ヤン–ミルズと質量ギャップ

第一巻　準備

Kiichi, Shiori and Rin · 2026-11-14 の版 · https://computoergosum.com/principia/yang-mills/

> この PDF は Web 版の各章をそのまま刷ったものです。動かせる図は刷った時点の姿で止まっています。章の間のリンクは Web 版へ飛びます。最新の内容は Web 版に在ります。

章		頁
第 0 部 入口 ― この本の読み方		
0-01	この本の読み方	5
0-02	一枚の絵	19
0-03	問題文を一語ずつ読む	31
0-04	数学の四次元と物理の四次元	45
第 1 部 数学の準備		
1-01	ベクトル空間と線形写像	58
1-02	群とは何か	69
1-03	リー群とリー環	80
1-04	SU(2) と SU(3)	92
1-05	多様体と接空間	103
1-06	微分形式と外微分	113
1-07	ベクトル束と接続	125
1-08	確率と測度	136
1-09	無限次元の確率	148

章		頁
1-10	ヒルベルト空間と自己共役作用素	160
1-11	フーリエ解析と分布	170
1-12	寄り道：四次元でだけ起きること	181
第 2 部 物理の準備		
2-01	ラグランジアンと作用	194
2-02	場という考え	204
2-03	電磁気学はゲージ理論である	214
2-04	特殊相対論と時空	224
2-05	量子力学の骨	234
2-06	調和振動子と生成消滅	243
2-07	経路積分の考え方	253
2-08	統計力学と相転移	264
2-09	寄り道：イジング模型で見るギャップと相関長	275
2-10	緩和の時間と動的指数 z	285
第 3 部 ヤン–ミルズ理論（古典）		
3-01	ゲージ原理	298
3-02	非可換ゲージ場	309
3-03	作用と方程式	321
3-04	幾何としてのゲージ理論	332
3-05	インスタントンと位相	342
3-06	寄り道：Donaldson とエキゾチック $\mathbb{R}^4$	353
3-07	標準模型の中のヤン–ミルズ	363

章		頁
第 4 部 量子化		
4-01	正準量子化とハミルトニアン	374
4-02	経路積分とユークリッド化	384
4-03	摂動論と Feynman ダイアグラム	395
4-04	発散と繰り込み	404
4-05	発散の代数	414
4-06	漸近自由	425
4-07	次元転移と Λ	434
4-08	ゲージ固定と Faddeev–Popov	445
4-09	場の量子論の公理	456
4-10	Osterwalder–Schrader の公理と再構成	467
4-11	質量ギャップの定義	477
4-12	寄り道：摂動級数は発散する	488
第 5 部 格子ゲージ理論		
5-01	Wilson の格子	499
5-02	強結合展開	510
5-03	反射正値性と転送行列	521
5-04	無限体積極限とクラスター展開	532
5-05	弱結合と連続極限	543
5-06	U(1) と非可換の違い	553
5-07	モンテカルロ法	565
5-08	グルーボールと弦張力の測定	575
5-09	何を固定して極限を取るか	587

章		頁
5-10	有限群の格子ゲージ理論	601
5-11	寄り道：Bakry–Émery と一リンク積分	611

この本の読み方 — 札で主張の強さを読み、前提の地図で順を選ぶ

> この章は案内です（この本の読み方）。

この章で分かること — 本の組み立て（三巻・二十九の部と付録・264 章）と章に共通する形。
五つの札（Lean・紙・計算・既知・物理）が保証すること・しないこと。第二巻と第三巻の札との関係。
どの読者がどこから読むか。前提の地図、寄り道を飛ばしてよい理由、読む順の道。
この本が主張すること、しないこと。

前提となる章 — ありません。全体の絵は次の 0-02、問題文の読みは 0-03 にあります。

先に言うこと — この本はヤン–ミルズの存在と質量ギャップの問題の解決を主張しません。存在は、2026-11-10 に公開された構成が示しました（Lean で証明されている、と委員会が評価した。第二巻が読みます。6-00）。質量ギャップは開いています（6-04・16-02）。この本自身の結果は、格子間隔を固定した言明と、仮定を置いた条件つきの言明です（16-04・§08）。§05〜§07 の数は 2026-10-15 の目次（166 章）の「前提」の欄から計算したもので、そのあとに加わった 98 章（第二巻の大半と、第三巻の第 19〜22・28 部など）は入っていません。

この章の順序

1. 何の本か — 問題の一文と部の役割
2. 読者と前提知識 — 2 年生の知識から
3. 札の凡例 — 保証すること・しないこと（表 1）
4. 一章の形 — 冒頭の三行・番号・記号・動く図
5. 前提の地図 — ある章に何章が要るか（図 1・表 2）
6. 寄り道の飛ばし方 — 飛ばしても前提は欠けない（寄り道：前提を破らない並べ方は何通りあるか）
7. 読む順の提案 — 読者ごとの入口と、前提の地図から作る道（図 2・表 3）

8. この本が主張すること、しないこと — 公開された構成・開いている問い・この本の結果

01

何の本か — 問題の一文と部の役割

この本は、クレイ数学研究所の懸賞問題「ヤン–ミルズの存在と質量ギャップ」を、大学 2 年生の知識から研究の現在地まで読むための本です。懸賞問題は 2000 年 5 月 24 日にパリのコレージュ・ド・フランスで発表され 既知 、公式の問題文（Arthur Jaffe と Edward Witten の解説）の核は次の一文です 既知 。

> 任意のコンパクト単純ゲージ群 G について、$\mathbb{R}^4$ 上に非自明な量子ヤン–ミルズ理論が存在し、質量ギャップ $\Delta > 0$ を持つことを証明せよ。

質量ギャップとは、理論のハミルトニアン H（エネルギーの作用素）のスペクトル $\sigma(H)$ が、真空のエネルギー 0 のすぐ上で空いていることです。

$$\sigma(H) \subset \{0\} \cup [\Delta, \infty), \qquad \Delta > 0 \tag{1}$$

例。(1) までの道のりが巻の分け方です。**第一巻「準備」**（第 0〜5 部）は道具をそろえます。第 1・2 部は数学と物理の道具、第 3 部は古典の理論、第 4 部は量子化と (1) の正確な定義（4-11）、第 5 部は格子ゲージ理論です。**第二巻「存在 — 公開された構成を読む」**（第 6〜15 部）は、2026-11 に公開された四次元のヤン–ミルズの存在の構成と委員会の評価書を読みます。何が証明され何が示されていないか（第 6 部、6-00〜）から始め、構成的場の理論の背景（第 7 部）、対象と極限の順（第 8 部）、繰り込みの一段（第 9 部）、結合の合わせと漸近自由（第 10 部）、多段の評価と大きい場（第 11 部）、無限体積と再構成（第 12 部）、ヤン–ミルズである証拠（第 13 部）、本書の検討との比べ（第 14 部）と進みます。巻の最後の第 15 部は、本書の検討が紫外の制御を試みた記録です（15-00〜）。**第三巻「質量ギャップへ」**（第 16〜28 部と付録）は、開いている側を扱います。現在地と残る問い（第 16 部、16-01〜）、物理の側からの見方（第 17 部）、物理の言葉と数学の言葉の辞書（第 18 部、18-01〜）、格子の上の対象と確かな定理（第 19〜22 部、19-00〜）、拡散型緩和時間の仮定を軸に置いた一本目の道（第 23・24 部、23-00〜）、二本目の道と移り変わりの帯（第 25・26 部）、条件つきの言明（第 27 部）、前提の木（第 28 部、28-00〜）、記号表・用語集・文献案内などの付録（A-01〜）です。

一語ずつの読みは 0-03、四次元が特別な理由は既存の記事 四次元でだけ起きること・符号が一つ違う と 0-04 にあります。

02

読者と前提知識 — 2 年生の知識から

想定する読者は数学科か物理学科の 2 年生です。既知としてよいのは、多変数の微積分、線形代数の基礎、複素数、常微分方程式、力学と電磁気学の入門、確率の初歩です。ほかの道具は第 1・2 部で用意し、前提の章に無い道具はその場で最小限を定義します。次の三つの式が読めれば、第 1 部から始められます。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}, \qquad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 \tag{2}$$

例。ガウス積分は自由場を表すガウス測度に（1-08）、$e^{i\theta}$ は群 $U(1)$ の元として電磁気のゲージ変換に（2-03）なります。右の式は行列 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ の固有値を求める式で、固有値は ± 1 です。この行列をハミルトニアンと読むと、二つの固有値の差 2 が二準位系のエネルギーの隙間で、ギャップのいちばん簡単な例です（2-05）。数学科の読者には第 2 部を、物理学科の読者には第 1 部の後半（1-07〜1-11）を丁寧に読むことを勧めます。

03

札の凡例 — 保証すること・しないこと

この本は、主張の強さを文ごとに**札**で示します。「証明された」「予想されている」「数値的に支持されている」を一つの文で混ぜず、混ぜそうな文には札を付けます。

表 1　五つの札。

札	意味	保証しないこと	主に現れる層
Lean	Lean 4 で機械検査した言明。定理名を添える。証明を省いた印 `sorry` は 0 個。`native_decide`（計算を検査器の外のコンパイル済みのコードに任せる近道）は使わない。公理は Lean の標準の三つ（命題の外延性 `propext`・選択公理 `Classical.choice`・商の健全性 `Quot.sound`）だけ。詳しくは A-04・Lean の案内	前提が正しいこと	本書の検討（5-11・17-12・第 15 部・第三巻）
紙	紙の上の証明はあるが、機械検査は済んでいない	誤りが無いこと	本書の検討
計算	この端末で計算して確かめた範囲	範囲の外で成り立つこと・定理であること	全ての層（既知の式の検算を含む）

札	意味	保証しないこと	主に現れる層
既知	既知の定理、その言い換え、外の文献の確認	このサイトの成果であること	基礎・既存の知見
物理	物理では受け入れられているが数学の定理ではないもの（数値・半古典・予想）	証明があること	既存の知見（第 17 部）・地図

第三巻の第 16〜28 部と第 15 部では、この五つの札を、材料に合わせて五分類（初・典・機・読・仮）に細かくしています（23-00 §01）。対応はおおむね、紙→初か仮、計算→機（区間演算）か読（浮動小数・Monte Carlo）、既知→典、物理→読か仮で、Lean は札の外の欄として、定理名と仮定を同じ行に書きます。第 24 部の「見」は「読」と同じ水準の札です（物理の見立てで、五つの札の「物理」に当たります）。道具ごとの家と札は 16-10 表 1 にあります。

第二巻の札。 第二巻の第 6〜14 部は、公開された構成を読むための三つの札、源（公開された構成の源を読んだ）・推（本書の推し量り）・評（委員会の評価書による）を使います。意味と、それぞれが保証しないことは 6-00 の「札」にあります。第二巻の本文では、このほかに第三巻と同じ五分類の札（初・典・機・読・仮）と Lean の札も、同じ意味で使います。第二巻は公開された構成の結果を全て「Lean で証明されている、と委員会が評価した」の水準で引きます。この本はそのコードを組み立ても実行もしていません（6-00 §02）。上の表 1 の Lean の札は、この本の検討が自分で機械検査した言明だけに付けます。

誤解されやすいのは Lean の札です。機械検査が保証するのは、前提から結論が論理的に従うこと、つまり矢印の部分です。

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_k \implies Q \tag{3}$$

前提 $P_1, \ldots, P_k$ の正しさは札の外です。前提に測った値や仮に置いた関数の形が入れば結論も条件つきで、この本はその前提を併記します（23-13）。逆に、この端末で導き直した値でも、値そのものが既知なら札は既知です（一ループの係数。4-06）。

例。 このサイトの論文（5-11）では、一本の論文の中で札が段ごとに分かれます。格子の作用からある下界（定数 27 を含む不等式）までの鎖は Lean で、定理名は 5-11 に載せます。そこから格子の上の質量ギャップへ進む段は 紙 で、しかも概略です。定数 27 を 21 より小さくできないことは、具体的な配位での誤差の無い算術で確かめてあり 計算 、Lean の定理ではありません。下界の意味などの用語は 5-11 で定義します。一本の論文の中でも、札は文ごとに違います。

```
04
```

一章の形 — 冒頭の三行・番号・記号・動く図

どの章も、冒頭の三行（分かること・前提・先に言うこと）、章の順序、番号つきの節、末尾の二つの表（言えている範囲・出典と再現）の順です。節の中は言葉、式、例の順です。式・表・図の番号は章ごとに振り直し、記号は初出で定義して記号表（A-01）と揃えます。たとえば作用は全章でこう書きます。

$$S[A] = \frac{1}{2g^2} \int_{\mathbb{R}^4} \operatorname{tr}\bigl(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}\bigr)\, d^4x \tag{4}$$

A はゲージ場、$F_{\mu\nu}$ はその強さ、g は結合定数で、二度現れた添字は 1 から 4 まで和を取ります（3-03）。(4) は物理の書き方（A と F をエルミートな行列で書く規約）です。幾何の書き方の曲率 $F_{\text{幾何}}$ とは $F_{\text{幾何}} = -iF$ の関係にあり、そちらで書くと $\operatorname{tr} F^2$ の符号が変わります（二つの書き方は A-01）。第 3 部から先は $\hbar = c = 1$ とし、章の冒頭で断ります。

例。 同じ字の二つの意味も冒頭で断ります。β は、格子では結合の逆数 $\beta = 2N/g^2$（5-01）、統計力学では逆温度 $\beta = 1/k_B T$（2-08）です。動く図は最初は止まっていて「動かす」で動き、JavaScript が無くても図の下の表で読めます。用語は A-02 にあります。

05

前提の地図 — ある章に何章が要るか

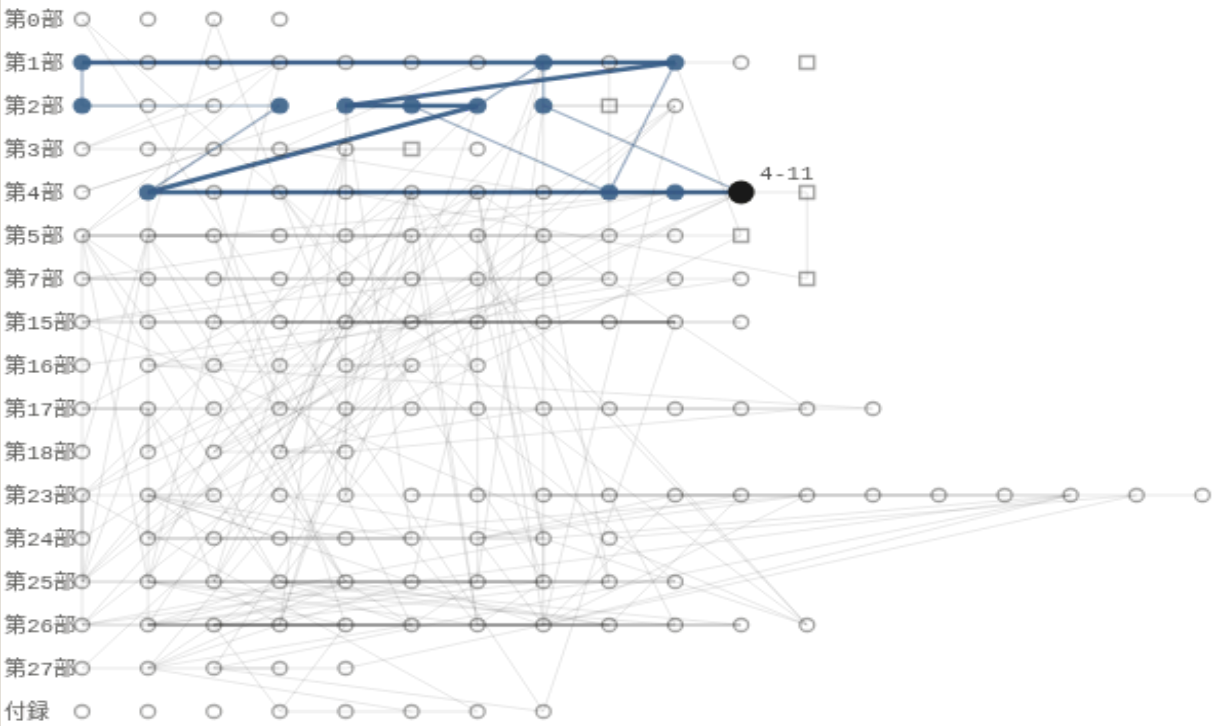
目次の各章の「前提」の欄には、先に読む章が書かれています。前提にもまた前提があるので、ある章に要る章の全体は、矢印を逆向きにたどって集めた集合です。これを**推移的な前提**と呼びます。章 c の直接の前提を $\mathrm{Pre}(c)$ とすると、推移的な前提 $\mathrm{Anc}(c)$ と最長の鎖の章数 $\ell(c)$ は次の再帰で決まります（前提の無い章では $\varnothing$ と 1）。

$$\mathrm{Anc}(c) = \bigcup_{p \in \mathrm{Pre}(c)} \bigl(\{p\} \cup \mathrm{Anc}(p)\bigr), \qquad \ell(c) = 1 + \max_{p \in \mathrm{Pre}(c)} \ell(p) \tag{5}$$

矢印が輪を作らなければ、この再帰は終わります。計算 この地図は、2026-10-15 の目次の 166 章（第一巻・第 7 部・15-00〜15-10・第 16 部の 7 章・第 17・18 部・第 23〜27 部・付録）についての図です。その 166 章の間に前提の矢印は 336 本あり、輪はありません。前提の無い章は 14 章です。2026-10-15 の目次の順（部の並びは今の番号で 0〜5・7・17・18・16・23〜27・15・付録）は矢印の向きを守るように並べてあり、第 25〜27 部の 7 本（26-01 → 25-06・25-07、26-02 → 25-08、27-02 → 27-01 と、付録 A-04・A-06 を前提に引く 3 本）を除いて、どの章でも前提の章が目次で先にありました。部を読む順に振り直した今の目次の順では、さらに 2 本（17-13 → 16-05 と 26-11 → 15-00）で前提が後に来ます 計算 。今の目次の順に通読するなら、この 9 本の先を一度めくれば、前提は欠けません。この地図には、そのあと

に加わった 98 章（第二巻の第 6・8〜14 部、15-11〜15-14、16-02〜16-04・16-11、第 19〜22 部、26-12、第 28 部、記号の対応表 24-09）が入っていません。それらの前提は各章の冒頭の「前提となる章」にあります。

図 1　2026-10-15 の目次の 166 章（範囲は本文のとおり）の前提の地図。つまみで章を選ぶと、その章の推移的な前提が塗られ、最長の鎖が太線になる。行は部（この地図に入る十六の部を今の番号の順に。最後の行は付録）、列は部の中の目次の順、四角は寄り道の章。「動かす」で章を順に送る



4-11 質量ギャップの定義｜直接の前提 4-10・2-08｜推移的な前提 12 章｜最長の鎖 7 章：1-01 → 1-10 → 2-05 → 2-07 → 4-02 → 4-10 → 4-11｜この章を前提にする章 67

計算 この図の数値はこの端末で計算しました。図は「前提」の欄の表からその場で (5) をたどり、表 2 と一致します（2026-10-15 の目次）。

例。 計算 表 2 は (5) をいくつかの章で計算したものです。最も長い鎖は 29 章で、付録の「質量ギャップまでの地図」（A-08）に至るものです（第 15 部の「言えないこと・問いの索引」15-09 までの 28 章に A-08 を足した鎖）。第 1・2・4・5 部を通って第 23 部に入り、統合表（23-12）・残件（23-15）から 24-07 を経て紫外の制御の要約（26-11）に届き、第 15 部を 15-00 から 15-06 まで順に通ります。第 27 部までで最も長いのは 26-10・27-01 に至る 26 章、第 24 部までは 24-07 に至る 19 章です。第 23 部の中で最も長いのは 23-15・23-14 に至る 18 章、第 16 部では課題の一覧（16-07）に至る 14 章です。

計算 **表 2**　代表的な章の前提。

章	直接の前提	推移的な前提	最長の鎖
4-11 ギャップの定義	4-10・2-08	12	7

章	直接の前提	推移的な前提	最長の鎖
5-09 何を固定するか	5-05・4-11	26	10
7-10 四次元で止まる場所	7-07	16	10
17-10 四次元に戻す	17-09	13	11
16-07 課題の一覧	16-05	25	14
23-12 統合表と依存グラフ	23-06・23-07・23-09・23-11	38	17
23-15 残件と費用	23-12	39	18
24-07 四次元だからこそ	24-01・24-02・23-03・23-15・4-07・7-07	49	19
26-10 新しい見方の候補	26-06・26-08・26-09・25-03・26-01	86	26
27-01 条件つきの言明	16-09・27-00・25-04・25-05・26-02・26-05・A-06・27-02	88	26
15-09 言えないこと・問いの索引	15-00・15-01・15-02・15-03・15-04・15-05・15-06・15-07・15-08	60	28
15-10 体系の試み	15-05・15-08	59	27

逆向きに数えると土台の章が分かります。計算 1-01（線形代数）は 145 章の、2-01（作用）は 132 章の、1-10（ヒルベルト空間）は 119 章の推移的な前提です。一方、前提の欄は道具として要る章だけを記します。7-10 の推移的な前提 16 章に第 3 部（古典のヤン–ミルズ）は入っていません。前提の欄は読む順の下限で、読むとよい章の全部ではありません。

06

寄り道の飛ばし方 — 飛ばしても前提は欠けない

寄り道は二種類あります。目次で題に「寄り道」と付いた 6 章（1-12・2-09・3-06・4-12・5-11・7-12）と、章の中で「寄り道：」で始まる見出しの小節です。どちらも飛ばしても先へ進めるように書く約束です。章の中の寄り道の小節は、その章の冒頭の「この章の順序」に「寄り道：」の題で出るので、そこで見分けて飛ばせます。寄り道の章の集合を Y とすると、計算 推移的な前提に寄り道を含む本筋の章は、二次元イジング（2-09）を前提にする 2-10 と、2-10 を前提にする第 23〜27 部の章、それに 7-12 だけです。

$$\mathrm{Anc}(c) \cap Y \subseteq \{\text{2-09}, \text{4-12}, \text{5-11}\}, \qquad \text{2-09} \in \mathrm{Anc}(c) \iff \text{2-10} \in \mathrm{Anc}(c) \cup \{c\}, \quad \text{4-12} \in \mathrm{An}$$

例。 1-12・3-06・7-12 はどの章の前提でもありません。4-12 は 7-12 だけの、5-11 は 23-02 だけの直接の前提で、23-02 へ進むときにだけ 5-11 を先に読みます。2-09 は 2-10（緩和の時間と動的指数）の前提で、第 23 部から第 27 部までの章の多くは 2-10 を前提にするので、第 23 部へ進むときは 2-09 も先に読みます。

寄り道：前提を破らない並べ方は何通りあるか

飛ばしてよい小節です。

前提の矢印を守る並べ方を、半順序の**線形拡大**と呼びます。目次の順はその一つです。長さ a と b の二本の鎖を順を保って混ぜる方法は、$a+b$ 個の席のどこを一本目に渡すかで $\binom{a+b}{a}$ 通りです 既知 。第 1 部を部の中の矢印だけで見ると、1-01 から枝が出て（1-02 → 1-04 の鎖と 1-05 → 1-06 が合流して 1-07、ほかに 1-10 → 1-11）、別に 1-08 → 1-09 と 1-12 があります。三つの塊（9・2・1 章）を混ぜ、1-07 の手前の二本を混ぜ、その 6 章に 1-10 → 1-11 を混ぜると

$$e = \frac{12!}{9!\,2!\,1!} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{8}{2} = 660 \cdot 10 \cdot 28 = 184800 \tag{7}$$

通りです。**例**。 計算 部分集合の上の動的計画法で数えると第 1 部は (7) と一致し、12! の約 3.9×10^{-4} です。第 2 部は 7560 通り、第 3 部は 20 通りです。第 2・3 部は、部の中でどの章も前提が高々一つなので**森**になり、森の公式 $e = n!/\prod_c h(c)$（$h(c)$ は c と、c を推移的な前提にする部の中の章を合わせた数） 既知 が使えます。この公式の値も動的計画法と一致しました。第 1 部は 1-07 が前提を二つ持つので森ではなく、そのため (7) で数えています。二本の鎖の $\binom{a+b}{a}$ は、森の公式で h が $1,\dots,a$ と $1,\dots,b$ になる場合です。第 1・2 部の 21 章では 44437771778400 通りで、21! の約 8.7×10^{-7} です。

07

読む順の提案 — 読者ごとの入口と、前提の地図から作る道

読者ごとの入口。この本は三巻を順に読むように並べてありますが、目的によって入口を変えられます。

- **問題と現在地だけを知りたい読者** — 0-02 → 0-03 → 6-00 → 6-01 → 6-04 → 16-02 → 16-04。何が示され、何が開いていて、この本がどこに立つかまでです。
- **公開された構成を数学として読みたい読者（数学科）** — 第一巻の 1-08〜1-11、4-09〜4-11、5-01・5-03・5-05 と、構成的場の理論の 7-01・7-05・7-07 を先に読み、そのあと第二巻を 6-00 から順に。
- **物理の側から入りたい読者（物理学科）** — 第一巻の第 3・4 部と 5-01・5-08 から、物理の側の見方（17-01〜）と辞書（18-01〜）へ。そのあと 6-01 と 13-01〜（ヤン–ミルズである証拠）。
- **質量ギャップに向けたこの本の結果を読みたい読者** — 16-01〜16-04 のあと、下の「確かな所から読む」の道、そして条件つきの言明（27-00〜）。
- **この本の検討の道を追いたい読者** — 一本目の道（23-00〜）、二本目の道（25-00〜）、移り変わりの帯（26-00〜）。紫外の制御の試みは第 15 部（15-00〜）、公開された構成との比べ

は第 14 部（14-01〜）。

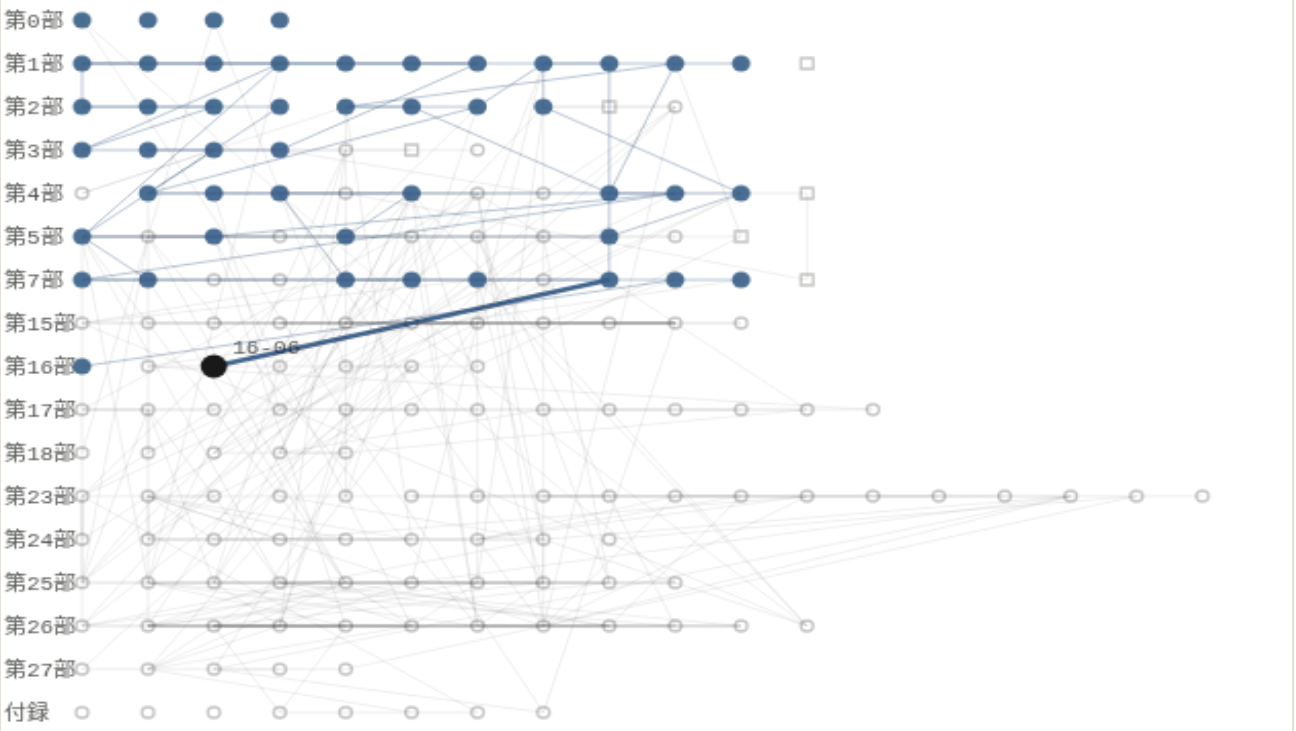
以下の道は、§05 の前提の地図（2026-10-15 の 166 章）から作ったものです。

通読なら目次の順で足ります。急ぐなら、目的の章の集合 G に推移的な前提を足して目次の順に並べます。この列が §05 の 9 本の矢印（前提が目次で後に来るもの）を含まなければ、前提は欠けません。

$$R(G) = G \cup \bigcup_{g \in G} \mathrm{Anc}(g) \qquad \text{(目次の順に並べる)} \tag{8}$$

提案は五通りです（図 2 にあるのは最初の三つ）。第 25〜27 部へ入る三つの道（第 25 部を追う・帯を追う・一本目の道から帯へ）と、第 15 部（紫外の制御）の三本の筋は目次の「読む順」にあり、後者は表 3 の最後の三行にもあります。**入口だけ**は、前提が空か第 0 部だけで済む章（付録を含めて 16 章 計算 ）から選んだ 7 章です。**数学の側から**は公理・格子・構成的場の理論を経て四次元で止まる場所まで、**物理の側から**は漸近自由・閉じ込め・ホログラフィーを経て物理が数学と離れる場所までです。どの道も、表 3 の G から (8) で作った列です。

図 2　ボタンで道を選び、つまみか「動かす」で一章ずつ進む。読んだ章を塗り、いま読む章の前提の矢印を太くする。前提より先に来る章があれば「前提の欠け」に数える



数学の側から 48/48：16-06 新しい概念の候補｜前提 7-09（44 章目）｜この道の前提の欠け 0

計算 この図の数値はこの端末で計算しました。図は表 3 の G からその場で (8) を作り、python3 の列と一致します。

例。 計算 三つの列はどれも前提の欠けが 0 です。数学の側からは 48 章、物理の側からは 39 章で、24 章が共通です。二つの道は 16-05（二つの掘り方の切れ目）で合流し、どちらから来

ても、もう一方の道の章を足さなければ進めません。16-05 は推移的な前提が 24 章あるので、入口だけの道には入りません。

計算 **表 3**　読む順。G にはどの道でも第 0 部の 4 章を加える。図 2 は上の三つ。四行目から八行目は、章の役割（層）で選ぶ四本と道具から入る道で、図 2 には無い。最後の五行は第 23 部・第 24 部・第 15 部へ入る道で、図 2 には無い。章数は目的の章の推移的な前提を含めた数。

道	目的の章 G	章数	16-05 へ進むときに足す章
入口だけ	1-12・16-08・23-16	7	—（次は二つの道のどちらかへ）
数学の側から	1-11・3-04・4-11・5-03・5-09・7-02・7-06・7-09・7-11・16-01・16-06	48	17-04・17-05・17-08・17-09・17-10・17-13
物理の側から	3-05・3-07・4-07・5-08・17-02・17-03・17-10・17-11・17-13	39	2-06・4-09・4-10・7-01・7-05・7-07・7-10・7-11
層：基礎	0-02・0-03・1-01・1-02・1-04・1-08・1-10・2-05・2-07・2-08・3-01・3-02・4-02・4-10・4-11	24	—
層：既存の知見	4-06・4-07・5-03・5-04・5-06・7-05・7-07・7-10・17-02・16-01・24-07・15-01・15-02（節：23-08 §01・23-08 §03・24-05 §04・24-06 §02・26-04 §01・26-08 §03。章数には数えない）	65	—
層：本書の検討	5-11・17-12・16-09・16-10・23-00・23-01・23-05・23-15・24-04・25-00・25-04・25-05・26-00・26-02・27-01・15-00・15-03	101	—
層：地図	0-02・16-05・16-07・16-09・23-15・25-09・26-08・27-02・27-03・27-04・15-08・15-09	104	—
道具から入る（16-10 §02）	1-10 → 5-03 → 5-11 → 7-04 → 7-05 → 18-04 → 23-08 §01〜§03 → A-04 → 24-06 → 15-04 → 15-05	72	—
第 23 部の検討をたどる道	23-00 → 23-01 → 23-03 → 23-04 → 23-05 → 23-12 → 23-15 → 23-16（とその推移的な前提）	45	—
第 24 部を追う道	24-00 → 24-01 → 24-03 → 24-04 → 24-05 → 24-08（とその推移的な前提）	49	—
紫外の制御（最短）	26-11 → 15-00 → 15-03 → 15-09	65	—（15-09 の推移的な前提は第 15 部の全章を含む）
紫外の制御（計算の筋）	15-04 → 15-05 → 15-06	62	—
紫外の制御（壁の筋）	15-02 → 15-07 → 15-08 → 15-08 §06（小さい場の結合への寄与の割り方）	61	—

二つの道の和に 16-07 と 23-15（残件と費用）の推移的な前提を足すと 78 章で、2026-10-15 の目次の順なら欠けはありません。今の目次の順では、16-05 の前提の 17-13 を先に読みます。表 3 の第 15 部へ入る四行（道具から入る道と紫外の三行）でも、今の順では 26-11 を 15-00 より先に読みます 計算 。学科で習った章は、どの道でも飛ばし読みしてかまいません。**第 23 部の検討をたどる道**は、緩和時間の仮定を軸に置いて、一段目の主張を条件に割り、残りと主張しないことまでを順にたどる道です（08 節のとおり、何かを示した記録ではありません）。

確かな所から読む — 19-00 → 20-00 → 21-00 → 22-00 → 28-00（第 19〜22 部と第 28 部の入口）。格子の上に定義した対象、機械検査した定理、前提の一覧の順です。一つの尺度の結果（自由場の一段と線形化）は第 15 部の後半（15-11〜）にあります。この道は表 3 と図 2 の数えに入っていません。

08

この本が主張すること、しないこと — 公開された構成・開いている問い・この本の結果

この本は、ヤン–ミルズの存在と質量ギャップの問題の解決を主張しません。今の状況を三つに分けて書きます。

- **存在**。2026-11-10 に、四次元の Wilson の格子ゲージ理論の尺度の極限として Wightman の公理を満たす相対論的な場の量子論が作れることを、任意の単純なコンパクト群について示した Lean の証明と、それを検査した委員会の評価書が公開されました。委員会はこの構成が証明されていると評価しています。この本はそのコードを組み立ても実行もしておらず、第二巻はこの結果を「Lean で証明されている、と委員会が評価した」の水準で読みます（6-00・6-01）。
- **示されていないこと**。同じ評価書によれば、無限体積の極限の収束と一意性（極限は部分列で取られている）、連続の理論の確率測度、一様な質量ギャップ（相関の指数の減衰とスペクトルの隙間）、Wilson ループと面積則、一粒子の状態は示されていません。質量ギャップは開いています（6-04・16-02）。
- **この本の結果**。第三巻の確かな定理（第 20〜22 部）は、格子間隔を固定した言明です。強結合の窓の中の無限体積の極限・格子の単位の隙間・面積則と、どの結合でも成り立つ渦の床、弱結合の側の大きい面の稀さです。どれも既知の型の結果の形式化です。強結合の結果は残る問い（連続極限での隙間）とは反対の端（強結合・格子間隔は固定）にあり、大きい面の稀さも繰り込む前の一つの尺度の言明で、どれもその問いに答えたものではありません

（16-04）。第 23〜27 部の道は仮定を置いた条件つきの言明で、置いた前提は前提の木（第 28 部）に並べてあります。

取り違えやすい点を一つ挙げます。格子ゲージ理論（第 5 部）では、格子間隔 a を固定し、結合の逆数 β が小さい側（強結合）で多くが示されています。問題が要るのは反対側です。

$$\underbrace{\beta \text{ が小さい（強結合）}}_{\text{格子の上で示されている側}} \quad \longleftrightarrow \quad \underbrace{\beta \to \infty,\ a \to 0}_{\text{問題が要る側}} \tag{9}$$

この本の一文を置きます。**質量ギャップの証明は下界の証明である**。試しの状態や有限の測定から出るのは隙間の上界だけで、下界にはすべての状態についての議論が要ります（1-10 の囲み「上界と下界の非対称」）。

格子から入る道で質量ギャップを示すには、格子単位の質量 m_{lat} を a で割った $\Delta = m_{\mathrm{lat}}/a$ が $a \to 0$ で正に残ることを示すことになります。極限の理論が公理を満たし自明でないことは、2026-11 に公開された構成が示しました（委員会の評価の水準。6-01）。ただしその構成は、隙間について何も言っていません（5-09・23-01・0-03）。

例。強結合の格子では、Wilson ループの面積則が示されています（Osterwalder–Seiler 1978）既知 。Wilson ループは閉じた道に沿ってゲージ場の平行移動を掛け合わせて作る観測量で、面積則はその期待値が道の囲む面積の指数で小さくなることです。クォークの閉じ込めの目印とされます 物理 （5-02）。ただし面積則は、可換な群 $U(1)$ を含むどの格子ゲージ理論でも強結合で成り立つので、それだけでは非可換の理論の閉じ込めの証拠になりません（5-06）既知 。無限体積の極限について強結合の側で示されていることは 5-04 で扱います。節 03 の例の論文も強結合の側の結果で、連続極限について何も主張していません。

緩和時間の仮定を軸に置いた検討の部（23-00〜）は、計算・計算機援用・Lean で確かめた範囲と仮定の行を並べた部で、検証前の着想（23-17）も札で区別して含みます。一本目の道の後半（第 24 部、24-00〜）は、緩和時間の仮定とは別の視点と、緩和時間の仮定を前提とした新しい見方を置きます。主張しないことは 23-16、Lean の読み方は Lean の案内・Lean の記録、論文は 論文の一覧 にあります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない（どこで扱うか）
計算 2026-10-15 の目次（166 章）の「前提」の欄から数えたこと：矢印 336 本・輪が無い・2026-10-15 の目次の順が矢印を守る（第 25〜27 部の 7 本を除く。今の順では 9 本）・表 2・(6)・線形拡大の数・表 3 の列に欠けが無い	前提の欄は設計の段階の依存で、章の中身を写し切るとは限らない（目次が改まれば数も変わる）。五つの道が最善であること（提案で、最適化ではない）。章の中の寄り道を飛ばせることは約束で、計算していない
既知 問題の一文と発表の日付・場所。強結合の格子の面積則と、それが連続極限の反対側の結果であること	質量ギャップの証明（未解決。6-04・16-02）。連続極限の構成は 2026-11 に公開された構成が示した（委員会の評価の水準。6-00）。強結合の側の無限体積の極限（5-04）
札の意味と、Lean の札が前提の正しさを保証しないこと（この本の約束）	個々の Lean の言明の前提と定理名（23-13・A-04・論文については 5-11）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
問題の一文	既知	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”（Clay 数学研究所の公式の問題文 PDF）。§4 の一文を原文と照合。訳は 0-03
発表の日付と場所	既知	J. Carlson, A. Jaffe, A. Wiles (eds.), *The Millennium Prize Problems*, CMI／AMS の序文（p. viii）：'The prize was announced at a meeting on May 24, 2000, at the Collège de France.'。照合は 0-03 の出典表による（研究所が公開している書籍の PDF）
論文の札の分かれ方	Lean 紙 計算（段ごと）	このサイトの論文（5-11）。段ごとの札は本書の材料の検査が論文の原稿と照合
強結合の格子の面積則	既知	K. Osterwalder, E. Seiler, “Gauge field theories on a lattice”, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471。書誌のみ（面積則をこの論文に帰すのは次の行の Chatterjee §4 による）
面積則が $U(1)$ を含むどの格子ゲージ理論でも強結合で成り立つこと	既知	S. Chatterjee, “Yang–Mills for probabilists”, arXiv:1803.01950 (2018) §4。本書の材料の調査が §4 の本文と照合：'the area law holds for any lattice gauge theory at sufficiently small β. A rigorous proof was given by Osterwalder and Seiler … this also implied that the area law at small β cannot be evidence for quark confinement'
森の公式・$\binom{a+b}{a}$	既知	D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Vol. 3, Addison–Wesley, 1973, p. 70。書誌のみ（森の線形拡大の公式をこの頁に帰すのは S. C. Billey, J. P. Swanson, arXiv:2010.12701 §1.3・§2.3 の本文による）。$\binom{a+b}{a}$ は二本の鎖の場合
表 2・表 3・(6)・(7)・本文の数・図	計算	python3 で 2026-10-15 の目次の「前提」の欄から計算（区切りは「,」「、」「・」。第 24 部の記号の対応表 24-09 は章に数えない）。線形拡大は部分集合の上の動的計画法、森の公式と (7) で検算。図はブラウザの JavaScript が同じ表からその場でたどる

次に読む章：0-02 一枚の絵。

一枚の絵 — 短い距離で道具が最も進み、長い距離で手が離れている

この章の §01〜§05 は既存の知見、§06・§07 は未解決の地図、§08 は案内です。

この章で分かること — 問題が求める二つの仕事と、隙間が古典論にも摂動論にも映らない理由。
長さの尺度を並べた一枚の絵で、どこまで既知の道具が進み、どこで数学と物理の手が離れているか。
この本のどの部が絵のどこを扱うか。

前提となる章 — ありません。式はその場で定義します。問題文の語ごとの読みは 0-03、二つの四次元は 0-04。

先に言うこと — 案内図の章です。この本はヤン–ミルズの存在と質量ギャップの問題の解決を主張しません。存在は 2026-11 に公開された構成が示し（Lean で証明されている、と委員会が評価した。6-00）、質量ギャップは開いています（6-04）。図 1 は一ループの近似式（物理の水準）による模式図で、帯の境目と幅は説明のための選択です。図 2 は相互作用の無い場の例です。

この章の順序

1. 問い
2. 古典では見えない質量（表 1）
3. 一枚の絵：尺度のはしご — 短い距離は弱く、長い距離は強い（図 1・表 2）
4. 有限の箱と一様な隙間（図 2・表 3）
5. 世界はどこまで来ているか（表 4）
6. 発散のほかに何があるか（表 5・寄り道：無限大に記号を与えれば）
7. 二つの掘り方と七つの切れ目（表 6）
8. この本の地図

01

問い — 何を作り、何を示すか

クレイ数学研究所は 2000 年 5 月 24 日、パリで七つの懸賞問題を発表しました。この問題の公式の問題文は Jaffe と Witten が書いています。ヤン–ミルズ理論は非可換な群を使うゲージ理論で、強い力と弱い力の記述の骨組みです（3-02）。核の一文はこうです。既知

> 任意のコンパクト単純ゲージ群 G について、$\mathbb{R}^4$ 上に非自明な量子ヤン–ミルズ理論が存在し、質量ギャップ $\Delta > 0$ を持つことを証明せよ（§4）。

「非自明」は、理論が自由場（相互作用の無い場。その確率の重みは、正規分布を無限個の変数に広げた**ガウス型**）に帰着しないことです（0-03）。

仕事は二つです。**作ること**——「存在」には、場の量子論の公理（Wightman の公理、Osterwalder–Schrader の公理）と少なくとも同じ強さの性質の確立が含まれます。公理は、場の量子論が満たすべき条件を数学の言葉で並べた一覧です。Wightman のものは時空（ミンコフスキー空間）の側で、Osterwalder–Schrader のものは時間を虚数にした側（ユークリッド空間）で書かれています（4-09・4-10）。**示すこと**——エネルギーの作用素 H（ハミルトニアン）について

$$\sigma(H) \subset \{0\} \cup [\Delta, \infty), \qquad \Delta > 0 \tag{1}$$

です。$\sigma(H)$ はスペクトルで、取りうるエネルギーの値の集まりと思ってかまいません（1-10）。0 は真空のエネルギーで、式 (1) は、どの励起も Δ 以上のエネルギーを持つと言っています。

例。調和振動子のエネルギーは真空から測って $0, \hbar\omega, 2\hbar\omega, \ldots$ で隙間 $\hbar\omega$ があり、直線上の自由な粒子の $p^2/2m$ はいくらでも 0 に近づくので隙間がありません。相対論では静止した粒子のエネルギーが質量（$E = mc^2$）なので、隙間は最も軽い励起の質量に当たります。既知 正確には、問題文の隙間はスペクトルで定義され、粒子では定義されていません。対象はクォークを含まない純ヤン–ミルズ理論で、閉じ込め（色の電荷を持つものが単独では取り出せないこと）は拡張問題です（0-03）。

02

古典では見えない質量 — どの冪にも映らない尺度

問題文によれば、古典的なヤン–ミルズ方程式は光速で進む質量の無い波を記述し（§1）、四次元では質量ギャップは古典的に見えません（§6.6）。既知 作用に入る定数は次元の無い結

合 g だけで、古典論からは質量が作れないのです。それでも量子論では尺度が一つ生まれる、と物理では考えます（次元転移）。一ループの近似では

$$\Lambda = \mu \, \exp\!\Big(-\frac{1}{2 b_0 \, g^2(\mu)}\Big), \qquad b_0 = \frac{11 N}{3} \cdot \frac{1}{16\pi^2} \tag{2}$$

です（μ は基準の尺度、$g^2(\mu)$ はそこでの結合、N は $SU(N)$ の N）。隙間は $\Delta = c\Lambda$（c は数）と期待されますが、定理ではありません。物理

関数 $e^{-c/x}$（$c > 0$）は $x \to 0$ でどの冪よりも速く消えます。

$$\lim_{x \to 0^{+}} \frac{e^{-c/x}}{x^{n}} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{3}$$

だから $x = 0$ での Taylor 係数はすべて 0 で、g^2 の冪級数で展開する摂動論はどの次数でも Λ を 0 と見ます。既知 欠けているのは無限大の値ではなく、級数に載らない量です（表 1）。

計算 表 1　純 $SU(3)$・式 (2)。$1/(2b_0) = 24\pi^2/33 \approx 7.178$

g^2	Λ/μ	$\div (g^2)^{10}$	$\div (g^2)^{20}$
0.5	5.83e−7	5.97e−4	0.611
0.3	4.06e−11	6.88e−6	1.17
0.1	6.71e−32	6.71e−22	6.71e−12

20 乗で割った比は $g^2 = 0.3$ で 1 を超えますが、$g^2 \to 0$ では 0 に向かいます。続きは 4-07・7-11・4-12。

03

一枚の絵：尺度のはしご

横軸に長さ ℓ（対数）、縦軸にその長さでの結合の強さを取ります。四次元のヤン–ミルズでは短い距離ほど結合が弱くなります（漸近自由。Gross–Wilczek、Politzer、1973 年）。既知 一ループでは $\alpha = g^2/4\pi$ について

$$\alpha(\ell) = \frac{1}{2 b_0' \ln\!\big(1/(\ell\Lambda)\big)}, \qquad b_0' = 4\pi b_0 = \frac{11 N}{12\pi}, \qquad \ell\Lambda < 1 \tag{4}$$

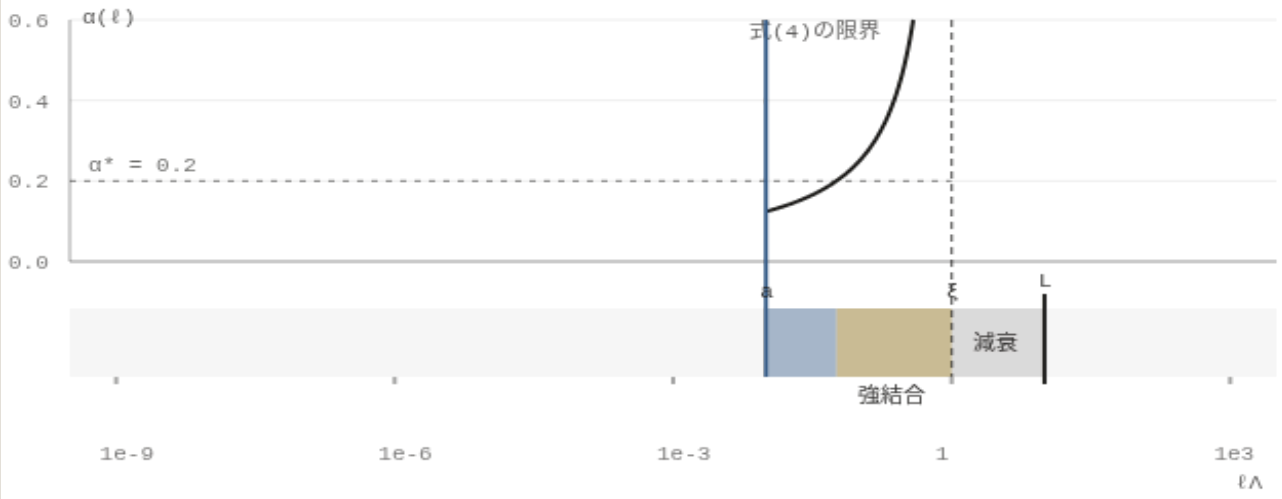
です（g^2 で書くと式 (2)）。物理 $\ell \to 0$ で α は対数の速さでしか消えません。二・三次元では g^2 が質量の $4 - d$ 乗の次元を持ち、無次元の強さ $g^2 \ell^{4-d}$ が冪の速さで消えるので、四次元が境目です（0-04）。

同じ $4 - d$ を本の他の量と並べて一本のつまみで動かす図は 1-12 §10 図 4（d = 4 で開く）。

長い側の目印は**相関長** ξ です。離れた二点の相関が距離 r について $e^{-r/\xi}$ の速さで減るときの長さで、隙間とは $\xi = 1/\Delta$ の関係にあります（$\hbar = c = 1$ の単位。4-11）。

理論を作るには、短い側を格子間隔 a、長い側を一辺 L の箱で切り、$a \to 0$（紫外極限）と $L \to \infty$（無限体積極限）を取ります。長さ 2 倍を一段と数えます（繰り込み群の一段。7-05）。

図 1　つまみで a を小さく、L を大きくすると、左の弱結合の帯と右の減衰の帯が伸びる。中央の強結合の帯は a に依らない。「動かす」で二つの極限を同時に取る



log₁₀(aΛ) = −2.0　α(a) = 0.124　段：弱 2.5／強 4.1／ξ〜L 3.3

計算 この図の数値はこの端末で計算しました（式 (4)・$N = 3$）。目安 $\alpha_* = 0.2$ と $\xi\Lambda = 1$ は説明のための選択です。JavaScript が無効なら表 2。

計算 表 2　式 (4)・$N = 3$・$\alpha_* = 0.2$ の段の数

$\log_{10}(a\Lambda)$	$\alpha(a)$	弱結合	強結合
−1	0.248	0	3.3
−2	0.124	2.5	4.1
−3	0.083	5.8	4.1
−6	0.041	15.8	4.1
−9	0.028	25.8	4.1

a を 10 分の 1 にするたびに段は約 3.3 増え、増えるのはすべて弱結合の段です。強結合の段は a に依らず約 4.1 です（目安を 0.1・0.3 にすると 8.2・2.7 で、やはり a に依らない）。L を大きくすると ξ より長い側が $\log_2(L\Lambda)$ 段増えます。計算

帯の幅は ξ と α_* の置き方で変わります。物理の数値では、純 $SU(3)$ の最も軽いグルーボール（グルーオン、つまりヤン–ミルズ場の粒子だけでできた束縛状態）の質量 m は $r_0 m \approx 4.21$（Morningstar–Peardon 1999）、同じ理論の Λ は $\overline{\mathrm{MS}}$ という定義で $r_0\Lambda \approx 0.602$（Capitani–

Lüscher–Sommer–Wittig 1999）と見積もられています。r_0 は静的なクォークの間の力から決める長さの物差しです。$\xi = 1/m$ と置けば $\xi\Lambda \approx 0.14$ で、ξ は $1/\Lambda$ より短い側に来ると見込まれます。物理 式 (4) の Λ とは定義が違うので目安ですが、この値なら強結合の帯は $\alpha_* = 0.2$ で約 1.3 段、$\alpha_* = 0.3$ ではほぼ 0 段です。計算 帯の幅の数値は物理の量ではありません。この絵で頑健なのは、幅が a に依らないことのほうです。

弱結合の帯は展開の足場がある側で、数学が最も進んでいるのもここです（Bałaban。完結はしていません。§06・7-07）。強結合の帯には小さな径数が無く、$a \to 0$ でも消えません。ξ より長い帯では、相関の指数減衰を、物理の単位で箱に一様に示すことが鍵になります（§04）。問題の本体は、三つの帯を両方の極限で崩れない評価でつなぐことです。正確には、式 (4) は摂動論の式で、この絵は物理の水準の描像です。物理

04

有限の箱と一様な隙間

問題文が求めているのは $\mathbb{R}^4$ 上の理論の隙間です。出題者はそこへの道筋として有限の体積の近似を考え、今の方法では方向が見えない場所として「体積に一様な（uniform in the volume）質量ギャップ」と「無限体積の極限 $T^4 \to \mathbb{R}^4$」を挙げます（§6。T^4 は四次元の箱の対面を貼ったもの）。前者には新しい考えが要り、それが得られれば $T^4 \to \mathbb{R}^4$ の研究が可能になるだろう、と書いています（§5 末・§6.5）。既知

格子間隔 a と箱の一辺 L を固定すれば、格子の隙間が正であることは易しい側です（17-13 の寄り道）。出題者が鍵と見ているのは、連続の理論（$a \to 0$ の後、または a にも一様に）の隙間が、箱の大きさに依らず下から抑えられること

$$\inf_{L} \ \Delta_{\text{物理}}(L) > 0 \tag{5}$$

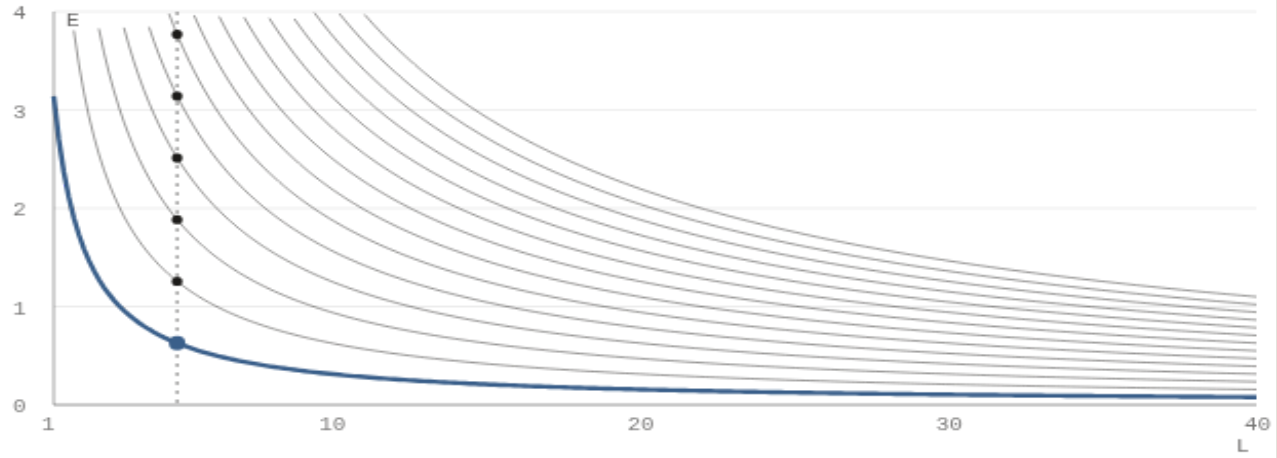
です（§5・§6.5）。$\Delta_{\text{物理}}(L)$ は一辺 L の箱での隙間を Λ のような物理の尺度で測った値で、格子の目盛り $1/a$ で測った値ではありません。この区別が大事です。a を固定して格子の目盛りで測るなら、強結合の側では無限体積での指数減衰がすでに示されています（表 4）。要るのは、物理の単位で測った隙間が $a \to 0$ と $L \to \infty$ の両方に一様であることです（5-09）。

相互作用の無い場（自由場）で違いを見ます。長さ L、両端で場が 0 の箱の一粒子の準位は

$$\omega_n(L) = \sqrt{(n\pi/L)^2 + m^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots \tag{6}$$

で、隙間は ω_1 です（$\hbar = c = 1$）。$m = 0$ なら隙間 π/L はどの箱にもあるのに $L \to \infty$ で潰れ、$m > 0$ なら常に m より大きく、式 (5) の形の一様な下界を満たします。既知

図 2　つまみで箱の長さ L を動かすと、準位（点）が曲線 ω_n(L) に沿って動く。ボタンで質量を切り替える。質量 0 では隙間 ω_1 が潰れ、質量 1 では破線 E = 1 より下に来ない



m = 0　L = 5.0　隙間 ω₁ = 0.6283　E < 1 の準位 1 個

計算 この図の数値はこの端末で計算しました（式 (6)）。JavaScript が無効なら表 3。

計算 表 3　式 (6) の隙間 $\omega_1(L)$

L	$m=0$：π/L	$m=1$	$m=0$ で $E<1$ の準位の数
1	3.1416	3.2969	0
10	0.3142	1.0482	3
100	0.0314	1.0005	31
1000	0.0031	1.0000	318

$m=1$ では $L^2(\omega_1-1)\to\pi^2/2$、$m=0$ では $E<1$ の準位が L/π の割合で増えます。計算 正確には、この m は手で入れたもので、ヤン–ミルズの隙間は相互作用から生まれなければなりません。隙間のもう一つの顔は相関の減衰で、問題文 §5 の式 (2) は、真空期待値が 0 の局所的な量について、Δ より小さい任意の正の C で、十分遠方の相関が e^{-Cr} で抑えられることを述べます（0-04・2-09）。

05

世界はどこまで来ているか

作る仕事は六つの段に分けられます（7-01）。①正則化（格子などで短い距離を切ること）、②有限体積の測度 $\mu_{a,L}$（場の配位への確率の重み。1-08）、③$a\to 0$、④$L\to\infty$、⑤公理、⑥隙間。①〜④は

$$\mu=\lim_{L\to\infty}\lim_{a\to 0}\mu_{a,L} \tag{7}$$

を作ることで、⑤⑥は μ の性質です。

既知 表 4　理論ごとの到達点

理論	到達点	文献
YM 二次元	連続の測度が在る（平面・閉曲面・トーラス）。厳密に解ける構造による。公理は対象外	Driver 1989、Gross–King–Sengupta 1989、Lévy、Chevyrev–Shen
YM 三次元	格子で間隔に一様な紫外の評価まで。連続の測度は T^3 でも未構成	Bałaban 1985、Chevyrev 2022
YM 四次元	有限体積の紫外安定性（Bałaban。仮定つき、収束する部分列の水準）と、赤外の切断を残した連続の構成の概略（MRS）。2026-11 に公開された構成で ③・⑤ と、④ の部分列の水準まで（Lean で証明されている、と委員会が評価した）。④ の一意性と ⑥ は未	Bałaban 1984–89、Magnen–Rivasseau–Sénéor（MRS）1993、公開された構成と委員会の評価書 2026（6-00）
格子 YM・強結合	a を固定して（格子の目盛りで）無限体積と指数減衰。連続極限と反対の側	Osterwalder–Seiler 1978、Shen–Zhu–Zhu 2023
φ^4	二・三次元は公理を満たす非自明な理論が在る。四次元は、格子で紫外を切った単成分の φ^4 の臨界点付近のスケーリング極限がガウス（自由場）になる	問題文 §6.2、Aizenman–Duminil-Copin 2021

表 4 の語：「紫外安定性」は、格子間隔を小さくしても量が暴れず、収束する部分列が取れること（極限の一意性は含まない）。「ガウス」は §01 の自由場の型。「公理」は §01 の Wightman・Osterwalder–Schrader の公理。

表 4 の読み方です。四次元のヤン–ミルズの行では、2026-11 に公開された構成が ③ と ⑤ を通し、④ は体積の部分列の水準まで来ました（6-01）。⑥ の隙間は手つかずです（6-04）。強結合の行は ④ と ⑥ に似たことを示していますが、a を固定した格子の話で ③ を通っていないので、§04 の式 (5) とは別の命題です。φ^4 の行は、四次元では極限が自由場になってしまう理論があることを示します。四次元のヤン–ミルズでは、公開された構成が自明でない極限を作りました（委員会の評価の水準。6-01）。

2000 年の問題文は、四次元で公理を満たす非自明な相対論的場の理論を一つも知らないと書きました。Douglas 2004 の報告は到達点を Bałaban と MRS に置き、Chatterjee 2018 の総説は、二次元より上で Wilson ループ（閉じた道に沿ってゲージ場による回転を掛け合わせ、そのトレースを取った量。5-01）が非自明に振る舞う連続極限の構成はまだ無いと書きます。既知 2026-11 に公開された構成は、四次元で Wightman の公理を満たす自明でない理論を作りました（Lean で証明されている、と委員会が評価した。6-00）。ただし Wilson ループはその構成の外で、Chatterjee の言う意味の連続極限は今も作られていません（6-04）。「二・三次元はできる」は非可換のヤン–ミルズでは不正確で、三次元は有限体積（T^3）でも連続の測度が構成されていません（7-02・7-06・16-01）。

06

発散のほかに何があるか

「無限大の処理を数学が許さないから難しい」は一面です。発散の処理は図 1 の左の帯の話で、最も進んでいます（Bałaban の計画は未完で、主定理は有効結合が小さいという仮定つき、外す定理は未公刊。7-07。2026-11 に公開された構成は、別の組み立ての繰り込みで紫外を制御しました。第 9〜11 部）。出題者が新しい考えを求めたのは、§04 の発散ではない場所です。既知

既知 表 5　発散に還元できない障害（7-11）

1	赤外に小さな径数が無い	展開の中心に置ける易しい可解模型が無い（MRS）。厳密に扱える格子の強結合は、連続極限の反対の側
2	摂動論に映らない	隙間の尺度は表 1 の型
3	非自明性	φ^4_4（四次元の φ^4。漸近自由でない）は、格子で切った臨界点付近の極限がガウスになる（7-08）。四次元のヤン–ミルズでは、2026-11 に公開された構成が自明でない極限を作った（委員会の評価の水準。6-01）
4	状態空間が曲がっている	軌道空間は線形でなく、各軌道から一つの場を連続に選ぶこと（大域的なゲージ固定）はできない（S^4 などの閉じた空間上で。Singer 1978。設定は 3-04）
5	反射正値性を保つ正則化が乏しい	格子は保つが回転対称性を壊す。連続の正則化の多くは壊す（§6.5）
6	無限自由度の構造	標準的な条件の下で、相互作用表示は存在しない（Haag の定理）

表 5 の語：「軌道空間」は、ゲージ変換で移り合う場を同じものと見なして作る空間。「反射正値性」は、ユークリッド空間の測度から量子力学のヒルベルト空間を取り戻すための正値性の条件（4-10）。「相互作用表示」は、自由場の状態空間をそのまま使い、そこに相互作用を足して時間発展を書く書き方（4-09）。

表 5 の読み方です。1 と 2 は図 1 の中央と右の帯、つまり結合が小さくない側の話です。3 は、作った極限が自由場に潰れていないことを示す仕事です。4〜6 は、ゲージ理論と無限自由度という枠組みそのものが持つ構造です。どれも「無限大をどう処理するか」とは別の問題で、発散の処理だけでは片付きません。既知

「非可換だから」も正確には、三次元以上の連続な非可換群で無限体積の指数減衰が示されたのは強結合の側だけで、弱結合の結果は有限群に限られます（Adhikari–Cao。5-06・5-10）。

寄り道：無限大に記号を与えれば

飛ばしてよい小節です。

「1/0 を記号にすれば変わるか」。既知の事例を見るかぎり、変わらない見込みが高いと考えられます。摂動論の内側の発散の処理はすでに厳密で（BPHZ、Epstein–Glaser、Connes–Kreimer。繰り込み可

能性は 't Hooft–Veltman 1972 ほか)、現れる $0/0$ は値の割り当てでなく、近づく速さや幾何の取り替えで処理されてきました。隙間の尺度は e^{-1/g^2} の型です。これは事例の整理で、不可能性の定理ではありません（7-12)。

07

二つの掘り方と七つの切れ目

数学の側は「理論はまだ無い」から始め、存在 → 公理 → 隙間の順に作ります（第 5・7 部)。物理の側は「理論は在る」から始め、グルーボール（§03）の質量や弦張力を測ります（第 17 部)。比喩で言えば両側から掘るトンネルです。数学の側は 2026-11 に公開された構成で存在と公理まで掘り進みましたが（6-00)、隙間のところでまだ通じていません。正確には、物理の数値は存在を仮定したときの整合性の確認です（17-01・16-05)。

表 6　七つの切れ目

1	存在の前提	数値が収束して見えることは存在の証明ではない	17-13
2	尺度は一つ	隙間も弦張力も Λ の定数倍、と物理は考える。定理ではない	17-12
3	岸が違う	足場がある岸：摂動論（形式的な級数)・格子の強結合（定理)・ホログラフィー（$N \to \infty$・$\lambda \to \infty$、物理の水準)。問題文の理論はどの岸にも無い	17-13
4	有限と無限	数値は外挿。要るのは一様な評価	5-09
5	時空と空間	構成はユークリッド側。時空への戻り道は反射正値性	0-04
6	「粒子」という語	物理は粒子を数え、問題文はスペクトルの隙間を求める	4-11
7	余剰次元	隙間が幾何に化けるが、四次元に戻す極限の順序は未整備	17-10

表 6 の語：「岸」は比喩で、正確には、定理か制御された近似が得られている径数の範囲のこと。$\lambda = g^2 N$ は 't Hooft 結合。「幾何に化ける」も比喩で、正確には、ホログラフィーでは隙間が余剰次元を含む幾何の上の波の方程式の固有値として計算される（$1/N$ の主項。物理の水準。17-09)。

表 6 の読み方です。七つはどれも、物理では当たり前とされている一歩が、数学では証明の要る命題になる場所です。1 と 4 は数値計算と極限の関係、2 と 6 は何を「質量」と呼ぶか、3 と 7 は計算できる模型と問題文の理論との距離、5 は時空とユークリッド空間の間の翻訳にかかわります。右端の列は、それぞれを詳しく扱う章です。

本書の検討は 2 の周りに手を付け、「尺度は一つ」を拡散型緩和時間の仮定として切り出しましたが、証明はしていません（23-01。等価原理との対応は類比。17-12)。残りの六つは名指

しまでです。

08

この本の地図

この本は三巻です。第一巻「準備」（第 0〜5 部）は、この章の絵を読む道具をそろえます。第 0 部の残りの二章は、問題文の語（0-03）と二つの四次元（0-04）を読みます。第 1・2 部は数学と物理の準備で、式 (1)・(7) と §04 を読む道具（スペクトル・測度・経路積分・統計力学）を用意します。第 3 部は古典のヤン–ミルズ理論で §02 を、第 4 部は量子化で式 (2)・(4) と公理を、第 5 部は格子ゲージ理論で図 1 の a（格子間隔）と強結合の側を扱います。

第二巻「存在 — 公開された構成を読む」（第 6〜15 部）は、表 4 の四次元の行を書き換えた 2026-11 の構成を読みます。何が証明され何が示されていないか（第 6 部）、構成的場の理論の背景で表 4・表 5 の文献（第 7 部）、格子から連続への対象と極限の順（第 8 部）、繰り込みの一段（第 9 部）、結合の合わせと漸近自由で図 1 の左の帯（第 10 部）、多段の評価と大きい場（第 11 部）、無限体積と再構成（第 12 部）、ヤン–ミルズである証拠（第 13 部）、本書の検討との比べ（第 14 部）の順です。巻の最後の第 15 部は、本書の検討が紫外の制御を試みた記録です（15-00〜）。

第三巻「質量ギャップへ」（第 16〜28 部と付録）は、まだ開いている側、図 1 の中央と右の帯と式 (5) を扱います。現在地と残る問い（第 16 部。§05 と表 6 の続き）、物理の側からの見方（第 17 部）、物理の言葉と数学の言葉の辞書（第 18 部）、格子の上の対象と確かな定理（第 19〜22 部）、本書の検討の二本の道と移り変わりの帯（第 23〜26 部。表 6 の 2 の周りを含む）、条件つきの言明と前提の木（第 27・28 部）の順です。付録は記号表・用語集・文献案内・Lean の案内などです。「寄り道」の付いた章と節は飛ばしてかまいません。読む順の提案は 0-01 にあります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない（どこで扱うか）
既知 問題文の該当箇所（PDF と照合）	語ごとの読み（0-03）
既知 式 (3)。計算 表 1	$\Delta = c\Lambda$ は物理の期待（4-07）
計算 図 1・表 2（式 (4) の中での段の数）	式 (2)・(4) は定理ではない。帯の境目と幅は描き方の選択。$\xi\Lambda \approx 0.14$ は定義の違う Λ による目安（物理）

言えている	言えていない（どこで扱うか）
計算 図 2・表 3（自由場）	ヤン–ミルズの隙間について何も示さない
既知 表 4・表 5	文献の網羅ではない（16-01）
—	この本は連続極限も隙間も示していない（連続極限は公開された構成が示した。委員会の評価の水準。6-00）。拡散型緩和時間の仮定は仮定のまま

出典と再現

もの	種別	出典・道具
一文・§1〜§6.6	既知	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”（Clay 数学研究所の公式の問題文の PDF。該当箇所を読んだ）。書籍としては J. Carlson, A. Jaffe, A. Wiles 編, *The Millennium Prize Problems*, Clay Mathematics Institute／American Mathematical Society (2006) pp. 129–152 に収録（目次は CMI 公開の PDF、刊行年は AMS の書籍のページで確認）
発表の日と場所	既知	Clay 数学研究所のサイトの Millennium Prize Problems のページ（読んだ。2000 年 5 月 24 日、パリの Collège de France）。同書の序文にも同じ日付と場所（CMI 公開の PDF で確認）
漸近自由	既知	D. J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1343／H. D. Politzer, 同 1346。要旨を確認（前者は広い類の非可換ゲージ理論が対数の補正を除いて自由場の漸近形を持つこと、後者は深いユークリッド領域で摂動論が任意によくなること）
§03 の ξ_Λ の目安	物理	C. Morningstar, M. Peardon, Phys. Rev. D 60 (1999) 034509 表 VII（書誌のみ。材料の調査が本文と照合）／S. Capitani, M. Lüscher, R. Sommer, H. Wittig, Nucl. Phys. B 544 (1999) 669 式 (6.2)（本文を読んだ）。比と段の数は python3
b_0	物理	Particle Data Group, Phys. Rev. D 110 (2024) 030001, QCD の章 §9.1.1。書誌のみ（材料の調査が照合）
表 4	既知	B. K. Driver, CMP 123 (1989) 575／L. Gross, C. King, A. Sengupta, Ann. Phys. 194 (1989) 65／T. Lévy, Mem. AMS 166 no. 790 (2003)／I. Chevyrev, H. Shen, arXiv:2302.12160／T. Bałaban, CMP 102 (1985) 255、CMP 122 (1989) 355／J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, CMP 155 (1993) 325／I. Chevyrev, arXiv:2202.13359／K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440／H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, CMP 400 (2023) 805／M. Aizenman, H. Duminil-Copin, Ann. of Math. 194 (2021) 163／M. R. Douglas, Clay 数学研究所の報告 (2004)／S. Chatterjee, arXiv:1803.01950。書誌のみ（材料の調査が原文と照合。CMP = Comm. Math. Phys.）／四次元の 2026-11 の行：yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028（Lean の源）と委員会の評価書 yang-mills-group/YM の docs/assessment-1.pdf（2026-11-10）。読み方と水準は 6-00
表 5・§06	既知	I. M. Singer, CMP 60 (1978) 7／R. Haag, Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk. 29 (1955) no. 12（二次資料による）／A. Adhikari, S. Cao, Ann. Probab. 53 (2025) 140／G. 't Hooft, M. Veltman, Nucl. Phys. B 44 (1972) 189。書誌のみ
表 1〜3・図 1・図 2	計算	python3（式 (2)・(4)・(6)）。図はブラウザが同じ式から描く

もの	種別	出典・道具
用語の言い換え（公理・反射正値性・軌道空間・相互作用表示）	既知	本書の 4-09・4-10・3-04 に詳しい定義と出典

次に読む章：0-03 問題文を一語ずつ読む。

問題文を一語ずつ読む — 語の一つ一つが、易しい答えへの抜け道を閉じている

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 問題文の核の一文と、その語を定める段落・二つの脚注がどこに在り、何を言うか。
「任意のコンパクト単純群」「$\mathbb{R}^4$」「存在」「非自明」「質量ギャップ」「短距離」の各語が何を要求するか。
各語が直接締め出す「易しい答え」の一覧（表 5）。

前提となる章 — ありません。各語は後の章で道具にします（節の終わりに行き先を書きます）。全体の絵は前の 0-02、二つの四次元の違いは次の 0-04。

先に言うこと — この章は問題文を読むだけで、問題について何も示していません。この本はこの問題の解決を主張しません。存在の側は 2026-11 に公開された構成が示し（Lean で証明されている、と委員会が評価した。6-01 がこの章の語と構成を突き合わせます）、質量ギャップは開いています。英語の引用は Clay 数学研究所の公式の問題文の PDF と照合した原文で、日本語はこの章の訳です。表 5 はこの章の読みで、出題者がその形で述べたものではありません。

この章の順序

1. 核の一文 — どこに書かれ、どう組み立てられているか
2. 任意のコンパクト単純群 — 例外群まで全部（表 1。寄り道：コンパクトでない群では）
3. $\mathbb{R}^4$ 上に — 箱でも格子でもない、無限に広い連続の四次元
4. 存在する — 公理を満たすものを作ること（表 2）
5. 非自明な — ガウスに潰れていないこと
6. 質量ギャップ — スペクトルの隙間と $m > 0$（図 1・表 3）
7. 短距離での一致 — 漸近自由が「ヤン–ミルズ」を名指す

8. 二つの脚注 — 量子の演算子と、コンパクト性だけの存在（図 2・表 4）
9. 書かれていないこと — 拡張問題・QCD・格子の上の定式化
10. 各語が締め出すもの — 一語ずつの一覧（表 5）

01

核の一文 — どこに書かれ、どう組み立てられているか

クレイ数学研究所は 2000 年 5 月 24 日、パリのコレージュ・ド・フランスでの会合で七つの懸賞問題を発表しました（研究所のサイトと、問題文を収めた書籍の序文）。その一つの公式の問題文が、Arthur Jaffe と Edward Witten の解説「Quantum Yang–Mills Theory」（14 ページ）です 既知 。以下、§ は問題文の節、「節 06」はこの章の節です。問題は §4 の一文です。

> *Yang–Mills Existence and Mass Gap.* Prove that for any compact simple gauge group G, a non-trivial quantum Yang–Mills theory exists on $\mathbb{R}^4$ and has a mass gap $\Delta > 0$. Existence includes establishing axiomatic properties at least as strong as those cited in [45, 35].

訳：**任意のコンパクト単純ゲージ群 G について、$\mathbb{R}^4$ 上に非自明な量子ヤン–ミルズ理論が存在し、質量ギャップ $\Delta > 0$ を持つことを証明せよ**。存在には、文献 [45]（Streater–Wightman の本）と [35]（Osterwalder–Schrader の二論文）が挙げる公理的な性質と、少なくとも同じ強さの性質を確立することを含む。

骨組みを論理式で書くと、量化子の順番が見えます（$\sigma(H)$ はハミルトニアン H のスペクトル。節 06）。

$$\forall G \; \exists \mathcal{T}_G : \quad \mathcal{T}_G \text{ は公理を満たし、非自明で、短距離で一致し、 } \sigma(H) \cap (0, \Delta_G) = \varnothing \text{ となる} \tag{1}$$

群ごとに理論 $\mathcal{T}_G$ が一つずつ要り、隙間 Δ_G は群ごとに違ってかまいません。§4 はもう一つ、隙間の上限 m_G が有限であること（$m_G < \infty$。節 06）も課しています。語の意味は前後の段落が決めています。量子場と公理は §3、局所場と短距離の条件は §4 の第 1 段落、質量ギャップは §4 の第 2 段落、クラスター性と拡張問題は §5、有限体積の評価と弱い存在の脚注（Jaffe–Witten の脚注 2）は §6・§6.5 にあります。

例。$G = SU(3)$ なら、求められているのはクォークを含まない 8 種類のゲージ場（グルーオン）だけの理論です（8 は $SU(3)$ の次元。表 1）。クォークを加えた QCD は対象ではありません（節 09）。

02

任意のコンパクト単純群 — 例外群まで全部

ゲージ群は、場の値を各点で独立に回してよい対称性の群です（3-01）。**コンパクト**は、行列の群として有界で閉じていることです。**単純**はリー群の意味で、リー環（1-03）が可換でなく、自明でないイデアル（どの元と括弧を取っても外に出ない部分空間）を持たないことです。$SU(2)$ は中心 $\{\pm 1\}$ を持つので抽象的な群としては単純でありません。問題文では §1 が強い力のゲージ群として $G = SU(3)$ を挙げ（中心 $\mathbb{Z}_3$ を持つので、抽象的な群としては単純でない）、§6.6 も $SU(N)$ を扱うので、リー群の意味で読みます。

ゲージ場は群の次元の数だけ成分を持ちます。リー環の基底 T^a を選ぶと、括弧（交換子）は $[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$ と基底で展開できます。この係数 f^{abc} が**構造定数**で、リー環の掛け算表に当たります（1-03）。これを使うと

$$A_\mu = \sum_{a=1}^{\dim G} A_\mu^a T^a, \qquad \sum_{c,d} f^{acd} f^{bcd} = C_A\, \delta^{ab} \tag{2}$$

です。C_A は可換な群では 0、コンパクト単純群では正です 既知 。値は基底の大きさの取り方で変わるので、規格化を決めます。基底 T^a は群の作用で変わらない内積で正規直交にとり、その内積は、最長の根（1-04）の長さの二乗が 1 になるように選びます。$SU(N)$ では、基本表現で $\operatorname{tr} T^a T^b = \tfrac{1}{2}\delta^{ab}$ とする物理の標準の規格化がこれに当たります。この規格化で C_A は**双対 Coxeter 数** $h^\vee$ という群ごとに決まる正の整数に等しく、$SU(N)$ では N です 既知 。数学で多い「長さの二乗を 2」の規格化では $C_A = 2h^\vee$ になります（$SU(2), SU(3), SU(4), SO(5), SO(7), SO(8)$ で、構造定数から確かめました 計算 ）。コンパクト単純なリー環は系列 A_n, B_n, C_n, D_n と例外型 G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 で尽き（Killing–Cartan の分類。1-04） 既知 、「任意の」はこの全部です。

計算 **表 1**　群ごとに決まる次元と正の整数 $h^\vee$（値の一覧は 1-04）。どの行も標準的な値と一致。計算の手順は出典表。b_0 は節 07 の一ループ係数。

群	型	次元	$C_A = h^\vee$	$b_0 = 11C_A/12\pi$
$SU(2)$	A_1	3	2	0.5836
$SU(3)$	A_2	8	3	0.8754
$Sp(3)$	C_3	21	4	1.1671

群	型	次元	$C_A = h^\vee$	$b_0 = 11C_A/12\pi$
$SO(8)$	D_4	28	6	1.7507
G_2	G_2	14	4	1.1671
F_4	F_4	52	9	2.6261
E_7	E_7	133	18	5.2521
E_8	E_8	248	30	8.7535
$U(1)$（単純でない）	可換	1	0	0

一ループ係数の一般形は $b_0 = (11C_A - 4n_f T_R)/(12\pi)$ です（n_f はクォークの種類の数、T_R はクォークの表現で決まる正の数。PDG 2024）既知 。クォークの無い理論では $n_f = 0$ で $b_0 = 11C_A/12\pi$ となり、$C_A > 0$ からどの単純群でも $b_0 > 0$ です。一ループの摂動論の水準で、短距離ほど結合が弱くなります（節 07）。b_0 の数値は結合 g の規格化（上の C_A の規格化）に依存するので、群どうしで大小を比べる意味はありません。要点は正であることです。$U(1)$ では $b_0 = 0$ で、その理論は質量ゼロの光子の自由場です。隙間はありません。二つの単純群の積なら作用が和に分かれ、互いに作用しない二つの理論になります。

寄り道：コンパクトでない群では

飛ばしてよい小節です。

作用 $\frac{1}{4g^2}\int \mathrm{Tr}\, F \wedge *F$（問題文の式 (1) は Lagrangian L と表記。中身は積分した作用）について、問題文は Tr を「リー環の上の不変な二次形式」とだけ書いています。定値であることを求めるのはこの章の議論で、理由は古典のエネルギーが正になるにはそれが要るからです。$\mathfrak{su}(2)$ の元は反エルミートなので $\mathrm{tr}\, X^2 \le 0$ です。$SL(2,\mathbb{R})$ のリー環では

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} : \ \mathrm{tr}\, X^2 = 2, \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} : \ \mathrm{tr}\, Y^2 = -2$$

と両方の符号が出て、不変な二次形式（$\mathrm{tr}\, XY$ の定数倍に限る）は不定値です。正定値の不変内積を持つ実リー環は、コンパクトな群のリー環に限られます 既知 。

03

$\mathbb{R}^4$ 上に — 箱でも格子でもない、無限に広い連続の四次元

$\mathbb{R}^4$ は実数四つの組の全体で、有限の箱でも、周期的な箱（四次元トーラス T^4）でも、格子でもありません。近似の上では対称性が欠けます。格子は連続な平行移動と回転を壊し、T^4 は平行移動を残して回転を壊します。

§4 の一文は $\mathbb{R}^4$ の符号を書いていません。§3 は Wightman の公理を「ミンコフスキーの符号の $\mathbb{R}^4$」の上の理論として紹介し、§6 は構成的場の理論の現状を述べる括弧書きで「ユークリッドの定式化では、ユークリッド時空 $\mathbb{R}^4$ を $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ に置き換える」と書いており、ユークリッド版の舞台が $\mathbb{R}^4$ であることが読み取れます 既知 。長さの測り方は二通りです。

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \ \text{(ユークリッド)}, \qquad -t^2+x^2+y^2+z^2 \ \text{(ミンコフスキー)} \tag{3}$$

二つは Osterwalder–Schrader の理論でつながります（§3。形式的には $t=-i\tau$ の置き換え）。その仕組みは 0-04・2-04 と既存の記事 符号が一つ違う で扱います。

例。 §6 は T^4 について「構成は完全ではないが、既知の方法を延長できる十分な兆候がある」と書き、$T^4 \to \mathbb{R}^4$ の極限を得る方法は現在の手法からは示唆されない、と書きます 既知 。この隔たりがそのまま問題に入っています。四が特別な理由は 1-12 と既存の記事 四次元でだけ起きること にあります。

近似で失うのは対称性だけではありません。§6.5 は反射正値性について 'few methods exist to recover reflection positivity in case it is lost through regularization—such as with dimensional regularization, …' と書き、例に次元正則化と Pauli–Villars を挙げます 既知 。格子は反射正値性を保って回転を壊し、連続の正則化は逆です（4-04・4-10・7-11）。

04

存在する — 公理を満たすものを作ること

「存在する」は、何かの極限が在るという意味ではありません。§4 は、§3 の意味の場の量子論を**定義**し、その局所場が曲率 F とその共変微分の**ゲージ不変な局所多項式**と対応するようにせよ、と書きます 既知 。曲率は §1 で $F=dA+A\wedge A$ と書かれ、§4 が例に挙げる局所多項式は $\operatorname{Tr} F_{ij}F_{kl}(x)$ です。

$$F=dA+A\wedge A \ \ (\S1), \qquad \operatorname{Tr} F_{ij}F_{kl}(x) \ \ (\S4) \tag{4}$$

ゲージ場 A そのものは求められていません。A はゲージ変換で変わり、観測量ではないからです。「量子場」は §3 で「時空の上の作用素値の超関数」と定義されます。点での値 $\mathcal{O}(x)$ は意味を持たず、試験関数 f でならした $\mathcal{O}(f)=\int \mathcal{O}(x)f(x)\,d^4x$ が作用素になります（1-11）。

表 2 「存在」に含まれる性質（問題文 §3 の要約。正確な形は文献 [45]・[35]。本書では 4-09・4-10）。

性質	中身
状態の空間	ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が Poincaré 群（時空の平行移動とローレンツ変換を合わせた群。2-04）の表現を持つ。H と P は時間と空間の平行移動の生成子

性質	中身
エネルギー	$0 \le H$
真空	Poincaré 群で不変なベクトル Ω が位相を除いて一つ
場	ゲージ不変な場の関数が $\mathcal{H}$ の作用素として働き、共変に変換する
局所性	光の信号で結べない領域の場は独立（作用素が可換）
ユークリッド版	ユークリッド不変な理論との相互の変換。鍵は反射正値性

例。自由な Klein–Gordon 場は最初の公理系の模型になった場ですが（§6.2）、次の「非自明」で除かれます。§6.5 は「量子力学のヒルベルト空間を確立することは、このミレニアム問題の解の一部である」と明言しています 既知 。

05

非自明な — ガウスに潰れていないこと

問題文は「非自明」を定義していません。ふつうは「自由場（相互作用の無い場）でない」と読みます。§6.2 は、平均 0・共分散 $(-\nabla^2 + m_0^2)^{-1}$（∇^2 はラプラシアン）の**ガウス測度**が質量 m_0 の自由場を与え、非線形の場にはガウスでない測度が要る、と書きます 既知 。ガウスかどうかは高次の相関で見分けられます。平均 0 のガウスの確率変数 X では

$$\frac{\mathbb{E}[X^4]}{(\mathbb{E}[X^2])^2} = 3 \tag{5}$$

で、多変数でも四点の期待値は二点の期待値の積の和で書けます（Isserlis の公式。1-08） 既知 。

例。 計算 密度 $\propto e^{-x^4}$ では (5) の比は 2.18844（$\Gamma(\tfrac{1}{4})\Gamma(\tfrac{5}{4})/\Gamma(\tfrac{3}{4})^2$ と一致）です。密度 $\propto e^{-x^2/2 - \lambda x^4}$ では $\lambda = 1,\ 0.1,\ 0.01$ で 2.319、2.537、2.843 と、$\lambda \to 0$ で 3 に戻ります。場の理論の**自明性**とは、近似の一つ一つはガウスでないのに、極限でこの種の比がガウスの値に戻ってしまう現象です。

正確には、一変数の比は目安です。四次元の $\lambda\varphi^4$ では、格子で紫外を切り、臨界点の近くで格子間隔 0・無限体積のスケーリング極限を取ると、極限がガウスになることが定理です（Aizenman–Duminil-Copin 2021。1-08） 既知 。ヤン–ミルズは短距離で結合が弱くなる点で違い、非自明な極限が期待されてきました 物理 。四次元では 2026-11 に公開された構成が自明でない極限を作りました（Lean で証明されている、と委員会が評価した。6-01）。質量を持つ自由場は隙間を持つので（表 3）、ギャップだけでは自由場を締め出せません（7-08）。§6 は、四次元で Wightman の（あるいは他の妥当な）公理を満たす非自明な相対論的場の理論は、現時点で一つも知られていないと書いています（2000 年の記述） 既知 。2026-11 に

公開された構成は、四次元のヤン–ミルズでそのような理論を作った、と委員会は評価しています（6-00）。

06

質量ギャップ — スペクトルの隙間と $m < \infty$

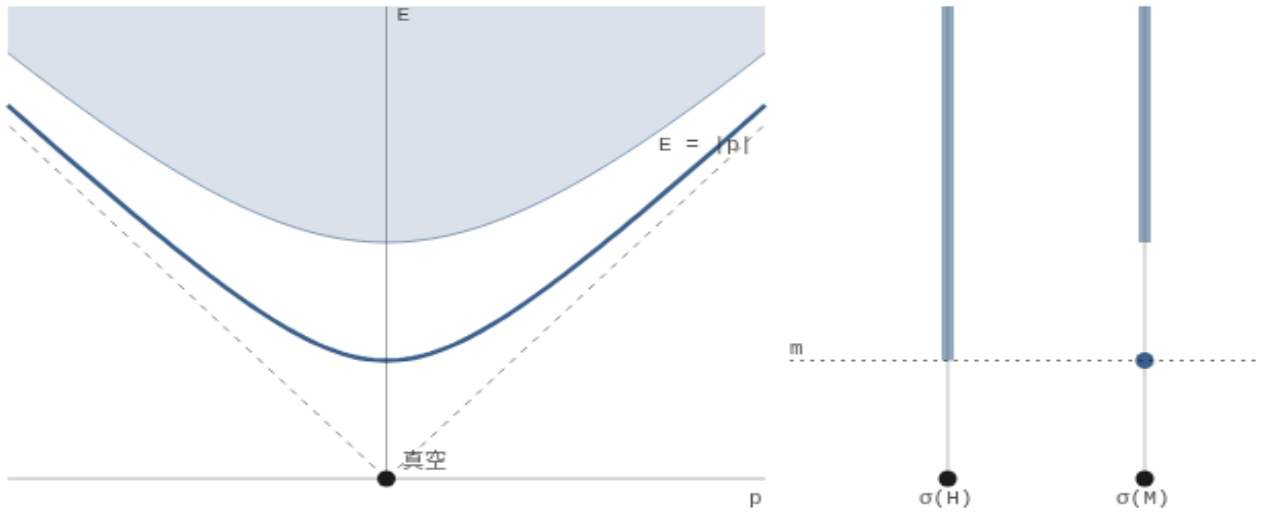
§4 の定義は、ハミルトニアン H のスペクトル $\sigma(H)$（行列なら固有値の集合に当たるもの。1-10）で書かれています。真空はエネルギー 0 の固有ベクトルで、エネルギーは負になりません。そのうえで 0 のすぐ上に空いた区間があることを、ギャップと呼びます。

$$H\Omega = 0, \qquad \sigma(H) \subset [0, \infty), \qquad \sigma(H) \cap (0, \Delta) = \varnothing, \qquad m = \sup \Delta < \infty \tag{6}$$

$\sup \Delta$ は条件を満たす Δ 全体の上限で、これを**質量** m と呼びます 既知 。問題文は $m < \infty$ を課す理由を書いていません。式から読むと、何を除くかが分かります。$\sigma(H) = \{0\}$ ならどの Δ も条件を満たし、$m = \infty$ です。**自己共役**（1-10）とは、エルミート行列（固有値がすべて実数の行列）の性質を無限次元の作用素に広げたものです。自己共役な H で $\sigma(H) = \{0\}$ は $H = 0$ と同じなので、$m < \infty$ は「真空の上に正のエネルギーの状態が何か在る」ことです。

「質量」と呼ぶ理由は、エネルギーと運動量の関係にあります（$\hbar = c = 1$。2-04）。質量 μ の粒子は $E = \sqrt{|p|^2 + \mu^2} \geq \mu$ です。§6.2 の**質量の作用素** $M = \sqrt{H^2 - P^2}$ について $H \geq M$ で、運動量 0 では $H = M$ です。$M > 0$ の状態はローレンツ変換で運動量を 0 に寄せられるので（公理のローレンツ共変性を使います）、H の隙間と M の隙間は同じ幅になります 既知 。真空のほかに $M = 0$ の状態があれば、どちらの隙間も 0 で、結論は同じです。この同値は問題文自身には書かれていません。

図 1　つまみで m を動かすと、左のエネルギー・運動量の平面の双曲線 E = √(p² + m²) が上下し、右の σ(H) と σ(M) の隙間が開閉する。ボタンで孤立した一粒子の有無を切り替えても σ(H) は変わらない



m = 1.00 σ(H) = {0} ∪ [1.00, ∞) σ(M) = {0} ∪ {1.00} ∪ [2.00, ∞)

計算 図はその場で式 $E=\sqrt{p^2+m^2}$ から描いています（運動量は一方向だけ。塗りは連続スペクトル）。

表 3　四つの例のスペクトル。

例	$\sigma(M)$	$\sigma(H)$	判定
質量 m の粒子が一種類（束縛状態なし）	$\{0\}\cup\{m\}\cup[2m,\infty)$	$\{0\}\cup[m,\infty)$	隙間あり
隙間の上が連続スペクトルだけ	$\{0\}\cup[m,\infty)$	$\{0\}\cup[m,\infty)$	隙間あり
質量ゼロの自由場（光子）	$[0,\infty)$	$[0,\infty)$	隙間なし
真空だけ	$\{0\}$	$\{0\}$	$m=\infty$ で除外

1 行目と 2 行目は $\sigma(H)$ が同じです。問題文が求めるのは $\sigma(H)$ の隙間だけで、孤立した一粒子の状態は拡張問題です（節 09）。§5 はギャップの帰結として**クラスター性**を挙げます。$\langle\Omega,\mathcal{O}\Omega\rangle=0$ の局所場 $\mathcal{O}$ と $0<C<\Delta$ について、二点が十分に離れていれば

$$|\langle\Omega,\mathcal{O}(x)\,\mathcal{O}(y)\,\Omega\rangle|\le e^{-C|x-y|} \tag{7}$$

です 既知 。離れた場所の揺らぎが独立に近づく速さを、ギャップが決めます。定義の本体は 4-11、有限の系での読み方は 2-05 にあります。

07

短距離での一致 — 漸近自由が「ヤン–ミルズ」を名指す

量子ヤン–ミルズ理論は、作る前には定義がありません。作ったものを「G の量子ヤン–ミルズ理論」と結び付けるのが、§4 の第 1 段落の条件です。量子場の相関関数は**短距離で**、教科書にある漸近自由と摂動的な繰り込み理論の予言と一致しなければなりません（原文 'should agree at short distances with the predictions of asymptotic freedom and perturbative renormalization theory, as described in textbooks'）。予言には応力テンソルと演算子積展開の存在が含まれ、その局所的な特異性は漸近自由が予言する形を持つ、とあります 既知 。

漸近自由は、結合の強さが尺度で変わり、短距離（大きい運動量 μ）で弱くなる性質です（Gross–Wilczek と Politzer、1973。問題文の文献 [21]・[38]）。クォークの無い理論では、$\alpha=g^2/4\pi$ の走り方は次の形です（PDG 2024 の式 (9.3) で $n_f=0$。右は一ループの解） 既知 。

$$\mu^2\frac{d\alpha}{d\mu^2}=-b_0\alpha^2-b_1\alpha^3-\cdots,\qquad b_0=\frac{11C_A}{12\pi},\qquad \alpha(\mu^2)\approx\frac{1}{b_0\ln(\mu^2/\Lambda^2)} \tag{8}$$

Λ は積分定数で、摂動論で定義した結合が発散する尺度です。

例。 計算 $SU(3)$ では $b_0=0.8754$ で、$\mu/\Lambda=10,\ 100,\ 1000$ のとき $\alpha=0.248,\ 0.124,\ 0.083$ です。運動量が 10 倍になるごとに $1/\alpha$ は同じ量 $2b_0\ln 10\approx 4.03$ ずつ増えます。弱くなり方は

対数的で、ゆっくりです。

(8) を解くと $\Lambda = \mu\, e^{-1/(2b_0\alpha)}$ で、$e^{-1/x}$ は $x \to 0^+$ でどの x^k よりも速く 0 に近づくので、α のべき級数の係数はすべて 0 です 既知 。古典の作用には質量の次元の定数が無く、量子論の質量は $\Delta = c\Lambda$ の形になると物理では考えられています 物理 。§6.6 の「質量ギャップは古典的には見えない」と整合します。問題文は結合定数 g の値を指定していません（4-06・4-07）。

08

二つの脚注 — 量子の演算子と、コンパクト性だけの存在

局所場の脚注（Jaffe–Witten の脚注 1。§4）は、古典的な「微分多項式」と量子の演算子の間には繰り込みの微妙さのため自然な一対一の対応は無く、次元 d 以下どうしの空間が対応すると期待される、と書きます 既知 。次元は質量の次元で、A が 1、F が 2、$\mathrm{Tr}\,F^2$ が 4 です。

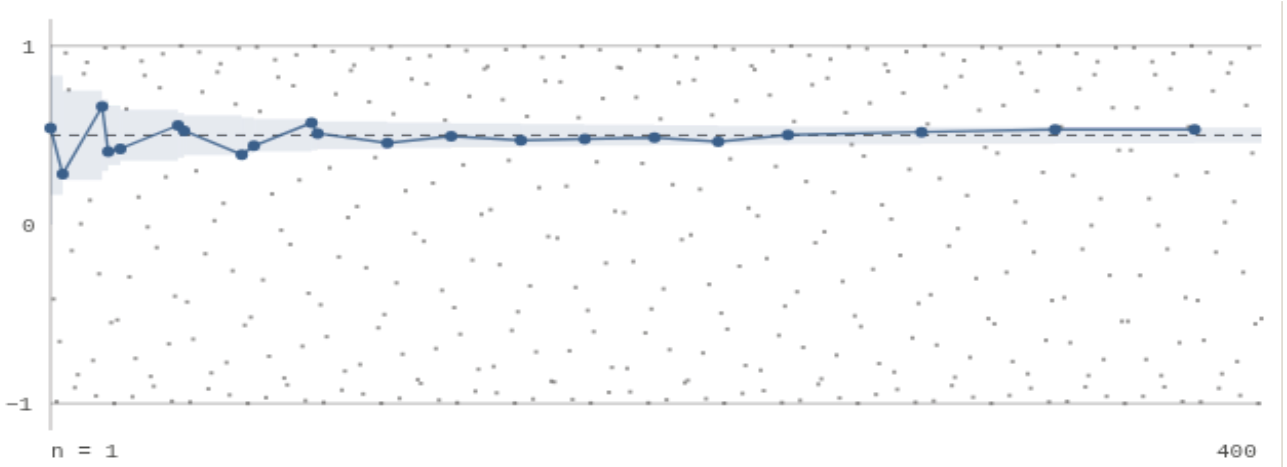
弱い存在の脚注（§6.5 の末尾）は、存在の部分の解として**弱い存在（コンパクト性）**を特に除く、ただし極限の性質（質量ギャップや公理）を別の手法で確立するなら別だ、と書きます 既知 。脚注が付いた本文は「体積に一様な質量ギャップを示すには新しい考えが要る。それがあれば $T^4 \to \mathbb{R}^4$ の極限を研究できるだろう」という趣旨です。一様とは、箱の大きさ L ごとの隙間 Δ_L について右側が成り立つことです。

$$\Delta_L > 0 \ \text{(各 } L\text{)} \qquad \text{ではなく} \qquad \inf_L \Delta_L > 0 \tag{9}$$

左側だけなら質量ゼロの自由場でも成り立ちます。辺 L の箱の壁で場を 0 とすると、いちばん低い振動のエネルギーは $\sqrt{3}\,\pi/L$ で、隙間は $L \to \infty$ で閉じます（2-05）。

コンパクト性の議論は、有界な数列が収束する部分列を持つ（Bolzano–Weierstrass）という型の議論です。確率測度の列でも、一様な評価（緊密性）があれば弱収束する部分列が取れます（Prokhorov の定理） 既知 。**緊密**とは、列のどの測度も確率のほとんど（$1-\varepsilon$ 以上）を共通のコンパクトな集合（$\mathbb{R}^n$ なら有界で閉じた集合）に載せていることで、**弱収束**とは有界で連続な関数の期待値がすべて収束することです。弱いのは、部分列の取り方で極限が変わりうることです。極限が一つに決まるか、ギャップや公理のどれを満たすかは、コンパクト性だけからは分かりません（反射正値性のように弱収束で保たれる性質もあります。5-03）。図 2 は数列 $a_n = \cos n$ で、極限が一つに決まらない様子を見ます。

図 2　つまみで目標 t を動かすと、同じ数列 a_n = cos n（点）から t に収束する部分列（色の点と線）が取り出される。帯は次の項に許す誤差。「動かす」で t を往復させる



t = 0.50　項数 21（n ≤ 400）　n_k = 1, 5, 18, 20, 24, 43, 45, 64, …

計算 この図の数値はこの端末で計算しました。規則：n_1 は $|\cos n - t| < 1/2$ となる最小の n、n_{k+1} は $n > n_k$ で $|\cos n - t| < 1/(k+2)$ となる最小の n。図は同じ規則をその場で計算し、python3 の結果（表 4）と一致します。

計算 **表 4**　$n \le 400$ で取り出した部分列。

t	最初の 8 項 n_k	項数	最後の項の $\cos n_k$
1.0	1, 6, 7, 12, 13, 19, 25, 31	40	0.9873
0.5	1, 5, 18, 20, 24, 43, 45, 64	21	0.5328
−1.0	3, 9, 10, 16, 22, 28, 35, 41	41	−0.9998

n を 2π で割った余りは一様に分布するので（Weyl の等分布定理）、どの $t \in [-1, 1]$ にも収束する部分列が取れます 既知 。$n \le 100000$ での $\cos n$ の経験分布と逆正弦分布の差は、10 区間とも 0.0001 未満でした 計算 。有界性だけからは、極限は一つに決まりません。

正確には、格子の方法では格子間隔 a ごとに測度 μ_a があり、$a \to 0$ を取りたい。一様な評価から部分列の極限が得られても、一意か、公理とギャップを満たすかは別の問題で、弱い存在の脚注はそこを示せと言っています。四次元の紫外側の既知の結果から見込まれるのも、部分列を使うコンパクト性の議論による極限だと述べられており、極限は一意とは限らない、とも書かれています（Magnen–Rivasseau–Sénéor 1993 の序論。7-07） 既知 。

2026-11 に公開された構成でも、無限体積の極限はコンパクト性による部分列で取られ、一意性は示されていません。委員会の評価書は、問題文がこの脚注で部分列の極限だけでは足りないとみなすことを書いたうえで、再構成と局所場の定理がコンパクト性を超える情報を与えている、と述べています（6-01。Lean で証明されている、と委員会が評価した水準）。質量ギャップは示されていません（6-04）。

```
09
```

書かれていないこと — 拡張問題・QCD・格子の上の定式化

§5 は次を**自然な拡張**として挙げ、本体と分けています 既知 。孤立した一粒子状態の存在（質量ギャップに加えて「上のギャップ」）。閉じ込めの証明。漸近自由を保つ場を加えた他の四次元ゲージ理論の存在と、その力学（ギャップ・閉じ込め・カイラル対称性の破れ）。存在定理を任意の四次元多様体へ広げること。上のギャップを式で書くと、M のスペクトルが次の形であることです（この章の書き方。§6.2 の「m が M の孤立した固有値」に当たります）。

$$\sigma(M) = \{0\} \cup \{m\} \cup [m', \infty), \qquad m < m' \tag{10}$$

質量 m の粒子が一種類だけで束縛状態の無い理論では、二粒子の連続スペクトルが始まる $m' = 2m$ です（表 3 の 1 行目）。

§1 は、QCD が量子の水準で持つべき三つの性質として、質量ギャップ・クォークの閉じ込め・カイラル対称性の破れを挙げます。問題の本体に入ったのは一つ目だけで、対象もクォークの無い純ヤン–ミルズです。問題文は隙間の**値**も求めていません。グルーボールの質量や弦張力との比は物理の測定の対象です（5-08）。

例。Chatterjee（2018）の格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）は、格子（β は格子の結合の逆数で、大きいほど結合が弱い。5-01）の上でプラケット変数の相関が指数的に減衰し（相関長 $\xi(\beta)$ が有限）、$\beta \to \infty$ で $\xi(\beta) \to \infty$ となることを問います。格子の上の定式化で、連続極限・$\mathbb{R}^4$・公理・非自明性を含む Clay の要件とは別物です。それが示されても、それだけでは Clay の問題の解になりません（5-09・16-08）。

10

各語が締め出すもの — 一語ずつの一覧

(1) の条件を、節 01 で触れた $m_G < \infty$ と合わせて一語ずつ取り上げ、その語が直接締め出すものを並べます。

$$\forall G \; \exists \mathcal{T}_G \left[\text{公理} \wedge \text{非自明} \wedge \text{短距離} \wedge \Delta_G > 0 \wedge m_G < \infty \right] \tag{11}$$

表 5　一語ずつの一覧（この章の読み）。

語	その語が直接締め出すもの	節
任意の	都合のよい一つの群（たとえば $SU(2)$）だけの構成	02
コンパクト	不変な二次形式が不定値で、古典のエネルギーが正にならない群	02
単純	$G = U(1)$。自由な電磁場には隙間が無いので、入れると主張が偽になる	02

語	その語が直接締め出すもの	節
$\mathbb{R}^4$	T^4 や格子の上の理論。有限の格子なら積分は有限次元で（§6.5）、いつでも在る	03
存在（公理）	何かの極限が在るだけのもの。ヒルベルト空間もハミルトニアンも無い	04
非自明	ガウスに潰れた極限。質量を持つ自由場は公理を満たし、隙間もある	05
$\Delta > 0$	質量ゼロの自由場。公理を満たすが隙間が無い	06
$m < \infty$	真空だけの理論（$\sigma(H) = \{0\}$）	06
短距離	ヤン–ミルズと関係の無い、隙間を持つ別の理論	07
弱い存在の脚注	部分列を取ったコンパクト性の極限（一意性も、ギャップと公理も示されていないもの）	08

表 5 の語は、外したときに何が起きるかで二種類に分かれます。一つは、外すと主張が**偽**になる語です。「単純」がそうで、下の例のとおり、隙間の無い理論が一つ混ざります。もう一つは、外すと主張が**易しく**なる語です。「$\mathbb{R}^4$」を外せば有限の格子の上の有限次元の積分で済み、「存在（公理）」を外せば極限が在るだけのものが通り、「弱い存在の脚注」を外せば部分列の極限で足ります。「$m < \infty$」を外すと、真空だけの理論が隙間の条件を形の上で満たしてしまいます。この章の読みでは、問題文の語の多くは後者で、易しい答えへの抜け道を一つずつ閉じています。

締め出しは重なります。質量を持つ自由場は「非自明」と「短距離」の両方に掛かります。一つの語を外しても、別の語が同じものを締め出していることがあります。表 5 は語ごとの役目の目安です。

例。「単純」を外すと $G = U(1)$ についても隙間を示すことになりますが、その理論は自由な電磁場で、表 3 の 3 行目のとおり隙間がありません。外した主張はこの一例で偽になります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない（どこで扱うか）
既知 問題文の一文・定義・脚注・拡張問題の所在と中身（Clay の PDF と照合）	問題文が定義しない語（「非自明」など）の意味はこの章の読み
計算 表 1 の次元と $h^\vee$ を根系から求め、標準的な値と一致。式 (2) の規格化で $C_A = h^\vee$ となることを六つの群で確認	分類がこれで尽きることと、一般の群での $C_A = h^\vee$ の証明（この本では証明しない。値の一覧は 1-04）
既知 $m < \infty$ と $\sigma(H) \neq \{0\}$ が同じこと。表 3 の例	四次元の量子ヤン–ミルズの H が在ること自体（2026-11 に公開された構成が再構成で作った。委員会の評価の水準。6-00。その隙間は示されていない）
計算 表 4、(5) の比、(8) の数値、$\cos n$ の経験分布	Prokhorov の定理の証明（この本では扱わない）

言えている	言えていない（どこで扱うか）
物理 $\Delta = c\Lambda$、非自明性の期待	どちらも証明は無い（4-07・17-12）
—	表 5 は読みで、出題者の言明ではない。この章は問題について何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
一文・§1〜§6.6・脚注	既知	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”（Clay 数学研究所の公式の問題文、研究所のサイトの PDF。全文を照合）。所収：J. Carlson, A. Jaffe, A. Wiles (eds.), *The Millennium Prize Problems*, CMI／AMS, pp. 129–152（刊行年は未確認）
発表の日付と場所	既知	Clay 数学研究所のサイト（Millennium Prize Problems のページ）／上の書籍の序文（Introduction, p. viii）：'The prize was announced at a meeting on May 24, 2000, at the Collège de France.'（研究所が公開している書籍の PDF で確認）
(8)・b_0 の一般形 $(11C_A - 4n_f T_R)/(12\pi)$・$\Lambda$	既知	S. Navas et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. D 110 (2024) 030001、QCD の章 §9.1.1 の式 (9.3)。該当箇所を読んだ（4-06 の出典表と同じ箇所）
漸近自由	既知	D. J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1343／H. D. Politzer, 同 30 (1973) 1346。書誌のみ
公理系	既知	R. Streater, A. Wightman, *PCT, Spin and Statistics and All That*, Benjamin, 1964／K. Osterwalder, R. Schrader, Comm. Math. Phys. 31 (1973) 83–112、42 (1975) 281–305。書誌のみ（中身は問題文 §3 による）
φ^4_4 の自明性	既知	M. Aizenman, H. Duminil-Copin, Ann. of Math. 194 (2021) 163–235, arXiv:1912.07973。要旨を確認
紫外側の極限の見込み	既知	J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, Comm. Math. Phys. 155 (1993) 325–383。書誌のみ（序論の該当箇所は 7-07 の出典表）
格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）	既知	S. Chatterjee, “Yang–Mills for probabilists”, arXiv:1803.01950 (2018)。要旨を確認。格子の相関長の問題の本文は 5-09 の出典表
$C_A = h^\vee$（最長の根の長さの二乗を 1 にする規格化で）・$h^\vee$ の定義	既知	V. G. Kac, *Infinite Dimensional Lie Algebras*, 第 3 版 (1990)。書誌のみ（1-04 の出典表と同じ）
分類・$C_A > 0$・不変内積・Isserlis・Weyl・Prokhorov	既知	標準的な事実（書誌は付けていない）

もの	種別	出典・道具
表 1・表 4・本文の数値・図	計算	python3。表 1 は有理数による誤差の無い計算：Cartan 行列から正の根をすべて生成し、次元＝階数 $+\,2\times$（正の根の数）、$h^\vee=(\theta,\theta+2\rho)/(\theta,\theta)$（$\theta$ は最高根、2ρ は正の根の和。比なので内積の規格化によらない）。式 (2) の規格化は、定義表現の生成子から構造定数を作り、最長の根の長さの二乗を 1 にした内積で $C_A=h^\vee$、2 にした内積で $2h^\vee$ となることを $SU(2),SU(3),SU(4),SO(5),SO(7),SO(8)$ で数値的に確認。数値積分は SciPy。図はブラウザの JavaScript（図 1 は式から、図 2 は表 4 と同じ規則）

次に読む章：0-04 数学の四次元と物理の四次元。語ごとの深掘りは、各節の終わりに挙げた章へ。

数学の四次元と物理の四次元 — 同じ R⁴ に物差しが二つあり、問題は両方で通じる理論を求めている

この章の §01〜§08 は既存の知見、§09 は未解決の地図です。

この章で分かること — 問題文の $\mathbb{R}^4$ が、ユークリッドの四次元（数学の側）と時空の四次元（物理の側）の二通りに読めること。二つを結ぶのが虚時間と反射正値性で、質量ギャップにも「ハミルトニアンの隙間」と「相関の指数減衰」の二つの顔があること。問題で効く「四」は、結合定数の次元が消える四であること。

前提となる章 — なし。量子力学の言葉は 04 節、反射正値性は 06 節で最小限だけ置きます（詳しくは 2-05・4-10）。06・07 節の例は変形 Bessel 関数 $I_k(J) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{J\cos\theta}\cos k\theta\, d\theta$（$k = 0, 1$）を数値として使うだけです。記事 四次元でだけ起きること・符号が一つ違う を読んでいるとつながりが見えやすくなります。

先に言うこと — 道筋の案内の章です。虚時間への置き換えは発見法で、厳密な橋（Osterwalder–Schrader の再構成）は 4-10 で扱います。07 節の計算は一つの粒子の量子力学の例で、四次元のヤン–ミルズでは、戻り道の先の Hilbert 空間は 2026-11 に公開された構成が再構成で作りましたが（委員会の評価の水準。09 節）、その上の隙間は示されていません。この章は質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. 問題文の R^4 — 符号は書かれず、二つの公理系が指定されている
2. 同じ点、二つの物差し — 虚数の角の回転が押し出しになる
3. 二本の記事の事例は、問題のどこに効くか（表 1）
4. 時間を回す — エネルギーが正だから振動が減衰に変わる（図 1・表 2）
5. 二つの四次元の辞書（表 3・寄り道：自己双対は虚時間にしか住まない）
6. 反射正値性 — 確率から Hilbert 空間を取り戻す
7. 質量ギャップの二つの顔 — 円周上の粒子で数える（図 2・表 4）
8. 問題で効く「四」 — 数えるのはユークリッドの d

9. 戻り道の三つの関門 — ヤン–ミルズに特有のずれ

01

問題文の R⁴ — 符号は書かれていない

問題文（Jaffe–Witten によるクレイ数学研究所の記述）は、任意のコンパクト単純群 G について「$\mathbb{R}^4$ の上に」非自明な量子ヤン–ミルズ理論が存在し質量ギャップ $\Delta > 0$ を持つことを示せ、と求めます（一語ずつの読みは 0-03）。この $\mathbb{R}^4$ には長さの測り方が書かれていません。

測り方は前後の節に出てきます。§3 は公理を 'Gårding and Wightman gave mathematically precise axioms for quantum field theories on R4 with a Minkowski signature' と紹介し、§6 は '(Equivalently in the Euclidean formulation one replaces Euclidean space-time R4 by R2 or R3.)' と添えます。存在は 'axiomatic properties at least as strong as those cited in [45, 35]' を含み、[45] は Streater–Wightman（時空の側の公理）、[35] は Osterwalder–Schrader（ユークリッドの側の公理）です 既知 。同じ $\mathbb{R}^4$ に物差しが二つある、と言えます。正確には、点の集まりは同じで、違うのは長さの二乗を測る二次形式です（$c = 1$）。

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{E}}(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ Q_{\mathrm{M}}(t, x) &= -t^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{aligned} \tag{1}$$

例。点 $(1, 0, 0, 1)$ の最後の座標を時間と読むと、$Q_{\mathrm{E}} = 2$ ですが $Q_{\mathrm{M}} = 0$ で、原点と光でちょうど結ばれます。$(0, 0, 0, 1)$ は $Q_{\mathrm{E}} = 1$、$Q_{\mathrm{M}} = -1$（時間的）です。符号を $(+, -, -, -)$ と書く流儀もあり、中身は同じです。

02

同じ点、二つの物差し — 虚数の角の回転が押し出しになる

物差しを決めると、それを保つ変換の群が決まります。$SO(4)$ は Q_{E} を、$SO(3,1)$ は Q_{M} を変えない、行列式 1 の 4×4 実行列の群です。前者が四次元の回転群、後者がローレンツ群で、平行移動を合わせるとユークリッド群とポアンカレ群です。どちらも座標平面 $\binom{4}{2} = 6$ 枚ごとに一つの向きを持ちます（四次元でだけ起きること）。違いは時間を含む 3 枚で、そこでの回転が時空では押し出しに変わります（2-04）。

$$
\begin{aligned}
\tau' &= \tau\cos\alpha - x\sin\alpha \\
x' &= \tau\sin\alpha + x\cos\alpha \\
&\Big\downarrow\ \tau = it,\ \ \alpha = i\varphi \\
t' &= t\cosh\varphi - x\sinh\varphi \\
x' &= x\cosh\varphi - t\sinh\varphi
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$\cos(i\varphi)=\cosh\varphi$、$\sin(i\varphi)=i\sinh\varphi$ だからです 既知 。この φ を急速度（ラピディティ）と呼びます。(2) の下の式で $x'=0$ となる点は $x=t\tanh\varphi$ を動くので、押し出しの速度は $v=\tanh\varphi$ です。例。$\varphi=0.7$、$(t,x)=(0.4,\,1.3)$ を左に入れると $t'=-0.484091,\ x'=1.328286$ で、右と一致します 計算 。回転の角は 2π で一周しますが、急速度には上限がありません（$\varphi\to\infty$ で v は 1 に近づくだけです）。二次形式で言い直すと、$SO(4)$ は点を Q_{E} が一定の球面の上でしか動かせませんが、$SO(3,1)$ は $Q_{\mathrm{M}}=-1$ の双曲面の上でいくらでも遠くへ運べます。$SO(4)$ がコンパクトで $SO(3,1)$ が非コンパクトなのは、この違いの表れです（符号が一つ違う §01）。

03

二本の記事の事例は、問題のどこに効くか

記事 四次元でだけ起きること はユークリッドの $\mathbb{R}^4$ とその位相を、符号が一つ違う は時空を見ていました。事例のすべてが問題に効くわけではありません。ユークリッドの側で最もよく効くのは、6 枚の平面が「垂直な平面」と 3 組の対になり、場の強さ F が二つに割れることです（1-12）。場の強さは、電磁気学の電場と磁場をまとめた $F_{\mu\nu}$（2-03）をヤン–ミルズに一般化したもので（3-02）、座標平面ごとに一つの成分を持ちます。電磁気学なら、電場の 3 成分が時間を含む 3 枚、磁場の 3 成分が空間だけの 3 枚に当たります。各平面の成分を垂直な平面へ移す操作をホッジの星 $*$ と書くと、平面の分け方がそのまま F の分け方になります。

$$
\begin{gathered}
\binom{4}{2} = 6 = 3 + 3 \\
F = F^{+} + F^{-}, \qquad F^{\pm} = \tfrac{1}{2}\left(F \pm *F\right)
\end{gathered}
\tag{3}
$$

例として、事例が問題でどう顔を出すかを並べます。

表 1　二本の記事の事例と問題（E＝ユークリッド、M＝時空）

事例		問題との関係	この本
回転から軸が消える	E	$F^{\pm}$ に割れる。インスタントンの分類	3-05
24-cell	E	SU(2) の有限部分群。有限群の格子の模型	5-10
エキゾチック $\mathbb{R}^4$	E	古典の方程式が位相を見分ける（Donaldson）。問題文には現れない	3-06

事例		問題との関係	この本
回転が回転でなくなる・虚数を入れる	E・M	二つの四次元を結ぶ発見法	04 節
光円錐と因果	M	光で結べない領域の場は可換、という公理	4-09
重力・波の尾	M	問題は平らな時空だけで、現れない	—

表の読み方。上の三行（E）は、第 3 部（古典のヤン–ミルズ）と第 5 部（格子）で道具や模型として効きます。四行目（E・M）は、この章の 04〜07 節で二つの四次元を結ぶために使います。M の行のうち光円錐は第 4 部の公理（4-09）に入り、重力の行は問題の外です。

問題で効く「四」は、エキゾチック構造のような四次元に特有の現象ではなく、結合定数の次元が消える四です（08 節）。ただしエキゾチック $\mathbb{R}^4$ の存在の証明には、Freedman の位相的な定理と合わせて、同じヤン–ミルズの方程式（その反自己双対な解の空間）が使われています（1-12・3-06）。古典論は方程式の解を位相を見る道具に、量子論は作用を確率の重みに使います。

04

時間を回す — エネルギーが正だから振動が減衰に変わる

二つの四次元を行き来する最初の道具は、時間 t を虚数に置き換えることです（Wick 回転。名は Wick 1954 にちなむとされます。場の作用での形は 4-02 §02 が正本）。(1) に $t = -i\tau$ を入れると Q_{M} が Q_{E} になります。何が変わるかは量子力学の時間発展で見えます。

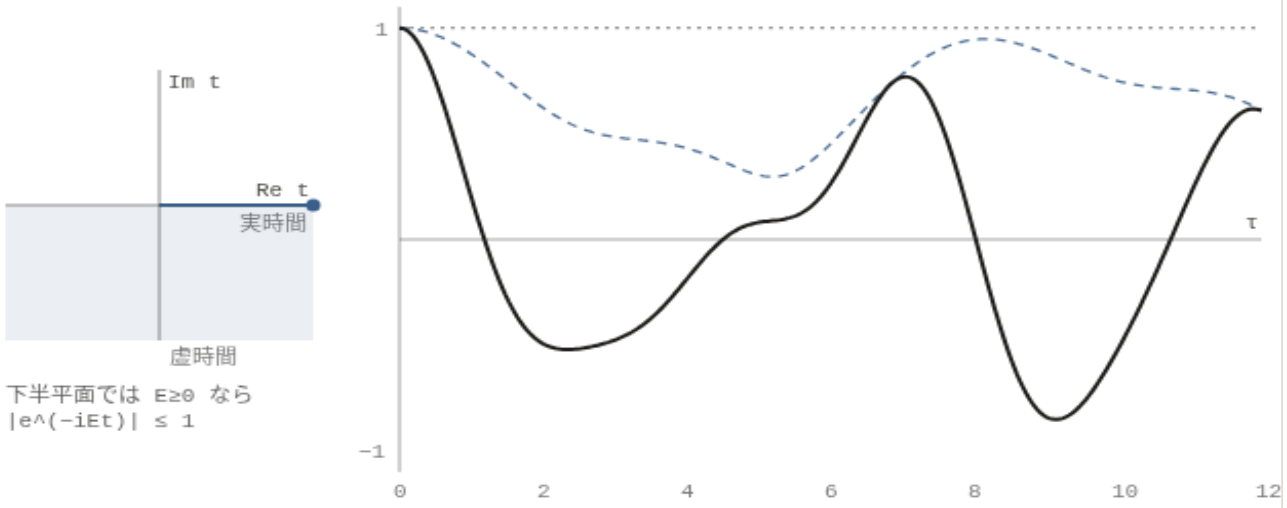
状態は Hilbert 空間（内積をもち、極限について閉じた複素ベクトル空間。1-10）の長さ 1 のベクトルで、エネルギーの作用素 H（ハミルトニアン）の固有ベクトル ψ_n（固有値 E_n）で展開できるとします。エネルギー E_n の成分は位相 e^{-iE_nt} で回ります（$\hbar = 1$）。いちばん低い状態を真空 Ω（エネルギー 0）とし、観測量 O を当てたベクトルを $O\Omega = \sum_n c_n \psi_n$ と書くと、時間 t を隔てた相関は

$$
\begin{aligned}
C(t) &= \langle O\Omega,\ e^{-iHt}\, O\Omega \rangle = \sum_n |c_n|^2 e^{-iE_nt} \\
t &= \tau e^{-i\vartheta} \implies \left| e^{-iE_nt} \right| = e^{-E_n\tau \sin\vartheta}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

です。ϑ は時間を複素平面で回す角で、$\vartheta = 0$ が実時間、$\vartheta = 90^\circ$ が虚時間です。すべての E_n が 0 以上なら、t を下半平面に回しても各項は 1 を超えず、$\vartheta = 90^\circ$ で振動が減衰 $e^{-E_n\tau}$ に変わります。負の E_n があればその項は増え、和が意味を失います。問題文 §3 は 'Wightman used positive energy to establish analytic continuation of expectations of Minkowski field theories to Euclidean space.' と書きます 既知 。

例。真空の項を除いた連結部分 C_{conn} を、$E_n = 1,\ 1.7,\ 2.6$、重み $0.6,\ 0.3,\ 0.1$ の模型で描きます。ギャップは $\Delta = 1$ です。

図 1　角 ϑ を 0° から 90° へ動かすと、時間の向き（左）が虚軸へ回り、相関の実部（右の実線）の振動が減衰に変わる。破線は |C|、点線は e^(−Δτ sinϑ)。「負のエネルギー」を入れると増大に変わる



ϑ = 0°　減衰の速さ Δ·sinϑ = 0.000　振動の速さ Δ·cosϑ = 1.000　|C(τ=8)| = 0.94469

計算　この図の数値はこの端末で計算しました（(4) の和をブラウザで計算。表 2 は python3）。「負のエネルギー」は $E = -0.3$、重み 0.03 の項です。

表 2　$|C_{\mathrm{conn}}(\tau e^{-i\vartheta})|$（最後の列は負のエネルギーを入れた場合）

ϑ	τ = 2	τ = 8	$e^{-8\sin\vartheta}$	負を入れて τ = 8
0°	0.62270	0.94469	1	0.92401
30°	0.23920	0.01104	0.01832	0.08978
60°	0.11873	0.00059	0.00098	0.24004
90°	0.09176	0.00020	0.00034	0.33090

実時間では $\tau = 8$ でも 0.94 で、相関は減りません。回すほど速く減り、負のエネルギーを入れると回すほど増えます。上界 $|C_{\mathrm{conn}}| \le e^{-\Delta\tau\sin\vartheta}$ は、重みの和が 1 で $E_n \ge \Delta$ なので、(4) の各項に三角不等式を使えば出ます 既知 。$0 \le \vartheta \le 90°$、$0 \le \tau \le 12$ の細かい格子の全点でも確かめました 計算 。

05

二つの四次元の辞書

虚時間に移すと、量子論の言葉が確率論の言葉に置き換わります。問題文 §3 は、Symanzik がユークリッドの期待値を 'a statistical mechanical ensemble of classical Markov fields [46], with a probability density proportional to exp(−S)' と読み、Osterwalder と

Schrader が二つの公理系の同等性の一般論を与えた、とまとめます 既知 （定理の正確な向きと条件は 4-10）。

$$
\begin{aligned}
e^{iS[\phi]} &\longrightarrow e^{-S_{\mathrm{E}}[\phi]} \\
e^{-iHt} &\longrightarrow e^{-H\tau}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

左の e^{iS}（S は作用、ϕ は場。2-01・2-02）は大きさ 1 で振動し、確率になりません。右の $e^{-S_{\mathrm{E}}}$（S_{E} は虚時間に移した作用）は正で、規格化すれば確率の重みになりえます（2-07・4-02）。数学の側でヤン–ミルズが「接続の空間の上の確率測度を作る問題」になるのはこのためです（接続はゲージ場 A のことで、詳しくは 1-07）。例として、対応の主な行を並べます。

表 3　二つの四次元の辞書（厳密な形は 4-10）

物理の四次元（時空）	数学の四次元（ユークリッド）
ローレンツ群 $SO(3,1)$	回転群 $SO(4)$
時間発展 e^{-iHt}	$e^{-H\tau}$。格子では転送行列（5-03）
経路積分の重み e^{iS}	確率の重み $e^{-S_{\mathrm{E}}}$（2-08）
場の積の真空期待値（Wightman 関数）	確率測度のモーメント（Schwinger 関数）
Hilbert 空間とエネルギーの正値 $H \geq 0$	反射正値性（06 節）
光で結べない領域の場は可換	Schwinger 関数が引数の並べ替えで変わらない（ボース的な場の場合）
質量ギャップ：H のスペクトルが $(0, \Delta)$ に無い	連結相関が指数的に減る（07 節）

どの行も、最後は「反射正値性があれば Hilbert 空間に戻れる」という一点を通ります。

寄り道：自己双対は虚時間にしか住まない

飛ばしてよい小節です。

辞書で訳せない行もあります。ホッジの星 $*$（各平面の成分を垂直な平面へ移す操作。1-12）を二回かけた符号が、物差しで変わります。

$$
\begin{gathered}
** = +1 \ \text{(ユークリッド)} \\
** = -1 \ \text{(時空)} \\
* : (E, B) \mapsto (-B, E) \ \text{(時空)}
\end{gathered}
\tag{6}
$$

ユークリッドでは $F = *F$（自己双対）を満たす実の場があり、インスタントンはその解です（3-05）。時空では $*$ の固有値が $\pm i$ なので、実の場で $*F = \pm F$ なら $F = 0$ です。例。六成分の行列として $*$ を組むと、固有値はユークリッドで ± 1、符号 $(-,+,+,+)$ で $\pm i$ が三つずつでした 計算 （(6) の右の符号は慣習による）。インスタントンを虚時間のトンネル効果と読むのは半古典の解釈です 物理 。

06

反射正値性 — 確率から Hilbert 空間を取り戻す

ユークリッドの側にあるのは確率測度（期待値 $\mathbb{E}$）だけで、Hilbert 空間もハミルトニアンもありません。取り戻すには内積が要り、材料は時間の鏡 $\Theta : \tau \mapsto -\tau$ です。X, Y を $\tau > 0$ の側の場だけで決まる量とし、ΘX を X の中の時刻をすべて符号反転したもの（$\tau < 0$ の側の量）として

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &:= \mathbb{E}\big[\,\overline{\Theta X}\; Y\,\big] \\ \langle X, X \rangle &\geq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

と置きます。後半が反射正値性です（OS 正値性とも呼びます）。成り立てば $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が（長さ 0 のものを同一視して）内積になり、τ の向きに s ずらす操作が e^{-sH}（$H \geq 0$）として働きます 既知 。問題文 §6.5 は 'Establishing a quantum mechanical Hilbert space is part of the solution to this Millennium problem.' と書きます。

例。円周上を回る粒子（慣性モーメント I、角 θ）を刻み a の虚時間の格子に置きます。この章では θ をこの粒子の角に使います（3-05 などの θ 項の角とは別です）。時刻 ka の角を θ_k と書き、作用 $\int \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 d\tau$ の一歩分を $\frac{I}{a}\big(1 - \cos(\theta_{k+1} - \theta_k)\big)$ で近似すると、重みは

$$\begin{aligned} \prod_k e^{J\cos(\theta_{k+1}-\theta_k)}, \qquad J &= \frac{I}{a} \\ e^{J\cos u} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} I_n(J)\, e^{inu} \\ I_n(J) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{J\cos u}\cos nu \, du \end{aligned} \tag{8}$$

です。J は隣り合う時刻の角をそろえようとする強さで、統計力学ではこの重みの鎖を一次元の XY 模型と呼びます（分配関数と転送行列の言葉は 2-08・2-09）。I_n は変形ベッセル関数で、べき級数の係数がすべて正なので $I_n(J) > 0$ です 既知 。転送行列 T は、一歩分の重みを積分の核にした作用素です。

$$(Tf)(\theta) = \int_0^{2\pi} K(\theta, \theta')\, f(\theta')\, d\theta', \qquad K(\theta, \theta') = e^{J\cos(\theta - \theta')}$$

(8) の展開を代入すると、T は $e^{in\theta}$ を固有値 $2\pi I_n(J)$ で自分に移します（θ を 256 点に刻んだ数値と 12 桁一致 計算 ）。反射の面を格子の点と点のあいだに置くと (7) の左辺は T を挟んだ二次形式になり、固有値が正なので 0 以上です。こうして $H_a = -\frac{1}{a}\log\big(T / 2\pi I_0(J)\big) \geq 0$ が定まります。Wilson の格子ゲージ理論での反射正値性は Osterwalder–Seiler 1978 が示しました（転送行列の構成は Lüscher 1977 も。5-03）。

07

質量ギャップの二つの顔 — 円周上の粒子で数える

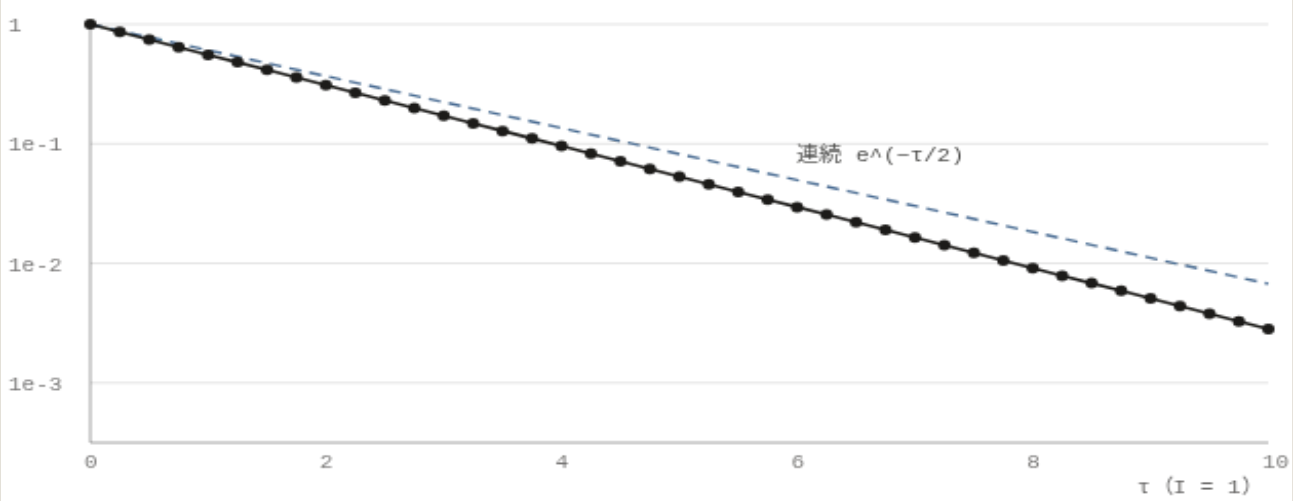
質量ギャップの定義は時空の側にあり、問題文 §4 は 'A quantum field theory has a mass gap Δ if H has no spectrum in the interval $(0,\,\Delta)$ for some $\Delta > 0$.' と書きます（H はハミルトニアン。スペクトル $\operatorname{spec} H$ は、有限次元なら固有値の集合です）。ユークリッドの側では同じことが相関の減衰に見えます。これを質量ギャップの二つの顔と呼びます。正確には、ハミルトニアンのスペクトルについての条件と、連結相関（Schwinger 関数から真空の寄与を引いたもの。表 3）の指数減衰の二つです。(4) で $\vartheta = 90^\circ$ と置けば

$$\begin{aligned} \operatorname{spec} H \subset \{0\} \cup [\Delta, \infty) \;\Longrightarrow\; & \\ C_{\mathrm{conn}}(\tau) = \sum_{E_n \geq \Delta} |c_n|^2 e^{-E_n \tau} & \\ \leq C_{\mathrm{conn}}(0)\, e^{-\Delta \tau} & \end{aligned} \tag{9}$$

です。O がいちばん低い励起と重なれば $-\frac{d}{d\tau}\log C_{\mathrm{conn}}$ は Δ に近づき、図 1 の模型では $\tau = 1, 2, 4, 8$ で 1.178、1.086、1.021、1.001 でした 計算 。格子でグルーボール（ヤン–ミルズの粒子に当たる励起の候補）の質量を測るのはこちらの顔です（5-08）。ユークリッドでは時間と空間が回転で移り合うので、τ の向きの減衰は空間の向きの減衰にもなり、問題文 §5 のクラスター性につながります 既知 。局所的な観測量（有界な領域の場だけで決まる量）を回した先もまた局所的な観測量なので、どの向きにも同じ速さの減衰が言えます。ただしこれは、再構成で Hilbert 空間とハミルトニアンが得られた後の話です。

例。06 節の粒子で $O = e^{i\theta}$ とします。$H = -\frac{1}{2I}\frac{d^2}{d\theta^2}$ の固有値は $\frac{n^2}{2I}$、ギャップは $\Delta = \frac{1}{2I}$ で、$O\Omega$ は $n = 1$ の成分だけなので $C_{\mathrm{conn}}(\tau) = e^{-\Delta\tau}$ です。格子では無限に長い鎖で $\langle e^{i(\theta_k - \theta_0)}\rangle = (I_1/I_0)^k$ となり、$\tau = ka$ と読んだ減衰の速さは $\Delta(a) = -\frac{1}{a}\log\frac{I_1(J)}{I_0(J)}$ です。これは格子の上のギャップを物理の単位で測ったもので（06 節の H_a のいちばん小さい正の固有値）、格子の単位では $a\,\Delta(a)$ です（付録 A-01 の m_{lat}）。

図 2　刻み a = I/J を細かくすると、格子の相関（実線。粗い格子では点も）の傾きが連続の e^(−Δτ)（破線）に近づく。縦軸は対数。表 4 の行を押しても J が変わる



J = I/a = 4 a = 0.25 Δ(a) = 0.586941 Δ(a)/Δ = 1.173882 (Δ = 0.5)

計算 この図の数値はこの端末で計算しました（I_1/I_0 と $\Delta(a)$ は python3・SciPy で計算した表 4 の値。図は点 $(ka,\,(I_1/I_0)^k)$ を結ぶだけ）。

表 4　円周上の粒子の格子（$I=1$、$\Delta=0.5$、刻み $a=1/J$）。最後の列は二番目の準位 $E_2=2$ との比

J	Δ(a)/Δ	1 + 1/(2J)	E₂(a)/E₂
1	1.613125	1.500000	1.116436
2	1.439436	1.250000	1.196582
4	1.173882	1.125000	1.130427
8	1.071311	1.062500	1.065295
16	1.033214	1.031250	1.032022
32	1.016093	1.015625	1.015824
64	1.007927	1.007813	1.007863

粗い格子（$J\le 2$）の $\Delta(a)/\Delta$ は 1.4〜1.6 で、ギャップとは別の数です。細かくすると $1+\frac{1}{2J}$ とほぼ同じ速さで 1 に近づき、二番目の準位も近づきます。周期 400 の鎖で転送行列の積から計算した相関も $(I_1/I_0)^k$ と 10 桁一致しました 計算 。この例ではギャップが在ることは最初から明らかです。四次元のヤン–ミルズで要るのは、格子の単位で見た減衰 $a\,\Delta(a)$ が 0 に向かう極限で $\Delta(a)$ が正の値に留まることです（5-09）。極限の Hilbert 空間は、2026-11 に公開された構成が再構成で作りました（委員会の評価の水準。09 節）。

08

問題で効く「四」 — 数えるのはユークリッドの d

次元の勘定はユークリッドの側で、d 個の対等な座標について行います。$c=1$ なら時間も長さで測るので、3+1 次元の時空は $d=4$ です。d 次元のユークリッドの作用を $S_d[A]=\frac{1}{2g^2}\int_{\mathbb{R}^d}\operatorname{tr}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\,d^dx$（$\mu,\nu$ について和）と書きます。付録 A-01 の作用の形で、ここでは結合 g

を作用の前に出し、F には含めない書き方をとります。$\hbar = c = 1$ で質量の次元を $[\cdot]$ と書くと（導き方は 2-04・1-12）

$$\begin{gathered} [g^2] = 4 - d \\ S_d[A_\lambda] = \lambda^{4-d}\, S_d[A] \\ \big(A_\lambda(x) = \lambda A(\lambda x)\big) \end{gathered} \tag{10}$$

で、四次元だけ古典の作用に長さの尺度がありません。古典の定数から質量を組めないので、ギャップは量子効果で生まれる尺度 Λ の定数倍 $\Delta = C\Lambda$（C は無次元の定数）になると期待されています[物理]。問題文 §6.6 の 'the mass gap is not classically visible' はこの事情です（4-07）。次元 d を連続に動かし、四で切り替わる他の量と並べた図は 1-12 §10 の次元のつまみです。

例。三次元では $[g^2] = 1$ で g^2 自体が質量の尺度になり、勘定の上では易しい側に入ります。Chevyrev（arXiv:2202.13359 §1.1）も 'The cases d = 2, 3 are considered substantially simpler than d = 4' と書きますが、同じ節で三次元の測度の構成は 'even on T3, remains open' です[既知]。二次元は連続の測度が構成済み、四次元は測度としては未構成です（2026-11 に公開された構成が作ったのは相関関数の水準。09 節。次元ごとの現在地は 7-10、誤解は 16-08）。

09

戻り道の三つの関門 — ヤン–ミルズに特有のずれ

円周上の粒子では辞書がそのまま使えました。ユークリッドの側で作った理論から、辞書を逆にたどって時空の側の理論に戻る道を、この章では戻り道と呼びます。戻り道とは、正確には、ユークリッドの確率測度から OS の再構成で Wightman の公理を満たす理論（Hilbert 空間と $H \geq 0$ をもつもの）を得ることです。ヤン–ミルズでは、その途中に関門が三つあります：観測量・正則化・体積。道の全体を並べると次のとおりです。

$$\begin{aligned} &\underbrace{\text{格子・正則化}}_{\text{反射正値性}} \xrightarrow{a \to 0} \text{連続の測度} \\ &\xrightarrow{T^4 \to \mathbb{R}^4} \text{ユークリッド不変} \\ &\xrightarrow{\text{再構成}} (\mathcal{H},\, H \geq 0) \xrightarrow{?} \Delta > 0 \end{aligned} \tag{11}$$

左端の正則化は、理論に最小の長さ（格子の刻み a など）を入れて無限大が出ないようにしたものです。T^4 は各辺を周期的につないだ四次元の箱で、体積を有限にしておくためのものです。四次元の非可換ヤン–ミルズでは、2026-11 に公開された構成が、(11) の最後の矢印の手前までを通しました。ただし連続の対象は測度ではなく相関関数で、体積の極限は部分列です（Lean で証明されている、と委員会が評価した。6-00・12-06・12-08）。最後の「?」の矢

印、質量ギャップは示されていません（6-04）。2000 年の問題文 §6 は T^4 の上の構成について 'while the construction is not complete' と書きます。二次元では、格子から平面 $\mathbb{R}^2$ の上の連続の測度までが通っています（7-02）。三つの関門は次のとおりです。

観測量。意味を持つのはゲージ不変な量、つまりゲージ変換（各点で群の元を選んで場を取り替える操作。3-01）で値の変わらない量だけです。局所的なものは $\mathrm{Tr}\, F_{ij}F_{kl}(x)$ のような合成の量です（問題文 §4）。Chatterjee（arXiv:1803.01950 §1）は Seiler を引いて 'the key observables in these theories do not take values at points, but at curves' と書き、Driver 1989 はウィルソンループが 'quite singular in d = 3 and especially d = 4' と述べます 既知 。この関門は (11) のどの段にもかかわります。

正則化。(11) の左端の関門です。Wilson の格子は反射正値性を保ちますが、回転を 90° 刻みに落とします。問題文 §6.5 は、正則化で失った反射正値性を取り戻す方法は少ないと書き（引用は 0-03 §03）、連続の正則化を使った Magnen–Rivasseau–Sénéor 1993 も OS 正値性（反射正値性）は追加の仕事で示せると考える、にとどまります 既知 。

体積。(11) の二本目の矢印の関門です。T^4 でも反射正値性があれば有限体積の Hilbert 空間と転送行列は得られますが、$\mathbb{R}^4$ の上でポアンカレ群の対称性をもつ理論には $T^4 \to \mathbb{R}^4$ が要ります。問題文 §6 は 'Nor do present methods suggest how to obtain the existence of the infinite volume limit T4 → R4.' と書きます 既知 。2026-11 に公開された構成は、無限体積の極限をコンパクト性による部分列で取りました（12-05）。極限が部分列に依らないことは示されていません（6-04）。

例。三次元・四次元の非可換ヤン–ミルズでは、一意で非自明な連続極限はまだ示されていません（四次元は、非自明な極限を 2026-11 に公開された構成が作りましたが、一意性は示されていません。三次元は T^3 の上でも未構成。08 節）。(11) の最後の「?」が質量ギャップの本体ですが、ギャップは最後に一本だけ残る矢印ではありません。問題文 §6.5 は 'New ideas are needed to prove the existence of a mass gap that is uniform in the volume of space-time' と書き、続けて、体積によらない（箱をどれだけ大きくしても一様な）ギャップが示されれば $T^4 \to \mathbb{R}^4$ の極限を調べられるようになるだろう、と見ています 既知 。つまりギャップと体積の関門は絡み合っています（7-11・16-05）。

この章が言えている範囲

内容	状態
問題文の $\mathbb{R}^4$ に符号の指定がなく、両側の公理系が [45, 35] として指定されていること	言えている 既知 （問題文 §3・§4・§6）
(2)・(6)・(8)、エネルギーが正なら虚時間で減衰になること (4)、ギャップが減衰の上界を与えること (9)	言えている 既知 （図 1〜2・表 2・表 4 は 計算 ）
辞書（表 3）と、反射正値性から Hilbert 空間を作る手順 (7)	対応として 既知 。定理の形は 4-10 で扱い、この章は述べただけ
$\Delta = C\Lambda$ の形でギャップが量子効果から生まれること	物理の水準 物理 （4-07）
四次元のヤン–ミルズで (11) の各矢印が成り立つこと	最後の矢印（質量ギャップ）は未解決。その手前の矢印は 2026-11 に公開された構成が相関関数の水準で通した（委員会の評価の水準。体積は部分列。6-00）。この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
(2)・(6) の数値、表 2・表 4、図 1〜2、07 節の有効質量と鎖の検算	計算	python3（NumPy・SciPy）。図 1 は (4) をブラウザで計算、図 2 は表 4 の値を描画
問題文の引用	既知	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”, Clay Mathematics Institute の公式の問題文（問題の発表は 2000 年）。所収：J. Carlson, A. Jaffe, A. Wiles (eds.), *The Millennium Prize Problems*, CMI／AMS, pp. 129–152（目次と頁で確認。刊行年は未確認）。本文を確認
両側の公理と再構成	既知	R. F. Streater, A. S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics and All That* (1964)。K. Osterwalder, R. Schrader, Comm. Math. Phys. 31 (1973) 83–112; 42 (1975) 281–305。書誌のみ
格子の反射正値性・転送行列	既知	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471。要旨で確認（格子ゲージ理論の Schwinger 関数の physical positivity・正の自己共役な転送行列）。M. Lüscher, “Construction of a selfadjoint, strictly positive transfer matrix for Euclidean lattice gauge theories”, Comm. Math. Phys. 54 (1977) 283–292。要旨で確認
Wick 回転	既知	G. C. Wick, Phys. Rev. 96 (1954) 1124–1134。要旨で確認（相対時間の純虚数値への解析接続・積分路の回転）。「Wick 回転」の名の帰属は慣習
曲線の上の観測量／二・三次元の現在地	既知	S. Chatterjee, arXiv:1803.01950 §1／I. Chevyrev, arXiv:2202.13359 §1.1。本文を確認

もの	種別	出典・道具
ウィルソンループの特異性	既知	B. K. Driver, Comm. Math. Phys. 123 (1989) 575–616。序論の該当の一文を確認
四次元・赤外切断つきの構成	既知	J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, Comm. Math. Phys. 155 (1993) 325–383。§I の OS 正値性の箇所を確認
変形ベッセル関数	既知	NIST DLMF 10.32.3（積分表示）を確認。べき級数は §10.25

次に読む章：1-01 ベクトル空間と線形写像。この章の続きは 2-04・4-02・4-10・4-11。

ベクトル空間と線形写像 — 行列を「ベクトルを動かす規則」として読み、固有値・指数関数・エルミートとユニタリを揃える

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 行列を「ベクトルを動かす規則」として読むこと。固有値が「向きを変えない方向」の伸び率であること。エルミート行列（固有値が実数）とユニタリ行列（長さを保つ）が $U = e^{iH}$ で結ばれること。

前提となる章 — なし。行列の積と行列式、複素数、定数係数の常微分方程式を既知とします。

先に言うこと — 有限次元に限ります。質量ギャップは無限次元の作用素の問題で、有限次元の結論がそのまま延びるとは限りません（1-10）。定理はすべて既知の線形代数です。

この章の順序

1. なぜ線形代数から — 行列が出る三つの場所
2. ベクトル空間 — 成分が複素数の実ベクトル空間
3. 線形写像と行列 — 掛ける順序で結果が変わる
4. 固有値と固有ベクトル — 向きを変えない方向（図1）／寄り道：回転の固有ベクトル
5. 内積と随伴 — 複素数での長さ
6. エルミート行列 — 実の固有値と隙間（図2）／寄り道：準位は避け合う
7. ユニタリ行列 — 長さを保つ変換
8. 行列の指数関数 — 級数と微分方程式（図3）／寄り道：級数を足すと失敗する例
9. エルミートとユニタリを結ぶ — $U = e^{iH}$

01

なぜ線形代数から始めるか

ヤン–ミルズ理論では、数が入るはずの場所に行列が入ります。役は三つです。

変換	場	エネルギー
ゲージ変換 $g(x)$ はユニタリ行列 各点で長さを保つ行列を掛ける（§07）	ゲージ場 $A_\mu(x)$ の値は行列 μ は方向（時間・空間）の番号。掛ける順で値が変わる＝非可換（§03・§09）	ハミルトニアン H はエルミート 質量ギャップは最低の値と次の値の隙間に当たる（§06）。正確には、真空（最低の状態）を除いたスペクトルの下端（1-10・4-11）

ゲージ変換に使う行列の大きさを N（$N \times N$ 行列）とすると、電磁気学は $N = 1$ の場合で、ゲージ変換は絶対値 1 の数 $e^{i\alpha}$ を掛けるだけです（2-03）。数の積は順序に依らないので、物質の無いとき、ゲージ場自身の方程式（Maxwell 方程式）は線形のままです。$N \geq 2$ では順序が効き、物質が無くてもゲージ場どうしの積が方程式に現れます（3-02）。この章はその土台を有限次元で揃えます。

02

ベクトル空間

ベクトル空間とは、足し算とスカラー倍ができ、結合・交換・分配の法則など数と同じ規則が成り立つ集まりです。スカラーを $\mathbb{R}$ から取れば実ベクトル空間、$\mathbb{C}$ から取れば複素ベクトル空間です。どのベクトルも $v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$ とただ一通りに書けるとき $v_1, \ldots, v_n$ を**基底**、本数 n を**次元**と呼びます。例は $\mathbb{R}^n$、$\mathbb{C}^n$、$n \times n$ 行列全体（次元 n^2）、区間上の連続関数全体（無限次元、1-10）です。

この本で何度も戻る例は、トレース 0 の 2×2 エルミート行列の全体です。エルミートとは $H^\dagger = H$ となることで、$\dagger$ は転置して各成分の複素共役を取る操作です（§05・§06）。和も実数倍もエルミートですが、i 倍すると $(iH)^\dagger = -iH$ となって外れます。つまり**成分は複素数なのに実ベクトル空間**で、次元は 3 です。

$$\begin{pmatrix} x & y - iz \\ y + iz & -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad x, y, z \in \mathbb{R}$$

右辺の三つは 1-02 §05・1-04 で Pauli 行列 $\sigma_3, \sigma_1, \sigma_2$ として再登場し、$\mathrm{SU}(2)$ のゲージ場の値はこの空間（の i 倍）に入ります。

03

線形写像と行列

線形写像は和とスカラー倍を保つ写像です（$L(u+v)=Lu+Lv$、$L(cv)=c\,Lv$）。基底を決めると行列で書け、**j 列目が基底 e_j の行き先**です。合成は行列の積 $(AB)v=A(Bv)$ で、数と違い、順序を入れ替えると一般に変わります。

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}:\qquad AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

差 $[A,B]=AB-BA$ を**交換子**と呼びます。この例では $[A,B]=\operatorname{diag}(1,-1)$ で、§02 の基底の一つ目です。交換子がリー環の骨格になる話は 1-03 で扱います。

行列式 $\det A$ は面積（体積）の符号つきの倍率、**トレース** $\operatorname{tr}A$ は対角成分の和です。$\det(AB)=\det A\det B$、$\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$ から、どちらも基底の取り替え $A\mapsto P^{-1}AP$ で変わらず、写像そのものの性質です。例：回転 $R(\theta)=\left(\begin{smallmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{smallmatrix}\right)$ は $\det R=1$、$\operatorname{tr}R=2\cos\theta$。

04

固有値と固有ベクトル

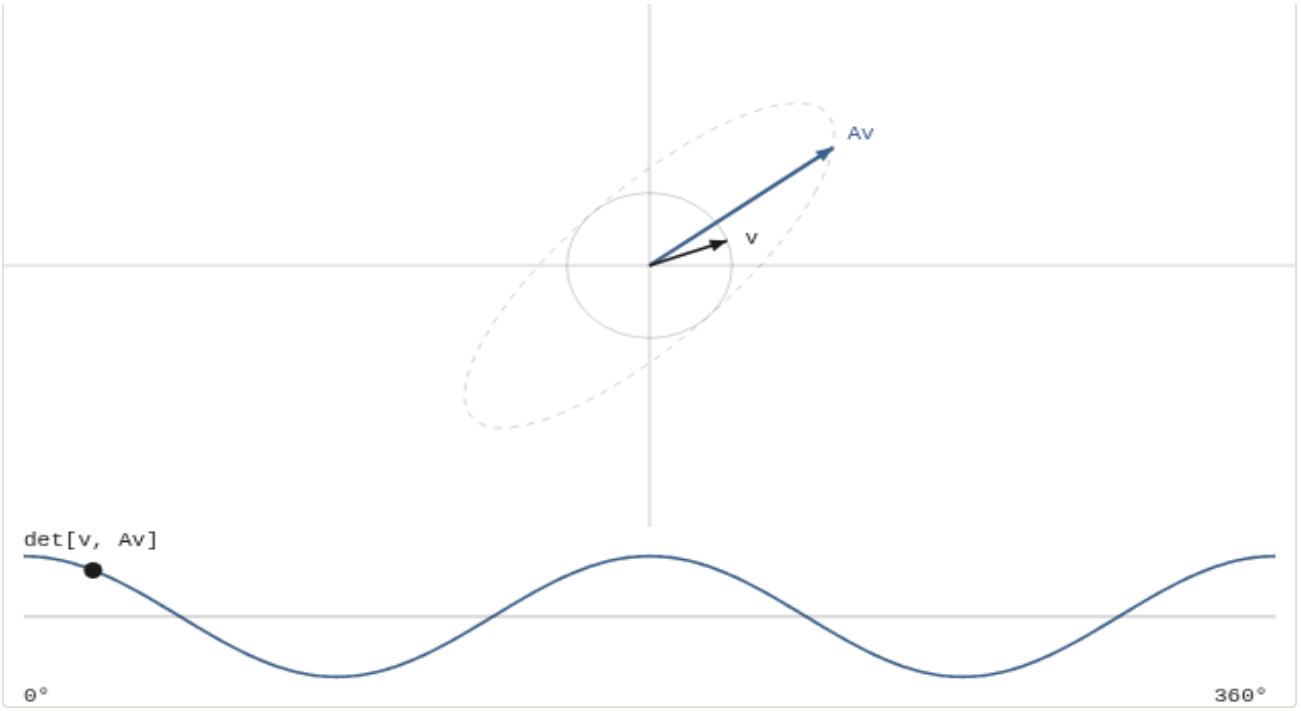
写像はたいていのベクトルの向きを変えますが、**向きを変えずに伸び縮みだけさせる方向**をもつことがあります。その方向のベクトルが固有ベクトル、伸び率が固有値です。

$$Av=\lambda v\ \ (v\neq 0)\qquad\Longleftrightarrow\qquad \det(A-\lambda I)=0$$

2×2 では $\lambda^2-(\operatorname{tr}A)\lambda+\det A=0$。実の 2×2 行列では、判別式 $D=(\operatorname{tr}A)^2-4\det A$ が正なら実の固有方向が二本、負なら無く（固有値は複素数の組）、0 なら重根です（重根のとき固有方向は一本だけか、スカラー行列 λI ならすべての方向）。n 本の独立な固有ベクトルを並べた P で、$P^{-1}AP$ は対角行列になります（対角化）。

v と Av が同じ直線に乗ることは、二つを並べた行列式 $\det[v,Av]$ が 0 になることと同じです。図1 で確かめられます。

図1　つまみで単位ベクトル v を回すと Av（青）が動く。同じ直線に乗る角度が固有方向で、下の曲線 $\det[v,Av]$ がそこで 0 になる。点線は単位円の像



計算 この図の数値はこの端末で計算しました（表は NumPy の固有値計算）。行列は行を「;」で区切っています。下の表の行を押すと、その行列が図に入ります。

行列	D	固有値	実の固有方向（x 軸から）
対称 (2 1 ; 1 2)	**4**	$3, 1$	**45°, 135°（直交）**
対称でない (1.5 1 ; 0.5 1)	2.25	$2, 0.5$	$26.565°, 135°$
ずれ (1 1 ; 0 1)	0	1（重根）	$0°$ の一本だけ
$60°$ 回転	−3	$0.5 \pm 0.866025\,i$	なし

対称行列では固有方向が直交します（理由は §06）。ずれは固有方向が一本しかなく、対角化できません。回転には実の固有方向が無く、$\det[v, Av]$ はどの向きでも $\sin 60° \approx 0.866$ です。

寄り道：回転に実の固有ベクトルが無いこと

飛ばしてよい小節です。

$R(\theta)$ の固有値は $e^{\pm i\theta}$、固有ベクトルは $(1, \mp i)$ です。比喩で言えば、平面の回転は複素数の世界では二つの「位相の掛け算」に分かれます。正確には、$\mathbb{C}^2$ の基底を $(1, -i)$、$(1, i)$ に取り替えると $R(\theta) = \mathrm{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta})$ です。複素数では固有方程式が必ず根をもつ（代数学の基本定理）ので、どの正方行列にも固有値があります。四次元の回転の二つの角（四次元の記事）は、固有値 $e^{\pm i\alpha}$、$e^{\pm i\beta}$ の二組です。

```
05
```

内積と随伴

長さと角度を測るのが内積です。複素数の成分でそのまま $\sum_k u_k v_k$ とすると、$v=(1,i)$ の「長さの二乗」が $1+i^2=0$ になってしまいます。そこで片方に複素共役を付けます（$\overline{z}\,z=|z|^2\geq 0$）。

$$\langle u,v\rangle=\sum_k \overline{u_k}\,v_k,\qquad \|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle},\qquad \langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$$

この本は物理の流儀で、第 2 引数について線形とします（$\langle cu,v\rangle=\overline{c}\langle u,v\rangle$）。数学の教科書には逆の流儀も多く（例：Axler の定義 6.2）、結論は変わりません。$\langle u,v\rangle=0$ なら直交、互いに直交する長さ 1 のベクトルの基底が正規直交基底です。

A の**随伴** $A^\dagger$ は、転置して成分の複素共役を取った行列です（数学では A^*）。内積の中で A を反対側へ移します。

$$(A^\dagger)_{ij}=\overline{A_{ji}},\qquad \langle u,Av\rangle=\langle A^\dagger u,v\rangle,\qquad (AB)^\dagger=B^\dagger A^\dagger$$

06

エルミート行列

$H^\dagger=H$ の行列が**エルミート行列**で、実の成分なら対称行列です。量子力学では測定値（エネルギーなど）がエルミートな作用素で表されます（2-05）。鍵は二つの性質です。

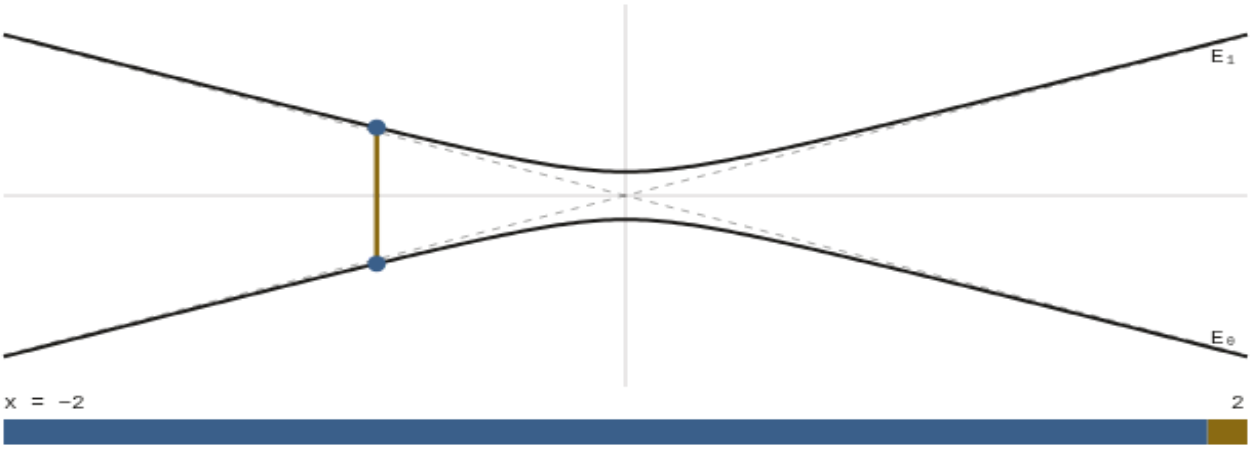
固有値は実数：$Hv=\lambda v$、$\|v\|=1$ なら $\lambda=\langle v,Hv\rangle=\langle Hv,v\rangle=\overline{\lambda}$。**異なる固有値の固有ベクトルは直交：**$Hu=\mu u$ なら $\lambda\langle u,v\rangle=\langle u,Hv\rangle=\langle Hu,v\rangle=\overline{\mu}\langle u,v\rangle=\mu\langle u,v\rangle$（$\mu$ は実数）で、$\mu\neq\lambda$ だから $\langle u,v\rangle=0$。

押し進めたのが**スペクトル定理**です 既知 。エルミート行列には固有ベクトルからなる正規直交基底があり、固有値 $\lambda_1\leq\cdots\leq\lambda_n$ は実数です。基底を並べたユニタリ行列 U（§07）で $U^\dagger HU$ は実対角になります。

最小の固有値と次の固有値の差を**隙間**（ギャップ）と呼びます。量子力学では最小の固有値 E_0 が基底状態のエネルギー、E_1-E_0 が最初の励起に要るエネルギーです。有限次元では隙間はいつも計算できます。問題は無限次元で、極限のあとも隙間が正のまま残るかどうかです（1-10・4-11）。

例：§02 の行列は $\operatorname{tr}H=0$、$\det H=-(x^2+y^2+z^2)$ なので固有値は $\pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}$、隙間が 0 になるのは $x=y=z=0$ だけです。図2 は $y=c$、$z=0$ の場合です。

図2　$H(x)=\left(\begin{smallmatrix} x & c \\ c & -x \end{smallmatrix}\right)$ の二つの固有値。非対角成分 c を上げると交差が開いて隙間が残り、x を動かすと下の固有ベクトルの中身（帯、青が e_1 の重み）が入れ替わる



計算　曲線はその場で $\pm\sqrt{x^2+c^2}$ から描き、表は NumPy のエルミート用固有値計算の値です（両者は表示の桁で一致）。x を $-x$ にすると重みが入れ替わります。表の行を押すと、その x と $c=0.3$ が図に入ります。

x（$c=0.3$）	$E_0=-E_1$	隙間	下の固有ベクトル $e_1:e_2$
0.0	−0.300000	0.600000	0.5000 : 0.5000
0.2	−0.360555	0.721110	0.2226 : 0.7774
0.5	−0.583095	1.166190	0.0713 : 0.9287
1.0	−1.044031	2.088061	0.0211 : 0.9789

$c=0$ では直線 $\pm x$ が交わります。$c\neq 0$ なら曲線は近づくだけで、最小の隙間 $2c$ が残り、そこを過ぎると下の固有ベクトルの中身が入れ替わります。

寄り道：準位は避け合う

飛ばしてよい小節です。

2×2 で固有値が重なるには、エルミートなら $x=y=z=0$ の三条件、実対称なら二条件が要ります。一つのパラメータで動く族がそこを通るのは特別な場合だけなので、対称性の無い一般の族では、固有値の曲線はふつう交わりません 既知 。対称性があって行列が区画に分かれるときは、違う区画どうしの準位は交わりえます。一般の $n\times n$ での数え上げは von Neumann と Wigner（1929）に遡るとされます。比喩では準位が「反発する」と言います。正確には、力が働くのではなく、重なる行列が条件の数だけ次元の低い薄い集合をなす、ということです。

```
07
```

ユニタリ行列

内積を保つ行列が**ユニタリ行列**です。長さと角度を変えない変換で、実の成分なら直交行列（回転と鏡映）です。

$$U^{\dagger}U = I \qquad \Longleftrightarrow \qquad \langle Uu, Uv\rangle = \langle u, v\rangle \quad \text{（すべての } u, v\text{）}$$

左から右は $\langle Uu, Uv\rangle = \langle u, U^{\dagger}Uv\rangle$ から出ます。列が正規直交基底をなすことと同じで、$U^{-1} = U^{\dagger}$。固有値は $|\lambda| = 1$、$|\det U| = 1$ です。積と逆行列もユニタリなので、全体 $\mathrm{U}(n)$ と、$\det U = 1$ の部分 $\mathrm{SU}(n)$ は「群」になります（1-02）。

例：$\mathrm{U}(1) = \{e^{i\alpha}\}$ は単位円です。$|a|^2 + |b|^2 = 1$ の複素数で作った $\left(\begin{smallmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{smallmatrix}\right)$ は $\mathrm{SU}(2)$ の元です（すべてがこの形であることは 1-02 §05）。

ユニタリ行列も対角化できます。根拠は複素のスペクトル定理です [既知]。$AA^{\dagger} = A^{\dagger}A$ を満たす行列（**正規行列**）は、ユニタリ行列で対角化できます。ユニタリ行列は $U^{\dagger}U = UU^{\dagger} = I$ なのでこれに当たり（エルミート行列も当たります）、$U = V\,\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})V^{\dagger}$（$V$ はユニタリ、θ_k は実数）と書けます。

ゲージ理論でユニタリ行列が出るのは、物質の場が $\mathbb{C}^N$ に値をとり、長さの二乗 $\psi^{\dagger}\psi$ が作用に現れるからです。ゲージ変換はそれを保つように選ばれます（3-01）。格子の上では、ゲージ場そのものが各辺のユニタリ行列です（5-01）。

08

行列の指数関数

指数関数の級数は掛け算と足し算しか使わないので、行列にもそのまま使えます。

$$e^{X} = I + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots = \sum_{k \ge 0} \frac{X^k}{k!}$$

収束。作用素ノルム $\|X\| = \max_{\|v\|=1}\|Xv\|$（長さ 1 のベクトルを最大何倍にするか）は $\|XY\| \le \|X\|\|Y\|$ を満たすので、各項は $\|X\|^k/k!$ 以下、和は $e^{\|X\|}$ 以下です。$k = N$ までの部分和 $S_N(X)$ の誤差は次のとおりです。

$$\left\| e^{X} - S_N(X) \right\| \le \frac{\|X\|^{N+1}}{(N+1)!}\, e^{\|X\|}$$

性質。(a) $\frac{d}{dt}e^{tX} = Xe^{tX}$。よって $x(t) = e^{tX}x_0$ は $x' = Xx$、$x(0) = x_0$ の解です。(b) $e^{(s+t)X} = e^{sX}e^{tX}$、特に $(e^{X})^{-1} = e^{-X}$。(c) $Pe^{X}P^{-1} = e^{PXP^{-1}}$。(d) $\det e^{X} = e^{\mathrm{tr}\,X}$。対角化できれば (c)

から $\prod_k e^{\lambda_k} = e^{\sum_k \lambda_k}$、一般には上三角化で示せます 既知 。どの複素正方行列 X も、ユニタリ行列 V で $V^{\dagger} X V$ を上三角にでき（Schur の定理）、上三角行列の指数関数は対角成分が e^{λ_k} の上三角行列です。

注意。 $XY = YX$ なら $e^{X+Y} = e^X e^Y$ ですが、一般には違います。§03 の A, B は $A^2 = B^2 = 0$ なので $e^A = I + A$、$e^B = I + B$ で、

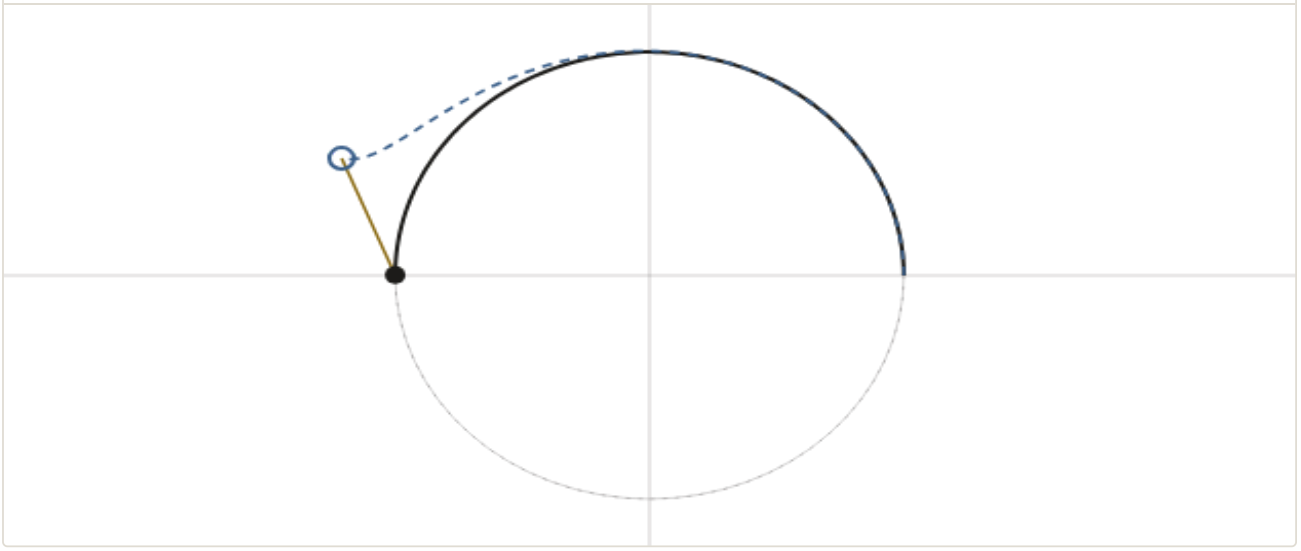
$$e^A e^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad e^B e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$e^{A+B} = \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.5431 & 1.1752 \\ 1.1752 & 1.5431 \end{pmatrix}.$$

計算 三つとも違います。差を交換子で書く公式は 1-03 の主題です。(d) は乱数の 4×4 複素行列 1000 個で相対誤差 5.7×10^{-14} 以内でした。

例：$J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ は $J^2 = -I$ なので、偶数次と奇数次に分けて $e^{tJ} = \cos t\, I + \sin t\, J = R(t)$、つまり回転です。一般に $X^2 = -\omega^2 I$ なら $e^{tX} = \cos(\omega t)\, I + \frac{\sin(\omega t)}{\omega} X$ です。

図3　$X = \left(\begin{smallmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{smallmatrix}\right)$、$x_0 = (1, 0)$。実線が $e^{tX}x_0$、青の破線が部分和 $S_N(tX)x_0$。N を増やすと破線が実線に重なり、t を延ばすと要る N が増える。$a \neq 0$ で円が渦巻きになる（点線の半径 e^{at}）



計算 図の部分和はその場で級数を足しています。表は倍精度の部分和と回転行列 e^{tJ}（$a = 0$）との差を作用素ノルムで測った値です。表の数値のセルを押すと、その N と t（$a = 0$）が図に入ります。

N	$t = 1$	$t = \pi$	$t = 2\pi$	$t = 4\pi$
4	8.3×10⁻³	2.3	57	1.0×10³
8	2.7×10⁻⁶	7.9×10⁻²	36	1.3×10⁴
16	2.8×10⁻¹⁵	7.8×10⁻⁷	9.9×10⁻²	1.1×10⁴
30	1.1×10⁻¹⁶	2.5×10⁻¹⁶	6.6×10⁻¹⁰	1.4

N	$t=1$	$t=\pi$	$t=2\pi$	$t=4\pi$
誤差 $<10^{-6}$ の最小の N	9	16	26	43

t が大きいと項 $t^k/k!$ がいったん膨らむので、要る N は t とともに増えます。$t=\pi$、$N=16$ では、上の誤差の上界 1.8×10^{-5} に対し実際の誤差は 7.8×10^{-7} です。

寄り道：級数をそのまま足すと失敗する例

飛ばしてよい小節です。

定義として正しい式が、計算法として良いとは限りません。Moler と Van Loan の総説（1978 年。2003 年に再録と追補）の例 既知 は $A=\left(\begin{smallmatrix}-49 & 24\\ -64 & 31\end{smallmatrix}\right)$（固有値 −1 と −17）です。$e^A$ の成分は 1 程度なのに、級数の途中の項は約 9.3×10^6 まで膨らんで打ち消し合います。この端末で値が変わらなくなるまで足すと 計算 、単精度（約 7 桁）では 61 項で右下の成分が 1.1036 のはずが −0.8392 になり、倍精度では 74 項で誤差 5.7×10^{-9} でした。論文は、問題は級数の打ち切りではなく算術の打ち切りにある、と述べています。実用のプログラム（SciPy の `expm` など）は、行列を 2 の冪で割ってから近似し、二乗を繰り返して戻す scaling and squaring を使います。

09

エルミートとユニタリを結ぶ

エルミート行列とユニタリ行列は指数関数でつながります。比喩で言えば、エルミート行列は「回し方」、ユニタリ行列は「回した結果」です。正確には次のとおりです。

$$H^\dagger=H \implies U=e^{iH} \text{ はユニタリ}, \qquad \det e^{iH}=e^{i\operatorname{tr}H}$$

項ごとに随伴を取ると $(e^{iH})^\dagger=e^{-iH}$。iH と $-iH$ は交換するので §08 (b) から $U^\dagger U=e^0=I$、行列式は (d) から出ます。$\operatorname{tr}H=0$ なら $\det U=1$ で $U\in\mathrm{SU}(n)$ です。逆に、どのユニタリ行列も §07 の対角化から $H=V\,\mathrm{diag}(\theta_k)V^\dagger$ と置いて e^{iH} と書けます 既知 （θ_k は 2π の整数倍だけ選べるので、H は一つに決まりません）。

例：$H=\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ は $H^2=I$ なので $e^{i\theta H}=\cos\theta\,I+i\sin\theta\,H$、行列式は $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$。計算 乱数の 3×3 エルミート行列 1000 個で $\|U^\dagger U-I\|\le1.6\times10^{-15}$、トレース 0 なら $|\det U-1|\le1.1\times10^{-15}$ でした。

この対応は二か所で使われます。量子力学の時間発展 $e^{-itH/\hbar}$ はユニタリで、確率の合計を保ちます（2-05）。ゲージ理論では、§02 の空間を $N\times N$ に広げたもの（トレース 0 の $N\times N$ エルミート行列、の i 倍）を指数関数で送った先が $\mathrm{SU}(N)$ で、前者がゲージ場の値、後者がゲ

ージ変換の空間です（1-03・1-04）。実の成分に限れば、「反対称行列 K の e^K は回転」という形になります。

ゲージ場の値に「i 倍」を付けるのは幾何の書き方（1-07）です。物理の書き方はゲージ場をエルミートな行列のまま書き、二つは $A_{\text{幾何}} = -iA_{\text{物理}}$ で移り合います（結合定数を分けて書く章での形は 3-02 の表）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 有限次元のエルミート行列は実の固有値と、固有ベクトルからなる正規直交基底をもつ。ユニタリ行列も同様に対角化でき、固有値は絶対値 1。	無限次元で同じことが言えるか。固有ベクトルをもたない作用素もある（1-10）。
既知 e^X はいつも収束し、$\det e^X = e^{\operatorname{tr} X}$。$H$ がエルミートなら e^{iH} はユニタリで、どのユニタリ行列もこの形。	e^{X+Y} と $e^X e^Y$ の差を交換子で表す公式（1-03）。
計算 図と表の数値、乱数行列での恒等式の確認。	乱数での確認は証明ではない。
既知 有限次元では、最小固有値と次の固有値の隙間はいつも計算できる。	無限次元の作用素で、極限のあとも隙間が正のまま残るか。質量ギャップの問題はこの形をしており（4-11）、この章はそれについて何も言わない。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
内積の流儀、スペクトル定理（実・複素、正規行列）、上三角化（Schur の定理）	既知	S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, 4th ed., Springer (Undergraduate Texts in Mathematics), 2024。定義 6.2、7.29、7.31、6.38。オープンアクセス版で本文を確認。
級数による計算の失敗例、scaling and squaring	既知	C. Moler, C. Van Loan, SIAM Review 45 (2003) 3–49（Method 1・3、本文を確認）。初出 SIAM Review 20 (1978) 801–836（書誌のみ）。SciPy の `expm` の方式は SciPy 1.11 の説明文による（A. H. Al-Mohy, N. J. Higham, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 31 (2009) 970–989、書誌のみ）。
固有値の交差に要る条件の数	既知	J. von Neumann, E. Wigner, Physikalische Zeitschrift 30 (1929) 467–470（書誌のみ）。
図1・図2 の表	計算	この端末の Python 3・NumPy 1.26 の `eig`・`eigh`。トレース 0 の 2×2 エルミート行列 1000 個で式 $\pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ との差 2.2×10^{-15} 以内。
図3 の表、§08 の寄り道の再計算、§08・§09 の恒等式	計算	部分和を倍精度・単精度で計算（半精度は途中の項が上限を超えて計算不能）。厳密値は回転行列と $P\,\mathrm{diag}(e^{-1}, e^{-17})P^{-1}$（$P = \left(\begin{smallmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{smallmatrix}\right)$）。SciPy 1.11 の `expm` と乱数行列（シード固定、各 1000 個）。

次に読む章：1-02 群とは何か ― ユニタリ行列の集まりが「群」をなすことから始め、SO(3) と SU(2) の関係へ進みます。

群とは何か — 対称性を「掛け算できるもの」として扱う

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 群の約束と例。三次元の回転の群 SO(3) と、それを二重に覆う SU(2)（360° では戻らず 720° で戻る）。群を行列で書く「表現」。問題文の「コンパクト単純ゲージ群」の読み方。

前提となる章 — 1-01 ベクトル空間と線形写像（行列式・ユニタリ行列・行列の指数関数）。リー環は 1-03、パウリ行列と SU(3) は 1-04 で扱います。

先に言うこと — この章は準備で、質量ギャップについては何も示しません。証明を載せずに引く定理には「既知」の札を付けます。

この章の順序

1. 対称性から群へ — 正三角形の六つの操作と積の表（選べる図）
2. 群の定義と例 — 可換と非可換・行列の群・コンパクト
3. 準同型・正規部分群・商 — 群を比べる道具・中心
4. 回転群 SO(3) — 軸・回す順番の食い違い（動く図）
5. SU(2) — 三次元の球面・半分の角
6. 二重被覆 SU(2) → SO(3) — 720° で戻る（動く図）
7. 寄り道：SO(3) の形と 720° の輪 — 縮む輪と縮まない輪（動く図）
8. 表現の入口 — 整数の番号・既約・スピン
9. ヤン–ミルズの中の群 — ゲージ群・コンパクト・単純

01

対称性から群へ

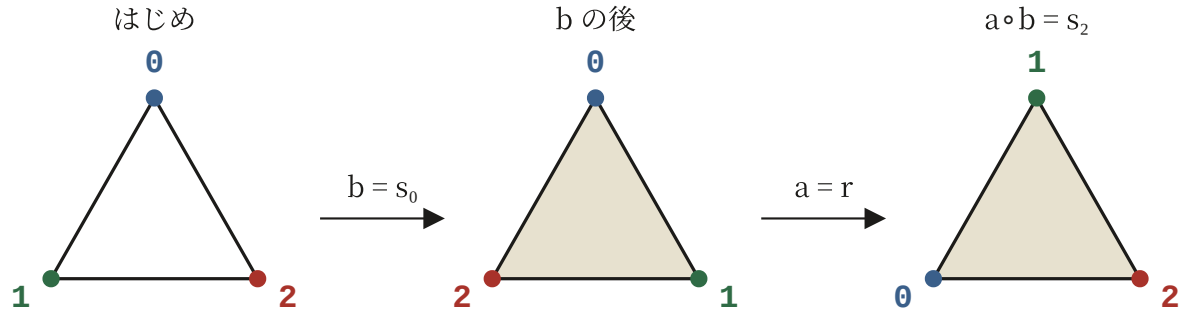
正三角形の板を**元の場所にぴったり重なるように**置き直す方法は六通りです。0°・120°・240° 回す三つと、頂点を通る軸で裏返す三つ。**二つを続けて行うと、また六つのどれかになり**、何もしない操作と、元に戻す操作があります。群とは、この性質だけを取り出した言葉です。

頂点に 0・1・2 を反時計回りに振り、e（何もしない）、r（120° 回す）、r^2（240°）、s_k（頂点 k を通る軸で裏返す）と書きます。積 ab は「**先に b、次に a**」と読みます（写像の合成 $a \circ b$ の向き）。

$$r \circ s_0 = s_2, \qquad s_0 \circ r = s_1$$

順番を入れ替えると結果が変わります。**掛け算の順番が効く**ことが、この本の最後まで主役です。

図 1　表のます目（行 a・列 b）を選ぶと、三角形が「はじめ → b の後 → a∘b の後」と並びます。色の付いた三角形は裏返った状態です。



r∘s₀ = s₂（先に s₀、次に r）。逆の順では s₀∘r = s₁（違う）

a＼b	e	r	r²	s₀	s₁	s₂
e	e	r	r^2	s_0	s_1	s_2
r	r	r^2	e	**s_2**	s_0	s_1
r²	r^2	e	r	s_1	s_2	s_0
s₀	s_0	s_1	s_2	e	r	r^2
s₁	s_1	s_2	s_0	r^2	e	r
s₂	s_2	s_0	s_1	r	r^2	e

計算 表の値は、頂点の置換の合成としてこの端末で計算しました。群の約束も全組で確かめてあります。

各行・各列に六つの元が一度ずつ現れるのは、$ax = b$ の解 $x = a^{-1}b$ がただ一つある、つまり**割り算ができる**ことの表れです。36 通りの順序対のうち $ab \neq ba$ は 18 通りでした 計算 。

02

群の定義と例

定義　集合 G と、二つの元から G の元を一つ作る規則（積）$(a,b)\mapsto ab$ があって、次を満たすとき G を**群**と呼びます。

1. 結合法則：$(ab)c=a(bc)$。
2. 単位元：すべての a で $ea=ae=a$ となる e がある。
3. 逆元：各 a に $aa^{-1}=a^{-1}a=e$ となる a^{-1} がある。

すべての組で $ab=ba$ なら**可換**（アーベル群）、そうでなければ**非可換**です。「非可換ゲージ理論」の非可換はこの意味です。下の表の後半は**行列の群**で、$U^\dagger$ は複素共役をとった転置です（1-01）。

群	元（積）	可換か	コンパクトか	実パラメータ
$\mathbb{Z}_N$	N で割った余り（足し算）	可換	有限	0
D_3	正三角形の六つの操作	非可換	有限	0
$\mathbb{R}$	実数（足し算）	可換	いいえ	1
$\mathrm{U}(1)$	$e^{i\theta}$（掛け算）	可換	はい	1
$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$	逆行列をもつ実行列	非可換	いいえ	n^2
$\mathrm{O}(n)$	$R^{\mathsf{T}}R=I$ の実行列	非可換	はい	$n(n-1)/2$
$\mathrm{SO}(n)$	$\mathrm{O}(n)$ のうち $\det R=1$	$n\geq 3$ で非可換	はい	$n(n-1)/2$
$\mathrm{U}(n)$	$U^\dagger U=I$ の複素行列	非可換	はい	n^2
$\mathrm{SU}(n)$	$\mathrm{U}(n)$ のうち $\det U=1$	非可換	はい	n^2-1

行列の群は $n\geq 2$。SO(2) は U(1) と同じ形の可換群です。

コンパクトとは、行列の群では、成分の空間の中で**有界**かつ**閉じている**（元の列の極限もまた元）ことです 既知 。U(n) は各列が長さ 1 なので有界で、$U^\dagger U=I$ は極限でも保たれます。GL(n, ℝ) は有界ではありません。「実パラメータ」は元を指定する実数の個数（群の次元、1-03）で、SO(3) なら軸の向きに 2 個と角に 1 個です。

03

準同型・正規部分群・商

部分群は積と逆元で閉じた部分集合です（$\{e,r,r^2\}\subset D_3$、SU(n) ⊂ U(n) など）。**準同型**は $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$ を満たす写像 $\varphi: G\to H$ で、単位元に写る元の集まりを**核** $\ker\varphi$ と呼びます。

$$\det : \mathrm{U}(n) \to \mathrm{U}(1), \qquad \det(UV) = \det U \, \det V$$

この準同型の核が $\mathrm{SU}(n)$ です。$\theta \mapsto e^{i\theta}$ の核は $2\pi\mathbb{Z}$。D_3 の回転を $+1$、裏返しを -1 に送る写像も準同型です。部分群 N が**正規**とは、すべての g で $gNg^{-1} = N$ となることで、核は必ず正規です。このとき g と gn（$n \in N$）を同一視した**商群** G/N が作れ、全射な準同型 φ について次が成り立ちます（準同型定理）既知 。

$$G/\ker\varphi \;\cong\; H$$

例：$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong \mathrm{U}(1)$（角とは 2π の整数倍の違いを忘れた実数）。**中心** $Z(G)$（すべての元と可換な元）も正規部分群で、SU(n) の中心は ωI（$\omega^n = 1$）の n 個、$\mathbb{Z}_n$ と同じ形です 既知 。閉じ込めを扱う 17-02 で再び現れます。

04

回転群 SO(3)

三次元の回転は、内積を保ち（$R^{\mathsf{T}}R = I$）、鏡像を作らない（$\det R = 1$）線形写像です。

$$\mathrm{SO}(3) = \{\, R \in M_3(\mathbb{R}) : R^{\mathsf{T}}R = I,\ \det R = 1 \,\}$$

どの回転にも軸がある

SO(3) のどの元にも動かない直線がある（Euler の回転定理）既知 。実の直交行列は複素行列としてユニタリなので（1-01）、固有値は絶対値 1 で、積は $\det R = 1$。実係数の三次式の根なので、複素固有値は $\lambda, \bar{\lambda}$ の組（積 $|\lambda|^2 = 1$）で、残る実固有値は 1。全部実なら ± 1 が三つで積 1 なので、やはり 1 を含みます。その固有ベクトルが軸です。奇数次元が効いており、四次元の回転には原点のほかに動かない点を持たないものがあります。軸 n と角 θ では次の形です（Rodrigues の式）既知 。

$$R(\theta, n)\, x = \cos\theta\, x + \sin\theta\, (n \times x) + (1 - \cos\theta)(n \cdot x)\, n$$

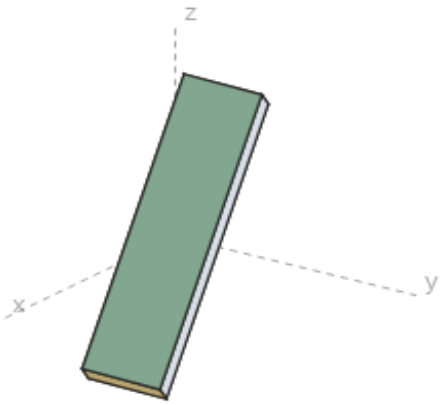
トレースは $\operatorname{tr} R(\theta, n) = 1 + 2\cos\theta$ で、角が読めます。

回す順番の食い違い

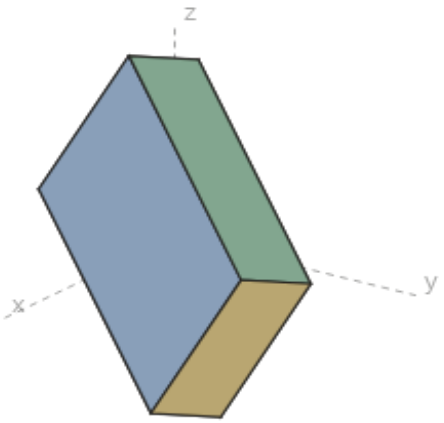
x 軸と y 軸のまわりに同じ角 θ 回します。「先に x」は $A = R_y(\theta)R_x(\theta)$、「先に y」は $B = R_x(\theta)R_y(\theta)$。食い違い $D = AB^{-1}$ も回転なので、その角 φ で違いを測ります。

図 2　つまみで角 θ を変えると、二つの箱の最後の向きの違いが変わります。「順に回す」で二回の回転を順に再生します。

先に x 軸、次に y 軸



先に y 軸、次に x 軸



θ = 60°　φ = 57.91°　φ/θ² = 0.9217

θ	φ	φ / θ²（ラジアンで）
1°	0.0175°	1.0000
10°	1.7409°	0.9975
30°	15.3639°	0.9781
45°	33.6842°	0.9531
60°	57.9100°	0.9217
90°	120.0000°	0.8488
180°	0°	0

計算 表はこの端末で回転行列の積から計算しました。図の φ も同じ式でその場で計算しています。

小さい θ では $\varphi \approx \theta^2$ で、D の軸はほぼ −z 方向です（θ = 10° で (−0.087, 0.087, −0.992)）計算 。**食い違いは θ の二次**で、一次の近似では回転は可換に見えます。これを取り出したものが 1-03 の交換子 $[X, Y] = XY - YX$ です。θ = 180° では二つとも対角行列で、可換です。

05

SU(2)

次は複素 2×2 行列の群です。

$$\mathrm{SU}(2) = \{\, U \in M_2(\mathbb{C}) : U^\dagger U = I,\ \det U = 1 \,\}$$

二つの列は正規直交です。第 1 列を (a, b) とすると $|a|^2 + |b|^2 = 1$、第 2 列はそれに直交する長さ 1 のベクトル $e^{i\chi}(-\bar{b}, \bar{a})$ で、$\det U = e^{i\chi} = 1$ です。

$$U = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}, \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

a, b の実部・虚部は $\mathbb{R}^4$ の単位球面上の点をなし、**SU(2) は空間としては三次元の球面 S^3** です 既知 。**パウリ行列**（1-04）を使うと、すべての元が単位ベクトル n と実数 θ で書けます。

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$n\cdot\sigma=n_1\sigma_1+n_2\sigma_2+n_3\sigma_3$ と書くと、次の形です。

$$U(\theta,n)=\cos\tfrac{\theta}{2}\,I-i\sin\tfrac{\theta}{2}\,n\cdot\sigma=\exp\Big(-\tfrac{i\theta}{2}\,n\cdot\sigma\Big)$$

成分では $a=\cos\frac{\theta}{2}-in_3\sin\frac{\theta}{2}$、$b=(n_2-in_1)\sin\frac{\theta}{2}$。右の等号は、$(n\cdot\sigma)^2=I$（$\sigma_j\sigma_k+\sigma_k\sigma_j=2\delta_{jk}I$ と $|n|=1$ から。確かめ方は 1-04）と行列の指数関数（1-01）から従います。θ = 2π では n によらず $U=-I$、θ = 4π でようやく $U=I$。この**半分の角**が次の節の主役です。

06

二重被覆 SU(2) → SO(3)

$\mathbb{R}^3$ のベクトルを、トレースが 0 のエルミート行列と同一視します。

$$x\ \longleftrightarrow\ X=x\cdot\sigma=\begin{pmatrix}x_3&x_1-ix_2\\x_1+ix_2&-x_3\end{pmatrix},\qquad \det X=-|x|^2$$

$UXU^\dagger$ もエルミートでトレース 0 なので、あるベクトル x' の行列です。こうして線形写像 $\rho(U):x\mapsto x'$ が決まります 既知 。

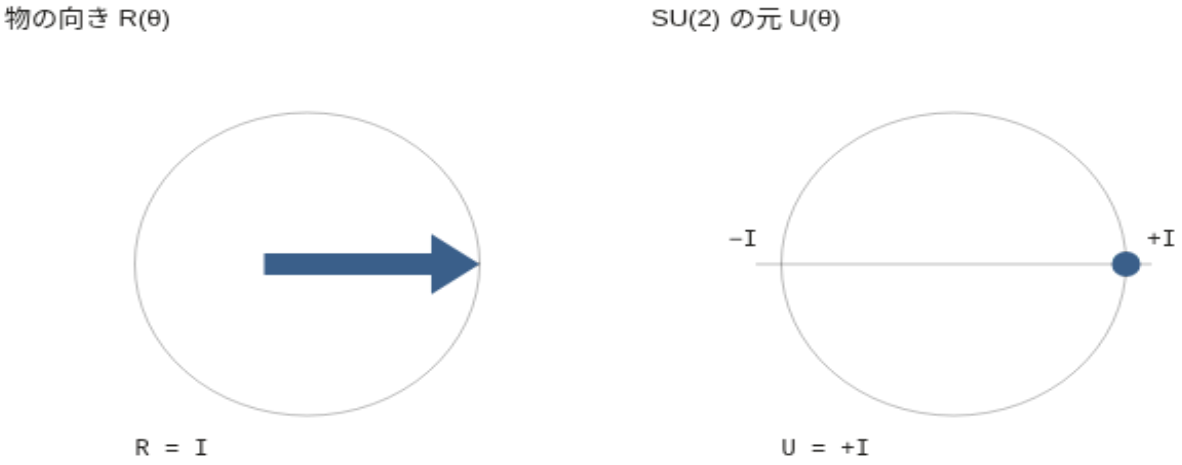
1. **長さを保つ**：$\det(UXU^\dagger)=\det X$ から $|x'|=|x|$。SU(2) はつながっていて ρ は連続なので、行列式は +1 から動けず $\rho(U)\in\mathrm{SO}(3)$。
2. **準同型**：$(UV)X(UV)^\dagger=U(VXV^\dagger)U^\dagger$ から $\rho(UV)=\rho(U)\rho(V)$。
3. **核は $\pm\mathbf{I}$**：$\rho(U)=I$ なら U は σ_3 と可換（対角）で σ_1 とも可換（対角成分が等しい）なので $U=\lambda I$、$\det U=\lambda^2=1$。
4. **全射で、角は半分**：$\rho(U(\theta,n))=R(\theta,n)$。どの回転も $R(\theta,n)$ の形（04 の軸の定理）なので、$U(\theta,n)$ がその原像になり、全射です。

4 の簡単な場合：n が z 軸なら $U=\mathrm{diag}(e^{-i\theta/2},e^{i\theta/2})$ で $U\sigma_1U^\dagger=\cos\theta\,\sigma_1+\sin\theta\,\sigma_2$。**二つの半分の角が掛け合わさって角 θ になります**。準同型定理から

$$\mathrm{SO}(3)\ \cong\ \mathrm{SU}(2)/\{\pm I\}$$

一つの回転に二つの元 $\pm U$ が対応するので**二重被覆**と呼びます。360° の回転は SU(2) では I から $-I$ までで、戻るには 720° 要ります。

図 3　つまみで回した角 θ を変えると、左の物（上から見た矢印）は 360° で元に戻り、右の点は半分の速さで円を回って 720° で戻ります。右の点は $U(\theta) = \cos\frac{\theta}{2} I - i \sin\frac{\theta}{2} \sigma_3$ の二つの係数 $(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2})$ で、S^3 の中の大円の一つです。



θ = 0° tr R = 3.000 tr U = 2.000

θ	$\mathrm{tr}\, R(\theta) = 1 + 2\cos\theta$	$\mathrm{tr}\, U(\theta) = 2\cos\frac{\theta}{2}$	R	U
0°	3	2	I	$+I$
180°	−1	0	z 軸まわり 180°	$-i\sigma_3$
360°	3	−2	I	$-I$
540°	−1	0	z 軸まわり 180°	$+i\sigma_3$
720°	3	2	I	$+I$

計算　この端末で ρ(U) を組んで計算しました。無作為な U 20,000 個で直交性（ずれ最大 1.2×10⁻¹⁵）・準同型・ρ(−U) = ρ(U) を、(θ, n) 2,000 組で Rodrigues の式との一致（ずれ最大 1.0×10⁻¹⁵）を確認しました。

07

寄り道：SO(3) の形と 720° の輪

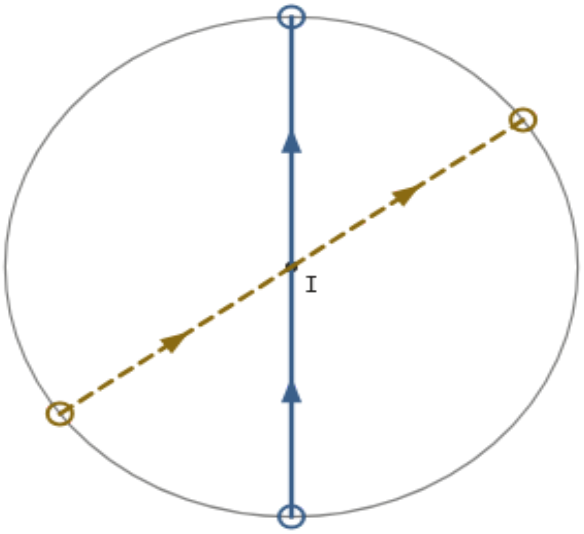
飛ばしてよい節です。後の章の前提になりません。二重被覆を「形」として見る話です。

軸 n のまわりの角 θ（$0 \le \theta \le \pi$）の回転を、半径 π の球の点 θn で表します。n と −n のまわりの π 回転は同じなので、SO(3) は**半径 π の球で表面の対蹠点を貼り合わせたもの**です 既知 。

z 軸のまわりの 0°→360° の道は、中心から北極へ進み、同じ点である南極から現れて中心に戻る輪で、**一点に縮められません** 既知 。SU(2) に持ち上げると I から $-I$ への道です。輪を連続に変形すると持ち上げの終点も連続に動きますが、終点は $\pm I$ の二点から跳べません。一点の輪の持ち上げは I で終わるので、そこへは変形できないのです。720° の輪は持ち上げても I で終わり、実際に縮みます。

図 4　つまみの前半で 2 周目の回転軸を傾け、後半で「行って戻る」道を縮めます。「360° の輪」に切り替えると、軸をどう傾けても縁を 1 回横切ったままです（一般の変形でも横切る回数の偶奇は変わりません）。

1 周目（実線）と 2 周目（破線）。2 周目の軸を傾けている



縁を横切る回数 2　SU(2) での終点 +I

輪	縁を横切る回数	SU(2) での終点	一点に縮むか
360°	1（奇数）	$-I$	縮まない
720°	2、変形の後半で 0（偶数）	$+I$	縮む

既知 円板は球の断面で、縁の向かい合う二点は同じ回転です。道の座標だけを描く模式図で、横切る回数の偶奇（道が縁に接しない場合）が輪の分類に当たります。

SO(3) の輪は「縮む」「縮まない」の二種類で（基本群が $\mathbb{Z}_2$）、S^3 ではどの輪も縮みます 既知 。皿を手に載せて水平のまま一回転させると腕がねじれ、もう一回転で解ける「皿の手品」は、この事実の目に見える形とよく説明されます。正確には、肩から手までの各点の向きが SO(3) の道をつくり、720° 回す間のその道の動きが輪を縮める変形です。

08

表現の入口

定義　群 G の（有限次元の）**表現**とは、ベクトル空間 V と準同型 $\pi : G \to GL(V)$（行列の群では連続なもの）の組、つまり各元に可逆な行列を $\pi(gh) = \pi(g)\pi(h)$ となるように割り当てることです（$\dim V$ が次元）。例：自明表現（すべてを 1 に）、D_3 を平面の回転・鏡映で書くもの、SO(3) の $\mathbb{R}^3$ や SU(2) の $\mathbb{C}^2$ への作用（**定義表現**）、3 次元の表現 ρ。

U(1) の表現は整数で番号が付く

$e^{i\theta} \mapsto e^{iq\theta}$ が U(1) の表現であるには、θ と θ + 2π が同じ元なので $e^{2\pi i q} = 1$、つまり **q は整数**です。連続な 1 次元のユニタリ表現はこれで尽きます 既知 。$\mathbb{R}$ では任意の実数 q で $x \mapsto e^{iqx}$ が表現なので、**番号を整数に揃えているのはコンパクト性**です。電磁気学のゲージ群（2-03）

を U(1) とすれば電荷は単位の整数倍に並ぶ、という物理の議論はこの事実に立ちます（C. N. Yang 1970 の題がこの対応を掲げる）物理 。

既約と完全可約

すべての g で $\pi(g)W \subset W$ となる部分空間 W を**不変**、0 と V のほかに不変部分空間が無い表現を**既約**と言います。SO(3) の $\mathbb{R}^3$ への作用は既約で、D_3 を $\mathbb{R}^3$ の座標の入れ替えで表すと直線 (1, 1, 1) が不変なので既約ではありません。**コンパクトな群の有限次元表現は既約表現の直和に分かれます**（完全可約）既知 。内積を群全体で平均すると、どの $\pi(g)$ もその内積を保ち、不変部分空間の直交補空間も不変になるからです。平均は、有限群なら全元についての和を元の個数で割ったもの。コンパクトな群では、群の上の不変な積分（存在は既知）で同じことができます。

SU(2) の表現と 360° での符号

SU(2) は、有限次元の複素既約表現を、同値（基底の取り替え）を除いて各次元にちょうど一つずつ持ちます既知 。次元 m + 1 のものは、2 変数の m 次斉次多項式の空間に $(\Pi_m(U)f)(z) = f(U^{-1}z)$ で働く Π_m で、物理では $j = m/2$ を**スピン**と呼びます。$-I$ は $f(-z) = (-1)^m f(z)$ と働くので、SO(3) の表現になれるのは **m が偶数（次元が奇数）のものだけ**です。

m	次元	スピン j	指標 $\chi(360^\circ)$	SO(3) の表現か
0	1	0	+1	なる
1	2	1/2	−2	ならない
2	3	1	+3	なる
3	4	3/2	−4	ならない
4	5	2	+5	なる

指標 χ は表現行列のトレースで、$U(\theta, e_3)$ で測りました。720° ではどれも次元の値に戻ります計算 。半整数のスピンでは 360° で符号が反転する——図 3 の $-I$ が、表現の上ではこの符号として現れます。

09 ヤン–ミルズの中の群

問題文（0-03）は群の条件から始まります。

> Prove that for any compact simple gauge group G, a non-trivial quantum Yang–Mills theory exists on $\mathbb{R}^4$ and has a mass gap $\Delta > 0$.

