhu の $\beta < 1/12$ 典 ）の定数を改善しても、手にある β の範囲が広がるだけで、この一様性には触れません。曲率の端 0.2722 は、曲率の下界（Lean）から出る閾で、隙間へ進む段は概略です 仮 。

一段目の言葉に置き直すと、同じことが $\hbar$ について起きています。§05 のとおり、$\hbar$ の窓をいくら広げても二重井戸の冪の言明 (2) は出ず、要るのは $\hbar \to 0$ で一様な形の命題でした。四次元格子では $\beta \to \infty$ で一様な形、一段目では $\hbar \to 0$ で一様な形——階段のどの段でも、足りないものの形は同じです。

寄り道：φ^4_4 の教訓 — 極限まで届いても、着く先が自明かもしれない

飛ばしてよい小節です。四次元のスカラー場 ϕ^4 では、格子で切って自然に極限を取ると、着く先はガウス（自由場）になります（Aizenman–Duminil-Copin 2021、7-08） 典 。極限が在り、質量が有限に残っても、相互作用が消えていれば問題文の意味の解ではありません。表 5 の連続の目標の水準で非自明性の言明を別に書いたのはこのためで、緩和時間の下界の仮定が非自明性と別の文であること（23-01 §06）と同じ注意です。比喩で言えば、山頂に着いたと思ったら平地だった、という着き方がありえます。

08

距離の読み方 — 一行の結び

この章の距離を一つの矢印の図にまとめます。

$$\underbrace{\text{一段目の各行}}_{\text{表 1}} \xrightarrow{\hbar\to 0 \text{ で一様な形}} \text{冪の仮定 } (\xi^2)\text{（一段目）} \quad \cdots \quad \underbrace{\text{各 } \beta \text{ の定理}}_{\text{手にある}} \xrightarrow{\text{一様性（(}}$$

点線は含意ではなく、同じ形の文が二つの段に置かれていることを表します。(5) のどの矢印も証明されていません。一段目では、矢印の手前の行を一覧にし、二つの道に割り、各行に作業の種類を付けたところまでで、割ったことは整理であって矢印を短くしたことではありません。

一行で言えば、**足りないのは段の数ではなく、全ての尺度で同じ定数で成り立つという一様性**です。一段目ではそれが $\hbar \to 0$ で一様な相内の局所 Poincaré の条件と芯の行に、四次元格子では $\beta \to \infty$ で一様な上界の仮定と橋に、形を変えて現れます。

この部は緩和時間の仮定を軸に置いて、その一様性を一段目の行に割りました。緩和時間の仮定とは別の視点から同じ一様性を問う道は 第 24 部 で扱います。四段の階段のそれぞれについ

て、ハードル・既知の到達点・この本の道具で届くか・費用の種類を一枚の表に並べ直したものは 24-07 §04 にあります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
結論 [111] に要る行が、分かれ道 [103] で二つの道に割れること。箱の側の芯の道は仮定 15 行・読み 3 行、区画の側の芯の道は仮定 20 行・読み 3 行（統合表のデータからの数え）	どちらの道が易しいか。行の数は重さを表さない
各行を閉じるのに要る作業の種類（区間演算・紙・書誌・測定・別の方法・方法未定）と、記録にある費用の見積もり	見積もりの当たり。どの見積もりも走らせていない。見積もりの無い行の費用
全ての行が揃う $\hbar$ が無いこと、揃えるには相内の局所 Poincaré の条件を $\hbar \to 0$ へ延ばす別の方法が要ること、窓の計算機援用では (2) に届かないこと	相内の局所 Poincaré の条件の $\hbar \to 0$ の漸近。(2) そのもの
二段目以後の目標の三つの水準と、二ループの外挿での段の数（読み） 読	表 6 は外挿の目安で、相関長の定理ではない。三つの水準のどれも、この部は示していない
ブロックと混合の道（ブロックの LSI と強い混合）の行を表 C1 に置き、隠れた凸性の命題と凸性の閾＝最初の共役点を証明つきで示したこと 初 。ブロックと混合の道を選んでも共通の 13 行が残り、一段目が閉じないこと	ブロックと混合の道の仮定 8 行と読み 2 行。混合の長さに $\ln(1/\hbar)$ が残るかどうか

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1 の行の番号・内容・分類	本書	23-12 表 1。各行の出所は統合表の出所の欄
表 1・表 3 の作業と費用の見積もり	本書	各章の残件の節（23-06 §07・23-07 §04・23-09 §05・23-11 §07）。どれも見積もりで、走らせていない
表 1・表 2・図 1 の数え	文字の処理	統合表と同じ行と辺のデータに費用の列を足し、[103] の片方を選んで結論から前提の向きに節点を集める小さな台本（数学の計算ではない）
(3)・表 5・格子の相関長の問題	典	A. Jaffe, E. Witten, Quantum Yang–Mills Theory, Clay Mathematics Institute (2000)。S. Chatterjee, arXiv:1803.01950 §5
(4)・表 6	読	二ループの係数（4-06 の出典表）と B. Lucini, M. Teper, JHEP 0106 (2001) 050, hep-lat/0103027 表 1 の $\beta = 2.60$ の値。外挿の数は検討の記録の表の写し
強結合の範囲 $\beta < 1/12$	典	H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, Commun. Math. Phys. 400 (2023) 805–851, arXiv:2204.12737（23-01 の出典表）

もの	種別	出典・道具
ϕ^4_4 の自明性	典	M. Aizenman, H. Duminil-Copin, Ann. of Math. 194 (2021) 163（7-08 の出典表）
ブロックと混合の道の行（表 C1）・数値の行 C04・C07・C12	初・読・仮	隠れた凸性の命題と C01 は本文の証明。C04・C07・C08 の $\kappa_\hbar$・C12 は記録の浮動小数の数値（C07 は 50 桁、区間演算ではない）。仮の行の典の候補（Helffer–Nier、Le Peutrec、Menz–Schlichting、Varadhan 型の極限、Zegarlinski、Martinelli–Olivieri、Topkis の単調比較の定理）は書誌を照合していない

この章で使った語 ― 距離（一覧）・分かれ道・箱の側の芯の道・区画の側の芯の道・作業の種類（区間演算・紙・書誌・測定・別の方法・方法未定）・揃う $\hbar$・目標の三つの水準・一様性。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-16 主張しないこと ― この部が示さないこと・強く読まないこと・偽とも言わないことを、本文の文との対応表つきで。

2026-10-09 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 23 部 一本目の道（前半）— 時間の方向から 示さない・強く読まない・偽とも言わない · Kiichi, Shiori and Rin

主張しないこと — 示さない・強く読まない・偽とも言わない

この章は未解決の問いの地図です。§01・§06 は案内です。

この章で分かること — 第 23 部が主張しない事柄の一覧（十四項目）と、各項目を本文のどの章のどの文が支えるかの対応表。主張しないことと反対を主張することの違い。一段目の命題・Lean の定理・計算機援用・読みのそれぞれについて、条件を外すとどう読み違えるかの例。

前提となる章 — なし。どこから読んでもよい章です。語は 23-01 §05（拡散型緩和時間の仮定・緩和時間の上界の仮定・緩和時間の下界の仮定）、23-00 §01（五つの札）、23-05（二重井戸の緩和時間の上界の命題と二重井戸の四条件）で定めています。

