第三巻　質量ギャップへ — 残る問いと本書の結果

第 26 部 移り変わりの帯

Kiichi, Shiori and Rin · 2026-11-14 の版 · https://computoergosum.com/principia/yang-mills/

> この PDF は Web 版の各章をそのまま刷ったものです。動かせる図は刷った時点の姿で止まっています。章の間のリンクは Web 版へ飛びます。最新の内容は Web 版に在ります。

章		頁
26-00	入口 — 合流	2
26-01	帯の正しい形	13
26-02	一つの不等式への還元	21
26-03	非可換が効く唯一の場所	32
26-04	構造だけでは渡れない	43
26-05	チェス盤と同時の反転	55
26-06	繰り込みの比較 — 群を区別する比較	66
26-07	時間の側から見た帯	84
26-08	試して止まった道の地図	91
26-09	測った記録	106
26-10	新しい見方の候補	117
26-11	紫外の制御 — 無限個の段で閉じるとは何か	131
26-12	帯の議論の篩 — 七つの試験の相手	134

入口 — 合流

この章は案内です。§03・§05 は未解決の地図です。

この部は検討の記録です。機械検査まで済んだ定理は第 20〜22 部、前提の今の一覧は 28-04 に在ります。

この章で分かること — 時間の方向から入る道（第 23・24 部）と、空間の方向から入る道（第 25 部）が、どちらも「全ての尺度で同じ定数で成り立つ」という一つの型の言明に着くこと。その言明が渡らなければならない尺度の区間を、この部では**移り変わりの帯**（略して**帯**）と呼びます。尺度のはしごの図（図 2）で、弱結合の道具と強結合の道具がそれぞれどこまで届き、どこが空いているかを見ます。帯の内訳（目標・還元・否定の補題・電場の流束・非可換の場所・β 単調性・繰り込みの比較・チェス盤）を一つの表にし、第 26 部の十三章の地図を置きます。

前提となる章 — 23-15 §07・23-15 §08（一様性の一行）・24-07 §01（無次元の結合）・4-07（次元転移）・25-00（空間の方向の道の入口）・16-09（証明が含むべき七つの段）。

先に言うこと — この頁は地図で、新しい定理を置きません。図 2 は物理の見立ての図で、行ごとに札を付けます。「二本の道が合流する」は**目標の水準**での言明で、それぞれの道が**いま止まっている壁**が同じものだという言明ではありません（§05）。この部のどの章も、質量ギャップも、連続極限での閉じ込めも示しません。

この章の順序

1. 二本の道が着く一つの型 — 「全ての尺度で同じ定数」
2. 語の注 — この部の「帯」と第 23・24 部の「窓」は別物
3. 尺度のはしご — どの尺度で、どの道具が効くか（図 2）
4. 帯の内訳 — 八つの部品と、その札（表 1）
5. 目標の水準の合流と、壁の水準の違い（表 2）
6. 第 26 部の地図 — 十三章と、24-07 の一行（表 3）

7. 五分類の表と依存グラフ

01

二本の道が着く一つの型 — 「全ての尺度で同じ定数」

この本は第 23 部から、質量ギャップの問題に二つの方向から近づいてきました。

一本目は時間の方向の道です（第 23・24 部）。揺らぎが均される時間が相関長の二乗で伸びるという**拡散型緩和時間の仮定**（上側は緩和時間の上界の仮定、下側は緩和時間の下界の仮定。23-01 §05）を軸に、格子の上の緩和の時間と相関長を比べました。四次元格子で目指す文は、23-15 §07 の表 5 の物理単位の目標の水準——格子の物理単位の質量 $m_{\mathrm{lat}}(\beta)/a(\beta)$ が正の有限値に向かう——です。片側の橋（23-01 §06）と上界の仮定を合わせてそこへ行くには、上界の仮定の定数 K が $\beta \to \infty$ で一様でなければなりません。

二本目は空間の方向の道です（第 25 部）。空間の二方向を、't Hooft の捩れ $n_{12} = 1$ のある小さなトーラス T^2_L に巻き、残りの平面 $\mathbb{R}^2$ の上で閉じ込めを見ます。T^2_L が十分小さければ、捩れが零モードを消し、理論は L の尺度まで弱結合のままで、渦は分数インスタントンとして扱えます（25-00・25-02）。この道の目標は、横を T^2_L に縮めた二次元の理論の弦の張力 $\sigma_{\mathrm{eff}}(L)$ が**L に一様に正**であること、すなわち

$$\inf_{L \geq L_0} \sigma_{\mathrm{eff}}(L) \;>\; 0 \qquad \text{(物理単位、格子間隔 } a \text{ に一様)} \tag{1}$$

です（一様な板の張力。定義は 26-02）。

二つの目標は、形が同じです。どちらも「ある尺度で成り立つ」ではなく「**全ての尺度で、同じ定数で成り立つ**」という文で、格子間隔 a から物理的な長さ $1/\Lambda$ を越えて大きな尺度まで、途中のどの尺度でも定数が崩れないことを求めます。23-15 §08 の一行——足りないのは段の数ではなく、全ての尺度で同じ定数で成り立つという一様性——は、一本目の道の側から書いたこの型の文でした。一段目（0+1 次元）では $\hbar \to 0$ で一様、四次元格子では $\beta \to \infty$ で一様、と形を変えて現れることも、23-15 §07 の末尾で見ました。

四次元では、弱結合の尺度と強結合の尺度の間に、結合の大きさが 1 の程度になる尺度 $L \sim 1/\Lambda$ があります。Λ は次元転移（4-07）で量子的に生まれる尺度で、格子の単位で測ると $a \to 0$ で発散します。二つの目標の文はどちらも、この尺度を一様な定数で通り抜けなければ成り立ちません。この部では、$L \sim 1/\Lambda$ の前後の尺度の区間を**移り変わりの帯**と呼び、二本の道が着く文を「帯を渡る文」と呼びます。

この合流は、検討の外の整理とも合っています。連続の課題の分け方（16-07 の一様なギャップの課題）では、一様なギャップ $\inf_L \Delta_L > 0$ を一つの課題に置きますが、二本の道はそれを二つの言葉で攻める形になっています。16-09 の証明が含むべき七つの段の表では、帯は「帯の段」に当たります。

02

語の注 — この部の「帯」と第 23・24 部の「窓」は別物

第 23・24 部は「窓」という語を、少なくとも三つの意味で使ってきました。**この部の「帯」は、そのどれとも別物です。**語が一致すると、二本の道が同じ所で止まっているように読めてしまうので、ここで分けておきます。

表 0　「窓」と「帯」の対照と、ほかの語と記号の注

語	意味	使う章	帯との関係
サイトの窓（A_W の窓・窓の印 σ_W・窓の周辺の対数 Sobolev の入力）	0+1 次元の経路の上の、有限個のサイトの区間	23-09	格子の単位で有限の長さ。帯ではない
$\hbar$ の窓	計算機援用で確かめられる $\hbar$ の範囲	23-07・23-08・23-15	パラメータの区間。尺度の区間ではない
時刻の窓（窓の因子 φ・窓の中の上限の命題）	時間の区間に限った試験関数	24-04・24-05	道具の名。帯ではない
移り変わりの帯（帯）	弱結合から強結合へ移る尺度 $L \sim 1/\Lambda$ の前後の区間	第 26 部	—
第 23・24 部の「帯」	23-01 §05・23-15 (5) の「帯の文」（量が長さの二乗の定数倍の幅に入るという言明）、23-09 の $\ell_{\text{帯}}$（頂上の帯に関わる長さ）、24-02 §03・§05 と 24-09 の「二次元の帯」（幅の狭い帯状の格子）。25-07 §06 の二次元の模型の「捩れた帯」も帯状の格子の意味	23-01・23-09・23-15・24-02・24-09・25-07	別の意味の語。この部の帯（尺度の区間）ではない
θ の三つの意味	23-09 の閾 θ（θ_B・θ_σ ほか、配位を谷の側と頂上の側に分ける値）・この部の区画の偏り $\theta(R;T_L^2)$（25-01 の (4)）・Tanizaki–Ünsal の真空角 θ（25-02 で $\theta=0$ と置く）	23-09・25-01・25-02	区画の偏りだけがこの部の量。他の二つは別の量
L と L_0	26-11 では L はブロックの倍率、L_0 は箱の一辺（7-05 と同じ）	7-05・26-11	第 25・26 部の L（T^2 の大きさ）とは別

ほかにも記号の衝突があるので、この部では次の約束で書きます。

- 渦の自由エネルギーが β について単調に増えるという性質は「**β 単調性**」、二倍の格子と粗い格子の渦の自由エネルギーを比べる不等式は「**繰り込みの比較**」と名で呼びます。
- 仮定は名だけで呼びます：**小さな $\mathbf{T^2}$ の基点・枠の減相関・横広げの不等式**（強い形・弱い形）・**一様な板の張力・一様な板のギャップ**。
- チェス盤の密度は κ_{cb} と書きます（第 23 部の κ と区別するため）。

03

尺度のはしご — どの尺度で、どの道具が効くか

図 2 は、空間の方向の道の言葉で、尺度 L（小さなトーラス T^2_L の大きさ、または比べる箱の大きさ）を縦に並べたものです。下が短い距離（格子間隔 a）、上が長い距離です。各行の右端に札を付けます。図 1（論理の流れ）は 16-09 にあります。図 2 の番号と題は 25-00 の図 2 と同じです。

```
尺度 L
  ∞ ┤ 閉じ込めの領域：T²  を広げても失うのは渦の面の位置のエントロピー（対数）だけ     〔読〕
    │    強結合の端：面積則は既知
    │    強結合の端の繰り込みの比較：定数は粗い（記帳は概略）                          〔仮
1/Λ ┤▒▒▒▒ 移り変わりの帯 ▒▒▒▒  繰り込みの比較：(2N, β) の渦の自由エネルギー ≤ K·(N, β
    │    一ループ：揺らぎを整形する比較なら β' = β − 0.258（二倍あたり）              〔
    │    一ループ：揺らぎについて等長的な比較では β' ≥ β + 0.023 の向きしか出ない     〔初
    │    数値：SU(2) は β' ≈ β − 0.2、U(1) は β' > β
    │    非摂動の誤差の評価 ← 空いている所
    │ 希薄な分数インスタントンの気体：弦の張力 ∝ Λ²(ΛL)^(5/3)
    │    余裕 5/3 = 11/3 − 2（漸近自由の係数 − 横の二次元のエントロピー）            〔
 L₀ ┤
    │ 紫外：Bałaban の解析。周期の箱の連続極限は公開された構成（第二巻）              〔仮
  a ┤
```

図 2　尺度のはしご。弱結合の道具（下）と強結合の道具（上）はそれぞれの端で効き、帯（L ~ 1/Λ）の非摂動の評価だけが空いている。札は行ごと。

図の読み方を三点だけ書きます。

(i) 二倍あたりの β の移動。「$\beta' = \beta - 0.258$」は、背景の磁場の中の揺らぎの一ループの熱核の係数 $11/3 = -1/3 + 4$ から出る値で、$\beta = 4/g^2$ の慣例で $\beta - \beta' = 8b_0 \ln 2$、$b_0 = 22/(48\pi^2)$ です。揺らぎを整形する比較ならこの値を再現し、揺らぎについて等長的な比較（恒等写像・平行移動・ゲージ変換・Migdal–Kadanoff 型の間引き）ではスピンの項 $+4$ が一次の評価に寄与せず、$-1/3$ の側の $\beta' \geq \beta + 0.023$（U(1) と同じ向き）しか出ません。どちらも**一ループの水準の文**で、非摂動の比較ではありません。表の分解と計算は 25-07 に置き、比較そのものは 26-06 で扱います。

(ii) 数値の「$\beta' \approx \beta - 0.2$」の条件。$SU(2)$、捩れ $n_{12} = 1$、レプリカ交換と Bennett の受理率の方法による渦の自由エネルギー ΔF の測定で、格子全体を二倍にし（$N_T \times M = 4 \times 8 \to 8 \times 16$ と $4^4 \to 8^4$）、大きい格子の値を小さい格子の β' の曲線に当てはめて読んだ値です。$\beta = 2.5$〜3.0、種は 1〜3 本で、読んだ $\beta - \beta'$ は $+0.13$〜$+0.25$（読みの幅は ± 0.05〜0.1 の程度、種の間の差から誤差は過小評価気味）。$U(1)$ は $\beta = 1.5$、$4 \times 8 \to 8 \times 16$ で $\beta - \beta' < -0.2$（逆向き）。格子は小さく、統計も少ないので、向きの読みであって値の決定ではありません 〔読〕。表は 26-09 に置きます。

(iii) 空いている所。強結合の端と一ループの端は、それぞれ別の道具で押さえられます。真ん中の帯で、比較の誤差を非摂動的に（中程度の結合で、大きな場も含めて）評価する道具がありません。図の「▒」の行が、この部の全体の主題です。

04

帯の内訳 — 八つの部品と、その札

表 1 は、帯を渡る文に関わる部品を、空間の方向の道の言葉で並べたものです。札は行ごと、条件は同じ行に書きます。札の意味は第 23 部の五分類のとおりです：〔初〕紙で証明を置いた・〔典〕原典で確認した既知・〔機〕計算機援用・〔読〕数値の読み（物理の見立ては「物理」と注記）・〔仮〕仮定。Lean の欄は札の外で、名と仮定を並べます。

表 1　帯の内訳（札は行ごと。「—」は機械検査の無い行）

部品	一行の中身	札	同じ行の条件	Lean	章
目標	「区画の偏り θ が尺度に一様に 1 から離れる」では足りない。要るのは $\ln(1/\theta(L,L)) \geq cL^2$（面積の指数）。Tomboulis–Yaffe の不等式で面積則へ	初（不足の論理）・典（Tomboulis–Yaffe）・読（U(1) の勘定、物理）	U(1) の行はクーロン相・長距離で二次元の U(1)・見立て	—	26-01
還元	基点・枠の減相関・横広げの不等式の三つの下で、倍化の反復 $\theta(2R) \leq K\theta(R)^4$ から目標が出る	初（条件つき）	三つの仮定の下。格子の人工物の無い $L \geq L_{\min}(a)$。二進の尺度の列の上で	`Doubling.iterate`・`decay`（反復の代数だけ）	26-02
否定の補題	鏡映正値性・中心と双対の恒等式・転送行列の正値性は $\mathbb{Z}_2$・U(1) でも同じに成り立つので、それだけからは横広げの不等式は出ない	初	「この入力の組だけでは」の形	—	26-04

部品	一行の中身	札	同じ行の条件	Lean	章
電場の流束	$\theta = Y(1)/Y(0) \geq 0$（電場の流束 1 と 0 の分配関数の比。't Hooft の双対性の格子版）	初	$\theta \leq 1$ には捩れた分配関数の正値性を仮定として使う	`FluxDuality`（スペクトルの形の代数）	26-04
非可換の場所	希薄な領域で $\ln(1/\theta) \propto A_D L^{5/3}$、指数の余裕 $5/3 = 11/3 - 2$。U(1) は -2	読（物理）・典（Tanizaki–Ünsal）	希薄な領域・一ループ。「この還元の中で」非可換が効く場所	—	26-03
β 単調性	渦の自由エネルギーが β について増える。格子単位の弦の張力の β 単調性と同じ重さの問題	仮（SU(2) では未証明）	証明があるのは限られた場合（二次元の小さな格子・固定した格子で $\beta \to 0$ と $\beta \to \infty$ の近く）だけで、本には置かない	—	26-06
繰り込みの比較	$(2N, \beta)$ の渦の自由エネルギー $\leq K \cdot (N, \beta')$、$\beta' < \beta$。漸近自由が入るのはここだけ	初（一ループの水準）・読（二倍の試験）・仮（非摂動の比較）	強結合の側は定数の粗い記帳、弱結合の側は一ループの水準。U(1) は逆向き	—	26-06
チェス盤	z の鏡映正値性の下で、枠の減相関を一つの密度 κ_{cb} に置き換える。帯は一様な板の張力と一様な板のギャップに集約	初（L を固定したチェス盤）・仮（一様な板の張力・一様な板のギャップ）	L を固定すれば。L に一様にするのは開	`ReflPos`（核の代数）	26-05

Lean の欄が保証するのは、有限和と実数の代数だけです。θ が区画の偏りであること、Haar 測度、転送行列の正値性は Lean の外にあります。名と仮定は各章の分類表に書きます。

表 1 の行のうち、**非可換の力学が入るのは「横広げの不等式」と「一様な板の張力」に関わる行だけ**です（還元の第三の仮定・非可換の場所・繰り込みの比較）。そこは U(1) と $\mathbb{Z}_2$ で破れる形をしています。他の行は、どの群でも成り立つ構造的な事実か、論理の整理です。

05

目標の水準の合流と、壁の水準の違い

「二本の道が同じ壁に着く」という言い方は、**目標の水準では正しく、いま止まっている壁の水準では正確ではありません。**

正しい部分は §01 のとおりです。第 23 部の四次元の目標（23-15 の物理単位の目標の水準：上界の仮定と片側の橋が $\beta \to \infty$ で同じ定数）も、空間の方向の道の目標 (1) も、帯を必ず渡る文です。

正確でない部分は、第 23 部の**いまの壁**です。23-09 §06 の「頂上の曲率の不足の壁」（頂上の一サイトの対角 $15/4$ と結合の和 4 が釣り合わないこと）は、0+1 次元の二重井戸の上の、階段の一段目の壁でした。そこで移り変わる長さは、頂上の Jacobi の方程式の最初の共役点で決まる**古典的な**長さで、$\hbar$ に依らず、格子の単位で有限です。帯で移り変わる長さ $1/\Lambda$ は量子的に生まれ、格子の単位で発散します。表 2 に違いを並べます。

表 2　一段目の壁と帯（詳しくは 26-07）

	一段目の壁（第 23 部）	**移り変わりの帯（第 26 部）**
場所	0+1 次元・二重井戸・$\varepsilon = \frac{1}{2}$ の格子	四次元格子・$SU(2)$
移り変わる長さ	頂上の最初の共役点（古典的・$\hbar$ に依らない）	$1/\Lambda$（次元転移で量子的に生まれる）
格子の単位での大きさ	有限	$a \to 0$ で発散
両端の道具	短い鎖は凸性、長い鎖は混合	弱結合は一ループと紫外の解析、強結合は展開
型	同じ：両端に別の道具があり、真ん中で最悪の配位の評価が止まり、平均の道具に移ると一様性が出る見込みがある	

だから、一段目の壁は帯の**縮図**ではあっても、帯そのものではありません。一段目では、移り変わる長さを越える有限のブロックと強い混合で渡る道が考えられますが（札は〔仮〕）、四次元では「移り変わる長さを越える有限のブロック」がありません。この違いと、型の同じところを、26-07 で時間の側から書きます。違いの理由——四次元の結合が無次元で、古典的な長さを持たないこと——は 24-07 §01 にあります。

06

第 26 部の地図 — 十三章と、24-07 の一行

表 3　第 26 部の章（札は各章の主な行。条件は同じ行に）

章	題	一行	主な札と条件
26-00	入口 — 合流	この頁	地図（物理の図＋各行の札）
26-01	帯の正しい形	θ が 1 から離れるでは足りず、$\ln(1/\theta(L,L)) \geq cL^2$ が要る	〔初〕不足の論理・〔典〕Tomboulis–Yaffe・〔読〕U(1) の勘定（物理）
26-02	一つの不等式への還元	横広げの不等式（強い形・弱い形）と倍化の反復。条件つきの還元の定理	〔初〕基点・枠の減相関・横広げの三つの仮定の下
26-03	非可換が効く唯一の場所	$5/3 = 11/3 - 2$・U(1) と $\mathbb{Z}_2$ の対照	〔読〕物理（希薄な領域・一ループ。「この還元の中で」）

章	題	一行	主な札と条件
26-04	構造だけでは渡れない	鏡映正値性・双対性・転送行列は $\mathbb{Z}_2$ ・U(1) でも同じ。$\theta = Y(1)/Y(0) \geq 0$	〔初〕「この入力の組だけでは」
26-05	チェス盤と同時の反転	枠の減相関を密度 κ_{cb} に。帯は一様な板の張力と一様な板のギャップに集約	〔初〕L を固定すれば・〔仮〕一様性
26-06	繰り込みの比較 ― 群を区別する比較	帯 ＝ β 単調性＋繰り込みの比較。漸近自由が入るのは $\beta' < \beta$ だけ	〔初〕一ループの水準・〔読〕二倍の試験・〔仮〕非摂動
26-07	時間の側から見た帯	第 23 部の道で帯に当たる文の形。一段目の壁は帯の縮図だが帯ではない	〔初〕最初の共役点の計算・〔仮〕帯を渡る文そのもの
24-07	四次元だからこそ	第 24 部に残す。無次元の結合と位相――帯の長さが量子的に生まれる理由	各行の札は 24-07 のとおり
26-08	試して止まった道の地図	試した道と、止まった理由。Tomboulis（2007）の主張と、U(1) を区別しないという批判	〔典〕照合の済んだ文献だけ・照合未了は明記
26-09	測った記録	T^2 を広げると U(1) の渦は高くなり SU(2) は高くならない。板の張力は増えて飽和。格子を二倍にした試験	〔読〕格子の大きさ・β・種の数・誤差を各行に
26-10	新しい見方の候補	真ん中の帯の四つの顔。検討の結果、否定的だった見方も	〔読〕物理の見立て
26-11	紫外の制御 ― 無限個の段で閉じるとは何か	両方の道の下にある土台。一段で閉じるとは何か・三つの難しさ・連作の五段と止まった場所・言明の案	〔初〕背景と揺らぎの分解の補題・結合の小ささの帰納の補題（一段の剰余＝結合の一段の正味の括弧は未証明）・〔典〕Bałaban の連作の五段・〔読〕一リンクの熱核の類（一リンク・登録範囲）・〔仮〕捩れた小さな四次元トーラスの紫外の言明（案・未証明）
26-12	帯の議論の篩 ― 七つの試験の相手	U(1) のほかに六つの相手を置き、議論の型ごとに落とす相手を並べる。本書の定理と帯の候補の言明を、相手ごとに真・偽・定義されないに分けた表	〔典〕・〔読〕・〔初〕・〔仮〕（文献で確かめたものだけを典に。小さい格子の計算は条件つき）

読む順は番号どおりを勧めます。26-01 と 26-02 で帯を一つの不等式まで絞り、26-03〜26-05 でその不等式のどこに何が入るかを見て、26-06 と 26-07 で二つの方向から帯そのものを眺めます。26-08〜26-10 は記録と候補です。26-11 は二本の道の下にある土台（紫外の制御）で、条件の台帳の「紫外の制御」の行の中身です。26-12 は、帯の議論を試す相手の一覧です。条件つきの言明全体は第 27 部（27-01）でまとめます。

```
07
```

五分類の表と依存グラフ

表 1 と表 3 の行の札は、それぞれの章の分類表で確定します。この頁が自分で置く行は次の十二です。

表 4　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	Λ は次元転移で生まれ、格子の単位で $a \to 0$ で発散する	典	4-07	一ループ・二ループの流れ	—
2	揺らぎを整形する比較で $\beta - \beta' = 8b_0 \ln 2 = 0.258$	初	25-07	一ループの水準・二倍あたり	—
3	揺らぎについて等長的な比較では $\beta' \geq \beta + 0.023$ の向きしか出ない	初	25-07	一ループの水準	—
4	二倍の試験：SU(2) で $\beta - \beta' \approx +0.13$〜$+0.25$、U(1) で逆向き	読	§03 (ii)・26-09	$4 \times 8 \to 8 \times 16$・$4^4 \to 8^4$・$\beta = 2.5$〜$3.0$・種 1〜3 本	—
5	小さな T^2 の弦の張力 $\propto \Lambda^2 (\Lambda L)^{5/3}$	典	Tanizaki–Ünsal 式 (2.37)	希薄な領域・一ループ	—
6	余裕 $5/3 = 11/3 - 2$（漸近自由の係数が横のエントロピーに勝つ）	読（物理）	26-03	希薄な領域・一ループ	—
7	強結合では面積則	典	5-02	小さな β	—
8	強結合の端の繰り込みの比較	仮	26-06（記帳は概略）	極めて小さな β	—
9	紫外の制御（捩れた小さな T^2 の箱。周期の立方の箱での連続極限は公開された構成が示した。第二巻）	仮	7-07・27-02	a から L_0 まで	—
10	二本の道の目標はどちらも「全ての尺度で同じ定数」の文で、帯を渡る	読（物理）	§01	目標の水準	—
11	一段目の壁の移り変わる長さは古典的で、格子の単位で有限	初	26-07 §02	0+1 次元・$\varepsilon = \frac{1}{2}$	—
12	一段目の壁は帯の縮図であって帯ではない	読（物理）	§05	型の比較	—

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  典  次元転移：Λ は量子的・格子の単位で発散                    4-07
 2  初  整形した比較で β − β' = 0.258                          一ループの水準
 3  初  等長的な比較は β' ≥ β + 0.023 の向き                   一ループの水準
 4  読  二倍の試験：SU(2) は β' < β、U(1) は逆                  小さな格子・種 1〜3 本
 5  典  弦の張力 ∝ Λ²(ΛL)^(5/3)                               希薄・一ループ
 6  読  余裕 5/3 = 11/3 − 2 ⟸ 5                               物理
 7  典  強結合の面積則                                         小さな β
 8  仮  強結合の端の繰り込みの比較                             記帳は概略
 9  仮  紫外の制御                                             a から L₀
10  読  二本の道の目標は同じ型で帯を渡る ⟸ 1                   目標の水準
11  初  一段目の移り変わる長さは古典的・有限                   26-07 §02
12  読  一段目の壁は帯の縮図で帯ではない ⟸ 1・10・11
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。図 2 の行は、表 4 の整形した比較から紫外の制御までの行の並べ直しで、図そのものは新しい節点を作りません。結論の側の節点（二本の道の目標が同じ型であること、一段目の壁が帯の縮図であること）は「読（物理）」で、帯を渡る文そのもの（一様な板の張力、上界の仮定の一様性）の節点はこの頁にありません。それは仮定として第 27 部の条件の台帳に置かれます。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
読 （物理） 二本の道の目標が同じ型（全ての尺度で同じ定数）で、どちらも帯を渡ること	帯を渡ること。二本の道のどちらかの目標
初 帯の比較の、一ループの水準での向き（整形した比較と等長的な比較の差）	非摂動の比較。帯の中程度の結合での誤差の評価
読 小さな格子の二倍の試験で SU(2) と U(1) の向きが分かれること	値の決定。大きな格子での振る舞い
読 （物理） 一段目の壁は帯の縮図であって帯ではないこと	一段目の壁を越えること。一段目の道具が帯を渡るかどうか

出典と再現

もの	種別	出典・道具
小さな捩れた T^2 の弦の張力	典	Y. Tanizaki, M. Ünsal, arXiv:2201.06166（Prog. Theor. Exp. Phys. 2022）式 (2.32)・(2.37)。章 25-02
Wilson ループの上界（渦の自由エネルギーから）	典	E. T. Tomboulis, L. G. Yaffe, Commun. Math. Phys. 100 (1985) 313。T. Kanazawa, arXiv:0808.3442（SU(N) への一般化）。章 26-01

もの	種別	出典・道具
強結合の面積則・次元転移・紫外の多重尺度の解析	典	章 5-02・4-07・7-07 の出典
一ループの熱核の係数と二倍あたりの移動	初	章 25-07（一ループの水準）
二倍の試験の数値	読	レプリカ交換と Bennett の受理率の方法。章 26-09 の表（格子の大きさ・β・種・誤差）
第 23 部の目標と一段目の壁	本書	23-15 §07・§08・23-09 §06・24-07 §01

この章で使った語 ― 移り変わりの帯（帯）・尺度のはしご・一様な板の張力・横広げの不等式・枠の減相関・小さな T^2 の基点・β 単調性・繰り込みの比較・チェス盤の密度 κ_{cb}・拡散型緩和時間の仮定。意味は A-02 用語集 と A-06 名前の索引 にあります。

次に読む章：26-01 帯の正しい形 ― 「θ が 1 から離れる」では足りない理由。

帯の正しい形

この章は本書の検討です。§06 は未解決の地図です。

この章で分かること — 帯を渡る文を、区画の偏り θ の言葉でどう書くべきか。「θ が尺度に一様に 1 から離れている」という素朴な形では足りないこと——その形から容器の評価で出る弦の張力の下界は $\ln(1/\theta_0)/L^2$ で、$L \to \infty$ で 0 になること、そして弱結合の四次元 U(1) がその形を満たすと見立てられること。要るのは、偏りが面積の指数で小さくなる形 $\ln(1/\theta(L,L)) \geq cL^2$ で、これは 't Hooft の閉じ込めの判定を枠で条件づけた局所の形です。Tomboulis–Yaffe の不等式が、渦の自由エネルギーの面積の指数の減衰を面積則に結ぶことも見ます。

前提となる章 — 26-00（帯）・25-01（捩れと 't Hooft の流束）・25-03（容器と区画の偏り）・25-04（板の閉じ込め）・5-06（U(1) と非可換）。

先に言うこと — この章の証明は初等的な不等式の操作だけです。U(1) のクーロン相の勘定は有効理論による見立てで（〔読〕、物理）、定理ではありません。「素朴な形が足りない」という結論のうち、紙で言えるのは「その形から容器の評価で出る下界は 0 に向かう」という部分で、「その形からはどの道でも閉じ込めが出ない」という部分は U(1) の見立ての上に立ちます。この章は閉じ込めも、正しい形 (7) も示しません。

この章の順序

1. 素朴な形 — θ が尺度に一様に 1 から離れる
2. 素朴な形から出るもの — 張力の下界は L→∞ で 0
3. U(1) のクーロン相の勘定 — 素朴な形を満たし、閉じ込めない
4. 正しい形 — 面積の指数と Tomboulis–Yaffe の不等式
5. 試金石 — U(1)・$\mathbb{Z}_2$・SU(2) での振る舞い（表 1）
6. この形が帯に課すもの
7. 五分類の表と依存グラフ

01

帯の素朴な形 — θ が尺度に一様に 1 から離れる

記号を 25-03 から受け取ります。格子 $(\mathbb{Z}/L)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ の上の $SU(2)$ の Wilson 作用を、Mack–Petkova の捩れを和に取ったアンサンブル（リンク U と、閉じた ± 1 の変数 z_p、重み $\exp(\frac{\beta}{2}\sum_p z_p \operatorname{tr} U_p)$）で書き、横の二方向 1・2 には背景の捩れ $n_{12}=1$ を固定します。平面（方向 3・4）の中の円板または正方形 D に対し、**容器**を $D \times T_L^2$、その**区画**を D を通る $\mathbb{Z}_2$ の流束 $\sigma_D = \prod_{p \in D \times \{y_0\}} z_p$、容器の外の全ての変数（**枠**）$\Phi$ で条件づけた**区画の偏り**を

$$\theta_D(\Phi) \;:=\; \big|\, \mathbb{E}[\sigma_D \mid \Phi] \,\big| \;\in [0,1] \tag{1}$$

とします。大きさ R の容器で横が T_L^2 のときの典型的な枠での値を $\theta(R;T_L^2)$、とくに $\theta(L,L) := \theta(L;T_L^2)$ と書きます。枠を与えると容器の中は条件つきで独立で、平面の中のループ C の内側の互いに素な容器 D_j について

$$|\langle W(C)\rangle| \;\le\; \mathbb{E}\prod_j \theta_{D_j}(\Phi) \tag{2}$$

が成り立ちます（Mack–Petkova の容器の評価 典 、25-03）。

空間の方向の道は、小さな T_L^2 では閉じ込めが見え（25-04）、それを $L \to \infty$ へ運べば $\mathbb{R}^4$ の閉じ込めになる、という筋でした。そこで最初に思いつく帯の文は、次の**帯の素朴な形**（以下、素朴な形）です。

$$\text{(素朴な形)} \qquad \sup_{L \ge L_0} \theta(L,L) \;\le\; \theta_0 \;<\; 1 \qquad \text{(典型的な枠で、格子間隔 } a \text{ に一様)} \tag{3}$$

「容器と横のトーラスを一緒に大きくしても、区画の偏りが 1 に張り付かない」——乱れが全ての尺度で残る、という文です。

02

素朴な形から出るもの — 張力の下界は L→∞ で 0

素朴な形の張力の下界 初 　ある L で、平面を一辺 L の正方形の容器で敷き詰めたとき、(2) の右辺の積が定数 $C_{\mathrm{D}} \ge 1$ の違いを除いて各因子の積に分かれ（枠の減相関 仮 ）、各因子が θ_0 以下だとする。このとき、面積 A の正方形のループ C（一辺が L の倍数）について

$$|\langle W(C)\rangle| \;\le\; C_{\mathrm{D}}\, \theta_0^{\,A/L^2} \;=\; C_{\mathrm{D}}\, e^{-\sigma_L A}, \qquad \sigma_L := \frac{\ln(1/\theta_0)}{L^2}. \tag{4}$$

証明　C の内側に一辺 L の正方形の容器を A/L^2 個並べ、(2) と仮定を使うと $|\langle W(C)\rangle| \le C_{\mathrm{D}} \prod_j \theta_0 = C_{\mathrm{D}} \theta_0^{A/L^2}$。指数を書き直せば (4)。∎

(4) の張力 σ_L は各 L で正です。しかし素朴な形 (3) が与えるのは 一つの 定数 θ_0 だけなので、この道で得られる張力の下界は $\ln(1/\theta_0)/L^2$ で、四次元の極限（板 $T^2_L \times \mathbb{R}^2$ が $\mathbb{R}^4$ に近づく $L \to \infty$）で 0 に向かいます。物理単位で書けば、L を $1/\Lambda$ の何倍にとっても下界は $\Lambda^2 \ln(1/\theta_0)/(L\Lambda)^2$ で、一様な張力を与えません。

ここで言えているのは「(3) から**容器の評価で**出る下界は 0 に向かう」ことです。(3) が成り立つ理論が閉じ込めないことは、素朴な形の張力の下界からは出ません。次の節の U(1) の見立てが、その一段を埋めます。

03

U(1) のクーロン相の勘定 — 素朴な形を満たし、閉じ込めない

同じ容器の言葉を四次元のコンパクトな $U(1)$ に当てはめます（捩れは ± 1 の値の中心の流束として同じに入ります）。以下は有効理論による見立てです 読 （物理）。

弱結合の $U(1)$ はクーロン相にいて、板 $T^2_L \times \mathbb{R}^2$ の上では、長い距離で横を積分した二次元の $U(1)$ になり、その結合は e^2/A_T（$A_T = L^2$ は T^2 の面積）です。二次元の $U(1)$ で面積 A_D の領域を通る流束 Φ の分配関数は、巻き付き k についての Poisson の和で

$$Z(\Phi) \;\propto\; \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ik\Phi}\, e^{-e^2 A_D k^2/(2A_T)} \tag{5}$$

と書けます。区画 $\sigma_D = \pm 1$ は $\Phi = 0$ と $\Phi = \pi$ に当たるので、$q := e^{-e^2 A_D/(2A_T)}$ が小さいとき

$$\theta(R; T^2_L) \;=\; \frac{Z(0) - Z(\pi)}{Z(0) + Z(\pi)} \;\approx\; 2q \;=\; 2\exp\!\Big(-\frac{e^2 A_D}{2A_T}\Big). \tag{6}$$

容器の大きさを $R = L$ にとると A_D/A_T は L に依らない数（正方形なら 1）なので、$\theta(L, L)$ は L に依らない定数で、素朴な形 (3) を満たします。一方、弱結合の四次元 $U(1)$ が閉じ込めないことは定理です（Guth 1980・Fröhlich–Spencer 1982、Villain 型の作用 典 、5-06）。二つを合わせると、**(3) は閉じ込めを導けない**、という結論になります。ただし (6) は見立てなので、この結論も同じ札 〔読〕（物理）を持ちます。

(6) は二次元に縮めた U(1) の弦の張力 $\sigma \sim e^2/(2L^2)$ と整合します。板の上の U(1) は閉じ込めますが、その張力は $1/L^2$ で 0 に向かいます。素朴な形の張力の下界の $\ln(1/\theta_0)/L^2$ は、ちょうどこの振る舞いと同じ形です。

注　最初に試した古典的なエネルギーの勘定（流束 π を半径 L の容器に一様に広げたエネルギー $(\beta/2)(\pi/L^2)^2 L^4 = \beta\pi^2/2$ が L に依らない）も同じ結論を与えますが、巻き付き k の和を落としているので、(5)・(6) の形を本文に置きます。

04

帯の正しい形 — 面積の指数

一様な張力を出すには、偏りが容器の面積の指数で小さくならなければなりません。物理単位で

$$\text{(正しい形)} \qquad \ln\frac{1}{\theta(L,L)} \;\geq\; c\,L^2 \qquad (L \geq L_0,\ \text{典型的な枠で、}a\ \text{に一様}) \tag{7}$$

です。これが帯の正しい形です。容器の評価の側から見れば、(7) は張力が L に依らない形にそのままなります。

面積の指数からの面積則 初　素朴な形の張力の下界と同じ枠の減相関の仮定の下で、一辺 L の容器で $\theta \leq e^{-cL^2}$ なら、一辺が L の倍数の正方形のループについて $|\langle W(C)\rangle| \leq C_{\mathrm{D}}\, e^{-cA}$。

証明　素朴な形の張力の下界の証明で θ_0 を e^{-cL^2} に替えると $C_{\mathrm{D}}(e^{-cL^2})^{A/L^2} = C_{\mathrm{D}}e^{-cA}$。∎

(7) は、't Hooft の閉じ込めの判定——渦（中心の流束）の自由エネルギーが断面の面積の指数で小さくなること——を、枠で条件づけた局所の形にしたものです。大域の形は、捩れた境界条件の分配関数で書けます。トーラスの上で、ループの平面 $\mu\nu$ に捩れの流束を入れた分配関数 Z_- と入れない Z_+ の比で渦の自由エネルギーを $e^{-F_v} := Z_-/Z_+$ と定めると、区画の偏りの大域版は

$$\theta \;=\; \frac{Z_+ - Z_-}{Z_+ + Z_-} \;=\; \tanh\frac{F_v}{2} \tag{8}$$

です（定義から、初）。$\tanh x \leq x$ と、$0 \leq \theta \leq 1/\sqrt{2}$ で $\operatorname{artanh}\theta \leq \theta/(1-\theta^2) \leq 2\theta$ から $\theta \leq F_v/2 \leq 2\theta$ なので、$\ln(1/\theta) \geq cL^2$ と $F_v \lesssim e^{-cL^2}$ は定数の違いを除いて同じ条件です。

大域の形を面積則に結ぶのが Tomboulis–Yaffe の不等式です 典。$SU(2)$ の格子ゲージ理論で、周期 L_μ, L_ν の方向の平面にある長方形 C（面積 A_C）について

$$\langle W(C)\rangle \;\leq\; 2\Big\{\tfrac{1}{2}\big(1 - e^{-F_v}\big)\Big\}^{A_C/(L_\mu L_\nu)} \tag{9}$$

が成り立ちます。ここで F_v は C と同じ平面の捩れの流束の自由エネルギーで、渦の面は残りの二方向を巻いて C と一度まわります（板の背景の捩れ n_{12} とは別の捩れです）。T. Kanazawa はこの不等式を $SU(N)$ と一般の古典的なスピン系へ、鏡映正値性を使って拡張しました 典。

Tomboulis–Yaffe からの張力の下界 初　(9) の下で、$F_v \le e^{-\rho L_\mu L_\nu}$（$\rho > 0$ はトーラスの大きさに依らない）なら $\langle W(C)\rangle \le 2e^{-\rho A_C}$、すなわち弦の張力は ρ 以上。

証明　$1 - e^{-F} \le F$ から $\frac{1}{2}(1 - e^{-F_v}) \le \frac{1}{2} e^{-\rho L_\mu L_\nu}$。$A_C/(L_\mu L_\nu)$ 乗すると $2^{-A_C/(L_\mu L_\nu)} e^{-\rho A_C} \le e^{-\rho A_C}$。∎

ρ は 't Hooft の弦の張力と呼ばれます。Tomboulis–Yaffe からの張力の下界の仮定と (7) は同じ型の条件です——前者は大域の分配関数の比、後者は枠で条件づけた容器の偏りです。大域の形は枠の減相関を要しない代わりに、基点（小さな T^2 での評価）も大域の分配関数で示す必要があります（26-02 の注）。

05

試金石 — U(1)・$\mathbb{Z}_2$・SU(2) での振る舞い

帯を渡る議論は、閉じ込めない理論では失敗しなければなりません。素朴な形 (3) はこの試金石に通らず、正しい形 (7) は通る見込みです。表 1 の振る舞いは全て見立てです 読　（物理）。

表 1　$\theta(L, L)$ の振る舞い（見立て。四次元・弱結合）

理論	L を大きくしたときの $\theta(L, L)$	素朴な形 (3)	正しい形 (7)	閉じ込め
$U(1)$（クーロン相）	一定（(6)）	満たす	満たさない	しない 典
$\mathbb{Z}_2$（弱結合）	1 に近づく（流束が T^2 の面積の壁を作る）	満たさない	満たさない	しない
$SU(2)$	0 に近づく（期待）	満たす（期待）	満たす（期待）	する（物理の期待）

素朴な形を**満たす**ことは、閉じ込めの試金石になりません。U(1) が満たすからです。「U(1) で失敗すること」は、「θ が L とともに面積の指数で小さくならないこと」として課すのが正しい言い方です。

06

この形が帯に課すもの

(7) は、帯の両側をつなぐ文です。小さな L（希薄な分数インスタントンの領域）では、$\ln(1/\theta)$ は弦の張力 $\propto \Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}$ と容器の面積の積で増える見込みで（26-03）、大きな L（閉じ込めの領域）では σL^2 から渦の面の位置のエントロピーの対数を引いた形になる見込みです 読　（物理）。(7) はその間——$L \sim 1/\Lambda$——を、一つの定数 c で通すことを求めます。

(7) より弱い途中の到達点も、二つ名指しできます。

- (a) $F_v(L,L) \to 0$：閉じ込めない相の排除。素朴な形よりは強いが、張力の一様な下界は与えない。
- (b) $\ln(1/\theta(L,L)) \geq cL^2/\ln L$：ほぼ面積則。素朴な形の張力の下界の形で張力の下界は $c/\ln L$ で、まだ一様ではない。

どちらも未解決です。

この章の結論は、第 25 部の道具の位置づけも変えます。流れの補題 $\theta \leq 1-a$（25-06）は、一段の核の反転の確率 a が $\frac{1}{2}$ 程度にしかなれないので、$\theta_0 \sim \frac{1}{2}$ の形――素朴な形 (3)――の評価しか与えません。だからその道具は帯の試験には使えず、L を固定した板の張力の下界を推す用途に限られます 初 。

次の章 26-02 では、(7) を、容器を固定して横のトーラスだけを広げる一つの不等式に還元します。

07

五分類の表と依存グラフ

表 2　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	容器の評価 (2)	典	Mack–Petkova・25-03	捩れを和に取ったアンサンブル	—
2	枠の減相関（(2) の積が定数 C_{D} の違いを除いて分かれる）	仮	A-06	—	—
3	素朴な形の張力の下界：素朴な形から容器の評価で出る張力の下界は $\ln(1/\theta_0)/L^2 \to 0$	初	§02 の証明	枠の減相関の下・一辺 L の倍数のループ	—
4	弱結合の四次元 U(1) は閉じ込めない	典	Guth・Fröhlich–Spencer（5-06）	Villain 型の作用	—
5	U(1) のクーロン相で $\theta \approx 2\exp(-e^2 A_D/(2A_T))$、$\theta(L,L)$ は一定	読（物理）	§03	クーロン相・長距離で二次元の U(1)・見立て	—
6	素朴な形は閉じ込めを導けない	読（物理）	§03	U(1) のクーロン相の見立ての上	—
7	$\theta = \tanh(F_v/2)$、$\theta \leq F_v/2 \leq 2\theta$（$\theta \leq 1/\sqrt{2}$）	初	§04	大域の形	—
8	Tomboulis–Yaffe の不等式 (9)	典	Tomboulis–Yaffe（式の形は Kanazawa の再述で確認）	$SU(2)$・格子・トーラス	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
9	(9) の $SU(N)$・古典スピン系への拡張	典	Kanazawa（要旨）	鏡映正値性の下	—
10	Tomboulis–Yaffe からの張力の下界：$F_v \le e^{-\rho L_\mu L_\nu}$ なら張力 $\ge \rho$	初	§04 の証明	Tomboulis–Yaffe の不等式の下	—
11	面積の指数からの面積則：$\theta \le e^{-cL^2}$ なら $\lvert\langle W\rangle\rvert \le C_{\mathrm{D}} e^{-cA}$	初	§04 の証明	枠の減相関の下	—
12	表 1 の振る舞い（U(1) 一定・$\mathbb{Z}_2$ は 1 へ・SU(2) は 0 へ）	読（物理）	§05	四次元・弱結合・見立て	—
13	流れの補題は素朴な形の評価しか与えない	初	§06・25-06	一段の核	—

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  典  容器の評価 |W| ≤ E∏θ                                  捩れを和に取ったアンサン
 2  仮  枠の減相関（定数 C_D）
 3  初  素朴な形の下界 ln(1/θ₀)/L² → 0 ⟸ 1・2
 4  典  弱結合の四次元 U(1) は閉じ込めない                    Villain 型
 5  読  U(1) のクーロン相の θ は L に依らない                 見立て
 6  読  素朴な形は閉じ込めを導けない ⟸ 3・4・5
 7  初  θ = tanh(F_v/2)・θ ≤ F_v/2 ≤ 2θ                      大域の形
 8  典  Tomboulis–Yaffe の不等式                             SU(2)
 9  典  SU(N) への拡張                                       要旨
10  初  F_v ≤ e^(−ρLL) なら張力 ≥ ρ ⟸ 8
11  初  θ ≤ e^(−cL²) なら |W| ≤ C_D e^(−cA) ⟸ 1・2
12  読  表 1 の振る舞い ⟸ 5                                   見立て
13  初  流れの補題は素朴な形の評価だけ ⟸ 3
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。この章の結論の節点のうち、紙で立つのは、素朴な形の張力の下界・Tomboulis–Yaffe からの張力の下界・面積の指数からの面積則・流れの補題の評価の四つで、どれも仮定の行（枠の減相関）か文献の行（Tomboulis–Yaffe の不等式）の上の初等的な操作です。「素朴な形は足りない」の全体は、見立ての行（U(1) のクーロン相の勘定）を前提に持つので「読（物理）」です。正しい形 (7) そのものの節点はありません。それは帯の文で、この章は示しません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 素朴な形から容器の評価で出る張力の下界は $\ln(1/\theta_0)/L^2$ で 0 に向かう（枠の減相関の下）。面積の指数の形なら張力は一様（同じ仮定の下）	枠の減相関そのもの。正しい形 (7)
典 ＋初 Tomboulis–Yaffe の不等式から、渦の自由エネルギーの面積の指数の減衰で張力の下界	大域の渦の自由エネルギーの減衰そのもの
読 （物理） U(1) のクーロン相は素朴な形を満たす。だから素朴な形はどの道でも閉じ込めを導けない	(6) の定理としての証明。U(1) の有効理論の誤差の評価
読 （物理） 試金石の表 1	SU(2) で $\theta(L,L)\to 0$ となること

出典と再現

もの	種別	出典・道具
Tomboulis–Yaffe の不等式 (9)	典	E. T. Tomboulis, L. G. Yaffe, Commun. Math. Phys. 100 (1985) 313。式の形と設定は T. Kanazawa, arXiv:0805.2742 の式 (1) と arXiv:0808.3442 の再述で確認（原論文の本文は未入手）
$SU(N)$ への拡張	典	T. Kanazawa, Generalizing the Tomboulis–Yaffe inequality to SU(N) lattice gauge theories and general classical spin systems, arXiv:0808.3442（要旨で確認）
容器の評価・捩れを和に取ったアンサンブル	典	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 123 (1979) 442・125 (1980) 117。章 25-03
't Hooft の流束と閉じ込めの判定	典	G. 't Hooft, Nucl. Phys. B153 (1979) 141。章 25-01
四次元 U(1) の非閉じ込め	典	A. H. Guth, Phys. Rev. D 21 (1980) 2291。J. Fröhlich, T. Spencer, Commun. Math. Phys. 83 (1982) 411。章 5-06
U(1) のクーロン相の勘定 (5)・(6)	読	本文 §03（有効理論の見立て。Poisson の和）
素朴な形の張力の下界・面積の指数からの面積則・Tomboulis–Yaffe からの張力の下界・(8) の評価	初	本文 §02・§04 の証明

この章で使った語 — 容器・区画・枠・区画の偏り θ・素朴な形・正しい形（面積の指数）・渦の自由エネルギー F_v・'t Hooft の弦の張力・枠の減相関・試金石。意味は A-02 用語集 と A-06 名前の索引 にあります。

次に読む章：26-02 一つの不等式への還元 — 正しい形を、横を広げる一つの不等式へ。

一つの不等式への還元

この章は本書の検討です。§08 は未解決の地図です。

この章で分かること — 帯の正しい形 $\ln(1/\theta(L,L)) \geq cL^2$（26-01）を、三つの仮定——小さな T^2 の基点・枠の減相関・横広げの不等式——の下で導く**条件つきの還元の定理**と、その証明。容器を平面の方向に広げる入れ子と、容器を固定して横の T^2 を広げる不等式を交互に使い、偏りの列 t_k が $t_{k+1} \leq K t_k^4$ を満たすことから面積の指数の減衰を出します（倍化の反復）。横広げの不等式の強い形と弱い形、強い形が閉じ込めより強いこと（板の張力の単調性を含む）、格子の人工物の無い尺度 $L \geq L_{\min}(a)$ に制限して述べる理由も見ます。

前提となる章 — 26-01（記号・容器の評価・面積の指数からの面積則）・25-03（容器の入れ子）・25-04（板の閉じ込め）・A-04（Lean）。

先に言うこと — 条件つきの還元の定理と弱い形での還元の定理は条件つきで、三つの仮定のどれも示されていません。とくに横広げの不等式は、この還元の中で非可換の力学が入る唯一の場所で、帯の難しさはそこに移っただけです。結論は二進の尺度の列 $R_k = 2^k R_0$ の上の文で、定数が格子間隔 a に一様かどうかは仮定の定数が一様かどうかで決まります。Lean で検査したのは反復の実数の代数だけです。

この章の順序

1. 二つの動き — 平面の方向の入れ子と、横の T^2 を広げること
2. 三つの仮定 — 基点・枠の減相関・横広げの不等式（強い形・弱い形）
3. 条件つきの還元の定理と証明
4. 弱い形での還元の定理と、跳躍の段の代わり
5. 横広げの不等式の強い形は閉じ込めより強い — 板の張力の単調性
6. 格子の人工物と $L_{\min}(a)$
7. Lean の言明を読む — Doubling（`Doubling.iterate` ・ `Doubling.decay`）
8. 残るもの

9. 五分類の表と依存グラフ

01

二つの動き — 平面の方向の入れ子と、横の T^2 を広げること

記号は 26-01 §01 のとおりです。$\theta(R;T_L^2)$ は、平面の方向の大きさ R の容器 $D_R\times T_L^2$ の、典型的な枠での区画の偏りで、$\theta(R,R):=\theta(R;T_R^2)$ と書きます。目標は、物理単位で一様な $c>0$ について

$$\ln\frac{1}{\theta(R,R)}\ \geq\ c\,R^2 \tag{1}$$

です。$\theta(R;T_L^2)$ を変える動きは二つあります。

平面の方向の入れ子。T_L^2 を固定したまま、大きな容器 R を内部の枠 Φ_{int} で小さな容器 $R_1,\dots,R_k$ に分けると、枠を条件づけたとき小さな容器は独立なので

$$\bigl|\mathbb{E}[\sigma_R\mid\Phi_R]\bigr|\ \leq\ \mathbb{E}\Bigl[\prod_i\theta_{R_i}\,\Bigm|\,\Phi_R\Bigr] \tag{2}$$

が成り立ちます（Mack–Petkova の容器の恒等式の入れ子の形 典、25-03）。容器を s 倍にすると、右辺は s^2 個の因子の積です。因子が典型的な値に近く、互いに独立に近ければ $\theta(sR;T_L^2)\approx\theta(R;T_L^2)^{s^2}$ で、乱れは大きな尺度へ伝わります。ただしこれは T^2 を固定した板の中の話で、板の閉じ込め（25-04）と同じ内容です。

横の T^2 を広げること。(1) は容器と横のトーラスを*一緒に*大きくすることを求めます。入れ子は T^2 を変えないので、それだけでは (1) に届きません。T_L^2 を $T_{L'}^2$ に替えると、渦の面が巻く曲面そのものが変わり、二つの尺度の容器を結ぶ関係は構造からは出てきません（26-04）。この関係を仮定として置くのが、次の節の横広げの不等式です。

02

三つの仮定

仮定は名で呼びます。全ての長さは物理単位で、格子の人工物が無視できる $L_{\min}(a)$ 以上とします（§06）。

小さな $\mathbf{T^2}$ の基点 仮　ある物理的な $L_0\geq L_{\min}(a)$ と $\varepsilon_0\in(0,1)$ について

$$\theta(L_0;T_{L_0}^2)\ \le\ 1-\varepsilon_0. \tag{3}$$

希薄な分数インスタントンの気体の見立てでは $\varepsilon_0 \propto (L_0\Lambda)^{11/3}$ です（25-02）。紫外の制御と挿入の一様な受理の下で示す筋が考えられていますが、示されていません。

