第三巻　質量ギャップへ — 残る問いと本書の結果

第 28 部 前提の木

Kiichi, Shiori and Rin · 2026-11-14 の版 · https://computoergosum.com/principia/yang-mills/

> この PDF は Web 版の各章をそのまま刷ったものです。動かせる図は刷った時点の姿で止まっています。章の間のリンクは Web 版へ飛びます。最新の内容は Web 版に在ります。

章		頁
28-00	入口 — 示すべき言明と、表現を通した十分条件	2
28-01	部分列の極限と、極限に移る性質	6
28-02	全列の収束	16
28-03	減衰から質量ギャップへ、帯の還元	25
28-04	前提の一覧 — 木と札	33
28-05	設計の選びに依るもの	50
28-06	開いている所と、対象がまだ無い所	57

入口 — 示すべき言明と、表現を通した十分条件

> この章は案内です。

この章で分かること — 第 28 部は「何が言えれば足りるか」を、根と十分条件の木として並べる部です。この入口では、根と十分条件の区別、前提の札の読み方、この部の章の順を示します。

前提となる章 — 19-07 示すべき言明。確かな定理は第 20〜22 部（20-00・21-00・22-00）。

先に言うこと — この部は前提と含意の一覧で、根のどれも示していません。根のうち紫外の側の四つ（合わせ・全列の収束・非退化・同程度連続）と、それを支える前提の木は、本書の設計（決まったブロック写像で押し出した測度）についての言明です。四次元のヤン–ミルズ理論の存在は、2026-11-10 に公開された構成が別の設計で示し、Lean で証明されている、と委員会が評価しました（第二巻。二つの設計の比べは 第 14 部、本書の紫外の試みの記録は 第 15 部）。そこで紫外の側の根と木は、本書の設計での示すべき言明と十分条件の記録として残します。赤外の側の根（一様な減衰とその帰結の質量ギャップ、帯）は開いたままで、こちらが第三巻の本題です。前提の札は 2026-11-13 の時点のもので、更新は A-08 質量ギャップまでの地図 で行います。

この章の順序

1. 根と、表現を通した十分条件（表 1）
2. 前提の札の凡例（表 2）
3. 形が未定の理由の記号（表 3）
4. この部の章

01

根と、表現を通した十分条件

この部では、示すべき言明を木の「根」、その十分条件を「葉」と呼びます。

根は、第 19 部で定義した対象（Wilson の測度、押し出しの測度、渦の比、再構成の器）だけで書いた、示すべき六つの言明です（19-07）。

十分条件は、今の道で根を導くために置いている前提です。その多くは、粗い尺度の理論を書き表すための量 ― 実効の結合、大きい場の活性、背景場、類 ― を通した言明で、この本ではそれを**表現**と呼びます。表現の量の多くは、まだ格子から定義されていません。

表 1　根と、今の道での十分条件

根（19-07）	根を書く言葉	今の道での十分条件（28-04 の行の名）	十分条件を書く言葉
合わせ	押し出しの測度の期待値、β_n	結合の一段の括弧と活性の再帰（実効の結合の定義と連続性・結合の一段の正味の括弧・大きい場の結合への寄与・活性の再帰・供給の稀さ・動く不変区間と余白）	実効の結合 u_k、活性 z_k、供給 w_k
全列の収束	押し出しの測度 $\nu_{n,m}$	一段の写像の縮みと終点の合わせ、紫外の安定性の前提の評価	一段の写像の座標、類、背景場
非退化	$\nu_{n,m}$ と小さい場の集合	二段の事象の稀さ（面の部分・背景の不変量の部分）	面の部分は根と同じ言葉。背景の不変量の部分は背景場
同程度連続	$\nu_{n,m}$ と観測量の族	観測量の同程度連続	根と同じ言葉
一様な減衰	$\nu_{n,m}$ の共分散、器	根と同じ形のブロック観測量の一様な減衰、質量ギャップの器への継ぎ目、細かい観測量・無限体積・回転・非自明の段の行（流した観測量のブロック変数による近似から極限が自由場でないことまで）、帯の比較（ギャップの言葉）と面積則からギャップへ	流した観測量、回した格子、箱の質量
帯	渦の比 θ	基点・入れ子・横広げ（θ の非負・小さな T^2 の基点・一つの尺度の判定・捩れを入れる写像の費用の問い・枠の減相関・横広げの不等式（強い形））、張力の倍化（張力の倍化の不等式・渦の自由エネルギーの単調性と繰り込みの比較）	θ、板の張力

根は、合わせで決めた列について読みます。結合の列を自由に選べる形で読むと、$\beta_n \equiv 0$ だけで質量ギャップと帯の根が立ってしまいます（19-07 §01）。表 1 の「合わせ」は、ほかの五つと並ぶ一行ではなく、ほかの五つの量化を決める行です。

根は表現に依りません。表現を替えれば（背景の定義を替える、ノルムを替える、など）十分条件は替わりますが、根は替わりません。一覧（28-04）は根を上に、十分条件を「今の道での」ものとして下に書きます。

```
02
```

前提の札の凡例

前提の札は、表の一つの欄として書きます。本文の札（初・典・機・読・仮、23-00 の系統）とは別のものです。本文で前提の言明そのものを書くときは、本文の札では 仮 です。

表 2　前提の札

札	意味	保証しないこと
定理	Lean で機械検査し、定義と言明を別の目で照合する点検が、言明の中身まで確かめた	前提の形そのものであること（範囲は同じ欄に書く）
定理（弱い形）	同じだが、前提の形より弱い形まで。欄をそのまま払うか、似た別の言明かを書き分ける	前提の形まで届くこと
紙	紙の議論が在る	誤りが無いこと（定義と言明を別の目で照合する点検は済んでいない）
形は確定・未証明	言明の形は決まっている。「条件つき」は合わせで決めた列で、閾・周期の制限を入れたときに限る	成り立つこと
形が未定	言明の形がまだ決まっていない。理由を記号で書く（表 3）	—
設計に依る	設計の選び（28-05）で決まる	選びが一つに決まること
文献	文献の結果に依る	本書で再導出したこと

03

形が未定の理由の記号

表 3　理由の記号

記号	意味
(a)	軽すぎる：自明な対象や、量を自由に取ることで立ってしまう
(b)	強すぎる：偽か、偽になる例が在る
(c)	対象が未定義：言明に出る量が格子から定義されていない
(d)	今の形に反する数値の兆しが在る
(e)	一つの尺度の形は在るが、段を跨ぐ形が無い
(f)	量化の順が未定

出どころで分けた一覧は 28-06 にあります。

04

この部の章

章	中身
28-01 部分列の極限と、極限に移る性質	前提なしに立つ部分と、前提が効く部分
28-02 全列の収束	終点の合わせによる全列の収束
28-03 減衰から質量ギャップへ、帯の還元	一様な減衰から器の質量ギャップへ。基点・入れ子・横広げから面積の指数へ
28-04 前提の一覧 — 木と札	根と 57 行の前提の木、段ごとの表、札ごとの数、別名の辞書
28-05 設計の選びに依るもの	九つの選びと、どの定理・前提がどれに依るか
28-06 開いている所と、対象がまだ無い所	形が未定の 24 行の出どころと、何が形を決めるか。主張しないこと

含意の三章は「もし前提が成り立てば何が出るか」を、仮定を全て見せて書く定理です。出るものは根より弱いこともあり（28-01 は部分列の極限まで）、根から先へ進む含意もあります（28-03 の一様な減衰から器の質量ギャップへ）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
根と十分条件の区別、前提の札と理由の記号の意味	根のどれも示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
根と十分条件の木、札	仮	本書の検討の前提の棚卸し（2026-11-13）。全文は 28-04

この章で使った語 — 根、十分条件、表現、前提の札、理由の記号。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：28-01 部分列の極限と、極限に移る性質 — 前提から何が出るかを、仮定を全て見せて読みます。一覧から読むなら 28-04。

部分列の極限と、極限に移る性質

この章は本書の検討です。

この章で分かること — 一辺 $2^n L$ の箱の細かい測度 μ_n をブロック写像で粗い段 m へ押し出した測度 $\nu_{n,m}$ について、「もし多くの仮定の欄が成り立つならば、部分列の極限が在り、その極限は鏡映正値・対称・非退化の下界を持つ」という条件つきの定理（Lean：`BoxWalk.chain_end_to_end_box`）を、仮定を全て見せて読みます。この定理の中身は二つに分かれます。(a) 有限の格子で一様に成り立つ性質は、部分列の極限に移ること。(b) 結合の一段の構造体から、合わせの点が陽な括弧の中に取れること。

前提となる章 — 19-04 ブロック写像・押し出しの測度、19-01 Wilson の測度、19-03 鏡映、19-07 示すべき言明。

先に言うこと — これは含意で、仮定のどれも四次元の格子で示されていません。部分列の極限の存在は、仮定なしに、どの確率測度の族にも立ちます。(a) と (b) を結ぶ読み（「細かい測度は、合わせの点で決めた結合の Wilson の測度である」）は定理の外に在ります。仮定に入れる量（実効の結合、活性、供給、剰余、背景の不変量、観測量の列）は、格子から定義されていません。だから、この定理が閉じていることは、連続極限の中身が示されたことを意味しません。四次元のヤン–ミルズ理論の存在は、2026-11-10 に公開された構成が別の設計で示しました（第二巻）。この章の含意は、本書の設計（決まったブロック写像で押し出した測度）が何を前提に置いたかの記録です（§ 08）。

この章の順序

1. 定理の形 — 何を固定し、何を自由に置くか — 定義から決まるのはブロック写像と押し出しだけ
2. 仮定の欄の表
   — Lean の名・数学の言葉・具体の対象で払われているか（表 1・表 2）
3. 結論の一つ目 — 合わせの点が括弧の中に在る — 関数の族 u だけの言明で、測度とは繋がっていない
4. 結論の二つ目 — 部分列に沿った収束 — コンパクト性から、どの測度の族にも立つ

5. 極限に移る性質 — 鏡映正値性・不変性・閉じた集合の質量の下界・観測量の連続の度合い（表 3）
6. 細かい測度を Wilson の測度にした版 — 二つの欄が消えた範囲と、残る欄
7. 二つを結ぶ読みは定理の外に在る — 裸の結合の列と実効の結合を繋ぐには、実効の結合の定義が要る
8. 先に組んだ条件つきの含意との関係 — その仮定は押し出しの測度で書いた言明

01

定理の形 — 何を固定し、何を自由に置くか

連続極限を作る一つの道は、次のとおりです。格子間隔を半分ずつにした箱（一辺 $2^n L$ の周期の箱、$n = 0, 1, 2, \ldots$）の上に細かい測度 μ_n を置き、それをブロック写像で一辺 $2^m L$ の粗い箱へ押し出します（19-04）。粗い段 m を固定して $n \to \infty$ とした極限が、物理の大きさを固定した箱の上の「連続極限のブロック変数の分布」の候補です。

記号を決めます。$\mathbb{B}$ は四元数の閉じた単位の球、E_m は一辺 $2^m L$ の箱のリンクに $\mathbb{B}$ の値を置いた配位の空間です。E_m は有限個の球の積なので、コンパクトな距離空間です。$B_m : E_{m+1} \to E_m$ はブロック写像、$\mathrm{down}_{n \to m}$ はその $n - m$ 回の合成、押し出しの測度は

$$\nu_{n,m} = (\mathrm{down}_{n \to m})_* \, \mu_n \qquad (m \le n) \tag{1}$$

です（Lean：`ChainBlockMap.blockMap`・`down`・`νP`）。ブロック写像は、道の積の平均を閾 $r_0 > 0$ で球へ戻す retract を含みます（19-04）。r_0 は定理の自由な引数（欄 `hr : 0 < r₀`）で、極限は r_0 に依り得ます。箱の版では、道の族と重みも固定されています（重み $(1/8, 3/4, 1/8)$、六つの順。Lean：`BoxWalk.boxPaths`・`boxW`）。

定義から決まっているのは、ここまでです。定理の中で、細かい測度 μ_n は任意の確率測度の族です。ほかに、結合の関数 u_k、活性 z_k、供給 w_k、剰余 $r_k^{\mathrm{s}}, r_k^{\mathrm{l}}$、面の変数 $Y_{m,p}$、背景の不変量 $f_{m,x}$、観測量の列 s_n、鏡映 Θ_m、対称の作用、小さい場の集合 C_m などが、全て自由な変数として入ります。仮定の欄は、これらの自由な量についての条件です。

仮定	結論の一つ目	結論の二つ目
結合の一段の構造体、稀さ、観測量の分かれ方、鏡	任意の目標の値 t と段 n について、$u_n(x) = t$ とな	ある部分列に沿って、全ての段 m で $\nu_{n,m}$ が収束し、

映正値性、対称、表現ほか（§02）	る点 x が陽な括弧の中に在る（§03）	極限が仮定の性質を受け継ぐ（§04・§05）
全て 仮 。量は格子から定義されていない	u だけの言明	収束そのものは仮定なしに立つ

Lean：`ChainBlockMap.chain_end_to_end_blockMap`（道の族と重みが一般の版）、`BoxWalk.chain_end_to_end_box`（箱の版）— 含意として機械検査（仮定は表のとおり）。二つの結論は、一つの言明の中で「かつ」で並んでいます。

02

仮定の欄の表

仮定の欄を全て並べます。「払われているか」の欄は、その欄が具体の対象（定義の在る測度や写像）で示されているか、抽象の量についての仮定のまま残っているかです。箱の版では、ブロック写像の連続性と押し出しの整合（$(B_m)_*\nu_{n,m+1} = \nu_{n,m}$）は定理の中で定義から払われていて、欄として現れません（Lean：`ChainBlockMap.continuous_blockMap`・`hcons_blockMap`）。

表 1　測度・観測量の側の欄（$\nu_{n,m}$ は式 (1)。「大きい n で」は「ある n_0 があって $n \geq n_0$ で」）

Lean の欄	数学の言葉	払われているか
`rarity`	仮 各段 m、大きい n、領域 R_m の各ブロック i で、$\nu_{n,m}$（ブロック i の面の変数 $Y_{m,p}$ が閾 $y_h(m)$ を越えるか、背景の不変量 $f_{m,x}$ が閾 $f_h(m)$ を越える（Lean ではこの閾の名が `θ` ですが、渦の比とは無関係です））$\leq n_p(m)P_1(m) + n_{pt}(m)S(m)$。稀さ	抽象。$Y_{m,p}$・$f_{m,x}$ は自由な関数で、事象そのものが定義されていない
`hCc`・`hgood`	仮 C_m は閉じた集合で、全てのブロックで「面の変数 $\leq y_h$、不変量 $\leq f_h$」となる事象を含む	抽象
`h0c`・`h0p`	仮 Θ_m は連続。大きい n で、類 $\mathcal{A}_m$ の F について $\int F(\Theta_m\omega)F(\omega)\,d\nu_{n,m} \geq 0$。鏡映正値性	**Wilson の測度で払った版が在る**（§06。類は幅一定の帯）
`hsc`・`hsym`	仮 対称の作用 g は連続。大きい n で、$\nu_{n,m}$ は g で不変	抽象（Wilson の版でも残る）
`split`・`lattice_vanishing`・`shift_vanishing`	仮 $\lvert s_n(d) - s_n(d')\rvert \leq \tau_n + \Omega(\mathrm{dist}(d,d'))$、$\tau_n \to 0$、$\Omega(r) \to 0$ $(r \downarrow 0)$。観測量の分かれ方（同程度連続の割れた形）	抽象。s_n は自由
`hcount`・`hdense`・`hbd`	仮 観測量の配置の空間 X の中の集合 D は可算で稠密、$\lvert s_n(d)\rvert \leq K$（$K$ は d・n に依らない一つの数。Lean の名は `Bd`）	抽象
`hac`・`ham`・`hbr`・`hbv`	仮 X への対称の作用は連続で D を保ち、破れ $\lvert s_n(gd) - s_n(d)\rvert \leq \varepsilon_b(g,n,d) \to 0$	抽象

Lean の欄	数学の言葉	払われているか
`hpos`	仮 大きい n で $\sum_{a,b} c_a c_b\, s_n(x_{ab}) \geq 0$（鏡映正値性の行列の形）	抽象
`HR`	仮 各 $d \in D$ と大きい n で $s_n(d) = \int F_d \, d\nu_{n,\mathrm{lev}(d)}$（$F_d$ は段 $\mathrm{lev}(d)$ の有界連続関数）。表現	抽象（s_n を ν の期待値として定義すれば自明に立つ）

表 2　結合の側の欄（構造体 `TransientChainError.CouplingStepsTransientE` と、その外の二つ。定義域は $\{x : u_j(x) \geq u_\star \ (j \leq k)\}$）

Lean の欄	数学の言葉	払われているか
`flow`	仮 $u_{k+1} = u_k - b + r^{\mathrm{s}}_k + r^{\mathrm{l}}_k$（一段の結合の減り）	抽象。$u, z, w, r^{\mathrm{s}}, r^{\mathrm{l}}$ は自由な関数 $\mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$、$W, \Phi, \mathcal{D}, e$ は自由な関数 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
`small_net` ・ `transient`	仮 $b_{\inf} + \delta_k - e(u_k) \leq b - r^{\mathrm{s}}_k \leq b_{\mathrm{p}} + e(u_k)$、$\sum_{k<n} \max(-\delta_k, 0) \leq D_0$（小さい場の正味の括弧と、過渡の和）	
`large_rem`	仮 $\lvert r^{\mathrm{l}}_k \rvert \leq \mathcal{D}(u_k)\, z_k$（大きい場の剰余）	
`act_rec` ・ `act_nonneg` ・ `act_init` ・ `supply`	仮 $z_{k+1} \leq \rho z_k + A w_k + B z_k^2$、$z_k \geq 0$、$z_0 \leq W(u_0)$、$w_k \leq \Phi(u_k)$（活性の再帰と供給）	
`fix_shift` ・ `DW` ・ `margin`	仮 $\rho W(s) + A\Phi(s) + BW(s)^2 \leq W(s')$（$u_\star \leq s$、$u_\star \leq s' \leq s + D_0$）、$\mathcal{D}(s) W(s) \leq Y$、$e(u_\star) + Y \leq b_{\inf}$（動く不変区間と余白）	
`ustar_pos` ・ `he` ・ `hD` ・ `hρ` ・ `hA` ・ `hB`	仮 $u_\star > 0$、e は $[u_\star, \infty)$ で減少、$\mathcal{D} \geq 0$、$\rho, A, B \geq 0$	
`h0` ・ `hCu`	仮 $u_0(x) = x$。$x \mapsto u_{k+1}(x)$ は定義域の上で連続	抽象