先に言うこと — 水準は〔二〕です。この本は、ヤン–ミルズの存在と質量ギャップの問題を解いていません。この部には連続極限の構成も、質量ギャップの証明もありません（連続極限の存在は、2026-11-10 に公開された構成が別の道で Lean で証明している、と委員会が評価した。第 6 部。質量ギャップはそこでも示されていない。6-04）。この章は、その事実を項目に割って書き出すだけで、新たな結果を足しません。この部は拡散型緩和時間の仮定を検討の軸に置いた部で、緩和時間の仮定を唯一の道とも正しい道とも主張しません。

この章の順序

1. 三つの意味 — 示さない／強く読まない／偽とも言わない（表 1）／寄り道：量化子の否定
2. 十四の項目と、それを支える本文の文 — 対応表（表 2）
3. 本体について — 問題文の主張・局所場の脚注・弱い存在の脚注（Jaffe–Witten の脚注）
4. 二重井戸の段について — 一段目の上界の命題は四つの条件の上の代数（表 3）
5. 届かなかったことは偽の証拠ではない — 迂回策の死・周期の箱の読み・下界の仮定と自由場（表 4）

6. 条件は要約で落ちる ― 本文の文と一行の要約（表 5）
7. 類比と他の文書 ― 判定しないこと・外へ出すときの約束

01

三つの意味 ― 示さない・強く読まない・偽とも言わない

数学の文章で「主張しない」と書くとき、意味は三つに分かれます。一つ目は**示していない**。問題の本体について、この部は何も示していません。二つ目は**強く読まない**。示したことには必ず条件や仮定が付いていて、条件を外した形で読むと、示していない文になります。三つ目は**偽とも言わない**。ある方法で届かなかったことは、その方法の性質であって、届かなかった命題が偽だという主張ではありません。

三つ目は論理の形で書くと区別がはっきりします。「P を主張する」を $\vdash P$ と書くと

$$\neg(\vdash P) \quad \text{と} \quad \vdash \neg P \quad \text{は別の文} \tag{1}$$

です。左は「P の証明を持っていない」、右は「P の否定の証明を持っている」です。この章の「主張しない」は、いつも左の意味です。比喩で言えば、地図に道が描いていないことは、そこに道が無いことの証拠ではありません。

表 1　この章の項目の分け方（番号は表 2 の項目）

種類	何を主張しないか	項目
示さない	$\mathbb{R}^4$ の上の存在と質量ギャップ・連続極限の構成・一段目の二重井戸の緩和時間の冪の言明	1・2・3・10
強く読まない	計算機援用・読み・Lean の定理・持ち上げ・緩和時間の仮定と質量ギャップの関係	4・5・6・7・11
偽とも言わない	道具が届かなかった命題・周期の箱で破れると読める上界の仮定	8・12・13
判定しない・数えない	既知の再導出・他の文書の正否・閉じていない命題の外への公開	9・14

寄り道：量化子の否定

飛ばしてよい小節です。「すべての f で $Q(f) \le C$」の否定は「ある f で $Q(f) > C$」です。記号で $\neg\forall f\, A(f) \iff \exists f\, \neg A(f)$。上界の仮定を偽と示すには反例の f の列が一本あれば足り、下界の仮定を偽と示すには「すべての f で比が $o(\xi^2)$」を示す必要があります。後者は上界の仮定と同じ「すべて」の型

の文で、試験関数を並べても出ません。いくつかの族が届かなかったことは、族を限った「すべて」（$\forall f \in \mathcal{F}$）で、族を外した「すべて」ではありません。

02

十四の項目と、それを支える本文の文

表 2 は、この部が主張しないことを一行ずつ書き、その行を支える本文の場所を並べたものです。「支える」とは、その章の文が、条件・仮定・範囲をすでに書いていて、この行はそれを一行に写しただけ、という意味です。

表 2　主張しないことと、それを支える本文の文

項目	主張しないこと	種類	支える本文の文（要旨）
1	ヤン–ミルズの存在と質量ギャップの問題の解決。連続極限の構成も、極限での質量ギャップの証明もここには無い	示さない	23-01 §08：四次元で手にあるのは反射正値性の保存の言明・OS 再構成の言明の定理と小さい β の無限体積の一意性の言明だけ（この部の筋で）。緩和時間の仮定と橋がそろっても無限体積の一意性の言明・Wilson ループの極限の言明・回転の回復の言明・OS 再構成の言明・非自明性の言明は従わない
2	一段目（0+1 次元の二重井戸）でも、緩和時間の仮定（二重井戸の冪の言明）は示していない。一段目の上界の命題は四つの条件の上の代数で、四つの条件はどれも仮定の行を残す	示さない	23-05 §08：四条件の現在地。23-12 §07：結論に要る仮定の行は 15 行か 20 行
3	四つの条件の全ての行が同時に成り立つ $\hbar$ は、まだ一つも無い	示さない	23-12 §06：相内の局所 Poincaré の条件の節点と鞍点の管の条件の範囲が交わらない。23-15 §05
4	計算機援用の結果は、計算した窓・節点の中の不等式で、窓の外と $\hbar \to 0$ については何も言わない	強く読まない	23-08 §10：計算機援用が言わないこと（窓の外・$\hbar \to 0$・連続と格子の差）
5	読み（浮動小数・Monte Carlo・当てはめ・族の下界）は、上界としても下界の証明としても使っていない	強く読まない	23-00 表 1：札「読」が保証しないこと。23-12 表 1：読の 19 行はどれも分類「読」のまま
6	Lean の定理は仮定から結論への代数を検査したもので、仮定の正しさと、実数を物理の量と読むことは検査していない	強く読まない	23-13 §05：四つの限界（仮定の正しさ・対象の符号化・結論を定義に置く・依存の円）
7	一段目から二段目以後へは、文の形と道具の形が持ち上がる見込みを述べるだけで、含意の定理は無い	強く読まない	23-03 §06：持ち上がるもの・持ち上がらないもの（定数と $\hbar$ の範囲は持ち上がらない）

項目	主張しないこと	種類	支える本文の文（要旨）
8	ある道具で届かなかったことは、その道具の性質で、届かなかった命題が偽だという主張ではない	偽とも言わない	23-10 の範囲の表：迂回策の「死」は道具の性質。23-02 §08：四次元格子の道が止まった場所
9	既知の定理の再導出は成果に数えない。構成を主張する他の文書の正否は判定しない	判定しない	23-14 §03：引いた定理の支え。23-14 §07：外の文書からは型だけを取り、出典を挙げて判定はしない
10	四次元格子の側の記録（緩和時間の仮定・三つの鎖・取りこぼしの和）も、仮定のまま	示さない	23-01 §05：三つの鎖はどれも仮定。23-02 §07：残ったのは代数と読み
11	上界の仮定は、片側の橋の仮定のもとで格子の物理単位の隙間の下界を含意するが、逆は一般には偽で、Wilson 測度の類では未決。緩和時間の仮定は質量ギャップそのものではない	強く読まない	23-01 §06 の (4)（片側の橋）と (5)（円の上の自由な粒子の反例：円の上で $\Delta > 0$ かつ $C_P = \infty$）
12	迂回策の「死」は、その組み立ての天井が要る値を越えないという意味で、残る一命題が偽だという意味ではない	偽とも言わない	23-10 §03：殺した一行は道具の不等式の行
13	周期の箱の四次元格子で上界の仮定が破れるという読みは、文献の数値と「HMC と Langevin は同じ普遍類」という予想の上の条件つきの読みで、上界の仮定が偽だという定理ではない	偽とも言わない	23-01 §05 の注（位相の区画と体積の順）・23-02 §05
14	仮定の行が残る命題を、結果として外へ出さない。外に出すのは、条件を全て閉じたものだけ	数えない	23-12 §08：統合表は地図で、進み具合の分数ではない