枠の減相関 仮　定数 $C_{\mathrm{D}} \ge 1$ があって、全ての R、L、整数 $s \ge 1$ について

$$\theta(sR;T_L^2)\ \le\ C_{\mathrm{D}}\,\theta(R;T_L^2)^{s^2}. \tag{4}$$

(2) の右辺は枠を共有する因子の積の平均で、Hölder の不等式だけでは冪が失われます（$\mathbb{E}\theta_{2R}^4 \le \mathbb{E}\theta_R^4$ の形しか出ない）。(4) は、その積が典型的な値の積に定数の違いを除いて分かれる、という仮定です。L を固定すれば、z の鏡映正値性の下でチェス盤の密度 κ_{cb} に置き換えられます（26-05）。κ_{cb} で読めば入れ子の冪は定数 1 で全ての L について立ちます（26-05 の入れ子の超乗法性の補題、§03 のチェス盤の密度で読んだ還元）。θ のままの L に一様な形は開いています。

横広げの不等式（強い形） 仮　定数 C があって、$L_{\min}(a) \le L \le L' \le R$ について

$$\theta(R;T_{L'}^2)\ \le\ C\Big(\frac{L'}{L}\Big)^{2}\theta(R;T_L^2). \tag{5}$$

容器を固定して横の T^2 を $s = L'/L$ 倍に広げても、偏りは高々 Cs^2 倍にしかならない、という文です。因子 s^2 は渦の面の横の位置のエントロピーです。$L' = L$ とおくと $C \ge 1$ が要ります（$\theta > 0$ なら）。

横広げの不等式（弱い形） 仮　二進の尺度 $R_k = 2^k R_0$ について、$0 \le \varepsilon_k < 1$、$\sum_k \varepsilon_k < \infty$、定数 $C' \ge 0$ があって

$$\ln\frac{1}{\theta(R_{k+1};T_{R_{k+1}}^2)}\ \ge\ (1-\varepsilon_k)\ln\frac{1}{\theta(R_{k+1};T_{R_k}^2)}\ -\ C'. \tag{6}$$

横を二倍に広げる一段ごとに、$\ln(1/\theta)$ の割合 ε_k と定数 C' を失ってよく、失う割合の総和が有限であればよい、という文です。強い形 (5) は $s=2$ で $\ln(1/\theta)$ を定数 $\ln(4C)$ だけ失う形なので、(6) の $\varepsilon_k = 0$ の場合に当たります。

03 条件つきの還元の定理

条件つきの還元の定理 初　小さな T^2 の基点・枠の減相関・横広げの不等式（強い形）を仮定する。$K := 4C\,C_{\mathrm{D}}$（≥ 1）とおき、整数 $s \ge 1$ を

$$t_0\ :=\ C\,C_{\mathrm{D}}\,s^2(1-\varepsilon_0)^{s^2}\ <\ K^{-1/3} \tag{7}$$

となるように選ぶ（$s^2(1-\varepsilon_0)^{s^2}\to 0$ なので選べる）。$R_0:=sL_0$、$R_k:=2^kR_0$ とおくと、全ての $k\ge 0$ で

$$\theta(R_k,R_k)\;\le\;K^{-1/3}\bigl(K^{1/3}t_0\bigr)^{4^k},\qquad\text{とくに}\qquad \ln\frac{1}{\theta(R_k,R_k)}\;\ge\;\gamma\,R_k^2,\quad \gamma:=\frac{\ln\bigl(1/(K^{1/3}t_0)\bigr)}{R_0^2}. \tag{8}$$

さらに枠の減相関の下で、26-01 の面積の指数からの面積則により、板 $T^2_{R_k}\times\mathbb{R}^2$ の上の、一辺が R_k の倍数の正方形のループで $|\langle W(C)\rangle|\le C_{\mathrm D}e^{-\gamma A}$。張力の下界 γ は k に依らない。

証明　三段で示す。

*段 1（跳躍）。*枠の減相関を $R=L=L_0$ と s で使い、小さな $\mathrm T^2$ の基点を入れると $\theta(sL_0;T^2_{L_0})\le C_{\mathrm D}(1-\varepsilon_0)^{s^2}$。次に横広げの不等式（強い形）を $L=L_0$、$L'=R=sL_0$ で使うと

$$t_0'\;:=\;\theta(R_0,R_0)\;=\;\theta(sL_0;T^2_{sL_0})\;\le\;C\,s^2\cdot C_{\mathrm D}(1-\varepsilon_0)^{s^2}\;=\;t_0.$$

段 2（一段の倍化）。$t_k:=\theta(R_k,R_k)$ とおく。枠の減相関を $R=L=R_k$、$s=2$ で使うと $\theta(2R_k;T^2_{R_k})\le C_{\mathrm D}t_k^4$。横広げの不等式（強い形）を $L=R_k$、$L'=R=2R_k$ で使うと

$$t_{k+1}\;=\;\theta(2R_k;T^2_{2R_k})\;\le\;4C\cdot C_{\mathrm D}\,t_k^4\;=\;K\,t_k^4. \tag{9}$$

段 3（反復）。$c:=K^{1/3}\ge 1$ とおくと (9) は $t_{k+1}\le c^3t_k^4$。両辺に c を掛けると $ct_{k+1}\le(ct_k)^4$ なので、帰納法で $ct_k\le(ct_0')^{4^k}\le(ct_0)^{4^k}$（$0\le ct_0'\le ct_0$ を使う）。よって $t_k\le c^{-1}(ct_0)^{4^k}$。$4^k=R_k^2/R_0^2$、$ct_0<1$、$c\ge1$ から

$$\ln\frac{1}{t_k}\;\ge\;4^k\ln\frac{1}{ct_0}+\ln c\;\ge\;\frac{\ln(1/(ct_0))}{R_0^2}\,R_k^2\;=\;\gamma R_k^2.$$

最後の主張は面積の指数からの面積則で $L=R_k$、e^{-cL^2} を $e^{-\gamma R_k^2}$ とすればよい。∎

段 3 の反復の代数――$t_{k+1}\le c^3t_k^4$ から $ct_k\le(ct_0)^{4^k}$ と $t_k\le(ct_0)^{4^k}/c$――は Lean で検査されています（§07）。

条件つきの還元の定理が言っていないこと。

- 結論は二進の列 R_k の上の文です。間の尺度 $R_k<R<R_{k+1}$ に広げるには、$\theta(R,R)$ の R についての単調性のような追加の性質が要り、ここでは仮定していません。
- 定数 γ が格子間隔 a に一様なのは、小さな $\mathrm T^2$ の基点・枠の減相関・横広げの不等式（強い形）の定数 $\varepsilon_0,C_{\mathrm D},C$ と L_0 が a に一様なときだけです。
- 枠の減相関は二か所で使われます――入れ子の冪（段 1・段 2）と、偏りから Wilson ループへの橋（面積の指数からの面積則）です。

- 「典型的な枠」の意味は枠の減相関の中に入れてあります。枠の分布の裾（悪い枠の稀さ）を別に扱う形にはしていません。

注（大域の版）。枠で条件づけた θ の代わりに、トーラス $T_L^2 \times T_M^2$ の上の捩れの分配関数の比（26-01 の (8)）で同じ連鎖を書けば、面積則への橋は Tomboulis–Yaffe の不等式（26-01 の Tomboulis–Yaffe からの張力の下界）が担い、枠の減相関は要りません。その代わり、小さな T^2 の基点も大域の分配関数で――渦が安いという下界として――示す必要があります。これも開いています。

チェス盤の密度で読んだ還元（κ_{cb} で読んだ還元） 初　26-05 の $\kappa_{\mathrm{cb}}(R;L)$（容器をブロックの内部全体にとった密度。$M$ は考える段の全ての $2R_k$ の倍数に固定する）について

$$\begin{aligned}&(\mathrm{A_{cb}})\ \ \kappa_{\mathrm{cb}}(L_0;L_0) \le 1-\varepsilon_0,\\ &(\mathrm{C_{cb}})\ \ \kappa_{\mathrm{cb}}(R;L') \le C\,(L'/L)^2\,\kappa_{\mathrm{cb}}(R;L)\quad (L_{\min}(a) \le L \le L' \le R)\end{aligned}$$

を仮定する。式の札 $(\mathrm{A_{cb}})$ はチェス盤の密度の基点、$(\mathrm{C_{cb}})$ はチェス盤の密度の横の比較、下の (B_0) は基点の読み替えの不等式です（名は A-06）。枠の減相関の代わりに 26-05 の入れ子の超乗法性の補題（$\kappa_{\mathrm{cb}}(sR;L) \le \kappa_{\mathrm{cb}}(R;L)^{s^2}$、定数 1、全ての L）を使うと、条件つきの還元の定理の証明が $C_{\mathrm{D}}=1$、$K=4C$、$t_0 = C\,s^2(1-\varepsilon_0)^{s^2} < K^{-1/3}$ でそのまま通り、$t_k := \kappa_{\mathrm{cb}}(R_k;R_k) \le K^{-1/3}(K^{1/3}t_0)^{4^k}$ です。ループへは 26-05 の (5) で直接降りるので、面積の指数からの面積則の C_{D} も要りません。段 3 は Doubling.iterate と同じ代数で、倍化の形は Lean：LatticeGaugeNestedBlocks（doubling_iterate・doubling_bound）。この形では枠の減相関は独立の仮定として残らず、L に一様な中身は $(\mathrm{C_{cb}})$ に入ります。小さな T^2 の基点を θ のまま残すなら、一つの尺度だけの一行

$$(\mathrm{B}_0)\ \ 1-\kappa_{\mathrm{cb}}(L_0;L_0)\ \ge\ \eta\,\big(1-\theta(L_0;L_0)\big)\quad (\eta>0 \text{ は } a \text{ に一様})$$

を足せば $(\mathrm{A_{cb}})$ が $\varepsilon_0 \to \eta\varepsilon_0$ で出ます 初。$(\mathrm{A_{cb}})$・$(\mathrm{C_{cb}})$・(B_0) はどれも示されていません 仮。

04

弱い形での還元

弱い形 (6) でも、反復は面積の指数を保ちます。ただし跳躍の段は弱い形では作れないので、基点を一つの尺度で十分小さく置く形になります。

弱い形での還元の定理 初　枠の減相関と、二進の列 $R_k = 2^k R_0$ の上の横広げの不等式（弱い形）を仮定し、$P := \prod_k (1-\varepsilon_k) > 0$、$A := \ln C_{\mathrm{D}} + C'$、$u_k := \ln(1/\theta(R_k,R_k))$ とおく。$u_0 >$

$A/(3P)$ なら、全ての k で

$$u_k \;\ge\; \Big(P\,u_0 - \frac{A}{3}\Big)4^k \;=\; \gamma'\,R_k^2, \qquad \gamma' := \frac{P u_0 - A/3}{R_0^2} > 0. \tag{10}$$

証明　枠の減相関を $s=2$ で使うと $\ln(1/\theta(R_{k+1};T_{R_k}^2)) \ge 4u_k - \ln C_{\mathrm{D}}$。(6) に入れ、$0 \le 1-\varepsilon_k \le 1$ と $\ln C_{\mathrm{D}} \ge 0$ を使うと $u_{k+1} \ge (1-\varepsilon_k)(4u_k - \ln C_{\mathrm{D}}) - C' \ge 4(1-\varepsilon_k)u_k - A$。$v_k := u_k/4^k$ とおくと $v_{k+1} \ge (1-\varepsilon_k)v_k - A\,4^{-(k+1)}$。$P_k := \prod_{i<k}(1-\varepsilon_i)$、$S_k := \sum_{j=1}^{k} 4^{-j}$ について $v_k \ge P_k v_0 - A S_k$ を帰納法で示す：$k=0$ は等号。k で成り立てば、$AS_k \ge 0$ と $1-\varepsilon_k \le 1$ から $v_{k+1} \ge (1-\varepsilon_k)P_k v_0 - AS_k - A4^{-(k+1)} = P_{k+1}v_0 - AS_{k+1}$。$v_0 = u_0 > 0$、$P_k \ge P$、$S_k < 1/3$ から $v_k \ge Pu_0 - A/3$。∎

強い形は $\varepsilon_k = 0$（$P=1$）、$C' = \ln(4C)$ の場合で、そのときの条件 $u_0 > (\ln C_{\mathrm{D}} + \ln 4C)/3 = \ln K/3$ は、条件つきの還元の定理の $t_0 < K^{-1/3}$ と同じ条件です。弱い形での還元の定理の u_0 の条件は、条件つきの還元の定理の跳躍の段が担っていた役を、基点の仮定に移したものです。

05

横広げの不等式の強い形は閉じ込めより強い — 板の張力の単調性

横を T_L^2 に縮めた二次元の理論の弦の張力（板の張力）を

$$\sigma_{\mathrm{eff}}(L) \;:=\; \liminf_{M\to\infty} \frac{-\ln \theta(M;T_L^2)}{M^2} \tag{11}$$

と定めます。一様な板の張力（26-00 の (1)）は $\inf_L \sigma_{\mathrm{eff}}(L) > 0$ です。

板の張力の単調性の命題 初　強い形 (5) が全ての $R \ge L'$ で成り立てば、$L_{\min}(a) \le L \le L'$ について $\sigma_{\mathrm{eff}}(L') \ge \sigma_{\mathrm{eff}}(L)$。

証明　$M \ge L'$ で (5) の対数を取ると $-\ln\theta(M;T_{L'}^2) \ge -\ln\theta(M;T_L^2) - \ln\big(C(L'/L)^2\big)$。$M^2$ で割って $M\to\infty$ の下極限を取ると、定数の項は消えて $\sigma_{\mathrm{eff}}(L') \ge \sigma_{\mathrm{eff}}(L)$。∎

つまり強い形は、板の張力が L について**減らない**ことを含みます。閉じ込め（面積則）に要るのは $\inf_L \sigma_{\mathrm{eff}}(L) > 0$ だけなので、強い形は閉じ込めより強い仮定です。小さな L では $\sigma_{\mathrm{eff}} \propto \Lambda^{11/3}L^{5/3}$ で増え、大きな L では $\mathbb{R}^4$ の張力 σ_∞ に近づくと見込まれますが 読（物理）、$L \sim 1/\Lambda$ で σ_{eff} が σ_∞ を一度越えてから戻る（行き過ぎる）なら、定数 C の強い形は偽で、閉じ込めは成り立ちえます。弱い形は、失う割合の総和が有限である限り、この種の行き過ぎを許します。

数値の側では、$SU(2)$、$\beta = 2.5$、$M = 16$ の板で、4×4 のループの Creutz 比が $N_T = 4, 6, 8, 10$ で $0.059,\ 0.061,\ 0.076,\ 0.071$（誤差 0.009〜0.002、2000 測定）で、増えて飽和し、有意な行き過ぎは見えていません 読 。Creutz 比は短距離の Coulomb の項を含むので、値ではなく N_T についての傾向だけを読みます。格子は一つの β だけで、N_T の範囲も狭いので、帯の全体についての読みではありません。測定の表は 26-09 に置きます。

横を一方向だけ広げる形（T^2 を長方形 $L_1 \times L_2$ にして L_1 だけを大きくする）は、二次元の小さな方向が有限温度の時間のように振る舞うので、正方形の形と同じには扱えない見込みです 読 （物理）。この章の連鎖は正方形の形 $L_1 = L_2$ しか使っていません。

06

格子の人工物と $L_{\min}(a)$

(5)・(6) は、格子の人工物が無視できる $L \geq L_{\min}(a)$ に制限して述べます。$L_{\min}(a)$ は物理単位で一定に保ち、格子の単位では $L_{\min}/a \to \infty$ とします。帯の目標 (1) は a に一様な連続極限の文なので、この制限は自然です。

制限が要ることは数値にも出ています。$SU(2)$、$\beta = 2.5$、$M = 8$ で $N_T = 2 \to 4$ にすると、渦の自由エネルギーは $-0.01 \pm 0.12 \to 0.63 \pm 0.18$、偏りは $\theta \lesssim 0.06 \to 0.31$ で、比はおよそ 5 です 読 。強い形が $s = 2$ で許す $Cs^2 = 4C$ と、誤差の範囲で境界にあります。$N_T = 2$ の捩れた 2×2 の T^2 では、渦は滑らかな分数インスタントンではなく格子の上の細い渦として安く入り、板の張力が大きく出るためと読めます。小さな格子の値で強い形を試すことはできません。

07

Lean の言明を読む — `Doubling.iterate` ・ `decay`

条件つきの還元の定理の段 3 の代数は、Lean 4 のファイル `Doubling.lean`（名前空間 `Doubling`）の二つの定理です。言明を本文の言葉で読みます。

`Doubling.iterate`：実数 c と実数列 $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ について、仮定 $0 \leq c$・全ての k で $0 \leq t_k$・全ての k で $t_{k+1} \leq c^3 t_k^4$ の下で、全ての k で $c\,t_k \leq (c\,t_0)^{4^k}$。

`Doubling.decay`：仮定 $0 < c$・$0 \leq t_k$・$t_{k+1} \leq c^3 t_k^4$ の下で、全ての k で $t_k \leq (c\,t_0)^{4^k}/c$。

本文の K は Lean の c^3 です。機械検査が保証するのは、この実数の不等式の代数だけです。t_k が区画の偏りであること、(9) の漸化式が成り立つこと——つまり小さな T^2 の基点・枠の減相関・横広げの不等式——は Lean の外にあります。二つの定理の公理は、記録では標準の三

つ（`propext`・`Classical.choice`・`Quot.sound`）で、本書の再検査を通しています（A-04）。

08 残るもの

条件つきの還元の定理は、帯の正しい形を三つの仮定に還元しました。三つの性格は違います。

- **小さな T^2 の基点**は、弱結合の側の文で、紫外の制御と挿入の一様な受理の下で示す筋が考えられています（第 25 部・27-02）。
- **枠の減相関**は、κ_{cb} で読めば 26-05 の入れ子の超乗法性の補題により定数 1 で全ての L について立ち、独立の仮定としては残りません（§03 のチェス盤の密度で読んだ還元）。L に一様な中身は、横広げの不等式（強い形）を κ_{cb} で読んだ $(\mathrm{C}_{\mathrm{cb}})$ に移ります。その代わり小さな T^2 の基点と横広げの不等式（強い形）を κ_{cb} で読む（または一行 (B_0) を足す）必要があります。
- **横広げの不等式**は、この還元の中で非可換の力学が入る唯一の場所です。$\mathrm{U}(1)$ と $\mathbb{Z}_2$ では破れ、希薄な領域の $\mathrm{SU}(2)$ では余裕 $5/3 = 11/3 - 2$ で成り立つ見込みです（26-03、〔読〕物理）。鏡映正値性や双対性のような構造的な入力だけからは出ません（26-04）。

開いているのは、横広げの不等式の強い形（または弱い形）を、希薄な領域と閉じ込めの領域の間——$L \sim 1/\Lambda$——を通して、非摂動的に示すことです。帯の難しさは、この一つの不等式に集まりました。

09 五分類の表と依存グラフ

表 1　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	平面の方向の入れ子 (2)	典	Mack–Petkova・25-03	T^2 を固定	—
2	小さな T^2 の基点 (3)	仮	25-02・27-02	$L_0 \geq L_{\min}(a)$	—
3	枠の減相関 (4)	仮	26-05・A-06	定数 $C_{\mathrm{D}} \geq 1$	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
4	横広げの不等式（強い形）(5)	仮	A-06	$L_{\min}(a) \le L \le L' \le R$・正方形の T^2	—
5	横広げの不等式（弱い形）(6)	仮	A-06	二進の列・$\sum \varepsilon_k < \infty$	—
6	強い形は弱い形の $\varepsilon_k = 0$、$C' = \ln 4C$ の場合	初	§02	—	—
7	反復：$t_{k+1} \le c^3 t_k^4$ なら $ct_k \le (ct_0)^{4^k}$、$t_k \le (ct_0)^{4^k}/c$	初	§03 段 3	実数の代数	Doubling（`Doubling.iterate`）（仮定：$0 \le c$・$0 \le t_k$・$t_{k+1} \le c^3 t_k^4$）・Doubling（`Doubling.decay`）（仮定：$0 < c$・同じ二つ）
8	条件つきの還元の定理：小さな T^2 の基点・枠の減相関・横広げの不等式（強い形）の下で $\ln(1/\theta(R_k, R_k)) \ge \gamma R_k^2$、板の上の面積則	初	§03 の証明・26-01 の面積の指数からの面積則	三つの仮定の下・二進の列・$L \ge L_{\min}(a)$	—（反復の部分だけ。表の反復の行）
9	弱い形での還元の定理：枠の減相関・横広げの不等式（弱い形）と $u_0 > A/(3P)$ の下で $u_k \ge \gamma' R_k^2$	初	§04 の証明	二つの仮定と基点の大きさの条件の下	—
10	板の張力の単調性の命題：強い形なら σ_{eff} は L について減らない	初	§05 の証明	$L \ge L_{\min}(a)$	—
11	σ_{eff} は小さな L で $L^{5/3}$ で増え、大きな L で σ_∞ へ	読（物理）	§05・26-03	希薄な領域・一ループ／閉じ込めの領域	—
12	Creutz 比が $N_T = 4 \to 10$ で増えて飽和、有意な行き過ぎなし	読	§05・26-09	SU(2)・$\beta = 2.5$・$M = 16$・2000 測定・傾向だけ	—
13	$N_T = 2 \to 4$ で偏りの比がおよそ 5	読	§06	SU(2)・$\beta = 2.5$・$M = 8$・誤差の範囲で境界	—
14	横広げの不等式は $L \ge L_{\min}(a)$ に制限して述べる必要がある	読（物理）	§06	小さな T^2 の格子の人工物	—
15	横広げの不等式（強い形）は U(1)・$\mathbb{Z}_2$ で破れ、希薄な SU(2) では余裕 $5/3$	読（物理）	26-03	希薄な領域・一ループ。「この還元の中で」	—

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  典  平面の方向の入れ子 (2)                                  T² を固定
 2  仮  小さな T² の基点 θ(L₀;T²_L₀) ≤ 1 − ε₀
 3  仮  枠の減相関 θ(sR;T²_L) ≤ C_D θ(R;T²_L)^(s²)
 4  仮  横広げの不等式・強い形 θ(R;T²_L') ≤ C(L'/L)² θ(R;T²_L)
 5  仮  横広げの不等式・弱い形（損失の総和が有限）
 6  初  強い形は弱い形の特別な場合 ⟸ 4
 7  初  t_(k+1) ≤ c³t_k⁴ ⇒ ct_k ≤ (ct₀)^(4^k)              Lean Doubling.ite
 8  初  条件つきの還元の定理：ln(1/θ(R_k,R_k)) ≥ γR_k² ⟸ 1・2・3・4・7
 9  初  弱い形での還元の定理 ⟸ 3・5
10  初  板の張力の単調性の命題：強い形 ⇒ σ_eff は減らない ⟸ 4
11  読  σ_eff の形（小さな L で増え、大きな L で飽和）        物理
12  読  Creutz 比は増えて飽和                                  β = 2.5・M = 16
13  読  N_T = 2 → 4 で比およそ 5                               β = 2.5・M = 8
14  読  L ≥ L_min(a) に制限が要る ⟸ 13
15  読  横広げの不等式は U(1)・Z₂ で破れ、希薄な SU(2) で余裕 5/3      26-03
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。二つの還元の定理の節点の前提には、仮定の行（小さな T^2 の基点・枠の減相関・横広げの不等式の二つの形）が必ず入っています。仮定の行は結論の量（$\theta(R_k, R_k)$ の面積の指数）を含みません——小さな T^2 の基点は一つの小さな尺度の文、枠の減相関は T^2 を固定した入れ子の文、横広げの不等式（強い形）は容器を固定した比較の文です。数値の行（板の Creutz 比・偏りの比）と見立ての行（板の張力の形・群による破れ）は、どの定理の前提にも入っていません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 基点・枠の減相関・横広げの不等式（強い形）の三つの下で、二進の尺度の列で $\ln(1/\theta(R_k, R_k)) \geq \gamma R_k^2$ と、板の上の k に依らない張力（条件つきの還元の定理）	三つの仮定のどれも。間の尺度。定数の a についての一様性（仮定の定数次第）
初 弱い形でも、基点が一つの尺度で十分小さければ同じ結論（弱い形での還元の定理）	弱い形そのもの。弱い形だけからの跳躍
初 強い形は板の張力の単調性を含み、閉じ込めより強い（板の張力の単調性の命題）	板の張力が行き過ぎないこと
読 板の Creutz 比は増えて飽和。小さな T^2 では格子の人工物が強い形の境界に触れる	帯の全体での板の張力の振る舞い。大きな格子での値
Lean：反復の実数の代数（Doubling（`Doubling.iterate`・`Doubling.decay`））	偏りが漸化式を満たすこと（Lean の外）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
容器の恒等式と入れ子	典	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 123 (1979) 442・125 (1980) 117。章 25-03
条件つきの還元の定理・弱い形での還元の定理・板の張力の単調性の命題	初	本文 §03〜§05 の証明
小さな T^2 の弦の張力の形（基点と σ_{eff} の小さな L の側）	典	Y. Tanizaki, M. Ünsal, arXiv:2201.06166 式 (2.32)・(2.37)。章 25-02
板の Creutz 比・$N_T = 2 \to 4$ の偏り	読	SU(2) のモンテカルロ（Creutz 比）と、レプリカ交換と Bennett の受理率の方法（渦の自由エネルギー）。章 26-09 の表
Lean	Lean	Doubling（`Doubling.iterate`・`Doubling.decay`）。保証するのは実数の代数だけ。A-04

この章で使った語 — 平面の方向の入れ子・横広げの不等式（強い形・弱い形）・小さな T^2 の基点・枠の減相関・倍化の反復・跳躍・板の張力 σ_{eff}・行き過ぎ・格子の人工物の尺度 $L_{\min}(a)$。意味は A-02 用語集 と A-06 名前の索引 にあります。

次に読む章：26-03 非可換が効く唯一の場所 — 横広げの不等式の符号を決める $5/3 = 11/3 - 2$。

非可換が効く唯一の場所

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 25-02・3-05 にあります。

この章で分かること — 26-02 の還元の中で、非可換の力学がどこに入るか。三つの仮定（小さな T^2 の基点・枠の減相関・横広げの不等式）と入れ子の不等式のうち、U(1) と $\mathbb{Z}_2$ で破れるのは横広げの不等式だけで、その符号を決めるのは希薄な領域の指数の余裕 $\mathbf{5/3 = 11/3 - 2}$ ——漸近自由の係数 $\mathbf{11/3}$ が、平面に置ける塊の位置の数（横の二次元のエントロピー）の $\mathbf{2}$ に勝つ余裕——であることを見ます。対照として、アーベルの流束は一様に広がるしかなく、U(1) の渦の自由エネルギーは $\boldsymbol{T^2}$ を広げると増えること、$\boldsymbol{SU(2)}$ の渦は尺度不変な自己双対の塊に局在できることを並べます。

前提となる章 — 26-01（区画の偏り θ・U(1) の勘定）・26-02（三つの仮定と条件つきの還元の定理）・25-02（渦と分数インスタントン）・3-05（インスタントンと Bogomolny の下界）・4-06（漸近自由）・5-06（U(1) と非可換）。

先に言うこと — 題の「唯一の場所」は**この還元の中で**の言い方です。別の還元（26-06 の繰り込みの比較）では、非可換の入力は別の形の場所に入ります。U(1)・$\mathbb{Z}_2$・$\boldsymbol{SU(2)}$ の振る舞いの勘定は、原論文自身が見立てと明記している勘定で、この章でも〔読〕（物理）の札で書きます。希薄な領域と一ループの外では何も言いません。紙で置く命題は、流束が一様に広がる初等的な補題と、論理の整理だけです。

この章の順序

1. 問い — 横広げの不等式の符号を決めるもの
2. アーベルの流束は一様に広がるしかない — 流束の一様化の補題と U(1)・$\mathbb{Z}_2$ の勘定
3. 非可換の渦は尺度不変な塊に局在できる — 自己双対の $Q = \frac{1}{2}$ の塊
4. 余裕 $\mathbf{5/3 = 11/3 - 2}$ — 希薄な気体の勘定と Tanizaki–Ünsal の式
5. 「この還元の中で」唯一の場所 — 還元の対偶の命題と、その限定
6. 数値の兆候 — $\boldsymbol{T^2}$ を広げたときの渦の自由エネルギー（表 2）
7. 五分類の表と依存グラフ

01

問い — 横広げの不等式の符号を決めるもの

記号は 26-01 §01 と 26-02 §01 のとおりです。$\theta(R;T^2_L)$ は、平面の方向の大きさ R（面積 A_D）の容器 $D\times T^2_L$ の、典型的な枠での区画の偏りで、捩れ $n_{12}=1$ は横のトーラス T^2_L（面積 $A_T=L^2$）に固定してあります。26-02 の条件つきの還元の定理は、三つの仮定から帯の正しい形 $\ln(1/\theta(R,R))\ge cR^2$ を導きました。その第三の仮定が横広げの不等式（強い形）

$$\theta(R;T^2_{L'})\ \le\ C\Big(\frac{L'}{L}\Big)^{2}\theta(R;T^2_L)\qquad (L_{\min}(a)\le L\le L'\le R) \tag{1}$$

でした。容器を固定したまま横の T^2 を広げると、区画の偏り θ はどちらへ動くか。θ が小さいほど区画の乱れ（渦の多さ）が大きいので、問いは「横を広げると渦は**高くなる**（θ が 1 に近づく）か、**高くならない**か」です。(1) は、高くなるとしても位置の数の因子 s^2（$s=L'/L$）までしか許しません。

この章の答えを先に書きます。アーベルの理論では、渦の流束は横の断面全体に一様に広がるしかないので、横を広げるほど渦は高くなり、(1) は破れます。$SU(2)$ では、渦は大きさ L 程度の自己双対の塊に局在でき、その作用は大きさに依らないので、古典的には横を広げる費用は 0 です。残る量子の効果は、希薄な領域では漸近自由の側に傾き、(1) は余裕 $5/3$ で成り立つ見込みです。

02

アーベルの流束は一様に広がるしかない

最初に、古典的な作用の初等的な事実を一つ置きます。

流束の一様化の補題 初　Ω を面積 $|\Omega|$ の平面の領域、f を Ω の上の二乗可積分な実関数で $\int_\Omega f=\Phi$ とする。このとき

$$\int_\Omega f^2\ \ge\ \frac{\Phi^2}{|\Omega|}, \tag{2}$$

等号は f が Ω の上でほとんど至るところ定数 $\Phi/|\Omega|$ のときに限る。

証明　Cauchy–Schwarz の不等式 $\big(\int_\Omega f\cdot 1\big)^2\le\int_\Omega f^2\cdot\int_\Omega 1$ から (2)。等号は f と 1 が比例するとき、すなわち f が定数のときに限る。∎

アーベルのゲージ場の作用 $\frac{1}{2e^2}\int F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ は場の強さの二乗で、線形の場の理論です。容器 $D\times T^2_L$ の各断面 $D\times\{y\}$（$y\in T^2_L$）を同じ流束 Φ が通る配位を考えると、流束の一様化の補

題を各断面で使い、横の T_L^2 で積分して

$$\frac{1}{2e^2}\int_{D\times T_L^2} F_{34}^2 \;\geq\; \frac{A_T}{2e^2 A_D}\,\Phi^2 \tag{3}$$

を得ます 初 （各断面の流束が同じ Φ であるという条件の下。古典的な作用の下界）。等号は流束が容器の全体に一様に広がる配位で、**流束を局在させると作用は増えるだけ**です。右辺は横の面積 A_T に比例するので、容器を固定して横を s 倍に広げると、流束 π（区画 $\sigma_D=-1$ に当たる）の最小の作用は s^2 倍になります。アーベルの渦は横を広げると高くなる、というのが古典的な水準の答えです。

量子の水準の勘定は 26-01 §03 のとおりです 読 （物理）。クーロン相の U(1) を板 $T_L^2\times\mathbb{R}^2$ の上で長い距離まで見ると二次元の U(1)（結合 e^2/A_T）で、流束 Φ の分配関数は巻き付き k の Poisson の和 $Z(\Phi)\propto\sum_k e^{ik\Phi}e^{-e^2A_Dk^2/(2A_T)}$ です。これは (3) の古典的な作用 $\frac{A_T}{2e^2A_D}(\Phi+2\pi k)^2$ の k についての和を Poisson の和公式で書き直したもので、$q:=e^{-e^2A_D/(2A_T)}$ が小さいとき

$$\theta(R;T_L^2)\;\approx\;2q\;=\;2\exp\!\Big(-\frac{e^2A_D}{2A_T}\Big),\qquad \ln\frac{1}{\theta}\;\approx\;\frac{e^2A_D}{2A_T}\;\propto\;A_D\,L^{-2}. \tag{4}$$

横を s 倍に広げると A_T は s^2 倍、q は q^{1/s^2} になるので、$\theta_{\text{new}}\approx 2(\theta_{\text{old}}/2)^{1/s^2}$ です。比は

$$\frac{\theta(R;T_{sL}^2)}{\theta(R;T_L^2)}\;\approx\;2^{\,1-1/s^2}\,\theta(R;T_L^2)^{-(1-1/s^2)}\;\longrightarrow\;\infty\qquad(\theta(R;T_L^2)\to 0,\;s>1) \tag{5}$$

となり、どんな定数 Cs^2 でも押さえられません。**U(1) では横広げの不等式 (1) は破れます** 読 （物理。(4) を認めた上の一行の代数）。弱い形（26-02 の横広げの不等式（弱い形））も、板の張力が e^2/L^2 で 0 に向かうので破れます 読 （物理）。

四次元の $\mathbb{Z}_2$ の理論は、弱結合（大きな β）で閉じ込めない相にいます（5-10）。そこでは容器を通る流束は、横の T^2 全体に張る面積 A_T の壁を作り、その張力は A_D に依りません。横を広げると壁の費用は A_T に比例して増え、(1) は破れます 読 （物理）。二つのアーベルの理論に共通するのは、**流束の費用が横の面積とともに増える**ことです。U(1) では線形性（流束の一様化の補題）のため、$\mathbb{Z}_2$ では壁の面積のためです。

03

非可換の渦は尺度不変な塊に局在できる

$SU(2)$ では事情が変わります。捩れ $n_{12}=1$ のある $T_L^2\times\mathbb{R}^2$ の上では、位相的な電荷 Q は半整数の値をとれます（'t Hooft の捩れ、25-01 典 ）。そして作用には Bogomolny の下界

$$S \;\geq\; \frac{8\pi^2}{g^2}\,|Q| \tag{6}$$

があり（3-05 典 ）、等号は自己双対（または反自己双対）の配位で成り立ちます。$Q=\frac{1}{2}$ の配位――分数インスタントン――の作用は $4\pi^2/g^2$ 以上で、平面の区画を反転させる渦の役を担います（25-02）。

(6) の右辺は、T^2 の大きさ L にも、容器の大きさ R にも依りません。四次元のヤン–ミルズの古典的な作用が尺度を変えても変わらないからです（結合 g が無次元、24-07 §01）。$Q=\frac{1}{2}$ の最小作用の配位は、大きさ L 程度の範囲に局在した自己双対の塊で、作用が下界 $4\pi^2/g^2$ に一致し、横と縦の比に依らない――というのが原論文の見立てです 読 （物理）。格子の上では、冷却した分数インスタントンの作用が $\pi^2\beta$ に下から近づくこと（$\beta=4/g^2$ で $4\pi^2/g^2=\pi^2\beta$。冷却で得た値は、格子の上の最小作用の上界）が測られています（25-02 の表）。

ここで、§02 の流束の一様化の補題との違いがはっきりします。

- **アーベル**：作用が二次形式なので、決まった流束の最小作用は流束を一様に広げた配位で達成され、その値は横の面積 A_T に比例します（(3)）。局在させても安くならず、広げられた場所全体に費用を払います。
- **非可換**：自己双対方程式は非線形で、有限の作用 $4\pi^2/g^2$ の解が大きさ L 程度に局在できます。容器が塊を入れられる大きさ（$R\geq L'$）である限り、横を L から L' に広げても塊を広げ直せばよく、古典的な費用は 0 です。

これは局所的な運動学の違いではなく、自己双対方程式の解の存在――非線形性――の違いです。古典的な水準で横広げの費用が 0 なので、(1) の符号は量子の効果――渦の位置の数と、結合の走り――で決まります。それが次の節の勘定です。

04

余裕 $5/3 = 11/3 - 2$

希薄な気体の勘定。$L\Lambda \ll 1$（Λ は次元転移の尺度、4-07）では、結合 $g(L)$ は小さく、渦（$Q=\pm\frac{1}{2}$ の塊）は互いに遠く離れた希薄な気体として扱えます。Tanizaki–Ünsal は $SU(N)$ について、小さな捩れた T^2 の上で、中心の渦が平面 $\mathbb{R}^2$ の上の点のように振る舞い、その一つあたりの重みが $Ke^{-S_I/N}$（$S_I=8\pi^2/g^2$、K は単位面積あたりの前因子）であることから、基底のエネルギーと弦の張力を

$$E_k(\theta) \;=\; -2Ke^{-S_I/N}\cos\frac{\theta-2\pi k}{N} \;\sim\; -\Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}\cos\frac{\theta-2\pi k}{N}, \qquad T_R \;\sim\; \Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}\sin^2\frac{\pi|R|}{N} \tag{7}$$

と導きました（Tanizaki–Ünsal、式 (2.32)・(2.37) 典 、希薄な領域・一ループ）。ここでの θ は真空の角で、この本の区画の偏り θ とは別の記号です。指数 $5/3$ は、一ループの結合の走り $8\pi^2/g^2(L) = \frac{11N}{3}\ln\frac{1}{L\Lambda}$（4-06 典 ）から $e^{-S_I/N} = (L\Lambda)^{11/3}$ となり、塊の大きさ L から単位面積あたりの位置の数が $1/L^2$ となるので、$(L\Lambda)^{11/3}/L^2 = \Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}$ と出ます。

区画の偏りに移ります。$SU(2)$ で、渦と反渦を合わせた単位面積あたりの密度を ζ とし、渦の位置を独立な Poisson の点で近似します 読 （物理。希薄な気体の近似）。容器の区画 σ_D は、D の中の渦の数 n について $(-1)^n$ です。平均 m の Poisson 分布の n について

$$\mathbb{E}\big[(-1)^n\big] \;=\; \sum_{n\geq 0} e^{-m}\frac{m^n}{n!}(-1)^n \;=\; e^{-2m} \tag{8}$$

なので 初 （初等的な等式）、$m = \zeta A_D$ とおいて

$$\theta(R;T_L^2) \;\approx\; e^{-2\zeta A_D}, \qquad \ln\frac{1}{\theta} \;\approx\; 2\zeta A_D \;\propto\; A_D\,\Lambda^{11/3}L^{5/3} \qquad (\Lambda \text{ を固定}) \tag{9}$$

です 読 （物理。希薄な領域・一ループ）。(4) と並べると、容器を固定したときの $\ln(1/\theta)$ の L についての冪は

表 1　容器を固定したときの $\ln(1/\theta)$ の L についての冪（見立て。四次元・弱結合の側）

理論	渦の費用の形	$\ln(1/\theta)$ の冪	横を広げると	横広げの不等式 (1)
$U(1)$（クーロン相）	流束が横の断面に一様に広がる（流束の一様化の補題）	L^{-2}	θ は 1 に近づく	破れる（(5)）
$\mathbb{Z}_2$（弱結合）	面積 A_T の壁	—（壁の費用 $\propto L^2$ で $\theta\to 1$）	θ は 1 に近づく	破れる
$SU(2)$（希薄な領域）	大きさ L の自己双対の塊、重み $(L\Lambda)^{11/3}$、位置の密度 $1/L^2$	$L^{+5/3} = L^{11/3-2}$	θ は減る	成り立つ（比は 1 以下）

となります。$SU(2)$ の冪 $5/3$ は、漸近自由の係数 $11/3$ と、平面に置ける塊の位置の数の 2（この部で「横の二次元のエントロピー」と呼んできたもの、26-00 の図 2）の差です。U(1) の冪 -2 は、漸近自由の項が無く位置の数の項だけが残った形と読めます。**漸近自由が横の二次元のエントロピーに勝つ余裕 $5/3 > 0$ が、横広げの不等式の符号そのもの**です 読 （物理）。

(9) から、希薄な領域の $SU(2)$ で横を s 倍に広げたときの比は

$$\frac{\theta(R;T_{sL}^2)}{\theta(R;T_L^2)} \;\approx\; \exp\Big(-2A_D\big(\zeta(sL)-\zeta(L)\big)\Big) \;\leq\; 1 \tag{10}$$

で（$\zeta \propto L^{5/3}$ は増加）、(1) は $C = 1$ で、因子 s^2 を使わずに成り立ちます 読 （物理）。ただし (9)・(10) が使えるのは $L\Lambda \ll 1$ の希薄な領域だけです。閉じ込めの領域（$L\Lambda \gg 1$）では $\ln(1/\theta) \approx \sigma A_D - \ln(A_T/\xi^2)$（$\xi$ は相関長）と見込まれ、A_T への依存は渦の面の位置のエント

ロピーの対数だけになり、(1) は因子 s^2 の範囲で成り立つ見込みです 読 （物理）。**二つの領域の間 $L \sim 1/\Lambda$——帯——を非摂動的に通す評価はありません。**

05

「この還元の中で」唯一の場所

26-02 の条件つきの還元の定理の連鎖の部品を、群を替えたときの振る舞いで並べます。

- **平面の方向の入れ子**（26-02 の (2)）は、枠で条件づけると容器の中が独立になるという Markov 性と、Mack–Petkova の容器の恒等式から来る文で、群の非可換性を使いません 典 。
- **小さな T^2 の基点**は、U(1) でも成り立つ見立てです。(4) で $R = L$ とおくと $\theta(L, L) \approx 2e^{-e^2/2}$ は L に依らない 1 未満の定数です（26-01 §03） 読 （物理）。
- **枠の減相関**は、L を固定すれば z の鏡映正値性の下でチェス盤の密度 κ_{cb} に置き換わり（26-05）、その構造は $\mathbb{Z}_2$・U(1) でも同じです（26-04）。L に一様な形（一様な板のギャップ）で U(1) が失敗する見立ては無く、U(1) が失敗するのは一様な板の張力の側だけと見込まれます 読 （物理、26-05 §05）。
- **横広げの不等式**は、U(1) と $\mathbb{Z}_2$ で破れ（§02）、希薄な領域の $SU(2)$ で余裕 $5/3$ で成り立つ見込みです（§04）。

還元の対偶の命題 初 　ある理論で、26-02 の条件つきの還元の定理の結論（二進の尺度の列での $\ln(1/\theta(R_k, R_k)) \geq \gamma R_k^2$ と、板の上の k に依らない張力）が偽なら、その理論では小さな T^2 の基点・枠の減相関・横広げの不等式（強い形）の少なくとも一つが偽である。

証明 　条件つきの還元の定理の対偶。∎

弱結合の U(1) では、板の上の張力は e^2/L^2 の程度で 0 に向かうと見立てられ（26-01 §03）、条件つきの還元の定理の結論は偽です。還元の対偶の命題により三つの仮定のどれかが偽で、上の並びでは小さな T^2 の基点は成り立ち、横広げの不等式（強い形）が破れています。**この還元の中で、U(1) と $\mathbb{Z}_2$ を外すために必ず使われる仮定は横広げの不等式だけ**で、そこが非可換の力学の入る場所です 読 （物理。U(1)・$\mathbb{Z}_2$・$SU(2)$ の振る舞いの見立ての上）。

この言い方には二つの限定が付きます。

- **還元に依る**。「唯一の場所」は 26-02 の連鎖の中の言い方です。帯を「β 単調性」と「繰り込みの比較」に分ける別の還元（26-06）では、漸近自由は比較の結合の移動 $\beta' < \beta$ に入ります。同じ物理が、還元ごとに別の形の不等式に入ると読むのが自然ですが、二つの還元の間の正確な対応は示されていません。

- **符号の見立ては二つの端だけ。**$5/3$ の余裕は希薄な領域（$L\Lambda \ll 1$）・一ループの勘定で、閉じ込めの領域の「対数だけ」も見立てです。横広げの不等式を帯 $L \sim 1/\Lambda$ で示す道具はありません。帯の難しさは、この一つの不等式の中の、この一つの尺度の区間に集まっています。

06

数値の兆候 — T^2 を広げたときの渦の自由エネルギー

容器を平面の方向の全体（周期 M の T^2_M）にとった大域の形（26-01 の (8)）で、横の T^2 を $N_T \times N_T$ に広げたときの渦の自由エネルギー $\Delta F = F_v$（捩れの流束 n_{34} を入れた分配関数との比、$\theta = \tanh(\Delta F/2)$）を、レプリカ交換と Bennett の受理率の方法で測った値です 読 。格子は $N_T^2 \times M^2$、捩れ $n_{12} = 1$、Wilson 作用。誤差は出所の推定の値で、種の数は出所に記載がありません。

表 2　横の T^2 を広げたときの ΔF（大域の形。〔読〕）

理論・β・M	$N_T = 2$	4	6	8
$U(1)$、$\beta = 1.5$、$M = 8$	-0.03 ± 0.04	0.83 ± 0.11	2.10 ± 0.47	5.14 ± 0.78
$SU(2)$、$\beta = 2.5$、$M = 8$	-0.01 ± 0.12	0.63 ± 0.18	0.33 ± 0.22	1.51 ± 0.29
$U(1)$、$\beta = 1.5$、$M = 12$	—	0.20 ± 0.21	1.35 ± 0.30	1.72 ± 0.47
$SU(2)$、$\beta = 2.5$、$M = 12$	—	0.57 ± 0.22	0.42 ± 0.24	-0.15 ± 0.36
$SU(2)$、$\beta = 2.4$、$M = 8$	—	0.31 ± 0.10	—	0.11 ± 0.25

読みは次のとおりです 読 。

- $U(1)$ では、二つの M のどちらでも、横を広げると ΔF が増えます（渦が高くなる）。$M = 8$ で θ は $N_T = 4, 6, 8$ で $0.39,\ 0.78,\ 0.99$、$\ln(1/\theta)$ は $N_T = 4 \to 8$ で $0.93 \to 0.012$（約 80 分の 1）。§02 の予言の向きです。
- $SU(2)$ では増え方がずっと緩やかか、増えません。$M = 8$、$\beta = 2.5$ の $\ln(1/\theta)$ は $N_T = 4 \to 8$ で $1.19 \to 0.45$（約 2.6 分の 1）、θ の比 $0.64/0.31 \approx 2$ は横広げの不等式（強い形）が $s = 2$ で許す $4C$ の中です。$M = 12$ と $\beta = 2.4$ では $N_T = 4 \to 8$ で ΔF は減ります。例外は $\beta = 2.5$、$M = 8$ の $N_T = 8$（$N_T = M$ の対称なトーラス）で、ΔF は 0.33 から 1.51 に上がっています。

限界も同じ重さで書きます。θ が 1 の程度の領域なので、$\theta \le 1$ のために U(1) の θ の比も 2.5 程度に抑えられ、この幾何での判別力は弱い。β は各理論で一点か二点で、U(1) の $\beta = 1.5$ と $SU(2)$ の $\beta = 2.5$ は同じ物理に合わせたものではありません。誤差は 0.04〜0.8 です。$N_T = 2$

の値は格子の人工物の領域です（26-02 §06）。**向きの兆候であって、横広げの不等式の試験の結論ではありません**。測定の詳しい表は 25-08 と 26-09 に置きます。

07

五分類の表と依存グラフ

表 3　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	Bogomolny の下界 $S \geq 8\pi^2\lvert Q\rvert/g^2$	典	3-05	連続の古典的な作用	—
2	捩れ $n_{12}=1$ の下で Q は半整数の値をとれる	典	't Hooft・25-01	$T^2_L\times\mathbb{R}^2$・$SU(2)$	—
3	一ループの走り $8\pi^2/g^2(L)=\frac{11N}{3}\ln\frac{1}{L\Lambda}$	典	4-06	一ループ・$L\Lambda\ll 1$	—
4	小さな捩れた T^2 の弦の張力 $T_R\sim\Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}\sin^2(\pi\lvert R\rvert/N)$	典	Tanizaki–Ünsal 式 (2.32)・(2.37)	希薄な領域・一ループ・$\theta=0$	—
5	流束の一様化の補題：$\int f^2\geq\Phi^2/\lvert\Omega\rvert$、等号は定数のとき	初	§02 の証明	二乗可積分	—
6	アーベルの作用の下界 (3)：$\geq\frac{A_T}{2e^2A_D}\Phi^2$、一様な配位で等号	初	流束の一様化の補題を各断面で	各断面の流束が同じ Φ・古典的な作用	—
7	U(1) のクーロン相で $\theta\approx 2e^{-e^2A_D/(2A_T)}$	読（物理）	26-01 §03	クーロン相・長距離で二次元の U(1)・見立て	—
8	U(1) で横広げの不等式は破れる（比 (5) が有界でない）	読（物理）	§02	U(1) のクーロン相の見立ての上	—
9	弱結合の $\mathbb{Z}_2$ で横広げの不等式は破れる（面積 A_T の壁）	読（物理）	§02・5-10	弱結合・見立て	—
10	$SU(2)$ の $Q=\frac12$ の最小作用は大きさ L 程度の自己双対の塊で、横広げの古典的な費用は 0	読（物理）	§03・25-02	原論文が見立てと明記・容器が塊を入れられる大きさ	—
11	Poisson の等式 $\mathbb{E}[(-1)^n]=e^{-2m}$	初	§04 の (8)	平均 m の Poisson 分布	—
12	希薄な気体で $\theta\approx e^{-2\zeta A_D}$、$\ln(1/\theta)\propto A_DL^{5/3}$	読（物理）	§04 の (9)	希薄な領域・一ループ・独立な点の近似	—
13	余裕 $5/3=11/3-2$ が横広げの不等式の符号を決める	読（物理）	§04	希薄な領域・一ループ	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
14	希薄な $SU(2)$ で横を広げた比は 1 以下（(10)）	読（物理）	§04	$L\Lambda \ll 1$	—
15	閉じ込めの領域で A_T への依存は対数だけ	読（物理）	§04	$L\Lambda \gg 1$・見立て	—
16	還元の対偶の命題：条件つきの還元の定理の結論が偽なら小さな T^2 の基点・枠の減相関・横広げの不等式（強い形）のどれかが偽	初	§05（対偶）	—	—
17	この還元の中で U(1)・$\mathbb{Z}_2$ を外すのは横広げの不等式だけ	読（物理）	§05	26-02 の連鎖の中で	—
18	横を広げると U(1) の ΔF は増え、$SU(2)$ は緩やかか増えない	読	§06 表 2	$M = 8, 12$・U(1) $\beta = 1.5$・SU(2) $\beta = 2.4, 2.5$・$N_T = 2$〜8・誤差 0.04〜0.8・$N_T = M = 8$ の例外	—

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  典  Bogomolny の下界 S ≥ 8π²|Q|/g²                                  連続・古典
 2  典  捩れの下で Q は半整数                                           T²_L × R²
 3  典  8π²/g²(L) = (11N/3) ln(1/LΛ)                                    ループ
 4  典  T_R ~ Λ²(ΛL)^(5/3) sin²(π|R|/N)                                 希薄・ループ
 5  初  流束の一様化の補題：∫f² ≥ Φ²/|Ω|
 6  初  アーベルの作用 ≥ (A_T/2e²A_D)Φ² ⟸ 5                            各断面の流束が同じ
 7  読  U(1)：θ ≈ 2exp(−e²A_D/2A_T)                                     見立て
 8  読  U(1) で横広げは破れる ⟸ 6・7
 9  読  Z₂ で横広げは破れる                                             弱結合・壁
10  読  SU(2) の渦は大きさ L の自己双対の塊 ⟸ 1・2                      古典的な費用 0
11  初  E[(−1)^n] = e^(−2m)
12  読  θ ≈ e^(−2ζA_D)、ln(1/θ) ∝ A_D L^(5/3) ⟸ 3・4・11                希薄・ループ
13  読  余裕 5/3 = 11/3 − 2 が符号 ⟸ 8・10・12
14  読  希薄な SU(2) で比 ≤ 1 ⟸ 12
15  読  閉じ込めの領域は対数だけ                                        見立て
16  初  還元の対偶の命題                                          26-02
17  読  この還元の中で群を分けるのは横広げだけ ⟸ 8・9・13・16
18  読  表 2 の向き                                                     小さな格子・β 一〜二点
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。紙で立つ節点は、流束の一様化の補題・アーベルの作用の下界・Poisson の等式・還元の対偶の命題の四つで、どれも初等的です。章の主張（余裕 5/3 = 11/3 − 2 が符号を決めること、この還元の中で群を分けるのは横広げの不等式だけであること）は「読（物理）」