二つの表の欄は、同時に満たせます 初 。たとえば領域 R_m・類 $\mathcal{A}_m$・P と、二つの対称の作用の添字の集合を空にし、$C_m = E_m$、X を一点、$s_n(d) = \int F_d \, d\nu_{n,\mathrm{lev}(d)}$、$u_k(x) = x - k$、$b = b_{\inf} = b_{\mathrm{p}} = 1$、剰余・活性・供給と $W, \Phi, \mathcal{D}, e, \delta, D_0, Y, \rho, A, B$ を全て 0、$u_\star = 1$ と取れます。ただし、この取り方では対応する結論も自明です。中身のある量で欄を払う取り方は知られていません。

寄り道：結合の一段の構造体が実際に言っていること

飛ばしてよい。表 2 の構造体は欄が十七ありますが、結論の一つ目に効く中身は「u の一段の減り $u_k - u_{k+1}$ が括弧 $[\, b_{\inf} + \delta_k - e(u_k),\ b_{\mathrm{p}} + e(u_k) \,]$ に入る」ことと、$u_\star, e, \delta, D_0$ だけについての数の条件です 初 。実際、任意の u がこの括弧を満たすなら、$r^{\mathrm{s}}_k := u_{k+1} - u_k + b$、$r^{\mathrm{l}} = z = w = 0$、$W = \Phi = \mathcal{D} = 0$、$Y = \rho = A = B = 0$ と置けば、`flow` ・ `small_net` ・ `large_rem` ・活性と供給の四つ・ `fix_shift` ・ `DW` ・ `hD` ・ `hρ` ・ `hA` ・ `hB` は立ちます。残る四つ — $u_\star > 0$（`ustar_pos`）、e が $[u_\star, \infty)$ で減少（`he`）、過渡の和 $\sum_{k<n} \max(-\delta_k, 0) \leq D_0$（`transient`）、$e(u_\star) \leq b_{\inf}$（`margin` の $Y = 0$ の形）— は、この置き方からは出ず、$u_\star, e, \delta, D_0$ の取り方の条件として残ります。大きい場の剰余・活性・供給の欄は、括弧を出すための一つの「割り方」に名を付けたもので、割り方を決める量

（実効の作用の分解）が格子から定義されていない限り、それ自身は中身を足しません。どの割り方が意味を持つかは、前提の一覧（28-04）と開いている所（28-06）の主題です。

03

結論の一つ目 — 合わせの点が括弧の中に在る

結論の一つ目は次の形です。

$$\forall t \geq u_\star + D_0,\ \forall n,\ \exists x: \quad \begin{cases} t + (b_{\mathrm{inf}} - e(u_\star) - Y)\, n - D_0 \ \leq\ x \ \leq\ t + (b_{\mathrm{p}} + e(u_\star) + Y)\, n, \\ u_n(x) = t, \qquad u_k(x) \geq t - D_0 \ \ (k \leq n). \end{cases} \tag{2}$$

意図の読みでは、x は細かい格子の裸の逆結合、$u_k(x)$ は k 段の繰り込みの後の実効の逆結合、t は粗い端で合わせる目標の値です。式 (2) は「n 段の後にちょうど t になる裸の値 x が、n について一次の陽な括弧の中に在り、途中の段で定義域を外れない」と読めます。一ループの減り b の付近で括弧が閉じるのは、一段の減りが $[b_{\mathrm{inf}} - e,\ b_{\mathrm{p}} + e]$ に入るからです。

式 (2) は、関数の族 u と表 2 の定数だけについての言明です。細かい測度 μ_n、押し出しの測度 $\nu_{n,m}$、観測量 s_n は、式 (2) にも、式 (2) を出すのに使う欄（表 2）にも現れません。定理の中で、u と μ を結ぶ欄は一つもありません。

証明の道筋は二段です。(i) 定義域の上で、活性と結合を一緒に k について帰納し、一段の減りが括弧に入ることを出します（大きい場の剰余は $\mathcal{D}W \leq Y$ で抑え、`margin` で括弧に吸います）。(ii) $u_0(x) = x$ と u_{k+1} の連続性から、中間値の定理で $u_n(x) = t$ となる x を括弧の中に取ります 初 。どちらも実数の関数の議論で、格子は出てきません。

04

結論の二つ目 — 部分列に沿った収束

結論の二つ目は、次の存在の言明から始まります。

$$\exists\, \varphi \text{ 狭義増加},\ \exists\, (\nu_m)_{m \geq 0} \text{ 確率測度}: \qquad \nu_{\varphi(k),m} \xrightarrow[k \to \infty]{} \nu_m \quad (\text{弱収束、全ての } m). \tag{3}$$

式 (3) は、**どの確率測度の族 μ_n についても、仮定の欄を一つも使わずに立ちます。**理由は、E_m がコンパクトな距離空間で、その上の確率測度の空間が弱収束の位相でコンパクト（しかも距離づけられる）だからです 典 （Prokhorov の定理の、コンパクトな空間の場合）。可算個の段 m の積もコンパクトなので、全ての m に共通の一本の部分列 φ が取れます（Lean：`WeakUltravioletExistence.exists_common_subseq`）。

だから式 (3) だけでは、極限が何であるかについて何も言っていません。極限は部分列 φ の選び方に依り得ます。極限が細かい測度の選び方を反映した中身を持つのは、次の節の「極限に移る性質」によってだけです。全列（部分列でない）の収束は、この定理の結論にありません。それは次の章 28-02 の主題で、示すべき言明の一つ（19-07 の全列の収束。合わせで決めた結合の列について言う）です。

押し出しの整合 $(B_m)_*\nu_{n,m+1} = \nu_{n,m}$ は定義から立ち、B_m が連続なので極限にも移ります：$(B_m)_*\nu_{m+1} = \nu_m$（Lean：`WeakUltravioletExistence.limit_consistent`）。極限の族は、ブロック写像について整合した射影系です。

05

極限に移る性質

結論の二つ目の残りは、表 1 の欄が部分列の極限に移ることです。どれも「有限の n で（大きい n で）一様に成り立つ閉じた条件は、弱極限で保たれる」という一つの型です。

表 3　大きい n の性質と、極限での性質（Lean の結論の構造体 `WeakUltravioletExistence.BlockConclusion`・`ObservableConclusion`）

仮定（大きい n で）	結論（極限で）	移す道具
`h0c`・`h0p`	`reflection_positive`：$F \in \mathcal{A}_m$ で $\int F(\Theta_m\omega)F(\omega)\,d\nu_m \geq 0$	$F \circ \Theta_m \cdot F$ は有界連続なので積分が収束し、≥ 0 は閉じた条件 初
`hsc`・`hsym`	`symmetric`：ν_m は対称の作用で不変	同じ（有界連続な関数の積分の等式） 初
`rarity`・`hgood`・`hCc`	`small_field_mass`：$\nu_m(C_m) \geq c_m$、$c_m = 1 - \lvert R_m\rvert\,(n_pP_1 + n_{pt}S)$	和の上界で大きい n の $\nu_{n,m}(C_m) \geq c_m$。閉じた集合の質量は弱極限で下がらない：$\limsup_n \nu_n(C) \leq \nu(C)$ 典
`HR`	$d \in D$ で $S(d) = \int F_d\,d\nu_{\mathrm{lev}(d)}$、$s_{\varphi(k)}(d) \to S(d)$	弱収束の定義そのもの 初
`hbd`	`bounded`：全ての $x \in X$ で $\lvert S(x)\rvert \leq K$	閉じた条件 初
`split`・`lattice_vanishing`・`shift_vanishing`・`hcount`・`hdense`	`continuous`・`modulus`：S は X 全体へ一様連続に延び、連続の度合いは Ω から来る	$\varepsilon/2$ の議論で同程度連続、可算稠密な D の上の極限を X へ延ばす 初
`hac`・`ham`・`hbr`・`hbv`	`invariant`：$S(gx) = S(x)$	破れが 0 に行くので D の上で等式、連続性で X へ 初
`hpos`	`positive`：$\sum_{a,b} c_a c_b S(x_{ab}) \geq 0$	閉じた条件 初

非退化の下界 c_m は、Lean では $[0,\infty]$ の値の引き算で書かれていて、$\lvert R_m\rvert(n_pP_1 + n_{pt}S) \geq 1$ のときは $c_m = 0$（中身の無い下界）と読みます。下界が中身を持つのは、稀さの欄の右辺が、

領域の大きさ $|R_m|$ に比べて小さいときだけです。

この節の全体は、測度の側の含意が「有限の n で一様に成り立つ性質が、弱極限に移る」までであることを示しています。性質そのもの（稀さ、鏡映正値性、対称、観測量の同程度連続）は、全て仮定の側に在ります。そのうち具体の対象で示されているのは、次の節の二つの欄だけです。

06

細かい測度を Wilson の測度にした版

細かい測度を、一辺 $2^n L$ の箱 $(\mathbb{Z}/2^n L)^4$ の正規化した SU(2) の Wilson の測度（結合 β_n、19-01）にした版が在ります。$\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ は*任意の列*です。あわせて鏡映 Θ_m を格子点の面の時間の鏡映 $x_0 \mapsto -x_0$、類 $\mathcal{A}_m$ を次の $\mathcal{A}_m^{(c)}$ に固定します。

$$\mathcal{A}_m^{(c)} = \{ F \text{ 有界連続} : \ F \text{ は基点の時間が } \{1, \dots, 1+c\} \text{ の粗いリンクだけに依る} \} \quad (2c+4)$$

このとき鏡映正値性の欄 `h0p` と、鏡映の連続性の欄 `h0c` は、Lean の中で示されて消えます（Lean：`BoxWalk.wilson_h0p` ・ `continuous_reflCfg`。前者は「任意の結合の列 β と大きい n で、押し出した Wilson の測度が帯 (4) の類について鏡映正値」という仮定なしの言明です）。結果の言明が `BoxWalk.chain_end_to_end_box_wilson2` です — 含意として機械検査（仮定は表 1・表 2 から `h0p` ・ `h0c` を除いたもの）。

この版の範囲を、正確に書きます。

- **二つの欄が消えた範囲では確認済みです。**類 (4) は m が十分大きい所で空でなく（一本のリンクの関数 $\cos(\mathrm{Re}\, U_{\ell_0})$ が入ります。Lean：`BoxWalk.stripSet_witness`）、極限の鏡映正値性は中身を持ちます。
- **「鎖を Wilson の測度で閉じた」と読むなら、条件つきです。**結合の一段の構造体、稀さ、対称 `hsym`、表現、観測量の欄は全て仮定のまま残ります。
- 類 (4) は狭い類です。帯の幅 c は全ての段 m で同じ一つの数で、m が大きくなっても広がらず、時間 0 の面のリンクを含みません。先に組んだ条件つきの含意（§08）の正の時間の類 $\mathcal{A}_m(P)$（正の半分全体）より小さい類です。その類は、粗い格子の対称の面（たとえば格子点の間の面）での鏡映と、細かい格子の正の側の台への引き戻しで定義されていて、鏡映そのものも格子点の面の $x_0 \mapsto -x_0$ とは違います。しかも結論は c ごとに「ある部分列と、ある極限」なので、「一つの極限が全ての c の帯で鏡映正値」はこの一本からは出ません。

Wilson の測度の版でも、β_n は任意の列で、u とは何の関係も置かれていません。これが次の節の主題です。

07

二つを結ぶ読みは定理の外に在る

ここまでで、定理の中身は二つに分かれました。

(a) 測度の側	(b) 結合の側
有限の格子で一様に成り立つ性質（鏡映正値性・対称・閉じた集合の質量の下界・観測量の同程度連続）は、部分列の極限に移る。部分列の極限そのものは前提なしに在る。	結合の一段の構造体から、$u_n(x) = t$ となる合わせの点 x が、n について一次の陽な括弧の中に取れる。

意図の読みは、この二つを次の一文で結びます：「細かい測度 μ_n は、合わせの点 x_n（式 (2) で目標 t に対して取った点）で決めた結合 $\beta_n = 4x_n$ の Wilson の測度である」。この一文は、**定理の中にありません**。Wilson の版（§06）は任意の列 β を取り、β_n と x_n の間に関係を置きません。だから定理から読み取れるのは、(a) と (b) が別々に成り立つことだけです。

先に組んだ条件つきの含意（§08）では、この一文は設定の定義として置かれています（細かい測度を、裸の結合の合わせの括弧で選んだ β_n の Wilson の測度と定義する）。ただしその含意でも、実効の結合 u_k は押し出しの測度 $\nu_{n,m}$ からではなく、段 k ごとに決めた別の有限の格子の Gibbs の期待値（または分配関数の比）から作る量として定義され、結合の側の量と測度の側の量（たとえば結合の側の閾と、稀さの事象の閾 $y_h(m)$）は定理の中で結ばれていません。Lean の鎖の定理では、この定義も置かれず、細かい測度は任意の族です。

結ぶには、実効の結合 u_k を格子から定義することが要ります。たとえば u_k を、裸の結合 x の Wilson の測度の何かの期待値の関数として定義すれば、式 (2) の $u_n(x) = t$ は「細かい Wilson の測度を、粗い段のある量が決まった値になるように合わせる」という、定義された対象だけの言明になります。その形は、示すべき言明の一つ「合わせ」として 19-07 に在ります（19-07 は、合わせ以外の言明を全て、合わせで決めた結合の列について述べています）。どの量で合わせるかには選びが残り、それは設計の選び（28-05）に入ります。

あわせて、表 1・表 2 の他の量も格子から定義されていません。実効の結合と剰余（実効の作用の分解から来る量）、大きい場の活性と供給、背景場とその不変量、観測量の列とその表現

は、どれも定理の中では自由な変数です。この定理が「閉じている」ことは、これらの量を格子から定義し、欄を示すことの代わりになりません。

08

先に組んだ条件つきの含意との関係

この定理は、本書の検討が先に組んだ条件つきの含意（小さな箱の四次元 SU(2) 格子ヤン–ミルズの弱い紫外の存在を、段ごとの前提からの機械検査の鎖で導く形。2026-10-30）の鎖の定理と同じ型の含意を、その後に結合の欄を別の形（括弧の幅を誤差の関数 e と過渡の項 δ_k で書く形）にし、ブロック写像を箱の上の具体の写像に置き換えて書き直したものです。先の含意の Lean は、抽象のブロック写像の上の言明です。先の含意では、細かい測度は裸の結合の合わせの括弧で選んだ β_n の Wilson の測度と定義されています（§07）。先の含意の仮定のうち、小さい場の集合の仮定（各段で閉じた集合 C_m があり、大きい n で $\nu_{n,m}(C_m) \geq 1 - \eta_m$ ）、観測量の同程度連続（期待値 s_n の同程度連続）、増分の総和可能性の仮定（$|s_{n+1}(x) - s_n(x)|$ が総和可能）は、細かい測度が与えられれば、押し出しの測度とその期待値だけで書かれた言明です。もう一つの仮定（結合の一段の括弧の仮定）は実効の逆結合 u_k についての言明で、u_k の定義は紙に在り、Lean の中では自由な関数です。これらの仮定はどれも四次元で示されておらず、主定理は含意です。四次元のヤン–ミルズ理論の存在そのものは、2026-11-10 に公開された構成が別の設計で示しました（第二巻。二つの設計の比べは 第 14 部）。本書では、押し出しの測度だけで書ける言明を「示すべき言明」（19-07）として先に置き、この章の定理を、そのうち部分列の極限と極限に移る性質の部分を受け持つ含意として読みます。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
含意：表 1・表 2 の欄が全て成り立てば、式 (2) と、式 (3) の部分列の極限で表 3 の性質が成り立つ。Lean：`BoxWalk.chain_end_to_end_box`（`ChainBlockMap.chain_end_to_end_blockMap` の箱の版）— 含意として機械検査（仮定は表のとおり）	どの欄も、四次元の格子の具体の量で示されていない（§06 の二つを除く）。仮定に入れる量が格子から定義されていない
典 式 (3) の部分列の極限は、どの確率測度の族にも在る（コンパクト性）。Lean：`WeakUltravioletExistence.exists_common_subseq`	極限が部分列に依らないこと（全列の収束。28-02）
初 式 (2) は u と表 2 の定数だけの言明で、測度と繋がっていない	μ_n が合わせの点で決めた Wilson の測度であること（定理の外の読み）

言えている	言えていない
Wilson の版：細かい測度が Wilson の測度（任意の結合の列）のとき、`h0p`・`h0c` が消える。Lean：`BoxWalk.chain_end_to_end_box_wilson2`・`wilson_h0p` — 二つの欄が消えた範囲で確認済み	鎖を Wilson の測度で閉じたこと（残りの欄は仮定）。類は幅一定の帯 (4) で、正の半分全体ではない
初 表 1・表 2 の欄は同時に満たせる（自明な対象で）	中身のある対象で欄を同時に満たす取り方

出典と再現

もの	種別	出典・道具
含意の言明と結論の構造体（§01〜§05）	Lean	本書の検討の Lean：`ChainBlockMap.chain_end_to_end_blockMap`・`BoxWalk.chain_end_to_end_box`、構造体 `TransientChainError.CouplingStepsTransientE`・`WeakUltravioletExistence.BlockConclusion`・`ObservableConclusion`・`Representation`。言明は源の字を読んで写した
Wilson の版（§06）	Lean	`BoxWalk.chain_end_to_end_box_wilson2`・`wilson_h0p`・`stripSet`・`stripSet_witness`・`reflCfg`。細かい格子の鏡映正値性は 20-01
確率測度の空間のコンパクト性（Prokhorov の定理）、閉じた集合の質量の上半連続	典	測度論の標準の事実。書誌のみ（未確認）。Lean は Mathlib の補題を使う
欄が同時に満たせる例（§02）	初	本文の取り方
先に組んだ条件つきの含意の仮定（小さい場の集合の仮定・観測量の同程度連続・増分の総和可能性の仮定・結合の一段の括弧の仮定。§08）	—	本書の検討の記録（2026-10-30）

この章で使った語 — 含意・押し出しの測度・部分列・弱収束・射影系・結合の一段の構造体・合わせの点・括弧・稀さ・小さい場の集合・非退化の下界・同程度連続・表現・帯の類。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：28-02 全列の収束 — 部分列を外すのに足りる条件を、一段の写像の Lipschitz の縮みと終点の合わせの形で読みます。