項目 1〜10 は部の骨子で、11〜14 は各章の記述から足したものです。どの行も、本文の条件を一行に縮めたもので、本文を読めば条件の全体が分かるように書いてあります。

03

本体について — 問題文の主張には何も言わない

問題文（0-03）が求めるのは、コンパクトな単純ゲージ群ごとに $\mathbb{R}^4$ の上の量子ヤン–ミルズ理論が存在し、公理（4-09・4-10）を満たし、質量ギャップを持つことです。

$$\text{存在（公理を満たす）} \quad \wedge \quad \mathrm{spec}(H) \subset \{0\} \cup [\Delta, \infty),\ \Delta > 0 \tag{2}$$

この部は (2) のどちらの部分についても何も示していません（項目 1）。問題文の局所場の脚注・弱い存在の脚注は、弱い存在（コンパクト性）だけによる極限を解から除きます 典 。部

分列の極限がコンパクト性からただで出ることは、この水準の話で、そこから一意性も質量ギャップも出ません。

この部が扱う緩和時間の仮定は、(2) の Δ（ユークリッドの時間の隙間）を、Langevin 力学の緩和の時間 C_P に言い換えた文です。二つは別の量で、片側の橋が成り立つ場合に限って上界の仮定から Δ の下界へ一方向に渡れます（項目 11、23-01 §06）。緩和時間の仮定を検討の軸に置いたのは、格子で計算でき、凸性と Poincaré 不等式の道具があり、機械検査が届く言葉だからで、この言い換えが問題を解く唯一の道だという主張ではありません。別の視点は 第 24 部 に置きます。

04

二重井戸の段について — 一段目の上界の命題は四つの条件の上の代数

一段目の中心の文は一段目の上界の命題です：「二重井戸の四条件の上で $C_P \le K\xi^2 S_0/\hbar$、よって二重井戸の冪の言明」（23-05 §04）。この文を「二重井戸で二重井戸の冪の言明が示された」と読むのは強すぎます（項目 2）。四つの条件の下に、統合表の仮定の行が 15 行か 20 行（二つの道のどちらか）と、読みの行が 3 行あるからです（23-15 表 1）。

組み立ての代数は Lean で検査されていますが、定理名だけが要約に残ると条件が落ちます。表 3 は、この部の定理名のうち、仮定を落とすと強く読まれやすいものです（項目 6）。

表 3　定理名・仮定・強く読まないこと

定理名	仮定（要点）	強く読まないこと
`H3_H4_compose`	箱の積の不等式・箱の隙間の不等式・$D = \hbar/S_0$・$n, \hbar, S_0 > 0$・$c_{\mathrm{alt}} < 1$	「一段目の上界の命題が示された」ではない。相内の局所 Poincaré の条件と鞍点の管の条件は箱の隙間の仮定の中に入っている
`power_H_of_kink_ratio`	$0 < K, s, \delta$・$1 \le R \le K/\hbar$・$s/\hbar \le \ln \xi$	「二重井戸の冪の言明が示された」ではない。$R \le K/\hbar$ が一段目の上界の命題の結論そのもの
`H1_assembly`	名前つきの七つ（分解・細かい側・Helffer の判定・余白・$0 < \lambda$・交差の行・率の条件）	六つの節点の命題で、$\hbar$ に一様な相内の局所 Poincaré の条件ではない
`cloc_term_vanishes`	芯の作用の障壁の仮定・ξ の読み・$\Delta S_* < 2S_0$	局所の項が消えるのは芯の作用の障壁の仮定を仮定したとき。作用の障壁の値は $\hbar = 0$ の読み
`path5_conditional`	剰余の不等式・代理の比・稀さ・算術の余裕（名前つき）	窓の下の端のスカラーの筋の命題で、残る一命題への含意の辺は無い

定理名	仮定（要点）	強く読まないこと
`win_qfree_window_le_of_interval_table`	区間演算の出力の表	窓の中の不等式（項目 4）。統合表で結論への道の上に無い
`hup_is_gap_positivity_of_lower`	$0 < m_{\mathrm{lat}} \cdot \kappa / m_{\mathrm{lat}}^2 \le C_P \cdot C_P \le K\xi^2$	片側の橋は仮定として入る。Wilson 測度で橋が成り立つことは示していない（項目 11）
`drainExp_eq_zero_iff`	$0 \le \eta \le 2 \cdot \theta \ge 0$	四次元格子の側の指数の代数。物理の量への当てはめは仮定の上（項目 10）

例。`power_H_of_kink_ratio` は「比 R が 1 と $K/\hbar$ の間にあり、$\ln \xi$ が $s/\hbar$ 以上なら、$\ln C_P / \ln \xi \to 2$」という代数です。仮定の $R \le K/\hbar$ を外して「Lean で二重井戸の冪の言明」と書けば、示していない文になります。正しい要約は「二重井戸の冪の言明は一段目の上界の命題の結論から代数で従う（Lean）」です。

05

届かなかったことは偽の証拠ではない

迂回策の死（項目 8・12）。窓の対数 Sobolev の道筋の残る一命題に向けた迂回策のうち 13 本は「死」と判定しました（23-10 §03）。死とは、その組み立てで得られる上界の天井が、要る値を越えないということです。残る一命題 [026] が偽だという意味ではなく、別の組み立てで閉じる可能性について何も言いません。

周期の箱の読み（項目 13）。四次元格子では、周期境界の箱で位相電荷の自己相関時間が ξ^2 より速く伸びると報告されていて、$\tau_{\mathrm{int}} \le C_P$ と合わせると上界の仮定は周期の箱で破れると読めます（23-01 §05 の注）。この読みは、文献の数値 読 と、HMC と Langevin が同じ普遍類だという予想 仮 の上に立っています。だからこの部は「四次元格子で上界の仮定は偽」とも主張しません。主張するのは、緩和時間の仮定の言明をどう直すかが問いとして残る、ということだけです。

下界の仮定は非自明性ではない。下界の仮定が避けるのは物理の質量が無限大に潰れることだけで、相互作用の有無は問いません。相互作用の無い理論で緩和時間の仮定を計算すれば確かめられます。格子の質量 m の自由場では、経路の測度の Poincaré 定数は共分散の最大固有値で、

$$C_P = \frac{1}{m^2}, \qquad m^2 = 4 \sinh^2 \frac{1}{2\xi}, \qquad \frac{C_P}{\xi^2} = \frac{1}{4\xi^2 \sinh^2(1/2\xi)} = 1 - \frac{1}{12\xi^2} + O(\xi^{-4}) \tag{3}$$

表 4　格子の自由場の C_P/ξ^2 初 （閉じた式 (3) の値）

ξ	C_P/ξ^2	$1 - 1/(12\xi^2)$
1	0.920674	0.916667

ξ	C_P/ξ^2	$1-1/(12\xi^2)$
2	0.979425	0.979167
8	0.998699	0.998698
64	0.999980	0.999980

比は $\xi \to \infty$ で 1 に近づくので、緩和時間の仮定の上下の両方が成り立ちます。緩和時間の仮定も下界の仮定も相互作用の無い理論で成り立つ文で、緩和時間の仮定から非自明性の言明は出ません（23-01 §06）。

06

条件は要約で落ちる — 本文の文と一行の要約

主張を強く読む誤りは、多くの場合、本文の文を一行に縮める段で起きます。表 5 は、本文の条件つきの文と、条件を落としきった一行を並べたものです。右の列の文はどれも、この部が示していない文です。

