第三巻　質量ギャップへ — 残る問いと本書の結果

第 25 部 二本目の道 — 空間の方向から

Kiichi, Shiori and Rin · 2026-11-14 の版 · https://computoergosum.com/principia/yang-mills/

> この PDF は Web 版の各章をそのまま刷ったものです。動かせる図は刷った時点の姿で止まっています。章の間のリンクは Web 版へ飛びます。最新の内容は Web 版に在ります。

章		頁
25-00	入口 — 時間でなく空間を	2
25-01	捩れた T^2 と 't Hooft の流束	12
25-02	渦と分数インスタントン	24
25-03	容器 — 枠を条件づけると独立になる	36
25-04	板の閉じ込め	49
25-05	渦の挿入の恒等式	59
25-06	力学で駆動した挿入と流れの補題	72
25-07	なぜ決まった写像は失敗するか	87
25-08	測った記録	100
25-09	この道が止まる場所 — T^2 を広げることが帯である	111

入口 — 時間でなく空間を

> この章は案内です（この部の入口）。

この部は検討の記録です。機械検査まで済んだ定理は第 20〜22 部、前提の今の一覧は 28-04 に在ります。

この章で分かること — 第 23 部は、時間の方向（揺らぎが均される時間と転送行列）から質量ギャップに向かう道でした。第 25 部は、空間の方向から閉じ込めに向かう二本目の道です。四次元のうち二つの方向を小さな捩れた二次元トーラス T^2 に縮め、残りの平面 $\mathbb{R}^2$ の上で Wilson ループの面積則を考えます。この章では、(1) なぜ一度小さな捩れた T^2 を経由するのか、(2) その結果、問題がどう二つに割れるのか、(3) どの尺度でどの道具が効くのか（図 2「尺度のはしご」）、(4) 第 25 部の十章の地図、を述べます。

前提となる章 — 5-01（Wilson の格子）・5-02（強結合）・17-02 中心渦・4-06（漸近自由）・4-07（次元転移）・7-07（四次元の構成の到達点）。第 23 部の入口 23-00。

先に言うこと — この章は地図の章で、新しく証明する文はありません。「小さな捩れた T^2 では T^2 の大きさまで弱結合のまま」は、紫外の制御（格子間隔 a から T^2 の大きさまでの、a に一様な評価）を仮定した上での物理の見立てです。2026-11-10 に公開された構成が示したのは周期の境界条件・立方の箱での連続極限で、捩れた境界条件や細長い箱での構成はそこにありません（検索の範囲で）。この部の「紫外の制御」は、「捩れた境界条件の下で同じ構成が立つこと」という、まだ開いた条件として残ります。第 25 部の道は、質量ギャップそのものではなく、まず閉じ込め（面積則）に向かいます。二つが別の言明であることは 17-02 と 16-08 のとおりです。

この章の順序

1. 二本目の道 — 何を、どの方向から見るか
2. 二つの壁 — 紫外と移り変わりの帯
3. なぜ小さな捩れた T^2 か — 二つの理由
4. 尺度のはしご — どの尺度で、どの道具が効くか（図 2・表 1）

5. 第 25 部の十章の地図（表 2）
6. この部の記号と語の約束
7. 第 23 部・第 26 部への案内
8. 言えないこと
9. 五分類の表と依存グラフ（表 3）

01

二本目の道 — 何を、どの方向から見るか

第 23 部の道は、格子の一つの方向を「時間」と見て、転送行列の隙間や、揺らぎが均される時間から質量ギャップに近づくものでした。どこで止まったかは 23-15 にまとめてあります。

第 25 部では向きを変えます。四次元の格子の四つの方向のうち二つ（1・2 の方向）を小さな周期 L のトーラス T^2 に巻き、残りの二つ（3・4 の方向）を大きな平面と見ます。平面の中に描いた Wilson ループ $W(C)$ が、囲む面積 A について $\langle W(C)\rangle \le e^{-\sigma A}$ と減るか（面積則）を問います。時間の道が「隙間」を見たのに対し、この道が見るのは「平面の中の渦の数え方」です。

巻いた T^2 には 't Hooft の捩れ（25-01）を入れます。捩れの無い周期的な T^2 に縮めると、平坦な接続の族（零モード）が残り、小さな T^2 と大きな四次元の間を相転移なしにつなぐ見通しが立たないことが、物理の文献で知られています [典]（Tanizaki–Ünsal 2022 の §2.1 の題は「周期的な T^2 への縮約と、断熱的な連続性の不在」）。捩れを入れた T^2 では、同じ論文が、小さな $T^2 \times \mathbb{R}^2$ の弱結合の真空の構造が $\mathbb{R}^4$ の強結合の領域へ相転移なしにつながるという予想を述べています [典]。この予想は予想のままで、この本でも予想として扱います。

02

二つの壁 — 紫外と移り変わりの帯

格子から出発して四次元の理論を作り、閉じ込めや質量ギャップを示そうとすると、性質の違う二つの壁に当たります。

1. **紫外の壁**。格子間隔 a を 0 に近づけても崩れない、全ての尺度での一様な評価が要ります。漸近自由（4-06）のおかげで短い距離では結合が弱くなり、摂動の言葉で各尺度を制御する多重尺度の解析が考えられます。四次元のヤン–ミルズでは、2026-11-10 に、Wilson の格子の極限として Wightman の公理を満たす理論を作る Lean の形式化と委員会の評価

書が公開され、Lean で証明されている、と委員会が評価しました（第二巻、6-00）。ただし、その構成が示したのは周期の境界条件・立方の箱での連続極限です。この部が使う捩れた境界条件の小さな T^2 と、細長い箱（小さな T^2 と大きな平面の積）での構成は、公開された構成にありません（検索の範囲で）。この本では、この部の紫外の段を「紫外の制御」という名の仮定として扱い、その中身を「捩れた境界条件の下で同じ構成が立つこと」という開いた条件と読みます 仮 。それより前の到達点（Bałaban の連作）は 7-07 にあります。

2. **移り変わりの帯**。結合が弱い尺度（短い距離）から強い尺度（長い距離）へ移る中間の尺度、物理の長さで $1/\Lambda$ の前後（Λ は次元転移で生まれる尺度、4-07）を、摂動に頼らずに渡る必要があります。両側にはそれぞれ道具があります（弱結合の側の摂動・半古典、強結合の側の強結合展開 5-02）。帯の中で効く道具が無いことが、この本の第 23 部の道もこの道も止まる場所です（第 26 部）。

二つの壁は、四次元に直接向かうと同時に現れます。格子間隔を小さくする（紫外）ことと、大きな箱で長い距離を見る（帯を渡る）ことを、一つの評価の中で同時にこなさなければならないからです。

03

なぜ小さな捩れた T² か — 二つの理由

小さな捩れた T^2 を経由すると、二つの壁を別々の段に分けられる、というのがこの道の骨組みです。理由は二つです。

理由 1：捩れが零モードを消すので、T^2 の大きさまで弱結合のまま進める（見立て）。捩れた T^2 の上では、作用が 0 の配位はゲージを除いて一つに固定され（25-01 捩れた真空の一意性）、その周りの随伴の揺らぎの格子 Laplacian には正のギャップ $4\sin^2(\pi/2N)$ があります（25-01 捩れた随伴のギャップの補題、$N = L/a$）初 。物理の単位に直すと、N が大きいときこのギャップは $(\pi/L)^2$ の程度で、古典的な揺らぎは全て $1/L$ 程度の質量を持ちます。すると、結合の走りは T^2 の大きさ L で止まり、$L\Lambda \ll 1$ なら有効結合 $g^2(L)$ は小さいまま、と見込まれます 読 （物理の見立て。紫外の制御を仮定した上で）。この段には帯が現れません。

理由 2：T^2 を巻く渦の面は、平面の中で局所的に閉じる。中心渦（17-02）は四次元では二次元の面で、平面の Wilson ループと絡む渦の面は、四次元では面積とともにコストが増える広がった対象です。この本の検討で四次元のまま帯を渡ろうとした道は、どれも「位相的な量（渦がループと絡むかどうか）を、局所的な操作で単調に比べられない」という一点で止まりました（地図は 26-08）読 。$\mathbb{R}^2 \times T^2$ では、平面の点 p の上の面 $\{p\} \times T^2$ は面積 L^2 の閉じた面で、平面の中では点のように振る舞います。渦を一枚足す・除く操作が、平面の有界な領

域の中の操作になります 初 （面が有界な領域に入ることは定義からの事実）。この局所性が、容器（25-03）・板の閉じ込め（25-04）・挿入の恒等式（25-05）の全てを支えます。

こうして問題は二つに割れます。

- **中間の到達目標（小さな T^2 の上）：** $\mathbb{R}^2\times$ 小さな捩れた T^2 で、ギャップと面積則を格子間隔 a に一様に示すこと。残る壁は紫外（捩れた境界条件での構成）だけです（ただし、紫外の制御・挿入の一様な受理・枠の減相関という名の仮定を置いた上での条件つきの研究計画で、定理ではありません） 仮 。
- **最後の段（T^2 を広げる）：** L を $1/\Lambda$ を越えて大きくしても、面積則の強さが一様に保たれること。残る壁は帯だけです（25-09） 仮 。

割ることで易しくなったわけではありません。帯は最後の段にそっくり残ります。割って得られたのは、帯の手前の全ての段を、帯と無関係に確かめられる形に並べられることと、帯が要求する不等式の形を一つに絞れることです（第 26 部）。

04

尺度のはしご — どの尺度で、どの道具が効くか

図 2 は、物理の長さ L（小さな T^2 の一辺、あるいは見ている尺度）を縦に取り、下の格子間隔 a から上の無限遠まで、どの尺度でどの道具が効くかを並べたものです。下（弱結合）と上（強結合）にはそれぞれ道具があり、真ん中の帯だけが空いている、という問題の形を一枚で見るための図です。図の番号と題は第 26 部の入口（26-00 の図 2「尺度のはしご」）と揃えてあります。図 1（論理の流れ）は 16-09 にあります。

図 2　尺度のはしご。縦軸は物理の長さ（下ほど短い）。各段の札は表 1 にあり、図の中の文は札の付いた行の要約で、それ自体は主張ではない



図 2 を文字で書くと次のとおりです。下から順に、格子間隔 a から基点の長さ L_0 までが紫外の段（捩れた境界条件での構成、この本では仮定）、L_0 が小さな捩れた T^2 の基点（第 25 部の道具が直接効く所）、L_0 から $1/\Lambda$ までが希薄な分数インスタントンの気体の段（半古典の見立て、弦の張力が $\Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}$ の程度）、$1/\Lambda$ の前後が移り変わりの帯（繰り込みの比較が一ループの水準と数値でしか分かっていない所）、その上が閉じ込めの領域（強結合の道具が効くと見込まれる所）です。

表 1　図 2 の各段の中身と札（条件を同じ行に）

段	中身	札	条件・範囲	章
$a \sim L_0$	a に一様な多重尺度の評価（有効作用の局所性・大きな場の稀さ・結合の流れ）	仮	紫外の制御という名の仮定（捩れた境界条件の下で同じ構成が立つこと）。公開された構成は周期の立方の箱だけ。それより前の Bałaban の連作には原典で未発表とされた段が残る	6-00・7-07
L_0	捩れを食う真空の一意性・随伴の Laplacian のギャップ $4\sin^2(\pi/2N)$・(1,1) の区画で最小作用が正	初	SU(2)・格子・N 固定・$n_{12}=1$	25-01
L_0	格子間隔と T^2 を固定すれば全ての β で面積則	初	N 固定・格子間隔固定。連続極限では張力が 0 になる。先行研究との照合は未了	25-04
L_0	小さな T^2 でのギャップと面積則を a に一様に	仮	紫外の制御・挿入の一様な受理・枠の減相関の下の条件つきの研究計画	25-09・27-01
$L_0 \sim 1/\Lambda$	位相電荷 $\frac{1}{2}$ の自己双対の塊の作用の下限 $4\pi^2/g^2$・希薄な気体の弦の張力 $\Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}$	典＋読	前者は BPS の下限（原典の式）。後者は希薄な領域・一ループの勘定による物理の見立て（Tanizaki–Ünsal の式 (2.32)・(2.37)）	25-02

段	中身	札	条件・範囲	章
$1/\Lambda$ の前後	繰り込みの比較：一ループの水準で $\beta - \beta' = 0.258$（格子を 2 倍にするごと）	初	一ループの水準・SU(2)・$\beta = 4/g^2$。摂動の外の主張ではない	26-06
$1/\Lambda$ の前後	数値の読み：SU(2) で $\beta - \beta' \approx 0.2$、U(1) では逆向き	読	格子 $4^4 \to 8^4$ ほか・種の数と誤差は 26-09	26-06
$1/\Lambda$ の前後	帯を摂動に頼らずに渡る不等式	仮	未解決。形は第 26 部で一つの不等式に絞る	26-02
$1/\Lambda \sim \infty$	強結合の側の面積則	典	小さな β での格子の言明。物理の長さの尺度との対応は漸近自由による見立て	5-02

表 1 の L_0 の行のうち、上の二行は格子間隔を固定した言明で、三行目の「a に一様」とは強さが違います。この差（格子間隔に一様にすること）が紫外の壁で、第 25 部の各章は、どの言明がどちらの側にあるかを同じ行に書きます。

05

第 25 部の十章の地図

第 25 部は次の十章です。札は章の中の行の札の主なもので、細かな割り方は各章の五分類の表にあります。「条件」の欄は、その章の主な言明に必ず付く条件です。

表 2　第 25 部の十章（札・条件を同じ行に）

章	題	一行の中身	主な札	条件
25-00	入口 ― 時間でなく空間を	この章	読 ＋典	「弱結合のまま」は紫外の制御の仮定の下の見立て
25-01	捩れた T^2 と 't Hooft の流束	$n_{12} = 1$・区画・流束の自由エネルギー・捩れの和のアンサンブル。三つの初等的な事実	典（定義）／初（三つの事実）	SU(2)・格子・N 固定・$n_{12} = 1$
25-02	渦と分数インスタントン	位相電荷 $\frac{1}{2}$ の塊・作用 $4\pi^2/g^2$・希薄な気体・弦の張力 $\Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}$・格子の作用が $\pi^2\beta$ に下から近づくこと	典／読／機／仮	希薄な領域・一ループ・SU(2)。冷却の作用は上界
25-03	容器 ― 枠を条件づけると独立になる	容器の恒等式（Mack–Petkova）・平面の方向の入れ子・四次元での限界	典／初	恒等式は既知。Lean は有限の代数だけ
25-04	板の閉じ込め	格子間隔と T^2 を固定すれば全ての β で面積則	初	N 固定・格子間隔固定・連続極限では張力が 0。先行研究との照合は未了
25-05	渦の挿入の恒等式	挿入比の期待値 1・区画の符号との相関・平均した評価・二次モーメント	初	有限の配位空間・正の重み・区画を反転する全単射

章	題	一行の中身	主な札	条件
25-06	力学で駆動した挿入と流れの補題	Jarzynski 型の恒等式・同時の反転の評価	初 ／典	一段の核の評価は帯の試験には使えない
25-07	なぜ決まった写像は失敗するか	揺らぎの形を変えない写像は反遮蔽の 4 を見られない。$11/3 = -1/3 + 4$	初 ／読	ループの水準
25-08	測った記録	駆動した挿入の仕事・渦の自由エネルギー・板の弦の張力	読	群・β・格子の大きさ・測定数・誤差を各行に
25-09	この道が止まる場所	T^2 を広げること＝移り変わりの帯	仮 ＋読	—

読む順は番号のとおりを勧めます。急ぐ読者は 25-01 の §01〜§02（設定）、25-02 の §01〜§03（分数インスタントンと希薄な気体）、25-04（板の閉じ込め）、25-09（止まる場所）の順に読めば、道の骨組みが追えます。

06

この部の記号と語の約束

- **群と結合。** 群は第 25 部を通して $SU(2)$ に固定します。Wilson 作用は 5-01 の規約で $\beta \sum_p \bigl(1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{tr} U_p\bigr)$、$\beta = 4/g^2$ です。
- **N と M。** 第 25 部の N は群の次数ではなく、小さな T^2 の一辺の格子点の数です（$L = Na$）。平面の一辺の格子点の数を M と書きます。格子は $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ です。
- **帯と窓。** この部と第 26 部の主語は「移り変わりの帯」（略して帯）です。第 23・24 部の「窓」（サイトの窓・$\hbar$ の窓・時刻の窓）とは別の物で、語が同じでないことに意味はありません（注は 26-00）。
- **仮定の名。** 仮定は記号でなく名で呼びます：紫外の制御・挿入の一様な受理・枠の減相関・一様な板の張力・一様な板のギャップ。索引は A-06 にまとめます。
- **札。** 第 23 部と同じ五つ：初（紙で証明を本文に置いた）・典（原典で確認した既知）・機（計算機援用の評価）・読（数値の読み。物理の見立てには「物理の見立て」と添える）・仮（仮定、あるいは証明の筋だけがある行。根拠の欄に筋の在りかを書く）。読み方は 23-00。

07

第 23 部・第 26 部への案内

第 23 部（一本目の道）へ。第 23 部は時間の方向から質量ギャップに向かう道で、拡散型緩和時間の仮定を一段目の模型で組み立てました。入口は 23-00、止まった所は 23-15、その先の考察は第 24 部（24-00）です。二つの道は、示そうとする言明が違います（第 23 部はギャップ、第 25 部はまず面積則）。

第 26 部（帯）へ。二本の道は、どちらも「全ての尺度で同じ定数」という型の言明の手前で止まります。第 26 部（26-00）は、その言明の正しい形（帯の正しい形、26-01）、一つの不等式への還元（26-02）、時間の側から見た同じ帯（26-07）を扱います。第 25 部の最後の章（25-09）が第 26 部への橋です。

段の表へ。証明が含むべき段（器・紫外・小さな T^2 のギャップ・小さな T^2 の閉じ込め・帯・$\mathbb{R}^4$・一般の群）の表は 16-09 にあります。第 25 部は、その表の「小さな T^2」の二段と「帯」の段の入口を埋めます。

08

言えないこと

(a) 弱結合。「T^2 の大きさまで弱結合のまま」は、紫外の制御を仮定した上での物理の見立てで、定理ではありません。この部の設定（捩れた境界条件の小さな T^2 と細長い箱）での格子間隔に一様な評価は、この本にも、公開された構成にもありません（公開された構成は周期の立方の箱）。

(b) 断熱的な連続性。小さな T^2 と $\mathbb{R}^4$ が相転移なしにつながることは予想で、この本はそれを使いません。使うのは「つながるなら何を示せばよいか」の形だけです。

(c) 閉じ込めとギャップ。この道の目標は面積則で、面積則から質量ギャップを出す既知の道はありません。二つは別の言明です（16-09・27-01）。

(d) 図 2。図 2 は道具の置き場所の地図で、尺度と結合の対応（どの L がどの β に当たるか）は漸近自由による見立てです。図の中の数は表 1 の札の付いた行の要約です。

09

五分類の表と依存グラフ

表 3　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	周期的な T^2 では断熱的な連続性が立たない（物理の文献の記述）	典	Tanizaki–Ünsal §2.1	物理の議論	—
2	捩れた $T^2 \times \mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^4$ への連続性の予想	典	同、要旨	予想として	—
3	捩れを食う真空の一意性と随伴の Laplacian のギャップ	初	25-01 の捩れた真空の一意性・捩れた随伴のギャップの補題	SU(2)・格子・N 固定・$n_{12} = 1$	—
4	面 $\{p\} \times T^2$ は平面の有界な領域に入る	初	定義	—	—
5	紫外の制御（捩れた境界条件の下で、公開された構成と同じ構成が立つこと）	仮	6-00・7-07	a から L_0 まで	—
6	T^2 の大きさまで弱結合のまま ⟸ 3・5	読	物理の見立て	$L\Lambda \ll 1$	—
7	四次元のまま帯を渡ろうとした道が止まった一点（位相的な量を局所的に比べられない）	読	26-08 の地図	試した道の範囲	—
8	問題が中間の到達目標と最後の段に割れる ⟸ 4・6・7	仮	この章 §03	研究計画の形	—
9	図 2 と表 1 の各段 ⟸ 5・6・8	各行の札	表 1	表 1 の条件	—

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
1  典  周期的な T²  では連続性が立たない                物理の議論
2  典  捩れた T² × R²  から R⁴  への連続性（予想）      予想
3  初  捩れを食う真空の一意性・ギャップ  4sin²(π/2N)    SU(2)・N 固定・n₁₂ = 1
4  初  面 {p} × T²  は平面の有界な領域に入る
5  仮  紫外の制御（捩れた境界条件での構成）            a から L₀ まで
6  読  T²  の大きさまで弱結合のまま ⟸ 3・5              物理の見立て・LΛ ≪ 1
7  読  四次元のまま渡る道が止まった一点                 試した道の範囲
8  仮  中間の到達目標と最後の段に割れる ⟸ 4・6・7
9  各  図 2・表 1 ⟸ 5・6・8
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。証明を置いた節点は、捩れた真空の一意性とギャップ（25-01 に証明）と、面が平面の有界な領域に入ること（定義）だけです。捩れた T^2 から R^4 への連続性の予想は、どの節点の前提にも入っていません。仮定の行（紫外の制御）は結論の量（ギャップ・面積則）を含まず、多重尺度の評価の形だけを述べます。この章の結論の側の節点（弱結合のまま・問題が二つに割れる）は「読」と「仮」で、閉じ込めの節点も質量ギャップの節点もありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 捩れた T^2 の上の作用 0 の配位の一意性と随伴の Laplacian のギャップ（25-01 に証明）・渦の面が平面の中で局所的であること	格子間隔に一様なギャップ。小さな T^2 での面積則の a に一様な形
典 周期的な T^2 と捩れた T^2 の違いについての物理の文献の記述・連続性の予想（予想として）	連続性の予想そのもの
読 「T^2 の大きさまで弱結合のまま」（紫外の制御の仮定の下の物理の見立て）・図 2 の配置	尺度と結合の対応の定量的な形。帯の幅
仮 問題が二つの段に割れるという研究計画の形	どちらの段も閉じていない。帯を渡る不等式

出典と再現

もの	種別	出典・道具
周期的な T^2 と捩れた T^2 の縮約・連続性の予想	典	Y. Tanizaki, M. Ünsal, Center vortex and confinement in Yang–Mills theory and QCD with anomaly-preserving compactifications, arXiv:2201.06166（v2, 2022）。要旨・§2.1 の題・§2.2〜2.3 を本文で確認
格子の上の分数インスタントンの気体の数値	典	G. Bergner, A. González-Arroyo, I. Soler, Fractional instantons and confinement: first results on a $T_2 \times R^2$ roadmap, arXiv:2502.09463（2025）。要旨を確認
捩れた境界条件	典	G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141／G. 't Hooft, Commun. Math. Phys. 81 (1981) 267（書誌は 3-05 と同じ）
紫外の到達点	本書	6-00（公開された構成）・7-07
一ループの $\beta - \beta' = 0.258$	初	$\beta = 4/g^2$、一ループの係数 $b_0 = 22/(48\pi^2)$ から $8b_0 \ln 2 \approx 0.2575$。導き方は 26-06
数値 $\beta - \beta' \approx 0.2$	読	この本の検討の数値の記録（26-09）
十章の題と札	本書	表 2。各章の五分類の表が正

この章で使った語 — 二本目の道・小さな捩れた T^2・紫外の壁・移り変わりの帯・紫外の制御・中間の到達目標・尺度のはしご・基点 L_0・希薄な分数インスタントンの気体・繰り込みの比較。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：25-01 捩れた T^2 と 't Hooft の流束 — 設定・区画・流束の自由エネルギーと、三つの初等的な事実。

捩れた T² と 't Hooft の流束

この章の §01・§02 は既存の知見、§03 以降は本書の検討です。

この章で分かること — 第 25 部の舞台を定義します。格子 $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ の上の $SU(2)$ Wilson 作用に、小さな T^2 の平面の 't Hooft の捩れ $n_{12} = 1$ を入れ、平面の方向の流束 n_{34} の二つの区画、その分配関数の比（流束の自由エネルギー）、二つの区画を一つの測度にまとめた捩れの和のアンサンブルを置きます。そのうえで、この道の土台になる三つの初等的な事実 — (1) 作用 0 の配位（捩れを食う真空）の一意性、(2) その周りの随伴の場の反周期性と、格子の二次元 Laplacian のギャップ $4\sin^2(\pi/2N)$、(3) $(1,1)$ の区画には平坦な配位が無く最小作用が正 — を証明つきで述べます。

前提となる章 — 25-00（この部の入口と記号）・5-01（リンク変数・プラケット・Wilson 作用）・1-04（$SU(2)$ と Pauli 行列）・3-05（位相電荷）・17-02 中心渦。

先に言うこと — この章の言明は全て、群 $SU(2)$・有限の格子・N を固定・捩れ $n_{12} = 1$ の上の文です。連続極限・格子間隔に一様な評価・閉じ込めについては何も言いません。定義の多くは 't Hooft（1979・1981）と Mack–Petkova（1980）の型の既知のもので 典 、三つの性質は初等的で、証明を本文に置きます 初 。三つとも物理の文献では知られた事柄の格子版で、新しさは主張しません。

この章の順序

1. 設定 — 格子・作用・符号の場 z
2. 区画と流束の自由エネルギー — 面を動かす補題と定義
3. 捩れの和のアンサンブル — 偏りの偶奇表示
4. 中心の値のプラケットと holonomy — 作用零の配位と一周の交換子
5. 捩れた真空の一意性
6. 捩れた随伴のギャップ — 反周期性と 4sin²(π/2N)
7. 捩れた区画の最小作用の正値性 — (1,1) の区画には平坦な配位が無い
8. 捩れた T² の三つの性質が言うこと

9. 言えないこと
10. 五分類の表と依存グラフ（表 1）

01

設定 — 格子・作用・符号の場 z

この節は既存の知見（'t Hooft の捩れた境界条件を格子の符号の場で書く形）の整理です。導入は 3-05 §03 にあります。

格子を $\Lambda = (\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$（$N, M \geq 2$）とします。1・2 の方向が小さな T^2、3・4 の方向が平面です。各リンク (x, μ) に $U_{x,\mu} \in SU(2)$ を置き、プラケット $p = (x; \mu, \nu)$（$\mu < \nu$）の値を

$$U_p = U_{x,\mu}\, U_{x+\hat{\mu},\nu}\, U_{x+\hat{\nu},\mu}^{-1}\, U_{x,\nu}^{-1} \tag{1}$$

と書きます（5-01 と同じ）。プラケットごとの符号 $z_p \in \{+1, -1\}$ を与えたとき、作用と分配関数を

$$S^z(U) = \sum_p \Big(1 - \tfrac{1}{2}\, z_p \operatorname{tr} U_p\Big), \qquad Z[z] = \int e^{-\beta S^z(U)} \prod_\ell dU_\ell, \qquad \beta = \frac{4}{g^2} \tag{2}$$

と置きます。dU_ℓ は正規化した Haar 測度です。$z \equiv +1$ なら (2) は 5-01 の Wilson 作用そのもので、各項は $|\operatorname{tr} U| \leq 2$ から $[0, 2]$ に入ります。$z_p = -1$ のプラケットは「中心の元 -1 を一つ差し込んだプラケット」で、そこでは $U_p = -1$ のとき作用が 0 になります。

二つの区画の符号。小さな T^2 の捩れを、各 $(1,2)$ 平面（x_3, x_4 を止めた $N \times N$ の平面）のちょうど一枚のプラケット、$(x_1, x_2) = (N-1, N-1)$ の $(1,2)$ プラケットに $z_p = -1$ を置くことで入れます。全ての (x_3, x_4) で同じ位置です。これを $z^{(0)}$ と書きます（他は全て $+1$）。平面の方向の流束を一つ足した符号 $z^{(1)}$ は、$z^{(0)}$ に加えて、平面の単位の正方形 $q = (q_3, q_4)$ の上の面

$$\Pi_q = \{\, ((x_1, x_2, q_3, q_4); 3, 4) \;:\; x_1, x_2 \in \mathbb{Z}/N \,\} \tag{3}$$

の N^2 枚の $(3,4)$ プラケットに $z_p = -1$ を置いたものです。Π_q は平面の点 q の上に立つ「T^2 を巻く面」で、平面の中では点のように振る舞います（25-00 §03 の理由 2）。

02

区画と流束の自由エネルギー

面の置き場所 q は分配関数に効きません。それを示すのが次の補題です。

面を動かす補題 初　リンク ℓ について、ℓ を含む全てのプラケットの符号を反転した場を $\delta_\ell z$ と書くと、$Z[\delta_\ell z] = Z[z]$。特に、(a) 面 Π_q は隣の正方形の面 $\Pi_{q'}$ へ動かせ、$z^{(1)}$ の分配関数は q によらない。(b) 面の集合 Q の上に面を置いた符号 $z^{(0)}\prod_{q\in Q}(\text{面 }\Pi_q)$ の分配関数は、$|Q|$ の偶奇だけで決まる。

証明。 変数の取り替え $U_\ell \mapsto -U_\ell$ は Haar 測度を保ちます。-1 は中心の元なので、ℓ を一度だけ含むプラケットでは U_p が $-U_p$ に変わり、他のプラケットは変わりません（格子のプラケットは一つのリンクを高々一度含みます）。よって $S^{\delta_\ell z}(-U_\ell,\dots) = S^{z}(U)$ で、積分は等しくなります。(a)：平面の点 $(a, b+1)$ の上の 3 方向のリンク全て（x_1, x_2 を走らせた N^2 本）に補題を順に使います。$(3,4)$ プラケットでこれらのリンクを含むのは、$\Pi_{(a,b)}$ と $\Pi_{(a,b+1)}$ の上のものだけで、それぞれちょうど一本を含みます。$(\mu, 3)$ プラケット（$\mu \le 2$）は 3 方向のリンクを二本含み、その両方が同じ平面の点の上にあるので、符号は二度反転して元に戻ります。他のプラケットは 3 方向のリンクを含みません。よって二枚の面 $\Pi_{(a,b)}$ と $\Pi_{(a,b+1)}$ の符号が反転し、面は一つ隣へ動きます。4 方向も同じです。(b)：面を動かして二枚を重ねると $(-1)^2 = +1$ で消えるので、(a) と平面の正方形の連結性から従います。∎

面を動かす補題は 't Hooft の捩れの格子版の基本の性質で、z の場そのものではなく、各平面を貫く -1 の個数の偶奇（流束 $n_{\mu\nu} \in \{0,1\}$）だけが分配関数に効くことを言っています 典（一般の形は 't Hooft 1979、格子の $\mathbb{Z}_2$ の符号の場による形は Mack–Petkova 1980）。この章で使うのは (a)・(b) の場合だけです。

区画と流束の自由エネルギーの定義　$Z(0) = Z[z^{(0)}]$、$Z(1) = Z[z^{(1)}]$ と書き、流束の組 $(n_{12}, n_{34}) = (1,0)$ と $(1,1)$ をそれぞれ区画と呼びます。混ざった平面（$(1,3)$ など）の流束は 0 とします。そのうえで

$$\Delta F = \ln\frac{Z(0)}{Z(1)}, \qquad \theta(N,M,\beta) = \frac{Z(0)-Z(1)}{Z(0)+Z(1)} = \tanh\frac{\Delta F}{2} \tag{4}$$

と置きます。ΔF は平面の方向の流束 n_{34} を一つ入れる自由エネルギーの差（'t Hooft の流束の自由エネルギー）、θ は二つの区画の「偏り」です。(4) の右の等式は $(1-e^{-\Delta F})/(1+e^{-\Delta F}) = \tanh(\Delta F/2)$ からです。$Z(0), Z(1) > 0$ なので $|\theta| < 1$ です。$\theta \ge 0$（つまり $Z(1) \le Z(0)$）は転送行列による別の議論が要り、26-04 で扱います。

この量が閉じ込めに効く理由は、Tomboulis–Yaffe の不等式が、平面の Wilson ループの期待値を捩れた分配関数の比で上から押さえることにあります 典。θ が平面の大きさ M について

$-\ln\theta \ge cM^2$ と減れば、その不等式を通して面積則が出ます。不等式の正確な形と、θ が 1 から離れるだけでは足りないことは 26-01 で扱います。

03

捩れの和のアンサンブル

二つの区画を別々の測度として持つ代わりに、面の置き方も確率変数にした一つの測度にまとめます。平面の単位の正方形の全体を T（M^2 個）とし、部分集合 $Q \subset T$ ごとに符号 $z^Q = z^{(0)}\prod_{q\in Q}(\Pi_q \text{ の上で } -1)$ を作ります。

定義（捩れの和のアンサンブル） 典　配位と面の集合の組 (U, Q) の上の確率測度

$$\tilde{\mu}(dU, Q) = \frac{1}{\Xi}\, e^{-\beta S^{z^Q}(U)} \prod_{\ell} dU_\ell, \qquad \Xi = \sum_{Q\subset T} Z[z^Q] \tag{5}$$

を捩れの和のアンサンブルと呼びます。プラケットの $\mathbb{Z}_2$ の符号を確率変数として足し上げる形は Mack–Petkova（1980）の表示の型で、彼らは閉じた（各立方体の六枚の積が $+1$ の）符号の場の全体で足し上げています。ここでは平面の流束 n_{34} に関わる面だけを足す、小さな形を使います。

偏りの偶奇表示（偏りを一つの期待値に） 初　$\theta = \mathbb{E}_{\tilde{\mu}}\big[(-1)^{|Q|}\big]$。

証明。 面を動かす補題 (b) から $Z[z^Q]$ は $|Q|$ が偶数なら $Z(0)$、奇数なら $Z(1)$ です。T の 2^{M^2} 個の部分集合のうち、ちょうど半分が偶数個です。よって $\Xi = 2^{M^2-1}(Z(0)+Z(1))$、$\sum_Q (-1)^{|Q|} Z[z^Q] = 2^{M^2-1}(Z(0)-Z(1))$ で、比が (4) の θ です。∎

偏りの偶奇表示の表示では、面の置き方 Q は平面の点の上の「渦がいるか」の記録で、$(-1)^{|Q|}$ は平面全体の渦の数の偶奇です。偏り θ が小さいとは、偶奇がほぼ公平に混ざっていること、つまり渦が平面の中に自由に湧いていることです。$\mathbb{R}^4$ では、ループと絡む渦の面は広がった面で、この「点の上の記録」の形には書けません（25-00 §03）。この表示は、平面をブロックに分けて柱ごとの偏りの積に書き直す形（容器の恒等式、25-03）と、渦を一つ差し込む写像の恒等式（25-05）の出発点になります。

04

中心の値のプラケットと holonomy

三つの性質の証明は、全てのプラケットが中心の値（± 1）を取る配位の性質に帰着します。まず、作用 0 がそれと同じことを確かめます。

作用零の配位の補題（作用 0 の配位） 初　$S^{z}(U)=0$ であるための必要十分条件は、全てのプラケットで $U_p = z_p \cdot \mathbf{1}$ となることです。

証明。 $SU(2)$ の元は $U=\cos\alpha\,\mathbf{1}+i\sin\alpha\,(n\cdot\sigma)$（$|n|=1$）と書け、$\operatorname{tr}U=2\cos\alpha$ です（1-04）。(2) の各項 $1-\frac{1}{2}z_p\operatorname{tr}U_p = 1-z_p\cos\alpha_p$ は 0 以上で、0 になるのは $z_p\cos\alpha_p=1$、つまり $z_p=1$ なら $\alpha_p=0$（$U_p=\mathbf{1}$）、$z_p=-1$ なら $\alpha_p=\pi$（$U_p=-\mathbf{1}$）のときだけです。∎

次に、プラケットが全て中心の値なら、平面を一周する holonomy どうしの交換子は、その平面の符号の積で決まります。基点 x から μ の方向へ一周する直線の道に沿ったリンクの積を $P_\mu(x)$ と書きます（$\mu=1,2$ なら長さ N、$\mu=3,4$ なら長さ M）。

一周の交換子の符号の補題（交換子は平面の符号の積） 初　全てのプラケットで $U_p=z_p\cdot\mathbf{1}$ なら、$\mu\neq\nu$ と基点 x について

$$P_\mu(x)\,P_\nu(x)\,P_\mu(x)^{-1}\,P_\nu(x)^{-1} = \varepsilon_{\mu\nu}\,\mathbf{1}, \qquad \varepsilon_{\mu\nu}=\prod_{p\subset(\mu,\nu)\text{ 平面 }\ni x} z_p \tag{6}$$

が成り立ちます。右の積は x を通る (μ,ν) 平面（二次元のトーラス）の全てのプラケットにわたります。

証明。 x を通る (μ,ν) 平面を、x を角に置いた正方形 R に切り開きます。R の境界を x から反時計回りに一周する道は、μ の方向の一周・ν の方向の一周・μ の方向の逆向きの一周・ν の方向の逆向きの一周をこの順に並べたもので、その holonomy が (6) の左辺です。一方、正方形の格子の円板では、境界の holonomy は、各プラケットの値を基点への道で平行移動して共役したものの、ある順序の積に等しくなります（格子の非可換 Stokes の定理：プラケットを一枚ずつ剥がして境界の道を縮める、帰納法）。全てのプラケットの値が中心の元 $z_p\mathbf{1}$ なら、共役で値は変わらず、順序にもよらないので、積は $\prod_{p\subset R} z_p$ です。∎

$z^{(0)}$ では、$(1,2)$ 平面は全て一枚だけ -1 を持つので $\varepsilon_{12}=-1$、他の平面は $\varepsilon=+1$ です。$z^{(1)}$ では、さらに $(3,4)$ 平面がちょうど一枚（面 Π_q と交わる一枚）の -1 を持つので $\varepsilon_{34}=-1$ です。これは、連続理論の 't Hooft の捩れた境界条件で、二つの方向の貼り合わせの整合が中心の元 $e^{\pi i n_{\mu\nu}}$ だけずれる、という関係の格子版です 典 （'t Hooft 1979）。