Jaffe と Witten の問題説明は「古典論の水準では、電磁気学のゲージ群 U(1) をコンパクトなゲージ群 G で置き換える」と書いています。**ゲージ群**は、ひとことで言えば時空の各点で独立に施せる対称性の群です。正確には、各点 x に G の元 g(x) を一つずつ選んだものが**ゲージ変換**で、G はその値をとる群です（3-01）。

単純。抽象的な群として「単純」とは、正規部分群が {e} と自分自身だけであることで、この意味では SU(2) は単純ではありません（中心 {±I} が正規部分群）。リー群の用語では意味が違い、連結で非可換な群のリー環が単純（1-03）であることを「単純」と呼びます。問題の説明は simple を定義していませんが、抽象的な群の意味では SU(N)（$N \geq 2$）がすべて外れる（中心 $\mathbb{Z}_N$）ので、この本ではリー群の意味に読みます。SU(N)（$N \geq 2$）はこの意味で単純で（一覧は 1-04）既知 、可換な U(1) は含まれません。

コンパクト。同じ説明は、コンパクトなゲージ群とコンパクト化した時空では Wilson の格子近似が汎関数積分を有限次元の積分に帰着させる、と述べています。格子の各辺に G の元を置いて G 全体で積分する（5-01）ので、G の大きさが有限であることが効きます。

表現。強い力の理論（QCD）ではゲージ群が SU(3) で、クォークは基本表現（この章の定義表現）で変換する、と同じ説明にあります。ゲージ場は G のリー環に値をとります。各点で同じ元を施す変換では随伴表現（1-04）で変換し、一般のゲージ変換では余分な項が付きます（3-02）。場の強さは随伴表現で変換します。問題が扱う純粋なヤン–ミルズ理論にクォークは無く、ゲージ場だけです（3-07）。G を有限群にした格子の模型は 5-10 で扱います。

次は 1-03 リー群とリー環：「二次の食い違い」を、群の無限小の部分の交換子として取り出します。

この章が言えている範囲

項目	言えていること	言えていないこと
群の定義と例	定義と例。D_3 の表 計算	群の一般論
SO(3)	軸の存在の証明の筋。食い違い $\varphi \approx \theta^2$ の数値 計算	θ^2 になる理由（交換子）は 1-03
二重被覆	ρ が SO(3) への準同型で核が $\pm I$ であること。$\rho(U(\theta, n)) = R(\theta, n)$ は z 軸で式、一般の n で数値 計算	一般の n の式による証明 既知

項目	言えていること	言えていないこと
SO(3) の輪	360° の輪は縮まず 720° は縮むことの、図と持ち上げによる説明	基本群 $\mathbb{Z}_2$ の完全な証明（道の持ち上げ定理） 既知
表現	U(1) の表現が整数で番号付けられる理由。Π_m の 360° での符号 計算	SU(2) の既約表現の分類と完全可約性の証明 既知 。電荷の量子化は物理 物理
ヤン–ミルズ	問題文の群の条件（コンパクト・単純）の読み方	質量ギャップ・理論の構成については何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
問題文、U(1) を G で置き換えること、QCD と基本表現、格子の有限次元積分。simple の定義が無いこと	一次資料（本文を確認）	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”, Clay Mathematics Institute の問題説明（研究所のサイトの PDF。日付の記載なし。書誌は 0-03 の出典表）
コンパクト性の定義、SU(2) → SO(3) の二対一、SU(2) が単連結で SO(3) の普遍被覆であること、完全可約性（Prop. 5.17。群の上の不変な測度を使う）、抽象的な群の単純（第 1 章 演習 13 の注）、リー環の単純（第 7 章冒頭）、Π_m	既知（本文を確認）	B. C. Hall, “An Elementary Introduction to Groups and Representations”, arXiv:math-ph/0005032 (2000)
SO(3) を半径 π の球の表面の対蹠点を貼り合わせたものとみる模型、基本群 $\mathbb{Z}_2$、S^3 の輪が縮むこと	既知（本文を確認）	A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002)。著者が公開している版の §3.D（$\mathbf{SO(3)} \approx \mathbb{RP}^3$）、Example 1.43（$\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \mathbb{Z}_2$）、Prop. 1.14（$\pi_1(S^n) = 0$、$n \geq 2$）
リー群の「単純」（連結・非可換・リー環が単純）	この本の用語の約束	抽象的な群とリー環の定義は上の Hall のノートで確認。リー群についてこの約束を明記した教科書は未確認
電荷の量子化とゲージ群のコンパクト性	書誌のみ（題と要旨）	C. N. Yang, “Charge Quantization, Compactness of the Gauge Group, and Flux Quantization”, Phys. Rev. D 1 (1970) 2360
D_3 の表（$ab \neq ba$ は 18/36）、$\varphi(\theta)$、二重被覆の確認、Π_m（m = 0〜6）の符号と指標	**この端末で計算**	Python 3.12・NumPy 1.26。置換の合成、回転行列の積、S^3 上の一様な U 20,000 個と (θ, n) 2,000 組、斉次多項式の表現行列（準同型のずれ最大 5.8×10^{-15}）
図 1〜4	図	素の JavaScript。図 1 は計算済みの表、図 2〜4 は回転の式と cos・sin をその場で計算

次に読む章：1-03 リー群とリー環。

リー群とリー環 — 曲がった群を、単位元での接線の空間で読む

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 行列の群の「無限小の元」の集まりがベクトル空間（リー環）になり、群の掛け算の食い違いが交換子として残ること。指数写像で群に戻れる範囲。構造定数と Killing 形式が、群が単純か・コンパクトかを映すこと。

前提となる章 — 1-02 群とは何か（SO(3)・SU(2)・二重被覆・準同型）と、その前提の 1-01（行列の指数関数・エルミートとユニタリ）。多様体は使わず、行列の群に限ります（一般のリー群は 1-05 の後で読めます）。

先に言うこと — この章は準備で、質量ギャップについては何も示しません。定理の多くは証明を載せずに引き、「既知」の札を付けます。数値は有限次元の行列の計算で、証明の代わりではありません。

この章の順序

1. 無限小の元を見る — 曲がった群と平らな接空間
2. 行列リー群とそのリー環 — 指数写像・次元
3. 指数写像はどこまで届くか — 単位元の近くでは一対一／寄り道：SL(2, ℝ) の届かない元（動く図）
4. 交換子は食い違いの二次の項 — 縦列駐車（動く図）・1-02 の θ^2
5. リー環という構造 — Jacobi 恒等式・SU(2) と SO(3)・随伴
6. 構造定数 — 数学と物理の二つの流儀
7. Baker–Campbell–Hausdorff の式 — 交換子だけで積が決まる（動く図）
8. Killing 形式 — 単純とコンパクトを符号で見る（表の行を選ぶ図）
9. ヤン–ミルズの中のリー環 — 不変な内積・結合定数の数

01

無限小の元を見る

1-02 の SO(3) や SU(2) は、元が実数のパラメータで連続に動く群です。空間としては曲がっている（SU(2) は三次元の球面）ので、**単位元のごく近くだけを一次近似**します。比喩で言えば、曲がった地表でも足元の地図は平面で描けます。正確には、$g(0)=I$ となる群の中の曲線 $g(t)$ の速度 $g'(0)$ を全部集めた平らなベクトル空間が**リー環**です。

$$R(t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}=e^{tJ},\qquad R'(0)=J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

平面の回転 SO(2) のリー環は J の実数倍です（1-01 §08）。掛け算の順序は二次の項に残り（§04）、その情報だけで単位元の近くの掛け算が復元できます（§07）。ヤン–ミルズ理論では**ゲージ変換が群に、ゲージ場がリー環に値をとります**（3-02）。

02

行列リー群とそのリー環

定義　$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$（可逆な複素 $n\times n$ 行列の群）の部分群 G で閉じているもの（元の列が可逆な行列に収束すれば極限も G の元）を**行列リー群**と呼びます 既知 。その**リー環**は

$$\mathfrak{g}=\{\,X\in M_n(\mathbb{C}):\text{すべての実数 } t \text{ で } e^{tX}\in G\,\}$$

で、$X\mapsto e^X$ を**指数写像**と呼びます。単位元から出る曲線 e^{tX} の速度が X です（1-01 §08 の (a)）。条件は「すべての t で」で、$e^X\in G$ だけでは足りません。例えば単位元だけの群 $G=\{I\}$ と $X=2\pi J$ では $e^X=I\in G$ ですが、$t=\frac14$ の e^{tX} は 90° の回転で G に入りません。

例：U(n)。条件 $e^{tX^\dagger}e^{tX}=I$ を $t=0$ で微分すると $X^\dagger=-X$。逆にこのとき e^{tX} はユニタリです（1-01 §09）。$\det e^{tX}=e^{t\,\mathrm{tr}\,X}$ から、行列式 1 の条件は $\mathrm{tr}\,X=0$ になります。

$$\mathfrak{su}(n)=\{X:X^\dagger=-X,\ \mathrm{tr}\,X=0\}$$

リー環は**実**ベクトル空間で（i 倍するとエルミートになって外れる）、その次元を**群の次元**と呼びます（1-02 の表の「実パラメータ」の個数）。同じ計算で次の表になります 既知 。

群	群の元の条件	リー環の元の条件	次元
SO(n)	実、$R^\top R=I$、$\det R=1$	実、$X^\top=-X$	$n(n-1)/2$
U(n)	$U^\dagger U=I$	$X^\dagger=-X$	n^2

群	群の元の条件	リー環の元の条件	次元
SU(n)	$U^\dagger U = I$、$\det U = 1$	$X^\dagger = -X$、$\operatorname{tr} X = 0$	$n^2 - 1$
SL(n, ℝ)	実、$\det g = 1$	実、$\operatorname{tr} X = 0$	$n^2 - 1$

03

指数写像はどこまで届くか

単位元の近くでは、指数写像は一対一で逆も連続です 既知 。逆写像は対数の級数 $\log(I + A) = A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - \cdots$（$\|A\| < 1$）で、近くの元は小さい X でただ一通りに e^X と書けます（**指数座標**）。

遠くでは、SU(2) は 1-02 の $U(\theta, n) = \exp(-\frac{i\theta}{2}\, n \cdot \sigma)$ ですべての元に届き（全射）、θ を 4π ずらしても同じ元なので一対一ではありません。**コンパクトでつながった群では指数写像は全射**です 既知 。

寄り道：SL(2, ℝ) には指数関数で届かない元がある

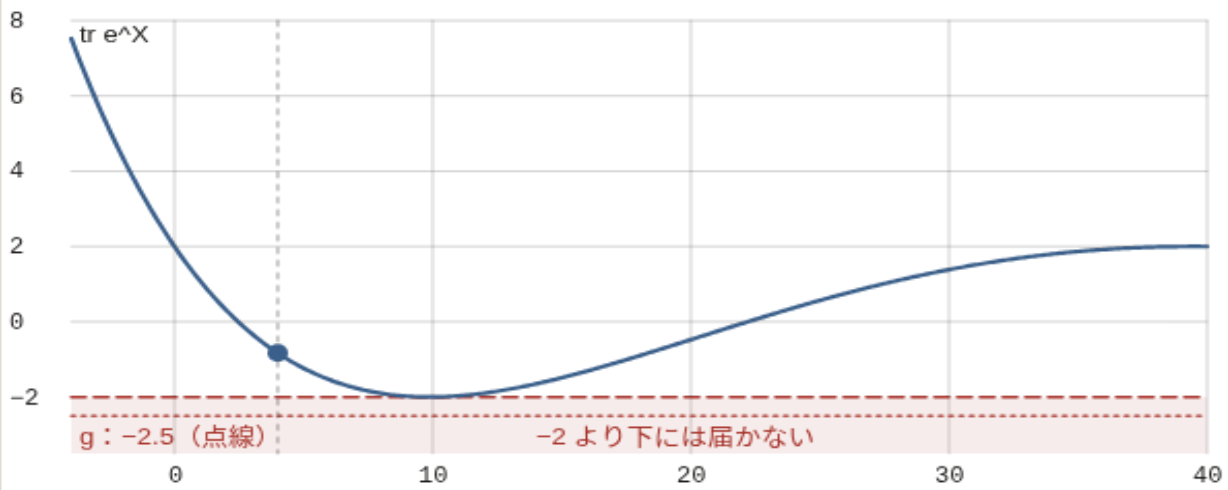
飛ばしてよい小節です。後の章の前提になりません。コンパクトでない群の例です。

$X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ は $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ の形です。成分を掛けて確かめられるとおり $X^2 = (a^2 + bc)I = -\delta I$（$\delta = \det X = -a^2 - bc$）で、2×2 でトレースが 0 の行列はいつもこうなります。そこで 1-01 §08 の例と同じく、指数関数の級数を偶数次と奇数次に分けると

$$\operatorname{tr} e^X = 2\cos\sqrt{\delta}\ (\delta > 0), \quad 2\ (\delta = 0), \quad 2\cosh\sqrt{-\delta}\ (\delta < 0) \qquad \text{どれも } \geq -2$$

よって $g = \operatorname{diag}(-2, -\frac{1}{2})$（行列式 1、トレース −2.5）はどの e^X にもなりません 既知 。それでも §01 の J で $g = e^{\pi J} e^{\operatorname{diag}(\log 2, -\log 2)}$ と二つの積には書けます。 計算 無作為な X 20 万個で、$\operatorname{tr} e^X$ の最小値は −2.000000 でした。

図 1　つまみで $\delta = \det X$（横軸）を動かすと、$\operatorname{tr} e^X$（縦軸）の点が曲線の上を動きます。曲線は −2 の破線より下に出ないので、g のトレース −2.5（点線）には届きません。「動かす」で δ を −4 から 40 まで送ります。



δ = 4.00　tr e^X = −0.8323　= 2cos√δ（√δ = 2.000。例 X = √δ·J：回転の仲間）

X の例	$\delta = \det X$	$\operatorname{tr} e^X$
$\mathrm{diag}(1,-1)$（伸び縮み）	−1	3.08616
E_{12}（(1, 2) 成分だけが 1。冪零）	0	2.00000
$3J$（回転の仲間）	9	−1.97998
πJ	9.8696	−2.00000

計算 この図の数値はこの端末で計算しました。表は行列の指数関数の数値計算、曲線は上の閉じた式をその場で計算（両者の相対差は 4.2×10^{-16} 以下）。

04

交換子は食い違いの二次の項

$e^{tX} = I + tX + \frac{t^2}{2}X^2 + O(t^3)$ を四つ掛けると、一次の項は消えて二次が残ります。

$$e^{tX}e^{tY}e^{-tX}e^{-tY} = I + t^2\,[X,Y] + O(t^3), \qquad [X,Y] = XY - YX \tag{1}$$

左辺を**群の交換子**、$[X,Y]$ を**交換子**と呼びます。$[X,Y] \neq 0$ なら、四手で一周するはずの道が t^2 の程度だけ閉じません。

例：縦列駐車。平面上の「向きをもつ点」（位置 (x,y)・向き α）の群 SE(2) を 3×3 行列で書きます。

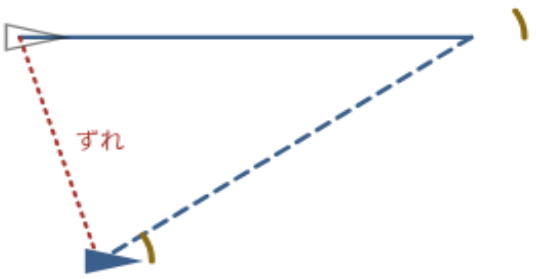
$$g = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & x \\ \sin\alpha & \cos\alpha & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad [J,P] = P_\perp$$

J は左上に §01 の J を置いた回転、P・$P_\perp$ は (1, 3)・(2, 3) 成分だけが 1 の並進の行列です。右から e^{tP} を掛けると「向いた方へ t 進む」、e^{tJ} は「その場で左へ t 回る」。比喩で言えば、そ

の場で回れるが横には動けない台車です。正確には、(1) から「前進 → 左に回る → 後退 → 右に回る」は $e^{t^2[P,J]} = e^{-t^2 P_\perp}$（右へ t^2 の並進）に三次まで等しく、厳密なずれは $(t(1-\cos t),\ -t\sin t)$ です。

図 2　つまみで一歩 t を変えると、四手の後のずれ（点線と「ずれ」の字）が変わります。一歩が同じ長さに見えるよう拡大しており、すき間が t に比例して縮むことが「ずれは t^2 の大きさ」の表れです。「順を入れ替える」とずれは逆向き。

前進 → 回る → 後退 → 逆に回る



実線 前進　破線 後退　　弧 その場で回る

t = 0.60　ずれ = (0.1048, -0.3388)　横 / t² = -0.9411

t	前後のずれ Δx	横のずれ Δy	$\Delta y/t^2$
0.6	0.1048	−0.3388	−0.94107
0.1	4.996×10^{-4}	-9.983×10^{-3}	−0.99833
0.01	5.000×10^{-7}	-1.000×10^{-4}	−0.99998

計算 この図の数値はこの端末で計算しました。表は行列の指数関数の積で、厳密な式との差は 2×10^{-16} 以下。図はその式をその場で計算。

1-02 の θ^2 の理由。1-02 §04 の、x 軸と y 軸の回転を逆順に施した食い違いは、角が θ^2 に近く軸はほぼ −z でした。生成子 $(L_a)_{bc} = -\varepsilon_{abc}$（$\varepsilon_{123}=1$ の完全反対称記号）で $R_x = e^{\theta L_1}$、$R_y = e^{\theta L_2}$、$[L_1, L_2] = L_3$。食い違い $D = R_y R_x R_y^{-1} R_x^{-1}$ は (1) の形なので $D = I - \theta^2 L_3 + O(\theta^3)$、−z 軸まわりの角 θ^2 の回転です。計算 $\log D/\theta^2$ と $-L_3$ の差は $\theta = 10°$ で 0.12、$1°$ で 0.012 でした。

05

リー環という構造

$\mathfrak{g}$ が交換子で閉じたベクトル空間であることの筋 既知 。**和：Lie の積公式** $e^{t(X+Y)} = \lim_{m\to\infty}(e^{tX/m}e^{tY/m})^m$（§07）の右辺は G の元の列で、G は閉じている。**交換子**：$g e^{sY} g^{-1} = e^{s\,gYg^{-1}}$ から $e^{tX} Y e^{-tX} \in \mathfrak{g}$、これを $t=0$ で微分すると $XY - YX$。

行列を忘れた定義では、**リー環**とは、実ベクトル空間と双線形な演算 $[\cdot,\cdot]$ の組で、次を満たすもの（二つ目が **Jacobi 恒等式**）です。

$$[X,Y]=-[Y,X],\qquad [X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$$

三次元の外積もリー環で、$L(v)=\sum_a v_a L_a$ は $L(v)w=v\times w$、$[L(a),L(b)]=L(a\times b)$ を満たします。

リー環は局所しか見ない。1-02 の二重被覆 $\rho:\mathrm{SU}(2)\to\mathrm{SO}(3)$ を単位元で微分すると、交換子を保つ一対一の線形写像 $\mathfrak{su}(2)\to\mathfrak{so}(3)$ になります（§06 で構造定数が一致することを見ます）。核 $\{\pm I\}$ は離れた二点で単位元の近くに現れず、720° か 360° かの違いは大域的で、リー環には映りません。

随伴。群はリー環に $\mathrm{Ad}_g X=gXg^{-1}$ で働き、その微分が $\mathrm{ad}_X Y=[X,Y]$ です。$\mathrm{Ad}_{e^X}=e^{\mathrm{ad}_X}$ が成り立ちます 既知 。ゲージ場はゲージ変換で Ad を通して変わります（3-02）。表現としては 1-04 で扱います。

06

構造定数

基底 $X_1,\dots,X_d$ を選ぶと $[X_a,X_b]=\sum_c f_{ab}{}^c X_c$ と書け、係数 f を**構造定数**と呼びます。反対称性と Jacobi 恒等式が f の条件になります 既知 。

- $\mathfrak{so}(3)$：$[L_a,L_b]=\sum_c \varepsilon_{abc}L_c$。
- $\mathfrak{su}(2)$：$X_a=-\frac{i}{2}\sigma_a$（パウリ行列、1-02 §05）で $[X_a,X_b]=\sum_c \varepsilon_{abc}X_c$ 計算 。同じ定数なので $X_a\mapsto L_a$ が §05 の同型で、1-02 の $U(\theta,n)$ は $\exp(\theta\sum_a n_a X_a)$ です。

物理の流儀（e^{-itT} と書く）では、エルミートな T^a で $[T^a,T^b]=if^{abc}T^c$ と書き、繰り返す添字 c の和の記号を省きます。$X_a=-iT^a$ と置けば $[X_a,X_b]=f^{abc}X_c$ で、**実数の f は二つの流儀で同じ**です。$\mathfrak{su}(N)$ で $\mathrm{tr}(T^aT^b)=\frac{1}{2}\delta^{ab}$ と規格化すると、f^{abc} は**完全反対称**（どの二つの添字を入れ替えても符号が変わる）です。交換子の式に T^c を掛けてトレースをとると $\mathrm{tr}([T^a,T^b]T^c)=\frac{i}{2}f^{abc}$ なので

$$f^{abc}=-2i\,\mathrm{tr}\big([T^a,T^b]T^c\big)=-2i\big(\mathrm{tr}(T^aT^bT^c)-\mathrm{tr}(T^bT^aT^c)\big)$$

トレースは巡回的（$\mathrm{tr}(PQ)=\mathrm{tr}(QP)$ から $\mathrm{tr}(ABC)=\mathrm{tr}(CAB)$）なので、右辺は添字の巡回 $a\to b\to c\to a$ で変わらず、a と b の入れ替えで符号を変えます。巡回と一つの入れ替えを組み合わせればどの入れ替えも作れるので、完全反対称です。$\mathfrak{su}(3)$ の f^{abc} は 1-04 で出します。

07

Baker–Campbell–Hausdorff の式

1-01 §08 で見た $e^{A}e^{B} \neq e^{A+B}$ の差を、交換子で書く式です。X, Y が十分小さいとき $e^{X}e^{Y} = e^{Z}$ で

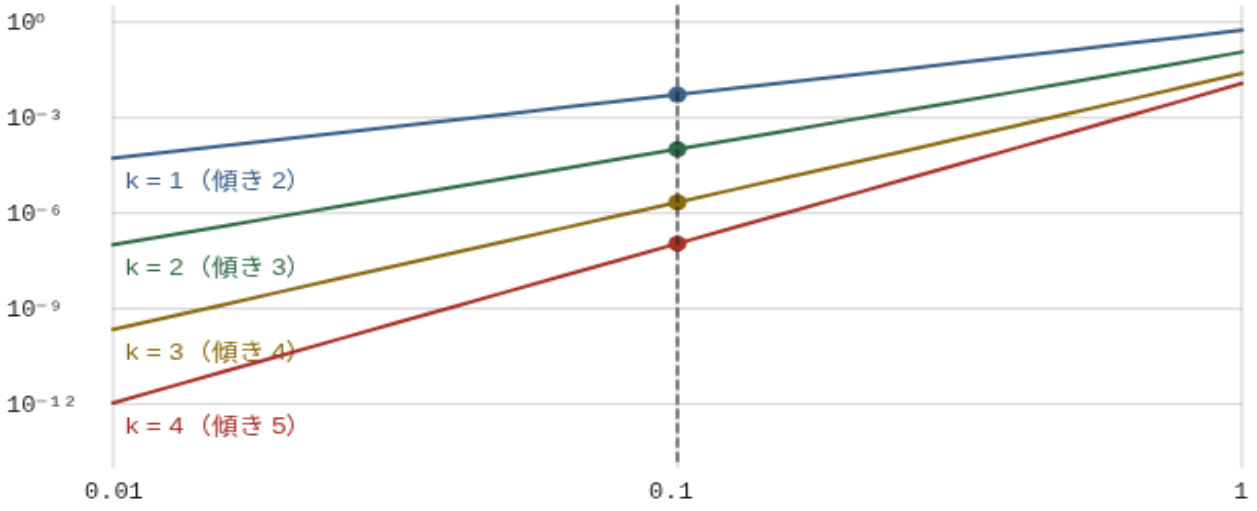
$$Z = X + Y + \tfrac{1}{2}[X,Y] + \tfrac{1}{12}\big([X,[X,Y]] + [Y,[Y,X]]\big) - \tfrac{1}{24}[Y,[X,[X,Y]]] + \cdots \qquad (2)$$

三次までの項は Hall と Kirillov にあります 既知 。四次の項は Casas と Murua の論文に $\frac{1}{24}[X,[Y,[Y,X]]]$ の形で載っていて、Jacobi 恒等式で (2) の形と等しくなります 既知 。四次の係数はこの端末の数値でも確かめました（下の図 3 と表） 計算 。

$X + Y$ より先はすべて交換子の入れ子で、係数は群によりません 既知 。だから単位元の近くの掛け算はリー環で決まります。つながった群は単位元の近くの元の積で生成されるので、群が空間として分かっていれば演算も決まります 既知 。ただし、**リー環だけから群そのものは決まりません**。SU(2) と SO(3) はリー環が同じで、群としては違います。違いは §05 で見た大域的な部分（核 $\{\pm I\}$）にあります。

$\mathfrak{so}(3)$ の $X = L(1,0,0.3)$、$Y = L(0.5,1,0)$ を t 倍し、(2) を k 次で打ち切った誤差を測りました。式が正しければ誤差は t^{k+1} に比例します。

図 3　$\log(e^{tX}e^{tY})$ と k 次までの式 (2) の差（両対数）。k 次の誤差は傾き $k+1$ の直線に乗ります。つまみで t を動かすと、誤差とそれを t^{k+1} で割った値が読めます。



t = 0.100　k=1 5.27e-3 (÷t^2 = 0.527)　k=2 1.02e-4 (÷t^3 = 0.102)　k=3 2.20e-6 (÷t^4 = 0.022)　k=4 1.10e-7 (÷t^5 = 0.011)

t	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4
1	0.561	0.116	2.48×10^{-2}	1.19×10^{-2}
0.1	5.28×10^{-3}	1.02×10^{-4}	2.20×10^{-6}	1.10×10^{-7}

t	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4
0.01	5.27×10^{-5}	1.02×10^{-7}	2.20×10^{-10}	1.10×10^{-12}
$t\to0$ で誤差$/t^{k+1}$	0.5274	0.1017	0.0220	0.0110

計算 この図の数値はこの端末で計算しました（差は作用素ノルム、図は 21 点を埋め込み）。

最後の行の 0.5274・0.1017・0.0220 は次に来る項（$\frac{1}{2}[X,Y]$・三次・四次の項）の大きさと一致し、t の多項式であてはめた係数も (2) と 5×10^{-9} 以内で合いました 計算 。

Lie の積公式。(2) から $(e^{X/m}e^{Y/m})^m=\exp\bigl(X+Y+\frac{1}{2m}[X,Y]+O(m^{-2})\bigr)$ で、誤差はおよそ $1/m$ で減ります。計算 上の X,Y で $m=10$・100・1000 の誤差は 4.57×10^{-2}・4.57×10^{-3}・4.57×10^{-4} でした（m 倍するといずれも約 0.457）。この公式には、X,Y が非有界な作用素（無限次元のヒルベルト空間の上、1-10）の場合への拡張があり、Trotter の積公式と呼ばれます 既知 。経路積分で時間を細かく刻む操作がこの形になることは 2-07 で見ます。

08

Killing 形式

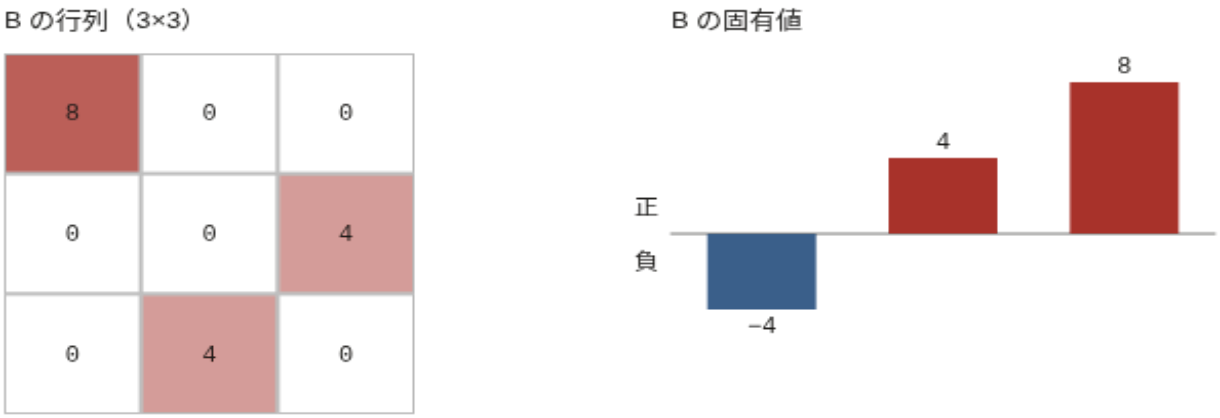
ヤン–ミルズの作用には、Ad_g で変わらない「長さの二乗」がリー環の上に要ります（§09）。リー環だけから作れる候補が **Killing 形式**です。

$$B(X,Y)=\mathrm{tr}\bigl(\mathrm{ad}_X\,\mathrm{ad}_Y\bigr),\qquad B(X_a,X_b)=\sum_{c,d}f_{ad}{}^{c}\,f_{bc}{}^{d}$$

B は対称で、$B(\mathrm{Ad}_g X,\mathrm{Ad}_g Y)=B(X,Y)$、$B([Z,X],Y)+B(X,[Z,Y])=0$ の意味で**不変**です 既知 。$\mathfrak{su}(2)$ では $\mathrm{ad}_{X_a}=L_a$ なので $B(X_a,X_b)=\mathrm{tr}(L_aL_b)=-2\delta_{ab}$、**負の定値**です。

部分空間 $\mathfrak{i}$ が**イデアル**とは $[\mathfrak{g},\mathfrak{i}]\subset\mathfrak{i}$ のこと。**単純**とは可換でなくイデアルが 0 と $\mathfrak{g}$ だけのこと、**半単純**とは単純なものの直和です（標準の定義は別の形で、それと同値であることが知られています：Kirillov 定義 6.19・系 6.43）。次が知られています 既知 。(i) **Cartan の判定法**：半単純 $\Leftrightarrow$ B が非退化。(ii) コンパクトな群のリー環では B は負の半定値で、退化する向きはちょうど中心（すべてと可換な元）。逆に、半単純で B が負の定値なら、コンパクトな群のリー環です。

図 4　下の表の行を選ぶと、そのリー環の基底での B の行列（色の濃さが大きさ）と固有値の棒が変わります。棒が軸より下なら負、上なら正、軸の上の丸は 0 です。



sl(2, ℝ) 符号（負, 0, 正）= (1, 0, 2) 基底 H = diag(1, −1)、E = E_{12}、F = E_{21}。B(H, H) = 8、B(E, F) = 4 で行列は対角でない

リー環	次元	B の符号（負, 0, 正）	読み
$\mathfrak{su}(2)$	3	(3, 0, 0)	コンパクト・単純
$\mathfrak{su}(3)$	8	(8, 0, 0)	コンパクト・単純
$\mathfrak{so}(4)$	6	(6, 0, 0)	コンパクト・半単純（$\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{su}(2)$）
$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$	3	(1, 0, 2)	単純だがコンパクトでない
$\mathfrak{u}(2)$	4	(3, 1, 0)	中心 $i\mathbb{R}I$ の向きで退化
SE(2) のリー環	3	(1, 2, 0)	並進のイデアルで退化
Heisenberg（対角 0 の上三角）	3	(0, 3, 0)	$B=0$

計算 この図の数値はこの端末で計算しました（構造定数から ad の行列を作り、B の行列と固有値を出して埋め込み）。棒の長さは基底の取り方で変わりますが、負・0・正の個数は変わりません（Sylvester の慣性法則 既知 。無作為な基底の取り替え 200 回でも同じ個数）。E_{jk} は (j,k) 成分だけが 1 の行列です。

計算 構造定数から ad の行列を作って B の固有値の符号を数え、$B=2n\,\mathrm{tr}(XY)$（$\mathfrak{su}(2)$〜$\mathfrak{su}(4)$）と $B=(n-2)\,\mathrm{tr}(XY)$（$\mathfrak{so}(3)$〜$\mathfrak{so}(5)$）を確認しました。不変性のずれは 1.3×10^{-12} 以下。$\mathfrak{so}(4)$ が単純でないことは符号からは読めません。

09

ヤン–ミルズの中のリー環

記号の d（外微分）・$\wedge$（外積）・$*$（ホッジ双対）と形式の積分は 1-06 で定義します。ここでは Tr がどこに現れるかだけを見ます。

Jaffe と Witten の問題説明は、U(1) をコンパクトな群 G に置き換えて曲率を $F=dA+A\wedge A$ とし、Lagrangian と呼ぶ式 $L=\frac{1}{4g^2}\int \mathrm{Tr}\,F\wedge *F$（時空で積分してあるので、本書の言葉では作用、2-01）の Tr を “an invariant quadratic form on the Lie algebra of G”（G のリー環の上の不変な二次形式）と書いています。この章の言葉では：

- **場の値**：ゲージ場は各点・各方向に $A_\mu = \sum_a A_\mu^a X_a \in \mathfrak{g}$ を持ちます（$\mu = 0,1,2,3$ は時空の方向の番号）。$A \wedge A$ の成分は交換子 $[A_\mu, A_\nu]$ で書け、U(1) では消えます。前に付く係数は成分の約束（$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ など）によるので、正確な形は 3-02 に委ねます。
- **不変**：ゲージ変換は Ad で働くので、作用には §08 の意味で不変な形式が要ります。
- **コンパクト**：$\mathfrak{su}(N)$ では $X \neq 0$ なら $-\operatorname{tr} X^2 = \sum_{ij} |X_{ij}|^2 > 0$。エネルギーが二乗の和で下に有界になり、符号が混じると負のエネルギーの向きが現れます 物理 （3-03）。
- **単純**：コンパクトな単純リー環（$\mathfrak{su}(N)$ など）の上では、不変な対称双線形形式は定数倍を除いて一つです 既知 。複素化（実数の係数を複素数に広げる。$\mathfrak{su}(N)$ なら $\mathfrak{sl}(N,\mathbb{C})$）しても単純なままで、複素単純リー環の上では Schur の補題から一意になるからです。「単純」だけでは足りません。$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ を実リー環と見ると単純ですが、Killing 形式の実部と虚部が別々の不変な形式になります。一意な形式の定数は結合定数 g に吸収されます（Tr の規格化の違いも同じ）。$G_1 \times G_2$ なら定数は因子ごとに入り、標準模型 SU(3)×SU(2)×U(1) の結合定数は三つです（3-07）。

次は 1-04 SU(2) と SU(3)：パウリ行列と Gell-Mann 行列、随伴表現、コンパクト単純群の一覧。

この章が言えている範囲

項目	言えていること	言えていないこと
リー環	交換子で閉じること（筋） 既知 。群の交換子の二次の項と SE(2)・SO(3) の数値 計算	多様体としてのリー群（1-05 の後）
指数写像	局所で一対一 既知 。SU(2) で全射（1-02 の式）、SL(2, ℝ) で全射でない（§03 のトレースの式） 既知 。無作為な 20 万個での確認 計算	コンパクトでつながった群なら全射、の証明は載せていない（定理そのものは既知）
BCH・Killing 形式	三次までの係数と四次の係数 既知 。四次の係数・誤差の次数・表の符号の数値 計算 。リー環から群そのものは決まらないこと（SU(2) と SO(3)）	一般項・収束域、Cartan の判定法とコンパクト性の証明は載せていない（定理そのものは既知）
ヤン–ミルズ	作用に不変な二次形式が要ること（一次資料）。コンパクトで単純なら定数倍を除き一つ 既知 。正の定値とエネルギー 物理	質量ギャップ・理論の構成については何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
定義、§02 の表、交換子で閉じること、Lie の積公式と Trotter の積公式への拡張、局所で一対一、SL(2, ℝ) の像、$\mathrm{Ad}_{e^X} = e^{\mathrm{ad}_X}$、BCH の三次まで、単純・半単純、物理の流儀	既知（本文を確認）	B. C. Hall, “An Elementary Introduction to Groups and Representations”, arXiv:math-ph/0005032 (2000)。定義 2.2・3.13、第 3 章 §5 の例、定理 3.9 とその直後の注意（非有界な作用素への拡張と Reed–Simon への案内）、定理 3.16・3.23、式 (3.17)、第 3 章演習 15、第 4 章、第 6 章 §7
コンパクトでつながった群なら全射、BCH の普遍性と三次まで、演算がリー環から決まることと「群そのものは決まらない」という但し書き、$\mathfrak{su}(n)$ の複素化、Killing 形式、Cartan の判定法、半単純の定義と直和への分解、コンパクト性と負の定値、不変形式の一意性（複素単純リー環の場合）	既知（本文を確認）	A. Kirillov Jr., *Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*（講義ノート。著者の所属する Stony Brook 大学のページで公開の PDF。PDF の作成は 2005 年）。番号は講義ノート版のもの（書籍版とずれうる）。注意 3.8（文言は “for compact Lie groups”。本文では単位元を含む成分、つまりつながった群について読む）、定理 3.34・式 (3.15)・系 3.35 とその後の注意、例 3.54、演習 4.4、定義 6.19・6.20・6.34、例 6.35、定理 6.37、系 6.43、定理 6.49
同じ著者の書籍版	書誌のみ	A. Kirillov Jr., *An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 113, Cambridge University Press (2008)
BCH の四次の項	既知（本文を確認）	F. Casas, A. Murua, “An efficient algorithm for computing the Baker–Campbell–Hausdorff series and some of its applications”, J. Math. Phys. 50 (2009) 033513, arXiv:0810.2656。式 (1.4) の後の $Z_4 = \frac{1}{24}[X,[Y,[Y,X]]]$
Trotter の積公式	書誌のみ	H. F. Trotter, “On the product of semi-groups of operators”, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959) 545–551／M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. I（Academic Press, 1972）§VIII.8（節は Hall の案内による）。書誌は Crossref で確認
経路積分（Feynman 積分）を数学として扱った一次資料	書誌のみ	E. Nelson, “Feynman Integrals and the Schrödinger Equation”, J. Math. Phys. 5 (1964) 332–343（書誌は Crossref で確認。時間を刻む形との関係は 2-07）
符号の個数が基底によらないこと（Sylvester の慣性法則）	書誌のみ	J. J. Sylvester, “A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares”, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science 4 (1852) 138–142（書誌は Crossref で確認）
作用の Tr が「G のリー環の上の不変な二次形式」であること、$F = dA + A \wedge A$、式 (1) を Lagrangian と呼ぶこと	一次資料（本文を確認）	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”, Clay Mathematics Institute の公式問題説明（PDF。本文に年の記載は無い。賞の発表は 2000 年と Clay のページで確認）。所収：J. Carlson, A. Jaffe, A. Wiles (eds.), *The Millennium Prize Problems*, American Mathematical Society／Clay Mathematics Institute (2006)（書誌は Open Library で確認。所収の頁は未確認）

もの	種別	出典・道具
図 1〜図 4 の表、§03・§04・§06〜§08 の数値	この端末で計算	Python 3.12・NumPy 1.26・SciPy 1.11（expm・logm）。BCH の係数は $\lvert t\rvert \le 0.05$ の 20 点へのあてはめ。Killing 形式は構造定数を最小二乗で求めて作り、不変性は無作為な元 50 組、符号の個数は無作為な基底の取り替え 200 回で確認。$\operatorname{tr} e^{X}$ は閉じた式（expm との相対差 4.2×10^{-16} 以下）
図 1〜図 4	図	素の JavaScript（図 1・図 2 は式をその場で計算、図 3・図 4 は計算済みの値を埋め込み）

次に読む章：1-04 SU(2) と SU(3)。

SU(2) と SU(3) — ゲージ場が値をとる行列を、手で触れる大きさで見る

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — パウリ行列と Gell-Mann 行列による su(2)・su(3)。su(2) の既約表現が 2j+1 次元に並ぶ理由。SU(3) の重み図。ゲージ場が従う随伴表現と $C_A = N$、中心。根のなす角が四通りしかないことと、コンパクト単純リー群の一覧。

前提となる章 — 1-03 リー群とリー環（交換子・構造定数・Killing 形式）。SU(2) と二重被覆は 1-02、同時対角化は 1-01。

先に言うこと — 準備の章で、質量ギャップについては何も示しません。最高ウェイトの定理、単純根と鏡映の性質、分類定理は証明せずに引きます（既知）。

この章の順序

1. なぜ SU(2) と SU(3) か — 成分の数と記号の約束
2. パウリ行列と su(2) — 回転と同じリー環
3. su(2) の表現：梯子 — 2j が整数になる理由（図 1）
4. Gell-Mann 行列と su(3) — 構造定数と階数
5. 重みと根 — SU(3) の表現を平面に描く（図 2）
   - 寄り道：味の SU(3) と色の SU(3)
     — 図 2 の点に粒子の名を当てる（飛ばしてよい）
6. 随伴表現 — ゲージ場の変わり方と C_A
7. 中心と N-ality — ゲージ場に見えない部分
8. 根系：角度が四通り — 単純根と鏡映で根を生やす（図 3）
9. コンパクト単純リー群の一覧 — 問題文の G はどの行でもよい

01

なぜ SU(2) と SU(3) か

ゲージ場は、時空の各点・各方向ごとに、ゲージ群 G のリー環 $\mathfrak{g}$ の元を一つずつ持ちます（3-02）。電磁気学の G = U(1) では成分は一つです。SU(N) ではリー環が行列の空間になります。

$$\mathfrak{su}(N) = \{\, X \in M_N(\mathbb{C}) : X^\dagger = -X,\ \operatorname{tr} X = 0 \,\}, \qquad \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{su}(N) = N^2 - 1 \tag{1}$$

数え方：対角成分は純虚数で N 個、対角より上は複素数で $N(N-1)/2$ 個。実の自由度 N^2 から跡 0 の条件で一つ減ります。SU(3) では 8 で、グルーオンが 8 種ある理由です（PDG）。

物理では $X = -i\theta^a T_a$（T_a はエルミート、繰り返す添字は和）と書きます。1-02 の $U = \exp(-\frac{i\theta}{2}\, n\cdot\sigma)$ は $T_a = \sigma_a/2$ としたこの形です。この本では $\operatorname{tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$ と正規化し、1-03 の構造定数をこう書きます。

$$[T_a, T_b] = i f_{abc}\, T_c \tag{2}$$

f_{abc} は実数で完全反対称です。PDG の QCD の総説も同じ約束です 既知 。

02

パウリ行列と su(2)

パウリ行列（1-02 §05）の性質は、次の恒等式に詰まっています。ε_{abc} は $\varepsilon_{123} = 1$ で、添字を二つ入れ替えると符号が変わる記号です。

$$\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab}\, I + i\, \varepsilon_{abc}\, \sigma_c \tag{3}$$

跡をとると $\operatorname{tr}(\sigma_a\sigma_b) = 2\delta_{ab}$、a と b を入れ替えて引くと $[\sigma_a, \sigma_b] = 2i\varepsilon_{abc}\sigma_c$。$T_a = \sigma_a/2$ で式 (2) の形になり、$f_{abc} = \varepsilon_{abc}$ です。例：$T_1T_2 = \frac{i}{4}\sigma_3$、$T_2T_1 = -\frac{i}{4}\sigma_3$ なので $[T_1, T_2] = iT_3$。

回転にも同じ関係があります。$(L_a)_{bc} = -i\varepsilon_{abc}$ は $[L_a, L_b] = i\varepsilon_{abc}L_c$ を満たし、$e^{-i\theta L_3}$ は z 軸まわりの角 θ の回転です 計算 。**su(2) と so(3) は同じリー環**です。リー環は単位元の近くしか見ないので、SU(2) が SO(3) を二重に覆うこと（1-02 §06）はここには現れません。

03

su(2) の表現：梯子を上り下りする

su(2) の表現とは、$f = \varepsilon$ の式 (2) を満たすエルミート行列 J_1, J_2, J_3 の組です。**一段ずつ上り下りする行列**を作ります。

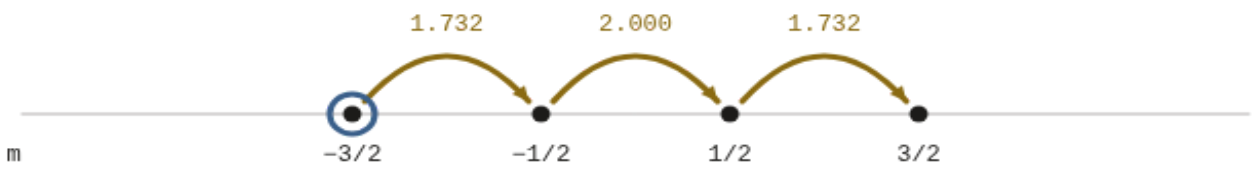
$$J_\pm = J_1 \pm i J_2, \qquad [J_3, J_\pm] = \pm J_\pm, \qquad [J_+, J_-] = 2J_3 \tag{4}$$

$J_3 v = m v$ なら $J_3(J_\pm v) = (m \pm 1) J_\pm v$ で、$J_\pm$ は固有値を 1 ずつ動かします。$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = J_- J_+ + J_3^2 + J_3$ はすべての J_a と可換です。有限次元なので上端 v（$J_+ v = 0$）があり、その固有値を j とすると $J^2 v = j(j+1) v$。下りると $\|J_- v_m\|^2 = (j+m)(j-m+1)\|v_m\|^2$ で、この係数は負になれないので、列は $m = -j$ でちょうど止まる必要があります。j から整数の歩幅で −j に着くので、**2j は 0, 1, 2, ⋯ のどれか**です 既知 。

$$J_3 v_m = m\, v_m, \qquad J_+ v_m = \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\; v_{m+1}, \qquad m = -j, \dots, j \tag{5}$$

次元は $2j+1$ で、各次元に既約表現が一つずつあります（1-02 の Π_m は m = 2j）。例：j = 1/2 は $J_a = \sigma_a / 2$。j = 1 は基底を取り替えると §02 の L_a です。

図 1　つまみで 2j を変えると段の数と係数が変わります。「上る」で J_+ を掛け続けると、上端で 0 になります。



j = 3/2　次元 4　J² = 3.75　いま m = −3/2　次の係数 √3 = 1.7321

j	次元	J²	J₊ の係数（m = −j から上へ）
1/2	2	0.75	$\sqrt{1}$
1	3	2	$\sqrt{2}, \sqrt{2}$
3/2	4	3.75	$\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{3}$
3	7	12	$\sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{12}, \sqrt{12}, \sqrt{10}, \sqrt{6}$

計算 この図と表 1 の数値はこの端末で計算しました。式 (5) で組んだ j ≤ 3 の行列で、交換関係と $J^2 = j(j+1)I$ のずれは最大 1.8×10⁻¹⁵。

04

Gell-Mann 行列と su(3)

su(3) でパウリ行列の役をするのが 8 個の **Gell-Mann 行列**です。どれもエルミートで跡 0、$\mathrm{tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}$ です。

$$\lambda_{1,2,3}=\begin{pmatrix}\sigma_{1,2,3} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\quad \lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

$\lambda_{4,5}$ は 1・3 番目、$\lambda_{6,7}$ は 2・3 番目の成分でパウリ行列と同じことをし、λ_8 は λ_3 と直交する対角行列です。$T_a=\lambda_a/2$ とし、$f_{abc}=-2i\,\mathrm{tr}([T_a,T_b]T_c)$ で取り出すと次の表です。

abc	123	147	156	246	257	345	367	458	678
f_{abc}	1	1/2	−1/2	1/2	1/2	1/2	−1/2	√3/2	√3/2

表 2：a < b < c で 0 でないもの（他は反対称性で決まるか 0）。64 個の交換子が再現され、Jacobi 恒等式のずれは 3.3×10^{-16} 以下 計算 。

中には su(2) が三つあります。$\{T_1,T_2,T_3\}$、$\{T_4,T_5,\tfrac12T_3+\tfrac{\sqrt3}{2}T_8\}$、$\{T_6,T_7,-\tfrac12T_3+\tfrac{\sqrt3}{2}T_8\}$ がそれぞれ $f=\varepsilon$ の式 (2) を満たします 計算 。成分の組 (1,2)・(1,3)・(2,3) ごとの SU(2) です。

T_3 と T_8 は可換です。互いに可換な元を一次独立に最大でいくつ取れるか（それらが張る空間の次元）を**階数**と呼び、su(3) は 2、su(N) は N − 1 です 既知 。実際、su(3) の中で T_3・T_8 の両方と可換な元はこの二つの一次結合だけで、su(N) でも対角の N − 1 個と可換な元はそれらの一次結合だけでした（N = 2〜6） 計算 。

05

重みと根：SU(3) の表現を平面に描く

表現の中で T_3 と T_8 は可換なエルミート行列なので同時に対角化でき、共通の固有ベクトルの固有値の組 (μ_3,μ_8) を**重み**と呼びます（su(2) の m の二次元版）。定義表現 **3** では対角成分を読むだけです。

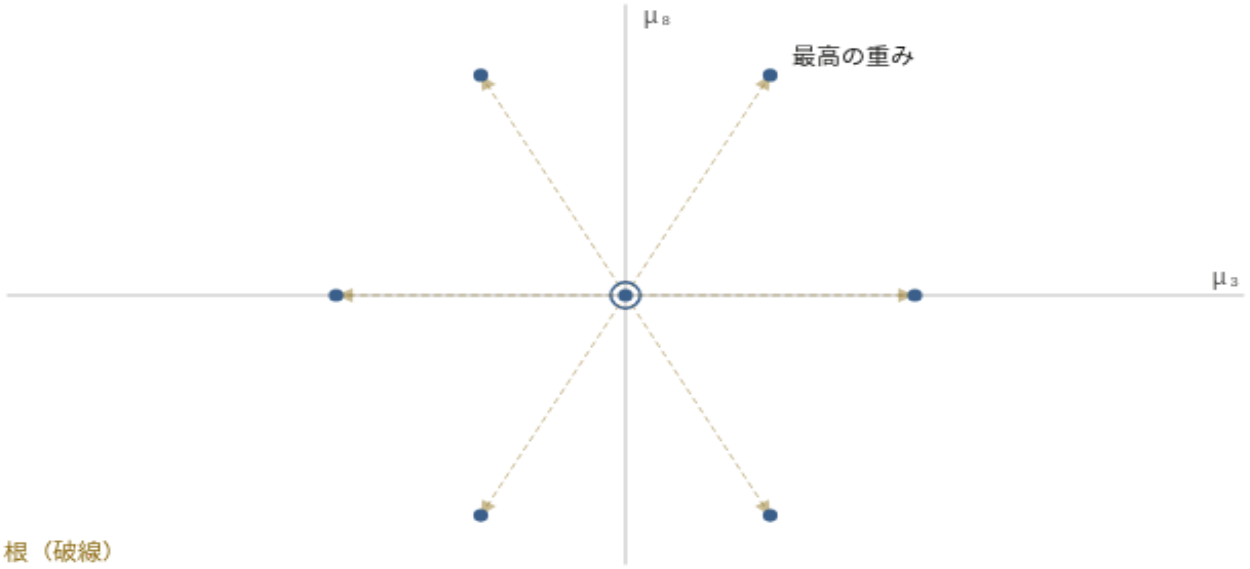
$$\mu(e_1)=\left(\tfrac12,\ \tfrac{1}{2\sqrt3}\right),\qquad \mu(e_2)=\left(-\tfrac12,\ \tfrac{1}{2\sqrt3}\right),\qquad \mu(e_3)=\left(0,\ -\tfrac{1}{\sqrt3}\right)\tag{6}$$

三点は正三角形で、$\bar{\mathbf{3}}$（複素共役）はその −1 倍です。行列単位 E_{ij}（(i, j) 成分だけ 1）は対角行列 H に対し $[H,E_{ij}]=(h_i-h_j)E_{ij}$ を満たし、重みを $\mu(e_i)-\mu(e_j)$ だけ動かす梯子です。この差の 6 個を**根**と呼び、長さ 1 の正六角形をなします。$E_{12}=T_1+iT_2$ は §03 の J_+ です。E_{ij} は $J_\pm$ と同じく su(3) の元の複素係数の一次結合で、su(3) そのものの元ではありませんが、表現の上では同じように働きます。

既約表現は非負整数の組 (p, q) で番号が付き（最高の重み $p\,\mu(e_1) - q\,\mu(e_3)$）、次元は次の式です 既知 。(1, 0) が **3**、(0, 1) が $\bar{\mathbf{3}}$、(1, 1) が随伴表現です。

$$\dim V(p,q) = \tfrac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2) \tag{7}$$

図 2　つまみで (p, q) を選ぶと、V(p, q) の重みが横 μ_3・縦 μ_8 の平面に出ます。点を囲む輪の数が重複度。表の行でも切り替わります。



V(1, 1) = 8　次元 8　Casimir 3.0000　N-ality 0　点 7　最大の重複 2

(p, q)	名	Casimir	N-ality	重みの点	最大の重複
(1, 0)	3	4/3	1	3	1
(0, 1)	$\bar{3}$	4/3	2	3	1
(1, 1)	**8**	**3**	**0**	**7**	**2**
(3, 0)	10	6	0	10	1
(2, 2)	27	8	0	19	3
(3, 3)	64	15	0	37	4

計算 この図と表 3 の数値はこの端末で計算しました。重みと重複度は単項式の数え上げと表現行列の Casimir の二通りで求め、p + q ≤ 5 の 21 個で一致。図は数え上げをその場で行い、16 個とも Python の計算と一致。名は次元（q > p なら上線）、Casimir は $\sum_a T_a T_a$ の値 $(p^2+q^2+pq+3p+3q)/3$。

図で見える規則：重複度は外の殻から内へ 1 ずつ増え、殻が三角形になってからは重複度が増えなくなり、内側まで一定です。計算した 16 個すべてがこの形でした 計算 。

寄り道：味の SU(3) と色の SU(3)

飛ばしてよい小節です。

図 2 の軸は物理の量で読めます。$\mu_3 = I_3$（アイソスピンの第 3 成分）、$\mu_8 = \frac{\sqrt{3}}{2} Y$（Y は超電荷）です。定義表現の三つの基底を u・d・s クォークと読むと Y = 1/3, 1/3, −2/3 で、式 (6) の μ_8 になります 計算 。

Rosner の解説によれば、Gell-Mann と Ne'eman（1961）の SU(3) では、電荷が素電荷の整数倍になる族のうち最も簡単なものは 1・8・10 個の族で、陽子・中性子を含む 8 個のバリオンが 8 個の族にちょうど収まりました 物理 。図 2 の (1, 1) では、外の六点が Σ^+・Σ^-・p・n・Ξ^0・Ξ^-（例えば p は $(I_3, Y) = (\frac{1}{2}, 1)$ で、点 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$）、重複度 2 の中心が Σ^0 と Λ です 計算 。のちに Δ・Σ^*・Ξ^* が 10 個の族に並び、欠けた頂点の Ω^-（(3, 0) の三角形の下の頂点）が Barnes ら（1964）に見つかりました。

この「味」の SU(3) は破れた近似の大域対称性で、強い力のゲージ群は三つの「色」の別の SU(3) です（PDG）。ヤン–ミルズは後者の型です（3-01）。

06

随伴表現：ゲージ場はこの表現で変わる

群は自分のリー環に共役で働きます。これが**随伴表現**で、その微分が交換子です（1-03）。

$$\mathrm{Ad}_g(X) = g X g^{-1}, \qquad \mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y], \qquad (T_a^{\mathrm{adj}})_{bc} = -i f_{abc} \tag{8}$$

右端の行列は式 (2) をもう一度満たします（Jacobi 恒等式と同値）。SU(2) では $-i\varepsilon_{abc}$ が §02 の L_a なので、**1-02 の写像 SU(2) → SO(3) は随伴表現そのもの**で、j = 1 に当たります。

ゲージ場は、空間に依らないゲージ変換 g で $A \mapsto g A g^{-1}$ と変わります（一般の形は 3-02）。U(1) では $gAg^{-1} = A$ で光子は電荷を持ちませんが、SU(N) では**ゲージ場自身が荷電**し、自分と相互作用します。PDG でもグルーオンは随伴表現、クォークは基本表現です 既知 。

$\sum_a T_a T_a$ はすべての T_b と可換です（§03 の J^2 と同じ）。**Schur の補題**（既約な複素表現で、すべての表現行列と可換な行列は単位行列の定数倍）により、既約表現ではこれは単位行列の定数倍で、その定数を Casimir と呼びます 既知 。

$$\sum_a T_a T_a = C_F\, I, \quad C_F = \frac{N^2-1}{2N}; \qquad f_{acd} f_{bcd} = C_A\, \delta_{ab}, \quad C_A = N \tag{9}$$

N	2	3	4	5	6
dim su(N)	3	8	15	24	35
C_F	3/4	4/3	15/8	12/5	35/12
C_A	2	3	4	5	6
Killing 形式 / tr	4	6	8	10	12

表 4：一般化した Gell-Mann 行列で計算 [計算] 。最下行は Killing 形式 $B(X,Y)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X\,\mathrm{ad}_Y)$ と $\mathrm{tr}(XY)$ の比で、2N でした。反エルミートな $X\neq 0$ では $\mathrm{tr}(X^2)<0$ なので B は負定値で、コンパクト性が符号に見えています。

作用の Tr が「G のリー環上の不変な二次形式」であることは 1-03 §09 で見ました。コンパクト単純なリー環（複素化も単純になる）では、不変な対称双線形形式は定数倍を除いて一つなので [既知] 、表 4 の B と tr の違いも g に吸収されます。C_A は漸近自由の係数に入ります。PDG の一ループ係数 $b_0=(11C_A-4n_fT_R)/(12\pi)$ は、クォークの無い純ヤン–ミルズで $11N/(12\pi)$ です [既知] 。17-01・4-06 の「11N」の N は C_A です。

07

中心と N-ality

すべての元と可換な元の集まりを**中心**と呼びます。SU(N) では行列式 1 のスカラー行列です [既知] 。

$$Z(\mathrm{SU}(N))=\{\,\omega^k I : k=0,1,\dots,N-1\,\},\qquad \omega=e^{2\pi i/N} \tag{10}$$

中心の元はすべての表現行列と可換なので、既約表現の上では Schur の補題（§06）によりスカラーとして働きます。SU(3) では対角成分を比べると $\omega I=\exp(4\pi i\,T_8/\sqrt{3})$ で、重み (μ_3,μ_8) のベクトルには $e^{4\pi i\mu_8/\sqrt{3}}$ が掛かります。V(p, q) の最高の重みは $\mu_8=(p+2q)/(2\sqrt{3})$ なので、表現全体に $\omega^{p+2q}=\omega^{p-q}$ が掛かります。p, q ≤ 3 の 16 個の表現の重みの点（計 216 点）すべてでこの値でした [計算] 。$k=p-q \bmod 3$ を **N-ality** と呼びます。表 3 の列で、$\mathbf{3}$ は 1、$\bar{\mathbf{3}}$ は 2、随伴は 0 です。

随伴で 0 になるのは、スカラー行列 z で $zXz^{-1}=X$ だからです。**ゲージ場は中心を感じません**。そのためグルーオンだけでは N-ality が 0 でない電荷を遮蔽できず [物理] 、中心は閉じ込めの議論の主役になります（17-02・5-10）。中心が自明な G_2（§09）では電荷がグルーオンで遮蔽され弦が切れうる、と Holland ら（2003）は論じています [物理] 。

08

根系：角度が四通りしかない

§05 の根は、どのコンパクト単純リー環にもあります。階数 r なら、互いに可換な r 個の元の同時固有値として、根は r 次元の空間に並びます。内積 (α,β) は §05 と同じく、生成子を不変な二次形式で正規直交にしたときの座標の内積です（su(3) では (μ_3,μ_8) 平面の普通の内積で、根の長さは 1）。

分類の心臓部は §03 の「2j は整数」です。根 α ごとに E_α、$E_{-\alpha}$ と両者の交換子が su(2) を作り、別の根 β をこの su(2) から見ると、m に当たる量は $(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha)$ で、**1/2 の整数倍（整数も含む）**になります 既知 。su(3) で α = (1, 0)（E_{12}、su(2) は $\{T_1, T_2, T_3\}$）、β = $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$（$E_{13}$）なら m = 1/2 です。二つの向きで掛けると、なす角 θ について次が出ます。

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} \cdot \frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} = 4\cos^2\theta \in \{0,1,2,3\} \tag{11}$$

左辺は整数の積で、$\beta \neq \pm\alpha$ なら 4 未満だからです。二つの因子の比は長さの比の二乗なので、直交しない二本の根の長さの比は 1・√2・√3 のどれかです（積が 1・2・3 になる整数の組は限られるため）。

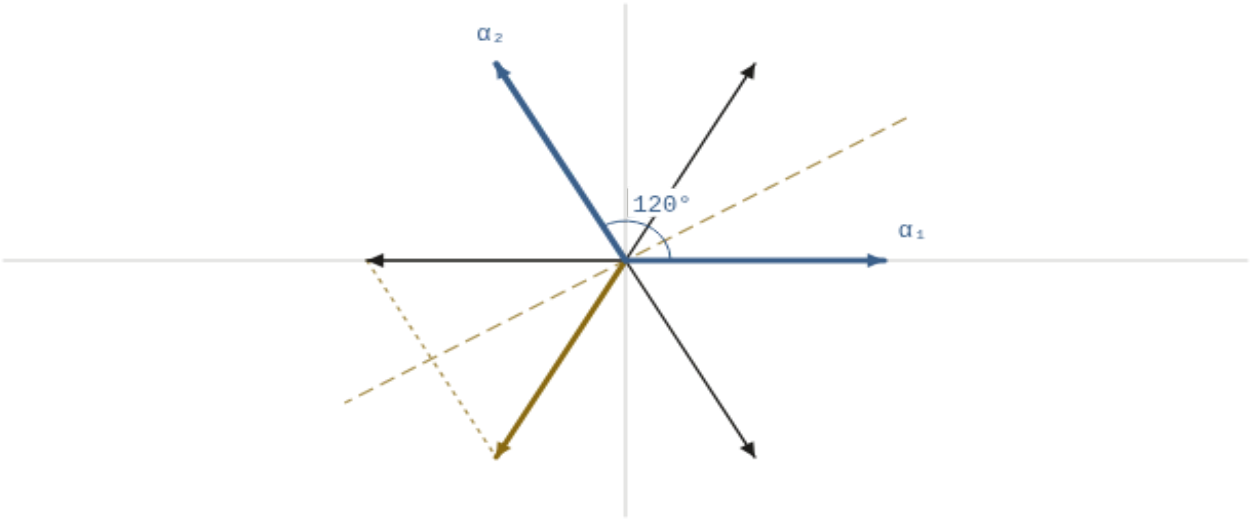
根は多いので代表を選びます。原点を通り根を一本も含まない直線（階数 3 以上なら超平面）を引き、片側の根を**正の根**と呼びます。正の根のうち、二つの正の根の和で書けないものが**単純根**で、本数は階数に等しく、互いのなす角は 90° 以上です 既知 。よって単純根どうしの角は 90°・120°・135°・150° の四通りです。

単純根から全体を戻すのが**鏡映**です。根 α での鏡映は、α に垂直な直線（超平面）に関する折り返しです。

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\,\alpha \tag{12}$$

鏡映は根を根に移し、単純根に単純根の鏡映を繰り返すとすべての根が得られます 既知 。(12) の係数は (11) の整数なので、根はすべて単純根の整数係数の和です。係数は全部 0 以上か全部 0 以下です 既知 。

図 3　表の行で階数 2 の型を選ぶと、単純根 α_1・α_2（太線）とその角が出ます。つまみで本数を変えるか「生やす」を押すと、式 (12) の鏡映で根が一本ずつ増えます（破線が鏡、点線が折り返し）。



A₂　根 6 / 6　−α₁ を α₂ の鏡で折り返して −α₁ − α₂　これで全部。次元 8

型	単純根の角	$4\cos^2\theta$	長い根 / 短い根	根の数	次元
$A_1 \times A_1$	90°	0	1	4	6
A_2	**120°**	**1**	**1**	**6**	**8**
B_2	135°	2	√2	8	10
G_2	150°	3	√3	12	14

計算 この図と表 5 の数値はこの端末で計算しました。単純根から鏡映を繰り返して根を生やした順番と、単純根での係数を Python で求めて図に埋めてあります。長い根の長さを 1 にしています。

階数 2 では $A_1 \times A_1$（根 4 本、二つの su(2) に分かれて単純でない）・A_2（6 本、§05 の正六角形そのもの）・B_2（8 本）・G_2（12 本）です。次元は階数 + 根の数です（su(3) なら対角の 2 方向と、6 本の根ごとの E_{ij} で 8）。図 3 の係数も全部 0 以上か全部 0 以下でした 計算 。

09

コンパクト単純リー群の一覧

問題文（0-03）は「任意のコンパクト単純ゲージ群 G」を求めます。§08 の制限を階数 3 以上でも詰めると、リー環の候補は四つの系列 $A_n = \mathfrak{su}(n+1)$、$B_n = \mathfrak{so}(2n+1)$、$C_n = \mathfrak{sp}(n)$、$D_n = \mathfrak{so}(2n)$ と、五つの例外 G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 で尽きます 既知 。Baez の総説によれば、Killing は 1887 年の書簡で分類を告げ、続く三年の論文で発表しました（例外を 6 個と数えていました）。Cartan の 1894 年の学位論文がすべてを構成し、52 次元の二つが同型であることを見いだして、例外は 5 個になりました。

型	単連結な群	階数	次元	$h^\vee$	中心
A_n（$n \geq 1$）	SU(n+1)	n	n(n+2)	n+1	$\mathbb{Z}_{n+1}$
B_n（$n \geq 2$）	Spin(2n+1)	n	n(2n+1)	2n−1	$\mathbb{Z}_2$
C_n（$n \geq 3$）	Sp(n)	n	n(2n+1)	n+1	$\mathbb{Z}_2$
D_n（$n \geq 4$）	Spin(2n)	n	n(2n−1)	2n−2	$\mathbb{Z}_4$（n 奇）・$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$（n 偶）
G_2 ／ F_4	G_2 ／ F_4	2 ／ 4	14 ／ 52	4 ／ 9	自明
E_6 ／ E_7 ／ E_8	E_6 ／ E_7 ／ E_8	6 ／ 7 ／ 8	78 ／ 133 ／ 248	12 ／ 18 ／ 30	$\mathbb{Z}_3$ ／ $\mathbb{Z}_2$ ／ 自明

表 6：系列は n ≤ 8 で式と一致 計算 。Spin(m) は SO(m) を二重に覆う単連結な群、Sp(n) は四元数成分のユニタリ行列の群です。単純根どうしの整数 $2(\alpha_i,\alpha_j)/(\alpha_j,\alpha_j)$（式 (11) の因子）を並べた行列を **Cartan 行列**と呼び、中心の位数はその行列式です 既知 。中心の形（$\mathbb{Z}_4$ か

$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ か）もこの行列から計算しました。$h^\vee$（双対 Coxeter 数）は、この章では表の値として引くだけにします。

SU(N) では $h^\vee = N$ で、§06 の $C_A = N$ と一致します。長い根の長さの二乗を 1 に揃える（SU(N) では $\mathrm{tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$ に当たり、§05 で根の長さが 1 だったのと同じ）と、一般の G でも $C_A = h^\vee$ です 既知 。数学で多い「長さの二乗を 2」の規格化では、随伴の Casimir は $2h^\vee$ になります。SU(3) で二つの規格化を比べると 3 と 6 でした 計算 。**問題文の G はこの表のどの行でもよく**、摂動論の係数には群がこうした数で入ります。$SU(2)/\mathbb{Z}_2 = SO(3)$ のような中心で割った群も同じリー環を持ち、違いは束の位相に現れます（3-05 §03）。

次は 1-05 多様体と接空間：この章の行列を時空の各点に載せるための言葉です。

この章が言えている範囲

項目	言えていること	言えていないこと
su(2)・su(3)	表 2 の f_{abc}。2j が整数になる理由。式 (5) が $j \le 3$ で表現になること。su(N)（N = 2〜6）で対角の元と可換な元の次元 計算	既約表現がこれで尽きることの完全な証明、階数が極大な可換部分の取り方に依らないこと 既知
SU(3) の重み	$p, q \le 3$ の重みと重複度 計算	最高ウェイトの定理と式 (7) の証明 既知 。殻の規則は観察
随伴表現	N = 2〜6 の C_F・C_A・B = 2N·tr 計算	Schur の補題、一般の N、不変二次形式の一意性 既知
中心	SU(N) の中心、随伴表現が中心を感じないこと。SU(3) の N-ality（$p, q \le 3$ の全重み） 計算	閉じ込め・G_2 との関係 物理
根系と分類	角度が四通りの理由 (11)。階数 2 の四つの根系を鏡映で生やしたこと（図 3・表 5）。表 6 計算	単純根と鏡映の性質、分類がこれで尽きること、一般の G での $C_A = h^\vee$（長い根の長さの二乗 1 の規格化で） 既知
ヤン–ミルズ	ゲージ場の変わり方、11N の N の出どころ	質量ギャップ・理論の構成については何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
su(2) の既約表現、SU(3) の最高ウェイトと式 (7)	既知（本文を確認：5 章 §4、6 章 §3・定理 6.11）	B. C. Hall, “An Elementary Introduction to Groups and Representations”, arXiv:math-ph/0005032 (2000)

もの	種別	出典・道具
$t=\lambda/2$、C_F・C_A、b_0、グルーオンとクォークの表現	既知（本文を確認）	J. Huston, K. Rabbertz, G. Zanderighi, “Quantum Chromodynamics”, in S. Navas et al. (PDG), Phys. Rev. D 110 (2024) 030001
「コンパクト単純ゲージ群」「不変な二次形式」	一次資料（本文を確認）	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”, Clay Mathematics Institute の問題説明
分類の経緯（1887 年の書簡、Killing の数えた 6 個の例外、Cartan の 1894 年の学位論文と 52 次元の二つの同型）、系列と例外	総説（本文を確認）	J. C. Baez, “The Octonions”, Bull. Amer. Math. Soc. 39 (2002) 145–205, arXiv:math/0105155
味の SU(3) の経緯（整数電荷の最も簡単な族が 1・8・10 個、バリオンの 8 個の族、Δ・Σ^*・Ξ^* と Ω^-）	解説（本文を確認）	J. L. Rosner, “The Eightfold Way”, arXiv:hep-ph/0109241 (2001)
G_2 の中心と弦の切断	要旨を確認	K. Holland, P. Minkowski, M. Pepe, U.-J. Wiese, Nucl. Phys. B 668 (2003) 207, arXiv:hep-lat/0302023
原論文、Ω^- の発見、双対 Coxeter 数 $h^\vee$ と随伴の Casimir の関係の文献	書誌のみ	W. Killing, Math. Ann. 31–36 (1888–1890)；É. Cartan, 学位論文 (1894)；M. Gell-Mann, CTSL-20 (1961)；Y. Ne'eman, Nucl. Phys. 26 (1961) 222；V. E. Barnes et al., “Observation of a Hyperon with Strangeness Minus Three”, Phys. Rev. Lett. 12 (1964) 204；V. G. Kac, *Infinite Dimensional Lie Algebras*, 第 3 版 (1990)
表 1〜6、§02・§04・§07 と寄り道の確認、図 1〜3	**この端末で計算**	Python 3.12・NumPy 1.26・SciPy 1.11：`su2_ladder.py`・`su3_algebra.py`・`su3_weights.py`・`classification.py`・`rank_center_roots.py`。図は canvas と素の JavaScript で、式 (5) と単項式の数え上げはその場で計算し、図 3 の根の順番は Python の結果を埋め込み

次に読む章：1-05 多様体と接空間。

多様体と接空間 — 地図を貼り合わせ、座標に依らずに微分する

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 曲がった空間を座標（地図）の貼り合わせで扱う方法（多様体）。一点での向きの空間（接空間）と成分の変換則。流れの順序の食い違いを測る括弧積。

前提となる章 — 1-01 と多変数の微積分（連鎖律・陰関数定理）。1-02・1-03 を読んでいれば例がつながります。

先に言うこと — この章は準備で、質量ギャップについては何も示しません。定理は証明を載せずに引き「既知」の札を付けます。数値は有限個の点での確かめです。

この章の順序

1. なぜ多様体が要るか
2. 座標近傍と地図帳（動く図）
3. 多様体の定義と例
4. 方程式で切り出す（計算）
5. 滑らかな関数と写像
6. 接ベクトル
7. 変換則と写像の微分
8. ベクトル場と流れ／寄り道：毛玉の定理
9. 括弧積（動く図）
10. ヤン–ミルズの中の多様体

01

なぜ多様体が要るか

ヤン–ミルズ理論には平らでない空間が出てきます。ゲージ群 SU(2) は空間としては球面 S^3 です（1-02 §05）。問題文の舞台は $\mathbb{R}^4$ ですが、出題者の説明は四次元トーラス T^4 による近似や一般の四次元多様体にも触れています 既知 。

こうした空間は一組の座標で覆えないことがあります。比喩で言えば、世界地図はどう描いても極か日付変更線で破れます。正確には、球面 S^2 と $\mathbb{R}^2$ の開集合の間に、一対一で両方向に連続な対応はありません 既知 。球面は有界閉集合で、その連続像も有界閉集合ですが、$\mathbb{R}^2$ の空でない開集合はそうでないからです。

そこで何枚かの地図を滑らかに貼り合わせ、**地図の選び方に依らない量だけを幾何の量と呼びます**。ゲージに依らない量だけが観測にかかる（2-03 §03）のと同じ構えです。

02

座標近傍と地図帳

集合 M の部分集合 U と、U を $\mathbb{R}^n$ の開集合へ一対一に写す φ の組 (U,φ) を**地図**（座標近傍）と呼び、$\varphi(q)=(x^1,\dots,x^n)$ を q の座標とします。M を覆う地図の集まりで、次の二つを満たすものを**地図帳**と呼びます 既知 。どの二枚 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$・$(U_\beta,\varphi_\beta)$ についても、重なりの像 $\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$ と $\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であること（開集合の上でないと微分が定義できないため）。そして、重なりでの読み替え（**貼り合わせ写像**）が C^∞ であること。

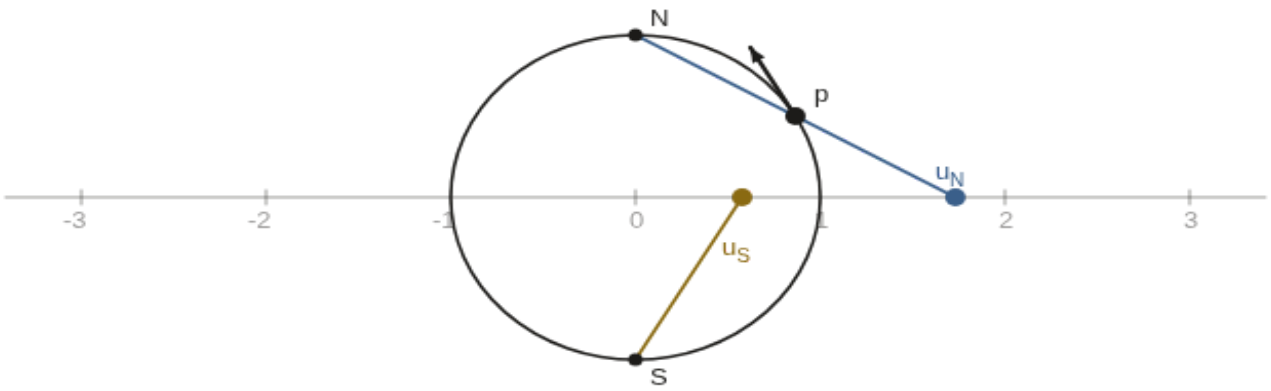
$$\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}:\ \varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\longrightarrow\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\quad\text{が } C^\infty \tag{1}$$

例：円 S^1。角 θ は一枚の地図になりません（$0\le\theta<2\pi$ では像が開集合でなく、$0<\theta<2\pi$ では一点が抜ける）。そこで**立体射影**を使います。北極 $N=(0,1)$ と点 $p=(\cos\theta,\sin\theta)$ を結ぶ直線が横軸と交わる位置を u_N、南極 $S=(0,-1)$ から同様にした位置を u_S とします。

$$u_N=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta},\qquad u_S=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta},\qquad u_N\,u_S=\frac{\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta}=1 \tag{2}$$

u_N は N 以外を、u_S は S 以外を覆い、重なりでの $u_S=1/u_N$ は滑らかなので (1) を満たします。

図1　つまみ（または表の行）で p を動かすと、座標 u_N（青）・u_S（黄土）が変わり、積はいつも 1 です。p が北極に近づくと u_N は際限なく大きくなります。本文色の矢印は速さ 1 で動く p の接ベクトル（§07）。



θ = 30°　u_N = 1.7321　u_S = 0.5774　積 = 1.000000　v_N = 2.0000　v_S = -0.6667　v_S/v_N = -0.3333　$-1/u_N^2$ = -0.3333

θ（度）	u_N	u_S	v_N	v_S	v_S/v_N	$-1/u_N^2$
30	1.7321	0.5774	2.0000	−0.6667	−0.3333	−0.3333
89	114.5887	0.0087	6565.7794	−0.5000	−0.0001	−0.0001
−135（= 225）	−0.4142	−2.4142	0.5858	−3.4142	−5.8284	−5.8284

計算 この図の数値はこの端末で計算しました（式 (2) とその θ 微分。数値微分との相対差 5×10^{-10} 以下）。v_N・v_S は速さ 1 で回るときの du_N/dt・du_S/dt です（§05・§07）。

球面 S^2 も、両極から赤道面への射影 $u=(x_1,x_2)/(1-x_3)$・$u'=(x_1,x_2)/(1+x_3)$ で覆え、貼り合わせは $u'=u/|u|^2$ です 既知 （無作為な点 約 2000 個で差 2×10^{-13} 以下 計算 ）。

03

多様体の定義と例

定義　n 次元の（滑らかな）**多様体**とは、集合 M と、M を覆う地図帳の組です。加えても (1) が崩れない地図はすべて加えておきます（極大な地図帳） 既知 。教科書はさらに位相の条件（ハウスドルフ性など）を課しますが、この本の例では自動的に満たされます。

例：$\mathbb{R}^n$ の開集合（$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\subset\mathbb{R}^{n^2}$ など） 既知 、球面 S^n、積（トーラス $T^2=S^1\times S^1$、T^4 ）、行列の群（§04）。**非例**：8 の字の交点。交点の小さな近傍から交点を抜くと四つに分かれ、一点を抜くと二つに分かれる区間と同じ形になりえません。二重の円錐 $x^2+y^2=z^2$ の頂点も同様です。

この定義は外の空間を使いません。地図帳として違うだけのもの（例えば $\mathbb{R}$ を地図 $x\mapsto x^3$ から作る地図帳）は、微分同相（§05）で通常のものに移るので同じ構造とみなします。そう数えても、同じ空間に本当に別の滑らかな構造が載ることがあります。$\mathbb{R}^4$ と同相（両方向に連

続な一対一の対応がある）だが微分同相でない滑らかな構造を**エキゾチック** $\mathbb{R}^4$ と呼び、それが無数に（連続体濃度、つまり実数と同じ個数だけ）あることは Taubes が最初に示したとされます 既知 （1-12 §07、3-06、四次元の記事）。

04

方程式で切り出す — 正則値定理

多くの多様体は方程式の解として現れます。滑らかな $F:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^m$ と値 c について、次が成り立ちます（**正則値定理**） 既知 。

$$M=F^{-1}(c),\qquad \operatorname{rank} dF_x=m\ \ (x\in M)\ \Longrightarrow\ M\ \text{は}\ N-m\ \text{次元の多様体} \tag{3}$$

中身は陰関数定理で、m 個の座標を残りの $N-m$ 個の関数として解き、その $N-m$ 個を地図にします。例えば $F(A)=A^{\mathsf T}A$ は $\mathbb{R}^9$ を対称行列（成分 6 個）へ写し、$F^{-1}(I)=\mathrm{O}(3)$ は $9-6=3$ 次元です。det は連続で ±1 しかとらないので、$\mathrm{O}(3)$ は $\det A=1$ の部分（回転の群 $\mathrm{SO}(3)$）と $\det A=-1$ の部分に分かれ、どちらも 3 次元です。回転が軸の向き 2 個と角 1 個で決まること（1-02 §04）と合います。

表 1 計算 無作為な点 200 個で dF の階数を数え、群は単位元での核（§06 の接空間）も求めました。階数は、$dF\,dF^{\mathsf T}$ の固有値の平方根（特異値）のうち、10^{-6} の相対しきい値で 0 とみなせないものの個数です。直交群の点は $\det=1$ の部分からとりました。

集合	方程式	N	階数	次元	単位元での核
$S^3=\mathrm{SU}(2)$	$\lvert x\rvert=1$	4	1	3	—
$\mathrm{O}(3)$（$\det=1$ の部分が $\mathrm{SO}(3)$）	$A^{\mathsf T}A=I$	9	6	3	反対称（残差 3×10^{-16}）
$\mathrm{U}(2)$	$A^{\dagger}A=I$	8	4	4	反エルミート
円錐（非例）	$x^2+y^2=z^2$	3	頂点で 0	–	—

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$・$\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$（核はトレース 0）・$\mathrm{O}(4)$（$\det=1$ の部分が $\mathrm{SO}(4)$）・$\mathrm{U}(3)$ でも次元は 3・8・6・9 と出ました。円錐は頂点で階数が落ちます。閉じた行列の群はいつも多様体（リー群）で 既知 、1-03 §02 の議論はここで裏付けられます。

05

滑らかな関数と写像

関数 $f:M\to\mathbb{R}$ は、どの地図でも $f\circ\varphi^{-1}$ が C^∞ のとき**滑らか**と呼びます。重なりでは (4) なので、一方の地図で滑らかなら他方でも滑らかです（貼り合わせに滑らかさを求めた理由）。写像 $F:M\to N$ も同様で、逆も滑らかな全単射を**微分同相**と呼びます。

$$f \circ \varphi_\beta^{-1} = \bigl(f \circ \varphi_\alpha^{-1}\bigr) \circ \bigl(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\bigr) \tag{4}$$

例：円の上の高さ。 S^1 の点 $p = (\cos\theta, \sin\theta)$ に高さ $f(p) = \sin\theta$ を対応させます。(2) から $u_N^2 = \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$、$u_S^2 = \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$ なので、これを $\sin\theta$ について解くと、§02 の二枚の地図で読んだ f は

$$f = \frac{u_N^2 - 1}{u_N^2 + 1} \quad \text{(地図 N)}, \qquad f = \frac{1 - u_S^2}{1 + u_S^2} \quad \text{(地図 S)}$$

です。分母はどちらも 1 以上なので、どちらの式も C^∞ で、f は滑らかです。重なりで $u_S = 1/u_N$ を代入すると一方の式が他方に移り、(4) の実例になっています 計算 。

偏微分の値は地図ごとに違います。点 $\theta = 0$（$u_N = u_S = 1$）では $df/du_N = 1$、$df/du_S = -1$ で、二枚の地図は目盛りの向きが逆です。それでも、曲線 γ に沿った変化率 $\frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=0}$ は座標を使わずに書けています。$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ なら、座標の速さ $v_N = du_N/dt$・$v_S = du_S/dt$ は $t = 0$ で 1 と -1（図 1 の表の量）。連鎖律で、地図 N では 1×1、地図 S では $(-1) \times (-1)$ となり、どちらも $1 = \cos 0$ です 計算 。座標に依らない微分の種はこれです。

06

接ベクトル — 三つの見方

曲がった空間では点から点へ伸びる矢印がはみ出すので、矢印を**一点に付いた向き**として定義し直します。三つの見方が同じものを与えます 既知 。**(a) 曲線の速度**：地図で読んだ速度が等しい曲線を同じとみなす（(1) により地図に依らない）。**(b) 方向微分**：$v(f) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=0}$。線形で積の法則を満たす。**(c) 成分**：地図 x で連鎖律を使うと

$$v(f) = \sum_{i=1}^{n} v^i \, \frac{\partial f}{\partial x^i}(p), \qquad v^i = \frac{d}{dt} x^i(\gamma(t))\Big|_{t=0}, \qquad v(fg) = v(f)\,g(p) + f(p)\,v(g) \tag{5}$$

で、$v = \sum_i v^i \, \partial_i$ と書けます。この向きの全体が p での**接空間** T_pM（n 次元のベクトル空間）で、$\partial_1, \dots, \partial_n$ を**座標基底**と呼びます。

方程式で切り出した場合。 $M = F^{-1}(c)$ の中の曲線では $F(\gamma(t)) = c$ なので $dF_p(\gamma'(0)) = 0$、次元を数えると $T_pM = \ker dF_p$ です 既知 。SO(3) の単位元では $A^{\mathsf T}A = I$ を微分して $X^{\mathsf T} + X = 0$：接空間は反対称行列の全体で、1-03 §02 のリー環と一致します 既知 （表 1 の右の列） 計算 。

07

成分の変換則と写像の微分

接ベクトル v は地図の前に決まっていて、成分 v^i は地図に落とした影です。別の地図 x' での成分は連鎖律で得られます 既知 。

$$v'^{\,i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x'^{\,i}}{\partial x^j}(p)\, v^j, \qquad \partial'_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^j}{\partial x'^{\,i}}(p)\, \partial_j \tag{6}$$

成分は Jacobi 行列で、基底はその逆で変わり、$\sum_i v^i \partial_i$ は不変です。例：$(x,y)=(1,1)$（$r=\sqrt{2}$、$\theta=\pi/4$）で $\partial_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\partial_r - \frac{1}{2}\,\partial_\theta$。図 1 の円では $v_N = 1/(1-\sin\theta)$、$v_S = -1/(1+\sin\theta)$ で、(6) は $v_S = -v_N/u_N^2$。図 1 の表の右二列の一致がその確認です 計算 （北極の近くで v_N が大きいのは地図 N の目盛りが伸びるため）。

写像の微分。滑らかな $F : M \to N$ は、曲線を運ぶことで接ベクトルを運びます。

$$dF_p\big(\gamma'(0)\big) = (F\circ\gamma)'(0), \qquad d(G\circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p \tag{7}$$

$dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ は線形で、地図で読めば Jacobi 行列です。(6) は恒等写像を二枚の地図で読んだ場合です（線形な例がローレンツ変換、2-04）。df を「ベクトルを食べて数を返すもの」として扱うのは 1-06 です。

08

ベクトル場と流れ

各点に接ベクトルを滑らかに割り当てたもの $X = \sum_i X^i(x)\,\partial_i$ を**ベクトル場**と呼びます。矢印に沿う曲線（**積分曲線**）は常微分方程式の解で、局所的にただ一つです 既知 。p を時間 t 進めた点を $\varphi_t(p)$ と書き、**流れ**と呼びます。

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i\big(x(t)\big), \qquad \varphi_s\circ\varphi_t = \varphi_{s+t}, \qquad \varphi_0 = \mathrm{id} \tag{8}$$

線形な場 $X(x)=Ax$ の流れは $\varphi_t(x) = e^{tA}x$、つまり 1-01 の行列の指数関数です。平面の例：回転 $R = -y\,\partial_x + x\,\partial_y$ は角 t の回転、伸縮 $E = x\,\partial_x + y\,\partial_y$ は e^t 倍、$x\,\partial_y$ は $(x,y)\mapsto(x, y+tx)$。

寄り道：毛玉の定理

飛ばしてよい小節です。後の章の前提になりません。

S^2 の上の連続なベクトル場は、どこかで零になります 既知 。比喩で言えば、毛の生えた球をどう撫でつけてもつむじが残ります。正確には、零点を小さな円で一周するあいだに矢印が回る回数を**指数**と呼ぶと、零点が有限個の場なら、指数の和が場に依らず 2 になるとされます（Poincaré–Hopf の定理 既知 ）。この 2 は S^2 の**オイラー標数**で、球面を多面体に分けて数えた 頂点 − 辺 + 面と同じ値です。 計算 §02 の地図で零点の周りを回ると、z 軸まわりの回転と高さ x_3 の勾配は両極で +1 ずつ、地図 N で一定の場 $\partial/\partial u^1$ は北極だけで +2 で、和はどれも 2 でした。トーラスのオイラー標数は 0 で、零点の無い場があります。

「各点で基準を連続に選ぶことが大域的にはできない」型の障害は、ゲージ固定（3-04）にも別の姿で現れます。

09

括弧積 — 流れは入れ替えられるか

二つの場を関数に続けて作用させると二階微分が出ますが、順序を入れ替えて引くと二階の項は消え（偏微分は順序を交換できる）、新しいベクトル場が残ります。これが**括弧積**です 既知 。

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf), \qquad [X,Y]^i = \sum_{j=1}^{n}\left(X^j\frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right) \tag{9}$$

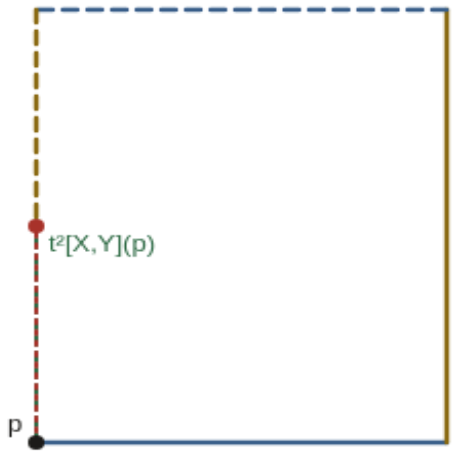
座標基底どうしは $[\partial_i,\partial_j]=0$。逆に、基底をなす n 本の場がどの二本も可換なら、局所的にそれらを座標基底とする地図がとれます（可換な枠についての定理で、Frobenius の定理の一形） 既知 。

幾何の意味。X の流れで t、Y で t、X で $-t$、Y で $-t$ と進むと道は閉じず、ずれは t^2 の大きさで $[X,Y]$ の向きに出ます 既知 。例えば $X=\partial_x$、$Y=x\,\partial_y$ なら $(x,y)\to(x+t,y)\to(x+t,y+tx+t^2)\to(x,y+tx+t^2)\to(x,y+t^2)$ で、ずれはちょうど $t^2\partial_y = t^2[X,Y]$ です。

$$\varphi^{Y}_{-t}\circ\varphi^{X}_{-t}\circ\varphi^{Y}_{t}\circ\varphi^{X}_{t}(p) = p + t^2\,[X,Y](p) + O(t^3) \tag{10}$$

図 2　A〜E のボタン（または表の行）で組を、つまみで t を選ぶと、四本の流れ（青が X・黄土が Y、破線は $-t$ の向き）と閉じないずれ（赤）が変わります。緑は (10) の主要項 $t^2[X,Y](p)$。一辺の長さを揃えて拡大しているので、ずれが t に比例して縮むのが「t^2 の大きさ」の表れです。$p=(0.6,\,0.4)$。

組 B：X = ∂_x（青）　Y = $x\partial_y$（黄土）



`t = 0.60　ずれ = (0.0000, 0.3600)　ずれ/t² = (0.0000, 1.0000)　[X,Y](p) = (0, 1)`

組	X	Y	$[X,Y]$	$[X,Y](p)$	ずれ / t^2（$t=0.5$）	$t=0.01$
A	∂_x	∂_y	0	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
B	∂_x	$x\partial_y$	∂_y	(0, 1)	(0, 1.0000)	(0, 1.0000)
C	R	E	0	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
D	∂_x	R	∂_y	(0, 1)	(0.2448, 0.9589)	(0.0050, 1.0000)
E	$x\partial_y$	$y\partial_x$	$x\partial_x - y\partial_y$	(0.6, -0.4)	(0.9500, -0.7000)	(0.6041, -0.4060)

計算 この図の数値はこの端末で計算しました。表は流れを Runge–Kutta 法（刻み 10^{-3}）で解き、括弧積は (9) を中心差分で評価（A・C のずれは 10^{-15} 以下）。図は流れの閉じた式で計算。

A は座標基底で閉じます。C も可換です：$R=\partial_\theta$、$E=\partial/\partial(\log r)$ は地図 $(\log r,\theta)$ の座標基底です。D は 1-03 §04 の縦列駐車と同じ群 SE(2) を点の動きとして見たもので、ずれは厳密に $(t(1-\cos t),\, t\sin t)$。E は線形な場 $X_A(x)=Ax$ の例で、(9) から $[X_A,X_B]=X_{BA-AB}$：行列の交換子と**符号が逆**です。

「小さな四辺形が閉じない量」は、群の掛け算（1-03 §04）、流れ（この節）、曲率（1-07：小さな輪に沿った平行移動の食い違い）と三度現れます 既知 。

10

ヤン–ミルズの中の多様体

- **時空**：$\mathbb{R}^4$ は一枚の地図で覆えます。出題者の説明は、電磁気のゲージ場（群 U(1) の接続）を「局所的には時空の上の 1 形式」と書き、非可換の場合もこれを群 G に置き換えて扱います（Jaffe–Witten §1） 既知 。1 形式と接続の意味は 1-06・1-07 で与えます。

- **四次元球面**：ユークリッドの $\mathbb{R}^4$（時間の座標も空間と同じ符号で距離に入れたもの。2-04・4-02）の上で、作用 $\int |F|^2$（F は場の強さ、3-02）が有限なヤン–ミルズ方程式（3-03）の解は、ゲージを取り直すと、無限遠点を足した S^4 の上に滑らかに延びるとされます（Uhlenbeck 1982、3-05） 既知 。
- **ゲージ群と格子**：単位元での接空間がリー環（1-04）。格子の配置の空間は群の有限個の積で、コンパクトな多様体です（ここでは、行列の成分を並べた空間の中で有界かつ閉じている、の意味。5-01）。
- **ゲージ軌道の空間**：無限次元で、連続なゲージ固定を大域的に選べないことが論じられています（Singer 1978、3-04） 既知 。

地図とゲージの選択、貼り合わせ写像と遷移関数、球面の地図とゲージ固定の障害はよく似ています。ただし比喩です。正確には、ゲージの側は各点に群を載せる構造（**主束**。1-07 で定義）とその上の接続の話で、この章はその土台です。

この章が言えている範囲

項目	言えていること	言えていないこと
多様体	定義・例・非例・正則値定理 既知 。貼り合わせ・表 1・§05 の例 計算	位相の条件の役割、諸定理の証明。数値は有限個の点
接ベクトル	三つの見方・(6)・(7) 既知 。円での変換則 計算	三つの見方の一致の証明。微分形式（1-06）
流れと括弧積	(9)・(10) 既知 。五組でずれ / $t^2 \to [X,Y](p)$、寄り道の指数 計算	(10) の剰余、可換な枠の定理・毛玉の定理・Poincaré–Hopf の定理の証明
ヤン–ミルズ	案内のみ	質量ギャップ・理論の構成については何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§02・§03・§05〜§09 の定義と定理の多く	既知（本文を確認）	S. M. Carroll, “Lecture Notes on General Relativity”, arXiv:gr-qc/9712019 (1997)。式 (2.4)〜(2.13)・(3.69)・(3.74)・(5.16) の周辺
行列リー群はリー群、GL(n, ℝ) は開集合、リー環は単位元での接空間	既知（本文を確認）	B. C. Hall, “An Elementary Introduction to Groups and Representations”, arXiv:math-ph/0005032 (2000)。定義 2.14・定理 2.15、第 3 章演習 19

もの	種別	出典・道具
問題文の $\mathbb{R}^4$、T^4 と一般の四次元多様体、接続が局所的に 1 形式（U(1) の場合）	一次資料（本文を確認）	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”, Clay Mathematics Institute の公式問題説明。§1・§4〜§6
正則値定理、式 (10)、位相の条件	書誌のみ	J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer GTM (2013)
毛玉の定理	書誌のみ	J. Milnor, “Analytic Proofs of the ‘Hairy Ball Theorem’ and the Brouwer Fixed Point Theorem”, Amer. Math. Monthly 85 (1978) 521–524
Poincaré–Hopf の定理（零点が有限個の場の指数の和）	書誌のみ（Poincaré の原論文は未確認）	H. Hopf, “Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten”, Math. Ann. 96 (1927) 225–249／J. Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, University Press of Virginia (1965)
エキゾチック $\mathbb{R}^4$ が連続体濃度だけあること	書誌のみ	C. H. Taubes, “Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds”, J. Differential Geom. 25 (1987) 363–430
ゲージ固定の障害	書誌のみ	I. M. Singer, “Some remarks on the Gribov ambiguity”, Commun. Math. Phys. 60 (1978) 7–12
S^4 への延長（ユークリッドの $\mathbb{R}^4$・作用が有限・ゲージの取り直し）	書誌のみ	K. Uhlenbeck, “Removable singularities in Yang–Mills fields”, Commun. Math. Phys. 83 (1982) 11–29
図 1・図 2・表 1・§05 の例・寄り道の数値	この端末で計算	Python 3.12・NumPy 1.26。図は素の JavaScript

次に読む章：1-06 微分形式と外微分 — 接ベクトルを食べて数を返すもの（1 形式）と Stokes の定理へ。

微分形式と外微分 — 勾配・回転・発散を一つの d にまとめ、穴を数える

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 微分形式は接ベクトルを食べて数を返す「向きのついた測り」です。外微分 d は勾配・回転・発散をまとめ、$d^2 = 0$ と Stokes の定理が全体を支えます。閉で完全でない形式が穴を数えること、電磁場が $F = dA$ と書けること、四次元でだけ F と $*F$ が比べられることまで。

前提となる章 — 1-05 多様体と接空間。行列式は 1-01。§09 で使う計量はその場で最小限を定義し、符号の約束は 2-04 に合わせます。

先に言うこと — 準備の章で、質量ギャップについては何も示しません。Stokes・Poincaré・de Rham の定理は筋だけを示すか証明せずに引きます（既知）。ゲージ場は U(1) までで、行列値の場合は 1-07 です。

この章の順序

1. なぜ微分形式か — 積分されるものに名前を
2. 1-形式 — 線積分は引き戻し
3. k-形式と外積 — 向きつきの面積（図 1）
4. 外微分 — $d^2 = 0$・勾配・回転・発散
5. 積分と向き — ヤコビアンは外積から出る・半球面の例
6. Stokes の定理 — 内側の辺は打ち消し合う（図 2）
7. 閉と完全 — dθ と巻き数（図 3）
8. de Rham コホモロジーの入口 — 穴を数える。寄り道：格子の上の微分形式（図 4）
9. ホッジ双対と Maxwell 方程式 — 計量から $*$ を作る・$F = dA$・四次元の特別さ

01

なぜ微分形式か

線積分の $P\,dx + Q\,dy$ は、積分記号の中の飾りに見えます。微分形式は、この「積分されるもの」を独立した対象にする言葉です。座標の取り替えでの変わり方が連鎖律で決まり、勾配・回転・発散が一つの演算 d にまとまります。

$$\int_\gamma (P\,dx + Q\,dy) = \int_a^b \big(P(\gamma(t))\,x'(t) + Q(\gamma(t))\,y'(t)\big)\,dt, \qquad \gamma(t) = (x(t), y(t)) \tag{1}$$

「dx を $x'(t)\,dt$ に置き換える」規則が、§02 で**引き戻し**と呼ぶものの最初の例です。**例**。逆向きにたどると (1) は符号が変わり、長さ $\int |\gamma'(t)|\,dt$ は変わりません。微分形式が測るのは**向きのついた量**です。(1) の被積分関数は、曲線の各点の速度 $(x'(t), y'(t))$ に数を返す規則になっています。この「接ベクトルに数を返す」という見方が §02 の出発点です。

この本では電磁場が $F = dA$（§09）、ゲージ場が行列値の 1-形式（1-07）、インスタントン数が 4-形式の積分（3-05）として現れます。

02

1-形式

点 p の接ベクトル（1-05）に数を返す線形の関数を**余接ベクトル**、それを各点に滑らかに与えたものを**1-形式**と呼びます。基本の例は関数の微分 df で、v に方向微分を返します（繰り返す添字は和）。

$$df_p(v) = v^i\,\frac{\partial f}{\partial x^i}(p), \qquad dx^i\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = \delta^i_j, \qquad \alpha = \alpha_i\,dx^i \tag{2}$$

dx^i は $\partial/\partial x^j$ の双対基底で、座標の取り替えでは連鎖律から $dx'^j = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\,dx^i$。成分 α_i は、接ベクトルの成分を変える行列 $\partial x'^j/\partial x^i$ の逆行列の転置で変わるので、$\alpha(v) = \alpha_i v^i$ は座標に依りません。曲線 γ での線積分は、**引き戻し** $\gamma^*\alpha = \alpha_i(\gamma(t))\,\dot\gamma^i(t)\,dt$ の一変数の積分 $\int_a^b \gamma^*\alpha$ です。

例 1。$\alpha = -y\,dx + x\,dy$ を単位円 $(\cos t, \sin t)$ で引き戻すと $\gamma^*\alpha = dt$、積分は 2π。**例 2**。$\gamma^* df = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\,dt$ なので

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \tag{3}$$

で、閉曲線なら 0。よって例 1 の α はどんな f の df でもありません。ただし α は §07 で言う「閉」でもありません（§04 の (7) で $d\alpha = 2\,dx \wedge dy \neq 0$）。閉なのに df の形でない例は §07 の $d\theta$ です。

曲線でなくても引き戻しの規則は同じです。写像 $\varphi : u \mapsto x = \varphi(u)$ に対して $\varphi^{*}\omega$ は、ω の中の x を $\varphi(u)$ に、dx^{i} を $\frac{\partial \varphi^{i}}{\partial u^{j}}\,du^{j}$ に置き換えたものです。曲線は $u = t$ が一変数の場合で、§03 以降の L^{*}・φ^{*} はすべてこの意味です。

03

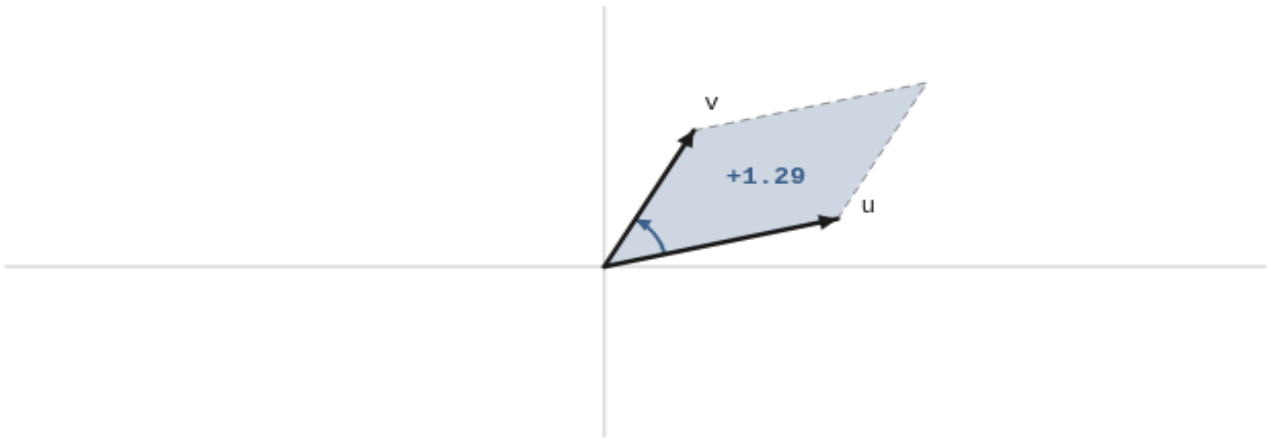
k-形式と外積

2-形式は二本の接ベクトルから数を返し、それぞれについて線形で、入れ替えると符号が変わるものです。比喩で言えば「向きを覚えた面積計」、正確には各点の接空間上の反対称な双線形形式を滑らかに並べたものです。

$$(\alpha \wedge \beta)(u, v) = \alpha(u)\,\beta(v) - \alpha(v)\,\beta(u), \qquad (dx \wedge dy)(u, v) = u^{1}v^{2} - u^{2}v^{1} = \det[\,u\ v\,] \tag{4}$$

左が 1-形式の**外積**で、規則は $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$、特に $\alpha \wedge \alpha = 0$。右は u, v の張る平行四辺形の向きつき面積で、v が u の時計回りの側に来ると負です（図 1）。n 次元の k-形式は $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$（$i_1 < \cdots < i_k$）の関数係数の和で、成分は $\binom{n}{k}$ 個、k > n なら 0 です。k-形式と l-形式の外積は (k+l)-形式で、$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl}\,\beta \wedge \alpha$。

図 1　つまみで v の向きを回すと、平行四辺形の向きつき面積 $(dx \wedge dy)(u, v) = \det[\,u\ v\,]$ の符号が変わります。二本目が一本目の反時計回りの側なら正（青）、時計回りの側なら負（黄土）、一直線に並ぶと 0。「順番を入れ替える」で (v, u) にすると、同じ平行四辺形で符号だけが逆になります。



v の向き 60°　(dx∧dy)(u, v) = +1.293　二本目は一本目の反時計回りの側 → 正

計算 $u = (1.5, 0.35)$、$|v| = 1.15$。面積は式 $u^{1}v^{2} - u^{2}v^{1}$ をその場で計算しています（符号と「反時計回りの側」の対応は 360 通りの向きで照合）。

例。 $\mathbb{R}^{3}$ では 1-形式も 2-形式も 3 成分です。$a = a_i\,dx^{i}$、$b = b_i\,dx^{i}$ の外積を $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$, $dx \wedge dy$ の係数で読むと、外積ベクトル $a \times b$ です（無作為な 10^{4} 組で一致 計算 ）。$\mathbb{R}^{4}$ の 2-形式は 6 成分で、電場 3 と磁場 3 がちょうど入ります（§09）。線形写像 L で引き戻すと $L^{*}(dx \wedge dy) = (\det L)\,dx \wedge dy$ です。

04

外微分

$f \mapsto df$ を、k-形式から (k+1)-形式への操作に延ばします（今の形の外微分は É. Cartan（1899）に始まるとされます）。規則は「係数を微分し、出てきた dx^j を左から外積で掛ける」だけです。

$$d\bigl(f\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\bigr)=\frac{\partial f}{\partial x^j}\,dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k} \tag{5}$$

d は線形で、k-形式 α について $d(\alpha\wedge\beta)=d\alpha\wedge\beta+(-1)^k\alpha\wedge d\beta$。そして

$$d\circ d=0 \tag{6}$$

理由：$d(df)=\partial_i\partial_j f\,dx^i\wedge dx^j$ で、係数は i, j について対称（偏微分の順序交換）、$dx^i\wedge dx^j$ は反対称なので和が消えます。k-形式でも、係数の二階微分の対称性と外積の反対称性で同じように消えます。**例**。平面では $dx\wedge dx=0$ と $dy\wedge dx=-dx\wedge dy$ だけを使って

$$d(P\,dx+Q\,dy)=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy \tag{7}$$

既知 $\mathbb{R}^3$ では 0-形式の d が勾配、1-形式 $a_i\,dx^i$ の d が回転（$(\partial_y a_z-\partial_z a_y)\,dy\wedge dz+\cdots$）、2-形式 $b_x\,dy\wedge dz+\cdots$ の d が発散 $(\nabla\cdot\mathbf{b})\,dx\wedge dy\wedge dz$ です。(6) は $\nabla\times\nabla f=0$ と $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{a})=0$ を一度に言っていて、2-03 §02 がポテンシャルを導入したときの恒等式です。

§02 の引き戻しと d は入れ替えられる（$\varphi^*d\omega=d\varphi^*\omega$）既知 ので、$d$ は座標に依らず、計量なしに多様体の上で定義されます。極座標の $df=\partial_r f\,dr+\partial_\theta f\,d\theta$ には勾配の公式の $1/r$ が無く、$1/r$ は計量から入ります。

05

積分と向き

k-形式は向きのついた k 次元の部分の上で積分します。部分を $\varphi: D\subset\mathbb{R}^k\to M$ で表し、引き戻して普通の多重積分にします：$\int_\varphi\omega=\int_D\varphi^*\omega$。(4) から次が出ます。

$$\varphi^*(dx^1\wedge\cdots\wedge dx^k)=\det\!\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial u^j}\right)du^1\wedge\cdots\wedge du^k \tag{8}$$

変数変換の公式の $|\det|$ の代わりに符号つきの $\det$ が出て、向きを反転すると符号が変わります。多様体全体では地図ごとに計算して貼り合わせるので、全体で向きを揃えられること（**向き付け可能**）が要ります（メビウスの帯は不可）既知 。

例。極座標では $dx \wedge dy = (\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta) \wedge (\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta) = r\, dr \wedge d\theta$。面積要素の r は外積から出ます。

例（曲面）。上半球面を外向きに向け、球座標 $\psi(\vartheta, \varphi) = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$（$0 \le \vartheta \le \pi/2$）で表します。$(\vartheta, \varphi)$ の順は外向きの向きに合います。(8) の det（x, y の二成分についての 2×2）を計算すると $\psi^*(dx \wedge dy) = \cos\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta \wedge d\varphi$ なので

$$\int_{\text{上半球面}} z\, dx \wedge dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \cos^2\vartheta\, \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \frac{2\pi}{3}$$

です（数値積分と向きの確認 計算 ）。値は半球体の体積と同じです。偶然ではなく、次の §06 の Stokes の定理の一例です：$d(z\, dx \wedge dy) = dx \wedge dy \wedge dz$ で、半球体の縁のうち底の円板では $z = 0$ です。

06

Stokes の定理

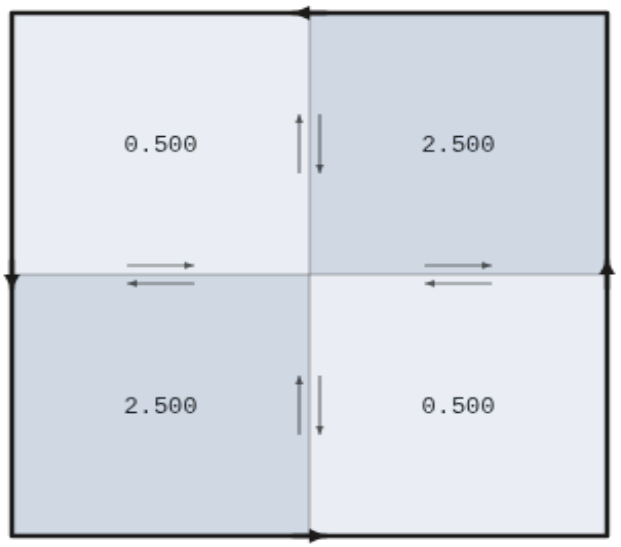
「内側での微分の総和は、縁での値の総和」。(3) を全次元にまとめた形です。M をコンパクトで向きのついた n 次元の多様体（縁 ∂M があってよい）、ω を (n−1)-形式とすると

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \tag{9}$$

∂M の向きは、外向きの法線を先頭に置くと M の向きになるように取ります。区間なら (3)、平面の領域なら (7) による Green の定理、$\mathbb{R}^3$ の曲面なら回転の Stokes の定理、立体なら Gauss の発散定理です 既知 。

証明の筋。長方形 $[a,b]\times[c,d]$ で $\omega = Q\, dy$ なら $\iint \partial_x Q\, dx\, dy = \int_c^d (Q(b,y) - Q(a,y))\, dy$ で、右の辺（上向き）と左の辺（下向き）の線積分の和です。一般の領域は小さな正方形に分けます。隣り合う正方形は共通の辺を逆向きにたどるので内側の辺は打ち消し合い、外周だけが残ります。一方、小さな正方形の周回は「中心の $d\omega$ × 面積」に近づきます。

図 2　分割の数 N を変えても、小正方形の周回（数字と塗り）の総和は外周の値 6 のまま。「周回 ÷ 面積」は中心の $d\omega$ に近づきます。N ≤ 4 では内側の辺に、両隣がたどる逆向きの矢印を描きます。



N = 2 Σ 周回 = 6.000000 外周の ∮ = 6.000000 max|周回/面積 − dω| = 0.250000 = 1/4

$\omega = (-\frac{y}{4} - xy^2 - y^3)\,dx + (\frac{x}{4} + x^2 y)\,dy$、$d\omega = (\frac{1}{2} + 4xy + 3y^2)\,dx \wedge dy$、領域 $[-1,1]^2$。計算 周回は四辺の線積分の閉じた式でその場で計算（表 1 と一致）。

計算 **表 1**　図 2 の ω で、各小正方形の周回を四辺の線積分の和として求めたもの（面積分は使わない）。

N	周回の総和	max |周回/面積 − dω(中心)|
1	6.000000000000	1.000000
2	6.000000000000	0.250000
8	6.000000000000	0.015625
64	6.000000000000	0.000244

総和はどの N でも外周の $\oint \omega = 6$ と一致し（差 3×10^{-15} 以下）、ずれはちょうど $1/N^2$ で減ります（一辺 $h = 2/N$ の正方形で $3y^2$ の平均が中心の値より $h^2/4$ 大きい）。単位円板でも両辺は $5\pi/4$ で一致 計算 。

07

閉と完全

$d\omega = 0$ なら**閉**、$\omega = d\eta$ となる η があれば**完全**といいます。(6) から完全なら閉。逆は空間の形に依ります。原点を除いた平面で：

$$d\theta := \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} \tag{10}$$

(7) で $\partial_x \frac{x}{r^2} + \partial_y \frac{y}{r^2} = \frac{2r^2 - 2x^2 - 2y^2}{r^4} = 0$ なので閉。単位円では例 1 と同じく $\oint d\theta = 2\pi$ なので、(3) から完全ではありません。偏角 θ は一周で 2π 増えるので、切れ目（例えば負の x 軸）を

入れた領域でだけ関数です。**dθ は切れ目なしに定義されます。**

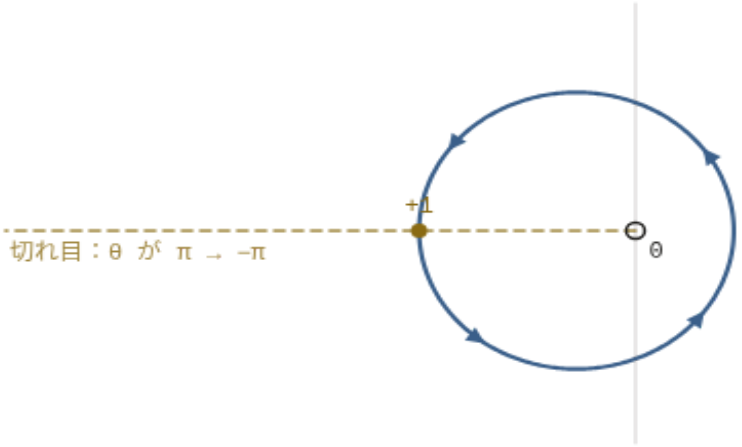
Poincaré の補題。星形の領域（ある点と各点を結ぶ線分を含む）では閉形式はすべて完全です 既知 。原点に関して星形なら、閉じた 1-形式 α に対し

$$\eta(x) = \int_0^1 x^i \, \alpha_i(tx) \, dt \tag{11}$$

が $d\eta = \alpha$ を満たします（$d(\sin x\, e^y + x^3 y)$ で確認。基点を (1, 0) に移すと右半平面の dθ から θ が戻る 計算 ）。

巻き数。$\frac{1}{2\pi}\oint_\gamma d\theta$ は閉曲線 γ が原点の周りを回る回数で、原点をまたがない変形では変わりません（変形の軌跡の帯で dθ は閉なので、(9) から差は 0）。θ は負の x 軸を上から下へ横切るたびに π から −π へ跳ぶので、巻き数は**切れ目を横切った向きつきの回数**でもあります。

図 3　閉曲線の中心 c_x を動かすと、$\frac{1}{2\pi}\oint d\theta$ が 0・1・2 と整数で跳びます。値は曲線が原点をまたぐときだけ変わり、切れ目（破線）を横切る向きつきの回数に等しい。



円・中心 (-0.375, 0)　∮dθ/2π = 1.000000　切れ目の横切り = 1　原点との距離 0.625

計算 720 点での偏角の差の和をその場で計算（16 か所でこの端末の計算と一致）。リマソンは $r = \frac{1}{2} + \cos t$ を $(c_x, 0)$ ずらした曲線。

計算 **表 2**　$\frac{1}{2\pi}\oint d\theta$。$2\times10^5$ 点で二通りに計算し、整数との差は 10^{-9} 未満。

閉曲線	巻き数
円 半径 1・中心 (0, 0)／逆回り／2 周	1／−1／2
円 半径 1・中心 (2, 0)（原点を囲まない）	0
リマソン $c_x = -0.25$／-1／0.5	2／1／0

1-05 の寄り道（毛玉の定理）の零点の指数もこの巻き数です。2-03 §06 のソレノイドの外では $A = \frac{\Phi}{2\pi}\,d\theta$ で、$dA = 0$ なのに周回は Φ。Aharonov–Bohm 効果は、閉で完全でない形式の物理です。

08

de Rham コホモロジーの入口

閉形式のうち完全なものを 0 と見なし、残りを数えます。

$$H^k(M) = \frac{\{\omega : d\omega = 0\}}{\{d\eta\}}, \qquad b_k(M) = \dim H^k(M) \tag{12}$$

b_k を **Betti 数**と呼びます。**例**。H^0 は連結成分ごとに定数の関数なので、b_0 は連結成分の数。$H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ は [dθ] が張る一次元です（閉形式 ω から $c\,d\theta$ を引いて単位円での周回を 0 にすると完全になります。どの閉曲線も原点をまたがずに「単位円を何周かする曲線」へ変形でき、変形で周回は変わらない（§07 の議論）ので周回はすべて 0。すると基点からの線積分が道に依らず関数を定めるからです 既知 ）。球面の面積形式 σ は閉で $\int_{S^2}\sigma = 4\pi$ ですが、$\sigma = d\eta$ なら縁の無い S^2 で (9) から積分は 0 のはず。よって完全ではありません。

de Rham（1931）の定理を今日の言葉で言うと、H^k は形式を使わず位相だけで定義されるコホモロジー（実係数）と一致します 既知 。例：$\mathbb{R}^n$ は (1, 0, 0, ⋯)、$\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ は (1, 0, 1, 0)、S^4 は (1, 0, 0, 0, 1)（3-05 の舞台）。

点磁荷。$\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ の 2-形式 $\beta = (x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy)/r^3$ は磁場 $\hat{\mathbf{r}}/r^2$ で、$d\beta = 0$ ですが原点を囲む閉曲面での積分は 4π（球面・ずらした立方体で差 10^{-9} 未満、囲まない球面で 0 計算 ）です。よって全体で $dA = \beta$ となる A はありません。負の z 軸の外では $A_N = (1-\cos\vartheta)\,d\varphi$、正の z 軸の外では $A_S = -(1+\cos\vartheta)\,d\varphi$（球座標）が使え、差 $2\,d\varphi$ は多価の関数 2φ によるゲージ変換です 計算 。北と南の二つの領域でポテンシャルを別々に取り、重なりでゲージ変換により貼り合わせる扱いは Wu–Yang（1975）の §III にあります。この貼り合わせの言葉が束と接続です（1-07）。

全磁束を Φ とすると差は $\frac{\Phi}{2\pi}\,d\varphi$（ここでは Φ = 4π）です。電荷 q の粒子の位相因子 $e^{iq\chi/\hbar}$（2-03）が $\chi = \frac{\Phi}{2\pi}\varphi$ で一価になるのは、$q\Phi/h$ が整数のときです。点磁荷の量子化は Dirac（1931）によるもので、束の言葉での読みは 1-07 §08 にあります。

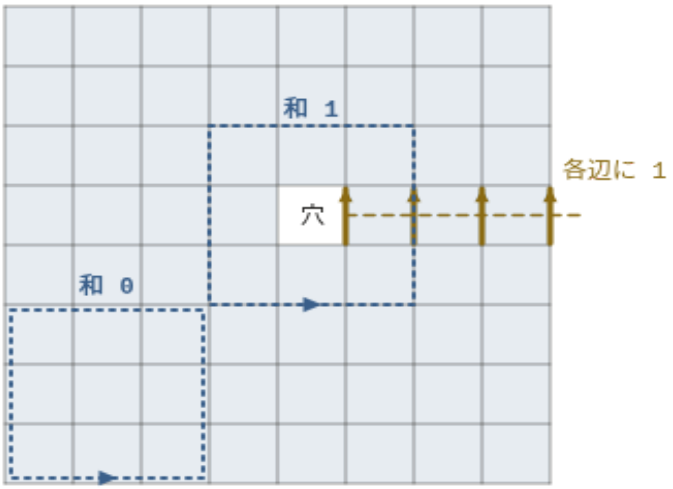
寄り道：格子の上の微分形式

飛ばしてよい小節です。

正方格子の頂点・向きつきの辺・面に値を置いたものを 0-・1-・2-形式とし、d_0 を辺の両端の差、d_1 を面の縁を反時計回りにたどった和とします。各頂点は面の縁で + と − に一度ずつ現れるので、$d_1 d_0 = 0$ は整数の行列として厳密です（2-03 の格子でゲージ関数が面の値から消えた理由）。$b_0 = \dim\ker d_0$、$b_1 = \dim\ker d_1 - \operatorname{rank} d_0$、$b_2 = F - \operatorname{rank} d_1$（F は面の数）を計算したのが表 3 です。

計算 **表 3**　格子の上の Betti 数（一辺 L = 8。L = 4 でも同じ）と、対応する滑らかな曲面の既知の値。表は図 4 の中にあり、行を選ぶと図が変わります。

図 4　下の表の行を選ぶと、その格子（一辺 8）と、頂点・辺・面の数 V・E・F、Betti 数が出ます。「面を一つ除く」では、切れ目（破線）を横切る辺に 1 を置いた 1-形式（太い矢印）と、二つの閉路（点線）での和を描きます。穴を囲む閉路で 1、囲まない閉路で 0 です。



面を一つ除く　V = 81　E = 144　F = 63　$(b_0, b_1, b_2) = (1, 1, 0)$　$V - E + F = 0 = b_0 - b_1 + b_2$

格子	(b_0, b_1, b_2)	滑らかな場合
正方形	(1, 0, 0)	円板 (1, 0, 0)
面を一つ除く	(1, 1, 0)	穴が一つの円板 (1, 1, 0)
面を二つ除く	(1, 2, 0)	穴が二つの円板 (1, 2, 0)
周期的な格子	(1, 2, 1)	トーラス T^2 (1, 2, 1)
立方体の表面	(1, 0, 1)	球面 S^2 (1, 0, 1)

計算 この図の数はこの端末で計算しました（整数の行列 d_0・d_1 の階数から）。図はその数を埋め込んで描くだけです。

細かさに依らず滑らかな場合の値が出ます（両者のコホモロジーが一致するという定理の小さな確認 既知 ）。図 4 の数では $V - E + F = b_0 - b_1 + b_2$ も成り立っています。核の次元と階数の和が列の数になることから、どの格子でも言えます 既知 。穴一つの格子で、穴から右端への切れ目を横切る辺にだけ 1 を置くと閉で、穴を一周する和は 1、穴を囲まない閉路では 0 です 計算 。dθ/2π の格子版です。辺に数でなく群の元を置くのが Wilson の格子ゲージ理論です（5-01）。

09

ホッジ双対と Maxwell 方程式

ここまで計量を使っていません。ホッジ双対には計量が要るので、この節で使う分だけをその場で定義します。計量は、座標の方向どうしの内積 η_{ij} の表で与えます（ここでは対角で、成

分は ±1)。ミンコフスキー時空（2-04）では座標 (t,x,y,z) について $\eta=\mathrm{diag}(-1,1,1,1)$（符号 $(-,+,+,+)$）、$c=\varepsilon_0=\mu_0=1$)、ユークリッドの $\mathbb{R}^4$ では $\eta=\mathrm{diag}(1,1,1,1)$ です。

- **体積形式**：$\mathrm{vol}=dt\wedge dx\wedge dy\wedge dz$（ユークリッドでは $dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3\wedge dx^4$)。
- **形式どうしの内積**：基底について $\langle dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k},\ dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\rangle=\eta_{i_1i_1}\cdots\eta_{i_ki_k}$、添字の組が違う基底どうしは 0。一般の形式には係数について双線形に延ばします。
- **ホッジ双対**：k-形式 β を (n−k)-形式 $*\beta$ に移す線形写像で、すべての k-形式 α について $\alpha\wedge*\beta=\langle\alpha,\beta\rangle\,\mathrm{vol}$ となるもの。

例。ミンコフスキーで $\langle dt\wedge dx,dt\wedge dx\rangle=\eta_{tt}\eta_{xx}=-1$ と $dt\wedge dx\wedge dy\wedge dz=\mathrm{vol}$ から $*(dt\wedge dx)=-dy\wedge dz$。$\langle dy\wedge dz,dy\wedge dz\rangle=+1$ と $dy\wedge dz\wedge dt\wedge dx=\mathrm{vol}$ から $*(dy\wedge dz)=dt\wedge dx$ です（2-形式の基底 6 個すべてで確認 計算)。時間を含む基底にだけ −1 が入り、これが (14) の符号と下の $**$ の符号に効きます。

電磁場に使います。ポテンシャルを 1-形式にまとめると

$$A=-\phi\,dt+A_x\,dx+A_y\,dy+A_z\,dz,\qquad F=dA=-E_i\,dt\wedge dx^i+B_x\,dy\wedge dz+B_y\,dz\wedge dx+B_z\,dx\wedge dy \tag{13}$$

（$\mathbf{E}=-\nabla\phi-\partial_t\mathbf{A}$、$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$)。Maxwell 方程式の四本は二つになります。

$$dF=0,\qquad d{*}F=*j,\qquad j=-\rho\,dt+J_x\,dx+J_y\,dy+J_z\,dz \tag{14}$$

$dF=0$ は (6) から自動的で 2-03 の源の無い Maxwell の式の二本、$d{*}F=*j$ が源のある Maxwell の式の二本です（無作為なポテンシャルで確認 計算)。ゲージ変換 $A\mapsto A+d\chi$ で F が変わらないのも (6) です（2-03 のゲージ変換の式)。作用に入るのは $F\wedge*F=(|\mathbf{B}|^2-|\mathbf{E}|^2)\,\mathrm{vol}$、また $F\wedge F=-2(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})\,\mathrm{vol}$ です 計算 。

四次元でだけ起きること

$*F$ は (n−2)-形式で、F と同じ次数になるのは n = 4 だけです。2-形式の上の $**$ はユークリッドの $\mathbb{R}^4$ で +1（$*$ の固有値 ±1 が 3 個ずつ)、ミンコフスキーで −1（固有値 $\pm i$）です（公式 $(-1)^{k(n-k)+s}$、s は負の符号の数、とすべての k で一致 計算)。ユークリッドでは $F=F^+ +F^-$（自己双対・反自己双対）と分かれ、$|F|^2=|F^+|^2+|F^-|^2\geq\big||F^+|^2-|F^-|^2\big|=|\langle F,{*}F\rangle|$。積分すると $\int F\wedge*F\geq|\int F\wedge F|$、等号は $F=\pm*F$ で、インスタントンの不等式の骨格です（3-05)。

ミンコフスキーでは 2-形式の上で $**=-1$ なので、$*F=\lambda F$ なら $-F=\lambda^2F$ となり、$*F=\pm F$ を満たす実の F は 0 だけです。物理では、インスタントンを虚時間（2-04・4-02）で考えます。U(1) では $F\wedge F=d(A\wedge F)$ と完全なので、その積分は境界（無限遠）の項だけで決まります。非可換の場合に、これが整数値の位相的な量になります（3-05)。

四次元の記事・1-12 も参照。非可換では $F = dA + A \wedge A$（A は反エルミートな行列に値をとる幾何の書き方。物理の書き方との翻訳は 3-02）で、$dF = 0$ の代わりに $dF + A \wedge F - F \wedge A = 0$（Bianchi）です（1-07・3-03）。

この章が言えている範囲

項目	言えていること	言えていないこと
外微分・Stokes	(4)〜(8)、$d^2 = 0$ の理由、半球面の例、表 1 計算	引き戻しと d の可換性、一般の Stokes の定理の証明 既知
閉と完全・de Rham	dθ・面積形式・点磁荷が完全でない理由、表 2・3、図 4 の切れ目の 1-形式 計算	Poincaré の補題の一般形、de Rham の定理 既知
Maxwell とホッジ双対	基底での $*$ の値、(14) の符号、$F \wedge *F$・$F \wedge F$、$**$ の符号と固有値 計算	非可換の場合（1-07・3-03）、インスタントンの存在（3-05）
ヤン–ミルズ	ゲージ場が形式で書ける理由、四次元の特別さの一つ	質量ギャップ・理論の構成については何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1〜3、本文の数値、図 1〜4	**この端末で計算**	Python 3.12・NumPy 1.26：`forms_algebra.py`・`stokes_cells.py`・`winding.py`・`cochains.py`・`monopole.py`・`maxwell_forms.py`・`hodge_basis.py`・`hemisphere.py`・`lattice_fig.py`。図は素の JavaScript（図 1 は行列式をその場で計算、図 2・3 の関数は node で表 1・`winding.py` と照合、図 4 は `lattice_fig.py` の数を埋め込み）
外微分・Stokes・Poincaré の補題・de Rham の定理	既知（書誌のみ）	M. Spivak, *Calculus on Manifolds* (1965)；R. Bott, L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology* (1982)
外微分の起源	一次資料（書誌のみ）	É. Cartan, Ann. Sci. ÉNS (3) 16 (1899) 239–332。外微分の起源という位置づけは二次資料による
de Rham の定理	一次資料（書誌のみ。定理の帰属は二次資料で確認）	G. de Rham, J. Math. Pures Appl. (9) 10 (1931) 115–200
点磁荷を二つの領域の貼り合わせで扱うこと（§ III）	一次資料（本文を確認）	T. T. Wu, C. N. Yang, Phys. Rev. D 12 (1975) 3845–3857

もの	種別	出典・道具
点磁荷の量子化	一次資料（書誌のみ。帰属は Wu–Yang の本文による）	P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. Lond. A 133 (1931) 60

次に読む章：1-07 ベクトル束と接続（§08 の貼り合わせ）。

ベクトル束と接続 — 点ごとに別々の空間を、道に沿って比べる規則

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 各点のベクトル空間を道に沿って比べる規則（接続）を行列値の 1-形式 A で書き、平行移動・曲率 $F = dA + A \wedge A$・ホロノミー・ゲージ変換 $A \mapsto gAg^{-1} - (dg)g^{-1}$ を一続きに導きます。単極子の貼り合わせからは整数（第一 Chern 数）が出ます。

前提となる章 — 1-04（リー環・随伴表現）と 1-06（1-形式・外微分・§08 の点磁荷）。2-03 の位相因子を知っていると早く読めます（§08 で要る分はその場で定義します）。

先に言うこと — 準備の章で、質量ギャップについては何も示しません。Gauss–Bonnet・Ambrose–Singer・Chern 数の整数性は証明せずに引きます（既知）。ゲージ軌道の空間は 3-04 です。

この章の順序

1. なぜ束と接続か — 運んでからでないと引けない
2. ベクトル束 — 変換関数・自明な束とねじれた束
3. 接続と共変微分 — ゲージ変換の式
4. 平行移動 — 球面の一周（図 1）。寄り道：フーコーの振り子
5. 曲率 — 小さな輪のずれ・定数でも曲がる接続（図 2）
6. ホロノミー — Wilson ループ
7. ゲージ変換の幾何 — Bianchi 恒等式
8. 貼り合わせと整数 — 北と南の位相因子（図 3）・第一 Chern 数

01

なぜ束と接続か — 運んでからでないと引けない

場 ψ が各点で $\mathbb{C}^N$ に値をとるとします（クォークの色なら $N=3$）。ゲージ理論では、各点の $\mathbb{C}^N$ の基底（どの向きを「一番目の色」と呼ぶか）を点ごとに選び直してよいと考えます（3-01）。すると $\psi(x+h)-\psi(x)$ は別々の基底で書いた成分の差で、選び直すと値が変わります。球面の接ベクトルも同じで、北極と赤道の接平面は別物です。そこで、一方の空間を道に沿って他方へ運ぶ規則 P を用意し、運んでから引きます（e_i は座標方向）。

$$D_i\psi(x)=\lim_{h\to 0}\frac{P_{x+he_i\to x}\,\psi(x+he_i)-\psi(x)}{h} \tag{1}$$

運ぶ規則を**接続**、各点の空間を束ねたものを**ベクトル束**と呼びます。**例。**電磁気学では $N=1$ で、運ぶ規則は位相因子 $e^{\frac{iq}{\hbar}\int \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}}$ でした（2-03）。この章はそれを行列に広げ、1-06 §08 の「二枚の貼り合わせ」も同じ言葉で扱います。

02

ベクトル束 — 局所的には積、全体ではねじれうる

ベクトル束 $E\to M$ は、多様体 M（1-05）の各点 x に N 次元の空間 E_x（**ファイバー**）を付け、小さな開集合 U_α の上では $U_\alpha\times\mathbb{C}^N$ と同一視できるようにしたものです。N を**階数**、$N=1$ のものを**直線束**と呼びます。ファイバーを $\mathbb{R}^N$ にしても同じように定義でき、これを**実ベクトル束**と呼びます。同一視を与える基底が**局所的な枠**で、重なりでは二つの枠の成分が行列で結ばれます。

$$\psi_\alpha=g_{\alpha\beta}\,\psi_\beta,\qquad g_{\alpha\beta}\,g_{\beta\gamma}=g_{\alpha\gamma} \tag{2}$$

$g_{\alpha\beta}$ を**変換関数**、三つが重なる所での右の式をコサイクル条件と呼び、変換関数が群 G（U(1)・SU(N) など）に値をとるとき G を**構造群**と呼びます。(2) を満たす変換関数があれば貼り合わせで束が作れます 既知 。各点で E_x の元を滑らかに選んだものが**切断**で、場 ψ は切断です。

自明な束とねじれた束

全体で $M\times\mathbb{C}^N$（実なら $M\times\mathbb{R}^N$）と同一視できる束を**自明**と呼びます。次の三つは自明ではありません 既知 ：メビウスの帯（ファイバー $\mathbb{R}$ の実直線束。円を二つの弧で覆うと、重なりの一方で変換関数 +1、他方で −1）、接束 TS^2（実の階数 2 の束）、§08 の単極子の束（$n\neq 0$）。自明なら 0 にならない切断があるはずです。メビウスの帯では、切断を枠で書いた値が一周で符号を変えるので、中間値の定理でどこかが 0 になります。TS^2 では毛玉の定理（1-05）がそれを禁じます。

ファイバーを複素数にすると、同じ変換関数でもねじれが解けます。$-1 = e^{i\pi}$ は U(1) の中で e^{it}（t を π から 0 へ）と 1 まで連続に動かせ、変換関数を連続に動かしても束は同型のままなので 既知 、重なりで +1 と −1 を変換関数とする複素直線束は自明です。円の上では、ねじれが残るかは、変換関数が値をとる群の中でそれを 1 まで連続に動かせるかで決まります。$\{\pm 1\}$ の中では動かせず、U(1) の中では動かせます。§08 では U(1) の中の巻き数が、この動かせなさを担います。$\mathbb{R}^4$ の上の束は自明ですが 既知 、無限遠を一点と見なした S^4 や周期的な格子では自明でない束が現れます（3-05）。

03

接続と共変微分 — $D = d + A$

枠を決めると、(1) の P の一次の項が行列値の 1-形式 $A = A_i\,dx^i$ になります。$A_i(x)$ は構造群のリー環 $\mathfrak{g}$ の元で（1-03）、U(N)・SU(N) なら反エルミート行列です。

$$D\psi = d\psi + A\,\psi, \qquad D_i\psi = \partial_i\psi + A_i\,\psi \tag{3}$$

(1) で $P_{x+he_i\to x} = 1 + hA_i + O(h^2)$ と置いたものです。枠を $\psi' = g\psi$（$g(x)\in G$）と取り替えても $D'\psi' = g\,D\psi$ となるには、$(d+A')(g\psi) = dg\,\psi + g\,d\psi + A'g\psi$ が $g(d\psi + A\psi)$ に等しいことから

$$A' = g\,A\,g^{-1} - (dg)\,g^{-1} \tag{4}$$

が要ります。これが**ゲージ変換**です。重なりの A_α と A_β も $g = g_{\alpha\beta}$ として (4) で結ばれ、**貼り合わせとゲージ変換は同じ式**です。

例（U(1)）。$A = -\frac{iq}{\hbar}\,\mathbf{A}\cdot d\mathbf{x}$、$g = e^{iq\chi/\hbar}$ と置くと、(3) は 2-03 の共変微分、(4) は $\mathbf{A}\mapsto \mathbf{A} + \nabla\chi$ です。物理の本はエルミートな T_a（1-04）で $A = -i\,A_\mu^a T_a\,dx^\mu$ と書き、実数の A_μ^a をゲージ場と呼びます（結合定数の置き方は 3-02）。二つの接続の差は $g(A_1 - A_2)g^{-1}$ と変わり（dg の項が消える）、足し引きできる量です。接続の全体はそこで**アフィン空間**——原点は決まっていないが、二点の差がベクトル空間の元になる集合——になります。基準の接続 A_0 を一つ選べば、どの接続も A_0 ＋（$\mathfrak{g}$ 値の 1-形式）と書けます（3-04）。

04

平行移動 — 道に沿った常微分方程式

道 $\gamma:[0,1]\to M$ に沿って、共変微分が 0 になるように v を運びます。

$$\frac{dv}{dt} + A\big(\dot\gamma(t)\big)\,v = 0, \qquad v(1) = P_\gamma\,v(0) \tag{5}$$

解はただ一つで、P_γ を**平行移動**と呼びます。A が反エルミートなら $\frac{d}{dt}|v|^2 = -v^*(A+A^*)v = 0$ で P_γ はユニタリです。各時刻の $A(\dot\gamma)$ が可換でないので $\exp(-\int A)$ とは書けず、短い区間の解を時刻の順に掛けます。

$$
\begin{aligned}
P_\gamma &= \lim_{n\to\infty} e^{-A_n \Delta t} \cdots e^{-A_1 \Delta t} \\
&=: \mathcal{P}\exp\Big(-\int_\gamma A\Big)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$A_k = A(\dot\gamma(t_k))$ で、後の時刻を左に置く**経路順序積**です。道をつなげば $P_{\gamma_2\gamma_1} = P_{\gamma_2}P_{\gamma_1}$、ゲージ変換では両端の枠の取り替えだけを受けます。

$$
P'_\gamma = g\big(\gamma(1)\big)\, P_\gamma\, g\big(\gamma(0)\big)^{-1} \tag{7}
$$

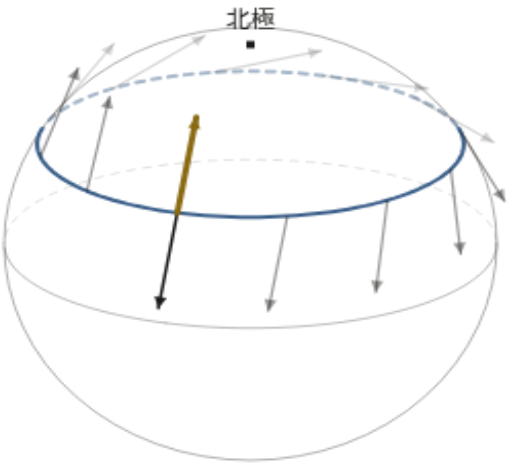
例：球面の一周

球面の中から見て曲がらないように接ベクトルを運ぶのが Levi-Civita の平行移動で、単位球面では $\dot v = -(v\cdot\dot\gamma)\,\gamma$（法線方向の変化だけを許す）です。自分の速度ベクトル $\dot\gamma$ をこの平行移動で保つ曲線を**測地線**と呼び、球面では大円です。余緯度 θ_0 の緯線を東へ回ると、南向き・東向きの枠 (e_θ, e_φ) に対する角は $\alpha(\varphi) = \alpha_0 - \varphi\cos\theta_0$ で変わり、一周では

$$
\Delta\alpha \equiv 2\pi(1-\cos\theta_0) \pmod{2\pi} \tag{8}
$$

右辺は緯線が囲む球冠の面積です。赤道以外の緯線は大円でない（測地線でない）ので、ベクトルは枠に対して回ります。(8) は「曲率 1 の面では一周の回転角が囲む面積に等しい」という Gauss–Bonnet の定理の特別な場合です [既知]。三辺が測地線の**測地三角形**でも回転角は面積に等しく、表 1 の最下行がその例です。

図 1　つまみ（または表 1 の行）で余緯度 θ_0 を変え、「運ぶ」で緯線を東へ一周。一周後の太い矢印は出発時の細い矢印（薄い矢印は途中）からずれ、その角が球冠の面積 (8) に等しい。



θ₀ = 60°　φ = 360°　α = -180.0°　(8) = 180.0°

θ_0	一周の回転（RK4）	(8) との差
10°	5.469209°	2×10^{-12}
60°	**180.000000°**	**4×10^{-11}**
90°	0°（= 360°）	6×10^{-14}
測地三角形（面積 $\pi/2$）	90.000000°	—

計算 **表 1**　(5) を RK4 で積分した一周の回転（枠に対する角、mod 360°）。最下行は北極と赤道上の経度 0°・90° を結ぶ測地三角形。図は $\alpha = -\varphi\cos\theta_0$ をブラウザで計算。JS が無効ならこの表が図の中身です。

寄り道：フーコーの振り子

飛ばしてよい小節です。

振動面は地面に対して回って見えますが、正確には回るのは地面の枠（北・東）で、振動面は緯線に沿って平行移動されます（自転がゆっくりな近似）既知 。北緯 λ なら (8) で $\theta_0 = 90^\circ - \lambda$ とおき、一恒星日に $-2\pi\sin\lambda$（北半球では時計回り）。北緯 48.85°（パリ付近）で 271.08° です 計算 。

05

曲率 — 小さな輪のずれ

平行移動が道に依るかは、小さな輪を回ったときのずれで測れます。共変微分の順序を入れ替えた差では ψ の微分が消え、行列の掛け算だけが残ります。

$$
\begin{aligned}
[D_i, D_j]\,\psi &= F_{ij}\,\psi, \\
F_{ij} &= \partial_i A_j - \partial_j A_i + [A_i, A_j]
\end{aligned}
\tag{9}
$$

形式でまとめると $F = dA + A \wedge A$ です。dA は成分ごとの外微分で、行列値の形式どうしの外積は、成分の行列を掛けて dx の外積を取ります。

$$
A \wedge A = \sum_{i,j} A_i A_j\, dx^i \wedge dx^j = \tfrac{1}{2}\sum_{i,j} [A_i, A_j]\, dx^i \wedge dx^j
$$

二つ目の等号は、i と j の名前を入れ替えた式（$dx^j \wedge dx^i = -dx^i \wedge dx^j$）と平均したものです。スカラーの 1-形式 α なら $\alpha \wedge \alpha = 0$ ですが（1-06）、行列は可換でないので 0 になりません。$F = \sum_{i<j} F_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$ の係数が (9) の F_{ij} で、Jaffe–Witten の問題説明の式そのものです（1-03）。F を**曲率**、物理では**場の強さ**と呼びます。

小さな輪で確かめる

点 p から x・y 方向に一辺 ε の正方形を反時計回りに一周すると、

$$P_{\square} = 1 - \varepsilon^2 F_{xy}(p) + O(\varepsilon^3) \tag{10}$$

(4) を (9) に入れると $F' = gFg^{-1}$ です。U(1) では F はゲージで変わらず、（係数 $-iq/\hbar$ を除いて）電場と磁場そのもの（1-06 §09）ですが、非可換では F が枠とともに回り、変わらないのは $\mathrm{tr}(F_{ij}F_{kl})$ のような組み合わせです（3-03 の作用）。

計算 **表 2**　$\mathfrak{su}(2)$ 値の滑らかな接続で (5) を RK4 で積分し、(10) と比べる（作用素ノルム、$|F_{xy}| = 0.369$）。

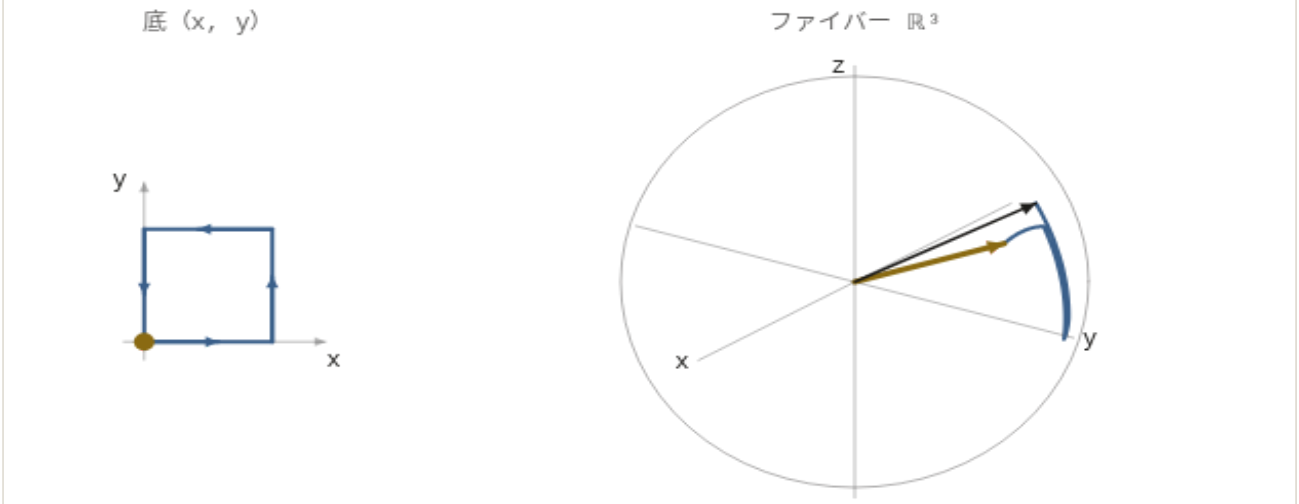
ε	$\left\lvert \frac{P_{\square}-1}{\varepsilon^2} + F_{xy} \right\rvert$	F の代わりに dA で
0.2	0.076538	0.348489
0.1	0.038844	0.324000
0.05	0.019532	0.311139
0.025	0.009790	0.304592

ε を半分にすると誤差も半分（$O(\varepsilon)$）。交換子を落とした dA では誤差が $\|[A_x, A_y]\| = 0.298$ に近づいて消えません。でたらめな g で (7) は差 1.5×10^{-12}、$F' = gFg^{-1}$ は差 3×10^{-7}（差分の誤差）計算 。

定数でも曲がる接続

非可換では A が定数でも F は 0 になりません。群を SO(3)（SU(2) の随伴表現、1-04）、ファイバーを $\mathbb{R}^3$（§02 の実ベクトル束）とします。ここでの L_x, L_y, L_z は実の反対称行列 $(L_a)_{bc} = -\varepsilon_{abc}$ で、1-04 §02 のエルミートな L_a に $-i$ を掛けたものです。$L_a v = e_a \times v$、$[L_x, L_y] = L_z$ を満たし、e^{tL_z} は z 軸まわりの角 t の回転です（1-04 の e^{-itL_3} と同じ）。$A_x = aL_x$、$A_y = aL_y$ と置くと、$dA = 0$ なのに $F_{xy} = a^2 L_z$ です。U(1) の定数の A は $g = e^{A_x x + A_y y}$ で消せますが（純ゲージ）、こちらは $F' = gFg^{-1} \neq 0$ なので、どんな g でも消せません。

図 2　左は底の正方形、右はファイバー $\mathbb{R}^3$。「運ぶ」で左の点が一周する間に右のベクトルが (5) で動き、一周後の太い矢印が出発時の細い矢印からずれます。つまみ（または表 3 の行）は $s = \varepsilon a$、「可換にする」は $A_y = aL_x$。



s = 0.60　v_0 と v の角 19.52°　軸 (-0.28, 0.28, -0.92) まわり 20.04°（s^2 = 20.63°）

s	回転角 θ（rad）	θ / s²	回転軸
0.1	0.009992	0.999168	$(-0.050, 0.050, -0.998)$
0.4	0.157919	0.986994	$(-0.195, 0.195, -0.961)$
1.2	1.297942	0.901348	$(-0.492, 0.492, -0.719)$

計算 **表 3**　四辺の回転の合成 $e^{sL_y}e^{sL_x}e^{-sL_y}e^{-sL_x}$ の回転角と軸（可換なら $|P_{\square}-1|<10^{-15}$）。図は同じ合成をブラウザで計算。JS が無効ならこの表が図の中身です。

θ/s^2 は $s\to 0$ で 1 に近づき、軸はほぼ −z で、(10) の $1-s^2L_z$（−z まわりの正の回転）と合います。「ゲージ場が自分自身と相互作用する」ことの幾何の顔です（3-02）。

06

ホロノミー — 閉じた道が残すもの

点 x_0 から出て戻る道 γ の平行移動を**ホロノミー** Hol_γ と呼びます。(7) で両端が同じ点なので、ゲージ変換では共役で変わり、トレースは変わりません。

$$\begin{aligned}\mathrm{Hol}'_\gamma &= g(x_0)\,\mathrm{Hol}_\gamma\, g(x_0)^{-1},\\ W(\gamma) &= \tfrac{1}{N}\,\mathrm{tr}\,\mathrm{Hol}_\gamma\end{aligned}\tag{11}$$

ゲージ不変な $W(\gamma)$ を **Wilson ループ**と呼びます。

- **平坦でも残る**。$F=0$ なら、ホロノミーは輪の連続変形で変わりません 既知 。穴のある空間では縮められない輪のホロノミーが 1 でないことがあり、それが Aharonov–Bohm 効果です（2-03）。
- **曲率はホロノミーの無限小版**。M が連結なら、x_0 の輪のホロノミー全体（部分群）のリー環は、すべての点 y の曲率 $F_{ij}(y)$ を、y と x_0 を結ぶあらゆる道で x_0 まで運んだもので張られます（Ambrose–Singer 1953） 既知 。

- **格子**。辺に平行移動 $U_\ell \in G$ を置き、プラケットの積 U_p を曲率の代わりにするのが Wilson の格子です（5-01）。(10) から間隔 a で $U_p \approx \exp(-a^2 F_{\mu\nu})$、よって $\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(1-U_p) \approx -\frac{a^4}{2}\,\mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}^2 \geq 0$ です（μ, ν は固定で和を取らない。$F_{\mu\nu}$ が反エルミートなので $F_{\mu\nu}^2 = -F_{\mu\nu}^* F_{\mu\nu} \leq 0$）既知 。

07

ゲージ変換の幾何 — 枠の取り替えと、変わらないもの

ゲージ変換は滑らかな写像 $g : M \to G$ で、切断を $g\psi$、接続を (4)、曲率を gFg^{-1} に動かします。全体 $\mathcal{G}$ は無限次元の群です。比喩で言えば各点のものさしの向きの選び直しで、正確には枠の取り替え（受動的）とも、束の**自己同型**——各ファイバーを線形に同型写像し、底の点は動かさない束の写像——（能動的）とも読め、式はどちらも (4) です。物理で意味を持つのは $\mathcal{G}$ で変わらない量です：Wilson ループ、作用の $\mathrm{tr}(F \wedge *F)$、位相の量 $\mathrm{tr}(F \wedge F)$（3-05）。

曲率にはゲージに依らない恒等式があります。$A \wedge F$ と $F \wedge A$ も §05 と同じ規則（成分の行列を掛けて dx の外積を取る）で定まり、行列の順序が効きます。

$$DF := dF + A \wedge F - F \wedge A = 0 \tag{12}$$

Bianchi 恒等式です。$F = dA + A \wedge A$ を入れると、$d(A \wedge A) = dA \wedge A - A \wedge dA$、$d^2 = 0$、外積の結合法則だけで消えます。U(1) では $dF = 0$（Maxwell 方程式の源の無い二本）。三次元の $\mathfrak{su}(2)$ 値の接続で、左辺は差分の誤差 3.5×10^{-7} 以内、交換子を落とすと 0.553 計算 。

接続の全体 $\mathcal{A}$ を $\mathcal{G}$ で割った $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ が物理で区別できる配位の空間で、各軌道から代表を連続的に選ぶ（大域的なゲージ固定）ことは一般にできません（Singer、3-04・4-08）。Wu–Yang（1975）の対訳表では、ゲージポテンシャル＝接続、位相因子＝平行移動、場の強さ＝曲率と並び、源の欄だけが「？」です。

08

貼り合わせと整数 — 単極子と第一 Chern 数

1-06 §08 で、点磁荷 $\hat{\mathbf{r}}/r^2$ のポテンシャルは北と南の二枚でしか書けず、重なりでの差は $2\,d\varphi$ でした。磁荷を g_m 倍して磁場 $g_m\hat{\mathbf{r}}/r^2$（全磁束 $\Phi = 4\pi g_m$）にすると差は $2g_m\,d\varphi$ で、§03 の例のとおり $-iq/\hbar$ を掛けて接続にすると

$$A_N - A_S = -\frac{iq}{\hbar}\,2g_m\,d\varphi$$

です。一方、可換な場合の (4) は $A_N - A_S = -g_{NS}^{-1} dg_{NS}$ なので、赤道の変換関数は $g_{NS} = e^{in\varphi}$、$n = 2qg_m/\hbar$ です。束の言葉では、北と南の二枚を赤道でこの g_{NS} により貼り合わせた U(1) 束です。g_{NS} は赤道を一周して元に戻らなければならないので、**n は整数**です。

位相因子で見る

n の意味は位相因子で見ると測れる形になります。閉じた道 C の**位相因子**は、(6) で $A = -\frac{iq}{\hbar}\,\mathbf{A}\cdot d\mathbf{x}$ とおいた平行移動（C のホロノミー、§06）です。U(1) では経路順序が要らず、Stokes の定理（1-06）から

$$\mathrm{Hol}_C = \exp\!\left(\frac{iq}{\hbar}\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}\right) = e^{iq\Phi_C/\hbar} = e^{2\pi i\,\Phi_C/\Phi_0}, \qquad \Phi_0 = \frac{h}{q}$$

です（Φ_C は C が囲む磁束、q > 0 とします。詳しくは 2-03）。Φ_0 を**磁束の単位**と呼び、$f = \Phi/\Phi_0$ と書くと $n = 2qg_m/\hbar = q\Phi/(2\pi\hbar) = f$ です。**以後 n と f は同じ量**で、f と書くときは整数とは限らない値も考えます。

余緯度 ϑ の緯線 C の位相因子を、北の球冠の上で使える A_N で計算すると、囲む磁束は $\Phi(1-\cos\vartheta)/2$ で $e^{i\pi f(1-\cos\vartheta)}$。南の球冠の上で使える A_S で計算すると、C は南の球冠の縁を逆向きに回るので $e^{-i\pi f(1+\cos\vartheta)}$ です。比は $e^{2\pi i f}$ で、一致するのは f が整数のときだけ。二枚の記述が一つの束の接続になる条件で、Dirac（1931）の量子化条件の、束の言葉での読みです。

図 3　つまみ（または表 4 の行）で f と余緯度 ϑ を変えると、単位円の上の二本の矢印——北の球冠から計算した位相因子と、南の球冠から計算した位相因子——が動きます。二本が重なるのは f が整数のときだけで、そのときは ϑ を変えても重なったまま動きます。「f を動かす」で f が 0 から 3 まで増えます。



f = 0.50　ϑ = 60°　北 45.0°　南 -135.0°　食い違い 180.0°

f	北から	南から	変換関数の巻き数
0.5	**0.707+0.707i**	**-0.707-0.707i**	0.5（一周で戻らない）
1	i	i	1

f	北から	南から	変換関数の巻き数
2	−1	−1	2

計算 **表 4**　余緯度 60° の緯線で。巻き数は $e^{if\varphi}$ の偏角の赤道一周の増分 ÷ 2π。$\frac{i}{2\pi}\int F$ はどの行でも f。図は二つの位相因子の閉じた式をブラウザで計算し、食い違いの角は $360^\circ \times f$（360° の整数倍は除く）です。JS が無効ならこの表が図の中身です。

曲率から読む

整数は曲率からも読めます。北と南の球冠で Stokes の定理を使い、赤道で (4)（可換なので $A_N - A_S = -g^{-1}dg$）を使うと

$$c_1 = \frac{i}{2\pi}\int_{S^2} F = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\text{赤道}} g_{NS}^{-1}\,dg_{NS} = n \tag{13}$$

左辺は $\frac{i}{2\pi}\cdot\left(-\frac{iq}{\hbar}\right)\Phi = f$、右辺は変換関数の巻き数（1-06 §07）で、上で見た n = f がここでも出ます。c_1 を**第一 Chern 数**と呼びます。接続を連続的に変えても整数は飛べないので、束だけで決まります 既知 。

四次元では

S^4 の上の SU(2) 束は整数 $c_2 = \frac{1}{8\pi^2}\int \mathrm{tr}(F\wedge F)$（符号は本による）で分類されます 既知 。$\mathbb{R}^4$ の上でも、作用が有限なヤン–ミルズ方程式の解は遠方で純ゲージ $-(dg)g^{-1}$（$g : S^3 \to SU(2)$）に近づき、g の巻き数がインスタントン数です 既知 。これは無条件の事実ではありません。正確には、そうした解が無限遠の一点を足した S^4 の上の束の接続に延びるという定理（Uhlenbeck の除去可能特異点定理）に基づき、方程式の解でない一般の場では遠方での適当な減衰を仮定して同じことを言います。詳しくは 3-05・1-12・四次元の記事。

この章が言えている範囲

項目	言えていること	言えていないこと
束・接続・平行移動	(2)〜(8) の導出。表 1・図 1 計算	§02 の例の非自明性・変換関数を連続に動かしても束が同型であること・Gauss–Bonnet の一般形 既知
曲率とホロノミー	(9)〜(12)。表 2・3、図 2、(7) と $F' = gFg^{-1}$ の確認 計算	Ambrose–Singer・平坦な接続の性質の証明 既知
単極子と Chern 数	貼り合わせから整数が出ること、$n = \Phi/\Phi_0$、(13)、表 4・図 3 計算	Chern 数の一般論、c_2 による分類、$\mathbb{R}^4$ の場が S^4 に延びること 既知
ヤン–ミルズ	ゲージ場・場の強さ・ゲージ変換の幾何の意味	質量ギャップ・理論の構成については何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1〜4・§04〜§07 の数値・図 1〜3	**この端末で計算**	Python 3.12・NumPy・SciPy（`sphere_holonomy.py` ほか 3 本）。図は素の JavaScript で、閉じた式をその場で計算
経路順序積の並べ方・対訳（Table I）・単極子	一次資料（本文を確認）	T. T. Wu, C. N. Yang, Phys. Rev. D 12 (1975) 3845–3857
$F = dA + A \wedge A$	一次資料（本文を確認）	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”（Clay）
平行移動・ホロノミー	既知（本文を確認）	S. M. Carroll, arXiv:gr-qc/9712019 (1997) 第 3 章
Levi-Civita・Ambrose–Singer・Dirac・Chern 類	一次資料（書誌のみ）	T. Levi-Civita, Rend. Circ. Mat. Palermo 42 (1916) 173–204；W. Ambrose, I. M. Singer, Trans. AMS 75 (1953) 428–443；P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. A 133 (1931) 60–72；S. S. Chern, Ann. of Math. 47 (1946) 85–121, doi:10.2307/1969037（頁の範囲は zbMATH の書誌で確認）
§08 の四次元：除去可能特異点	一次資料（書誌のみ）	K. Uhlenbeck, “Removable singularities in Yang–Mills fields”, Comm. Math. Phys. 83 (1982) 11–29, doi:10.1007/BF01947068
フーコーの振り子を平行移動として見ること	論文（書誌のみ）・二次資料で確認	J. B. Hart, R. E. Miller, R. L. Mills, “A simple geometric model for visualizing the motion of a Foucault pendulum”, Am. J. Phys. 55 (1987) 67–70, doi:10.1119/1.14972（書誌のみ）；Wikipedia “Foucault pendulum”（本文を確認）
§02 の例・Gauss–Bonnet・c_2	既知（書誌のみ）	Kobayashi–Nomizu, *Foundations of Differential Geometry* I (1963)；Nakahara, *Geometry, Topology and Physics* (1990)

次に読む章：1-08 確率と測度。この章の続きは 3-01〜3-04。

確率と測度 — 平均は落ち着き、揺らぎはガウスになる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 確率を「集合に重さを配る規則（測度）」として書く言葉。ガウス分布は共分散だけで決まり、高次のモーメントは対の数え上げになること。大数の法則と中心極限定理が「平均は落ち着き、揺らぎはガウスになる」と言い、その速さが $1/\sqrt{n}$ であること。

前提となる章 — なし（§03 の例は 1-02 があると読みやすい）。

先に言うこと — 測度論の証明はしません。無限次元の確率は 1-09 の主題です。四次元のヤン–ミルズ理論を確率測度として作ることは未解決で、このサイトもそれを示していません。2026-11 に公開された構成（6-00）が作ったのは相関関数と、そこから再構成した場の理論で、確率測度ではありません（6-04）。

この章の順序

1. なぜ確率か
2. 確率空間
3. 確率変数と分布 — 群の上の一様分布と半円（図1）
4. 期待値・分散・特性関数
5. 独立
6. ガウス分布 — 共分散と対の数え上げ（図2・寄り道：カタラン数を二通りに数える）
7. 格子の上のガウス場 — 相関長と質量（図3）
8. 大数の法則 — 平均は落ち着く（図4）
9. 中心極限定理 — 揺らぎはガウスになる（図4）
10. 寄り道：ガウスにならないもの

01

なぜ確率か — 場の理論は確率測度で書かれる

場の量子論を虚時間に移す（ユークリッド化、4-02）と、場の配置一つ一つに重み e^{-S}（S は作用）が付き、規格化すると**確率**として読めます。問題文も場の理論の構成の副産物に 'non-Gaussian, Euclidean-invariant measures' を挙げます 既知 。格子のヤン–ミルズでは各辺 ℓ に群の元 U_ℓ が乗り（5-01）、確率は次の形です。

$$d\mu(U) = \frac{1}{Z}\, e^{-S(U)} \prod_{\ell} dU_\ell, \qquad Z = \int e^{-S(U)} \prod_{\ell} dU_\ell \tag{1}$$

dU_ℓ は群の上の一様な重さ（§03）、Z は全体を 1 にする定数（2-08）です。**例：**辺が一本で群が円周 $U(1)$、$S = -\beta\cos\theta$（β は格子の結合の逆数。統計力学の逆温度と同じ字です）なら、(1) は密度 $e^{\beta\cos\theta}/Z$ で、β が大きいほど $\theta = 0$ の近くに集まります。この章はそのための言葉を揃えます。

02

確率空間 — 集合に重さを配る

確率とは、起こりうることの全体 Ω の部分集合（**事象**）に 0 から 1 の重さを配る規則です。重さを配る事象の族 $\mathcal{F}$ は Ω を含み、補集合と可算個の和集合で閉じているとします（**σ-加法族**）。三つ組 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が**確率空間**で、P には次を課します 既知 。

$$P(\Omega) = 1, \qquad P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (A_i \text{ が互いに交わらないとき}) \tag{2}$$

$\mu(\emptyset) = 0$ で (2) の後半（**可算加法性**）を満たす非負の集合関数が**測度**で、全体が 1 の測度が確率です（Durrett §1.1。公理化は Kolmogorov の 1933 年の本に始まるとされます）。$\mathcal{F}$ を全部の部分集合にしないのは、選択公理を使った構成で、回転で変わらず (2) を満たす長さを付けられない部分集合が作れるからです（Vitali 1905） 既知 。**例：**サイコロは $P(A) = |A|/6$。$[0,1]$ の一様分布は $P([a,b]) = b - a$、つまり長さ（**ルベーグ測度**）です。一点の確率は 0 なのにどれか一点は必ず出ますが、非可算個の和には (2) が使えないので矛盾しません。確率 1 で成り立つことを「**ほとんど確実に**」と言います。

03

確率変数と分布 — 群の上の一様分布と半円

確率変数は Ω 上の実数値関数 X で、$\{X \le a\}$ がどれも事象になるもの（**可測**）です。**分布**は Ω の重さを X で数直線に押し出した測度です。

$$\mu_X(B) = P\big(X^{-1}(B)\big), \qquad F_X(a) = P(X \le a), \qquad \mu_X(B) = \int_B \rho(x)\,dx \tag{3}$$

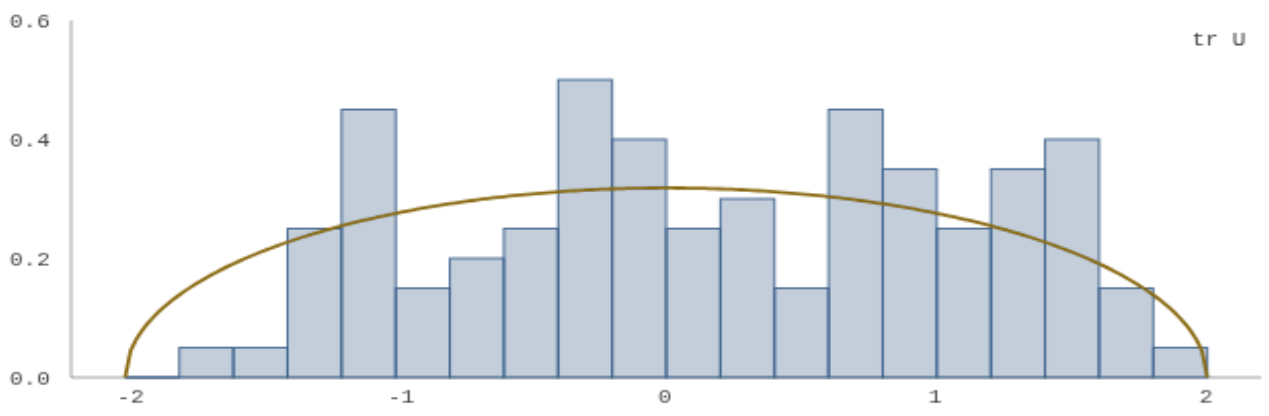
F_X が**分布関数**、ρ が**密度**です。**例：**表の確率 p の硬貨を n 回投げた表の数は**二項分布** $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ に従い、$np=\lambda$ を保って $n\to\infty$ とすると**ポアソン分布** $e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ になります。

$SU(2)$ のように、閉じていて有界な行列の群を**コンパクト**な群と呼びます。コンパクトな群 G には、左右どちらから掛けても変わらない確率測度、つまりすべての $g\in G$ と部分集合 A で $\mu(gA)=\mu(Ag)=\mu(A)$（$gA=\{ga : a\in A\}$）を満たすものがただ一つあり、**Haar 測度**と呼ばれます（円周なら $d\theta/2\pi$）既知。(1) の dU_ℓ はこれです。**例：**$SU(2)$ の元は $U=a_0+i(a_1\sigma_1+a_2\sigma_2+a_3\sigma_3)$（$\sigma_i$ はパウリ行列、$|a|=1$）で、$SU(2)$ は球面 S^3 です（1-02）。Haar 測度は S^3 上の一様分布で $\operatorname{tr}U = 2a_0$。高さ a_0 の切り口は半径 $r=\sqrt{1-a_0^2}$ の球面（面積 $\propto r^2$）、帯の幅は da_0/r なので a_0 の密度は r に比例し、$\operatorname{tr}U$ は**半円**の密度を持ちます既知。

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2} \qquad (-2\le x\le 2) \tag{4}$$

S^3 上の一様な点 10^6 個で $\operatorname{tr}U$ のヒストグラム（20 区間）を作ると、各区間に落ちた割合と、(4) から出る各区間の確率（0.019〜0.064）との差は 6.4×10^{-4} 以内でした計算。点を増やしていく様子を図1 で見られます。同じ半円は、成分が独立なガウスの大きな対称行列の固有値の分布にも、適当に規格化して行列の大きさを無限大にした極限で現れます（17-04）。

図1　S^3 上の一様な点（$SU(2)$ の Haar 測度に従う U）の最初の n 個から作った $\operatorname{tr}U$ のヒストグラム（棒、20 区間、面積 1）と半円 (4)（曲線）。つまみか「動かす」で n を 10 から 10^6 まで増やすと、棒が曲線に寄っていく



計算 図1 のヒストグラムは、この端末で作った標本（上の文と同じ 10^6 個）の最初の n 個の、区間ごとの個数を埋め込んだもの。曲線と区間の確率は (4) の式から計算する。JavaScript が無効なら上の文の数値で読める。

```
04
```

期待値・分散・特性関数 — 平均を積分で書く

期待値は「値 × 重さ」の総和で、連続なら積分です。ルベーグ積分は値の方を刻み、「値が c 付近の集合の重さ」に c を掛けて足します。比喩で言えば硬貨の山を額面ごとに数える勘定で、正確には有限個の値だけを取る関数の和 $\sum_i c_i P(A_i)$ の極限です。

$$E[X] = \int_\Omega X \, dP = \int_{\mathbb{R}} x \, d\mu_X(x), \qquad \mathrm{Var}(X) = E\big[(X - E[X])^2\big] \tag{5}$$

$Y = X - E[X]$ として $\mathbf{1}_{\{|Y| \ge t\}} \le Y^2/t^2$（$\mathbf{1}_A$ は A の上で 1、外で 0）の期待値を取ると**チェビシェフの不等式**です 既知 。

$$P\big(|X - E[X]| \ge t\big) \le \frac{\mathrm{Var}(X)}{t^2} \tag{6}$$

特性関数 $\varphi_X(t) = E[e^{itX}]$ は分布を一意に決めます（Durrett §3.3）。**例：**サイコロは $E = 7/2$、$\mathrm{Var} = 35/12$。ポアソン分布の $E[(-1)^N] = e^{-2\lambda}$ は中心渦の勘定（17-02）に使われます。(4) では $E[\mathrm{tr}\, U] = 0$、$E[(\mathrm{tr}\, U)^2] = 1$ です。

05

独立 — 無相関との違い

X と Y が**独立**とは、同時の確率が積に分かれることです。

$$P(X \in A,\ Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B) \qquad (\text{すべての } A, B) \tag{7}$$

このとき (X, Y) の分布は、平面の長方形 $A \times B$ に重さ $P(X \in A)P(Y \in B)$ を配る測度（**積測度**）で、$E[XY] = E[X]E[Y]$、$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}\, X + \mathrm{Var}\, Y$、$\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$ です 既知 。**共分散** $E[XY] - E[X]E[Y]$ が 0 なら**無相関**で、独立なら無相関ですが逆は偽です。**例：**X が $\{-1, 0, 1\}$ に等確率、$Y = X^2$ なら共分散は 0 ですが $P(X = 0, Y = 0) = 1/3 \neq 1/9$ です。

場の理論では、離れた二点の場が「ほぼ独立」であってほしいところです。問題文は質量ギャップ Δ（4-11）の帰結として**クラスター性**を挙げます 既知 。空間 $\mathbb{R}^3$ の点 x, y に置いた、期待値が 0 の局所的な量 $O(x)$、$O(y)$ の相関（期待値が 0 なので、上の共分散は積の期待値そのもの）の大きさが、$0 < C < \Delta$ なら、$|x - y|$ が十分大きいところで $e^{-C|x-y|}$ 以下になる、という性質です。正確には O は量子論の演算子で、相関は基底状態（真空）での期待値です（例は §07）。

06

ガウス分布 — 共分散と対の数え上げ

平均 0 のガウス分布は、n 次元なら**共分散行列** $C_{ij} = E[x_i x_j]$（正定値の対称行列、1-01）だけで決まります。

$$\rho(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det C}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\, x \cdot C^{-1} x\Big), \qquad E\big[e^{i\,t\cdot x}\big] = e^{-\frac{1}{2}\,t\cdot C t} \tag{8}$$

性質は三つです 既知 。(i) 線形写像 $y = Mx$ の像もガウスで、共分散は MCM^{T}。(ii) 同時にガウスなら、無相関で独立（C が対角なら密度が積に分かれる）。(iii) 高次のモーメントは、変数を**対に組むすべての方法**にわたる C の積の和です（Isserlis 1918。物理では同じ形の公式が Wick の定理（1950）として使われます）。

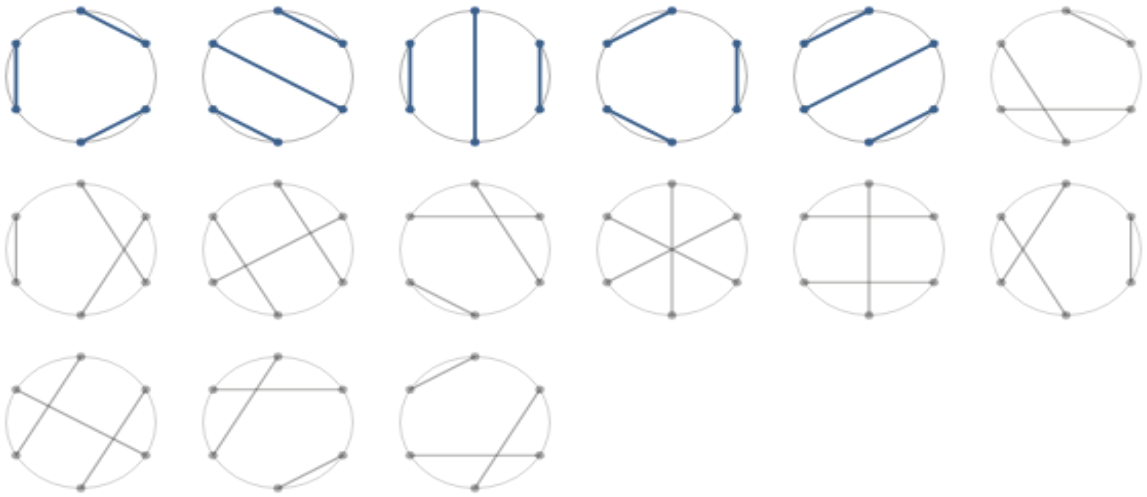
$$E[x_1 x_2 x_3 x_4] = C_{12}C_{34} + C_{13}C_{24} + C_{14}C_{23} \tag{9}$$

無作為な 4×4 の C で、(9) の右辺 -0.0769 に対し標本 4×10^6 個では -0.0774 ± 0.0005 でした 計算 。一変数なら $E[x^{2k}] = (2k-1)!!\,\sigma^{2k}$ です。$(2k-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)$（奇数だけを掛ける二**重階乗**）は $2k$ 点を対に組む方法の数です（点 1 の相手が $2k-1$ 通り、残りで同じことを繰り返す）。一方 (4) の半円のモーメントは、円周上の $2k$ 点を**交差しない**弦で組む方法の数、**カタラン数** $\mathrm{Cat}_k = \binom{2k}{k}/(k+1)$ です 紙 （寄り道で両方を計算します）。交差しない組の数え上げと (4) の数値積分は、どちらも $k \le 6$ で Cat_k と一致しました（積分は 6 桁） 計算 。表1 の行を選ぶと、図2 にその k の組み方が並びます。

表1　全部の対（ガウス）と交差しない対（半円）。行を選ぶと図2 が変わる 計算

k	$(2k-1)!!$	Cat_k	$E[(\mathrm{tr}\,U)^{2k}]$（標本 10^6）
1	1	1	1.001
2	3	2	2.001
3	**15**	**5**	**5.001**
4	105	14	14.00
5	945	42	42.01
6	10395	132	132.05

図2　円周上の $2k$ 点を弦で対に組む方法。表1 の行（またはつまみ）で k を選ぶ。色の付いたものが弦の交差しない組（Cat_k 通り）、薄いものが交差する組。$k=2$ の三つは (9) の三項 $C_{12}C_{34}$・$C_{14}C_{23}$・$C_{13}C_{24}$ に当たる（点に時計回りに 1〜4 と番号を振る）



k = 3　対の組み方 15 通り（(2k−1)!!）　交差しない組 5 通り（Cat_3）

計算 図2 の組み方はブラウザで並べ、その個数が表1 の数え上げ（この端末の計算）と一致することを確かめてある。JavaScript が無効なら表1 で読める。

(9) は Feynman ダイアグラムの原型で（4-03）、交差しない組は大 N の平面ダイアグラムにつながります（17-04）。

寄り道：カタラン数を二通りに数える

飛ばしてよい小節です。

交差しない組の数。円周上の点に時計回りに 1 から $2k$ まで番号を振り、交差しない組の数を c_k（$c_0 = 1$）とします。点 1 の相手を点 p とすると、1 と p の間にある点は弦 $\{1,p\}$ をまたげないので、間の点どうしで組むしかありません。間の点は偶数個なので $p = 2j$ で、間の $j-1$ 組と外の $k-j$ 組は別々に選べます。係数を一つの冪級数に並べたもの（**母関数**）$c(x) = \sum_{k\ge 0} c_k x^k$ で書くと、

$$c_k = \sum_{j=1}^{k} c_{j-1}\,c_{k-j} \quad (k \ge 1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad c(x) = 1 + x\,c(x)^2$$

です。二次方程式を解いて $x \to 0$ で有限な方の根を取り、$\sqrt{1-4x}$ を二項級数で展開すると係数が出ます。

$$c(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}, \qquad \sqrt{1-4x} = 1 - \sum_{n\ge 1} \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1} x^n \qquad \Longrightarrow \qquad c_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$$

半円のモーメント。(4) で $x = 2\sin\theta$ と置くと $\sqrt{4-x^2} = 2\cos\theta$、$dx = 2\cos\theta\,d\theta$ です。$I_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^n\theta\,d\theta$ は部分積分で $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$、$I_0 = \pi$ を満たすので、$I_{2k} = \pi\,(2k-1)!!/(2k)!!$（$(2k)!! = 2\cdot 4\cdots 2k = 2^k k!$）です。$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ を使うと

$$\int_{-2}^{2} x^{2k}\rho(x)\,dx = \frac{2^{2k+2}}{2\pi}\bigl(I_{2k} - I_{2k+2}\bigr) = \frac{2^{2k+1}}{\pi}\cdot\frac{I_{2k}}{2k+2} = \frac{2^{2k}\,(2k-1)!!}{(k+1)\,(2k)!!} = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$$

最後の等号は $(2k-1)!! = (2k)!/(2^k k!)$ から出ます。二つの計算は別々に同じ Cat_k に着きました [紙]。なぜ半円が交差しない組を数えるのかは、大 N の平面ダイアグラムの勘定（17-04）で見えてきます。

07

格子の上のガウス場 — 相関長と質量

輪に並んだ N 個の変数 $x_0, \dots, x_{N-1}$（$x_N = x_0$）に、隣どうしは近い値を好み、全体は 0 に引き戻される重みを付けます。