全列の収束

この章は本書の検討です。

この章で分かること — 前の章の定理は部分列の極限しか出しません。部分列を外すには、格子を一段細かくしたときの粗い尺度の量の差が総和可能であれば足ります。この章では、その差を抑える一つの十分条件 — 繰り込みの一段の写像の Lipschitz の縮みと、粗い端での結合の合わせ — を、終点を合わせた歪積の軌道の収束（Lean：`SkewOrbit.coarse_tendsto` ほか）として、仮定を全て見せて読みます。条件 $\varepsilon + \tau < 1$ と $4cc' < (1-\varepsilon-\tau)^2$ がこの方法に必要十分であること、終点の合わせが外せないことも Lean の例で示されています。

前提となる章 — 28-01 部分列の極限の含意、19-04 ブロック写像、19-07 示すべき言明（全列の収束）。

先に言うこと — これは含意です。定理は距離空間の点の軌道についての言明で、測度は出てきません。仮定の一段の写像（周辺の座標 u と無関係な座標 v の上の写像）は、格子から定義されていません。だから、この定理から格子の連続極限の全列の収束は出ません。出るのは「もし繰り込みの一段がこの形で、この縮みを持つならば」という形の結論だけです。四次元のヤン–ミルズ理論の存在は、2026-11-10 に公開された構成が別の設計で示しました（第二巻）。この章の含意は、本書の設計（決まったブロック写像で押し出した測度）での記録です（28-00）。

この章の順序

1. 部分列から全列へ — 何が足りないか — 増分が総和可能なら全列が収束する
2. 一段の写像の形 — 周辺の方向と無関係な方向 — 歪積の写像と、終点を合わせた軌道の族
3. 仮定の欄の表 — Lipschitz の縮み・直径・終点の合わせ（表 1）
4. 言明 — 粗い端の Cauchy 性と極限の一意性 — 差 $\le D\theta^n$、極限は裸の値に依らない
5. 証明の道筋 — 二点の境界値の問題 — u の差は粗い側から、v の差は細かい側から伝わる

6. 条件と速さ — この方法に必要十分であること — 線形の模型の固有値と、下げられない速さ
7. 終点の合わせは外せない — 同じ写像で合わせを外すと Cauchy でない例
8. 仮定の写像は格子から定義されていない — 何を定義すれば言明が格子の言明になるか

01

部分列から全列へ — 何が足りないか

前の章（28-01 §04）の部分列の極限は、どの確率測度の族にも在ります。極限は部分列の選び方に依り得るので、それだけでは「連続極限が一つ決まった」とは言えません。全列（部分列を取らない列）の収束が要ります。

全列の収束には、易しい十分条件があります。粗い尺度の一つの量の列 s_n（たとえば段 m の観測量の期待値）について

$$|s_{n+1} - s_n| \le \delta_n, \qquad \sum_n \delta_n < \infty \tag{1}$$

なら、s_n は Cauchy 列なので収束し、どの部分列の極限もその極限に等しくなります 初（Lean：`WeakUltravioletExistence.tendsto_of_summable_increments`・`subseq_limit_eq`。観測量の族の形は `WeakUltravioletExistence.weak_uv_observable_full`）。本書の検討が先に組んだ条件つきの含意（28-01 §08）では、式 (1) の形の条件が仮定（増分の総和可能性の仮定）として置かれています。増分の総和可能性の仮定は、ゲージ不変な関数の可算で稠密な族の上で、観測量の値の段ごとの増分が総和可能、という仮定です。押し出しの測度の全列の弱収束（19-07 の全列の収束。合わせで決めた結合の列について言う）とは同じ言明ではなく、総和可能なぶん強く、関数の族も違います。その族から全ての有界連続な関数へ移る一段は、紙の議論です。

問題は、式 (1) の δ_n をどこから得るかです。格子 $n+1$ と格子 n の二つの細かい測度を、同じ粗い段 m まで押し出して比べます。繰り込みの写像は合成できるので、格子 $n+1$ の側は「一段だけ繰り込んでから、格子 n と同じ道を通る」と見られます。一段の後の実効の作用が、格子 n の裸の作用と少しだけ違うなら、その違いが残りの段で縮んでいけば、粗い端での差は小さくなります。この章の定理は、この筋のうち「縮んでいく」の部分を、点の軌道の言明として書いたものです。

02

一段の写像の形 — 周辺の方向と無関係な方向

実効の作用を、二つの座標で表すと考えます。周辺の座標 $u \in \mathbb{R}$（逆結合）と、無関係な座標 v（それ以外。距離空間 X の点）です。尺度 k（$k = n$ が細かい端、$k = 0$ が粗い端）から $k-1$ への一段の写像を

$$\Phi_k(u, v) = \big(u - b_k + r_k(u, v),\ T_k(u, v)\big) \tag{2}$$

とします（Lean：`SkewOrbit.step`）。b_k は一段の結合の減り（一ループの値の付近の数）、r_k はその直し、T_k は無関係な座標の写像です。写像は段 k だけに依り、出発した格子 n には依りません。

なぜ歪積か。全ての方向が縮む写像なら、軌道の収束は縮小写像の原理の型で出ます。繰り込みの写像は、結合の方向 u では縮みません（漸近自由のもとでは、u は一段ごとにほぼ b ずつ減るだけです）。縮むのは無関係な方向 v だけで、二つの方向は r_k と T_k を通して互いに影響します。この形の写像を歪積と呼びます。

格子 n の軌道は、尺度 n の裸の値 $w_n(n)$ から始めて $w_n(k-1) = \Phi_k(w_n(k))$ で粗い端 $w_n(0)$ まで下ろした点の列です（Lean：`SkewOrbit.IsOrbit`）。軌道の族 $(w_n)_n$ について、次の三つをまとめて「許容」と呼びます（Lean：`SkewOrbit.Admissible`）。

- 各 w_n は尺度 n から 0 への軌道。
- **終点の合わせ**：全ての n で、粗い端の周辺の座標が同じ値 $\bar{u}$ になる：$w_n(0)_u = \bar{u}$。
- 無関係な座標は、全ての段で直径 D 以下の集合 $\mathcal{B} \subset X$ に留まる。

終点の合わせは、前の章の結論の一つ目（28-01 §03、n 段の後にちょうど目標の値になる裸の値が在る）と同じ役をします。ただし二つの定理は、互いの量を参照していません。

03

仮定の欄の表

表 1　終点を合わせた歪積の軌道の収束の仮定（中点の版 `SkewOrbit.coarse_tendsto_mid` の欄。$v, v' \in \mathcal{B}$、u, u' は全ての実数）

Lean の欄	数学の言葉	払われているか
`hr`	仮 $\lvert r_k(u,v) - r_k(u',v')\rvert \le \varepsilon\lvert u-u'\rvert + c\,d(v,v')$	抽象。r_k, T_k, X は自由で、格子から定義されていない
`hT`	仮 $d(T_k(u,v), T_k(u',v')) \le c'\lvert u-u'\rvert + \tau\, d(v,v')$	
`hB`	仮 $\mathcal{B}$ の直径 $\le D$	抽象

Lean の欄	数学の言葉	払われているか
`hε` ・ `hc` ・ `hc'` ・ `hτ` ・ `hD`	仮 $\varepsilon, c, c', \tau, D \geq 0$	数の条件
`hετ` ・ `h4`	仮 $\varepsilon + \tau < 1$、$4cc' < (1-\varepsilon-\tau)^2$	数の条件（§06 でこの方法に必要十分）
`hw`（`Admissible`）	仮 軌道の族が許容（軌道であること・終点の合わせ・$\mathcal{B}$ に留まる）	抽象
`[CompleteSpace X]`	仮 X は完備	抽象

一般の版（`SkewOrbit.coarse_step` ・ `coarse_cauchy` ほか）は、θ を一つ与えて、$\tau < \theta < 1-\varepsilon$ と

$$q := \frac{cc'/(1-\varepsilon-\theta) + \tau}{\theta} < 1 \tag{3}$$

を仮定します。この章の θ は縮みの率で、渦の比 θ_M（19-02）とは無関係です。中点 $\theta = (1-\varepsilon+\tau)/2$ を取ると、式 (3) は $4cc' < (1-\varepsilon-\tau)^2$ から出ます（Lean：`SkewOrbit.midpoint_admissible`）。

Lipschitz の欄は u の全ての値で仮定していますが、これは制限になりません。欄を窓 $u, u' \geq a$ の上だけで仮定し、軌道が窓に留まる（全ての n, k で $w_n(k)_u \geq a$）ことを足せば、同じ結論が出ます（Lean：`SkewOrbitProbe.coarse_tendsto_window` ・ `limit_independent_window`。$u \mapsto \max(u, a)$ で切った写像に元の定理を当てる）。弱結合の窓 $u \geq u_\star$ の上の評価だけを使う場面に合います。

仮定は同時に満たせて、しかも自明な場合に限りません。$X = \mathbb{R}$、$\mathcal{B} = [-1, 1]$（$D = 2$）、$b = 0$、$r(u, v) = \frac{7}{20}v$、$T(u, v) = \frac{7}{10}v + \frac{1}{20}u$（$\varepsilon = 0$、$c = 7/20$、$c' = 1/20$、$\tau = 7/10$、$4cc' = 0.07 < 0.09$）で、裸の無関係な座標が $\pm\frac{1}{2}$ の付近で振動して収束しない許容な族が作れ、粗い端は収束します（Lean：`SkewOrbitProbe.Ex.admissible` ・ `Ex.coarse_converges` ・ `Ex.bare_not_cauchy`）。

04

言明 — 粗い端の Cauchy 性と極限の一意性

表 1 の仮定のもとで、$\theta = (1-\varepsilon+\tau)/2$ として次が成り立ちます。

$$d\big(w_{n+1}(0)_v,\ w_n(0)_v\big) \leq D\,\theta^n \qquad (\text{全ての } n). \tag{4}$$

だから粗い端の無関係な座標 $w_n(0)_v$ は Cauchy 列で、X が完備なら**全列で**収束し、その極限 v_∞ について $d(w_n(0)_v, v_\infty) \leq D\theta^n/(1-\theta)$ です。さらに、同じ $\bar{u}$ で合わせた二つの許容な族の

極限は一致します。極限は、裸の無関係な座標 $w_n(n)_v$ の選び方に依りません。粗い端の点 (u, v) の連続関数 Ψ は、全列で $\Psi(\bar{u}, v_\infty)$ に収束します。

Lean：`SkewOrbit.coarse_step`（式 (4)）・`coarse_cauchy`・`coarse_tendsto`・`coarse_rate`・`limit_independent`・`observable_tendsto`、中点の版 `coarse_step_mid`・`coarse_tendsto_mid`・`limit_independent_mid` — 含意として機械検査（仮定は表 1 のとおり）。

式 (4) が比べているものを確かめておきます。格子 $n+1$ の軌道を尺度 n 以下に切ると、それは尺度 n で「裸の値に一段 Φ_{n+1} を当てた点」から始まる軌道です（Lean：`SkewOrbitProbe.one_step_after`）。格子 n の軌道は尺度 n の裸の値から始まります。どちらも粗い端で $\bar{u}$ に合わせてあるので、同じ長さ n の二つの許容な軌道の比べになります。

この言明を連続極限の言葉に読むと、「粗い尺度の観測量が (u_0, v_0) の連続関数なら、その期待値の列は部分列を取らずに収束し、極限は裸の作用の無関係な部分の選び方に依らない」となります。この読みは定理の外に在ります（§08）。

05

証明の道筋 — 二点の境界値の問題

同じ長さ n の二つの許容な軌道 w, w' を比べ、$x_k = |w(k)_u - w'(k)_u|$、$y_k = d(w(k)_v, w'(k)_v)$ と置きます。

段 1：一段の不等式。 式 (2) の第一成分の差をとり、表 1 の `hr` を使うと $x_k \le x_{k-1} + \varepsilon x_k + c\, y_k$、つまり

$$(1-\varepsilon)\, x_k \le x_{k-1} + c\, y_k, \qquad y_{k-1} \le c' x_k + \tau\, y_k \qquad (1 \le k \le n) \tag{5}$$

です（後者は `hT`）初。境界の値は $x_0 = 0$（終点の合わせ）と $y_n \le D$（$\mathcal{B}$ の直径）です。x は粗い側（$k=0$）から細かい側へ、y は細かい側（$k=n$）から粗い側へ伝わります。

段 2：重みつきの最大。 $M := \max_{k \le n} y_k\, \theta^{-(n-k)}$ と置きます。$x_0 = 0$ から式 (5) の前半を積むと、帰納法で $x_k \le cM\theta^{n-k}/(1-\varepsilon-\theta)$ が出ます（$\theta/(1-\varepsilon-\theta) + 1 = (1-\varepsilon)/(1-\varepsilon-\theta)$ でちょうど閉じます）初。

段 3：締める。 それを式 (5) の後半に入れると、$k-1 < n$ で $y_{k-1}\theta^{-(n-k+1)} \le qM$（$q$ は式 (3)）。$k = n$ では $y_n \le D$。だから $M \le \max(D, qM)$ で、$q < 1$ から $M \le D$、特に $y_0 \le D\theta^n$ です初（Lean：`SkewOrbit.two_point_bound`・`orbit_compare`）。

段 3 で $q < 1$ を使うところが、縮みの条件の効く場所です。u の方向は縮まないので、u の差を v の差で抑えるには、粗い端で u の差が 0 であること（終点の合わせ）が要ります。

06

条件と速さ — この方法に必要十分であること

θ の選び方について、三つのことが Lean で確かめられています。

- **必要十分**：$\tau < \theta < 1 - \varepsilon$ と式 (3) を満たす θ が在ることと、$\varepsilon + \tau < 1$ かつ $4cc' < (1 - \varepsilon - \tau)^2$ であることは同値です（Lean：`SkewOrbitProbe.theta_exists_iff`）。中点を取ることで条件は何も失われません。
- **速さの窓**：$s = \sqrt{(1-\varepsilon-\tau)^2 - 4cc'}$、$\theta_\pm = \big((1-\varepsilon+\tau) \pm s\big)/2$ とすると、$\theta_- < \theta < \theta_+$ の全ての θ が使えます（Lean：`SkewOrbitProbe.rate_window`）。速さは θ_- の直上まで良くできます。
- **下げられない速さ**：$\varepsilon = 0$、$c = 1/6$、$c' = 1/3$、$\tau = 1/2$（$\theta_- = 2/3$、$\theta_+ = 5/6$）で、式 (5) と境界の値を満たし $y_0 \geq (2/3)^n/2$ となる列が在ります。だから式 (5) からは θ_- より速い減りは出ません（Lean：`SkewOrbitProbe.Sharp.sharp`）。

$\theta_\pm$ は、交差の項の符号を逆にした線形の模型の行列 $\begin{pmatrix} 1-\varepsilon & -c \\ c' & \tau \end{pmatrix}$ の固有値です 初 （特性多項式 $\lambda^2 - (1-\varepsilon+\tau)\lambda + (1-\varepsilon)\tau + cc'$ の根）。$4cc' \leq (1-\varepsilon-\tau)^2$ は、それが実数である条件です。

ここで言う「必要十分」は、**この証明の方法（式 (5) からの二点の評価）に対して**です。条件が破れたときに全列の収束そのものが偽になる、という主張ではありません。式 (5) は差の大きさだけを見ていて、交差の項の符号を使っていないので、符号が分かる写像では、より良い評価の余地があります。

07

終点の合わせは外せない

§03 の例と同じ写像（$\varepsilon = 0$、$c = 7/20$、$c' = 1/20$、$\tau = 7/10$、$\mathcal{B} = [-1, 1]$）で、軌道は全て軌道で、無関係な座標は $\mathcal{B}$ に留まるのに、粗い端の周辺の座標を揃えない族が作れます。その族では、粗い端の無関係な座標は Cauchy になりません（Lean：`SkewOrbitProbe.Ex.matching_needed`）。

中身は、写像の行列 $\begin{pmatrix} 1 & c \\ c' & \tau \end{pmatrix}$ が固有値 $21/20 > 1$ の方向（周辺の方向に近い方向）を持つことです。この例では、粗い端の u を揃えないと、軌道はこの方向の成分を持ち、その大きさが n ごとに入れ替わります。終点の合わせは、この拡がる方向の成分を n ごとに決め直す操作です。

だから、全列の収束は「縮み」だけからは出ません。**裸の結合を n ごとにどう選ぶか（合わせ）が、言明の一部です**。格子の言葉では、これは示すべき言明の「合わせ」（19-07）に当たります。同じ型の存在（n 段の後にちょうど目標の値になる裸の値）は前の章の結論の一つ目が別の量について与えますが、二つの定理の u は同じものと置かれていません。そこでも u は格子から定義されていません（28-01 §07）。許容な族が在ること（無関係な座標が $\mathcal{B}$ に留まることを含む）も、一般の写像では示されていません。

08

仮定の写像は格子から定義されていない

この定理は、距離空間 $\mathbb{R} \times X$ の点の軌道についての言明です。測度・格子・ブロック写像は、言明のどこにも出てきません。格子の連続極限の全列の収束に読むには、定理の外で次のものを決める必要があります。

1. **座標**：段 k の実効の作用を (u, v) で表すこと。とくに無関係な座標 v と、その距離。実効の作用（段 k の実効の測度）そのものが、まだ格子から定義されていません。
2. **写像**：一段の繰り込みを、その座標の上の写像 Φ_k として書くこと（式 (2) の形になること、b_k が二つの軌道に共通であること）。
3. **縮み**：その写像が表 1 の Lipschitz の評価を、$4cc' < (1 - \varepsilon - \tau)^2$ を満たす定数で持つこと。
4. **観測量**：粗い尺度の観測量の期待値が、粗い端の座標 (u_0, v_0) の連続関数であること。

四つとも、今は仮定の側に在ります。前提の一覧（28-04）では、一段の写像の Lipschitz の縮みと終点の合わせの行が「形が未定（対象が未定義）」の札を持ち、その下に段に一様な帰納や小さい場の一段の繰り込みなど、表現の水準の前提がぶら下がります。どの座標とノルムを選ぶかは設計の選び（28-05）です。