最後に、holonomy が配位をどこまで決めるかを述べます。

holonomy による決定の補題（holonomy で決まる） 初　同じ z について $U_p=z_p\mathbf{1}$（全ての p）を満たす二つの配位 U, U' が、基点 0 での四つの holonomy を一致させる（$P_\mu=P'_\mu$、$\mu=1,\dots,4$）なら、U' は U のゲージ変換です。

証明。 各格子点 x に、0 から x への決まった道 γ_x（1 の方向、2 の方向、3 の方向、4 の方向の順に正の向きへ進む道）を選び、道に沿った積を $U(\gamma_x)$ と書きます。リンク $\ell=(x\to y)$ に

ついて、閉じた道 $c_\ell = \gamma_x\,\ell\,\gamma_y^{-1}$ を考えます。トーラスの格子の二次元の骨格では、0 を基点とする閉じた道は、有限枚のプラケットを掃くことで、四つの直線の一周の語に変形できます（$\pi_1(T^4) = \mathbb{Z}^4$ の格子版、標準の位相の事実 典 ）。変形で掃いたプラケットは中心の値なので、c_ℓ の holonomy は「掃いたプラケットの z の積」と「P_μ の語」の積で、どちらも U と U' で同じです。よって $U(\gamma_x)U_\ell U(\gamma_y)^{-1} = U'(\gamma_x)U'_\ell U'(\gamma_y)^{-1}$、すなわち $g(x) = U'(\gamma_x)^{-1}U(\gamma_x)$ と置くと $U'_\ell = g(x)\,U_\ell\,g(y)^{-1}$ です。∎

05

捩れた真空の一意性

捩れを食う配位。$\Omega_1 = i\sigma_1$、$\Omega_2 = i\sigma_2$ と置き、配位 U^0 を次で定めます。1 の方向のリンクは $x_1 = N-1$ のもの（T^2 の継ぎ目を渡るもの）だけ Ω_1、2 の方向のリンクは $x_2 = N-1$ のものだけ Ω_2、他のリンク（3・4 の方向を含む）は全て $\mathbf{1}$ とします。

捩れを食う配位の補題 初　$\Omega_1\Omega_2\Omega_1^{-1}\Omega_2^{-1} = -\mathbf{1}$。また U^0 のプラケットは、$(x_1, x_2) = (N-1, N-1)$ の $(1,2)$ プラケットだけが $-\mathbf{1}$ で、他は全て $\mathbf{1}$ です。よって $S^{z^{(0)}}(U^0) = 0$。

証明。 $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3 = -\sigma_2\sigma_1$ から $\Omega_1\Omega_2 = -\sigma_1\sigma_2 = -i\sigma_3$、$\Omega_1^{-1}\Omega_2^{-1} = (-i\sigma_1)(-i\sigma_2) = -i\sigma_3$ で、積は $(-i\sigma_3)^2 = -\mathbf{1}$。プラケット (1) を見ると、継ぎ目を含まない $(1,2)$ プラケットは全て $\mathbf{1}$。$x_1 = N-1$、$x_2 \neq N-1$ では $\Omega_1 \cdot \mathbf{1} \cdot \Omega_1^{-1} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}$、$x_2 = N-1$、$x_1 \neq N-1$ では $\mathbf{1} \cdot \Omega_2 \cdot \mathbf{1} \cdot \Omega_2^{-1} = \mathbf{1}$、角 $(N-1, N-1)$ では $\Omega_1\Omega_2\Omega_1^{-1}\Omega_2^{-1} = -\mathbf{1}$。1・2 の方向のリンクは x_3, x_4 によらないので、3・4 の方向を含むプラケットは全て $\mathbf{1}$。作用零の配位の補題から作用は 0 です。∎

反可換の対の剛性の補題（反可換な対） 初　$A, B \in SU(2)$ が $ABA^{-1}B^{-1} = -\mathbf{1}$ を満たすなら、ある $g \in SU(2)$ で $gAg^{-1} = i\sigma_1$、$gBg^{-1} = i\sigma_2$ となります。また、$i\sigma_1$ と $i\sigma_2$ の両方と可換な $SU(2)$ の元は $\pm\mathbf{1}$ だけです。

証明。 $ABA^{-1} = -B$ の跡を取ると $\operatorname{tr} B = -\operatorname{tr} B$、よって $\operatorname{tr} B = 0$ で $B = i\,b\cdot\sigma$（$|b| = 1$）。同様に $BAB^{-1} = -A$ から $A = i\,a\cdot\sigma$。$(a\cdot\sigma)(b\cdot\sigma) = (a\cdot b)\mathbf{1} + i(a\times b)\cdot\sigma$ なので、$AB = -BA$ は $a\cdot b = 0$ と同値です。直交する単位ベクトルの組 (a,b) は、回転 $R \in SO(3)$ で (e_1, e_2) に移せます（$(a, b, a\times b)$ は正の向きの正規直交基底）。$SU(2) \to SO(3)$ は全射で、$g(v\cdot\sigma)g^{-1} = (Rv)\cdot\sigma$ となる g を取れば主張の前半です。後半：$C = c_0\mathbf{1} + i\,c\cdot\sigma$ が σ_1 と可換なら $c\times e_1 = 0$、σ_2 と可換なら $c\times e_2 = 0$、よって $c = 0$、$C = \pm\mathbf{1}$。∎

捩れた真空の一意性（捩れを食う真空の一意性） 初　区画 $(1,0)$ で作用 0 の配位（$S^{z^{(0)}}(U) = 0$）は、ゲージ変換と、3・4 の方向の中心の変換（ある 3 方向の切り口 $x_3 = c$ の全ての 3 方向のリンクに -1 を掛ける操作、4 方向も同様）を除いて、U^0 ただ一つです。小さ

な T^2 の上だけ（二次元の格子 $(\mathbb{Z}/N)^2$、捩れ $n_{12}=1$）なら、ゲージ変換だけを除いて一つです。

証明。 作用零の配位の補題から $U_p = z_p^{(0)}\mathbf{1}$。一周の交換子の符号の補題から、基点 0 の holonomy は $P_1P_2P_1^{-1}P_2^{-1} = -\mathbf{1}$、他の対は可換です。反可換の対の剛性の補題で基点のゲージを選び直せば $P_1 = i\sigma_1$、$P_2 = i\sigma_2$。P_3, P_4 は両方と可換なので $\pm\mathbf{1}$。U^0 の holonomy は $(i\sigma_1, i\sigma_2, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ です。切り口 $x_3 = c$ の 3 方向のリンクに -1 を掛けると、それらを含むプラケットは全て二本を含むので（$(\mu, 3)$ と $(3, 4)$ のプラケットの 3 方向の二辺は同じ x_3 にある）、作用は変わらず、P_3 だけが符号を変えます。4 方向も同じです。これで四つの組 $(i\sigma_1, i\sigma_2, \pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{1})$ は全て U^0 から中心の変換で得られ、holonomy による決定の補題から、holonomy が一致する作用 0 の配位はゲージ変換で移り合います。二次元では P_3, P_4 が無いので、ゲージ変換だけで足ります。∎

反可換の対の剛性の補題の証明が示すとおり、$(-i\sigma_1, i\sigma_2)$ は $g = i\sigma_2$ による共役で $(i\sigma_1, i\sigma_2)$ に移ります。小さな T^2 の方向の中心の変換は、ゲージ変換に吸収されます。平面の方向の中心の変換は吸収されず、作用 0 の配位はゲージの類として四つあります。

06

捩れた随伴のギャップ — 反周期性と 4sin²(π/2N)

真空 U^0 の周りの揺らぎの二次の部分には、随伴の場の共変な Laplacian が現れます。小さな T^2（二次元の格子 $(\mathbb{Z}/N)^2$）の上で、$\mathfrak{su}(2)$ に値を取る場 ϕ に

$$(-\Delta_U\phi)(x) = \sum_{\mu=1,2}\Big[\,2\phi(x) - \mathrm{Ad}(U_{x,\mu})\,\phi(x+\hat\mu) - \mathrm{Ad}(U_{x-\hat\mu,\mu})^{-1}\phi(x-\hat\mu)\Big], \qquad \mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1}$$

と置きます。Ad は直交変換なので、$-\Delta_U$ は $\mathfrak{su}(2)$ の内積に関して対称で非負です。

捩れた随伴のギャップの補題 初　$U = U^0$ のとき、$\mathfrak{su}(2)$ の基底 $i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3$ の成分 ϕ^1, ϕ^2, ϕ^3 ごとに、$-\Delta_{U^0}$ は次の符号つきの境界条件の下のスカラーの Laplacian に分かれます。

成分	1 の方向	2 の方向	最小の固有値
ϕ^1（$i\sigma_1$）	周期	反周期	$4\sin^2(\pi/2N)$
ϕ^2（$i\sigma_2$）	反周期	周期	$4\sin^2(\pi/2N)$
ϕ^3（$i\sigma_3$）	反周期	反周期	$8\sin^2(\pi/2N)$

どの成分も少なくとも一つの方向で反周期です。よって $-\Delta_{U^0}$ の最小の固有値は $4\sin^2(\pi/2N) > 0$ で、零モードはありません。

証明。 $\mathrm{Ad}(i\sigma_1)$ は $i\sigma_1$ を保ち $i\sigma_2, i\sigma_3$ の符号を変え（$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = -\sigma_2$ など）、$\mathrm{Ad}(i\sigma_2)$ は $i\sigma_2$ を保ち $i\sigma_1, i\sigma_3$ の符号を変えます。U^0 のリンクは継ぎ目を渡るものだけが Ω_μ なので、(7) は成分ごとに、継ぎ目を渡る結合だけに符号 ± 1 の付いたスカラーの Laplacian になります。長さ N の輪で一本の結合に符号 s を付けた差分作用素 $2f(x) - f(x+1) - f(x-1)$ は、$e^{ikN} = s$ を満たす k について $f(x) = e^{ikx}$ を固有関数に持ち、固有値は $2 - 2\cos k = 4\sin^2(k/2)$ です。$s = +1$ なら $k \in \frac{2\pi}{N}\mathbb{Z}$（最小 0）、$s = -1$ なら $k \in \frac{2\pi}{N}(\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$（最小 $4\sin^2(\pi/2N)$、$k = \pi/N$）です。二次元では二つの方向の和なので、表の値になります。∎

捩れの無い周期的な T^2 の真空 $U \equiv \mathbf{1}$ では、全ての成分が両方の方向で周期的で、定数の ϕ が三次元ぶんの零モードになります。捩れの役目は、この零モードを消して、揺らぎに $4\sin^2(\pi/2N)$ の下限を与えることです。N が大きいとき $4\sin^2(\pi/2N) \approx \pi^2/N^2$ で、格子間隔 a の単位を戻すと $(\pi/L)^2$（$L = Na$）です。

同じギャップを質量に読み替えると、格子の上の質量 m_N は $4\sinh^2(m_N/2) = 4\sin^2(\pi/2N)$、すなわち

$$m_N = 2\ \mathrm{arsinh}\sin\frac{\pi}{2N} \tag{8}$$

です（格子の伝播関数の減衰率と隙間の関係、$2\cosh m - 2 = 4\sinh^2(m/2)$）初 。この m_N は 25-02 §05 で、柱に閉じ込めた分数インスタントンの作用の収束の速さとして現れます。

07

捩れた区画の最小作用の正値性 — (1,1) の区画には平坦な配位が無い

捩れた区画の最小作用の正値性 初　区画 $(1,1)$ では、作用 0 の配位はありません。したがって最小作用

$$S_{\min}(N,M) = \min_{U} S^{z^{(1)}}(U) \tag{9}$$

は正です。また $S_{\min}(N,M) \le 2N^2$ です。

証明。 作用 0 の配位があったとすると、作用零の配位の補題と一周の交換子の符号の補題から、基点の holonomy は $P_1P_2P_1^{-1}P_2^{-1} = -\mathbf{1}$、$P_3P_4P_3^{-1}P_4^{-1} = -\mathbf{1}$（$\varepsilon_{34} = -1$）、混ざった対は可換です。反可換の対の剛性の補題から P_3 は P_1, P_2 の両方と可換なので $\pm\mathbf{1}$、P_4 も同じです。すると $P_3P_4P_3^{-1}P_4^{-1} = \mathbf{1}$ となって矛盾します。配位の空間 $SU(2)^{\#\text{リンク}}$ はコンパクトで作用は連続なので最小は達せられ、それは 0 でないので正です。上界：U^0 を区画 $(1,1)$ で評価すると、面 Π_q の N^2 枚では $U_p = \mathbf{1}$、$z_p = -1$ で一枚あたり $1 - \frac{1}{2}(-1)(2) = 2$、他は 0 です。∎

上界の配位は「細い渦の面」で、一枚のプラケットの厚さの面に作用 $2N^2$ を払います。捩れた区画の最小作用の正値性が言うのは最小作用が 0 でないことだけで、どれだけ小さいか（細い面より遥かに安い滑らかな塊があるか）は言いません。それが次の章の分数インスタントンの話で、格子の上の数値では $S_{\min}$ は π^2 の程度で、$2N^2$ よりずっと小さいと読まれています（25-02 §05）。

連続理論では、捩れ $n_{12} = n_{34} = 1$ の束の位相電荷は半整数に限られ、作用は $8\pi^2|Q|/g^2 \geq 4\pi^2/g^2$ で下から押さえられます [典]（'t Hooft 1981、Tanizaki–Ünsal の式 (2.24)・(2.25)）。捩れた区画の最小作用の正値性は、この下限の格子版の最も弱い形（正であること）にあたります。格子の上で $S_{\min}$ が π^2 に近いことは、連続の下限の格子版としては示されていません。

08

捩れた T² の三つの性質が言うこと

- **捩れた真空の一意性**は、小さな T^2 の古典的な真空が孤立していることを言います。周期的な T^2 では、可換な holonomy の組の全体（平坦な接続の族）が真空になり、その上を揺らぎが自由に動くので半古典の勘定が始められません。捩れがそれを一点（とその中心の像）に縮めます。
- **捩れた随伴のギャップの補題**は、孤立した真空の周りの揺らぎが $4\sin^2(\pi/2N)$ の下限を持つことを言います。これが、25-00 §03 の「T^2 の大きさまで弱結合のまま」という見立ての古典の側の根拠です。量子の側（紫外の制御。捩れた境界条件の下で、2026-11-10 に公開された構成と同じ構成が立つこと）は、開いた仮定のままです。
- **捩れた区画の最小作用の正値性**は、平面の方向の流束 n_{34} を入れると必ず作用を払うこと、つまり渦は「ただ」では置けないことを言います。偏り θ を 1 から離すのは渦のコストと渦の位置のエントロピーの競合で、そのコストの下限の一番弱い形が捩れた区画の最小作用の正値性です。

三つとも、N を固定した有限の格子の上の文です。N を増やすこと（T^2 を物理の長さとして広げること）は、この章のどの文も含みません。それが移り変わりの帯の問題です（25-09）。

09

言えないこと

(a) 連続極限。三つの性質はどれも $a \to 0$ について何も言いません。捩れた随伴のギャップの補題のギャップは古典の揺らぎの下限で、量子の有効作用のギャップではありません。

(b) 閉じ込め。θ の定義と偏りの偶奇表示は閉じ込めの道具の置き場所で、θ がどれだけ小さいかは言いません。格子間隔を固定した場合の評価は 25-04、半古典の率は 25-02。

(c) 他の群。証明は $SU(2)$ の Pauli 行列の計算（反可換の対の剛性の補題）に依ります。$SU(N)$ の場合はこの章では扱いません。

(d) 最小作用の値。$S_{\min}(N,M)$ が π^2 に近いこと、N とともに π^2 に近づくことは数値の読みで、この章では示しません。

10

五分類の表と依存グラフ

表 1　この章の行（「—」は機械検査の無い行。条件は全行で SU(2)・有限の格子 $(\mathbb{Z}/N)^2\times(\mathbb{Z}/M)^2$・$N,M\ge 2$）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	流束だけが分配関数に効く（一般の形）・捩れの関係	典	't Hooft 1979・Mack–Petkova 1980	—	—
2	面を動かす補題：面を動かす・偶奇だけで決まる	初	§02 の証明	面 Π_q の場合	—
3	区画と流束の自由エネルギーの定義：$\Delta F\cdot\theta=\tanh(\Delta F/2)$ (4)	定義	§02	$n_{12}=1$・混ざった流束 0	—
4	Tomboulis–Yaffe：Wilson ループを捩れた分配関数の比で押さえる	典	26-01 で式を	—	—
5	偏りの偶奇表示：$\theta=\mathbb{E}_{\tilde\mu}[(-1)^{\lvert Q\rvert}]\Longleftarrow 2$	初	§03 の証明	面の和のアンサンブル (5)	—
6	作用零の配位の補題：作用 $0\Longleftrightarrow U_p=z_p\mathbf{1}$	初	§04	—	—
7	一周の交換子の符号の補題：交換子は平面の符号の積 (6)	初	§04（格子の非可換 Stokes）	全プラケットが中心の値	—
8	閉じた道は直線の一周の語に変形できる	典	標準の位相	トーラスの格子	—
9	holonomy による決定の補題：holonomy で決まる $\Longleftarrow$ 7・8	初	§04	同じ z・中心の値	—
10	捩れを食う配位の補題：U^0 は区画 (1,0) で作用 0	初	§05	—	—
11	反可換の対の剛性の補題：反可換な対の正規形と可換子 $\{\pm\mathbf{1}\}$	初	§05	$SU(2)$	—
12	捩れた真空の一意性：捩れを食う真空の一意性 $\Longleftarrow$ 6・7・9・10・11	初	§05	ゲージ変換と平面の方向の中心の変換を除いて	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
13	捩れた随伴のギャップの補題：随伴の場の反周期性とギャップ $4\sin^2(\pi/2N)$ ⟸ 10	初	§06	二次元の格子 $(\mathbb{Z}/N)^2$・$U=U^0$	—
14	(8)：$m_N = 2\,\mathrm{arsinh}\,\sin(\pi/2N)$ ⟸ 13	初	§06	代数の言い換え	—
15	捩れた区画の最小作用の正値性：(1,1) に平坦な配位が無く $0 < S_{\min} \le 2N^2$ ⟸ 6・7・11	初	§07	区画 (1,1)	—
16	連続理論の下限 $8\pi^2\lvert Q\rvert/g^2 \ge 4\pi^2/g^2$	典	't Hooft 1981・Tanizaki–Ünsal の (2.24)(2.25)	連続・捩れの束	—

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  典  流束だけが効く・捩れの関係                                  't Hooft・Mack–Petko
 2  初  面を動かす補題：面を動かす                                  面 Π_q
 3  定  ΔF・θ = tanh(ΔF/2)                                          n₁₂ = 1
 4  典  Tomboulis–Yaffe                                             26-01
 5  初  偏りの偶奇表示：θ = E[(−1)^|Q|] ⟸ 2
 6  初  作用零の配位の補題：作用 0 ⟺ U_p = z_p
 7  初  一周の交換子の符号の補題：交換子 = 平面の符号の積          中心の値
 8  典  閉じた道は一周の語に変形できる
 9  初  holonomy による決定の補題：holonomy で決まる ⟸ 7・8
10  初  捩れを食う配位の補題：U⁰ は作用 0
11  初  反可換の対の剛性の補題：反可換な対・可換子 ±1              SU(2)
12  初  捩れた真空の一意性 ⟸ 6・7・9・10・11
13  初  捩れた随伴のギャップの補題：ギャップ 4sin²(π/2N) ⟸ 10  (ℤ/N)²
14  初  m_N = 2 arsinh sin(π/2N) ⟸ 13
15  初  捩れた区画の最小作用の正値性：0 < S_min ≤ 2N² ⟸ 6・7・11
16  典  連続の下限 4π²/g²                                          連続
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。この章に仮定の行はありません。引用の行は四つ（流束だけが効くこと・Tomboulis–Yaffe・閉じた道の変形・連続の下限）で、三つの性質の証明が使う引用は閉じた道の変形だけです（holonomy による決定の補題を通して捩れた真空の一意性だけ）。捩れた随伴のギャップの補題・捩れた区画の最小作用の正値性は引用なしで閉じています。

捩れた境界条件の、この本の対象としての定義は 19-02 に在ります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 面を動かす補題・偏りの期待値の表示（偏りの偶奇表示）・捩れを食う真空の一意性（ゲージと平面の方向の中心を除いて）・随伴の Laplacian のギャップ $4\sin^2(\pi/2N)$・(1,1) の区画で $0 < S_{\min} \le 2N^2$。全て SU(2)・有限の格子・N 固定・$n_{12} = 1$	量子の揺らぎのギャップ。格子間隔に一様な評価。$S_{\min}$ の値と N 依存
典 流束だけが効くことの一般の形・Tomboulis–Yaffe の不等式・連続理論の作用の下限	$\theta \ge 0$（26-04 で扱う）。他の群

出典と再現

もの	種別	出典・道具
捩れた境界条件・流束の自由エネルギー	典	G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141。G. 't Hooft, Commun. Math. Phys. 81 (1981) 267（書誌は 3-05 と同じ）
プラケットの $\mathbb{Z}_2$ の符号を足し上げる表示	典	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 125 (1980) 117
Tomboulis–Yaffe の不等式	典	E. T. Tomboulis, L. G. Yaffe, Commun. Math. Phys. 100 (1985)（頁は未確認）。式の形は 26-01
位相電荷の分数部分と作用の下限	典	Y. Tanizaki, M. Ünsal, arXiv:2201.06166 の式 (2.24)・(2.25)（本文で確認）
§02〜§07 の補題と三つの性質・(8)	初	本文の証明。数値の計算は使っていない

この章で使った語 — 't Hooft の捩れ・区画・流束 $n_{\mu\nu}$・面 Π_q・流束の自由エネルギー ΔF・偏り θ・捩れの和のアンサンブル・捩れを食う配位 U^0・中心の変換・随伴の Laplacian・反周期・最小作用 $S_{\min}$。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：25-02 渦と分数インスタントン — $(1,1)$ の区画の最小作用の中身と、希薄な気体の勘定。

2026-10-15 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 25 部 二本目の道 — 空間の方向から 分数インスタントン・希薄な気体・格子の作用 · Kiichi, Shiori and Rin

渦と分数インスタントン

この章は既存の知見の整理です。§02 は未解決の地図、§05・§06 は本書の検討です。

この章で分かること — 前の章の捩れた区画の最小作用の正値性は、平面の方向の流束 n_{34} を一つ入れると必ず作用を払うことを言いました。この章は、その最小のコストの中身を見ます。(1) 連続理論では、捩れた $T^2 \times \mathbb{R}^2$ の上の流束を担う最も安い対象は位相電荷 $\frac{1}{2}$ の自己双対の塊（分数インスタントン）で、作用の下限は $4\pi^2/g^2 = \pi^2\beta$ です。(2) その塊が平面の中で点のように散らばった希薄な気体を数えると、弦の張力は $\Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}$ の程度になります（物理の見立て）。指数の $5/3 = 11/3 - 2$ が、漸近自由の係数と平面の二次元の差です。(3) 格子の上では、流束を入れた区画の最小作用が π^2 より小さい値から π^2 に近づきます（数値の読みと、証明書つきの上界）。(4) 連続理論での塊の存在を、ある性質を仮定して導く筋を、仮定の行として置きます。

前提となる章 — 25-01（区画・θ・捩れた T^2 の三つの性質）・3-05（インスタントンと位相電荷、BPS の下限）・17-02 渦の気体の模型・4-06 一ループの係数・4-07（Λ）。

先に言うこと — 希薄な気体の勘定は、希薄な領域（$\Lambda L \ll 1$）・一ループの水準・群 $SU(2)$ の上の物理の見立てで、定理ではありません。格子の冷却で得た作用の値は、見つけた配位の作用なので最小作用の**上界**で、下界ではありません。連続理論の自己双対の解の存在は、この章では仮定つきの筋として置くだけです。

この章の順序

1. 位相電荷 1/2 の自己双対の塊 — 作用の下限
2. 塊は在るか — 数値と、仮定つきの筋
3. 希薄な気体 — 弦の張力を数える（式 (5)〜(8)）
4. 5/3 = 11/3 − 2 の読み方
5. 格子の上の作用 — $\pi^2\beta$ に下から近づく（表 1・表 2）
6. 格子の上で率を言う言明 — 細い面の率 $2\mathrm{N}^2$ から分数インスタントンの率へ
7. 言えないこと

8. 五分類の表と依存グラフ（表 3）

01

位相電荷 1/2 の自己双対の塊 — 作用の下限

連続理論の位相電荷 Q とインスタントンの作用の下限は 3-05 のとおりで、ユークリッドの作用は

$$S_E \;\geq\; \frac{8\pi^2}{g^2}\,|Q| \tag{1}$$

を満たし、等号は（反）自己双対の方程式 $F = \pm *F$ の解で達せられます[典]。周期的な四次元のトーラスや $\mathbb{R}^4$ では Q は整数です。ところが 't Hooft の捩れのある束では、Q の分数部分が捩れで決まり、$SU(N)$ で $n_{12} = n_{34} = 1$ なら $Q \equiv -1/N \pmod 1$ です（この章で $SU(N)$ と書くときの N は群の次数で、この部の格子の N とは別です）[典]（Tanizaki–Ünsal の式 (2.24)、原典は 't Hooft 1981）。$SU(2)$ では $Q \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ で、(1) から

$$S_E \;\geq\; \frac{4\pi^2}{g^2} = \pi^2 \beta \qquad (\beta = 4/g^2) \tag{2}$$

です（同、式 (2.25)：下限は通常のインスタントンの作用 $8\pi^2/g^2$ の $1/N$）[典]。

この下限を達する解が分数インスタントンです。Tanizaki–Ünsal は、$\mathbb{R}^2 \times T^2$（T^2 に捩れ）の上でこの解の作用密度が $\mathbb{R}^2$ の方向に局在して渦のような形をし、平面の Wilson ループの内側にあるとループに中心の元 -1（$SU(N)$ では $e^{2\pi i/N}$）を掛けること、つまり中心渦（17-02）として振る舞うことを述べています[典]（式 (2.26) の前後）。前の章の言葉では、この塊は区画 $(1,1)$ の最安の住人で、面 Π_q を細い面としてではなく滑らかな塊として運ぶものです。

大きさについて一言。塊の作用は (2) で決まり大きさによりませんが、捩れた T^2 の上では塊は T^2 の大きさ L 程度の広がりに固定されます（同じ論文の脚注は、$SU(N)$ で塊の半径が群の次数の平方根に比例するという先行の数値を引いています）[典]。大きさが決まっているので、希薄な気体の勘定で赤外の発散が起きません。周期的な $\mathbb{R}^4$ のインスタントンの大きさの積分が赤外で発散するのと対照的です（3-05）。

02

塊は在るか — 数値と、仮定つきの筋

文献の状況 典 。Tanizaki–Ünsal は、分数の位相電荷を持つ自己双対の解の解析的な形はほとんど知られていない（特定の縦横比のトーラスの上の可換な定数の解を除いて）と書き、格子の冷却による数値の探索が、格子の離散化の誤差の範囲で下限 (2) を達する配位を見つけ、$\mathbb{R}^2$ の方向を無限に伸ばした極限もよく定まっていると報告していることを引いています（同 §2.3.1）。解析的な存在は、この本が確かめた範囲の文献では示されていません。

仮定つきの筋 仮 （筋：この本の検討の記録の「Nahm 変換による存在の筋」。根拠は 表 3 の Nahm 変換の行）。次の性質を仮定します。

> **仮定（Nahm 変換の同変性）。**二重周期のインスタントン（$T^2 \times \mathbb{R}^2$ の上の荷電 1 の解）と、双対トーラスの上の Hitchin 型のデータの間の Nahm 変換は、物理空間の並進と中心のゲージ変換に同変である：物理空間の並進は双対の側の平坦な直線束の掛け算に、中心の捩れは双対トーラスの半周期の並進に対応する。

筋は次の三段です。(i) $T^2_{2L\times L} \times \mathbb{R}^2$ の上の荷電 1 の $SU(2)$ 二重周期インスタントンを、Nahm 変換で双対の側のデータに対応させる（二重周期インスタントンの構成と変換の全単射性は文献にあるとされる。照合未了）。(ii) 長い方向の半周期の並進と中心のゲージ変換の合成 τ は、仮定により双対の側の半周期の並進と定数のずれの合成に対応し、特異点の位置を四分の一周期に置けば τ で不変なデータが選べる。(iii) 対応する解は τ でゲージを除いて不変で、商 $T^2_{L\times L} \times \mathbb{R}^2$ に降ろすと、τ が中心の捩れを含むので $n_{12} = 1$ の束の上の荷電 $\frac{1}{2}$ の反自己双対解になり、作用は (2) の下限に等しい。

この筋が閉じれば、(2) の下限は連続理論で達せられます。閉じていないのは、仮定そのもの（同変性の正確な形）と、(i) の文献の照合と、商に降ろしたときに束の位相（n_{12} と平面の無限遠での流束）が正しく出ることの確認です。もう一つの筋として、Bogomolny の下限・Uhlenbeck のコンパクト性による泡の排除・集中コンパクト性による分裂の排除を組み合わせる変分法の筋もありますが、最小の値が下限に等しいこと自体を別に示す必要があり、同じく 仮 です。この本は、どちらの筋も以下の章の前提に使いません。

03

希薄な気体 — 弦の張力を数える

この節は既存の知見（希薄な気体の勘定）の整理です。導入は 3-05 §07 にあります。

塊が平面の中で互いに遠く離れて散らばっている（希薄な）と仮定し、塊どうしの相互作用を無視して数えます。これが希薄な気体の近似で、ここからの勘定は Tanizaki–Ünsal の §2.3.2 を $SU(2)$ に写したものです [典]（式の写し）。近似そのものの正しさは物理の見立てです [読]。

注意：原典は小さな T^2 を 3・4 の方向に、平面を 1・2 の方向に置いていて、この本（T^2 が 1・2、平面が 3・4）とは添字が入れ替わっています。以下はこの本の添字で書きます。

一つの塊の重み。平面の上の一つの塊（自己双対・$Q=+\frac{1}{2}$）と反塊（$Q=-\frac{1}{2}$）の重みは、θ 角を 0 として

$$K\,e^{-S_I/2}, \qquad S_I=\frac{8\pi^2}{g^2}, \qquad \frac{S_I}{2}=\frac{4\pi^2}{g^2}=\pi^2\beta \tag{3}$$

です（原典の式 (2.27) の $N=2$）。前因子 K は質量の次元 2 を持ち $K\sim 1/L^2$ で、その正確な値は揺らぎの行列式の解析で決まるもので、原典は与えていません [典]。

漸近自由で書き直す。一ループの走る結合（4-06）で、尺度 L の結合を Λ で書くと、$SU(2)$ で $8\pi^2/g^2(L)=\frac{22}{3}\ln\frac{1}{\Lambda L}$（一ループの水準。一般の $SU(N)$ では $\frac{11N}{3}$）なので、

$$e^{-S_I/2}=e^{-4\pi^2/g^2(L)}=(\Lambda L)^{11/3}\quad(\text{一ループ}), \qquad K\,e^{-S_I/2}\sim\frac{1}{L^2}(\Lambda L)^{11/3}=\Lambda^2(\Lambda L)^{5/3} \tag{4}$$

となります（原典の式 (2.32) の最後の変形）[典]。指数 $11/3$ は群の次数によりません（$SU(N)$ では塊の作用が S_I/N で、係数 $11N/3$ の N と打ち消し合う）。

Wilson ループ。面積 A のループ C の内側に塊が一つあると、ループの値に -1 が掛かります（中心渦）。塊と反塊をそれぞれ密度 $Ke^{-\pi^2\beta}$ の独立な Poisson の点として平面に撒くと、内側の個数 n は平均 ρA（$\rho=2Ke^{-\pi^2\beta}$）の Poisson 分布で、

$$\langle W(C)\rangle=\mathbb{E}\big[(-1)^n\big]=e^{-2\rho A}=\exp\!\big(-4Ke^{-\pi^2\beta}\,A\big) \tag{5}$$

です。Poisson 分布で $\mathbb{E}[(-1)^n]=e^{-\lambda}\sum_k(-\lambda)^k/k!=e^{-2\lambda}$ という一行の計算です [初]（模型の中の計算）。原典は、全体の電荷の制約（塊と反塊の数の差が N の倍数）を Fourier の和で入れて同じ答えを出しています：$\theta=0$ で基本表現の弦の張力は

$$T_R\sim\Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}\sin^2\frac{\pi|R|}{N} \tag{6}$$

（原典の式 (2.37)。N は群の次数、$|R|$ は表現の Young 図の箱の数を N で割った剰余）で、$SU(2)$ の基本表現では $\sin^2(\pi/2)=1$ です [典]。(5) と (4) を合わせると

$$\sigma=4K\,e^{-\pi^2\beta}\ \sim\ \Lambda^2(\Lambda L)^{5/3} \qquad (\text{希薄な領域・一ループ・}SU(2)) \tag{7}$$

読 （物理の見立て。$\sim$ は前因子の定数を省いた比例）。

偏り θ との関係。同じ数え方を、平面全体（面積 $A_{\text{平面}} = (Ma)^2$）の塊の個数の偶奇に当てると、25-01 の偏りの偶奇表示の $\theta = \mathbb{E}[(-1)^{|Q|}]$ は

$$\theta \approx e^{-2\rho A_{\text{平面}}}, \qquad -\ln\theta \approx 4K e^{-\pi^2\beta}\,(Ma)^2 \tag{8}$$

となり、$-\ln\theta$ が平面の面積に比例する（面積則の型）と同時に、その率が分数インスタントンの重み $e^{-\pi^2\beta}$ で決まることが読めます 読 （希薄な気体の見立て）。格子の上でこの形のうち「率が $e^{-\beta S}$ で、S が π^2 に近い」部分を言う言明が §06 です。

格子の上の数値も同じ描像を支持しています。Bergner–González-Arroyo–Soler（2025）は、二つの方向が他より遥かに小さく捩れた境界条件を持つ四次元のトーラスの $SU(2)$ の格子で、小さな T^2 の大きさでは位相電荷と弦の張力が渦のような分数インスタントンの気体から生じること、大きさを増すと密度が増え、構造の間隔が一定に近づくことを報告しています 典 （要旨で確認。本文の数値は照合未了）。

04

5/3 = 11/3 − 2 の読み方

(4) の指数は二つの寄与の差です 読 （物理の見立て）。

- $11/3$：**漸近自由**。T^2 が小さいほど結合が弱く、塊は $(\Lambda L)^{11/3}$ の割合で稀になります。係数 $11/3$ は一ループの係数（4-06 の $11/3 = -1/3 + 4$）そのものです。
- -2：**平面の二次元**。塊の大きさは L なので、平面の単位面積あたり置ける場所の数は $1/L^2$ です（$K \sim 1/L^2$）。これは塊の位置のエントロピーにあたります。

差 $11/3 - 2 = 5/3$ が正なので、Λ を止めて T^2 を広げると（L を増すと）、物理の単位の弦の張力は増えます。広げるほど閉じ込めが強まる向きで、$L \sim 1/\Lambda$ で Λ^2 の程度に達するのは次元の勘定と矛盾しません。一つの T^2 の大きさの正方形（面積 L^2）あたりで数えると $\sigma L^2 \sim (\Lambda L)^{11/3}$ で、その正方形に塊がいる確率が L とともに増える、と言い換えられます。

可換な群 $U(1)$ には、分数の流束を担う局在した塊がありません。流束は T^2 の上に一様に広がるしかなく、T^2 を広げる向きの振る舞いが逆になります。「非可換が効く唯一の場所」としてこの差を扱うのは 26-03 で、そこでもこの勘定は一ループの水準の見立てです。この章の範囲では、(4)〜(8) は全て $\Lambda L \ll 1$ の希薄な領域の文で、$L \sim 1/\Lambda$ の帯の中には延びません。

05

格子の上の作用 — π²β に下から近づく

単位の合わせ方。25-01 の作用 $S^z(U) = \sum_p (1 - \frac{1}{2} z_p \operatorname{tr} U_p)$ は β を掛ける前の量です。5-01 の古典的な連続極限で、$SU(2)$・$\beta = 4/g^2$ なら βS^z は連続の作用 S_E に近づくので、作用 $4\pi^2/g^2$ の塊は $S^z \approx \pi^2$（つまり $\beta S^z \approx \pi^2 \beta$）に当たります。以下の数は全て S^z の値を π^2 で割ったものです。

冷却の数値 読 。各リンクを、それを含むプラケットの残りの辺の和（staple）の向きに置き換える操作を繰り返して S^z を下げ（冷却）、区画 $(1,1)$ の最小作用 $S_{\min}(N, M)$ を探した結果が表 1 です。冷却が止まった配位の作用は、その配位が実在するので最小作用の**上界**です（浮動小数点の計算の範囲で）。真の最小がさらに低い可能性は、初期配位を替えても同じ値に着いたことで読みとして退けているだけです。

表 1　区画 $(1,1)$ の最小作用の冷却の値（$S_{\min}/\pi^2$。SU(2)・Wilson 作用・$n_{12} = n_{34} = 1$・乱数の初期配位から 3 回）

格子 $T_N^2 \times T_M^2$	$N \times M$	$S_{\min}$	$S_{\min}/\pi^2$
対称	2×2	7.841	0.794
対称	3×3	9.661	0.979
対称	4×4	9.799	0.993
対称	6×6	–	0.998
細長い	2×4	–	0.683
細長い	2×6	–	0.677
細長い	3×6	–	0.921
細長い	4×8	–	0.960

読み方 読 ：(i) どの値も π^2 より小さく、N とともに π^2 に近づきます（格子の上の値は連続の値に下から近づく。Wilson 作用の離散化の補正が負であることと整合する、という物理の読み）。(ii) 細長い格子（$M > N$）では、$N = 2$ で $M = 4 \to 6$ と平面を広げても値がほとんど変わりません。塊が平面の方向に局在していて、その作用が平面の大きさによらないこと、つまり希薄な気体の前提（塊が一つの局在した対象であること）を格子が支持しています。(iii) 対称な格子の値が細長い格子より大きいのは、対称な格子では塊が平面の方向にも N 程度に押し込まれるためと読めます。平面の方向に大きさ 16 の板（$4 \times 4 \times 16 \times 16$）で作用の分布を測った別の冷却では、$S^z/\pi^2 \approx 0.96$、作用の約 91% が塊の中心から平面の方向の半径 2 以内、約 99.6% が半径 4（$= N$）以内にありました 読 。