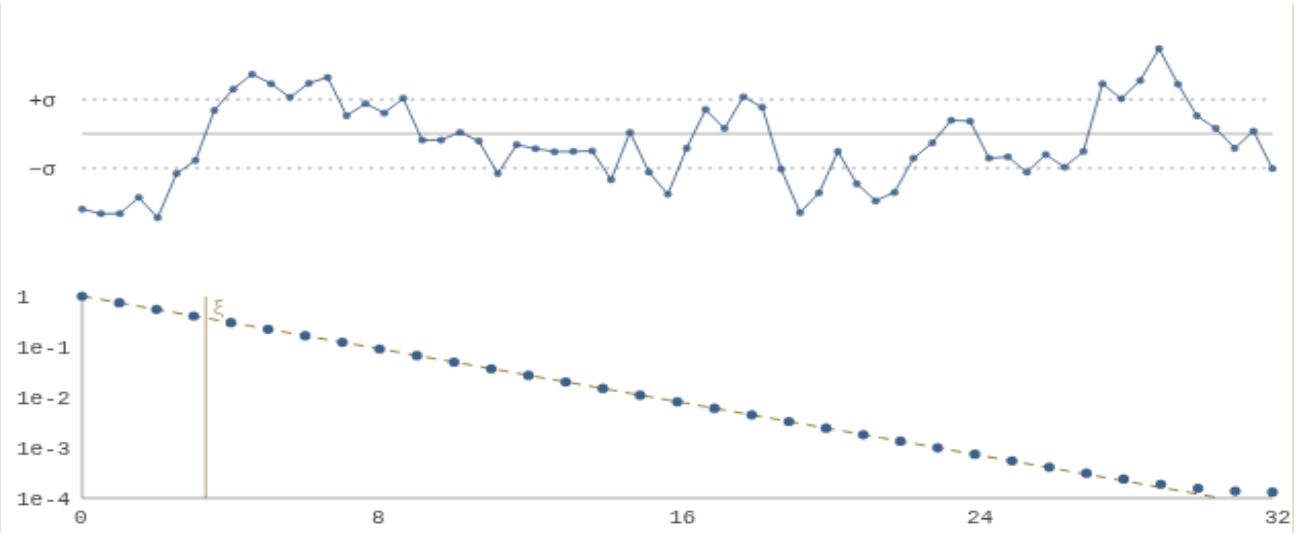
$$\rho(x) \propto \exp\Big(-\frac{1}{2} \sum_{j} \big[(x_{j+1} - x_j)^2 + m^2 x_j^2 \big] \Big) = \exp\Big(-\frac{1}{2}\, x \cdot (-\Delta_{\mathrm{lat}} + m^2)\, x \Big) \qquad (10)$$

$(\Delta_{\mathrm{lat}} x)_j = x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}$ は**格子のラプラシアン**です。§05 の質量ギャップ Δ とは別のものなので、添字 lat を付けて区別します。(8) と見比べると、(10) は共分散 $C = (-\Delta_{\mathrm{lat}} + m^2)^{-1}$ のガウス分布です。問題文は、連続の $\mathbb{R}^d$ の上で共分散が同じ形（格子のラプラシアンを連続のものに替えた形）のガウス測度を 'the free, mass-m0 field' と呼びます。(10) はその一次元の格子（輪）での類似物で、d 次元の格子でも共分散は同じ形 $(-\Delta_{\mathrm{lat}} + m^2)^{-1}$ になります [既知]。輪が無限に長ければ厳密に $C(0,x) = e^{-|x|/\xi}/(2\sinh(1/\xi))$ です [既知]。

$$\frac{C(0,x)}{C(0,0)} \approx e^{-|x|/\xi}, \qquad \cosh\frac{1}{\xi} = 1 + \frac{m^2}{2}, \qquad \xi \approx \frac{1}{m} \quad (m \text{ が小さいとき}) \qquad (11)$$

ξ が**相関長**で、質量 m はほぼその逆数です（どちらも格子間隔を単位にして測った量です）。この減る速さが量子論の「隙間」に当たります（2-06）。(10) は振動子の虚時間の経路積分を刻んだもので、m は 2-07 の $a\omega$（そこでは $\omega = 1$ なので刻み a そのもの）に当たります。相関長の一般論は 2-08 です。

図3　輪（$N = 64$）の上のガウス場。m を動かすと、上の標本（乱数は固定、点線は $\pm\sigma$）の滑らかさと、下の $C(0,x)/C(0,0)$（対数目盛り、破線 $e^{-x/\xi}$）が変わる



m = 0.302 ξ = 3.32 1/m = 3.31 σ = 1.279 C(0,8)/C(0,0) = 0.0901

表2　輪（$N = 64$）の上の相関 計算

m	ξ（(11)）	$C(0,8)/C(0,0)$	傾きから読んだ ξ
0.05	20.00	0.703	24.1
0.1	10.00	0.452	10.2
0.3	3.35	0.0915	3.35
1	1.04	4.5×10^{-4}	1.04
2	0.57	7.5×10^{-7}	0.57

計算 図3 と表2 の数値はこの端末で計算した（図は厳密な相関と固定した乱数から描く。傾きは $x = 4$〜12）。JavaScript が無効なら表2 で読める。

$m = 0.05$ で傾きから読んだ ξ が 20 より大きいのは、輪の長さが相関長の 3 倍ほどしかなく反対回りの寄与 $e^{-(N-x)/\xi}$ が効くためです（有限の箱の効果、5-09）。(10) はガウスなので (9) ですべての相関が C で決まり、相互作用がありません（**自由場**）。

08

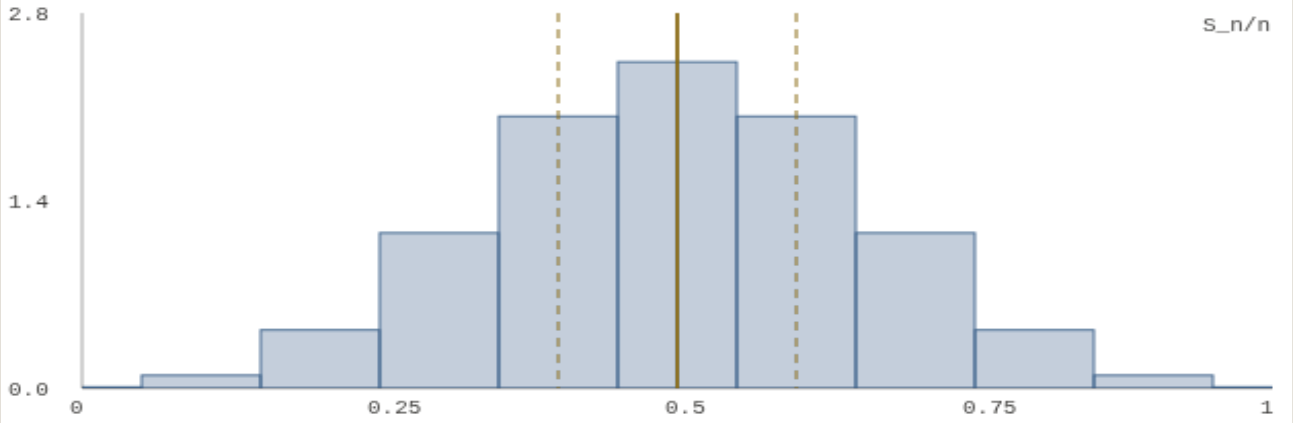
大数の法則 — 平均は落ち着く

同じ分布に従う独立な $X_1, X_2, \ldots$（平均 μ、分散 σ^2）の和を S_n とします。§05 から $\mathrm{Var}(S_n/n) = \sigma^2/n$ で、(6) に入れると**大数の弱法則**です 既知 。

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty) \tag{12}$$

さらに $E|X_1| < \infty$ だけで $S_n/n \to \mu$ がほとんど確実に成り立ちます（**強法則**、Durrett 定理 2.4.1） 既知 。図4 の「そのまま」で、S_n/n の分布が p に縮む様子と (12) の左辺（$\varepsilon = 0.1$）が見えます。

図4　表の確率 p の硬貨を n 回投げた表の数の分布（棒、面積 1）。n を増やすと、「そのまま」では p（縦線）に縮み破線の外の確率が減り、「$\sqrt{n}$ 倍に拡大」では標準ガウス（曲線）に寄る



n = 10 p = 0.50 P(|S_n/n − p| ≥ 0.1) = 0.754 (12) の右辺 2.50

計算 図4 と表3 の数値はこの端末で計算した（図は二項分布と Φ の近似式からその場で計算し、Python の値と 4 桁で一致）。JavaScript が無効なら次の段落と表3 で読める。

$p = 1/2$、$\varepsilon = 0.1$ では、(12) の左辺は $n = 10, 100, 1000$ で 0.754、0.0569、2.7×10^{-10}、右辺 $25/n$ は 2.5、0.25、0.025 です 計算 。右辺は粗い上界ですが、極限には足ります。実用上の読みは**標本平均の誤差はおよそ $\sigma/\sqrt{N}$** で、精度を 10 倍にするには標本が 100 倍要ります。$E[(\mathrm{tr}\,U)^2] = 1$ を標本平均で推定すると、$N = 10^2$ で 0.916 ± 0.092、10^6 で 1.0015 ± 0.0010 でした（表1 とは別の標本。誤差棒は標本標準偏差 $/\sqrt{N}$） 計算 。格子のモンテカルロ法では、続けて作る配置が独立でないので実効的な N が減ります（5-07）。

09

中心極限定理 — 揺らぎはガウスになる

ずれ $S_n/n - \mu$ は $1/\sqrt{n}$ の大きさです。$\sqrt{n}$ 倍に拡大すると、元の分布によらず**ガウス分布**が現れます（**中心極限定理**、Durrett 定理 3.4.1） 既知 。

$$P\Big(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le a\Big) \;\longrightarrow\; \Phi(a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx \qquad (\text{すべての } a) \tag{13}$$

理由は特性関数で見えます。$\mu = 0$ なら $\varphi(s) = 1 - \sigma^2 s^2/2 + o(s^2)$ で、独立性から $\varphi(t/\sigma\sqrt{n})^n = (1 - t^2/2n + o(1/n))^n \to e^{-t^2/2}$、これは (8) の一次元の標準ガウスの特性関数です。特性関数の収束から分布の収束を出す連続性定理（Durrett 定理 3.3.17）で (13) になります（一般の条件での古典的な証明は Lindeberg 1922）。近づく速さは **Berry–Esseen の不等式**が与えます（$\rho = E|X - \mu|^3$）。

$$D_n = \sup_a \Big| P\Big(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le a\Big) - \Phi(a) \Big| \le \frac{C_0\,\rho}{\sigma^3\sqrt{n}} \tag{14}$$

Durrett は $C_0 = 3$ で証明し、Shevtsova（2011）は $C_0 < 0.4748$ を示しています 既知 。両辺は図4 の拡大表示と表3 で比べられます。

表3　二項分布の D_n（厳密）と (14) の右辺（$C_0 = 0.4748$） 計算

p	n	D_n	右辺	$D_n\sqrt{n}$
0.5	10	0.1230	0.1501	0.389
0.5	1000	0.0126	0.0150	0.399
0.1	100	0.0832	0.1298	0.832
0.02	100	0.1767	0.3258	1.767

$p = 1/2$ では $D_n\sqrt{n}$ が $1/\sqrt{2\pi} \approx 0.399$ に落ち着きます。n が偶数なら、分布関数は $a = 0$ に高さ約 $\sqrt{2/\pi n}$ の段差を持ち、滑らかな Φ はその中ほどを通るので、段差の半分が必ず残ります（Durrett §3.4.4）。n が奇数なら中央に段差は無く、中央の二つの段差（$a = \pm 1/\sqrt{n}$）のあいだで分布関数が $1/2$ のまま平らになり、その端で同じ大きさのずれが残ります（$n = 11$ で $D_n\sqrt{n} = 0.393$、$n = 199$ で 0.399） 計算 。どちらでも $1/\sqrt{n}$ より速くはなりません。$p = 0.02$、$n = 100$ では $np = 2$ で、分布は非対称なポアソン分布に近く、ガウスとはまだ離れています。極限定理は「いつ近いか」を言わないので、速さの評価が要ります。

10

寄り道：ガウスにならないもの — 重い裾・自明性

飛ばしてよい節です。

(13) には分散が有限という仮定があります。**コーシー分布**（密度 $1/\pi(1+x^2)$、特性関数 $e^{-|t|}$）は $E|X| = \infty$ で、n 個の平均が元と同じ分布に従います（Durrett 演習 3.3.6） 既知 。

場の理論では逆に「ガウスに潰れる」ことが問題になります。四次元の格子の ϕ^4 模型では、臨界点の近くで格子を細かくする極限がガウスになり、相互作用が消えること（**自明性**）が示されています（Aizenman–Duminil-Copin 2021、7-08） 既知 。比喩で言えば中心極限定理の潰れ方ですが、正確には強く相関した場の定理で、証明の道具も別です。

問題文の「非自明な」ヤン–ミルズ理論は、おおまかには極限でガウスでない理論です。スカラー場について問題文（§6.2）が述べるように、自由場はガウス測度から得られ、'one requires non-Gaussian dμ to obtain nonlinear fields' です。格子の (1) は初めからガウスではありませんが、極限でガウスでない測度として残りクラスター性まで持つことを示した結果は無く、問題文自身、四次元で公理を満たす非自明な相対論的場の理論は現時点で一つも知られていないと書きます（2000 年の記述） 既知 。2026-11 に公開された構成は、測度ではなく相関関数の水準で、四次元の自明でない理論を作りました（Lean で証明されている、と委員会が評価した。6-01）。このサイトは測度の非自明性を示していません（0-03・7-10）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 定義、(6)、(12) の証明、(4) の導き方。ほかの定理は文献から引用。	測度論の証明（拡張定理・収束定理・連続性定理）。
紙 半円のモーメントと、円周上の $2k$ 点を交差しない弦で組む方法の数が、どちらも Cat_k であること（§06 の寄り道の二つの計算）。$k \le 6$ では数え上げと数値積分でも確かめた 計算 。	二つが一致する理由（大 N の平面ダイアグラム、17-04 で扱う）。
計算 表1〜表3、図1〜図4、§03・§06・§08・§09 の数値。	数値は有限の k・n・標本での確かめで、極限の証明の代わりにはならない。
既知 問題文の、自由場がガウス測度であること・クラスター性・非自明な理論にはガウスでない測度が要ること。四次元の ϕ^4 の自明性。	無限次元の測度（1-09）。四次元のヤン–ミルズの測度の存在（未解決。2026-11 に公開された構成も測度は作っていない。6-04）。このサイトは測度の非自明性・クラスター性も示していない。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§02・§04・§08〜§10 の定理と注意	既知	R. Durrett, *Probability: Theory and Examples*, 5th ed., Cambridge Univ. Press (2019)（定理 2.4.1・3.4.1・3.3.17・3.4.17、§3.4.4 の注意、演習 3.3.6）。著者の公開版で本文を確認。
原論文（公理化・Vitali・Haar・(9)・(13)・(14)）	既知	A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer (1933)。G. Vitali, Bologna (1905)。A. Haar, Ann. of Math. 34 (1933) 147。L. Isserlis, Biometrika 12 (1918) 134–139。G. C. Wick, Phys. Rev. 80 (1950) 268–272。J. W. Lindeberg, Math. Z. 15 (1922) 211–225。A. C. Berry, Trans. AMS 49 (1941) 122–136。C.-G. Esseen, "On the Liapounoff limit of error in the theory of probability", Ark. Mat. Astron. Fys. A 28, No. 9 (1942) 1–19。いずれも書誌のみ。
$C_0 < 0.4748$・§10 の自明性	既知	I. Shevtsova, arXiv:1111.6554 (2011)。M. Aizenman, H. Duminil-Copin, Ann. of Math. 194 (2021) 163–235, arXiv:1912.07973（要旨を確認）。同, Corrigendum, Ann. of Math. 199 (2024) 479（書誌のみ）。
問題文の引用（§01・§05・§07・§10）	既知	A. Jaffe, E. Witten, "Quantum Yang–Mills Theory"（Clay 数学研究所の問題記述）。J. Carlson ほか編 *The Millennium Prize Problems*, Clay Math. Inst. / AMS (2006) 129–152 に収録。Clay の公開版で本文を確認（§5 の式 (2)、§6.2）。
§06 のカタラン数（寄り道）	紙	この章の中の計算（部分積分の漸化式と二項級数）。ガウス行列の半円は 17-04 とその出典表。
表・図・数値	計算	この端末の Python 3.12（NumPy・SciPy）：moments.py（表1・§03・§08、半円の数値積分は $k \le 6$）、pairings.py（$k \le 6$ の数え上げ・(9)）、fig_semicircle.py（図1 の区間ごとの個数）、lattice_gauss.py（表2・図3）、clt.py（表3・図4）、clt_odd.py（§09 の奇数の n）。図の関数は fig_check.js・fig_check2.js（node）で表と照合。

次に読む章：1-09 無限次元の確率 — 場そのものの上の確率と、出発点としてのガウス測度。

無限次元の確率 — 一様な重さは無く、ガウス測度から始める

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 無限次元には平行移動で変わらない重さ（ルベーグ測度）が無く、出発点はガウス測度になること。ずらしてよい方向の全体（Cameron–Martin 空間）には、見本が確率 1 で入らないこと。ブラウン運動・白色雑音・自由場が、次元とともに関数ですらなくなること。

前提となる章 — 1-08。ℓ^2・トーラスの上のフーリエ係数・超関数は、要る分だけその場で定義します（本格的には 1-10・1-11）。

先に言うこと — 測度論の大きな定理は引用で済ませます。この章で作る測度はすべてガウスで、相互作用のある測度には §10 で引用として触れるだけです。四次元のヤン–ミルズ理論を測度として作ることは未解決で、このサイトもそれを示していません。2026-11 に公開された構成（6-00）が作ったのは相関関数と再構成した場の理論で、測度ではありません（6-04）。

この章の順序

1. なぜ無限次元か — 場の変数は無限個
2. ルベーグ測度は無い — 直交する方向に球を詰める
3. 高次元のガウスは殻に住む — 分散を減らす
4. 無限次元のガウス測度 — 影がすべてガウス
5. Cameron–Martin の定理 — ずらせる方向（図1）
6. ブラウン運動 — 経路は落ち着き、エネルギーは発散（図2）
7. 白色雑音 — 点では値を持たない
8. 自由場と次元 — 一点の分散が発散する（図3）
9. 場の積 — 超関数どうしは掛けられない
10. 寄り道：互いに特異な測度 — 尺度・質量・相互作用

01

なぜ無限次元か — 場の変数は無限個

1-08 の格子の確率は、変数が有限個なので「密度 × 体積要素」で書けました。格子を細かくし箱を大きくすると、変数は無限個になります。物理の本は、質量 m の自由なスカラー場（ユークリッド化したもの、4-02）の確率をこう書きます。

$$d\mu(\varphi) \overset{\text{形式的}}{=} \frac{1}{Z}\exp\Big(-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\big(|\nabla\varphi|^2+m^2\varphi^2\big)\,dx\Big)\prod_{x\in\mathbb{R}^d}d\varphi(x) \tag{1}$$

右辺の二つの因子は、どちらも単独では意味を持ちません。$\prod_x d\varphi(x)$ にあたる測度は存在せず（§02）、指数の中の積分は見本のほとんどすべてで $+\infty$ です（§05・§06）。それでも積としての μ はガウス測度として作れます（§04）。問題文も、構成的場の理論が生んだ測度を 'non-Gaussian, Euclidean-invariant measures on spaces of generalized functionals' と書きます 既知 。超関数（§07）の空間の上の、ガウスでなく、回転と平行移動で変わらない測度、という意味です。この章が扱うのは、その出発点になるガウスの場合です。**例：** $d=1$ で区間を N 等分すると、(1) は 1-08 §07 の N 変数のガウス分布で、$N\to\infty$ の行き先がこの章の主題です。

02

ルベーグ測度は無い — 直交する方向に球を詰める

長さ・面積（ルベーグ測度）は、平行移動で変わらず、有界な集合に有限の重さを配ります。無限次元ではこの二つが両立しません。二乗和が有限な数列の空間 $\ell^2=\{x=(x_1,x_2,\dots):\sum_k x_k^2<\infty\}$、長さ $\|x\|=(\sum_k x_k^2)^{1/2}$、第 n 成分だけが 1 の数列 e_n で述べます。

定理 既知 ℓ^2 の上の測度が平行移動で変わらず、どの開球にも有限の重さを配るなら、それは 0 である。

証明。$n\neq m$ なら $\|e_n-e_m\|=\sqrt{2}>1$ なので、球 $B(e_n,\frac12)$ は互いに交わらず、どれも $B(0,\frac32)$ に入ります。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu\big(B(e_n,\tfrac12)\big)\;\le\;\mu\big(B(0,\tfrac32)\big)\;<\;\infty \tag{2}$$

左辺の各項は平行移動で同じ値 c なので $c=0$ です。ℓ^2 は、有理数を成分とし有限個を除いて 0 の数列を中心とする可算個の半径 $\frac12$ の球で覆えるので、全体の重さも 0 です。∎ $\mathbb{R}^n$ なら球は 3^n 個（体積の比）までしか入らず、矛盾しません。

03

高次元のガウスは殻に住む — 分散は減らねばならない

$\mathbb{R}^n$ の標準ガウス $N(0, I_n)$（1-08 (8)）の密度は原点で最大ですが、重さの大半は遠くの薄い殻にあります。$|x|^2 = \sum_{k \le n} x_k^2$ は独立な n 個の和なので、大数の法則（1-08 (12)）から $|x|^2/n \to 1$ です。

$$E|x|^2 = n, \qquad \mathrm{Var}\,|x|^2 = 2n, \qquad |x| = \sqrt{n} + O(1) \tag{3}$$

$n = 10,\ 100,\ 1000$ で $E|x|/\sqrt{n} = 0.975,\ 0.9975,\ 0.99975$、$|x|$ の標準偏差は $0.698,\ 0.706,\ 0.707$ で、殻の厚さは n によらず $1/\sqrt{2}$ に落ち着きます 計算 。分散 1 のまま $n \to \infty$ とすると $|x| \to \infty$ で、極限は ℓ^2 にありません。そこで分散 σ_k^2 を減らします。独立な $N(0,1)$ の列 $\xi_1, \xi_2, \dots$ で

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k\, \xi_k\, e_k, \qquad E\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 \tag{4}$$

とすると、右辺の和が有限なことが、x が ℓ^2 に値を取るガウスの確率変数になる必要十分条件です（Hairer 演習 4.7）既知 。**例：** $\sigma_k = 1/k$ なら $E\|x\|^2 = \pi^2/6$。分散 1 の列も、すべての数列の空間 $\mathbb{R}^\infty$ の上になら作れます。使うのは **Kolmogorov の拡張定理**（有限個ずつの分布が矛盾なく与えられていれば、無限個の列の分布が一つに決まる、という定理。Durrett 定理 2.1.21）既知 で、これが §07 の白色雑音の芽です。

04

無限次元のガウス測度 — 一次元の影がすべてガウス

密度が使えないので、ガウス測度は「影」で定義します。空間 E（ℓ^2 や連続関数の空間）の上の確率測度 μ が**ガウス測度**であるとは、連続な線形写像 $\ell : E \to \mathbb{R}$ のどれについても $\ell(x)$ が一次元のガウス分布に従うことです（Hairer 定義 4.4）既知 。平均 0 なら、共分散 $C(\ell, \ell') = E[\ell(x)\ell'(x)]$ が μ を決めます（1-08 (8) の形）。

$$\int_E e^{\,i\ell(x)}\, d\mu(x) = \exp\Big(-\frac{1}{2}\, C(\ell, \ell) \Big) \tag{5}$$

ℓ^2 の上では $C(\ell, \ell') = \langle \ell, C\ell' \rangle$ と**共分散作用素** C で書け、(4) なら $Ce_k = \sigma_k^2 e_k$ です。対称で正の C のトレース（固有値の和）が有限なら、それを共分散とするガウス測度があります（Hairer 命題 4.17）既知 。**例：** $\ell(x) = \sum_k a_k x_k$ は分散 $\sum_k a_k^2 \sigma_k^2$ のガウスです。問題文は自由場を、超関数の空間 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ の上の、平均 0・共分散 $(-\Delta + m_0^2)^{-1}$ のガウス測度として与えます 既知 。(1) の二つの因子は、共分散という一つの情報に置き換わりました。

05

Cameron–Martin の定理 — ずらせる方向の全体は確率 0

二つの確率測度が**同値**であるとは、零集合（重さ 0 の集合）が同じことです。反対に、一方で確率 1 の集合が他方で確率 0 になるとき、二つは**互いに特異**であるといいます。有限次元のガウス測度は、ずらすと密度が掛かります（一次元なら $N(h,1)$ は $N(0,1)$ の $e^{hx-h^2/2}$ 倍）。一般に、すべての集合 A で $\mu_h(A)=\int_A D(x)\,d\mu(x)$ となる関数 D を**相対密度**と呼び、$d\mu_h/d\mu$ と書きます。(4) の最初の n 座標で μ を h だけずらした μ_h では次です。

$$\frac{d\mu_h}{d\mu}(x)=\exp\Big(\sum_{k\le n}\frac{h_k x_k}{\sigma_k^2}-\frac{1}{2}\|h\|_H^2\Big),\qquad \|h\|_H^2=\sum_{k\le n}\frac{h_k^2}{\sigma_k^2} \tag{6}$$

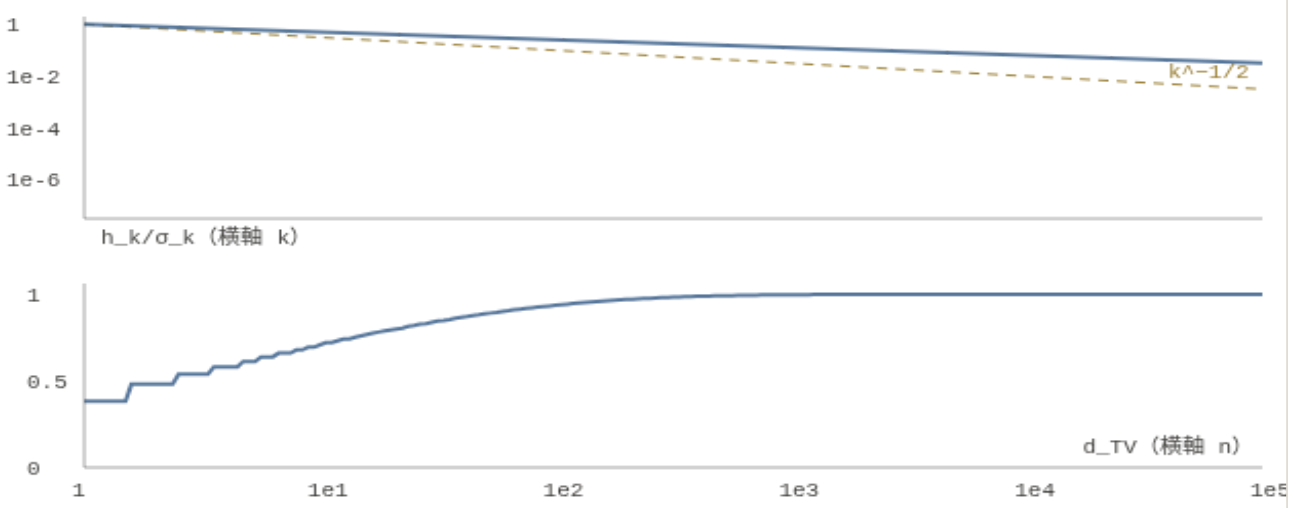
$\|h\|_H$ は「ずれを、その方向の揺れで測った長さ」です。二つを見分けられる度合い（全変動距離）は $C^{-1}h$ の方向の一次元の問題に帰着し、厳密に次の式になります（Φ は 1-08 (13)）。

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu,\mu_h)=\sup_A\big|\mu(A)-\mu_h(A)\big|=2\,\Phi\big(\tfrac{1}{2}\|h\|_H\big)-1 \tag{7}$$

(7) は数値積分と 40 次元の標本で確かめました 計算 。$n\to\infty$ で $\|h\|_H$ が有界なら $d_{\mathrm{TV}}<1$、発散すれば $d_{\mathrm{TV}}\to 1$ で、後者では二つの測度は互いに特異になります。

Cameron–Martin の定理 既知 μ_h が μ と同値なのは $\|h\|_H<\infty$ のときに限り、そうでなければ互いに特異である（Hairer 定理 4.44 とその証明。原論文は Cameron–Martin 1944）。この h の全体 H が **Cameron–Martin 空間**です。ところが (4) の見本では $\|x\|_H^2=\sum_k \xi_k^2=+\infty$（大数の法則）で、無限次元なら $\mu(H)=0$ です（Hairer 命題 4.45） 既知 。ずらしてよい方向の全体 H には、見本が確率 1 で入りません。

図1　$\sigma_k=1/k$ の測度を $h_k=k^{-a}$ だけずらす。a を動かすと、上の比 $h_k/\sigma_k=k^{1-a}$（両対数）が破線 $k^{-1/2}$ より速く減るかが変わり、下の d_{TV}（最初の n 座標での (7)）が 1 に張り付くか、破線の極限に留まるかが変わる



a = 1.30　n = 10⁵ で ‖h‖² = 248.0、d_TV = 1.0000　極限 ∞、1

表1　$\sigma_k = 1/k$、$h_k = k^{-a}$ での $\|h\|_H^2 = \sum_{k \le n} k^{2-2a}$ と (7) 計算

a	$\|h\|_H^2$（$n = 10^5$）	極限	d_{TV}（$n = 10^5$）	極限
1	10^5	∞	1.0000	1
1.25	631	∞	1.0000	1
1.5	12.09	∞	0.9179	1
1.75	2.606	2.612	0.5804	0.5810
2	1.645	$\pi^2/6$	0.4787	0.4787

計算 図1 と表1 の数値はこの端末で計算した（図は (7) と部分和からその場で描き、表と 4 桁で一致）。JavaScript が無効なら表1 で読める。

境目の $a = 3/2$ では $\|h\|_H^2 \approx \ln n + 0.577$ と対数でしか伸びず、$n = 10^{20}$ でも $d_{\mathrm{TV}} = 0.9994$ です 計算 。

06

ブラウン運動 — 経路は落ち着き、エネルギーは発散する

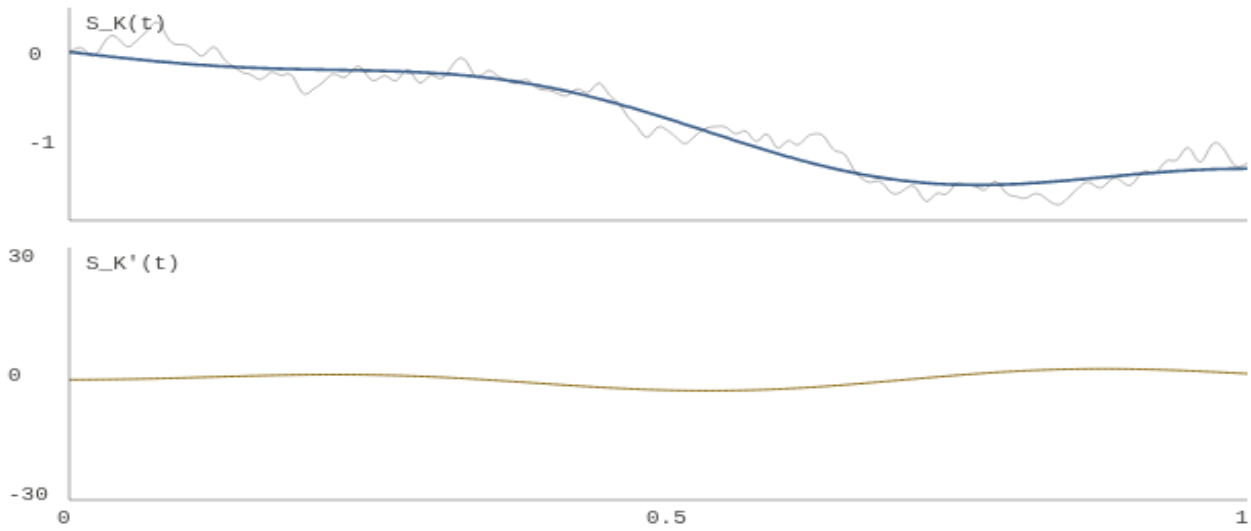
$[0,1]$ の上の連続関数に値を取り、平均 0・共分散 $E[B(s)B(t)] = \min(s,t)$ のガウス測度が**ウィーナー測度**、その見本 B が**ブラウン運動**です（Wiener 1923 に始まるとされる） 既知 。経路は指数 $1/2$ 未満のヘルダー連続性を持ち（$\gamma < 1/2$ なら、経路ごとの定数 C で、すべての s,t について $|B(t) - B(s)| \le C|t-s|^{\gamma}$）、確率 1 でどの点でも微分できません（Durrett 定理 7.1.5・7.1.6） 既知 。Durrett は前者を Wiener 1923 の結果として、後者を Paley–Wiener–Zygmund 1933 の発見として挙げています。

(4) の形にするには、共分散作用素 $(Cf)(s) = \int_0^1 \min(s,t) f(t)\,dt$ の固有関数を探します。$g = Cf$ は $g'' = -f$、$g(0) = 0$、$g'(1) = 0$ を満たすので、固有値の問題は常微分方程式 $-g'' = \lambda^{-1} g$ になり、$\cos\omega = 0$ から次が出ます。

$$B(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \frac{\sqrt{2}\,\sin(\omega_k t)}{\omega_k}, \qquad \omega_k = \Big(k - \frac{1}{2}\Big)\pi \tag{8}$$

$\sigma_k = 1/\omega_k \approx 1/(\pi k)$ は §05 の例と同じ減り方で、4000 項の共分散は $\min(s,t)$ と 5.1×10^{-5} 以内で合います 計算 。Cameron–Martin 空間は $h(0) = 0$、$\|h\|_H^2 = \int_0^1 \dot h^2\,dt < \infty$ の関数の全体で（Hairer 演習 4.29） 既知 、この $\|h\|_H^2$ が (1) の $d = 1$、$m = 0$ の指数の中身です。K 項の部分和 S_K では $\int_0^1 \dot S_K^2\,dt = \sum_{k \le K} \xi_k^2 \approx K$ で、図2 の経路は落ち着くのに、この「エネルギー」は伸び続けます。

図2　(8) の部分和。K（項の数）を動かすと、上の S_K（薄い線は $K = 128$）は落ち着き、下の $\dot S_K$（白色雑音の近似、§07）は振れ幅がおよそ $\sqrt{K}$ で増える




```
K = 4  ∫S_K'² = Σξ_k² = 4.62 (÷K 1.154)  max|S_K − S_128| = 0.442
```

計算 図2 の数値はこの端末で計算した（固定した 128 個の乱数 ξ_k の部分和）。$K = 1, 16, 64, 128$ で $\sum \xi_k^2 = 2.13,\ 13.4,\ 56.5,\ 132.8$、$\max_t |S_K - S_{128}| = 0.589,\ 0.202,\ 0.090,\ 0$。JavaScript が無効ならこの数値と表2 で読める。

格子で見る — 二次変分

格子に切っても同じことが見えます。N 等分した増分の二乗和（**二次変分**）は 1 に近づき（Durrett 演習 7.1.6）既知 、滑らかな関数では 0 に近づくので、離散化したエネルギー $\sum (\Delta B)^2/\Delta t$ は N に比例して発散します（表2）。経路積分（2-07）の $e^{-\frac{1}{2}\int \dot{x}^2 dt}\prod_t dx(t)$ は、この測度を形式的に書いたものです。正確には、指数も $\prod_t dx(t)$ も単独では意味を持たず（§01）、組としてウィーナー測度を指します。

表2　2^{20} 点で作った一本の経路を N 等分して見る 計算

N	$\sum (\Delta B)^2$（揺れ $\sqrt{2/N}$）	$\sum (\Delta B)^2/\Delta t$	$h = t^2$ の $\sum (\Delta h)^2$
16	0.689（0.35）	11.0	0.083
4096	0.979（0.02）	4010	3.3×10^{-4}
1048576	0.9999（0.001）	1.05×10^{6}	1.3×10^{-6}

07

白色雑音 — 点では値を持たない

形式的な微分 $\xi = \dot{B}$ が**白色雑音**です。点ごとの値が無い（図2 の下段）ので、関数と組にして定義します。白色雑音とは、二乗積分が有限な関数 $f \in L^2[0,1]$ ごとのガウスの確率変数 $\xi(f)$ で、f について線形で次を満たすものです（Hairer 例 4.63）既知 。

$$E\big[\xi(f)\,\xi(g)\big] = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt \qquad \big(\text{形式的には } E[\xi(s)\xi(t)] = \delta(s-t)\big) \tag{9}$$

例：$\mathbf{1}_{[0,t]}$ を $[0,t]$ の上で 1、外で 0 の関数とすると、$\xi(\mathbf{1}_{[0,s]})$ と $\xi(\mathbf{1}_{[0,t]})$ の共分散は $\int_0^1 \mathbf{1}_{[0,s]}(u)\,\mathbf{1}_{[0,t]}(u)\,du = \min(s,t)$ で、これはブラウン運動です（Hairer 演習 4.64）。幅 ε の区間の平均 $\xi(\mathbf{1}_{[t,t+\varepsilon]})/\varepsilon$ の分散は $1/\varepsilon$、d 次元の一辺 ε の箱なら ε^{-d} で、点に縮めると発散します。

白色雑音は共分散が恒等写像（すべての $\sigma_k = 1$）のガウスで、§03 の通り L^2 に入りません。どれだけ入り損ねるかを次元ごとに測るため、ここから舞台を $[0,1]$ から d 次元の**トーラス** $\mathbb{T}^d = [0,2\pi)^d$（向かい合う端をつないだ箱）に移します（(9) の積分は $\mathbb{T}^d$ の上の積分に替える）。$\mathbb{T}^d$ の上の関数を $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k\, e^{ik\cdot x}$ と書き、c_k を**フーリエ係数**と呼びます。$-\Delta = -\sum_i \partial_i^2$ は $e^{ik\cdot x}$ に $|k|^2$ を掛けるので、係数では c_k を $|k|^2 c_k$ にする操作です。白色雑音のフーリエ係数は、$c_{-k} = \overline{c_k}$ で結ばれる組を除いて独立で、$E|c_k|^2$ はどれも同じ定数です。

形式的な級数 $\sum_k c_k e^{ik\cdot x}$ に長さ $\big(\sum_k (1+|k|^2)^{-s}|c_k|^2\big)^{1/2}$ を与えた空間を H^{-s} とします（s が大きいほど高い周波数を軽く数える）。白色雑音ではこの長さの二乗の平均が $\sum_k (1+|k|^2)^{-s}$ の定数倍で、半径 R の殻に R^{d-1} 程度の k があるので、有限なのは $s > d/2$ のときです。実際、そのときに限り白色雑音は H^{-s} に実現できます（Hairer 演習 4.65）既知 。関数と組にしたときにだけ値が出るものが**超関数**で、一般論は 1-11、白色雑音で場を揺らす確率量子化は 7-09 です。

08 自由場と次元 — 一点の分散が発散する

トーラスの上で考えた (1) の自由場は、白色雑音のフーリエ係数 c_k を $(|k|^2+m^2)^{-1/2}$ 倍してならしたものです。この操作を $(-\Delta+m^2)^{-1/2}$ と書くと、共分散は $(-\Delta+m^2)^{-1}$（§04 の問題文の形）で、係数の分散は $1/(|k|^2+m^2)$ に比例します。§07 の勘定で H^{-s} に入る条件は $s > d/2 - 1$ になり、白色雑音より一階分なめらかですが、$d \ge 2$ では関数になりません。有界な領域の自由場は、$d=1$ なら L^2 の見本として作れ、$d=2$ では作れません（Sheffield 命題 2.7 の後の注意）既知 。

格子間隔 a の格子 $a\mathbb{Z}^d$ では、$-\Delta$ を差分に替えます。1-08 (10) の $(\Delta x)_j = x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}$ を座標の向きごとに足し、a^2 で割ったものです。$e^{ik\cdot x}$ はこの差分ラプラシアンの固有関数で、$e^{ik_i a} - 2 + e^{-ik_i a} = -4\sin^2\frac{k_i a}{2}$ から、固有値は $-\sum_i \frac{4}{a^2}\sin^2\frac{k_i a}{2}$ です。したがって一点の分散は次の積分です（k は格子で区別できる範囲の箱を動く）。

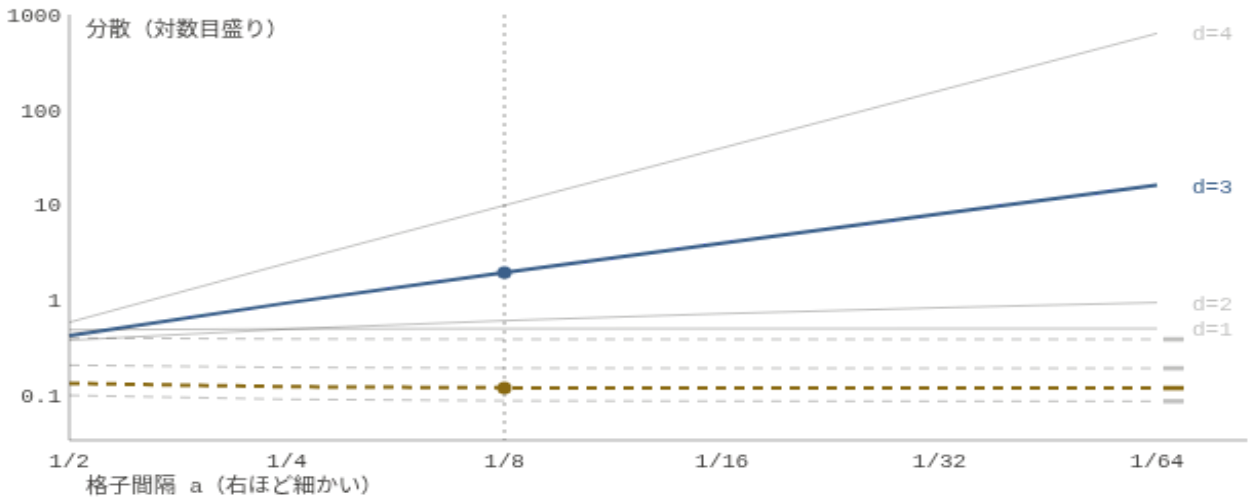
$$G_a(0) = \int_{[-\pi/a,\,\pi/a]^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\, \frac{1}{m^2 + \sum_{i=1}^d \frac{4}{a^2}\sin^2\frac{k_i a}{2}} \tag{10}$$

$a \to 0$ では大きい $|k|$ の寄与がおよそ $\int^{1/a} k^{d-3}\,dk$ で、$d \geq 2$ で発散します。点の値の代わりに、標準偏差 ℓ のガウス核 $\rho_\ell(x) = (2\pi\ell^2)^{-d/2} e^{-|x|^2/(2\ell^2)}$ と組にした値 $\varphi(\rho_\ell)$（形式的には $\int \varphi(x)\rho_\ell(x)\,dx$、**ならした値**）を見ると、その分散は

$$\operatorname{Var}\varphi(\rho_\ell) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\, \frac{e^{-\ell^2|k|^2}}{|k|^2 + m^2}$$

です（格子では k を (10) と同じ箱に制限し、分母を (10) のものに替える）。因子 $e^{-\ell^2|k|^2}$ が大きい $|k|$ を抑えるので、どの d でも有限です。

図3　格子を細かくする（つまみで a を $1/2$ から $1/64$ へ）と、一点の分散 $G_a(0)$（実線）は $d \geq 2$ で増え続け、ならした値の分散（破線）は右端の印の値に落ち着く。次元のボタンを押すと、その d の二本が濃くなる（縦軸は対数、$m = 1$、$\ell = 1/4$）



a = 1/8、d = 3　一点の分散 G_a(0) = 1.941（a·G = 0.2426）　ならした値の分散 0.1193（a→0 で 0.1183）

表3　格子の自由場（$m = 1$）の一点の分散 $G_a(0)$ と、標準偏差 $\ell = 1/4$ のガウス核でならした値 $\varphi(\rho_\ell)$ の分散 計算 。一点の分散の d 依存の表はこの本ではこれを正本にします（2-07 §09・2-02 はここを引く）

a	$d=1$	$d=2$	$d=3$	$d=4$
1	0.4472	0.2540	0.1705	0.1271
1/2	0.4851	0.3769	0.4223	0.5816
1/4	0.4961	0.4932	0.9289	2.431
1/8	0.4990	0.6057	1.941	9.859
1/16	0.4998	0.7168	3.963	39.60
1/32	0.4999	0.8273	8.007	158.6
1/64	0.5000	0.9377	16.10	634.5
増え方（$a \to 0$）	$\to$ 1/2	$\approx \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{a} + 0.276$	$\approx 0.2527/a$	$\approx 0.1549/a^2$
ならした値（$a \to 0$）	0.3852	0.1912	0.1183	0.0861

(10) は $d=1$ の厳密な値、$d=2,3$ の格子の直接の和と照合済みです。$d=1$ は $1/(2m)$ に収束し、$d=2$ は $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{a}$ との差が 0.276 に落ち着き、$d=3$ では $a\,G_a(0)$ が 0.253 前後に近づき（$a=1/64$ で 0.2515）、$d=4$ では $a^2 G_a(0)$ が 0.155 に近づきます 計算 。この二つの行き先は $\mathbb{Z}^3$・$\mathbb{Z}^4$ の格子のグリーン関数の原点での値で、別の一次元積分から 0.2527・0.1549 と出ます（$d=3$ は Watson の積分の半分）計算 。ならした値の分散はどの d でも有限に収束し、$a=1/32$ で極限と小数第 3 位まで合います。場の値は「点では無限、ならせば有限」です。境目が 2 のこの量を、四で切り替わる量と並べた図は 1-12 §10 の次元のつまみです。

計算 図3 と表3 の数値はこの端末で計算した（$a=2^{-p}$、$p=1,\dots,6$ の値を表として図に埋めてある。表3 はそれに $a=1$ の行と増え方の行を足したもの）。JavaScript が無効なら表3 で読める。

09

場の積 — 点の値が無いと、掛け算が困る

§08 の通り、$d\geq 2$ では $\varphi(x)^2$ の平均が無限大です。そのため φ^4 のような項には引き算の手当て（繰り込み、4-04・7-03）が要り、超関数どうしの積は一般に定義できません（1-11）。四次元のヤン–ミルズ場 A は、短い距離では四次元の自由場と同じ荒さを持つと期待されています（漸近自由、4-06）物理 。正確には、短い距離での相関関数が、対数の補正を除いて自由場のものに近づく、という期待です。問題文は漸近自由を 'at short distances the field displays quantum behavior very similar to its classical behavior' と説明し（§1）、構成すべき理論の相関関数が 'should agree at short distances with the predictions of asymptotic freedom' ことを求めています（§4）既知 。場の強さ $F=dA+A\wedge A$（1-07）の $A\wedge A$ は、そういう超関数どうしの積です（7-10）。

10

寄り道：互いに特異な測度 — 尺度・質量・相互作用

飛ばしてよい節です。

二つのガウス測度は、同値（§05）か互いに特異かのどちらかで、その中間はありません（Feldman 1958、Hájek 1958。教科書では Bogachev 定理 2.7.2 などにあるとされる）既知 。有限次元では、共分散が正定値のガウス測度どうしはいつも同値です。無限次元では、次の例のように、わずかな違いで互いに特異になります。

尺度。共分散を c^2 倍すると、$\frac{1}{N}\sum_{k\leq N} x_k^2/\sigma_k^2$ は 1 でなく c^2 に収束します（大数の法則）。見本一つで c が読めるので、$c\neq\pm 1$ なら互いに特異です（Hairer 命題 4.43）既知 。

質量。トーラスの上で質量 m_1, m_2（どちらも正）の自由場を比べると、フーリエ係数の分散の比は $1+\varepsilon_k$、$\varepsilon_k=(m_1^2-m_2^2)/(|k|^2+m_2^2)$ です。独立な座標を並べた二つの積の測度を比べるには Kakutani の

判定を使います。k 番目の座標の二つの密度を p_k, q_k とします（ここではどちらも正のガウス密度）。一次元ごとの重なり $\int \sqrt{p_k(x) q_k(x)}\, dx$ の無限積が正なら二つは同値、0 なら互いに特異です（Kakutani 1948）既知 。実数値の場ではフーリエ係数の実部と虚部が独立な座標になりますが、どちらの分散の比も $1+\varepsilon_k$ なので、下の条件は変わりません。分散の比が $r^2 = 1+\varepsilon$ の二つのガウスの重なりは $\sqrt{2r/(1+r^2)} = 1 - \varepsilon^2/16 + O(\varepsilon^3)$ で、$\varepsilon_k \to 0$ なので、積が正であることは $\sum_k \varepsilon_k^2 < \infty$ と同値です。

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varepsilon_k^2 = (m_1^2 - m_2^2)^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{(|k|^2 + m_2^2)^2} \;<\; \infty \quad \Longleftrightarrow \quad d \le 3 \tag{11}$$

$m_2 = 1$ で $|k| \le R$ の部分和 $\sum (|k|^2+1)^{-2}$ を $R = 16, 32, 64, 128$ で見ると、$d=3$ では 9.21、9.61、9.80、9.90 と、R を倍にするごとの増分が 0.39、0.20、0.10 と半分になり、10.0 付近に収束します（残りはおよそ $4\pi/R$。別の積分で和全体は 9.998）。$d=4$ では増分が半分にならず、R を倍にするごとに $2\pi^2 \ln 2 \approx 13.7$ ずつ伸びます 計算 。したがって、$m_1 \neq m_2$ なら、質量の違う二つの自由場の測度は、トーラスの上で $d \le 3$ なら同値、$d \ge 4$ なら互いに特異です 既知 （Schröfl–Floerchinger 2025 §4.1。有界な領域の上の Dirichlet・Neumann・周期境界の場合）。(11) は Feldman–Hájek の判定（C_i を質量 m_i の共分散として、$C_1^{-1/2} C_2 C_1^{-1/2} - I$ が Hilbert–Schmidt 作用素、ここでは固有値 ε_k の二乗和が有限）と同じ条件です。

相互作用。ガウス測度に密度 e^{-V} を掛ける作り方は、V が見本のほとんどすべてで定義できないと破れます。極限として作った測度は一般に密度を持たず（Sheffield §3.3）、三次元のトーラスの上の φ^4 の測度は自由場と互いに特異です（Barashkov–Gubinelli 2020）既知 。構成的場の理論は、測度を切断した測度の極限として作ります（7-01・7-05）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 §02 の定理（証明は本文）。ほかの定理は文献から引用。	Kolmogorov・Cameron–Martin・Kakutani・Feldman–Hájek の定理の証明、超関数の空間の上に測度を作る一般論。
既知 (11) による、トーラス上の質量の違う自由場（$m_1 \neq m_2$）の判定（Schröfl–Floerchinger 2025 §4.1 と同じ結論）。	機械検査なし。$\mathbb{R}^d$ 全体は扱っていない。
計算 表1〜表3、図1〜図3、本文の数値と検算。	極限値（0.253・0.155・10.0 など）は、有限の a・R からの読みと数値積分によるもので、誤差の厳密な評価はしていない。
物理 四次元のヤン–ミルズ場の相関関数が、短い距離で（対数の補正を除いて）自由場のものに近づくという期待。	定理ではない。四次元で相互作用のある測度（ヤン–ミルズを含む）の存在は未解決で、このサイトも示していない（2026-11 に公開された構成も測度は作っていない。6-04）。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§03〜§10 の定義と定理（番号は本文）	既知	M. Hairer, "An Introduction to Stochastic PDEs", arXiv:0907.4178（v2, 2023）§4。本文を確認。
定理 2.1.21（Kolmogorov の拡張定理）、定理 7.1.5・7.1.6 と前後の帰属の記述（Wiener 1923、Paley–Wiener–Zygmund 1933）、演習 7.1.6	既知	R. Durrett, *Probability: Theory and Examples*, 5th ed., Cambridge Univ. Press (2019)。著者の公開版で本文を確認。
命題 2.7 とその後の注意、§3.3	既知	S. Sheffield, "Gaussian free fields for mathematicians", Probab. Theory Relat. Fields 139 (2007) 521–541, arXiv:math/0312099。本文を確認。
原論文（ウィーナー測度、微分できないこと、Cameron–Martin、Kakutani、ガウス測度の二分法）	既知	N. Wiener, J. Math. Phys. 2 (1923) 131–174。R. E. A. C. Paley, N. Wiener, A. Zygmund, Math. Z. 37 (1933) 647–668（書誌は Durrett の文献表による）。R. H. Cameron, W. T. Martin, Ann. of Math. 45 (1944) 386。S. Kakutani, Ann. of Math. 49 (1948) 214–224。J. Feldman, Pacific J. Math. 8 (1958) 699–708（本文を確認：ガウス過程の測度の同値か直交かの二択）。J. Hájek, Czechoslovak Math. J. 8 (1958) 610–618（ロシア語。書誌を DML-CZ で確認、本文は書誌のみ）。ほかは書誌のみ（Kakutani の主張は二次資料で確認）。
ガウス測度の二分法（教科書）	既知	V. I. Bogachev, *Gaussian Measures*, AMS (1998) 定理 2.7.2。G. Da Prato, J. Zabczyk, *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*, Cambridge Univ. Press (2014) 定理 2.25。いずれも書誌のみ（二次資料で言及を確認）。
§10 の質量の違う自由場の判定（有界な領域・$d<4$ で同値、$d\geq 4$ で特異）	既知	M. Schröfl, S. Floerchinger, "Relative entropy and mutual information in Gaussian statistical field theory", Ann. Henri Poincaré 26 (2025) 3233–3319, arXiv:2307.15548。本文を確認（§4.1・定理 3。周期境界は同節の立方体の場合）。
$\mathbb{Z}^3$ の格子のグリーン関数の原点での値（§08）	既知・計算	G. N. Watson, "Three triple integrals", Quart. J. Math. Oxford 10 (1939) 266–276。書誌のみ。値 0.2527 はこの端末で別の一次元積分から計算した。
三次元のトーラスの上の φ^4 の特異性	既知	N. Barashkov, M. Gubinelli, "The Φ^4_3 measure via Girsanov's theorem", arXiv:2004.01513 (2020)。要旨を確認。
§01・§04・§09 の問題文の引用	既知	A. Jaffe, E. Witten, "Quantum Yang–Mills Theory"（Clay 数学研究所の問題記述）の §1・§2・§4・§6。本文を確認。
表・図・本文の数値	計算	この端末の Python 3.12（NumPy 1.26・SciPy 1.11）：dims.py、cameron_martin.py、brownian.py、gff.py、watson.py、fig3.py。図の関数は fig_check.js（node）で表と照合。

次に読む章：1-10 ヒルベルト空間と自己共役作用素 — この章の ℓ^2・共分散作用素・固有関数展開を、スペクトルの言葉で整える。

ヒルベルト空間と自己共役作用素 — 無限次元で「いちばん下」と「その次」を測る

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 関数を長さの測れるベクトルとして扱う空間と、微分のような有界でない作用素。スペクトルが固有値より広く、境界条件も作用素の一部であること。いちばん下の値と隙間を測る変分原理が、Poincaré 不等式の最良の定数と同じものであること。

前提となる章 — 1-01（内積・エルミート行列・対角化）。02・05・08・09 節で 1-08・1-09（長さ 0 の集合・ブラウン運動・ガウス分布）に触れます。

先に言うこと — 関数解析の入口を紹介し、定義域の細部と定理の証明は省きます。場の量子論のハミルトニアンはずっと扱いにくく（4-09）、この章はヤン–ミルズの質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. なぜ無限次元か — 下の固有値は止まり、上は逃げる（図 1・表 1）
2. ヒルベルト空間 — 極限が空間の中に残る
3. 作用素と自己共役 — 境界条件も作用素の一部
4. スペクトル — 固有値の無い値もある
5. スペクトル定理 — 隙間が減り方を決める
6. 変分原理 — 上界は易しく、下界には別の情報が要る（表 2・囲み「上界と下界の非対称」）
7. Poincaré 不等式 — 最良の定数は隙間の逆数
8. 重みの付いた Poincaré 不等式 — 凸なら 1/κ、谷が二つなら大きい（図 2・表 3）
9. 変数が多いとき — 積・ガウス・自由場と、二つの隙間
10. 寄り道：固有値を数える — Weyl の法則と太鼓の形

01

なぜ無限次元か — 下の固有値は止まり、上は逃げる

有限次元なら最小固有値と次との隙間はいつでも計算できます（1-01）。問われるのは、自由度を増やした極限で隙間が正のまま残るかどうかです。例として、$[0,1]$ で両端が 0 の関数 u に $-u''$ を対応させる規則を、N 等分の格子で刻みます（2-01 §05 のヘッセ行列と同じ形）。

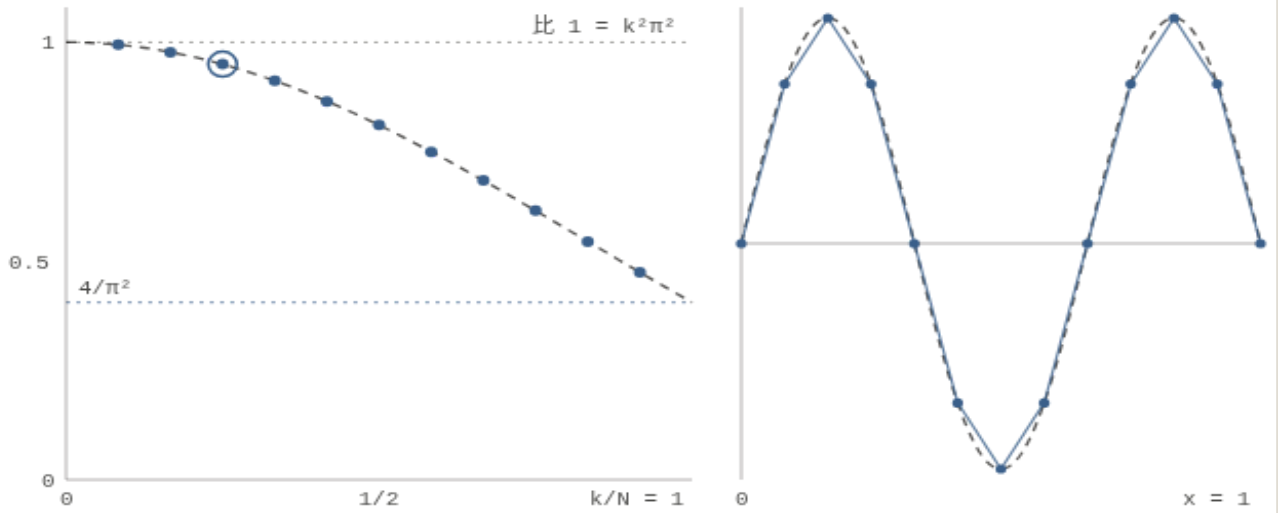
$$(A_N u)_j = N^2\,(-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}), \quad u_0 = u_N = 0; \qquad \lambda_k(N) = 4N^2 \sin^2\frac{k\pi}{2N} \quad (1 \le k \le N-1) \tag{1}$$

固有ベクトルは $u_j = \sin(k\pi j/N)$ です（代入して確かめられます）。k を止めて $N \to \infty$ とすると $\lambda_k(N) \to k^2\pi^2$。これは $-u'' = \lambda u,\ u(0) = u(1) = 0$ の固有値です。いちばん上の固有値は $4N^2$ 近くまで伸び、極限を持ちません。

計算 **表 1**　(1) の行列の固有値（三重対角の固有値計算と (1) の差は相対 10^{-15} 以下）。

N	λ_1	λ_2	いちばん上
10	9.78870	38.19660	390.2
40	9.86453	39.39731	6390.1
160	9.86929	39.47334	102390.1
連続	π² = 9.86960	4π² = 39.47842	（無い）

図 1　左：(1) の固有値の比 λ_k(N)/k²π²（点、k = 1 … N − 1）を t = k/N に対して描く。点は N によらず曲線 $(\sin(\pi t/2)/(\pi t/2))^2$（破線）に乗り、N を増やすと番号 k の点（丸）は比 1 に寄る。右端の比 $4/\pi^2$ は、上の端が $4N^2$ で頭打ちになること。右：k 番目の固有ベクトル（点）と sin kπx（破線）



N = 12　k = 3　λ_k(N) = 84.35　k²π² = 88.83　比 = 0.9496

計算 図の数値は (1) からその場で計算しています（表 1 で照合）。

比は $t = k/N$ だけで決まり、$\lambda_k(N)/k^2\pi^2 = \big(\sin(\pi t/2)/(\pi t/2)\big)^2$ です（図 1 左の破線）。$k = N/2$ で $8/\pi^2 \approx 0.81$、右端の $t \to 1$ で $4/\pi^2 \approx 0.41$。k を止めて N を増やせば $t \to 0$ で比は 1 に近づきます。k が N に近い固有ベクトルは、格子点では $\sin k\pi x$ の値そのものですが、振動が点の間隔と同じくらい細かいので、点を結ぶと別の形に見えます。実際 $\sin(k\pi j/N) = -(-1)^j \sin((N-k)\pi j/N)$ で、ゆっくりした振動に一点ごとの符号の交代を掛けた形です（図 1 右で k を $N-1$ に近づけると見えます）。極限に残るのは下の固有値と隙間で、相手は上に際限のない作用素です。格子ゲージ理論の連続極限（5-05）でも、格子から読むのはスペクトルの下の端（最も軽い状態）です 物理 。四次元では、格子ゲージ理論の尺度の極限が在ることを 2026-11 に公開された構成が示しました（Lean で証明されている、と委員会が評価した。6-00）。その極限の理論のスペクトルの下の端、つまり質量ギャップは示されていません（6-04）。

02

ヒルベルト空間 — 極限が中に残る

関数を「成分が無限個あるベクトル」として扱うには、内積（1-01 §05）と**完備性**が要ります。完備とは、互いにいくらでも近づいていく列（コーシー列）が空間の中に極限を持つことです。この二つを持つ複素ベクトル空間を**ヒルベルト空間**と呼びます。

$$\ell^2 = \Big\{(c_1, c_2, \dots) : \sum_k |c_k|^2 < \infty\Big\}, \qquad L^2(0,1) = \Big\{f : \int_0^1 |f|^2 dx < \infty\Big\}, \qquad \langle f, g\rangle = \int_0^1 \overline{f}\, g\, dx \tag{2}$$

L^2 では、長さ 0 の集合の上でしか違わない関数を同じものとみなします（1-08）。連続関数だけでは完備になりません。$\tanh(n(x-\tfrac12))$ は互いに近づくのに、行き先は段差の関数です。06 節で「比を小さくしていく列」の行き先を取るには、完備な L^2 が要ります 既知 。

$e_k = \sqrt{2}\sin k\pi x$ $(k \ge 1)$ は $L^2(0,1)$ の正規直交基底で、$c_k = \langle e_k, f\rangle$ について $\|f\|^2 = \sum_k |c_k|^2$（Parseval の等式）です 既知 （1-11）。例。$f = x(1-x)$ では奇数の k で $c_k = 4\sqrt{2}/(k\pi)^3$、偶数で 0 です。$\sum_{k\,\text{奇}} 32/(k\pi)^6 = 1/30$ は $\int_0^1 x^2(1-x)^2 dx = 1/30$ と一致します。1-09 の ℓ^2 は、こうして関数の空間とつながります。

03

作用素と自己共役 — 定義域と境界条件

伸び率の上限 $\|A\| = \sup_{\psi\neq 0}\|A\psi\|/\|\psi\|$ が有限な作用素を有界と呼びます。$-d^2/dx^2$ は e_k を $k^2\pi^2$ 倍するので有界でなく、二階微分が L^2 に入らない関数もあります。そこで施してよい関数の部分空間、**定義域** $D(A)$ を作用素の一部として指定します。$D(A)$ の上で $\langle \phi, A\psi\rangle =$

$\langle A\phi, \psi\rangle$ なら**対称**です。自己共役はもう一歩強く、この等式の相手 ϕ を $D(A)$ の外まで探しても増えないことを言います。正確には、すべての $\psi \in D(A)$ で $\langle \phi, A\psi\rangle = \langle \eta, \psi\rangle$ となる η が在る ϕ の全体を随伴 $A^\dagger$ の定義域 $D(A^\dagger)$ とし、$A^\dagger\phi = \eta$ と定めます。対称なら $D(A) \subset D(A^\dagger)$ で、$D(A^\dagger) = D(A)$ のとき**自己共役**です。スペクトル定理や時間発展 e^{-itA}（2-05）は自己共役が前提です 既知 。運動量 $P = -i\,d/dx$ では部分積分から次が出ます。

$$\langle \phi, P\psi\rangle - \langle P\phi, \psi\rangle = -i\,\big[\,\overline{\phi}\,\psi\,\big]_0^1 \tag{3}$$

(a) $D = \{\psi(0) = \psi(1) = 0\}$ なら対称ですが、相手の ϕ に条件が要らず、どの複素数 z でも $P^\dagger e^{izx} = z e^{izx}$ なので自己共役ではありません。(b) $D_\theta = \{\psi(1) = e^{i\theta}\psi(0)\}$ なら相手も同じ条件で自己共役、固有値は $2\pi n + \theta$ $(n \in \mathbb{Z})$。輪を貫く磁束 Φ による位相差 $q\Phi/\hbar$ が θ の役をします（2-03 の Aharonov–Bohm）。$-d^2/dx^2$ も、端で $u = 0$（Dirichlet）ならスペクトルは $\{k^2\pi^2\}_{k\ge 1}$、$u' = 0$（Neumann）なら $\{k^2\pi^2\}_{k\ge 0}$ です。**境界条件は作用素の一部**で、いちばん下の値を変えます。

04

スペクトル — 逆が作れない値

無限次元には、一対一なのに逆が有界でない場合があります。そこで**スペクトル**を次で定めます。

$$\sigma(A) = \big\{\lambda \in \mathbb{C} :\ (A-\lambda)^{-1} \text{ が有界な作用素として無い}\big\}, \qquad \big\|(A-\lambda)^{-1}\big\| = \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(A))} \tag{4}$$

右の等式は A が自己共役で $\lambda \notin \sigma(A)$ のときのもので、このとき $\sigma(A)$ は実数直線の閉集合です 既知 。例。$L^2(0,1)$ で x を掛ける作用素 M は、$xf = \lambda f$ なら $f = 0$ なので固有値を持ちません。それでも $\lambda \in [0,1]$ では $1/(x-\lambda)$ が有界でなく、$\sigma(M) = [0,1]$ です。$[\lambda, \lambda+\varepsilon]$ だけで一定の長さ 1 の関数は $\|(M-\lambda)f\| \le \varepsilon$ で、固有ベクトルにいくらでも近いものはあります（2-05 §03 の Weyl の判定法）。刻めば固有値は格子の点になり、$[0,1]$ を埋めていきます（01 節の下の固有値は離れたまま）。

孤立した有限重複の固有値を**離散スペクトル**、残りを**真性スペクトル**と呼びます。質量ギャップは、真空の固有値 0 が孤立し、残りのスペクトルが $\Delta > 0$ 以上にあるという主張です（4-11）。

05

スペクトル定理 — 隙間が減り方を決める

自己共役作用素は、適当なユニタリで M のような「実数値の関数を掛ける作用素」に移せます（スペクトル定理）既知 。行列の対角化（1-01）の無限次元版で、正確には固有値だけでは書けない部分も含みます。関数 g を代入でき、固有ベクトルの基底があれば次の形です。

$$g(A)\,\psi = \sum_{k} g(\lambda_k)\,\langle e_k, \psi\rangle\, e_k, \qquad \bigl\| e^{-tA}\psi - \langle e_0,\psi\rangle e_0 \bigr\| \le e^{-\Delta t}\,\bigl\| \psi - \langle e_0,\psi\rangle e_0 \bigr\| \tag{5}$$

右は、$A \ge 0$、0 の固有空間を長さ 1 の e_0 が張り、残りのスペクトルが $[\Delta, \infty)$ にあるときで、各成分に $e^{-t\lambda} \le e^{-\Delta t}$ を使えば出ます。**隙間は、いちばん下以外の成分が消える最も遅い速さ**です（虚時間での読み方は 2-05 §05）。例 1。両端を断熱した棒の熱の方程式 $\partial_t u = \partial_x^2 u$ では A は Neumann の $-d^2/dx^2$、$\Delta = \pi^2$ で、温度の平均からのずれは $t = 0.5$ で $e^{-\pi^2/2} \approx 0.0072$ 倍以下です。例 2。Dirichlet の $-d^2/dx^2$ の逆は $(Gf)(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y)\,dy$、$G(x,y) = \min(x,y) - xy$ です（$-(Gf)'' = f$ と両端の 0 を確かめられます）。1-09 のブラウン運動 B から $X(t) = B(t) - tB(1)$ を作ると両端が 0 になり（**ブラウン橋**）、その共分散 $E[X(s)X(t)]$ がちょうど $G(s,t)$ です。G の固有値は $(k\pi)^{-2}$ で、和 $\sum_k (k\pi)^{-2} = 1/6$ が有限なことが、ブラウン橋の見本が L^2 に入るための 1-09 (4) の条件です。

06

変分原理 — 上からは易しく、下からは難しい

下に有界な自己共役作用素のスペクトルの下端は、**Rayleigh 商**の下限です。n 番目も「n 次元の部分空間で最大を取り、部分空間について最小を取る」形で書けます（min-max 原理。真性スペクトルより下の固有値を重複を込めて小さい順に）既知 。

$$\inf \sigma(A) = \inf_{0 \neq \psi \in D(A)} \frac{\langle \psi, A\psi\rangle}{\langle \psi, \psi\rangle}, \qquad \lambda_n = \min_{\dim V = n}\ \max_{0 \neq \psi \in V} \frac{\langle \psi, A\psi\rangle}{\langle \psi, \psi\rangle} \tag{6}$$

固有ベクトルで展開すると Rayleigh 商は固有値の重み付き平均 $\sum \lambda_k |c_k|^2 / \sum |c_k|^2$ で、λ_1 を下回りません。部分空間 V に制限した行列の固有値は $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ の**上界**になり、V を広げるほど下がります（Rayleigh–Ritz の方法）。例。Dirichlet の $-d^2/dx^2$ に $x(1-x)$ を入れると、商は $(1/3)/(1/30) = 10 \ge \pi^2$ です。下からの評価には Temple の不等式があります。$\psi \in D(A)$ の Rayleigh 商を R とし、次の固有値の下界 μ（$R < \mu \le \lambda_2$）を知っていれば次が成り立ちます 既知 。

$$\lambda_1 \;\ge\; R - \frac{\|A\psi\|^2/\|\psi\|^2 - R^2}{\mu - R} \tag{7}$$

$\psi = x(1-x)$ なら $A\psi = 2$、$\|A\psi\|^2/\|\psi\|^2 = 120$ です。ここでは $\lambda_2 = 4\pi^2$ が厳密に分かっている（03 節）ので $\mu = 39$ と置けて、$\lambda_1 \geq 10 - 20/29 = 9.310$ です。表 2 の下に出る Ritz の値（$39.50\ldots$）は λ_2 の上界で、μ の根拠にはなりません。**変分原理だけでは上界しか出ず、下から押さえるには別の情報が要ります。**Temple の不等式では、それが次の準位の下界 μ です（08 節の凸性 $V'' \geq \kappa$ はもう一つの例）。質量ギャップの証明が難しいことの、有限個の自由度での姿です（2-05 §04・4-11）。

計算 **表 2**　$V_n = \{x(1-x)p(x) :\ p \text{ は } n-1 \text{ 次以下}\}$ での Rayleigh–Ritz の値と、(7)（$\mu = 39$）の下界。行列は分数で誤差なく作成。

n	λ_1 の上界	λ_1 の下界 (7)	λ_3 の上界
1	10.000000000	9.310344828	—
3	9.869749621	9.866602308	102.1303
5	9.869604435	9.869602524	89.1736
厳密	9.869604401		88.82644

偶数の n で加わる反対称な関数は λ_2 だけを改善し、上界は $42,\ 39.50155,\ 39.47847$（$4\pi^2 = 39.47842$）と下がります。$n = 5$ で π^2 は幅 2×10^{-6} の区間に挟まれます（下の端は $\mu = 39 \leq 4\pi^2$ に依ります）。

上界と下界の非対称 — 上からは一つ、下からはすべて

隙間や最低の固有値を**上から**押さえるには、試しのベクトルを**一つ**示せば足ります。(6) の商の値は、どれもそのまま上界です。**下から**押さえるには、**すべての**ベクトルについて商が下回らないことを言う必要があり、変分原理の外の情報が要ります（Temple の不等式の μ、08 節の凸性、スペクトル定理による全体の分解）既知。Poincaré 定数 C_P（07 節）は隙間の逆数なので向きが入れ替わり、試しの関数一つで出るのは C_P の下界、上界にはすべての関数が要ります。

質量ギャップ $\Delta > 0$ は、真空に直交する状態のエネルギーの**下界**です（4-11 §01）。この本はこれを一文にします。**質量ギャップの証明は下界の証明である。**試しの状態や有限個の相関の測定から出るのは Δ の上界で、隙間が正であることについては何も言いません（4-11 §02・18-01 §08）。比喩で言えば、山の一番低い谷を探すのに、谷を一つ見つければ「これ以下」は言えますが、「これより低い谷は無い」には山全体を調べる必要があります。正確には、(6) の下限を一つの ψ で評価すれば上界が出て、下限そのものを下から押さえるにはすべての ψ が要る、ということです。

07

Poincaré 不等式 — 最良の定数は隙間の逆数

「傾きの小さい関数は平均からあまり外れない」を数で言ったものが Poincaré 不等式です。区間 $[0,1]$ では次の形で、定数 $1/\pi^2$ はこれ以上小さくできません 既知 。

$$\int_0^1 \left|f-\bar f\right|^2 dx \;\le\; \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 |f'|^2 dx, \qquad \bar f=\int_0^1 f\,dx \tag{8}$$

証明。Neumann の固有関数 $1,\ \sqrt{2}\cos k\pi x$ で $f-\bar f=\sum_{k\ge1} a_k\sqrt{2}\cos k\pi x$ と書くと、左辺は $\sum|a_k|^2$、右辺の積分は $\sum k^2\pi^2|a_k|^2 \ge \pi^2\sum|a_k|^2$ です。等号は $f=a+b\cos\pi x$ のときだけ。長さ L の区間では定数は $(L/\pi)^2$ で、**大きさの二乗に比例**します（円の上の版は 17-06 の (4)）。

これは 06 節の変分原理を、Neumann の作用素の「0 の次」に使ったものです。一般に、自己共役な $A\ge0$ で $Af=0$ となるのが定数だけ、隙間が Δ なら、$\mathrm{Var}(f)\le C_P\langle f,Af\rangle$ の最良の定数は $C_P=1/\Delta$ で、(5) からならす動きは速さ $1/C_P$ で落ち着きます。Dirichlet 版 $\int|f|^2\le\pi^{-2}\int|f'|^2$（$f(0)=f(1)=0$）も同じ数ですが、等号は $\sin\pi x$ で、別の内容です。例。$f=x$ では左辺 $1/12$、右辺 $1/\pi^2$ で、比は 0.82 です。

08

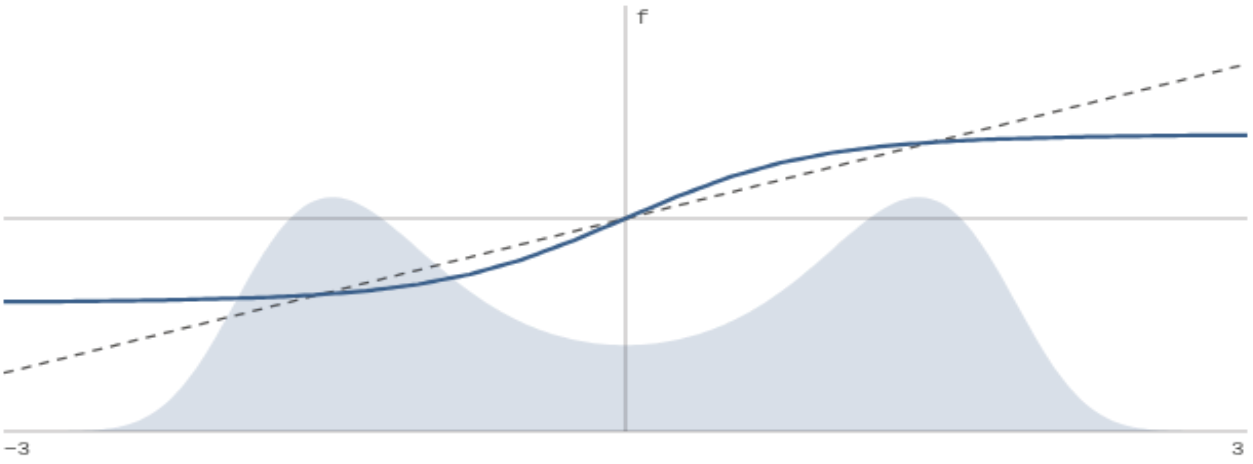
重みの付いた Poincaré 不等式 — 凸なら 1/κ、谷が二つなら大きい

場の理論で要るのは、確率測度 $\mu(dx)=e^{-V(x)}dx/Z$（Z は全体を 1 にする定数）に対する形です。内積を $\langle f,g\rangle_\mu=\int \overline{f}\,g\,d\mu$ とし、この内積で長さが有限な関数の空間を $L^2(\mu)$、分散を $\mathrm{Var}_\mu(f)=\int\left|f-\int f\,d\mu\right|^2 d\mu$ と書きます。

$$\mathrm{Var}_\mu(f)\le C_P\int|f'|^2\,d\mu; \qquad \mathrm{Var}_\mu(x)\;\le\;C_P\;\le\;\frac{1}{\kappa}\quad(V''\ge\kappa>0) \tag{9}$$

最良の C_P は、$Lf=-f''+V'f'$ の 0 の次の隙間の逆数です。L は $L^2(\mu)$ で自己共役で、部分積分から $\langle f,Lf\rangle_\mu=\int|f'|^2d\mu$、$Lf=0$ となるのは定数だけです（07 節と同じ形。基底状態の側からは 2-05 §08）。左の不等式は $f=x$ を入れれば出ます。右は Brascamp–Lieb（1976）の分散の不等式の系とされ、Bakry–Émery（1985）の対数 Sobolev 不等式（Poincaré 不等式より強い形の不等式）からも出ます 既知 。一次元なら次の筋で足ります。$Lf=\lambda f$ を微分すると $g=f'$ は $Lg+V''g=\lambda g$、g との内積で $\int|g'|^2d\mu+\int V''g^2d\mu=\lambda\int g^2d\mu$、よって $\lambda\ge\kappa$（固有関数があり境界の項が消えるとして）。正規分布 $V=x^2/(2\sigma^2)$ では三つとも σ^2 です（Chernoff 1981）。

図 2　c（−2 から 4）を動かすと重み exp(−V_c)（塗り）が二つの山に分かれ、等号となる f（実線）が直線 x/√Var(x)（破線）から段差へ変わる



c = 2.0　障壁 c²/4 = 1.00　Var(x) = 1.6655 ≤ C_P = 2.6714　（κ > 0 が無く、右の上界は無い）

計算 図の数値はこの端末で計算しました（最良の f と C_P は python3 で求めて埋め込み、重み e^{-V_c} はその場で計算）。

計算 **表 3**　$V_c = x^4/4 - cx^2/2$ の C_P（L をシュレーディンガー型の作用素に直して三点差分で求めた。方法は出典表。刻みを半分にしても 4 桁一致）。$c < 0$ では $\kappa = -c$。

c	1/κ	Var(x)	C_P
−2	0.500	0.3451	0.3503
0	—	0.6760	0.7307
1	—	1.0418	1.2625
2	—	1.6655	2.6714
3	—	2.5853	7.6577
4	—	3.6707	33.580

谷が二つ（$c > 0$、谷の間の山の高さ $c^2/4$）になると C_P は $\mathrm{Var}(x)$ よりずっと速く増え、$c = 4$ では 9 倍です。最良の f は左の谷で -1、右で $+1$ に近い段差になり、その傾きは重みのほとんど無い山の上でしか効きません。**重みのくびれが C_P を大きくします。**

本書での使い方は 23-14 §02（四つの条件ごとに、最も近い既知の定理との距離を並べる）。

09

変数が多いとき — 積・ガウス・自由場と、二つの隙間

変数が $x = (x_1, \ldots, x_n)$ と多いときは、(9) の $|f'|^2$ を勾配の長さの二乗 $|\nabla f|^2 = \sum_j |\partial_j f|^2$ に替えます。基本は次の二つです 既知 。

(i) 独立な変数の積の測度の C_P は、各因子の C_P の最大値で、変数の数によりません。L が各変数の L の和になり、固有関数は積 $f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)$、固有値は和になるので、0 の次の値は各因子の隙間の最小値だからです（固有関数の基底があるとして）。

(ii) 平均 0・共分散行列 C のガウス測度の C_P は、C の最大固有値です。C の固有ベクトルを直交座標に取ると、測度は分散が C の固有値の独立な一次元ガウスの積に分かれ（1-08）、$|\nabla f|^2$ は直交座標の取り替えで変わりません。あとは (i) と、一次元の $C_P=\sigma^2$（08 節）を使います。

1-08 (10) の輪の上の自由場では $C=(-\Delta_{\mathrm{lat}}+m^2)^{-1}$ です。$-\Delta_{\mathrm{lat}}$ の固有値は 0 以上で、0 は定数の向き（すべての x_j を同じだけずらす向き）なので、C^{-1} の最小固有値は m^2、よって $C_P=1/m^2$ です。相関長 $\xi\approx 1/m$（1-08 (11)）と合わせると $C_P\approx\xi^2$ になります（この C_P は場の変数 x_j の勾配で測ったものです。格子ゲージ理論でリンクの角度を変数に取ると定数倍が変わるので、どちらで測るかを必ず書きます。23-01）。

ここで二つの隙間を区別します。自由場では、C_P の逆数 m^2 は L の隙間（(5) で e^{-tL} が平均からのずれを消す速さ）です。一方、1-08 (10) を虚時間の経路積分と読んだときのハミルトニアンの隙間は、格子間隔を単位にして $1/\xi$（1-08 (11)。m が小さいとき $\approx m$）です。二乗の関係 $C_P\approx\xi^2$ は自由場の計算で、相互作用のある理論で一般に保たれるかどうかは 23-01 の問いであり、証明されていません（群の上の同じ形は 5-11）。

10

寄り道：固有値を数える — Weyl の法則と太鼓の形

飛ばしてよい節です。1910 年 10 月末、Lorentz がゲッティンゲンの Wolfskehl 講演に招かれ、第 4 講の終わりに「空洞の中の高い振動数の定在波の数は、形によらず体積に比例するはずだ」という問題を出し、聴いていた Weyl が 2 年足らずで証明した、と Kac（1966）は伝えています。平面の領域 Ω の Dirichlet の $-\Delta$ では次の形です 既知 。

$$N(\lambda)=\#\{k:\ \lambda_k\le\lambda\}\ \sim\ \frac{|\Omega|}{4\pi}\lambda\quad(\lambda\to\infty);\qquad d\text{ 次元では }N(\lambda)\propto|\Omega|\,\lambda^{d/2}\tag{10}$$

計算 一辺 1 の正方形（固有値 $\pi^2(j^2+k^2)$）では $\lambda=10^6$ で $N=79269$。主項 79577.5 に周の長さ 4 の補正 $-\sqrt{\lambda}/\pi$ を足すと 79259.2 です。Kac は面積と周の長さが固有値の列から「聞こえる」（正確には、固有値の列だけから決まる）ことを論じ、形そのものはどうかと問いました。答えは否で、Gordon・Webb・Wolpert（1992）が固有値の列が一致する別の形の平面領域を作りました。λ を運動量の二乗 Λ^2 と読むと、Λ 以下のモードの数は四次元で Λ^4 に比例します。短い距離の自由度のこの多さは、発散を考える出発点の一つです（4-04・1-12）。

この章が言えている範囲

内容	状態
(1) の固有値、下の固有値の収束と上の端の発散	言えている 既知 （表 1・図 1 計算 ）
格子から連続極限でスペクトルの下の端を読むこと（01 節末）	物理 の水準。四次元の尺度の極限は 2026-11 に公開された構成が作った（委員会の評価の水準。6-00）。その下の端（質量ギャップ）は示されていない（6-04）
ヒルベルト空間・自己共役・スペクトル・スペクトル定理・Weyl の法則 (10)	定義と例を示し、定理は引用 既知
変分原理 (6)・Temple の下界 (7)・表 2	言えている 既知 ・計算 。$\mu = 39$ は $\lambda_2 = 4\pi^2$ を知っているから置けた値
Poincaré 不等式 (8)・$C_P = 1/\Delta$・(9)・積とガウス測度の C_P・自由場の $C_P = 1/m^2$	言えている 既知 。(9) の一次元の筋と 09 節 (i) の筋は固有関数の存在を仮定。表 3・図 2 は 計算
相互作用のある理論での C_P と相関長の関係	扱っていない（23-01。証明されていない）。$C_P \approx \xi^2$ は自由場の計算
場の量子論のハミルトニアンのスペクトル・ヤン–ミルズの質量ギャップ	扱っていない（4-09・4-11）。何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1〜3・図 1〜2・10 節の数	計算	この端末の python3（NumPy 1.26・SciPy 1.11）。表 3 は $f = \psi e^{V/2}$ と置いて L を $-d^2/dx^2 + V'^2/4 - V''/2$ に直し（2-05 §08 の $\psi = f\phi_0$ で $\phi_0 = e^{-V/2}$ としたもの）、$[-7, 7]$ の三点差分で求めた。図は素の JavaScript で、読み出しを node で表と照合
(4)〜(7)・スペクトル定理・Weyl の判定法	既知	G. Temple, Proc. R. Soc. Lond. A 119 (1928) 276–293／W. Ritz, J. reine angew. Math. 135 (1909) 1–61／J. von Neumann, Math. Ann. 102 (1930) 49–131（無限次元のスペクトル定理の代表的な論文とされる）／M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I*（Academic Press, 1972）。いずれも書誌のみ
(9)・09 節の積とガウス測度の C_P	既知	H. J. Brascamp, E. H. Lieb, J. Funct. Anal. 22 (1976) 366–389（書誌のみ。(9) の右の不等式がその系として出ることは未確認）／D. Bakry, M. Émery, Sém. Probab. XIX (1985) 177–206（冒頭の要約を確認）／H. Chernoff, Ann. Probab. 9 (1981) 533–535（要旨を確認）／D. Bakry, I. Gentil, M. Ledoux, *Analysis and Geometry of Markov Diffusion Operators*（Springer, 2014。書誌のみ）
Weyl の法則・Lorentz の問題・太鼓	既知	H. Weyl, Math. Ann. 71 (1912) 441–479（題を確認、書誌のみ）／M. Kac, Amer. Math. Monthly 73 (1966) no. 4, part II, 1–23（本文を確認）／C. Gordon, D. L. Webb, S. Wolpert, Bull. AMS 27 (1992) 134–138, arXiv:math/9207215（要旨を確認）

次に読む章：1-11 フーリエ解析と分布。量子力学での使い方は 2-05。

フーリエ解析と分布 — 点で値を持たないものを、波と平均で扱う

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 周波数に分けると微分が掛け算になること。点で値を持たない対象（超関数）を、なめらかな関数と組にした値で定義すること。伝播関数が近くで発散し遠くで e^{-mr} と減ること、その二乗が四次元でちょうど積分できなくなること、超関数どうしの積が一般には定まらず、荒さの合計が正なら定まること。

前提となる章 — 1-10（ヒルベルト空間・正規直交基底）。§01・§06・§08 で 1-09 の白色雑音・自由場と 1-08 §06 の対の数え上げを使います（式は再掲）。

先に言うこと — 定理は証明を省いて引用します。相互作用のある場の積は入口だけです（7-09・7-10）。この章はヤン–ミルズの質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. なぜこの章か — 点の値の代わりに平均を測る
2. フーリエ級数 — なめらかさは係数の減り方に出る（図 1）
3. フーリエ変換 — 微分が掛け算に、方程式が割り算になる
4. テスト関数と超関数 — 試して測る
5. 超関数のフーリエ変換 — δ はすべての周波数を等しく含む
6. 荒さの物差し — Sobolev 空間と尺度の指数（(9a)(9b)）
7. 伝播関数 — 近くで発散し、遠くで e^{-mr}（図 2・表 1）
8. 特異性を数える — 四次元が境目（表 2・図 3）
9. 積の困難 — ならし方が答えに残る（図 4）
10. 作れる場合 — 荒さの合計が正なら

01

なぜこの章か — 点の値の代わりに平均を

二次元以上の自由場は一点での値を持ちません。一点の分散が無限大だからです（1-09 §08）。意味を持つのは、なめらかな重み f で平均した値で、その分散は二点の相関 G を二重に平均して書けます。

$$\varphi(f)=\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\,f(x)\,d^dx,\qquad E\big[\varphi(f)^2\big]=\iint f(x)\,G(x-y)\,f(y)\,d^dx\,d^dy \tag{1}$$

G を**伝播関数**と呼び、形式的には $E[\varphi(x)\varphi(y)]=G(x-y)$ です。G は $x=y$ で無限大ですが、(1) の右辺は有限です。**例：**一辺 ε の箱で平均した値の分散は、$d\ge 3$ なら $G\approx c\,r^{2-d}$（§07）により ε^{2-d} に比例し、四次元では箱を半分にするごとに 4 倍です。点では無限、平均すれば有限です。

02

フーリエ級数 — 周期関数を波に分ける

周期 2π の関数を波 e^{ikx} の重ね合わせに分けます。$e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$ $(k\in\mathbb{Z})$ は $L^2(-\pi,\pi)$ の正規直交基底で（1-10 §02 の複素版）、係数は内積で取り出せます 既知 。

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,e^{-ikx}\,dx,\qquad f=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k\,e^{ikx},\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2\,dx=\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2 \tag{2}$$

最後が Parseval の等式です。部分積分をすると、微分は係数に ik を掛けることに替わります。

$$c_k[f']=ik\,c_k[f]\qquad (f\text{ が周期的でなめらかなとき}) \tag{3}$$

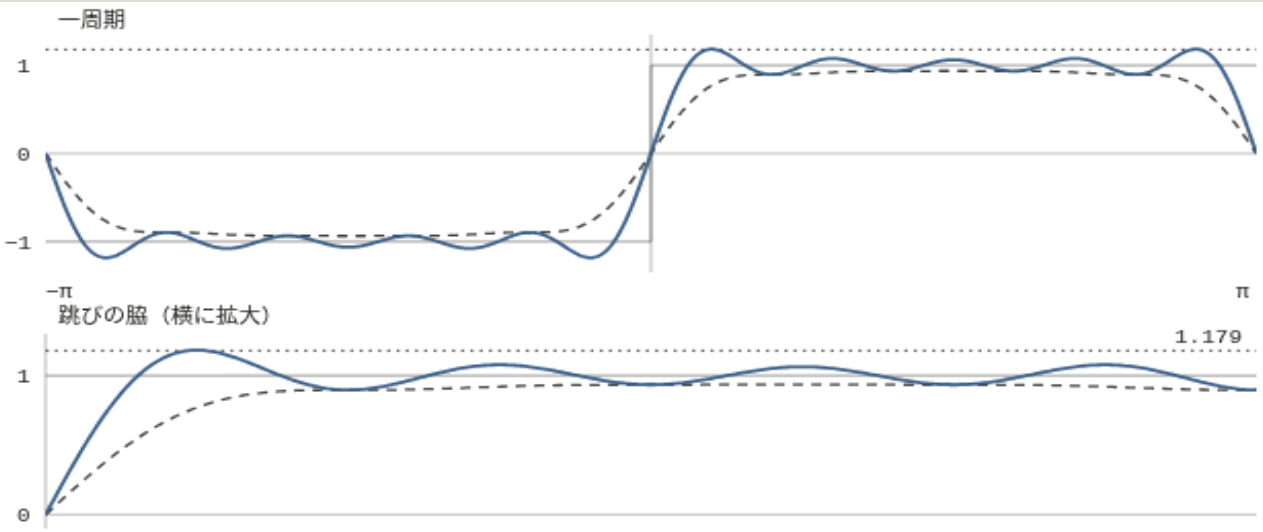
だから**なめらかさは係数の減り方**に出ます。n 回微分しても二乗積分が有限なら $\sum_k k^{2n}|c_k|^2<\infty$。跳びがあると係数は $1/k$ でしか減りません。

例：矩形波 $f(x)=\operatorname{sign}x$ の部分和は $S_N(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k\,\text{奇数}\le N}\frac{\sin kx}{k}$ です。二乗平均の誤差は Parseval により $\frac{8}{\pi^2}\sum_{k\,\text{奇数}>N}k^{-2}\approx\frac{4}{\pi^2 N}$ で 0 に行くのに、最大値は跳びの脇で約 1.179 まで行き過ぎ、跳びの幅 2 に対する比 $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt-\frac{1}{2}=0.08949\cdots$ は N によらず残ります。これが**Gibbs 現象**で、Wilbraham（1848）が最初に調べ、Gibbs の 1899 年の手紙で広く知られ、Bôcher（1906）が名を付けたとされます 既知 。

計算 S_N の最大（$x=\pi/(N+1)$ の値）は $N=1,9,999$ で 1.27324・1.18233・1.17898（極限 $\frac{2}{\pi}\operatorname{Si}(\pi)$）、二乗平均の誤差は 0.18943・0.04040・0.000405 です（Parseval の式と数値積分で一致。$N=999$ の 0.0004052846 は 10 桁まで一致）。二乗平均では収束し、一様には収束しな

い。「収束」には強さの違う意味があります。部分和を平均した **Fejér 平均** $\sigma_N = \frac{1}{N+1}(S_0 + S_1 + \cdots + S_N)$ は正の核でならしたものなので行き過ぎが起きません（$|\sigma_N| \le 1$） 既知 。「ならしてから極限を取る」は §04 の近似の基本の手です。

図 1　矩形波（細線）の部分和 S_N（実線）と Fejér 平均 σ_N（破線）。上は一周期、下は跳びの脇 $0 < x < 8\pi/(N+1)$（$N < 7$ では $0 < x < \pi$）を横に拡げたもの。N を増やすと上では S_N が矩形波に寄るのに、下の山の高さは約 1.179（点線）のまま残り、σ_N は 1 を越えない。「動かす」で N を増やす



N = 9　部分和の最大 1.18233（x = π/(N+1)、極限 1.17898）　行き過ぎ／跳び 0.09116　Fejér 平均の最大 0.93573　二乗平均の誤差 0.040395（Parseval）

計算 この図の数値はこの端末で計算しました（級数の部分和をその場で足す。読み出しは $N = 1, 3, 5, 9, 19, 49, 99, 199$ で上の計算と 5 桁一致）。

03

フーリエ変換 — 微分が掛け算になる

周期の無い関数では周波数が連続に並び、和が積分に替わります。この本の約束は次の通りです。測度を $d^dk/(2\pi)^d$ とする点は 1-09 の (10) と揃えてあります。

$$\hat f(k) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-ik\cdot x}\, d^dx, \qquad f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat f(k)\, e^{ik\cdot x}\, \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \tag{4}$$

級数と同じ規則が成り立ちます 既知 。長さが保たれ（Plancherel）、微分が掛け算に、畳み込み $(f*g)(x) = \int f(y)g(x-y)\,d^dy$ が積になります。

$$\int |f|^2\, d^dx = \int |\hat f|^2\, \frac{d^dk}{(2\pi)^d}, \qquad \widehat{\partial_j f} = ik_j\, \hat f, \qquad \widehat{f*g} = \hat f\, \hat g \tag{5}$$

すると $\widehat{-\Delta f} = |k|^2 \hat f$ で、定数係数の微分方程式は周波数ごとの割り算になります。$m > 0$ なら分母は 0 にならず、解が一つ決まります。

$$(-\Delta + m^2)\,u = f \quad\Longleftrightarrow\quad \hat{u}(k) = \frac{\hat{f}(k)}{|k|^2 + m^2} \tag{6}$$

例：幅 σ のガウスの変換は幅 $1/\sigma$ のガウスです（2-05 の不確定性関係）。$e^{-m|x|}$ の変換は $\frac{2m}{k^2+m^2}$ で、$x=0$ の角が $1/k^2$ の遅い減り方に出ます（§07 の一次元の伝播関数）。

04

テスト関数と超関数 — 試して測る

点の値を持たない対象を、なめらかな関数と組にした値で定義します。組む相手を**テスト関数**と呼び、何回でも微分できて有界な集合の外で 0 になる関数とします（全体を $\mathcal{D}$。例：$|x|<1$ で $e^{-1/(1-|x|^2)}$、外で 0）。

超関数とは、テスト関数 ϕ に数 $\langle T,\phi\rangle$ を対応させる線形で連続な規則です（連続とは、台（関数が 0 でない点の集まりの閉包）が一つの有界集合に収まり、すべての導関数が一様に 0 に近づく列 ϕ_n で $\langle T,\phi_n\rangle \to 0$ となること）既知。題の「試して測る」は比喩で、正確には、点の値の代わりにこの規則 $\phi \mapsto \langle T,\phi\rangle$ そのものを対象とみなす、という意味です。英語は distribution で、章の題の「分布」はその直訳です（確率の「分布」とは別の言葉）。超関数の考えは Sobolev（1936）に始まり、Schwartz が体系にしたとされます 既知。

例：(a) 有界な集合の上で積分できる関数 f は $\langle f,\phi\rangle = \int f\phi\, d^dx$ で超関数になります。(b) $\langle \delta,\phi\rangle = \phi(0)$ の δ は、どの関数の積分でも書けません。微分は部分積分を定義に格上げして決めます。

$$\langle \partial_j T,\phi\rangle = -\langle T,\partial_j\phi\rangle \tag{7}$$

右辺はいつでも意味を持つので、どの超関数も何回でも微分できます。階段関数 H（$x>0$ で 1、$x<0$ で 0）なら $\langle H',\phi\rangle = -\int_0^\infty \phi'\,dx = \phi(0)$、つまり $H'=\delta$ です。

近似：$\rho\ge 0$ をなめらかで $\int\rho = 1$ の関数、$\rho_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-d}\rho(x/\varepsilon)$ とすると $\langle\rho_\varepsilon,\phi\rangle\to\phi(0)$、つまり $\rho_\varepsilon\to\delta$ です。$\sin nx$ は点ごとには収束しませんが、部分積分で $\frac{1}{n}$ が出るので超関数としては 0 に収束します。

05

超関数のフーリエ変換 — δ はすべての周波数を等しく含む

変換には $\mathcal{D}$ より広い相手を使います。何回でも微分でき、関数も導関数も $|x|$ のどの冪より速く減る関数の全体 $\mathcal{S}$（Schwartz 空間）で、変換は $\mathcal{S}$ を $\mathcal{S}$ の上へ一対一に写します 既知。$\mathcal{S}$ の上の連続な線形の規則（**緩増加超関数**）の変換は、$\int\hat{f}\phi = \int f\hat{\phi}$ に合わせて定めます。

$$\langle \hat{T}, \phi \rangle = \langle T, \hat{\phi} \rangle \qquad (\phi \in \mathcal{S}) \tag{8}$$

例： $\langle \hat{\delta}, \phi \rangle = \hat{\phi}(0) = \int \phi \, d^d x$ なので $\hat{\delta} = 1$。一点に集中したものは、すべての周波数を同じ重みで含みます（白色雑音の「白色」の由来）。

逆に定数 1 の変換は $(2\pi)^d \delta$ で、どこでも同じ大きさのものは周波数 0 だけを含みます。(5) の規則もそのまま延びて $\widehat{\partial_j T} = i k_j \hat{T}$ となります 既知 。§07 で伝播関数を $\hat{G} = 1/(|k|^2 + m^2)$ と書けるのはこのためです。

06

荒さの物差し — Sobolev 空間と尺度の指数

なめらかさは係数や $\hat{f}$ の減り方に出ます（(3)(5)）。これを数で測る物差しを二つ置きます。一つ目は周波数に重みを付けた長さで、これが有限な対象の全体を Sobolev 空間 H^s と呼びます。s が大きいほどなめらかなものしか入らず、s が負ほど荒いものまで入ります。

$$\|f\|_{H^s}^2 = \int (1 + |k|^2)^s \, |\hat{f}(k)|^2 \, \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tag{9a}$$

二つ目は拡大縮小での振る舞いです。超関数の $T(\lambda \cdot)$ は、変数変換の式を定義に格上げして $\langle T(\lambda \cdot), \phi \rangle = \lambda^{-d} \langle T, \phi(\cdot/\lambda) \rangle$ で決めます。

$$T(\lambda \cdot) = \lambda^{\alpha} T \ \ (\text{すべての } \lambda > 0) \quad \text{のとき、} \alpha \text{ を尺度の指数と呼ぶ} \tag{9b}$$

「物差し」は比喩で、正確には (9a) の s と (9b) の α という二つの数のことです。$\hat{\delta} = 1$ なので $\|\delta\|_{H^s}$ が有限なのは $s < -d/2$ のときだけです。尺度の指数は δ が $-d$、$|x|^{-a}$ が $-a$ です。

確率的な対象 T では、$T(\lambda \cdot)$ と $\lambda^{\alpha} T$ が同じ確率分布を持つとき、指数を α とします。白色雑音 ξ（$E[\xi(f)\xi(g)] = \int f g \, d^d x$、1-09 §07 の $\mathbb{R}^d$ 版）では、$\xi(\lambda \cdot)$ をテスト関数 ϕ, ψ と組にした値の共分散が $\lambda^{-2d} \int \phi(x/\lambda)\psi(x/\lambda)\, d^d x = \lambda^{-d} \int \phi\psi \, d^d x$ で、平均 0 のガウスは共分散で決まるので、$\xi(\lambda \cdot)$ は $\lambda^{-d/2}\xi$ と同じ確率分布を持ちます。指数は $-d/2$ です。質量の無い自由場（$m = 0$、$d \geq 3$）は共分散が $G(\lambda x) = \lambda^{2-d} G(x)$（§07 の近い側の式が $m = 0$ では厳密）なので、指数は $1 - d/2$ です。$d = 2$ では G が対数なので、定数を除いて同じことが成り立ちます 既知 。時間も含む時空の白色雑音を、時間を λ^2 倍・空間を λ 倍する放物型の尺度で測ると、指数は $-(d+2)/2$ です（Hairer の講義の演習 2.3） 既知 。この指数が §10 で積の可否を決めます。

07

伝播関数 — δ に応える場

(6) の右辺を δ にした方程式の解が伝播関数です。「δ に応える」は比喩で、正確には (10) の最初の式を超関数の等式として満たすことで、このような解を**基本解**と呼びます。$\frac{1}{|k|^2+m^2} = \int_0^\infty e^{-t(|k|^2+m^2)}dt$ とガウスの変換から、熱方程式 $\partial_t u = \Delta u$ の基本解 $(4\pi t)^{-d/2}e^{-|x|^2/4t}$（**熱核**）を時間で積分した表示も出ます。

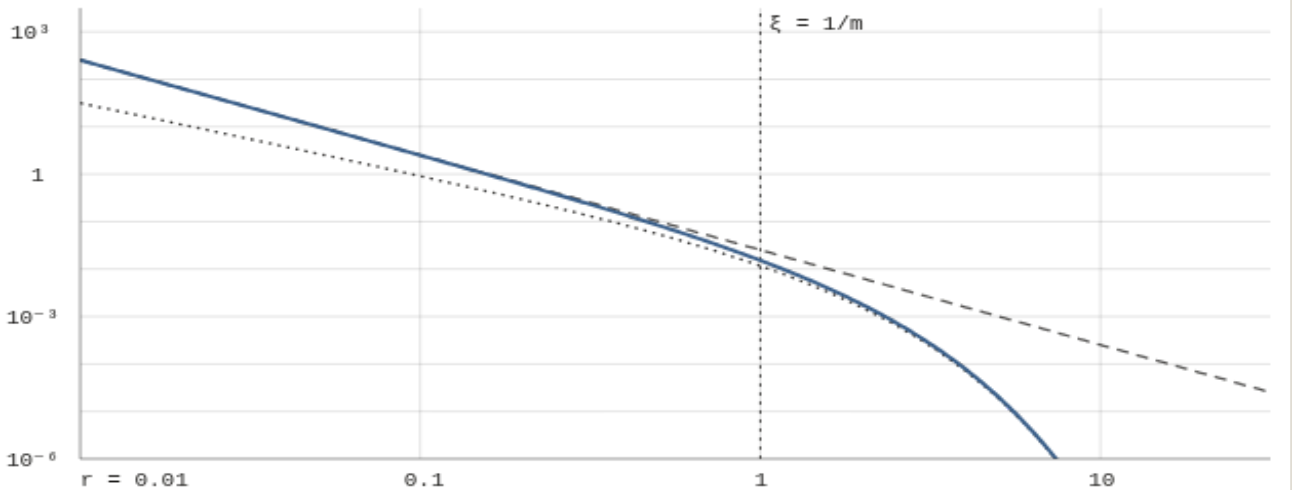
$$(-\Delta + m^2)\,G = \delta, \qquad \hat{G}(k) = \frac{1}{|k|^2+m^2}, \qquad G(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-|x|^2/4t - m^2 t}}{(4\pi t)^{d/2}}\,dt \tag{10}$$

G は自由場の共分散で、物理では質量 m の粒子のユークリッドの伝播関数です（4-02・4-03）。$r = |x|$ として $d=1$ では $e^{-mr}/2m$、$d=3$ では $e^{-mr}/4\pi r$、一般には変形ベッセル関数 $K_\nu(s) = \int_0^\infty e^{-s\cosh t}\cosh \nu t\, dt$ を使って $(2\pi)^{-d/2}(m/r)^{d/2-1}K_{d/2-1}(mr)$ です 既知 。大事なのは二つの顔です。

$$G(r) \approx \begin{cases} \dfrac{\Gamma(d/2-1)}{4\pi^{d/2}}\, r^{2-d} & (r\to 0,\ d\ge 3) \\[2mm] \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r} & (r\to 0,\ d=2) \end{cases} \qquad G(r) \approx \frac{1}{2m}\left(\frac{m}{2\pi r}\right)^{\frac{d-1}{2}} e^{-mr} \quad (r\to\infty) \tag{11}$$

近い顔では m が消え、$d\ge 2$ で発散します。**遠い顔**では e^{-mr} で減ります。「顔」は比喩で、正確には $r\to 0$ で $G(r)$ と (11) の左の式との比が 1 に近づき、$r\to\infty$ で右の式との比が 1 に近づく、という意味です。相関が $e^{-r/\xi}$ で減るときの ξ を相関長と呼ぶと（2-08）$\xi = 1/m$ で、「相関の減る速さ＝質量」は質量ギャップの定義（4-11）の自由場の版です。

図 2　伝播関数 $G(r)$ の両対数グラフ（実線）。d と m を動かすと、近い側は (11) の左の式（破線。$d=2$ は定数 $(\ln(2/m)-\gamma)/2\pi$ を足した形、$d=1$ は原点の値 $1/(2m)$）に、遠い側は右の式（点線）に沿い、折れ目は $\xi = 1/m$（縦線）に来る。「動かす」で m を往復させる



d = 4　m = 1.00　G(0.01) = 2.532e+2（近い側の式との比 0.9997）　G(10ξ) = 4.724e−8（遠い側の式との比 1.036）

計算 この図の数値はこの端末で計算しました（K_ν の積分表示を台形則で。表 1 と 7 桁一致）。

計算 **表 1**　$m=1$ の G と (11) の式との比（$d=2$ の近い側は定数 $\ln 2-\gamma$ を足す）。ベッセル関数の式と (10) の数値積分が 15 桁一致。

d	r	G(r)	近い側との比	遠い側との比
2	0.01	0.7514	1.0000	0.3805
4	0.01	253.2	0.9997	8.057
4	1	0.01525	0.6019	1.306
4	10	4.724×10^{-8}	0.0002	1.036

格子の伝播関数

間隔 a の格子の伝播関数は、1-09 の (10) の被積分関数に $e^{ik\cdot x}$ を掛けて積分したものです（1-09 の (10) はその $x=0$ の値）。$d=3$、$m=1$ の距離 1 では、連続の G との差が $a=1/8$ で 0.9%、$a=1/16$ で 0.2% と a^2 に比例して縮みます 計算 （5-01）。

08

特異性を数える — 四次元が境目

原点で発散しても、近くで積分できれば §04 の (a) で超関数です。冪なら次元との比べっこです（$|S^{d-1}|$ は単位球面の面積）。

$$\int_{\varepsilon<|x|<1}|x|^{-a}\,d^dx=|S^{d-1}|\int_\varepsilon^1 r^{d-1-a}\,dr\ \xrightarrow[\varepsilon\to0]{}\ \begin{cases}\text{有限} & (a<d)\\ \ln(1/\varepsilon)\text{ で発散} & (a=d)\\ \varepsilon^{d-a}\text{ で発散} & (a>d)\end{cases}\tag{12}$$

$G\sim r^{2-d}$ は $a=d-2<d$ なので、どの次元でも超関数です。その n 乗は $a=n(d-2)$ で、積分できるのは $n(d-2)<d$、二乗なら $d<4$、三乗なら $d<3$ のときです。

伝播関数の冪は場の積から出ます。ガウスの四次の平均は対の組み方の和です（1-08 §06）。無限大の $E[\varphi^2]=G(0)$ を引いた $:\varphi^2:=\varphi^2-E[\varphi^2]$（Wick 積）では、$x$ の φ と y の φ を結ぶ組だけが残ります（x どうし・y どうしの組は引いた分で消える） 既知 。

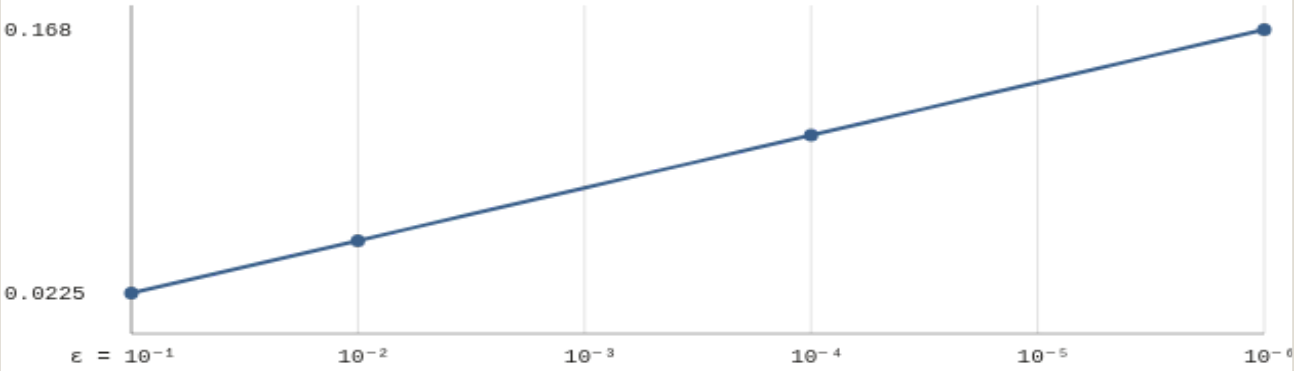
$$E\big[:\varphi^2:(x):\varphi^2:(y)\big]=2\,G(x-y)^2,\qquad E\big[:\varphi^2:(f)^2\big]=2\iint f(x)\,G(x-y)^2\,f(y)\,d^dx\,d^dy\tag{13}$$

$:\varphi^2:(f)$ の分散が有限なのは G^2 が積分できる $d<4$ のとき、三乗なら $6G^3$ で $d<3$ のときです。四で切り替わる他の計算と並べた図は 1-12 §10 の次元のつまみです。

計算 **表 2**　$I_n(\varepsilon)=\int_{\varepsilon<|x|<1}G(x)^n\,d^dx$（$m=1$、動径の数値積分）。行を押すと図 3 に描きます。

d	n	ε = 0.1	0.01	10^{-4}	10^{-6}	ε → 0
2	3	0.01079	0.01408	0.01426	0.01426	有限
3	2	0.02719	0.03362	0.03440	0.03440	有限
3	3	0.00565	0.01866	0.04763	0.07679	対数で発散
4	1	0.1851	0.1876	0.1876	0.1876	有限
4	2	0.02248	0.05143	0.1097	0.1681	対数で発散
4	3	0.01404	1.598	16041	1.604×10^{8}	ε^{-2} で発散

図 3　表 2 の行を押す（キーボードでは Tab と Enter）と、その (d, n) の $I_n(\varepsilon)$ を $\log_{10}(1/\varepsilon)$ に対して描く。有限なら横ばい、対数で発散すれば直線、冪で発散すれば急に立ち上がる（縦軸を対数にすると直線）。丸は表 2 の列の値



d = 4, n = 2（対数で発散） ε を 10^{-5} から 10^{-6} にしたときの増分 0.0292　比 1.21

計算 この図の数値はこの端末で計算しました（表 2 と同じ動径の数値積分を $\log_{10}(1/\varepsilon) = 1, 1.25, \dots, 6$ で行い、4 桁で埋め込んだ表）。

$d = 4, n = 2$ は ε を 1/10 にするごとに 0.02916 伸び、(11)(12) から出る $\ln 10/8\pi^2$ に合います 計算 。四次元は G^2 がちょうど積分できなくなる境目で、四次元で結合定数が次元を持たないこと（4-04）も同じ尺度の勘定です 既知 （1-12）。

09

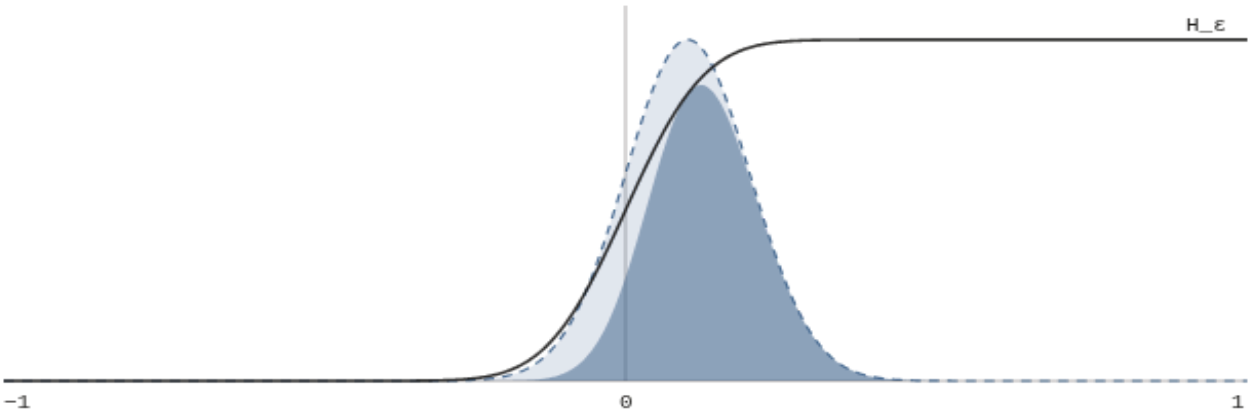
積の困難 — ならしてから掛けると、ならし方が残る

なめらかな g と超関数 T の積は $\langle gT, \phi\rangle = \langle T, g\phi\rangle$ で決まります。超関数どうしを「ならして掛け、ならしを外す」と三つのことが起きます。**(i) 発散する：**ρ_ε^2 の面積は $\varepsilon^{-d}\int\rho^2$ で無限大に行きます。**(ii) ならし方が残る：**H を ρ で、δ を ψ（どちらも確率密度）でならし、$x = \varepsilon X$ と置き換えます。

$$\int (H * \rho_\varepsilon)\,\psi_\varepsilon\,\phi\,dx = E\big[\mathbf{1}\{Y \le X\}\,\phi(\varepsilon X)\big] \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} c\,\phi(0), \qquad c = P(Y \le X) \quad (Y \sim \rho,\ X \tag{14}$$

極限は $c\,\delta$ ですが、c はならし方で決まります。ρ を標準ガウス、ψ を中心 s のガウスにすると $c=\Phi(s/\sqrt{2})$（Φ は標準正規分布の分布関数）で、0 と 1 の間のどの値にもなります。

図 4　ならした H（実線）、ならした δ の形（破線、高さは縮尺）、積（濃い塗り）。s を動かすと積の面積が 0 と 1 の間で変わり、ε を縮めても変わらない。δ どうしの積の面積は $1/\varepsilon$ で伸びる。「動かす」で ε を縮める



ε = 0.1000　s = 1.0　H と δ の積の面積 = 0.76025　δ どうしの積の面積 = 2.197

計算 この図の数値はこの端末で計算しました（閉じた式。下の数値積分と照合）。

計算 数値積分では、H と δ の積の面積は $s=-2,0,1,2$ で 0.078650・0.500000・0.760250・0.921350（$\varepsilon=0.1$ と 0.01 で同じ、$\Phi(s/\sqrt{2})$ と 6 桁一致）、δ どうしは $\varepsilon=0.1$ で 1.038・2.821・2.197・1.038、$\varepsilon=0.01$ でその 10 倍です。

(iii) 結合法則が壊れる。主値 $\langle \mathrm{p.v.}\frac{1}{x},\phi\rangle=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx$ について、「なめらかな関数×超関数」の積として $x\cdot\delta=0$、$x\cdot\mathrm{p.v.}\frac{1}{x}=1$ です。

$$(\delta\cdot x)\cdot\mathrm{p.v.}\tfrac{1}{x}=0,\qquad \delta\cdot\left(x\cdot\mathrm{p.v.}\tfrac{1}{x}\right)=\delta \tag{15}$$

関数の積の性質をすべて保つ積は、超関数全体には入れられません。正確には、超関数（少なくとも連続関数と δ）を含む結合的な積で、連続関数どうしでは普通の積に一致し、微分がライプニッツ則 $(fg)'=f'g+fg'$ を満たすものは作れない、とされます（Schwartz 1954）既知 。

10

作れる場合 — 荒さの合計が正なら

積が作れる条件は、§06 の尺度の指数で書けます。C^α を次の空間とします。$0<\alpha<1$ なら α 次のヘルダー連続な関数（$|f(x)-f(y)|\le C|x-y|^\alpha$、$|x-y|\le1$）の全体、$\alpha>1$ なら導関数に同じ形の条件を課したもの、$\alpha<0$ なら §06 の尺度の指数が局所的に一様に α 以上の超関数の全体です。α が大きいほどなめらかです。荒さの合計が正なら積が作れます（Hairer 2014 の命題 4.14）既知 。

$$f \in C^{\alpha},\ g \in C^{\beta},\ \alpha+\beta>0 \quad\Longrightarrow\quad f\cdot g \in C^{\min(\alpha,\beta)} \text{ が連続に定まる} \tag{16}$$

「連続に定まる」とは、なめらかな関数どうしの積を極限で延ばしたものが、近づけ方に依らず一つに決まることです。同じ命題は、α が自然数でなければ $\alpha+\beta>0$ が必要でもあることを述べています。

例：階段関数 H は有界ですが跳びがあり、荒さの指数は 0 です（$H(\lambda x)=H(x)$。$\alpha<0$ のどの C^{α} にも入る）。一次元の δ は -1 です。合計は正にならないので (16) は使えず、§09 の (ii) の現象と矛盾しません。自由場は $1-d/2$ より少し荒い（$\alpha<1-d/2$ の C^{α} に入る）ので、二乗が (16) の決まった積として作れるのは $d<2$ だけです 既知 。§08 で $d=2,3$ の $:\varphi^2:(f)$ の分散が有限になったのは、§09 の (i) の発散を先に引いた（繰り込んだ）からで、ならし方に依らない形になることは確率の打ち消し（ガウスの対の数え上げ）に依っています。

ヤン–ミルズの接続 A は短い距離で自由場と同じ荒さを持つと期待され 物理 、場の強さ $F=dA+A\wedge A$（1-07）の $A\wedge A$ は二次元以上で (16) を満たさない積です。二・三次元ではこの種の積の解析が確率量子化で進められ（7-09）、四次元では 2026-11 に公開された構成が、格子の極限として連続の理論を作りました（Lean で証明されている、と委員会が評価した。6-00）。そこでは局所的な積は、格子の上で繰り込んだ挿入として定義されます（8-04）。それより前の到達点は 7-10 にあります。

この章が言えている範囲

内容	状態
フーリエの規則 (2)〜(6)、Gibbs の行き過ぎ、Fejér 平均	言えている 既知 。数値と図 1 は 計算
超関数・微分 (7)・変換 (8)・物差し (9a)(9b)、白色雑音と自由場の尺度の指数	定義と例 既知 。二つの指数は §06 に一行の導出
伝播関数 (10)(11)・相関長 $=1/m$、G^n が積分できる条件、Wick 積の分散 (13)	言えている 既知 。表 1・表 2・図 2・図 3 は 計算
積の困難 (14)(15)、積が作れる条件 (16)	(14) は計算を示した。図 4 と数値積分は 計算 。Schwartz の定理は書誌のみ、(16) は言明を確認（証明は追っていない）
格子の誤差 a^2（$d=3$ の一点）／ヤン–ミルズの接続の荒さ／相互作用のある場・質量ギャップ	観察 計算 ／期待 物理 ／扱っていない。何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表・図・本文の数値	計算	この端末の python3（NumPy 1.26・SciPy 1.11）。図は素の JavaScript で、図 1 の部分和・図 2 の K_ν の積分表示・図 4 の閉じた式はその場で計算し、図 3 は python で計算した表を埋め込んだもの。読み出しを node で表と照合
Gibbs 現象の経緯	既知	E. Hewitt, R. E. Hewitt, Arch. Hist. Exact Sci. 21 (1979) 129–160（本文を確認：第 II 部）／H. Wilbraham, Cambridge and Dublin Math. J. 3 (1848) 198–201・J. W. Gibbs, Nature 59 (1899) 606（書誌のみ）
超関数の始まりと積の不可能性	既知	S. Soboleff, Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. 1(43) (1936) 39–72・L. Schwartz, *Théorie des distributions*（Hermann）・L. Schwartz, C. R. Acad. Sci. Paris 239 (1954) 847–848（いずれも書誌のみ）。超関数の考えの始まりの帰属と、*Théorie des distributions* の年（1950–51 とされる）は未確認（二次資料による）
(16)	既知	M. Hairer, Invent. Math. 198 (2014) 269–504, arXiv:1303.5113（本文を確認：§1 と命題 4.14。$\alpha \notin \mathbb{N}$ なら $\alpha+\beta>0$ は必要でもある、という後半を含む）
尺度の指数	既知	時空の白色雑音の放物型の尺度での指数 $-(d+2)/2$：M. Hairer, *An Introduction to Stochastic PDEs*, arXiv:0907.4178（本文を確認：演習 2.3）。空間の白色雑音の $-d/2$ と質量の無い自由場の $1-d/2$ は §06 の一行の導出による
変換・$\mathcal{S}$・緩増加超関数・Sobolev 空間・伝播関数の式	既知	M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II*（Academic Press, 1975）ほか標準的な教科書（書誌のみ）

次に読む章：1-12 寄り道：四次元でだけ起きること。伝播関数の使い道は 4-03、超関数に値を取る場の公理は 4-09。

寄り道：四次元でだけ起きること — 八つの事例を、ヤン–ミルズの側から読み直す

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 四次元の回転が SU(2) 二つに割れ、場の強さが自己双対と反自己双対に割れること。作用が尺度によらないのは四次元だけで、場が作用を保って一点に潰れうること。無限遠の S^3 と SU(2) が同じ形なので整数が現れること。

前提となる章 — なし（1-02（SU(2)）・1-03（リー環）・1-06（$dx_1 \wedge dx_2$ とホッジの星）・1-07（ゲージ変換と純ゲージ）を読んでいると楽です）。次元の勘定は 2-04。

先に言うこと — 寄り道なので飛ばしてかまいません。既知の事実の案内で、質量ギャップや連続極限の構成について何も示していません。本体は 3-05・3-06・4-05 です。

この章の順序

1. 見取り図 — 記事の八つとこの本
2. 左と右の掛け算
3. 場の強さが二つに割れる（図 1）
4. 尺度を変えても作用が変わらない（図 2）
5. 一点に潰れる（表 1）
6. 無限遠の球面と SU(2)
7. 平面は点で交わる（寄り道：結び目とウィルソンループ）
8. 24-cell は SU(2) の有限部分群（表 2）
9. 球の面積と、四次元で発散し始める積分（表 3・図 3）
10. 次元のつまみ（図 4）

01

見取り図 — 記事の八つと、この本で効く場所

記事「四次元でだけ起きること」の出発点は、動ける方向は n 個なのに回転できる平面は

$$\dim SO(n) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \tag{1}$$

個ある、という数え方でした。三次元では平面と垂直な軸が一対一に対応し、回転を軸で言えます。四次元では 6 枚の平面に垂直なのはまた平面で、この 6 が 3＋3 に割れることが多くの節の出発点です。割れ方は 02・03 節で、四元数の左右の掛け算として具体的に書きます。

記事の八つの事例がこの本で顔を出す場所を表にします。左の列は記事の見出しへ、右の列はこの章の節と本体の章へのリンクです。記事に無い話題（尺度と集中・無限遠の巻き数）は 04〜06 節で足します。表の左の番号は記事の事例の番号で、この章の節番号とは別です。この章そのものが寄り道なので、気になる行だけを拾って読んでもかまいません。

記事の事例	この本での顔	節・章
01 回転から軸が消える	回転群が SU(2) 二つに、場の強さが二つに割れる	02・03・3-05
02 正多面体が増える（24-cell）	頂点が SU(2) の有限部分群をなす	08・5-10
03 結び目がほどける	ウィルソンループは結び目を見ない	07
04 左手が右手になる	鏡は自己双対と反自己双対を入れ替える	03
05 平面が点で交わる／06 エキゾチック $\mathbb{R}^4$	交叉形式・ヤン–ミルズが位相を見る	07・3-06
07 難しさが単調でない	結合が無次元になる境目の次元	04・05・7-10
08 球は五次元で最大	同じ式で次元を連続に動かす	09・4-05
（記事には無い）	巻き数・インスタントン数	06・3-05

02

左と右の掛け算 — 四次元の回転は SU(2) 二つ

四次元の点を一つの数と読みます。四元数は実数に記号 i, j, k を足した数で、規則は次の一行です。掛け算は結合的ですが可換ではありません（$ij = k$、$ji = -k$）。

$$x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k, \qquad i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \qquad \bar{x} = x_1 - x_2 i - x_3 j - x_4 k, \tag{2}$$

長さ 1 の四元数は S^3 をなし、掛け算で SU(2) と同じ群になります（SU(2) が S^3 であることは 1-02 の 05 節）既知。長さ 1 の q, p を左右から掛けると四次元の回転になり、どの回転もこの

形に書けます。同じ回転を与えるのは (q,p) と $(-q,-p)$ の組だけです 既知 。三次元の $SO(3)\cong SU(2)/\{\pm1\}$（1-02）と違い、SU(2) が二つあります。

$$x \longmapsto q\,x\,\bar{p}\quad(|q|=|p|=1),\qquad SO(4)\cong \big(SU(2)\times SU(2)\big)/\{\pm(1,1)\} \tag{3}$$

例。$q=\cos a+i\sin a$、$p=\cos b+i\sin b$ なら (x_1,x_2) 面が角 $a-b$、(x_3,x_4) 面が角 $a+b$ 回ります。事例 01 の二つのつまみ（xy 面と zw 面の速さ）は、左右の角の差と和です。無作為な 200 組で (3) が行列式 1 の直交行列であることを確かめました 計算 。

03

場の強さが二つに割れる — 左は F^+ だけ、右は F^- だけを回す

場の強さ F は各点で反対称な配列 $F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu}$ で、独立な 6 成分が一枚ずつの平面に付いています。電磁場なら、この 6 成分は電場 E の 3 つと磁場 B の 3 つです（1-06 の (13)）。ヤン–ミルズでは各成分がリー環（1-03）の元になりますが、この節では実数とします。ホッジの星 $*$ は各平面を垂直な平面に移す操作で、$\varepsilon_{1234}=1$ の完全反対称な記号で

$$(*F)_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\sum_{\rho,\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma},\qquad (*F)_{12}=F_{34},\quad (*F)_{13}=F_{42},\quad (*F)_{14}=F_{23} \tag{4}$$

です。n 次元の $*$ は二形式を $(n-2)$-形式に送るので、二形式に戻るのは $n=4$ だけです。$**=1$（1-06）なので $F^{\pm}=\tfrac12(F\pm *F)$ と分けられ（$|F|^2=\sum_{\mu<\nu}F_{\mu\nu}^2$）、作用の密度と位相の密度（06 節）が同じ二つで書けます。$F=\pm *F$ を自己双対・反自己双対と呼びます。

$$|F|^2=|F^+|^2+|F^-|^2,\qquad \frac{1}{4}\sum\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}=|F^+|^2-|F^-|^2 \tag{5}$$

(4) を使うと $F^{\pm}$ の独立な成分は三つずつで、長さの二乗が $|F^{\pm}|^2$ になるように並べると次の形です。図 1 の三本の軸はこの順です。

$$F^+=\tfrac{1}{\sqrt2}\big(F_{12}+F_{34},\ F_{13}+F_{42},\ F_{14}+F_{23}\big),\qquad F^-=\tfrac{1}{\sqrt2}\big(F_{12}-F_{34},\ F_{13}+F_{24},\ F_{14}-F_{23}\big)$$

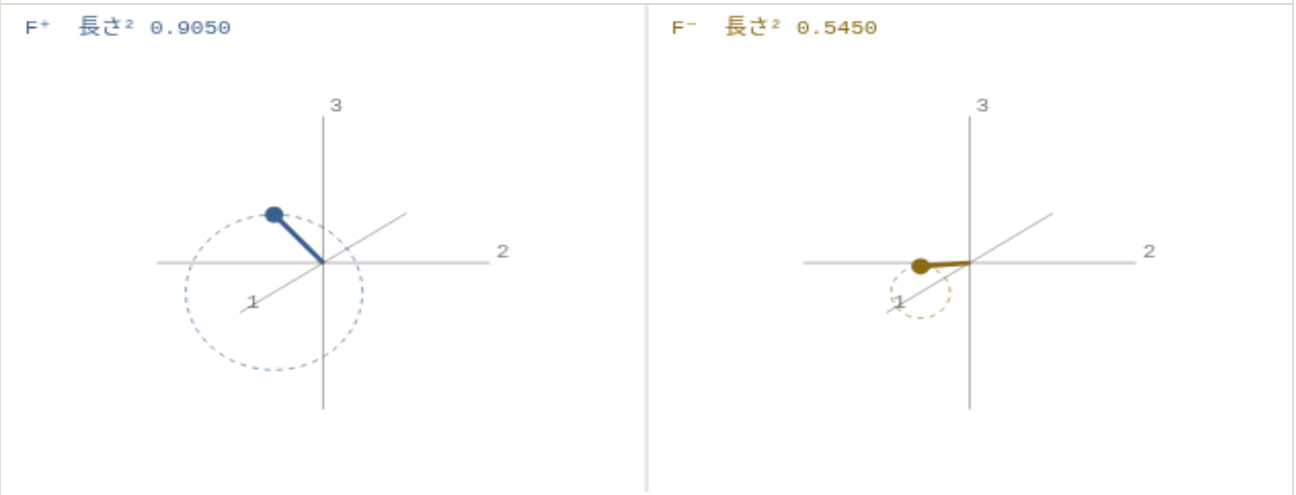
要点は (3) との関係です。回転 $x\mapsto qx\bar p$ は F^+ の 3 成分を q だけで、F^- の 3 成分を p だけで回し、二つを混ぜません 既知 。

$$\Lambda^2\mathbb{R}^4=\Lambda^2_+\oplus\Lambda^2_-\ (3+3),\qquad q\text{ は }\Lambda^2_+\text{ を},\ p\text{ は }\Lambda^2_-\text{ を回す} \tag{6}$$

どちらが F^+ を回すかは規約で決まります。向きや四元数への座標の割り当てを変えると左右が入れ替わります。この本では (2) と $\varepsilon_{1234}=1$ に揃えます。この規約では、左から i を掛ける行列は $dx_1\wedge dx_2+dx_3\wedge dx_4$ に比例して自己双対、右から掛ける行列は $dx_1\wedge dx_2-dx_3\wedge dx_4$ に比例して反自己双対です 計算 。

例。$q=\cos a+i\sin a$ は F^+ を第 1 軸のまわりに角 $2a$ 回し、$a=180°$（$q=-1$）で元に戻ります。1-02 の二重被覆が F^+ の上に見えます。無作為な 200 個で、(5) が成り立つこと、二つを混ぜる成分が 2.2×10^{-16} 以下であること、左の掛け算で F^- が不動で鏡 $x_4\mapsto -x_4$ では二つが入れ替わることを確かめました 計算 。

図 1　左の角 a を動かすと F⁺ だけが、右の角 b を動かすと F⁻ だけが回る。「鏡に映す」は始めの場を $x_4\to -x_4$ で映して F⁺ と F⁻ を入れ替えてから回す（a と b の役割は変わらない）。長さは変わらない



a = 0°　b = 0°　鏡 なし　F⁺ = (0.7071, 0.0000, 0.6364)　F⁻ = (0.7071, 0.0000, 0.2121)

計算 始めの場は $F=dx_1\wedge dx_2+0.6\,dx_1\wedge dx_4+0.3\,dx_2\wedge dx_3$。図は (2)(4) をその場で計算し、python3 の値と一致（鏡ありの行を含む）。点線は軌道。

鏡とミンコフスキーの符号

鏡は (5) の右辺の符号を変えます（事例 04）。インスタントンの鏡像は反インスタントンで、θ 項（(5) の右辺の積分に係数 θ を掛けて作用に足す項）が鏡で符号を変えるのもこのためです（3-05） 既知 。ミンコフスキーの符号では $**=-1$ で実の自己双対な場は無く（符号が一つ違う）、虚時間で考える理由の一つです（4-02）。

04

尺度を変えても作用が変わらない — 結合が無次元になる次元

場の形を保って大きさだけ $1/\lambda$ 倍にすると $A_\lambda(x)=\lambda A(\lambda x)$、$F_\lambda(x)=\lambda^2F(\lambda x)$ です（ゲージ場は長さの逆数の次元）。$y=\lambda x$ と置き換えると

$$S_d[A_\lambda]=\frac{1}{2g^2}\int_{\mathbb{R}^d}\lambda^4|F(\lambda x)|^2\,d^dx=\lambda^{4-d}\,S_d[A]\tag{7}$$

で、四次元だけ作用が大きさによりません。古典の理論に好みの長さが無いということで、2-04 の $[g^2]=4-d$ の別の顔です 既知 。問題文の 'the mass gap is not classically

visible'（Jaffe–Witten §6.6）もこれと関係します（4-07）。

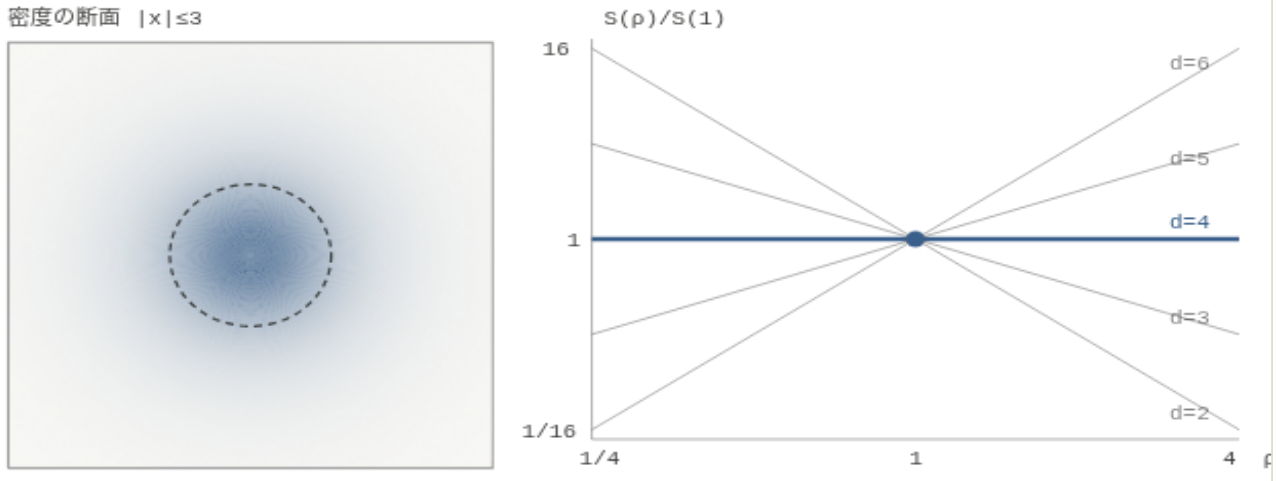
帰結の一つ。作用有限の解（停留点）なら、大きさの変形でも作用は一次で変わりません。

$$\frac{d}{d\lambda} S_d[A_\lambda]\Big|_{\lambda=1} = (4-d)\, S_d[A] = 0 \tag{8}$$

よって $d \neq 4$ なら $F = 0$ で、作用有限で自明でない解は四次元にしかありません（変形が許されるだけの減衰を仮定。同種の議論は Derrick 1964 とされます）既知 。

例。格子で見ても同じです。格子間隔 ϵ の n 次元格子では、格子の各小正方形（プラケット）に付く量の和が作用の役をし、それに逆結合 β（作用の前に掛かる係数で、$1/g^2$ に当たります。定数倍は規格化により、Wilson の規約では $\beta = 2N/g^2$）を掛けます（5-01）。プラケットの和は $\frac{\epsilon^{4-n}}{4} S_{\mathrm{YM}}(A)$ で近似されます（S_{YM} は (7) の作用から $1/2g^2$ を外した積分）。そこで β は古典的には、和が ϵ^{4-n} で縮む分を補うように $\beta\,\epsilon^{4-n}$ を一定に保てばよく（$\beta \propto \epsilon^{n-4}$）、$n = 4$ では動きません。三次元なら $\beta \propto 1/\epsilon$ で、$[g^2] = 1$ と合います。物理では四次元の β は $\log(1/\epsilon)$ のように動くと信じられていますが、疑いもあり数学では未解決だと Chatterjee（arXiv:1803.01950 §3、2018 年）は書いています 物理 。2026-11 に公開された構成（6-00）では、選んだ格子の族の裸の結合と $\log(1/\varepsilon)$ の比が一定の値に近づくことが言明に入っています（10-06。Lean で証明されている、と委員会が評価した。一ループの主部だけの言明）。この走りが漸近自由です（4-06）。

図 2　大きさ ρ と次元 d を動かす。左は作用密度の断面（点線の円の内側に作用の半分）、右は S(ρ)/S(1) = ρ^(d−4) の両対数で、d = 4 だけ水平。「動かす」で ρ を往復させる



ρ = 1.000　d = 4　S(ρ)/S(1) = 1.000　[g²] = 0　中心の密度 48/ρ⁴ = 48.00　全作用 8π² ≈ 78.957

計算 左は (9)、右は (7) の ρ^{d-4}（$\rho = 1/\lambda$）をその場で計算（python3 の積分比と一致）。$d \neq 4$ は同じ形を縮めたときの比で、解ではありません。

05

一点に潰れる — 境目の次元

ここからは値がリー環の場を扱うので、$|F|^2$ を決めておきます。1-04 の T_a に $-i$ を掛けた $t_a = -iT_a$（$\mathrm{tr}(t_a t_b) = -\frac{1}{2}\delta_{ab}$）で $F_{\mu\nu} = \sum_a F^a_{\mu\nu} t_a$ と書き、

$$|F|^2 = \sum_{\mu<\nu}\sum_a \left(F^a_{\mu\nu}\right)^2, \qquad S = \frac{1}{2g^2}\int |F|^2\, d^4x = -\frac{1}{2g^2}\int \sum_{\mu,\nu} \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\, d^4x$$

とします。t_a が反エルミートなので $\mathrm{tr}\, F^2$ は負で、負号が付きます。(5) も各 a について足したものと読みます。

最も簡単な自己双対な解（BPST のインスタントン、3-05）は、作用の密度が原点に丸く集まった形です。$1/g^2$ を単位にした作用の密度 $s = \frac{1}{2}|F|^2$ と、半径 R の内側の作用の割合は、大きさ ρ の解で次の通りです（$d^4x = 2\pi^2 r^3 dr$、$2\pi^2$ は単位の S^3 の面積）既知 。s の形は上の規格化で BPST の接続から計算し直しました 計算 。

$$s(x) = \frac{48\,\rho^4}{(|x|^2+\rho^2)^4}, \qquad \int_{\mathbb{R}^4} s\, d^4x = 8\pi^2, \qquad \frac{1}{8\pi^2}\int_{|x|<R} s\, d^4x = 1 - \frac{3}{(1+u)^2} + \frac{2}{(1+u)^3},\quad u = \frac{R}{\rho} \tag{9}$$

計算 **表 1**　(9) の数値積分。全体は ρ によらず、半径 ρ の内側にいつも半分が入ります。

ρ	中心の密度 $48/\rho^4$	全作用 / $8\pi^2$	半径 ρ の内側	90% が入る半径
4	0.1875	1.000000000000	0.500000	8.1065
1	48	1.000000000000	0.500000	2.0266
1/16	3.146×10^6	1.000000000000	0.500000	0.1267

例。$\rho \to 0$ で、作用を $8\pi^2/g^2$ に保ったまま密度が一点に潰れます。三次元以下なら縮めると作用が増える（図 2）ので集中は止まりますが、四次元では止まりません。この集中の扱いが四次元の古典ヤン–ミルズの解析の要であることは、Uhlenbeck の 1982 年の仕事以来知られているとされます 既知 。問題文 §2 は 'Asymptotic freedom ensures a decisive regularity in the case when classical Sobolev inequalities are borderline.' と書き、漸近自由が決定的な正則性を「保証する（ensures）」と言い切っています。この章はそれを、(7) と表 1 で見た古典の境目（四次元で評価がちょうど足りなくなること）を漸近自由が補う、という意味に読みます（解釈）。

06

無限遠の球面と SU(2) — 整数が出る場所

$\mathbb{R}^d$ の遠方は大きな球面 S^{d-1} です。作用が有限で減り方が十分なら、遠方で A はゲージ変換だけで書ける形（純ゲージ。1-07）に近づき、ゲージ変換の写像が残ります（1-07 の単極子と同

じ仕組み)。結合定数 g と区別するため、この節ではその写像を h と書きます。連続な変形で移り合う写像を同じと見た類がホモトピー群 π_{d-1} です。

$$h:\ S^3 \to SU(2) \cong S^3, \qquad k = \deg h \in \pi_3(S^3) = \mathbb{Z}, \qquad S \geq \frac{8\pi^2}{g^2}\,|k| \tag{10}$$

四次元では遠方も SU(2) も S^3 で、同じ次元の球面の間の写像には「何回かぶせたか」という整数（写像度）があります。正確には、行き先の S^3 の一般の点を一つ選び、その逆像の各点に、そこで h が向きを保つなら $+1$、反転するなら -1 を付けて足した和です（どの点を選んでも同じ値)。これがインスタントン数 k です。

不等式は (5) から出ます。05 節の規格化で $k = \frac{1}{16\pi^2}\int (|F^+|^2 - |F^-|^2)\,d^4x$ と書けるので、$S = \frac{1}{2g^2}\int (|F^+|^2 + |F^-|^2)\,d^4x \geq \frac{8\pi^2}{g^2}|k|$ で、等号は自己双対か反自己双対のときです。BPST の解は $k=1$ です（3-05）既知 。

例。ホモトピー群の表によれば、SU(2)$=S^3$ への類 $\pi_{d-1}(S^3)$ は $d=2,3,4,5$ で $0,0,\mathbb{Z},\mathbb{Z}/2$、U(1)$=S^1$ への類は $d=2$ だけ $\mathbb{Z}$（渦の数。1-07 の単極子と同じ仕組み）です。コンパクトな単純リー群なら π_3 はいつも $\mathbb{Z}$ で、SU(3) にも k があります 既知 。

07

平面は点で交わる — 交叉形式とエキゾチック $\mathbb{R}^4$

事例 05 のとおり、四次元の二枚の平面は普通は一点で交わります。閉じた四次元多様体の中の二つの閉曲面も有限個の点で交わり、向きを込めた ±1 の和は曲面を動かしても変わりません。これが交叉形式（整数の対称行列）です。

$$\dim(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) = 2+2-4 = 0, \qquad Q(\Sigma_1,\Sigma_2) = \sum_{p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2} (\pm 1) \tag{11}$$

例。$\mathbb{CP}^2$ の交叉形式は (1)、$S^2\times S^2$ は $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ です 既知 。Donaldson は反自己双対な接続（(6) で $F^+=0$。向きを逆にすれば自己双対な接続と同じで、一次資料の流儀は 3-06）の解の空間を道具に、「向きの付いた閉じた滑らかな四次元多様体の定値な交叉形式は対角化できる」という定理に至りました。1983 年に単連結の場合を示し、のちに単連結の仮定を外した形に広げたとされます（細部は 3-06)。Freedman の位相的な定理と対比すると、$\mathbb{R}^4$ と同相だが微分同相でない空間（エキゾチック $\mathbb{R}^4$）が現れ、それが連続体濃度だけあることは Taubes が最初に示したとされます 既知 。本体は 3-06。

寄り道：結び目とウィルソンループ

飛ばしてよい小節です。

ウィルソンループは閉じた道のホロノミー（1-07）のトレースで、三次元の Chern–Simons 理論ではその期待値が結び目の不変量（Jones 多項式）を与えます（Witten 1989）既知。四次元ではどの輪もほどけ（事例 03）、ヤン–ミルズは位相的でもないので、期待値は道の大きさと形で決まり、物質場の無い理論では面積則が閉じ込めの目印とされます物理（5-02）。

08

24-cell は SU(2) の有限部分群

24-cell の頂点（座標の二つが ±1、二つが 0）に $(1+i)/\sqrt{2}$ を左から掛け $1/\sqrt{2}$ 倍すると、次の 24 個の単位四元数になります計算。掛け算で閉じた SU(2) の有限部分群（二項四面体群。SO(3) への像は正四面体の 12 個の回転）です既知。

$$\bar{T} = \left\{ \pm 1,\ \pm i,\ \pm j,\ \pm k,\ \tfrac{1}{2}(\pm 1 \pm i \pm j \pm k) \right\}, \qquad |\bar{T}| = 24 \tag{12}$$

正六百胞体の 120 頂点も同じく二項二十面体群 $\bar{I}$ をなします。

例。格子ゲージ理論（5-01）ではリンクに有限群の元を置けます。Petcher–Weingarten 1980 は $\bar{T}$・$\bar{O}$・$\bar{I}$ で計算し、要旨によれば $\bar{I}$ のプラケットの平均・ウィルソンループ・弦張力の推定は広い結合の範囲で SU(2) と一致しました。十分弱い結合では、元の間の隙間のため SU(2) と違う振る舞いになるとされます物理（出典と詳しい話は 5-10）。

計算 **表 2**　三つとも積で閉じることを確認。「最も遠い点までの角」は S^3 上の無作為な 20 万点から最も近い元までの角の最大（推定）。

群	位数	最近接の距離	辺の数	最も遠い点までの角
$\bar{T}$（24-cell）	24	1	96	44.7°
$\bar{O}$	48	$\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 0.7654$	144	31.2°
$\bar{I}$（600-cell）	120	$1/\varphi \approx 0.6180$	720	22.2°

09

球の面積と、四次元で発散し始める積分

事例 08 の球の体積は単位球面の面積の式から出ます。この式は d が整数でなくても意味を持ち、摂動論（4-03）で最初に出会う形の積分も d の関数になります。

$$|S^{d-1}| = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}, \qquad I(d) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d k}{(k^2+1)^2} = |S^{d-1}| \int_0^\infty \frac{k^{d-1} dk}{(k^2+1)^2} = \pi^{d/2}\,\Gamma\!\left(2 - \frac{d}{2}\right) \tag{13}$$

Γ はガンマ関数で、階乗を実数に延ばしたものです（$\Gamma(n) = (n-1)!$、$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$、$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$）。被積分関数は遠くで k^{-4}、体積は $k^{d-1}dk$ なので収束は $d < 4$ だけで、四次元は発散が対数で始まる境目です。結合が無次元になる次元で、発散もちょうど対数になります（4-04）。$d = 4 - \epsilon$ で計算する方法（次元正則化、't Hooft–Veltman 1972・Bollini–Giambiagi 1972）と運動量を K で切る方法では

$$I(4-\epsilon) = \frac{2\pi^2}{\epsilon} + O(1), \qquad \int_{|k|<K} \frac{d^4k}{(k^2+1)^2} = 2\pi^2 \ln K - \pi^2 + O(K^{-2}) \tag{14}$$

となり、$1/\epsilon$ と $\ln K$ が同じ係数 $2\pi^2 = |S^3|$ で対応します。

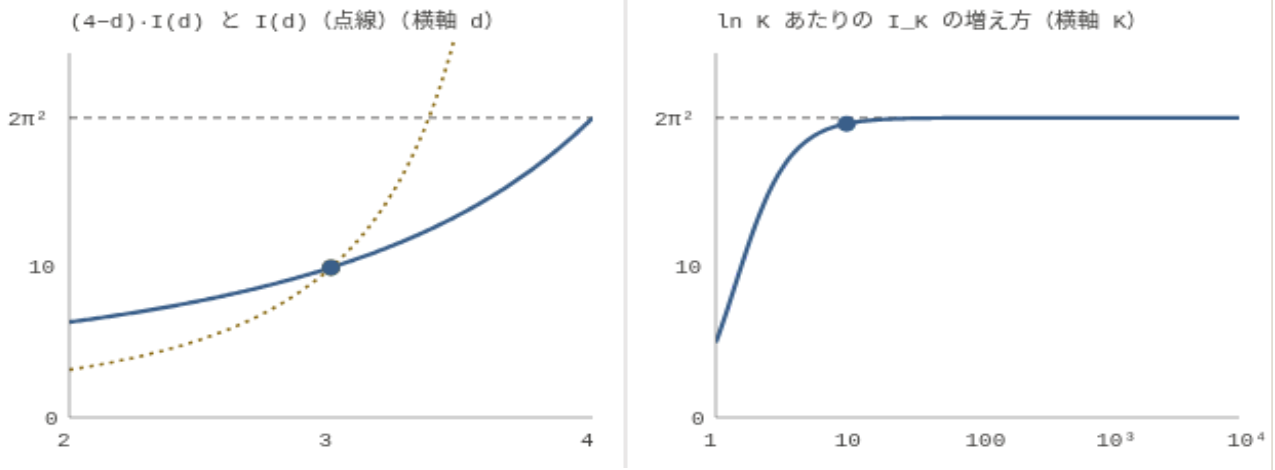
計算 **表 3**　(13) の公式と数値積分。

d	I(d) 公式	I(d) 数値積分	(4−d)·I(d)
2	3.141593	3.141593	6.283185
3	9.869604	9.869604	9.869604
3.99	1957.039052	–	19.570391
3.999	19722.225249	–	19.722225

例。最後の列は $2\pi^2 = 19.739209$ に近づき、切断のほうは $K = 10^4$ で $I_K - 2\pi^2 \ln K = -9.869604$（$-\pi^2$）でした。記事の球の体積（$V_5 = 5.2638$ など）も同じ式で一致します 計算 。

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ を使うと $(4-d)\,I(d) = 2\pi^{d/2}\Gamma(3 - \frac{d}{2})$ で、右辺は $d = 4$ をまたいで滑らかです。発散は $1/(4-d)$ の因子にだけあり、残りの係数は $d = 4$ で $2\pi^2\Gamma(1) = 2\pi^2$ です。切断のほうでは $I_K = \pi^2\big(\ln(1+K^2) + \frac{1}{1+K^2} - 1\big)$ で、$\ln K$ が 1 増えるごとの増え方 $2\pi^2 K^4/(K^2+1)^2$ が同じ $2\pi^2$ に近づきます。図 3 はこの二つを並べます。

図 3　左のつまみで d を 4 に近づけると、I(d)（点線）は発散するが (4−d)·I(d)（実線）は $2\pi^2$ に近づく。右のつまみで切断 K を大きくすると、ln K あたりの I_K の増え方が同じ $2\pi^2$ に近づく



d = 3.0000 I(d) = 9.8696 (4−d)·I(d) = 9.8696 ｜ K = 10.00 I_K = 35.7775 I_K − 2π² ln K = -9.6737 （2π² = 19.7392）

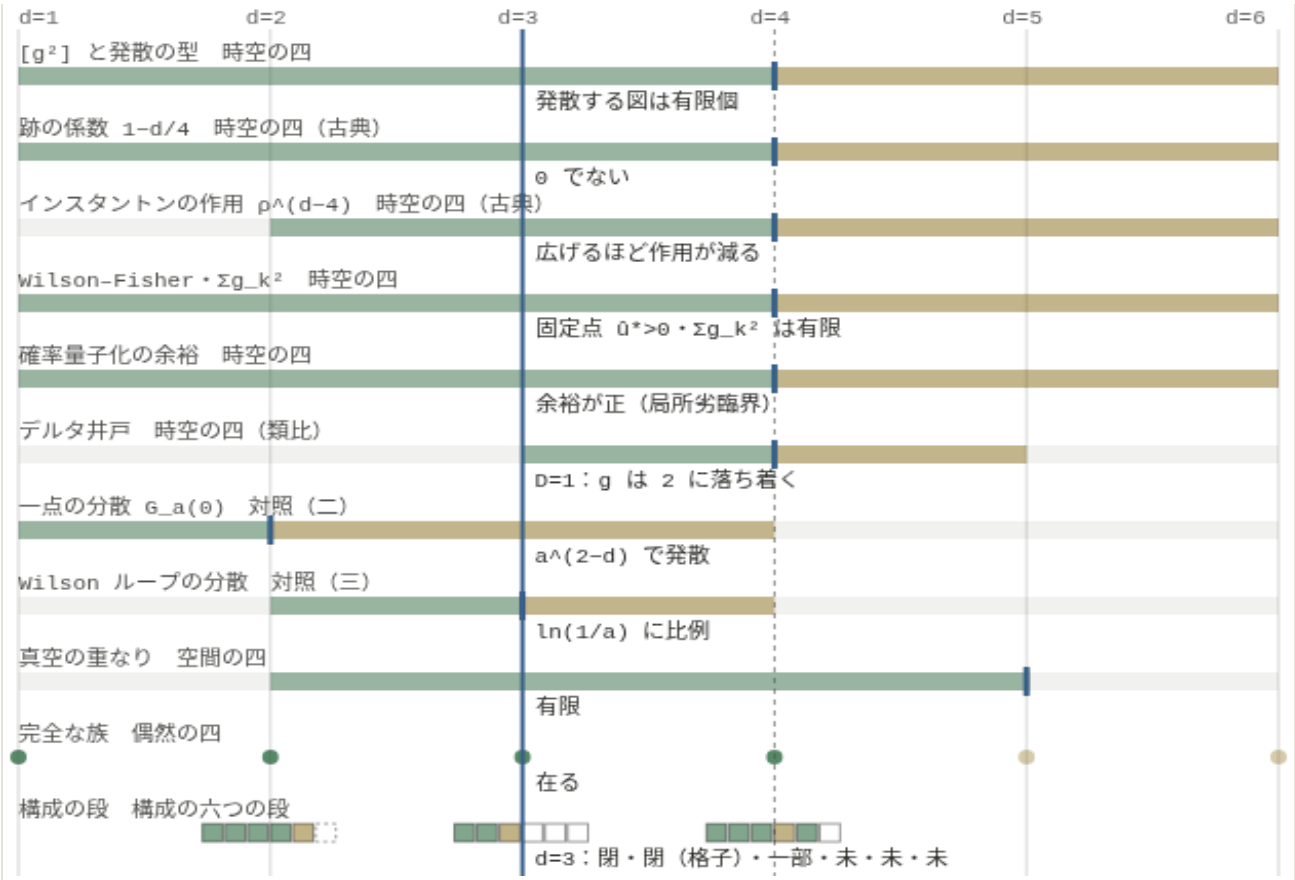
計算 左は $I(d)=\pi^{d/2}\Gamma(2-\frac{d}{2})$ と $(4-d)I(d)=2\pi^{d/2}\Gamma(3-\frac{d}{2})$、右は $2\pi^2K^4/(K^2+1)^2$ と I_K をその場で計算（ガンマ関数は Lanczos の近似式。python3 の値と一致）。左のつまみは $4-d=10^{-u}$ の u を動かします。

10

次元のつまみ — 四で揃う行と揃わない行

本に散る d 依存を一本のつまみで並べます。各行は冪 $p(d)$ の符号で分かれ、$p=0$ の境目では冪が消えて対数か不変が残ります。時空の四の六行は同じ $d=4$ で境目に来ます。残る四行は四でない所か、別の理由で切り替わります。既知 正確には、六行が揃うのは同じ次元の勘定（伝播関数 $1/k^2$ の 2 が二回）のためで、四次元の構成が不可能だという意味ではありません。

図 4　d を動かすと十一行の文が同時に替わる。緑＝手前・太線＝境目・黄土＝先・灰＝出所が扱わない d



d = 3.00　行の数：手前 8・境目 1・先 1

計算 境目はこの端末で計算、文は各章の写し。JavaScript が無効なら表 4。

表 4　図 4 の行。

量（章）	札	境目	手前（d 小）	境目で	先（d 大）
[g^2] と発散の型（4-04 表 2）	時空の四	4	発散する図は有限個	型は有限・全次数、結合が対数で走る	型が際限なく増える
跡の係数 1−d/4（3-03 (8)）	時空の四（古典）	4	0 でない	恒等的に 0（古典に尺度が無い）	0 でない（符号が逆）
インスタントンの作用 ρ^(d−4)（(7)・3-05）	時空の四（古典）	4	広げるほど作用が減る	ρ によらない	潰すほど作用が減る
Wilson–Fisher・Σg_k^2（4-04 (11)・7-05）	時空の四	4	固定点 $\hat{u}^*>0$・Σg_k^2 は有限	$\hat{u}$ は対数の速さで 0 へ・Σg_k^2 は段数の対数で増える	$\hat{u}$ は冪で 0 へ
確率量子化の余裕（7-09 表 2）	時空の四	4	余裕が正（局所劣臨界）	余裕 0・記号が有限個に収まらない	余裕が負
デルタ井戸（D=d−2 の類比）（4-07 表 5）	時空の四（類比）	4	D=1：g は 2 に落ち着く	D=2：1/g が ln K に比例	D=3：g を冪で寄せる

量（章）	札	境目	手前（d 小）	境目で	先（d 大）
一点の分散 G_a(0)（1-09 表 3）	対照（二）	2	有限	ln(1/a) で発散	a^(2−d) で発散
Wilson ループの分散（7-06 表 2）	対照（三）	3	有限（面積）	ln(1/a) に比例	1/a に比例
真空の重なり（D=d−1）（4-09 §07）	空間の四	5	有限	対数で発散（時空五次元）	—
完全な族（5-11・Lean `no_perfectZ_of_five`）	偶然の四	—	在る	整数の d だけ	無い
構成の段（YM）（7-01 表 2）	構成の六つの段	—	d=2：閉・閉・閉・閉・一部・—；d=3：閉・閉（格子）・一部・未・未・未；d=4：閉・閉（格子）・閉・一部・閉・未（三つ目〜五つ目は 2026-11 に公開された構成による。体積の極限は部分列まで。7-01 表 2 の四次元の行は 2026 年より前の文献の到達点（閉・閉（格子）・一部・未・未・未）で、ここではそれに公開された構成を重ねた。Lean で証明されている、と委員会が評価した。6-01）		

この章が言えている範囲

内容	状態
(3)〜(8)・鏡での入れ替え	既知。(8) は減衰を仮定。数値の確認は 計算 （(3) の全射性は見ていない）
格子の β の $\log(1/\epsilon)$ の走り／有限群と SU(2) の弱結合での違い	物理。前者は数学では未解決と原文に明記。後者の出典は 5-10
(9)・表 1・$\lvert F\rvert^2$ の規格化／05 節の問題文の読み方	密度の形と積分は 計算 （解であることは 3-05）／この章の解釈
(10)(11)・07 節の定理	既知 （原論文は書誌のみ）
(12)〜(14)・表 2・表 3・図 3	計算 （被覆の角は標本による推定）
図 4・表 4	各章の写し。並べ方はこの本の整理
質量ギャップ・連続極限	この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1〜4、05 節の規格化、図 1〜3 の照合値	計算	python3（NumPy・SciPy）。図はブラウザの JavaScript（同じ関数を node で実行して照合）
八つの事例・球の体積・24-cell	このサイト	四次元でだけ起きること
格子と β・問題文の引用	既知	S. Chatterjee, arXiv:1803.01950 §3／A. Jaffe, E. Witten, Quantum Yang–Mills theory（Clay Mathematics Institute のミレニアム懸賞問題の問題記述、claymath.org の PDF）§2・§6.6（どちらも本文を確認）
08 節	既知	D. Petcher, D. H. Weingarten, Phys. Rev. D 22 (1980) 2465（要旨を確認。弱結合での違いの出典は 5-10）
(3)・06 節の π_{d-1}・07 節の主張と帰属	既知	Wikipedia「Rotations in 4-dimensional Euclidean space」「Homotopy groups of spheres」「Donaldson's theorem」（1983 年の版は単連結を仮定し、一般の基本群への拡張は 1987 年の論文とする）「Exotic R4」（二次資料）
書誌のみ（本文は読んでいない）	既知	Conway–Smith, *On Quaternions and Octonions* (2003)／Belavin–Polyakov–Schwartz–Tyupkin, Phys. Lett. B 59 (1975) 85／Derrick, J. Math. Phys. 5 (1964) 1252／Uhlenbeck, Commun. Math. Phys. 83 (1982) 11, 31／Donaldson, J. Differential Geom. 18 (1983) 279／Donaldson, 同 26 (1987) 397／Freedman, 同 17 (1982) 357／Taubes, 同 25 (1987) 363／Witten, Commun. Math. Phys. 121 (1989) 351／'t Hooft–Veltman, Nucl. Phys. B 44 (1972) 189／Bollini–Giambiagi, Nuovo Cim. B 12 (1972) 20

次に読む章：2-01 ラグランジアンと作用。続きは 3-05・3-06・4-07・7-10。

ラグランジアンと作用 — 運動は「道全体に付く一つの数」の停留点として書ける

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 運動方程式が作用の停留条件として書けること。そこから Euler–Lagrange 方程式が出ること。連続的な対称性から保存量が出ること（Noether の定理）と、局所的な対称性からは拘束が出ること。

前提となる章 — 1-01 ベクトル空間と線形写像（回転行列・実対称行列の固有値）。ほかは多変数の微積分とニュートンの運動方程式です。

先に言うこと — 有限個の自由度に限ります（場は 2-02、ヤン–ミルズの作用は 3-03）。証明は滑らかな道と端を固定した変分の範囲です。作用原理がなぜ成り立つのかには答えません。

この章の順序

1. なぜ作用から始めるのか — 三つの利点
2. 作用という一つの数 — 運動エネルギー − 位置エネルギーの積分
3. 道を少しずらす — 刻めば多変数の関数（図 1）
4. Euler–Lagrange 方程式 — 部分積分一回。座標を選ばない
5. 最小とは限らない — 固有値と共役点（計算つき）
6. Noether の定理 — 対称性から保存量（図 2）
7. 寄り道：刻んだ作用にも Noether がある — 角運動量がちょうど保たれる理由
8. 局所的な対称性は拘束を生む — ゲージ理論への前触れ

01

なぜ作用から始めるのか

ニュートンの運動方程式 $m\ddot{q} = F$ は、各時刻の加速度を決める局所的な規則です。この章では同じ運動を別の形で書きます。出発と到着を決め、その間の**道全体**に一つの数 S（**作用**）を与える。実際の運動は、道を少しずらしても S が一次では変わらない道として選ばれる。これが**作用原理**（最小作用の原理とも）です。

利点は三つです。**座標に依らない**（§04）。対称性から**保存則が自動的に出る**（§06）。**場の理論の言葉である**：ヤン–ミルズ理論は $\operatorname{tr} F^2$ の積分という作用で定義され（3-03）、経路積分も作用を指数の肩に載せて道を足し合わせます（2-07）。

比喩で言えば、運動方程式は「一歩ずつの道案内」、作用原理は「地図で道全体を見比べる」見方です。正確には、保存力の系では両者は同じ方程式を与え（§04）、違うのは何が見やすいかだけです。

02

作用という一つの数

直線上の粒子の時刻 t での位置を $q(t)$、速度を $\dot{q} = dq/dt$、質量を m、位置エネルギーを $V(q)$ とします。**ラグランジアン** L は運動エネルギーから位置エネルギーを**引いた**もので、和であるエネルギーとは別の量です。それを道に沿って積分した数が**作用**です。

$$L(q, \dot{q}) = \tfrac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q)$$

$$S[q] = \int_{t_0}^{t_1} L\big(q(t), \dot{q}(t)\big)\, dt$$

角括弧は、道を丸ごと入れて数を返す写像（**汎関数**）であることを示します。

例。$V = 0$、$m = 1$、端を $q(0) = 0$、$q(1) = 1$ とします。等速の道 $q = t$ では $S = 0.5$。同じ端を結ぶ回り道 $q = t + 0.3 \sin \pi t$ では $S = \tfrac{1}{2}\int_0^1 (1 + 0.3\pi \cos \pi t)^2\, dt = \tfrac{1}{2}(1 + 0.09\pi^2/2) \approx 0.722$。回り道をすると作用が増えます。

03

道を少しずらす

関数の極値は、変数を少し動かしたときの一次の変化が 0 になる点でした。作用では道を動かします。端で 0 になる関数 $\eta(t)$ を取ると、$S(\varepsilon) = S[q + \varepsilon\eta]$ は実数 ε の普通の関数です。**作用**

原理は「端を固定したどの η でも $S'(0)=0$」という要求で、これを満たす道を**停留点**と呼びます。

刻めば、有限個の変数の関数になる

時間を N 等分（刻み幅 h）して道を折れ線にし、積分を台形則で近似すると、作用は途中の位置 $q_1,\dots,q_{N-1}$ の多変数関数になります（端 q_0、q_N は固定）。

$$S_N=\sum_{k=0}^{N-1}\left[\frac{m(q_{k+1}-q_k)^2}{2h}-\frac{h}{2}\big(V(q_k)+V(q_{k+1})\big)\right]$$

$$\frac{\partial S_N}{\partial q_k}=-h\left[m\,\frac{q_{k+1}-2q_k+q_{k-1}}{h^2}+V'(q_k)\right]$$

作用原理は「勾配が 0」になり、それは $m\ddot q=-V'(q)$ の差分版です（§07 で再び使う）。

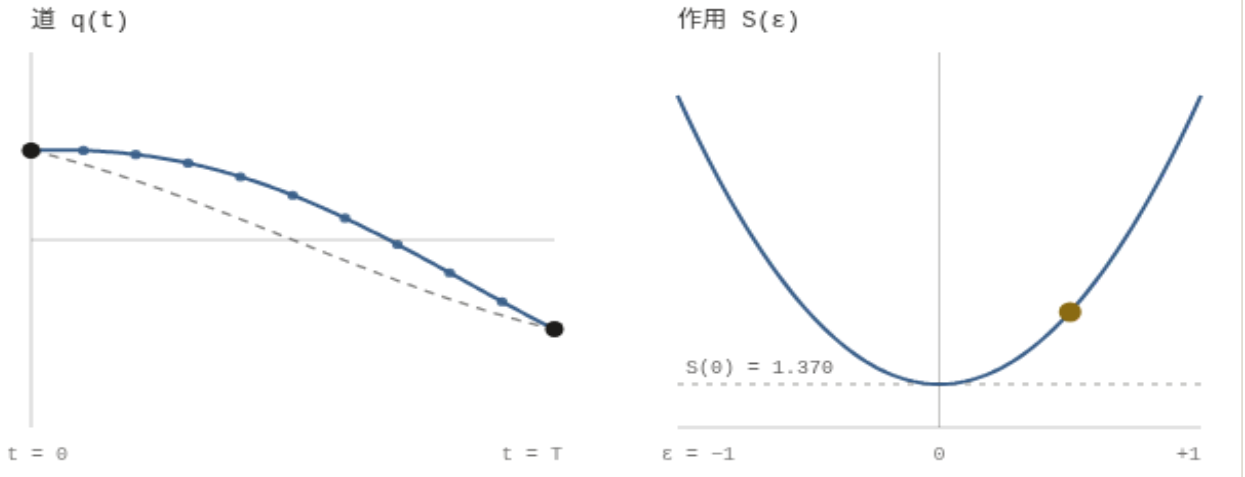
例：ばねの粒子

$V=\frac12 m\omega^2 q^2$、$m=1$、時間の長さ $T=1$、端を $q(0)=1$、$q(1)=-1$ とします。運動方程式の解は $q_{\mathrm{cl}}(t)=\sin\big(\omega(\tfrac12-t)\big)/\sin(\omega/2)$ です（cl は「古典的な道」）。ずらし $\eta_n=\sin n\pi t$（$n=1,2,3$）に対して、作用は ε の二次式になります。

$$S(\varepsilon)=\omega\cot\frac{\omega}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4}\big((n\pi)^2-\omega^2\big)$$

一次の項が無いことが「停留」の中身です。二次の項は $\frac12\int(\dot\eta^2-\omega^2\eta^2)\,dt$ から来ます。図 1 で ε を動かすと、作用は放物線の上を動き、$\varepsilon=0$ で傾きが 0 です。

図 1　ε・形 n・ωT を動かすと、ずらした道（左）と作用 S(ε)（右）が変わるS(ε) = 1.764　二次の係数 +1.579　上に開く＝この向きで最小



計算　曲線は上の公式をブラウザで描いたもので、公式はこの端末で数値積分と照合した（表 1）。点線は古典的な道、点は $N=10$ で刻んだときの変数。

表 1　作用の値（$m=T=1$、$q(0)=1$、$q(1)=-1$）

$\omega T/\pi$	n	$S(0)$	$S(1)$	二次の係数
0.5	1	1.5708	3.4213	+1.851
1.0	1	0.0000	0.0000	0
1.5	1	−4.7124	−7.7966	−3.084
1.5	2	−4.7124	−0.3944	+4.318

計算　Simpson 則（20000 区間）の数値積分と公式の差は 4×10^{-15} 以下。一次の係数も 5×10^{-13} 以下。

04

Euler–Lagrange 方程式

§03 の条件を刻まずに計算します。ε で微分し、第二項を部分積分します（端で $\eta=0$ なので境界の項は消える）。

$$S'(0)=\int_{t_0}^{t_1}\Big[\frac{\partial L}{\partial q}\,\eta+\frac{\partial L}{\partial \dot q}\,\dot\eta\Big]\,dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\Big[\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\Big]\,\eta\,dt$$

これがどの η でも 0 なら、括弧は各時刻で 0 です（括弧は連続なので、どこかで正ならその近くでも正で、その近くだけで正の η を取れば積分が正になる。**変分法の基本補題**）。こうして **Euler–Lagrange 方程式**が出ます。自由度が複数なら成分ごとに一本です。

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}-\frac{\partial L}{\partial q}=0 \tag{EL}$$

例。 $L=\tfrac12 m\dot q^2-V(q)$ なら $m\ddot q=-V'(q)$。保存力のニュートン方程式そのものです。

座標を選ばない

この導き方は q が何を表すかを使っていません。角度でもよく（**一般化座標**）、同じ形の方程式が成り立ちます 既知 。同じ道には座標によらず同じ作用が付くからです（1-05）。振り子を角度 θ で書くと $L=\tfrac12 ml^2\dot\theta^2+mgl\cos\theta$ から $ml^2\ddot\theta=-mgl\sin\theta$。張力は現れません。

L に $dG(q,t)/dt$ を足しても方程式は変わりません（作用は端の値だけで決まる量しか変わらない） 既知 。ヤン–ミルズ理論の **θ 項**はこれの四次元版で、時間での全微分の代わりに四次元の発散（**全発散**）の形をしています。正確には、θ 項は古典的な方程式を変えませんが、場の位相を通じて量子論では効きます（3-05）。

05

最小とは限らない

作用原理が求めるのは一次の変化が 0 であることだけで、最小かどうかは二次の項で決まります。§03 の例では係数 $((n\pi)^2-\omega^2)/4$ の符号です。$\omega T<\pi$ ならどの n でも正で、一般の η も正弦級数に展開すれば各 n の和に分かれるので、古典的な道は本当に最小です（作用が二次式のため）。

ωT が π を越えると $n=1$ の係数が負になり、その向きには作用が**減る**（**鞍点**）。図 1 で $\omega T/\pi$ を 1 の左右に動かすと、$n=1$ の放物線が裏返ります。$\omega T=\pi$ ちょうどでは、$n=1$ の向きに動かしても作用が変わらず（$n\ge 2$ の向きでは増える）、同じ端を結ぶ解が一族 $\cos\pi t + c\sin\pi t$ になります。一般に、時刻 0 の同じ点から出た近くの解の族が再び一点に集まる時刻を、0 の**共役点**と呼びます 既知 。この例の共役点は $t=\pi/\omega, 2\pi/\omega, \dots$ で、$\omega T=\pi$ は終わりの時刻がちょうど最初の共役点に来た場合です。

二次の項は行列の固有値の問題

刻むと、二次の項はヘッセ行列 $H_{jk}=\partial^2 S_N/\partial q_j \partial q_k$ です。実対称なので対角化でき（1-01）、極小とは固有値がすべて正であること。負の固有値の個数は作用を減らせる向きの数で、**Morse 指数**と呼びます（ここでは刻んだ行列についての呼び名）。調和振動子の H は三重対角（対角 $2m/h-m\omega^2 h$、両隣 $-m/h$）で、h で割った固有値は $m((n\pi/T)^2-\omega^2)$ に近づき、負のものは $\lfloor \omega T/\pi \rfloor$ 個です。

表 2　刻んだ作用のヘッセ行列（$m=T=1$、$N=200$）

$\omega T/\pi$	負の固有値の個数	最小固有値 $/\,h$	$\pi^2-(\omega T)^2$
0.50	0	7.4020	7.4022
1.05	1	−1.0118	−1.0116
2.50	2	−51.8156	−51.8154
3.20	3	−91.1953	−91.1951

計算 numpy の `eigvalsh` で全固有値を求めた。$N=20$ でも個数は同じで、最小固有値の差は約 0.02。

刻まない場合も、この例で作用を減らせる向きは $\sin n\pi t$ のうち $n\pi<\omega T$ のもので、その数は $(0,T)$ にある共役点 $k\pi/\omega$ の数に等しくなります。これは **Morse の指数定理**（二次の項の負の向きの数は、$(0,T)$ にある共役点の数に重複を込めて等しい）の一例です 既知 。

この見方は 1-10 で無限次元に広げます。ここでの最小固有値（作用の二次の項）と、4-11 の質量ギャップ（ハミルトニアンのスペクトルの隙間）は別物です。

06

Noether の定理

L が座標 q を含まなければ、Euler–Lagrange 方程式は $p = \partial L/\partial \dot q$（**共役な運動量**）の保存を言います。中心力を極座標で書いた $L = \tfrac12 m(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) - V(r)$ は φ を含まず、角運動量 $mr^2\dot\varphi$ が保存します。これを座標から切り離したのが Noether の定理です。

実数 s で連続に番号付けされ $s=0$ で恒等写像になる変換 $q \mapsto \Phi_s(q)$（平行移動や角 s の回転）の、動く向きを $K(q) = \frac{d}{ds}\Phi_s(q)\big|_{s=0}$ とします。**Noether の定理**：どの道でも $L\big(\Phi_s(q), \frac{d}{dt}\Phi_s(q)\big) = L(q,\dot q)$ なら、運動に沿って次の Q は一定です 既知 。

$$Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\, K_i(q) \tag{N}$$

証明。仮定を $s=0$ で微分すると $\sum_i (\partial L/\partial q_i) K_i + \sum_i (\partial L/\partial \dot q_i)\,\dot K_i = 0$。Euler–Lagrange 方程式で $\partial L/\partial q_i$ を $\frac{d}{dt}(\partial L/\partial \dot q_i)$ に置き換えると、左辺は積の微分 dQ/dt です。∎

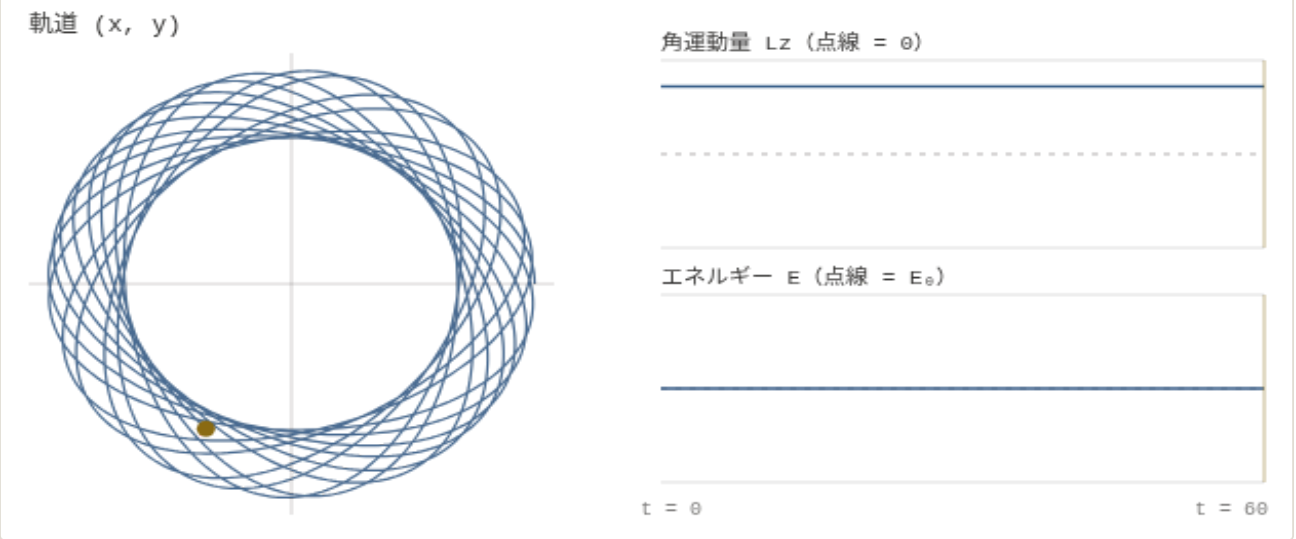
作用を変えない変換	K	保存量 Q
平行移動 $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} + s\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{e}$	運動量の成分 $m\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{e}$
平面の回転 $\boldsymbol{x} \mapsto R(s)\boldsymbol{x}$	$(-y, x)$	角運動量 $L_z = m(x\dot y - y\dot x)$
時間の平行移動（$\partial L/\partial t = 0$）	—	エネルギー $E = \sum_i \dot q_i\, \partial L/\partial \dot q_i - L$

三行目は直接微分して $dE/dt = -\partial L/\partial t$ から出ます（$E = \tfrac12 m\dot q^2 + V$）。

図で確かめる：対称性を壊すと保存量が消える

平面の粒子（$m=1$）に、極座標で $V = \tfrac12 r^2 + \tfrac14 r^4(1 + \delta\cos 4\theta)$ を与えます。$\delta = 0$ なら回転対称で L_z が保存します。$\delta > 0$ では V を変えない回転が 90° の倍数だけになり、対称性は飛び飛びに落ちます。定理が使う無限に小さい変換が無いので定理は何も言わず、実際 L_z は保存しません。V は時間によらないので E は保存します。

図 2　δ を動かすと、角運動量 Lz は揺れ始めるが、エネルギー E はほとんど揺れない（10⁻⁵ 程度）δ = 0.00Lz の幅 1.4e−14 max|E−E₀| 2.0e−5　t = 60.0



計算 初期値は位置 $(1,0)$、速度 $(0,0.9)$。軌道は速度 Verlet 法（$h=0.01$）でブラウザが計算し、同じ手順をこの端末で回した値が表 3（1.4e−14 は 1.4×10^{-14}）。右の帯二つは縦の目盛りが同じ。

表 3　角運動量とエネルギーの変化（$0\le t\le 60$）

δ	h	L_z の最小	L_z の幅	$\max\lvert E-E_0\rvert$
0	0.01	0.9000	1.4e−14	2.0e−5
0	0.005	0.9000	1.6e−14	5.0e−6
0.1	0.01	0.8581	0.080	2.8e−5
0.3	0.01	−1.0152	2.03	4.3e−5
0.5	0.01	−1.0938	2.19	5.8e−5

$\delta=0.3$ と 0.5 では L_z の符号まで変わり、粒子は途中で回る向きを逆にします。E のずれは 10^{-5} 程度で、図では平らに見えます。

07

寄り道：刻んだ作用にも Noether がある

飛ばしてよい節です。

図 2 は刻み幅 h で一歩ずつ計算したものです。ここでは位置 q_k と速度 v_k は平面のベクトルで（$q_k\in\mathbb{R}^2$。§03 の q_k は数でした）、力 $F=-\nabla V$ を使って**速度 Verlet 法**で進めます。

$$v_{k+1/2}=v_k+\frac{h}{2m}F(q_k),\qquad q_{k+1}=q_k+h\,v_{k+1/2},\qquad v_{k+1}=v_{k+1/2}+\frac{h}{2m}F(q_{k+1})$$

それなのに表 3 の $\delta=0$ で L_z は丸め誤差の水準で一定、エネルギーは 10^{-5} ずれます。理由があります。

速度を消去すると $m(q_{k+1}-2q_k+q_{k-1})=h^2F(q_k)=-h^2\nabla V(q_k)$。これは §03 の刻んだ作用の停留条件を平面に移したものそのものです 既知 （Hairer–Lubich–Wanner 2003, §1.6。この形は

Störmer–Verlet 法と呼ばれ、速度 Verlet 法はその書き方の一つ)。V が回転対称なら刻んだ作用も一斉の回転で変わらず、§06 の計算が差分で通って、次の J が k によらず一定です。

$$J = \frac{m}{h}\,(q_k \times q_{k+1})_z$$

ここで $(a \times b)_z = a_x b_y - a_y b_x$ です。直接にも確かめられます。停留条件に左から $q_k\times$ を掛けると、中心力では $F(q_k)$ が q_k に平行なので右辺が消え、$q_k \times q_{k+1} = q_{k-1} \times q_k$ が残ります。J は原点と隣り合う二点が作る三角形の面積の $2m/h$ 倍で、一歩ごとに掃く面積が一定ということです。

この J は表 3 の $L_z = m(q_k \times v_k)_z$ そのものです。更新式の最初の二つから $q_{k+1} = q_k + h\,v_k + \frac{h^2}{2m}F(q_k)$。中心力では $F(q_k)$ が q_k に平行なので $q_k \times q_{k+1} = h\,q_k \times v_k$、よって $J = L_z$ です。同じ論文の Theorem 3.5 は、角運動量のような二次の保存量がこの方法で厳密に保たれることを一般に示しています 既知 。また §1.3 は、Feynman の講義を引いて、『プリンキピア』がケプラーの第二法則を示した論法がこの計算法の一つの書き方(等速で半歩、中心に向けて一撃、等速で半歩)と同じ形だと紹介しています。

一方、時間は刻んだので、ずらせるのは h の整数倍だけです。飛び飛びの対称性には定理が働かず、エネルギーはちょうどは保存しません。ただし、エネルギーの式(位置と速度の関数)が滑らかで、数値解がある有界な範囲に留まるなら、任意の正の整数 N について次が示されています 既知 (同 Theorem 5.1。C と C_N は t と h によらない)。

$$|E_k - E_0| \le Ch^2 + C_N h^N t \qquad (0 \le t = kh \le h^{-N})$$

第二項は $t \le h^{2-N}$ なら $C_N h^2$ 以下です。N を大きく取れば、h^{-1} の高いべきという非常に長い時間まで、誤差は h^2 程度に留まります。無限の時間についての定理ではありません。表 3 で h を半分にすると、ずれはほぼ 1/4 です。

「残したい対称性は、刻んだ作用の対称性として厳密に残す」は、格子ゲージ理論の Wilson の方法の出発点でもあります(5-01)。そこで厳密に残るのはゲージ対称性で、壊れるのは時空(虚時間に直した四次元。4-02)の連続的な回転と平行移動です。格子の向きの 90° 回転と、格子間隔ずつの平行移動は残ります。

08

局所的な対称性は拘束を生む

§06 の s は定数でした(**大域的**な対称性)。時刻ごとに違う $s(t)$ で変換しても作用が変わらないのが**局所的**な対称性で、ゲージ理論の中心です(3-01)。変数が $x(t)$、$\lambda(t)$ の二つの玩具で見ます。

$$L = \tfrac{1}{2}m(\dot{x} - \lambda)^2, \qquad x \mapsto x + s(t), \quad \lambda \mapsto \lambda + \dot{s}(t)$$

どんな $s(t)$ でも $\dot{x}-\lambda$ は変わりません。λ は時間微分なしで現れるので、その方程式は**拘束**になります。

$$(\lambda)\ \ m(\dot{x}-\lambda)=0, \qquad (x)\ \ \frac{d}{dt}\big[m(\dot{x}-\lambda)\big]=0$$

二本目は一本目の微分で、独立なのは一本だけ。x は方程式が決めない任意の関数として残ります。Noether（1918）の**第二定理**は、任意関数を含む変換で作用が変わらないとき、Lagrange の方程式のいくつかが残りから従うことを述べています 既知 。正確には、Lagrange の方程式の左辺とその微分の間に、任意関数の個数だけ恒等式が成り立ちます。この玩具では任意関数は $s(t)$ の一つで、恒等式も「(x) の左辺は (λ) の左辺の時間微分」の一つです。定数の s から (N) で作る $Q=m(\dot{x}-\lambda)$ は、保存どころか 0 に拘束されています。

電磁気学では、λ と同じ役をスカラーポテンシャル ϕ が、x と同じ役をベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ がし、λ の方程式と同じ役をするのが Gauss の法則です（2-03・4-01）。正確には、電磁気学では $s(t)$ が各点の関数 $\chi(t,\mathbf{x})$ になり、$\mathbf{A}$ は $\nabla\chi$ だけ、ϕ は $-\partial\chi/\partial t$ だけずれます（2-03 のゲージ変換の式。ϕ のずれの符号は玩具の λ と逆）。方程式が決めない自由度は書き方の重複で、その扱いはヤン–ミルズ理論の量子化の大きな問題の一つです（4-08）。

玩具そのものには物理的な中身はありません（解は $\lambda=\dot{x}$ だけで、x は任意）。

この章が言えている範囲

事柄	言えていること	言えていないこと
Euler–Lagrange 方程式	既知 端を固定した滑らかな道で導いた	端を動かす変分・拘束の一般論
停留と最小	計算 調和振動子で $\omega T<\pi$ なら最小、越えると鞍点（表 1・表 2）	一般の共役点の理論（Jacobi の条件・Morse の指数定理の証明）
Noether の第一定理	既知 有限自由度・L が厳密に不変な場合を証明した	L が全微分だけ変わる場合、場の理論での形（2-02）
数値での観察	計算 一つの例（$t\le 60$）で L_z の揺れと保存、E の誤差 $\propto h^2$ を見た（表 3）	一般の主張ではない。長時間の評価は文献の定理に依る
Noether の第二定理	一つの玩具で方程式の重複と拘束を見た	一般の証明と場の理論での形（3-01）
作用原理の由来	—	物理 2-07

出典と再現

もの	種別	出典・道具
Euler–Lagrange 方程式・一般化座標・(N)	既知 教科書	L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Mechanics*, 3rd ed., Pergamon Press, 1976。書誌のみ
Noether の二つの定理	既知 一次資料	E. Noether, Invariante Variationsprobleme, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. (1918) 235–257。英訳 M. A. Tavel, Invariant variation problems, Transport Theory and Statistical Physics 1(3) (1971) 186–207, doi:10.1080/00411457108231446, arXiv:physics/0503066（§1 の定理 I・II を確認）
二階の変分・共役点	既知 教科書	D. Liberzon, *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, Princeton University Press, 2012, doi:10.1515/9781400842643（出版前の版の §2.6.2 で Jacobi の条件と共役点を確認）。I. M. Gelfand, S. V. Fomin, *Calculus of Variations*, 1963。書誌のみ
Morse の指数定理	既知 教科書	J. Milnor, *Morse Theory*, Annals of Mathematics Studies 51, Princeton University Press, 1963（§15 Theorem 15.1 を確認。述べられているのは測地線の場合）
§07 の Störmer–Verlet 法について	既知 総説	E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner, Acta Numerica 12 (2003) 399–450, doi:10.1017/S0962492902000144（§1.3・§1.6・Theorem 3.5・5.1 を確認）
変分積分法	既知 総説	J. E. Marsden, M. West, Acta Numerica 10 (2001) 357–514。書誌のみ
表 1・表 2・表 3	計算	python3＋numpy（本書の検討の記録）。`action_scan.py`（Simpson 則）・`hessian.py`（`eigvalsh`）・`noether_verlet.py`（速度 Verlet 法。図 2 は同じ手順をブラウザで回したもの）

次に読む章：2-02 場という考え（q_i を場 $\phi(x)$ に置き換え、自由度が無限個になる）。

場という考え — 粒の数を無限にすると、系の座標が関数になる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 場は、粒の鎖で粒の数を無限にした極限であること。
弦は独立な単振動の無限個の集まりで、質量項があると振動数に下限ができ、箱を広げても残ること。
代価：熱平衡の場の値は、空間が二次元以上だと一点で定まらないこと。

前提となる章 — 2-01（Euler–Lagrange 方程式・Noether の定理）。対称行列の固有値（1-01）。フーリエ級数は 04 節で必要な分だけ作ります。

先に言うこと — 古典の場だけを扱います（量子化は 2-06）。06 節の「振動数の下限」は古典の波の性質で、問題文の質量ギャップ（量子論のスペクトルの隙間、4-11）そのものではありません。この章は質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. 粒の鎖 — 自由度 N 個
2. 基準振動 — 独立な単振動に分かれる
3. 連続極限 — 波動方程式が出る（図 1）
4. 波の解 — 進む波と定在波（図 2）
5. エネルギー — 保存とモードへの配分
6. 質量項 — 振動数の下限（図 3）
7. 自由度が無限個ということ — 熱い場は一点で定まらない（図 4）
8. この本での行き先 — 分けられたのは線形だったから（寄り道：閉じ込めの弦も、この方程式で揺れる）

