第三巻　質量ギャップへ — 残る問いと本書の結果

# 第 24 部 一本目の道（後半）

Kiichi, Shiori and Rin · 2026-11-14 の版 · https://computoergosum.com/principia/yang-mills/

> この PDF は Web 版の各章をそのまま刷ったものです。動かせる図は刷った時点の姿で止まっています。章の間のリンクは Web 版へ飛びます。最新の内容は Web 版に在ります。


| 章 | | 頁 |
|---|---|---|
| 24-00 | 入口 — 第 23 部から受け取るもの | 2 |
| 24-01 | 拡散型緩和時間の仮定を妨げる一つの形 — ほぼ保存される大域の量 | 9 |
| 24-02 | 物差しと座標を選び直す — 保存が壊れる長さ | 22 |
| 24-03 | 緩和時間の仮定を直す二つの形 — 区画ごとの仮定と局所の仮定 | 31 |
| 24-04 | 片側の橋は緩和時間の仮定のどの形を要るか | 48 |
| 24-05 | 時間を連続にする — Hamiltonian 格子と真空の測度 | 67 |
| 24-06 | 凸性の代わりに稀さで払う — 群の上の繰り込みと対数 Sobolev | 80 |
| 24-07 | 四次元だからこそ — 無次元の結合と位相 | 100 |
| 24-08 | 問いと、主張しないこと | 119 |
| 24-09 | 一本目の道（後半）の記号の対応表 | 128 |

# 第 24 部の入口 — 第 23 部から受け取るもの

> この章は案内です（この部の入口）。

この部は検討の記録です。機械検査まで済んだ定理は第 20〜22 部、前提の今の一覧は 28-04 に在ります。

**この章で分かること** — 第 24 部「今後の考察」の位置づけと、第 23 部から受け取る文、九章の地図（題・一行・水準・その章が言えている範囲）、この部で定まった言葉、この部が扱わないもの。

**前提となる章** — 23-00（第 23 部の入口）・23-01 §05（拡散型緩和時間の仮定）・23-01 §06（拡散型緩和時間の仮定が与えるもの・与えないもの）。

**先に言うこと** — 水準は〔二〕です。この頁は地図で、何も証明しません。第 24 部のどの章も、質量ギャップを示しません。緩和時間の仮定が誤りだったとも、正しい道だったとも書きません。

この章の順序

1. 位置づけ — 第 23 部の検討の次に、何を考えるか
2. 第 23 部から受け取る文 — 五つの文と札（表 1）
3. 部の地図 — 九章の一覧と、各章が言えている範囲（図 1・表 2・表 3）
4. この部で定まった言葉 — 局所の拡散型緩和時間の仮定と比の形・閾・保存が壊れる長さ
5. 扱わないもの・記号の対応表・第 23 部への戻り

---

01

## 位置づけ — 第 23 部の検討の次に、何を考えるか

第 23 部は、質量ギャップの問題を、格子で計算でき機械検査の届く量——Langevin 力学の緩和の時間 $C_P$ と相関長 $\xi$ の冪の関係（緩和時間の仮定）——に言い換え、その言い換えを取っ掛かりにして検討した部でした。緩和時間の仮定を鋭い文として立てたことで、緩和時間の仮定がどこで成り立たないかを名指せるようになりました。どの試験関数が緩和時間の仮定の上の半分（緩和時間の上界の仮定）を妨げるかが、一つの型としてまとまったのです。これは「緩和時間の仮定が誤りだった」ではなく、「緩和時間の仮定を立てたから壊れ方の正体が見えた」という順の出来事です。

第 24 部はそこから始まる「今後の考察」です。まず、緩和時間の仮定を妨げるものが一つの形——隙間に映らない大域の量が、相関長とは別の長さで緩和を遅くする——にまとまることを見ます（24-01・24-02）。次に、緩和時間の仮定を前提に置いたまま、その形を避けて緩和時間の仮定を述べ直す二つの候補（位相の区画ごとの緩和時間の仮定と、窓や箱を物差しの数倍に限った局所の緩和時間の仮定）を定義し、片側の橋が質量ギャップに要るのはどちらの部分かを調べます（24-03・24-04）。そこから、緩和時間の仮定を経由しない二つの見方——時間を連続に取った格子では隙間がちょうど真空の測度の Poincaré 定数になること（24-05）と、群の上では凸性の代わりに稀さで払う道具が要ること（24-06）——に進みます。最後に、四次元であることがどこに効いているかを「無次元の結合」と「位相」の二点に限って述べ（24-07）、問いと主張しないことで閉じます（24-08）。

この部の多くの文は見立てで、第 23 部の五つの札（初・典・機・読・仮）に、見立ての札「見」を一つ足して区別します。見立ては判断の材料としての意見で、証明も数値も持ちません。

02

## 第 23 部から受け取る文

表 1 は、第 24 部が第 23 部から受け取って使う五つの文です。札と言明は第 23 部のままで、この部では式番号と節を引くだけにし、証明を写しません。

表 1　第 23 部から受け取る文

| 文 | 札 | 第 23 部の場所 | 使う章 |
|---|---|---|---|
| 言い換えの取引：問題文の量はユークリッドの時間の隙間、緩和時間の仮定の量は Langevin の時間の緩和 $C_P$（上限で定義され、試験関数一本で下界が出て、上界を部品から組める量）。二つは別の量 | 約束 | 23-01 §04（三つの $C_P$） | 24-01・24-04・24-05 |

| 文 | 札 | 第 23 部の場所 | 使う章 |
|---|---|---|---|
| 緩和時間の仮定は冪の文 $\lim \ln C_P / \ln \xi = 2$。帯の文の半分を上界の仮定・緩和時間の下界の仮定と書く | 仮 | 23-01 §05 | 全章 |
| 片側の橋：時間を連続に取った格子で $C_P \geq \kappa \hbar^2 / \Delta^2$。橋の仮定の下で上界の仮定は格子の物理単位の隙間より強い文（論文の形の版もあり、外部の検査の前） | 初（連続時間）・仮（Wilson の時間を刻む格子では時間の刻みの比べの仮定（論文「片側の橋」の (D))） | 23-01 §06（Lean `hup_is_gap_positivity_of_lower`、仮定：$0 < m \cdot \kappa / m^2 \leq C_P \cdot C_P \leq K \xi^2$） | 24-04・24-05 |
| 逆向きは一般には偽：円の上の自由な粒子では $\Delta > 0$ のまま $C_P = \infty$（円の上の自由な粒子の反例） | 初 | 23-01 §06 | 24-01・24-04 |
| 四次元の周期の箱では、位相電荷の凍結で上界の仮定が破れると読める（$SU(3)$ 以上の原典と、予想を延ばした読みの上）。位相の区画と体積の順の注 | 仮・読 | 23-01 §05 の注・23-02 §05 | 24-01・24-03・24-07 |

03

## 部の地図 — 九章の一覧と、各章が言えている範囲

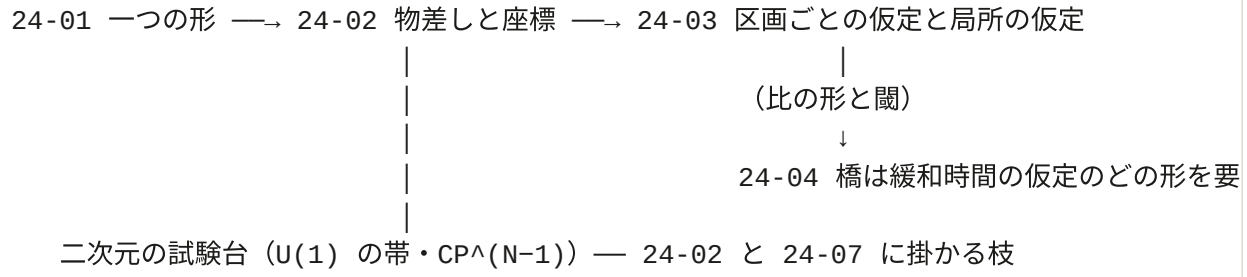
第 24 部の九章と記号の対応表

0. **24-00 入口 — 第 23 部から受け取るもの** 〔二〕（この頁）
1. 24-01 拡散型緩和時間の仮定を妨げる一つの形 — ほぼ保存される大域の量 〔三〕
2. 24-02 物差しと座標を選び直す — 保存が壊れる長さ 〔三〕
3. 24-03 緩和時間の仮定を直す二つの形 — 区画ごとの仮定と局所の仮定 〔研〕（要約は〔三〕）
4. 24-04 片側の橋は緩和時間の仮定のどの形を要るか 〔研〕（要約は〔三〕）
5. 24-05 時間を連続にする — Hamiltonian 格子と真空の測度 〔三〕
6. 24-06 凸性の代わりに稀さで払う — 群の上の繰り込みと対数 Sobolev 〔研〕（要約は〔三〕）
7. 24-07 四次元だからこそ — 無次元の結合と位相 〔三〕
8. 24-08 問いと、主張しないこと 〔二〕〜〔三〕

24-09 一本目の道（後半）の記号の対応表（参照の頁）

この部は、第 23 部と合わせて「一本目の道 — 時間の方向から」の後半に当たります（二本目の道は第 25 部、二本の道の合流は第 26 部、条件つきの言明は第 27 部）。章の順は、壊れ方の形（24-01・24-02）、緩和時間の仮定を前提に置いた述べ直し（24-03・24-04）、緩和時間の仮定を経由しない見方（24-05・24-06）、四次元に固有のこと（24-07）、問い（24-08）です。24-01 から 24-05 までは、前の章の結論が次の章の問いになる一本の鎖です。24-06 は鎖の帰結ではなく、24-03〜24-05 のどの言明を示すにも要る道具の章で、筋の上では枝に置きます。

図 1　第 24 部の道筋（矢印は「前の章の結論が次の章の問いになる」。含意の定理ではない）




道具の枝：24-06 凸性の代わりに稀さで払う（24-03〜24-05 のどれにも要る）
四次元に固有のこと：24-07 無次元の結合と位相
閉じ：24-08 問いと、主張しないこと

表 2　各章の一行と、その章が言えている範囲

| 章 | 一行 | この章が言えている範囲 |
|---|---|---|
| 24-01 | キンクの数・巻き数・流束・位相電荷・箱を貫く流束が、どれも「隙間に映らない大域の量が別の尺度で緩和を遅くする」同じ型であることを、強さとともに一つの表にする | 五つの例が同じ型であることは分類（見立て）。数は行ごとの札 |
| 24-02 | $C_P$ と比べるべき長さを三つの物差しに分け、座標（Dirichlet 形式）の選び方で緩和の型が変わることと、二次元の帯と試験台の数を並べる | 保存が壊れる長さは二次元 $U(1)$ の帯の読み。比べる相手の言い直しは候補。$CP^{N-1}$ は一つの体積・一つの相関長の条件つきの読み |
| 24-03 | 位相の区画に条件づけた緩和時間の仮定と、窓や箱を物差しの数倍に限った局所の緩和時間の仮定を定義し、無質量の参照との比の形で述べる | 二つの緩和時間の仮定は定義が立ち、局所の緩和時間の仮定は比の形でだけ中身を持つ。どの $\beta$ でも示した不等式は無い |
| 24-04 | 片側の橋が使うのは上界の仮定の時刻に局所な部分だけであることと、窓の橋・比の形の閾・三つの参照を述べる | 橋の閾は参照と族に依り、閾と 1 の間の帯は未決。全ては局所の励起のモーメントの仮定と片側の橋の命題（論文の定理 3.1）の仮定の上 |
| 24-05 | 時間を連続に取った格子では、隙間が一つの時刻の真空の測度の Poincaré 定数とちょうど逆数で結ばれることと、そこで要る道具が当たらない理由を並べる | 隙間は真空の測度の Poincaré 定数そのもので、恒等式は問題を易しくしない |
| 24-06 | 群の上では凸性の道具が弱結合で原理的に立たないこと、凸でない所が確率の小さい所へ押し込まれること、稀さで払う道具と規則の候補を述べる | 道具の章。凸性の天井は証明つき、稀さで払う測度の類は候補。階層模型の結果は四次元に含意しない |

| 章 | 一行 | この章が言えている範囲 |
|---|---|---|
| 24-07 | 四次元で効いていることを無次元の結合と位相の二点に限り、四段のハードルと、三段目がなぜ長く開いていたかを、公開された構成より前の一次資料の記述で並べる | 二点は臨界次元の性質の見立て。$SU(2)$ の凍結は未決。二次元の結果は四次元に含意しない |
| 24-08 | 問いの表・規則の候補の一覧・主張しないことの十六項目 | 問いと主張しないこと。規則の候補は候補 |

第 23 部で出た材料のうち、この部の章が本文として受けるものを表 3 に並べます。

表 3　第 23 部から受ける材料と、受ける章

| 材料 | 第 23 部の関連 | 受ける章 |
|---|---|---|
| 他の道の表（繰り込み群と対数 Sobolev・確率量子化・Hamiltonian 格子・階層模型など） | 23-02 §08 | 24-05・24-06 |
| 上界の仮定と質量ギャップの片側の橋 | 23-01 §06 | 24-04 |
| 階層的ゲージ模型と座標の問題 | 23-17 着想 12 | 24-02 §02・24-06 §05 |
| 流束の保存と「保存が壊れる長さ」 | 23-17 問い「保存を壊す項の長さ」 | 24-01・24-02 |
| 四次元の格子での緩和時間の仮定の検討（位相電荷の凍結と、区画の文・局所の文への直し方） | 23-01 §05 の注・23-02 §05 | 24-01・24-03 |

04

## この部で定まった言葉

**局所の緩和時間の仮定と比の形**。試験関数を、物差し $\ell$ の $c$ 倍の窓（または箱）に台を持つものに限った Poincaré 定数 $C_P^{\mathrm{loc}}(c)$ を、同じ窓・同じ目盛りの無質量の参照との比 $K_{\mathrm{rel}}(c)$ で述べた文（24-03 §03）。「ある定数で押さえる」形は自由場でも成り立って空虚なので、比の形にします。

**閾 $K_*$**。比が閾より小さければ、仮定の上で片側の橋が質量の下界を与える、という閾の値。参照の取り方で $0.342\kappa$（スカラー）・$0.502\kappa$（ゲージ商）・約 $0.62\kappa$（$SU(2)$ の色の一重項）と変わります（24-04 §06。数は自由場の参照の読み）。

**保存が壊れる長さ $\ell_*$**。隙間に映らない大域の量が、局所の輸送でなく保存の破れで緩和しはじめる長さ。静的な相関長とは別の物差しで、二次元 $U(1)$ の帯で測った値は相関長と比例しません（24-02 §01・§03）。

05

## 扱わないもの・記号の対応表・第 23 部への戻り

**扱わないもの**。第 24 部は、紫外の側——連続極限の存在・回転の回復・OS 公理・非自明性（第 23 部の Wilson ループの極限の言明・回転の回復の言明・OS 再構成の言明・非自明性の言明、23-01 §02）——に触れません。四次元に固有の難しさとして三段目の到達点を一次資料で並べるのは 24-07 §05 だけで、そこでも構成は扱いません。連続極限の存在は、2026-11-10 に公開された構成（四次元の Wilson の格子の極限として Wightman の公理を満たす理論を作る Lean の形式化。Lean で証明されている、と委員会が評価した）を、第二巻（第 6 部から）で読みます。

**記号**。第 24 部の記号と、第 23 部の同じ字の記号との対応は 24-09 一本目の道（後半）の記号の対応表 にあります。とくに $\Delta$ はハミルトニアンの隙間 $E_1 - E_0$ に限り、物理単位の質量は $m_{\mathrm{phys}}$ と書きます。

**第 23 部へ戻る**。第 23 部の地図は 23-00 §01、主張しないことは 23-16、小さな問いは 23-17 にあります。

---

## この頁が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 第 24 部の章の並びと、各章が言えている範囲の一行（表 2）。第 23 部から受け取る文と札（表 1） | どの章も質量ギャップを示さない。緩和時間の仮定の真偽も示さない |
| この部で定まった言葉の意味（§04） | 局所の緩和時間の仮定・閾・保存が壊れる長さについての定理（定義と比の形と、自由場や二次元の数まで） |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 表 1 の文 | 本書 | 23-01・23-02 の各節と出典表 |
| 表 2・§04 の各行 | 本書 | 第 24 部の各章の「この章が言えている範囲」 |

**この頁で使った語** — 今後の考察・言い換えの取引・片側の橋・見立ての札「見」・局所の緩和時間の仮定・比の形・閾・保存が壊れる長さ・道具の枝。意味は A-02 用語集 と 24-09 にあります。

次に読む章：24-01 拡散型緩和時間の仮定を妨げる一つの形 — ほぼ保存される大域の量 — 隙間に映らない大域の量が別の尺度で緩和を遅くする型を、五つの例で一つの表にする。

# 拡散型緩和時間の仮定を妨げる一つの形 — ほぼ保存される大域の量

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 2-10・5-09 にあります。

**この章で分かること** — 拡散型緩和時間の仮定の上の半分（緩和時間の上界の仮定）を妨げる例を五つ並べ、どれも「隙間に映らない大域の量が、相関長とは別の尺度で緩和を遅くする」という一つの型に入ることを見ます。五つの例は、二重井戸のキンクの数、円の上の粒子の巻き数、二次元 $U(1)$ の帯の流束、四次元の周期の箱の位相電荷、箱を貫く流束です。違うのは強さ（対数・冪か指数・無限）と、壊れ方の出来事です。上界の仮定がこの型でどう破れるかは $\tau_{\mathrm{int}} \le C_P$ の一行で決まります。部分領域の電荷で「輸送」と「保存の破れ」の二つの勘定を分け、24-03 の局所の拡散型緩和時間の仮定の準備をします。

**前提となる章** — 23-01 §05（緩和時間の仮定の (13)・上界の仮定の (14)(15)・位相の区画の注）・23-01 §06（円の上の自由な粒子の反例）・23-02 §05（$\tau_{\mathrm{int}} \le C_P$）・2-10 の寄り道（保存する力学）。記号は 24-09 にまとめてあります。

**先に言うこと** — 水準は〔三〕です。五つの例を一つの型と呼ぶのは分類で、定理ではありません 見 。各例の数は、行ごとに札を付けた条件の上の数です。この章は上界の仮定が偽であることを主張しません。四次元の周期の箱の行は、$SU(3)$ 以上の原典の数値と、開いた境界の観察に付いた予想を周期の箱の位相の遅さへ延ばした読みの上にあり、$SU(2)$ については読みの水準でも決まっていません。どの例も質量ギャップを壊しません。

この章の順序

1. ほぼ保存される大域の量の型 — 三つの条件と、上界の仮定が破れる一行（(1)〜(3)）
2. 五つの例を一つの表に — 表 1・下に降ろした三つの行（表 2）
3. 三つの強さ — 対数・冪か指数・無限（表 3）
4. 部分領域の電荷の二つの勘定 — 輸送の係数 $d$ と保存の破れの係数 $h$（(4)〜(7)）
5. 一段目の壁は、この型の縮小版 — 頂上の $\frac{1}{4}$
   と、第 23 部の壊れ方の型との対応（表 4）

6. 言えないこと — 予想の延長・$SU(2)$・二次元・冪と指数
7. 五分類の表と依存グラフ — 表 5

01

## ほぼ保存される大域の量の型 — 三つの条件と、上界の仮定が破れる一行

緩和時間の仮定は冪の文 $\lim \ln C_P / \ln \xi = 2$（23-01 の (13)）で、その上の半分（上界の仮定）は「すべての試験関数 $f$ で $\mathrm{Var}(f) \le C\,\xi_{\mathrm{RG}}^2\,\mathcal{E}(f)$」（同 (15)）です。すべての $f$ の文なので、一本でも比 $\mathrm{Var}/\mathcal{E}$ が $\xi^2$ より速く伸びる関数があれば崩れます。第 23 部で緩和時間の仮定を鋭い文として立てたので、その関数がどんな形をしているかを名指すことができます。この章の答えは次の型です。

型（見立て）

測度 $\mu$ と Dirichlet 形 $\mathcal{E}$ の組に、大域の量 $Q$ があって、

(i) $\mathrm{Var}_\mu(Q)$ は大きい（体積や窓の長さとともに伸びる）。

(ii) $\mathcal{E}(Q)$ は小さい。$Q$ は保存則の流束を通って隣へ受け渡されるか、稀な配位を通ってしか変わらない。

(iii) $Q$ は隙間 $\Delta$ に映らない。時刻で積分した一時刻の関数の族（24-04 の $\mathcal{F}_1$）に入らないか、入っても隙間の励起と重ならない。

このとき $Q$ を緩和させる時間は、相関長 $\xi$ ではなく、$Q$ を壊す出来事の尺度で決まる。

(iii) がこの型と質量ギャップを切り離す条件です。隙間に映らないので、緩和がいくら遅くても隙間は正のままで構いません。この切り離しの一番小さな例が、第 23 部の円の上の自由な粒子の反例（円の上の自由な粒子、隙間は正で $C_P = \infty$）でした。

**上界の仮定が破れる一行。** 力学が可逆（生成作用素 $L$ が $L^2(\mu)$ で自己共役、$-L \ge 0$）なら、どの観測量 $f$ の積分自己相関時間も $C_P$ を越えません。$\tilde f = f - \mu(f)$ の $-L$ のスペクトル測度を $\nu_f$（台は $[\lambda_1, \infty)$、$\lambda_1 = 1/C_P$）とすると

$$\tau_{\mathrm{int}}(f) := \int_0^\infty \frac{\mathrm{Cov}(f(0), f(t))}{\mathrm{Var}\, f}\, dt = \frac{\int \lambda^{-1}\, d\nu_f(\lambda)}{\int d\nu_f(\lambda)} \;\le\; \frac{1}{\lambda_1} = C_P \tag{1}$$

です 初 （$\lambda \ge \lambda_1$ の上で $\lambda^{-1} \le \lambda_1^{-1}$ を積分するだけ。等号は $\tilde{f}$ が最も遅い固有空間に載るとき）。Lean では有限のスペクトル和の版を検査しています（LatticeGauge.FourDTrial.tau_int_le_CP、仮定：重み $\ge 0$・各固有値 $\ge \lambda_1 > 0$・重みの和 $> 0$）。力学を使わない版は上限の定義そのもので

$$\frac{\mathrm{Var}_\mu(Q)}{\mathcal{E}(Q)} \;\le\; C_P \tag{2}$$

初 。したがって、$Q$ の緩和の時間（(1) なら $\tau_{\mathrm{int}}(Q)$、(2) なら静的な比）が $\beta \to \infty$ の列で $c\,\xi^{p}$（$p > 2$）以上に伸びるなら、どの定数 $K$ でも $C_P \le K\xi^2$ は破れます。相関長 $\xi$ と記帳の長さ $\xi_{\mathrm{RG}}$ が定数倍で比べられる範囲では、これは上界の仮定の否定です。

$$\tau_{\mathrm{int}}(Q) \le C_P, \quad \tau_{\mathrm{int}}(Q) \ge c\,\xi^{p}\ (p>2), \quad \xi \to \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \neg\,\exists K:\ C_P \le K\xi^2 \tag{3}$$

初 Lean LatticeGauge.FourDTrial.not_hup_of_fast_tau（仮定：$0 < c \cdot 2 < p \cdot \xi_n \to \infty$・$\xi_n > 0$・各 $n$ で $\tau_n \le C_n$ と $c\,\xi_n^p \le \tau_n$）。指数の伸び $\tau \ge c\,e^{\alpha\xi}$ は $p = 3$ を含みます（$e^x \ge x^3/6$）。逆向きの注意も一行です。速い量の $\tau$ が小さいことは上界の仮定を支えません。重みが速いモードに載った観測量は、$C_P$ がいくら大きくても $\tau_{\mathrm{int}}$ が小さいままです（陰性対照 tau_small_but_CP_large）。

この一行の水準を確かめておきます。(3) の左の二つの仮定のうち、Lean が受け取るのは実数の列の不等式だけで、$\tau_n$ が可逆な力学の自己相関時間であること、$C_n$ が Wilson 測度の Poincaré 定数であることは Lean の外にあります。四次元で (3) の第二の仮定を支えるのは、原典の Monte Carlo の数値 典 を、算法の違いを越えて Langevin の自己相関に読み替えたもので、その読み替えは仮定です（§06 (a)）。

02

## 五つの例を一つの表に

表 1 は、型の三つの条件を満たす五つの例を、同じ列で並べたものです。列は、族の外にある量（型の $Q$）・それを動かす出来事（保存の破れ）・遅さの尺度と相関長の関係・強さ・測った数とその札・本文のある章です。行の札はその行の数の札で、「同じ型に入る」という分類そのものは全ての行で 見 です。

表 1　上界の仮定を妨げる五つの例（強さは $C_P/\xi^2$ の伸び方。数の条件は各行の段落）

| 例 | 族の外にある量 | 何で動くか（保存の破れ） | 遅さの尺度と相関長 | 強さ | 測った数と札 | 章 |
|---|---|---|---|---|---|---|

| 例 | 族の外にある量 | 何で動くか（保存の破れ） | 遅さの尺度と相関長 | 強さ | 測った数と札 | 章 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (a) 0+1 の二重井戸 | キンクの数（どちらの井戸にいるか）・窓の中のキンクの位置 | キンクの対の生成と消滅（トンネル）・窓を横切る運動 | $\xi$ と同じ起源。全体の比は $S_0/\hbar \approx \ln \xi$。局所の比は最短の窓でも $\omega_b/m$ | 対数 | 一サイトの比 $= \omega_b/m$ 初 ・ $4.61,\ 21.6,\ 638$ 読 ・全体の比 仮 | 23-04 §04・24-04 |
| (b) 円の上の自由な粒子 | 巻き数（持ち上げた角の増分の積分） | 壊れない（連続な経路） | 無限 | 無限 | $\Delta = \hbar^2/2 > 0$ で $C_P = \infty$ 初 | 23-01 円の上の自由な粒子の反例 |
| (c) 二次元 $U(1)$ の帯 | 流束の双極子・帯の位相電荷 $Q$ | 一枚のプラケットの巻き付き（高さ $2\beta$ の障壁） | $\ell_c \propto e^{0.916\beta}$、$\xi_{XY} \approx 2\beta$ | $\xi_{XY}$ について指数 | $\ell_c = 3.29$〜$139$ ・$\tau(Q)/\xi_{XY}^2 = 0.4 \to 24$ 読 | 24-02 |
| (d) 四次元の周期の箱 | 滑らかにした位相電荷 $Q$ | 格子を通り抜ける小さなインスタントン（転位） | $SU(3)$ 以上の原典で $\xi^2$ より速い。$SU(2)$ は一次資料一本で $a^{-2}$ に近い | 冪か指数（$SU(3)$ 以上） | 原典の数値 典 ・上界の仮定の読み 仮 | 23-01 §05 の注・24-07 |
| (e) 箱を貫く流束 | 箱の境のサイトのゲージ変換で動く汎関数 | 境のゲージ変換を割らないと試験の空間に入る | 参照の箱の値が $2.22$〜$2.53$ 倍 | 定数倍 | 二つの取り方の差 初 ・倍率 読 | 24-03 §03 |

**(a) 二重井戸のキンクの数**。0+1 次元の経路の測度（23-04、$V = (x^2-1)^2/8$、$S_0 = 2/3$）では、経路がどちらの井戸にいるかは、キンク（谷から谷へ移る道）が入るときだけ変わります。キンクの重み $e^{-S_0/\hbar}$ が相関長 $\xi \propto \hbar^{1/2} e^{S_0/\hbar}$ を決め、キンクの拡散が $C_P$ の上の側の尺度 $\xi^2 S_0/\hbar$ を決めるので、遅い量と相関長は同じ出来事から生まれます。比 $C_P/\xi^2$ は $S_0/\hbar \approx \ln \xi$ の程度で、帯の上界の仮定は対数だけ破れますが二重井戸の緩和時間の冪の言明は残ります（23-04 の (14)、希薄なキンクの気体の勘定）仮。窓を限った局所の比にも同じ型が出ます。一つの時刻だけの窓では、周辺 $\psi_0^2$ の Poincaré 定数が基底状態変換で $(H - E_0)$ の隙間に移り、底の曲率の調和振動子との比は**ちょうど** $\omega_b/m$ です（$\psi_0$ が Schrödinger の基底状態のとき）初。格子 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ の転送では $\hbar = 0.3,\ 0.15,\ 0.08$ で $4.61,\ 21.6,\ 638$、$\omega_b/m$ の $1.04$〜$1.05$ 倍です 読。この比の詳しい振る舞い（窓を長くすると $(\omega_b/m)^2$ へ移る）は 24-04 で扱います。

**(b) 円の上の粒子の巻き数**。第 23 部の円の上の自由な粒子の反例です。経路を実数直線に持ち上げた $\tilde{x}(\tau)$ の増分を重み $w$ で積分した $f = \int w\, d\tilde{x}$ は、$\mathrm{Var}(f) = \hbar \int w^2 \cdot \mathcal{E}(f) = \hbar \int w'^2$ で、窓を伸ばすと比はいくらでも大きくなります。巻き数は連続な経路では決して壊れないの

で、強さは無限です。この $f$ は台が長さ $L$ の窓に入る汎関数で、窓を止めれば比は有限ですが、窓を伸ばすと非有界になります [初]。巻き数は時刻で積分した一時刻の関数ではないので、型の条件 (iii) を満たしています。

**(c) 二次元 $U(1)$ の帯の流束と位相電荷。**幅 2 の帯で外周のリンクを止め、リンクを Langevin で動かすと、プラケットの角（流束）は隣どうしで受け渡されるだけで、流束のむらは拡散で均されます。群がコンパクトなので、一枚のプラケットの角が $\pi$ を越える「巻き付き」で流束の総和（帯の位相電荷 $Q$）が一つ変わり、保存が破れます。保存が壊れる長さ $\ell_c$ は $\beta = 2, \dots, 6$ で $3.29,\ 9.88,\ 24.7,\ 53.6,\ 139$、$\ln \ell_c$ の傾きは $0.916(21)$ で、静的な長さ $\xi_{XY} = -1/\ln(I_1(\beta)/I_0(\beta))$（$2.78$〜$10.9$）との比は $1.2$ から $12.8$ に開きます [読]。帯が $\ell_c$ より長いと、緩和は $Q$ が一つ動く時間で決まり、$\tau(Q)/\xi_{XY}^2$ は $\beta = 4$ で約 $0.4$、$\beta = 8$（帯の長さ 32）で約 $24$ です [読]。条件：二次元 $U(1)$・幅 2・外周凍結・リンクの Langevin のゲージ商・帯の長さ $\le 256$・$\tau_{\mathrm{int}}$ は隙間の上界としての読み・当てはめの形 $A/M^2 + B$。保存が壊れる長さの詳しい話は 24-02 です。

**(d) 四次元の周期の箱の位相電荷。**滑らかにした位相電荷 $Q$ は、連続極限では区画の間を移れず、格子の上では格子間隔の大きさの小さなインスタントン（転位）が格子を通り抜けるときだけ変わります。周期の箱では $Q$ の自己相関時間が $\xi^2$ より明らかに速く伸びると報告されています（局所の熱浴・過緩和で Del Debbio–Panagopoulos–Vicari 2002、HMC で Schaefer–Sommer–Virotta 2011、局所の算法で Bonanno–Bonati–D'Elia 2021。冪なら指数は約 5、あるいは $1/a$ について指数的で、三本とも冪と指数をデータでは区別できないと書く）[典]。三本の群はどれも $SU(3)$ 以上です。$SU(2)$ で $\tau_{\mathrm{int}}(Q)$ の格子間隔への依存を測った一次資料は、探した範囲で一本（Abe–Morikawa–Suzuki 2025。HMC・周期・一辺が $2.2/\sqrt{\sigma}$ 程度の小さな箱・三つの格子間隔）で、$a^{-2}$ に近い伸びと報告しています [典]。熱浴系で $SU(2)$ を扱った原典は、どれも「凍結が測れるほど強くない」側の観察でした。(3) を通して上界の仮定の読みに使うときの条件は §06 にまとめます。

**(e) 箱を貫く流束。**力学の遅さではなく、試験関数の族の取り方で同じ型が出る例です。四次元の箱で局所の Poincaré 定数の参照（無質量の自由なゲージ場の値）を測るとき、箱の全てのサイトのゲージ変換で割れば試験の空間はプラケットの角の関数になり、箱の境のサイトのゲージ変換を割らずに残すと、箱を一様に貫く場（発散が二つの面にしかない流束）が試験の空間に入ります。後者の値は前者の $2.22$（一辺 4）から $2.53$（一辺 12）倍で、ほぼゲージを固定した値に戻ります [読]（一色のガウスの近似・$\beta = 1$・正準の目盛り・浮動小数）。可縮な箱では、全てのサイトで割った空間とプラケットの関数の空間が一致します [初]（24-03 §03）。この行の数は参照の自由場の数で、対象の測度の数ではありません。型の一員とみなすのは [見] です：箱の境を通る流束は、箱の中から見れば「隙間に映らず、族の取り方一つで比を動かす大域の量」です。

型の条件は満たすが、五つの例の表から下へ降ろした行が三つあります（表 2）。どれも別の章に本文があり、ここでは札だけを写します。

表 2　表 1 の下に降ろした三つの行

| 例 | 族の外にある量 | 遅さ | 札 | 本文 |
|---|---|---|---|---|
| 保存する力学（ガウス鎖） | 場の総和 | 波数 $1/\xi$ の成分で $\xi^4/2$、無限の鎖で $C_P = \infty$ | 初 | 2-10 の寄り道 |
| 階層格子の層のプラケットの流束（Gauss 近似・リンクの座標） | 層ごとの流束 | 最小の固有値 $\beta \cdot 4\sin^2(\pi/2^{N+1})$。層を切り離して静的な相関を 0 にしても同じ遅さ | 初 （区画分解と二次元の双対格子の Neumann Laplacian）・読 （$N \le 4$ の照合） | 24-02 |
| 小さな周期の箱の中心の区画 | Polyakov ループの符号 | 熱浴で長い自己相関。箱が大きくなれば消える有限体積の作り物で、Langevin の $C_P$ ではない | 読 | 24-08（問い） |

階層格子の行の上の側は Lean で検査しています（HierLink.lam_le、束 LatticeGaugeHierarchicalLink。仮定なし：$4\sin^2(\pi/2^{N+1}) \le \pi^2/4^N$。最小の固有値がこの式に等しいことは Lean の外）。

03

## 三つの強さ — 対数・冪か指数・無限

五つの例を、遅さの比 $C_P/\xi^2$（あるいは $\tau(Q)/\xi^2$）が相関長とともにどう伸びるかで並べ直すと、型は一つでも強さは三つに分かれます。

表 3　一つの形・三つの強さ

| 強さ | 例 | 壊す出来事と相関長の起源 | 緩和時間の仮定と上界の仮定への効き |
|---|---|---|---|
| 対数 | (a) 二重井戸 | 同じ出来事（キンク）が遅い量と $\xi$ を作る | 帯の上界の仮定は対数で破れ、二重井戸の冪の言明は残る 仮 |
| 冪か指数 | (c) 二次元の帯・(d) 四次元の周期の箱 | 遅い量を壊す出来事（巻き付き・転位）と $\xi$ の起源が別 | (c) は二次元の玩具の中で $\tau(Q)/\xi_{XY}^2$ が $\beta$ とともに伸びる 読 。(d) は §06 の条件の下で上界の仮定が偽と読める（$SU(3)$ 以上） |
| 無限 | (b) 回転子・表 2 の保存する力学と層の流束 | 壊す出来事が無い | $\Delta > 0$ のまま $C_P = \infty$ 初 |
| （定数倍） | (e) 箱を貫く流束 | 力学ではなく族の取り方 | 局所の比の分母を 2.2〜2.5 倍動かす 読 |

表 3 の真ん中の行が、四次元で問題になる行です。二重井戸では遅い量と相関長が同じキンクから生まれるので、指数が揃って対数の差しか残りません。二次元の帯では、相関長（弦張力の逆数）は $\beta$ について一次でしか伸びないのに、保存を壊す巻き付きは高さ $2\beta$ の障壁を越える出来事で、その長さは $\beta$ について指数で伸びます。四次元で同じ割れが起きるかと、割れるならなぜかは 24-07 の問いです。

04

## 部分領域の電荷の二つの勘定 — 輸送の係数と保存の破れの係数

無限体積では位相電荷の総量 $Q$ は $L^2$ に入らないので、型の (2) に入れるのは部分領域 $R$ の電荷です。その比 $\mathrm{Var}\,/\mathcal{E}$ を二つの係数に分けて書くと、24-03 の局所の緩和時間の仮定が何を問うかがはっきりします。

**設定**。四次元の無限体積の平行移動で不変な格子の測度 $\mu$ と、リンクの Langevin の Dirichlet 形 $\mathcal{E}(f)=\sum_{\ell}\mathbb{E}|\nabla_{\ell} f|^2$ を取ります。滑らかにした電荷密度 $q(x)$ は、$x$ から距離 $r_s$ 以内のリンクだけに依るものとします（有限回の均しで作る。Wilson 流のガウスの裾は切り落としの誤差として別に扱う）。勾配の場 $J_{\ell}(x):=\nabla_{\ell} q(x)$ は $|x-x_{\ell}|>r_s$ で 0 です。その和 $\bar{J}_{\ell}:=\sum_x J_{\ell}(x)$（全電荷の勾配）と一次のモーメント $D_{\ell}:=\sum_x (x-x_{\ell})J_{\ell}(x)$（双極子）を置き、三つの係数を

$$\chi_t:=\sum_{y}\mathrm{Cov}\big(q(0),q(y)\big),\qquad h:=\sum_{\ell\in\text{単位胞}}\mathbb{E}|\bar{J}_{\ell}|^2,\qquad d:=\sum_{\ell\in\text{単位胞}}\mathbb{E}|D_{\ell}\cdot e_1|^2 \tag{4}$$

で定めます [初]（定義。立方の対称性で $\mathbb{E}[D\otimes D]$ は $d$ の単位行列倍の型と置く）。$\chi_t$ は格子単位の位相感受率、$h$ は**保存の破れ**の密度（連続では位相不変性から $\bar{J}=0$、格子でだけ転位の配位の上で 0 でない）、$d$ は**輸送**の係数です。境界の層の係数 $g$ は、半空間で切った電荷の $\mathcal{E}$ から体積の項を引いた面あたりの量です。

**鋭い箱**。一辺 $R$ の箱では、クラスタの減衰 $\sum_z |z|\,|\mathrm{Cov}(q(0),q(z))|<\infty$ を仮定すると [仮]（隙間に相当する仮定なので、隙間の議論に戻すときは循環に注意）、

$$\mathrm{Var}(Q_R)=\chi_t|R|-b|\partial R|+o(|\partial R|),\qquad \mathcal{E}(Q_R)=\sum_{\ell}\mathbb{E}\Big|\sum_{x\in R}J_{\ell}(x)\Big|^2=h|R|+g|\partial R|+O(R^{2-\eta}) \tag{5}$$

です（$b$ は相関の片側の一次のモーメント）。分母の形に注意します。密度ごとの勾配の二乗の和 $\sum_{x\in R}\mathbb{E}|J_{\ell}(x)|^2$ は $\mathcal{E}(Q_R)$ ではありません。それは和 $\sum_x J_{\ell}(x)$ の打ち消し（連続では全電荷が局所に動かないこと）を落とした量で、完全に保存する理論でも体積の項を残してしまいます。正しい体積の項は $|\sum_x J_{\ell}(x)|^2$ の密度 $h$ です。$|R|=R^4$・$|\partial R|=8R^3$ を入れると

$$\frac{\chi_t}{h} - \frac{\chi_t R - 8b}{hR + 8g} = \frac{8(g\chi_t + bh)}{h(hR + 8g)} \tag{6}$$

初 （代数）Lean LatticeGauge.LocalH.subregion_gap_identity（仮定：$0 < h$・$0 < hR + 8g$）。比は $R \to \infty$ で周期の箱の全体の比 $\mathrm{Var}(Q)/\mathcal{E}(Q) = \chi_t/h$ に戻り、主項の比 $\chi_t R^4/(hR^4 + gS)$ は $\chi_t/h$ を越えません（subregion_ratio_le、仮定：$0 \le \chi_t$・$0 < h$・$0 \le g$・$0 < R^4$・$0 \le S$）。

**滑らかな窓**。$Q_w := \sum_x w(x)q(x)$、$w(x) = W(x/R)$ とすると、$\nabla_\ell Q_w = w(x_\ell)\bar{J}_\ell + \nabla w(x_\ell) \cdot D_\ell + O(R^{-2})$ で、交差の項は $\sum \nabla(w^2) = 0$ で消え、

$$\frac{\mathrm{Var}(Q_w)}{\mathcal{E}(Q_w)} = \frac{\chi_t R^2}{hR^2 + d\lambda_W}\big(1 + O(\xi^2/R^2)\big), \qquad \lambda_W := \frac{\|\nabla W\|^2}{\|W\|^2}, \qquad R_*^2 := \frac{d\lambda_W}{h} \tag{7}$$

です 仮 （クラスタの減衰と、$h, d$ の定義の上の見積もり。$\lambda_W$ は単位の四次元立方体の Dirichlet の窓で $4\pi^2$）。二つの領分が交差の長さ $R_*$ で分かれます。$R \ll R_*$ では比は $\chi_t R^2/(d\lambda_W)$ で $R^2$ に比例し、これは保存する力学（2-10 の寄り道）と同じ**輸送**の型です。$R \gg R_*$ では比は $\chi_t/h$ で、**障壁**（保存の破れ）の型です。$D_{\mathrm{eff}} := d/\chi_t$・$r \propto h/\chi_t$ と読めば $R_*^2 \approx D_{\mathrm{eff}}/r$ で、24-02 の「保存が壊れる長さ」の四次元の候補になります 見 。

二つの係数は別々の問いに掛かります。全体の上界の仮定の必要条件は $\chi_t/h \lesssim \xi^2$ で、保存の破れの係数 $h$ を問います。24-03 の局所の緩和時間の仮定は、箱の一辺 $c\xi$ の窓に (7) を入れた条件で、$h$ が小さい領分では輸送の係数 $d$ を問います（24-03 §05）。$h$・$g$・$d$ の四次元の格子の値は、この本にはありません。

05

## 一段目の壁は、この型の縮小版

第 23 部の一段目は、頂上の一サイトの曲率が凸性に $\frac{1}{4}$ 足りないという共通の壁で止まりました（23-09 の (11)：対角 $4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$ が結合の和 4 に届かない）。この壁は、この章の型の 0+1 次元の縮小版と読めます 見 。理由は次の対応です。

型の (ii) は「$Q$ は稀な配位を通ってしか変わらない」でした。二重井戸で $Q$（どちらの井戸にいるか）が変わる配位は、経路が頂上の台地を渡る配位で、そこはちょうど作用の Hessian が負の向きを持つ場所です。凸性に頼る道具（Bakry–Émery・Brascamp–Lieb・対角優位）は、この配位の上で不足を出し、不足は台地の稀さ（エントロピー）でしか払えません（23-10 通貨の取り違えの型）。つまり $\frac{1}{4}$ は「ほぼ保存される量を壊す出来事の配位で、凸性が足りない」ことの局所の顔です。四次元でこれに当たるのは、位相電荷が変わる配位（滑らかさの

条件を破る、格子間隔の大きさの転位）です。四次元でも同じ型の壁に出会うという見込みは、ここから来ます 見 。

表 4　この章の型と、第 23 部の注・壊れ方の型の対応

| 第 23 部の場所 | そこで言われていること | この章の型での読み |
|---|---|---|
| 23-01 §05 の注 | 位相電荷は区画の間を移れず、周期の箱では予想の下で上界の仮定が偽と読める。緩和時間の仮定を区画ごとか局所の言明に直す方向が候補 | 表 1 の (d) の行。直す二つの形は 24-03 |
| 23-01 §06 の型の段落 | 緩和が隙間より遅いのは、隙間に映らない時刻に局所でない量が拡散で運ばれるとき | 型の (i)〜(iii) そのもの。この章は例を五つに増やし、強さで分けた |
| 23-10 頂上の曲率の型（源は一つ） | 不足の源は頂上の一サイトの曲率だけ | 壊す出来事の配位が一つの場所に集まる（§05） |
| 23-10 通貨の取り違えの型 | Poincaré は出口の速さ、稀さはエントロピーの通貨。条件づけの後には払う稀さが残らない | 型の (ii) の「稀な配位」は Poincaré の比では払えない。区画に条件づけると稀さは区画の間の量へ移る（24-03 の $C_{\mathrm{trans}}$ ） |
| 23-10 移しかえの型 | 軽くなった列の分だけ別の列が重くなる | 区画ごとの拡散型緩和時間の仮定は障害を消さず、区画の間の量一つに押し込む（24-03 §04） |

06

## 言えないこと

(a) **予想の延長**。「HMC と Langevin は同じ動的な普遍類」という予想は、原典（Lüscher–Schaefer 2011）では、開いた境界の $SU(3)$ で自己相関が $a^{-2}$ に伸びるという観察に付いた語です。同じ原典は、周期境界では Langevin を積分する算法も位相の区画を渡りにくくなると書きますが、その根拠に引くのは熱浴と HMC の原典で、自身の周期境界の数値はありません 典 。表 1 の (d) の行を (3) に入れて「上界の仮定は周期の箱で偽と読める」とするのは、**予想を周期境界の位相の遅さへ延ばした読み**です 仮 。熱浴の Dirichlet 形と Langevin の Dirichlet 形の間には一リンクの比較 $\mathcal{E}_{\mathrm{HB}} \le c_1 \mathcal{E}_L$ の一方向しかなく、熱浴の遅さから Langevin の $C_P$ の下界は直接は出ません。HMC と Langevin の関係を定理として述べた一次資料は、探した範囲で見当たりません。

(b) $SU(2)$ **は未決**。原典の群は $SU(3)$ 以上です。$SU(2)$ の一次資料は一本で、その数は $a^{-2}$ に近い側にあります。半古典の粗い勘定（転位の作用を一ループのインスタントンの作用の定数倍と置く）では、$SU(3)$ の数に合わせた定数で $SU(2)$ はちょうど $z = 2$ の境目の近くに落ちます（24-07）。$SU(2)$ **について、位相電荷の凍結が緩和時間の仮定を壊すかは決まっていません**。

(c) **二次元と四次元**。(c) の行は二次元 $U(1)$ の玩具の数で、二次元 $U(1)$ は連続極限で自明な理論です。四次元・非可換・$\beta \to \infty$ の指数については何も言いません。

(d) **冪か指数か**。(d) の行の三本の原典は、自ら「冪と指数はデータで区別できない」と書いています。表 3 の「冪か指数」はその言い方の写しです。

(e) **型は分類**。五つの例が一つの型に入ることは定理ではありません。(e) の行は参照の自由場の数で、対象の測度の数ではありません。(4)〜(7) の係数 $h, g, d$ は定義だけで、四次元の値はありません。

(f) **質量ギャップ**。どの例も隙間を壊しません。型の (iii) がそれを保証する条件で、この章が言うのは「上界の仮定という形では捕まらない遅さがある」ことまでです。

07

## 五分類の表と依存グラフ

この章の行を五分類の書式（23-00 §01）に、見立ての札「見」を足して一表にします。行の記号は下の依存グラフの節点と同じです。

表 5　ほぼ保存される量の行（「—」は機械検査の無い行）

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 | 機械検査 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | クラスタの減衰 $\sum_z \lvert z\rvert \,\lvert \mathrm{Cov}(q(0), q(z))\rvert < \infty$ | 仮 | (5) の前提 | 無限体積 | — |
| 2 | 予想を周期の箱の位相の遅さへ延ばした読み | 仮 | §06 (a) | 周期の箱 | — |
| 3 | $SU(3)$ 以上の周期の箱で $\tau(Q)$ が $\xi^2$ より速い | 典 | §02 (d)・三本の原典 | $SU(3), SU(4), SU(6)$・周期 | — |
| 4 | $SU(2)$ の一次資料一本で $a^{-2}$ に近い | 典 | §02 (d) | HMC・小さな箱・三点 | — |
| 5 | 二重井戸の全体の比 $C_P/\xi^2 \approx S_0/\hbar$ | 仮 | 23-04 の (14) | $\hbar \to 0$ | — |
| 6 | 帯の $\ell_c \cdot \tau(Q)/\xi_{XY}^2$ | 読 | §02 (c) | 二次元 $U(1)$・$\beta = 2..6$（$\tau(Q)$ は 8 も） | — |
| 7 | 境のゲージを凍らせた参照が 2.22〜2.53 倍 | 読 | §02 (e) | 一色のガウス・$\beta = 1$・一辺 $\le 12$ | — |
| 8 | 可逆な力学で $\tau_{\mathrm{int}} \le C_P$ | 初 | (1) | 可逆な半群 | tau_int_le_CP（仮定：重み $\ge 0$・固有値 $\ge \lambda_1 > 0$） |
| 9 | 円の上の自由な粒子の反例：$\Delta > 0$ で $C_P = \infty$ | 初 | 23-01 の (23) | 円・全ての $\hbar$ | rotor_ratio_unbounded（仮定：$0 < r$。骨の算術だけ） |

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 | 機械検査 |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 一サイトの比 $= \omega_b/m$ | 初 | §02 (a)（基底状態変換） | Schrödinger の $\psi_0$ | one_slice_ratio（仮定：$0 < \varepsilon, m, \omega$。比の代数だけ） |
| 11 | 部分領域の比の式 (6) と、比 $\le \chi_t/h$ | 初 | (5)(6)（行 1 の上） | 無限体積 | subregion_gap_identity・subregion_ratio_le（仮定：正値） |
| 12 | (3)：$\tau$ が $\xi^p$（$p > 2$）なら上界の仮定は破れる | 初 | (3) | $\xi \to \infty$ の列 | not_hup_of_fast_tau（仮定：$\tau_n \le C_n \cdot c\xi_n^p \le \tau_n \cdot p > 2$） |
| 13 | 周期の箱で上界の仮定は偽と読める（$SU(3)$ 以上） | 仮 | 行 12 に行 3 と行 2 を入れた読み | 周期の箱 | — |
| 14 | 五つの例は一つの型 | 見 | §01〜§03 | — | — |

```
 1  仮  クラスタの減衰                                   無限体積
 2  仮  予想を周期の箱の位相の遅さへ延ばした読み          周期の箱
 3  典  SU(3) 以上で τ(Q) が ξ² より速い                 周期の箱
 4  典  SU(2) の一次資料一本（a⁻² に近い）               HMC・小さな箱
 5  仮  二重井戸の全体の比 ≈ S₀/ħ                       ħ → 0
 6  読  帯の ℓ_c・τ(Q)/ξ_XY²                            二次元 U(1)
 7  読  境のゲージを凍らせた参照の倍率                   一色のガウス
 8  初  τ_int ≤ C_P                                     可逆な半群
        Lean tau_int_le_CP
 9  初  円の上の自由な粒子の反例（23-01）                円
10  初  一サイトの比 = ω_b/m                             0+1
11  初  部分領域の比 (6) ⟸ 1                            無限体積
        Lean subregion_gap_identity・subregion_ratio_le
12  初  τ ≥ cξ^p（p>2）なら上界の仮定は破れる ⟸ 8
        Lean not_hup_of_fast_tau
13  仮  周期の箱で上界の仮定は偽と読める ⟸ 2・3・12      SU(3) 以上
14  見  一つの形 ⟸ 5・6・7・9・10・13
```