表 5　本文の文（条件つき）と、条件の落ちた一行（右はどれも誤り、または示していない文）

話題	本文の文	条件の落ちた一行
窓の外の鎖	$\hbar$ の窓 $[3\cdot10^{-4},3\cdot10^{-3}]$ の全体で $q_{\mathrm{free}}\le 0.998854904$ 機（IEEE の正しい丸めを前提・外向きの幅）	鞍点の管の条件の鎖の条件が閉じた
環の外の鎖	窓の全体で $q_{\mathrm{out}}<1$ 機 （ピン ≤ 0 の条件つき。境の段は 1.004〜1.045 の読み）	環の継ぎ目が閉じた
箱の間の混ざり	$c_{\mathrm{alt}}=0.731/0.410/0.138$（$C=2/4/8$、縮約した模型の値） 読	箱の交互の最大相関の仮定が成り立つ
相内の局所 Poincaré の条件	六つの節点で余白 ≥ 0.067（端 $[0,2.5]^2$） 機 、定数 $C\le 1.6\times10^{10}$（節点の命題）	相内の局所 Poincaré の条件は示された
一段目の上界の命題	二重井戸の四条件の上の代数（Lean は箱の合成の代数）	二重井戸で二重井戸の冪の言明が示された
Feynman–Kac の筋	$\sup\lvert\nabla\psi\rvert^2$ の下からの読み 0.433 ± 0.007（閾の 0.54 倍、$\hbar=10^{-3}$） 読 、紙の上界は閾の約 1000 倍	Feynman–Kac の筋の仮定は閾の内に収まる
周期の箱	文献の数値と予想の上で、上界の仮定は周期の箱では偽と読める	四次元で上界の仮定は偽

表 5 の誤りの型は二つです。一つは範囲（窓・節点・模型の値）が落ちる型、もう一つは分類（読・機・仮）が落ちる型です。どちらも、要約の一行に条件の語を残せば防げます。

07

類比と他の文書 — 判定しないこと・外へ出すときの約束

物理の側の言葉を借りた箇所は、借りた先の水準を引き継ぎます。ホログラフィーは予想で、それを使った対応表は辞書であって証明された同値ではありません。完全な族が $d \le 4$ で在ることの「4」は格子の組合せの数で、物理の時空の次元とは関係のない一致です（23-02 §02）。一段目と四次元格子の対応（$\hbar \to 0$ と $\beta \to \infty$）も類比で、対応の定理ではありません（23-03 §06）。

構成を主張する他の文書について、この部は正否を判定しません（項目 9）。外の文書から取り入れたのは、依存グラフの読み方の型（結論を定義に置く閉じ方・依存の円）だけで、それも出典を伏せた型として書きました（23-13 §05・23-14 §07）。

最後に、外へ出すときの約束です（項目 14）。この部の命題は、仮定の行が一つでも残る限り、結果として外へ出しません。外へ出すのは、全ての条件を閉じ、機械検査と書誌の確かめを通したものだけです。それまでの記述は、どの行が閉じていてどの行が閉じていないかの地図として置きます。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
この部が問題文 (2) について何も示していないこと。主張しないことの十四項目と、それを支える本文の場所（表 2）	(2) の真偽。連続極限の存在。体積に一様な隙間
表 3 の定理名の仮定（各章の言明の写し）	仮定の行の正しさ
初 格子の自由場で $C_P/\xi^2 = 1 - 1/(12\xi^2) + \cdots$ と緩和時間の仮定が成り立つこと（閉じた式）	相互作用のある四次元の測度で C_P と ξ^2 を比べる定理（どちらの向きにも無い）
周期の箱で上界の仮定が破れるという読みの条件（文献の数値と予想）	四次元格子で上界の仮定が偽であること・真であること

出典と再現

もの	種別	出典・道具
問題文・局所場の脚注・弱い存在の脚注	典	A. Jaffe, E. Witten, Quantum Yang–Mills Theory, Clay Mathematics Institute (2000)（0-03 の出典表）
表 2 の各行	本書	表の右の列の章と節
表 3 の定理名と仮定	Lean	言明は 23-13 §03 と各章の分類表
(3)・表 4	初	閉じた式。$1/(4\sinh^2(u/2)) = 1/u^2 - 1/12 + O(u^2)$ の展開

もの	種別	出典・道具
表 5 の本文の文	本書	23-07 §03・23-08 §05・23-11 §02・23-06 §04・23-09 §05・23-01 §05

この章で使った語 — 示さない・強く読まない・偽とも言わない・量化子の否定・片側の橋・迂回策の死・要約で落ちる条件。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-17 ひらめきと小さな問い — 一段目の検討で繰り返し役に立った見方と、卒業研究の大きさで決着のつく問い。

2026-10-09 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 23 部 一本目の道（前半）— 時間の方向から 着想の型・捨てた仮説・小さな問い · Kiichi, Shiori and Rin

ひらめきと小さな問い — 手順として残る見方と、決着のつく問い

この章の §01 は案内、§02〜§04 は未解決の地図、§05 は本書の検討です。

この章で分かること — 一段目の検討の途中で、繰り返し役に立った見方を、「どんな問題でもこの手順を踏む必要がある」という形の十二の着想にまとめたもの。各着想に、読者が手で確かめられる小さな問いを一つずつ。捨てた仮説とその理由の表。卒業研究の大きさで決着のつく問いの一覧と、一問を決着の形まで進めた例題。

前提となる章 — 着想の材料は 23-06〜23-11 の各章です。各着想の末尾に、その見方が働いた章を書きます。問いの前提は各問の欄に書きます。

先に言うこと — 水準は〔二〕〜〔三〕です。ここに並ぶのは検証の前の着想と問いで、定理でも結果でもありません。どの問いが決着しても、質量ギャップの証明には届きません。決着しても何が動かないかを、各問に書きました。

この章の順序

1. 着想の読み方 — 三つの状態と、残す基準（表 1）
2. 十二の着想と小さな問い — 払い方・住所・閾・向き・順序
3. 捨てた仮説 — 元の形・直った形・根拠（表 2）
4. 卒業研究の大きさの問い — 十七問の一覧（表 3）
5. 例題：一問を決着の形まで — Hermite の族の $1 - \lambda_k$（表 4）

01

着想の読み方 — 三つの状態と、残す基準

検討の途中では、結果とは別に「見え方の転換」が書き留められます。それらは三つの状態に分かれます。**着想のまま**（検査を受けていない）、**確かめた形**（小さな模型や閉じた式で一度は確かめた）、**既知と重なる**（芯が既知の定理の言い換えだった。着想に数えない）です。

この章に残す基準は一つです。誰が・いつ思いついたかではなく、**同じ型の問題に出会った別の読み手も、この手順を踏む必要がある**と言える形に書けるものだけを残します。例えば「上界を削る前に、要る値の因子を構造と道具に仕分ける」は、二重井戸を離れても意味を持つ手順です。逆に、ある数値がたまたま閾の近くにあったという観察は残しません。

四次元格子の側の着想を七つの型（下からは測れない／一次元に落とす／単位を落とす／反例と対照を先に／差の冪を見る／拡散型緩和時間の仮定は測度と形の組／状態空間のつながり）で読みました。表 1 はその七つと、この章の十二の着想との関係です。