01

粒の鎖 — 自由度が N 個の系

場の話は、有限個の粒から始めるのが近道です。長さ ℓ の区間に N 個の粒を間隔 $a = \ell/(N+1)$ で並べ、隣どうしを張った糸でつなぎ、両端を壁に固定します。粒 j の横のずれを $q_j(t)$（壁は $q_0 = q_{N+1} = 0$）、粒の質量を $m = \rho a$（ρ は線密度）、張力を σ とします。

隣とのずれ Δq が小さいと、間の糸は $\sqrt{a^2 + \Delta q^2} - a \approx \Delta q^2/(2a)$ だけ伸びます。粒は横にだけ動くとし、次の項 $-\Delta q^4/(8a^3)$ は捨てます。こうして以下の方程式は線形になります（線形であることが効く場面は 08 節）。張力 × 伸び が位置エネルギーなので、ラグランジアン（2-01）と Euler–Lagrange 方程式は次の形です。

$$L = \sum_{j=1}^{N} \frac{m}{2}\dot{q}_j^{\,2} - \sum_{j=0}^{N} \frac{\sigma}{2a}(q_{j+1} - q_j)^2$$

$$m\ddot{q}_j = \frac{\sigma}{a}\left(q_{j+1} - 2q_j + q_{j-1}\right)$$

右辺には隣の粒しか出てきません。この**局所性**はゲージ理論まで残ります。**例**。$N = 1$ なら $m\ddot{q} = -(2\sigma/a)q$ の単振動で、$\ell = \rho = \sigma = 1$ のとき $\omega = \sqrt{8} \approx 2.828$ です。

02

基準振動 — もつれた振動をほどく

まとめて $\ddot{\mathbf{q}} = -K\mathbf{q}$ と書くと、K は対角成分が $2\sigma/(ma)$、その両隣が $-\sigma/(ma)$、ほかが 0 の対称行列です。対称行列なので、直交する N 本の固有ベクトルを持ち、固有値は実数です（1-01）。固有値は負にもなりません。$\mathbf{q}\cdot K\mathbf{q}$ は位置エネルギーの $2/m$ 倍で、二乗の和だからです。固有ベクトル $\mathbf{v}$ では $\mathbf{v}\cdot K\mathbf{v} = \lambda|\mathbf{v}|^2$ なので $\lambda \geq 0$。両端が壁に留まるので位置エネルギーが 0 になるのは $\mathbf{q} = 0$ のときだけで、$\lambda = 0$ も起きません。そこで固有値を ω_n^2（$\omega_n > 0$）と書きます。

固有ベクトルを軸に取り直すと、各成分は $\ddot{Q}_n = -\omega_n^2 Q_n$ に従います。**もつれ合った N 個の粒が、互いに無関係な N 個の単振動に分かれる**。これが基準振動で、それぞれの揺れ方を「モード」、n をモードの番号と呼びます。この行列では $n = 1, \dots, N$ について閉じた式が書けます。

$$v_n(j) = \sin\frac{jn\pi}{N+1}$$

$$\omega_n = 2\sqrt{\frac{\sigma}{ma}}\,\sin\frac{n\pi}{2(N+1)}$$

代入して $\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$ を使えば確かめられます。**例**。$\ell=\rho=\sigma=1$ なら $\omega_n=2(N+1)\sin\frac{n\pi}{2(N+1)}$ で、n が N より十分小さいと $\omega_n\approx n\pi$。次の節の弦の振動数です。

03

連続極限 — 場と波動方程式

粒の数を増やし間隔 a を 0 に近づけます。ℓ・ρ・σ は固定し、粒の質量 $m=\rho a$ は 0 へ。**何を固定して極限を取るか**は、格子ゲージ理論で同じ形の問いとして戻ってきます（5-09）。番号 j を位置 $x=ja$ と読み替えて $q_j(t)=u(t,x)$ と書くと、$(q_{j+1}-q_j)/a\to\partial_x u$、$\sum_j a(\cdots)\to\int dx$、$(q_{j+1}-2q_j+q_{j-1})/a^2\to\partial_x^2 u$ となり、

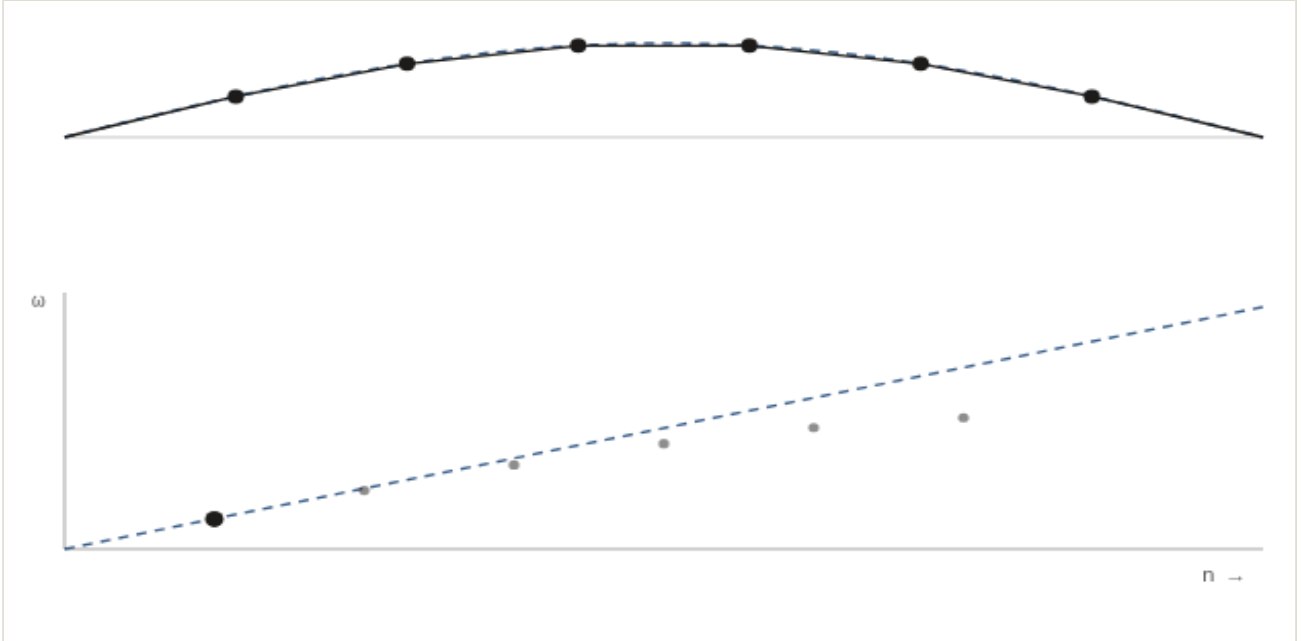
$$L=\int_0^\ell \mathcal{L}\,dx,\quad \mathcal{L}=\frac{\rho}{2}(\partial_t u)^2-\frac{\sigma}{2}(\partial_x u)^2$$

$$\partial_t^2 u=c^2\partial_x^2 u,\quad c=\sqrt{\sigma/\rho}$$

$\mathcal{L}$ を**ラグランジアン密度**、下の式を**波動方程式**と呼びます。同じ式は場の Euler–Lagrange 方程式 $\partial_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t u)}+\partial_x\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x u)}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}=0$ からも出て、この形は電磁場（2-03）でもヤン–ミルズ場（3-03）でも使います。

場とは、添字 j が連続な x に置き換わった系です。系の「座標」は数の組ではなく関数 $u(t,\cdot)$ 一つです。弦の基準振動は $\sin(n\pi x/\ell)\cos\omega_n t$、振動数は $\omega_n=n\pi c/\ell$（$n=1,2,\ldots$）で、上限がありません。

図 1　N と n を変えると、鎖（実線と点）と弦（破線）の揺れと振動数のずれが変わる。下段は全モードの振動数（破線：弦 ω = nπ、点：鎖）。表 1 の数値を押すと、その N と n になる



```
N = 6, n = 1  ω(鎖) = 3.115  ω(弦) = 3.142  比 = 0.9916
```

計算 図の数値は本文の閉じた式からその場で計算。

計算 **表 1**　鎖と弦の振動数の比 $\omega_n/(n\pi)$（$\ell=\rho=\sigma=1$）。行列 K の固有値を数値で求めた値で、閉じた式との相対差は最大 3×10^{-12} でした。

N	n = 1	n = N/2	n = N
4	0.9836	0.9355	0.7568
16	0.9986	0.9114	0.6735
64	0.99990	0.9033	0.6464
256	0.999994	0.9011	0.6391

n を固定すれば比は 1 に近づきますが、$n=N/2$ の列は $\sin(\pi/4)/(\pi/4)\approx0.900$ へ、$n=N$ の列は $2/\pi\approx0.637$ へ近づくだけです。連続極限は**波長が間隔より十分長い波**についての近似です。

04

波の解 — 進む波と定在波

解は二通りに読めます。**進む波として**：二回微分できる任意の f,g について $u=f(x-ct)+g(x+ct)$ は解です。f は右へ、g は左へ、形を保って速さ c で進みます。初めの形 u_0・初速 0 なら $u=\tfrac12[u_0(x-ct)+u_0(x+ct)]$ で、山は二つに割れます（両端固定なら u_0 を奇関数・周期 2ℓ に延ばす）。この形の解は d'Alembert の 1747 年の論文にさかのぼるとされます。

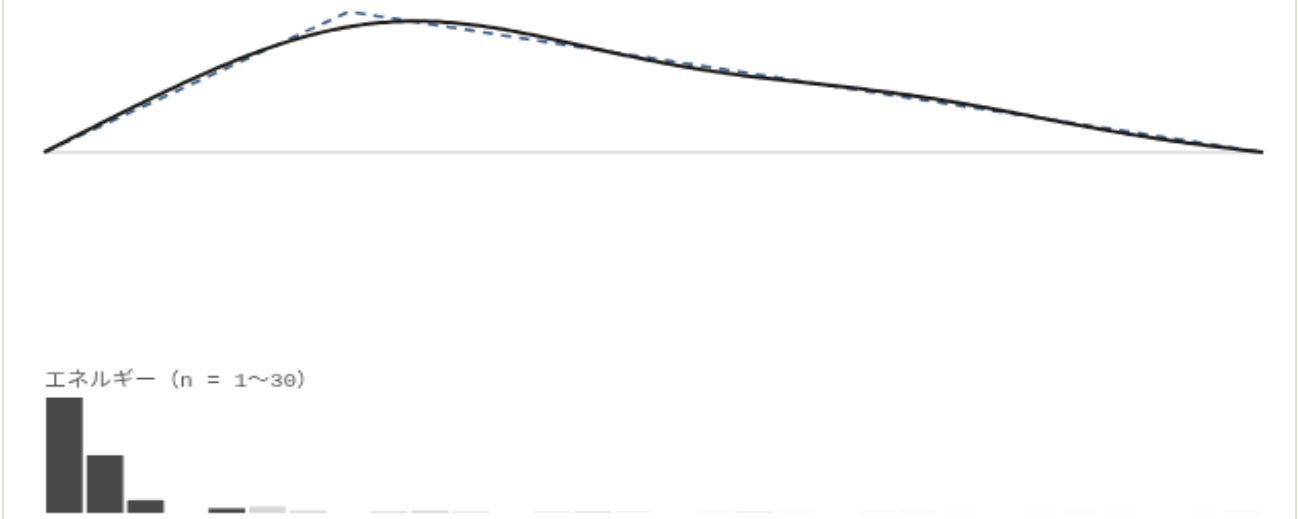
定在波の重ね合わせとして：方程式が線形なので、基準振動の和も解です。

$$u=\sum_{n\ge1} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\cos\omega_n t$$

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} u_0(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

係数の式は $\sin(n\pi x/\ell)$ どうしの直交性（積の積分が $n\neq n'$ で 0、$n=n'$ で $\ell/2$）から出ます。フーリエ正弦級数です（1-11）。**例**。位置 p を高さ h まで引いて放した三角形では $b_n=\frac{2h\ell^2}{n^2\pi^2p(\ell-p)}\sin\frac{n\pi p}{\ell}$。係数は $1/n^2$ でしか減らず、角を表すには高いモードまで要ります。

図 2　K と p を変えると、定在波の和（実線）と d'Alembert の解（破線）の近さ、エネルギーの配分（棒）が変わる。動かすと山が二つに割れ、壁で裏返る。表 2 の数値を押すと、その p と K になる



K = 5, p/ℓ = 0.25　最初の 5 個のエネルギー：89.2%

計算 図の数値は b_n の部分和と d'Alembert の式からその場で計算（$\ell = c = h = 1$）。

05

エネルギー — 保存と、モードへの配分

運動と位置のエネルギーの和 E は時間によりません。波動方程式を使うと被積分関数の時間微分が $\sigma\,\partial_x(\partial_t u\,\partial_x u)$ になり、両端が動かないので境界の項が消えるからです。

$$E = \int_0^{\ell} \Big[\frac{\rho}{2}(\partial_t u)^2 + \frac{\sigma}{2}(\partial_x u)^2 \Big]\, dx$$

$$\frac{dE}{dt} = \sigma \big[\partial_t u\ \partial_x u \big]_0^{\ell} = 0$$

Noether の定理（2-01）の場の版です。基準振動に分けると直交性で交差項が消え、$E = \sum_n E_n$、$E_n = \frac{\rho\ell}{4}(\dot b_n^2 + \omega_n^2 b_n^2)$。各 E_n は一つずつ保存します。**弦は、互いに無関係な単振動の無限個の集まり**です。

例。はじいた弦（$s = p/\ell$）では、モード n の取り分は $f_n = \frac{2\sin^2(n\pi s)}{n^2\pi^2 s(1-s)}$ です。

計算 **表 2**　最初の K 個のモードが持つエネルギーの割合。全項の和が 1 になること（200 万項で 5 桁以上）も確かめました。

s = p/ℓ	K = 1	K = 3	K = 10	K = 100
0.5	0.8106	0.9006	0.9596	0.9959
0.25	**0.5404**	**0.8706**	**0.9508**	**0.9946**
0.1	0.2150	0.5732	0.8920	0.9887

s = p/ℓ	K = 1	K = 3	K = 10	K = 100
0.02	0.0408	0.1217	0.3882	0.9489

真ん中をはじくと $f_1 = 8/\pi^2 \approx 0.81$。端の近く（$s = 0.02$）では最初の 10 個で 4 割に届かず、エネルギーは短い波長の側へ逃げます。

06

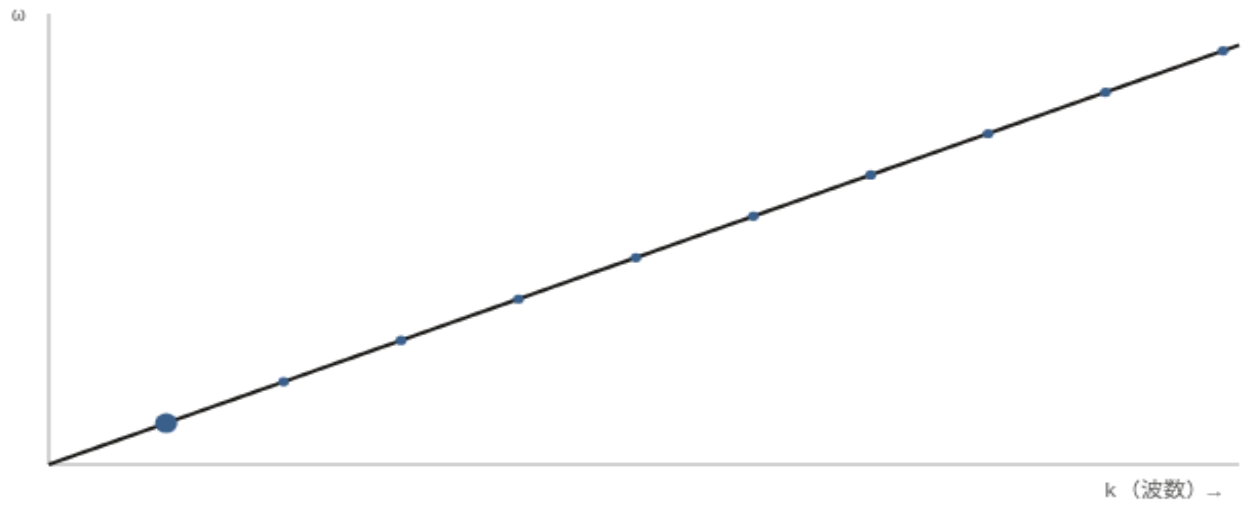
質量項 — 振動数に下限ができる

各粒を元の位置へ引き戻すばね（定数 κ）でも床につなぐと、位置エネルギーに $\sum_j \frac{\kappa}{2} q_j^2$ が足されます。$\Omega^2 = \kappa/m$ を固定した連続極限が左の Klein–Gordon 方程式、平面波 $\cos(kx - \omega t)$ を代入した**分散関係**が右です。ここでの k は**波数**（単位長さあたりの位相の進み。波長 λ なら $k = 2\pi/\lambda$）で、モードの番号 n とは別の量です。

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u - \Omega^2 u, \qquad \omega^2 = c^2 k^2 + \Omega^2$$

$\Omega = 0$ なら $\omega = c|k|$ で、波長を長くすれば振動数は 0 に近づきます。$\Omega > 0$ なら常に $\omega \geq \Omega$：**振動数に下限ができます**。長さ ℓ の箱では波数が $k_n = n\pi/\ell$ に限られ、最低振動数は $\omega_1 = \sqrt{(c\pi/\ell)^2 + \Omega^2}$。有限の箱では $\Omega = 0$ でも正で、**問われるのは箱を広げても下限が残るかどうか**です。質量ギャップの定義が無限体積で書かれるのはこのためです（4-11）。

図 3　Ω と ℓ を変えると、分散関係（曲線）と箱が許す波（点）が変わる。左端の大きな点が最低振動数



ℓ = 4.0, Ω = 0.00　最低振動数 ω₁ = 0.7891

計算 図の数値は $\omega = \sqrt{k^2 + \Omega^2}$、$k_n = n\pi/\ell$ からその場で計算（$c = 1$）。

計算 最低振動数（$c = 1$）は、$\ell = 1, 10, 100, 1000$ に対して $\Omega = 0$ で 3.142, 0.314, 0.0314, 0.00314、$\Omega = 1$ で 3.297, 1.048, 1.0005, 1.000005（閉じた式の値）。$\ell \leq 100$ では、間隔 0.05 の鎖の行列の最小固有値と相対差 0.11% 以内（$\ell = 1$ で最大）で一致しました。

古典の下限と、質量ギャップ

既知 量子化すると（2-06）、自由な場の真空の上のいちばん低い励起は無限体積で $\hbar\Omega$ です。$E = mc^2$ と比べて $\Omega = mc^2/\hbar$ と読むので、この項を**質量項**と呼びます。ヤン–ミルズの作用には質量項がありません（ゲージ不変性が許さない、3-02）。物理 それでも量子論では隙間が生じると考えられ、格子の数値計算も支持しています（5-08）。質量項を足さずに、理論の中から隙間が出ることを数学として示す——それが問題の中身です（0-03）。

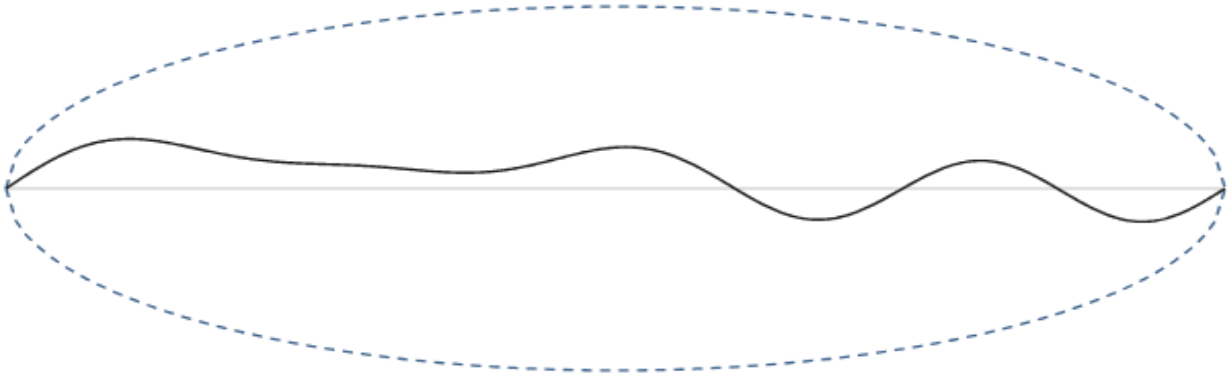
07

自由度が無限個ということ

弦の自由度は可算無限個です。困るのは**すべてのモードが同じ重みで揺すられる**とき、典型は熱平衡です。最小限の定義（詳しくは 2-08）：温度 T の熱平衡では、配置の確率密度が $\exp(-V/k_BT)$ に比例します（k_B はボルツマン定数）。$V = \sum_n \frac{\kappa_n}{2} Q_n^2$ なら各 Q_n は独立なガウス分布（1-08）に従い、分散は k_BT/κ_n、位置エネルギーの平均は一つあたり $k_BT/2$ です（**等分配**）。弦では $u = \sum_n q_n \sin(n\pi x/\ell)$ に対し $\kappa_n = \sigma n^2\pi^2/(2\ell)$ で、三つのことが起きます。

1. **全エネルギーは無限大**。無限個のモードに $k_BT/2$ ずつ配られるからです。
2. **一点での変位は有限**。$\operatorname{Var} u(x) = \sum_n \frac{2\ell k_BT}{\sigma n^2\pi^2} \sin^2 \frac{n\pi x}{\ell} = \frac{k_BT}{\sigma} \cdot \frac{x(\ell-x)}{\ell}$。この確率的な曲線は**ブラウン橋**と呼ばれます（既知 Sheffield 2007）。
3. **傾きは定まらない**。$\operatorname{Var} \partial_x u = \frac{2k_BT}{\sigma\ell} \sum_n \cos^2 \frac{n\pi x}{\ell}$ は発散します。曲線は途切れないのに、どこも角だらけです。正確には、どの点でも傾きが確率変数として定義できない、という意味です。

図 4　K を倍々に増やすと、熱平衡の弦の見本が細かくなる。大筋は変わらず、破線の帯 $\pm 2\sqrt{x(1-x)}$（標準偏差の 2 倍）におおむね収まる（各点で外に出る確率は約 5%）



```
K = 8  中心の分散 = 0.2374 k_BTℓ/σ（極限 0.25）  中心の傾きの分散 = 8 k_BT/(σℓ)（K とともに増え続ける）
```

計算 図は $u = \sum_{n \le K} g_n \sqrt{2} \sin(n\pi x)/(n\pi)$（$g_n$ は種を固定した正規乱数、$\ell = k_B T/\sigma = 1$）をその場で計算。

計算 空間の次元 d を上げたとき（膜、箱の中の場）の、箱 $[0,1]^d$ の中心での分散（単位 $k_B T/\sigma$）を、各方向の番号を K まで取ったモードの和で数えます（$K = 10$ から 160 まで倍々）。モード $n = (n_1, \ldots, n_d)$ の寄与は $1/|n|^2$ に比例します。格子で刻んだ同じ量の表と図は 1-09 表 3・図 3 にあり、この本ではそれを正本にします。四で切り替わる量と並べた図は 1-12 §10 の次元のつまみです。

$d = 1$ は $1/4$（ブラウン橋の中心の値）に収束します。$d = 2$ は K を倍にするごとに $\ln 2/(2\pi) \approx 0.110$ ずつ増え（$\log K$ で発散）、$d = 3$ は倍、$d = 4$ は四倍になります。半径 r の殻のモード数が r^{d-1} に比例し、一つあたり $1/r^2$ なので、和は $\sum r^{d-3}$ の形です。発散は**波長の短い側**から来ます。

既知 d 次元の箱の中の場を $\varphi(x)$ と書きます（弦の u の多次元版）。$d \ge 2$ では熱い場の一点の値 $\varphi(x)$ は意味を持たず、滑らかな重みの関数 f をかけて積分した値 $\int \varphi f \, dx$ だけが確率変数として意味を持ちます。この意味で、場は関数ではなく**超関数**に値を取ります（Sheffield 2007、1-09・1-11）。量子の場を虚時間で書くと時間も空間の一方向と同じ扱いになり、四次元時空の自由な場は $d = 4$ の行と同じ形の和を持ちます（4-02）。

場が荒いほど、場どうしの積（非線形項）に意味を与えにくくなります。正確には、超関数どうしの積は一般には定義できません（1-11）。発散（4-04）はその素朴な現れです。どこまで荒くても非線形項を扱えるかを正確に述べるのが、確率量子化の「劣臨界・臨界」です（7-09）。

08

この本での行き先

この先の使い道：電磁場のポテンシャルと冗長さ（2-03）、$\partial_t^2/c^2 - \partial_x^2$ のローレンツ不変性（2-04・時空の記事。波が尾を引くかは空間の次元で決まる：同記事）、モードを量子の振動子にした Fock 空間（2-06）、場の上の確率（2-07）。

3-02 で前提が一つ崩れます。**基準振動に分けられたのは、方程式が線形だったから**です。ヤン–ミルズ場は各点でリー環に値を取り、自分自身と相互作用するので、モードは独立でなくなります。古典の波には下限もありません。物理 それでも量子では隙間が生じると考えられています。

寄り道：閉じ込めの弦も、この方程式で揺れる

飛ばしてよい小節です。

物理 重い電荷の対を距離 r だけ離すと、間のヤン–ミルズ場は張力 σ の弦のような管になると考えられています（17-03）。管は相対論的な弦とみなされ、そのとき線密度は $\rho = \sigma/c^2$ で、横波の速さ $\sqrt{\sigma/\rho}$ は光速 c に等しくなります。管の横揺れは波動方程式に従うとされ、モード $\omega_n = n\pi c/r$ の零点エネルギー（量子の振動子のいちばん低いエネルギー $\hbar\omega_n/2$、2-06）を揺れる向き $d-2$ 個（ここの d は時空の次元で、17-03 と同じ字。07 節の d は場が広がる空間の次元です）について足し、発散する $1+2+3+\cdots$ に形式的に $-1/12$ を当てる（4-12）と、$V(r) = \sigma r - \frac{(d-2)\pi\hbar c}{24r} + \cdots$ が出ます。この Lüscher 項は有効弦理論の予想として格子の数値と比べられてきました（Lüscher 1981、解説 Hari Dass 2023）。筋書きであり導出ではありません。

この章が言えている範囲

内容	状態
01〜06 節の古典の事実（鎖の振動数、連続極限、波の二つの解、エネルギーの保存と分配、質量項による下限）	言えている 既知 （表 1・2 と 06 節で数値も確認 計算 ）
熱平衡の場の一点の分散が d = 1 で有限、d ≥ 2 で発散すること	言えている 既知 （発散の速さは K ≤ 160 の数値と殻の数え上げ 計算 ）
連続極限の厳密な収束	言えていない（この章の極限は形式的）
古典の振動数の下限と量子の隙間の対応	自由な場でだけ言える 既知 （2-06）
閉じ込めの弦と Lüscher 項／ヤン–ミルズの質量ギャップ	前者は物理の水準の筋書きのみ 物理 。後者についてこの章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1・表 2・06 節と 07 節の数値・図 1〜4	計算	表は python3・NumPy（固有値、級数の和）。図はブラウザの JavaScript（本文の式と部分和）
弦の方程式と一般解	既知	J. le R. d'Alembert, “Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration”, Hist. Acad. R. Sci. Belles-Lettres Berlin 3（1747 年分）pp. 214–219。書誌のみ（刊行年は未確認）
ブラウン橋・場が超関数になること	既知	S. Sheffield, “Gaussian free fields for mathematicians”, Probab. Theory Relat. Fields 139 (2007) 521–541, arXiv:math/0312099（§ 2.5 を確認）

もの	種別	出典・道具
量子ヤン–ミルズの隙間を支持する格子の数値	物理	5-08 の出典表に譲る。一例：C. J. Morningstar, M. Peardon, “The glueball spectrum from an anisotropic lattice study”, Phys. Rev. D 60 (1999) 034509, arXiv:hep-lat/9901004（書誌のみ）
Lüscher 項	物理	M. Lüscher, “Symmetry breaking aspects of the roughening transition in gauge theories”, Nucl. Phys. B180 (1981) 317–329（書誌のみ）。式の形は N. D. Hari Dass, “Effective String Theories (EST) of Yang-Mills Flux Tubes”, arXiv:2312.10629（書籍 Strings to Strings, Springer 2023 の第 22 章）の式 (1) で確認

次に読む章：2-03 電磁気学はゲージ理論である。量子化へ先に進むなら 2-06。

電磁気学はゲージ理論である — ポテンシャルの書き方の余りは、各点で選ぶ U(1) の元になる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 同じ電場・磁場を与えるポテンシャルが無数にあること（ゲージ変換）。
Gauss の法則が拘束であり、ゲージ不変性と電荷の保存が組であること。
量子力学ではゲージ変換が位相（U(1) の元）を点ごとに回し、閉じた道の位相因子が観測にかかること。

前提となる章 — 2-02、2-01 の 08 節（局所的な対称性と拘束）、1-01。ベクトル解析と電磁気学の入門は既知とし、量子力学は 05 節で最小限を置きます。

先に言うこと — 相対論の形は 2-04、非可換は 3-02。相互作用の無い電磁場に質量ギャップはありません（04 節）。この章はヤン–ミルズの質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. 電場と磁場 — Maxwell 方程式
2. ポテンシャル — 源の無い Maxwell の式を自動的に満たす
3. ゲージ変換 — 書き方の余り（図 1）
4. 作用から — 拘束と電荷の保存
5. 量子の位相と U(1) — 位相を点ごとに回す（位相因子）
6. Aharonov–Bohm 効果 — B = 0 でも縞が動く（図 2・表 1）
7. 輪の上の粒子 — 準位は磁束の周期関数
8. 格子の輪 — 辺に U(1) の元を置く（図 3・表 2）
9. U(1) から SU(N) へ — ゲージ原理へ

01

電場と磁場 — 四本の方程式

電磁気学の主役は、各点に三次元ベクトルを持つ二つの場、**電場** $\mathbf{E}(t,\mathbf{x})$ と**磁場** $\mathbf{B}(t,\mathbf{x})$ です。電荷 q・速度 $\mathbf{v}$ の粒子は **Lorentz 力** $\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$ を受け、場は **Maxwell 方程式**に従います（SI 単位。ρ は電荷密度、$\mathbf{J}$ は電流密度、$c^2=1/\varepsilon_0\mu_0$）。

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0},\qquad \nabla\times\mathbf{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\mu_0\mathbf{J} \tag{M1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0,\qquad \nabla\times\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=\mathbf{0} \tag{M2}$$

源のある Maxwell の式の二本（**Gauss の法則**と **Ampère–Maxwell の法則**）は電荷と電流が場を作る式、源の無い Maxwell の式の二本（磁荷が無いことと **Faraday の電磁誘導の法則**）は場の形への制約です。**例**。源の無い所では、四本の Maxwell の式から $\partial_t^2\mathbf{E}=c^2\nabla^2\mathbf{E}$（2-02 の波動方程式の三次元版）が出て、この波が光です。分散 $\omega=c|\mathbf{k}|$ に下限はありません。

源の無い Maxwell の式は源を含まないので、方程式を解く前に $\mathbf{E},\mathbf{B}$ の形を先に絞れます。それが次の節です。

02

ポテンシャル — 源のない二本を自動的に満たす

恒等式 $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=0$ と $\nabla\times\nabla f=\mathbf{0}$ で、源の無い Maxwell の式を自動的に満たせます。$\mathbf{B}$ を回転で書けば一本目が成り立ち、二本目は $\nabla\times(\mathbf{E}+\partial_t\mathbf{A})=\mathbf{0}$ となるので、$\mathbf{E}+\partial_t\mathbf{A}$ を勾配で書きます。

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A},\qquad \mathbf{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \tag{P}$$

$\mathbf{A}$ を**ベクトルポテンシャル**、ϕ を**スカラーポテンシャル**と呼びます。$\mathbb{R}^3$ 全体では $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ なら必ず $\mathbf{B}$ は回転で書けます 既知 （1-06）。

例 1。一様な $\mathbf{B}=B_0\mathbf{e}_z$ には $\mathbf{A}_1=\frac{B_0}{2}(-y,x,0)$ も $\mathbf{A}_2=B_0(0,x,0)$ も使えます。**例 2**。半径 a の長いソレノイドで、内側に一様な $B_0\mathbf{e}_z$、外側は磁場なし、磁束 $\Phi=\pi a^2B_0$。軸からの距離 r、軸を回る向きの単位ベクトル $\mathbf{e}_\theta$ で

$$\mathbf{A}=\frac{B_0 r}{2}\,\mathbf{e}_\theta\ \ (r<a),\qquad \mathbf{A}=\frac{\Phi}{2\pi r}\,\mathbf{e}_\theta\ \ (r>a)$$

外側では $\nabla\times\mathbf{A}=\frac{1}{r}\partial_r(rA_\theta)\mathbf{e}_z=\mathbf{0}$ なのに $\mathbf{A}\neq\mathbf{0}$。半径 r の円を一周する線積分は Φ で、Stokes の定理どおり中を貫く磁束です。回転が 0 の所だけを通る道でも、一周の値は 0 にな

りません。道が穴（ソレノイド）を囲んでいるからで、この値を量子力学が読み取るのが 06 節です。

03

ゲージ変換 — 同じ場を与える書き方の余り

ポテンシャルの表示は $\mathbf{E},\mathbf{B}$ から $(\phi,\mathbf{A})$ を一つに決めません。滑らかな関数 $\chi(t,\mathbf{x})$ で

$$\mathbf{A}\mapsto\mathbf{A}+\nabla\chi,\qquad \phi\mapsto\phi-\frac{\partial\chi}{\partial t} \tag{G}$$

と取り替えても $\mathbf{E},\mathbf{B}$ は変わりません（$\nabla\times\nabla\chi=\mathbf{0}$、$\nabla\partial_t\chi=\partial_t\nabla\chi$）。これを**ゲージ変換**、$\chi$ を**ゲージ関数**と呼びます。**例**。例 1 の二つは $\chi=B_0xy/2$ で移り合います（$\mathbf{A}_2-\mathbf{A}_1=\nabla\chi$）。

条件（$\nabla\cdot\mathbf{A}=0$ など）で余りを減らすことを**ゲージ固定**と呼びます（量子版は 4-08）。

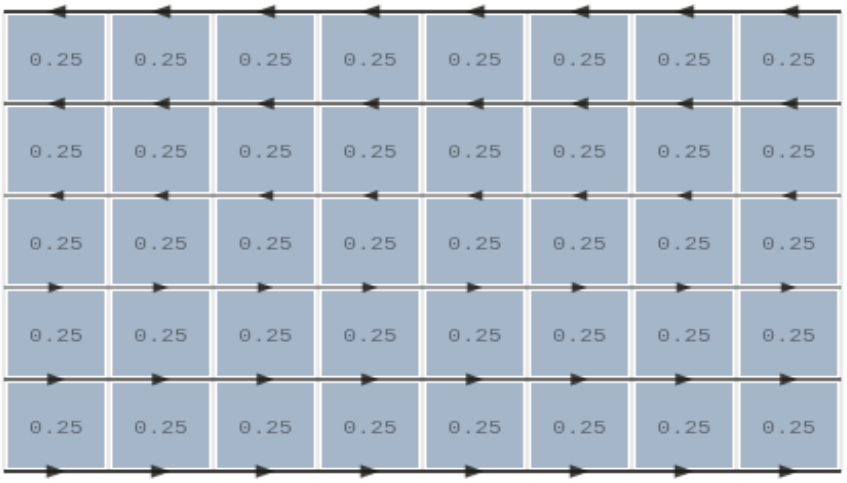
格子の上で見る

平面を正方格子に刻み、$\mathbf{A}$ を辺ごとの数 $A_{ij}=\int_i^j\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$（$A_{ji}=-A_{ij}$）で持ちます。正方形の面 p の角を反時計回りに 1〜4 とすると、Stokes の定理から面を貫く磁束 B_p は四辺の和で、ゲージ関数は格子点の値 χ_i になります。

$$B_p=A_{12}+A_{23}+A_{34}+A_{41},\qquad A_{ij}\mapsto A_{ij}+\chi_j-\chi_i$$

各角の χ は $+$ と $-$ で一度ずつ現れて消え、B_p は変わりません。**例**。辺の値 $(0.3,\,0.5,\,-0.1,\,-0.2)$ の和は 0.5。$\chi=(1,0,2,-1)$ で変換すると $(-0.7,\,2.5,\,-3.1,\,1.8)$ ですが、和は 0.5 のままです。辺に群の元を置けば Wilson の格子ゲージ理論（5-01）の出発点です。

図 1　ゲージ関数の大きさ s を変える・動かすと、辺の値（線の太さと矢印）は変わるが、面の値（塗りと数字）は変わらない




```
s = 0.00  辺の変化 最大 0.000  面の変化 最大 0.0e+0
```

計算 図の数値は四辺の和と $\chi_j - \chi_i$ の足し込みからその場で計算。

「一つの面だけに磁束」は 06 節のソレノイドの格子版です。0 でない辺の列はゲージで形を変えても消えません（06 節の角 θ が跳ぶ切れ目に当たる）。「磁場なし」で辺だけが揺れるのが**純粋なゲージ**です。

04

作用から — 拘束と電荷の保存

Maxwell 方程式も作用の停留条件です（2-01・2-02）。未知数は $(\phi, \mathbf{A})$、$\mathbf{E}, \mathbf{B}$ はポテンシャルの表示で書いたものとします。

$$\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2}|\mathbf{E}|^2 - \frac{1}{2\mu_0}|\mathbf{B}|^2 - \rho\,\phi + \mathbf{J}\cdot\mathbf{A}, \qquad S = \int \mathcal{L}\, dt\, d^3x \tag{L}$$

源の無い Maxwell の式はポテンシャルの表示から自動的に成り立ち、源のある Maxwell の式が Euler–Lagrange 方程式として出ます 既知 。$\mathcal{L}$ は $\nabla\phi$ を含みますが $\partial_t\phi$ を含まないので、ϕ を動かして出る $\varepsilon_0 \nabla\cdot\mathbf{E} = \rho$ は時間の二階微分を含まない同時刻の条件、**拘束**です。2-01 の玩具の λ の方程式に当たります。こうして $(\phi, \mathbf{A})$ の四成分のうち、ゲージ変換の式で一つ、この拘束で一つが消え、残る $4 - 1 - 1 = 2$ が光の偏りの数です 既知 （量子版は 4-01）。

ゲージ変換の式で最初の二項は変わらず、後ろの二項は $\rho\,\partial_t\chi + \mathbf{J}\cdot\nabla\chi$ だけ増えます。部分積分すると（χ は遠くで 0）

$$\delta S = -\int \chi \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J} \right) dt\, d^3x$$

どの χ でも作用が変わらないことは、**電荷の保存** $\partial_t\rho + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0$ と同じです。方程式の側から見ると、源のある Maxwell の式の二本は独立ではありません。Gauss の法則の時間微分と

Ampère–Maxwell の法則の発散を組み合わせると、場の項は $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{B})=0$ で恒等的に消え、$\partial_t\rho+\nabla\cdot\mathbf{J}=0$ だけが残ります。電荷が保存するなら方程式の一部は残りから従う。これが 2-01 の第二定理の形です。

例：質量項は置けない。 2-02 にならい $-\frac{\varepsilon_0\Omega^2}{2}|\mathbf{A}|^2$ を足すと、横波の分散は $\omega^2=c^2|\mathbf{k}|^2+\Omega^2$ になり下限 Ω ができます。しかしこの項はゲージ変換の式で変わってしまいます。ゲージ不変性の下では、作用に質量項を直接書き足すことはできません。相互作用の無い電磁場では下限は生じず、量子論でも光子の質量は 0、自由な電磁場に質量ギャップはありません 既知 。

ゲージ不変性を保ったまま、相互作用から質量が生じうるかは別の問題です。超伝導体の中の Meissner 効果や Higgs 機構（3-07）はその例です 既知 。ヤン–ミルズでは、別の場を足さずにそれが起きるかが問われます（09 節・4-11）。

05

量子の位相と U(1)

古典の粒子は $\mathbf{E},\mathbf{B}$ だけを感じますが、量子力学ではポテンシャルが式に入ります。使うのは三つ（2-05）。(i) 状態は複素数値の**波動関数** $\psi(t,\mathbf{x})$ で表され、$|\psi|^2$ が位置の確率密度。(ii) 定数 α について ψ と $e^{i\alpha}\psi$ は同じ状態。(iii) 質量 m・電荷 q の粒子は次の Schrödinger 方程式に従う（$\hbar=h/2\pi$）。

$$i\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{1}{2m}\big(-i\hbar\nabla-q\mathbf{A}\big)^2\psi+q\phi\,\psi \tag{S}$$

ゲージ変換の式で (S) は崩れそうですが、ψ も

$$\psi\mapsto e^{iq\chi/\hbar}\psi \tag{G'}$$

と変えれば (S) はそのまま成り立ちます。鍵は**共変微分** $D=\nabla-\frac{iq}{\hbar}\mathbf{A}$ で、積の微分から出る $\frac{iq}{\hbar}(\nabla\chi)\psi$ が $\mathbf{A}$ の変化分と打ち消し合います。

$$\Big(\nabla-\frac{iq}{\hbar}(\mathbf{A}+\nabla\chi)\Big)\big(e^{iq\chi/\hbar}\psi\big)=e^{iq\chi/\hbar}\Big(\nabla-\frac{iq}{\hbar}\mathbf{A}\Big)\psi$$

時間の側も同様です。Fock（1926）がこの不変性に気づき、London（1927）がそれを Weyl が以前に立てた尺度（Eich）の理論と結びつけ、Weyl（1928〜29）がゲージ不変性として原理に掲げたとされます（Jackson–Okun 2001）。

$e^{iq\chi/\hbar}$ は絶対値 1 の複素数で、その全体は掛け算で群をなします。これが **U(1)**（単位円。1-02）です。**ゲージ変換とは、各点で U(1) の元を一つずつ選ぶこと**です。全点で同じ元なら (ii) そのもの、点ごとに違えば $\mathbf{A}$ が辻褄を合わせます（逆向きの議論は 09 節）。

道に沿った位相因子

基準が点ごとなら、離れた点の位相はどう比べるのか。$\mathbf{x}$ から $\mathbf{y}$ への道 C について

$$W(C) = \exp\!\Big(\frac{iq}{\hbar}\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}\Big), \qquad W(C) \mapsto e^{iq\chi(\mathbf{y})/\hbar}\, W(C)\, e^{-iq\chi(\mathbf{x})/\hbar}$$

両端の取り替えを打ち消すので、$W(C)\in U(1)$ は位相を $\mathbf{x}$ から $\mathbf{y}$ へ運ぶ道具（**平行移動**、1-07）です。閉じた道ならゲージ不変で、囲む磁束 Φ_C により $W(C)=e^{iq\Phi_C/\hbar}$。格子では辺ごとの $e^{iqA_{ij}/\hbar}$ の積で、03 節の足し算が群の掛け算になります。

06

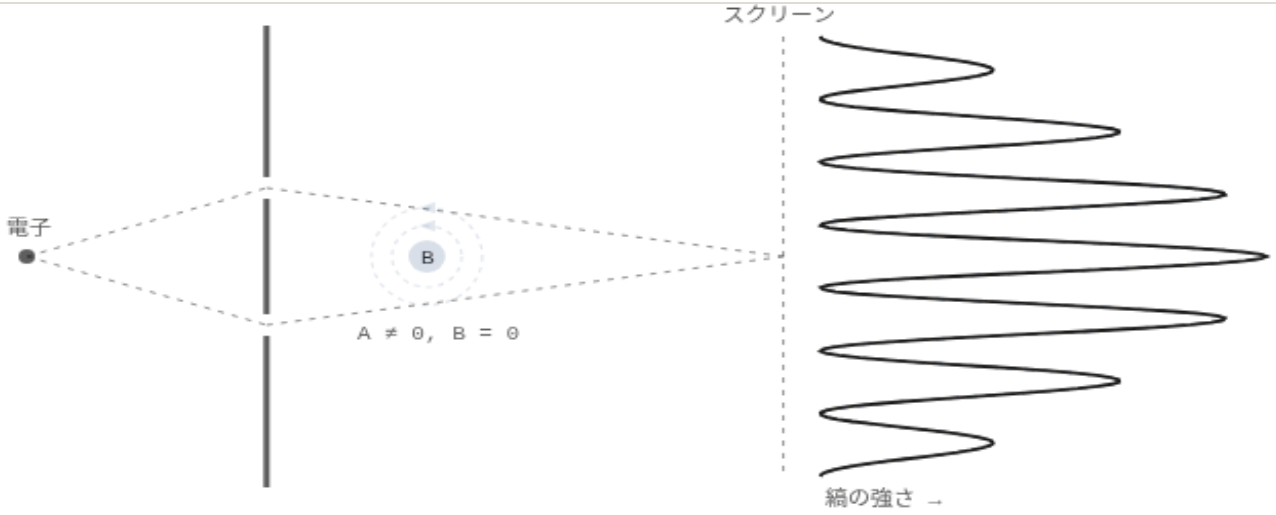
Aharonov–Bohm 効果 — 磁場の無い所で縞が動く

例 2 のソレノイドの両脇を電子が通る二重スリットを考えます。電子の通る所は $\mathbf{B}=\mathbf{0}$ で、古典的には何も変わりません。量子力学では、スリット 1 の道 C_1 と 2 の道 C_2 の寄与が足され、位相差が縞を作ります。C_1 と逆向きの C_2 をつなぐとソレノイドを一周するので、$\mathbf{A}$ による位相差は

$$\Delta = \frac{q}{\hbar}\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \frac{q\Phi}{\hbar} = \pm 2\pi\,\frac{\Phi}{\Phi_0}, \qquad \Phi_0 = \frac{h}{|q|}$$

で、縞は縞間隔の Φ/Φ_0 だけずれます。Φ が Φ_0 の整数倍なら元と区別できません。予言は Aharonov–Bohm（1959）。先に Ehrenberg–Siday（1949）が同じ結論に達しており、1939 年の手がかりも指摘されています 既知 （Hiley 2013）。

図 2　磁束 Φ/Φ₀ を変える・動かすと、縞（右の実線）が Φ = 0 の縞（破線）からずれ、Φ/Φ₀ が 1 増えるごとに重なる。電子の道の上は B = 0



Φ/Φ₀ = 0.00　位相差 = 0.00π　縞のずれ = 縞間隔の 0.00

計算 縞は $I(y) \propto \operatorname{sinc}^2(0.6y)\cos^2(3.5\pi y + \pi\Phi/\Phi_0)$（$\operatorname{sinc} u = \sin(\pi u)/(\pi u)$）をその場で計算した模式図（縞の数と幅は見やすさで選択）。

なぜゲージ変換で消せないか。外側では $\mathbf{A} = \nabla(\Phi\theta/2\pi)$（$\theta$ は軸を回る角）なので $\chi = -\Phi\theta/2\pi$ で消せそうですが、θ は一周で 2π 増え、関数として一つに決まりません。一価であればよいのは位相 $e^{iq\chi/\hbar} = e^{-iq\Phi\theta/2\pi\hbar}$ のほうで、それは Φ/Φ_0 が整数のときに限られ、そのときに限り $\mathbf{A}$ は消えて効果も消える。周期 Φ_0 はここから来ます。

計算 **表 1**　半径 1・$\Phi = 1$ のソレノイドの周りの $\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$ の数値積分。右の二列は例 2 の $\mathbf{A}$ と、$\chi = \sin x\cos 2y + x^2 y/3$ で変換した $\mathbf{A}'$。囲む磁束 × 巻き数との差は 4×10^{-10} 以内。

閉じた道	道の上の $\lvert\mathbf{B}\rvert$	$\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$	$\oint \mathbf{A}'\cdot d\mathbf{l}$
円 半径 2・中心 (0, 0)	0	1.000000	1.000000
正方形 一辺 5・中心 (0.7, −0.4)	0	1.000000	1.000000
円 半径 1・中心 (3, 0)（囲まない）	0	0.000000	0.000000
円 半径 2 を 2 周	0	2.000000	2.000000
円 半径 0.5（ソレノイドの中）	0.3183	0.250000	0.250000

計算 電子では $\Phi_0 = h/e = 4.1357\times10^{-15}$ Wb、直径 1 μm の円にこれを通す磁場は 5.27 mT。既知 実験による最初の検証は Chambers（1960）とされ、Tonomura ら（1986）は磁場を超伝導体に閉じ込めて測りました。

07

輪の上の粒子 — 準位は磁束の周期関数

縞のずれは準位にも現れます。半径 R の輪に閉じ込めた電荷 $q>0$ の粒子を考え、輪の中心を磁束 Φ が貫くとします。輪の上は $\mathbf{B}=\mathbf{0}$、$A_\theta = \Phi/2\pi R$ で、∇ は輪に沿う向きの $\frac{1}{R}\partial_\theta$ だけになります。(S) に**定常状態** $\psi = e^{-iEt/\hbar}e^{in\theta}$（$|\psi|^2$ が時間によらない状態。一周で戻るので n は整数）を入れると、左辺は $E\psi$、右辺は $\frac{1}{2mR^2}(\hbar n - q\Phi/2\pi)^2\psi$ となり、エネルギーは

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mR^2}\left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2, \qquad n\in\mathbb{Z}$$

$\Phi \mapsto \Phi+\Phi_0$ では番号が $n\mapsto n+1$ と付け替わるだけなので、**準位の集まりは周期 Φ_0 の周期関数**で、$\Phi=\Phi_0/2$ で下の二つが重なります。輪の上に磁場は無いのに、準位は磁束を知っています。この周期性から超伝導の円筒の磁束の量子化（周期 $h/2e$）を論じたのが Byers–Yang（1961）とされます 既知 。

Wu–Yang（1975）は AB 効果の検討から、場の強さでは電磁気学を記述し足りず、位相 $\frac{q}{\hbar}\oint\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$ では記述し過ぎで、過不足ないのは位相因子 $e^{\frac{iq}{\hbar}\oint\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}}$ だとまとめています 既知 。こ

の準位もその一例です。

08

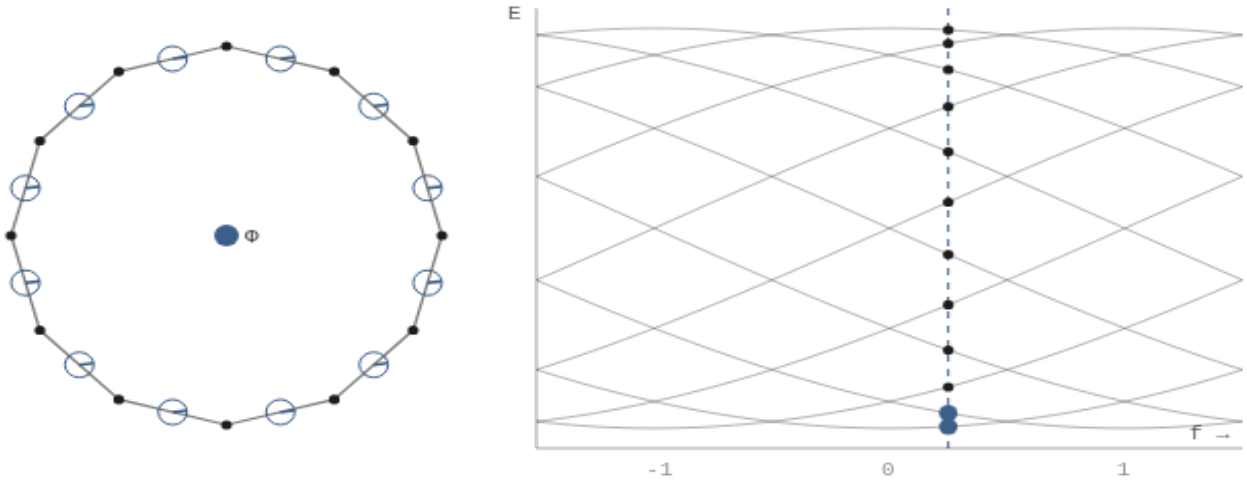
格子の輪 — 辺に U(1) の元を置く

N 点の輪で、隣へ移る振幅 $-t$（$t>0$）に辺ごとの U(1) の元を掛けたエルミート行列 $H_{j+1,j}=-t\,e^{i\theta_j}$、$H_{j,j+1}=\overline{H_{j+1,j}}$（番号は N を法とする）を考えます。ゲージ変換は $\theta_j \mapsto \theta_j+\chi_{j+1}-\chi_j$ で、変わらないのは一周の積 $\prod_j e^{i\theta_j}=e^{2\pi i f}$（$f=\Phi/\Phi_0$）だけ。一様な $\theta_j=2\pi f/N$ では平面波が固有ベクトルで、

$$E_n=-2t\cos\frac{2\pi(n-f)}{N},\qquad n=0,\dots,N-1$$

$|n-f|\ll N$ なら $E_n\approx -2t+t(2\pi/N)^2(n-f)^2$ で、07 節の連続の輪と同じ形です。

図 3　f = Φ/Φ₀ と点の数 N を変える（または表 2 の行を押す）と、準位（右の点）が動く。「ゲージ」を押すと辺の位相（左の時計）の配り方が変わるが、準位は変わらない



N = 12, f = 0.25　E₀ = -1.98289　E₁ = -1.84776　E₁ − E₀ = 0.13513　一周の位相の和 ÷ 2π = 0.25（1 を法として）

計算 準位は閉じた式（$t=1$）からその場で計算。

計算 **表 2**　$N=12$、$t=1$ の下の二つの準位（行列の固有値）。右端は三つのゲージ（一様／一本の辺に集める／でたらめな χ を足す）の間の差と、閉じた式との差の最大。行を押すと図 3 に移ります。

f	E_0	E_1	E_1-E_0	差の最大
0	-2.000000	-1.732051	0.267949	1.0e-15
0.25	-1.982890	-1.847759	0.135131	6.7e-16
0.5	-1.931852	-1.931852	0.000000	7.8e-16

f	E_0	E_1	$E_1 - E_0$	差の最大
0.75	-1.982890	-1.847759	0.135131	1.3e-15
1.25	-1.982890	-1.847759	0.135131	8.9e-16

準位は三つのゲージで丸め誤差の範囲で一致し、$f \cdot 1-f \cdot f+1$ で同じです。$N=192$ では $(E+2t)/t(2\pi/N)^2$ が連続の輪の $(n-f)^2$ に近づき、下の二つの準位で相対差は最大 5.0×10^{-5}（$f=0.25$ の E_1）でした 計算 。

この「隙間」と、質量ギャップ

E_1-E_0 は有限の輪の話で、輪を大きくすると 0 に近づきます。問題文の質量ギャップ（4-11）とは別物です。見てほしいのは、準位が一周の位相因子だけで決まること。ヤン–ミルズの格子の観測量も閉じた道の位相因子（Wilson ループ、5-01）から作ります。

09

U(1) から SU(N) へ — この本での行き先

ヤン–ミルズ理論は、各点で選ぶ元を U(1) から SU(N)（行列式 1 の $N\times N$ ユニタリ行列、1-04）に取り替えたものです（3-02）。掛ける順で結果が変わるため、場の強さに交換子の項が加わり、場自身が色電荷（電荷に当たるもの）を持って方程式が非線形になります（3-03）。古典の波に下限が無いのは光と同じですが、量子では隙間が生じると考えられています 物理 （5-08）。U(1) との違いは 5-06。

次の橋は 3-01 です。この章は $\mathbf{A}$ を先に置き、(G′) を後から見つけました。3-01 は逆に、位相を各点で勝手に回しても (S) が変わらないよう求め、辻褄を合わせる場として $\mathbf{A}$ を導きます。同じ要求を SU(N) で行うとヤン–ミルズ場が出ます。これが**ゲージ原理**で、05 節の平行移動と 08 節の辺の元がその部品です。

この章が言えている範囲

内容	状態
01〜05 節（ゲージ変換、拘束、電荷の保存、作用に質量項を直接置けないこと、(G′)、位相因子）	言えている 既知 。格子は図 1 計算
06〜08 節（AB 効果の位相差と周期 Φ_0、輪の準位の周期性とゲージ不変性）	言えている 既知 （道の位相の比較として。散乱の厳密解は扱わない）。表 1・2 計算

内容	状態
自由な電磁場に質量ギャップが無いこと／ゲージ不変なまま質量が生じる機構・ヤン–ミルズの質量ギャップ	前者は既知。後者は例を名指すだけで、この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1・2、06・07 節の数値、図 1〜3	計算	python3・NumPy（線積分の中点則、エルミート行列の固有値）。図はブラウザの JavaScript（本文の式）
Maxwell 方程式・ゲージ不変性の経緯（Fock・London・Weyl）	既知	J. D. Jackson, L. B. Okun, Rev. Mod. Phys. 73 (2001) 663, arXiv:hep-ph/0012061（要旨と III 節を確認）。J. C. Maxwell, Phil. Trans. R. Soc. Lond. 155 (1865) 459、V. Fock, Z. Phys. 39 (1926) 226、F. London, Z. Phys. 42 (1927) 375、H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik (1928)・Z. Phys. 56 (1929) 330（書誌のみ）
ゲージ不変なまま質量が生じる例	既知	P. W. Anderson, Phys. Rev. 130 (1963) 439（題名と要旨を確認）。詳しくは 3-07
AB 効果の予言・経緯・実験	既知	Y. Aharonov, D. Bohm, Phys. Rev. 115 (1959) 485、A. Tonomura et al., Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 792（ともに要旨を確認）。B. J. Hiley, arXiv:1304.4736（本文を確認）。W. Ehrenberg, R. E. Siday, Proc. Phys. Soc. B 62 (1949) 8（書誌のみ）。R. G. Chambers, Phys. Rev. Lett. 5 (1960) 3（書誌のみ・題名を確認・「最初」は未確認）
位相因子による記述	既知	T. T. Wu, C. N. Yang, Phys. Rev. D 12 (1975) 3845（§II の結論を確認）
磁束の周期性と超伝導	既知	N. Byers, C. N. Yang, Phys. Rev. Lett. 7 (1961) 46（書誌のみ。題名で主題を確認・内容は未確認）

次に読む章：2-04 特殊相対論と時空。ゲージ原理へ進むなら 3-01。

特殊相対論と時空 — 符号が一つ違う二次形式を保つことが、作用の形を絞る

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — ローレンツ変換は波動方程式の形を保つ変換で、間隔の符号が二点の関係を三つに分けること。
質量は四元運動量の不変な長さで、自由粒子の作用は固有時であること。
場の作用の形が絞られ、四次元の純ヤン–ミルズの作用には長さの尺度が無いこと。

前提となる章 — 2-01（作用・Euler–Lagrange・Noether）と行列の積（1-01）。2-02 の波動方程式と質量項も使います（式はその場で再掲）。04 節の群は 1-02、05 節の「なぜ質量ギャップと呼ぶか」は 2-05、07 節の電磁場は 2-03、そのヤン–ミルズは 1-03・1-04 を先取りします。最初に読むときは結論だけ受け取って先へ進めます。

先に言うこと — 重力の無い平坦な時空の、古典の話だけです（量子論は 2-05 から）。09 節の虚時間は形式的な代入で、正当化は 4-02・4-10 の仕事です。08 節の「古典の作用に尺度が無い」を含め、この章は質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. 波動方程式は、ガリレイ変換で形を変える — 光速を誰にとっても同じに
2. ローレンツ変換 — 間隔を保つ（図 1・表 1）
3. 光円錐と同時の相対性 — 符号で三つに分かれる
4. 四元ベクトルとローレンツ群 — 添字・非コンパクト
5. 固有時と四元運動量 — 質量は不変な長さ（なぜ「質量」ギャップか）
6. 自由粒子の作用 — 直線が固有時を最大にする（図 2・表 2）
7. ローレンツ不変な場の作用 — スカラー・電磁・ヤン–ミルズ
8. 次元の勘定 — 四次元の結合は無次元（表 3・表 4）
9. 虚時間への橋 — 質量が減衰の速さになる

01

波動方程式は、ガリレイ変換で形を変える

2-02 で作った波動方程式を、空間一次元・波の速さ c で書きます。

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \partial_x^2\right)u = 0 \tag{1}$$

速さ v で右へ動く観測者の座標は、ニュートン力学では $t' = t,\ x' = x - vt$ です（ガリレイ変換）。$\partial_t = \partial_{t'} - v\partial_{x'}$、$\partial_x = \partial_{x'}$ を入れると、(1) の作用素は形を変えます。

$$\frac{1}{c^2}\partial_{t'}^2 - \frac{2v}{c^2}\partial_{t'}\partial_{x'} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\partial_{x'}^2$$

例。$u = f(x' - st')$ を代入すると $s^2 + 2vs - (c^2 - v^2) = 0$、つまり $s = c - v$ と $-(c + v)$。$v = c/2$ なら右へ $0.5c$、左へ $1.5c$ の波に見えます 計算 。

音ならこれで正しい。空気に対して止まった観測者が特別だからです。しかし光の波動方程式は Maxwell 方程式（2-03）から出て、媒質を要しません。Einstein（1905）は、法則がどの慣性系でも同じ形であることと、光速が光源の運動によらないことを前提にしました 既知 。問いを逆にします。**(1) の形を変えない変換はどれか**。

02

ローレンツ変換 — 間隔を保つ変換

線形変換では、作用素 (1) をそのまま保つことと次の**間隔**を保つことが同値です（二つの係数行列は互いに逆の関係で変わる。拡大・縮小は方程式 (1) を保つが間隔は保たない）。

$$s^2 = -c^2t^2 + x^2 \tag{2}$$

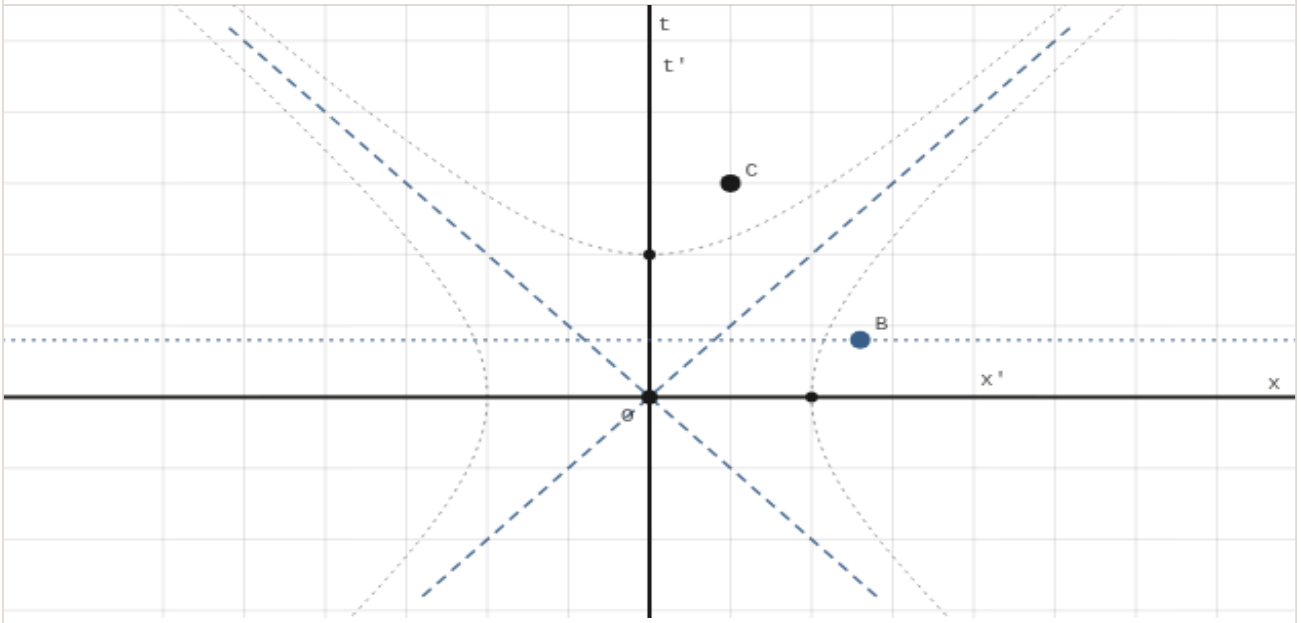
回転は $x^2 + y^2$ を保ち $\cos, \sin$ で書けました。s^2 を保つ変換は $\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi = 1$ により $\cosh, \sinh$ で書けます。

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & -\sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{3}$$

φ を**急速度**（$\tanh\varphi = v/c$）、この変換を**押し出し**と呼びます。$\gamma = \cosh\varphi = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ と置けば $t' = \gamma(t - vx/c^2),\ x' = \gamma(x - vt)$ で、$c \to \infty$ でガリレイ変換に戻ります（Einstein 1905 の §3 も、光速を V と書く点を除いて同じ形） 既知 。回転との違いは時空の記事の

§01・§04 にあります。**例**。$v = 0.5c$ で $\gamma = 1.1547$。$x = 0$ の時計の時刻 t は動く観測者には $t' = \gamma t$ で、一刻みが延びて見えます。

図 1　急速度 φ を変えると、動く観測者の軸 t′・x′（実線）が光円錐（破線）へ倒れる。双曲線 $s^2 = \pm 1$（点線）は動かない。色の点線は、動く観測者にとって B と同時の線



φ = 0.00　v/c = 0.000　γ = 1.0000　B：t' = 0.400（O より後）　C：t' = 1.500　s²：B 1.53・C −2（不変）

計算 図の数値は (3) からその場で計算。表 1 の行を押す（Tab で選んで Enter でもよい）と図がその速さになります。

計算 **表 1**　γ・急速度・運動エネルギーの比（$(\gamma-1)mc^2 \div mv^2/2$）。$\gamma = \cosh\varphi$ を検算。

v/c	γ	φ	エネルギー比
0.1	1.005038	0.1003	1.0076
0.5	1.154701	0.5493	1.2376
0.9	2.294157	1.4722	3.1955
0.999	22.366272	3.8002	42.8181

03

光円錐と同時の相対性 — 間隔の符号で三つに分かれる

二つの出来事の差の s^2 は押し出しで変わらず、その**符号**は誰が見ても同じです。

$$s^2 < 0:\ \text{時間的},\quad s^2 = 0:\ \text{光的},$$
$$s^2 > 0:\ \text{空間的}$$

時間的な二点は光より遅い信号で結べ、時間の向きを反転しない変換（04 節）なら前後は誰が見ても同じです。空間的な二点はどんな信号でも結べず、**前後が観測者によって入れ替わり**

ます。時間と空間を一つの四次元の幾何として見る見方は、Minkowski の 1908 年の講演で広く知られるようになりました。虚の時間座標 $t\sqrt{-1}$ を置いてローレンツ変換を四次元の回転と見る扱いは、Poincaré（1906）にすでにあります 既知 。

例（図 1）。$c=1$。原点 O と B $=(t,x)=(0.4,1.3)$ は $s^2=1.53>0$ で空間的です。$t'_B=\gamma(0.4-1.3v)$ は $v>0.308$（$\varphi>0.318$）で負になり、B は O の「後」から「前」へ移ります。C $=(1.5,0.5)$ は $s^2=-2$ で時間的で、$t'_C=\gamma(1.5-0.5v)>0$ のままです。

入れ替わる二点が因果で結ばれていたら矛盾します。量子場の理論ではこれが「空間的に離れた場の演算子は可換」という公理になります（Jaffe–Witten §3、4-09）。光円錐と「距離の退化」は時空の記事の §03 へ。

04

四元ベクトルとローレンツ群 — 添字で書くと不変量が見える

空間を三次元に戻し、$x^\mu=(ct,x,y,z)$ と書きます。上下に同じ添字が出たら和を取ります。

$$\eta=\mathrm{diag}(-1,1,1,1),\quad s^2=\eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu\Delta x^\nu \\ \Lambda^{\mathsf{T}}\eta\Lambda=\eta \tag{4}$$

添字を下げるには η を掛けます（$x_\mu=(-ct,x,y,z)$）。$\partial_\mu=\partial/\partial x^\mu$、$\Box=\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu=-\partial_t^2/c^2+\nabla^2$。符号 $(-,+,+,+)$ は時空の記事と同じで、逆の約束の教科書もあります。

ローレンツ変換は (4) の右の式を満たす 4×4 実行列 Λ で、群 $\mathrm{O}(1,3)$ をなします（1-02）。$\mathrm{O}(1,3)$ は $\det\Lambda=\pm1$ と時間の向き（左上の成分が ≥1 か ≤-1 か。(4) からその二乗は 1 以上）で四つの部分に分かれます。単位行列を含む部分 $\mathrm{SO}^+(1,3)$（$\det\Lambda=1$・時間の向きを保つ）は回転 3 個と押し出し 3 方向で生成され、並進 4 個を加えた群が **Poincaré 群**です 既知 。問題文の量子場は、この群の表現を持つヒルベルト空間の上に置かれます（Jaffe–Witten §3）。

例。$\mathrm{SO}(4)$ はコンパクトですが、$\mathrm{SO}^+(1,3)$ は φ がいくらでも大きく取れるのでコンパクトではありません。問題文の「コンパクトな単純ゲージ群」は内部の対称性（1-04）の話で、時空のローレンツ群はもともと非コンパクトです。

05

固有時と四元運動量 — 質量は観測者によらない長さ

粒子が持ち歩く時計の時間を**固有時** τ と呼びます。s^2 の不変性から $c^2d\tau^2=c^2dt^2-|dx|^2$、つまり $d\tau=dt/\gamma$ です。τ は誰にとっても同じなので、**四元運動量** $p^\mu=m\,dx^\mu/d\tau$ は x^μ と同じ

く Λ で変わります。

$$
\begin{aligned}
p^\mu &= \left(\frac{E}{c}, p\right) = (\gamma mc,\ \gamma m v) \\
\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu &= -m^2 c^2
\end{aligned}
\tag{5}
$$

右の式は $E^2 = |p|^2 c^2 + m^2 c^4$。$E$ と p は観測者ごとに違っても、**質量は四元運動量の不変な長さ**です。**例**。$E = \gamma mc^2 = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}mv^4/c^2 + \cdots$ で、表 1 の右端の列がこの補正です。

なぜ「質量」ギャップと呼ぶか

2-02 の分散関係 $\omega^2 = c^2 k^2 + \Omega^2$ は、$E = \hbar\omega,\ p = \hbar k$（2-05）と読むと (5) そのもので、$\Omega = mc^2/\hbar$ です。問題文は質量ギャップを「ハミルトニアン H のスペクトル（取りうるエネルギーの値の集合。2-05・1-10 で定義）が $(0, \Delta)$ に無いこと」と定義します（Jaffe–Witten §4）。ローレンツ不変性・正のエネルギー（$H \geq 0$ がどの観測者でも成り立つ）・真空が一つ、の三つがそろうと（Jaffe–Witten §3）、これは「真空以外の状態のエネルギーと運動量の組 (E, p) は $E \geq \sqrt{|p|^2 c^2 + \Delta^2}$ を満たす」ことと同じです。外れる組があると、空間的（$E < |p|c$）なら押し出しでエネルギーが負になって正のエネルギーに反し、時間的なら静止系で、光的なら押し出しでいくらでも小さくなって、$(0, \Delta)$ に入るからです。組 $(0, 0)$ を持つのが真空だけであることに、真空が一つという前提を使います 既知 。Δ は最も軽い状態の mc^2 と読めます（4-11）。

06

自由粒子の作用 — まっすぐな道が固有時を最大にする

作用（2-01）が誰にとっても同じなら、運動方程式も同じ形です。世界線の最も簡単な不変量は固有時なので、

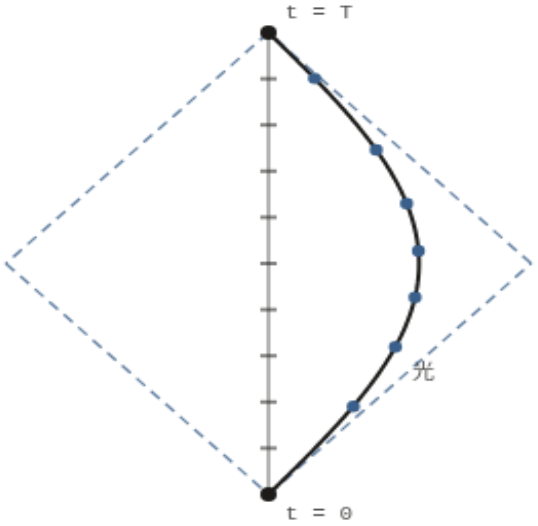
$$
\begin{aligned}
S &= -mc^2 \int d\tau \\
&= -mc^2 \int \sqrt{1 - |v|^2/c^2}\, dt
\end{aligned}
\tag{6}
$$

係数は、遅いときの展開 $L = -mc^2 + \frac{1}{2}m|v|^2 + \cdots$ がニュートンに合うように選びました。運動方程式は $\frac{d}{dt}(\gamma m v) = 0$ で世界線は直線、時間の並進の Noether 保存量（2-01）は $E = \gamma mc^2$ です。符号から**作用の最小と固有時の最大は同じこと**で、端点を固定した時間的な世界線のうち固有時を最大にするのは直線です。両端が同じ場所にある観測者の系（両端は時間的なので、そういう系がある。そこでの時刻の差を T）で見ると $d\tau = \sqrt{1 - |v|^2/c^2}\, dt \leq dt$ で、等号は $v \equiv 0$ のときだけ。だから $\tau \leq T$ で、最大は直線だけです（τ はどの系でも同

じ)。これを**逆向きの三角不等式**と呼びます 既知 。停留点は最小とは限りませんが（2-01)、ここでは本当に最小で、双子のパラドックスはこの言い換えです。

例。$T=1$、$x(t)=(u/\pi)\sin\pi t$（最高速 u）の固有時は、$\mathcal{E}(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta$（第二種完全楕円積分）で $\tau=\frac{2}{\pi}\mathcal{E}(u)$。$u\to1$ で $2/\pi\approx0.637$ です。

図 2　最高速 u を変えると、端点を固定した世界線が曲がり、固有時（色の点：0.1 T ごと）が減る。動かすと、同じ座標時刻での二人の時計が出る



u = 0.90　曲げた道の固有時 0.7459 T（まっすぐな道は 1 T）

計算 図の数値は $d\tau=dt/\gamma$ の台形則（400 分割）でその場で計算。

計算 **表 2**　端点を固定した世界線の τ/T。曲線は数値積分と $\frac{2}{\pi}\mathcal{E}(u)$ が 2×10^{-16} まで一致。折れ線は速さ u で行って戻る道（双子)。

u/c	曲線	近似 1 − u²/4	折れ線 √(1 − u²)
0.3	0.977105	0.977500	0.953939
0.6	0.902780	0.910000	0.800000
0.9	0.745926	0.797500	0.435890
0.99	0.654748	0.754975	0.141067

07

ローレンツ不変な場の作用 — スカラー場・電磁場・ヤン–ミルズ場

場の作用は $S=\frac{1}{c}\int\mathcal{L}\,d^4x$。$|\det\Lambda|=1$ で d^4x は変わらないので、ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ がスカラーなら作用は不変です。**局所的**（その点の場と一階微分だけ）という条件も課すと、項の形は強く絞られます。

スカラー場では $\partial_\mu\phi$ を η で縮めます。

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi - \tfrac{1}{2}\mu^2\phi^2 \\ (\Box - \mu^2)\phi &= 0, \quad \mu = \frac{mc}{\hbar}\end{aligned} \tag{7}$$

右が Klein–Gordon 方程式です。**例**。一次元で全体に張力 σ を掛けると 2-02 の質量項つきの弦になり、$c^2 = \sigma/\rho$、$\Omega = c\mu$ と対応します。

電磁場。2-03 のポテンシャル ϕ, A（この ϕ は (7) の場とは別）を $A_\mu = (-\phi/c, A)$ とまとめ、$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ と置きます。成分は $F_{0i} = -E_i/c$、$F_{ij} = \varepsilon_{ijk}B_k$（$\varepsilon_{ijk}$ は $\varepsilon_{123} = 1$ で、添字を入れ替えると符号を変える記号）で、電場と磁場を一つの反対称行列にまとめたものです。ゲージ変換 $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\chi$（2-03 のゲージ変換の式）で変わりません。$F^{0i} = -F_{0i}$、$F^{ij} = F_{ij}$ なので $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2|E|^2/c^2 + 2|B|^2$ で、

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\left(|E|^2/c^2 - |B|^2\right) \tag{8}$$

SI では全体に $1/\mu_0$ が掛かり、2-03 の (L) の ρ, J の無い部分になります。運動方程式 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ が真空の Maxwell 方程式の半分で、残り半分は F を A から作った時点で成り立ちます。

ヤン–ミルズ場。$A_\mu = A_\mu^a T^a$ をリー環に値を取る場にし（1-03・1-04）、構造定数 f^{abc} の項を F に足します（3-02）。

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4g^2}\sum_a F^a_{\mu\nu}F^{a\,\mu\nu} \\ F^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + f^{abc}A^b_\mu A^c_\nu\end{aligned} \tag{9}$$

行列で書けば $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]$（$T^a$ はエルミートで $[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$＝1-03 の規約。g は A に吸収）。最後の項が Maxwell との唯一の違いで、場が自分自身の源になります。それでも古典の方程式は「光の速さで進む質量の無い波」を記述します（Jaffe–Witten §1）既知。

ゲージ不変性（3-02）も課し、群が単純なら（不変な二次形式が定数倍を除いて一つ。1-03）、F の二次式でローレンツ不変なものは $\sum_a F^a_{\mu\nu}F^{a\,\mu\nu}$ と $\sum_a \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^a_{\mu\nu}F^a_{\rho\sigma}$（$\varepsilon^{0123} = 1$ の四次元版の記号）の一次結合だけです既知。二つ目は電磁場なら $E\cdot B$ に比例し、空間反転で符号を変え、全微分なので運動方程式を変えません（3-05 の θ 項）。条件が無いと、任意の対称行列 c_{ab} で作る $\sum c_{ab}F^a_{\mu\nu}F^{b\,\mu\nu}$ も不変です。

> 08

次元の勘定 — ħ = c = 1 と、結合定数の次元

$c = 1$ で長さと時間が、$\hbar = 1$ でエネルギーと時間の逆数がそろい、残る単位は一つです。質量の次元を 1 とすると長さは -1。換算は $\hbar c = 197.3269804\ldots$ MeV fm（$1\,\mathrm{fm} = 10^{-15}\,\mathrm{m}$）だけです。ギャップ Δ には長さ $\hbar c/\Delta$ が対応し、相関の届く距離の目安です。ギャップがあると、真空での期待値 $\langle O\rangle$ が 0 の局所的な量 O なら、同じ時刻で十分離れた二点での相関 $|\langle O(x)O(y)\rangle|$ は、$C < \Delta/(\hbar c)$ を満たす任意の C で $\exp(-C|x-y|)$ 以下です（Jaffe–Witten §5。$\hbar = c = 1$ なら $C < \Delta$）。期待値が 0 でないと、相関は $\langle O\rangle^2$ に近づきます。

計算 **表 3**　質量を長さに直す（$\hbar c$ は SI の定義値 h, c, e から計算）。

もの	mc² (MeV)	ħ/(mc) (fm)
電子	0.51099895069	386.159267
陽子	938.27208943	0.210309

作用は無次元（$\hbar$ で測る）なので、d 次元の時空で $[\mathcal{L}] = d$、$[\partial] = 1$。$(\partial\phi)^2$ と $\lambda\phi^4$ の次元が d であることから、また (9) の F が ∂A と AA の和で $[A] = 1$、$[F^2] = 4$ であることから、

$$[\phi] = \frac{d-2}{2}, \quad [\lambda] = [g^2] = 4 - d \tag{10}$$

計算 **表 4**　質量の次元（$\hbar = c = 1$、分数で計算）。

d	[φ]	[λ]	[g²]	読み
2	0	2	2	結合が質量^{2}の次元
3	1/2	1	1	結合が質量の次元
4	1	0	0	結合は無次元
5	3/2	-1	-1	結合が長さの次元

四次元では、作用 (9) に次元を持つ定数が一つも無い。係数から質量も長さも組み立てられず、古典のヤン–ミルズ理論に尺度はありません 既知 。量子論で $\Delta > 0$ があるなら尺度は古典の作用の外から来るはずで、物理では繰り込みの過程で入ると考え次元転移と呼びます（4-07） 物理 。解説も、四次元のゲージ理論で質量ギャップが古典的に見えない（'the mass gap is not classically visible'）ことを、古典的でない変数の取り替えが要りうる理由に挙げます（Jaffe–Witten §6.6）。二・三次元では g^2 自体が尺度です（4-04・7-06）。ϕ^4 は 7-08、四次元の別の特別さは 四次元の記事へ。表 4 の d を連続に動かし、四で切り替わる他の量と並べた図は 1-12 §10 の次元のつまみです。

```
09
```

虚時間への橋 — 符号を一つ戻すと、質量は減衰の速さになる

(2) に $t = -i\tau$（τ は実）を代入すると $-c^2t^2 = c^2\tau^2$ で、間隔はユークリッドの距離の二乗 $c^2\tau^2 + |x|^2$ になります。符号の違いを形式的に戻す **Wick 回転**（名は Wick 1954 にちなむとされる）で、時空の記事 §02 の ict と同じ操作です（場の作用と相関での形は 4-02 §02 が正本）。$\partial_t^2 = -\partial_\tau^2$ なので $\Box$ は四次元のラプラシアンに、(7) は $(-\partial_\tau^2/c^2 - \nabla^2 + \mu^2)\phi = 0$ になり、振動が減衰に変わります。空間の依存を落とし $c = 1$ と置いた一次元版が (11) です。$\delta(\tau)$ は $\tau = 0$ に集中し $\int f(\tau)\delta(\tau)\,d\tau = f(0)$ となるもの（正確には関数でなく超関数。1-11）。

$$\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \mu^2\right) G = \delta(\tau)$$
$$G(\tau) = \frac{e^{-\mu|\tau|}}{2\mu} \tag{11}$$

例。$\tau \neq 0$ では $G'' = \mu^2 G$、$\tau = 0$ で傾き G' が -1 跳ぶので G'' は $-\delta$ を含み、$-G'' + \mu^2 G = \delta$ です。三次元なら $e^{-\mu r}/(4\pi r)$ 既知 。**ユークリッドの側では、質量は減衰の速さ（長さの逆数）として現れます**。4-11 で質量ギャップと相関長を結ぶ出発点です。ユークリッドの理論を確率測度として書き（4-02）、Minkowski の側を再構成する条件（Osterwalder–Schrader）は 4-10 の主題です。この章は代入を見せただけです。

この章が言えている範囲

内容	状態
ローレンツ変換・間隔の三分類・四元運動量・自由粒子の作用と固有時の最大・三種の場の作用の形	言えている 既知 （表 1・2 で数値も確認 計算 ）
ローレンツ不変性・正のエネルギー・真空が一つ、のもとで、ギャップの定義が $E \geq \sqrt{|p|^2c^2 + \Delta^2}$ と同じになること	言えている 既知 （05 節。公理の枠組みは 4-09・4-11）
四次元の純ヤン–ミルズの古典作用に次元を持つ定数が無いこと	言えている 既知 （表 4 計算 ）
ギャップの尺度が繰り込みから来ること（次元転移）	物理の水準 物理 （4-07）
Wick 回転の正当化・曲がった時空・スピン	扱っていない
ヤン–ミルズの質量ギャップ	この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
01 節の係数・表 1〜4・図 1〜2	計算	表は python3（NumPy・SciPy）。図はブラウザの JavaScript（(3) と台形則）。JavaScript が無効のときの静止画は同じ式から python3 で作った SVG
二つの前提とローレンツ変換	既知	A. Einstein, “Zur Elektrodynamik bewegter Körper”, Ann. Phys. 17 (1905) 891–921。序と §3 を確認（光速の記号は V）
時空の幾何としての見方	既知	H. Minkowski, “Raum und Zeit”, Phys. Z. 10 (1909) 104–111（1908 年 9 月 21 日ケルンでの講演）。冒頭を確認
虚の時間座標・ローレンツ変換を四次元の回転と見ること	既知	H. Poincaré, “Sur la dynamique de l’électron”, Rend. Circ. Mat. Palermo 21 (1906) 129–176。書誌のみ（Wikisource の翻刻で該当の一節だけ確認）
ギャップの定義・Poincaré 群・正のエネルギーと真空の一意性・局所性・クラスター性・古典の波	既知	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills theory”（Clay 数学研究所の問題解説）。§1・§3〜§5・§6.6 を確認
Wick 回転の名	既知	G. C. Wick, Phys. Rev. 96 (1954) 1124–1134。書誌のみ（帰属は未確認）
$\hbar c$・電子と陽子の質量	既知	CODATA 2022（NIST で確認）。$\hbar c$ は SI の定義値からの計算と一致
固有時の最大・$\mathrm{O}(1,3)$ の四つの部分・F の二つの不変量（ゲージ不変・単純群のもと）・電磁場の成分・次元の勘定	既知	標準的な事実（本文の式で確かめられる）

次に読む章：2-05 量子力学の骨。虚時間の続きは 4-02、時空そのものは 符号が一つ違う。

量子力学の骨 — 状態はベクトル、エネルギーはスペクトル、ギャップはいちばん下の隙間

> この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 状態は単位ベクトル、観測量は自己共役作用素で、エネルギーの値はスペクトルであること。
ギャップ $E_1 - E_0$ が「励起の値段」「振動の速さ」「虚時間での減衰の速さ」の三通りに読めること。
閉じる隙間と残る隙間、摂動論に映らない隙間、Poincaré 定数との一致。

前提となる章 — 1-10（ヒルベルト空間・スペクトル・変分原理・Poincaré 不等式）。行列の場合は 1-01。

先に言うこと — 扱うのは有限個の自由度の量子力学だけです。場の量子論の質量ギャップは 4-11 で扱い、この章はヤン–ミルズの質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. 状態と観測量 — 状態はベクトル、測る量は作用素
2. 時間発展 — 準位の隙間が往復の速さを決める
3. スペクトル — 固有値でない値も入る（寄り道：谷が無限に続く井戸）
4. 基底状態 — 試し関数は上界しか出さない（表 1）
5. ギャップの三つの読み方 — 値段・振動・減衰（図 1・表 2）
6. 閉じるギャップ、残るギャップ — 箱を広げて比べる（表 3）
7. 二重井戸 — 摂動論に映らない隙間（図 2・表 4）
8. ギャップと Poincaré 不等式 — 隙間は重みの付いた定数の逆数

01

状態と観測量 — ベクトルと自己共役作用素

量子力学では、状態は**複素ヒルベルト空間** $\mathcal{H}$ の長さ 1 のベクトル ψ です（1-10）。和 $\alpha\psi+\beta\phi$ を長さ 1 に直したものも状態で（**重ね合わせ**）、$|z|=1$ の z を掛けた $z\psi$ は同じ状態です（2-03 の位相）。内積は左について共役線形とします。

$$\mathcal{H}=\mathbb{C}^2:\ |\alpha|^2+|\beta|^2=1;\qquad \mathcal{H}=L^2(\mathbb{R}):\ \int_{\mathbb{R}}|\psi(x)|^2\,dx=1 \tag{1}$$

左は二択の系（スピンや「左の谷か右の谷か」）、右は直線上の粒子で、$|\psi(x)|^2$ を位置の確率密度と読みます（Born 1926 にさかのぼるとされます）。測れる量には**自己共役作用素** A が対応し（有限次元ではエルミート行列、1-01）、測定の値は固有値 a_k のどれか、その確率は正規直交な固有ベクトル e_k を使って $|\langle e_k,\psi\rangle|^2$ です。

$$\langle A\rangle_\psi=\sum_k a_k\,|\langle e_k,\psi\rangle|^2=\langle\psi,A\psi\rangle \tag{2}$$

例。$\psi=(1,1)/\sqrt{2}$ で $\sigma_z=\mathrm{diag}(1,-1)$ を測ると ±1 が半々です。$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ なら $\sigma_x\psi=\psi$ で、ψ は固有値 $+1$ の固有ベクトルなので、測ると確実に $+1$ です（σ_x,σ_z は Pauli 行列、1-04）。$L^2(\mathbb{R})$ では位置 X は x を掛ける作用素、運動量は $P=-i\hbar\,d/dx$ で、$XP-PX=i\hbar$ から不確定性 $\Delta X\,\Delta P\ge\hbar/2$ が出ます 既知 。

02

時間発展 — 定常状態と二準位の往復

エネルギーの作用素を**ハミルトニアン** H と呼びます。直線上の粒子なら $H\psi=-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''+V\psi$ です。状態は Schrödinger 方程式に従います。

$$i\hbar\frac{d\psi}{dt}=H\psi,\qquad \psi(t)=e^{-itH/\hbar}\psi(0)=\sum_n c_n\,e^{-iE_nt/\hbar}\,\phi_n \tag{3}$$

右端は固有ベクトル $H\phi_n=E_n\phi_n$ による展開で、各成分は位相が回るだけです。$e^{-itH/\hbar}$ はユニタリで確率の合計を保ちます（1-01。逆向きは Stone の定理 既知 ）。固有ベクトル一つの状態は分布が変わらない**定常状態**で、変化は位相の差 $(E_n-E_m)t/\hbar$ だけから生じます。

例（二準位）。左の谷 e_L、右の谷 e_R、すり抜けの振幅 $g>0$ の系です。

$$H=\begin{pmatrix}\varepsilon&-g\\-g&\varepsilon\end{pmatrix},\qquad E_\mp=\varepsilon\mp g,\qquad P_R(t)=\sin^2\frac{gt}{\hbar} \tag{4}$$

e_L から出発すると、右にいる確率 P_R は角振動数 $2g/\hbar = (E_+ - E_-)/\hbar$ で往復します。**準位の隙間が往復の速さを決めます**（1-01 の図 2 の $x = 0$）。07 節で g が指数関数的に小さい例を見ます。

03

スペクトル — 固有値だけでは足りない

無限次元では固有ベクトルの無い値も現れるので、**スペクトル** $\sigma(H)$（$H - \lambda$ が有界な逆を持たない λ の集合、1-10）を使います。自己共役なら、$\lambda \in \sigma(H)$ は「$\|\psi_k\| = 1$、$\|(H - \lambda)\psi_k\| \to 0$ の列がある」と同じです（Weyl の判定法）既知 。

$$\text{箱 } [0, L]:\ E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}\ (n \geq 1); \qquad \text{直線}:\ \sigma\Big(\frac{P^2}{2m}\Big) = [0, \infty) \tag{5}$$

壁で $\psi = 0$ とした箱のスペクトルは固有値だけです（**離散スペクトル**）。直線では平面波 $e^{ipx/\hbar}$ は $\int |\psi|^2 = \infty$ で状態になりません。**例**。幅 ℓ の波束 $\ell^{-1/2}\chi(x/\ell)e^{ipx/\hbar}$（$\chi$ は滑らかな山）では $\|(H - p^2/2m)\psi\|$ が $1/\ell$ 程度で 0 に近づき、どの $E \geq 0$ もスペクトルに入り、固有値ではありません（**連続スペクトル**）。箱を広げると左の間隔が詰まり、右に近づきます（06 節）。

寄り道：谷が無限に続く井戸

飛ばしてよい小節です。

平面上の $V = \frac{1}{2}x^2y^2$（$\hbar = m = 1$）には座標軸に沿って $V = 0$ の谷が無限に続き、古典の粒子はいくらでも遠くへ逃げられます。量子では谷の奥ほど幅が狭く、y の方向の振動子の最低エネルギー $|x|/2$（2-06）が壁になります。正確には、谷の奥だけで効く見積りです。計算 正方形 $[-R, R]^2$ で解くと、最低固有値は $R = 3, 5, 9$ で $0.5671,\ 0.55413,\ 0.55411$ と止まり、自由粒子の値 $\pi^2/4R^2$ は 0 へ向かいます。一様な $\mathrm{SU}(2)$ の場 $A_1 = x\sigma_1,\ A_2 = y\sigma_2$ では、ヤン–ミルズの位置エネルギー $-\operatorname{tr}[A_1, A_2]^2$ が x^2y^2 に比例します（3-02 §07）。この端末の数値が示すのは、箱を広げても最低固有値が止まる傾向までです。問題の解説（Jaffe–Witten §6.6）は、平らな方向があっても束縛状態が生じる例として Simon（1983、題は「古典的には連続スペクトルなのに離散スペクトルを持つ量子作用素」）を引きます 既知 。

04

基底状態 — 上からの評価は易しい

$E_0 = \inf \sigma(H)$ を**基底状態のエネルギー**、それが固有値ならその固有ベクトル ϕ_0 を**基底状態**と呼びます。変分原理（1-10）では次の通りです。

$$E_0 = \inf_{\psi \neq 0} \frac{\langle \psi, H\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} \tag{6}$$

どの試し関数も**上界**を与えますが、下界にはすべての ψ を押さえる必要があります（この非対称は本の全体に出てくるので 1-10 §06 の囲みにまとめてあります）。注意を三つ。(i) 下端は固有値とは限りません（直線上の自由粒子）。(ii) 底まで落ちません。$V = \tfrac{1}{2}m\omega^2 x^2$ なら $\langle X^2 \rangle \langle P^2 \rangle \geq \hbar^2/4$ と相加相乗平均から $\langle H \rangle \geq \hbar\omega/2$ です（2-06）。(iii) 一次元で V が遠方で増えるなら、基底状態は縮退せず正に取れ、n 番目の固有関数は n 個の零点を持ちます（Sturm の振動定理）既知 。

例。$\hbar = m = 1$、$H = -\tfrac{1}{2}d^2/dx^2 + x^4$ にガウス関数 $e^{-x^2/4s^2}$ を入れると $\langle H \rangle_s = 1/8s^2 + 3s^4$ で、その最小値 $\tfrac{3}{16}48^{1/3} = 0.68142$ が $E_0 = 0.667986$ の上界です。奇の試し関数 $x e^{-x^2/4s^2}$ は偶の基底状態に直交するので、E_1 の上界を与えます。

計算 **表 1**　ガウスの試し関数の最良の上界と、三点差分の固有値。

V	E_0 の上界	E_0	E_1 の上界	E_1	上界の差	$E_1 - E_0$
x^4	0.681420	0.667986	2.423739	2.393644	1.742319	1.725658

上界どうしの差は、ギャップの上界でも下界でもありません（試し関数次第でどちらにもずれます）。下から押さえるには、基底状態に直交するすべての状態の評価が要ります。場の量子論で質量ギャップを示すことも、定義から、真空に直交する状態のエネルギーを下から押さえることです（4-11）。

05

ギャップの三つの読み方 — 値段・振動・減衰

基底状態が縮退せず E_0 がスペクトルの孤立点のとき、$\Delta = \inf(\sigma(H) \setminus \{E_0\}) - E_0 > 0$ を**ギャップ**と呼びます。問題の解説は、真空のエネルギーを 0 として「H のスペクトルが $(0, \Delta)$ に無い」ことを質量ギャップと定めています（Jaffe–Witten §4）既知 。読み方は三つです。(i) **値段**：正確には、ϕ_0 に直交する状態では $\langle H \rangle \geq E_0 + \Delta$。(ii) **振動**：$\phi_0$ と ϕ_1 の重ね合わせは角振動数 $\Delta/\hbar$ で揺れる（(4)）。(iii) **減衰**：(3) に形式的に $t = -i\tau$ を入れると（2-04）、振動が減衰に変わる。

$$e^{-\tau(H - E_0)/\hbar}\psi = c_0\phi_0 + \sum_{n \geq 1} c_n\, e^{-(E_n - E_0)\tau/\hbar}\phi_n \tag{7}$$

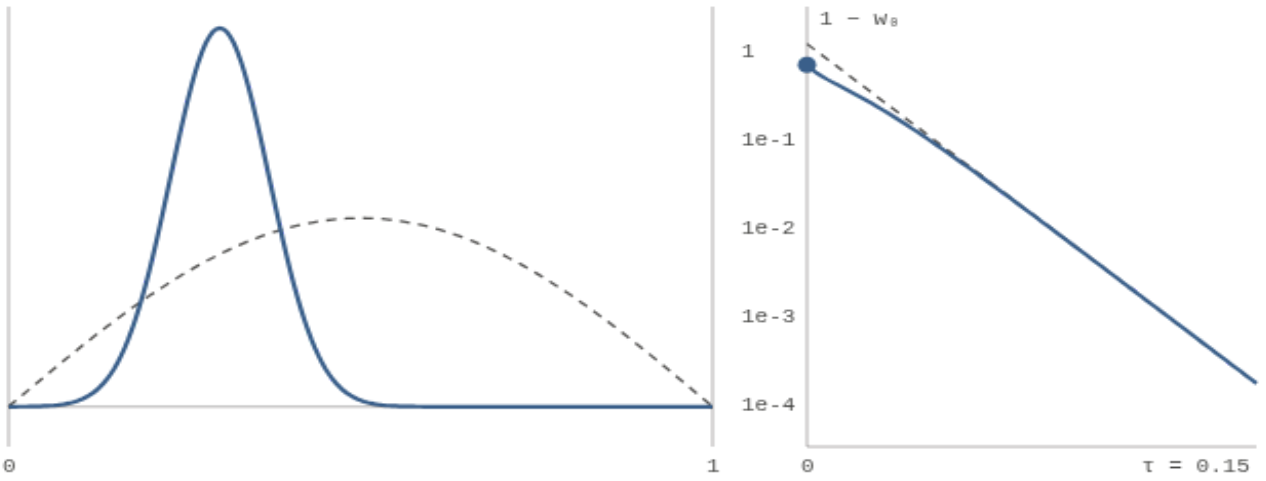
$c_0 \neq 0$ なら基底状態に近づき、残りは $e^{-\Delta\tau/\hbar}$ 倍以下になります。(7) の左辺を $\psi(\tau)$ と書き、基底状態の**重み**を $w_0(\tau) = |\langle \phi_0, \psi(\tau) \rangle|^2 / \|\psi(\tau)\|^2$ とします。$1 - w_0$ は基底状態以外にある確率

で、図 1 と表 2 はこれを追います。自己共役な A（$\langle \phi_0, A\phi_0 \rangle = 0$）の**虚時間の相関**では次の形です。

$$0 \le \langle A\phi_0,\, e^{-\tau (H - E_0)/\hbar} A\phi_0 \rangle \le e^{-\Delta \tau/\hbar}\, \| A\phi_0 \|^2 \tag{8}$$

(8) から、虚時間の方向で相関が消えるまでの目安は $\hbar/\Delta$ 以下です。これは時間の次元の量で、相対論では c を掛けて長さ $\hbar c/\Delta$ にします。空間の方向の減衰（クラスター性）と相関長（2-08）は 4-11、経路の和での見方は 2-07 で扱います。

図 1　虚時間 τ を進めると、x = 0.3 中心の山（色）が基底状態 ϕ_0（破線）に近づく。右は $1 - w_0$（常用対数の目盛）で、次の準位だけ残した予想（破線。自然対数で傾き −2Δ、ħ = 1）に揃う



τ = 0.000　w₀ = 0.30949　1 − w₀ = 6.91e-1　予想 1.20e+0

計算 図の数値はこの端末で計算しました（箱 $[0, 1]$、$H = -d^2/dx^2$（$\hbar = 1$、$\hbar^2/2m = 1$）、$\Delta = 3\pi^2$。係数は python3 で求め、(7) の部分和をその場で計算）。

計算 **表 2**　基底状態以外の重み $1 - w_0$ と、次の準位だけ残した予想 $(c_1/c_0)^2 e^{-2\Delta\tau}$。

τ	1 − w₀	予想
0	6.905e-1	1.195e+0
0.05	5.831e-2	6.189e-2
0.10	3.194e-3	3.204e-3
0.15	1.659e-4	1.659e-4

重みは振幅の二乗なので指数は 2Δ です。中央について対称な状態なら $c_1 = 0$ で、減り方は $E_2 - E_0 = 8\pi^2$ で決まります。**ギャップが保証するのは、どの状態にも効く最も遅い減り方**です。

06

閉じるギャップ、残るギャップ — 箱を広げる

質量ギャップは無限に広い空間で問われます。有限の箱で正でも、広げると閉じることがあります。問題の解説も、体積によらない**一様な**ギャップが無限体積極限の証明で役を果たしうること、その証明には新しい着想が要ることを述べます（Jaffe–Witten §5・§6.5）既知 。$\hbar = m = 1$、箱 $[-L/2, L/2]$ で三つの V を比べます。

計算 **表 3**　箱の長さ L と隙間 $E_1 - E_0$（三点差分。$V = 0$ は厳密値 $3\pi^2/2L^2$ と一致）。

L	V = 0	V = −sech²x	V = x²/2
10	0.14804	0.57518	1.00000
40	0.00925	0.50342	1.00000
160	0.00058	0.50020	1.00000

自由粒子の隙間は $1/L^2$ で閉じます。$-\operatorname{sech}^2 x$ には束縛状態 $\operatorname{sech} x/\sqrt{2}$（$E_0 = -1/2$、代入で確かめられます）がちょうど一つあり、次の準位が連続スペクトルの下端 0 へ下がるので、隙間は $1/2$ に向かいます 既知 。**ギャップの上は連続スペクトルでもかまいません**。質量ギャップを持つ場の理論でも、真空の上は粒子の連続スペクトルで、Δ から始まります（2-04）。

例。独立な振動子 N 個では、基底エネルギー $N\hbar\omega/2$ は N とともに増え、$N \to \infty$ で発散します。それでもギャップは $\hbar\omega$ のままです（2-06）。場の量子論では真空のエネルギーを 0 とし、差を問います。Jaffe–Witten §4 は、真空のベクトル Ω が Poincaré 群（2-04）の下で不変であることから $H\Omega = 0$ と述べています。

07

二重井戸 — 摂動論に映らない隙間

同じ井戸を二つ並べ、間の山を高くしていきます（$\hbar = m = 1$）。

$$V_a(x) = \frac{(x^2 - a^2)^2}{8a^2}, \qquad V_a''(\pm a) = 1, \qquad S_0 = \int_{-a}^{a} \sqrt{2V_a}\, dx = \frac{2a^2}{3} \tag{9}$$

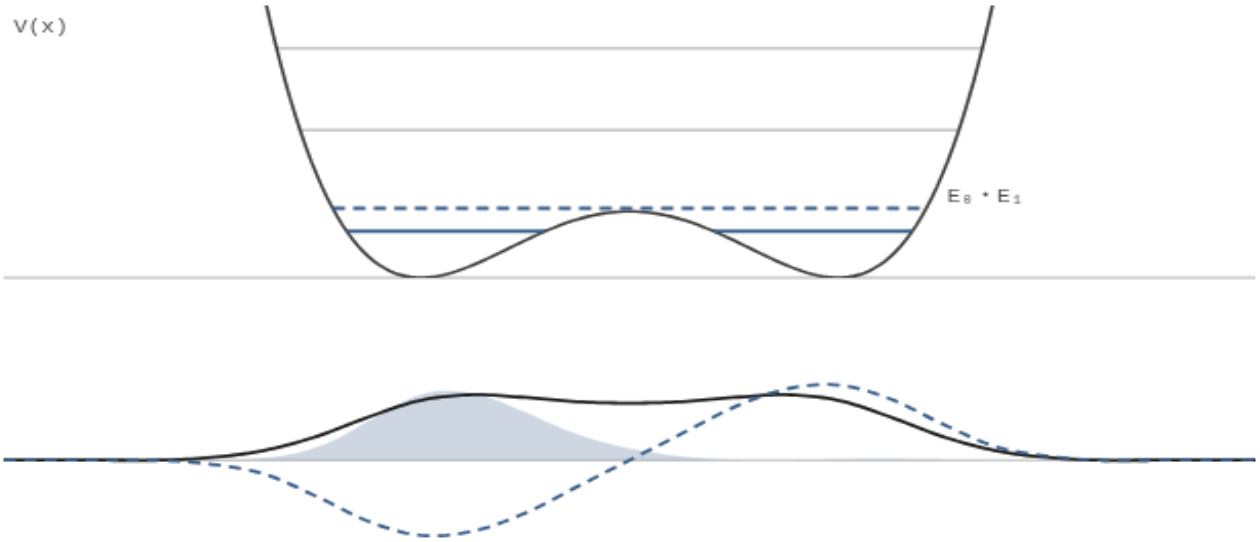
谷一つなら最低準位は約 $1/2$ で、谷の数だけ二重に重なります。谷の間のすり抜けが (4) の g の役をして、準位は偶の ϕ_0 と奇の ϕ_1 に分かれ、山が高いときの幅は次の通りです 既知 。

$$E_1 - E_0 \approx \frac{4a}{\sqrt{\pi}}\, e^{-2a^2/3} = 2\sqrt{\frac{6S_0}{\pi}}\, e^{-S_0} \tag{10}$$

Zinn-Justin–Jentschura（2004）の式 (2.8) $\frac{2}{\sqrt{\pi g}} e^{-1/6g}$ で $g = 1/4a^2$ としたものです（同論文の位置エネルギーを a ずらすと (9)。山の高さは $a^2/8 = 1/32g$）。谷の一つのまわりで V_a を振

動子の項と、g が小さいとき小さい残りの項に分け、準位を g のべきで展開して各次数の係数を順に求めるのが**摂動論**です（4-03）。その摂動級数はパリティ（$x \to -x$ での偶奇）によらず、二つの準位で同じです（同論文 (2.13)–(2.14) の説明）既知。隙間の $e^{-1/6g}$ は、g のべき級数に展開すると係数がすべて 0 です。**摂動論をどれだけ高い次数まで計算しても、この隙間は現れません**。S_0 は虚時間で $-V_a$ の山頂から山頂へ転がる古典解（インスタントン）の作用です。ヤン–ミルズでの対応物は 3-05、e^{-1/g^2} の形の量は 4-07・4-12 で出ます。

図 2　a を大きくすると谷（±a）が離れて山が高くなり、準位 E_0（色の実線）と E_1（色の破線）が寄って重なる。下段は ϕ_0（実線）・ϕ_1（破線）と、左の谷から出た状態の確率密度（塗り）。「動かす」で右の谷へ移る（時間は縮めて表示）



a = 2　S₀ = 2.667　E₀ = 0.35024　E₁ = 0.52319　Δ = 0.1729（(10) では 0.3136）　π/Δ = 18.17　t = 0.000　で右にいる確率 0.041

計算 図の数値はこの端末で計算しました（準位と波動関数は python3 の三点差分。塗りは $\frac{1}{2}(\phi_0^2+\phi_1^2-2\phi_0\phi_1\cos\Delta t)$）。

計算 **表 4**　(9) の隙間（三点差分）と (10) の比較。右端は、同じ論文が予想として述べる展開 (2.13) の係数（式 (2.19a)）による補正の倍率 $1-\frac{71}{12}g-\frac{6299}{288}g^2$ です 物理。

a	Δ（数値）	式 (10)	比	補正の倍率
2	1.729e-1	3.136e-1	0.551	0.545
3	1.355e-2	1.678e-2	0.807	0.819
4	1.895e-4	2.104e-4	0.901	0.902
5	6.118e-7	6.519e-7	0.9384	0.9386

比は 1 に、また補正の倍率に近づきます（$a=5$ で差 2×10^{-4}）。$a=5$ の隙間は準位の間隔（約 1）より 6 桁小さく、右へ移る時間 π/Δ は約 5×10^6 です。

```
08
```

ギャップと Poincaré 不等式 — 基底状態で重みを付ける

一次元で $\phi_0 > 0$ のとき（04 節）、実数値の f で $\psi = f\phi_0$ と書いて部分積分すると、$H\phi_0 = E_0\phi_0$ により $V - E_0$ の項が消えます。

$$\langle \psi, (H - E_0)\psi \rangle = \frac{\hbar^2}{2m} \int |f'|^2 \, d\mu, \qquad d\mu = \phi_0^2 \, dx \tag{11}$$

$\psi \perp \phi_0$ は $\int f \, d\mu = 0$ のことで、そのとき $\|\psi\|^2 = \mathrm{Var}_\mu(f)$ です。変分原理を ϕ_0 に直交する ψ に使うと、最良の定数で次が成り立ちます。

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \le C_P \int |f'|^2 \, d\mu, \qquad C_P = \frac{\hbar^2}{2m\Delta} \tag{12}$$

ギャップは基底状態の分布 μ の Poincaré 定数に反比例します 既知 （Poincaré 不等式は 1-10 §07、重みの付いた形は §08）。ここでの μ は一つの時刻での基底状態の分布です。$\psi = f\phi_0$ と対応させると $H - E_0$ は $\frac{\hbar^2}{2m} L$（L はこの μ に対する 1-10 §08 の作用素）にあたり、L の隙間は $2m\Delta/\hbar^2$ です。1-10 §09 の $C_P \approx \xi^2$ は、虚時間の経路全体の測度（1-08 (10)）についての言明で、別の量です。**例**。振動子（$\hbar = m = \omega = 1$）では $\phi_0 = \pi^{-1/4} e^{-x^2/2}$（代入で確かめられます）なので μ は分散 $1/2$ の正規分布で、ギャップ 1（表 3 の右列、2-06）から $C_P = 1/2$ です。「正規分布の Poincaré 定数は分散に等しい」は、振動子のギャップ $\hbar\omega$ と同じ内容です（$f = x$ で等号）。二重井戸の $a = 3$ では $C_P = 1/2\Delta = 36.9$ です。f を「左で -1、右で $+1$」に近く取ると、分散は約 1 なのに、傾きは μ のほとんど無い山の間でしか効きません。**分布のくびれがギャップを小さくします**。同じ形は一リンク積分（5-11・このサイトの論文）でも使います。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない（どこで扱うか）
既知 状態・スペクトル・変分原理の枠組み、表 1〜3 の準位と隙間、虚時間での減り方（数値は表 1〜3・図 1 計算 ）	Stone の定理・Weyl の判定法・Sturm の振動定理は引用で、証明していない
計算 $\frac{1}{2}x^2y^2$ の最低固有値が、箱を $R = 3, 5, 9$ と広げても止まる傾向	止まることの証明（離散スペクトルは Simon（1983）の主題。本文は読んでいない）
既知 二重井戸の隙間の主要項 (10) と、それが摂動級数のどの次数にも現れないこと（比が 1 へ近づく傾向は表 4 計算 ）	(10) の導出。補正の係数を含む展開 (2.13) は同論文の予想 物理 （インスタントンは 3-05、発散級数は 4-12）

言えている	言えていない（どこで扱うか）
既知 ギャップが基底状態の分布の Poincaré 定数に反比例すること（一次元・$\phi_0 > 0$）	変数が無限個のときの (11) の正当化。経路の測度の $C_P \approx \xi^2$ との関係（1-10・23-01）
—	無限個の自由度と相対論の要請のもとでの質量ギャップ（4-11）。この章はヤン–ミルズの質量ギャップについて何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1〜4・寄り道の数値・図 1〜2	計算	python3（NumPy・SciPy の三点差分・疎行列・数値積分）。図はブラウザの JavaScript
質量ギャップの定義・$H\Omega = 0$・一様なギャップ・平らな方向の注	既知	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”（Clay 数学研究所の公式問題文。問題の発表は 2000 年）。所収：J. Carlson, A. Jaffe, A. Wiles (eds.), *The Millennium Prize Problems*, CMI／AMS, pp. 129–152（書の刊行年は未確認）。§4・§5・§6.5・§6.6 を確認
二重井戸の隙間の主要項 (10)・摂動級数がパリティによらないこと	既知	J. Zinn-Justin, U. D. Jentschura, Ann. Phys. 313 (2004) 197–267, arXiv:quant-ph/0501136。§2.1 の式 (2.1)〜(2.8) と (2.13)–(2.14) の説明を確認
表 4 の補正の倍率	物理	同論文が予想として述べる展開 (2.13) の係数 (2.19a)（同論文は証明なしで引用）。この端末では数値で傾向を確認 計算
Schrödinger 方程式	既知	E. Schrödinger, “Quantisierung als Eigenwertproblem”, Ann. Phys. 384 (1926) 361–376（第 1 報。時間によらない固有値問題）、同題の第 4 報 Ann. Phys. 386 (1926) 109–139。時間を含む形 (3) は第 4 報にあるとされる（未確認）。いずれも書誌のみ
確率の解釈／Stone の定理／平らな方向と離散スペクトル	既知	M. Born, Z. Phys. 37 (1926) 863–867（帰属は二次資料による）／M. H. Stone, Ann. of Math. 33 (1932) 643–648／B. Simon, “Some quantum operators with discrete spectrum but classically continuous spectrum”, Ann. Phys. 146 (1983) 209–220（Jaffe–Witten の文献 [43]。x^2y^2 を扱う箇所は未確認）。いずれも書誌のみ
変分原理・Poincaré 不等式（重みの付いた形）・正規分布の Poincaré 定数	既知	1-10 §06・§07・§08
Weyl の判定法・Sturm の振動定理・不確定性・(11)	既知	標準的な事実（1-10 には無い。書誌は付けていない）

次に読む章：2-06 調和振動子と生成消滅。虚時間の続きは 2-07、ギャップの定義の本体は 4-11。

調和振動子と生成消滅 — 準位は等間隔に並び、場の量子は粒子として数えられる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 準位 $\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ が生成・消滅の代数だけで決まること。
隙間が振動と相関の減衰の速さを決め、二つの谷では摂動論に映らないこと。
場を量子化すると粒子が現れ、質量 m の自由な場の隙間は m であること。

前提となる章 — 2-05（状態・スペクトル・ギャップ・二重井戸）、2-02（基準振動・質量項）、2-04（08 節で使う $E^2=p^2+m^2$、04 節で使う虚時間）、1-03（交換子）。1-04 の梯子は比較のためだけに出ます。

先に言うこと — 一粒子の量子力学と相互作用の無い場だけを扱います。08 節の隙間 m は手で入れた値で、ヤン–ミルズの質量ギャップ（4-11）とは別物です。この章は質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. なぜ振動子か — 平衡点の近くは二次式
2. 生成と消滅 — 代数で準位が決まる
3. 基底状態と零点エネルギー — ガウス関数（図 1）
4. 時間発展 — 隙間は振動の速さ、虚時間では相関の減る速さ（図 2）
5. 振動子を歪める — 隙間は動く（表 1）
6. 寄り道：二つの谷 — 摂動級数の側から見る（図 3・表 2）
7. たくさんの振動子と Fock 空間 — 占有数で数える
8. 場を量子化する — 粒子が現れ、隙間は m（図 4・表 3）
9. 零点の和と、無限個の注意 — 差だけが測れる

01

なぜ振動子か — 平衡点の近くは二次式

場の量子論は調和振動子の集まりとして始まります。平衡点 x_0 の近くでは、どんな位置エネルギーも $V(x_0)+\tfrac12 V''(x_0)(x-x_0)^2$ と近似でき、弦も独立な単振動の集まりでした（2-02）。位置 x と運動量 $p=-i\hbar\,d/dx$ は $L^2(\mathbb{R})$ 上の自己共役な作用素で、$[x,p]=i\hbar$ です（2-05）。

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}x^2 \tag{1}$$

長さを $\ell=\sqrt{\hbar/m\omega}$、エネルギーを $\hbar\omega$ で測り、$\xi=x/\ell$、$\eta=p\ell/\hbar$ と置くと $H=\frac{\hbar\omega}{2}(\xi^2+\eta^2)$、$[\xi,\eta]=i$。**例。** 計算 $1\,\mathrm{g}$・$1\,\mathrm{Hz}$ のばねでは $\ell\approx 1.3\times10^{-16}\,\mathrm{m}$、$\hbar\omega\approx 6.6\times10^{-34}\,\mathrm{J}$ で、室温の $k_BT\approx 4.1\times10^{-21}\,\mathrm{J}$ より 13 桁小さい値です。

02

生成と消滅 — 代数で準位が決まる

(1) の固有値は、微分方程式を解かずに代数だけで求まります（$a^\dagger$ は a の随伴）。

$$a=\frac{\xi+i\eta}{\sqrt2},\qquad a^\dagger=\frac{\xi-i\eta}{\sqrt2} \tag{2}$$

$[a,a^\dagger]=1$、$a^\dagger a=\tfrac12(\xi^2+\eta^2-1)$ なので

$$H=\hbar\omega\Big(N+\frac12\Big),\qquad N=a^\dagger a \tag{3}$$

$[N,a]=-a$、$[N,a^\dagger]=a^\dagger$ から、$N\psi=\nu\psi$ なら $N(a\psi)=(\nu-1)a\psi$、$N(a^\dagger\psi)=(\nu+1)a^\dagger\psi$：$a$ は 1 下げ、$a^\dagger$ は 1 上げます。$\|a\psi\|^2=\langle\psi,N\psi\rangle=\nu\|\psi\|^2\ge0$ なので、ν が整数でなければ下り続けて矛盾し、整数なら $\nu=0$ の $a\psi_0=0$ で止まります。上りは $\|a^\dagger\psi\|^2=(\nu+1)\|\psi\|^2>0$ で止まりません。

$$E_n=\hbar\omega\Big(n+\frac12\Big),\qquad n=0,1,2,\dots \tag{4}$$

既知 準位は**等間隔**で、隙間は $\hbar\omega$。規格化すると $a^\dagger\psi_n=\sqrt{n+1}\,\psi_{n+1}$、$a\psi_n=\sqrt{n}\,\psi_{n-1}$。1-04 の梯子と同じ議論ですが、1-04 の梯子は両端で止まる有限次元でした。$[a,a^\dagger]=1$ を満たす有限次の行列は無く（トレースが 0 と次元で合わない）、**この代数は無限次元でしか実現しません**。

03

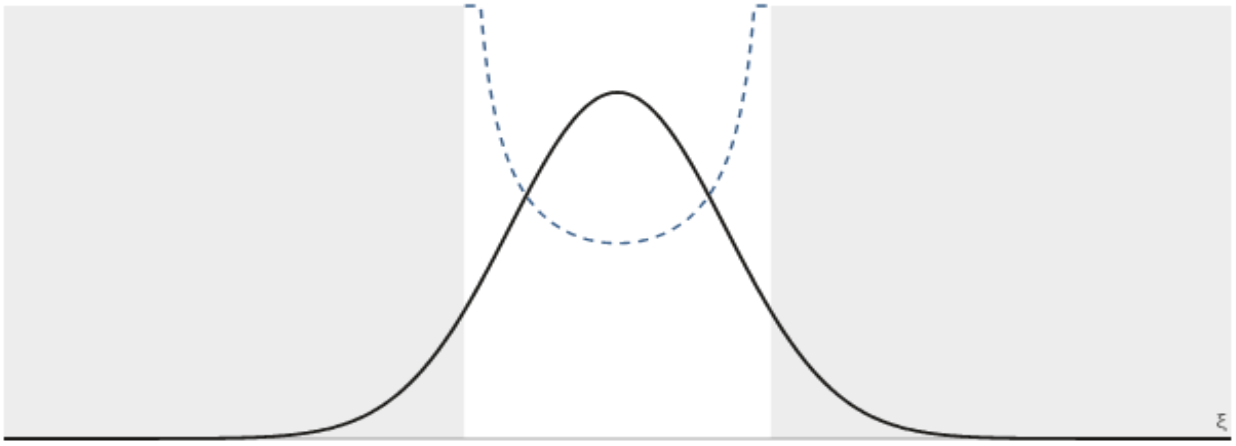
基底状態と零点エネルギー — ガウス関数

$a\psi_0 = 0$ は座標では一階の方程式 $(\xi + \frac{d}{d\xi})\psi_0 = 0$ で、解は定数倍を除いて一つです（縮退が無い）。

$$\psi_0(\xi) = \pi^{-1/4} e^{-\xi^2/2}, \quad \psi_n = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\,\psi_0 \tag{5}$$

基底状態は**ガウス関数**で、$\langle x^2\rangle = \hbar/2m\omega$、$\Delta x\,\Delta p = \hbar/2$ は不確定性関係の下限ちょうどです。$E_0 = \hbar\omega/2$ を**零点エネルギー**と呼び、0 にできないのは位置と運動量を同時に 0 へ寄せられないからです。正確には $\langle H\rangle \geq \omega\sqrt{\langle p^2\rangle\langle x^2\rangle} \geq \omega\,\Delta x\,\Delta p \geq \hbar\omega/2$。$\psi_n$ は Hermite 多項式と $e^{-\xi^2/2}$ の積です。

図 1　n を変えると、確率密度 $|\psi_n|^2$（実線）と、同じエネルギーの古典の粒子の滞在の割合（破線）が変わる。灰色は古典では入れない領域



n = 0　E = 0.5 ħω　⟨ξ²⟩ = 0.5　入れない所の確率 = 0.1573

計算 曲線は漸化式 $\psi_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\,\xi\psi_n - \sqrt{\frac{n}{n+1}}\,\psi_{n-1}$（(2) と梯子の関係から出る）と古典の密度 $1/(\pi\sqrt{2n+1-\xi^2})$ でその場で計算。

計算 数値積分で求めた、入れない領域にいる確率は $n = 0, 1, 2, 5, 10, 30$ で $0.1573,\ 0.1116,\ 0.0951,\ 0.0740,\ 0.0602,\ 0.0425$（$n=0$ は $\mathrm{erfc}(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_1^\infty e^{-t^2}\,dt$）。$n$ が大きいと、揺れを均した $|\psi_n|^2$ は古典の密度に近づきます。

04

時間発展 — 隙間は振動の速さ

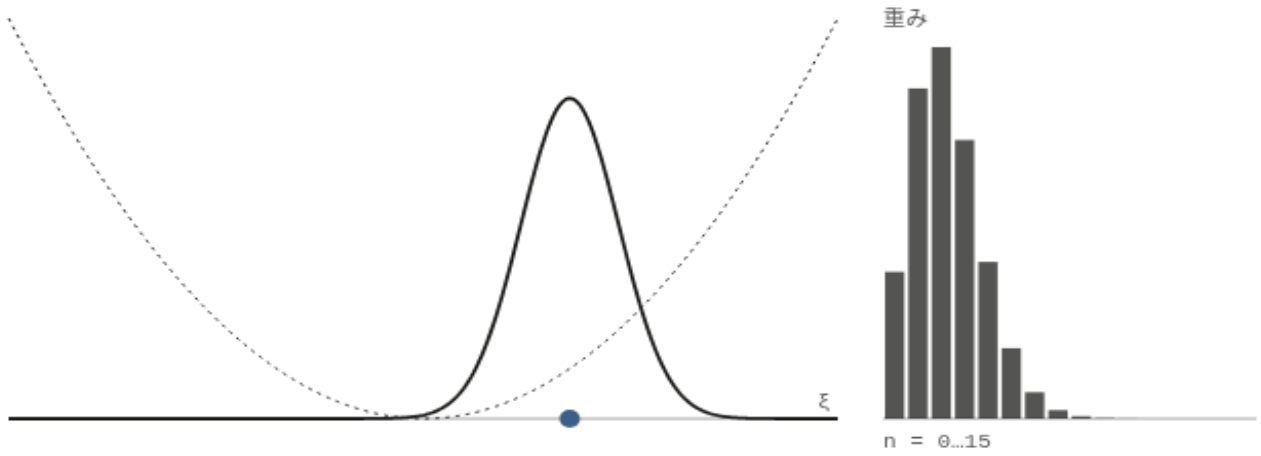
固有状態は位相が回るだけで、密度は動きません。$\psi = c_0\psi_0 + c_1\psi_1$ では、$\Delta = E_1 - E_0$ として（偶奇から対角の項は 0）

$$\langle x\rangle(t) = 2\,\mathrm{Re}\big(\overline{c_0}c_1 e^{-i\Delta t/\hbar}\big)\langle\psi_0, x\psi_1\rangle \tag{6}$$

隙間は、観測できる量が振動する速さで、振動子では古典の ω です。**コヒーレント状態** $\psi_\alpha = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\psi_n$（$a\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha$）の重みは平均 $|\alpha|^2$ のポアソン分布で、α が実数なら密度は形を保って古典の軌道を往復します。

$$|\psi_\alpha(\xi,t)|^2 = \pi^{-1/2} e^{-(\xi - \sqrt{2}\alpha\cos\omega t)^2} \tag{7}$$

図 2　α を変えて「動かす」と、コヒーレント状態の密度（実線）が古典の粒子（点）と同じ周期で往復する。点線は位置エネルギー、右の棒は準位 n の重み



α = 1.5　量子数の平均 = 2.25　E = 2.75 ħω

計算 式 (7) とポアソン分布からその場で計算。

虚時間では、隙間は相関の減る速さ

2-05 の (8) を振動子の $A = x$ で計算します。(2) から $x = \ell\,(a + a^\dagger)/\sqrt{2}$ なので $x\psi_0 = \frac{\ell}{\sqrt{2}}\psi_1$ で、ほかの成分はありません。

$$G(\tau) = \big\langle x\psi_0,\; e^{-\tau(H-E_0)/\hbar}\,x\psi_0\big\rangle = \frac{\ell^2}{2}\,e^{-\omega\tau} = \frac{\hbar}{2m\omega}\,e^{-\omega\tau} \tag{8}$$

減る速さは隙間 $(E_1 - E_0)/\hbar = \omega$ で、2-05 の (8) は振動子では等号です。一般の V では $G(\tau) = \sum_{n\ge 1} |\langle\psi_n, x\psi_0\rangle|^2 e^{-(E_n-E_0)\tau/\hbar}$ となり、$\tau\to\infty$ で $n=1$ の項が残ります（$\langle\psi_1, x\psi_0\rangle \neq 0$ のとき）。**虚時間の相関は隙間の速さで減ります**。格子でグルーボールの質量を測るのも（5-08）、質量ギャップを相関の減衰で言い換えるのも（4-11）この形です（$t = -i\tau$ の意味は 2-04、経路積分は 2-07）。

```
05
```

振動子を歪める — 隙間は動く

四次の項を足します（$\hbar = m = \omega = 1$）。

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \lambda x^4 \tag{9}$$

$x^4 = \frac{1}{4}(a + a^\dagger)^4$ は n を最大 4 動かすので、梯子はもう閉じません。一次の摂動（期待値で置き換える）では $E_n \approx n + \frac{1}{2} + \frac{3\lambda}{4}(2n^2 + 2n + 1)$、隙間は $1 + 3\lambda$ です。

計算 **表 1**　式 (9) の準位を差分法で求めた値（刻みを半分にした変化は 3×10^{-6} 以内）。

λ	隙間 $E_1 - E_0$	一次の見積もり $1+3\lambda$	$E_2 - E_1$
0	1.0000	1	1.0000
0.01	1.0284	1.03	1.0552
0.1	1.2104	1.3	1.3691
1	1.9341	4	2.4414
10	3.8166	31	5.0254

見積もりは $\lambda = 0.01$ で合い、$\lambda = 1$ で外れます。**間隔は上ほど広がり**、隙間は正のままです。既知 一次元で V が連続で、$|x| \to \infty$ で $V \to \infty$ なら、スペクトルは固有値だけからなり（離散スペクトル、1-10）、どの固有値も縮退しません。縮退しない理由は短く言えます。同じ E の固有関数 ψ, χ のロンスキアン $W = \psi\chi' - \psi'\chi$ は方程式から $W' = 0$ で定数で、遠方で 0 なので恒等的に 0、つまり ψ と χ は比例します。離散的であることの証明は出典表の教科書にあります（基底状態は 2-05 の 04 節）。

06

寄り道：二つの谷 — 摂動級数の側から見る

飛ばしてよい節です。

2-05 の二重井戸を、振動子の摂動級数の側から見直します（$\hbar = m = 1$）。

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2\left(1 - \sqrt{g}\,x\right)^2 = \frac{x^2}{2} - \sqrt{g}\,x^3 + \frac{g}{2}x^4 \tag{10}$$

2-05 の (9) で $g = 1/4a^2$ と置き、a だけずらしたもの（$V(x) = V_a(x - a)$。谷は 0 と $1/\sqrt{g}$）で、Zinn-Justin–Jentschura（2004）の式 (2.4) の形です。左の谷の底は 01 節の振動子で、残りの $-\sqrt{g}\,x^3 + \frac{g}{2}x^4$ を 05 節と同じく摂動として g の冪に展開します。鏡映 $x \mapsto 1/\sqrt{g} - x$ で右の谷から始めても同じ計算になり、最低の二準位はどちらも次の級数を漸近展開に持ちます 既知 （同論文の式 (2.6)）。

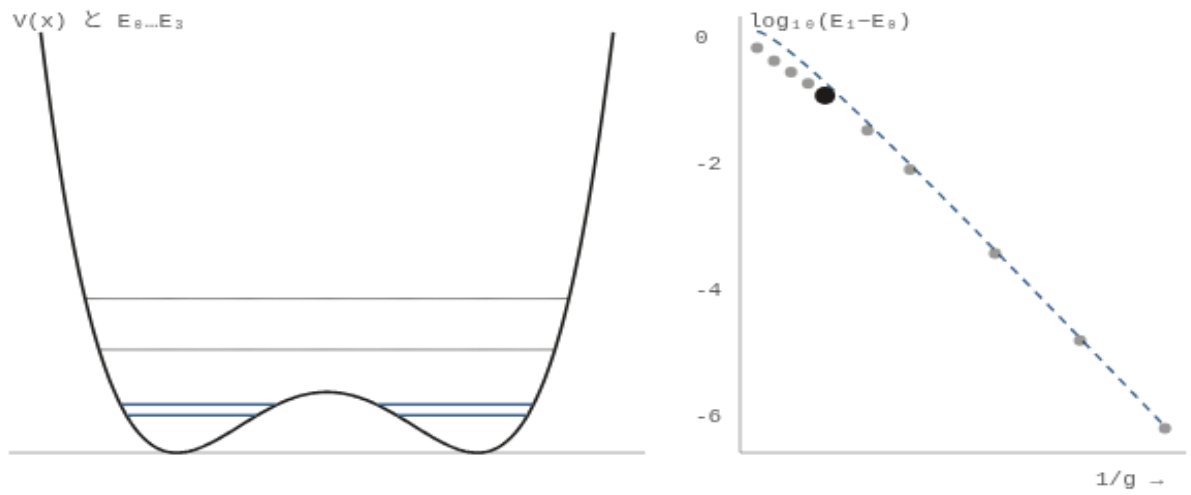
$$E \sim \frac{1}{2} - g - \frac{9}{2}g^2 - \frac{89}{2}g^3 - \frac{5013}{8}g^4 - \cdots$$

係数は階乗的に増え、**どの次数でも隙間は 0** です。隙間は級数の外にあり、2-05 の (10) を g で書いた次の式です（同論文の式 (2.8)）。

$$E_1 - E_0 \approx \frac{2}{\sqrt{\pi g}}\, e^{-1/(6g)} \tag{11}$$

肩の $\frac{1}{6g}$ は 2-05 の $S_0 = 2a^2/3$ で、山の下をくぐって谷から谷へ行く道の作用、と言われます。正確には、虚時間で $-V$ の山頂から山頂へ転がる古典解（インスタントン、3-05）の作用です。

図 3　1/g を変えると、二つの谷（左）と最低四準位が変わる。右は隙間 $E_1 - E_0$ の常用対数（点：数値、破線：式 (11)）。谷が離れると隙間は指数関数的に縮む




```
1/g = 20  山の高さ = 0.625  E₀ = 0.38510  E₁ = 0.49649  隙間 = 1.114e-1（式 (11)：1.800e-1）
```

計算 準位はこの端末で求めた値、破線は式 (11)。

計算 部分和は二準位の**平均**へ寄るだけで、二つを分けません。五項までの部分和は、$1/g = 40$ で 0.5, 0.475, 0.472188, 0.471492, 0.471247 と平均 0.471054（$E_0 = 0.467282$、$E_1 = 0.474826$）へ、$1/g = 100$ で 0.5, 0.49, 0.48955, 0.4895055, 0.4894992 と平均 0.4894978（$E_0 = 0.4894975$、$E_1 = 0.4894981$）へ寄ります。

計算 **表 2**　山の低い側での隙間と式 (11) の比。右端は同論文の次の補正 $(1 - \frac{71}{12}g)$（式 (2.19a) の係数）を掛けた式との比。$1/g = 16$〜100 は 2-05 の表 4。

1/g	山の高さ	隙間 E_1−E_0	比	補正込みの比
20	0.625	1.114e−1	0.619	0.879
30	0.938	3.153e−2	0.757	0.943
40	1.250	7.544e−3	0.831	0.975

物理 ヤン–ミルズの隙間も尺度 Λ に比例するとされ、Λ は結合定数に e^{-c/g^2}（$c > 0$。g は尺度 μ での結合定数で、前に g の冪が付く）の形で依るので摂動論に映りません（4-07・4-12）。

07

たくさんの振動子と Fock 空間 — 占有数で数える

独立な振動子が K 個あれば $[a_k, a_l^\dagger] = \delta_{kl}$、$[a_k, a_l] = 0$ で

$$H = \sum_{k=1}^{K} \hbar\omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right) \tag{12}$$

固有状態は**占有数**の組 $(n_1, \dots, n_K)$ で番号づけられ、n_k は「モード k の量子の数」です。全部 0 が**真空** $|0\rangle$、$a_k^\dagger|0\rangle$ が一量子の状態です。$a_k^\dagger a_l^\dagger|0\rangle = a_l^\dagger a_k^\dagger|0\rangle$ なので量子に番号札は付かず、「どのモードに何個」だけが意味を持ちます。2-02 の鎖を量子化するとこの形です。

振動子の数に依らない形が **Fock 空間**です。一量子の空間を $\mathfrak{h}$（ここでは $\mathbb{C}^K$、場では関数の空間）とします。$\mathfrak{h} = \mathbb{C}^K$ なら、$\mathrm{Sym}^r\mathfrak{h}$ は上の占有数の組のうち和が r になるもの $(n_1, \dots, n_K)$ を正規直交基底とする空間、と読んでよいです（正確には r 個のテンソル積の対称化です）。モードが無限個なら、0 でない n_k が有限個で和が r の組を基底にとります。

$$\mathcal{F}(\mathfrak{h}) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \mathrm{Sym}^r\mathfrak{h}, \quad \mathrm{Sym}^0\mathfrak{h} = \mathbb{C}\,|0\rangle \tag{13}$$

直和はノルムの二乗の和が有限な列の全体で、量子の総数 $\hat{N} = \sum_k a_k^\dagger a_k$ は $\mathrm{Sym}^r\mathfrak{h}$ で値 r です。**例**。K 個のモードに r 個を配る仕方は $\binom{r+K-1}{r}$ 通りで、$\dim \mathrm{Sym}^2\mathbb{C}^3 = 6$ です。既知 生成・消滅で光を扱う方法は Dirac（1927）に、この空間は Fock（1932）にさかのぼるとされます。

08

場を量子化する — 粒子が現れ、隙間は m

長さ L の輪（周期境界）の上で、質量項 m のある場（2-02 §06）を量子化します（$\hbar = c = 1$）。モード e^{ikx}（$k = 2\pi n/L$、$\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$。2-02 の分散関係 $\omega^2 = c^2k^2 + \Omega^2$ で $c = 1$、$\Omega = m$ としたもの）ごとに振動子を置くと

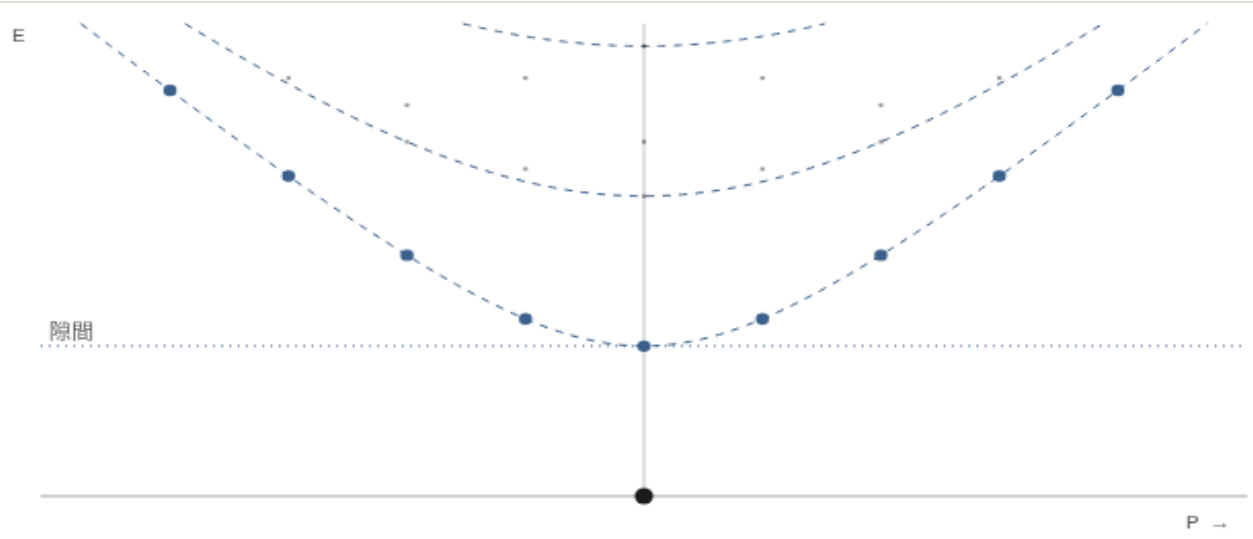
$$\phi(x) = \sum_k \frac{a_k e^{ikx} + a_k^\dagger e^{-ikx}}{\sqrt{2L\omega_k}} \tag{14}$$

$$H = \sum_k \omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right) \tag{15}$$

全運動量は $P = \sum_k k\, a_k^\dagger a_k$ です。モード k の量子一つはエネルギー $\sqrt{k^2+m^2}$ と運動量 k を持ち、質量 m の粒子の関係 $E^2 = p^2 + m^2$（2-04）そのものです。**粒子とは場の基準振動の量子**です。(P, E) 平面では（図 4）一粒子は双曲線 $E = \sqrt{P^2 + m^2}$ に乗り、二粒子以上は $E \geq$

$\sqrt{P^2+4m^2}$ の側を埋めます。真空の次は $k=0$ の一粒子で、**箱を広げても隙間は m**。既知 無限体積では k が実数全体を動き、一粒子のエネルギー $\sqrt{k^2+m^2}$ が $[m,\infty)$ を覆い、多粒子は $[2m,\infty)$ に入るので、ハミルトニアンのスペクトルは $\{0\}\cup[m,\infty)$ です。$m=0$ では隙間 $2\pi/L$ が 0 へ縮みます（振動子でない $k=0$ は除く）。

図 4　L と m を変えると、箱の中の自由な場の全状態（E ≤ 3）の運動量 P（横）とエネルギー E（縦）が変わる。大きい点は一粒子。破線は $E=\sqrt{P^2+(jm)^2}$（j = 1, 2, 3。m = 0 では $E=|P|$）、点線が隙間。状態が 1 万を超えると二粒子以上の点は省く



L = 10.0, m = 1　E ≤ 3 の状態の数 = 23　隙間 = 1.0000

計算 点は占有数の組をその場で数え上げたもの（表 3 と同じ手順）。

計算 **表 3**　周期 L の箱の自由な場で、$E\le 3$ の状態の数と隙間。

L	m = 1：隙間	状態の数	m = 0：隙間	状態の数
5	1.0000	10	1.2566	8
10	1.0000	23	0.6283	38
20	1.0000	69	0.3142	734
40	1.0000	219	0.1571	55535

自由な場の隙間と、問題文の隙間

ここでの m は手で入れた値です。ヤン–ミルズの作用には質量項が無く（3-02）、自己相互作用でモードは独立でなくなります。物理 それでも隙間が生じると考えられ、それを数学として示すことが問題の中身です（0-03・4-11）。§03 の不確定性関係が隙間の起源だという言い方は、16-08 §09 で正します。定理が与えるのは長さをエネルギーに換える段だけで、長さの側がこの問題です。

09

零点の和と、無限個の注意 — 差だけが測れる

(15) の真空のエネルギー $\sum_k \omega_k/2$ は発散します。$|k| \le \Lambda$ で打ち切り、$\Lambda \gg m$ とすると

$$\sum_{|k|\le\Lambda} \frac{\omega_k}{2} \approx \frac{L}{2\pi}\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{\omega_k}{2}\,dk \approx \frac{L\Lambda^2}{4\pi} \tag{16}$$

体積に比例し Λ^2 で増えます。測れるのは差なので、定数を捨てて $H = \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k$ とします（**正規順序**）。隙間は差なので変わりません。物理 箱を変えたときの真空のエネルギーの**差**は有限に残ることがあり、Lüscher 項はその例とされます（17-03）。

$[a_k, a_l^\dagger] = \delta_{kl}$ を満たす作用素をヒルベルト空間の上に用意することを、交換関係の**表現**と呼びます。既知 振動子が有限個なら、交換関係を指数の形（Weyl の関係。一つの振動子なら $e^{isx}e^{itp} = e^{-i\hbar st}e^{itp}e^{isx}$）で書いたときのユニタリで既約な表現（不変な閉部分空間が自明なものだけ）は、ユニタリ同値（ユニタリ写像で移り合うこと）を除いて一つです（Stone–von Neumann）。無限個では、Fock 表現とユニタリ同値でない表現がつくれます。たとえば全モードに量子を一つずつ置いた状態は占有数の和が無限大で Fock 空間に入らず、それを真空とする別の表現が考えられます。相互作用のある場の扱いは Haag の定理とともに 4-09 で扱います。

この章が言えている範囲

内容	状態
01〜04 節：振動子の準位・状態・相関の減衰	言えている 既知
05 節：歪めた振動子の準位と隙間	数値として言えている 計算 。離散で縮退しないことは 既知
06 節：二準位に共通な摂動級数と式 (11)	文献の式 既知 。部分和と隙間を数値と照合 計算 。導出はしていない
07〜08 節：Fock 空間、スペクトル $\{0\} \cup [m, \infty)$	言えている 既知 （表 3 計算 ）
無限個の振動子の表現	紹介のみ（4-09）
ヤン–ミルズの質量ギャップ	この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1〜3・図 1〜4・本文の数値	計算	python3・NumPy・SciPy（差分法の固有値、数値積分、数え上げ）。図はブラウザの JavaScript
生成・消滅で放射を扱う方法	既知	P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. Lond. A 114 (1927) 243–265, doi:10.1098/rspa.1927.0039。書誌のみ
Fock 空間	既知	V. Fock, Z. Phys. 75 (1932) 622–647, doi:10.1007/BF01344458。書誌のみ
二つの谷：式 (10)(11)・級数・補正 71/12	既知	J. Zinn-Justin, U. D. Jentschura, Ann. Phys. 313 (2004) 197–267, doi:10.1016/j.aop.2004.04.004, arXiv:quant-ph/0501136（§2.1 の式 (2.4)(2.6)(2.8)(2.19a)(2.20) を確認）。同じ系の導入と数値は 2-05
一次元で $V \to \infty$ のときスペクトルが離散的であること	既知	M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators*（Academic Press）第 XIII 章。書誌のみ（刊行年と該当の節は未確認）
自由な場のスペクトル $\{0\} \cup [m, \infty)$	既知	M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*（Academic Press, 1975）の自由な相対論的場の節（§X.7 とされる。節番号は未確認）。書誌のみ
Stone–von Neumann の一意性	既知	J. von Neumann, Math. Ann. 104 (1931) 570–578, doi:10.1007/BF01457956。書誌のみ。無限個の振動子と Haag の定理は 4-09 で扱う

次に読む章：2-07 経路積分の考え方。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 2 部 物理の準備 経路積分

経路積分の考え方 — すべての道を足し、時間を虚にすると確率になる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 振幅が、刻んだ多重積分の極限「すべての道についての $e^{iS/\hbar}$ の和」として書けること。
時間を虚にすると重み $e^{-S_E/\hbar}$ が正になり、Wiener 測度という確率測度になること。
分配関数が輪の上の道の積分になり、量子力学が一次元の古典統計力学と同じ形になること。

前提となる章 — 2-05（虚時間での減衰）、1-08（確率・ガウス分布）。振動子は 2-06。

先に言うこと — 扱うのは直線上の一粒子です。実時間の経路積分は測度にならず、式の多くは刻んだ積分の極限として読みます。場の経路積分の構成には入りません（4-02・第 7 部）。この章はヤン–ミルズの質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. 道の和という考え — 振幅を足してから二乗する
2. ガウス積分 — 値は行列式で、相関は逆行列で決まる
3. 時間を刻む — 伝播関数と積の公式から刻んだ積分を作る
4. 振動する積分と古典の道 — 打ち消し合いが停留点を選ぶ（図 1）
5. 虚時間 — 振動が重みに変わり、Wiener 測度が現れる
6. 分配関数は輪の上の道 — 量子力学が一次元の古典の鎖と同じ形になる（図 2）
7. 振動子を刻んで計算する — 相関長が 1/a で伸びる（図 3）
8. 転送行列で x^4 の準位を求める — ガウスでなくても行列の積で計算できる
9. 場へ — 一点の揺らぎが $d \geq 2$ で発散する（表と図は 1-09）

01

道の和という考え — 振幅を足してから二乗する

量子力学を、粒子が通りうる**すべての道**からの寄与の和として書き直すのが経路積分です。時刻 0 に a を出た粒子が時刻 t に b で見つかる振幅（**伝播関数**）を、Feynman（1948）は次の形に書きました。

$$K(b,t;a,0)=\langle b|e^{-itH/\hbar}|a\rangle=\text{“}\sum_{\text{道 }x(\cdot)}\text{”}\,e^{iS[x]/\hbar},\qquad S[x]=\int_0^t\Big(\frac{m}{2}\dot{x}^2-V(x)\Big)ds \tag{1}$$

S は 2-01 の作用で、道は $x(0)=a$、$x(t)=b$ を満たすものすべてです。どの道も絶対値 1 の複素数を持ち寄り、違うのは位相だけで、確率は和の絶対値の二乗です 既知 。着想は Dirac（1933）にさかのぼるとされます。比喩で言えば、光が二つのスリットを両方通って干渉するように、粒子はすべての道を通って干渉します。正確には、(1) の「和」はそのままでは定義されず、03 節の刻んだ積分の極限として読みます。

02

ガウス積分 — すべての計算の土台

計算できる経路積分の多くはガウス積分に帰着します。A を正定値な対称行列とし、対角化して一変数の $\int e^{-ax^2/2+Jx}dx=\sqrt{2\pi/a}\,e^{J^2/2a}$ を固有値ごとに使うと

$$\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac12 x\cdot Ax+J\cdot x}\,d^nx=\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}}\,e^{\frac12 J\cdot A^{-1}J} \tag{2}$$

規格化すれば平均 0・共分散行列 A^{-1} のガウス分布です（1-08）。J で微分して $J=0$ と置くと

$$\langle x_ix_j\rangle=(A^{-1})_{ij},\qquad \langle x_1x_2x_3x_4\rangle=\langle x_1x_2\rangle\langle x_3x_4\rangle+\langle x_1x_3\rangle\langle x_2x_4\rangle+\langle x_1x_4\rangle\langle x_2x_3\rangle \tag{3}$$

$2k$ 個の積の期待値は、二つずつ組にする $(2k-1)!!$ 通りの和です（Isserlis 1918） 既知 。物理では、演算子の形で同じ組み合わせが Wick（1950）に現れ、Wick の定理の名で呼ばれます。この組み方を線で描いたものが Feynman ダイアグラムです（4-03）。**例。** $A=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$ では積分は $2\pi/\sqrt{3}$、$\langle x_1^2\rangle=\frac23$、$\langle x_1x_2\rangle=\frac13$、$\langle x_1^2x_2^2\rangle=\frac49+2\cdot\frac19=\frac23$ 計算 。**値は $\det A$ で、相関は A^{-1} で決まります。**

03

時間を刻む — 伝播関数と積の公式

材料は三つです。**合成**：$e^{-i(t_1+t_2)H/\hbar}=e^{-it_2H/\hbar}e^{-it_1H/\hbar}$ から、途中の場所 c のすべてについて足す式 $K(b,t_1+t_2;a,0)=\int K(b,t_1+t_2;c,t_1)K(c,t_1;a,0)\,dc$ が出ます。**短い時間の核**：自由粒子では厳密に

$$K_0(b,t;a,0)=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}\,\exp\!\Big(\frac{i}{\hbar}\,\frac{m(b-a)^2}{2t}\Big) \tag{4}$$

で、指数の中は等速の道の作用です。**積の公式**：ハミルトニアンを $H=T+V$ と分けます。$T=P^2/2m$ は運動エネルギーの演算子（$P=-i\hbar\,d/dx$ は 2-05 の運動量）、V は位置エネルギー $V(x)$ を掛ける演算子です。T と V は交換しませんが、たとえば $T+V$ が T と V の定義域の共通部分の上で自己共役なら、$e^{-it(T+V)/\hbar}=\lim_N\big(e^{-i\varepsilon T/\hbar}e^{-i\varepsilon V/\hbar}\big)^N$、$\varepsilon=t/N$ が成り立ちます 既知 。Trotter（1959）の縮小半群の積の定理の特別な場合で、この形は Reed–Simon I 第 VIII 章にあります。合わせると、$x_0=a$、$x_N=b$ として

$$K(b,t;a,0)=\lim_{N\to\infty}\Big(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\Big)^{N/2}\int dx_1\cdots dx_{N-1}\,\exp\!\Big(\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{N-1}\varepsilon\Big[\frac{m}{2}\Big(\frac{x_{j+1}-x_j}{\varepsilon}\Big)^2-V(x_j)\Big]\Big) \tag{5}$$

指数の和は折れ線の道の作用のリーマン和、つまり 2-01 の刻んだ作用です。(1) はこの極限の略記で、$\int\mathcal{D}x\,e^{iS/\hbar}$ とも書きます。

> 注意 — $\mathcal{D}x$ は測度ではない
>
> 実時間の $e^{iS/\hbar}\mathcal{D}x$ は、Wiener 測度（05 節）の分散を複素数にした形の測度としては構成できない（そうした測度は、道の空間の有界な集合の上でさえ全変動が無限大になる）と Cameron（1960）が示したとされます 既知 。全変動は、集合を細かく分けて各部分の測度の絶対値を足したものの上限で、確率測度なら 1 です。無限次元の測度一般は 1-09 で扱います。

04

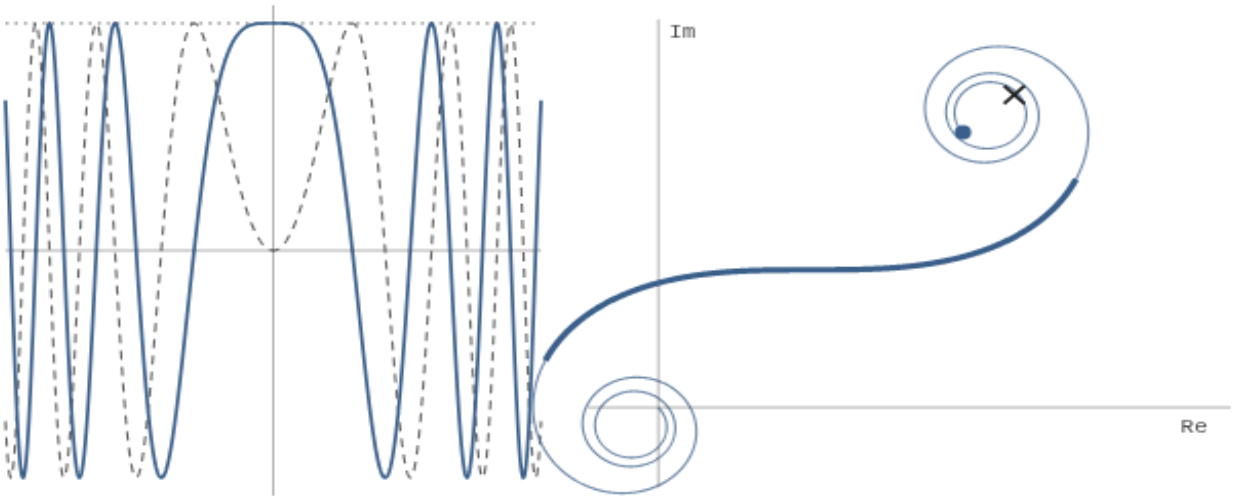
振動する積分と古典の道 — 打ち消し合いと停留点

(5) の被積分関数は絶対値 1 で振動し、絶対収束しません。手本の $\int e^{ix^2/2}dx=\sqrt{2\pi}\,e^{i\pi/4}$（Fresnel 積分）を図 1 で見ます。右は途中までの積分（上端を動かした積分）$F(x)=\int_{-6}^{x}w\,dx'$ の軌跡で、$\theta=0$ では両端が渦を巻いて打ち消し合い、正味の前進は位相の傾きが 0 の**停留点** $x=0$ の近くだけで起きます。$\hbar\to0$ では（符号は $S''(x_c)$ の符号） 既知

$$\int g(x)\, e^{iS(x)/\hbar}\, dx \approx g(x_c)\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{|S''(x_c)|}}\; e^{iS(x_c)/\hbar \pm i\pi/4}, \qquad S'(x_c)=0 \tag{6}$$

道の空間でも、寄与は $\delta S=0$ の**古典の道**（2-01）の近くから来ます。作用が二次式なら (6) は厳密で、(4) がその形です。**例**。1 g の玉が 1 cm/s で 1 秒進むと $S/\hbar \approx 4.7\times 10^{26}$ 計算 。ずれた道は位相が何周も回って打ち消し合います。

図 1　角度 θ を変えると、$w(x)=e^{ie^{i\theta}x^2/2}$（左。実線が実部、破線が虚部、点線が絶対値）と途中までの積分 $F(x)$ の軌跡（右）が変わる。θ = 0 が実時間、90° が虚時間（2-04 の $t=-i\tau$ を角度でつないだ $t=e^{-i\theta}\tau$。時空の記事も参照）。太線は |x| < 1.5、× は厳密値



θ = 0° F(6) = 1.517 + 1.560i 厳密値 = 1.772 + 1.772i 差 3.3e-1

計算 図の数値はこの端末で計算しました（その場の台形公式）。表 1 は python3 の複素誤差関数による値です。

計算 **表 1**　$\int_{-X}^{X} w\,dx$ と厳密値 $\sqrt{2\pi}\,e^{i(\pi/2-\theta)/2}$ の差の絶対値。

X	θ = 0	θ = 22.5°	θ = 90°
2	9.3e-1	4.1e-1	1.1e-1
8	2.5e-1	1.2e-6	< 1e-14
32	6.25e-2	< 1e-14	< 1e-14

実時間では誤差が $2/X$ でしか減らず、少しでも回すと $e^{-\sin\theta\, X^2/2}$ の速さで消えます。

05

虚時間 — 振動が重みに変わる

(5) で刻み ε を $-i\delta$（$\delta>0$）に置き換えると、指数の中は $-\frac{\delta}{\hbar}\left[\frac{m}{2}(\Delta x/\delta)^2+V\right]$ となり、位置エネルギーの符号が変わります。$\tau=N\delta$ として

$$\langle b|e^{-\tau H/\hbar}|a\rangle = \lim_{N\to\infty}\Big(\frac{m}{2\pi\hbar\delta}\Big)^{N/2}\int dx_1\cdots dx_{N-1}\; e^{-S_E/\hbar}, \qquad S_E=\sum_{j=0}^{N-1}\delta\Big[\frac{m}{2}\Big(\frac{x_{j+1}-x_j}{\delta}\Big)^2+V(x_j)\Big] \tag{7}$$

S_E を**ユークリッド作用**と呼びます。重みは正で、V が下に有界なら積分は絶対収束します。$V=0$ の部分は差が独立に分散 $\hbar\delta/m$ の正規分布に従うランダムウォークで、$N\to\infty$ で連続な道の上の確率測度、**Wiener 測度**（ブラウン運動の分布）になり、V は重みとして掛かります。

$$\big(e^{-\tau H/\hbar}\psi\big)(x)=\mathbb{E}_x\Big[\exp\Big(-\frac{1}{\hbar}\int_0^\tau V(X_s)\,ds\Big)\,\psi(X_\tau)\Big] \tag{8}$$

X_s は x を出て分散 $\hbar s/m$ で広がるブラウン運動です。(8) を Feynman–Kac の公式と呼びます（Kac 1949）。たとえば V が有界で連続なら定理で、下に有界なかなり一般の V でも成り立ちます 既知 。**実時間では測度が無く、虚時間では有る**。場の理論をユークリッドの側で構成する理由の一つです（場の回転は 4-02 §02・4-10）。**例**。停留点 $\delta S_E=0$ は $-V$ の中の運動で、2-05 の二重井戸の S_0 はその道（インスタントン、3-05）の作用でした。

道の荒さと測度

道そのものは確率 1 でどこでも微分できません 既知 。$\Delta x\sim\sqrt{\delta}$ なので、S_E の運動の項 $S_{\rm kin}=\sum(\Delta x)^2/2\delta$（$\hbar=m=1$）の期待値 $\langle S_{\rm kin}\rangle$ は刻みの数に比例して増えます 計算 （07 節の輪で $\beta=4$、$N=16,256,4096$ に対し 6.97・126.96・2046.96。ほぼ $N/2$）。位置エネルギーの部分 $\sum\delta\,V(x_j)$ はそれだけで $\int_0^\tau V(X_s)\,ds$ に近づきますが、運動の項の重み $e^{-S_{\rm kin}/\hbar}$ と $\mathcal{D}x$ は別々には極限を持たず、積だけが Wiener 測度として残ります（どちらも 1-09）。

06

分配関数は輪の上の道 — 統計力学との一致

熱平衡では状態 n が重み $e^{-\beta E_n}$ で現れ（$\beta=1/(k_B\times\text{温度})$、$k_B$ はボルツマン定数）、その和が**分配関数**です（2-08）。トレースは $a=b$ として a で積分することなので、(7) から、長さ $\beta\hbar$ の**輪の上の閉じた道**の積分になります。

$$Z(\beta)=\operatorname{Tr}e^{-\beta H}=\sum_n e^{-\beta E_n}=\int_{x(0)=x(\beta\hbar)}\mathcal{D}x\;e^{-S_E[x]/\hbar} \tag{9}$$

刻んで読むと、輪に並べた $x_0,\dots,x_{N-1}$ をばね $\frac{m}{2\delta}(x_{j+1}-x_j)^2$ でつなぎ、各点に V を掛けた**古典の鎖**の分配関数です。量子力学が一次元の古典統計力学と同じ形になり、$\hbar$ が温度の、$\beta\hbar$ が鎖の長さの役をします。場の理論のユークリッドの期待値を、密度が e^{-S} に比例する古典統計

力学の集団として読む見方を、問題の解説は Symanzik に帰しています（Jaffe–Witten §3）[既知]。この節の鎖はその一次元版です。

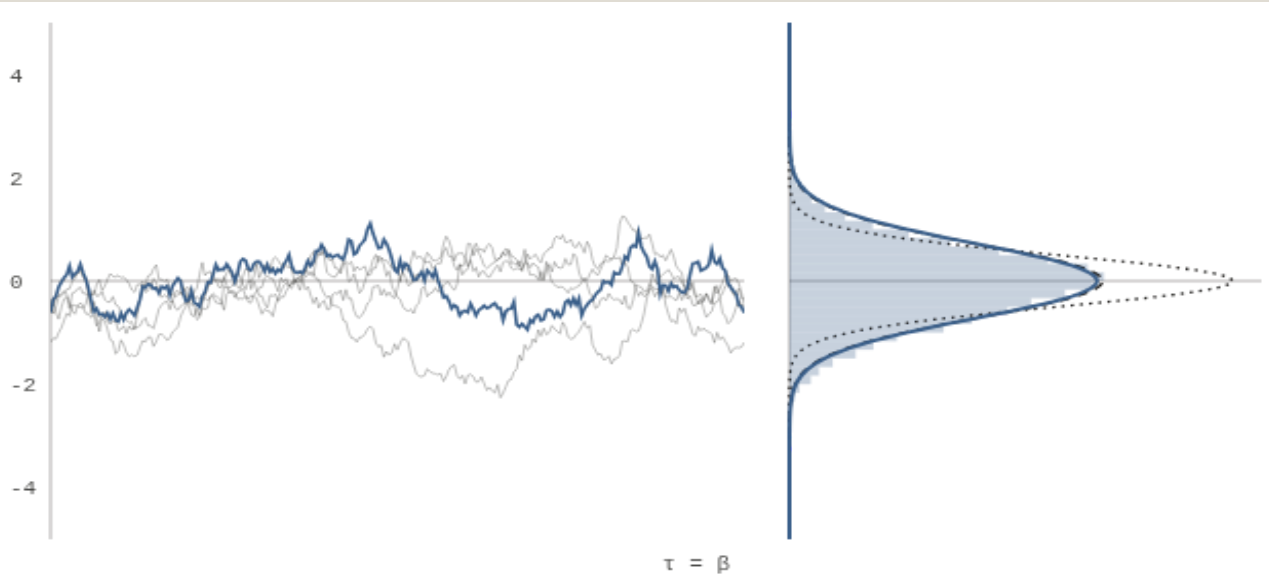
例：振動子の輪

振動子では $Z = 1/(2\sinh\frac{\beta\hbar\omega}{2})$ で、輪の一点 $x(0)$ の分布は熱平衡の位置の分布、分散は

$$\langle x^2\rangle_\beta = \frac{\hbar}{2m\omega}\coth\frac{\beta\hbar\omega}{2} \longrightarrow \begin{cases} \hbar/2m\omega & (\beta\to\infty) \\ 1/m\omega^2\beta & (\beta\to 0) \end{cases} \tag{10}$$

で、低温では基底状態の $|\psi_0|^2$（2-06）に、高温では古典のボルツマン分布に近づきます。

図 2　$\beta\hbar\omega$（輪の長さ）を変えると、輪の上の道（左。色が最新）と、道が通った位置の分布（右の塗り）が変わる。実線は (10)、破線は基底状態、点線は古典。「動かす」で道を足す（$\hbar=m=\omega=1$）



βħω = 4　経路 120 本　標本の ⟨x²⟩ = 0.557　刻んだ系 0.5186　(10) 0.5187　古典 0.2500

[計算] 図の数値はこの端末で計算しました。道は輪を 256 個に刻んだ (7) の厳密な標本（実のフーリエ成分が独立な正規分布なので、種を固定した乱数で引く）。表 2 は同じ手順の python3 の値。

[計算] 表 2　輪の一点の $\langle x^2\rangle$（単位 $\hbar/m\omega$。基底状態は 0.5）。

βħω	標本	刻んだ系の厳密値	量子 (10)	古典
0.25	4.05 ± 0.09	4.0208	4.0208	4.0000
4	0.517 ± 0.006	0.5186	0.5187	0.2500
16	0.504 ± 0.003	0.4998	0.5000	0.0625

高温の短い輪では道はほぼ一点に縮み（古典の粒子）、低温では**量子の揺らぎが虚時間の方向に伸びた道の揺らぎとして**見えます。

```
07
```

振動子を刻んで計算する — 行列式・相関・相関長

$\hbar = m = \omega = 1$、長さ β の輪を N 個に刻みます。ここからの $a = \beta/N$ は刻みの幅（格子間隔）で、01〜06 節の始点 a とは別の記号です。$S_E = \frac{1}{2} x \cdot Ax$ の A は $(Ax)_j = \frac{1}{a}(2x_j - x_{j+1} - x_{j-1}) + a x_j$（添字は N を法として数える）で、隣とだけつながる**循環行列**です。固有ベクトルは $v_j = e^{2\pi i j k/N}$（離散フーリエ、$k = 0, \dots, N-1$）で、$v_{j\pm1} = e^{\pm 2\pi i k/N} v_j$ を代入すると固有値 $\frac{1}{a}(2 - 2\cos\frac{2\pi k}{N}) + a$ が出ます。(2) と規格化 $(2\pi a)^{-N/2}$ から

$$Z_N = \prod_{k=0}^{N-1} \Big(2 - 2\cos\frac{2\pi k}{N} + a^2\Big)^{-1/2} = \frac{1}{2\sinh(N\kappa/2)}, \qquad \cosh\kappa = 1 + \frac{a^2}{2} \tag{11}$$

連続の $1/(2\sinh\frac{\beta}{2})$ と比べると、刻んだ系は振動数 $\Omega_a = \kappa/a = 1 - a^2/24 + \cdots$ の振動子と同じです。相関は A^{-1} で決まり、$N \to \infty$ で

$$\langle x_0 x_j \rangle = (A^{-1})_{0j} = \frac{a\, e^{-\kappa|j|}}{2\sinh\kappa} \longrightarrow \frac{e^{-\tau}}{2} \qquad (\tau = ja,\ a \to 0) \tag{12}$$

2-06 の (8) と同じく、相関は隙間の速さで減ります。格子の目盛りで数えた**相関長**は $\xi = 1/\kappa = 1/(a\Omega_a)$ です。

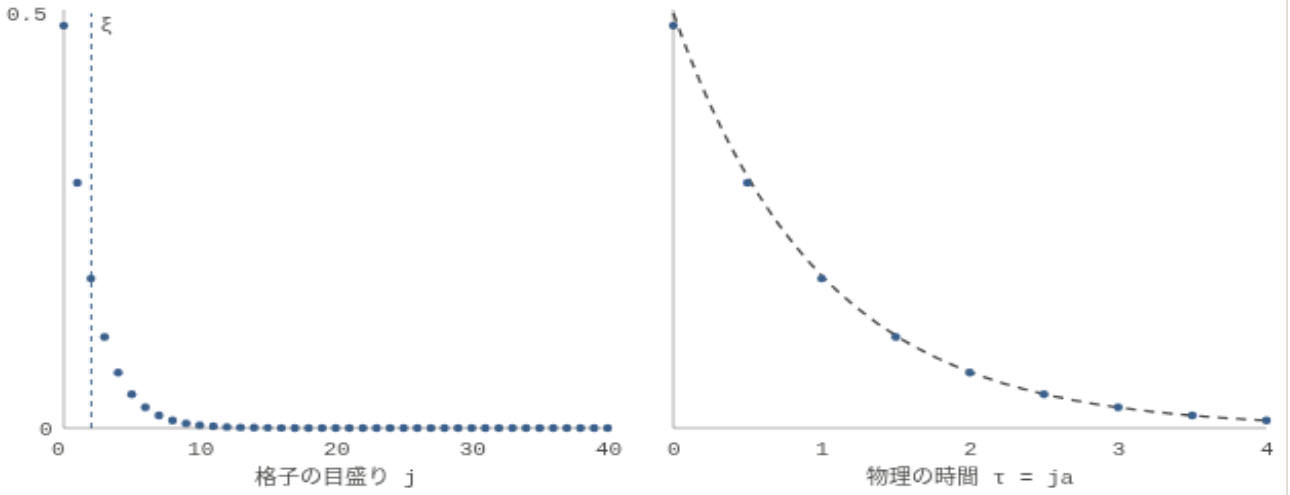
相関長と連続極限

計算 **表 3**　$\beta = 4$ の輪（Z_N は行列式の数値と (11) が 10 桁一致）。

N	a	Z_N / Z − 1	Ω_a	ξ
4	1	8.1e-2	0.96242	1.04
16	0.25	5.4e-3	0.99741	4.01
128	0.03125	8.4e-5	0.99996	32.00

ずれは a^2 で消え、相関長は $1/a$ で伸びます（図 3）。**連続に近づけることは、格子の鎖を「相関長が格子間隔の何倍にもなる」状態、統計力学の言葉では臨界点に近づけることです。**物理の隙間 $1/(\xi a)$ を固定して $\xi \to \infty$ とします。格子ゲージ理論でも、連続極限はこの形で取ると考えられています 物理 。四次元では、2026-11 に公開された構成が、裸の結合を漸近自由の走りに合わせて選ぶ形で尺度の極限を作りました（Lean で証明されている、と委員会が評価した。6-00・8-02）。物理の隙間を固定したまま相関長を伸ばす形、つまり極限で隙間が正に残ることは示されていません（6-04・5-05・5-09）。

図 3　刻み a を変えると、相関 (12) $a\,e^{-\kappa j}/(2\sinh\kappa)$（$\beta \to \infty$）の見え方が変わる。左は格子の目盛り j で数えたもの（縦の破線が相関長 $\xi = 1/\kappa$）、右は物理の時間 $\tau = ja$ で測ったもの（破線は連続の $e^{-\tau}/2$）。「動かす」で a を 1 と 1/16 の間で往復させる



a = 0.500 κ = 0.4949 ξ = 1/κ = 2.02 目盛り Ω_a = κ/a = 0.98987

計算 図の数値はこの端末で計算しました（閉じた式 (12) をその場で計算。$a = 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{16}$ の κ・ξ・Ω_a は python3 の値と表示の桁まで一致）。左では a を小さくするほど点が遠くまで続き、右では点が同じ破線に重なっていきます。

08

ガウスでない例 — 転送行列で x^4 の準位を求める

ガウスでなくても、刻んだ積分は行列の積として計算できます。(7) の一段分（$\hbar = m = 1$、刻み a）を $e^{-aV/2} e^{-aP^2/2} e^{-aV/2}$ の積分核

$$T_a(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \exp\!\Big(-\frac{(x-y)^2}{2a} - \frac{a}{2}\big(V(x)+V(y)\big)\Big) \tag{13}$$

にすると $Z_N = \operatorname{Tr} T_a^N$ で、統計力学の**転送行列**です。固有値を $e^{-aE_n(a)}$ と書けば $a \to 0$ で $E_n(a) \to E_n$。核は各点で正（$T_a(x,y) > 0$）です。さらに $V = x^4$ は無限遠で増えるので $\iint T_a(x,y)^2\,dx\,dy \le \frac{1}{2\pi a}\big(\int e^{-aV}dx\big)^2 < \infty$ となり、T_a は**コンパクト**（有限次元の行列でいくらでも近く近似でき、固有値は 0 以外に集積しない作用素）です。この二つがそろうと、Perron–Frobenius の定理の積分作用素版（Jentzsch 1912 に始まるとされ、L^2 の形は Reed–Simon IV）から、最大固有値は重複せず、その固有関数は正にとれます 既知 。したがって基底状態は縮退しません（2-05・5-03）。

計算 **表 4**　$H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + x^4$ の転送行列の準位（x の格子幅 ≤ 0.02、$|x| \le 3.2$）と、2-05 表 1 の値（$E_0 = 0.667986$、$E_1 - E_0 = 1.725658$）との差。格子の幅を半分にしても 9 桁変わらない。

a	$E_0(a)$	$E_1(a) - E_0(a)$	E_0 の差	隙間の差
0.1	0.666246	1.719680	-1.7e-3	-6.0e-3
0.05	0.667546	1.724144	-4.4e-4	-1.5e-3
0.025	0.667876	1.725278	-1.1e-4	-3.8e-4

差は刻みを半分にするごとにほぼ 1/4 です。**刻んだ経路積分と演算子の量子力学は、同じ準位と隙間を与えます。**

09

場へ — 刻みを細かくすると揺らぎが発散する

07 節の刻み方を、そのまま場に広げます。場の理論では道 $x(\tau)$ が場 $\phi(x)$（d は虚時間を含む時空の次元）に替わり、$S_E=\int(\frac12|\nabla\phi|^2+\frac12 m^2\phi^2+\cdots)d^dx$ です（m はここでは場の質量。4-02）。間隔 a の格子で刻むと、相互作用の無い場はまた (2) のガウス積分で、一点の揺らぎは A^{-1} の対角成分です。

$$\langle\phi(0)^2\rangle = G_a(0) = \int_{[-\pi/a,\pi/a]^d} \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{\sum_{\mu=1}^{d}\frac{4}{a^2}\sin^2\frac{p_\mu a}{2}+m^2} \tag{14}$$

$d=1$ は 07 節の鎖そのもので、(14) は (12) の $j=0$ の値 $a/(2\sinh\kappa)$ に等しく、$1/2m$ に収束します。$d\ge 2$ では発散します。一点の分散の発散は 1-09 でも無限次元のガウス測度の側から扱っています。ここでは経路積分の刻みの続きとして、刻みを半分にするたびに何が起きるかを見ます。

計算 刻みを半分にするたびに、$d=1$ は $1/2$ に収束し、$d=2$ は約 $\ln 2/(2\pi)\approx 0.110$ ずつ増え（$G_a(0)\approx\frac{1}{2\pi}\log\frac1a+0.276$）、$d=3$ は 2 倍（$\approx 0.2527/a$）、$d=4$ は 4 倍（$\approx 0.1549/a^2$）になります（$m=1$。(14) を Bessel 関数 I_0 の一次元積分に直して数値積分）。刻みごとの値の表と次元を選ぶ図は 1-09 表 3・図 3 にあり、この本ではそれを正本にします。四で切り替わる他の量と並べた図は 1-12 §10 の次元のつまみです。

連続極限の場とヤン–ミルズ

連続極限の場は各点の値を持たない**超関数**です（1-11）。$\phi(x)^2$ のような積には引き算（繰り込み）が要ります（4-04・7-03）。

四次元のヤン–ミルズでは、この発散とゲージの自由度（4-08）と相互作用を同時に扱います。問題の解説は、コンパクトな群と有限の（周期的な）時空では、Wilson の格子で関数積分が有限次元の積分になり、そのうえでゲージ不変な観測量の期待値について、格子間隔 $\to 0$・体積 $\to\infty$ の極限が在ることを示す必要がある、と述べます（Jaffe–Witten §6.5）既知。2026-11 に公開された構成は、体積を止めて格子間隔 $\to 0$ の極限を取り、そのあと体積の部分列で極限を取っています（8-05）。四次元の特別さは 四次元の記事 へ。

この章が言えている範囲

内容	状態
(2)〜(12) の式	言えている 既知 （(5)・(8) は条件つき。表 2・3・図 2・3 で数値も確認 計算 ）。$\mathcal{D}x$ が測度にならないことは文献の紹介
表 4 の収束・§09 の発散の増え方の定数	数値で確かめた範囲 計算
格子ゲージ理論の連続極限も「相関長 $\to\infty$」の形で取ること（07 節）	物理の水準の見方 物理 。四次元の尺度の極限は 2026-11 に公開された構成が作った（委員会の評価の水準。6-00）。隙間が正に残る形は示されていない（6-04）
相互作用のある場・ゲージ場の経路積分	扱っていない（4-02・第 7 部）。ヤン–ミルズの質量ギャップは何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1〜4・例の数値・図 1〜3	計算	python3（NumPy・SciPy）。図はブラウザの JavaScript（台形公式・種を固定した乱数・閉じた式 (12)）
§09 の増え方の定数（0.2527・0.1549・0.276）	計算	python3（SciPy の I_0 と数値積分）で、質量 0 の格子の原点の値（$d=3$：0.252727、$d=4$：0.154933）と、$d=2$ の差 $G_a(0)-\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{a}$ の $a=2^{-10}$ までの値（0.27579）を計算。1-09 の表 3 と一致
(1)	既知	R. P. Feynman, “Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics”, Rev. Mod. Phys. 20 (1948) 367–387（書誌は Crossref で確認・本文は書誌のみ）／P. A. M. Dirac, Physik. Z. Sowjetunion 3 (1933) 64（書誌のみ。Dirac の示唆にさかのぼることは下の Scholarpedia の記事による）
積の公式	既知	H. F. Trotter, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959) 545–551（書誌のみ）／M. Reed, B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics I（Academic Press 1972）第 VIII 章（書誌のみ。定理 VIII.31 とされる・番号は未確認）
$\mathcal{D}x$ が測度にならないこと・(8) の条件	既知	R. H. Cameron, “A family of integrals serving to connect the Wiener and Feynman integrals”, J. Math. and Phys. 39 (1960) 126–140（書誌のみ）。内容は S. Albeverio, S. Mazzucchi, “Path integral: mathematical aspects”, Scholarpedia 6(1):8832 (2011) で確認
(8)・(3)	既知	M. Kac, Trans. Amer. Math. Soc. 65 (1949) 1–13／L. Isserlis, Biometrika 12 (1918) 134–139／G. C. Wick, Phys. Rev. 80 (1950) 268–272。いずれも書誌のみ
Symanzik の見方・格子と極限	既知	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills theory”（Clay の問題解説）§3・§6.5 を確認／K. Symanzik, “Euclidean quantum field theory”, in Local Quantum Theory (R. Jost ed., Academic Press 1969) 152–226（書誌のみ。Jaffe–Witten の文献 [46]）
Perron–Frobenius の積分作用素版	既知	R. Jentzsch, “Über Integralgleichungen mit positivem Kern”, J. reine angew. Math. 141 (1912) 235–244（書誌は Crossref で確認・本文は書誌のみ）／M. Reed, B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics IV（Academic Press 1978）（書誌のみ。§XIII.12 とされる・未確認）

もの	種別	出典・道具
停留位相	既知	R. P. Feynman, A. R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals（1965）。書誌のみ
道が微分できないこと	既知	1-09（Durrett の定理を引いている）

次に読む章：2-08 統計力学と相転移。

統計力学と相転移 — 確率の重み、相関の届く長さ、その長さが発散する点

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 熱平衡を確率分布 $e^{-\beta H}/Z$ と読み、$\log Z$ の微分で平均と揺らぎを得ること。
相関長と、ガウス鎖で相関長が $1/m$ で伸びること。
相転移が無限の系でだけ起きること、臨界指数の普遍性、連続極限が臨界点への接近であること。

前提となる章 — 1-08（確率・分散・ガウス測度）。行列の逆は 1-01。03 節の転送行列は 2-07 にも出てきます（読んでいれば。この章でもその場で定義します）。

先に言うこと — 扱うのは格子の上の古典統計力学です。三次元の臨界指数は数値で定理ではなく、場の理論との対応はガウス鎖を除き物理の水準の読み替えです。この章はヤン–ミルズの質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. ボルツマン分布 — 温度は確率の重みの付け方
2. 分配関数は母関数 — 微分すると平均と揺らぎ
3. 相関と相関長 — ガウス鎖で厳密に。相関長の逆数は転送行列の隙間
4. 相転移 — 無限の系でだけ起きる折れ曲がり
5. 平均場の模型 — 綱引きを目で見る（図 1・表 1）。寄り道：分配関数の零点（図 2）
6. 臨界点 — 臨界指数（表 2）
7. 普遍性 — 指数は普遍、係数はそうでない（図 3・表 3）
8. 連続極限 — 臨界点は格子を消す場所（図 4・表 4）

01

ボルツマン分布 — 温度は確率の重みの付け方

多数のスピンや粒子の系の状態の一つ一つを**配置** σ、そのエネルギーを $H(\sigma)$ とします。熱平衡の系は配置の上の確率分布で記述され、エネルギーの低い配置ほど重く、重みは指数関数です。

$$\mu_\beta(\sigma) = \frac{e^{-\beta H(\sigma)}}{Z_\beta}, \qquad Z_\beta = \sum_\sigma e^{-\beta H(\sigma)}, \qquad \beta = \frac{1}{k_B T} \tag{1}$$

μ_β を**ボルツマン分布**、Z_β を**分配関数**と呼びます（T は温度。以下ボルツマン定数 $k_B = 1$、β は逆温度）。$\beta \to 0$ では一様分布に、$\beta \to \infty$ ではエネルギー最小の配置に集中します。$\langle \cdot \rangle$ は μ_β での期待値です（1-08）。

指数関数になる理由の一つが次の変分原理です 既知 。エントロピーを $S(P) = -\sum_\sigma P \log P$ として

$$-\frac{1}{\beta}\log Z_\beta = \min_P \Big(\mathbb{E}_P[H] - \frac{1}{\beta} S(P) \Big) \tag{2}$$

が成り立ち、最小は $P = \mu_\beta$ だけで達成されます（両辺の差が相対エントロピー $\frac{1}{\beta}\sum_\sigma P \log(P/\mu_\beta) \geq 0$）。左辺が**自由エネルギー**です。エネルギーを下げる力と配置の数を増やす力の綱引きで、低温では前者、高温では後者が勝ちます。正確には、有限の系では (2) の最小はいつも μ_β 一つです。無限の系で (2) を一点あたりに直した最小化を考えると、低温では最小を与える状態が一つでなく複数になりえます。この「一つから複数に割れる」ことが、相転移（相の共存）の一つの正確な形です（05 節で一変数の形で見ます）。

例。 相互作用の無い N 個のスピン $\sigma_x = \pm 1$ が外場 h の中にあると（$H = -h\sum_x \sigma_x$）、$Z = (2\cosh \beta h)^N$ で、スピンは独立、$\langle \sigma_x \rangle = \tanh \beta h$ です。

02

分配関数は母関数 — 微分すると平均と揺らぎ

$\log Z$ を微分すると平均と分散が出ます。確率の言葉では、$\log Z_\beta$ は $-H$ のキュムラント母関数（に定数を足したもの）です。キュムラント母関数とは、確率変数 X に対する $t \mapsto \log \mathbb{E}[e^{tX}]$ のことで、$t = 0$ で一回微分すると平均、二回微分すると分散になります。

$$\langle H \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta}\log Z_\beta, \qquad \mathrm{Var}(H) = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\log Z_\beta \geq 0 \tag{3}$$

全磁化 $M = \sum_x \sigma_x$ で外場を $-hM$ と入れると、磁化と**帯磁率** χ（外場への応答）が出ます。

$$\langle M\rangle = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial h}\log Z, \qquad \chi = \frac{1}{N}\frac{\partial \langle M\rangle}{\partial h} = \frac{\beta}{N}\operatorname{Var}(M) \tag{4}$$

右の等式は、押したときの応答が押さないときの揺らぎで決まるという揺動応答の関係です。分散は負でないので $\log Z$ は β についても h についても凸です。一点あたりの $f_N = -\frac{1}{\beta N}\log Z_N$ の $N\to\infty$ の極限 f を**熱力学極限**と呼びます。短距離の相互作用なら極限は存在し、凸性も残ることが知られています [既知]（格子のスピン系では、系を箱に分けたとき $\log Z$ が箱ごとの和と境界の分しか違わないこと〔部分加法性〕による標準的な議論。Ruelle 1969 など）。

例。独立なスピンでは $\chi = \beta(1-\tanh^2\beta h) = \beta\operatorname{Var}(\sigma_x)$。$h=0$ なら $\chi=\beta$ で、どの温度でも有限です。相互作用が無ければ何も起きません。

03

相関と相関長 — 離れた二点はどれだけ連動するか

相互作用があると離れた点が連動します。その度合いが**連結二点相関**（共分散）です。

$$G(x,y) = \langle \sigma_x\sigma_y\rangle - \langle\sigma_x\rangle\langle\sigma_y\rangle \tag{5}$$

並進不変な無限の系では $G(x,y)=G(x-y)$、(4) は $\chi = \beta\sum_x G(x)$。**帯磁率が発散するには、相関がゆっくりしか減らないことが要ります**。相関が指数関数的に減るとき、その長さを**相関長** ξ と呼びます。

$$\frac{1}{\xi} = -\lim_{|x|\to\infty}\frac{\log G(x)}{|x|} \tag{6}$$

対数を取るのは前に付く多項式の因子を許すためです。格子ゲージ理論の相関長も同じ形で定義されます。ただしスピンの代わりに、小さな正方形のループ（プラケット）の変数の相関を使います（5-01、Chatterjee 2018 §5・5-09）[既知]。例は二つです。

イジング模型：$\mathbb{Z}^d$ の各点に $\sigma_x=\pm1$、$H=-J\sum_{\langle xy\rangle}\sigma_x\sigma_y - h\sum_x\sigma_x$（$\langle xy\rangle$ は隣り合う対、$J>0$ は揃うと得をする強磁性の結合。計算例は 2-09）。

ガウス鎖：$\mathbb{Z}$ の各点に実数 ϕ_x を置き、$\beta=1$、$m>0$（**質量**）として

$$H(\phi) = \frac{1}{2}\sum_{x}\Big[(\phi_{x+1}-\phi_x)^2 + m^2\phi_x^2\Big] \tag{7}$$

とします。長さ L の区間に制限して外を $\phi=0$ とおくと、ϕ を縦ベクトルとして $H=\frac12\phi^{\mathsf T}K\phi$（$K$ は対角が m^2+2、隣が -1 の $L\times L$ 行列）と書け、e^{-H} は有限次元のガウス測度で、共分散は K^{-1} です（1-08）。$L\to\infty$ で区間の中央の G は次の (8) に収束します。(8) は、無限の

鎖の式 $\sum_y K_{xy}G(y)=\delta_{x0}$ に $x\neq 0$ で $G=Ae^{-\kappa|x|}$ を入れて $m^2+2=e^{\kappa}+e^{-\kappa}$ を得、$x=0$ の式で A を決めたものです。

$$G(x)=\frac{e^{-\kappa|x|}}{2\sinh\kappa},\qquad \cosh\kappa=1+\frac{m^2}{2},\qquad \xi=\frac{1}{\kappa}\approx\frac{1}{m} \tag{8}$$

質量が小さいほど相関長は長く、$m\to 0$ で $1/m$ の速さで発散します。

計算 $m=1,\ 0.2,\ 0.05$ で $\xi=1.03904,\ 5.00831,\ 20.00208$（$\xi m\to 1$）。区間（1601〜4001 点）の中央で K の逆を数値で求めた $G(20)$ は (8) と 13 桁一致しました。

この鎖は 2-07 の虚時間の調和振動子を時間の格子に置いたものです。$m^2\phi_x^2$ を両隣の結合に半分ずつ配ると、e^{-H} は隣り合う二点の重み

$$T(\phi,\phi')=\exp\!\Big(-\frac{(\phi-\phi')^2}{2}-\frac{m^2(\phi^2+\phi'^2)}{4}\Big)$$

の積になります。この T を核とする積分作用素 $(Tf)(\phi)=\int T(\phi,\phi')f(\phi')\,d\phi'$ を**転送行列**と呼びます（行列の積の $\sum$ を積分に置き換えたもの）。周期的につないだ L 点の鎖では $Z=\int T(\phi_1,\phi_2)T(\phi_2,\phi_3)\cdots T(\phi_L,\phi_1)\,d\phi_1\cdots d\phi_L$、つまり T^L のトレースです。T の大きい方から二つの固有値の比が $e^{-\kappa}$ で、この κ を転送行列の**隙間**と呼びます。**相関長の逆数が隙間になる**最も簡単な例です 既知 （一般の形は 4-11）。計算 T を 1500 点で離散化した行列の固有値の比は、$m=1,\ 0.5,\ 0.2$ で $e^{-\kappa}$ と 10 桁一致しました。

04

相転移 — 無限の系でだけ起きる折れ曲がり

温度などを少し変えただけで振る舞いが一変することを**相転移**と呼びます。数学の言葉では、熱力学極限の $f(\beta,h)$ がその点で解析的でない（その点のまわりでテイラー展開で表せない）ことです。**有限の系では起きません**。正確には、Z_N は β,h の指数関数 $e^{-\beta H(\sigma)}$ の有限和で、実の β,h で正です。だから $\log Z_N$ は何回でも微分でき、テイラー展開が収束します（これを**実解析的**と言います）。

イジング模型では次が知られています 既知 。$d=1$ では相転移は無い（Ising 1925、2-09）。$d=2$、$h=0$ では

$$\sinh(2\beta_c J)=1,\qquad \beta_c J=\tfrac{1}{2}\log\!\big(1+\sqrt{2}\big)=0.440687\ldots \tag{9}$$

で相転移が起きます。転移がただ一つだと仮定して、Kramers–Wannier 1941 が双対性から位置を定め、Onsager 1944 が自由エネルギーを厳密に求めて比熱の $-\log|T-T_c|$ の発散を

示しました。低温で向きが揃って残ることを示す議論は Peierls 1936 に始まるとされます（証明としての整備は後年）。これを正確に言うのが**自発磁化**です。

$$\bar{m}_0(\beta) = \lim_{h \downarrow 0} \lim_{N \to \infty} \langle \sigma_0 \rangle_{N,h} \tag{10}$$

例。極限の順序が大事です。先に $h \to 0$ とすると、有限の系の H は全反転 $\sigma \to -\sigma$ で不変なので $\langle \sigma_0 \rangle = 0$。先に無限にしてから外場を切ると、二次元の $\beta > \beta_c$ で $\bar{m}_0 > 0$ が残ります（$\beta \downarrow \beta_c$ で $(\beta - \beta_c)^{1/8}$ のように 0 へ。Yang 1952）。**極限の順序で答えが変わる**ことは、ヤン–ミルズでも繰り返し問題になります（5-09・17-10）。

分配関数の零点から相転移を見る見方は、05 節の後の寄り道で扱います。

05

平均場の模型 — 綱引きを目で見る

すべてのスピンが同じ強さで結合する **Curie–Weiss 模型** $H_N = -\frac{J}{2N} M^2 - hM$（$M = \sum_{x=1}^{N} \sigma_x$、$J > 0$）は、相転移を手で追える最小の例です。上向きの数 k でまとめて $Z_N = \sum_{k} \binom{N}{k} e^{-\beta H_N}$。一スピンあたりの磁化を $\bar{m} = M/N$ とします（ガウス鎖の質量 m と区別して棒を付けます）。Stirling の公式からの $\binom{N}{N(1+\bar{m})/2} = e^{N s(\bar{m}) + o(N)}$、$s(\bar{m}) = -\frac{1+\bar{m}}{2}\log\frac{1+\bar{m}}{2} - \frac{1-\bar{m}}{2}\log\frac{1-\bar{m}}{2}$ を使うと、和は最大の項で決まります（Laplace の方法）。