で、その前提に見立ての行（U(1) のクーロン相・SU(2) の自己双対の塊・希薄な気体の偏り）が入っています。数値の行（表 2 の向き）はどの結論の前提にも入っていません。横広げの不等式そのものの節点はありません。それは仮定として 27-02 の条件の台帳に置かれます。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 アーベルの作用では、決まった流束の最小作用は一様に広げた配位で、横の面積に比例する（各断面の流束が同じ条件の下・古典的な作用）	量子の U(1) の勘定 (4) の定理としての証明
読 （物理） U(1)・$\mathbb{Z}_2$ で横広げの不等式は破れ、希薄な $SU(2)$ では余裕 $5/3 = 11/3 - 2$ で成り立つ	帯 $L \sim 1/\Lambda$ での横広げの不等式。希薄な領域・一ループの外での符号
初 ＋ 読 （物理） この還元の中で、U(1)・$\mathbb{Z}_2$ を外すのは横広げの不等式だけ	還元に依らない「唯一の場所」。26-06 の還元との正確な対応
読 小さな格子で、横を広げると U(1) の渦は高くなり $SU(2)$ は高くならない向き（一つの例外つき）	大きな格子・多くの β での振る舞い。不等式の定数の値

出典と再現

もの	種別	出典・道具
小さな捩れた T^2 の中心の渦の気体と弦の張力 (7)	典	Y. Tanizaki, M. Ünsal, arXiv:2201.06166（Prog. Theor. Exp. Phys. 2022）式 (2.32)・(2.37)。章 25-02
Bogomolny の下界・半整数の位相電荷	典	章 3-05・25-01 の出典（G. 't Hooft, Nucl. Phys. B153 (1979) 141 ほか）
一ループの結合の走り	典	章 4-06 の出典
U(1) のクーロン相の勘定・横広げの不等式が群を分けるという見立て	読（物理）	帯の還元の論文（この本から出た論文、A-07）の命題「the inequality separates the theories」（論文自身が heuristic と明記）。章 26-01
流束の一様化の補題・(3)・(8)・還元の対偶の命題	初	本文 §02・§04・§05 の証明
表 2 の渦の自由エネルギー	読	レプリカ交換と Bennett の受理率の方法。章 25-08・26-09 の表

この章で使った語 — 横広げの不等式・区画の偏り θ・自己双対の塊（分数インスタントン）・希薄な気体・余裕 $5/3$・横の二次元のエントロピー・クーロン相・移り変わりの帯（帯）。意味は A-02 用語集 と A-06 名前の索引 にあります。

次に読む章：26-04 構造だけでは渡れない — 鏡映正値性や双対性だけでは横広げの不等式が出ない理由。

構造だけでは渡れない

この章は本書の検討です。§01 は既存の知見、§05 は未解決の地図です。

この章で分かること — 格子ゲージ理論の構造的な道具——転送行列の正値性・中心と双対の恒等式・鏡映正値性・格子の対称性・有限の補題——を、捩れのある板の言葉で並べ、どれも $\mathbb{Z}_2$ と U(1) でそのまま成り立つことを確かめます。そこから、**この入力の組だけでは**横広げの不等式は導けない、という否定の補題が出ます。帯を渡るには、閉じ込めない相を外す力学の入力が要ります。途中で、構造の側から確かに言える二つのこと——区画の偏りの電場の流束の形 $\theta = Y(1)/Y(0) \geq 0$ と、z のアンサンブルの格子点を通る鏡映の正値性——を証明つきで置きます。後者は次の章のチェス盤の評価の入力になります。

前提となる章 — 26-01（区画の偏りと大域の形 (8)）・26-02（横広げの不等式）・26-03（U(1)・$\mathbb{Z}_2$ で破れること）・5-03（鏡映正値性と転送行列）・25-01（捩れと 't Hooft の流束）・A-04（Lean）。

先に言うこと — 否定の補題は「**この入力の組だけでは**」の形の文で、入力の一覧を明示した上での論理の整理です。どの入力も役に立たない、とは言いません（鏡映正値性は 26-05 で使います）。「U(1)・$\mathbb{Z}_2$ で横広げの不等式が破れる」は 26-03 の見立て（〔読〕、物理）なので、否定の補題の結論の最後の一段もその札を引き継ぎます。Lean で検査したのは、電場の流束の形のスペクトルの代数と、鏡映正値性の最後の和の代数だけです。

この章の順序

1. 構造の入力の一覧 — 何を「構造」と呼ぶか
2. 電場の流束の形 — $\theta = Y(1)/Y(0) \geq 0$ と tanh の比較
3. z の鏡映正値性 — 格子点を通る鏡映と、横向きの鏡映が捩れで崩れること
4. 構造の入力だけでは足りない補題 — この入力の組だけでは
5. 要る入力 — 閉じ込めない相を外すもの
6. Lean の言明を読む — `FluxDuality` ・ `ReflPos`
7. 五分類の表と依存グラフ

01

構造の入力の一覧 — 何を「構造」と呼ぶか

この節の五つの入力のうち、転送行列の正値性・中心と双対の恒等式・格子の対称性の三つは既存の知見の整理です。導入は 5-03 §05（転送行列）と 5-03 §04（反射正値性）にあります。

格子 $\Lambda = (\mathbb{Z}/L_1) \times (\mathbb{Z}/L_2) \times (\mathbb{Z}/M)^2$ の上の Wilson 作用の格子ゲージ理論で、横の二方向 1・2 に背景の捩れ $n_{12} = 1$ を置きます（25-01）。方向 3・4 が平面です。この章で**構造の入力**と呼ぶのは、次の五つの組 $\mathcal{I}$ です。

1. **転送行列の正値性**：平面の方向（3 または 4）を時間とする転送行列 T が正の作用素（5-03、Osterwalder–Seiler・Lüscher 典 ）。
2. **中心と双対の恒等式**：捩れの流束を入れることは中心変換の挿入であり、電場の流束の射影で分解できること（'t Hooft 典 ）。§02 の電場の流束の分解の補題はこの形の一つです。
3. **平面の方向の鏡映正値性**：捩れを固定した z のアンサンブルでの、方向 3・4 の格子点を通る鏡映の正値性（§03 の z の鏡映正値性）。
4. **格子の対称性**：平行移動・回転・鏡映と、それらで捩れの類が保たれること。
5. **有限の補題**：容器の恒等式と入れ子（25-03）、板の評価 $\sup_\Phi \theta_D \le \tanh(\beta L^2)^{|D|}$（25-04）、流れの補題 $\theta \le 1 - a$（25-06）。どれも測度と有限和の性質だけを使います。

問いは、$\mathcal{I}$ から横広げの不等式（26-02 の (5)）が出るか、です。答えは §04 で「出ない」です。そこへ行く前に、$\mathcal{I}$ の中で、区画の偏りについて確かに言えることを二つ置きます。

02

電場の流束の形 — $\theta = Y(1)/Y(0) \ge 0$

格子を $T^2_{L_1 \times L_2} \times T^2_{M \times M}$ とし、$n_{12} = 1$ に加えて平面 (3,4) を通る捩れの流束 $n_{34} \in \{0, 1\}$ を入れた分配関数を $Z(1, n_{34})$ と書きます。26-01 の (8) の大域の偏りは

$$\theta \;:=\; \frac{Z(1,0) - Z(1,1)}{Z(1,0) + Z(1,1)} \;=\; \tanh \frac{F_v}{2}, \qquad e^{-F_v} := \frac{Z(1,1)}{Z(1,0)} \tag{1}$$

でした。方向 3 を時間に選びます。時刻一つ分の空間は $T^2_{L_1 L_2} \times T^1_M$（方向 1・2・4）で、そこには空間の磁束 $m_4 = n_{12} = 1$ があります。転送行列 $T_3 \ge 0$ と、方向 4 の中心変換 $\hat{C}_4$（方向 4 に一周する結合に中心の元 -1 を掛ける操作）は可換で、$\hat{C}_4^2 = 1$ です。$\hat{C}_4$ の固有値 $(-1)^{e_4}$ で空間を分けたときの $e_4 \in \{0, 1\}$ が、方向 4 の**電場の流束**です（'t Hooft 典 ）。射影を P_e とし

$$Y(e) \;:=\; \mathrm{Tr}\big(P_e\, T_3^{\,M}\big) \qquad (e=0,1) \tag{2}$$

とおきます。

電場の流束の分解の補題（電場の流束の形） 初　上の設定で、$Y(0), Y(1) \ge 0$ で

$$Z(1,0) = Y(0) + Y(1), \qquad Z(1,1) = Y(0) - Y(1). \tag{3}$$

よって $Z(1,0)+Z(1,1) > 0$ のとき $\theta = Y(1)/Y(0) \ge 0$。さらに捩れた分配関数の正値性の仮定なら $\theta \le 1$、すなわち $F_v \ge 0$ で $0 \le \theta \le 1$。

証明　分配関数は転送行列の跡 $Z(1,0) = \mathrm{Tr}\, T_3^{\,M}$ で、平面 $(3,4)$ を通る捩れ $n_{34}=1$ は、時間の一周のどこかで $\hat{C}_4$ を挟むことと同じなので $Z(1,1) = \mathrm{Tr}(\hat{C}_4 T_3^{\,M})$ です（'t Hooft の構成 典 ）。$\hat{C}_4 = P_0 - P_1$、$1 = P_0 + P_1$ を代入すると (3)。P_e は T_3 と可換な直交射影なので $P_e T_3^{\,M} P_e = P_e T_3^{\,M}$ は正の作用素で、跡は 0 以上です。$Z(1,0)+Z(1,1) = 2Y(0) > 0$ のとき (1) に (3) を入れて $\theta = 2Y(1)/2Y(0)$。$Z(1,1) = Y(0) - Y(1) \ge 0$ から $Y(1) \le Y(0)$。∎

二つの注意があります。第一に、$\theta \ge 0$ と $|Z(1,1)| \le Z(1,0)$ は (3) と $Y(e) \ge 0$ だけから出る**スペクトルの**事実ですが、$\theta \le 1$ に要る捩れた分配関数の正値性の仮定はそうではありません。$Z(1,1)$ は捩れた面の重み $e^{-\frac{\beta}{2}\mathrm{tr}U_p}$ を含む正の関数の積分なので 0 以上ですが、これは Boltzmann の重みの正値性で、転送行列のスペクトルからは出ません。第二に、電場の流束の分解の補題は「渦の自由エネルギー（磁束）が小さい $\Longleftrightarrow$ 電場の流束 $e_4=1$ の状態が $e_4=0$ に比べて重い」という 't Hooft の電場と磁場の双対性の格子版です。閉じ込めの領域では $Y(1)/Y(0)$ は電場の弦の張力で小さくなると見込まれます 読 （物理、26-05 §04）。

大域の形で横広げを書くときに使う、初等的な補題を一つ添えます。

tanh の比較の補題 初　$\theta = \tanh(F/2)$、$\theta' = \tanh(F'/2)$、$F, F' \ge 0$ とする。$F' \le KF$（$K \ge 1$）なら $\theta' \le K\theta$。

証明　$\tanh$ は $[0,\infty)$ で単調増加かつ凹で $\tanh 0 = 0$ なので、$K \ge 1$ について $\tanh(Kx) \le K \tanh x$（凹関数 g で $g(0)=0$ なら $g(x) = g(\frac{1}{K}\cdot Kx + (1-\frac{1}{K})\cdot 0) \ge \frac{1}{K} g(Kx)$）。よって $\theta' = \tanh(F'/2) \le \tanh(KF/2) \le K\tanh(F/2) = K\theta$。∎

つまり、渦の自由エネルギーの形の横広げ $F_v(L') \le C(L'/L)^2 F_v(L)$ は、偏りの形の横広げを導きます。

```
03
```

z の鏡映正値性 — 格子点を通る鏡映と、横向きの鏡映

設定。トーラス $\Lambda = (\mathbb{Z}/L)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$、$M$ は偶数とします。変数は結合 $U_\ell \in SU(2)$ と面の変数 $z_p \in \{\pm 1\}$ で、次の拘束を課します。

- 全ての三次元の立方体 c で $\prod_{p \in \partial c} z_p = 1$（$z$ は閉じた $\mathbb{Z}_2$ の 2-余鎖）。
- 大域の類の固定 $n_{12}(z) := \prod_{p \in \Pi} z_p = -1$。$\Pi$ は (x_3, x_4) を固定した (1,2) 平面で、z が閉じているので Π の位置に依りません。

測度は

$$d\mu \;=\; Z^{-1} \prod_{\ell} dU_\ell \sum_{z} \mathbf{1}[\delta z = 1]\, \mathbf{1}[n_{12}(z) = -1]\, \exp\Big(\frac{\beta}{2} \sum_{p} z_p \operatorname{tr} U_p \Big) \tag{4}$$

（dU は Haar 測度）です。これが 26-01 §01 の捩れを和に取ったアンサンブルで、横の捩れを固定したものです。

鏡映。Θ を方向 3 の格子点を通る鏡映 $x_3 \mapsto -x_3 \pmod M$ とします。固定される平面は $P_0 = \{x_3 = 0\}$ と $P_1 = \{x_3 = M/2\}$ です。結合には、方向 $\mu \neq 3$ なら $U_{(x,\mu)} \mapsto U_{(\Theta x, \mu)}$、方向 3 なら $U_{(x,3)} \mapsto U_{(\Theta x - e_3, 3)}^{-1}$、面の変数には $z_p \mapsto z_{\Theta p}$ で作用させ、関数には $(\Theta G)(U, z) := \overline{G(\Theta U, \Theta z)}$ で作用させます。

z の鏡映正値性 初　右半分 $\Lambda_+ = \{0 \le x_3 \le M/2\}$ の変数（平面 $P_0 \cup P_1$ の上の変数を含む）だけに依る任意の有界な関数 G について $\langle G \cdot \Theta G \rangle_\mu \ge 0$。方向 4 についても同じ。

証明　五段で示す。

段 1（変数の分割）。 変数を三つに分ける。φ：平面 $P_0 \cup P_1$ の上の変数（平面の中の方向 1・2・4 の結合と、平面の中の (1,2)・(1,4)・(2,4) 型の面の z）。ψ_+：右の変数（$0 \le x_3 < M/2$ から出る方向 3 の結合、$0 < x_3 < M/2$ の他の方向の結合、$[x_3, x_3+1] \subset [0, M/2]$ の $(3,\nu)$ 型の面、$0 < x_3 < M/2$ の平面の中の型の面の z）。$\psi_- := \Theta \psi_+$：左の変数。Θ は φ を動かさない。

段 2（重みの分解）。 面の重み $e^{\frac{\beta}{2} z_p \operatorname{tr} U_p}$ は、p が右・左・平面のどれか一つに属するので、そのどれかに入る。平面の面の重みは $A(\varphi)$ に入れる。立方体の拘束も同様に分かれる：方向 3 を含む立方体は $[x_3, x_3+1]$ を張るので片側と平面の変数だけに依り、方向 3 を含まない立方体は $0 < x_3 < M/2$ なら右、平面の上なら平面の変数だけに依る。大域の拘束 n_{12} は $\Pi \subset P_0$ で測れば φ の関数。よって重みは $W = A(\varphi)\, F(\psi_+, \varphi)\, F'(\psi_-, \varphi)$、$A \ge 0$、$F \ge 0$ の形。

段 3（左右の因子の関係）。 作用と拘束は Θ で不変である。面の向きが逆になっても $SU(2)$ では $\operatorname{tr} U_{\Theta p} = \operatorname{tr} U_p^{-1} = \operatorname{tr} U_p$。立方体は立方体に移り、$n_{12}$ を測る平面は固定される。よって

$F'(\psi_-,\varphi)=F(\Theta\psi_-,\varphi)$。

*段 4（測度の不変性）。*Haar 測度は逆元をとる操作で不変、z の数え上げの測度は置換で不変。

*段 5（正値性）。*以上から

$$Z\,\langle G\cdot\Theta G\rangle \;=\; \int d\varphi\,A(\varphi)\Big[\int d\psi_+ F(\psi_+,\varphi)G(\psi_+,\varphi)\Big]\overline{\Big[\int d\psi_- F(\Theta\psi_-,\varphi)G(\Theta\psi_-,\varphi)\Big]} \;=\; \int d\varphi$$

∎

最後の等式から不等式への代数（有限和の版）は Lean の ReflPos（`ReflPos.refl_pos`）で検査されています（§06）。正値性から出る Cauchy–Schwarz の形 $\langle G\cdot\Theta H\rangle^2\le\langle G\cdot\Theta G\rangle\langle H\cdot\Theta H\rangle$（実の G,H）の、因子に分けた後の代数が ReflPos（`ReflPos.refl_cs`）です。これはチェス盤の評価の入力です（26-05）。

z の鏡映正値性は Osterwalder–Seiler の格子点を通る鏡映の議論 [典]（5-03）に、$\mathbb{Z}_2$ の面の変数と閉性の拘束を加えたものです。要点は、立方体の拘束が一つずつ片側と平面に収まることと、大域の類 n_{12} が鏡映の方向（3）と直交する平面にあって平面 P_0 の上で測れることです。

横向きの鏡映。同じ議論を方向 1・2 の鏡映でしようとすると、捩れが邪魔をします。

横向きの鏡映の非正値の補題 [初]　$SU(2)$ で $e^{\frac{\beta}{2}\mathrm{tr}U}=\sum_j c_j\chi_j(U)$（$\chi_j$ はスピン j の指標、$c_j=\frac{2(2j+1)}{\beta}I_{2j+1}(\beta)>0$）とすると、捩れた面の重みは

$$e^{-\frac{\beta}{2}\mathrm{tr}U} \;=\; \sum_j (-1)^{2j} c_j\,\chi_j(U) \tag{5}$$

で、半整数の j の係数が負になる。したがって、捩れを固定したまま横の方向 1・2 の鏡映の平面をまたぐ面の重みは正の型でなく、鏡映正値性の標準の議論はそこで成り立たない。

証明　-1 は $SU(2)$ の中心の元で、$-\mathrm{tr}\,U=\mathrm{tr}(-U)$、$\chi_j(-U)=(-1)^{2j}\chi_j(U)$。よって $e^{-\frac{\beta}{2}\mathrm{tr}U}=e^{\frac{\beta}{2}\mathrm{tr}(-U)}=\sum_j c_j\chi_j(-U)$ から (5)。c_j の式と正値性は、変形 Bessel 関数 $I_n(\beta)>0$（$\beta>0$）による標準の展開です [典]。正の型の重み（指標展開の係数が 0 以上）であることが、鏡映の平面をまたぐ面について標準の議論の要る性質で、(5) はそれを満たさない。∎

横向きの鏡映の非正値の補題の帰結は、**鏡映正値性からは横の大きさ L についての凸性や単調性が出ない**ことです。横広げの不等式は L についての比較なので、それを鏡映から得る道は最初から閉じています。横向きの鏡映の非正値の補題が言うのは標準の議論が使えないことで、横の鏡映の正値性が全ての関数で破れることまでは示していません。

04

否定の補題 — この入力の組だけでは

構造の入力だけでは足りない補題（否定の補題） 初　§01 の構造の入力の組 $\mathcal{I}$（転送行列の正値性・中心と双対の恒等式（電場の流束の分解の補題を含む）・平面の方向の鏡映正値性（z の鏡映正値性）・格子の対称性・有限の補題）は、群を $SU(2)$ から $\mathbb{Z}_2$ または U(1) に替え、捩れの変数を ± 1 のまま置いた四次元の Wilson の理論でも、同じ証明で成り立つ。したがって、$\mathcal{I}$ だけを使って横広げの不等式を導く議論があれば、同じ議論が $\mathbb{Z}_2$ と U(1) でも横広げの不等式を導く。対偶として、**$\mathbb{Z}_2$ か U(1) のどちらかで横広げの不等式が偽なら、この入力の組だけでは横広げの不等式は導けない。**

証明　入力ごとに、使っている群の性質を確かめる。

- 転送行列の正値性：Osterwalder–Seiler の議論は、コンパクト群の Wilson 作用で、指標展開の係数が正の作用について成り立つ。$\mathbb{Z}_2$・U(1) の $e^{\beta \operatorname{Re} U_p}$ はこれを満たす 典 。
- 中心と双対の恒等式：使うのは、-1 が群の中心にあること（$\mathbb{Z}_2$ と U(1) の中心は群そのもので -1 を含む）と、捩れの流束が中心変換の挿入であることだけ。電場の流束の分解の補題の証明はそのまま通る。
- 鏡映正値性：z の鏡映正値性の証明が使う群の性質は、段 3 の $\operatorname{tr} U_{\Theta p} = \operatorname{tr} U_p^{-1} = \operatorname{tr} U_p$ と、段 4 の Haar 測度の逆元についての不変性だけ。U(1) では作用を $\operatorname{Re} U_p$ で書くと $\operatorname{Re} U^{-1} = \operatorname{Re} \overline{U} = \operatorname{Re} U$、$\mathbb{Z}_2$ では $U^{-1} = U$ で、どちらも成り立つ。
- 格子の対称性：作用と捩れの類の定義が群に依らない形なので同じ。
- 有限の補題：容器の恒等式は枠で条件づけた独立性（Markov 性）、板の評価は面の変数の反転の軌道についての条件づけ、流れの補題は定常性だけを使い、どれも群の非可換性を使わない。

前半が示せたので、後半は論理である：議論が $\mathcal{I}$ の性質しか使わないなら、$\mathcal{I}$ を満たす全ての理論で同じ結論を与える。∎

構造の入力だけでは足りない補題の前提「$\mathbb{Z}_2$ か U(1) で横広げの不等式が偽」は、26-03 §02 の見立てです 読 （物理。U(1) のクーロン相の勘定と、弱結合の $\mathbb{Z}_2$ の壁の勘定）。それを認めると、**横広げの不等式は構造の入力だけからは出ない**という結論になります。この最後の一段は、前提の札〔読〕（物理）を引き継ぎます。

同じ議論は、弱い形（26-02 の横広げの不等式（弱い形））にも、一様な板の張力にもそのまま当てはまります。U(1)・$\mathbb{Z}_2$ では板の張力が L とともに 0 に向かうと見立てられるので、どちらも同じ入力の組だけでは出ません 読 （物理）。

構造の入力だけでは足りない補題が言っていないことも書いておきます。第一に、$\mathcal{I}$ が帯に無用だとは言っていません。L を固定すれば、z の鏡映正値性は枠の減相関をチェス盤の密度 κ_{cb} に置き換えます（26-05）。第二に、$\mathcal{I}$ に一つ力学の入力を足したときに何が出るかは、構造の入力だけでは足りない補題の外です。第三に、強結合（小さな β）では U(1) も閉じ込めるので、構造の入力だけでは足りない補題が分けるのは群そのものではなく、**閉じ込めない相があるかどうか**です。

薄い渦の床 — 構造だけの道具が出すのは床まで。構造の入力に相関不等式と被覆の比べを足しても、出るのは群を区別しない下からの評価（床）です。板 $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ の $SU(2)$ の Wilson 測度で、全ての実数 β、全ての $N, M \geq 1$、背景 $n_{12} \in \{0,1\}$ について

$$\theta = \frac{Z_{n_{34}=0} - Z_{n_{34}=1}}{Z_{n_{34}=0} + Z_{n_{34}=1}} \;\leq\; \tanh\!\big(N^2|\beta|\big)^{M^2} \tag{6}$$

が成り立ちます[初]（薄い渦の床。$SU(2)$ の系を $\mathbb{Z}_2$ の符号の系で上から押さえ、四次元の $\mathbb{Z}_2$ の系を二次元の面の系に移して閉じた式で評価する。具体の $SU(2)$ の Wilson 測度の定理として Lean で検査した）。不等式の型は Mack–Petkova・Fröhlich の線にあります[典]（原典の本文での照合は未）。結合が正のとき、張力にすると $\sigma_N(\beta) \geq -\ln\tanh(N^2\beta) \approx 2e^{-2N^2\beta}$ で、N とともに急に 0 へ向かい、N に一様ではありません（強結合の窓の中では、面積あたりの率が横の大きさに依らない形が在ります。前の因子は残ります。窓の外では一様な形はありません。20-06）。右辺は面に沿って N^2 枚を重ねた薄い渦の値で、同じ比べは $\mathbb{Z}_2$ の系でも同じ形で立ちます。この型の比べは、当てはまる模型の類の極限に在るガウスの模型で等号になるので、比べだけから床を一様な割合で越え続けること（26-06 §08 の張力の倍化の不等式）は出ません[読]。構造の入力だけでは足りない補題が「この入力の組だけでは出ない」と言う所を、出る側から言うと「出るのは床まで」です。床より上が、§05 の非可換の力学の入力の要る所です。この床の言明と証明は 21-02 に在ります。

05

要る入力 — 閉じ込めない相を外すもの

構造の入力だけでは足りない補題から、帯を渡る議論は $\mathcal{I}$ の外の入力を少なくとも一つ使わなければなりません。それは、弱結合の U(1) と $\mathbb{Z}_2$——閉じ込めない相——で偽になる入力でなければなりません。この本の検討で名指しできる候補は、どれも非可換の力学の性質です。

表 1　帯に要る入力の候補（どれも示されていない。札は候補の見立て）

入力	U(1)・$\mathbb{Z}_2$ で	入る場所	章
漸近自由（結合の走りの符号）	U(1) は走らないか逆向き、$\mathbb{Z}_2$ は連続な走りを持たない	希薄な領域の余裕 $5/3$・繰り込みの比較の $\beta' < \beta$	26-03 §04・26-06

入力	U(1)・$\mathbb{Z}_2$ で	入る場所	章
自己双対の塊への局在（非線形性）	アーベルの流束は一様に広がるしかない	横広げの古典的な費用が 0	26-03 §03
紫外の制御（多重尺度の解析）	U(1) では別の形（共形な長距離）	小さな T^2 の基点	26-02 の小さな T^2 の基点・27-02

表 1 の各行は〔読〕（物理）の見立てで、どの入力も帯 $L \sim 1/\Lambda$ で使える形になっていません。強結合の側では、多面体の展開で横広げの不等式が定数 $C \approx 1$ で成り立つ筋が考えられています（因子 $(L'/L)^2$ が強結合の主要項の文献（Münster 1981）と整合するという報告がありますが、照合未了です）。ただし平面の大きさ M に一様な評価は確かめられておらず、この本では〔仮〕に置きます。強結合では U(1) も閉じ込めるので、この行は構造の入力だけでは足りない補題と矛盾しません。

構造の入力だけでは足りない補題は予想どおりの結果を明示したもので、驚きはありません。役目は、帯の議論を読むときの**試金石**を一つ与えることです：議論が $\mathcal{I}$ の性質だけで進んでいるなら、その議論は U(1) でも同じ結論を与えるので、どこかに誤りがあります。26-08 の、U(1) を区別しないという批判を受けた道の記録は、この試金石の実例です。

06

Lean の言明を読む — `FluxDuality`・`ReflPos`

電場の流束の分解の補題のスペクトルの部分と、z の鏡映正値性の段 5 の代数は、Lean 4 のファイル `FluxDuality.lean`・`ReflPos.lean` の五つの定理です。言明を本文の言葉で読みます。どれも有限集合 ι（または Φ, Ψ）の上の実数の和の文です。

`FluxDuality.split`：実数の族 $t, c : \iota \to \mathbb{R}$ について、仮定「全ての i で $c_i = 1$ または $c_i = -1$」の下で、$\sum_i t_i - \sum_i c_i t_i = 2\sum_{c_i=-1} t_i$ かつ $\sum_i t_i + \sum_i c_i t_i = 2\sum_{c_i=1} t_i$。本文では t_i が T_3^M の固有値、c_i が $\hat{C}_4$ の固有値で、二つの式が (3) の $Z(1,0) \mp Z(1,1) = 2Y(1), 2Y(0)$ です。

`FluxDuality.twisted_le`：仮定「全ての i で $0 \le t_i$」「$c_i = \pm 1$」の下で $\left|\sum_i c_i t_i\right| \le \sum_i t_i$。本文の $|Z(1,1)| \le Z(1,0)$ です。

`FluxDuality.bias_mem`：仮定「$0 \le t_i$」「$c_i = \pm 1$」「$0 \le \sum_i c_i t_i$」「$0 < \sum_i t_i + \sum_i c_i t_i$」の下で、$\theta := (\sum t - \sum ct)/(\sum t + \sum ct)$ について $0 \le \theta \le 1$。**第三の仮定 $Z_{11} := \sum ct \ge 0$ が $\theta \le 1$ に使われ**、これはスペクトルの事実ではなく、本文の Boltzmann の重みの正値性に当たります。

`ReflPos.refl_pos`：有限集合 Φ, Ψ と実関数 $A : \Phi \to \mathbb{R}$、$F, G : \Psi \to \Phi \to \mathbb{R}$ について、仮定「全ての φ で $0 \le A(\varphi)$」の下で $\sum_\varphi \sum_{\psi_1} \sum_{\psi_2} A(\varphi) F(\psi_1, \varphi) F(\psi_2, \varphi) G(\psi_1, \varphi) G(\psi_2, \varphi) \ge 0$

。z の鏡映正値性の段 5 の $\int A\,|\int FG|^2 \geq 0$ の有限和の版で、F の符号は問いません。

`ReflPos.refl_cs`：同じ仮定 $0 \leq A$ の下で、$g(\varphi) := \sum_\psi F(\psi,\varphi)G(\psi,\varphi)$、$h(\varphi) := \sum_\psi F(\psi,\varphi)H(\psi,\varphi)$ について $\left(\sum_\varphi A\,g\,h\right)^2 \leq \left(\sum_\varphi A\,g^2\right)\left(\sum_\varphi A\,h^2\right)$。鏡映の Cauchy–Schwarz の形 $\langle G\cdot\Theta H\rangle^2 \leq \langle G\cdot\Theta G\rangle\langle H\cdot\Theta H\rangle$ を、重みが因子に分かれた後の代数として書いたものです。

機械検査が保証するのは、この有限和と実数の代数だけです。転送行列が正であること、$\hat{C}_4$ と可換であること、捩れが $\hat{C}_4$ の挿入であること、重みが $A\cdot F\cdot F$ の形に分かれること（z の鏡映正値性の段 1〜4）、Haar 測度――は Lean の外にあり、本文の証明と文献が担います。五つの定理の公理は、記録では標準の三つ（`propext`・`Classical.choice`・`Quot.sound`）で、本書の再検査を通しています（A-04）。

07

五分類の表と依存グラフ

表 2　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	転送行列の正値性 $T \geq 0$	典	Osterwalder–Seiler・Lüscher・5-03	コンパクト群の Wilson 作用	—
2	捩れ n_{34} は中心変換 $\hat{C}_4$ の挿入、e_4 は $\hat{C}_4$ の固有値	典	't Hooft・25-01	中心が -1 を含む群	—
3	電場の流束の分解の補題：$Z(1,0)=Y(0)+Y(1)$、$Z(1,1)=Y(0)-Y(1)$、$\theta = Y(1)/Y(0) \geq 0$	初	§02 の証明 $\Longleftarrow$ 1・2	$T^2_{L_1L_2}\times T^2_{M\times M}$・$n_{12}=1$・$Z(1,0)+Z(1,1)>0$	FluxDuality（`FluxDuality.split`）（仮定：$c_i=\pm1$）・`twisted_le`（仮定：$0\leq t_i$・$c_i=\pm1$）
4	$\theta \leq 1$（$F_v \geq 0$）	初	§02 $\Longleftarrow$ 3	捩れた分配関数の正値性の仮定（Boltzmann の重みの正値性）を使う	FluxDuality（`FluxDuality.bias_mem`）（仮定：$0\leq t_i$・$c_i=\pm1$・$Z_{11}\geq 0$・$Z_{10}+Z_{11}>0$）
5	tanh の比較の補題：$F' \leq KF$（$K\geq 1$）なら $\tanh(F'/2) \leq K\tanh(F/2)$	初	§02 の証明（tanh の凹性）	$F, F' \geq 0$	—
6	z の鏡映正値性：z のアンサンブルの、方向 3・4 の格子点を通る鏡映の正値性	初	§03 の証明（Osterwalder–Seiler の議論に z と拘束を加えた形）	$SU(2)$・M は偶数・捩れ $n_{12}=1$ を固定	ReflPos（`ReflPos.refl_pos`）（段 5 の代数だけ。仮定：$0\leq A$）・`refl_cs`（仮定：$0\leq A$）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
7	指標展開の係数 $c_j = \frac{2(2j+1)}{\beta} I_{2j+1}(\beta) > 0$	典	標準の展開（数値で照合）	$SU(2)$・$\beta > 0$	—
8	横向きの鏡映の非正値の補題：捩れた面の重みは半整数の j で負の係数、横向きの鏡映は正の型でない	初	§03 の証明 $\Longleftarrow$ 7	捩れを固定・方向 1・2 の鏡映	—
9	構造の入力だけでは足りない補題：$\mathcal{I}$ は $\mathbb{Z}_2$・U(1) でも成り立ち、$\mathcal{I}$ だけからの議論はそこでも同じ結論を与える	初	§04 の証明 $\Longleftarrow$ 1・3・6	「この入力の組だけでは」の形・捩れは ± 1	—
10	U(1)・$\mathbb{Z}_2$ で横広げの不等式は偽	読（物理）	26-03 §02	弱結合・見立て	—
11	横広げの不等式（強い形・弱い形）と一様な板の張力は、構造の入力だけからは出ない	読（物理）	§04 $\Longleftarrow$ 9・10	U(1)・Z_2 で横広げの不等式が偽という見立ての上	—
12	鏡映正値性からは横の大きさ L についての凸性・単調性は出ない	初	§03 $\Longleftarrow$ 8	標準の議論が使えない、の意味	—
13	強結合で横広げの不等式は $C \approx 1$ で成り立つ	仮	筋：多面体の展開（平面の大きさに一様な評価は未確認）	小さな β	—
14	閉じ込めの領域で $Y(1)/Y(0)$ は電場の弦の張力で小さい	読（物理）	26-05 §04	$L\Lambda \gg 1$・見立て	—

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  典  転送行列の正値性                                          コンパクト群・Wilson 作
 2  典  捩れは中心変換の挿入、e₄ は固有値                        't Hooft
 3  初  電場の流束の分解の補題：θ = Y(1)/Y(0) ≥ 0 ⟸ 1・2                    Lean
 4  初  θ ≤ 1 ⟸ 3                                          Z(1,1) ≥ 0 を使う・
 5  初  tanh の比較の補題：F' ≤ KF ⇒ θ' ≤ Kθ                        K ≥ 1
 6  初  z の鏡映正値性（方向 3・4）                        Lean refl_pos・refl_cs（代数）
 7  典  指標展開の係数 c_j > 0                                SU(2)
 8  初  横向きの鏡映の非正値の補題 ⟸ 7                      捩れを固定
 9  初  構造の入力だけでは足りない補題 ⟸ 1・3・6              この入力の組だけでは
10  読  U(1)・Z₂ で横広げは偽                                  26-03・見立て
11  読  構造の入力だけからは出ない ⟸ 9・10
12  初  鏡映から L の凸性・単調性は出ない ⟸ 8
13  仮  強結合で C ≈ 1                                        筋・M に一様は未確認
14  読  閉じ込めの領域で Y(1)/Y(0) は小さい                   見立て
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。紙で立つ節点は、電場の流束の分解の補題・θ ≤ 1・tanh の比較の補題・z の鏡映正値性・横向きの鏡映の非正値の補題・構造の入力だけでは足りない補題・凸性と単調性が出ないことで、文献の行（転送行列の正値性・中心変換の挿入・指標展開の係数）の上にあります。章の題の主張（横広げの不等式と一様な板の張力は構造の入力だけからは出ない）だけが見立ての行（U(1)・Z_2 で横広げの不等式が偽）を前提に持ち、「読（物理）」です。仮定の行（強結合で横広げの不等式が成り立つ）はどの結論の前提にも入っていません。

鏡映正値性の機械検査した形は 20-01、θ の符号は 21-06 に在ります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 区画の大域の偏りは電場の流束の比 $\theta = Y(1)/Y(0) \in [0,1]$（上界は重みの正値性を使う）	$Y(1)/Y(0)$ の大きさの評価。帯での電場の弦の張力
初 捩れを固定した z のアンサンブルは、方向 3・4 の格子点を通る鏡映で正値。横向きの鏡映は捩れで正の型でない	横の鏡映の正値性が全ての関数で破れること。L についての凸性
初 構造の入力の組 $\mathcal{I}$ は $\mathbb{Z}_2$・U(1) でも成り立ち、$\mathcal{I}$ だけからの議論はそこでも同じ結論を与える（この入力の組だけでは）	$\mathcal{I}$ に力学の入力を足したときに何が出るか
読 （物理） 横広げの不等式と一様な板の張力は、構造の入力だけからは出ない	U(1)・$\mathbb{Z}_2$ で横広げの不等式が偽であることの定理としての証明

言えている	言えていない
Lean：スペクトルの代数（FluxDuality（`FluxDuality.split`・`FluxDuality.twisted_le`・`FluxDuality.bias_mem`））と鏡映の最後の和の代数（ReflPos（`ReflPos.refl_pos`・`ReflPos.refl_cs`））	転送行列・中心変換・重みの分解・Haar 測度（Lean の外）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
鏡映正値性と転送行列の正値性	典	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440。M. Lüscher, Commun. Math. Phys. 54 (1977) 283。章 5-03
電場と磁場の流束・捩れと中心変換	典	G. 't Hooft, Nucl. Phys. B153 (1979) 141。章 25-01
捩れを和に取ったアンサンブル	典	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 123 (1979) 442。章 25-03
電場の流束の分解の補題・tanh の比較の補題・z の鏡映正値性・横向きの鏡映の非正値の補題・構造の入力だけでは足りない補題	初	本文 §02〜§04 の証明。帯の還元の論文（この本から出た論文、A-07）の命題「site-reflection positivity」「no-go from structure」と同じ内容
指標展開の係数の式	典	標準の展開。$\beta = 0.5, 2.5$、$j \le 3/2$ で Haar 測度の数値積分と小数点以下 8 桁で一致することを確かめた
強結合の多面体の展開の筋	仮	筋のみ。主要項の比較の文献（Münster 1981）は照合未了
Lean	Lean	FluxDuality（`FluxDuality.split`・`FluxDuality.twisted_le`・`FluxDuality.bias_mem`）、ReflPos（`ReflPos.refl_pos`・`ReflPos.refl_cs`）。保証するのは有限和と実数の代数だけ。A-04

この章で使った語 — 構造の入力・転送行列・中心変換・電場の流束 e_4・区画の偏り θ・z のアンサンブル・格子点を通る鏡映・正の型・否定の補題・横広げの不等式・試金石。意味は A-02 用語集 と A-06 名前の索引 にあります。

次に読む章：26-05 チェス盤と同時の反転 — z の鏡映正値性を使って、枠の減相関を一つの密度に置き換える。

チェス盤と同時の反転

この章は本書の検討です。§04・§05 は未解決の地図、§06 は案内です。

この章で分かること — 26-02 の還元の第二の仮定「枠の減相関」は、枠を共有する容器の偏りの積が、典型的な値の積に分かれるという仮定でした。横のトーラスの大きさ L を固定すれば、z の鏡映正値性（26-04 の z の鏡映正値性の定理）とチェス盤の評価によって、この仮定は**一つの密度** κ_{cb} に置き換わります。L を固定した板の上では、Wilson ループは $\kappa_{\mathrm{cb}}^{n(C)}$ で押さえられ、残る仕事は $\kappa_{\mathrm{cb}} < 1$ の評価だけです。その評価の道具として、板の評価と同時の反転を並べ、同時の反転が帯の試験には使えない理由も書きます。最後に、帯が「一様な板の張力」と「一様な板のギャップ」の二つの一様性に集約されることを見ます。

前提となる章 — 26-02 §02（枠の減相関）・26-04 §03（z の鏡映正値性）・25-03（容器）・25-04（板の閉じ込め）・25-06（流れの補題と同時の反転）・5-03（鏡映正値性）。

先に言うこと — この章の紙の結果（横を止めたチェス盤の評価・同時の反転の評価）は、L **を固定すれば**の文です。L に一様な評価は一つもありません。帯の二つの一様性は〔仮〕のまま残ります。チェス盤の評価そのものは標準の道具（Fröhlich–Israel–Lieb–Simon）で、新しいのは、それを容器の偏りに当てる組み立てだけです。記号 κ_{cb} の添え字は、この本の他の κ と区別するためのものです（§06）。

この章の順序

1. 置き換えるもの — 枠の減相関と、Hölder で失われる冪
2. チェス盤の評価 — 横を止めたチェス盤と密度 κ_cb
3. κ_{cb} の上界 — 板の評価と同時の反転の評価、そしてその限界
4. 帯が再び現れる場所 — 希薄な領域・閉じ込めの領域・その間
5. 帯の集約 — 一様な板の張力と一様な板のギャップ（表 1）
6. κ の記号の対照（表 2）
7. 五分類の表と依存グラフ

01

置き換えるもの — 枠の減相関と、Hölder で失われる冪

記号は 26-01 §01 のとおりです。容器 $D \times T_L^2$ の区画の偏り $\theta_D(\Phi) = |\mathbb{E}[\sigma_D \mid \Phi]|$ は枠 Φ の関数で、平面の中の互いに素な容器 D_j がループ C の内側にあれば

$$|\langle W(C)\rangle| \;\le\; \mathbb{E}\prod_j \theta_{D_j}(\Phi) \tag{1}$$

でした（Mack–Petkova 典 ）。右辺は**同じ枠を共有する**因子の積の平均です。因子が独立なら $\prod_j \mathbb{E}\theta_{D_j}$ に分かれますが、枠の場は容器の間でつながっているので、そうはなりません。Hölder の不等式で $\mathbb{E}\prod_{j=1}^{n}\theta_j \le \prod_j (\mathbb{E}\theta_j^n)^{1/n}$ とすると、右辺の各因子は θ の n 乗の平均の n 乗根で、典型的な値 θ の積にはならず、面積に比例する冪が失われます（入れ子の形では $\mathbb{E}\theta_{2R}^4 \le \mathbb{E}\theta_R^4$ しか出ない）。

そこで 26-02 §02 は、枠の減相関

$$\theta(sR;T_L^2) \;\le\; C_{\mathrm{D}}\,\theta(R;T_L^2)^{s^2} \tag{2}$$

を仮定として置きました 仮 。(2) は二つの役を担っていました——入れ子の冪（26-02 の条件つきの還元の定理の跳躍の段・倍化の段）と、偏りから Wilson ループへの橋（26-01 の面積の指数からの面積則）です。この章は、**L を固定した板の上で**、積を分けるという役を、一つの並進不変な量に移します。

02

チェス盤の評価 — 密度 κ_{cb}

設定。格子 $(\mathbb{Z}/L)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ の、捩れ $n_{12}=1$ を固定した z のアンサンブル（26-04 の (4)）を考えます。平面 (3,4) を一辺 B の正方形のブロック Q_t（$t \in \mathcal{T}$、境界の格子点を含む）に分け、M は $2B$ の倍数とします。各ブロックの内部に容器 $D_t \times T_L^2$ を一つずつ、互いに鏡映で移り合う位置に置きます。

チェス盤の評価（Fröhlich–Israel–Lieb–Simon） 典 　測度が平面の方向 3・4 の、全てのブロックの境界の格子平面を通る鏡映について鏡映正値であるとする。各 t について f_t をブロック Q_t の変数（境界を含む）だけに依る有界な実関数とし、$f_t^{(s)}$ を、f_t を鏡映の合成でブロック Q_s に運んだ関数とする。このとき

$$\Big|\Big\langle \prod_{t\in\mathcal{T}} f_t \Big\rangle\Big| \;\le\; \prod_{t\in\mathcal{T}} \Big\langle \prod_{s\in\mathcal{T}} f_t^{(s)} \Big\rangle^{1/|\mathcal{T}|}. \tag{3}$$

これは Fröhlich–Israel–Lieb–Simon の標準の議論で、鏡映の Cauchy–Schwarz の形（26-04 §03、Lean の ReflPos（`ReflPos.refl_cs`）はその因子に分けた後の代数）を繰り返し使って得られます（原論文は Fröhlich–Israel–Lieb–Simon（1978）。この本では、鏡映正値性からチェス盤の評価を得る標準の形であることを M. Biskup の講義録 arXiv:math-ph/0610025 の要旨で確かめました）。

z のアンサンブルでは、鏡映正値性は 26-04 の z の鏡映正値性が与えます。z の鏡映正値性は $x_3 = 0$ と $x_3 = M/2$ を通る鏡映について述べていますが、測度は方向 3 の平行移動で不変なので、任意の格子平面 $x_3 = c$ を通る鏡映でも同じです。方向 4 も同様です。

次に、偏りがブロックの関数であることを確かめます。容器 $D_t \times T_L^2$ の内部は、枠を与えると条件つきで独立で、条件つきの分布は容器のすぐ外側の殻の変数だけに依ります（Markov 性）。容器がブロックの内部にあるので、殻はブロックの中にあり、$\theta_t := \theta_{D_t}$ は Q_t の変数の関数です。また、鏡映は測度を保ち、区画 $\sigma_D = \prod_{p \in D \times \{y_0\}} z_p$ を鏡映した容器の区画に移すので、θ_t を鏡映でブロック Q_s に運んだ関数は θ_s です。

横を止めたチェス盤の評価（L を固定したチェス盤） 初　L と M を固定する。上の設定で

$$\kappa_{\mathrm{cb}} \;:=\; \Big(\mathbb{E} \prod_{t \in \mathcal{T}} \theta_t \Big)^{1/|\mathcal{T}|} \tag{4}$$

とおくと、全ての部分集合 $S \subset \mathcal{T}$ について $\mathbb{E} \prod_{t \in S} \theta_t \le \kappa_{\mathrm{cb}}^{|S|}$。とくに、ループ C の内側に容器が丸ごと入るブロックの数を $n(C)$ とすると

$$|\langle W(C) \rangle| \;\le\; \kappa_{\mathrm{cb}}^{\,n(C)}. \tag{5}$$

証明　(3) で $t \in S$ なら $f_t = \theta_t$、$t \notin S$ なら $f_t = 1$ とおく。$\theta_t \ge 0$ なので左辺は $\mathbb{E} \prod_{t \in S} \theta_t$。右辺の $t \in S$ の因子は、上で見たとおり $\theta_t^{(s)} = \theta_s$ なので $\big(\mathbb{E} \prod_{s \in \mathcal{T}} \theta_s \big)^{1/|\mathcal{T}|} = \kappa_{\mathrm{cb}}$、$t \notin S$ の因子は 1。よって $\mathbb{E} \prod_{t \in S} \theta_t \le \kappa_{\mathrm{cb}}^{|S|}$。(5) は (1) で D_j を C の内側の容器にとり、この評価を使えばよい。∎

(5) は、一辺 B のブロックが面積 B^2 を占めるので、張力の下界 $\ln(1/\kappa_{\mathrm{cb}})/B^2$ を与えます（一辺が B の倍数の正方形のループについて）。**L を固定すれば、z の鏡映正値性が閉じたので、板の上の面積則までの隙間は $\kappa_{\mathrm{cb}} < 1$ の評価だけ**になりました 初 （L・M を固定した文）。枠の減相関 (2) のような、枠の分布についての仮定は要りません。

κ_{cb} は、全てのブロックに同時に容器を置いたときの偏りの積の、一ブロックあたりの幾何平均です。「典型的な一つの容器の偏り」ではなく「全ての容器を一度に見た量」なので、枠の相関は κ_{cb} の中に吸収されています。その代わり、κ_{cb} が小さいことは、もはや一つの容器の性質としては読めません。

入れ子の超乗法性の補題 初　容器をブロックの内部全体にとる（D_t を Q_t の内部の (3,4) の面の全てとし、殻 $\partial Q_t \times T^2_L$ は閉じたブロック Q_t の中にある）。一辺 R のブロックについての (4) を $\kappa_{\mathrm{cb}}(R;L)$ と書く（M は固定）。整数 $s \geq 1$ について $2sR$ が M を割り切るなら、全ての L で

$$\kappa_{\mathrm{cb}}(sR;L) \;\leq\; \kappa_{\mathrm{cb}}(R;L)^{s^2}. \tag{5a}$$

証明　一辺 sR の大きなブロック Q'_u は一辺 R の小さなブロック s^2 個の和で、(3,4) 平面の面はブロックの内部にあるので区画は $\sigma'_u = \prod_{t\subset u}\sigma_t$。小さなブロックの殻の全体 Φ' は大きなブロックの殻の全体 Φ を含み、Markov 性から Φ' を与えると小さな容器は条件つきで独立なので、$\theta'_u = |\mathbb{E}[\sigma'_u \mid \Phi]| \leq \mathbb{E}[\prod_{t\subset u}\theta_t \mid \Phi]$（26-02 の (2)、Mack–Petkova の入れ子の形）。$X_u := \prod_{t\subset u}\theta_t$ は閉じた大きなブロック u の変数の関数で、Φ を与えると大きなブロックの内部は条件つきで独立なので $\prod_u \mathbb{E}[X_u \mid \Phi] = \mathbb{E}[\prod_u X_u \mid \Phi]$。平均して $\mathbb{E}\prod_u \theta'_u \leq \mathbb{E}\prod_t \theta_t$。ブロックの数は $|\mathcal{T}| = s^2|\mathcal{T}'|$ なので、両辺の $1/|\mathcal{T}'|$ 乗をとる。∎

入れ子の超乗法性の補題は鏡映正値性を使いません。使うのは Markov 性と入れ子の形だけで、定数は 1、L・R・s に依りません。チェス盤の評価が要るのは、κ_{cb} から一つの容器（$\mathbb{E}\theta_t \leq \kappa_{\mathrm{cb}}$）と Wilson ループ（(5)）へ降りる段だけです。有限の確率空間の上で、大きなブロックを小さなブロック s^2 個の fibre とし平均の不等式を仮定に置いた抽象の形は Lean：LatticeGaugeNestedBlocks（nested_supermultiplicative）。Markov 性は Lean の外です。

03

κ_{cb} の上界 — 板の評価と同時の反転、そしてその限界

(i) 板の評価。容器の各面 $p \in D$ について、面 $\{p\}\times T^2_L$ の z を反転する操作は互いに可換で、どれも区画を反転し、枠を変えません。その軌道で条件づけると $\mathbb{E}[\sigma_D \mid \text{軌道}] = \pm\prod_{p\in D}\tanh X_p$、$|X_p| \leq \beta L^2$ なので、$\sup_\Phi \theta_D(\Phi) \leq \tanh(\beta L^2)^{|D|}$ です（25-04 初 ）。$\theta_t \leq \sup\theta$ から

$$\kappa_{\mathrm{cb}} \;\leq\; \tanh(\beta L^2)^{|D|} \;<\; 1. \tag{6}$$

これで、L を固定した板の上の面積則は既に出ています。ただし張力は $-\ln\tanh(\beta L^2) \approx 2e^{-2\beta L^2}$（面積あたり）で、$\beta = 2.5$、$L = 4$ なら $2e^{-80}$ です。**枠の上限（sup）を通る評価は、L について超指数的に悪くなる**ので、L に一様な評価は平均の形——κ_{cb} のような量——からしか来ません。

(ii) 同時の反転。流れの補題（25-06）は、容器の内部の、条件つきの分布 $\mu(\cdot \mid \Phi)$ を保つ任意の Markov 核 K について、一歩で区画が変わる確率を $a(\Phi)$ とすると $\theta_D(\Phi) \le 1 - a(\Phi)$ と言います 初 （定常性だけを使い、可逆性は要らない）。

同時の反転の評価 初　枠を固定したまま、互いに素な容器 D_t（$t \in S$）の内部でそれぞれ定常な核を独立に一歩走らせる（出発は条件つきの分布から）。このとき

$$\mathbb{E}\prod_{t\in S}\theta_t \;\le\; \mathbb{P}\big(S \text{ のどの容器の区画も変わらない}\big). \tag{7}$$

証明　枠 Φ を固定する。容器の内部は条件つきで独立で、核も独立に走らせるので、どの容器も変わらない条件つきの確率は $\prod_{t\in S}(1-a_t(\Phi))$。流れの補題から $\theta_t(\Phi) \le 1 - a_t(\Phi)$ なので $\prod_t \theta_t(\Phi) \le \mathbb{P}(\text{どれも変わらない} \mid \Phi)$。$\Phi$ について平均をとれば (7)。∎

(7) の右辺はモンテカルロで測れる量なので、$S = \mathcal{T}$ とおけば $\kappa_{\mathrm{cb}} \le \mathbb{P}(\text{どれも変わらない})^{1/|\mathcal{T}|}$ は、Wilson ループの上界を**正しい向きに**推定する道具になります。自然な核は、力学で駆動した挿入（25-06、受理の確率 $\min(1, e^{-W})$）です。

(iii) 限界。一歩の核の反転の確率 a は、測った範囲では 1 から離れています（駆動した挿入の核で受理 $\min(1, e^{-W})$ のとき 0.6〜0.73、25-08 計算 ）。そのため (7) で保証できるのは $\theta_t \le \theta_0$（θ_0 は 1 未満の定数）の形で、κ_{cb} を面積の指数で小さくはできません。大きさ $B \sim L$ のブロックでそれが L に一様でも、出る張力の下界は $\ln(1/\theta_0)/L^2 \to 0$ で、26-01 の素朴な形の張力の下界が扱う帯の素朴な形——U(1) も満たす形——にしかなりません 初 （論理）。**同時の反転は帯の試験には使えません**。帯の正しい形 $\theta \le e^{-cL^2}$ を確かめるには $a \to 1$ となる核が要り、その構成は知られていないからです（25-06 §07）。同時の反転の測定を「帯の数値的な姿」とする位置づけは撤回されており（25-08）、この道具の正しい用途は、L を固定した板の張力の下界——κ_{cb} の推定——です。