確かめ方。「⟸」の行で右の番号が左より小さいことを目で見ます。円はありません。$SU(2)$ の一次資料の行はどの行の前提にも入っていません。$SU(2)$ の読みが決まっていないことの、グラフの上の姿です。「周期の箱で上界の仮定は偽と読める」の行の葉には仮定の行（予想を周期の箱の位相の遅さへ延ばした読み）があり、この行の札が「仮」なのはこのためです。

正確には、「周期の箱で上界の仮定は偽と読める」の言明は結論の量 $C_P$ を含みますが、その前提のうち、予想を延ばした読みと SU(3) 以上の原典の数は $C_P$ を含みません。原典の数は Monte Carlo の自己相関の数、予想を延ばした読みは力学の普遍類についての読みで、$C_P$ に届くのは τ_int ≤ C_P の行を通る一回だけです。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 初 $\tau_{\mathrm{int}} \le C_P$（可逆な力学）・静的な下界 (2)・(3) の代数・円の上の自由な粒子の反例・一サイトの比 $\omega_b/m$・部分領域の比の式 (6) | (3) の第二の仮定を四次元で満たす $\tau(Q)$ の下界。四次元の $h, g, d$ の値 |
| 読 二次元 $U(1)$ の帯の $\ell_c$ と $\tau(Q)$、境のゲージの倍率、二重井戸の格子の比 | どれも条件の中の浮動小数・Monte Carlo の数で、上界・下界の命題ではない。二次元の数は四次元に何も含意しない |
| 典 $SU(3)$ 以上の周期の箱で $\tau(Q)$ が $\xi^2$ より速い（三本の原典）・$SU(2)$ の一次資料一本 | 冪か指数か。$SU(2)$ で $z > 2$ か |
| 仮 周期の箱で上界の仮定は偽と読める（$SU(3)$ 以上・予想を延ばした読みの上） | 上界の仮定が偽であること。$SU(2)$ での同じ読み |
| 見 五つの例が一つの型であること・一段目の壁がこの型の縮小版であること | 型の分類を定理にすること |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 周期の箱の位相電荷の自己相関（$SU(3)$ 以上） | 典 | L. Del Debbio, H. Panagopoulos, E. Vicari, JHEP 08 (2002) 044 §2・S. Schaefer, R. Sommer, F. Virotta, Nucl. Phys. B 845 (2011) 93 §4〜§5・C. Bonanno, C. Bonati, M. D'Elia, arXiv:2012.14000 §1（本文で確認） |
| $SU(2)$ の一次資料 | 典 | M. Abe, O. Morikawa, H. Suzuki, PTEP 2025 063B03（arXiv:2501.00286 の本文 §3.2 と図 6 の文で確認。図の数値は読んでいない） |
| $SU(2)$ の熱浴系の観察・半古典の指数 | 典 | A. Athenodorou, M. Teper, JHEP 12 (2021) 082 §6.2・B. Lucini, M. Teper, JHEP 06 (2001) 050 §6・B. A. Berg, D. A. Clarke, Phys. Rev. D 97 (2018) 054506 §II（本文で確認） |
| HMC と Langevin の普遍類の予想・周期境界の文 | 典 | M. Lüscher, S. Schaefer, JHEP 07 (2011) 036（抄録・§3.2〜§3.3・§5.2 を本文で確認） |
| (1)・(3)・(6) の代数 | Lean | LatticeGauge.FourDTrial（tau_int_le_CP・not_hup_of_fast_tau・tau_small_but_CP_large）・LatticeGauge.LocalH（subregion_gap_identity・subregion_ratio_le）。束が保証するのは代数だけ |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 二次元 $U(1)$ の帯の数 | 読 | リンクの Langevin のゲージ商の模擬（幅 2・外周凍結・帯の長さ $\le 256$）と $A/M^2 + B$ の当てはめ。誤差は Madras–Sokal |
| 二重井戸の一サイトの比・境のゲージの倍率 | 読 | 転送の核の格子の固有値問題（$\varepsilon = \frac{1}{2}$）・格子の Green 関数の箱への圧縮の最大固有値（一色のガウス） |

**この章で使った語** — ほぼ保存される大域の量・保存の破れ・輸送の係数 $d$ と保存の破れの係数 $h$・交差の長さ $R_*$・巻き付き・帯の位相電荷・箱を貫く流束。記号は 24-09 にあります。

次に読む章：24-02 物差しと座標を選び直す — 比べるべき長さは静的な相関長か、保存が壊れる長さか。型を避けて緩和時間の仮定を述べ直す二つの形は 24-03。

# 物差しと座標を選び直す — 保存が壊れる長さ

この章は本書の検討です。§06 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 拡散型緩和時間の仮定は緩和の時間 $C_P$ を一つの長さ $\xi$ の二乗と比べる文でした。その $\xi$ の役をしうる物差しを三つに分けます：静的な相関長、保存が壊れる長さ $\ell_*$、大域の量が一つ動く時間。同じ平衡の測度でも、どの座標で動かすか（Dirichlet 形式の選び方）で拡散型緩和時間の仮定の真偽が変わることを、階層格子で見ます（木の座標では $C_P = 1/\beta$、リンクの座標では一辺の二乗）。二次元 $U(1)$ の帯で保存が壊れる長さを五点で測った数が、静的な長さと比例しないこと、それが位相電荷の一歩と同じ巻き付きから来ること、緩和の率を「生の率」と「静的な揺らぎ」に分けると紙の予想が落としていた因子が見えることを述べます。最後に、比べる相手を $\max(\xi^2,$ **大域の量が一つ動く時間**$)$ に置く直し方の候補と、二次元 $CP^{N-1}$ の試験台で位相電荷の凍結は $N$ で割れ、局所の量の比は割れなかったこと（条件つき）を並べます。

**前提となる章** — 24-01（型・(4)〜(7) の二つの勘定・表 1 の (c)）・23-01 §05（緩和時間の仮定の (13) と位相の区画の注）・23-01 §07（記帳の長さ $\xi_{\mathrm{RG}}$ と対数の因子）・2-10 の寄り道（保存する力学）・2-10 の「定数のほかの違い」（変数の取り方）。記号は 24-09 にまとめてあります。

**先に言うこと** — 水準は〔三〕です。この章の数は、階層格子の Gauss 近似と、二次元の模型（$U(1)$ の帯・$CP^{N-1}$）の数です。二次元の数は四次元のヤン–ミルズについて何も含意しません。「比べる相手を直す」は候補の言い直しで、どの模型でも示していません 見 。この章は質量ギャップも、緩和時間の仮定の真偽も示しません。

この章の順序

1. 三つの物差し — 静的な相関長・保存が壊れる長さ・大域の量が一つ動く時間（(1)(2)）
2. 座標を選び直す — 木の座標とリンクの座標、流束の保存（表 1・(3)〜(5)）
3. 二次元 $U(1)$ の帯 — 保存が壊れる長さを五点で（表 2・(6)）
4. 同じ巻き付きの二つの顔 — 流束の双極子と位相電荷（(7)）
5. 生の率と静的な揺らぎ — 紙の予想が落としていた因子（(8)(9)）
6. 比べる相手を直す — $\max(\xi^2, \tau_{\mathrm{glob}})$（(10)）
7. 二次元 $CP^{N-1}$ の試験台 — 凍結は $N$ で割れ、局所の比は割れない（表 3・表 4）
8. 言えないこと
9. 五分類の表と依存グラフ — 表 5

---

01

## 三つの物差し — 拡散型緩和時間の仮定の $\xi$ は何の長さか

緩和時間の仮定は冪の文 $\lim \ln C_P / \ln \xi = 2$（23-01 の (13)）で、緩和の時間 $C_P$ を一つの長さ $\xi$ の二乗と比べます。第 23 部はこの $\xi$ を相関長 $1/m_{\mathrm{lat}}$ とし、その代わりに記帳の長さ $\xi_{\mathrm{RG}}$ を使いました（23-01 §07）。ところが 24-01 の型では、遅さを決めるのは相関長ではなく「大域の量 $Q$ を壊す出来事の尺度」でした。そこで、比べる相手の候補を三つに分けておきます。

**(a) 静的な相関長 $\xi$。**平衡の測度だけで決まる、二点の相関が減る長さです。四次元では $\xi = 1/m_{\mathrm{lat}}$。二次元の $U(1)$ の帯では、帯の一行が軸ゲージで一次元の回転子の鎖になり、Wilson ループが面積で減る長さ（弦張力の逆数）

$$\xi_{XY} = -\frac{1}{\ln\bigl(I_1(\beta)/I_0(\beta)\bigr)} \;\approx\; 2\beta \qquad (\beta \text{ が大きいとき}) \tag{1}$$

がこれに当たります（$I_\nu$ は変形 Bessel 関数。式は標準の計算で、この本では原典を確かめていません 仮 ）。

**(b) 保存が壊れる長さ $\ell_*$。** 部分領域 $R$ の中の大域の量（電荷） $Q_R$ は、二つの道で変わります。境界を通って流れ出る輸送の道（時間は $R^2$ の程度）と、領域の中で保存が破れる道（転位・巻き付き）です。二つが釣り合う長さが $\ell_*$ です。24-01 の (7) の交差の長さ $R_*$ は、その静的な版でした。測度だけの量で書く候補の定義は

$$S := \sup_{R} \frac{\mathrm{Var}(Q_R)}{\mathcal{E}(Q_R)}, \qquad \ell_* := \inf\Big\{ R : \ \frac{\mathrm{Var}(Q_R)}{\mathcal{E}(Q_R)} \ \geq \ \frac{S}{2} \Big\} \quad (S=\infty \text{ なら } \ell_*=\infty) \tag{2}$$

です 見 。24-01 の (7) の見積もり $\mathrm{Var}\,/\mathcal{E} \approx \chi_t R^2/(hR^2 + d\lambda_W)$ を入れると $S = \chi_t/h$ で、半分に届くのは $hR^2 = d\lambda_W$ のとき、すなわち $\ell_* = R_*$ です 仮 （(7) の見積もりの上）。保存が破れない（$h=0$）なら $S=\infty$ で $\ell_*=\infty$ となり、後の §02 の Gauss 近似の層の流束（保存がちょうど成り立つ）と合います。正確には、比を $R^2$ と比べる「$\mathrm{Var}\,/\mathcal{E} \le K R^2$ となる $R$ の上限」という形の定義は、(7) の見積もりでは比を $R^2$ で割った量が $R$ について減るので、条件を満たす $R$ の集合は上に開いた半直線か空になり、上限は無限か定まらず、長さを決めません。(2) は飽和の値の半分で切ることでこれを避けています。

**(c) 大域の量が一つ動く時間 $\tau_{\mathrm{glob}}$。** 長さではなく時間です。周期の箱の位相電荷 $Q$ の積分自己相関時間 $\tau_{\mathrm{int}}(Q)$ がその代表で、可逆な力学なら $\tau_{\mathrm{int}}(Q) \le C_P$（24-01 の (1)）です。

三つは同じ模型の中で別の値を取りえます。0+1 次元の二重井戸では、遅い量（キンクの数）と相関長が同じキンクから生まれ、三つは対数の差しか持ちません（24-01 表 3）。§03 の二次元の帯では、(a) は $\beta$ について一次、(b)(c) は指数で伸び、三つが離れていきます。緩和時間の仮定がどの物差しの文かは、模型を決めても自動では決まりません。

この節が言えている範囲：(2) は定義の候補で、四次元の $\ell_*$ の値はこの本にありません。(1) の $\xi_{XY}$ は帯の静的な長さとして使うだけで、四次元の相関長の代わりにはなりません。

02

## 座標を選び直す — 木の座標とリンクの座標

Poincaré 定数 $C_P = \sup \mathrm{Var}(f)/\mathcal{E}(f)$ の分母は Dirichlet 形式で、どの変数の勾配で測るかを決めないと定まりません。変数を定数倍に付け替えると $C_P$ が定数倍変わることは第 2 部で見ました（2-10 の「定数のほかの違い」：リンクの角で測るか場で測るかで $\beta$ 倍）。この節では、座標の選び方で $C_P$ の伸び方の**型**が変わる例を置きます。

**舞台。** 階層格子は、格子を入れ子の箱に置き換えて繰り込みの一段が書き下せるようにした格子です。ゲージ場では Ito（1984）が、Migdal–Kadanoff の近似の再帰がちょうど成り立つ三次元の格子を作り、高い次元への延長は読者に委ねると書いています 典 。この本は二倍ずつ粗くする四次元の版を自分で定め（各層が一辺 $L=2^N$ の二次元の周期の格子で、水準 $r$ のボンドは $4^r$ 枚の層で同一視される）、その上の Gauss 近似（$U(1)$、または $SU(2)$ の Lie 環の一成分への線形化）だけを扱います 仮 （四次元の構成はこの本の延長）。

**木の座標。** プラケットの値（節点のホロノミー）を変数に取ると、Gauss 近似では配位の空間は線形部分空間 $S$ で、平衡の測度は $S$ の上の密度 $e^{-\beta|x|^2/2}$、Langevin のポテンシャルの Hesse 行列は $S$ の上で $\beta I$ です。

$$\text{木の座標（Gauss 近似）}: \qquad \lambda_1 = \beta, \qquad C_P = \frac{1}{\beta} \qquad (\text{全ての段数 } N) \tag{3}$$

初 証明。単位の計量の Ornstein–Uhlenbeck 過程で、ドリフトの行列が $\beta I$ なので、生成作用素の隙間は $\beta$ です。∎ Lean `HierLink.tree_no_decay`（束 LatticeGaugeHierarchicalLink。仮定：$0<\beta$。比が 1 であることの算術だけ）。段数を増やしても、つまり格子をどれだけ大きくしても、この座標では緩和は遅くなりません。非可換の流れで相関長が伸びても粗い水準は Haar に近く $C_P = O(1)$ のまま、と見込まれ 見 、**木の座標では緩和時間の仮定は偽か空虚**です。

**リンクの座標。** 第 23 部の緩和時間の仮定が名指すのはリンク変数の Langevin です（23-01 §04）。Gauss 近似のリンクの生成作用素は $\beta\, D\Pi D^*$（$D$ はリンクからプラケットへの外微分、$\Pi$ は同一視の射影）で、その最小の正の固有値は

$$\lambda_{\min}(N) = 4\sin^2\frac{\pi}{2^{N+1}}, \qquad 4^N \lambda_{\min}(N) \ \longrightarrow \ \pi^2 \qquad (N\to\infty) \tag{4}$$

です 初 （紙：層の関数を階層の射影で区画に割ると、区画 $k$ のブロックの作用素は一辺 $2^{k+1}$ の二次元の双対格子の Neumann Laplacian になり、最小は区画 $k=N-1$ の一辺 $2^N$ の値） 読 （$N\le 2$ で直接の全スペクトル、$N=3,4$ で区画の別の実装と一致）。生成作用素の隙間は $\beta\lambda_{\min}$ で、一辺の二乗に反比例して小さくなります。Lean `HierLink.lam_le`（仮定なし：$4\sin^2(\pi/2^{N+1}) \le \pi^2/4^N$。遅さの向きの上界で、$\lambda_{\min}$ がこの式に等しいことは Lean の外）・`HierLink.measured_scaled`（測った $\lambda_{\min}(4)$ の区間を仮定に $4^4\lambda_{\min} \in (9.83, 9.84)$）。

表 1　座標とギャップ（Gauss 近似・$U(1)$ の一成分・この本の四次元の延長。ギャップは $\beta$ で割った値）

| $N$ | 一辺 $L=2^N$ | 木の座標 | リンクの座標（原格子の計量） | $4^N\lambda_{\min}$ | リンクの座標（類ごとの計量） | 四次元の原格子のゲージ商 | 層を切り離した対照 $4\sin^2(\pi/L)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 2.000000 | 8.0000 | 2.000000 | 2.0000 | 4 |
| 2 | 4 | 1 | 0.5857864 | 9.3726 | 0.8768944 | 0.5857864 | 2 |
| 3 | 8 | 1 | 0.1522409 | 9.7434 | 0.2575235 | — | 0.5858 |
| 4 | 16 | 1 | 0.0384294 | 9.8379 | 0.0667663 | — | 0.1522 |

表 1 の札：木の座標の列は (3) で 初 。リンクの座標（原格子の計量）は (4) の閉じた式と計算の一致 初 読 。類ごとの計量（同一視したボンドを一つの変数として動かす）は計算だけ 読 で、原格子の計量の 1.0〜1.74 倍です。四次元の原格子のゲージ商は $N\le 2$ で原格子の計量と $10^{-9}$ まで一致 読 。最小の固有ベクトルは、全ての $N$ で同じ区画（層の四つの最上位の組の対比）に載っています 読 。

**遅さの出所は流束の保存。**リンクを動かすと、プラケットの値（流束）は隣どうしで受け渡されるだけです。

$$\frac{d}{dt}F = d\Big(\frac{d}{dt}A\Big), \qquad \sum_{p\in\text{ブロック}} F_p = 0 \quad \text{(境のボンドが止まっているとき、Stokes)} \tag{5}$$

流束のむらは拡散でしか均されず、一辺の二乗の時間がかかります（第 2 部の保存する力学＝model B の型、2-10 の寄り道）。決め手は表 1 の最後の列です。層を切り離して全てのボンドを層ごとの独立な変数にすると、静的にはプラケットはほぼ独立（総和の拘束だけ）で相関の長さは 0 なのに、最小の固有値は $4\sin^2(\pi/L)$ で同じ $L^{-2}$ の型が残ります 初 。したがって**この遅さは相関長から来ていません。**Gauss 近似のプラケットの静的な相関は $-\beta^{-1}R^{-4}$ の程度の質量の無い減り方で、$\beta$ は流れず（四次元で結合が無次元であることの Gauss 近似での姿、24-07）、相関長は体積で切られるだけです 初 。

**帰結。**緩和時間の仮定は測度だけの文ではなく、**（測度・Dirichlet 形式）の組の文**です 見 。木の座標とリンクの座標は同じ平衡の測度を持つのに、前者では $C_P$ が段数に依らず、後者では一辺の二乗で伸びます。第 2 部の「座標で $C_P$ が定数倍変わる」は伸び方の冪を変えませんでしたが、ここでは冪そのもの（$N^0$ と $4^N$）が変わります。第 23 部の緩和時間の仮定はリンク変数の Langevin を名指しているので、この点は既に満たしています。熱浴や過緩和の数値をリンクの Langevin の $C_P$ に読み替えるのは仮定です（2-10 §「熱浴と Langevin を同一視しない」）。そしてリンクの座標でも、Gauss 近似では保存がちょうど成り立つので (2) の $\ell_*$ は無限で、「$C_P\propto L^2$」と相関長を比べることには意味がありません。比べるのは、群がコンパクトであることや非可換であることが流束の保存をどの長さで壊すか、という Gauss 近似の外の量です。次の節はその最初の測りです。

この節が言えている範囲：階層模型は平行移動と回転の不変性を欠き、四次元のヤン–ミルズに何も含意しません。四次元の構成は原典の三次元の構成のこの本の延長です。数は Gauss 近似の数で、$N\le 4$ です。

03

## 二次元 $U(1)$ の帯 — 保存が壊れる長さを五点で

**模型。**前節の層の一枚を細い帯に切り出します。プラケット $(x,y)$、$x=0,\dots,M-1$、$y=0,1$（幅 $W=2$）、外周のリンクは全て角 0 に止め、内部のリンクを作用 $S=-\beta\sum_p\cos\varphi_p$ の Langevin $d\theta_\ell=-\partial_\ell S\,dt+\sqrt{2}\,dB_\ell$ で動かします（単位の計量）。内部の頂点のゲージ変換はプラケットの角 $\varphi_p$ を変えないので、ゲージ不変な関数の上ではリンクの生成作用素は $\varphi$ の上の拡散に落ち、その計量はプラケットの双対グラフの Neumann Laplacian です 初 。平衡の測度はプラケットごとに独立な $e^{\beta\cos\varphi}$ を $\sum_p\varphi_p\equiv 0\pmod{2\pi}$ で条件づけたもので、プラケットどうしの静的な相関はほぼありません。

**Gauss 近似では保存がちょうど成り立つ。**$\sin\varphi\to\varphi$ とすると、最小の隙間は $\beta\cdot 4\sin^2(\pi/2M)\approx\beta\pi^2/M^2$ で、帯の長さの二乗に反比例します 初 （Lean `ConsLen.neumann_gap_lower`・`ConsLen.neumann_gap_upper`、束 LatticeGaugeConservationLength。仮定：$1\le M$。$4/M^2\le 4\sin^2(\pi/2M)\le\pi^2/M^2$。隙間がこの式に等しいことは Lean の外）。

**群がコンパクトだと保存が破れる。**一枚のプラケットの角が $\pm\pi$ を越える出来事（巻き付き）で、角を $(-\pi,\pi]$ に縮めた和

$$Q:=\frac{1}{2\pi}\sum_p[\varphi_p]\ \in\ \mathbb{Z} \tag{6}$$

（帯の位相電荷、外周が止まっているので整数）が一つ変わります。巻き付きは高さ $2\beta$ の障壁を越える稀な出来事です。測るのは二つの量です。流束の双極子 $X=\sum_p w_p[\varphi_p]$（$w_p=\cos(\pi(x+\tfrac12)/M)$、Gauss 近似の最も遅いモード）の $\lambda_X:=1/\tau_{\text{int}}(X)$ と、位相電荷の $\lambda_Q:=1/\tau_{\text{int}}(Q)$ です。可逆な力学では $\tau_{\text{int}}\le C_P$（24-01 の (1)）なので、どちらも**隙間の上界**として読みます。保存が壊れる長さは、$\lambda_X=A/M^2+B$ を当てはめて $\ell_c:=\sqrt{A/B}$（拡散の速さ $A/M^2$ が飽和の値 $B$ に等しくなる長さ）と定めます。

表 2　二次元 $U(1)$ の帯の五点（幅 2・外周凍結・リンクの Langevin のゲージ商・帯の長さ $M \le 256$。$\lambda_Q$ は $\mathrm{Var}\,Q \ge 0.5$ の $M$ の重みつき平均。$E := \mathbb{E}\,[\varphi_p]^2$。誤差は Madras–Sokal と当てはめの共分散）

| $\beta$ | $\xi_{XY}$ | $\ell_c$ | 紙の見積もり | $\lambda_Q$ | $\tau(Q)$ | $\pi/\sqrt{E\lambda_Q}$ | $\rho = \ell_c/\frac{\pi}{\sqrt{E\lambda_Q}}$ | $\ell_c/\xi_{XY}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2.78 | 3.29(20) | 3.53 | 0.769(21) | 1.30 | 4.10 | 0.80(5) | 1.2 |
| 3 | 4.75 | 9.88(39) | 8.28 | 0.224(13) | 4.46 | 10.0 | 0.985(50) | 2.1 |
| 4 | 6.82 | 24.7(9) | 19.6 | 0.0579(29) | 17.3 | 23.9 | 1.03(5) | 3.6 |
| 5 | 8.87 | 53.6(3.1) | 47.7 | 0.0127(10) | 79 | 58.5 | 0.92(6) | 6.0 |
| 6 | 10.90 | 139(14) | 118 | 0.00276(32) | 362 | 139 | 1.00(11) | 12.8 |

表 2 の札は全て 読 です。「紙の見積もり」は試験関数の容量の見積もり（巻き付きの戻りを容量で最適化した試験関数を入れた上界の、二項が等しくなる長さ。$\beta$ が大きいとき $e^{\beta}\sqrt{\pi/(6\beta)}$）の数値積分の値で 仮 （独立近似の上の見積もり）、測った $\ell_c$ と同じ桁です。

**傾き**。$\beta = 2, \dots, 6$ の重みつき直線で

- $\ln \ell_c$ の傾き $a = 0.916(21)$。区間で割ると $\beta = 2\text{〜}4$ で $0.988(34)$、$4\text{〜}6$ で $0.834(46)$。
- $-\ln \lambda_Q$ の傾き $b = 1.355(18)$。区間で割ると $1.286(28)$ と $1.520(57)$（差は $3.7\sigma$）。
- 合成 $\pi/\sqrt{E\lambda_Q}$ の ln の傾きは $0.884(9)$ で、どの区間でも $0.879\text{〜}0.884$。

読 Lean `ConsExp.lc_slope_2_6`（束 LatticeGaugeConservationExponent。仮定：$\ell_c(2) \in [3.09, 3.49]$・$\ell_c(6) \in [125, 153]$、測った $1\sigma$ の区間。結論：$a \in [3/4, 1]$）・`ConsExp.lamQ_slope_2_6`（$\lambda_Q(2)$・$\lambda_Q(6)$ の $1\sigma$ の区間を仮定に $b \in [5/4, 3/2]$）。束が保証するのは区間の算術だけです。

**静的な長さと比例しない**。静的な長さ $\xi_{XY} \approx 2\beta$ は $\beta$ について一次で、五点で約 4 倍にしかなりません。保存が壊れる長さ $\ell_c \propto e^{0.92\beta}$ は 42 倍になり、比 $\ell_c/\xi_{XY}$ は $1.2$ から $12.8$ に開きます 読 。§01 の三つの物差しのうち (a) と (b) が、同じ模型の中で指数で離れていく例です。帯が $\ell_c$ より長いと、緩和は帯の長さに依らなくなり、$Q$ が一つ動く時間で決まります。

条件：二次元 $U(1)$・幅 2・外周凍結・単位の計量のリンクの Langevin のゲージ商・$\beta = 2, \dots, 6$・帯の長さ $M \le 256$・$\tau_{\mathrm{int}}$ は隙間の上界としての読み・当てはめの形 $A/M^2 + B$（$\beta = 2$ は $\chi^2/\text{自由度} = 3.3$ で形が合っていない）。$\beta \to \infty$ の指数については何も言いません。

## 04
## 同じ巻き付きの二つの顔 — 流束の双極子と位相電荷

表 2 の $\rho$ の列は、二つの量が一つの過程であることを示します。流束の双極子 $X$ の緩和は、Gauss 近似の剛性を $1/E$ に替えた速さ $\mu_1(M)/E$（$\mu_1 \approx \pi^2/M^2$）で $M^{-2}$ に下がり、位相電荷 $Q$ の緩和の率 $\lambda_Q$ は帯の長さに依りません。拡散が長さ $\ell$ を渡る時間が、$Q$ が一つ動く時間に等しくなる長さは

$$\frac{\pi^2}{E\,\ell^2} = \lambda_Q \quad \Longleftrightarrow \quad \ell = \frac{\pi}{\sqrt{E\,\lambda_Q}} \tag{7}$$

で 初 （代数）Lean `ConsExp.lc_eq_iff`（仮定：$0 < E$・$0 < \lambda$・$0 < \ell$）、測った $\ell_c$ との比 $\rho$ は五点で $0.80\text{〜}1.03$ です 読 。**保存が壊れる長さは、位相電荷が一つ動く間に流束が拡散で渡る距離**と読めます。流束の双極子が $M^{-2}$ から外れることと、位相電荷が緩和することは、同じ巻き付きの二つの顔です。

$\beta = 8$ の一点がこの読みを補います。帯の長さ 64 まで $X$ は $M^{-2}$ を保ちます（Gauss の剛性との比 $0.86\text{〜}1.03$）が、帯の長さ 32 で $\tau_{\mathrm{int}}(Q) = 5.3(1.7) \times 10^3$（走りの長さ $10^6$・$\mathrm{Var}\,Q = 0.145$）と、$X$ の値の約 $1/380$ の遅いモードが現れます 読 。$\mathrm{Var}\,Q$ が小さい（$Q \neq 0$ が稀な区画）ので、この点は傾きに入れていません。

この節が言えている範囲：$\ell_c$ は $X$ の緩和の折れの長さで、隙間そのものの折れの長さではありません（$Q$ を含めると $\beta = 4$ の隙間の上界は $M \approx 8\text{〜}16$ で既に飽和します）。帯の位相電荷が四次元の位相電荷と同じものだとは主張しません。

## 05
## 生の率と静的な揺らぎ — 紙の予想が落としていた因子

測る前の紙の予想は「$\lambda_Q \propto \beta e^{-2\beta}$」（障壁 $2\beta$ の Kramers の率）で、傾き $b$ は 2 の近くのはずでした。測った $b = 1.355(18)$ はそれより緩く、しかも $\beta$ の前後で割れました（表 2 の下）。割れの出所を探すために、緩和の率を二つの因子に分けます。$Q$ は $\pm 1$ の跳びの酔歩

に復元力が掛かった鎖と見なせるので、跳びの総率 $WM\nu$（$\nu$ は一枚のプラケットあたりの巻き付きの率）と分散 $\mathrm{Var}\,Q \approx WM\,E/(4\pi^2)$ から

$$\lambda_Q = \kappa \cdot \frac{2\pi^2\,\nu}{E}, \qquad E = \mathbb{E}\left[\varphi_p\right]^2 \tag{8}$$

の形が出ます 仮 （鎖の見立て。$\kappa$ は生の数え方の補正。片側の橋の命題（論文の定理 3.1）の比べの定数 $\kappa$（24-09）とは別の量）。分子の $\nu$ は**生の率**（力学の量）、分母の $E$ は**静的な揺らぎ**（測度の量）です。対数を取ると

$$\Delta \ln \lambda_Q = \Delta \ln \nu - \Delta \ln E \tag{9}$$

です 初 （代数）Lean `ConsExp.lamQ_log_split`（仮定：$0 < \kappa$・各量が正）。

巻き付きの生の数 $\nu_{\mathrm{raw}}$（$\pm\pi$ を越えた回数）を数えると、次のことが分かりました 読 。

- $\kappa = \lambda_Q E/(2\pi^2\nu_{\mathrm{raw}})$ は $\beta = 3, 4, 5, 6$ で $0.167,\ 0.165,\ 0.158,\ 0.167$ と一定です（生の数は $\pi$ の近くの往復も数えるので、実効の越えはその約 $1/6$）。
- 生の率の傾き $-d\ln\nu_{\mathrm{raw}}/d\beta$ は区間 $3\to4,\ 4\to5,\ 5\to6$ で $1.73,\ 1.75,\ 1.79$ で、Kramers の率 $\beta e^{-2\beta}$ の傾き $2 - 1/\beta$（区間の中点で $1.71,\ 1.78,\ 1.82$）と 1〜3% で合います。
- 静的な因子 $\ln(1/E)$ の傾きは $0.38,\ 0.27,\ 0.21$ で、$\beta$ とともに減ります（Gauss の値 $1/E \approx \beta$ に近づく）。

(9) から $b = (\text{生の率の傾き}) - (\ln(1/E)\ \text{の傾き})$ で、後者が $\beta$ とともに減るので $b$ は $\beta$ とともに増えます。これが割れの正体です。**紙の予想は静的な因子 $1/E$ を落としていました。**直した形は $\lambda_Q \propto \beta e^{-2\beta}/E$（$\beta$ が大きいとき $\propto \beta^2 e^{-2\beta}$、$b \to 2 - 2/\beta$）で、測った $b$ と同じ向きです 見 。合成 $\pi/\sqrt{E\lambda_Q}$ では $E$ が打ち消し合って $\nu^{-1/2}$ だけが残るので、傾きは生の率の傾きの半分（約 $0.88$）で全区間一定になります。表 2 の下の三つ目の傾きがこれです。

正確には、この分け方は割れを見た後に足した検査で、事前に登録した予測の中にはありませんでした。また、$\beta \to \infty$ の指数（$b \to 2$ かどうか）は、この五点からは何も言えません。

見方として残すもの 見 ：大域の量の緩和の率は、「出来事の率」（力学・障壁）と「その出来事一回で大域の量がどれだけ動くかを測る静的な揺らぎ」（測度）の積に割れます。四次元の位相電荷について原典が書く一ループの勘定（24-07 §02）も、出来事の密度の指数だけを数えています。静的な因子が指数の読みを動かすかは、四次元では確かめていません。

06

## 比べる相手を直す — $\max(\xi^2, \tau_{\mathrm{glob}})$

帯の中で、静的な長さ $\xi_{XY}$ を物差しに $\tau(Q)$ を測ると、$\tau(Q)/\xi_{XY}^2$ は $\beta = 4$ で約 $0.4$、$\beta = 8$（帯の長さ 32）で約 $24$ です 読 。$C_P \geq \tau_{\mathrm{int}}(Q)$ なので、$C_P/\xi_{XY}^2$ も $\beta$ とともに伸びます。静的な相関長だけを物差しにした「$C_P \lesssim \xi^2$」は、この玩具の中で $\beta$ とともに破れる向きです（24-01 の型の (c) の行）。そこで、比べる相手に大域の量の時間を加える形を候補として置きます。

$$C_P \ \asymp\ \max\!\left(\xi^2,\ \tau_{\mathrm{glob}}\right), \qquad \tau_{\mathrm{glob}} := (\text{大域の量が一つ動く時間}) \tag{10}$$

見 。これが緩和時間の仮定を直す向きの一つです。もう一つの向きは、試験関数の側を時刻と空間に局所な族に限ることで（24-03 §02）、そこでは箱が $\ell_*$ より小さい限り大域の量の時間は入らない見込みです（§07）。

(10) には三つの弱点があります。(i) $\tau_{\mathrm{glob}}$ を同じ力学の $\tau_{\mathrm{int}}(Q)$ で定めると、(10) は $\tau_{\mathrm{int}}(Q) \leq C_P$ の言い直しに近く、中身を持ちません。中身を持たせるには、$\tau_{\mathrm{glob}}$ を力学と独立に決める必要があります。候補は §05 の分け方（障壁の率と静的な揺らぎ、$\tau_{\mathrm{glob}} \approx E/(2\pi^2\kappa\nu)$）か、(2) の静的な $\ell_*$ から拡散の時間 $\ell_*^2/D$ を作ることです 見 。(ii) 帯の数が見ているのは (10) の下の側 $C_P \geq \tau_{\mathrm{glob}}$ だけで、$C_P$ を上から押さえる数は一つもありません。$\beta = 4$ では $\tau(Q) \approx 17$ に対し $\xi_{XY}^2 \approx 46$ で、$C_P$ が $\xi_{XY}^2$ の側にあるかは測っていません。(iii) 四次元では $\tau_{\mathrm{glob}}$ の候補は周期の箱の位相電荷で、その測りは原典の熱浴・HMC の数で、Langevin への読み替えは仮定です（24-01 §06）。

この節が言えている範囲：(10) は候補の言い直しで、どの模型でも示していません。第 23 部の緩和時間の仮定を (10) で置き換えることも提案していません。緩和時間の仮定を鋭く立てたからこそ、比べる相手が一つでは足りない場所が名指せた、という順の記述です。

07

## 二次元 $CP^{N-1}$ の試験台 — 凍結は $N$ で割れ、局所の比は割れない

**なぜこの模型か。**二次元の $CP^{N-1}$ 模型は、四次元のヤン–ミルズと同じ二点——結合が無次元であることと、尺度を持たないインスタントン——を持ち（24-07）、群の大きさの役をする $N$ を動かせます。周期の箱で位相のモードの自己相関が $\xi = 2$〜$6$ で $\exp(1.72\,\xi)$ の型に伸び（$N = 21$、Hasenbusch 2017）、$N$ とともに悪くなる（Del Debbio–Manca–Vicari 2004・Berni–Bonanno–D'Elia 2019）という一次資料があります 典 。開いた境界では伸びが $z \approx 1$ に戻るとも報告されています 典 。

**設定。**作用は Hasenbusch の形 $S = -\beta N \sum_{x,\mu} (\bar{z}_{x+\mu} z_x \lambda_{x,\mu} + \text{c.c.} - 2)$（$z_x \in \mathbb{C}^N$・$|z_x| = 1$、$\lambda \in U(1)$）、位相電荷はプラケットの角の和 $Q = \frac{1}{2\pi} \sum \theta_{\text{plaq}}$ です。力学は熱浴（サイトとリンク）に過緩和を $n_{\text{ov}}$ 回混ぜたもので、**Langevin ではありません。**ここで測る自己相関は熱浴の掃きの単位で、Langevin の $C_P$ への読み替えは仮定です（2-10）。局所の量は一辺 $R$ の箱の三つ：エネルギー $E_B$、箱の位相電荷 $q_B$、箱の「磁化」$m_B$ です。

**二次元の参照は四次元と性格が違う。**24-03 の比の形 $K_{\text{rel}}$ の参照（無質量の自由場の箱の値）は、二次元では箱の大きさ $R$ に加えて格子の一辺 $L$ の対数で発散します（連続の核 $-\frac{1}{2\pi}\ln|z|$ の定数の部分が箱の平均に載る） 初 。箱の平均を除けば有限で、$1/R^2$ の外挿で約 $0.0548$ です 読 。さらに、平均 0 の量でも自由場の Langevin の自己相関は $\ln L$ で伸びます 読 （$R = 16$ の箱で、格子の一辺 64 から 1024 で 36 から 119）。そこでこの試験台の比は、**格子の一辺 $L = 64$ を固定した自己相関の比** $K_{\text{rel}}(c;\,\text{量}) := \tau(\text{量}_B(c\xi))/\tau^{\text{free}}(D_B(c\xi))$（$D_B$ は自由場の箱の Neumann の最初のモード、同じ算法・同じ $L$）と $K_{\text{glob}} := \tau(Q^2)/\tau^{\text{free}}(D_B(4\xi))$ で、24-03 の静的な比とは別の量です。

**陽性対照。**$N = 21$・$\beta = 0.70$・$L = 44$・$n_{\text{ov}} = 6$ の二本（走りの長さ 70000 掃き）で、$\tau_{\text{int}}(Q^2) = 160(26)$（Hasenbusch の表 II の $199(18)$ の 0.80 倍、事前に決めた帯 $[139, 259]$ の中）、エネルギーの差 $-9 \times 10^{-6}$、$\xi$ の差 $-0.1\%$ で通過しました 読 。

表 3　核心の対と純粋な熱浴の対（$L = 64$・周期・$\xi \approx 4$。$K$ は $c = 1, 2, 4$ の三つの値。一本ずつ・走りの長さを登録より縮めた本がある）

| $N$ | $\beta$ | $n_{\text{ov}}$ | $\xi_{\text{2nd}}$ | $\tau(Q^2)$ | $Q$ の変化／測定 | $K_{\text{glob}}$ | $K_{\text{rel}}(E_B)$ | $K_{\text{rel}}(m_B)$ | $K_{\text{rel}}(q_B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 0.70 | 6 | 3.738(14) | 154(46) | 527／30600 | 定義できない（参照 $\tau^{\text{free}}$ が 0.33〜0.54） | | | |
| 2 | 1.140 | 6 | 4.25(8) | 0.50 | 93123／99000 | 同上 | | | |
| 21 | 0.70 | 0 | 3.76(6) | 3874(2810) | 120／41400 | 55 | 0.32, 0.11, 0.038 | 0.68, 0.59, 0.51 | 1.71, 1.74, 2.27 |
| 10 | 0.80 | 0 | 4.62(8) | 70.9(10.3) | 24347／81000 | 1.01 | 0.35, 0.13, 0.049 | 0.83, 0.78, 0.57 | 1.51, 1.11, 0.83 |
| 2 | 1.140 | 0 | 4.89(24) | 0.73 | 133493／144000 | 0.010 | 0.26, 0.084, 0.030 | 0.66, 0.41, 0.25 | 0.21, 0.062, 0.022 |

表 3 の札は全て 読 です。$N = 21$・$n_{\text{ov}} = 0$ の $\tau(Q^2)$ は走りの長さが約 $11\tau$ しかなく、下界の扱いです。

**読めること。**

1. **位相電荷の凍結は $N$ で割れる。**$\xi \approx 4$ で、$\tau(Q^2)$ は $N = 21$ 対 $N = 2$ で、過緩和ありで 154 対 0.50（約 300 倍）、純粋な熱浴で 3874 対 0.73（約 5000 倍、前者は下界の扱い）です 読 。
2. **局所の量の比は $N$ に依らず小さい。**純粋な熱浴の対で、エネルギーと磁化の $K_{\text{rel}}$ は $N = 2, 10, 21$ でほぼ同じ（$E_B$ で 0.03〜0.35、$m_B$ で 0.25〜0.83）、一歩の Rayleigh 商の比（$1/(1-\rho(1))$ の自由場の値との比）も全て 1.1 以下です 読 。凍る点での判定は「位相の凍結は箱 $4\xi$ までの局所の比を壊さない」の側でした。条件：$L = 64$・$\xi \approx 4$ の一点・一本ずつ・事後の枡（下）。凍る点は $(N = 21,\ \xi \approx 4)$ の一点だけで、$K_{\text{glob}} = 55$ は一本の誤差で $1\sigma$ の幅が 15〜95 あり、判定の閾 30 を越えるかはその誤差の中です。**一点の、弱い読み**です。
3. **$\ell_*$ は $N$ とともに伸びる。**箱の位相電荷の自己相関が大域の値に追いつく長さを表 4 に並べます。

表 4　箱の位相電荷の自己相関 $\tau(q_B(R))$ と大域の $\tau(Q)$（純粋な熱浴・$L = 64$）

| $N$ | $R = 2$ | 4 | 8 | 16 | 32 | $\tau(Q)$ | $\tau(q_B(32))/\tau(Q)$ | $R \to 2R$ の指数 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 3.08 | 9.82 | 38.9 | 160 | 738 | 4071 | 0.18 | 1.67, 1.98, 2.04, 2.21 |
| 10 | 3.01 | 8.72 | 24.7 | 58.4 | 113 | 222 | 0.51 | 1.54, 1.50, 1.24, 0.95 |
| 2 | 0.98 | 1.21 | 1.39 | 1.51 | 1.53 | 1.55 | 0.99 | 0.30, 0.20, 0.12, 0.02 |

読 $N = 2$ では箱の電荷の自己相関が $R \approx 8$〜$16$ で大域の値に飽和し、$N = 10$ は $R = 32$ で曲がり始め、$N = 21$ は $R = 32$ でも $R^2$ で伸びています。箱の電荷は境界を通る輸送（§01 の (b) の道）で $R^2$ の時間をかけ、大域の値に追いつく長さが $\ell_*$ の読みです。**この模型のこの範囲では、凍結は $\ell_*$ より小さな箱の比を壊さず、$\ell_*$ を越える尺度の量にだけ乗る**、という形です 見 。表 3 で $N$ とともに割れるのが箱の電荷の $K_{\text{rel}}(q_B)$ だけ（$c = 4$ で $0.022 \to 0.83 \to 2.27$）なのは、この追いつく長さの違いの反映と読みます。24-03 の言葉では、局所の拡散型緩和時間の仮定は輸送の係数 $d$ を、全体の緩和時間の仮定は保存の破れの係数 $h$ を問うので（24-03 §05）、局所の比

が凍結の影響を受けないという見込みの、二次元での一つの姿です。片側の橋が要るのは局所の側だという 24-04 の結論（24-04）とも向きが合いますが、ここの比は自己相関の比で、橋の闘の比（静的な比）ではありません。

**開示しておくこと。**

- **登録の判定は定義できなかった。**事前に登録した判定は過緩和を混ぜた力学（$n_{\mathrm{ov}} > 0$）の比でしたが、過緩和は自由場の参照の自己相関を振動させ、$\tau^{\mathrm{free}}(D_B)$ が $0.33$〜$0.54$ と 1 を下回りました。分母が 2 未満の比は定義しないという規則（本番の前に足した）により、登録の比は全て「定義できない」でした。上の読み 2・3 は、登録を固めた後に別の枡として足した純粋な熱浴の対の数です。
- **動的指数 $z_Q(N)$ は読めない。**各 $N$ で $\xi$ が一点しかありません。判定の台本は $N = 21$ に負の指数を印字しましたが、二点目は位相電荷が一度も変わらなかった（丸め誤差だけの）列に台本が小さな自己相関を返した作り物で、捨てました。
- **$N = 2$ の位相電荷には紫外の札が付く。**$N = 2$ では位相感受率の二つの定義（プラケットの角の和と Berg–Lüscher の三角形の定義）が 13〜14% 違い、$N = 10, 21$ では 0.1〜3% でした 読 。$N = 2$（$O(3)$ と同じ模型）の格子の位相感受率には紫外の問題があることが知られていると理解しています 仮 （記憶・原典は取っていない）。$N = 2$ が凍らないのは、格子の尺度（紫外）が $Q$ を決めている側だからかもしれません 見 。だとすると $N = 2$ の速さは「凍結が弱い」ことではなく「$Q$ が連続の意味の位相電荷になっていない」ことの影で、$SU(2)$ との類比（24-07）はこの留保つきです。
- 走りの長さを登録より縮めた本があり（一本の時間の上限のため）、統計は粗いです。開いた境界の陰性対照は走らせていません。

この節が言えている範囲：二次元の $CP^{N-1}$・この作用とこの算法（熱浴と過緩和）・$L = 64$・$\xi \approx 4$ の一点の数で、四次元・$SU(N)$・緩和時間の仮定・質量ギャップについては何も言いません。

08

## 言えないこと

(a) 二次元と四次元。§03〜§07 の数は二次元の $U(1)$ の帯と二次元の $CP^{N-1}$ の数です。二次元 $U(1)$ は連続極限で自明な理論で、どちらの数も四次元・非可換・$\beta \to \infty$ の指数について何も含意しません。

(b) 上界の読み。$\lambda_X$・$\lambda_Q$ は隙間の上界（$C_P$ の下界）としての読みで、隙間そのものではありません。$\ell_c$ は流束の双極子の緩和の折れの長さで、当てはめの形 $A/M^2 + B$ に依ります。

(c) 候補。(2) の $\ell_*$ と (10) の比べる相手は候補で、どの模型でも示していません。帯の数が見ているのは (10) の下の側だけです。

(d) 階層格子。結果は Gauss 近似の数で、四次元の構成は原典の三次元の構成のこの本の延長です。階層模型は平行移動と回転の不変性を欠き、四次元のヤン–ミルズに含意しません。

(e) 試験台の条件。$CP^{N-1}$ の比は熱浴の力学の自己相関の比で、$L = 64$ を固定した条件つきの量、24-03 の静的な比とは別の量です。各 $N$ で $\xi$ は一点、凍る点は一つ、局所の比の判定は登録の後に足した枡の上の一点の弱い読みで、登録の判定は定義できませんでした。$z_Q(N)$ は読めていません。

(f) 後付け。§05 の生の率と静的な揺らぎの分け方は、割れを見た後に足した検査です。

(g) $SU(2)$ との類比。$N$ で凍結が割れることを、$SU(2)$ の境目の読みの二次元の類比として使うのは見立てで、$N = 2$ には紫外の札が付きます（24-07）。

09

## 五分類の表と依存グラフ

表 5　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 | 機械検査 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Gauss 近似（可換の線形化）と、階層格子の四次元の延長 | 仮 | §02 | $N \le 4$ | — |
| 2 | 木の座標で $\lambda_1 = \beta$（(3)） | 初 | §02 | Gauss 近似・全ての $N$ | `HierLink.tree_no_decay`（仮定：$0 < \beta$。比の算術） |
| 3 | リンクの座標の $\lambda_{\min}(N) = 4\sin^2(\pi/2^{N+1})$（(4)） | 初 | §02 の区画分解 | Gauss 近似 | `HierLink.lam_le`（仮定なし。上界の向きだけ） |
| 4 | $N \le 4$ の照合・類ごとの計量・原格子のゲージ商 | 読 | 表 1 | $N \le 4$（ゲージ商は $N \le 2$） | `HierLink.measured_scaled`（測った区間を仮定） |

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 | 機械検査 |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 層を切り離しても $L^{-2}$ が残る（流束の保存） | 初 | (5)・表 1 | Gauss 近似 | — |
| 6 | 緩和時間の仮定は（測度・Dirichlet 形式）の組の文 | 見 | §02 | — | — |
| 7 | 帯の Gauss の隙間 $\beta \cdot 4\sin^2(\pi/2M)$ | 初 | §03 | 幅 2・外周凍結 | `ConsLen.neumann_gap_lower/upper`（仮定：$1 \le M$） |
| 8 | $\tau_{\mathrm{int}} \le C_P$ | 初 | 24-01 の (1) | 可逆な力学 | `LatticeGauge.FourDTrial.tau_int_le_CP`（仮定：重み $\ge 0$・固有値 $\ge \lambda_1 > 0$） |
| 9 | 帯の五点 $\ell_c$・$\lambda_Q$・傾き $a, b$ | 読 | 表 2 | §03 の条件 | `ConsExp.lc_slope_2_6`・`lamQ_slope_2_6`（$1\sigma$ の区間を仮定） |
| 10 | (7) の代数 | 初 | §04 | — | `ConsExp.lc_eq_iff`（仮定：$0 < E, \lambda, \ell$） |
| 11 | $\rho = 0.80 \sim 1.03$（二つの顔） | 読 | 表 2 | 五点 | — |
| 12 | (9) の分解の代数 | 初 | §05 | — | `ConsExp.lamQ_log_split`（仮定：$0 < \kappa$・正値） |
| 13 | 生の率が Kramers の傾きに 1〜3%・$\kappa$ が一定（後付け） | 読 | §05 | $\beta = 3..6$ | — |
| 14 | 紙の予想は $1/E$ を落としていた | 見 | §05 | 帯 | — |
| 15 | $\tau(Q)/\xi_{XY}^2$ が $0.4 \to 24$ | 読 | §06 | $\beta = 4, 8$ | — |
| 16 | 比べる相手 $\max(\xi^2, \tau_{\mathrm{glob}})$（(10)） | 見 | §06 | — | — |
| 17 | $CP^{N-1}$ の陽性対照の通過 | 読 | §07 | $N = 21$・$L = 44$ | — |
| 18 | $\tau(Q^2)$ が $N$ で割れる | 読 | 表 3 | $L = 64$・$\xi \approx 4$ | — |
| 19 | 局所の比は $N$ に依らず小さい | 読 | 表 3 | 事後の枡・一点・弱い | — |
| 20 | 箱の電荷が大域に追いつく長さが $N$ で伸びる | 読 | 表 4 | $L = 64$ | — |
| 21 | $N = 2$ が凍らないのは紫外が $Q$ を決めている側かもしれない | 見 | §07 | — | — |
| 22 | 凍結は $\ell_*$ を越える尺度の量にだけ乗る | 見 | §07 | この模型のこの範囲 | — |