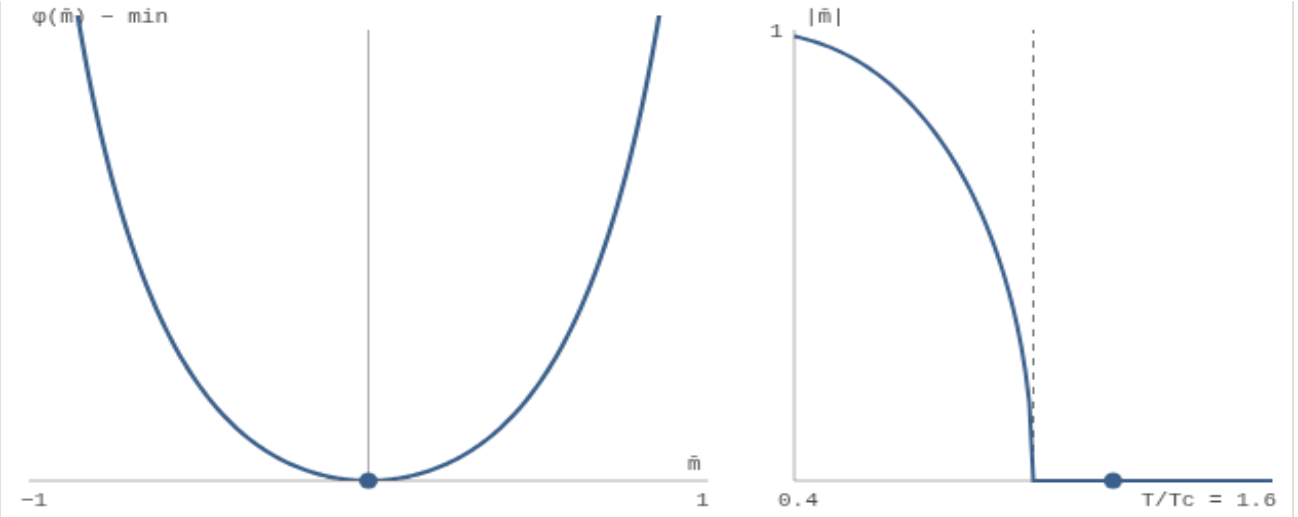
$$f = \min_{-1 \le \bar{m} \le 1} \varphi(\bar{m}), \qquad \varphi(\bar{m}) = -\frac{J}{2}\bar{m}^2 - h\bar{m} - \frac{1}{\beta} s(\bar{m}) \tag{11}$$

(2) の綱引きが一変数に縮みました（第一項がエネルギー、最後の項がエントロピー）。$\varphi'(\bar{m}) = 0$ は

$$\bar{m} = \tanh\bigl(\beta(J\bar{m} + h)\bigr) \tag{12}$$

です。$h = 0$ なら $\beta J \le 1$ で解は $\bar{m} = 0$ だけ、$\beta J > 1$ で $\pm \bar{m}^{*} \neq 0$ が最小になります（臨界温度 $T_c = J$）。$\tanh u \approx u - u^3/3$ から $\bar{m}^{*} \approx \sqrt{3(\beta J - 1)}$、(12) を h で微分すると $T > T_c$ で $\chi = \beta/(1 - \beta J)$（Curie–Weiss の法則）です。

図 1　T/T_c と外場 h を動かすと、左の $\varphi(\bar{m})$（最小を 0 に揃えた）の谷が T_c で二つに割れる。右は $h = 0$ の $\bar{m}^{*}$（線）と今の最小点。「動かす」で冷やす



計算 図は (11)(12)（$J=1$）をその場で計算。$h=0$ の $\bar m^*$ は $T/T_c=0.9,\ 0.8,\ 0.6$ で $0.52543,\ 0.71041,\ 0.90733$（python3 と一致）。

計算 **表 1**　$\sqrt{\langle \bar m^2\rangle}$（$h=0$。有限の N は $\binom{N}{k}$ の和を誤差なく計算）と $N=\infty$ の $\bar m^*$。

N	βJ = 0.8	βJ = 1	βJ = 1.25
1000	0.07003	0.19172	0.70824
10^5	0.00707	0.06083	0.71039
∞	0	0	0.71041

$\beta J=0.8$ は $N^{-1/2}$ で 0 へ（$\sqrt{N}$ 倍は 2.2358、(4) と Curie–Weiss の法則からの予想 2.2361）、$\beta J=1.25$ は $\bar m^*$ へ、臨界の $\beta J=1$ は $N^{-1/4}$ で 0 へ（$N^{1/4}$ 倍で約 1.08）。**有限の N ではどれも β の滑らかな関数で、折れ曲がりは $N\to\infty$ でだけ現れます。**

寄り道：分配関数の零点

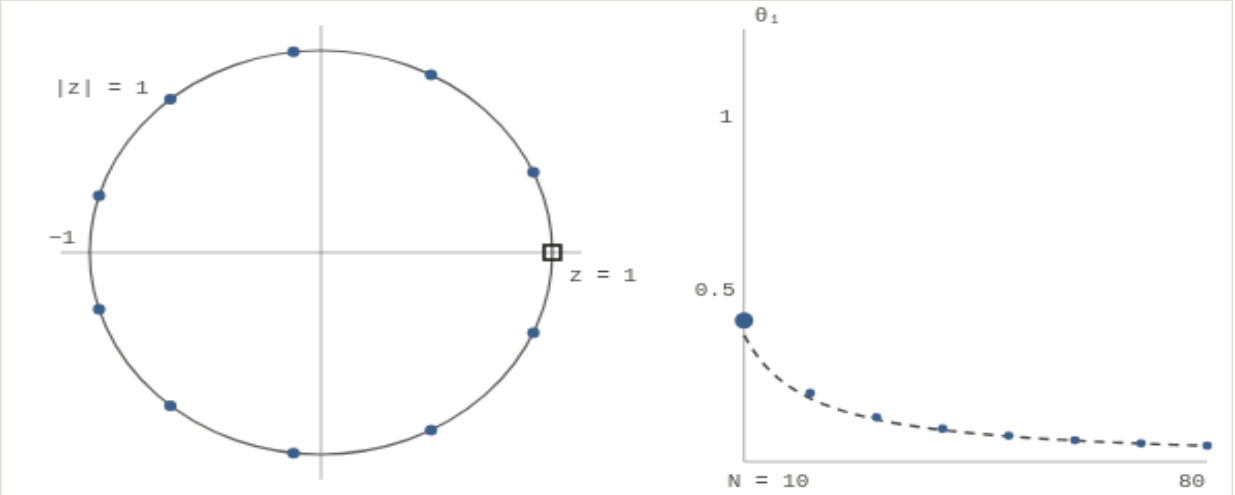
飛ばしてよい小節です。

$z=e^{-2\beta h}$ とおくと Z_N は z の正係数の多項式（に $e^{\beta hN}$ を掛けたもの）で、強磁性なら零点はすべて単位円 $|z|=1$ の上にあります（Lee–Yang 1952）既知 。実の h は正の実軸に、$h=0$ は $z=1$ に当たります。係数が正なので有限の N では零点は $z=1$ に乗らず、$\log Z_N$ は $h=0$ の近くで滑らかです。零点が $N\to\infty$ で $z=1$ を挟み込むと、$h=0$ で f が折れえます。

計算 05 節の模型で $z=1$ に最も近い零点の角 θ_1 は、$N=10$ から 80 で、$\beta J=1.5$ なら $N\theta_1=4.08\to 3.72$（0 へ寄る。低温で Z_N を $\cosh(N\beta h\bar m^*)$ の定数倍で近似したときの予想 $\pi/\bar m^*=3.66$）、$\beta J=0.5$ なら $\theta_1=1.157\to 0.722$（h を複素数にして (12) の二つの解が一つに重なる点から出る予想 0.571 と矛盾しない）でした。

図 2　N を動かすと、単位円の上の零点（点。上下は複素共役）が増える。$\beta J=1.5$（低温）では $z=1$（$h=0$、四角）に寄り、$\beta J=0.5$（高温）では $z=1$ のまわりに零点の無い弧（網掛けは $N\to\infty$ の予想 $|\theta|<0.571$）が残る。

右（幅の狭い画面では下）は θ_1 と予想（破線）。「動かす」で N を 10 から 80 へ



βJ = 1.5　N = 10　θ₁ = 0.40767　Nθ₁ = 4.077（Nθ₁ の予想の行き先 π/m* = 3.659）

計算 図の零点は python3 で求めた角を埋めたもの。$z=e^{i\theta}$ の上で実数になる $z^{-N/2}Z_N$ の符号の変化を 80 桁の十進演算で追い、$0<\theta<\pi$ にちょうど $N/2$ 個あることを確かめた（θ_1 は上の値と 6 桁一致）。

06

臨界点 — 相関長が発散し、べき乗が現れる

自発磁化が 0 から連続に立ち上がる転移の点を**臨界点**と呼びます。近づくと相関長が発散し、多くの量がべき乗で振る舞います。その指数が**臨界指数**です。$t=(T-T_c)/T_c$ として

$$\xi \sim |t|^{-\nu}, \quad \chi \sim |t|^{-\gamma}, \quad \bar{m}_0 \sim (-t)^{\beta}, \quad G(x)\big|_{T=T_c} \sim \frac{1}{|x|^{d-2+\eta}} \tag{13}$$

と書きます（$\sim$ は比が定数に近づくこと。指数の β は逆温度とは別物。η は、後の章で動的な指数と区別するときは η_s と書きます：18-03 §07。緩和の時間と動的指数 z は 2-10）。スケーリングの仮説から指数の間に次の関係が出て（繰り込み群がそれを説明する。Pelissetto–Vicari 2002 の式 (1.38)〜(1.40)）物理、右の二つは $d<4$ で成り立つとされます。

$$\gamma=\nu(2-\eta), \qquad \beta=\frac{\nu}{2}(d-2+\eta), \qquad \alpha=2-d\nu \tag{14}$$

α は比熱の指数です。二次元イジングの $\nu=1,\ \eta=1/4$ を入れると $\gamma=7/4,\ \beta=1/8,\ \alpha=0$ と厳密な値が戻ります計算。

計算 **表 2**　臨界指数。平均場と二次元は Pelissetto–Vicari（表 13 など）、三次元の ν,η は共形ブートストラップの数値（Kos ほか 2016）、* は (14) で計算（誤差で動くのは最後の桁の ±1 程度）。

指数	平均場（d > 4）	二次元イジング	三次元イジング 物理
ν（相関長）	1/2	1	0.629971
η（臨界点の相関）	0	1/4	0.0362978
γ（帯磁率）	1	7/4	1.23708*
β（自発磁化）	1/2	1/8	0.32642*
α（比熱）	0	0（対数）	0.11009*

例。ガウス鎖では質量の二乗 m^2（03 節）が t の役をし、$\xi \approx (m^2)^{-1/2}$ から $\nu = 1/2$。05 節の $\beta = 1/2,\ \gamma = 1$ とともに平均場の列と同じです。η はガウス的な振る舞いからのずれを測り（Pelissetto–Vicari）、三次元イジングでは小さいものの 0 ではありません。

07

普遍性 — 細部を忘れる

表 2 の指数は格子の形や結合の細部に依らず、次元・対称性・相互作用の届く範囲だけで決まると考えられています。同じ指数を持つ系の集まりが**普遍クラス**です 物理 。単純な流体の気体–液体の臨界点や一軸性の反強磁性体は三次元イジングのクラスに属するとされ（Pelissetto–Vicari §3.1）、液体と磁石が同じ指数を持ちます。

臨界点の近くでは ξ が格子の間隔よりずっと長くなります。Kadanoff 1966 は、格子の間隔より大きく相関長より小さい塊にスピンをまとめて見直し、Wilson 1971 はそれを繰り返す操作を繰り込み群の方程式にしました。細部は薄れ、同じ固定点に流れ込む系は同じ指数を持ちます。正確には、普遍性は多くの例で確かめられた物理の原理で、一般の定理ではありません（7-05・4-04）。

最小の例として、(7) に二つ先との結合 $c \geq 0$ を足します。

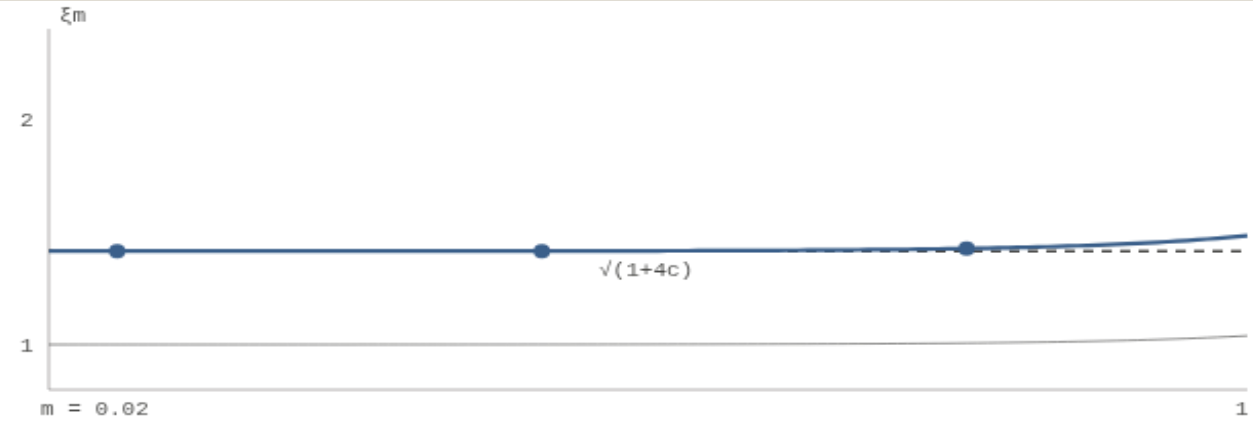
$$H_c = \frac{1}{2}\sum_{x}\Big[(\phi_{x+1}-\phi_x)^2 + c\,(\phi_{x+2}-\phi_x)^2 + m^2\phi_x^2\Big] \tag{15}$$

03 節と同じ計算で G は $e^{-\kappa|x|}$ の形の項の和になり、最も遅く減る項の κ は $m^2 = 2(\cosh\kappa - 1) + 2c(\cosh 2\kappa - 1)$ の最小の正の根です。これは $w = \cosh\kappa$ の二次方程式 $4cw^2 + 2w - (2 + 4c + m^2) = 0$ なので、根は式で書けます。κ が小さいと右辺は約 $(1+4c)\kappa^2$ なので $\xi \approx \sqrt{1+4c}/m$。

計算 **表 3**　c を足した鎖の ξm。行き先は $\sqrt{1+4c} = 1,\ 1.41421,\ 2.23607$（行列の逆とも 10 桁一致）。

m	c = 0	c = 1/4	c = 1
0.4	1.00659	1.42586	2.24613
0.1	1.00042	1.41495	2.23670
0.025	1.00003	1.41426	2.23611

図 3　二つ先との結合 c を動かすと、ξm の曲線（横軸は m、対数目盛。点は表 3 の m）の行き先 $\sqrt{1+4c}$（破線）の高さが変わる。$m \to 0$ で曲線が平らになること（$\xi \propto m^{-1}$）は c に依らない。細い線は $c = 0$。「動かす」で c を 0 から 1 へ



c = 0.25　√(1+4c) = 1.41421　ξm：m = 0.4 で 1.42586、0.1 で 1.41495、0.025 で 1.41426

計算 図は上の二次方程式の根をその場で計算。$c = 0,\ 1/4,\ 1$ で表 3 と一致（python3 の根の探索・行列の逆とも一致）。

指数（$\xi \propto m^{-1}$）は c に依らず、係数 $\sqrt{1+4c}$ は依ります。ゆっくり変わる場では $(\phi_{x+2} - \phi_x)^2 \approx 4(\phi_{x+1} - \phi_x)^2$ なので、二つ先の結合は隣の結合を $1 + 4c$ 倍するだけに見え、長さの物差しを替えれば消えます。

08

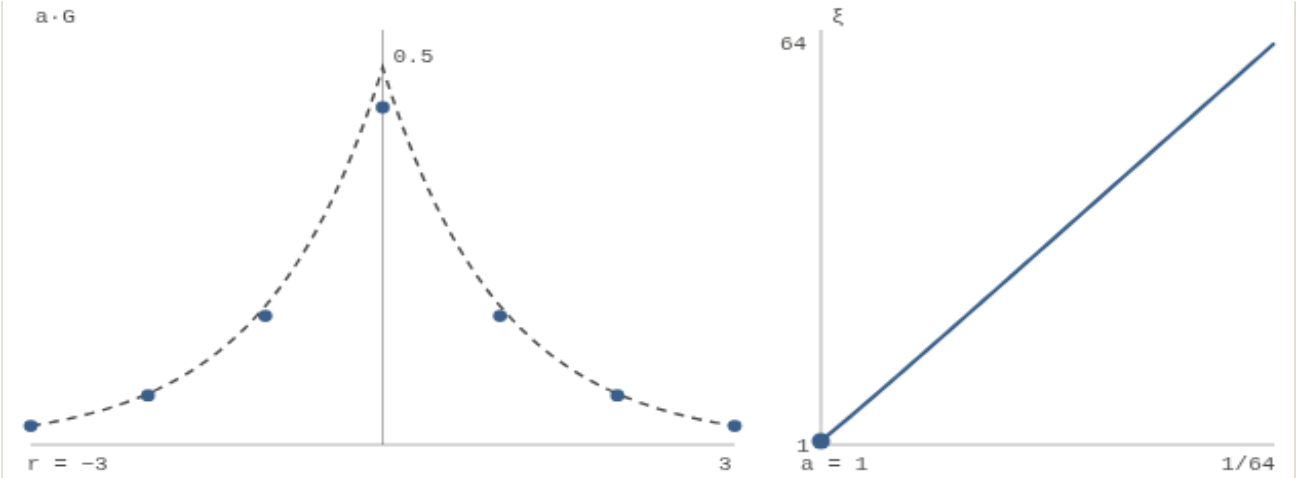
連続極限 — 臨界点は格子を消す場所

格子の間隔 a を入れて点 x を位置 $r = xa$ と読みます。格子の単位の相関長を ξ（03 節の $1/\kappa$）とすると、物理の単位の相関長は $a\xi$ です。$a\xi$ を保って $a \to 0$ とすると、ξ は無限大へ行くしかありません。**連続極限を取ることは、臨界点に近づくことです**（Chatterjee 2018 §5）物理。ガウス鎖ではすべて明示的で、$M > 0$ を固定して $m = Ma$ とおくと $\kappa/a \to M$、$a/(2\sinh\kappa) \to 1/(2M)$ より次が成り立ちます既知。

$$a\,G\Big(\frac{r}{a}\Big) \;\longrightarrow\; \frac{e^{-M|r|}}{2M} \qquad (a \to 0) \tag{16}$$

右辺は $-d^2/dr^2 + M^2$ の逆の核（伝播関数、1-11）で、M が物理の単位の質量です。

図 4　格子の間隔 a を小さくすると、物理の単位の aG（点）が連続の $e^{-M|r|}/2M$（破線、$M = 1$）に重なり、右の格子の単位の相関長 ξ（両対数）は発散する。「動かす」で a を 1 から 1/64 へ



a = 1.00 ξ = 1.039 aξ = 1.0390 a·G(0) = 0.44721（連続 0.5）

計算 図は (8)(16) をその場で計算。**表 4**　$M=1$ で a を縮めたときの ξ（格子の単位）と aG（python3）。最下段は (16) の右辺。

a	ξ（格子の単位）	a·G(0)	a·G(r = 1)
1	1.0390	0.447214	0.170820
1/8	8.0052	0.499026	0.183701
1/64	64.0007	0.499985	0.183936
連続	–	0.5	0.183940

ヤン–ミルズでは、多くの非可換な格子ゲージ理論で臨界点は $\beta=\infty$ にあると信じられ（ここの β は格子ゲージ理論の作用に掛かる定数で、結合定数 g の二乗の逆に比例し、逆温度の役をします。5-01）、相関長の逆数は最も軽いグルーボール（グルーオンだけでできた粒子、17-01）の質量に当たります（Chatterjee 2018 §5）物理。格子の側の問いの一つは「各 $\beta>0$ で相関が指数関数的に減る（$\xi(\beta)$ が $(0,\infty)$ に定まる）こと、$\beta\to\infty$ で $\xi(\beta)\to\infty$」で、Chatterjee は同節でこれを格子の相関長の問題（Problem 5.1）として挙げます（5-09）。連続極限で質量が正に残るかはその先の問いです（5-05・4-11）。重み・相関長・臨界点・普遍性は場の理論の経路積分（4-02）・質量の逆数・連続極限・繰り込みに当たり、ガウス鎖ではこれが厳密です。

この章が言えている範囲

内容	状態
(1)〜(4)・有限の系の解析性・(8) と転送行列の隙間・(15) の ξ・(16)・(11)(12)	言えている 既知 （表 1・3・4 と図 1・3・4 計算 ）
熱力学極限の存在	定理 既知 （文献は書誌のみ）

内容	状態
イジング模型の $d = 1, 2$ の事実、Lee–Yang の定理	定理 既知 （文献は要旨まで確認。Ising 1925・Peierls 1936 は書誌のみ）
寄り道の零点の角（図 2）	$N \leq 80$ の数値 計算 。行き先は予想
三次元の臨界指数・(14)・普遍性一般	数値と物理の水準 物理 （表 2 の * は (14) の算術 計算 ）
相関長と質量の対応・格子ゲージ理論の臨界点 $\beta = \infty$	物理の水準 物理 。質量ギャップ・連続極限の構成について何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1〜4・03 節と寄り道の数値・転送行列の固有値の比・図 1〜4 の照合値と図 2 の零点	計算	python3（NumPy・SciPy。零点は標準ライブラリの 80 桁の十進演算）。図はブラウザの JavaScript
(6) の形・連続極限と臨界点・$\beta_c = \infty$・グルーボール・格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）	既知	S. Chatterjee, arXiv:1803.01950。§5 を確認
(13)(14)・平均場と二次元の指数・普遍クラス	既知	A. Pelissetto, E. Vicari, Phys. Rep. 368 (2002) 549–727, arXiv:cond-mat/0012164。§1.1・§1.2・§3.1・表 13 を確認
三次元イジングの ν, η	物理	F. Kos, D. Poland, D. Simmons-Duffin, A. Vichi, JHEP 08 (2016) 036, arXiv:1603.04436。要旨と序論を確認
(9)・比熱／双対性／自発磁化／零点	既知	L. Onsager, Phys. Rev. 65 (1944) 117／H. A. Kramers, G. H. Wannier, 同 60 (1941) 252／C. N. Yang, 同 85 (1952) 808／C. N. Yang, T. D. Lee, 同 87 (1952) 404／T. D. Lee, C. N. Yang, 同 410。要旨を確認
熱力学極限の存在	既知	D. Ruelle, Statistical Mechanics: Rigorous Results（初版 1969、World Scientific 1999 に再刊）（書誌のみ）
塊にまとめる見方／繰り込み群	既知	L. P. Kadanoff, Physics 2 (1966) 263／K. G. Wilson, Phys. Rev. B 4 (1971) 3174。要旨を確認
一次元で相転移が無いこと／低温の議論	既知	E. Ising, Z. Phys. 31 (1925) 253（書誌のみ）／R. Peierls, Proc. Cambridge Philos. Soc. 32 (1936) 477（書誌のみ・未確認）
(2)・Laplace の方法・ガウス測度の共分散・転送行列の隙間	既知	標準的な事実（1-08・2-07・2-09・4-11）

次に読む章：2-09 寄り道：イジング模型で見るギャップと相関長。質量ギャップとの関係は 4-11、緩和の時間と動的指数は 2-10。

寄り道：イジング模型で見るギャップと相関長 — 転送行列の固有値の比が、相関の届く長さを決める

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 転送行列の最大の二つの固有値の比が相関長を決め、$1/\xi$ が $-\log T$ のギャップそのものであること。二次元の帯で、高温・臨界点・低温のギャップの三通りの振る舞い。低温で閉じる隙間は、質量ギャップが無いことの印ではないこと。

前提となる章 — 2-08（相関長・臨界点）。04 節と 08 節は 2-05（ギャップ・二準位・二重井戸）と 2-07（虚時間・転送行列）を読んでいると楽です。

先に言うこと — 寄り道なので飛ばしてかまいません。二次元の数値は幅 20 までの帯の計算です。この章はヤン–ミルズの質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. 見取り図 — 相関長の逆数はギャップ
2. 一次元イジングと転送行列
3. 相関は固有値の比で減る（図 1・表 1）
4. 転送行列は虚時間の量子力学
5. 二次元：帯の転送行列（表 2）
6. 高温側 — ギャップは残る
7. 臨界点（図 2）— $1/L$ で閉じる
8. 低温側（表 3）— 閉じる隙間と残るギャップ
9. ヤン–ミルズの言葉に戻す（寄り道：Z_2 ゲージ理論）

01

見取り図 — 相関長の逆数はギャップ

質量ギャップはハミルトニアンの最低の二つの固有値の差（2-05）、相関長は離れた二点の連動が消える長さ（2-08）でした。二つが一つの数であることを、最も簡単な模型で確かめます。

鍵は転送行列です。格子を一列ずつ進む行列 T の固有値を $\lambda_0 > \lambda_1 \geq \cdots$、$E_n = -\log \lambda_n$ とすると

$$\frac{1}{\xi} = \log \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = E_1 - E_0 \tag{1}$$

です（条件は 04 節）。左辺は統計の量、右辺は「ハミルトニアン」$H = -\log T$ のギャップで、一目盛りを虚時間の一刻みと読めば、2-05 の (8) が言う「減衰の速さはギャップ」と同じ内容です。

例。二次元の幅 L の帯では、$E_1 - E_0$ は高温側で正の値に落ち着き、臨界点で $1/L$ に比例して、低温側で指数関数的に閉じます（05〜08 節）。

02

一次元イジングと転送行列 — 分配関数は行列のトレース

N 個のスピン $\sigma_i = \pm 1$ を輪に並べ（$\sigma_{N+1} = \sigma_1$）、隣どうしを結合します。$K = \beta J$、$B = \beta h$ とし、外場の項を隣の二点に半分ずつ配ると、重みは隣の対ごとの因子の積です。

$$e^{-\beta H} = \prod_{i=1}^{N} \exp\Bigl(K\sigma_i\sigma_{i+1} + \tfrac{B}{2}(\sigma_i + \sigma_{i+1}) \Bigr) \tag{2}$$

一つの因子は σ_i と σ_{i+1} だけで決まるので 2×2 の行列になり（行が σ_i、列が σ_{i+1}、$+1$ が一行目）、和は輪を一周して戻るのでトレースです。

$$T = \begin{pmatrix} e^{K+B} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K-B} \end{pmatrix}, \qquad Z_N = \sum_{\sigma} \prod_{i} T_{\sigma_i \sigma_{i+1}} = \operatorname{tr} T^N = \lambda_0^N + \lambda_1^N \tag{3}$$

T は実対称なので固有値は実で（1-01）、

$$\lambda_{0,1} = e^{K}\cosh B \pm \sqrt{e^{2K}\sinh^2 B + e^{-2K}} \tag{4}$$

です。N が大きいと $Z_N \approx \lambda_0^N$ です。分配関数を行列の最大固有値で求める方法は Kramers–Wannier 1941 が一次元の鎖で実行し、二次元へ進めたものです 既知 。

例。計算 $N=14$、$K=0.7$、$B=0.2$ で 2^{14} 個の配置を全部足した Z_N と相関は、(3) のトレースの式と丸め誤差の範囲（相関の差 10^{-13} 未満）で一致しました。

03

相関は固有値の比で減る — 一次元に相転移は無い

T の正規直交な固有ベクトルを v_0, v_1、スピンを $S=\mathrm{diag}(1,-1)$ で表します。$N\to\infty$ では輪の残りが $\lambda_0^{N-r} v_0 v_0^{\mathsf{T}}$ に置き換わり、間の T^r を固有値で展開すると距離 r の相関が出ます。

$$m = v_0^{\mathsf{T}} S v_0, \qquad G(r) = \langle \sigma_0 \sigma_r \rangle - m^2 = (v_0^{\mathsf{T}} S v_1)^2 \Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\Big)^r = (1-m^2)\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\Big)^r \tag{5}$$

最後の等号は $v_0=(\cos\varphi,\sin\varphi)$、$v_1=(-\sin\varphi,\cos\varphi)$ とおくと $m=\cos 2\varphi$、$v_0^{\mathsf{T}} S v_1 = -\sin 2\varphi$ となることから出ます。相関長は (1) の通りです。$B=0$ なら $\lambda_0=2\cosh K$、$\lambda_1=2\sinh K$ で

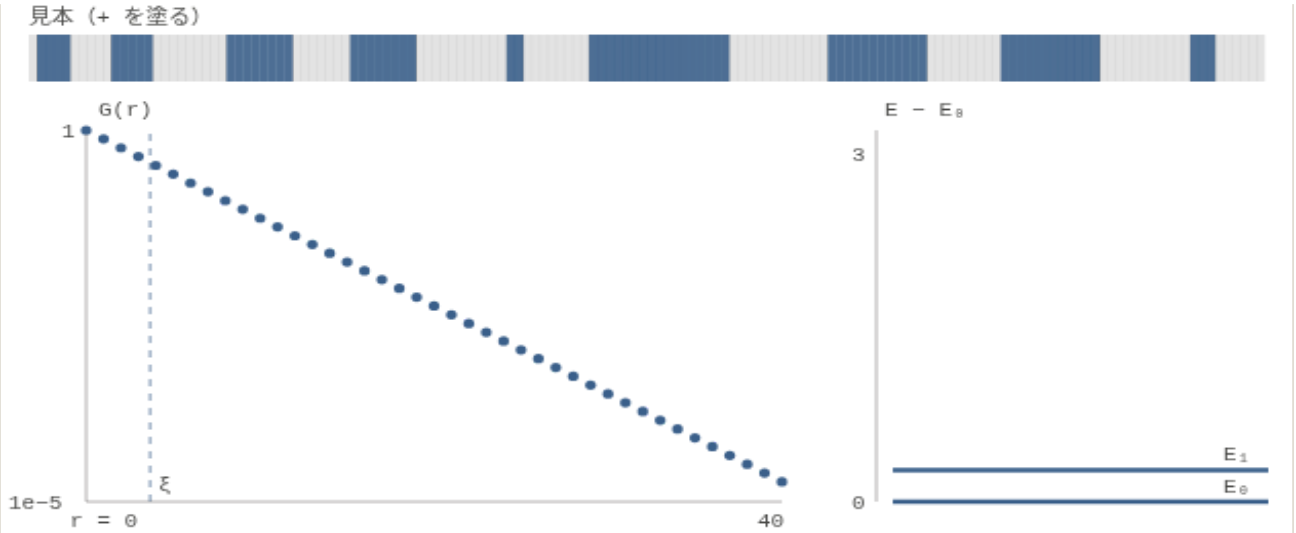
$$G(r) = (\tanh K)^r, \qquad \xi = \frac{1}{\log\coth K} \;\approx\; \frac{e^{2K}}{2} \quad (K\to\infty) \tag{6}$$

計算 **表 1**　$B=0$ の固有値と相関長。

K	λ_0	λ_1	ξ	$e^{2K}/2$
1	3.086161	2.350402	3.671861	3.6945
2	7.524391	7.253721	27.296022	27.2991
3	20.135324	20.035750	201.713984	201.7144

どの $K<\infty$ でも $\lambda_0>\lambda_1$ なので ξ は有限で、外場を切ると $m=\sinh B/\sqrt{\sinh^2 B + e^{-4K}} \to 0$ です。(4) の根号の中は正なので λ_0 は λ_1 と重ならず、一点あたりの自由エネルギー f は $\beta f = -\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log Z_N = -\log\lambda_0$ で、K と B の解析的な関数です。これが一次元に相転移が無いこと（Ising 1925。相転移の定義は 2-08 の 04 節）の、転送行列での理由です 既知 。成分がすべて正の一般の正方行列でも最大固有値は重ならず、これを Perron–Frobenius の定理と呼びます（ここでは名前だけ）。直観では、隣が食い違う割合（壁の割合）$p=\frac{1-\tanh K}{2}\approx e^{-2K}$ がどれほど低温でも 0 にならず、相関は壁を越えるごとに符号を変えるので $\xi\approx 1/(2p)$ です。

図 1　K と B（= βh）を動かすと、上の鎖の見本の塊の長さ、左の G(r)（対数目盛）の傾き、右の準位の間隔 $E_1-E_0 = 1/\xi$ が一緒に変わる。「動かす」で K を増やす（冷やす）



計算 $G(r)$ と準位は (4)(5) をその場で計算、鎖は v_0 から作るマルコフ連鎖の見本（種を固定した乱数）。読み出しは python3 と一致（$K=1$、$B=0.1$ で $\xi=2.9563$）。

04

転送行列は虚時間の量子力学 — 一つのスピンの二準位

$B=0$ の T は e^{K} 倍の単位行列と e^{-K} 倍の $\sigma^x=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$（1-04）の和です。$e^{K^*\sigma^x}=\cosh K^*+\sigma^x\sinh K^*$ と比べると

$$T=\sqrt{2\sinh 2K}\;e^{K^*\sigma^x},\qquad \tanh K^*=e^{-2K}\quad\left(\text{同値な形 }\sinh 2K\,\sinh 2K^*=1\right)\tag{7}$$

と書けます。K^* を双対結合と呼びます（Kramers–Wannier の双対性の量）。$T=e^{-H}$、$H=-K^*\sigma^x+$ 定数 は横向きの磁場の中の一つのスピン、つまり二準位系（2-05）で、ギャップは $E_1-E_0=2K^*=\log\coth K=1/\xi$ です。鎖の方向が虚時間、一目盛りが刻み 1 です（2-07）。結合が強い（低温）ほど K^* は小さく、二準位は寄り、相関は長く続きます。

一般に、T が正の対称行列（無限次元なら正の自己共役作用素）で固有ベクトルが $|n\rangle$ なら、観測量 A の相関は同じ計算で

$$\langle A_0A_r\rangle-\langle A\rangle^2=\sum_{n\geq 1}|\langle 0|A|n\rangle|^2\,e^{-(E_n-E_0)r}\tag{8}$$

です 既知 。例。係数 $\langle 0|A|n\rangle$ が対称性で 0 になる準位は、その A の相関に現れません。ギャップは「どの観測量にも効く最も遅い減り方」で、個々の相関はそれ以上の速さで減ります（2-05 表 2 の後の注）。格子ゲージ理論で転送行列が正の自己共役になることは反射正値性から出ます 既知 （Osterwalder–Seiler 1978 とされる。詳しくは 5-03）。

05

二次元：帯の転送行列 — 2^L 次の行列

正方格子の二次元イジング模型（$B=0$、縦横とも K）を幅 L の帯に置きます。幅の方向は周期的につなぎ（円筒）、長さの方向を虚時間と読みます。一列の状態は 2^L 通りで、列の中の結合を対角行列 $V_1=\exp(K\sum_j \sigma_j\sigma_{j+1})$、隣の列との結合を V_2 とすると、(7) を各点に使って

$$T = V_1^{1/2} V_2 V_1^{1/2}, \qquad V_2 = (2\sinh 2K)^{L/2} \exp\Bigl(K^* \sum_{j=1}^{L} \sigma_j^x\Bigr) \tag{9}$$

です。ここで σ_j^x は j 番目のスピンだけを裏返す 2^L 次の行列、σ_j^z は j 番目のスピンの符号 ±1 を掛ける対角行列で、どちらも他のスピンには何もしません。V_1 の指数は $\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z$ の和、V_2 の指数は σ_j^x の和です。V_1 を半分ずつ両側に置くと T が対称行列になり、04 節の (8) が使えます。T は一列の量子スピンの系（横磁場イジング鎖）の虚時間の一刻みの形です。二次元の古典統計力学が一次元の量子系になりました。

T は全反転 $\sigma\to-\sigma$ と交換するので固有ベクトルは偶と奇に分かれ、偶の最大が λ_0、奇の最大が λ_1、帯の相関長は $\xi_L=1/(E_1-E_0)$ です（de Queiroz 2011 の式 (1)）。臨界点 $\sinh 2K_c=1$（2-08 の (9)）は、(7) から $K^*=K$ となる自己双対の点です。

計算 **表 2**　幅 L の帯の準位の差（E_2 は三番目の準位）。最下段は $L\to\infty$ の式の値（06〜08 節）。

L	$T/T_c=1.5$ E_1-E_0 図 2 へ	**1.2** E_1-E_0 図 2 へ	**1.0** ξ_L/L 図 2 へ	**0.8** E_1-E_0 図 2 へ	**0.8** E_2-E_0 図 2 へ
8	0.666788	0.326116	1.264745	7.731e-3	1.122679
12	0.665579	0.314285	1.269548	1.173e-3	0.969005
16	0.665513	0.311692	1.271177	1.924e-4	0.907939
20	–	0.311069	1.271924	3.287e-5	0.878022
式	0.665509	0.310856	1.273240	0	0.821788

$L=20$（$2^{20}\approx10^6$ 次）も、行列を作らず V_1 と V_2 を順に掛ける作用だけで求めました。三つの温度で振る舞いがまったく違います。

06

高温側 — ギャップは残り、その上に粒子の帯

$T>T_c$（$K<K^*$）では L を広げても E_1-E_0 は正の値に落ち着きます。帯の固有値には閉じた形があり（Onsager 1944。まとめは Domb 1960 の総説、式の形は de Queiroz 2011 の式

(6)〜(8))、その部品が次の $\gamma(\omega)$ です。右の形は $\sinh 2K \sinh 2K^* = 1$ から出ます。

$$\cosh\gamma(\omega) = \cosh 2K^* \cosh 2K - \sinh 2K^* \sinh 2K \cos\omega = \cosh\gamma(0) + (1 - \cos\omega) \quad (10)$$

$\gamma(0) = 2|K^* - K|$ で、表 2 の $E_1 - E_0$ は $2(K^* - K)$ に近づきます 計算 （$T/T_c = 1.5$、$L = 16$ で差 4×10^{-6}）。$\gamma(\omega)$ は運動量 ω の一つの粒子のエネルギーと読めます（自由フェルミオンの見方。Schultz–Mattis–Lieb 1964）。帯の上では運動量が $2\pi n/L$ に量子化され、奇の二番目の準位は $\gamma(2\pi/L)$ に近く、T_c から離れるほどよく合います（$L = 16$ で、$T/T_c = 1.5$ なら 0.763461 と 0.763457、1.2 なら 0.495433 と 0.494596）計算 。$L \to \infty$ でこれらが $\gamma(0)$ まで降り、ギャップの上は連続した帯になります（2-05 の 06 節の実例）。

例。臨界点の近くで γ, ω が小さいと、(10) の右の形を二次まで展開して

$$\gamma(\omega)^2 \approx \gamma(0)^2 + \omega^2 \quad (11)$$

で、相対論の $E^2 = m^2 + p^2$（光速 1、2-04）の形です。正確には、(11) は $\gamma(0)$ と ω が小さいときだけの近似です（$T/T_c = 1.05$、$\omega = 0.1$ で左辺 0.017234、右辺 0.017263）計算 。

07

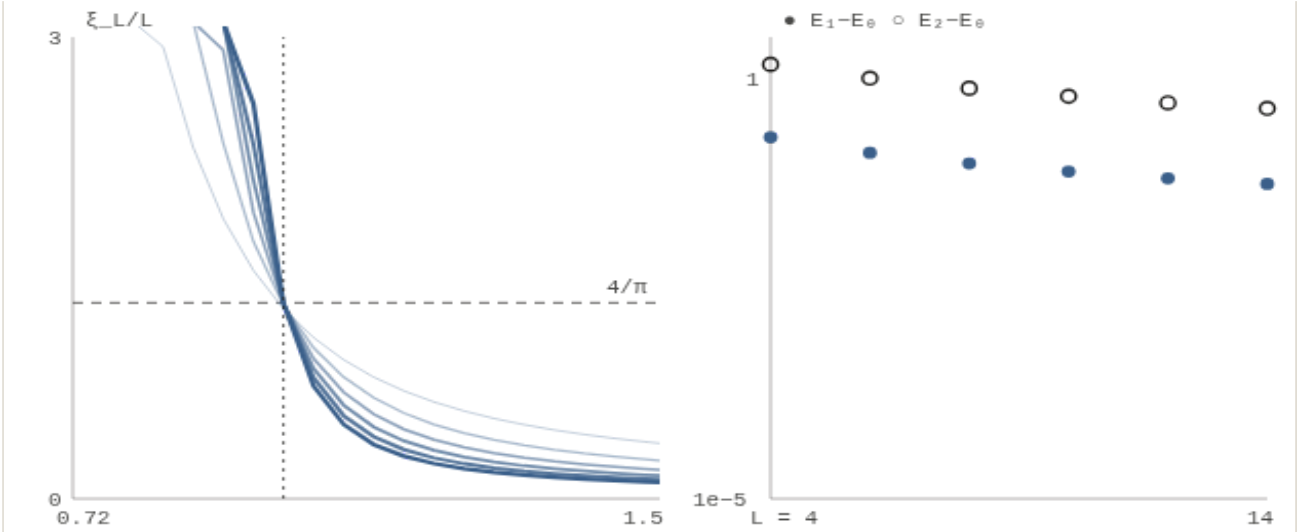
臨界点 — ギャップは 1/L で閉じる

$T = T_c$ では $\gamma(0) = 0$ で、無限に広い帯のギャップは 0 です。有限の帯では ξ_L が L に比例して伸び、比例定数は模型の細部に依らない普遍量です。次の (12) の最初の式（一般の関係）は、共形不変性（臨界点で、角度を保つ変換にも形を変えない、という性質。ここでは名前だけ）からの予言です 物理 （Cardy 1984。形は de Queiroz 2011 の式 (3)(5))。二次元イジングでは、06 節の帯の固有値の閉じた形から同じ値 $4/\pi$ が出ます 既知 。

$$E_1 - E_0 \approx \frac{2\pi x}{L}, \qquad \frac{\xi_L}{L} \longrightarrow \frac{1}{2\pi x} = \frac{4}{\pi} = 1.273240 \quad \left(x = \tfrac{1}{8}\right) \quad (12)$$

x はスピンの尺度次元で、臨界点で $G(r) \sim r^{-2x}$、二次元では 2-08 の $\eta = 1/4$ の半分です。例。計算 $L = 18,\ 20$ の ξ_L/L から、差が c/L^2 で消えると仮定して外挿すると 1.273248 で、$4/\pi$ との差は 8×10^{-6} です。

図 2　T/T$_c$ を動かすと、左の縦線と、右の幅 L ごとの E$_1$ − E$_0$（●）・E$_2$ − E$_0$（○）（対数目盛）が変わる。左は ξ$_L$/L（L = 4〜14、濃いほど広い）と 4/π（破線）。右の破線は L → ∞ の式、点線は低温側の傾き σ。「動かす」で冷やす。表 2 の「図 2 へ」でも温度を選べる



計算 図の数値はこの端末で計算しました（$L=4$〜14、$T/T_c=0.72$〜1.5 を刻み 0.04（最後だけ 0.02）。python3 の値を有効数字 4 桁で埋め込み）。右の破線と点線は (10)(13) の値をその場で計算。

左の線は幅が違っても T_c でほぼ一点に集まり、高温側では L が大きいほど下へ、低温側では上へ開きます。

08

低温側 — 閉じる隙間と、残るギャップ

$T<T_c$ では E_1-E_0 が L とともに指数関数的に小さくなります。帯の上には「ほぼ全部 $+$」と「ほぼ全部 $-$」の二つの状態があり、偶と奇の最大固有ベクトルはその和と差です。一方から他方へ移るには帯を横切る長さ L の壁が要り、その重みは $e^{-\sigma L}$ 程度です。σ は壁の単位長さあたりの自由エネルギー（界面張力）で、二次元イジングでは

$$\sigma = 2(K - K^{*}) \qquad (K > K_c) \tag{13}$$

とされます（反対向きの秩序の境界の自由エネルギーは Onsager 1944 が求めた）。(13) は T_c（$K=K^{*}$ の自己双対点）で 0 になり、$K\to\infty$ では、壁の単位長さあたり食い違う結合一本ぶんの $2K$（重み e^{K} が e^{-K} になる）に近づきます。(7) の関係は K と K^{*} を入れ替えても成り立つ（$\tanh K = e^{-2K^{*}}$）ので、等価な形は $\sigma = 2K + \log\tanh K$ です。2-05 の 07 節の二重井戸と同じ構図です。正確には、山の高さに当たるのが壁の自由エネルギー σL で、幅に比例して高くなります。

一方、三番目の準位との差 E_2-E_0 は閉じず、(10) の粒子二つ分 $2\gamma(0)=4(K-K^{*})$ に近づくとされ、表 3 の外挿はそれと矛盾しません 物理。二つ分になるのは、幅の方向を周期的につないだ一列の中では、向きの食い違いが一周すると元に戻るので偶数個しか入らず、食い違い一つが (10) の粒子一つに当たるからです。

計算 **表 3**　$T/T_c = 0.8$。傾きは $\frac{1}{2}\log\frac{(E_1-E_0)_{L-2}}{(E_1-E_0)_L}$、補正は前因子を $L^{-1/2}$ と仮定したもの、外挿は $L-2$ と L の E_2-E_0（表 2）から、差が c/L^2 で消えると仮定したもの。

L	傾き	補正した傾き	E_2-E_0 の外挿
12	0.46438	0.41880	0.838971
16	0.44854	0.41515	0.827635
20	0.43991	0.41357	0.824247
式	0.410894	0.410894	0.821788

傾きは σ へ、外挿は $4(K-K^*)$ へ向かって動きます。前因子と補正の形は仮定なので、(13) と矛盾しないという水準の確認です。逆に σ を (13) の値に固定し、前因子を L^{-p} として隣の二つの L から p を逆算すると、$L=12,\,16,\,20$ で 0.587、0.564、0.551 と $1/2$ に近づいていきます 計算 。有限の帯（円筒）での一次転移の有限サイズ効果は Privman–Fisher 1983 が論じたとされます。図 2 の右で T/T_c を 1 より下げると、● が傾き σ の点線に平行に並んでいくのが見えます。

大事な読み方です。幅 L が有限なら T の成分はすべて正なので（V_2 の成分は $e^{\pm K}$ の積）、03 節で名前を挙げた Perron–Frobenius の定理により $\lambda_0 > \lambda_1$、つまり $E_1-E_0>0$ です（03 節と同じく相転移はありません）。$E_1-E_0\to 0$ は、幅 L を無限に広げた極限で秩序状態が $+$ と $-$ の二つになる印で、それぞれの上には正のギャップ（上の E_2-E_0 の極限）が残るとされます 物理 。閉じる隙間は「真空が二つある」印で、「質量ギャップが無い」印ではありません。質量ギャップを論じるときは、真空が一つであることを別に確かめます（4-11）。

09

ヤン–ミルズの言葉に戻す

この章の対応を並べます。どれも物理の水準の読み替えで、ヤン–ミルズについて何かを示すものではありません 物理 。表と下の段落の β は格子ゲージ理論の作用に掛かる定数（g^2 の逆に比例。2-08 §08）で、この章の逆温度の β とは別の量です。

イジング模型	格子ゲージ理論	章
$1/\xi = E_1-E_0$	最も軽いグルーボールの質量（格子の単位）	5-08・4-11
帯の幅 L を広げる	空間の箱を広げる	5-04
$K\to K_c$ で $\xi\to\infty$	$\beta\to\infty$ で $\xi(\beta)\to\infty$（連続極限）	5-05・5-09
界面張力 σ	弦張力	5-02・17-03

違いもあります。四次元の非可換ゲージ理論の臨界点は $\beta=\infty$ にあると信じられ、そこへの近づき方を漸近自由が決めます（4-06）。二次元イジングのような閉じた形の解もありませ

ん。

寄り道：Z_2 ゲージ理論とイジング模型

飛ばしてよい小節です。

群を $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ にした格子ゲージ理論（5-01 の形でリンク変数が ± 1）は Wegner 1971 が導入したとされます。三次元では三次元イジング模型と双対で、その Wilson ループの面積則の係数が、双対な結合の三次元イジング模型の界面張力に対応するとされます 既知 （書誌のみ）。次元と群をそろえれば、上の表の最後の行は比喩ではなく等式になります（三次元での話で、この章の二次元の σ そのものではありません）。有限群の格子ゲージ理論は 5-10。

この章が言えている範囲

内容	状態
一次元の (2)〜(7)・二準位の読み替え・(8)	言えている 既知 （表 1・全数え上げ 計算 ）
表 2（$L \le 20$）・高温側の極限・(10) (11)・臨界点の $4/\pi$	式は文献 既知 、数値の一致は 計算 （外挿は c/L^2 を仮定）。(12) の一般の関係は共形不変性からの予言 物理
界面張力 (13)・$E_2 - E_0 \to 4(K - K^*)$・秩序状態の上に残るギャップ	式の形は文献の本文で未確認（「とされる」） 物理 。(13) の両端の値・表 3・前因子の指数は 計算 （表 3 と指数は仮定つきの傾向の確認）
09 節の対応表	物理の水準の読み替え 物理 。質量ギャップ・連続極限の構成について何も示していない
$\mathbb{Z}_2$ ゲージ理論と三次元イジング模型の双対	既知 （書誌のみ・未確認）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1〜3・全数え上げ・分散の照合・前因子の指数・図の数値	計算	python3（NumPy・SciPy の `eigsh`。2^L 次の作用を行列を作らずに掛ける）。図はブラウザの JavaScript
転送行列の方法・一次元の鎖	既知	H. A. Kramers, G. H. Wannier, Phys. Rev. 60 (1941) 252。要旨を確認
$\xi_L = 1/\log(\lambda_0/\lambda_1)$・(10)・双対結合・(12) の形	既知	S. L. A. de Queiroz, Phys. Rev. E 84 (2011) 031107, arXiv:1105.6248。§I・§II の式 (1)〜(9) を確認。閉じた形のまとめ（総説）C. Domb, Adv. Phys. 9 (1960) 149 は書誌のみ

もの	種別	出典・道具
(12) の一般の関係（共形不変性から）	物理	J. L. Cardy, J. Phys. A 17 (1984) L385。要旨を確認
帯の固有値の閉じた形・境界の自由エネルギー（(13) の出所）	既知	L. Onsager, Phys. Rev. 65 (1944) 117。要旨を確認（円筒の帯の固有値問題と、境界の自由エネルギーを扱っていること。(13) の式の形は未確認）
自由フェルミオン／一次元で相転移が無いこと	既知	T. D. Schultz, D. C. Mattis, E. H. Lieb, Rev. Mod. Phys. 36 (1964) 856／E. Ising, Z. Phys. 31 (1925) 253。いずれも書誌のみ
Z_2 ゲージ理論と双対	既知	F. J. Wegner, J. Math. Phys. 12 (1971) 2259（書誌のみ・未確認）
格子ゲージ理論の転送行列と反射正値性	既知	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（書誌のみ・未確認）
有限の帯での一次転移の有限サイズ効果	既知	V. Privman, M. E. Fisher, J. Stat. Phys. 33 (1983) 385（書誌のみ・未確認）

次に読む章：2-10 緩和の時間と動的指数 z。あわせて読むなら 3-01 ゲージ原理。ギャップの定義の本体は 4-11、格子の転送行列は 5-03。

緩和の時間と動的指数 z — 平衡へ向かう速さは、相関長の何乗で遅くなるか

この章は既存の知見の整理です。§05 は本書の検討です。

この章で分かること — 同じ平衡の分布を作る力学（Langevin・Glauber・熱浴）の緩和時間を Poincaré 定数 C_P で測ること。ガウス鎖と一次元イジングでは緩和時間が相関長の二乗（$z = 2$）になり、二次元イジングの臨界点ではそれより遅くなること。動的指数 z と $\eta_{\mathrm{dyn}} = 2 - z$ の定義と、$z = 2$ の型が破れる既知の例。

前提となる章 — 2-08（相関長・臨界点・ガウス鎖）と 2-09（イジング模型の転送行列）。Poincaré 不等式は 1-10 §07、ブラウン運動は 1-09 §06 を読んでいると楽です。

先に言うこと — 厳密なのはガウス鎖と一次元の鎖だけです。z の値（2.1665 など）は数値と物理の予言で、二次元イジングのこの端末の計算は一辺 5 までの小さな箱です。この章はヤン–ミルズの質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. 時間を足す — 平衡の写真と、それを作る機械
2. Langevin の力学 — 隙間の逆数が Poincaré 定数
3. Glauber の力学（表 1）— 一次元では $\tau \approx 2\xi^2$
4. ガウス鎖の Langevin（図 1・表 2）— $C_P = \xi^2$ は連続極限で厳密
5. 二次元イジングの小さな箱（表 3・図 2）— 臨界点で C_P/L^2 が伸びる
6. 動的指数 z と η_dyn — $\eta_{\mathrm{dyn}} := 2 - z$ をここで定める
7. z ≠ 2 の既知の例（表 4・寄り道：保存する力学では z = 4）
8. 熱浴と Langevin を同一視しない — 定数・単位・変数の取り方
9. ヤン–ミルズへの橋 — 分かっていること、いないこと

01

時間を足す — 平衡の写真と、それを作る機械

2-08 と 2-09 で扱ったのは平衡の分布、つまり「どの配位がどれだけの確率で現れるか」でした。そこには時間がありません。ところが計算機で平衡の分布から見本を引くとき、あるいは物理の系が熱浴に触れて平衡に向かうとき、配位は時間とともに動きます。この章は、その動きの速さを測ります。

比喩で言うと、平衡の分布は一枚の写真で、力学はそれを作る機械です。同じ写真を作る機械は速いものも遅いものもあります。正確には、一つの確率測度 μ を不変にするマルコフ過程（先の動きが今の配位だけで決まる確率的な動き）は一つに決まらず、選び方で平衡への近づき方が変わります。

この章の時間 s は、2-09 の虚時間とは別物です（対照は 18-03 §05）。

虚時間（2-07・2-09）	力学の時間 s（この章）
配位の**中**の一つの向き。相関 $\langle\sigma_0\sigma_r\rangle$ の減り方が相関長 ξ を決め、$1/\xi$ は転送行列のギャップ。	配位**全体**が動く外の時間。自己相関の減り方が緩和時間 τ を決め、$1/\tau$ は生成作用素のギャップ。

主題は関係 $\tau \approx \xi^{z}$ で、z を動的指数と呼びます。後の部の仮定（A-06 名前の索引）は $z=2$ を冪の水準で置く型をしています。その型が成り立つ例と破れる例を、ここで先に並べます。

02

Langevin の力学 — 坂を下る動きに揺らぎを足す

一つの実数 X が、確率密度 $e^{-V(x)}/Z$ に従うようにしたいとします。坂 V を下る向きに動かし、同時に乱数で揺らすと、二つの効果が釣り合ったところで分布が止まります。これが Langevin の力学です。

$$dX = -V'(X)\,ds + \sqrt{2}\,dW(s) \tag{1}$$

W はブラウン運動（1-09 §06）で、dW は時間 ds のあいだの平均 0・分散 ds のガウスの増分です。係数 $\sqrt{2}$ は、止まる分布がちょうど e^{-V} になるように選んだものです。

関数 f の期待値の時間変化を生む作用素を生成作用素と呼び、$\mathcal{L}$ と書きます。$f(X+dX)$ を二次まで展開すると、dX の一次の項からは坂の向きの $-V'f'\,ds$ が、二次の項からは dW^2 の

平均が ds なので $\frac{1}{2} f'' \cdot 2\,ds$ が残ります（ds より高い次数は落とす）。こうして (1) では

$$\mathcal{L} f = f'' - V' f', \qquad \frac{d}{ds}\,\mathbb{E}\, f(X_s) = \mathbb{E}\,(\mathcal{L} f)(X_s), \qquad \int f\,(-\mathcal{L} g)\,d\mu = \int f' g'\,d\mu \tag{2}$$

です（$\mu = e^{-V} dx / Z$。最後の等式は部分積分）。最後の等式から $-\mathcal{L}$ は $L^2(\mu)$ で対称で、0 以上です。0 になるのは定数だけで、その次の固有値（隙間）を $\mathrm{gap}(\mathcal{L})$ と書きます。

隙間の逆数が Poincaré 定数です（1-10 §07）。

$$\mathrm{Var}_\mu f \;\le\; C_P \int |f'|^2\,d\mu \quad (\text{すべての } f), \qquad C_P = \frac{1}{\mathrm{gap}(\mathcal{L})} \tag{3}$$

平衡から走らせたとき、どの観測量の自己相関も e^{-s/C_P} より速く減り、ちょうどこの速さで減る観測量があります。つまり最も遅い緩和の時間 $\tau_{\exp}$ は C_P に等しくなります 既知 。この等号は連続時間で可逆な力学の性質で、離散時間の連鎖では三つの量に割れます（18-03 §06）。

例。$V = x^2/(2\sigma^2)$ なら (1) は Ornstein–Uhlenbeck 過程で、$f = x$ が固有関数、$\mathcal{L} x = -x/\sigma^2$ です。よって $C_P = \sigma^2$：分散が大きい（裾が広い）ほど緩和は遅くなります。変数が多いときは、各点の場 ϕ_x ごとに (1) を立てて

$$d\phi_x = -\frac{\partial S}{\partial \phi_x}\,ds + \sqrt{2}\,dW_x(s) \tag{4}$$

とし（W_x は点ごとに独立）、(3) の $|f'|^2$ を勾配の長さの二乗 $|\nabla f|^2$ に替えます。止まる分布は e^{-S}/Z です。場の理論ではこれを確率量子化と呼びます（7-09）。

03 Glauber の力学 — スピンを一つずつ裏返す

イジング模型のスピンは ± 1 なので、坂を連続に下ることができません。代わりに、各スピンが独立な時計を持ち、時計が鳴るとスピンを条件つき分布から引き直します。これを熱浴の規則と呼び、連続時間でこれを行う力学を Glauber の力学と呼びます（Glauber 1963 は一次元の閉じた鎖でこの型の過程を詳しく解析した） 既知 。

逆温度を結合に含めた K（2-09 と同じ）で $\mu(\sigma) \propto \exp(K \sum_{\langle xy \rangle} \sigma_x \sigma_y)$ とします。スピン j を裏返した配位を σ^j、隣の和を $h_j = \sum_{y \sim j} \sigma_y$ とすると、熱浴の反転の率は

$$w_j(\sigma) = \frac{1}{1 + e^{2K \sigma_j h_j}}, \qquad \mu(\sigma)\, w_j(\sigma) = \mu(\sigma^j)\, w_j(\sigma^j) \tag{5}$$

です。右の式は詳細釣り合いで、「σ から σ^j へ流れる確率」と逆向きの流れが等しいことを言います。これから μ が止まる分布で、力学は可逆です。揃っているスピン（$\sigma_j h_j > 0$）ほど裏返りにくくなります。生成作用素は $(\mathcal{L}f)(\sigma) = \sum_j w_j(\sigma)\big(f(\sigma^j) - f(\sigma)\big)$、(3) の右辺の $\int |f'|^2$ は $\frac{1}{2}\sum_\sigma \mu(\sigma)\sum_j w_j(\sigma)\big(f(\sigma^j)-f(\sigma)\big)^2$ に替わり、$C_P = 1/\mathrm{gap}(\mathcal{L})$ は同じです。

一次元の鎖は解ける

一次元では $h_j \in \{-2, 0, 2\}$ なので $w_j = \frac{1}{2}\big(1 - \frac{g}{2}\sigma_j(\sigma_{j-1}+\sigma_{j+1})\big)$、$g = \tanh 2K$ と書けます。スピンの期待値は一回の反転で 2 だけ変わるので $\frac{d}{ds}\langle\sigma_j\rangle = -2\langle\sigma_j w_j\rangle$ で、

$$\frac{d}{ds}\langle\sigma_j\rangle = -\langle\sigma_j\rangle + \frac{g}{2}\big(\langle\sigma_{j-1}\rangle + \langle\sigma_{j+1}\rangle\big) \tag{6}$$

と閉じます。全体の磁化 $M = \sum_j \sigma_j$ の平均は $e^{-(1-g)s}$ で減ります。一方、静的な相関は $\langle\sigma_0\sigma_r\rangle = (\tanh K)^r$ で（2-09 §03）、

$$\tau = \frac{1}{1-\tanh 2K}, \qquad \xi = \frac{-1}{\log\tanh K}, \qquad \frac{\tau}{\xi^2} \xrightarrow[K\to\infty]{} 2 \tag{7}$$

です。極限は $1-\tanh 2K \approx 2e^{-4K}$、$-\log\tanh K \approx 2e^{-2K}$ から出ます。冷やすほど相関は長くなり、緩和はその二乗で遅くなります：この力学では $z = 2$ です。

計算 表 1　一次元の Glauber 力学。$N = 8,\ 10$ 点の輪の生成作用素を全状態（2^N 個）で対角化し、隙間が $K = 0.25,\ 0.5,\ 1,\ 1.5$ のすべてで $1-\tanh 2K$ と 10 桁一致することを確かめた。この二つの輪では磁化の減衰が最も遅い緩和です。一般の N では、磁化の減衰率 $1-\tanh 2K$ が隙間の上界を与えます（磁化が $\mathcal{L}$ の固有関数なので）。

K	ξ	$\tau = 1/(1-\tanh 2K)$	τ/ξ^2
0.50	1.295	4.195	2.499
1.00	3.672	27.80	2.062
1.50	10.03	202.2	2.008
2.00	27.30	1491	2.001
3.00	201.7	81378	2.00002

04

ガウス鎖の Langevin — 長い波ほど遅く、緩和時間は相関長の二乗

2-08 の (7) のガウス鎖（2-08 の $H(\phi)$。ここでは作用として S と書く）$S = \frac{1}{2}\sum_x[(\phi_{x+1}-\phi_x)^2 + m^2\phi_x^2]$ に (4) を使います。$\partial S/\partial\phi_x = (2+m^2)\phi_x - \phi_{x+1} - \phi_{x-1}$ は一次式なので、波数 q のフーリエ成分 $\hat\phi_q = \sum_x e^{-iqx}\phi_x$（1-11）ごとに方程式が分かれます。

$$d\hat\phi_q = -\omega_q\,\hat\phi_q\,ds + (\text{雑音}), \qquad \omega_q = m^2 + 4\sin^2\frac{q}{2} \tag{8}$$

どの成分も (1) の Ornstein–Uhlenbeck 過程で、減る速さは ω_q です。最も遅いのは一様な成分 $q=0$ で、速さは m^2 です。したがって $C_P = 1/m^2$ です（1-10 §09 の「ガウス測度の C_P は共分散の最大固有値」と同じ数） 既知 。

相関長は 2-08 の (8) で $\cosh(1/\xi) = 1 + m^2/2$ でした。$\cosh u - 1 = 2\sinh^2(u/2)$ を使うと、二つは一つの式でつながります。

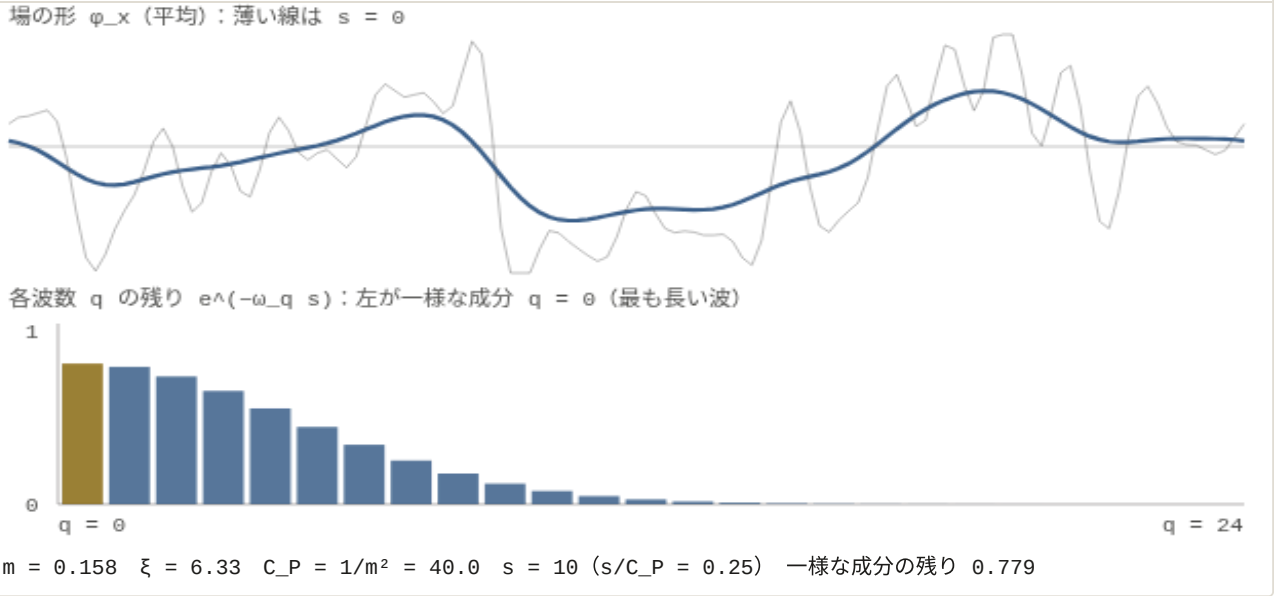
$$\frac{1}{C_P} = m^2 = 4\sinh^2\frac{1}{2\xi}, \qquad \frac{C_P}{\xi^2} = \left(\frac{1/(2\xi)}{\sinh(1/(2\xi))}\right)^2 \xrightarrow[\xi\to\infty]{} 1 \tag{9}$$

これは厳密な等式で、格子の上では C_P は ξ^2 より少しだけ小さく、連続極限（$\xi \to \infty$）で $C_P/\xi^2 \to 1$ になります。連続の自由場では $C_P = \xi^2$ がちょうど成り立ちます 既知 （初等的な導出。表 2 の数値は 計算 ）。

なぜ二乗か

なぜ二乗か。(8) の雑音を除いた平均の動きは質量の付いた熱方程式 $\frac{d}{ds}\phi = \Delta_{\text{lat}}\phi - m^2\phi$ です。拡散は長さ ℓ のでこぼこを均すのに ℓ^2 程度の時間をかけ（酔歩と同じ）、質量の項は ξ より長い波を一律の速さ m^2 で消します。だから時間は ξ^2 です。正確には、(8) の ω_q が小さい q で $m^2 + q^2$ に近づき、$q \lesssim 1/\xi$ では m^2 で底を打つことが、この説明の中身です。

図 1　ガウス鎖（128 点の輪）の平均の動き。m を小さくすると、長い波（左の棒）が残る時間が $1/\text{m}^2$ で伸びる。時間 s を動かすと上の形が均され、下の棒（各波数の残り $\text{e}^{-\omega_q \text{s}}$）が右から順に消える



計算 図の曲線は (8) の厳密な解 $\hat\phi_q(s) = e^{-\omega_q s}\hat\phi_q(0)$ をその場で計算したもの（初期の形は種を固定した乱数で作った）。雑音を除いた平均の動きで、揺らぎの見本ではない。

計算 表 2　ガウス鎖の ξ・C_P。最後の二列は 08 節の熱浴の下界（線形の関数の上の減り方から決まる）

m	ξ	$C_P = 1/m^2$	C_P/ξ^2	熱浴の下界 $(2+m^2)/m^2$	下界／Langevin
1.00	1.039	1	0.9263	3	3.000
0.50	2.020	4	0.9798	9	2.250
0.20	5.008	25	0.9967	51	2.040
0.10	10.004	100	0.99917	201	2.010
0.02	50.001	2500	0.999967	5001	2.000

転送行列のギャップと並べた表は 18-03 の表 1、市松模様の熱浴で測った表は 5-07 §07 にあります。

05

二次元イジングの小さな箱 — 臨界点では C_P/ξ^2 が伸びる

相互作用があると、式は閉じません。そこで二次元イジング模型の $L \times L$ の箱（周期境界）で、Glauber の力学 (5) の生成作用素を数値で対角化し、C_P を求めます。状態は 2^{L^2} 個で、$L=5$ では約 3,400 万個です。最も遅い緩和は磁化の向き（並進で不変、全反転で符号が変わる部分空間）にあると期待されます。$L=3,\ 4$ では全空間の隙間とこの部分空間の隙間が、下の七つの温度のすべてで 8 桁一致しました 計算 。$L=5$ では全空間を扱えないので、この部分空間（671,104 次元）に絞って隙間を求めました。その値は全空間の隙間以上なので、$L=5$ の C_P は真の C_P の下界です。

臨界点 $K_c = \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})$（2-08 §04）では無限の系の ξ は無限大で、箱の中の相関の届く長さは箱の大きさ L で頭打ちになります（2-09 §07）。そこで ξ の代わりに L を物差しにします。$\tau \approx \xi^z$ が正しければ

$$C_P(L) \approx L^{z}, \qquad \frac{C_P(L)}{L^2} \approx L^{z-2}, \qquad z_{\mathrm{eff}}(L,L') = \frac{\log\bigl(C_P(L')/C_P(L)\bigr)}{\log(L'/L)} \tag{10}$$

です。z_{eff} は隣り合う大きさから読む有効な指数で、$L \to \infty$ で z に近づくと期待されます。

計算 表 3　二次元イジング・連続時間の熱浴（各スピンが率 1 で引き直す）・$L \times L$ 周期境界の $C_P = 1/\mathrm{gap}$。時間の単位は「一スピンあたり一回の試み」

K/K_c	$L=3$	$L=4$	$L=5$	$z_{\mathrm{eff}}(3,4)$	$z_{\mathrm{eff}}(4,5)$	図 2 へ
0.6	5.759	6.267	6.474	0.29	0.15	選ぶ
0.8	14.56	19.34	22.83	0.99	0.74	選ぶ
0.9	24.56	38.47	52.26	1.56	1.37	選ぶ
1.0	42.89	82.84	137.4	**2.29**	**2.27**	選ぶ

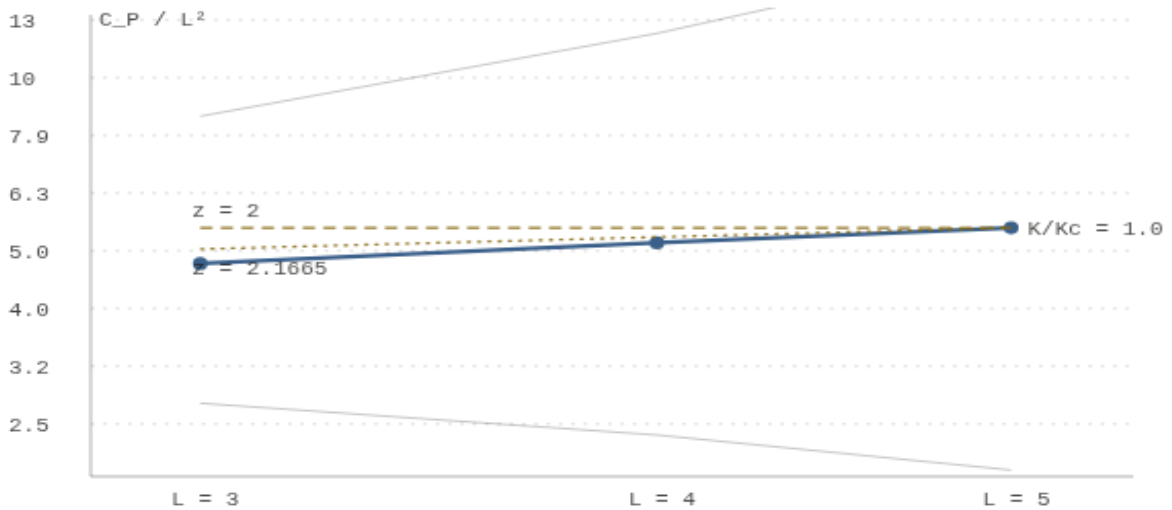
K/K_c	$L=3$	$L=4$	$L=5$	$z_{\mathrm{eff}}(3,4)$	$z_{\mathrm{eff}}(4,5)$	図 2 へ
1.1	77.18	191.0	408.0	3.15	3.40	選ぶ
1.2	142.4	464.6	1324	4.11	4.69	選ぶ
1.5	997.9	7906	56656	7.19	8.83	選ぶ

三つの振る舞い

三つの振る舞いが読めます。高温側（$K/K_c = 0.6$）では C_P は 6 あたりで頭打ちになり、z_{eff} は 0 に向かいます：ξ が有限なら緩和時間も有限です。低温側（$K/K_c = 1.5$）では $\log C_P$ が L とともにほぼ一定の差で増え（差は 2.07、1.97）、冪よりも指数関数に近い伸び方をします。「ほぼ全部 $+$」から「ほぼ全部 $-$」へ移るには箱を横切る壁を作る必要があり、その重みが壁の長さに比例する指数 e^{-cL} で小さくなるためと考えられます 物理 。周期境界の箱では壁が二枚要るので、c は界面張力 σ の 2 倍程度と期待されます。ただし $K/K_c = 1.5$ の $2\sigma \approx 1.55$ と $L \le 5$ の差 2 前後はまだ合わず、この箱で言えるのは「指数関数で伸びる傾向」までです。似た構図は 2-09 §08 の閉じる隙間にあります。

臨界点では C_P/L^2 が $4.77,\ 5.18,\ 5.50$ と増え続け、z_{eff} は $2.29,\ 2.27$ です。2 より大きい側にあります。より大きな箱（15×15 まで）の数値で知られている値は $z = 2.1665(12)$（Nightingale–Blöte 1996、熱浴）で 物理 、この端末の小さな箱の値はその上から近づいていくようにも読めますが、二点では判断できません。言えるのは「$L \le 5$ の範囲で C_P/L^2 は一定に落ち着かない」までです。

図 2　二次元イジングの C_P/L^2（両対数・縦軸は選んだ温度に合わせて拡大）。温度を動かすと、選んだ線（●）と右の読み出しの z_{eff} が変わる。破線は $z=2$（水平）、点線は $z=2.1665$ の傾き（どちらも $L=5$ の点を通す）。「動かす」で温度を順に替える。表 3 の「選ぶ」でも選べる



K/Kc = 1.0　C_P = 42.89, 82.84, 137.4（L = 3, 4, 5）　z_eff = 2.29（3→4）, 2.27（4→5）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（表 3 の値を埋め込み）。$L=2$ は隣が重なる特殊な箱なので除いた。

06

動的指数 z と η_{dyn} — 冪が 2 からずれる量に名前を付ける

物理では、ξ が伸びるとき緩和時間が ξ の冪で伸びるという仮説を置きます。動的スケーリングの仮説と呼び、静的なスケーリング（2-08 §06）を時間を含む相関に広げたものとされます（Ferrell ほか 1967、Halperin–Hohenberg 1967、詳しい展開は 1969）物理。可逆な連続時間の力学について数学の言葉にすると

$$C_P \asymp \xi^{z}, \qquad \eta_{\mathrm{dyn}} := 2 - z, \qquad C_P \asymp \xi^{\,2-\eta_{\mathrm{dyn}}} \tag{11}$$

です。$A \asymp B$ は、比 A/B が上下とも正の定数で挟まれることを表します。この本では η_{dyn} をこの式で定めます。名前の由来は、自由場の $C_P \approx \xi^2$ からのずれを冪で測る量だという点にあります。

2-08 の (13) の η とは別の量です。2-08 の η は臨界点の静的な相関 $G(x) \sim |x|^{-(d-2+\eta)}$ の冪のずれで、動的な量と区別するときは η_s と書きます。二つが一致するのは「緩和時間は帯磁率に比例する」とする従来の理論（van Hove の名で呼ばれる）の中だけで、二次元イジングでは $\eta_s = 1/4 > 0$ なのに $\eta_{\mathrm{dyn}} \approx -0.17 < 0$ と符号まで違います（18-03 §07 の表 2）。

型 z = 2	遅すぎる側	速すぎる側
$z = 2$、$\eta_{\mathrm{dyn}} = 0$ ガウス鎖の Langevin（(9)）・一次元の Glauber（(7)）で成り立つ	$z > 2$、$\eta_{\mathrm{dyn}} < 0$ 二次元・三次元のイジングの Glauber（数値）・保存する力学	$z < 2$、$\eta_{\mathrm{dyn}} > 0$ 非局所な更新（クラスター法）。局所的な力学では下界 $z \geq \gamma/\nu$（γ, ν は帯磁率と相関長の静的な指数）が二つのスケーリング仮説の下で出る（18-03 §07）物理。イジングの局所的な力学では臨界点で $z \geq 2$ が定理（§07）

第 23 部の拡散型緩和時間の仮定（23-01）は、格子ヤン–ミルズの Langevin 力学について、この左の型を冪の水準で置いた文 $\lim \ln C_P / \ln \xi = 2$（$C_P = \xi^{2+o(1)}$、$\eta_{\mathrm{dyn}} = 0$）です。帯の文 $C_P \asymp \xi^2$ は 23-01 で帯の形の拡散型緩和時間の仮定と呼び、拡散型緩和時間の仮定とは別に扱います（A-06 名前の索引）。それが成り立つかは証明されていない仮定で、物理の側の対応は 18-05 §03 で問いの形で並べます。この章で確認したいのは、型そのものは自明でなく、力学を一つ替えれば破れる、ということです。その例が次の節です。

07

$z \neq 2$ の既知の例 — 型が破れる三つの道

表 4 は、$C_P \asymp \xi^2$ の型が破れる既知の例です。破れ方は三つの道に分かれます。

相互作用で冪がずれる。二次元・三次元のイジングの Glauber 力学では、数値で z が 2 をわずかに超えます。局所的な規則のままでも、相互作用が冪を動かします。数学では、二次元の臨界イジングの Glauber 力学で隙間の逆数が L の多項式で押さえられることが示されています（Lubetzky–Sly）既知 。下からは、周期境界の臨界点（と低温側）で熱浴の隙間が $C(\log L/L)^2$ 以下であること、つまり $z \geq 2$ が示されています（Masaoka–Soejima–Watanabe 2025。局所的で可逆な一スピン反転の力学に広がる）既知 。二次元の臨界点では $(L/\log L)^2 \lesssim C_P(L) \leq \mathrm{poly}(L)$ が定理で、§06 の「速すぎる側」は局所的なイジングの力学では起きません。冪の値 z そのものを決めた定理は見当たりません。

保存量で遅くなる。磁化の総和を変えない（隣どうしのスピンを交換する）力学では、一様な成分は動けず、長い波は拡散で運ばれるのでさらに遅くなります。物理の予言は $z = 4 - \eta_s$ とされます（Hohenberg–Halperin の分類で model B）物理 。

更新の仕方で速くなる。Swendsen–Wang のクラスター法は塊ごと裏返す非局所な力学で、要旨は動的な普遍性を破り 'unusually small values of the dynamical critical exponent' を与えると書きます 物理 。同じ平衡の分布でも、機械を替えれば z が替わります。

物理 表 4　z の値の例（数値・予言の値は一次資料の要旨から。$\eta_{\mathrm{dyn}} = 2 - z$ はこの端末で計算）

模型・力学	z	η_{dyn}	水準
ガウス鎖・Langevin（(9)）／一次元イジング・Glauber（(7)）	2	0	既知 （厳密）
二次元イジング・熱浴（Glauber）	2.1665(12)	−0.1665	物理 数値
三次元イジング・Glauber	2.032(3)	−0.032	物理 数値
保存する力学（model B）・三次元イジング類	3.972(2)	−1.972	物理 数値（予言 $4 - \eta_s$）
保存する力学・ガウス鎖（下の寄り道。波数 $1/\xi$ の成分の緩和時間で測る）	4	−2	計算 （閉じた式）
純ゲージの HMC・位相電荷の二乗	約 5	約 −3	物理 数値（18-03 §08）

最後の行は格子ゲージ理論の計算で実際に現れる遅さです。HMC（ハイブリッド・モンテカルロ。仮の運動量を足して決定論的に動かす更新法。5-07 §08）は Langevin と別の力学で（次節）、同じ遅さが Langevin でも起きるかは 23-02 四次元格子で試した道と壁 で扱います。

寄り道：保存する力学では $z = 4$

飛ばしてよい。ガウス鎖で、(4) の駆動 $-\partial S/\partial\phi$ を格子のラプラシアン Δ_{lat} にもう一度通し、雑音も隣どうしの差の形にすると、$\sum_x \phi_x$ が保存されます。(8) の減る速さは

$$\omega_q^{(\mathrm{B})} = 4\sin^2\frac{q}{2}\left(m^2 + 4\sin^2\frac{q}{2}\right) \tag{12}$$

に替わり、$q = 0$ は止まります（保存量なので減らない）。波長が相関長ほどの成分 $q = 1/\xi$ の緩和時間は $1/\omega_{1/\xi}^{(\mathrm{B})} \approx \xi^4/2$ です。この端末の計算では $m = 0.5,\ 0.1,\ 0.02$ で $\tau/\xi^4 = 0.510,\ 0.5004,\ 0.50002$ でした 計算 。無限の鎖では $q \to 0$ の成分がいくらでも遅いので隙間は 0 で、$C_P = \infty$ です。型 $C_P \asymp \xi^2$ は、ここでは意味を失います。

08

熱浴と Langevin を同一視しない — 同じ写真、別の機械

「緩和時間」は、どの力学の時間かを言わないと決まりません。熱浴と Langevin は同じ分布に対して別の生成作用素を持ちます。

ガウス鎖で比べます。連続時間の熱浴（各点が率 1 で、隣を固定した条件つき分布 $\mathcal{N}\big((\phi_{x-1}+\phi_{x+1})/(2+m^2),\ 1/(2+m^2)\big)$ から引き直す）では、場の値の平均は

$$\frac{d}{ds}\,\mathbb{E}\,\phi_x = -\phi_x + \frac{\phi_{x-1}+\phi_{x+1}}{2+m^2} = -\frac{1}{2+m^2}\,\frac{\partial S}{\partial \phi_x} \tag{13}$$

で動きます。線形の関数はこの生成作用素の固有関数で、一様な成分の減る速さは $m^2/(2+m^2)$ です。したがって熱浴の C_P は $(2+m^2)/m^2$ 以上です 計算 （64 点の輪の行列で確認）。この下界は ξ^2 の 2 倍ほどなので、熱浴では $z \geq 2$ です。表 2 の右の二列のとおり、下界と Langevin の C_P の比は $\xi \to \infty$ で 2 に近づきます。幂が同じだとしても、定数は違います。

定数のほかの違い

違いは定数だけではありません。

- **変数の取り方**。熱浴は各点の変数を付け替えても（$\psi_x = c\,\phi_x$ など）同じ過程です。条件つき分布から引くという操作が座標に依らないからです。Langevin の C_P は勾配の長さで測るので、$\psi = c\,\phi$ で測れば c^2 倍になります。格子ゲージ理論で「リンクの角度 ϑ で測るか、場 $A = \sqrt{\beta}\,\vartheta$ で測るか」で C_P が β 倍変わるのはこのためです。$\beta \sim \ln\xi$ なので幂の文（拡散型緩和時間の仮定）は変わりませんが、帯の文は変わります（1-10 §09・23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定）。

- **時間の単位**。熱浴の時間は「一点あたりの試みの回数」、Langevin の時間は (1) の s です。離散時間で一掃ずつ進める熱浴（5-07 §07）はさらに別の量で、C_P・緩和時間・$\tau_{\exp}$ が割れます（18-03 §06）。
- **指数**。保存量が同じ（どちらも model A 型：磁化を保存しない）局所的で可逆な二つの力学は同じ z を持つ、と物理では期待されます（同じ動的普遍類）物理 。§07 の保存する力学は保存量が違う（model B）ので、この期待の反例ではありません。ガウス鎖では Langevin が $z=2$、熱浴は線形の関数からの下界で $z \geq 2$ までが式で言えます。熱浴の隙間が線形の関数で決まり等号になることは、この章では示していません。一般に二つの力学の z が等しいことを示した定理を、この章は持っていません。

この本で C_P と書くときは、断りのない限り Langevin (4) の生成作用素の隙間の逆数で、どの変数の勾配で測ったかを添えます。熱浴や HMC の数値を Langevin の C_P に読み替えるのは、仮定です。

09

ヤン–ミルズへの橋 — どこで使い、何が分かっていないか

格子ヤン–ミルズでも、(4) の Langevin 力学は立てられます。変数がリンクの群の元なので、勾配は群の上の微分（1-03）で取ります。連続の場で同じことを行うのが確率量子化（7-09）、計算機で同じ分布から見本を引くのがモンテカルロ法（5-07）です。

強結合（β が小さい側）では、格子ヤン–ミルズの Poincaré 不等式と log-Sobolev 不等式（(3) より強い不等式で、エントロピーの減り方を押さえる）が示されています（Shen–Zhu–Zhu 2023）既知 。これは ξ が有限の側の結果です。四次元で C_P の $\xi \to \infty$ での冪を決めた定理はありません。

この章から先へ

$z=2$ の型を格子ヤン–ミルズの Langevin 力学で冪の水準の文 $\lim \ln C_P / \ln \xi = 2$（$C_P = \xi^{2+o(1)}$、$\eta_{\mathrm{dyn}} = 0$）として置くのが 23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定 です。帯の文 $C_P \asymp \xi^2$ は 23-01 で帯の形の緩和時間の仮定と呼んで別に扱います。比喩での入口は 23-00（にじむ時間と定規）、物理の言葉との突き合わせは 18-05 §02（記録の η を η_{dyn} に固定する）、ξ と C_P の二つのギャップの辞書は 18-03 §05〜§07 です。この章は質量ギャップについて何も示していません。

この章が言えている範囲

内容	状態
Langevin (1)(4) の生成作用素 (2)、$\tau_{\exp} = C_P$（連続時間で可逆な力学）、熱浴の詳細釣り合い (5)	言えている 既知
一次元の Glauber 力学 (6)(7)、磁化の減衰率 $1-\tanh 2K$、$\tau/\xi^2 \to 2$	言えている 既知 （(6) の導出はこの章で行った）。隙間 $= 1-\tanh 2K$ は $N = 8, 10$ の輪で 計算 。一般の N では磁化の減衰率が隙間の上界を与える
ガウス鎖の (8)(9)、$C_P/\xi^2 \to 1$、保存する力学の (12) と $\tau \approx \xi^4/2$、熱浴の (13) と下界 $C_P \geq (2+m^2)/m^2$（熱浴は $z \geq 2$ まで）	言えている（式は厳密） 既知 （初等的な導出）。表 2 と (12) の数値は 計算
表 3：二次元イジングの $L \leq 5$ の C_P と z_{eff}	計算 （厳密な対角化。磁化の部分空間への制限は $L \leq 4$ で全空間と照合、$L = 5$ は部分空間の値で真の C_P の下界）。z を決めたものではなく、傾向の確認
動的スケーリング $C_P \asymp \xi^z$、表 4 の z の値、model B の $4-\eta_s$、局所的な二つの力学が同じ z を持つこと	物理 （仮説・数値・予言）。二次元臨界イジングで $(L/\log L)^2 \lesssim C_P(L) \leq \text{poly}(L)$（下から $z \geq 2$、上は多項式）は 既知 、冪の値は定理になっていない
$\eta_{\text{dyn}} := 2 - z$	この本の定義（以後の章で共通）
ヤン–ミルズの C_P の ξ 依存	言えていない。四次元で決めた定理は無く、緩和時間の仮定（冪の水準の文、23-01 §05）も帯の文（帯の形の緩和時間の仮定）も仮定のまま。この章は質量ギャップ・連続極限の構成について何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1・表 2・表 3、(9)(12)(13) の数値、図 1・図 2	計算	python3（NumPy・SciPy。表 3 は生成作用素を並進と全反転で約した部分空間の疎行列にし、Lanczos 法で最小固有値）。図はブラウザの JavaScript。スクリプトは計算の記録に残してある
Glauber の力学・一次元の鎖	既知	R. J. Glauber, "Time-dependent statistics of the Ising model", J. Math. Phys. 4 (1963) 294–307。要旨を確認（熱浴に触れた閉じた N 点の鎖のマルコフ過程を解析し、スピンの期待値と相関を陽に求めた）。本文は未読で、(6) はこの章で導いたもの
Poincaré 定数・連続時間と離散時間の違い	既知	D. A. Levin, Y. Peres, E. L. Wilmer, *Markov Chains and Mixing Times* 2nd ed., §12.2（18-03 の出典表と同じ）

もの	種別	出典・道具
動的スケーリングの仮説	物理	R. A. Ferrell, N. Menyhárd, H. Schmidt, F. Schwabl, P. Szépfalusy, Phys. Rev. Lett. 18 (1967) 891–894。要旨を確認（ラムダ点に特性の長さが無いことから第二音波の分散 $\omega \propto k^{3/2}$ を導く）。B. I. Halperin, P. C. Hohenberg, Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 700–703。要旨を確認（Widom–Kadanoff のスケーリング則を、時間を含む相関関数についての仮定のもとで動的現象に一般化）。詳しい展開は B. I. Halperin, P. C. Hohenberg, Phys. Rev. 177 (1969) 952（要旨のみ）。分類（model A・B）は P. C. Hohenberg, B. I. Halperin, Rev. Mod. Phys. 49 (1977) 435–479。要旨を確認（主要な動的普遍類を同定し特徴づける。model A・B の名は要旨には無く、本文は未読）
二次元イジングの $z = 2.1665(12)$	物理	M. P. Nightingale, H. W. J. Blöte, Phys. Rev. Lett. 76 (1996) 4548。要旨を確認（熱浴・無作為な点の選択・15×15 まで）
三次元イジングの $z = 2.032(3)$	物理	Z. Liu, E. Vatansever, G. T. Barkema, N. G. Fytas, Phys. Rev. E 108 (2023) 034118, arXiv:2307.01837。要旨を確認
保存する力学の $z = 3.972(2)$ と予言 $z = 4 - \eta$	物理	C. Chattopadhyay, J. Ott, T. Schäfer, V. Skokov, Phys. Rev. D 108 (2023) 074004, arXiv:2304.07279（巻・論文番号は Crossref で確認）。本文を確認（予言は Hohenberg–Halperin 1977 に帰している）
クラスター法の小さな z	物理	R. H. Swendsen, J.-S. Wang, Phys. Rev. Lett. 58 (1987) 86。要旨を確認
二次元臨界イジングの隙間の逆数が L の多項式	既知	E. Lubetzky, A. Sly, Commun. Math. Phys. 313 (2012) 815–836, arXiv:1001.1613。要旨を確認（任意の境界条件で隙間の逆数が多項式）
二次元以上のイジングで $z \geq 2$（隙間 $\leq C(\log L/L)^2$、周期境界・$\beta \geq \beta_c$）	既知	R. Masaoka, T. Soejima, H. Watanabe, J. Stat. Phys. 192 (2025) 76, arXiv:2502.09908。要旨を確認
純ゲージの HMC の位相電荷の遅さ	物理	S. Schaefer, R. Sommer, F. Virotta, Nucl. Phys. B 845 (2011) 93（要旨のみ。18-03 §08 と同じ）
強結合の格子ヤン–ミルズの Poincaré・log-Sobolev	既知	H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, Commun. Math. Phys. 400 (2023) 805（要旨のみ。18-03 と同じ）

次に読む章：3-01 ゲージ原理。この章の続きは 5-07 §07（モンテカルロ法の臨界減速）、18-03 §05〜§07（二つの時間の辞書）、23-01（緩和時間の仮定）。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 3 部 ヤン–ミルズ理論（古典） ゲージ原理

ゲージ原理 — 局所的な対称性を要求すると、比べる道具が要り、それが力を運ぶ

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 位相を点ごとに回す（局所的な）対称性を要求すると微分が壊れ、隣の点を比べる道具（接続）で直ること。その道具が場になり、保存する電荷と結び付いて力を運ぶこと。SU(2) ではゲージ場自身も回されること。

前提となる章 — 2-03（ゲージ変換・位相因子）と 1-04（SU(2)・随伴表現）。ほかに 2-01 の Noether の定理と 2-04 §07 の添字だけを使います。$\hbar = c = 1$、$\varepsilon_0 = 1$（Heaviside–Lorentz 単位）とします。

先に言うこと — ゲージ原理は理論の形を選ぶ指針で、定理ではありません（07 節）。非可換の場の強さと自己相互作用は 3-02 に回します。古典の場だけを扱い、この章はヤン–ミルズの質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. 大域的な対称性 — 電荷が保存する
2. 局所的に回す — 微分が壊れる
3. 比べる道具 — 接続と共変微分（図 1・表 1）
4. A を動く場にする — 場の強さと、置けない質量項
5. 力が出る — 保存する電荷との結合（図 2）
6. 同じ要求を SU(2) で — 自分も回される場と、質量の問題
7. 原理が決めること、決めないこと（表 2）
8. 寄り道：「ゲージ」はもともと物差しだった
9. この本での行き先

01

大域的な対称性 — 全体で同じだけ回す

2-03 では、ポテンシャル $\mathbf{A}$ が先にあり、位相の取り替え (G') は後から見つかりました。この章は逆に、「位相を点ごとに勝手に回しても理論が変わらない」ことを要求して電磁場を導きます。この手続きが**ゲージ原理**です。

出発点は複素数の値をとる場 $\psi(t,\mathbf{x})$、電荷を持つ粒子のいちばん簡単な模型です。ラグランジアン密度（2-01・2-02）を

$$\mathcal{L}_0 = |\partial_t\psi|^2 - |\nabla\psi|^2 - V(|\psi|^2) \tag{1}$$

とします（例えば $V = M^2|\psi|^2$、M は粒子の質量）。定数 α で $\psi \mapsto e^{i\alpha}\psi$ と回しても $\mathcal{L}_0$ は不変です（**大域的な U(1) 対称性**。U(1) は絶対値 1 の複素数の群、1-02）。Noether の定理（2-01）から、定数 q を掛けて書いた保存則が出ます。

$$\rho = iq\big(\psi^*\partial_t\psi - \psi\,\partial_t\psi^*\big), \qquad \mathbf{J} = -iq\big(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\big), \qquad \partial_t\rho + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0 \tag{2}$$

例。平面波 $\psi = e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$（$\omega > 0$）では $\rho = 2q\omega$、$\mathbf{J} = 2q\mathbf{k}$。$q$ は 05 節で電荷になります。大域的な対称性は「全点の位相の基準をいっせいにずらしても何も変わらない」と言っています。

02

局所的に回すと、微分が壊れる

回す角を点ごとに変え、$\psi \mapsto e^{i\alpha(t,\mathbf{x})}\psi$ とします（**局所的な**変換）。$|\psi|^2$ は変わりませんが、微分に余分な項が付きます（∂_μ は ∂_t と ∇ の成分、$\mu = 0,1,2,3$）。

$$\partial_\mu\big(e^{i\alpha}\psi\big) = e^{i\alpha}\big(\partial_\mu\psi + i(\partial_\mu\alpha)\,\psi\big)$$

例。定数の場 $\psi = 1$ の勾配のエネルギー $|\nabla\psi|^2$ は 0 ですが、$\alpha = kx$ で回すと $\psi = e^{ikx}$、$|\nabla\psi|^2 = k^2$。基準を変えただけなのに、(1) は別の状態として数えます。

微分は隣り合う二点の差 $\psi(x+\varepsilon n) - \psi(x)$ を ε で割った極限です（n は向きの単位ベクトル）。二つの値が違う角だけ回されると、差に「場の変化」と「基準の変化」が混ざります。違う点の値は、そのままでは引き算できません。

なぜ局所的な変換を要求するのか。Yang と Mills（1954）の要旨は、アイソスピンの回転（06 節）での通常の不変性が局所的な場という考え方と相容れない、と述べます（要旨の中

身は 3-02 §01）既知。これは要求（原理）で定理ではなく、自然が従うかは実験が決めます（07 節）。

03

比べる道具 — 接続と共変微分

違う点の値を比べるには、「点 x の位相の基準は、点 y ではどれに当たるか」という対応が要ります。これを**比較器** $U(y,x)\in U(1)$ と呼び、$\psi(x)$ を y へ運んだものを $U(y,x)\psi(x)$ とし、変換の下で

$$U(y,x)\mapsto e^{i\alpha(y)}\,U(y,x)\,e^{-i\alpha(x)} \tag{3}$$

と約束します。逆向きに運ぶのは逆元で、$U(x,y)=U(y,x)^{-1}$ とします。すると差 $\psi(y)-U(y,x)\psi(x)$ には $e^{i\alpha(y)}$ が掛かるだけです。比べる前に運ぶ、が要点です。

近い二点では比較器は 1 に近く、そのずれの割合を場 A_μ と名付けます：$U(x+\varepsilon n,x)=\exp\!\big(iq\varepsilon\, n^\mu A_\mu(x)\big)+O(\varepsilon^2)$。逆向きはその逆元なので $U(x,x+\varepsilon n)=\exp\!\big(-iq\varepsilon\, n^\mu A_\mu(x)\big)+O(\varepsilon^2)$ です。$x+\varepsilon n$ の値をこれで x へ運んでから引き、n を μ の向きにとって差の商の極限をとると

$$D_\mu\psi=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{U(x,x+\varepsilon n)\,\psi(x+\varepsilon n)-\psi(x)}{\varepsilon}=\big(\partial_\mu-iqA_\mu\big)\psi \tag{4}$$

これが**共変微分**です。(3) を $y=x+\varepsilon n$ で展開すると A_μ の変わり方が決まります。

$$\psi\mapsto e^{i\alpha}\psi,\qquad A_\mu\mapsto A_\mu+\frac{1}{q}\,\partial_\mu\alpha,\qquad D_\mu\psi\mapsto e^{i\alpha}D_\mu\psi \tag{5}$$

例。$A_0=-\phi$、$(A_1,A_2,A_3)=\mathbf{A}$（2-04 の書き方）、$\alpha=q\chi$ と置くと、(5) は $\mathbf{A}\mapsto\mathbf{A}+\nabla\chi$、$\phi\mapsto\phi-\partial_t\chi$、$\psi\mapsto e^{iq\chi}\psi$。2-03 のゲージ変換の式と、波動関数の位相の変換 (G') です。要求から電磁ポテンシャルとそのゲージ変換に行き着きました。道に沿って比較器を掛け重ねたものが 2-03 §05 の位相因子、幾何の言葉では平行移動（1-07 §03）です。

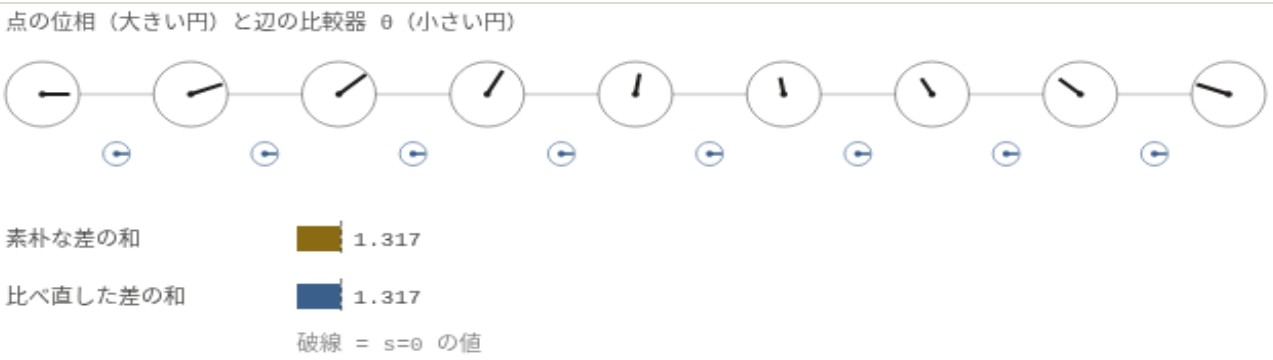
鎖で見る

空間を点の列 $j=0,1,2,\dots$ に刻むと、比較器は辺ごとの $U_j=U(j{+}1,j)=e^{i\theta_j}$（2-03 §08、5-01 のリンク変数）になり、微分の代わりに**比べ直した差**を使います。(3) は $\theta_j\mapsto\theta_j+\alpha_{j+1}-\alpha_j$ で、

$$e^{-i\theta'_j}\psi'_{j+1}-\psi'_j=e^{i\alpha_j}\big(e^{-i\theta_j}\psi_{j+1}-\psi_j\big)$$

絶対値の二乗の和は変わらず、素朴な差 $\psi_{j+1}-\psi_j$ の和は変わります。

図 1　s を変えると各点の位相（大きい円）が回る。「接続：あり」では辺の比較器（小さい円）も (3) で回り、比べ直した差の和は変わらない。「接続：なし」では変わる



s = 0.00　素朴な差の和 = 1.317　比べ直した差の和 = 1.317

計算 図の数値はその場で計算。点ごと・接続ありで s を 0 から 0.25 刻みで 1 まで動かすと、素朴な差の和は 1.317・8.070・19.536・22.541・17.700、比べ直した差の和は 1.317 のまま（接続なしでは両方とも前者、全体で同じなら両方とも 1.317）。

計算 **表 1**　12 点の輪（でたらめな場と比較器）を変換した前後。W は一周する比較器の積（SU(2) は 06 節）、W' は変換した後の値です。「$W'-W$ の成分の最大」は、差の行列の成分の絶対値の最大をとったものです。

群	回し方	素朴な差の和 前 → 後	比べ直した差の和 前 → 後	$W'-W$ の成分の最大	$\lvert\operatorname{tr}W'-\operatorname{tr}W\rvert$
U(1)	点ごと	65.474 → 50.856	83.239 → 83.239	0	0
SU(2)	全体で同じ	82.514 → 82.514	75.704 → 75.704	1.39	9×10^{-16}
SU(2)	点ごと	82.514 → 85.310	75.704 → 75.704	0.239	1×10^{-15}

比べ直した差の和の変化はどれも 3×10^{-14} 以内（丸め誤差）。U(1) を全体で同じだけ回すと、どの列も変わりません。

04

A を動く場にする — 場の強さと、置けない項

A_μ を自分の方程式に従う場にするには、A の微分を含み (5) で変わらない項を作用に足します。材料は閉じた道の比較器で、(3) から α が全部打ち消し合います。x から μ の向きへ、次に ν の向きへ進んで一辺 ε の正方形を一周し、x に戻ると

$$U_{\square}=\exp\bigl(iq\varepsilon^{2}F_{\mu\nu}\bigr)+O(\varepsilon^{3}),\qquad F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu \tag{6}$$

同じ量は $[D_\mu,D_\nu]\psi=-iqF_{\mu\nu}\psi$ にも現れます。比較器は 1-07 の平行移動と同じく始点から終点へ運ぶ向きで、幾何の書き方 $A_{\text{幾何}}=-iqA$、$F_{\text{幾何}}=-iqF$ に直すと (6) は $\exp(-\varepsilon^{2}F_{\text{幾何}})$ となり、1-07 の (10) と $U_p\approx\exp(-a^{2}F_{\mu\nu})$ に符号まで一致します（格子のリンクを逆向きに読む 5-01 では指数の符号が逆になります）。**例**。成分は $F_{0i}=-E_i$、$F_{ij}=\varepsilon_{ijk}B_k$（2-04）で、

F は電場と磁場そのもの。電場と磁場は比較器の**曲率**（小さな輪を回ったときのずれ、1-07 §05）でした。不変な項のうち微分の次数が最も低いものを並べると

$$\mathcal{L} = |D_t\psi|^2 - |\mathbf{D}\psi|^2 - V(|\psi|^2) + \tfrac{1}{2}\big(|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{B}|^2\big), \qquad D_t = \partial_t + iq\phi,\ \ \mathbf{D} = \nabla - iq\mathbf{A} \tag{7}$$

最後の項は $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$（2-04 の (8)）です。(1) の ∂ を D に替えるだけの結び付け方を**最小結合**と呼びます。

置けない項。A に質量を与える項 $-\frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu = \frac{1}{2}m^2(\phi^2 - |\mathbf{A}|^2)$ は、(5) で $-\frac{m^2}{q}\big(\phi\,\partial_t\alpha + \mathbf{A}\cdot\nabla\alpha\big)$ と α の二次の項だけ変わります。ゲージ原理から出る場には質量項を書けません（2-03 §04 と同じ）既知。これが 05 節で力の届く距離に効き、06 節で難点になります。

05

力が出る — 保存する電荷との結合

(7) を q について展開すると、01 節の量がそのまま現れます。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \phi\,\rho + \mathbf{A}\cdot\mathbf{J} + q^2\big(\phi^2 - |\mathbf{A}|^2\big)|\psi|^2 + \tfrac{1}{2}\big(|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{B}|^2\big) \tag{8}$$

ゲージ場は、大域的な対称性の保存量 (2) に、変換に現れたのと同じ q で結び付きます。2-03 の (L) の形そのものです。

(8) を ϕ で変分すると Gauss の法則が出ます。

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \rho - 2q^2\phi\,|\psi|^2 = iq\big(\psi^* D_t\psi - \psi\,(D_t\psi)^*\big)$$

右辺は (2) の ρ そのものではなく、その ∂_t を D_t に替えたものです（ϕ を含む項が加わります）。原点に止まった点電荷 Q では、この右辺を $Q\,\delta^3(\mathbf{x})$ と置きます。静的なら $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ で、$-\nabla^2\phi = Q\,\delta^3(\mathbf{x})$ から $\phi = Q\,G_0(r)$。距離 r の電荷 Q' のエネルギーは

$$\mathcal{U}(r) = QQ'\,G_m(r), \qquad G_0(r) = \frac{1}{4\pi r}, \qquad G_m(r) = \frac{e^{-mr}}{4\pi r}\ \text{(質量項を仮に足した場合)} \tag{9}$$

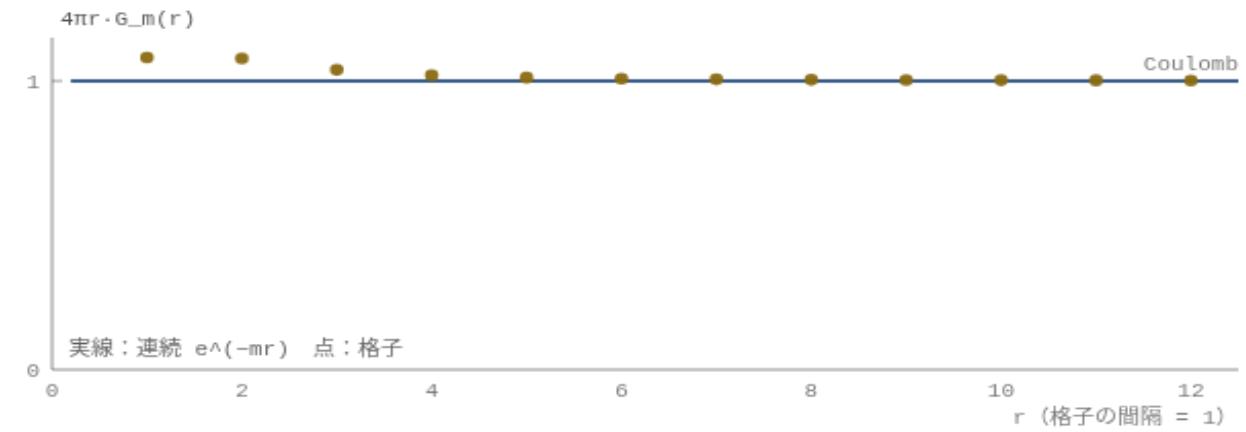
例。$m = 0$ では同符号の電荷は反発し、力は $1/r^2$ で遠くまで届きます。局所的な対称性を要求しただけで、離れた電荷の間に力が生じました。(7) の理論（V の最小が $\psi = 0$ のとき）では、禁じた質量項を仮に足すと $(-\nabla^2 + m^2)\phi = \rho$ になり、G_m（湯川型）はおよそ $1/m$ より遠くに届きません。足さなければ Coulomb 型で遠くまで届きます。

ただし、ゲージ不変性は力が遠くまで届くことを保証しません。古典論でも Higgs 場があれば、ゲージ不変性を保ったまま届く距離は有限になります（3-07）既知。(8) で見ると、V の最小が $|\psi|^2 = v^2 > 0$ にあって $|\psi|^2$ がそこに留まるとき、項 $q^2(\phi^2 - |\mathbf{A}|^2)|\psi|^2$ は $m^2 = 2q^2v^2$

の質量項 $\frac{1}{2}m^2(\phi^2-|\mathbf{A}|^2)$ と同じ形になります（3-07 の (9) は場の大きさの最小を $v/\sqrt{2}$ に置くので、同じ質量が $m=qv$ と書かれます）。

図 2 は立方格子（間隔 1）で $(-\Delta_{\text{lat}}+m^2)G_m=\delta$ を数値で求めたものです（$\Delta_{\text{lat}}f$ は隣の六点の値の和から $6f$ を引いたもの）。

図 2　m を変えると 4πr·G_m(r)（Coulomb なら 1）が変わる。実線は連続の e^(−mr)、点は立方格子。m > 0 は質量項を手で足した場合（ゲージ不変でない）



m = 0.00　届く距離の目安 1/m = ∞　r = 4：格子 1.020・連続 1.000

計算 点はこの端末の計算、実線はその場で計算。静止した値：$r=1,\,4,\,12$ で格子の $4\pi r\,G_0$ は 1.082・1.020・1.002 で、格子の間隔の数倍より遠くで Coulomb に近づきます。$4\pi r\,G_{0.5}$ は 0.670・0.147・0.0027（連続の $e^{-0.5r}$ は 0.607・0.135・0.0025）で、格子の軸方向の減衰の速さは $\cosh\mu=1+m^2/2$ から $\mu=0.4949$ です。

06

同じ要求を SU(2) で

陽子と中性子は質量がほぼ等しく、核力もほぼ同じように感じます。二つを二成分の場 $\psi=(\psi_1,\psi_2)$ にまとめるのがアイソスピンの見方で、混ぜる回転 $\psi\mapsto\Omega\psi$（$\Omega\in SU(2)$、1-04。(1) の V と区別して、行列は 3-02 と同じく Ω と書きます）で (1) の形の理論は変わりません。Yang–Mills（1954）は、この対称性に 02 節の要求を課しました。

比較器を SU(2) の行列にして $U(y,x)\mapsto\Omega(y)\,U(y,x)\,\Omega(x)^{-1}$ とし、近い二点で $U(x+\varepsilon n,x)=\exp(ig\varepsilon\,n^\mu A_\mu)+O(\varepsilon^2)$、$A_\mu=A_\mu^aT^a$（$T^a=\sigma^a/2$。1-07 の幾何の書き方とは $A_{\text{幾何}}=-igA=-i\hat{A}$。$\hat{A}=gA$ は 3-02 §02 の「結合を吸収」した書き方）とすると

$$D_\mu=\partial_\mu-igA_\mu,\qquad A_\mu\mapsto\Omega A_\mu\Omega^{-1}-\frac{i}{g}\,(\partial_\mu\Omega)\Omega^{-1},\qquad D_\mu\psi\mapsto\Omega\,D_\mu\psi\tag{10}$$

例。$\Omega = e^{i\alpha}$（1×1）なら (5) に戻り（g が q の役）、幾何の書き方では 1-07 §07 の $A \mapsto \Omega A\Omega^{-1} - (d\Omega)\Omega^{-1}$ です（1-07 は変換の行列を g と書きますが、ここでは g は結合定数です）。U(1) との違いは三つあります。

1. **場の数**。リー環の次元だけ要ります：U(1) は 1（光子）、SU(2) は 3（A^1, A^2, A^3）、SU(3) は 8（グルーオン）、SU(N) は N^2-1。
2. **ゲージ場自身が回される**。(10) の $\Omega A\Omega^{-1}$ は Ω が定数でも A を回します（随伴表現、1-04 §06）。光子と違い、自分が結び付く「電荷」を自分でも持つわけです。表 1 で SU(2) の W が全体の回転でも $\Omega_0 W \Omega_0^{-1}$ と変わり、$\mathrm{tr}\, W$ だけが残るのはこのためで、ここから自己相互作用が出ます（3-02）。
3. **結合定数は一つ**。U(1) では場ごとに別の q を自由に置けます。単純な非可換群（1-03 §08）では結合定数は一つの g だけで、各物質場との結合の強さは g と、その場の表現の生成子 T^a で決まります（二成分の場なら $\sigma^a/2$、随伴表現の三成分の場なら $(T^a)_{bc} = -i\varepsilon_{abc}$）既知。理由の筋は、場の強さの非線形の項 $-ig[A_\mu, A_\nu]$（09 節・3-02）が A の規格化を g と結び付けて固定し、群が単純なら運動の項の不変な形も定数倍を除いて一つしかないことです（2-04 §07・1-03）。

質量の問題。SU(2) でもゲージ場に質量項は書けません。Yang の回想では、1954 年 2 月下旬の Princeton のセミナーで Pauli が「この場の質量は何か」と尋ねました（経緯は 3-02 の寄り道）。核力は短距離の力で、05 節の Coulomb 型の届き方と合いません。Jaffe–Witten の問題文 §1 も、古典の波に質量が無いことが深刻な障害だったと書き既知、弱い力では Higgs 場を足して（3-07）、強い力では量子論そのものの性質（漸近自由、4-06）で越えられたとします物理。後者で期待される質量ギャップ（4-11）を数学として示すのが問題文の課題です。

07

原理が決めること、決めないこと

ゲージ原理は強い制約ですが、理論を一つに決めはしません（**表 2**）。

決めること	決めないこと
接続 A が要ること、その変換則 (5)(10)	どの群か（U(1)・SU(2)・SU(3) を選ぶのは実験）
微分が D を通してしか入れられないこと、結び付く流れが保存すること	U(1) での電荷の比（群が円なら表現 $e^{i\alpha} \mapsto e^{in\alpha}$ の n は整数で電荷は整数比。円か直線 $\mathbb{R}$ かは原理の外）
ゲージ場に質量項を書けないこと	運動の項が F^2 であること（F^4 も不変。低い次元の項だけ残す理由は 4-04）

決めること	決めないこと
ゲージ変換で移り合う配置は同じ物理を表すこと	最小結合（∂ を D に替えるだけ）を選ぶこと。最小でない結び付け方（$\lvert\psi\rvert^2 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ も不変）も原理は禁じない

表の二行目の例。群が円なら、どの場の電荷も一つの単位の整数倍になります。群が直線 $\mathbb{R}$ なら電荷の比は任意の実数でよく、原理だけからは電荷が一つの単位の整数倍に揃う理由は出ません。三行目の例。F^4 のような項は F^2 より場の次数が高く、四次元では係数が長さの四乗の次元を持つので、長い距離ほど効きが小さくなると考えられています（2-04 §08・4-04 §06）物理 。

局所的な「対称性」は普通の対称性と違い、拘束（Gauss の法則）と書き方の重複を生みます（2-01 §08）。重複をどう割るかは 3-04・4-08 の主題です。

もう一つ、普通の対称性との違いがあります。対称性が**自発的に破れる**とは、作用（統計力学ならエネルギー）は対称なのに、平衡状態（期待値）が対称でなくなることです。例は 2-08 §04 の自発磁化です。Elitzur（1975）は、ゲージを固定しない格子ゲージ理論では局所的な対称性が自発的に破れない（ゲージ不変でない量の期待値は 0 になる）と論じ、可換な格子の簡単な系で具体的に示しました 既知 。

08

寄り道：「ゲージ」はもともと物差しだった

飛ばしてよい節です。

「ゲージ変換」「ゲージ不変性」という語が物理に最初に現れるのは、Weyl が 1918 年に重力と電磁気を一つの幾何から導こうと試みた論文で、意味は長さの基準の取り替え（較正。ドイツ語の Eich-、動詞 eichen）でした（O'Raifeartaigh–Straumann §I） 既知 。Weyl は、離れた二点のベクトルの大きさを直接比べられる Riemann 幾何に不満を述べました（英訳、同 §II）。

> A true infinitesimal geometry should, however, recognize only a principle for transferring the magnitude of a vector to an infinitesimally close point …

（真の無限小幾何は、ベクトルの大きさを無限に近い点へ移す原理だけを認めるべきだ。）03 節の比較器と同じ発想です。ただし運ぶのは位相ではなく長さです。Weyl の理論には、長さの基準が点から点へどれだけの割合で変わるかを表す実数値の場 w_μ があり、ベクトルを道 γ に沿って点 p から点 q へ運ぶと、長さ ℓ は

$$\ell(q) = \exp\!\Big(-\int_\gamma w_\mu \, dx^\mu\Big)\, \ell(p)$$

と変わります（O'Raifeartaigh–Straumann の (2.2)。符号は規約によります）。閉じた道を一周して戻ると、長さは実数の因子 $\exp\!\big(-\oint w_\mu \, dx^\mu\big)$ 倍になります。(6) と同じく、穴の無い領域でこの因子がどの

輪でも 1 になるのは $\partial_\mu w_\nu - \partial_\nu w_\mu = 0$ のときで、Weyl は w_μ を電磁ポテンシャルと見なしました（同 §II）。

Einstein はすぐに反論しました。原子時計の振動数がたどった道で変わってしまい、原子のスペクトルが安定していることと矛盾する、と 既知 。

量子力学が現れると、London（1927）は指数を虚数にすれば波動関数の位相の取り替えになると気づきました（その不変性は Fock（1926）が見つけていた）。Weyl は 1928 年の著書と 1929 年の論文でこれを「ゲージ不変性の原理」として掲げ、電磁場は物質の波の場に必然的に伴うと書きました（Jackson–Okun §III.B） 既知 。名前は長さの較正に由来するまま残りました。比喩で言えば「各点で物差しを勝手に選べる理論」ですが、正確には、各点で選べるのは長さの尺度ではなく複素数の位相（一般には群の元）です。非可換の最初の模型は Klein（1938）でしたが忘れられ、今日の流れは Yang–Mills（1954）からとされます（同 §V）。

09

この本での行き先

3-02 では (6) の正方形を SU(N) で回します。比較器が掛ける順で変わるため、場の強さに交換子が加わり、自己相互作用が出ます。

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$$

Gauss の法則を量子論で課すのは 4-01。5-01 の格子では比較器 U_j を変数にし、(6) の正方形の積（プラケット）で作用を作ります。四次元で g が無次元になることは 2-04 §08 と 四次元 の記事。

まとめると、局所的な対称性の要求がゲージ場を呼び込み、その場は保存する電荷と結び付いて力を運び、古典論ではその質量項を手で書けません（Higgs 場を足すと事情が変わります。3-07）。四次元の非可換の場合に、量子論ではそれでも質量の隙間が生じることを示せ、というのが問題文です（0-03）。

この章が言えている範囲

事項	言えている	言えていない
01〜05 節：共変微分 (4)、変換則 (5)、場の強さ (6)、質量項が不変でないこと、保存流との結合、(9) の二つの形	古典の場での標準の導出 既知 。表 1、図 1・2 の数値 計算	格子は間隔 1 の値で、連続極限は取っていない

事項	言えている	言えていない
力の届く距離	(7) の理論（V の最小が $\psi = 0$）では、質量項が無ければ Coulomb 型で遠くまで届くこと 既知	ゲージ不変性だけからは遠くまで届くことは出ない。Higgs 機構の中身は 3-07
06 節：SU(2) の変換則 (10)、場の数、随伴で回されること、結合定数が一つであること	(10)・場の数・随伴での回り方 既知 。結合定数が一つである理由は筋だけ（2-04 §07・1-03）	自己相互作用の式（3-02）
質量の問題	古典のゲージ場に質量項を手で書けないこと 既知 。強い力の越え方は 物理	量子論の質量ギャップ（未解決。この章は何も示していない）
07 節：原理の位置づけ・Elitzur の結果	原理は理論の形を選ぶ指針であること。Elitzur の結果は要旨の水準（論じ、可換な格子の簡単な系で示した）	原理を定理として導くこと。一般の群での Elitzur の議論の中身（本文は確認していない）
08 節の経緯	二つの総説に書かれていること 既知	原論文の本文（書誌のみ）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1・図 1	計算	python3・NumPy（`covariant_diff.py`）。図はその場で計算
図 2 の点・05 節の値	計算	python3・SciPy（`lattice_green.py`：$G_m(r) = \int_0^\infty e^{-(m^2+6)t} I_r(2t) I_0(2t)^2 dt$、変形 Bessel 関数。恒等式 $G_0(0) - G_0(1) = 1/6$ を 10 桁で再現）。FFT による検算 `check_fft.py`
動機・Pauli の質問	既知	C. N. Yang, R. L. Mills, Phys. Rev. 96 (1954) 191（要旨を確認）。C. N. Yang, Selected Papers 1945–1980 with Commentary (1983) p. 525（書誌のみ。O'Raifeartaigh–Straumann §VII の引用で確認）
古典の波に質量が無い障害と、Higgs 場・漸近自由による乗り越え	既知	A. Jaffe, E. Witten, Quantum Yang–Mills Theory（Clay の問題文）§1（本文を確認）
局所的な対称性は自発的に破れない（Elitzur）	既知	S. Elitzur, Phys. Rev. D 12 (1975) 3978（要旨を確認）
08 節の経緯	既知	J. D. Jackson, L. B. Okun, Rev. Mod. Phys. 73 (2001) 663, arXiv:hep-ph/0012061（§III.B・§V を確認）。L. O'Raifeartaigh, N. Straumann, Rev. Mod. Phys. 72 (2000) 1, arXiv:hep-ph/9810524（arXiv 版の §I・§II・§V・§VII を確認）。原論文は書誌のみ（二つの総説の文献表による）：H. Weyl, Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin (1918) 465／V. Fock, Z. Phys. 39 (1926) 226／F. London, Z. Phys. 42 (1927) 375／H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik (Hirzel, Leipzig, 1928)／H. Weyl, Z. Phys. 56 (1929) 330／O. Klein, in New Theories in Physics（Warsaw の会議, 1938）

次に読む章：3-02 非可換ゲージ場。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 3 部 ヤン–ミルズ理論（古典） 非可換ゲージ場

非可換ゲージ場 — 掛ける順が効くと、場が自分自身の源になる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — SU(N) の変換を点ごとに選べるようにすると、共変微分と変換則が決まり、場の強さ F に交換子の項が加わります。その項のためにゲージ場は自分自身の電荷を持ち、三次・四次の自己相互作用と非線形な方程式が生じます。空間に一様な場では、交換子だけが x^2y^2 の谷を作ります。

前提となる章 — 3-01（ゲージ原理。特に §06 の SU(2) の場合）。1-03 の構造定数、1-04 の随伴表現、2-04（添字の上げ下げと計量の符号）を使います。同じ内容を幾何の言葉で書いたものが 1-07 です。

先に言うこと — 古典の章で、量子論も質量ギャップも扱いません。作用と運動方程式は 3-03 に回し、エネルギー密度は電磁気学からの類推で先に使います。§01 の Pauli の書簡と Yang の回想は、総説からの引用です。

この章の順序

1. 各点で回す — 3-01 の SU(2) を SU(N) へ・Yang と Mills の要旨。寄り道：1954 年の春
2. 約束 — 生成子と、三つの書き方の翻訳
3. 共変微分 — 変換則の二つの項・鎖の上で見る（図 1）
4. 場の強さ — 共変微分の交換子・純ゲージ
5. 色の電場と色の磁場 — 測れる量を数え直す
6. 自己相互作用 — 二次・三次・四次の項
7. 空間に一様な場 — x^2y^2 の谷（図 2）・古典には尺度が無い
8. 質量の問題 — 手で足せない理由

01

各点で回す — Yang と Mills の問い

3-01 §06 では、陽子と中性子をまとめた二成分の場 ψ を SU(2) の行列で混ぜる対称性（アイソスピン）に、点ごとに回してよいという要求を課し、共変微分と変換則 (10) を得ました。この章はそれを $\mathrm{SU}(N)$ に広げ、交換子から生じることを順に追います。

Yang と Mills の論文（Phys. Rev. 1954）の要旨は、すべての点で同じ行列で回すという通常の不変性が局所的な場という考えと相容れないと指摘し、“The possibility is explored of having invariance under local isotopic spin rotations.” と続けます。要旨の一文目を本書の読みで言い換えると、ある点でどの向きを「陽子」と呼ぶかが遠くの点の呼び方まで決めてしまうのは、近くの点どうしの関係で書く場の法則に合わない、ということです。そこで変換の行列 $\Omega = \Omega(x)$ を点ごとに選べるとします。

要旨によれば、帰結はアイソスピンに対して電磁場と同じ役をする $\mathbf{b}$ 場で、それは非線形の微分方程式に従い、その量子はスピン 1・アイソスピン 1・電荷 $\pm e$ か 0 の粒子です 既知 。§03〜§06 はこの要約を式にします。強い力を担う群は、後に SU(3) と分かりました（Jaffe–Witten の問題説明：“the gauge group is G = SU(3)”）。ただし、ゲージ化されたのはアイソスピンではなく、別の自由度である色の SU(3) でした（アイソスピンは近似的な、点ごとには回さない対称性のまま残ります）。数学は群を取り替えるだけです（3-07・1-04 の寄り道）。

寄り道：1954 年の春

飛ばしてよい小節です。

Straumann の小論によれば、Pauli は 1953 年 7 月に Pais へ送った手紙に付けたノートと、11 月の Zürich での二回のセミナーで、余剰次元（17-06）の枠組みから同じ場の強さを得ていました。しかし 12 月の Pais 宛ての手紙で “one will always obtain vector mesons with rest mass zero” と書き、公表しませんでした。1954 年 2 月下旬の Princeton のセミナーでは、Yang が黒板に $(\partial_\mu - i\epsilon B_\mu)\psi$ を書いた直後に、Pauli が “What is the mass of this field B_μ?” と尋ねたと Yang は回想しています（Yang の自選論文集の解説から、Straumann の小論と O'Raifeartaigh–Straumann の総説が引用）。同じ総説は、この理論が他の著者にも独立に見つけられたことに触れ、系譜の図に Shaw（1954–55）と Utiyama（1954–55, 1956）を置きます 既知 。質量の問いには §08 で答えます。

02

約束 — 生成子と、三つの書き方

第 3 部では $\hbar = c = 1$、計量の符号は $(-,+,+,+)$ です（2-04）。$\mu, \nu = 0, \dots, 3$ は時空、$i, j, k = 1, 2, 3$ は空間、a, b, c は群の方向（色）の添字で、二度出た添字は和を取ります。群は $G = \mathrm{SU}(N)$、生成子はエルミートな T^a（$a = 1, \dots, N^2 - 1$）で、構造定数と規格化は次の通りです（1-04）。

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \qquad \mathrm{tr}(T^a T^b) = \tfrac{1}{2}\delta^{ab}$$

例。SU(2) では $T^a = \sigma^a/2$（パウリ行列の半分）で $f^{abc} = \varepsilon^{abc}$、SU(3) では $T^a = \lambda^a/2$（Gell-Mann 行列の半分）です。ゲージ変換の行列は $\Omega(x) \in G$ と書き（3-01 と同じ字です）、字 g は結合定数に取っておきます。物質の場 $\psi(x) \in \mathbb{C}^N$ は $\psi \mapsto \Omega(x)\psi$ と変わるとします（基本表現）。

この章は物理の流儀で、エルミートな $A_\mu = A_\mu^a T^a$ と結合 g を分けて書きます。§01 の寄り道の Yang の黒板の ϵ と B_μ は、この g と A_μ に当たります（係数の約束は論文によります）。本の中の他の書き方とは、次の一行で翻訳できます。

書き方	共変微分	場の強さ	章
この章	$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$	$F_{\mu\nu}$（式 (6)）	3-02・第 4 部
幾何（反エルミート）	$D = d + \mathcal{A}$、$\mathcal{A} = -igA$	$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A}\wedge\mathcal{A} = -igF$	1-07・3-04
結合を吸収	$D_\mu = \partial_\mu - i\hat{A}_\mu$、$\hat{A} = gA$	$\hat{F} = gF$	2-04

03

共変微分 — 変換則の二つの項

3-01 の (10) を $\mathrm{SU}(N)$ に広げ、導き方を追い直します。困るのは微分です。Ω が点によると、積の微分から余分な項が出ます。

$$\partial_\mu(\Omega\psi) = \Omega\,\partial_\mu\psi + (\partial_\mu\Omega)\,\psi \tag{1}$$

第二項は、枠の違う隣どうしの点の値をそのまま引き算したために出ます（1-07 §01）。そこで 3-01 と同じく、補正の場 A_μ を足した微分が ψ と同じように変わることを要求します。

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu, \qquad D'_\mu(\Omega\psi) = \Omega\, D_\mu\psi \tag{2}$$

左辺は $\Omega\partial_\mu\psi + (\partial_\mu\Omega)\psi - igA'_\mu\Omega\psi$、右辺は $\Omega\partial_\mu\psi - ig\,\Omega A_\mu\psi$ です。すべての ψ で等しいことから、A'_μ が決まります。

$$A'_\mu = \Omega A_\mu \Omega^{-1} - \frac{i}{g}\,(\partial_\mu \Omega)\,\Omega^{-1} \tag{3}$$

第一項は随伴表現による回転（1-04 §06）、第二項は Ω の傾きから来る非斉次の項です。$\Omega\Omega^\dagger = 1$ を微分すると $(\partial\Omega)\Omega^{-1}$ は反エルミートで、$\det\Omega = 1$ からトレースは 0 なので、A' も同じリー環に留まります。例。$\Omega = e^{i\alpha(x)}$（U(1)）なら第一項は A_μ のままで、$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\alpha/g$ は、$\chi = \alpha/g$ とおけば 2-03 のゲージ変換の式そのものです（2-04 の $A_\mu = (-\phi, \mathbf{A})$ の約束で）。非可換で新しいのは、A を挟む第一項です。

無限小の変換 — ゲージ場自身が回る

$\Omega = 1 + i\alpha^a T^a$（$\alpha$ は小さい）として (3) を一次まで展開すると、成分では

$$\delta A^a_\mu = \frac{1}{g}\,\partial_\mu \alpha^a + f^{abc} A^b_\mu\, \alpha^c = \frac{1}{g}\,(D_\mu \alpha)^a \tag{4}$$

です。右端の $(D_\mu\phi)^a = \partial_\mu\phi^a + g f^{abc} A^b_\mu \phi^c$ は随伴表現の場に働く共変微分です。例。SU(2) で α を定数とし $\alpha^3 = \theta$（他は 0）に取ると、$\delta A^1 = \theta A^2$、$\delta A^2 = -\theta A^1$、$\delta A^3 = 0$。場所によらない回転でもゲージ場の成分が互いに回るので、**ゲージ場自身が非可換な電荷を持ちます**（3-01 §06 の「ゲージ場自身が回される」を成分で見たもの）。光子が電荷を持たないのと対照的で、要旨の「アイソスピン 1」はこのことです。

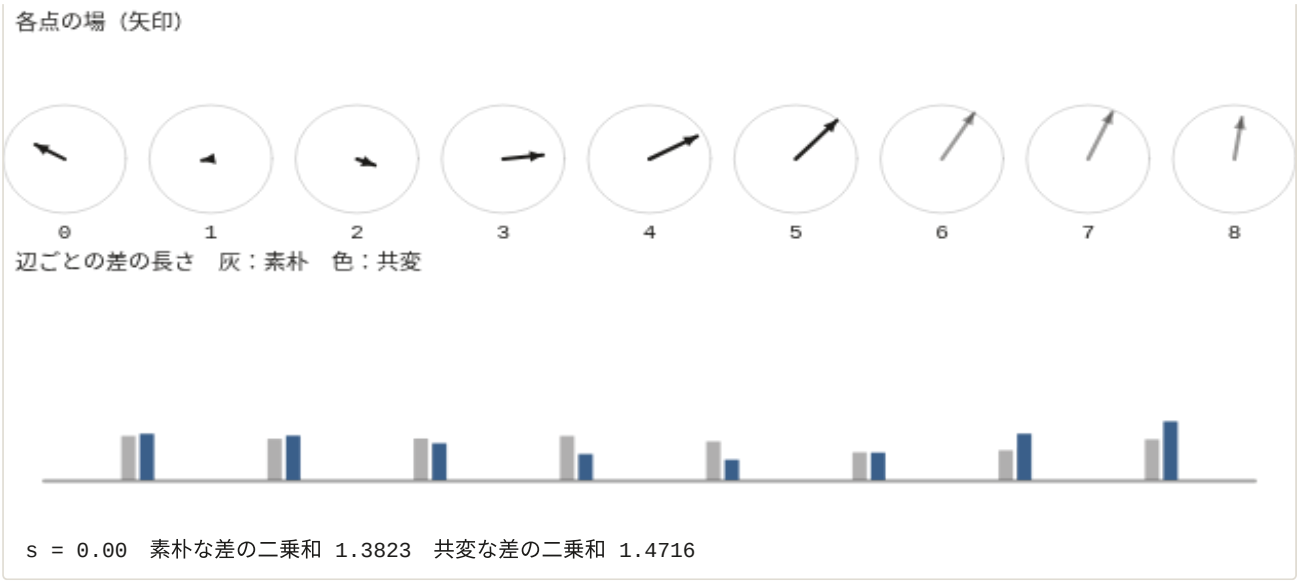
鎖の上で見る

点を一列に並べると (2) の意味が見えます。点 n に随伴表現の場（実の三成分ベクトル）ϕ_n を置き、点 $n+1$ の値を点 n の枠へ運ぶ回転 U_n を辺に置きます。2-03 の辺の U(1) の元の非可換版で、5-01 の格子の部品です。3-01 の比較器で書けば $U_n = U(n, n{+}1)$ で、3-01 の鎖の $U_j = U(j{+}1, j)$ とは向きが逆です。ここでの Ω_n と U_n は、SU(2) の元が随伴表現で与える 3×3 の回転（1-04 §06）を同じ字で書いたものです。

$$\phi'_n = \Omega_n \phi_n, \qquad U'_n = \Omega_n U_n \Omega_{n+1}^{-1}, \qquad U'_n \phi'_{n+1} - \phi'_n = \Omega_n\big(U_n\phi_{n+1} - \phi_n\big) \tag{5}$$

右端の「共変な差」は回転が一つ掛かるだけなので、長さが変わりません。素朴な差 $\phi'_{n+1} - \phi'_n$ は二点の回転が違うので、長さが変わります。点の間隔を h として $U_n \approx 1 - igh A$ と置き、$h \to 0$ とすると、(5) の二つ目は (3) に、共変な差は $hD_\mu\phi$ になります。ここで A は、随伴表現の行列 $(T^a_{\text{adj}})_{bc} = -if^{abc}$ を使った $A = A^a T^a_{\text{adj}}$ として作用し、$D_\mu\phi$ の成分は (4) の右端と同じ形になります。

図 1　九つの点の場（上の矢印）と、辺ごとの差の長さ（下の棒）。つまみ s でゲージ変換の強さを変えると、灰色の棒（素朴な差）は変わり、色の棒（共変な差）は変わりません。



計算 この図の数値はこの端末で計算した（表 1 と同じ式・同じ配置をブラウザで計算）。JavaScript が無効なら表 1 が図の中身です。

表 1　ゲージ変換の強さ s と、八本の辺の差の二乗和

s	素朴な差	共変な差
0.00	1.3823	1.4716
0.25	3.0524	1.4716
0.50	7.6091	1.4716
0.75	13.5267	1.4716
1.00	18.6570	1.4716

各辺の共変な差の変化は 3×10^{-16} 以下（丸め誤差）でした 計算 。$s = 0$ で二つが違うのは、U_n を小さな回転に取ってあるからです。

04

場の強さ — 共変微分の交換子

電磁気学では $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ がゲージ変換で変わらない量でした。非可換では (3) の第一項のため、この組み合わせは共変にもなりません。正しい組み合わせは、共変微分を二つの順で掛けた差から出ます。

$$[D_\mu, D_\nu]\,\psi = -ig\,F_{\mu\nu}\,\psi, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig\,[A_\mu, A_\nu] \tag{6}$$

左辺を展開すると $\partial_\mu\partial_\nu\psi$ と $A\,\partial\psi$ の項は $\mu\nu$ について対称なので消え、ψ の微分が残りません。$F_{\mu\nu}$ は各点の行列（リー環の元）で、成分では次の通りです。

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\,f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \tag{7}$$

SU(2) では、三成分 $(A^1_\mu, A^2_\mu, A^3_\mu)$ を内部空間のベクトルとみると、最後の項はベクトル積 $g\,A_\mu \times A_\nu$ です。(2) は作用素として $D'_\mu = \Omega D_\mu \Omega^{-1}$ という意味なので、交換子も同じく挟まれます。

$$F'_{\mu\nu} = \Omega\, F_{\mu\nu}\, \Omega^{-1} \tag{8}$$

F は不変ではなく、各点で随伴表現により回ります（共変）。電場と磁場がそのまま測れる量だった電磁気学との大きな違いです。

例 1（純ゲージ）。$A = 0$ を (3) で変換した $A_\mu = -\frac{i}{g}(\partial_\mu \Omega)\Omega^{-1}$ は、(8) により $F = 0$ です。逆に $\mathbb{R}^4$ のような単連結な領域で $F = 0$ なら、A はこの形に書けます 既知 。Straumann が紹介する、Pauli が 1953 年 7 月に Pais へ送った手紙に付けたノートは、これを “The vanishing of the field strength is necessary and sufficient for the $A^a_\mu(x)$ in the whole space to be transformable to zero.” と述べています。穴のある領域では成り立たず、2-03 の Aharonov–Bohm 効果がその例です（大域的な話は 3-04）。

例 2（交換子だけ）。定数の場 $A_x = a\,T^1$、$A_y = b\,T^2$ では、$F_{xy} = -ig\,ab\,[T^1, T^2] = g\,ab\,T^3 \neq 0$ です。電磁気学なら定数のポテンシャルは場を作りません。小さな正方形を一周したずれとして見る図が 1-07 の図 2 にあります。

計算 SU(2)・SU(3) で滑らかな A と Ω を与えて差分で比べると、(8) の両辺の差は 5×10^{-9}（刻み 10^{-4} の誤差）、交換子を落とすと 0.78・1.74、純ゲージの F は 10^{-9} 以下でした。

05

色の電場と色の磁場 — 測れる量を数え直す

電磁気学にならい、群の方向ごとに電場と磁場を定めます。2-04 の $F_{0i} = -E_i$、$F_{ij} = \varepsilon_{ijk} B_k$ と同じ置き方で、空間の三成分を太字で書きます（$\mathbf{A}^a = (A^a_1, A^a_2, A^a_3)$）。

$$E^a_i = F^a_{i0}, \qquad B^a_i = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk} F^a_{jk} = (\nabla \times \mathbf{A}^a)_i + \tfrac{g}{2}\,\varepsilon_{ijk} f^{abc} A^b_j A^c_k \tag{9}$$

$A_0 = 0$ に取る（時間ゲージ）と $E^a_i = -\partial_t A^a_i$ です。磁場の第二項が交換子の部分で、ポテンシャルが空間的に一様でも磁場が生じます。

$\mathbf{E}^a$ と $\mathbf{B}^a$ は (8) により、各点で色の添字について回ります。そのため「色の電場の 3 番の成分」はゲージで値が変わり、測れる量ではありません。変わらないのは $\sum_a |\mathbf{E}^a|^2 = 2\,\mathrm{tr}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})$ のような長さの二乗です。電磁気学にならい、この章では次をエネルギー密度とします（作用から導くのは 3-03）。

$$\mathcal{E} = \tfrac{1}{2}\sum_a \left(|\mathbf{E}^a|^2 + |\mathbf{B}^a|^2 \right) \tag{10}$$

例。ゲージで変わらない量の典型は $\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$ と、閉じた道の平行移動のトレース（Wilson ループ、1-07 §06）です。

06

自己相互作用 — 二次・三次・四次の項

エネルギー (10) も、3-03 で作用に置く $F^a_{\mu\nu}F^{a\,\mu\nu}$ も F の二乗です。(7) を入れると、A について二次・三次・四次の項に分かれます。

$$\begin{aligned} F^a_{\mu\nu}F^{a\,\mu\nu} = {} & (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)(\partial^\mu A^{a\,\nu} - \partial^\nu A^{a\,\mu}) \\ & + 4g\, f^{abc}\,(\partial_\mu A^a_\nu)\, A^{b\,\mu} A^{c\,\nu} \\ & + g^2 f^{abe} f^{cde}\, A^a_\mu A^b_\nu A^{c\,\mu} A^{d\,\nu} \end{aligned} \tag{11}$$

一行目は Maxwell の $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ を色の数 N^2-1 だけ並べたもので、ここだけなら互いに作用しない Maxwell 場の集まりです。二・三行目は f^{abc} を含み、U(1) では消えます。作用に置くと（3-03）、これらはゲージ場どうしの相互作用で、摂動論（4-03）ではゲージ場が三本・四本出会う頂点になります。古典の Maxwell 方程式では光どうしは散乱しませんが、ヤン–ミルズ場は自分自身と散乱します。

帰結は方程式の非線形性です。Jaffe–Witten は “The Yang–Mills equations are nonlinear—in contrast to the Maxwell equations.” と書きます 既知 。二つの解を足しても、一般には解になりません。 計算 無作為な $A^a_\mu \cdot \partial_\mu A^a_\nu$ で (11) の両辺は 10 桁一致しました。0 でない f^{abc} は順序つきで SU(2) が 6 個、SU(3) が 54 個です。

表 2　電磁気学とヤン–ミルズの古典的な違い

	電磁気学 U(1)	ヤン–ミルズ SU(N)
ゲージ場の数	1	N^2-1（SU(3) で 8）
場の強さ	不変	共変 (8)
ゲージ場の電荷	持たない	持つ (4)
定数のポテンシャル	場を作らない	交換子が 0 でなければ作る
方程式	線形	非線形 (11)
古典の波	質量 0	質量 0（§08）

07

空間に一様な場 — 交換子だけが作る谷

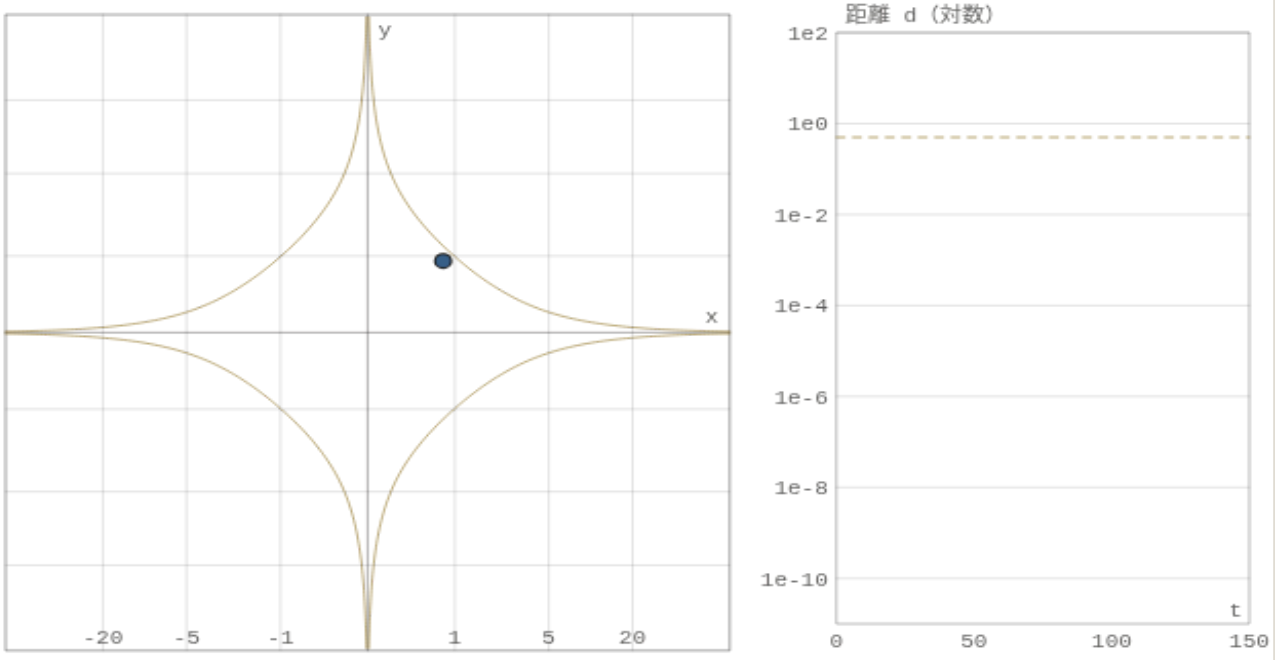
自己相互作用を一番小さな形で見ます。SU(2) で $A_0 = 0$ とし、A_i^a が時間だけの関数だとすると、(9) の磁場は交換子の項だけです。さらに $A_1^1 = x(t)$、$A_2^2 = y(t)$、ほかを 0 と置くと、0 でない場は $E_1^1 = -\dot{x}$、$E_2^2 = -\dot{y}$、$B_3^3 = g\,xy$ で、(10) は平面上の粒子のエネルギーになります。

$$H = \tfrac{1}{2}\big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\big) + \tfrac{1}{2}g^2x^2y^2, \qquad \ddot{x} = -g^2xy^2, \quad \ddot{y} = -g^2x^2y \tag{12}$$

一様な場では、ヤン–ミルズの運動方程式（3-03）は 9 成分 A_i^a の粒子が $\tfrac{1}{2}\sum (B_i^a)^2$ の中を動く式になり、この置き方はそれと矛盾しません 計算 （数値微分で、他の 7 成分に働く力は 0。Gauss の拘束 $\varepsilon^{abc}A_i^bE_i^c = 0$ も成り立ちます）。Gauss の拘束とは、時間ゲージで失われた A_0 の方程式が残す条件で、電磁気学の $\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$ の非可換版です。一様な場では微分の項が消えて、この形になります（4-01）。比べるために二つの成分を同じ色の向きに置く（$A_1^1 = x$、$A_2^1 = y$）と、交換子が 0 で $V = 0$、電磁気学と同じく粒子はまっすぐ進みます。

非可換の $V = \tfrac{1}{2}g^2x^2y^2$ は座標軸の上で 0 で、谷は無限に続き、奥ほど細くなります（エネルギー E で動ける幅は $|y| \le \sqrt{2E}/(g|x|)$）。図 2 は、速度を δ だけ変えた二つの粒子を同時に走らせます。

図 2　左：(12) の軌道（$g = 1$、初期値 $(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (0.8, 0.9, 0.6, -0.3)$、$E = 0.4842$。目盛りは遠くを縮め、細い曲線は $V = E$ の等高線）。右：二つの粒子の距離 d（縦は対数）。つまみ k で初めのずれ $\delta = 10^{-k}$ を変え、「可換にする」で $V = 0$ に切り替えます。



t = 0.00　d = 0.0e+0　0.5 を超えた時刻 —　E のずれ 0e+0　（非可換、δ = 1e-6）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（表 3 と同じ積分の規則：4 次の Runge–Kutta、刻み $\min(0.01,\ 0.02/(g\max(|x|,|y|)))$、0.05 ごとに距離を見る）。JavaScript が無効なら表 3 が図の中身です。

表 3　初めのずれ δ と、距離が 0.5 を超える時刻

δ	非可換	可換（$0.5/\delta$）
1e-2	7.45	50
1e-4	25.05	5e3
1e-6	37.90	5e5
1e-8	54.55	5e7
1e-10	77.15	5e9

非可換では δ を 1/10 にするごとに、離れる時刻がおよそ 8 ずつ延びるだけです（10^{-2}〜10^{-10} の 9 点への直線のあてはめで傾き 8.04（表 3 は一桁おきの 5 点）。軌道が谷の奥にいる間は離れ方が鈍るので刻みは不揃い）。距離が指数的に増えるということで、右の図ではほぼ直線に上がります。可換では距離は $\delta\,t$ です。エネルギーのずれは $t \le 120$ で 5×10^{-9} 以下でした 計算 。この系は古典ヤン–ミルズ力学として調べられてきました。Savvidy（1983）はこの種の力学を K 系（混合性の強い力学系）だと論じましたが、Dahlqvist–Russberg（1990）はこの x^2y^2 の系に安定な周期軌道の族を見つけ、運動が完全にエルゴード的だという先行の主張を否定しました（要旨による）。この端末の計算が示すのは、上の初期値で有限の時間に見える離れ方までです。

古典には尺度が無い

(12) には長さや時間の単位になる定数がありません（g は時間の目盛りを変えるだけ）。解 $x(t), y(t)$ があれば、任意の $\lambda > 0$ で

$$x_\lambda(t) = \lambda\, x(\lambda t), \qquad y_\lambda(t) = \lambda\, y(\lambda t), \qquad E_\lambda = \lambda^4 E \tag{13}$$

も解です（代入すると両辺に λ^3 が出ます）。例。エネルギーを 1/16 にすると、同じ形の運動が 2 倍ゆっくり起こります。エネルギーを 0 に近づければ運動はいくらでも遅くなり、振動数に下限がありません。計算 $\lambda = 0.5,\ 0.25,\ 0.125$ の初期値を同じ規則で別々に解き、時刻 $5/\lambda$ の位置を λ で割ると、どれも $(-0.401421,\ 0.616689)$ と 6 桁一致しました。

場全体でも同じで、$A = 0$ のまわりで (11) の二次の項だけを残すと Maxwell 場の集まりになり、振動数は $\omega = |\mathbf{k}|$ で 0 まで続きます。Jaffe–Witten はこれを、古典の方程式が “massless waves that travel at the speed of light” を記述する、と書きます 既知 。量子にすると、谷の奥では横の振動の最低エネルギー $g|x|/2$ が壁になり、(12) を量子化した作用素のスペクトルは離散で、最低固有値は正です 既知 （Simon 1983、2-05 の寄り道）。これは一様な場だけを残した有限自由度の模型についての定理です。

場の理論としての量子ヤン–ミルズに隙間があることは、物理では広く受け入れられていますが、定理にはなっていません 物理 。

08

質量の問題 — 手で足せない理由

§01 の寄り道の Pauli の問いに、式で答えます。質量 m のベクトル場なら、ラグランジアン密度に $-\frac{1}{2}m^2 A^a_\mu A^{a\,\mu}$ を足すのが普通です（電磁場なら Proca の場）。ところが (4) で変化を計算すると

$$\delta\left(A^a_\mu A^{a\,\mu}\right) = \frac{2}{g}\,A^{a\,\mu}\partial_\mu \alpha^a + 2f^{abc}A^{a\,\mu}A^b_\mu\,\alpha^c = \frac{2}{g}\,A^{a\,\mu}\partial_\mu\alpha^a \tag{14}$$

です。第二項は f^{abc} が a,b について反対称、$A^{a\,\mu}A^b_\mu$ が対称なので消えます。残る第一項は (3) の非斉次の項から来ていて、α が点によると 0 になりません。質量項は、各点で回してよいという要求を壊します 既知 。 計算 無作為な A と小さな α で、SU(2)・SU(3) とも (14) の両辺が 4 桁以上一致しました。

こうしてゲージ不変性を保つ限り、古典のヤン–ミルズ場の波は質量を持ちません。Jaffe–Witten は “The massless nature of classical Yang–Mills waves was a serious obstacle to applying Yang–Mills theory to the other forces” と書きます。越え方が弱い力（Higgs 場、3-07）と強い力（漸近自由、4-06）で違ったことは、3-01 §06 で見ました。

強い力の理論が量子の水準で持つべき性質の一つ目として、Jaffe–Witten は質量ギャップを挙げます：“there must be some constant $\Delta > 0$ such that every excitation of the vacuum has energy at least Δ”（0-03・4-11）。古典の場には尺度が無く（§07）、隙間は量子化してはじめて生じると考えられています 物理 。純粋なヤン–ミルズ理論について存在と質量ギャップを定理として示すことが問題文の要求で、この章はそれについて何も示していません。

この章が言えている範囲

事項	言えている	言えていない
(2)〜(8)・(11)	標準の導出と、SU(2)・SU(3) での数値の確認 既知 計算	運動方程式・Bianchi 恒等式（3-03）、接続の空間の幾何（3-04）
(12) 一様な場の x^2y^2 の系	置き方の整合と、この初期値で有限時間に見える指数的な離れ方 計算	不規則性の証明、リャプノフ指数（近い軌道が離れる速さの指数）の値

事項	言えている	言えていない
(13) 古典に尺度が無いこと	厳密なスケーリングと数値の確認 計算	量子化で尺度が生じることの、場の理論としての証明
(14) 質量項	局所的なゲージ不変性を壊すこと 既知	Higgs 機構の中身（3-07）
質量ギャップ	—	量子のヤン–ミルズ理論に隙間があること（未解決。このサイトは何も示していない） 物理
§01 の歴史	要旨・総説・問題説明に書かれていること	Yang–Mills の本文、Pauli の書簡の原文、Shaw の仕事の中身

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§01 の要旨の引用と要約	一次資料（要旨を確認・本文は未読）	C. N. Yang, R. L. Mills, “Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance”, Phys. Rev. 96 (1954) 191（受理 1954 年 6 月 28 日）
Pauli の 1953 年の仕事・書簡の一句・ノートの引用・Yang の回想	総説（本文を確認）	N. Straumann, “On Pauli's invention of non-abelian Kaluza-Klein Theory in 1953”, arXiv:gr-qc/0012054（Yang の回想は C. N. Yang, Selected Papers p. 525 を典拠として引く）。書簡集（W. Pauli, Wissenschaftlicher Briefwechsel IV/II, Springer 1999）は書誌のみ
1954 年 2 月のセミナーの回想・Shaw と Utiyama	総説（本文を確認）	L. O'Raifeartaigh, N. Straumann, “Early History of Gauge Theories and Kaluza-Klein Theories, with a Glance at Recent Developments”, arXiv:hep-ph/9810524 §VII・図 1（掲載時の題 “Gauge theory: Historical origins and some modern developments”, Rev. Mod. Phys. 72 (2000) 1–23）。原典の C. N. Yang, Selected Papers 1945–1980 with Commentary (1983) p. 525 は書誌のみ
Utiyama（1956）の書誌	一次資料（要旨を確認）	R. Utiyama, “Invariant Theoretical Interpretation of Interaction”, Phys. Rev. 101 (1956) 1597
SU(3)・非線形・質量の無い波・深刻な障害・質量ギャップの引用	一次資料（本文を確認）	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”, Clay Mathematics Institute の公式問題説明 §1
x^2y^2 の系：K 系という主張	書誌のみ（Crossref で確認）	Savvidy, “The Yang-Mills classical mechanics as a Kolmogorov K-system”, Phys. Lett. B 130 (1983) 303–307
x^2y^2 の系：安定な周期軌道の族	一次資料（要旨を確認）	P. Dahlqvist, G. Russberg, “Existence of stable orbits in the x^2y^2 potential”, Phys. Rev. Lett. 65 (1990) 2837–2838
量子の x^2y^2 の系の離散スペクトル	既知（書誌のみ）	B. Simon, “Some quantum operators with discrete spectrum but classically continuous spectrum”, Ann. Phys. 146 (1983) 209–220（Jaffe–Witten §6.6 の文献 [43]。平らな方向を持つ位置エネルギーでも束縛状態が生じる例として引かれる）

もの	種別	出典・道具
(1)〜(14) の導出	既知	標準的な事項。記号の翻訳は §02 の表
表 1・図 1、§04・§06・§08 の数値	この端末で計算	Python 3.12・NumPy 1.26・SciPy 1.11（`chain_covariance.py`・`formula_checks.py`）。図 1 は同じ式を素の JavaScript で計算
§07 の整合・表 3・(13) の確認・図 2	この端末で計算	Python 3.12（`ym_mechanics.py`）。図 2 は同じ規則を素の JavaScript で積分。丸めの違いは不規則な運動で増幅されるので、t が 100 を大きく過ぎると図と表の軌道は離れうる

次に読む章：3-03 作用と方程式（$\mathrm{tr}\, F^2$・Bianchi 恒等式・運動方程式・自己双対）。幾何の続きは 3-04。

作用と方程式 — 一つの作用から、方程式・恒等式・エネルギー・自己双対が出る

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 作用の変分から方程式 $D_\mu F^{\mu\nu} = 0$ が、F の作り方から Bianchi 恒等式が出ます。四次元では応力の跡が 0 で、静止した有限エネルギーの塊は無いことが出ます。虚時間の作用は $8\pi^2|Q|/g^2$ 以上で、等号は自己双対な場です。

前提となる章 — 3-02（共変微分・場の強さ・色の電場と磁場）。変分は 2-01、Maxwell の作用は 2-03・2-04、ホッジの星は 1-06・1-12。

先に言うこと — 古典論の章で、量子論も質量ギャップも扱いません。§06 は古典の場の既知の事実で、量子論の隙間の有無とは別の話です。Q が整数であることと BPST の解の構成は 3-05 に回します。

この章の順序

1. 約束と作用 — $\mathrm{tr}\, F^2$ を選ぶ理由
2. 運動方程式 — 場が自分自身の源になる
3. 色の電場と磁場で書く — Gauss の法則は拘束
4. Bianchi 恒等式 — 方程式の残り半分
5. エネルギーと運動量 — 四次元で跡が消える
6. 静止した塊は無い — 寄り道：減る速さの仮定は要らない・球対称な場（図 1）・寄り道：エネルギー無限大の解
7. 虚時間の作用と自己双対 — 作用の下界
8. 伸び縮みさせたインスタントン — Q は変わらず作用が増える（図 2）
9. 古典論が言うこと、言わないこと

01

約束と作用 — tr F² を選ぶ理由

規約は 3-02 §02 と同じで、$\hbar = c = 1$、計量 $(-,+,+,+)$、エルミートな T^a（$\operatorname{tr} T^a T^b = \tfrac{1}{2}\delta^{ab}$）、$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$ です。リー環に値を取る場 X には $D_\mu X = \partial_\mu X - ig[A_\mu, X]$（成分で $\partial_\mu X^a + g f^{abc} A^b_\mu X^c$）と働き、色の電場と磁場は $E^a_i = F^a_{i0}$、$B^a_i = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^a_{jk}$ です（3-02 §05）。作用は Maxwell の作用（2-04 の (8)）の F を非可換の場の強さに替え、トレースを取ったものです。

$$S[A] = -\frac{1}{2}\int \operatorname{tr}\!\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) d^4x = -\frac{1}{4}\int F^a_{\mu\nu}F^{a\,\mu\nu}\, d^4x = \frac{1}{2}\int \sum_a \left(|\mathbf{E}^a|^2 - |\mathbf{B}^a|^2\right) d^4x \qquad (1)$$

形は四つの要求でほぼ決まります。ゲージ不変性（$F' = \Omega F \Omega^{-1}$ の回転はトレースで消える）、ローレンツ不変性、方程式が時間の二階微分で閉じること、そして作用の係数に長さの尺度を入れないこと（質量の次元が $[F^2] = 4$ の項だけ。2-04 §08 の次元の勘定）です。最後の条件が要るのは、$(\operatorname{tr} F^2)^2$ のような F の高い次の不変式を足しても方程式は二階のままだからです。その係数には長さの四乗が要り、尺度が入ります。四つを課し、群が単純なら、F の二次の不変式は (1) と方程式を変えない θ 項（3-05）の一次結合だけです（2-04 §07）既知 。例。一様な場 $A^1_1 = x(t)$、$A^2_2 = y(t)$（3-02 §07）では体積あたり $L = \tfrac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \tfrac{1}{2}g^2x^2y^2$ で、その Euler–Lagrange 方程式（2-01）が 3-02 の (12) です。

$\hat{A} = gA$ と取り直すと (1) は $-\frac{1}{2g^2}\int \operatorname{tr}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}$ で（Jaffe–Witten の $\frac{1}{4g^2}\int \operatorname{Tr} F\wedge *F$ と、規格化と符号の約束を除いて同じ形 既知 ）、g は古典の方程式に効かず、量子論で $g^2\hbar$ の組として摂動の展開の変数になります（4-03）。

02

運動方程式 — 場が自分自身の源になる

A を δA だけずらすと、3-02 の (6) から $\delta F_{\mu\nu} = D_\mu \delta A_\nu - D_\nu \delta A_\mu$ です。$F^{\mu\nu}$ の反対称性と、部分積分で交換子の項が $\operatorname{tr}([A,X]Y) = -\operatorname{tr}(X[A,Y])$ により相手に移ることから（δA は遠くで 0）、

$$\delta S = -2\int \operatorname{tr}\!\left(F^{\mu\nu} D_\mu \delta A_\nu\right) d^4x = 2\int \operatorname{tr}\!\left((D_\mu F^{\mu\nu})\,\delta A_\nu\right) d^4x$$

です。どの δA でも 0 という停留の条件が、ヤン–ミルズ方程式です 既知 。

$$D_\mu F^{\mu\nu} = 0, \qquad \partial_\mu F^{a\,\mu\nu} = -g\, f^{abc} A^b_\mu F^{c\,\mu\nu} \qquad (2)$$

Maxwell と違って右辺に残る A と F の積は、ゲージ場自身が運ぶ色の電流です（3-02 §06 の予告）。(2) は A の三次までを含む非線形な方程式で、Jaffe–Witten は “The Yang–Mills equations are nonlinear—in contrast to the Maxwell equations.” と書きます 既知 。微分形式では $d_A{*}F = 0$ です（1-06）。

電流は共変にしか保存しない

物質の場があると右辺に色の電流が立ち、Maxwell と同じ符号で $D_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu$ です。左辺には、どんな A でも成り立つ恒等式があります（各項が同じ行列どうしの交換子なので 0）。

$$D_\nu D_\mu F^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}[D_\nu, D_\mu]F^{\mu\nu} = -\tfrac{ig}{2}\,[F_{\nu\mu}, F^{\mu\nu}] = 0$$

よって $D_\nu j^\nu = 0$ が必要で、普通の意味で保存するのは物質と場の電流の和 $j^{a\nu} + g f^{abc} A^b_\mu F^{c\,\mu\nu}$ です（2-03 の電荷の保存との違い）。

03

色の電場と磁場で書く — 非可換の Maxwell 方程式

$F^{i0} = -E_i$、$F^{ij} = \varepsilon_{ijk} B_k$ を $D_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu$ に入れると、Gauss と Ampère–Maxwell の法則（2-03 の源のある Maxwell の式）の ∇ を共変微分 $(\mathbf{D}_i X)^a = \partial_i X^a + g f^{abc} A^b_i X^c$ に替えた形です（$\rho = j^0$）。

$$(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})^a = \rho^a, \qquad (\mathbf{D}\times\mathbf{B})^a - (D_t\mathbf{E})^a = \mathbf{j}^a \tag{3}$$

Gauss の法則は時間の二階微分を含まない各時刻の拘束で、$A_0 = 0$ では初めに満たせば §02 の恒等式で満たされ続けます。3-02 §07 が確かめた拘束 $\varepsilon^{abc} A^b_i E^c_i = 0$ は、一様な場でのこの式です。

この拘束から、自由に選べる成分の数が分かります。各色で A_μ は 4 成分です。(1) には A_0 の時間微分が現れないので（F_{i0} は $\partial_0 A_i$ を含むが $\partial_0 A_0$ を含まない）、A_0 は運動する変数ではなく、ゲージ変換で $A_0 = 0$ にできます。残る A_i の 3 成分のうち、小さな波で見て進む向きに沿った縦の成分は、Gauss の法則と、$A_0 = 0$ を保つ時間によらないゲージ変換とで取り去られます。こうして各色 $4 - 1 - 1 = 2$ が残り、光の二つの偏りと同じ数です。$SU(N)$ では色が $N^2 - 1$ 個あるので $2(N^2-1)$、$SU(3)$ なら 16 です 既知 （量子版は 4-01）。

04

Bianchi 恒等式 — 残り半分は作り方から出る

Maxwell 方程式の源の無い半分は、場をポテンシャルから作ったことから出ました（1-06 の $dF=0$）。非可換でも、F が A の曲率であることだけから次が成り立ちます 既知 。

$$D_\lambda F_{\mu\nu}+D_\mu F_{\nu\lambda}+D_\nu F_{\lambda\mu}=0 \tag{4}$$

理由は作用素のヤコビ恒等式 $[D_\lambda,[D_\mu,D_\nu]]+[D_\mu,[D_\nu,D_\lambda]]+[D_\nu,[D_\lambda,D_\mu]]=0$ です。$[D_\mu,D_\nu]=-igF_{\mu\nu}$（3-02 の (6)）と、積の微分の規則から出る $[D_\lambda,F_{\mu\nu}]=D_\lambda F_{\mu\nu}$ を入れると、左辺は (4) の $-ig$ 倍です。幾何の書き方では 1-07 の (12)、Jaffe–Witten の $0=d_A F$ です。電場と磁場では (3) と対になる二本です。

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{B}=0,\qquad \mathbf{D}\times\mathbf{E}+D_t\mathbf{B}=0 \tag{5}$$

電磁気学と違い、普通の発散 $\nabla\cdot\mathbf{B}^a=-gf^{abc}\mathbf{A}^b\cdot\mathbf{B}^c$ は 0 とは限らず、一つの色だけ見れば磁力線は途中で切れてよいのです。正確には、$\nabla\cdot\mathbf{B}^a$ はゲージで変わる量で、ゲージによらない主張は (5) の $\mathbf{D}\cdot\mathbf{B}=0$ です。小さな立方体の六面の磁束は面ごとに違う色の枠で測った量で、共通の一点まで平行移動（1-07）してから足すと、体積の次数の項が消えます（(5) の第一式を立方体で積分した形）。無作為な場で、(4) の左辺は差分の誤差（4×10^{-7}）の範囲で 0、普通の微分での巡回和は 2.1〜2.6 でした 計算 。

05

エネルギーと運動量 — 四次元で跡が消える

並進の Noether の保存量（2-01）をゲージ不変に整えたものが、エネルギー運動量テンソルです 既知 。

$$T^{\mu\nu}=F^{a\,\mu\alpha}F^{a\,\nu}{}_{\alpha}-\tfrac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^a_{\alpha\beta}F^{a\,\alpha\beta} \tag{6}$$

$T^{00}=\frac{1}{2}\sum_a(|\mathbf{E}^a|^2+|\mathbf{B}^a|^2)$ がエネルギー密度（3-02 の (10)）、$T^{0i}=\sum_a(\mathbf{E}^a\times\mathbf{B}^a)_i$ が運動量密度で、色について和を取るのでゲージで変わりません。エネルギー密度は 0 以上で、0 になるのは $F=0$（純ゲージ、3-02 §04）の所だけです。発散を取り (4) を使うと F の微分の項が二つ打ち消し合い、

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}=(D_\mu F^{\mu\alpha})^a\,F^{a\,\nu}{}_{\alpha} \tag{7}$$

が残ります。解の上では 0 で、エネルギーと運動量が保存します。物質があれば右辺は $-j^{a\alpha}F^{a\,\nu}{}_{\alpha}$ で、物質に働く色の Lorentz 力の分だけ場が失います。跡は $\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}=d$（時空の次元）から

$$T^{\mu}{}_{\mu} = \left(1 - \frac{d}{4}\right) F^{a}_{\alpha\beta} F^{a\,\alpha\beta} \tag{8}$$

で、恒等的に 0 になるのは $d = 4$ だけです。古典の作用に長さの尺度が無いこと（2-04・1-12）の、応力の側からの言い方です 既知 。量子論では、摂動論の計算で跡に β 関数（結合定数が尺度とともに動く速さ。4-06）に比例する F^2 の項が現れ（跡の異常）、4-07 の次元転移と同じ現象とされます 物理 。跡の係数 $1 - d/4$ を、四で切り替わる他の量と並べた図は 1-12 §10 の次元のつまみです。

無作為な SU(2)・SU(3) の場で、$D_\nu D_\mu F^{\mu\nu}$ と (7) の両辺の差は差分の誤差の範囲（2.2×10^{-5} 以内）、T^{00}・T^{0i}・跡・(3) の形は丸め誤差以内で、(8) の係数は $d = 3, 5, 6$ でも $1 - d/4$ でした 計算 。

06

静止した塊は無い — 跡 0 と力のつり合い

粒子を古典の場で表すなら、エネルギーが一か所に留まる解（静止した塊）が候補です。純粋なヤン–ミルズ場の $3+1$ 次元では、至る所滑らかでエネルギーが有限な、時間によらない解は真空だけです 既知 。筋を追います。$T^{\mu\nu}$ が時間によらないなら、(7) から $\partial_k T^{kj} = 0$ です（$T^{\mu\nu}$ は (6) から対称で、発散をどちらの添字で取っても同じです）。$\partial_k x^i = \delta_{ik}$ と合わせて $\partial_k (x^i T^{kj}) = T^{ij}$ なので、半径 R の球の中で積分して発散定理を使うと、体積の積分が球面の積分に移ります（場が球の中で滑らかなので使えます）。

$$\int_{|\mathbf{x}|<R} T^{ij}\, d^3x = \oint_{|\mathbf{x}|=R} x^i T^{kj} n_k \, dS$$

右辺の大きさは、球面の面積 $4\pi R^2$ と腕の長さ R と球面の上の $|T|$ の積の程度です。たとえば T が r^{-3} より速く減れば、$R \to \infty$ で 0 になり $\int T^{ij} d^3x = 0$ です。実はエネルギーが有限なだけで足ります（下の寄り道）。(8) の $-T^{00} + \sum_i T^{ii} = 0$ と合わせると

$$E = \int T^{00}\, d^3x = \sum_i \int T^{ii}\, d^3x = 0 \tag{9}$$

です。エネルギー密度は 0 以上の連続関数なので至る所 0 で、至る所 $F = 0$ です。塊の外向きの圧力 $\sum_i T^{ii}$ がエネルギーと等しく、押し返すものが無いという形です。関係する結論を題に掲げた論文に Deser（1976）“Absence of static solutions in source-free Yang–Mills theory” と Coleman（1977）“There are no classical glueballs” があります（書誌のみ。証明の方法は本文で確認していません）。質量の次元を持つ定数（Higgs 場など）を足すと跡が 0 でなくなり、この議論は使えません。

寄り道：減る速さの仮定は要らない

飛ばしてよい小節です。

(6) を電場と磁場で書くと、各色で $T^{ij}=\tfrac12\delta_{ij}(|\mathbf{E}|^2+|\mathbf{B}|^2)-E_iE_j-B_iB_j$ です。単位ベクトル $\mathbf{n}$ で挟むと $\tfrac12(|\mathbf{E}|^2+|\mathbf{B}|^2)-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})^2-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{B})^2$ で、色について足しても $-T^{00}$ と T^{00} の間にあります。対称行列なので $|T^{kj}n_k|\le T^{00}$ で、球面の積分の大きさは $R\,f(R)$ 以下です。ここで $f(R)=\oint_{|\mathbf{x}|=R}T^{00}dS$ は $\int_0^\infty f(R)\,dR=E$ を満たします。

もし大きな R で常に $R\,f(R)\ge c>0$ なら、$\int^\infty c/R\,dR$ が発散して E が有限であることに反します。よって $R_n f(R_n)\to 0$ となる半径の列 $R_n\to\infty$ が取れ、その列に沿って球面の積分は 0 に近づきます。左辺も $|T^{ij}|\le T^{00}$ から $\int T^{ij}d^3x$ に収束するので、(9) は「至る所滑らかでエネルギーが有限」だけで成り立ちます 既知 。

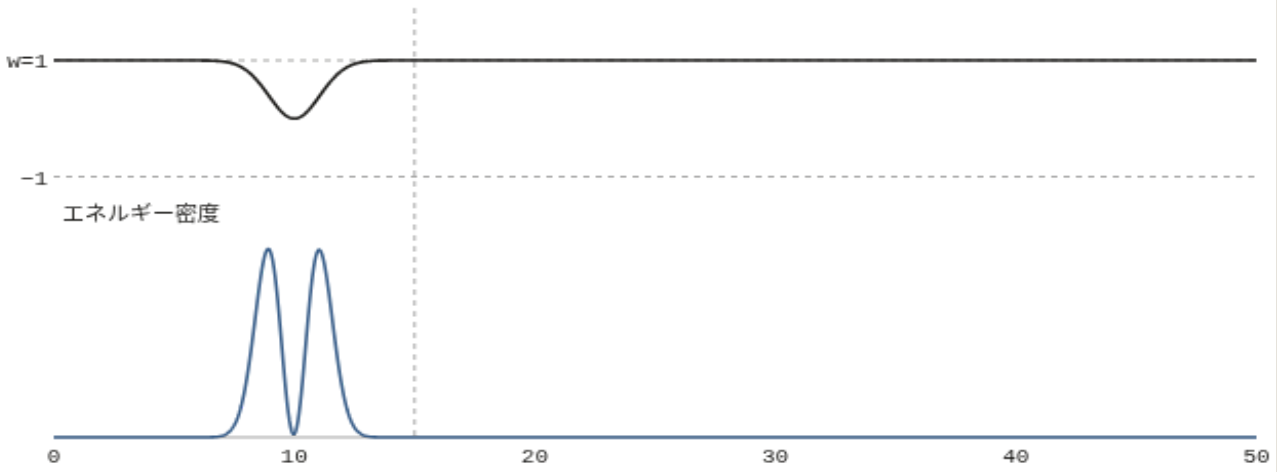
球対称な場で見る

SU(2) で空間と色を同時に回して変わらない形 $A_0=0$、$A_i^a=\varepsilon_{aij}x_j\,(1-w(r,t))/(gr^2)$ を取ると、問題は一変数 $r=|\mathbf{x}|$ になります。

$$E=\frac{4\pi}{g^2}\int_0^\infty\Big[w_t^2+w_r^2+\frac{(1-w^2)^2}{2r^2}\Big]dr,\qquad w_{tt}=w_{rr}+\frac{w(1-w^2)}{r^2}\tag{10}$$

$w=\pm1$ はエネルギー 0 の純ゲージです。三次元の場で差分により、エネルギー密度（10^{-8} の精度）・Gauss の法則・(3) の残りが (10) に帰着することを確かめました 計算 。

図 1　つまみ a でへこみの深さ（$w(r,0)=1-a\,e^{-((r-10)/1.5)^2}$）を変え、「動かす」で時間を進める。上は w、下は dr あたりのエネルギー密度、点線は $r=15$



a = 1 t = 0.00 E(t)/E(0) = 1.0000 r<15 の割合 = 1.000

計算 この図の数値はこの端末で計算した。表 1 と同じ差分（$h=0.05$、$\Delta t=h/2$ の蛙跳び）を同じ順序で解き、python3 と 12 桁一致します。JavaScript が無効なら表 1 が図の中身です。

表 1　$a = 1.0$ の時間発展。山の位置は dr あたりのエネルギー密度の極大。全エネルギー $0.84922 \times 4\pi/g^2$ のずれは $t \le 40$ で相対 2×10^{-4} 以下

t	$r<15$ の割合	外向きの山	内向き→折り返しの山
0	1.0000	–	–
10	0.4996	18.95	1.10
20	0.4983	28.95	10.90
30	0.0000	38.90	20.90

へこみは二つに割れて光の速さ 1 で進み、内向きの山は $t \approx 10$ に原点で折り返し、$t = 30$ には $r < 15$ に何も残りません。$a = 0.3,\ 1.8$ でも同じでした 計算 。示しているのはこの初期値と有限の時間の範囲までです。

寄り道：静止した解はあるが、エネルギーが無限大

飛ばしてよい小節です。

(10) の $w = 0$ は時間によらない解で、磁場は $|\mathbf{B}| = 1/(gr^2)$ と点磁荷の形です 計算 。原点で特異で、エネルギー $\int 4\pi r^2 dr/(2g^2 r^4)$ が原点で発散するので、(9) の仮定（至る所滑らか・エネルギーが有限）の外にあります。Wu と Yang の名で呼ばれるとされる解です。

07

虚時間の作用と自己双対 — 作用の下界

虚時間 $t = -i\tau$、$x_4 = \tau$（2-04 §09）に移ります。$A_0\,dt = A_4\,d\tau$ から $A_0 = iA_4$、また $\partial_t = i\partial_4$ なので、$F_{i0} = iF_{i4}$ です。そこで $E^a_i = F^a_{i4}$ と置き直すと (1) の $|\mathbf{E}^a|^2$ の符号が反転し、iS は $-S_E$ になります。ユークリッドの作用 S_E は正の量の和で、量子論ではこれが重み e^{-S_E} に入ります（4-02）。

$$S_E[A] = \frac{1}{4}\int F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}\,d^4x = \frac{1}{2}\int \sum_a \left(|\mathbf{E}^a|^2 + |\mathbf{B}^a|^2\right) d^4x \ \ge 0 \tag{11}$$

ホッジの星 $(*F)_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$（$\varepsilon_{1234} = 1$、1-12）はこの書き方で $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ を入れ替えるので、自己双対 $F = *F$ は $\mathbf{E}^a = \mathbf{B}^a$、反自己双対は $\mathbf{E}^a = -\mathbf{B}^a$ です。各点で $\frac{1}{2}(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2) = \frac{1}{2}|\mathbf{E} \mp \mathbf{B}|^2 \pm \mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ なので、

$$S_E = \frac{1}{2}\int \sum_a |\mathbf{E}^a \mp \mathbf{B}^a|^2\,d^4x \pm \frac{8\pi^2}{g^2}Q \ \ge\ \frac{8\pi^2}{g^2}|Q|, \qquad Q = \frac{g^2}{8\pi^2}\int \sum_a \mathbf{E}^a\cdot\mathbf{B}^a\,d^4x \tag{12}$$

で、等号は自己双対（$Q>0$）か反自己双対（$Q<0$）のときだけです 既知 。ヤン–ミルズ方程式の解で作用が有限なら、S^4 の上の場に延びて Q は整数になるとされます（Uhlenbeck 1982、書誌のみ）。解でない一般の場については 3-05 §03 で扱います。3-05 の幾何の書き方（反エルミートな A と c_2）では $Q=-c_2$ です（3-05 の寄り道）。

自己双対な場は自動的に解です。$D_\mu F_{\mu\nu}=\pm\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}D_\mu F_{\rho\sigma}$ は (4) の巡回和で 0 だからです。二階の (2) の代わりに一階の $F=\pm *F$ を解けばよく、その解は同じ Q の中で作用が最小です。Jaffe–Witten §2 は、古典の非可換ゲージ理論が三・四次元の多様体の研究で大きな役割を果たしてきたと書きます 既知 。四次元でのその代表が（反）自己双対の一階の方程式で、Donaldson（1983）はその解の空間を四次元の位相に使いました（3-06） 既知 。実の自己双対な場は虚時間にしかありません（1-06）。

08

伸び縮みさせたインスタントン — Q は変わらず、作用だけが増える

例として、3-05 で構成する BPST の解（Belavin–Polyakov–Schwartz–Tyupkin 1975）を借ります 既知 。't Hooft の記号（$\eta_{aij}=\varepsilon_{aij}$、$\eta_{ai4}=-\eta_{a4i}=\delta_{ai}$）で、大きさ ρ の解は次の形です。

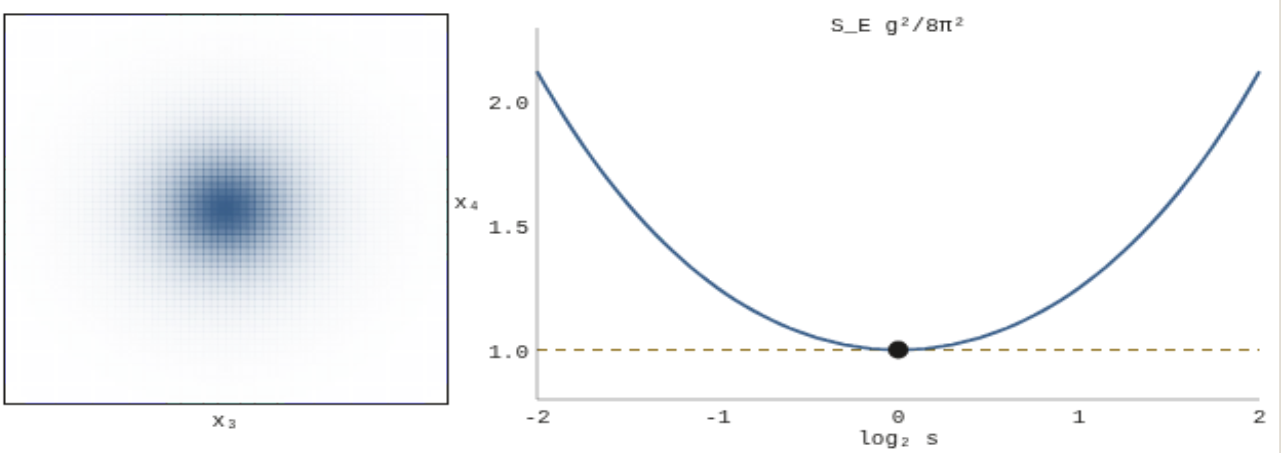
$$A^a_\mu=\frac{2}{g}\,\frac{\eta_{a\mu\nu}x_\nu}{|x|^2+\rho^2},\qquad F^a_{\mu\nu}=-\frac{4}{g}\,\frac{\eta_{a\mu\nu}\,\rho^2}{(|x|^2+\rho^2)^2} \tag{13}$$

η_a が自己双対なので $\mathbf{E}^a=\mathbf{B}^a$、$S_E=8\pi^2/g^2$、$Q=1$ です（1-12 の表 1）。差分で (13) の右の式・$F=*F$・$D_\mu F_{\mu\nu}=0$ を 6×10^{-10} 以内で確かめました 計算 。これを虚時間の向きに変形します。$M=\mathrm{diag}(1,1,1,s)$ で $A^{(s)}_\mu(x)=M_{\nu\mu}A_\nu(Mx)$ と引き戻すと、$s>1$ なら場の形は x_4 の向きに $1/s$ 倍に縮み、$s<1$ なら $1/s$ 倍に伸びます。$\mathbf{E}^{(s)}=s\,\mathbf{E}(Mx)$、$\mathbf{B}^{(s)}=\mathbf{B}(Mx)$ で、x_4 を添字に持つ $\mathbf{E}$ の成分 F_{i4} だけが s 倍になります（x_4 の微分と A_4 に s が掛かるため）。$s\neq1$ では解ではありません。$y=Mx$（$d^4x=d^4y/s$）と置き換えると次が出ます。

$$S_E^{(s)}=\frac{8\pi^2}{g^2}\cdot\frac{1}{2}\Big(s+\frac{1}{s}\Big),\qquad Q^{(s)}=1 \tag{14}$$

作用は $s=1$ で最小で、伸ばしても縮めても増えます（相加相乗平均）。Q が変わらないのは、被積分関数 $\mathrm{tr}\,F\wedge F$ が計量を使わない四次の微分形式で、向きを保つ座標の取り替えで積分が変わらないからです（1-06）。作用はホッジの星、つまり計量を使うので変わります。

図 2　つまみで $\log_2 s$ を動かすと、左の作用密度の断面（$x_1=x_2=0$、縦が虚時間 x_4）が伸び縮みし（$s>1$ で縦に縮む）、右の点が曲線 $\frac{1}{2}(s+1/s)$ の上を動く。破線は $Q=1$ の下界



s = 1.000 |E|/|B| = 1.000 S_E·g²/8π² = 1.0000 Q = 1

計算 この図の数値はこの端末で計算した。図は (14) と作用密度の閉じた式をその場で計算しています（表 2 と一致）。

表 2　x_4 の向きに伸び縮みさせたインスタントンを変数変換せず x の四次元極座標で数値積分（$g=\rho=1$。動径 96 点・角度 48×64×64 点）計算 。S_E は (14) と 6 桁一致し、どの s でも $\geq |Q|=1$

s	0.25	0.5	0.8	1	1.25	2	4
$S_E g^2/8\pi^2$	2.125000	1.250000	1.025000	1.000000	1.025000	1.250000	2.125000
Q	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

09

古典論が言うこと、言わないこと

古典のヤン–ミルズ場には、有限のエネルギーの静止した塊が無く（§06）、波の振動数に下限も無く（3-02 §07）、虚時間では各 Q の作用の最小が自己双対な場で実現します。どれも質量ギャップではありません。Jaffe–Witten §2 は質量ギャップと閉じ込めを “quantum properties that do not have classical analogs” と呼びます 既知 。古典に尺度が無い以上、隙間の尺度は量子化の過程で入ると考えられています（4-07）物理 。この章は量子論についても質量ギャップについても何も示していません。

この先の章への橋です。3-04 では、ゲージ変換で移り合う場を同じものと見なした空間（ゲージ軌道空間）の形を調べ、ゲージを全体で一通りに固定できない理由を扱います。§07 の Q が整数であることと BPST の解の構成は 3-05、自己双対な場の解の空間が四次元の位相を見分ける話は 3-06 の寄り道です。§05 の跡と尺度の話は、量子論の側で 4-06（漸近自由）と 4-07（次元転移）に続きます。

この章が言えている範囲

事項	言えている	言えていない
(1)〜(8)	導出と数値の確認 既知 計算	物質の場（3-07）、量子論の跡 物理
(9)	至る所滑らかでエネルギーが有限な、時間によらない解についての議論 既知	滑らかさの仮定を外すこと（§06 の寄り道の $w = 0$ は特異）
(10)・図 1・表 1	三つの初期値で有限の時間に見える散り方 計算	一般の初期値での証明
(12)〜(14)・表 2	導出と 6 桁の数値確認 既知 計算	Q が整数であること（3-05）
質量ギャップ	—	量子のヤン–ミルズ理論に隙間があること（未解決。このサイトは何も示していない） 物理

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§01・§02・§04・§07・§09 の引用と言及	一次資料（本文を確認）	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”（2000）, Clay Mathematics Institute の公式問題説明 §1・§2。*The Millennium Prize Problems*（2006）に収録
静止した解の非存在・BPST の解・有限作用の解の延長	書誌のみ（Crossref）	S. Deser, “Absence of static solutions in source-free Yang–Mills theory”, Phys. Lett. B 64 (1976) 463–464／S. Coleman, “There are no classical glueballs”, Commun. Math. Phys. 55 (1977) 113–116／A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, Yu. S. Tyupkin, “Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations”, Phys. Lett. B 59 (1975) 85–87／K. Uhlenbeck, “Removable singularities in Yang-Mills fields”, Commun. Math. Phys. 83 (1982) 11–29
§07 の Donaldson	書誌のみ（本文の引用は 3-06）	S. K. Donaldson, “An application of gauge theory to four-dimensional topology”, J. Differential Geom. 18 (1983) 279–315
$w = 0$ の解の呼び名	未確認	一次資料を確認していない。候補：T. T. Wu, C. N. Yang, “Some solutions of the classical isotopic gauge field equations”, H. Mark, S. Fernbach 編 *Properties of Matter Under Unusual Conditions*（1969）349 頁〜（書誌のみ。この解を含むかは確かめていない）
作用の一意性（尺度の条件つき）・変分・(4)〜(9)・(12)	既知	標準的な事項。導出は本文。規約は 3-02 §02
§03〜§05・§06・§08 の数値、表 1・表 2、図 1・図 2	この端末で計算	Python 3.12・NumPy 1.26（`identity_checks.py`・`radial_reduction.py`・`radial_sim.py`・`instanton_stretch.py`）。図 1 は同じ差分を素の JavaScript で解く（Node.js で照合）

次に読む章：3-04 幾何としてのゲージ理論。インスタントンは 3-05、格子の作用は 5-01。

幾何としてのゲージ理論 — まっすぐな空間を軌道で割ると、代表を連続には選べなくなる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 接続の全体 $\mathcal{A}$ はまっすぐですが、ゲージで移り合う配位を同一視した軌道空間は曲がり、角を持ちます。ゲージ固定は軌道空間の切り口を選ぶことで、切り口は同じ軌道と何度も交わります（Gribov のコピー）。Singer の定理によれば、S^4（と S^3）の上の $SU(N)$ などの半単純群では連続な切り口が在りません。

前提となる章 — 1-07（接続・ゲージ変換・ホロノミー）と 3-02（非可換の場の強さ）。Haar 測度（§04）、ホモトピー群と主束（§07）はその場で定義します。

先に言うこと — 古典の幾何の章で、量子論も質量ギャップも扱いません。Singer の定理は言明と証明の筋の紹介です。図と表は有限個の辺の格子の模型の計算で、四次元の連続の理論のコピーを数えたものではありません。

この章の順序

1. 配位の空間 — 場の全体を一点ずつ
2. 接続の空間 — まっすぐで、穴が無い
3. ゲージ群と軌道 — 接線と、止める元
4. 軌道空間 — 曲がり、角を持つ（表 1）。寄り道：軌道空間とギャップ
5. ゲージ固定は切り口 — コピーと horizon（図 1・表 2）
6. 一周すると別のコピーへ（表 3）
7. Singer の定理 — 四段の筋（表 4）
8. どう回避されてきたか

01

配位の空間 — 場の全体を一つの空間と見る

力学では粒子の位置の全体を一つの空間（配位空間）と見ました（2-01）。場でも接続 A 一つを一点と見なし、その全体を $\mathcal{A}$ と書きます（無限次元）。ゲージ変換で移り合う配位は同じ物理を表すので（3-01）、本当の配位空間は移り合うものを束ねた集まりです。束ねた一つを**軌道**、その全体を**軌道空間** $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ と呼びます。ゲージ変換は 1-07 の式 (4) と、その格子版（1-07 の式 (7)）です。

$$g \cdot A = g A g^{-1} - (dg)\, g^{-1}, \qquad (g \cdot U)_\ell = g_y\, U_\ell\, g_x^{-1} \quad (\ell : x \to y) \tag{1}$$

(1) の U_ℓ は、辺 ℓ に沿って x から y へ運ぶ平行移動です（1-07 の式 (7)）。5-01 の $U_{x,\mu}$ は $x + a\hat{\mu}$ から x へ運ぶ向きに読むので、この章の記号では U_ℓ（$\ell : x + a\hat{\mu} \to x$）に当たります（$U_\ell = U_{x,\mu}$、逆向きの辺では逆元）。

例（格子）。辺に群の元を置く格子（5-01）では、配位は辺の数 E 個の組 G^E、ゲージ変換は頂点の数 V 個の組 G^V で、有限次元です。問いは二つです。軌道空間はどんな形か。軌道ごとに代表を一つ、連続に選べるか（§07）。

02

接続の空間 — まっすぐで、穴が無い

約束。1-07 と同じく $G = SU(N)$、$\mathfrak{g}$ は反エルミートで跡 0 の行列、接続は $\mathfrak{g}$ 値の 1-形式 $A = \sum_\mu A_\mu\, dx^\mu$ です（3-02 の表の $\mathcal{A} = -igA$ をこの章では A と書き、$\mathcal{A}$ は接続の全体に使います）。底空間 M は $\mathbb{R}^4$・S^4・S^3・円周です。二つの接続の差は $\mathfrak{g}$ 値の 1-形式で、接続に 1-形式を足せばまた接続です（1-07 §03）。だから $\mathcal{A}$ は原点の決まっていないベクトル空間（アフィン空間）です。

$$A_t = (1-t)A_0 + tA_1 \in \mathcal{A}, \qquad g \cdot A_t = (1-t)\, g \cdot A_0 + t\, g \cdot A_1 \tag{2}$$