04

帯が再び現れる場所 — 希薄な領域・閉じ込めの領域・その間

横を止めたチェス盤の評価は L を固定した文でした。L を動かすと、$\kappa_{\mathrm{cb}} < 1$ を示すのに必要なブロックの大きさ B と、評価の質が、尺度ごとに変わります。以下は全て見立てです 読 （物理）。

- **希薄な領域**（$\Lambda L \ll 1$）。一辺 ℓ の容器で $\mathbb{E}[-\ln\theta_D] \approx \sigma_{\mathrm{TU}}\ell^2$、$\sigma_{\mathrm{TU}} \propto \Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}$（26-03 §04）。枠の影響は L/π 程度の距離で減衰します。判定は成り立ちますが、要るブロックは $B \gtrsim \sigma_{\mathrm{TU}}^{-1/2}$ で、その体積は $1/g^2(L)$ について指数的に大きくなります。

- **閉じ込めの領域**（$\Lambda L \gg 1$）。電場の流束の形（26-04 の電場の流束の分解の補題）で $\theta \approx Y(1)/Y(0) \approx c\,\sigma L^2 e^{-\sigma \ell^2}$（因子 L^2 は電場の弦の横の位置のエントロピー）。要るブロックの大きさは $\sqrt{\ln L}$ でしか増えません。
- **その間**（$\Lambda L \sim 1$）——**帯**。二つの一様性が要ります（§05）。

$a \to 0$ では、B も L も格子の単位で無限大になるので、有限個の箱を確かめるだけでは足りません。尺度をつなぐ不等式が要り、それが帯の問題です。

なぜ通常の Dobrushin 型の判定が使えないか。枠を固定すると区画どうしは相互作用しません。依存は全て枠の場にあり、連続な場は境界に追随するので、全変動で測った影響の係数はほぼ 1 になります。Dobrushin、Dobrushin–Shlosman、van den Berg–Maes の型の条件はそのままでは満たされず、良いブロックでの縮小（Bałaban の多重尺度の解析の型）のような別の入力が要ると見込まれます 読 （物理）。これらの判定の原論文はこの本では照合していません。

05

帯の集約 — 一様な板の張力と一様な板のギャップ

チェス盤の言葉では、帯は次の二つの一様性の文に集約されます。どちらも示されておらず、仮定として置きます。

一様な板の張力 仮　横を T_L^2 に縮めた二次元の理論の弦の張力（板の張力、26-02 の (11)）が、L に一様に正：

$$\inf_{L \ge L_0} \sigma_{\mathrm{eff}}(L) \;>\; 0 \qquad \text{(物理単位、格子間隔 } a \text{ に一様)}. \tag{8}$$

容器の言葉では $\inf_L \mathbb{E}[-\ln \theta_D]/(\ell\Lambda)^2 > 0$ の形で、26-02 の横広げの不等式（弱い形）の内容に当たります。チェス盤の判定は、これを面積則へ運ぶだけです。U(1) は全ての L で張力 $\sim e^2/L^2$ で、**ここでだけ**失敗する見込みです 読 （物理）。

一様な板のギャップ 仮　κ_{cb} を尺度をまたいで比べられること：偏りどうしの相関、悪いブロックの確率、殻の揺らぎの評価が L に一様であること（板の質量ギャップが L に一様であることに当たる）。これが、26-02 の枠の減相関 (2) を L に一様にした形の正体です。入れ子の超乗法性の補題（§02）により、固定した L の中では κ_{cb} を尺度 R から sR へ定数 1 で運べるので、この文の L に一様な中身は、L をまたぐ比較

$$(\mathrm{C_{cb}}) \quad \kappa_{\mathrm{cb}}(R; L') \le C\,(L'/L)^2\,\kappa_{\mathrm{cb}}(R; L) \qquad (L_{\min}(a) \le L \le L' \le R)$$

——26-02 の横広げの不等式を κ_{cb} で読んだ文——に移ります 紙 （26-02 §03 のチェス盤の密度で読んだ還元）。横には入れ子がありません（T^2_{2L} を T^2_L の四枚で張ると捩れは $4 \equiv 0 \pmod 2$ になり、$n_{12} = 1$ の集団を作れない）。

表 1　帯の集約（札は行ごと。条件は同じ行に）

文	札	同じ行の条件	26-02 との対応	U(1) で
L を固定したチェス盤：$\lvert\langle W\rangle\rvert \le \kappa_{\mathrm{cb}}^{n(C)}$	初	$L \cdot M$ を固定・z の鏡映正値性（26-04 §03）の下	枠の減相関の「積が分かれる」役を、固定した L で引き受ける	同じく成り立つ
$\kappa_{\mathrm{cb}} < 1$（固定した L）	初	板の評価 (6) から。張力は $\approx 2e^{-2\beta L^2}$ と極めて小さい	—	同じく成り立つ
一様な板の張力 (8)	仮	物理単位・a に一様	横広げの不等式の弱い形の内容	破れる見込み〔読〕
一様な板のギャップ	仮	L に一様な相関・悪いブロック・殻の揺らぎの評価。κ_{cb} で読めば固定した L の中は入れ子の超乗法性の補題で定数 1、残りは $(\mathrm{C}_{\mathrm{cb}})$	枠の減相関を L に一様にした形	破れる見立ては無い〔読〕

こうして、帯の非可換の内容は一様な板の張力の側に、尺度をまたぐ確率論の内容は一様な板のギャップの側に、と分かれて置かれます。κ_{cb} で読むと、一様な板のギャップの L に一様な中身は $(\mathrm{C}_{\mathrm{cb}})$ に移り、横広げの不等式と同じ文になります 紙 （入れ子の超乗法性の補題）。一様な板の張力 (8) との論理的な関係（一方から他方が出るか）は調べられていません。

06

κ の記号の対照

この本は κ をいくつもの意味で使ってきました。この章のチェス盤の密度は κ_{cb} と書き、添え字を落としません。表 2 は、同じ字の別の量の一覧です。量どうしに関係はありません。

表 2　κ の字を使う量

記号	意味	章
κ_{cb}	チェス盤の密度：全てのブロックの容器の偏りの積の、一ブロックあたりの幾何平均 (4)	この章・26-00 表 1
κ（片側の橋）	片側の橋の命題の比べの定数（$C_P \ge \kappa \xi^2$ の形）	23-01 §06
κ_{BE}	Bakry–Émery の曲率の下限	24-09
$\hbar\kappa$・κ_f	隣のサイトとの結合の強さの上界・Brascamp–Lieb の交差の強さ	23-06
$\kappa = 3/1000$	Barta の行の、欠陥の外での下界	23-09
κ（第 24 部）	Langevin の計量と運動項の計量の比べの定数	24-09

記号	意味	章
$\kappa_{\mathrm{C7}}(k)$	長さ k の鎖の凸性の定数（23-11 の $\kappa(k)$ と同じ量）	26-07
κ_w	適応した剛性：捩れの生成場に沿った力の分散（幅 w。帯の候補の量の一つ）	26-10

記号の対応の全体は A-01 に置きます。

07

五分類の表と依存グラフ

表 3　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	容器の評価 (1)	典	Mack–Petkova・25-03	捩れを和に取ったアンサンブル	—
2	枠の減相関 (2)	仮	26-02・A-06	定数 C_{D}	—
3	z の鏡映正値性（方向 3・4、任意の格子平面）	初	26-04 §03・平行移動の不変性	$SU(2)$・捩れを固定・M は偶数	ReflPos（`ReflPos.refl_pos`・`ReflPos.refl_cs`）（代数だけ。仮定：$0 \le A$）
4	チェス盤の評価 (3)	典	Fröhlich–Israel–Lieb–Simon（講義録の要旨で確認）	鏡映正値性の下・$2B \mid M$	—
5	θ_t はブロックの変数の関数で、鏡映で θ_s に移る	初	§02（Markov 性・測度の鏡映不変性）	容器をブロックの内部に置く	—
6	横を止めたチェス盤の評価：$\mathbb{E}\prod_S \theta_t \le \kappa_{\mathrm{cb}}^{\lvert S\rvert}$、$\lvert\langle W(C)\rangle\rvert \le \kappa_{\mathrm{cb}}^{n(C)}$	初	§02 の証明 $\Longleftarrow$ 1・3・4・5	L を固定すれば（M も固定）	—
7	板の評価 $\sup_\Phi \theta_D \le \tanh(\beta L^2)^{\lvert D\rvert}$、よって $\kappa_{\mathrm{cb}} < 1$	初	25-04・§03 (6)	L を固定・張力 $\approx 2e^{-2\beta L^2}$	—
8	流れの補題 $\theta \le 1 - a$	初	25-06	定常な核（可逆性は不要）	FluxLemma（`FluxLemma.flip_le_one_sub_abs`）（仮定：$w \ge 0$・$K \ge 0$・行和 1・w が定常・$\sum w = 1$・$\sigma = \pm 1$）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
9	同時の反転の評価：$\mathbb{E}\prod_S \theta_t \le \mathbb{P}$(どれも変わらない)	初	§03 の証明 $\Longleftarrow$ 8	枠を固定して独立に一歩・出発は条件つきの分布	—
10	一歩の核の反転の確率は $\frac{1}{2}$ 程度で頭打ち	読	25-08 の測定	駆動した挿入の核	—
11	同時の反転は素朴な形の評価しか与えず、帯の試験に使えない	初	§03 (iii) $\Longleftarrow$ 9・26-01 素朴な形の張力の下界	一歩の反転の確率の頭打ちを前提にした論理	—
12	希薄な領域・閉じ込めの領域での判定とブロックの大きさ	読（物理）	§04	$\Lambda L \ll 1$・$\Lambda L \gg 1$・見立て	—
13	Dobrushin 型の判定はそのままでは使えない	読（物理）	§04	影響の係数がほぼ 1 という見立て・原論文は照合未了	—
14	一様な板の張力 (8)	仮	§05・A-06	物理単位・a に一様	—
15	一様な板のギャップ	仮	§05・A-06	L に一様	—
16	U(1) は一様な板の張力でだけ失敗する	読（物理）	§05	張力 $\sim e^2/L^2$ の見立て	—

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  典  容器の評価 |W| ≤ EΠθ                                  捩れを和に取ったアンサン
 2  仮  枠の減相関（この章で L を固定して置き換える対象）
 3  初  z の鏡映正値性（26-04）                          Lean refl_pos・refl_cs
 4  典  チェス盤の評価                                     Fröhlich–Israel–Lie
 5  初  θ_t はブロックの関数、鏡映で θ_s に移る          Markov 性
 6  初  横を止めたチェス盤の評価：|W| ≤ κ_cb^n(C) ⟸ 1・3・4・5          L を
 7  初  κ_cb ≤ tanh(βL²)^|D| < 1                          L を固定・張力は極小
 8  初  θ ≤ 1 − a                                          Lean flip_le_one_
 9  初  同時の反転の評価：EΠθ ≤ P(どれも変わらない) ⟸ 8
10  読  一歩の反転の確率は ½ 程度で頭打ち                  測定
11  初  同時の反転は帯の試験に使えない ⟸ 9・10           26-01 素朴な形の張力の下界
12  読  両端の領域での判定とブロックの大きさ              見立て
13  読  Dobrushin 型はそのままでは使えない                見立て
14  仮  一様な板の張力
15  仮  一様な板のギャップ
16  読  U(1) は一様な板の張力でだけ失敗 ⟸ 14・15         見立て
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。この章の主な結論（横を止めたチェス盤の評価）は紙で立ち、前提は文献の行（容器の評価・チェス盤の評価）と紙の行（z の鏡映正値性・ブロックの関数と鏡映）だけです。仮定の行（枠の減相関）はこの結論の前提に入っていません——それがこの章の要点です。「同時の反転は帯の試験に使えない」は論理の行ですが、前提に測定の行（一歩の反転の確率の頭打ち）を持つので、その頭打ちが成り立つ範囲の文です。帯の二つの仮定（一様な板の張力・一様な板のギャップ）は結論の量（L を固定した κ_{cb}）を含まず、第 27 部の条件の台帳（27-02）に置かれます。

チェス盤の評価の機械検査した形は 22-01 に在ります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 L を固定すれば、z の鏡映正値性とチェス盤の評価で、Wilson ループは $\kappa_{\mathrm{cb}}^{n(C)}$ で押さえられ、枠の減相関は要らない	κ_{cb} の L に一様な評価（一様な板のギャップ）
初 同時の反転は κ_{cb} を正しい向きに推定する道具で、一歩の核では帯の試験に使えない	$a \to 1$ となる核。帯の数値的な試験
読 （物理） 帯は一様な板の張力と一様な板のギャップに集約され、U(1) は前者でだけ失敗する	二つの一様性のどちらも。二つの間の論理的な関係
Lean：鏡映の最後の和の代数と、流れの補題の有限の版	チェス盤の評価そのもの・Markov 性・Haar 測度（Lean の外）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
チェス盤の評価	典	J. Fröhlich, R. Israel, E. H. Lieb, B. Simon（1978）の標準の議論。M. Biskup, Reflection positivity and phase transitions in lattice spin models, arXiv:math-ph/0610025 の要旨で確認（原論文の本文は未入手）。格子ゲージ理論での使用例（Borgs–Seiler）は照合未了
容器の評価・捩れを和に取ったアンサンブル	典	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 123 (1979) 442。章 25-03
z の鏡映正値性	初	章 26-04 の z の鏡映正値性
横を止めたチェス盤の評価・同時の反転の評価・(6)	初	本文 §02・§03 の証明。帯の還元の論文（この本から出た論文、A-07）の系「chessboard」「simultaneous flips」と同じ内容
一歩の核の頭打ち・同時の反転の測定の撤回	読	章 25-08 の表
Dobrushin・Dobrushin–Shlosman・van den Berg–Maes の判定	—	照合未了（名だけを挙げた）
Lean	Lean	ReflPos（`ReflPos.refl_pos`・`ReflPos.refl_cs`）、FluxLemma（`FluxLemma.flip_le_one_sub_abs`）。保証するのは有限和と実数の代数だけ。A-04

この章で使った語 — 枠の減相関・チェス盤の評価・チェス盤の密度 κ_{cb}・ブロック・同時の反転・流れの補題・一様な板の張力・一様な板のギャップ・移り変わりの帯（帯）。意味は A-02 用語集 と A-06 名前の索引 にあります。

次に読む章：26-06 繰り込みの比較 — 群を区別する比較 — 帯を β 単調性と繰り込みの比較に分ける、もう一つの還元。

繰り込みの比較 — 群を区別する比較

この章は本書の検討です。§04・§07・§08 は未解決の地図です。

この章で分かること — 移り変わりの帯を、二つの言明に割ります。一つは、格子の幾何を止めたとき渦の自由エネルギーが β について増えること（β 単調性）。もう一つは、格子全体を 2 倍にした格子が、結合を強めた元の格子と定数倍で比べられること（繰り込みの比較）。漸近自由が入るのは、繰り込みの比較の「結合を強める向き」$\beta' < \beta$ だけです。β 単調性は易しい部品に見えますが、格子単位の弦の張力の β についての単調性と同じ重さの問題でした。繰り込みの比較は強結合の端と一ループの端の両方で成り立ちますが、強結合の側は定数が極端に粗い証明の筋、弱結合の側は一ループの水準の計算です。その間の帯で、$SU(2)$ と $U(1)$ を数値で比べると、比較の向きは $SU(2)$ では帯の全体で変わらず、$U(1)$ では既知の相転移の位置で反転します。最後に、帯が β について有界な区間であることから、帯の中の繰り込みの比較が「固定した β での両側の面積則（周長の次数の誤差つき）」に還元されるという初等的な補題を示し、難しさが帯のどこに寄るかを述べます。

前提となる章 — 26-01（帯の正しい形 $\ln(1/\theta) \geq cL^2$）・26-02（一つの不等式への還元）・25-01（捩れた T^2 と 't Hooft の流束）・25-07（決まった写像が失敗する理由と一ループの表）・4-06（漸近自由）・5-02（強結合展開）・5-06（$U(1)$ と非可換）。

先に言うこと — 水準は〔研〕です。この章は帯のどの β でも、繰り込みの比較を示していません。示すのは、両端で比較が成り立つ範囲と条件、数値の読み、それに一つの還元の補題（§06）です。還元の補題の仮定は、四次元 $SU(2)$ の格子の中間の結合での閉じ込めという未解決の問題を含みます。チェス盤の密度は κ_{cb} と書きます。

この章の順序

1. 帯を二つに割る — β 単調性と繰り込みの比較
2. β 単調性は易しくない — 電場の流束で書き直すと弦の張力の単調性に並ぶ
3. 両端で成り立つ比較 — 強結合の端と一ループの端（表 1）
4. β の上の地図 — 区間ごとの札（図 1）
5. 数値 — 格子を 2 倍にする — $SU(2)$ と $U(1)$（表 2〜表 4）

6. 帯は有界な区間 — 帯の中の比較の還元の補題と、有限の段数で帯を渡る系
7. 真ん中の帯の四つの顔 — 局所量の候補（表 5）
8. 帯を閉じる議論が満たすべき条件 — 基準「U(1) の転移と区別する」
9. 言えないこと
10. 五分類の表と依存グラフ — 表 6

01

帯を二つに割る — β 単調性と繰り込みの比較

対象は 25-01 の板です。格子 $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ に $SU(2)$ の Wilson 作用を置き、$(1,2)$ 平面に捩れ $n_{12} = 1$ を入れます。$(3,4)$ 平面の流束 n_{34} を区画とし、渦の自由エネルギーを

$$\Delta F(N, M, \beta) \;=\; -\ln \frac{Z_{n_{34}=1}(N, M, \beta)}{Z_{n_{34}=0}(N, M, \beta)}, \qquad \theta = \tanh \frac{\Delta F}{2} \tag{1}$$

と書きます。θ は 't Hooft の判定に使う量で、帯の正しい形は「$\ln(1/\theta(L,L)) \geq cL^2$ が L に一様」でした（26-01）。渦の自由エネルギーが大きいほど θ は小さく、閉じ込めの側です。

帯を渡る言明を、次の二つに割ります 仮 （どちらも未証明の言明として置く）。

$$\text{(Mon)} \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \Delta F(N, M, \beta) \;\geq\; 0 \qquad \text{(格子の幾何を止めて)} \tag{2}$$

$$\text{(RG-cmp)} \quad \Delta F(2N, 2M, \beta) \;\leq\; K \cdot \Delta F(N, M, \beta'), \qquad \beta' < \beta, \qquad K \text{ は } N, M \text{ に依らない} \tag{3}$$

> 式の札 (Mon) は β 単調性、(RG-cmp) は繰り込みの比較のことです（名は A-06）。下の (5) の (Mon) も同じです。

(2) の左辺は、作用の差の平均として等式で書けます：$\partial_\beta \Delta F = \langle \Delta S \rangle$（渦の有る区画と無い区画の作用の平均の差） 初 （分配関数を β で微分するだけ）。(3) は、2 倍に粗くした格子の渦が、結合を強めた元の大きさの格子の渦より高くつかない、という比較です。

(2) の範囲。(2) はこの章の板——群 $SU(2)$、背景の捩れ $n_{12} = 1$、板の幾何 $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$——についての言明です。非可換の群の一般の性質ではありません：有限の非可換群 Q_8・D_4 の小さな格子では、背景の捩れが無くても $\partial_\beta \Delta F < 0$ となる点があり、背景つきでも横の長い幾何で破れる点があります 読 （有限群の転送行列の浮動小数の値。二つの独立な実

装で一致)。一方、面の符号だけを変数に持つ $\mathbb{Z}_2$ の符号の系では、非負の結合について (2) の型の単調性（$\mathbb{Z}_2$ の単調性）が成り立ちます [初]（相関不等式の型の証明。抽象の符号の系の言明は Lean で検査した。四次元のトーラスの格子への当てはめは紙)。

二つを合わせると帯を渡る筋が立ちます。(3) を $\beta_0 > \beta_1 > \beta_2 > \cdots$ と反復すると、格子を 2^k 倍にした渦の自由エネルギーが、結合 β_k の元の格子の値の K^k 倍以下に押さえられます。β_k が強結合の範囲に入れば、そこでの渦の自由エネルギーは面積の指数で小さく、段を重ねるごとに二重指数で小さくなるので、K^k の損失に勝ちます。(2) は、反復の途中で β' を必要より小さく選んでも損をしない、という調整の役をします。

(3) の率の形。(3) の定数 K は帳簿で、中身は板の張力の比べです。板の張力と、それに面の数を掛けた量を

$$\sigma_N(\beta) := \lim_{M\to\infty} \frac{-\ln \Delta F(N, M, \beta)}{M^2}, \qquad s(N,\beta) := N^2 \sigma_N(\beta) \tag{3′}$$

と置きます（極限が在るとして。無ければ下極限)。(3) の両辺の対数を M^2 で割って $M \to \infty$ とすると K は消え、残るのは $s(N,\beta') \le s(2N,\beta)$ です [初]（(3) からこの形が従う。逆向きには、ΔF と面積の項の差の制御が要る)。この本では、この率の形を繰り込みの比較の主な形として読みます。対称な箱 $N = M$ だけを見て $K > 1$ を許すと、$U(1)$ でも $\beta' < \beta$ が立ってしまいます [読]。$\beta' \ge \beta$ を強いるのは N を止めた $M \to \infty$ の側で、率の形はその向きを持っています。

漸近自由が入るのは (3) の $\beta' < \beta$ だけです。 (2) は群を区別する仕組みを含まない形の文です。$\mathbb{Z}_2$ と $U(1)$ では、捩れの背景が無ければ Ginibre の不等式から出ますが、この章の板には捩れ $n_{12} = 1$ があり、その場合は $\mathbb{Z}_2$ でも Ginibre の不等式では出ません [仮]（Ginibre の不等式の当てはめは原典の本文で照合していない)。一方 (3) の向きは群で変わります。$U(1)$ では一ループで $\beta' \ge \beta$ になり、反復は強結合へ向かわず、正しく失敗します。非可換の $SU(2)$ で $\beta' < \beta$ になるのは、漸近自由（4-06)、つまり格子を粗くすると実効的な結合が強まることの言い直しです。この意味で (3) は「群を区別する比較」でなければなりません。

例。強結合の端では (3) が $K \approx 4$ で成り立ちます（§03)。格子を 2 倍にすると、渦の面の面積は 4 倍になり、面積の指数の率 $\sigma(\beta)$ を 4 倍にした β'、すなわち $\sigma(\beta') = 4\sigma(\beta)$ で釣り合います。$\beta = 1.0$ なら $\beta' \approx 0.013$ です（表 1)。強結合では一段で結合が大きく動きます。

Tomboulis（2007）は (3) の型の比較を Migdal–Kadanoff の間引きで作ろうとし、その流れが $U(1)$ でも強結合へ向かうことが Ito–Seiler と Kanazawa によって指摘されました [典]（Ito–Seiler は残りの段を彼らの式 (3.5) の不等式 $A(\alpha) > A^{+}(\alpha)$ に帰着させ、それが示されていないと書く)。経緯と照合は 26-08 に置きます。この章で必要なのは、群を区別しない比較では帯を渡れない、という一点だけです。

比較の向きを有効作用の言葉で見直すと、木の水準では本当の一段の粗い作用は Migdal–Kadanoff の作用以下で（粗い向きでは 1/4 まで小さく、長波長で一致）、結合の言葉で $\beta/4 \le \beta' \le \beta$ の、閉じ込めに好都合な向きです 初 （下側） 読 （上側は測った箱の数値）。それでも比較に使えないのは、分配関数の不等式 $Z \le Z_{\mathrm{MK}}$ が粗い変数を固定した形に持ち上がらないからです。一ループの漸近では Migdal–Kadanoff の流れの速さ（一段 0.2503）は本当の速さ 0.2575 よりわずかに遅いだけで向きは好都合ですが、U(1) ではどちらも走らず、群の違いは Migdal–Kadanoff の側では指数的に小さい流れにしか現れません 読 。同じ観測量の一段の挟み込み $\langle W\rangle_L < \langle W\rangle_R < \langle W\rangle_{\mathrm{MK}}$ は SU(2) と U(1) の 12 行全てで成り立ち、群を区別しません 読 （Metropolis・$4^4 \to 2^4\cdot 8^4 \to 4^4\cdot\beta \in \{2,4,8\}$）。

Ito–Seiler が帰着させた不等式 $A(\alpha) > A^{+}(\alpha)$ は「渦の自由エネルギーが結合とともに増える」という単調性と同じで、小さな箱の数値では脱閉じ込めの U(1) でも成り立ちます 読 （4^4・MK 像の一本の向き・$\alpha \in \{0.9, 1.0\}$）。群を区別すべきなのは、その先の延長と、補間母数を 1 から離す工夫の側です。

「Migdal–Kadanoff の流れは本当の流れより遅い」を捩れの自由エネルギーで測ると、軌道の一段（実効の β で 2.47 → 2.19）で $4^4/2^4$ の箱では本当の一段が Wilson の β に換算して 0.15 だけ速く見えましたが（$R = 1.34(7)$）、$6^4/3^4$ では差は 0.02(2)（$R = 1.17(20)$）で、測り方の分解能（統計と、ΔF の方法の 0.1〜0.25 の系統の床）の内に入ります。二つの流れの速さは帯の中でほぼ揃って見え、2^4 の箱の 7% の離散化が最初の差の大部分を作っていた可能性があります 読 。

02

β 単調性は易しくない — 電場の流束で書き直すと弦の張力の単調性に並ぶ

β 単調性は「構造的な部品で、示せそうだ」と見えます。実際には易しくありません。電場の流束で書き直すと分かります。

流束 n_{34} の区画の分配関数を、$\mathbb{Z}_2$ の Fourier 変換で電場の流束 $e \in \{0,1\}$ の分配関数 Y_0, Y_1 に分けると $Z_{n_{34}=0} = Y_0 + Y_1$、$Z_{n_{34}=1} = Y_0 - Y_1$ です。$E_e = \frac{d}{d\beta}\ln Y_e$ と置くと

$$\frac{\partial \Delta F}{\partial \beta} \;=\; \frac{2\,Y_0 Y_1\,(E_1 - E_0)}{Y_0^2 - Y_1^2}, \qquad \theta = \frac{Y_1}{Y_0} \tag{4}$$

初 証明。$\Delta F = \ln(Y_0+Y_1) - \ln(Y_0-Y_1)$ を微分し、$Y_e' = E_e Y_e$ を入れて通分すると、分子は $(E_0Y_0 + E_1Y_1)(Y_0 - Y_1) - (E_0Y_0 - E_1Y_1)(Y_0 + Y_1) = 2Y_0Y_1(E_1 - E_0)$ です。θ の式は $\tanh(\Delta F/2) = (e^{\Delta F}-1)/(e^{\Delta F}+1)$ に $e^{\Delta F} = (Y_0+Y_1)/(Y_0-Y_1)$ を入れたものです。∎

$Y_1 > 0$（26-04 の $\theta = Y(1)/Y(0) \ge 0$ の正の場合）なら、(4) から

$$\text{(Mon)} \iff E_1 \geq E_0 \iff \theta \text{ が } \beta \text{ について増える} \iff \text{電場の流束の自由エネルギー} \tag{5}$$

です 初 。電場の流束の自由エネルギーは、閉じ込めの相では弦の張力と流束の通る長さの積の程度です。だから β 単調性が全ての格子で成り立てば、格子単位の弦の張力 σa^2 が β について減ることが従う、と読めます 仮 （根拠：電場の流束の自由エネルギーと弦の張力を結ぶ段は書き下していない）。**格子単位の弦の張力の β についての単調性は、$SU(2)$ では証明されていません。** Wilson ループの期待値の β についての単調性すら、探した範囲で示されていません。β 単調性は、少なくともこれと同じ重さの問題です 仮 。「β 単調性は構造的で示せそう」という当初の見立ては、ここで訂正されます。

手元にある部分的な結果は次のとおりです 仮 （どれも証明はこの本に置いていない）。二次元で面が 1 枚・2 枚のとき（$O(4)$ の鎖の条件つきのエネルギーの単調性による）、任意の固定した格子で $\beta \to 0$ の近く、捩れ n_{12} の背景で $\beta \to \infty$ の近く（n_{12} と n_{34} を両方持つ平坦な接続が $SU(2)$ に無いので $\partial_\beta \Delta F$ が正の定数に近づく）。反例は、二次元の閉じた式（$N \leq 100$・$\beta \leq 20$）、$\mathbb{Z}_2$ の $2 \times 2 \times 2 \times 1$ の全数え上げ、四次元の 1^4・2^4 の Monte Carlo のどれでも見つかっていません 読 。

詰まる理由は二つ記録されています。Mack–Petkova の表示で $SO(3)$ の配位が捩れの類を持つと、条件つきの Ginibre の不等式が逆向きになり、$\partial_\beta \Delta F$ が「測りたい二つの寄与の差」そのものになること。指標展開では、三次元以上で spin network の積分の符号が定まらないこと 読 （物理の見立て）。

帰結。帯の連鎖に β 単調性を全ての格子で使う必要はありません。(3) を $\Delta F(2N, 2M, \beta) \leq K \Delta F(N, M, \beta')$ の形で直接示せば、β' の選び方の自由度が β 単調性の役を吸収します。だから以下では繰り込みの比較に集中します。

03

両端で成り立つ比較 — 強結合の端とーループの端

強結合の端

Wilson 作用の基本表現の指標展開の係数を $u(\beta) = I_2(\beta)/I_1(\beta)$ と書きます（$\beta \to 0$ で $u \approx \beta/4$）。強結合の展開（5-02）で板の渦の自由エネルギーを展開すると、主要項は $(3,4)$ 平面を巻く N^2 枚の平らな面（面積 M^2、重み u^{M^2}）です。記録には次の形の命題と証明の筋があります。

強結合の端の展開の命題。 絶対定数 u_0, K_0, C があり、$u(\beta) \leq u_0$ と全ての $N, M \geq 2$ で

$$\Delta F(N, M, \beta) = 2N^2 e^{-\sigma_N(\beta) M^2} (1 + \epsilon), \qquad |\epsilon| \leq C M^2 (K_0 u)^{\max(1, M/100)} \leq C' u \tag{6}$$

が成り立つ。σ_N は β・N・n_{12} に依るが M に依らず、$\sigma_\infty = -\ln u - 4u^4 + O(u^5)$。仮
（筋：多面体の展開で捩れの符号が $\mathbb{Z}_2$ のホモロジー類で決まること、面の平らな部分を二次元の指標の貼り合わせで積分してちょうど u^{M^2} を出すこと、面の上の輪郭の Peierls の評価。体積の多面体と面の輪郭の相互作用の記帳（証明の第 5 段）が概略で、この本には証明を置いていない。展開の形は Münster（1981）の型だが原典の本文は照合していない）

強結合の端の比較。 β' を $\sigma_N(\beta') = 4\sigma_{2N}(\beta)$ で定めると、全ての $N, M \geq 2$ で $\Delta F(2N, 2M, \beta) / \Delta F(N, M, \beta') = 4(1 + O(u))$、$\beta' < \beta$、$u' = u^4(1 + O(u^4))$ 仮（強結合の端の展開の命題の上の代数）。

定数は極端に粗く、$u_0 \approx 10^{-80}$、β にして約 4×10^{-80} です。紙の上で強結合の端が閉じているのは、極端に強い結合の範囲だけです。これは定数の問題で、数え上げを詰めれば大きく改善できる見込みですが、平らな面の展開は粗面化（$\beta_R \approx 1.9$）で止まるので、強結合の側だけで帯を覆うことはできません 読（物理の見立て）。$U(1)$ も強結合では閉じ込め、(3) を満たします。群の違いが現れるのは弱結合の側です。

表 1　強結合の主要項の式 $u(\beta') = u(\beta)^4$ の根 β'（一段の結合の動き） 読

β	$u(\beta)$	β'	$\beta - \beta'$
0.5	0.1237	0.0009	0.499
1.0	0.2402	0.0133	0.987
1.5	0.3441	0.0561	1.444
2.0	0.4331	0.1409	1.859

表 1 の β は強結合の端の展開の命題の範囲（$u \leq u_0$）の外にあります。主要項だけで比較の向きと大きさを見る目安で、比較が成り立つという主張ではありません。

ループの端

弱結合の側では、(3) を変分の不等式として作ります。区画 $n_{34} = 0$ の測度 μ_0 を区画 1 へ運ぶ可測な全単射 T について、Gibbs の変分原理から

$$\Delta F \;=\; \mathbb{E}_{\mu_0}\big[S \circ T - S - \ln J_T\big] - \mathrm{KL}\big(T_{\#}\mu_0 \,\|\, \mu_1\big) \;\leq\; \mathbb{E}_{\mu_0}\big[S \circ T - S - \ln J_T\big] \tag{7}$$

です 典（Gibbs の変分原理の標準形。J_T は T の Jacobian）。右辺は μ_0 の平均だけで書けるので、評価は片側で済みます。細かい格子 $(2N, \beta)$ の配位をブロック化して粗い格子 (N, β') に写し、粗い格子でほぼ最適な挿入の写像を使い、細かい格子へ戻すときに揺らぎを運ぶ、という作り方を考えます。そのときの揺らぎの運び方で、一ループの答えが二つに分かれます。

一ループの勘定は、一定の背景の磁場 B の中の $SU(2)$ の揺らぎ（Feynman ゲージ）の熱核の跡で行います。体積あたり、$1/(16\pi^2 s^2)$ を除いて、ベクトル（4 偏極）が $\frac{Bs}{\sinh Bs}(2 +$

$2\cosh 2Bs$)、ゴーストが $-2\frac{Bs}{\sinh Bs}$ です。$x = Bs$ について $\frac{x}{\sinh x} = 1 - \frac{x^2}{6} + O(x^4)$、$\cosh 2x = 1 + 2x^2 + O(x^4)$ を入れると

$$\underbrace{\tfrac{x}{\sinh x}(2 + 2\cosh 2x) - \tfrac{2x}{\sinh x}}_{\text{全体}} = 2 + \tfrac{11}{3}x^2 + O(x^4), \qquad \underbrace{\tfrac{4x}{\sinh x} - \tfrac{2x}{\sinh x}}_{\text{軌道だけ}} = 2 - \tfrac{1}{3}x^2 + O(x^4) \quad (8)$$

で、$\frac{11}{3} = -\frac{1}{3} + 4$ の $+4$ はスピンの項 $\cosh 2Bs$ から来ます 初 （一ループの水準。展開は二行の計算）。$\frac{11}{3}$ が漸近自由の係数です。表と導き方の詳細は 25-07 に置き、ここでは結論だけを使います。

- **等長的な比較**（揺らぎについて等長的な写像：恒等写像・群の平行移動・ゲージ変換・Migdal–Kadanoff 型の間引き）では、(7) の評価は一次の跡 $\frac{1}{2}\operatorname{tr}((M_B - M_0)M_0^{-1})$ で、スピンの項の寄与はちょうど 0 です。評価は軌道だけの値より悪いので、与えうるのは高々 $-\frac{1}{3}$ の側、すなわち $\beta' \geq \beta + 0.023$（2 倍あたり）で、反漸近自由の向き、$U(1)$ と同じ向きです 初 （一ループの水準）。
- **揺らぎを整形する比較**（行列式 1 の最適な線形写像で揺らぎの形を変える）では、正確な $\frac{1}{2}\ln\det$ を誤差 $\sim \Delta F^2/n$（n は自由度の数）で再現し、$\beta' = \beta - 0.258$（2 倍あたり）を出します 初 （一ループの水準）。

数の出所：$\beta = 4/g^2$、$b_0 = 22/(48\pi^2)$ で、一ループの結合の動きは 2 倍あたり $\beta - \beta' = 4 \cdot 2b_0 \ln 2 = 0.2575$ です。軌道だけなら $\frac{11}{3}$ を $-\frac{1}{3}$ に替えて $0.2575 \times (-\frac{1}{11}) = -0.0234$ です 初 （算術）。

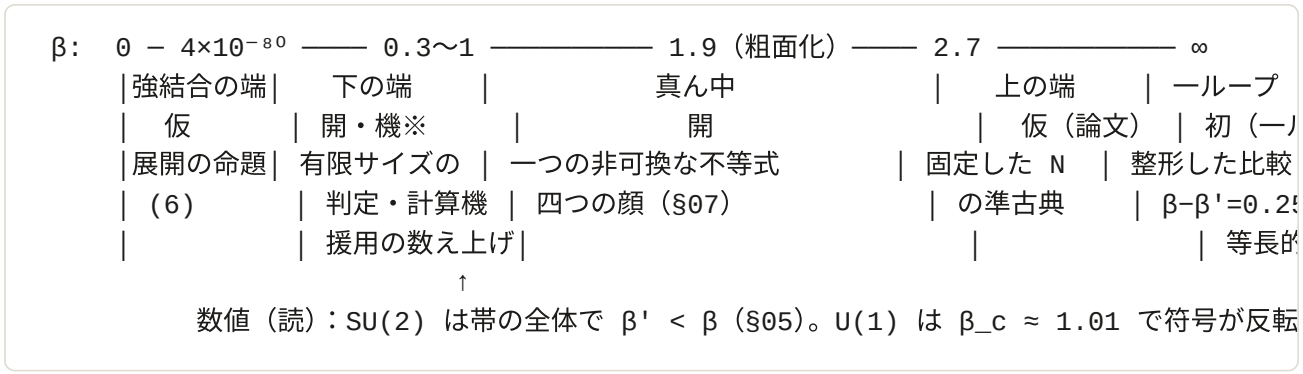
これで、Tomboulis の方法（間引き＝等長的）が群を区別できなかった理由が一ループの水準で数として説明できます。漸近自由を見る仕組みは、揺らぎの整形にあります。残るのは、整形した輸送の評価の誤差（渦の面の近くの局所的な KL と高次のループ）を、中程度の結合と大きな場で押さえることで、これは開いています。

両端の文は必ず条件つきで読んでください。「繰り込みの比較は両端で成り立つので、帯の幅だけが残る」とは言えません。強結合の側は $u \leq u_0 \approx 10^{-80}$ の範囲の、記帳の一部が概略の筋で、弱結合の側は一ループの水準の計算です。非摂動の弱結合の比較は、どの β でも示されていません。

04

β の上の地図 — 区間ごとの札

図 1 は Wilson 作用の β の上に、繰り込みの比較と閉じ込めの状態を区間ごとに並べたものです。区間の境は目安で、どの境も定理の閾ではありません。



- **強結合の端** 仮 ：強結合の端の展開の命題。定数 $u_0 \approx 10^{-80}$ のまま本に証明を置けないので「仮」です。同じ強結合の端には、本書の Lean で検査した結果が在ります（20-06）：面積則と、面積あたりの率が横の大きさに依らない渦の床です（前の因子は残ります）。どちらも強結合の窓（β がおよそ 10^{-3} 以下）の中だけの、格子間隔を固定した言明で、繰り込みの比較そのものではありません。窓の外では、横の大きさに一様な形はありません。
- **下の端**（$\beta \approx 0.3$〜1）：開。ただし強結合の端の固定した β の両側の面積則の上側は延びました（図 1 の※）。$SU(2)$ の元を中心の符号と $SO(3)$ の切断に分けると（$U = \sigma V$）、捩れの自由エネルギーは、$SO(3)$ の背景を止めた $\mathbb{Z}_2$ のゲージのガラス（結合 $|K_p| \le \beta$、符号はランダム）の比の平均で挟まれます 紙 。その閉じた板の多面体展開の Kotecký–Preiss の判定 典 （箱の磁束の混合 δ_c（26-10 §03）の、背景に一様な形）を、10 枚までの全数え上げと木による尾の評価で確かめると、$N, M \ge 11$ で $\beta \le 0.1039$ の全てにおいて $|\Delta F(N, M, \beta)| \le 8 a N^2 e^{-b M^2}$（$a = 0.0454$、$b = 0.01$。$\beta$ を下げると b は大きくなる）が成り立ちます 機 （区間演算。$N, M \ge 2$ の全てでは $\beta \le 0.0680$。有理数の版 $\beta \le 0.1029$ の最後の算術は Lean：CenterFluxPolymerCertificate（tree_k・kp_bound・kp_lt_one・rate_rational・final_real）。$\tanh \beta \le \beta$・木の帰納の補題・KP の定理は Lean の外）。これは固定した β の両側の面積則の上側の形で、率 b は真の σ よりずっと小さく、下側（弦の張力の上界）はありません。同じ分解は $U(1)$ でも $\mathbb{Z}_2$ でも成り立つので、この評価は群を区別せず、純 $\mathbb{Z}_2$ の転移 $\beta \approx 0.44$ を越えられません 読 。$\beta \ge 0.12$ は数え上げの閾で示せません。既知の評価の型である可能性が高く、新しさは主張しません。それより上の候補は、箱の境界の中心の磁束を変えたときの内側への影響 $\delta(L_0, \beta)$ による Dobrushin–Shlosman 型の有限サイズの判定と、許される面の成長定数を計算機援用の数え上げで示して u_0 を 0.04〜0.12 へ上げる道（見込みの範囲は物理の見立て）。どちらも $\beta \approx 1$ より上へは届かない見込みです。
- **真ん中**（$\beta \approx 1$〜2.7）：開。非可換性を使う不等式が一つ要り、それを担う局所量の候補が四つあります（§07）。
- **上の端**（固定した N で大きな β）：閉じ込めの向きは、分数インスタントンによる閉じ込めの下界（この本の検討から出た論文 3 の定理 A。固定した N で $-\ln \theta \ge c \beta^{-a} e^{-\beta(S_* + \varepsilon)} M^2$）に紙の証明があります。ただしチェス盤の一般の定理と Morse–Bott の補題を引用してい

て、この本には証明を置いていないので「仮」とします 仮 。M に一様な逆向きの評価と、率 S_* が最小作用 $S_{\min}$ に一致することは開いています。N を増やす向きは、真ん中と同じ問題です。

- **一ループ** 初 ：§03 の (8) と二つの比較。摂動の水準です。

帯の幅をどう数えるかは、下の端をどこに置くかで変わります。強結合の展開が数値の上で有効なのは $\beta \approx 0.3\text{〜}0.5$ までと見られ、記録はこの帯を「Wilson 作用の β で、およそ 0.5〜2.7」と書いています 読 （物理の見立て）。紙の上の帯は u_0 の小ささのぶん、ずっと広く $[4\times10^{-80},\ 2.7]$ です。

05

数値 — 格子を 2 倍にする

繰り込みの比較を数値で直接試します。手順は、細かい格子の渦の自由エネルギーを測り、それと同じ値を与える粗い格子の β' を、粗い格子の ΔF の曲線から読むことです。測り方はどれも、レプリカ交換で区画をまたぐ標本を作り、Bennett の受理比の方法（BAR）で自由エネルギーの差を出すものです。誤差は統計誤差で、種（乱数の初期値）を替えた二本の差が表示の誤差の 1〜2 倍になる点があり、誤差は小さめに出ている可能性があります。どの数も読みで、証明ではありません 読 。

表 2　板の格子全体を 2 倍にする：$(N,M)=(4,8)\to(8,16)$（$n_{12}=1$） 読

群	β	$\Delta F(4,8,\beta)$	$\Delta F(8,16,\beta)$	種の数	一致する β'	$\beta-\beta'$
$SU(2)$	2.7	2.97 ± 0.33	0.92 ± 0.30（0.65 ± 0.39 と 1.31 ± 0.48 の重みつき平均）	2	≈ 2.57（曲線の誤差を入れて 2.45〜2.65）	$\approx +0.13$（$+0.05$〜$+0.25$）
$SU(2)$	2.6	1.43 ± 0.19	-0.50 ± 0.34（0 と整合）	2	$\lesssim 2.45$	$\gtrsim +0.15$
$SU(2)$	2.5	0.63 ± 0.18	0.41 ± 0.34	1	2.2〜2.5	0〜+0.3
$U(1)$	1.5	0.83 ± 0.11	2.32 ± 0.45（レプリカ 48・交換の受理率の最小 0.37）	1	>1.7（曲線の外）	<-0.2

粗い側の曲線は $SU(2)$ の $\Delta F(4,8,\beta')$ が $\beta'=2.2,2.3,2.4,2.5,2.6,2.7$ で $0.05, 0.00, 0.31, 0.63, 1.43, 2.97$、$U(1)$ が $\beta'=1.3\text{〜}1.7$ で $0.42, 0.55, 0.83, 0.92, 1.46$ です。$SU(2)$ では 2 倍にすると渦の自由エネルギーが下がり（$\beta=2.7$ で $2.97\to0.92$）、一致する β' は β より小さい。$U(1)$ では上がり（$0.83\to2.32$、約 3σ）、$\beta'>\beta$ です。比較の向きが二つの群で分かれました。$U(1)$ の最初の実行（レプリカ 32）は交換の受理率の最小が 0.03 で混ざりが悪く、使っていません。

表 3　対称なトーラス N^4（$n_{12}=1$）の ΔF と、$2^4\to4^4$ の一段の β'。種は各 1 本 読

群	β	$\Delta F(2^4)$	$\Delta F(4^4)$	$\beta-\beta'$

群	β	$\Delta F(2^4)$	$\Delta F(4^4)$	$\beta-\beta'$
$SU(2)$	1.75・2.0	0.573・1.39	0.01・-0.03	>0.75（$\beta'<1.0=2^4$ の曲線の外）
$SU(2)$	2.25	2.71	0.50	0.53
$SU(2)$	2.5	4.29	2.46	0.30
$SU(2)$	2.75	5.95	5.10	0.13
$SU(2)$	3.0	7.88	7.33	0.07
$U(1)$	0.9	1.15	0.05	>0.3
$U(1)$	1.0	1.80	1.07	$+0.12$
$U(1)$	1.1	2.46	2.71	-0.04
$U(1)$	1.2	3.10	3.68	-0.11
$U(1)$	1.4	4.18	4.46	-0.05

誤差は 2^4 で 0.01〜0.08、4^4 で 0.03〜0.26 です。$SU(2)$ は読める全ての β（1.75〜3.0）で $\beta-\beta'>0$、つまり一段の階段関数に固定点がありません。強結合へ向かうほど一段の動きが大きく、表 1 の強結合の値へつながる形です。弱結合の側で 0.07 まで小さくなるのは、2^4 が一ループの領域には小さすぎるための格子の人工物と見られます。$U(1)$ は **$\beta=1.0$ と 1.1 の間で符号が反転**します。既知の相転移 $\beta_c\approx1.01$ の位置で、閉じ込めの相では $\beta'<\beta$、Coulomb の相では $\beta'>\beta$ です。

表 4　$SU(2)$ の $4^4\to8^4$（$n_{12}=1$）。ΔF は種ごとの値の単純平均、誤差は種の差の半分 読

β	$\Delta F(4^4)$	$\Delta F(8^4)$	**種の数（8^4）**	$\beta-\beta'$
2.3	—	-0.04 ± 0.10（≈0）	1	$\gtrsim0.1$
2.5	2.46（1 本）	0.48 ± 0.48	1	$\approx+0.25$（$+0.19$〜$+0.5$）
2.7	4.72 ± 0.25	3.11 ± 0.46	2	$+0.16$（$+0.13$〜$+0.19$）
2.9	6.56 ± 0.33	4.68 ± 0.63	3	$+0.20$（$+0.12$〜$+0.29$）
3.0	7.58 ± 0.25	5.78 ± 0.40	2	$+0.18$（$+0.14$〜$+0.25$）

4^4 の曲線は $\beta=2.6$（3.96 ± 0.13、1 本）・2.75（5.18 ± 0.10）・2.8（5.60 ± 0.27）の点も使いました。$4^4\to8^4$ でも測った全ての β で $\beta-\beta'>0$ で、平均は約 $+0.2$ です。一ループの漸近値 0.258 と、既知の $a\sqrt{\sigma}$ の値から見込まれる約 0.23 に近い値です 読 。

読み方。階段関数の符号の試験は、相転移の有無を見分けています。$U(1)$ は転移の位置で反転し、$SU(2)$ は測った範囲で反転しません。これは §08 の基準「U(1) の転移と区別する」の数値の姿です。ただし格子は 8^4 までで小さく、β の点も少なく、種の数も 1〜3 本です。「$SU(2)$ では帯の全体で符号が変わらない」は、この格子と点の上の読みです。

> 06

帯は有界な区間 — 固定した β の面積則への還元

帯は β について有界な閉区間 $I=[\beta_a,\beta_b]$ です。尺度を無限回またぐ比較が、有界な区間の上では有限個の段に縮みます。そのことを、次の補題の形で書きます。

帯の中の両側の面積則の仮定（帯 I の上の、固定した β での両側の面積則）。 定数 $N_1, M_0 \geq 2$、$c_-, c_+ > 0$、$p \geq 0$ と、関数 $\sigma_N(\beta) > 0$ があって、

- 固定した β の両側の面積則：全ての $\beta \in I$、$N \geq N_1$、$M \geq M_0$ で $\ c_- N^2 e^{-\sigma_N(\beta) M^2 - pM} \ \leq \ \Delta F(N,M,\beta) \ \leq \ c_+ N^2 e^{-\sigma_N(\beta) M^2 + pM}$。
- 率の一様な正値と連続性：$\sigma_* := \inf_{N \geq N_1,\, \beta \in I} \sigma_N(\beta) > 0$ で、ある $\delta > 0$ について、$\beta, \beta' \in I$ ・$|\beta - \beta'| \leq \delta$ なら全ての $N \geq N_1$ で $\sigma_N(\beta') \leq \sigma_{2N}(\beta) + \sigma_*$。

固定した β の両側の面積則の上側は面積則（周長の次数の誤差 pM つき）、下側は「渦が安すぎない」こと、すなわち弦の張力の上界です。率の一様な正値と連続性は率が帯の上で一様に正で、β について少し動かしても大きく変わらないことです。

帯の中の比較の還元の補題。 帯の中の両側の面積則の仮定の下で、$\beta \in I$、$\beta' \in [\beta - \delta, \beta) \cap I$、$N \geq N_1$、$M \geq M_0$ について

$$\Delta F(2N, 2M, \beta) \ \leq \ K \cdot \Delta F(N, M, \beta'), \qquad K = 4\,\frac{c_+}{c_-}\exp\!\Big(\frac{9p^2}{8\sigma_*}\Big) \tag{9}$$

が成り立つ。K は N・M・β に依らない。

初 証明。$2N \geq N_1$・$2M \geq M_0$ なので、固定した β の両側の面積則の上側から $\Delta F(2N,2M,\beta) \leq c_+ (2N)^2 e^{-\sigma_{2N}(\beta)(2M)^2 + p(2M)} = 4c_+ N^2 e^{-4\sigma_{2N}(\beta) M^2 + 2pM}$。下側から $\Delta F(N,M,\beta') \geq c_- N^2 e^{-\sigma_N(\beta') M^2 - pM}$。$\eta := 4\sigma_{2N}(\beta) - \sigma_N(\beta')$ と置くと、率の一様な正値と連続性から $\eta \geq 3\sigma_{2N}(\beta) - \sigma_* \geq 2\sigma_*$（$\sigma_{2N}(\beta) \geq \sigma_*$ を使う）。比は

$$\frac{\Delta F(2N,2M,\beta)}{\Delta F(N,M,\beta')} \ \leq \ 4\frac{c_+}{c_-}\, e^{-\eta M^2 + 3pM} \ \leq \ 4\frac{c_+}{c_-}\, e^{9p^2/(4\eta)} \ \leq \ 4\frac{c_+}{c_-}\, e^{9p^2/(8\sigma_*)}$$

です。二つ目の不等号は二次式 $-\eta M^2 + 3pM$ の最大値 $9p^2/(4\eta)$、三つ目は $\eta \geq 2\sigma_*$ です。∎

有限の段数で帯を渡る系。 帯は $\lceil (\beta_b - \beta_a)/\delta \rceil$ 段以内で渡れ、その間の損失は K の段数乗で、N・M に依らない定数です 初 。β' は $\sigma_N(\beta') \leq 4\sigma_{2N}(\beta) - 2\sigma_*$ を満たす範囲なら、もっと大きく下げても同じ証明が通ります。

較正。強結合の端の展開の命題（(6)）は、固定した β の両側の面積則を $p = 0$、$c_\pm = 2(1 \pm C'u)$ で与えます。このとき (9) は $K = 4(1+C'u)/(1-C'u)$ で、§03 の強結合の端の比較の $4(1+O(u))$ と一致します 初 （強結合の端の展開の命題は仮なので、一致は形の一致です）。

帯の中の比較の還元の補題が言うこと。 帯の中の繰り込みの比較は、帯の各 β での「固定した β の閉じ込め（周長の次数の誤差つきの両側の漸近）」に還元されます。尺度をまたぐ比較そのものは要りません。帯に入るのは物理の箱が大きいときなので、固定した β の両側の面積則が要るのは N, M が相関長 $\xi(\beta)$ より十分大きい範囲だけです。

帯の中の比較の還元の補題が言わないこと。 帯の中の両側の面積則の仮定は帯のどの β でも未証明です。上側は、四次元 $SU(2)$ の格子の中間の結合での閉じ込めという未解決の問題そのものです。探した範囲で、$\beta \approx 1$ での四次元 $SU(2)$ の格子の閉じ込めの証明は見当たりません。下側（弦の張力の上界を周長の次数の精度で）も書き下していません。補題は群に依らず、非可換性は全て帯の中の両側の面積則の仮定に入っています。$U(1)$（$\beta \in (1.01, 2.7)$）では帯の中の両側の面積則の仮定が偽なので、結論も出ません。この補題は道具ではなく還元で、帯を易しくしたとは言いません。