機械検査の欄が保証するのは算術と代数と区間の比較だけです。固有値が閉じた式に等しいこと・$\tau_{\mathrm{int}} \le C_P$ のスペクトル表示・当てはめ・Monte Carlo は Lean の外にあります（23-13）。

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  仮  Gauss 近似・階層格子の四次元の延長                N ≤ 4
 2  初  木の座標で λ₁ = β ⟸ 1                          Lean tree_no_decay
 3  初  リンクの座標の λ_min(N) ⟸ 1                     Lean lam_le（上界）
 4  読  N ≤ 4 の照合 ⟸ 3                               Lean measured_scaled
 5  初  層を切り離しても L⁻² ⟸ 1
 6  見  緩和時間の仮定は（測度・形式）の組の文 ⟸ 2・3・5
 7  初  帯の Gauss の隙間                              Lean neumann_gap_lower/upper
 8  初  τ_int ≤ C_P（24-01 の (1)）                    Lean tau_int_le_CP
 9  読  帯の五点 ℓ_c・λ_Q・a・b ⟸ 7・8                  Lean lc_slope_2_6・lamQ_slope_2_6
10  初  (7) の代数                                     Lean lc_eq_iff
11  読  ρ = 0.80〜1.03 ⟸ 9・10
12  初  (9) の分解                                     Lean lamQ_log_split
13  読  生の率と κ（後付け） ⟸ 9
14  見  紙の予想は 1/E を落としていた ⟸ 12・13
15  読  τ(Q)/ξ_XY² が 0.4 → 24 ⟸ 8・9
16  見  比べる相手 max(ξ², τ_glob) ⟸ 6・11・15
17  読  CP^{N−1} の陽性対照
18  読  τ(Q²) が N で割れる ⟸ 17
19  読  局所の比は N に依らず小さい ⟸ 17                 事後の枡・一点
20  読  追いつく長さが N で伸びる ⟸ 17
21  見  N = 2 は紫外が Q を決めている側か ⟸ 18
22  見  凍結は ℓ_* を越える量にだけ乗る ⟸ 19・20
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。この章の結論の節点（緩和時間の仮定は測度と形式の組の文・比べる相手の直し・凍結は保存が壊れる長さを越える量にだけ乗る）はどれも「見」で、四次元の節点も、質量ギャップの節点もありません。二次元の読み（帯の五点から先の節点）は四次元の行のどれの前提にも入りません。

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 初 Gauss 近似の階層格子で、木の座標のギャップが $\beta$、リンクの座標のギャップが $\beta \cdot 4\sin^2(\pi/2^{N+1})$ で、遅さが流束の保存から来ること | 非線形・非可換の階層格子のギャップ。四次元のヤン–ミルズへの含意 |
| 読 二次元 $U(1)$ の帯の保存が壊れる長さ $\ell_c$ の五点と傾き $0.916(21)$、静的な長さと比例しないこと、$\ell_c \approx \pi/\sqrt{E\lambda_Q}$ | $\beta \to \infty$ の指数。隙間そのものの折れ。四次元の $\ell_*$ |
| 読 生の率は Kramers の傾きに乗り、割れは静的な因子 $1/E$ から来る（後付け） | 四次元の位相電荷の率の静的な因子 |
| 見 三つの物差し・$\ell_*$ の候補の定義 (2)・比べる相手 $\max(\xi^2, \tau_{\mathrm{glob}})$ | どの模型でも示した文。緩和時間の仮定の正しい直し方 |
| 読 二次元 $CP^{N-1}$（$L = 64 \cdot \xi \approx 4$）で、凍結は $N$ で割れ、局所の比は $N$ に依らず小さい（事後の枡・一点・弱い）、追いつく長さが $N$ で伸びる | $z_Q(N)$。登録の判定（定義できなかった）。四次元・$SU(N)$ への含意 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 階層的なゲージの格子 | 典 | T. Ito, Commun. Math. Phys. 95 (1984) 247（§1 を本文で確認。高い次元への延長は読者に委ねると書く）。四次元の版はこの本の延長 |
| 階層 Gauss 自由場の比べの値 | 典 | R. Bauerschmidt, D. C. Brydges, G. Slade, arXiv:1907.05474 §4.1.2（本文で確認） |
| (3)(4)・(5)・(7)(9) の代数 | 初・Lean | 本文の証明。束 LatticeGaugeHierarchicalLink（`HierLink.*`）・LatticeGaugeConservationLength（`ConsLen.*`）・LatticeGaugeConservationExponent（`ConsExp.*`）。束が保証するのは算術・代数・区間の比較だけ |
| 表 1 の数 | 読 | 類の模型の密行列の全固有値（$N \le 2$）・区画ごとの別の実装（$N \le 4$）・四次元の原格子の拘束面の上のゲージ商（$N \le 2$） |
| 表 2 の数 | 読 | 帯のリンクの Langevin の模擬（刻み $\beta\,dt \approx 0.04$・帯の長さ $\le 256$）。陽性対照：Gauss の力学の $\tau$ が閉じた式と $1\sigma$。陰性対照：外周のリンクも動かすと $M$ に依らない $O(\beta)$。誤差は Madras–Sokal、ブロック平均の別経路 |
| $\xi_{XY}$ の式・Kramers の率 | 仮 | 標準の計算として使った（原典を確かめていない） |
| $CP^{N-1}$ の作用・位相電荷・陽性対照の値 | 典 | M. Hasenbusch, Phys. Rev. D 96 (2017) 054504, arXiv:1706.04443（式 (1)(10)〜(12)・表 II を本文で確認）。B. Berg, M. Lüscher, Nucl. Phys. B 190 (1981) 412（三角形の定義の原典、書誌のみ） |
| 位相のモードの凍結の $N$ 依存 | 典 | L. Del Debbio, G. M. Manca, E. Vicari, Phys. Lett. B 594 (2004) 315（本文）・M. Berni, C. Bonanno, M. D'Elia, Phys. Rev. D 100 (2019) 114509（本文）・M. Campostrini, P. Rossi, E. Vicari, Phys. Rev. D 46 (1992) 2647（要旨） |
| 表 3・表 4 の数 | 読 | 熱浴（サイトの $O(3)$ 熱浴・リンクの von Mises の熱浴）と過緩和の模擬、Wolff の窓の自己相関。自由場の参照は同じ算法・同じ $L$ |
| $O(3)$ の格子の位相感受率の紫外の問題 | 仮 | 記憶（原典を取っていない） |

**この章で使った語** — 三つの物差し・保存が壊れる長さ $\ell_*$（$\ell_c$）・Dirichlet 形式（座標）・木の座標とリンクの座標・流束の保存・巻き付き・帯の位相電荷・流束の双極子・生の率と静的な揺らぎ・大域の量が一つ動く時間・二次元の試験台。意味は A-02 用語集 と 24-09 にあります。

次に読む章：24-03 緩和時間の仮定を直す二つの形 — 区画ごとの仮定と局所の仮定 — 型を避けて緩和時間の仮定を述べ直す二つの形。四次元に固有のこと（なぜ二つの長さが割れるのか）は 24-07 で扱います。

2026-10-09 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 24 部 一本目の道（後半） 局所の Poincaré 定数・比の形・区画ごとの緩和時間の仮定 · Kiichi, Shiori and Rin

# 緩和時間の仮定を直す二つの形 — 区画ごとの仮定と局所の仮定

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 2-10・5-09 にあります。

**この章で分かること** — 24-01 の型（ほぼ保存される大域の量）を避けて拡散型緩和時間の仮定を述べ直す二つの形を定義します。局所の緩和時間の仮定は、台を長さ $c\ell$ の窓に限った汎関数の上の Poincaré 定数 $C_P^{\mathrm{loc}}(c)$ の文で、窓の周辺の法則だけで決まり、$c \to \infty$ で全体の $C_P$ に無条件で戻ります。ただし「ある $K(c)$ で $C_P^{\mathrm{loc}} \le K(c)\ell^2$」の形は質量の無い自由場でも成り立つので空虚で、同じ箱の無質量の値との比 $K_{\mathrm{rel}}$ で述べる必要があります。区画ごとの緩和時間の仮定は、滑らかにした位相電荷の区画ごとの Poincaré 定数の文で、緩和時間の仮定の障害を区画の間の量 $C_{\mathrm{trans}}$ 一つに押し込みますが、質量ギャップへの橋にはなりません。部分領域の電荷で見ると、局所の緩和時間の仮定は輸送の係数 $d$ を、全体の緩和時間の仮定は保存の破れの係数 $h$ を問います。

**前提となる章** — 24-01（型と、(4)〜(7) の二つの勘定）・23-01 §05（緩和時間の仮定・緩和時間の上界の仮定の (13)〜(15)、位相の区画の注）・23-01 §06（片側の橋の命題（論文の定理 3.1）の設定）・23-11 §02（箱への帰着の命題と閉じた箱 $C_{\mathrm{box}}$）。記号は 24-09。

**先に言うこと** — 水準は〔研〕で、§01 だけ〔三〕で読めるように書きます。この章の中心は定義で、**二つの緩和時間の仮定のどちらも、どの $\beta$ でも示していません**。示したのは定義の性質（窓の周辺の量であること・稠密でないこと・単調性・極限）と、区画の分散の分解の不等式と、自由場の参照の値です。四次元の Wilson 測度の上の定義は、時間を連続に取った経路の測度の上の定義の写しで、無限体積の測度の存在は前提の行です。

この章の順序

1. 要約 — 〔三〕で読める一節
2. 局所の緩和時間の仮定の定義 — 時間で均した汎関数の代数 $\mathcal{D}$・窓の族 $\mathcal{D}_c$・局所の Poincaré 定数の性質の命題（(1)〜(4)）
3. 比の形とゲージ商の参照 — 絶対の形の空虚さ・$K_{\mathrm{rel}}$・ゲージ不変な参照・0+1 の注（(5)〜(7)・表 1）

4. 区画ごとの緩和時間の仮定 — 正則値の切り口・反射の形・区画の Poincaré 定数の命題と挟み・三つの弱点（(8)〜(11)）
5. 開いた箱と閉じた箱・二つの係数 — 局所は $d$、全体は $h$・表 2（体積と $a \to 0$ の順）
6. 五分類の表 — 表 3／依存グラフ
7. 言えないこと

---

01

## 要約

〔三〕で読める一節です。緩和時間の仮定は「すべての試験関数」の文なので、24-01 の型の量（巻き数・位相電荷）の緩和が $\xi^2$ より速く伸びれば、それ一つで上の半分（上界の仮定）は破れます（24-01 の (3)）。その量は時刻にも空間にも局所でない大域の量です。そこで試験関数を二通りに制限して、緩和時間の仮定を述べ直します。

**局所の緩和時間の仮定**。試験関数を、長さ $c\ell$ の窓（四次元では一辺 $c\ell$ の時空の箱）の中の配位だけに依るものに限ります。$\ell$ は隙間とは別に外から与える物差しで、四次元では記帳の長さ $\xi_{\mathrm{RG}}$ です。その上限 $C_P^{\mathrm{loc}}(c)$ は窓の周辺の分布だけで決まり、窓を広げると単調に増え、$c \to \infty$ で全体の $C_P$ にちょうど戻ります。ところが四次元の箱では、質量の無い自由場でも $C_P^{\mathrm{loc}}$ は箱の一辺の二乗の程度で有限です。「$C_P^{\mathrm{loc}} \le K\ell^2$」を満たすだけでは何も言っていないことになるので、同じ箱の無質量の値との比 $K_{\mathrm{rel}}$ が 1 より十分小さいことを求めます。

**区画ごとの緩和時間の仮定**。周期の箱で、滑らかにした位相電荷の値で配位を区画に分け、区画ごとに Poincaré 定数を測ります。分散を区画の中と区画の間に分けると、全体の $C_P$ は「区画の中の最悪の定数」と「区画の間の量 $C_{\mathrm{trans}}$」の和で上から、$C_{\mathrm{trans}}$ で下から挟まれます。区画ごとの緩和時間の仮定を仮定すると、上界の仮定は $C_{\mathrm{trans}} \lesssim \xi^2$ と同じことになります。障害は消えずに一つの量に移るだけです。

**何を問うか**。部分領域の電荷の比を二つの係数で書くと（24-01 の (7)）、局所の緩和時間の仮定は電荷の**輸送**の係数 $d$ が小さすぎないことを、全体の上界の仮定は電荷の**保存の破れ**の係数 $h$ が小さすぎないことを要ります。四次元で位相電荷の凍結が効くのは $h$ の側なので、局所の緩和時間の仮定は凍結の影響を受けない見込みです 見 。ただし局所の緩和時間の仮定は上界の仮定を組み立てる鎖の部品にはならず、別の文です（§06 の依存グラフ）。片側の橋が要るのは時刻に局所な側であること（片側の橋の仮定の上）は、橋の章 24-04 で扱います。

02

## 局所の拡散型緩和時間の仮定の定義

**設定**。第 23 部の片側の橋と同じ設定に置きます（23-01 の (17)）。有限の空間格子、一つの時刻の配位の空間 $\mathcal{Q}$（有限次元の連結な Riemann 多様体、計量 $M$）、$H = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta_M + V$ と基底状態の仮定（論文の (A1)。スペクトルが離散・基底状態 $\psi_0 > 0$ が単純・$\Delta = E_1 - E_0 > 0$）、$\mu$ は $T = \infty$ の定常な経路の測度（一つの時刻の分布 $\psi_0^2$、推移 $e^{-\tau A}$、$A = (H - E_0)/\hbar$）、$m = \Delta/\hbar$ です。試験関数の集まりを次の**時間で均した汎関数の代数**に取ります。

$$\mathcal{D} := \Big\{ f = \Phi\Big( \int h_1(\tau) F_1(q(\tau))\, d\tau, \dots, \int h_k(\tau) F_k(q(\tau))\, d\tau \Big) \Big\}, \qquad \mathcal{E}_G(f) = \hbar \int \mathbb{E}\big\langle d_{q(\tau)} f,\, G\, d_{q(\tau)} f \big\rangle\, d\tau \tag{1}$$

ここで $\Phi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^k)$、$F_i \in C^\infty(\mathcal{Q})$（$\mathcal{Q} = \mathbb{R}^n$ では多項式の増大まで）、重み $h_i \in L^\infty(\mathbb{R})$ は**台が有界**なものです。$d_{q(\tau)} f = \sum_i \partial_i \Phi \cdot h_i(\tau)\, dF_i(q(\tau))$ で、計量 $G$ は片側の橋の計量の比べの仮定（論文の (A3)）を満たすものとします。全体の Poincaré 定数を $C_P := \sup_{f \in \mathcal{D},\, \mathcal{E}(f) > 0} \mathrm{Var}(f)/\mathcal{E}(f)$ と**$\mathcal{D}$ の上で**定めます。片側の橋の試験関数 $f_T = \int_0^T F(q)\, d\tau$ はこの $\mathcal{D}$ に入ります。

局所の Poincaré 定数の定義

長さの物差し $\ell > 0$ と $c > 0$ に対し、窓 $W_c := [0, c\ell]$ と

$$\mathcal{D}_c := \{ f \in \mathcal{D} : \text{全ての重み } h_i \text{ の台が } W_c \text{ に入る} \}, \qquad C_P^{\mathrm{loc}}(c) := \sup_{f \in \mathcal{D}_c,\, \mathcal{E}(f) > 0} \frac{\mathrm{Var}(f)}{\mathcal{E}(f)} \tag{2}$$

と置く。$\ell$ は隙間で決めた長さ $\xi = \hbar/\Delta$ ではなく、外から与える長さとする（四次元では記帳の長さ $\xi_{\mathrm{RG}}$）。

$\ell$ を隙間で決めないのは、24-04 で局所の緩和時間の仮定から隙間の下界を導くとき、窓の長さに隙間が入っていると議論が循環するためです。測度が定常なので、窓の位置は値に効きません（区間 $[a, a + c\ell]$ でも同じ値）。

局所の Poincaré 定数の性質の命題

(i) $C_P^{\mathrm{loc}}(c)$ は、窓の上の経路の周辺の法則 $\mu|_{W_c}$ と、窓の中の Dirichlet 形だけで決まる。

(ii) $\mathcal{D}_c$ は $L^2(\mu)$ で稠密でない。

(iii) $c \le c'$ なら $C_P^{\mathrm{loc}}(c) \le C_P^{\mathrm{loc}}(c') \le C_P$。

(iv) $\lim_{c \to \infty} C_P^{\mathrm{loc}}(c) = C_P$。この極限には仮定が要らない。

初 証明。(i) $f \in \mathcal{D}_c$ は経路の窓の中の値だけで決まります（経路は連続で、$\int hF(q)\,d\tau$ は窓の中の点の Riemann 和の極限）。$\tau \notin W_c$ では $d_{q(\tau)}f = 0$ なので $\mathcal{E}(f) = \hbar \int_{W_c} \mathbb{E}\langle \cdots \rangle\, d\tau$ で、分散も Dirichlet 形も窓の周辺の法則の期待値です。

(ii) $\mathcal{D}_c$ の閉包は、窓の中の経路が生成する $\sigma$-代数 $\mathcal{F}_{W_c}$ に可測な関数の空間 $L^2(\mathcal{F}_{W_c})$ に入ります。窓の外の時刻 $\tau_0$ の値 $F(q(\tau_0))$（$F$ は定数でない）は $\mathcal{F}_{W_c}$ に可測でありません。窓の端からの距離を $s > 0$ とすると、条件つき期待値は $\psi_0^{-1} e^{-sA}(F\psi_0)$ の型で、基底状態の仮定の下で $F$ そのものと一致しないからです。

(iii) $c \le c'$ なら $\mathcal{D}_c \subseteq \mathcal{D}_{c'} \subseteq \mathcal{D}$ で、部分集合の上の上限は小さい。

(iv) $\mathcal{D}$ の重みは台が有界なので、定常性で窓を $[-c\ell/2, c\ell/2]$ に取り直せば $\mathcal{D} = \bigcup_c \mathcal{D}_c$ です。$b < C_P$ なら比が $b$ を越える $f \in \mathcal{D}$ があり、その $f$ はある $c$ の $\mathcal{D}_c$ に入るので $C_P^{\mathrm{loc}}(c) > b$ です。(iii) の単調性と合わせて極限は $C_P$ です。∎

Lean LatticeGauge.LocalH.local_le_global（仮定：上に有界・空でない・部分集合）と local_approaches_global（仮定：$S = \bigcup_c S_c$・上に有界・空でない。結論：$\sup S$ より小さいどの $b$ も、ある $c$ の $\sup S_c$ で越えられる）は、(iii)(iv) の実数の集合の上限の部分だけを検査しています。経路の測度・$\mathcal{D}$・$\mathcal{E}$ は Lean の外です。

(iv) が仮定なしで成り立つのは、$C_P$ を $\mathcal{D}$ の上で定めたからです。「局所の関数が形式の芯である」という仮定は、この極限には要りません。芯の問いが残るのは、$C_P(\mathcal{D})$ を確率量子化の方程式（Langevin 力学の SPDE）の生成作用素の隙間と同一視するときだけです（$\mathcal{D}$ の上の形の閉包の生成作用素の隙間は $1/C_P(\mathcal{D})$ で、それが SPDE の生成作用素と一致するかが芯の問い）。

**局所の緩和時間の仮定。**局所の Poincaré 定数の定義の上で、局所の緩和時間の仮定を二つの水準で書きます。

$$(\xi^2)_c^{\mathrm{loc}}:\ \lim \frac{\ln C_P^{\mathrm{loc}}(c)}{\ln \ell} = 2, \qquad (\xi^2)\!\uparrow_c^{\mathrm{loc}}(K):\ C_P^{\mathrm{loc}}(c) \le K\,\ell^2 \quad (3)$$

（左は $\ell \to \infty$ の族での冪の文、右はその上の半分の絶対の形）。局所の Poincaré 定数の性質の命題から二つのことが一行で出ます 初 。第一に、全体の上界の仮定 $C_P \le K\ell^2$ は、全ての $c$ で同じ定数の $(\xi^2)\!\uparrow_c^{\mathrm{loc}}(K)$ を含意します（(iii)）。第二に、**$c$ に一様な** $K$ で全ての $c$ の $(\xi^2)\!\uparrow_c^{\mathrm{loc}}(K)$ が成り立てば、(iv) で全体の上界の仮定に戻ります。したがって、局所の緩和時間の仮定が全体の上界の仮定と違う中身を持つのは、**一つの** $c$ を止めて述べるときだけです。

**空間も局所にした版。**無限の空間格子（あるいは箱を含む空間格子）で、空間の箱 $B$ と窓の積 $B \times W_c$ を取り、$F_i$ を $B$ の中の変数だけに依る一時刻の関数に限った族 $\mathcal{D}_{B,c}$ と $C_P^{\mathrm{loc}}(B,c)$ を同じ形で定めます。局所の Poincaré 定数の性質の命題の (i)〜(iv) は同じ証明で成り立ち、

(i) の周辺は $B \times W_c$ の上の場の法則です。四次元の Wilson 測度の上の局所の緩和時間の仮定は、時間と空間を区別しない一辺 $c\ell$（$\ell = \xi_{\mathrm{RG}}$）の時空の箱 $B_c$ と、箱の中のリンクが生成する $\sigma$-代数の上でこの定義を写したもので、Dirichlet 形はリンクの Langevin の $\mathcal{E}(f) = \mathbb{E}\sum_{\ell} |\nabla_{\ell} f|^2$ です。写しの段で前提になるのは、無限体積の Wilson 測度の存在と一意性（第 23 部の無限体積の一意性の言明）です 仮 。

03

## 比の形とゲージ商の参照

**絶対の形は空虚**。(3) の右の形 $(\xi^2)\uparrow_{c}^{\mathrm{loc}}(K)$ は、空間も局所にした四次元の時空の箱では、質量の無い自由場でも成り立ちます。一辺 $R$ の時空の箱 $B_R$ で、無限体積の無質量の自由スカラー場（一成分・正準の目盛り）の局所の Poincaré 定数を $C_P^{\mathrm{loc},0}(R)$ と書くと

$$\frac{R^2}{4\pi^2} \;\le\; C_P^{\mathrm{loc},0}(R) \;\le\; R^2 \tag{4}$$

です 初 。ガウス測度の勾配の Poincaré 定数は、族を張る部分空間に圧縮した共分散の作用素ノルムに等しいので（Hairer–Stuart–Voss–Wiberg 2005 の共分散の圧縮の補題（Hairer–Stuart–Voss–Wiberg の補題 2.2）の部分空間への写し） 典 、$C_P^{\mathrm{loc},0}(R) = \| P_B (-\Delta)^{-1} P_B \|$ です。四次元では $(-\Delta)^{-1}$ は有限（過渡的）で、核は連続で $1/(4\pi^2|z|^2)$ の型なので、Schur の評価 $\sup_x \sum_{y \in B} G(x-y) \le \int_{|z|<2R} d^4 z / (4\pi^2|z|^2) = R^2$ が上を、箱の Dirichlet の基底状態を試験関数にした値が下を与えます。よって $\ell = R/c$ と読めば $(\xi^2)\uparrow_{c}^{\mathrm{loc}}(K)$ は $K = c^2$ で成り立ち、「**ある $K(c)$ で $C_P^{\mathrm{loc}}(c) \le K(c)\ell^2$」の形は隙間について何も言いません**。これがこの定義の陰性対照（無質量の自由場）です。数で見ると、$\Gamma(R) := C_P^{\mathrm{loc},0}(R)/R^2$ は $R = 4, 6, 8, 10, 12, 16$ で $0.0802,\ 0.0768,\ 0.0756,\ 0.0750,\ 0.0747,\ 0.0744$、補正は $1/R^2$ で対数の補正は無く、$\Gamma_\infty = 0.0740$ です 読 （浮動小数・無限格子の熱核の数値積分・$R \le 16$ からの外挿。独立な周期格子の経路と相対 $2 \cdot 10^{-3}$ 以内）。無質量の場そのものが $K(c) = 0.0740\, c^2$ を満たします。

低い次元との対照を一行置きます。時空二次元の無質量では赤外が発散して $C_P^{\mathrm{loc}} = \infty$、有限の空間格子で時間の窓だけに局所化すると、一定のモードが $C_P^{\mathrm{loc}} \approx T/(2m)$（$mT \ll 1$）を与え、$m \to 0$ で発散します。無質量の場が有限の局所の定数を持つのは、時空三次元以上で空間も局所にした場合で、第 24 部の四次元の設定がちょうどそこに当たります 初 。

比の形の定義

対象の測度 $\mu$（Wilson 測度、または連続時間の経路の測度）の箱 $B_{c\ell}$ の局所の Poincaré 定数を、同じ格子・同じ箱・同じ目盛りの Dirichlet 形の無質量の参照の値で割った比を

$$K_{\mathrm{rel}}(c) := \frac{C_P^{\mathrm{loc}}(B_{c\ell};\mu)}{C_P^{\mathrm{loc},0}(c\ell)}, \qquad (\xi^2)\uparrow_c^{\mathrm{rel}}(K):\ K_{\mathrm{rel}}(c) \le K \quad (\beta \ge \beta_0 \text{ に一様},\ \ell = \xi_{\mathrm{RG}})$$

と置く。局所の緩和時間の仮定は**一つの $c$** でのこの文とし、$c$ に一様には求めない。

絶対の形の定数とは $K(c) = K_{\mathrm{rel}}\,\Gamma\,c^2$ で対応します 初 。比の形にすると定数 $K$ は箱の大きさに依らない絶対の数になり、「1 より十分小さい」が意味を持ちます。

**$c$ に一様に求めない理由。**質量 $m$ の自由場の比は $mR$ だけの関数 $r(mR)$ で、$mR = 0.5,\ 1,\ 2,\ 4,\ 12$ で $0.932,\ 0.825,\ 0.623,\ 0.359,\ 0.0772$ です 読 （一辺 4〜12 の箱で 0.3% 以内に揃う）。箱が相関長より小さい（$mR \to 0$）と比は 1 に近づきます。漸近自由な理論は短い距離で自由場に近いので、$K < 1$ を $c \to 0$ まで一様に求める文は偽になる見込みです 見 。作用が凸な摂動 $\frac{1}{2}\phi(-\Delta)\phi + \sum U(\phi_x)$（$U$ 凸）の場では Brascamp–Lieb の不等式から $K_{\mathrm{rel}} \le 1$ です 仮 （不等式の原典の言明はこの部では確かめていない）。橋に要るのは比が 1 より小さいことではなく、閾 $K_*$ より小さいことで、閾は参照の取り方で $0.342\kappa$（スカラー）・$0.502\kappa$（ゲージ商・一色の線形化）・$\approx 0.62\kappa$（$SU(2)$ の色の一重項・主項）と動きます。閾と、帯 $[K_*, 1)$ が未決であることは 24-04 で扱います。

**ゲージ場の参照はゲージ商で。**四次元のゲージ場では、参照をどの試験の空間で測るかで値が変わります。対象の Wilson 測度はゲージ不変で、ゲージ不変でない関数の Poincaré 定数はゲージの軌道に沿って無限大になるので、比の分子が有限なのはゲージ不変な関数の上だけです。そこで分母の参照も同じ箱のゲージ不変な関数で測ります。

$$V_F := \{\text{箱のプラケットの角の関数の勾配}\} = d^*\big(\ell^2(P_R)\big), \qquad V_Q := \{\text{箱の全てのサイトの勾}$$

箱が可縮なら $V_F = V_Q$ です 初 （立方体の複体は可縮で一次のホモロジーが 0、よって箱のグラフの閉路はプラケットの 2-鎖の境界）。可縮でない領域（穴あき）では $V_F \subsetneq V_Q$ です。ゲージを固定した参照（Feynman ゲージなど）は固定の母数 $\alpha$ に依り、$\Gamma_Q \le \Gamma_{\mathrm{Landau}} \le \Gamma_{\alpha=1}$、さらに $\Gamma_\alpha \ge \alpha/(\lambda_D^{\mathrm{int}} R^2)$ で $\alpha \to \infty$（固定を外す）と無限大になります 初 。数は表 1 です。

表 1　四次元の箱の参照（一色のガウスの近似・$\beta = 1$・正準の目盛り・浮動小数・$R \le 16$ からの外挿。$\lambda_W$ は試験の空間の中の箱の Dirichlet の値に $R^2$ を掛けたもの）

| 参照 | 試験の空間 | $\Gamma_\infty$ | $\lambda_{W,\infty}$ | 参照として |
|---|---|---|---|---|
| スカラー（一成分） | 箱の全ての関数 | 0.0740 読 | $4\pi^2 = 39.5$ | ゲージ場には使わない |
| Feynman ゲージ（$\alpha = 1$） | 箱のリンクの全ての関数 | 0.0740 読 | 39.5 | $\alpha$ に依る・内在的でない |
| **ゲージ商** | $V_Q = V_F$（プラケットの角の関数） | 0.0277 読 | 72.0 読 | $\alpha$ に依らない。これを使う |

| 参照 | 試験の空間 | $\Gamma_\infty$ | $\lambda_{W,\infty}$ | 参照として |
|---|---|---|---|---|
| 境のゲージを凍らせた変種 | 内部のサイトのゲージ変換だけで割る | ゲージ商の $2.22$〜$2.53$ 倍（一辺 $4$〜$12$） 読 | — | ゲージ不変でない（箱を貫く流束が入る） |

表 1 の最後の行が 24-01 の表 1 の (e) です。箱の境のサイトのゲージ変換も箱の中のリンクに作用するので、箱のゲージ不変な観測量（Wilson ループなど）は全てのサイトで割った空間に入ります。「**箱の全てのサイトのゲージ変換で割る」ことは定義の一部**で、書き落とすと数が $2.2$〜$2.5$ 倍動きます。どの参照も自由場の数で、対象の Wilson 測度の比は、この本では一つも測っていません。

**0+1 の注**。0+1 次元には有限の無質量の参照がありません（自由な粒子では $C_P^{\mathrm{loc}} = \infty$）。参照は必ず尺度を持ち、二重井戸では底の曲率の調和振動子（角振動数 $\omega_b$）を取ります。その比は最短の窓（一つの時刻）で**ちょうど** $\omega_b/m$ です（$\psi_0$ が Schrödinger の基底状態のとき） 初 ：

$$K_{\mathrm{rel}}(\text{一つの時刻}) = \frac{\varepsilon/(2m)}{\varepsilon/(2\omega_b)} = \frac{\omega_b}{m} \tag{7}$$

（$\varepsilon$ は時間の刻み。分子は周辺 $\psi_0^2$ の Poincaré 定数で、基底状態変換で $(H - E_0)$ の隙間に移る。この恒等式は 24-05 の真空の測度の式と同じもの）Lean LatticeGauge.LocalHDoubleWell.one_slice_ratio（仮定：$0 < \varepsilon, m, \omega$。比の代数だけ）。二重井戸ではトンネルで $m \ll \omega_b$ なので、比は窓を短くしても 1 にならず、格子 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ で $4.61$（$\hbar = 0.3$）から $638$（$\hbar = 0.08$）です 読 。したがって「短い距離で比は 1 に近づく」は比の形から出る事実ではなく、**漸近自由（短い距離で自由場に近い）という理論の性質に依る仮定**です 仮 。窓を長くしたときの比の三つの領分は 24-04 で扱います。

04

## 区画ごとの拡散型緩和時間の仮定

**設定**。周期の箱 $\Lambda_L = (\mathbb{Z}/L)^4$、配位の空間 $\mathcal{M} = G^{\text{リンク}}$（コンパクトで連結な多様体・両側不変な計量）、Wilson 測度 $\mu$（滑らかで正の密度）、$\mathcal{E}(f) = \int |\nabla f|^2 d\mu$ を取ります。位相電荷は、Wilson 流（流れの時間 $s$）か有限回の均しで滑らかにした格子の電荷 $Q_s$ を使います。均しの写像は滑らかで電荷密度は行列要素の多項式なので、$Q_s \in C^\infty(\mathcal{M})$ です。

区画と、壁で反射する形の定義

切り口 $\theta_n \in (n-1, n)$ を $Q_s$ の**正則値**に取る（Sard の定理で殆ど全ての値が正則なので、$n - \frac{1}{2}$ にいくらでも近く取れる）。

$$I_n := \{\theta_n \le Q_s < \theta_{n+1}\}, \quad \mu_n := \mu(\,\cdot\,|I_n), \quad \mathcal{E}_n(f) := \int_{I_n} |\nabla f|^2 d\mu_n \ \ (f \in H^1(I_n)), \quad C_P^{\mathrm{sec}}(n) \tag{8}$$

（$\mu(I_n) > 0$ の $n$ だけ）。$\mathcal{E}_n$ には境界条件を課さない。その生成作用素は、壁で反射する（Neumann の）Langevin である。

正則値で切るので、区画の閉包は滑らかな境界をもつコンパクトな多様体で、壁は余次元 1 の滑らかな超曲面です。幾何学的に定めた整数値の電荷（区分的に定数で不連続）で切ると、形は開集合の上の $H^1$ で定義できますが、壁の正則性が分からず、次の (i) が言えません。この章が滑らかにした電荷を使うのはこのためです。

区画の Poincaré 定数の命題（区画の Poincaré 定数と、分散の分解）

(i) $C_P^{\mathrm{sec}}(n) < \infty \iff I_n$ が連結。

(ii) 区画の番号を $N$ とすると、滑らかな $f$ で

$$\mathcal{E}(f) = \sum_n \mu(I_n)\,\mathcal{E}_n(f), \qquad \mathrm{Var}\, f = \sum_n \mu(I_n)\,\mathrm{Var}_{\mu_n} f + \mathrm{Var}\big(\mathbb{E}[f \,|\, N]\big) \tag{9}$$

(iii) 区画の間の量 $C_{\mathrm{trans}} := \sup_f \mathrm{Var}(\mathbb{E}[f|N])/\mathcal{E}(f)$ について

$$C_{\mathrm{trans}} \ \le\ C_P \ \le\ \sup_n C_P^{\mathrm{sec}}(n) + C_{\mathrm{trans}} \tag{10}$$

(iv) $C_P^{\mathrm{sec}}(n) \le C_P$ は一般には成り立たない。

初 証明。(i) 区画の閉包はコンパクトで境界が滑らか、密度は正で滑らかなので、Neumann の作用素の解核はコンパクトです（Rellich の定理 仮 ：原典の言明はこの部では確かめていない）。零固有値の重複度が連結成分の数に等しいので、隙間が正であることと連結であることは同じです。(ii) 壁は測度 0 なので Dirichlet 形は区画ごとの和に割れ、分散は条件つき分散の期待値と条件つき期待値の分散の和です。(iii) 左は $\mathrm{Var}(\mathbb{E}[f|N]) \le \mathrm{Var}\, f$、右は (9) の第一項に区画ごとの Poincaré 不等式を使い、$\sum_n \mu(I_n)\mathcal{E}_n = \mathcal{E}$ で閉じます。(iv) 区画の関数は壁で跳んでよい（$H^1(\mathcal{M})$ に入らない）ので、条件づけが新しい隘路を作れば $C_P^{\mathrm{sec}}(n) > C_P$ もありえます。∎ Lean LatticeGauge.LocalH.sector_split（仮定：重み $\ge 0$・区画ごとの不等式・(9) の二つの式・$\mathrm{Var}(\mathbb{E}[f|N]) \le C_{\mathrm{trans}}\mathcal{E}$。結論：(10) の右）・trans_le_total（仮定：重みと区画の分散が $\ge 0$・(9)。結論：(10) の左の分子の不等式）。(9) の恒等式そのもの・Rellich・測度は Lean の外です。

**区画ごとの緩和時間の仮定と、その系。**区画ごとの緩和時間の仮定は、物理の一辺を止めた箱で区画の中の Poincaré 定数が相関長の二乗で押さえられるという文です。

$$(\xi^2)\uparrow^{\mathrm{sec}}:\quad L=\lambda\,\xi_{\mathrm{RG}}\ \text{で}\ \sup_n C_P^{\mathrm{sec}}(n)\le K(\lambda)\,\xi_{\mathrm{RG}}^2 \qquad\Longrightarrow\qquad \big(\,(\xi^2)\uparrow\iff C_{\mathrm{trans}}\lesssim \xi_{\mathrm{f}}$$

初 （(10) から。$\lesssim$ は定数の取り替えを除く）。区画ごとの緩和時間の仮定は緩和時間の仮定の障害を区画の間の量 $C_{\mathrm{trans}}$ に**ちょうど**押し込みます。障害を消すのではなく、一つの量に移すだけで、23-10 の移しかえの型と同じ形です。$C_{\mathrm{trans}}$ の物理の読みは転位の率で、静的には $C_{\mathrm{trans}}\ge \mathrm{Var}(\mathbb{E}[Q_s|N])/\mathcal{E}(Q_s)$ です。

**橋にはつながらない。**(10) と片側の橋（23-01 の (17)、周期の時間で $T$ が有限の補正つき）から出るのは $\kappa/m^2\lesssim \sup_n C_P^{\mathrm{sec}}(n)+C_{\mathrm{trans}}$ までで、$C_{\mathrm{trans}}$ を押さえない限り隙間は出ません 初 。区画の中の Langevin の隙間 $1/C_P^{\mathrm{sec}}(n)$ は第五の時間の量で、条件つきの測度 $\mu_n$ には転送作用素がありません（全体の電荷の拘束が時間の Markov 性を壊す）。片側の橋の型の「区画の中の物理の隙間」は定義から立たず、立てるには θ 真空の重ね合わせの扱いが要りますが、定式化していません 見 。

**三つの弱点。**(a) *条件づけの壁が人工の双安定を作りうる。*第 23 部の箱の側の芯では、区間を「ちょうどこの区間」と条件づけた壁の上に二つの局所の最小点が現れ、物理の準安定ではない双安定が生まれました（23-11 §06）。区画の壁は測度の小さい転位の配位の上にあるので害は小さいと見込みますが、確かめていません 見 。区画の Poincaré 定数の命題の (i) で連結かどうかが分かっていないのは、この弱点の極端な形です。(b) *物理の体積を大きくすると、区画を止めても障害が残る。*$\beta$ を止めて $L\to\infty$ とすると、区画 $I_n$ の中でも半分の箱の電荷は動けます。24-01 の (5) の係数で、条件つきの分散は $\chi_t V/4$、Dirichlet 形は $hV/2+g\,|\partial|$ の程度で、比は $V\to\infty$ で $\chi_t/(2h)$、周期の箱の全体の比 $\chi_t/h$ と同じ桁です 仮 （$h,g$ の定義と、二つの半分の和を止めた正規分布の条件つき分散の勘定の上）。区画で止まるのは全体の電荷の一つのモードだけで、部分領域の電荷のモードは残ります。したがって区画ごとの緩和時間の仮定が上界の仮定と違う中身を持つのは、箱が交差の長さより小さい（区画の中の部分領域が輸送の領分にある）ときだけで、**物理の体積を止めた順でしか意味を持たない**見込みです 見 。(c) $T=\infty$ *の経路の測度には区画が無い。*四次元の電荷は時間について積分した量で、$T=\infty$ では $L^2$ に入りません。

**一段目の割り方との対応。**(9) は、一段目の分散の分割（相の中の局所 Poincaré と、相を移る輸送、23-05 §01）と同じ割り方で、相 ↔ 区画、キンク ↔ 転位と対応します 見 。23-03 §06 の「二尺度の割り方は持ち上がる見込み」の、具体的な行き先の一つです。ただし一段目では、相を移る輸送（キンクの拡散）の時間は $\xi^2 S_0/\hbar$ の程度と読まれ（23-04 の (14) 仮 ）、二重井戸の緩和時間の冪の言明の形に入ります。四次元の区画の間の量 $C_{\mathrm{trans}}$ は 24-01 の型の量そのもので、同じ形に入る見込みは立っていません。

05

## 開いた箱と閉じた箱・二つの係数

**局所は輸送の係数を、全体は保存の破れの係数を問う**。24-01 の (7) の滑らかな窓の電荷 $Q_w$ は、一辺 $R = c\xi$ の箱の局所の族に入ります。(7) を局所の緩和時間の仮定（絶対の形）に入れると、必要条件は $\chi_t c^2\xi^2/(hc^2\xi^2 + d\lambda_W) \le K\xi^2$ で、$h$ が小さい領分（交差の長さ $R_*$ が $c\xi$ よりずっと長い）では

$$\frac{\chi_t (c\xi)^2}{d\,\lambda_W} \le K\xi^2 \iff \chi_t c^2 \le K\,d\,\lambda_W, \qquad \text{すなわち} \qquad D_{\text{eff}} := \frac{d}{\chi_t} \ge \frac{c^2}{K\lambda_W} \tag{12}$$

です 初 （代数）Lean LatticeGauge.LocalH.transport_requirement（仮定：$0 < d$・$0 < \lambda_W$・$0 < \xi$）。比の形では $K$ を $K_{\text{rel}}\Gamma c^2$ に読み替えます。一方、全体の上界の仮定の必要条件は、24-01 の (2)(6) で $R \to \infty$ とした

$$\frac{\chi_t}{h} \lesssim \xi^2 \tag{13}$$

です 仮 （24-01 の (5) の上）。(12) と (13) は別の係数に掛かります。**局所の緩和時間の仮定は電荷の輸送の係数 $d$ を、全体の緩和時間の仮定は電荷の保存の破れの係数 $h$ を問います**。四次元の位相電荷の凍結は、連続極限で $h$ が速く消えること（転位の配位が稀になること）の現れと読めるので、効くのは (13) の側です。局所の緩和時間の仮定が凍結の影響を受けない見込みはここから来ます 見 。$d$ と $h$ の四次元の格子の値はありません。

**閉じた箱と開いた箱**。第 23 部の箱への帰着の命題（23-11 §02）は、全体の $C_P$ を箱の定数 $C_{\text{box}}$ で押さえる帰着で、$C_{\text{box}}$ は**境界の値を止めた**条件つきの測度の定数（境界の値について sup）でした。これを閉じた箱と呼びます。局所の緩和時間の仮定の箱は境界を止めない周辺の箱で、開いた箱と呼びます。四次元で境界のリンクを止めると、箱の中の位相電荷の整数部分は箱の中の転位でしか変わらない見込みです（連続では、箱の電荷は境界の Chern–Simons の値と巻き数の和） 見 。したがって $\chi_t(c\xi)^4 \gtrsim 1$ の大きさの閉じた箱では、$C_{\text{box}}$ が転位の障壁の時間を受け継ぐ見込みです 見 。開いた箱では電荷が境界を通って出入りし、緩和は (12) の輸送の型です 仮 。

**閉じた箱と開いた箱の違いは、周期境界と開いた境界の違いと同じ形**です。開いた境界は、物理の一辺を止めた有限の箱の中でしか位相の障害を外しません（開いた境界の $Q^2$ の自己相関時間は、時間の向きの長さにほぼ比例して伸びる、Lüscher–Schaefer 2011 の §5.3 読 ）。これは (12) の輸送の型の、箱の言葉での言い直しです。帰結の読み 見 ：予想を延ばした読み（24-01 の §06 (a)）の下で上界の仮定が四次元で偽と読めるなら、局所の緩和時間の仮定が成り立つ場合でも、箱への帰着の命題の四次元版は閉じた箱の段で破れます。壊れる場所は「箱の中の緩和」ではなく「閉じた箱の中の区画の移り変わり」です。

表 2　体積と $a \to 0$ の順と、効く見込みの直し方

| 順 | 先に取るもの | 効く見込みの直し方 | 効かない見込みの直し方 | 札 |
|---|---|---|---|---|
| 物理の一辺を止めて $a \to 0$ | 有限の箱の連続極限 | 開いた境界・区画ごとの緩和時間の仮定 | — | 典（開いた境界の原典）・見 |
| 体積を先に無限（この本の順） | 無限体積の格子の測度 | 局所の緩和時間の仮定（開いた箱） | 開いた境界・区画ごとの緩和時間の仮定 | 仮（部分領域の電荷の勘定）・見 |

Langevin を実装する算法の自己相関の尺度づけ（格子単位で $1/a^2$）を、原典は「無限格子と、開いた境界の有限の格子で成り立つと期待される」と書き、周期境界の位相を変える遷移は格子の作り物として解析から外しています（Lüscher–Schaefer, Non-renormalizability of the HMC algorithm, 2011 の脚注）典。表 2 の二行目はこの言い方と同じ向きですが、原典の対象は局所の量の自己相関で、局所の緩和時間の仮定そのものではありません。

06

## 五分類の表

この章の行を五分類の書式に「見」を足して一表にします。行の記号は依存グラフの節点と同じで、24-01 の行（クラスタの減衰の行）を一つ引き継ぎます。

表 3　区画ごとの緩和時間の仮定と局所の緩和時間の仮定の行（「—」は機械検査の無い行）

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 | 機械検査 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 無限体積の Wilson 測度の存在と一意性 | 仮 | 第 23 部の無限体積の一意性の言明 | $\beta \geq \beta_0$ | — |
| 2 | Rellich の定理（Neumann の解核のコンパクト性） | 仮 | 区画の Poincaré 定数の命題 (i)（原典の言明は確かめていない） | 滑らかな境界 | — |
| 3 | ガウス測度の Poincaré 定数＝圧縮した共分散のノルム | 典 | (4)・Hairer–Stuart–Voss–Wiberg 2005 | ガウス | — |
| 4 | 局所の Poincaré 定数の性質の命題 (i)〜(iv) | 初 | §02 の証明 | 連続時間・有限の空間格子・$T = \infty$ | local_le_global・local_approaches_global（仮定：上に有界・空でない・$S = \bigcup S_c$。上限の部分だけ） |
| 5 | 局所の Poincaré 定数の性質の命題の証明が四次元の Wilson 測度の箱で同じに通ること | 仮 | §02 の末（定義域の扱いを書き下していない） | 四次元・無限体積 | — |

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 | 機械検査 |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 四次元の局所の Poincaré 定数の性質 | 初 | 行 1・4・5 の上 | 四次元 | — |
| 7 | 絶対の形は無質量の自由場で $K = c^2$ で成り立つ | 初 | (4) | 時空四次元・空間も局所 | — |
| 8 | $\Gamma_\infty = 0.0740$・$\Gamma_{Q,\infty} = 0.0277$・$\lambda_W^Q = 72.0$・境の凍結で $2.22$〜$2.53$ 倍 | 読 | §03・表 1 | 自由場・一色のガウス・$\beta = 1$・$R \le 16$ | — |
| 9 | 可縮な箱で $V_F = V_Q$・ゲージ固定の参照は $\alpha$ に依り $\alpha \to \infty$ で発散 | 初 | (6) | 可縮な箱 | — |
| 10 | 最短の窓の比 $= \omega_b / m$ | 初 | (7) | 0+1・Schrödinger の $\psi_0$ | one_slice_ratio（仮定：$0 < \varepsilon, m, \omega$） |
| 11 | 短い距離で比は 1 に近づく | 仮 | §03 の 0+1 の注（漸近自由に依る） | 四次元 | — |
| 12 | 局所の緩和時間の仮定（比の形）：一つの $c$ で $K_{\mathrm{rel}}(c) \le K$ | 仮 | (5) | $\beta \ge \beta_0$ | — |
| 13 | 区画の Poincaré 定数の命題 (i)：区画の定数が有限 $\Longleftrightarrow$ 区画が連結 | 初 | §04（行 2 の上） | 周期の箱・正則値の切り口 | — |
| 14 | 挟み (10) | 初 | (9)(10) | 周期の箱 | sector_split・trans_le_total（仮定：重み $\ge 0$・区画ごとの不等式・(9) の二式） |
| 15 | 系 (11)：区画ごとの緩和時間の仮定の下で上界の仮定 $\Longleftrightarrow C_{\mathrm{trans}} \lesssim \xi^2$ | 初 | (11) | 物理の一辺を止めた箱 | — |
| 16 | 区画から出るのは $\kappa / m^2 \lesssim \sup_n C_P^{\mathrm{sec}} + C_{\mathrm{trans}}$ まで | 初 | §04（片側の橋の上） | 有限の箱 | — |
| 17 | クラスタの減衰（24-01 の表 5 の行 1） | 仮 | 24-01 の (5) | 無限体積 | — |
| 18 | (12)：局所は $d$・(13)：全体は $h$ | 初 | (12)（代数）・(13) は行 17 の上 | 四次元 | transport_requirement（仮定：$0 < d, \lambda_W, \xi$） |
| 19 | 区画の中の半分の箱の比 $\to \chi_t / (2h)$ | 仮 | §04 の弱点 (b) | $\beta$ を止めて $L \to \infty$ | — |

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 | 機械検査 |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 四次元の箱の交互の最大相関の仮定：閉じた箱の族の間の最大相関 $< 1$ が $\beta$ に一様 | 仮 | 箱への帰着の命題の四次元版の前提 | 四次元・$2^4$ 色の族 | — |
| 21 | 四次元の閉じた箱の隙間の仮定：閉じた箱で $C_{\mathrm{box}}(c\xi_{\mathrm{RG}}) \le K'\xi_{\mathrm{RG}}^2$ | 仮 | §05（位相の障壁が入る見込みの行） | 四次元 | — |
| 22 | 四次元の多族の箱の帰着 $C_P \le C(c)\,C_{\mathrm{box}}/(1-c_{\mathrm{alt}})$ | 仮 | 一次元の箱への帰着の命題の四次元版（書き下していない） | 四次元 | — |
| 23 | 緩和時間の上界の仮定 | 初 | 行 20・21・22 の上の代数 | 四次元 | — |