Lipschitz の縮みが、繰り込み群の既存の評価（場と母数について解析的な形の評価）から出るかどうかは、確かめていません。この章は、その見込みを主張しません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 増分が総和可能なら全列が収束し、部分列の極限はそれに等しい。Lean：`WeakUltravioletExistence.tendsto_of_summable_increments`・`weak_uv_observable_full`	格子の期待値の増分が総和可能であること（先に組んだ条件つきの含意の仮定、増分の総和可能性の仮定）
含意：表 1 の仮定のもとで、粗い端の無関係な座標は全列で収束し、差は $D\theta^n$ 以下、極限は裸の値に依らない。Lean：`SkewOrbit.coarse_step`・`coarse_tendsto`・`limit_independent`・`observable_tendsto` — 含意として機械検査（仮定は表のとおり）	仮定の写像 r_k, T_k と座標 X が格子から定義されていること。格子の連続極限の全列の収束
使える θ が在ることは $\varepsilon + \tau < 1$ かつ $4cc' < (1-\varepsilon-\tau)^2$ と同値。Lean：`SkewOrbitProbe.theta_exists_iff`・`rate_window`・`Sharp.sharp`	条件が破れたとき全列の収束が偽になること（方法の限界であって、言明の否定ではない）
終点の合わせを外すと、同じ写像で Cauchy でない族が在る。Lean：`SkewOrbitProbe.Ex.matching_needed`	格子の上の合わせ方（どの量をどの段で合わせるか）
初 この章の u と前の章の結合の関数 u は、別々の定理の別々の変数	二つを同じものと置くこと。許容な族（合わせつきで $\mathcal{B}$ に留まる軌道）が実際の写像で在ること
仮定は自明でない例で同時に満たせる。Lean：`SkewOrbitProbe.Ex.admissible`・`Ex.bare_not_cauchy`	実際の繰り込みの写像が仮定を満たすこと

出典と再現

もの	種別	出典・道具
歪積の軌道の定理（§02〜§05）	Lean	本書の検討の Lean：名前空間 `SkewOrbit` の 13 本（`two_point_bound`・`midpoint_admissible`・`orbit_compare`・`coarse_step`・`coarse_cauchy`・`coarse_tendsto`・`coarse_rate`・`limit_independent`・`observable_tendsto` と中点の版）。Lean 4 で機械検査（13 本）。公理は標準の三つ。核の再検査済み。言明は源の字を読んで写した
条件の同値・速さの窓・下げられない速さ・合わせの必要・窓の版（§03・§06・§07）	Lean	名前空間 `SkewOrbitProbe`（定義と言明を別の目で照合したときに足した補助の宣言：`theta_exists_iff`・`rate_window`・`Sharp.sharp`・`Ex.*`・`coarse_tendsto_window` ほか）。公理は標準の三つ（検査の記録）

もの	種別	出典・道具
増分が総和可能なら全列（§01）	Lean	`WeakUltravioletExistence.tendsto_of_summable_increments`・`subseq_limit_eq`・`weak_uv_observable_full`
線形の模型の固有値（§06）	初	本文の計算（2×2 の行列の特性多項式）
先に組んだ条件つきの含意の仮定（増分の総和可能性の仮定）	—	本書の検討の記録（2026-10-30）。28-01 §08

この章で使った語 — 全列の収束・増分の総和可能性・歪積・周辺の座標・無関係な座標・一段の写像・軌道・終点の合わせ・許容な族・Lipschitz の縮み・二点の境界値の問題・速さの窓。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：28-03 減衰から質量ギャップへ、帯の還元 — 赤外の側の二つの含意と、その間に矢印が無いことを読みます。

減衰から質量ギャップへ、帯の還元

この章は本書の検討です。

この章で分かること — 赤外の側の二つの含意を読みます。(i) 測度の列が一様な指数の減衰を持てば、極限の測度から再構成した理論は質量ギャップを持つ（Lean：`OSGap.massGap_of_measures_sub`）。強結合の窓では、この仮定は全て具体の Wilson の測度で払われています。(ii) 渦の比 θ について基点・入れ子・横広げの三つが成り立てば、$\ln(1/\theta)$ が面積に比例して育つ（Lean：`BandReduction.band_reduction` ほか）。最後に、(ii) の結論から (i) の仮定へ向かう矢印は無い、ということを書きます。

前提となる章 — 19-03 再構成の器・質量ギャップの定義、20-04 再構成と質量ギャップ、19-02 渦の比 θ、26-02 一つの不等式への還元。

先に言うこと — 二つとも含意です。(i) は窓の外では仮定のままで、仮定を払う具体の測度の列（格子間隔を動かす列）はありません。また結論だけでは、Hilbert 空間が真空だけの自明な場合を除けません。(ii) は実数の関数 $\theta(R, L)$ についての不等式の言明で、格子も測度も出てきません。実際の渦の比が三つの仮定を満たすことは示されていません。面積の指数から質量ギャップを出す矢印は、Lean にも紙にもありません。格子間隔に一様な指数の減衰は、2026-11-10 に公開された構成にも無く、在るのは長い距離について多項式の速さの評価までです（16-03）。この章の二つの含意は、開いたままの赤外の側の問いに向けた形です。

この章の順序

1. 二つの含意と、その間 — 減衰 ⇒ ギャップ、三つの仮定 ⇒ 面積の指数、面積 ⇒ ギャップは無い
2. 減衰から質量ギャップへ — 言明 — 極限の測度の上の再構成と、‖T − P_Ω‖ ≤ e^{−m}
3. 減衰からギャップへ — 仮定の欄の表 — 鏡映正値性・対称・並進・減衰（表 1）
4. 強結合の窓の中では全て払われている — 20-04 の定理との関係と、窓の外
5. 帯の還元 — 言明 — 二倍ずつの尺度で、偏りが四乗ずつ小さくなる
6. 帯の還元 — 仮定の欄の表 — 基点・入れ子・横広げ（表 2）

7. 面積の指数から質量ギャップへの矢印は無い — 二本の道は別々に在る

01

二つの含意と、その間

赤外の側（長い距離の側）には、目標が二つあります。一つは質量ギャップ（転送の作用素の、真空の外での縮み）、もう一つは閉じ込め（渦の比やループの期待値が面積に比例して減ること）です。この章の二つの含意は、それぞれの目標へ向かう最後の一段を受け持ちます。

```
一様な減衰（測度の列）   ──〔含意 (i)：Lean〕──▶   極限の理論の質量ギャップ
        ▲
        |   矢印なし（§07）
        |
面積の指数   ◀──〔含意 (ii)：Lean〕──   基点 ＋ 入れ子 ＋ 横広げ（渦の比 θ）
```

二つの矢印は、どちらも「もし〜ならば」の形で Lean で機械検査されています。仮定の側（一様な減衰、三つの不等式）は、示すべき言明の「質量ギャップ（一様な減衰）」と「帯」（19-07 の一様な減衰・帯。どちらも合わせで決めた結合の列について言う）に当たり、どちらも格子間隔を動かす形では示されていません。図の縦の矢印は、§07 で書くとおり、在りません。

02

減衰から質量ギャップへ — 言明

設定を決めます。X は配位の空間、Y は正の側の配位の空間です。連続写像 $r, \Theta_r : X \to Y$ は、配位を正の側へ制限する写像と、鏡に映してから制限する写像です。$\mathrm{sh} : Y \to Y$ は時間の一目盛りの並進です。観測量は Y の上の有界連続関数で、そのうち定数 1 を含み並進で閉じた部分空間 W（たとえば有限個の時刻の切り口だけに依る関数）を使います。測度 ν について、対と並進を

$$\langle F, G \rangle_\nu = \int F(\Theta_r x)\, G(r x)\, d\nu(x), \qquad (\tau F)(y) = F(\mathrm{sh}\, y) \tag{1}$$

とします。対が半正値・対称で、τ が対について対称なら、W を対で割って完備化した Hilbert 空間と、τ から来る転送の作用素 T、定数 1 から来る真空 Ω が作れます（再構成の器。19-03）。質量ギャップ m は $\|T - P_\Omega\| \le e^{-m}$ です（P_Ω は真空への射影。19-03）。

含意 (i)。確率測度の列 μ_n が ν に弱収束し、表 1 の欄が成り立つとします。そのとき W の上の再構成の器 D が在って、その対は ν の対 (1)、並進は τ、定数は 1 で、D は質量ギャップ m を持ちます。

Lean：`OSGap.massGap_of_measures_sub` — 含意として機械検査（仮定は表 1 のとおり）。結論は器の対・並進・定数を ν の量に縛った形で、器を勝手に選べる形ではありません。

証明の道筋は三段です。(1) 鏡映正値性・対称・並進の対称は、$F\circ\Theta_r\cdot G\circ r$ が有界連続なので弱極限に移ります（28-01 §05 と同じ型）初。(2) それで ν の上の器が作れます。(3) 減衰の欄も極限に移り、$\langle\tau^k F,\tau^k F\rangle_\nu-\langle 1,F\rangle_\nu^2\le C_F e^{-2mk}$ が全ての $F\in W$ で立ちます。これを Hilbert 空間の言葉に直すと、真空に直交するベクトルの上で T^k が e^{-mk} で縮むことになり、$\|T-P_\Omega\|\le e^{-m}$ が出ます（Lean：`OSGap.Datum.hasMassGap_of_decay`）。

03

減衰からギャップへ — 仮定の欄の表

表 1　`OSGap.massGap_of_measures_sub` の仮定（「大きい n で」は「ある n_0 があって $n\ge n_0$ で」。$F,G\in W$）

Lean の欄	数学の言葉	強結合の窓の中	窓の外
`h`	仮 $\mu_n\to\nu$（弱収束）	全て Wilson の測度で払われている（§04、20-04）	抽象（格子間隔を動かす列の収束は示されていない）
`h1` ・ `hW`	仮 $1\in W$、W は並進で閉じる		観測量の類の選び
`hRP`	仮 大きい n で $\int F(\Theta_r x)F(rx)\,d\mu_n\ge 0$（鏡映正値性）		細かい格子の測度では定理（20-01）。押し出した測度では類による
`hsym` ・ `hshift`	仮 大きい n で対が対称、並進が対について対称		抽象
`hdec`	仮 各 F に定数 C_F が在り、各 k と大きい n で $\int F(\mathrm{sh}^k\Theta_r x)F(\mathrm{sh}^k rx)\,d\mu_n-\left(\int F(rx)\,d\mu_n\right)^2\le C_F e^{-2mk}$（一様な減衰）		形は確定、示されていない（格子間隔に一様な m が要る）

減衰の欄 `hdec` で、m と C_F は n に依りません。極限の理論の質量 m は、測度 μ_n が住む格子の時間の一目盛りを単位にした数です。連続極限で物理の質量を言うには、粗い尺度のブロック観測量について、格子間隔と箱の大きさに依らない率で減衰することが要ります。それが示すべき言明の「質量ギャップ」（19-07 の一様な減衰。合わせで決めた結合の列について言う）で、この含意の仮定 `hdec` をその形で払うことは、窓の外では開いています。また欄 `h` は列 μ_n の弱収束を仮定します。前の章（28-01 §04）のように部分列の極限しか無いときは、その部分列に当てて「その極限点について」の結論になり、極限そのものは一つに決まりません。

結論だけでは、自明な場合を除けません。W を対で割った空間が真空だけ（一次元）なら、$T - P_\Omega = 0$ で、質量ギャップは任意の m で立ちます。仮定の欄も、一点の空間で同時に満たせます 初 。中身のある質量ギャップには、真空の外に状態が在ること（非退化）を別に言う必要があります。強結合の窓の定理は、非退化を言明に入れています（20-04）。

04

強結合の窓の中では全て払われている

強結合の窓 $18\tanh|\beta| < 1$（$|\beta| < 0.0556$ 読 ）では、周期の箱 $(\mathbb{Z}/2(n+1))^4$ の正規化した Wilson の測度を $\mathbb{Z}^4$ へ周期に持ち上げた列が、部分列なしに一つの測度 ν_β に弱収束します。そのうえで、表 1 の欄に当たる性質（鏡映正値性・対称・並進・減衰）が全て具体の測度で示され、再構成の器は $\|T - P_\Omega\| \le (18\tanh\beta)^{1/2}$ を満たし、真空の外に状態が在ります（$0 < \beta$。Lean：`InfMain2.wilson_infvol_main2`。20-04 の一本にまとめた言明）。これは強結合の展開による既知の型の結果の形式化です 典 （Osterwalder–Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440 の型）。

窓の中の定理が言っていないことを並べます。格子間隔は 1 に固定です。窓は $|\beta| < 0.0556$ だけで、連続極限の側（$\beta \to \infty$）には届きません。質量の数 $-\frac{1}{2}\log(18\tanh\beta)$ は下界だけです。

だから含意 (i) の位置は次のとおりです。**窓の中では、含意の仮定が全て払われ、結論が具体の Wilson の測度の定理として立ちます。窓の外では、仮定のままです。**連続極限の質量ギャップに使うには、格子間隔を動かす測度の列（細かい格子の測度を粗い段へ押し出した列、28-01）について表 1 の欄を示すことが要り、そのどれも示されていません。

05

帯の還元 — 言明

閉じ込めの側の目標は、渦の比が面積に比例して小さくなることです。意図の読みでは、$\theta(R, L)$ は平面の向きの大きさ R の容器と一辺 L の横のトーラスの、典型的な枠での区画の偏りで、長さは物理の単位で測ります（26-02 §01。格子の上の渦の比の定義は 19-02）。目標は、物理の単位で一様な $c > 0$ について $\ln(1/\theta(R,R)) \ge cR^2$ です。

含意 (ii)。$\theta : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ を任意の関数とし、表 2 の構造体 `Hyp`（非負・基点・入れ子・横広げ）を仮定します。構造体の外の仮定は $L_0 > 0$、$s \ge 1$、$C \ge 0$、$C_D \ge 0$、$c \ge 0$、$c^3 = 4CC_D$ です。二倍ずつの尺度 $R_k = 2^k s L_0$ を取ると、全ての k で

$$c\,\theta(R_k, R_k) \;\le\; \big(c\,t_0\big)^{4^k}, \qquad t_0 := C s^2 C_D\,(1-\varepsilon_0)^{s^2} \tag{2}$$

です。さらに $c \geq 1$ かつ $0 < c\,t_0 < 1$ なら、$\theta(R_k, R_k) > 0$ のとき（`area_exponent` の仮定はこの三つと式 (2)）

$$4^k \ln \frac{1}{c\,t_0} \;\leq\; \ln \frac{1}{\theta(R_k, R_k)} \tag{3}$$

で、$4^k = R_k^2/(sL_0)^2$ なので、これは面積の指数の形 $\ln(1/\theta(R_k, R_k)) \geq c' R_k^2$ です。

Lean：`BandReduction.band_reduction`（式 (2)）・`area_exponent`（式 (3)）、部品 `BandReduction.jump`（基点から一度の入れ子と一度の横広げで $\theta(sL_0, sL_0) \leq t_0$）・`step`（一段の倍化 $\theta(2R, 2R) \leq 4CC_D\,\theta(R, R)^4$）— 含意として機械検査（仮定は表 2 のとおり）。

証明の芯は `step` です。入れ子を $n = 2$ で使うと $\theta(2R, R) \leq C_D \theta(R, R)^4$、横広げを $L = R$、$L' = 2R$ で使うと $\theta(2R, 2R) \leq 4C\,\theta(2R, R)$ で、合わせて $t_{k+1} \leq 4CC_D\,t_k^4$。$c^3 = 4CC_D$ と置くと $c\,t_{k+1} \leq (c\,t_k)^4$ になり、帰納法で式 (2) が出ます 初 。

基点の代わりに一つの大きさでの数 $\theta(R_0, R_0) \leq t_0$ を入れ、横広げを「偏りが既に小さい倍化の段」だけで使う版も在ります（Lean：`BandFiniteSize.doubling`。仮定は構造体の三つ — 非負、入れ子の $n = 2$ の場合、$\theta(2L, L) \leq \delta$ のときの横広げ — と、$R_0 > 0$、$C \geq 0$、$C_D \geq 0$、$c \geq 1$、$c^3 = 4CC_D$、$\theta(R_0, R_0) \leq t_0$、$c\,t_0 \leq 1$、$C_D t_0^4 \leq \delta$）。結論は式 (2) と同じ形です。

06

帯の還元 — 仮定の欄の表

表 2　構造体 `BandReduction.Hyp` の欄（θ は任意の関数 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$）

Lean の欄	数学の言葉	意図の θ について
`nonneg`	仮 全ての R, L で $\theta(R, L) \geq 0$	格子間隔を固定した渦の比では、縦の大きさが偶数なら全ての実の β で定理（21-06）。容器の偏りとの対応は紙
`base`	仮 $\theta(L_0, L_0) \leq 1 - \varepsilon_0$（基点）	格子間隔を固定した形では薄い渦の床 $\lvert\theta_M\rvert \leq \tanh(N^2\lvert\beta\rvert)^{M^2}$ が定理（21-02）。格子間隔に一様な形は示されていない
`nest`	仮 全ての R, L, n で $\theta(nR, L) \leq C_D\,\theta(R, L)^{n^2}$（入れ子）	紙の入力（26-02 の入れ子の議論）。Lean の欄との対応づけも紙
`widen`	仮 $0 < L \leq L' \leq R$ で $\theta(R, L') \leq C\,(L'/L)^2\,\theta(R, L)$（横広げ）	示されていない。十分条件の一つ（渦の自由エネルギーの方向ごとの劣加法性）が在るが（28-04）、それが成り立つかは開いている

この含意は、実数の不等式の言明です。θ は任意の関数で、格子・測度・格子間隔は言明に出てきません。意図の θ（容器の偏り）が三つの仮定を満たすことは、紙の入力として置かれていて、示されていません。とくに意図の読みでは、全ての長さが物理の単位で、仮定は格子間隔に一様でなければなりません。格子間隔を固定した床の定理（21-02・21-03）は、この一様性を与えません。

仮定は同時に満たせます 初 。$\theta(R,L)=e^{-R^2}$、$C_D=C=1$、ε_0 を小さく取ると、入れ子は等号、横広げは $(L'/L)^2\geq 1$ で立ちます。この例では結論も最初から分かっている形で、例は仮定が矛盾しないことを示すだけです。また入れ子を $n=1$ で使うと、$\theta>0$ のとき $C_D\geq 1$ が強いられます。