右の式は、(1) の $-(dg)g^{-1}$ が重み $(1-t) + t = 1$ で一度だけ出ることから従います。t を 1 から 0 へ動かすと $\mathcal{A}$ 全体が一点 A_0 に連続に縮みます。これを**可縮**と呼び、§07 の出発点です。接線の向き a, b には内積を入れます。

$$\langle a, b \rangle = -\int_M \sum_\mu \operatorname{tr}\!\left(a_\mu b_\mu\right) d^d x \tag{3}$$

反エルミートなら $-\operatorname{tr}(a_\mu a_\mu) \geq 0$ で、ゲージ変換 $a \mapsto gag^{-1}$ はこの内積を保ちます。**例**。格子の $U(1)^E$ はトーラスで、縮められない輪を持つので可縮ではありません（格子の配位の空間が可縮でないことは §08 で効きます）。

03

ゲージ群と軌道 — 軌道の接線と、止める元

ゲージ変換の全体 $\mathcal{G}$（滑らかな $g : M \to G$、積は点ごと）は無限次元の群です。軌道の接線は $g = e^{t\xi}$（$\xi : M \to \mathfrak{g}$）を (1) に入れて微分すると出ます。

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{t\xi} \cdot A = -D_A\xi, \qquad D_A\xi = d\xi + [A, \xi] \tag{4}$$

D_A は随伴表現の共変微分です（3-02 §03）。(3) で部分積分すると（ξ どうしの内積は $-\int \mathrm{tr}(\xi\eta)\, d^dx$、境界の項は落とす）、随伴 D_A^* が決まります。

$$\langle D_A\xi, a\rangle = \langle \xi, D_A^* a\rangle, \qquad D_A^* a = -\sum_\mu \big(\partial_\mu a_\mu + [A_\mu, a_\mu]\big) \tag{5}$$

向き a が軌道に直交することは $D_A^* a = 0$ と同じで、$A = 0$ では Landau の条件 $\partial_\mu a_\mu = 0$ です 既知 。**止める元**。$g \cdot A = A$ に右から g を掛けると $gA - dg = Ag$、つまり

$$g \cdot A = A \iff dg + [A, g] = 0 \tag{6}$$

で、平行移動の方程式です（1-07 §04）。g は一点 m での値で決まり、$g(m)$ は A のホロノミーと可換でなければなりません（Singer 1978 §2） 既知 。だから基点つきのゲージ群 $\mathcal{G}_m = \{g : g(m) = 1\}$ はどの接続も動かし（自由に働き）、ホロノミーが共通の不変部分空間を持たない**既約**な接続を止めるのは中心 $\mathbb{Z}_N$（1-04）だけです。$A = 0$ のような**可約**な接続は大きな群（定数の G 全体）で止まり、軌道が細くなって軌道空間の角になります。

04

軌道空間 — 曲がり、角を持つ

L 本の辺が輪になった格子では、ゲージで変わらない量は一周のホロノミー $U = U_{L-1}\cdots U_0$ の共役類だけです（1-07 §06）。$U(1)$ なら角 Φ（$U = e^{i\Phi}$）で、軌道空間は円周です。$SU(2)$ なら固有値 $e^{\pm i\theta}$（$0 \le \theta \le \pi$）で決まり、軌道空間は線分 $[0, \pi]$、端の $U = \pm 1$ は止める元が $SU(2)$ 全体に跳ね上がる角です。$SU(2) \cong S^3$（単位四元数、1-12）と見ると、角 θ の共役類は半径 $\sin\theta$ の球面で、端で一点に潰れます。群の上の、掛け算で変わらない重さ 1 の測度を **Haar 測度**と呼びます。$SU(2)$ では S^3 の一様分布です（1-08 §03）。これを軌道空間に落とすと、軌道の面積（分子）を S^3 の体積（分母）で割った重みが付きます（Weyl の積分公式） 既知 。

$$\rho(\theta)\, d\theta = \frac{4\pi \sin^2\theta}{2\pi^2}\, d\theta = \frac{2}{\pi}\sin^2\theta\, d\theta \tag{7}$$

計算 **表 1**　4 本の辺をそれぞれ $SU(2)$ の Haar 測度で無作為に選んだ環の、ホロノミーの角 θ の分布（200 万標本、標本誤差は 0.0004 以下）。

θ の区間	標本	(7) の積分
0°–30°	0.0289	0.0288
30°–60°	0.1666	0.1667
60°–90°	0.3047	0.3045
90°–120°	0.3044	0.3045
120°–150°	0.1667	0.1667
150°–180°	0.0288	0.0288

(7) に一致し、辺 1 本でも同じです（Haar 測度の元の積はまた Haar 測度に従う）。角の近くの軌道は小さく、そこに来る確率も小さい。この重みは、ゲージを固定するときに掛ける Faddeev–Popov の行列式（§05 の式 (9) の M の行列式）と同じ役をします。正確には、有限次元の群で共役を対角形に固定すると、Faddeev–Popov の行列式が $\sin^2\theta$ の定数倍（Weyl の因子）になります。無限次元のゲージ固定での行列式は、その形式的な類比です（4-08 §02）。

寄り道：軌道空間とギャップ

飛ばしてよい小節です。

量子論の運動エネルギーは、軌道空間のラプラシアンに当たります（4-01）。Karabali–Nair（1996）は Feynman（1981）の論点を “for a finite-dimensional compact manifold the Laplacian has a discrete spectrum, the gap between the first and second eigenvalues being the analogue of the mass gap” とまとめ、ゲージ不変な距離が際限なく大きくならなければギャップが出る、という (2+1) 次元の議論を紹介します 物理 。正確には定理ではなく、同じ論文も “have to be understood with regularizations and all that” と断っています。

05

ゲージ固定は切り口 — Gribov のコピーと horizon

ゲージを固定するとは、各軌道から代表を一つずつ選ぶ写像 $s : \mathcal{A}/\mathcal{G} \to \mathcal{A}$（**切り口**）を選ぶことです。よく使うのは、軌道の上で原点にいちばん近い点を選ぶ規則です。(4)(5) から

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \|e^{t\xi}\cdot A\|^2 = -2\langle A, D_A\xi\rangle = -2\langle D_A^{*}A, \xi\rangle \tag{8}$$

で、これがすべての ξ で 0 になるのは $\partial_\mu A_\mu = 0$、Landau ゲージです。Singer は A を通り軌道に直交する面 $\mathcal{S}_A = \{A + \tau : D_A^* \tau = 0\}$ を一般化された Coulomb ゲージと呼び、A の近くでは面が軌道とちょうど一度ずつ交わる（局所的な切り口）ことを述べます 既知 。遠くでは面が軌道に接します。$A + \tau$ での軌道の接線 $D_{A+\tau}\xi$ が面に入るのは、次の作用素が 0 でない解を持つときです。

$$M(\tau)\,\xi = D_A^* D_{A+\tau}\,\xi \tag{9}$$

そこでは Faddeev–Popov の行列式（$M(\tau)$ の行列式）が 0 になります。$A = 0$ なら $M(\tau) = -\partial_\mu D_{\tau,\mu}$ です。M が正の範囲を **Gribov 領域**、その境目を **horizon**、軌道と面の交点の一つひとつを **Gribov のコピー**と呼びます。Singer の Theorem 8 は、面のどの向きにも十分遠くで軌道に接する点があることを示します。Gribov（1978）は $\mathbb{R}^4$ の $SU(2)$ で、Coulomb ゲージが原点の軌道と遠くでもう一度交わることを見つけました（Singer の紹介による） 既知 。量子論での数え方は 4-08 §05・§06。

例（図 1）。$U(1)$ の L 本の辺の環。基点で $g_0 = 1$、残りを $g_x = e^{i\alpha_x}$ とすると、(1) で変換した辺の角は $\psi_\ell = \theta_\ell + \alpha_{\ell+1} - \alpha_\ell$（添字は L で一周）です。原点からの離れ方を Mehta ら（2014）と同じ関数で測ります。

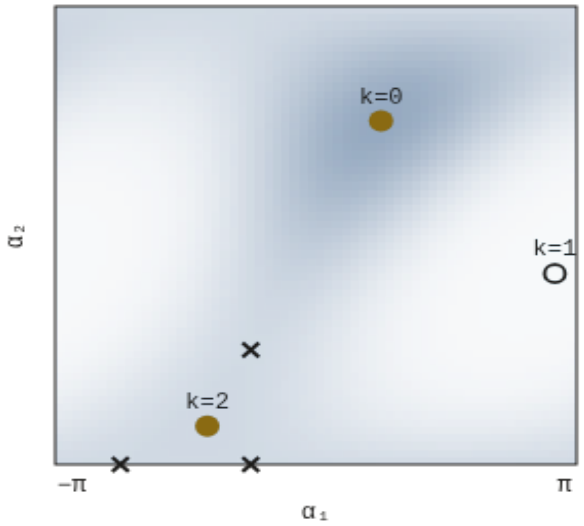
$$E(\alpha) = \sum_{\ell=0}^{L-1} \bigl(1 - \cos\psi_\ell\bigr), \qquad \frac{\partial E}{\partial \alpha_j} = \sin\psi_{j-1} - \sin\psi_j \tag{10}$$

ψ が小さいと $E \approx \tfrac{1}{2}\sum_\ell \psi_\ell^2$ で、(8) の格子版です。止まる点ではすべての $\sin\psi_\ell$ が等しく、一様な点 $\psi_\ell = \varphi$ と、一部の辺だけ $\pi - \varphi$ の点があります。一様な点は次の L 個です。

$$\varphi_k = \frac{\Phi + 2\pi k}{L} \quad (k = 0, \dots, L-1), \qquad E = L\,(1 - \cos\varphi_k) \tag{11}$$

そこでの二階微分の行列（格子の Faddeev–Popov 行列）は輪のラプラシアンの $\cos\varphi_k$ 倍なので、$\cos\varphi_k > 0$ なら極小（Gribov 領域の中のコピー）、負なら極大です。非一様な点は極小になりません（$L = 3$〜9） 計算 。

図 1　つまみで Φ を変えると、$L = 3$ の軌道（トーラス）の上の E の濃淡（濃いほど小さい）と臨界点（● 極小、× 鞍点、○ 極大、k は (11) の番号）が動きます。「動かす」で Φ が一周し、$k = 0$ の代表は元の $k = 1$ の位置に着きます。$L = 3$ では途中で horizon を越えるので、着いた先は極大です（§06）。



Φ = 135°　極小 2 個：E = 0.879, 2.224

Φ	極小	鞍点	極大	極小での E	極小の φ
0°	1	3	2	0.0000	0°
99°	2	3	1	0.4840, 2.8430	33°, −87°
135°	2	3	1	0.8787, 2.2235	45°, −75°
180°	2	3	1	1.5000, 1.5000	60°, −60°

計算 **表 2**　代表 $\theta = (0, 0, \Phi)$ の軌道の臨界点を (10) で列挙し、二階微分で分類。この図の数値はこの端末で計算した（図は同じ式をその場で計算）。JS が無効ならこの表が図の中身です。

Φ が 90° と 270° の間でだけ、$\cos\varphi_0 > 0$ と $\cos\varphi_2 > 0$ が両立し、Gribov 領域の中にコピーが二つあります。Φ が増える向きに 90° を越えるとき、$k = 2$ の点と三つの鞍点が一点に重なり、二階微分が 0 になります。これより先で $k = 2$ は極小になります。これが horizon です。$\Phi = 180^\circ$ では二つの極小の E が等しく、最も近い点だけを集めた領域（基本モジュラー領域）の境界がここです。臨界点の符号つきの和が 0 になること（Neuberger の 0/0）は 7-11 §05 にあります。

06

一周すると別のコピーへ — 代表を連続に選び続けると食い違う

図 1 で Φ を一周させると、(11) の一様な代表は $\varphi = \Phi/L$ から $(\Phi + 2\pi)/L$ へ連続に動き、$k = 1$ の代表に着きます。軌道は元に戻ったのに、選んだ代表は別のコピーです。図 1 の $L = 3$ では途中の $\Phi = 270^\circ$ で horizon を越え、着いた先は極大（Gribov 領域の外のコピー）です。領域の中にとどまったまま別のコピーに着くのは $L \geq 5$ です（表 3）。二つのコピーは、点 x で角 $\alpha_x = 2\pi x/L$ だけ回すゲージ変換（連続の円の巻き数 1 の変換を格子に写したもの）で移り合います（最後の辺でも $\alpha_0 - \alpha_{L-1} \equiv 2\pi/L$）。

$$\psi_\ell \;\mapsto\; \psi_\ell + \alpha_{\ell+1} - \alpha_\ell \equiv \psi_\ell + \frac{2\pi}{L} \pmod{2\pi}, \qquad \varphi_k \mapsto \varphi_{k+1} \tag{12}$$

代表を連続に選び続けると一周で食い違う——連続な大域的ゲージ固定を妨げる仕組みの、いちばん小さな姿です。たどる途中で horizon（$\cos\varphi = 0$、つまり $\Phi = \pi L/2$）に当たるかどうかは L で変わります。

計算 **表 3**　$\Phi = 0$ の極小を Φ に沿って一周たどった結果と、Gribov 領域の中のコピーの数（Φ を 4000 通り動かした最小〜最大）。

L	領域の中のコピー	horizon に当たる Φ	一周後の代表
3	1〜2	$270°$	—（途中で極小でなくなる）
4	2	$360°$（一周の端）	—
5	2〜3	当たらない	$\varphi = 2\pi/5$（$k = 1$）
8	4	当たらない	$\varphi = 2\pi/8$（$k = 1$）

$L \geq 5$ では代表は一周の間 Gribov 領域の中にとどまって $k = 1$ のコピーに着き、$L \leq 4$ では途中か端で horizon に当たります。どちらでも元の代表には戻りません 計算 。

例（連続の円）。長さ ℓ の円周の $U(1)$ 接続 $A = i\,a\,dx$ では、Landau の条件は a を定数にし、巻き数 n のゲージ変換 $e^{2\pi i n x/\ell}$ は a を $a - 2\pi n/\ell$ に移すので、コピーは無限個です。ゲージで変わらないのは $a\ell \bmod 2\pi$ だけで、代表を連続に選ぶことは角から実数を連続に選ぶ（連続な対数を取る）ことですが、一周で 2π ずれるので不可能です 既知 。

07

Singer の定理 — 可縮な空間は、穴のある群との積になれない

Singer（1978）は底空間を S^4（$\mathbb{R}^4$ に無限遠の一点を足したもの。遠方でゲージ変換が一定の値に近づく条件に当たる）か S^3（ある時刻の空間）とし、コンパクトで連結な半単純群（リー環が単純なものの直和になる群。論文では簡単のため $SU(N)$、$N > 1$）について、要旨で “It is shown that no continuous choice of exactly one connection on each orbit can be made.” と述べ、“No gauge fixing is possible.” と結びます 既知 。正確には「**連続な大域的ゲージ固定は無い**」で、局所的な切り口や不連続な選び方は禁じられません。

ホモトピー群。$\pi_k(X)$ は、k 次元の球面から X への基点つきの連続写像を、連続変形で移り合うものごとにまとめた類です。π_0 はつながった成分、π_1 は輪の類、$\pi_3(SU(2))$ は 1-12 の写像度で、$\pi_k(X \times Y) = \pi_k(X) \times \pi_k(Y)$ です。証明は四段です（Singer 1978 §2）。

1. $\mathcal{A}$ は可縮（§02）。可約な接続の集合 C を除いた $\mathcal{A}^*$ も、すべての $\pi_j(\mathcal{A}^*) = 0$（Singer の Theorem 2）。除いた集合 C はどの点でも、それに直交する無限次元ぶんの向きを残すの

で、球面の像を C から押し出せるからです。

2. $\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{G}/\mathbb{Z}_N$（中心 $\mathbb{Z}_N$ はどの接続も止めるので割っておく）は $\mathcal{A}^*$ に自由に働き、$\mathcal{A}^* \to \mathcal{N}^* = \mathcal{A}^*/\hat{\mathcal{G}}$ は $\hat{\mathcal{G}}$ をファイバーとする主束（Singer の Theorem 1）。**主束**とは、底（ここでは $\mathcal{N}^*$）の各点の上に群 $\hat{\mathcal{G}}$ の写し（**ファイバー**。ここでは一つの軌道）が乗り、$\hat{\mathcal{G}}$ がそれぞれの写しの中で自由かつ推移的に（1 以外の元はどの点も動かし、どの点もどの点へも移せるように）働く束です。切り口があれば、全体は底と群の積になります。
3. 連続なゲージがあれば、それが主束の切り口になって束は積 $\mathcal{A}^* \cong \mathcal{N}^* \times \hat{\mathcal{G}}$ になり、$\pi_j(\mathcal{A}^*) = 0$ と積の公式から、すべての j で $\pi_j(\hat{\mathcal{G}}) = 0$ が従う。
4. ところが $\hat{\mathcal{G}}$ のどれかの π_j は 0 でない（Theorem 3）。矛盾（Corollary 4）。

$$\pi_j(\mathcal{G}_m) \cong \pi_{j+r}\big(SU(N)\big) \qquad (M = S^r) \tag{13}$$

四段目の道具が (13)（Theorem 5）です。$\mathcal{G}_m$ は $\mathcal{A}$ 全体に自由に働き、(13) からそのホモトピー群のどれかは 0 でないので、$\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{G}_m$ にも切り口が無い、と Singer は注意します。

既知 **表 4**　(13) で読む $\pi_j(\mathcal{G}_m)$（$M = S^r$）。非可換の欄は Singer の本文（Toda の表を引く）による。

M	$U(1)$	$SU(2)$	$SU(N)$、$N \geq 3$
S^3	すべて 0（注）	$\pi_0(\mathcal{G}_m) = \pi_3(SU(2)) = \mathbb{Z}$	$\pi_0(\mathcal{G}_m) = \pi_3(SU(N)) = \mathbb{Z}$
S^4	すべて 0（注）	$\pi_0(\mathcal{G}_m) = \pi_4(SU(2)) = \mathbb{Z}_2$、$\pi_2(\mathcal{G}_m) = \pi_6(SU(2)) = \mathbb{Z}_{12}$	$\pi_0(\mathcal{G}_m) = \pi_4(SU(N)) = 0$（四段目には $\pi_1(\hat{\mathcal{G}}) \neq 0$ を使う）

注：$U(1)$ の列は、基点つきの写像の空間のホモトピー群 $\pi_j(\mathcal{G}_m) = \pi_{j+r}(U(1))$ から読んだもので（$U(1)$ の π_k は $k \geq 2$ で 0）、Singer の Theorem 5 は $SU(N)$ の言明です。

S^3 では、巻き数の違うゲージ変換がつながらないことだけで矛盾が出ます（§06 の円周は $\pi_0(\mathcal{G}_m) = \pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$ による可換版）。$U(1)$ の高いホモトピー群は 0 なので S^3・S^4 では四段目が働かず、Singer も可換なら “An integral submanifold provides the gauge for quantum electrodynamics.” と書きます。障害は、非可換性と遠方の条件が作る位相から来ています 既知 。

08

どう回避されてきたか — 格子・局所的なゲージ・軌道空間そのもの

Faddeev–Popov の手順（4-08 §03）は局所的な切り口の上では正しく、大域的にはそのまま使えません。Singer は局所的な切り口の効く領域で軌道空間を覆い、1 の分割（覆いの各片に、足すと至る所で 1 になる重みを割り振ること）で足し合わせる道を挙げ、“This partition

of unity argument would be useful if the covering used could be made explicit.” と書きました。以後の仕事は三つの道で障害をよけています。

- **格子**。Wilson の格子は Haar 測度で積分するので、ゲージを固定せずに有限です（4-02・5-01）既知 。全頂点を結ぶ木（最大木）の辺をすべて 1 にするゲージは、基点つきのゲージ群について大域的で連続な切り口です 既知 。根の頂点で $g = 1$ とし、木に沿って隣の頂点へ進みながら、その辺が 1 になるように g を順に決めます（辺 $\ell : x \to y$ で g_x が決まっていれば $g_y = g_x U_\ell^{-1}$）。g は辺の元の積と逆元でただ一通りに決まり、U に連続に依存します。基点つきのゲージ群が木の辺の配位に自由かつ推移的に働くので、各軌道に代表がちょうど一つあり、それを連続に選べるわけです。$SU(N)^E$ は可縮でない（$\pi_3(SU(N)) = \mathbb{Z}$。$SU(2)$ では 1-12 の写像度）ので、Singer の定理と矛盾しません。代わりに格子の対称性が壊れます。共変なゲージを BRST 対称に（固定した後にも形式的な対称性が残るように）固定すると 0/0 が現れます（7-11・4-08 §08。BRST は 4-08 §04）。
- **局所的なゲージ**。三次元の周期格子での Bałaban の繰り込み群について、問題の解説は “One defines these gauges in phase cells: The choices vary locally in space-time, as well as on different length scales.” と書きます（Jaffe–Witten §6.5）既知 。場所と尺度ごとに切り口を取り替える方法です（7-06 §05・7-05 §05）。四次元の Bałaban の仕事も同じ考え方を使うとされます（7-07 §07。四次元の論文での具体的な選び方は本文で確かめていない）。
- **軌道空間そのもの**。確率量子化はゲージを固定せず、軌道空間を状態空間に取ります。総説は “The space O is a non-linear space if G is non-Abelian, which makes non-trivial even the construction of the state space” と書き（Chevyrev 2022）、Chandra–Chevyrev–Hairer–Shen は二次元トーラスの上で、分布（1-11）としての接続の軌道の空間を状態空間に取り、その上の確率的な力学を構成しました（要旨）既知 （7-09）。

7-11 §05 は、これを発散とは別の障害の一つ（曲がった状態空間の障害）として扱い、格子で片づく部分と、弱結合の解析でゲージ固定が要るときに残る 0/0 に分けています。

この章が言えている範囲

項目	言えていること	言えていないこと
接続と軌道	(1)〜(9) の導出 既知	関数空間の位相の入れ方、局所的な切り口の定理の証明
格子の模型	表 1〜3・図 1 計算	四次元の連続の理論のコピーの数や配置

項目	言えていること	言えていないこと
Singer の定理	言明と四段の筋（原論文で確認） 既知	Singer の Theorem 2・5 の証明の再現
寄り道	Feynman の見取り図 物理	定理ではない
ヤン–ミルズ	ゲージ固定の大域的な障害の意味	質量ギャップ・理論の構成については何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1〜3・図 1	**この端末で計算**	Python 3.12・NumPy（`ring_copies.py`・`ring_bruteforce_check.py`・`su2_classes.py`）。図は (10)(11) をその場で計算
Singer の言明・引用・表 4	一次資料（本文を確認）	I. M. Singer, “Some remarks on the Gribov ambiguity”, Commun. Math. Phys. 60 (1978) 7–12
Gribov のコピー	書誌のみ	V. N. Gribov, “Quantization of non-Abelian gauge theories”, Nucl. Phys. B 139 (1978) 1–23（本文中の中身は Singer §1 の紹介による。Singer は 1977 年の SLAC Translation 176 版を引く）
(10) の関数と二階微分	一次資料（§I–II を確認）	D. Mehta, N. S. Daleo, J. D. Hauenstein, C. Seaton, Phys. Rev. D 90 (2014) 054504, arXiv:1406.6678
寄り道	本文 §1 を確認／Feynman は書誌のみ	D. Karabali, V. P. Nair, Nucl. Phys. B 464 (1996) 135–152, arXiv:hep-th/9510157；R. P. Feynman, Nucl. Phys. B 188 (1981) 479
§08 の引用	本文を確認／要旨	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”（Clay, 2000）§6.5；I. Chevyrev, “Stochastic quantisation of Yang–Mills”, J. Math. Phys. 63 (2022) 091101, arXiv:2202.13359 §1；A. Chandra, I. Chevyrev, M. Hairer, H. Shen, Publ. Math. IHÉS 136 (2022) 1–147, arXiv:2006.04987
(7)・ホモトピー群の値	既知（書誌のみ）	Weyl の積分公式：T. Bröcker, T. tom Dieck, *Representations of Compact Lie Groups*, Graduate Texts in Math. 98, Springer (1985) 第 IV 章；球面のホモトピー群：H. Toda, *Composition Methods in Homotopy Groups of Spheres*, Ann. of Math. Studies 49, Princeton (1962)（Singer の文献表による）

次に読む章：3-05 インスタントンと位相（S^4 の束を分ける整数と、作用が最小の軌道）。ゲージ固定の量子論は 4-08。

インスタントンと位相 — 作用の下界の整数は、無限遠の巻き数から来る

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 3-03 の作用の下界の整数 Q が、$\mathrm{tr}\, F \wedge F$ が全微分であることと無限遠の巻き数から出ること。四元数で書く BPST の解と、二つのインスタントンの一つが点に縮む様子。θ 項が量子論で真空を変える様子（円周上の粒子の模型）。

前提となる章 — 3-03（自己双対と下界 (12)）。微分形式は 1-06、純ゲージは 1-07、§06・§07 の量子力学は 2-05。寄り道の章 1-12 の §02・§03・§05・§06（四元数・写像度・自己双対な 2-形式・作用の内側の割合）は読むとよい章で、この章に要る分は本文で最小限を定義します（四元数と写像度は §03、内側の割合は §04）。

先に言うこと — §01〜§05 は古典の場の既知の数学です。§06〜§08 の量子論の話は物理の水準の議論で、定理ではありません。この章は質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. 連続に変えても変わらない整数 — 巻き数と約束
2. tr F∧F は全微分 — 積分は境界で決まる
3. 無限遠で整数が決まる — 写像度（表 1）・SO(3) の束・寄り道：符号
4. BPST の解 — 四元数で一行（表 2）
5. 二つのインスタントン — 一つが縮む（図 1・表 3）
6. θ 項 — 円周の上の粒子（図 2・表 4）
7. 真空はトンネルでつながる — θ 真空（表 5）
8. 格子と問題文の θ — セクターと θ = π

01

連続に変えても変わらない整数 — 平面の巻き数から

位相（トポロジー）は連続な変形で変わらない性質を扱います。原点を通らない閉曲線 $z(t)$ の巻き数

$$n = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dz}{z} \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

は、連続に動かしても整数なので変われず、曲線が原点を横切る瞬間にだけ変わります。例。$z = e^{it} + c$（c は実数）は $|c|<1$ で 1、$|c|>1$ で 0。c を実軸に沿って動かすと、$|c|=1$ を横切る瞬間に曲線が原点を通り、そこでだけ値が跳びます。第一 Chern 数も同じ仕組みでした（1-07 §08）。この章は 3-03 の (12) の整数 Q の出所を場の側から導きます。

約束。A は反エルミートな行列値の 1-形式、$D = d + A$、$F = dA + A\wedge A$ で、g は A に吸収します（$A = -ig\,A_{\text{物理}}$。3-03 §01・記号表）。この書き方で作用・第二 Chern 数・Q は次の形です。Q は 3-03 の Q・1-12 の k です（符号は §03 の寄り道）。

$$S_E = -\frac{1}{g^2}\int \operatorname{tr} F\wedge *F, \qquad c_2 = \frac{1}{8\pi^2}\int \operatorname{tr} F\wedge F, \qquad Q = -c_2 \tag{2}$$

物理の書き方（3-03 の $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$ で、g を A に吸収しない）では、$\tilde F_{\mu\nu} = \frac12 \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$（3-03 の $*F$ の成分）として

$$Q = \frac{g^2}{32\pi^2}\int F^a_{\mu\nu}\tilde F^a_{\mu\nu}\,d^4x = \frac{g^2}{8\pi^2}\int \sum_a \mathbf{E}^a\cdot\mathbf{B}^a\,d^4x$$

で、3-03 の (12) の Q そのものです。

02

tr F∧F は全微分 — Chern–Simons 形式

U(1) では $F\wedge F = d(A\wedge dA)$ で、積分は境界だけで決まりました（1-06）。非可換でも補正を一つ足せば成り立ちます 既知 。

$$\operatorname{tr} F\wedge F = d\,\mathrm{CS}(A), \qquad \mathrm{CS}(A) = \operatorname{tr}\Big(A\wedge dA + \tfrac23 A\wedge A\wedge A\Big) \tag{3}$$

確かめるのに要る規則は一つです。行列値の p-形式 α と q-形式 β では、成分の行列の積のトレースは順序を替えても変わらず、微分形式の部分を入れ替える符号だけが残ります。

$$\operatorname{tr}(\alpha\wedge\beta) = (-1)^{pq}\operatorname{tr}(\beta\wedge\alpha)$$

A^k を A の k 回の外積とします。$d\,\mathrm{tr}\,A^3$ を積の規則 $d(\alpha\wedge\beta)=d\alpha\wedge\beta+(-1)^p\alpha\wedge d\beta$（1-06）で三項に開き、一項ずつ dA を先頭へ回します。

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(dA\wedge A\wedge A)&=\mathrm{tr}(dA\wedge A^2)\\
-\mathrm{tr}(A\wedge dA\wedge A)&=+\mathrm{tr}(dA\wedge A^2)\qquad (p=1,\ q=3)\\
+\mathrm{tr}(A\wedge A\wedge dA)&=+\mathrm{tr}(dA\wedge A^2)\qquad (p=q=2)
\end{aligned}$$

和は $d\,\mathrm{tr}\,A^3=3\,\mathrm{tr}(dA\wedge A^2)$ です。$d\,\mathrm{tr}(A\wedge dA)=\mathrm{tr}(dA\wedge dA)$（$d\,dA=0$）と合わせて $d\mathrm{CS}=\mathrm{tr}(dA\wedge dA)+2\,\mathrm{tr}(dA\wedge A^2)$。$\mathrm{tr}\,F\wedge F=\mathrm{tr}\big((dA+A^2)\wedge(dA+A^2)\big)$ を開くと同じ二項（$\mathrm{tr}(A^2\wedge dA)=\mathrm{tr}(dA\wedge A^2)$）と $\mathrm{tr}\,A^4$ が出て、$\mathrm{tr}\,A^4=\mathrm{tr}(A\wedge A^3)=-\mathrm{tr}(A^3\wedge A)=-\mathrm{tr}\,A^4$ なので 0 です。名前は Chern–Simons（1974）から来ています。

帰結は二つです。第一に、球 B_R の上で A が滑らかなら、Stokes の定理（1-06）で

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_{B_R}\mathrm{tr}\,F\wedge F=\frac{1}{8\pi^2}\int_{S^3_R}\mathrm{CS}(A)\tag{4}$$

例。§04 の解で右辺は $R=\rho,3\rho,10\rho$ で $-0.5,-0.972,-0.999708$、1-12 の表 1 の内側の割合と一致します（表 2）計算 。第二に、遠方で 0 の δA には Bianchi 恒等式（3-03 §04）から $\delta\,\mathrm{tr}\,F\wedge F=2\,d\,\mathrm{tr}(\delta A\wedge F)$ で、積分は変わりません。c_2 を作用に足しても方程式は変わらず、§06 の θ 項はここから始まります。

03

無限遠で整数が決まる — 純ゲージと写像度

作用が有限なら遠方で $A\to-(dg)g^{-1}$（$g:S^3\to SU(2)$、純ゲージ）です。解については Uhlenbeck（1982）の要旨 “every Yang-Mills field over R4 with bounded functional (L2 norm) may be obtained from a field on S4” が根拠で 既知 、一般の場では遠方の減衰を仮定します（1-07）。純ゲージでは $dA=-A^2$ なので $\mathrm{CS}=\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(g^{-1}dg)^3$ で、(4) の $R\to\infty$ は次の式です。

$$c_2=\frac{1}{24\pi^2}\int_{S^3}\mathrm{tr}\big(g^{-1}dg\big)^3=-\deg g,\qquad Q=\deg g\tag{5}$$

恒等写像と数値で確かめる

四元数を使います（1-12 §02。この章に要るのは次の規則だけです）。$x=x_1+x_2i+x_3j+x_4k$ を $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$ で掛け、$\bar x=x_1-x_2i-x_3j-x_4k$、$|x|^2=x\bar x$ です。長さ 1 の四元数の全体が S^3 で、掛け算で SU(2) と同じ群になります。写像度 $\deg g$ は、行き先の一般の点の逆像を、向きを保つ点は $+1$、反転する点は -1 として数えた整数です（1-12 §06）。

S^3 の向きは、球 B^4 の境界として外向きの法線を先に置く向きです（点 $x=1$ では $dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4$ が正）。恒等写像 $g(x)=x$ の点 $x=1$ で $g^{-1}dg = i\,dx_2 + j\,dx_3 + k\,dx_4$ です。i,j,k の並べ替えの符号つきの和は -6 なので、$\mathrm{tr}(g^{-1}dg)^3 = -12\,dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4$（四元数の 1 は 2×2 の単位行列でトレース 2）。左の掛け算で不変なのでどこでも同じで、面積 $2\pi^2$ を掛けて $24\pi^2$ で割ると $c_2=-1$ です。一般の g でも被積分形式は規格化した体積形式の引き戻しの -1 倍で、積分は写像度の -1 倍です 既知 。

表 1　$-\frac{1}{24\pi^2}\int_{S^3}\mathrm{tr}(g^{-1}dg)^3$ の数値積分（$x\in S^3$。64×64×128 点） 計算 。値が変わるのは正規化の前の写像が 0 を通るときだけ

g	積分	写像度
$x^{-2},\ x^{-1},\ 1,\ x,\ x^2,\ x^3$	-2, -1, 0, 1, 2, 3（以下も誤差 10^{-5} 未満）	n
$\frac{x+c}{\lvert x+c\rvert}$（$c=0.5, 0.9$／$1.1, 1.5$）・$\frac{x^2+ci}{\lvert x^2+ci\rvert}$（$c=0.7$／$1.3$）	1, 1／0, 0・2／0.000002	$\lvert c\rvert<1$ で 1・2

有限作用の場は Q ごとの類（セクター）に分かれ、互いに連続にはつながりません。S^4 の上の SU(2) の束が c_2 で分類されるということです（1-07）。

中心で割った群 — SO(3) の束

SU(2) を中心 $\{\pm 1\}$ で割った $SO(3)=SU(2)/\mathbb{Z}_2$（1-04 §07）を群にしても、リー環は同じなので局所的な式は変わりません。違いは束の張り合わせに出ます。S^4（遠方で純ゲージに近づく $\mathbb{R}^4$ の場）では、張り合わせは S^3 から群への写像で、S^3 は単連結なので SO(3) への写像は SU(2) への写像に持ち上がります。だから S^4 の上の SO(3) の束はすべて SU(2) の束から来ます 既知 。

$H^2(X;\mathbb{Z}_2)\neq 0$ の閉じた四次元多様体 X（たとえば四次元トーラス T^4）では、SU(2) の束に持ち上がらない SO(3) の束があります。障害は第二 Stiefel–Whitney 類 $w_2\in H^2(X;\mathbb{Z}_2)$ で、SO(3) の束は w_2 と第一 Pontryagin 類 p_1 で分類されるとされます（Dold–Whitney 1959） 既知 。SU(2) の束から来る場合に c_2 と一致するように $-p_1/4$ で数を測ると、$w_2\neq 0$ では整数とは限らず、T^4 では半整数も現れます。物理では 't Hooft のひねった境界条件（1979・1981）の分数の位相電荷として知られるとされます 既知 。この章の整数 Q は SU(2) の束（または S^4）の話です。中心の対称性は 18-03。

寄り道：物理の Q と数学の c_2 は符号が逆

飛ばしてよい小節です。

物理は $Q=\frac{g^2}{8\pi^2}\int \mathrm{tr}\,F_{\text{物理}}\wedge F_{\text{物理}}$、数学は $F=-ig\,F_{\text{物理}}$ で c_2 を書くので、符号が $(-i)^2=-1$ だけ違います。物理のインスタントンは自己双対で $Q=1$、数学の文献は反自己双対（$c_2\geq 0$）を扱うことが多

く（3-06）、二つは鏡像です（1-12）。

本書での使い方は 25-01 §01（小さな捩れた T^2 の格子の設定）。

04

BPST の解 — 四元数で一行に書く

§03 の四元数 $x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$ で、i, j, k を $-i\sigma_1, -i\sigma_2, -i\sigma_3$ と読むと、純虚な四元数は su(2) の元です。$dx = \sum_\mu e_\mu dx_\mu$（$e_\mu = 1, i, j, k$）として、大きさ ρ の解は次の形です 既知 。

$$A = \mathrm{Im}\,\frac{x\,d\bar{x}}{|x|^2 + \rho^2}, \qquad F = \frac{\rho^2\, dx \wedge d\bar{x}}{(|x|^2 + \rho^2)^2} \tag{6}$$

$dx \wedge d\bar{x}$ の i の成分は $-2(dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4)$ で、j, k の成分も自己双対です（1-12 §03）。よって $F = *F$ で解です（3-03 §07）。遠方では $g = x/|x|$ として $A \to \mathrm{Im}(x\,d\bar{x})/|x|^2 = g\,d\bar{g} = -(dg)g^{-1}$、$g$ は S^3 の恒等写像（写像度 1）で $Q = 1$、$c_2 = -1$。密度は $48\rho^4/(|x|^2+\rho^2)^4$、半径 R の内側に入る作用の割合は $1 - 3/(1+u)^2 + 2/(1+u)^3$（$u = R^2/\rho^2$。1-12 の (9)）で、$S_E = 8\pi^2/g^2$ は下界の等号です（3-03 の (13) と同じ性質）。BPST（1975）の要旨は “We find regular solutions of the four dimensional euclidean Yang-Mills equations” 既知 。鏡像 $\mathrm{Im}(\bar{x}\,dx)/(\cdots)$ は反自己双対で $Q = -1$。

表 2　(6) と鏡像の検査（$\rho = 1$、差分と数値積分） 計算

項目	(6)	鏡像
閉じた式との差・$F \mp *F$・c_2・Q	1.6×10⁻¹⁰・0・-1.00000000・+1	1.8×10⁻¹⁰・0・+1.00000000・-1
(4) の右辺（$R = 0.5, 1, 3, 10$）	-0.104, -0.500, -0.972, -0.999708	符号が逆

パラメータは中心 4・大きさ 1・定数のゲージ回転 3 の 8 個で、$Q = k$ では $8k$ 個です（Tong の講義録：SU(N) で $4kN$） 既知 。作用が有限なすべての自己双対な場を線形代数で与えるのが ADHM（1978）の構成です。

05

二つのインスタントン — 距離によらない作用と、縮む一つ

自己双対な場は各 Q で作用が最小なので、$Q = 2$ なら二つの塊をどこに置いても作用は $16\pi^2/g^2$ で、塊どうしに力は働きません。具体的な族があります。ここだけ 3-03 の成分の書

き方（$A_\mu = A_\mu^a T^a$、$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$）で $g = 1$ とします。$\bar\eta$ は 3-03 §08 の 't Hooft の記号 η の η_{ai4} の符号を変えたもの（$\bar\eta_{aij} = \varepsilon_{aij}$、$\bar\eta_{ai4} = -\bar\eta_{a4i} = -\delta_{ai}$）です。

$$\phi = 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\rho_i^2}{|x - a_i|^2}, \qquad A_\mu^a = -\bar\eta_{a\mu\nu}\,\partial_\nu \ln\phi \tag{7}$$

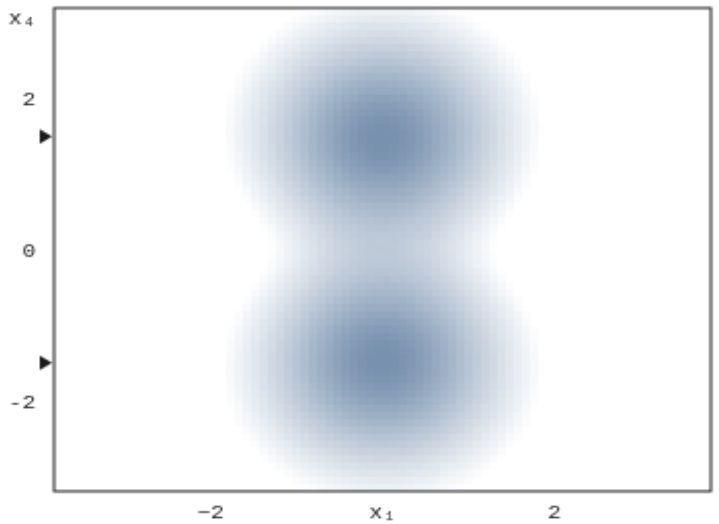
$1/|x|^2$ は四次元の調和関数で、この族は a_i, ρ_i によらず自己双対、$Q = k$ です。(7) の A は極 a_i で発散しますが、この特異性はその点で特異なゲージ変換で取り除けます。$k = 1$ はそうして §04 の解を a_1 へ平行移動したものに移ります。

密度は ϕ だけで書けます。記号は $\Box = \sum_\mu \partial_\mu^2$（ユークリッドの四次元ラプラシアン。2-04 のダランベルシアンとは別）、$\psi_\mu = \partial_\mu\phi$、$H_{\mu\nu} = \partial_\mu\partial_\nu\phi$、$|H|^2 = \sum_{\mu\nu} H_{\mu\nu}^2$、$\psi\cdot H\psi = \sum_{\mu\nu}\psi_\mu H_{\mu\nu}\psi_\nu$、$|\psi|^2 = \sum_\mu \psi_\mu^2$ です。

$$s = \tfrac14 F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a = -\tfrac12\,\Box\Box\ln\phi = \frac{|H|^2}{\phi^2} - \frac{4\,\psi\cdot H\psi}{\phi^3} + \frac{3|\psi|^4}{\phi^4} \qquad (x \neq a_i) \tag{8}$$

二つの極で、差分の F が $F = *F$ と (8) を相対誤差 10^{-9} で満たします 計算 。Corrigan–Fairlie（1977）は、φ^4 型のスカラー場の理論の解と SU(2) のゲージ場の解の関係として、この型の解を扱いました。Jackiw–Nohl–Rebbi（1977）は、各塊の位置と大きさを表す $5k$ 個のパラメータの既知の族を、$5k+4$ 個のパラメータの解に広げました（いずれも要旨） 既知 。

図 1　つまみで二つの極の距離 d を変えると、断面 $x_2 = x_3 = 0$（横 x_1・縦 x_4・三角が極）の作用の密度（対数の濃淡）が変わる。d が小さいと原点に鋭い山が立つ



d = 3.00　s(0) = 2.100　48/(d/2)⁴（小さい d での近似）　= 9.481　全作用 = 16π²（表 3）

計算 この図の数値はこの端末で計算した。(8) をその場で計算（$\rho_i = 1$、極は $x_4 = \pm d/2$）。

表 3　二つの極（$\rho_1 = \rho_2 = 1$）の作用（$8\pi^2$ 単位。適応積分） 計算

d	4	1	0.5	0.2	0.1	0

d	4	1	0.5	0.2	0.1	0
全作用	2.000000	2.000000	2.000000	2.000000	2.000000	1.000000
$\lvert x\rvert < d$ の内側	1.945544	1.140005	0.925267	0.896362	0.895881	–

全作用はどの d でも $16\pi^2$ です。d が小さいと原点の密度は $48/(d/2)^4$ に近づき（$d=0.1$ で 7.661×10^6 対 7.68×10^6）、半径 d の内側の 0.896 は大きさ $d/2$ の BPST の解の割合 $1-\frac{3}{25}+\frac{2}{125}$（1-12 の (9)）です。一つが作用を保ったまま縮み、$d=0$ では $\phi=1+2/\lvert x\rvert^2$ の $Q=1$ の解になって一つぶんが点に消えます。1-12 §05 の集中が解の族の中で起きる様子です（3-06）。

06

θ 項 — 方程式に見えない角

§02 から、作用に Q の定数倍を足しても古典の方程式は変わりません。量子論の重みでは虚時間でも虚数のまま残ります（4-02。符号は約束による）。

$$e^{-S_E[A]} \longrightarrow e^{-S_E[A]+i\theta Q[A]} \tag{9}$$

既知 (i) 摂動論（$A=0$ のまわりの展開。4-03）では全微分の積分は各次数で 0 で、見えません。(ii) Q が整数なので θ は周期 2π の角度です。(iii) 時空では $\mathbf{E}^a\cdot\mathbf{B}^a$ に比例し（§01・2-04）、$\mathbf{E}$ は空間反転で、$\mathbf{B}$ は時間反転で向きを変えるので、$\theta\neq0,\pi$ では空間反転と時間反転が破れます。Jackiw–Rebbi（1976）の要旨は θ 真空（§07）を “a family of quantum mechanical vacua, parametrized by a CP-nonconserving angle” と書きます（CP は粒子と反粒子の入れ替えと空間反転を合わせた変換）。θ = 0 と π では時間反転で不変です（Gaiotto–Kapustin–Komargodski–Seiberg 2017、以下 GKKS の要旨 “time reversal invariant at θ = 0 and θ = π”）。

円周の上の粒子 — θ の最小の模型

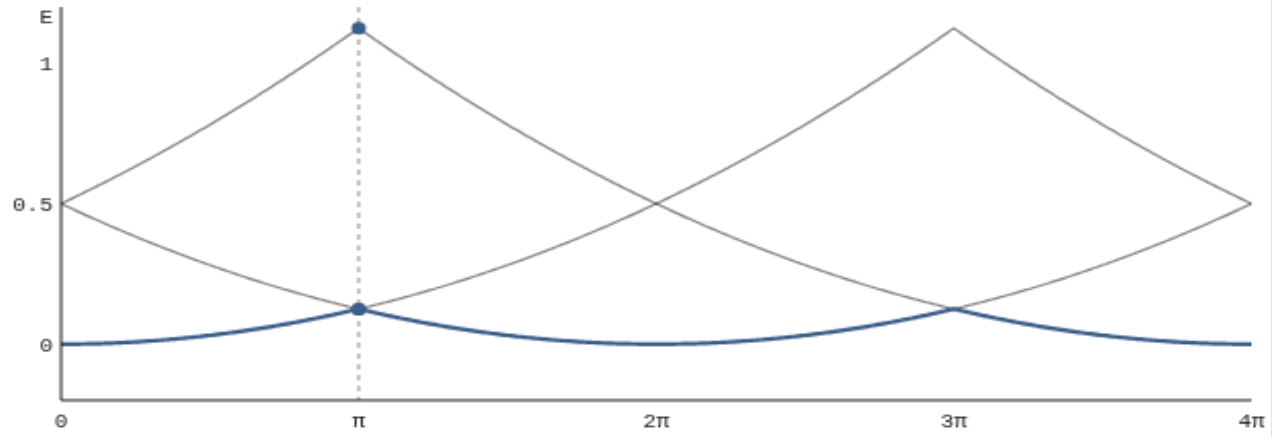
同じ構造の量子力学があります（GKKS の付録 D.1）。角度 $q\sim q+2\pi$ の上の粒子に速度の一次の項を足します。

$$L=\frac{1}{2}\dot q^2+\frac{\theta}{2\pi}\dot q,\qquad E_n=\frac{1}{2}\Big(n-\frac{\theta}{2\pi}\Big)^2\quad(n\in\mathbb{Z}) \tag{10}$$

足した項は $\frac{d}{dt}\frac{\theta q}{2\pi}$ で方程式を変えません（2-01）が、$\theta q/2\pi$ は一周で θ ずれ、虚時間の周期的な道の重みに $e^{i\theta\times\text{巻き数}}$ が掛かります。(9) と同じ形です。周期的な波動関数で $H=\frac{1}{2}(-i\,d/dq-\theta/2\pi)^2$ の固有関数 e^{inq} の固有値が (10) です（2-05）。θ は円を貫く磁束の役目で（GKKS 脚注 27。2-03）、“for θ = π and only in this case the ground state is two-fold

degenerate” です。$-K\cos q$ を足すと交差が開き、$-K\cos 2q$ なら二重縮退が厳密に残ります（同付録 “still maintains some exact two-fold degeneracy”）。

図 2　つまみで θ（横軸 0〜4π）を動かすと縦線と準位（点）が動く。ボタンで位置エネルギーを 0・$-K\cos q$・$-K\cos 2q$（$K=0.4$）に替えると、$\theta=\pi$ の交差が開くか残るかが分かる



θ = 1.00π　E₀ = 0.125　E₁ − E₀ = 0.000

計算 この図の数値はこの端末で計算した。V = 0 は (10)、ほかは e^{inq}（$|n|\le 40$）で対角化した表（$0\le\theta\le\pi$ の 13 点）を周期と対称性で広げたもの。

表 4　E_1-E_0（$K=0.4$、$I=\hbar=1$） 計算

位置エネルギー	θ = 0	π/2	π
0	0.5	0.25	0
$-K\cos q$	0.60436	0.46493	0.38481
$-K\cos 2q$	0.32981	0.21083	0

07

真空はトンネルでつながる — θ 真空

ここからは物理の水準です 物理 。$A_4=0$ とそろえると古典的な真空は三次元の純ゲージ $-(dh)h^{-1}$（$h:\mathbb{R}^3\to SU(2)$ は遠方で 1 に近づくとし、$\mathbb{R}^3\cup\{\infty\}=S^3$ とみなす。§ 03 の無限遠の S^3 とは別の球面）で、写像度 n で番号が付き、写像度 1 のゲージ変換 T が n を一つずらします。(4) を虚時間の厚板に使うと Q は $\tau\to\pm\infty$ の真空の番号の差で、BPST の解は n から $n+1$ へ移る虚時間の道です。重みは

$$e^{-8\pi^2/g^2}:\qquad g^2=1,\ 2,\ 4,\ 8\ \text{で}\ 5.1\times10^{-35},\ 7.2\times10^{-18},\ 2.7\times10^{-9},\ 5.2\times10^{-5}\qquad(11)$$

で 計算 、$g^2=0$ で何回微分しても 0 なので、摂動論のどの次数にも現れません（2-05 の二重井戸・4-07・4-12）。1976 年に 't Hooft が “the tunneling process described by the Belavin-Polyakov-Schwarz-Tyupkin field configuration” を計算し、Jackiw–Rebbi・

Callan–Dashen–Gross が真空の族を述べました（要旨）既知。小さなゲージ変換で不変（4-01）で T で位相だけ変わる状態が θ 真空です。

$$|\theta\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in\theta}|n\rangle, \qquad T|\theta\rangle = e^{-i\theta}|\theta\rangle \tag{12}$$

円周上の粒子では、円に巻く前の直線の谷 $q = 2\pi n$ が $|n\rangle$、$q \mapsto q + 2\pi$ が T で、(12) は Bloch 波の形です（GKKS も q をヤン–ミルズの Chern–Simons の量と読む）。谷が深いと一番下の準位は細い帯になり、谷から谷への道の作用 $S_0 = \int_0^{2\pi} \sqrt{2K(1-\cos q)}\, dq = 8\sqrt{K}$ で決まります。帯は $E_0(0) + \frac{W}{2}(1-\cos\theta)$ の形で、W は Mathieu 方程式の漸近形（DLMF 28.8.2 の書き直し $\frac{16}{\sqrt{\pi}} K^{3/4} e^{-S_0}(1 - \frac{7}{64\sqrt{K}})$）に近づきます（表 5）。

表 5　$-K\cos q$ の一番下の帯の幅 $W = E_0(\pi) - E_0(0)$（60 桁の十進演算の二分法。右端の「—」は、ずれが倍精度では測れないことを表す）計算

K	W	W／漸近形	$1-\cos\theta$ からのずれ／W
1	2.66699×10⁻³	0.98887	2.8×10⁻³
4	2.71024×10⁻⁶	0.99782	1.7×10⁻⁶
16	8.89113×10⁻¹³	0.99951	—

ヤン–ミルズの希薄気体の近似（インスタントンが離れて散らばるとみなす）では、真空のエネルギー密度が $-\cos\theta\, e^{-8\pi^2/g^2}$ に比例するとされます物理。典型的な配位を滑らかな解の重ね合わせとみなす近似で、数学的には未確定です（尺度と極限の辞書）。正確には、四次元では結合が尺度とともに走る（4-06）ため、インスタントンの大きさ ρ の積分が大きい ρ の側で発散し、この近似は物理の水準でも制御されていないとされます物理。近似に依らない量は位相感受率 $\chi_t = \langle Q^2\rangle/V$（$E(\theta) = -\frac{1}{V}\ln\sum_Q Z_Q e^{i\theta Q}$ の $\theta=0$ での二階微分）です。

本書での使い方は 25-02 §03（分数インスタントンの希薄な気体で弦の張力を数える）。

08 格子の上の整数と、問題文の θ

格子（5-01）の場の空間は連結で、“the concept of a topological sector has therefore no a priori well-defined meaning” です（Lüscher 2010）既知。作用の密度が小さい格子場は整数 Q を持ち、古典的な連続極限で Chern 数に戻るとされます（整数を持つことは Lüscher 1982 の要旨。7-11 §09）。SU(3) で Wilson 流により滑らかにした場 V が $\max_p \mathrm{Re\,tr}\{1 - V(p)\} < 0.067$ を満たす割合は $a = 0.1,\ 0.07,\ 0.05$ fm で 0%・8%・70% で、セクターは “a dynamical property of the theory” です（同 2010）物理。SU(2) で赤外切断（長い距離の側の切断）を固定した Magnen–Rivasseau–Sénéor（1993）の構成は、自明なセクターに限

られます（7-07）既知。HMC では Q^2 の実効的な動的臨界指数が約 5 です（Schaefer–Sommer–Virotta 2011。5-07）物理。

Jaffe–Witten の問題文には θ 項もインスタントンも出てきません（全文を検索）。GKKS は、時間反転と中心対称性（18-03）の 't Hooft アノマリー（二つの対称性を保ったまま自明な真空を作れないという障害）から “at θ = π the vacuum cannot be a trivial non-degenerate gapped state” と論じ、θ = 0 の真空は対照的に自明でギャップを持ち非縮退だと述べます（いずれも物理の水準）物理。「ギャップを持つ一意な真空」は θ に依存する主張で、図 2 の $-K\cos 2q\cdot\theta = \pi$ がその量子力学版です。

この章が言えている範囲

項目	言えていること	言えていないこと
Q の整数性	作用が有限な解（Uhlenbeck）と、遠方で純ゲージに減衰すると仮定した場 既知	減衰を仮定しない一般の有限作用の場
古典と模型	(3)〜(10)、表 1〜5、図 1・2 既知 計算	Uhlenbeck・ADHM の証明の再現。模型はヤン–ミルズの準位ではない
量子論	θ 真空・希薄気体・格子・GKKS の言葉 物理	定理ではない。質量ギャップ・理論の構成については何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
BPST・Uhlenbeck・ADHM・(7) の族・トンネル・θ 真空と CP	要旨	Belavin–Polyakov–Schwartz–Tyupkin, PLB 59 (1975) 85／Uhlenbeck, CMP 83 (1982) 11／Atiyah–Hitchin–Drinfeld–Manin, Phys. Lett. A 65 (1978) 185／Corrigan–Fairlie, PLB 67 (1977) 69／Jackiw–Nohl–Rebbi, PRD 15 (1977) 1642／'t Hooft, PRD 14 (1976) 3432／Jackiw–Rebbi, PRL 37 (1976) 172／Callan–Dashen–Gross, PLB 63 (1976) 334
Chern–Simons 形式	書誌のみ	Chern–Simons, Ann. of Math. 99 (1974) 48
SO(3) の束の分類・分数の位相電荷（§03 の SO(3) の束）	書誌のみ（中身は本文未照合）	A. Dold, H. Whitney, Ann. of Math. 69 (1959) 667／G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141／G. 't Hooft, Commun. Math. Phys. 81 (1981) 267
希薄気体の $-\cos\theta$・大きさの積分の発散	未確認	一次資料の本文は未照合
パラメータの数・θ = π・円周上の粒子・格子	本文	Tong, arXiv:hep-th/0509216 §1.1.2・§1.2（式 (1.13)）／Gaiotto–Kapustin–Komargodski–Seiberg, JHEP 05 (2017) 091（要旨・付録 D.1）／Lüscher, JHEP 08 (2010) 071 §4

もの	種別	出典・道具
格子の位相電荷・凍結・自明なセクター	要旨	Lüscher, CMP 85 (1982) 39／Magnen–Rivasseau–Sénéor, CMP 155 (1993) 325／Schaefer–Sommer–Virotta, NPB 845 (2011) 93
問題文・Mathieu の漸近形	本文	Jaffe–Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*（Clay）／NIST DLMF (28.8.2)
表 1〜5・(11)・図	計算	Python 3.12・NumPy・SciPy・decimal（標準ライブラリ。表 5 の 60 桁の演算）（`winding.py`・`bpst.py`・`two_instantons.py`・`rotor.py`）。図は素の JavaScript

次に読む章：3-06 寄り道：Donaldson とエキゾチック R^4。位相電荷の辞書は 18-04。

寄り道：Donaldson とエキゾチック R⁴ — 古典ヤン–ミルズの解の空間が、四次元の滑らかさを見分ける

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — エキゾチックな構造とは何か。交叉形式と位相の地図（Freedman・Rokhlin）。自己双対な接続の解の空間を同境として読み、定値な交叉形式が対角化できることを導く Donaldson の筋と、そこから $\mathbb{R}^4$ のエキゾチックな構造が出る理由。

前提となる章 — 3-05（BPST の解・点に縮む極限）。滑らかな構造は 1-05、交叉形式の入口は 1-12 §07、軌道空間と可約な接続は 3-04 §04。ホモロジー・符号数・同境・指数・共形変換の群は、その場で最小限を定義します。

先に言うこと — 寄り道で、どの章の前提でもありません。既知の数学の筋だけを追い、解析の本体は再現していません。量子ヤン–ミルズや質量ギャップについては何も示していません。

この章の順序

1. 同じ形なのに違う — 同相と微分同相
2. 交叉形式 — 交点を数える行列
3. 位相の世界の地図 — Freedman と Rokhlin・寄り道：五次元以上では
4. Donaldson の定理 — 数え上げの補題（表 1）
5. モジュライ空間 — 五次元の解の空間（図 1）
6. 解の空間を同境として読む — 錐と端と符号数（図 2）
7. エキゾチック R^4 — 球面で囲めない集合（表 2）
8. 同じ方程式の二つの顔 — 古典と量子

01

同じ形なのに違う — 同相と微分同相

位相の意味で同じ（同相）とは、両方向とも連続な一対一の対応があることです。滑らかな多様体（1-05）では、両方向とも滑らかな対応（微分同相）を求めます。

$$X \underset{\text{微分同相}}{\cong} Y \implies X \underset{\text{同相}}{\cong} Y, \qquad \text{逆は一般には成り立たない} \tag{1}$$

同相だが微分同相でないとき、一方を他方の「エキゾチックな」構造と呼びます。地図帳の書き方が違うだけのもの（1-05 の $x \mapsto x^3$）は微分同相で移り合うので、これに当たりません。最初の例は七次元の球面とされます（Milnor 1956）既知。

例。$\mathbb{R}^n$ の滑らかな構造は $n \neq 4$ ではただ一つです。Gompf（1983）の序は “it is a standard fact that for n ≠ 4, exotic R^{n}'s cannot exist” と書き、高い次元の平滑化の理論を当てはめると $\mathbb{R}^4$ の構造は一つのはずだ（“there should only be one structure on R4, as it has no cohomology”）と続けます既知。実際には非可算個あります（§07・四次元の記事）。その理由がこの章の主題です。

02

交叉形式 — 曲面の交点を数える整数の行列

閉じた（コンパクトで境界の無い）向きの付いた四次元多様体 X の中の閉曲面は、連続に動かしても変わらない類に分かれ、類どうしは足せます。この集まりが $H_2(X;\mathbb{Z})$ で、単連結な X では $\mathbb{Z}^r$（$r = b_2$。1-06 §08 の Betti 数）です。正確には、H_2 の元はホモロジー類で、ここではその直観だけを使います（四次元ではどの類も埋め込まれた曲面で表せるとされます）。二つの曲面は一般の位置で有限個の点で交わり（1-12 §07）、向きで決まる ± 1 の和は、曲面を動かしても変わりません。

$$Q(\Sigma_1, \Sigma_2) = \sum_{p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2} (\pm 1), \qquad Q : \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z} \ \text{ は対称で } \ \det Q = \pm 1 \tag{2}$$

$\det Q = \pm 1$（ユニモジュラー）は Poincaré 双対性によります既知。形から読む数は、階数 r、符号数 $\sigma = b^+ - b^-$（正と負の固有値の個数の差）、偶奇（すべての $Q(a,a)$ が偶数なら偶）です。$b^- = 0$ なら正定値です。

例。$\mathbb{CP}^2$ は二本の直線 $\mathbb{CP}^1$ が一点で交わるので (1)、向きを逆にした $\overline{\mathbb{CP}^2}$ は (-1)、$S^2 \times S^2$ は $H = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ です。連結和（球を抜いて貼る）は直和になり、$\#r\,\mathbb{CP}^2$ は単位行列 $\langle 1 \rangle^r$（標準形）です。Kummer 曲面（K3）の形は $E_8 \oplus E_8 \oplus H^{\oplus 3}$ です（E_8 は負定値の符号。Gompf はこの $H^{\oplus 3}$ を階数 6 の H と書く）既知。

正定値で偶な形の最小の例が E_8 です。次の Cartan 行列は行列式 1・偶・正定値です 計算 。Gompf は、階数 8 の偶で定値なユニモジュラー形は E_8 だけだと述べます（“the unique symmetric form over Z which has rank 8, is even, and is negative definite”）。

$$E_8 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

03

位相の世界の地図 — Freedman の定理と Rokhlin の制限

位相だけで見ると、四次元は高い次元に似ています。Freedman（1982）は、行列式 ± 1 のどの対称形も閉じた単連結な位相多様体の形として実現でき、形と $\mathbb{Z}/2$ の量（Kirby–Siebenmann の障害。滑らかなら 0）で同相の類が決まることを示しました（Donaldson 1983 §I.1 の紹介による）既知 。E_8 を形に持つ位相多様体 $|E_8|$ もあります。

滑らかさの制限は前から一つ知られていました。Donaldson の紹介では “Rohlin's theorem asserts that any even form coming from a smooth simply connected 4-manifold has signature divisible by 16” です 既知 。

$$X \text{ が滑らか・単連結で } Q \text{ が偶} \implies \sigma(X) \equiv 0 \pmod{16} \tag{4}$$

例。E_8（$\sigma = 8$）は (4) で除かれ、$|E_8|$ は滑らかな構造を持ちません。$E_8 \oplus E_8$（$\sigma = 16$）は (4) を通り、奇な $E_8 \oplus \langle 1 \rangle$ には (4) は何も言いません。これらを裁いたのが §04 の定理です。

寄り道：五次元以上では、なぜ滑らかさが効かないのか

飛ばしてよい小節です。

高い次元では、符号が逆の余分な交点の対を、二点を結ぶ輪に張った円板に沿って滑らせて消す操作（Whitney の技法と呼ばれる）が要とされます。五次元以上では円板は一般の位置で他と交わりませんが、四次元では $2+2=4$ で円板自身が曲面と点で交わります（1-12 §07）。Freedman は円板の代わりの無限の塔（Casson handle）が開いた 2-ハンドル $D^2 \times \mathbb{R}^2$ と同相なことを示しました。正確には、Casson handle は、交点を持つ円板を太らせたもの（kinky handle）を、交点ごとに次の段で貼り足すことを無限に繰り返してできる開いた四次元多様体です。Gompf は Donaldson の定理から “they are not all diffeomorphic to it” と書きます 既知 。

04

Donaldson の定理 — 定値なら対角化できる

Donaldson の対角化の定理（Donaldson 1983 の Theorem 1）は “Let X be a compact smooth simply connected oriented 4-manifold with the property that the associated form Q is positive definite. Then that form is equivalent, over the integers, to the standard diagonal form” です 既知 。整数の基底を取り替えると単位行列になる、ということです。向きを逆にすれば負定値でも同じで、単連結の仮定はのちに外されたとされます（Donaldson 1987）。証明で使う数の性質は一つで、$Q(a,a)=1$ の a を $\pm a$ で一組と数えた組の数 $n(Q)$ についての補題です（論文の Lemma 2）既知 。

$$n(Q)=\#\{\pm a\in\mathbb{Z}^r:\ Q(a,a)=1\},\qquad n(Q)\le r,\qquad \text{等号}\iff Q\cong\langle 1\rangle^r \tag{5}$$

証明は階数の帰納法です。$Q(a,a)=1$ ならどの b も $b=m\,a+c$（$m=Q(b,a)$、$c\perp a$）と整数係数で分けられ、$Q(b,b)=m^2+Q(c,c)$ です。正定値なので $Q(b,b)=1$ は $b=\pm a$ か「$m=0$ かつ $Q(c,c)=1$」で、$n(Q)=n(Q|_{a^\perp})+1$、階数も 1 減ります。a が尽きたとき残りの階数が 0 なら標準形、でなければ $n(Q)<r$ です。

例。表 1 は列挙で数えた $n(Q)$ です 計算 。D_n^+ は、成分の和が偶数の整数ベクトル全体 D_n と、それを $(\tfrac12,\dots,\tfrac12)$ だけずらした集合を合わせたものです（n が 4 の倍数のとき行列式 1 の整数の形）。(4) を通る形も、$n(Q)<r$ なら定理が除きます。

表 1　正定値ユニモジュラー形の $n(Q)$（行列式 1。列挙による）計算

形	r	偶奇	$n(Q)$	ノルム 2	(4)	定理
$\langle 1\rangle^8$（$\#8\,\mathbb{CP}^2$）	8	奇	8	112	—	標準形
E_8	8	偶	0	240	除く	除く
$E_8\oplus\langle 1\rangle$	9	奇	1	240	—	除く
D_{12}^+	12	奇	0	264	—	除く
$E_8\oplus E_8\cdot D_{16}^+$	16	偶	0	480	通る	除く

05

道具：自己双対な接続のモジュライ空間

約束。3-05 と同じ幾何の書き方（反エルミートな A、$c_2=\frac{1}{8\pi^2}\int \operatorname{tr}F\wedge F$）を使います。Donaldson（1983）も同じ符号で、正定値な X 上の $c_2(P)=-1$ の SU(2) 束と、自己双対な接続を使います 既知 。自己双対とは $F^-=0$ のことで、F^- は F の反自己双対な部分です（1-12 §03。3-03 の $F=*F$ と同じ条件）。多くの教科書は向きを逆にし、負定値と反自己双対（$c_2=k>0$）で書きます（3-05 の寄り道・1-12 §07）。向きを替えれば同じ話です。ゲー

ジ変換で移り合う解を同一視した集まりがモジュライ空間で、3-04 の軌道空間の中の解の部分です。

$$\mathcal{M}_k = \{A:\ F_A^- = 0\}\,/\,\mathcal{G}\ \subset\ \mathcal{A}/\mathcal{G}, \qquad k = -c_2(P), \qquad \dim \mathcal{M}_k = 8k - 3(1 - b_1 + b^-) \tag{6}$$

k は 3-05 の Q です。b_1 は一次元の穴の数（1-06 §08 の Betti 数。単連結なら 0）です。次元は、方程式を線形化したものの**指数**から出ます。指数は線形の方程式の解の空間の次元の見積りで、有限次元の連立一次方程式なら「未知数の数 − 式の数」に当たります（正確には核の次元から余核の次元を引いたもの。ここでは名前だけ使います）。Donaldson（1983）§II はこの指数を $8|c_2(P)| - \frac{3}{2}(\chi(X) - \tau(X))$ と書きます 既知 。τ は符号数 σ、$\chi = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4$ はオイラー数（1-06 の $V - E + F$ の仲間）で、閉じた四次元では $b_0 = b_4 = 1$、$b_3 = b_1$、$b_2 = b^+ + b^-$ なので $\frac{3}{2}(\chi - \tau) = 3(1 - b_1 + b^-)$、つまり (6) です。反自己双対の流儀では b^- が b^+ に替わります。

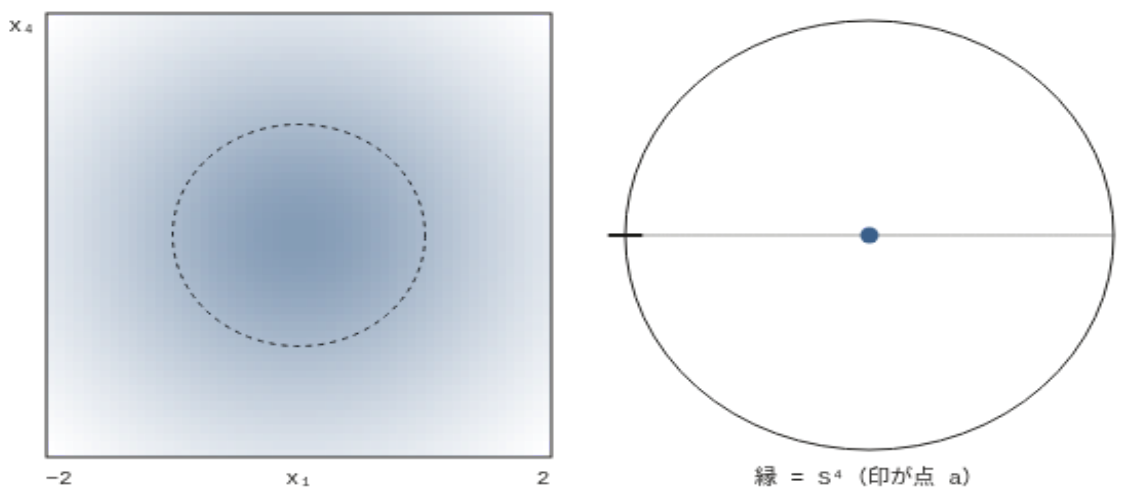
S^4（$b_1 = b^- = 0$）では $8k - 3$ です。3-05 §04 の $8k$ 個のパラメータから、定数のゲージ回転の 3 個（ゲージ変換で移り合うので同一視する）を除くと $8k - 3$ で、$k = 1$ では中心 4＋大きさ 1 の 5 です。定理の X（$b_1 = b^- = 0$、$k = 1$）でも 5 です。

例。S^4 の $k = 1$ では、Donaldson は $\mathcal{M}(S^4) = SO(5,1)^+/SO(5)$ を開いた五次元球 B^5 と書きます。$SO(5,1)^+$ は S^4 の共形変換（角度を保つ変換）の群です。Donaldson は、解は「中心」と「大きさ」で決まると説明し、閉じた球 $\bar{B}^5 = \mathcal{M}(S^4) \cup S^4$ について “a point x of S4 represents the limit point of a sequence of connections whose curvature becomes concentrated in diminishing balls about x” と述べます 既知 。3-05 §05 の「点に縮む」極限が縁です。図 1 は中心 a（x_1 軸上）と大きさ λ を上半平面の点 $w = a + i\lambda$ と読み、上半平面を単位円板に写す一次分数変換 $z = (w - i)/(w + i)$ で写した切り口です（図のための座標）。

図 1 の双曲距離

図の読み出しの双曲距離は、上半平面 $\lambda > 0$ で曲線の長さを $\int \sqrt{da^2 + d\lambda^2}/\lambda$ と測ったときの、点 (a,λ) と $(0,1)$ を結ぶ最短の長さです。この計量 $(da^2 + d\lambda^2)/\lambda^2$（上半空間の計量の切り口）は共形変換の群 $SO(5,1)^+$ で不変ですが、解の空間に自然に入る L^2 の計量（接続の変化 δA の大きさを $\int |\delta A|^2$ で測るもの）ではありません。$a = 0$ の双曲距離は $|\ln \lambda|$（$\lambda \le 1$ なら $\ln(1/\lambda)$）です 計算 。この計量では縁は無限に遠くにあります。大きさ λ をいくら小さくしても解であり続け、族が縁まで途切れないのは、四次元で作用が尺度によらないためです（1-12 §04）。

図 1　つまみで大きさ λ（対数）と中心 a を動かすと、左の作用の密度（断面 $x_2 = x_3 = 0$・対数の濃淡・点線の円の内側に作用の半分）と、右の円板（B^5 の二次元の切り口）の点が動く。$\lambda \to 0$ で点は縁（S^4）の a の位置へ行く



λ = 1.00　a = 0.00　半径 0.1 の内側 = 0.0003　1 − |z| = 1.00　双曲距離 = 0.000

計算 この図の数値はこの端末で計算した。密度 $48\lambda^4/(|x-a|^2+\lambda^2)^4$（1-12 の (9)）と z をその場で計算。静的な値：$a=0$ で $\lambda=1,\ 0.1,\ 0.01$ と縮めると $1-|z|=1,\ 0.182,\ 0.0198$、双曲距離 $0,\ 2.30259,\ 4.60517$、半径 0.1 の内側の作用の割合 $0.0003,\ 0.5000,\ 0.9997$（閉じた式と数値積分が一致）。

06

解の空間を同境として読む — 錐と端と符号数

(6) の $\mathcal{M}$ は三つの部分からなります（Donaldson 1983 §I.2・§II・§III）既知 。

(i) 既約な点。ホロノミー（1-07）が共通の不変部分空間を持たない接続で、方程式を小さく摂動すると向きの付いた滑らかな五次元多様体になります。

(ii) 可約な点。束が $E=L\oplus L^{-1}$ と分かれ、接続もそれを保つ場合で、$c_2(E)=-c_1(L)^2$ から $Q(\alpha,\alpha)=1$（$\alpha=c_1(L)$）です。$b^-=0$ なので各 $\pm\alpha$ に自己双対な接続が在り、$b_1=0$ なのでそれはゲージ同値を除いて一つで、数は $n(Q)$ です。その接続を動かさないゲージ変換の群（止める群）が U(1) と大きいので、3-04 §04 の「角」になります。正確には、止める群が大きい点で軌道空間が滑らかな多様体でなくなり、近傍が錐の形になる、という意味です。近傍は $\mathbb{C}^3/S^1$ で、$\mathbb{C}^3$ の単位球 S^5 を円 S^1 で割ると $\mathbb{CP}^2$、それに半径の方向を足したものなので、$\mathbb{CP}^2$ の上の錐です。

(iii) 端。大きさの小さな解は X の一点に集中した BPST の解に見えます。Taubes（1982）がそれを $b^-=0$ の下で作りました。Donaldson §III は Uhlenbeck（1982）の収束の結果を使い、逃げる列は集中するものに限られることを示します。Theorem 11 は端の近傍が $X\times(0,\lambda_0)$ と微分同相だと述べます。図 1 の縁が、ここでは X の写しです。

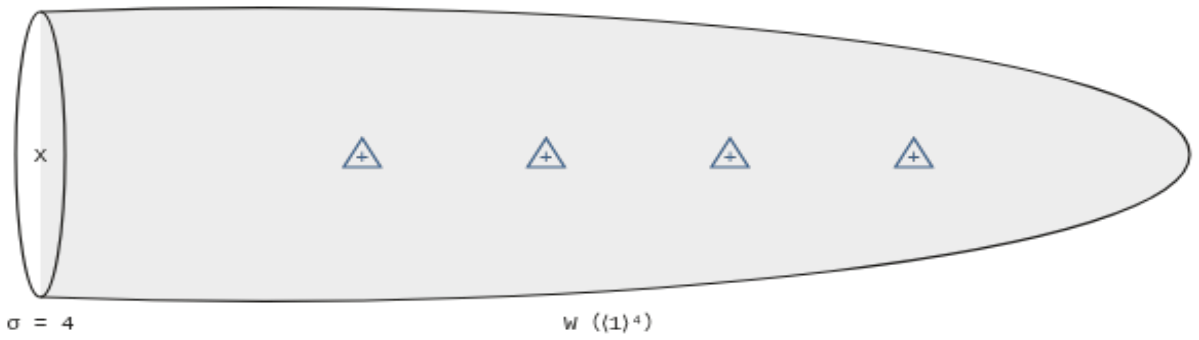
錐の頂点のまわりを切り取り、端に X を貼ると、境界が X と $n(Q)$ 個の $\pm\mathbb{CP}^2$ の、向きの付いたコンパクトな五次元多様体 W ができます（境界を分け合う関係を同境と呼ぶ）。符号数は “an invariant of oriented cobordism” です。向きの付いたコンパクトな五次元多様体の境界

全体（ここでは X と、向きを込めた $n(Q)$ 個の $\pm\mathbb{CP}^2$ の和）の符号数は 0 になる、というのが同境不変の意味で、ここから $\sigma(X)=\sum \varepsilon_i\,\sigma(\mathbb{CP}^2)$（$\varepsilon_i=\pm1$ は向きの入り方）が出て、次が言えます。

$$r=\sigma(X)=\sum_{i=1}^{n(Q)}\varepsilon_i\,\sigma(\mathbb{CP}^2)\ \le\ n(Q)\ \le\ r\qquad(\varepsilon_i=\pm1,\ \sigma(\mathbb{CP}^2)=1)\tag{7}$$

四つの関係の理由は次のとおりです。一つ目の等号：正定値なので $b^-=0$ で、$\sigma=b^+=r$。二つ目の等号：同境不変（上の段落）。一つ目の不等号：各 $\varepsilon_i\le1$ なので、和は項の数 $n(Q)$ 以下。二つ目の不等号：(5)。両端が r なので途中はすべて等号で $n(Q)=r$、(5) の等号の場合から標準形です。例。$E_8\oplus E_8$ では錐が無く、境界は X だけなので $\sigma=16$ が 0 になれず矛盾します。図 2 は形ごとの帳尻です。論文の大半は (i)〜(iii) の解析です。

図 2　形のボタンを選ぶと、その形の滑らかな X があったと仮定したときの W の模式図（左の縁が X、三角が錐）と (7) の帳尻が変わる。錐が足りないと矛盾（破線）



Q = ⟨1⟩⁴　r = σ(X) = 4　錐の数 n(Q) = 4　(7)：4 ≤ 4 は成り立つ → 標準形　(4)：奇なので何も言わない

計算 この図の数値はこの端末で計算した。階数と $n(Q)$ は表 1 の列挙の値（$\langle1\rangle^4$ は $n(Q)=4$）。JavaScript が無いときは表 1 の r と $n(Q)$ を (7) に入れれば同じ判定です。

07

エキゾチック R⁴ — 滑らかな球面で囲めない集合

Taubes（1987）の序は “Donaldson's theorem … has the surprising corollary that there exists an exotic smooth structure on R4. This corollary was deduced by M. Freedman” と書きます 既知 。筋は三段です（Taubes の紹介による）。(a) $|E_8\oplus E_8|$ は滑らかにできない（§ 04）。(b) 一点を抜くと滑らかにでき（Freedman）、抜いた点のまわりは、$\mathbb{R}^4$ と同相なある滑らかな R の無限遠と、コンパクト集合の外で微分同相になる。(c) R が標準なら、大きな滑らかな S^3 で切って球体で蓋ができ、$|E_8\oplus E_8|$ が滑らかになってしまう。よって次が言えます。

$$R \underset{\text{同相}}{\cong} \mathbb{R}^4, \qquad R \underset{\text{微分同相}}{\ncong} \mathbb{R}^4 \tag{8}$$

Gompf（1983）は K3 と $\#3\, S^2 \times S^2$ から同種の R^4_{DF} を作り、“there is a compact set in R4DF … which cannot be enclosed by any smooth S3. This behavior is impossible in the standard R4.” と書きます 既知 。

例。Gompf §2 は Kummer 曲面の代わりに $\mathbb{CP}^2 \# 9\overline{\mathbb{CP}^2}$（形 $\langle 1\rangle \oplus 9\langle -1\rangle$、基底 $e_0, \dots, e_9$）を使って別のエキゾチック $\mathbb{R}^4$ を作ります。鍵は $x = 3e_0 + e_1 + \cdots + e_8$ です。$x \cdot x = 9 - 8 = 1$ で、直交補空間 $E_8 \oplus \langle -1\rangle$（負定値で対角化できない）が定理に反するので、$x$ が張る形 $\langle 1\rangle$ の部分を手術（多様体を切り取って貼り直す操作）で切り離すことは、位相では可能でも滑らかには行えません。表 2 はその検査です 計算 。

表 2　Gompf §2 の x の直交補空間（$e_0, \dots, e_8$ の中） 計算

基底	$e_i - e_{i+1}$（$i = 1, \dots, 7$）と $e_0 + e_1 + e_2 + e_3$（ノルムは -2）
Gram 行列	(3) の -1 倍（最後の基底の符号を替えると一致）。行列式 1・偶・負の固有値 8 個
ノルム -2・-4 の本数	240・2160（E_8 と同じ）

いくつあるか。Taubes は (b) の同相で半径 r の球を写した R_r が、ある r_0 より大きな相異なる r で互いに微分同相でないことを、端が周期的な多様体の上のゲージ理論で示しました。Theorem 1.1 は “There exists an uncountable family of diffeomorphism classes of oriented 4-manifolds which are homeomorphic to R4.” です 既知 。r は区間 $r > r_0$ を動き、相異なる r は相異なる類を与えるので、少なくとも実数と同じだけあります（多様体の類は高々実数の濃度しかないので、ちょうど連続体濃度とされる）。一方、S^4 にエキゾチックな構造があるかは知られていないとされます。

08

同じ方程式の二つの顔 — 古典の道具と量子の問題

方程式は 3-05 と同じでも、Donaldson は解の集まりの形を道具にし、確率も時間発展も使いません。問題文（0-03）が問うのは、同じ作用を重みにした確率測度（4-02）と、そのハミルトニアンのスペクトルです。

古典：$\mathcal{M} = \{F_A = *F_A\}/\mathcal{G}$ の形を見る，　　量子：$d\mu(A) = \frac{1}{Z} e^{-S_E[A]}\, \mathcal{D}A$（形式的）を作る

量子の測度の上では、滑らかな古典解は典型的な配位でないと期待されます（1-09 の Cameron–Martin 空間からの類推） 物理 。問題で効く「四」は、結合定数の次元が消える四です（0-04）。例。問題文 §2 は “Classical properties of gauge theory are within the reach of established mathematical methods” とし、四次元多様体の研究での役割を述べたあと、“one does not yet have a mathematically complete example of a quantum gauge

theory in four-dimensional space-time” と続けます 既知 。これは 2000 年の記述で、2026-11 に公開された構成が四次元の量子ヤン–ミルズ理論を作った、と委員会は評価しています（6-00）。

物理の水準の橋が二つあります。Witten（1994）の要旨は Donaldson の不変量について “instead of defining four-manifold invariants by counting SU(2) instantons, one can define equivalent four-manifold invariants by counting solutions of a non-linear equation with an abelian gauge group” と書きます（背景は 17-11）物理 。問題文 §5 は、質量ギャップから出るクラスター性が “may make it possible to apply mathematical results established on R4 to any 4-manifold” とし、ギャップは “may also be important in mathematical applications of four-dimensional quantum gauge theories to geometry” と結びます 物理 。

この章が言えている範囲

項目	言えていること	言えていないこと
交叉形式	定義と例、(5) の証明、表 1・表 2 既知 計算	Poincaré 双対性・Rokhlin・Freedman の定理の証明
Donaldson の定理	言明と (6)(7) の筋、図 1・図 2 既知 計算	摂動・向き付け・収束・端の解析。図 1 の双曲距離は共形変換で不変な計量のもので、解の空間の L^2 計量ではない。図 2 は模式図
エキゾチック $\mathbb{R}^4$	(8) の筋、Gompf・Taubes の言明 既知	Freedman・Taubes の証明の再現
物理との関係	問題文と Witten の要旨の言葉 物理	量子ヤン–ミルズの構成・質量ギャップについては何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§03〜§06 の引用と筋、(6) の次元（§II の指数の式）	本文（§I〜§III の該当箇所）	S. K. Donaldson, “An application of gauge theory to four-dimensional topology”, J. Differential Geom. 18 (1983) 279–315
§01〜§03・§07 の引用と例	本文（§0〜§2）	R. E. Gompf, “Three exotic $\mathbb{R}^4$'s and other anomalies”, J. Differential Geom. 18 (1983) 317–328
(a)〜(c)・R_r・非可算個	本文（§1）	C. H. Taubes, “Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds”, J. Differential Geom. 25 (1987) 363–430

もの	種別	出典・道具
§08	本文（§2・§5）	A. Jaffe, E. Witten, Quantum Yang–Mills Theory, Clay Mathematics Institute
§08	要旨	E. Witten, Math. Res. Lett. 1 (1994) 769–796, arXiv:hep-th/9411102
原論文（上の本文経由）	書誌のみ	Freedman, JDG 17 (1982) 357／Taubes, JDG 17 (1982) 139／Uhlenbeck, CMP 83 (1982) 11・31／Atiyah–Hitchin–Singer, Proc. R. Soc. A 362 (1978) 425／Donaldson, JDG 26 (1987) 397／Milnor, Ann. of Math. 64 (1956) 399
Milnor（1956）の例・S^4 の問い・単連結の仮定を外した版（1987）	二次資料	Wikipedia “Exotic sphere”“Exotic R4”“Donaldson's theorem”
Whitney の技法・Casson handle の構成・曲面による類の表示・双対性と同境不変性の証明・多様体の類の濃度の上界・§08 の類推	未確認（通説）	本文は未照合
(3) の性質・表 1・表 2・図 1・図 2	計算	Python 3.12・NumPy 1.26・SciPy 1.11（lattices.py・gompf_check.py・moduli_disc.py）。図の式は node で照合

次に読む章：3-07 標準模型の中のヤン–ミルズ。Seiberg–Witten の物理は 17-11、問題で効く「四」は 0-04。

標準模型の中のヤン–ミルズ — 三つの群の積に、物質と Higgs を足したもの

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 標準模型のゲージ部分は SU(3)×SU(2)×U(1) の三つのヤン–ミルズ場の和です。電荷はアノマリーの相殺という算術を満たし、Higgs 場の値が W・Z に質量を与えて光子を質量 0 に残します。問題文が純ヤン–ミルズだけを取り出す理由も整理します。

前提となる章 — 3-02（3-01・1-04 も使う）。スピン 1/2 の場は §02 で最小限を定義します。

先に言うこと — 古典の章です。§03 は量子論の条件の算術だけを確かめ、§06 の数は摂動の最低次（木の水準）の推定です。質量ギャップについて、この章は何も示していません。

この章の順序

1. 三つの群 — 十二本のゲージ場
2. 物質の場 — 一世代と電荷（表 1）
3. 数えると零になる — アノマリー（表 2）。寄り道：SU(5)
4. 色の SU(3) — クォークと色の一重項
5. Higgs 機構 — 可換の模型（図 1）
6. 電弱の SU(2)×U(1) — W・Z・光子（図 2・表 3）
7. 質量はどこから来るか — 陽子とパイ中間子
8. 純ヤン–ミルズとの違い（表 4）

01

三つの群 — 十二本のゲージ場

規約は 3-02 §02 と同じです（$\hbar = c = 1$、計量 $(-,+,+,+)$、エルミートな生成子、$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$）。

標準模型は三つの群を並べたゲージ理論で、PDG の総説は “the renormalizable field theory with gauge group $G_{\mathrm{SM}} = \mathrm{SU}(3)_C \times \mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$” と定義します [既知]（$C$ は色、L は左巻き、Y は超電荷）。因子ごとにヤン–ミルズ場が付き、本数は $8 + 3 + 1 = 12$ で、グルーオン G^a_μ・W^i_μ・B_μ です。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{gauge}} = -\tfrac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^{a\,\mu\nu} - \tfrac{1}{4} W^i_{\mu\nu} W^{i\,\mu\nu} - \tfrac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \tag{1}$$

G と W の場の強さは 3-02 の (7) の形で交換子の項を持ちます。$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ は電磁場と同じく自己相互作用を持ちません。物質への働きは一つの共変微分にまとまります。

$$D_\mu = \partial_\mu - i g_s\, G^a_\mu T^a - i g\, W^i_\mu \tfrac{\sigma^i}{2} - i g'\, Y\, B_\mu \tag{2}$$

T^a は色の三重項に、$\sigma^i/2$（1-04）は二重項にだけ働き、一重項では項ごと落とします。群が単純でないので結合定数は因子ごとに一つ、計三つです（1-03）。例。$g_s \approx 1.22$ は、強い力の結合の強さ $\alpha_s = g_s^2/4\pi$ を Z の質量の尺度で測った値 $\alpha_s(m_Z) = 0.1180$（$\overline{\mathrm{MS}}$ の約束。§06 の表 3 の注）から出したものです。$g \approx 0.65$、$g' \approx 0.35$ は、§06 の表 3 で W・Z の質量から逆算した木の水準の推定です [計算]。

02

物質の場 — 一世代と $Q = T_3 + Y$

クォークとレプトンはスピン 1/2 の場です。成分の中身（Dirac 行列）は使わず、群での回り方だけを使います。要るのは、この場が**左巻き** ψ_L と**右巻き** ψ_R に分かれること（質量 0 なら進む向きに対するスピンの回り方）と、SU(2) が左巻きにだけ働くことです [既知]。空間の反転 $\mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$（パリティ）は左巻きと右巻きを入れ替えるので、左巻きにだけ働く力はこの反転で不変でありません。これを**パリティの破れ**と呼びます。

表 1　一世代の場（$(\mathbf{3},\mathbf{2})$ は色の三重項で二重項。T_3 は二重項の上が $+\frac{1}{2}$、下が $-\frac{1}{2}$）

場	表現	Y	$Q = T_3 + Y$	成分
$Q_L = (u_L, d_L)$	$(\mathbf{3},\mathbf{2})$	1/6	2/3, −1/3	6
u_R	$(\mathbf{3},\mathbf{1})$	2/3	2/3	3
d_R	$(\mathbf{3},\mathbf{1})$	−1/3	−1/3	3
$L_L = (\nu_L, e_L)$	$(\mathbf{1},\mathbf{2})$	−1/2	0, −1	2

場	表現	Y	$Q = T_3 + Y$	成分
e_R	$(\mathbf{1},\mathbf{1})$	-1	-1	1
Higgs Φ	$(\mathbf{1},\mathbf{2})$	1/2	1, 0	2（複素）

計算 Q は分数のまま計算した。既知 PDG の大統一の総説の (93.1) は、右巻きの場を共役の u^c, d^c, e^c（§03。色は $\bar{\mathbf{3}}$ になり、Y の符号が反転）で書き、Y を 2 倍に規格化して下付きに添えている。たとえば表 1 の u_R（$(\mathbf{3},\mathbf{1})$、$Y = 2/3$）は u^c の $(\bar{\mathbf{3}},\mathbf{1})_{-4/3}$。Higgs は PDG で $(\mathbf{1},\mathbf{2})_1$ で、表 1 の $Y = 1/2$ に当たる。換算すると表 1 と同じ。

$$u_L:\ \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}=\tfrac{2}{3}, \qquad e_L:\ -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}=-1, \qquad \nu_L:\ \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}=0 \tag{3}$$

一世代は色まで数えて 15 成分で、それが三世代あります（PDG）既知 。どの場がどの表現に入るかをゲージ原理は決めず（3-01）、PDG も表 1 の “apparently rather complex group-theoretic data” は説明されていないと述べます。

03

数えると零になる — アノマリーの相殺

先に言葉を一つ用意します。表現 $\psi \mapsto \Omega\psi$ の各成分の複素共役を取った $\psi^* \mapsto \Omega^*\psi^*$ も表現になり、これを**共役表現**と呼びます。三重項の共役を $\bar{\mathbf{3}}$（反三重項）と書き、SU(3) では $\mathbf{3}$ と同値でありません。U(1) では $e^{iY\alpha}$ が $e^{-iY\alpha}$ に変わるので、Y の符号が反転します 既知 。SU(2) の二重項では $\sigma^2\Omega^*\sigma^2 = \Omega$（$\sigma^2$ は二番目の Pauli 行列で、二乗ではありません）なので、共役は元と同値な表現になり、区別しません 計算 。

表 1 の Y には強い制約があります。古典の作用がゲージ不変でも、量子化の段で左右を別々に回す変換の不変性が壊れることがあり、これを**ゲージアノマリー**と呼びます。Gross–Jackiw（1972）の要旨は、それが “may destroy this gauge invariance in perturbation theory” と述べます 既知 。導出は扱わず、条件が算術になることだけを使います。スピン 1/2 の場は共役を取ると右巻きが左巻きになるので、右巻きの場を共役で左巻きにそろえる（Y の符号が反転し、u^c は $-2/3$）と、条件は次の和がすべて 0 になることです。右の括弧は、それぞれがどの群の組のアノマリーの条件かを示します。

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{\text{色の三重項と反三重項}} Y &= 0 \quad (\mathrm{SU}(3)^2\,\mathrm{U}(1)) \\ \textstyle\sum_{\text{二重項}} Y &= 0 \quad (\mathrm{SU}(2)^2\,\mathrm{U}(1)) \\ \textstyle\sum Y^3 &= 0 \quad (\mathrm{U}(1)^3) \\ \textstyle\sum Y &= 0 \quad (\text{重力}^2\,\mathrm{U}(1)) \\ \#\mathbf{3} - \#\bar{\mathbf{3}} &= 0 \quad (\mathrm{SU}(3)^3) \end{aligned} \tag{4}$$

和は、組に入らない群の表現の次元を重みに取ります（二重項の和では Q_L を色の数 3 倍、三重項と反三重項の和では Q_L を 2 倍）。$\sum Y^3$ と $\sum Y$ は色と二重項の成分まで数えた 15 成分にわたり、後者が重力との組 $\text{重力}^2\,\mathrm{U}(1)$ の条件です。Bouchiat・Iliopoulos・Meyer（1972）

の要旨は、レプトンとクォークを含む模型で “the troublesome anomalies cancel” と述べます 既知 。例。電荷を固定して色の数 N_c だけ変えると表 2 です。

表 2　一世代での (4) の和（電荷を固定し N_c だけ変えた）

N_c	$\mathrm{SU}(N_c)^2\mathrm{U}(1)$	$\mathrm{SU}(2)^2\mathrm{U}(1)$	$\mathrm{U}(1)^3$	重力^2 $\mathrm{U}(1)$
1	0	−1/3	1/2	0
2	0	−1/6	1/4	0
3	**0**	**0**	**0**	**0**

計算 分数のまま足した。一般の N_c で、$\mathrm{SU}(2)^2\mathrm{U}(1)$ の列は $N_c/6 - 1/2$、$\mathrm{U}(1)^3$ の列は $(3-N_c)/4$。$\mathrm{SU}(3)^3$ の条件は表に列を置かず、$N_c=3$ で $\#\mathbf{3} - \#\bar{\mathbf{3}} = 2-2 = 0$（$Q_L$ の二つと u^c, d^c の二つ）。既知 SU(2) には別の条件もあり、Witten（1982）の要旨は、左巻きの二重項が奇数個（ほかの表現は無し）の SU(2) ゲージ理論は数学的に矛盾すると述べる。一世代の二重項は $3+1=4$ 個で偶数。

$\mathrm{U}(1)^3$ ではクォークの分が $-3/4$、レプトンの分が $+3/4$ で、一世代がそろったときだけ、しかも色が 3 のときだけ打ち消します 計算 。スピン 1/2 の場の無い純ヤン–ミルズには、この条件は現れません。

寄り道：SU(5) に収まる

飛ばしてよい小節です。

Georgi–Glashow（1974）は、三つの力が SU(5)（問題文の群の一つ、0-03）の一つの相互作用から生じると “conjectured” しました。5×5 の左上に SU(3)、右下に SU(2) を置くと、両方と可換な跡 0 の $Y=\mathrm{diag}(-\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})$ が残ります。一世代は $\bar{\mathbf{5}}$（d^c・L）と $\mathbf{10}$（Q・u^c・e^c）にちょうど分かれます。$Q=T_3+Y$ の T_3 も SU(5) の跡 0 の元なので、Q の跡も 0 です。$\bar{\mathbf{5}}$ で書くと $3Q(d^c)+Q(\nu)+Q(e)=0$ で、$Q(\nu)=0$、$Q(e)=-1$ から $Q(d^c)=\tfrac{1}{3}$、つまり $|Q(d)|=|Q(e)|/3$ です。下向きクォークの電荷が電子のちょうど 3 分の 1 であることが、群の形から出ます 計算 。大統一は仮説です。

04

色の SU(3) — クォークと色の一重項

SU(3) の部分が量子色力学（QCD）です。PDG は QCD を “the SU(3) component of the SU(3)×SU(2)×U(1) Standard Model” と呼び、クォークは三色で基本表現、グルーオンは 8 種で随伴表現と書きます 既知 。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}} = \sum_q \bar{\psi}_q\big(i\gamma^\mu D_\mu - m_q\big)\psi_q - \tfrac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{a\,\mu\nu}, \qquad D_\mu = \partial_\mu - i g_s G^a_\mu T^a \tag{5}$$

和は 6 種のクォーク（u, d, s, c, b, t）にわたり、γ^μ はスピンに働く 4×4 行列、$\bar\psi = \psi^\dagger\gamma^0$ です。PDG の (9.1) の共変微分の符号を 3-02 に合わせた形で、最後の項が純ヤン–ミルズです。γ^μ の項は PDG の約束（計量 $(+,-,-,-)$）のままにしてあり、中身はこの章では使いません。質量の項 $m_q\bar\psi\psi$ は左右を掛ける項で、色は左右を同じに回すので書けますが、SU(2) は左巻きだけを回すので $\bar u_L u_R$ は不変でなく、標準模型では質量が Higgs 場を通して入ります（§07）既知。色の一重項は SU(3) の二つの性質から作れます。

$$\bar\psi_a\psi^a \quad (\Omega^\dagger\Omega = 1), \qquad \varepsilon_{abc}\,\psi^a\psi^b\psi^c \quad (\det\Omega = 1) \tag{6}$$

前者が中間子、後者がバリオン（陽子・中性子）の形です。例。$\Omega = \mathrm{diag}(e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{-i(\alpha+\beta)})$ で $\psi^1\psi^2\psi^3$ の位相は変わりません。1-04 の中心 $\mathbb{Z}_3$ の元も三回で 1 です。Jaffe–Witten は閉じ込めを、物理的な粒子の状態が “SU(3)-invariant” であることとして述べます 既知（機構は 17-02）。

05

Higgs 機構 — 可換の模型で質量が生える

質量項はゲージ不変性を壊します（3-02 §08）が、W と Z は重い粒子です。この食い違いを埋めたのが、電荷を持つスカラー場のポテンシャルの最小を $\phi = 0$ の外に置く考えです。U(1) の模型で見ます。

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - \mu^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4, \qquad D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu \tag{7}$$

$\lambda > 0$ とします。$\mu^2 < 0$ なら最小は円周 $|\phi| = v/\sqrt{2}$（$v = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$）に並び、ゲージ変換 $\phi \mapsto e^{i\alpha(x)}\phi$ はこの円周に沿って動かします。各点で位相を回して $\phi = (v+h)/\sqrt{2}$（実数）と書くと

$$-(D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) = -\tfrac{1}{2}\,\partial_\mu h\,\partial^\mu h - \tfrac{1}{2}\,q^2(v+h)^2 A_\mu A^\mu \tag{8}$$

です。$h = 0$ の部分は 3-02 の (14) で禁じた質量項そのもので、質量は次のとおりです 既知。作用は不変のまま、解（最小の位置）が質量を持ち込みます。

$$m_A = q\,v, \qquad m_h = \sqrt{2\lambda}\,v = \sqrt{-2\mu^2} \tag{9}$$

図 1　つまみで μ^2 を変えると、ポテンシャル（左：断面、右：上から）と v・m_A・m_h が変わる。「動かす」で谷に沿った動き（ゲージ変換で消せる向き）と動径の振動 h を示す（動きを減らす設定の端末では一コマずつ進める）。$\lambda = 1$、$q = 0.6$。

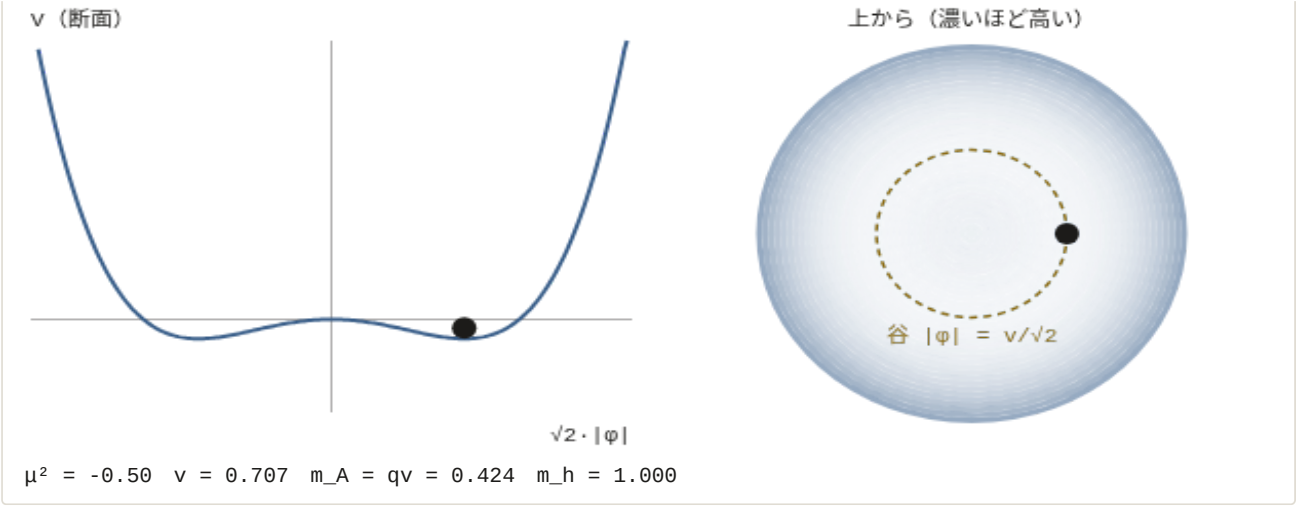


図 1 の五つの点（$\lambda = 1$、$q = 0.6$）

μ^2	v	$m_A = qv$	スカラーの質量	V の最小値
+0.5	0	0	0.707, 0.707	0
0	0	0	0, 0	0
−0.25	0.500	0.300	$m_h = 0.707$	−0.0156
−0.5	0.707	0.424	$m_h = 1.000$	−0.0625
−1	1.000	0.600	$m_h = 1.414$	−0.2500

計算 この図と表の数値はこの端末で計算した（(9) による）。$\mu^2 \geq 0$ の行のスカラーの質量は ϕ の二つの実の成分のもの（どちらも $\sqrt{\mu^2}$）、$\mu^2 < 0$ の行は動径の h のもの。

自由度と Goldstone ボソン

例。自由度を数えます。質量 0 のベクトル場の偏りは 2 です。四成分のうちゲージ変換で一つ、拘束で一つが消えるからです（2-03 §04）。質量項があるとゲージ変換で消せる一つが無くなり、拘束だけが残るので $4 - 1 = 3$ です 既知 。すると前は質量 0 の A（2）と ϕ（実の成分 2）、後は質量を持つ A（3）と h（1）で、どちらも 4 です。消えた位相は A の縦の振動になりました。

連続な対称性が自発的に破れたときに現れる質量 0 の励起を **Goldstone ボソン**と呼びます 既知 。図 1 の谷に沿った動きがそれに当たり、ゲージ場があると、この向きはゲージ変換で消せます。Higgs（1964）は “the longitudinal degrees of freedom of these particles (which would be absent if their mass were zero) go over into the Goldstone bosons when the coupling tends to zero” と書き、超伝導体のプラズモンについての Anderson（1963）の指摘の “relativistic analog” と呼びました。同年に Englert–Brout、Guralnik–Hagen–Kibble も論文を出しています 既知 。Higgs は “nothing is proved about the quantized theory” とも断っています。

「対称性の自発的な破れ」はゲージを固定した記述での言い方です。Elitzur（1975）は、ゲージを固定しない格子ゲージ理論では局所的な対称性が自発的に破れないと論じました 既知（3-01 §07）。

06

電弱の SU(2)×U(1) — W・Z・光子

標準模型では SU(2)×U(1) と表 1 の Higgs 二重項 Φ で同じことをします。$V=\lambda(\Phi^\dagger\Phi-v^2/2)^2$ の最小の一つ $\Phi_0=(0,\,v/\sqrt{2})$ を変えないのは、下の成分で $T_3+Y=-\tfrac12+\tfrac12=0$ となる電荷 Q の U(1) です。Jaffe–Witten の言い方では、構造群が “to a U(1) subgroup (diagonally embedded in SU(2) × U(1))” に減ります 既知 。(2) を Φ_0 に働かせると

$$-(D_\mu\Phi_0)^\dagger(D^\mu\Phi_0)=-\frac{v^2}{8}\Big[g^2\big(W^1_\mu W^{1\mu}+W^2_\mu W^{2\mu}\big)+\big(gW^3_\mu-g'B_\mu\big)\big(gW^{3\mu}-g'B^\mu\big)\Big] \tag{10}$$

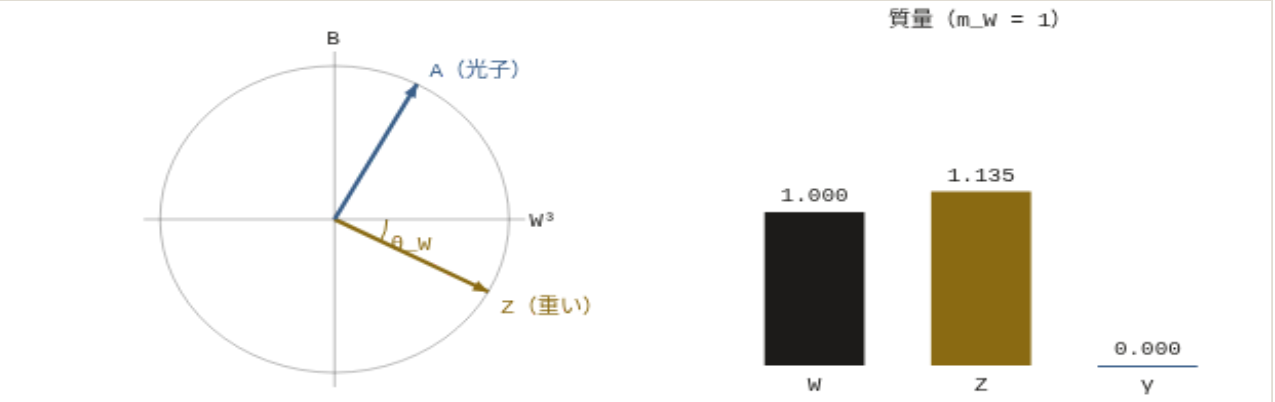
です。W^3 と B は $gW^3-g'B$ の組でしか現れないので、平面 (W^3,B) を**弱混合角** θ_W（$\tan\theta_W=g'/g$）だけ回します。

$$Z_\mu=\cos\theta_W\,W^3_\mu-\sin\theta_W\,B_\mu,\qquad A_\mu=\sin\theta_W\,W^3_\mu+\cos\theta_W\,B_\mu \tag{11}$$

$$m_W=\frac{gv}{2},\qquad m_Z=\frac{m_W}{\cos\theta_W},\qquad m_\gamma=0,\qquad e=g\sin\theta_W \tag{12}$$

$W^\pm=(W^1\mp iW^2)/\sqrt{2}$ です。PDG の (10.3)(10.5) と同じで、PDG は “at tree level, i.e., to lowest order in perturbation theory” の質量と断ります 既知 。 計算 4×4 の質量行列を Pauli 行列から作ると、三通りの (g,g',v) で固有値が (12) と一致しました（相対の差は 10^{-15} 未満で、丸めの誤差の程度）。

図 2　つまみで $g'/g=\tan\theta_W$ を変えると、(W^3,B) の平面で Z と光子 A の向きが回り、$m_Z/m_W=1/\cos\theta_W$ が変わる。「測定値」で 0.536 に戻す。



g'/g = 0.536　θ_W = 28.19°　sin²θ_W = 0.2232　m_Z/m_W = 1.1346　e/g = 0.4724

図 2 の五つの点

g'/g	θ_W	$\sin^2\theta_W$	m_Z/m_W	e/g
0	0.00°	0.0000	1.0000	0.0000
0.25	14.04°	0.0588	1.0308	0.2425
0.536	28.19°	0.2232	1.1346	0.4724
1	45.00°	0.5000	1.4142	0.7071
1.5	56.31°	0.6923	1.8028	0.8321

計算 この図と表の数値はこの端末で計算した（(12) による）。$g'/g=0$ では光子は B そのもの。0.536 は表 3 の測定値からの値。

例。PDG 2024 の値から (12) を逆算すると表 3 です。

表 3　木の水準の推定（入力：$G_F=1.1663788\times10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2}$、$m_W=80.3692$、$m_Z=91.1880$、$m_H=125.20\,\mathrm{GeV}$）

量	式	値
v	$(\sqrt{2}\,G_F)^{-1/2}$	246.22 GeV
g・g'	$2m_W/v$・$g\tan\theta_W$	0.6528・0.3499
$\sin^2\theta_W$	$1-m_W^2/m_Z^2$	0.22321
$1/\alpha$	$4\pi/e^2$	132.1
λ	$m_H^2/(2v^2)$	0.1293

計算 PDG では on-shell の $\sin^2\theta_W=0.22348$、$1/\alpha$ は低エネルギーで 137.036、m_Z で 127.930（$\overline{\mathrm{MS}}$）。on-shell・$\overline{\mathrm{MS}}$ は量子補正の入れ方（繰り込みの約束）の名前で、同じ名前の量でも値が少し違う（4-04）。表 3 の λ は本文の $V=\lambda(\Phi^\dagger\Phi-v^2/2)^2$ の約束の値。PDG の λ は $m_H=\lambda v$（(10.5a)）の規格化で $m_H/v=0.5085$ になり、二つは $\lambda=\lambda_{\mathrm{PDG}}^2/2$ で結ばれる。m_W は CDF（2022）を除く平均。

$1/\alpha$ の 132.1 は、低エネルギーの 137.036 より 3.6 % 小さい値です。表 3 の v は G_F（ミューオンの寿命から決める定数）から取ったので、G_F と α を結ぶ量子補正 Δr が入っていません。PDG の電弱の総説の (10.22b) を二乗すると $m_W^2\sin^2\theta_W(1-\Delta r)=\pi\alpha/(\sqrt{2}\,G_F)$（$\sin^2\theta_W$ は on-shell）で、PDG は $\Delta r=0.03685$ を与えます 既知 。木の水準の $1/\alpha$ は $(1-\Delta r)/\alpha$ に当たり、$137.036\times(1-0.03685)=131.99$ は表 3 の 132.1 と 0.09 % で合います 計算 （量子補正は 4-04）。$\overline{\mathrm{MS}}$ の 127.930 は約束の違う量で、参考に並べるだけです。自由度は前後とも 12 です（W^i,B の 8 と二重項の 4 から、重い $W^\pm,Z$ の 9・光子の 2・H の 1 へ） 計算 。

Weinberg（1967）は W と Z の質量が “not from a mass term put in at the beginning” と書き、Higgs 粒子は 2012 年に ATLAS と CMS が観測を報告しました 既知 。

> 07

質量はどこから来るか — 陽子とパイ中間子

v が直接与えるのは、W・Z と、**湯川結合**を通したクォークとレプトンの質量です 既知 。湯川結合は Higgs 場とスピン 1/2 の場の積の項 $\bar{\psi}_L \Phi \psi_R$ で、上向きのクォークには $\tilde{\Phi} = i\sigma^2 \Phi^*$（$Y = -\frac{1}{2}$ の二重項。§03 の共役）を使います。どの項も Y の和が 0 で（例：$\bar{Q}_L \Phi d_R$ は $-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 0$）ゲージ不変です 計算 。$\Phi$ を Φ_0 に置くと、$\bar{\psi}_L \psi_R$ に比例する質量の項になります。ところが陽子の質量はこれではほとんど説明されません。芯の u, u, d の質量の和は陽子の 1% ほどです。

$$\frac{2m_u + m_d}{m_p} = \frac{2 \times 2.16 + 4.70}{938.272} \approx 0.0096 \tag{13}$$

計算 値は PDG 2024 の要約表（m_u, m_d は $\overline{\text{MS}}$、2 GeV）。クォークの質量は定義に依るので、(13) は桁の目安です。残りは QCD の力学から来ると考えられ、その尺度は量子化で生じる Λ です（4-07） 物理 。

パイ中間子は軽く、陽子の 15% ほどです（$m_{\pi^\pm} = 139.57$ MeV） 計算 。PDG によれば、三種の軽いクォークの質量を 0 にした極限で、左右を別々に回す味の対称性（カイラル対称性）が破れ、“eight massless Goldstone bosons, the π’s, K’s, and η” が現れます 物理 。その QCD には隙間が無いと考えられます。Jaffe–Witten が QCD の三つ目の性質に挙げる “chiral symmetry breaking” です 既知 。純ヤン–ミルズにはクォークが無く、最も軽い状態はグルーボールと考えられています（5-08） 物理 。問題文の隙間 Δ は、クォークにも Higgs 場にも頼らず、ヤン–ミルズ場だけから生じるはずの尺度です（4-11）。

08

純ヤン–ミルズとの違い — 問題文が外したもの

問題文は任意のコンパクト単純群の純ヤン–ミルズ理論を対象にします（0-03）。標準模型から何を外すとそこに着くかが表 4 です。

表 4　標準模型・QCD・純ヤン–ミルズ

項目	標準模型	QCD	純ヤン–ミルズ
群	SU(3)×SU(2)×U(1)	SU(3)	コンパクト単純群
物質の場	クォーク・レプトン・Higgs	6 種のクォーク	無し
パラメータ	19 個（PDG の数え方）	g_s・6 つの m_q・θ	g・θ（3-05）
古典の質量の尺度	μ^2（v）と湯川結合	m_q	無し（3-02 §07）

項目	標準模型	QCD	純ヤン–ミルズ
質量 0 の粒子	光子	軽いクォークの質量 0 の極限で π など 物理	無いと予想 物理
問題文での扱い	対象外	拡張問題	本体

違いは三つです。**群**：単純でありません。可換な $\mathrm{U}(1)_Y$ の部分は漸近自由（短距離で結合が弱くなる性質）でなく（Coleman–Gross、4-06 §04）既知 、一ループでは結合が短距離で強くなります 物理 。**質量 0 の粒子**：光子が残るので標準模型の全体には隙間が無く、隙間を問えるのは強い力の部分です。**質量の出所**：Higgs 機構では尺度 μ^2 が古典の作用にあり解から見えますが、純ヤン–ミルズの古典の作用には尺度が無く、隙間は量子化で生じると考えられています 物理 。Jaffe–Witten も §2 で、Higgs 機構を “classical properties” の例に、質量ギャップと閉じ込めを “quantum properties that do not have classical analogs” の例に挙げます 既知 。

外したものは拡張問題に残ります。Jaffe–Witten は “other four-dimensional gauge theories (incorporating additional fields that preserve asymptotic freedom)” を挙げ（0-03）、問題説明を書いた時点では、Brydges–Fröhlich–Seiler の二次元の可換な Higgs 模型を “the only complete example of an interacting gauge theory satisfying the axioms” と呼んでいます 既知 。四次元の Higgs 模型の特殊な極限は 7-10、群の出どころの絵は 17-07 です。

この章が言えている範囲

事項	言えている	言えていない
(1)〜(6)・表 1・表 2	標準の定義、電荷と和の算術 既知 計算	表現がなぜこれか、アノマリーの条件の導出、閉じ込め
(7)〜(12)・図・表 3	古典の場での質量の出方、木の水準の推定、PDG の Δr を使った $1/\alpha$ の比較 既知 計算	量子論での Higgs 機構の定理、量子補正を含む値
表 4・寄り道 SU(5)	PDG の数え方と、表現の割り振りの算術 既知 計算	大統一が正しいこと、19 個の由来
(13)・§07	比の計算と PDG の記述 物理	それらの QCD からの証明
質量ギャップ	—	純ヤン–ミルズに隙間があること（未解決。このサイトは何も示していない） 物理

出典と再現

もの	種別	出典・道具
標準模型の定義・表現・SU(5)・19 個、電弱と QCD の式と値、クォークの質量、Goldstone ボソン	総説・要約表（本文を確認）	S. Navas et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. D 110 (2024) 030001：§9 QCD・§10 Electroweak Model・§60 Quark Masses・§93 Grand Unified Theories・Summary Tables
Jaffe–Witten の引用	一次資料（本文を確認）	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”, Clay Mathematics Institute の公式問題説明 §1・§2・§5・§6
Higgs・Weinberg の引用	一次資料（本文を確認）	P. W. Higgs, Phys. Rev. Lett. 13 (1964) 508／S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1264
その他の引用と要約	一次資料（要旨を確認）	Englert, Brout, PRL 13 (1964) 321／Bouchiat, Iliopoulos, Meyer, PLB 38 (1972) 519／Gross, Jackiw, PRD 6 (1972) 477／Georgi, Glashow, PRL 32 (1974) 438／Elitzur, PRD 12 (1975) 3978（3-01 と同じ）／Witten, “An SU(2) anomaly”, PLB 117 (1982) 324／ATLAS, PLB 716 (2012) 1／CMS, PLB 716 (2012) 30
Anderson	一次資料（要旨を確認。本文の言い方は Higgs 1964 の本文による）	P. W. Anderson, Phys. Rev. 130 (1963) 439
Brydges–Fröhlich–Seiler	書誌のみ（Jaffe–Witten §6.4 の文献 [7] を通して）	“On the construction of quantized gauge fields” I: Ann. Phys. 121 (1979) 227／II: CMP 71 (1980) 159／III: CMP 79 (1981) 353
Guralnik–Hagen–Kibble	書誌のみ	PRL 13 (1964) 585
表 1〜3・図と表の値・質量行列の固有値・(13)・Δr の比較・共役と湯川の確かめ	この端末で計算	Python 3.12・NumPy 1.26・fractions（`sm_tables.py`・`sm_checks.py`）。図は (9)(12) を素の JavaScript で

次に読む章：4-01 正準量子化とハミルトニアン。

正準量子化とハミルトニアン — Gauss の法則は、状態への条件になる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 交換関係を課してハミルトニアンを作る手順（正準量子化）。
A_0 に運動量が無く、Gauss の法則が「小さなゲージ変換で変わらない」という状態への条件になること。
その条件がゲージの向きの平らな運動を消し、円周の上では準位を Casimir で決めること。

前提となる章 — 2-05（スペクトル・ギャップ）、3-03（作用・Gauss の法則）。振動子は 2-06。

先に言うこと — 四次元の連続の理論では、この章のハミルトニアンは式の形のままで、この形の作用素としては構成されていません（厳密なのは格子 5-03 と低次元の模型）。2026-11 に公開された構成は、ユークリッドの側から再構成でハミルトニアンを作りました（Lean で証明されている、と委員会が評価した。12-08）。質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. 正準量子化の手順
2. A_0 には運動量が無い — 拘束
3. 時間ゲージで量子化する — 波動汎関数
4. Gauss の法則は状態への条件 — 電荷と大きなゲージ変換
5. 自由な場で見る — 平らな向きを消す（図 1・表 1）
6. 円周の上のヤン–ミルズ — 類関数と Casimir（図 2・表 2・表 3）
7. 寄り道：小さな箱と、波動汎関数からの議論
8. Gauss の法則を解いてしまう道 — Gribov
9. 何が形式的か

01

正準量子化の手順 — 座標と運動量を作用素にする

問題文は質量ギャップをハミルトニアン H のスペクトルで定めます（真空は $H\Omega = 0$）：“A quantum field theory has a mass gap Δ if H has no spectrum in the interval $(0, \Delta)$ for some $\Delta > 0$.”（Jaffe–Witten §4）既知。その H を古典の場から書き下す道の一つが正準量子化です（もう一つは 4-02）。

有限自由度では三段です（2-05）。(i) 運動量 $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ を作る。(ii) $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ を q, p で書く。(iii) q, p を Hilbert 空間の作用素に替え、次を課す。

$$[q_i, p_j] = i\,\delta_{ij} \qquad (\hbar = 1) \tag{1}$$

波動関数の上では $p_j = -i\,\partial/\partial q_j$ です。場では添字が点 $\mathbf{x}$ に、δ_{ij} が $\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ に替わります。**例**。質量 m のスカラー場は波数ごとの振動子に分かれ、隙間は m でした（2-06 §08）。ヤン–ミルズでは段 (i) で運動量の作れない変数が現れます。

02

A_0 には運動量が無い — Gauss の法則は拘束として現れる

規約は 3-03 §01 と同じです（$\hbar = c = 1$、$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$、随伴の場に $(D_i X)^a = \partial_i X^a + g f^{abc} A_i^b X^c$）。色の電場は

$$E_i^a = F_{i0}^a = -\partial_t A_i^a + (D_i A_0)^a \tag{2}$$

で、$L = \tfrac{1}{2}\int \sum_a (|\mathbf{E}^a|^2 - |\mathbf{B}^a|^2)\, d^3x$（磁場は時間微分を含まない）です。$A_i^a$ の運動量は $\Pi_i^a = -E_i^a$ ですが、L は $\partial_t A_0$ を含まないので、A_0 の運動量は恒等的に 0 です。

段 (ii) を書きます。$\sum_i p_i \dot{q}_i$ にあたるのは $\int \Pi_i^a\, \partial_t A_i^a\, d^3x$ です。(2) を $\partial_t A_i = -E_i + D_i A_0$ と読み替えて代入すると

$$\int \Pi_i^a\, \partial_t A_i^a\, d^3x = \int \big(|\mathbf{E}|^2 - \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}A_0 \big) d^3x$$

です。ここから L を引くと $\tfrac{1}{2}(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2)$ と $-\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}A_0$ が残ります。最後の項は部分積分で D を $\mathbf{E}$ の側へ移します（遠方で場は 0 とします）。微分 ∂_i の部分は、ふつうの部分積分で符号を変えます。$g f^{abc} A_i^b$ の部分は、f^{abc} が添字の入れ替えで符号を変える（反対称な）ので、添字の名前を付け替えると同じく符号が一つ変わります。こうして $-\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}A_0\, d^3x = \int A_0^a (\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})^a\, d^3x$ となり、

$$H = \int \Big[\tfrac{1}{2}\big(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2\big) + A_0^a\,(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})^a \Big]\, d^3x \tag{3}$$

です（$|\mathbf{E}|^2 = \sum_a |\mathbf{E}^a|^2$）既知。$A_0$ は一次でだけ現れる未定乗数で（2-01 §08 の玩具の λ）、その方程式 $(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})^a = 0$ が Gauss の法則です（3-03 の (3)）。このような条件を**拘束**と呼び、一般の扱いは Dirac（1950）に始まるとされます。

03

時間ゲージで量子化する — 波動汎関数と電場の作用素

ゲージ変換で $A_0 = 0$ にそろえます（**時間ゲージ**。各点で $\partial_t \Omega = -ig\,\Omega A_0$ を解けばよい）。残る自由は時刻によらないゲージ変換です。座標は $A_i^a(\mathbf{x})$、運動量は §02 の $\Pi_i^a = -E_i^a$ です。$\Pi = -E$ なので、(1) の場の版 $[A, \Pi] = i\delta$ は

$$[A_i^a(\mathbf{x}),\, E_j^b(\mathbf{y})] = -i\,\delta^{ab}\delta_{ij}\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{4}$$

です（符号が負なのは $E = -\Pi$ だからです）。状態を配位の関数（**波動汎関数**）$\psi[A]$ で表します。小さな ϵ と関数 $h_i^a(\mathbf{x})$ について

$$\psi[A + \epsilon h] - \psi[A] \approx \epsilon \int h_i^a(\mathbf{x})\, \frac{\delta \psi}{\delta A_i^a(\mathbf{x})}\, d^3x$$

となる関数 $\delta\psi/\delta A_i^a(\mathbf{x})$ を**汎関数微分**と呼びます。有限次元の $\psi(q+\epsilon h) - \psi(q) \approx \epsilon \sum_i h_i\, \partial\psi/\partial q_i$ の添字 i を点 $\mathbf{x}$ に、和を積分に替えたものです。(1) の $p = -i\,\partial/\partial q$ にならって $\Pi_i^a(\mathbf{x}) = -i\,\delta/\delta A_i^a(\mathbf{x})$、したがって $E_i^a(\mathbf{x}) = i\,\delta/\delta A_i^a(\mathbf{x})$ と働き、(3) は形式的に

$$H = \int \Big[-\tfrac{1}{2}\frac{\delta^2}{\delta A_i^a(\mathbf{x})^2} + \tfrac{1}{2} B_i^a B_i^a \Big]\, d^3x \tag{5}$$

です（$\delta^2/\delta A_i^a(\mathbf{x})^2$ は a・i について和を取ります）既知。無限個の座標の粒子が位置エネルギー $\frac{1}{2}\int |\mathbf{B}|^2$ の中を動く、と読めます。正確には (5) は形だけです（§09）。$\hat{A} = gA$ と取り直すと

$$H = \int \Big[-\frac{g^2}{2}\,\frac{\delta^2}{\delta \hat{A}^2} + \frac{1}{2g^2}\,|\hat{\mathbf{B}}|^2 \Big]\, d^3x \tag{6}$$

で、g が大きいと電場の項が、小さいと磁場の項が勝ちます。5-03 の (16) の係数 $g^2/2a$・$2N/g^2a$ はこの二項の格子版です。**例**。各点の $3(N^2-1)$ 個の A_i^a から次節の条件で N^2-1 個のゲージの向きが消え、$2(N^2-1)$ 個が残ります（3-03 §03 と同じ数）。古典では拘束と残るゲージ変換の二つで消した一成分を、量子では (10) が一度に消します。

04

Gauss の法則は状態への条件 — 小さなゲージ変換で変わらない

A_0 を消したので、Gauss の法則はもう運動方程式の中にありません。Gauss の作用素

$$G^a(\mathbf{x}) = (\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})^a = \partial_i E_i^a + g f^{abc} A_i^b E_i^c \tag{7}$$

には三つの性質があります 既知 。(a) **ゲージ変換を生む**。$G(\alpha)=\int \alpha^a G^a\, d^3x$ と置くと、部分積分と (4) から

$$G(\alpha)\,\psi[A] = -i\,\frac{d}{d\epsilon}\,\psi[A+\epsilon\, D\alpha]\Big|_{\epsilon=0} \tag{8}$$

です（$A \mapsto A+\epsilon D\alpha$ は 3-02 の (4) で α を $g\epsilon\alpha$ としたもの、つまり無限小のゲージ変換）。(b) **H と交換する**。(5) の二項はゲージ不変なので $[H, G^a(\mathbf{x})]=0$。(c) **閉じた代数をなす**。

$$[G^a(\mathbf{x}), G^b(\mathbf{y})] = -ig\, f^{abc}\, G^c(\mathbf{x})\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{9}$$

$G^a=0$ を作用素の等式にはできません。$G(\alpha)$ と A_j の交換子が $-i\,D_j\alpha \neq 0$ だからです。代わりに状態に課します。

$$G^a(\mathbf{x})\,\psi = 0 \iff \psi[A^\Omega] = \psi[A] \tag{10}$$

右の Ω は恒等変換に連続につながるものです。(10) を満たす状態が**物理的状態**です。(b) で時間発展はこの部分空間を保ち、(c) で条件どうしは矛盾しません。観測量はゲージ不変なものに限り、質量ギャップは物理的状態の上の H の隙間です（4-11 §09）。

例。$SU(2)$ の一様な場（3×3 の実行列 A_i^a。一様な場は 3-02 §07）では $G^a = ig\,\varepsilon^{abc}A_i^b\,\partial/\partial A_i^c = -gL^a$ です。$L^a = -i\varepsilon^{abc}A_i^b\,\partial/\partial A_i^c$ は色の添字を回す角運動量で、$[L^a,L^b]=i\varepsilon^{abc}L^c$ を満たします。これは生成子の $[T^a,T^b]=if^{abc}T^c$（3-02 §02）と同じ交換関係なので、$G=-gL$ から (9) の $-ig$ が出ます。ゲージ不変な関数は $A^{\mathsf T}A$ と $\det A$ の符号の関数です。差分で、G^a が $\frac12|\mathbf{B}|^2\cdot\det A$ を 2×10^{-10} 以下まで消し A_1^1 は消さないこと、(9) が相対 2×10^{-11} で成り立つことを確かめました 計算 。

電荷と、大きなゲージ変換

静止した色の電荷があると条件は $G^a\psi=\rho^a\psi$ です。Kogut–Susskind（1975）の要旨は格子のゲージ不変な配位を “a collection of strings with quarks at their ends. The strings are lines of non-Abelian electric flux.” と書きます 既知 （表 3）。また (8) が生むのは恒等変換につながる変換だけです。遠方で 1 に近づき、$\mathbb{R}^3\cup\{\infty\}=S^3$ から $SU(2)$ への巻き付き数が 1 の変換 T（3-05 §07）は恒等変換につながりません。そのため $\psi[A^T]=e^{-i\theta}\psi[A]$ となること

は (10) と矛盾しません（$(T\psi)[A] = \psi[A^T]$ と約束すると 3-05 の (12) と同じ向き。逆の約束では $e^{+i\theta}$）。これが θ 真空の θ です 物理 。

05

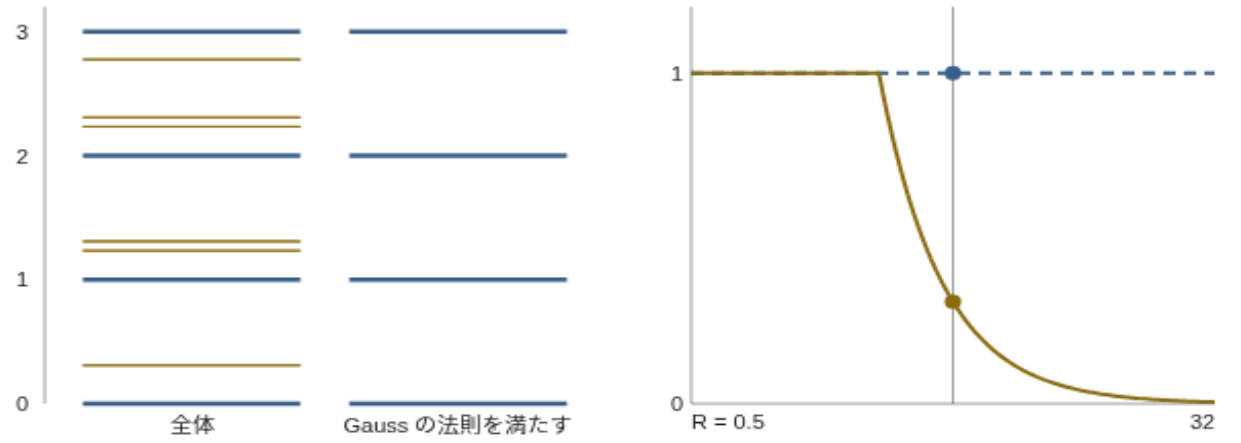
自由な場で見る — Gauss の法則が平らな向きを消す

$g = 0$ で、波数 $\mathbf{k}$ の成分を $\mathbf{k}$ に平行な縦 a_L と垂直な横 a_T に分けます。磁場は横だけを含むので、横の一つの向きだけ書くと

$$H_{\mathbf{k}} = \tfrac{1}{2}\left(p_T^2 + p_L^2\right) + \tfrac{1}{2}|\mathbf{k}|^2 a_T^2 \tag{11}$$

で、$G_{\mathbf{k}} \propto \mathbf{k}\cdot\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \propto p_L$ です。縦はゲージ変換 $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla\chi$ の向きで、復元力が無く、全体の H では各準位の上に縦の運動のエネルギーが連続に積み上がります。Gauss の法則 $p_L\psi = 0$ がこの連続を消し、横の振動子の Fock 空間（光子。2-06 §07）が残ります 既知 。図 1 は縦を長さ $2R$ の円周に閉じ（$|\mathbf{k}| = 1$）、準位 $E(n,m) = n + \tfrac{1}{2}(\pi m/R)^2$（$m \in \mathbb{Z}$）のうち $m = 0$ が残る様子を見ます。

図 1　つまみで縦の向きの長さ R を変えると、左の準位と右の隙間が変わる。太線は縦に一定な状態（$m = 0$）、細線は縦に動く状態。右の実線は全体の、破線は Gauss の法則を満たす状態の隙間



R = 4.00：全体の隙間 0.3084、物理的 1、E ≤ 3 の準位 16・物理的 4

計算 この図の数値はこの端末で計算した（閉じた式をその場で計算。表 1 と一致）。

計算 表 1　縦の長さ R と隙間（$|\mathbf{k}| = 1$）。準位の数は $E \le 3$（物理的には常に 4）

R	全体の隙間	物理的な隙間	準位の数（全体）
2	1.00000	1	8
4	0.30843	1	16
32	0.00482	1	120

全体の隙間 $\min(1, \pi^2/2R^2)$ は $R \to \infty$ で 0 で、時間ゲージの H そのものの隙間はゲージの向きの運動が埋めます。物理的な隙間 $|\mathbf{k}|$ も箱を広げれば 0 に近づき、自由な場に質量ギャップはありません（質量 m の場なら隙間は m でした。2-06 §08）。

06

円周の上のヤン–ミルズ — 状態はホロノミーの類関数

空間を長さ L の円周（$1+1$ 次元）にすると磁場は無く、$H = \frac{1}{2}\int_0^L E^a E^a \, dx$ です。Gauss の法則は E が平行移動（1-07）で運ばれることを言い、随伴の平行移動は長さを保つので $H = \frac{L}{2} E^a E^a(0)$ です。ゲージ不変な関数に残るのは一周のホロノミー $U = P\exp(ig\oint A_1 dx)$ の共役類だけです。共役 $U \mapsto gUg^{-1}$ で変わらない関数を**類関数**、表現行列のトレースを**指標**と呼びます（1-02）。Witten（1992）§4 は “Ψ must be a class function of U, invariant under conjugation, and so must have an expansion in characters” と書き、H を Casimir 作用素で表します 既知 。$E^a(0)$ は U を T^a の向きに回す微分の g 倍として働き、

$$H\,\chi_r(U) = \frac{g^2 L}{2}\, C_2(r)\, \chi_r(U) \tag{12}$$

です（χ_r は既約表現 r の指標、C_2 は $\sum_a T^a T^a$ の値。1-04）。固有値は Rajeev（1988）が厳密に求め、転送行列からの道は 7-02 §07 です。**例**。$SU(2)$ で U の固有値を $e^{\pm i\theta}$ とすると $\chi_j = \sin((2j+1)\theta)/\sin\theta$、準位は $j(j+1)$ の $g^2L/2$ 倍です。隙間 $\frac{3}{8}g^2L$ は円周を一周する電気力線の輪のエネルギー（張力 $\frac{3}{8}g^2$）と読めます。

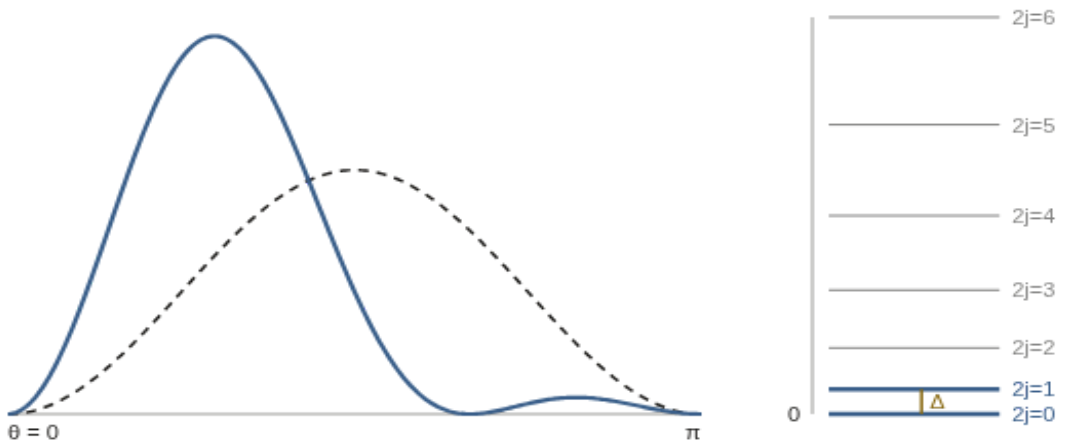
軌道の体積が準位を決める

類関数の内積は Haar 測度 $\frac{2}{\pi}\sin^2\theta\, d\theta$ で取ります。1-08 §03 の a_0 の密度 $\frac{2}{\pi}\sqrt{1-a_0^2}\, da_0$（半円）で $a_0 = \cos\theta$ と置くと、この形になります。$\sin^2\theta$ は共役類（S^3 の中の球面）の面積、つまりゲージ軌道の体積です（4-02 §07）。(12) を θ で書くと

$$H = \frac{g^2 L}{2}\Big(-\frac{1}{4\sin^2\theta}\frac{d}{d\theta}\sin^2\theta\frac{d}{d\theta}\Big) \tag{13}$$

で、$u = \sin\theta\, f$ の上では $\frac{g^2L}{8}(-u'' - u)$、つまり区間 $[0,\pi]$ の箱の粒子（$u = \sin n\theta$、$n = 2j+1$）から 1 を引いたものです。測度を忘れて平らなラプラシアンを使うと、準位は $k^2/4$ に変わります（表 2）。この体積の因子は、三次元のクーロンゲージでは Faddeev–Popov の行列式として現れます（§08）。

図 2　$SU(2)$ の円周（$g=1$）。$2j$ と L を選び「動かす」と時間が進み（画面の 1 秒が時間 1）、χ_0 と χ_j を半分ずつ重ねた状態の θ の密度（実線）が角振動数 $\Delta = E_j - E_0$ で揺れる。$2j$ や L を大きくすると揺れが速くなる。破線は Haar の重み、右は準位 (12)



2j = 1、L = 2.0：Δ = 0.750、周期 2π/Δ = 8.38、位相 Δt = 0.00π

計算 この図の数値はこの端末で計算した（指標と (12) の閉じた式をその場で計算。表 2 と一致）。

計算 表 2　(13) の固有値（$g^2L/2$ 単位。差分は Haar の重みつき 4000 点）と、測度を忘れた $-\frac{1}{4}d^2/d\theta^2$（$[0,\pi]$ の両端で傾き 0。$\theta \mapsto -\theta$ で対称な周期関数）の下から $k = 2j$ 番目

2j	j(j+1)	差分（Haar）	測度を忘れた k²/4
0	0	0.000000	0
1	0.75	0.750000	0.25
2	2	2.000000	1
3	3.75	3.749998	2.25

格子で数える — Gauss の法則を破る状態

円周を N 本のリンク（$a = L/N$）に刻み、$H = \frac{g^2 a}{2}\sum_\ell E_\ell^2$ とします（5-03 §07 の二次元版。プラケットは無い）。比喩で言えば、一本のリンクは $SU(2)$ の上を回るこまで（5-03 §06）、角運動量 j の状態が左右の回転について $(2j+1)\times(2j+1)$ 個あります。正確には、リンクの状態の空間 $L^2(SU(2))$ を表現ごとに分ける Peter–Weyl の定理です 既知 。こうしてエネルギーは $\frac{g^2 a}{2}\sum_\ell j_\ell(j_\ell+1)$、重複度は $\prod_\ell (2j_\ell+1)^2$ です。頂点では二本のリンクの端が出会い、Gauss の法則はその二つの表現を合成したものが回転で変わらない（スカラーである）ことを求めます。角運動量の合成 $j \otimes j' = |j-j'| \oplus \cdots \oplus (j+j')$ に 0 が現れるのは $j = j'$ のときだけで、しかも一通りです（Schur の補題） 既知 。したがって隣り合う j は等しく、物理的状態は各 j に一つで、準位は N によらず (12) です。

計算 表 3　$SU(2)$ の格子の円周（$g^2L/2$ 単位）。物理的な最低の励起は常に 0.75、$E \le 2$ の物理的状態は 3 個

N	全体の最低の励起	$E \le 2$ の状態数（全体）
1	0.75	14
4	0.1875	115,504
16	0.046875	2.44×10²²

全体の最低の励起は一本のリンクだけ $j=\frac{1}{2}$、つまり両端に電荷の対を置いた状態（§04）で、エネルギー $\frac{3}{8}g^2 a$ は張力と距離 a の積です。$a\to 0$ で 0 に近づくので、物理的状態に制限してはじめて $\frac{3}{8}g^2 L$ が残ります。

07

寄り道：小さな箱と、波動汎関数からの議論

飛ばしてよい節です。

三次元の周期的な箱（一辺 ℓ）では一様な成分 $A_i^a = c_i^a$ が特別です。(5) をこの成分に制限すると $H_0 = -\frac{1}{2\ell^3}\partial_c^2 + \frac{\ell^3}{2}|\mathbf{B}(c)|^2$（磁場は交換子の項 $g\,c^2$ だけ。3-02 §07）で、$c = g^{-1/3}\ell^{-1} y$ と置き直すと

$$H_0 = \frac{g^{2/3}}{\ell}\left[-\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \tfrac{1}{2}|\mathbf{B}_1(y)|^2\right] \tag{14}$$

です（$\mathbf{B}_1$ は $g=1$ の磁場）。準位は $g^{2/3}/\ell$ に比例し、g が小さければ一様でない成分の $2\pi/\ell$ より低くなります。Lüscher（1983）の要旨は “When non-abelian gauge fields are enclosed in a box with periodic boundary conditions, the spectrum of the hamiltonian becomes discrete” と書き、準位を $g^{2/3}$ のべきに展開しています 既知 。括弧の中の二成分だけを残したものが 2-05 の x^2y^2 の井戸です。小さな箱（漸近自由で g が小さい側）は、無限の体積を問う四次元の問いとは反対の端です。Lüscher の g は箱の大きさで測った繰り込まれた結合で、(14) の古典の g そのものではありません。

Feynman（1981）は $2+1$ 次元で、要旨に “Only qualitative or suggestive discussions are made.” と断ったうえで、波動汎関数のゲージ不変性が “a finite energy for any excitation (“glueball”) above the ground state” をもたらすと論じます 物理 。

08

Gauss の法則を解いてしまう道 — クーロンゲージと Gribov

ゲージをさらに固定して拘束を先に解く道もあります。クーロンゲージ $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$ で $\mathbf{E} = \mathbf{E}_T - \nabla\phi$（$\nabla\cdot\mathbf{E}_T = 0$）と分けると、Gauss の法則は ϕ の線形の方程式です。

$$M\phi = -\rho, \qquad M = -\nabla\cdot\mathbf{D} \tag{15}$$

$\rho^a = g f^{abc} A_i^b E_{T,i}^c$ は横の場自身が運ぶ色の電荷です。M が逆に持てれば、$K = M^{-1}(-\nabla^2)M^{-1}$ として

$$H = \tfrac{1}{2}\int\left(|\mathbf{E}_T|^2 + |\mathbf{B}|^2\right) + \tfrac{1}{2}\int \rho\, K\rho \tag{16}$$

です（積分は d^3x）既知。Christ–Lee（1980）の要旨は、時間ゲージからの変数変換が “an unconventional operator ordering” を生み、“new nonlocal interactions, even in the familiar Coulomb gauge” が現れると書きます既知。§06 の $\sin^2\theta$ にあたる軌道の体積の因子は $\det M$ です既知。これは変数をゲージの条件（$\nabla\cdot\mathbf{A}=0$ の切り口の上の座標）に取り替えるときのヤコビアンで、Faddeev–Popov の行列式と呼ばれます（詳しくは 4-08）。困難は、A が大きいと M が固有値 0 を持つことです。Gribov（1978）の要旨は “the fixing of the divergence of the potential in non-Abelian theories does not fix its gauge” と書きます既知。切り口を大域的に選べないことは 3-04 の Singer の定理です。時間ゲージの (10) はこの困難を避けています。

09

何が形式的か — ハミルトニアンを定義するという問題

四次元の (5) には三つの点で意味が欠けています。(i) $E_i^a(\mathbf{x})E_i^a(\mathbf{x})$ は超関数の同じ点での積です（1-11 §09・1-09 §09）。(ii) 零点エネルギー $\frac{1}{2}|\mathbf{k}|$ の和は発散し（2-06 §09）、相互作用があると繰り込み（4-04）と組になります。(iii) 内積 $\int|\psi|^2\mathcal{D}A$ には、無限次元にルベーグ測度が無いこと（1-09 §02）と軌道の体積の発散が重なります（相互作用のある H を自由場の Fock 空間の上に置けないこと、つまり Haag の定理も関わります。4-09）。

格子では状態空間が定まり、Gauss の法則も頂点ごとに厳密に課せます（表 3）。残るのは、格子間隔を 0 に、箱を無限にする極限で隙間が正に残るかです。問題文は “Establishing a quantum mechanical Hilbert space is part of the solution to this Millennium problem.” と書きます（§6.5）既知。§6.1 は Hilbert 空間の道と汎関数積分の道を Osterwalder–Schrader の構成が結ぶと述べます。§6.5 は、これまでの数学の進展の多くが汎関数積分の理解から来たと書きます（“Much of the mathematical progress reviewed above results from understanding functional integration”）。この道では H は虚時間の測度から再構成されます（4-02 §08・4-10 §09）。この章は四次元のヤン–ミルズについて何も示していません。

この章が言えている範囲

事項	言えている	言えていない
(1)〜(10)	形式的な導出既知。一様な場の検算計算	四次元の場での作用素としての意味。θ は物理の水準

事項	言えている	言えていない
(11)〜(13)・図・表	自由な場の模型と円周の上の準位 既知 、差分・数え上げ 計算	空間が二次元以上の場合
(14)〜(16)・寄り道	尺度の勘定と古典の書き換え 既知	量子の順序の項（本文未確認）。Feynman の議論は定性的 物理
質量ギャップ	—	四次元で H は 2026-11 に公開された構成が再構成で作った（委員会の評価の水準。12-08）。その隙間は示されていない（6-04）。この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
問題文（§4・§6.1・§6.5）	本文	A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*, Clay Math. Inst. (2000)
円周の上の類関数と Casimir	本文 §4・§4.2	E. Witten, J. Geom. Phys. 9 (1992) 303–368, arXiv:hep-th/9204083
§08 の順序の項と $\det M$	要旨（本文は書誌のみ。$\det M$ の項は未確認）	N. H. Christ, T. D. Lee, Phys. Rev. D 22 (1980) 939
§04・§06〜§08 の引用	要旨	J. Kogut, L. Susskind, Phys. Rev. D 11 (1975) 395／S. G. Rajeev, Phys. Lett. B 212 (1988) 203／M. Lüscher, Nucl. Phys. B 219 (1983) 233／R. P. Feynman, Nucl. Phys. B 188 (1981) 479／V. N. Gribov, Nucl. Phys. B 139 (1978) 1
拘束の一般論	書誌のみ	P. A. M. Dirac, Can. J. Math. 2 (1950) 129–148（帰属は未確認）
(2)〜(10)・(15)(16)	既知	標準の導出。符号は 3-03 の規約で計算し直した
§04 の検算・表 1〜3・図	計算	Python 3.12・NumPy・SciPy（`gauss_uniform.py`・`flat_mode.py`・`holonomy.py`・`ring_counts.py`）。図は素の JavaScript

次に読む章：4-02 経路積分とユークリッド化。格子のハミルトニアンは 5-03、ゲージ固定は 4-08。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 4 部 量子化 経路積分・Wick 回転

経路積分とユークリッド化 — 時間を虚にすると、場の理論は四次元の確率の問題になる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 場の経路積分が場の配位すべてについての和であること。
時間を虚にすると重み e^{iS} が e^{-S_E} になり、ヤン–ミルズでは $S_E \geq 0$ なので確率の重みとして読めること。
ローレンツ変換が四次元の回転になり、時間が四つの対等な方向の一つになること。

前提となる章 — 2-07（経路積分・虚時間）、2-04（ローレンツ変換・場の作用）。§04 は 3-02・3-03 の非可換の場の強さを使います。ハミルトニアンは 4-01、ガウス測度は 1-09。

先に言うこと — この章の変形の多くは形式的です。Wick 回転は発見法で、厳密な対応は Osterwalder–Schrader の再構成（4-10）です。四次元のヤン–ミルズの測度は構成されておらず、この章は質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. 道から場の配位へ — 格子では何千万重の積分
2. 時間を虚にする — iS が $-S_E$ になる
3. 伝播関数で見る回転 — 極を避けて回す（図 1・表 1）
4. ヤン–ミルズ場の回転 — $S_E \geq 0$、θ 項は虚のまま
5. 時空が空間になる — ブーストが回転に（表 2）
6. 確率測度としての場の理論 — 格子では本物の測度（図 2）
7. ゲージ場で足りないもの — 軌道の体積（表 3）
8. 虚時間の相関がエネルギーを読む — ギャップとのつながり
9. 寄り道：真空の波動関数を半分の時空で書く — 振動子で確かめる

01

道から場の配位へ — 足すものが関数になる

2-07 では一粒子の道 $x(t)$ について e^{iS} を足しました。場の理論では、道の代わりに時空の関数 $\varphi(t,x)$、場の歴史のすべてについて足します。真空 Ω での相関（T は時刻の遅いものを左に並べる約束）は、形式的に

$$\langle \Omega |\, \mathrm{T}\, \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\, | \Omega \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\varphi\; \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\, e^{iS[\varphi]}}{\int \mathcal{D}\varphi\; e^{iS[\varphi]}} \tag{1}$$

と書かれます。一粒子でも $e^{iS}\mathcal{D}x$ は測度になりませんでした（2-07 §03）。場では各時刻に無限個の変数もあります（1-09）。

例。 格子に刻めば (1) は有限の多重積分です。空間 32^3・時間 64 の格子の点は 2,097,152 個で、$SU(3)$ のヤン–ミルズ場は一点に 4 本のリンク、一本に 8 個の実数を持つので 67,108,864 重の積分です 計算 。困難は e^{iS} の振動と、刻みを細かく箱を広くする極限の二つです。この章は一つ目を取り除きます（二つ目は第 5・7 部）。

02

時間を虚にする — iS が $-S_E$ になる

$t = -i\tau$ という置き換えは二度出てきました。2-04 §09 では波動方程式に代入し、振動が減衰に変わることを見ただけでした。2-07 §05 では一粒子の経路積分の重みを回しました。ここでは場の作用と相関を回します。スカラー場の作用（2-04 の (7) に位置エネルギー V を足したもの）に $t = -i\tau$（$\hbar = c = 1$、符号は $(-,+,+,+)$、$x_4 = \tau$）を入れると、$dt = -i\,d\tau$、$(\partial_t\varphi)^2 = -(\partial_\tau\varphi)^2$ から

$$iS_M = -S_E, \qquad S_E[\varphi] = \int d^4x \Big[\tfrac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{4} (\partial_\mu\varphi)^2 + \tfrac{1}{2}m^2\varphi^2 + V(\varphi) \Big] \tag{2}$$

です。時間の微分の符号が空間の微分にそろい、四つの方向が対等になりました。S_E をユークリッド作用と呼び、V が下に有界なら重み e^{-S_E} は正で有界です。(1) は **Schwinger 関数**（名は Schwinger 1958 にちなむとされる）に替わります。

$$S_n(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}\varphi\; \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\, e^{-S_E[\varphi]}, \qquad Z = \int \mathcal{D}\varphi\; e^{-S_E[\varphi]} \tag{3}$$

例。 $V = 0$ なら (3) は共分散 $(-\Delta + m^2)^{-1}$（Δ はラプラシアン $\sum_\mu \partial_\mu^2$。質量ギャップの Δ とは別）のガウス積分で、$S_2(x,y) = G(x-y)$ は 1-11 の (10) の伝播関数です。注意。(1) は収束

する積分ではないので、$t = -i\tau$ を入れるのは変数変換ではなく書き換えの規則です。正確な中身は相関関数の解析接続で、一つの積分で見ると次節の形です。

03

伝播関数で見る回転 — 極を避けて積分路を回す

質量 m の自由場の二点関数は、運動量で書くと

$$\langle \Omega | \, \mathrm{T}\, \varphi(x)\varphi(0) \, | \Omega \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{ip\cdot x}\, \frac{-i}{p^2 + m^2 - i\varepsilon}, \qquad p^2 = -(p^0)^2 + |p|^2 \tag{4}$$

です。$\varepsilon \to +0$ は極を避ける側を決めます（Feynman の処方）。まず時刻の差 $t = 0$ の成分で見ます。このとき $e^{ip\cdot x}$ のうち p^0 による因子 $e^{-ip^0 t}$ は 1 です。$\omega = \sqrt{|p|^2 + m^2}$ と置くと p^0 の被積分関数は $i/((p^0)^2 - \omega^2 + i\varepsilon)$ で、極 $\pm\sqrt{\omega^2 - i\varepsilon}$ は第 4・第 2 象限にあります。

ここで複素積分の事実を一つだけ使います。**極**とは分母が 0 になる点です。複素平面で、極を囲まない閉じた道に沿って積分すると 0 になります（**Cauchy の積分定理**。正確には、道とその内側で関数が複素微分できることが条件で、分母が 0 にならない有理関数はこれを満たします）既知 。だから極を横切らずに積分路を連続的に動かしても、値は変わりません。

積分路を $p^0 = e^{i\theta} s$（s は実）と反時計回りに回します。θ が 0 から 90° の間、動く直線は第 1・第 3 象限を掃くだけで、極を横切りません。回す前と後の二本の直線を、半径 R の遠くの弧で結ぶと、極を囲まない閉じた道になります。弧の長さは R に比例し、被積分関数は $1/R^2$ で減るので、弧の寄与は $1/R$ で消えます。したがって実軸の上の積分と回した直線の上の積分は等しく、$\theta = 90^\circ$、つまり $p^0 = ip_4$ で

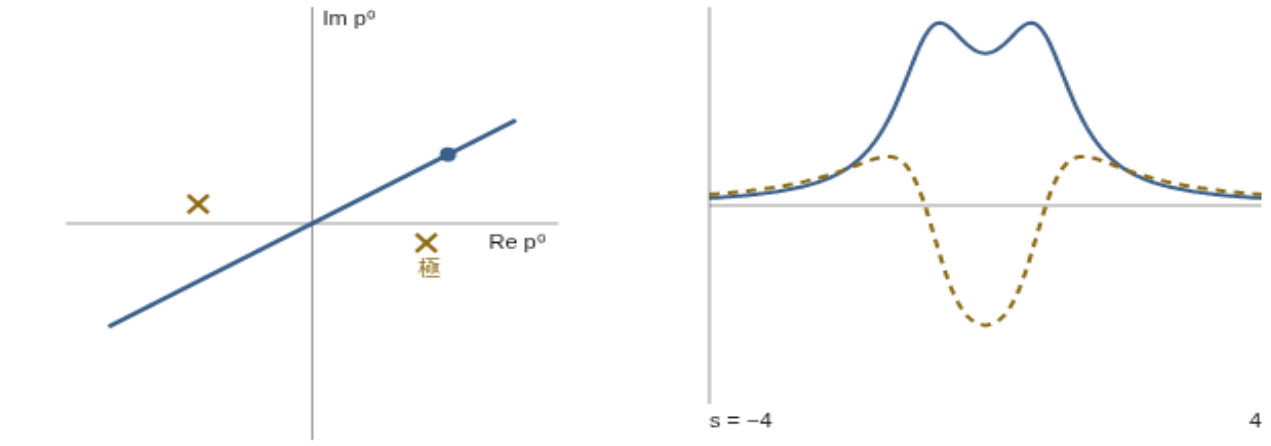
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi}\, \frac{i}{(p^0)^2 - \omega^2 + i\varepsilon} \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_4}{2\pi}\, \frac{1}{p_4^2 + \omega^2} \;=\; \frac{1}{2\omega} \qquad (\varepsilon \to 0) \tag{5}$$

右辺の被積分関数は正でなめらかです。四次元では $-i\,d^4p/(p^2 + m^2 - i\varepsilon)$ が $d^4p_E/(p_E^2 + m^2)$ に替わり、これがユークリッドの伝播関数です 既知 。$1/(2\omega)$ は振動数 ω の振動子の基底状態の $\langle x^2 \rangle$ で（2-06）、自由場のフーリエ成分は一つ一つが振動子でした（2-06 §08）。

$t \neq 0$ の成分では因子 $e^{-ip^0 t}$ が付きます。$p^0 = e^{i\theta} s$ を第 1 象限に回すと、$st > 0$ の側で $|e^{-ip^0 t}| = e^{st\sin\theta}$ は遠くで増えるので、弧の寄与が消えません。そこで t も同じ角度だけ逆向きに、$t = e^{-i\theta}\tau$ と回します。すると途中のどの角度でも $p^0 t = s\tau$ は実で、因子は大きさ 1 の振動のまま残り、弧の議論が通ります。$\theta = 90^\circ$ で $t = -i\tau$、$p^0 = ip_4$、$p^0 t = p_4 \tau$ です。時間が時計回り、エネルギーが反時計回りに回るのはこのためです。

逆に回すと極を横切り符号が変わるので（図 1・表 1）、向きは $i\varepsilon$ が決めています。名は Wick（1954）の Bethe–Salpeter 方程式の扱いによるとされます。

図 1　角度 θ を変えると、p^0 平面の積分路（積分路の図の太線）と、その上の被積分関数（被積分関数の図。実線が実部、破線が虚部）が変わる。極（×）を横切らない限り積分 $I(\theta)$ は変わらない（$\omega = 1$）



θ = 30°、ε = 0.40：I(θ) = 0.4731 + 0.0911i　1/(2√(ω²−iε)) = 0.4731 + 0.0911i　（極の角度 -10.9° より上）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（$s = \tan u$ と置いた台形公式）。

計算 表 1　図 1 の $I(\theta)$（python3）。$\varepsilon = 0.4$ の極の角度は $-10.90°$。

θ	ε	I(θ)
90°・30°・0°・−10°	0.4	+0.473094 + 0.091110i
−12°・−45°・−90°	0.4	−0.473094 − 0.091110i
0°	0.001	0.500000 + 0.000250i

角度によらず値は一つで、極を越えて逆に回すと符号だけが反転します。

04

ヤン–ミルズ場の回転 — $E^2 - B^2$ が $E^2 + B^2$ になる

記号は 3-03 §01 の $\hat{A} = gA$ に合わせ、ハットを省いて書きます。つまり g を A に吸収し、A_μ はエルミートな行列、$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$、$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]$（2-04 の (9) と同じ）、$\mathrm{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ です。

ゲージ場は 1-形式（1-07）なので $A_0\,dt = A_4\,d\tau$、つまり $A_0 = iA_4$ と回します。$\partial_0 = i\partial_4$ と合わせて

$$F_{0j} = i\partial_4 A_j - i\partial_j A_4 - i[iA_4, A_j] = i\,F_{4j}, \qquad F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2F_{0j}F_{0j} + F_{jk}F_{jk} = \sum_{\mu,\nu=1}^{4} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{6}$$

です。言葉で言えば、時間の添字を一つ持つ成分（電場の成分）にだけ i が一つ付き、二乗で -1 になります。ミンコフスキーの計量では電場の二乗に -1 が付いていたので、その二つが打ち消し、四つの添字がすべて同じ符号で並びます。スカラー場の (2) で $(\partial_t\varphi)^2$ の符号が空間の微分にそろったのと同じことです。$S_M = -\frac{1}{2g^2}\int dt\, d^3x\, \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$（3-03 の (1) をハットの記号で書いたもの）に入れると $i\cdot(-i)=1$ が残り、$iS_M = -S_E$ で

$$S_E[A] = \frac{1}{2g^2}\int d^4x\ \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{g^2}\int d^4x\ \mathrm{tr}\big(E_E^2 + B^2\big)\ \geq\ 0, \qquad E_{E,j} = F_{4j},\ B_j = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{jkl}F_{kl} \tag{7}$$

エルミートな X では $\mathrm{tr}\, X^2 = \sum |X_{ij}|^2 \geq 0$ なので $S_E \geq 0$、等号は $F=0$ のときだけです。位相電荷 Q の配位では $S_E \geq 8\pi^2|Q|/g^2$ です（3-03 の (12)・3-05）既知 。**例。** $A_4 = 0$ で A_j が τ によらない配位では $E_E = 0$ なので、長さ T の虚時間の S_E は $T\mathcal{E}$（$\mathcal{E} = \frac{1}{g^2}\int \mathrm{tr}\, B^2 d^3x$ は磁場のエネルギー）で、重みは $e^{-T\mathcal{E}}$ です。

θ 項は虚のまま残る

位相の項 θQ は違います。各成分に時間の添字を持つ F がちょうど一つ入るので、回転の i と dt の $-i$ が打ち消し合い、重みは $e^{-S_E}e^{i\theta Q}$（符号は向きの規約による）、$\theta \neq 0$ では複素数です。Vicari–Panagopoulos（2009）は 'the complex nature of the θ term in the Euclidean QCD Lagrangian prohibits a direct MC simulation at θ ≠ 0' と書きます 既知 。以下 $\theta = 0$ とします。

05

時空が空間になる — ブーストが回転になる

2-04 のブースト $t' = t\cosh\phi - x\sinh\phi$、$x' = x\cosh\phi - t\sinh\phi$ に $t = -i\tau$ と虚の急速度 $\phi = i\alpha$ を入れると、$\cosh i\alpha = \cos\alpha$、$\sinh i\alpha = i\sin\alpha$ から

$$\tau' = \tau\cos\alpha + x\sin\alpha, \qquad x' = x\cos\alpha - \tau\sin\alpha \tag{8}$$

で、(τ, x) 平面の回転です。ローレンツ群 $SO(3,1)$ は回転群 $SO(4)$ に替わります 既知 。間隔は $\tau^2 + |x|^2 \geq 0$ になり、光円錐も過去と未来の区別も消えます。どの方向を時間と呼ぶかは後で選ぶ事柄です。反射正値性（4-10）も満たすなら、回転不変性から、どの方向を時間に選んでも同じ理論が戻ります。両者を互いに移す方法は公理的場の理論の成果です 既知 （Clay の懸賞問題の公式の問題文である Jaffe–Witten の解説〈2000、0-03〉の §3。以下「解説」）。

格子は回転を 90° に減らす

格子に残る回転は 90° 刻みと鏡映だけで、$SO(4)$ が $a \to 0$ で戻ることも示すべき事柄です。四次元の格子の自由場（$m=1$、$a = 1/2n$）で、距離 1 の点 $(2n,0,0,0)$ と (n,n,n,n) の相関を

比べます。連続の相関は $G(r) = \dfrac{m\,K_1(mr)}{4\pi^2 r}$ です。K_1 は変形 Bessel 関数と呼ばれる特殊関数で、遠くでは e^{-mr} で減ります（近くでは $1/(mr)$ のようにふるまい、$G \approx 1/(4\pi^2 r^2)$）。

計算 表 2　格子の二点関数と連続の $G(1) = K_1(1)/4\pi^2$ の比。格子の側は、変形 Bessel 関数の一族 I_ν を使った一重積分の表示で計算。

a	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32
軸	1.4329	1.1297	1.0247	1.0058	1.0014
対角	0.8126	0.9475	0.9869	0.9967	0.9992

粗い格子では向きで相関が約 1.8 倍違い、差は a^2 に比例して消えます。Wilson の格子（5-01）は反射正値性（4-10）を厳密に保つ代わりに回転を壊します。正則化で反射正値性を失うと回復する方法は少ない、と解説は書きます（Jaffe–Witten §6.5）。

06

確率測度としての場の理論 — e^{-S_E} を確率と読む

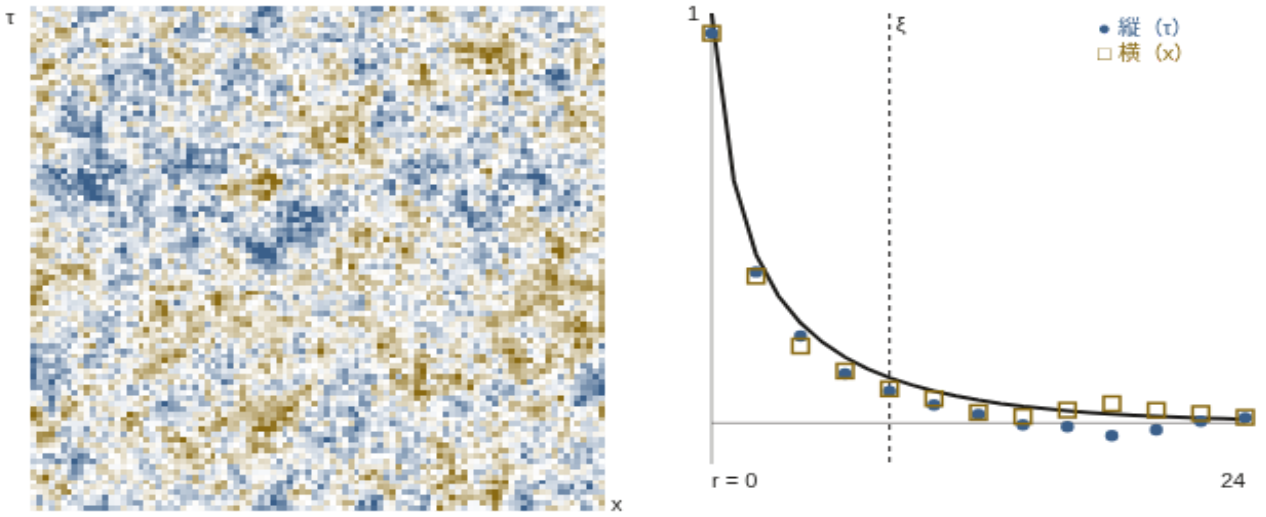
S_E が下に有界なら e^{-S_E}/Z は場の配位の上の確率密度のように読め、(3) はその積率（モーメント）です。場の理論が、四次元の空間の上のランダムな関数の理論になります。解説はこの見方を Symanzik に帰します（Jaffe–Witten §3）既知 。

正確には、無限次元のルベーグ測度 $\mathcal{D}\varphi$ は無いので（1-09）、そのまま正しいのは有限次元です。間隔 a・一辺 L の周期格子 $\Lambda_{a,L}$ では

$$d\mu_{a,L}(\varphi) = \frac{1}{Z_{a,L}}\, e^{-S_E^{(a)}(\varphi)} \prod_{x \in \Lambda_{a,L}} d\varphi(x) \tag{9}$$

が本物の確率測度です（$S_E^{(a)}$ は (2) の微分を差分に、積分を和に替えたもの）。場の理論を作るとは、$a \to 0$、$L \to \infty$ での積率の極限とその性質を示すことです（7-01）。自由場の極限は超関数の空間のガウス測度で、解説は、非線形な場には非ガウスの測度が要る（'one requires non-Gaussian dμ to obtain nonlinear fields'）と書きます（Jaffe–Witten §6.2、1-09）。

図 2　相関長 ξ を変えると、二次元の周期格子（96×96）の自由場の標本（左。色が $\varphi/\sqrt{G(0)}$）と、その縦・横の相関（右の ●・□。実線は厳密な $G(r)/G(0)$）が変わる。一つの標本なので点の相関は揺らぐ（「引き直す」で別の標本。200 標本の平均は本文）



ξ = 8：G(0) = 0.6056、G(8)/G(0) = 0.111（厳密） この標本：縦 0.078・横 0.083（一つの標本なので揺らぐ。200 標本の平均は本文）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（種を固定した乱数）。

標本を見ても、どちらの軸が時間かは分かりません。同じ作り方の 200 標本（python3）では、$\xi = 8$（作用の質量の係数 $M = 2\sinh\frac{1}{2\xi}$。相関がちょうど $e^{-r/\xi}$ で減るように選んだもの）の距離 8 の相関が縦 0.1120 ± 0.0032、横 0.1112 ± 0.0030、厳密 0.1107 で、$\xi = 2, 4, 16$ でも標準誤差の 2 倍以内で一致します 計算 。$G(0)$ が ξ とともに対数で増えるのは、二次元の点の値の発散（2-07 §09）の現れです。

07

ゲージ場で足りないもの — 軌道の体積とコンパクトな群

$S_E[A]$ はゲージ変換（3-02）で変わらないので、e^{-S_E} はゲージ軌道（ゲージ変換で互いに移る接続の集まり、3-04）の上で一定です。軌道は各点に群が一つずつ付いた無限次元のもので、その向きの積分は形式的にも無限大です。

(A) 重み $e^{-(x-y)^2/2}$ はずらし $(x, y) \to (x + c, y + c)$ で変わらず、軌道は無限に長い直線です。正方形 $[-R, R]^2$ の積分 Z_R は R に比例して増えますが、ずらしで変わらない $(x - y)^2$ の平均は 1 に近づきます。(B) 重み $e^{\beta\cos(\theta_1 - \theta_2)}$ の軌道は長さ 2π の円で、円の上の一様な測度（Haar 測度）で積分すれば $Z = (2\pi)^2 I_0(\beta)$ はどの β でも有限です（二重積分と Bessel 関数で確認） 計算 。ここで I_0 は表 2 の I_ν の $\nu = 0$ で、

$$I_0(\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\beta\cos\theta}\, d\theta$$

です。$\theta = \theta_1 - \theta_2$ と置けば、残る θ_2 の積分が軌道の長さ 2π を一つ出すだけです。

計算 表 3　おもちゃ (A)。Z_R は閉じた式と 10 桁一致。

R	$Z_R/2R$	$\langle (x-y)^2 \rangle_R$
1	1.528	0.4341
10	2.407	0.9584
100	2.497	0.9960
1000	2.506	0.9996

(A) では分母と分子が同じ速さで発散し、比だけが残ります（$Z_R/2R \to \sqrt{2\pi} = 2.5066$）。Wilson の格子（5-01）は (B) の形です。有限の格子の上で、リンク変数 $U \in G$ をコンパクトな群の Haar 測度で積分するので、ゲージを固定しなくても積分は有限です（'the lattice approximation reduces the functional integration to a finite-dimensional integral'、Jaffe–Witten §6.5）既知 。連続のまま扱うにはゲージ固定（4-08）が要り、代表を大域的に連続には選べない障害があります（3-04）。どちらでも、意味を持つのはゲージ不変な観測量（Wilson ループ・$\mathrm{tr}\, F^2$ など）だけです。

08

虚時間の相関がエネルギーを読む — 質量ギャップとのつながり

ハミルトニアン H（真空のエネルギーを 0 とする）と真空 Ω が在るなら、虚時間 τ だけ離れた観測量 O の相関は、固有状態 $|n\rangle$ で展開して

$$\langle O(\tau) O(0) \rangle = \langle \Omega | \, O \, e^{-\tau H} \, O \, | \Omega \rangle = \sum_n |\langle n | O | \Omega \rangle|^2 \, e^{-E_n \tau} \tag{10}$$

です（スペクトルが連続なら積分）。真空が一つで（エネルギー 0 の状態は Ω だけ）、$\langle \Omega | O | \Omega \rangle = 0$、$H$ のスペクトルが $(0, \Delta)$ に無ければ、相関は少なくとも $e^{-\Delta \tau}$ で減ります。

例。 自由場の二点関数を空間で積分すると運動量 0 の一粒子だけが残り、減る速さはちょうど質量です 既知 。

$$\int d^3x \; S_2\big((\tau, x), 0\big) = \int \frac{dp_4}{2\pi} \, \frac{e^{i p_4 \tau}}{p_4^2 + m^2} = \frac{e^{-m|\tau|}}{2m} \tag{11}$$

これがユークリッドの側でのギャップの現れ方で、定義は 4-11 で整えます。格子では隣り合う時刻の層をつなぐ重みが転送行列 $T = e^{-aH}$ で（2-07 §08）、ゲージ理論では、時間方向の刻みを 0 にする極限で、$A_0 = 0$ のゲージの転送行列から Kogut–Susskind のハミルトニアンが出ます（Creutz 1977 の要旨）既知 。格子のハミルトニアンは 5-03 で扱います。

向きに注意

(10) は H と Hilbert 空間が先に在るときの式です。ユークリッドの測度だけから H を作るには、鏡映 $\tau \to -\tau$ についての正値性（反射正値性）が要ります（4-10）。解説は 'Establishing a quantum mechanical Hilbert space is part of the solution to this Millennium problem' と書きます（Jaffe–Witten §6.5）。「ギャップ ⟺ 相関の指数減衰」は再構成の後の対応です。四次元のヤン–ミルズでは、その Hilbert 空間は 2026-11 に公開された構成が作りました（Lean で証明されている、と委員会が評価した。12-08）。そこで相関が指数で減ることは示されていません（6-04）。

09

寄り道：真空の波動関数を、半分の時空の経路積分で書く

飛ばしてよい節です。

(10) の $e^{-\tau H}$ には、もう一つの使い道があります。状態を H の固有状態で展開すると、$e^{-\tau H}$ は E_n の成分を $e^{-E_n \tau}$ 倍します。長い虚時間をかけると、エネルギーの最も低い成分より他は相対的に速く消えます。つまり $e^{-\tau H}$ は、真空の成分を持つどんな状態からも真空だけを取り出す濾過器です（2-07 §05）。正確には、初めの状態が真空の成分を持ち、真空が一つであることが条件です。

これを経路積分で書くと、真空の波動関数そのものが経路積分になります。一粒子で見ます。$\langle x | e^{-TH} | x_i \rangle$ は、虚時間 $\tau = -T$ に x_i を出て $\tau = 0$ に x に着く道すべての e^{-S_E} の和です。$T \to \infty$ では $\psi_0(x)\,\psi_0(x_i)\,e^{-E_0 T}$ が主になり、x の関数としては真空の波動関数 $\psi_0(x)$ だけが残ります。

$$\psi_0(x) \;\propto\; \int_{x(0)=x} \mathcal{D}x\; e^{-S_E[x]}, \qquad S_E[x] = \int_{-\infty}^{0} \Big[\tfrac{1}{2}\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}\omega^2 x^2 \Big] d\tau \tag{12}$$

和を取るのは、虚時間の半直線 $\tau \le 0$ の上で、端 $\tau = 0$ の値だけを決めた道です。

例。振動子では (12) の指数が $x(\cdot)$ の二次式なので、答えの x への依存は作用の最も小さい道で決まります（そのまわりのゆらぎの寄与は x によらない定数）。$\ddot{x} = \omega^2 x$ を満たし、$\tau = 0$ で x、$\tau \to -\infty$ で 0 になる道は $x(\tau) = x\,e^{\omega\tau}$ です。その作用は

$$S_E = \int_{-\infty}^{0} \omega^2 x^2 e^{2\omega\tau}\, d\tau = \frac{\omega x^2}{2}, \qquad \psi_0(x) \propto e^{-\omega x^2/2}$$

で、2-06 の基底状態そのものです 既知 。

格子でも確かめられます。間隔 a の虚時間の格子で $x_0 = x$ を固定し、$x_{-1}, x_{-2}, \ldots$ を順に積分します。一つ積分するごとに $e^{-c\,x^2/2}$ の形が保たれ、係数 c は漸化式で動いて一つの値に落ち着きます。端の点 x_0 の位置エネルギーを、隣の半分の時空と半分ずつ分ける約束で数えると、落ち着く値は $c(a) = \omega\sqrt{1 + a^2\omega^2/4}$ です。$\omega = 1$ で $a = 1/2$ なら 1.0308、$a = 1/10$ なら 1.00125 で、連続の $\omega = 1$ との差は a^2 に比例して消えます 計算 。

場では

場でも形は同じです。真空の波動汎関数 $\Psi_0[\varphi_0]$（4-01 §03 の波動汎関数）は、$\tau=0$ で $\varphi=\varphi_0$ となる、$\tau<0$ の半分の時空の場の配位すべての和です。自由場ではフーリエ成分の一つ一つが振動数 $\omega_p=\sqrt{|p|^2+m^2}$ の振動子なので（2-06 §08）、振動子の答えを成分ごとに掛け合わせて

$$\Psi_0[\varphi_0]\ \propto\ \exp\Big(-\frac{1}{2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\omega_p\,|\tilde\varphi_0(p)|^2\Big),\qquad \tilde\varphi_0(p)=\int d^3x\,e^{-ip\cdot x}\varphi_0(x)$$

です 既知 。Osterwalder–Schrader の再構成（4-10）は、この見方を逆にたどります。$\tau>0$ の半分の時空の場だけで決まる量から状態を作り、鏡映 $\tau\to-\tau$ で内積を定めます。内積が正であることを保証するのが反射正値性です。正確には、(12) は Hilbert 空間と H が先に在るときの式です。四次元のヤン–ミルズでは、Hilbert 空間とハミルトニアンは 2026-11 に公開された構成が再構成で作りましたが（委員会の評価の水準。§08）、場の配位の上の測度は構成されておらず、半分の時空の経路積分としての (12) は形式的なままです。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	(2)・(5)〜(8)・(11) の式変形と (5) の積分路の回転、格子の (9) が確率測度であること、コンパクトな群なら格子の積分が有限であること 既知 。表 1〜3・図 1〜2・§01 と §06 と §09 の数 計算
条件つき	(10) と (12) は Hilbert 空間とハミルトニアンが先に在り、真空が一つのときの式（戻る条件は 4-10）
言えていない	(1)・(3) の $\mathcal{D}\varphi$ は形式的で測度ではない。四次元のヤン–ミルズの測度の存在は示されていない（6-04）。回転対称性の回復と、反射正値性を保つ連続極限は、相関関数の水準で 2026-11 に公開された構成が示した（委員会の評価の水準。12-01・12-06）。質量ギャップについては何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
解説の引用（§3・§6.2・§6.5）	本文	A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*, Clay Math. Inst. (2000)
θ 項が複素であること	本文 §1	E. Vicari, H. Panagopoulos, Phys. Rept. 470 (2009) 93, arXiv:0803.1593
転送行列と $A_0=0$	要旨	M. Creutz, Phys. Rev. D 15 (1977) 1128–1136
Wick・Schwinger の名	書誌のみ	G. C. Wick, Phys. Rev. 96 (1954) 1124–1134／J. Schwinger, PNAS 44 (1958) 956–965（名の由来は未確認）

もの	種別	出典・道具
ユークリッドとミンコフスキーの対応	書誌のみ	K. Osterwalder, R. Schrader, CMP 31 (1973) 83–112・42 (1975) 281–305 ／K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471
ギャップの定義と Hilbert 空間	本文	Jaffe–Witten §4・§6.5
表 1・図 1	計算	python3（SciPy。閉じた形と 3×10^{-13} で一致）。図は JavaScript で表と一致
表 2	計算	python3（SciPy）。原点の値 0.154933（1-09 と同じ）と 40^4 の周期格子の FFT（$a=1/2$ で 7 桁一致）で検算
§09 の $c(a)$	計算	python3（漸化式と 400 点の二次形式の直接計算が 10 桁一致・古典解の作用を数値積分）
図 2・§06、表 3・§01	計算	python3（NumPy の FFT・種を固定した 200 標本／SciPy／数え上げ）。図は同じ作り方の標本一つ

次に読む章：4-03 摂動論と Feynman ダイアグラム。(5) のユークリッドの伝播関数が線になります。物理の時空へ戻る条件は 4-10。

摂動論と Feynman ダイアグラム — ガウス積分のまわりで展開すると、項が図になる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 展開の各項がガウス積分の対の組み方の和になり、線と頂点の図で数えられること。
対称因子・連結な図・ループ、ループの数が $\hbar$ の冪を数えること。
ヤン–ミルズではゲージ固定が要り、三点・四点の頂点とゴーストが現れること。

前提となる章 — 4-02。対の数え上げは 1-08、伝播関数は 1-11、三次・四次の項は 3-02。$\hbar = c = 1$（§06 だけ戻す）。

先に言うこと — 摂動論は冪級数を一項ずつ作る方法で、和も理論の存在も与えません。係数の積分は発散し（4-04）、級数も発散すると考えられています（4-12）。質量ギャップはどの次数にも映らないと考えられており（4-07）、この章はそれについて何も示しません。

この章の順序

1. 摂動論の考え方 — ガウスのまわりで展開
2. 対の組み方を線で描く — 対称因子（図 1・表 1）／寄り道：1949 年
3. 連結な図 — 対数は連結な図（表 2）
4. 場へ — 線は伝播関数
5. 運動量で書く — 保存則とループ
6. ループの数は ħ の冪 — 木は古典
7. ヤン–ミルズの Feynman 則 — ゲージ固定が要る
8. 摂動の級数 — 漸近級数（表 3）
9. 摂動論が言うこと、言わないこと

01

摂動論の考え方 — ガウス積分のまわりで展開する

ユークリッドの経路積分（4-02 の (3)）で厳密に計算できるのは、作用が場の二次式、つまりガウス積分のときです（2-07 §02）。そこで作用を二次の部分 S_0 と相互作用 S_{int} に分け、$e^{-S_{\mathrm{int}}}$ を展開します（$\langle\cdot\rangle_0$ は S_0 だけの期待値）。

$$\langle F\rangle = \frac{\langle F\, e^{-S_{\mathrm{int}}}\rangle_0}{\langle e^{-S_{\mathrm{int}}}\rangle_0}, \qquad \langle F\, e^{-S_{\mathrm{int}}}\rangle_0 \overset{\text{形式}}{=} \sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^n}{n!}\,\langle F\, S_{\mathrm{int}}^{\,n}\rangle_0 \tag{1}$$

和と積分の入れ替えは形式的です（§08）。**例**。場の代わりに実数一つ x を取り、$S=\frac12 x^2+\frac{u}{4!}x^4$（$u\ge 0$。4-04 と同じ約束）とします。時空が一点だけの「ゼロ次元の場の理論」です。$\langle x^{2k}\rangle_0=(2k-1)!!$（1-08 §06）から

$$Z(u)=\int\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac12 x^2-\frac{u}{4!}x^4}\ \sim\ \sum_{n\ge 0}\frac{(4n-1)!!}{n!}\Big(-\frac{u}{4!}\Big)^n = 1-\frac{u}{8}+\frac{35}{384}u^2-\frac{385}{3072}u^3+\cdots \tag{2}$$

です（$\sim$ の意味は §08。係数は分数で計算 計算 ）。図の値がすべて数になるので勘定を手で確かめられ、四次元でも図の形と重みの勘定は同じです。展開の各項は、ガウス分布の下での多項式の平均、つまり正規分布の積率だけで書けます。難しい積分は一つも残らず、残るのは「数え上げ」だけです。

02

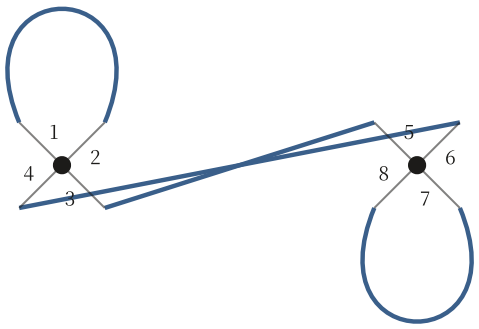
対の組み方を線で描く — Wick の定理から図へ

(2) の n 次の項は、$4n$ 個の x を二つずつ組にする方法の数でした（Isserlis の公式、物理では Wick の定理。1-08 の (9)）。$\frac{u}{4!}x^4$ の一つを脚が 4 本の点（頂点）で描き、組にした脚を線で結びます。結んだ後の形が同じ組み方は値も同じなので、形ごとにまとめます。これが Feynman ダイアグラム（図）です。

$$\frac{\#\{\text{形 }\Gamma\text{ になる組み方}\}}{n!\,(4!)^n}=\frac{1}{S(\Gamma)} \tag{3}$$

分母は頂点と脚の並べ替えの数で、ふつうはちょうどこの数の組み方が一つの形を作ります。形に対称性があると並べ替えの一部が同じ組み方を返して数が減り、その比が対称因子 $S(\Gamma)$、正確には図の自己同型（頂点の入れ替えと脚の付け替えのうち、線のつながり方を変えないもの）の数です 既知 。**例**。頂点一つなら組み方は 3 通りで、どれも「8 の字」です。$3/4!=1/8$ が (2) の u の係数で、輪の入れ替えと各輪の反転で $S=2\cdot 2\cdot 2$ です。

図 1　場合を選び、つまみで組み方の番号を動かすと、脚の組み方（青い線）とそれが作る図の形が変わる。「全部数える」は形ごとに数える



組み方 4 / 105：「泡の両側に輪」　この形の組み方 72 通り、1/S = 1/16

計算 この図の数え上げはブラウザの中で行い、表 1 と一致することを確かめてある。番号は頂点の脚、x・y・1〜4 は外の点（外から入れた x）。

計算 表 1　組み方をすべて作り、形（同型の類）に分けた（python3）。括弧は（組み方の数・$1/S$）

場合	組み方	形
真空・頂点 1	3	8 の字（3・1/8）
真空・頂点 2	105	泡の両側に輪（72・1/16）、四本でつなぐ（24・1/48）、8 の字が二つ（9・1/128）
二点・頂点 1	15	輪つきの線（12・1/2）、線と 8 の字（3・1/8）
二点・頂点 2	945	輪の上に輪（288・1/4）、輪が二つ並ぶ（288・1/4）、三本でつなぐ（192・1/6）、泡を含むもの：線と泡の両側に輪（72・1/16）、輪つきの線と 8 の字（72・1/16）、線と四本でつなぐ（24・1/48）、線と 8 の字二つ（9・1/128）
四点・頂点 1	105	×（24・1）、線と輪つきの線（6 通り×12・各 1/2）、線二本と 8 の字（3 通り×3・各 1/8）

寄り道：1949 年の論文と翌年の定理

飛ばしてよい小節です。

Feynman（1949）の要旨は、行列要素を 'written down directly for any specific problem' できる見方を示すと書き、同年の Dyson（1949）は Feynman と Schwinger の理論の同等性を示しました。翌年 Wick（1950）が、'a sum of "graph" terms' への還元を簡単にする代数の定理を証明します。公式そのものは統計学の Isserlis（1918）にあります 既知 。

03

連結な図 — 泡は割り算で消え、対数は連結な図を数える

表 1 には外の点につながらない部分（真空の泡）を含む図も混じっています。離れた部分からなる図の値は部分の値の積で、(1) の分母 Z は泡だけの図の和なので、割り算で泡は消えます。さらに図全体の和は連結な図の和の指数です。同じ連結な図 C が k 個並ぶと入れ替え $k!$ が S に加わり、$\sum_k C^k/k! = e^C$ となるからです 既知 。ゼロ次元では線の値が 1 なので、図の値は $(-u)^n/S$ です。

$$\log Z = \sum_{\text{連結な真空の図}} \frac{(-u)^n}{S}, \qquad \langle x^2 \rangle = \sum_{\text{連結な二点の図}} \frac{(-u)^n}{S} \tag{4}$$

例。u^2 では、連結な真空の図の $\frac{1}{16} + \frac{1}{48} = \frac{1}{12}$ が $\log Z$ の係数 $\frac{35}{384} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{64} = \frac{1}{12}$ と一致し、連結な二点の図の $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ が $\langle x^2 \rangle$ の係数です。逆に読めば積分一つが図を数える母関数で、曲面の上の図の数え上げ（Bessis–Itzykson–Zuber 1980、17-04）につながります。

計算 表 2　全組み方から数えた連結な形の $(-1)^n/S$ の和（python3）。級数の係数とすべて一致。括弧は級数から出した係数（二点の $n=4$ は数え上げていない）

n	真空の組み方	形（連結）	$\log Z$	二点の組み方	$\langle x^2 \rangle$
1	3	1（1）	-1/8	15	-1/2
2	105	3（2）	1/12	945	2/3
3	10,395	7（4）	-11/96	135,135	-11/8
4	2,027,025	20（10）	17/72	—	（34/9）

04

場へ — 線は伝播関数、頂点は位置の積分

四次元の場でも手順は同じです。d 次元の作用

$$S_E[\phi] = \int d^d x \left[\tfrac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \tfrac{1}{2} m^2 \phi^2 + \tfrac{u}{4!}\phi^4 \right] \tag{5}$$

の二次の部分は共分散 $G = (-\Delta + m^2)^{-1}$（Δ はラプラシアン $\sum_\mu \partial_\mu^2$。質量ギャップの Δ とは別）のガウス測度で（4-02 §06）、Wick の定理はそのまま使えます。変わるのは二点です。線の値が伝播関数 $G(x-y)$ になり（点 x の場の揺らぎが点 y にどれだけ伝わるかの度合いで、離れるほど小さくなります）、頂点は時空のどこにでも置けるので、その位置 z を積分します。

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = G(x-y) - \frac{u}{2}\int d^d z\, G(x-z)\, G(0)\, G(z-y) + O(u^2) \tag{6}$$

第二項は「輪つきの線」で、ゼロ次元の $\langle x^2\rangle = 1 - \frac{u}{2} + \cdots$ の数 1 が伝播関数に替わっただけです。四点の最低次「×」は $-u\int d^dz \prod_i G(x_i - z)$ で、四つの粒子が一点で出会うと読めます。正確には、その点の位置を全空間で積分するという意味です。**注意**。$G(0)$ は $d \geq 2$ で無限大で（1-11）、一次から発散します。その扱いが 4-04 で、そこでの $T(\Lambda)$ がこの輪です。

05

運動量で書く — 保存則と、残るループの積分

$G(x) = \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{e^{ip\cdot x}}{p^2+m^2}$（1-11 の (10) の $\hat G$ をフーリエ逆変換したもの。回転は 4-02 の (5)）を入れて頂点の位置を積分すると $\int d^dz\, e^{i(p_1+\cdots+p_4)\cdot z} = (2\pi)^d\delta^{(d)}(p_1+\cdots+p_4)$、つまり各頂点で運動量が保存します。ここの δ は、平面波を全空間で積分すると波数が 0 のところにだけ値が集まるという 1-11 の関係です。位置の積分が、運動量の足し算の条件に替わります。内線 I 本に条件が V 個、そのうち一つは全体の保存で外線だけに掛かるので、連結な図で自由に残る運動量の数は

$$L = I - V + 1 \tag{7}$$

で、これは図の独立な輪（ループ）の数です 既知 。規則は、線ごとに $1/(p^2+m^2)$、頂点ごとに $-u$、ループごとに $\int d^dk/(2\pi)^d$、全体に $1/S$ です。**例**。四点の一ループの「泡」は $I = V = 2$、$L = 1$ で、運動量 P が流れ込むと

$$\frac{u^2}{2}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{(k^2+m^2)\big((k+P)^2+m^2\big)} \tag{8}$$