### 依存グラフ

```
 1  仮  無限体積の Wilson 測度の存在と一意性                  β ≥ β₀
 2  仮  Rellich の定理                                        滑らかな境界
 3  典  ガウスの Poincaré 定数 = 圧縮した共分散のノルム   ガウス
 4  初  局所の Poincaré 定数の性質の命題（連続時間）       T = ∞
        Lean local_le_global・local_approaches_global（上限の部分だけ）
 5  仮  その証明が四次元の箱で同じに通ること                  四次元
 6  初  四次元の局所の Poincaré 定数の性質 ⟸ 1・4・5
 7  初  絶対の形の空虚さ (4) ⟸ 3                              時空四次元
 8  読  参照の数（Γ_∞・Γ_Q・λ_W^Q・境の凍結の倍率）          自由場
 9  初  可縮な箱で V_F = V_Q・ゲージ固定は α に依る          可縮な箱
10  初  最短の窓の比 = ω_b/m                                  0+1
        Lean one_slice_ratio
11  仮  短い距離で比は 1 に近づく（漸近自由）                四次元
12  仮  局所の緩和時間の仮定（比の形・一つの c）             β ≥ β₀
13  初  区画の定数が有限 ⟺ 連結 ⟸ 2                          正則値の切り口
14  初  挟み C_trans ≤ C_P ≤ sup C^sec + C_trans              周期の箱
        Lean sector_split・trans_le_total
15  初  区画ごとの仮定の下で上界の仮定 ⟺ C_trans ≲ ξ² ⟸ 14
16  初  区画から出る橋の不等式 ⟸ 14（＋片側の橋）
17  仮  クラスタの減衰（24-01）                               無限体積
18  初  局所は d・全体は h ⟸ 17
        Lean transport_requirement
19  仮  区画の中の半分の箱の比 → χ_t/(2h)
20  仮  四次元の箱の交互の最大相関 < 1                       四次元
21  仮  四次元の閉じた箱の隙間 C_box ≤ K'ξ_RG²   ← 位相の障壁が入る見込みの行
22  仮  四次元の多族の箱の帰着（書き下していない）
23  初  上界の仮定 ⟸ 20・21・22
```

確かめ方。「⟸」の行で右の番号が左より小さいことを目で見ます。円はありません。葉の「仮」は十（無限体積の測度の存在・Rellich の定理・局所の Poincaré 定数の性質の証明の四次元への写し・短い距離の比の読み・局所の緩和時間の仮定・クラスタの減衰・半分の箱の比・四次元の箱の交互の最大相関・四次元の閉じた箱の隙間・四次元の多族の箱の帰着）、「典」はガウスの Poincaré 定数の行、「読」は参照の数の行です。

このグラフで読むことは二つです。第一に、**局所の緩和時間の仮定は、上界の仮定を組む鎖のどこにも入りません**。箱への帰着の命題の型の帰着は閉じた箱（四次元の閉じた箱の隙間の仮定）を使い、局所の緩和時間の仮定の箱は開いた箱だからです。局所の緩和時間の仮定は上界の仮定の部品ではなく、別の文です。局所の緩和時間の仮定がどこで使われるかは 24-04 の橋のグラフにあります。第二に、四次元で上界の仮定が壊れる見込みの場所は、四次元の閉じた箱の隙間の仮定の一行に集まります。この行の言明は閉じた箱の定数 $C_{\mathrm{box}}$ だけを含み、全体の $C_P$ を含まないので、結論を前提に置く形にはなっていません。

07

## 言えないこと

(a) 二つの緩和時間の仮定は**定義の候補で、どの $\beta$ でも、対象のゲージ理論について示した不等式はありません**。示したのは定義の性質（局所の Poincaré 定数の性質の命題・区画の Poincaré 定数の命題）と、自由場の参照の値です。緩和時間の仮定の「正しい直し方」も主張しません。

(b) 四次元の Wilson 測度の上の局所の緩和時間の仮定は、連続時間の経路の測度の上の定義の写しで、無限体積の測度の存在と、定義域の扱い（局所の Poincaré 定数の性質の命題の証明が四次元の箱で同じに通ること）は前提の行です。

(c) 部分領域の電荷の勘定（開いた箱で輸送・閉じた箱で障壁）は、クラスタの減衰と形式的な係数 $h, g, d$ の上の見積もりで、四次元の格子の値はありません。

(d) 四次元の多族の箱の帰着は書かれていません。区画の壁の害・物理の体積を大きくしたときの区画ごとの緩和時間の仮定の破れ方は見立てです。

(e) 局所の緩和時間の仮定が四次元で成り立つ証拠はありません。あるのは「凍結が効くのは $h$ の側で、局所の緩和時間の仮定が問うのは $d$」という勘定だけです。

(f) 表 1 の数はどれも参照の自由場の数（一色のガウス・$\beta = 1$・浮動小数・外挿）で、対象の測度の比 $K_{\mathrm{rel}}$ は一つも測っていません。閾は参照と試験の観測量の族に依り、帯 $[K_*, 1)$ の場について橋は何も言いません（24-04）。

(g) 「短い距離で比は 1 に近づく」は漸近自由に依る仮定で、0+1 の二重井戸ではこの読みが成り立ちません（(7)）。

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 初 局所の Poincaré 定数の定義と局所の Poincaré 定数の性質の命題（窓の周辺の量・稠密でない・単調・$c \to \infty$ で $C_P$ に無条件で戻る。連続時間・有限の空間格子・$T = \infty$・片側の橋の仮定の上） | 四次元の Wilson 測度の上の定義域の扱い（写し）。芯の問い（SPDE の生成作用素との同一視） |
| 初 絶対の形の局所の緩和時間の仮定は、時空四次元で空間も局所にした箱では無質量の自由場でも成り立つ（$K = c^2$） | 比の形の局所の緩和時間の仮定が対象の理論で成り立つこと |
| 初 可縮な箱でプラケットの関数の族とゲージ商が一致すること・ゲージ固定の参照が母数に依ること・最短の窓の比 $\omega_b/m$ | $\beta$ 有限の $SU(2)$ の参照・四次元の大きいループの族の値 |
| 読 参照の数 $\Gamma_\infty = 0.0740$・$\Gamma_{Q,\infty} = 0.0277$・$\lambda_W^Q = 72.0$・境の凍結で $2.22$〜$2.53$ 倍 | 上界・下界の命題ではない。自由場の数で、対象の測度の数ではない |
| 初 区画の定義（正則値の切り口・反射の形）・有限 $\Longleftrightarrow$ 連結（Rellich の上）・挟み (10)・系 (11)・区画から出る橋の不等式 | 区画が連結かどうか。$C_{\mathrm{trans}}$ の評価。$\theta$ 真空の扱い |
| 見 局所の緩和時間の仮定は凍結の影響を受けない見込み・閉じた箱が障壁を受け継ぐ見込み・区画ごとの緩和時間の仮定は物理の体積を止めた順でだけ意味を持つ見込み | どれも定理ではない |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| ガウス測度の Poincaré 定数＝共分散のノルム | 典 | M. Hairer, A. M. Stuart, J. Voss, P. Wiberg (2005) の共分散の圧縮の補題（等号は一次の汎関数） |
| 開いた境界の $Q^2$ の自己相関と時間の向きの長さ・Langevin の算法の尺度づけの期待 | 典 | M. Lüscher, S. Schaefer, JHEP 07 (2011) 036 §5.3・M. Lüscher, S. Schaefer, JHEP 04 (2011) 104 の §1 と脚注（本文で確認） |
| 局所の Poincaré 定数の性質の命題 (iii)(iv)・区画の Poincaré 定数の命題の (10)・(12) の代数・(7) の比 | Lean | LatticeGauge.LocalH（local_le_global・local_approaches_global・sector_split・trans_le_total・transport_requirement）・LatticeGauge.LocalHDoubleWell（one_slice_ratio）。束が保証するのは実数の集合の上限・代数だけ |
| 表 1 の参照の数・$\Gamma(R)$・$r(mR)$ | 読 | 格子の Green 関数（熱核の数値積分）の箱への圧縮の最大固有値（Lanczos）と、独立な周期格子の経路（零モードを外す・$1/L^2$ の外挿）。ゲージ商は箱のグラフの Neumann Laplacian による射影と、密な特異値分解による射影の二つの経路 |
| 二重井戸の格子の比 | 読 | 転送の核（時間の刻み $\varepsilon = \frac{1}{2}$ の対称積）の格子の固有値問題 |

**この章で使った語** — 時間で均した汎関数の代数 $\mathcal{D}$・窓・局所の Poincaré 定数 $C_P^{\mathrm{loc}}(c)$・比の形 $K_{\mathrm{rel}}$・無質量の参照と $\Gamma$・ゲージ商の参照・区画と反射の形・区画の間の量 $C_{\mathrm{trans}}$・開いた箱と閉じた箱・輸送の係数 $d$ と保存の破れの係数 $h$。記号は 24-09 にあります。

次に読む章：24-04 片側の橋は緩和時間の仮定のどの形を要るか ― 比の形の局所の緩和時間の仮定から隙間の下界が出る閾 $K_*$ と、橋が質量を見る箱の大きさ。

# 片側の橋は緩和時間の仮定のどの形を要るか

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 5-09・2-10 にあります。

**この章で分かること** ― 第 23 部の片側の橋が拡散型緩和時間の仮定のどの部分しか使わないか。時刻で積分した一時刻の関数の族では、Poincaré 定数の上限が隙間でちょうど決まるので、橋に要るのは緩和時間の上界の仮定の時刻に局所な部分だけです。窓を限った局所の緩和時間の仮定から有限の空間体積の隙間の下界が出ること、無限体積では局所の緩和時間の仮定を無質量の参照との比で述べる必要があること、その閾が参照の取り方（スカラー・ゲージ商・$SU(2)$ の色の一重項）で変わること、橋が質量を見るのは箱が相関長の 4〜5 倍以上のときであること。0+1 次元の二重井戸では、最も短い窓でも比が 1 にならないこと。

**前提となる章** ― 23-01 §05（拡散型緩和時間の仮定の (13)、上界の仮定の (14)(15)）・23-01 §06（片側の橋の (17)、恒等式 (18)、橋 (19)、時間の刻みの比べの仮定（論文「片側の橋」の (D)）の (20)）・23-01 §06 (5)（円の上の自由な粒子の反例）・24-03（局所の緩和時間の仮定と比の形の定義）。記号は 24-09 にまとめてあります。

**先に言うこと** ― 水準は〔研〕で、§01 の要約だけ〔三〕です。この章は質量ギャップを示しません。緩和時間の仮定も上界の仮定も、その局所の版も、どの $\beta$ でも示していません。示すのは、橋がどの仮定のどの部分を使うかという論理の形と、自由場の参照の値です。窓の議論は時間を連続に取った格子・有限の空間格子・$T = \infty$ の定常な経路の測度の上の文で、無限体積の版はさらに局所の励起のモーメントの仮定と無限体積の基底状態変換の恒等式の上にあります。参照の値は浮動小数の計算と外挿の読みです。

この章の順序

1. 要約〔三〕 ― 橋が使うのは上界の仮定の時刻に局所な部分だけ
2. 片側の橋と時刻に局所な族 ― 上限がちょうど $\xi^2$・論文との対応（(1)〜(3)）
3. 窓を限る ― 窓の因子の単調性・窓の中の上限の命題・有限体積の下界（(4)〜(10)・表 1）
4. 「ある $K(c)$」は空虚 ― 無質量の自由場という陰性対照と、比の形（(11)(12)）
5. 無限体積の橋と閾 ― 局所の励起のモーメントの仮定・比への移しかえ（(13)〜(16)）

6. 三つの参照 — スカラー・ゲージ商・色の一重項（表 2）・橋が質量を見る箱
7. 0+1 次元の注 — 最も短い窓でも比は $\omega_b/m$（(17)・表 3）
8. どの仮定のどの部分がどの結論に要るか — 表 4
9. 言えないこと
10. 五分類の表と依存グラフ — 表 5

---

01

## 要約〔三〕 — 橋が使うのは上界の仮定の時刻に局所な部分だけ

第 23 部の 23-01 §06 で、時間を連続に取った格子の経路の測度について、片側の橋 $C_P \geq \kappa\hbar^2/\Delta^2$を示しました。試験関数は、一つの時刻の配位の関数 $F = \psi_1/\psi_0$ を時間で積分した $f_T = \int_0^T F(q(\tau))\,d\tau$ の一本です。この一本と上界の仮定の $C_P \leq C\xi_{\mathrm{RG}}^2$ を並べると、格子の物理単位の隙間の下界 $m_{\mathrm{phys}}^2 \geq \kappa/C$ が出ます（23-01 の (19)）。この章の問いは、そのとき上界の仮定のどの部分が使われているか、です。

答えは三段に分かれます。

**第一段**。「一つの時刻の関数を時間の重みで均したもの」の族 $\mathcal{F}_1$ の上では、$\mathrm{Var}\,/\mathcal{E}$ の上限が正準の目盛りでちょうど $\xi^2 = \hbar^2/\Delta^2$ です [初]。したがって上界の仮定をこの族に制限した文は「格子の物理単位の隙間が $C^{-1/2}$ 以上」と同じです。上界の仮定のうち隙間を越える中身は、この族の外——巻き数や位相電荷のような、時刻に局所でない関数——にしかありません（23-01 の円の上の自由な粒子の反例、24-01 の型）。橋は上界の仮定の時刻に局所な部分しか使いません。

**第二段**。時間の窓を長さ $c\ell$ に限った局所の緩和時間の仮定（$\ell$ は隙間とは別に外から与える物差しで、四次元では記帳の長さ $\xi_{\mathrm{RG}}$）からも、有限の空間体積の隙間の下界 $m_{\mathrm{phys}} \geq \sqrt{1/c^2 + \kappa/K} - 1/c$ が出ます [初]。$c \to \infty$ で第 23 部の $\sqrt{\kappa/K}$ に戻ります。

**第三段**。空間も局所にして無限体積へ進むと、「箱の中の局所の Poincaré 定数が $K(c)\ell^2$ 以下」という形の文は空虚になります。四次元の質量の無い自由場も、ある $K(c)$ でこの文を満たすからです [初]。そこで、同じ箱・同じ目盛りの無質量の自由場の値（参照）との比 $K_{\mathrm{rel}}$ で述べます。局所の励起のモーメントの仮定の上で、比が閾 $K_* = \kappa/(\lambda_W \Gamma)$ より小さければ隙間の下界が出ます [初]（仮定の上の代数）。閾は参照の取り方で変わり、スカラーで $0.342\kappa$、ゲージ商（一色の線形化）で $0.502\kappa$、$SU(2)$ の色の一重項（主項・二次のカオス）で約 $0.62\kappa$（試験の値なので使える閾の下の値）です [読]。質量のある自由場で調べると、橋が質量を見

るのは箱の一辺が相関長の約 4.2 倍（スカラー）〜5.2 倍（ゲージ商）以上のときです 読 。比が閾と 1 の間の帯 $[K_*, 1)$ にある場について、この橋は何も言いません。

最後に 0+1 次元の注を置きます。二重井戸では、最も短い窓（一つの時刻）でも比はちょうど $\omega_b/m$ で、1 になりません 初 。「短い距離では比が 1 に近い」は比の形から出る事実ではなく、四次元では漸近自由に依る仮定です 仮 。

比喩で言えば、橋は「時計の針が一回りする時間」だけを見ていて、「針が何周したかを数える歯車」の遅さは見ていません。上界の仮定はその歯車も含めた全体の文で、橋に要るのは針の部分だけです。

02

## 多次元の片側の橋と時刻に局所な族 — 上限がちょうど $\xi^2$

設定は 23-01 §06 の片側の橋と同じです。空間は有限の格子、一つの時刻の配位の空間 $Q$、ハミルトニアン $H = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta_M + V$、基底状態の仮定（論文の (A1)。離散スペクトル・基底状態 $\psi_0 > 0$ が重複せず滑らか・$\Delta = E_1 - E_0 > 0$）、定常な経路の測度の仮定（論文の (A2)。$T = \infty$ の定常な経路の測度）、計量の比べの仮定（論文の (A3)。Langevin の計量の比較、$\kappa = 1/\lambda_G$）。$m = \Delta/\hbar$、$\xi = 1/m$、$A = (H - E_0)/\hbar$ です。

時刻に局所な族を次のように置きます。

$$\mathcal{F}_1 = \Big\{ f_{h,G_1} = \int_{\mathbb{R}} h(\tau)\, G_1(q(\tau))\, d\tau \ :\ h \text{ は有界で台が有界, } G_1 \text{ は } Q \text{ の上の滑らかな関数} \Big\} \tag{1}$$

片側の橋の $f_T$ は $h = \mathbf{1}_{[0,T]}$、$G_1 = \psi_1/\psi_0$ の場合です。

片側の橋の上限（時刻に局所な族で最良）

片側の橋の仮定と正準の選び方 $G = M^{-1}$（$\kappa = 1$）のもとで、

$$\sup_{f \in \mathcal{F}_1} \frac{\mathrm{Var}(f)}{\mathcal{E}(f)} = \xi^2 = \frac{\hbar^2}{\Delta^2}, \tag{2}$$

で、上限は達成されない（どの $f \in \mathcal{F}_1$ でも比は $\xi^2$ より真に小さい）。

初 証明。$\varphi = (G_1 - \langle G_1 \rangle)\psi_0$ の $A$ のスペクトル測度を $\nu_\varphi$ とすると、$\nu_\varphi$ は $[m, \infty)$ に載ります。相関の式と Plancherel の定理から

$$\mathrm{Var}(f) = \int d\nu_\varphi(a) \int_{\mathbb{R}} |\hat{h}(k)|^2 \frac{2a}{a^2 + k^2} \frac{dk}{2\pi}, \qquad \mathcal{E}(f) = \int d\nu_\varphi(a) \int_{\mathbb{R}} |\hat{h}(k)|^2\, 2a\, \frac{dk}{2\pi} \tag{3}$$

です（右は恒等式 (18) から）。$a \geq m$ で $2a/(a^2+k^2) \leq 2a/m^2$、等号は $k=0$ だけなので、比は $\xi^2$ より小さい。上限が $\xi^2$ であることは片側の橋の $f_T$ で $T \to \infty$ とすれば分かります。∎
一般の計量では、計量の比べの仮定と逆向きの比較 $G \geq \lambda'_G M^{-1}$ から上限は $\kappa\xi^2$ と $\xi^2/\lambda'_G$ の間に挟まれます。Lean `EuclideanPath.GapBridge.local_rayleigh_le`（仮定：$0<m$・各 $k$ で $m \leq a_k$・$0 \leq c_k$。結論：$m^2 \sum_k c_k/a_k \leq \sum_k c_k a_k$）と `fourier_weight_le`（仮定：$0<m \leq a$。結論：$2a/(a^2+k^2) \leq 2a/m^2$）は、この証明の有限和と各点の不等式だけを検査したものです。

**帰結**。上界の仮定を $\mathcal{F}_1$ に制限した文「すべての $f \in \mathcal{F}_1$ で $\mathrm{Var}(f) \leq C\xi_{\mathrm{RG}}^2 \mathcal{E}(f)$」は、(2) によって $\xi^2 \leq C\xi_{\mathrm{RG}}^2$、すなわち

$$\mathcal{F}_1 \text{ の上の上界の仮定} \iff m_{\mathrm{phys}} = m\,\xi_{\mathrm{RG}} \geq C^{-1/2} \text{（正準・各 } \beta\text{）}$$

と同じです 初 。右から左も (2) から出ます。上界の仮定が格子の物理単位の隙間より強い分（23-01 §06 の結論）は、すべて $\mathcal{F}_1$ の外にあります。円の上の自由な粒子（円の上の自由な粒子の反例）では、巻き数の汎関数 $\int w\,d\tilde{x}$ が $\mathcal{F}_1$ の外にあって $C_P = \infty$ を作り、$\mathcal{F}_1$ の上の上限は $\xi^2$ のままです。

**論文との対応**。片側の橋・(2)・円の上の自由な粒子の反例は、論文（論文の一覧・PDF）“The inverse squared spectral gap bounds the Langevin Poincaré constant of Euclidean path measures from below”（Kiichi, Shiori and Rin）にまとめてあります。要旨の一文は「有限次元の配位の空間の上の、時間の全体で定常な Euclid の経路の測度について、時間で均した滑らかな汎関数の上の確率量子化（Langevin）の Dirichlet 形の Poincaré 定数は $C_P \geq \kappa(\hbar/\Delta)^2$ を満たす」です。片側の橋は論文の定理 3.1、(2) は命題 4.1、円の上の自由な粒子の反例は命題 5.1（時間で均した滑らかな汎関数の族 $\mathcal{D}_0$ の上でも $C_P=\infty$）に当たります。この本では式番号を引くだけにし、証明は 23-01 §06 と論文に任せます。論文は外部の数学者の検査を経ていません。

03

## 窓を限る — 窓の因子の単調性・窓の中の上限・有限体積の下界

局所の緩和時間の仮定の定義は 24-03 §02 の (1)〜(3) にあります。ここで使う形だけを写します。物差し $\ell > 0$ は隙間とは別に外から与える長さ（四次元では記帳の長さ $\xi_{\mathrm{RG}}$）です。隙間で決めた $\xi$ を物差しにすると、隙間の下界を導くときに循環します。$c > 0$ に対し、時間で均した汎関数のうち重みの台が長さ $c\ell$ の窓に入るものの族を $\mathcal{D}_c$ と書き、

$$C_P^{\mathrm{loc}}(c) = \sup_{f \in \mathcal{D}_c} \frac{\mathrm{Var}(f)}{\mathcal{E}(f)}, \qquad (\xi^2)\!\uparrow_c^{\mathrm{loc}}(K) : \ C_P^{\mathrm{loc}}(c) \leq K\ell^2 \quad (4)$$

と置きます。$C_P^{\mathrm{loc}}(c)$ は窓の上の経路の周辺の法則だけで決まり、$c$ について単調に増え、$c \to \infty$ で全体の $C_P$ に戻ります（24-03）。

### 窓の因子と、その単調性

片側の橋の (17) の右辺の括弧を $\varphi(x)$ と書きます（引数の無い $\varphi$ は §02 のベクトルで、別の量です。記号は 24-09 に従います）。

$$\varphi(x) = 1 - \frac{1 - e^{-x}}{x}, \qquad g(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2} = \frac{x - 1 + e^{-x}}{x^3} \qquad (x > 0) \tag{5}$$

窓 $T$ の比は $\kappa\xi^2\varphi(T/\xi) = \kappa T^2 g(mT)$ です。$\varphi(x) = x/2 + O(x^2)$、$\varphi(x) \to 1$（$x \to \infty$）で、値は $\varphi(1) = 0.368$・$\varphi(4) = 0.755$・$\varphi(10) = 0.900$ です 初 （閉じた式の値）。

> 窓の因子の単調性の命題（窓の因子は減る）
>
> $g$ は $(0, \infty)$ で狭義に減少する。

初 証明。$x - 1 + e^{-x} = \int_0^x \int_0^u e^{-v}\, dv\, du = x^2 \int_0^1 (1-t) e^{-xt}\, dt$ なので、$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 (1-t)e^{-xt}\, dt$ です。正の狭義減少関数 $1/x$ と、正の狭義減少関数 $\int_0^1 (1-t)e^{-xt} dt$ の積なので狭義に減ります。∎ Lean `LatticeGauge.LocalH.wr_strictAntiOn`（仮定なし。結論：$g$ は $(0,\infty)$ で狭義減少。Lean では微分の符号 $g'(x) = h(x)/x^4$、$h(x) = 3 - 2x - (3+x)e^{-x} < 0$ の経路で閉じている）。

窓の因子の単調性の命題の使い道は二つあります。一つ目に、重みを窓の指示関数 $\mathbf{1}_{[0,T]}$ に固定し、一時刻の関数だけを動かした族では、上限が最低の励起 $a = m$ でちょうど取られ、$T^2 g(mT) = \xi^2 \varphi(T/\xi)$ に等しくなります 初 （スペクトル測度の重みつき平均の比は、成分ごとの比の最大を越えない。最大が $a = m$ で取られることが $g$ の単調性そのもの）。二つ目に、窓を限った上界の仮定 $\kappa T^2 g(c\, m_{\mathrm{phys}}) \le K\ell^2$（$T = c\ell$）を一つの数の不等式にできます。$g$ は $(0,\infty)$ から $(0,\infty)$ への連続な狭義減少の全単射なので、

$$\kappa\,(c\ell)^2\, g(c\, m_{\mathrm{phys}}) \le K\ell^2 \iff m_{\mathrm{phys}} \ge \frac{1}{c}\, g^{-1}\!\Big(\frac{K}{\kappa c^2}\Big) \tag{6}$$

です。$e^{-x} \ge 1 - x + x^2/2 - x^3/6$（$x \ge 0$）から $g(x) \ge 1/(2x) - 1/6$ が出て、陽な形

$$m_{\mathrm{phys}} \ge \frac{3\kappa c}{6K + \kappa c^2} \tag{7}$$

が得られます 初 。Lean `LatticeGauge.LocalH.gap_lower_of_window`（仮定：$0 < \kappa, c, K, \ell, m$・$\kappa(c\ell)^2 g(c\ell m) \le C_P \cdot C_P \le K\ell^2$。結論：$3\kappa c/(6K + \kappa c^2) \le m\ell$）。(7) は

$c\,m_{\mathrm{phys}} \lesssim 1$ で鋭く、$c\,m_{\mathrm{phys}} \gtrsim 3$ では右辺の近似が弱くなるので、大きい $c$ には次の形を使います。

### 窓の中の重みも動かす — 窓の中の上限の命題

窓の中の上限の命題（窓の中の時刻に局所な族の上限）

片側の橋の仮定と正準の選び方のもとで、重みの台が $[0,T]$ に入る $\mathcal{F}_1$ の元の上の上限は

$$\sup_{f\in\mathcal{F}_1,\,\operatorname{supp} h\subset[0,T]} \frac{\operatorname{Var}(f)}{\mathcal{E}(f)} = \Psi_T(m) := \frac{1}{m^2+\omega_0^2}, \qquad \omega_0\tan\frac{\omega_0 T}{2} = m, \quad \omega_0\in\left(0,\frac{\pi}{T}\right) \tag{8}$$

である。一般の計量（計量の比べの仮定）では左辺は $\kappa\Psi_T(m)$ 以上。

初 証明〔研〕。$\varphi$ を $A$ の固有成分 $\varphi_k$（固有値 $a_k$）に分けると、$\operatorname{Var} = \sum_k \|\varphi_k\|^2\langle h, e^{-a_k|s-t|}h\rangle$、$\mathcal{E} = 2\|h\|^2\sum_k a_k\|\varphi_k\|^2$（恒等式 (18)）です。重みつき平均の比は成分ごとの比の最大を越えないので、$\operatorname{Var}/\mathcal{E} \le \max_k \langle h, K_{a_k}h\rangle/\|h\|^2$、ここで $K_a$ は核 $e^{-a|s-t|}/(2a)$ を $[0,T]$ に制限した積分作用素で、実数直線の上の $(a^2-\partial^2)^{-1}$ の圧縮です。$a\mapsto(a^2-\partial^2)^{-1}$ は作用素として減少するので、最大は $a=m$ です。$K_m$ の最大の固有値は、固有関数が $u''=-\omega^2u$ と境界条件 $u'(0)=m\,u(0)$・$u'(T)=-m\,u(T)$ を満たすことから、対称な第一の解 $u=\cos(\omega(t-T/2))$ の $\omega\tan(\omega T/2)=m$ で決まり、値は $1/(m^2+\omega^2)$ です。等号は $G_1=\psi_1/\psi_0$・$h=\cos(\omega_0(t-T/2))$ で取られます。∎

根 $\omega_0$ は $\tan z \ge z$ から $\omega_0^2 \le 2m/T$ を満たし、また $\omega_0 < \pi/T$ なので

$$\max\left(\frac{1}{m^2+\pi^2/T^2},\ \frac{1}{m^2+2m/T}\right) \ \le\ \Psi_T(m)\ <\ \frac{1}{m^2} \tag{9}$$

です 初。指示関数の重みの値 $T^2 g(mT)$ は $\Psi_T(m)$ より真に小さく（cos は定数でない）、$T\to 0$ では両方とも $\approx T/(2m)$、$T\to\infty$ では $\Psi_T = 1/m^2 - O(T^{-2})$、$T^2 g = 1/m^2 - O(T^{-1})$ です。

表 1　窓の上限の二つの値（$m=1$）

| $T$ | 指示関数の重み $T^2 g(T)=\varphi(T)$ | 重みも動かす $\Psi_T(1)$ | 分類 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.368 | 0.369 | 左の列は 初（閉じた式）、右の列は 読（根の式の数値と、核の中点則の最大固有値との照合で相対 $2.5\times10^{-5}$ 以内） |
| 4 | 0.755 | 0.775 | |
| 10 | 0.900 | 0.935 | |

### 有限の空間体積の下界

局所の緩和時間の仮定 (4) と窓の中の上限の命題を合わせます。$\kappa\Psi_{c\ell}(m) \le C_P^{\mathrm{loc}}(c) \le K\ell^2$ と (9) の $\Psi_{c\ell}(m) \ge 1/(m^2 + 2m/(c\ell))$ から、$\mu = m\ell = m_{\mathrm{phys}}$ は $\mu^2 + 2\mu/c \ge \kappa/K$ を満たし、

$$m_{\mathrm{phys}} \;\ge\; \sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{\kappa}{K}} - \frac{1}{c} \qquad (c > 0) \tag{10}$$

です 初 （片側の橋の仮定の上）。 Lean `LatticeGauge.LocalH.gap_lower_of_local_window`（仮定：$0 < \kappa, c, K, \ell, m \cdot \kappa/(m^2 + w^2) \le C_P \cdot w^2 \le 2m/(c\ell) \cdot C_P \le K\ell^2$。結論：(10))、`local_bound_tendsto`（仮定なし。結論：(10) の右辺は $c \to \infty$ で $\sqrt{\kappa/K}$ に近づく）。$c \to \infty$ で 23-01 の (19) に戻り、$c \to 0$ では $\approx c\kappa/(2K)$ です。(10) は (7) より全ての $c$ で強い形です。

**自由場では両向き**。ガウスの経路の測度では、Poincaré 定数は共分散作用素のノルムに等しく 典 （Hairer–Stuart–Voss–Wiberg 2005, Lemma 2.2)、窓の族 $\mathcal{D}_c$ 全体の上でも $C_P^{\mathrm{loc}}(c) = \Psi_{c\ell}(m)$ がちょうど成り立ちます 初 （共分散を窓に圧縮した作用素の最大固有値が窓の中の上限の命題の値)。したがって自由場では「$(\xi^2)\!\uparrow_c^{\mathrm{loc}}(K) \Rightarrow$ (10)」に加えて「$m_{\mathrm{phys}} \ge K^{-1/2} \Rightarrow$ 全ての $c$ で $(\xi^2)\!\uparrow_c^{\mathrm{loc}}(K)$」も成り立ちます（$\Psi < 1/m^2$)。局所化が自明でないことも見えます。$C_P^{\mathrm{loc}}(c) < C_P$ が全ての有限の $c$ で真に成り立ち、$c \to 0$ では $\approx c\ell/(2m) \to 0$ です。

**この節の条件**。(4)〜(10) は時間を連続に取った格子・有限の空間格子・$T = \infty$・片側の橋の三つの仮定（基底状態・定常な経路の測度・計量の比べ）の上の文です。時間も刻む Wilson の格子では時間の刻みの比べの仮定（23-01 の (20)）が残り、窓の版はその上でまだ書いていません。

04

## 「ある $K(c)$」は空虚 — 無質量の自由場という陰性対照と、比の形

空間も局所にします。無限の空間格子で、一辺 $R = c\ell$ の時空の箱 $B_R$ に台を持つ汎関数だけを動かした局所の Poincaré 定数を $C_P^{\mathrm{loc}}(B_R)$ と書きます（24-03 §03 の空間も局所にした版。下の (11) は 24-03 の (4) と同じ不等式)。素直な局所の緩和時間の仮定は「$C_P^{\mathrm{loc}}(B_{c\ell}) \le K(c)\,\ell^2$」です。ところがこの形は、四次元では隙間について何も言いません。

陰性対照（質量の無い自由場）

時空四次元・無限体積の質量の無い自由スカラー場（正準の目盛り・$\hbar = 1$）で、

$$\frac{R^2}{4\pi^2} \;\le\; C_P^{\mathrm{loc}}(B_R) \;\le\; R^2. \tag{11}$$

したがって $K(c)=c^2$ で「$C_P^{\mathrm{loc}}(B_{c\ell})\le K(c)\ell^2$」が成り立ち、隙間は 0 である。

初 証明。ガウスの Poincaré 定数は共分散を箱に圧縮した作用素のノルムです 典 （前節）。共分散 $(-\Delta)^{-1}$ は四次元で過渡的なので有限で、連続の核は $1/(4\pi^2|z|^2)$ です。上は Schur の評価で、ノルムは $\sup_x\sum_{y\in B_R}G(x-y)\le\int_{|z|<2R}\frac{d^4z}{4\pi^2|z|^2}=R^2$ 以下です（格子の核の漸近は連続の核で置き換えた。この段は 仮 ）。下は、箱の Dirichlet の基底状態 $w$ を試験の向きに取り、$\langle w,Gw\rangle\langle w,-\Delta w\rangle\ge\|w\|^4$（Cauchy–Schwarz）から $C_P^{\mathrm{loc}}\ge 1/\lambda_D(B_R)\approx R^2/(4\pi^2)$ です（時空の箱の四つの向きに $\pi^2/R^2$ ずつ）。∎

数で見ると、比 $\Gamma(R):=C_P^{\mathrm{loc},0}(B_R)/R^2$ は $R=4,6,8,10,12,16$ で $0.0802,\ 0.0768,\ 0.0756,\ 0.0750,\ 0.0747,\ 0.0744$ と減り、補正は $1/R^2$ で対数の補正は無く、外挿で $\Gamma_\infty=0.0740$ です 読 （浮動小数・格子の熱核の数値積分と、独立な周期格子の経路の一致が相対 $2\times10^{-3}$ 以内・外挿は $R\le16$・一成分）。これは紙の挟み $[1/(4\pi^2),\,0.1125]$ の中で、Dirichlet の値 $1/(4\pi^2)=0.0253$ の 2.92 倍です。連続の核が次数 $-2$ の斉次なので、圧縮が $R^2$ にちょうど比例するのは期待どおりです。

低い次元との対照も一行置きます。時空二次元の無質量の場では赤外が発散して $C_P^{\mathrm{loc}}=\infty$、時間の窓だけを局所にした有限の空間体積でも一定のモードが $\approx T/(2m)$ で伸びます。質量の無い場が有限の局所の定数を持つのは、時空三次元以上で空間も局所にした場合だけで、第 24 部の四次元の設定はちょうどそこに当たります 初 。

### 比の形

そこで、局所の緩和時間の仮定を同じ格子・同じ箱・同じ目盛りの無質量の自由場（参照）との比で述べます。

$$K_{\mathrm{rel}}(c)=\frac{C_P^{\mathrm{loc}}(B_{c\ell};\mu)}{C_P^{\mathrm{loc},0}(c\ell)},\qquad C_P^{\mathrm{loc},0}(R)=\Gamma(R)\,R^2,\qquad (\xi^2)\!\uparrow_c^{\mathrm{rel}}(K):\ \ K_{\mathrm{rel}}(c)\le K \tag{12}$$

（$\beta\ge\beta_0$ に一様、$\ell=\xi_{\mathrm{RG}}(\beta)$）。定数 $K$ は絶対の数になります。**一つの $c$ での文**として置き、$c$ に一様には要求しません。質量 $m$ の自由場の比 $r(mR)$ は $mR\to0$ で 1 に近づくので、短い距離まで一様に $K<1$ を求める文は自由場に近い理論では偽になるからです 見 。$c$ に一様な $K$ を求めると、$c\to\infty$ で全体の上界の仮定に戻ります（24-03）。

凸な相互作用を足した場（作用 $\frac12\langle\Phi,-\Delta\Phi\rangle+\sum_x U(\Phi_x)$、$U$ は凸）では、Hesse 行列が $-\Delta$ 以上なので Brascamp–Lieb の不等式から $K_{\mathrm{rel}}\le1$ です 仮 （不等式の書誌は確かめていない）。凸な場は帯 $[0,1]$ の中にいます。橋に要るのは、次の節で見るとおり、その中の閾より下の部分です。

05

## 無限体積の橋と閾 — 局所の励起のモーメントの仮定と比への移しかえ

無限体積では、一つの時刻の関数 $F = \psi_1/\psi_0$ は局所でも陽でもありません。代わりに、箱の中の局所の観測量が低いエネルギーの励起を作る、という仮定を置きます。

局所の励起のモーメントの仮定

一辺 $c\ell$ の空間の箱に台を持つ局所の観測量 $O$ があって、$\varphi = (O - \langle O\rangle)\Omega$（$\Omega$ は真空）の、転送の生成作用素 $A$ についてのスペクトル測度 $\nu_\varphi$ が

$$\frac{M_3}{M_1} := \frac{\int a^3\, d\nu_\varphi(a)}{\int a\, d\nu_\varphi(a)} \;\le\; m_\infty^2 + \frac{\gamma}{(c\ell)^2} \tag{13}$$

を満たす。$m_\infty$ は無限体積の格子単位の隙間、$\gamma$ は $\beta$ に依らない定数。

仮 どの相互作用のある模型でも示していません。仮定 (13) は結論の量 $m_\infty$ を含みますが、上からの比較にだけ現れ、$m_\infty > 0$ を含意しません。$m_\infty = 0$ でも意味を持つ文で（局所の観測量で低いエネルギーの励起に近づける、という近似の性質）、質量の無い自由場は $\gamma = d\pi^2$ で満たします。

初 自由場での成立。一粒子の状態で $\nu_\varphi = \sum_p |\hat w_p|^2/(2\omega_p)\,\delta_{\omega_p}$、$M_3/M_1 = m_0^2 + \langle w, -\Delta w\rangle/\|w\|^2 \le m_0^2 + d\pi^2/(c\ell)^2$（$w$ は空間の箱の Dirichlet の基底状態、$d$ は空間の次元）。

窓 $T$ の比は Jensen の不等式で $\ge \kappa/(M_3/M_1 + \pi^2/T^2)$ と押さえられます。時空の箱を等方に扱い $\lambda_W := \gamma + \pi^2$ と置くと

$$C_P^{\mathrm{loc}}(B_R) \;\ge\; \frac{\kappa}{m_\infty^2 + \lambda_W/R^2} \tag{14}$$

で、これと局所の緩和時間の仮定 $C_P^{\mathrm{loc}} \le K\ell^2$ から $m_{\mathrm{phys}}^2 \ge \kappa/K - \lambda_W/c^2$ です 初 （(13) と無限体積の基底状態変換の恒等式の上）。Lean `LatticeGauge.LocalH.gap_lower_dirichlet`（仮定：$0 < \kappa, c, K, \ell$ ・$0 < m^2 + \lambda$ ・$\kappa/(m^2+\lambda) \le C_P$ ・$\lambda \le \gamma/(c\ell)^2$ ・$C_P \le K\ell^2$。結論：$\kappa/K - \gamma/c^2 \le (m\ell)^2$）。

比の形 (12) に移すと、$C_P^{\mathrm{loc}} \le K_{\mathrm{rel}}\Gamma R^2$ と (14) から

$$(m_\infty R)^2 \;\ge\; \lambda_W\Big(\frac{K_*}{K_{\mathrm{rel}}} - 1\Big), \qquad K_* := \frac{\kappa}{\lambda_W\,\Gamma} \tag{15}$$

です 初 （(13) と無限体積の恒等式の上の代数）。 Lean `LatticeGauge.LocalHReference.ratio_bridge`（仮定：$0 < \lambda_W, \Gamma, R, K_{\mathrm{rel}} \cdot \kappa/(m^2 + \lambda_W/R^2) \le C \cdot C \le K_{\mathrm{rel}} \Gamma R^2$。結論：(15)）、`kstar_correspondence`（仮定：$0 < \lambda_W, \Gamma, c$。結論：$K(c) = K_{\mathrm{rel}} \Gamma c^2$ のとき $K(c) < \kappa c^2/\lambda_W \iff K_{\mathrm{rel}} < K_*$）、`ratio_bridge_vacuous_of_ge`（仮定：$K_* \le K_{\mathrm{rel}}$。結論：(15) の右辺 $\le 0$）。

読み方。$K_{\mathrm{rel}} < K_*$ なら右辺は正で、質量の下界

$$m_\infty \ell \;\ge\; \frac{\sqrt{\lambda_W}}{c} \sqrt{\frac{K_*}{K_{\mathrm{rel}}} - 1} \tag{16}$$

が出ます。$K_{\mathrm{rel}} \ge K_*$ なら (15) は空です。参照は自分の Dirichlet の下界を満たす（$\Gamma \ge 1/\lambda_W$、(11) の左と同じ Cauchy–Schwarz）ので、どの参照でも $K_* \le \kappa$ です 初 。 Lean `LatticeGauge.LocalHReference.kstar_le_kappa`（仮定：$0 \le \kappa \cdot 0 < \lambda_W, \Gamma \cdot 1 \le \lambda_W \Gamma$。結論：$K_* \le \kappa$）。比が 1 の場（$K_{\mathrm{rel}} = 1$）では橋は架かりません（`rel_one_no_bridge`、陰性対照）。

(15) の $\lambda_W$ には注意が要ります。$\lambda_W$ は「許される局所の観測量の族の中で達せる $M_3/M_1$ の値」で、試験の観測量の族を選ぶと決まる数です。分母の参照 $\Gamma$ と分子の下界の $\lambda_W$ は、同じ族で取らなければなりません。次の節で、この点が閾を動かします。

06

## 三つの参照 — スカラー・ゲージ商・色の一重項

表 2 に、参照の取り方ごとの値を並べます。どの行も自由場の参照の数で、対象の Wilson 測度の比 $K_{\mathrm{rel}}$ は一つも測っていません。

表 2　三つの参照と閾（四次元・正準の目盛り。数は浮動小数の計算と外挿の読み）

| 参照 | 試験の観測量の族 | $\Gamma_\infty$ | $\lambda_W$（$R^2$ 倍） | $\lambda_W \Gamma$ | 閾 $K_*/\kappa$ | 橋が質量を見る箱 | 条件 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| スカラー | 箱の場の全ての関数（最良は一次） | 0.0740 | $4\pi^2 \approx 39.5$ | 2.92 | 0.342 | $mR \approx 4.2$ | 一成分・外挿は $R \le 16$ 読 |
| ゲージ商 | 箱の**全ての**サイトのゲージ変換で割った商＝箱のプラケットの角の関数 | 0.0277 | 72.0 | 1.99 | 0.502 | $mR \approx 5.2$（Proca の横波） | 一色の成分のガウス・$\beta = 1$・外挿は $R \le 16$（$\lambda_W$ は $R \le 14$） 読 |

| 参照 | 試験の観測量の族 | $\Gamma_\infty$ | $\lambda_W$（$R^2$ 倍） | $\lambda_W\Gamma$ | 閾 $K_*/\kappa$ | 橋が質量を見る箱 | 条件 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $SU(2)$ の色の一重項 | 色の一重項（主項は二次のカオス）・箱の差し渡しの大きさのループを含む族 | $\Gamma_Q/2 \approx 0.0138$ | 115〜117（試験の値） | 約 1.6 | 約 0.62（下の値） | — | 主項（$\beta \to \infty$）・三色の独立なガウス・一階の試験・外挿は $R \le 10$ 読 |

Lean `LatticeGauge.LocalHReference.kstar_measured`（仮定：測った $\Gamma \in [0.0739, 0.0741]$。結論：$0.34 < K_* < 0.344$）、`LatticeGauge.GaugeReference.kstar_gauge_measured`（仮定：測った $\Gamma_Q \in [0.02762, 0.02772]$・$\lambda_W^Q \in [71.8, 72.1]$。結論：$0.5 < K_*^Q < 0.505$）、`LatticeGauge.WilsonLoopReference.kstar2_measured`（仮定：測った $\lambda^{(2)} \in [115, 118]$・$\Gamma_Q \in [0.02762, 0.02772]$。結論：$0.61 < K_*^{(2)} < 0.63$）。三つとも測った数を仮定に置いた算術で、数そのものは Lean の外です。

### なぜ参照で閾が変わるか

**ゲージ固定の値は参照にならない。**ゲージを固定した自由なゲージ場（Feynman ゲージ）の値はスカラーと同じ $\Gamma = 0.0740$ ですが、ゲージ固定の母数 $\alpha$ を変えると値が変わり、固定を外す（$\alpha \to \infty$）と箱の中のゲージ変換の向きで無限大になります 初（ゲージの像の向きの試験関数で $\Gamma_a(\alpha) \ge \alpha/(\lambda_D^{\mathrm{int}} R^2)$）。対象の Wilson 測度はゲージを固定しないので、比の分子が有限なのはゲージ不変な関数の上だけです。分母も同じ空間で測ります。Lean `LatticeGauge.GaugeReference.gauge_param_unbounded`（仮定：$0 < \lambda_D, R \cdot \alpha/(\lambda_D R^2) \le \Gamma_a(\alpha)$。結論：$\Gamma_a$ は $\alpha$ について有界でない）。

**ゲージ不変な観測量は高い運動量しか持てない。**ゲージ商の試験の空間は、箱のグラフの上で発散が 0 の場（横波）です。箱が可縮なら、これは箱のプラケットの角の関数の空間とちょうど一致します 初（立方体の複体の一次のホモロジーが 0 なので、閉じた道はプラケットの和の境界）。発散 0 の制約のもとでは、箱の全体で同じ向きを向く正の場（スカラーの最適な試験の向き）が作れません。最適な向きは運動量の大きい横波になり、$\lambda_W^Q = 72.0$ はスカラーの $4\pi^2$ の 1.82 倍、$\Gamma_Q$ はスカラーの 0.374 倍です 読。比の閾は $0.342 \to 0.502$ と緩みますが、これは $\Gamma$ が縮む割合が $\lambda_W$ の伸びより大きいからで（$0.502/0.342 = 1/(0.374 \times 1.82)$）、局所の Poincaré 定数そのものに直した条件 $C_P^{\mathrm{loc}} < \kappa R^2/\lambda_W$ は $0.0253\kappa R^2$ から $0.0139\kappa R^2$ へ厳しくなります 読。

**箱の境のゲージ変換も割る。**箱の内部のサイトのゲージ変換だけで割り、境のサイトのゲージを凍らせると、箱を一様に貫く流束が試験の空間に入り、値はほぼゲージ固定の値に戻って $\Gamma_Q$ の 2.2〜2.5 倍になります 読。箱のゲージ不変な観測量（Wilson ループ）は全てのサイ

トの変換で不変なので、「全てのサイトのゲージ変換で割る」ことが参照の定義の一部です（24-01 の「箱を貫く流束」の行）。

**一色の近似が暗に仮定していたこと**。一つの色の成分に線形化すると、箱の中のプラケットの角の線形結合だけで横波の試験の空間全体を張り、大きいループも箱の外に掛かるプラケットも要りません 初 （長方形のループの角は内側のプラケットの角の和）。ところが $SU(2)$ のゲージ不変量（色の一重項）には、単位元のまわりの展開で一次の項がありません 初 。一次の項 $\sum c_\ell^a A_\ell^a$ は定数のゲージ変換（大域の色の回転 $SO(3)$）でも不変でなければならず、$SO(3)$ は $\mathbb{R}^3$ に固定されたベクトルを持たないので $c=0$ です。ループの trace $\frac{1}{2}\operatorname{tr} U_C = \cos(|\theta_C|/2) = 1 - |\theta_C|^2/8 + \cdots$ は角の二次から始まります。Lean `LatticeGauge.WilsonLoopReference.no_linear_singlet`（仮定：二つの回転 $\operatorname{diag}(-1,-1,1)$・$\operatorname{diag}(1,-1,-1)$ で不変な一次形式。結論：係数は 0）。

**参照はちょうど半分**。主項（$\beta \to \infty$、三色の独立なガウス）では、色の一重項の関数は二次以上のカオスです。ガウス測度の Ornstein–Uhlenbeck の生成作用素の固有値は、共分散の固有座標の一粒子の固有値の和なので、二次のカオスの上の最小は一粒子の最小の二倍で、Poincaré 定数は $\Gamma_Q/2$ です 初 （等号は $f_w = \sum_a (\langle w, A^a\rangle^2 - \mathbb{E})$、$w$ は横波の最適な向き）。一階の試験の値は $\lambda_W(f_w) = \lambda(w) + 1/C(w)$ で、Cauchy–Schwarz から $\lambda(w) < \lambda_W(f_w) \le 2\lambda(w)$ です 初 。四次元の箱で $\lambda^{(2)} R^2 \to 115\text{〜}117$（$\lambda_W^Q$ の約 1.6 倍）、閾は $K_*^{(2)} = 2/(\lambda^{(2)}\Gamma_Q) \approx 0.62\kappa$ です 読 。$\lambda^{(2)}$ は試験の値（上からの値）なので、出る閾は使える閾の下の値です。Lean `chaos2_gamma`・`chaos2_lambda`（仮定：$0 < n, g$ と Wick の積率を式として。結論：比の代数）、`chaos2_bracket`（仮定：$0 < C$・$1 \le \lambda C$。結論：$\lambda < \lambda + 1/C \le 2\lambda$）。

**大きいループが要る**。この値を出すには、箱の差し渡しの大きさのループが要ります。プラケットだけの族 $\{\operatorname{tr} U_p\}$ の主項では参照が $1/R^2$ で消え（二次元で $\Gamma_Q/2$ の 0.29 倍から 0.035 倍、$R = 4 \to 12$）、$2\times 2$ までのループを足しても 0.12 倍（$R=12$）で、橋は格子の尺度のことしか言いません 読 。箱の差し渡しの長方形を全て入れると、二次元で $\Gamma_Q/2$ に全ての桁で一致し、三次元の平らな長方形だけでは 0.73 倍です 読 。四次元の大きいループ（平らでないもの・投げ縄の積を含む）の値はありません。

### 橋が質量を見る箱

質量 $m$ の自由場の比 $r(mR) = C_P^{\mathrm{loc}}(R;m)/C_P^{\mathrm{loc}}(R;0)$ は、$R = 4\text{〜}12$ で 0.3% 以内に $mR$ だけの関数に揃います 読 。スカラーでは $r = 0.932,\ 0.825,\ 0.623,\ 0.359,\ 0.0772$（$mR = 0.5, 1, 2, 4, 12$）、ゲージ商の横波（Proca）では $r_Q = 0.950,\ 0.842,\ 0.721,\ 0.610,\ 0.514,\ 0.434$（$mR = 1, \dots, 6$）です。比が閾に落ちる所は、スカラーで $mR \approx 4.2$、横波で $mR \approx 5.2$ で