柱に閉じ込めた塊と、証明書つきの上界 機 。分数インスタントンの格子の論文（この本から出た論文の一つ、草稿。A-07）は、平面を一辺 ℓ の正方形のブロックに分け、一つのブロック

の上の柱 $T_N^2 \times [0,\ell]^2$ に流束を入れ、柱の外枠を捩れを食う真空 U^0（25-01 §05）に固定したときの最小作用を

$$S_*(N,\ell) = \min\{\text{外枠を } U^0 \text{ に固定した柱の作用 ： 柱に流束 } n_{34} \text{ を一つ}\} \tag{9}$$

と定義しています。保存した配位を正確に正規化し、外枠が真空に一致することを確かめたうえで 40 桁の算術で作用を再評価した値は、それぞれの S_* の上界です：

$$S_*(2,12) \le 6.67348665542 \le 0.6762\,\pi^2, \quad S_*(3,12) \le 9.07284242009 \le 0.9193\,\pi^2, \quad S_*(4,8) \le 10 \tag{10}$$

（$N=4$ は冷却が収束していない値）。条件：群 $SU(2)$・Wilson 作用・具体的な配位の作用の評価であって、上界の向きだけ。札の「機」はこの上界（具体的な配位の作用を桁の保証つきで評価したもの）にだけ付き、最小値そのものには付きません。どれも π^2 より小さいので、「格子の上の最小のコストは連続の値 π^2 より小さい」は、$N=2,3,4$ で上界から直接言えます。

柱の幅への依存 読 。同じ論文の表（冷却の値）：

表 2　$S_*(N,\ell)/\pi^2$ の ℓ 依存（冷却。SU(2)・外枠は真空に固定）

ℓ	3	4	5	6	7	8	10	12
$N=2$	0.7082	0.6924	0.6779	0.6771	0.6763	0.6762	0.67617	0.67617
$N=3$	1.1524	1.0185	0.9493	0.9347	0.9230	0.9213	0.9195	0.9193

S_* の初等的な性質 初 ：(a) 最小は達せられる（コンパクト性）。(b) $S_*(N,\ell) \le 2N^2$（柱に細い面を一枚置く）。(c) ℓ について増えない（小さい柱の最小の配位を、残りを真空で埋めて大きい柱に埋め込めば、境のプラケットは真空どうしで作用 0）。(d) 周期的な格子の最小作用と $S_*(N,\ell) \ge S_{\min}(N,k\ell)$（$k \ge 1$。柱の配位を外を真空で埋めて周期的な格子に延ばす）。よって $\lim_\ell S_*(N,\ell)$ は在ります。

周期的な格子の値（冷却）は $S_{\min}(2,M) =$ $6.740117,\ 6.677345,\ 6.673724,\ 6.673486,\ 6.673485$（$M=4,6,8,12,16$）、$S_{\min}(3,16) =$ 9.072494 で、$S_*(N,\ell)$ は ℓ とともにこれに上から近づきます。その差 $S_*(N,\ell) - S_{\min}(N,\infty)$ は、25-01 の (8) の捩れの質量 $m_N = 2\,\mathrm{arsinh}\sin(\pi/2N)$（$m_2 \approx 1.317$、$m_3 \approx 0.962$）について $e^{-m_N\ell}/\ell$ のように減ると読まれています 読 （分数インスタントンの格子の論文の草稿は、観測した傾き 1.41・1.02 を予想の値 1.45・1.06 と並べている。予想の値の出し方はこの本では確かめていない）。塊の裾が、捩れた T^2 の上の随伴の揺らぎの質量で切られている、という読みです。

まとめると、格子の上の最小のコストは $N=2,3,4$ でおよそ $0.68\pi^2,\ 0.92\pi^2,\ 0.96\pi^2$（周期的な格子の値。$N=4$ は細長い格子 4×8 の冷却）で、N を増すと π^2 に下から近づきます。「$N\to\infty$ で $S_{\min}(N,\infty) \to \pi^2$」は数値だけで、証明はありません 読 。

06

格子の上で率を言う言明 — 細い面の率 2N² から分数インスタントンの率へ

N と格子間隔を固定すれば、どの β でも面積則の型の評価 $-\ln\theta \geq c\,M^2$ が初等的に出ます（25-04）。そこでの率 c は細い面のコストで決まり、$c \approx e^{-2\beta N^2}$ です（25-01 の捩れた区画の最小作用の正値性の上界 $2N^2$ の配位）。$2N^2$ は N とともに増え、分数インスタントンとは関係がありません。

分数インスタントンの格子の論文の主定理（分数インスタントンによる閉じ込めの下界（その論文の定理 A））は、この率を $S_*(N,\ell)$ に置き換える言明です。草稿の形を条件ごと写します 仮（この本ではまだ証明を本文に置いていない。根拠の欄は分数インスタントンの格子の論文の草稿の §3〜§6。証明はチェス盤の評価と Morse–Bott の補題を引用で使い、剛性の定数は存在だけが示されて値は明示されない）。

分数インスタントンによる閉じ込めの下界（草稿の言明）。 全ての $N \geq 2$・$\ell \geq 2$・$\beta \geq 1$・$M \in 2\ell\mathbb{N}$ について、ある $c(N,\ell) > 0$・$a > 0$ と $\varepsilon(\beta) = O\big(\sqrt{\ln\beta/\beta}\big)$ があって

$$-\ln\theta(N,M,\beta) \;\geq\; c(N,\ell)\,\beta^{-a}\,e^{-\beta\,(S_*(N,\ell)+\varepsilon(\beta))}\,M^2. \tag{11}$$

(10) の上界と合わせると、率は $2N^2 = 8, 18, 32$ から $\leq 0.68\pi^2,\ 0.92\pi^2,\ 0.98\pi^2$ 程度に下がります（$N = 2, 3, 4$）。ただし前因子 β^{-a} と $\varepsilon(\beta)$ の項が粗いので、(11) が細い面の評価に勝つのは、明示されない大きな β から先です。(11) は N に一様でなく、連続極限についても質量ギャップについても何も言いません。逆向きの評価（希薄な気体の上界、M に一様）は開いています。これらの位置づけは 27-01 と 27-02 で扱います。

(8) の見立てと (11) を並べると、見立ての「率は分数インスタントンの作用」という部分のうち、固定した N の格子の上で閉じ込めの向き（下からの評価）だけが言明の形になっている、という位置です。

07

言えないこと

(a) 希薄な気体。(5)〜(8) は相互作用を無視した勘定で、$\Lambda L \ll 1$ の希薄な領域・一ループの水準の物理の見立てです。前因子 K は値が分かっていません。

(b) 冷却の値。表 1・表 2 の値は最小作用の上界で、下界ではありません。「π^2 に下から近づく」のうち、「π^2 より下」は $N = 2, 3, 4$ で (10) の上界から言え、「近づく」は数値の読みで

す。

(c) 連続の存在。捩れた $T^2 \times \mathbb{R}^2$ の上で (2) の下限を達する解の存在は、この本では仮定つきの筋で、示されていません。

(d) 帯。この章の全ての文は $\Lambda L \ll 1$ か N 固定の文で、T^2 を $1/\Lambda$ を越えて広げることについては何も言いません（25-09）。

(e) 分数インスタントンの格子の論文。分数インスタントンによる閉じ込めの下界は草稿の言明で、この本の札は「仮」です。草稿の証明を一行ずつ確かめて本文に置くまで、上げません。

08

五分類の表と依存グラフ

表 3　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	BPS の下限 (1)	典	3-05	連続	—
2	捩れた束で $Q \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$、下限 $4\pi^2/g^2 = \pi^2\beta$ (2) $\Longleftarrow 1$	典	Tanizaki–Ünsal の (2.24) (2.25)・'t Hooft 1981	連続・SU(2)・$n_{12}=n_{34}=1$	—
3	塊は平面に局在し中心渦として働く・大きさは L 程度	典	Tanizaki–Ünsal §2.3.1	原典の数値と記述	—
4	解析的な存在は知られていない（原典の記述）	典	Tanizaki–Ünsal §2.3.1	—	—
5	Nahm 変換の同変性の下での存在の筋	仮	筋：検討の記録の「Nahm 変換による存在の筋」・§02	仮定 1 つ・文献の照合未了	—
6	一つの塊の重み $Ke^{-\pi^2\beta}$・$K \sim 1/L^2$ (3)	典	Tanizaki–Ünsal の (2.27)	希薄な気体の模型	—
7	$Ke^{-\pi^2\beta} \sim \Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}$ (4)	典	Tanizaki–Ünsal の (2.32)	一ループ	—
8	Poisson の模型で $\langle W\rangle = e^{-2\rho A}$ (5)	初	§03 の一行	模型の中の計算	—
9	$T_R \sim \Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}\sin^2(\pi\lvert R\rvert/N)$ (6)	典	Tanizaki–Ünsal の (2.37)	$\theta=0$・希薄な領域	—
10	$\sigma = 4Ke^{-\pi^2\beta} \sim \Lambda^2(\Lambda L)^{5/3} \Longleftarrow$ 6・7・8・9	読	物理の見立て	希薄な領域・一ループ・SU(2)	—
11	$-\ln\theta \approx 4Ke^{-\pi^2\beta}(Ma)^2$ (8) $\Longleftarrow$ 8・10	読	物理の見立て	同上	—
12	格子の気体の数値（Bergner–González-Arroyo–Soler 2025）	典	要旨	SU(2)・捩れた小さな T^2	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
13	$5/3 = 11/3 - 2$ の読み ⟸ 10	読	§04	一ループ・希薄な領域	—
14	冷却の値（表 1）・局在の割合	読	この本の検討の数値の記録	上界・3 回の初期配位	—
15	S_* の性質 (a)〜(d)	初	§05	SU(2)・格子	—
16	証明書つきの上界 (10)	機	分数インスタントンの格子の論文の草稿 §7（40 桁の再評価）	上界の向きだけ・$N = 4$ は未収束	—
17	表 2 の ℓ 依存・$e^{-m_N \ell}/\ell$ の減衰	読	同、§7	冷却	—
18	π^2 に下から近づく ⟸ 14・15・16・17	読	§05	「下」は $N = 2, 3, 4$ で行 16 から	—
19	分数インスタントンによる閉じ込めの下界 (11)	仮	分数インスタントンの格子の論文の草稿 §3〜§6	N 固定・$\beta \geq 1$・N に一様でない・連続極限なし	—

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  典  S ≥ 8π²|Q|/g²                                              連続
 2  典  捩れで Q ∈ 1/2 + ℤ・下限 π²β ⟸ 1                            SU(2)・n₁₂ =
 3  典  塊は平面に局在・中心渦・大きさ L 程度
 4  典  解析的な存在は知られていない
 5  仮  同変性の仮定の下の存在の筋                                  照合未了
 6  典  一つの塊の重み K e^(−π²β)
 7  典  K e^(−π²β) ~ Λ²(ΛL)^(5/3)                                  一ループ
 8  初  Poisson の模型で 〈W〉 = e^(−2ρA)
 9  典  T_R ~ Λ²(ΛL)^(5/3) sin²(π|R|/N)                            θ = 0
10  読  σ = 4K e^(−π²β) ~ Λ²(ΛL)^(5/3) ⟸ 6・7・8・9                 希薄・一ループ
11  読  −ln θ ≈ 4K e^(−π²β)(Ma)² ⟸ 8・10
12  典  格子の気体の数値（要旨）
13  読  5/3 = 11/3 − 2 の読み ⟸ 10
14  読  冷却の値・局在の割合                                        上界
15  初  S_* の性質 (a)〜(d)
16  機  S_* ≤ 0.6762π², 0.9193π², 0.9707π²                          上界・N = 4 ま
17  読  ℓ 依存・e^(−m_N ℓ)/ℓ
18  読  π² に下から近づく ⟸ 14・15・16・17
19  仮  分数インスタントンによる閉じ込めの下界（格子の論文の定理 A）  N 固定・草稿
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。証明を本文に置いた節点は、Poisson の模型の一行と S_* の性質の二つだけで、どちらも模型の中か有限の格子の上の一行の議論です。Nahm 変換による存在の筋と、分数インスタントンによる閉じ込めの下界の「仮」はどの節点の前提にも入っていません。この章の結論の側の節点（弦の張力・θ の読み・5/3 の読み・π^2 に下から近づくこと）は全て「読」で、閉じ込めの節点も質量ギャップの節点もありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
典 捩れた束の作用の下限 $4\pi^2/g^2 = \pi^2\beta$・希薄な気体の原典の式 (2.27)(2.32)(2.37)・格子の気体の数値の報告（要旨）	(2) を達する連続の解の存在
読 弦の張力 $\Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}$（希薄な領域・一ループ・SU(2) の見立て）・$5/3 = 11/3 - 2$ の読み・格子の作用が π^2 に近づくこと	希薄な気体の近似の正しさ。K の値。$N \to \infty$ の極限
機 $S_* \le 0.6762\pi^2,\ 0.9193\pi^2,\ 0.9707\pi^2$（$N = 2, 3, 4$、具体的な配位の上界）	S_* と $S_{\min}$ の下界・一致
初 Poisson の模型の一行・S_* の初等的な性質	—
仮 存在の筋（同変性の仮定）・分数インスタントンによる閉じ込めの下界（草稿）	どちらも本文に証明が無い

出典と再現

もの	種別	出典・道具
(2)(3)(4)(6)・塊の局在・解析解の状況	典	Y. Tanizaki, M. Ünsal, Center vortex and confinement in Yang–Mills theory and QCD with anomaly-preserving compactifications, arXiv:2201.06166（v2, 2022）。§2.2〜§2.3、式 (2.24)〜(2.37) を本文で確認
格子の分数インスタントンの気体	典	G. Bergner, A. González-Arroyo, I. Soler, arXiv:2502.09463（2025、Lattice 2024 の報告）。要旨を確認
捩れた束の位相電荷	典	G. 't Hooft, Commun. Math. Phys. 81 (1981) 267（書誌は 3-05）
存在の筋（同変性の仮定）	仮	この本の検討の記録（Nahm 変換による存在の筋）。そこで引かれた二重周期インスタントンの構成と Nahm 変換の文献は照合未了
表 1・局在の割合	読	この本の検討の数値の記録（冷却、乱数の初期配位から 3 回）
(9)(10)・表 2・周期的な格子の値・減衰の傾き・分数インスタントンによる閉じ込めの下界	機・読・仮	分数インスタントンの格子の論文（分数インスタントンの格子の閉じ込め、草稿 2026-10-14）。§2・§7・§8。題と段階は A-07
(5)・S_* の性質・m_N の数値	初	本文。m_N は 25-01 の (8) に $N = 2, 3$ を入れた値

この章で使った語 — 分数インスタントン・位相電荷 $\frac{1}{2}$・BPS の下限・中心渦・希薄な気体・前因子 K・弦の張力・$5/3 = 11/3 - 2$・冷却・柱に閉じ込めた塊 $S_*(N, \ell)$・証明書つきの上界・捩れの質量 m_N。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：25-03 容器 — 枠を条件づけると独立になる — 平面をブロックに分け、偏りを柱ごとの量の積で押さえる。

2026-10-15 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 25 部 二本目の道 — 空間の方向から 容器の恒等式・入れ子・四次元での限界 · Kiichi, Shiori and Rin

容器 — 枠を条件づけると独立になる

この章は既存の知見の整理です。§04・§05・§07 は本書の検討です。

この章で分かること — Wilson ループを閉じ込めの向きに押さえる最も素朴な道具は、ループの張る面を小さな領域（容器）に分け、容器の外側（枠）を止めて考えることです。最近接の作用では、枠を止めると容器どうしは独立になり、Wilson ループの期待値は「容器ごとの区画の偏り」の積の平均で上から押さえられます（容器の恒等式）。これは Mack–Petkova（1980）の渦の容器の恒等式を、区画の和のアンサンブルで書き直したもので、この本は新しさを主張しません。この章では、(1) 容器の恒等式とその tanh の形、(2) 固定した区画へ移すときに要る「内側と外側の領域」の形、(3) 平面の方向（R^2 の方向）に容器を入れ子にする不等式、(4) 四次元では長さの決まった容器を独立に並べても $V(R) \gtrsim R/\ln R$ までしか出ないという Kovács–Tomboulis の指摘、(5) 二次元の解ける模型で、容器の恒等式の評価が指数の部分で鋭いこと、を順に見ます。

前提となる章 — 25-01（捩れた T^2 と 't Hooft の流束・区画）・25-02（渦）。第 5 部の 5-01（Wilson 作用と Wilson ループ）・5-08（弦の張力）・第 17 部の 17-02（中心渦の描像）。

先に言うこと — 群は $SU(2)$、作用は Wilson 作用、格子は有限で、格子間隔は固定します。この章の文は全て「格子の上の、ある固定した β」の文で、連続極限については何も言いません。容器の恒等式は既知です（典）。この本が紙で置くのは、区画の和のアンサンブルでの書き直しと、固定した区画へ移すときの修正の形と、入れ子の不等式の三つです（初）。Lean の欄が保証するのは有限和の代数だけで、Haar 測度と区画の位相は本文の議論に依ります。

この章の順序

1. 要約 — 枠を止めると独立になる
2. 設定 — 区画の和のアンサンブル・枠と容器
3. 容器の恒等式と tanh の形 — Mack–Petkova の恒等式との対応
4. 固定した区画へ — 内側と外側の容器
5. 平面の方向の入れ子の不等式

6. 四次元での限界 — $V(R) \gtrsim R/\ln R$（Kovács–Tomboulis の式 (23)〜(25)）
7. 二次元の解ける模型での検査 — 表 1
8. 言えないこと
9. 五分類の表と依存グラフ — 表 2

01

要約 — 枠を止めると独立になる

この節は〔三〕の読者に向けた要約です。式と証明は §02 以下にあります。

1. 格子の Wilson 作用は、隣り合うリンクだけを結ぶ（最近接の）作用です。だから、ある領域の内側のリンクと外側のリンクは、境目のリンクを通してしか話をしません。境目を全部止めてしまえば、別々の領域の内側は互いに独立になります。これは統計力学の Markov 性そのものです。
2. Wilson ループ $W(C)$ を、ループの張る面の上の小さな領域（容器）ごとの「区画の符号」$\sigma_j = \pm 1$ の積に書き直せます（区画の和のアンサンブルで、§02）。枠（容器の外側）を止めると σ_j どうしは独立なので、期待値は積になり、絶対値を取って平均すると $|\langle W \rangle| \le \mathbb{E}[\prod_j \theta_j]$、$\theta_j = |\mathbb{E}[\sigma_j \,|\, \text{枠}]|$ が出ます。これが容器の恒等式です 典 。
3. θ_j は $\tanh(|\Delta F_j|/2)$ と書けます。ΔF_j は、枠を止めた容器の中で、渦が一本ある区画と無い区画の自由エネルギーの差です。渦が安く入る（ΔF_j が小さい）容器ほど θ_j は小さく、Wilson ループは小さく押さえられます。
4. この恒等式は Mack–Petkova（1980）の「渦の容器」の恒等式で、Kovács–Tomboulis（2001）の式 (18)〜(22) にそのまま書かれています。違いは、区画を和にして書いたことと、枠について最大値でなく平均を取ったことだけです。この本は新しさを主張しません。
5. 固定した区画（一つの捩れの区画）の Wilson ループに移すには、ループの内側だけでなく外側にも容器が要ります（§04 の内側と外側の容器の命題）初 。
6. 容器を平面の方向に入れ子にすると、大きな容器の偏りは小さな容器の偏りの積の平均で押さえられます（§05 の平面の方向の入れ子の不等式）初 。ただしこれは T^2 の大きさを止めた板の中の話で、T^2 と一緒に広げる話（移り変わりの帯）には使えません。
7. 四次元の空間（R^4）では、ループの内側の点を通る容器の長さはループとともに伸びます。容器の費用を一定に保つには太さを $\sqrt{\ln R}$ の程度に太らせる必要があり、独立な容器から

出るのは $V(R) \gtrsim R/\ln R$ までです（Kovács–Tomboulis）典。小さな T^2 の板では容器の長さが T^2 の面積で止まるので、この障害は現れません。

8. 二次元の $SU(2)$ は解けるので、容器の恒等式の評価がどれだけ鋭いかを数で見られます。一辺 ℓ の容器で敷き詰めると、評価から出る弦の張力は $\sigma - \ln(16/(3\pi))/\ell^2$ の形で真の値に近づきます（§07）初 ＋読 。

02

設定 — 区画の和のアンサンブル・枠と容器

格子 Λ は有限の超立方格子、リンク変数は $U = (U_b) \in SU(2)^{\text{リンク}}$ です。各プラケット p に符号 $z_p \in \{\pm 1\}$ を置き、全ての 3 次元の立方体 c で $\prod_{p \in \partial c} z_p = 1$（余閉）を課します。重みと測度を

$$w(U,z) = \exp\Big(\frac{\beta}{2}\sum_{p} z_p \operatorname{tr} U_p\Big), \qquad d\mu \;\propto\; w(U,z)\prod_{b} dU_b \;\times\; (\text{余閉な } z \text{ の数え上げ}) \tag{1}$$

と置きます（dU_b は Haar 測度）。同じコホモロジー類の z は中心のゲージ変換 $U_b \mapsto \omega U_b$（$\omega \in \{\pm 1\}$）で移り合うので、(1) の和は、全ての 't Hooft の捩れの区画（25-01）の $SU(2)$ 分配関数の和に定数倍を除いて等しくなります（Mack–Petkova の和のアンサンブル）典。どの区画にいるかは z のコホモロジー類で決まり、区画の指示関数は z の関数です。この章では (1) を**区画の和のアンサンブル**と呼び、期待値を $\mathbb{E}$ と書きます。

ループ C と、C を張る面 $S(C)$（プラケットの集まりで、境界が C）を一つ取ると、

$$W(C) = \tfrac{1}{2}\operatorname{tr} U_C \prod_{p \in S(C)} z_p \tag{2}$$

は中心のゲージ変換で変わらず、$|W(C)| \le 1$ です。区画を一つに固定した Wilson ループは、(2) に区画の指示関数を掛けて条件づけたものです（§04）。

枠と容器。 格子の中に互いに離れた領域 $R_1, \dots, R_n$（容器）を取り、容器の内側の変数（内側のリンクと、内側のプラケットの z）を x_j、それ以外の全ての変数を**枠** Φ と呼びます。容器の境のリンクは枠に入ります。作用は最近接なので、各プラケットの項と各立方体の拘束は、高々一つの容器の内側と枠にしか依りません。よって重みは枠を止めると分かれます。

$$w(\Phi, x) = a(\Phi)\prod_{j=1}^{n} f_j(\Phi, x_j), \qquad a > 0,\; f_j > 0 \tag{3}$$

ループ C は枠の中を通り、$S(C)$ の容器 R_j の内側にある部分の z の積を $\sigma_j(x_j) \in \{\pm 1\}$（容器の**区画の符号**）と書くと、(2) も分かれます。

$$W(C) = c(\Phi)\prod_{j=1}^{n}\sigma_j(x_j), \qquad |c(\Phi)| \le 1 \tag{4}$$

（$c(\Phi)$ は $\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,U_C$ と、$S(C)$ の枠に入る部分の z の積。）σ_j は容器の内側の中心のゲージ変換で変わらないので（$S(C)$ の境界 C は枠の中にある）、枠を止めた条件つきの分布の上の量としてよく定まります。また、枠を止めても σ_j は決まりません。小さな T^2 の板 $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ で容器を「平面の円板 $\times\ \mathrm{T}^2$」に取ると、円板の中の平面のプラケット p の上の面 $S_p = \{p\}\times T^2$（N^2 枚の (3,4) プラケット）は余閉で容器の内側にあり、その上の z を全部反転すると、枠は変わらずに σ_j だけが反転するからです [初]（余閉であることの確かめは 25-04 §03 の手順 2）。

03

容器の恒等式と tanh の形

この節は既存の知見（Mack–Petkova の容器の恒等式）の整理です。導入（独立な渦の符号と面積則）は 17-02 §06 にあります。

枠 Φ を止めたときの容器 j の区画の確率を $q_j^{\pm}(\Phi) = \mathbb{P}(\sigma_j = \pm 1 \,|\, \Phi)$、容器の内側の二つの区画の分配関数を $Z_j^{\pm}(\Phi) = \sum_{x_j:\sigma_j=\pm1} f_j(\Phi, x_j)$（連続の変数では Haar 測度の積分）と書き、

$$\theta_j(\Phi) := \big|\mathbb{E}[\sigma_j \,|\, \Phi]\big| = |q_j^{+} - q_j^{-}|, \qquad \Delta F_j(\Phi) := \ln\frac{Z_j^{+}(\Phi)}{Z_j^{-}(\Phi)} = \ln\frac{q_j^{+}}{q_j^{-}} \tag{5}$$

と置きます。θ_j を容器 j の**偏り**、ΔF_j を枠を止めた**渦の自由エネルギー**と呼びます。

容器の恒等式

(3)(4) の下で

$$\mathbb{E}[W(C)\,|\,\Phi] = c(\Phi)\prod_{j=1}^{n}\mathbb{E}[\sigma_j\,|\,\Phi], \qquad |\langle W(C)\rangle| \;\le\; \mathbb{E}_{\Phi}\Big[\,|c(\Phi)|\prod_{j=1}^{n}\theta_j(\Phi)\Big] \;\le\; \mathbb{E}_{\Phi}\Big[\prod_{j=1}^{n}\theta_j(\Phi)\Big]$$

さらに $\theta_j(\Phi) = \tanh\big(|\Delta F_j(\Phi)|/2\big)$。

[典]（恒等式）＋[初]（和のアンサンブルでの書き直し）。証明。(3) から、枠を止めた条件つきの分布は容器ごとの分布 $f_j(\Phi,\cdot)/(Z_j^{+}+Z_j^{-})$ の積で、σ_j はそれぞれ別の容器の変数の関数なので、条件つきの期待値は積に分かれます。(4) を代入すれば第一式です。絶対値を取り、$|c| \le 1$ を使って枠について平均すると第二式です。最後に $q^{+}+q^{-}=1$ と $q^{\pm}>0$ から

$$\frac{q^+ - q^-}{q^+ + q^-} = \frac{e^{\Delta F/2} - e^{-\Delta F/2}}{e^{\Delta F/2} + e^{-\Delta F/2}} = \tanh\frac{\Delta F}{2}, \qquad \Delta F = \ln\frac{q^+}{q^-} \tag{7}$$

です。∎

Lean FrameLemma（`FrameLemma.frame_bound`）（仮定：枠の空間・容器の数・各容器の内側の空間が有限、各容器の内側が空でない、$a(\varphi) > 0$、$f_j(\varphi, y) > 0$。結論：$|\sum_\varphi \sum_x a \prod_j f_j \cdot c \prod_j \sigma_j| \le \sum_\varphi a \prod_j Z_j \cdot |c| \prod_j |\sum_y f_j \sigma_j| / Z_j$、$Z_j = \sum_y f_j$）・FrameLemma（`FrameLemma.sign_mean_le_one`）（仮定：$f > 0$・$\sigma = \pm 1$。結論：正規化した条件つきの平均の絶対値は 1 以下）・FrameLemma（`FrameLemma.ratio_eq_tanh`）（仮定：$q^+, q^- > 0$。結論：(7)）・Containers（`Containers.container_bound`）（仮定：有限・$a \ge 0$・$|s| \le 1$。結論：$|\sum_\varphi \sum_x a\, s \prod_i f_i \sigma_i| \le \sum_\varphi a \prod_i |\sum_y f_i \sigma_i|$）。どれも有限和の代数で、Haar 測度の積分・余閉な z・区画の位相・最近接の作用から (3)(4) が出ることは Lean の外です。

原典との対応。 Kovács–Tomboulis（hep-lat/0108017、Phys. Rev. D 65 (2002) 074501）は、固定した区画で、容器 Λ_i の境のリンクを止めて内側を積分し、余閉な面 V_i の上の結合の符号を反転した分配関数 $z^{(\mp)}_{\Lambda_i}$（彼らの式 (19)）から

$$f_{\Lambda_i}(U_{\partial\Lambda_i}) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{z^{(-)}_{\Lambda_i}}{z^{(+)}_{\Lambda_i}}\Big) \ \ (18), \qquad W[C] = \Big\langle \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\, U[C] \prod_i f_{\Lambda_i}(U_{\partial\Lambda_i}) \Big\rangle \ \ (20), \qquad W[C] \le \prod_i \mathrm{m}_{U_i}$$

を書き、(20) を Mack–Petkova（Ann. Phys. 125 (1980) 117、彼らの文献 [3]）に帰しています 典 （原典の式は hep-lat/0108017 の本文で確認。Mack–Petkova の本文はこの本では確かめていません）。容器の恒等式との違いは二つだけです。(i) 区画を和にした (1) で書いたので、因子が $\frac{1}{2}(1 - z^-/z^+)$ でなく $(Z^+ - Z^-)/(Z^+ + Z^-) = \tanh(\Delta F/2)$ になる（測度の規格化の違い）。(ii) (22) は枠について最大値を取るが、(6) は平均を取る。(ii) は、悪い枠が稀であることを使える余地を残します。§07 の二次元の検査では、平均の形の方が速く真の値に近づきます。

04

固定した区画へ — 内側と外側の容器

容器の恒等式は区画の和のアンサンブルの文です。物理で見たいのは、一つの捩れの区画に固定した Wilson ループです。板 $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ で、ループ C は T^2 の一点 y_0 の (3,4) 平面の中にあるとします。区画のラベルのうち (3,4) の流束の偶奇を $(-1)^{n_{34}}$（y_0 の (3,4) 平面全体の z の積）、それ以外のラベル（n_{12} など）の指示関数を $\mathbf{1}_o$ と書くと、区画 $s \in \{\pm 1\}$ に固定した期待値は

$$\langle W(C) \rangle_s = \frac{\mathbb{E}\big[W \cdot \frac{1}{2}\big(1 + s(-1)^{n_{34}}\big)\mathbf{1}_o\big]}{\mathbb{E}\big[\frac{1}{2}\big(1 + s(-1)^{n_{34}}\big)\mathbf{1}_o\big]} \tag{8}$$

です。容器をループの内側だけに置くと、分子の第二項 $\mathbb{E}[W(-1)^{n_{34}}\mathbf{1}_o]$ は困ります。$W(-1)^{n_{34}}$ は $\frac{1}{2}\mathrm{tr}\, U_C$ に**平面の $S(C)$ の外側**の z の積を掛けたもので、内側の容器の符号を含ま

ないので、容器の恒等式では小さくならないからです。手当ては、外側にも容器を置くことです。

内側と外側の容器の命題（内側と外側の領域）

(3,4) 平面の中で、ループの内側に容器 $R_1,\dots,R_n$、外側に容器 $R'_1,\dots,R'_m$ を格子状に並べ、枠は直線の帯から成り、各方向に枠の中だけを通る直線があるとする。このとき $\mathbf{1}_o$ は枠の関数で、$(-1)^{n_{34}}=c''(\Phi)\prod_j\sigma_j\prod_k\sigma'_k$（$|c''|=1$）と書ける。$\theta_j,\theta'_k$ を (5) の偏りとし、$\mathbb{E}_o[\,\cdot\,]:=\mathbb{E}[\,\cdot\,\mathbf{1}_o]/\mathbb{E}[\mathbf{1}_o]$ と置くと、$\mathbb{E}_o[\prod_j\theta_j\prod_k\theta'_k]<1$ のとき

$$|\langle W(C)\rangle_s|\ \le\ \frac{\mathbb{E}_o\big[\prod_j\theta_j\big]+\mathbb{E}_o\big[\prod_k\theta'_k\big]}{1-\mathbb{E}_o\big[\prod_j\theta_j\prod_k\theta'_k\big]}\tag{9}$$

初 証明。$n_{12},n_{13},n_{14},n_{23},n_{24}$ は、それぞれの平面の z の積で、その平面を枠の中だけを通る直線の帯の上に取り直せる（z が余閉なので積は平面の位置に依らない）ので、枠の関数です。よって $\mathbf{1}_o$ は枠の関数です。(3,4) 平面は $S(C)$ とその補集合に分かれ、それぞれが枠の部分と容器の部分に分かれるので、$W=c(\Phi)\prod_j\sigma_j$、$W(-1)^{n_{34}}=c'(\Phi)\prod_k\sigma'_k$、$(-1)^{n_{34}}=c''(\Phi)\prod_j\sigma_j\prod_k\sigma'_k$（$|c|,|c'|\le1$、$|c''|=1$）です。容器の恒等式の第一式を枠について $\mathbf{1}_o$ を掛けて平均すると、$|\mathbb{E}[W\mathbf{1}_o]|\le\mathbb{E}[\mathbf{1}_o\prod_j\theta_j]$、$|\mathbb{E}[W(-1)^{n_{34}}\mathbf{1}_o]|\le\mathbb{E}[\mathbf{1}_o\prod_k\theta'_k]$、$|\mathbb{E}[(-1)^{n_{34}}\mathbf{1}_o]|\le\mathbb{E}[\mathbf{1}_o\prod_j\theta_j\prod_k\theta'_k]$。(8) の分子は前の二つの和の半分以下、分母は $\frac12(\mathbb{E}[\mathbf{1}_o]-\mathbb{E}[\mathbf{1}_o\prod\theta\prod\theta'])$ 以上です。両方を $\mathbb{E}[\mathbf{1}_o]$ で割れば (9) です。∎

(9) の第二項が平面の大きさ $M\to\infty$ で 0 に行くのは、外側の容器でも偏りが典型的に 1 より小さい場合（悪い枠の稀さが外側でも使える場合）です。この本はそれを示していません 仮。板の閉じ込めの定理（25-04）では、平面の全てのプラケットに反転の群を働かせるので、外側の項は t^{M^2-A} と自動的に小さくなり、この問題は起きません。

05

平面の方向の入れ子

大きな容器 R（平面の円板 $\times\,\mathrm{T}^2$）を、内側の枠 Φ_{int} で隔てた小さな容器 $R_1,\dots,R_k$ に分けます。R の張る面の z の積は $\sigma_R=s(\Phi_{\mathrm{int}})\prod_i\sigma_i$（$|s|=1$、枠に入る部分の z の積）です。

平面の方向の入れ子の不等式

R の外の枠を Φ_R とすると

$$\bigl|\mathbb{E}[\sigma_R \mid \Phi_R]\bigr| \;\le\; \mathbb{E}\Bigl[\prod_{i=1}^{k} \bigl|\mathbb{E}[\sigma_i \mid \Phi_R, \Phi_{\mathrm{int}}]\bigr| \;\Bigm|\; \Phi_R\Bigr] \tag{10}$$

初 証明。Φ_R と Φ_{int} を合わせたものを枠として容器の恒等式を使い（$c = s$）、Φ_R を止めたまま Φ_{int} について平均します。∎ Lean Containers（`Containers.container_bound`）（仮定：有限・$a \ge 0$・$|s| \le 1$）がこの代数の有限和の版で、Lean のファイルの説明の文が「Mack–Petkova の容器の恒等式と平面の倍化の不等式を含む」と書いている形です。

読み方。ある大きさの容器で偏りが典型的な枠で $\theta_0 < 1$ なら、平面の方向に容器を 2 倍にするたびに偏りは θ_0^4 の程度に下がる、と期待できます 読 （物理の見立て：(10) の右辺は積の平均で、平均の積ではないので、これは不等式から直接は出ません）。乱れは平面の方向の大きな尺度へ伝わります。

ただし、(10) は **T^2 の大きさを止めた板の中**の話です。T^2 を広げる（四次元の空間へ近づける）ときに要るのは、T^2 と容器を一緒に倍にしたときの偏り $\theta(L, L)$ の振る舞いで、(10) はそれに何も言いません（T^2 が変わると、渦の面が巻く曲面そのものが変わる）。そこで要る形は「$\theta(L, L)$ が 1 から一様に離れる」では足りず、$\ln(1/\theta(L, L)) \ge cL^2$ の形でなければならないこと（$U(1)$ との対照）は、移り変わりの帯の章 26-01 で扱います。

06

四次元での限界 — 独立な容器では $R/\ln R$ まで

容器の恒等式は格子の大きさにも次元にも依らない恒等式です。では、四次元の空間（R^4 の格子）で容器をたくさん並べれば面積則が出るでしょうか。Kovács–Tomboulis（hep-lat/0108017 §3）は、それが**独立な容器では届かない**ことを次の勘定で示しています 典 （以下の (23)〜(27) は原典の式番号。原典の本文で確認）。

1. 容器 Λ_i の、余閉な面 V_i に横向きの二方向の幅を d_i、縦の長さを $|V_i|$ とする。十分太い容器では、全ての境界の値について $-\ln(z^{(-)}/z^{(+)}) \sim |V_i| \exp(-c\, d_i^2)$ となる領分に入っていると**仮定**する（原典の (23)。c は原典の ρ）。
2. 一つの容器の自由エネルギーの費用を一定の f 以下に保つには $d_i^2 \ge c^{-1} \ln(|V_i|/f)$ が要る（(24)）。すると $\max |f_{\Lambda_i}| < \tfrac{1}{2}(1 - e^{-f})$ は一定。
3. 辺 $T \times R$（$T > R$）の長方形のループの、周から離れた点を通る容器の長さは $|V_i| \sim R^{d-2}$（四次元で R^2）。よって太さは $\sqrt{\ln R}$ の程度に要り、ループの中に入る容器は $\sim RT/\ln R$ 個。(22) から

$$V(R)\ \geq\ \mathrm{const}\cdot\frac{R}{\ln R}\qquad(\text{原典の }(25)) \tag{11}$$