表 1　七つの型と、この章の着想（右の列は §02 の着想）

型	一行	この章で続く着想
下からは測れない	平均や試験関数は C_P を下からしか押さえない	上界を削る前に、下界を一本測る
一次元に落とす	C_P の上界の道具は一次元で手に入る	凸性の閾は、Hessian にパラメータが入るかで決まる（閾より短く刻む）
単位を落とす	無次元比を主役にする	1/ħ は何に住むか（1/ħ の住む長さ）
反例と対照を先に	証明が成り立たない模型を先に挙げる	条件づけの壁が最小点を作る（最小点を先に数える）
差の冪を見る	冪を決めるのは量でなく打ち消しの残り	上界と読みの比を、打ち消しの段と向きの段に分ける
緩和時間の仮定は測度と形の組	Dirichlet 形の正規化を名指して書く	拡散型緩和時間の仮定の真偽は、座標（Dirichlet 形）で変わる
状態空間のつながり	定数の一様性より先に位相を疑う	座標で真偽が変わる着想・23-01 §05 の注

02

十二の着想と小さな問い

同じ場所を二度払っていないか

長い不等式の鎖では、一つの悪い場所（二重井戸では頂上の近く）を、二つの段がそれぞれ別の名前で払っていることがあります。区画の枠組みでは、Bochner の段と Gibbs の段が同じ頂上の近くを払い、一方の増幅の因子が全体に掛かっていました。負の曲率をもう一方の側へ移すと、増幅を通らずに済みます。同じ型で、二つの項が互いに補い合う勾配を使うときは、

分母を分け合って $(1+\sqrt{C})^2$ でなく $(1+C)$ に畳めることがあります。手順として言えば、**組み立てを詰める前に、各段が何を払っているかを場所ごとに書き出し、二度払いを探す**ことです（23-09 §02・23-10 の二度払いの型）。状態：確かめた形。

小さな問い 1。$\|u+v\|^2 \le (1+t)\|u\|^2 + (1+1/t)\|v\|^2$（$t>0$）を、三つのベクトルの和 $u+v+w$ に二回続けて使う組み立てと、三項を一度に $\|u+v+w\|^2 \le (1+s_1)\|u\|^2 + \cdots$ と配分する組み立てで、$\|u\|^2=\|v\|^2=\|w\|^2=1$ のときの最良の右辺を比べよ。二回続けた方はどこで同じ量を二度払っているか。

Poincaré の通貨とエントロピーの通貨

稀な事象を「稀さ」で払いたくなる場面があります。ところが Poincaré 不等式の側では、稀さは通貨になりません。Poincaré が見るのは出口の速さで、稀な状態に質量を載せても分散と Dirichlet 形の両方で質量が打ち消し合うからです。稀さを通貨にできるのはエントロピーの側（対数 Sobolev 不等式）だけですが、こちらは代わりに、試験関数が集まりうる最も稀な状態の $\ln(1/\nu)$ を払います。手順として言えば、**エントロピー型と分散型のどちらを使うかは、二つの稀さ（払いたい欠陥の稀さと、試験関数が集まりうる状態の稀さ）を並べて決める**ことです（23-10 の通貨の取り違えの型）。状態：確かめた形（二点の模型）。

小さな問い 2。二点 $\{0,1\}$ の上の測度 $\pi=(1-p,p)$ と、反転の速さ 1 の Dirichlet 形 $\mathcal{E}(f)=\pi_0\pi_1(f_1-f_0)^2$ を考える。Poincaré 定数は p に依らないことを示せ。対数 Sobolev 定数が $p\to 0$ で $\ln(1/p)$ の速さで伸びることを、二点の空間の既知の公式（Diaconis–Saloff-Coste）を引いて確かめよ。

$1/\hbar$ は何に住むか — 損の読みは、それが掛かる量と同じ長さで

頂上の台地では、$1/\hbar$ の大きさの定数を作る試験関数は、集団の一次の座標 $\sum z_j$ ではなく、頂上の角からの半径 $\sum z_j^2$ の関数でした。線形の集団座標を選ぶと、向きを取り違えます。また、$1/\hbar$ は台地の長さ $\ell \approx 0.34/\hbar$ に住んでいて、損を測るときはそれが掛かる量と同じ長さで測る必要があります。手順として言えば、**二尺度に分ける前に、下界を作る関数が粗い座標に住むかファイバーに住むかを確かめる**ことです（23-10 の 1/ħ の住所の型・23-09 §06）。状態：着想のまま（数値の読みで支えた形）。

小さな問い 3。$\mathbb{R}^k$ の上の測度 $\mu \propto e^{-V(|z|)/\hbar}$、$V(r)=(r^2-1)^2/8$ で、一次の関数 $f=z_1+\cdots+z_k$ と半径の関数 $g=|z|^2$ の比 $\mathrm{Var}(\cdot)/\mathcal{E}(\cdot)$（$\mathcal{E}(f)=\hbar\int|\nabla f|^2 d\mu$）を、$k=1$ と $k=2$ で $\hbar\to 0$ の主項まで比べよ。$k=2$ で μ が円環に集まるとき、遅い向きはどちらの関数が捉えるか。

条件づけの壁が最小点を作る

区間の端をちょうど固定して条件づけると、$\hbar = 0$ の最小点が全て壁の上に乗ることがあります。そのとき見えている「遅さ」や「双安定」は、模型の性質ではなく、条件づけが作った影です（芯の負の端の双安定は、キンクが一サイトずれたい配置を芯の区間に閉じ込めた影でした）。手順として言えば、**区画や条件づけの切り方を変えるたびに、壁の上に乗る $\hbar = 0$ の最小点を数えることを最初の検査にする**ことです（23-11 §06）。状態：確かめた形。

小さな問い 4。$V(x) = (x^2 - 1)^2/8$ を区間 $[0, b]$（$0 < b < 1$）に制限した測度 $\mu_\hbar \propto e^{-V/\hbar}\mathbf{1}_{[0,b]}$ は、$\hbar \to 0$ でどこに集まるか。その近くで $\mu_\hbar$ を指数分布で近似し、$\mu_\hbar$ の Poincaré 定数（Dirichlet 形 $\hbar \int f'^2 d\mu$）の $\hbar \to 0$ での振る舞いを $|V'(b)|$ で書け。壁を $b = 1$ に動かすと何が変わるか。

内側を一様に閉じる前に、外側で何が掛かるかを先に書く

入れ子の評価では、内側の定数を $O(1)$ で押さえようとして詰まることがあります。ところが外側の式で、その定数に小さな因子が掛かっているなら、内側に要る精度はずっと緩くなります。箱の隙間の命題では局所の項に $e^{-2S_0/\hbar}$ が掛かるので、芯の定数は $O(1)$ でなくても $e^{\Delta S/\hbar}$（$\Delta S < 2S_0$）の大きさで足りました。手順として言えば、**内側を一様に閉じる前に、外側の式でその量に何が掛かるかを先に書き、内側に要る精度を外側の尺度との比で決める**ことです（23-11 §06）。状態：確かめた形（作用の障壁の読みは $\hbar = 0$ の値）。

小さな問い 5。$K(\hbar) = A + e^{-2S_0/\hbar} B(\hbar)$ が $\hbar \to 0$ で有界であるために B に要る条件を書け。$B(\hbar) \le c\,\hbar^{-p} e^{\Delta S/\hbar}$ の形なら、ΔS と $2S_0$ と p の関係はどうあればよいか。$\Delta S = 2S_0$ のちょうどの場合は何が要るか。