す（どちらも線形補間）読。**橋が質量を見るのは、箱の一辺が相関長の 4〜5 倍以上のときだけです。**横波は運動量が大きいので、質量に気づくのが遅れます。

裏から言えば、比が帯 $[K_*, 1)$ にある場について、この橋は何も言いません。質量 $mR < 4.2$ の自由場（スカラーの参照）もこの帯に入るので、橋は質量を持つ場も取りこぼします。帯の中の場で質量を見る別の議論（Jensen の不等式と Dirichlet の試験関数の外）があるかは決まっていません。

07

## 0+1 次元の注 — 最も短い窓でも比は $\omega_b/m$

0+1 次元の二重井戸 $V(x) = (x^2-1)^2/8$（$V''(\pm 1) = 1 = \omega_b^2$、$S_0 = 2/3$）で、比の形を試します。0+1 次元には有限の無質量の参照がありません（自由な粒子は定常な測度を持たず $C_P^{\mathrm{loc}} = \infty$）。参照は底の曲率の調和振動子 $\omega_b$ を取るほかなく、比の文は「$K_{\mathrm{rel}}(T) < \kappa$ なら $m > \omega_b$」になります初（窓の中の上限の命題の下界と $\Psi_T$ の $m$ についての減少から。閾は $\kappa$ で、四次元の $0.342\kappa$ との差は空間の箱の Dirichlet の損そのもの）。Lean `LatticeGauge.LocalHReference.gap_gt_ref_of_ratio`（仮定：$\Psi$ は単調非増加・$0 < \kappa$・$0 < \Psi(\omega_b)$・$\kappa\Psi(m) \le C \le K\Psi(\omega_b)$・$K < \kappa$。結論：$\omega_b < m$）。

一つの時刻だけの窓は閉じた形で計算できます。時間の刻み $\varepsilon$ の格子で、一つの時刻の周辺 $\psi_0^2$ と $\mathcal{E}_1(f) = (\hbar/\varepsilon)\int \psi_0^2 |f'|^2$ の Langevin の生成作用素は、基底状態変換で

$$L = -\frac{2}{\varepsilon\hbar}\,\psi_0^{-1}(H - E_0)\,\psi_0, \qquad C_P^{\mathrm{loc}}(1) = \frac{\varepsilon}{2m}, \qquad K_{\mathrm{rel}}(1) = \frac{\omega_b}{m} \tag{17}$$

です初（$\psi_0$ が Schrödinger の基底状態のとき。参照は $\varepsilon/(2\omega_b)$）。これは 24-05 の恒等式そのものです。Lean `LatticeGauge.LocalHDoubleWell.one_slice_ratio`（仮定：$0 < \varepsilon, m, \omega$。結論：$(\varepsilon/(2m))/(\varepsilon/(2\omega)) = \omega/m$）。

窓を長くしたときの振る舞いは、窓の中の上限の命題の上で三つの領分に分かれます初。

表 3　0+1 次元の二重井戸の比 $K_{\mathrm{rel}}(T)$（$\mathcal{F}_1$ の部分の値 $\Psi_T(m)/\Psi_T(\omega_b)$ の三つの領分）

| 窓 | 比 | $m \propto e^{-S_0/\hbar}$ での桁 |
|---|---|---|
| $T \to 0$（一つの時刻） | $\omega_b/m$ | $e^{S_0/\hbar}$ |
| $1/\omega_b \ll T \ll \xi$ | $\omega_b^2 T/(2m)$ | $T\,e^{S_0/\hbar}$ |
| $T \gg \xi$ | $(\omega_b/m)^2$ | $e^{2S_0/\hbar}$ |

移り目は $\Psi_T(m)$ が $1/m^2$ の半分になる窓で、$\omega_0 = m$ すなわち $\tan(mT/2) = 1$、$T_\times = \pi/(2m)$ です初。Lean `LatticeGauge.LocalHDoubleWell.crossover_root`・

`crossover_half`（仮定：$0 < m$。結論：$T = \pi/(2m)$ で $m\tan(mT/2) = m$、値が半分。根の一意性は Lean の外）。

格子の値（時間の刻み $\varepsilon = \frac{1}{2}$・転送の核は Trotter の対称積・$\hbar = 0.3,\ 0.15,\ 0.08$）は、一つの時刻の窓で $K_{\mathrm{rel}}(1) = 4.61,\ 21.6,\ 638$、$K_{\mathrm{rel}}(1)\cdot m = 1.04,\ 1.04,\ 1.05$ です 読 （(17) からのずれは時間を刻んだ転送の $\psi_0$ と参照の離散化から）。移り目は格子で $k_{\times} m\varepsilon = 1.571\text{〜}1.574$（$\pi/2 = 1.5708$） 読 。窓の中の汎関数を一点の関数の和から多点の関数に広げると比はさらに上がり、二つの時刻の窓の直接の値は $\mathcal{F}_1$ の値の 1.02・1.09・1.34 倍、八つの時刻の窓で三点の積までの族の下界は 1.07・1.27・2.12 倍以上です 読 （下界・$\hbar$ が小さいほど族を広げるたびに上がり、飽和していない）。

比の文「$K_{\mathrm{rel}} < \kappa$ なら $m > \omega_b$」は、隙間がトンネルで小さい二重井戸では正しく破れます（全ての窓で $K_{\mathrm{rel}} \geq 4.6 > \kappa = 1$）。0+1 は四次元の比の類比ではなく、比の形が非凸性に正しく反応することの陰性の対照です。

**この注から四次元へ持ち出すこと**。二重井戸の非凸性は窓の長さに依らず、一つの時刻の分布の二峰性として最も短い窓から比に出ます。したがって「短い距離では比が 1 に近い」（§04 で $c$ に一様を求めなかった理由）は、比の形から出る事実ではありません。四次元でそう見込むのは、理論が短い距離で自由場に近いという漸近自由に依る仮定です 仮 。

## 08 どの仮定のどの部分がどの結論に要るか

表 4　結論ごとに要る緩和時間の仮定の部分と、ほかに要る仮定

| 結論 | 要る緩和時間の仮定の部分 | ほかに要る仮定 | 分類 |
|---|---|---|---|
| 有限の空間体積・各 $\beta$ の格子の物理単位の隙間の下界 | 窓 $c\ell$ の局所の緩和時間の仮定（(4)）、または $\mathcal{F}_1$ に制限した上界の仮定 | 片側の橋の仮定（連続の時間・有限の空間格子・$T = \infty$）。Wilson の時間を刻む格子では時間の刻みの比べの仮定が残り、窓の版は書いていない | 初 （(6)(10)）・仮 （時間の刻みの比べの仮定） |
| 無限体積の格子の物理単位の隙間の下界 | 一つの $c$ で $K_{\mathrm{rel}}(c) < K_*$（比の形 (12)） | 局所の励起のモーメントの仮定・無限体積の基底状態変換の恒等式・$\kappa$ が $\beta$ に一様・試験の観測量は色の一重項の族（箱の差し渡しのループを含む） | 仮 |
| 区画の間の移り変わりの速さ | 区画ごとの拡散型緩和時間の仮定と区画の間の量 $C_{\mathrm{trans}}$（24-03） | 質量ギャップとは無関係 | 見 |

| 結論 | 要る緩和時間の仮定の部分 | ほかに要る仮定 | 分類 |
|---|---|---|---|
| 上界の仮定そのもの | 全ての $f$ | 閉じた箱の段（24-03） | 仮 （四次元の周期の箱では、$SU(3)$ 以上の原典の数値と予想を延ばした読みの上で偽と読める側） |

表 4 の要点は、どの行の結論にも**全体の上界の仮定は要らない**ことです。片側の橋が使うのは上界の仮定の時刻に局所な部分（有限体積）か、局所の緩和時間の仮定の比の形（無限体積）だけです。上界の仮定の残り――時刻に局所でない関数についての文――は、位相電荷のような量が上界の仮定を妨げうる場所で（24-01）、橋はそこを通りません 初 （表 4 の一行目）・ 見 （二行目以下の読み）。

Jaffe–Witten の問題の解説は「時空の体積に一様な質量ギャップを示すには新しい考えが要る」と書いています 典 。局所の緩和時間の仮定は箱の大きさを記帳の長さに結び、体積に依らない文として立つので、「体積に一様」を Poincaré の言葉で述べる一つの形になっています 見 。ただし、それを示す道具はありません。

09

## 言えないこと

- 局所の励起のモーメントの仮定はどの相互作用のある模型でも示していません。無限体積の基底状態変換の恒等式も仮定です。無限体積の橋 (15)(16) はこの二つの上の代数です。
- 表 2 の値は浮動小数の計算と外挿の読みです（スカラーと横波は $R \le 16$、色の一重項は $R \le 10$）。$0.62\kappa$ は一階の試験の値から出した閾で、使える閾の下の値です。色の一重項は主項（$\beta \to \infty$）・三色の独立なガウスの近似で、$\beta$ が有限の $SU(2)$ の値はありません。四次元の大きいループの値もありません。
- 「橋が質量を見るのは箱が相関長の 4〜5 倍以上」は質量のある**自由場**の比の線形補間です。相互作用のある場の比の値はありません。
- 帯 $[K_*, 1)$ に入る場について、橋は何も言いません。帯の中で質量を見る別の議論は未決です。
- 「短い距離で比は 1 に近い」は漸近自由に依る仮定で、比の形からは出ません（0+1 の二重井戸では偽）。
- 窓の議論は時間を連続に取った格子の文で、Wilson の時間を刻む格子では時間の刻みの比べの仮定が残ります。
- どの結論も、各 $\beta$ の格子の物理単位の隙間の下界までです。$m_{\mathrm{phys}}(\beta)$ の極限・連続極限・無限体積の測度の存在は従いません。質量ギャップ・緩和時間の仮定・上界の仮定・局所の

緩和時間の仮定のどれも示していません。

10

## 五分類の表と依存グラフ

この章の行を五分類の書式（23-00 §01）に「見」を足して並べます。行の記号は下の依存グラフの節点の番号です。

表 5　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 | 機械検査 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 無限体積の測度の存在と一意性 | 仮 | 23-01 §02 | $\beta \geq \beta_0$ | — |
| 2 | 基底状態の仮定・定常な経路の測度の仮定・計量の比べの仮定：離散スペクトル・$T=\infty$ の定常な測度・計量の比較 | 仮 | 23-01 表 6 | 連続の時間・有限の空間格子 | — |
| 3 | 局所の $C_P$ の性質（窓の周辺だけで決まる・$c$ に単調・$c\to\infty$ で $C_P$） | 初 | 24-03 | 連続の時間 | `local_le_global`・`local_approaches_global`（仮定：有界・非空・族の和が全体） |
| 4 | $(\xi^2)\uparrow_c^{\mathrm{rel}}(K)$：一つの $c$ で $K_{\mathrm{rel}}(c)\leq K$ | 仮 | (12) | — | — |
| 5 | $(\xi^2)\uparrow_c^{\mathrm{loc}}(K)$：$C_P^{\mathrm{loc}}(c)\leq K\ell^2$（有限の空間体積） | 仮 | (4) | — | — |
| 6 | 局所の励起のモーメントの仮定：局所の観測量の励起のモーメント比 | 仮 | (13) | — | — |
| 7 | 無限体積の基底状態変換の恒等式 | 仮 | §05 | — | — |
| 8 | $\kappa$ が $\beta$ に一様 | 仮 | 23-01 §06 | 場の目盛りでは満たす見込み | — |
| 9 | 三つの参照の値 $\Gamma_\infty$・$\lambda_W$（表 2） | 読 | §04・§06 | 自由場・外挿 | — |
| 10 | 基底状態変換の恒等式 | 初 | 23-01 (18) | 有限の空間格子 | — |
| 11 | 片側の橋と (2)：$\mathcal{F}_1$ の上限がちょうど $\xi^2$ | 初 | 23-01 (17)・(2)(3) | 連続の時間・正準 | `poincare_lower_of_gap`（仮定：$0<p,m,\kappa,E$・$2p/m\leq V$・$E\leq 2mp/\kappa$・$V/E\leq C_P$）・`local_rayleigh_le` |
| 12 | 窓の因子の単調性の命題：$g(x)=\varphi(x)/x^2$ は狭義減少 | 初 | §03 | $x>0$ | `wr_strictAntiOn`（仮定なし） |

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 | 機械検査 |
|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 窓の中の上限の命題：窓の上限 $\Psi_T(m)$ | 初 | (8) | 連続の時間・正準 | —（根の存在は Lean の外） |
| 14 | 窓の下界 (7) | 初 | (6)(7) | 有限の空間体積 | `gap_lower_of_window`（仮定は (7) の脇） |
| 15 | 窓の下界 (10) | 初 | (10) | 有限の空間体積 | `gap_lower_of_local_window`（仮定は (10) の脇） |
| 16 | 無質量の自由場が「ある $K(c)$」の文を満たす（(11)） | 初 | §04 | 時空四次元・無限体積（格子の核の漸近は仮） | `dirichlet_bound_vacuous`（仮定：$0 < \ell \cdot \kappa c^2/\gamma \le K$。結論：この議論の仮定が $m = 0$ と両立） |
| 17 | 比の橋 (15) | 初 | §05 | 行 6・7 の上 | `ratio_bridge`・`kstar_le_kappa` |
| 18 | 閾 $0.342\kappa$・$0.502\kappa$・約 $0.62\kappa$（下の値） | 読 | 表 2 | 自由場・外挿 | `kstar_measured`・`kstar_gauge_measured`・`kstar2_measured`（測った区間を仮定） |
| 19 | 色の一重項に一次の項が無い・参照が半分 | 初 | §06 | 主項・三色の独立なガウス | `no_linear_singlet`・`chaos2_gamma` |
| 20 | 0+1 の比の文と一つの時刻の比 (17) | 初 | §07 | 0+1・Schrödinger の $\psi_0$ | `gap_gt_ref_of_ratio`・`one_slice_ratio` |
| 21 | 「短い距離で比は 1 に近い」 | 仮 | §07 | 漸近自由に依る | — |
| 22 | 有限の空間体積の隙間の下界 | 初 | 表 4 の一行目 | 行 2・5 の上 | — |
| 23 | 無限体積の格子の物理単位の隙間の下界 | 初 | 表 4 の二行目 | 行 1・4・6・7・8 の上 | — |

Lean の定理の名前空間は、`LatticeGauge.LocalH`（行 3・12・14・15・16）・`LatticeGauge.LocalHReference`（行 17・18 の一つ目・行 20 の一つ目）・`LatticeGauge.GaugeReference`（行 18 の二つ目）・`LatticeGauge.WilsonLoopReference`（行 18 の三つ目・行 19）・`LatticeGauge.LocalHDoubleWell`（行 20 の二つ目）・`EuclideanPath.GapBridge`（行 11）です。どの束も、保証するのは書いてある仮定から結論が出る代数と算術と一変数の解析だけで、経路の測度・恒等式・窓の中の上限の命題・参照の数値は Lean の外にあります（23-13）。

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい。1・3・4・16 は 24-03 の依存グラフの 1（無限体積の測度の存在）・6（四次元の局所の Poincaré 定数の性質）・12（局所の緩和時間の仮定）・7（絶対の形の空虚さ）に当たります）：

```
 1  仮  無限体積の測度の存在と一意性                                  β ≥ β₀
 2  仮  片側の橋の三つの仮定（基底状態・定常な経路の測度・計量の比べ）
        連続の時間・有限の空間格子・T=∞
 3  初  局所の C_P：窓の周辺だけで決まる・c に単調・c→∞ で C_P        Lean local_le_g
 4  仮  局所の緩和時間の仮定（比の形）：一つの c で K_rel(c) ≤ K
 5  仮  局所の緩和時間の仮定（有限体積の形）：C_P^loc(c) ≤ K ℓ²
 6  仮  局所の励起のモーメントの仮定 (13)
 7  仮  無限体積の基底状態変換の恒等式
 8  仮  κ が β に一様
 9  読  参照の値 Γ∞・λ_W（表 2）
10  初  基底状態変換の恒等式（23-01 の (18)）
11  初  片側の橋：F₁ の上限がちょうど ξ² ⟸ 2・10                    Lean poincar
12  初  窓の因子の単調性：g = φ/x² は狭義減少                       Lean wr_stric
13  初  窓の中の上限：Ψ_T(m) ⟸ 2・10
14  初  窓の下界 (7) ⟸ 5・11・12                                    Lean gap_
15  初  窓の下界 (10) ⟸ 5・13                                       Lean gap_
16  初  陰性対照：無質量の自由場が「ある K(c)」を満たす (11)
17  初  比の橋 (15) ⟸ 3・4・6・7                                    Lean rati
18  読  閾 K* = 0.342κ／0.502κ／約 0.62κ ⟸ 9                        Lean ksta
19  初  一重項：一次の項が無い・参照が半分                          Lean no_linear
20  初  0+1：K_rel < κ ⇒ m > ω_b・一つの時刻の比 ω_b/m ⟸ 10・13
21  仮  短い距離：「比は 1 に近い」（漸近自由に依る。0+1 の行 20 では偽）
22  初  有限体積の各 β の格子の物理単位の隙間の下界 ⟸ 14・15
23  初  無限体積の格子の物理単位の隙間の下界（条件つき） ⟸ 1・8・17・18・19
```

円の検査は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを見るだけです。仮定の行のうち結論の量（隙間 $m_\infty$）を含むのは局所の励起のモーメントの仮定だけで、そこでは $m_\infty$ が上からの比較にだけ現れ、$m_\infty > 0$ を含意しないことを §05 で確かめました。無質量の自由場の節点は結論に入らない陰性対照で、「ある $K(c)$」の形を捨てた理由を記録しています。「短い距離で比は 1 に近い」は仮定で、結論の二つの隙間の下界はこれに依りません（$c$ を一つに止めたため）。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 時刻に局所な族 $\mathcal{F}_1$ の上の上限が正準でちょうど $\xi^2$ で、$\mathcal{F}_1$ の上の上界の仮定が格子の物理単位の隙間の下界と同じであること（連続の時間・有限の空間格子・$T=\infty$） 初 | Wilson の時間を刻む格子での同じ文（時間の刻みの比べの仮定が残る）。上界の仮定の $\mathcal{F}_1$ の外の部分の真偽 |
| 窓の因子の単調性、窓の中の上限の命題、窓の局所の緩和時間の仮定から有限の空間体積の隙間の下界 (7)(10) 初 | 局所の緩和時間の仮定がどの模型・どの $\beta$ で成り立つか |
| 「ある $K(c)$」の形は四次元の無質量の自由場で満たされて空虚なこと、比の形への移しかえと $K_* \le \kappa$ 初 | 局所の励起のモーメントの仮定と無限体積の恒等式（どちらも仮定） |

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 三つの参照の値と閾 $0.342\kappa$・$0.502\kappa$・約 $0.62\kappa$、橋が質量を見る箱 $mR \approx 4.2$・$5.2$ 読 | 対象の Wilson 測度の比 $K_{\mathrm{rel}}$。$\beta$ が有限の $SU(2)$ の閾。四次元の大きいループの値。帯 $[K_*, 1)$ の場 |
| 0+1 の二重井戸で最も短い窓の比がちょうど $\omega_b/m$、窓による三つの領分 初 ・格子の値 読 | 四次元で短い距離の比が 1 に近いこと（漸近自由に依る仮定） |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 片側の橋・恒等式・円の上の自由な粒子の反例 | 本書 | 23-01 §06 の (17)(18)・円の上の自由な粒子の反例。論文「片側の橋」（論文の一覧）の定理 3.1・命題 4.1・命題 5.1 |
| (2)(3)・窓の因子の単調性の命題・窓の中の上限の命題・(6)〜(10)・(15)(16) | 初 | 本文の証明。代数の段は Lean の束（表 5 の機械検査の欄） |
| ガウスの Poincaré 定数＝共分散のノルム | 典 | M. Hairer, A. M. Stuart, J. Voss, P. Wiberg, Analysis of SPDEs arising in path sampling. Part I: The Gaussian case, Commun. Math. Sci. 3 (2005) 587–603, arXiv:math/0601095, Lemma 2.2 |
| 表 1 の右の列・(11) の $\Gamma(R)$・表 2・$r(mR)$・表 3 の格子の値 | 読 | 自由場の共分散を箱に圧縮した作用素の最大固有値（熱核の数値積分と周期格子の二つの経路・Lanczos）、0+1 は転送の核の格子の固有値問題と Rayleigh–Ritz の下界。どれも浮動小数で、外挿は本文に書いた範囲 |
| 体積に一様な隙間には新しい考えが要る | 典 | A. Jaffe, E. Witten, Quantum Yang–Mills Theory, Clay Mathematics Institute (2000), §6 |
| Brascamp–Lieb の不等式（凸な摂動で $K_{\mathrm{rel}} \le 1$） | 仮 | 書誌を確かめていない |

**この章で使った語** — 時刻に局所な族 $\mathcal{F}_1$・窓・窓の因子 $\varphi(x)$・窓の中の上限の命題・局所の Poincaré 定数 $C_P^{\mathrm{loc}}$・局所の緩和時間の仮定（$(\xi^2)\uparrow_c^{\mathrm{loc}}$・$(\xi^2)\uparrow_c^{\mathrm{rel}}$）・比 $K_{\mathrm{rel}}$・無質量の参照と $\Gamma$・ゲージ商の参照・閾 $K_*$・局所の励起のモーメントの仮定・帯 $[K_*, 1)$・色の一重項と二次のカオス。意味は A-02 用語集 と 24-09 にあります。

次に読む章：24-05 時間を連続にする — Hamiltonian 格子と真空の測度 — (17) の恒等式を一般の格子で述べ、緩和時間の仮定を経由しない Poincaré の文として読む。

2026-10-09 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 24 部 一本目の道（後半） 真空の測度・基底状態変換・Kogut–Susskind · Kiichi, Shiori and Rin

# 時間を連続にする — Hamiltonian 格子と真空の測度

この章は本書の検討です。§04・§06 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 時間を連続に取った格子では、ハミルトニアンの隙間 $\Delta$ が、一つの時刻の真空の分布 $\nu = \psi_0^2$ の Poincaré 定数とちょうど $\Delta = \hbar^2/(2C_P(\nu))$ で結ばれること（証明つき）。これが第 23 部の片側の橋の $T = \infty$ の裏返しで、24-04 の最も短い窓の比 $\omega_b/m$ と同じ式であること。Kogut–Susskind の Hamiltonian 格子で隙間を直接扱う道と、そこで局所から大域への隙間の定理が当たらない理由。$SU(2)$ の色の一重項では、主項で真空の測度の Poincaré 定数が半分になり、ゲージ不変な最低の試験の空間が二粒子になること。真空の測度の定数を測るのに何が要るか。

**前提となる章** — 23-01 §04（表 3 の三つの $C_P$）・23-01 §06（片側の橋の命題（論文の定理 3.1）の (17)、恒等式 (18)）・24-04（時刻に局所な族の上限 (2)、0+1 の窓の (17)、色の一重項）・2-05 §08（一次元の基底状態変換）。記号は 24-09 にまとめてあります。

**先に言うこと** — 水準は〔三〕です。この章の恒等式は、隙間を「ある測度の Poincaré 定数」と言い換えるだけで、問題を易しくしません。真空の測度は陽に書けず、その Poincaré 定数を結合に一様に押さえる道具はありません。この章は質量ギャップを示しません。拡散型緩和時間の仮定を経由しない見方を一つ置き、その見方で何が要るかを並べます。

この章の順序

1. 隙間は真空の測度の Poincaré 定数 — 隙間と真空の測度の命題（(1)〜(4)）・手で確かめる例
2. 三つの Poincaré 定数 — 経路の測度・時刻に局所な族・真空の測度（表 1・(5)(6)）
3. 0+1 の格子の版 — 一つの時刻の窓と、時間を刻んだときのずれ
4. Kogut–Susskind の Hamiltonian 格子 — 隙間を直接扱う道・電場と磁場の分け方の frustration の命題・道具が当たらない所（表 2）
5. $SU(2)$ の色の一重項と二粒子 — 主項で定数が半分（(7)(8)）
6. 真空の測度の定数を測る道 — 何が要るか

7. 言えないこと

8. 五分類の表と依存グラフ — 表 3

---

01

## 隙間は真空の測度の Poincaré 定数

設定は第 23 部の片側の橋と同じです。空間は有限の格子、一つの時刻の配位の空間は $Q$（$\mathbb{R}^n$、またはコンパクトで連結な Riemann 多様体）、運動項の計量は $M$、ハミルトニアンは $H = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta_M + V$ で、基底状態の仮定（論文の (A1)。スペクトルは離散・基底状態 $\psi_0$ は重複せず滑らかで正・$\Delta = E_1 - E_0 > 0$）を置きます。一つの時刻の真空の分布と、その上の Dirichlet 形・Poincaré 定数を

$$\nu = \psi_0^2 \, d\mathrm{vol}, \qquad \mathcal{E}_\nu(F) = \int_Q \psi_0^2 \, |dF|^2_{M^{-1}} \, d\mathrm{vol}, \qquad C_P(\nu) = \sup_F \frac{\mathrm{Var}_\nu(F)}{\mathcal{E}_\nu(F)} \tag{1}$$

と置きます（$F$ は $Q$ の上の滑らかな関数で定数でないもの）。ゲージ理論では $F$ をゲージ不変な関数に限り、$\Delta$ はゲージ不変な部分空間の隙間です。

隙間と真空の測度の命題

基底状態の仮定のもとで

$$\Delta = \frac{\hbar^2}{2\, C_P(\nu)} \tag{2}$$

が成り立ち、(1) の上限は $F = \psi_1/\psi_0$ で達成される。

初 証明。写像 $U : F \mapsto F\psi_0$ は $L^2(\nu)$ から $L^2(d\mathrm{vol})$ への等長写像で、定数 1 を $\psi_0$ に移します。したがって $\langle F \rangle_\nu = 0 \iff F\psi_0 \perp \psi_0$、そのとき $\|F\psi_0\|^2 = \mathrm{Var}_\nu(F)$ です。滑らかな $F$ について、基底状態変換の恒等式（23-01 の (18)）

$$\big\langle F\psi_0, \, (H - E_0)\, F\psi_0 \big\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\, \mathcal{E}_\nu(F) \tag{3}$$

が成り立ちます。$H - E_0$ は $\psi_0$ の直交補の上で $\Delta$ 以上なので（min-max）、$\langle F \rangle_\nu = 0$ の滑らかな $F$ で

$$\Delta \, \mathrm{Var}_\nu(F) \;\le\; \frac{\hbar^2}{2}\, \mathcal{E}_\nu(F), \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{\mathrm{Var}_\nu(F)}{\mathcal{E}_\nu(F)} \le \frac{\hbar^2}{2\Delta} \tag{4}$$

です。定数を足しても両辺は変わらないので、全ての滑らかな $F$ で (4) が成り立ちます。等号は $F = \psi_1/\psi_0$（基底状態の仮定から滑らかで、$F\psi_0 = \psi_1$、(3) の左辺は $\Delta\|\psi_1\|^2$）で取られます。$Q = \mathbb{R}^n$ では、$\psi_1/\psi_0$ の Dirichlet 積分が有限であることを、論文「片側の橋」（論文の一覧）の切り落としの補題（補題 3.3）で確かめます。∎

言い換えると、真空の分布の上の Langevin 力学の生成作用素は、基底状態変換で $-(2/\hbar^2)\,\psi_0^{-1}(H - E_0)\,\psi_0$ にユニタリ同値です。この型の言い換えはよく知られています（確率量子化や超対称量子力学の言い換え）。隙間と真空の測度の命題はその隙間の部分を、この本の (1) の約束で書いたものです。

**較正（一つの調和振動子）。** $Q = \mathbb{R}$・$M = 1$・$V = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$・$\hbar = 1$ では、隙間は $\Delta = \omega$ なので、(2) から $C_P(\nu) = 1/(2\omega)$ です。$\psi_0^2$ は分散 $1/(2\omega)$ の正規分布で、一次元の正規分布の Poincaré 定数が分散に等しいこと（一次の関数で等号）と一致します。23-01 の表 3 の真空の C_P の行（自由場で $1/(2m)$）はこの値です [初]。

**例 1（二つのサイトで手で確かめる）。** 23-01 の例 6 の二つのサイトの格子（$\hbar = M = 1$・$V = \frac{1}{2}x^{\mathsf{T}}Kx$、基準振動 $u = (x_1 + x_2)/\sqrt{2}$ の角振動数 $m_0$、$v = (x_1 - x_2)/\sqrt{2}$ の角振動数 $\sqrt{m_0^2 + 2}$）では、$\nu$ は $u$ の分散 $1/(2m_0)$・$v$ の分散 $1/(2\sqrt{m_0^2+2})$ の独立な正規分布です。Poincaré 定数は二つの分散の大きい方 $1/(2m_0)$ で、(2) は $\Delta = m_0$ を与え、23-01 の例 6 の隙間と一致します [初]。$m_0 = \frac{1}{2}$ なら $C_P(\nu) = 1$、経路の測度の $C_P = \xi^2 = 4$ で、$4 = 4\,C_P(\nu)^2$ です（次の節の (5)）。

02

## 三つの Poincaré 定数

同じ $C_P$ の記号で三つの量が呼ばれます。隙間と真空の測度の命題で、三つの関係が一つの表に並びます。

表 1　三つの Poincaré 定数（時間を連続に取った格子・正準の目盛り。自由場の列は $\hbar = 1$・質量 $m$）

| 量 | どの測度・どの関数 | 隙間との関係 | 自由場 | 分類 |
|---|---|---|---|---|
| $C_P$ | 経路の測度・全ての汎関数 | 片側 $C_P \geq \kappa\hbar^2/\Delta^2$ | $1/m^2$ | [初]（23-01 の片側の橋） |
| $\sup_{\mathcal{F}_1}$ | 経路の測度・時刻で積分した一時刻の関数 | $= \hbar^2/\Delta^2 = (2C_P(\nu)/\hbar)^2$ | $1/m^2$ | [初]（24-04 の (2) とこの章の (2) を合わせる） |
| $C_P(\nu)$ | 一つの時刻の真空の分布 | $= \hbar^2/(2\Delta)$ | $1/(2m)$ | [初]（隙間と真空の測度の命題） |

二行目の等式

$$\sup_{f \in \mathcal{F}_1} \frac{\mathrm{Var}(f)}{\mathcal{E}(f)} = \Big(\frac{2\,C_P(\nu)}{\hbar}\Big)^2 \tag{5}$$

は、23-01 §04 の「自由場では $C_P^{(\beta)} = 4(C_P^{(\alpha)})^2$」を、相互作用のある場合に時刻に局所な族の上で正確にしたものです [初]。23-01 ではこの読み替えを自由場の形からの類推として書きました。片側の橋の仮定の上では、時刻に局所な族に限れば類推でなく等式です。拡散型緩和時間の仮定が述べる経路の $C_P$ が $(2C_P(\nu)/\hbar)^2$ を越える分は、時刻に局所でない関数（巻き数や位相電荷）から来ます。

**物理の単位で言い直す。**格子単位で $\hbar = 1$ とし、記帳の長さ $\xi_{\mathrm{RG}}$ で物理の単位に直すと、(2) は

$$m_{\mathrm{phys}} = m\,\xi_{\mathrm{RG}} = \frac{\xi_{\mathrm{RG}}}{2\,C_P(\nu)}, \qquad m_{\mathrm{phys}} \geq c \iff C_P(\nu) \leq \frac{\xi_{\mathrm{RG}}}{2c} \tag{6}$$

です [初]。質量ギャップ（格子の物理単位の隙間が正に残ること）は、「真空の測度の Poincaré 定数が記帳の長さの一乗で押さえられる」という Poincaré の文と同じです。緩和時間の仮定を経由しない Poincaré の文で、伸び方は二乗でなく一乗（動的指数で言えば $z = 1$ の型）です。ただしこれは言い換えで、どちらの側にも新しい情報はありません。$C_P(\nu)$ の上界には全ての $F$ が要り、難しさは隙間の下界とちょうど同じです。

**真空の測度では位相の問題が起きない。**$\nu$ の上で動かすのは一つの時刻の一価の関数だけです。円の上の自由な粒子でいえば、$\nu$ は円の上の一様分布で $C_P(\nu) = 1$（周の長さ $2\pi$ の円の Wirtinger の不等式）と有限で、(2) は 23-01 の円の上の自由な粒子の反例の $\Delta = \hbar^2/2$ を与えます。そして経路の測度で $C_P = \infty$ を作った巻き数の汎関数（時間について積分した持ち上げの角）は $\nu$ の関数ではありません [初]。四次元の位相電荷も時間の積分で定まる量なので、一つの時刻の真空の分布の関数には入りません [見]。境目は 24-04 の $\mathcal{F}_1$ の内と外と同じです。

03

## 0+1 の格子の版 — 一つの時刻の窓

24-04 §07 の 0+1 次元の二重井戸で、時間を幅 $\varepsilon$ で刻んだ鎖の一つの時刻の窓の局所の Poincaré 定数は、$\psi_0$ が Schrödinger の基底状態なら $C_P^{\mathrm{loc}}(1) = \varepsilon/(2m)$ ちょうどでした（24-04 の (17)）。窓の Dirichlet 形 $(\hbar/\varepsilon)\int \psi_0^2 |F'|^2$ は (1) の $\mathcal{E}_\nu$ の $\hbar/\varepsilon$ 倍なので、これは隙間と真空の測度の命題の $C_P(\nu) = \hbar^2/(2\Delta)$ を $\varepsilon/\hbar$ 倍した値そのものです [初]。最も短い窓の比 $\omega_b/m$ は、この恒等式を参照（調和振動子）と対象（二重井戸）で割ったものです。

時間を刻むと、鎖の一つの時刻の分布は転送の核（Trotter の対称積）の最大固有ベクトルの二乗で、Schrödinger の $\psi_0^2$ とはわずかにずれます。$V = (x^2-1)^2/8$・$\varepsilon = \frac{1}{2}$・$\hbar = 0.3,\ 0.15,\ 0.08$ の格子で、一つの時刻の窓の直接の値を $\varepsilon/(2m_{\mathrm{tr}})$（$m_{\mathrm{tr}}$ は転送の第二固有値から）で割った比は $1.006,\ 1.013,\ 1.019$、参照も刻んだ比 $K_{\mathrm{rel}}(1)\cdot m_{\mathrm{tr}}$ は $1.037,\ 1.044,\ 1.050$ で

す 読 。恒等式は連続の時間の文で、時間を刻んだ格子では近似です。この差が、第 23 部の時間の刻みの比べの仮定（論文「片側の橋」の (D)、23-01 の (20)）が残る理由の、最も小さな形です。

04

## Kogut–Susskind の Hamiltonian 格子

この節は既存の知見（Kogut–Susskind の Hamiltonian 格子）の整理です。導入は 5-03 §07 にあります。

時間を連続に取り、空間だけを格子にしたゲージ理論のハミルトニアンが Kogut–Susskind の格子です。配位の空間は空間のリンクごとの群の積 $Q = G^{\{\text{空間のリンク}\}}$（コンパクトで連結な多様体）で、片側の橋の形に合わせて運動項の計量を $M = g^{-2}\cdot$（両側不変な計量）と置くと

$$H_{\mathrm{KS}} = \frac{g^2}{2}\sum_{\ell} E_\ell^2 + \frac{1}{g^2}\sum_{p}\bigl(2 - \operatorname{tr} U_p\bigr) \qquad (\hbar = 1,\ G = SU(2)) \tag{7}$$

です。$E_\ell^2$ はリンク $\ell$ の群の上の Laplace–Beltrami 作用素の符号を変えたもの（電場の二乗）、$U_p$ はプラケットの周りの積で、第二項は磁場の項です。係数の約束は文献で異なり、ここでは片側の橋の形に合わせました。物理の状態はゲージ不変な関数（Gauss の法則）で、$H_{\mathrm{KS}}$ はゲージ変換と交換するので $\psi_0$ は自動的にゲージ不変です。問題文の量はこの格子では $H_{\mathrm{KS}}$ のゲージ不変な部分空間の隙間そのもので、隙間と真空の測度の命題から一つの時刻の真空の分布 $\nu = \psi_0^2\cdot$Haar の Poincaré 定数で書けます。

この格子で隙間を直接扱う道は、24-00 の材料の表の「他の道の表」の行の一つです。到達点と止まった場所を表 2 にまとめます。

表 2　Hamiltonian 格子の隙間を直接扱う道（一次資料の等級は出典の表）

| 道具 | 言明（要旨） | Kogut–Susskind の格子に当たるか | 分類 |
|---|---|---|---|
| 局所から大域への隙間の定理（Knabe の型、Gosset–Mozgunov） | frustration-free で平行移動に不変な局所のハミルトニアンで、長さ $n$ の開いた鎖の局所の隙間が閾（Gosset–Mozgunov で $6/(n(n+1))$）を越えれば、熱力学極限で隙間が体積に一様に残る（一次元、二次元の正方格子へ拡張） | 当たらない。電場の項と磁場の項への分け方では frustration-free でない（電場と磁場の分け方の frustration の命題） | 典 （要旨で言明を確認）・ 初 （電場と磁場の分け方の frustration の命題） |
| 摂動（Yarotsky） | 古典的な格子系に相対有界な量子の摂動を足した系で、隙間と相関の指数減衰 | 強結合（電場の項が支配）は摂動の型に乗る見込み。仮定との照合はしていない | 典 （要旨）・ 見 |

| 道具 | 言明（要旨） | Kogut–Susskind の格子に当たるか | 分類 |
|---|---|---|---|
| 弱結合（連続極限の側）の隙間の結果 | — | 探した範囲（短い語の検索二回）で見当たらない | — |

電場と磁場の分け方の frustration の命題（電場と磁場への分け方は frustration-free でない）

$g > 0$・空間の格子にプラケットが一つ以上あるとする。(7) を局所の項 $h_\ell = \frac{g^2}{2} E_\ell^2$、$h_p = \frac{1}{g^2}(2 - \operatorname{tr} U_p)$ の和と見るとき、どの定数 $c_p$ を引いても $h_p - c_p$ は固有ベクトルを持たない。したがって全ての局所の項の基底状態を同時に実現する状態は無く、この分け方は frustration-free でない。

初 証明。$h_p$ は $L^2(Q, \mathrm{Haar})$ の上の掛け算の作用素で、掛ける関数 $2 - \operatorname{tr} U_p$ は $Q$ の上の定数でない実解析的な関数です。$(h_p - c_p)\psi = 0$ なら $\psi$ の台は等位集合 $\{2 - \operatorname{tr} U_p = c_p g^2\}$ に入りますが、定数でない実解析的な関数の等位集合は Haar 測度で 0 なので $\psi = 0$ です。∎ 電場の項と磁場の項が交換しないことも同じく初等的です（$E_\ell^2$ は微分の作用素で、$\operatorname{tr} U_p$ を掛けることと交換しない）。区画ごとに電場と磁場の項をまとめた分け方でも frustration-free にならないかは、交換しないことからの見込みで、示していません 見 。また、局所の Hilbert 空間 $L^2(SU(2))$ が無限次元であることと定理の設定との照合もしていません。

**真空の測度の側の道具**。隙間と真空の測度の命題で隙間を $C_P(\nu)$ に移しても、使える道具は増えません。理由を三つ並べます。

- $\nu$ は陽に書けません。$-2 \ln \psi_0$ が $\nu$ の「作用」で、局所でもありません。凸性で Poincaré 定数を押さえる Bakry–Émery の型の判定には $\mathrm{Hess}(-\ln \psi_0)$ の下界が要ります。凸なポテンシャルの基底状態が対数凹になるという Brascamp–Lieb の型の結果は記憶で、書誌を確かめていません 仮 。しかも (7) の磁場の項はコンパクトな群の上の定数でない滑らかな関数なので、最大点で Hesse 行列が 0 以下になり、一様に凸にはなれません 初 。群の Ricci 曲率の分を足した判定が $g \to 0$ で一様に効くかは、24-06 の凸性の天井の補題と同じ型の障害に当たる見込みです 見 。
- 局所から大域へ、という Glauber 力学の型の議論（局所の箱の Poincaré 定数と強い空間の混合から体積に一様な隙間へ、Martinelli の講義の型）を $\nu$ で立てるには、$\nu$ の境界の値に対する空間の混合が要ります。$\nu$ が陽でない分、Wilson 測度より難しい見込みです 見 （その型の定理の言明は記憶で、原典で確かめていない 仮 ）。
- 時間の格子間隔を先に 0 にする（Hamiltonian 極限）のは、Wilson の等方な格子とは別の極限の順序です。どちらの順でも同じ連続極限に行くことは仮定です 仮 （23-02 の背景）。

05

## $SU(2)$ の色の一重項と二粒子

24-04 §06 で、四次元の時空の箱の参照について「$SU(2)$ の色の一重項には一次の項が無く、参照はちょうど半分になる」ことを見ました。同じことを、一つの時刻の真空の分布の側で述べます。

主項（$g \to 0$、三つの色の成分が独立なガウス）では、真空の分布 $\nu$ は空間のリンクの横波の場の上のガウス測度で、自由なハミルトニアンの一粒子の角振動数を $\omega_k$ とすると、(1) の Dirichlet 形の Langevin の生成作用素は隙間と真空の測度の命題の基底状態変換で $-2(H - E_0)$ にユニタリ同値です（$\hbar = 1$）。$H - E_0$ の固有値は一粒子の角振動数の和 $\sum_k n_k \omega_k$（$n_k$ は粒子の数）で、固有空間は Wiener のカオスに当たります（$n = \sum n_k$ が $n$ 次のカオス）。有限の空間格子で最小の角振動数を $\omega_{\min} > 0$ とします（周期の箱の一定のモードのように $\omega = 0$ になるモードは別に扱う）。

ゲージ不変な関数は、定数のゲージ変換（大域の色の回転 $SO(3)$）で不変でなければなりません。一次のカオスの関数 $\sum c_k^a A_k^a$ は色の添字 $a$ についてのベクトルで、$SO(3)$ は $\mathbb{R}^3$ に固定されたベクトルを持たないので、不変なものは 0 だけです 初 。したがってゲージ不変な関数の最低の試験の空間は二次のカオス（二粒子）で、その上の最小の固有値は $2\omega_{\min}$、等号は二つの粒子を同じ最低のモード $w$ に置いて色で縮めた $F_w = \sum_a (\langle w, A^a \rangle^2 - \mathbb{E})$ で取られます 初 。隙間と真空の測度の命題で読み替えると

$$C_P(\nu \,|\, \text{色の一重項}) = \frac{C_P(\nu)}{2}, \qquad \Delta_{\text{一重項}} = 2\,\omega_{\min} \qquad (\text{主項}) \tag{8}$$

です 初 （主項・三色の独立なガウス・$\omega_{\min} > 0$ の有限の空間格子の上）。ゲージ不変な最低の励起は二粒子の閾にあり、Poincaré 定数は一粒子の定数の半分です。24-04 の時空の箱の参照 $\Gamma_Q/2$ は、同じ仕組みを時空の箱の局所の Poincaré 定数で見たものです。Lean `LatticeGauge.WilsonLoopReference.no_linear_singlet`（仮定：二つの回転で不変な一次形式。結論：係数は 0）・`chaos2_gamma`（仮定：$0 < n, g$ と Wick の積率を式として。結論：比が半分になる代数）。

物理では「最も軽いグルーボールは二つのグルーオンの束縛状態」と語られます。(8) はその主項の局所の Poincaré 版にあたる、という読みができます 見 。ただし、物理の機構は証明にならず（24-07 の物理の機構の表）、(8) は主項の形の文です。無限体積では $\omega_{\min} \to 0$ なので、(8) の右辺も 0 に行きます。質量ギャップは主項には現れず、主項で決まるのは「ゲージ不変な試験の空間は二粒子から始まる」という形だけです。$g$ が有限の $SU(2)$ で (8) がどう変わるかは、何も計算していません。

06

## 真空の測度の定数を測る道 — 何が要るか

隙間と真空の測度の命題から、真空の分布の Poincaré 定数を測ることは隙間を測ることと同じです。測る道を、第 23 部の一段目の機械がどこまで使えるかで並べます。

- **0+1 次元**。一段目の機械（転送の核の格子の固有値問題と、重みつきの格子 Laplacian の一般化固有値）は、一つの時刻の窓の局所の Poincaré 定数を直接計算し、$\varepsilon/(2m_{\mathrm{tr}})$ と 1.006〜1.019 倍の範囲で一致しました（§03） 読 。0+1 では機械がそのまま $C_P(\nu)$ を測ります。
- **標本**。$\nu$ は陽でないので、標本が要ります。時間の格子間隔を小さくした異方的な Wilson 格子の、一つの時刻の切り口の周辺分布は、Hamiltonian 極限で $\nu$ に近づく見込みです 見 。時間の刻みが有限なら、その切り口は転送の核の $\psi_0^2$ で、§03 のずれ（0+1 の $\varepsilon = \frac{1}{2}$ で 1〜2%）が入ります。
- **試験の関数**。ゲージ不変な関数に限るので、Wilson ループの多項式から取ります。24-04 §06 のとおり、箱の差し渡しの大きさのループが要ります。
- **目盛り**。(1) の $\mathcal{E}_\nu$ は運動項の計量 $M^{-1} = g^2 \cdot$（両側不変な計量）で測ります。Langevin の目盛りをこれと揃えないと、(2) の係数が $\kappa$ 倍ずれます。
- **向き**。標本の上の Rayleigh 商は $C_P(\nu)$ の下界、すなわち隙間の**上界**を与えるだけです（試験関数を一つ置けば出る側）。隙間の下界には全ての $F$ が要り、第 23 部の緩和時間の上界の仮定と緩和時間の下界の仮定の非対称（23-01 の (15)）がそのまま現れます。測る道は、隙間の易しい側を測る道です。

この章は計算を置いていません。小さな周期の格子の Kogut–Susskind の隙間を、電場の表現を切って区間で押さえる計算は、有限の箱の数に留まり、体積に一様な隙間への橋にはなりません 見 。

07

## 言えないこと

- 隙間と真空の測度の命題は恒等式で、問題を易しくしたとは主張しません。$C_P(\nu)$ を $\beta$（あるいは $g$）に一様に押さえる道具はありません。
- 局所から大域への隙間の定理は、Kogut–Susskind の格子の電場と磁場への分け方には当たりません（電場と磁場の分け方の frustration の命題）。区画にまとめた分け方で当たらないことは見込みで、示していません。

- 強結合の摂動の結果を Kogut–Susskind の格子に当てはめる照合はしていません。弱結合の側の結果は、探した範囲で見当たりません。
- Hamiltonian 極限を先に取る順序が Wilson の格子と同じ連続極限を与えることは仮定です。
- (8) は主項（三色の独立なガウス）の文で、$g$ が有限の値はありません。グルーボールとの対応は見立てです。
- この章は質量ギャップを示しません。緩和時間の仮定についても何も示しません。

08

## 五分類の表と依存グラフ

表 3　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 | 機械検査 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 基底状態の仮定：離散スペクトル・$\psi_0 > 0$ 滑らかで重複しない・$\Delta > 0$ | 仮 | 23-01 表 6 | 有限の空間格子 | — |
| 2 | 基底状態変換の恒等式 (3) | 初 | 23-01 (18) | 有限の空間格子 | — |
| 3 | 隙間と真空の測度の命題：$\Delta = \hbar^2/(2C_P(\nu))$ | 初 | (2)〜(4) | 連続の時間・有限の空間格子 | — |
| 4 | 三つの定数の関係 (5) | 初 | 表 1 | 正準・片側の橋の仮定 | — |
| 5 | 物理の単位の言い直し (6) | 初 | §02 | 各 $\beta$ | — |
| 6 | 0+1 の一つの時刻の窓は隙間と真空の測度の命題の $\varepsilon/\hbar$ 倍 | 初 | §03 | 0+1・Schrödinger の $\psi_0$ | `LatticeGauge.LocalHDoubleWell.one_slice_ratio`（仮定：$0 < \varepsilon, m, \omega$） |
| 7 | 時間を刻んだ格子でのずれ 1.006〜1.019・1.037〜1.050 | 読 | §03 | $\varepsilon = \frac{1}{2}$・三つの $\hbar$ | — |

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 | 機械検査 |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 電場と磁場の分け方の frustration の命題：電場と磁場への分け方は frustration-free でない | 初 | §04 | $g > 0$・有限の空間格子 | — |
| 9 | frustration-free を仮定した局所から大域への隙間の定理 | 典 | 表 2（要旨で言明を確認） | 原典の設定 | — |
| 10 | 強結合の摂動の型（Yarotsky） | 典 | 表 2（要旨） | 原典の設定 | — |
| 11 | 凸なポテンシャルの基底状態は対数凹 | 仮 | §04（記憶） | — | — |
| 12 | 局所から大域への型の議論（Martinelli の講義の型） | 仮 | §04（記憶） | — | — |
| 13 | Hamiltonian 極限と Wilson の格子が同じ連続極限に行く | 仮 | §04 | — | — |
| 14 | 色の一重項に一次の項が無い | 初 | §05 | 主項 | `LatticeGauge.WilsonLoopReference.no_linear_singlet`（仮定：二つの回転で不変） |
| 15 | (8)：一重項で $C_P(\nu)$ が半分・隙間は $2\omega_{\min}$ | 初 | §05 | 主項・三色の独立なガウス・$\omega_{\min} > 0$ | `chaos2_gamma`（仮定：Wick の積率を式として） |
| 16 | 局所から大域の定理は Kogut–Susskind の格子に当たらない | 見 | §04 | 区画にまとめた分け方を含めて | — |
| 17 | 強結合は摂動の型に乗る | 見 | 表 2 | 照合は未 | — |

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 | 機械検査 |
|---|---|---|---|---|---|
| 18 | (8) はグルーボールの局所の Poincaré 版 | 見 | §05 | — | — |
| 19 | 真空の測度の定数を一様に押さえる道具は無い | 見 | §04・§06 | — | — |

機械検査の欄は代数だけです。恒等式 (3)・隙間と真空の測度の命題・電場と磁場の分け方の frustration の命題・(8) の測度の段は Lean の外にあります（23-13）。