張力の倍化の不等式・単調性・一つの尺度の判定など、帯に関わる他の言明の形は、前提の一覧（28-04）に札つきで並べてあります。この章ではそれらを章にしません。

07

面積の指数から質量ギャップへの矢印は無い

含意 (ii) の結論（面積の指数）から、含意 (i) の仮定（ブロック観測量の一様な減衰）へ向かう矢印は、Lean にも紙にもありません。

素朴な形の「面積則 ⇒ 質量ギャップ」は、一般には偽です 初 。たとえば二次元の格子で、面積則を持つゲージ理論に、それと切り離された質量ギャップの無い模型（たとえば臨界の二次元 Ising 模型。臨界点で転送行列の隙間が閉じることは 2-09 §07）を直積で足した理論を考えます。Wilson ループの期待値はゲージの部分だけで決まるので面積則のままですが、Ising の部分の相関は指数で減らないので、理論全体に質量ギャップはありません（直積の転送行列の隙間は、二つの隙間の小さい方です）。だから面積の指数から減衰を出すには、そのような切り離された部分が無いことを使う、別の議論が要ります。

逆の向きには次の結果があります 典 （Chatterjee, Comm. Math. Phys. 385 (2021) 1007, arXiv:2006.16229。17-02）。中心対称性が破れなければ、Wilson ループは $|\langle W(R\times T)\rangle|\leq e^{-V(R)T}$、$V(R)\to\infty$ を満たし（弦の張力が正とまでは言いません）、さらに任意の境界条件での一様な指数減衰という強い形のギャップを仮定すると、面積則まで出ます。この強い形の減衰は、この章の含意 (i) の仮定とも、Clay の意味の質量ギャップとも同じではありません。本書の二つの含意は、その向きの矢印も Lean に持っていません。

だから、今の地図では二本の道は別々に在ります。

- **質量ギャップの道**：一様な減衰 ⇒ 質量ギャップ（含意 (i)）。仮定の一様な減衰は、窓の中では示され、窓の外では開いています。
- **閉じ込めの道**：基点・入れ子・横広げ ⇒ 面積の指数（含意 (ii)）。三つの仮定は、格子間隔に一様な形では示されていません。

質量ギャップの最後の矢印をどの道で引くか（帯の量を質量ギャップの言葉で書いた比べの行を使うか、など）は、前提の一覧（28-04）と開いている所（28-06）の主題です。この章は、

どちらの道が通るかを主張しません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
含意 (i)：測度の列が弱収束し、表 1 の欄が成り立てば、極限の測度の上の再構成の器が質量ギャップ m を持つ。Lean：`OSGap.massGap_of_measures_sub` — 含意として機械検査（仮定は表のとおり）	窓の外で、格子間隔を動かす列について欄を示すこと。結論だけでは非退化（真空の外の状態）が出ないこと
強結合の窓 $18\tanh\lvert\beta\rvert < 1$、$0 < \beta$ では、欄が全て具体の Wilson の測度で払われ、非退化つきの質量ギャップが立つ。Lean：`InfMain2.wilson_infvol_main2`（20-04）	格子間隔を動かすこと、窓の外、質量の上界（下界だけ）
含意 (ii)：基点・入れ子・横広げから、二倍ずつの尺度で $\ln(1/\theta)$ が面積に比例して育つ。Lean：`BandReduction.band_reduction`・`area_exponent`・`jump`・`step`、`BandFiniteSize.doubling` — 含意として機械検査（仮定は表のとおり）	意図の θ が三つの仮定を満たすこと（紙の入力）。格子間隔に一様な基点・横広げ
初 素朴な「面積則 ⇒ 質量ギャップ」は、切り離された、質量ギャップの無い部分があると偽	面積の指数から一様な減衰を出す矢印（Lean にも紙にも無い）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
減衰から質量ギャップへの含意（§02・§03）	Lean	本書の検討の Lean：`OSGap.massGap_of_measures_sub`、器 `OSGap.Datum`・`HasMassGap`、`OSGap.Datum.hasMassGap_of_decay`。言明は源の字を読んで写した
強結合の窓の定理（§04）	Lean・典	`InfMain2.wilson_infvol_main2`（20-04）。型の出典 K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440
帯の還元（§05・§06）	Lean	`BandReduction.Hyp`・`band_reduction`・`area_exponent`・`jump`・`step`・`iterate`、`BandFiniteSize.Hyp`・`doubling`。言明は源の字を読んで写した。紙の還元は 26-02
仮定が同時に満たせる例（§03・§06）	初	本文の取り方
ギャップから閉じ込めへの向きの結果（§07）	典	S. Chatterjee, Comm. Math. Phys. 385 (2021) 1007, arXiv:2006.16229

この章で使った語 — 含意・再構成の器・転送の作用素・真空への射影・質量ギャップ・一様な減衰・非退化・強結合の窓・渦の比・区画の偏り・基点・入れ子・横広げ・面積の指数。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：28-04 前提の一覧 ― 木と札 ― 三つの含意の仮定を含めて、示すべき言明を根に、今の道での十分条件を葉にした木を、札つきで並べます。

前提の一覧 — 木と札

この章は本書の検討です。§09 の辞書は案内です。

この章で分かること — 19-07 の六つの言明（根）を上に、今の道でそれを支える十分条件 57 行を下に置いた木と、57 行の表です。行ごとに、中身の名、一行の言明、どの対象についての言明か、札、形が未定なら理由の記号を書きます。札ごとの数と、先に組んだ条件つきの含意での名と第 27 部の台帳の呼び名との対応表も付けます。

前提となる章 — 28-00 入口（札の凡例）、19-07 示すべき言明。対象の定義は第 19 部（19-01〜19-04）。

先に言うこと — この一覧は 2026-11-13 の時点のもので、札は動きます。更新は A-08 質量ギャップまでの地図 で行います。表の言明の多くは、まだ格子から定義されていない量（実効の結合・活性・背景場など）を使っています。その行は「形が未定」か「対象：定義なし」と書いてあり、言明が意味を持つことを主張していません。紫外の側の根を支える行（表 2・表 3 の大半）は、本書の設計（決まったブロック写像で押し出した測度）での十分条件の記録です。四次元のヤン–ミルズ理論の存在は、2026-11-10 に公開された構成が別の設計で示しました（第二巻。二つの設計の比べは 第 14 部）。赤外の側の行（表 4 の一様な減衰と、表 5 の帯）は、開いたままの問いに向けたものです。

この章の順序

1. 段と札の読み方 — 表の並びと、七つの札
2. 木 — 根と、表現を通した十分条件（図 1）
3. 札ごとの数と、そこから読めること（表 1）
4. 箱の連続極限の前提 — 固定した箱の連続極限（表 2、17 行）
5. 紫外の安定性の前提 — 紫外の安定性の評価（表 3、21 行）
6. 全列の収束・観測量・無限体積・回転・非自明性の前提（表 4、7 行）
7. 帯 — 渦の自由エネルギーの行（表 5、12 行）
8. 57 行の外に足した 5 行（表 6）

9. 別名の辞書（短い版、表 7）

01

段と札の読み方 — 表の並びと、七つの札

表の並び。行は、証明までの道を段に分けたときの段の順に、四つの表に並べています。表の左の列の番号は、表ごとの通し番号です。本文では行を中身の名で引きます。

段	表	行の数
箱の連続極限の前提：大きさを止めた箱の連続極限（ブロック写像の鎖の前提）	表 2	17
紫外の安定性の前提：紫外の安定性の評価（一段ごとの評価。評価の種類は、自由場の入力、拘束つきの Green 関数、背景場、小さい場の展開、大きい場、段を跨ぐ帰納の順）	表 3	21
全列の収束・細かい観測量・無限体積・回転・非自明性の前提	表 4	7
帯（渦の自由エネルギーの移り変わり。条件の台帳 27-02 の帯の周りの行）	表 5	12

自由場の前提（自由場の絶対の条件）は紫外の安定性の前提の行（伝播関数の挟み・無関係な項の縮み・一段の結合の減りの係数・背景の写像の縮み・多体の和の幾何（相関のノルム）・大きい場の評価）への参照なので行を立てていません。フェルミオンの前提はこの一覧の範囲の外です。

札。前提の札は表の一つの欄で、本文の札（初・典・機・読・仮）とは別のものです（凡例は 28-00）。

札	意味
定理	Lean で機械検査し、定義と言明を別の目で照合する点検が、言明の中身まで確かめた
定理（弱い形）	同じだが、前提の形より弱い形まで。前提の欄を**そのまま払う**のか、**似た別の言明**（別の対象・部分族・線形化など）なのかを同じ欄に書く
紙	紙の議論が在る。定義と言明を別の目で照合する点検は済んでいない
形は確定・未証明	言明の形は決まっている。証明は無い。「条件つき」は、合わせで決めた列で閾・周期の制限を言明に入れたときに限る、の意味
形が未定	言明の形がまだ決まっていない。理由を記号で書く
設計に依る	設計の選び（28-05）で決まる行
文献	文献の結果に依る。本書で再導出していない

理由の記号（形が未定の行）：(a) 軽すぎる（自明な対象で立ってしまう）、(b) 強すぎる（偽か、偽の例が在る）、(c) 対象が未定義、(d) 今の形に反する数値の兆しが在る、(e) 一つの尺度の形は在るが段を跨ぐ形が無い、(f) 量化の順が未定。

表の「対象」の欄は、言明がどの対象について語るかです。第 19 部に定義が在るものは錨で結び、無いものは「定義なし」と書きます。

02

木 — 根と、表現を通した十分条件

木の根は 19-07 の六つの言明です。根は定義された対象だけで書けています。その下に、今の道で根を導くために置いている前提（葉）がぶら下がります。葉の多くは、実効の結合・活性・背景場・類といった**表現**（粗い尺度の理論を書き表すための量）を通した言明です。

図 1　根と十分条件の木（2026-11-13 の時点。括弧は札）

合わせ（19-07 §02）
  └ 実効の結合を通した十分条件
        │ ・実効の結合の定義と連続性（設計）
        │ ・結合の一段の正味の括弧（未定）
        │ ・大きい場の結合への寄与（未定）
        │ ・活性の再帰（未定）
        │ ・供給の稀さ（未定）
        │ ・動く不変区間と余白（未定）
        ├ 紫外の安定性の前提の表現の水準
        │   ・一段の結合の減りの係数（定理・弱）
        │   ・一ループの係数の値（文献）
        │   ・小さい場の一段の繰り込み定理（未定）
        │   ・段に一様な帰納（未定）
        │   ・大きい場の評価（未定）
        │   ・大きい場の気体（未定）
        └ 閾どうしの結び（未定）
── 以下の根は、合わせで決めた列 β_n について ──
全列の収束（19-07 §03）
  └ 一段の写像の縮みと終点の合わせ（未定）　※終点の合わせ ＝ 合わせ
        └ ・段に一様な帰納（未定）
          ・小さい場の一段の繰り込み定理（未定）
          ・無関係な項の縮み（定理・弱）
          ・拘束つき減衰の定理（確定・真空の版）
          ・背景の零階の運び（未定）
          ・一段の背景場の補題（紙）・多段の背景場（紙）
          ・一つの尺度の展開の道具（紙）
          ・段ごとのゲージ固定（紙）・類と局所化（紙）
非退化（19-07 §04）
  ├ 二段の事象の稀さ：面の部分（確定・条件つき）
  │   ← これ自身が定義された対象だけの言明
  └ 二段の事象の稀さ：背景の不変量の部分（未定）
        ・小さい場の集合の取り方と背景の不変量の延ばし方（設計）
        ・背景つきの正値性（未定）
        ・背景の二次の型の定数（紙）
        ・一段の背景場の補題（紙）
同程度連続（19-07 §05）
  └ 観測量の同程度連続（確定・条件つき）
        │ ← これ自身が定義された対象だけの言明
        └ 背景の写像の Lipschitz
              ・背景つきの正値性（未定）
              ・背景の二次の型の定数（紙）
              ・背景の写像の縮み（定理・弱）
構造（どの根にも要る）
      ・ブロック写像の連続・合成・押し出しの整合から
        観測量の族と小さい場の集合までの七行（定理 / 定理・弱 / 紙）
自由場の土台
      ・伝播関数の挟み（定理・弱）
      ・多体の和の幾何（相関のノルム）（定理・弱）
      ・多体の和の幾何（到達の定数）（確定）
      ・拘束つきの逆の恒等式（定理）

```
        ・細かい格子の一つの尺度の稀さ（定理・弱）
一様な減衰（19-07 §06）＝ ブロック観測量の一様な減衰（確定・条件つき）
  ├─ 質量ギャップの器への継ぎ目（確定）
  ├─ 無限体積：箱の大きさに一様な紫外の評価（未定）
  ├─ 回転：橋の一段の紫外の評価・無限体積の極限が箱の形に依らないこと（未定）
  ├─ 細かい観測量：流した観測量のブロック変数による近似（未定）
  ├─ 非自明：極限が自由場でないこと（未定）
  └─ 赤外の道
        ・帯の比較（ギャップの言葉）（未定）
        ・面積則からギャップへ（未定）
帯（19-07 §07）
  ├─ θ の非負（定理・弱）
  ├─ 小さな箱の基点（確定・条件つき）
  ├─ 一つの尺度の判定（確定・条件つき）
  │     ← 捩れを入れる写像の費用の問い（未定）
  ├─ 入れ子（枠の減相関）（紙）
  ├─ 倍化の横広げ（確定・条件つき）
  └─ 別の道
        ・張力の倍化の不等式（未定）
        ・渦の自由エネルギーの単調性と繰り込みの比較（未定）
        ・小さな捩れた箱のギャップと挿入の一様な受理（未定）
        ・渦の面積の指数から Wilson ループの面積則へ（文献）
```

木から読めることは三つです。

1. **根の水準では、言明の形は決まっています**（合わせの選びを除く）。ただし根は、合わせで決めた列について読むときだけ中身を持ちます（列を自由に取ると、$\beta_n \equiv 0$ で一様な減衰と帯の根が立ちます。19-07 §01）。形が未定の 24 行のうち 13 行は根より下の表現の水準に、8 行は対象がまだ無いか上流の後に決まる行に、3 行は帯の量化と真偽に在ります（28-06）。表現を替えれば葉は替わり、根は替わりません。
2. **非退化の面の部分（二段の事象の稀さ：面の部分）と同程度連続（観測量の同程度連続）は、前提の形がそのまま定義された対象だけの言明**で、表現を通していません。
3. **帯の側の未定は、表現からではなく、量化の順と真偽から来ています**（張力の倍化の不等式・渦の自由エネルギーの単調性と繰り込みの比較・面積則からギャップへ）。出どころが紫外と違います。

今の道の鎖の定理（28-01）の中では、裸の結合の列 β_n と実効の結合は繋がっていません。Lean の定理は裸の結合の列を任意に取ります。先に組んだ条件つきの含意（28-01 §08）は、細かい測度を「裸の結合の合わせの括弧で選んだ β_n の Wilson の測度」と定義することで両者を結んでいますが、証明そのものは結合の側と測度の側に割れています。鎖の中で両者を結べる候補の場所は、閾どうしの結びです。

03

札ごとの数と、そこから読めること

表 1　札ごとの数（2026-11-13 の時点、57 行。§08 の足した 5 行は数えない）

札	数	行
定理	3	ブロック写像の連続・合成・押し出しの整合・細かい格子の鏡映正値性・拘束つきの逆の恒等式
定理（弱い形）	10	ゲージ共変と局所性・格子の対称との可換・粗い水準の鏡映正値性・細かい格子の一つの尺度の稀さ・伝播関数の挟み・無関係な項の縮み・一段の結合の減りの係数・背景の写像の縮み・多体の和の幾何（相関のノルム）・θ の非負
紙	8	測度の対称・観測量の族と小さい場の集合・一段の背景場の補題・多段の背景場・一つの尺度の展開の道具・段ごとのゲージ固定・類と局所化・枠の減相関
形は確定・未証明	7	二段の事象の稀さ：面の部分・観測量の同程度連続・拘束つき減衰の定理・ブロック観測量の一様な減衰・小さな T^2 の基点・一つの尺度の判定・横広げの不等式（強い形）（拘束つき減衰の定理は真空のまわりの版、ほかの 6 行は条件つき）
形が未定	24	結合の一段の正味の括弧・大きい場の結合への寄与・活性の再帰・供給の稀さ・動く不変区間と余白・二段の事象の稀さ：背景の不変量の部分・背景つきの正値性・背景の零階の運び・小さい場の一段の繰り込み定理・大きい場の評価・大きい場の気体・段に一様な帰納・一段の写像の縮みと終点の合わせ・流した観測量のブロック変数による近似・箱の大きさに一様な紫外の評価・橋の一段の紫外の評価・無限体積の極限が箱の形に依らないこと・極限が自由場でないこと・捩れを入れる写像の費用の問い・張力の倍化の不等式・単調性と繰り込みの比較・小さな捩れた箱のギャップと挿入の一様な受理・帯の比較（ギャップの言葉）・面積則からギャップへ
設計に依る	2	実効の結合の定義と連続性・持ち上げの行和が段に一様
文献	3	一ループの係数の値・渦の面積の指数から Wilson ループの面積則へ・森の補間の公式

定理の札の行が語る対象。「定理」と「定理（弱い形）」の 13 行は、次のどれかについての言明です：細かい格子の Wilson の測度（細かい格子の鏡映正値性・細かい格子の一つの尺度の稀さ・θ の非負）、ブロック写像そのもの（ブロック写像の連続・合成・押し出しの整合・ゲージ共変と局所性・格子の対称との可換）、押し出しの測度の構造の性質（粗い水準の鏡映正値性。帯の類で）、自由場・真空の背景・線形化したブロック化（伝播関数の挟み・無関係な項の縮み・一段の結合の減りの係数・背景の写像の縮み・多体の和の幾何（相関のノルム））、抽象の恒等式（拘束つきの逆の恒等式）。**繰り込んだ尺度の測度（押し出しの測度 $\nu_{n,m}$ や段 $k \geq 1$ の実効の測度）についての、定量の評価の定理は在りません。**押し出しの測度について在るのは、細かい測度から押し出しで運んだ構造の性質だけです。

欄をそのまま払う行。「定理（弱い形）」の 10 行のうち、今の道の前提の欄をそのまま払っているのは粗い水準の鏡映正値性（帯の類で）だけです。ほかは、別の対象・部分族・線形化・一段の形などの、似た別の言明です（表の札の欄に書き分けました）。

形が未定の行の出どころ。24 行のうち 20 行は、理由に (c)（対象が未定義）か (e)（段を跨ぐ形が無い）を含みます。含まない 4 行（背景の零階の運び・張力の倍化の不等式・単調性と繰り込みの比較・面積則からギャップへ）は「強すぎる・偽の例が在る」の側で、背景の零階の運びは、今の形を偽とする紙の議論が在ります（別の目の確かめはまだ）。