パラメータの sup は閾のすぐ外で取られる

長さ k の芯の定数を k について一様に押さえるとき、難しいのは長い芯ではなく、凸性が失われる閾のすぐ外（$k = 8$、両端が頂上）でした。閾の内側は凸性で只、遠く外側は箱への帰着で飽和し、その間の一点が sup を取ります。手順として言えば、**パラメータについての sup で詰まったら、まず閾の位置を求め、そのすぐ外の値を名指して別に押さえる**ことです（23-11 §05）。状態：確かめた形（閾は閉じた式）。

小さな問い 6。$\kappa(k) = 8\sin^2\!\big(\pi/(2(k+1))\big) - \tfrac{1}{4}$ が負になる最小の k を求めよ（23-09 §06 の式と同じ）。$\kappa(k)$ は $k \to \infty$ でどう振る舞うか。閾が $k = 8$ にあることと、sup が $k = 8$ で取られることとは、同じことか別のことか。

除外する集合の閾は、下流の不等式が許す質量で決める

悪い集合を除外して残りで評価するとき、閾をどこに置くかは、悪い集合の側の都合ではなく、その集合の質量を受け取る下流の不等式が何を許すかで決まります。区画の枠組みでは、窓の印の閾と欠陥の閾が食い違ったために、印で決まる集合で欠陥を含むものが全空間しか無くなり、閉じる条件が字義どおりには何も与えていませんでした。手順として言えば、**合成する条件の一つ一つが、同じ閾の定義の上で成り立っているかを字義どおりに確かめ、閾は下流が払える質量から逆算する**ことです（23-09 §04）。状態：確かめた形（可測性の一行）。

小さな問い 7。一サイト $z \in \mathbb{R}$ で、印 $\sigma = \mathbf{1}\{z \le -\theta_\sigma\}$ と欠陥の集合 $N = \{-\theta_B < z \le -\theta_\sigma\}$（$\theta_\sigma < \theta_B$）を考える。$\sigma$ の値で決まる集合（σ について可測な集合）で N を含むものを全て挙げよ。$\theta_\sigma = \theta_B$ にすると何が変わるか。

凸性の閾は、Hessian にパラメータが入るかで決まる

端の値の sup で詰まったとき、その端の値が Hessian に入っているかを見ると道が分かれます。最近接の二次の結合で端の値が一次で入るだけなら、Hessian は端の値に依らず、凸性は端の値に一様です。だから凸性の閾より短く刻めば、端の値の sup は只になり、代価は全て刻み目の相関（最大相関）の側へ移ります。手順として言えば、**パラメータの端で詰まったら、まず Hessian にそのパラメータが入るかを確かめ、入らないなら凸性の閾より短く刻み、継ぎ目の相関だけを別に勘定する**ことです（23-11 §05）。状態：確かめた形。

小さな問い 8。$S(x_1,\dots,x_k) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(x_{j+1}-x_j)^2}{2\varepsilon} + \varepsilon \sum_{j=1}^{k} V(x_j)$、$x_0 = a$・$x_{k+1} = b$ を固定した測度 $e^{-S/\hbar}$ で、Hessian が a, b に依らないことを確かめよ。$V'' \ge -\frac{1}{2}$（$V = (x^2-1)^2/8$ の頂上の値）のとき、Hessian の最小固有値が正になる k の範囲を ε で書け（$\varepsilon = \frac{1}{2}$ で小さな問い 6 の $\kappa(k)$ と比べよ）。

上界と読みの比を、打ち消しの段と向きの段に分ける

上界 U と下からの読み L が大きく離れているとき、比 U/L を一つの数で見ても、どこで失っているかは分かりません。間に「同じ経路で、打ち消しを捨てる前の量」R を挟んで、R/L（打ち消しの段）と U/R（向きの段）に分けると、Feynman–Kac の筋では前者が 1.2 前後、後者が 1000 を超え、損はほぼ全てスカラーの Grönwall が向きを捨てる段にありました（23-09 §05）。手順として言えば、**上界と読みの隔たりは、段ごとの比に割ってから改良の的を決める**ことです。状態：確かめた形（読みの比）。

小さな問い 9。$\dot{X} = -CX$、$C = \mathrm{diag}(\lambda, \Lambda)$（$0 < \lambda < \Lambda$）で、初期値 $g = (0, 1)$（硬い向き）のとき、$\int_0^T |X_t|\,dt$ の真の値と、スカラーの Grönwall $|X_t| \le e^{-\lambda t}|g|$ から出る上界を比べよ。比は Λ/λ でどう伸びるか。行列のまま評価すると何が戻るか。

上界を削る前に、下界を一本測る

上界の組み立てを何段も詰めても届かないとき、先に同じ量の下界を試験関数で一本測ると、問題が技法にあるのか目標にあるのかが分かります。下界が目標を越えていれば、上界の改良は無意味です。区画の枠組みでは、伝播の定数の下界が要る値の数倍にあることが分かって、上界の床を削る作業の意味が変わりました。手順として言えば、**上界の床を削る前に、要る値と最良の定数の下界を並べる段を置く**ことです（23-09 §03・23-10 §02）。状態：確かめた形。

小さな問い 10。升 L 個の一本道（一様分布・$\mathcal{E}(f)=\frac{1}{L}\sum (f_{i+1}-f_i)^2$）で、「$C_P \le L^2/12$」という目標を、試験関数 $f_i = i$ 一本で偽と示せ（$\mathrm{Var}(f)/\mathcal{E}(f) = L(L+1)/12$）。真の値 $1/(2(1-\cos(\pi/L)))$（23-00 §04）とも比べよ。

障害は消えずに移る — 移った先を一行ずつ記録する

定式を変えると、障害が消えたように見えて、別の場所に同じ形で現れることがあります。一段目では、頂上の一サイトの曲率が結合に $\frac{1}{4}$ 足りないという一つの数が、芯の塊の Poincaré・斜面の縮みの比が 1 に近づくこと・頂上にピン留めした裾の比が 1 を超えること、と形を変えて三度戻りました（23-09 §06 の共通の壁）。手順として言えば、**定式を変えるたびに「障害がどこへ移ったか」を一行ずつ記録し、移った先の式が同じ数で書けるかを確かめる**ことです。同じ数で書けるなら、それは道具の欠陥ではなく、対象の構造です。状態：確かめた形（共通の壁の式）。

小さな問い 11。三重対角行列 $M_k = \mathrm{tridiag}(-2,\, 4-\frac{1}{4},\, -2)$（$k\times k$、両端は Dirichlet）の最小固有値を閉じた形で求め、$\kappa(k)$（小さな問い 6）と比べよ。対角優位 $\frac{15}{4} < 4$ が破れていることと、最小固有値が $k \ge 8$ で負になることは、どう関係しているか。

拡散型緩和時間の仮定の真偽は、測度だけでなく座標（Dirichlet 形）で変わる

拡散型緩和時間の仮定は測度の文ではなく、測度と Dirichlet 形の組の文です。同じ平衡の測度でも、どの変数を独立に動かす力学かで、隙間の大きさが $O(1)$ にも、体積の一辺の二乗に反比例する大きさにもなります。保存する量（隣どうしで受け渡すだけの量）がある力学では、そのむらは拡散でしか均されないからです。手順として言えば、**緩和時間の仮定を問う前に、どの座標の力学かを名指し、その力学に保存量があるか、保存がどの長さで壊れるかを先に確かめる**ことです（23-01 §05。保存が壊れる長さとの比べ方は 第 24 部）。状態：着想のまま（自由場の近似で確かめた形）。

小さな問い 12。L 個の独立な標準正規の積の測度で、(a) 各座標を独立に Ornstein–Uhlenbeck で動かす力学と、(b) 隣どうしで量を受け渡し和 $\sum x_i$ を保つ力学（和を固定した