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  仮  基底状態の仮定：離散スペクトル・ψ₀ > 0・Δ > 0                    有限の空間格子
 2  初  基底状態変換の恒等式（23-01 の (18)）
 3  初  隙間と真空の測度の命題：Δ = ħ²/(2 C_P(ν)) ⟸ 1・2
 4  初  三つの定数：sup over F₁ = (2C_P(ν)/ħ)² ⟸ 3（＋23-01 の片側の橋・24-04 の (
 5  初  物理の単位：m_phys ≥ c ⟺ C_P(ν) ≤ ξ_RG/(2c) ⟸ 3
 6  初  0+1 の窓：一つの時刻の窓は隙間の命題の ε/ħ 倍 ⟸ 3              Lean one_slic
 7  読  格子のずれ：1.006〜1.019（時間を刻んだ転送の ψ₀）
 8  初  電場と磁場の分け方の frustration の命題：frustration-free でない
 9  典  局所→大域：frustration-free を仮定した隙間の定理
10  典  摂動：相対有界な量子の摂動で隙間（要旨）
11  仮  対数凹：凸なポテンシャルの基底状態（記憶）
12  仮  混合：局所の箱と空間の混合から一様な隙間（記憶）
13  仮  極限の順序：Hamiltonian 極限と Wilson の格子
14  初  一次なし：色の一重項に一次の項が無い                          Lean no_linear_
15  初  二粒子：(8) ⟸ 3・14（主項）                                  Lean chaos
16  見  当たらない：局所→大域は KS に当たらない ⟸ 8・9
17  見  強結合：摂動の型に乗る ⟸ 10
18  見  グルーボール：(8) の読み ⟸ 15
19  見  道具なし：C_P(ν) を一様に押さえる道具は無い ⟸ 11・12・13・16
```

円の検査は全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを見るだけです。この章の結論は、隙間と真空の測度の命題とそこから出る三つの関係（三つの定数・物理の単位・0+1 の窓）、二粒子の主項の文で、質量ギャップの節点はありません。仮定の行（基底状態の仮定・対数凹・混合・極限の順序）はどれも隙間の下界を含みません。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 時間を連続に取った有限の空間格子で、隙間が一つの時刻の真空の分布の Poincaré 定数と $\Delta = \hbar^2/(2C_P(\nu))$ で結ばれること（基底状態の仮定の上） 初 | $C_P(\nu)$ を $\beta$ に一様に押さえる方法。問題が易しくなったという主張 |
| 三つの Poincaré 定数の関係、時刻に局所な族の上で 23-01 の自由場の読み替えが等式になること 初 | 経路の $C_P$ が $(2C_P(\nu)/\hbar)^2$ を越える分の大きさ |
| 0+1 の一つの時刻の窓がこの恒等式であること 初 ・時間を刻んだときのずれ 読 | 四次元の Wilson の格子での時間の刻みの比べの仮定の成否 |
| Kogut–Susskind の格子の電場と磁場への分け方が frustration-free でないこと 初 | 区画にまとめた分け方での成否。強結合の摂動の当てはめ。弱結合の結果 |
| 主項で、色の一重項の最低の試験の空間が二粒子で、$C_P(\nu)$ が半分になること 初 | $g$ が有限の値。グルーボールとの対応（見立て） |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 恒等式 (3)・片側の橋 | 本書 | 23-01 §06 の (17)(18)。$\mathbb{R}^n$ の切り落としは論文「片側の橋」（Kiichi, Shiori and Rin）の補題 3.3 |
| 隙間と真空の測度の命題・(5)(6)・電場と磁場の分け方の frustration の命題・(8) | 初 | 本文の証明 |
| Kogut–Susskind のハミルトニアン | 設定 | J. Kogut, L. Susskind, Hamiltonian formulation of Wilson's lattice gauge theories, Phys. Rev. D 11 (1975) 395–408（書誌は照合、本文は取っていない。(7) の係数はこの本の約束） |
| 局所から大域への隙間の定理 | 典 | D. Gosset, E. Mozgunov, arXiv:1512.00088（要旨で言明を確認）。S. Knabe, J. Stat. Phys. 52 (1988) 627–638（書誌は照合、閾の値は前者の要旨の再述） |
| 強結合の摂動 | 典 | D. A. Yarotsky, arXiv:math-ph/0412040（Commun. Math. Phys. 261 (2006)）（要旨） |
| 弱結合の隙間の結果の探索 | — | arXiv の短い語の検索二回で該当なし（検索は浅い） |
| §03 の格子の値 | 読 | 0+1 の二重井戸の転送の核の格子の固有値問題（24-04 の出典表と同じ） |
| Brascamp–Lieb の型の対数凹性・Martinelli の型の局所から大域 | 仮 | 記憶。原典で言明を確かめていない |

**この章で使った語** — 真空の測度 $\nu$・基底状態変換・隙間と真空の測度の命題・三つの Poincaré 定数・Hamiltonian 格子（Kogut–Susskind）・frustration-free・局所から大域へ

の隙間の定理・色の一重項と二次のカオス・Hamiltonian 極限。意味は A-02 用語集 と 24-09 にあります。

次に読む章：24-06 凸性の代わりに稀さで払う ― 群の上では凸性が足りないことを、稀さで払う道具の話として。

# 凸性の代わりに稀さで払う — 群の上の繰り込みと対数 Sobolev

この章は本書の検討です。§02・§08 は既存の知見、§05・§07 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — ここからは道具の話です。24-01〜24-05 は「何を比べ、どの拡散型緩和時間の仮定を述べ直すか」を扱いました。どの言明を示すにも、緩和の定数を上から押さえる道具が要ります。平らな空間でその道具の中心にあるのは凸性（Bakry–Émery・Brascamp–Lieb）で、スカラーの階層模型では、各尺度で条件つきの測度が一様に凸であることを入口にして、拡散型緩和時間の仮定と同じ型の定理が示されています。この章では、(1) 凸性の道具が何を要り、どこで破れるかを、0+1 次元の頂上・群の反対極・階層模型の帰納の仮定の三か所で見ます。群の上では、閉じた多様体の上の凸性の天井の補題（証明つき）により、弱結合の尺度で凸性は原理的に立ちません。(2) 平らな $\phi^4$ と群とでは、凸な場所と凸でない場所が逆になり、壁は消えずに確率 $e^{-c\beta}$ の所へ押し込まれます。(3) そこで、凸性でなく稀さで払う道具（エントロピーの通貨・Lyapunov の条件・場に依る定数）を並べ、第 23 部の作用の障壁の余裕が「稀さで払えた例」であることを見ます。(4) それを規則の形に書き直した「稀さで払う測度の類」を候補として置き、紫外の側と強結合の側の間に残る「結合の窓」が、三段目の難しさの二つ目の言い直しであることを確かめます。(5) 確率量子化の道を一節で添えます。

**前提となる章** — 23-09 §06（頂上の一サイトの曲率 $\frac{15}{4}$ と 4）・23-10 通貨の取り違えの型・23-11 §06（作用の障壁の余裕）・24-02 §02（木の座標とリンクの座標）・24-07 §05（根の三つ）。第 1 部の 1-05（多様体）と 1-04（$SU(2)$）。記号は 24-09。

**先に言うこと** — 水準は〔研〕で、§01 の要約は〔三〕です。証明を置くのは §03 の補題と系と命題だけで、ほかは原典の写し（典）か見立て（見）です。階層模型の結果は四次元のヤン–ミルズに何も含意しません。§07 の「規則」は候補で、どれも三段目（連続極限）を閉じる見込みを約束しません。この章は質量ギャップも、緩和時間の仮定も示しません。記号の注意：この章の Bakry–Émery の曲率の下限は $\kappa_{\mathrm{BE}}$ と書き、片側の橋の命題（論文の定理 3.1）の比べの定数 $\kappa$（24-09）とは別の量です。稀さの率は $s$（$\mu(B) \le e^{-s}$）と書きます。第 23 部の 23-09・23-10 で $\ell$ と書いた量で、第 24 部では $\ell$ を長さの物差しに使うため字を替えました。

この章の順序


1. 要約〔三〕 — 凸性の天井・場所の逆転・稀さの通貨
2. 凸性の道具は何を要るか — Bakry–Émery・Brascamp–Lieb・階層模型の帰納の仮定
3. 閉じた多様体の上の凸性の天井 — 群の上の凸性の天井の補題・単位元に集まれない系・一リンクの Wilson の重みの命題（証明つき）
4. 凸と非凸の場所が逆 — $\phi^4$ と群・壁は確率の小さい所へ（図 1）
5. 階層模型の帰納を群に写すと — 当たる・変わる・当たらない（表 1）
6. 稀さで払う道具 — 通貨・Lyapunov・場に依る定数・作用の障壁の例（表 2）
7. 規則にするなら — 稀さで払う測度の類 — 対象・規則・最初の定理の候補・結合の窓
8. 確率量子化の道 — 劣臨界性 $d < 4$ と、対象の置き場を作り直す方向
9. 言えないこと
10. 五分類の表と依存グラフ — 表 3


01

## 要約〔三〕 — 凸性の天井・場所の逆転・稀さの通貨

この節は〔三〕の読者に向けた十段落の要約です。証明と原典の条件は §02 以下にあります。

1. 階層模型は、格子を入れ子の箱に置き換えて、繰り込みの一段が書き下せるようにした模型です。スカラー場の四次元の階層 $|\phi|^4$ では、平衡の性質（Bauerschmidt–Brydges–Slade の本）と、確率力学の緩和の遅さ（Bauerschmidt–Bodineau：隙間が自由場と同じ冪で消える）の両方が定理になっています 典。後者は緩和時間の仮定と同じ型の文です。
2. Bauerschmidt–Bodineau の方法は、各尺度で「粗い場を止めたときの細かい揺らぎの測度が一様に凸」という仮定を入口にします 典。原典自身が、大きな場での凸性を、方法を階層模型の外へ広げる主な課題と書いています。
3. 群 $SU(2)$ は閉じた空間（三次元の球面）です。閉じた空間の上では、凸性を課すとポテンシャルの振れ幅が直径の二乗で抑えられ、測度は一様な分布の定数倍の範囲から出られません（§03 の凸性の天井の補題） 初。弱結合では、測度は単位元の近くに集まる必要があるので、凸性の仮定は弱結合の尺度で原理的に成り立ちません。

4. 平らな空間の $\phi^4$ では、大きな場は本来凸で、凸でないのは小さな場（二つの井戸の間）です。群の上では逆に、単位元の近く（小さな場）が凸で、遠い側の半球（大きな場）が必ず凸でなくなります（§04）初 。
5. ただし、凸でない側にいる確率は $e^{-\beta}$ の程度に小さい（§03 の一リンクの Wilson の重みの命題）初 。壁は消えず、確率の小さい所へ押し込まれます。
6. 第 23 部の一段目の壁（頂上の一サイトの対角 $\frac{15}{4}$ が結合の和 4 に $\frac{1}{4}$ 届かないこと）も、凸性の不足を台地の稀さで払う形でした。Poincaré 不等式は出口の速さを測る通貨で、稀さを払えるのはエントロピーの通貨です（23-10 通貨の取り違えの型）。稀さで払う段は、対数 Sobolev の型の不等式を通る必要があります。
7. 凸性の代わりに稀さで払う道具には、Lyapunov の条件（悪い集合から戻る漂流）と、場に依る定数があります。第 23 部の作用の障壁の評価は、芯の双安定の費用を、局所の項の稀さで払えた例でした（余裕は約 95 倍、$\hbar = 0$ の読みの上で）。
8. 一リンクの測度は井戸が一つで、緩和の定数は $\beta$ について指数では悪くなりません。二重井戸の $\frac{1}{4}$ の型の壁は一リンクには戻りません 見 。
9. 規則の形に書き直すと「稀さで払う測度の類」になります（§07）。紫外の側では粗視化の一段ごとに類が閉じる形が書けそうですが、閉じ込めの尺度で稀さの率が尽き、強結合の側の曲率の道具との間に「結合の窓」が残ります。これは三段目の難しさの二つ目（24-07 §06）の言い直しです 見 。
10. 確率量子化（SPDE）の道は同じ Langevin 力学を使いますが、目的は測度の構成で、解の理論は $d < 4$ でだけ劣臨界です 典 。四次元の緩和時間の仮定にも局所の拡散型緩和時間の仮定にも道具を与えません。

02

## 凸性の道具は何を要るか — Bakry–Émery・Brascamp–Lieb・階層模型の帰納の仮定

この節は既存の知見（Bakry–Émery・Brascamp–Lieb・階層模型の帰納の仮定）の整理です。導入は 5-11 §02 にあります。

緩和の定数（Poincaré 定数、対数 Sobolev 定数）を**上から**押さえる道具の多くは、ポテンシャルの二階微分の下界、つまり凸性を入口にします。三つを並べます。

**Bakry–Émery**。Riemann 多様体 $M$ の上の確率測度 $\mu = e^{-V}d\mathrm{vol}/Z$ について、

$$\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\, V \;\geq\; \kappa_{\mathrm{BE}}\, g \quad (\kappa_{\mathrm{BE}} > 0) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leq \frac{2}{\kappa_{\mathrm{BE}}} \int |\nabla f|^2 d\mu, \quad C_P \leq \frac{1}{\kappa_{\mathrm{BE}}} \tag{1}$$

です 典 （Bauerschmidt–Bodineau–Dagallier の総説の定理 3.6 の、尺度が一つの場合）。条件は**全ての点で**の下界です。

**Brascamp–Lieb**。$\mathbb{R}^n$ の上で $\operatorname{Hess} V > 0$ なら $\operatorname{Var}_\mu(f) \le \mathbb{E}_\mu\langle \nabla f, (\operatorname{Hess} V)^{-1} \nabla f\rangle$ 典 （Bauerschmidt–Bodineau の補題 2.7 が使う形）。これも各点の凸性を使います。

**階層模型の帰納**。Bauerschmidt–Bodineau は、Gauss の共分散を尺度ごとに $C = C_0 + \cdots + C_N$ と分け、繰り込んだポテンシャル $e^{-V_{j+1}(\phi)} = \mathbb{E}_{C_j} e^{-V_j(\phi+\zeta)}$（場の**加法** $\phi + \zeta$）を作り、次の仮定を置きます 典 （arXiv:1809.02075 §2.3）。

$$\text{(A1)} \qquad C^{1/2}\big(\operatorname{Hess} V_j(\phi)\big)C^{1/2} \;\ge\; -\varepsilon_j\, Q \qquad (\text{全ての } \phi,\ \varepsilon_j < 1) \tag{2}$$

ここで $Q$ は粗い場の空間への射影、$\varepsilon_j$ は原典の記号です（0+1 次元の格子間隔 $\varepsilon$ とは別）。(A1) と二つの構造の仮定の下で、一段ごとに Brascamp–Lieb の二次形式が $D \le C/(1-\varepsilon) + D_+/(1-\varepsilon)^2$ と受け渡され、全段の積は $\exp\big(2\sum_l(\varepsilon_l + O(\varepsilon_l^2))\big)$ で押さえられます（定理 2.1・系 2.2）典 。結論はスペクトルの隙間（Poincaré の型）で、対数 Sobolev の結果ではありません。対数 Sobolev を多重尺度で流す形は同じ著者たちの後の仕事（Polchinski 流、§05）です。原典は「この方法を階層模型の外へ広げるには、確率の評価でなく凸性が要り、大きな場での凸性が主な課題」と書いています 典 。

**破れる三か所**。(a) 0+1 次元の二重井戸の頂上。芯の作用の Hessian の一つの行は、頂上で対角 $4 - \frac{1}{4}$ が隣との結合の和 $4$ に届かず（23-09 の (11)）、全てのサイトが頂上にある面の上で長さ $k \ge 8$ の塊の最小固有値は負になります 初 。凸性の道具はどれも、この $\frac{1}{4}$ を台地の稀さで払う必要がありました。(b) 群の反対側の半球。§03 の一リンクの Wilson の重みの命題で、一リンクの Wilson の重みの Bakry–Émery の曲率が遠い側の半球で負になることを見ます。(c) 階層模型の帰納の (A1)。群に値をとる場では、(A1) は「粗い場を止めた繊維の上の測度の Bakry–Émery」と読むのが自然で 見 、§03 の凸性の天井の補題により弱結合の尺度では成り立ちえません。

この節が言えている範囲：(1)(2) と定理 2.1 は原典の言明の写しです。(c) の読み方（群の (A1) を繊維の Bakry–Émery と読むこと）は見立てで、群の上の帰納の正確な定式化はこの本にありません。

03

## 閉じた多様体の上の凸性の天井 — 天井の補題・単位元に集まれない系・一リンクの重み

凸性の天井の補題

$M$ を直径 $D$ の、境界の無いコンパクトで連結な Riemann 多様体、$V \in C^2(M)$、$K \geq 0$ とする。$\mathrm{Hess}\, V \geq -K\, g$ なら

$$\operatorname{osc} V := \max_M V - \min_M V \;\leq\; \frac{K D^2}{2}. \tag{3}$$

初 証明。$V$ の最大点を $p$ とします（$M$ はコンパクト）。任意の $q \in M$ について、$p$ から $q$ への最短の測地線 $\gamma : [0, L] \to M$（速さ 1、$L = d(p,q) \leq D$）を取ります（コンパクトな多様体は完備なので Hopf–Rinow の定理で存在する）。$h(t) := V(\gamma(t))$ と置くと、$p$ は境界の無い多様体の上の最大点なので $h'(0) = dV_p(\gamma'(0)) = 0$。測地線に沿っては $h''(t) = \mathrm{Hess}\, V(\gamma'(t), \gamma'(t)) \geq -K$ です。積分して $h'(t) \geq -Kt$、もう一度積分して $h(t) \geq h(0) - Kt^2/2$。$t = L$ で $V(q) \geq \max V - KL^2/2 \geq \max V - KD^2/2$。$q$ は任意なので (3) です。∎

Lean の検査はありません（一次元の版「$h'' \geq -K$・$h'(0) = 0$ なら $h(0) - h(x) \leq Kx^2/2$」は候補として残しています）。証明の要は「最大点で一階微分が消える」ことで、ここに**境界が無いこと**（閉じていること）が効いています。平らな $\mathbb{R}^n$ には最大点が無いので、同じ評価は出ません。

単位元に集まれない系（$SU(2)$ では、凸な測度は単位元に集まれない）

$SU(2)$ を単位の三次元球面 $S^3$（両側不変の計量・$\mathrm{Ric} = 2g$・直径 $\pi$）とし、$\mu = e^{-V} d\mathrm{Haar}/Z$ が $\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\, V \geq 0$ を満たすとする。このとき $\operatorname{osc} V \leq \pi^2$ で、全ての Borel 集合 $A$ について

$$\mu(A) \;\leq\; e^{\pi^2}\, \mathrm{Haar}(A), \qquad \mu\big(\{\theta \leq r\}\big) \;\leq\; e^{\pi^2}\, \frac{2}{3\pi}\, r^3 \tag{4}$$

（$\theta$ は単位元からの測地距離、$e^{\pi^2} \approx 1.9 \times 10^4$）。とくに一リンクの Wilson の重み（$\operatorname{osc} V = 2\beta$）は、$\beta > \pi^2/2$ で $\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\, V \geq 0$ を満たさない。

初 証明。$\mathrm{Hess}\, V \geq -\mathrm{Ric} = -2g$ なので凸性の天井の補題を $K = 2$・$D = \pi$ で使うと $\operatorname{osc} V \leq \pi^2$。$Z = \int e^{-V} d\mathrm{Haar} \geq e^{-\max V}$ なので、密度は $e^{-V}/Z \leq e^{\max V - \min V} \leq e^{\pi^2}$ です。類関数の Haar の分布は $\frac{2}{\pi} \sin^2\theta\, d\theta$（$\theta \in [0, \pi]$）で、$\sin\theta \leq \theta$ から $\mathrm{Haar}(\theta \leq r) \leq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{r^3}{3}$。Wilson の重み $V = \beta(1 - \cos\theta)$ は $\operatorname{osc} V = 2\beta$ なので、$2\beta > \pi^2$ なら (4) の前の不等式に反します。∎

(4) の読み方。弱結合の Wilson の測度は、確率の大半を半径 $\beta^{-1/2}$ の程度の球に集めます。(4) の右辺は $r^3$ で小さくなるので、$\beta$ が大きいと、Bakry–Émery の型の凸性を持つ測度には

それができません。凸性を課すと、測度は Haar から定数倍 $e^{\pi^2}$ より遠くへ離れられない、というのが補題の中身です。

一リンクの Wilson の重みの命題

単位の $S^3 = SU(2)$ の上で $V_\beta = \beta(1-\cos\theta)$、$\mu_\beta = e^{-V_\beta} d\mathrm{Haar}/Z_\beta$ とする。

(i) $\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\, V_\beta = (2 + \beta\cos\theta)\, g$。したがって Bakry–Émery の条件は $\beta < 2$ のときだけ成り立ち、そのとき $\kappa_{\mathrm{BE}} = 2 - \beta$。

(ii) $\beta > 2$ のとき、条件が破れる集合 $N_\beta := \{\cos\theta < -2/\beta\}$ は単位元から遠い側の半球に入り、その上で $V_\beta \geq \beta + 2$。

(iii) $\beta \geq 2$ で

$$\mu_\beta(N_\beta) \;\leq\; \frac{54\pi}{25}\, e^{-3/2}\, \beta^{3/2} e^{-\beta} \;<\; 1.52\, \beta^{3/2} e^{-\beta}. \tag{5}$$

初 証明。(i) 単位の球面の上の $\theta$ だけの関数 $f$ は、測地極座標 $g = d\theta^2 + \sin^2\theta\, g_{S^2}$ で $\mathrm{Hess}\, f = f''\, d\theta^2 + f' \cot\theta\, (g - d\theta^2)$ です（動径の向きは測地線に沿う二階微分、球面の向きは $\theta$ 一定の球の第二基本形式 $\cot\theta$ から）。$f = \beta(1-\cos\theta)$ では $f'' = \beta\cos\theta$、$f' \cot\theta = \beta \sin\theta \cot\theta = \beta\cos\theta$ なので $\mathrm{Hess}\, V_\beta = \beta\cos\theta\, g$。単位の $S^3$ では $\mathrm{Ric} = 2g$。最小は $\theta = \pi$ の $2 - \beta$ です。(ii) $\cos\theta < -2/\beta < 0$ なら $\theta > \pi/2$ で、$V_\beta = \beta(1-\cos\theta) > \beta + 2$。(iii) $N_\beta$ の上で $e^{-V_\beta} \leq e^{-\beta-2}$、Haar の測度は 1 以下なので $\int_{N_\beta} e^{-V_\beta} \leq e^{-\beta-2}$。分母は、$r = \beta^{-1/2} \leq 1$ の球の上で $1 - \cos\theta \leq \theta^2/2$ から $V_\beta \leq \frac{1}{2}$、$\theta \leq 1$ で $\sin\theta \geq \theta - \theta^3/6 \geq \frac{5}{6}\theta$ から $\mathrm{Haar}(\theta \leq r) \geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{25}{36} \cdot \frac{r^3}{3} = \frac{25}{54\pi} r^3$。よって $Z_\beta \geq e^{-1/2} \frac{25}{54\pi} \beta^{-3/2}$ で、割ると (5) です（$\frac{54\pi}{25} e^{-3/2} = 1.514\cdots$）。∎

(5) は粗い上界で、反対極の近く（$\theta \approx \pi$、$V_\beta \approx 2\beta$）の確率はさらに小さく $e^{-2\beta}$ の程度です。凸性の天井の補題から出る必要条件 $\beta \leq \pi^2/2$ より、(i) の $\beta < 2$ のほうが鋭い。凸性の天井の補題の役目は Wilson の重みに限らないことで、**どんな**重みでも、凸性を課せば (4) の範囲に閉じ込められる、という所にあります。

この節が言えている範囲：凸性の天井の補題・単位元に集まれない系・一リンクの Wilson の重みの命題は証明を置いた文です。言っているのは一つの多様体の上の一つの測度の凸性で、繊維の上の条件つきの測度（多くのリンクの積の上の測度）の凸性については §05 の見立てを通してしか言いません。

04

## 凸と非凸の場所が逆 — 壁は確率の小さい所へ

平らな空間の $\phi^4$（一つのサイトの $V(\phi)=\lambda(\phi^2-v^2)^2$ の型）では、$V''(\phi)=4\lambda(3\phi^2-v^2)$ は $|\phi|<v/\sqrt{3}$ でだけ負です。凸でないのは**小さな場**（二つの井戸の間の頂上の近く）で、**大きな場**では $V$ は $\phi^4$ で育ち凸です。Bauerschmidt–Bodineau が「大きな場の凸性」を課題と書いたのは、繰り込んだ後の有効なポテンシャルが大きな場でも凸に留まるかを、一様に示す必要があるためでした。

群の上では逆です。一リンクの Wilson の重みの命題の (i) のとおり、単位元の近く（小さな場、$\theta<\pi/2$）では $\operatorname{Hess} V_\beta>0$ で Gauss に近く、遠い側の半球（大きな場）では $\operatorname{Hess} V_\beta<0$ です。これは Wilson の重みに固有のことではありません。閉じた多様体の上の滑らかな関数は最大点を持ち、最大点では $\operatorname{Hess} V\le 0$ です。**大きな場の凸でない所は、位相の理由で必ず在ります** 初 。一方、一リンクの Wilson の重みの命題の (iii) のとおり、そこにいる確率は $e^{-\beta}$ の程度です。

```
図 1　凸な場所と凸でない場所（横軸は場の大きさ。φ⁴ は |φ|、群は単位元からの角 θ）

  φ⁴（平らな空間）：
     |φ| 小 ———— |φ| ≈ v ———————— |φ| 大
     凸でない（頂上）      井戸の底（凸）            凸（φ⁴ で育つ）
     → 凸でない所は「小さな場」。確率は井戸の間を渡る頻度で決まる

  SU(2)（閉じた球面）：
     θ 小 ———— θ = π/2 ———————— θ = π（反対極）
     凸（Gauss に近い）    境目                  凸でない（最大点で必ず）
     → 凸でない所は「大きな場」。確率は e^(−β) の程度（一リンクの Wilson の重みの命題）
```

**壁は消えず、確率の小さい所へ押し込まれる**。平らな空間では、凸でない頂上を避ける道具（大きな場の凸性を課す・小さな場を別に扱う）が考えられました。群の上では、凸でない所は避けられず（凸性の天井の補題）、その代わり確率が指数で小さい（一リンクの Wilson の重みの命題）。だから群の上の道具は、凸性で押すのでなく、確率で押す道具でなければなりません 見 。

**稀さの率が測れた例**。二次元 $U(1)$ の幅 2 の帯では、一枚のプラケットの巻き付き（高さ $2\beta$ の障壁を越える稀な事象）の生の率の傾きが、Kramers の率 $\beta e^{-2\beta}$ の傾き $2-1/\beta$ に 1〜3% で乗りました（$\beta=3..6$・外周凍結・後付けの検査、24-02 §05） 読 。群の上の繰り込みとこの数の関係は見立てです。

**稀さを局所の量で払えない最も小さい例**。0+1 次元の二重井戸では、最も短い窓（一つの時刻）でも局所の比は 1 にならず、ちょうど $\omega_b/m$ です（24-03 の (7)・24-04 §07） 初 （Lean LatticeGauge.LocalHDoubleWell.one_slice_ratio、仮定：$0<\varepsilon$・$0<m$・$0<\omega$。束が保

証するのは代数だけ)。凸でない頂上の影響は、窓をどれだけ短くしても比に残ります。群の上への含意は見立てです 見 。

この節が言えている範囲：凸でない所が位相の理由で必ず在ることと、その確率の上界 (5) は証明つきです。「確率で押す道具でなければならない」は見立てです。

05

## 階層模型の帰納を群に写すと — 当たる・変わる・当たらない

**模型**。四次元の階層的なゲージ模型として、Migdal–Kadanoff の近似の再帰がちょうど成り立つ格子（Ito 1984 典 ）を考えます。縦のプラケットの結合を場所ごとに $0$ か $\infty$ に置くと、プラケットの重み $g$ の再帰が $g \mapsto (g^{*4})^4$（四枚を貼り合わせる畳み込みと、四枚を重ねる冪）の形で書き下せます。四次元の $SU(N)$ で全ての結合から強結合へ流れて閉じ込めることが述べられています（Ito 1985 典 （要旨））。この模型は平行移動と回転の不変性を持たず、その定理は四次元のヤン–ミルズの問題の言明の一部になりません。動かす座標の選び方で緩和の型が変わることは 24-02 §02 で見ました（木の座標では Gauss 近似の隙間がちょうど $\beta$ で段数に依らず、リンクの座標では一辺の二乗に反比例して小さくなる)。

表 1 は、Bauerschmidt–Bodineau の帰納の部品を、群 $SU(2)$ に値をとるこの模型に一行ずつ写したものです。「当たる」は形がそのまま立つ、「変わる」は対応する形があるが中身が替わる、「当たらない」は立たない、の意味で、凸性の天井の補題の行のほかは見立てです。

表 1　階層模型の帰納の部品を $SU(2)$ に写すと（判定の札：初＝凸性の天井の補題から・見＝見立て）

| 原典の部品 | 群に写すと | 判定 |
|---|---|---|
| 共分散の分解 $C = \sum C_j$ と場の加法 $\phi + \zeta$ | 加法は群の積に、参照の Gauss は Haar に替わる。「尺度 $j$ の共分散」の役は重みの剛性（$-\ln g$ の Hesse 行列の上限）が担い、畳み込みで剛性の逆数がほぼ足される型の不等式がある（紙の記録、この本に証明は置かない） | 変わる 見 |
| (A1) 各点の一様な凸性 | 繊維の上の測度の Bakry–Émery と読むと、凸性の天井の補題により弱結合の尺度で立たない | 当たらない 初 （凸性の天井の補題）＋読み方は 見 |
| 大きな場の凸性（原典の主な課題） | 群では大きな場（遠い側の半球）が必ず凸でない（§04)。ただし確率は $e^{-c\beta}$ | 変わる（壁は必須になり、確率の小さい所へ） 見 |
| (A2)(A3) 尺度の結合と交換 | 木（プラケット）の座標では階層の構造から自動。リンクの座標では Dirichlet 形が階層について対角でなく、交換が崩れる見込み | 木：当たる／リンク：当たらない見込み 見 |

| 原典の部品 | 群に写すと | 判定 |
|---|---|---|
| 補題 2.7（条件つきの測度の Brascamp–Lieb を凸性から） | 典型の粗い値では繊維の上の最小の折れ線は一つで隙間は $\beta$ の程度。粗い値が $-1$ に近いと、単位元から $-1$ への測地線が二次元の球面の族をなし、その向きの隙間が $O(1)$ に落ちる見込み。長い弧は鞍点で二つ目の井戸ではない見込み | 変わる（凸性は使えないが、損は多項式の見込み） 見 |
| 補題 2.8（粗い場の向きの微分を、揺らぎの平行移動と部分積分で共分散に直す恒等式） | 各写しの最後の因子を右から平行移動すると粗いホロノミーが同じだけ動き、Haar の不変性で同じ型の恒等式が立つ。違いは得点が場について線形でなく有界なこと | 当たる（形） 見 |
| 補題 2.9（Helffer–Sjöstrand の表示と Witten Laplacian の作用素の下界） | 多様体では一形式の Witten Laplacian に $\mathrm{Ric}+\mathrm{Hess}\,V$ が入る。要るのは各点の下界で、(A1) と同じ理由で弱結合では立たない | 当たらない 見 |
| 多重尺度の Bakry–Émery（Polchinski 流・係数 $\dot\lambda_t$ は負でもよい） | 群の上の自然な半群は熱核との畳み込み $V_t=-\ln(e^{-V}*K_t)$。Migdal–Kadanoff の畳み込みの段はその離散版。要るのは $\inf \mathrm{Hess}\,V_t$（下から）で、群の上の定式化は探した範囲で見当たらない | 変わる（未定式化） 見 |

**まとめ。**分散の分解と補題 2.8 の型の恒等式は群の上でも立ちます。立たないのは、凸性を**各点で**使う二か所（補題 2.7・2.9）で、凸性の天井の補題により、弱結合の尺度ではどう定数を工夫しても立ちません。原典の「大きな場の凸性」の壁は、群の上では消えずに必須になり、ただし壁の上の確率が $e^{-c\beta}$ に下がります 見 。

**群の上の Polchinski 流。**Bauerschmidt–Bodineau–Dagallier の総説の定理 3.6 は、Gauss の共分散の流れ $C_t$ に沿って、条件

$$\dot C_t\,\mathrm{Hess}\,V_t(\phi)\,\dot C_t-\tfrac12\ddot C_t\ \ge\ \dot\lambda_t\,\dot C_t\quad(\text{全ての }\phi),\qquad \frac{1}{\gamma}=\int_0^\infty e^{-2\lambda_t}dt \tag{6}$$

から対数 Sobolev の定数 $2/\gamma$ を出します 典 。$\dot\lambda_t$ は負でもよく、凸でない時間帯は $e^{-2\lambda_t}$ の膨らみとして払われます。曲がった空間の版（計量の流れと $\mathrm{Ric}$ を含む形、定理 3.20）も述べられていて、原典は「この一般化の興味深い応用を現在知らない」と書きます 典 。群に値をとる場の置き場の候補です 見 。群の上でこの流れを書くと、自然な半群は熱核との畳み込み $V_t=-\ln(e^{-V}*K_t)$ で、要るのは $\inf \mathrm{Hess}\,V_t$ の下からの評価です。これまでの Migdal–Kadanoff の再帰の評価（剛性の再帰・強結合に入るまでの段数が $\beta+4\log\beta+20$ 以下という紙の記録 仮 （この本に証明を置かない））は、どれも上からの評価（$\sup \mathrm{Hess}$）で、二つをつなぐ量が $\inf \mathrm{Hess}\,V_t$ の流れです。弱結合の時間帯では $\inf \mathrm{Hess}\,V_t\approx-\beta$（反対極）で、$e^{-2\lambda_t}$ がどれだけ膨らむかは評価していません 見 。最初の数は一リンクの重みの一段（問い「一リンクの重みの Hessian」、24-08）です。

**一リンクには $\frac14$ の型は戻らない。**$e^{(\beta/2)\,\mathrm{tr}\,U}d\mathrm{Haar}=e^{\beta\cos\theta}d\mathrm{Haar}$ は井戸が一つで（$\theta=\pi$ は密度の最小、二つ目の極小は無い）、隙間は大きな $\beta$ で単位元の Hesse 行列 $\beta$ に近づき、指数では悪くならない見込みです 見 （半古典の一般論。球面の上の場つきの Boltzmann 測度の一

様な対数 Sobolev の原典は書誌だけで確かめていない)。二重井戸の頂上の $\frac{1}{4}$ の型の壁(井戸が二つ)は、一リンクには現れません。繊維の上では、粗い値が $-1$ に近い所の縮退した族が多項式の損を生む見込みです(表 1)。

この節が言えている範囲:表 1 の判定は、凸性の天井の補題の行を除いて見立てです。階層模型の結果は、どの判定についても四次元のヤン–ミルズに含意を持ちません。

06

## 稀さで払う道具 — 通貨・Lyapunov・場に依る定数・作用の障壁の例

**通貨**。第 23 部の 23-10 通貨の取り違えの型は、Poincaré 不等式が測るのは出口の速さで、稀さを払えるのはエントロピーの通貨だ、と述べました(23-10 通貨の取り違えの型)。式では、集合 $B$ が $\mu(B) \le e^{-s}$ を満たすとき

$$s \int_B g^2 \, d\mu \;\le\; \mathrm{Ent}_\mu(g^2) + \ln 2 \int g^2 \, d\mu \tag{7}$$

です 初 (23-09 の (3))。分散と Dirichlet 形の比は関数の定数倍で変わらないので、稀な集合に台を持つ関数を入れると稀さは分子と分母で打ち消し、Poincaré の段では稀さが効きません。**稀さを払う段は、対数 Sobolev(エントロピー)の型の不等式を通る必要があります。** 群の上の道具の候補が、Poincaré の帰納(離散の尺度の Brascamp–Lieb)でなく、尺度ごとの Bakry–Émery を対数 Sobolev の形で流す型(§05 の (6))になるのはこのためです 見 。

**Holley–Stroock の摂動**。$\mu' = e^{-U}\mu/Z$ で $U$ が有界なら、$\mu'$ の Poincaré 定数(と対数 Sobolev 定数)は $\mu$ のものの $e^{\operatorname{osc} U}$ 倍以下です 仮 (記憶にある標準の形。この章では原典を確かめていない)。凸でない所を「振れ幅」で払う道具で、費用は稀さに依らず振れ幅の指数です。一リンクの Wilson の重みを Haar からの摂動と見ると $\operatorname{osc} U = 2\beta$ で、損は $e^{2\beta}$ です。第 23 部では、頂上の帯だけをこの摂動で払う案(迂回策「頂上の帯だけの摂動」)が、一サイトの振れ $\operatorname{osc}/\hbar = 3.7/11/37$ を指数に入れて鎖で長さ倍になり、許容の 2000〜4900 倍外になりました(23-10 §03、1/ħ の住所の型) 読 。

**Lyapunov の条件**。生成作用素 $L$ について、$W \ge 1$ と良い集合 $G$ があって

$$LW \;\le\; -a\,W + b\,\mathbf{1}_G \qquad (a > 0,\; b \ge 0) \tag{8}$$

(悪い集合から良い集合へ戻る漂流)が成り立ち、$G$ の上で局所の Poincaré 不等式(定数 $C_G$)が成り立つなら、全体の Poincaré 定数は $(1 + bC_G)/a$ 以下です 典 (Bakry–Barthe–Cattiaux–Guillin 2008 の型。言明は二次資料の再述で確かめた、23-14 §03。一次元ガウスでの陽性対照は 23-14 §04 の 20 行目)。凸性を使うのは良い集合 $G$ の上だけで、悪い集合は

「戻ってくる速さ」で払います。群の上では、良い集合を単位元の近く、悪い集合を遠い側の半球に取るのが自然で、損は多項式の見込みです 見 。ただし (8) は Poincaré の結論で、稀さそのものを使う形ではありません。稀さを使うには、(8) の型を対数 Sobolev の形（エントロピーの通貨）に移す段が要ります 見 。

**場に依る定数**。Bauerschmidt–Bodineau は注 2.4 で、(A1) の $\varepsilon$ を粗い場に依らせ $\varepsilon = \varepsilon(\phi)$ としてもよい（ただし一様に 1 未満）と書き、「使いにくい」と添えています 典 。悪い粗い場で $\varepsilon$ が大きくなることを許す方向ですが、一様に 1 未満を要する限り凸性の天井の補題の天井は越えません。越えるには、悪い場の**確率で重みをつけた平均**の形の条件に替える必要があります 見 。

**稀さで払えた例 — 作用の障壁の余裕**。第 23 部の一段目では、箱の中の隙間の命題の箱の側の芯の端が頂上を越えると、条件づけの壁の上に二つ目の最小点が現れ、芯の Poincaré 定数が $e^{\Delta S/\hbar}$ の型で増えました（23-11 §06）。これは芯の中の凸でない所の費用です。その費用を、箱の中の隙間の命題の局所の項に掛かる稀さ $D/(C\xi)^2 \le d\,e^{-2S_0/\hbar}$（キンクの対の生成の稀さ）が払います：芯の作用の障壁の仮定 $C_P \le c_* \hbar^{-p} e^{\Delta S_*/\hbar}$ と $\xi$ の読みの下で、局所の項は $e^{-(2S_0 - \Delta S_* - \delta)/\hbar}$ で消えます 初 （23-11 の (12)。Lean LatticeGauge.CoreActionGap.cloc_term_poly・cloc_term_vanishes、仮定：芯の作用の障壁の仮定・$\xi$ の読み・$\Delta S_* < 2S_0$）。$\hbar = 0$ の読みでは $\Delta S_*^0 \le 1.4 \times 10^{-2}$ で、$2S_0 = 4/3$ との比は $1.05 \times 10^{-2}$ 以下、余裕は約 95 倍でした 読 （Lean LatticeGauge.CoreActionGap.measured_ratio、仮定：測った上界 $\Delta S^0 \le 0.01401$、結論は比 $\le 1.06 \times 10^{-2}$ の形）。凸でない所を凸性で消すのでなく、それより強い稀さの因子で払う、という形がこの章の型の小さな実例です。ただし芯の作用の障壁の仮定そのものは仮定の行で、$\hbar = 0$ の読みと下界の $\hbar \ln C_P$ でしか支えていません。

表 2　凸でない所の払い方（何で払い、費用は何か）

| 払い方 | 何で払うか | 費用の形 | 一リンクの $SU(2)$ では | 札 |
|---|---|---|---|---|
| 凸性（Bakry–Émery・Brascamp–Lieb） | 全ての点の曲率の下界 | 下界の逆数 | $\beta < 2$ でだけ使える（一リンクの Wilson の重みの命題）。凸性の天井の補題で弱結合では原理的に不可 | 初 |
| Holley–Stroock の摂動 | ポテンシャルの振れ幅 | $e^{\mathrm{osc}}$ | $e^{2\beta}$：指数の損 | 仮 （記憶） |
| Lyapunov の条件 (8) | 悪い集合から戻る漂流と、良い集合の上の局所の定数 | $(1 + bC_G)/a$ | 良い集合を単位元の近くに取れば、損は多項式の見込み | 典 （型）・見 （群への当てはめ） |
| エントロピーの通貨 (7) | 悪い集合の稀さ $s$ | $1/s$ の形で効く | $s \approx \beta$（一リンクの Wilson の重みの命題の (5)）。閉じ込めの尺度で $s = O(1)$ になり尽きる | 初 （不等式）・見 （尽きること） |

| 払い方 | 何で払うか | 費用の形 | 一リンクの $SU(2)$ では | 札 |
|---|---|---|---|---|
| 強い稀さの因子で払う（作用の障壁の余裕） | 費用 $e^{\Delta S_*/\hbar}$ より強い稀さ $e^{-2S_0/\hbar}$ | $\Delta S_* < 2S_0$ の余裕 | 一段目の例（0+1 次元）。群の上の対応は未定 | 初（代数）・読（余裕）・仮（芯の作用の障壁の仮定） |

この節が言えている範囲：(7) と作用の障壁の代数は証明つき、Lyapunov の条件は二次資料で言明を確かめた型、Holley–Stroock は記憶の標準形です。群の上でどれがどの損で効くかは見立てです。

07

## 規則にするなら — 稀さで払う測度の類

この章で見たことを、規則の形に書き直してみます。「新しい数学を作るなら、何を数学の規則にすればよいか」という問いの言い方に沿った試みで、ここに書く規則は**候補**です。無矛盾性も、既存の結果を言い直せることも確かめていません。どれも三段目（連続極限と OS 公理）を閉じる見込みを約束しません 見。他の候補（尺度の公理化・ループの代数・保存量と区画・漸近自由の公理・曲率の規則）と組み合わせの一覧は 24-08 §02 に置きます。

候補：稀さで払う測度の類

**対象**。コンパクトな Riemann 多様体 $M$（群の積）の上の確率測度 $\mu = e^{-V}d\mathrm{vol}/Z$ と、良い集合 $G \subset M$ の組。母数 $(\kappa_{\mathrm{BE}}, s, a, b)$ で類 $\mathcal{C}(\kappa_{\mathrm{BE}}, s, a, b)$ を定める。

**規則の候補**。局所の凸性の規則 — 良い集合の上では局所に凸：$G$ の上で $\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\, V \geq \kappa_{\mathrm{BE}} > 0$。悪い集合の稀さの規則 — $\mu(M \setminus G) \leq e^{-s}$。戻る漂流の規則 — 悪い集合から戻る漂流：(8) の型 $LW \leq -aW + b\mathbf{1}_G$。エントロピーの払いの規則 — 稀さはエントロピーの不等式 (7) を通してだけ払う（類は Poincaré でなく対数 Sobolev の型の量で定める）。粗視化で閉じる規則 — 群の上の熱核との畳み込み $V_t = -\ln(e^{-V} * K_t)$ が母数を $(\kappa_{\mathrm{BE}}, s, a, b) \mapsto (\kappa'_{\mathrm{BE}}, s', a', b')$ と陽な漸化式で写す。

**規則でなく制約**。凸性の天井の補題により、$M$ 全体で局所の凸性の規則を置く類は、$\mathrm{osc}\, V$ が $KD^2/2$（一リンクの $SU(2)$ で $\pi^2$）を越える重みでは空になる。一リンクの Wilson の重みでは $\beta > \pi^2/2$ で空。**悪い集合は必ず在る**。

**エントロピーの払いの規則は第 23 部の通貨の型を規則にしたもの**です（23-10 通貨の取り違えの型：Poincaré は出口の速さ、稀さはエントロピーの通貨）。

**最初の定理の候補**。(a) 一つの測度について：$\mu \in \mathcal{C}$ なら対数 Sobolev の定数が $F(\kappa_{\mathrm{BE}}, s, a, b)$ 以下で、$F$ は $s$ について指数でない。平らな空間では、Lyapunov の条件と局所の不等式を合わせる型がこれに当たり（§06）、Holley–Stroock の摂動は $e^{\mathrm{osc}}$ を払います。(b) 閉じること：$SU(2)$ の一リンクの Wilson の重みに熱核を一段かけても類に留まり、$s' \geq s - O(1)$。これが問い「一リンクの重みの Hessian」（24-08 §01）の最初の一歩です。類関数（単位元からの角 $\theta$ の一変数の関数）では熱核の畳み込みは指標の展開の係数に Casimir の値の指数を掛けるだけなので、良い集合の上の曲率の下限と悪い集合の重さの写り方を、一変数の紙の計算と小さな数値で追えます 見 。

**既にある部品**。平らな場では、Bauerschmidt–Brydges–Slade の本の付録の重み（regulator）$\tilde{G}(X, \phi)$ が四つの性質――積の分解（交わらない集合で積に分かれる）、場の和の劣乗性 $\tilde{G}(X, \phi + \phi') \leq \tilde{G}^2(X, \phi)\, \tilde{G}^2(X, \phi')$、揺らぎの期待値の閉じ $\mathbb{E}_+ \tilde{G}^t(X) \leq 2^{|B(X)|}$、次の段への単調性 $\tilde{G}^t \leq \tilde{G}_+$――を持ち、そこから一段の評価 $\| \mathbb{E}_+ \theta K(X) \|_{\tilde{G}_+} \leq 2^{|B(X)|} \| K(X) \|_{\tilde{G}}$ が出ます（活動のノルムの一段の評価（BBS の補題 A.6.1））典 。**大きな場の稀さを重みのノルムで書き、粗視化の一段の期待値で閉じる**ことの実例です。群の上で要るのはこの「一段で閉じる」ことの群版で、場の和の劣乗性（BBS の (ii)）が場の**加法**を使っている所が、群の積 $u_1 u_2$ に替わります。Bauerschmidt–Bodineau–Dagallier の多重尺度 Bakry–Émery（§05 の (6)、$\dot{\lambda}_t$ は負でもよい）と、その曲がった空間の版（定理 3.20）も部品の候補です 典 。エントロピーの安定性の補題（各点の Hesse 行列の代わりに共分散の上界を条件にする形、補題 3.21）は線形の傾け $e^{\langle h, \zeta \rangle}$ を使うので、群には直接写りません 見 。

**粗視化の一段と組む ― 結合の窓**。尺度の公理化（粗視化の半群と、その上の流れ）とこの類を組むと、段ごとの類 $\mathcal{C}_j = \mathcal{C}(\kappa_j, s_j, a_j, b_j)$ を粗視化の核が $\mathcal{C}_j \to \mathcal{C}_{j+1}$ と写す形が書けます。最初の定理の候補は「有限の箱・紫外の側で、実効の結合 $\beta_j$ が $\beta_*$ 以上の間は $s_{j+1} \geq s_j - c \cdot \kappa_{j+1} \geq \kappa_j (1 - c/\beta_j)$ の型で類が閉じる」です 見 。閉じた先では実効の測度が一様な対数 Sobolev を持ち、そこから先は強結合の側の道具（群の Ricci 曲率で払う型。小さな $\beta$ で対数 Sobolev と質量ギャップを与える Shen–Zhu–Zhu の結果 典 （要旨））に渡せます。ところが稀さの率 $s_j$ は実効の結合に比例し（一リンクの Wilson の重みの命題の (5) で $s \approx \beta$）、閉じ込めの尺度で $\beta_j = O(1)$ になると尽きます。曲率の通貨は狭い範囲でしか効きません。**二つの間に、どちらの通貨も足りない結合の窓が残ります**。この窓は、三段目の難しさの二つ目――紫外と赤外をつなぐ展開が無いこと――を規則の言葉で言い直したもので、新しい障害ではありません（24-07 §06・24-07 表 3） 見 。

階層的なゲージ模型（§05）では、静的な流れが強結合へ入るまでの段数が有限で、紫外の側・窓・強結合の側の三つが一つの模型の中で揃います。規則の候補を最初に試すならこの模型です。ただし、その静的な流れは多体の残りを持たない一変数の漸化式なので、窓を横切る

ことが易しいのは模型の構造のためで、結果は四次元のヤン–ミルズに何も含意しません 見 。

**根との関係** 見 。三段目の三つの根（24-07 §05）のうち、この類が正面から効くのは三つ目（大局的なゲージ固定が無く、大きな場が凸性で制御できない）です。凸性の天井の補題が「群では凸性の類が空」と言う所に、代わりの類を置くからです。一つ目（段数に一様）には尺度の公理化と組んだときだけ効き、粗視化で閉じる規則の漸化式が段数に一様な定数を出すかが要です。二つ目（紫外と赤外をつなぐ）には効きません——上の結合の窓が、その効かなさの姿です。

この節が言えている範囲：規則は候補で、定理の候補は候補です。既存の部品（重みの四性質と活動のノルムの一段の評価・多重尺度の Bakry–Émery）は各原典の条件（平らな場・階層・Gauss の共分散の流れ）の中でだけ成り立ちます。

08

## 確率量子化の道 — 劣臨界性と、対象の置き場を作り直す方向

確率量子化は、ヤン–ミルズの測度を、それを不変測度に持つ Langevin 力学（確率偏微分方程式）の長時間の極限として作る道です（7-09）。力学はこの本の $C_P$ が測る Langevin 力学と同じ種類ですが、目的は**測度の構成**で、緩和の速さ（緩和時間の仮定）は問いません。

正則性構造の解の理論の鍵の条件は劣臨界性で、それは $d < 4$ のときに限り成り立ちます（Chevyrev の総説 §1.2 典 ）。二次元では、ゲージ軌道の空間の上の Polish な状態空間と Markov 過程が作られ、ヤン–ミルズの測度がその不変測度であることが示されています（Chandra–Chevyrev–Hairer–Shen、Chevyrev–Shen 典 （要旨））。三次元では、熱流で均した一形式の空間という新しい状態空間と、局所の時間の解・ゲージ共変な繰り込みまでで、三次元のヤン–ミルズの測度は周期の箱 $\mathbb{T}^3$ の上でも未構成です（Chevyrev の総説 §1・§4 典 ）。

この道は、格子の繰り込み群を延ばすのでなく、**対象の置き場（状態空間）と構成の手段（確率力学）を作り直す**方向に出ています（24-07 §05） 見 。ただし、劣臨界性の条件は、この新しい道具も四次元でちょうど臨界になることを示します。結合が無次元であること（24-07 §01 の (c)）の一つの現れです。この道は、四次元の緩和時間の仮定にも局所の緩和時間の仮定にも道具を与えません。

この節が言えている範囲：劣臨界性の条件と三次元の未構成は総説の本文の言明、二次元・三次元の個々の結果は要旨の写しです。この本は正則性構造を道具として使っていません。

09

## 言えないこと

(a) 階層模型。階層模型の結果は、四次元のヤン–ミルズに何も含意しません（平行移動と回転の不変性を欠く）。表 1 の判定も、階層模型の中の見立てです。

(b) 群の上の Polchinski 流。熱核との畳み込みで流す形を、多重尺度の Bakry–Émery の条件まで定式化した資料は、探した範囲で見当たりません（「無い」ではありません）。

(c) 繊維。粗い値が $-1$ に近い所の縮退した族の向きの隙間が $O(1)$ に落ちること、長い弧が鞍点であることは見立てです（連続の測地線の Morse 指数からの類推）。

(d) 力学。階層的なゲージ模型の Glauber 力学・Langevin 力学の隙間や対数 Sobolev の言明は、探した範囲で見当たりません。

(e) 原典の種類。Bauerschmidt–Bodineau 2019 の帰納は Poincaré の型（スペクトルの隙間）の結果で、対数 Sobolev の結果ではありません。対数 Sobolev を流す形は同じ著者たちの後の仕事と総説の定理です。

(f) 規則の候補。§07 の類は候補で、無矛盾性・既存の結果の言い直し・定理の候補のどれも確かめていません。「結合の窓は尺度をつなぐ展開の欠如の言い直し」は見立てで、窓の幅の数はどの模型でも測っていません。

(g) 作用の障壁の例。余裕 95 倍は 0+1 次元の $\hbar = 0$ の読みで、芯の作用の障壁の仮定は仮定の行です。群の上の繰り込みに同じ形の余裕があるかは言いません。

(h) 確率量子化。四次元が臨界であることは、四次元で道具が作れないことの証明ではありません。原典の条件の言明を写しただけです。

10

## 五分類の表と依存グラフ

表 3　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 | 機械検査 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Bakry–Émery (1) | 典 | 総説の定理 3.6 | 各点の曲率の下界 | — |
| 2 | 階層模型の帰納の (A1) と定理 2.1・系 2.2 (2) | 典 | §02 | スカラー・階層 | — |

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 | 機械検査 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 頂上の一サイトの対角 $\frac{15}{4}$ と結合の和 $4$ | 初 | 23-09 の (11) | 0+1・$\varepsilon=\frac{1}{2}$ | — |
| 4 | 凸性の天井の補題：$\operatorname{osc} V \le K D^2/2$ (3) | 初 | §03 の証明 | 境界の無いコンパクトな多様体 | —（一次元の版は候補） |
| 5 | 単位元に集まれない系：$SU(2)$ で凸なら $\mu \le e^{\pi^2}\,\mathrm{Haar}$ (4) | 初 | §03 の証明 | 単位の $S^3$ | — |
| 6 | 一リンクの Wilson の重みの命題：一リンクで $(2+\beta\cos\theta)g$・$\beta<2$・(5) | 初 | §03 の証明 | $\beta \ge 2$（(5)） | — |
| 7 | 閉じた多様体の最大点では $\operatorname{Hess} V \le 0$ | 初 | §04 | — | — |
| 8 | 帯の巻き付きの生の率が Kramers の傾きに 1〜3% | 読 | 24-02 §05 | 二次元 $U(1)$・$\beta=3..6$・後付け | — |
| 9 | 0+1 の一サイトの比 $\omega_b/m$ | 初 | 24-03 の (7)・24-04 §07 | 0+1 | `LatticeGauge.LocalHDoubleWell.one_slice_ratio`（仮定：$0<\varepsilon,m,\omega$） |
| 10 | 群の (A1) を繊維の Bakry–Émery と読むと弱結合で立たない | 見 | §02・§05 | 弱結合の尺度 | — |
| 11 | 表 1 の判定 | 見 | 表 1 | 階層模型 | — |
| 12 | 多重尺度の Bakry–Émery (6)・曲がった空間の版 | 典 | 総説の定理 3.6・3.20 | Gauss の共分散の流れ | — |
| 13 | 階層模型の強結合に入るまでの段数 $\le \beta + 4\log\beta + 20$ | 仮 | 紙の記録（本に証明なし） | Migdal–Kadanoff・$SU(2)$ | — |

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 | 機械検査 |
|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 一リンクには $\frac{1}{4}$ の型の壁は戻らない | 見 | §05 | 一リンク | — |
| 15 | 通貨の不等式 (7) | 初 | 23-09 の (3) | — | — |
| 16 | Holley–Stroock の摂動の費用 $e^{\mathrm{osc}}$ | 仮 | 記憶の標準形 | — | — |
| 17 | Lyapunov の条件 (8) から $(1+bC_G)/a$ | 典 | 二次資料（23-14 §03） | — | 陽性対照 `gauss1d_bbcg`（仮定なし、23-14） |
| 18 | 場に依る $\varepsilon(\phi)$（一様に 1 未満） | 典 | 原典の注 2.4 | — | — |
| 19 | 芯の作用の障壁の仮定 | 仮 | 23-11 §06 | 0+1・箱の側の芯 | — |
| 20 | $\Delta S_*^0 \le 1.4\times 10^{-2}$・余裕約 95 倍 | 読 | 23-11 §06 | $\hbar=0$ の読み | `LatticeGauge.CoreActionGap.measured_ratio`（仮定：測った上界） |
| 21 | 局所の項が $e^{-(2S_0-\Delta S_*-\delta)/\hbar}$ で消える | 初 | 23-11 の (12) | $\hbar\to 0$ | `LatticeGauge.CoreActionGap.cloc_term_poly`・`cloc_term_vanishes`（仮定：芯の作用の障壁の仮定・$\xi$ の読み・$\Delta S_*<2S_0$） |
| 22 | 群の上の道具は確率で押す道具でなければならない | 見 | §04 | — | — |
| 23 | 重みの四性質と活動のノルムの一段の評価 | 典 | BBS の付録 | 平らな場 | — |
| 24 | 稀さで払う測度の類（候補） | 見 | §07 | 候補 | — |
| 25 | 強結合の対数 Sobolev と質量ギャップ | 典 | Shen–Zhu–Zhu（要旨） | 小さな $\beta$ | — |
| 26 | 結合の窓は尺度をつなぐ展開の欠如の言い直し | 見 | §07・24-07 §06 | — | — |

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 | 機械検査 |
|---|---|---|---|---|---|
| 27 | 解の理論は $d<4$ で劣臨界・三次元の測度も未構成 | 典 | Chevyrev の総説 | — | — |
| 28 | 確率量子化の道は四次元の緩和時間の仮定に道具を与えない | 見 | §08 | — | — |

機械検査の欄が保証するのは実数の代数と算術だけで、$\Delta S$ が芯の作用の障壁であること、$C_P$ が経路の測度の Poincaré 定数であることは Lean の外です（23-13）。凸性の天井の補題・単位元に集まれない系・一リンクの Wilson の重みの命題には機械検査がありません。

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  典  Bakry–Émery：曲率の下界 ⇒ 対数 Sobolev・Poincaré
 2  典  階層模型の帰納の (A1)・定理 2.1・系 2.2（Bauerschmidt–Bodineau）
        スカラー・階層
 3  初  頂上の一サイトの対角 15/4 と結合の和 4                          0+1（23-09）
 4  初  凸性の天井の補題：osc V ≤ KD²/2                                閉じた多様体
 5  初  単位元に集まれない系：SU(2) で凸なら μ ≤ e^(π²) Haar ⟸ 4
 6  初  一リンクの Wilson の重みの命題：曲率 (2 + β cos θ)・確率 (5)
 7  初  閉じた多様体の最大点で Hess ≤ 0
 8  読  帯の生の率が Kramers の傾きに 1〜3%                             二次元 U(1)・
 9  初  0+1 の一サイトの比 ω_b/m                                       Lean one_sl
10  見  群の (A1) は弱結合で立たない ⟸ 2・4
11  見  表 1 の判定 ⟸ 10
12  典  多重尺度の Bakry–Émery・曲がった空間の版
13  仮  強結合に入るまでの段数（紙の記録）
14  見  一リンクに 1/4 の型は戻らない ⟸ 6
15  初  通貨の不等式 (7)                                              23-09 の (3
16  仮  Holley–Stroock の費用 e^osc                                    記憶
17  典  Lyapunov の条件 (8)                                            二次資料
18  典  場に依る ε（一様に 1 未満）
19  仮  芯の作用の障壁の仮定                                          0+1
20  読  ΔS⁰ ≤ 1.4·10⁻²・余裕約 95 倍                                   ħ = 0 の読み
21  初  局所の項が消える (12) ⟸ 19                                     Lean cloc_
22  見  群の上の道具は確率で押す ⟸ 5・6・7・15
23  典  重みの四性質・活動のノルムの一段の評価（BBS）                  平らな場
24  見  稀さで払う測度の類（候補）⟸ 4・15・17・23
25  典  強結合の対数 Sobolev と隙間                                    要旨
26  見  結合の窓は尺度をつなぐ展開の欠如の言い直し ⟸ 6・24・25
27  典  劣臨界性 d < 4・三次元も未構成
28  見  確率量子化は四次元の緩和時間の仮定に道具を与えない ⟸ 27
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。証明を置いた節点は、凸性の天井の補題・単位元に集まれない系・一リンクの Wilson の重みの命題・閉じた多様体の最大点の四つで、どれも一つの多様体の上の一つの測度についての文です。この章の結論の側の節点（群の上の道具は確率で押す・稀さで払う測度の類・結合の窓の言い直し・確率量子化の注）は全て「見」で、質量ギャップの節点も、緩和時間の仮定の節点もありません。局所の項が消える節点（稀さで払えた例）は芯の作用の障壁の仮定の上の代数で、結論の側の節点の前提には入りません。0+1 次元の例は型の例であって、群の上の文の根拠ではないからです。

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 初 閉じた多様体の上の凸性の天井（凸性の天井の補題）・$SU(2)$ で凸な測度は Haar の $e^{\pi^2}$ 倍を越えない（単位元に集まれない系）・一リンクの Wilson の重みの曲率と、凸でない集合の確率の上界（一リンクの Wilson の重みの命題） | 繊維の上の条件つきの測度（多くのリンクの積）の凸性と隙間。縮退した族の向きの隙間の値 |
| 典 Bakry–Émery・階層模型の帰納の仮定と結論・多重尺度の Bakry–Émery・重みの四性質と活動のノルムの一段の評価・確率量子化の劣臨界性 | 群の上の Polchinski 流の定式化。階層的なゲージ模型の力学の隙間 |
| 初 ＋読 第 23 部の作用の障壁の余裕は、凸でない所を稀さで払えた例（芯の作用の障壁の仮定と $\hbar = 0$ の読みの上） | 芯の作用の障壁の仮定そのもの。群の上で同じ余裕があること |
| 見 群の上の道具は確率で押す道具でなければならないこと・表 1 の判定・稀さで払う測度の類（候補）・結合の窓は尺度をつなぐ展開の欠如の言い直し | どれも定理ではない。階層模型の結果の四次元への含意。規則の候補の無矛盾性 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 階層模型の帰納（(A1)・定理 2.1・系 2.2・注 2.4・補題 2.7〜2.9・自己評価の文） | 典 | R. Bauerschmidt, T. Bodineau, arXiv:1809.02075（Commun. Math. Phys. 373 (2020) 1167）。§1〜§2 を本文で確認 |
| (1)・(6)・曲がった空間の版・エントロピーの安定性 | 典 | R. Bauerschmidt, T. Bodineau, B. Dagallier, arXiv:2307.07619（総説）。定理 3.6・3.20・補題 3.21 を本文で確認 |
| 重みの四性質・活動のノルムの一段の評価 | 典 | R. Bauerschmidt, D. C. Brydges, G. Slade, Introduction to a Renormalisation Group Method, Lecture Notes in Math. 2242 (2019), arXiv:1907.05474。付録 A.6 を本文で確認 |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 階層的なゲージ模型 | 典 | K. R. Ito, Commun. Math. Phys. 95 (1984) 247（本文）。K. R. Ito, Phys. Rev. Lett. 55 (1985) 558（要旨） |
| Lyapunov の条件 (8) | 典 | D. Bakry, F. Barthe, P. Cattiaux, A. Guillin, Electron. Commun. Probab. 13 (2008) 60（書誌は記憶。言明は二次資料の再述で確認、23-14 §03） |
| Holley–Stroock の摂動 | 仮 | R. Holley, D. Stroock, J. Stat. Phys. 46 (1987) 1159（書誌・言明とも記憶） |
| 強結合の対数 Sobolev と質量ギャップ | 典 | H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, arXiv:2204.12737（要旨）。範囲の数は正規化の約束に依るので書かない |
| 確率量子化 | 典 | I. Chevyrev, Stochastic quantisation of Yang–Mills, arXiv:2202.13359（§1・§1.2・§4 を本文で）。A. Chandra, I. Chevyrev, M. Hairer, H. Shen, arXiv:2006.04987・arXiv:2201.03487（要旨）。I. Chevyrev, H. Shen, arXiv:2302.12160（要旨） |
| 凸性の天井の補題・単位元に集まれない系・一リンクの Wilson の重みの命題 | 初 | 本文 §03 の証明。数値は $\frac{54\pi}{25}e^{-3/2}$ と $e^{\pi^2}$ の値だけ |
| 第 23 部の例（頂上・通貨・Holley–Stroock の案・作用の障壁） | 本書 | 23-09 §06・23-10 §04・23-11 §06 |
| Lean | Lean | LatticeGauge.LocalHDoubleWell（`one_slice_ratio`）・LatticeGauge.CoreActionGap（`cloc_term_poly`・`cloc_term_vanishes`・`measured_ratio`）。束が保証するのは代数と算術だけ |

**この章で使った語** — 凸性の天井・Bakry–Émery の曲率の下限 $\kappa_{\mathrm{BE}}$・Brascamp–Lieb・繊維・凸と非凸の場所の逆転・稀さの率 $s$・通貨（エントロピー）・Holley–Stroock の摂動・Lyapunov の条件・場に依る定数・群の上の Polchinski 流・稀さで払う測度の類・結合の窓・劣臨界性。意味は A-02 用語集 と 24-09 にあります。

次に読む章：24-07 四次元だからこそ — 四次元で効いていることを、無次元の結合と位相の二点に限って。

2026-10-09 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 24 部 一本目の道（後半） 臨界次元・位相・四段のハードル · Kiichi, Shiori and Rin

# 四次元だからこそ — 無次元の結合と位相

この章は既存の知見の整理です。§03・§04・§06・§07 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 四次元で効いていることを二点に限って述べます。結合が無次元であること（臨界次元・次元転移・$\phi_4^4$ とヤン–ミルズで漸近自由の向きが逆）と、尺度を持たない位相的な配位があること（インスタントンと位相電荷）。二点を合わせると、遅い量と相関長が別の起源に割れる、という見立てが立ちます。次に、第 23 部の四段の階段のそれぞれについて、ハードル・既知の到達点・この本の道具で届くか・費用の種類を一枚の表にし、三段目（連続極限）がなぜ長く開いていたのかを、難しさの三つの源と一次資料の記述で述べます（三段目の存在の部分は、2026-11-10 に公開された構成が示した、と委員会が評価しました。第二巻で読みます）。位相については、周期の箱で緩和時間の上界の仮定が偽と読める範囲と、この本の群 $SU(2)$ では凍結が拡散型緩和時間の仮定を壊すかが決まっていないことを、24-02 の二次元の試験台と並べます。物理の非摂動的な機構が証明にならない理由を一行ずつ添えます。

**前提となる章** — 23-03 §02（四段の定義）と 23-03 §06（持ち上がる見込みと持ち上がらない理由）・23-15 §07（二段目以後の距離）・23-16（主張しないこと）・23-01 §05（緩和時間の仮定と位相の区画の注）・4-07（次元転移）・7-07（Balaban と MRS）・24-01・24-02。記号は 24-09。

**先に言うこと** — 水準は〔三〕です。二点は「四次元でだけ起きること」ではなく、理論がその臨界次元にいることの性質として述べます。二点を合わせた読みは見立てです 見 。四段の表の「届くか」と費用は見立てと見積もりです。§05 は読んだ一次資料の記述の整理で、Balaban の論文の本文は取れていません（書誌と、他の資料の記述を通して）。この章は質量ギャップも、連続極限の構成も示しません。

この章の順序

1. 結合が無次元であること — 臨界次元・次元転移・逆向きの漸近自由（(1)(2)・図 1）
2. 尺度を持たない位相的な配位 — インスタントンと、転位の重みの二つの数え方（(3)・表 1）

3. 二点を合わせた見立て — 遅い量と相関長が別の起源に割れる
4. 四段のハードル — 段・ハードル・既知の到達点・届くか・費用（表 2）
5. なぜ三段目が長く開いていたか — 難しさの三つの源・対象・道具・理論・歴史（表 3）
6. 規則の候補について一段落 — 「結合の窓」は尺度をつなぐ展開の欠如の言い直し
7. 位相と箱 — $SU(2)$ では未決 — 周期の箱・開いた境界・二次元の試験台との対応
8. 物理の機構と、証明にならない理由 — 表 4
9. 言えないこと
10. 五分類の表と依存グラフ — 表 5

---

01

## 結合が無次元であること — 臨界次元・次元転移・逆向きの漸近自由

この節は既存の知見（臨界次元・次元転移・漸近自由）の整理です。導入は 4-07 §02 にあります。

$d$ 次元のヤン–ミルズの作用を

$$S = \frac{1}{4g^2}\int d^d x \ \operatorname{tr} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \qquad [g^2] = (\text{長さ})^{\,d-4} \tag{1}$$

と書くと、結合 $g^2$ は四次元でちょうど無次元になります 典 （次元の数え。格子では Wilson の発見法で $\beta \propto \varepsilon^{4-d}$、四次元で $\beta$ は格子間隔 $\varepsilon$ に依らない、Chatterjee の総説 §3）。三次元以下では $g^2$ が長さの負の冪の次元を持ち、短い距離で相互作用は冪で弱まります（超くりこみ可能）。五次元以上では逆に強まります（くりこみ不可能）。ちょうど四次元では、尺度を一段変えるごとの補正が冪で縮まず、$g^2$ の大きさで残ります。冪の数え方の言葉では、四次元の四次の単項式は relevant でも irrelevant でもなく marginal です（Bauerschmidt–Brydges–Slade の本の定義 5.2.1 典 ）。

**次元転移**。非可換の場合、その補正の符号は「短い距離ほど弱い」側に向きます（漸近自由、4-06）。作用は長さの物差しを持たないのに、量子化すると一ループで

$$\Lambda = \mu \, \exp\!\Big(-\frac{1}{2b_0\, g^2(\mu)}\Big), \qquad b_0 = \frac{11N}{48\pi^2} \quad (SU(N)\ \text{の純ゲージ}) \tag{2}$$

という長さの逆数が生まれます 典 （一ループの標準形、4-07）。質量ギャップと閉じ込めの尺度は $\Lambda$ の定数倍だと予想されています。$\exp(-1/g^2)$ は $g=0$ で全ての導関数が消えるの

で、$\Lambda$ は $g$ の摂動の展開のどの次数にも現れません（4-07 の「摂動論に映らない」）。

**緩和時間の仮定への現れ**。(a) 相関長は $\beta$ について指数で伸び（$SU(2)$ の一ループの記帳で $\xi \propto e^{3\pi^2\beta/11}$、23-03 表 2）、$\xi$ で測る量には $\ln\xi \sim \beta$ の因子が付きます。第 23 部が緩和時間の仮定を帯の文でなく冪の文に置いたのはこのためでした（23-01 §07）。(b) Gauss 近似では結合が流れません。階層格子の Gauss 近似で、プラケットの静的な相関は質量の無い $R^{-4}$ の減り方で、相関長は体積で切られるだけでした（24-02 §02）。尺度は非可換の補正からだけ生まれます。(c) 確率量子化の方程式の解の理論は、劣臨界性（$d < 4$）を鍵の条件にしていて、四次元はちょうど臨界です（Chevyrev の総説 §1.2 典、7-09）。

**同じ marginal でも向きが逆**。四次元の $\phi^4$ も結合が無次元（marginal）ですが、繰り込みの流れで結合が 0 に近づくのは長い距離の側です（「赤外の漸近自由」、Bauerschmidt–Brydges–Slade の赤外の漸近自由の命題（BBS の命題 6.1.7） 典 ）。制御したい向き（長い距離）で理論が Gauss に近づくので道具が届き、届いた先の極限は自明（スケーリング極限は Gauss）でした（Aizenman–Duminil-Copin 2021 典 （要旨）、7-08）。ヤン–ミルズでは結合が 0 に近づくのは短い距離の側で、長い距離に向かって結合が育ちます。

図 1　二本の矢印（結合 g の流れ。左が短い距離、右が長い距離）