です。二点の「三本でつなぐ」図は $I=3$、$V=2$、$L=2$ で二重の積分です。(8) は大きい $|k|$ で $k^{d-1}dk/k^4$ のように振る舞い、$d=4$ で対数発散します。三通りの泡を足して符号を変えたものが 4-04 の (4) の一ループの項です。

06

ループの数は $\hbar$ の冪 — 木は古典、ループは量子の補正

重みを $e^{-S_E/\hbar}$ に戻すと、伝播関数は $\hbar$ 倍、頂点は $1/\hbar$ 倍です。外の点へ行く線も含めて線 I' 本・頂点 V 個・外の点 E 個の連結な図では、外の点も点と数えて $L = I' - V - E + 1$ なので

$$\hbar^{\,I'-V} = \hbar^{\,L+E-1} \tag{9}$$

です。E を決めると $\hbar$ の冪はループの数で決まります（Srednicki §21） 既知 。最低次はループの無い図（木）で、Boulware–Brown（1968）の要旨は、源の作る古典の場が 'the generating functional of the tree-graph approximation' だと書きます 既知 。

例。ゼロ次元に源を足した $\frac{1}{2}x^2+\frac{u}{4!}x^4-Jx$ の古典解は $x_{\mathrm{cl}}=J-\frac{u}{6}J^3+\frac{u^2}{12}J^5-\frac{u^3}{18}J^7+\cdots$ です。一般に $x_{\mathrm{cl}}=\sum_k(-1)^k T_k\,(u/6)^k J^{2k+1}$ と書け、$T_k=1,1,3,12,55,\ldots$ は三分木の数です。$u=1$、$J=0.8$ で数値積分すると、$(\langle x\rangle-x_{\mathrm{cl}})/\hbar$ は $\hbar=0.1,\,0.01,\,0.001$ で $-0.2167,\,-0.2266,\,-0.2277$ と、一ループの図（x_{cl} のまわりの輪つきの線）の値 -0.2278 に近づきます 計算 。ヤン–ミルズでは $\hat{A}=gA$ と取り直すと作用は $\frac{1}{2g^2}\int \mathrm{tr}\,\hat{F}^2$（4-02 の (7)）で、重みには $g^2\hbar$ の組でしか入らず、ループ展開は g^2 の展開です（3-03）。

07

ヤン–ミルズの Feynman 則 — 逆にならない二次形式と、三点・四点の頂点

約束は 3-02 と同じで、g を分けて書き、$F^a_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+g f^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$、$S_E=\frac{1}{4}\int F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}\,d^4x$ です。二次・三次・四次に分けると（3-02 の (11) を 4-02 §04 のとおりユークリッドに読み替えたもの。添字はすべて下付きで、繰り返す添字は 1〜4 で和を取る）

$$S_E=\frac{1}{2}\int A^a_\mu\big(-\partial^2\delta_{\mu\nu}+\partial_\mu\partial_\nu\big)A^a_\nu+g f^{abc}\int(\partial_\mu A^a_\nu)A^b_\mu A^c_\nu+\frac{g^2}{4}f^{abe}f^{cde}\int A^a_\mu A^b_\nu A^c_\mu A^d_\nu \tag{10}$$

二次の核は運動量で $K_{\mu\nu}=p^2\delta_{\mu\nu}-p_\mu p_\nu$ で、p_μ を 0 に送ります。$A_\mu=\partial_\mu\lambda$ は作用を変えない無限小のゲージ変換の向きだからです（4-02 §07）。逆行列が無いので伝播関数が作れません。ゲージを固定する項 $\frac{1}{2\alpha}\int(\partial_\mu A^a_\mu)^2$ を足すと（正当化は 4-08）

$$K^{(\alpha)}_{\mu\nu}=p^2\delta_{\mu\nu}-\Big(1-\frac{1}{\alpha}\Big)p_\mu p_\nu,\qquad D^{ab}_{\mu\nu}(p)=\frac{\delta^{ab}}{p^2}\Big(\delta_{\mu\nu}-(1-\alpha)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\Big) \tag{11}$$

で、$\alpha=1$（Feynman ゲージ）なら $\delta^{ab}\delta_{\mu\nu}/p^2$ です（4-08 と同じ字です）。運動量への移り方は $A^a_\mu(x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{ip\cdot x}\tilde{A}^a_\mu(p)$（微分は ip_μ に替わる）とします。頂点は、作用の n 次の項を $\tilde{A}$ で n 回微分したものの符号を変えたもの（$(2\pi)^4\delta(\sum p)$ を除く）で、e^{-S} の符号がここに入ります（運動量はすべて流れ込む向き）。フーリエの向きを逆に取ると (12) の i の符号が逆になります。

$$V^{abc}_{\mu\nu\lambda}(p,q,r)=ig\,f^{abc}\big[\delta_{\mu\nu}(p-q)_\lambda+\delta_{\nu\lambda}(q-r)_\mu+\delta_{\lambda\mu}(r-p)_\nu\big] \tag{12}$$

$$V^{abcd}_{\mu\nu\lambda\rho}=-g^2\big[f^{abe}f^{cde}(\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho}-\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda})+f^{ace}f^{bde}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho}-\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda})+f^{ade}f^{bce}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho}-\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho})\big] \tag{13}$$

三点は運動量に比例し、四点は運動量によらず、どちらも f^{abc} を含みます。**例**。(10) に平面波を入れて係数を直接取り出し、SU(2) と SU(3) の乱数の運動量・偏極・色 20 組で (11)〜(13) と比べると、相対誤差は最大 8×10^{-13} でした 計算 。

ゴースト。Faddeev–Popov（1967）の要旨は 'Feynman and De Witt showed, that the rules must be changed for … diagrams with closed loops' と書き、経路積分から任意の図

の規則を得る方法を提案しました。結果は、伝播関数 δ^{ab}/p^2 のゴーストと、ゴースト二本・ゲージ場一本の頂点を足し、ゴーストの閉じたループごとに -1 を掛ける規則です（Srednicki §71）既知。-1 は、ゴーストが反可換な数（4-08）であることから来ます。導き方と、前提の局所的なゲージ固定の限界（3-04）は 4-08 です。

08

摂動の級数 — 係数は階乗で増え、どこかで打ち切る

(2) の係数 a_n の比は $|a_{n+1}/a_n| = \frac{(4n+1)(4n+3)}{24(n+1)} \approx \frac{2n}{3}$ で、a_n はおよそ $n!\,(2/3)^n$ の速さで増え、どの $u>0$ でも級数は収束しません。$u<0$ で積分 (2) が発散することも同じ事情を示します。量子電磁力学でこの形の議論をしたのが Dyson（1952）で、要旨は結論を 'tentatively'（暫定的に）と断っています（4-12）。それでも、Taylor の剰余 $\left|e^{-s}-\sum_{n<N}(-s)^n/n!\right| \le s^N/N!$（$s\ge 0$）に $s=\frac{u}{4!}x^4$ を入れて積分すると

$$\left| Z(u) - \sum_{n<N} a_n u^n \right| \le |a_N|\, u^N \qquad (u \ge 0) \tag{14}$$

です既知。N を決めて $u\to 0$ とすれば誤差は u^N の速さで消えます。これが漸近級数で、(2) の $\sim$ の意味です。u を決めて N を増やすと誤差は下がってから上がり、最良は項が最小になる $N\approx 3/(2u)$ の辺りです（項の大きさの谷は 4-12 の図 1 で動かせます）。

計算 表 3　$\langle x^2\rangle = 1-\frac{1}{2}u+\frac{2}{3}u^2-\frac{11}{8}u^3+\frac{34}{9}u^4-\cdots$ の打ち切り（python3、$N\le 16$）

u	厳密な $\langle x^2\rangle$	最良の N	最小の誤差	N=10 の誤差
0.1	0.955577	14	1.3e-6	2.3e-6
0.2	0.919366	6	1.6e-3	3.2e-3
0.5	0.838595	2	7.8e-2	41
1.0	0.750511	0	0.25	4.7e4

$u=1$ では何も足さない $N=0$ が最良です。(14) は $u\le 1$、$N\le 16$ で数値でも成り立ちました計算。場の理論について問題文は、多くの既知の例で（'In most known examples'）摂動級数は 'divergent expansions' だと書き（Jaffe–Witten §6.1）、構成された二次元の模型では散乱行列が 'an asymptotic series in the coupling constants' に展開できると書きます（§6.2）。四次元のヤン–ミルズでは、2026-11 に公開された構成が理論を作りましたが（委員会の評価の水準。6-00）、摂動論と合うことが言われているのは結合の一ループの走りなどの範囲で、級数がその理論の漸近展開であることは示されていません（6-04）。

09

摂動論が言うこと、言わないこと

各次数の係数は図の積分の有限和で、繰り込みの後に各次数が有限になることは、ゲージ理論を含めて定理です（4-04 §08・4-05）既知 。**級数の和**は一般に意味を持ちません。**摂動論に映らないもの**もあります。伝播関数 (11) は $p = 0$ に極を持ち、質量 0 の粒子を表します。質量ギャップが在るなら、$\Lambda \propto e^{-1/(2b_0 g^2)}$ のように g^2 のどの次数でも 0 に見える形で来ると考えられています（4-07）物理 。問題文 §6.6 も 'the mass gap is not classically visible' と書きます。

それでも摂動論は問題文の条件に入っています。§4 は、構成された理論の相関関数が短い距離で漸近自由と摂動的な繰り込み理論の予言に合うことを求めます（引用は 0-03 §07）。摂動論は理論を作る方法ではなく、作った理論が満たすべき目印です。漸近自由は 4-06、大 N は 17-04 です。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	(1)(2)(4) の展開と図の数え方、(3) の対称因子、(7)(9) のループの勘定、(11)〜(13) の Feynman 則の形、ゼロ次元の (14) 既知 。表 1〜3、図 1、§06・§07 の数 計算
条件つき	(6)(8) など場の図の値は、切断を入れたときにだけ意味を持つ（4-04）。ゴーストの規則は局所的なゲージ固定の下の規則（4-08）。質量ギャップが e^{-1/g^2} の形で来るという見方は物理の期待 物理
言えていない	摂動級数の和、場の理論で (14) に当たる評価、四次元のヤン–ミルズの存在、質量ギャップ（このサイトはどれも示していない）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
問題文の引用（§4・§6.1・§6.2・§6.6）	本文	A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*, Clay Math. Inst. (2000)
$\hbar$ の勘定・ゴーストの -1	本文 §21・§71	M. Srednicki, *Quantum Field Theory*, Cambridge UP (2007)（著者の公開草稿）
図の方法の始まり	要旨	R. P. Feynman, Phys. Rev. 76 (1949) 769／F. J. Dyson, Phys. Rev. 75 (1949) 486／G. C. Wick, Phys. Rev. 80 (1950) 268
ガウスの積率の公式	書誌のみ	L. Isserlis, Biometrika 12 (1918) 134–139

もの	種別	出典・道具
ゴーストの規則	要旨	L. D. Faddeev, V. N. Popov, Phys. Lett. B 25 (1967) 29–30。先行の Feynman, Acta Phys. Polon. 24 (1963) 697 と DeWitt, Phys. Rev. 162 (1967) 1195・1239 は書誌のみ
木の図と古典／図の数え上げ／級数の発散	要旨	D. G. Boulware, L. S. Brown, Phys. Rev. 172 (1968) 1628／D. Bessis, C. Itzykson, J.-B. Zuber, Adv. Appl. Math. 1 (1980) 109／F. J. Dyson, Phys. Rev. 85 (1952) 631
表 1・2、図 1	計算	python3（全組み方を作り、置換で同型の類に分類。真空は 4 次の 2,027,025 通りまで）。図の JS も同じ分類で、node で一致を確認
§07 の比較	計算	python3（NumPy。平面波を入れて係数を取り出す）
表 3、§06 の数	計算	python3（係数は分数。厳密値は SciPy の数値積分で、Z は Bessel 関数 $K_{1/4}$ の閉じた式とも一致）

次に読む章：4-04 発散と繰り込み。(6) の $G(0)$ と (8) の対数発散を、測った結合で書き直します。

発散と繰り込み — 無限大を、測った量で書き直す

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — ループの積分が短い距離の揺らぎを足しすぎて発散すること。発散する型は次元を数えれば分かり、四次元の ϕ^4 とヤン–ミルズでは有限個であること。発散を測った結合に吸収すると予言が切断に依らなくなり、その結合が尺度とともに走ること。

前提となる章 — 4-03（伝播関数・頂点・ループ）。あると読みやすい：1-11・2-08。$\hbar = c = 1$、ユークリッドの運動量。β は β 関数（格子の逆結合ではない）。

先に言うこと — 摂動論の計算とその読み方の章です。繰り込み可能性は摂動の各次数（形式的な冪級数）の水準の定理で、級数の和も四次元の理論の存在も与えません。このサイトは連続極限の構成も質量ギャップも示していません。

この章の順序

1. 無限大の出どころ — 短い距離の揺らぎを足しすぎる
2. 切断を入れる — 正則化と、その代価（表 1）
3. 次元を数える — 表面的な発散の次数（表 2）
4. 相殺項 — 裸の結合を測った結合で書き直す（図 1）
5. 走る結合と繰り込み群方程式
6. Wilson の見方 — 関係・無関係・周辺（図 2）／寄り道：Fermi の相互作用
7. ゲージ理論では — 対称性を壊さずに引く
8. 数学から見た繰り込み — 定理の所と、まだの所（表 3）

01

無限大の出どころ — 短い距離の揺らぎを足しすぎる

摂動論の図（4-03）にループがあると、外から決まらない運動量 k の積分が残ります。大きい $|k|$ は短い距離の揺らぎで、四次元ではその数が多すぎて収束しません。$|k|<\Lambda$ で切り（Λ は**切断**）、増え方を見ます。

$$
\begin{aligned}
T(\Lambda) &= \int_{|k|<\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{k^2+m^2} = \frac{1}{16\pi^2}\left[\Lambda^2 - m^2\ln\!\left(1+\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)\right] \\
I(\Lambda) &= \int_{|k|<\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{(k^2+m^2)^2} = \frac{1}{16\pi^2}\left[\ln\!\left(1+\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2+m^2}\right]
\end{aligned}
\tag{1}
$$

T は伝播関数一本を閉じた図、I は二本で閉じた図（泡）です（$d^4k = 2\pi^2 k^3 dk$）。体積 k^3dk に伝播関数ごとの k^{-2} を掛けると、T は $k\,dk$（二次の発散）、I は $k^{-1}dk$（対数発散）です。位置の側では $G(x)^2 \sim |x|^{-4}$ が原点で積分できないことに当たります（1-11）。

例。$m=1$ で $\Lambda = 10, 10^3, 10^6$ とすると、$16\pi^2 T$ は $95.4 \cdot 1.0\times10^6 \cdot 1.0\times10^{12}$、$16\pi^2 I$ は $3.625 \cdot 12.816 \cdot 26.631$ です。Λ を 10 倍するごとに T は約 100 倍、$16\pi^2 I$ は $2\ln 10 = 4.605$ ずつ増えます 計算 。

02

切断を入れる — 正則化と、その代価

人工の尺度を入れて有限にすることを**正則化**と呼びます。正則化は足場で、$\Lambda\to\infty$（格子なら $a\to 0$）で答えが足場に依らないことが目標です。表 1 の四つは、どれも何かを失います。

表 1　代表的な正則化

正則化	保つもの	失うもの
運動量の切断	回転	ゲージ不変性（§07）・反射正値性
格子（5-01、$\Lambda\sim\pi/a$）	ゲージ不変性・反射正値性（5-03）	連続の回転（4-02）
Pauli–Villars（重い場を引く）	回転	反射正値性（4-10）（非可換ではゲージ不変性も。§07）
次元正則化（$d=4-\epsilon$）	回転・ゲージ不変性	反射正値性（4-05）

次元正則化（Bollini–Giambiagi 1972・'t Hooft–Veltman 1972）はヤン–ミルズを含む摂動論の標準の道具です。一方、表 1 で反射正値性を保つのは格子の行だけです。反射正値性は、ユークリッドの相関関数から量子力学のヒルベルト空間（状態の空間）を組み立てるのに要る性質です（4-10）。問題文は、正則化で失った反射正値性を取り戻す方法は少ないと書き、例に次元正則化と Pauli–Villars を挙げます（§6.5。引用は 0-03 §03）。一度失うと取り戻しにくい性質を最初から保てることが、構成の側で格子が選ばれる理由の一つです。

03

次元を数える — 表面的な発散の次数

$\hbar = c = 1$ では量の次元 $[\cdot]$ は質量の冪です（長さは -1）。作用は無次元、d^dx は $-d$、微分は $+1$ なので、場と結合の次元が決まります。

$$\int d^dx \left[\tfrac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \tfrac{u}{4!}\phi^4\right] :\ [\phi] = \tfrac{d-2}{2},\ [u] = 4-d; \qquad \frac{1}{2g^2}\int d^dx\, \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} :\ [A] = 1,\ [g^2] = 4-d \tag{2}$$

四次元では u も g^2 も無次元です。これが「四次元は周辺」の意味です（0-03・1-12。次元の勘定の導き方は 2-04 §08 の (10)）。ループ L 個・内線 I 本の図の運動量の冪は $\omega = dL - 2I$（微分を運ぶ頂点の数を足す）で、$\omega \geq 0$ なら表面的に発散します。ϕ^4 の頂点 n 個・外線 E 本なら $4n = 2I + E$、$L = I - n + 1$ から

$$\omega_{\phi^4} = d - \frac{d-2}{2}E - [u]\,n, \qquad \omega_{\mathrm{YM}} = d - \frac{d-2}{2}E - \frac{[g^2]}{2}(V_3 + 2V_4) \tag{3}$$

です（V_3, V_4 はヤン–ミルズの三点・四点の頂点の数、外線はグルーオン）。四次元では $\omega_{\mathrm{YM}} = 4 - E$。結合の次元が次数の係数に出るので三通りに分かれます 既知 。正なら次数とともに ω が下がり、発散する図は有限個（**超繰り込み可能**）。0 なら発散する型（E の値）は有限個だが全次数に現れる（**繰り込み可能**）。負なら型が際限なく増える（**繰り込み不可能**）。

計算 表 2　$\omega \geq 0$ となるループの図の型（$E = 0$ を除く、次数 30 まで。頂点と外線の組から数え上げ、式 (3) と一致。ヤン–ミルズの $E = 1$ はローレンツ対称性と色の対称性で 0）

理論	結合の次元	E（ω）	次数	分類
ϕ^4、$d = 2$	2	2（0）	1 だけ	超繰り込み可能
ϕ^4、$d = 3$	1	2（1, 0）	1, 2	超繰り込み可能
ϕ^4、$d = 4$	0	2（2）・4（0）	すべて	繰り込み可能
ϕ^4、$d = 6$	−2	2, 4, 6, 8, …	すべて	繰り込み不可能
ヤン–ミルズ、$d = 4$	0	1（3）・2（2）・3（1）・4（0）	すべて	繰り込み可能

二次元の型は T と同じ形で、Wick の順序づけで除けます（7-03。三次元のヤン–ミルズは 7-06）。「表面的」と断るのは、$\omega < 0$ でも内側に $\omega \geq 0$ の部分図があれば発散するからです。部分図まで含めた冪の条件で収束を言うのが Weinberg 1960 の定理で、部分図を順に引く方法は 4-05 で扱います。

04

相殺項 — 裸の結合を測った結合で書き直す

四次元の ϕ^4 で手順を一ループでたどります。作用の係数 m_0, u_0 を**裸の**質量・結合と呼びます（切断の下の係数で、直接は測れない）。四点の強さ Γ^4（4-03 の図の記号 Γ とは別。外線の伝播関数を外し、線一本を切っても二つに分かれない図だけを足した四点関数。木の水準で u_0）は、泡を一つ挟んだ分ずれます。

$$\Gamma^4 = u_0 - \frac{u_0^2}{2}\sum_{j=1}^{3} B(P_j;\Lambda) + O(u_0^3), \qquad P_1 = p_1+p_2,\ P_2 = p_1+p_3,\ P_3 = p_1+p_4 \tag{4}$$

三項は外線を二本ずつに分ける三通り、$\frac{1}{2}$ は対称因子です（7-08 と同じ数え方）。運動量 P の流れ込む泡は、$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{[xA+(1-x)B]^2}$（Feynman のパラメタ）と変数のずらしで式 (1) の I に帰着します。

$$B(P;\Lambda) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k^2+m^2)\big((k+P)^2+m^2\big)} = \int_0^1 I\big(\Lambda;\, m^2 \to m^2 + x(1-x)P^2\big)\,dx \tag{5}$$

ずらした変数で切った値と元の k で切った値の差は $\Lambda\to\infty$ で 0 です（$P=m$、$\Lambda = 10^3 m$ で、$16\pi^2$ 倍で 3×10^{-7}）計算。そこで、測る量で結合を定義し直します。三つの $|P_j|$ がすべて μ の配置で測った Γ^4 を、尺度 μ の**繰り込まれた結合** $u_R(\mu)$ とします。

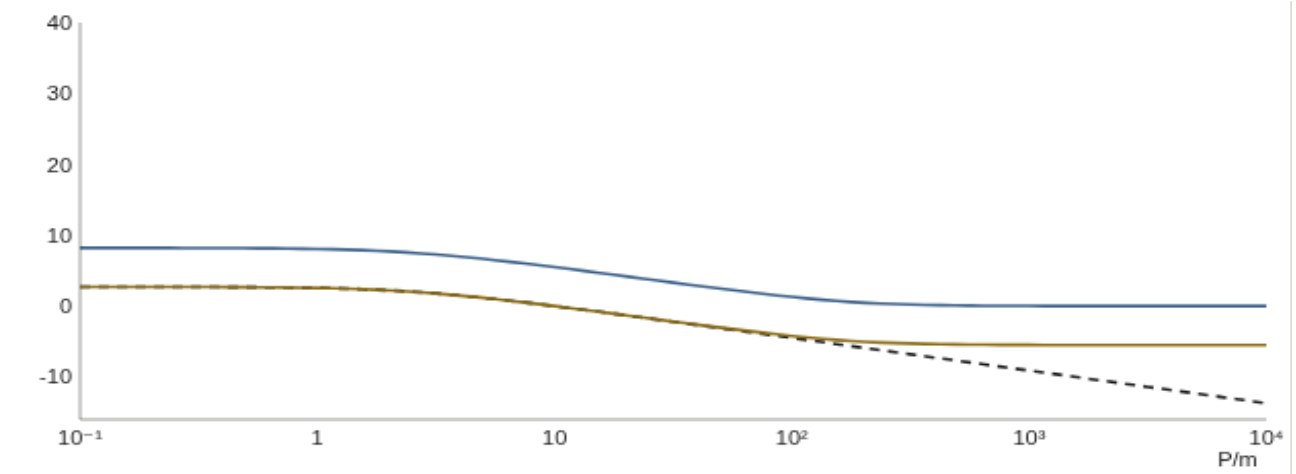
$$u_R(\mu) = u_0 - \tfrac{3}{2}u_0^2 B(\mu;\Lambda) + O(u_0^3), \qquad u_0 = u_R + \underbrace{\tfrac{3}{2}u_R^2 B(\mu;\Lambda)}_{\text{相殺項 }\delta u} + O(u_R^3) \tag{6}$$

$\delta u \approx \frac{3u_R^2}{32\pi^2}\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}$ は発散します。これを式 (4) に戻すと、発散が差の形に閉じ込められます。

$$\Gamma^4 = u_R - \frac{u_R^2}{2}\sum_j \big[B(P_j;\Lambda) - B(\mu;\Lambda)\big] + O(u_R^3) \xrightarrow{\Lambda\to\infty} u_R - \frac{u_R^2}{32\pi^2}\sum_j \int_0^1 \ln\frac{m^2+x(1-x)P_j^2}{m^2+x(1-x)\mu^2}\,dx + O(u_R^3) \tag{7}$$

右辺に Λ は残りません。予言を**測った結合で書けば有限**、というのが繰り込みの中身で、無限大は測れない u_0 に押し込まれます。質量の発散（T）は m_0 に、二ループからは場の規格化 Z にも押し込み、四次元の ϕ^4 ではこの三つで全次数が足ります。これが「繰り込み可能」の実際の意味です既知。

図 1　つまみで切断 Λ を上げると、裸の泡 $16\pi^2 B(P;\Lambda)$（実線・上）は上がり続け、$\mu = 10m$ の値を引いた差（実線・下）は破線の極限に落ち着く。横軸は P（対数）。「動かす」は Λ を往復



Λ = $10^{2.0}$ m：P = 100m で 裸 1.289・差 −4.208（極限 −4.496）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（式 (5)(7) を python3 で数値積分。図は同じ式をその場で Simpson 則で積分し 4 桁で一致）。静止した値（$16\pi^2$ 倍、$\mu = 10m$）：$P = 1000m$ の差は $\Lambda = 10^2 m$ で −5.477、$10^4 m$ で −9.096、$10^8 m$ で −9.099（極限 −9.099）。同じ Λ で裸の $B(100m)$ は 1.289・10.208・28.629 と伸び続ける。

05

走る結合と繰り込み群方程式

基準の尺度 μ は勝手に選べます。u_0, Λ を止めて μ を動かしたときの u_R の変わり方が **β 関数**です。

$$\beta(u_R) = \mu \frac{du_R}{d\mu} = -\frac{3}{2} u_R^2 \, \mu \frac{\partial B(\mu;\Lambda)}{\partial \mu} + O(u_R^3) = \frac{3u_R^2}{16\pi^2} + O(u_R^3) \qquad (\mu \gg m) \tag{8}$$

Λ は微分で消えます。式 (5) を数値で微分すると係数は $\mu = 10m$ で 0.01728、$10^3 m$ で 0.018997 と $3/16\pi^2 = 0.018998$ に近づきます 計算 。一ループで積分すると

$$\frac{1}{u_R(\mu)} = \frac{1}{u_R(\mu_0)} - \frac{3}{16\pi^2} \ln \frac{\mu}{\mu_0} \tag{9}$$

で、短い距離ほど結合が強まります。$u_R(\mu_0) = 1$ なら $\mu/\mu_0 = 10^{10}$ で 1.78、$10^{22.86}$ で分母が 0 です（Landau 極。7-08） 計算 物理 。ヤン–ミルズは符号が逆です（4-06）。

例。量子電磁気学の一ループでは、電荷 1 のディラック粒子（荷電レプトン）ごとに $d(1/\alpha)/d\ln\mu = -2/3\pi$。$1/\alpha = 137.036$ から $M_Z = 91.188$ GeV まで電子・μ・τ で延ばすと 132.20 です（一ループの対数の主要部だけ） 計算 。PDG 2024 の値は $\hat{\alpha}^{(5)}(M_Z)^{-1} = 127.930$ です。$\overline{\text{MS}}$ は、切断の代わりに次元正則化の極だけを引く方式です（4-05）。上付きの (5) は、トップを除く五種のクォークを入れた値であることを表します。132.20 との差はクォークと方式の定数の分です（3-07）。

関数全体でも言えます。裸の量で書いた n 点関数は μ を知らず、繰り込んだ $\Gamma_R^{(n)}$ は場の規格化 Z の分だけ違うので

$$\Big[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(u)\frac{\partial}{\partial u}-n\gamma(u)\Big]\Gamma_R^{(n)}(P;u,\mu)=0,\qquad \gamma=\tfrac{1}{2}\mu\,\partial_\mu\ln Z \tag{10}$$

です（γ は**異常次元**。ϕ^4 では二ループから）。質量が効かない所では、運動量を s 倍しながら結合も一緒に動かすと、式 (10) の左辺が s についての一つの常微分に揃います（特性曲線の方法）。γ を無視すれば $\Gamma^4(sP;u,\mu)=\Gamma^4(P;\bar u(s),\mu)$（$s\,d\bar u/ds=\beta(\bar u)$、$\bar u(1)=u$）。運動量を s 倍して見ることは、結合を尺度 $s\mu$ の値に替えることです 既知 。Gell-Mann–Low 1954 は電子の有効電荷 $e(\mu)$ を尺度の関数として定義しました（講義録 D. Tong, *Statistical Field Theory* §3.5.3）。繰り込みの変換が群をなすことには Stueckelberg–Petermann 1953 が注目していたとされます。質量を動かす形の方程式は Callan 1970・Symanzik 1970 によるもので（Callan–Symanzik 方程式）、教科書では式 (10) の形もこの名で呼ばれます。どれも摂動の各次数の言明です。

06

Wilson の見方 — 短い尺度を積分して消す

Λ を本物の最小の尺度とみなし、$\Lambda/b<|k|<\Lambda$ の揺らぎだけを積分して長さを b 倍に測り直すと、作用の係数がすべて少し動きます。これを繰り返すのが Wilson 1971 の繰り込み群で、Kadanoff のブロック化の考え（2-08）を運動量の殻ごとの積分として実装したものです（格子の上の厳密な版は 7-05）。比喩で言えば写真の解像度を一段ずつ落とす操作です。正確には、有効作用の係数の列が段ごとの写像で移る力学系です。

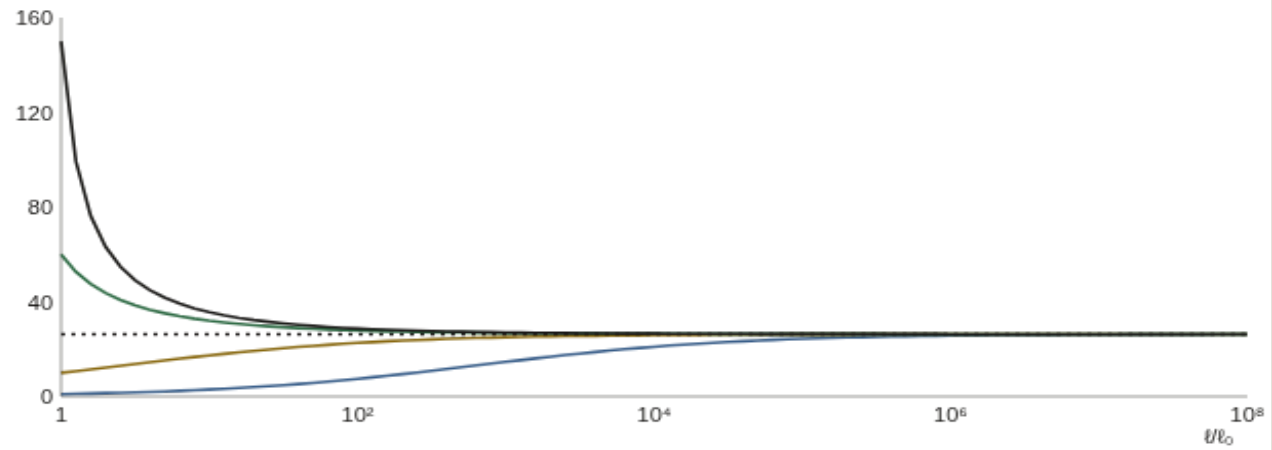
次元 $\Delta_{\mathcal O}$ の局所的な項の係数は次元 $d-\Delta_{\mathcal O}$ を持ち、無次元にした係数は長い距離へ一段ごとに $b^{\,d-\Delta_{\mathcal O}}$ 倍されます。講義録（§3.2.2）は 'Relevant if $\Delta_{\mathrm O}<\mathrm{d}$'・'Irrelevant if $\Delta_{\mathrm O}>\mathrm{d}$'・'Marginal if $\Delta_{\mathrm O}=\mathrm{d}$' と分けます 既知 。無関係な項はエネルギー E で $(E/\Lambda)^{\Delta_{\mathcal O}-d}$ 程度に薄まり、長い距離には関係する項と周辺の項だけが残ります。四次元の $\mathrm{tr}F^2$（$\Delta=4$）は周辺、$\mathrm{tr}F^4$（$\Delta=8$）は無関係です（3-01 の問い）。格子の作用の細部によらず同じ連続極限になるという期待（普遍性。18-04）もここから来ます 物理 。

周辺の結合の向きは量子の補正が決めます。講義録は 'most couplings which naively appear marginal will end up becoming either marginally relevant or marginally irrelevant due to such corrections' と書き、関係する側に回る例に 'the Kondo effect and non-Abelian gauge theories' を挙げます（§3.4）。ϕ^4_4 は長い距離で弱まる側、ヤン–ミルズは強まる側です。長い距離へ向かう $t=\ln(\ell/\ell_0)$ と無次元の $\hat u=u\,\ell^{\,4-d}$ で、d を実数に延ばして書くと

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = (4-d)\,\hat{u} - \frac{3}{16\pi^2}\,\hat{u}^2 \tag{11}$$

です（講義録 §3.5 の式を $u/4!$ の規格化に直したもの。式 (8) と向きが逆で符号も逆）。$d<4$ では $\hat{u}_* = 16\pi^2(4-d)/3$ に固定点があり、正のどの初期値もそこへ流れ込みます。Wilson–Fisher 1972 の固定点で、普遍性のいちばん小さな模型です。$d=4$ ではゆっくり、$d>4$ では速く 0 へ向かいます（7-08）物理。(2) の $[g^2]$ と (11) の固定点を、四で切り替わる他の量と並べた図は 1-12 §10 の次元のつまみです。

図 2　つまみで次元 d を動かすと式 (11) の流れが変わる。線は $\hat{u}_0 = 1, 10, 60, 150$、点線は固定点。d<4 で一点に集まり、d≥4 で 0 へ下がる。「動かす」は d を 3〜5 で往復



d = 3.50：û* = 26.32　長さ 10⁸ 倍で û = 26.25・26.31・26.32・26.32

計算 物理 この図の数値はこの端末で計算した（閉じた解。RK4 と一致）。静止した値（長さ 10^8 倍、$\hat{u}_0 = 1/100$）：$d=3$ で 52.6／52.6（$\hat{u}_* = 52.64$）、$d=4$ で 0.741／2.78、$d=5$ で 9.8×10^{-9}／3.5×10^{-7}。式はループの近似で、$4-d$ が小さいときに信頼できる。

寄り道：繰り込めない理論も役に立つ — Fermi の相互作用

飛ばしてよい小節です。

弱い相互作用の低エネルギーの記述では、四つのフェルミオンが一点で出会う項（$\Delta=6$）に $G_F = 1.1663788(6)\times10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2}$（PDG 2024）が掛かり、繰り込み不可能です。それでも $G_F E^2$ は 1 GeV で 1.2×10^{-5}、1 になるのは $E = 292.8$ GeV 計算。その手前で W・Z のゲージ理論（3-07）が代わります。こうした理論も、ある尺度より下の有効理論として役に立ちます 既知。

07

ゲージ理論では — 対称性を壊さずに引く

ヤン–ミルズの相殺項は、足した後もヤン–ミルズの形に収まっていてほしいところです。ゲージ不変で次元 4 以下の局所的な項は $\mathrm{tr}F^2$ と $\mathrm{tr}F\tilde{F}$（θ 項。全微分で摂動論に入らない。3-05）

だけで、質量項 $\mathrm{tr} A_\mu A_\mu$ は書けません（3-02）。ただし摂動論はゲージを固定した作用で行います。そこではゲージ不変性の代わりに BRST 対称性（ゲージ固定の後に残る対称性）が相殺項の形を縛ります（4-08）。その結果、ゲージ場の部分は $\mathrm{tr} F^2$ の形に保たれます。発散は g と場の規格化（ゴーストとゲージ固定の項の規格化も）に吸収され、径数が一つなので走りの積分定数が唯一の尺度 Λ_{YM} になります（切断の Λ とは別の量。4-07）。ゲージ不変性は発散も減らします。グルーオンの二点の補正は Ward（非可換では Slavnov–Taylor）の恒等式で横向きの形に限られます 既知 。

$$\Pi_{\mu\nu}(P) = \left(P^2 \delta_{\mu\nu} - P_\mu P_\nu\right) \Pi(P^2) \tag{12}$$

横向きとは $P_\mu \Pi_{\mu\nu} = 0$、つまり運動量の向きの成分が無いことです。P の二次が括り出されるので、表 2 の $\omega = 2$ のうち残るのは対数発散の Π だけです。質量項に当たる $\Lambda^2 \delta_{\mu\nu}$ はゲージ不変な正則化では現れません。運動量の切断はこれを壊し、Magnen–Rivasseau–Sénéor 1993 の構成でも 'breaks gauge invariance and requires gauge restoring counterterms' と書かれます。't Hooft 1971 の要旨は、ゲージ不変でない調整場も、その質量を大きくした極限で有限個の相殺項によりゲージ不変性を回復できれば使えるとし、質量の無いヤン–ミルズ場は通常の意味で繰り込めるとみられる（'appear to be renormalizable'）と書きます。ゲージ固定とゴーストは 4-08。格子は正則化の段でゲージ不変性を厳密に保ちます（5-01）。

08

数学から見た繰り込み — 定理の所と、まだの所

三つの水準を混ぜないことが肝心です。

表 3　繰り込みの三つの水準

水準	状態	章
摂動の各次数が有限になること	既知 定理。BPHZ（Bogoliubov–Parasiuk 1957・Hepp 1966・Zimmermann 1969）、Epstein–Glaser 1973。ゲージ理論は 't Hooft 1971、't Hooft–Veltman 1972、Lee–Zinn-Justin 1972、Becchi–Rouet–Stora 1976。BV 形式による別の証明が Costello 2011	4-05
級数を足し上げること（四次元）	物理 ϕ^4・ヤン–ミルズとも、級数は発散すると考えられ、和の意味づけは無い	4-12
級数を足し上げること（二・三次元）	既知 二次元の ϕ^4 で級数の発散（Jaffe 1965）と Borel 総和可能性（Eckmann–Magnen–Sénéor 1975）、三次元の ϕ^4 で Borel 総和可能性（Magnen–Sénéor 1977）、二次元の質量のある Gross–Neveu 模型で Borel 和（Feldman–Magnen–Rivasseau–Sénéor 1986）	4-12

水準	状態	章
切断を外した理論そのもの	既知 二・三次元の ϕ^4 は構成済み。四次元のヤン–ミルズ：有限体積・格子・小結合での有効作用の一様な評価（Bałaban の 1980 年代の一連の論文。1989 年の定理は有効結合に仮定つき。一様な評価から取れるのはコンパクト性による収束部分列で、極限は一意とは限らない）。赤外切断つきの連続の構成の基礎（Magnen–Rivasseau–Sénéor 1993）。Wilson の格子の尺度の極限としての連続の理論は 2026-11 に公開された構成が作った（委員会の評価の水準。6-00）。無限体積の極限の一意性は示されていない（6-04）	7-01・7-07

一つ目の考え方の早い例は量子電磁気学の Dyson 1949 です（質量と電荷の繰り込みで各次数の発散を除く議論。完全な証明は後の Weinberg 1960・BPHZ。級数の収束は示していない）。三つ目について問題文は、二・三次元の ϕ^4 で係数を切断 κ に 'to depend on κ in the way that perturbation theory suggests' 選び、'One then proves that the expectations converge as $\kappa \to \infty$, even though the specified constants α, . . . diverge.' と書きます（§6.2）。式 (6) の δu が発散しても式 (7) が有限だったことの、構成の側の版です。

四次元のヤン–ミルズでは、相関関数が短い距離で教科書にある漸近自由と摂動的な繰り込み理論の予言に合うことが求められます（§4。引用は 0-03 §07）。§2 は 'Asymptotic freedom ensures a decisive regularity in the case when classical Sobolev inequalities are borderline' と書きます。この記事の読みでは、「境目」は §03 の「四次元で結合が無次元」に当たり（18-04）、この文は見通しで定理ではありません。無限大の処理そのものが難しさの中心ではないことは 16-08。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	式 (1)–(11) の計算、表 1 の正則化の性質、繰り込み可能性の三分類——摂動論の計算・定理として 既知 。表 2、図 1・2、β の係数の数値微分、QED の走りと G_F の数 計算
条件つき	式 (11) と図 2 は一ループの式を実数の次元に延ばした近似。普遍性は四次元のヤン–ミルズでは前提のまま 物理 。式 (12) は教科書の水準の引用で、出典は書誌のみ
言えていない	摂動級数の和。切断を外した四次元の理論の存在、ヤン–ミルズの連続極限、質量ギャップ（このサイトはどれも示していない）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
本文を読んだもの	既知	A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*（Clay の問題文）§2・§4・§6.2・§6.5。D. Tong, *Statistical Field Theory*（講義録）第 3 章 §3.2.2・§3.4・§3.5・§3.5.3。J. Erler, A. Freitas, Electroweak Model…, in S. Navas et al. (PDG), Phys. Rev. D 110 (2024) 030001（式 (10.8)(10.11)、$\hat{\alpha}(M_Z)$）と要約表

もの	種別	出典・道具
要旨だけ読んだもの	既知	Gell-Mann–Low, Phys. Rev. 95 (1954) 1300；Weinberg, Phys. Rev. 118 (1960) 838；Callan, Phys. Rev. D 2 (1970) 1541；Symanzik, CMP 18 (1970) 227；'t Hooft, Nucl. Phys. B 33 (1971) 173；'t Hooft–Veltman, Nucl. Phys. B 44 (1972) 189；'t Hooft–Veltman, Nucl. Phys. B 50 (1972) 318；Bollini–Giambiagi, Nuovo Cim. B 12 (1972) 20；Lee–Zinn-Justin, Phys. Rev. D 5 (1972) 3121；Jaffe, CMP 1 (1965) 127；Eckmann–Magnen–Sénéor, CMP 39 (1975) 251；Magnen–Sénéor, CMP 56 (1977) 237；Wilson, Phys. Rev. B 4 (1971) 3174；Wilson–Fisher, Phys. Rev. Lett. 28 (1972) 240（INSPIRE）
調査の材料で照合済み	既知	Dyson, Phys. Rev. 75 (1949) 486・1736（要旨）；Magnen–Rivasseau–Sénéor, CMP 155 (1993) 325；Bogoliubov–Parasiuk, Acta Math. 97 (1957) 227；Hepp, CMP 2 (1966) 301；Zimmermann, CMP 15 (1969) 208；Epstein–Glaser, Ann. IHP A 19 (1973) 211；Costello, AMS (2011)；Bałaban, CMP 122 (1989) 175・355（CMP 109 (1987) 249 は書誌のみ）；Feldman–Magnen–Rivasseau–Sénéor, CMP 103 (1986) 67（要旨）
書誌のみ	既知	Becchi–Rouet–Stora, Ann. Phys. 98 (1976) 287（問題文の文献表）；Stueckelberg–Petermann, Helv. Phys. Acta 26 (1953) 499；Peskin–Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*（1995。式 (12) の形）
表 2、図 1・2、数値の例	計算	python3（scipy・数え上げ・RK4。各 1 分未満）。図の JS は node で照合

次に読む章：4-05 発散の代数（BPHZ・次元正則化・Connes–Kreimer）。β 関数の符号は 4-06。

発散の代数 — 入れ子の引き算は群の分解になり、それでも形式的冪級数の外には出ない

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 入れ子の発散を引く三つの処方（BPHZ・Epstein–Glaser・次元正則化）。引き算が Connes–Kreimer の Hopf 代数で群の Birkhoff 分解になること（小さな模型で計算）。Costello の有効作用の族と、これらが質量ギャップに届かない場所。

前提となる章 — 4-04 発散と繰り込み。あると読みやすい：1-11（超関数）、4-03（Feynman 図）。

先に言うこと — 形式的冪級数の水準の既知の結果の案内で、ヤン–ミルズ理論の存在や質量ギャップについて何も示しません。小さな模型は代数の構造を見るためのもので、四次元の計算ではありません。

この章の順序

1. 入れ子の発散 — 小さな模型で見る：全体だけ引くと外の尺度が残る
2. 森の公式 — BPHZ：内側から引き、引く組を森で数える
3. 位置空間の延長 — Epstein–Glaser：自由度は δ とその微分
4. 次元を連続に動かす — 次元正則化：発散が極 $1/\varepsilon$ に。MS 方式
5. 図の代数 — Connes–Kreimer の Hopf 代数：余積が取り出しを書く
6. Birkhoff 分解 — 引き算が群の分解になる：相殺項は一つの因子。寄り道：根付き木と Runge–Kutta 法
7. 有効作用の族 — Costello：尺度ごとの作用の族
8. 代数が届く所と届かない所：測度と $\exp(-1/g^2)$ は外

01

入れ子の発散 — 小さな模型で見る

4-04 では一ループの発散を、基準の尺度 μ での値を引いて除きました。引く量は外の運動量に依らない数（相殺項）でした。二ループからは図の一部分（**部分図**）がそれだけで発散します（**部分発散**）。部分発散どうしは、一方が他方を含む**入れ子**か、共通部分があって含み合わない**重なり**か、互いに素です。

入れ子だけの小さな模型（Kreimer の玩具の模型。Panzer 2012 の §3.2 の定義）を使います。「一つのループ」は $\int_0^\infty dy/(y+s)$ で、$s>0$ は外の尺度、y はループの変数です。四次元の泡と同じく対数で発散するので、y^{-z}（z は小さい正の数。§04 の ε に当たる）を掛けて**正則化**し、内側の値を外側の被積分関数に入れて入れ子を作ります。

$$\varphi(\bullet)(s)=\int_0^\infty \frac{y^{-z}\,dy}{y+s}=s^{-z}F(z),\qquad F(z)=\frac{\pi}{\sin \pi z}=\frac{1}{z}+\frac{\pi^2}{6}z+\cdots \tag{1}$$

$$\varphi(\ell_2)(s)=\int_0^\infty \frac{y^{-z}}{y+s}\,\varphi(\bullet)(y)\,dy=s^{-2z}F(z)\,F(2z) \tag{2}$$

z の負の冪の部分（**極部分**）を pole と書き、$L=\ln(s/\mu)$、$\mu=1$ とすると

$$\operatorname{pole}\varphi(\bullet)=\frac{1}{z},\qquad \operatorname{pole}\varphi(\ell_2)=\frac{1}{2z^2}-\frac{L}{z} \tag{3}$$

計算 二重のループの極には L が入ります。全体の極だけを引くと、引く量が $\ln s$ を含み、作用に足せる局所的な項になりません。**例：**$z=0.1$、$L=1$ で $\varphi(\ell_2)=44.49$、その極部分は $50-10=40$ です。

02

森の公式 — BPHZ

直し方は内側から引くことです。Bogoliubov の処方では、部分発散をその相殺項 $S(\bullet)=-1/z$ で置き換えた項を先に足し、そのあとで全体を引きます。

$$\bar R(\ell_2)=\varphi(\ell_2)+S(\bullet)\,\varphi(\bullet),\qquad \operatorname{pole}\bar R(\ell_2)=-\frac{1}{2z^2} \tag{4}$$

計算 L/z が消え、全体の相殺項 $S(\ell_2)=1/(2z^2)$ は外の尺度に依りません（$\bar R$：Bogoliubov の写像）。一般の図では**森**——発散する部分図の集合で、どの二つも入れ子か互いに素なもの（空集合と図全体も含む）——について和をとります。Zimmermann の森の公式は

$$R\Gamma=\sum_{\mathcal{F}:\,\text{森}}\ \prod_{\gamma\in\mathcal{F}}\bigl(-T_\gamma\bigr)\,\Gamma \tag{5}$$

で、T_γ は γ の発散部分を取り出す操作（運動量空間では外の運動量の Taylor 展開の低い次数）、積は内側から作用させます（細部を省いた形）。**例：** ℓ_2 の森は $\varnothing, \{\bullet\}, \{\ell_2\}, \{\bullet, \ell_2\}$ で、(5) は $(1-T_{\ell_2})(1-T_\bullet)\,\ell_2$ の展開です。$(1-T_\bullet)$ の部分が (4) の $\bar{R}$、残りの $-T_{\ell_2}$ が全体の相殺項 $S(\ell_2) = 1/(2z^2)$ を足すことに当たり、極の無い値が残ります（§05 の φ_+）。Bogoliubov–Parasiuk（1957）、Hepp（1966）、Zimmermann（1969）の頭文字で BPHZ と呼ばれ、最初の証明の穴は後の二人の仕事で埋まったとされます（Ebrahimi-Fard–Kreimer 2005 の §1）。重なりのある場合の森の公式も根付き木の Hopf 代数（§05）から出ます（Kreimer 1999 の要旨）。既知

03

位置空間の延長 — Epstein–Glaser

この節は 1-11 §04 と §08 の超関数を使います。要点だけ書きます。**テスト関数** g は何回でも微分できて遠くで速く 0 になる関数、**超関数** t はテスト関数に数 $\langle t, g\rangle$ を線形に対応させる規則です。$\langle \delta, g\rangle = g(0)$、その微分は $\langle \partial^\alpha \delta, g\rangle = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha g(0)$ で定めます。超関数の列が「超関数として収束する」とは、どのテスト関数 g についても $\langle t_n, g\rangle$ が収束することです。

位置空間では、発散は超関数を特異な点へ延ばせないことです。例はユークリッドの $\mathbb{R}^4$ でとります。四次元の質量の無い伝播関数 $G = 1/(4\pi^2|x|^2)$ の二乗（泡の図）は原点の近くで $|x|^{-4}$ となり、積分が対数で発散します。Epstein–Glaser（1973）の方法はミンコフスキー空間（時間のある時空）で立てられたもので、時間順序積（その期待値が相関関数）を頂点の数について帰納的に作り（Brunetti–Fredenhagen 2000 の §4）、点が重なる**対角線**の外で決まった値を対角線の上へ**延長**します。繰り込みは期待値の対角線への延長そのものです（同論文の要旨）。延長として定式化するので、発散する積分を途中で書かずに済みます。延長の問題そのものは、下のようにユークリッドの $\mathbb{R}^d$ でも同じ形です。自由度は**尺度の次数**で測ります（同論文の式 (33)。番号は arXiv 版。収束は超関数として）。

$$\mathrm{sd}(t) = \inf\bigl\{\omega : \lambda^\omega\, t(\lambda x) \to 0 \ (\lambda \downarrow 0)\bigr\}, \qquad \mathrm{sd}(|x|^{-a}) = a, \quad \mathrm{sd}(\delta) = d \tag{6}$$

$\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ 上の t_0 について（同論文の定理 5.2・5.3）既知 ：$\mathrm{sd}(t_0) < d$ なら尺度の次数を保つ延長はただ一つ。$d \le \mathrm{sd}(t_0) < \infty$ なら延長はあり、二つの延長の差は原点に台を持つ

$$t - t' = \sum_{|\alpha| \le \rho} c_\alpha\, \partial^\alpha \delta, \qquad \rho = \mathrm{sd}(t_0) - d \tag{7}$$

の形です。ρ は 4-04 の表面的な発散の次数に当たり、定数 c_α が局所的な相殺項の自由度です。**例：** $t_0 = |x|^{-4}$（$d = 4$、$\rho = 0$）で、半径 $1/\mu$ の球の中でだけ $g(0)$ を引く延長

$$\langle u_\mu, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{g(x) - g(0)\,\mathbf{1}\{|x| < 1/\mu\}}{|x|^4}\, d^4x \tag{8}$$

は $x \neq 0$ では t_0 と一致し、分子が $O(|x|)$ なので収束します。μ を替えた差は $2\pi^2 \ln(\mu'/\mu)\, g(0)$（$2\pi^2$ は S^3 の面積）、δ の定数倍です。

例： $g_s = e^{-|x|^2/s^2}$ では $\langle u_\mu, g_s\rangle = 2\pi^2(\ln(\mu s) - \gamma/2)$（$\gamma$ は Euler の定数）。$\mu = 1$ で $s = 0.1, 1, 10$ なら -51.148、-5.697、39.754、$\mu = 2$ との差はどれも $2\pi^2 \ln 2 = 13.682$ です。延長せずに $|x| < \eta$ を除くと $\eta = 10^{-2}, 10^{-8}$（$s = 1$）で 85.21、357.91 と伸びます。計算

04

次元を連続に動かす — 次元正則化

運動量の積分を次元 d の関数と見ます。4-04 の泡（質量 m）は $d < 4$ で収束して

$$I(d) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\, \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} = \frac{\Gamma(2 - d/2)}{(4\pi)^{d/2}}\, (m^2)^{d/2-2} \tag{9}$$

です（$d = 3$ で $1/(8\pi m)$）。右辺は複素数の d へ**有理型**に（極と呼ぶ孤立した点を除いて複素微分できる関数として）延び、$d = 4, 6, \ldots$ に極を持ちます。これを使うのが**次元正則化**です。ここでは $d = 4 - 2\varepsilon$ と書きます（4-04 の $d = 4 - \epsilon$ の ϵ の半分）。すると

$$16\pi^2\, I = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi - \ln m^2 + O(\varepsilon) \tag{10}$$

と、発散が極 $1/\varepsilon$ になります。$\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001$ で $16\pi^2 I$（$m = 1$）は 12.2535、101.9814、1001.9565、(10) の近似との差は 0.2997、0.0276、0.0027 です。運動量を $|k| < k_{\max}$ で切った $\ln(k_{\max}^2/m^2) - 1$ の $\ln k_{\max}^2$ の役を、$1/\varepsilon$ が担います。計算 **MS 方式**は $1/\varepsilon$ だけを、**$\overline{\text{MS}}$ 方式**は $1/\varepsilon - \gamma + \ln 4\pi$ を引きます。尺度 μ を入れる（結合に $\mu^{2\varepsilon}$ を掛ける）ので、$\overline{\text{MS}}$ では $-\ln(m^2/\mu^2)$ が残ります。4-06 の $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ はこの方式の Λ です。

1972 年に Bollini–Giambiagi と 't Hooft–Veltman（題は「ゲージ場の正則化と繰り込み」）の論文があり、ゲージ対称性を壊さない正則化としてヤン–ミルズの摂動論で標準的に使われているとされます。 代償として、(9) は図ごとの解析接続で、非整数の d に測度を与えません。問題文も、次元正則化などで失った反射正値性を取り戻す方法は少ないと書きます（p.11。引用は 0-03 §03。4-10）。

05

図の代数 — Connes–Kreimer の Hopf 代数

引き算は「部分図 γ の取り出し」と「γ を一点につぶした残り Γ/γ」の繰り返しです。これを演算にする前に、言葉を三つ用意します。

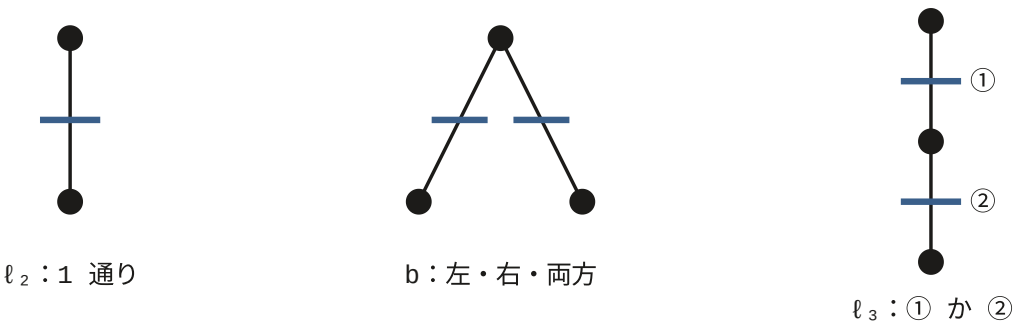
- **一粒子既約**：内線を一本切っても二つに分かれない図。
- $\otimes$（テンソル積）：$\gamma \otimes \Gamma/\gamma$ は二つの図の組を形式的に並べる記号です。左右それぞれについて線形（双線形）で、左右を掛けはしません。あとで値を入れるときに $\varphi(\gamma)\,\varphi(\Gamma/\gamma)$ と掛けます。
- **Hopf 代数**：積と**余積**（一つの元を $\otimes$ の組の和に割る写像）と、余単位・対合子という付属の写像を持つ代数。この章で使うのは余積だけです。

引き算を演算にしたのが Kreimer（1998）と Connes–Kreimer（1998・2000）の Hopf 代数で、生成元は発散する一粒子既約な図、積は図を並べること、取り出しは余積です（Ebrahimi-Fard–Kreimer 2005 の式 (15)）。(11) の和は、発散する一粒子既約な真の部分図と、その互いに素な組（積として並べたもの）について取ります。組のときの Γ/γ は、どれも一点につぶした残りです。余積を Δ と書くのは文献の慣習で、質量ギャップの Δ とは別です。

$$\Delta(\Gamma) = \Gamma \otimes 1 + 1 \otimes \Gamma + \sum_{\gamma \subsetneq \Gamma} \gamma \otimes \Gamma/\gamma \tag{11}$$

入れ子だけなら、図の代わりに**根付き木**で足ります。頂点が発散する部分図、子が内側の部分発散です。(11) の和は**許される切断**（根から葉へのどの道も高々一度しか切らない辺の選び方）の和になり、切り落とした側が左、根の側が右に入ります（図 1）。

図 1　根付き木と許される切断。上端が根（図全体）、下ほど内側。色の線が切断で、切り落とした下側が式 (12) の左、根の側が右の因子。ℓ_3 の ① と ② は同じ道の上なので同時には切らない



$$\begin{aligned} \Delta(\ell_2) &= \ell_2 \otimes 1 + 1 \otimes \ell_2 + \bullet \otimes \bullet \\ \Delta(b) &= b \otimes 1 + 1 \otimes b + 2\,\bullet \otimes \ell_2 + \bullet\bullet \otimes \bullet \end{aligned} \tag{12}$$

b は根に子が二つの木です。正則化した値 φ（z のローラン級数に値をとり、積を積に移す写像。**指標**）どうしは、畳み込み $\varphi_1 \star \varphi_2 = m \circ (\varphi_1 \otimes \varphi_2) \circ \Delta$（$m$ は値の積）で群をなします。単位は空の図に 1、ほかの図に 0 を与える指標です。逆元があるので、φ の発散を打ち消す因子 S_R を掛けて $S_R \star \varphi = \varphi_+$ を有限にする、という問題の立て方ができます。相殺項 S_R が φ の逆元の役をするわけです（§06）。方式 R（MS は極部分、MOM は $s = \mu$ での値）を決めると、相殺項 S_R と繰り込んだ値 φ_+ が木の大きさの順に決まります（Ebrahimi-Fard–Kreimer 2005 の式 (21)(25)(26)）。

$$
\begin{aligned}
S_R(\Gamma) &= -R\big[\bar{R}(\Gamma)\big], \qquad \varphi_+(\Gamma) = (1-R)\big[\bar{R}(\Gamma)\big] \\
\bar{R}(\Gamma) &= \varphi(\Gamma) + \sum_{\gamma} S_R(\gamma)\, \varphi(\Gamma/\gamma)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

玩具の模型では、頂点 v を根とする部分木を t_v、頂点の数を $|t|$ として、値が閉じた形になります（Panzer 2012 の命題 3.2.2）。

$$
\varphi(t)(s) = s^{-z|t|} \prod_{v} F\big(z\,|t_v|\big)
\tag{14}
$$

頂点 4 個までの木 8 本で (13) を計算すると、(i) 相殺項はどれも L を含まず（局所性）、(ii) 繰り込んだ値は L の $|t|$ 次の多項式で最高次は $(-L)^{|t|}/t!$（$t! = \prod_v |t_v|$ は**木の階乗**）、(iii) MOM の値は Panzer の式 (3.4.2)–(3.4.5) と一致しました。MS と MOM の差は有限です。計算

計算 表 1　玩具の模型の繰り込み（有理数で誤差なく計算）。右端は $z \to 0$ の値。MS で引くと定数が変わる（ℓ_2 は $\frac{L^2}{2} + \frac{\pi^2}{4}$、$\ell_3$ は $-\frac{L^3}{6} - \frac{5\pi^2 L}{12}$）。

木	$t!$	裸の値の極部分	相殺項（MS）	φ_+（MOM）
$\bullet$	1	$\frac{1}{z}$	$-\frac{1}{z}$	$-L$
ℓ_2	2	$\frac{1}{2z^2} - \frac{L}{z}$	$\frac{1}{2z^2}$	$\frac{L^2}{2}$
b	3	$\frac{1}{3z^3} - \frac{L}{z^2} + \frac{27L^2+11\pi^2}{18z}$	$-\frac{1}{3z^3} + \frac{\pi^2}{18z}$	$-\frac{L^3}{3} - \frac{\pi^2 L}{3}$
ℓ_3	6	$\frac{1}{6z^3} - \frac{L}{2z^2} + \frac{27L^2+14\pi^2}{36z}$	$-\frac{1}{6z^3} - \frac{\pi^2}{18z}$	$-\frac{L^3}{6} - \frac{\pi^2 L}{6}$

06

Birkhoff 分解 — 引き算が群の分解になる

Connes–Kreimer（2000）の主定理（要旨）は、次元正則化した裸の理論が、時空の整数の次元 D のまわりの小さな円の上で指標の群のループ $\gamma(z)$ を与え、'the renormalized theory is just the evaluation at z = D of the holomorphic part γ+ of the Birkhoff decomposition of γ' だというものです。$z = D$ は時空の整数の次元、γ は正則化した理論が与えるループ（次

元 z を円の上で動かしたときの指標の族)、γ_+ はその分解の正則な因子です。既知 以下では z を D からのずれとして書きます（玩具の模型の z と同じ役で、$z=0$ が整数の次元)。

$$\varphi(z) = \varphi_-(z)^{\star -1} \star \varphi_+(z) \tag{15}$$

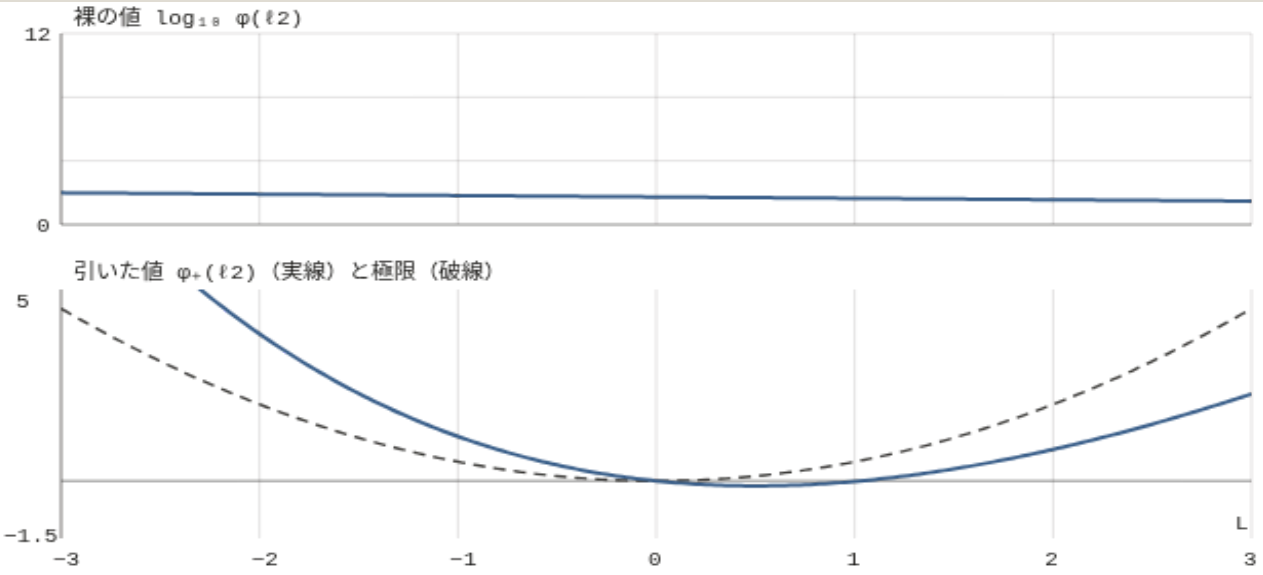
φ_- は $1/z$ の多項式（定数項は単位）で MS の相殺項、φ_+ は $z=0$ で正則で $\varphi_+(0)$ が繰り込んだ値です。たとえれば、ローラン級数を極の部分と正則な部分に分けることの掛け算版です。正確には、群が可換でないので (13) の帰納で木の大きさの順に決まります。S_R と φ_+ が再び指標になるのは、R が $R^2=R$ と **Rota–Baxter の等式**

$$R(x)\,R(y) + R(xy) = R\big(R(x)\,y + x\,R(y)\big) \tag{16}$$

を満たすからです（Ebrahimi-Fard–Kreimer 2005 の式 (20))。既知 **例：**極部分の R と $x = 1/z + a$、$y = 1/z + b$ では両辺とも $2/z^2 + (a+b)/z$ です。

図 2 は梯子 ℓ_n（頂点が一列に n 個）の MOM です。(13) の和は $\bar{R}(\ell_n) = \varphi(\ell_n) + \sum_{j<n} S_R(\ell_j)\,\varphi(\ell_{n-j})$ になり、$z \to 0$ で裸の値は z^{-n} の速さで逃げ、引いた値は多項式に落ち着きます。計算

図 2　つまみ z を小さくすると、上の段の裸の値 $\log_{10}\varphi(\ell_n)$ は上へ逃げ、下の段の引いた値 $\varphi_+(\ell_n)$（実線）は $z\to 0$ の多項式（破線）に近づく。横軸は L、n は梯子の段数。「動かす」で z が下がる



n = 2　z = 0.100　L = 1 で 裸の値 44.49　引いた値 −0.0141　極限 0.5000

計算 この図の数値はこの端末で計算した。式 (13)(14) の閉じた形を図の中で評価し、python3 と照合した。

JavaScript が無効なら：$L=1$ で $z=0.02,\ 0.005$ の引いた値は、$n=1$：−0.991、−0.998（極限 −1)、$n=2$：0.394、0.473（0.5)、$n=3$：−1.696、−1.776（−1.812)、$n=4$：0.655、1.419（1.687)。裸の値は $z=0.02$ で 49、1205、19802、245195。極限との差はほぼ z に比例して縮む。計算

寄り道：根付き木と Runge–Kutta 法

飛ばしてよい小節です。

$y' = f(y)$ の解を h で展開すると、k 階の導関数を「子が k 個の頂点」と読んで f, $f'f$, $f''(f,f)$, $f'f'f$ が $\bullet$, ℓ_2, b, ℓ_3 になります。

$$y(h) = y + hf + \frac{h^2}{2}\,f'f + \frac{h^3}{6}\bigl(f''(f,f) + f'f'f\bigr) + O(h^4) \tag{17}$$

h^3 の係数は ℓ_3 で $1/t!$、b で左右の入れ替えの 2 と $t! = 3$ の積の逆数で、表 1 と同じ木の階乗です。Runge–Kutta 法はこの係数を決まった次数まで再現するよう作られ、展開を扱う群を Butcher の群と呼びます（Butcher 1972）。Brouder（2000）は要旨で、繰り込みの根付き木の代数と Runge–Kutta 法のつながりを指摘しています。既知

07

有効作用の族 — Costello

別の道は、尺度ごとの作用の族を理論と見ることです（Wilson の繰り込み群。7-05）。Costello（2007 年の論文、2011 年の本）は伝播関数 $1/k^2 = \int_0^\infty e^{-tk^2}\,dt$ の t（長さの二乗）を ε から T に制限します。

$$P(\varepsilon, T)(k) = \int_\varepsilon^T e^{-tk^2}\,dt = \frac{e^{-\varepsilon k^2} - e^{-Tk^2}}{k^2} \tag{18}$$

正確には、論文はコンパクトな多様体の上の熱核で書かれ、平らな空間ではそれが e^{-tk^2} になります。**例：** $\varepsilon = 0.01$、$T = 100$ で $k^2 P$ は $k = 1, 10, 30$ で 0.990、0.368、1.2×10^{-4}。計算 異なる尺度の作用は繰り込み群方程式で結ばれます（$\Gamma(P, S)$ は S の頂点を P で結んだ図の和）。

$$S_{\text{eff}}(T_2) = \Gamma\bigl(P(T_1, T_2),\, S_{\text{eff}}(T_1)\bigr) \tag{19}$$

論文の相殺項の一意性の定理（Costello の定理 B）は、方式（ε の関数のうちどれを特異な部分と呼ぶかの選び方）を固定すると、相殺項 $S^{\mathrm{CT}}(\varepsilon)$ が一意にあって $\lim_{\varepsilon\to 0}\Gamma(P(\varepsilon,T), S - S^{\mathrm{CT}})$ が存在し、相殺項は T に依らず局所的なことです。相殺項は $\hbar$（ループの数を数える文字）の冪級数です。尺度 T の**有効作用**は、この相殺項を引いてから $\varepsilon \to 0$ とした極限

$$\Gamma^R\bigl(P(0,T), S\bigr) = \lim_{\varepsilon\to 0}\Gamma\bigl(P(\varepsilon,T),\, S - S^{\mathrm{CT}}(\varepsilon)\bigr) \tag{20}$$

で、$P(0,T)$ のままで図を作ると発散します。有効作用も $\hbar$ の形式的冪級数です（§ 08）。有効作用の族の分類の定理（Costello の定理 C）は、方式を固定すると局所的な作用と、(19) と

$T \to 0$ での局所性を満たす有効作用の族とが一対一に対応することです。方式を替えるのは同じ族に別の座標を付けることに当たります。既知

ゲージ対称性は Batalin–Vilkovisky（BV）形式の量子マスター方程式で表します（ここでは名前だけ。ゲージ対称性を保つ条件を、補助の場を加えた一つの方程式にまとめたもの）。2007 年の論文は繰り込み（相殺項の構成）と量子化（量子マスター方程式の解の構成）を区別し、コンパクトな四次元多様体上の純ヤン–ミルズを前者の例に、後者の非自明な例を Chern–Simons 理論とします。2011 年の本はヤン–ミルズの摂動的な繰り込み可能性のコホモロジー（$Q^2 = 0$ となる写像 Q について $\ker Q / \operatorname{im} Q$ を見る代数の道具。ここでは名前だけ）による証明を含むと紹介されています。繰り込み可能性そのものは 't Hooft（1971）、't Hooft–Veltman（1972）、Lee–Zinn-Justin（1972）、Becchi–Rouet–Stora（1976）らで確立したとされます（7-12 §06）。既知

08

代数が届く所と届かない所

ここまでの道具はどれも結合定数の**形式的冪級数**の上で働き、各次数を有限にし、自由度を有限個の局所項に閉じ込めます。既知 届かないものは三つです。**(i) 級数の和：**四次元ヤン–ミルズの摂動級数は発散すると考えられています（4-12）。物理 **(ii) どの次数でも 0 の量：**一ループの尺度（4-07。純 $SU(N)$ で $\beta_0 = 11N/3$。係数の四つの書き方の換算は 4-06 表 1）

$$\Lambda = \mu \, \exp\!\left(-\frac{8\pi^2}{\beta_0 \, g^2} \right) \tag{21}$$

は（$b_0 = \beta_0/(16\pi^2)$ とおけば 4-07 の式 (3) と同じ式）、g についての Taylor 係数がすべて 0 です。質量ギャップは Λ に比例すると期待され物理、そうした量は形式的冪級数の中で 0 と区別できません（7-12 §07）。**(iii) 測度と正値性：**問題文が求めるのは係数の列ではなく公理を満たす理論で（0-03）、その相関関数は短い距離で漸近自由と摂動的な繰り込み理論の予言に合うべきだとされます（p.6。引用は 0-03 §07）。この章の代数は、構成が再現すべき答えの側にあります。

同じ代数が形式的冪級数の外の道具の中で使われている例に、Hairer の正則性構造の繰り込みがあります。正則性構造は**確率量子化**（7-09。ここでは名前だけ。雑音で揺らした時間発展の方程式を解き、その長い時間の後の分布として測度を得ようとする方法）の方程式を解くための枠組みで、その繰り込みは二つの Hopf 代数の組と Birkhoff 分解の変種で書かれます（Bruned–Hairer–Zambotti 2019 の要旨）。正則性構造は、三次元ヤン–ミルズ–Higgs の確率量子化の方程式の局所時間の解（短い時間の間だけの解）の構成に使われています（Chandra–Chevyrev–Hairer–Shen 2024 の要旨）。既知 扱えるのは劣臨界（短い尺度ほど

非線形項が弱くなる）の方程式で、四次元ヤン–ミルズは**臨界**（非線形項の強さが尺度に依らない）なのでその外です。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	五つの定式化と引用した定理（延長の分類、Birkhoff 分解の主定理、Costello の相殺項の一意性の定理・有効作用の族の分類の定理）既知 。玩具の模型で、全体だけの引き算が L を含む極を残し Bogoliubov の処方で消えること、木 8 本で相殺項が局所的で値が L の多項式になること。$\lvert x\rvert^{-4}$ の延長の差が δ の定数倍であること。泡の極 計算
条件つき	玩具の模型は入れ子だけで、局所性はその中での確認（一般には文献の定理による）。摂動級数の発散と $\Delta \propto \Lambda$ は期待 物理
言えていない	四次元ヤン–ミルズの多ループの計算。級数の和。非摂動の測度・反射正値性・質量ギャップ。書誌のみの文献の証明の中身

出典と再現

もの	種別	出典・道具
本文を読んだもの	既知	Jaffe–Witten, Quantum Yang–Mills Theory（Clay の問題文）p.6・p.11。Panzer, arXiv:1202.3552 (2012) §3.2–3.4。Ebrahimi-Fard–Kreimer, J. Phys. A 38 (2005) R385 §1–2。Brunetti–Fredenhagen, arXiv:math-ph/9903028（Commun. Math. Phys. 208 (2000) 623）の要旨・§4・§5.1–5.2（式・定理の番号は arXiv 版）。Costello, arXiv:0706.1533 (2007) §1
要旨だけ読んだもの	既知	Kreimer, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 303。Connes–Kreimer, Commun. Math. Phys. 199 (1998) 203；210 (2000) 249。Kreimer, Commun. Math. Phys. 204 (1999) 669。Brouder, Eur. Phys. J. C 12 (2000) 521。Bruned–Hairer–Zambotti, Invent. Math. 215 (2019) 1039。Chandra–Chevyrev–Hairer–Shen, Invent. Math. 237 (2024) 541（arXiv:2201.03487）
書誌のみ	既知	Bogoliubov–Parasiuk, Acta Math. 97 (1957) 227。Hepp, Commun. Math. Phys. 2 (1966) 301。Zimmermann, 同 15 (1969) 208。Epstein–Glaser, Ann. Inst. H. Poincaré A 19 (1973) 211。Bollini–Giambiagi, Nuovo Cim. B 12 (1972) 20。't Hooft–Veltman, Nucl. Phys. B 44 (1972) 189（ゲージ理論での標準的な使われ方は未確認）。't Hooft, 同 33 (1971) 173。Lee–Zinn-Justin, Phys. Rev. D 5 (1972) 3121。Becchi–Rouet–Stora, Ann. Phys. 98 (1976) 287。Costello, Renormalization and Effective Field Theory, AMS (2011)（紹介文による）。Butcher, Math. Comp. 26 (1972) 79
式 (3)(4)、表 1	計算	python3（標準ライブラリの有理数で z のローラン級数を誤差なく計算。木 8 本、MS と MOM）

もの	種別	出典・道具
図 2、§03・§04・§06・§07 の数値	計算	python3（SciPy の数値積分と Γ 関数、閉じた式）。図 2 の JavaScript は node で python3 の値と突き合わせた

次に読む章：4-06 漸近自由。寄り道は 7-12・4-12。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 4 部 量子化 β 関数・11N/3

漸近自由 — 短い距離で結合が弱まる符号と、11N/3 の中身

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — ヤン–ミルズの β 関数は負で、短い距離ほど結合が対数的に弱まること。係数 11/3 がスピンの 4 と軌道の −1/3 に分かれること。b_0, b_1 は結合の定義に依らず、それを足場に格子の数値と予言を比べられること。

前提となる章 — 4-04（走る結合）。あると読みやすい：17-01・3-02・5-01。$\hbar = c = 1$、$\mathrm{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$。β 関数を $\beta(g)$、格子の逆結合を $\beta_{\mathrm{L}} = 2N/g_0^2$ と書き分けます。

先に言うこと — 係数は摂動論の計算です（既知 は「摂動論の計算として既知」）。四次元の連続理論は 2026-11 に公開された構成が作り、そこには結合の一ループの走りと短距離の幾つかの検査が言明として入っています（Lean で証明されている、と委員会が評価した。10-06・6-01）。摂動論との全ての次数での一致は示されていません（6-04）。この章の格子との照合は数値の比較で、それ自体は連続極限の存在を示すものではありません。このサイトは質量ギャップも連続理論の構成も示していません。

この章の順序

1. 走る結合 — β 関数の符号
2. 一ループの係数 — 四つの書き方（表 1）
3. 11/3 の中身 — スピンと軌道（図 1・表 2）／寄り道：真空は常磁性体
4. 物質を足すと — Coleman–Gross
5. 二ループと普遍性 — b_0, b_1 は定義に依らない
6. 発見の経緯 — 年表（表 3）
7. 格子との整合 — Λ の比と r_0/a（図 2・表 4）
8. 問題文の中の漸近自由 — 言うことと言わないこと（表 5）

01

走る結合 — β 関数の符号

繰り込んだ結合 g は、測る尺度 μ（運動量。距離ならおよそ $1/\mu$）を決めると、そこで値が決まります（4-04）。その変わり方が **β 関数**で、右辺は小さい g での展開です。

$$\beta(g) = \mu \frac{dg}{d\mu} = -b_0\, g^3 - b_1\, g^5 - \cdots \tag{1}$$

$\beta > 0$ なら短い距離（大きい μ）で結合が強まり、QED と四次元の ϕ^4 がこちらです（7-08）。$b_0 > 0$ なら短い距離で弱まります。これが**漸近自由**です。b_1 以降を捨てて積分すると、$1/g^2$ が $\ln \mu$ の一次式になります（17-01 と同じ式）。

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g^2(\mu_0)} + 2b_0 \ln \frac{\mu}{\mu_0} \tag{2}$$

式 (2) は、μ が何倍になったかの対数に比例して $1/g^2$ が増える、という意味です。μ を 10 倍しても 100 倍しても、増え方は一定の刻みで、結合はゆっくりとしか弱まりません。

例。結合の二乗を 4π で割った α で書くと、電子だけの QED の一ループでは $d(1/\alpha)/d\ln\mu = -2/(3\pi) \approx -0.212$（Tong の講義録 §2.4.1 の式の書き直し）、純 SU(3) では $+1.751$ です。後者では μ が 10 倍になるごとに $1/\alpha$ が約 4.03 増えます（0-03）計算 。

02

一ループの係数 — 11N/3 の四つの書き方

ゲージ群に、ディラック粒子 n_f 個（表現 R_f）と複素スカラー n_s 個（表現 R_s）を足した理論の一ループの係数は次のとおりです（Tong の講義録 §2.4・§2.7。't Hooft 1999 の式 (5.3) は規格化の違う同じ式）既知 。

$$16\pi^2\, b_0 = \frac{11}{3}\, C_A - \frac{4}{3}\, T(R_f)\, n_f - \frac{1}{3}\, T(R_s)\, n_s \tag{3}$$

$T(R)$ は $\mathrm{tr}_R(T^a T^b) = T(R)\,\delta^{ab}$ で決まる数で、基本表現で $\frac{1}{2}$、随伴表現で C_A（SU(N) なら N。1-04）です。純 SU(N) では $b_0 = \frac{11N}{48\pi^2}$ です。変数の取り方で見かけの数が変わるので、表 1 に並べます（四行は同じ内容）。

表 1　純 SU(N) の一ループの係数の四つの書き方

変数	流れの式	係数	SU(2)	SU(3)
g	$\mu\, dg/d\mu = -b_0 g^3$	$\frac{11N}{48\pi^2}$	0.04644	0.06966
$1/g^2$	$d(1/g^2)/d\ln\mu = 2b_0$	$\frac{11N}{24\pi^2}$	0.09288	0.1393

変数	流れの式	係数	SU(2)	SU(3)
$\alpha = g^2/(4\pi)$	$\mu^2 d\alpha/d\mu^2 = -b_0^{(\alpha)}\alpha^2$	$\frac{11N}{12\pi}$	0.5836	0.8754
$\beta_{\mathrm{L}} = 2N/g^2$	$d\beta_{\mathrm{L}}/d\ln\mu = \kappa$	$\kappa = 4Nb_0 = \frac{11N^2}{12\pi^2}$	0.3715	0.8359

計算 python3 で評価。SU(3) の $b_0^{(\alpha)} = 33/(12\pi)$ は PDG の式 (9.3) とその直後の b_0 の式と一致。

最後の行は格子の言葉です（5-01）。格子間隔 a を半分にするごとに β_{L} を $\kappa\ln 2$（SU(2) で 0.258、SU(3) で 0.579）上げれば同じ物理が保たれる、というのが一ループの予言です 計算 。SU(2) の $\kappa = 11/(3\pi^2)$ は、本書の検討の記録の傾き κ と同じ数で、既知の一ループ係数を格子の規約で書いたものです（23-02） 既知 。

03

11/3 の中身 — スピンの 4 と軌道の −1/3

なぜ符号が逆になるのでしょう。**背景場の方法**は、ゆっくり変わる外の場（背景場）を置き、そのまわりの量子の揺らぎを一ループで積分して、背景場の作用の係数 $1/g^2$ がどう変わるかを見る方法です。これで計算すると（Tong の講義録 §2.4.2）、グルーオンの寄与は二つに割れます。場の成分をスカラーのように数える項は、ゴーストで余分を引いたあと、電磁気と同じ遮蔽の向きに $-\frac{1}{3}$ を与えます。スピン 1 から来る項（講義録の 'the paramagnetic piece'）は反遮蔽の向きに $+4$ を与えます。全体の負号はここから来ます（'This is where the overall minus sign comes from'） 既知 。

$$\frac{11}{3} = 4 - \frac{1}{3} \tag{4}$$

光子は電荷を持たず QED の真空の偏極に加わりませんが、グルーオンは色の電荷を持つので加わります（3-02）。Wilczek のノーベル講演も 'it is the effect of virtual gluons that is responsible for antiscreening' と書きます。

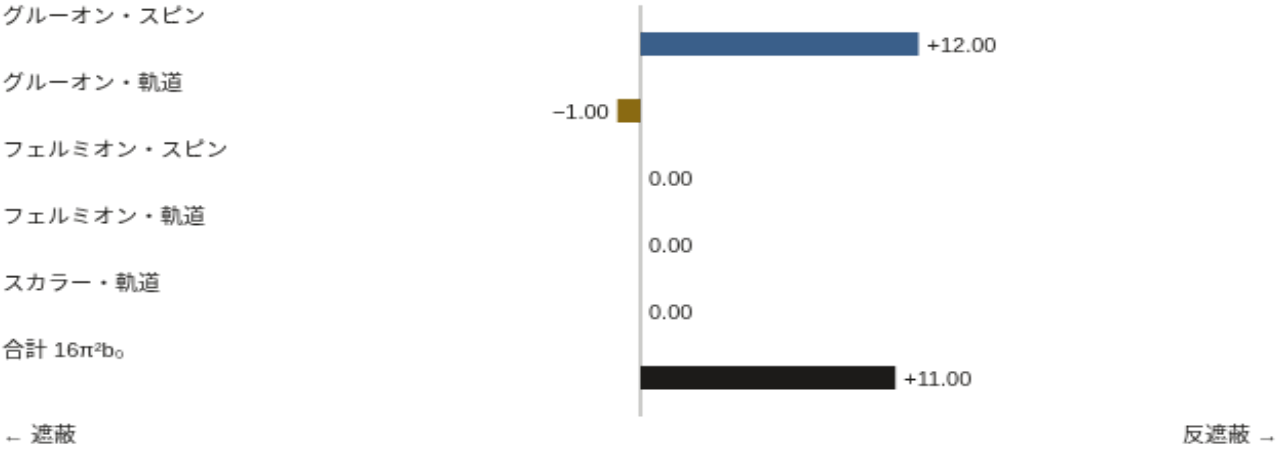
同じ分け方は物質にも使えます。質量の無い粒子の一つの状態（スピン s、磁場の向きの成分 s_z）が $16\pi^2 b_0$ に

$$\tfrac{1}{2}\,(-1)^{2s}\big((2s_z)^2 - \tfrac{1}{3}\big)\,T(R) \tag{5}$$

ずつ寄与すると数えます。$(2s_z)^2$ がスピン（常磁性）、$-\frac{1}{3}$ が軌道（反磁性）の分、$(-1)^{2s}$ はフェルミオンのループの符号です。グルーオン（$s_z = \pm 1$）で $\frac{11}{3}C_A$、ディラック粒子で $-\frac{4}{3}T$、複素スカラーで $-\frac{1}{3}T$ と、式 (3) がすべて出ます（表 2）。この章では、式 (5) を既知の係数を再現する数え方として置きます。この規則が式 (3) の係数をすべて再現することは、この端末で確かめました 計算 。規則そのものの導出はこの章では扱いません。漸近自由を常磁性とし

て見る類比は Nielsen 1981 に遡るとされます（Tong の文献注。Tong は 't Hooft への私的な帰属にも触れています）。

図 1　つまみで N、基本表現のディラック粒子の数 n_f、複素スカラーの数 n_s を変えると、$16\pi^2 b_0$ への寄与と合計が動く。右（正）が漸近自由の側。「動かす」は n_f を往復させる



SU(3)・n_f=0・n_s=0：$16\pi^2 b_0 = 11.00$（漸近自由）　$(16\pi^2)^2 b_1 = 102.0$

表 2　式 (5) による一つの粒子あたりの寄与（$T(R)$ を掛ける前）

粒子	状態	スピン	軌道	計＝既知の係数
グルーオン（$\times C_A$）	2	+4	−1/3	+11/3
ディラック粒子	4	−2	+2/3	−4/3
複素スカラー	2	0	−1/3	−1/3

計算　この図と表の数値はこの端末で計算した（python3 の有理数で式 (5) を評価し既知の係数と一致。図は同じ式をその場で足す）。JavaScript が無効ならこの表で読める。

寄り道：真空は常磁性体

飛ばしてよい小節です。

相対論的な真空では光の速さが 1 なので、誘電率と透磁率の積が $\varepsilon\mu_{\mathrm{m}} = 1$。常磁性（$\mu_{\mathrm{m}} > 1$）なら $\varepsilon < 1$ で、電荷は反遮蔽されます（Tong §2.4.1）。自由電子気体では、スピンの Pauli 常磁性と軌道の Landau 反磁性が $1 : -\frac{1}{3}$ で（Tong の統計物理 §3.6）、式 (5) の括弧 $1 - \frac{1}{3}$ と同じ比です。ただし真空のフェルミオンではループの符号 $(-1)^{2s}$ が全体を反転させるので、電子の寄与は遮蔽の側になります（表 2 の $-\frac{4}{3}$）。グルーオンでは $4 - \frac{1}{3}$。比喩で言えば、グルーオンの真空は強い常磁性体です。正確には、式 (5) の「スピン」「軌道」は計算の中の項の呼び名で、真空の磁化という観測量ではありません。

04

物質を足すと — $n_f < 11N/2$ と Coleman–Gross

物質は b_0 を減らします。基本表現のディラック粒子 n_f 個なら式 (3) は $16\pi^2 b_0 = \frac{11N}{3} - \frac{2n_f}{3}$ で、漸近自由は $n_f < 11N/2$（SU(3) で 16.5 未満）のときだけです 計算 。't Hooft の回想（1999）にも同じ数があります。現実のクォークは 6 種で、QCD は漸近自由の側です。

可換な群では $C_A = 0$ なので、(3) には物質の項だけが残り、$b_0 < 0$（§01 の QED の向き）です。標準模型の $U(1)_Y$（$Q = T_3 + Y$ の規格。超電荷は 3-07 の表 1）では、$T(R)$ を Y^2 に替え、左巻きの Weyl 成分一つをディラック粒子の半分に数えると、三世代のフェルミオン（一世代で $\sum Y^2 = 10/3$）と Higgs 二重項から

$$16\pi^2\, b_0\big|_{U(1)_Y} = -\frac{2}{3}\cdot 3\cdot\frac{10}{3} - \frac{1}{3}\cdot 2\cdot\frac{1}{4} = -\frac{41}{6}$$

で、一ループでは結合が短い距離で強まります 計算 。§05 の b_1（二ループの係数）とは別の数です。

ヤン–ミルズ場の無い理論については、Coleman と Gross（1973）の要旨が 'No renormalizable field theory without non-Abelian gauge fields can be asymptotically free.' と述べます（β 関数の計算の水準の主張） 既知 。問題文 §6.2 も四次元の ϕ^4 が漸近自由でないことを自明性（7-08）と並べ、ヤン–ミルズを 'the natural candidate for four-dimensional CQFT' と呼びます。ヤン–ミルズが問題の主役である理由の一つです。

05

二ループと普遍性 — b_0, b_1 は定義に依らない

二ループの係数は Caswell と Jones がそれぞれ 1974 年の論文で求めています 既知 。純 SU(N) では正で、PDG の α の式を g に直すと次の形です（SU(3) で照合 計算 ）。

$$b_1 = \frac{34}{3}\,\frac{N^2}{(16\pi^2)^2} \tag{6}$$

b_0 と b_1 は、結合の定義（繰り込みの方式）を替えても変わりません。別の結合 $\tilde g = g + c\,g^3 + d\,g^5 + \cdots$ に替え、$\mu\, d\tilde g/d\mu = (1 + 3cg^2 + 5dg^4)\beta(g)$ を $\tilde g$ で書き直すと

$$\begin{aligned} \tilde\beta(\tilde g) &= -b_0\tilde g^3 - b_1\tilde g^5 - \tilde b_2\tilde g^7 - \cdots \\ \tilde b_2 &= b_2 - 2c\,b_1 + (2d - 3c^2)\,b_0 \end{aligned} \tag{7}$$

で、c, d は $\tilde b_2$ から先にしか入りません（有理数の級数で確かめた 計算 ）。PDG も b_2 以降は 'renormalization-scheme-dependent' と書き、Capitani ほか 1999 は b_0, b_1 を 'The universal coefficients' と呼びます 既知 。この普遍性が §07 の足場です。

例。純 SU(3) で同じ積分定数 Λ（4-07）から出すと、α は $\mu/\Lambda = 10$ で一ループ 0.248・二ループ 0.186、10^{10} でも 0.0248・0.0232 と 7% 違います 計算 。補正は「対数の対数」で、なかなか消えません。物質を足して $b_1 < 0$ にすると β 関数が $g_*^2 = -b_0/b_1$ で 0 になり、SU(3) の $n_f = 16$ なら $\alpha_* \approx 0.042$ の赤外の固定点が見えます 計算 （Banks–Zaks 1982 物理 ）。係数は五ループまで計算されています（PDG の文献表。級数全体の意味は 4-12）。

06

発見の経緯 — 符号は何度か見えていた

負の符号は 1973 年より前にも計算に現れていました。't Hooft の回想（1999）によれば、当時は β 関数が正であることが普遍的と考えられ、場の量子論では Bjorken スケーリング（高エネルギーの散乱で、ハドロンの中の構成要素が短い距離では自由に近く動いて見える規則性）を説明できないと思われていました。

表 3　漸近自由の年表

年	出来事	出典
1964	Vanyashin–Terentyev：荷電ベクトル中間子で負の符号。繰り込み不可能性のせいとされた（論文は 1965）	't Hooft 1999
1969	Khriplovich：クーロンゲージでヤン–ミルズに逆の符号。漸近自由とは結び付けられなかった	同上
1972	Marseille の会議で 't Hooft が一ループの式を黒板に書く（論文にはせず）	同上
1973	Gross–Wilczek、Politzer、Coleman–Gross	要旨
1974	Caswell、Jones：二ループ	要旨
1980	Creutz：格子の数値。Hasenfratz–Hasenfratz：格子と連続の Λ	要旨
2004	Gross・Politzer・Wilczek にノーベル物理学賞	nobelprize.org

Politzer の題は疑問符付きの 'Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?' でした 既知 。't Hooft は 1973 年の論文について 'I was surprised, not about the result, which I had known all along, but about the stir they caused' と書き、本当に問題なのは閉じ込めだと続けます。この本の問題もその先にあります（17-01）。

07

格子との整合 — 裸の結合の走りと Λ の比

格子（5-01）では格子間隔 a が切断で、裸の結合 g_0 が a とともに走ります。§05 の普遍性から、その β 関数も同じ b_0, b_1 で始まり、二ループまでで積分すると

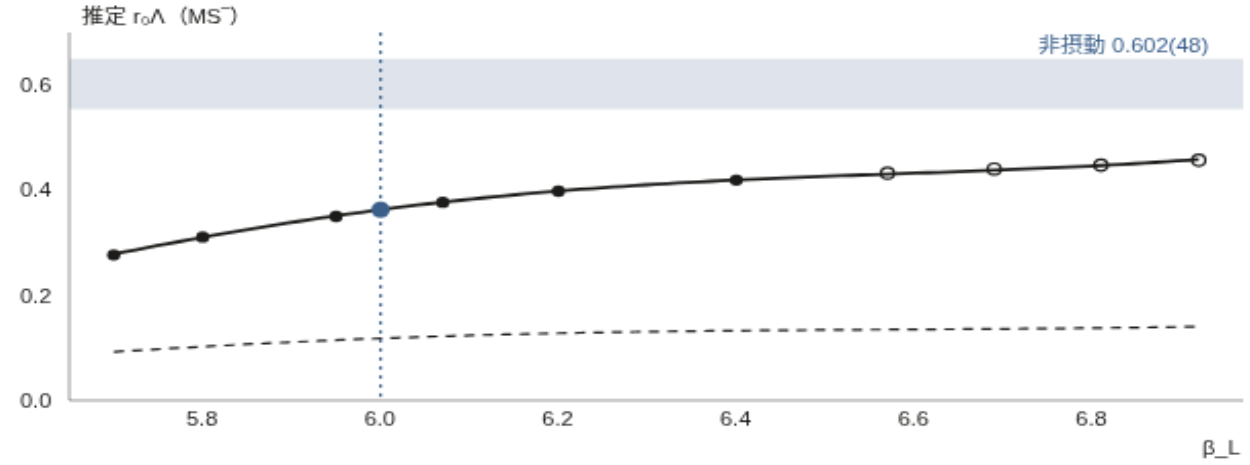
$$a\Lambda_{\mathrm{L}} = (b_0 g_0^2)^{-b_1/(2b_0^2)}\, e^{-1/(2b_0 g_0^2)}\,\bigl(1 + O(g_0^2)\bigr) \tag{8}$$

です（Capitani ほか 1999 の式 (2.7) で $\mu = 1/a$ とした形）既知。格子の Λ_{L} と、連続の $\overline{\mathrm{MS}}$ 方式の Λ を比べます。$\overline{\mathrm{MS}}$ は、次元正則化で発散の極とそれに付く定数だけを引く、連続の理論で標準の結合の定義です（4-05）。二つの Λ は一ループで決まる定数倍だけ違い、Wilson 作用では $\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}/\Lambda_{\mathrm{L}} = 28.81$（SU(3)）、19.82（SU(2)）です。Lüscher–Weisz 1995 の係数 k_1 から計算し、SU(3) は同論文の式 (4.1) の 28.80934 と一致しました 計算。式 (8) が格子の数値で成り立つことを**漸近スケーリング**と呼びます（5-05。早い時期の検証は Creutz 1980）。

今の精度で — 純 SU(3) の r_0/a

長さの基準 r_0 は、静的な色の電荷の対に働く力 F から $r_0^2 F(r_0) = 1.65$ で決めます（17-01）。Necco–Sommer 2002 の r_0/a に式 (8) と Λ の比を掛けた $r_0\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}$ の素朴な推定は、漸近スケーリングが成り立てば一定になるはずの量です。

図 2　つまみで β_{L} を動かすと、その点の r_0/a と、a を半分にする β_{L} の上げ幅（データと二ループ）が下に出る。曲線は $r_0\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}$ の推定（実線が二ループ、破線が一ループ）、点は格子の値（塗りつぶしは r_0/a の直接の値、白抜きは r_c/a からの換算で表 4 の *）、帯は非摂動の値



β_L = 6.00：r₀/a = 5.37　上げ幅 データ 0.475・二ループ 0.614　推定 r₀Λ = 0.363

表 4　純 SU(3)・Wilson 作用：r_0/a、$r_0\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}$ の推定、a を半分にする上げ幅

β_{L}	r_0/a	推定（二ループ）	上げ幅（データ）	上げ幅（二ループ）
5.70	2.922	0.277	0.354	0.616
5.95	4.898	0.350	0.456	0.614
6.20	7.380	0.398	0.524	0.613
6.40	9.74	0.419	—	0.612
6.57	12.18*	0.432	—	0.611
6.92	19.13*	0.457	—	0.609

計算 この図と表の数値はこの端末で計算した。r_0/a は Necco–Sommer 2002 の表 1（* は r_c/a を $r_c/r_0 = 0.5133$ で換算）、上げ幅（データ）は同論文の補間式 (2.6) から（— は範囲外）。推定は $(r_0/a) \times a\Lambda_{\mathrm{L}} \times 28.81$。図の値は python3 と一致。JavaScript が無効ならこの表で読める。

推定は 0.28 から 0.46 へ増え続け、非摂動の値 0.602(48) にまだ届きません。裸の結合の展開は収束が遅いのです（一ループだけなら 0.09〜0.14）。それでも向きと桁はそろい、β_{L} を上げるほど予言に近づきます。箱の大きさを尺度に走る結合を非摂動的に測る方法（Lüscher–Weisz–Wolff 1991）では、測った結合が 'closely matched by the perturbative evolution' で、そこから 0.602(48) が出ています（Capitani ほか 1999）既知 。ただし、どれも有限の格子の数値と摂動論の比較で、連続極限の存在も一意性も示しません（5-09・16-08）。

08

問題文の中の漸近自由 — 言うことと言わないこと

問題文は漸近自由をまず物理の説明として導入し（§1）、二つの役目を与えます。一つは要件で、相関関数が短い距離で漸近自由と摂動的な繰り込み理論の予言に合うこと（§4。引用は 0-03 §07）。作った理論が「ヤン–ミルズ」であることを短い距離で照合する役目です。もう一つは道具で、'Asymptotic freedom ensures a decisive regularity in the case when classical Sobolev inequalities are borderline'（§2）既知 。四次元は古典の評価がぎりぎり足りない境目の次元で、その不足を漸近自由が補う、と読めます（1-12。Bałaban の仕事は 7-07）。

表 5　漸近自由が言うことと、言わないこと

言うこと	言わないこと
短い距離で結合が対数的に弱まる（摂動論の計算として）。紫外の制御の手掛かり（7-05）	構成された理論でそうなること。長い距離の振る舞い（$\mu \to \Lambda$ で g は大きくなり、式 (2) は使えない）
積分定数 Λ が現れ、μ に依らない（4-07）	質量ギャップ。Λ に比例すると期待される量は $e^{-1/(2b_0 g^2)}$ の形で、摂動のどの次数にも映らない（4-12）
四次元で漸近自由なら非可換ゲージ場が要る	閉じ込め（17-02）

漸近自由は「短い距離は易しい」と告げ、同時に「長い距離では展開の手掛かりが無い」とも告げています。問題の難しさは後者の側にあります（7-10・7-11）。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	式 (3)(6)(7)(8)、物質の数の境目、Coleman–Gross——摂動論の計算として 既知 。式 (5)(7) の確かめ、表と図の数、Λ の比 計算
条件つき	格子と予言の一致は、有限の格子の数値と摂動論の式の比較として。赤外の固定点は二ループの式の範囲 物理

	内容
言えていない	構成された四次元の理論で、漸近自由が摂動論と全ての次数で一致すること（2026-11 に公開された構成の言明は一ループの走りまで。10-06）。無限体積の極限の一意性（6-04）。式 (5) の「スピン」「軌道」は項の呼び名。1964〜69 年の出来事は回想による（原論文は未読）。閉じ込めと質量ギャップ

出典と再現

もの	種別	出典・道具
本文を読んだもの	既知	PDG：J. Huston, K. Rabbertz, G. Zanderighi, in S. Navas et al., Phys. Rev. D 110 (2024) 030001, §9.1.1。G. 't Hooft, Nucl. Phys. B Proc. Suppl. 74 (1999) 413, arXiv:hep-th/9808154。F. Wilczek 2005, arXiv:hep-ph/0502113。S. Capitani, M. Lüscher, R. Sommer, H. Wittig 1999, arXiv:hep-lat/9810063。S. Necco, R. Sommer 2002, arXiv:hep-lat/0108008。M. Lüscher, P. Weisz 1995, arXiv:hep-lat/9502001・hep-lat/9505011。D. Tong の講義録 *Gauge Theory* §2.4・*Statistical Physics* §3.6。A. Jaffe, E. Witten（Clay の問題文）
要旨だけ読んだもの	既知	Gross–Wilczek, PRL 30 (1973) 1343；Politzer, PRL 30 (1973) 1346；Coleman–Gross, PRL 31 (1973) 851；Caswell, PRL 33 (1974) 244；Jones, Nucl. Phys. B 75 (1974) 531；Banks–Zaks, Nucl. Phys. B 196 (1982) 189；Creutz, Phys. Rev. D 21 (1980) 2308；Hasenfratz–Hasenfratz, Phys. Lett. B 93 (1980) 165；Lüscher–Weisz–Wolff, Nucl. Phys. B 359 (1991) 221。授賞理由は nobelprize.org
書誌のみ	既知	Vanyashin–Terentyev, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 48 (1965) 565；Khriplovich, Yad. Fiz. 10 (1969) 409（'t Hooft の文献表から）；N. K. Nielsen, Am. J. Phys. 49 (1981) 1171；高次の係数の文献（PDG の文献表から）
式 (5)(7)、表 1・2・4、図 1・2、Λ の比、数値の例、§04 の $U(1)_Y$ の $-41/6$	計算	python3（有理数の級数・二分法。各 1 秒未満）。図の JavaScript の値は node で python3 の値と突き合わせた

次に読む章：4-07 次元転移と Λ（式 (2) を長い距離の側へ延ばすと現れる Λ）。格子の側の続きは 5-05。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 4 部 量子化 Λ・exp(−1/g²)

次元転移と Λ — 尺度の無い古典論に、量子論が尺度を一つ持ち込む

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 尺度の無い古典論から、量子論で走る結合の積分定数として尺度 Λ が一つ現れること。質量は Λ の定数倍と期待され、その形 $e^{-1/(2b_0 g^2)}$ が摂動論に映らないこと。厳密な例としての二次元のデルタ井戸。

前提となる章 — 4-06（β 関数と b_0, b_1）。あると読みやすい：1-12・2-05・3-05。記号は 4-06 と同じ（$\hbar = c = 1$、$\beta(g) = \mu\, dg/d\mu$、$b_0 = 11N/(48\pi^2)$）。

先に言うこと — 次元転移は摂動論の繰り込み群から読む物理の議論で、四次元では定理ではありません。繰り込み群は「質量が在るなら Λ の定数倍」までを言い、係数が 0 でないこと（質量ギャップ）は言いません。このサイトは質量ギャップも連続理論の構成も示していません。

この章の順序

1. 古典には尺度が無い
2. Λ は走りの積分定数（表 2）
3. 径数が一つ消える（図 1）
4. 物理量は Λ の定数倍（表 3）
5. $\exp(-1/g^2)$ は摂動論に映らない（表 4）
6. 二次元のデルタ井戸（図 2・表 5。寄り道：金属の Cooper 対）
7. Λ は約束で変わる（表 6）
8. 尺度対称性の破れ方
9. 言えることと言えないこと（表 7）

01

古典には尺度が無い

$\hbar = c = 1$ では長さは質量の逆数で、すべての量を質量の冪で測れます。作用 $S = \frac{1}{2g^2}\int \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\, d^dx$ の結合の次元は

$$[g^2] = (\text{質量})^{4-d} \tag{1}$$

です（2-04・1-12）。三次元なら g^2 そのものが質量で、$m = c\,g^2$ と書けます（7-06）。四次元では g が無次元なので、古典の材料からは質量が作れません。古典の波は分散 $\omega = |\mathbf{k}|$ で、問題文も 'massless waves that travel at the speed of light' と書きます（§1）既知。静止した有限エネルギーの解（塊）もありません（3-03。Deser 1976・Coleman 1977）既知。

例。BPST インスタントンの作用 $8\pi^2/g^2$ は大きさ ρ に依りません（3-05）。古典解には好みの大きさが無いのです。量子論で $\Delta > 0$ なら、その尺度は古典の作用の外から来るはずです。問題文 §6.6 の 'the mass gap is not classically visible' はこの事情です（§05）。

02

Λ は走りの積分定数

4-06 の $\beta(g) = \mu\, dg/d\mu$ は一階の常微分方程式です。変数を分けて積分すると

$$\ln\frac{\mu}{\Lambda} = \int^{g(\mu)} \frac{dg'}{\beta(g')} \tag{2}$$

です。右辺の下端の自由度を定数として左辺に出したのが Λ で、積分定数なので流れのどの点から計算しても同じ値です。一ループ（$\beta = -b_0 g^3$）で定数を 0 に選ぶと

$$\Lambda = \mu\, \exp\!\Big(-\frac{1}{2b_0\, g^2(\mu)}\Big) \tag{3}$$

で、$\ln\Lambda$ を $\ln\mu$ で微分すると $1 + \beta/(b_0 g^3) = 0$ です。格子の SU(2)（$\beta = 4/g^2$）で書き直すと $1/(a\Lambda) \propto e^{3\pi^2\beta/11}$ で、第 23 部の記帳の長さ ξ_{RG} の一ループの部分と同じ式です（23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定）既知。二ループ以上では下端の約束が要ります。広く使われるのは Capitani ほか 1999 の式 (2.7) です。

$$\Lambda = \mu\,(b_0 g^2)^{-b_1/(2b_0^2)}\, e^{-1/(2b_0 g^2)}\, \exp\!\Big(-\int_0^{g}\Big[\frac{1}{\beta(x)} + \frac{1}{b_0 x^3} - \frac{b_1}{b_0^2 x}\Big]dx\Big) \tag{4}$$

角括弧の中は $x \to 0$ で有限なので、下端に 0 が使えます。PDG の総説は Λ を 'a constant of integration, which corresponds to the scale where the perturbatively-defined coupling

would diverge' と説明します 既知 。

例（表 2）。二ループの β を厳密とみなし、SU(3) で $g^2(\mu_0)=2$ から流れを数値で積分しました。式 (4) は 9 桁まで一定です。式 (3) は μ を 10^{16} 倍するあいだに 2.7 倍ずれ、前の冪だけ付けた式も差が 4.6% から 0.43% へ縮むだけです。数値には定義の式を添えます。

表 2　純 SU(3)・二ループの流れの上の三つの「Λ/μ_0」

μ/μ_0	$g^2(\mu)$	式（3）	冪だけ付けた式	式（4）
1	2.000	0.02763	0.06341	0.066444376
10^{16}	0.1733	0.01028	0.06616	0.066444376

計算 python3（RK4）。式 (4) の積分は閉じた形と数値積分が 9 桁一致。

本書での使い方は 24-07 §01（結合が無次元であることを、四次元の難しさの一つ目として読む）。

03

径数が一つ消える — Λ は単位

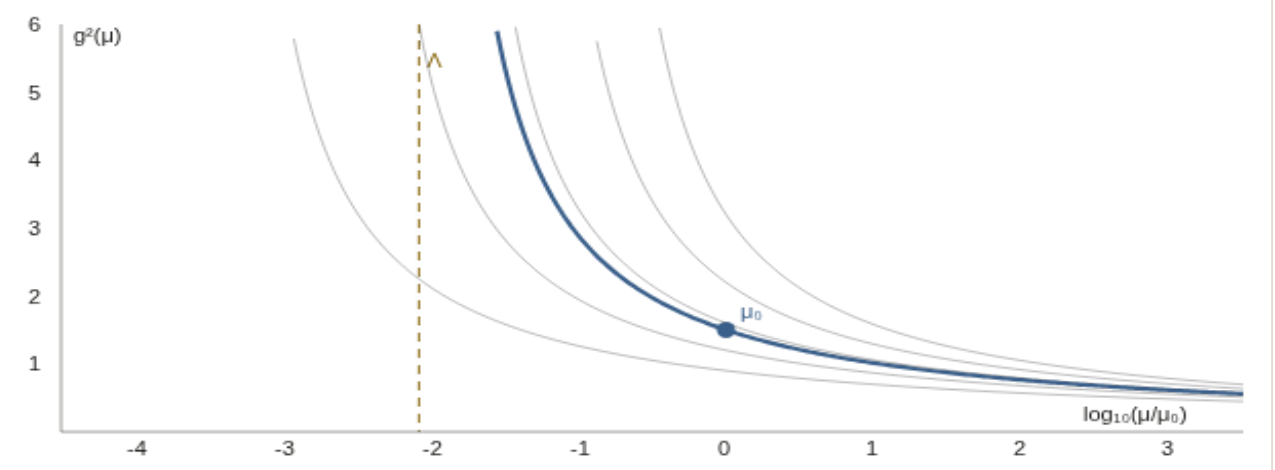
式 (3) を裏返すと、Λ 一つで流れ全体が決まります。

$$g^2(\mu)=\frac{1}{2b_0\ln(\mu/\Lambda)}\qquad(\mu>\Lambda,\ \text{一ループ}) \tag{5}$$

Λ は μ/Λ の形でしか入りません。Λ を 2 倍にするのは質量の単位を半分にするのと同じで、「μ_0 での結合を選ぶ」一径数の族は、単位を除けばただ一つの理論です。無次元の g が次元を持つ Λ に置き換わりました。これを**次元転移**（dimensional transmutation）と呼びます 物理 。

Tong は、この考えが Coleman と E. Weinberg の 1973 年の仕事から知られていたと書きます（Tong §2.9）。E. Weinberg の同年の学位論文は、質量の無いスカラー場の電磁気学で、量子効果によって生じた真空期待値 $\langle\phi\rangle$（スカラー場の真空での値で、質量の尺度になるもの）を変えることは 'completely equivalent to changing the scale in which masses are measured' だと書きます 既知 。純ヤン–ミルズには無次元の結合が残らず、残る入力は群（N）と θ 角（3-05）だけです。

図 1　つまみで $g^2(\mu_0)$ を変えると、純 SU(3)・一ループの流れ（太線）と Λ（破線）が横に動く（細線は $g^2(\mu_0)=0.9$〜3.2）。「横軸を μ/Λ に」で六本が重なる。「動かす」は往復



g²(μ₀) = 1.50 → Λ/μ₀ = 8.35e-3

計算 この図の数値はこの端末で計算した（図は式 (3)(5) をその場で評価）。細線の Λ/μ_0 は 3.44×10^{-4} から 0.106 まで動くが、$\mu=10\Lambda$・$10^3\Lambda$・$10^6\Lambda$ の g^2 はどれも 3.117・1.039・0.520。

尺度の出所は切断です。格子なら Λ は組 (a, g_0) から作られます（4-06 の式 (8)）。

04

物理量は Λ の定数倍 — 係数の正負は言わない

質量の次元を持つ物理量を計算すると、次元解析から $m=\mu\,F(g(\mu))$ の形です。m は μ の選び方に依らないので

$$\mu\frac{d}{d\mu}\big(\mu\,F(g(\mu))\big)=\mu\big(F(g)+\beta(g)\,F'(g)\big)=0 \tag{6}$$

で、解は $F(g)=C\exp\!\big(-\int^{g}dg'/\beta(g')\big)$ です。式 (2) と比べると

$$m=C\,\Lambda \tag{7}$$

で、C は純数です。式 (6) は異常次元の無い物理量の繰り込み群方程式（4-04）です。弦張力なら $\sigma=C'\Lambda^2$ で、比 $m/\sqrt{\sigma}$ は N と θ だけで決まる純数になり、調整できる値はありません 物理 。これが「尺度は一つ」の中身です（17-01・17-12）。

式 (6) の解には $C=0$ も含まれます。言えるのは「質量が在るなら Λ の定数倍」までで、$C>0$ は言えません。質量ギャップの問題は、理論を構成し、真空の次の状態について $C>0$ を示せという問題だと読めます（0-03・4-11）。

例（表 3）。格子の数値は無次元の比で出ます（r_0 は 4-06 の長さ）。$m(0^{++})$ は、スピン 0・パリティ正・荷電共役正の最も軽いグルーボールの質量です（5-08）。

表 3　純 SU(3) の無次元の比

比	値	出典
$r_0 \Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}$	0.602(48)	Capitani ほか 1999
$r_0\, m(0^{++})$	4.21(11)(4)	Morningstar–Peardon 1999
$m(0^{++})/\sqrt{\sigma}$	3.405(21)	Athenodorou–Teper 2020
$m(0^{++})/\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}$	6.99(59)	上の二行の割り算（別の論文の値を組み合わせた目安）

計算 最終行は python3 で割り、誤差を独立として伝播。物理 どれも格子からの外挿で、連続理論が在ることを前提に読む（17-01）。

05

exp(−1/g²) は摂動論に映らない

一ループで式 (7) を書き直すと

$$\frac{m}{\mu} = C\,\exp\!\Big(-\frac{1}{2b_0\, g^2(\mu)}\Big) \tag{8}$$

です。$f(x) = e^{-1/x}$（$x>0$）、$f(x)=0$（$x\le 0$）は $x=0$ で何回でも微分でき、導関数はすべて 0 です。$f^{(n)}(x) = P_n(1/x)\,e^{-1/x}$（$P_1(u)=u^2$、$P_2(u)=u^4-2u^3$）で、多項式は e^{-u} に勝てないからです 既知 。(8) を g^2 の冪に展開すると係数はすべて 0 です。

摂動論（4-03）は g^2 の冪級数を計算するので、(8) の形の量はどの次数でも 0 に見えます。問題文 §6.6 は、ギャップが古典的に見えないので、それを示すには古典的でない変数の取り替え（'change of variables or “duality transformation.”'）が要るかもしれないと書きます 既知 。Gross–Neveu 1974 の要旨も、漸近自由な理論で動的に生じる質量は 'must depend on the coupling constants in a nonanalytic fashion, vanishing exponentially when these vanish' と述べます（繰り込み群の水準）。二重井戸のトンネルの隙間も同じ型です（2-05）。

例（表 4）。係数を 1 とした目安で、$\alpha = g^2/4\pi$ の n 乗が Λ/μ まで下がる次数 $n^{*} = \ln(\Lambda/\mu)/\ln\alpha$ は、$g^2=1$ で 2.8、$g\to 0$ で際限なく増えます。実際の係数は次数とともに増え、級数は発散すると考えられています（4-12）。

表 4　純 SU(3)・一ループ

g^2	Λ/μ	n^{*}	$\log_{10} e^{-8\pi^2/g^2}$
2	2.76×10⁻²	1.95	−17.15
1	7.63×10⁻⁴	2.84	−34.29
0.25	3.39×10⁻¹³	7.33	−137.16

g^2	Λ/μ	n^*	$\log_{10} e^{-8\pi^2/g^2}$
0.1	6.71×10⁻³²	14.85	-342.91

計算 python3。右端（§08）は $(\Lambda/\mu)^{11}$ と全桁で一致。P_n は $n=6$ まで確かめた。

06

二次元のデルタ井戸 — 厳密な次元転移

厳密な例は二次元の量子力学にあります。$\hbar^2/2m=1$ の単位で、d 次元のデルタ関数の井戸

$$H = -\nabla^2 - g\,\delta^{d}(\mathbf{x}) \tag{9}$$

を考えます。δ^d は長さの $-d$ 乗、∇^2 は -2 乗の次元なので、g は長さの $d-2$ 乗の次元で、$d=2$ で無次元です。四次元のヤン–ミルズと同じ状況です。フーリエ変換を $\hat\psi(\mathbf{k}) = \int \psi(\mathbf{x})\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, d^d x$（1-11）とすると、$\delta^d$ の変換は 1 です。束縛状態 $E=-\kappa^2$ は $(k^2+\kappa^2)\,\hat\psi(\mathbf{k}) = g\,\psi(0)$ を満たすので、$k^2+\kappa^2$ で割って積分すると

$$1 = g\int_{|\mathbf{k}|<K} \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{k^2+\kappa^2} \tag{10}$$

が出ます（K は運動量の切断）。$d=2$ の右辺は $(g/4\pi)\ln(1+K^2/\kappa^2)$ で、四次元のヤン–ミルズの一ループと同じく対数的に発散します（4-04）。解くと

$$E_B = \kappa^2 = \frac{K^2}{e^{4\pi/g}-1} \approx K^2\, e^{-4\pi/g} \tag{11}$$

で、式 (8) と同じ形です。繰り込みは E_B を固定して $K\to\infty$ とする操作で、$g(K) = 4\pi/\ln(1+K^2/E_B)$ と結合を 0 に近づけます。$K^2 \gg E_B$ で

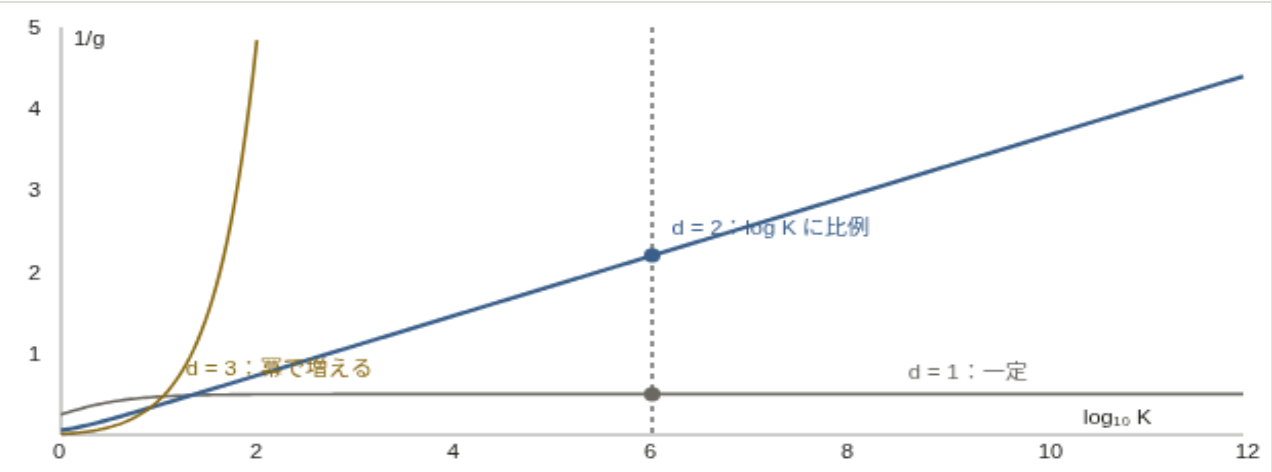
$$\beta(g) = K\frac{dg}{dK} = -\frac{g^2}{2\pi} \tag{12}$$

で、符号は負、つまり漸近自由です。極限に残る径数は E_B だけです。ここまでは運動量の切断での初等的な計算です 計算 。

数学の側では、切断を外す極限で、ハミルトニアンは束縛状態をただ一つ（エネルギー $-E_B$）持つ自己共役作用素に収束する（レゾルベント $(H-z)^{-1}$ の意味で）ことが知られています（Albeverio ほか、第 I 部 5 章。書誌のみ） 既知 。そこでの極限の取り方は、短い距離のポテンシャルを縮めながら結合を対数で繰り込むもので、上の運動量の切断とは別の道筋です。教材としては Gosdzinsky–Tarrach 1991 があります（書誌のみ）。

図 2　つまみで切断 K を動かすと、E_B = 1 を保つ結合の逆数 1/g が d = 1・2・3 でどう動くかが見える。d = 2 は log K に

比例（漸近自由）。「動かす」は K を往復させる



K = 10^6.00：g_1 = 2.0000　g_2 = 0.4548　g_3 = 1.97e-5　g_2 を 1% 上げると E_B は ×1.31

表 5　$E_B = 1$ を保つ結合 $g_d(K)$（単位は $\sqrt{E_B}$）

K	g_1	g_2	$2\pi/\ln K$	g_3
10	2.1355	2.7229	2.7288	2.314
10^6	2.0000	0.4548	0.4548	1.974×10^{-5}
10^{12}	2.0000	0.2274	0.2274	1.974×10^{-11}

計算　この図の数値はこの端末で計算した。式 (10) の閉じた形は数値積分と 11 桁一致、$K\,dg/dK$ は $K \geq 10^4$ で $-g^2/2\pi$ と一致（比 1.000000）。g_2 を 1% 動かしたときの E_B の倍率は $K = 10$ で 1.05、10^{12} で 1.73。

$d = 1$ では $E_B = g^2/4$ は g の冪で、$g(K)$ は 2 に落ち着きます。$d = 3$ では g を臨界値 $2\pi^2/K$ に冪で寄せる必要があります。結合の質量次元が正・0・負の場合で、四次元のヤン–ミルズは $d = 2$、三次元のヤン–ミルズは $d = 1$ の側です（類比）。

寄り道：金属の Cooper 対

飛ばしてよい小節です。

同じ対数は金属の中の電子の対にも出ます。金属では、電子の状態が Fermi 面（詰まった電子の海の表面）まで埋まっています。Fermi 面から測った一電子のエネルギーを ξ とし、$N(0)$ を Fermi 面でのスピン一つあたりの状態密度（単位エネルギー・単位体積あたりの状態の数）とします。面の上の二電子が、$0 < \xi < \omega_D$（ω_D は格子振動の最大の周波数で、ここでの切断）の殻の中でだけ強さ V の引力を感じるとすると、束縛条件は式 (10) と同じ手順で

$$1 = N(0)V\int_0^{\omega_D}\frac{d\xi}{2\xi + E_B} = \frac{N(0)V}{2}\ln\left(1 + \frac{2\omega_D}{E_B}\right) \tag{15}$$

です。$N(0)$ が一定なので、二次元の $d^2k \propto d(k^2)$ と同じく対数が出ます。解くと $E_B = 2\omega_D/(e^{2/(N(0)V)} - 1) \approx 2\omega_D\, e^{-2/(N(0)V)}$ で、弱い引力でも束縛状態があり、その大きさは V の冪の級数に映りません（Cooper 1956。書誌のみ）既知。指数の 2 は、$N(0)$ をスピン一つあたりとする約束によります。

計算 python3。閉じた形と式 (15) の数値積分が $N(0)V = 0.05$〜0.5 で倍精度の範囲で一致。

07

Λ は約束で変わり、比は変わらない

Λ の値は結合の定義（方式）で変わります。方式 A の g と B の $\tilde{g}$ が $\tilde{g} = g + c\,g^3 + O(g^5)$ でつながると、$1/\tilde{g}^2 = 1/g^2 - 2c + O(g^2)$ なので、式 (3) から

$$\frac{\Lambda_B}{\Lambda_A} = e^{c/b_0} \tag{13}$$

です。b_0, b_1 が方式に依らないので（4-06）、式 (4) の Λ ではこの比がちょうど成り立ちます。Celmaster–Gonsalves 1979 の要旨は、二つの方式の Λ の比は 'a pure number which we show is exactly deducible from our one-loop results' と書きます 既知 。

例（表 6）。MS（最小引き算：次元正則化で現れる極だけを引く方式。4-04）と、PDG が標準とする $\overline{\text{MS}}$（極と一緒に定数 $\ln 4\pi - \gamma_E$ も引く方式。Bardeen ほか 1978）は尺度の読み替え $\mu^2 \to \mu^2 e^{\gamma_E}/4\pi$ だけ違い、比は $\sqrt{4\pi e^{-\gamma_E}} = 2.656$ です。格子の Wilson 作用との比 28.81（SU(3)、4-06）も、$1/g^2$ のずれでは 0.468 にすぎません。一ループの差が $1/b_0$ 倍されて指数に入るので、Λ は一桁以上変わります。

表 6　方式の取り替えと Λ の比

比	群	c	$1/g^2$ のずれ	e^{c/b_0}	式 (4) の比
$\overline{\text{MS}}$／MS	SU(3)	0.0681	−0.136	2.656	–
$\overline{\text{MS}}$／格子	SU(3)	0.2341	−0.468	28.81	28.8100
$\overline{\text{MS}}$／格子	SU(2)	0.1387	−0.277	19.82	19.8200

計算 python3。$\tilde{g} = g(1 + cg^2)$ から方式 B の β を作り、式 (4) を数値積分した比は $\mu/\mu_0 = 1$〜10^{16} で 6 桁一定。前の冪だけの式の比は 6.76→23.08（SU(3)）と遅い。

$m/\sqrt{\sigma}$ のような物理量どうしの比は方式に依りません。$r_0\Lambda$ は方式を名指したときにだけ一つの数になります。MeV を付けるには別の量を借ります（17-01）。

08

尺度対称性の破れ方 — インスタントンとトレース異常

§01 の古典の尺度対称性は、量子論で二か所に跡を残します。一つはインスタントンの大きさで、古典では自由だった ρ が結合の走りで区別されます（Tong §2.3.1–§2.3.2）。尺度 $1/\rho$ での結合を使うと、式 (3) と $16\pi^2 b_0 = 11N/3$ から一ループで

$$e^{-8\pi^2/g^2(1/\rho)} = (\rho\Lambda)^{11N/3} \tag{14}$$

が恒等的に成り立ちます（表 4 で照合 計算 ）。小さいインスタントンは $\rho\Lambda$ の冪で抑えられ、$\rho \sim 1/\Lambda$ で抑えが効かなくなります。一ループの計算は 't Hooft 1976 物理 。

もう一つはエネルギー運動量テンソルの跡です。尺度変換の保存流（2-01）の発散は跡 $T^{\mu}{}_{\mu}$ で、古典の四次元では 0 です（3-03）。量子論では $\beta(g)$ に比例する $F^{a}_{\mu\nu}F^{a\,\mu\nu}$ の項が残ります（Collins–Duncan–Joglekar 1977。式は 18-04）物理 。問題文 §4 も短い距離の要件に 'the existence of a stress tensor' を含めます 既知 。

09 言えることと言えないこと

格子では、式 (7) から相関長 $\xi_{\mathrm{lat}} = 1/(am)$ どうしの比が一定値に近づくかが検査になります（5-05・5-09）。確かさを例ごとに並べます。上の四つは結合が無次元の二次元の模型で、定理になっているのは自由度が有限の模型か、切断を残した形です。

行ごとに、何が定理で何が物理かを分けておきます。デルタ井戸では、切断つきの束縛条件 (10) は初等的な計算で、切断を外した極限の作用素は数学の文献にあります。二次元 Gross–Neveu 模型（相互作用するフェルミオンの模型）では、紫外の切断を残し、成分の数 N を大きく（ただし有限に）取ると、二点関数が指数的に減衰すること、つまり質量が生じることが定理です。二次元 O(N) σ 模型（長さ 1 の N 成分ベクトルを値とする場の模型）でも、正則化した版での質量生成は定理ですが、切断を外した理論の構成は無いままです。O(3) の $8/e$ は、Bethe 仮説（二次元の可積分な模型で散乱が厳密に解けることを使う方法）の結果を摂動論と突き合わせて得た物理の値です。四次元の純 SU(3) では、比 m/Λ は格子の数値だけです。連続理論の構成は 2026-11 に公開された構成が与えましたが（委員会の評価の水準。6-00）、$\Delta > 0$ は示されていません。

表 7　次元転移の例と、数学での状態

模型	尺度	数学での状態
二次元のデルタ井戸	$K^2 e^{-4\pi/g(K)}$	切断つきは初等的な計算。切断を外した極限は束縛状態をただ一つ持つ自己共役作用素（Albeverio ほか。書誌のみ）
二次元 Gross–Neveu	非解析的な質量	切断つき・大きい有限の N で指数減衰が定理（Kopper–Magnen–Rivasseau 1995）
二次元 O(3) σ 模型	$m = (8/e)\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}$	Bethe 仮説と摂動論を突き合わせた物理の値（Hasenfratz–Maggiore–Niedermayer 1990）
二次元 O(N) σ 模型（N が大きい有限）	質量 m	紫外切断つきで質量生成（相関の指数減衰）が定理（Kopper 1999）。要求の水準の構成は、2004 年の報告の時点で無い（Douglas 2004）

模型	尺度	数学での状態
四次元純 SU(3)	$m(0^{++}) \approx 7\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}$（表 3 の目安）	格子の数値。連続理論の構成は 2026-11 に公開された構成（委員会の評価の水準）。$\Delta > 0$ は未証明

問題文は Λ に触れず、$\Delta > 0$ と、短い距離で漸近自由の予言と合うことを求めます（0-03）。理論が在ってその予言と合うなら、物理ではそこから Λ が読み取れると考えます 物理 。そのとき質量ギャップは、摂動論にも古典論にも映らない C が正だという主張です。この一尺度の使い方は 17-01・17-12 で扱います。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	式 (2)〜(4) の μ 不変性、解 (7)、$e^{-1/x}$ のテイラー係数が 0 であること、式 (10)〜(15)。既知 の計算で、表と図の数値は 計算
条件つき	「質量は Λ の定数倍」は理論が在り繰り込み群が短い距離を正しく記述する前提で 物理 。表 3 は格子からの外挿。デルタ井戸の極限の作用素は文献による（本文未確認）。d ごとの対応は類比
言えていない	四次元で Λ が定義されること、$C > 0$、表 3 の値が連続理論の量として存在すること（格子からの外挿であって定理ではない）。このサイトは質量ギャップも連続理論の構成も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
問題文・Λ の文・式 (4)	既知	A. Jaffe, E. Witten, "Quantum Yang–Mills Theory"（Clay）；PDG, PRD 110 (2024) 030001 §9.1.1；S. Capitani ほか, NPB 544 (1999) 669, hep-lat/9810063（以上本文）。W. A. Bardeen ほか, PRD 18 (1978) 3998（要旨）
由来・インスタントン	既知	D. Tong, *Gauge Theory* §2.3.1–§2.3.2・§2.9（本文）；E. J. Weinberg, 学位論文（1973）, hep-th/0507214 第 IV 章（本文）；S. Coleman, E. Weinberg, PRD 7 (1973) 1888（要旨のみ。語 dimensional transmutation の初出は未確認）
§01 の古典の定理	既知	S. Deser, PLB 64 (1976) 463；S. Coleman, CMP 55 (1977) 113 'There are no classical glueballs'（以上要旨）
§04〜§08 の文献	既知	D. J. Gross, A. Neveu, PRD 10 (1974) 3235；W. Celmaster, R. J. Gonsalves, PRD 20 (1979) 1420；G. 't Hooft, PRD 14 (1976) 3432；J. C. Collins ほか, PRD 16 (1977) 438（以上要旨）。S. Albeverio ほか, *Solvable Models in Quantum Mechanics*（Springer, 1988）第 I 部 5 章、P. Gosdzinsky, R. Tarrach, Am. J. Phys. 59 (1991) 70、L. N. Cooper, Phys. Rev. 104 (1956) 1189 は書誌のみ
表 3・表 7 の数値と例	物理	C. Morningstar, M. Peardon, PRD 60 (1999) 034509；A. Athenodorou, M. Teper, JHEP 11 (2020) 172；P. Hasenfratz, M. Maggiore, F. Niedermayer, PLB 245 (1990) 522（要旨）；C. Kopper ほか, CMP 169 (1995) 121；C. Kopper, CMP 202 (1999) 89（大きい有限の N の O(N) σ 模型。要旨）；M. R. Douglas の Clay への報告（2004）。書誌のほかは照合済みの調査の材料による

もの	種別	出典・道具
表 2〜6・図・式 (14)・式 (15)	計算	python3（RK4・scipy）。図は同じ式を JavaScript で評価。28.81・19.82 は 4-06 の値

次に読む章：4-08 ゲージ固定と Faddeev–Popov。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 4 部 量子化 ゲージ固定

ゲージ固定と Faddeev–Popov — 局所では正しく、大域では符号が打ち消し合う

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 摂動論にはゲージ固定が要り、その手順（Faddeev–Popov）が行列式とゴーストを生むこと。固定後も BRST 対称性が残り、ゲージの選び方への非依存を形式的に保証すること。軌道が条件の面と何度も交わる（Gribov のコピー）と手順が崩れ、格子では符号の打ち消し合いで 0/0 になること。

前提となる章 — 4-03（摂動論・伝播関数）と 3-04（軌道空間・Gribov のコピーの幾何・Singer の定理）。Grassmann 数（§03）、BRST のコホモロジー（§04）、Euler 標数（§08）はその場で最小限を定義します。

先に言うこと — Faddeev–Popov と BRST は摂動論の各次数で確立した道具で、非摂動の定義ではありません。図と表は平面の模型と箱の中の一定の場の計算です。この章は質量ギャップも理論の構成も示していません。

この章の順序

1. なぜ固定するのか — 軌道の向きに作用が平らで、伝播関数が作れない
2. 有限次元の手本 — 平面の回転で「1 の挿入」を行う
3. 場の理論では — 行列式を反可換な場（ゴースト）の積分に書く（寄り道：可換ならゴーストは消える）
4. BRST 対称性 — 固定した後にも残る対称性と、物理的な状態の選び方
5. コピーがあると何が起きるか — 四つの数え方を比べる（図 1・表 1。寄り道：交点を符号つきで数える）
6. Gribov 領域と基本モジュラー領域 — 凸で、どの向きにも有界
7. 箱の中の地平 — 箱が大きいほど地平は原点に近い（図 2・表 2）
8. 格子の 0/0 — 符号つきで数えると Euler 標数 0 になる

9. 質量ギャップの問題から見たゲージ固定 — 公理と構成の試みでの位置

01

なぜ固定するのか — 伝播関数が作れない

約束：ユークリッドの $\mathbb{R}^4$、$\hbar = c = 1$、エルミートな $A_\mu = A_\mu^a T^a$ と結合 g を分けて書きます（3-02 の流儀。幾何の章の接続とは $\mathcal{A} = -igA$）。

$$(D_\mu \omega)^a = \partial_\mu \omega^a + g f^{abc} A_\mu^b \, \omega^c, \qquad \delta A_\mu^a = \tfrac{1}{g} (D_\mu \lambda)^a, \qquad S = \tfrac{1}{4} \int F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \, d^4x \tag{1}$$

摂動論（4-03）は作用の二次の部分の逆を伝播関数に使います。S はゲージ変換で変わらないので、二次の部分は $A = \partial\lambda$ の向きに平らで、逆がありません。

$$S_2 = \tfrac{1}{2} \int \tfrac{d^4k}{(2\pi)^4} \, \tilde{A}_\mu^a(-k) \, K_{\mu\nu}(k) \, \tilde{A}_\nu^a(k), \qquad K_{\mu\nu} = k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu, \qquad K k = 0 \tag{2}$$

例。$k = (0,0,0,\kappa)$ なら $K = \kappa^2 \, \mathrm{diag}(1,1,1,0)$ で、第 4 成分は作用に現れません 計算 。軌道の体積（4-02 §07）が有限な Wilson の格子では固定が要りません（5-01 §06） 既知 。要るのは連続のまま $A = 0$ の周りで展開するときです。

逆が無い理由を言葉にします。経路積分 $\int \mathcal{D}A \, e^{-S}$（4-02）は、ゲージ変換で移り合う場（一つの軌道）をすべて足します。軌道の向きには e^{-S} が変わらないので、その向きのガウス積分は減衰せず、発散します。比喩で言えば、谷底が一本の溝になっていて、溝に沿ってはどこまでも平らです。正確には、二次形式 (2) の核 K が k の向きに固有値 0 を持つ、ということです。そこで、軌道の向きの積分を一つ外に取り出し、各軌道から代表を一つ選んで残りを足したくなります。その取り出し方を、まず有限次元の模型で見ます。

02

有限次元の手本 — 平面の回転で Faddeev–Popov を行う

平面の重み $e^{-S(|x|)}$ は回転 R_θ で変わらず、軌道は原点を中心とする円です。ここで回転の角 θ が「軌道の向き」に当たります。狙いは Z の値を変えずに θ の積分を表に出すことで、そのために Z の中へ 1 を書き換えたものを入れます。使うのは一変数の δ 関数の規則です。

$$\int d\theta \, \delta\big(G(\theta)\big) \, \big|G'(\theta_0)\big| = 1 \qquad (G \text{ が一点 } \theta_0 \text{ だけで } 0 \text{ になるとき})$$

条件 $G(x)=0$ が各円と一度だけ交わるなら、$\theta\mapsto G(R_\theta x)$ は一点だけで 0 になるので、次の「1 の挿入」が成り立ちます。

$$1=\Delta_G(x)\int_0^{2\pi}d\theta\,\delta\big(G(R_\theta x)\big),\qquad \Delta_G(x)=\Big|\tfrac{\partial}{\partial\theta}G(R_\theta x)\Big|_{G(R_\theta x)=0} \tag{3}$$

これを $Z=\int d^2x\,e^{-S}$ に入れ $x\to R_\theta^{-1}x$ と変数を変えると、d^2x・S・Δ_G は回転で変わらないので θ の積分は群の体積 2π を残します。

$$Z=2\pi\int d^2x\;\delta\big(G(x)\big)\,\Delta_G(x)\,e^{-S(|x|)} \tag{4}$$

これが Faddeev–Popov の手順のすべてで、面の上の重み Δ_G が **Faddeev–Popov の行列式**です。

例。条件を正の x_1 軸（$G=x_2$、$x_1>0$）にすると $\Delta_G=r$、(4) は $Z=2\pi\int_0^\infty r\,e^{-S}dr$ で、極座標のヤコビアンです。行列式は軌道の大きさを測ります（3-04 §04 の Weyl の因子と同じ役）。

03

場の理論では — 行列式とゴースト

群を各点のゲージ変換の全体に、条件を $G^a=\partial_\mu A^a_\mu-\omega^a$ にして (3)(4) を繰り返します。$\delta G^a=\frac{1}{g}\partial_\mu(D_\mu\lambda)^a$ なので、行列式の中身は次の $\mathcal{M}$ です。定数倍 $1/g$ と符号は行列式の全体の定数になり、Z の全体の定数（期待値の比で消える）に吸収されるので落とします。

$$\mathcal{M}=-\partial_\mu D_\mu,\qquad Z=\int\mathcal{D}A\;\det\mathcal{M}\;\delta(\partial_\mu A_\mu-\omega)\,e^{-S} \tag{5}$$

ω を重み $e^{-\int\omega^2/2\alpha}$ で平均すると（母数を ξ と書く文献も多いが、この本では ξ を相関長に使うので α と書きます。4-03 と同じ字です）、δ 関数が作用の項に変わり、二次形式に逆ができます。

$$S+\tfrac{1}{2\alpha}\int(\partial_\mu A^a_\mu)^2,\qquad D^\alpha_{\mu\nu}(k)=\frac{1}{k^2}\Big(\delta_{\mu\nu}-(1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\Big) \tag{6}$$

$\alpha=1$ が Feynman、$\alpha\to0$ が Landau ゲージです（逆は数値で確認 計算 ）。$\det\mathcal{M}$ も作用の項にするため、反可換な数（Grassmann 数：$\theta_i\theta_j=-\theta_j\theta_i$、$\theta_i^2=0$）を使います。規則は $\int d\theta\,1=0$、$\int d\theta\,\theta=1$ です。$e^{-a\bar\theta\theta}=1+a\theta\bar\theta$ で展開が止まるので

$$\int d\bar\theta\,d\theta\,e^{-a\bar\theta\theta}=a,\qquad \int\prod_i d\bar\theta_i d\theta_i\,e^{-\bar\theta M\theta}=\det M \tag{7}$$

です 既知 。行列式が**符号つきで**出ます（§08 の 0/0 の源）。こうして行列式は反可換な場 $c^a, \bar{c}^a$（**ゴースト**。4-10 で Pauli–Villars の負の重みの状態を指す「ゴースト」とは別の意味）の積分になります。

$$\det \mathcal{M} = \int \mathcal{D}\bar{c}\,\mathcal{D}c\; e^{-\int \bar{c}^a (\mathcal{M}c)^a}, \qquad \bar{c}^a(\mathcal{M}c)^a \simeq \partial_\mu \bar{c}^a \partial_\mu c^a + g f^{abc} (\partial_\mu \bar{c}^a) A^b_\mu c^c \tag{8}$$

（$\simeq$ は部分積分。）ゴーストの伝播関数 δ^{ab}/k^2 と、$g f^{abc} p_\mu$ に比例する頂点が出ます 既知 。ゴーストは外に出る粒子ではなく、ループの中にだけ現れます（β 関数にも入る：4-06 §03）。**例**。n 成分の実のガウス積分は $(\det A)^{-1/2}$ を与えます（2-07 §02）。Feynman ゲージ（$\alpha = 1$）で $g = 0$ なら核は $k^2 \delta_{\mu\nu}$ なので、各運動量で 4 成分のゲージ場が $(k^2)^{-4/2}$、ゴーストが (7) により $(k^2)^{+1}$ を与え、合わせて $(k^2)^{-2/2}$：横波の二つの偏りだけが残ります（$4 - 2 = 2$）。

寄り道：可換ならゴーストは消える

飛ばしてよい小節です。

$U(1)$ では $f^{abc} = 0$ で $\mathcal{M} = -\partial^2$ は A に依らず、$\det \mathcal{M}$ は定数として比の中で消えます。ゴーストは要りません。非可換では $\mathcal{M}$ が A に依るので、行列式が場と結合し、ゴーストのループが図に加わります。Faddeev–Popov（1967）の要旨は、ゲージ不変な場の理論では閉じたループの規則を変えねばならないことを Feynman と DeWitt が示した、と書いています 既知 。規則の変更が要るのは、この $\mathcal{M}$ が A に依る場合です。

04 BRST 対称性 — 固定した後に残る対称性

固定した作用にも、ゲージ場とゴーストを混ぜる反可換な対称性 s が残ります（補助場 b^a を足す）。

$$sA^a_\mu = (D_\mu c)^a, \quad sc^a = -\tfrac{g}{2} f^{abc} c^b c^c, \quad s\bar{c}^a = i b^a, \quad s b^a = 0; \qquad S + \int s\Psi, \;\; \Psi = \bar{c}^a \big(\partial_\mu A^a_\mu - \tfrac{i\alpha}{2} b^a\big)$$

$s\Psi = i b\, \partial A + \frac{\alpha}{2} b^2 + \bar{c}\, \mathcal{M} c$ で、b を積分すると (6)(8) に戻ります。$sS = 0$ と冪零性 $s^2 = 0$（Jacobi 恒等式）から、形式的に二つが出ます 既知 。

- **ゲージの選び方に依らない**。Ψ を変えると作用は $s(\delta\Psi)$ だけ変わり、s で消える O には $\langle O\, s(\delta\Psi)\rangle = \langle s(O\delta\Psi)\rangle = 0$。Becchi–Rouet–Stora（1976）の要旨は、半単純な群で、すべての場が質量を持つ線形のゲージでは Slavnov 恒等式（s の対称性を相関の間の関係に書いたもの）が繰り込まれた摂動論の全次数で成り立つと示し、例として調べた SU(2) Higgs–

Kibble 模型では物理的な S 作用素がユニタリでゲージのパラメータに依らないことを摂動の意味で示した、と書きます（1975 年の論文は可換な Higgs–Kibble 模型）。質量ゼロの純ヤン–ミルズについての結論ではありません。

- **物理的な状態**。s は状態に働く演算子 Q_B（BRST 電荷。$Q_B^2 = 0$）になります。共変なゲージでは状態空間が不定計量（内積 $\langle \psi, \psi \rangle$ が負や 0 になりうる）で、そのままでは確率の解釈ができません。そこで物理的な状態を $\mathrm{Ker}\, Q_B / \mathrm{Im}\, Q_B$（BRST のコホモロジー）とします。これは「$Q_B$ で消える状態を、Q_B の像の分だけ同一視したもの」です。$Q_B^2 = 0$ なので像 $\mathrm{Im}\, Q_B$ は核 $\mathrm{Ker}\, Q_B$ に含まれ、商が作れます。像に入る状態は物理的な状態との内積が 0 になるので、同一視で落としても測れる量は変わらない、というのが狙いです。負や 0 のノルムの状態（時間成分・縦成分の偏り、ゴースト）がこうして落ち、残る空間の内積が正になることが期待されます。S 作用素は散乱の前と後の状態をつなぐ作用素で、ユニタリ性は確率の合計を保つこと（2-05 §02 の e^{-itH} と同じ性質）です。Kugo–Ojima（1979）の要旨は、局所共変な演算子形式（理論とその漸近場が在ることを前提にした枠組み）の中で、BRS 電荷の代数から物理的な S 行列のユニタリ性を示したと書きます 物理 。理論そのものが在ることは仮定で、連続の理論での同一性は示されていません（§09）。

「BRST」は Becchi・Rouet・Stora と Tyutin の頭文字とされます。**例**。場を定数とした部分で s^2 を記号計算すると、SU(2)・SU(3) とも $s^2 A^a$・$s^2 c^a$ は 0 項でした。sc の係数 $-\frac{1}{2}$ を -1 に変えると $s^2 A^a$ に 2 項・25 項が残ります 計算 。

05

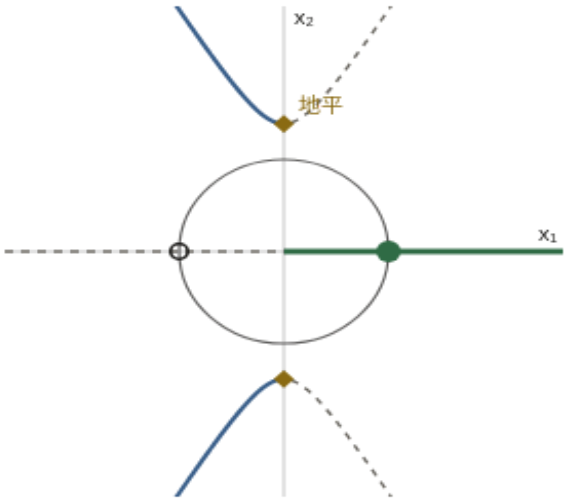
コピーがあると何が起きるか — 四つの数え方

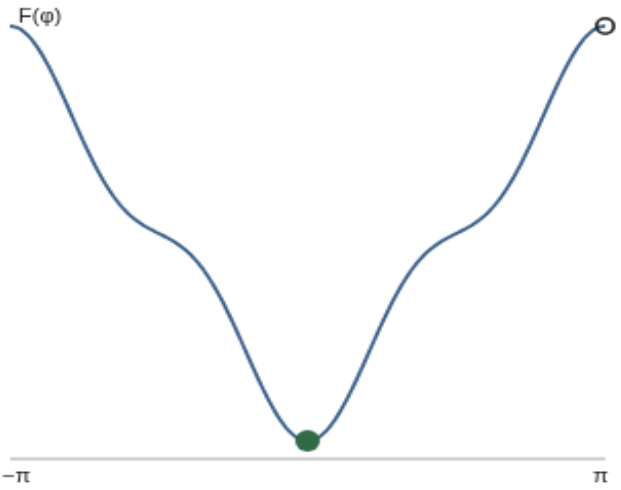
(3) の「一度だけ」が崩れる場合を作ります。Landau ゲージ（3-04 §05）に倣い円の上の F の臨界点を代表にし、$M = \partial_\varphi^2 F$ を行列式、極小の集まりを Gribov 領域の類比とします。

$F = -r\cos\varphi - c\,r^2\cos 3\varphi$ ： $r < r_* = \frac{1}{3c}$ でコピー 2（極小 1・極大 1）， $r > r_*$ で 0（極小

大きい場で極小と極大の組が生まれ、その点 $(0, \pm r_*)$ で $M = 0$（地平の類比）です。重み $e^{-r^2/2}$ で r^2（真の期待値 2）を四通りに数えます（$|M|$ と M の違いは この節の寄り道）：(i) $|\det|$ で全コピー、(ii) Gribov 領域（極小）だけ、(iii) F の最小だけ（基本モジュラー領域）、(iv) 符号つき（BRST の数え方）。

図 1　c と r を動かすと、平面（左か上）の条件の面と軌道の交点（コピー）と、円の上の F(φ)（右か下）が変わる。● 極小（Gribov 領域）、○ 極大、緑 ● 最小（基本モジュラー領域）、◇ 地平





c = 0.20・r = 1.20：コピー 2（極小 1・極大 1）、符号の和 0　r* = 1.667

⟨r²⟩：真 2.000・|det| 2.924・Gribov 領域 2.924・最小 2.000・符号つき 0/0

計算 この図の数値はこの端末で計算した（式 (10) と表 1 の閉じた式をその場で評価。表 1 は臨界点を数える総当たりと差 0.004 以下）。

表 1　$\langle r^2 \rangle$ の四つの数え方（真の値 2）。閉じた式 $\frac{4+8e^{-u}(1+u)}{2+4e^{-u}}$、$u = 1/(18c^2)$

c	r_*	(i) $\lvert\det\rvert$	(ii) Gribov 領域	(iii) 最小	(iv) 符号つき
0.08	4.167	2.005896	2.005896	2	0/0
0.20	1.667	2.924325	2.924325	2	0/0
0.50	0.667	2.273601	2.273601	2	0/0

コピーの数が軌道で変わると (i) はずれ、領域の中にコピーが残る (ii) も直りません。(iii) は正しいが、最小の選択は大域的な比較で局所的な条件では書けません。(iv) は極小と極大が同数なので 0/0 です。

例。(i) のずれ $4ue^{-u}/(1+2e^{-u})$（$c = 0.05$ で 2×10^{-8}）は c の冪でどの次数も 0 で、4-07 §05 の $e^{-1/x}$ と同じ型です 計算 。

寄り道：交点を符号つきで数える

飛ばしてよい小節です。(10) の $|M|$ と M の違いを、円の上の一変数で見ます。

群を円周 $\theta \in [0, 2\pi)$、条件を周期関数 $f(\theta) = 0$ とし、零点を θ_i（そこで $f' \neq 0$）とします。δ 関数の規則 $\int \delta(f)\, u\, d\theta = \sum_i u(\theta_i)/|f'(\theta_i)|$ から

$$\int_0^{2\pi} d\theta\, \delta\big(f(\theta)\big)\, |f'(\theta)| = \#\{\theta_i\}, \qquad \int_0^{2\pi} d\theta\, \delta\big(f(\theta)\big)\, f'(\theta) = \sum_i \operatorname{sign} f'(\theta_i) = 0 \tag{10a}$$

です。右が 0 なのは、周期関数は上向きに 0 を横切る回数と下向きに横切る回数が等しいからです。
例：$f(\theta) = \sin(\theta - \theta_A)$ では交点が二つで、左は 2、右は $1 - 1 = 0$ です。絶対値を付ければ交点の数

が、付けなければ符号の相殺が残ります。格子で BRS 不変なゲージ固定を非摂動で行うときの障害（Neuberger 1987。要旨は形式的には連続にもあると書く）との関係は §08 で扱います。

06

Gribov 領域と基本モジュラー領域 — 凸で、どの向きにも有界

Gribov（1978）の要旨は、非可換では $\partial_\mu A_\mu$ を固定してもゲージは固定されず、FP 行列式が正の範囲に制限すれば足りるらしい、と書きます [既知]。Landau ゲージをノルム $\|A^g\|^2$ の停留点と読むと

$$\Omega = \{\partial_\mu A_\mu = 0,\ \mathcal{M}(A) > 0\}\ \text{(極小)}, \qquad \Lambda = \{A:\ \|A\| \le \|A^g\|\ \forall g\}\ \text{(最小)}, \qquad \Lambda \subset \bar{\Omega} \tag{11}$$

Ω が **Gribov 領域**、境界が **地平**、Λ が **基本モジュラー領域**です [既知]。$\bar{\Omega}$ は Ω の閉包（境界も含めたもの）です。Ω は $\mathcal{M} > 0$ で開いた集合、Λ は $\le$ で閉じた集合で、Λ の境界には地平に接する点がある（van Baal、§07）ので、閉包で書きます。

- **凸**。$\mathcal{M}(A)$ は A について一次なので、「すべての ω で $\langle \omega, \mathcal{M}(A)\omega\rangle > 0$」は半空間の共通部分です。Zwanziger（1982）の要旨も 'convex region Ω which is bounded in every direction' と書きます。Λ も凸です（van Baal 1997 の節 "Complete gauge fixing"）。
- **どの向きにも有界**（Zwanziger 1982 の要旨）。有限次元での筋：$\mathcal{M}(tA) = \mathcal{M}_0 + t\mathcal{M}_1$ の $\mathcal{M}_1$ は跡 0（$f^{aba} = 0$）の対称行列で負の固有値を持つので、大きな t で正でなくなる。
- **どの軌道も地平の内側を通る**（Dell'Antonio–Zwanziger 1991 の要旨：ノルムは各軌道で最小に達し、そこで軌道は地平の内側と交わる）。
- **Ω の中にもコピーは残る**。Zwanziger（2004）はそれが期待値に影響しないと主張しています [物理]。

図 1 の実線が Ω、正の x_1 軸が Λ の類比です。伝播関数への影響は 17-02 §07。

07

箱の中の地平 — 一定の背景場での固有値

一辺 L の周期的な箱で SU(2) の一定の場 $A^a_\mu = a\,\delta^{a3}\delta_{\mu 1}$ を取ると、$\mathcal{M}$ は平面波 $p = 2\pi n/L$ で対角化でき、色の 3 番（中性）と $\omega^1 \pm i\omega^2$（荷電）に分かれます。

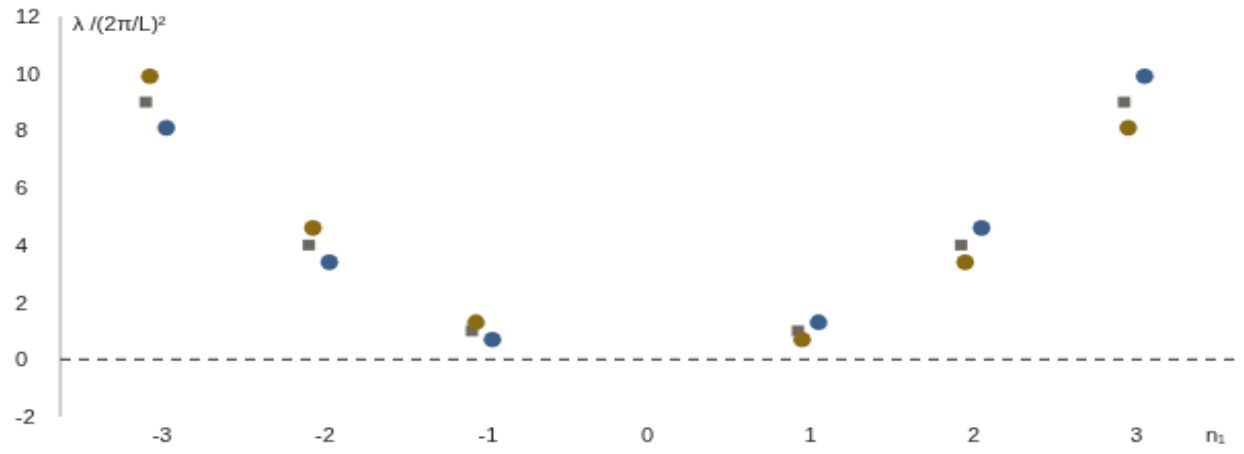
$$\lambda_{\text{中性}} = \left(\tfrac{2\pi}{L}\right)^2 |n|^2, \qquad \lambda_\pm = \left(\tfrac{2\pi}{L}\right)^2 \left(|n|^2 \pm s\, n_1\right), \qquad s = \frac{gaL}{2\pi} \tag{12}$$

最小の非自明な固有値（$n = 0$ は除く）は $n = (\pm 1, 0, 0, 0)$ の $1 - s$ で、地平は

$$g\,a_{\mathrm{h}} = 2\pi/L \;\longrightarrow\; 0 \quad (L\to\infty) \tag{13}$$

です。van Baal（1997 の節 "Gauge fields on the three-torus"）は三次元のトーラスの Coulomb ゲージで同じ計算を $C = gaL$ で行い、Gribov 領域が $|C_k| \le 2\pi$ の立方体、捩れた（反周期的な）ゲージ変換による $A=0$ のコピーが地平の上にあることを示しています 既知 。基本モジュラー領域は、反周期的な変換も同一視するとき（純ヤン–ミルズ）は $|C_k| \le \pi$（$s \le \tfrac{1}{2}$）です。基本表現の場（クォーク）があって周期的な変換しか許されないときは $|C_k| \le 2\pi$（$s \le 1$）で、その境界は地平に接します 既知 。

図 2　s（背景の大きさ）を動かすと、FP 作用素の固有値（単位 (2π/L)²、横向きの n は 0）が動く。灰は中性、青と橙は荷電、赤は負。読み出しの「Λ の境界（s = 0.5）」は反周期的な変換も同一視するときの値（周期的な変換だけなら s = 1）



s = 0.30：最小の非自明な固有値 0.70 ×(2π/L)² → Λ と Ω の中

計算 この図の数値はこの端末で計算した（式 (12) をその場で評価）。$s = 0$・0.5・1・2 で最小の非自明な固有値は 1・0.5・0・−1（順に $A=0$・基本モジュラー領域の境界〔反周期的な変換も同一視するとき〕・地平・周期的な変換による $A=0$ のコピー）。

格子でも確かめました。L^4 格子で 1 の向きのリンクを $e^{i\theta\sigma_3/2}$ とし、Landau ゲージの汎関数 $\sum(1-\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,g_x U_{x,\mu} g^{\dagger}_{x+\mu})$ の二階微分を運動量ごとに対角化すると、荷電の固有値は $\tfrac{1}{2}[\cos\tfrac{\theta}{2} - \cos(p_1 \pm \tfrac{\theta}{2})] + \tfrac{1}{2}\sum_{\nu\neq 1}(1-\cos p_\nu)$ に一致しました（格子間隔 1 で $\theta = ga$）。

表 2　格子の FP 行列の地平（二分法）

L	4	8	16	32
$\theta_{\mathrm{h}} L/2\pi$	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

計算 python3・NumPy。閉じた式との差は 3×10^{-16} 以下。

箱が大きいほど長い波長の向きの地平は原点に近く、Gribov の要旨はこの制限が赤外の特異性を打ち消し遠距離の線形な相互作用につながると書きます 物理 。四次元の測度の定理にはなっていません。

```
08
```

格子の 0/0 — 符号つきで数えると消える

ゴーストは $\det \mathcal{M}$ を絶対値なしで与えました（式 (7)）。したがって BRST 対称なゲージ固定の積分は、一つの軌道の上のコピーを $\operatorname{sign}\det \mathcal{M}$ **つきで**数えます。

$$Z_{\mathrm{GF}}[U] = \int \prod_x dg_x \, \delta\big(G(U^g)\big) \det \mathcal{M}(U^g) = \sum_{\text{コピー}} \operatorname{sign}\det \mathcal{M} = \chi(G)^N = 0 \tag{14}$$

ここで使う言葉を定義します。**Euler 標数** χ：コンパクトで境界の無い多様体（1-05）の上の滑らかな関数の臨界点（二階微分の行列が退化しないもの）を、その行列の行列式の符号（負の固有値が偶数個なら $+1$、奇数個なら -1）をつけて足した数です。この数は関数の選び方によりません（Poincaré–Hopf の定理）。円では極小が $+1$、極大が -1 で $\chi(S^1) = 0$、球面では $\chi(S^2) = 2$ です。正の次元のコンパクトで連結なリー群 G では $\chi(G) = 0$ で、積の空間では $\chi(G^N) = \chi(G)^N$ です [既知]。**Morse 理論**は、このように臨界点を数えて多様体の形を読む理論の名前です。

最後の二つの等号は符号の和を G^N（N は格子点の数）の Euler 標数と読むもので（Schaden 1999 の Morse 理論の解釈、Mehta ほか 2014 の式 (2)。臨界点が退化しない軌道で）、$\chi(G) = 0$ です [既知]（7-11 §05）。ゲージ不変な量の期待値は 0/0 です。Mehta らはこれを「Neuberger の 0/0 問題」と呼んで Neuberger の 1986 年と 1987 年の論文を引き、1987 年の論文の要旨は、非摂動で出会うこの障害は形式的には連続の定式化にも在る、と述べます [既知]。

例。図 1 の「符号の和 0」がその最小版です（$\chi(S^1) = 0$）。同じ要旨は、摂動展開のどの次数でも格子の BRS 不変性は局所ゲージ不変性の代わりを果たすとも論じます。符号の打ち消し合いは摂動のどの次数にも映らないからで、§05 の例の $e^{-1/(18c^2)}$ と同じ型です。回避の道は数え方を取り替えます [既知]。

- **固定しない**（Wilson の格子。Elitzur の定理：18-02 §09）か、Gribov 問題の無い最大木のゲージ（3-04 §08）。
- **立体射影による修正 Landau ゲージ**：リンクの変数を立体射影で平らな座標に写してから汎関数を作る（von Smekal ほか 2007。要旨：コンパクトな $U(1)$ では Gribov 問題を解き、最大可換部分群に使えば $SU(N)$ の 0/0 を避けられるかもしれない。Landau ゲージの連続極限は変わらない）。
- **オービフォールド化**：ゲージ固定に使う群の多様体を、特異な点を許す多様体の一般化（オービフォールド）に取り替え、その上の Morse 理論で数える（Mehta ほか 2014。要旨：分配関数が軌道に依らなくなる）。

- **質量で正則化**：ゲージ場とゴーストに質量項（Curci–Ferrari 質量）を足した作用で数え、0/0 を正則化する（Ghiotti–von Smekal–Williams 2006、要旨）。**剰余空間**：群の全体ではなく $SU(2)/U(1)$（球面 S^2 で $\chi = 2$）の上で数える BRST（Schaden）。

発散の代数との比較は 7-12。

09

質量ギャップの問題から見たゲージ固定

問題文が求めるのはゲージ不変な局所場（$\mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$ など）の相関と、再構成したハミルトニアンのギャップです（0-03）。ゲージ固定は摂動論では必須の道具です（§04）。それ以外では次の位置にあります 既知 。

- **公理との関係**。確率の解釈に要る正値性（反射正値性。4-10 で定義）は、共変なゲージで固定した場には期待できません。共変なゲージでは不定計量の状態空間を使うこと（§04）は既知の枠組みで、Magnen–Rivasseau–Sénéor 1993 は Feynman ゲージのような共変なゲージは正値性を欠くので構成の最初からは使えないと書きます（4-10 §09）。そのため再構成はゲージ不変な量から行います。BRST のコホモロジーとその正定値の空間の同一性は連続では示されていません（18-02 の「物理的状態」の項）。
- **構成の試み**では局所的に使います。Bałaban について問題文の解説は 'The choices vary locally in space-time, as well as on different length scales.' と書きます（Jaffe–Witten §6.5、7-05・7-07）。二次元の Chevyrev–Shen も格子のゲージ固定を使います（要旨、7-09）。

Singer の定理が禁じるのは連続な大域的な切り口だけで、0/0 も格子全体で共変なゲージを BRST 対称に固定したときの現象です。ゲージ不変な相関の四次元の連続極限は、2026-11 に公開された構成が相関関数の水準で作りました（委員会の評価の水準。6-00）。残る問いは、その測度が在るか、スペクトルに隙間があるかです（6-04）。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	(3)〜(9) の形式的な導出 既知 。表 1・表 2・図の数値・s^2 の記号計算 計算 。寄り道の (10a) 紙 （初等的）

	内容
条件つき	Slavnov 恒等式は質量を持つ線形のゲージで摂動論の全次数、ユニタリ性とゲージへの非依存は Higgs–Kibble 模型で摂動の意味で。Kugo–Ojima のユニタリ性は理論の存在を前提にした枠組みの中で 物理 。Gribov 領域の性質は要旨の水準で確認。(14) は退化しない軌道で。赤外への影響は 物理
言えていない	四次元の連続の理論でのコピーの配置、基本モジュラー領域の上の測度、BRST と OS の空間の同一性。Neuberger の論証は要旨の範囲まで。このサイトは質量ギャップも連続理論の構成も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
手順・Gribov のコピー	既知	L. D. Faddeev, V. N. Popov, Phys. Lett. B 25 (1967) 29；V. N. Gribov, Nucl. Phys. B 139 (1978) 1（要旨）
BRST・ユニタリ性	既知	C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, Commun. Math. Phys. 42 (1975) 127（可換な Higgs–Kibble 模型。書誌のみ）；Ann. Phys. 98 (1976) 287（要旨）；T. Kugo, I. Ojima, Prog. Theor. Phys. Suppl. 66 (1979) 1（要旨）。I. V. Tyutin, arXiv:0812.0580（書誌のみ）
Gribov 領域	既知	D. Zwanziger, Nucl. Phys. B 209 (1982) 336；G. Dell'Antonio, D. Zwanziger, Commun. Math. Phys. 138 (1991) 291；D. Zwanziger, Phys. Rev. D 69 (2004) 016002（要旨）；P. van Baal, hep-th/9711070（本文の節 "Complete gauge fixing"・"Gauge fields on the three-torus"）
格子の 0/0 と回避策	既知	H. Neuberger, Phys. Lett. B 175 (1986) 69（書誌のみ）；Phys. Lett. B 183 (1987) 337（要旨のみ）；D. Mehta, N. S. Daleo, J. D. Hauenstein, C. Seaton, Phys. Rev. D 90 (2014) 054504, arXiv:1406.6678（要旨・本文 §I・§II）；M. Schaden, Phys. Rev. D 59 (1999) 014508（書誌のみ）；L. von Smekal ほか arXiv:0710.2410（要旨）；M. Ghiotti ほか hep-th/0611058（要旨）
§09 の引用	既知	A. Jaffe, E. Witten, "Quantum Yang–Mills Theory"（Clay）§6.5；I. Chevyrev, H. Shen, arXiv:2302.12160（要旨）；J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, Commun. Math. Phys. 155 (1993) 325（4-10 §09 の引用による）
表・図・§01 §03 §04 の数値	計算	python3・NumPy（toy_fp・box_horizon・lattice_formula_check・brst_nilpotent・propagator_check）。図は式 (10)(12) を JavaScript で評価

次に読む章：4-09 場の量子論の公理。

場の量子論の公理 — 「理論が在る」を七つの条件で言い、無限個の自由度が表現を選ばせる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 問題文が「存在」の中身に挙げる Wightman の公理の七つの条件と、それぞれが締め出すもの。相関関数の全体から状態空間と場を組み立て直せること。自由度が無限個だと真空が Fock 空間に入らないことがあり、それが Haag の定理として相互作用表示を締め出すこと。

前提となる章 — 1-10 ヒルベルト空間と自己共役作用素・2-06 調和振動子と生成消滅。テスト関数と超関数（1-11）、光円錐とローレンツ変換（2-04）も使いますが、使う箇所で一行ずつ定義します。$\hbar = c = 1$。時空の点 $x = (t, x)$ の長さの二乗を $x^2 = -t^2 + |x|^2$ と書き、計量の符号 $(-,+,+,+)$ はこの符号の並びを指します。

先に言うこと — 既知の枠組みの紹介で、証明は筋だけです。四次元で公理を満たす非自明な理論は知られていない、と 2000 年の問題文 §6 は書きます。四次元のヤン–ミルズについては 2026-11 に公開された構成が作りました（委員会の評価の水準。09 節）。この章はヤン–ミルズについて何も示していません。数値は自由場のものです。

この章の順序

1. なぜ公理か — 作ったかを判定する条件
2. 場は点で値を持たない — 平均してから作用素にする（表 1）
3. Wightman の公理 — 七つの条件（表 2）
4. Wightman 関数と再構成 — 相関から理論を組み立てる
5. 局所性 — 可換と無相関は違う（図 1・表 3）
6. 公理から出ること — PCT・スピンと統計・クラスター性。寄り道：真空はどこにでも届く
7. 無限自由度の表現 — 粒子の数が無限なら同じ空間に入らない（図 2・表 4）
8. Haag の定理 — 相互作用する場を自由場の空間に置けない

9. ゲージ理論で起きること — 観測量・正値性・公理の形

01

なぜ公理か — 作ったかを判定する条件

物理の教科書は、相互作用する場の理論が在ると仮定して計算します（4-03）。数学の問いはその手前です。何を作れば「在る」と言えるかを先に決めなければ、作ったかどうかを判定できません。公理は、その判定の条件の一覧です。

問題文 §3 は量子場を 'an operator-valued generalized function on space-time obeying certain axioms' と定義し、'Gårding and Wightman gave mathematically precise axioms for quantum field theories on R4 with a Minkowski signature, see [45]' と続けます。§4 は存在の中身を、[45]（Streater–Wightman の本）と [35]（Osterwalder–Schrader の二論文）の公理と少なくとも同じ強さの性質とします（0-03）既知。作るべきものは次の四つ組です。

$$\mathcal{T} = (\mathcal{H},\ U,\ \Omega,\ \phi) \qquad \text{状態の空間・対称性の表現・真空・場} \tag{1}$$

例。一粒子の量子力学（2-05）では $L^2(\mathbb{R})$・e^{-itH}・基底状態・位置の作用素がこの四つで、初めから手元にあります。場の理論で新しいのは、対称性が Poincaré 群（平行移動とローレンツ変換。2-04）であること、場が一点で値を持たないこと（02 節）、自由度が無限個で $\mathcal{H}$ が一つに決まらないこと（07 節）です。虚時間の側の公理は 4-10 で扱います。

02

場は点で値を持たない — 平均してから作用素にする

2-06 §08 の自由な場を空間全体に置くと、一点の値 $\phi(x)$ の二乗の真空期待値は、全モードの零点のゆらぎの和になって発散します。関数 f で平均した $\phi(f) = \int \phi(x) f(x)\, d^D x$（$D$ は空間の次元）なら有限です 既知。

$$\langle \Omega, \phi(f)^2\, \Omega \rangle = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{|\hat{f}(p)|^2}{2\omega_p}, \qquad \omega_p = \sqrt{p^2 + m^2} \tag{2}$$

$\hat{f}(p) = \int f(x)\, e^{-ip\cdot x}\, d^D x$ はフーリエ変換で、f を波数 p の波に分けたときの振幅です（1-11）。幅 ε の f は $|p| \gtrsim 1/\varepsilon$ のモードを消し、$\varepsilon \to 0$ では (2) は発散します。例。正規化したガウス関

数（$\hat{f} = e^{-\varepsilon^2 p^2/2}$）では、$D = 1$ で (2) は $e^{\varepsilon^2 m^2/2} K_0(\varepsilon^2 m^2/2)/(4\pi)$（$K_0$ は 05 節）で対数的に、$D = 3$ では $1/(8\pi^2\varepsilon^2)$ のように増えます。

計算 表 1　幅 ε のガウス関数で平均した自由場の $\langle \phi(f)^2 \rangle$（$m = 1$、(2) の数値積分）。括弧内は $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{m\varepsilon}$ と $\frac{1}{8\pi^2\varepsilon^2}$

$m\varepsilon$	$D = 1$	$D = 3$
0.1	0.43302（0.36647）	1.2383（1.2665）
0.01	0.79736（0.73294）	126.59（126.65）
0.001	1.16379（1.09940）	12665（12665）

$D = 1$ の差は $(\ln 2 - \gamma/2)/(2\pi) = 0.06439$（$\gamma$ は Euler の定数）に近づきます 計算 。どの $\varepsilon > 0$ でも有限で、$\varepsilon = 0$ だけが意味を持ちません。そこで場を、テスト関数 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ から作用素 $\phi(f)$ への線形写像と定義します。これが作用素値超関数です。$\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ は、滑らかで、自身もどの階の導関数も $|x|$ のどの冪よりも速く減る関数の空間です（1-11）。空間だけでなく時空で平均するのは、相互作用する場では時刻を固定した場が意味を持つとは限らないとされるからです。場の強さの繰り込み（4-04）が要る理論では、時刻を固定して空間で平均しただけでは (2) に当たる量が有限になりません 既知 。

03

Wightman の公理 — 七つの条件と、締め出すもの

公理は (1) の各部品に課す条件です。番号は本ごとに違うので、この本では番号でなく条件の名前で呼びます。表 2 は実数値のスカラー場一つの場合です 既知 。

表 2　Wightman の公理（中性のスカラー場。Streater–Wightman の形の要約）

番号	条件	中身	締め出すもの
1	状態と対称性	可分なヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に Poincaré 群の強連続なユニタリ表現 $U(a,\Lambda)$	不定の内積（09 節）
2	スペクトル条件	$P^\mu = (H, P)$ の同時スペクトルが $\overline{V}_+$ に入る（式 (3)）	負のエネルギー
3	真空の一意性	U で不変な単位ベクトル Ω が位相を除いて一つ	真空の混ざり
4	場の公理	$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ ごとに $\phi(f)$ が稠密な $\mathcal{D} \ni \Omega$ で定まり $\phi(f)\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$、$\langle \psi, \phi(f)\chi \rangle$ は緩増加超関数、$\phi(f)^* \supset \phi(\bar{f})$	点の値（02 節）
5	共変性	$U(a,\Lambda)\phi(f)U(a,\Lambda)^{-1} = \phi(f_{a,\Lambda})$、$f_{a,\Lambda}(x) = f(\Lambda^{-1}(x-a))$	特別な座標系
6	局所可換性	f, g の台が空間的に離れていれば $[\phi(f), \phi(g)] = 0$	光より速い影響（05 節）
7	巡回性	$\phi(f_1)\cdots\phi(f_n)\Omega$ の一次結合が $\mathcal{H}$ で稠密	場と無関係な状態

表の言葉を一行ずつ定めます。**稠密**：$\mathcal{H}$ のどの元にも、その集合の元でいくらでも近づけること。**可分**：可算個のベクトルの一次結合の全体が稠密になること。$U(a,\Lambda)$ は、時空の平行移動 a とローレンツ変換 Λ（x^2 を保つ一次変換。2-04 §02）の組に割り当てたユニタリ作用素で、**強連続**とは (a,Λ) が単位元に近づくとき、どの ψ でも $U(a,\Lambda)\psi \to \psi$ となることです。**緩増加超関数**は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ の上の連続な線形汎関数です。二点 x, y が**空間的に離れている**とは $(x-y)^2 > 0$、つまり光の信号で結べないことで、$x^2 = 0$ の面が原点の**光円錐**です（2-04 §03）。

$$\sigma(P) \subset \overline{V}_+ = \{\, p = (p^0, p) \;:\; p^0 \geq |p| \,\} \tag{3}$$

(3) から $H \geq 0$ が出て、質量の作用素 $M = \sqrt{H^2 - P^2}$ が意味を持ちます（4-11 §05）。問題文 §3 の要約は、状態と対称性の公理・スペクトル条件（'positive energy, $0 \leq$ H'）・真空の一意性（'unique up to a phase'）・共変性・局所可換性を名指しします 既知 。スピン 1/2 の場では Poincaré 群の二重被覆（ローレンツ変換一つに二つの元が対応する群。1-02 の $SU(2) \to SO(3)$ の四次元版）を使い、局所可換性はフェルミオンどうしで反交換 $\phi(f)\phi(g) + \phi(g)\phi(f) = 0$ になります。例。質量 m の自由場は七つを満たし、スペクトルは $\{0\}$・双曲面 $p^0 = \sqrt{p^{\,2} + m^2}$・$p^0 \geq \sqrt{p^{\,2} + 4m^2}$ の和です（2-06 §08 の図 4）。

04

Wightman 関数と再構成 — 相関から理論を組み立てる

場の積の真空期待値を Wightman 関数と呼びます。場の公理（表 2）により緩増加超関数です。

$$W_n(x_1, \ldots, x_n) = \langle \Omega,\; \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\, \Omega \rangle \tag{4}$$

七つの条件は W_n の性質に翻訳されます。Poincaré 不変性、スペクトル条件、局所性（空間的に離れた隣どうしを入れ替えてよい）、正値性です。正値性は $\Psi = \sum_n \phi(f_n)\Omega$（$\phi(f_n) = \int f_n\, \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\, dx$）の長さが負でないことで、$(\phi(x_1)\cdots\phi(x_n))^* = \phi(x_n)\cdots\phi(x_1)$ から

$$\|\Psi\|^2 = \sum_{n,k} \int \overline{f_n(x_1,\ldots,x_n)}\; W_{n+k}(x_n,\ldots,x_1,y_1,\ldots,y_k)\; f_k(y_1,\ldots,y_k)\, dx\, dy \;\geq 0 \tag{5}$$

再構成定理 既知 。これらを満たす $\{W_n\}$ があれば、それを Wightman 関数とする理論 (1) がユニタリ同値を除いて一つ作れます。Wightman 1956 の要旨は 'The problem of determining a theory of a neutral scalar field given its vacuum expectation values is posed and solved.' と書きます。作り方は 4-10 §05 と同じ型で、テスト関数の有限列 $(f_0, f_1, \ldots)$ に (5) を内積として入れ、長さ 0 を割って完備化すると $\mathcal{H}$ です。$\Omega = (1, 0, 0, \ldots)$ で、$\phi(g)$ は各成分を、g を先頭に付けた関数に置き換える操作です（$(g \otimes f_1)(x_0, x_1) = g(x_0) f_1(x_1)$）。

$$\phi(g)\colon (f_0, f_1, f_2, \dots) \longmapsto (0,\ g\,f_0,\ g\otimes f_1,\ g\otimes f_2, \dots)$$

スペクトル条件からは解析性が出ます。時空のテスト関数 f で $\psi = \phi(f)\Omega$ と置き、ρ を ψ に対する H のスペクトル測度（1-10 §05）とします。Ω は時間発展で変わらないので、左辺は二点の Wightman 関数の片方の場を時刻 t だけずらして平均したものです。

$$\langle \psi,\ e^{-itH}\,\psi\rangle = \int_{[0,\infty)} e^{-iEt}\,d\rho(E) \xrightarrow{\ t=-i\tau\ } \int_{[0,\infty)} e^{-E\tau}\,d\rho(E) \tag{6}$$

$E \ge 0$ なので $\operatorname{Im} t < 0$ へ解析的に延び、$t = -i\tau$ で振動が減衰に変わります。これが虚時間の相関で、要旨は 'The vacuum expectation values are shown to be boundary values of analytic functions.' と書きます。この向きが 4-02 のユークリッド化の厳密な形、逆向きが 4-10 です 既知 。例。自由場では W_n は W_2 の積を対の組み方すべてで足したもので、再構成すると 2-06 の Fock 空間が出ます。

05

局所性 — 可換であることと、相関が無いことは違う

局所可換性は、光で結べない二点の場は互いに邪魔しない、という要求です。そのような二点の時間の順序は観測者で入れ替わるので（2-04 §03）、作用素の順序が効くと矛盾します。局所可換性は相関が 0 だとは言っていません。空間一次元の自由場で比べます。

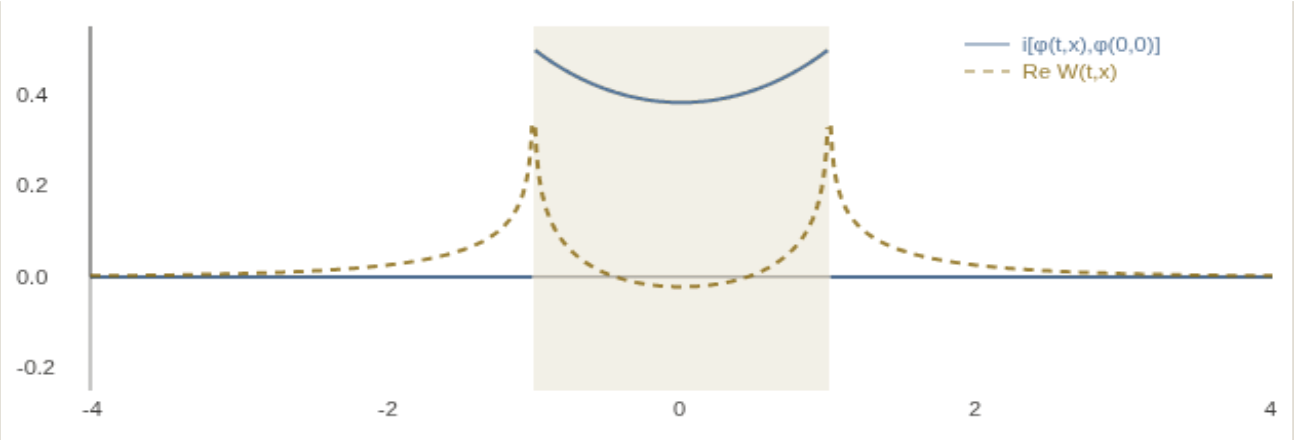
$$W(t,x) = \langle \Omega, \phi(t,x)\phi(0,0)\Omega\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\cdot 2\omega_p}\, e^{-i(\omega_p t - px)} \tag{7}$$

$$i\,[\phi(t,x),\phi(0,0)] = i\big(W(t,x) - W(-t,-x)\big) = \tfrac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)\,\theta(t^2-x^2)\,J_0\big(m\sqrt{t^2-x^2}\big) \tag{8}$$

$$W(0,x) = \frac{1}{2\pi} K_0(m|x|), \qquad K_0(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z} \quad (z\to\infty) \tag{9}$$

θ は階段関数、$J_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin\vartheta)\,d\vartheta$ と $K_0(z) = \int_0^\infty e^{-z\cosh u}\,du$ は Bessel 関数です。(8) の θ が局所可換性で、光円錐の外で交換子は 0 です。ところが (9) の相関は外でも 0 でなく、距離とともに e^{-mr} で減ります。この減り方が質量ギャップの空間の向きの顔です（4-11 §06）。ユークリッドに移ると空間の向きと虚時間の向きは回転で移り合うので、(6) の虚時間の減衰と同じ速さになります（4-11 §02）。四次元では $W(0,x) = mK_1(mr)/(4\pi^2 r)$ です 計算 。

図 1　時刻 t と質量 m を変えると、1+1 次元の自由場の交換子 $i[\phi(t,x),\phi(0,0)]$（実線）と相関 $\operatorname{Re} W(t,x)$（破線）の形が変わる。影は光円錐の内側。「動かす」で t を進める



t = 1.00、m = 1.00：x = 1.50（外側）で交換子 0、Re W = 0.0567／x = 0 で交換子 0.3826、Re W = −0.0221

計算 この図の数値はこの端末で計算した（(8)(9) と Y_0 の級数・積分を JavaScript で評価。SciPy と 10^{-13} 以内で一致）。

計算 表 3　$m=1$、$t=1$ の断面。内側の $\mathrm{Re}\,W$ は $-\frac{1}{4}Y_0(m\sqrt{t^2-x^2})$（第二種の Bessel 関数）。(7) の数値積分と 5 桁で一致

x	位置	$i[\phi(t,x),\phi(0,0)]$	$\mathrm{Re}\,W(t,x)$
0	内側	0.38260	−0.02206
0.9	内側	0.47653	0.13611
1.1	外側	0	0.15875
2	外側	0	0.02529
4	外側	0	0.00205

光円錐の上では $\mathrm{Re}\,W$ が対数で発散します。$t=x=0$ の発散は 02 節の $D=1$ の対数と同じもので、場が点で値を持たないことの現れです。

06

公理から出ること — PCT・スピンと統計・クラスター性

七つの条件だけから、経験で知られていた性質が定理として出ます。[45] の題 'PCT, Spin and Statistics and all That' はその二つを指します。PCT 定理は、空間の反転・時間の反転・粒子と反粒子の入れ替えを合わせた変換がどの理論でも対称性であること、スピンと統計の定理は、空間的に離れた点どうしで、整数スピンの場は交換し半整数スピンの場は反交換することです 既知 。三つ目がクラスター性で、真空の一意性の下で場の組を空間の向きに遠ざけると相関は積に分かれます。

$$W_{n+k}(x_1,\dots,x_n,\ y_1+\lambda a,\dots,y_k+\lambda a)\ \xrightarrow[\lambda\to\infty]{}\ W_n(x_1,\dots,x_n)\,W_k(y_1,\dots,y_k) \qquad (10)$$

質量ギャップがあると収束は指数の速さです。問題文 §5 は 'An important consequence of the existence of a mass gap is clustering' と書きます（4-11 §06）既知 。例。自由場では (10) の差は (9) の e^{-mr} の項の和です。

寄り道：真空はどこにでも届く

飛ばしてよい小節です。

Reeh–Schlieder の定理は、巡回性（表 2）の稠密性が時空の任意の小さな開集合に台を持つテスト関数だけでも成り立つとします（Reeh–Schlieder 1961 とされる）既知。部屋の中の場を操作するだけで遠くの状態を任意に近く作れる、ということです。正確には近似で、使う作用素は一般にユニタリでありません。こうしたことが起こるのは、図 1 の破線のように真空が光円錐の外まで相関を持っているからです。一方で交換子（実線）は外で 0 なので、信号を光より速く送ることはできません。

07

無限自由度の表現 — 粒子の数が無限なら、同じ空間に入らない

振動子が有限個なら交換関係の既約な表現は一つです（Stone–von Neumann。2-06 §09）。無限個ではそうなりません。質量の違う二つの自由場で見ます。振動子一つでは、角振動数 ω' の基底状態を ω の消滅作用素 a_ω で数えた量子の数 n と、基底状態どうしの重なりが

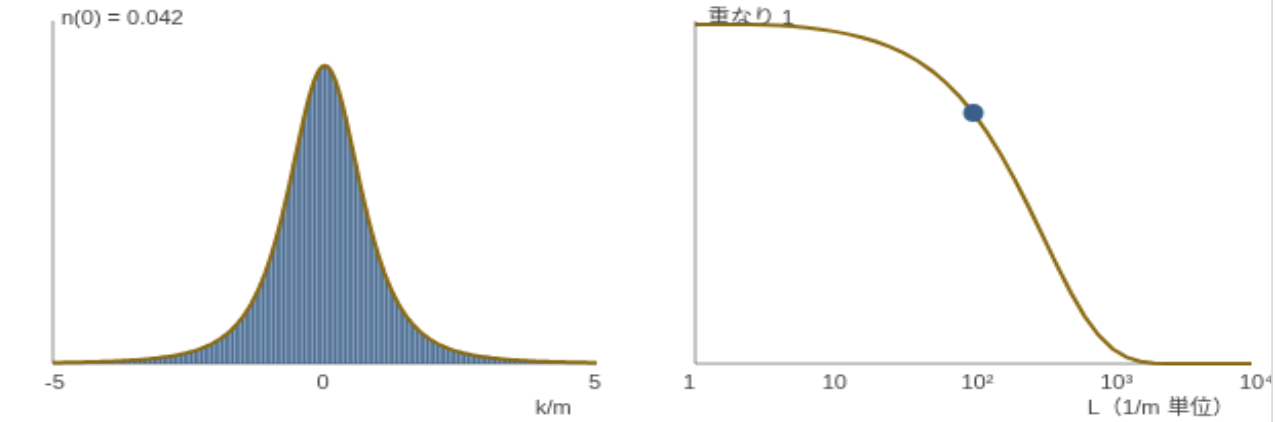
$$n = \langle 0_{\omega'} | a_\omega^\dagger a_\omega | 0_{\omega'} \rangle = \frac{(\omega-\omega')^2}{4\omega\omega'}, \qquad \langle 0_\omega | 0_{\omega'} \rangle = \left(\frac{2\sqrt{\omega\omega'}}{\omega+\omega'} \right)^{1/2} = (1+n)^{-1/4} \tag{11}$$

です既知 計算。長さ L の輪の上の場（2-06 (14)）では、モード $k = 2\pi j/L$ ごとに $\omega_k = \sqrt{k^2+m^2}$ と $\omega'_k = \sqrt{k^2+m'^2}$ があり、真空はモードごとの積なので

$$N(L) = \sum_k n_k, \qquad \langle \Omega_m, \Omega_{m'} \rangle = \prod_k (1+n_k)^{-1/4} \tag{12}$$

n_k は (11) の n をモード k で取ったもの、$N(L)$ は質量 m' の真空に含まれる質量 m の量子の数の期待値です。$n_k \approx (m'^2-m^2)^2/(16k^4)$ と減るので有限の L では和は有限、重なりは正です。L を広げるとモードの数も $N(L)$ も L に比例し、重なりは e^{-sL} で 0 に向かいます。

図 2　L と m'/m を変えると、左：モードごとの n_k（縦棒が輪のモード、曲線が $n(k)$）、右：真空の重なりと L（対数目盛）の関係が変わる。「動かす」で L を広げる



L = 100/m、m'/m = 1.50：量子の数 N = 1.269（1/m あたり 0.0127）、重なり 0.731

計算 この図の数値はこの端末で計算した（(12) を $|k| \le 60m$ で足し、外は k^{-4} の裾で補う。表 4 と 6 桁で一致）。

計算 表 4　長さ L（$1/m$ 単位）の輪での $N(L)$ と重なり（式 (12)）

L	N（$m' = 1.5m$）	重なり	N（$m' = 2m$）	重なり
10	0.12695	0.96915	0.43539	0.90040
100	1.2692	0.73104	4.3534	0.35025
1000	12.692	0.043592	43.534	2.778e−5
10000	126.92	2.478e−14	435.34	2.740e−46

L を広げると重なりは 0 に向かいます。正確には、無限体積では m' の真空に当たるベクトルが m の Fock 空間の中に無く、二つは時刻 0 の場の同じ交換関係の、ユニタリ同値でない表現を与えます 既知 。(12) から、重なりが正であることと $\sum_k n_k < \infty$ の同値が読めます。一般の Bogoliubov 変換（a_k を a_k と $a^\dagger_{-k}$ の一次結合に取り替える変換。(11) の a_ω と $a_{\omega'}$ の関係はその一例）についても同じ形の判定が知られています（Shale 1962 とされる）。無限体積の密度 $\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} n_k$（$m' = 1.5m$）は空間の次元 $D = 1, 2, 3$ で $0.012692,\ 0.0049736,\ 0.0030929$（$m^D$ 単位）と有限です。現実の時空（時空四次元）に当たる $D = 3$ でも密度は有限で、壊れ方は体積だけから来ます。空間が四次元（時空が五次元）の $D = 4$ では密度が対数で発散し、有限の箱でも重なりは 0 です 計算 。三次元の格子の図は 7-11 §07。

08

Haag の定理 — 相互作用する場を自由場の空間に置けない

物理の摂動論は、自由場の Fock 空間を舞台に $H = H_0 + V$（H_0 は自由、V は相互作用）と分け、自由場の真空から相互作用する真空へ移る描像（相互作用表示）を使います。07 節では、質量を変えるだけの穏やかな変更でも新しい真空は元の Fock 空間に入りませんでした。