が出るだけで、純粋な線形のポテンシャル（面積則）にはなりません。原典は続けて、隣り合う容器の境界の値も積分して容器をできるだけ太くまとめ、横の面積 $\sim R^2$ の容器を使えば $V(R)\geq \mathrm{const}\,R-\frac{\mathrm{const}}{R}(\ln R+\mathrm{const})$（(27)）となること、つまり**線形のポテンシャルはループの大きさの太い渦の揺らぎから来る**ことを述べています。また、(22) の形は粗く、鏡映正値性から出る不等式（彼らの (11)(13)、Tomboulis–Yaffe の大域の形）は格子の大きさに一様な評価で直接に面積則を与える、とも述べています 典 。

この章の言葉で言い直すと、R^4 では容器の長さがループとともに伸びるので、長さの決まった容器を独立に並べる道は面積則に届きません。小さな T^2 の板では、容器 $\{\text{円板}\}\times T^2$ の長さ（渦の面の面積）が T^2 の面積で止まるので、この障害は現れません 初 （原典の勘定の (24) で $|V_i|=N^2$ が定数になることの読み替え）。障害が戻ってくるのは T^2 を広げるときで、それが移り変わりの帯（26-01・25-09）です。

07

二次元の解ける模型での検査

二次元の $SU(2)$（平面の格子・Wilson 作用 $\frac{\beta}{2}\mathrm{tr}\,U_p$）は、プラケットが互いに独立に振る舞うので解けます。ここで容器の恒等式の評価が真の値にどれだけ近いかを見ます。二次元には「容器の長さ」の問題が無いので、この検査は §06 の四次元の障害については何も言いません。

設定。 ループの内側を一辺 ℓ の正方形の容器で敷き詰め、容器の境のリンクを枠に取ります（容器の面積 $A=\ell^2$）。枠を止めると、容器 j はその境のホロノミー $V_j\in SU(2)$ しか見ません。指標 $\chi_n(V)=\sin((n+1)\vartheta)/\sin\vartheta$（$V$ の固有値 $e^{\pm i\vartheta}$、$n=0,1,2,\dots$ は表現の $2\times$スピン）と $a_n=I_{n+1}(\beta)/I_1(\beta)$（$I$ は変形 Bessel 関数）を使うと、熱核の展開から

$$\mathbb{E}[\sigma_j\,|\,\text{枠}]=\frac{\sum_{n\,\text{奇}}(n+1)\,a_n^{A}\,\chi_n(V_j)}{\sum_{n\,\text{偶}}(n+1)\,a_n^{A}\,\chi_n(V_j)} \tag{12}$$

で、容器のホロノミーは互いに独立に、分母を密度とする分布に従います。よって容器の恒等式の評価は容器ごとの因子の積になり、

$$|\langle W\rangle|\ \leq\ B(A)^{\#\text{容器}},\qquad B(A)=\int_{SU(2)}dV\,\Big|\sum_{n\,\text{奇}}(n+1)\,a_n^{A}\,\chi_n(V)\Big| \tag{13}$$

真の値は $\langle W\rangle=a_1^{\text{面積}}$、真の弦の張力は $\sigma=-\ln a_1$ です。(13) から出る弦の張力を $\sigma_{\mathrm{L}5}(\ell):=-\ln B(\ell^2)/\ell^2$、Kovács–Tomboulis の (22) の形（枠について最大値）から出るものを

$\sigma_{\max}(\ell) := -\ln\bigl(\max_V |(12)|\bigr)/\ell^2$ と書きます。

添字の L5 は、容器の恒等式（枠についての平均）から出る形を指す字で、最大値の形 $\sigma_{\max}$ と対にして使います。

大きな容器の極限。 $A \to \infty$ では奇数の和は $n=1$ の項 $2a_1^A\chi_1(V) = 4a_1^A\cos\vartheta$ が、偶数の和は $n=0$ の項 1 が主になるので、Haar の分布 $\frac{2}{\pi}\sin^2\vartheta\,d\vartheta$ で

$$\frac{B(A)}{a_1^A} \longrightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 4|\cos\vartheta|\sin^2\vartheta\,d\vartheta = \frac{16}{3\pi} \approx 1.6977, \qquad \sigma_{\mathrm{L5}}(\ell) = \sigma - \frac{\ln(16/(3\pi))}{\ell^2} + (A(\text{エ}\ 14)$$

です 初 。容器の恒等式の評価は**指数の部分で鋭く**、損失は $1/\ell^2$ で消えます。

表 1　二次元 $SU(2)$ で容器の恒等式から出る弦の張力 $\sigma_{\mathrm{L5}}(\ell)$ と、最大値の形 $\sigma_{\max}(\ell)$。浮動小数・ϑ の台形則 4×10^5 点・表現を $n \le 200$ で打ち切り・分母の規格化の確かめは全ての行で 1.000000。数は本書の検討の数値（読）

β	**真の** σ	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=4$	$\ell=8$	$\ell=16$	$\sigma_{\max}$：$\ell=1$・4・16
1	1.4263	0.9132	1.2940	1.3932	1.4180	1.4242	0.2723・1.3397・1.4209
2	0.8367	0.3663	0.7044	0.8036	0.8285	0.8347	0.0366・0.7501・0.8313
4	0.4185	0.0624	0.2866	0.3854	0.4102	0.4164	0.00067・0.3318・0.4131
8	0.1994	0.0016	0.0761	0.1663	0.1911	0.1973	$<10^{-6}$・0.1128・0.1940

読み方 読 。(i) $\ell=16$ の列は (14) の右辺と小数第 4 位まで一致します（例：$\beta=1$ で $1.426309 - \ln(1.69765)/256 = 1.424242$）。(ii) 細い容器（$\ell=1$）では、$\beta$ が大きいと評価は指数的に悪くなります（$\beta=8$ で 0.0016 対 0.1994）。太い容器が要ることの、二次元での姿です。(iii) 最大値の形も同じ極限に近づきますが、遅れます。平均を取る容器の恒等式の方が、同じ ℓ で常に真の値に近い。

(ii) の $\ell=1$ の最大値の形は、閉じた形で書けます。一辺 1 の容器はプラケット一枚で、その四本のリンクは全て枠に入るので、$\mathbb{E}[z_p\,|\,V] = \tanh\bigl(\frac{\beta}{2}\mathrm{tr}\,V\bigr)$、最大値は $\mathrm{tr}\,V = \pm2$ で $\tanh\beta$ です 初 。表の $\sigma_{\max}(1)$ は $-\ln\tanh\beta$（$\beta=1,2,4$ で $0.27234,\ 0.036635,\ 0.000671$）と一致します。これは次の章の板の閉じ込めの評価 $\sigma \ge -\ln\tanh(\beta N^2)$ の $N=1$ の場合と同じ式です（25-04 §05）。

08

言えないこと

(a) 新しさ。容器の恒等式は Mack–Petkova の容器の恒等式で、Kovács–Tomboulis の (18)〜(22) に書かれています。区画の和のアンサンブルでの書き直し・内側と外側の容器の命題・平面の方向の入れ子の不等式は初等的で、Kovács–Tomboulis 以外の文献との照合は済んでいません。この章の結果に新しさは主張しません。

(b) 内側と外側の容器の命題の第二項。外側の容器の偏りが典型的に小さいこと（第二項が $M \to \infty$ で 0 に行くこと）は示していません。

(c) 平面の方向の入れ子の不等式の読み。「2 倍にするたびに θ_0^4」は見立てで、(10) から直接は出ません。T^2 を一緒に広げる話には (10) は何も言いません。

(d) 四次元の勘定。§06 の $R/\ln R$ は、原典の太い容器の自由エネルギーの形の仮定（Kovács–Tomboulis の (23)。太い容器の自由エネルギーが境界の値に一様に $|V_i|e^{-c d_i^2}$ の形）の上の勘定で、四次元の定理ではありません。この本は (23) もその否定も示していません。

(e) 容器の自由エネルギーの一様な評価。ΔF_j を良い枠に一様に、格子間隔に一様に評価することは、この本のどこでも示していません。それには枠を止めた条件つきの測度の多重尺度の解析が要り、変分原理（分配関数の下界しか与えない）だけでは向きが足りません。

(f) Lean。機械検査の欄は有限和の代数だけです。Haar 測度・余閉な z・区画の位相・最近接の作用から (3)(4) が出ることは Lean の外です。

(g) 二次元の検査。表 1 は二次元の数値で、四次元の容器の長さの問題については何も言いません。

09

五分類の表と依存グラフ

表 2　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	区画の和のアンサンブル (1) は全ての捩れの区画の分配関数の和	典	Kovács–Tomboulis §2（捩れの移動）・Mack–Petkova（本文未確認）	$SU(2)$・有限格子	—
2	枠を止めると重みと Wilson ループが容器ごとに分かれる (3)(4)・σ_j は枠で決まらない	初	§02	最近接の作用・容器は互いに離れる	—
3	Kovács–Tomboulis の (18)(20)(22)	典	原典の本文	固定した区画・枠の最大値	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
4	容器の恒等式：(6) と $\theta_j = \tanh(\lvert\Delta F_j\rvert/2)$	典＋初	§03（恒等式は行 3、書き直しは本文）	有限格子・任意の β	FrameLemma（`FrameLemma.frame_bound`）（仮定：有限・$a>0$・$f>0$・内側が空でない）・`sign_mean_le_one`（仮定：$f>0$・$\sigma=\pm1$）・`ratio_eq_tanh`（仮定：$q^{\pm}>0$）・Containers（`Containers.container_bound`）（仮定：有限・$a\ge0$・$\lvert s\rvert\le1$）
5	内側と外側の容器の命題：固定した区画の (9)	初	§04	板・格子状の容器・$\mathbb{E}_o[\prod\theta\prod\theta']<1$	—（代数は行 4 の束と同じ形）
6	(9) の第二項が $M\to\infty$ で 0 に行く	仮	§04（外側の悪い枠の稀さ）	—	—
7	平面の方向の入れ子の不等式 (10)	初	§05	T^2 の大きさを止めた板	Containers（`Containers.container_bound`）（仮定：有限・$a\ge0$・$\lvert s\rvert\le1$）
8	2 倍にするたびに偏りが θ_0^4 の程度	読（物理）	§05	典型的な枠・T^2 固定	—
9	独立な容器では $V(R)\ge \mathrm{const}\,R/\ln R$ まで・太い容器で線形	典	原典 §3 の (23)〜(27)	四次元・原典の太い容器の自由エネルギーの形の仮定の上	—
10	板では容器の長さが T^2 の面積で止まり、行 9 の障害は現れない	初	§06（(24) の読み替え）	小さな T^2 の板・N 固定	—
11	大きな容器で $B(A)/a_1^A\to 16/(3\pi)$・(14)	初	§07	二次元 $SU(2)$・Wilson 作用	—
12	表 1 の数	読	本書の検討の数値	二次元・浮動小数・$n\le200$	—
13	一辺 1 の容器の最大値の形は $\tanh\beta$	初	§07	二次元	—

機械検査の欄の束は、この本の側の再検査で `sorry` を含まず、公理が標準の三つ（propext・Classical.choice・Quot.sound）の部分集合であることが確かめられたものです。保証されるのは有限の集合の上の実数の和と積の代数だけです（23-13）。

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  典  区画の和のアンサンブル (1)                                  SU(2)・有限
 2  初  枠で分かれる (3)(4)・σ_j は枠で決まらない                  最近接
 3  典  Kovács–Tomboulis (18)(20)(22)                              固定した
 4  初  容器の恒等式 (6)(7) ⟸ 1・2（3 と同じ恒等式）               Lean Frame
 5  初  内側と外側の容器の命題 (9) ⟸ 4                             板・内側と
 6  仮  (9) の第二項 → 0                                          外側の稀さ
 7  初  平面の方向の入れ子の不等式 (10) ⟸ 4                       T² 固定
 8  読  2 倍で θ₀⁴（物理）⟸ 7
 9  典  R/ln R・太い容器で線形（太い容器の自由エネルギーの形の仮定の上）
        四次元
10  初  板では容器の長さが止まる ⟸ 9
11  初  16/(3π) の極限 ⟸ 4                                        二次元
12  読  表 1 ⟸ 4・11                                               浮動小数
13  初  一辺 1 の最大値 = tanh β ⟸ 3                               二次元
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。外側の稀さの行（(9) の第二項 → 0）は仮定の行で、どの行の前提にも入っていません。内側と外側の容器の命題の不等式 (9) はこの行が無くても成り立ち、この行は (9) を面積則として読むときにだけ要ります。この章には、連続極限の節点も、四次元の面積則の節点もありません。

機械検査まで済んだ渦の側の定理は第 21 部に在ります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
典 ＋ 初　容器の恒等式とその tanh の形。有限格子・任意の β・区画の和のアンサンブル	新しさ（恒等式は Mack–Petkova）。容器の自由エネルギー ΔF_j の、良い枠と格子間隔に一様な評価
初　固定した区画への移し方（内側と外側の容器の命題）と、平面の方向の入れ子（平面の方向の入れ子の不等式）	(9) の第二項が 0 に行くこと。T^2 を一緒に広げたときの偏りの振る舞い（26-01）
典　四次元で独立な容器から出るのは $R/\ln R$ まで（原典の太い容器の自由エネルギーの形の仮定の上の勘定）・板ではこの障害が現れない理由	四次元の面積則。太い容器の自由エネルギーの形の仮定そのもの
初 ＋ 読　二次元 $SU(2)$ で容器の恒等式の評価が指数の部分で鋭いこと（損失 $\ln(16/(3\pi))/\ell^2$）	四次元での評価の鋭さ

出典と再現

もの	種別	出典・道具
容器の恒等式 (18)(20)(22)・四次元の勘定 (23)〜(27)	典	T. G. Kovács, E. T. Tomboulis, Vortex waistlines and long range fluctuations, arXiv:hep-lat/0108017（Phys. Rev. D 65 (2002) 074501）。§2・§3 を本文で確認
渦の容器と和のアンサンブル	典（間接）	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 125 (1980) 117（Kovács–Tomboulis の文献 [3]。本文はこの本では未確認）
鏡映正値性による大域の形	典（間接）	E. T. Tomboulis, L. G. Yaffe, Commun. Math. Phys. 100 (1985) 313（Kovács–Tomboulis の文献 [9] と、その本文 (11)(13) の再述）
容器の恒等式の和のアンサンブルでの形・内側と外側の容器の命題・平面の方向の入れ子の不等式・(14)・一辺 1 の最大値	初	本文 §03〜§07 の証明
表 1	読	本書の検討の数値（二次元 $SU(2)$・指標展開 (12) を数値積分。数秒の計算）
Lean	Lean	FrameLemma（`FrameLemma.frame_bound`・`FrameLemma.sign_mean_le_one`・`FrameLemma.ratio_eq_tanh`）・Containers（`Containers.container_bound`）。束が保証するのは有限和の代数だけ

この章で使った語 — 区画の和のアンサンブル・枠・容器・区画の符号・偏り θ・枠を止めた渦の自由エネルギー ΔF・容器の恒等式・内側と外側の容器・入れ子・容器の長さと太さ。意味は A-02 用語集 にあります（第 25 部の語は追加の予定）。

次に読む章：25-04 板の閉じ込め — 平面の全てのプラケットに反転の群を働かせると、格子間隔と T^2 を止めた板で、全ての β の面積則が出ます。

板の閉じ込め

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 25-03・5-01 にあります。

この章で分かること — 二つの方向が小さな T^2（一辺 N の格子）に巻かれ、残りの二つの方向（平面）が広い「板」の格子を考えます。格子間隔と T^2 の大きさを止めれば、$SU(2)$ の Wilson ループは**全ての** β で面積則に従い、弦の張力は $\sigma \geq -\ln \tanh(\beta N^2) \geq 2e^{-2\beta N^2} > 0$ です（板の閉じ込めの定理）。証明は初等的で、平面のプラケットの真上に立つ渦の面 $\{p\} \times T^2$ の上の符号を一斉に反転する群について平均するだけです。この章では、定理の言明（§02）、五つの手順の証明（§03）、容器の形 $\sup\theta \leq \tanh(\beta N^2)^{\ell^2}$ と、連続極限ではこの下界が 0 になる理由（§04）、二次元での検査（§05）、先行文献との位置（§06）を置きます。

前提となる章 — 25-03（区画の和のアンサンブル・枠と容器・容器の恒等式）・25-01（捩れの区画と流束）。第 5 部の 5-01（Wilson 作用）・5-02（強結合の面積則）・第 7 部の 7-02（二次元）。

先に言うこと — 定理は格子の上の文で、格子間隔と T^2 の一辺 N を止めたときの文です。連続極限（$N \to \infty$、$\beta \to \infty$）では、この下界は 0 に消えます。定理が強結合の展開を使わずに全ての β で成り立つのは、板が実質的に二次元の系だからで、四次元の空間の閉じ込めについては何も言いません。先行文献との照合は済んでいません（Tomboulis–Yaffe 型の議論・Borgs 1985 との照合が残る）。

この章の順序

1. 要約 — 渦の面を一斉に反転して平均する
2. 設定と板の閉じ込めの定理
3. 証明 — 五つの手順
4. 容器の形と細い渦の費用 — 連続極限では張力の下界が 0
5. 二次元での検査
6. 先行文献との位置

7. 言えないこと

8. 五分類の表と依存グラフ — 表 1

01

要約 — 渦の面を一斉に反転して平均する

1. 二次元の格子ゲージ理論は、どの結合でも閉じ込めます（Wilson ループが面積の指数で減る）。プラケットが互いに独立に振る舞うからです（7-02）。
2. 二つの方向が小さく閉じた板 $T^2 \times \mathbb{R}^2$ の格子は、遠くから見れば二次元の系です。だから、T^2 の大きさを止めておけば、やはり全ての結合で閉じ込めると期待できます。この章はそれを、格子の上で証明つきで述べます 初 。
3. 道具は 25-03 の区画の和のアンサンブルです。平面のプラケット p ごとに、その真上に立つ T^2 の全ての点の (3,4) プラケット N^2 枚の面 S_p を考えます。S_p の上の符号 z を一斉に反転しても、余閉の条件は保たれ、リンクは変わりません。ループの内側の p で反転すると Wilson ループの符号が変わり、重みは高々 $e^{\pm 2\beta N^2}$ 倍しか変わりません。
4. 全ての反転の組み合わせ（2^{M^2} 通り）で平均すると、Wilson ループは内側のプラケットごとの因子 $(1-r_p)/(1+r_p)$ の積で押さえられ、各因子は $\tanh(\beta N^2)$ 以下です。よって $|\langle W \rangle| \le \tanh(\beta N^2)^{A}$（$A$ はループの面積）。
5. この下界は N について超指数的に弱く（$\beta = 2.5$、$N = 4$ で $\sigma \ge 2e^{-80}$）、連続極限では 0 になります。細い渦の面を一度に反転する費用 $2\beta N^2$ が、T^2 の格子の点の数とともに増えるからです。物理の渦（分数インスタントン）の費用は $\pi^2\beta$ の程度で N に依らないので、太い渦で同じことをする道が次の二章（25-05・25-06）です。

02

設定と板の閉じ込めの定理

格子 $\Lambda = (\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$。第 1・2 方向が T^2（一辺 N）、第 3・4 方向が平面（周期 M で切ったもの）です。群は $SU(2)$、作用は Wilson 作用 $\frac{\beta}{2}\sum_p \operatorname{tr} U_p$、$\mathrm{T}^2$ の捩れ（n_{12} など）は任意に固定します。ループ C は T^2 の一点 y_0 の (3,4) 平面の中にあり、平面の中で面積 A（プラケットの数）の領域 $S(C)$ を囲むとします。

板の閉じ込めの定理

$t := \tanh(\beta N^2)$ と置く。全ての $\beta > 0$、全ての M、固定した任意の捩れの区画で

$$\left|\langle \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\, U_C\rangle\right| \;\le\; \frac{t^{A}+t^{M^2-A}}{1-t^{M^2}} \tag{1}$$

とくに $M\to\infty$ の任意の極限点で $|\langle\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,U_C\rangle|\le t^{A}$ であり、ループの面積について一様に

$$\sigma \;\ge\; -\ln\tanh(\beta N^2) \;\ge\; 2e^{-2\beta N^2} \;>\; 0. \tag{2}$$

初 （証明は §03）。(2) の σ は格子の単位の弦の張力で、条件は「$SU(2)$・Wilson 作用・N 固定・格子間隔固定・全ての β」です。(2) の右の不等式は、$u=e^{-2x}$ と置いて $-\ln\tanh x=\ln(1+u)-\ln(1-u)=2(u+u^3/3+\cdots)\ge 2u$ から出ます。

03

証明 — 五つの手順

手順 1（区画の和のアンサンブル）。 25-03 §02 の (1)：余閉な $z\in\{\pm1\}^{\text{プラケット}}$ と U について重み $w(U,z)=\exp(\frac{\beta}{2}\sum_p z_p\mathrm{tr}\,U_p)$、測度は Haar × 数え上げ。$z=z_0\cdot\delta\omega$（$\omega\in\{\pm1\}^{\text{リンク}}$、$(\delta\omega)_p=\prod_{b\in\partial p}\omega_b$）と書ける z は全て、Haar 測度の不変性 $U_b\mapsto\omega_b U_b$ により z_0 と同じ積分を与えるので、同じコホモロジー類の z の和は、その類が表す捩れの区画の $SU(2)$ 分配関数の定数倍です 初 。区画は z の類で決まり、区画の指示関数は z の関数です。ゲージ不変な Wilson ループは $W(C)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,U_C\prod_{p\in S(C)}z_p$ で、同じ置き換えで $\prod_{p\in S(C)}(\delta\omega)_p=\prod_{b\in C}\omega_b$ が $\mathrm{tr}\,U_C$ の側の符号と打ち消し合うので、区画の中では $\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,U_C$ と（区画の代表の選び方による符号を除いて）同じ期待値を持ちます。

手順 2（渦の面は余閉）。 平面のプラケット p ごとに $S_p:=\{p\text{ の上の }(3,4)\text{ プラケット}\}\times T^2$（$N^2$ 枚）と置きます。三次元の立方体のうち (3,4) の面を持つのは向き (1,3,4) と (2,3,4) のものだけで、例えば T^2 の点 y から方向 1 に伸びて平面のプラケット p' を張る (1,3,4) の立方体の (3,4) の面は、y と $y+e_1$ の p' の二枚です。$p'=p$ なら二枚とも S_p に入り、$p'\neq p$ なら一枚も入りません。(1,2,3)・(1,2,4) の立方体は (3,4) の面を持ちません。よって全ての立方体は S_p の面を 0 枚か 2 枚含み、S_p の上の z を反転しても余閉の条件は保たれます 初 。$p\neq q$ なら S_p と S_q は共通のプラケットを持ちません。

手順 3（群の作用）。 平面の全てのプラケットの集合を P（$|P|=M^2$）とし、部分集合 $g\subseteq P$ に $z\mapsto z\cdot\chi_{S_g}$（$S_g=\bigcup_{p\in g}S_p$ の上で反転）を対応させます。これは群 $G=\{\pm1\}^P$ の作用で、余閉な z の上の全単射であり、U を変えないので Haar × 数え上げの測度を保ちます。

- Wilson ループ：$S(C)$ は y_0 の平面の中の A 枚で、S_p は y_0 の平面のプラケットを p の位置の一枚だけ含みます。よって $W(g\cdot x)=W(x)\prod_{p\in g}\varepsilon_p$、$\varepsilon_p=-1$（$p\in S(C)$）・$+1$（それ以外）。

- 重み：S_p の上の z を反転すると作用は $-\beta\sum_{q\in S_p} z_q \mathrm{tr}\,U_q$ だけ変わるので、$r_p(x) := \exp(-\beta\sum_{q\in S_p} z_q \mathrm{tr}\,U_q)$ と置くと、$|\mathrm{tr}\,U_q|\le 2$ から $r_p \in [e^{-2\beta N^2}, e^{2\beta N^2}]$。$r_p$ は S_p の上の値だけで決まり、面どうしは交わらないので、$w(g\cdot x)=w(x)\prod_{p\in g} r_p(x)$。

手順 4（平均）。$\mathbb{E}$ を区画の和のアンサンブルの期待値、$\sum_x$ を z の和と U の Haar の積分とします。各 g について変数の付け替えで $\sum_x W(x)w(x) = \sum_x W(g\cdot x)w(g\cdot x) = \sum_x W(x)w(x)\prod_{p\in g}\varepsilon_p r_p(x)$。$g$ について平均し、$\sum_{g\subseteq P}\prod_{p\in g}\varepsilon_p r_p = \prod_{p\in P}(1+\varepsilon_p r_p)$ を使うと

$$2^{M^2}\sum_x W w = \sum_x W(x)w(x)\prod_{p\in S(C)}\big(1-r_p(x)\big)\prod_{p\notin S(C)}\big(1+r_p(x)\big),\qquad 2^{M^2}\sum_x w = \sum_x w(x)\prod_{p\in P}\big(1+r_p(x)\big).\tag{3}$$

です。一枚の不等式 $|1-r|\le \tanh(a)\,(1+r)$（$r\in[e^{-2a},e^{2a}]$、ここでは $a=\beta N^2$）は、$(1-r)/(1+r) = -\tanh(\tfrac12\ln r)$ と $|\tfrac12\ln r|\le a$ から出ます。$|W|\le 1$ と合わせて、(3) の左の式の右辺の絶対値は $t^{A}\sum_x w\prod_P(1+r_p) = t^{A}\,2^{M^2}\sum_x w$ 以下です。よって

$$|\mathbb{E}[W(C)]| \;\le\; t^{A}.\tag{4}$$

この段では軌道に分ける必要がありません。g ごとの付け替え（全単射）と、g の和と x の和の交換だけを使っています。

手順 5（固定した区画への射影）。群 G は (3,4) の流束の偶奇だけを変えます。S_p は y_0 の (3,4) 平面のプラケットを一枚含むので $(-1)^{n_{34}}$（y_0 の (3,4) 平面全体の z の積）を反転し、他の向きのプラケットを含まないので n_{12} などの他のラベルの指示関数 $\mathbf{1}_o$ を変えません。区画 s に固定した期待値は 25-03 の (8) と同じく

$$\langle W\rangle_s = \frac{\mathbb{E}[W\mathbf{1}_o] + s\,\mathbb{E}[W(-1)^{n_{34}}\mathbf{1}_o]}{\mathbb{E}[\mathbf{1}_o] + s\,\mathbb{E}[(-1)^{n_{34}}\mathbf{1}_o]}\tag{5}$$

です。$W(-1)^{n_{34}} = \tfrac12\mathrm{tr}\,U_C\prod_{p\notin S(C)} z_p$（$y_0$ の平面の補集合、面積 M^2-A）は、$p\notin S(C)$ の反転で符号を変え、$p\in S(C)$ の反転で変わりません。$(-1)^{n_{34}}$ は全ての p の反転で符号を変えます。$\mathbf{1}_o$ は G で不変なので、手順 4 と同じ平均で（ε_p の役を取り替えて）

$$|\mathbb{E}[W\mathbf{1}_o]|\le t^{A}\,\mathbb{E}[\mathbf{1}_o],\qquad |\mathbb{E}[W(-1)^{n_{34}}\mathbf{1}_o]|\le t^{M^2-A}\,\mathbb{E}[\mathbf{1}_o],\qquad |\mathbb{E}[(-1)^{n_{34}}\mathbf{1}_o]|\le t^{M^2}\,\mathbb{E}[\mathbf{1}_o].\tag{6}$$

(5) の分子と分母を (6) で押さえると (1) です。$M\to\infty$ で $t^{M^2-A}\to 0$、$t^{M^2}\to 0$（$t<1$）なので、極限点で $|\langle W\rangle|\le t^{A}$、(2) が出ます。∎

ここでは平面の全てのプラケットに群が働くので、25-03 §04 の「外側の項が小さくならない」問題は起きません。外側の項は t^{M^2-A} と自動的に小さくなります。

Lean SlabConfine（`SlabConfine.group_average`）（仮定なし：$\sum_{g\subseteq P}\prod_{p\in g}\varepsilon_p r_p = \prod_{p\in P}(1+\varepsilon_p r_p)$）・SlabConfine（`SlabConfine.factor_split`）（仮定なし：内側と外側への分解）・SlabConfine（`SlabConfine.tanh_bound`）（仮定：$t\ge 0$・$r_p>0$・$|1-r_p|\le t(1+r_p)$）・SlabConfine（`SlabConfine.one_sheet`）（仮定：$a\ge 0$・$e^{-2a}\le r\le e^{2a}$。結論：$|1-r|\le$

$\tanh a \cdot (1+r)$）・SlabAverage（`SlabAverage.average_bound`）（仮定：配位の集合が有限・$w>0$・$|W|\le 1$・$g\subseteq P$ ごとの作用が全単射・$r_p>0$・$|1-r_p|\le t(1+r_p)$・$W(gx)w(gx)=W(x)w(x)\prod_{p\in g}\varepsilon_p r_p(x)$・$w(gx)=w(x)\prod_{p\in g}r_p(x)$。結論：$|\sum Ww|\le t^{|P\cap A|}\sum w$）。手順 4 の有限和の版です。和を Haar 測度の積分に置き換えること、余閉な z と区画の位相（手順 1・2・5）は Lean の外で、本文の議論に依ります。

04

容器の形と細い渦の費用

同じ平均を一つの容器の中だけで行うと、25-03 の偏りの言葉で書けます。平面の一辺 ℓ の正方形 Q（ℓ^2 枚のプラケット）と T^2 の積を容器とし、Q を張る面の z の積を σ_Q とします。$g\subseteq Q$ の反転は容器の内側の z だけを変えるので枠 Φ を変えず、σ_Q を $\prod_{p\in g}(-1)$ 倍します。一つの x の軌道 $\{g\cdot x : g\subseteq Q\}$ の上で、重みは $w(x)\prod_{p\in g}r_p(x)$ と積の形なので、軌道を条件づけると g の各成分は独立で、

$$\mathbb{E}[\sigma_Q \,|\, \text{軌道}] = \sigma_Q(x)\prod_{p\in Q}\frac{1-r_p(x)}{1+r_p(x)} = \pm\prod_{p\in Q}\tanh X_p, \qquad X_p=-\tfrac12\ln r_p\in[-\beta N^2,\beta N^2] \tag{7}$$

です 初 。軌道の条件づけは枠の条件づけより細かいので

$$\sup_{\Phi}\ \theta_Q(\Phi) = \sup_{\Phi}\bigl|\mathbb{E}[\sigma_Q\,|\,\Phi]\bigr| \ \le\ \tanh(\beta N^2)^{\ell^2} \tag{8}$$

です 初 。枠の**最大値**で押さえられるのは、細い面の反転の費用 $|\ln r_p|\le 2\beta N^2$ が枠に依らず一様だからです。

極端に弱いこと。 (2) の下界は N について超指数的に小さくなります。$\beta=2.5$、$N=4$ で $2\beta N^2=80$、$\sigma\ge 2e^{-80}\approx 3.6\times10^{-35}$ です。物理の弦の張力 $\sigma_{\mathrm{phys}}=\sigma/a^2$ の下界 $2e^{-2\beta N^2}/a^2$ は、T^2 の物理の大きさ $L=Na$ を止めて $a\to 0$（$N=L/a\to\infty$、漸近自由により β は増える）とすると 0 に行きます 初 。**連続極限では、この定理の張力の下界は 0 です。**

理由は細い渦の費用。 反転の費用 $2\beta N^2$ は、厚さ一つの格子の面 S_p の N^2 枚を一度に裏返す作用で、T^2 の格子の点の数とともに増えます。一方、物理で渦の費用と考えられているのは、T^2 を巻く滑らかな分数インスタントンの作用 $4\pi^2/g^2=\pi^2\beta$（$\beta=4/g^2$）の程度で、N に依りません（25-02） 読 （物理）。同じ群平均の議論は、反転の重みの比 r_p が $[e^{-F},e^{F}]$ に入れば $t=\tanh(F/2)$ で通るので、細い面の反転を「太い渦を挿入する、測度を保つ写像」に置き換え、F を N に依らない量で押さえられれば、格子間隔に一様な下界が見込めます 仮 （根拠の在りか：この章の (7) の形と、25-05 の挿入の恒等式・25-06 の力学で駆動した挿入）。そのためには、挿入の費用の一様な評価（紫外の制御。この部の設定では、捩れた境界条件の下で 2026-11-10 に公開された構成と同じ構成が立つこと）が要り、この本はそれを示していません。公開された構成は周期の立方の箱の上のもので、ここには届きません。

また (8) は、$\sup_\Phi$ を使う議論が N について超指数的に悪くなることも示しています。T^2 を広げる話（移り変わりの帯）で一様性を得るには、枠についての最大値でなく平均の形しか使えません（25-03 の容器の恒等式 が平均を取る理由の一つ）。

05 二次元での検査

証明の五つの手順を二次元の格子 $(\mathbb{Z}/M)^2$ に直接当てると、立方体が無いので余閉の条件は空で、渦の面は $S_p = \{p\}$（プラケット一枚、板の閉じ込めの定理の式で $N = 1$ と置いたもの）です。よって同じ証明が二次元の $SU(2)$ について $|\langle W \rangle| \le \tanh(\beta)^A$ を与えます。二次元の真の値は $\langle W \rangle = a_1^A$、$a_1 = I_2(\beta)/I_1(\beta)$ なので、定理は全ての β で $I_2(\beta)/I_1(\beta) \le \tanh\beta$ を含みます。

- 大きな β での主項：$I_\nu(\beta) \sim e^\beta (2\pi\beta)^{-1/2}(1 - \frac{4\nu^2-1}{8\beta})$ から $a_1 \approx 1 - \frac{3}{2\beta}$、一方 $\tanh\beta \approx 1 - 2e^{-2\beta}$。下界は真の張力 $\approx \frac{3}{2\beta}$ より指数的に小さく、矛盾はありません 初 。
- 数で：真の $\sigma = -\ln a_1$ は $\beta = 1, 2, 4, 8$ で $1.4263,\ 0.8367,\ 0.4185,\ 0.1994$、定理の下界 $-\ln\tanh\beta$ は $0.2723,\ 0.0366,\ 0.00067,\ 2.25\times10^{-7}$ です 読 （浮動小数）。
- この下界は、25-03 の表 1 の「一辺 1 の容器・枠の最大値の形」$\sigma_{\max}(1)$ とちょうど一致します。一辺 1 の容器ではプラケット一枚の z だけが内側にあり、$\mathbb{E}[z_p \,|\, V] = \tanh(\frac{\beta}{2}\mathrm{tr}\, V)$、その最大が $\tanh\beta$ だからです 初 （25-03 §07）。板の定理は「厚さ一つの容器を、枠について最大値で押さえる」評価と同じ形をしています。

四次元の板の Wilson ループの測定（Creutz 比・捩れの有無の比較）は、測った記録の章 25-08 に置きます。

06 先行文献との位置

板の閉じ込めの定理の論法（コンパクトな方向を巻く中心の面の上の符号を群として平均する）は、Mack–Petkova・Tomboulis–Yaffe の渦の自由エネルギーの議論と同じ系統で、厚さ一つの容器 $\{p\}\times T^2$ の自由エネルギーを作用で直接に押さえたものに当たります 典 （系統の対応は Kovács–Tomboulis hep-lat/0108017 §2〜§3 の枠組みとの比較による）。発想は古典的なので、同じ評価が文献に、あるいは言い伝えとして既にある可能性があります。照合が残っているのは次の二つです。

- Tomboulis–Yaffe（Commun. Math. Phys. 100 (1985) 313）型の議論：捩れた分配関数の比で Wilson ループを押さえる不等式（Kanazawa arXiv:0808.3442 の再述）。板の上で同

じ形の評価が明示的に書かれているかは、確かめていません。

- Borgs（Nucl. Phys. B 261 (1985)、高温の格子ゲージ理論の空間的な Wilson ループの面積則）：十分高い温度で、クラスター展開により空間的な Wilson ループの面積則を示した仕事と記録されています。この本は原典の本文を確かめていません（書誌は二次の記録による）。板の閉じ込めの定理との違いとして見込まれるのは、非可換の $SU(2)$・N を止めて全ての β・評価が明示的で初等的、の三点ですが、照合は未了です。

この本の中では、板の閉じ込めの定理は次の章の挿入の恒等式の特別な場合（細い挿入）として再び出てきます（25-05 §06）。

07

言えないこと

(a) 連続極限。(2) の下界は $a \to 0$ で 0 になります。板の閉じ込めの定理は格子間隔に一様な張力について何も言いません。

(b) 四次元の空間。板の閉じ込めの定理は T^2 の大きさ N を止めた文で、$N \to \infty$（四次元の空間へ近づける）では下界が消えます。四次元の閉じ込めについては何も言いません。T^2 を広げる段が移り変わりの帯です（25-09・26-01）。

(c) 太い渦への改良。§04 の「太い渦の写像で F を N に依らず押さえる」は仮の筋で、挿入の費用の一様な評価を含め、証明はありません。

(d) 先行文献。§06 の二つとの照合は済んでいません。この章の結果に新しさは主張しません。

(e) Lean。機械検査の欄は有限和の代数（群平均の恒等式・tanh の評価・一枚の不等式）だけです。$SU(2)$ の Haar 測度、余閉な z、区画の位相と射影（手順 1・2・5）は Lean の外です。