測度の上）の隙間を比べよ。(b) の隙間が $4\sin^2(\pi/(2L))$ の形になること、それが静的な相関の長さ（ここでは 0）と関係しないことを確かめよ。

03

捨てた仮説 — 元の形・直った形・根拠

捨てた仮説とその理由は、同じ誤りを避けるための情報です。表 2 の上の六行は一段目の検討で、下の四行は四次元格子の側で捨てたものです。

表 2　捨てた仮説・訂正された着想

元の形	直った形	根拠
凸な芯で局所 Poincaré が出る	芯の外への小旅行の作用が S_0 よりずっと小さく、長さ ξ の区間には小旅行が指数個入る	小旅行の作用の読み（23-06 §03 の二尺度へ）
壁から離れれば凸性は良くなる	逆。端を壁へ押し付けると分散が下がり Hessian が上がる。離すとこの助けだけが消える	端の値ごとの Hessian の比較（23-06 §04）
塊を大きくすれば、塊ごとの凸性で鎖が組める	塊の最悪の凸性は塊の長さとともに減り、塊どうしの結合は減らない	共通の壁の式（23-09 §06）
時間平均した作用素の最小固有値で縮みを押さえられる	偽。使えるのは最小固有値の時間平均だけで、これが向きを捨てる	反例の代数（Lean `mbar_bound_false`、23-09 §05）
点ごとの読みが稀な配位で特異なら、真の勾配も特異	真の勾配の上限を決めるのは点ごとの最小でなく、導関数の流れの減衰の速さ	表示 $\nabla\psi = \int \mathbb{E}[J_t^{\top}\nabla G]\,dt$（23-09 §05）
定数を鋭くする道は $\hbar$ をどこまでも下げられる	凸な半径（約 0.45）で止まり、その先は誤差の項が本物の大きさになる	節点の余白の読み（23-06 §07 の $\hbar < 0.005$ の行へ）
$C_P \asymp \xi^2$ はふつう成り立つ	緩和時間の仮定は動的指数 $z = 2$ という固有の主張	二次元 Ising の熱浴で $z \approx 2.17$
可換の反例は「非可換性が必須」を示す	「第二の小さな径数を禁じる入力」が必須	三次元 $\mathbb{Z}_2$ は可換でも一尺度が保たれる（17-12）
ホログラフィーの密度は対数凹でない	符号が逆（$W'' = -2B''$）	一次元の模型の判定
ゲージ固定の数値は閉じ込めの性質	四次元のコンパクト $U(1)$ の数値で、$SU(2)$ では未測定	23-02 §04

誤りの型は二つで、どちらも要約の一行に上げる段で起きます。一つは条件（群・模型・範囲）が落ちる型、もう一つは「点ごとの量」と「測度の上の量」を取り違える型です。表 2 の上の六行のうち四行は後者です。

04

卒業研究の大きさの問い — 十七問の一覧

「小さな問い」は三つを満たす問いです。答えの形（在る／無い、定数の値、不等式の成否）が先に決まっていること。道具が手元にあること（python3 と NumPy・SciPy、SAT ソルバー、区間演算、Lean と Mathlib、文献の検索）。数学科か物理学科の三・四年生が卒業研究の期間で決着をつけられる見込みがあること。表 3 の一列目は問いの短い名です。

表 3　十七の問い（「決着しても動かないもの」は、その問いが決着しても変わらないこの部の行）

番号	問	一行	道具	決着の形	決着しても動かないもの
1	k=3 胞体の完全な族	$k=3$ 胞体の完全な族は $d=9$ で在るか	SAT・Lean	周期の箱での構成か、箱の非充足の反駁の記録	一リンク積分が一段きりであること（23-02 §02）
2	完全な族が在る最大の次元	完全な族が在る最大の次元 $d_{\max}(k)$	総当たり・紙	$k=3,4,5$ の表と、上界 $3k+1$ が鋭くない理由	同上。周期 2 の非存在（Lean `no_perfect_k4_d9`・`no_perfect_k5_d8`、仮定：周期 2）は既に在る
3	Hermite の族の定数	Hermite の族の $1-\lambda_k$ の定数（§05 の例題）	紙・python3	(5) の二項と剰余	試験関数は C_P を下からしか押さえないこと
4	森の上の比の SU(N) 版	森の上の関数の比が $1/\lambda_1(G)$ で頭打ちになることの $SU(N)$ 版と Lean の言明	紙・Lean	Haar の積の Poincaré の言明	緩和時間の上界の仮定（四次元格子の緩和時間の下界の仮定の試験関数の族を一つ閉じるだけ）
5	二次元格子の C_P(β)	二次元格子 YM のリンク変数での $C_P(\beta)$	紙・python3	$\beta\to\infty$ の冪	四次元の緩和時間の仮定（二次元は対照）
6	一リンク積分の後の曲率	一リンク積分の後の曲率の最良の定数 $c^{*}\in[21,27]$	大域最適化・区間演算	c^{*} と配位、計算機援用の下界	強結合の側から出られないこと
7	柱の模型の N^{−3} の係数	柱の模型の N^{-3} の係数 $C\approx 320$ を解析的に（XX 鎖の有限サイズ展開）	紙・python3	閉じた式と 4 桁以上の一致	管の評価（管の不等式）の矢印の論理
8	柱の模型の 1/P の符号	柱の模型で、有限の u の $1/P$ の符号	python3	$u=0.1\sim 0.3$ の符号の表	同上
9	取りこぼしのゲージ依存	取りこぼし c_2 はブロック変換のゲージの取り方でどれだけ変わるか	python3	ゲージごとの c_2 の表と、正値な核で $c_2>0$ が保たれるか	取りこぼしの和の矢印（$c_2\neq 0$ なら動かない）
10	O(3) σ 模型の C_P と ξ²	二次元 $O(3)$ σ 模型の C_P と ξ^2	python3・文献	傾きと、目盛りを替えたときの対数の有無	四次元の緩和時間の仮定（漸近自由な対照）

番号	問	一行	道具	決着の形	決着しても動かないもの
11	三次元 Z_2 ゲージの C_P/ξ²	三次元 $\mathbb{Z}_2$ ゲージ理論の C_P/ξ^2	python3	表と、双対の Ising 側の動的指数との対応	非可換の場合の緩和時間の仮定
12	C_P(V) の体積単調性	$C_P(V)$ の体積単調性と境界条件（小さな格子で生成作用素の固有値を全て求める）	python3	単調性の反例か証明	緩和時間の仮定を述べる体積の順（23-01 §05 の注）の問いそのもの
13	四次元 SU(2) の動的指数	四次元 $SU(2)$ の局所の算法の動的指数の一次資料を集める	文献	十本前後の一次資料の表（指数・観測量・箱・境界）	周期の箱の読みの条件（予想の部分）
14	芯の最大相関の区間演算	中くらいの芯の段の二点の最大相関（$8 \le k \le 14$）を区間演算で上から押さえる	区間演算・紙	k と $\hbar$ の点ごとの計算機援用の上界と、格子と連続の差の紙	箱の側の芯の道の [007]（$k \ge 15$ の側）と [014]（23-15 表 1）
15	芯と窓の前因子の冪	芯と窓の C_P の前因子 $\hbar^{-p}$ の冪を、縮退点の容量で読む	python3・紙	p の値（読み）と、容量の式の形	作用の障壁 $\Delta S < 2S_0$ の側（小さな問い 5 の条件の片方だけ）
16	箱の交互の最大相関の比較	箱の間の交互の最大相関 $c_{\mathrm{alt}} < 1$ を、二点の量に縮まない例を避けて示す比較の定理	紙	縮約した模型で一様な c_{alt} の上界	相内の局所 Poincaré の条件・鞍点の管の条件の行（[006] だけが動く）
17	保存を壊す項の長さ	小さな問い 12 の保存のある力学で、保存を壊す小さな項を足したとき、隙間が一辺の二乗から離れる長さ	紙・python3	壊す項の強さと長さの関係	四次元の緩和時間の仮定（第 24 部の問いの最小の模型）