難しさが寄る場所 読 （物理の見立て）。帯の中の比較の還元の補題の後、帯の中に残るのは固定した β の問題（体積に一様な評価・凸でない大きな場・相転移が無いこと）です。尺度をまたぐ難しさは帯の中から消えるのではなく、**帯の上端**と**紫外の制御との継ぎ目**に寄ります。帯の上端では $\xi(\beta)$ が格子単位で 10 を超え、固定した β の両側の面積則を有限の箱の計算で確かめる道は規模で止まります。そして帯の上端から先（$\beta \to \infty$）は、紫外の制御（7-07）が受け持つ範囲で、二つを同じ定数でつなぐ必要があります。24-07 §05 の三つの根で言えば、帯の中は大域のゲージ固定の欠如（大きな場の非凸性）と相転移の排除、上端の継ぎ目が尺度をつなぐ展開の欠如（紫外と赤外をつなぐ展開が無い）です。

例。強結合の側（$u \le u_0$）では、ちょうど小さな T^2 の基点の形の言明が強結合の端の展開の命題として（筋の水準で）あります。帯の下の端を $\beta \approx 0.3$〜1 へ押し上げる作業（§04 の下の端）は、帯の中の比較の還元の補題の言葉では「固定した β の両側の面積則の成り立つ区間を広げる」ことで、尺度をまたぐ比較を要りません。

07

真ん中の帯の四つの顔

真ん中の帯を渡るには、非可換性を使う不等式が一つ要る、というところまで絞れています。その一つを**どの局所量で書くか**について、候補が四つあります。どれか一つを、尺度に一様に、$U(1)$ で破れる形で示せばよい、という意味で「顔」と呼びます。表 5 は名前と振る舞いの予想だけを並べたもので、詳しい検討は 26-10 にあります。どの行も見立てです 読 （物理の見立て）。

表 5　真ん中の帯の四つの顔（予想の行は物理の見立て。数値は読）

顔	局所量	$SU(2)$ の予想	$U(1)$ で破れる場所

顔	局所量	$SU(2)$ の予想	$U(1)$ で破れる場所
κ_w	捩れの向きの柔らかさ：捩れの生成場に沿った力の分散（幅 w の帯で）	w とともに減る（Nielsen–Olesen の柔らかい方向。一ループの $+4$ のスピンの項の非摂動版）	スピンの項が無く $\kappa_w \geq c\beta$
$\delta(L_0)$	箱の境界の中心の磁束を変えたときの、内側の立方体の全変動距離	L_0 とともに指数的に 0 へ	Coulomb の相で $O(\beta)$ のまま残る
$f(\ell)$	外枠を止めた $\ell \times \ell$ の柱の捩れの自由エネルギー	$e^{-\sigma \ell^2}$ の型	$\pi^2\beta/\ell^2$ の型（$\mathbb{Z}_2$ では $\approx 2\beta$）
圧力の余裕	捩れの模様を入れた系と入れない系の圧力の差 $p_\infty - p_{G,L}$（チェス盤の密度 κ_{cb} の指数）	正の余裕が残り、固定した β の面積則を出す	小さな κ_{cb} を作らない

数値の一例。柱の顔 $f(\ell)$ を、外枠を止めた $T_4^2 \times \ell \times \ell$ の捩れの偏り $\mathbb{E}|\theta_B|$ で測ると、$SU(2)$（$\beta = 2.3$）は $\ell = 4, 5, 6$ で $0.23, 0.07, 0.09$、$U(1)$ の Coulomb の相（$\beta = 1.3$）は $0.61, 0.49, 0.41$（$\ell = 8$ で 0.25）で、$\ell \geq 5$ で $SU(2)$ は $U(1)$ の 1/5〜1/7 です 読 。ただし $SU(2)$ の値は統計の底に近く、$e^{-\sigma\ell^2}$ と冪の区別はこの大きさではつきません。

四つの顔のどれについても、尺度をまたぐ比較（例えば $f(2\ell, 2N, \beta) \leq K f(\ell, N, \beta')$）は大域の繰り込みの比較と同じ難しさの局所版で、易しくなったわけではありません。顔を替えて得るのは、証明の対象が「境界を止めた有限の領域の言明」に変わることです。

08

帯を閉じる議論が満たすべき条件 — 基準 「U(1) の転移と区別する」

基準「U(1) の転移と区別する」。$U(1)$ はこの帯の中（$\beta \approx 1.01$）に、閉じ込めない相への相転移を持ちます。帯を閉じる議論は、$SU(2)$ に相転移が無いことを、$U(1)$ と区別して示さなければなりません。これは「四次元 $SU(2)$ には零温度で閉じ込めない相への転移が無い」という未解決の問題と同じ重さで、この条件を満たさない案は最初から捨てられます。

§05 の階段関数の符号は、この基準の数値の姿でした。言い直すと、**帯を閉じる証明は、比較の向き $\beta' < \beta$ が $SU(2)$ では帯の全体で変わらないことを示すこと**です。構造だけの議論（鏡映正値性・双対性・転送行列）は $\mathbb{Z}_2$・$U(1)$ でも同じ形で成り立つので、それだけでは基準を満たしません（26-04）。群を区別しない繰り込み（等長的な比較・Migdal–Kadanoff の流れ）も満たしません（§03）。

帯の全体を一度に閉じなくても、基準「U(1) の転移と区別する」を満たす中間の到達点があります。

1. $\Delta F(L, L) \to 0$（速さを問わない）。$U(1)$ の Coulomb の相では $\Delta F(L, L)$ は $\pi^2\beta_R/2 - \ln 2$（古典的な半磁束の値 $\pi^2\beta_R/2$ から、半磁束の向き $\pm\pi$ の二つ分の $\ln 2$ を引いたもの。β_R

は繰り込まれた結合）へ向かい、$\mathbb{Z}_2$ の閉じ込めない相では増えるので、これを示せば既知の閉じ込めない相を排除できます 仮 （相の振る舞いは見立て）。質量ギャップは出ません。数値では $U(1)$（$\beta = 1.2$）の $2^4 \to 4^4$ が $3.10 \to 3.68$ と横ばい、$SU(2)$（$\beta = 2.75$）が $5.95 \to 5.10$ です 読 。

2. 張力の倍化の不等式：ある $\delta_0 > 0$ と N_1 があって、全ての $N \geq N_1$ で $4\sigma_{2N}(\beta) \geq e^{\delta_0}\sigma_N(\beta)$、すなわち $s(2N,\beta) \geq e^{\delta_0} s(N,\beta)$（記号は §01 の繰り込みの比較の率の形）。$U(1)$ の Coulomb の相では s が尺度によらず一定でちょうど $\delta_0 = 0$ の境に、$\mathbb{Z}_2$ の閉じ込めない相では $s \to 0$ で負の側にあるので、基準「U(1) の転移と区別する」を満たします 読 （三つの相の値は閉じた式の模型と小さな格子の値）。出るのは $s(2^k N_1) \geq e^{k\delta_0} s(N_1) \to \infty$ で、Coulomb の相と離散群の閉じ込めない相が外れます 初 （反復の算術）。上の一つ目の文 $\Delta F(L,L) \to 0$ へ移るには、対称な箱の値と板の張力の差の制御が別に要ります。質量ギャップも面積則も出ません。前提の一覧での行は 28-04 に在ります。

3. $\ln(1/\theta(L,L)) \geq cL^2/\ln L$（ほぼ面積則）。Tomboulis–Yaffe の不等式 典 を通せば Wilson ループが周長則より速く減ります（$\langle W\rangle \leq 2\exp(-cA/\ln A)$ の型）。

4. 帯そのもの：$\ln(1/\theta(L,L)) \geq cL^2$（26-01）。

帯をギャップの言葉で読む — 帯の比較（ギャップの言葉）。 渦の自由エネルギーは電束 $e \neq 0$ の側の量（§02 の (4)(5)）で、質量ギャップが要るのは $e = 0$ の側です。中性の側で帯を渡る比較は、箱のギャップを箱の大きさで測った $x(L) = L\,m_0(L)$ の倍化の写像に固定点が無いこと、すなわち帯の区間で $x(2L) \geq x(L) + \delta$（δ は格子間隔に依らない）の形に書けます 仮 。$U(1)$ の Coulomb 相では x が光子の値 2π に止まる（周期の箱で $x(2L)/x(L) = 1/\cos(\pi/2L) \to 1$）ので、この形は基準「U(1) の転移と区別する」を満たします 紙 。率の比 $m_0(2L) \geq (\frac{1}{2} - \varepsilon)m_0(L)$ の形は、$U(1)$ で $m_0(2L)/m_0(L) = 1/(2\cos(\pi/2L)) > \frac{1}{2}$ と自明に満たされるので、区別に使えません 紙 。区別の中身は刻み δ が一様であることにあります。四つの顔（§07）のうち、κ_W と（全ての境界条件に広げた）$\delta(L_0)$ は中性の側にも効き、$f(\ell)$・圧力の余裕は中心の捩れの上の量で、閉じ込めの側だけのものです 読 。Tomboulis–Yaffe の不等式は $U(1)$ でも同じ証明で成り立つ構造の不等式で、出力は荷電セクターなので、閉じ込めの側へ降りる道具で、帯の比較（ギャップの言葉）の道具にはなりません 読 。gap の側の基準は、$\mathbb{Z}_2$ の閉じ込めない相（そこにもギャップがある）を外す必要が無い点で、閉じ込めの側の基準より狭くなります。どの行も示していません。

U(1) のほかの試験の相手（Z_2・有限の非可換群・随伴 Higgs の極限・混合作用・SU(N)・G_2）は 26-12 に並べます。

> 09

言えないこと

(a) 帯のどの β でも、繰り込みの比較も β 単調性も示していません。

(b) 強結合の端は、$u \le u_0 \approx 10^{-80}$ の範囲の、記帳の一部が概略の筋です。弱結合の端は一ループの水準で、非摂動の主張ではありません。「両端で成り立つ」を、この二つの条件を外して読まないでください。

(c) 帯の中の比較の還元の補題は還元で、帯の中の両側の面積則の仮定は未解決の問題を含みます。帯の中の比較の還元の補題で帯が易しくなったとは言いません。

(d) §05 の数値は 8^4 までの小さな格子・少ない β・1〜3 本の種の読みで、相転移が無いことの証拠ではありません。

(e) 表 5 の四つの顔は候補で、どれも尺度に一様な評価を持っていません。

(f) β 単調性と弦の張力の単調性の関係は読みの段を含みます（§02）。β 単調性が偽だとも言いません。

10

五分類の表と依存グラフ

表 6　この章の行（「—」は機械検査の無い行。この章の行に Lean の欄はありません）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲
1	$\partial_\beta \Delta F = \langle \Delta S \rangle$	初	§01	格子の幾何を止めて
2	Gibbs の変分原理 (7)	典	§03	可測な全単射 T
3	(4)(5)：β 単調性 ⇔ $E_1 \ge E_0$ ⇔ θ が β について増える	初	§02	$Y_1 > 0$
4	β 単調性は格子単位の弦の張力の β 単調性と同じ重さ	仮	§02（電場の流束と張力を結ぶ段を書き下していない）	全ての格子で
5	β 単調性の部分的な結果（二次元の 1・2 枚、$\beta \to 0$、捩れの背景で $\beta \to \infty$）	仮	§02（証明は本に置いていない）	各場合の条件
6	強結合の端の展開の命題：強結合の端の渦の自由エネルギーの形 (6)	仮	筋：証明の第 5 段の記帳が概略	$u \le u_0 \approx 10^{-80}$・$N, M \ge 2$
7	強結合の端の比較 $K = 4(1 + O(u))$、$\beta' < \beta$	仮	強結合の端の展開の命題の上の代数	同上
8	熱核の跡の展開 (8)：$\frac{11}{3} = -\frac{1}{3} + 4$	初	§03	一ループ・一定の背景
9	等長的な比較は $\beta' \ge \beta + 0.023$（反漸近自由）	初	§03・25-07	一ループの水準・2 倍あたり

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲
10	揺らぎを整形する比較は $\beta' = \beta - 0.258$	初	§03・25-07	一ループの水準・2 倍あたり
11	分数インスタントンによる閉じ込めの下界（論文 3 の定理 A。固定した N・大きな β の閉じ込めの向き）	仮	論文に紙の証明（引用つき）。本には置いていない	固定した N
12	表 2：$(4,8) \to (8,16)$ で $SU(2)$ は $\beta' < \beta$、$U(1)$ は $\beta' > \beta$	読	§05	格子・β・種は表のとおり
13	表 3・表 4：$SU(2)$ は符号が変わらず、$U(1)$ は $\beta = 1.0$〜1.1 で反転	読	§05	8^4 まで・種 1〜3 本
14	帯の中の比較の還元の補題：帯の中の両側の面積則の仮定の下で帯の中の比較 (9)	初	§06	固定した β の両側の面積則・率の一様な正値と連続性・$N \geq N_1$・$M \geq M_0$
15	有限の段数で帯を渡る系：帯は有限段で渡れ、損失は N, M に依らない	初	§06	同上
16	較正：強結合の端の展開の命題の形で $K = 4(1 + C'u)/(1 - C'u)$	初	§06	形の一致（強結合の端の展開の命題が仮）
17	難しさは帯の上端と紫外の制御の継ぎ目に寄る	読	§06（物理の見立て）	—
18	真ん中の帯の四つの顔とその予想	読	§07（物理の見立て）	—
19	基準「U(1) の転移と区別する」：$U(1)$ の帯の中の転移と、帯を閉じる議論の条件	読	§08（転移の位置は数値の既知の値。物理の見立て）	—
20	$\Delta F(L, L) \to 0$ は既知の閉じ込めない相を排除する	仮	§08（相の振る舞いは見立て）	—

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  初  ∂_β ΔF = ⟨ΔS⟩
 2  典  Gibbs の変分原理 (7)
 3  初  β 単調性 ⇔ E₁ ≥ E₀ ⇔ θ が増える ⟸ 1                    Y₁ > 0
 4  仮  β 単調性は張力の β 単調性と同じ重さ ⟸ 3
 5  仮  β 単調性の部分的な結果
 6  仮  強結合の端の展開の命題                                  u ≤ u₀ ≈ 10⁻⁸⁰
 7  仮  強結合の端の比較 K ≈ 4 ⟸ 6
 8  初  11/3 = −1/3 + 4                                      一ループ
 9  初  等長的な比較は β' ≥ β + 0.023 ⟸ 2・8                 一ループ
10  初  整形した比較は β' = β − 0.258 ⟸ 2・8                 一ループ
11  仮  分数インスタントンによる閉じ込めの下界                  固定した N
12  読  (4,8)→(8,16) の向きが群で分かれる
13  読  階段関数の符号：SU(2) は変わらず U(1) は反転
14  初  帯の中の比較の還元の補題
15  初  帯は有限段 ⟸ 14
16  初  較正 ⟸ 6・14                                          形の一致
17  読  難しさは上端と紫外の継ぎ目 ⟸ 14
18  読  四つの顔 ⟸ 9・10・12・13
19  読  基準「U(1) の転移と区別する」 ⟸ 13
20  仮  ΔF(L,L) → 0 は閉じ込めない相を排除 ⟸ 19
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。固定した β の両側の面積則と率の一様な正値と連続性は、帯の中の比較の還元の補題の行の条件として書き、節点にしていません。仮定の行が結論の量（帯を渡る比較）を含まないためです。この章の節点に、帯のどの β での比較の節点も、閉じ込めの節点も、質量ギャップの節点もありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 β 単調性と電場の流束の言い換え (4)(5)。一ループの水準で、等長的な比較が反漸近自由の向き（$\beta' \geq \beta + 0.023$）しか与えず、揺らぎを整形する比較が $\beta - \beta' = 0.258$ を出すこと	β 単調性そのもの。非摂動の弱結合の比較
初 帯の中の比較の還元の補題：帯の中の比較が、固定した β の両側の面積則（帯の中の両側の面積則の仮定）に還元されること	帯の中の両側の面積則の仮定のどの β での証明。帯を易しくしたこと
仮 強結合の端の比較（$u \leq u_0 \approx 10^{-80}$・記帳の一部が概略）。固定した N の上の端（分数インスタントンによる閉じ込めの下界。論文 3 の定理 A）	本に置いた証明。u_0 を実用の範囲へ上げること
読 8^4 までの格子で、比較の向きが $SU(2)$ では変わらず $U(1)$ では転移の位置で反転すること	相転移が無いことの証拠。大きな格子での同じ読み

出典と再現

もの	種別	出典・道具
β 単調性・繰り込みの比較の分割、(4)(5)、部分的な結果、熱核の跡の展開と二つの比較	本書の検討	この本の検討の記録（帯を β 単調性と繰り込みの比較に割る着想と、β 単調性の検討・一ループの確認）。(4) と (8) はこの章で計算を確かめた
強結合の端の展開の命題と強結合の端の比較	本書の検討（仮）	この本の検討の記録（強結合の側の比較の厳しい形と、その訂正の節）。多面体の展開の型は G. Münster（1981）の強結合の渦の自由エネルギーの展開（書誌と原典の本文は照合していない）
表 1	読	修正 Bessel 関数の比 I_2/I_1 の数値と、$u(\beta') = u(\beta)^4$ の数値の根。この章で数値を確かめた
表 2〜表 4・柱の偏り	読	この本の検討の数値の記録（繰り込みの比較の試験・対称なトーラスの階段関数の走査・$U(1)$ の対照・$4^4 \to 8^4$ の追加と種の統合・柱の捩れのコスト）。レプリカ交換と Bennett の受理比の方法
帯の中の比較の還元の補題・有限の段数で帯を渡る系・較正	初	この本の検討（帯の候補の検討の還元の補題）。証明はこの章で一行ずつ確かめた
四つの顔・基準「U(1) の転移と区別する」・中間の到達点	本書の検討	この本の検討の記録（移り変わりの帯を閉じる道の整理）。詳細は 26-10
Tomboulis の主張と批判	典	E. T. Tomboulis, arXiv:0707.2179。K. R. Ito, E. Seiler, arXiv:0711.4930（式 (3.5)）・arXiv:0803.3019（詳しい検討）。T. Kanazawa, arXiv:0805.2742（付録 A）。経緯は 26-08
Tomboulis の 1980 年代の短い論文	典	E. T. Tomboulis, Phys. Rev. Lett. 50 (1983) 885（題は未確認・本文は読んでいない）
Tomboulis–Yaffe の不等式	典	E. T. Tomboulis, L. G. Yaffe, Commun. Math. Phys. 100 (1985)（26-01 の出典表）

この章で使った語 — 移り変わりの帯・β 単調性・繰り込みの比較・等長的な比較・揺らぎを整形する比較・階段関数・四つの顔・基準「U(1) の転移と区別する」・還元の補題。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：26-07 時間の側から見た帯 — 第 23 部の道で帯に当たる言明と、一段目の壁「頂上の曲率の不足の壁」が帯の縮図であって帯ではないこと。

時間の側から見た帯

この章は本書の検討です。§06 は未解決の地図です。

この章で分かること ― 第 23 部は、Langevin の時間（確率力学の緩和）の側から質量ギャップに近づく道でした。この章は、その道の上で移り変わりの帯に当たる言明がどれかを正確に述べ、第 23 部が実際に止まっている壁「頂上の曲率の不足の壁」と帯との関係を決めます。答えは二つです。(1) 第 23 部の四次元の目標（23-15 の物理単位の目標の水準）は、拡散型緩和時間の仮定の上側（緩和時間の上界の仮定）と片側の橋が $\beta \to \infty$ で同じ定数で成り立つという、全ての尺度で一様な言明で、帯を必ず渡ります。(2) 一段目の壁「頂上の曲率の不足の壁」は帯の縮図ですが、帯ではありません。移り変わる長さが、頂上の Jacobi の方程式の最初の共役点（約 7.84 サイト）で古典的に決まり、$\hbar$ に依らず格子の単位で有限だからです。四次元の帯の長さ $1/\Lambda$ は量子化で生まれ、格子の単位で発散します。二つの壁は**型が同じで、中身が違う**。これを六列の対照表にします。

前提となる章 ― 23-15 §07（目標の三つの水準）・23-01 §06（片側の橋）・23-09 §06（頂上の一サイトの曲率 $\frac{15}{4}$ と 4）・23-11 §05 の短い芯の段（長さ 7 までの凸性）・24-06（稀さで払う）・24-07（四次元だからこそ・難しさの三つの源）・26-06（繰り込みの比較と四つの顔）・4-07（次元転移）。

先に言うこと ― 水準は〔研〕です。証明を置くのは、§02 の頂上の Jacobi の方程式と最初の共役点の計算、§03 の隠れた凸性の命題の証明、§01 の一行の代数だけです。二つの壁の対比は物理の見立てで、帯を渡る言明そのものはどちらの道でも仮定です。語の注意：第 23 部の 23-01 §05 は「帯の文」という語を、C_P が長さの二乗の定数倍の幅に入るという言明（定数倍の幅＝帯）に使っています。この章の「帯」は第 26 部の「移り変わりの帯」（$L \sim 1/\Lambda$ の移り変わり）で、別の語です。第 23・24 部で「帯」が別の意味で使われる箇所の一覧は 26-00 表 0 にあります。また第 23・24 部の「窓」（サイトの窓・$\hbar$ の窓・時刻の窓）とも別物です。長さ 7 までの凸性の定数は、チェス盤の密度 κ_{cb} と区別して $\kappa_{\mathrm{C7}}(k)$ と書きます（23-11 の $\kappa(k)$ と同じ量）。

この章の順序

1. 第 23 部の道で帯に当たる言明 ― 物理単位の目標の水準と、同じ定数という一様性
2. 一段目の壁は古典の長さで決まる ― 頂上の Jacobi の方程式と最初の共役点
3. 型は同じ ― 両端に別の道具、真ん中で最悪の評価が止まり、平均の道具へ
4. 中身は違う ― 移り変わる長さの起源・稀さと典型・相転移
5. 二つの壁の対照表 ― 六列（表 1）
6. 第 23 部への補い ― ブロックと混合の道 ― 23-15 の第三の枝へ
7. 言えないこと
8. 五分類の表と依存グラフ ― 表 2

01

第 23 部の道で帯に当たる言明 ― 物理単位の目標の水準と、同じ定数という一様性

第 23 部は、四次元格子の質量ギャップの目標を三つの水準に割りました（23-15 表 5）。格子の目標の水準は格子の各 β で相関長が有限、物理単位の目標の水準は格子の質量を物理の単位で測った $m_{\mathrm{lat}}(\beta)/a(\beta)$ が正の有限値 Δ_∞ へ向かう、連続の目標の水準は連続の理論で隙間が正、です。時間の側の道で帯に当たるのは物理単位の目標の水準です。

物理単位の目標の水準の下の半分（質量が 0 に潰れないこと）は、二つの言明から一行の代数で出ます。拡散型緩和時間の仮定の上側である上界の仮定（23-01 §05 の (14)）と、片側の橋（23-01 §06 の片側の橋の命題の形）です。

$$\exists\, \beta_0,\, C,\, \kappa > 0 \ \ \forall \beta \ge \beta_0 : \qquad \underbrace{a(\beta)^2\, C_P(\beta) \ \le \ C}_{\xi^2\uparrow}, \qquad \underbrace{C_P(\beta) \ \ge \ \kappa\, \xi(\beta)^2}_{\text{片側の橋}} \tag{1}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{m_{\mathrm{lat}}(\beta)}{a(\beta)} \ = \ \frac{1}{a(\beta)\,\xi(\beta)} \ \ge \ \sqrt{\kappa / C} \qquad (\beta \ge \beta_0) \tag{2}$$

初 証明。(1) の二つから $\kappa\xi^2 a^2 \le a^2 C_P \le C$、両辺の平方根の逆数を取れば (2) です。∎（23-01 §06 の (16) と同じ代数。C_P は Wilson 測度の Langevin の Poincaré 定数、$\xi = 1/m_{\mathrm{lat}}$ は格子の単位の相関長、$a(\beta)$ は格子間隔）

(1) の中身は二つの量化子の順にあります。**C と κ が β に依らない**こと、つまり $\beta \to \infty$ の全ての格子で同じ定数で成り立つことです。片側の橋は、連続の時間と有限の空間格子では仮定を名指した命題として示せますが、四次元の格子への持ち上げは形の見込みだけです 仮（24-07 表 2 の四段目の行）。上界の仮定は四次元では仮定です 仮。

なぜこの言明は帯を渡るか 読（物理の見立て）。β を大きくすると格子間隔 $a(\beta)$ は 0 へ向かい、相関長は格子の単位で $\xi(\beta) \propto e^{3\pi^2\beta/11}$ の型で伸びます（一ループの記帳、23-03 表 2）。β を一つ止めた Wilson 測度の中には、格子の一目盛りから $\xi(\beta)$ までの全ての尺度が入っていて、長さ L の尺度の実効的な結合は、$L \ll 1/\Lambda$ では小さく、$L \sim 1/\Lambda$ で $O(1)$ になり、その先で強結合の振る舞いに入ります。$C_P(\beta)$ は全ての試験関数の上限なので、最も遅い緩和、すなわち最も長い尺度の振る舞いまでを含みます。だから (1) を β に依らない C で示すことは、どの β でも、実効的な結合が $O(1)$ になる尺度——移り変わりの帯——を同じ定数で通り抜けることを含みます。空間の側の道の目標（一様な板の張力：L に一様に正の張力、26-00）も同じ型の文です。二本の道が「全ての尺度で同じ定数」という一つの型の言明に着く、というのが第 26 部の合流の意味です。

この一様性は第 23 部が既に述べたことの受け直しです。23-15 §07 の末尾は、足りないのは段の数ではなく全ての尺度で同じ定数で成り立つという一様性で、それが一段目では $\hbar \to 0$ で一様な形に、四次元格子では $\beta \to \infty$ で一様な形に現れる、と書きました。この章の問いは、その一段目の版が四次元の帯と**同じもの**か、ということです。

02

一段目の壁は古典の長さで決まる — 頂上の Jacobi の方程式と最初の共役点

場所を確かめます。一段目は 0+1 次元の二重井戸の経路の測度 $\mu \propto e^{-S/\hbar}$ で、

$$S(z) = \sum_{i} \Big[\frac{(z_{i+1}-z_i)^2}{2\varepsilon} + \varepsilon V(z_i) \Big], \qquad V(z) = \frac{(z^2-1)^2}{8}, \qquad \varepsilon = \tfrac{1}{2} \tag{3}$$

です（23-04）。壁が現れるのは、経路が頂上 $z=0$ と井戸の間にとどまる区間（芯）$Q_k = [-x_c, 0]^k$（$x_c = 0.89$、面は Neumann）の条件つきの測度で、目標は、その Poincaré 定数が芯の長さ k・端の値・$\hbar$ に一様なこと（芯の Poincaré の一様性の仮定、23-15 §02）です。

頂上の配位 $z \equiv 0$ での Hessian は三重対角 $\mathrm{tridiag}(-2, \frac{15}{4}, -2)$ で、一つの行の対角 $\frac{15}{4}$ が結合の和 4 に $\frac{1}{4}$ 届きません（23-09 §06）。この不足を、変分法の言葉で読み直します。

頂上の Jacobi の方程式。 S の Euler–Lagrange の方程式を頂上 $z \equiv 0$ で線形化すると、変位 u_n について

$$-2u_{n-1} + \tfrac{15}{4}\,u_n - 2u_{n+1} = 0 \tag{4}$$

です。一般の ε では対角が $2/\varepsilon + \varepsilon V''(0) = 2/\varepsilon - \varepsilon/2$、隣との結合が $1/\varepsilon$ で、(4) は $u_{n-1} + u_{n+1} = (2 - \varepsilon^2/2)u_n$ と書けます。$u_n = e^{\pm i n\theta}$ を入れると特性の式は $2\cos\theta = 2 - \varepsilon^2/2$、すなわち

$$\cos\theta = 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \qquad (\varepsilon = \tfrac{1}{2} \text{ で } \cos\theta = \tfrac{15}{16},\ \ \theta = 0.35542\ldots) \tag{5}$$

で、$|\cos\theta| < 1$ なので解は回転 $u_n = \sin(n\theta)$（$u_0 = 0$）です。頂上は、Euclid の運動方程式 $\ddot z = V'(z)$ の線形化 $\ddot u = V''(0)u = -\frac{1}{2}u$ で見ても、指数的に離れる点ではなく回転の点です。

最初の共役点。 $u_0 = 0$ から出た解が次に 0 になる位置 $n = \pi/\theta$ が最初の共役点です。$\varepsilon = \frac{1}{2}$ で

$$\frac{\pi}{\theta} = 8.8391\ldots, \qquad \frac{\pi}{\theta} - 1 = 7.8391\ldots \ \approx\ 7.84 \tag{6}$$

です 初（$\theta = \arccos(15/16)$ の数値。独立な確かめとして、漸化式 (4) を $u_0 = 0, u_1 = 1$ から回すと $u_8 = 0.844 > 0$、$u_9 = -0.164 < 0$ で、線形補間の零点は 8.837）。

凸性の閾＝共役点。 両端を止めた長さ k の塊の頂上での Hessian $\mathrm{tridiag}(-2, \frac{15}{4}, -2)$ の最小固有値は

$$\kappa_{\mathrm{C7}}(k) \ =\ \tfrac{15}{4} - 4\cos\frac{\pi}{k+1} \ =\ 8\sin^2\frac{\pi}{2(k+1)} - \frac{1}{4} \tag{7}$$

で（三重対角の固有値の閉じた式）、これが正になるのは $\pi/(k+1) > \theta$、すなわち $k+1 < \pi/\theta$ のときだけです。(6) から $k \le 7$ で正、$k \ge 8$ で負です 初（$\kappa_{\mathrm{C7}}(7) = 0.0545$、$\kappa_{\mathrm{C7}}(8) = -0.0088$。数値の対角化と (7) の差は $k = 5$〜10 で 10^{-15} の程度）。「長さ 7 までは凸、8 から壊れる」（23-11 §05 の短い芯の凸性の補題）は、区間 $[0, k+1]$ に共役点が入るかどうかという、変分法の Jacobi の判定の離散版そのものです。

この長さは古典的で、$\hbar$ に依らない。 (4)〜(7) に $\hbar$ は一度も現れません。現れるのは作用 S の形（運動項の係数 $1/\varepsilon$ と頂上の曲率 $V''(0)=-\frac{1}{2}$）だけです。一段目で取る極限は $\varepsilon=\frac{1}{2}$ を止めた $\hbar\to 0$ なので、移り変わる長さは極限の全体で約 7.84 サイトに留まり、格子の単位で有限です。時間の単位に直すと $\varepsilon\cdot\pi/\theta\approx 4.42$ で、時間を連続にした極限の値 $\pi/\sqrt{|V''(0)|}=\pi\sqrt{2}\approx 4.44$（頂上の回転の半周期）に近い値です。$\varepsilon$ を 0 に送ればサイトの数は $1/\varepsilon$ で伸びますが、それは一段目の問題が取る極限ではありません。

例。$\varepsilon=\frac{1}{4}$ なら $\pi/\theta-1\approx 16.75$ サイトで、時間の単位では ≈ 4.44 です。長さはサイトの数としては刻みで変わり、物理の時間としては作用の中の数 $V''(0)$ で決まっています。

混合の長さとの数値の一致（仕組みは別）。 最悪の端の値（頂上）からの影響が全変動で 10^{-2} 未満になるサイトの数は、$\hbar=10^{-2}$〜10^{-5} でほぼ動かず約 9 で、刻みを $\varepsilon=0.35,0.5,0.7,0.9$ と変えると $12,9,7,5$ と、$\pi/\theta=12.7,8.8,6.3,4.9$ に数値で近い値になります 読 。ただし仕組みは「頂上の近くに半周期とどまる」ことではありません。$\hbar\to 0$ の最適な道は頂上からすぐ下り始め、箱の角 $-x_c$ に有限のステップ（$\varepsilon=\frac{1}{2}$ で 7）で着き、混合の長さはおよそそのステップ数に 2 を足したものです 読 。二つが近い値になる理由は分かっていません。この章が共役点について主張するのは、(7) の凸性の閾だけです。

03

型は同じ — 両端に別の道具、真ん中で最悪の評価が止まり、平均の道具へ

二つの壁を並べると、同じ型が見えます 読 （物理の見立て。型の比較で、どちらの側の言明も含意しない）。

両端に別の道具がある。 一段目では、短い塊（$k\le 7$）は (7) の凸性で端の値と $\hbar$ に一様に押さえられ（短い芯の凸性の補題 初 ）、井戸の中では相の中の局所 Poincaré（相内の局所 Poincaré の条件、23-06）が効きます。四次元の帯では、強結合の端で展開が、弱結合の端で一ループの比較が効きます（26-06 §03。強結合の側は $u\le u_0\approx 10^{-80}$ の筋、弱結合の側は一ループの水準）。

真ん中で、最悪の配位の評価が止まる。 一段目で最悪の配位を入口に持つ道具は、どれも同じ一行の不足 $\frac{15}{4}<4$ に戻ります 初 （各行は二行の計算）。

- 一サイトの Dobrushin の影響係数：条件つきの一サイトの測度は $\frac{15}{4}$-凸で、隣への結合 $1/\varepsilon=2$ から一つの隣への影響は $\le 2/\frac{15}{4}=\frac{8}{15}$、二つで $\frac{16}{15}>1$。
- 長さ 7 のブロックの影響：Brascamp–Lieb と M-行列の成分ごとの比較で、左の端から右の端への影響は $2\,(M_7^{-1})_{71}=2\cdot 2^6/\det M_7\approx 1.18>1$（$M_7=\mathrm{tridiag}(-2,\frac{15}{4},-2)$ の 7×7、$\det M_7=1770735/16384\approx 108.08$）。
- Otto–Reznikoff の判定：$\mathrm{tridiag}(-2,\frac{15}{4},-2)$ の正値性が要り、無限の鎖では下端 $-\frac{1}{4}$ で失敗。

四次元の帯では、最悪の枠で評価する道が同じ役をします。板の閉じ込めの評価 $\sup_\Phi\theta\le\tanh(\beta L^2)^{\ell^2}$（25-04）から出る張力は $\sigma\ge -\ln\tanh(\beta L^2)\approx 2e^{-2\beta L^2}$ で、L について超指数的に悪くなります（$\beta=2.5$・$L=4$ で $2e^{-80}$）。構造だけの入力（鏡映正値性・双対性・転送行列）は $\mathbb{Z}_2$・$U(1)$ でも同じ形で成り立ち、帯を渡れません（26-04）。どちらの側にも「最悪の一点」があります。一段目では全てのサイトが頂上にいる面 $x\equiv 0$、四次元ではプラケットが中心の元 -1 にある所です。

平均の道具に移ると、一様性が出る見込みがある。 一段目では、転送作用素の相関長は $\hbar$ を小さくすると短くなり（$\hbar=0.1$ から 3×10^{-4} で 1.68 から 0.48）読 、最悪の端の値からの影響も $\hbar$ にほぼ依らない長さで消えます（§02）。頂上に近い配位の稀さ（$\hbar=3\times 10^{-4}$ で $P(z>-0.5)\approx 10^{-252}$）読 が、転送作用素の中で自動的に払われているからです（24-06 §06 の「稀さで払う」）。四次元の側では、L を止めれば、枠の減相関がチェス盤の一つの密度 κ_{cb}（平均の量）に置き換わります（26-05）。尺度をまたぐ評価は、四つの顔のどれかに託されています（26-06 §07）仮 。

平均の道具の一段目の版は、具体的な形まで提案されています（§06）。その入口にある一意性の命題を、証明つきで置きます。

隠れた凸性の命題。 任意の $\varepsilon>0$、$c>0$、$l\ge 1$、端の値 $a,b\in[-c,0]$ について、作用 S（(3) の V で、両端を a,b に止めたもの）は箱 $[-c,0]^l$ の上で局所的な極小をちょうど一つ持ち、それは大域的な最小である。

初 証明。$z_i=-\sqrt{\rho_i}$（$\rho_i\in[0,c^2]$）と置きます。(i) $(z_{i+1}-z_i)^2=\rho_{i+1}+\rho_i-2\sqrt{\rho_i\rho_{i+1}}$ で、幾何平均 $\sqrt{xy}$ は $[0,\infty)^2$ の上で凹なので、$-\sqrt{\rho_i\rho_{i+1}}$ は凸です。(ii) 端の項 $(z_1-a)^2=\rho_1+a^2-2|a|\sqrt{\rho_1}$ も、$-\sqrt{\rho_1}$ が凸なので凸です（右端も同じ）。(iii) $V(z)=(z^2-1)^2/8=(\rho-1)^2/8$ は ρ について二階微分 $\frac{1}{4}$ の狭義凸です。よって $\tilde S(\rho):=S(-\sqrt{\rho})$ は凸な集合 $[0,c^2]^l$ の上で $\nabla^2\tilde S\ge(\varepsilon/4)I$ の狭義凸で、局所的な極小は一つで大域的です。$\rho\mapsto-\sqrt{\rho}$ は $[0,c^2]^l$ から $[-c,0]^l$ への同相写像なので、局所的な極小は互いに対応します。∎

隠れた凸性の命題が言うのは極小の一意性で、Poincaré 不等式ではありません。Dirichlet 形は z の平らな計量で書かれているので、ρ の座標での凸性はそのまま Bakry–Émery を与えません。測度を ρ で書くと密度に $\prod_i(2\sqrt{\rho_i})^{-1}$ が付き、その対数の凹性が、$\rho_i\lesssim\sqrt{2\hbar/\varepsilon}$（頂上のごく近くの薄い層）でだけ凸性を壊します（$\frac{\varepsilon}{4\hbar}$ と $\frac{1}{2\rho^2}$ の比べ）。「頂上の曲率の不足の壁」の非凸性は、z の座標で長さ 8 以上の頂上の塊に見えていたものが、ρ の座標では一サイトごとの稀な薄い層に移る、という読みができます 仮 （この層を稀さで払う議論は組んでいない）。

04

中身は違う — 移り変わる長さの起源・稀さと典型・相転移

型が同じでも、壁の重さを決める三点が違います 読 （物理の見立て）。

(i) 移り変わる長さの起源。 一段目の移り変わる長さは最初の共役点（約 7.84 サイト）で、作用 S に書かれた数（運動項の係数と頂上の曲率）だけから決まる古典的な長さです。$\hbar \to 0$ の極限の全体で、格子の単位で有限に留まります（§02）。四次元の帯の長さは $1/\Lambda$ で、作用は長さの物差しを持ちません（四次元で結合は無次元、24-07 §01）。長さは量子化で、一ループの記帳では $\Lambda = \mu \exp(-1/(2b_0 g^2(\mu)))$ の形で生まれ（次元転移、4-07）典、格子の単位では $1/(a\Lambda)$ が $\beta \to \infty$ で $e^{3\pi^2\beta/11}$ の型で発散します。$\exp(-1/g^2)$ は $g = 0$ で全ての導関数が消えるので、この長さは結合の展開のどの次数にも現れません。

(ii) 悪い配位が稀か、典型か。 一段目では頂上の近くの配位は稀で（§03 の 10^{-252}）、24-06 の「稀さで払う」通貨が効きます。四次元の帯では、悪い配位（太い中心渦・分数インスタントン）は閉じ込めの機構そのもので、典型です。稀さの率は帯で尽きています。これは 24-07 §05 の根「尺度をつなぐ展開の欠如」の行（赤外では Gauss 近似の効かない配位が典型になり、稀さという通貨が無い）と同じ指摘です。

(iii) 相転移があり得るか。 一段目の芯は、コンパクトな一サイトの空間の上の最近接の一次元の鎖です。転送作用素は正の積分核なので、鎖の長さに一様な評価を妨げる相転移はありません 仮 （正の積分核の主固有値の事実。23-15 表 1 の [001] と同じ書誌で、原典は要取得）。四次元の固定した β では、体積に一様な評価は「相転移が無いこと」と同じ重さで、$U(1)$ は帯の中（$\beta \approx 1.01$）で実際に転移します。帯を閉じる議論は $U(1)$ と区別しなければならない、という基準「U(1) の転移と区別する」です（26-06 §08）。

(i) から、決定的な違いが一つ出ます。一段目では、移り変わる長さを越える**有限の**ブロック（長さ 12）を選べば、ブロックの中は一つの極小の周りの解析で、ブロックの間は強い混合で、という二段の道が立ちます（§06）。四次元では、移り変わる長さ $1/\Lambda$ が格子の単位で発散するので、それを越える有限のブロックがありません。**だから一段目の道具がそのまま帯を渡ることは期待できません。** 24-07 §01 の「結合が無次元＝古典的な長さが無い」が、この違いの理由です。

補足。26-06 §06 の還元の補題を通すと、帯の中は「固定した β での、体積に一様な評価」になり、一段目の壁（固定した $\hbar$ での、長さ k に一様な評価）と同じ形の文になります。固定したパラメータ・体積に一様・凸でない領域を通る、の三つが共通です。それでも重さが違うのは (ii) (iii) のためです。そして尺度をまたぐ難しさは、還元の後には帯の上端と紫外の制御の継ぎ目に寄ります（同 §06）。一段目には結合の流れが無い（難しさの源のうち、無次元の結合という源が無い）ので、この継ぎ目に当たるものがありません。

05

二つの壁の対照表

表 1 は §02〜§04 を六つの列にまとめたものです。各欄の札は欄の中に書きます。型の比較（行をまたぐ読み）は全て見立てです 読 。

表 1　一段目の壁と四次元の帯（列 (1)〜(6)）

	(1) 場所と対象	(2) 移り変わる長さとその起源	(3) 両端で効く道具	(4) 真ん中で止まる道具とその理由	(5) 平均の道具とその状態	(6) 対
一段目の壁「頂上の曲率の不足の壁」	0+1 次元の二重井戸の経路の測度（$\varepsilon = \frac{1}{2}$、$\hbar \to 0$）。芯 $[-x_c, 0]^k$ の条件つきの測度の Poincaré 定数を k・端の値・$\hbar$ に一様に（芯の Poincaré の一様性の仮定）	頂上の最初の共役点 $\pi/\theta - 1 \approx 7.84$ サイト、$\cos\theta = 1 - \varepsilon^2/4$。作用だけで決まる古典の長さで $\hbar$ に依らず、格子の単位で有限 初	短い塊：$k \le 7$ の凸性（短い芯の凸性の補題、$\kappa_{C7}(7) = 0.0545$） 初 。井戸の中：相の中の局所 Poincaré（相内の局所 Poincaré の条件、行ごとの札は 23-06）	最悪の配位での曲率：Dobrushin（$\frac{16}{15}$）・長さ 7 のブロック（≈ 1.18）・Otto–Reznikoff（$-\frac{1}{4}$）・Brascamp–Lieb・Barta の行が全て $\frac{15}{4}$ 対 4 に戻る 初 。最悪の点は面 $x \equiv 0$	ブロックの LSI（長さ ≥ 12）＋強い混合＝ブロックと混合の道 仮 。入口の隠れた凸性の命題 初 。転送作用素の相関長と混合の長さは $\hbar$ にほぼ依らない 読	一次 の鎖 は格 移が い（ （正 積分 核。 典は 取 得）。 悪い 位は

	(1) 場所と対象	(2) 移り変わる長さとその起源	(3) 両端で効く道具	(4) 真ん中で止まる道具とその理由	(5) 平均の道具とその状態	(6) 元
四次元の帯	四次元 $SU(2)$ の格子の板 $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$（$n_{12}=1$）の渦の自由エネルギー。$\ln(1/\theta(L,L)) \geq cL^2$ を L に一様に（26-01）	$1/\Lambda$。作用に長さが無く（結合が無次元）、量子化で生まれる（次元転移）典 。格子の単位で $\beta \to \infty$ で発散	強結合の展開（$u \leq u_0 \approx 10^{-80}$、記帳の一部が概略）仮 。一ループの比較（揺らぎを整形すれば $\beta - \beta' = 0.258$）初（一ループの水準）	最悪の枠：$\sup_\Phi \theta \leq \tanh(\beta L^2)^{\ell^2}$ が L について超指数的に悪い（25-04）。構造だけの入力は $\mathbb{Z}_2$・$U(1)$ でも成り立つ（26-04）。等長的な比較は反漸近自由（26-06）。最悪の点は中心の元 -1	チェス盤の密度 κ_{cb}（L を止めれば、26-05）。尺度をまたぐには四つの顔 $\kappa_w \cdot \delta(L_0) \cdot f(\ell)$・圧力の余裕のどれか 仮	$U(1$ 帯の（β 1.01 に転 を持 ＝基 「U の転 と区 す る」。悪い 位（ い中 渦・ 数イ スタ トン は典

表 1 の読み方。列 (3)〜(5) を横に読むと型が同じで（両端に別の道具、真ん中で最悪の評価が止まり、平均の道具に移る）、列 (2) と (6) を縦に比べると中身が違います（長さの起源が古典か量子か、相転移があり得るか）。「頂上の曲率の不足の壁を帯と同じ言葉で書けるか」という問いへの答えは、**型は同じ言葉で書け、中身（移り変わる長さの起源）は違う**、です。

06

第 23 部への補い — ブロックと混合の道

次の道は、芯の Poincaré の一様性の仮定を、サイトの窓の LSI 定数 A_W（23-09）を経由せずに支える候補として提案されています。第 23 部の分かれ道（23-15 §02）の第三の枝「ブロックと混合の道」として、23-15 のブロックと混合の道の小節に行の表と依存グラフを置きます。ここでは、帯との関係に要る骨組みだけを書きます。

1. **ブロックの LSI** 仮 ：長さ $\ell_B \geq 12$（共役点 ≈ 7.84 と、凸性の壊れる長さ 8 を避ける）のブロックで、端の値と $\hbar$ に一様。入口は隠れた凸性の命題（§03）初 、最悪の端の値での最小点の曲率 $\lambda_*(12) \geq 0.255$ 読 （四隅の最小点の区間演算が残る）、一つの非退化な極小から指数的に小さい固有値が無いことを出す Witten の Morse 理論と Menz–Schlichting の分解（Neumann の箱の角での形は照合未了）。
2. **強い混合** 仮 ：$\hbar \to 0$ の最適な道は全ての出発点から 7 ステップ以内で箱の角に着き（記録は 50 桁の KKT の証明書と隠れた凸性の命題と Topkis の単調性。外向きの丸めの区間演算かを確かめるまで 読 ）、幅 $\approx 0.8\sqrt{\hbar}$ に集中し、角の境界層で Doeblin の重なりを持つ、という三段で $\mathrm{TV}(n) \leq (1-\delta)^{\lfloor n/10 \rfloor}$、$\delta$ は $\hbar$ に依らない。第二段・第三段は拘束つきの Laplace の方法の筋です。
3. **一次元の鎖の標準の定理** 仮 ：ブロックの LSI と強い混合から、鎖の長さに一様な LSI（Zegarlinski、Martinelli–Olivieri の型。コンパクトな連続スピンの版は照合未了）。LSI から Poincaré が出て芯の Poincaré の一様性の仮定に届く。

位置づけ。ブロックと混合の道が閉じても一段目は閉じません。二つの道に共通の行（管・縮約したキンクの気体・交差項・相内の局所 Poincaré の条件の延長ほか、23-15 表 1 の共通の 13 行）はブロックと混合の道でも残ります。混合の長さに $\ln(1/\hbar)$ の緩い依存が残る場合、冪の文（$\ln C_P / \ln \xi \to 2$）は影響を受けない見込みですが、定数が $\hbar$ に一様であることを要る行は影響を受けます（詳しくは 23-15 のブロックと混合の道の小節）。

帯との関係。ブロックと混合の道は、§03 の型の「平均の道具に移る」段の一段目の版です。そして §04 (i) のとおり、その要は「移り変わる長さを越える有限のブロック」があることでした。四次元の帯には、その有限のブロックがありません。ブロックと混合の道が一段目で成功しても、帯を渡る道具を与えるとは言えません。四次元に写した形（境界を止めた箱の判定＋強い混合、顔 $\delta(L_0)$）では、その「強い混合」こそが $U(1)$ で破れる場所です 読 （物理の見立て）。

07

言えないこと

(a) 帯を渡る言明 (1) は、どちらの半分も四次元では示していません。(2) は (1) の上の一行の代数です。

(b) 二つの壁の型の比較（§03・§04・表 1 の行をまたぐ読み）は見立てで、一段目の結果が四次元の何かを含意するとは言いません。持ち上がるのは文の形だけです（23-03 §06）。

(c) 共役点について主張するのは、(7) の凸性の闕が最初の共役点で決まることだけです。混合の長さとの数値の一致の理由は分かっていません。

(d) ブロックと混合の道の行は、隠れた凸性の命題を除いて「仮」と「読」です。ブロックと混合の道が一段目を閉じるとは言いません。

(e) 一次元の鎖に相転移が無いことは、原典を取得していない書誌の上の文です。

(f) 四次元に「有限のブロックが無い」ことは、ブロックの道が四次元で不可能だという主張ではありません。一段目の道具の形がそのまま写らない、という意味です。

08

五分類の表と依存グラフ

表 2　この章の行（この章の行に Lean の欄はありません）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲
1	(1) $\Longrightarrow$ (2)：$m_{\mathrm{lat}}/a \geq \sqrt{\kappa/C}$	初	§01（23-01 の (16) と同じ代数）	$\beta \geq \beta_0$
2	片側の橋 $C_P \geq \kappa \xi^2$	初	23-01 §06	連続の時間・有限の空間格子・基底状態の仮定・定常な経路の測度の仮定・計量の比べの仮定
3	片側の橋の四次元の格子への持ち上げ	仮	24-07 表 2	—
4	上界の仮定：$a^2 C_P \leq C$、C は β に依らない	仮	23-01 §05	四次元・$\beta \geq \beta_0$
5	(1) を同じ定数で示すことは帯を渡ることを含む	読	§01（物理の見立て）	—
6	頂上の Jacobi の方程式 (4) と $\cos\theta = 1 - \varepsilon^2/4$	初	§02	$V = (z^2-1)^2/8$
7	最初の共役点 $\pi/\theta - 1 = 7.839\ldots$	初	§02（二つの独立な数え方）	$\varepsilon = \frac{1}{2}$
8	(7)：$\kappa_{C7}(k) > 0 \iff k+1 < \pi/\theta \iff k \leq 7$	初	§02・23-11 短い芯の段	$\varepsilon = \frac{1}{2}$・頂上の配位
9	移り変わる長さは $\hbar$ に依らず、$\hbar \to 0$ で格子の単位で有限	初	§02（(4)〜(7) に $\hbar$ が無い）	ε を止めた $\hbar \to 0$
10	混合の長さ ≈ 9 と π/θ の数値の近さ（仕組みは角に着く時間）	読	§02	$\hbar = 10^{-2}$〜10^{-5}・ε の四点
11	最悪の配位の道具（Dobrushin・ブロック・Otto–Reznikoff）は $\frac{15}{4}$ 対 4 に戻る	初	§03	$\varepsilon = \frac{1}{2}$
12	最悪の枠の評価は L について超指数的に悪い	初	25-04	N・格子間隔を止めて
13	隠れた凸性の命題（極小の一意性）	初	§03	端の値 $a, b \in [-c, 0]$・箱 $[-c, 0]^t$
14	非凸性は ρ の座標で薄い層 $\rho \lesssim \sqrt{2\hbar/\varepsilon}$ に移る（読み）	仮	§03	—
15	$1/\Lambda$ は次元転移で生まれ、格子の単位で発散	典	4-07・24-07 §01	一ループの記帳
16	一次元の芯の鎖に相転移は無い	仮	§04（正の積分核。原典は要取得）	コンパクトな一サイトの空間
17	二つの壁は型が同じで中身が違う（表 1）	読	§03〜§05（物理の見立て）	—
18	ブロックと混合の道：ブロックの LSI＋強い混合 $\Longrightarrow$ 芯の Poincaré の一様性の仮定	仮	§06・23-15 の第三の枝	$\varepsilon = \frac{1}{2}$・芯 $[-x_c, 0]^k$
19	四次元には移り変わる長さを越える有限のブロックが無く、一段目の道具はそのまま写らない	読	§04・§06（物理の見立て）	—