(f) 極限の存在。$M \to \infty$ の極限の測度の存在はこの章では扱わず、全ての極限点についての上界として述べています。

08

五分類の表と依存グラフ

表 1　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	区画の和のアンサンブルは区画の分配関数の和・Wilson ループの対応（手順 1）	初	§03	$SU(2)$・有限格子	—
2	渦の面 S_p は余閉で互いに交わらない（手順 2）	初	§03	板 $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$	—
3	反転で W は ε_p 倍・重みは $r_p \in [e^{-2\beta N^2}, e^{2\beta N^2}]$ 倍（手順 3）	初	§03	Wilson 作用	—
4	群平均 (3) と $\lvert\mathbb{E}[W]\rvert \le t^A$ (4)	初	§03 手順 4	区画の和のアンサンブル	SlabAverage（`SlabAverage.average_bound`）・SlabConfine（`SlabConfine.group_average`・`SlabConfine.tanh_bound`・`SlabConfine.one_sheet`）（仮定は §03 の末尾の通り）
5	固定した区画への射影 (5)(6)	初	§03 手順 5	平面の全てのプラケットに群が働く	—
6	板の閉じ込めの定理：(1) と $\sigma \ge -\ln\tanh(\beta N^2) \ge 2e^{-2\beta N^2}$	初	§02・§03	$SU(2)$・Wilson 作用・N 固定・格子間隔固定・全ての β	—（有限和の核だけ行 4）
7	容器の形 (7)・$\sup_\Phi \theta_Q \le \tanh(\beta N^2)^{\ell^2}$ (8)	初	§04	一辺 ℓ の容器 $\times\ \mathrm{T}^2$	—
8	連続極限（$L = Na$ 固定・$a \to 0$）では下界が 0	初	§04	β が $a \to 0$ で減らないこと	—
9	物理の渦の費用は $\pi^2\beta$ の程度で N に依らない	読（物理）	25-02	希薄な領域・半古典	—
10	太い渦を挿入する写像で、格子間隔に一様な下界が出る	仮	筋：§04 の (7) の形と 25-05・25-06	紫外の制御の下	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
11	二次元へ当てると $I_2(\beta)/I_1(\beta) \le \tanh\beta$ ・一辺 1 の容器の最大値の形と一致	初	§05	二次元 $SU(2)$	—
12	§05 の数	読	§05	浮動小数	—
13	論法は Mack–Petkova・Tomboulis–Yaffe の渦の自由エネルギーの系統	典	Kovács–Tomboulis §2〜§3 との比較	—	—

機械検査の欄の束は、この本の側の再検査で `sorry` を含まず、公理が標準の三つの部分集合であることが確かめられたものです。保証されるのは有限の配位の集合の上の和の代数で、手順 1・2・5 と Haar 測度の積分は Lean の外です（23-13）。

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  初  区画の和 = 区画の分配関数の和・W の対応   SU(2)・有限格子
 2  初  渦の面 S_p は余閉・互いに素                  板
 3  初  W は ε_p 倍・重みは r_p 倍、|ln r_p| ≤ 2βN²
 4  初  群平均 (3)(4) ⟸ 2・3                        Lean average_bound ほか
 5  初  固定した区画へ (5)(6) ⟸ 1・4
 6  初  板の閉じ込めの定理 (1)(2) ⟸ 5              N 固定・a 固定・全ての β
 7  初  容器の形 (7)(8) ⟸ 3
 8  初  連続極限では下界 0 ⟸ 6                     L = Na 固定
 9  読  物理の渦の費用 π²β（物理）                 希薄・半古典
10  仮  太い渦で一様な下界 ⟸ 7・9                   紫外の制御の下
11  初  二次元へ・最大値の形と一致 ⟸ 6
12  読  §05 の数 ⟸ 11                              浮動小数
13  典  渦の自由エネルギーの系統
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。板の閉じ込めの定理の前提は §03 の五つの手順の行だけで、仮定の行（太い渦で一様な下界）はどの行の前提にも入りません。その結論は「格子間隔に一様な下界」で、板の閉じ込めの定理の量（N を止めた下界）を含みません。

機械検査まで済んだ渦の側の定理は第 21 部に在ります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 板 $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ の $SU(2)$ Wilson 作用で、N と格子間隔を止めれば、全ての β と全ての捩れの区画で $\sigma \geq -\ln\tanh(\beta N^2) \geq 2e^{-2\beta N^2}$（板の閉じ込めの定理）	格子間隔に一様な張力。T^2 を広げたときの張力（移り変わりの帯）。新しさ（照合が未了）
初 容器の形 $\sup_\Phi \theta_Q \leq \tanh(\beta N^2)^{\ell^2}$・連続極限では下界が 0 になること	太い渦の挿入の費用の一様な評価（太い渦の行は仮）
初 ＋読 二次元での整合（$I_2/I_1 \leq \tanh\beta$・一辺 1 の容器の最大値の形との一致）	四次元の板の測定（25-08）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
板の閉じ込めの定理と証明の五つの手順・容器の形 (7)(8)・二次元への適用	初	本文 §03〜§05 の証明
渦の容器・自由エネルギーの議論の系統	典	T. G. Kovács, E. T. Tomboulis, arXiv:hep-lat/0108017（Phys. Rev. D 65 (2002) 074501）§2〜§3 を本文で確認。G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 125 (1980) 117 と E. T. Tomboulis, L. G. Yaffe, Commun. Math. Phys. 100 (1985) 313 はその引用を通して（本文は未確認）
Tomboulis–Yaffe の不等式の再述	典	T. Kanazawa, arXiv:0808.3442
高温の空間的な Wilson ループの面積則	照合未了	C. Borgs, Nucl. Phys. B 261 (1985)（書誌は二次の記録。本文は未確認）
二次元の数	読	I_2/I_1 と $\tanh\beta$ の浮動小数の値（25-03 表 1 と同じ計算）
Lean	Lean	SlabConfine（`SlabConfine.group_average`・`SlabConfine.factor_split`・`SlabConfine.tanh_bound`・`SlabConfine.one_sheet`）・SlabAverage（`SlabAverage.average_bound`）。束が保証するのは有限和の代数だけ

この章で使った語 — 板・渦の面 S_p・反転の群・群平均・細い渦の費用・容器の偏り θ_Q・板の閉じ込めの定理。意味は A-02 用語集 にあります（第 25 部の語は追加の予定）。

次に読む章：25-05 渦の挿入の恒等式 — 細い面の反転を一般の「区画を反転する全単射」に置き換えると、何が無条件に言えるか。

渦の挿入の恒等式

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 25-03・1-08 にあります。

この章で分かること — 25-04 では、細い渦の面を反転する写像で平均して板の閉じ込めを出しました。この章では、その写像を一般の「区画を反転する全単射」T（渦を一本挿入する写像）に置き換えたとき、何が**無条件に**言えるかを並べます。使うのは三つだけです：有限の配位空間、正の重み、区画の符号を反転する全単射。そこから、(1) 挿入比 ρ の平均は 1 で、$\mathbb{E}[\rho\sigma] = -\mathbb{E}[\sigma]$、(2) 区画の偏りは挿入比の揺らぎで押さえられる：$4\mathbb{E}[\sigma]^2 \le \mathrm{Var}(\bar{\rho})$、(3) 対合に直すと $\mathbb{E}[H] = \mathbb{E}[H\tanh(\Delta S/2)]$ という有界な形と、位置について平均した形、(4) $\mathbb{E}[H\sqrt{\rho}] = 0$ から出る二次モーメントの形と Paley–Zygmund の形、が出ます。どれも初等的な恒等式と Cauchy–Schwarz で、Lean で有限和の版が検査されています。

前提となる章 — 25-03（区画の和のアンサンブル・区画の符号・偏り）・25-04（板の閉じ込め）。第 1 部の 1-08（確率と測度・Cauchy–Schwarz）。

先に言うこと — この章の定理は全て「有限の配位空間・正の重み・区画を反転する全単射（Haar を保つ写像の有限版）」の三つの条件の上の文で、各定理の行にその条件を書きます。連続の $SU(2)$ の配位空間へ移すには、和を Haar 測度の積分に置き換え、写像が測度を保つ（あるいはヤコビアンを重みに入れる）ことが要り、その部分は Lean の外です。結果は初等的で、先行文献との照合は済んでいません。閉じ込めについて、これらの恒等式だけからは何も出ません。何が足りないかを §07・§08 に書きます。

この章の順序

1. 要約 — 渦を一本入れる写像の帳尻
2. 設定 — 三つの条件
3. 挿入比の平均の恒等式と、揺らぎによる偏りの評価
4. 有界な形 — 有界な挿入の恒等式・揺らぎの関係式・位置の平均
5. 二次モーメントの形 — 平方根の恒等式・Paley–Zygmund の形・多数の細胞
6. 板の閉じ込めの再導出

7. 何を意味し、何が足りないか — 表 1
8. 言えないこと
9. 五分類の表と依存グラフ — 表 2

01

要約 — 渦を一本入れる写像の帳尻

1. 区画の和のアンサンブル（25-03）では、ある領域に渦が通っているかどうかが符号 $\sigma = \pm 1$ で表されます。渦を一本入れる（あるいは抜く）写像 T は σ を反転します。
2. 配位 x で渦を入れたときの重みの比を挿入比 $\rho(x)$ と呼びます。ρ が 1 より小さいほど、渦を入れるのは高くつきます。
3. 挿入比の平均はいつでもちょうど 1 です（挿入比の平均の恒等式）。これは「写像で配位を付け替えても、全体の重みの和は変わらない」という帳尻の式にすぎません。同じ帳尻から $\mathbb{E}[\rho\sigma] = -\mathbb{E}[\sigma]$ も出ます 初 。
4. 二つを組み合わせると、区画の偏り $|\mathbb{E}[\sigma]|$ は、挿入比の揺らぎ（分散）の半分の平方根以下です（挿入比の揺らぎによる偏りの評価）。たくさんの位置で挿入して挿入比を平均すると、揺らぎは小さくなりえます。位置について平均することが、エントロピーの役を果たします 初 。
5. 挿入比は大きな値を取りうる（重い裾）ので、扱いやすい有界な形も用意します。$\tanh(\Delta S/2)$ は常に $[-1, 1]$ に入り、$\mathbb{E}[H] = \mathbb{E}[H \tanh(\Delta S/2)]$ が成り立ちます（有界な挿入の恒等式）。$1 - \mathbb{E}[\tanh]$ は、渦を挿入するモンテカルロの一手の受理率の平均の 2 倍です（挿入の揺らぎの関係式） 初 。
6. $\sqrt{\rho}$ を使う形は、二次モーメントがいつでも 1 以下なので裾の心配がありません（平方根の挿入の恒等式・Paley–Zygmund の形の偏りの評価） 初 。
7. 細い渦の面の反転（25-04）を挿入に取ると、板の閉じ込めの定理がこの章の特別な場合として出ます（§06）。
8. これらは閉じ込めの証明ではありません。面積則には、多数の領域で同時に偏りが小さいこと（大偏差）と、挿入の費用の格子間隔に一様な評価（紫外）が要り、どちらもこの章の外です。

02

設定 — 三つの条件

この章を通して次の三つを置きます。

- **有限の配位空間の条件** X（有限集合）。
- **正の重みの条件** $w : X \to (0, \infty)$。期待値は $\mathbb{E}[f] = \sum_x w(x) f(x) / \sum_x w(x)$。
- **区画を反転する全単射の条件**：区画の符号 $\sigma : X \to \{\pm 1\}$ と全単射 $T : X \to X$ で、$\sigma(Tx) = -\sigma(x)$。

区画を反転する全単射の条件は、区画の和のアンサンブルで「Haar 測度を保ち、ある領域の区画の符号を反転する写像」（例：渦の面の z の反転と、領域の内側に台を持つ滑らかな左からの掛け算の合成）の有限版です。対合であること・互いに可換であること・最悪の場合の評価は、§03 では使いません。有限の配位空間の条件から連続の配位空間（$SU(2)^{\text{リンク}}$ と余閉な z）へ移すには、和を Haar 測度と数え上げの積分に置き換え、T が測度を保つこと（保たないならヤコビアンを重みに入れること）が要ります。証明は同じ変数の付け替えで通りますが、その版は Lean の外です。

挿入比を

$$\rho(x) = \begin{cases} w(Tx)/w(x) & (\sigma(x) = +1) \\ w(T^{-1}x)/w(x) & (\sigma(x) = -1) \end{cases} \tag{1}$$

と置きます。$\sigma = +1$ の配位には T で渦を入れ、$\sigma = -1$ の配位には T^{-1} で戻す、という向きの合わせ方です。作用 $S = -\ln w$ で書けば $\rho = e^{-\Delta S}$ です。

03

挿入比の平均の恒等式と、揺らぎによる偏りの評価

挿入比の平均の恒等式

有限の配位空間の条件・正の重みの条件・区画を反転する全単射の条件の下で

$$\mathbb{E}[\rho] = 1, \qquad \mathbb{E}[\rho\,\sigma] = -\mathbb{E}[\sigma]. \tag{2}$$

初 証明。$X_\pm = \{\sigma = \pm 1\}$ と置きます。T は X_+ を X_- に、X_- を X_+ に写し、全単射なので $T(X_+) = X_-$、$T^{-1}(X_-) = X_+$ です。よって

$$\sum_{x \in X_+} w(x)\rho(x) = \sum_{x \in X_+} w(Tx) = \sum_{y \in X_-} w(y), \qquad \sum_{x \in X_-} w(x)\rho(x) = \sum_{x \in X_-} w(T^{-1}x) = \sum_{y \in X_+} w(y).$$

足すと $\sum w\rho = \sum w$、σ を掛けて足すと $\sum w\rho\sigma = \sum_{X_-} w - \sum_{X_+} w = -\sum w\sigma$ です。∎

Lean InsertionIdentity（`Insertion.mean_one`・`Insertion.mean_rho_sigma`）（仮定：X は有限・$w > 0$・T は X の全単射・$\sigma(Tx) = -\sigma(x)$・$\sigma = \pm 1$。結論：$\sum w\rho = \sum w$、$\sum w\rho\sigma = -\sum w\sigma$）。対合・可換性・測度の構造は使っていません。

挿入比の揺らぎによる偏りの評価（区画の偏りは挿入比の揺らぎで押さえられる）

有限の配位空間の条件・正の重みの条件の下で、区画の符号 σ と、それを反転する全単射の空でない有限族 $T_1, \dots, T_n$（各 T_k が区画を反転する全単射の条件を満たす）を取り、挿入比の平均を $\bar\rho = \frac{1}{n}\sum_k \rho_k$ とすると

$$4\,\mathbb{E}[\sigma]^2 \;\le\; \mathbb{E}\big[(\bar\rho - 1)^2\big] = \mathrm{Var}(\bar\rho), \qquad \text{すなわち} \quad |\mathbb{E}[\sigma]| \le \tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Var}(\bar\rho)}. \tag{3}$$

初 証明。挿入比の平均の恒等式を各 T_k に使って平均すると $\mathbb{E}[\bar\rho] = 1$、$\mathbb{E}[\bar\rho\sigma] = -\mathbb{E}[\sigma]$。よって $\mathbb{E}[(\bar\rho - 1)\sigma] = -2\mathbb{E}[\sigma]$。Cauchy–Schwarz と $\sigma^2 = 1$ から $4\mathbb{E}[\sigma]^2 \le \mathbb{E}[(\bar\rho - 1)^2]\mathbb{E}[\sigma^2] = \mathrm{Var}(\bar\rho)$。∎

Lean InsertionIdentity（`Insertion.sector_bias_le`）（仮定：X は有限・族の添字集合は有限で空でない・$w > 0$・各 T_k は全単射で $\sigma(T_k x) = -\sigma(x)$・$\sigma = \pm 1$。結論：$4(\sum w\sigma)^2 \le (\sum w)\sum w(\bar\rho - 1)^2$）。

容器（25-03）に当てるには、枠を止めた条件つきの測度の上で挿入比の揺らぎによる偏りの評価を使います。容器の内側だけを動かす全単射なら枠は変わらないので、$\theta_j(\Phi) = |\mathbb{E}[\sigma_j \,|\, \Phi]| \le \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Var}(\bar\rho \,|\, \Phi)}$ です 初 。容器の恒等式の因子 $\tanh(|\Delta F_j|/2)$ が、容器の中の多数の位置への挿入の、挿入比の平均の揺らぎで上から押さえられる、という読み方になります。

04

有界な形 — tanh と位置の平均

挿入比 $\rho = e^{-\Delta S}$ は大きな値を取りうるので、$\mathrm{Var}(\bar\rho)$ は大きくなりえます。そこで有界な因子に取り替えます。区画を反転する全単射の条件の T から、区画に向きを合わせた写像

$$\tau(x) = \begin{cases} Tx & (\sigma(x) = +1) \\ T^{-1}x & (\sigma(x) = -1) \end{cases} \tag{4}$$

を作ると、τ は**対合**（$\tau \circ \tau = \mathrm{id}$）です（$\sigma(x) = +1$ なら $\tau x = Tx \in X_-$ なので $\tau(\tau x) = T^{-1}Tx = x$。逆も同じ） 初 。$\Delta S = S \circ \tau - S$、$\rho = w \circ \tau / w = e^{-\Delta S}$、そして

$$t(x) := \frac{w(x) - w(\tau x)}{w(x) + w(\tau x)} = \tanh\frac{\Delta S(x)}{2} \;\in (-1, 1) \tag{5}$$

と置きます。

有界な挿入の恒等式

有限の配位空間の条件・正の重みの条件の下で、τ を X の対合、H を τ で奇な関数（$H \circ \tau = -H$）とすると $\mathbb{E}[H] = \mathbb{E}[H\,t]$。

初 証明。$1 - t = 2w \circ \tau / (w + w \circ \tau)$ なので $\mathbb{E}[H] - \mathbb{E}[Ht]$ は $2\sum_x g(x) / \sum w$、$g(x) = w(x)H(x)w(\tau x)/(w(x) + w(\tau x))$ に比例します。$g(\tau x) = -g(x)$（H が奇で、残りは $x \leftrightarrow \tau x$ で対称）なので、和を τ で付け替えると $\sum g = -\sum g$、よって 0 です。∎

Lean BoundedInsertion（`Bounded.single`）（仮定：X は有限・τ は全単射で $\tau \circ \tau = \mathrm{id}$・$w > 0$・$H \circ \tau = -H$。結論：$\sum wHt = \sum wH$）。

挿入の揺らぎの関係式（揺らぎの関係式と受理率）

有界な挿入の恒等式の設定で、全ての実数 s について $\mathbb{P}(\Delta S = s) = e^{s}\,\mathbb{P}(\Delta S = -s)$。とくに $\mathbb{E}[t] \geq 0$ で、

$$1 - \mathbb{E}[t] = 2\,\mathbb{E}\Big[\frac{1}{1 + e^{\Delta S}}\Big] = 2 \times (\text{挿入の一手の Barker 型の受理率の平均}). \tag{6}$$

初 証明。付け替えで任意の g について $\mathbb{E}[g] = \mathbb{E}[(g \circ \tau)\,\rho]$。$\Delta S \circ \tau = -\Delta S$ なので $g = \mathbf{1}\{\Delta S = s\}$ と取ると $g \circ \tau = \mathbf{1}\{\Delta S = -s\}$ で、集合 $\{\Delta S = -s\}$ の上では $\rho = e^{-\Delta S} = e^{s}$ なので第一式。s と $-s$ を組にすると $\mathbb{P}(s)\tanh\frac{s}{2} + \mathbb{P}(-s)\tanh\frac{-s}{2} = \mathbb{P}(-s)(e^{s} - 1)\tanh\frac{s}{2} \geq 0$ なので $\mathbb{E}[t] \geq 0$。最後に $1 - \tanh(\Delta S/2) = 2/(1 + e^{\Delta S})$。∎ この補題には Lean の検査がありません。

(6) の読み方。Barker 型の一手は「渦を挿入した配位を確率 $w(\tau x)/(w(x) + w(\tau x))$ で受け入れる」モンテカルロの一手です。挿入がほとんど断られる（費用が高い）なら $\mathbb{E}[t] \approx 1$、よく通るなら $\mathbb{E}[t]$ は 1 から離れます。第一式は、非平衡の統計力学で Crooks の揺らぎの関係式と呼ばれるものと同じ形です（原典との照合と、力学で駆動した版は 25-06）。

多数の細胞と位置の平均。 互いに離れた細胞 c ごとに、細胞の中の位置 $p \in P$（P は空でない有限集合）の挿入の対合 $\tau_{c,p}$ を取り、$t_{c,p}$ を (5) で作り、$\bar{t}_c = \frac{1}{|P|}\sum_p t_{c,p}$ と置きます。

位置で平均した挿入の評価（位置について平均した有界な評価）

有限の配位空間の条件・正の重みの条件の下で、各 $\tau_{c,p}$ が対合、H が全ての $\tau_{c,p}$ で奇、そして別の細胞の因子が動かないこと（$c \neq d$ なら $t_{d,q} \circ \tau_{c,p} = t_{d,q}$）を仮定すると

$$\mathbb{E}[H]=\mathbb{E}\Big[H\prod_{c}\bar{t}_c\Big],\qquad |H|\le 1 \text{ なら } \ |\mathbb{E}[H]|\le \mathbb{E}\Big[\prod_{c}|\bar{t}_c|\Big]. \tag{7}$$

初 証明。まず各細胞から一つずつ位置を選んだ $\prod_c t_{c,p_c}$ について、細胞を一つずつ足す帰納で $\mathbb{E}[H\prod_c t_{c,p_c}]=\mathbb{E}[H]$：細胞 d を足す段では、それまでの積 $G=\prod_{c\neq d}t_{c,p_c}$ が τ_{d,p_d} で動かないので HG は奇で、有界な挿入の恒等式が使えます。$\prod_c \bar{t}_c$ を展開すると、選び方 $|P|^{\#\text{細胞}}$ 通りの平均なので第一式。$|H|\le 1$ で絶対値を取れば第二式です。∎ 各因子は $[-1,1]$ に入り、モーメントの仮定は要りません。

Lean BoundedInsertion（`Bounded.averaged`・`Bounded.averaged_bound`）（仮定：X と細胞の集合と位置の集合 P は有限・P は空でない・全ての $\tau_{c,p}$ が対合・$w>0$・H は全ての $\tau_{c,p}$ で奇・$c\neq d$ なら $t_{d,q}\circ\tau_{c,p}=t_{d,q}$・後者は $|H|\le 1$ も。結論：(7)）。帰納の一段は BoundedInsertion（`Bounded.multi`）。

05 二次モーメントの形

tanh の形は有界ですが、指数の平均（自由エネルギー）をそのまま捉えません。もう一つの有界な形が $\sqrt{\rho}$ です。

平方根の挿入の恒等式（Bhattacharyya の形）

有限の配位空間の条件・正の重みの条件の下で、τ を対合、$H\circ\tau=-H$、$\rho=w\circ\tau/w$ とすると $\mathbb{E}[H\sqrt{\rho}]=0$。

初 証明。$w\sqrt{\rho}=\sqrt{w\cdot w\circ\tau}$ は $x\leftrightarrow\tau x$ で対称、H は反対称なので、$\sum_x w(x)H(x)\sqrt{\rho(x)}$ は τ で付け替えると符号を変え、0 です。∎

Lean SecondMoment（`SecondMoment.sqrt_identity`）（仮定：X は有限・τ は全単射で $\tau\circ\tau=\mathrm{id}$・$w>0$・$H\circ\tau=-H$。結論：$\sum wH\sqrt{w\circ\tau/w}=0$）。

Paley–Zygmund の形の偏りの評価

有限の配位空間の条件・正の重みの条件の下で、空でない有限集合 P の各 p に対合 τ_p を取り、H は全ての τ_p で奇で $|H|\le 1$ とする。$Y:=\frac{1}{|P|}\sum_p\sqrt{\rho_p}$（区画を反転する挿入の、重みつきの数）と置くと

$$\mathbb{E}[H]^2\,\mathbb{E}[Y^2]\ \le\ \mathbb{E}[Y^2]-\mathbb{E}[Y]^2,\qquad \text{すなわち}\quad \mathbb{E}[H]^2\le 1-\frac{\mathbb{E}[Y]^2}{\mathbb{E}[Y^2]},\qquad \text{かつ}\ \mathbb{E}[Y^2]\le 1 \tag{8}$$

初 証明。平方根の挿入の恒等式を平均して $\mathbb{E}[HY]=0$。$C=\mathbb{E}[Y^2]$、$B=\mathbb{E}[Y]$ と置くと $\mathbb{E}[H(C-BY)]=C\,\mathbb{E}[H]$。Cauchy–Schwarz と $H^2\le 1$ から $C^2\mathbb{E}[H]^2\le\mathbb{E}[(C-BY)^2]=C^2-2CB^2+B^2C=C(C-B^2)$。$C>0$（$\rho_p>0$）で割って第一式です。最後の不等式は、$Y^2\le\frac{1}{|P|}\sum_p\rho_p$（Cauchy–Schwarz）と、対合については $\mathbb{E}[\rho_p]=\sum_x w(\tau_p x)/\sum w=1$ から出ます。∎

Lean SecondMoment（`SecondMoment.pz_bound`）（仮定：X と P は有限・P は空でない・全ての τ_p が対合・$w>0$・H は全ての τ_p で奇・$|H|\le 1$。結論：$(\sum wH)^2(\sum wY^2)\le(\sum w)\big((\sum wY^2)(\sum w)-(\sum wY)^2\big)$、正規化すると (8) の第一式）。$\mathbb{E}[Y^2]\le 1$ には Lean の検査がありません。

(8) は、Y が二次モーメントの意味で集中している（$\mathbb{E}[Y^2]$ が $\mathbb{E}[Y]^2$ に近い）ほど偏りが小さいことを言います。二次モーメントはいつでも 1 以下なので、ρ の分散の形のような重い裾の心配がありません。

多数の細胞。細胞ごとの挿入比の積を扱う形も置いておきます。

多数の細胞の二次モーメントの評価

有限の配位空間の条件・正の重みの条件の下で、$|H|\le 1$、細胞の有限集合 C の各 c に関数 $r_c : X\to\mathbb{R}$（平均した挿入比）を取り、**挿入で奇であること**——全ての $S\subseteq C$ について $\mathbb{E}[H\prod_{c\in S}r_c]=(-1)^{|S|}\mathbb{E}[H]$——を仮定すると

$$\mathbb{E}\Big[H\prod_{c\in C}(1-r_c)\Big]=2^{|C|}\,\mathbb{E}[H],\qquad 4^{|C|}\,\mathbb{E}[H]^2\ \le\ \mathbb{E}\Big[\prod_{c\in C}(1-r_c)^2\Big]. \tag{9}$$

初 証明。$\prod_c(1-r_c)=\sum_{S\subseteq C}(-1)^{|S|}\prod_{c\in S}r_c$ と展開し、仮定を使うと各項が $\mathbb{E}[H]$ になり、$2^{|C|}$ 個の和です。Cauchy–Schwarz と $H^2\le 1$ で第二式。∎

Lean MultiCell（`MultiCell.bound`）（仮定：X と C は有限・$w>0$・$|H|\le 1$・上の「挿入で奇」の等式を全ての $S\subseteq C$ で。結論：(9) の第二式）と MultiCell（`MultiCell.expand_identity`）（第一式）。「挿入で奇」は Lean の中では**仮定として置かれた等式**です。一つの全単射については押し出しの等式 $\sum w\,(w\circ T/w)\,F=\sum w\,F\circ T^{-1}$（MultiCell（`MultiCell.pushforward`）、仮定：有限・$w>0$）から出ますが、別々の細胞の挿入を合成したときにこの等式が成り立つことは、写像の可換性と比の不変性に依り、Lean の外です。

06

板の閉じ込めの再導出

25-04 の細い挿入を取ります。細胞をループの内側の平面のプラケット $p\in S(C)$ とし、位置は一つ（$|P|=1$）、τ_p を渦の面 S_p の上の z の反転とします。τ_p はそれ自身が対合で、リンクを変えないので Haar × 数え上げの測度を保ちます。$H=W(C)$ は各 τ_p で奇、$t_p=(1-$

$r_p)/(1+r_p)$ は S_p の上の値だけで決まるので $q \neq p$ の τ_q で動きません。位置で平均した挿入の評価から

$$|\mathbb{E}[W(C)]| \;\le\; \mathbb{E}\Big[\prod_{p \in S(C)} |t_p|\Big] \;\le\; \tanh(\beta N^2)^{A} \tag{10}$$

（$|t_p| \le \tanh(\beta N^2)$ は 25-04 の一枚の不等式）初。これは 25-04 の手順 4 の (4) そのもので、固定した区画への射影は 25-04 の手順 5 と同じです。板の閉じ込めの定理は、位置で平均した挿入の評価の「細い挿入・位置一つ」の特別な場合です。連続の配位空間での (10) は、和を積分に置き換えた同じ議論で、Lean の外です。

07

何を意味し、何が足りないか

位置の平均はエントロピー。 挿入比の揺らぎによる偏りの評価の $\mathrm{Var}(\bar{\rho})$ は、n 個の位置のうち互いに相関の届く位置の数を K、一つの挿入比の分散を V とすれば $\approx VK/n$ の程度と見込まれます 読（物理）。位置の数 n を増やすことがエントロピーの役を、位置どうしの相関の減衰（質量ギャップ）が K を小さく保つ役を果たします。滑らかな分数インスタントン型の挿入では $V \sim e^{S_{\mathrm{inst}}}$ の程度と見込まれ、要る領域の面積は V に比例し、弦の張力は $\sigma \sim e^{-S_{\mathrm{inst}}}/L^2$ 程度と、希薄な渦の気体の公式と同じ形になります 読（物理・半古典の見積もり。証明ではない）。

表 1　三つの形の比較（一つの細胞あたりの因子）

形	因子	長所	短所
挿入比の分散（挿入比の揺らぎによる偏りの評価）	$1-\bar{\rho}$	自由エネルギー（指数の平均）をそのまま捉える	重い裾。二次モーメントが大きくなりうる
tanh（位置で平均した挿入の評価）	$\bar{t}_c$	有界。受理率という意味（挿入の揺らぎの関係式）	指数の平均でないので、渦の形のエントロピーを捉えにくい
$\sqrt{\bar{\rho}}$（Paley–Zygmund の形の偏りの評価）	Y	二次モーメントが常に 1 以下で、形のエントロピーも捉えうる	位置・形どうしの重なりの評価が要る

チェス盤への集約。 平面の方向の鏡映正値性があれば、チェス盤の評価で $\mathbb{E}[\prod_{c\in\text{内側}} |\bar{t}_c|] \le \Lambda^n$、$\Lambda := (\mathbb{E}[\prod_{\text{全ての細胞}} |\bar{t}_c|])^{1/\#\text{細胞}}$ と、並進不変な一つの量に集約され、$\Lambda < 1$ なら面積則が出る、という筋があります 仮（根拠の在りか：鏡映正値性の扱いは 26-04・26-05。同じ構造は Kovács–Tomboulis の (13)(21) にある 典）。

足りないもの。 (i) 大偏差の段：$\Lambda < 1$ には、全ての細胞で同時に挿入がよく断られる事象が、細胞の数について指数的に稀であることが要ります。(ii) 紫外の段：受理率の下界が格子間隔に一様であることが要り、細い反転（25-04）では N とともに悪くなります。滑らかな挿入にすると、決まった写像は紫外で余分の費用を払うことが分かっています（25-07）。(iii) 二

次モーメントの上界：挿入比の揺らぎによる偏りの評価の V の上界。三つともこの本では示していません。

陰性対照。 四次元の $U(1)$ は弱結合で閉じ込めないので、この章の評価をそこに当てれば、必ずどこかで評価が効かなくなるはずです（例えば V が大きくなる）。その確かめは、この本ではまだ行っていません。

08 言えないこと

(a) 閉じ込め。この章の恒等式と不等式は、どれも閉じ込めを導きません。§07 の (i)〜(iii) が残ります。

(b) 連続の配位空間。定理は全て、有限の配位空間の条件・正の重みの条件・区画を反転する全単射の条件の下の有限の版で、$SU(2)$ の Haar 測度の上の版は、写像が測度を保つこと（あるいはヤコビアン）を足した同じ議論ですが、Lean の外です。

(c) 多数の細胞の二次モーメントの評価の仮定。「挿入で奇」の等式は、別々の細胞の挿入を合成した写像について、この章では示していません（Lean でも仮定）。

(d) 新しさ。どれも変数の付け替えと Cauchy–Schwarz の初等的な組み合わせで、先行文献との照合は済んでいません。和のアンサンブル・容器の恒等式は Mack–Petkova、Wilson ループを捩れた分配関数で押さえる形は Tomboulis–Yaffe、チェス盤の積は Kovács–Tomboulis の枠組みの中にあります。位置について平均した挿入と Cauchy–Schwarz の組み合わせは、Mermin–Wagner の型の証明で標準的な手法と記録されており、ゲージ理論では Chatterjee（arXiv:2602.00436）にも現れる、とされています（照合未了）。この章の結果に新しさは主張しません。

(e) §07 の見積もり。$\mathrm{Var}(\bar{\rho}) \approx VK/n \cdot V \sim e^{S_{\mathrm{inst}}} \cdot \sigma \sim e^{-S_{\mathrm{inst}}}/L^2$ は物理の見立てで、どれも証明ではありません。

(f) 陰性対照。四次元の $U(1)$ で評価が効かなくなることは、まだ確かめていません。

09 五分類の表と依存グラフ

表 2　この章の行（条件は有限の配位空間の条件・正の重みの条件・区画を反転する全単射の条件）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	挿入比の平均の恒等式：$\mathbb{E}[\rho] = 1$・$\mathbb{E}[\rho\sigma] = -\mathbb{E}[\sigma]$	初	§03	有限の配位空間の条件・正の重みの条件・区画を反転する全単射の条件。対合も可換性も使わない	InsertionIdentity（`Insertion.mean_one`・`Insertion.mean_rho_sigma`）（仮定：有限の配位空間の条件・正の重みの条件・区画を反転する全単射の条件・$\sigma = \pm 1$）
2	挿入比の揺らぎによる偏りの評価：$4\mathbb{E}[\sigma]^2 \le \mathrm{Var}(\bar{\rho})$	初	§03	有限の配位空間の条件・正の重みの条件・各 T_k が区画を反転する全単射の条件・族は空でない有限	InsertionIdentity（`Insertion.sector_bias_le`）（仮定：同左）
3	(4) の τ は対合	初	§04	区画を反転する全単射の条件	—
4	有界な挿入の恒等式：$\mathbb{E}[H] = \mathbb{E}[H \tanh(\Delta S/2)]$	初	§04	有限の配位空間の条件・正の重みの条件・τ は対合・H は奇	BoundedInsertion（`Bounded.single`）（仮定：同左）
5	挿入の揺らぎの関係式：$\mathbb{E}[t] \ge 0$・受理率 (6)	初	§04	有限の配位空間の条件・正の重みの条件・τ は対合	—
6	位置で平均した挿入の評価：(7)	初	§04	有限の配位空間の条件・正の重みの条件・対合・H は奇・別の細胞の因子が動かない・$\lvert H\rvert \le 1$	BoundedInsertion（`Bounded.averaged`・`Bounded.averaged_bound`）（仮定：同左）
7	平方根の挿入の恒等式：$\mathbb{E}[H\sqrt{\rho}] = 0$	初	§05	有限の配位空間の条件・正の重みの条件・対合・H は奇	SecondMoment（`SecondMoment.sqrt_identity`）（仮定：同左）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
8	Paley–Zygmund の形の偏りの評価：(8) の第一式	初	§05	有限の配位空間の条件・正の重みの条件・対合の族・H は奇・$\lvert H\rvert \le 1$	SecondMoment（`SecondMoment.pz_bound`）（仮定：同左）
9	$\mathbb{E}[Y^2] \le 1$	初	§05	対合	—
10	多数の細胞の二次モーメントの評価：(9)	初	§05	有限の配位空間の条件・正の重みの条件・$\lvert H\rvert \le 1$・「挿入で奇」を仮定	MultiCell（`MultiCell.bound`・`MultiCell.expand_identity`）（仮定：同左。「挿入で奇」は Lean でも仮定）
11	細い挿入で板の閉じ込めの (10)	初	§06	板・N 固定・区画の和のアンサンブル	—（核は行 6 の束）
12	$\mathrm{Var}(\bar\rho) \approx VK/n$・$\sigma \sim e^{-S_{\mathrm{inst}}}/L^2$	読（物理）	§07	希薄な領域・半古典	—
13	チェス盤の積の構造	典	Kovács–Tomboulis の (13)(21)	鏡映正値性の下	—
14	チェス盤で Λ に集約・$\Lambda < 1$ なら面積則	仮	筋：§07・26-04・26-05	平面の方向の鏡映正値性の下	—

機械検査の欄の束は、この本の側の再検査で `sorry` を含まず、公理が標準の三つの部分集合であることが確かめられたものです。保証されるのは有限集合の上の和の代数だけです（23-13）。Lean の名は全ての章で「ファイル（名前空間.定理）」の形で書きます。名前空間 Insertion の定理はファイル InsertionIdentity に、Bounded の定理はファイル BoundedInsertion にあります。

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  初  E[ρ] = 1・E[ρσ] = −E[σ]                  三つの条件
 2  初  4E[σ]² ≤ Var(ρ̄) ⟸ 1                    Lean sector_bias_le
 3  初  向きを合わせた τ は対合                  全単射の条件
 4  初  E[H] = E[H t] ⟸ 3                        Lean Bounded.single
 5  初  揺らぎの関係式・受理率 ⟸ 3
 6  初  位置の平均 (7) ⟸ 4                       Lean averaged_bound
 7  初  E[H√ρ] = 0 ⟸ 3                           Lean sqrt_identity
 8  初  Paley–Zygmund (8) ⟸ 7                    Lean pz_bound
 9  初  E[Y²] ≤ 1 ⟸ 1・3
10  初  多数の細胞 (9)（「挿入で奇」を仮定）   Lean MultiCell.bound
11  初  細い挿入で板の閉じ込め ⟸ 6               板・N 固定
12  読  VK/n・e^(−S_inst)/L²（物理）⟸ 2
13  典  チェス盤の積の構造
14  仮  Λ に集約・Λ < 1 なら面積則 ⟸ 6・13      鏡映正値性の下
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。仮定の行はチェス盤の行（Λ に集約・$\Lambda<1$ なら面積則）だけで、どの行の前提にも入りません。多数の細胞の評価の「挿入で奇」は定理の言明の中の仮定で、別の行から来るものではありません。この章には閉じ込めの節点も、質量ギャップの節点もありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 有限の配位空間の条件・正の重みの条件・区画を反転する全単射の条件の下で $\mathbb{E}[\rho]=1$・$\mathbb{E}[\rho\sigma]=-\mathbb{E}[\sigma]$・$4\mathbb{E}[\sigma]^2\le \mathrm{Var}(\bar\rho)$	$\mathrm{Var}(\bar\rho)$ の上界（二次モーメント V の評価）
初 対合と奇な H について、tanh の形・揺らぎの関係式・位置の平均・$\sqrt{\rho}$ の形・Paley–Zygmund の形	大偏差の段（全ての細胞で同時に断られる事象の稀さ）。紫外の段（受理率の格子間隔に一様な下界）
初 板の閉じ込めの定理は細い挿入の特別な場合	T^2 を広げたときの閉じ込め。四次元の $U(1)$ の陰性対照
仮 チェス盤で一つの量 Λ に集約する筋	$\Lambda<1$ の証明