形は確定・未証明の行と、自明に立つ取り方。7 行のうち 6 行（二段の事象の稀さ：面の部分・観測量の同程度連続・ブロック観測量の一様な減衰・小さな T^2 の基点・一つの尺度の判定・横広げの不等式（強い形））は、合わせで決めた列で、閾と周期の制限を言明に入れたときだけ「形は確定」です。列を自由に取ると、ブロック観測量の一様な減衰・小さな T^2 の基点・一つの尺度の判定・横広げの不等式（強い形）は $\beta_n \equiv 0$ で自明に立ちます（$\theta = 0$、時間に離れた変数が独立）初。強結合の窓でのブロック観測量の一様な減衰の定理（20-04）はこの向きに在り、言明が満たせる例ではあっても中身の確かめではありません。退化でない小さい例が在るのは、拘束つき減衰の定理の真空のまわりの版（一次元・スカラーで入力の二つ）と、小さな T^2 の基点の格子間隔を止めた形（薄い渦の床、21-02）です。

04

箱の連続極限の前提 — 固定した箱の連続極限

大きさを止めた箱で、ブロック写像の鎖が部分列の極限と、極限に移る性質を出すための前提です。使う側の含意は 28-01。記号：B はブロック写像、$\nu_{n,m}$ は押し出しの測度、u_k は段 k の実効の結合（格子からの定義は未定）、z_k は大きい場の活性、w_k は供給。

表 2　箱の連続極限の前提（2026-11-13 の時点）

番号	中身の名	言明	対象	札	理由
1	ブロック写像の連続・合成・押し出しの整合	B は連続。段 n から m への写像は一段ずつの合成。$(B_m)_* \nu_{n,m+1} = \nu_{n,m}$	19-04・押し出し	定理：全ての道の族・重み・測度の族について	—
2	ゲージ共変と局所性	$B(U^g) = B(U)^{g\vert\text{粗い点}}$。$B(U)_b$ は b から有限の距離の細かいリンクだけに依る	19-04	定理（弱い形、似た別の言明）：一段の写像の形。合成への延長と到達の距離は紙	—
3	格子の対称との可換	並進・鏡映・超立方の群と B が可換	19-04	定理（弱い形、下ごしらえ）：並進は点検済み、時間の向きの鏡映は Lean（中身は未点検）、ほかの軸の鏡映と超立方は紙	—
4	細かい格子の鏡映正値性	正の側のリンクだけに依る有界可測な f で $\int f(\Theta U)\, f(U)\, d\mu_W \geq 0$	19-01・鏡映	定理：一辺が偶数。格子点の面は全ての実の β、リンクの真ん中の面は $\beta \geq 0$ でゲージ不変な f（20-01）	—

番号	中身の名	言明	対象	札	理由
5	粗い水準の鏡映正値性	正の時間の類の F で $\int (F \circ \Theta)\, F \, d\nu_{n,m} \geq 0$、行列の形 $\sum c_a c_b \, s_n(x_{ab}) \geq 0$	19-04・正の側	定理（弱い形、欄をそのまま払う）：正の側を帯に取った類で。行列の形は紙。粗い半分の全部を正の側に取る形は置かない（28-05）	—
6	測度の対称	$\nu_{n,m}$ が格子の対称で不変。観測量の対称の破れ $\to 0$	19-04	紙：純粋なゲージ理論の対称の欄は Lean に無い。Lean に在るのはフェルミオンつきの測度の族の版（大域のゲージ変換と四方向の単位の並進）	—
7	観測量の族と小さい場の集合	D は可算で稠密、$\lvert s_n \rvert \leq B_d$、$s_n(x) = \int G_x \, d\nu_{n,\mathrm{lev}(x)}$、$C_m$ は閉で二段の事象を含む	19-07	紙：包含（二段の事象 $\subseteq$ 小さい場の集合）は背景の不変量の延ばし方に依る（小さい場の集合の取り方と背景の不変量の延ばし方）	—
8	実効の結合の定義と連続性	$u_0(x) = x_\circ$、$x \mapsto u_{k+1}(x)$ が $\{u_j \geq u_\star \ (j \leq k)\}$ で連続	定義なし（u_k）	設計に依る	—
9	結合の一段の正味の括弧	$u_{k+1} = u_k - b + r_k^s + r_k^l$、$b_{\inf} + \delta_k - e(u_k) \leq b - r_k^s \leq b_p + e(u_k)$、$\sum_k \max(-\delta_k, 0) \leq D_0$	定義なし（u_k、小さい場と大きい場の剰余 r_k^s, r_k^l）	形が未定	(c) (e)
10	大きい場の結合への寄与	$\lvert r_k^l \rvert \leq D(u_k)\, z_k$	定義なし（r_k^l、z_k）	形が未定	(a) (c)
11	活性の再帰	$z_{k+1} \leq \rho z_k + A w_k + B z_k^2$、$z_k \geq 0$、$z_0 \leq W(u_0)$	定義なし（z_k・w_k）	形が未定	(a) (c) (e)
12	供給の稀さ	$w_k \leq \Phi(u_k)$（段に一様な面の変数の指数の積率 $\mathbb{E}\, e^{\sigma Y} \leq m_1(\sigma)$ から）	定義なし（w_k、段 k の面の変数）	形が未定	(c) (e)
13	細かい格子の一つの尺度の稀さ	$\beta \geq 81$ で、X の面が全て $\mathrm{Re}\, U_p < 0$ の確率 $\leq q_1^{\lfloor \lvert X \rvert / 6 \rfloor}$、$q_1 < 1$ は体積に依らない	19-01	定理（弱い形、似た別の言明、どの欄にも未接続）：一つの尺度、$\beta \geq 81$、全分配関数に対する比（22-01）	—
14	動く不変区間と余白	$\rho W(s) + A\Phi(s) + B W(s)^2 \leq W(s')$（$u_\star \leq s,\ s' \leq s + D_0$）、$D(s) W(s) \leq Y$、$e(u_\star) + Y \leq b_{\inf}$	実数の関数 W, Φ, D, e	形が未定：W, Φ, D, e が自由で、全て 0 に取ると立つ	(a) (c)
15	二段の事象の稀さ：面の部分	大きい n で $\nu_{n,m}\big(\beta_m(1 - \mathrm{Re}\, U_p) > y_h(m)\big) \leq P_1(m)$	19-04	形は確定・未証明（条件つき：合わせで決めた列で、閾の床と $\eta_m < 1$ を言明に入れたとき）	—

番号	中身の名	言明	対象	札	理由
16	二段の事象の稀さ：背景の不変量の部分	大きい n で $\nu_{n,m}\big(f_{m,x} > f_h(m)\big) \le S(m)$	定義なし（背景場の不変量 f）	形が未定	(c)
17	観測量の同程度連続	$\lvert s_n(d) - s_n(d')\rvert \le \tau_n + \Omega(\mathrm{dist}(d,d'))$、$\tau_n \to 0$、$\Omega(r) \to 0$	19-04（観測量の族は観測量の族と小さい場の集合）	形は確定・未証明（条件つき：合わせで決めた列で）	—

05

紫外の安定性の前提

箱の連続極限の前提の表現の水準の前提（結合の一段の正味の括弧・大きい場の結合への寄与・活性の再帰・供給の稀さ）を、一段ごとの評価から出すための前提です。記号：G_k は段 k の自由場の伝播関数の族、P/ω は自由の伝播関数（19-04 §07）、$\mathcal{M}$ は一段の写像。

表 3　紫外の安定性の前提（2026-11-13 の時点）

番号	中身の名	言明	対象	札	理由
1	伝播関数の挟み	全ての段 k と運動量で $c_0\,P/\omega \preceq G_k \preceq P/\omega$、$c_0 = 3/100$	19-04	定理（弱い形、似た別の言明）：上の側・下の側とも点検済み。対象は記号の漸化式（運動量ごとの行列の族）、自由場・真空の背景・線形化、重み $(1/8, 3/4, 1/8)$（15-12）	—
2	背景つきの正値性	$\lambda_{\min}(H_c(B)) \ge \lambda_0(1 - f_1/f_\star)$	紙の定義（背景場 B、拘束つきの Hessian H_c）	形が未定：背景場と拘束つきの Hessian が紙の定義で、形も三通り並んでいる	(c)
3	無関係な項の縮み	$\mathcal{M}^{17}(\omega G_k) \preceq \tau\,\omega G_{k+17}$、$\tau < 1/170$、$k$ に一様	19-04	定理（弱い形、似た別の言明）：二次形式の τ。帰納の τ_k とは別。段 0 の一段の評価は条件つき（15-12）	—
4	一段の結合の減りの係数	自由場の係数 b_k が率 $(3/5)^k$ で収束し、過渡の和が有限	19-04	定理（弱い形、似た別の言明）：自由場の拘束つき共分散の上の、任意のデータの二次の汎関数が率 $(3/5)^k$ で収束。b_k がこの汎関数であることは紙	—
5	一ループの係数の値	$b_\infty = 2b_0 \ln 2$	—	文献：この写像での再導出なし	—
6	背景の写像の縮み	一目盛りの変位の和 $\sum_j \Delta_j < \infty$（自由場の部分は $\lVert\psi_l\rVert^2 \le 0.608^l$ の型）	19-04	定理（弱い形、似た別の言明）：自由場の部分	—

番号	中身の名	言明	対象	札	理由
7	多体の和の幾何（相関のノルム）	面の場の相関のノルム $\Lambda \le 640/9$	19-04	定理（弱い形、似た別の言明）：自由場・線形化・トーラス（15-12）。到達の定数は 多体の和の幾何（到達の定数）	—
8	拘束つきの逆の恒等式	$C = G - GT^{*}(TGT^{*})^{-1}TG$ と上下の評価	抽象の線形写像	定理：有限次元の抽象の恒等式と評価	—
9	拘束つき減衰の定理	段 k の一段の拘束つき Green 関数が、指数の重み W について $\|Wx\| \le \frac{11}{2}\|Ww\|/r^{2}$、定数が k に一様	抽象（Lean）。具体の対象は紙	形は確定・未証明（真空のまわりの版）。一般の背景の版は形が未定 (c)	—
10	背景の零階の運び	$\sup_n 4^n\theta_n < \infty$、$\sum_n 4^n\theta_n^{3/2} < \infty$（$\theta_n$：段 j の単位の背景の面の上限を粗い単位で割った比）	紙の定義（作用の最小化元の背景）	形が未定：今の形は、作用の最小化元の背景で数値では発散する 読 （偽であることの紙の議論は、点検の前）	(b) (d)
11	一段の背景場の補題	小さい場で、拘束つきの作用の極小が一意・解析的・指数で局所・粗いゲージと可換	紙の定義（背景場）	紙	—
12	多段の背景場	入れ子の小さい場の領域で一意・正則。線形化の逆は作用のノルムで段の数に依らず 1 以下	紙の定義（背景場）	紙	—
13	持ち上げの行和が段に一様	$\sup\|Eg\| \le R\,\sup\|g\|$、$R$ が k に一様	紙の定義（線形の持ち上げ）	設計に依る：ゲージとノルムの選び。一次元・スカラーは定理	—
14	一つの尺度の展開の道具	直積の白色雑音の測度の上のクラスター展開とその収束	抽象	紙	—
15	森の補間の公式	—	—	文献：本体は Lean に無い	—
16	小さい場の一段の繰り込み定理	粗い作用 $=$ $\beta_{k+1}S_W$（背景）＋ 局所の展開 ＋ 多体。多体は距離について指数で小さい	定義なし（段 k の実効の作用）	形が未定	(c) (e)
17	段ごとのゲージ固定	段ごとの Landau ゲージ。行列式は下三角の塊。Haar の Jacobian の評価	紙の定義	紙	—
18	大きい場の評価	各段 t と各穴 γ で $\|z_t(\gamma)\| \le \exp(-\gamma_E\,\beta\,S^{\flat}(\gamma))$、$S^{\flat}(\gamma) \ge s_*\|\gamma\|$、$s_* > 0$ が段と体積に一様	定義なし（活性、粗い類）	形が未定	(c) (d) (e)
19	大きい場の気体	$\sum_{X \ni x} \|z(X)\|\, e^{2\|X\|} \le 1$ と、気体の分配関数が対応する比に等しいこと	定義なし（活性）	形が未定	(a) (b) (e)

番号	中身の名	言明	対象	札	理由
20	類と局所化	次元 4 以下の局所のゲージ不変な項は定数と $\sum \operatorname{tr} F^2$ だけ	紙の定義（類）	紙：局所化の代数は Lean、類との同一視は紙	—
21	段に一様な帰納	$r_{k+1} \le \tau_k r_k + a_k w_k + s_k$、$w_{k+1} \le b_k r_k + \sigma_k w_k + s'_k$、係数の積が $1/4$ 未満なら球に留まる	定義なし（r_k・w_k は実数の列で、類の座標としての定義が無い）	形が未定	(c) (e)

06

全列の収束・観測量・無限体積・回転・非自明性の前提

箱の連続極限の前提と紫外の安定性の前提の形が決まった後に形を決める行です。細かい観測量と回転の行は、言明を書くための対象がまだ定義されていません（28-06）。

表 4　全列の収束・細かい観測量・無限体積・回転・非自明性の前提（2026-11-13 の時点）

番号	中身の名	言明	対象	札	理由
1	一段の写像の縮みと終点の合わせ	$\lvert r_k(u,v) - r_k(u',v')\rvert \le \varepsilon \lvert u-u'\rvert + c\lVert v-v'\rVert$、$\lVert T_k(u,v) - T_k(u',v')\rVert \le c' \lvert u-u'\rvert + \tau \lVert v-v'\rVert$、$4cc' < (1-\varepsilon-\tau)^2$	定義なし（一段の写像の座標 u, v）	形が未定	(c)
2	流した観測量のブロック変数による近似	流れの時間 t の観測量を、段 m のブロック変数の Lipschitz な関数で、格子に一様に誤差 $\varepsilon_m(t) \to 0$ で近似	対象なし（流した観測量）	形が未定：流した観測量が未定義	(c)
3	箱の大きさに一様な紫外の評価	箱の連続極限の前提と紫外の安定性の前提が、箱の大きさ L に依らない定数で立つ	その二つの前提の全て	形が未定	(e)
4	ブロック観測量の一様な減衰	$\lvert\langle F \cdot G \circ \tau_t\rangle - \langle F\rangle\langle G\rangle\rvert \le C_F C_G\, e^{-mt}$、$m$ が格子間隔と箱に依らない（正確な形は 19-07 §06）	19-04・19-03	形は確定・未証明（条件つき：合わせで決めた列で、時間差を周期の半分までに）。強結合の窓では定理（20-04）だが、自明に立つ側の向き	—
5	橋の一段の紫外の評価	回した細かい格子から標準の粗い格子への一段の像が、鎖の球に入る	対象なし（回した格子からのブロック写像）	形が未定	(c)
6	無限体積の極限が箱の形に依らないこと	形の違うトーラスの列の極限が一致する	定義なし（無限体積の極限）	形が未定	(c)
7	極限が自由場でないこと	（どの量で言うかが未定）	—	形が未定	(c)

07

帯 — 渦の自由エネルギーの行

渦の比 θ（19-02）だけで書ける行が多い段です。言明は 26-02 の記号 $\theta(R;T_L^2)$（縦の大きさ R、横のトーラスの大きさ L）のままに書きます。$m_0(L)$ は大きさ L の箱の質量（転送の作用素の隙間）、$\sigma_N(\beta)=\liminf_M(-\ln\theta_{N,M})/M^2$ は板の張力です。

表 5　帯の前提（2026-11-13 の時点）

番号	中身の名	言明	対象	札	理由
1	θ の非負	M が偶数なら全ての実の β で $0\le\theta_{N,M}(\beta)$	19-02	定理（弱い形、似た別の言明）：M が偶数の部分族。欄は全ての大きさを要る（21-06）	—
2	小さな箱の基点	$\theta(L_0;T_{L_0}^2)\le 1-\varepsilon_0$ が格子間隔に一様	19-02	形は確定・未証明（条件つき：合わせで決めた列で）。格子間隔を止めた形は薄い渦の床（21-02）	—
3	一つの尺度の判定	物理の大きさ L_* で $\theta(L_*;T_{L_*}^2)<(s^2)^{-1/(s^2-1)}$（$s=2$ で 0.63、$s=3$ で 0.7598）	19-02	形は確定・未証明（条件つき：合わせで決めた列で）	—
4	捩れを入れる写像の費用の問い	ゲージ共変で滑らかな写像 T で $\mathbb{E}_+[S\circ T-S-\ln J_T]\le 2\,\mathrm{artanh}(0.7598)$ が格子間隔に一様	対象なし（写像 T）	形が未定	(c)
5	入れ子（枠の減相関）	$\theta(nR;T_L^2)\le C_D\,\theta(R;T_L^2)^{n^2}$	19-02	紙	—
6	倍化の横広げ	$\theta(R;T_{L'}^2)\le C\,(L'/L)^2\,\theta(R;T_L^2)$（$L\le L'\le R$）	19-02	形は確定・未証明（条件つき：合わせで決めた列で）	—
7	張力の倍化の不等式	ある $\delta_0>0$ と N_1 で、全ての $N\ge N_1$ について $4\sigma_{2N}(\beta)\ge e^{\delta_0}\sigma_N(\beta)$	紙の定義（板の張力 σ_N）	形が未定：(d) は β に一様な形についてだけ	(b) (f)
8	渦の自由エネルギーの単調性と繰り込みの比較	捩れの挿入の自由エネルギーが β について単調。$s(N,\beta')\le s(2N,\beta)$	19-02	形が未定	(b)
9	小さな捩れた箱のギャップと挿入の一様な受理	隙間 $\ge c/L$ が格子間隔に一様。駆動した渦の挿入の受理率が格子間隔に一様	19-02・19-03	形が未定：捩れた小さい箱の隙間の作用素と、挿入の写像が未定義	(c)
10	帯の比較（ギャップの言葉）	$x(L):=L\,m_0(L)$ について $x(2L)\ge x(L)+\delta$、かつ閾の上の安定性	19-03（箱の質量）	形が未定：使う箱（空間の面つき）の箱の質量 $m_0(L)$ が未定義	(c)
11	面積則からギャップへ	帯（面積の指数）から、ブロック観測量の一様な減衰へ	—	形が未定：素朴な形は二次元で偽	(b)

番号	中身の名	言明	対象	札	理由
12	渦の面積の指数から Wilson ループの面積則へ	—	—	文献：典型の枠の版は再導出していない	—

帯の行のうち張力の倍化の不等式・単調性と繰り込みの比較には、言明の形をどう量化するか（β に一様に言うか、物理の大きさを止めて言うか）の選びが残っています。面積則からギャップへは質量ギャップの側と閉じ込めの側を結ぶ矢印で、この本には在りません（28-03）。