どの問いにも、着手の前に同じ問いの答えがあるかを探す段を置きます。問いを定理の形で一文に書き、数学と物理の両方の語の組で検索し、総説の参考文献から一次資料の本文へたどって、同じ答え・近いが違う結果・見当たらない、のどれかに判定します。見当たらなければ「探した範囲で見当たらない」と書き、探した語と資料を出典表に残します。

05

例題：一問を決着の形まで — Hermite の族の $1-\lambda_k$

問いの大きさを見るため、問い「Hermite の族の定数」を最後まで進めます。標準正規分布の Poincaré 定数は $C_P = 1$ で、等号は $f = x$ です（1-10）。x を含まない族 $F_k = \mathrm{span}\{x^3, \dots, x^{2k+1}\}$ での比 $\mathrm{Var}(f)/\mathcal{E}(f)$ の最大を λ_k とします。

Hermite 多項式を $\mathbb{E}[h_m h_n]=\delta_{mn}$ に正規化すると $h_n'=\sqrt{n}\,h_{n-1}$ なので、奇関数 $f=\sum_{j=0}^{k} u_j h_{2j+1}$ の分散と Dirichlet 形は対角になります。

$$\mathrm{Var}(f)=\sum_{j=0}^{k} u_j^2, \qquad \mathcal{E}(f)=\sum_{j=0}^{k}(2j+1)\,u_j^2 \tag{1}$$

族に入る条件は「単項式 x の係数が 0」という一本の一次の拘束 $\sum_j w_j u_j=0$、$w_j=(-1)^j\sqrt{(2j+1)!!/(2j)!!}$ です。拘束の下の $\mathcal{E}/\mathrm{Var}$ の最小 μ_k を Lagrange の未定乗数で求めると、一変数の方程式が残ります 典 （一次の拘束の下の二次形式の停留値の永年方程式、Golub 1973）。

$$g_k(\mu):=\sum_{j=0}^{k}\frac{w_j^2}{2j+1-\mu}=0, \qquad 1<\mu_k<3, \qquad \lambda_k=\frac{1}{\mu_k} \tag{2}$$

$\mu_k=1+\varepsilon$ と置くと $j=0$ の項が $-1/\varepsilon$ で、残りと釣り合います。

$$\frac{1}{\varepsilon}=S_k+O(\varepsilon), \qquad S_k:=\sum_{j=1}^{k}\frac{(2j+1)!!}{(2j)!!\,2j} \tag{3}$$

S_k は母関数で閉じます。$(2j+1)!!/(2j)!!=(2j+1)\binom{2j}{j}4^{-j}$ で各項を二つに割り、部分和の恒等式 $\sum_{j=0}^{k}\binom{2j}{j}4^{-j}=(2k+1)\binom{2k}{k}4^{-k}$（$k$ の帰納法）と、$\ln\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}=\sum_{j\ge1}\binom{2j}{j}\frac{x^j}{2j\,4^j}$ の $x=1$ での値 $\ln 2$ を使うと 初

$$S_k=2\sqrt{\frac{k}{\pi}}+(\ln 2-1)+O(k^{-1/2}) \tag{4}$$

です。(3) に入れて $1-\lambda_k=\varepsilon-\varepsilon^2+\cdots$ と展開すると、二つの項が決まります 初 。

$$1-\lambda_k=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}}-\frac{\pi\ln 2}{4k}+O(k^{-3/2}), \qquad \frac{\sqrt{\pi}}{2}=0.886227, \quad \frac{\pi\ln 2}{4}=0.544397 \tag{5}$$

表 4　λ_k と (5) の検算 読 （(2) の根を数値で求めた値）

k	λ_k	$\sqrt{k}(1-\lambda_k)$	$k\big(1-\lambda_k-\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}}\big)$
1	0.555556	0.4444	−0.4418
10	0.774921	0.7118	−0.5517
1000	0.972524	0.8689	−0.5489
10^4	0.991192	0.8808	−0.5459
10^6	0.999114	0.8857	−0.5446
(5)	$\to 1$	0.8862	−0.5444

決着しても動かないものは、試験関数が C_P を下からしか押さえないという事実です。族を大きくしても $\lambda_k < 1$ のまま $k^{-1/2}$ の速さで 1 に近づくだけで、極限が 1 だと言えるのは族の外の入力（ガウスの凸性 $V'' = 1$）からです。小さな問いの決着は、多くの場合こういう形になります。

この部は緩和時間の仮定を検討の軸に置いて、その上で繰り返し役に立った見方をこの章に集めました。緩和時間の仮定とは別の視点から立つ問いは 第 24 部 に置きます。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
十二の着想が、本文のどの章のどの段で働いたか（各着想の末尾の章）と、各着想の状態（着想のまま・確かめた形）	着想が一段目の外（四次元格子・他の問題）で働くこと。どの着想も検証の前の見方
初 小さな問い 6・11 の閾の式（$\kappa(k) < 0 \iff k \geq 8$）、(4)(5) の導出の骨	(5) の剰余 $O(k^{-3/2})$ の係数の値
読 表 4 の数値	表 4 は (2) の根の浮動小数の値で、上界・下界の命題ではない
十七の問いの一覧と、決着しても動かないもの	どの問いも、決着しても質量ギャップ・連続極限・緩和時間の仮定について何も示さない。「卒業研究の大きさ」は見込み

出典と再現

もの	種別	出典・道具
十二の着想の材料	本書	各着想の末尾に挙げた章の節（23-06〜23-11）
小さな問い 2 の二点の対数 Sobolev 定数	典	P. Diaconis, L. Saloff-Coste, Logarithmic Sobolev inequalities for finite Markov chains（書誌は未確認。言明は原典で確かめていない。問いの側で確かめる対象）
表 2 の下の二行（二次元 Ising の熱浴・ホログラフィーの密度）	本書	本書の検討で捨てた仮説の記録。二次元 Ising の z は M. P. Nightingale, H. W. J. Blöte, Phys. Rev. Lett. 76 (1996) 4548（要旨のみ）
表 3 の問い 1〜13	本書	本書の検討の小さな問い十四問から、試験台になった一問を除いたもの。問い 14〜17 は 23-09〜23-11 の残る行から
(2) の永年方程式	典	G. H. Golub, Some modified matrix eigenvalue problems, SIAM Review 15 (1973) 318–334（書誌のみ）

もの	種別	出典・道具
表 4	読	(2) の根の二分法と、$k \le 6$ での単項式の Gram 行列の一般化固有値との照合

この章で使った語 ― 着想の三つの状態・二度払い・Poincaré の通貨とエントロピーの通貨・$1/\hbar$ の住む長さ・条件づけの壁・凸性の閾・打ち消しの段と向きの段・障害の移動・保存のある力学・小さな問い。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：第 24 部 一本目の道（後半） ― 緩和時間の仮定とは別の視点と、緩和時間の仮定を前提とした新しい見方の材料の一覧。付録へ進むなら A-01 記号表。