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  初  (1) ⟹ m_lat/a ≥ √(κ/C)                連続の時間・有限の空間格子
 2  初  片側の橋の命題
 3  仮  橋の四次元への持ち上げ ⟸ 2                  四次元
 4  仮  上界の仮定（C が β に依らない）
 5  読  (1) を同じ定数で示すことは帯を渡る ⟸ 1・3・4
 6  初  頂上の Jacobi の方程式・cos θ = 1 − ε²/4
 7  初  最初の共役点 π/θ − 1 ≈ 7.84 ⟸ 6            ε = ½
 8  初  凸性の閾 k ≤ 7 ＝ 共役点 ⟸ 6・7
 9  初  移り変わる長さは ħ に依らず有限 ⟸ 6・7      ε を止めた ħ → 0
10  読  混合の長さ ≈ 9 と π/θ の数値の近さ
11  初  最悪の配位の道具は 15/4 対 4 に戻る ⟸ 8
12  初  最悪の枠は L について超指数的に悪い（25-04）
13  初  隠れた凸性の命題
14  仮  非凸性は ρ の薄い層へ ⟸ 13
15  典  1/Λ は次元転移・格子の単位で発散
16  仮  一次元の芯の鎖に相転移は無い
17  読  型は同じ・中身は違う ⟸ 9・11・12・15・16
18  仮  ブロックと混合の道 ⟹ 芯の Poincaré の一様性 ⟸ 13
19  読  四次元に有限のブロックは無い ⟸ 9・15・18
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。この章で「初」の節点は、一行の代数、頂上の線形の計算（Jacobi の方程式・最初の共役点・凸性の閾・古典の長さ・最悪の配位の道具）、隠れた凸性の命題で、帯を渡る言明（四次元での上界の仮定と、それを同じ定数で示すこと）は「仮」と「読」です。質量ギャップの節点はありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 物理単位の目標の水準の下の半分が、上界の仮定と片側の橋の同じ定数の組から一行で出ること	四次元での上界の仮定と橋。物理単位の目標の水準そのもの
初 一段目の凸性の閾（長さ 7）が頂上の Jacobi の方程式の最初の共役点 $\pi/\theta - 1 \approx 7.84$ で決まり、$\hbar$ に依らないこと。最悪の配位の道具が $\frac{15}{4}$ 対 4 に戻ること。隠れた凸性の命題	芯の Poincaré の一様性の仮定そのもの。混合の長さが共役点と近い理由
読 二つの壁は型が同じで、移り変わる長さの起源（古典と量子）・稀さと典型・相転移の有無が違うこと（表 1）	一段目の結果の四次元への含意。帯を渡る道具
仮 ブロックと混合の道（ブロックの LSI＋強い混合）が芯の Poincaré の一様性の仮定を支える候補であること	ブロックと混合の道の各段の証明（隠れた凸性の命題を除く）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
目標の三つの水準・上界の仮定・片側の橋	本書	23-15 表 5・23-01 §05・23-01 §06
頂上の Hessian と $\frac{15}{4}$ 対 4・短い芯の凸性の補題	本書	23-09 §06・23-11 §05
Jacobi の方程式・共役点 (4)〜(7)	初	この本の検討（第 23 部の壁への提案の記録の、頂上の線形化の節）。$\theta = \arccos(15/16)$ と π/θ は数値で、漸化式の符号の変わり目と三重対角の行列の対角化を独立な確かめとしてこの章で確かめた（数秒の計算）
最悪の配位の三つの道具の値	初	同じ記録（最悪の場合の解析の節）。$2(M_7^{-1})_{71}$ はこの章で有理数で計算し直した（記録の丸めた値 1.19 に対して 1.184）
隠れた凸性の命題	初	同じ記録（隠れた凸性の命題の証明の節）。証明はこの章で一行ずつ確かめた。Benguria–Brezis–Lieb・Brezis–Oswald の型の議論（原典は照合していない）
転送作用素の相関長・混合の長さ・最適な道・$\lambda_*(12)$	読	同じ記録（数値の節）と、一様な LSI への道の整理版
ブロックと混合の道の標準の定理	仮（典の候補）	B. Zegarlinski、F. Martinelli–E. Olivieri の一次元の鎖の LSI、B. Helffer–F. Nier・D. Le Peutrec の Witten の Morse 理論、G. Menz–A. Schlichting の分解（どれも原典の照合未了）
次元転移・無次元の結合・難しさの三つの源	典	4-07・24-07 の出典表
四次元の側の各欄	本書	25-04・26-04・26-05・26-06

この章で使った語 — 移り変わりの帯・拡散型緩和時間の仮定（上界の仮定）・片側の橋・Jacobi の方程式・共役点・隠れた凸性・ブロックの LSI・強い混合・ブロックと混合の道・基準「U(1) の転移と区別する」。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：26-08 試して止まった道の地図 — 試して止まった道と、止まった理由の一覧。四次元で効いていることの二点は 24-07 四次元だからこそ。

試して止まった道の地図

この章は未解決の問いの地図です。§03 は既存の知見、§04 は本書の検討です。

この章で分かること — 移り変わりの帯を渡ろうとして試され、止まった道を一つの台帳にまとめます。台帳は三つの層からなります。三十の道（§02）、帯の章の検討で捨てたか範囲を限った道（§05）、そして台帳の道の言い換えにすぎないと分かった三つの着想（§06）です。各行に「止まった理由」と出所を付け、理由の札を行ごとに置きます。文献に拠る行は、原典で照合した文献だけに〔典〕を付け、照合していない文献は「照合未了」と書きます。とくに三つの道を詳しく見ます。局所の容器の平均が四次元で $R/\ln R$ に留まること（§03）、Migdal–Kadanoff の補間による Tomboulis（2007）の主張と、それが U(1) を区別しないという批判（§03）、捩れた T^2 との比較原理が数値で破れること（§04）です。最後に、新しい候補が最初に通るべき選別の基準を置きます（§07）。

前提となる章 — 26-00（帯の内訳）・26-01（帯の正しい形）・26-02（横広げの不等式）・25-03（容器）・25-04（板の閉じ込め）・26-06（繰り込みの比較）・23-10 §04（壊れ方の七つの型）。

先に言うこと — この頁は記録の地図で、新しい定理を置きません。「止まった」は「この入力の組では帯を渡れないと分かった」という意味で、その道の部品が他の場所で役に立たないという意味ではありません（例えば板の閉じ込めは、格子間隔と T^2 を止めれば全ての β で成り立つ定理です）。止まった理由の多くは物理の見立ての水準の判断で、証明つきの否定は少数です。札はその区別のために行ごとに付けます。

この章の順序

1. 台帳の読み方 — 「止まった」の意味と札の付け方
2. 三十の道 — 止まった理由と出所（表 1）
3. 文献で止まっていた二本 — 局所の容器の平均と、Migdal–Kadanoff の補間
4. 捩れた T^2 との比較原理 — 一ループで真、数値で偽
5. 帯の章で捨てた道・範囲を限った道（表 2）

6. 言い換えにすぎなかった三つ（表 3）と、型の問い（表 4）
7. 選別の基準と文献の較正（表 6）
8. 五分類の表と依存グラフ

01

台帳の読み方 — 「止まった」の意味と札の付け方

この本の検討は、帯を渡る道具を探して、多くの道を試しました。どの道も、最後には同じ一点で止まっています。**中程度の結合で、尺度を大きくすると乱れが強くなることを示す、非摂動的な原理が無い**、という一点です。止まり方を並べると、三つの教訓が繰り返し出てきます。

- 摂動の領域（弱結合か強結合）でしか働かない道具は、帯を渡れない。
- 局所的な操作は、捩れの区画のような位相的な量を変えられない。
- 単調性の源（相関不等式・鏡映正値性）は、閉じ込めの機構（乱れ）と逆向きに働く。

台帳の目的は、同じ道を繰り返さないことです。新しい候補を考えたら、まずこの台帳のどれかの言い換えになっていないかを確かめます（§ 06 はその実例です）。

各行の列は次のとおりです。

- **道**：試した着想の一行の要約。
- **止まった理由**：その道がどこで帯を渡れなくなったか。
- **札**：止まった理由の札です。初 は理由に紙の証明がある（この本の章に置いた）、典 は原典で照合した文献に拠る、機 は計算機援用、読 は数値の読み、「読 （物理）」は物理の見立ての水準の判断です。理由が見立てでも、その道を再検討しないという判断は変わりません。ただし見立ての理由で止めた道は、新しい入力があれば開き直せます。
- **出所**：この本の検討の記録か、文献か。文献は、原典で照合したものに〔典〕、照合していないものに「照合未了」と書きます。

語の注意。この部では 26-00 § 02 の約束に従って「帯」と書き、第 23・24 部の「窓」（サイトの窓・ħ の窓・時刻の窓）とは区別します。

02

三十の道 — 止まった理由と出所

表 1 の番号 1〜28 は、この本の検討が帯を渡る原理を探して試した道で、29・30 は、その検討を別の手で確かめ直した際に、文献の中で既に止まっていたと分かった道です。札は「止まった理由」の札です。

表 1　三十の道（札は止まった理由の札。「本書の検討」はこの本の検討の記録）

#	道	止まった理由	札	出所
1	鏡映正値性・チェス盤の評価	不等式の向きが逆で、流束の自由エネルギーの片側（下界）しか出ない	読（物理）	本書の検討。チェス盤そのものは 26-05
2	箱の大きさ L についての連続な単調性（Feynman–Hellmann の微分）	差の符号を決める相関不等式が $SU(2)$ に無い	読（物理）	本書の検討
3	有限個の L を区間演算で確かめる	四次元では計算の規模が届かない。階層模型では区間演算の証明書が作れた（551 区画、全区画の再実行で合格。階層模型だけの結果）	読（物理：規模の判断）・機（階層模型だけ）	本書の検討
4	$\mathbb{Z}_2$ への射影と GKS（$SO(3) \times \mathbb{Z}_2$ の分割）	四次元のデータで分割の前提が棄却された	読	本書の検討
5	赤外の上界（Fröhlich–Simon–Spencer）	向きが逆。質量の無い相を示す側の不等式	読（物理）	Fröhlich–Simon–Spencer（照合未了）
6	小さな T^2 の結果から L について連続に延ばす背理法	固定点を排除する量が無く、帯そのものに戻る	読（物理）	本書の検討
7	Kramers–Wannier の双対	帯を一変数の不等式（磁気流束の自由エネルギーが尺度 $2L$ で L より小さい）に言い換えるだけ	読（物理）	本書の検討（双対そのものは照合未了）
8	局所的なエントロピー・有限エネルギーの議論	位相的な保存：$\mathbb{R}^4$ の局所的な閉曲面は平面と偶数回交わるので、局所の操作では捩れの区画が変わらない	読（物理）	本書の検討
9	板の閉じ込め	格子間隔と T^2 を止めれば全ての β で面積則。N に一様な評価が帯そのもので、張力は連続極限で 0 へ行く	初（N を止めた定理）	25-04
10	中心渦の $\mathbb{Z}_2$ 有効模型の GKS	フラストレーションを消すと、閉じ込めの機構も消える	読（物理）	本書の検討
11	Nishimori の構造	**撤回**（焼きなましと焼き入れの取り違え。数値で否定された）	—	本書の検討

#	道	止まった理由	札	出所
12	データ処理不等式	区画に依らない通信路が作れない。区画を見分ける検出器にはなるが、乱れを生む駆動力にならない	読（物理）	本書の検討
13	太い渦の群平均	小さな T^2 では働くが、$\mathbb{R}^4$ では渦の面の張力の問題に戻る	読（物理）	本書の検討
14	最悪の反転コストの繰り込み	単調非増加にはなるが、減少することが保証されない	読（物理）	本書の検討
15	渦の面のパーコレーション	確率的な支配に最悪の場合の下界が要り、強結合に帰着する	読（物理）	本書の検討
16	ギャップの安定性・Lieb–Robinson の評価	摂動の半径の内側だけで働き、強結合に帰着する	読（物理）	本書の検討
17	面の結合についての凸性	細い面のコストしか見えない	読（物理）	本書の検討
18	面の形の適応的な平均	1 の分割の書き直しで、同語反復	読（物理）	本書の検討
19	大きな N_c の体積独立性	帯が、実効的な体積 $N_c L$ に姿を変えて戻る	読（物理）	本書の検討
20	指標展開の係数の正値性	鏡映正値性から自動的に従い、新しい情報が無い	読（物理）	本書の検討
21	階層模型の単調性の抽出（比の順序・TP_2 など）	一般には偽	読	本書の検討
22	一点の Bakry–Émery の曲率	一点のギャップは常に正で、壁はプラケットの間の影響にある	読（物理）	本書の検討
23	強劣加法性による単調量・a 定理の格子版	格子だけの版は相を区別しない。区別する版は回転不変性を要し、それは帯を渡った後でしか手に入らない（循環）	読（物理）	本書の検討（Casini–Huerta 型の議論は照合未了）
24	ゲージ軌道の空間の曲率・膜の気体の繰り込み・鋭い相転移の道具	曲率の補正は $O(1)$ で、作用の Hessian の $O(\beta)$ の負を打ち消せず強結合に帰着／四次元の膜には遮蔽の機構が無い／$SU(2)$ の面の表示は重みの符号が変わり、FKG が無い	読（物理）	本書の検討
25	スピンと指数定理（柔らかいモードの数え上げ）	一ループでは漸近自由の言い換えで、非摂動の部分は帯に戻る	読（物理）	本書の検討

#	道	止まった理由	札	出所
26	曲率の繰り込み（Bakry–Émery の曲率と O'Neill の公式、商の曲率次元条件）	負の曲率は粗視化で保たれない。一次元の鎖で有効な一リンクの重みを畳み込みで追うと、曲率の最小値は一段目で悪化する（$SU(2)$：$-6 \to -14$、$U(1)$：$-4 \to -8$）	読	本書の検討
27	捩れた T^2 との比較原理（全てのループで）	一ループでは真、非摂動では数値で偽（§04）	読	本書の検討（§04）
28	多尺度の Bakry–Émery の判定（Polchinski 方程式）	凸でない領域は通れるが、繰り込まれたポテンシャルの尺度ごとの制御が帯そのもの。コンパクト群の版も整っていない	読（物理）	Bauerschmidt–Bodineau（照合未了）
29	局所の渦の容器の平均	恒等式は既知で、容器の長さを止めると四次元では $R/\ln R$ まで（§03）	典	Mack–Petkova（1980）・Kovács–Tomboulis hep-lat/0108017。25-03 §06
30	Migdal–Kadanoff の補間による渦の自由エネルギーの単調性	鍵の不等式（Ito–Seiler の (3.5)。補間母数の共通性の不等式）が強結合の外で示されていない。議論が $U(1)$ を区別しない（§03）	典	Tomboulis arXiv:0707.2179・Ito–Seiler arXiv:0711.4930・Kanazawa arXiv:0805.2742

表 1 の N_c は色の数で、T_N^2 の大きさ N とは別の量です。番号 11 は、ここに一行だけ残します。中身は撤回されたので、この本の他の場所では使いません。

表 1 の大半の札が「読（物理）」であることに注意してください。止まった理由の多くは、反例や否定の定理ではなく、「この道はこの点で帯そのものに戻る」という見立てです。証明つきの行は、番号 9（板の閉じ込めは N を止めた定理で、N に一様でないこと）と、表 2 の止まった道「等長的な比較」・止まった道「構造的な入力だけ」・止まった道「反転の証明書」・止まった道「枠の上限の評価」です（範囲は各行の札の括弧の中）。表 1 の 29・30 は、文献で止まっていた「典」の行です。番号 3 の「機」は階層模型の上の結果で、四次元の格子については何も言いません（階層模型では Migdal–Kadanoff の間引きが正確になる点で、四次元とは別物です）。

03

文献で止まっていた二本 — 局所の容器の平均と、Migdal–Kadanoff の補間

この節は既存の知見（文献の中で止まっていた二本の道）の整理です。導入は 17-02 §05 にあります。

表 1 の 29・30 は、この本の検討が自分で試した後に、文献の中で同じ道が既に止まっていたと分かったものです。どちらも原典の本文で照合しました 典。

局所の渦の容器の平均 — 四次元では R/ln R まで

枠（容器の外側）を止めると容器の中の区画の符号が独立になり、Wilson ループが容器ごとの偏りの積で押さえられる、という恒等式は、25-03 §03 の容器の恒等式でした。これは Mack–Petkova（1980）の「渦の容器」の恒等式で、Kovács–Tomboulis（hep-lat/0108017）の式 (18)〜(22) に書かれています。違いは、区画を和のアンサンブルで書いたことと、枠について最大値でなく平均を取ったことだけで、この本は新しさを主張しません。

同じ論文の §3 が、この道の四次元での限界を述べています。辺 $T \times R$（$T > R$）の長方形のループの内側の点を通る容器の長さは R^2 の程度で、容器の費用を一定に保つには、断面の幅を $\sqrt{\ln R}$ の程度に太らせなければなりません。ループの中に入る独立な容器は $RT/\ln R$ の程度しかなく、出るのは

$$V(R) \;\geq\; \text{const} \cdot \frac{R}{\ln R} \qquad \text{(Kovács–Tomboulis の式 (25))} \tag{1}$$

までです 典。線形のポテンシャル（面積則）には、ループの大きさの太い容器が一つ要ります。これは Tomboulis–Yaffe の大域の形（26-01 §04）そのもので、帯を渡ることと同じ条件です。

止まった理由を一行で言えば、**長さの決まった容器を独立に並べる道は、$\mathbb{R}^4$ では面積則に届かない**、です。小さな T^2 の板では、容器の長さ（渦の面の面積）が T^2 の面積で止まるので、この障害は現れません（25-03 §06）。障害が戻るのは T^2 を広げるとき、つまり帯です。

Migdal–Kadanoff の補間による渦の自由エネルギーの単調性

Tomboulis（arXiv:0707.2179）は、四次元 $SU(2)$ の全ての結合での閉じ込めを主張しました。議論の流れは次のとおりです 典。

1. Migdal–Kadanoff 型の間引き（格子間隔 $a \to ba$）で、分配関数の上界と下界を作る（原典の (3.4)・(3.7)）。
2. その係数をパラメータ t で補間し、ある値 t^* で間引きが等式になる表示を得る（(3.12)・(3.16)・(3.35)）。捩れた区画でも同じ表示を作る（(4.19)・(4.26)）。
3. **鍵の段**：捩れの無い区画と捩れた区画で、同じ t^* が取れること（(5.14)）。これを不等式 $A \geq A^{+}$（(5.15)）から導くとし、それは強結合で示せば足りる、と述べる。
4. 結論として、真の渦の自由エネルギーは間引いた系の渦の自由エネルギー以下（(5.22)）。間引いた系は強結合に流れるので、強結合展開で $F \sim L\, e^{-\hat{\sigma} A}$、Tomboulis–Yaffe の不等式で面積則。

これに対して二つの批判があります 典。

- **Ito–Seiler（arXiv:0711.4930）**：t^* が二つの区画で共通に取れることは、彼らの (3.5) の不等式 $A(\alpha) > A^+(\alpha)$ に帰着し、それは強結合の外では示されていない。さらに、Migdal–Kadanoff の流れは**群がアーベルか非可換かに依らず**強結合に向かうので、議論がそのまま通るなら $U(1)$ も全ての結合で閉じ込めることになる。四次元の $U(1)$ には閉じ込めない相があるので、どこかで群を区別する入力が要る。
- **Kanazawa（arXiv:0805.2742 付録 A）**：補間のパラメータについての連続性の議論は成り立たない（反例を挙げる）。$U(1)$ で議論のどの段が破れるかが示されていない。任意のコンパクト連結群で Migdal–Kadanoff の流れは強結合へ行くので、繰り込みの側は $U(1)$ と $SU(2)$ を区別できず、**非可換の中身は全て t^* の存在に入る**。

原典の脚注 10 自身が「アーベルの系では (5.15) 型の不等式は Griffiths の不等式から出る」と書いています。残りの段と合わせると $U(1)$ の閉じ込めを示すことになり、議論が群を区別していない兆候です。

止まった理由を一行で言えば、**群を区別しない繰り込みは、帯を閉じる議論にならない**、です。これは 26-06 §08 の基準「U(1) の転移と区別する」（$U(1)$ が帯の中 $\beta \approx 1.01$ に持つ転移と区別して、$SU(2)$ に転移が無いことを示す）の、文献の中の実例です。この本の横広げの不等式（26-02 §02）は、比較を「一つの理論・一つの結合の中で幾何だけを変える」形に限ったもので、$U(1)$ では破れる形をしています（26-01 §03・26-09 §02）。ただし示す難しさは同じ型で、帯を通して要ることも変わりません。

関連して、Kanazawa（arXiv:0805.2742）の定理 1 は、大きさの違う格子の捩れた分配関数の比を、結合をずらした比に結ぶ恒等式ですが、$U(1)$ でも成り立つので閉じ込めについては何も言いません 典。Ito–Seiler の別の論文（arXiv:0803.3019）は照合未了です。

04

捩れた T² との比較原理 — ループで真、数値で偽

表 1 の 27 です。**比較原理**とは、全ての平面のループ C について

$$\langle W(C)\rangle_{\mathbb{Z}^4} \;\le\; \langle W(C)\rangle_{\mathbb{Z}^2\times T^2_N,\, n_{12}=1} \tag{2}$$

が成り立つ、という主張です（右辺は捩れのある板、25-04 §02）。成り立てば、板の閉じ込め（N を止めて全ての β で面積則）と合わせて、$\mathbb{Z}^4$ の全ての β での面積則が出ます。だから試す価値がありました。

ループでは真 読。背景の周りの揺らぎの熱核で比べると、各時刻で不等式が成り立ちます。像の和の色の重みは $c(n) = 4\cdot\mathbf{1}[n\in(2\mathbb{Z})^2] - 1$ で、数値で機械精度まで確かめました（一ル

ープの水準の数値の確認で、紙の証明は置いていません）。

非摂動では偽 読。モンテカルロで、格子 $16 \times 16 \times N_T \times N_T$（$\mathbb{R}^2$ の方向を周期 16、T^2 を N_T ）の捩れのある板と、16^4 を比べました（$SU(2)$、Wilson 作用）。

比較原理の試験（プラケットの期待値。括弧は最後の桁の統計誤差）

β	N_T	**捩れのある板**	16^4	**読み**
2.1	2	0.52952(67)	0.53494(40)	板が低い：誤差を両側から取って 7σ、独立な再実行で 5.5σ。$W(2,2)$ も低い
1.8	2	0.43966(56)	0.44129(18)	板が低い（約 2.7σ）
2.4	2	0.6275(10)	0.6300(2)	板が低い（約 2.4σ）
2.6	6・8	捩れのある板が 16^4 を下に行き過ぎる兆候（プラケットで 2.5σ・1.9σ）		未確定

(2) で C を一つのプラケットに取ると、右辺は板のプラケット、左辺は 16^4 のプラケットです。$\beta = 2.1$・$N_T = 2$ で板のほうが 7σ 低いので、(2) は小さなループで破れます。捩れのフラストレーション（小さな T^2 に捩れを押し込んだ費用）がプラケットを下げると読めます 読（物理）。弱結合の側（$\beta = 2.6$）の行き過ぎは統計が足りず、確定していません。

もう一つ、$N = 1$ では漸近自由の尺度の振る舞いと矛盾します 読（物理）。板の定理から $\sigma_{\mathrm{tw}}(1) \geq -\ln\tanh\beta \approx 2e^{-2\beta}$ ですが、漸近自由の尺度の振る舞いを認めれば $\sigma_\infty a^2 \propto e^{-(6\pi^2/11)\beta} = e^{-5.38\beta}$ で、大きな β で (2) が逆を向きます。

止まった理由を一行で言えば、**一ループで成り立つ順序が、非摂動で小さなループから壊れる**、です。ここから二つの基準が出ます（§07）：基準「一ループの言い換えでない」（非摂動の評価であること）と、基準「小さなループで破れない」（短い尺度で破れないか、大きなループだけを主張する形であること）。大きなループだけの漸近の形（$\sigma_{\mathrm{tw}}(L) \leq \sigma_\infty$）は否定されていませんが、それを示す機構が無く、表 1 の 2（差の符号を決める不等式が $SU(2)$ に無い）と同じ壁に当たります。

正の観察も一つ残ります 読（物理）。捩れのある T^2 は、弱結合で小さな N_T から無限体積に近く、捩れの無い場合と逆の側から近づきます。断熱的な連続性の描像と合いますが、近づき方は単調でない兆候があり、単調性に基づく道具には不利な事実です。

05

帯の章で捨てた道・範囲を限った道

第 25・26 部の検討の中で、表 1 とは別に捨てた道と、使える範囲を限った道があります。表 2 にまとめます。前半の五つ（1〜5）が「捨てた道」、後半が「範囲を限った道」です。

表 2　帯の章で捨てた道・範囲を限った道（札は止まった理由の札）

#	道	止まった理由	札	章
1	**等長的な比較**：等長的な比較（恒等写像・群の平行移動・ゲージ変換・間引き）	揺らぎの形を変えない比較では、一ループのスピンの項 $+4$ の寄与がちょうど 0 になり、出るのは $\beta' \geq \beta + 0.023$（反漸近自由の向き）だけ	初（一ループの水準）	25-07・26-06 §03
2	**構造的な入力だけ**：構造的な入力だけ（鏡映正値性・双対性・転送行列・中心の恒等式）	$\mathbb{Z}_2$ と $U(1)$ でもそのまま成り立つので、群を区別できない（否定の補題）	初（「この入力の組だけでは」の形）	26-04
3	**決定論的な挟み撃ち**：決定論的な写像による挟み撃ちで面積則を出す	輸送の恒等式（Gibbs の変分原理）の余り（相対エントロピー）が、渦の面の面積とともに増えるので、$e^{-\sigma A}$ の形は出ない。定性的な目標 $\Delta F(L,L) \to 0$ には使える	読（物理）	26-10 §02
4	**ガラスの挟み撃ち**：帯の上半分での $\mathbb{Z}_2$ のガラスの挟み撃ち	$\beta \gtrsim 2$ では実効的な $\mathbb{Z}_2$ 結合の平均が 1.1〜1.9 で、純 $\mathbb{Z}_2$ の転移点 0.44 を大きく超え、ガラスは秩序相の側にある。挟みが緩い	読	26-09 §08・26-10 §03
5	**反転の証明書**：反転の証明書（容器の反転）・同時の反転を帯の試験に使う	一段の核の反転の確率 a は 1/2 程度で頭打ちになり、$\theta \leq 1-a$ から出るのは $\sigma \geq c/L^2$（$U(1)$ も満たす弱い形）だけ	初（$\theta \leq 1-a$）・読（a の頭打ち）	25-06・26-01 §02
6	**枠の上限の評価**：枠の上限 $\sup_\Phi$ を使う評価	$\tanh(\beta L^2)^{\ell^2}$ の形で、L について超指数的に悪くなる。一様性には枠についての平均の形しか使えない	初	25-04 §02
7	**Dobrushin 型の判定**：通常の Dobrushin・Dobrushin–Shlosman・van den Berg–Maes の判定を枠つきで使う	連続な場が境界に追随し、影響係数がほぼ 1 になる	読（物理）	（文献は照合未了）
8	**β 単調性を易しい部品に**：β 単調性を易しい部品として、帯＝β 単調性＋繰り込みの比較とする	β 単調性は、格子単位の弦の張力の β についての単調性と同じ重さの問題だった（訂正）	読（物理）	26-06 §02
9	**一方向の横広げ**：横広げを一方向だけに限る	高温での空間的な弦の張力の振る舞い（Bali らの格子の測定、照合未了）から見て怪しく、正方形の形だけに限る	読（物理）	26-02 §02
10	**Wilson flow の輸送**：Wilson flow を渦の挿入の輸送に使う	数値で否定的。前向きの輸送（Moser 型）に直す形は開いている	読	25-06
11	**共形な枠**：共形な枠 $H^2 \times S^2$（尺度を位置に変える）	検討の結果否定的：双曲的な入れ子で容器の数が増えず、核心は同じ場所に残る	読（物理）	26-10 §04
12	**強結合の展開だけ**：強結合の展開だけで帯を覆う	平らな面の展開は粗面化（$\beta_R \approx 1.9$、照合未了）で止まる	読（物理）	26-06 §04

```
06
```

言い換えにすぎなかった三つと、型の問い

新しい候補を考えるときは、まず台帳のどれかの言い換えでないかを確かめます。表 3 は、帯の候補を検討した際に、候補にせず台帳の言い換えと判定した三つです。

表 3　言い換えにすぎなかった三つの着想

#	着想	何の言い換えだったか	札
1	**ホロノミーの Haar への接近**：大きなループのホロノミーの法則が Haar 測度に近づくこと（Weyl の測度で境界のホロノミーが中心化する）	中心について奇な部分（半整数の表現）の減衰は Wilson の面積則そのもので、柱の分解と Tomboulis–Yaffe の不等式がつくる輪の言い換え。偶の部分（随伴の表現）は周長則で、群の区別に効かない	読（物理）
2	**中心と θ 項のアノマリー**：中心と θ 項の混合アノマリーの整合	運動学的な制約（§07 の基準「力学的である」）。$\theta = 0$ では何も強制しない	読（物理）
3	**階層模型での成功**：階層模型（Migdal–Kadanoff の間引きが正確になる模型）での成功を帯の証拠にする	階層模型では $U(N)$ も閉じ込めるので、基準「非可換性を本質的に使う」の検査にならない	読（物理）

第 23 部の迂回の検討（23-10 §04）は、0+1 次元の二重井戸の上の失敗から七つの型を取り出しました。個々の迂回策は四次元の候補と直接には重なりませんが、型の問いは四次元の候補にもそのまま当てられます。表 4 にその問いを並べます。

表 4　壊れ方の七つの型と、新しい候補に当てる問い

型	一行	候補に当てる問い
1	源は一つ（頂上の一サイトの曲率）	最悪の配位の面で、何を払っているか
2	比で入る構造の因子には天井がある	欠陥の集合を変えているか、比の因子を動かしているだけか
3	同じ場所を二度払う	払う場所を同じ図に描いたか
4	通貨の取り違え（出口の速さと稀さ）	稀さを払う段がエントロピーを通っているか
5	難しさの住所	難しさは、どの量に掛かっているか
6	揺れの向きと柔らかい向きのずれ	ベクトルをスカラーに潰していないか
7	移しかえ	和が不変量になっていないか（軽くした列の分だけ別の列が重くなっていないか）

第 24 部の規則の候補（24-08 §02 の表 3）も、除外ではなく「どの根に効かないか」の記録として、ここで使えます。紫外と赤外をつなぐ根（24-07 の尺度をつなぐ展開の欠如）の列に「効く」と書かれた候補は一つもなく、粗視化の一段で閉じる稀さの類（尺度の公理化の規則＋稀さの類の規則）で現れる「結合の窓」（第 24 部の語、24-06）は、その根の言い直しでし

た。帯の候補が尺度をつなぐ展開の欠如に効くと言うなら、どの候補とも違う入力を名指す必要があります。

07

選別の基準と文献の較正

止まった理由を裏返すと、帯を渡る道具が満たすべき条件の候補が出ます。表 6 は、その条件を、元になった止まり方と並べたものです。どれも必要条件の候補で、満たせば帯を渡れるという十分条件ではありません 読（物理）。特に重いのは「非可換性を本質的に使う」「一ループの言い換えでない」「最小の帯を渡れる」「U(1) の転移と区別する」の四つです。

表 6　選別の基準（元になった止まり方つき）

基準	中身	元になった止まり方
格子だけで立つ	格子だけで成り立つ（回転不変性に頼らない）	表 1 の 23
相を区別する	相を区別する（質量の無い相で破れるか、極限の値が違う）	表 1 の 23
正値性に頼らない	正値性・FKG に頼らない	表 1 の 24（$SU(2)$ の面の表示は重みの符号が変わる）
非可換性を本質的に使う	**非可換性を本質的に使う**。四次元の $U(1)$・二次元の $O(2)$ のように質量の無い相を持つ模型で同じ結論が出る原理は誤り	表 1 の 30・表 2 の「構造的な入力だけ」・表 3 の「階層模型での成功」
漸近自由と両立する	漸近自由と両立する	§04 の $N=1$ の矛盾
位相的な区画を扱える	位相的な区画（捩れ）を扱える	表 1 の 8
一ループの言い換えでない	**一ループの言い換えでない、非摂動の評価**であること	表 1 の 25・27
力学的である	力学的である（作用と結合の流れを使う）。運動学的な制約（双対性・鏡映正値性・アノマリー・分配関数の正値性）だけでは、閉じ込めない相も矛盾なく存在しうるので届かない	表 2 の「構造的な入力だけ」・表 3 の「中心と θ 項のアノマリー」
凸でない領域を通れる	凸でない（負の曲率の）領域を通れる。凸性・対数凹性・曲率の下界だけに基づく道具は帯で使えない	表 1 の 26
最小の帯を渡れる	**最小の帯を渡れる**：二次元の漸近自由な模型（大きな N の $O(N)$ 模型・Gross–Neveu 模型）で、紫外の切断を外したまま。これを渡れない単調量は四次元も渡れない	文献の較正（下）
小さなループで破れない	小さなループ（短い尺度）で破れない。あるいは大きなループだけを主張する形である	§04

基準	中身	元になった止まり方
線形化が非等長的	比較の写像の線形化が、揺らぎについて等長的でない	表 2 の「等長的な比較」
U(1) の転移と区別する	**$U(1)$ が帯の中（$\beta \approx 1.01$）に持つ転移と区別して、$SU(2)$ に転移が無いことを示す**	表 1 の 30・26-06 §08

基準「最小の帯を渡れる」の背景には、二次元の $O(3)$ 模型でさえ格子の水準での全ての温度の指数減衰（Polyakov の予想）が未解決だという事情があります（Peled–Spinka の講義録 arXiv:1708.00058 の記述、照合未了）。四次元で一様なギャップを示す道具は、少なくともそれを示す力を持たなければなりません。

文献の較正。帯の両側で、いまの最前線はどこにあるか。照合の済んだものだけに〔典〕を付けます。

- 強結合の側：Cao–Nissim–Sheffield（arXiv:2505.16585）は、$U(N)$ の格子ヤン–ミルズで、次元 d だけに依る $\beta_0(d)$ 以下の β では全ての N で面積則を示しました 典。同じ著者たちの arXiv:2509.04688 は、Durhuus–Fröhlich（1980）の質量ギャップの条件を確率力学の方法で確かめ、't Hooft の領域（$\beta \lesssim c_d N$）で面積則を得ています 典。どちらも強結合の側の結果で、帯の中の β には届きません。本書の Lean にも、強結合の窓の中だけの面積則と、面積あたりの率が横の大きさに依らない渦の床が在ります（20-06。格子間隔は固定、前の因子は残る）。これも帯には届きません。
- 帯の普遍性：Gross–Neveu 模型のどの版についても、紫外の切断を外した極限でのカイラル対称性の破れの証明は無いと明記した論文があります（Fabbri–Goller arXiv:2606.13075、照合未了）。大きな N の二次元模型の赤外の解析（Kopper–Magnen–Rivasseau 1995、Kopper 1999）は紫外の切断つきです（照合未了）。
- 計算機援用の繰り込み：二次元のテンソル繰り込みで、高温の固定点の近くの流れを計算機援用で示した結果（Ebel–Kennedy–Rychkov arXiv:2506.03247、照合未了）が、いまの最前線の一つと見られます。四次元 $SU(2)$ の帯からは遠い位置です。

まとめると、**漸近自由な理論で、紫外の切断を外した極限での質量の生成の証明は、調べた範囲で見当たりません**。四次元のヤン–ミルズの連続極限の存在は 2026-11-10 に公開された構成が示しました（委員会の評価の水準。第二巻）が、質量ギャップは示していません。帯は、この本の道に固有の穴ではなく、漸近自由な理論に共通の未解決の核心です。ただし、この一文は調べた範囲の言明で、照合未了の文献を含みます。

止まった理由を議論の型で並べ直した表は 16-11 の表 2 に在ります。

```
08
```

五分類の表と依存グラフ

表 1〜表 3 の各行の札は、表の中に置きました。この頁が自分で置く行は次の十四です。

表 7　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	枠を止めた容器の恒等式は Mack–Petkova の容器の恒等式	典	Kovács–Tomboulis 式 (18)〜(22)	和のアンサンブル・平均の形の違いだけ	—
2	長さを止めた独立な容器からは、四次元で $V(R) \gtrsim R/\ln R$ まで	典	Kovács–Tomboulis 式 (23)〜(25)	$\mathbb{R}^4$・独立な容器	—
3	Migdal–Kadanoff の補間の鍵の段は補間母数の共通性の不等式に帰着し、強結合の外で示されていない	典	Ito–Seiler arXiv:0711.4930	Tomboulis arXiv:0707.2179 の議論	—
4	Migdal–Kadanoff の流れは群に依らず強結合へ向かい、繰り込みの側は $U(1)$ と $SU(2)$ を区別しない	典	Kanazawa arXiv:0805.2742 付録 A	任意のコンパクト連結群	—
5	比較原理は一ループで成り立つ	読	§04（熱核の各時刻の不等式を数値で）	一ループの水準	—
6	比較原理は $\beta = 2.1$・$N_T = 2$ で破れる	読	§04 の表	$16^2 \times 2^2$ 対 16^4・7σ（独立な再実行 5.5σ）	—
7	$N = 1$ の比較原理は漸近自由の尺度の振る舞いと矛盾する	読（物理）	§04	漸近自由の尺度の振る舞いを認める限り	—
8	板の閉じ込めは N と格子間隔を止めて全ての β で成り立ち、N に一様でない	初	25-04	N 固定・格子間隔固定	25-04 の Lean 欄
9	等長的な比較からは $\beta' \geq \beta + 0.023$ の向きしか出ない	初	25-07	一ループの水準	—
10	構造的な入力だけでは群を区別できない	初	26-04	「この入力の組だけでは」	—
11	表 1・表 2・表 3 の残りの行の止まった理由	読（物理）	本書の検討	各行の条件	—
12	階層模型では有限個の区画の区間演算で証明書が作れる	機	表 1 の 3	階層模型だけ。四次元の格子には何も言わない	—
13	強結合の側の最前線は小さな β・全ての N の面積則	典	Cao–Nissim–Sheffield arXiv:2505.16585・2509.04688	$\beta \leq \beta_0(d)$・$\beta \lesssim c_d N$	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
14	選別の十三の基準（表 6）は帯を渡る道具の必要条件の候補	読（物理）	§07	必要条件の候補で、十分条件ではない	—

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  典  容器の恒等式は既知                                  Kovács–Tomboulis (18) の
 2  典  独立な容器は R/ln R まで ⟸ 1                          R⁴
 3  典  Tomboulis の鍵の段は (3.5) に帰着・未証明             強結合の外
 4  典  Migdal–Kadanoff の流れは群を区別しない                 任意のコンパクト連結群
 5  読  比較原理はループで成り立つ                          ループの水準
 6  読  比較原理は β = 2.1・N_T = 2 で破れる                  7σ・再実行 5.5σ
 7  読  N = 1 の比較原理は漸近自由と矛盾                     物理
 8  初  板の閉じ込め（N 固定）                               25-04
 9  初  等長的な比較は β' ≥ β + 0.023                          25-07・ループ
10  初  構造だけでは群を区別しない                          26-04
11  読  残りの行の止まった理由                               物理の見立て
12  機  階層模型の証明書                                      階層模型だけ
13  典  強結合の側の最前線                                    小さな β
14  読  選別の基準 ⟸ 2・4・5・6・7・9・10・11
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。選別の基準の行は結論の側の唯一の節点で、札は「読（物理）」です。この頁のどの行も、帯を渡ることも、帯を渡れないことも示しません。止まった道は「この入力の組では渡れない」と記録しただけで、その入力に何かを足した道は台帳の外にあります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
典 局所の容器の平均は四次元で $R/\ln R$ まで。Migdal–Kadanoff の補間の議論は鍵の段が未証明で、群を区別しない	Tomboulis（2007）の主張が偽であること（未証明の段が残る、までが言えること）
読 比較原理が小さなループで破れること（$\beta = 2.1$・$N_T = 2$、7σ、再実行 5.5σ）	大きなループだけの漸近の形が偽であること
初 板の閉じ込め・等長的な比較・構造だけの否定の補題（各章の条件の下で）	それらの道に何かを足した道が渡れないこと
読 （物理） 残りの道の止まった理由と、選別の基準	止まった理由の多くの証明。基準を満たす道具が帯を渡ること

出典と再現

もの	種別	出典・道具
渦の容器の恒等式と四次元の限界	典	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 125 (1980) 117。T. G. Kovács, E. T. Tomboulis, hep-lat/0108017（Vortex waistlines and long range fluctuations）式 (18)〜(25)。章 25-03
Migdal–Kadanoff の補間による主張	典	E. T. Tomboulis, arXiv:0707.2179（原典の (3.4)・(3.7)・(3.12)・(3.16)・(3.35)・(4.19)・(4.26)・(5.14)・(5.15)・(5.22)、脚注 10）
その批判	典	K. R. Ito, E. Seiler, arXiv:0711.4930（(3.5)）。T. Kanazawa, arXiv:0805.2742（付録 A・定理 1）。Ito–Seiler arXiv:0803.3019 は照合未了
Tomboulis–Yaffe の不等式	典	E. T. Tomboulis, L. G. Yaffe, Commun. Math. Phys. 100 (1985) 313。T. Kanazawa, arXiv:0808.3442。章 26-01
強結合の側の最前線	典	S. Cao, R. Nissim, S. Sheffield, arXiv:2505.16585・arXiv:2509.04688
文献の較正の残り	照合未了	Fabbri–Goller arXiv:2606.13075、Ebel–Kennedy–Rychkov arXiv:2506.03247、Bauerschmidt–Bodineau（Comm. Pure Appl. Math. 2021）、Kopper–Magnen–Rivasseau（1995）、Kopper（1999）、Peled–Spinka arXiv:1708.00058、Fröhlich–Simon–Spencer、Bali らの空間的な弦の張力の測定
比較原理の試験	読	この本の検討の数値（$SU(2)$・Wilson 作用・$16 \times 16 \times N_T \times N_T$ の捩れのある板と 16^4、プラケットと小さな Wilson ループ）。誤差は検算で取り直した値（7σ）と独立な再実行（5.5σ）
三十の道・帯の章で捨てた道・言い換え・選別の基準	本書の検討	この本の検討の記録（除外の台帳と、帯の候補の検討）

この章で使った語 — 除外の台帳・止まった理由・渦の容器・比較原理・Migdal–Kadanoff の間引き・等長的な比較・選別の基準・移り変わりの帯（帯）・β 単調性・繰り込みの比較。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：26-09 測った記録 — この部が引く数値を一頁に。

測った記録

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 5-07・5-01 にあります。

この章で分かること — 第 26 部が引く数値を、一頁にまとめます。小さな捩れた T^2 を広げたとき、$U(1)$ の渦の自由エネルギーは上がり、$SU(2)$ の渦は上がらないこと（§02）。板の弦の張力は T^2 とともに増えて飽和し、有意な行き過ぎは見えないこと（§03）。渦の自由エネルギーの β 依存（§04）。格子全体を 2 倍にしたとき、$SU(2)$ の渦は安くなり $U(1)$ の渦は高くなること（§05）。一段の階段関数の符号が、$U(1)$ では既知の相転移 $\beta_c \approx 1.01$ で反転し、$SU(2)$ では測った範囲で反転しないこと（§06）。外枠を止めた柱の偏りを小さく保つのに要る幅が、$SU(2)$ では N とともにほとんど伸びず、$U(1)$ では伸びること（§07）。$\mathbb{Z}_2$ のガラスの表示の診断（§08）。

前提となる章 — 25-01（捩れた T^2 と流束）・26-01（区画の偏り θ）・26-02（横広げの不等式）・26-06（繰り込みの比較）・5-07（モンテカルロ法）。

先に言うこと — この頁の数は全て数値の読みです 読。格子は 8^4 までと小さく、β の点も、種（乱数の初期値）や枠の数も少なく、誤差は統計誤差だけで、小さめに出ている可能性があります。どの行も、帯を渡ることの証拠ではなく、候補の向きを選ぶための傾向の記録です。各行に格子の大きさ・β・種や枠の数・誤差を書きます。記録に種の数が書かれていない行は「記載なし」とします。

この章の順序

1. 測り方と記号 — 渦の自由エネルギー・区画の偏り・人工物の注
2. T^2 を広げる — $U(1)$ は上がり、$SU(2)$ は上がらない（表 1〜表 3）
3. 板の弦の張力 — 増えて飽和する（表 4・表 5）
4. 渦の自由エネルギーの β 依存（表 6）
5. 格子全体を 2 倍にする（表 7〜表 10）
6. 階段関数の符号 — $U(1)$ の対照（表 11）
7. 柱の偏り — $\ell \times N$ の走査（表 12〜表 14）

8. $\mathbb{Z}_2$ のガラスの診断（表 15）
9. 小さな格子の人工物 — 読むときの注意の一覧
10. 五分類の表と依存グラフ

01

測り方と記号

格子。板の格子は $(\mathbb{Z}/N_T)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ で、最初の二方向（大きさ N_T）が小さな T^2、残りの二方向（大きさ M）が平面 $\mathbb{R}^2$ の代わりです。T^2 には 't Hooft の捩れ $n_{12}=1$ を入れます（25-01）。対称なトーラスは N^4 と書きます。作用は Wilson 作用 $-\frac{\beta}{2}\sum_p z_p \operatorname{tr} U_p$（$SU(2)$）と、その $U(1)$ 版です。

渦の自由エネルギー。平面の方向の流束 n_{34} を変えた区画との自由エネルギーの差を

$$\Delta F = F(n_{34}=1) - F(n_{34}=0) = -\ln \frac{Z(n_{34}=1)}{Z(n_{34}=0)} \tag{1}$$

と書き、区画の偏りを $\theta = \tanh(\Delta F/2)$ とします（26-01 §04 の F_v と同じ量）。ΔF が大きいほど渦は高く（入りにくく）、θ は 1 に近づきます。閉じ込めの領域では $\Delta F \to 0$ と期待されます。

測り方。ΔF は、レプリカ交換（結合を補間した複製の間で配位を交換し、区画をまたぐ標本を作る）と、Bennett の受理比の方法（BAR）で求めます。誤差は統計誤差です。種を替えた二本の差が、表示した誤差の 1〜2 倍になる点があり、誤差は小さめに出ている可能性があります。板の弦の張力は Creutz 比

$$\chi(R) = -\ln \frac{W(R,R)\,W(R-1,R-1)}{W(R,R-1)\,W(R-1,R)} \tag{2}$$

で読みます（$W(R,T)$ は $R\times T$ の Wilson ループ）。小さな R の Creutz 比は Coulomb の項を含んで張力を大きめに見積もるので、絶対値でなく傾向だけを読みます。

人工物の注（先に）。どの表にも共通の注意を、§09 に一覧にします。特に $N_T=2$ は格子の人工物の領域で、2^4 は一ループの振る舞いを見るには小さすぎ、柱の偏りの 0.1 程度の値は統計の底です。

02

T² を広げる — U(1) は上がり、SU(2) は上がらない

平面の方向の大きさ M を止めて、T^2 の大きさ N_T だけを広げます。横広げの不等式（26-02 §02）の符号を見る試験です。

表 1　$\Delta F(N_T)$、$M = 8$（$n_{12} = 1$、レプリカ交換＋Bennett の受理比の方法。種の数は記載なし） 読 — 数は 25-08 表 3 に載せた同じ測定です。数はここに写しません。

$U(1)$ では T^2 を広げると ΔF が急に増え、θ は $0 \to 0.39 \to 0.78 \to 0.99$ です。$SU(2)$ は $0 \to 0.63 \to 0.33 \to 1.51$ と、ずっと緩やかです（θ は $0 \to 0.31 \to 0.16 \to 0.64$）。$N_T = 4 \to 8$ で $\ln(1/\theta)$ は、$U(1)$ が $0.93 \to 0.012$（約 80 分の 1）、$SU(2)$ が $1.18 \to 0.45$（約 2.6 分の 1）です。ただしこの幾何では θ が 1 の程度で、$\theta \le 1$ の天井のために判別力が弱く、$SU(2)$ の $N_T = 8 = M$ は対称なトーラス 8^4（物理の大きさ $L\sqrt{\sigma} \approx 1.5$）です。$U(1)$ の $\beta = 1.5$ と $SU(2)$ の $\beta = 2.5$ は、同じ物理の大きさに合わせたものではありません。

表 2　$\Delta F(N_T)$、$M = 12$（容器を大きくした再測定） 読 — 数は 25-08 表 4 に載せた同じ測定です。数はここに写しません。

$U(1)$ の $N_T = 8$ は、レプリカ 24 では 0.54 ± 0.53 で混ざりが悪く、40 に増やした値を載せています。種の数は記載なしです。

表 3　$SU(2)$、$\beta = 2.4$、$M = 8$ 読 — 数は 25-08 表 5 に載せた同じ測定です。数はここに写しません。

読み 読。三つの設定（$\beta = 2.5$ の $M = 8$・12、$\beta = 2.4$ の $M = 8$）で、$SU(2)$ は横の T^2 を広げても渦の自由エネルギーが増えません（$\beta = 2.5$・$M = 8$ の対称点 $N_T = M = 8$ を除く）。$U(1)$ は二つの M で増えます。横広げの不等式の符号の、数値の兆候です。誤差は 0.1〜0.5 と大きく、β も二点だけです。$\beta = 2.4$ の $N_T = 8$ が $\beta = 2.5$ の同じ点より小さいのは、$\beta = 2.4$ では同じ格子が物理的に大きい（$L\sqrt{\sigma} \approx 2.2$ と 1.5）ことと合います。

03

板の弦の張力 — 増えて飽和する

一様な板の張力（26-02）の必要条件の一つは、板の弦の張力 $\sigma_{\text{eff}}(N_T)$ が N_T について大きく行き過ぎないことです。$SU(2)$、$\beta = 2.5$、$M = 16$ で、Creutz 比 (2) を測りました。四次元の値は $\sigma a^2 \approx 0.036$ です。

表 4　板の Creutz 比、400 測定（$SU(2)$、$\beta = 2.5$、$N_T \times N_T \times 16 \times 16$、種の数は記載なし） 読 — 数は 25-08 表 6 に載せた同じ測定です。数はここに写しません。

表 5　同じ設定で 5 倍の統計（2000 測定）と $N_T = 10$ 読 — 数は 25-08 表 7 に載せた同じ測定です。数はここに写しません。

読み 読。400 測定で見えた $N_T = 6$ の $\chi(4)$ の山（0.089 ± 0.013、$N_T = 8$ との差は約 2.3σ）は、2000 測定では 0.061 ± 0.004 になり、統計の揺らぎでした。$\chi(4)$ は $N_T = 4 \to 8$ で増え、$N_T = 10$ で 0.071（$N_T = 8$ との差 1.7σ）とほぼ飽和します。有意な行き過ぎは見えません。$\chi(4)$ は Coulomb の項を含むので、四次元の $\sigma a^2 \approx 0.036$ より大きく出ます。読むのは N_T についての傾向だけで、β は一点です。

04

渦の自由エネルギーの β 依存

表 6　$SU(2)$、$N_T = 4$、$M = 8$（$4 \times 4 \times 8 \times 8$、$n_{12} = 1$、レプリカ交換＋Bennett の受理比の方法、種の数は記載なし）読

β	2.2	2.3	2.4	2.45	2.5	2.55	2.6	2.7
ΔF	0.05 ± 0.05	0.00 ± 0.05	0.31 ± 0.10	0.30 ± 0.13	0.63 ± 0.18	0.66 ± 0.13	1.43 ± 0.19	2.97 ± 0.33

読み 読。誤差の範囲で β について単調に増えます。β 単調性（26-06 §02）と矛盾しない、という読みです（β 単調性は $SU(2)$ で示されていません）。$\beta \le 2.3$ で渦はほぼ自由（$\theta \approx 0$）、$\beta = 2.6$〜2.7 で急に高くなります。固定した格子 $4 \times 4 \times 8 \times 8$ が物理的に小さくなり、希薄な領域（$\theta \to 1$）に入るためと読めます。2.45 と 2.55 の点は、§05 の当てはめのために足した補間点です。

05

格子全体を 2 倍にする

繰り込みの比較（26-06 §05）を直接に試します。細かい格子（全ての方向を 2 倍）の ΔF を測り、それと同じ値を与える粗い格子の β' を、粗い格子の曲線（表 6 など）から読みます。漸近自由の予言は、$SU(2)$ で $\beta' < \beta$、走らない $U(1)$ で $\beta' \ge \beta$ です。

表 7　板 $(N_T, M) = (4, 8) \to (8, 16)$（$n_{12} = 1$）読

群	β	$\Delta F(4, 8, \beta)$	$\Delta F(8, 16, \beta)$：種ごと	統合	種	一致する β'	$\beta - \beta'$
$SU(2)$	2.7	2.97 ± 0.33	0.65 ± 0.39・1.31 ± 0.48（2 本目は交換の受理率の最小 0.10）	0.92 ± 0.30（誤差の重みつき平均）	2	≈ 2.57（曲線の誤差を入れて 2.45〜2.65）	$\approx +0.13$（$+0.05$〜$+0.25$）
$SU(2)$	2.6	1.43 ± 0.19	-0.57 ± 0.46・-0.41 ± 0.51	-0.50 ± 0.34（0 と整合）	2	$\lesssim 2.45$	$\gtrsim +0.15$
$SU(2)$	2.5	0.63 ± 0.18	0.41 ± 0.34	—	1	2.2〜2.5	0〜+0.3

群	β	$\Delta F(4,8,\beta)$	$\Delta F(8,16,\beta)$：種ごと	統合	種	一致する β'	$\beta-\beta'$
$U(1)$	1.5	0.83 ± 0.11	2.32 ± 0.45（レプリカ 48、交換の受理率の最小 0.37）	—	1	> 1.7（曲線の外）	< -0.2

$U(1)$ の粗い格子の曲線は $\Delta F(4,8,\beta') = 0.42, 0.55, 0.83, 0.92, 1.46$（$\beta' = 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7$）です。$U(1)$ の最初の実行（レプリカ 32）は -0.18 ± 0.12 でしたが、交換の受理率の最小が 0.03 で混ざりが悪く、使っていません。