```
                 短い距離（紫外）                                 長い距離（赤外）
φ⁴₄ ：   g は大きい側へ        ←──────────────── g → 0（Gauss に近づく）
          → 制御したい向きで Gauss に近い。道具は届き、極限は自明

YM₄ ：   g → 0（Gauss に近づく）  ──────────────→  g が育つ（Λ の尺度で g = O(1)
          → Gauss に近いのは紫外だけ。赤外の側に展開の参照が無い
```

**四次元でだけ、とは書かない**。二次元の $O(N)$（$N \geq 3$）模型と $CP^{N-1}$ 模型も、結合が無次元で漸近自由という同じ組を持ち、$CP^{N-1}$ には尺度を持たないインスタントンもあります。そこでも紫外極限の構成は完成していません（Rivasseau 2000、Douglas 2004 典 ）。逆に、臨界次元でも可換（$U(1)$）や非ゲージ（$\phi^4_4$）なら、理論は自由場に同値か自明になります。この章の「四次元だからこそ」は、**臨界次元にいること（無次元の結合）と、非可換であること（漸近自由の向き・位相・ゲージ軌道の幾何）が同時に起きること**を指します 見 。

## 02 尺度を持たない位相的な配位 — インスタントンと転位の重み

$\pi_3(SU(N)) = \mathbb{Z}$ により、四次元のゲージ場には整数の位相電荷 $Q$ があり、自己双対な解（インスタントン）の作用は大きさ $\rho$ に依らず $8\pi^2/g^2$ です 典 （Belavin–Polyakov–Schwartz–Tyupkin 1975 の要旨、作用の値は Lucini–Teper 2001・Athenodorou–Teper 2021 の本

文)。作用が $\rho$ に依らないのは、古典のヤン–ミルズが四次元で尺度を持たないことの現れです。

格子の上では、滑らかにした位相電荷は格子間隔の大きさの小さなインスタントンが格子を通り抜けるとき（「超立方体の中に消える」）にだけ変わります（Lucini–Teper 2001 §6.1 [典]）。その重みは、一ループの小さなインスタントンの密度 $D(\rho) \propto \rho^{11N/3-5}$ から見積もられ、位相電荷が一単位動く時間について

$$\ln \tau_Q = b + \left(\frac{11N}{3} - 5\right) \ln \frac{1}{a\Lambda} \tag{3}$$

という勘定が一次資料にあります（Athenodorou–Teper 2021 の式 (32)(34) [典]）。$SU(2)$ では係数が $7/3$ で、原典自身が「かなり弱い」と書きます。当てはめた傾きとの比べは表 1 です。

表 1　(3) の係数と当てはめた傾き（Athenodorou–Teper 2021 の表 43。熱浴と過緩和・周期の箱・標準の物理体積に規格化）

| $N$ | (3) の係数 $11N/3-5$ | 当てはめた傾き |
|---|---|---|
| 2 | $7/3 \approx 2.33$ | 表から除外（測定の間隔より $\tau_Q$ が十分大きくならない） |
| 3 | 6.0 | 6.82(7) |
| 4 | 9.67 | 9.27(12) |
| 5 | 13.3 | 11.13(20) |
| 6 | 17.0 | 13.50(30) |
| 8 | 24.3 | 17.58(43) |

表 1 の札は [典]（原典の数）です。独立な経路が一つあります。Wilson 流で滑らかにした場が位相の区画の間にいる確率（滑らかさの閾 $h \geq 0.067$ を越える確率）は、物理の大きさを止めた格子で $a^6$ に比例して消えると原典の図が示唆していて（Lüscher 2010 §4.3、$SU(3)$・示唆の語 [典]）、(3) の $SU(3)$ の係数 6 と同じ数です。$SU(2)$ について同じ型の測定は、探した範囲で見当たりません。

**二つの数え方。**転位の作用を一ループのインスタントンの作用の $c$ 倍と置く粗い勘定では、動的指数は $z = (11N/3)c - 4$ の型になります [仮]。(3) の数え方とは、$\rho \sim a$ の体積の因子と $d\rho$ の幅の数え方で 1 違います。$SU(3)$ の数（当てはめの 6.82、あるいは別の原典の $z \approx 5$）に $c$ を合わせると、**どちらの数え方でも $SU(2)$ は $z = 2$ の境目の近くに落ちます** [見]。この本は二つの数え方のどちらが正しいかを判定しません。また $c$ が群に依らないことも確かめていません。

> 03

## 二点を合わせた見立て — 遅い量と相関長が別の起源に割れる

二点を並べると、次の見立てが立ちます[見]。遅い量（位相電荷）の時間と相関長 $\xi$ は、どちらも同じ無次元の結合から $e^{(\text{定数})\cdot\beta}$ の形で生まれます。ところが指数が別の数です。相関長は (2) から $\xi \propto \Lambda^{-1}$、位相電荷の時間は (3) から $\tau_Q \propto (a\Lambda)^{-(11N/3-5)}$ で、格子単位では $\tau_Q$ は $\xi^{11N/3-5}$ の型、比べる相手の $\xi^2$ とは指数が揃いません。

- 0+1 次元の二重井戸では、遅い量（キンクの数）と $\xi$ が同じキンクから生まれ、指数が揃って対数の差しか残りません（24-01 表 3）。
- 二次元 $U(1)$ の帯では、静的な長さは $\beta$ について一次、保存が壊れる長さは $e^{0.92\beta}$ で、二つが指数で離れます（24-02 §03、二次元の玩具の読み）。
- 二次元 $CP^{N-1}$ では、$N$ を動かすと凍結の強さと保存が壊れる長さが割れ、局所の比は割れませんでした（24-02 §07、条件つきの一点の読み）。

「質量ギャップは生まれても、緩和時間の仮定の形（$C_P$ と $\xi^2$ を同じ冪で結ぶ形）では捕まらない」ことの正体の候補は、**遅い量と相関長が別の起源に割れること**で、その割れは結合が無次元であることと位相の二つから来る、という読みです。この読みでは、質量ギャップを捕まえる形は緩和時間の仮定の全体ではなく、時刻に局所な部分（24-04）と、その裏返しの真空の測度の Poincaré 定数（24-05）の側にあります。

この節が言えている範囲：読みで、定理ではありません。指数の数は原典の当てはめと半古典の勘定で、$SU(2)$ ではちょうど境目の近くに落ちるので、$SU(2)$ について「割れる」かは決まっていません（§07）。原典の自己相関は熱浴・過緩和・HMC の力学の数で、リンクの Langevin の $C_P$ への読み替えは仮定です（24-01 §06）。

04

## 四段のハードル

第 23 部は拡散型緩和時間の仮定を四段に分けました（23-03 §02）：一段目＝0+1 次元の二重井戸の経路の測度、二段目＝四次元格子の非可換ゲージ理論（格子間隔を止める）、三段目＝連続極限と OS 公理、四段目＝極限での質量ギャップ。表 2 は、各段のハードル・既知の到達点・この本の道具で届くか・費用の種類を一枚にしたものです。費用の種類は三つです。「週」＝既存の道具の組み合わせで作業を重ねれば届く見込み、「年」＝既存の道具の大きな拡張か、大きな仕事の再構成が要る、「新しい数学」＝読んだ資料の中に道筋の記述が無い（この語は「なぜ三段目の数学が無いのか」という問いの言い方をそのまま借りたもの）。

表 2　四段のハードル（「届くか」と「費用の種類」は見立て。到達点の札は行の中）

| 段 | ハードル | 既知の到達点〔出典と札〕 | この本の道具で届くか | 費用の種類 |
|---|---|---|---|---|
| 一段目：0+1 次元の二重井戸 | 二重井戸の緩和時間の冪の言明を $\hbar \to 0$ で一様に。頂上の曲率の不足 $\frac{1}{4}$ を稀さで払う | 静的な側（トンネル分裂・相関長）は半古典で既知 典 。緩和時間の仮定の上の側は二重井戸の緩和時間の上界の命題（四条件の上の代数）まで、行ごとに初・典・機・仮が混在（23-12） | 部分的に届いている。残りは条件ごとの行（23-15 表 1） | 週（多くの行）。ただし $\hbar < 0.005$ の行は「別の方法」、頂上の一命題は「方法未定」で、見積もりが無い |
| 二段目：四次元格子・非可換 | 弱結合（大きな $\beta$）での相関の指数減衰（格子の質量ギャップ）を体積に一様に。上界の仮定と緩和時間の下界の仮定 | 強結合（小さな $\beta$）では定理（Osterwalder–Seiler 1978 典 （書誌と二次資料））。階層模型では全ての $\beta$ で閉じ込め（Ito 1985 典 （要旨））。弱結合の実格子では未解決（格子の相関長の問題、Chatterjee の Problem 5.1） | 階層模型の中では静的な側は既知で、動的な側（座標と保存、24-02 §02）は届く範囲。実格子の弱結合は届かない（閉じ込めの尺度を横切ることそのもの、§05 の尺度をつなぐ展開の欠如） | 週（階層模型の動的な側）／「新しい数学」（実格子の弱結合） |
| 三段目：連続極限と OS 公理 | 格子間隔 $\to 0$ の極限の存在・一意性・無限体積・OS 公理・非自明性 | 2026-11-10 に公開された構成：四次元の Wilson の格子の極限として Wightman の公理を満たす理論を、任意のコンパクト単純群で作る Lean の形式化（Lean で証明されている、と委員会が評価した 典 ）。周期の立方の箱の連続極限と、体積の部分列による無限体積の極限。無限体積の極限の収束と一意性は示されていない（6-04）。それより前の到達点：有限体積の格子の紫外安定性（三・四次元、Balaban の Commun. Math. Phys. 1983–89 の 13 本 典 （書誌と、他の資料の本文の記述））。赤外切断つき・軸ゲージの Schwinger 関数（Magnen–Rivasseau–Sénéor 1993 典 （序を本文で））。三次元の測度ですら有限の箱で未構成（Chevyrev 2022 典 ） | この本の道具では届かない。存在の部分は公開された構成から引用する（第二巻）。残る項目（無限体積の極限の収束と一意性・連続の理論の確率測度）は 6-04 | （存在の部分は公開された構成。残る項目は「新しい数学」の見込み） |
| 四段目：極限での質量ギャップ | 体積に一様な隙間 $\Delta > 0$ | 無い。問題文は「体積に一様な質量ギャップには新しい考えが要る」と書く（Jaffe–Witten §6.5 典 ）。数値では $SU(3)$ の最も軽いグルーボールが弦張力の平方根の $3.405(21)$ 倍（Athenodorou–Teper 2021 典 ）で、有限個の格子間隔と有限の箱からの外挿。公開された構成にも一様な質量ギャップは無い（在るのは多項式の評価、6-04） | 届かない。片側の橋（23-01 §06）は形だけ持ち上がる見込み 見 | 「新しい数学」 |

表 2 の三段目の費用は、公開された構成より前には、無次元の結合という源と大域のゲージ固定の欠如について「年」と見積もっていました。この見積もりは資料の記述に依ります 見 ：

Rivasseau 2000 の「Balaban の結果を簡潔にし書き直せ。数百頁に及ぶので小さな仕事ではない」、Dimock の再構成が三次元の $\phi^4$ から始めて、三次元の QED の分配関数の安定性に十年あまりで届いたこと（要旨）。尺度をつなぐ展開の欠如には、費用の見積もりを支える資料がありません。一段目の行の費用は 23-15 §03 の見積もりのとおりで、「週」と書いた行にも走らせた見積もりは一つもありません。

この節が言えている範囲：既知の到達点の行は出典の札のとおりです。「届くか」と費用の種類は見立てで、届かないと書いた段について「不可能」とは言いません。

05

## なぜ三段目が長く開いていたか

この節は、2026-11-10 に公開された構成より前に読んだ一次資料の記述の整理です。2026-11-10 に、四次元の Wilson の格子の極限として Wightman の公理を満たす理論を作る Lean の形式化と、委員会の評価書が公開され、三段目の存在の部分は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」水準に入りました（第二巻、6-00）。示されていないのは、無限体積の極限の収束と一意性、連続の理論の確率測度、一様な質量ギャップ、Wilson ループと面積則、一粒子の状態です（6-04）。以下の要約と表 3 は、その構成より前の到達点と、難しさの源の読みとして残します。

まず十三行で要約します〔三〕。

1. 三段目は「格子を細かくした極限に一つの確率測度があり、それが OS 公理を満たす」ことです。公開された構成より前に一次資料に在った定理は、有限の箱の中で、格子をどれだけ細かくしても粗視化した理論が暴れない、という一様な評価（Balaban の紫外安定性）までです。
2. そこから先には、相関関数の評価・極限の一意性・箱を無限に広げること、の三つが別々に要りました。公開された構成は、周期の箱の連続極限と、体積の部分列による無限体積の極限を与えますが、無限体積の極限の一意性は示していません。三次元の非可換ゲージ理論の有限の箱の中の測度は、読んだ資料の範囲では構成されていません。
3. 難しさの一つ目は、四次元では結合が無次元であることです。三次元以下では尺度を細かくするほど相互作用が冪で弱まり、扱う発散は有限個で済みました。四次元では一段ごとの補正が冪で縮まず、無限個の段の補正を、段の数に依らない形で全部制御しなければなりません。
4. 二つ目は、漸近自由が「短い距離でだけ」効くことです。短い距離では結合が小さく、自由場の周りの展開が使えます。長い距離では結合が大きくなり、閉じ込めの尺度 $\Lambda$ が現れます。

5. この $\Lambda$ は結合のどの次数の展開にも現れないので、短い距離から展開を延ばしても届きません。結合が大きい側で収束する強結合展開は、格子間隔が大きい側でしか使えず、連続極限に届きません。二つの展開の間の尺度を横切る道具がありません。
6. 三つ目は、非可換のゲージ不変性です。全ての配位で同時に効く連続なゲージ固定が存在せず（Gribov・Singer）、Balaban は尺度ごと・場所ごとにゲージを選び直しました。
7. 場が大きい所では展開が使えず、そこは「起こりにくい」ことで押さえるしかありません。群の上では大きな場は必ず非凸になるので、凸性に頼る方法は使えず、稀さで払う方法が要ります（24-06）。
8. Magnen–Rivasseau–Sénéor（1993）は、長い距離に切断を置いたまま、軸ゲージで Schwinger 関数を構成しました。切断を外さない理由を、彼らは序で、結合が大きくなり閉じ込めの非摂動効果に入ること、その周りで展開できる易しい可解模型が無いこと、と書いています。
9. 格子の数値計算では、$SU(3)$ の最も軽いグルーボールの質量が弦張力の平方根の約 $3.41$ 倍と、連続極限へ外挿されています。
10. しかし数値は有限個の格子間隔と有限の箱からの外挿で、極限が存在すること・一意であること・箱の大きさに一様であることを示しません。
11. 四次元で非自明な相互作用を持つ場の理論は、漸近自由なものに限られると考えられています。$\phi^4$ 理論は四次元で自明（スケーリング極限が Gauss）であることが示されました。
12. その結果、公開された構成より前には、四次元で比べる相手になる「相互作用のある構成済みの理論」は一つも無く、ヤン–ミルズはその最初の例として求められていました。
13. この本が一段目（二重井戸）と二段目（階層的なゲージ模型）で出会った壁——頂上の凸性の不足を稀さで払うこと、群の上で凸性の仮定が立たないこと、隙間に映らない大域の量——は、三段目の三つ目の難しさの小さな版です。三段目では、その「稀さ」が長い距離で稀でなくなります 見 。

## 難しさの三つの源

表 3　難しさの源（事実の列は出典の札のとおり、「何が止まるか」は見立て）

| 源 | 事実（一次資料の記述） | 何が止まるか | この本の壁との対応 |
|---|---|---|---|
| 無次元の結合という源 — 結合が無次元で、全ての尺度が同じ重さで効く | 四次元で $g$ は無次元・四次の項は marginal（§01）。構成された模型は二・三次元の超くりこみ可能なものと、二次元の質量のある Gross–Neveu だけ（Rivasseau 2000 典 ）。$d=2,3$ は $d=4$ よりかなり易しい（Chevyrev 2022 典 ） | 無限個の段の補正を段数に一様に足し上げる必要。漸近自由は $g_j^2 \sim 1/(bj)$ で、和は対数でしか収束しない | 緩和時間の仮定を冪の文に置いたこと（$\ln \xi \sim \beta$ の因子） |

| 源 | 事実（一次資料の記述） | 何が止まるか | この本の壁との対応 |
|---|---|---|---|
| 尺度をつなぐ展開の欠如 — 紫外と赤外をつなぐ展開が無い | MRS 1993 の序の文（下）。「紫外極限の弱結合展開は低温展開とある程度矛盾する」「異なる展開・繰り込み群の異なる領域を貼り合わせる技法を発展させるべき」（Rivasseau 2000 典 ）。強結合展開は格子間隔の大きい側でしか収束しない（Chatterjee 典 ） | Balaban と MRS の制御は $g_j$ が小さい段だけで効き、$\Lambda^{-1}$ の尺度を横切る段に使える定理が無い | 一段目では頂上の配位が稀で、稀さという通貨があった。赤外では Gauss 近似の効かない配位が典型になり、その通貨が無い |
| 大域のゲージ固定の欠如 — 非可換のゲージ不変性 | 連続な大域のゲージ固定が無い（Gribov 1978・Singer 1978 典 （書誌のみ、中身は記憶））。Balaban は正則な配位の上で局所的・尺度ごとに固定し、群値の場の平均を別に定義した（論文の題）。大きな場の凸性が階層模型の外への主な課題（Bauerschmidt–Bodineau 典 ） | 大きな場を凸性で制御できず、稀さで払うしかない | 群の上の凸性の天井（24-06 の補題）。凸と非凸の場所が平らな $\phi^4$ と逆 |

三つの源の関係 見 ：無次元の結合という源は「何段あるか」（段数が無限で各段が同じ重さ）、尺度をつなぐ展開の欠如は「どの段で展開が切れるか」（閉じ込めの尺度）、大域のゲージ固定の欠如は「一段の中で何が足りないか」（凸性と大域のゲージ）。Balaban は有限体積の紫外の段で大域のゲージ固定の欠如を処理し、$g_j$ が小さい範囲で無次元の結合という源を処理しました。尺度をつなぐ展開の欠如には、読んだ資料のどれも手を付けていません。

### Balaban と MRS が止まった場所

**Balaban**。ゲージ理論の系列は Commun. Math. Phys. の 13 本（1983〜1989、格子の Green 関数の評価の一本を含む）で、頁を足すと約 426 頁です 典 （書誌で数えた。本文は取れていない）。到達点は、他の資料の本文の記述を合わせると次のとおりです。有限体積の格子で、ブロックスピン変換を任意に多く繰り返した後も、単位格子の上の有効作用が有界に留まること（紫外安定性）。そこから、滑らかにした Wilson ループのようなゲージ不変な量の極限が、コンパクト性による**部分列**で存在することは従うはずですが、**極限は一意とは限りません**（MRS 1993 の序の整理 典 ）。相関関数の評価・極限の一意性・無限体積・OS 公理・質量ギャップは、どの資料も Balaban の到達点に含めていません。

**MRS 1993**。示したのは、純 $SU(2)$ の四次元ヤン–ミルズの Schwinger 関数を、固定した赤外切断つき・紫外切断なしで、正則化した軸ゲージで、自明な位相の区画で構成することと、Slavnov 恒等式が非摂動的に成り立つことです。著者自身、収束の証明を全ての細部で与えたとは主張しない、詳しい概略だと書いています 典 （序を本文で確認、証明の本体は読んでいない）。止めた理由は序の次の文です（この本の訳）。

> 大きなゲージ変換の下の不変性や、インスタントンのような非自明な位相の効果は調べない。また赤外切断を外そうとはしない。それは結合定数の大きな値に、おそらく閉じ込めに対応するいわゆる非摂動効果につながるからである。これらの問題は今のところ私たちの構

> 成的方法の及ぶ範囲の外にある。とくに、周りで展開できる、これらの現象の易しい可解模型が無いからである。

引用の「私たち」は MRS の著者たちを指します。赤外切断を外さないので、OS 公理の全体も調べられない、と序は続けます。

### 対象・道具・理論・歴史

**対象が未定義**。問題文は「非自明な量子ヤン–ミルズ理論が $\mathbb{R}^4$ の上に存在し、質量ギャップを持つことを示せ」で、存在の部分に Wightman または OS と同じ強さの公理を求め、脚注でコンパクト性による弱い存在だけでは解とみなさないと書きます（Jaffe–Witten 典 ）。構成そのものが問題の中身で、構成が済んだ対象の性質を問う形になっていません。Douglas の 2004 年の報告も「量子ヤン–ミルズ理論の満足な数学的定義は無い」と書きます 典 。さらに、測度を置く空間が決まっていません。自然な空間はゲージ軌道全体の商で、非可換なら非線形の空間になり、状態空間の構成さえ自明でない。三次元ではすでに Gauss 自由場が線に制限できないほど特異で、二次元で使えたホロノミーの空間は使えない、と Chevyrev の総説は書きます 典 。二段目までの対象（格子の上の有限次元の確率測度）は定義済みで、その性質を問う数学があります。公開された構成より前には、三段目の対象は、どの空間にどの位相で置くかからして未定でした。「数字が無い」の一段手前に「対象が無い」があったのです 見 。公開された構成は、対象を相関の表（Schwinger 関数）と OS の空間として与え、連続の理論の確率測度は与えていません（6-04）。

**道具は Gauss の参照の周りの摂動**。構成された模型の多くは弱結合の領域で、クラスター展開と Mayer 展開とその多重尺度版で作られています（Rivasseau 2000 典 ）。繰り込み群の一段の解析は、場が 0 の周りの冪の摂動とテイラー近似に頼り、それは場が小さいときだけ良い近似です（Bauerschmidt–Brydges–Slade の本 典 ）。確率量子化の解の理論は、劣臨界性（$d < 4$）のもとで解が Gauss 自由場を不変測度に持つ確率熱方程式の摂動であることを使います（Chevyrev 典 ）。どれも「各尺度で Gauss 測度に近い」ことを入力にします。ヤン–ミルズの漸近自由は、この入力を**短い距離でだけ**与えます。長い距離では、Gauss の参照から出発する根拠が尽きます。四次元 $\phi^4$ では逆に長い距離で Gauss に近づくので同じ道具が効き、結論は自明でした。**四次元で道具の届く理論は自明になり、非自明であるべき理論には道具の入力が無い** 見 。

**小さいパラメータも凸性も無しに、無限個の尺度を横切る理論が無い**。読んだ範囲の多重尺度の定理は、どれも各段に小さいパラメータか凸性を置きます：小さな結合（階層と Euclid の $\phi^4_4$）、各段の条件つき測度の一様な凸性（Bauerschmidt–Bodineau）、収束する摂動展開（二次元の Gross–Neveu、書誌のみ）、小さな $g_j$ と大きな場の稀さ（Balaban・MRS） 典 。群に値をとる場では、凸性の仮定が弱結合の尺度で原理的に立ちません（24-06 の補題：直径 $D$

のコンパクトな多様体で $\mathrm{Hess}\, V \geq -K$ なら $\mathrm{osc}\, V \leq K D^2/2$）。**ゲージ不変性はこの制御を禁じます** 見 ：ゲージ不変な関数は軌道に沿って一定なので、軌道の向きに凸性（$\mathrm{Hess}\, V > 0$）を持てません。ゲージを固定して軌道の向きを消そうとすると、連続な大域の固定がありません。Balaban の局所の固定と MRS の二つのゲージの継ぎ目は、どちらも小さな場の領域でだけ効きます。軌道の空間の Riemann 幾何は記述されていますが（Singer 1981、書誌のみ）、その上の Gauss でもその摂動でもない測度を扱う一般論は、読んだ資料の中にはありません。

**歴史**。Balaban の仕事は「非常に印象的だが近づきにくい。結果が多くの出版物に散らばり、全ての議論の整合性を確かめるのは非常に難しい」と MRS の序は書き、Rivasseau 2000 は書き直しを未解決の問題に挙げます 典 。Dimock の再構成は「他の人々はこの方法を採り入れるのが遅かった」と書いて三次元の $\phi^4$ から始め（本文）、三次元の QED の分配関数の格子間隔に一様な評価に至っています（要旨） 典 。四次元の非可換の再構成は、公開された構成より前に読んだ資料の中にはありませんでした。中間の目標のうち、有限の箱 $T^4$ の上の構成は、公開された構成が周期の箱の連続極限として与えた、と委員会は評価しています。三次元の測度は、読んだ資料の範囲では空いています。別の数学を作る動きもあります。Wilson ループと確率論の言葉での定式化（Chatterjee）と、確率量子化でゲージ軌道の上の Markov 過程を作り不変測度の構成を開いた問題として掲げる道（Chandra–Chevyrev–Hairer–Shen、Chevyrev の総説）です 典 。どちらも格子の繰り込み群を延ばすのでなく、対象の置き場（状態空間）や構成の手段（確率力学）を作り直す向きです。ただし後者の鍵の条件 $d < 4$ は、この新しい道具も四次元でちょうど臨界になることを示しています。

この節が言えている範囲：一次資料の記述の整理と、源の対応づけ（見立て）です。Balaban の本文は取れていないので、到達点の記述は他の資料の本文を通したものです。Gribov と Singer の中身は記憶で、書誌だけを照合しました。

06

## 規則の候補について一段落

§04 の表の「新しい数学」を作るとしたら何を規則に置くか、という候補の一覧は 24-08 で扱います。ここでは一つだけ書きます 見 。尺度の公理化（粗視化の半群とその上の流れ）と、稀さで払う測度の類（良い集合の上では局所に凸・悪い集合は稀・悪い集合から戻る漂流・稀さはエントロピーの不等式を通してだけ払う）を組み合わせると、紫外の側で、粗視化の一段ごとに類が閉じる形が書けそうです。強結合の側では、群の曲率で払う型の道具が狭い範囲で効きます。**二つの間に、どちらの通貨も足りない「結合の窓」が残ります**。稀さの率は実効の結合に比例して閉じ込めの尺度で尽き、曲率の通貨はまだ足りない、という範囲です。この窓は、尺度をつなぐ展開の欠如（紫外と赤外をつなぐ展開が無いこと）を規則の言葉で言

い直したもので、新しい障害ではありません。階層的なゲージ模型は、紫外の側・窓・強結合の側の三つが一つの模型の中で揃う場所ですが、そこでの結果は四次元のヤン–ミルズに何も含意しません。

07

## 位相と箱 — この本の群 $SU(2)$ では未決

**周期の箱**。可逆な力学では $\tau_{\mathrm{int}}(Q) \le C_P$ なので（24-01 の (1)）、位相電荷の自己相関が $\xi^2$ より速く伸びれば上界の仮定は破れます（24-01 の (3)。Lean `LatticeGauge.FourDTrial.not_hup_of_fast_tau`、仮定：$\tau_n \le C_n \cdot c\,\xi_n^p \le \tau_n \cdot p > 2 \cdot \xi_n \to \infty$。陰性対照 `z_two_compatible_with_hup`、仮定なし：$\tau \propto \xi^2$ は上界の仮定と両立する）。周期の箱では $SU(3)$ 以上の原典がそう報告しているので、HMC と Langevin が同じ動的な普遍類という予想（原典では開いた境界の観察に付いた語）を周期の箱の位相の遅さへ延ばした読みの下で、**上界の仮定は周期の箱で偽と読めます** 仮 （23-01 §05 の注・24-01 §06）。

**開いた境界は有限の箱でしか救わない**。開いた境界では、物理の一辺を止めた箱の中で自己相関の伸びが $a^{-2}$ に戻ります。ただし箱の空間の一辺を止めて時間の向きの長さだけを延ばすと、$Q^2$ の自己相関時間は $42.1(2.5)$・$113(6)$・$148(10)$（時間の向きの長さ 24・48・80 の格子）とほぼ長さに比例して伸びます（Lüscher–Schaefer 2011 §5.3 典 ）。電荷が境界を通る輸送でしか出入りしないからで、先に体積を無限にするこの本の順では救いにならない見込みです 仮 （24-03 §05 と表 2）。

**$SU(2)$ は一次資料が一本で、$a^{-2}$ の側**。$SU(2)$ の純ゲージで位相電荷の自己相関の格子間隔への依存を測った一次資料は、探した範囲で一本です（Abe–Morikawa–Suzuki 2025：HMC・周期・物理の一辺が $2.2/\sqrt{\sigma}$ 程度の小さな箱・三つの格子間隔、$a^{-2}$ にかなりよく乗ると報告 典 ）。熱浴系の原典はどれも $SU(2)$ では凍結が測れるほど強くならない側の観察で、表 1 でも $SU(2)$ は除かれていました。§02 の二つの数え方は、どちらも $SU(2)$ を $z = 2$ の境目の近くに置きます。**したがって、この本の群 $SU(2)$ について、位相電荷の凍結が緩和時間の仮定を壊すかは決まっていません**。一次資料は境目かその下の側に寄っています 読 。

**24-02 の二次元の試験台との対応** 見 。二次元の $CP^{N-1}$ では、$\xi \approx 4$ で凍結は $N$ で割れ（$N = 21$ で強く凍り、$N = 2$ は凍らない）、局所の量の比は割れませんでした（24-02 §07、条件つきの一点の読み）。群の大きさの役をする $N$ で凍結の強さが割れることは、四次元で $SU(2)$ が境目に落ち $SU(3)$ 以上が明らかに越えることの二次元の類比として読めます。一次資料の二次元の勘定も「$z \sim N$」の型で、同じ議論が四次元の $SU(N)$ にも当てはまると書いています（Del Debbio–Manca–Vicari 2004 典 ）。ただし $N = 2$ には紫外の札（位相感受率の二つの定義が 13〜14% 違う）が付き、$N = 2$ が凍らないのは格子の尺度が位相電荷を決め

ている側だからかもしれません。類比はこの留保つきで、**二次元の結果は四次元に何も含意しません**。

この節が言えている範囲：「上界の仮定は周期の箱で偽と読める」は $SU(3)$ 以上の原典と予想を延ばした読みの上の文で、上界の仮定が偽であることは主張しません。$SU(2)$ については未決です。

08

## 物理の機構と、証明にならない理由

質量ギャップと閉じ込めを説明する物理の機構は多くあります。この本はどれも証明の道具として使いません。表 4 は、各機構が何を言い、なぜ証明にならないかを一行ずつ並べたものです。最後の行は、この本の 24-05 の主項の文を物理の言葉に寄せた見立てで、他の行と性格が違います。

表 4　物理の機構と、証明にならない理由（札：典＝本文か要旨で言明を確かめた・仮＝記憶）

| 機構 | 何を言うか | 証明にならない理由（一行） | 出所と札 |
|---|---|---|---|
| 強結合の面積則 | 強結合の格子では Wilson ループが面積で減り、自由なクォークは無い | 強結合の極限には回転（Euclid）不変性が無く、連続極限の側（弱結合）へは延びない | Wilson 1974 典 （要旨）。強結合の定理（Osterwalder–Seiler 1978）は 仮 （記憶） |
| 双対超伝導（可換射影・単極子の凝縮） | 非可換部分を先にゲージ固定すると $N-1$ 個の可換ゲージ場と単極子になり、単極子が凝縮すれば閉じ込め | 凝縮は示されておらず、射影はゲージの選び方に依る。凝縮で閉じ込めが記述される例は物質場を含む超対称の理論に摂動を加えたもので、純ゲージに当たらない | 't Hooft 1981・Seiberg–Witten 1994 典 （要旨）・Jaffe–Witten §6.6 典 |
| 中心渦 | 中心の元に値をとる渦が弦張力を担う | 最大中心ゲージと射影の上の格子の数値（「示唆する」の語）で、評価の不等式も極限の文も無い。't Hooft 1978 の代数は相を分類するが、どの相にあるかは決めない | Del Debbio–Faber–Greensite–Olejník 1997・'t Hooft 1978 典 （要旨） |
| インスタントンの希薄気体 | 作用 $8\pi^2/g^2$ の位相的な解のまわりの半古典の和で真空を近似 | 小さな $\rho$ でだけもっともらしく、$\rho$ が大きくなると（反）インスタントンが重なり実効の作用が変わる。隙間の生まれる尺度で近似の前提が崩れる | BPST 1975・'t Hooft 1976・Callan–Dashen–Gross 1978 典 （要旨）・Lucini–Teper 2001 §6 典 （本文）。大きさの積分の赤外の発散は 仮 （記憶） |
| 大 N・弦との双対 | 平面図形が支配し、$1/N$ が弦の結合定数の役をする | 摂動級数の並べ替えか予想で、$N$ が有限への戻り方が無い。問題文も「十分大きな $N$ では出発点かもしれない」としつつ、フェルミオンの無いゲージ理論への有効な道は無いと書く | 't Hooft 1974・Witten 1979 典 （要旨）・Jaffe–Witten §6.6 典 |

| 機構 | 何を言うか | 証明にならない理由（一行） | 出所と札 |
|---|---|---|---|
| 軌道の空間の曲率 | ゲージ軌道の空間の曲率と波動汎関数のゲージ不変性から、励起が有限のエネルギーを持つ | Feynman 自身が定性的・示唆的な議論と書き、3+1 次元は論じない。Singer は幾何の記述で、ハミルトニアンの下界の文は無い。言葉は Bakry–Émery（曲率の下界から隙間）に最も近い 見 | Singer 1981・Feynman 1981 典 （要旨）・Jaffe–Witten §6.6 典 |
| （この本の見立て）グルーボールは色の一重項の二粒子 | 真空の測度の側で、ゲージ不変な最低の試験の空間は $SU(2)$ では一粒子に無く、二粒子（二次のカオス）にある（24-05 §05） | 主項（$g \to 0$・三色の独立なガウス）の文で、$g$ が有限の値については何も言わない。無限体積では主項の右辺も 0 へ行く。グルーボールとの対応そのものが見立て | 24-05 の (7)(8) 初 （主項）・対応は 見 |

この節が言えている範囲：各行の「何を言うか」は原典の要旨か本文の写しで、どの機構の正否も判定しません。

09

## 言えないこと

(a) 正体の候補。§03 の「遅い量と相関長が別の起源に割れる」は見立てです。転位の作用の比 $c$ の値も、それが群に依らないことも確かめていません。$SU(2)$ は二つの数え方のどちらでも境目の近くに落ちます。

(b) 機構。表 4 のどの機構も、この本は証明の道具として使いません。

(c) 二次元。二次元の模型（$U(1)$ の帯・$CP^{N-1}$）の結果が四次元の何を含意するかは言いません。

(d) 四次元でだけ、とは言わない。二点は臨界次元にいることの性質として述べました。

(e) 表 2。「届くか」と費用の種類は見立てと見積もりで、「新しい数学」は読んだ資料の中に道筋の記述が無いことを指し、不可能を意味しません。

(f) 資料。§05 は読んだ一次資料の範囲の整理で、Balaban の本文・Gribov・Singer・Osterwalder–Seiler の本文は取れていません。「無い」と書いた理論は「読んだ資料の中に無い」の意味で、§05 は 2026-11-10 の公開より前の資料の整理です。

(g) $SU(2)$。この本の群 $SU(2)$ について、位相電荷の凍結が緩和時間の仮定を壊すかは決まっていません。上界の仮定が偽であることも主張しません。

10

## 五分類の表と依存グラフ

表 5　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 | 機械検査 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 四次元で $g^2$ は無次元・四次の項は marginal（(1)） | 典 | §01 | — | — |
| 2 | 次元転移 (2)（一ループ） | 典 | 4-07 | 一ループ | — |
| 3 | $\phi_4^4$ のスケーリング極限は Gauss | 典 | Aizenman–Duminil-Copin（要旨） | 最近接・格子切断 | — |
| 4 | Balaban の紫外安定性（有限体積・格子・部分列） | 典 | 書誌と他の資料の本文 | 三・四次元・有限体積 | — |
| 5 | MRS の構成（赤外切断・軸ゲージ・$SU(2)$・自明な区画・概略） | 典 | 序を本文で | 固定した赤外切断 | — |
| 6 | 三次元の測度も未構成・解の理論は $d<4$ が鍵 | 典 | Chevyrev の総説 | — | — |
| 7 | $8\pi^2/g^2$・$D(\rho)\propto \rho^{11N/3-5}$・(3) | 典 | §02 | 一ループ | — |
| 8 | 表 1 の当てはめ（$SU(3)$ で $6.82(7)$） | 典 | 表 1 | 熱浴と過緩和・周期 | — |
| 9 | $SU(2)$ の一次資料一本（$a^{-2}$ に近い） | 典 | §07 | HMC・小さな箱・三点 | — |
| 10 | 開いた境界の $Q^2$ の自己相関が時間の向きの長さに比例 | 典 | §07 | $SU(3)$・物理の一辺を止めた箱 | — |

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 | 機械検査 |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | $\tau \geq c\xi^{p}$（$p > 2$）なら上界の仮定は破れる | 初 | 24-01 の (3) | $\xi \to \infty$ の列 | `LatticeGauge.FourDTrial.not_hup_of_fast_tau`（仮定：$\tau_n \leq C_n \cdot c\xi_n^{p} \leq \tau_n \cdot p > 2$）・陰性対照 `z_two_compatible_with_hup`（仮定なし） |
| 12 | 予想を周期の箱の位相の遅さへ延ばした読み | 仮 | 24-01 §06 | 周期の箱 | — |
| 13 | 周期の箱で上界の仮定は偽と読める（$SU(3)$ 以上） | 仮 | §07 | 周期の箱 | — |
| 14 | 先に体積を無限にする順では開いた境界は救いにならない | 仮 | 24-03 §05 | 無限体積 | — |
| 15 | 二つの数え方で $SU(2)$ は $z = 2$ の境目の近く | 見 | §02 | 半古典 | — |
| 16 | $SU(2)$ で凍結が緩和時間の仮定を壊すかは未決 | 見 | §07 | — | — |
| 17 | 遅い量と相関長が別の起源に割れる（二点の見立て） | 見 | §03 | — | — |
| 18 | 二点は臨界次元の性質（四次元でだけとは言わない） | 見 | §01 | — | — |
| 19 | 難しさの三つの源とその関係 | 見 | §05・表 3 | 読んだ資料の範囲 | — |
| 20 | 「結合の窓」は尺度をつなぐ展開の欠如の言い直し | 見 | §06 | — | — |
| 21 | 四段の表の「届くか」と費用の種類 | 見 | 表 2 | — | — |

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 | 機械検査 |
|---|---|---|---|---|---|
| 22 | 二次元の $N$ の割れは $SU(2)$ の境目の類比 | 見 | §07 | 二次元・$N=2$ に紫外の札 | — |

機械検査の欄が保証するのは実数の列の代数だけで、$\tau_n$ が可逆な力学の自己相関時間であること、$C_n$ が Wilson 測度の Poincaré 定数であることは Lean の外です（23-13）。

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  典  四次元で g² は無次元・marginal
 2  典  次元転移 Λ = μ e^(−1/(2b₀g²))                    ―ループ
 3  典  φ⁴₄ の極限は Gauss
 4  典  Balaban の紫外安定性（部分列・一意性なし）      有限体積
 5  典  MRS 1993（赤外切断・軸ゲージ・SU(2)・概略）
 6  典  三次元の測度も未構成・d < 4 が鍵
 7  典  8π²/g²・D(ρ) ∝ ρ^(11N/3−5)・(3)
 8  典  SU(3) の当てはめ 6.82(7)                          熱浴・周期
 9  典  SU(2) の一次資料一本（a⁻² に近い）              HMC・小さな箱
10  典  開いた境界の τ(Q²) が時間の長さに比例           物理の一辺を止めた箱
11  初  τ ≥ cξ^p（p > 2）⇒ 上界の仮定は破れる          Lean not_hup_of_fast_tau
12  仮  予想を周期の箱へ延ばした読み
13  仮  周期の箱で上界の仮定は偽と読める ⟸ 8・11・12  SU(3) 以上
14  仮  無限体積を先に取る順で開いた境界は救わない ⟸ 10
15  見  SU(2) は z = 2 の境目の近く ⟸ 7・8
16  見  SU(2) で凍結が緩和時間の仮定を壊すかは未決 ⟸ 9・15
17  見  遅い量と相関長が別の起源に割れる ⟸ 1・2・7
18  見  臨界次元の性質 ⟸ 1・3
19  見  難しさの三つの源 ⟸ 1・2・4・5・6
20  見  結合の窓は尺度をつなぐ展開の欠如の言い直し ⟸ 19
21  見  四段の表の「届くか」と費用 ⟸ 4・5・6・19
22  見  二次元の N の割れは SU(2) の境目の類比 ⟸ 15・16
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。この章の結論の節点（周期の箱で上界の仮定は偽と読める、から先）は「仮」か「見」で、質量ギャップの節点も、連続極限の節点もありません。$SU(2)$ の一次資料の節点は「凍結が緩和時間の仮定を壊すかは未決」の節点にだけ入り、周期の箱の節点の前提には入りません。$SU(2)$ の読みが決まっていないことのグラフの上の姿です（24-01 の依存グラフと同じ形）。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 典 四次元で結合が無次元であること・次元転移・$\phi^4_4$ の自明性・インスタントンの作用と一ループの密度・原典の当てはめ | $\beta$ と格子間隔の関係の数学の証明。$\Lambda$ の定数倍が質量ギャップであること |