08

57 行の外に足した 5 行

57 行のどれにも入っていない前提が五つあります。数え方を変えないよう、表 1 の数の外に置きます。この 5 行の札は、57 行と同じ水準の点検をまだ通っていません。

表 6　足した前提（2026-11-13 の時点）

番号	中身の名	言明	対象	札	理由
1	閾どうしの結び	二段の事象の面の変数の倍率 β_m と閾 $y_h(m)$ を、結合の側の u_m と閾 $y_s(u_m)$ に結ぶ（たとえば $\beta_m = 4u_m$、$y_h(m) = y_s(u_m)$、または解析の床 $y_h(m) \le \beta_m(1-\cos\varphi_c)$（$\varphi_c$ は小さい場の閾を決める決まった角）のもとで）	定義なし（u_m）	形が未定：先に組んだ条件つきの含意でも、定理はこの二つを結ばない	(c)
2	小さい場の集合の取り方と背景の不変量の延ばし方	二段の事象が小さい場の集合に含まれること。背景の不変量を $SU(2)$ の外で閾 f_h より大きい値に延ばしたときに立ち、0 に延ばすと偽	紙の定義（背景場）	設計に依る	—
3	背景の二次の型の定数	先に組んだ含意の前提「背景の評価」の三つの定数（背景の写像の Lipschitz の定数を作る二次の型の定数）	紙の定義（背景場）	紙	—
4	多体の和の幾何（到達の定数）	面の場の相関の行の和 R が有限	19-04	形は確定・未証明	—
5	質量ギャップの器への継ぎ目	器の含意（28-03）は、測度の列の全列の弱収束と、観測量の部分空間が時間の並進で閉じることを仮定に持つ。部分列で使うときは「どの極限点でも」の形になる	19-03	形は確定・未証明（条件つき：合わせで決めた列で。全列の収束の根と同じ形）	—

09

別名の辞書（短い版）

同じ前提が、本書の検討が先に組んだ条件つきの含意（小さな箱の弱い紫外の存在。28-01 §08）と、第 27 部の台帳で別の名で呼ばれています。突き合わせに要る分だけを載せます。

表 7　別名の辞書（短い版）

中身の名	先に組んだ条件つきの含意での名	台帳（27-02）	Lean
小さな箱の弱い紫外の存在の含意（先に組んだ含意の主定理）	主定理。仮定は結合の一段の括弧の仮定・観測量の同程度連続・小さい場の集合の仮定、結論は裸の結合の合わせの括弧から非退化（小さい場の集合の質量）まで	紫外の制御（箱の連続極限の前提。27-02）	`WeakUltravioletExistence.BlockConclusion`
段ごとの前提からの鎖の定理	鎖の定理（仮定は段ごとの六つ）。Lean の箱の版とは仮定の組が別	—	`BoxWalk.chain_end_to_end_box`・`ChainBlockMap.chain_end_to_end_blockMap`
結合の一段（実効の結合の定義と連続性・結合の一段の正味の括弧）	結合の一段の括弧の仮定、結合の一段の正味の括弧、一段の剰余の二次の型・類の窓の条件・実効の結合の定義と連続性	—	鎖の欄 `flow`・`small_net`・`transient`
大きい場の結合への寄与	大きい場の結合への寄与	—	鎖の欄 `large_rem`
活性の再帰	活性の再帰、極限の期待値の存在と連続な延長、大きい場の重み	—	鎖の欄 `act_rec`
供給の稀さ・細かい格子の一つの尺度の稀さ	供給の稀さ、一枚の面の積率と稀さ	—	`FoldCap.rarity_explicit`
動く不変区間と余白	動く不変区間と余白、対数の閾と動く区間	—	鎖の欄 `fix_shift`

中身の名	先に組んだ条件つきの含意での名	台帳（27-02）	Lean
二段の事象の稀さ（面の部分・背景の不変量の部分）	小さい場の集合の仮定、格子に一様な小さい場の事象	—	鎖の欄 `rarity`
観測量の同程度連続	観測量の同程度連続、格子に一様な小さい場の事象・背景の評価	—	鎖の欄 `split`
鏡映正値性（細かい格子の鏡映正値性・粗い水準の鏡映正値性）	鏡映正値性の台	z の鏡映正値性（捩れの和を取った集団の正値性で、別物）	`TorusRP.wilson_rp`
背景つきの正値性	背景つきの正値性、背景の評価	—	—
大きい場の気体	面の水準の大きい場の気体	—	—
段に一様な帰納	一段の剰余の二次の型・類の窓の条件	—	`F3Conditional.f3_conditional`
拘束つき減衰の定理	—	—	`RealSpaceThmR.thmR_form`（抽象の形）
一段の写像の縮みと終点の合わせ	増分の総和可能性の仮定に関わる（同じものではない。下の注）	—	—
ブロック観測量の一様な減衰	—	台帳のブロック観測量の一様な減衰	—
小さな箱の基点（小さな T^2 の基点）	—	台帳の小さな T^2 の基点	—
入れ子（枠の減相関）	—	台帳の枠の減相関	—

中身の名	先に組んだ条件つきの含意での名	台帳（27-02）	Lean
倍化の横広げ（横広げの不等式（強い形））	—	26-02 の横広げの不等式（強い形）・27-01 の同じ行	—
渦の自由エネルギーの単調性と繰り込みの比較	—	β 単調性・繰り込みの比較（26-06）	—
小さな捩れた箱のギャップと受理（小さな箱のギャップと受理）	—	小さな T^2 のギャップ・挿入の一様な受理	—
帯の比較（ギャップの言葉）	—	台帳の帯の比較（ギャップの言葉）	—

増分の総和可能性の仮定は、ゲージ不変な関数の可算で稠密な族について、観測量の値の段ごとの増分が総和可能、という仮定です。19-07 §03 の全列の収束とは同じものではありません。総和可能なぶん強く、関数の族も違います。また先に組んだ含意は細かい測度を裸の結合の合わせの括弧で選んだ β_n の Wilson の測度と定義しますが、Lean の定理は裸の結合の列を任意に取ります。

先に組んだ含意の十の前提のうち、鏡映正値性の台が鏡映正値性です。ほかの九つは、鏡映正値性を除いた前提です。四次元のヤン–ミルズ理論の存在そのものは 2026-11-10 に公開された構成が別の設計で示しました（第二巻）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
六つの根と 57 行の前提を、木と段ごとの表に並べ、札と理由の記号を付けた（2026-11-13 の時点）	どの前提も、この章では示していない。札はこの日の点検の記録による

言えている	言えていない
定理の札の 13 行は、細かい格子の Wilson の測度、ブロック写像そのもの、押し出しの測度の構造の性質、自由場・線形化、抽象の恒等式のどれかについての言明	繰り込んだ尺度の測度についての定量の評価の定理は無い
形が未定の 24 行のうち 20 行は、対象が未定義か段を跨ぐ形が無いことに由来する	未定の行の形を決める問いの答え（28-06 に問いだけ）
形は確定・未証明の 7 行のうち 6 行は、合わせで決めた列についての条件つき	列を自由に取ると、そのうち 4 行は $\beta_n \equiv 0$ で自明に立つ。退化でない小さい例は 2 行だけ

出典と再現

もの	種別	出典・道具
57 行の前提、札、理由の記号、木	仮	本書の検討の前提の棚卸し（2026-11-13）。札は Lean の源と、定義と言明を別の目で照合した点検の記録から
先に組んだ条件つきの含意の仮定と十の前提（表 7）	—	本書の検討の記録（2026-10-30）。28-01 §08
定理の札の行	Lean	各章の出典の表（20-01・21-06・15-12・22-01）
森の補間の公式	典	書誌のみ（未確認）
渦の面積の指数から Wilson ループの面積則へ	典	書誌のみ（未確認）
条件の台帳の行と、ブロック観測量の一様な減衰・帯の比較（ギャップの言葉）の行	—	27-02 条件の台帳

この章で使った語 — 前提、根、十分条件、表現、実効の結合、活性、供給、背景場、類、押し出しの測度、二段の事象、渦の比、板の張力、条件の台帳。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：28-05 設計の選びに依るもの — 「設計に依る」の行と、ほかの行の定数がどの選びに依るかを表にします。

設計の選びに依るもの

この章は本書の検討です。

この章で分かること — 繰り込みの一段や前提の言明には、数学が決めるのではなく、こちらが選んで固定している所があります。その九つの選びについて、今の値と、選びを替えたときに作り直しになる定理・前提を表にします。第 20・21 部の定理と大きい面の稀さ（22-01）がブロック写像の選びに依らないことも、ここで確かめます。

前提となる章 — 19-04 §08 重みという設計の選び、28-04 前提の一覧。

先に言うこと — どの選びが前提を満たしやすいかは、この章では主張しません。重みを替えたときの定数の表と、ブロック平均の重なりが押し出しの測度の鏡映正値性を保つかの計算は、まだ点検を通っていないので載せません。そこには論点が在る、とだけ書きます。ここでの選びは本書の設計（決まったブロック写像で押し出した測度）の中の選びで、四次元のヤン–ミルズ理論の存在を示した公開された構成の設計とは別のものです（二つの設計の比べは第 14 部）。

この章の順序

1. 設計の選びとは — 定義を一つに決めるための固定
2. 九つの選びと今の値（表 1）
3. 横の重み・倍率・引き戻しの半径 — ブロック写像そのものの選び
4. ブロック平均の重なり — 鏡映正値性との論点
5. ノルム・ゲージ・背景の定義 — 表現の選び
6. 合わせ方と気体の両立の定義
7. どの定理・前提がどの選びに依るか（表 2）
8. そのほかの固定（表 3）

01

設計の選びとは — 定義を一つに決めるための固定

繰り込みの一段（19-04）を定義するには、道の族の重み、ブロックの倍率、平均を群へ戻す手続きなどを一つに決めなければなりません。前提の言明（28-04）にも、どのノルムで測るか、どの背景のまわりで展開するか、といった決めが入ります。

これらは数学の側から一つに決まるものではなく、こちらが選んで固定するものです。選びを替えれば、それに依る定理の定数や証明書は作り直しになり、前提の言明そのものも変わります。示すべき言明（19-07）のうち、帯は渦の比 θ だけで書け、ブロック写像の選びに依りません。ほかの五つは押し出しの測度 $\nu_{n,m}$ を通してブロック写像の選び（重み・倍率・半径）に依り、合わせ・非退化・同程度連続は、さらに観測量と集合の選びに依ります。

この章は、どの選びが何に効いているかを、一か所で見えるようにするための表です。

02

九つの選びと今の値

表 1　設計の選び（2026-11-13 の時点）

選び	今の値	依る前提（28-04 の行の名）
ブロック化の横の重み $(\alpha, 1-2\alpha, \alpha)$	$\alpha = 1/8$	自由場の入力（伝播関数の挟み・無関係な項の縮み・一段の結合の減りの係数・背景の写像の縮み・多体の和の幾何）、拘束つき減衰の定理、背景の零階の運び、持ち上げの行和が段に一様、大きい場の評価
ブロックの倍率	2	合わせの括弧、二段の事象の稀さ：面の部分、自由場の入力（伝播関数の挟みから多体の和の幾何まで）、背景の零階の運び、帯の倍化（一つの尺度の判定・横広げの不等式（強い形）・張力の倍化の不等式）
径の引き戻しの半径 r_0	自由な母数（$0 < r_0 \le 1$）	線形化の範囲、大きい場の評価
ブロック平均の重なり	重なりあり（横に $(1/8, 3/4, 1/8)$ でずれる道の平均）	粗い水準の鏡映正値性、活性の再帰、供給の稀さ、ブロック観測量の一様な減衰
ノルム	所によって上限のノルムと二乗和のノルムが混在	拘束つき減衰の定理、背景の零階の運び、多段の背景場、持ち上げの行和が段に一様、段に一様な帰納
ゲージ	段ごとの Landau の切り口／軸のゲージ／木のゲージ	拘束つき減衰の定理、持ち上げの行和が段に一様、段ごとのゲージ固定
背景の定義	拘束つきの作用の最小化元	二段の事象の稀さ：背景の不変量の部分、背景つきの正値性、背景の零階の運び、一段の背景場の補題、多段の背景場

選び	今の値	依る前提（28-04 の行の名）
合わせ方（実効の結合の定義）	未定（観測量・段・目標の値・解の取り方。紙に u_k の定義の案が二通り）	実効の結合の定義と連続性、結合の一段の正味の括弧、箱の連続極限の前提の全ての行の定義域
気体の両立の定義	先に組んだ条件つきの含意：隣接しない／Lean：重ならない	大きい場の結合への寄与、大きい場の気体

03

横の重み・倍率・引き戻しの半径 — ブロック写像そのものの選び

横の重み。粗いリンクを作る道は、横の向きに $-1, 0, +1$ 目盛りずれ、その重みが $(\alpha, 1-2\alpha, \alpha)$ です（19-04 §03）。今は $\alpha = 1/8$ です。自由場の一段の定理（15-12）の定数は全てこの値で計算したもので、別の重みではそのまま使えません：伝播関数の挟みの下の定数 $c_0 = 3/100$、17 段の縮み $\tau < 1/170$、面の場の相関のノルム $\Lambda \le 640/9$ など。

重みを替えると何が良くなり何が悪くなるかには論点が在ります（面の場を粗い単位で測った量が段とともに育つかどうか、重みを替えると拘束の性質がどう変わるか）。

倍率。一段で格子間隔を半分にします。合わせの括弧（19-07 §02）は段の番号 $n = \log_2(1/a_n)$ で書かれ、帯の側の一つの尺度の判定の閾は倍率 s ごとに違います（$s=2$ で 0.63、$s=3$ で 0.7598）。

引き戻しの半径。道の積の平均を単位の球へ戻す手続きの閾 r_0 です。ブロック写像の線形化の定理（15-13）は $0 < r_0 \le 1$ を仮定に持ちます。

選びに依らない定理。第 20 部（鏡映正値性・強結合）、第 21 部（渦の床・Polyakov ループ）の定理と、大きい面の稀さ（22-01）は、細かい格子の Wilson の測度と捩れた分配関数だけを使い、ブロック写像を使いません。だからこの三つの選び（と §04 の重なり）のどれにも依りません[初]。

04

ブロック平均の重なり — 鏡映正値性との論点

今の道の族では、粗いリンクを作る道が横にずれるので、隣り合うブロックが細かいリンクを共有します（重なりのある平均）。

鏡映正値性（20-01）は細かい格子の Wilson の測度について定理です。押し出した粗い測度 $\nu_{n,m}$ でも鏡映正値性が保たれるかは、ブロックが鏡映の面を跨ぐかどうか、つまり重なりの有

無に関わる見込みがあり、**ここに論点が在ります**。計算はまだ点検を通っていないので載せません。

今の前提の一覧では、粗い水準の鏡映正値性（粗い水準の鏡映正値性の行）を、正の側を帯に取った類（細かい格子の正の半分のリンクだけに依る粗い観測量）の形で置いています。この形は、細かい格子の Wilson の測度についての言明として払われています。粗い半分の全部を正の側に取る形は、前提に置いていません。

この選びに依るのは粗い水準の鏡映正値性のほか、段を跨ぐ稀さ（活性の再帰・供給の稀さ。鏡映正値性からのチェス盤の評価を使う道）と、一様な減衰から質量ギャップへ移るときの器（ブロック観測量の一様な減衰）です。

05

ノルム・ゲージ・背景の定義 — 表現の選び

この三つは、ブロック写像ではなく、粗い尺度の理論を書き表す（表現する）ときの選びです。根（19-07）には現れず、十分条件の側にだけ現れます。

- **ノルム**。面の場を上限のノルムで測るか、作用（二乗和）のノルムで測るか。背景の零階の運び（28-04 の行）の今の形は上限のノルムで書かれていて、形が未定の理由 (b)(d) はこの選びに結びついています。拘束つき減衰の定理や多段の背景場は二乗和か作用のノルムで書かれています。
- **ゲージ**。段ごとの Landau の切り口、軸のゲージ、木のゲージ。持ち上げの行和が段に一様か（持ち上げの行和が段に一様）はゲージの選びで変わります。一次元・スカラーの持ち上げの行和は定理です。
- **背景の定義**。ブロックの拘束のもとで作用を最小にする背景を使っています。背景の不変量の稀さ（二段の事象の稀さ：背景の不変量の部分）、背景つきの正値性、背景場の補題（一段の背景場の補題・多段の背景場）はこの定義の上に書かれています。陽な式で書ける別の背景に替える道もあります。

06

合わせ方と気体の両立の定義

合わせ方。裸の結合の列 β_n を、段 m_0 の粗い観測量 Y_0 の期待値を目標の値 κ_0 に合わせて決めます（19-07 §02）。選ぶのは Y_0・m_0・κ_0 と、解が複数あるときの取り方です。前提の側の言葉では、実効の結合 u_k の定義（実効の結合の定義と連続性）に対応させる道が考えられます。u_k には紙に二通りの定義の案が在ります（繰り込んだ結合として読むか、ブロック化した

作用の係数として読むか)。どちらを取るかで、箱の連続極限の前提の全ての行の定義域 $u_m \geq u_\star$ の意味が変わります。本書の検討が先に組んだ条件つきの含意（28-01 §08）は細かい測度を裸の結合の合わせの括弧で選んだ β_n の Wilson の測度と定義し、Lean の定理は裸の結合の列を任意に取ります。測度の側の閾と結合の側の閾を結ぶ前提（閾どうしの結び）も、この選びと一緒に決まります。

気体の両立の定義。大きい場の気体で、二つの大きい場の領域が「両立する」とは何かの定義です。本書の検討が先に組んだ条件つきの含意（28-01 §08）では「隣接しない」、Lean の形は「重ならない」で、二つは別物です。依るのは大きい場の結合への寄与・大きい場の気体で、どちらも形が未定です。