読み 読。$SU(2)$ は 2 倍にすると渦の自由エネルギーが下がり（$\beta = 2.7$ で $2.97 \to 0.92$）、一致する β' は β より小さい。$U(1)$ は上がり（$0.83 \to 2.32$、約 3σ）、$\beta' > \beta$ です。比較の向きが二つの群で分かれました。$\beta = 2.7$ の $+0.13$ は、一ループの 0.258 と、既知の $a\sqrt{\sigma}$ の値から見込まれる約 0.23 より小さめです（約 1.5σ）。$U(1)$ の逆向きには、格子の小ささの人工物も含まれうる、と記録は注しています。

次は対称なトーラス N^4 で、$2^4 \to 4^4$ と $4^4 \to 8^4$ の二段を見ます。

表 8　$SU(2)$、対称なトーラスの $\Delta F(N^4,\beta)$（$n_{12} = 1$、種は各 1 本） 読

β	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.25	2.5	2.75	3.0
2^4	0.034	0.094	0.213	0.573	1.39	2.71	4.29	5.95	7.88
4^4	0.01	-0.01	0.01	0.01	-0.03	0.50	2.46	5.10	7.33

誤差は 2^4 で 0.01〜0.08、4^4 で 0.03〜0.26 です。$2^4 \to 4^4$ の一段の β'（4^4 の値を 2^4 の曲線に当てはめる）は表 9 のとおりです。

表 9　$SU(2)$ の $2^4 \to 4^4$ の一段 読

β	≤ 2.0	2.25	2.5	2.75	3.0
β'	< 1.0（曲線の外）	1.72	2.20	2.62	2.93
$\beta-\beta'$	> 0.75〜1	0.53	0.30	0.13	0.07

読める全ての β（1.75〜3.0）で $\beta - \beta' > 0$、つまり一段の階段関数に固定点がありません。強結合へ向かうほど一段の動きが大きく、弱結合の側で 0.07 まで小さくなるのは、2^4 が一ループの領域には小さすぎるための人工物と見られます。

表 10　$SU(2)$ の $4^4 \to 8^4$。ΔF は種ごとの値と、その単純平均（誤差は種の差の半分。三本の行は平均と散らばり） 読

β	$\Delta F(4^4)$：種ごと → 統合	$\Delta F(8^4)$：種ごと → 統合	種（8^4）	$\beta-\beta'$
2.1	—	-0.04 ± 0.17	1	—（≈ 0）
2.3	—	-0.04 ± 0.10	1	$\gtrsim 0.1$
2.5	2.46（1 本）	0.48 ± 0.48	1	$\approx +0.25$（$+0.19$〜$+0.5$）
2.6	3.96 ± 0.13（1 本）	—	—	—
2.7	4.96・4.47 → 4.72 ± 0.25	3.57・2.65 → 3.11 ± 0.46	2	$+0.16$（$+0.13$〜$+0.19$）
2.75	5.10・5.26 → 5.18 ± 0.10	—	—	—

β	$\Delta F(4^4)$：種ごと → 統合	$\Delta F(8^4)$：種ごと → 統合	種（8^4）	$\beta-\beta'$
2.8	5.33・5.87 → $\mathbf{5.60 \pm 0.27}$	—	—	—
2.9	6.88・6.23 → $\mathbf{6.56 \pm 0.33}$	5.68・3.52・4.84 → $\mathbf{4.68 \pm 0.63}$	3	$+0.20$（$+0.12$〜$+0.29$）
3.0	7.33・7.83 → $\mathbf{7.58 \pm 0.25}$	5.38・6.17 → $\mathbf{5.78 \pm 0.40}$	2	$+0.18$（$+0.14$〜$+0.25$）

読み 読。$4^4 \to 8^4$ でも、測った全ての β で $\beta-\beta' > 0$ で、平均は約 $+0.2$ です。一ループの漸近値 0.258 と、既知の $a\sqrt{\sigma}$ の値から見込まれる約 0.23 に近い値です。種の差が表示の誤差の 1〜2 倍になる点があり（$\beta = 2.9$ の 8^4 は 5.68 と 3.52）、誤差は小さめに出ている可能性が高い、と読みます。種一本だけの読み（$+0.08$〜$+0.13$）より、種を足した読みのほうが漸近的な振る舞いに近づきました。$\beta = 2.7$ の 8×16 の板の読み（表 7、$+0.13$）とも合います。

06

階段関数の符号 — U(1) の対照

同じ $2^4 \to 4^4$ の走査を、$U(1)$ で行いました。四次元の $U(1)$ は $\beta_c \approx 1.01$ に、閉じ込めの相から Coulomb の相への相転移を持ちます。

表 11　$U(1)$、対称なトーラスの $\Delta F(N^4, \beta)$ と $2^4 \to 4^4$ の一段（$n_{12} = 1$、種は各 1 本、誤差は記載なし） 読

β	**0.6**	**0.8**	**0.9**	**1.0**	**1.1**	**1.2**	**1.4**	**1.6**
2^4	0.14	0.62	1.15	1.80	2.46	3.10	4.18	5.23
4^4	0.00	0.00	0.05	1.07	2.71	3.68	4.46	5.85
$\beta-\beta'$	> 0.3	> 0.3	> 0.3	$+0.12$	-0.04	-0.11	-0.05	< 0

読み 読。$U(1)$ の $\beta-\beta'$ は、$\beta = 1.0$ と 1.1 の間で符号が反転します。既知の相転移 $\beta_c \approx 1.01$ の位置です。閉じ込めの相では $\beta' < \beta$、Coulomb の相では $\beta' > \beta$ です。$SU(2)$ は同じ走査で、測った全ての β で $\beta-\beta' > 0$ でした（表 9・表 10）。一段の階段関数の符号は、相転移の有無を見分ける診断として働いています。これは帯を閉じる議論が満たすべき基準「U(1) の転移と区別する」（26-06 §08）の、数値の姿です。

この符号の試験から言えるのは、8^4 までの格子と、表の β の点の上で、$SU(2)$ の符号が変わらなかったことだけです。$SU(2)$ に相転移が無いことの証拠ではありません。

関連して、速さを問わず $\Delta F(L, L) \to 0$ を見る中間の目標（26-06 §08）について、二つの読みがあります 読。$U(1)$（$\beta = 1.2$）の $2^4 \to 4^4$ は $3.10 \to 3.68$ と横ばいで、Coulomb の相で古典的な半磁束の値へ向かう描像と矛盾しません。$SU(2)$（$\beta = 2.75$）は $5.95 \to 5.10$ と下がります。

07

柱の偏り — ℓ × N の走査

柱の顔 $f(\ell)$（26-10 §02）を測ります。柱 $T^2_N \times \ell \times \ell$ の外枠を平衡な配位から取って止め、柱の中に n_{34} の面を入れたときの条件つきの自由エネルギー $\Delta F_B = \ln Z_B(+)/Z_B(-)$ と偏り $\theta_B = \tanh(\Delta F_B/2)$ を、枠ごとにレプリカ交換＋Bennett の受理比の方法で求め、枠について $\mathbb{E}|\theta_B|$ を取ります。チェス盤の評価（26-05）に入るのは、この $\mathbb{E}|\theta_B|$ です。$SU(2)$ は $\beta = 2.3$、$U(1)$ は Coulomb の相の $\beta = 1.3$ です。

表 12　$N = 4$ で ℓ を変える（括弧は枠の数） 読

ℓ	$SU(2)$、$\beta = 2.3$：$\mathbb{E}\lvert\theta_B\rvert$	$U(1)$、$\beta = 1.3$：$\mathbb{E}\lvert\theta_B\rvert$
2	0.93 ± 0.06（5）	—
3	0.58 ± 0.17（4）	0.95 ± 0.05（4）
4	0.23 ± 0.04（12）	0.61 ± 0.21（4）
5	0.07 ± 0.03（12）	0.49 ± 0.09（12）
6	0.09 ± 0.04（4）	0.41 ± 0.06（12）
8	—	0.25 ± 0.05（8）

$\ell \geq 5$ で、$SU(2)$ の柱の偏りは $U(1)$ の 1/5〜1/7 です。$U(1)$ はゆっくり減り（$\ell = 5 \to 8$ で約 $\ell^{-1.4}$）、$SU(2)$ は $\ell = 4 \to 5$ で 1/3 に落ちます。ただし $SU(2)$ の $\ell \geq 5$ の値は、枠ごとの統計誤差がつくる底（$|\theta_B|$ を正に偏らせる）に近く、$e^{-\sigma\ell^2}$ か冪かは、この大きさでは決められません。枠によって符号が変わることもあります（$\ell = 4$ の $SU(2)$ で ΔF_B の平均は -0.05）。ブロックを回るホロノミーが -1 に近い枠では、面のある区画のほうが好まれます。

表 13　$\ell = 5$ で N を変える（括弧は枠の数） 読

N	$SU(2)$、$\beta = 2.3$	$U(1)$、$\beta = 1.3$
4	0.07 ± 0.03（12）	0.49 ± 0.09（12）
6	0.20 ± 0.05（6）	0.97 ± 0.01（6）
8	0.39 ± 0.05（5。6 枠目は時間の上限で途中まで）	—

ℓ を止めると、どちらの群でも偏りは N とともに 1 に近づきます。偏りが小さいうちは、およそ N^2 に比例して増え（$\Delta F_B \propto N^2 f(\ell)$）、比例の係数は $SU(2)$ が $U(1)$ の約 1/7 です。群の違いは、θ を小さく保つのに要る ℓ の伸び方に出るはずなので、ℓ と N の両方を変えました。

表 14　$\ell \times N$ の走査：$\mathbb{E}\lvert\theta_B\rvert$（括弧は枠の数） 読

	$\ell = 4$	5	6	7	8	10
$SU(2)$、$\beta = 2.3$、$N = 4$	0.23（12）	0.07（12）	0.09（4）	0.11（4）		
$SU(2)$、$N = 6$	0.43（4）	0.20（6）	0.15（4）	0.08（4）		
$SU(2)$、$N = 8$	0.43（4）	0.38（5）	0.13（4）	0.29 ± 0.06（3）		

	$\ell=4$	5	6	7	8	10
$U(1)$、$\beta=1.3$、$N=4$	0.61（4）	0.49（12）	0.41（12）		0.25（8）	0.27（4）
$U(1)$、$N=6$		0.97（6）	0.98（4）		0.51（4）	0.45（4）

読み 読。$SU(2)$ は $N=4,6,8$ のどれでも、$\ell\approx 6$〜7 で統計の底（約 0.1）まで下がり、要る ℓ は N とともにほとんど伸びません。$U(1)$ は $N=4$ でも $\ell=10$ で 0.27 に留まり、$N=6$ では $\ell=10$ でも 0.45 で、要る ℓ が N とともに伸び、下がり方も遅い。$N=8$・$\ell=7$ の 0.29 は 3 枠だけ（時間の上限で打ち切り）で、$\ell=6$ の 0.13 より大きいのは枠の少なさによる揺らぎと見ます（3 枠とも $\Delta F_B>0$、0.43〜0.85）。予想（$SU(2)$ は $\ell\sim\sqrt{\ln N}$、$U(1)$ は $\ell\propto N$）と矛盾しませんが、格子が小さく枠も少ないので、伸び方の形までは決められません。

08

$\mathbb{Z}_2$ のガラスの診断

$U=\sigma V$（$\sigma\in\mathbb{Z}_2$、V は $SO(3)$ の切断）と書くと、捩れの区画は「$SO(3)$ の背景の上の $\mathbb{Z}_2$ のランダムな面のゲージ模型」になります（26-10 §03）。面ごとの実効的な $\mathbb{Z}_2$ 結合は $K_p=(\beta/2)|\mathrm{tr}\,U_p|$、フラストレーション（$\mathbb{Z}_2$ の単極子）は $\prod_{p\in\partial c}\mathrm{sign}\,\mathrm{tr}\,U_p=-1$ となる立方体 c です。

表 15　$SU(2)$、周期的な 8^4、熱浴で熱化 150 回・測定 100 回（種の数は記載なし、誤差は記載なし） 読

β	$\langle P\rangle$	$\mathrm{tr}\,U_p<0$ の割合	$\langle K\rangle$	$K<K_c=0.4407$ の割合	フラストレートした立方体	p_{eff}
1.0	0.243	0.297	0.455	0.494	0.481	0.209
1.5	0.363	0.204	0.741	0.282	0.452	0.162
2.0	0.501	0.109	1.120	0.149	0.349	0.091
2.3	0.602	0.051	1.437	0.081	0.216	0.045
2.5	0.653	0.029	1.660	0.051	0.140	0.027
2.7	0.686	0.018	1.870	0.034	0.093	0.017

p_{eff} は、立方体のフラストレーションの密度 ρ を、独立な符号の反転の確率に $(1-2p_{\mathrm{eff}})^6=1-2\rho$ で換算した値です。K_c は純 $\mathbb{Z}_2$ のゲージ理論の転移点、比べる値は四次元のランダムな面のゲージ模型の Nishimori 多重臨界点 $p_c\approx 0.11$ です（照合未了）。

読み 読。$\beta\gtrsim 2.0$ では、平均の結合 $\langle K\rangle$ が K_c の 3〜4 倍で、$p_{\mathrm{eff}}<0.11$ です。$\mathbb{Z}_2$ のガラスは秩序相の側にある見込みです。$\beta\lesssim 1.5$ では $p_{\mathrm{eff}}\geq 0.16$、柔らかい面（$K<K_c$）は 28〜49% で、無秩序の側です。独立な符号への換算は粗い（柔らかい面とフラストレーションは相関している）ので、境は目安です。この診断から、ガラスの道は帯の下半分に限られます（26-08 §05 の止まった道「ガラスの挟み撃ち」）。

09

小さな格子の人工物 — 読むときの注意の一覧

- **$N_T = 2$（および 2^4）は格子の人工物の領域。** $N_T = 2$ では T^2 の一辺が格子二つで、捩れのフラストレーションが大きく、連続の描像（分数インスタントンの気体）からは遠い。$2^4 \to 4^4$ の一段の $\beta - \beta'$ が弱結合の側で 0.07 まで下がる（表 9）のも、2^4 が一ループの領域に小さすぎるためと見られます。$N_T = 2$ の値は「向きの参考」にとどめます。
- **θ の天井。** θ が 1 の程度の幾何（表 1 の $M = 8$）では、$\theta \le 1$ のために比が抑えられ、群の違いの判別力が弱くなります。
- **統計の底。** 柱の偏り $\mathbb{E}|\theta_B|$ は、枠ごとの統計誤差で正に偏ります。0.1 程度の値は底に近く、面積の指数か冪かは決められません（表 12・表 14）。
- **Coulomb の項。** 小さな R の Creutz 比は Coulomb の項を含み、張力を大きめに見積もります（表 4・表 5）。
- **混ざりの悪さ。** レプリカ交換の受理率の最小が小さい実行（$U(1)$ のレプリカ 24・32、$SU(2)$ の 2 本目の 0.10）は、値が大きく揺れます。使わなかった実行は表の注に書きました。
- **種の数と誤差。** 種は 1〜3 本です。種を替えた二本の差が表示の誤差の 1〜2 倍になる点があり、誤差は小さめに出ている可能性が高い。
- **β の合わせ方。** $U(1)$ と $SU(2)$ の β は、同じ物理の大きさに合わせたものではありません。比べているのは、それぞれの群の中での向き（符号）だけです。
- **撤回した測定。** 容器を同時に反転させる測定を「帯の数値の姿」として読むことは撤回しました。一段の核の反転の確率が 1/2 程度で頭打ちになり、出るのは $U(1)$ も満たす弱い形だけだからです（26-08 §05 の止まった道「反転の証明書」）。測定そのものは 25-08 にあります。

10

五分類の表と依存グラフ

この頁の行は全て数値の読みです。札は「読」で、物理の見立てを含む読みには「(物理)」を添えます。

表 16　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	T^2 を広げると $U(1)$ の ΔF は増え、$SU(2)$ は増えない	読	表 1〜表 3	$M = 8, 12$・$\beta = 2.4, 2.5$（$SU(2)$）・$\beta = 1.5$（$U(1)$）・$N_T \le 8$	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
2	板の $\chi(4)$ は N_T とともに増えて飽和し、有意な行き過ぎは無い	読	表 4・表 5	$\beta = 2.5$・$M = 16$・2000 測定・$N_T \le 10$	—
3	ΔF は β について増える	読	表 6	$4 \times 4 \times 8 \times 8$・$\beta = 2.2$〜$2.7$	—
4	格子全体を 2 倍にすると、$SU(2)$ は $\beta' < \beta$、$U(1)$ は $\beta' > \beta$	読	表 7〜表 10	$(4,8) \to (8,16)$・$2^4 \to 4^4$・$4^4 \to 8^4$・種 1〜3 本	—
5	$4^4 \to 8^4$ の $\beta - \beta'$ は平均約 $+0.2$ で、一ループの 0.258 に近い	読	表 10	$\beta = 2.5$〜3.0・種 1〜3 本	—
6	$U(1)$ の一段の符号は $\beta = 1.0$ と 1.1 の間で反転し、$SU(2)$ は測った範囲で反転しない	読	表 9・表 11	$2^4 \to 4^4$・種 1 本	—
7	柱の偏りを小さく保つ ℓ は、$SU(2)$ では N とともにほとんど伸びず、$U(1)$ では伸びる	読	表 12〜表 14	$N \le 8$・$\ell \le 10$・枠 3〜12	—
8	$\beta \gtrsim 2$ で $\mathbb{Z}_2$ のガラスは秩序相の側、$\beta \lesssim 1.5$ で無秩序の側	読（物理）	表 15	8^4・独立な符号への換算は粗い	—
9	1〜7 の測定は、横広げの不等式・繰り込みの比較・基準「U(1) の転移と区別する」の向きと矛盾しない	読（物理）	§02〜§07	小さな格子の傾向。証拠ではない	—

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
1  読   T² を広げる：U(1) は上がり SU(2) は上がらない        M = 8, 12
2  読   板の張力は増えて飽和                                 β = 2.5・2000 測定
3  読   ΔF は β について増える                               4×4×8×8
4  読   2 倍の試験：SU(2) は β' < β、U(1) は逆 ⟸ 3          種 1〜3 本
5  読   4⁴ → 8⁴ の β − β' ≈ +0.2 ⟸ 4                        種 1〜3 本
6  読   階段関数の符号：U(1) は β_c で反転 ⟸ 4              2⁴ → 4⁴
7  読   柱の偏りの ℓ × N                                    N ≤ 8・ℓ ≤ 10
8  読   Z₂ のガラスの診断                                    8⁴
9  読   向きの整合 ⟸ 1・2・4・6・7                           傾向
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。この頁には「初」「典」「仮」の行がありません。帯を渡る文（一様な板の張力・横広げの不等式・繰り込みの比較）の節点も無く、それらは仮定として第 27 部の条件の台帳（27-02）に置かれています。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
読 小さな格子で、T^2 を広げる・格子を 2 倍にする・柱を広げる、のどの試験でも $SU(2)$ と $U(1)$ の向きが分かれること	大きな格子での振る舞い。値の決定。横広げの不等式・繰り込みの比較そのもの
読 $U(1)$ の階段関数の符号が既知の転移の位置で反転し、$SU(2)$ は測った範囲で反転しないこと	$SU(2)$ に相転移が無いこと
読 （物理） $\mathbb{Z}_2$ のガラスが帯の上半分で秩序相の側にあること	ガラスの相の境の位置（換算が粗い）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
全ての表	読	この本の検討の数値の記録（渦の挿入の数値計算：大域の流束の自由エネルギー・板の弦の張力・β 依存・繰り込みの比較の試験・対称なトーラスの階段関数の走査・$U(1)$ の対照・$4^4 \to 8^4$ の追加と種の統合・柱の捩れのコスト・$\mathbb{Z}_2$ のガラスの診断）と、移り変わりの帯を閉じる道の整理の数値の節。レプリカ交換と Bennett の受理比の方法、熱浴、Creutz 比
$U(1)$ の相転移 $\beta_c \approx 1.01$	読	格子の数値の既知の値（5-06）
Nishimori 多重臨界点 $p_c \approx 0.11$	照合未了	四次元のランダムな面のゲージ模型の数値の文献
一ループの 0.258	初	章 25-07（一ループの水準）

この章で使った語 — 渦の自由エネルギー ΔF・区画の偏り θ・Creutz 比・レプリカ交換・Bennett の受理比の方法・階段関数・柱の偏り $\mathbb{E}\lvert\theta_B\rvert$・$\mathbb{Z}_2$ のガラス・フラストレーション。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：26-10 新しい見方の候補 — これらの傾向を、どの局所量の不等式に育てるか。

新しい見方の候補

この章は未解決の問いの地図です。閉じた部品と閉じない部品の境を示します。

この章で分かること — 移り変わりの帯の真ん中を渡るには、非可換性を使う不等式が一つ要る、というところまで絞れています（26-06 §07）。この章は、その一つをどの局所量で書くかの候補を並べます。四つの顔——捩れの向きの柔らかさ κ_w・箱の磁束の混合 $\delta(L_0)$・柱の捩れのコスト $f(\ell)$・圧力の余裕——について、担う局所量、$SU(2)$ で成り立つと見る理由、$U(1)$ で壊れる場所、数値の有無を書きます（§02）。帯の下半分に限った $\mathbb{Z}_2$ のガラスの表示（§03）、検討の結果否定的だった共形な枠 $H^2 \times S^2$（§04）、そして新しい三つの候補——帯のコンパクト性による還元・Weyl の測度の対数凹性と高さ・方位の分解・柱の局所の階段関数（§05）——を置きます。

前提となる章 — 26-06（繰り込みの比較・四つの顔の一覧・還元の補題）・26-08（止まった道と選別の基準）・26-09（測った記録）・25-03（容器）・26-01（帯の正しい形）。

先に言うこと — この頁の候補は、どれも**物理の見立ての水準**のものです。どの候補も帯を閉じず、帯のどの β でも定理を与えません。紙の証明を置くのは、候補の足場になる初等的な事実（輸送の恒等式・Jensen の挟み・射影の密度など）だけで、それぞれに「初」を付けます。候補が当たる見込みの数は書きません（見込みの数は判断の補助にすぎず、根拠のある数ではないため）。

この章の順序

1. 候補の読み方 — 候補が通るべき関所
2. 真ん中の帯の四つの顔（表 1）
3. $\mathbb{Z}_2$ のガラス — 帯の下半分に限る
4. 共形な枠 $H^2 \times S^2$ — 検討の結果否定的
5. 三つの新しい候補 — コンパクト性による還元・Weyl の測度・柱の階段関数
6. ほかの五つの候補（表 2）
7. 言えないこと

8. 五分類の表と依存グラフ

01

候補の読み方 — 候補が通るべき関所

この頁の候補は、26-08 §07 の選別の基準を関所として通してから並べています。とくに次の四つを、各候補で名指しします。

- **非可換性を本質的に使うか**。$U(1)$ で同じ結論が出る候補は誤りです。各候補に「$U(1)$ で壊れる場所」を書くのはこのためです。試験の相手を U(1) のほかへ広げた表は 26-12 に在ります。
- **一ループの言い換えでないか**。一ループでは漸近自由そのものになる量は、それだけでは足りません。
- **小さな尺度で破れないか**。主張は $\ell \geq \ell_{\min}$ のように、格子の人工物の外に限った形にします。
- **$U(1)$ の帯の中の転移（$\beta \approx 1.01$）と区別するか**。

候補ごとに、(i) 担う局所量、(ii) $SU(2)$ で成り立つと見る理由（非可換性が入る場所）、(iii) $U(1)$ と $\mathbb{Z}_2$ で壊れる場所、(iv) 台帳（26-08）との照合、(v) 数値の有無、を書きます。札は、初等的な事実に「初」、数値に「読」、見立てに「読（物理）」です。

02

真ん中の帯の四つの顔

帯を渡る非可換な不等式を、どの局所量で書くかの候補が四つあります。どれか一つを、尺度に一様に、$U(1)$ で破れる形で示せばよい、という意味で「顔」と呼びます。どの顔でも、尺度をまたぐ比較（例えば $f(2\ell, 2N, \beta) \leq K f(\ell, N, \beta')$）は大域の繰り込みの比較と同じ難しさの局所版で、易しくなるわけではありません。顔を替えて得るのは、証明の対象が「境界を止めた有限の領域の言明」に変わることです。

表 1　四つの顔（予想と理由は物理の見立て。数値は読）

顔	担う局所量	$SU(2)$ で成り立つと見る理由	$U(1)$・$\mathbb{Z}_2$ で壊れる場所	数値

顔	担う局所量	$SU(2)$ で成り立つと見る理由	$U(1)$・$\mathbb{Z}_2$ で壊れる場所	数値
捩れの向きの柔らかさ κ_w	幅 w の帯の中で、捩れの生成場に沿った力の分散（適応した剛性）	w とともに減る。Nielsen–Olesen の柔らかい方向で、一ループのスピンの項 $+4$ の非摂動版	$U(1)$ はスピンの項が無く $\kappa_w \geq c\beta$。$\mathbb{Z}_2$ は連続な道が無く、細い面（面積あたり 2β）しか使えない	無し
箱の磁束の混合 $\delta(L_0)$	箱の境界の中心の磁束を変えたときの、内側の立方体の法則の全変動距離	L_0 とともに指数的に 0 へ	$U(1)$ の Coulomb の相では $O(\beta)$ のまま残る	無し
柱の捩れのコスト $f(\ell)$	外枠を止めた $T^2_N \times \ell \times \ell$ の柱の、捩れの条件つきの自由エネルギーと偏り $\mathbb{E}\lvert\theta_B\rvert$	$e^{-\sigma\ell^2}$ の型	$U(1)$ は $\pi^2\beta/\ell^2$ の型、$\mathbb{Z}_2$ は $\approx 2\beta$	有り（26-09 §07）
圧力の余裕	捩れの模様を入れた系と入れない系の圧力の差 $p_\infty - p_{G,L}$（チェス盤の密度 κ_{cb} の指数）	中間の β で正の余裕が残る	$U(1)$ は小さな κ_{cb} を作らない	無し

捩れの向きの柔らかさ κ_w — 輸送で区画をつなぐ

足場になるのは、区画を写す写像による自由エネルギーの恒等式です。区画 0 の配位空間から区画 1 の配位空間への可測な全単射 T（Jacobian J_T）を取り、μ_0, μ_1 を二つの区画の Gibbs 測度、$\Delta F = -\ln(Z_1/Z_0)$ とすると

$$\Delta F \;=\; \mathbb{E}_{\mu_0}\big[S\circ T - S - \ln J_T\big] \;-\; \mathrm{KL}\big(T_{\#}\mu_0 \,\big\|\, \mu_1\big) \tag{1}$$

が成り立ちます 初。

証明。変数変換で $Z_1 = \int e^{-S(Tx)} J_T(x)\,dx$ なので、$G := S\circ T - S - \ln J_T$ と置くと $Z_1/Z_0 = \mathbb{E}_{\mu_0}[e^{-G}]$。測度 $\tilde{\mu} \propto e^{-G}\mu_0$ は μ_1 を T^{-1} で引き戻したもので、$\mathrm{KL}(\mu_0\|\tilde{\mu}) = \mathbb{E}_{\mu_0}[G] + \ln \mathbb{E}_{\mu_0}[e^{-G}]$。$T$ が全単射なので $\mathrm{KL}(\mu_0\|\tilde{\mu}) = \mathrm{KL}(T_{\#}\mu_0\|\mu_1)$。整理すると (1)。∎

(1) の第一項は「写像の作用の費用」、第二項は余りです。写像 T が決定論的だと、余り（相対エントロピー）は渦の面の面積とともに増えるので、$e^{-\sigma A}$ 型の面積則は出ません 読（物理）（26-08 §05 の止まった道「決定論的な挟み撃ち」）。したがって輸送の道の目標は、面積則ではなく、定性的な $\Delta F(L,L) \to 0$（26-06 §08 の中間の到達点）です。

(ii) $SU(2)$ で成り立つと見る理由 読（物理）。捩れの生成場に沿って区画を写す「適応した」写像は、変数を三角に変換するもので $J_T = 1$、つまり体積を保ちながら揺らぎの形を変える写像です。25-07 の原理——体積を保つことでなく、揺らぎの形を変えないことが反遮蔽の

$+4$ を見えなくする——の非摂動版にあたります。κ_w は、その写像の作用の費用の揺らぎの大きさで、幅 w の帯の中で Nielsen–Olesen の柔らかい方向が効けば w とともに減ると見ます。

(iii) 壊れる場所。$U(1)$ にはスピンの項が無く、$\kappa_w \geq c\beta$ が残ります。$\mathbb{Z}_2$ には区画をつなぐ連続な道が無く、細い面（面積あたり 2β）しか使えません。**(iv) 台帳**：表 1 の 25（スピンと指数定理は一ループで漸近自由の言い換え）に当たる危険があり、非摂動の部分を分散 κ_w の評価として切り出せるかが分かれ目です。**(v) 数値**：無し。

箱の磁束の混合 $\delta(L_0)$ — 有限の箱の判定

Dobrushin–Shlosman 型の有限サイズの判定の、ゲージ版の候補です。目標の形は「$\delta(L_0,\beta) \leq \varepsilon_d$ ならば面積則」で、判定そのものは書き下されていません 読（物理）。相関不等式（GKS）を使わないので、$SU(2)$ に GKS が無いという障害（表 1 の 2・4）には当たりません。

$SU(2)$ では $\delta(L_0)$ が L_0 とともに指数的に 0 へ向かうと見ます。$U(1)$ の Coulomb の相では、Gauss 近似の Villain 模型で相対エントロピーが L_0 に依らず $O(\beta)$ で残ります（見立ての水準の勘定）読（物理）。注意：通常の Dobrushin の判定を枠つきで使うと、連続な場が境界に追随して影響係数がほぼ 1 になります（26-08 の止まった道「Dobrushin 型の判定」）。$\delta(L_0)$ が中心の磁束だけを変える量なのは、この追随を避けるためです。数値は無し。

柱の捩れのコスト $f(\ell)$ — 箱の Wilson ループと同じ量

柱の内部は、骨格 Σ（柱の外枠）を与えると条件つきで独立なので

$$|\theta| \;\leq\; \mathbb{E}\prod_{B} |\theta_B(\Sigma)| \tag{2}$$

が成り立ちます 初（25-03 §03 の容器の恒等式と同じ枠組みで、新しい内容はありません）。新しいのは $f(\ell)$ の読み方です。外を止めた箱の中の電気的な流束は、**箱の Wilson ループの面積則と同じ量**です 読（物理）。すると輪が一つできます：Tomboulis–Yaffe の不等式（θ から Wilson の面積則、26-01 §04）と、(2)（箱の Wilson の面積則から θ）です。

輪を回すには二つ足りません（開）：周期的な境界条件と止めた境界条件の比較、そして $\ln N$ の損失です。損失が残っても $\ln(1/\theta(L,L)) \geq cL^2/\ln L$ は出て、Tomboulis–Yaffe を通せば $\langle W\rangle \leq 2\exp(-cA/\ln A)$（周長則より速い減衰）になる、という見立てです 読（物理）。

数値は有ります（26-09 §07）読。外枠を止めた $T_4^2 \times \ell \times \ell$ で、$\ell \geq 5$ の $SU(2)$（$\beta = 2.3$）の $\mathbb{E}|\theta_B|$ は $U(1)$（$\beta = 1.3$）の 1/5〜1/7 で、θ を小さく保つのに要る ℓ は $SU(2)$ では $N \leq 8$ で 6〜7 とほとんど伸びず、$U(1)$ では伸びます。この大きさでは、止めた境界条件と周期的な

境界条件の違いは問題になっていないように見えます。ただし $SU(2)$ の値は統計の底に近く、$e^{-\sigma \ell^2}$ と冪の区別はつきません。

圧力の余裕 — 計算機援用の挟み撃ち

チェス盤の密度を $\kappa_\Lambda = \exp(|B|(p_{G,\Lambda} - p_\Lambda))$（$p_G$ は捩れの模様を入れた系の圧力、$|B|$ はタイルの体積）と書きます。上からは、模様が鏡映対称なら周期の転送行列が正で、Schatten ノルムの単調性から $p_{G,\Lambda} \le p_{G,L}$（$\Lambda$ が L の倍数）。下からは $p_\Lambda \ge p_\infty$ と、無限体積の圧力の下界 p_{lb} をループ方程式のブートストラップの双対の証明書（Kazakov–Zheng の方法、照合未了）から取る。合わせると $\kappa_\Lambda \le \exp(|B|(p_{G,L} - p_{\mathrm{lb}}))$ が Λ に一様になり、固定した β で明示的な張力の面積則が出る、という見立てです 読（物理）。

この顔は帯（格子間隔に一様）を越えません。得られるとすれば、四次元 $SU(2)$ の中間の結合（例えば $\beta = 1.0$）での、固定した β の閉じ込めです。探した範囲で、その証明は見当たりません。§05 の還元（候補「帯のコンパクト性による還元」）と組むと、この種の固定した β の結果がそのまま帯の部品になります。$U(1)$ の $\beta = 1.2$ は小さな κ を作らないはずで、対照に使えます。数値は無し。

03
$\mathbb{Z}_2$ のガラス — 帯の下半分に限る

$SU(2)$ の元を $U = \sigma V$（$\sigma \in \mathbb{Z}_2$、V は $SO(3)$ の切断）と書くと、捩れの区画の分配関数は $Z_n = \int d\omega\, Z_n(\omega)$ と書けます。$Z_n(\omega)$ は、$SO(3)$ の背景 ω が決める結合 $\beta J_p(\omega)$（$J_p = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\, V_p$、符号はランダム）と捩れ n を持つ $\mathbb{Z}_2$ ゲージ理論の分配関数です。$X(\omega) = \ln Z_0(\omega)/Z_1(\omega)$ と置き、$P_n(d\omega) \propto Z_n(\omega) d\omega$ とすると

$$\mathbb{E}_{P_1}[X] \;\le\; \Delta F \;\le\; \mathbb{E}_{P_0}[X] \qquad (\Delta F = \ln Z_0/Z_1) \tag{3}$$

です 初。

証明。$Z_0/Z_1 = \int Z_1(\omega) e^{X(\omega)} d\omega / Z_1 = \mathbb{E}_{P_1}[e^X] \ge e^{\mathbb{E}_{P_1} X}$（Jensen）から左側。同様に $Z_1/Z_0 = \mathbb{E}_{P_0}[e^{-X}] \ge e^{-\mathbb{E}_{P_0} X}$ から右側。∎

(3) の右辺は、$SO(3)$ の背景で焼き入れた $\mathbb{Z}_2$ のランダムな面のゲージ模型の、捩れの自由エネルギーです。この表示だけなら $U(1)$ にも同じものがあるので、基準「U(1) の転移と区別する」は満たしません。群の区別は、背景のフラストレーション（$\mathbb{Z}_2$ の単極子）と柔らかい面の密度という**力学の量**に入ります 読（物理）。

診断の結果（26-09 §08）読。8^4 で、$\beta \gtrsim 2.0$ では実効的な $\mathbb{Z}_2$ 結合の平均が 1.1〜1.9 と純 $\mathbb{Z}_2$ の転移点 0.44 を大きく超え、フラストレーションを独立な符号に換算した p_{eff} は 0.017〜0.09

で、Nishimori 多重臨界点 0.11 より小さい。**帯の上半分では、ガラスは秩序相の側**にあります。$SO(3)$ の場がすでに区画を見分けてしまい（$|X|$ が大きい）、挟み (3) は大きく緩みます。そこでの閉じ込めは $SO(3)$ の部分（太い中心渦）が担う、と読めます。弱結合で中心渦が太いという物理の描像と合います 読（物理）。

$\beta \lesssim 1.5$ では $p_{\mathrm{eff}} \geq 0.16$、柔らかい面は 28〜49% で、ガラスは無秩序の側です。したがって**ガラスの道は帯の下半分に限ります**。上半分については捨てました（26-08 §05 の止まった道「ガラスの挟み撃ち」）。下半分での使い方の候補は、箱の磁束の混合の変種で、外を $SO(3)$ の部分だけで条件づけ、境界の中心の流束（$\mathbb{Z}_2$ の符号）だけを裏返したときの内側の法則の全変動距離 $\delta_c(L_0, \beta)$ を測るものです。$SO(3)$ の枠は動かないので、連続な場が境界に追随する障害（Dobrushin 型の判定）を避けられます。残る結合は $\mathbb{Z}_2$ のガラスだけです。帯の上半分では δ_c も 1 に近いはずで、この変種は帯の下の端を押し上げる作業（26-06 §04）の側に属します 読（物理）。

04

共形な枠 H² × S² — 検討の結果否定的

$\mathbb{R}^4$ から一本の直線を除いた空間は、$H^2 \times S^2$ に共形です 初：直線からの距離を r、直線に沿う座標を t とすると

$$dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \;=\; r^2\Big[\frac{dt^2 + dr^2}{r^2} + d\Omega^2\Big] \tag{4}$$

で、括弧の中は双曲平面 H^2（上半平面のモデル）と単位球面の積です。直線の上に 't Hooft の線を置くと、直線を囲む全ての球面に $\mathbb{Z}_2$ の流束 1 が乗ります（$n_{12} = 1$ の正確な類似）。そして、点 $(t, r) \in H^2$ に対応する球 $\{t\} \times S^2_r$ は、半平面の中のループ C と、(t, r) が C の囲む領域の内側にあるとき、かつそのときに限り奇数回まわります 初（球が張る三次元の球体と C の交点は、線分 $\{t\} \times [0, r)$ と C の交点）。$\mathbb{R}^4$ で局所的な閉曲面を使う道を止めた位相的な障害（表 1 の 8：閉曲面は平面と偶数回交わる）を、直線を「外側」として使うことで避けている形です。直線の近く（$r \to 0$）が小さな球の領域（弱結合）、遠く（$r \to \infty$）が赤外で、**尺度が位置に変わります**。

見込みがあったのはここまでで、検討の結果は否定的でした 読（物理）。

- 高さ r・双曲的な大きさ 1 の容器は、ユークリッドの大きさが r の程度で、球 S^2_r を持ちます。これは帯の量 $\theta(r, r)$ そのもの（T^2 の代わりに S^2）です。
- 双曲的な入れ子：高さ $2r$ の単位の容器（$[-r, r] \times [r, 3r]$ 程度）の双曲面積は $2r\,(1/r - 1/(3r)) = 4/3$ で、高さ r の単位の容器は 1〜2 個しか入りません 初（積分の計算）。双曲面

積は形を止めた拡大で変わらないので、入れ子で部分の容器の数は増えず、出るのは $\theta(2r) \le \theta(r)^{1.3}$ 程度で、平面の入れ子の指数 4 になりません。

- 半平面のループ（高さ d から $d+\ell$、長さ T）の双曲面積は $T(1/d - 1/(d+\ell)) \approx T/d$ で、高さに依らない一様な θ_0 からは周長則しか出ません。面積則には、高さ r の単位の容器で $\theta \le e^{-c(r\Lambda)^2}$、つまり帯と同じ条件が要ります。

結論：共形な枠は「尺度の変化＝H^2 の中の平行移動」として繰り込みを空間の言葉にしますが、運動学だけでは面積則は出ず、核心（漸近自由による乱れの増加）は同じ場所に残ります。価値は、$\mathbb{R}^4$ の段（16-09 ）を板を経由せずに述べる枠組みとしての見通しの良さにあります。't Hooft の線のある測度でのループと、線の無い $\mathbb{R}^4$ のループの関係は開いていて、比較原理が失敗した前例（26-08 §04）があります。

05

三つの新しい候補

帯の候補を八つ検討し、そのうち三つをここに置きます（残りは §06）。選んだ理由は、帯のコンパクト性による還元は紙で確実に書ける還元で、帯の「どこが本当に難しいか」を動かすこと、候補「Weyl の測度の対数凹性」は二次元の関所で四次元より先に安く試せ、単調性の源と乱れの機構が逆向きになる型（26-08 §01 の教訓）に当たらない数少ない形であること、候補「柱の局所の階段関数」は既にある柱の数値の道具でそのまま試せ、基準「U(1) の転移と区別する」を直接見られることです。

帯のコンパクト性による還元

(i) 一行。帯は β について有界な閉区間 $I = [\beta_a, \beta_b]$ なので、帯の中の繰り込みの比較は、β' を β から少し下げるだけで成り立ち、帯は有限回の段で渡れる。要るのは帯の各 β での「固定した β の閉じ込め（周長の次数の誤差つきの両側の漸近）」だけ。

これは 26-06 §06 の帯の中の比較の還元の補題として、証明つきで置かれています 初（固定した β の両側の面積則・率の一様な正値と連続性・$N \ge N_1$・$M \ge M_0$ の下）。ここでは「見方」としての意味だけを書きます。

(ii) 担う局所量。固定した β での、大きな体積の渦の自由エネルギーの両側の評価。局所量としては、柱の偏りの、$\ell \gg \xi(\beta)$ での面積の率 $\sigma_N(\beta)$ と、周長の次数の誤差 p。

(iii) 非可換性の入る場所 読（物理）。補題そのものは群に依りません。非可換性は全て仮定（帯の中の $SU(2)$ の閉じ込め）に入ります。この候補は道具でなく還元で、難しさの場所を移すためのものです。還元の後、帯の中に残るのは固定した β の問題（体積に一様な評価・凸で

ない大きな場・相転移が無いこと）で、尺度をまたぐ難しさは帯の上端（相関長 $\xi(\beta)$ が格子単位で急に伸びる所）と紫外の制御の継ぎ目に寄ります。

(iv) 壊れる場所。$U(1)$（$\beta \in (1.01, 2.7)$）と $\mathbb{Z}_2$（転移より弱結合の側）では仮定が偽なので、結論も出ません。基準「U(1) の転移と区別する」は仮定が担います。

(v) 台帳との照合。表 1 の 6（小さな T^2 から連続に延ばす背理法）とは違い、使う連続性は β についての有限体積の量の連続性だけです。連続極限の結合の階段関数を有界な区間で考える着想と同じ精神ですが、こちらは格子の β で止めて、連続極限を経ません。

(vi) 既知の結果との関係。強結合の側では、ちょうどこの形の言明が筋の水準であります（26-06 §03 の強結合の端の展開の命題）。帯の中の $\beta \approx 1$ での四次元 $SU(2)$ の格子の閉じ込めの証明は、探した範囲で見当たりません（強結合の側の最前線は小さな β、26-08 §07）。Chatterjee（arXiv:2006.16229、抄録で確認・本文は照合未了）は、中心が非自明で、任意の境界条件の下で相関が指数的に減衰すれば中心対称性は破れず、破れなければ閉じ込める、という形の結果を与えています。固定した β の定性的な閉じ込めへの入口になりえますが、固定した β の両側の面積則の周長の次数の精度は出しません。

(vii) 次に要るもの。固定した β の両側の面積則の上側を、有限の箱の判定（箱の磁束の混合・圧力の余裕）で β ごとに出す道と、下側（渦が安すぎないこと＝弦の張力の上界）を試行の渦の変分で出す道です。どちらも固定した β の問題で、箱の大きさは $\xi(\beta)$ 程度で済みますが、帯の上端では $\xi(\beta)$ が格子単位で 10 を超え、四次元の有限の箱の計算は規模で止まります（表 1 の 3）。数値は無し。

Weyl の測度の対数凹性と、高さ・方位の分解

(i) 初等的な事実 初。単位球面 $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ の一様な測度を一つの座標 t に射影した密度は

$$\rho_n(t) \;\propto\; (1-t^2)^{(n-3)/2}, \qquad t \in [-1,1] \tag{5}$$

です。**証明**。高さ t の切り口は半径 $\sqrt{1-t^2}$ の球面 S^{n-2} で、その面積は $(1-t^2)^{(n-2)/2}$ に比例し、高さ dt の帯の幅（球面に沿う長さ）は $dt/\sqrt{1-t^2}$ です。掛けて (5)。∎ よって $n \geq 3$ で ρ_n は対数凹（$n=3$ で平ら）、$n=2$ で対数凸（逆正弦の分布）です。$SU(2) \cong S^3$（$n=4$）では $t = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\, U$ の密度は $\propto \sqrt{1-t^2}$（Weyl の測度）、$U(1) = S^1$ では $\propto 1/\sqrt{1-t^2}$ です。

二次元の $O(3)$ 模型では、スピンを $s = (\sqrt{1-t^2}\cos\varphi,\ \sqrt{1-t^2}\sin\varphi,\ t)$ と書くと、S^2 の一様な測度は $dt\, d\varphi/(4\pi)$ で（(5) の $n=3$）、$s_i \cdot s_j = \sqrt{(1-t_i^2)(1-t_j^2)}\cos(\varphi_i - \varphi_j) + t_i t_j$ なので、高さ t を条件にした方位 φ の模型は、結合 $J_{ij} = \beta\sqrt{(1-t_i^2)(1-t_j^2)} \geq 0$ の XY 模型です初。フラストレーションはありません。

(ii) 担う局所量。ブロック $b \times b$ の粗い変数で測った、方位の実効結合 $J_{\text{eff}}(b)$ と、高さの揺らぎ。

(iii) 成り立つと見る理由 読（物理）。条件つきの方位の模型は強磁性なので、XY の Ginibre の不等式（照合未了）が向きよく使えます：結合を下げると相関が下がる。指数減衰に要るのも相関の上界なので、**単調性の源と乱れの機構が同じ向きを向きます**。乱れは高さの揺らぎ、つまり $n \geq 3$ の測度 (5) から来ます。$O(2)$ には高さがありません。

(iv) 壊れる場所。$O(2)$：高さが無く、方位は結合 β の XY のまま（KT 相）。四次元の $U(1)$：類の向きの自由度（S^2）が無い。$\mathbb{Z}_2$：連続な方位が無い。

(v) 台帳との照合と危険。表 1 の 22（一点の Bakry–Émery）・26（曲率の繰り込み）と違い、曲率でなく射影の対数凹性と条件つきの Ginibre を使います。表 1 の 10（$\mathbb{Z}_2$ の GKS）と違い、条件つきの模型にフラストレーションがありません。危険は二つです。(a) 赤道の向きの埋め込みで逆の結論（$O(3)$ に KT 型の相がありうる）を論じた Patrascioiu–Seiler の議論（照合未了）があり、この候補はその論争の場所に立ちます。(b) 一サイトの水準では J_{ij} の典型値が KT の閾値を超え、比較は何も言いません。効くとすればブロックの水準だけで、そこには Ginibre の比較が直接には無く、迂回の移しかえの型の危険があります。

(vi) 四次元へ。$U = t + i\sqrt{1-t^2}\, n \cdot \sigma$（$n \in S^2$ は類の向き）の n を条件にした残りの $U(1)$ が強磁性になる表示が要りますが、作れていません。二次元の格子の $O(n)$（$n \geq 3$）で全ての温度の指数減衰を示すこと（Polyakov の予想）は未解決です（26-08 §07 の基準「最小の帯を渡れる」）。

(vii) 数値。無し。最初の試験の形は決まっています：二次元の $O(3)$（$\beta = 1.5, 1.7$）・対照の $O(2)$（KT 相と無秩序相）・補助の $O(4)$（高さの密度が $SU(2)$ と同じ $\sqrt{1-t^2}$）で $J_{\text{eff}}(b)$ を測り、$O(3)$ で相関がすでに減衰している大きさでも J_{eff} が KT の目安を超えたままなら、この候補を捨てる。$O(2)$ で J_{eff} が b とともに下がれば、測り方が機械的に結合を下げているとして結果を使わない。ブロックの水準の Ginibre の比較は定理として存在しないので、通っても必要条件の見張りにとどまります。

柱の局所の階段関数

(i) 一行。大域の ΔF の繰り込みの比較を、外枠を止めた柱の量の比較に置き換える：

$$f(2\ell, 2N, \beta) \;\leq\; K \cdot f(\ell, N, \beta')^{c}, \qquad \beta' < \beta,\;\; \ell \geq \ell_{\min} \tag{6}$$

（K・c は ℓ・N に依らない）。**(ii) 担う局所量**。柱 $T^2_N \times \ell \times \ell$（外枠は平衡な配位で止める）の条件つきの捩れの自由エネルギー ΔF_B と偏り $\theta_B = \tanh(\Delta F_B/2)$。比べる量は、枠についての ΔF_B の中央値（符号つき）と $\mathbb{E}|\theta_B|$ の二つ。

(iii) 成り立つと見る理由 読（物理）。既にある数値（26-09 §07）で、θ を小さく保つのに要る ℓ は $SU(2)$ では N とともにほとんど伸びず、$U(1)$ では伸びます。非可換性は、渦が T^2 の大きさの塊（分数インスタントン）に局在できる所に入ります。その作用は Bogomolny の下界で T^2 の大きさに依らないからです（25-02）。

(iv) 壊れる場所。$U(1)$ の Coulomb の相では流束が一様に広がり、柱の偏りは冪でしか減らない（$\ell = 5 \to 8$ で約 $\ell^{-1.4}$）ので、局所の β' は β 以上に出るはずです。$\mathbb{Z}_2$ は面の張力が残り、同様です。

(v) 台帳との照合。表 1 の 27（境界条件・幾何の比較）とは違い、同じ対象を二つの尺度で比べます。表 1 の 2 の相関不等式も使いません。基準「小さなループで破れない」のため、小さな ℓ（3 以下）は格子の人工物で破れうるとして、主張は $\ell \geq \ell_{\min}$ の形にします。捩れの境界条件で定義した結合の階段関数（de Divitiis らの方法、照合未了）の局所版にあたります。

(vi) 数値。(6) そのものを測った数は、まだ有りません。試験の形は決まっています：細かい側 $(N, \ell) = (4, 4)$、粗い側 $(2, 2)$（余裕があれば $(4, 6)$ と $(2, 3)$）で、$SU(2)$ は $\beta = 2.3$、$U(1)$ は閉じ込めの相 $\beta = 0.9$ と Coulomb の相 $\beta = 1.3$。予言は、$SU(2)$ で $\beta' < \beta$、$U(1)$ は $\beta = 0.9$ で $\beta' < \beta$、1.3 で $\beta' \geq \beta$（相で符号が反転）。$U(1)$ の二点で符号が分かれなければ、この観測量は相を見分けないとして候補を一段下げます。$(2, 2)$ は人工物が大きいので、$(4, 6)/(2, 3)$ で確かめるまでは兆候として扱います。

(vii) 難しさ。(6) を示すことは、大域の繰り込みの比較と同じ難しさの局所版です（§02 の冒頭）。得るのは、証明の対象が「境界を止めた有限の領域の言明」になること、そして帯のコンパクト性による還元の仮定（固定した β の両側の面積則）を柱の言葉で書けることです。

06

ほかの五つの候補

検討した八つの候補のうち、残りの五つを一行ずつ置きます。どれも §05 の三つより優先しなかった理由を添えます。札は全て「読（物理）」で、初等的な恒等式を含むものはその行に「初」を足します。

表 2　ほかの五つの候補

候補	一行	優先しなかった理由	札
符号の打ち消しとしての閉じ込め	捩れの和を取った測度 P（重み $Z_0(\omega) + Z_1(\omega)$）で $\theta = \mathbb{E}_P[\tanh(X/2)]$。帯の上半分でガラスが秩序相（$\lvert X \rvert$ が大きい）でも、X の符号が打ち消せば θ は小さい	群の区別が N を大きくしたときの伸び方に出る点で、柱の顔 $f(\ell)$ と同じ量の言い換えに近い。数値は乱れた $\mathbb{Z}_2$ ゲージ理論の分配関数の比を ω ごとに要し、規模が大きい	初（恒等式は θ の定義 $(Z_0 - Z_1)/(Z_0 + Z_1)$ を ω について書き直すだけ）・読（物理）

候補	一行	優先しなかった理由	札
中心だけの影響係数	§03 の $\delta_c(L_0,\beta)$。外を $SO(3)$ の部分だけで条件づけ、境界の中心の流束だけを裏返す	帯の上半分では δ_c も 1 に近いはずで、帯の下半分専用（帯の下の端を押し上げる作業の側）	読 （物理）
$\mathbb{Z}_2$ の単極子の流れによる流束の符号の拡散	平面ごとの符号の流束は、間を横切る $\mathbb{Z}_2$ の単極子の閉曲線の数の偶奇だけ変わる。単極子の巻きの密度で流束が混ざる	$U(1)$ の単極子の描像の $\mathbb{Z}_2$ 版で、基準「非可換性を本質的に使う」が弱い。単極子を抑えた作用でも閉じ込めが残るかどうかに論争がある（照合未了）	読 （物理）
自己双対の座標の行列式	各区画で、測度を反自己双対の部分への押し出しと見たときの Jacobian の、区画の間の差	表 1 の 25（スピンと指数定理は一ループで漸近自由の言い換え）に当たる危険が大きい。格子には自己双対の分解が無い	読 （物理）
二次元に落ちた板の「離散の 1-形式対称性は破れない」の定量版を N に一様に	板の閉じ込めを、二次元で離散の 1-形式対称性が自発的に破れないという型の文の格子版と読み、その定量版（張力 $\geq$ 最も安い区画の壁の密度）を N に一様にする	道としては、小さな T^2 の準古典で N を増やす道（Tanizaki–Ünsal の断熱的な連続性の予想と同じ重さ）そのもので、新しいのは読み方だけ。一般化された対称性の文献の次元の条件は照合未了	読 （物理）