| 典 三段目の到達点（2026-11-10 に公開された構成の周期の箱の連続極限、委員会の評価の水準。それより前の Balaban の紫外安定性・MRS の赤外切断つきの構成）と、MRS が止めた理由の序の文 | Balaban の本文の確認。無限体積の極限の収束と一意性・連続の理論の確率測度・一様な質量ギャップ（公開された構成にも無い） |
| 仮 周期の箱で上界の仮定は偽と読める（$SU(3)$ 以上・予想を延ばした読み） | 上界の仮定が偽であること。$SU(2)$ での同じ読み |
| 見 二点の見立て・難しさの三つの源・結合の窓・四段の表の「届くか」と費用・二次元の類比 | どれも定理ではない。二次元の結果の四次元への含意 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 問題文と状況報告 | 典 | A. Jaffe, E. Witten, Quantum Yang–Mills Theory, Clay Mathematics Institute (2000)（§6・§6.5・§6.6・脚注 2 を本文で確認）。M. R. Douglas, Report on the Status of the Yang–Mills Millenium Prize Problem (2004)（本文） |
| 構成的場の理論の現状 | 典 | V. Rivasseau, Constructive field theory and applications: perspectives and open problems, arXiv:math-ph/0006017（II・VI を本文で確認。雑誌の巻頁は記憶）。S. Chatterjee, Yang–Mills for probabilists, arXiv:1803.01950（§3・§5・§6 を本文で）。I. Chevyrev, Stochastic quantisation of Yang–Mills, arXiv:2202.13359（§1・§3・§4 を本文で） |
| Balaban の系列 | 典（書誌） | T. Balaban, Commun. Math. Phys. 89 (1983) 571; 95 (1984) 17; 96 (1984) 223; 98 (1985) 17; 99 (1985) 75; 99 (1985) 389; 102 (1985) 255; 102 (1985) 277; 109 (1987) 249; 116 (1988) 1; 119 (1988) 243; 122 (1989) 175; 122 (1989) 355（書誌を照合、本文は取れていない。頁は書誌から数えた） |
| MRS 1993 | 典 | J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, Construction of $YM_4$ with an infrared cutoff, Commun. Math. Phys. 155 (1993) 325–383（序を本文で確認、引用はこの本の訳） |
| 再構成 | 典 | J. Dimock, The renormalization group according to Balaban I, arXiv:1108.1335（序を本文で）。同じ著者の三次元の QED の概観 arXiv:2204.07201（要旨） |
| 冪の数え・赤外の漸近自由・大きな場 | 典 | R. Bauerschmidt, D. C. Brydges, G. Slade, arXiv:1907.05474（定義 5.2.1・赤外の漸近自由の命題・§7 を本文で）。R. Bauerschmidt, T. Bodineau, arXiv:1809.02075（序と §2 を本文で） |
| $\phi^4_4$ の自明性 | 典 | M. Aizenman, H. Duminil-Copin, Ann. of Math. 194 (2021) 163–235（要旨。7-08 の出典表） |
| (2) の一ループの形 | 典 | 4-06・4-07 の出典表 |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| インスタントン・(3)・表 1 | 典 | A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, Yu. S. Tyupkin, Phys. Lett. B 59 (1975) 85（要旨）。A. Athenodorou, M. Teper, JHEP 12 (2021) 082（§6.2・式 (32)(34)・表 42・43 を本文で）。B. Lucini, M. Teper, JHEP 06 (2001) 050（§6 を本文で）。M. Lüscher, JHEP 08 (2010) 071（§4.3 を本文で） |
| 位相電荷の自己相関・開いた境界 | 典 | M. Lüscher, S. Schaefer, JHEP 07 (2011) 036（§3・§5.3 を本文で）。M. Abe, O. Morikawa, H. Suzuki, PTEP 2025 063B03（§3.2 と図 6 の文を本文で、図の数値は読んでいない）。L. Del Debbio, G. M. Manca, E. Vicari, Phys. Lett. B 594 (2004) 315（本文） |
| ゲージ固定の大域の障害 | 典（書誌のみ） | V. N. Gribov, Nucl. Phys. B 139 (1978) 1。I. M. Singer, Commun. Math. Phys. 60 (1978) 7。中身は記憶 |
| 表 4 の機構 | 典 | K. G. Wilson, Phys. Rev. D 10 (1974) 2445。G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 190 (1981) 455。N. Seiberg, E. Witten, Nucl. Phys. B 426 (1994) 19。L. Del Debbio, M. Faber, J. Greensite, S.ˇOlejník, Phys. Rev. D 55 (1997) 2298。G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 138 (1978) 1。G. 't Hooft, Phys. Rev. D 14 (1976) 3432。C. G. Callan, R. F. Dashen, D. J. Gross, Phys. Rev. D 17 (1978) 2717。G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 72 (1974) 461。E. Witten, Nucl. Phys. B 160 (1979) 57。I. M. Singer, Phys. Scripta 24 (1981) 817。R. P. Feynman, Nucl. Phys. B 188 (1981) 479（どれも要旨で確認）。K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（書誌のみ） |
| グルーボールの数値 | 典 | A. Athenodorou, M. Teper, JHEP 12 (2021) 082（表 24・33） |
| 上界の仮定が破れる一行の代数 | Lean | LatticeGauge.FourDTrial（`not_hup_of_fast_tau`・`z_two_compatible_with_hup`）。束が保証するのは実数の列の代数だけ |

**この章で使った語** — 臨界次元・marginal・次元転移・赤外の漸近自由・インスタントン・転位・四段のハードル・難しさの三つの源・紫外安定性・結合の窓・双対超伝導・中心渦。意味は A-02 用語集 と 24-09 にあります。

次に読む章：24-08 問いと、主張しないこと — 卒業研究の大きさで決着のつく問いと、規則の候補の一覧、第 24 部が主張しないこと。

# 問いと、主張しないこと

この章は未解決の問いの地図です。閉じた部品と閉じない部品の境を示します。

**この章で分かること** — 第 24 部の各章が残した問いを一つの表にし（済み・一部済み・未・新、と決着したら動くもの・決着しても動かないもの）、「新しい数学を作るなら何を規則に置くか」という問いへの規則の候補を一覧にし、第 24 部が主張しないことを十六行にして、それぞれを本文のどの章のどの文が支えるかを対応させます。

**前提となる章** — なし。どこから読んでもよい章です。三つの意味（示さない・強く読まない・偽とも言わない）は 23-16 §01 のとおりに使います。記号は 24-09。

**先に言うこと** — 水準は〔二〕〜〔三〕です。この章は新たな結果を足しません。問いの表は問いで、主張はありません。規則の候補は候補で、どれも三段目（連続極限と OS 公理）を閉じる見込みを約束しません。第 23 部の「主張しないこと」（23-16）は、この部にもそのまま効きます。

この章の順序

1. 問いの表 — 十九の問い・状態・決着しても動かないもの（表 1）
2. 規則の候補の一覧 — 六つの候補と三つの組み合わせ・難しさの源との関係（表 2・表 3）
3. 主張しないこと — 十六の項目と、それを支える本文の文（表 4）
4. 第 23 部との関係

---

01

## 問いの表 — 卒業研究の大きさで決着のつく問い

表 1 は、第 24 部の各章が残した問いです。「大きさ」は決着に要る作業の種類（紙・読む・計算・Lean）で、時間の見積もりではありません。各行に「決着しても動かないもの」を必ず書きました。問いが決着しても、質量ギャップの問題は動きません。状態の「済み」は、この部の本文がその問いに答えた（条件つきで）という意味で、答えの札は右の章にあります。

表 1　第 24 部の問い（状態：済み・一部済み・未・新〔この部の執筆で足した問い〕）

| 問 | 問い | 大きさ | 状態 | 決着したら動くもの | 決着しても動かないもの | どの章から |
|---|---|---|---|---|---|---|

| 問 | 問い | 大きさ | 状態 | 決着したら動くもの | 決着しても動かないもの | どの章から |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **自由場の局所励起の比べ**：自由場で、箱に台を持つ観測量の励起のエネルギーの比べ（局所の励起のモーメントの仮定を計算する） | 紙 | 済み：モーメントの形で、自由場は $\gamma = d\pi^2$ で成り立つ | 局所の橋の係数の形 | 相互作用のある模型での局所の励起のモーメントの仮定 | 24-04 §05 |
| 2 | **窓の因子の単調性の問い**：窓の因子 $\varphi(x)/x^2$ の単調性 | 初等・Lean | 済み：$x > 0$ で狭義減少（Lean `wr_strictAntiOn`、仮定なし） | 窓の閾の陽な形 | 何も（定数の形だけ） | 24-04 §03 |
| 3 | **Polyakov ループの符号の問い**：小さな周期の箱の Polyakov ループの符号（答えの分かった遅い区画の量）で、静的な比 $\mathrm{Var}/\mathcal{E}$ が遅さを捕まえるか | 小さな計算 | 未 | 静的な試験関数の方法の陽性対照 | 位相電荷の判定 | 24-01 §02 |
| 4 | **二次元の層の U(1) の隙間**：二次元の層のコンパクトな $U(1)$ で、帯を伸ばしたとき隙間が $M^{-2}$ で下がり続けるか飽和するか（保存が壊れる長さの非線形の値） | 計算 | 済み：幅 2 の帯・外周凍結・$\beta = 2..6$ の五点で $\ell_c \propto e^{0.916\beta}$（読み） | 保存が壊れる長さの非線形の値 | 四次元の $\ell_*$ | 24-02 §03 |
| 5 | **位相電荷の自己相関の資料**：$SU(2)$ の純ゲージの位相電荷の自己相関の一次資料（無ければ物理の体積を止めた小さな測り） | 読む・計算 | 一部済み：一次資料は一本（HMC・小さな箱・$a^{-2}$ に近い）。小さな測りは未 | $SU(2)$ の行の札（境目か、明らかに $\xi^2$ より速いか） | HMC と Langevin の関係の予想 | 24-07 §07 |
| 6 | **二つの射影の補題の多族版**：二つの射影の補題の多族版（$d$ 次元の箱の $2^d$ 色の族）と、その最大相関の条件 | 紙 | 未 | 四次元の箱の帰着の節点 | 最大相関の $\beta$ に一様な評価 | 24-03 §06 |
| 7 | **一リンクの重みの Hessian**：$SU(2)$ の上で熱核と畳み込んだ一リンクの Wilson の重みの $\inf \mathrm{Hess}\, V_t$ と、悪い集合の重さの流れ（類関数の一変数） | 紙＋小さな計算 | 未（稀さで払う測度の類の最初の一歩） | 群の上の Polchinski 流の最初の数・類が一段で閉じるか | 階層模型でない格子・多段で一様に閉じること | 24-06 §07 |

| 問 | 問い | 大きさ | 状態 | 決着したら動くもの | 決着しても動かないもの | どの章から |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | **転送作用素での刻みの比べ**：Wilson の転送作用素で、時間の刻みの比べの仮定（論文「片側の橋」の (D)。隣の時刻の増分と勾配の比べが $\beta$ に一様）を低いエネルギーに切った関数に限って示す | 紙 | 未 | 有限体積の窓の橋を Wilson の時間を刻む格子へ | 無限体積 | 24-04 §08 |
| 9 | **$\tau_{\mathrm{int}}$ と $C_P$ の Lean**：有限状態の可逆な Markov 連鎖で、$\tau_{\mathrm{int}} \le C_P$ と基底状態変換の恒等式（隙間と真空の測度の命題の代数）を、確率の対象から定義して Lean で閉じる | Lean | 未 | 対象そのものを型にした形式化の一例（23-13 の別の形の検査） | 経路の測度・連続の場 | 24-05 §01 |
| 10 | **$\mathrm{CP}^{N-1}$ のモードの読み直し**：二次元 $CP^{N-1}$ の局所のモードと位相のモードの自己相関を、局所の拡散型緩和時間の仮定（索引は A-06）の目で読み直す | 読む・計算 | 一部済み：文献は読んだ。試験台の測りは一つの体積・一つの相関長の条件つきの読みまで | 試験台の材料 | 四次元 | 24-02 §07 |
| 11 | **二次元 SU(2) のループの族**：二次元 $SU(2)$（プラケットが独立）で、ループの族の $\lambda_W$・$\Gamma$ を有限の $\beta$ で求める | 計算 | 新 | 色の一重項の閾の $\beta$ 依存 | 四次元の値 | 24-04 §06 |
| 12 | **四次元の大きいループの値**：四次元の箱で、差し渡しの大きさのループ（平らでないもの・投げ縄の積を含む）の族の値 | 計算 | 新 | 色の一重項の参照の四次元の値 | 対象の測度の比 | 24-04 §06 |
| 13 | **キンクの位置への還元**：0+1 の二重井戸で、キンクの位置を座標にした一次元への還元で局所の比を挟む | 紙＋小さな計算 | 新 | 窓を横切る運動の定数 | 四次元の比 | 24-04 §07 |
| 14 | **帯の β=7 の一点**：帯の $\beta = 7$ を一点足し、生の率の傾きが $2 - 1/\beta$ に乗り続けるか、$\ell_c$ の傾きが収まるか | 計算 | 新 | 二次元の帯の傾きの確かさ | 四次元 | 24-02 §05 |

| 問 | 問い | 大きさ | 状態 | 決着したら動くもの | 決着しても動かないもの | どの章から |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | **閾と 1 の間の帯の質量**：比が閾と 1 の間の帯 $[K_*, 1)$ に入る場について、比の形のままで質量を見る別の議論があるか（Jensen と Dirichlet の試験関数の外） | 紙 | 新 | 未決の帯の扱い | 相互作用のある場の比の値 | 24-04 §06 |
| 16 | **時間を刻む格子の窓の橋**：Wilson の時間を刻む格子で、窓の版の橋（窓の中の上限の命題と有限体積の下界）を時間の刻みの比べの仮定の下で書く | 紙 | 新 | 窓の橋の格子の版 | 無限体積 | 24-04 §03 |
| 17 | **区画の分け方の frustration-free**：Kogut–Susskind のハミルトニアンを区画にまとめて分けたとき、frustration-free になるか | 紙 | 新 | 局所から大域への隙間の定理が当たるか | 弱結合の隙間 | 24-05 §04 |
| 18 | **$\mathbb{CP}^{N-1}$ の試験台の拡張**：$CP^{N-1}$ の試験台で、別の乱数の種と $N$ の残りの組を足し、位相のモードの遅さの指数を二点目の相関長で読む | 計算 | 新 | 凍結が $N$ で割れる読みの確かさ | 四次元 | 24-02 §07 |
| 19 | **部分領域の電荷の保存の長さ**：保存が壊れる長さの定義 (2)（比が飽和の値の半分に届く最小の $R$）を、四次元の部分領域の電荷で測る | 計算 | 新 | 四次元の保存が壊れる長さの最初の値 | 拡散型緩和時間の仮定の真偽 | 24-02 §01 |

どの問いも、決着すれば一つの章の一つの行の札が動きます。質量ギャップ・拡散型緩和時間の仮定・緩和時間の上界の仮定の真偽は、どの問いの決着でも動きません。

02

## 規則の候補の一覧 — 「新しい数学を作るなら、何を規則に置くか」

第 24 部の考察は、「新しい数学を作るなら、何を数学の規則にすればよいか」という問いにも行き当たりました（24-07 §06）。命題の意味を捨てて等式の規則だけを残したブール代数のように、繰り込みや連続極限の性質を規則に置いた体系を組み立てるとしたら、どう組めるか。表 2 はその候補の一覧です。**全ての行は候補**で、無矛盾性も、既存の結果を言い直せることも確かめていません 見 。ブール代数の喩えは組み立て方の比喩で、数学の主張ではありません。

どの候補も同じ形で書けます：既存の枠組みの仮定を一つ外し、代わりの規則を置く。外すものと置くものを各行の一行に縮め、問いを一つと、その問いが決着しても動かないものを添えました。

表 2　規則の候補（各一行・問い一つ）見

| 規則 | 規則の候補（一行） | 問い（一つ） | 決着しても動かないもの |
|---|---|---|---|
| 尺度の公理化の規則 | 粗視化の半群・局所性・ゲージ共変・縮む方向と周辺の方向・大きな場の重み | 階層的な $SU(2)$ 模型で、五つの規則のうちどれが当たり、どれが当たらないか | 階層でない格子・連続極限 |
| ループの代数の規則 | 有界・Mandelstam の恒等式・正値と反射正値・ループ方程式（接続を捨て、ループの値を残す） | 二次元 $SU(2)$ の格子で、四つの規則を満たす状態は有限の $\beta$ で一つに決まるか | 三次元以上の連続のループの定義 |
| 保存量と区画の規則 | 分散の分解・挟み $C_{\mathrm{trans}} \le C_P \le \sup C_P^{\mathrm{sec}} + C_{\mathrm{trans}}$・局所の窓・二つの長さ（24-03 §04） | 挟みの $C_{\mathrm{trans}}$ を、区画の間の縮約した鎖の量で書けるか | 構成（三段目） |
| 稀さの類の規則 | 良い集合の上の局所の凸性・悪い集合の稀さ・戻る漂流・エントロピーの通貨（24-06 §07） | 一リンクの Wilson の重みを熱核と一段畳み込んで、類の母数がどう写るか（問い「一リンクの重みの Hessian」） | 多段で一様に閉じること |
| 漸近自由の公理の規則 | 尺度の変換・単調な結合・紫外で自由場・次元転移（赤外には何も置かない） | 紫外で自由場に近づく規則から、局所の比が短い距離で 1 に近づくことが従うか | 赤外・質量ギャップ |
| 曲率の規則 | ゲージ軌道の空間の上の Bakry–Émery | 一つのプラケットの軌道の空間で、商の曲率の項は強結合の範囲を広げるか | 弱結合 |
| 尺度の公理化の規則＋稀さの類の規則 | 粗視化の一段で閉じる稀さの類 | 階層的な $SU(2)$ 模型で、紫外の側の類の閉じ方と強結合の道具の間に残る結合の窓の幅はいくらか | 四次元の窓 |
| 保存量と区画の規則＋稀さの類の規則 | 区画つきの稀さの類（区画の中の定数と、区画の間の遷移の率の大きい方で挟む Eyring–Kramers の型） | 二次元 $U(1)$ の帯で、隙間の上界が「区画の中」と「遷移の率」の大きい方で挟めるか | 四次元の位相電荷 |
| ループの代数の規則＋保存量と区画の規則 | ループの代数に区画を入れる（状態の集合の端点への分解を区画と読む） | ループの規則の解が一つでないことと、相（区画）が複数あることは対応するか | 弱結合での一点性 |

難しさの三つの源（24-07 表 3：無限個の段を段数に一様に制御すること〔無次元の結合という源〕・紫外と赤外をつなぐ展開が無いこと〔尺度をつなぐ展開の欠如〕・大局的なゲージ固定が無く大きな場が凸性で制御できないこと〔大域のゲージ固定の欠如〕）との関係を表 3 にします。

表 3　規則の候補と難しさの三つの源（「効く」は規則の言葉がその源を扱えるという意味で、源を越えるという意味ではない）見

| 候補 | 無次元の結合という源（段数に一様） | 尺度をつなぐ展開の欠如（紫外と赤外） | 大域のゲージ固定の欠如（ゲージと大きな場） |
|---|---|---|---|
| 尺度の公理化の規則 | 効く（言葉そのもの） | 効かない（結合が $O(1)$ で領域を出る） | 半分（群の重みが未定式化） |

| 候補 | 無次元の結合という源（段数に一様） | 尺度をつなぐ展開の欠如（紫外と赤外） | 大域のゲージ固定の欠如（ゲージと大きな場） |
|---|---|---|---|
| ループの代数の規則 | 効かない（連続のループの定義に戻る） | 形の上では効く（全ての $\beta$ で同じ規則）。解が一つに決まるかが未決 | 最も効く（ゲージ固定が現れない） |
| 保存量と区画の規則 | 効かない | 効かない | 名前を与えるだけ |
| 稀さの類の規則 | 尺度の公理化の規則と組んだときだけ | 効かない（稀さの率が尽きる） | 正面から効く |
| 漸近自由の公理の規則 | 書き写すだけ | 効かない（赤外を空ける） | 効かない |
| 曲率の規則 | 効かない | 効かない（強結合の側だけ） | 意味を与える |

**表の読み** 見 。尺度をつなぐ展開の欠如の列に「効く」は一つもありません。ループの代数の規則だけが全ての結合で同じ形の規則を持ちますが、規則の解が一つに決まるかどうかが尺度をつなぐ展開の欠如の中身そのものに置き換わっています。尺度の公理化の規則＋稀さの類の規則で現れる結合の窓（24-06 §07）は、この尺度をつなぐ展開の欠如を規則の言葉で言い直したものです。

**ブール代数の型はどこで可能か** 見 。連続の対象を離散の規則に置き換えることは、観測量の**代数**の段では既に半分あります：格子（連続の場を辺の上の群の元に置き換える）、ループの Mandelstam の恒等式とループ方程式、区画の整数、階層模型の一変数の漸化式。しかし三段目を決める規則は、等式でなく**不等式**です：正値性・稀さ・凸性・段数に一様な評価。ループ方程式（等式）は解を一つに決めず、解を絞るのは正値性（無限個の不等式）です。比喩として言えば、三段目に要るのはブール代数より、測度論（σ 加法性という不等式の規則と極限の規則）に近い型です。

**規則の候補について主張しないこと**。(i) どの候補も、三段目を閉じる見込みを約束しません。(ii) ブール代数の喩えは比喩で、「三段目の規則は不等式」も見立てです。ヤン–ミルズの規則が等式で書けないことを示してはいません。(iii) 候補と既存の結果の対応（例えば、尺度の公理化の規則の安定多様体の形と、有限体積の紫外安定性の対応）は、どれも原典の本文で確かめていない言い直しです。(iv) 「階層模型は紫外の側・窓・強結合の側の三つが揃う場所」は探した範囲での言い方で、四次元への含意はありません。(v) 届かないと書いた候補は、偽であることの証拠ではありません。

03

## 主張しないこと — 十六の項目と、それを支える本文の文

表 4 は、第 24 部が主張しないことを一行ずつ書き、その行を支える本文の場所を並べたものです。「支える」とは、その章の文が条件・仮定・範囲をすでに書いていて、この行はそれを一行に写しただけ、という意味です。種類の列は 23-16 の三つの意味（示さない・強く読まない・偽とも言わない）です。

表 4　第 24 部が主張しないことと、それを支える本文の文

| 項目 | 主張しないこと | 種類 | 支える本文の文（要旨） |
|---|---|---|---|
| 1 | ヤン–ミルズの存在と質量ギャップの問題の解決。連続極限・回転の回復・OS 公理・非自明性には触れない（存在の部分は、2026-11-10 に公開された構成を第二巻で読む） | 示さない | 24-00 §05：扱わないもの。24-07 §04：三段目・四段目はこの本の道具では届かない |
| 2 | 緩和時間の仮定が偽であること。四次元の周期の箱で上界の仮定が成り立たないという文は、$SU(3)$ 以上の原典の数値と、開いた境界の観察に付いた予想（HMC と Langevin が同じ動的な普遍類）を周期の箱の位相の遅さへ延ばした読みの上の文 | 偽とも言わない | 24-01 §06 の (a)(b)・24-07 §07 |
| 3 | 区画ごとの拡散型緩和時間の仮定と局所の緩和時間の仮定は定義の候補で、どの $\beta$ でも示していない。緩和時間の仮定の「正しい直し方」も主張しない | 示さない | 24-03 §07 |
| 4 | 片側の橋（局所の版を含む）は時間を連続に取った格子の上の不等式で、Wilson の時間を刻む格子では時間の刻みの比べの仮定が残る。局所の版はさらに局所の励起のモーメントの仮定の上にある | 強く読まない | 24-04 §08（表 4）・24-04 §09 |
| 5 | 「隙間＝真空の測度の Poincaré 定数」は恒等式で、問題を易しくしたとは主張しない | 強く読まない | 24-05 §01・24-05 §07 |
| 6 | 保存が壊れる長さ $\ell_*$ の定義と、比べる相手の言い直し $C_P \asymp \max(\xi^2, \tau_{\mathrm{glob}})$ は候補で、どの模型でも示していない | 強く読まない | 24-02 §06・24-02 §08 |
| 7 | 階層模型と二次元の模型の結果は、四次元のヤン–ミルズに何も含意しない | 強く読まない | 24-06 §09 の (a)・24-02 §08 |
| 8 | 物理の非摂動的な機構（閉じ込め・インスタントン・中心渦・双対）は、この部では証明の道具として使っていない | 示さない | 24-07 §08（表 4） |
| 9 | 「四次元だからこそ」の二点は臨界次元の性質としての見立てで、四次元でだけ起きるとは主張しない | 強く読まない | 24-07 §01・24-07 §09 の (d) |
| 10 | 第 23 部の「主張しないこと」は、この部にもそのまま効く | — | 23-16 §02 |
| 11 | 局所の緩和時間の仮定は、定義と比の形まで。どの $\beta$ でも、対象のゲージ理論について局所の緩和時間の仮定を示していない。示したのは定義の性質と、自由場の参照の値 | 示さない | 24-03 §03・24-04 §04 |
| 12 | 局所の橋の閾（$0.342\kappa$・$0.502\kappa$・約 $0.62\kappa$）は参照の取り方と試験の観測量の族に依る。比が閾と 1 の間にある場について、橋は何も言わない | 強く読まない | 24-04 §06（表 2） |

| 項目 | 主張しないこと | 種類 | 支える本文の文（要旨） |
|---|---|---|---|
| 13 | 0+1 の二重井戸では、局所の比は最短の窓でも 1 にならない。四次元で「短い距離で比は 1 に近づく」とするのは、漸近自由に依る仮定 | 強く読まない | 24-04 §07・24-03 の (7) |
| 14 | 保存が壊れる長さを測ったのは、二次元 $U(1)$ の幅 2 の帯（外周凍結・$\beta = 2..6$）だけ。四次元・非可換・$\beta \to \infty$ の指数については何も言わない | 強く読まない | 24-02 §03（表 2） |
| 15 | $SU(2)$ について、位相電荷の凍結が緩和時間の仮定を壊すかは決まっていない。一次資料は一本で、その数は $a^{-2}$ に近い側にある | 偽とも言わない | 24-07 §07・24-01 §06 の (b) |
| 16 | 二次元 $CP^{N-1}$ の試験台の結果は、四次元のヤン–ミルズに何も含意しない（比は一つの体積を止めた条件つきの自己相関の比で、静的な比とは別の量） | 強く読まない | 24-02 §07 |

項目 2 の「予想」の語は、原典では開いた境界の観察に付いた語なので、周期の箱への適用は「延ばした読み」と書きます。規則の候補（§02）についての主張しないことは §02 の末尾に置きました。

04

## 第 23 部との関係

第 23 部の「主張しないこと」の十四項目（23-16）は、この部にもそのまま効きます。ここでは重ねて列挙しません。とくに、届かなかったことは偽の証拠ではない（23-16 の項目 8・12）、条件は要約で落ちる（23-16 §06）、の二つは、この部の見立ての文（札「見」）を読むときにも同じです。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 第 24 部の問いの一覧と、各問いが決着しても動かないもの（表 1） | どの問いの答えも。問いの「大きさ」は作業の種類で、時間の見積もりではない |
| 規則の候補の一覧と、難しさの三つの源との関係の見立て（表 2・表 3） | どの候補の無矛盾性も、三段目への見込みも |
| 第 24 部が主張しないことの十六項目と、それを支える本文の場所（表 4） | 各項目の命題の真偽 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 表 1 の各行 | 本書 | 右の列の章と節 |
| 表 2・表 3 の候補と難しさの源 | 見 | 24-06 §07・24-07 §05・§06。候補が引く既存の結果の出典は各章の出典表（重みの四性質は Bauerschmidt–Brydges–Slade の本、二次元のループ方程式は Chatterjee の総説 §6 の整理、強結合の対数 Sobolev は Shen–Zhu–Zhu の要旨） |
| 表 4 の各行 | 本書 | 右の列の章と節 |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
| --- | --- | --- |
| 三つの意味 | 本書 | 23-16 §01 |

**この章で使った語** — 問いの状態（済み・一部済み・未・新）・決着しても動かないもの・規則の候補・組み合わせ・難しさの三つの源・結合の窓・示さない／強く読まない／偽とも言わない。意味は A-02 用語集 と 24-09 にあります。

次に読む頁：24-09 一本目の道（後半）の記号の対応表。第 24 部の地図に戻るなら 24-00。

# 一本目の道（後半）の記号の対応表

この章は記号と用語の案内です。

**この頁で分かること** — 第 24 部で使う記号の一覧。各記号の意味・定義の場所・単位と、第 23 部の同じ字の記号と同じ量か別の量か。

**前提となる章** — なし。第 23 部の記号は 23-01 §01 と A-01 記号表。

**先に言うこと** — 量は格子単位（格子間隔が 1）で数えます。Langevin の時間は長さの二乗の次元を持ち（拡散）、$C_P$ を物理の単位で測った値は $a^2 C_P$ です。数は定義の章の条件の上の値で、札はその章にあります。

01

## 記号の一覧

表 1　第 24 部の記号（「同じ」は第 23 部の同じ字と同じ量、「新」は第 24 部で足した記号）

| 記号 | 意味 | 定義の場所 | 単位（格子）／物理での読み | 第 23 部との対応 |
|---|---|---|---|---|
| $\ell$ | 外から与える長さの物差し（隙間と独立）。四次元では記帳の長さ、0+1 の二重井戸では $1/\omega_b = 1$ | 24-03 §02 | 長さ／$a\ell$ | 新（四次元では 23-01 §07 の記帳の長さと同じ量） |
| $\xi$ | 相関長 $1/m_{\mathrm{lat}}$。0+1 では $\hbar/\Delta$ | 23-01 の (1)・(17) | 長さ／$a\xi$ | 同じ |
| $\xi_{\mathrm{RG}}$ | 記帳の長さ（格子を粗くする段を数えて決めた長さ）$= 1/a$ | 23-01 §07 | 長さ／1 | 同じ |
| $\xi_{XY}$ | 二次元 $U(1)$ の帯の静的な長さ $-1/\ln(I_1(\beta)/I_0(\beta))$（弦張力の逆数） | 24-01 §02・24-02 | 長さ | 新 |
| $R = c\ell$ | 局所の窓・箱の一辺 | 24-03 §03 | 長さ | 新 |
| $c$ | 窓の長さと物差しの比 | 24-03 の (2) | 無次元 | 新 |

| 記号 | 意味 | 定義の場所 | 単位（格子）／物理での読み | 第 23 部との対応 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{D}$ | 時間で均した汎関数の代数（重みの台が有界） | 24-03 の (1) | — | 新（23-01 の (7) の上限を取る集まりを定めたもの） |
| $\mathcal{D}_c$ | 重みの台が窓 $[0, c\ell]$ に入る $\mathcal{D}$ の部分族 | 24-03 の (2) | — | 新 |
| $\mathcal{F}_1$ | 時刻で積分した一時刻の関数の族 | 24-04 | — | 23-01 の片側の橋の命題（論文の定理 3.1）の試験関数の族に名を付けたもの |
| $C_P$ | Poincaré 定数 $\sup \mathrm{Var}/\mathcal{E}$（経路の測度） | 23-01 の (7)。第 24 部では上限を $\mathcal{D}$ の上で取る | 長さの二乗（Langevin の時間）／$a^2 C_P$ | 同じ（23-01 表 3 の経路の C_P） |
| $C_P^{\mathrm{loc}}(c)$ | 局所の Poincaré 定数（$\mathcal{D}_c$ の上の上限） | 24-03 の (2) | 長さの二乗 | 新 |
| $C_P^{\mathrm{loc},0}(R)$ | 同じ箱・同じ目盛りの無質量の参照の値 $= \Gamma(R) R^2$ | 24-03 の (4) (5) | 長さの二乗 | 新 |
| $K(c)$ | 絶対の形の局所の拡散型緩和時間の仮定の定数 $C_P^{\mathrm{loc}}(c) \le K(c)\ell^2$ | 24-03 の (3) | 無次元 | 23-01 の (14) の $C$（Lean の $K$）の局所版 |
| $K_{\mathrm{rel}}$ | 比 $C_P^{\mathrm{loc}}/C_P^{\mathrm{loc},0}$ | 24-03 の (5) | 無次元 | 新 |
| $\Gamma$ | 参照の箱の値の係数 $C_P^{\mathrm{loc},0}(R)/R^2$。スカラーで $\Gamma_\infty = 0.0740$、ゲージ商で $\Gamma_Q = 0.0277$ | 24-03 §03・表 1 | 無次元 | 新 |
| $\lambda_W$ | 試験の空間の中の箱の Dirichlet の値に $R^2$ を掛けたもの（スカラーで $4\pi^2$、ゲージ商で $72.0$）。窓の関数 $W$ では $\|\nabla W\|^2/\|W\|^2$ | 24-01 の (7)・24-03 表 1 | 無次元 | 新 |
| $\kappa$ | Langevin の計量と運動項の計量の比べの定数（計量の比べの仮定（論文の (A3))）。24-02 §05 の帯の生の率の補正 κ（κ_BE でも、この κ でもない）とは別の量 | 23-01 の片側の橋 | 無次元 | 同じ |

| 記号 | 意味 | 定義の場所 | 単位（格子）／物理での読み | 第 23 部との対応 |
|---|---|---|---|---|
| $\kappa\mathrm{BE}$ | Bakry–Émery の曲率の下限。片側の橋の比べの定数 $\kappa$ とは別の量 | 24-06 §01 | 長さの逆二乗 | 新 |
| $s$ | 稀さの率（悪い集合 $B$ の測度が $\mu(B) \le e^{-s}$ で落ちる指数）。第 23 部の $\ell$ と同じ量 | 24-06 §01（式は §06 の (7)・§07 の悪い集合の稀さの規則） | 無次元（$-\ln \mu(B)$。0+1 次元の例では作用の差を $\hbar$ で割った桁、群の一リンクでは $s \approx \beta$） | 23-09 の稀さの指数 $\ell$ |
| $K_*$ | 橋の閾 $\kappa/(\lambda_W \Gamma)$ | 24-04 | 無次元 | 新 |
| $\ell_c$ | 二次元 $U(1)$ の帯で保存が壊れる長さ（流束の双極子の緩和の折れ） | 24-01 §02・24-02 | 長さ | 新 |
| $\ell_*$ | 保存が壊れる長さ（一般の名。候補の定義は 24-02 の (2)：比が飽和の値の半分に届く最小の R） | 24-02 | 長さ | 新 |
| $R_*$ | 交差の長さ $\sqrt{d\lambda_W/h}$（輸送と障壁の領分の境） | 24-01 の (7) | 長さ | 新 |
| $\lambda_Q$ | 帯の位相電荷の緩和の率 $1/\tau_{\mathrm{int}}(Q)$ | 24-02 | Langevin の時間の逆数 | 新 |
| $\tau_{\mathrm{int}}$ | 積分自己相関時間 | 24-01 の (1)・23-02 §05 | Langevin の時間（原典では掃き数・分子動力学の時間） | 同じ |
| $m$ | 隙間を時間の逆数で $m = \Delta/\hbar$。四次元では $m_{\mathrm{lat}}$ | 23-01 の (1)・(17) | 長さの逆数 | 同じ（$m_{\mathrm{lat}}$） |
| $m_{\mathrm{phys}}$ | 物理単位の質量 $m\ell$（四次元で $m_{\mathrm{lat}}\xi_{\mathrm{RG}}$） | 23-01 の (12) (16) | 無次元（物理の単位） | 同じ |
| $\Delta$ | ハミルトニアンの隙間 $E_1 - E_0$ | 23-01 の片側の橋 | エネルギー | **意味を一つに限る**（下の §02） |
| $\omega_b$ | 二重井戸の底の角振動数 $\sqrt{V''(\pm 1)} = 1$ | 24-03 の (7)・24-04 | 時間の逆数 | 新（23-04 の模型の量） |
| $S_0$ | キンクの作用 $2/3$ | 23-04 §03 | 作用 | 同じ |
| $\varphi(x)$ | 窓の因子 $1 - (1 - e^{-x})/x$ | 23-01 の (17) の括弧・24-04 | 無次元 | 同じ（プラケットの角 $\varphi_p$ とは別） |
| $\varphi_p$ | 二次元の帯のプラケットの角 | 24-01 §02・24-02 | 角 | 新 |

| 記号 | 意味 | 定義の場所 | 単位（格子）／物理での読み | 第 23 部との対応 |
|---|---|---|---|---|
| $Q$, $Q_s$ | 位相電荷・滑らかにした位相電荷。二次元の帯では $Q = \sum_p [\varphi_p]/2\pi$ | 24-01 §02・24-03 §04 | 整数（$Q_s$ は実数） | 23-01 §05 の注の $Q$ と同じ |
| $\chi_t$, $h$, $d$, $g$ | 位相感受率・保存の破れの密度・輸送の係数・境界の層の係数 | 24-01 の (4) (5) | 格子単位（$h, d, g$ は $\mathcal{E}$ の目盛りに依る） | 新 |
| $C_P^{\mathrm{sec}}(n)$, $C_{\mathrm{trans}}$ | 区画の Poincaré 定数・区画の間の量 | 24-03 の (8) (10) | 長さの二乗 | 新 |

02

## 字が同じで意味を分けるもの

$\Delta$。第 23 部の 23-01 では、(1) の $\Delta(\beta) = m_{\mathrm{lat}}/a$（物理単位の質量）と、片側の橋の $\Delta = E_1 - E_0$（ハミルトニアンの隙間）の二つの意味で $\Delta$ を使いました。第 24 部では $\Delta$ を**片側の橋の意味 $E_1 - E_0$ に限り**、物理単位の質量は $m_{\mathrm{phys}}$ と書きます。

$K$。23-01 の (14) は緩和時間の上界の仮定の定数を $C$ と書き、Lean の定理は同じ定数を $K$ と書きます。第 24 部の $K(c)$ はその局所版、$K_{\mathrm{rel}}$ は比の形の定数で、$K_*$ は橋の閾です。三つは別の量です。

$\varphi$。窓の因子 $\varphi(x)$ は引数つきで、二次元の帯のプラケットの角は添字つきの $\varphi_p$ です。

$Q$。四次元の位相電荷と二次元の帯の位相電荷は同じ字で書きます。どちらも「隙間に映らない大域の整数」で、24-01 の型の $Q$ の例です。二次元の数が四次元に何かを含意するわけではありません。

**$\lambda$ の付く記号**。$\lambda_1$（Langevin の隙間 $= 1/C_P$、23-01）・$\lambda_W$（箱の Dirichlet の値）・$\lambda_Q$（帯の位相電荷の緩和の率）は、別の量です。

次に読む章：25-00 入口 — 時間でなく空間を。