出典と再現

もの	種別	出典・道具
挿入比の平均の恒等式・挿入比の揺らぎによる偏りの評価・有界な挿入の恒等式・挿入の揺らぎの関係式・位置で平均した挿入の評価・平方根の挿入の恒等式・Paley–Zygmund の形の偏りの評価・多数の細胞の二次モーメントの評価・(10)	初	本文 §03〜§06 の証明。論文の草稿「Exact centre-vortex insertion identities in the twist-summed ensemble, and bounded, averaged and driven confinement bounds」（A-07 の渦の挿入の恒等式の論文）の定理と同じ内容
和のアンサンブル・容器の恒等式	典（間接）	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 125 (1980) 117（25-03 の通り、本文は未確認）
チェス盤の積の構造 (13)(21)	典	T. G. Kovács, E. T. Tomboulis, arXiv:hep-lat/0108017（Phys. Rev. D 65 (2002) 074501）
位置の平均と Cauchy–Schwarz の組み合わせ（ゲージ理論の例）	照合未了	S. Chatterjee, arXiv:2602.00436（書誌は確認済みの記録による。定理の対応は未照合）
Lean	Lean	InsertionIdentity（`Insertion.mean_one`・`Insertion.mean_rho_sigma`・`Insertion.sector_bias_le`）・BoundedInsertion（`Bounded.single`・`Bounded.multi`・`Bounded.averaged`・`Bounded.averaged_bound`）・SecondMoment（`SecondMoment.sqrt_identity`・`SecondMoment.pz_bound`）・MultiCell（`MultiCell.pushforward`・`MultiCell.expand_identity`・`MultiCell.bound`）。束が保証するのは有限和の代数だけ

この章で使った語 — 挿入写像・挿入比 ρ・区画に向きを合わせた対合 τ・tanh の因子 t・受理率・位置の平均・$\sqrt{\rho}$ の形・Paley–Zygmund の形・挿入で奇。意味は A-02 用語集 にあります（第 25 部の語は追加の予定）。

次に読む章：25-06 力学で駆動した挿入と流れの補題 — 写像を一度に当てる代わりに、熱浴の力学でゆっくり渦を入れると、有界な挿入の恒等式が仕事 W の形になります。

2026-10-15 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 25 部 二本目の道 — 空間の方向から 駆動した挿入・Crooks と Jarzynski・流れの補題 · Kiichi, Shiori and Rin

力学で駆動した挿入と流れの補題

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 25-03・2-08 にあります。

この章で分かること — 25-05 では、渦を一度に挿入する写像 τ から $\mathbb{E}[H] = \mathbb{E}[H\tanh(\Delta S/2)]$ を出しました。挿入の費用 ΔS は細い渦では面積に比例して大きく、評価はほとんど役に立ちません。この章では、挿入を一度に行う代わりに、渦の面の結合を少しずつ反転させながら容器の中だけを熱浴で更新する「駆動した挿入」を考え、(1) 経路の空間の上で時間反転と区画の反転を合わせたものが対合になり、重みの比が e^{-W}（W は経路に沿った仕事）になること（Crooks の関係）、(2) そこから $\mathbb{E}[H] = \mathbb{E}[H\tanh(W/2)]$（駆動した恒等式）と Jarzynski の等式が出ること、(3) 区画を反転させる定常な核の一歩の反転の確率 a について $\theta \le 1 - a$（流れの補題）と、反転の確率 $\le 1 - \theta^2$、(4) 容器を同時に動かすと $\mathbb{E}\prod\theta \le \mathbb{P}(\text{どれも反転しない})$、を示します。最後に、この保証が一段の核では $\theta_0 \sim \frac{1}{2}$ までしか届かず、移り変わりの帯（26-01）の試験には使えないことを書きます。

前提となる章 — 25-03（容器・枠・区画の偏り θ・容器の恒等式）・25-05（有界な挿入の恒等式・挿入の揺らぎの関係式・位置で平均した挿入の評価）・26-01（帯の正しい形 $\ln(1/\theta(L,L)) \ge cL^2$）。第 2 部の 2-08（Gibbs 測度・自由エネルギー）と、第 5 部の 5-07（熱浴・詳細つり合い）。

先に言うこと — 定理は全て「有限の配位空間・正の重み・容器の中だけを動かす核」の上の文で、各行にその条件を書きます。連続の $SU(2)$ の配位空間への移し方は 25-05 §02 と同じ（和を Haar 測度の積分に置き換える）で、Lean の外です。Crooks の関係と Jarzynski の等式は非平衡の統計力学で知られた結果で、ここでは格子の区画の和のアンサンブルに当てはめるために証明を書き下します。この章のどの不等式からも、閉じ込めは出ません。

この章の順序

1. 要約 — 渦をゆっくり入れる
2. 設定 — 駆動の手続きと経路の空間
3. Crooks の対合と駆動した恒等式 — Jarzynski の等式・受理率・多数の細胞
4. 二つの極限 — 一度に入れる・準静的に入れる

5. 切った測度の公式
6. 反転の確率の補題と流れの補題
7. 同時の反転の評価と、この保証の限界（表 1）
8. 言えないこと
9. 五分類の表と依存グラフ — 表 2

01

要約 — 渦をゆっくり入れる

1. 25-05 の挿入は、渦の面の上の結合の符号を一度に反転させる操作でした。そのときの費用 ΔS は、細い渦の面では面の上のプラケットの数（T^2 の面積 N_T^2）に比例し、評価の因子 $\tanh(\Delta S/2)$ はほとんど 1 です。
2. そこで、結合を m 段に分けて少しずつ反転させ、各段で容器の中だけを熱浴で更新します。周りの揺らぎが新しい結合に合わせて緩むので、払う仕事 W は下がります。
3. 経路の空間で「時間を逆にたどり、区画を反転する」写像は対合で、重みの比は e^{-W} です（Crooks の関係）典。25-05 の有界な挿入の恒等式をこの対合に当てると $\mathbb{E}[H] = \mathbb{E}[H\tanh(W/2)]$ が出ます 初。
4. 同じ関係から、手続きの段数 m に依らず $\mathbb{E}[e^{-W} \mid \text{枠}] = Z_-/Z_+$（Jarzynski の等式）典。段数 0 では $W = \Delta S$ で 25-05 に戻ります。
5. 区画を反転させる任意の定常な核について、一歩で区画が反転する確率 a は $1-\theta$ 以下です。言い換えると $\theta \le 1-a$（流れの補題）初。より弱い形 $a \le 1-\theta^2$ もあります 初。
6. 枠を固定すると容器は独立なので、全ての容器で同時に核を走らせると $\mathbb{E}\prod_t \theta_t \le \mathbb{P}(\text{どの容器も反転しない})$ です 初。右辺はモンテカルロで測れる量で、Wilson ループの上界を正しい向きに推定できます。
7. ただし帯の形には $a \ge 1 - e^{-cL^2}$、すなわち順と逆の経路の重なりを面積の指数で 1 に近づける核が要り、測った一段の核の a は 0.6〜0.73 程度（受理 $\min(1, e^{-W})$）で、この保証で言えるのは $\theta \le \theta_0$（1 未満の定数）までです 読。帯の形 $\theta \le e^{-cL^2}$ の試験には使えません。正しい用途は、T^2 を固定した板の張力の下界です。

02

設定 — 駆動の手続きと経路の空間

25-03・25-04 の区画の和のアンサンブルを使います。リンクの $SU(2)$ の変数 U と、プラケットの ± 1 の変数 z（余閉）の上の重み $w(U,z)=\exp\!\big(\tfrac{\beta}{2}\sum_p z_p \operatorname{tr} U_p\big)$ です。板 $T^2_{N_T}\times(\mathbb{Z}/M)^2$ の $(3,4)$ 平面のプラケット p について、渦の面 $S_p=\{p\}\times T^2$ の z を全て反転すると、p を囲む Wilson ループに渡る区画の符号が反転します（25-04）。p のまわりに容器 $D_p\times T^2$（D_p は $(3,4)$ 平面の円板）を取り、容器の外の変数を**枠** Φ と呼びます。

この章を通して、次の三つを置きます。

- **有限の配位空間の条件** X。連続の場合は 25-05 §02 の注意のとおり。
- **正の重みの条件** $w=e^{-S}>0$。
- **容器の中だけを動かす核**：以下の核 K は容器の内側の変数だけを更新し、枠を変えない。

結合の補間。 $\lambda\in[0,1]$ について、S_p の上のプラケットの結合だけを $1-2\lambda$ 倍した作用を S_λ とします。$S_0=S$ で、$S_1(x)=S(Rx)$（R は S_p の上の z の反転）です。S_λ はゲージ不変です。

核。 K_λ を、容器の内側のリンクだけを動かす熱浴の遷移核で、e^{-S_λ} について可逆（詳細つり合い）なものとします：

$$e^{-S_\lambda(x)}K_\lambda(x,y)=e^{-S_\lambda(y)}K_\lambda(y,x). \tag{1}$$

順の手続き。 $\lambda_k=k/m$（$k=0,\dots,m$）。区画が $+$ の配位 x_0 から始め、$k=1,\dots,m$ の各段で「結合を $\lambda_{k-1}\to\lambda_k$ に変え、そのときの作用の変化を仕事に加え、次に K_{λ_k} で $x_{k-1}\to x_k$ と更新する」。仕事は

$$W=\sum_{k=1}^{m}\big[S_{\lambda_k}(x_{k-1})-S_{\lambda_{k-1}}(x_{k-1})\big]. \tag{2}$$

最後に R を当てた Rx_m は区画が $-$ の配位です。区画が $-$ の配位からは、同じことを R で写した逆向きの手続き（λ を $1\to0$）で行います。$m=0$ なら更新は無く、$W=S_1(x_0)-S_0(x_0)=\Delta S$ で 25-05 の一度の挿入です。

経路の空間。 $\Omega=\{(s,x_0,\dots,x_m)\}$（$s=\pm$ は始点の区画）とし、区画 $+$ から始まる経路の重みを

$$\hat W(+,x_0,\dots,x_m)=e^{-S_0(x_0)}\prod_{k=1}^{m}K_{\lambda_k}(x_{k-1},x_k), \tag{3}$$

区画 $-$ から始まる経路の重みを、逆向きの手続きの同じ形の積で定めます。核の行の和は 1 なので、Ω の上の測度を始点に射影すると元の測度に戻ります。したがって、始点だけで決まる量の期待値は、Ω の上で計算しても変わりません [初]。

対合。 $\iota(+, x_0, \dots, x_m) = (-, Rx_m, \dots, Rx_0)$：経路を逆にたどり、区画を反転します（$-$ から始まる経路にはその逆）。$\iota \circ \iota = \mathrm{id}$ です。重みが正の経路は、(1) によって重みが正の経路に写ります。

03

Crooks の対合と駆動した恒等式

Crooks の関係

有限の配位空間の条件・正の重みの条件・容器の中だけを動かす核と (1) の下で、重みが正の全ての経路 ω について

$$\frac{\hat{W}(\iota\omega)}{\hat{W}(\omega)} = e^{-W(\omega)}, \qquad W \circ \iota = -W. \tag{4}$$

[典] この形の関係は Crooks によるもので（出典の表）、ここでは格子の手続きに合わせた標準の計算を書き下します。証明。$\omega = (+, x_0, \dots, x_m)$ とします。逆向きの経路の重みは、R の下で S_λ が $S_{1-\lambda}$ に写ることを使って $+$ の座標に戻すと $e^{-S_1(x_m)} \prod_{k=1}^{m} K_{\lambda_k}(x_k, x_{k-1})$ です。(1) で各因子を $K_{\lambda_k}(x_{k-1}, x_k)\, e^{S_{\lambda_k}(x_k) - S_{\lambda_k}(x_{k-1})}$ に置き換えると、比の指数は

$$S_0(x_0) - S_1(x_m) + \sum_{k=1}^{m} \big[S_{\lambda_k}(x_k) - S_{\lambda_k}(x_{k-1}) \big] = \sum_{k=1}^{m} S_{\lambda_{k-1}}(x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{m} S_{\lambda_k}(x_{k-1}) = -W$$

です（和の添字を一つずらし、$S_0(x_0)$ を $k=1$ の項、$-S_1(x_m)$ を $k=m$ の項と打ち消させる）。逆向きの経路で (2) を計算すると、同じ項が逆の符号で並ぶので $W \circ \iota = -W$。∎

Crooks の関係は、25-05 の (5) の「重みの比が $e^{-\Delta S}$ の対合」が、経路の空間の上で「重みの比が e^{-W} の対合」に置き換わったことを言っています。そこで 25-05 の有界な挿入の恒等式がそのまま使えます。

駆動した挿入の恒等式（駆動した恒等式）

有限の配位空間の条件・正の重みの条件・容器の中だけを動かす核と (1) の下で、$H = h(\Phi)\,\sigma$（h は枠だけの関数、σ は容器の区画の符号）とすると

$$\mathbb{E}[H] = \mathbb{E}_{\Omega}\big[H\tanh(W/2)\big]. \tag{5}$$

初 証明。H を始点で評価した Ω の上の関数とみます。核と R は枠を変えないので h は ι で不変、σ は反転し、$H\circ\iota = -H$。Ω の上の重み $\hat{W}$ と対合 ι について、25-05 の (5) の因子は (4) により $(\hat{W}-\hat{W}\circ\iota)/(\hat{W}+\hat{W}\circ\iota) = (1-e^{-W})/(1+e^{-W}) = \tanh(W/2)$ です。25-05 の有界な挿入の恒等式から $\mathbb{E}_{\Omega}[H] = \mathbb{E}_{\Omega}[H\tanh(W/2)]$。左辺は始点だけで決まるので $\mathbb{E}[H]$ に等しい（§02）。∎

Lean：核の部分は BoundedInsertion（`Bounded.single`）（仮定：有限集合・対合・$w>0$・H は奇。結論：$\sum wHt = \sum wH$）を、有限の経路の空間 Ω（重みが正の経路に制限）に当てたものです。経路の空間の構成とCrooks の関係は Lean の外です。

Jarzynski の等式

有限の配位空間の条件・正の重みの条件・容器の中だけを動かす核と (1) の下で、段数 m に依らず

$$\mathbb{E}\big[e^{-W}\,\big|\,\Phi,\ \sigma=+\big] = \frac{Z_{-}(\Phi)}{Z_{+}(\Phi)}, \tag{6}$$

ここで $Z_{\pm}(\Phi)$ は枠 Φ を固定した区画 $\pm$ の分配関数です。

典 Jarzynski によるものです（出典の表）。証明。(4) から $\sum_{\omega}\hat{W}(\omega)e^{-W(\omega)} = \sum_{\omega}\hat{W}(\iota\omega)$。右辺は区画 $-$ から始まる経路の重みの総和で、核の行の和が 1 なので $Z_{-}(\Phi)$。左辺を区画 $+$ の経路の重みの総和 $Z_{+}(\Phi)$ で割れば (6)。∎

(6) は、手続きの速さ（段数 m）に依らない量で、数値の検算に使えます。一方、e^{-W} の平均は稀な小さい W に支配されるので、少ない標本では推定が大きく揺らぎます（25-08 の表で $-\ln\langle e^{-W}\rangle$ が負になる行があるのはそのためです）。

駆動した挿入の受理率の系（受理率）

駆動した挿入の恒等式の設定で $1-\mathbb{E}_{\Omega}[\tanh(W/2)] = 2\,\mathbb{E}_{\Omega}\big[1/(1+e^{W})\big]$。右辺は、駆動した経路の終点を Barker 型の規則で受け入れる一手の受理率の平均の 2 倍です。

初 $1-\tanh(W/2) = 2/(1+e^{W})$ の期待値を取るだけです。25-05 の挿入の揺らぎの関係式の ΔS を W に置き換えたものです。

多数の細胞。 互いに離れた細胞 c（容器 $D_c \times T^2$）ごとに、位置の集合 P（空でない有限集合）から位置 P_c を一様に、互いに独立に選び、選んだ位置で駆動した挿入を行います。細胞ごとの経路は、始点の配位の中の自分の容器とその周りだけを読みます。

多数の細胞の駆動した評価

有限の配位空間の条件・正の重みの条件・容器の中だけを動かす核と (1) の下で、容器が互いに離れていて（どのプラケットも二つの容器の内側にまたがらない）、$H = h(\Phi)\prod_c \sigma_c$、$|H| \le 1$ とすると

$$|\mathbb{E}[H]| \;\le\; \mathbb{E}\Big[\prod_{c} \frac{1}{|P|}\sum_{p\in P} \mathbb{E}\big[\,|\tanh(W_{c,p}/2)| \;\big|\; x_0\big]\Big]. \tag{7}$$

初 証明。始点 x_0、位置の選択 (P_c)、細胞ごとの経路からなる拡大した空間を作ります。細胞 d の対合 ι_d は、細胞 d の経路を逆にたどり、始点の容器 d の内側を経路の終点の反転に置き換えます。容器が離れているので、枠を止めた重みは容器ごとの積に分かれ、ι_d は他の細胞の経路の重みと仕事を変えません。よって ι_d の重みの比は e^{-W_d} で、他の細胞の因子 $\tanh(W_c/2)$（$c \neq d$）は ι_d で動きません。25-05 の位置で平均した挿入の評価の証明（細胞を一つずつ足す帰納）がそのまま通り、$\mathbb{E}[H] = \mathbb{E}[H\prod_c \tanh(W_{c,P_c}/2)]$。絶対値を取り、始点を止めると細胞ごとの経路と位置の選択が独立であることを使えば (7)。∎

(7) は 25-05 の位置で平均した挿入の評価と違い、位置の平均の中に絶対値が入っています。位置どうしの符号の打ち消しを使わない分だけ弱い形です。

04

二つの極限 — 一度に入れる・準静的に入れる

段数 0。 $m = 0$ では $W = \Delta S$ で、駆動した挿入の恒等式は 25-05 の有界な挿入の恒等式です 初。細い渦では ΔS が T^2 の面積に比例し、$\tanh(W/2)$ はほとんど 1 です。

準静的の極限。 $m \to \infty$（ゆっくり駆動する）で、W は枠を止めた容器の条件つきの自由エネルギー $\Delta F_D(\Phi) = \ln\big(Z_+(\Phi)/Z_-(\Phi)\big)$ に近づく、と見込まれます 読 （物理。熱力学積分の標準的な見立てで、核が各 λ で十分よく混ざることを要する。この本では証明しません）。そのとき駆動した挿入の恒等式の因子は $\tanh(\Delta F_D/2) = \theta_D(\Phi)$ になり、25-03 の容器の恒等式（Mack–Petkova の恒等式）に戻ります。手続きの長さ m が、一度に入れる粗い評価と、正確な条件つきの自由エネルギーとをつなぐ、という読み方です。

数値の姿。 $SU(2)$、$\beta = 2.3$、板 $2 \times 2 \times 8 \times 8$、捩れ $n_{12} = 1$、円板の半径 2、6 配位 × 4 位置で、段数 $m = 0, 4, 16$ の仕事の平均は 10.7・6.5・2.9、$\tanh(W/2)$ の平均は 0.990・0.968・0.688 でした 読 。段数を増やすと仕事が下がり、因子が 1 から離れます。他の β・N_T・容器の半径の記録は 25-08 にまとめます。容器が渦の大きさより小さいと、段数を増やしても仕事は下がりきりません（同じ表）。

05

切った測度の公式

容器 $D \times T^2$ の中で、反転の面 $S = \{p_0\} \times T^2$ の上のプラケットの項だけを作用から除いた測度（枠 Φ を固定）を μ_{cut} とし、$X := \sum_{p \in S} z_p \operatorname{tr} U_p$（$z$ は区画 $+$ の代表）と置きます。面の上の重みは $e^{(\beta/2) z_p \operatorname{tr} U_p}$ で、区画 $-$ では S の上の z が反転するので、

切った測度の公式

$$\frac{Z_{\pm}(\Phi)}{Z_{\mathrm{cut}}(\Phi)} = \mathbb{E}_{\mathrm{cut}}\left[e^{\pm \beta X/2}\right], \qquad \theta(\Phi) = \frac{\left|\mathbb{E}_{\mathrm{cut}}[\sinh(\beta X/2)]\right|}{\mathbb{E}_{\mathrm{cut}}[\cosh(\beta X/2)]}. \tag{8}$$

初 第一式は定義から、第二式は $\theta = |Z_+ - Z_-|/(Z_+ + Z_-)$ に第一式を入れて $e^{a} \mp e^{-a} = 2\sinh a,\ 2\cosh a$ を使うだけです。

Lean FlipLemma（`FlipLemma.cut_formula`）（仮定：有限集合の上の実数値の重み v（非負性も使わない）・実数値の X・実数 b。結論：$\sum v e^{bX/2} - \sum v e^{-bX/2} = 2\sum v \sinh(bX/2)$ と、和の形の cosh の等式）。保証されるのは和の代数だけです。

μ_{cut} には区画がありません。$\theta(\Phi)$ は「枠の情報が、切った測度の中を容器の大きさだけ渡って面に届く強さ」と読めます。駆動した挿入は、$+ \to$ **切った測度** $\leftarrow -$ という対称な形にも組めます（Crooks の関係の対合と両立します）。

06

反転の確率の補題と流れの補題

枠 Φ を止めた条件つきの測度を μ_Φ、容器の区画の符号を $\sigma \in \{\pm 1\}$、$m_\Phi = \mathbb{E}[\sigma \mid \Phi]$、$\theta(\Phi) = |m_\Phi|$ とします。K を容器の中だけを動かす Markov 核とし、$(X, X') \sim \mu_\Phi \otimes K$（$X$ を μ_Φ から引き、K で一歩進めたものが X'）とします。

反転の確率の補題

K が μ_Φ について**定常**（$\sum_x \mu_\Phi(x) K(x,y) = \mu_\Phi(y)$）なら

$$\mathbb{P}\big(\sigma(X') \neq \sigma(X)\big) \;\le\; 1 - m_\Phi^2 = 1 - \theta(\Phi)^2. \tag{9}$$

初 証明。$\sigma = \pm 1$ なので $\mathbb{P}(\sigma(X') \neq \sigma(X)) = \sum_{x,y} \mu_\Phi(x) K(x,y) (\sigma(x) - \sigma(y))^2 / 4$。$(a-b)^2 \le 2(a-m)^2 + 2(b-m)^2$ で上から押さえ、行の和が 1 であることと定常性で二つの和をどちらも $\sum_x \mu_\Phi(x)(\sigma(x)-m)^2 = 1 - m^2$ に直すと、$\frac{1}{2}(1-m^2) + \frac{1}{2}(1-m^2)$。∎ 可逆性は使いません。

Lean FlipLemma（`FlipLemma.flip_le`）（仮定：有限集合・$w \ge 0$・$\sum w = 1$・$K \ge 0$・行の和が 1・定常性 $\sum_x w_x K_{xy} = w_y$・$\sigma^2 = 1$。結論：$\sum_{x,y} w_x K_{xy} (\sigma_x - \sigma_y)^2/4 \le 1 - (\sum w\sigma)^2$。

正の核の反転の確率の系

K が μ_Φ について可逆で、$L^2(\mu_\Phi)$ の作用素として正（$\langle f, Kf\rangle \ge 0$）なら、(9) の右辺は $(1-\theta^2)/2$ に下がる。

初 証明。$\mathbb{P}(\text{反転}) = (1 - \langle \sigma, K\sigma\rangle)/2$（内積は μ_Φ で）。$\tilde\sigma = \sigma - m$ と置くと、K の行の和が 1 で可逆なので $\langle \sigma, K\sigma\rangle = \langle \tilde\sigma, K\tilde\sigma\rangle + m^2 \ge m^2$。∎ この系には Lean の検査がありません。

次の形のほうが鋭く、この章で主に使います。

流れの補題

反転の確率の補題の設定（定常な K）で、一歩で区画が反転する確率を $a(\Phi)$ とすると

$$a(\Phi) \;\le\; 1 - \theta(\Phi), \qquad \text{すなわち} \qquad \theta(\Phi) \;\le\; 1 - a(\Phi). \tag{10}$$

初 証明。$+ \to -$ の流れ $A = \mathbb{P}(\sigma(X) = +, \sigma(X') = -)$ と $- \to +$ の流れ B を取ります。定常性から X' の区画の分布は X と同じなので $A = B$。また $A \le \mathbb{P}(\sigma(X) = +) = (1+m)/2$、$B \le (1-m)/2$。よって $a = A + B = 2A \le 2\min\big((1+m)/2, (1-m)/2\big) = 1 - |m|$。∎ $\theta \le 1$ なので $1 - \theta \le 1 - \theta^2$ で、(10) は (9) より鋭い形です。

Lean FluxLemma（`FluxLemma.flip_le_one_sub_abs`）（仮定：有限集合・$w \ge 0$・$\sum w = 1$・$K \ge 0$・行の和が 1・定常性・σ の値は 1 か -1。結論：$\sum_{x,y} w_x K_{xy} (\sigma_x - \sigma_y)^2/4 \le 1 - |\sum w\sigma|$。

使い方。 区画を反転させる定常な核で、反転の確率が c 以上のものを作れれば $\theta \le 1 - c$ です。駆動した挿入を提案とし、終点を確率 $\min(1, e^{-W})$ で受け入れる核は、Crooks の関係から μ_Φ について可逆（よって定常）で、その反転の確率は受理率です。受理率は $\mathbb{P}(W \le w_0)\, e^{-w_0}$ 以上なので、e^{-W} の平均を制御する必要はなく、「安い仕事が正の確率で起こる」ことだけで足ります 初 。

07

同時の反転と、この保証の限界

互いに離れた容器の有限集合 S を取り、各容器 $t \in S$ の区画の偏りを $\theta_t(\Phi)$ とします（枠 Φ は全ての容器の外の変数）。

同時の反転の評価

有限の配位空間の条件・正の重みの条件の下で、容器が互いに離れていて、各容器 t に、その容器の中だけを動かす定常な核 K_t を取り、全ての容器で同時に一歩ずつ動かすと

$$\mathbb{E}\Big[\prod_{t\in S}\theta_t(\Phi)\Big] \;\le\; \mathbb{P}\big(S\ \text{のどの容器も反転しない}\big). \tag{11}$$

初 証明。枠を止めると容器の内側は条件つきで独立（25-03 の条件つきの独立性）で、核も容器ごとに独立に動くので、$\mathbb{P}(\text{どれも反転しない}\,|\,\Phi)=\prod_t(1-a_t(\Phi))$。流れの補題から各因子は $\theta_t(\Phi)$ 以上。期待値を取る。∎

25-03 の容器の恒等式は $|\langle W(C)\rangle| \le \mathbb{E}\prod_t\theta_t$（$C$ の内側の容器について）の形でした。(11) と合わせると、Wilson ループの上界を、モンテカルロで測れる量 $\mathbb{P}(\text{どれも反転しない})$ で**正しい向きに**押さえられます 初 。

限界（大事な注意）。 (10) から言えるのは $\theta \le 1-a$ です。一段の核（駆動した挿入を一回提案して受け入れるか決める核）の反転の確率 a は、受理 $\min(1,e^{-W})$ の核で測った範囲では 0.6〜0.73 程度です 計算 （25-08 の表 1・表 2 の生の W から出し直した値。表の受理率の列は Barker 型 $1/(1+e^{W})$ の平均で、その天井 $1/(1+e^{\Delta F}) \le \frac{1}{2}$ は受理の規則のもので、核の限界ではありません 紙 Lean ）。そのため、大きさ L の容器で言えるのは $\theta \le \theta_0$（θ_0 は 1 未満の定数）までです。これが L に一様に成り立っても、出るのは

$$\sigma \;\ge\; \frac{\ln(1/\theta_0)}{L^2} \;\longrightarrow\; 0 \qquad (L\to\infty) \tag{12}$$

だけで、これは 26-01 の「弱い形」（$U(1)$ も満たす形）そのものです 初 。帯の正しい形 $\theta(L,L)\le e^{-cL^2}$ を (10) で示すには、$a \ge 1-e^{-cL^2}$ となる核、つまりほとんど確実に区画を反転させる核が要ります 初 （(10) の書き直し）。受理率は順と逆の経路の測度の重なり O で挟まれ（$e^{-\Delta F}O \le a_F \le \min(e^{-\Delta F},O)$、混合した核で $(1-\theta)O \le a \le 1-\theta$） 紙 Lean （LatticeGaugeAcceptanceSandwich（overlap_sandwich・mixture_sandwich）。仮定は Crooks 型の関係 $P_F e^{-W} = e^{-\Delta F}P_R$）、$a \ge 1-e^{-cL^2}$ は $O \ge 1-e^{-cL^2}$、散逸で言えば

$D \lesssim e^{-2cL^2}$ の程度を求めます 読 （Pinsker の不等式の逆向きの読み）。一段の核でそれを作る見込みは立っていません。

したがって、**同時の反転による保証は、移り変わりの帯の数値的な試験には使えません**。この道具で測った記録（25-08 §06）も、帯の数値的な姿としては読めません。正しい用途は、T^2 の大きさ L を固定した板の張力の下界と、チェス盤の密度 κ_{cb}（26-05）の上からの推定です。

表 1　この章の評価の、何が言えて何が言えないか（条件は有限の配位空間の条件・正の重みの条件・容器の中だけを動かす核）

評価	形	言えること	言えないこと
駆動した恒等式（駆動した挿入の恒等式・多数の細胞の駆動した評価）	$\mathbb{E}[H] = \mathbb{E}[H\tanh(W/2)]$	段数を増やすと因子が 1 から離れうる（数値）	因子の上界が L に一様であること
Jarzynski の等式	$\mathbb{E}[e^{-W}] = Z_-/Z_+$	数値の検算	少ない標本での精度（稀な事象に支配される）
反転の確率（反転の確率の補題）	$a \le 1-\theta^2$	$\theta \le \sqrt{1-a}$	—（流れの補題より弱い）
流れの補題	$\theta \le 1-a$	T^2 を固定した板の張力の下界	一段の核では $\theta_0 \sim \frac{1}{2}$ まで。帯の形 e^{-cL^2} は出ない
同時の反転の評価	$\mathbb{E}\prod\theta \le \mathbb{P}(\text{反転なし})$	Wilson ループの上界の正しい向きの推定量	帯の数値的な試験

08 言えないこと

(a) 閉じ込め。この章の恒等式と不等式は、どれも閉じ込めを導きません。駆動した挿入の恒等式・多数の細胞の駆動した評価の因子が L と格子間隔に一様に 1 から離れること、あるいは a が 1 に近い核が要り、どちらもこの本では示していません。

(b) 準静的の極限。$m \to \infty$ で $W \to \Delta F_D$ となることは §04 の見立てで、核の混ざり方の評価を含む証明はこの本にありません。

(c) 連続の配位空間。定理は全て、有限の配位空間の条件の下の有限の版です。$SU(2)$ の Haar 測度の上の版は、熱浴の核の可逆性と経路の空間の測度を連続の場合に書き直す必要があり、Lean の外です。

(d) 一段の核の限界。測った核の a（受理 $\min(1, e^{-W})$ で 0.6〜0.73）は測定の読みで、定理ではありません。帯の形に届かないという結論は、この読みではなく $a \ge 1 - e^{-cL^2}$ が要るという (10) の書き直し（表 2 の「弱い形しか出ない」の行）に依ります。25-08 の表の受理率が $\frac{1}{2}$ の下に留まるのは Barker 型の規則の天井です。逆に a が 1 に近い核があれば (10) はそのまま使えますが、その構成は知られていません。

(e) 新しさ。Crooks の関係と Jarzynski の等式は既知で、区画の和のアンサンブルへの当てはめと、反転の確率の補題・流れの補題・同時の反転の評価は初等的です。区画を反転させる非平衡の提案で受理率を上げる手法は、モンテカルロの文献で tempered transitions や非平衡の候補の手法として知られています（照合未了）。この章の結果に新しさは主張しません。

09

五分類の表と依存グラフ

表 2　この章の行（条件は有限の配位空間の条件・正の重みの条件・容器の中だけを動かす核）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	経路の空間の始点の周辺分布は元の測度	初	§02	有限の配位空間の条件・正の重みの条件・容器の中だけを動かす核・核の行の和が 1	—
2	Crooks の関係：$\hat{W} \circ \iota / \hat{W} = e^{-W} \cdot W \circ \iota = -W$	典	§03・Crooks	有限の配位空間の条件・正の重みの条件・容器の中だけを動かす核・(1) の詳細つり合い	—
3	駆動した挿入の恒等式：$\mathbb{E}[H] = \mathbb{E}_{\Omega}[H \tanh(W/2)]$	初	§03	有限の配位空間の条件・正の重みの条件・容器の中だけを動かす核・(1)・$H = h(\Phi)\sigma$	BoundedInsertion（`Bounded.single`）を Ω に当てる（仮定：有限・対合・$w > 0$・H は奇。Ω の構成は Lean の外）
4	Jarzynski の等式（段数に依らない）	典	§03・Jarzynski	有限の配位空間の条件・正の重みの条件・容器の中だけを動かす核・(1)・枠を止めて	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
5	駆動した挿入の受理率の系：$1 - \mathbb{E}[\tanh(W/2)] = 2\times$受理率	初	§03	行 3 の設定	—
6	多数の細胞の駆動した評価：(7)	初	§03	容器が離れている・$\lvert H\rvert \le 1$・位置を独立に一様に選ぶ	—（帰納の型は 25-05 の BoundedInsertion（`Bounded.averaged`））
7	$m \to \infty$ で $W \to \Delta F_D(\Phi)$	読（物理）	§04	核が各 λ で十分混ざる	—
8	段数とともに仕事が下がる（$\beta = 2.3$、$2 \times 2 \times 8 \times 8$）	読	§04・25-08	$SU(2)$・6 配位 × 4 位置	—
9	切った測度の公式 (8)	初	§05	枠を止めて・反転の面の項を除く	FlipLemma（`FlipLemma.cut_formula`）（仮定：有限集合・実数値の v・X・b）
10	反転の確率の補題：反転の確率 $\le 1 - \theta^2$	初	§06	定常な核（可逆は不要）	FlipLemma（`FlipLemma.flip_le`）（仮定：$w \ge 0$・$\sum w = 1$・$K \ge 0$・行の和 1・定常・$\sigma^2 = 1$）
11	正の核の反転の確率の系：正の核なら $(1 - \theta^2)/2$	初	§06	可逆で正の作用素	—
12	流れの補題：$\theta \le 1 - a$	初	§06	定常な核（可逆は不要）	FluxLemma（`FluxLemma.flip_le_one_sub_abs`）（仮定：$w \ge 0$・$\sum w = 1$・$K \ge 0$・行の和 1・定常・$\sigma = \pm 1$）
13	受け入れ $\min(1, e^{-W})$ の核は定常、受理率 $\ge \mathbb{P}(W \le w_0) e^{-w_0}$	初	§06	行 2 の設定	—
14	同時の反転の評価：$\mathbb{E}\prod \theta_t \le \mathbb{P}(\text{反転なし})$	初	§07	容器が離れている・定常な核を容器ごとに	—（核は行 12）
15	一段の核の a は測った範囲で 0.6〜0.73（受理 $\min(1, e^{-W})$。表の Barker 型の列は規則の天井 $\frac{1}{2}$ の下）	読	§07・25-08	測った β・N_T・容器の範囲	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
16	(10) から出るのは $\sigma \geq \ln(1/\theta_0)/L^2$（弱い形）。帯の形には $a \geq 1 - e^{-cL^2}$ が要る	初	§07	$\theta \leq 1 - a$ だけを使う場合	—

機械検査の欄の束は、この本の側の再検査で `sorry` を含まず、公理が標準の三つの部分集合であることが確かめられたものです。保証されるのは有限集合の上の和の代数だけです（23-13）。`flip_le` と `cut_formula` はファイル FlipLemma に、`flip_le_one_sub_abs` はファイル FluxLemma にあります。

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  初  経路の空間の始点の周辺分布 = 元の測度          核の行の和 1
 2  典  重みの比 e^(−W)・W∘ι = −W                      詳細つり合い (1)
 3  初  E[H] = E[H tanh(W/2)] ⟸ 1・2                    Lean Bounded.single を Ω に
 4  典  E[e^(−W) | 枠] = Z₋/Z₊ ⟸ 2
 5  初  1 − E[tanh(W/2)] = 2 × 受理率 ⟸ 3
 6  初  多数の細胞 (7) ⟸ 2                             容器が離れている
 7  読  m → ∞ で W → ΔF_D（物理）⟸ 4
 8  読  段数とともに仕事が下がる                        β = 2.3・2×2×8×8
 9  初  切った測度の公式                                Lean cut_formula
10  初  反転の確率 ≤ 1 − θ²                             Lean flip_le
11  初  正の核なら (1 − θ²)/2 ⟸ 10
12  初  θ ≤ 1 − a                                       Lean flip_le_one_sub_abs
13  初  min(1, e^(−W)) の核は定常・受理率の下界 ⟸ 2
14  初  E∏θ ≤ P(反転なし) ⟸ 12                          容器が離れている
15  読  一段の核の a は 0.6〜0.73（Metropolis 型）     測った範囲
16  初  弱い形しか出ない・帯には a ≥ 1 − e^(−cL²) ⟸ 12
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。この章に仮定（仮）の行はありません。一段の核の受理の読みは「弱い形しか出ない」の行の前提に入れていません（その行は $\theta \leq 1 - a$ だけから出る書き直しで、受理の読みはそれをどこまで使えるかの判断です）。閉じ込めの節点も、質量ギャップの節点もありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 有限の配位空間の条件・正の重みの条件・容器の中だけを動かす核の下で駆動した恒等式 $\mathbb{E}[H] = \mathbb{E}[H \tanh(W/2)]$ と多数の細胞の形	因子 $\tanh(W/2)$ の、L と格子間隔に一様な上界