07

どの定理・前提がどの選びに依るか

表 2　依存の表（● は依る)。上の 5 行は定理、下は前提（2026-11-13 の時点）

定理・前提	重み	倍率	半径	重なり	ノルム	ゲージ	背景	合わせ	気体
第 20 部（鏡映正値性・強結合）									
第 21 部（渦の床・Polyakov ループ）									
15-12 自由場の一段	●	●							
15-13 線形化と押し出しの共分散	●	●	●						
22-01 大きい面の稀さ									
粗い水準の鏡映正値性				●					
実効の結合の定義と連続性・結合の一段の正味の括弧		●						●	
大きい場の結合への寄与									●
活性の再帰・供給の稀さ				●					
二段の事象の稀さ：面の部分		●							
二段の事象の稀さ：背景の不変量の部分							●		
自由場の入力（伝播関数の挟み・無関係な項の縮み・一段の結合の減りの係数・背景の写像の縮み・多体の和の幾何（相関のノルム)）	●	●							
背景つきの正値性							●		
拘束つき減衰の定理	●				●	●			

定理・前提	重み	倍率	半径	重なり	ノルム	ゲージ	背景	合わせ	気体
背景の零階の運び	●	●			●		●		
背景場（一段の背景場の補題・多段の背景場）					●（C2）		●		
持ち上げの行和が段に一様	●				●	●			
段ごとのゲージ固定						●			
大きい場の評価	●		●						
大きい場の気体									●
段に一様な帰納					●				
ブロック観測量の一様な減衰（器）				●					
帯の倍化（一つの尺度の判定・横広げの不等式（強い形）・張力の倍化の不等式）		●							

表 2 の上の 5 行のうち、選びに依るのは自由場と線形化の二章だけです。前提の側では、重みに依る行が紫外の安定性の前提に集まり、背景・ノルム・ゲージに依る行が背景場と拘束つきの評価に集まっています。

08 そのほかの固定

ブロック写像や表現の選びではありませんが、定理と前提の範囲を決めている固定です。

表 3　そのほかの固定

固定	今の値	依るもの
大きい面の閾	稀さの定理は $\mathrm{Re}\,U_p < 0$。前提の側は段ごとの閾 $y_h(m)$	22-01、供給の稀さ・細かい格子の一つの尺度の稀さ・二段の事象の稀さ：面の部分
β の範囲	強結合の窓 $18\tanh\lvert\beta\rvert < 1$・$24(1-e^{-4\lvert\beta\rvert}) < 1$、稀さは $\beta \ge 81$	第 20 部、22-01、細かい格子の一つの尺度の稀さ
鏡映の面と正の側	格子点の面（全ての実の β）／リンクの真ん中の面（$\beta \ge 0$）。粗い水準では正の側を帯に取る	20-01、細かい格子の鏡映正値性・粗い水準の鏡映正値性
背景の不変量の延ばし方	$SU(2)$ の外の値の決め方（閾より大きい値に延ばすか）	観測量の族と小さい場の集合の包含、二段の事象の稀さ：背景の不変量の部分、小さい場の集合の取り方と背景の不変量の延ばし方
観測量の類	流した観測量（定義はまだ無い）	流した観測量のブロック変数による近似、回転の前提
捩れの幾何	背景の捩れ $n_{12} = 1$、横の大きさ N を止める	第 21 部、帯の全ての行

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
九つの選びの今の値と、それに依る前提を表にした	どの選びが前提を満たしやすいか
初 第 20・21 部の定理と 22-01 はブロック写像を使わないので、ブロック写像の選びに依らない	—
第 15 部の自由場の一段の定数は、重み 1/8 と倍率 2 で計算したもの	別の重みでの定数（表は点検の前で載せない）
ブロック平均の重なりと押し出しの測度の鏡映正値性の間に論点が在る	その論点の答え（計算は点検の前で載せない）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
選びの一覧と依存	仮	本書の検討の前提の棚卸し（2026-11-13）
ブロック写像の定義と重み	Lean	19-04 の出典の表
自由場の一段の定数	Lean	15-12 の出典の表
気体の両立の二つの定義	—	本書の検討が先に組んだ条件つきの含意（28-01 §08）と本書の Lean の束

この章で使った語 — 設計の選び、横の重み、倍率、引き戻しの半径、ブロック平均の重なり、ノルム、ゲージ、背景場、合わせ、気体の両立。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：28-06 開いている所と、対象がまだ無い所 — 形が未定の前提を、出どころで分けて一覧にします。

開いている所と、対象がまだ無い所

> この章は未解決の地図です。

この章で分かること — 28-04 で「形が未定」の札が付いた 24 行が、どこから未定なのかを三つに分けた一覧です。行ごとに、形を決めるのが紙の議論か、小さい数値実験か、設計の選びかを書きます。言明を書くための対象そのものがまだ無い段（細かい観測量・回転）と、この本が主張しないことを最後に置きます。

前提となる章 — 28-04 前提の一覧（行の名と札）、19-07 示すべき言明。

先に言うこと — この章は一覧で、どの問いにも答えていません。「何が決めるか」の欄は問いの種類を書いたもので、その問いが近く決まることを主張していません。中身は動くので、更新は A-08 質量ギャップまでの地図 で行います。

この章の順序

1. 三つの出どころ — 表 1
2. 表現の対象が未定義 — 紫外の 13 行（表 2）
3. 対象そのものが無い・下流の 8 行（表 3）
4. 量化の順と真偽 — 帯の 3 行（表 4）
5. 形を決める問いの順
6. 対象の定義がまだ無い段
7. この本が主張しないこと

01

三つの出どころ

形が未定の前提は 24 行です（28-04 表 1）。理由の記号（(a) 軽すぎる、(b) 強すぎる、(c) 対象が未定義、(d) 今の形に反する数値の兆し、(e) 段を跨ぐ形が無い、(f) 量化の順が未定）だ

けを見ると散らばって見えますが、出どころで分けると三つです。

表 1　形が未定の 24 行の出どころ（2026-11-13 の時点）

出どころ	行の数	行	根との関係
表現の対象が未定義	13	結合の一段の正味の括弧・大きい場の結合への寄与・活性の再帰・供給の稀さ・動く不変区間と余白・二段の事象の稀さ：背景の不変量の部分・背景つきの正値性・背景の零階の運び・小さい場の一段の繰り込み定理・大きい場の評価・大きい場の気体・段に一様な帰納・一段の写像の縮みと終点の合わせ	根（19-07）は書けている。その下の、実効の結合・活性・背景場・類を通した十分条件の形が未定
対象そのものが無い・下流	8	流した観測量のブロック変数による近似・箱の大きさに一様な紫外の評価・橋の一段の紫外の評価・無限体積の極限が箱の形に依らないこと・極限が自由場でないこと・捩れを入れる写像の費用の問い・小さな捩れた箱のギャップと挿入の一様な受理・帯の比較（ギャップの言葉）	言明に要る対象（流した観測量、回した格子の写像、捩れを入れる写像、捩れた小さい箱の器など）が無いか、上流の形が決まってから形を決める行
量化の順と真偽	3	張力の倍化の不等式・渦の自由エネルギーの単調性と繰り込みの比較・面積則からギャップへ	帯の根は書けている。十分条件の候補が偽の例を持つか、どの順に量化するかが未定

表現の 13 行は、根より下の表現の水準に在ります。表現を替える（背景の定義を替える、ノルムを替える、など）と葉は替わりますが、根は替わりません。帯の側の未定は、表現からではなく、言明の量化と真偽から来ています。

02

表現の対象が未定義 — 紫外の 13 行

今の道の鎖の定理の中では、実効の結合 u、活性 z、供給 w、剰余、面の変数、背景の不変量、観測量は全て自由な変数です。格子から定義されているのは、ブロック写像と押し出しの測度だけです（19-04）。そのため次の行は、証明の前に対象の定義が要ります。

表 2　表現の水準の 13 行と、形を決めるもの

行	理由	何が決めるか	最小の問い
結合の一段の正味の括弧	(c) (e)	紙（設計）	実効の結合を一つに定義する。合わせ（19-07 §02）の言葉に言い直すなら、どの粗い観測量をどの段で合わせるか。そのとき他の行の定義域 $u_m \geq u_\star$ が同じ言葉で書けるか
大きい場の結合への寄与	(a) (c)	小さい数値実験と設計	今の形は活性を自由に取れば立つ（軽い）。体積と段に一様な形を言明の中に入れたとき、素の Wilson の測度の小さい格子で、その一様性が数として立つか
活性の再帰	(a) (c) (e)	紙と小さい数値実験	一段だけ押し出した測度 $\nu_{n,n-1}$ で、粗い面が大きい事象を細かい格子の事象に引き戻すと、チェス盤の評価（22-01）が使える形になるか

行	理由	何が決めるか	最小の問い
供給の稀さ	(c) (e)	設計	供給を、押し出しの測度の事象の確率（細かい側の像は小さく、粗い面は大きい）として定義できるか。できれば二段の事象の稀さ：面の部分と一本になる
動く不変区間と余白	(a) (c)	大きい場の結合への寄与・供給の稀さの定義の後の紙	実数の関数 W, Φ, D, e が自由で、全て 0 に取ると立つ。実際の気体の係数がこの形で、余白の数が立つか
二段の事象の稀さ：背景の不変量の部分	(c)	設計（背景の定義）	背景の不変量を使わず面の変数だけの事象にするか、背景を陽な式で書ける背景に替えるか
背景つきの正値性	(c)	設計（背景の定義）と紙	背景場と拘束つきの Hessian の定義を決め、並んでいる三つの形のどれを前提にするかを決める
背景の零階の運び	(b) (d)	紙（設計）	今の形（面の上限で測る形）は、作用の最小化元の背景で数値では発散する 読 （偽であることの紙の議論は点検の前）。零階の項を作用のノルムで書いたとき、多段の背景場と同じ仮定で閉じるか
小さい場の一段の繰り込み定理	(c) (e)	紙	入力が Wilson の作用そのものの段 0 の言明を書き下すのに要る未定義の対象が、背景場だけか
大きい場の評価	(c) (d) (e)	小さい数値実験	穴ごとの作用の、段についての下限が、段を深くしても面の数に比例する正の値に留まるか
大きい場の気体	(a) (b) (e)	小さい数値実験と設計	文字どおりの形は固定の格子でいつでも立つ（軽い）か、全ての領域での等式の形は小さい格子で数値では成り立たない 読 （強い）。その間の、一様性を含む形を決める。気体の両立の定義（隣接しない／重ならない）の選びも残る（28-05）
段に一様な帰納	(c) (e)	設計（帰納のノルム）と紙	帰納の座標 r_k を類の座標で定義したとき、自由場の縮み（無関係な項の縮み）が r_k の漸化式の係数になるか
一段の写像の縮みと終点の合わせ	(c)	小さい場の一段の繰り込み定理・段に一様な帰納の形が決まった後の紙	段に一様な帰納の座標の言葉で、縮みの条件が同じ座標の言明になるか

13 行のうち 5 行（大きい場の結合への寄与・活性の再帰・供給の稀さ・大きい場の評価・大きい場の気体）は、大きい場の扱い（活性と気体）に集まっています。その中身（評価の形と気体の前提）は、言明の形が決まるまでこの本の章にしません。

03

対象そのものが無い・下流の 8 行

表 3　対象が無いか、上流が決まってから形を決める行

行	理由	何が決めるか
流した観測量のブロック変数による近似	(c)	格子の勾配流と流した観測量の定義（§06）
箱の大きさに一様な紫外の評価	(e)	箱の連続極限の前提と紫外の安定性の前提の形が決まった後に、その一様性の版として決める
橋の一段の紫外の評価	(c)	回した細かい格子から標準の粗い格子へのブロック写像の定義（紙の素描だけ）
無限体積の極限が箱の形に依らないこと	(c)	無限体積の極限（箱を大きくした極限）の定義の後
極限が自由場でないこと	(c)	どの量で言うかの選び（たとえば、段 m_0 で合わせたときの別の段 m_1 の同じ観測量の極限値）
捩れを入れる写像の費用の問い	(c)	写像 T の定義（やり方が未定）。この行は一つの尺度の判定の十分条件なので、一つの尺度の判定を直接確かめる道もある
小さな捩れた箱のギャップと挿入の一様な受理	(c)	捩れた小さい箱の隙間を測る作用素と、駆動した渦の挿入の写像の定義
帯の比較（ギャップの言葉）	(c)	空間の面つきの箱の器と、箱の質量 $m_0(L)$ の定義

04

量化の順と真偽 — 帯の 3 行

表 4　帯の側の未定の行

行	理由	何が決めるか
張力の倍化の不等式	(b)(f)。(d) は β に一様な形についてだけ	小さい数値実験。横の大きさ N を止めて $\beta \to \infty$ とすると、渦の最小作用（21-05）が N とともに増える数が在り、β に一様な形に反する向きの兆しです読。物理の大きさを止めた列（$N = L_*/a$、$\beta = \beta(a)$）の上で言う形にするか、量化の順を決める
渦の自由エネルギーの単調性と繰り込みの比較	(b)	有限の非可換群の格子で、単調性が破れる例が在る読。$SU(2)$ で何を仮定として置くかを決める（26-06 の形）
面積則からギャップへ	(b)	紙（道の選び）。素朴な形は二次元で偽。質量ギャップの側の最後の矢印を、帯の比較（ギャップの言葉）と閾の上の安定性から箱の質量の一様な下界を経て一様な減衰へ、の一本に決めるか

05

形を決める問いの順

安く決まるもの（紙か小さい数値）を先に、同じ安さなら下流の多いものを先に並べると、次の順です。1〜3 は互いに独立です。

1. 合わせの観測量 Y_0 と段 m_0 を決め、実効の結合を一つに定義する（実効の結合の定義と連続性・結合の一段の正味の括弧。紙）。
2. 二段の事象の稀さの面の部分（二段の事象の稀さ：面の部分）を、押し出しの測度で数にする（小さい数値実験）。定義された対象だけで書けている前提なのに、小さい例の確かめが無い行です。
3. 背景の零階の運びを、どの背景・どのノルムで言うかを決める（紙）。二段の事象の稀さ：背景の不変量の部分の背景の定義も同時に決まる。
4. 活性の再帰を、一段だけ押し出した測度で言えるか（紙と小さい数値。2 の後）。
5. 拘束つき減衰の定理を、一次元で入力から出力まで一本に通し、仮定が同時に満たせるかを確かめる（Lean）。
6. 大きい場の気体の一様性を数で見る（小さい数値実験）。
7. 大きい場の評価の、段の深さへの依り方を見る（数値）。
8. 段に一様な帰納の二次の部分を一本に通す（紙。1 の後）。
9. 張力の倍化の不等式が立ちうる領域の形を見る（数値）。
10. 質量ギャップの側の最後の矢印を一本に決める（面積則からギャップへ。紙）。

06

対象の定義がまだ無い段

問題文の要求のうち二つは、前提の形を論じる前に、言明を書く対象が要ります（19-07 §08）。

段	書きたい言明	足りない対象
細かい観測量	点の場・流した観測量の期待値の連続極限での収束	格子の勾配流と、流した観測量の定義（本書の Lean に無い）。近似の行（流した観測量のブロック変数による近似）も、この定義が無いので形が未定
回転	回した観測量の期待値の一致（Euclid の群の不変）	超立方の群より細かい回転が作用する観測量（細かい観測量の段）か、回した格子から標準の格子への一段（橋の一段の紫外の評価の対象）
無限体積	箱を大きくした押し出しの測度の、窓の上の収束	定義を一つ足せば書ける（箱の座標での窓への制限か周期の延長）。強結合の窓では周期の持ち上げで書けて定理（20-03）
非自明	極限が自由場の極限と違うこと	書けるが、どの観測量で言うかが未定（極限が自由場でないこと）

07

この本が主張しないこと

- **質量ギャップの本体**。四次元の $SU(2)$ ヤン–ミルズ理論（どのコンパクト単純群でも）に質量ギャップが在ることについて、この本は何も示していません。強結合の窓での質量の下界（20-04）は、格子間隔を止めた一つの尺度の定理です。
- **連続極限の構成**。格子間隔を 0 にした極限の理論を、この本は構成していません。四次元のヤン–ミルズ理論の存在は、2026-11-10 に公開された構成が別の設計で示し、Lean で証明されている、と委員会が評価しました（第二巻）。本書の検討が先に組んだ条件つきの含意（本書の設計での小さな箱の弱い紫外の存在）の結論は、前提を置いたうえでの部分列の極限と、有限の格子の性質が極限に移ることまでで、その前提の多くは形が未定です（28-01）。
- **帯**。強結合の側と弱結合の側を一つの定数で跨ぐ言明（19-07 §07）について、この本は何も示していません。渦の床（21-02・21-03）は、格子間隔と横の大きさを止めた形です。強結合の窓の中の渦の自由エネルギーの上界（20-06）は率が横の大きさに依りませんが（前の因子は残る）、窓の外へは延びません。
- **閉じ込め**。強結合の窓の外での四次元の面積則も、渦の面積の指数から Wilson ループの面積則への移り（渦の面積の指数から Wilson ループの面積則へ）の再導出も、この本にはありません。強結合の窓の中の格子の面積則は 20-06 に在ります（既知の型の形式化。連続の Wilson ループは、この本にも公開された構成にもありません）。
- **非自明性と回転不変**。問題文のこの二つについて、この本は言明の形も決めていません（回転は対象がまだ無い。19-07 §08）。
- **強結合の窓の定理の位置**。強結合の窓での質量の下界は、示すべき言明が自明に立つ側の例で、言明の中身の確かめではありません（19-07 §01）。

これまでの部の「主張しないこと」の索引は 27-04 にあります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
形が未定の 24 行を出どころで三つに分けた（表現の水準 13、対象が無い・下流 8、量化と真偽 3）	どの行の形も決めていない
行ごとに、形を決めるのが紙・数値・設計のどれかと、最小の問いを書いた	問いの答え。問いの順は安さと下流の数で並べたもので、答えの見込みではない
細かい観測量と回転の段は、言明を書く対象がまだ無い	その対象の定義

言えている	言えていない
この本は質量ギャップの本体・連続極限の構成・帯について何も示していない	—

出典と再現

もの	種別	出典・道具
24 行の分け方、最小の問い、問いの順	仮	本書の検討の前提の棚卸し（2026-11-13）
単調性が破れる有限の非可換群の例	読	本書の検討の数値の記録（有限群の格子の直接の和）。26-06 の記述
面積則からギャップへの素朴な形が二次元で偽であること	初	28-03 §07 の反例（面積則を持つ二次元のゲージ理論と、臨界の二次元 Ising 模型の直積。臨界点で隙間が閉じることは 2-09 §07）
主張しないことの索引	—	27-04

この章で使った語 — 形が未定、表現、実効の結合、活性、気体、背景場、類、量化の順、勾配流、流した観測量、主張しないこと。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：A-01 記号表。あわせて読むなら A-08 質量ギャップまでの地図 — この一覧の更新と、問いの進み具合はそちらで追います。