07

言えないこと

- (a) どの候補も帯を閉じません。どの候補についても、帯のどの β でも定理を示していません。
- (b) 帯のコンパクト性による還元は還元で、帯を易しくしたとは言いません。帯の中の両側の面積則の仮定は、四次元 $SU(2)$ の格子の中間の結合での閉じ込め（未解決）を含みます。
- (c) Weyl の測度の対数凹性の二次元の試験が通っても、Polyakov の予想にも四次元にも何も含意しません。ブロックの水準の Ginibre の比較は定理として存在しません。
- (d) 二次元の結果が四次元に持ち上がるとは言いません。持ち上がるのは文の形だけです。
- (e) 四つの顔の $SU(2)$ の予想は、どれも見立てです。数値があるのは柱の顔 $f(\ell)$ だけで、それも小さな格子の傾向です。
- (f) 共形な枠の否定は「運動学だけでは面積則は出ない」という見立ての水準の判断で、その枠で別の入力を足した道を否定してはいません。
- (g) この頁の候補が既知の事実の組み合わせでないとは言いません。帯のコンパクト性による還元の補題や、Weyl の測度の候補の射影の対数凹性は、どこかに書かれているかもしれません。

08

五分類の表と依存グラフ

この頁の候補そのものは全て「読（物理）」です。紙の証明を置いたのは、候補の足場になる初等的な事実だけです。

表 3　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	区画を写す全単射の自由エネルギーの恒等式 (1)	初	§02 捩れの向きの柔らかさ	可測な全単射・Jacobian が定まる	—
2	決定論的な写像では余りが面の面積とともに増え、面積則は出ない	読（物理）	§02 の捩れの向きの柔らかさ・26-08 の「決定論的な挟み撃ち」	—	—
3	柱の分解 $\lvert\theta\rvert \le \mathbb{E}\prod_B \lvert\theta_B(\Sigma)\rvert$	初	§02 の柱の捩れのコスト・25-03 の容器の恒等式の枠組み	骨格を止めた条件つきの独立性	—
4	柱の偏り：$\ell \ge 5$ で $SU(2)$ は $U(1)$ の 1/5〜1/7、要る ℓ は $SU(2)$ で伸びない	読	26-09 §07	$\beta = 2.3$（$SU(2)$）・1.3（$U(1)$）・$N \le 8$・枠 3〜12	—
5	四つの顔の $SU(2)$ の予想と、$U(1)$・$\mathbb{Z}_2$ で壊れる場所	読（物理）	§02 表 1	見立て	—
6	$\mathbb{Z}_2$ のガラスの Jensen の挟み (3)	初	§03	$U = \sigma V$ の表示	—
7	ガラスは帯の上半分で秩序相の側、ガラスの道は下半分に限る	読（物理）	§03・26-09 §08	8^4・換算は粗い	—
8	$\mathbb{R}^4 \setminus$直線 $\cong H^2 \times S^2$（共形）と、球とループの偶奇の判定	初	§04 (4)	—	—
9	双曲的な入れ子の面積 $4/3$、半平面のループの双曲面積 $\approx T/d$	初	§04	積分の計算	—
10	共形な枠では運動学だけで面積則は出ず、核心は同じ場所に残る	読（物理）	§04	検討の結果否定的	—
11	帯のコンパクト性による還元：帯の中の比較は固定した β の両側の面積則に還元される	初	26-06 §06 の帯の中の比較の還元の補題	固定した β の両側の面積則・率の一様な正値と連続性・$N \ge N_1$・$M \ge M_0$	—
12	射影の密度 (5) と、$O(3)$ の高さ・方位の分解（結合 $J_{ij} \ge 0$ の XY）	初	§05 Weyl の測度の対数凹性	—	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
13	Weyl の測度の対数凹性の機構：単調性の源と乱れの機構が同じ向き	読（物理）	§05 Weyl の測度の対数凹性	ブロックの水準の比較は定理として無い	—
14	柱の局所の階段関数の予言 (6)：$SU(2)$ で $\beta' < \beta$、$U(1)$ は相で符号が反転	読（物理）	§05 柱の局所の階段関数	$\ell \geq \ell_{\min}$。(6) の数値は無し	—
15	候補「符号の打ち消しとしての閉じ込め」の恒等式 $\theta = \mathbb{E}_P[\tanh(X/2)]$	初	§06 表 2	θ の定義の書き直し	—

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  初  輸送の恒等式 (1)
 2  読  決定論的な写像の余りは面積とともに増える ⟸ 1          物理
 3  初  柱の分解                                          25-03 の枠組み
 4  読  柱の偏りの数値                                    26-09 §07
 5  読  四つの顔の予想 ⟸ 1・2・3・4                        物理
 6  初  ガラスの Jensen の挟み (3)
 7  読  ガラスの道は下半分に限る ⟸ 6                      8⁴・物理
 8  初  共形同値と偶奇の判定 (4)
 9  初  双曲的な入れ子の面積
10  読  共形な枠は否定的 ⟸ 8・9                           物理
11  初  帯のコンパクト性による還元                        26-06 の還元の補題と仮定
12  初  射影の密度 (5) と高さ・方位の分解
13  読  Weyl の測度の対数凹性の機構 ⟸ 12                                  物理
14  読  柱の局所の階段関数の予言 (6) ⟸ 3・4・11                          物理
15  初  θ = E_P[tanh(X/2)]
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。結論の側の節点（四つの顔の予想・ガラスの道の範囲・共形な枠の否定・三つの新しい候補のうち二つの機構と予言）は全て「読（物理）」で、「初」の節点は候補の足場の初等的な事実か、別の章に証明を置いた還元です。帯を渡る文の節点はこの頁にありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 候補の足場の初等的な事実：輸送の恒等式・柱の分解・ガラスの Jensen の挟み・共形同値と偶奇の判定・射影の密度と高さ・方位の分解・$\theta = \mathbb{E}_P[\tanh(X/2)]$	それらから帯を渡る評価が出ること
初 帯の中の比較が、固定した β の両側の面積則に還元されること（26-06 の帯の中の比較の還元の補題、帯の中の両側の面積則の仮定の下）	帯の中の両側の面積則の仮定のどの β での証明。帯を易しくしたこと

言えている	言えていない
読 （物理） 四つの顔と三つの候補の、$SU(2)$ で成り立つと見る理由と $U(1)$ で壊れる場所	どの顔・候補についても、尺度に一様な評価
読 （物理） $\mathbb{Z}_2$ のガラスの道は帯の下半分に限ること・共形な枠は運動学だけでは面積則を出さないこと	下半分でガラスの道が帯の下の端を押し上げること

出典と再現

もの	種別	出典・道具
四つの顔・ガラスの表示・共形な枠の検討	本書の検討	この本の検討の記録（移り変わりの帯を閉じる道の整理・物理の視点からの機構の案）
三つの新しい候補とほかの五つ	本書の検討	この本の検討（帯の候補の検討）。帯のコンパクト性による還元の補題は 26-06 §06
柱の偏り・ガラスの診断の数値	読	26-09
Tomboulis–Yaffe の不等式	典	E. T. Tomboulis, L. G. Yaffe, Commun. Math. Phys. 100 (1985) 313。章 26-01
分数インスタントンの作用	典	Y. Tanizaki, M. Ünsal, arXiv:2201.06166。章 25-02
固定した β の閉じ込めへの入口	抄録で確認	S. Chatterjee, arXiv:2006.16229（本文は照合未了）
照合未了の文献	照合未了	Kazakov–Zheng（格子ヤン–ミルズのブートストラップ）、Patrascioiu–Seiler（$O(3)$ の KT 型の相の議論）、XY の Ginibre の不等式、de Divitiis ら（捩れの境界条件の階段関数）、単極子を抑えた作用の論争、一般化された対称性の Coleman–Mermin–Wagner 型の文献、Dobrushin–Shlosman の判定

この章で使った語 — 四つの顔・適応した剛性 κ_w・箱の磁束の混合 $\delta(L_0)$・柱の捩れのコスト $f(\ell)$・圧力の余裕・$\mathbb{Z}_2$ のガラス・フラストレーション・共形な枠・帯のコンパクト性・Weyl の測度・高さと方位・柱の局所の階段関数・移り変わりの帯（帯）。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：26-11 紫外の制御 — 無限個の段で閉じるとは何か — 二本の道の下にある土台。一段で閉じるとは何かと、連作が止まった場所。

紫外の制御 — 無限個の段で閉じるとは何か

この章は案内です。§01 は未解決の地図です。

この章で分かること — 格子間隔 a を 0 に送ると繰り込みの段の数が無限に増えるとき、「一段で同じ形に戻る」を定数を崩さずに全ての段で示すとは何か。この章の本文は 第 15 部「紫外の制御の試みの記録」の前半（15-00〜15-10）に広げました。この頁には、分かることの五行・紫外の壁の分解の言明・節ごとの案内だけを残します。

前提となる章 — 7-05（繰り込み群の段の列）・7-07（四次元：Bałaban と MRS）・26-00（合流）・27-02（条件の台帳）。

先に言うこと — この章が扱うのは条件の台帳の「紫外の制御」の行で、移り変わりの帯（帯）とは別の課題です。帯より細かい尺度の側だけを扱います。周期の立方の箱での連続極限は、2026-11-10 に公開された構成が示しました（委員会の評価の水準。第二巻）。この章と第 15 部が扱うのは本書の検討が組んだ別の道（捩れた小さな箱と、格子間隔に一様な形）の紫外の制御で、こちらは示されていません。捩れた境界条件・細長い箱での構成と、格子間隔に一様な形の言明は、公開された構成にもありません。第 15 部が置くのは、何を示せばよいかの言明・一行ずつの計算・初等的な補題と、最小の系で測った数で、どれも紫外の制御の一部分を言い直すか、紫外の制御を別の条件に割るだけです。

この章の順序

1. この章で分かること — 五行
2. 紫外の壁の分解 — 有限個の母数で閉じる類と三つの剰余（言明だけ）
3. 第 15 部への案内 — 読む順

00

この章で分かること

- 紫外の制御は、有効密度が「一段で同じ形に戻る」ことを、定数を崩さずに無限個の段で示すことです。段の数は $K = \log_L(L_0/a) \to \infty$ で、一段の損 δ_k の和 $\sum_k \delta_k$ が K に一様に有限なら定数は残ります 初 （15-00）。
- 四次元では結合が無次元なので、一段ごとの g_k^2 の大きさの損の和が $\ln K$ で発散します 初 （一ループの流れの下の算術）。その部分は結合の流れに正確に吸収し、残りを和の有限な大きさか、横に縮む形に閉じ込める必要があります（15-01・15-03）。
- 群に値をとる場では揺らぎの測度が背景に依り、その依存 η_k が難所です。揺らぎの法則が背景に依らない型（辺ごとの熱核の積）では、平らな場の一段の評価の鎖が群の上でそのまま通り $\eta = 0$ です 初 （一段だけ・Wilson の作用と大きな場を含まない。15-07）。
- 粗い一枚の角を固定した最小の系では、不変な曲線の傾き $\sum f^2 = \beta'/\beta$・横の縮み $\lambda = \sum f^4 / \sum f^2$ が一つの射影から決まり、$\lambda \le \max f^2$ です 初 （可換な配位に制限した木の水準・一つの粗い面の周辺分布で見る一段。15-05）。源（毎段注がれる θ^4 の係数）は一ループで測った数です 読 。
- 母数は「引き込む先の一母数の類＋縮む形」で数えるのがよく、二次の結合の比を 2 に保つ類としては一段で閉じません 初 ・ 読 （$SU(2)$・一列四枚・主項。15-06）。Bałaban の四次元の定理は有効結合の小ささを仮定し、外す定理は未発表で、大きな場込みの一段の剰余（結合の一段の正味の括弧）は原典にありません 典 （15-02）。

01

紫外の壁の分解 — 有限個の母数で閉じる類と三つの剰余

有限個の母数 $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$ で番号づけた重みの族 $\{w_\theta\}$ をとり、ブロック化の一段 T が

$$T\big(w_\theta\,(1+\rho)\big) = w_{\Phi(\theta)}\,\big(1 + r_\theta[\rho]\big) \tag{1}$$

の形をとるとします（Φ は母数の流れ、$r_\theta[\rho]$ は剰余）。次の四つから紫外の制御が段数に一様に従う、という形の言明を置きます 仮 （言明の形だけ。詳しくは 15-03 §02）。

- 類が閉じる条件：母数の個数が段に依らず有限で、類は一段の写像の引き込む先の一母数の類と、一段ごとに縮む形の座標からなる（最小の系での根拠は 15-06）。
- 結合の流れの剰余の条件：$\beta_{k+1} = \beta_k - 8b_0 \ln L + O(1/\beta_k)$。
- 形の剰余の条件：横の縮み $\lambda < 1$ と一段の剰余 $\varepsilon(\beta)$ で、外れが $\sup_j \varepsilon(\beta_j)/(1-\lambda)$ に押さえられる型（15-03 §04）。
- 実効の結合の定義と連続性：定義域の中の連続性。

結合の一段の正味の括弧と実効の結合の定義と連続性から結合が小さく留まる条件が出るのは結合の小ささの帰納の補題 初 （15-03 §03。結合の一段の正味の括弧を β の変数で書いたものが結合の流れの剰余の条件）、外れの上限は等比級数の算術 初 です。示されていないのは、四次元の本当の一段で類が閉じる条件と大きな場込みの結合の流れの剰余の条件が立つことで、それが閉じない四行（15-08）です。

02

第 15 部への案内 — 読む順

読む順は三本あります（15-00 §04）：最短は 15-00 → 15-03 → 15-09、計算の筋は 15-04 → 15-05 → 15-06、壁の筋は 15-02 → 15-07 → 15-08 です。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
この頁は要約と案内です。言えている範囲は第 15 部の各章の表にあります	本書の道の形の紫外の制御（第 15 部のどの章も示していません。周期の立方の箱の連続極限は公開された構成が示しました）
仮 紫外の壁の分解（言明の形）	四次元の本当の一段で類が閉じる条件・結合の流れの剰余の条件・形の剰余の条件が立つこと

出典と再現

出典は第 15 部の各章の出典表にあります（原典の書誌は 15-02 の出典表）。

この章で使った語 — 紫外の制御・段の数・同じ形・紫外の制御の三条件・紫外の壁の分解・類が閉じる条件・結合の流れの剰余の条件・形の剰余の条件・結合の連続性・引き込む先の類・横の縮み。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：26-12 帯の議論の篩 — 七つの試験の相手。あわせて読むなら 15-00 入口 — 紫外の制御とは何か。

帯の議論の篩 — 七つの試験の相手

この章は未解決の地図です。§05 は本書の検討（小さい格子の計算）です。

この章で分かること — 帯を閉じる議論は、これまで「U(1) の転移と区別する」という基準で試されてきました（26-06 §08）。この章は試験の相手を七つに増やします：U(1) の弱結合、Z_2 の弱結合、有限の非可換群（四元数群・二項正二十面体群など）、随伴 Higgs の極限（U(1) の Wilson の作用になる）、SU(2) の基本＋随伴の混合作用の一次の転移の線とその端点、SU(N) の体積転移、中心の無い群 G_2。相手ごとに、どの型の議論を落とすかを書き、本書の Lean の定理と帯の候補の言明を七つの相手で「真・偽・定義されない」に分けた表を置きます。欄ごとに、本書の計算・Lean で確かめたもの、文献で確かめたもの、確かめていないものを分けます。最後に、小さい格子の計算で見たこと（有限群の平坦な接続の数え、一点の格子での冪、混合作用のヒステリシス、縦横比を止めた U(1) の定数、項ごとの符号の試し）を、条件つきで並べます。発想の全体の地図は 16-11 に在ります。

前提となる章 — 26-04 構造だけでは渡れない、26-06 繰り込みの比較、21-05 渦の最小作用、5-06 U(1) と非可換の違い、5-10 有限群の格子ゲージ理論。

先に言うこと — **この章は、帯を越える道を与えません。証明は在りません。**七つの相手は、議論を落とすための試験で、どの相手についても新しい定理は置きません。相手の模型の性質のうち、本書が原典か総説の当の箇所で確かめたものだけを典 とし、それ以外は「文献の記述（本書は未確認）」として本文の根拠にしません。**混合作用の端点の話は、格子間隔を止めた上のことです。連続の SU(2) の理論に質量ギャップが無い、という意味ではありません。**試験の相手を増やすという見方そのものは、専門家には知られていることかもしれません。本書はこれを新しい結果ではなく、本書の検討が使う篩として書きます。

この章の順序

1. 篩の考え方 — 二つの向きの試験 — 閉じ込めの量とギャップの量
2. 七つの相手 — 相手ごとの性質と、落とす議論
3. 議論の型と、落とす相手（表 1）
4. Lean の定理と帯の候補の言明 × 七つの相手（表 2）
5. 小さい格子の計算で見たこと — 五つ
6. この章が言っていないこと

札 — 初 ＝この章に導出を置いた手の勘定／典 ＝原典か総説の当の箇所を確かめた文献の事実／読 ＝本書の小さい格子の数値の読み（格子・掃引・種を添える）／仮 ＝推し量り・見込み／Lean ＝本書の Lean の定理（強結合の窓の中だけ、格子間隔は固定）。くわしくは 6-00 の「札」。

記号。SU(2) の Wilson の作用は $\beta\sum_p(1-\frac{1}{2}\operatorname{tr}U_p)$、混合作用の結合は基本表現 β_F・随伴表現 β_A、随伴 Higgs のとびの結合は J と書きます。ΔF は捩れた箱の渦の自由エネルギー、θ は渦の比です（19-02）。板の張力の量 $s(N)=N^2\sigma_N$ は 26-06 の記号で、一ループの傾きの s とは別の量です。

言葉。**最大トーラス**は SU(2) の中の可換な部分群 $\{\mathrm{diag}(e^{i\phi},e^{-i\phi})\}$（U(1) と同じ形）。**混合作用**は Wilson の作用（基本表現の項）に随伴表現の項を足した作用。**一次の転移**は面の平均などが結合について跳ぶ転移、**臨界の端点**は一次の転移の線が終わる点。**体積転移**は、格子の作用に由来する、温度に依らない（零温度の）転移。連続極限の物理ではなく、格子の上の現象です。**平坦な接続**（平らな配位。21-07 の言い方）は全ての面のホロノミーが単位元（捩れが在るときは捩れの符号）に一致する配位。**凍った相**は、有限群のゲージ理論で大きい β の側の、平坦な接続の近くに張り付いた相です。

01

篩の考え方 — 二つの向きの試験

帯を閉じる議論が、別の模型でも同じ形で通ってしまい、しかもその模型で結論が偽なら、その議論はどこかで誤っているか、結論に足りません。これが篩です。これまでの篩は U(1) 一つでした：U(1) は帯の中（$\beta\approx1.01$）に閉じ込めない相への転移を持つので、帯を閉じる議論は U(1) を区別しなければなりません（26-06 §08）。

篩には二つの向きがあります 仮 。

- **閉じ込めの量**（張力・渦の比・張力の倍化の不等式など）を芯に置く議論は、閉じ込めない相を持つ相手で偽にならなければなりません。
- **ギャップの量**（相関長・有限の箱の混合）を芯に置く議論は、閉じ込めないがギャップは在る相手で真でなければなりません。閉じ込めの量はそこで偽でもかまいません。Z_2 の弱結合の相と中心の無い群がその候補ですが、そこにギャップが在ることは、本書は文献で確かめていません（相手 2・相手 7）。

質量ギャップと閉じ込めは別の言明で（16-09 §03）、篩をどちらの向きで使うかは、芯の言明がどちらの量かで決まります。

02

七つの相手

相手 1 — U(1) の弱結合

性質。四次元の U(1) の格子ゲージ理論は、弱結合で閉じ込めない相を持ちます。Villain の形の作用について、Wilson ループの期待値に Coulomb 型の下界があり、電荷は閉じ込められないことが示されています 典 （Guth 1980、要旨で確かめた）。Fröhlich–Spencer は、四次元の U(1) の格子ゲージ理論で質量の無い（QED の）相への閉じ込めの外れる転移が在ることを別の方法で示し、主に Villain の近似で書いたうえで、

全ての結果を Wilson の作用の模型へ延ばせる、と本文で述べています（延長は別の論文の技法による）典（1982、前刷りの要旨と §1 で確かめた）。転移の位置 $\beta \approx 1.01$ は本書の記録の値です（26-06 §04）。

SU(2) の軸の上の場所。SU(2) の元を最大トーラスに制限すると $\frac{1}{2}\operatorname{tr}\operatorname{diag}(e^{i\phi}, e^{-i\phi}) = \cos\phi$ なので、SU(2) の Wilson の作用 $\beta(1 - \frac{1}{2}\operatorname{tr} U_p)$ は、最大トーラスの上では U(1) の Wilson の作用 $\beta(1 - \cos\phi_p)$ と同じ式になります（同じ β）初。言えるのは作用の式が一致することまでで、SU(2) の測度が最大トーラスに制限されるわけではありません。同じ β の U(1) の模型は $\beta \gtrsim 1.01$ で Coulomb の相に在ります。SU(2) の軸のこの区画が、U(1) を区別する入力の要る区画だ、というのが本書の見立てです仮。

落とす議論。鏡映正値性・中心と双対の恒等式・転送行列の正値性だけの議論（26-04）。縦横比を止めた繰り込みの比較は、弱い側では U(1) でも一様な定数で立つので、弱い側の比べの言明は U(1) を区別しません（§05 の (d)）。U(1) を止めるのは、軌道が転移の区画を跨ぐ所です。ただし縦横比を延ばす量化では、弱い側で既に U(1) が落ちます。芯の言明を書くときは、量化を明記します。

相手 2 — Z_2 の弱結合

性質。四次元の Z_2 の格子ゲージ理論は一次の転移を持ちます典（Creutz–Jacobs–Rebbi 1979、要旨で確かめた。位置は自己双対の点 $\beta \approx 0.44$、26-06 §04 の記述）。弱結合の側は閉じ込めない相で、そこでギャップが在ることは文献の記述（本書は未確認）。

落とす議論。ギャップの量を芯に置くと称して、Z_2 の弱結合で偽になる量を使う議論。張力の倍化の不等式は、Z_2 の閉じ込めない相では板の張力の量 $s(N)$ が 0 へ向かうので偽です（26-06 §08）読。Z_2 の弱結合の相にギャップが在る、という文献の記述が正しければ、張力の倍化の不等式はギャップに必要な量ではないことになります。同じ条件のもとで、トーラスの上の大域の対数 Sobolev 不等式は、ホロノミーの部門の間の混合が遅いので成り立たない見込みで、ギャップの量としては通らないことになります仮。

相手 3 — 有限の非可換群

相手。SU(2) の有限部分群：四元数群 Q_8（位数 8）、二項正四面体群（24）、二項正八面体群（48）、二項正二十面体群（120）。どれも非可換で、中心に -1 を含みます。有限群のゲージ理論は大きい β で凍った相に入る見込みです仮。凍る β の値は文献の記述（本書は未確認）。

落とす議論。「代数としての非可換」だけを入力にする議論。有限の非可換群は非可換ですが、弱結合では SU(2) の連続の揺らぎ（漸近自由）を持ちません。本書の記録では、Q_8 で被覆の不等式と β についての単調性が破れる点が在ります（21-01：三次元・背景なしの β についての単調性）読。凍った相の値の水準は §05 の (a)。

相手 4 — 随伴 Higgs の極限（U(1) の Wilson の作用になる）

模型。SU(2) の Wilson の作用に、各点の単位ベクトル $n(x) \in S^2$（随伴表現）の項 $-J\sum_{x,\mu} n(x)\cdot R(U_{x,\mu})\, n(x+\hat{\mu})$ を足します（R は SU(2) から SO(3) への写像）。

$J=\infty$ での形 初。$J \to \infty$ では重みは $R(U_{x,\mu})n(x+\hat{\mu}) = n(x)$ の配位に集まります。SO(3) は S^2 に推移的に働くので、ゲージ変換で全ての点で $n(x) = e_3$ にできます。すると条件は $R(U)e_3 = e_3$、すなわち U が σ_3 と可換、すなわち U は最大トーラスの元です。このとき面の積も最大トーラスに入り、相手 1 で見た作用の式

の一致から、作用は U(1) の Wilson の作用（同じ β）になります。残るゲージの自由度は U(1) です。極限の測度が実際にこの集合に集まることの確認は、形式的な極限として扱っています。

族として。J の全ての値で、群は連続かつ非可換で、中心 $\mathbb{Z}_2$ は随伴の場に自明に働くので中心の対称性は残り、重みは正です 初 。鏡映正値性もこの族で保たれる見込みです 仮 。

落とす議論。「群が連続で非可換・中心の対称性・重みの正値性」だけを入力にして、族の全ての J について一様に閉じ込めを結論する議論。これらの入力は族の全体で同じで、$J=\infty$ は U(1) の Wilson の作用で、相手 1 の閉じ込めない相を持ちます（Fröhlich–Spencer、相手 1） 典 。漸近自由の符号を入力に足しても、事情は変わらない見込みです 仮 。随伴の実スカラーを一つ足した連続の理論（長さを止めない随伴スカラーの理論）の一ループの係数は、4-06 の式 (3) の規格化（$16\pi^2 b_0$）で、純 SU(2) の $\mathbf{22/3}$ から実スカラー一つぶん（複素スカラーの半分）の $\mathbf{1/3}$ を引いて 7 で、正のままです 初 。ただし $J=\infty$ の極限の理論そのものは U(1) で、漸近自由ではありません。この相手が落とすのは、族の全ての J で成り立つ入力だけから、J に一様に閉じ込めを結論する議論です。

相手 5 — SU(2) の混合作用の一次の転移の線とその端点

模型。作用 $\sum_p \left[\beta_F\left(1-\frac{1}{2}\operatorname{tr}U_p\right)+\beta_A\left(1-\frac{1}{3}\left((\operatorname{tr}U_p)^2-1\right)\right)\right]$。$\beta_A=0$ が Wilson の作用です。随伴の項は中心の符号を見ません。

性質。SU(2) の Wilson の作用の一般化（SU(2)・SO(3)・Z_2 の模型を極限に含む）で、SO(3) と Z_2 の一次の転移の線が三重点で合流し、臨界の端点まで続くことが、四次元の Monte Carlo で報告されています 典 （Bhanot–Creutz 1981、要旨で確かめた）。端点の位置は文献で揺れています。Bhanot–Creutz が小さい格子で見た見かけの端点はおよそ $(\beta_F,\beta_A)\approx(1.5,\,0.9)$ です（Gavai の本文の引用による）。Gavai は 6^4〜16^4 の格子で $\beta_A=1.25$ に一次の体積転移を見ず、端点は $\beta_A\geq 1.25$ に在る見込みとしています 典 （Gavai 1996、要旨と本文で確かめた）。SU(3) の同じ型の混合作用では、端点に近づくとスカラー（0^{++}）のグルーボールの質量が下がり、ほかのグルーボールの質量は変わらず、端点は 0^{++} の相関長だけが発散する臨界点と矛盾しない、と報告されています 典 （Heller 1995、要旨で確かめた。張力と転移の温度の比はほぼ一定）。SU(2) の端点でスカラーの質量が 0 に向かうことは、文献の記述（本書は未確認）。線の両側が閉じ込めの相であることは、線が端点で終わり Wilson の軸の閉じ込めの相と滑らかにつながることからの推論です 仮 。

本書の計算。$\beta_A=1.5$・2.0 では、4^4 の格子でも強いヒステリシスが見えます（§05 の (c)） 読 。端点の位置はこの計算からは読みません。

落とす議論。「β の軸に転移が無い／段の写像に不動点が無い」を、局所・鏡映正値・純ゲージの作用の類の上で使う議論。この類の中に一次の転移の線と臨界の端点が在ります。これらは Wilson の軸に固有の事実で、作用の類へは延びません。公開された構成の段 0 は Wilson の作用でなく表示つきの有効な作用なので（16-03 §05）、これは飾りの注意ではありません 仮 。「率が一様に正」を作用の類で使う議論は、この相手では判定できません：一次の線をまたいでも張力は跳ぶだけで正のままでありえ、破るのは端点でギャップが閉じる場合だからです。同じ理由で、端点でスカラーの質量が格子の単位で 0 に向かい張力が残るなら、「張力が在れば、作用の類に一様な柔らかい議論でギャップが出る」は偽になりますが、SU(2) についてはこの部分を確かめていないので、判定できない、に置きます（16-11 表 3）。

注意。端点は格子間隔を止めた上の現象です。連続の SU(2) の理論に質量ギャップが無い、という意味ではありません。帯の議論が使ってよいのは「繰り込まれた軌道の上に居る」ことで、「局所・鏡映正値・純ゲージ

の作用の類に居る」だけでは足りない、というのがこの相手の教えです 仮 。

相手 6 — SU(N) の体積転移

性質。SU(N) の面の作用（Wilson の作用）では、強結合と弱結合の間の移り変わりが、SU(4) では滑らかな移り変わりに見え、SU(6) では強い一次の体積転移になっている、と報告されています 典 （Lucini–Teper–Wenger 2002、本文で確かめた）。SU(5) から一次になること、転移の両側が閉じ込めであることは、文献の記述（本書は未確認）。

落とす議論。相手 5 と同じ型（Wilson の軸に転移が無いことに頼る議論）が、SU(N) 一般へ延びないこと。SU(N) 一般の質量ギャップ（A-08 §06）を目指すなら、この篩も通らなければなりません。

相手 7 — 中心の無い群 G_2

性質。G_2 は中心が自明で、そのため基本表現の「クォーク」はグルーオンに遮蔽され、静的なクォークの間の弦は切れ得ます。それでも G_2 のゲージ理論は閉じ込める（論文の意味で）と報告されています 典 （Holland–Minkowski–Pepe–Wiese 2003、要旨で確かめた）。質量ギャップが在ることは文献の記述（本書は未確認）。

落とす議論。中心の捩れ・渦・渦の比 θ で書いた量は、G_2 ではそもそも定義されません 初 （中心の元が無いので捩れが無い）。張力の倍化の不等式や非可換性を使う不等式の四つの顔を芯に置く議論は、全ての群の質量ギャップには届きません。G_2 には別の量（境界の場への応答など）が要ります（16-11 §06）。

03

議論の型と、落とす相手

表 1　議論の型と、それを落とす相手（「落とす」は、その相手でも同じ入力が揃い、結論が偽になるか定義されないこと）

議論の型（入力）	落とす相手	理由と札
鏡映正値性・中心と双対の恒等式・転送行列の正値性だけ	U(1)・Z_2	同じ構造がそこでも成り立つ（26-04） 初
代数としての非可換だけ	有限の非可換群	非可換だが、連続の揺らぎを持たない。単調性の破れ（21-01、三次元・背景なし） 読
群が連続で非可換・中心の対称性・重みの正値性だけから、族に一様に閉じ込めを結論する	随伴 Higgs の族（$J=\infty$ は U(1)）	族の全体でこれらが同じ（相手 4） 初 。U(1) の Wilson の作用の閉じ込めない相 典 （Fröhlich–Spencer）
局所・鏡映正値・純ゲージの作用の類に居ることと、「軸に転移が無い／段の写像に不動点が無い」	混合作用の一次の線	類の中に一次の転移の線と臨界の端点 典 読
作用の類で「率が一様に正」、または作用の類に一様な柔らかい議論で「張力 ⇒ ギャップ」	混合作用の端点（判定できない）	端点でギャップが閉じる場合だけ破れる。SU(3) の類似は 典 、SU(2) は本書は未確認
Wilson の軸に転移が無いことを SU(N) 一般で	SU(N) の体積転移	SU(6) で強い一次 典
中心の捩れ・渦で書いた量だけ	G_2	量が定義されない 初
ギャップの量と称して、大域の混合を使う	Z_2 の弱結合（ギャップが在るなら）	部門の間の遅い混合 仮 。Z_2 の弱結合の相のギャップは文献の記述（本書は未確認）

議論の型（入力）	落とす相手	理由と札
縦横比を止めた、損失を許す繰り込みの比較（弱い側）	U(1)（弱い側では落とさない）	弱い側では U(1) でも一様な定数で立つ（§05 (d)） 初 読 。区別の中身は転移の区画に押し込まれる

04

Lean の定理と帯の候補の言明 × 七つの相手

表 2 は、行に本書の Lean の定理（同じ型の定理が相手の模型でも成り立つか）と帯の候補の言明、列に SU(2) の Wilson の作用（基準）と七つの相手を置きます。欄の札：Lean 本書の Lean、初 この章の導出、読 本書の記録の数値、典 文献で確かめた。「—」は本書が確かめていない欄で、推し量りで埋めていません。「定義されない」は、その相手で量の定義に要るもの（中心の捩れ、連続の生成子）が無いことです。

表 2　真・偽・定義されない

行	SU(2) Wilson（基準）	U(1) 弱結合	Z_2 弱結合	有限の非可換群	随伴 Higgs $J=\infty$	混合作用の端点	SU(N) 体積転移
強結合の窓の無限体積の極限・質量ギャップ・面積則（20-03・20-04・20-06）	真 Lean （窓の中）	—	—	—	—	対象外（端点は窓の外）	—
鏡映正値性・チェス盤・$\theta \geq 0$（20-01・21-06）	真 Lean	—	—	—	—	—	—
薄い渦の床（21-02）	真 Lean	—	—	—	—	—	—

行	SU(2) Wilson（基準）	U(1) 弱結合	Z_2 弱結合	有限の非可換群	随伴 Higgs $J=\infty$	混合作用の端点	SU(N) 体積転移
太い渦の床（21-03。捩れた真空を使う）	真 Lean	—（定義が移らない：作用 0 の捩れた真空が無い）	—（同じ）	—	—（定義が移らない）	—	—
渦の最小作用は正 $S_N>0$（21-05。捩れた真空を使う）	真 Lean	—（定義が移らない：作用 0 の捩れた真空が無い）	—（同じ）	真 初 （$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}$ を含む SU(2) の部分群）	—（定義が移らない）	—	—
張力の倍化の不等式	開	偽 読 （26-06 §08）	偽 読 （26-06 §08）	—	偽 初 読 （$J=\infty$ は U(1) 初 、U(1) の値は 読 ）	—	—
捩れの向きの柔らかさ	開	—	定義されない 初	定義されない 初	—	—	—
箱の磁束の混合	開	—	—	—	—	—	—
柱の捩れのコスト	開	—	—	—	—	—	—
圧力の余裕	開	—	—	—	—	—	—
物理の大きさの箱の混合の言明	開（強い形の質量ギャップの言い換え）	—	—	—	—	—	—

欄の根拠。

- **$S_N > 0$ の行** 初 。S_N の定義（21-05）は、塊の枠を捩れた真空（リンクに四元数 $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}$ が載る、作用 0 の配位）に止めます。四元数の $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}$（反可換な対）を含む SU(2) の有限部分群（この章の四つの群）では、枠の捩れた真空は $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}$ だけでできているので、部分群の配位として作れます。内部のリンクを部分群の元に限った配位は、SU(2) の配位の一部なので、作用の下限は SU(2) の下限より小さくなりません。SU(2) の下限は、塊の大きさに一様に正です（21-05 の定理 `VortexPos.Svortex_ge_unif`）。だから部分群でも渦の最小作用は正です（Lean の定理からの一行の帰結）。U(1) と Z_2 のような可換な群では、一つの捩れを作用 0 では満たせないので（面の積を閉じた面の上で掛けると捩れの符号だけが残る）、作用 0 の捩れた真空が無く、定義が移りません。
- **移した定義での見込み** 仮 。背景の捩れを外した形に定義を移せば、測る捩れの流束 π を m^2 枚の面に一様に分けた配位の作用は、横の位置の数 N^2 を掛けて $N^2 m^2(1-\cos(\pi/m^2)) \le N^2\pi^2/(2m^2)$ で、塊を大きくすると 0 に向かいます（初 ：移した定義の上で）。同じ広げ方は、SU(2) でも背景の捩れを外せば最大トーラスの中でできます。SU(2) で渦の最小作用が正になるのは、背景の捩れの真空（四元数の $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}$）と可換なのが中心の ± 1 だけで、流束を連続に広げられないからです（21-05 の寄り道）。
- **張力の倍化の不等式の行** 読 。U(1) の Coulomb の相では $s(N)$ が尺度に依らず一定でちょうど境、Z_2 の閉じ込めない相では $s(N) \to 0$（26-06 §08。閉じた式の模型と小さい格子の値）。
- **「定義されない」の欄** 初 。G_2 は中心が自明なので、中心の捩れで書く量（θ、渦の床、張力の倍化の不等式、四つの顔のうち捩れか中心の磁束を使う全て）が無い。捩れの向きの柔らかさは捩れの生成場に沿う微分を使うので、離散の群（Z_2・有限群）では定義されない。
- **「—」の欄について**。本書の Lean の定理（A-04 表 4g と、21-05・21-07・20-06 の頁）の言明を読んだ範囲では、強結合の窓・鏡映正値性・チェス盤・$\theta \ge 0$・薄い渦の床の証明は、SU(2) の非可換性でなく、群の別の構造（Dobrushin の条件、鏡映、中心の元 -1、コンパクト性）に依る型で、U(1)・Z_2・有限群へ移る見込みです 仮 。捩れた真空を使う定理（太い渦の床・渦の最小作用）は、U(1)・Z_2 へは定義ごと移りません。各定理の証明を相手の模型へ移して確かめてはいないので、表では「—」にしました。四つの顔の U(1) での振る舞いの見立ては 26-06 §07 表 5 に在ります（物理の見立て）。

表 2 から読めること 仮 。基準の列と相手の列で値の違う行は、いまのところ張力の倍化の不等式だけです（U(1)・Z_2 で偽、読 ）。$S_N > 0$ の行は、有限の非可換群で真（初 ）、U(1) では定義が移りません。本書の SU(2) に固有の事実がどれも配位の作用についての事実であることは、16-11 §03 に在ります。芯の候補は「U(1) の弱結合で偽、かつ混合作用の端点の型の点で偽（端点でギャップが閉じるなら。SU(2) では本書は未確認）」の両方を満たす言明から選ぶ、という基準を置くと、表 2 の「—」を埋めることがそのまま次の仕事になります。

05

小さい格子の計算で見たこと

どれも小さい格子の浮動小数の計算で、一回の走りの値は「見えた」「試しでは破れなかった」までです。台本は本書の検討のもので、この章のために走らせ直しました（結果は下に書きます）。

(a) 有限群の平坦な接続の数え（1^4 の格子）

設定。1^4 の格子（格子点一つ、リンク四本、面六枚）。凍った極限（$\beta \to \infty$）では、分配関数は平坦な配位の数に比例します。捩れの無い側 Z_0 は、四本のリンクの元が互いに全て可換な四つ組の数。捩れの在る側 Z_1 は、$[U_1, U_2] = -1$（交換子が -1）で、ほかの五つの対が可換な四つ組の数です。

手の勘定 初 （Q_8 の Z_1）。$Q_8 = \{\pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\}$ で反可換な対 (U_1, U_2) は、軸の違う二つの非中心の元で $6 \times 4 = 24$ 通り。U_3, U_4 は U_1 とも U_2 とも可換なので中心の ± 1 で、$2 \times 2 = 4$ 通り。$Z_1 = 96$ です。

表 3　平坦な接続の数（全数え上げ。種は無い） 読

群	位数	Z_0	Z_1	$\ln(Z_0/Z_1)$
Q_8	8	736	96	2.037
二項正四面体群	24	5856	96	4.111
二項正八面体群	48	18816	384	3.892
二項正二十面体群	120	76320	480	5.069

走らせ直した結果、四つの群の Z_0・Z_1 は上の値と一致しました。読み：凍った相では、捩れ一つの自由エネルギーは L に依らない定数の型です（1^4 だけで見た値）。

(b) 一点の格子での冪（SU(2)、1^4）

手の勘定 初 。作用 $S = \sum_{\mu<\nu} (1 - \frac{1}{2} z_{\mu\nu} \operatorname{tr} P_{\mu\nu})$、捩れは $z_{12} = -1$。$Z(\beta) = \int e^{-\beta S}$ は、最小作用の配位の集合が次元 m の多様体で横の Hessian が退化しなければ $Z \sim C \beta^{-(12-m)/2}$（リンク四本で 12 次元）で、$\beta \langle S \rangle = -\beta \, d \ln Z / d\beta \to (12-m)/2$ です。捩れの在る側：最小は U_1, U_2 が反可換（$U_1 = i\, n_1 \cdot \sigma$、$U_2 = i\, n_2 \cdot \sigma$、$n_1 \perp n_2$：3 次元）で $U_3, U_4 = \pm 1$。$m = 3$ なので $\beta \langle S \rangle \to 9/2$。捩れの無い側：四本が一つの最大トーラスに入る配位（トーラスの選び 2 次元＋角 4 つ：6 次元）で $\beta \langle S \rangle \to 3$。この族は中心の点で次元が跳ねるので、そこから対数の補正が入る見込みです 仮 。比は $Z_1 / Z_0 \sim c\, \beta^{-3/2}$（対数の補正つき）。

計算 読 （Metropolis、鎖 4000 本 × 3000 掃引、最初の 1000 掃引を捨てる、種一本、誤差は区間平均の統計だけ）。

β	**捩れ在り** $\beta\langle S\rangle$	**捩れ無し** $\beta\langle S\rangle$
30	4.545(3)	2.862(2)
300	4.498(3)	2.897(2)
3000	4.497(2)	2.860(3)

読み：捩れの在る側は $\beta = 300$・3000 で $9/2$ に合い（$\beta = 30$ は 4.545）、無い側は 3 より 0.10〜0.14 下です。冪 $-3/2$ の差は見えました。対数の係数はこの計算からは決まりません（$\beta = 3000$ の値が 300 より下がっていて、平らな向きの熱化が遅い疑いがあります）。走らせ直し：$\beta = 300$ を同じ種で走らせ、4.4977(33)・2.8970(19) で一致しました。

(c) 混合作用のヒステリシス（SU(2)、4^4）

設定 読 。相手 5 の作用、4^4 周期、Metropolis（部分格子ごとの一斉更新）。β_F を $0 \to 2.5$ と上げてから下げ、各点 80 掃引、冷えた初期配位。種は各 β_A で一本（$\beta_A = 2.0$ だけ二本）。面の平均 $\frac{1}{2} \operatorname{tr} P$ の「下り − 上り」の最大を見ます。

β_A	下り − 上り の最大（その β_F）	読み
0	0.023 以下（全域）	ヒステリシス無し。$\beta_F = 2.0$ で 0.49〜0.52、2.5 で 0.65
1.0	0.079（1.25）、0.063（1.5）	揺らぎと区別しにくい大きさ
1.5	0.317（1.0）、0.165（1.25）	強い
2.0	0.413（0.5・0.75）、0.205（1.0）。別の種で 0.516（0.5）・0.430（0.75）・0.311（1.0）	強い

同じ走りの中に逆符号の差が最大 0.08 の大きさで出ている（$\beta_A = 2.0$・$\beta_F = 0$ で $+0.076$ など）ので、0.08 以下の差はこの計算では揺らぎと区別しにくい大きさです。読み：$\beta_A = 1.5$・2.0 では 4^4 でも強いヒステリシスが見えました。$\beta_A = 1.0$ の弱い差は、4^4 の有限の大きさの効果でありえます（大きい格子で一次の転移が消えることを報告した Gavai の見直しの型）。端点の位置はこの計算からは読みません。ヒステリシスは遅い力学でも出るので、端点での質量や張力もこの計算からは出ません。走らせ直し：同じ種で四つの β_A を走らせ、全ての値が一致しました。

(d) 縦横比を止めた U(1) の定数

手の勘定 初 。U(1) の Coulomb の相の板の近似（26-03 の式 (4) で、$e^2 = 1/\beta$、渦の面積 M^2、横の面積 N^2 と読む）$\theta(N, M, \beta) \approx 2\exp(-M^2/(2\beta N^2))$ を使い、縦横比 $r = M/N$ を止めると

$$\frac{\theta(2N, 2M, \beta)}{\theta(N, M, \beta')} = \exp\Big(\frac{r^2}{2}\Big(\frac{1}{\beta'} - \frac{1}{\beta}\Big)\Big)$$

で、N に依りません。$\beta' = \beta - c$ と置くと $1/(\beta - c) - 1/\beta = c/(\beta(\beta - c))$ は β について減るので、$\beta \geq \beta_1$ の全体で一様に

$$K = \exp\Big(\frac{r^2 c}{2\beta_1(\beta_1 - c)}\Big) \tag{1}$$

で繰り込みの比較の形 $\theta(2N, 2M, \beta) \leq K\theta(N, M, \beta - c)$ が立ちます（近似の式の上で）。

計算 読 （近似の式の数値の走査：$\beta \in [\beta_1, 10^4]$ を 4000 点、$N = 2, 4, 8, 16, 64$、$r = 1, 2, 4$。種は無い）。走査の上限は式 (1) と一致しました。例：$c = 0.258$・$\beta_1 = 3$ で $r = 1, 2, 4$ に $K = 1.016,\ 1.065,\ 1.285$。$c = 0.258$・$\beta_1 = 10$ で $1.0013,\ 1.0053,\ 1.0214$。走らせ直して同じ値を得ました。

読み：縦横比を止めた比べは、弱い側では U(1) でも「好きな速さ c で強結合へ走る」形で一様に立ち、非可換性を何も使いません。$K(r)$ は r とともに限りなく育つので、横を止めて縦を延ばす量化では、弱い側で既に U(1) が落ちます。近似の式は単極子の効果（β が有限で $e^{-c\beta}$ の程度）を落としているので、真の U(1) で同じ定数が立つかは確かめていません。

(e) 項ごとの符号の試し（SU(2)、1^4）

問い。面ごとに別の結合 β_p を置いたとき、ΔF（背景 $z_{12} = -1$ の上で、測る捩れ z_{34} の有無）は各 β_p について増えるか。$\partial \Delta F/\partial \beta_p = \langle E_p\rangle_{z_{34}=-1} - \langle E_p\rangle_{z_{34}=+1}$（$E_p = 1 - \frac{1}{2} z_p \operatorname{tr} P$）の符号を見ます 初 （$\Delta F = \ln Z_{z_{34}=+1} - \ln Z_{z_{34}=-1}$ の微分）。

計算 読 （Metropolis、鎖 3000 本 × 800 掃引、最初の 200 掃引を捨てる、β_p は $[0.2, 3.0]$ の一様乱数で 6 枚ぶん。随伴の項なしで 6 組、随伴 $\beta_A = 1.0$ つきで 2 組、合わせて 48 個の差）。48 個とも正で、最小の差は

0.029（β_p の一つが 0.2 の組）。統計の比は 58〜1700（区間平均の誤差で、自己相関のため小さめに出ている可能性はあるが、符号は動きません）。走らせ直し：最初の 2 組（種 1）を走らせ、全ての値が一致しました。

読み：1^4 は六枚の面が一点でつながった特殊な格子で、β_p は 3 までなので、「項ごとの単調性が立つ」とは言えません。有限群 Q_8 で似た単調性が破れる（21-01：三次元・背景なしの β についての単調性で、条件はこの試しと違う）のとの対照は、記録に残す価値があります。次に試す格子は細長い箱です（16-11 §05）。

06

この章が言っていないこと

- 帯を越える道を与えていません。証明は在りません。
- 混合作用の端点の話は格子間隔を止めた上のことで、連続の SU(2) の理論に質量ギャップが無い、という意味ではありません。SU(2) の端点の位置は文献で揺れており、端点でスカラーの質量が 0 に向かうことは、本書は確かめていません。
- 表 2 の「—」の欄について、真とも偽とも言いません。
- 七つの相手の性質のうち「文献の記述（本書は未確認）」と書いたものは、本文の主張の根拠にしていません。
- 小さい格子の値から、大きい格子や連続の理論の結論を出していません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
Lean 表 2 の基準の列（本書の定理、強結合の窓の中・格子間隔は固定）	相手の模型での同じ型の定理（「—」の欄）
初 最大トーラスの上で SU(2) と U(1) の Wilson の作用の式が一致すること。随伴 Higgs の $J=\infty$ が U(1) の Wilson の作用になること（形式的な極限）。随伴の実スカラー一つで一ループの係数が 7（正）。S_N の行（有限部分群で正、可換な群で定義が移らない）。G_2 と離散の群で定義されない欄。Q_8 の $Z_1=96$。1^4 の冪の勘定。縦横比を止めた U(1) の定数 (1)（近似の式の上で）	極限の測度の集中の確認。真の U(1) での一様な定数。移した定義での $S_N=0$
典 U(1) の閉じ込めない相（Villain の作用、Wilson の作用への延長は Fröhlich–Spencer の本文）。Z_2 の一次の転移。混合作用の一次の線と臨界の端点、端点の位置の見直し（$\beta_A \geq 1.25$ の見込み）。SU(3) の端点に近づくとスカラーの質量が下がること。SU(6) の強い一次の体積転移。G_2 の中心が自明で弦が切れ得ること	SU(2) の端点の質量、SU(5) の体積転移、Z_2 の弱結合・G_2 のギャップ、有限群の凍る β
読 有限群の平坦な接続の数（全数え上げ）。1^4 の SU(2) の $\beta\langle S\rangle$（4000 × 3000、種一本）。4^4 の混合作用のヒステリシス（各点 80 掃引、各 β_A で種一本、$\beta_A=2.0$ は二本）。項ごとの符号の 48 個（3000 × 800）	端点の位置。項ごとの単調性が立つこと

出典と再現

もの	種別	出典・道具
U(1)（Villain の作用）の閉じ込めない相	典	A. H. Guth, “Existence proof of a nonconfining phase in four-dimensional U(1) lattice gauge theory”, Phys. Rev. D 21 (1980) 2291（要旨で確かめた）

もの	種別	出典・道具
U(1) の質量の無い相への転移、Wilson の作用への延長	典	J. Fröhlich, T. Spencer, “Massless phases and symmetry restoration in abelian gauge theories and spin systems”, Commun. Math. Phys. 83 (1982) 411（前刷り IHES/P/81/40 の要旨と §1 で確かめた。主に Villain の近似で書き、全ての結果を Wilson の作用の模型へ延ばせる、と本文で述べる。延長は別の論文の技法による）
四次元 Z_2 の一次の転移	典	M. Creutz, L. Jacobs, C. Rebbi, “Experiments with a gauge-invariant Ising system”, Phys. Rev. Lett. 42 (1979) 1390（要旨で確かめた）
混合作用の一次の線・三重点・臨界の端点	典	G. Bhanot, M. Creutz, “Variant actions and phase structure in lattice gauge theory”, Phys. Rev. D 24 (1981) 3212（要旨で確かめた）
見かけの端点 $(1.5, 0.9)$ の引用と、大きい格子での見直し（$\beta_A = 1.25$ に一次の転移なし、端点は $\beta_A \geq 1.25$ の見込み）	典	R. V. Gavai, “A study of the bulk phase transitions of the SU(2) lattice gauge theory with mixed action”, Nucl. Phys. B 474 (1996) 446, arXiv:hep-lat/9603003（要旨と本文で確かめた）
SU(3) の混合作用の端点に近づくスカラーの質量	典	U. M. Heller, “SU(3) lattice gauge theory in the fundamental–adjoint plane and scaling along the Wilson axis”, Phys. Lett. B 362 (1995) 123, arXiv:hep-lat/9508009（要旨で確かめた）
SU(N) の体積転移（SU(4) は滑らか、SU(6) は強い一次）	典	B. Lucini, M. Teper, U. Wenger, “The deconfinement transition in SU(N) gauge theories”, Phys. Lett. B 545 (2002) 197, arXiv:hep-lat/0206029（本文で確かめた）
G_2 の中心が自明で弦が切れ得ること、閉じ込め	典	K. Holland, P. Minkowski, M. Pepe, U.-J. Wiese, “Exceptional confinement in G(2) gauge theory”, Nucl. Phys. B 668 (2003) 207, arXiv:hep-lat/0302023（要旨で確かめた）
一ループの係数の式	初	4-06 の式 (3) に随伴の実スカラー一つを入れた
文献の記述で本書が確かめていないもの：Z_2 の弱結合の相のギャップ、有限群の凍る β（Petcher–Weingarten 1980）、SU(2) の端点のスカラーの質量、SU(5) の体積転移と両側の相、G_2 のギャップ	—	文献の記述（本書は未確認）。本文の主張の根拠にしていない
本書の Lean の定理	Lean	20-06・21-02・21-03・21-05・21-06・21-07 の宣言（`VortexPos.SN_pos`・`TwistBlocks.thick_vortex_floor`・`TwistedWilson.thin_vortex_floor`・`TwistBlocks.theta_nonneg`・`TwistFlat.no_flat_twist11` ほか）。A-04 表 4g と 21-05・21-07・20-06 の頁で言明を確かめた
U(1) の転移の位置、Z_2 の転移の位置、張力の倍化の不等式の三つの相の値、四つの顔の見立て	読	26-06 §04・§07・§08
§05 の (a)〜(e)	読	本書の検討の台本（numpy の浮動小数、全数え上げと Metropolis）。この章のために走らせ直した：(a) 全て、(b) $\beta = 300$、(c) 全てと別の種一本、(d) 全て、(e) 最初の 2 組

この章で使った語 — 篩・閉じ込めの量・ギャップの量・最大トーラス・随伴 Higgs・混合作用・一次の転移・臨界の端点・体積転移・中心の無い群・平坦な接続・凍った相・捩れた真空・ヒステリシス・縦横比・項ごとの符号。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：27-00 入口 — この部の約束。発想の全体の地図は 16-11 に在ります。