言えている	言えていない
典 Crooks の関係・Jarzynski の等式（格子の手続きに書き下した）	準静的の極限 $W \to \Delta F_D$ の証明
初 定常な核について $a \le 1-\theta^2$・$\theta \le 1-a$・同時の反転 $\mathbb{E}\prod\theta \le \mathbb{P}$(反転なし)	a が 1 に近い核の構成。帯の形 $\theta \le e^{-cL^2}$
読 測った一段の核は $a \ge 1-e^{-cL^2}$ から遠い（帯の試験には使えない）	連続の配位空間での同じ定理（Lean の外）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
Crooks の関係（経路の重みの比 e^{-W}）	典	G. E. Crooks, “The entropy production fluctuation theorem and the nonequilibrium work relation for free energy differences”, Phys. Rev. E 60 (1999) 2721, arXiv:cond-mat/9901352（書誌は arXiv の頁で確認。Markov 連鎖の形の原典は未確認）
Jarzynski の等式	典	C. Jarzynski, “A nonequilibrium equality for free energy differences”, Phys. Rev. Lett. 78 (1997) 2690, arXiv:cond-mat/9610209（書誌は arXiv の頁で確認）
駆動した挿入の恒等式・駆動した挿入の受理率の系・多数の細胞の駆動した評価・切った測度の公式・反転の確率の補題・正の核の反転の確率の系・流れの補題・同時の反転の評価	初	本文 §03〜§07 の証明。駆動した挿入の恒等式は論文の草稿「Exact centre-vortex insertion identities in the twist-summed ensemble, and bounded, averaged and driven confinement bounds」（A-07 の渦の挿入の恒等式の論文）の driven identity と同じ内容。流れの補題は A-07 の帯の還元の論文の flux bound と同じ内容
容器の恒等式	典（間接）	G. Mack, V. B. Petkova（25-03 の通り）
tempered transitions・非平衡の候補の手法	照合未了	モンテカルロの文献（書誌は未確認）
数値（§04）	読	25-08 の表 1 の最初の行と同じ測定
Lean	Lean	FlipLemma（`FlipLemma.flip_le`・`FlipLemma.cut_formula`）・FluxLemma（`FluxLemma.flip_le_one_sub_abs`）・BoundedInsertion（`Bounded.single`）。束が保証するのは有限和の代数だけ

この章で使った語 — 駆動した挿入・段数 m・仕事 W・経路の空間 Ω・Crooks の対合 ι・準静的・切った測度・反転の確率・流れの補題・同時の反転。意味は A-02 用語集 にあります（第 25 部の語は追加の予定）。

次に読む章：25-07 なぜ決まった写像は失敗するか ― 駆動した挿入が安く、一度に当てる決まった写像が高くつく理由を、一ループの水準で「揺らぎの形を変えるかどうか」の違いとして説明します。

2026-10-15 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 25 部 二本目の道 — 空間の方向から 向きの原理・揺らぎの整形・一ループの表 · Kiichi, Shiori and Rin

なぜ決まった写像は失敗するか

> この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 4-06・4-04 にあります。

この章で分かること — 25-05 と 25-06 で見たように、渦を一度に挿入する決まった写像は高くつき、熱浴でゆっくり入れる駆動した挿入は安くつきます。この章では、その違いを原理の形で説明します。(1) 区画の比 Z_-/Z_+ の下から（区画の自由エネルギー ΔF の上から）の評価は、写像による Gibbs の変分原理で得られ、その差はちょうど相対エントロピーです（向きの原理）。(2) ガウスの模型では、揺らぎの形を変えない（等長的な）写像の損失は自由度の数を増やしても減らず、行列式 1 の写像で揺らぎを整形すれば損失は $\Delta F^2/n$ まで下がります。(3) 背景の磁場の中のグルーオンの一ループの勘定 $\frac{11}{3} = -\frac{1}{3} + 4$ で、反遮蔽の $+4$ は偏極についてトレース 0 のスピンの項から来るので、**一ループの水準で**、等長的な写像による比較は漸近自由と逆の向き $\beta' \geq \beta + 0.023$ しか出せず、揺らぎを整形する写像は $\beta - \beta' = 0.258$ を再現します。(4) 決まった点ごとの写像は紫外で余分の費用を払うこと（二次元の模型の数値）と、余りの相対エントロピーが面積とともに増えるなら面積則は出ないこと、を並べます。

前提となる章 — 25-05（挿入の恒等式）・25-06（駆動した挿入）・26-01（帯の正しい形）。第 4 部の 4-06（漸近自由・一ループの係数）と 4-04（繰り込み）、第 2 部の 2-08（自由エネルギー・相対エントロピー）。

先に言うこと — §03〜§05 の主張は全て**一ループ（ガウス）の水準**の文です。この章は非摂動の主張をしません。中程度の結合や大きな場で、揺らぎを整形する写像の誤差を押さえることは開いた問題で、移り変わりの帯（第 26 部）の核心はそこにあります。§06 の紫外の余分の費用は、二次元の模型の数値の読みです。

この章の順序

1. 要約 — 揺らぎの形を変えるかどうか
2. 向きの原理 — 上界は変分から（輸送の恒等式）
3. ガウスの模型 — 等長的な写像の損失と揺らぎの整形（表 1）
4. 一ループの表 11/3 = −1/3 + 4 — スピンの項は一次のトレースに出ない（表 2）
5. 繰り込みの比較への帰結 — 等長と整形の比較（表 3）

6. 決まった写像の紫外の余分の費用 — 表 4
7. 決定論的な挟み撃ちと面積則 — 余りの相対エントロピーの障害と加法性
8. 言えないこと
9. 五分類の表と依存グラフ — 表 5

01

要約 — 揺らぎの形を変えるかどうか

1. 閉じ込めには、渦のある区画が無い区画に比べて高くつきすぎないこと、つまり区画の自由エネルギー $\Delta F = \ln(Z_+/Z_-)$ の**上からの**評価が要ります（$\theta = \tanh(\Delta F/2)$ を小さくするため）。
2. その向きの評価を与えるのは、区画 $+$ の測度を区画 $-$ へ運ぶ写像 T による Gibbs の変分原理です：$\Delta F = \mathbb{E}_+[S \circ T - S - \ln J_T] - \mathrm{KL}$。KL（相対エントロピー）を捨てれば上界になります 初 。
3. 捨てた KL が評価の損失です。ガウスの模型で計算すると、揺らぎの形を変えない写像（恒等写像・群の平行移動・ゲージ変換・間引き）の損失は、自由度を増やしても減りません。体積を保ったまま揺らぎを伸び縮みさせる写像なら、損失は $\Delta F^2/n$（n は自由度の数）まで下がります 初 。
4. 漸近自由の係数 $\frac{11}{3}$ は、一ループの水準で、軌道の部分 $-\frac{1}{3}$ とスピンの項の $+4$ に分かれます。スピンの項は偏極についてトレース 0 なので、揺らぎの形を変えない写像の評価（一次のトレース）には現れません 初 （一ループの水準）。
5. その結果、一ループの水準で、等長的な写像で作った繰り込みの比較は 2 倍あたり $\beta' \geq \beta + 0.023$（$U(1)$ と同じ向き）しか出せず、揺らぎを整形する写像は漸近自由の $\beta - \beta' = 0.258$ を再現します 初 （一ループの水準）。
6. 決まった点ごとの写像は、二次元の模型で、捩れの方向の格子の大きさ N_T について線形以上に増える余分の費用を払いました。揺らぎを新しい背景で引き直す試行では、この増加が消えます 読 。
7. 決定論的な写像の余りの KL が面の面積とともに増えるなら、変分の評価から面積則は出ません 初 （その仮定の下で）。輸送の道の役割は、帯の形そのものより弱い定性的な目標にあります。

02

向きの原理 — 上界は変分から

区画 $+$ と区画 $-$ の配位の集合を X_+・X_-、それぞれの上の Gibbs 測度を $\mu_\pm = e^{-S}/Z_\pm$ とし、区画の自由エネルギーを $\Delta F = \ln(Z_+/Z_-)$ と置きます（25-06 の ΔF_D と同じ向き）。区画の偏りは $\theta = \tanh(|\Delta F|/2)$ なので、閉じ込めの向きに要るのは ΔF の**上界**、言い換えると Z_-/Z_+ の**下界**です。

輸送の恒等式（輸送の恒等式・Gibbs の変分原理）

$T : X_+ \to X_-$ を可測な全単射で、基準の測度（Haar × 数え上げ、ガウスの模型では Lebesgue）についてのヤコビアンを J_T とし、$T_\#\mu_+$ を μ_+ の T による押し出しとすると

$$\Delta F = \mathbb{E}_+\big[S\circ T - S - \ln J_T\big] - \mathrm{KL}\big(T_\#\mu_+ \,\big\|\, \mu_-\big). \tag{1}$$

とくに $\Delta F \le \mathbb{E}_+[S\circ T - S - \ln J_T]$ で、等号は $T_\#\mu_+ = \mu_-$（T が μ_+ を μ_- へ正確に運ぶ）ときに限る。

初 標準の計算です。証明。$\nu = T_\#\mu_+$ の密度は $y = Tx$ で $\nu(y) = \mu_+(x)/J_T(x)$。よって

$$\mathrm{KL}(\nu\|\mu_-) = \mathbb{E}_+\big[\ln\mu_+(x) - \ln J_T(x) - \ln\mu_-(Tx)\big] = \mathbb{E}_+\big[S(Tx) - S(x) - \ln J_T(x)\big] - \ln Z_+ +$$

移項すれば (1)。$\mathrm{KL} \ge 0$ から不等式。∎ 有限の配位空間（25-05 の有限の配位空間の条件）で T が全単射なら $J_T = 1$ で、(1) の右辺の第一項は 25-05 の $\mathbb{E}_+[\Delta S]$ です。

もう一方の向き。 この本で使う構造的な道具は、ΔF を上から押さえません。鏡映正値性からは $Z_- \le Z_+$（$\theta \ge 0$、$\Delta F \ge 0$）が出ますが、これは ΔF の**下界**で、閉じ込めと逆の向きです（26-04）初。チェス盤の評価は $\mathbb{E}\prod\theta$ を一つの密度 κ_{cb} に置き換えますが、$\kappa_{cb} < 1$ を言うにはやはり ΔF の上界が要ります（26-05）。Tomboulis–Yaffe の不等式は θ の評価を Wilson ループに運ぶもので、θ 自身は押さえません（26-01）。この本の道具の範囲では、ΔF の上界は (1) の型の変分（試行の写像・試行の測度）と、明示的な構成からしか出ていません 読（道具の一覧についての整理の判断で、定理ではありません）。これを**向きの原理**と呼びます。帯を渡る道具の候補は、まずこの向きの評価を与えるものでなければなりません。

03

ガウスの模型 — 等長的な写像と整形する写像

(1) の KL がどれだけ大きいかを、全てが計算できるガウスの模型で見ます。$\mathbb{R}^n$ の上の二つのガウス測度 $\mu_0 = N(0,\Delta_0^{-1})$・$\mu_B = N(0,\Delta_B^{-1})$（作用 $S_0 = \frac12 x^{\mathsf T}\Delta_0 x$・$S_B = \frac12 x^{\mathsf T}\Delta_B x$、$\Delta_0, \Delta_B$

は正定値）を取ります。μ_0 が「区画 $+$（背景なし）の揺らぎ」、μ_B が「区画 $-$（渦の背景 B のまわり）の揺らぎ」の役です。正確な値は

$$\Delta F = -\ln \frac{Z_B}{Z_0} = \tfrac{1}{2}\ln\det(\Delta_B \Delta_0^{-1}) = \tfrac{1}{2}\sum_{k} \ln \lambda_k, \tag{2}$$

λ_k は $\Delta_0^{-1/2}\Delta_B\Delta_0^{-1/2}$ の固有値です。線形写像 T を (1) に入れると、$M := \Delta_0^{-1/2} T^{\mathsf{T}} \Delta_B T \Delta_0^{-1/2}$ を使って評価は

$$\mathbb{E}_0\big[S_B \circ T - S_0\big] - \ln|\det T| = \tfrac{1}{2}(\operatorname{tr} M - n) - \ln|\det T| \tag{3}$$

です（$\mathbb{E}_0[x^{\mathsf{T}} A x] = \operatorname{tr}(A\Delta_0^{-1})$ から）。

揺らぎについて等長的な写像とは、$T^{\mathsf{T}}\Delta_0 T = \Delta_0$（$\mu_0$ の揺らぎの形を変えない、μ_0 を保つ）線形写像のことです。恒等写像、群の平行移動やゲージ変換の線形化、間引き（細かい自由度の一部を捨て、残りをそのまま粗い格子の自由度とする操作）の線形化がこの類に入ります（間引きの扱いは §08 (b)）。

等長的な写像の損失の命題（等長的な写像の損失は自由度で薄まらない）

T が揺らぎについて等長的なら、(3) の評価は T に依らず $\tfrac{1}{2}\sum_k(\lambda_k - 1)$ で、正確な値 (2) との差は

$$\tfrac{1}{2}\sum_{k} \big(\lambda_k - 1 - \ln \lambda_k\big) \;\geq\; 0. \tag{4}$$

初 証明。$O := \Delta_0^{1/2} T \Delta_0^{-1/2}$ は $O^{\mathsf{T}}O = 1$ を満たす直交行列で、$M = O^{\mathsf{T}}(\Delta_0^{-1/2}\Delta_B\Delta_0^{-1/2})O$。よって $\operatorname{tr} M = \sum_k \lambda_k$、$|\det T| = 1$。差は $t - 1 - \ln t \geq 0$ を足したもの。∎ (4) は二つのガウス測度の相対エントロピー $\mathrm{KL}(\mu_0 \| \mu_B)$ そのものです。背景が揺らぎを変えるのが少数の方向（固有値が 1 でない λ_k が有限個）なら、(4) は n を大きくしても減りません。

揺らぎの整形の命題（行列式 1 の写像で整形すれば損失は $\Delta F^2/n$）

$\det T = 1$ の線形写像の全体で (3) の評価の下限を取ると、$r := \det(\Delta_B\Delta_0^{-1}) = e^{2\Delta F}$ として

$$\inf_{\det T = 1}\Big(\tfrac{1}{2}(\operatorname{tr} M - n)\Big) = \tfrac{n}{2}\big(r^{1/n} - 1\big), \qquad 0 \;\leq\; \tfrac{n}{2}\big(e^{2\Delta F/n} - 1\big) - \Delta F \;\leq\; \frac{\Delta F^2}{n}\, e^{2|\Delta F|/n} \tag{5}$$

初 証明。$\det T = 1$ なら $\det M = r$ で、逆に $\det M = r$ の任意の正定値行列 M は $T = \Delta_B^{-1/2} M^{1/2} \Delta_0^{1/2}$（に直交行列を掛けたもの、$\det T = r^{-1/2} r^{1/2} = 1$）で実現できます。相加相乗

平均で $\operatorname{tr} M \geq n(\det M)^{1/n} = n r^{1/n}$、等号は $M = r^{1/n}\cdot 1$。差の評価は $u = 2\Delta F/n$ として $e^{u} - 1 - u \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}$ から。∎

揺らぎの整形の命題の写像は体積を保ち（$\ln J_T = 0$）、背景が変える少数の方向の揺らぎを伸び縮みさせ、その体積の変化を残りの多数の方向に一つあたり $\Delta F/n$ ずつ薄く負わせます。**要るのはヤコビアン（エントロピー）を持つことではなく、揺らぎの形を変えることです。**

表 1　ガウスの模型の例：固有値 0.2・0.3・3・4（残りは全て 1）

評価	$n = 10$	$n = 100$	$n = 10^4$
正確な値 (2)	-0.16425	-0.16425	-0.16425
等長的な写像（等長的な写像の損失の命題）	$+1.75$	$+1.75$	$+1.75$
行列式 1 の最適な写像（揺らぎの整形の命題）	-0.1616	-0.1640	-0.16425

初 （(2)・(4)・(5) の閉じた式の値）。小さい固有値と大きい固有値が混じると、一次のトレース $\frac{1}{2}\sum(\lambda_k - 1)$ と $\frac{1}{2}\sum \ln \lambda_k$ は逆の符号になりえます。この例では正確には区画の変更が**安い**（$\Delta F < 0$）のに、等長的な写像の評価は高い（$+1.75$）と言います。次節のスピンの項がちょうどこの形をしています。

04

ループの表 11/3 = −1/3 + 4

(1,2) 平面の一定の可換な磁場 B を背景に置き、そのまわりの $SU(2)$ のグルーオンの揺らぎを Feynman ゲージで考えます。揺らぎの二次の作用の演算子は

$$M_B = -D^2\,\delta_{\mu\nu} - 2iF_{\mu\nu} \tag{6}$$

で、第一項が軌道の部分（共変微分の二乗）、第二項がスピンの項です。ゴーストの演算子は $-D^2$ です。熱核のトレース（体積あたり。共通の因子 $1/(16\pi^2 s^2)$ と、群の因子 $C_A = 2$＝電荷を持つ成分の数を除く）は、固有時 s の関数として

$$\text{ベクトル（4 偏極）}：\ \frac{Bs}{\sinh Bs}\big(2 + 2\cosh 2Bs\big), \qquad \text{ゴースト}：\ -2\,\frac{Bs}{\sinh Bs} \tag{7}$$

です。$x = Bs$ として $x/\sinh x = 1 - x^2/6 + O(x^4)$、$\cosh 2x = 1 + 2x^2 + O(x^4)$ を使って x^2 の係数を拾うと、次の表になります。

表 2　$B^2 s^2$ の係数の内訳（一ループの水準）

部分	熱核のトレースの形	$B^2 s^2$ の係数	意味
軌道（ベクトルの軌道 4 自由度 − ゴースト 2）	$\frac{Bs}{\sinh Bs}\,(4 - 2)$	$-\frac{1}{3}$	反磁性（遮蔽）。$U(1)$ の荷電粒子と同じ型

部分	熱核のトレースの形	B^2s^2 の係数	意味
スピンの項	$\frac{Bs}{\sinh Bs}\,2(\cosh 2Bs-1)$	$+4$	常磁性（反遮蔽）。非可換に特有
合計	(7) の和	$+\frac{11}{3}$	漸近自由の一ループの係数（4-06 の $\frac{11}{3}$）

初 （一ループの水準。展開は二行の計算です：軌道は $2(1-x^2/6)=2-x^2/3$、スピンは $(1-x^2/6)\cdot 4x^2=4x^2+O(x^4)$。）この勘定の規約では、係数 $+\frac{11}{3}$ が漸近自由の向き、$-\frac{1}{3}$ が逆の向きです。

スピンの項の一次の消失の命題（スピンの項は一次のトレースに現れない ― 一ループの水準）

ガウスの水準で、背景なしの演算子 $M_0=-\partial^2\delta_{\mu\nu}$ と (6) の M_B を比べるとき、揺らぎについて等長的な写像による (1) の評価は一次のトレース $\frac12\mathrm{tr}\big((M_B-M_0)M_0^{-1}\big)$ で、スピンの項の寄与はちょうど 0 です。この評価は、軌道の部分だけの正確な値 $\frac12\ln\det(M_{\mathrm{orb}}M_0^{-1})$ 以上です。

初 （一ループの水準）証明。M_0^{-1} は偏極の添字について $\delta_{\mu\nu}$ に比例し、$F_{\mu\nu}$ は反対称なので、$\mathrm{tr}_{\mu\nu}(F_{\mu\nu})=0$。よってスピンの項の一次のトレースは 0 で、評価は $\frac12\mathrm{tr}((M_{\mathrm{orb}}-M_0)M_0^{-1})$ に等しく、等長的な写像の損失の命題の不等式 $t-1\ge\ln t$ から $\frac12\ln\det(M_{\mathrm{orb}}M_0^{-1})$ 以上。∎ スピンの項は二次（表 2 の $\cosh 2Bs-1=O(B^2)$）になって効き、反遮蔽の $+4$ を与えます。一次のトレースしか見ない評価は、それを完全に失います。（無限次元の演算子のトレースと行列式は、一ループの計算で通常行う正則化のもとでの文です。）

05

繰り込みの比較への帰結

第 26 部の繰り込みの比較（26-06）は、格子全体を 2 倍にした $(2N,\beta)$ の渦の自由エネルギーを、元の大きさ (N,β') のそれで上から押さえ、$\beta'<\beta$（結合が強くなる向き、漸近自由）を言いたいものです。一ループの水準では、渦の背景のまわりの係数 c が 2 倍あたりの結合の移動を決め、$\beta=4/g^2$、$b_0=c\,C_A/(16\pi^2)$ として $\beta-\beta'=8b_0\ln 2$ です。

等長と整形の比較の命題（二つの写像の比較 ― 一ループの水準）

(a) 揺らぎについて等長的な写像で (1) の評価を作ると、一ループの水準で取り込める係数は高々 $c=-\frac13$ で、2 倍あたり $\beta'\ge\beta+0.023$（$U(1)$ と同じ、漸近自由と逆の向き）しか出せない。
(b) 体積を保ちつつ揺らぎを整形する写像（揺らぎの整形の命題）なら、正確な $\frac12\ln\det$

を誤差 $O(\Delta F^2/n)$ で再現し、$c=\frac{11}{3}$、$b_0=22/(48\pi^2)$、2 倍あたり $\beta-\beta'=0.258$ を出す。

初 （一ループの水準）証明。(a) はスピンの項の一次の消失の命題と、評価が上界であること（輸送の恒等式）から。数は $8\cdot\frac{-1/3\cdot 2}{16\pi^2}\ln 2=-\frac{0.2575}{11}\approx -0.0234$。(b) は揺らぎの整形の命題を殻ごとの揺らぎに当てたもので、数は $8\cdot\frac{22}{48\pi^2}\ln 2\approx 0.2575$。∎

表 3　2 倍あたりの結合の移動 $\beta-\beta'$（$SU(2)$、$\beta=4/g^2$）

何から	$\beta-\beta'$	分類	同じ行に書く条件
正確な一ループの係数 $\frac{11}{3}$	0.258	初	一ループの水準
揺らぎを整形する写像の評価（等長と整形の比較の命題 (b)）	0.258（誤差 $O(\Delta F^2/n)$）	初	一ループの水準・ガウスの評価
等長的な写像の評価（等長と整形の比較の命題 (a)）	≤ -0.023	初	一ループの水準。$U(1)$ と同じ向き
格子全体を 2 倍にした試験（$4^4\to 8^4$、β ごとに種 1〜3 本）	$+0.16$〜$+0.25$	読	$\beta=2.5$〜3.0。各 β の幅は 26-06 表 4 のとおり（例：$\beta=2.7$ で $+0.13$〜$+0.19$、$\beta=2.5$ で $+0.19$〜$+0.5$）。$\beta=2.3$ では $\gtrsim 0.1$。小さな格子
$U(1)$ の同じ試験（$(N,M)=(4,8)\to(8,16)$、$\beta=1.5$）	<-0.2	読	逆向き（$\beta'>1.7$、曲線の外）。レプリカ 48・交換の受理率の最小 0.37。種 1 本（26-06 表 2）

Migdal–Kadanoff 型の間引きで繰り込みの比較を作る試み（Tomboulis 2007）は、同じ議論が $U(1)$ でも強結合へ流れてしまう点で批判されました 典 （Ito–Seiler・Kanazawa、出典の表）。間引きは揺らぎの形を変えない側に入るので、等長と整形の比較の命題 (a) はこの批判に一ループの水準の説明を与えている、と読めます 読 （物理。非摂動の議論の穴を一ループの計算が言い当てる、という解釈で、批判そのものの証明ではありません）。

選別の基準。 帯を渡る方法の候補は、**試行の写像の線形化が揺らぎについて非等長的**でなければならない——これが一ループの水準での必要条件です 初 （等長と整形の比較の命題 (a) の言い換え。一ループの水準）。非摂動の水準でも同じ条件が要るという見方は 読 （物理）です。25-06 の駆動した挿入が安いのは、熱浴が揺らぎの形を新しい結合に合わせて緩めるからで、この基準と整合します 読 （物理）。

06

決まった写像の紫外の余分の費用

等長的な写像の損失の命題は「等長的な写像の損失は自由度で薄まらない」と言いました。格子の上で決まった点ごとの写像を使うと、損失はさらに、格子間隔を細かくするほど**増える**こ

とが数値で見えています。

二次元の模型。 二次元の $O(3)$ 模型（スピン $s_x \in S^2$、作用 $-\beta \sum s_x \cdot s_y$）を、帯 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/N_T)$ の上で、周期の方向に z 軸まわりの π 回転の捩れを入れて置きます。古典的な真空は北極と南極で、二つを結ぶキンク（分数インスタントンの二次元版）の作用は $2\pi\beta$ に下から近づきます。四次元の小さな捩れた T^2 の、軽い試験台です。

表 4　二次元の捩れた帯でのキンクの挿入の費用（β を除いた作用の単位。余分の費用は $\beta \times (\mathbb{E}[\Delta S] - \text{古典の値})$）

試行	β	$N_T = 2$	$N_T = 4$	$N_T = 8$	条件
決まった点ごとの回転（各点で真空からキンクへの最小の回転）の余分の費用	2	-2.1	$+4.1$	$+14.7$	標準偏差は $N_T = 8$ で 4.6（$\beta = 2$）・2.6（$\beta = 4$）。配位の数は記録に無い
同上	4	-2.0	$+4.6$	$+16.2$	

読 余分の費用は β にほとんど依らず、N_T について線形以上に増えます。期待された「走る結合による $\ln N_T$ の減少」とは逆です。

一方、揺らぎを古い背景のまま運ぶのでなく、**新しい背景（キンク）のまわりのガウス測度から引き直す**試行では、評価の差は一ループの行列式の比 $\frac{1}{2}\ln[\det' H_{\text{kink}} / \det H_{\text{vac}}]$ になります。その値（集団座標の二本を除く）は $N_T = 3, 4, 6, 8, 10$ で $-3.68, -2.94, -2.43, -2.11, -1.88$ と対数的にしか変わらず、回転と並進の集団座標の測度を入れた量は $N_T = 4$〜12 で -4.91〜-4.85 とほぼ一定でした 読 （固有値の数値計算。誤差の評価なし）。線形以上の増加は消えています。

四次元の板。 $SU(2)$、$\beta = 2.3$、板 $2 \times 2 \times 8 \times 8$ で、流束を決まった色の向き（σ_3）に滑らかに広げる挿入は、費用を下げるどころか上げました：ΔS の平均は広げる半径 1 で 21.9、半径 2 で 36.0 読 。ゲージを固定していない配位では、決まった向きの場が各点の色の向きと揃わないためと読めます 読 （物理）。同じ板で、駆動した挿入（25-06）は 16 段で仕事の平均を 2.9 まで下げました。

読み方。 決まった点ごとの写像は、揺らぎを「固定した背景の上で」動かすので、新しい背景での揺らぎのエントロピーの差を取り損ねます。等長的な写像の損失の命題の損失が、格子の細かい自由度ごとに積み上がる、という描像です 読 （物理。N_T に比例するかどうかは三点の数値からの読みで、一般の評価はありません）。挿入の平均（25-05）・駆動した挿入（25-06）・揺らぎの引き直しは、どれもこの費用を避けるための道具です。

> 07

決定論的な挟み撃ちと面積則

帯の正しい形は $\theta(L,L) \le e^{-cL^2}$（26-01）でした。$\theta = \tanh(\Delta F/2) \le \Delta F/2$ なので、変分でこれを示すには $\Delta F(L,L)$ の上界が $2e^{-cL^2}$ の程度まで小さくなければなりません。

相対エントロピーによる面積則の障害（余りの KL が面積とともに増えるなら面積則は出ない）

写像 T について、(1) の余り $\mathrm{KL}(T_{\#}\mu_+ \| \mu_-)$ が渦の面の面積 A について $\ge c'A$（$c' > 0$）なら、(1) から出る評価 $\mathbb{E}_+[S\circ T - S - \ln J_T]$ は $c'A$ 以上で、それから出る θ の上界は $\tanh(c'A/2)$ 以上、$A \to \infty$ で 1 に近づく。とくに $\theta \le e^{-\sigma A}$ の形の評価は出ない。

初 証明。(1) から $\mathbb{E}_+[\cdots] = \Delta F + \mathrm{KL} \ge \mathrm{KL} \ge c'A$（区画の向きを $\Delta F \ge 0$ に取る）。$\tanh$ は単調。∎ これは仮定の下の文で、仮定が成り立つかどうかは写像ごとに確かめる必要があります。

容器ごとの相対エントロピーの加法性（独立な容器では余りの KL は足し算になる）

枠を止めて容器 $D_1, \dots, D_k$ の内側が条件つきで独立で（25-03）、写像が容器ごとの積 $T = T_1 \times \cdots \times T_k$ なら、$\mathrm{KL}(T_{\#}\mu_+ \| \mu_- \mid \Phi) = \sum_j \mathrm{KL}(T_{j\#}\mu_{+,j} \| \mu_{-,j} \mid \Phi)$。各項が $c_0 > 0$ 以上なら、余りは容器の数、つまり面積に比例する。

初 積の測度の相対エントロピーは各因子の相対エントロピーの和、という標準の事実です。∎

決まった（揺らぎに合わせない）写像では、各容器の余りが $c_0 > 0$ で下から押さえられ、相対エントロピーによる面積則の障害の仮定が成り立つ、というのが構成的場の理論と確率論の二つの視点からの検討の共通の判断です 読 （物理・見立て。三角な写像の上限は周長型、という判断も同じ）。この判断の下では、輸送の道は帯の形そのものを示す道具ではなく、より弱い定性的な目標——$\Delta F(L,L) \to 0$（速さを問わない）——のための道具になります。$\Delta F(L,L) \to 0$ は、$U(1)$ のクーロン相（$\Delta F(L,L)$ は正の定数に近づく）や $\mathbb{Z}_2$ の非閉じ込め相を排除するには足りますが、閉じ込めも質量ギャップも出しません 読 （物理。数値は 26-06）。

08

言えないこと

(a) 非摂動の水準。スピンの項の一次の消失の命題・等長と整形の比較の命題と表 3 の上三行は全て一ループ（ガウス）の水準の文です。中程度の結合や大きな場で、揺らぎを整形する写像の誤差（渦の面の近くの局所的な相対エントロピーと高次のループ）を押さえることは開いた問題で、この本は示していません。

(b) 等長的な写像の分類。恒等写像・群の平行移動・ゲージ変換の線形化は定義どおり等長的です。間引きを等長的な側に入れるのは、残す自由度の揺らぎをそのまま運ぶ、という意味での分類で、間引きは全単射ではないので等長的な写像の損失の命題の文字どおりの適用ではありません。

(c) 向きの原理。「ΔF の上界は変分と明示的な構成からしか出ない」は、この本の道具の一覧についての判断で、定理ではありません。

(d) 紫外の余分の費用。表 4 は二次元の模型の三点の数値で、四次元のゲージ理論で同じ増え方をすることは示していません。四次元では Ward 恒等式による打ち消しがありうるとされ、それが起きるかはゲージ固定と写像の共変性に依ります。

(e) 相対エントロピーによる面積則の障害の仮定。決まった写像の余りの KL が面積に比例することは、容器ごとの相対エントロピーの加法性の積の場合に、各容器の余りが下から押さえられることを仮定して言えるだけで、一般の写像については見立てです。

(f) 新しさ。Gibbs の変分原理・ガウス測度の相対エントロピー・背景場の一ループの計算はどれも標準です。それらを「揺らぎの形を変えるかどうか」の選別の基準として並べた見方の新しさは主張しません。スカラー場では Polchinski 流の輸送写像（Bauerschmidt–Bodineau–Dagallier）が知られており、ゲージ場の例は探した範囲で見当たりません（照合未了）。

09

五分類の表と依存グラフ

表 5　この章の行（§03〜§05 は全て一ループ（ガウス）の水準）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	輸送の恒等式：$\Delta F = \mathbb{E}_{+}[S \circ T - S - \ln J_T] - \mathrm{KL}$	初	§02（標準）	可測な全単射・ヤコビアンが定まる	—
2	鏡映正値性は $\Delta F \geq 0$（閉じ込めと逆の向き）しか与えない	初	§02・26-04	捩れを固定した鏡映の方向	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
3	向きの原理：ΔF の上界は変分と明示的な構成からだけ	読	§02	この本の道具の一覧についての判断	—
4	等長的な写像の損失の命題：$\frac{1}{2}\sum(\lambda_k - 1 - \ln\lambda_k)$（$n$ で薄まらない）	初	§03	ガウスの模型・$T^{\mathsf{T}}\Delta_0 T = \Delta_0$	—
5	揺らぎの整形の命題：行列式 1 の写像の最適値と損失 $\le (\Delta F^2/n)e^{2\lvert\Delta F\rvert/n}$	初	§03	ガウスの模型・線形写像	—
6	表 1 の例の値	初	§03	固有値 0.2・0.3・3・4	—
7	表 2：$\frac{11}{3} = -\frac{1}{3} + 4$（$+4$ はスピンの項）	初	§04	一ループの水準・一定の可換な背景・Feynman ゲージ	—
8	スピンの項の一次の消失の命題：スピンの項は一次のトレースに現れない	初	§04	一ループの水準	—
9	等長と整形の比較の命題 (a)：等長的な比較は $\beta' \ge \beta + 0.023$	初	§05	一ループの水準・2 倍あたり	—
10	等長と整形の比較の命題 (b)：整形する比較は $\beta - \beta' = 0.258$	初	§05	一ループの水準・2 倍あたり	—
11	2 倍の試験の $\beta - \beta'$（$SU(2)$ で正、$U(1)$ で負）	読	§05・26-06	小さな格子・β は数点・種 1〜3 本	—
12	Migdal–Kadanoff の補間は $U(1)$ を区別しない（批判）	典	Ito–Seiler・Kanazawa	Tomboulis 2007 の議論について	—
13	行 12 の一ループの水準の説明	読（物理）	§05	一ループの水準	—
14	選別の基準：線形化が揺らぎについて非等長的であること	初	§05	一ループの水準での必要条件（非摂動では読）	—
15	決まった点ごとの写像の余分の費用は N_T について線形以上	読	§06	二次元 $O(3)$・捩れた帯・$N_T = 2, 4, 8$	—
16	揺らぎの引き直しでは増加が消える	読	§06	同上・$N_T = 3$〜12・誤差の評価なし	—
17	四次元で決まった向きに広げる挿入は費用が上がる	読	§06	$SU(2)$・$\beta = 2.3$・$2\times2\times8\times8$	—
18	相対エントロピーによる面積則の障害：余りの KL $\ge c'A$ なら面積則は出ない	初	§07	余りの KL の下界を仮定	—
19	容器ごとの相対エントロピーの加法性：独立な容器で KL は足し算	初	§07	枠を止めて容器が独立・写像が積	—
20	決まった写像では各容器の余りが下から押さえられる	読（物理）	§07	見立て	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
21	$\Delta F(L,L) \to 0$ はクーロン相と非閉じ込めの $\mathbb{Z}_2$ 相を排除する	読（物理）	§07・26-06	閉じ込めもギャップも出さない	—

この章に機械検査の束はありません。

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  初  ΔF = E₊[S∘T − S − ln J] − KL                  全単射・ヤコビアン
 2  初  鏡映正値性は ΔF ≥ 0 だけ                      26-04
 3  読  向きの原理（道具の一覧の判断）⟸ 1・2
 4  初  等長的な写像の損失は n で薄まらない ⟸ 1     ガウス
 5  初  行列式 1 の整形で損失 ~ ΔF²/n ⟸ 1            ガウス
 6  初  表 1 の例 ⟸ 4・5
 7  初  11/3 = −1/3 + 4                              一ループの水準
 8  初  スピンの項は一次のトレースに出ない ⟸ 4・7   一ループの水準
 9  初  等長的な比較は β' ≥ β + 0.023 ⟸ 1・8         一ループの水準
10  初  整形する比較は β − β' = 0.258 ⟸ 5・7         一ループの水準
11  読  2 倍の試験の符号（SU(2) 正・U(1) 負）        小さな格子
12  典  Migdal–Kadanoff の補間への批判
13  読  行 12 のループの説明（物理）⟸ 9・12
14  初  選別の基準：非等長的であること ⟸ 9           一ループの水準
15  読  決まった写像の余分の費用（二次元）
16  読  引き直しで増加が消える（二次元）
17  読  決まった向きの挿入は高い（四次元の板）
18  初  余りの KL ≥ c'A なら面積則は出ない ⟸ 1      仮定つき
19  初  独立な容器で KL は足し算
20  読  決まった写像の余りは容器ごとに下から（見立て）⟸ 19
21  読  ΔF(L,L) → 0 の役割（物理）⟸ 18・20
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。仮定（仮）の行はありません。相対エントロピーによる面積則の障害の結論は、「決まった写像では各容器の余りが下から押さえられる」という見立てが正しいときにだけ決まった写像に当てはまり、その区別は最後の行（ΔF(L,L) → 0 の役割）の分類（読）に表しています。この章には閉じ込めの節点も、質量ギャップの節点も、非摂動の節点もありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 輸送の恒等式（Gibbs の変分原理）と、その評価の損失が相対エントロピーであること	非摂動の水準での、揺らぎを整形する写像の誤差の評価

言えている	言えていない
初 ガウスの模型で、等長的な写像の損失は薄まらず、整形する写像の損失は $\Delta F^2/n$	間引きなど全単射でない操作への文字どおりの拡張
初 一ループの水準で $\frac{11}{3} = -\frac{1}{3} + 4$、等長的な比較は $\beta' \geq \beta + 0.023$、整形する比較は $\beta - \beta' = 0.258$	中程度の結合での繰り込みの比較（第 26 部の帯の核心）
読 決まった点ごとの写像は紫外で余分の費用（二次元の模型の三点）	四次元のゲージ理論での同じ増え方
初 余りの KL が面積に比例するなら面積則は出ない（仮定つき）	決まった写像一般についてその仮定が成り立つこと

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§02〜§07 の七つの命題・表 1・表 2	初	本文 §02〜§07 の証明と計算。スピンの項の一次の消失の命題・等長と整形の比較の命題と表 2 は論文の草稿（A-07 の帯の還元の論文）の繰り込みの比較の節と同じ内容
漸近自由の一ループの係数	典	4-06 の通り
Migdal–Kadanoff の補間による議論	典	E. T. Tomboulis, arXiv:0707.2179
その批判	典	K. R. Ito, E. Seiler, arXiv:0711.4930。T. Kanazawa, arXiv:0805.2742（照合は 26-06 の通り）
Polchinski 流の輸送写像（スカラー場）	照合未了	Bauerschmidt–Bodineau–Dagallier（書誌は未確認）
表 3 の数値の行	読	26-06（格子全体を 2 倍にした試験）
表 4・§06 の二次元の数値	読	この本の検討で行った二次元 $O(3)$ の捩れた帯の計算（冷却したキンク・点ごとの回転の写像・Hessian の固有値）。誤差の評価は粗い
§06 の四次元の板の数値	読	A-07 の渦の挿入の恒等式の論文の数値の節と同じ測定

この章で使った語 — 輸送の恒等式・Gibbs の変分原理・向きの原理・揺らぎについて等長的な写像・揺らぎの整形・スピンの項・反遮蔽・余りの相対エントロピー・選別の基準。意味は A-02 用語集 にあります（第 25 部の語は追加の予定）。

次に読む章：25-08 測った記録 — 第 25 部の数値（駆動した挿入の仕事・T^2 を広げたときの渦の自由エネルギー・板の弦の張力）を、条件つきで一か所にまとめます。

測った記録

> この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 25-03・5-07 にあります。

この章で分かること — 第 25 部の数値の記録を一か所にまとめます。三つの系列があります：(1) 駆動した挿入（25-06）の仕事と受理率、(2) 捩れた T^2 を広げたときの、大域の流束の渦の自由エネルギー（$U(1)$ の対照つき）、(3) 板の弦の張力（Creutz 比）。最後に、同時の反転の測定と、それを帯の試験に使えない理由を注記します。

前提となる章 — 25-06（駆動した挿入・流れの補題）・25-03（容器・区画の偏り θ）・26-02（横広げの不等式・弦の張力の単調性）。第 5 部の 5-07（モンテカルロ）と 5-08（弦の張力・Creutz 比）。

先に言うこと — この章の数は**全て数値の読み**（札「読」）で、どれも証明ではありません。各行に群・β・T^2 の大きさ N_T・平面の大きさ M・測定の数・誤差を書きます。誤差が記録に無いものは「記録に無い」と書きます。格子は小さく、β は数点です。$N_T = 2$ の行は、T^2 が格子の単位で 2 しかない、格子の人工物が大きい領域です。

この章の順序

1. 要約 — 三つの系列
2. 共通の設定と読み方
3. 駆動した挿入の仕事 — 表 1・表 2
4. T^2 を広げたときの渦の自由エネルギー — 表 3・表 4・表 5
5. 板の弦の張力 — 表 6・表 7
6. 同時の反転の測定と、帯の試験に使えない理由 — 表 8・表 9
7. 言えないこと
8. 五分類の表と依存グラフ — 表 10

01

要約 — 三つの系列

1. **駆動した挿入。** $SU(2)$ の板で、渦を一度に挿入する費用（段数 0）は T^2 の面積に比例して 11.8・24.2・44.9（$N_T = 2, 3, 4$、$\beta = 2.3$）と大きいのに、256 段で駆動すると 0.50〜0.63 まで下がりました 読 （表 1 の行 A・B・C。条件の違う行 G・H では、256 段の仕事は 3.64・6.67 と高いままです）。容器（円板）が渦の大きさより小さいと、段数を増やしても下がりきりません。
2. 容器の半径 4 を固定して $N_T = 4, 6, 8$（$\beta = 2.5$、1024 段）と広げても、仕事は 1.1〜1.6 で、N_T についてはっきりした増加はありませんでした 読 （10 配位 × 3 位置）。
3. **渦の自由エネルギー。** 大域の流束の区画の自由エネルギー ΔF は、T^2 を広げると $U(1)$（$\beta = 1.5$）では増え、$SU(2)$（$\beta = 2.4, 2.5$）では増えないか減りました 読 （$M = 8$ と 12、誤差は $U(1)$ で 0.04〜0.78、$SU(2)$ で 0.1〜0.36）。
4. **板の弦の張力。** $SU(2)$、$\beta = 2.5$、$M = 16$ の Creutz 比 $\chi(4)$ は、$N_T = 4 \to 8$ で増え、$N_T = 10$ でほぼ飽和しました。有意な行き過ぎは見えません 読 （2000 測定）。
5. **同時の反転。** 容器を同時に駆動した測定は、移り変わりの帯の数値的な姿としては使えません（25-06 §07）。T^2 を固定した板の張力の下界の道具としてだけ残ります。

02

共通の設定と読み方

- **格子。** 板 $(\mathbb{Z}/N_T)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$。方向 1・2 が捩れた T^2（捩れ $n_{12} = 1$）、方向 3・4 が平面です。$SU(2)$ は Wilson 作用、$U(1)$ は対照として同じ形の作用。
- **駆動した挿入。** 平面の円板（半径 r）× T^2 の容器の中だけを熱浴で更新し、渦の面の結合を m 段で $1 \to -1$ に変えたときの仕事 W（25-06 の (2)）。受理率は $1/(1 + e^{W})$ の平均（Barker 型。25-06 の駆動した挿入の受理率の系の受理率で、$\frac{1}{2}(1 - \mathbb{E}\tanh(W/2))$ に等しい）です。表 8・表 9 の同時の反転だけは $\min(1, e^{-W})$（Metropolis 型）の平均です。
- **渦の自由エネルギー。** 平面の $(3, 4)$ トーラス全体を通る流束 $n_{34} \in \{0, 1\}$ の二つの区画の $\Delta F = \ln(Z(1,0)/Z(1,1))$ を、結合を補間するレプリカ交換と Bennett の受理率の比（BAR）で推定したもの。偏りは $\theta = \tanh(\Delta F/2)$。誤差は記録の推定値です。
- **弦の張力。** 平面の中の $R \times R$ の Wilson ループから作った Creutz 比 $\chi(R)$。小さな R ではクーロンの項を含み、張力を過大に見積もります。
- **物理の大きさ。** 記録では、$\beta = 2.5$ の $N_T = 8$ は $L\sqrt{\sigma} \approx 1.5$、$\beta = 2.4$ の $N_T = 8$ は $L\sqrt{\sigma} \approx 2.2$、$\beta = 2.7$ の $N_T = 4$ は $L\sqrt{\sigma} \approx 0.4$ と見積もられています 読 （既知の $a\sqrt{\sigma}$ の

値からの換算)。小さな T^2 の半古典の領域にいるのは最後のものだけです。

- $N_T = 2$。T^2 が格子の単位で 2 の行は、格子の人工物が大きい領域です。傾向を読むときには外します。

03

駆動した挿入の仕事

全て $SU(2)$、捩れ $n_{12} = 1$。標本の数は「配位の数 × 一つの配位あたりの挿入の位置の数」です。W の括弧の中は標本の標準偏差（実行の出力の記録から）で、平均の誤差ではありません。同じ配位の異なる位置の標本は独立でないので、平均の誤差は標準偏差を標本の数の平方根で割ったものより大きいと見るべきです。

表 1　駆動した挿入（段数 0 と最も遅い駆動の比較。斜線の左右は段数または半径の二つの値）

実行	β	N_T	M	r	段数 m	標本	W の平均（標準偏差）	$\tanh(W/2)$ の平均	受理率
P	2.3	2	8	2	0 / 4 / 16	6 × 4	10.7 / 6.5 / 2.9（記録に無い）	0.990 / 0.968 / 0.688	0.005 / 0.016 / 0.156
A	2.3	2	8	2	0 / 256	12 × 4	11.8（2.5） / 0.50（0.71）	1.00 / 0.22	0.000 / 0.39
B	2.3	3	8	2	0 / 256	12 × 4	24.2（4.6） / 0.52（0.84）	1.00 / 0.21	0.000 / 0.39
C	2.3	4	8	2	0 / 256	8 × 4	44.9（6.8） / 0.63（1.19）	1.00 / 0.24	0.000 / 0.38
D	2.3	2	10	3	256	12 × 4	0.19（0.74）	0.09	0.46
E	2.5	4	10	2 / 4	1024	8 × 3	2.40（2.11） / 0.44（1.21）	0.67 / 0.17	0.17 / 0.41
F	2.7	4	12	2 / 4	1024	6 × 3	6.00（1.34） / 3.77（1.18）	0.99 / 0.92	0.006 / 0.04
G	2.7	4	18	8	256 / 1024	4〜6 × 3	3.64（3.98） / 2.72（2.53）	0.54 / 0.59	0.23 / 0.20
H	2.5	8	12	4	256 / 1024	4〜6 × 3	6.67（2.63） / 0.51（1.64）	0.98 / 0.17	0.012 / 0.42

行 P は 25-06 §04 で引いた測定です。行 P・A・D は $N_T = 2$（格子の人工物の領域）です。

読み 読 ：(i) 段数 0 の費用は N_T^2 にほぼ比例します（A・B・C で 11.8・24.2・44.9）。(ii) 容器が十分大きければ、駆動した挿入の仕事は 0 近くまで下がります。(iii) 必要な容器の半径

は、格子間隔が半分になるごとに約 2 倍に見えます（$\beta = 2.3$ で 2、2.5 で 4、2.7 では 4 で不足、8 でも 0 近くには届かない）。渦の太さが物理的な長さで決まっていることと整合します。(iv) H（$N_T = 8$）の 1024 段の仕事 0.51 は E（$N_T = 4$）の 0.44 とほぼ同じですが、256 段では 6.67 と高く、駆動の速さに強く依存します。

表 2　統計を増やした駆動した挿入（$SU(2)$、捩れ $n_{12} = 1$）

実行	β	N_T	M	r	段数 m	標本	W の平均（標準偏差）	$-\ln\langle e^{-W}\rangle$	$\tanh(W/2)$ の平均	受理率
I4	2.5	4	12	4	1024	10 × 3	1.32（1.12）	0.72	0.48	0.26
I6	2.5	6	12	4	1024	10 × 3	1.14（1.03）	0.59	0.44	0.28
I8	2.5	8	12	4	1024	10 × 3	1.64（1.59）	0.22	0.52	0.24
J	2.7	4	18	8	4096	記録に無い	2.84（0.84）	2.44	0.85	0.07

読み 読 ：(i) I：容器の半径 4 を固定して $N_T = 4, 6, 8$ と広げても、仕事は 1.1〜1.6 で、N_T についてはっきりした増加はありません（平均の誤差は標準偏差 $/\sqrt{30}$ で 0.2〜0.3 程度）。表 1 の E・H の 0.44・0.51 は少ない統計の揺らぎでした。(ii) J：$\beta = 2.7$、$r = 8$ で駆動を G の 4 倍遅くしても $W \approx 2.8$（G の 1024 段で 2.7）で、Jarzynski の推定は 2.4。仕事の大部分は駆動の速さによる散逸ではなく、本当の自由エネルギーと読めます。$\beta = 2.7$ の $N_T = 4$ は物理的に小さな T^2（$L\sqrt{\sigma} \approx 0.4$）で、希薄な領域の側にいるので渦が実際に高い、という読みです（物理）。

Jarzynski の推定について。 $-\ln\langle e^{-W}\rangle$ は 25-06 の Jarzynski の等式から区画の自由エネルギーの推定ですが、稀な小さい W に支配されるので、少ない標本では大きく揺らぎます。表 1 には載せていない列ですが、負の値も出ています（例：E の半径 4、1024 段で -0.30。A の 64 段で -0.085）。この列は検算の目安で、値そのものは信頼できません。

受理の規則。 表 1・表 2 の受理率の列は Barker 型 $1/(1+e^{W})$ の平均です。同じ記録の生の W から Metropolis 型 $\min(1, e^{-W})$ の平均を出し直すと、最も遅い駆動の行で A 0.641・B 0.647・C 0.595・D 0.729・E（$r = 4$、1024 段）0.607 で、どれも $\frac{1}{2}$ を超えます 計算 。点ごとに $\frac{1}{2}\min(1, e^{-x}) \le 1/(1+e^{x}) \le \min(1, e^{-x})$ で、Crooks 型の関係の下では Barker 型の平均は $1/(1+e^{\Delta F})$ 以下（$\Delta F \ge 0$ なら $\frac{1}{2}$ 以下）です 紙 Lean
（LatticeGaugeAcceptanceSandwich（half_metro_le_fermi・fermi_le_metro・barker_le_of_crooks））。表の受理率が $\frac{1}{2}$ の下に留まるのはこの規則の天井で、核の物理の限界ではありません。

この系列の限界。 R^4 の閉じ込めに要るのは、偏りが L とともに面積の指数で小さくなること（26-01）で、それはこの測定では見えません。β は 2.3〜2.7 の数点で、誤差の評価もまだ粗いままです。

04

T² を広げたときの渦の自由エネルギー

容器は平面の全体（$M \times M$）で、$T^2 = N_T \times N_T$ を広げます。横広げの不等式（26-02）の符号の試験です。全てレプリカ交換 + BAR、捩れ $n_{12} = 1$、レプリカの数 24（断りの無い限り）。反復の数は記録にありません。

表 3　ΔF、平面 $M = 8$

理論	β	$N_T = 2$	$N_T = 4$	$N_T = 6$	$N_T = 8$
$U(1)$（対照）	1.5	-0.03 ± 0.04	0.83 ± 0.11	2.10 ± 0.47	5.14 ± 0.78
$SU(2)$	2.5	-0.01 ± 0.12	0.63 ± 0.18	0.33 ± 0.22	1.51 ± 0.29

表 4　ΔF、平面 $M = 12$（容器を大きくした再測定）

理論	β	$N_T = 4$	$N_T = 6$	$N_T = 8$
$U(1)$（対照）	1.5	0.20 ± 0.21	1.35 ± 0.30	1.72 ± 0.47（レプリカ 40。24 では 0.54 ± 0.53 で混ざりが悪かった）
$SU(2)$	2.5	0.57 ± 0.22	0.42 ± 0.24	-0.15 ± 0.36

表 5　ΔF、$SU(2)$、$\beta = 2.4$、平面 $M = 8$

N_T	**4**	**8**
ΔF	0.31 ± 0.10	0.11 ± 0.25

読み 読 ：(i) $U(1)$ は T^2 を広げると ΔF が増えます（$M = 8$ で θ が $0 \to 0.39 \to 0.78 \to 0.99$、$M = 12$ で $0.20 \to 1.35 \to 1.72$）。(ii) $SU(2)$ は三つの設定（$\beta = 2.5$ の $M = 8$・12、$\beta = 2.4$ の $M = 8$）で、広げても増えないか減ります。例外は $\beta = 2.5$、$M = 8$ の $N_T = 8 = M$（対称なトーラス T^4_8）の 1.51 です。(iii) $N_T = 4 \to 8$ で $\ln(1/\theta)$ は $U(1)$ で $0.93 \to 0.012$（約 80 分の 1）、$SU(2)$ で $1.18 \to 0.45$（約 2.6 分の 1）（$M = 8$）。横広げの不等式の符号の、数値的な兆候と読めます。(iv) $\beta = 2.4$ の $N_T = 8$ が $\beta = 2.5$ より小さいのは、同じ格子が物理的に大きい（$L\sqrt{\sigma} \approx 2.2$ と 1.5）ことと整合します。

限界。 θ が 1 に近くない（$O(1)$ の）領域なので、$\theta \le 1$ のために $U(1)$ の比も抑えられ、この幾何では横広げの不等式の判別力は弱いです。誤差は $U(1)$ で 0.04〜0.78、$SU(2)$ で 0.1〜0.36 と大きく、β は一点か二点です。$U(1)$ の $\beta = 1.5$ と $SU(2)$ の $\beta = 2.5$ は「同じ物理」に合わせたものではありません。$N_T = 2$ の列は格子の人工物の領域です。

05

板の弦の張力

$SU(2)$、$\beta = 2.5$、平面 $M = 16$、捩れ $n_{12} = 1$。平面の中の Wilson ループの Creutz 比 $\chi(R)$ を T^2 の大きさ N_T ごとに測りました。26-02 の横広げの不等式（強い形）が含む「縮めた二次元の弦の張力 $\sigma_{\mathrm{eff}}(N_T)$ の単調性」と、$L \sim 1/\Lambda$ で張力が一度大きくなる「行き過ぎ」の試験です。記録では、四次元の $\beta = 2.5$ の値は $\sigma a^2 \approx 0.036$ とされています 読 。

表 6　Creutz 比、400 測定

N_T	$\chi(3)$	$\chi(4)$	$\chi(5)$
2	0.098 ± 0.006	0.034 ± 0.029	-0.02 ± 0.14
4	0.113 ± 0.007	0.070 ± 0.018	0.07 ± 0.06
6	0.108 ± 0.003	0.089 ± 0.013	0.11 ± 0.05
8	0.113 ± 0.003	0.051 ± 0.010	0.07 ± 0.04

表 7　Creutz 比、2000 測定（5 倍の統計）と $N_T = 10$

N_T	$\chi(3)$	$\chi(4)$	$\chi(5)$
4	0.103 ± 0.002	0.059 ± 0.009	0.03 ± 0.04
6	0.115 ± 0.001	0.061 ± 0.004	0.084 ± 0.019
8	0.116 ± 0.002	0.076 ± 0.002	0.070 ± 0.022
10	0.112 ± 0.002	0.071 ± 0.002	0.076 ± 0.009

読み 読 ：(i) 400 測定で $\chi(4)$ は $N_T = 6$ が最大（0.089）で、$N_T = 8$ との差は約 2.3 標準偏差でした。行き過ぎの兆候に見えましたが、2000 測定では $N_T = 6$ は 0.061 ± 0.004 で、**統計の揺らぎ**でした。(ii) 2000 測定の $\chi(4)$ は $N_T = 4 \to 8$ で増え、$N_T = 10$ で 0.071（$N_T = 8$ との差 1.7 標準偏差）とほぼ飽和します。有意な行き過ぎは見えません。張力の単調性（26-02 の必要条件）と整合します。(iii) $\chi(4)$ はクーロンの項を含むので、四次元の $\sigma a^2 \approx 0.036$ より大きく出ます。絶対値ではなく、N_T についての傾向だけを読みます。(iv) $N_T = 2$ の行（表 6）は格子の人工物の領域で、400 測定だけです。

限界。β は 2.5 の一点、平面は $M = 16$ の一つです。$\chi(5)$ 以上は誤差が大きく、張力の値そのものは決まりません。$N_T = 10$ は $L\sqrt{\sigma}$ で 2 程度で、$L \to \infty$ の傾向は外挿になります。

06

同時の反転の測定と、帯の試験に使えない理由

25-06 の同時の反転の評価（$\mathbb{E}\prod\theta \le \mathbb{P}(\text{どの容器も反転しない})$）を数値に使った測定です。$SU(2)$、$\beta = 2.5$、容器を間隔 B で並べ、一つの配位あたり 4 つの容器で同時に、受理

$\min(1, e^{-W})$ の駆動した挿入（512 段）を行いました。受理率の平均を $\bar{a}$ と書きます。

表 8　容器の半径 $r = 4$ を固定（$B = 10$、$M = 20$、512 段）

N_T	配位の数	$\bar{a}$	W の平均	W / N_T^2
4	30	0.36 ± 0.03	1.6	0.10
6	20	0.25 ± 0.04	2.6	0.07
8	10	0.12 ± 0.03	4.5	0.07
10	6	0.02 ± 0.01	8.2	0.08

表 9　容器の半径を N_T に比例させた再測定（$r = N_T$、$B = 2r + 2$、$M = 2B$、512 段）

N_T	r	配位の数	$\bar{a}$	W の平均
4	4	30	0.35 ± 0.03	1.6
6	6	11	0.34 ± 0.05	2.0
8	8	3	0.16 ± 0.08	4.5

読み 読 ：(i) 表 8：半径を固定して T^2 を広げると、仕事は N_T^2 にほぼ比例して増え、受理率は落ちます。渦の大きさは T^2 の大きさで決まるので、半径 $r < L$ の容器には渦が収まらず、細い管の中の面として面積に比例した費用を払う、と読めます。横広げの不等式は容器の大きさが L 以上の範囲の主張なので、これは反例ではありません。保証つきの張力（$-\ln \mathbb{P}(\text{反転なし})$ を容器の数と B^2 で割ったもの）は $N_T = 4$ で約 0.005 でした。(ii) 表 9：容器を L とともに大きくすると、受理率は $N_T = 4 \to 6$ でほぼ一定です（$N_T = 8$ は 3 配位で判断できません）。

帯の試験に使えない理由。 この測定は「一様な板の張力（移り変わりの帯）の数値的な姿」としては**読めません**。理由は 25-06 §07 のとおりです：流れの補題の保証は $\theta \le 1 - a$ で、帯の形 $\theta \le e^{-cL^2}$ を出すには $a \ge 1 - e^{-cL^2}$ の核が要り、それには順と逆の経路の測度の重なり O を面積の指数で 1 に近づけること（散逸で言えば $D \lesssim e^{-2cL^2}$）が要ります（25-06 §07）。測った核はそこから遠いので、言えるのは「大きさ L の容器で $\theta \le \theta_0$（θ_0 は 1 未満の定数）」だけで、そこから出る $\sigma \ge \ln(1/\theta_0)/L^2$ は $U(1)$ も満たす弱い形です（26-01）。**この測定は、T^2 を固定した板の張力の下界を測る道具としてだけ使えます。**表 9 の $N_T = 6, 8$ の続きは止められています。

07
言えないこと

(a) 証明。この章の数はどれも証明ではなく、どの不等式の仮定も確かめていません。

(b) 帯。表 2・表 3〜5・表 7 の傾向は、移り変わりの帯（L に一様な $\theta \le e^{-cL^2}$）を数値で示すものではありません。測った T^2 は $L\sqrt{\sigma} \approx 2$ 程度までで、$L \to \infty$ は外挿です。

(c) 誤差。駆動した挿入の誤差の評価はまだ粗く（標本の標準偏差だけ）、レプリカ交換の誤差は記録の推定値で、自己相関の扱いは記録にありません。

(d) 格子の人工物。$N_T = 2$ の行は格子の人工物の領域です。$N_T = 4$ でも小さな格子の補正は残ります。

(e) 対照の釣り合い。$U(1)$ の $\beta = 1.5$ と $SU(2)$ の $\beta = 2.5$ は、物理の大きさを揃えた比較ではありません。

(f) 同時の反転。表 8・表 9 を帯の数値的な姿として読むことはできません。

08

五分類の表と依存グラフ

表 10　この章の行（全て数値の読み。条件は各行の範囲の欄）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	段数 0 の挿入の費用は N_T^2 にほぼ比例	読	表 1（A・B・C）	$SU(2)$・$\beta = 2.3$・$M = 8$・$r = 2$・8〜12 配位 × 4	—
2	容器が十分大きければ駆動した仕事は 0 近くまで下がる	読	表 1	$\beta = 2.3$〜2.5・256〜1024 段・$N_T = 2$ の行を含む	—
3	要る容器の半径は格子間隔が半分になるごとに約 2 倍	読	表 1（E・F・G）	$\beta = 2.3, 2.5, 2.7$・統計は少ない	—
4	半径 4 を固定して $N_T = 4 \to 8$ で仕事ははっきり増えない	読	表 2（I）	$\beta = 2.5$・$M = 12$・1024 段・10 配位 × 3・誤差 0.2〜0.3	—
5	$\beta = 2.7$、$r = 8$ の仕事は散逸でなく自由エネルギー	読（物理）	表 1（G）・表 2（J）	$N_T = 4$・$M = 18$・Jarzynski の推定は揺らぎが大きい	—
6	T^2 を広げると $U(1)$ の ΔF は増える	読	表 3・表 4	$\beta = 1.5$・$M = 8, 12$・誤差 0.04〜0.78	—
7	T^2 を広げても $SU(2)$ の ΔF は増えないか減る（$N_T = M = 8$ を除く）	読	表 3〜5	$\beta = 2.4, 2.5$・$M = 8, 12$・誤差 0.1〜0.36	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
8	行 6・7 は横広げの不等式の符号の兆候	読（物理）	§04 ⟸ 6・7	θ が $O(1)$ の領域で判別力は弱い	—
9	$N_T = 6$ の行き過ぎは統計の揺らぎ	読	表 6・表 7	$\beta = 2.5$・$M = 16$・400 と 2000 測定	—
10	$\chi(4)$ は $N_T = 4 \to 8$ で増え $N_T = 10$ でほぼ飽和	読	表 7	$\beta = 2.5$・$M = 16$・2000 測定・クーロンの項を含む	—
11	半径を固定すると同時の反転の仕事は N_T^2 に比例して増える	読	表 8	$\beta = 2.5$・$r = 4$・6〜30 配位 × 4 容器	—
12	一段の核の受理率は測った範囲で Barker 型 0.46 以下・Metropolis 型 0.73 以下（表 8・表 9 は Metropolis 型で 0.36 以下）	読	表 1・表 2・表 8・表 9	測った β・N_T・容器の範囲	—
13	同時の反転の測定は帯の試験に使えない	初	§06・25-06 §07 ⟸ 12	流れの補題 $\theta \le 1 - a$ だけを使う場合	—（核は 25-06 の FluxLemma（`FluxLemma.flip_le_one_sub_abs`））

「同時の反転の測定は帯の試験に使えない」の行だけは数値でなく論理の行です：$\theta \le 1 - a$ から出るのは弱い形だけ、という 25-06 の「弱い形しか出ない」の行の当てはめで、受理率の行の読みはそれがどの程度効くかを示します。

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  読  段数 0 の費用 ∝ N_T²                          β = 2.3・M = 8
 2  読  大きな容器で駆動した仕事 → 0 近く          β = 2.3〜2.5
 3  読  要る半径は格子間隔の半分ごとに約 2 倍 ⟸ 2
 4  読  半径 4 で N_T を広げても仕事は増えない  β = 2.5・10 配位 × 3
 5  読  β = 2.7 の仕事は自由エネルギー（物理）  Jarzynski は揺らぐ
 6  読  U(1) の ΔF は T² とともに増える            β = 1.5
 7  読  SU(2) の ΔF は増えない                      β = 2.4, 2.5
 8  読  横広げの不等式の符号の兆候（物理）⟸ 6・7
 9  読  N_T = 6 の行き過ぎは揺らぎ                 2000 測定
10  読  χ(4) は増えて飽和 ⟸ 9                        クーロンの項を含む
11  読  半径固定の同時の反転は面積に比例
12  読  一段の核の受理率：Barker 型 ≤ 0.46・Metropolis 型 ≤ 0.73（測った範囲）
13  初  同時の反転は帯の試験に使えない ⟸ 12      25-06 の流れの補題
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。仮定（仮）の行はありません。閉じ込めの節点も、質量ギャップの節点もありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
読 駆動した挿入は、容器が渦より大きければ仕事を 0 近くまで下げる（$SU(2)$・$\beta = 2.3$〜2.5）	仕事の上界が L と格子間隔に一様であること
読 T^2 を広げると $U(1)$ の渦は高くなり、$SU(2)$ は高くならない（$\beta = 2.4, 2.5$・$M = 8, 12$）	横広げの不等式。θ が小さい領域での判別
読 板の弦の張力（Creutz 比）は N_T とともに増えて飽和し、有意な行き過ぎは無い（$\beta = 2.5$・2000 測定）	張力の値そのもの。$L \to \infty$ の振る舞い
初 同時の反転の保証は帯の試験には使えない	$a \to 1$ の核による帯の数値の試験

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1〜9 の全ての数	読	この本の検討で行ったモンテカルロの記録（熱浴・駆動した挿入・レプリカ交換と BAR・Creutz 比）。各実行の出力の記録と照らし、表 1 の標準偏差は出力の記録から写した
表 1 の行 P	読	A-07 の渦の挿入の恒等式の論文の数値の節と同じ測定（A-07）
表 3〜5・表 7	読	A-07 の帯の還元の論文の数値の節と同じ測定
$L\sqrt{\sigma}$ と四次元の $\sigma a^2 \approx 0.036$	読	記録の換算（既知の $a\sqrt{\sigma}$ の値による。原典の値は未照合）
Jarzynski の等式	典	25-06 の出典の表
同時の反転を帯の試験に使えない論理	初	25-06 §07

この章で使った語 ― 駆動した挿入・段数・仕事・受理率・大域の流束の自由エネルギー・レプリカ交換・BAR・Creutz 比・行き過ぎ・同時の反転・保証つきの張力。意味は A-02 用語集にあります（第 25 部の語は追加の予定）。第 26 部の数値（格子全体を 2 倍にした試験・階段関数・柱の偏り）は 26-09 にあります。

次に読む章：25-09 この道が止まる場所 — T^2 を広げることが、そのまま移り変わりの帯であることを確かめ、空間の方向の道の到達点をまとめます。

2026-10-15 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 25 部 二本目の道 — 空間の方向から 帯・横広げ・道の終点 · Kiichi, Shiori and Rin

この道が止まる場所 — T² を広げることが帯である

この章は未解決の問いの地図です。閉じた部品と閉じない部品の境を示します。

この章で分かること — 小さな捩れた T^2 から出発する空間の方向の道が、どの段で止まるか。止まるのは T^2 の一辺 L を相関長の尺度 $1/\Lambda$ を越えて広げる段で、これが移り変わりの帯（略して帯）です。帯の両端、つまり L が小さい希薄な分数インスタントンの領域と L が大きい閉じ込めの領域では、要る不等式が成り立つ見込みがあり、真ん中の $L \sim 1/\Lambda$ を非摂動的に通すことだけが残ります。

前提となる章 — 25-00（この部の入口）・25-02（渦と分数インスタントン）・25-04（板の閉じ込め）・16-09（証明が含むべき七つの段の表の帯の段）。

先に言うこと — この章は短い案内の章で、新しい証明を置きません。帯を渡る文はどれも仮定で、両端の見込みは一ループと希薄な気体の勘定、または閉じ込めの描像の上の物理の見立てです。

この章の順序

1. 止まる段 — 小さな T^2 で手にあるものと、広げる段
2. 帯の両端と真ん中 — 希薄な領域・閉じ込めの領域・その間（表 1）
3. 帯で示すべき文 — 帯の正しい形と、途中の到達点
4. 第 26 部へ

01

止まる段 — 小さな T^2 で手にあるものと、広げる段

この部の道は、四次元の問題を二つに分けるために小さな捩れた T^2 を経由しました（25-00）。捩れが零モードを消すので、T^2 の大きさ L までの尺度で理論は弱結合のままで、T^2 を巻く渦の面は分数インスタントンとして局所的に閉じます。こうして、紫外の壁だけが残る中

間の到達目標（小さな T^2 でのギャップと閉じ込め、証明が含むべき七つの段のうち、小さな T^2 のギャップの段と小さな T^2 の閉じ込めの段）と、それ以外の壁が集まる段（T^2 を広げる、帯の段）に分かれます。

小さな T^2 の側で手にあるものは、どれも条件つきか、格子間隔を固定した文です。格子間隔と T^2 を固定すれば全ての β で面積則が成り立ちますが、張力は細い渦のコストで決まり連続極限で 0 になります 初 （25-04）。挿入の恒等式と平均の評価は閉じ込めを一つの局所的な量に帰着させます 初 （25-05）。格子間隔を 0 に送った小さな T^2 の閉じ込めとギャップは、紫外の制御などの仮定の上の筋です 仮 。この部の紫外の制御は「捩れた境界条件の下で、2026-11-10 に公開された構成と同じ構成が立つこと」で、公開された構成は周期の立方の箱だけなので、開いた条件です（27-01 の小さな T^2 のギャップの矢印・小さな T^2 の面積則の矢印）。

問題文が求めるのは $\mathbb{R}^4$ の理論なので、$L \to \infty$ が要ります。L を相関長 $1/\Lambda$ より十分小さい所から十分大きい所まで、全ての L で同じ定数の評価を持って広げること。この段がこの道の止まる場所で、本書ではこれを**移り変わりの帯**（略して帯）と呼びます 仮 。第 23・24 部の「窓」（サイトの窓・$\hbar$ の窓・時刻の窓）とは別の語です（26-00 の注）。

02

帯の両端と真ん中

帯で示すべき文は、容器の区画の偏り $\theta(R; T_L^2)$（容器の一辺 R、横の T^2 の一辺 L、25-03）の言葉で、横の T^2 を広げても偏りが大きくならない、という形をしています（横広げの不等式、26-02）。両端と真ん中で状況が違います。

表 1　帯の両端と真ん中（Λ は力学的な尺度、L は横の T^2 の一辺）

領域	描像	横の T^2 を広げると	札	同じ行に書く条件
$L \ll 1/\Lambda$（希薄な領域）	渦は荷電 $\frac{1}{2}$ の自己双対の塊（分数インスタントン）で、作用 $4\pi^2/g^2$ は T^2 の形に依らない。希薄な気体で $\ln(1/\theta) \propto A_D\, L^{5/3}$（$A_D$ は容器の面積）	$\ln(1/\theta)$ が増え、偏りは小さくなる。指数 $5/3 = 11/3 - 2$ は漸近自由の係数が横の二次元のエントロピーに勝つ余裕	読 （物理：一ループと希薄な気体の勘定）。張力の式 $\Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}$ は 典	希薄な領域・一ループ・SU(2)。U(1) では同じ勘定で指数が -2
$L \gg 1/\Lambda$（閉じ込めの領域）	容器の渦の面の自由エネルギーは張力 × 面積で、T^2 の面積への依存は渦の面の位置のエントロピー（対数）だけ	偏りの比は s^2 の程度に留まる	読 （物理：閉じ込めの描像の上）	閉じ込めを仮定した描像。示されていない

領域	描像	横の T^2 を広げると	札	同じ行に書く条件
$L \sim 1/\Lambda$（真ん中）	弱結合の描像も強結合の描像も使えない	示すべき文そのもの	仮	非摂動の入力が要る。構造的な入力（鏡映正値性・双対性・転送行列）だけでは出ない（26-04）

対照のために U(1) を置くと、$U(1)$ の流束は一様に広がるしかなく、板の上の $U(1)$ は長距離で結合 e^2/A_T（A_T は T^2 の面積）の二次元の $U(1)$ になるので $\ln(1/\theta) \propto A_D/A_T$ で、T^2 を広げたときの偏りの比（広げた後と前の比）はいくらでも大きくなります 読 （物理：帯の還元の論文の見立ての勘定）。四次元の弱結合の $\mathbb{Z}_2$ でも同じく破れます。非可換の流束は尺度に依らない有限作用の塊に局在できる、という点が SU(2) と U(1) を分けます（26-03）。測った記録（T^2 を広げたときの渦の自由エネルギーが U(1) では上がり SU(2) では上がらない、板の張力が増えて飽和する）は 25-08 と 26-09 にあります 読 。

03

帯で示すべき文 — 帯の正しい形と、途中の到達点

帯の目標は「偏りが 1 から一様に離れる」（$\sup_L \theta(L;T_L^2) \le \theta_0 < 1$）ではありません。この形は四次元の $U(1)$ も満たし、出る張力は $\ln(1/\theta_0)/L^2 \to 0$ だからです（26-01）。帯の正しい形は、容器の渦の自由エネルギーが面積の指数で小さくなること

$$\ln \frac{1}{\theta(L;T_L^2)} \;\ge\; c\,L^2 \qquad \text{(物理的な単位で、格子間隔 } a \text{ に一様)} \tag{1}$$

で、't Hooft の閉じ込めの判定の、枠を条件づけた局所版です 仮 。(1) は、基点と枠の減相関と横広げの不等式があれば倍化の反復で従います（27-01 §03 の倍化の反復の定理とその前提）。チェス盤の言葉では、(1) の内容は一様な板の張力と一様な板のギャップの二つの一様性になります（26-05）。

(1) に届く前の途中の到達点として、二つの弱い文が名指されています 仮 。(a) 容器の渦の自由エネルギーが $L \to \infty$ で 0 に近づくこと（閉じ込めない相が無いことの言い換え）。(b) $\ln(1/\theta) \ge cL^2/\ln L$（ほぼ面積則）。どちらも示されていません。

04

第 26 部へ

この道は、帯の手前まで来て止まりました。帯で何が要るかは、この部の道具で形を絞れます。帯の正しい形 (1)、一つの不等式への還元、非可換が効く場所、構造だけでは渡れないこと、の順です。時間の方向の道（第 23・24 部）も、四次元の目標を「$\beta \to \infty$ に一様な定数」

の形で書くと同じ型の一様性に着きます（23-15 §08）。二本の道がこの帯で合流することは、第 26 部の入口 で扱います。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
空間の方向の道が止まる段が、横の T^2 を相関長の尺度を越えて広げる段（帯）であること。帯の正しい形 (1) と、非閉じ込め相の排除 (a) の名指し	(1)・(a)・(b) のどれも 仮
両端の見込み：希薄な領域の $5/3 = 11/3 - 2$、閉じ込めの領域の対数のエントロピー 読 （物理）	真ん中 $L \sim 1/\Lambda$ を非摂動的に通すこと。両端の見込みの証明

出典と再現

もの	種別	出典・道具
小さな T^2 の弦の張力 $\Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}$	典	Y. Tanizaki, M. Ünsal, arXiv:2201.06166 の式 (2.32)・(2.37)（25-02 の出典表）
希薄な領域の $5/3 = 11/3 - 2$、$U(1)$ の -2	読（物理）	帯の還元の論文（草稿、A-07）の「不等式は理論を分ける」の命題（論文自身が見立てと明記）
帯の正しい形 (1) と $U(1)$ の反例	仮・読	26-01。Tomboulis–Yaffe の不等式は典
非閉じ込め相の排除 (a)	仮	27-02 の台帳の「't Hooft の張力の正値性」の行

この章で使った語 — 移り変わりの帯（帯）・横広げの不等式・区画の偏り $\theta(R; T^2_L)$・希薄な領域・閉じ込めの領域・途中の到達点。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：26-00 入口 — 合流 — 二本の道が「全ての尺度で同じ定数」という一つの型の言明に着くこと。