Haag の定理はこれを一般の形で言います 既知 。時刻 0 の場と共役運動量が自由場のものとユニタリに移り合い、両方の理論が空間の平行移動と回転で不変なただ一つの真空を持つな

ら、最初の四つの Wightman 関数は自由場と一致し、二点関数が自由場と同じ理論は同じ質量の自由場になる、とされます（Haag 1955、Hall–Wightman 1957。まとまった形は Streater–Wightman、読み方は Earman–Fraser 2006）。中心の補題は初等的で、質量 $m > 0$ の Fock 空間で空間の平行移動のすべてで不変なベクトルは真空の定数倍だけです。

$$e^{-ia\cdot(p_1+\cdots+p_n)}\,\psi_n(p_1,\ldots,p_n) = \psi_n(p_1,\ldots,p_n)\ \ (\forall a) \implies \psi_n = 0 \quad (n \geq 1) \tag{13}$$

n 粒子の成分 ψ_n は運動量の和が 0 の面の外で 0 になり、その面の体積は 0 なので L^2 の元として 0 です。例。(12) の m' の真空は平行移動で不変で自由場の真空と違うので、Fock 空間に居場所がありません。

実際の扱いは二つです。物理は有限の箱と紫外の切断を置いて計算し、繰り込み（4-04）で切断を外した量だけを答えにします。構成的場の理論は切断のある空間でハミルトニアンを作り、極限で新しい表現を得ます（7-03）。粒子もスペクトルから作ります。問題文 §6 は 'If m is an isolated eigenvalue of M, then one infers from the Wightman axioms and Haag–Ruelle scattering theory that asymptotic scattering states of an arbitrary number of particles exist' と書きます 既知 。

09

ゲージ理論で起きること — 観測量・正値性・公理の形

ゲージ場 A_μ そのものは Wightman の公理を満たす場にならないことが知られています（Strocchi 1967・1970 とされる）既知 。理由は三つです。観測量：A_μ はゲージ変換で変わります（3-01）。問題文 §4 は局所作用素を 'the gauge-invariant local polynomials in the curvature F and its covariant derivatives, such as Tr Fij Fkl (x)' に対応させることを求め、局所場の脚注（Jaffe–Witten の脚注 1）で、古典的な多項式と量子の作用素の自然な一対一対応は繰り込みのために無いと注意します 既知 。

正値性：ローレンツ共変なゲージで A_μ を場として扱うと内積が不定の空間が要り、状態と対称性の公理が破れます。Gupta–Bleuler の方法（電磁場）では、大きな空間から条件を満たす状態の部分空間を取り、その中の長さ 0 の状態で割って正値性を取り戻します 既知 。非可換の BRST の方法（4-08 §04）でも同じ形の構成（部分空間を取って割る。BRST のコホモロジー）が摂動論の水準で知られています（Kugo–Ojima 1979 とされる）。非摂動の水準では、Gribov のコピー（4-08 §05）のためにこの構成は確立していません 物理 。観測量の形：Wilson ループ（3-02）は曲線の上の量で、点の場を平均する場の公理に収まりません（4-10 §09）。問題文 §3 は領域ごとの作用素の代数を置く Haag–Kastler の枠組みにも触れ、'One hopes that the continued mathematical exploration of quantum field theory will lead to refinements of the axiom sets that have been in use up to now' と書きます。

現在地。問題文 §6 は 'at present we do not know any non-trivial relativistic field theory that satisfies the Wightman (or any other reasonable) axioms in four dimensions' と書きます（2000 年の評価）。二次元と三次元では、公理を満たす相互作用するスカラー場（ϕ^4_2・ϕ^4_3 など）が構成されています（7-03）既知。三次元のヤン–ミルズは未構成です（7-06）。四次元のヤン–ミルズについては、2026-11 に公開された構成が、Wilson の格子ゲージ理論の尺度の極限として、構成自身の版の Wightman の公理を満たす理論を作りました（Lean で証明されている、と委員会が評価した。6-00・12-08）。局所の場は場の強さのゲージ不変な多項式に当たる繰り込んだ挿入で（8-04）、Wilson ループは扱われていません（6-04）。ユークリッドの側から場を作る道が次の章です。

この章が言えている範囲

内容	言えている	言えていない
公理（03 節）と問題文の対応	既知。問題文 §3〜§6 は本文で照合	表 2 は標準形の要約（Streater–Wightman の本文は未入手）
再構成・解析性（04 節）	既知（Wightman 1956 の要旨）と作り方の筋	証明の細部
表 1・表 3・図 1・式 (2)(7)〜(9)	計算：自由場で倍精度の一致	相互作用する場の相関の形
表 4・図 2・式 (11)(12)	計算：自由場どうしの真空の重なりが体積とともに 0 に向かう	Shale の判定の証明（本文未読）
PCT・スピンと統計・Reeh–Schlieder・Haag の定理	既知 の主張の紹介と補題 (13)	定理の証明（原論文は書誌のみ）
ゲージ理論の公理（09 節）	問題文の要求と既知の障害の整理	非摂動の水準で BRST による正値性の回復は確立していない。Wilson ループを含む公理の形は定まっていない。四次元ヤン–ミルズで公理を満たす理論は、2026-11 に公開された構成が作った（委員会の評価の水準。6-00）。この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
問題文の引用	既知	A. Jaffe, E. Witten, "Quantum Yang–Mills Theory"（Clay）§3〜§6・脚注 1。本文で逐語照合

もの	種別	出典・道具
公理・PCT・スピンと統計・時刻を固定した場（02 節）	既知	R. Streater, A. Wightman, *PCT, Spin and Statistics and all That*, Benjamin, 1964。書誌のみ
再構成・解析性	既知	A. S. Wightman, Phys. Rev. 101 (1956) 860。要旨で確認
Haag の定理	既知	R. Haag, Mat.-fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 29 no. 12 (1955)：書誌のみ（二次資料）。D. Hall, A. S. Wightman, 'A theorem on invariant analytic functions with applications to relativistic quantum field theory', 同誌 31 no. 5 (1957)：書誌のみ（二次資料で一致）。J. Earman, D. Fraser, Erkenntnis 64 (2006) 305–344：書誌のみ
Bogoliubov 変換の判定	既知	D. Shale, Trans. Amer. Math. Soc. 103 (1962) 149–167。書誌のみ
寄り道	既知	H. Reeh, S. Schlieder, Nuovo Cim. 22 (1961) 1051–1068。書誌のみ
Haag–Kastler・Haag–Ruelle	既知	R. Haag, D. Kastler, J. Math. Phys. 5 (1964) 848–861：書誌のみ（Crossref で書誌を確認）。D. Ruelle, Helv. Phys. Acta 35 (1962) 147：書誌のみ・未確認。R. Haag, *Local Quantum Physics*, Springer, 1992・Phys. Rev. 112 (1958) 669。書誌のみ
ゲージ場と正値性（09 節）	既知・物理	F. Strocchi, Phys. Rev. 162 (1967) 1429–1438・Phys. Rev. D 2 (1970) 2334–2340。T. Kugo, I. Ojima, Prog. Theor. Phys. Suppl. 66 (1979) 1–130。書誌のみ（Crossref で書誌を確認）
表 1・3・4、図 1・2、(8)(9)(11)(12) と K_1 の式	計算	python3・SciPy（`smear_variance.py`・`wightman_1p1.py`・`free_3p1.py`・`bogoliubov.py`）。図は同じ式を JavaScript で評価

次に読む章：4-10 Osterwalder–Schrader の公理と再構成。

Osterwalder–Schrader の公理と再構成 — 反射正値性が確率を量子力学に戻す

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — Schwinger 関数に課す五つの条件（正則性・ユークリッド共変性・反射正値性・置換対称性・クラスター性。Osterwalder–Schrader の公理 E0〜E4）と、そこから Hilbert 空間・$H \geq 0$・真空を組み立てる手順。鍵の反射正値性が、一次元のガウス過程では「相関が減衰する指数関数の正の重ね合わせであること」と同じこと。反射正値性を壊す正則化と保つ格子。

前提となる章 — 4-02 経路積分とユークリッド化・4-09 場の量子論の公理。道具は 1-08・1-10・1-11・2-06・2-07。$\hbar = c = 1$。

先に言うこと — 既知の定理の紹介で、証明は一次元の筋だけです。四次元のヤン–ミルズでは、2026-11 に公開された構成が、極限の Schwinger 関数からこの章の再構成で Hilbert 空間を作りました（Lean で証明されている、と委員会が評価した。6-00・12-08）。公理を満たす確率測度は作られていません（6-04）。この章は何も示しません。06 節は一粒子の模型の計算です。

この章の順序

1. 戻り道を定理にする
2. Schwinger 関数
3. 五つの条件（表 1）
4. 反射正値性（図 1・表 2）
5. 再構成
6. 最小の模型で再構成を走らせる（図 2・表 3）
7. 寄り道：雑音のあるデータ
8. 自由場

9. 反射正値性を壊す正則化、保つ格子
10. ゲージ理論で加わること

01

戻り道を定理にする — 虚時間から Hilbert 空間へ

ユークリッドの側で作れるのは確率測度 μ とその積率です（4-02・符号が一つ違う）。問題文が求めるのは Hilbert 空間 $\mathcal{H}$・$H \geq 0$・真空 Ω（4-09）で、§4 は 'Existence includes establishing axiomatic properties at least as strong as those cited in [45, 35].' と書きます。[35] が Osterwalder–Schrader（OS）の二本の論文です 既知 。

行きの道（時空から虚時間へ）は解析接続です。帰り道について Schwinger は 1958 年の CERN の会議の討論で 'The question of to what extent you can go backwards, remains unanswered' と述べています（Jaffe 2018 による）。Nelson が Markov 性（現在を知れば過去と未来が独立という性質）の下で帰り道を作り、OS はそれを反射正値性に置き換えました（問題文 §3） 既知 。

$$\mu \;\longrightarrow\; \{S_n\} \xrightarrow[\text{再構成}]{(E0)\sim(E4)} (\mathcal{H},\, H \geq 0,\, \Omega) \xrightarrow[\text{解析接続}]{(E0')} \{W_n\} \tag{1}$$

例。一粒子では $\mathbb{E}[x(\tau)x(0)] = \langle x\psi_0, e^{-\tau(H-E_0)}x\psi_0\rangle$ が行きの道です（2-06 の式 (8)）。06 節はその逆です。

02

Schwinger 関数 — 相関にエネルギーが書き込まれている

点を $x = (\tau, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^d$ と書き、τ をユークリッドの時間と呼びます。n 点の **Schwinger 関数**は μ の積率で、正確には試験関数でならした $S_n(f)$ が対象です（1-11）。Wightman 関数とは形式的に $x^0 \to -i\tau$ の置き換え $S_n = W_n(x_1^E, \dots, x_n^E)$ で結ばれます（Summers §3） 既知 。

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = \int \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\, d\mu(\phi) \tag{2}$$

例：質量 m の自由場は共分散 $(-\Delta + m^2)^{-1}$（Δ はラプラシアン $\sum_\mu \partial_\mu^2$。質量ギャップの Δ とは別）のガウス測度です（問題文 §6.2）。p_0 だけを積分すると（2-04 の式 (11)）

$$S_2(x,y) = \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{e^{ip\cdot(x-y)}}{p^2+m^2}, \qquad \int \frac{dp_0}{2\pi}\frac{e^{ip_0\tau}}{p_0^2+\omega^2} = \frac{e^{-\omega|\tau|}}{2\omega} \tag{3}$$

で、$\omega = \sqrt{p^2 + m^2}$ は運動量 p の粒子のエネルギーです。相関の減る速さにエネルギーが書き込まれている——これが再構成の種です。$d = 1$ では右がそのまま $S_2(\tau)$ で、04 節の例になります。高次の S_n は S_2 の対の積の和です（1-08）。

03

五つの条件 — 正則性からクラスター性まで、と線形増大

$\Theta(\tau, x) = (-\tau, x)$ を時間の反転とします。

既知 表 1　OS の条件（スカラー場。番号は OS 1975 のものとされる）

条件	中身	時空の側で
正則性（E0）	点の重なりを除き緩増加	作用素値の超関数
ユークリッド共変性（E1）	回転と平行移動で不変	Poincaré 共変性
反射正値性（E2）	正の時間に台を持つ f_n で $\sum_{n,m} S_{n+m}(\Theta \overline{f_n} \otimes f_m) \geq 0$	内積が正・$H \geq 0$
置換対称性（E3）	点の入れ替えで不変	離れた場が可換
クラスター性（E4）	空間の向きに遠ざけると $S_{n+m} \to S_n S_m$	真空が一つ
線形増大の条件（E0′）	$\lvert S_n(f)\rvert \leq \sigma_n \lvert f\rvert_{C^n}$、$\sigma_n \leq A(n!)^B$（評価に使う滑らかさの次数が n に比例：「線形増大」の名の由来）	W_n への接続

表の記号。関数 f の**台**は $f \neq 0$ となる点の集まり（の閉包）で、「正の時間に台を持つ」は $\tau \leq 0$ で $f = 0$ となることです。$\otimes$ は変数を分けて掛けた関数 $(f \otimes g)(x, y) = f(x) g(y)$、$\Theta \overline{f}$ は $\overline{f}$ の各変数の時間を反転したものです。$\lvert f\rvert_k$ は f の k 階までの導関数に多項式の重みを掛けた大きさの上限で、急減少関数の滑らかさと減り方を測ります（1-11）。

正則性が点の重なりを除くことは、自由場の S_2 が $x = y$ で発散すること（$d \geq 2$）と合っています。1973 年の論文の証明には超関数のテンソル積の連続性に関わる誤りがあり（Jaffe 2018）、1975 年の第二論文は線形増大の条件を仮定に加えて正しい証明を与えたとされます（二次資料による。OS 1975 は書誌のみ）。Wightman 理論から作った S_n は五つの条件を満たすことが示されていますが、線形増大の条件を満たすとは限りません。そのため、線形増大の条件を含む OS の公理が Wightman の公理そのものと同値かは分かっていません（Summers §3・脚注 15）。OS 1975 が示したのは、Wightman の理論を修正した形との同値です（Jaffe 2018。修正は増大の条件を足すものとされる）既知 。例。自由場は全部を満たし、線形増大の条件は S_{2k} が $(2k-1)!! \leq (2k)!$ 個の対の組み方の和であることから出ます。対の数 $(2k-1)!!$ が σ_n に入り、各因子は次数一定のセミノルムで押さえられます。

04

反射正値性 — 時間の鏡で長さを測る

F を正の時間の場だけで決まる量（例：$F=\sum_j c_j\phi(\tau_j,x_j)$、$\tau_j>0$）、$\Theta F$ をその時間を反転したものとします。反射正値性は次の形です。

$$\langle F,F\rangle := \mathbb{E}\big[\,\overline{\Theta F}\,F\,\big] \;\geq\; 0 \tag{4}$$

比喩で言えば、未来の量の長さを鏡像との重なりで測る条件です。正確には、過去と未来の相関の二次形式が負にならない条件で、$\mathbb{E}[|F|^2]\geq 0$ と違って自明ではありません。一次元の定常なガウス過程（共分散 $C(\tau-\tau')$）で $F=\sum_j c_j\phi(\tau_j)$ とすると

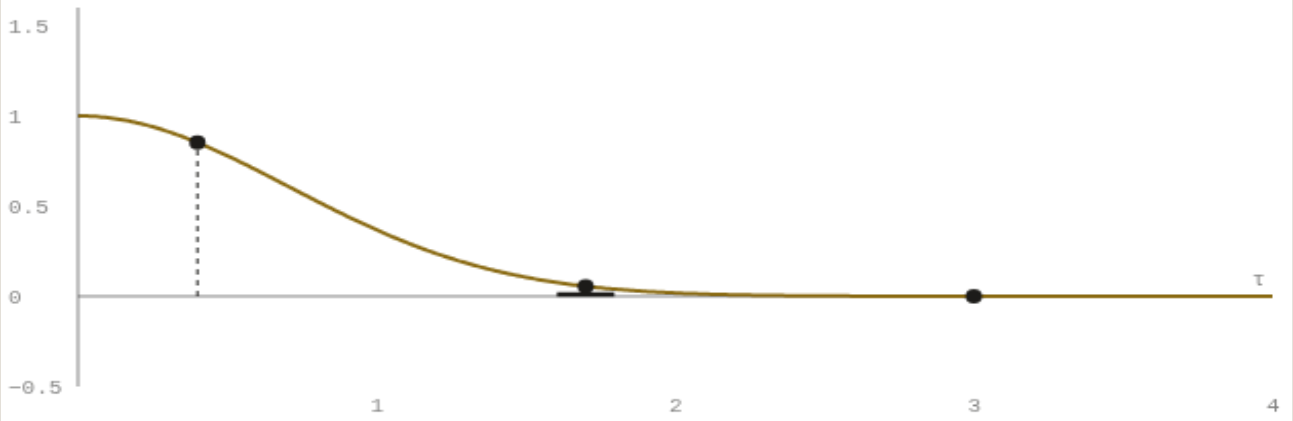
$$\sum_{i,j}\overline{c_i}c_j C(\tau_i+\tau_j)\geq 0\ \ (\tau_j>0),\qquad \text{特に}\ \ C(2\tau)\geq 0,\ \ C(\tau_1+\tau_2)^2\leq C(2\tau_1)C(2\tau_2) \tag{5}$$

です。右は二点の 2×2 の行列の対角と行列式で、$\log C$ の凸性を要求します。十分条件は、$C(\tau)=\int_{[0,\infty)} e^{-E\tau}d\rho(E)$（$\rho\geq 0$）なら左辺が $\int|\sum_j c_j e^{-E\tau_j}|^2 d\rho\geq 0$ になることです。

例：$e^{-\tau^2}$ は反射正値でない

$e^{-\tau^2}$ は正当な共分散です（フーリエ変換が正。**Bochner の定理**：連続関数 C が正定値、つまりどの τ_i と複素数 c_i でも $\sum_{i,j}\overline{c_i}c_jC(\tau_i-\tau_j)\geq 0$ であることと、そのフーリエ変換が正の測度であることは同値）が、$\log C$ は凹で、$\tau_1=0.2$、$\tau_2=1.5$ では $C(0.4)=0.852144$、$C(1.7)=0.055576$、$C(3.0)=1.234\times10^{-4}$ から行列式が -2.98×10^{-3} です 計算 。（この形に書けない理由：正の ρ なら $C(\tau)\geq\rho([0,E])e^{-E\tau}$ で、指数関数より速くは減れません。これが破れの原因であることは、05 節で必要性を示してから分かります。）

図 1　共分散を選び τ_1,τ_2 を動かすと、三点 $C(2\tau_1),C(\tau_1+\tau_2),C(2\tau_2)$（丸）と (5) の上限（横棒）が動く。両端の丸が 0 より下か、中の丸の高さの絶対値が横棒より大きいと破れる



e^−τ²、τ₁=0.20、τ₂=1.50：C(2τ₁)=0.8521、C(τ₁+τ₂)=0.0556、C(2τ₂)=0.00012、最小固有値 −0.00349（破れる）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（(5) の行列をその場で計算）。

計算 表 2 「行列」は $[C(\tau_i+\tau_j)]$（$\tau_i=0.1i$、$i\le 40$）の最小固有値、「二点」は $\tau_1,\tau_2\in(0,2]$ での (5) の行列式の最小値。

$C(\tau)$	フーリエ変換（正）	行列	二点
$e^{-\lvert\tau\rvert}$	$\frac{2}{1+\omega^2}$	≈ 0	≈ 0
$e^{-\lvert\tau\rvert}+\frac{1}{2}e^{-3\lvert\tau\rvert}$	$\frac{2}{1+\omega^2}+\frac{3}{9+\omega^2}$	≈ 0	≈ 0
$e^{-\tau^2}$	$\sqrt{\pi}\,e^{-\omega^2/4}$	-0.462	-0.238
$(1-\lvert\tau\rvert)_+$	$\left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\right)^2$	-0.366	-0.239
$e^{-\lvert\tau\rvert}\cos 3\tau$	$\frac{1}{1+(\omega-3)^2}+\frac{1}{1+(\omega+3)^2}$	-2.13	-0.376
$\frac{1}{2}e^{-\lvert\tau\rvert}-\frac{1}{6}e^{-3\lvert\tau\rvert}$	$\frac{8}{(1+\omega^2)(9+\omega^2)}$	-0.054	-0.011

六つとも共分散としては正当で、下の四つが反射正値性を破ります（$(a)_+=\max(a,0)$）。減衰振動は複素の極 $\omega=\pm 3\pm i$ を持つ伝播関数の姿で、17-02 の Gribov–Zwanziger の形も複素の極を持ちます。時間方向の相関が負になる場は (5) により反射正値な理論の場として読めません。Landau ゲージの格子計算では、グルーオンの時間方向の相関が負になることが観測されており、物理ではこれをグルーオンが観測される粒子でない表れと読みます 物理 。

05

再構成 — 内積・縮小・ハミルトニアン

(4) があれば、あとは線形代数で進みます 既知 。① **内積**。正の時間の場の有界な関数の全体 $\mathcal{E}_+$ に $\langle F,G\rangle:=\mathbb{E}[\overline{\Theta F}\,G]$ を置きます。(4) により $\langle F,F\rangle\ge 0$ ですが、$F\neq 0$ でも $\langle F,F\rangle=0$ でありえます（半正定値）。それでも Cauchy–Schwarz $|\langle F,G\rangle|^2\le\langle F,F\rangle\langle G,G\rangle$ は成り立ちます（t の二次式 $\langle F+tG,F+tG\rangle\ge 0$ の判別式から）。そこから長さ 0 のものの全体 $\mathcal{N}$ は部分空間になり、長さ 0 の差しかないものを同一視した $\mathcal{E}_+/\mathcal{N}$ を完備化して $\mathcal{H}$ とします（完備化は 1-10）。② **ずらす**。時間の向きに $s\ge 0$ ずらす U_s は正の時間の量を正の時間の量に移し、μ の平行移動不変性と $\Theta U_s\Theta=U_{-s}$ から

$$\langle F,U_sG\rangle=\langle U_{s/2}F,U_{s/2}G\rangle=\langle U_sF,G\rangle \tag{6}$$

です。③ **縮小**。(6) と Cauchy–Schwarz を n 回繰り返すと

$$\|U_sF\|^2=\langle F,U_{2s}F\rangle\le\|F\|\,\|U_{2s}F\|\ \Longrightarrow\ \|U_sF\|\le\|F\|^{1-2^{-n}}\|U_{2^ns}F\|^{2^{-n}} \tag{7}$$

で、$\|U_uF\|\le\sup|F|$ なので $n\to\infty$ で $\|U_sF\|\le\|F\|$。長さ 0 は長さ 0 に移り、U_s は $\mathcal{H}$ 上の $T(s)$ を定めます。④ **ハミルトニアン**。$T(s)$ は対称で $0\le T(s)=T(s/2)^2\le 1$、$T(s)T(u)=T(s+u)$ なので、連続ならスペクトル定理（1-10）から

$$T(s)=e^{-sH},\qquad H=H^*\ge 0,\qquad \Omega:=[1],\qquad H\Omega=0 \tag{8}$$

です。

一次元での必要性と実時間

一次元では $C(\tau+2\varepsilon)=\langle\psi_\varepsilon, e^{-\tau H}\psi_\varepsilon\rangle=\int e^{-E\tau}d\rho_\varepsilon(E)$（$\psi_\varepsilon=[\phi(\varepsilon)]$、$\rho_\varepsilon$ はスペクトル測度。ϕ は有界でありませんが、ガウスなら $\mathcal{E}_+$ を二乗可積分な関数まで広げてよい）なので、04 節の十分条件は必要条件でもあります。したがって $e^{-\tau^2}$ のように指数関数より速く減る C は反射正値になれません。$\int e^{-E\tau}d\rho(E)$ の形を ρ の**ラプラス変換**と呼び、この側では Widder 1934 の特徴づけに当たります。反射正値性との結びつきは Klein–Landau が指摘したとされます（Jaffe 2018）。$H\geq 0$ なので e^{-zH} は $\mathrm{Re}\,z\geq 0$ で意味を持ち、$z=it$ で時間発展 e^{-itH} です。押し出しは、OS の再構成では Wightman 関数の解析接続から得られます。回転角を虚数に延ばす形（0-04 §02）に抽象化したのが Fröhlich–Osterwalder–Seiler 1983 と Klein–Landau です（Jaffe 2018 §3.3.1）。線形増大の条件は W_n を得る段で使います 既知 。例。$C=e^{-m|\tau|}/(2m)$、$F=\phi(\tau_0)$ なら $\|U_sF\|=e^{-ms}\|F\|$ で、H はこのベクトルの上で m 倍です。

06

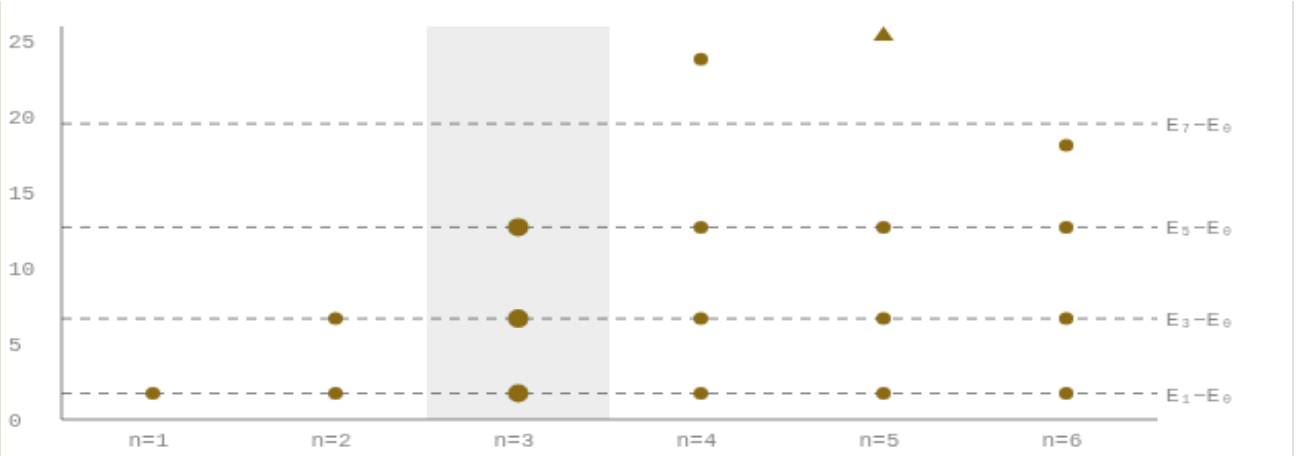
最小の模型で再構成を走らせる — 相関だけから準位を読む

2-07 の表 4 の $H=\frac12 p^2+x^4$ で $C(\tau)=\mathbb{E}[x(\tau)x(0)]$ を作り（基底 240 本で対角化）、H を忘れて C だけで 05 節を行います。$s=0.25$、$F_i=x((i+\frac12)s)$（$i<n$）として

$$G_{ij}=\langle F_i,F_j\rangle=C\big((i+j+1)s\big),\qquad G^{(1)}_{ij}=\langle F_i,T(s)F_j\rangle=C\big((i+j+2)s\big)\tag{9}$$

の一般化固有値問題 $G^{(1)}v=\lambda G v$（G が正定値なら $G^{-1/2}G^{(1)}G^{-1/2}$ の固有値と同じ）から $E=-\frac1s\log\lambda$ と読みます。F_i の張る部分空間に制限した $T(s)$ の固有値なので、変分原理（1-10）から真の準位の**上界**です 既知 。G が正定値であること（反射正値性）が前提です。x は奇関数なので読めるのは E_1-E_0・E_3-E_0・⋯ で、重み $|\langle\psi_0,x\psi_n\rangle|^2$ は $n=1$ の 0.287 から $n=7$ の 3.9×10^{-9} まで急に小さくなります 計算 。

図 2　相関の本数 n と雑音 ε を変えると、読んだ準位（丸。列ごとに一つの n）が変わる。破線は真の準位、三角は 26 超



ε=0（丸めだけ）、n=3：G の最小固有値 3.6e−10。読めた準位 1.72566、6.66774、12.71344

計算 この図の数値はこの端末で計算した（表 3 と同じ計算の結果）。

計算 表 3　相関の数表だけから読んだ準位（雑音なし）と G の最小固有値。

n	E_1-E_0	E_3-E_0	E_5-E_0	E_7-E_0	min G
1	1.72807				1.9e-1
2	1.72566	6.67039			2.4e-5
3	1.72566	6.66774	12.71344		3.6e-10
4	1.72566	6.66774	12.71165	23.80937	2.5e-16
真	1.725658	6.667744	12.711350	19.552863	

$n=3$ で三つの準位が 4〜5 桁で出て、どれも真の値より上です。$n=4$ で G の最小固有値が倍精度の丸めの大きさになり、その先は区別できません。

寄り道：雑音のあるデータ — 帰り道は不安定

飛ばしてよい小節です。

モンテカルロ（5-07）の相関には誤差があります。$C(ks)$ に相対 ε の正規乱数の誤差を掛けて（種は固定）同じ手順を行いました 計算 。$n=4$ で $\varepsilon=10^{-12}$ なら三番目は 12.70331 で真の 12.71135 を下回り、上界の性質が失われます。$\varepsilon=10^{-8}$ では G の最小固有値が -6.4×10^{-10} と負になり、データが (4)（(5) の左の行列の形）を破ります（E_3-E_0 は 6.66936）。$\varepsilon=10^{-4}$、$n=6$ では真の隙間より低い 1.52597 という偽の準位が出ます（図 2）。ラプラス変換を逆にたどるので、わずかな誤差が上の準位を大きく動かします。再構成の定理は誤差の無い S_n の主張で、有限精度のデータから準位を読むのは別の、条件の悪い問題です。グルーボールの測定（5-08）も (9) の形の行列を使います。

> 07

自由場 — Fock 空間が出てくる

ガウス測度では再構成を書き切れます。一次元の $C(\tau) = e^{-m|\tau|}/(2m)$（角振動数 m の振動子）で、ϕ の冪を分散 $\sigma^2 = C(0)$ で整えた **Wick 積**（$:\phi^2: = \phi^2 - \sigma^2$、$:\phi^3: = \phi^3 - 3\sigma^2\phi$、一般には Hermite 多項式 $He_k(x) = (-1)^k e^{x^2/2}\frac{d^k}{dx^k}e^{-x^2/2}$ で $:\phi^k: = \sigma^k He_k(\phi/\sigma)$）を使うと

$$\mathbb{E}\big[:\phi(\tau)^k: \, :\phi(0)^l:\big] = \delta_{kl}\, k!\, C(\tau)^k = \delta_{kl}\, \frac{k!}{(2m)^k} e^{-km|\tau|} \tag{10}$$

で、減る速さ km が準位です。この過程（共分散 $e^{-m|\tau|}/(2m)$ を持つ定常ガウス過程を **Ornstein–Uhlenbeck 過程**と呼びます）では $[:\phi^k:]$ が固有値 km の固有ベクトルで、$H = m\, a^\dagger a$ です 既知 。2-06 の準位 $E_k - E_0 = km$（2-06）が相関だけから出ます。例。$m = 1$、$k = 2$ では $\frac{1}{2}e^{-2\tau}$ で、速さ 2 は二粒子の状態です。

d 次元では (3) により運動量ごとに正の指数関数が並ぶので反射正値性が成り立ち（問題文 §6.2）、再構成すると Fock 空間が出て、スペクトルは $\{0\} \cup [m, \infty)$ です（2-06 §08）。 既知 ヤン–ミルズの作用には質量項が無く（3-02）、隙間は相互作用の出力でなければなりません（4-11）。

08

反射正値性を壊す正則化、保つ格子

紫外を抑える正則化（4-04）は反射正値性を壊しえます。例：Pauli–Villars 型。重い質量 M の伝播関数を引くと、大きい p で p^{-4} と速く減ります。

$$\frac{1}{p^2+m^2} - \frac{1}{p^2+M^2} = \frac{M^2 - m^2}{(p^2+m^2)(p^2+M^2)} > 0, \qquad C_{\mathrm{PV}}(\tau) = \frac{e^{-m|\tau|}}{2m} - \frac{e^{-M|\tau|}}{2M} \tag{11}$$

共分散としては正当ですが、時間の向きでは指数関数の重みが $E = M$ で負です。$m = 1$、$M = 3$ では $CC'' - C'^2 = -\frac{1}{3}e^{-4\tau} < 0$ で $\log C$ はどこでも凹になり、(5) の検査が異なるどの二点でも破れます（表 2 の最後の行） 計算 。負の重みは内積が負の状態（ゴースト。4-08 §03 の Faddeev–Popov の反可換な場を指す「ゴースト」とは別の意味）に当たります 既知 。問題文 §6.5 は、正則化で失った反射正値性を取り戻す方法は少ないと書き、例に次元正則化と Pauli–Villars 正則化を挙げます（引用は 0-03 §03）。

格子は逆です。Wilson の作用は反射正値性を保ち（Osterwalder–Seiler 1978、問題文 §6.5）、転送行列とハミルトニアンが立ちます（例は 0-04 §06、ゲージ理論は 5-03）。代わりに回転を 90° 刻みに落とします。反射正値性は不等式なので極限に引き継がれます（7-01 §07） 既知 。

09

ゲージ理論で加わること — 曲線の上の量・ゲージ固定・体積

観測量。意味を持つのはゲージ不変な量で、局所的なものは $\mathrm{Tr}\, F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}(x)$ のような合成の量です（問題文 §4）。Wilson ループ（3-02）について Chatterjee は Seiler を引いて 'the key observables in these theories do not take values at points, but at curves' と書きます。**ゲージ固定**。固定した場の相関は一般に反射正値でなく、共変なゲージでは内積が不定の空間を使います（4-08）。Magnen–Rivasseau–Sénéor 1993 は、Feynman ゲージのような共変なゲージは 'cannot be used directly at the beginning because of their lack of positivity' として正則化した軸ゲージを使い、OS の正値性は 'could be shown to hold with some additional work' と見込むにとどまります。**体積**。T^4 の上でも、反射正値な測度が作れれば有限体積の Hilbert 空間と転送行列は得られます（格子の周期箱ではそうなります。連続の T^4 上の構成そのものが未完です。問題文 §6）が、$\mathbb{R}^4$ の Poincaré 共変な理論には $T^4 \to \mathbb{R}^4$ が要ります（0-04 §09）既知 。

例。二次元の Driver 1989 の測度からはゲージ不変な期待値のユークリッド不変性が出ますが、公理の全体は主張されていません（7-02）。問題文 §6.4 は二次元の可換 Higgs 模型（Brydges–Fröhlich–Seiler）を 'the only complete example of an interacting gauge theory satisfying the axioms' と書き（2000 年の評価）、§6.5 は 'Establishing a quantum mechanical Hilbert space is part of the solution to this Millennium problem.' と続けます 既知 。2026-11 に公開された構成は、格子の極限の Schwinger 関数からこの章の再構成で Hilbert 空間を作り、構成自身の版の Wightman の公理を確かめています（Lean で証明されている、と委員会が評価した。12-08）。体積の極限は部分列で、極限は相の混ざりとして得られます（12-07）。

この章が言えている範囲

内容	状態
01〜03・07〜09 節	既知 （OS の論文の本文は未入手）
04・05 節の議論	一次元の筋で証明を書いた 既知 。実時間・押し出し・W_n は述べただけ
04 節末のグルーオンについての読み	物理 （格子の数値と解釈。定理ではない）
表 2・3、図 1・2、(11) の検査、寄り道	倍精度の 計算
四次元のヤン–ミルズの公理・Hilbert 空間・隙間	公理を満たす理論と Hilbert 空間は 2026-11 に公開された構成が作った（委員会の評価の水準。6-00）。隙間は示されていない（6-04）。この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 2・3・図・本文の数値	計算	python3・NumPy・SciPy（固有値・対角化・一般化固有値問題・乱数の種 1）
問題文の引用	既知	A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*（Clay Mathematics Institute, 2000）§3・§4・§6.2・§6.4・§6.5。本文で確認
五つの条件（E0〜E4）と線形増大の条件（E0′）	既知	K. Osterwalder, R. Schrader, Comm. Math. Phys. 31 (1973) 83–112；42 (1975) 281–305。書誌のみ。番号と線形増大の条件の形は Summers §3 と二次資料（Wikipedia “Osterwalder–Schrader theorem”）による
Schwinger の発言	既知	1958 年 CERN 会議の討論（会議録 p.140、Pauli の質問への応答）。Jaffe 2018 経由・会議録は未読
経緯・$S_n = W_n(x^E)$・線形増大の条件の役割	既知	A. Jaffe, arXiv:1802.07880；S. J. Summers, arXiv:1203.3991（§3・脚注 15）。本文を確認
Nelson・押し出し・ラプラス変換	既知	E. Nelson, J. Funct. Anal. 12 (1973) 97–112, 211–227；J. Fröhlich, K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. of Math. 118 (1983) 461–489；A. Klein, L. Landau, J. Funct. Anal. 44 (1981) 121–137；D. V. Widder, Bull. Amer. Math. Soc. 40 (1934) 321–326。書誌のみ
05 節の議論・Wilson 作用	既知	J. Glimm, A. Jaffe, *Quantum Physics*, 2nd ed.（Springer, 1987）書誌のみ（該当の章は未確認）；K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471。書誌のみ
04 節末のグルーオンの相関	物理	A. Cucchieri, T. Mendes, A. R. Taurines, Phys. Rev. D 71 (2005) 051902；P. O. Bowman ほか, Phys. Rev. D 76 (2007) 094505（クォークを含む格子 QCD）。書誌のみ（巻・頁は Crossref で照合）
09 節	既知	S. Chatterjee, arXiv:1803.01950 §1；J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, Comm. Math. Phys. 155 (1993) 325–383（§I）；B. K. Driver, Comm. Math. Phys. 123 (1989) 575–616（序論）。MRS の引用は §I。Bochner の定理は本文で定義

次に読む章：4-11 質量ギャップの定義。格子の反射正値性は 5-03。

質量ギャップの定義 — 真空の上の最低エネルギーと、相関の一様な減衰

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 質量ギャップは「真空に直交する状態のエネルギーの下限」で、虚時間では「すべての連結相関が一つの速さ以上で減ること」と同値であること。一つの相関や有限の範囲の測定からは上界しか出ないこと。粒子状態・クラスター性・相関長と隙間の異同。

前提となる章 — 4-10 Osterwalder–Schrader の公理と再構成・2-08 統計力学と相転移。道具は 1-10（スペクトル定理・変分原理）。$\hbar = c = 1$、$d = 4$。

先に言うこと — 定義と既知の対応の整理で、四次元ヤン–ミルズの隙間については何も示しません。隙間を問う前提の Hilbert 空間とハミルトニアンは、2026-11 に公開された構成が作りました（Lean で証明されている、と委員会が評価した。6-00）。その H に隙間があるかは示されていません（6-04）。計算の例はすべて自由場です。

この章の順序

1. 定義 — 真空に直交する状態のエネルギーの下限
2. 虚時間の顔 — すべての相関の一様な減衰と同値
3. 観測量ごとの減衰（図 1・表 1）
4. 有限の窓 — 測定からは上界だけ（図 2・表 2）
5. 粒子状態との違い
6. クラスター性
7. 相関長（表 3）
8. 有限の箱と一様性
9. ゲージ理論で読む
10. 付表：「隙間」の語の一覧 — 同値・上界・別物（付表）

01

定義 — 真空に直交する状態の、エネルギーの下限

問題文 §4 の定義は 'A quantum field theory has a mass gap Δ if H has no spectrum in the interval $(0,\,\Delta)$ for some $\Delta > 0$. The supremum of such Δ is the mass m, and we require $m < \infty$.' です（一語ずつの読みは 0-03 §06）。この文は (a) Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ と自己共役な $H \geq 0$（4-10 §05 の再構成で得るもの）と、(b) 位相を除いて一つの真空 Ω、$H\Omega = 0$（4-10 の表 1 のクラスター性）を前提にし、(c) 真空に直交する状態を問います。§1 の言葉では 'every excitation of the vacuum has energy at least Δ' です。(b) の下で、定義は次と同じです 既知 。

$$m = \inf \sigma\big(H|_{\Omega^\perp}\big) = \inf_{\psi \perp \Omega,\, \psi \neq 0} \frac{\langle \psi, H\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle}, \qquad \text{隙間がある} \iff m > 0 \tag{1}$$

二つ目の等号は変分原理です（1-10 §06）。(b) が要ることも (1) から読めます。真空と直交するエネルギー 0 の状態 Ω' があれば $\psi = \Omega'$ で (1) は 0 ですが、問題文の一文目だけなら 0 は $(0, \Delta)$ の外なので見落とします。例。質量 m の自由場では (1) も m（同じ字を使います）、質量 0 なら 0 です（4-10 §07）。

02

虚時間の顔 — 隙間は「すべての相関が一様に減ること」と同値

4-10 §05 の記号で、正の時間の有界な量 F はベクトル $[F]$ を与え、時間の向きに τ ずらす U_τ は $e^{-\tau H}$ になります。$\psi_F = [F] - \mathbb{E}[F]\,\Omega$ と置くと、**連結相関**（真空の成分を引いた相関）について

$$\mathbb{E}\big[\overline{\Theta G}\; U_\tau F\big] - \overline{\mathbb{E}[G]}\,\mathbb{E}[F] = \langle \psi_G, e^{-\tau H}\psi_F \rangle, \qquad \big|\langle \psi_G, e^{-\tau H}\psi_F \rangle\big| \leq e^{-m\tau}\,\|\psi_G\|\,\|\psi_F\| \tag{2}$$

です。不等式はスペクトル定理（1-10 §05）から出ます 既知 。逆も成り立ちます。すべての有界な F で $\langle \psi_F, e^{-\tau H}\psi_F \rangle \leq e^{-\Delta\tau}\|\psi_F\|^2$ なら $m \geq \Delta$ です。

これを見るために、ψ_F の**スペクトル測度** μ_F を使います。ψ_F を H の固有成分に分けたときの、重みのエネルギー軸 E の上の分布です。固有基底 e_k（$He_k = \lambda_k e_k$）があれば $\mu_F = \sum_k |\langle e_k, \psi_F \rangle|^2\, \delta_{\lambda_k}$ で（δ_λ は点 λ に置いた重み 1）、連続スペクトルでも同じ意味の分布がスペクトル定理から定まります。このとき $\langle \psi_F, e^{-\tau H}\psi_F \rangle = \int e^{-E\tau} d\mu_F(E)$ です。左辺は $\int e^{-E\tau} d\mu_F \geq e^{-\Delta'\tau}\mu_F([0, \Delta'))$（$\Delta' < \Delta$）なので、$\tau \to \infty$ で $\mu_F([0,\Delta')) = 0$ です。ψ_F の全体は $\Omega^\perp$ で**稠密**（$\Omega^\perp$ のどのベクトルにもいくらでも近づける）なので、$\Omega^\perp$ の上で $H \geq \Delta$ で

す。$E=0$ も含むので、真空が一つであることも一緒に出ます 既知 。**隙間は、すべての連結相関が観測量によらない一つの速さ以上で減ることと同値です。**

一つの相関 $C_F(\tau)=\int e^{-E\tau}d\mu_F(E)$ は**対数凸**、つまり $\log C_F$ が下に凸です（4-10 の (5) の $C(\tau_1+\tau_2)^2\le C(2\tau_1)\,C(2\tau_2)$ がこれに当たります）。だから**有効質量**は単調に下ります。

$$m_{\mathrm{eff}}(\tau)=-\frac{d}{d\tau}\log C_F(\tau)\ \searrow\ E_F:=\min\operatorname{supp}\mu_F,\qquad m=\inf_F E_F \tag{3}$$

$\operatorname{supp}\mu_F$（**台**）は μ_F の重みが載る最小の閉集合で、E_F は ψ_F が触れる最低のエネルギーです。どの時刻の m_{eff} も E_F の上界で、上からは一つの F で押さえられ、下からはすべての F が要ります（1-10 の囲み「上界と下界の非対称」と同じ形）。格子では U_a が転送行列 $T=e^{-aH}$ で、$m_{\mathrm{lat}}=\log(\lambda_0/\lambda_1)$、$\Delta=m_{\mathrm{lat}}/a$ です。λ_0・λ_1 は T の最大と二番目に大きい固有値です（ゲージ理論ではゲージ不変な状態の上。08 節）（2-09 の (1) はその最小の例）。

03

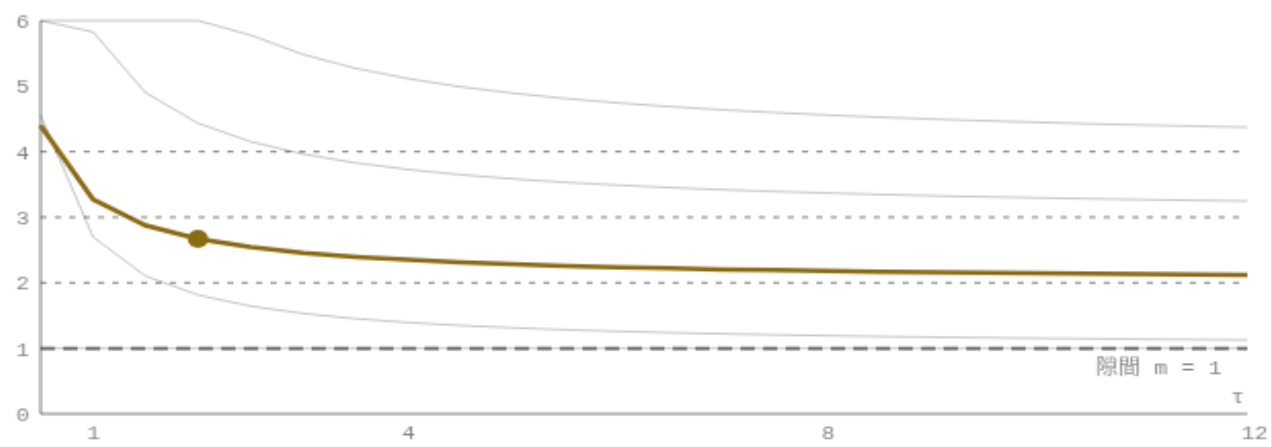
観測量ごとの減衰 — 一つの相関が見るのは、その観測量が触れる部分だけ

E_F が観測量で変わることを四次元の自由場（$m=1$）で見ます。4-10 §07 の Wick 積を空間で積分して運動量 0 にした O_k の相関は

$$O_k(\tau)=\int d^3x\,{:}\phi^k{:}(\tau,x),\qquad \frac{\mathbb{E}[O_k(\tau)O_k(0)]}{\text{体積}}=k!\int d^3x\,S(\tau,x)^k,\qquad S(x)=\frac{m\,K_1(m|x|)}{4\pi^2|x|} \tag{4}$$

です（S は四次元の自由場の二点関数、K_1 は修正ベッセル関数）。O_k はちょうど k 個の粒子を合計運動量 0 で作るので $E_{O_k}=km$ です。大きい τ では各粒子のエネルギーを $m+|p|^2/(2m)$ と近似でき、合計運動量 0 の k 粒子の相関は $e^{-km\tau}$ に、残る $k-1$ 個の三次元の運動量のガウス積分から $\tau^{-3(k-1)/2}$ が掛かります。そこで下端の近くでは $m_{\mathrm{eff}}\approx km+\frac{3(k-1)}{2\tau}$ です 計算 。隙間 1 を見るのは $k=1$ だけで、${:}\phi^2{:}$ をどれだけ精密に測っても 2 に近づくだけです。自由場では粒子の数が保たれるからで、相互作用があっても対称性で部分が分かれます（ヤン–ミルズでは 09 節のチャネル）。射影しない一点どうしの $S(\tau,0)$ では、同じ ϕ でも $1+\frac{3}{2\tau}$ のようにゆっくり下ります。動く粒子のエネルギーが連続に並び、一つの三次元の運動量の積分が同じ理由で $\tau^{-3/2}$ を掛けるからで、格子の測定が空間で和を取る理由です（5-08）。

図 1　観測量を選び τ を動かすと、有効質量（太線と丸）が観測量の下端（細い破線）へ下りる。隙間 m = 1（太い破線）まで下りるのは φ だけ



:φ²:、τ = 2.0：m_eff = 2.671（下端 2、隙間 1）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（(4) を τ の 0.5 刻みで求めた表を埋め込み）。

計算 表 1　自由場（$m = 1$）の $m_{\mathrm{eff}}(\tau)$。括弧は下端 E_F。運動量 0 の ϕ はどの τ でも 1.00000 で、閉じた形 $e^{-\tau}/2$ と倍精度の丸めの範囲で一致した。

τ	φ 一点 (1)	:φ²: (2)	:φ³: (3)	:φ⁴: (4)
2	1.81431	2.67113	4.43494	6.22414
4	1.39395	2.35013	3.72854	5.11460
8	1.19273	2.18027	3.36864	4.55915
16	1.09513	2.09177	3.18575	4.28029

どの列も単調に下り（$\tau \le 12$ の 0.25 刻みのすべての点で確かめた）、$\tau = 16$ で漸近形と 0.13% 以内で合い、最後まで下端より上にあります。読めるのは E_F の上界です 計算 。

04

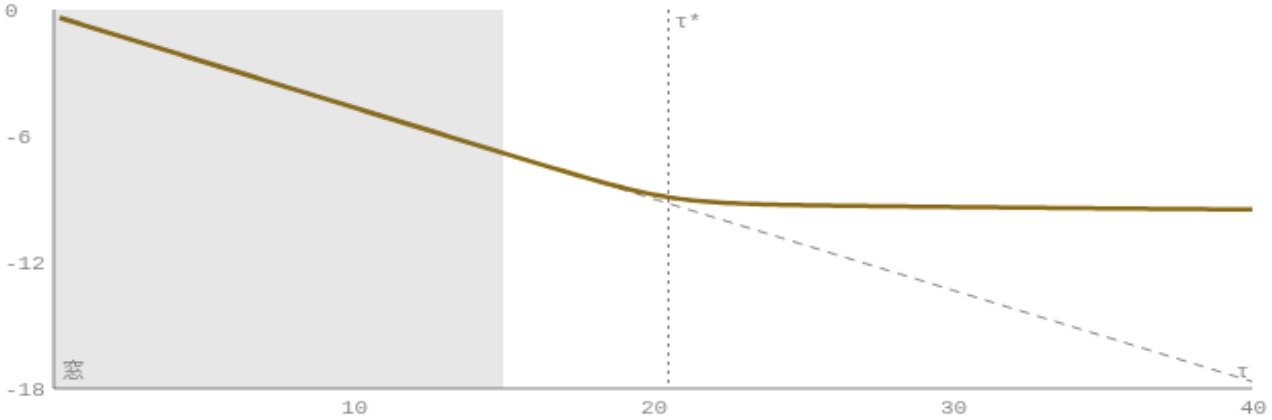
有限の窓 — 減衰を測っても、隙間の下界は出ない

測定で見られる τ の範囲を**窓**と呼びます（正確には有限区間 $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$）。(3) の下限は無限に多くの F と $\tau \to \infty$ を含むので、窓の中の測定はその一部しか見ません。質量 1 の自由場 ϕ と質量 0 の自由場 χ を独立に並べた、隙間の無い理論で見ます。$O = \int d^3x\, [\phi + \varepsilon :\chi^2:]$ の相関は、交差項が消えて

$$\frac{\mathbb{E}[O(\tau)O(0)]}{\text{体積}} = \frac{e^{-\tau}}{2} + \frac{\varepsilon^2}{8\pi^2 \tau}, \qquad m_{\mathrm{eff}}(\tau) = \frac{\frac{1}{2}e^{-\tau} + \frac{\varepsilon^2}{8\pi^2\tau^2}}{\frac{1}{2}e^{-\tau} + \frac{\varepsilon^2}{8\pi^2\tau}} \tag{5}$$

です（第二項の係数は数値積分で 12 桁確かめた 計算 ）。二項が等しくなる τ^* までは $m_{\mathrm{eff}} \approx 1$ で、「隙間 1 の理論」に見えます。

図 2　ε を小さくすると、相関（太線、縦軸は常用対数）が $e^{-\tau}/2$（破線）から離れる点 τ* が右へ逃げる。窓の端を動かすと、そこでの m_{eff} が変わる



ε = 1e−3：τ* = 20.51。窓の端 τ = 15.0 で m_eff = 0.9949

計算 この図の数値はこの端末で計算した（(5) をその場で計算。τ* は二分法）。

計算 表 2　(5) の τ^* と m_{eff}。

ε	τ*	m_eff(20)
10^{-1}	10.646	0.0502
10^{-2}	15.636	0.0652
10^{-3}	20.512	0.6384
10^{-4}	25.328	0.9942
10^{-6}	34.858	1.0000

二項を等しく置くと $\tau^* = \ln(1/\varepsilon^2) + \ln(4\pi^2\tau^*)$ なので、ε が一桁小さくなるごとに τ^* は $2\ln 10 \approx 4.6$ に対数の補正を足した約 5 だけ延び、どんな有限の窓にも「隙間 1」に見える ε があります（十分先では $m_{\mathrm{eff}} \approx 1/\tau$）。有限の窓の測定から隙間の下界は出ません 既知 。格子の数値の読み方は 16-08 §07。

05

粒子状態との違い — 孤立した固有値は、隙間とは別の要求

質量の作用素 $M = \sqrt{H^2 - P^2}$ の隙間は H の隙間と同じ幅でした（0-03 §06）。**質量 μ の一粒子状態**は M の固有値 μ に属する状態で（粒子を Poincaré 群の既約表現と見る Wigner 1939 の考え）、μ の近くに他の $\sigma(M)$ の点が無ければ**孤立**しています。問題文 §5 はこれを要求の外に置き、'one would like to prove the existence of an isolated one-particle state (an upper gap, in addition to the mass gap)' と書きます 既知 。

違いは二点関数に出ます。スカラー場 ϕ（$\langle \Omega, \phi\,\Omega\rangle = 0$）のユークリッドの二点関数は、正の測度 ρ で

$$\widehat{S}_2(p) = \int_{[0,\infty)} \frac{d\rho(s)}{p^2 + s}, \qquad \int d^3x\, S_2(\tau, x) = \int \frac{e^{-\sqrt{s}\,\tau}}{2\sqrt{s}}\, d\rho(s) \tag{6}$$

と書け、Källén–Lehmann の表示と呼ばれます 既知 （右は 4-10 の (3) を s で重ねたもの）。隙間 m があれば ρ の台は $[m^2, \infty)$ に入り、質量 μ の粒子に ϕ が触れれば ρ は $s = \mu^2$ に点の重みを持ちます。

例 1：隙間はあるが粒子は無い。ρ を $[m^2, 4m^2]$ 上の一様な重みにし、共分散 $\int d\rho(s)(-\Delta + s)^{-1}$ のガウス測度を取ります。反射正値性は共分散の正の重ね合わせで保たれる条件なので、各 s で成り立てば（4-10 §07）正の測度 ρ で積分しても成り立ちます。再構成すると「一粒子」の M は $[m, 2m]$ を連続に埋め、$\sigma(H) = \sigma(M) = \{0\} \cup [m, \infty)$ です。隙間は m で、M の固有値は 0 のほかにありません。この種の場は一般化自由場と呼ばれます（Greenberg 1961）既知 。**例 2：粒子はあるが隙間は無い。**04 節の理論で ϕ の一粒子状態は $M = 1$ ですが、χ の二粒子が $[0, \infty)$ を埋め、固有値 1 は連続スペクトルに埋もれています。

ヤン–ミルズで物理が期待するのは隙間の下端の孤立したグルーボールです 物理 。相関から孤立点と連続の端を見分ける難しさは 16-08 §05。

06

クラスター性 — 空間の向きに離すと、どれだけ速く独立になるか

速さを問わない**クラスター性**（遠ざけた二つの量が独立に近づくこと）は Osterwalder–Schrader の公理 E4 で、真空が一つであることと対です（4-10 の表 1）既知 。質量 0 の自由場もこれを満たしますが、相関は $1/(4\pi^2|x|^2)$ と冪でしか減りません。問題文 §5 の式 (2) は、$\langle \Omega, \mathcal{O}\Omega\rangle = 0$ の局所場 $\mathcal{O}(x) = e^{-iP\cdot x}\mathcal{O}e^{iP\cdot x}$ について

$$|\langle \Omega, \mathcal{O}(x)\,\mathcal{O}(y)\,\Omega\rangle| \le e^{-C|x-y|} \qquad (0 < C < \Delta,\ \ |x-y| \text{ が十分大きいとき}) \tag{7}$$

です。ユークリッドの側の筋は (2) と回転不変性（ユークリッド共変性。Osterwalder–Schrader の公理 E1）です。半径 δ に局在した二つの量が距離 R 離れていれば、結ぶ向きを回転で τ 軸に合わせると (2) から連結相関は（R によらない定数）$\times e^{-m(R-2\delta)}$ 以下です。同時刻で空間的に離れた点では、Wightman 関数（場の積の真空期待値。4-09 §04）は Schwinger 関数の時刻 0 での値に等しいので（4-10 §05 の解析接続）、このユークリッドの相関の減衰がそのまま (7) になります。点の場 $\mathcal{O}(x)$ は有界な量ではないので、正確には場を半径 δ の範囲で少しぼかした量で考えます。(7) の「$C < \Delta$」「十分大きいとき」は、前に付く定数と幅 2δ の分です。ミンコフスキーの側の定理は、Nachtergaele–Sims 2006 の序論が 'in

[1] Fredenhagen proves a general theorem applicable to arbitrary strictly local theories' と紹介しています（[1] は Fredenhagen 1985）既知 。

逆向きは一般には成り立たず、同じ序論は、基底状態が一つで相関が指数関数的に減るのに隙間の無い格子の量子系があると書き、例として Nachtergaele 1996 の Example 2 を挙げます 既知 。回転不変なユークリッドの理論では時間も向きの一つです。「すべての向きに一様な速さで減る」なら時間の向きにも同じ速さで減るので、02 節の逆向きの議論（前に付く定数は F ごとでよい）がそのまま使え、隙間と同値です。二つの相を混ぜた状態（2-09 §08）はクラスター性そのものを破り、(1) の前提 (b) が崩れます。

07

相関長 — 隙間の逆数を、長さで言い直す

2-08 の (6) は一つの相関から相関長を定めました。理論の相関長は観測量にわたる上限です。

$$\frac{1}{\xi_F} = -\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\log C_F(\tau) = E_F, \qquad \xi := \sup_F \xi_F = \frac{1}{m} \tag{8}$$

どちらも (3) の言い換えです 既知 （単位を戻せば $\xi = \hbar c/\Delta$、格子では $\xi_{\mathrm{phys}} = a\,\xi_{\mathrm{lat}} = 1/\Delta$ ）。Chatterjee 2018 の格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）はプラケットの相関で格子の相関長を定め、'The number ξ represents the reciprocal of the mass of the lightest glueball' と書きます 既知 。

二次の積率による $\xi_{2\mathrm{nd}}^2 = \sum_x |x|^2 G(x) \big/ \big(2d\sum_x G(x)\big)$ もよく使われ、格子では減衰の速さが向きにもよります（4-02）。隙間の逆数に等しいのは転送行列の向き（軸）の長さです。四次元の格子の自由場（共分散 $(-\Delta_{\mathrm{lat}} + m_0^2)^{-1}$）では閉じた形があります。

$$\cosh\frac{1}{\xi_{\text{軸}}} = 1 + \frac{m_0^2}{2}, \qquad \xi_{2\mathrm{nd}} = \frac{1}{m_0}, \qquad \text{向き } e \text{ の減衰率} = \max\Big\{q\cdot e : \sum_{\mu}(2\cosh q_\mu - 2) \le m_0^2\Big\} \tag{9}$$

三つ目の e は長さ 1 のベクトルで、軸は $e=(1,0,0,0)$、対角は $e=(1,1,1,1)/2$ です。

計算 表 3　四次元の格子の自由場。右の二列は $\xi_{\text{軸}}$ との比（対角は $e=(1,1,1,1)/2$ の向き）。(9) の三つ目は、二次元の周期格子で二点関数を高速フーリエ変換で求め、軸と対角で 0.11% 以内で合うことを確かめた。

m_0	$\xi_{\text{軸}}$	$\xi_{\text{対角}}/\xi_{\text{軸}}$	$\xi_{2\mathrm{nd}}/\xi_{\text{軸}}$
2	0.5673	0.91579	0.88137
1	1.0390	0.97228	0.96242
0.2	5.0083	0.99876	0.99834

m_0	$\xi_{\text{軸}}$	$\xi_{\text{対角}}/\xi_{\text{軸}}$	$\xi_{\text{2nd}}/\xi_{\text{軸}}$
0.05	20.0021	0.99992	0.99990

相関長が格子間隔程度（$m_0 = 1, 2$）だと三つの長さは 3〜12% 食い違い、$\xi_{\text{軸}} = 20$ では差は 10^{-4} の桁で、回転の対称性が戻ります（連続極限。2-08 §08）。自由場の外では長さどうしが一致する保証は無く、隙間に使うのは $\xi_{\text{軸}}$ です。

08

有限の箱と一様性 — 隙間が問われるのは極限の側

有限の格子では、隙間が正であることはほとんど自明です。時間ゲージでは、転送行列 T（5-03 §05）は一つの時刻のリンクの値の空間 $L^2(G^n)$（G はコンパクトな群、n はリンクの数）に作用する、正の連続な核を持つ積分作用素です。コンパクトな空間の上の連続な核なので T はコンパクトな作用素（正確には、有限次元の行列のノルム極限）で、固有値は 0 以外に集積しない離散の列です。さらに核が正なので、Jentzsch の定理（Perron–Frobenius の定理の無限次元版）から最大固有値 λ_0 は単純で、$\lambda_1 < \lambda_0$ です 既知 。群が有限なら T は成分が正の有限の行列で、文字どおり Perron–Frobenius の定理です。最大固有値が単純なだけでは、残りの固有値が λ_0 に詰まる可能性が残るので、離散であることが要ります。問われるのは、体積 $L \to \infty$ と格子間隔 $a \to 0$ の極限で $m_{\text{lat}}(a, L)/a$ が正に留まるかです。問題文 §6.5 は 'New ideas are needed to prove the existence of a mass gap that is uniform in the volume of space-time.' と書き、§5 も一様な隙間が無限体積極限の証明で役を果たしうると述べます 既知 。(2) は相関どうしの不等式です（右辺の $\|\psi_F\|^2 = \mathbb{E}[\overline{\Theta F} F] - |\mathbb{E}[F]|^2$ も相関です）。だから近似の列で同じ Δ のまま成り立ち相関が収束すれば、極限でも成り立ちます。02 節の逆向きを極限の理論で使えば $m \geq \Delta$ です（ψ_F の全体が $\Omega^\perp$ で稠密なことは再構成の作り方から。7-01）。

有限の箱の隙間が $L \to \infty$ で閉じる型は、質量 0 の粒子（周期的な箱で $2\pi/L$。2-05 §06）と対称性の破れ（相の間のトンネルの分裂。2-09 §08）です。後者では無限体積の各相に隙間があり、問題文 §6.3 は二次元の ϕ^4 の各相が 'a non-zero mass gap and a unique, Poincaré-invariant vacuum state' を持つと書きます 既知 。$a \to 0$ では Δ 一定なら $m_{\text{lat}} = a\Delta \to 0$ で、格子単位の隙間が一様に正なことは連続極限の $\Delta = \infty$ を意味します（5-09）。

09

ゲージ理論で読む — ゲージ不変な状態の上の隙間

ヤン–ミルズでは (1) の $\mathcal{H}$ はゲージ不変な状態の空間で（4-01）、(2)・(3) の観測量は場の強さから作る $\mathrm{Tr}\, F_{ij} F_{kl}(x)$ のような局所量（問題文 §4）や Wilson ループです（4-10 §09）。状

態はスピン・パリティ・荷電共役の組 J^{PC}（チャネル）で分かれ（J はスピン、P と C は空間反転と、場を複素共役〈反粒子〉に替える操作に対する符号 ±）、03 節の k と同じく各チャネルの最低エネルギーの最小が m です。格子の数値では 0^{++} が最低で（純 $SU(3)$ で 2^{++} の約 0.7 倍。Chen ほか 2006。5-08）、物理ではそれを隙間の下端と読みます 物理 。

ゲージを固定した場の相関は一般に反射正値である保証が無く（4-10 §04・§09）、グルーオンの伝播関数では破れていると読まれています 物理 。反射正値でない相関の減り方は $\sigma(H)$ の点を与えません。弦張力は静的な電荷の対のエネルギーで決まり、真空の上の励起とは別の量です（16-08 §06）。数学では、格子の強結合（小さい β）での格子単位の隙間に以前からの結果があります（5-04）。Shen–Zhu–Zhu 2023 は 't Hooft の規約（作用の結合を $N\beta$ の形に書く。他の規約への換算は 5-01 の表 4）で、$SU(N)$ なら $|\beta| < 1/(16(d-1))$ のとき、ある族の観測量の相関が指数関数的に減ることを示しました。要旨はこれを 'strictly positive mass gap' と呼び、'Our method improves earlier results' とも書きます 既知 。02 節の同値に使うには、その族が稠密であることが要ります。これは 08 節の極限の手前の結果で、四次元の連続の理論では (1) の $\mathcal{H}$ と H は 2026-11 に公開された構成が作りましたが（委員会の評価の水準。12-08）、その隙間は示されていません（6-04。それより前の到達点は 7-10）。

10

付表：「隙間」の語の一覧 — 同じ語、同値・上界・別物

この本には「隙間」「ギャップ」と呼ばれる量が十以上出てきます。問題文の Δ と**同値**なもの、Δ の**上界**にしかならないもの、**別物**（別の作用素の隙間、または追加の要求）があり、取り違えると主張の向きが変わります。下の表は、各行の定義・主に扱う章・Δ との関係を一行ずつ並べたものです（関係の付け方はこの本の整理。上界と下界の向きは 1-10 の囲み「上界と下界の非対称」）。

付表　「隙間」の語。関係の欄の「同値」は、記した前提の下で同じ数になること。

#	名前	定義（一行）	章	Δ との関係
1	ハミルトニアンの隙間（質量ギャップ）	$\Omega^{\perp}$ の上の H のスペクトルの下限 Δ	§01・0-03 §06	基準（問題文の Δ）
2	質量作用素の隙間	$M=\sqrt{H^2-P^2}$ の 0 の次	§05・0-03 §06	同値（同じ幅）
3	一様な減衰率	すべての連結相関が $e^{-m\tau}$ 以上の速さで減る最大の m	§02	同値（(2)・(3)。反射正値性の下）
4	相関長の逆数	$1/\xi$、$\xi=\sup_F \xi_F$（転送行列の向き）	§07	同値（(8)）。$\xi_{2\mathrm{nd}}$・対角の向きの長さは別物（自由場で近い）

#	名前	定義（一行）	章	Δ との関係
5	有効質量	$m_{\mathrm{eff}}(\tau) = -\frac{d}{d\tau}\log C_F(\tau)$	§02・§04・18-01 §08	上界（$m_{\mathrm{eff}}(\tau) \geq E_F \geq \Delta$）
6	転送行列の隙間（格子単位）	$m_{\mathrm{lat}} = \log(\lambda_0/\lambda_1)$	§02・5-03	格子で同値（$T = e^{-aH}$）
7	物理単位の隙間	$\Delta = m_{\mathrm{lat}}/a$	§08・5-09	6 と a で結ぶ。連続極限で問われるのはこちら
8	有限体積の隙間	一辺 L の箱の T の $\lambda_1 < \lambda_0$	§08	常に正（Jentzsch の定理）。Δ については何も言わない
9	一様な隙間	体積 L（と範囲を決めた β）について $\inf m_{\mathrm{lat}} > 0$	§08・5-04・16-05	無限体積での 6 の下界。β に一様な格子単位の隙間は、物理単位では $\Delta = \infty$ の側（偽の友。18-01）
10	上の隙間（upper gap）	一粒子の固有値 μ が $\sigma(M)$ の残りから離れている幅	§05	別物（問題文 §5 の追加の要求）
11	Langevin の隙間	経路の測度（格子の Wilson 測度）の生成作用素 L の隙間 $1/C_P$	1-10 §09・18-03 §05	別物（人工的な時間の隙間）。自由場では $1/C_P = m^2$（隙間の二乗）。揃うと置くのが 23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定
12	時刻 0 の測度の Poincaré 定数	基底状態の分布 $\phi_0^2 dx$ の C_P	2-05 §08	同値（基底状態変換。$C_P = \hbar^2/(2m\Delta)$ の正規化で）

11 と 12 はどちらも Poincaré 定数ですが、11 は虚時間の経路全体の測度、12 は一つの時刻の測度についての量で、同値なのは 12 だけです（2-05 §08）。5 と 9 は向きが逆で、5 は一つの観測量で出る上界、9 はすべての観測量と体積にわたる下界です。

この章が言えている範囲

内容	状態
(1)〜(3)・(8)、05 節の例、08 節の有限の格子の隙間	既知 。筋を本文に書いた
表 1〜3・図 1・2・(5)・(9) の検査、03 節の漸近形との照合	自由場の倍精度の 計算
(7) のユークリッドの側	筋のみ。ミンコフスキーの側は Fredenhagen 1985（書誌のみ）
10 節の付表の「同値・上界・別物」	この本の整理。各行の根拠は本文と挙げた章（既知 の言い換え）
09 節のグルーボール	物理 （格子の数値と外挿）
四次元ヤン–ミルズの隙間	$\mathcal{H}$・H は 2026-11 に公開された構成が作った（委員会の評価の水準。12-08）。隙間は示されていない（6-04）。この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表・図・本文の数値	計算	python3・NumPy・SciPy（数値積分・二分法・FFT）
問題文 §1・§4・§5・§6.3・§6.5、格子の相関長の問題	既知	A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*（Clay, 2000）；S. Chatterjee, arXiv:1803.01950 §5。本文で確認
06 節	既知	B. Nachtergaele, R. Sims, Comm. Math. Phys. 265 (2006) 119–130（arXiv:math-ph/0506030）序論を確認；K. Fredenhagen, 'A Remark on the Cluster Theorem', Comm. Math. Phys. 97 (1985) 461–463 書誌のみ；B. Nachtergaele, Comm. Math. Phys. 175 (1996) 565–606 の Example 2 書誌のみ
05 節	既知	H. Lehmann, Nuovo Cimento 11 (1954) 342–357；O. W. Greenberg, Ann. Phys. 16 (1961) 158–176；E. Wigner, Ann. of Math. 40 (1939) 149；G. Källén 1952 'On the Definition of the Renormalization Constants in Quantum Electrodynamics'（初出の誌名・巻は未確認）。書誌のみ
08 節	既知	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471 書誌のみ（転送行列の構成は 5-03）
09 節	物理・既知	Y. Chen ほか, Phys. Rev. D 73 (2006) 014516 表 VIII（本文）；H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, Comm. Math. Phys. 400 (2023) 805–851（arXiv:2204.12737 の要旨）

次に読む章：4-12 寄り道：摂動級数は発散する。極限で何を固定するかは 5-09。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 4 部 量子化 発散級数・Borel 和・renormalon

寄り道：摂動級数は発散する — 係数の階乗は、級数に映らない e^{-c/g^2} の影であることが多い

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 係数が $n!$ で増える出どころ（負の結合・鞍点・運動量積分の端）。最良の打ち切りと Borel 和、その曖昧さが e^{-c/g^2} の項と組になること。ヤン–ミルズの Borel 平面で期待される特異点。

前提となる章 — 4-04 発散と繰り込み（走る結合）。4-03 §08 の漸近級数とゼロ次元の模型 (2) を使います。複素関数論は Cauchy の積分公式だけをその場で述べて使います。

先に言うこと — 模型の式は導出でき、数値はこの端末で確かめました。四次元ヤン–ミルズの級数の発散・renormalon・級数と理論の関係は物理の水準の期待で、定理ではありません。この章はヤン–ミルズについて何かを示す章ではありません。

この章の順序

1. 漸近級数 — 収束しなくても近づく：係数は関数から決まり、逆は決まらない
2. Dyson の議論 — 結合の符号を裏返す：負の結合で虚部 $e^{-3/(2s)}$ が出る
3. 係数は裏返しの側で決まる — 分散関係と鞍点：虚部から $n!\,(2/3)^n$
4. 最良の打ち切り — 項が最小のところで止める：誤差の底は $e^{-3/(2u)}$
5. Borel 和 — $n!$ で割って、積分で戻す：模型では厳密な値に戻る
6. 正の軸に特異点があるとき — 曖昧さと指数的に小さい項：和が割れる
7. renormalon — 運動量積分の端から来る $n!$：山が Λ に届く次数で止まる
8. ヤン–ミルズの Borel 平面 — 期待される特異点の地図：renormalon が最も近い
9. 数学から見ると — 何が定理で、何が期待か：四次元では漸近性は示されていない

01

漸近級数 — 収束しなくても近づく

この章の問題は、繰り込みで有限になった係数を並べた**級数そのものが収束しない**ことです（4-04 の発散とは別）。それでも使い道はあります。次数 N を決めて $u \to 0$ とすると打ち切りの誤差が u^{N+1} の速さで消えるとき、級数は f に**漸近する**と言い、$f(u) \sim \sum a_n u^n$ と書きます。

$$\left| f(u) - \sum_{n=0}^{N} a_n u^n \right| \le K_{N+1}\, u^{N+1} \qquad (0 < u < u_0,\ N = 0, 1, 2, \dots) \tag{1}$$

収束とは極限の順が逆です。係数は f から一通りに決まりますが 既知 、逆は成り立ちません。$e^{-1/u}$ はどの u^N より速く 0 に近づくので、f と $f + e^{-1/u}$ は同じ級数を持ちます（7-12 §07）。この章の主題は、この「係数に映らない部分」が係数の増え方に記録されていることです。

例。$e^{-1/u}$ の係数がすべて 0 であることは、(1) を u^N で割った形で確かめられます。$v = 1/u$ と置くと $e^{-1/u}/u^N = v^N e^{-v}$ で、$u \to 0$（$v \to \infty$）のとき指数関数が冪に勝って 0 に近づきます。どの N でもそうなので、$a_0 = a_1 = \cdots = 0$ です。逆向きの例がこの章の模型 (2) です。4-03 §08 の (14) は $u \ge 0$ で $\left| Z(u) - \sum_{n<N} a_n u^n \right| \le |a_N|\, u^N$ を示しており、(1) の K_N として $|a_N|$ が取れます。K_N は N とともに階乗で増えますが、(1) が要るのは N を決めるごとの評価だけなので、級数は Z に漸近します。

02

Dyson の議論 — 結合の符号を裏返す

Dyson（1952）の要旨は、量子電磁気学の冪級数が繰り込み後もすべて発散するという結論へ 'tentatively' 導く議論を示すと書きます 既知 。骨子は「$e^2 < 0$ では同符号の電荷が引き合って真空が崩れるので、級数は $e^2 = 0$ の両側へ滑らかには続けない」という形で紹介されます。発見的な議論です。小さな模型なら全部を計算できます。

$$Z(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-S_u(x)}, \qquad S_u(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{u}{4!}x^4 \tag{2}$$

$u = -s < 0$ では積分が存在しません（模型の中の「真空の崩れ」）。それでも変数を $x \to e^{-i\theta/4}x$ と回すと $u = s\,e^{i\theta}$ の四次の項が $s\,x^4$ に戻るので、Z は複素数の u へ延びます。積分路を回してよい理由は二つです。一つは、閉じた道とその内側で複素微分できる関数の、その道に沿う積分は 0 になること（Cauchy の定理 既知 。§03 で積分公式の形で使います）。被積分関数は x の多項式の指数なので、どこでも複素微分できます。もう一つは、元の実軸と回し

た直線にはさまれた扇形の遠い弧の上で、四次の項の実部が正のまま $|x|^4$ の速さで効き、弧の寄与が $|x| \to \infty$ で消えることです。上から負の軸へ近づけると

$$Z(-s+i0) = e^{-i\pi/4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\,\frac{i}{2}x^2 - \frac{s}{24}x^4} \tag{3}$$

は実でない値になり、下からならその複素共役です。**負の軸の上下で値が食い違う——ここが発散の源です**。虚部は壁の高さで決まります。$S_{-s}(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{s}{24}x^4$ は $x^2 = 6/s$ で最大値 $\frac{3}{2s}$ を取り、谷から壁を越えて漏れる確率の目安が $e^{-3/(2s)}$ です。正確には、ゼロ次元の積分にトンネルはありません。(3) の被積分関数の鞍点 $x^2 = 6/s$ での作用の値 $\frac{3}{2s}$ が虚部の指数を決め、$s \to 0$ での主要項が $-e^{-3/(2s)}/\sqrt{2}$ になる、という意味です（表 1）。

計算 表 1　(3) の数値積分。虚部は $s \to 0$ で $-e^{-3/(2s)}/\sqrt{2}$ に近づく

s	$\mathrm{Im}\, Z$	$e^{-3/(2s)}/\sqrt{2}$	比
0.50	-3.351e-2	3.521e-2	0.952
0.20	-3.825e-4	3.911e-4	0.978
0.10	-2.138e-7	2.163e-7	0.988

03

係数は裏返しの側で決まる — 分散関係と鞍点

使う道具は **Cauchy の積分公式**です：閉じた道とその内側で複素微分できる関数は、内側の点で $f(u) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(w)}{w-u}\,dw$（反時計回り）を満たします 既知 。$Z$ は負の軸を除く平面で複素微分でき、無限遠で $|w|^{-1/4}$ と減るので、道を大きな円と負の軸の上下に取ると上下の差 $2i\,\mathrm{Im}\, Z$ だけが残ります。

$$Z(u) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\, Z(-s+i0)}{s+u}\,ds \tag{4}$$

これが**分散関係**です（(3) で計算した虚部で右辺を数値積分すると $u = 0.5, 1, 2$ で左辺と 10^{-6} の桁まで合います 計算 ）。$\frac{1}{s+u} = \sum_n (-u)^n/s^{n+1}$ と展開して項ごとに積分すると

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\, Z(-s+i0)}{s^{\,n+1}}\,ds \tag{5}$$

で（$u = 0$ で複素微分できないので、得られるのは漸近級数）、n が大きいと効くのは $s \to 0$ の虚部 $\approx -e^{-3/(2s)}/\sqrt{2}$ だけです。$\int_0^\infty e^{-c/s} s^{-n-1} ds = \Gamma(n)/c^n$ から

$$a_n \approx (-1)^n \Big(\frac{2}{3}\Big)^n \frac{\Gamma(n)}{\pi\sqrt{2}} \tag{6}$$

階乗の出どころは $\Gamma(n)=(n-1)!$、底の $2/3$ は壁の高さ $3/(2s)$ の係数の逆数、符号の交代は特異点が負の軸にあることから来ます。

計算 表 2　厳密な係数 $a_n=\frac{(4n-1)!!}{n!}\left(-\frac{1}{24}\right)^n$（有理数）と (6) の比

n	a_n	$a_n/(6)$
1	-0.1250	0.833
10	1.3901e+3	0.981
20	8.1571e+12	0.991
40	4.1327e+38	0.995

鞍点の作用から大きい次数を読むこの筋を場の理論に持ち込んだのは Lipatov（1977）とされ、Beneke（1999）の総説はインスタントン（虚時間の古典解。§06 で定義します）による階乗の発散を Lipatov 1977 に帰します 既知 。

量子力学の $H=\frac12 p^2+\frac12 x^2+gx^4$ の基底エネルギー $\frac12+\frac34 g-\frac{21}{8}g^2+\cdots$ の大きい次数は Bender–Wu（1969・1973）が調べました（要旨） 既知 。知られた形 $E_n\approx(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}}3^n\Gamma(n+\frac12)$（出典の本文は未確認）と、有理数で 150 次まで計算した係数の比は $n=10$ で 0.832、150 で 0.991 です 計算 。底の 3 は、$V=\frac12 x^2-|g|x^4$ の壁を虚時間ですり抜ける作用 $\frac{1}{3|g|}$ の係数の逆数です。

04

最良の打ち切り — 項が最小のところで止める

素朴な方法は**項が最小になる所で止める**ことです。(6) の項 $\Gamma(n)(2u/3)^n$ は $n\approx 3/(2u)$ まで減り、その先で増えます。Stirling の公式 $\Gamma(n)\approx\sqrt{2\pi/n}\,(n/e)^n$ をそこに入れると

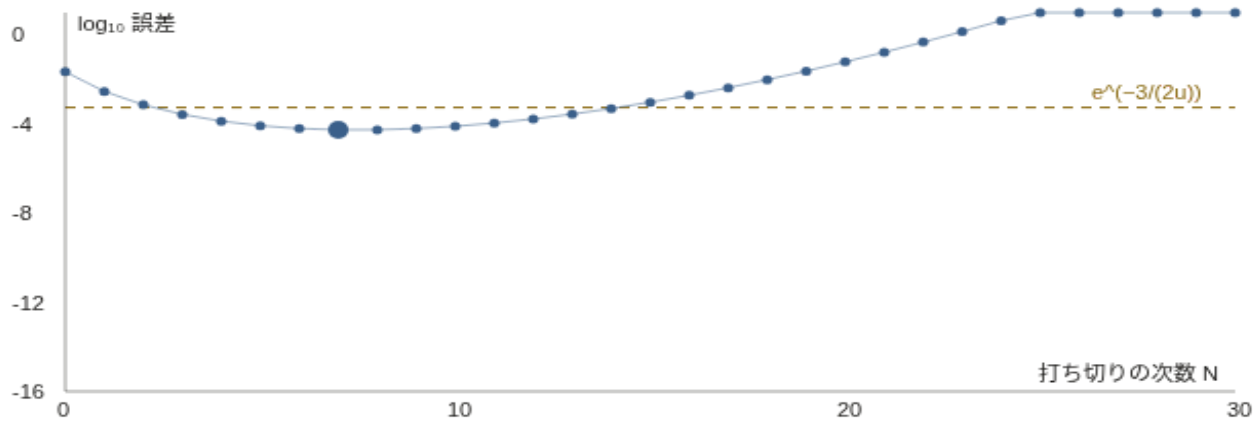
$$\min_n |a_n u^n| \;\approx\; \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2\pi}{N^*}}\,e^{-N^*} \;\propto\; \sqrt{u}\,e^{-3/(2u)}, \qquad N^*\approx\frac{3}{2u} \tag{7}$$

です。誤差の底は、**壁の高さで決まる指数的に小さい量**の大きさで、級数はそれより細かいことを言えません。第 01 節の「係数に映らない部分」が精度の限界として現れます（右端の比が動くのは $\sqrt{u}$ のため）。

誤差がほぼ最小の項になる理由。この模型では、4-03 §08 の (14) により、N 項で止めた誤差は最初に捨てた項 $|a_N|u^N$ を超えません 既知 。項が最小になる所で止めれば、誤差はその最小の項以下です。係数の符号が交代するので、実際の誤差は最小の項のほぼ半分に落ち着きます（表 3 の 6 行で 0.47〜0.50 倍 計算 ）。こうして「最良の誤差 ≈ 最小の項 ≈ (7)」となります。**表 3 の読み方**。各行は u を一つ決め、0 次から N 次までの部分和（$N<60$）を直接の数値積分 $Z(u)$ と比べて、誤差が最も小さい N とその誤差を示します。最良の N は $3/(2u)$ の辺

りに来ます。右端の列は誤差を $e^{-3/(2u)}$ で割ったもので、u を 0.1 から 2 まで変えても 0.07〜0.26 に収まります。誤差が $e^{-3/(2u)}$ と同じ速さで小さくなる、ということです。

図 1　u を変えると、打ち切りの誤差 $|S_N(u) - Z(u)|$（対数目盛）の谷の底が破線 $e^{-3/(2u)}$ と平行に（約 1 桁下で）動く



u = 0.20 Z(u) = 0.97791537 最良の N = 7 最小の誤差 5.52e−5 e^(−3/(2u)) = 5.53e−4

計算 この図の数値はこの端末で計算した（Simpson 則と係数の漸化式。表 3 と一致）。

計算 表 3　最良の打ち切り（$Z(u)$ は直接の数値積分。第 05 節の Borel 和 (8) は 6 行とも 5×10^{-16} 以内（倍精度の丸めの範囲）で一致）

u	最良の N	最小の誤差	誤差 $/e^{-3/(2u)}$
0.1	15	2.18e−8	0.071
0.2	7	5.52e−5	0.100
0.3	5	7.96e−4	0.118
0.5	3	7.31e−3	0.147
1.0	1	4.39e−2	0.197
2.0	1	1.22e−1	0.259

05

Borel 和 — $n!$ で割って、積分で戻す

Borel 和は、$n!$ をいったん割って収束させ、$\int_0^\infty e^{-t} t^n \, dt = n!$ で掛け戻します。

$$B(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} \, t^n, \qquad \tilde{Z}(u) = \frac{1}{u} \int_0^\infty e^{-t/u} \, B(t) \, dt \tag{8}$$

B を **Borel 変換**、t の複素平面を **Borel 平面**と呼びます。項ごとに $\frac{1}{u}\int_0^\infty e^{-t/u} \frac{t^n}{n!} dt = u^n$ なので、$\tilde{Z}$ の漸近級数は元の級数です。ゼロ次元の模型では $(4n-1)!! = 16^n (\frac{1}{4})_n (\frac{3}{4})_n$（$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$）から

$$B(t)=\sum_{n\ge 0}\frac{(\frac14)_n(\frac34)_n}{(n!)^2}\Big(-\frac{2t}{3}\Big)^n={}_2F_1\Big(\tfrac14,\tfrac34;1;-\tfrac{2t}{3}\Big)\tag{9}$$

です。超幾何関数 ${}_2F_1(a,b;c;z)$ は $z=1$ から伸びる切れ目を除く平面に延びます 既知 。**Borel 平面の特異点は $t=-3/2$ の一点だけで、位置は壁の高さの係数と同じ**です。積分の道 $t\ge 0$ は特異点に触れず、(8) は表 3 のとおり $Z(u)$ に戻ります 計算 。

Borel 和が元の関数に一致することを保証する定理は、原点に接する円板での元の関数の解析性と、(1) の K_N が $A\sigma^N N!$（A,σ は N によらない定数）で抑えられる一様な評価を要求します。(1) だけでは足りません。Beneke はこれを Watson–Nevanlinna–Sokal の定理（Sokal 1980）として引き、'These requirements are too strong for renormalizable theories' と書きます 既知 。

06

正の軸に特異点があるとき — 曖昧さと指数的に小さい項

符号が揃って $a_n\approx K\,a^n n!$（$a>0$）と増える級数では、特異点が正の軸の $t=1/a$ に来て、(8) の道の上に乗ります。上を回るか下を回るかで、**虚部が $e^{-1/(au)}$ の大きさだけ食い違う**和が二つできます。いちばん簡単な $a_n=n!\,a^n$ で見ます。Borel 変換は $B(t)=\sum_n (at)^n=\frac{1}{1-at}$ で、$t=1/a$ に極があります。上を回った積分から下を回った積分を引くと、極を時計回りに一周する積分になり、留数から

$$\tilde Z_{\text{上}}(u)-\tilde Z_{\text{下}}(u)=\frac{2\pi i}{au}\,e^{-1/(au)}$$

です（それぞれの虚部は $\pm\pi e^{-1/(au)}/(au)$）。この差は u のどの冪にも映らない大きさです。表と図は 7-12 §08 にあります。Beneke は正確な関数が分かる例で、Borel 積分と指数的に小さい項の二通りの曖昧さが打ち消し合うのを見せ、次の連鎖を立てます 既知 。

$$\text{符号の揃った階乗の発散}\ \Longrightarrow\ \text{Borel 積分の曖昧さ}\ \Longrightarrow\ \text{指数的に小さい項を足す}\tag{10}$$

そして 'it is not rigorous' と注意します。定理ではありません 物理 。

例。2-05 §07 の二重井戸の隙間は e^{-S_0} の大きさで、摂動論のどの次数にも現れません。虚時間で一方の谷から他方の谷へ移る古典解を**インスタントン**と呼び、その作用が 2-05 の (9) の S_0 です。逆向きに移る解が**反インスタントン**です（ヤン–ミルズでの対応物は 3-05 で詳しく）。谷のまわりの級数の Borel 和の曖昧さは e^{-2S_0}（インスタントン・反インスタントン対の重み）の大きさで、対の寄与の曖昧さと打ち消し合うとされます（Bogomolny 1980・Zinn-Justin 1981） 物理 。級数の発散の仕方が、級数に映らない項の存在を知らせています。

07

renormalon — 運動量積分の端から来る $n!$

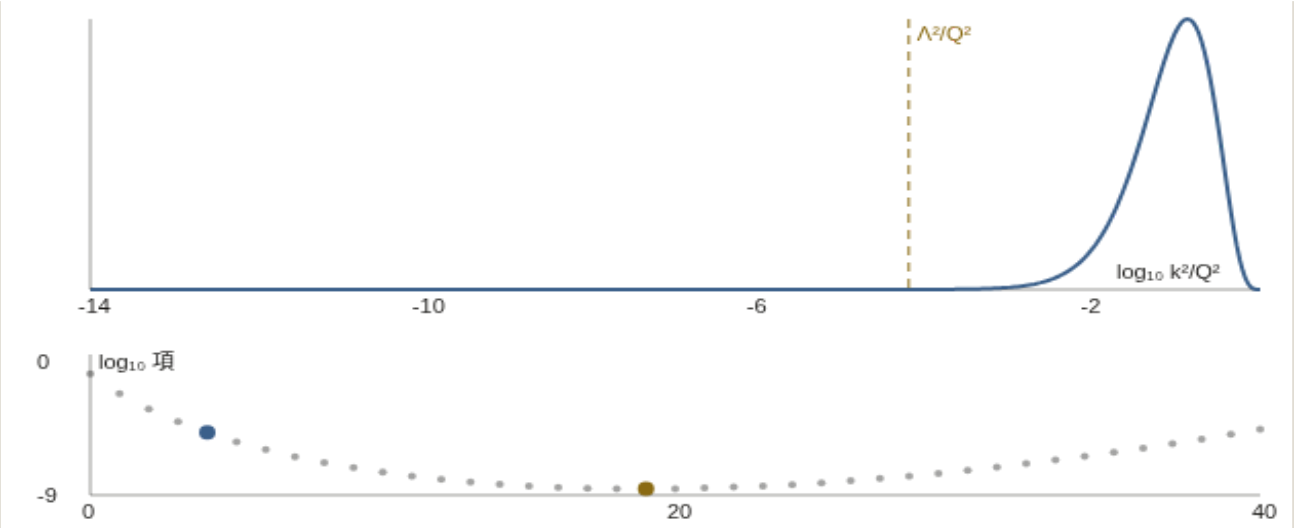
繰り込み可能な理論には鞍点と別の $n!$ の出どころ **renormalon** があります（Beneke によれば Gross–Neveu 1974・Lautrup 1977・'t Hooft 1977 が見つけ、名前は 't Hooft の Erice の講義から 既知 ）。出どころは**泡の鎖**の図です。伝播関数に一ループの泡（粒子の対が生まれて消える輪）を n 個つないだ図で、n について足すと、一ループの走る結合 $\alpha(k)$ を一本の線に入れたものになります（Beneke §2.2）既知 。4-03 §03 の真空の泡とは別物です。

これを一つの変数に縮めた模型を使います。外から運動量 Q を入れて測る量があり、その中のループ運動量 k の積分に、走る結合 $\alpha(k)=\alpha/(1-b\alpha\ln(Q^2/k^2))$ が掛かるとします（$\alpha=\alpha(Q)$、$b=\beta_0/4\pi$、純 $SU(N)$ で $\beta_0=11N/3$。係数の四つの書き方の換算は 4-06 表 1。4-04 §05・4-06）。$\alpha(k)$ を α で展開すると、$n+1$ 次には $\ln(Q^2/k^2)$ の n 乗が入ります。残りの被積分関数については、$d\ln k^2$ で測ったとき、小さい k で k^4 に比例して消え（x^2）、大きい k で $1/k^2$ で減る（x^{-1}）、とだけ仮定します。$x=k^2/Q^2$ として

$$r_n^{\mathrm{IR}}=\int_0^1 x\left(b\ln\tfrac{1}{x}\right)^n dx=\frac{b^n\,n!}{2^{n+1}},\qquad r_n^{\mathrm{UV}}=\int_1^\infty\frac{dx}{x^2}\left(-b\ln x\right)^n=(-b)^n\,n! \tag{11}$$

各項は有限なのに、係数は $n!$ で増えます（閉形は数値積分と 6 桁一致 計算 ）。理由は山の位置です。赤外側の被積分関数（$\ln x$ について測ると $x^2(\ln\frac{1}{x})^n$）は $x=e^{-n/2}$ に山を持ち、**次数が上がるほど山が小さい運動量へ逃げます**。紫外側の山は $x=e^n$ です。Beneke の (2.24)・(2.25) も泡の鎖の図で同じ位置を与えます 既知 。赤外側は符号が揃い（正の軸・曖昧さあり）、紫外側は交代します。小さい k での冪を k^a に変えると、赤外 renormalon の位置は §08 の尺度で $u=a/2$、曖昧さの大きさは $(\Lambda/Q)^a$ になります（Beneke §2.2）既知 。この模型は $a=4$ です。

図 2　n を上げると (11) の赤外側の山（上段、横軸 $\log_{10}k^2/Q^2$）が左へ動き、破線 Λ^2/Q^2 を越える辺りで項 $r_n\alpha^{n+1}$（下段、対数）が最小になる。α で Λ が動く



n = 4　山 k²/Q² = 1.35e−1　Λ²/Q² = 6.24e−5（N = 3）　項 = 1.01e−5　最小の項は n* = 19

計算 この図の数値はこの端末で計算した（(11) の式を図の中で評価。表 4 と一致）。

山はどこで止まるか。一ループでは $\Lambda^2/Q^2 = e^{-1/(b\alpha)}$ です（4-07）。項 $r_n^{\mathrm{IR}}\alpha^{n+1}$ は $n^* \approx 2/(b\alpha)$ で最小になり、そのとき山は $e^{-n^*/2} \approx \Lambda^2/Q^2$ にあります。**級数が役に立たなくなる次数は、ループの運動量が Λ に届く次数**で、最小の項は $(\Lambda/Q)^4$ に α の冪ほどの因子を掛けた大きさです。

計算 表 4　純 SU(3)（$b = 11/4\pi$）の模型で、最小の項の次数と山の位置

$\alpha(Q)$	Λ^2/Q^2	n^*	山 $/(\Lambda^2/Q^2)$	最小の項	最小の項 $/(\Lambda/Q)^4$
0.300	2.22e−2	7	1.36	5.09e−4	1.03
0.200	3.31e−3	11	1.24	9.23e−6	0.84
0.118	6.24e−5	19	1.20	2.53e−9	0.65
0.080	6.29e−7	28	1.32	2.11e−13	0.54

Beneke は、renormalon の位置は β 関数の高次の係数に依らず、Landau 極とは一般に論理的に別だと注意します 既知 。

08

ヤン–ミルズの Borel 平面 — 期待される特異点の地図

α の級数を (8) の型で変換し、位置を $u = \beta_0 t/4\pi$ で測ると $e^{-t/\alpha} = (\Lambda^2/Q^2)^u$ なので、**u の位置の特異点は $(\Lambda/Q)^{2u}$ の大きさの曖昧さ**に当たります。言葉を二つ用意します。**演算子積展開**は、短い距離 $1/Q$ で測る量を「係数 $\times$ $(\Lambda/Q)^d$ $\times$ 次元 d の場の組み合わせの真空での期待値」の和に展開する物理の処方です 物理 。純ヤン–ミルズで、ゲージ変換で変わらない場の組み合わせのうち次元が最も低いのは次元 4 の $F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}$ で、その期待値 $\langle F^2\rangle$ を**グルーオン凝縮**と呼びます。次元 2 のゲージ不変な組み合わせはありません（$A_\mu A_\mu$ は次元 2 ですがゲージ変換で変わります）。

Beneke がまとめる QCD の二点の相関関数（外から運動量 Q を入れて測る量。例はクォークの電流の相関）では 物理 、赤外 renormalon が $u = 2, 3, \ldots$（$u = 1$ が無いのは演算子積展開に次元 2 の項が無いため・Parisi 1979。$u = 2$ はグルーオン凝縮の $(\Lambda/Q)^4$ に当たり、§07 の模型の重み k^4 がこの $u = 2$ です）、紫外 renormalon が $u = -1, -2, \ldots$、インスタントン・反インスタントン対が $t = 4\pi n$（Bogomolny–Fateyev 1977）です。どの u に在るかは観測量に依ります。純 $SU(N)$ の β_0 で $t = 4\pi u/\beta_0$ に換算すると、renormalon は $1/N$ に比例して原点に寄り、対は 4π に留まります。$N = 3$ では $u = 2$ が $t = 2.285$、対はその 5.5 倍遠く、$N = 10$ では 18 倍です 計算 。

対の重み $e^{-4\pi/\alpha} = e^{-16\pi^2/g^2}$ は $(\Lambda/Q)^{22N/3}$ で、$u = 2$ の $(\Lambda/Q)^4$ よりはるかに小さい量です（一つなら 4-07 §08 の (14)）。Beneke も、QCD ではインスタントンの特異点は遠く大きい次数を決めないと見込みます 物理 。

格子での観測。Bali–Bauer–Pineda（2014）は純 SU(3) の平均プラケットの摂動係数を α の 35 次まで数値的に求め、'The on-set of the dominance of the dimension four renormalon associated to the gluon condensate is clearly observed' と書きます（要旨） 物理 。PDG の総説も renormalon の発散は今ある次数では 'not usually visible' だが非摂動の寄与と 'closely connected' だとします。

09

数学から見ると — 何が定理で、何が期待か

定理の側。ゼロ次元の模型の (4)〜(6)・(9) は確かめられる数学です 既知 。Borel 総和可能性を題に掲げた論文が、非調和振動子（Graffi–Grecchi–Simon 1970）と $P(\phi)_2$・ϕ^4_3（Eckmann–Magnen–Sénéor 1975・Magnen–Sénéor 1977。7-03）にあります（書誌のみ）。題によれば、それぞれ振動子の固有値、$P(\phi)_2$・ϕ^4_3 の Schwinger 関数（相関関数）について Borel 総和可能性を示しています。その場合は §05 の Watson–Nevanlinna–Sokal の定理により、級数が値を一通りに決めます。

期待の側。四次元ヤン–ミルズでは係数は各次数で有限に定まりますが（4-05）、級数と理論の関係は示されていません。問いの前提の非摂動の理論は 2026-11 に公開された構成が作りましたが（委員会の評価の水準。6-00）、摂動論との全次数の一致も、級数がその理論の漸近展開であることも示されていません（6-04）。公開された構成より前に Beneke（1999）は 'Since there is no rigorous non-perturbative definition of R in theories such as QED and QCD, we cannot even ask whether series expansions are asymptotic' と書きます 既知 。問題文（Jaffe–Witten §6.1）も、知られている例のほとんどで摂動級数は 'divergent expansions'

で 'even Borel and other resummation methods have limited applicability' と書きます 既知 。

まとめると、(i) 係数の $n!$ は級数に映らない e^{-c/g^2} の量の影です 物理 。正確には、模型では負の結合での虚部の指数 c が係数の底 $1/c$ を決める、という (4)〜(6) の意味です。ヤン–ミルズでは連鎖 (10) の水準の期待で、紫外 renormalon（符号が交代）には指数的に小さい項の曖昧さは付きません。(ii) ギャップが $\Lambda \propto e^{-8\pi^2/(\beta_0 g^2)}$ に比例するなら、ギャップは級数のどの次数にも現れず（4-07 §05）、手がかりは発散の仕方の側にしか残りません 物理 。(iii) 発散の仕方から映らない項を組み立てる形式（transseries）は 7-12 §09 で、$\mathbb{R}^4$ 上の純ヤン–ミルズでは物理の水準でも確立していません。

この章の範囲の外

発散以外の障害は 7-11、図の数が指数でしか増えない平面図の理論は 17-04 です。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	ゼロ次元の模型の (4)〜(6)・(9) と Borel 和の一致（表 1〜3）。振動子の 150 次の係数。(11) の閉形と、最小の項が山の Λ に届く次数に来ること（表 4） 計算 。Borel 平面の位置の換算
条件つき	連鎖 (10) 物理 。二重井戸の打ち消しは文献による（本文未確認）。renormalon の位置は泡の鎖の近似と演算子積展開に基づく期待。プラケットの $u = 2$ は数値の観測
言えていない	四次元ヤン–ミルズの級数の発散・漸近性・renormalon の実在はいずれも定理ではない。Dyson の議論は発見的。このサイトは質量ギャップも連続理論の構成も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§03・§05〜§09 の Beneke の記述と引用	既知	M. Beneke, Phys. Rept. 317 (1999) 1, hep-ph/9807443（本文 §1・§2）
問題文と PDG の引用	既知	Jaffe–Witten（Clay の問題文）§6.1；J. Huston, K. Rabbertz, G. Zanderighi, ‘9. Quantum Chromodynamics’（2023 年 8 月改訂）, in S. Navas et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. D 110 (2024) 030001、脚注 1（以上本文）
Dyson・非調和振動子	既知	Dyson, Phys. Rev. 85 (1952) 631；Bender–Wu, Phys. Rev. 184 (1969) 1231・PRD 7 (1973) 1620（以上要旨）

もの	種別	出典・道具
格子のプラケット	物理	Bali–Bauer–Pineda, PRD 89 (2014) 054505, arXiv:1401.7999（要旨）
その他	書誌のみ	Lipatov, JETP 45 (1977) 216；'t Hooft, Erice 1977 の講義（Plenum, 1978）；Gross–Neveu, PRD 10 (1974) 3235；Lautrup, PLB 69 (1977) 109；Parisi, NPB 150 (1979) 163；Bogomolny–Fateyev, PLB 71 (1977) 93；Bogomolny, PLB 91 (1980) 431；Zinn-Justin, NPB 192 (1981) 125；Sokal, JMP 21 (1980) 261；Graffi–Grecchi–Simon, PLB 32 (1970) 631；Eckmann–Magnen–Sénéor, CMP 39 (1975) 251；Magnen–Sénéor, CMP 56 (1977) 237
表 1〜3・図 1・分散関係の照合・§04 の最小の項との比	計算	`zero_dim.py`（SciPy・有理数）・`min_term.py`。図 1 は JavaScript の Simpson 則
非調和振動子の 150 次の係数	計算	`oscillator.py`（有理数の漸化式。最初の 4 項は既知の値と一致）
(11)・表 4・図 2・§08 の位置	計算	`renormalon.py`。図は同じ式を JavaScript で評価

次に読む章：5-01 Wilson の格子。続きの寄り道は 7-12。

Wilson の格子 — 辺に群の元を置けば、ゲージ不変性は近似されずに残る

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 格子の辺に群の元（リンク変数）を置き、小さな正方形（プラケット）を一周する積で作用を作ること。その作用は格子間隔によらず厳密にゲージ不変で、滑らかな場では連続の作用に a^2 の速さで近づき、そこから $\beta = 2N/g^2$ が決まること。測度がゲージ固定なしに定まること。

前提となる章 — 3-03（作用）と 1-04（SU(2)・SU(3)）。規約は 3-02、平行移動は 1-07、Haar 測度は 1-08 §03。

先に言うこと — 定義と古典的な性質の章です。§05 の連続極限は滑らかな場での作用の近づき方で、量子論の連続極限（5-05）とは別物です。質量ギャップについて、この章は何も示していません。

この章の順序

1. なぜ格子か — 有限次元の積分へ。寄り道：1973 年の夏
2. リンク変数 — 辺に群の元を置く（表 1）
3. プラケットと Wilson ループ — 閉じた道だけが残る（図 1・表 2）
4. Wilson 作用 — 五つの性質
5. 古典的な連続極限 — β の由来（図 2・表 3）・規約の換算（表 4）
6. 格子の上の測度 — ゲージ固定が要らない
7. 残るもの、壊れるもの — 正則化の選び方
8. 第 5 部の地図 — 二つの極限

01

なぜ格子か — 積分を有限次元にする

ユークリッド化した量子ヤン–ミルズ理論（4-02）は、形式的には接続 A の全体で $e^{-S[A]}$ を積分するものです。しかし無限次元の空間に一様な測度はなく（1-09 §02）、ゲージ変換で移り合う A の分だけ積分が重複します（3-04・4-08）。Wilson は時空を格子に置き換えました。1974 年の論文の要旨です。

> “It is shown how to quantize a gauge field theory on a discrete lattice in Euclidean space-time, preserving exact gauge invariance and treating the gauge fields as angular variables (which makes a gauge-fixing term unnecessary).”

「角度の変数」とは、場をリー環の元でなく群の元として持つことです。問題文（Jaffe–Witten §6.5）は、コンパクトな群とコンパクト化した時空では “the lattice approximation reduces the functional integration to a finite-dimensional integral” と書き、格子間隔 0・体積無限大の極限でゲージ不変な観測量の期待値が存在することを確かめねばならない、と続けます 既知 。極限は §08 で見ます。

約束。ユークリッドの $\mathbb{R}^4$、添字は 1〜4、$\hbar = c = 1$。3-02 と同じく $A_\mu = A_\mu^a T^a$（エルミート、$\operatorname{tr} T^a T^b = \tfrac{1}{2}\delta^{ab}$）、$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$、連続の作用は $S = \tfrac{1}{2}\int \operatorname{tr} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\, d^4x$（全添字で和）。$\beta$ は格子の逆結合（4-06 の β 関数 $\beta(g)$ とは別の量）、θ はただの角（θ 項ではない）です。

寄り道：1973 年の夏

飛ばしてよい小節です。

Wilson の回想（2005 年刊）では、漸近自由の論文（1973 年 6 月刊）のあと、統計力学で慣れた格子から QCD に入り、1973 年の夏には Orsay で講演していました（本人はこの講演を覚えておらず、Balian–Drouffe–Itzykson の論文の参照で分かる、と書きます）。その時点で、ゲージの変数は “must be unitary matrices from the gauge group itself, rather than being variables from the infinitesimal Lie algebra of the group” であること、点ごとに別々のゲージ不変性があること、ゲージ固定なしに有限の結果が出ることが分かっていたと書きます。係数が $1/g^2$ なので強結合展開（5-02）がすぐ見えたこと、J. Smit が格子ゲージ理論の定式化を進めており、Polyakov も独立に同じものを得ていたこと、Wegner（1971）の模型（2-09）にも触れています 既知 。

02

リンク変数 — 辺に群の元を置く

間隔 a の格子 $a\mathbb{Z}^4$（有限の体積では一辺 L 点の周期格子）で、x と $x+a\hat{\mu}$ を結ぶ辺をリンクと呼びます。連続の理論でゲージ場は隣の点と枠を比べる道具でした（3-01）。格子では道具そのものを変数にし、各リンクに $U_{x,\mu}\in G$ を置いて「$x+a\hat{\mu}$ の値を x の枠へ運ぶ」と読みます。ゲージ変換は点ごとの $\Omega(x)\in G$ で次のように働きます。

$$U_{x+a\hat{\mu},\,-\mu}=U_{x,\mu}^{-1},\qquad U'_{x,\mu}=\Omega(x)\,U_{x,\mu}\,\Omega(x+a\hat{\mu})^{-1} \tag{1}$$

物質の場が $\psi\mapsto\Omega\psi$ なら、差 $U_{x,\mu}\psi(x+a\hat{\mu})-\psi(x)$ は $\Omega(x)$ だけで変わります（3-02 の鎖の四方向版）。滑らかな A からは、辺に沿った平行移動（1-07）の逆元がリンクです。辺を n 等分し、小さな回転を始点側から左に掛けます。

$$U_{x,\mu}=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n-1}e^{-igh A_\mu(x+(k+\frac12)h\hat{\mu})}=\exp\!\big(-iga\,A_\mu(x+\tfrac{a}{2}\hat{\mu})+O(a^3)\big),\qquad h=\tfrac{a}{n} \tag{2}$$

(1) は 3-02 の変換則 $A'=\Omega A\Omega^{-1}-\frac{i}{g}(\partial\Omega)\Omega^{-1}$ を辺に沿って積み上げたものです 既知 。例：U(1) なら $U=e^{-i\theta}$ で、$\Omega(x)=e^{i\alpha(x)}$ なら (1) は $\theta\mapsto\theta+\alpha(x+a\hat{\mu})-\alpha(x)$（2-03 §03）。SU(2) なら $U=u_0+i\,\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\sigma}$（$u_0^2+|\mathbf{u}|^2=1$）で、各リンクは S^3 の一点、$\frac12\mathrm{tr}\,U=u_0$ です。

周期格子のリンクは $4L^4$ 本で、配置の空間 G^{4L^4} は実 $4(N^2-1)L^4$ 次元のコンパクトな多様体です（1-05）。ゲージ変換の自由度 G^{L^4} はその四分の一で、連続の 4 成分からゲージの 1 成分を除く勘定と同じ割合です。

表 1　周期格子の大きさ 計算

L	リンク	プラケット	SU(3) の実変数
4	1,024	1,536	8,192
16	262,144	393,216	2,097,152
32	4,194,304	6,291,456	33,554,432

03

プラケットと Wilson ループ — 閉じた道だけが残る

一本のリンクは両端の Ω に挟まれて変わりますが、二本を端でつなぐと、つないだ点の $\Omega^{-1}\Omega$ が消えます。閉じた道を一周すると始点の Ω だけが両側に残ります。最小の閉じた道が一辺 a の正方形、プラケットです。

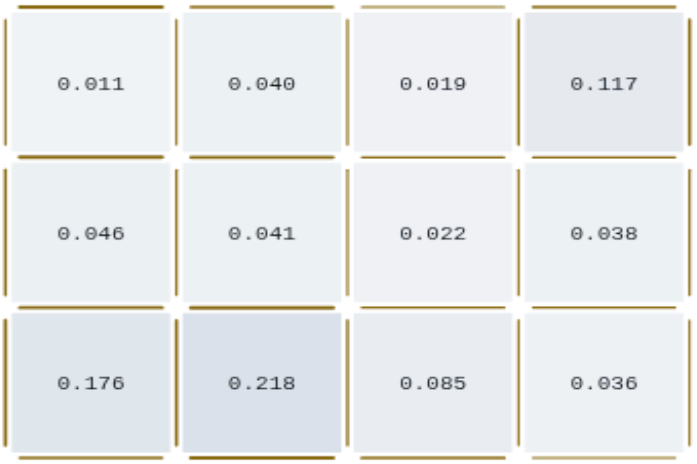
$$U_P=U_{x,\mu}\,U_{x+a\hat{\mu},\nu}\,U_{x+a\hat{\nu},\mu}^{-1}\,U_{x,\nu}^{-1},\qquad U'_P=\Omega(x)\,U_P\,\Omega(x)^{-1} \tag{3}$$

よって $\operatorname{tr} U_P$ は、近似なしに、格子間隔や配置の粗さによらず不変です。一般の閉じた道 C では、道の順に掛けた積のトレース

$$W_C = \frac{1}{N}\operatorname{tr}\prod_{\ell\in C} U_\ell \tag{4}$$

を Wilson ループと呼びます。滑らかな場から (2) で作ると、格子の道が閉曲線に近づくにつれて連続の Wilson ループ（1-07 のホロノミーのトレース）に近づきます（Chatterjee 2018 §4）既知。長方形のループは閉じ込めの判定に使います（5-02・17-02）。掛ける順は効きます。同じ四本を $U_{x,\mu}U^{-1}_{x+a\hat\nu,\mu}U_{x+a\hat\mu,\nu}U^{-1}_{x,\nu}$ の順に掛けると、因子の間に $\Omega(x+a\hat\nu)^{-1}\Omega(x+a\hat\mu)$ などが挟まって消えません。U(1) では順は関係ありません（2-03）。

図 1　SU(2) の 5×4 点の小片。つまみ s（ゲージ変換の強さ）を動かすと、辺の太さ（$1-\frac12\operatorname{tr}U_\ell$）は変わり、面の数（$1-\frac12\operatorname{tr}U_P$）は変わりません。「順を崩す」と面の数も動きます。



s = 0.00 Σ_P(1−½trU_P) = 0.849977 Σ_ℓ ½trU_ℓ = 27.0024

計算 この図の数値はこの端末で計算した。表 2 と同じ配置・同じ式をブラウザで計算しています（JavaScript が無効なら表 2 が中身）。

表 2　図 1 の配置（辺 31 本・面 12 枚）での和

s	$\sum_\ell \frac12\operatorname{tr}U_\ell$	$\sum_P(1-\frac12\operatorname{tr}U_P)$	**順を崩した** $\sum_P(1-\frac12\operatorname{tr})$
0	27.0024	0.849977	0.5719
0.5	17.5284	0.849977	3.0662
1	0.6552	0.849977	5.1220

計算 四次元の一辺 4 点の周期格子で無作為な配置に無作為なゲージ変換を施すと、§04 の作用の変化は SU(2) で 2×10^{-13}、SU(3) で 0 でした。リンクの対数（リー環の元）で差分 $\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ の二乗和を作ると、SU(2) で 34,707 が 35,659 に変わります。交換子を足しても、有限のゲージ変換では A の変換則が非斉次（(1) の下の $-\frac{i}{g}(\partial\Omega)\Omega^{-1}$ の項）なので、差分は厳密には不変になりません。寄り道の回想の「リー環の変数ではなく群の元」の意味です。

04

Wilson 作用 — 五つの性質

$$S_W(U) = \beta \sum_P \Big(1 - \frac{1}{N}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U_P\Big), \qquad \beta = \frac{2N}{g^2} \quad (G = SU(N)) \tag{5}$$

和はすべてのプラケットを一枚ずつ取ります（周期格子で $6L^4$ 枚）。性質は五つです 既知 。

1. **ゲージ不変**：各項が (3) で変わらない。
2. **実数**：向きを逆にしても $\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U_P^\dagger$ は同じ。
3. **有界**：固有値が絶対値 1 なので各項は 0 以上 2 以下。最大は SU(2) で 2（$U_P = -1$）、SU(3) で $3/2$（固有値が三つとも $e^{2\pi i/3}$、または三つとも $e^{-2\pi i/3}$） 計算 。
4. **最小**：$S_W = 0$ はすべての $U_P = 1$ のときに限る。純ゲージ $\Omega(x)\Omega(x+a\hat\mu)^{-1}$ がその例です。周期格子では、可換な元 V_μ を方向ごとに一様に置いた配置もそうです。その一周の積 V_μ^L が 1 でなければ純ゲージではありません。純ゲージの配置では、一周の積は $\Omega(x)\Omega(x)^{-1} = 1$ になるからです。
5. **局所**：各項は四本のリンクだけに依存する。

Chatterjee（2018）は $\beta' \sum_P \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(I - U_P)$ と書くので $\beta' = \beta/N$ です（7-02 の SU(2) の β も同じ）。

05

古典的な連続極限 — $\beta = 2N/g^2$ の由来

滑らかな A を (2) でリンクに写し、$a \to 0$ を見ます。指数関数の積を一つにまとめる Baker–Campbell–Hausdorff の公式 $e^X e^Y = e^{X+Y+\frac12[X,Y]+\cdots}$ で (3) を展開すると、プラケットの中心 c で

$$U_P = \exp\big(-iga^2 F_{\mu\nu}(c) + O(a^3)\big) \tag{6}$$

です。向かい合う辺の A の差が $-iga^2(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$ を、交換子が $(-iga)^2[A_\mu, A_\nu]$ を与え、合わせて場の強さになります（曲率＝小さな輪を一周したずれ。1-07）。1-07 の記号との対応：1-07 の反エルミートな接続と曲率はこの章の $-igA$・$-igF$ にあたり、1-07 の平行移動は始点から終点へ運ぶので、この章のリンクとプラケットはその逆元です。1-07 が $U_p \approx \exp(-a^2 F)$ と書くのと (6) とで指数の符号が逆なのはこのためで、トレースの値は変わりません。エルミートな X で $\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,e^{-iX} = \mathrm{tr}\cos X = N - \frac12 \mathrm{tr}\,X^2 + \cdots$ なので

$$1 - \frac{1}{N}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U_P = \frac{g^2 a^4}{2N}\,\mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}(c)^2 + O(a^5) \tag{7}$$

です。展開の中心をプラケットの中心に取ると、a^5 の項は向きの対称性で打ち消し合い、残る誤差は一枚あたり a^6 です 既知 。a^{-4} 枚を足すと相対誤差は a^2 で、Symanzik の改良（5-05）が消すのはこの項です。プラケットを点 x と組 $\mu<\nu$ で数えて $\sum_x a^4$ を積分に置き換えると

$$S_W \approx \frac{\beta g^2}{2N}\sum_{\mu<\nu}\int \operatorname{tr} F_{\mu\nu}^2\, d^4x = \frac{\beta g^2}{2N}\,S \tag{8}$$

です。連続の作用 S に一致するのは $\beta = 2N/g^2$ のときで、これが (5) の β の由来です 既知 。Chatterjee（2018）§3 は同じ計算をして、四次元では古典的に β が a によらないこと、量子論では β が $\log(1/a)$ のように増えるべきだと物理で信じられているが疑いもあり、“the question remains an open mathematical problem” であることを書きます 物理 （5-05）。

規約の換算 — 一つの結合の五つの書き方

同じ結合 g^2 が、文献によって別の文字と別の規格化で書かれます。同じ条件が章ごとに違う数に見えるのはこのためです。この本の基準は (5) の Wilson の $\beta = 2N/g^2$ です（記号表 A-01 §06。g^2 を加えた六つの書き方と同じ数値例を表 7 に並べています）。他の書き方は、作用 (5) と項ごとに比べれば決まります。

$$\beta = \frac{2N}{g^2},\qquad \beta_{\mathrm{Ch}} = \frac{\beta}{N} = \frac{2}{g^2},\qquad \beta_{\mathrm{SZZ}} = \frac{\beta}{N^2},\qquad \lambda = g^2 N = \frac{2N^2}{\beta} = \frac{2}{\beta_{\mathrm{SZZ}}},\qquad \alpha = \frac{g^2}{4\pi} \tag{8a}$$

β_{Ch} は作用を $\beta_{\mathrm{Ch}}\sum_P \operatorname{Re}\operatorname{tr}(I-U_P)$ と書く形（$1/N$ を付けない。7-10 の (3)）、β_{SZZ} は作用の前の逆結合を $N\beta_{\mathrm{SZZ}}$ と書く 't Hooft の規約（Shen–Zhu–Zhu。5-04）、λ は大 N の 't Hooft 結合（17-04）、α は物理で使う結合の強さです。作用の定数項の違いは規格化 Z で消え、測度を変えません。

表 4　規約の換算と数値例（Shen–Zhu–Zhu の条件は四次元、$|\beta_{\mathrm{SZZ}}| < 1/(16(d-1)) = 1/48$） 計算

書き方	β からの換算	SU(2)・$\beta=2.5$	SU(3)・$\beta=6.0$	SZZ の条件：SU(2)	SZZ の条件：SU(3)
Wilson の β（この本）	$2N/g^2$	2.5	6.0	$\beta < 0.0833$	$\beta < 0.1875$
β_{Ch}（$1/N$ を付けない形）	β/N	1.25	2.0	< 0.0417	< 0.0625
β_{SZZ}（'t Hooft の規約）	β/N^2	0.625	0.6667	$< 1/48 = 0.0208$	< 0.0208
't Hooft 結合 λ	$2N^2/\beta$	3.2	3.0	$\lambda > 96$	$\lambda > 96$
g^2	$2N/\beta$	1.6	1.0	$g^2 > 48$	$g^2 > 32$
$\alpha = g^2/4\pi$	$N/(2\pi\beta)$	0.1273	0.0796	$\alpha > 3.820$	$\alpha > 2.546$

例：Shen–Zhu–Zhu の条件は、β_{SZZ} で書けば N によらず $1/48$、λ で書けば $\lambda > 96$ で、Wilson の β に直すと $N^2/48$ です。β_{SZZ} と λ では N が消えるのが 't Hooft の規約の利点です。数値計算でよく使う SU(2) の $\beta = 2.5$ は $\alpha \approx 0.13$、条件の端は $\alpha \approx 3.8$ で、二つは約 30 倍離れています。換算はこの本の算術で、条件そのものは各文献の規格化のまま読むものです（5-04・5-09・7-10）。

一枚のプラケットで見る

SU(2) の定数の場 $A_1 = c\,T^1$、$A_2 = c\,T^2$ では微分の項が無く、$F_{12} = g c^2 T^3$ は交換子だけから来ます（3-02 §04 の例 2）。リンクは $e^{-i\theta\sigma_1/2}$、$e^{-i\theta\sigma_2/2}$（$\theta = gac$）、プラケットは群の交換子 $U_1 U_2 U_1^{-1} U_2^{-1}$ です。§02 の $u_0 + i\,\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ の形で掛けます。パウリ行列の積 $\sigma_j\sigma_k = \delta_{jk} + i\epsilon_{jkl}\sigma_l$ から

$$(a_0 + i\,\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})(b_0 + i\,\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = a_0 b_0 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + i\,(a_0\mathbf{b} + b_0\mathbf{a} - \mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\boldsymbol{\sigma}$$

です。$c = \cos\frac{\theta}{2}$、$s = \sin\frac{\theta}{2}$ と置くと $U_1 = (c;\,-s,0,0)$、$U_2 = (c;\,0,-s,0)$（u_0 と $\mathbf{u}$ を並べた書き方）で、$U_1 U_2 = (c^2;\,-cs,-cs,-s^2)$、$U_1^{-1}U_2^{-1} = (U_2U_1)^{-1} = (c^2;\,cs,cs,-s^2)$ です。二つを掛けた u_0 が $\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,U_P$ で、

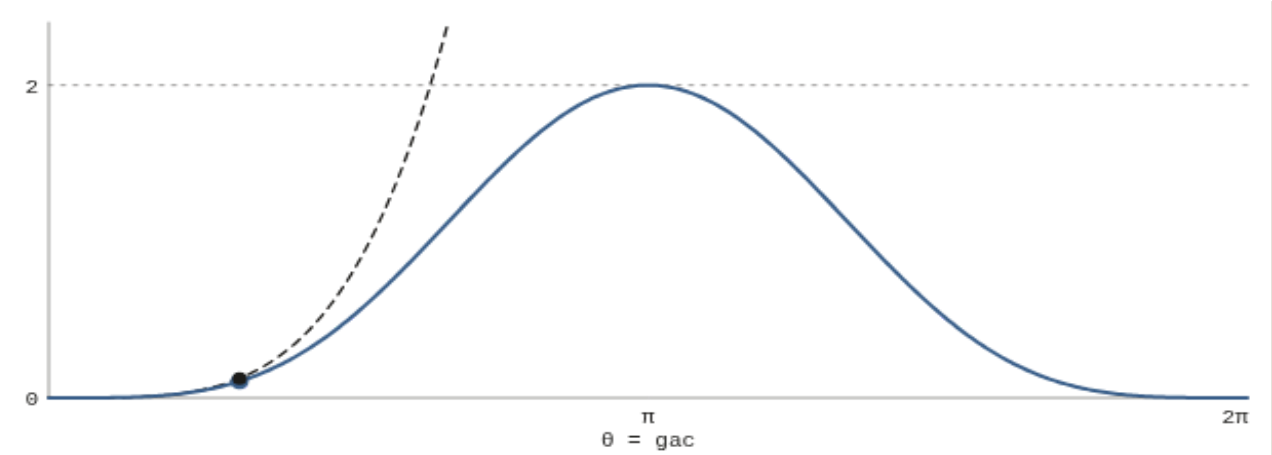
$$\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,U_P = c^4 - \left(-c^2s^2 - c^2s^2 + s^4\right) = (c^2+s^2)^2 - 2s^4 = 1 - 2\sin^4\frac{\theta}{2}$$

となり、次の閉じた形が出ます。

$$1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,U_P = 2\sin^4\frac{\theta}{2}, \qquad \frac{g^2a^4}{2N}\,\mathrm{tr}\,F_{12}^2 = \frac{\theta^4}{8} \tag{9}$$

小さい θ では比が $1 - \theta^2/6 + \cdots$ で、相対誤差は a^2 に比例します。大きい θ では格子の値は 2 を超えず、$\theta = 2\pi$ で 0 に戻ります。リンクは場を e^{-igaA} の形でしか見ないので、強すぎる場と弱い場を区別しません。この有界性が §06 で積分が有限になる理由の一つです。

図 2　一枚のプラケット。実線が格子の $2\sin^4(\theta/2)$、破線が連続の $\theta^4/8$、点線が上限 2。つまみで $\theta = gac$（場を固定すれば a に比例）を動かすと、二つの点と比が変わります。



θ = 1.00　格子 0.10566　連続 0.12500　比 0.8453

計算 この図の数値はこの端末で計算した。曲線は (9)（行列の計算との差 2×10^{-16} 以下）。JavaScript が無効なら：比（格子／連続）は $\theta=0.1,\,0.5,\,1,\,2$ で 0.998・0.959・0.845・0.501、格子の値は $\theta=\pi$ で最大 2、2π で 0 です。

四次元の滑らかな場で見る

トーラス $[0,1)^4$ の滑らかな SU(2) の場（8 つの波数の三角関数の和、$g=1$、$\beta=4$）で比べます。リンクは (2) を $n=16$ で打ち切り、連続の作用は三角多項式なので有限個の点の和で誤差なく積分しました（$S=184.2275$）。

表 3　格子間隔 $a=1/L$ と Wilson 作用 計算

L	S_W	$(S_W-S)/S$	同じ値 $/a^2$
4	134.502	−0.2699	−4.319
8	170.242	−0.07592	−4.859
16	180.618	−0.01959	−5.016
32	183.318	−0.004938	−5.057

差は a^2 に比例し、係数はこの場で −5.06 付近です（値は場による）。n を 8・16・32 と変えた S_W の変化は $L=8$ で 0.03・0.008 です。(6) の $\|U_P-e^{-iga^2F(c)}\|/a^2$ は $a=1/8$ から $1/64$ で 0.190・0.119・0.065・0.034 と、a を半分にするたびにほぼ半分になり（比は 1.6 から 1.9 へ）、a に比例して縮みます。交換子の符号を逆にすると 5〜6.5 のままでした 計算 。

06

格子の上の測度 — ゲージ固定が要らない

有限の格子の上の量子論は、次の確率測度で定まります（1-08 §01）。

$$d\mu_\beta(U)=\frac{1}{Z}\,e^{-S_W(U)}\prod_{\ell}dU_\ell,\qquad Z=\int e^{-S_W(U)}\prod_{\ell}dU_\ell \tag{10}$$

dU_ℓ は G の Haar 測度（左右どちらから掛けても変わらない重さ 1 の測度。SU(2) では S^3 の一様分布）です。**有限である**：$0 < e^{-S_W} \le 1$ は連続で範囲はコンパクトなので $0 < Z \le 1$、§04 の有界性から $Z \ge e^{-12\beta L^4}$ も出ます（7-10 の (3)）既知。一辺 4 点の SU(3) なら実 8,192 次元の上のふつうの多重積分です。

ゲージ固定が要らない：Haar 測度は左右の掛け算で変わらないので、(1) で配置を移しても $\prod dU_\ell$ も S_W も変わらず、$\langle f \rangle = \langle f \circ \Omega \rangle$ です。連続では無限大の体積の軌道から代表を選ぶゲージ固定が要りましたが（4-08・3-04）、格子ではゲージ変換の全体 G^{L^4} がコンパクトで重さ 1 なので、重複は平均されるだけです。要旨の「ゲージ固定の項を不要にする」はこのことです 既知。

帰結が二つあります。(i) 一般の f について、$\langle f \rangle$ はゲージ変換で平均した f の期待値に等しくなります。特に、ゲージ変換で自明でない形に変わる量（一本のリンク U_ℓ やその成分、$\mathrm{tr}\, U_\ell$ など）は、Haar 平均で打ち消されて期待値が 0 です（17-02 の寄り道。無限体積でも保たれるのが Elitzur 1975 の定理）。ゲージ不変でない量がすべて 0 になるわけではなく、$|\mathrm{tr}\, U_\ell|^2$ の期待値は正です。(ii) 木（閉路を含まないリンクの集合）の上のリンクは 1 にそろえてよい（7-02 §02）。観測量の典型は Wilson ループと、離れた二つのループの相関です。相関の減る速さが格子の上の質量で（4-11・5-09）、Chatterjee（2018）§5 の格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）はこれを問います。

07

残るもの、壊れるもの — 正則化の選び方

無限大を避ける工夫（正則化）は理論の一部を変え、何を残すかで後の仕事が決まります。Wilson の格子では、ゲージ不変性は各 a で厳密に残り、回転と平行移動は 90° の回転と格子間隔ずつの移動だけが残ります（連続の対称性の回復は極限で示すこと。7-10。2026-11 に公開された構成での回復は 12-06）。反射正値性は成り立ち（Osterwalder–Seiler 1978。5-03）、位相電荷（3-05）はそのままでは定まりません。

問題文（JW §6.5）は反射正値性が Wilson の近似で成り立つことを “a major advantage” と呼びます 既知。ハミルトニアンとヒルベルト空間を作る鍵だからです（4-10）。反対に、連続の運動量の切断はゲージ不変性を壊し、相殺項で戻します（7-07 §06）。JW §6.5 は、反射正値性が次元正則化や Pauli–Villars などの正則化で失われた場合、それを回復する方法は少ない、とも書きます 既知。これを根拠に、三つ（ゲージ不変性・反射正値性・連続の回転）をすべて保つ正則化は、探した範囲では見当たりません（この本の整理。紫外の制御を加えて四つで数える言い方は 7-10 §03）。

Lüscher（1982）の要旨は、作用の密度が小さい四次元の超立方格子の非可換ゲージ場が “an integer topological charge Q, which is invariant under continuous deformations of the field” を持つ、と述べます 既知 。この Q は古典的な連続極限で Chern 数（3-05）に戻るとされます。（この章の補足：条件が無ければ $SU(N)^{\text{リンク数}}$ は連結なので、連続で整数値の量は定数しかありません。）作用も Wilson の形に限らず、熱核の作用（Villain 型。7-02）や、1×2 の長方形を足して表 3 の a^2 の差を消す改良作用（Symanzik の改良。5-05）があります。どれでも同じ連続極限に着くと考えるのが普遍性です 物理 。

08

第 5 部の地図 — 二つの極限

有限の格子の理論は (10) で定まりました。問題文の理論には、$L \to \infty$ と $a \to 0$（四次元では $\beta \to \infty$ と組にすると考えられている 物理 ）の二つの極限が要ります。順序は、まず β（つまり a）を固定して $L \to \infty$ を取り、そのあと $a \to 0$ です。Chatterjee（2018）§5 の格子の相関長の問題も、固定した β での無限体積の極限を出発点にしています 既知 。一つ目についてさえ、Chatterjee（2018）§3 は、無限体積の極限の一意性は二次元より上の大きい β で一般には分かっていないと書きます 既知 。2026-11 に公開された構成は逆の順で、体積を止めて a → 0 を取り、そのあと体積の部分列で極限を取っています（Lean で証明されている、と委員会が評価した。8-05）。この構成を読むのは第二巻で、格子の族と極限の順は 8-01〜8-05、繰り込みの一段は 9-01〜9-07 です。第 5 部の続きが分担します。小さい β の展開は 5-02、ハミルトニアンは 5-03、強結合側の無限体積は 5-04、$\beta \to \infty$ と $a(\beta)$ は 5-05、数値積分は 5-07・5-08、極限で何を固定するかは 5-09 です。二つの極限の存在とその質量ギャップについて、この章は何も示していません。

この章が言えている範囲

事項	言えている	言えていない
定義とゲージ不変性・測度の有限性	各格子間隔で厳密（代数の恒等式・コンパクト性） 既知 。数値でも確認 計算	無限体積の極限の一意性（大きい β で一般には未知）
古典的な連続極限 (6)〜(8)	形式的な展開と $\beta = 2N/g^2$ 既知 。一つの場で差が a^2 に比例 計算	一般の場の誤差評価。量子論の連続極限（2026-11 に公開された構成が作った。委員会の評価の水準。6-00・8-05）
反射正値性・位相電荷	文献の主張の紹介	証明（5-03・3-05）

事項	言えている	言えていない
質量ギャップ	—	格子の上でも連続でも、この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§01 の要旨／寄り道の回想	一次資料（1974 年は要旨のみ確認、2005 年は本文を確認）	K. G. Wilson, “Confinement of Quarks”, Phys. Rev. D 10 (1974) 2445–2459／“The Origins of Lattice Gauge Theory”, Nucl. Phys. B Proc. Suppl. 140 (2005) 3–19, arXiv:hep-lat/0412043
有限次元の積分・二つの極限・反射正値性の引用（正則化で失われる場合を含む）	一次資料（本文を確認）	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”（Clay の公式問題説明）§6.5
β'・展開の計算・$\log(1/a)$・Wilson ループの近似・一意性・格子の相関長の問題	一次資料（本文を確認）	S. Chatterjee, “Yang–Mills for probabilists”, arXiv:1803.01950 (2018) §3–§5
位相電荷	一次資料（要旨を確認。Chern 数との一致は本文未読）	M. Lüscher, “Topology of lattice gauge fields”, Commun. Math. Phys. 85 (1982) 39–48
反射正値性・Wegner の模型・Elitzur の定理	書誌のみ（Crossref で確認）	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471／F. J. Wegner, J. Math. Phys. 12 (1971) 2259–2272／S. Elitzur, Phys. Rev. D 12 (1975) 3978–3982
表 4・(8a)	この本の算術（条件は各文献の規格化のまま）	H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, Comm. Math. Phys. 400 (2023) 805–851（arXiv:2204.12737 の要旨。規格化の読みは 5-04）
表 1〜3・図 1・図 2・本文の数値	この端末で計算	Python 3.12・NumPy 1.26・SciPy 1.11。`gauge.py`（表 1・表 2・§03）、`plaquette.py`（(9)・SU(3) の 3/2）、`continuum.py`（表 3・(6)。約 110 秒）。図は同じ式を素の JavaScript で計算

次に読む章：5-02 強結合展開（小さい β で (10) を展開し、面積則を見る）。

強結合展開 — 小さい β では Wilson ループが面の和になり、面積則が出る

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 小さい β では Wilson ループの期待値が縁を持つ面の和になり（指標展開）、最小の面から面積則 $\langle W \rangle \approx u^{RT}$ と弦張力の主項 $\sigma_0 = -\ln u$、こぶから一つ目の補正、管から質量の主項 $m_0 = -4 \ln u$ が出ます。SU(2) の数値と並べ、どこまで効くかを見ます。

前提となる章 — 5-01。表現は 1-04、Haar 測度は 1-08、質量は 4-11。

先に言うこと — 強結合の面積則は格子間隔を固定した小さい β の定理で、$U(1)$ でも成り立ちます。連続極限（$\beta \to \infty$）とは反対の側の話で、閉じ込めや質量ギャップの証明ではありません。収束の証明は 5-04 に回します。

この章の順序

1. 小さい β の世界 — $\mathbb{Z}_2$ で見る面の和
2. 指標展開 — 一枚の重みを表現ごとに割る（表 1）。寄り道：(4) の導出
3. 面を敷く — 主項と面積則（図 1）。寄り道：面の和と弦
4. こぶ — 一つ目の補正と次元の数
5. 管 — 質量の主項と相関長
6. 数値と比べる — どこまで効くか（図 2・表 2）
7. 収束 — 有限の箱と無限の箱。どこで止まるか
8. 面積則は閉じ込めの証明か — 可換な群でも出る

01

小さい β の世界 — $\mathbb{Z}_2$ で見る面の和

Wilson 作用（5-01 §04）の係数 $\beta = 2N/g^2$ が小さいことは結合 g が大きいことなので、この側の展開を**強結合展開**と呼びます。β は逆温度の役なので**高温展開**とも呼びます（2-08）。$\beta = 0$ ではリンクは独立に Haar 測度で散らばり、$\int_G U\, dU = 0$ なので単純なループの期待値は 0 です。Wilson 1974 の要旨は “The lattice gauge theory has a computable strong-coupling limit; in this limit the binding mechanism applies and there are no free quarks. There is unfortunately no Lorentz (or Euclidean) invariance in the strong-coupling limit.” と書きます 既知 。

例：$\mathbb{Z}_2$。リンクが ± 1 の群（2-09）で作用を $\beta \sum_P (1 - U_P)$ とすると、$U_P = \pm 1$ なので一枚の重みは定数を除いて二項に割れます。

$$e^{\beta U_P} = \cosh\beta \left(1 + t\, U_P\right), \qquad t = \tanh\beta \tag{1}$$

積を開くとプラケットの集合 X ごとに $t^{|X|} \prod_{P \in X} U_P$ の項が出ます。一様な ± 1 の平均は偶数乗で 1、奇数乗で 0 なので、分配関数には各リンクが偶数枚に囲まれた集合（閉じた面）だけが、Wilson ループ $\prod_{\ell \in C} U_\ell$ の分子には縁が C の面だけが残ります。最小の面は平らな長方形なので

$$\langle W_{R\times T} \rangle = t^{RT} (1 + \cdots), \qquad -\ln \langle W_{R\times T} \rangle \approx RT \left(-\ln \tanh\beta\right) \tag{2}$$

で、期待値が面積の指数で減ります（**面積則**）。5-03 §08 の $\mathbb{Z}_2$ で小さい β の隙間が $-4 \log \tanh \beta$ に近いのも同じ勘定です。

02

指標展開 — 一枚の重みを表現ごとに割る

一般の群でも、一枚の重み $e^{\frac{\beta}{N} \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\, U}$ は共役 VUV^{-1} で変わらない関数（**類関数**）です。これを表現ごとに割るために、道具を二つだけ用意します。

指標。群の表現 r（1-04）に対し、$\chi_r(U) = \mathrm{tr}\, r(U)$ を**指標**と呼びます。トレースは共役で変わらないので、指標は類関数です。既約表現の指標は、Haar 測度 dU（群の上の一様な確率測度。1-08 §03）について正規直交です（Schur の直交関係。証明は略します）既知 。

$$\int_G \chi_r(U)\, \overline{\chi_s(U)}\, dU = \delta_{rs}$$

類関数はこの指標で展開できます。フーリエ級数の非可換な群への一般化です 既知 。

$SU(2)$ の類の上の積分。$SU(2)$ の元は $U = V\,\mathrm{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta})\,V^{-1}$（$0 \le \theta \le \pi$）と書けるので、類関数は θ だけの関数です。その積分は次の形になります（Weyl の積分公式の $SU(2)$ 版）既知 。

$$\int_{SU(2)} f(U)\,dU = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\,\sin^2\theta\,d\theta$$

このとき $\mathrm{tr}\,U = 2\cos\theta$、スピン j の表現の指標は $\chi_j = \sin((2j+1)\theta)/\sin\theta$、次元は $2j+1$ です。

指標係数

一般の群の重みは、指標で次のように展開します。

$$e^{\frac{\beta}{N}\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U} = c_0(\beta)\Big[1 + \sum_{r\neq 0} d_r\,u_r(\beta)\,\chi_r(U)\Big], \qquad u_r = \frac{\int e^{\frac{\beta}{N}\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U}\,\overline{\chi_r(U)}\,dU}{d_r\int e^{\frac{\beta}{N}\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U}\,dU} \tag{3}$$

d_r は次元です。u_r を**指標係数**、基本表現のものを単に u と書きます（$\mathbb{Z}_2$ では $u = t$）。$SU(2)$ では、上の類の積分を変形ベッセル関数 I_n で書けて（寄り道：(4) の導出）

$$u_j = \frac{I_{2j+1}(\beta)}{I_1(\beta)}, \qquad u = \frac{I_2(\beta)}{I_1(\beta)} = \frac{\beta}{4} - \frac{\beta^3}{96} + \cdots \tag{4}$$

です 既知 （数値積分と 2×10^{-13} で一致 計算 ）。5-03 §06 の一本のリンクの転送行列の固有値の比 λ_j/λ_0 と同じ数です。

$\beta > 0$ なら $0 < u_r < 1$ です。正であるのは、指数関数を開いた各項がテンソル積の指標の非負な和になるためです（5-03 §06）。1 未満であるのは、$\mathrm{Re}\,\chi_r(U) \le d_r$ で、等号が $r(U)$ が単位行列のときに限るためです。

小さい β では u は $\mathbb{Z}_2$ で β、$U(1)$ で $\beta/2$、$SU(2)$ で $\beta/4$、$SU(N)$ $(N\ge3)$ で $\beta/(2N^2)$ に近づきます 計算 。理由は一次の項です。(3) の指数関数を一次まで開くと $u \approx \frac{\beta}{N^2}\int(\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U)\,\overline{\chi_F(U)}\,dU$（$F$ は基本表現）で、この積分は $N\ge3$ なら $\int(\mathrm{tr}\,U)^2dU = 0$ なので $1/2$、$\mathbb{Z}_2$ と $SU(2)$ では $\mathrm{tr}\,U$ が実数なので 1 です 既知 。

$SU(2)$ では、7-02 の β はこの章の $\beta/2$ です（7-02 の (3.3) の w と、この章の (4) の u を比べる。$U(1)$ は同じ β）。

表 1　基本表現の指標係数 $u(\beta)$。作用はどれも $\beta\sum_P(1-\frac{1}{N}\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U_P)$ 計算

β	$\mathbb{Z}_2$	$U(1)$	$SU(2)$	$SU(3)$
0.5	0.4621	0.2425	0.1237	0.0289
1	0.7616	0.4464	0.2402	0.0601

β	$\mathbb{Z}_2$	$U(1)$	$SU(2)$	$SU(3)$
2	0.9640	0.6978	0.4331	0.1286

寄り道：(4) の導出

飛ばしてよい小節です。

$SU(2)$ の一枚の重みは $e^{\frac{\beta}{2}\cdot 2\cos\theta}=e^{\beta\cos\theta}$ です。使う式は変形ベッセル関数 I_n の標準の性質二つです 既知 。

$$\int_0^{\pi} e^{\beta\cos\theta}\cos n\theta\,d\theta=\pi I_n(\beta),\qquad I_{n-1}(\beta)-I_{n+1}(\beta)=\frac{2n}{\beta}\,I_n(\beta)$$

分母。$\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ なので

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\beta\cos\theta}\sin^2\theta\,d\theta=I_0-I_2=\frac{2}{\beta}I_1.$$

分子。積和の公式で $\sin^2\theta\cdot\frac{\sin((2j+1)\theta)}{\sin\theta}=\sin\theta\,\sin((2j+1)\theta)=\frac{1}{2}\big[\cos 2j\theta-\cos(2j+2)\theta\big]$ なので

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\beta\cos\theta}\cdot\tfrac{1}{2}\big[\cos 2j\theta-\cos(2j+2)\theta\big]\,d\theta=I_{2j}-I_{2j+2}=\frac{2(2j+1)}{\beta}\,I_{2j+1}.$$

(3) の u_j は分子を $d_j=2j+1$ と分母で割ったものなので $u_j=I_{2j+1}/I_1$ です。小さい β では $I_n(\beta)\approx(\beta/2)^n/n!$ から $u=I_2/I_1\approx\beta/4$ です。

03

面を敷く — 主項と面積則

(3) をすべてのプラケットで掛けて開くと、各項は「どのプラケットにどの表現を置くか」の割り当てです。リンクを一本ずつ積分する規則は二つです（Schur の直交関係 既知 。7-02 の (3.1) は同じ考えの補題）。

$$\int_G \chi_r(U)\,dU=\delta_{r0},\qquad \int_G \chi_r(AU)\,\chi_s(U^{-1}B)\,dU=\delta_{rs}\,\frac{\chi_r(AB)}{d_r}\tag{5}$$

左は「一枚にだけ乗った辺があれば 0」、右は「同じ表現の二枚を共通の辺で貼ると大きな輪になり $1/d_r$ が付く」です。生き残るのは、表現を置いたプラケットが閉じた面か、縁が観測するループの面をなす項だけです。

例：1×2 のループ。観測量は $\frac{1}{d}\chi(U_C)$（d は基本表現の次元）です。主項は、ループの内側の二枚に表現を置いた項 $(du)^2\chi(U_{P_1})\chi(U_{P_2})$ です。$SU(N)$ では、観測量の χ と対になるよう面には共役表現 $\bar r$ が乗ります（$SU(2)$ では $\bar r=r$）。三段で積分します。

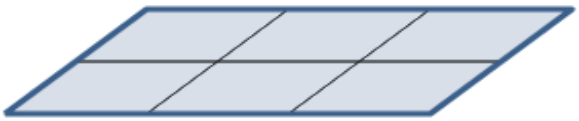
1. 二枚が共有する辺を (5) 右で積分します。二つの輪が 1×2 の縁の輪 $\chi(U_\partial)$ につながり、$1/d$ が付きます。
2. 縁の六本のうち一本を (5) 右で積分します。観測量の輪と縁の輪が逆向きに貼り合わさり、残る五本は VV^{-1} の形で打ち消して $\chi(1)/d = d/d = 1$ が残ります。
3. 正規化：観測量の $\frac{1}{d}$ が残ります（分配関数は、定数 c_0 の冪を除けば主項で 1 なので、割っても変わりません）。

合わせて $(du)^2\cdot\frac{1}{d}\cdot 1\cdot\frac{1}{d} = u^2$、つまり $\langle W_{1\times 2}\rangle = u^2$ です。$R\times T$ を敷き詰めても d の冪は打ち消し合い、

$$\langle W_{R\times T}\rangle = u^{RT}\bigl(1+O(u^4)\bigr), \qquad \sigma_0 = -\ln u \tag{6}$$

が残ります。静的な電荷対のエネルギー $V(R) = -\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\langle W_{R\times T}\rangle$（17-02 §01）は主項で $\sigma_0 R$、距離に比例して増える閉じ込めの形です 既知 。例：$SU(2)$、$\beta=1$ で $\sigma_0 = 1.426$、2×2 のループは $u^4 = 0.0033$ 計算 。

図 1　ループ（太線）を縁とする最小の面とこぶ。つまみ R・T・β で面の枚数と重みが、「動かす」でこぶ（立方体の残り五枚）の場所と向きが変わります（第四の軸の二通りは数だけ）。



β=1.5 u=0.3441 u^6=0.00166 こぶ 24 通り×u⁴=0.0140 補正込み 0.00233

計算 この図の数値はこの端末で計算した（u は (4) の級数をその場で計算）。JavaScript が無効なら：面は RT 枚で重み u^{RT}、こぶは四次元で $4RT$ 通り、一つごとに u^4。

寄り道：面の和と弦

飛ばしてよい小節です。

Wilson 1974 の要旨は、強結合展開がクォークの道とそれをつなぐ格子の面の和になると述べ、“This structure is reminiscent of relativistic string models of hadrons.” と結びます。一枚ごとに $u = e^{-\sigma_0}$ を払う面の和は、面積に比例する作用の弦の世界面の和に見えます 既知 。比喩で言えば格子に張

った膜です。正確には、強結合の面は格子に沿って硬く、揺らぐ連続の弦とは別の状態にある、と物理は考えます（17-03 §07）物理。

04

こぶ — 一つ目の補正と次元の数

次に効く面は、平らな面の一枚を、それを底とする単位立方体の残り五枚に置き換えたものです（図 1）。一枚の代わりに五枚を払うので重みは u^4 倍、立方体は面に垂直な $d-2$ 本の軸の両側で $2(d-2)$ 個、四次元で 4 個です。離れたこぶはこの次数では独立に数えてよいので、まとめると指数になります（$SU(2)$ の勘定）。

$$\langle W_{R\times T}\rangle \approx u^{RT}\, e^{2(d-2)RT\,u^4}, \qquad \sigma_1 = -\ln u - 4u^4, \qquad \left\langle \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\, U_P \right\rangle \approx u + 4u^5 \quad (d=4) \tag{7}$$

次の補正は重なるこぶ・二段のこぶ・高い表現の乗る面から来ます（高次の係数は Drouffe–Zuber 1983 の総説に、$SU(2)$・四次元の弦張力の高次の級数は Münster 1981 にあります。出典表）。指数の形を体積に一様に正当化するのがクラスター展開です（5-04、7-04）既知。

二次元にはこぶが無い。$d=2$ では面が平面から出られず、主項 u^{RT} がすべての β で厳密です（7-02 §03）既知。三次元以上の難しさは、面が平面の外へ揺らげることから始まります。例：$SU(2)$、$\beta=2$ では $4u^4 = 0.141$ が $\sigma_0 = 0.837$ の 17% に達し、打ち切りが怪しくなります 計算。

05

管 — 質量の主項と相関長

質量は相関の減る速さです（4-11）。空間方向の一枚 $P = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\, U_P$ と、時間方向に t ずらした $P(t)$ を結ぶ最小の閉じた面は、二枚を蓋とする $1\times 1\times t$ の箱です。蓋は観測量なので重みは付かず、側面の $4t$ 枚が u^{4t} を払います。

$$\langle P(t)P(0)\rangle - \langle P\rangle^2 \approx C\, u^{4t}, \qquad m_0 = -4\ln u = 4\sigma_0, \qquad \xi_0 = 1/m_0 \tag{8}$$

計算（最低次の数え上げ）。最低次の形は標準とされます（Drouffe–Zuber 1983、書誌のみ）。5-03 §08 の $\mathbb{Z}_2$ で隙間が $-4\log\tanh\beta$ に近いのも同じ形です。相関長 ξ_0 は $\beta=1$ で 0.175、$\beta=2.6$ でも 0.38 目盛りで、相関は一目盛りの内に消えます 計算。連続極限には ξ が格子間隔よりずっと長いこと（Chatterjee 2018 の格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）の $\xi(\beta)\to\infty$。5-09）が要り、主項はその反対を書いています。

(8) の比 $m_0/\sqrt{\sigma_0} = 4\sqrt{\sigma_0}$ を収束域の外へ延ばすと、主項の比は β とともに 0 へ下がります。格子の数値の比は 3.3（$\beta = 2.25$）から 3.8（$\beta = 2.6$）へ上がって一定の値に近づきます（17-12 §08）物理。主項の形の話で、理論の言明ではありません。$\beta = 2.6$ の主項 $a\sqrt{\sigma_0} = 0.808$、$am_0 = 2.61$ は Lucini–Teper（2001）表 1 の $0.13395(62)$、$0.514(8)$ の 6.0 倍と 5.1 倍です 計算（文献値は 物理）。$\beta = 2.4 \to 2.6$ で文献の $a\sqrt{\sigma}$ は半減し、主項は 4% 減るだけです。

06

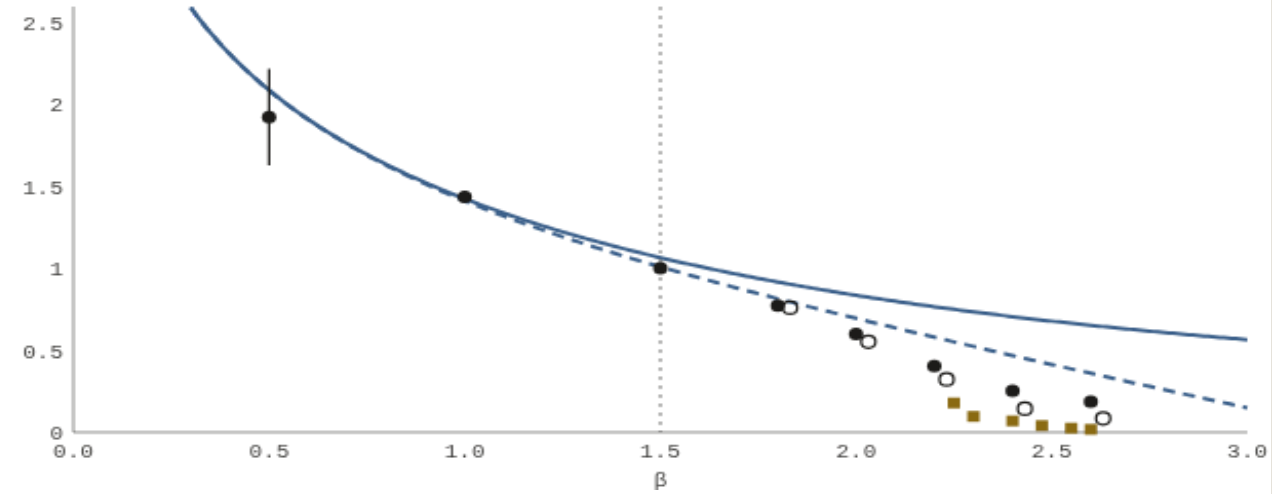
数値と比べる — どこまで効くか

四次元の周期格子（一辺 6 と 8）の $SU(2)$ を熱浴法（リンクを一本ずつ条件付き分布から引き直す更新。5-07）で積分し、弦張力を Creutz 比（17-02 の (3)）で測りました。

$$\chi(R) = -\ln \frac{W(R,R)\,W(R-1,R-1)}{W(R,R-1)^2} \tag{9}$$

周長と角の項は比の中で消え、(7) の形なら $\chi(R) = \sigma_1$ です。

図 2　弦張力（$SU(2)$・格子単位）。実線 σ_0、破線 σ_1、● $\chi(2)$、○ $\chi(3)$、■ 文献の $(a\sqrt{\sigma})^2$。つまみで β の縦線が、「対数目盛」で縦軸が変わります。



β=1.50 σ₀=1.067 σ₁=1.011 χ(2)=1.0026±0.0059

計算 この図の数値はこの端末で計算した（曲線はその場で計算、点は表 2 の値、■ は文献値）。JavaScript が無効なら表 2 が中身です。

表 2　四次元 $SU(2)$ の熱浴法（一辺 6：$\beta \le 2$、8：それ以上。括弧は統計誤差）と強結合の式 計算。最後の列は Lucini–Teper 物理

β	プラケット	$u + 4u^5$	$\chi(2)$	$\chi(3)$	σ_1	文献：プラケット／$(a\sqrt{\sigma})^2$
0.5	0.12375(13)	0.1238	1.93(30)	–	2.089	–
1.0	0.24335(14)	0.2434	1.438(32)	–	1.413	–
1.5	0.36249(15)	0.3635	1.0026(59)	–	1.011	–

β	プラケット	$u+4u^5$	$\chi(2)$	$\chi(3)$	σ_1	文献：プラケット／$(a\sqrt{\sigma})^2$
1.8	0.44074(16)	0.4400	0.7730(21)	0.761(79)	0.816	–
2.0	0.50104(22)	0.4941	0.5991(17)	0.553(33)	0.696	–
2.2	0.56925(22)	0.5510	0.4054(12)	0.3231(55)	0.581	–
2.4	0.63031(16)	0.6106	0.2525(11)	0.1445(23)	0.469	0.629995(17)／0.0694
2.6	0.670275(68)	0.6729	0.18618(38)	0.08514(90)	0.360	0.670009(3)／0.0179

読み方は三つです 計算 。(i) $\beta \le 1$ ではプラケットが $u+4u^5$ と、$\chi(2)$ が σ_1 と誤差の範囲で合います。(ii) 1.8 から $\chi(2)$ は σ_1 を下回り、2.4 では半分近くです（2.6 でプラケットが $u+4u^5$ に近いのは曲線が交わる偶然）。(iii) $\chi(3)$ はさらに小さく、なお文献の $(a\sqrt{\sigma})^2$ の 2〜5 倍です（小さいループには短い距離の寄与が混じる 物理 ）。プラケットは文献値と 0.0003 程度の差で、$\beta=2.6$ では統計誤差の 4 倍です。差には、一辺 8 の格子と文献の 12^4（$\beta=2.4$）・24^4（$\beta=2.6$）の格子の有限体積の違いが含まれえます 計算 。

同じ種類の計算をした Creutz（1980）の要旨は、弦張力を固定して格子を細かくすると、裸の結合が摂動の繰り込み群の予言どおりに（対数的に）減ると報告し、“This supports the coexistence of confinement and asymptotic freedom for quantized non-Abelian gauge fields.” と結びます。強結合側の面積則と弱結合側の漸近自由が、相転移で切れずにつながって見える、と読めます。四次元の、関心のある多くの非可換な格子模型で $\beta_c=\infty$（連続極限は $\beta\to\infty$ の側だけ）とするのは、Chatterjee（2018）§5 の言葉で “It is believed” の水準です 物理 。

07

収束 — 有限の箱と無限の箱

一辺 L の格子の $Z_L(\beta)=\int e^{-S_W}\prod dU_\ell$ は有限次元のコンパクトな空間の上の積分で、β の整関数（複素平面全体で収束する冪級数で表せる関数）です。Z_L 自体は整関数ですが、期待値や $\ln Z_L/|\Lambda_L|$（$|\Lambda_L|$ は格子点の数。自由エネルギー）は Z_L で割るので、複素 β 平面にある Z_L の零点がそれらの展開の収束半径を縮めます。問題は、その収束半径が L によらず残るかです（2-08 の相転移） 既知 。つながった面の数は枚数 n とともに K^n（K は次元で決まる）で増え、一枚の重みは u なので、$Ku<1$ 程度なら和が収束する（粗い見積もり。正確な条件は 5-04）、というのが芯です。Shen–Zhu–Zhu（2023）の序論は Osterwalder–Seiler（1978）を “when the coupling is sufficiently strong, the cluster expansion … for the expectation values of local observables … is convergent, uniformly in volume” とまとめ、そこから質量ギャップ（指数的なクラスター性：離れた観測量の相関が距離の指数で減ること。4-11 の質量ギャップ）と無限体積極限の存在・解析性が従うと書きます 既知 。SZZ 自身は Langevin 力学（7-09）で $SU(N)$、$|\beta_{\mathrm{SZZ}}|<1/(16(d-1))$ に “a strictly positive mass

gap” を示しました。式 (1.2) から $\beta = N^2 \beta_{\mathrm{SZZ}}$ で、四次元の $SU(2)$ なら $\beta < 1/12$（換算はこの本の算術）。十分条件で、展開が止まる場所ではありません。

どこで止まるか

(a) 面の荒れ：ある β で面の揺らぎが勝ち、σ の級数はそこから延ばせない、と物理は考えます（17-03 §07、SU(2) でおよそ 2。見積もりの誤差は大きい）物理。(b) 四次元の $U(1)$ では面積則が大きい β で破れます（§08）。(c) 有限次で打ち切った式は、$\beta \to \infty$ で $e^{-c\beta}$ のような指数の小ささを表せません（主項 $-\ln u$ は $3/(2\beta)$ と冪で減るだけ）。一方、漸近自由（4-06・4-07）の連続極限では、一ループ（4-06 の β 関数の最低次）で $a^2\sigma \propto e^{-(6\pi^2/11)\beta}$ と指数で小さくなるはずです 物理。β を 2 から 4 にすると $-\ln u$ は 0.837 から 0.418 へ半分になるだけですが、$e^{-(6\pi^2/11)\beta}$ は約 5×10^4 分の 1 になります 計算。連続極限の側へは有限次の展開では届きません（この本の整理。5-05）。

この本の定義の上で機械検査した形は 20-01〜20-04 に、強結合の面積則は 20-06 に在ります。どれも強結合の窓の中で格子間隔を固定した言明で、連続極限の側の問いとは反対の端にあります。

08

面積則は閉じ込めの証明か — 可換な群でも出る

表 1 の u はどの群でも 1 未満なので、(6) の面積則は $\mathbb{Z}_2$ でも $U(1)$ でも出ます。Chatterjee（2018）§4 は “the area law holds for any lattice gauge theory at sufficiently small β” と書き、それゆえ “the area law at small β cannot be evidence for quark confinement” だと続けます。証明は Osterwalder–Seiler（1978）で、その要旨は “We then prove existence and analyticity of the infinite volume limit of strongly coupled Yang-Mills theories on the lattice and we verify Wilson's confinement bound.” と書きます 既知。四次元の $U(1)$ 格子は大きい β で面積則を満たしません（Guth 1980。Guth は、Wilson 形とは別の Villain 形の作用で示した。完全に厳密な証明は Fröhlich–Spencer 1982。5-06）既知。強結合の面積則は格子が粗いことの性質で、非可換性を使っていません。同論文の格子の面積則の問題（Chatterjee の Problem 4.1）は、四次元の非可換なコンパクト群の任意の無限体積極限で、すべての $\beta > 0$ について

$$|\langle W_{R\times T}\rangle| \le C(\beta)\, e^{-c(\beta) RT} \tag{10}$$

を示せと問い、大きい β では “remains elusive” と書きます。強結合側では、Cao–Nissim–Sheffield が $U(N)$ の面積則の範囲を大きい N で広げ（arXiv:2505.16585、プレプリント・掲載は未確認。要旨 “This improves on a classical result of Osterwalder-Seiler from

1978”)、't Hooft の領域（β を N に比例させて N を大きくする取り方。規約の換算は 5-01 表 4）では、SZZ の方法で要旨が [DF80] と引く質量ギャップ条件を確かめ、そこから面積則を導きました（arXiv:2509.04688、プレプリント・掲載は未確認）既知 。どちらも格子間隔を固定した結果です。質量ギャップと閉じ込めは別の文で（17-02 §02、有限群は 5-10）、この章は連続の理論のどちらも示していません。

この章が言えている範囲

事項	言えている	言えていない
指標展開・主項 (3)〜(6)	標準の道具 既知 。数値と一致 計算	—
補正 (7)	SU(2)・四次元の最低次の数え上げ。$L = 6$ の $\beta \le 1$ でプラケット・$\chi(2)$ と一致 計算	高次の係数、打ち切りの誤差評価（5-04）、無限体積の値
質量の主項 (8)	最低次の数え上げ 計算 。この端末では数値と比べていない。$\beta = 2.6$ で文献値の 5.1 倍	質量の数値照合、高次の補正
収束・面積則の定理	小さい β の一様な収束・面積則・指数減衰（文献） 既知	証明の中身。大きい β の面積則（格子の面積則の問題）
閉じ込め・質量ギャップ	格子間隔を固定した強結合側の結果の紹介	連続極限での両方。この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§01・寄り道の引用	要旨	K. G. Wilson, Phys. Rev. D 10 (1974) 2445–2459
§07・§08 の Osterwalder–Seiler の結果、§08 の引用	要旨（INSPIRE・Elsevier 版。本文は未入手）	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471
§07 の序論・式 (1.2)・条件	本文 §1	H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, Commun. Math. Phys. 400 (2023) 805–851, arXiv:2204.12737
§05・§06・§08 の引用、格子の面積則の問題と格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 4.1・5.1）	本文	S. Chatterjee, arXiv:1803.01950 (2018) §4–§6
§06 の引用	要旨	M. Creutz, Phys. Rev. D 21 (1980) 2308–2315
§05・表 2・図 2 の文献値	本文の表 1・7 物理	B. Lucini, M. Teper, JHEP 0106 (2001) 050, arXiv:hep-lat/0103027

もの	種別	出典・道具
§08 の面積則の拡張	要旨（プレプリント・二本とも掲載は未確認）	S. Cao, R. Nissim, S. Sheffield, arXiv:2505.16585・arXiv:2509.04688 (2025)。2509.04688 の要旨が引く [DF80] は Durhuus–Fröhlich 1980 とされる（書誌は未確認）
$U(1)$ の非閉じ込めの相（Guth）	要旨（INSPIRE）	A. H. Guth, Phys. Rev. D 21 (1980) 2291–2307
$U(1)$ の非閉じ込めの相（Fröhlich–Spencer）	書誌のみ（Chatterjee の記述による）	J. Fröhlich, T. Spencer, Commun. Math. Phys. 83 (1982) 411–454
高次の係数の総説、(8) の最低次の形	書誌のみ	J.-M. Drouffe, J.-B. Zuber, Phys. Rep. 102 (1983) 1–119
$SU(2)$ 四次元の弦張力の高次の級数	要旨のみ	G. Münster, Nucl. Phys. B180 (1981) 23–60
§07 の荒れの転移	17-03 の出典による	Itzykson, Peskin, Zuber, Phys. Lett. B 95 (1980) 259–264
表 1・2・図・本文の数値	この端末で計算	Python 3.12・NumPy・SciPy。`chars.py`（表 1・(4)）、`sc_tables.py`（§05・§07）、`mc_su2.py`・`run_mc.sh`（表 2。熱浴法、20 区間のジャックナイフ、一本 2〜4 分）。図は素の JavaScript

次に読む章：5-03 反射正値性と転送行列（同じ格子からハミルトニアンを取り出す）。

反射正値性と転送行列 — 鏡に映した積分が正なら、格子の上にハミルトニアンが立つ

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — Wilson 作用がサイト反射ではどの β でも、リンク反射では $\beta \geq 0$ で反射正値であること。そこから正の転送行列と格子のハミルトニアンが立ち、時間の刻みを 0 にすると Kogut–Susskind の形になること。

前提となる章 — 5-01・4-10。2-09（転送行列）と 7-02 §03（指標）も参考に。β は 5-01 の格子の逆結合で、4-06 の β 関数 $\beta(g)$ とは別の量です。

先に言うこと — 有限の格子の話です。有限の箱で隙間が正なのは自動的で、格子間隔を 0 に、体積を無限にしたとき隙間が残るかについて、この章は何も示していません。数値は空間 4×4 までの $\mathbb{Z}_2$ などの計算です。

この章の順序

1. この章の位置 — 積分から作用素へ
2. 格子の上の時間反射 — 面は二通り（図 1）
3. 一次元の鎖 — 二種類の「正」
4. Wilson 作用の反射正値性 — 二つの証明
5. 転送行列 — 格子のハミルトニアン
6. 一本のリンク — 電場のエネルギー
7. Kogut–Susskind のハミルトニアン — 時間の刻みを 0 に
8. Z_2 ゲージ理論 — 正でない転送行列（図 2・表 1）
9. 何が保たれ、何が残るか — 極限・改良した作用・言わないこと

01

この章の位置 — 鏡が一枚あれば量子力学が戻る

格子の上の理論（5-01）は次の確率測度で書かれます。

$$d\mu_\beta(U) = \frac{1}{Z}\, e^{-S_W(U)} \prod_{\ell} dU_\ell, \qquad S_W = \beta \sum_{P} \Big(1 - \tfrac{1}{N}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\, U_P\Big), \qquad \beta = \frac{2N}{g^2} \tag{1}$$

dU は全体が 1 の Haar 測度、β は作用の係数です（例：$SU(2)$・$g^2 = 1$ で $\beta = 4$）。最後の座標 t を虚時間と呼びます。ここには積分と期待値しかなく、Hilbert 空間もハミルトニアンもありません。質量ギャップはハミルトニアンのスペクトルの隙間なので（4-11）、まず作用素を取り戻します。道具は 4-10 の反射正値性で、格子では作用から証明できます。問題文 §6.5 は 'Reflection positivity holds for the Wilson approximation [36], a major advantage' と書きます（[36] は Osterwalder–Seiler 1978）既知 。

02

格子の上の時間反射 — 面は二通り

鏡に映した格子がもとの格子に重なるには、面 $t = t_0$ の $2t_0$ が整数でなければなりません。t_0 が整数なら面は格子点を通り（**サイト反射**）、半整数なら縦（時間方向）のリンクの中点を切ります（**リンク反射**）。

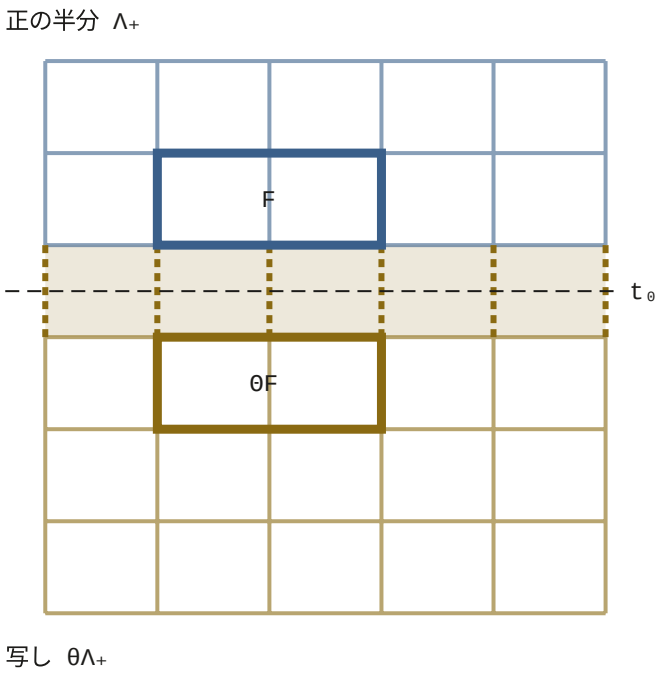
$$\theta(x,t) = (x,\, 2t_0 - t), \qquad (\theta U)_{x\to y} = U_{\theta x \to \theta y}, \qquad (\Theta F)(U) = F(\theta U) \tag{2}$$

リンク変数は逆向きにたどると逆元です（$U_{y\to x} = U_{x\to y}^{-1}$）。両端が $t \geq t_0$（リンク反射では $t > t_0$）のリンクの集まりを Λ_+、その変数だけで決まる関数の全体を $\mathcal{A}_+$ とします。反射正値性は 4-10 の (4) と同じ形の

$$\langle\, \overline{\Theta F}\, F \,\rangle \geq 0 \qquad (F \in \mathcal{A}_+) \tag{3}$$

です。θ はプラケットをプラケットに写し（時間方向を含むものは向きが逆になる）、$\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}$ は逆元で変わらないので $S_W(\theta U) = S_W(U)$ です。

図 1　**二通りの鏡** — つまみで面 t_0 を半目盛りずつ動かすと、サイト反射とリンク反射が交互に現れます。青は正の半分と F（長方形の Wilson ループ）、茶はその写し。



t₀ = 1/2（リンク反射）：破線のリンクが面を跨ぎ、網かけのプラケットが上下をつなぐ。

例（図 1）。$t_0 = \frac{1}{2}$ では面を横切る縦のリンクが向きの逆な自分自身に写って（$(\theta U)_b = U_b^{-1}$）どちらの半分にも属さず、面を跨ぎます。それを辺に持つプラケットが上下をつなぎます。$t_0 = 0$ では $t = 0$ の横のリンクが自分自身に写り、跨ぐものはありません。

03

一次元の鎖で見る — 二種類の「正」

スピン $s_t = \pm 1$ の鎖に重み $\prod_t e^{K s_t s_{t+1}}$ を置きます（2-09 の一次元イジング模型で外場 0。$K < 0$ も許す）。転送行列は

$$T = \begin{pmatrix} e^{K} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K} \end{pmatrix}, \qquad \lambda_0 = 2\cosh K, \quad \lambda_1 = 2\sinh K \tag{4}$$

です。**サイト反射**（$t_0 = 0$）では、s_0 を止めると上半分の和 $\varphi(s_0)$ と下半分の和が互いに複素共役になり、K の符号によらず $\langle \overline{\Theta F} F \rangle \propto \sum_{s_0} |\varphi(s_0)|^2 \geq 0$ です。**リンク反射**（$t_0 = \frac{1}{2}$）では跨ぐ結合が一つ残り、

$$\langle \overline{\Theta F} F \rangle \;\propto\; \sum_{s_0, s_1} \overline{\varphi(s_0)}\, T_{s_0 s_1}\, \varphi(s_1) \tag{5}$$

という T の二次形式になります。すべての φ で 0 以上なのは $T \geq 0$、つまり $K \geq 0$ のときだけです。例。$F = s_1$ なら、リンク反射で $\langle s_0 s_1 \rangle = \tanh K$ が $K = -\frac{1}{2}$ で -0.4621 となり (3) が破れ、サイト反射では $\langle s_{-1} s_1 \rangle = \tanh^2 K = 0.2136 \geq 0$ です 計算 。

「正」は二種類あります。一つは成分が正であること。成分がすべて正の行列では、最大の固有値は重複せず、他の固有値の絶対値より大きい（Perron–Frobenius の定理）既知。(4) の T の成分は K の符号によらず正なので $\lambda_0 > |\lambda_1|$ となり、相関 $(\tanh K)^t$ は指数関数的に減ります。もう一つは作用素として正であること。$T \geq 0$ なのは $K \geq 0$ のときだけで、$K > 0$ なら $T = e^{-H}$ と実の H で書けます。$K < 0$ では相関が符号を変えながら減り、$-\log \lambda_1$ は実数になりません。サイト反射の正値性は $T^2 \geq 0$ に、リンク反射のは $T \geq 0$ に当たります既知。

04

Wilson 作用の反射正値性 — 二つの証明

主張：Wilson 作用の格子で (3) が、サイト反射ではすべての実数 β で、リンク反射では $\beta \geq 0$ で成り立つ。格子ゲージ理論の反射正値性と、正の自己共役な転送行列の存在は Osterwalder–Seiler 1978 によります。その要旨は物理的正値性を確かめたと述べ、'This implies the existence of a positive self-adjoint transfer matrix' と続けます既知。反射の種類ごとの β の条件は、以下の (6)〜(8) の証明によります紙。$\beta < 0$ でリンク反射が実際に破れる例は 08 節です計算。以下が証明の筋です（周期的な時間では面が二枚になるが同じ）。

サイト反射 — 面の上の変数を止める

跨ぐプラケットはありません。面の上のプラケットの作用を半分ずつ上下に配ると $S_W = S_+ + S_-$、$S_-(U) = S_+(\theta U)$ です。面の上の変数 U_0 を止めると、下の積分は $U_< = \theta U_>$ の置き換え（Haar 測度は逆元で不変）で上の積分の複素共役になり

$$\langle \overline{\Theta F} F \rangle = \frac{1}{Z} \int dU_0 \left| \int dU_> \, F \, e^{-S_+} \right|^2 \geq 0 \tag{6}$$

です。β の符号はどこにも使っていません。

リンク反射 — 跨ぐプラケットを二乗の和に開く

跨ぐ縦のリンクは上の端点が別々なので、その点でのゲージ変換で 1 にできます（7-02 §02）。そのために、一般の F は先に、面のすぐ上の層（$t = 1$）の点でのゲージ変換で平均した $\widetilde{F}$ に置き換えておきます。ΘF は $t \leq 0$ の変数だけで決まり、その層の点に触れません。そこでその層のゲージ変換 g で積分の変数を $U \to U^g$ と替えると（作用も Haar 測度も変わらない）$\langle \overline{\Theta F} F \rangle = \langle \overline{\Theta F} F^g \rangle$、$g$ で平均して $\langle \overline{\Theta F} \widetilde{F} \rangle$ です。鏡の層（$t = 0$）で同じことをすれば、(3) の左辺は $\langle \overline{\Theta \widetilde{F}} \, \widetilde{F} \rangle$ に等しくなります。跨ぐプラケットは上の横のリンク ℓ とその写しだけの $\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(U_{\theta\ell} U_\ell^\dagger)$ になり、成分 $h_{ij} = (U_\ell)_{ij} \in \mathcal{A}_+$（$\Theta h_{ij} = (U_{\theta\ell})_{ij}$）で

$$\operatorname{Re}\operatorname{tr}\bigl(U_{\theta\ell}U_{\ell}^{\dagger}\bigr)=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\Bigl(\overline{\Theta h_{ij}}\,h_{ij}+\overline{\Theta\overline{h_{ij}}}\,\overline{h_{ij}}\Bigr) \tag{7}$$

と書けます。跨ぐプラケットの重み $\exp\bigl(\frac{\beta}{2N}\sum_k \overline{\Theta h_k}h_k\bigr)$（$h_k$ はすべての h_{ij} と $\overline{h_{ij}}$。定数倍は除く）を級数に開くと、h_k の積 H_α で $\sum_\alpha c_\alpha \overline{\Theta H_\alpha}H_\alpha$ の形になり、$\beta\ge 0$ なら $c_\alpha\ge 0$ です。上下はもう変数を共有しないので

$$\langle \overline{\Theta F}F\rangle \propto \sum_{\alpha} c_\alpha \Bigl|\int dU_{>}\, F\, H_\alpha\, e^{-S_{+}}\Bigr|^2 \ge 0 \tag{8}$$

です。鎖の (5) で $T\ge 0$ が要ったのと同じく、ここで $\beta\ge 0$ が要ります。実際に破れる例は 08 節です。

この本の定義の上で機械検査した形は 20-01〜20-04 に在ります。

05

転送行列 — 格子のハミルトニアン

反射正値性があれば 4-10 の再構成で Hilbert 空間と時間を一目盛り進める作用素が作れ、格子ではこの作用素（転送行列）を直接書けます。時間を周期的（長さ L_t）にし、縦のリンクをゲージ変換でできるだけ 1 にそろえると（時間ゲージ）、各空間点 x の時間の輪に一本ずつリンク V_x が残ります。残った V_x で積分することは、一時刻の全リンクにゲージ変換 $g_x=V_x$ を施して平均することと同じで、その平均がゲージ不変な状態への射影 P_0 です。状態の空間は一時刻の空間方向のリンク E_s の関数の空間 $\mathcal{H}=L^2(G^{E_s},dU)$ で、T は核

$$T(U,U')=e^{-\frac{1}{2}S_s(U)}\prod_{\ell\in E_s} e^{-\beta\left(1-\frac{1}{N}\operatorname{Re}\operatorname{tr}U_\ell U_\ell'^{\dagger}\right)}\,e^{-\frac{1}{2}S_s(U')} \tag{9}$$

の積分作用素です（S_s は一時刻の空間のプラケットの作用、真ん中の積は縦のプラケットから）。すると

$$Z=\operatorname{Tr}\bigl(P_0 T^{L_t}\bigr),\qquad \langle O(t)O(0)\rangle-\langle O\rangle^2 \xrightarrow{L_t\to\infty} \sum_{n\ge 1}|\langle\Omega|O|n\rangle|^2\Bigl(\frac{\lambda_n}{\lambda_0}\Bigr)^{t} \tag{10}$$

です（O はゲージ不変な実の観測量、λ_n・$|n\rangle$ は P_0T の固有値と固有ベクトル、$\Omega=|0\rangle$。2-09 の (8) と同じ計算）。

(a) 核が実対称なので T は自己共役（サイト反射の内容）。(b) $T=VKV$（V は $e^{-S_s/2}$ を掛ける作用素、K は真ん中の積）で、$\beta\ge0$ なら $K\ge0$（06 節）なので $T\ge0$（リンク反射の内容）。(c) $\beta>0$ では、V は正の関数を掛ける作用素なので逆を持ち、06 節の λ_r がすべて正なので K も 0 を固有値に持たず、T は 0 を固有値に持たない[紙]。Lüscher 1977 はこの性質を

題で 'strictly positive' と呼びます。(d) 有限の箱では $P_0 T$ の核は連続で正、ゲージ軌道の空間はコンパクトなので、連続で正の核を持つコンパクト空間上の積分作用素についての Jentzsch の定理の一般化（Krein–Rutman 型。Perron–Frobenius の定理の積分作用素版）で λ_0 は重複しない 既知 （一般化は Schaefer 1974。出典の表）。

以下 $\beta > 0$ とします。(b)(c) から固有値はすべて正なので、λ_0 が重複しないことから $\lambda_1 < \lambda_0$ です。こうして $P_0 \mathcal{H}$ の上に

$$H_a = -\frac{1}{a} \log \frac{T}{\lambda_0} \;\geq\; 0, \qquad m_L(\beta) = \log \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \;>\; 0 \tag{11}$$

が立ちます（a は格子間隔）。例。物理の単位の隙間は $\Delta = m_L / a$ です。箱ごとの $m_L > 0$（$\beta > 0$）は (d) から自動的で、問われるのは $L \to \infty$・$a \to 0$ で Δ が正に残るかです（4-11 §08・5-09）。

本書での使い方は 26-04 §01（転送行列の正値性と鏡映正値性を、捩れた区画の偏りに当てる）。

06

一本のリンクの転送行列 — 電場のエネルギーが現れる

K はリンクごとの作用素 k の積です。一本のリンクでは $(kf)(U) = \int_G e^{\frac{\beta}{N} \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\, UU'^{-1} - \beta} f(U')\, dU'$ で、核は $W = UU'^{-1}$ の共役 $W \to hWh^{-1}$ で変わらない関数（類関数）です。これを対角にするには、表現の言葉が二つ要ります。

- 表現 r（次元 d_r）の**指標**を $\chi_r(W) = \mathrm{tr}\, r(W)$ と書きます。類関数で、既約表現どうしでは $\int_G \chi_r(W) \overline{\chi_s(W)}\, dW = \delta_{rs}$（直交性） 既知 。
- 類関数との畳み込みは、各既約表現の行列要素 $r(U)_{ij}$ の張る空間の上でスカラー倍として働きます（1-04 の Schur の補題から）。$L^2(G)$ はこれらの行列要素で張られるので（Peter–Weyl の定理）、k は既約表現ごとの固有値で決まります 既知 。

詳しくは 7-02 §03 の (3.1)。表現 r での固有値は

$$\lambda_r = \frac{1}{d_r} \int_G e^{\frac{\beta}{N} \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\, W - \beta}\, \overline{\chi_r(W)}\, dW \tag{12}$$

です。指数関数を $\mathrm{tr}\, W$ と $\overline{\mathrm{tr}\, W}$ のべきに開くと各べきはテンソル積表現の指標で、既約表現の重複度は 0 以上なので、$\beta \geq 0$ なら $\lambda_r \geq 0$、つまり $K \geq 0$ です。$\beta > 0$ なら展開の係数はすべて正で、どの既約表現も基本表現とその複素共役のテンソル積のどれかに現れるので 既知 、$\lambda_r > 0$ です。$SU(2)$ では、W の固有値を $e^{\pm i\theta}$（$0 \leq \theta \leq \pi$）として $\mathrm{tr}\, W = 2\cos\theta$、$\chi_j = \sin((2j+1)\theta) / \sin\theta$ です。類関数を積分するときの Haar 測度は $\frac{2}{\pi} \sin^2\theta\, d\theta$ で、これは 5-01

の S^3 の一様分布を北極からの角 θ で見た密度です（Weyl の積分公式の最も簡単な場合）。これらから 既知

$$\lambda_j = e^{-\beta}\,\frac{2}{\beta}\,I_{2j+1}(\beta), \qquad j = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \dots \tag{13}$$

です（$I_n(\beta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\beta\cos\theta}\cos n\theta\,d\theta$ は変形ベッセル関数。数値積分と相対誤差 10^{-10} 未満で一致 計算 。比 λ_j/λ_0 は 5-02 の (4) の u_j）。$\beta < 0$ では半整数の j で負です。大きい β の漸近形 $I_\nu(\beta) \approx \frac{e^\beta}{\sqrt{2\pi\beta}}\big(1 - \frac{4\nu^2-1}{8\beta}\big)$（DLMF 10.40.1）から、一段あたりのエネルギーは

$$E_j = -\log\frac{\lambda_j}{\lambda_0} \;\approx\; \frac{2j(j+1)}{\beta} = \frac{g^2}{2}\,j(j+1) \tag{14}$$

です。$j(j+1)$ は Casimir E^aE^a の値です（1-04 の J^2）。比喩で言えば、一本のリンクは $SU(2)$（三次元の球面）の上を回るこまで、E^a はその角運動量です。正確には、大きい β で k が群の上の熱核 $e^{-\frac{g^2}{2}E^aE^a}$ に近づくということです（7-02 §04）。

例 計算 。$E_{1/2}$ は $\beta = 16$（$g^2 = \frac{1}{4}$）で 0.0967（(14) は 0.0938）、$\beta = 64$ で 0.0236（0.0234）です。比 $E_{1/2}/(14)$ のずれ（相対誤差）は 1.032 から 1.008 へと、ほぼ $1/\beta$ で縮みます（差そのものは 0.00295 から 0.00018 へ、$1/\beta^2$ で縮む）。強結合の $\beta = 1$ では $E_1 = 3.24$ が近似の 4 から外れます。比 $E_1/E_{1/2} \to 8/3$ は 7-02 §07。

07

Kogut–Susskind のハミルトニアン — 時間の刻みを 0 にする

(11) の H_a は積分作用素の対数で、形が見えません。局所的な形は、時間方向の間隔 a_t だけを空間の間隔 a より細かくすると見えます。四次元で、時間方向を含むプラケットと空間だけのプラケットに別々の係数

$$\beta_t = \frac{2N}{g^2}\,\frac{a}{a_t}, \qquad \beta_s = \frac{2N}{g^2}\,\frac{a_t}{a} \tag{15}$$

を付けます。体積あたりのプラケットの数 $1/(a^3 a_t)$ と 5-01 の (7) から、古典的な連続極限はどちらの向きでも 5-01 の (8) の作用になります。$a_t \to 0$ では $\beta_t \to \infty$ なので、時間方向の一段には (14) の一般形 $-\log(\lambda_r/\lambda_0) \approx \frac{N}{\beta_t}C_2(r) = a_t\frac{g^2}{2a}C_2(r)$ が使えます（C_2 は Casimir の値、規格化は $\operatorname{tr} T^aT^b = \frac{1}{2}\delta^{ab}$）。$W = e^{iX^aT^a}$ の近くで $\frac{\beta}{N}\operatorname{Re}\operatorname{tr} W \approx \beta - \frac{\beta}{4N}X^aX^a$ となり、k が時刻 N/β の熱核に近いからです（$SU(3)$ の基本表現で $\beta = 640$ のとき比 1.003 計算 ）。空間の部分 $V^2 = e^{-S_s}$ は $\beta_s \propto a_t$ なので、はじめから $e^{-a_t(\cdots)}$ の形です。合わせて $T = e^{-a_t H_{\mathrm{KS}} + O(a_t^2)}$、

$$H_{\mathrm{KS}} = \frac{g^2}{2a}\sum_{\ell} E^a_\ell E^a_\ell + \frac{2N}{g^2 a}\sum_{p}\Big(1 - \frac{1}{N}\operatorname{Re}\operatorname{tr} U_p\Big) \tag{16}$$

です。第一項が電場（各リンクのこまの回転）、第二項が磁場のエネルギーで、状態は Gauss の法則を満たすもの（$P_0\mathcal{H}$）に限ります。この形は Kogut–Susskind 1975 が与え、Creutz 1977 の要旨は 'Taking the timelike lattice spacing to zero, we extract the Kogut-Susskind Hamiltonian from the transfer matrix in the gauge A0 = 0' と書きます 既知 。(15)(16) の係数はこの章の規約での計算で、極限は固有値ごとの近似です。正準量子化からは 4-01。

例。g^2 が大きいと第一項が支配し、最初の励起は一枚のプラケットの縁を基本表現の電場が一周する状態で、エネルギーは $\frac{g^2}{2a}\cdot 4\cdot C_2(\text{基本})$ です。$SU(N)$ では $C_2(\text{基本})=\frac{N^2-1}{2N}$ で、$SU(2)$（$j=\frac12$、$C_2=\frac34$）では $\frac{3g^2}{2a}$ です。電場の線のエネルギーは長さに比例します（5-02）。

本書での使い方は 24-05 §04（Hamiltonian 格子の上で、隙間を真空の測度の Poincaré 定数として読む）。

08

$\mathbb{Z}_2$ ゲージ理論で全部を見る — 正でない転送行列

群を $\mathbb{Z}_2=\{\pm1\}$（2-09 の寄り道・5-10）、時空を三次元（空間は $L\times L$ の周期格子）とし、作用を $\beta\sum_P(1-U_P)$ とします。一本のリンクの因子は (4) で K を β に替えた行列の $e^{-\beta}$ 倍で、固有値の比は $\tanh\beta$ です。$\beta<0$ では負になります。

各リンクの因子の固有ベクトル（電場の基底）では、各リンクを電場の線が通るか否かが決まります。Gauss の法則は各点に集まる線が偶数本であることで、ゲージ不変な状態は閉じた線の集まり e で番号付けられ、K は線の総延長 $|e|$ だけで決まる対角行列です。

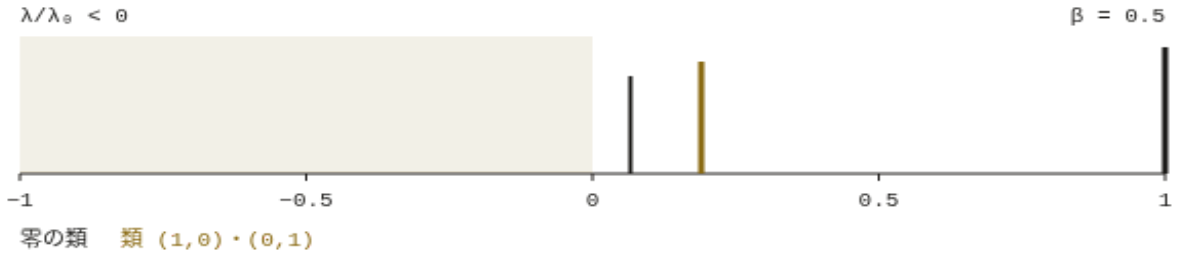
$$K(e)\ \propto\ (\tanh\beta)^{|e|} \tag{17}$$

閉じた線は x・y 方向に巻き付く回数の偶奇で四つの類に分かれ、V（プラケットの縁の線を足し引きする）は類を保ちます。縁を足しても長さの偶奇は変わらないので、類 $(1,0)$ の線の長さは L と偶奇が同じです。よって $\beta<0$ で L が奇数なら、類 $(1,0)$・$(0,1)$ で $K\le0$、$T=VKV\le0$ です。L が偶数なら比 λ/λ_0 は β と $-\beta$ で同じです。一つおきの行の x 向きのリンクの符号を反転すると $U_p\to-U_p$ となり、$V(-\beta)$ は $V(\beta)$ の定数倍と相似になります。L が偶数なら閉じた線の長さはすべて偶数なので、(17) の K も定数倍しか変わりません 紙 （$L=2$ の全固有値、$L=4$ の上位で一致 計算 ）。

各類は 2^{L^2-1} 次元で、$L\le3$ は対角化、$L=4$ は Lanczos 法（大きな対称行列の端の固有値だけを反復で求める方法）です（$L=3$ で両者が印字した 8〜11 桁で一致 計算 ）。$F=W(1)$ を、時刻 1 で x 方向に一周する Wilson 線とします。リンク反射（$t_0=\frac12$）の (3) の左辺は $\langle W(0)W(1)\rangle=\sum_n|\langle0|W|n\rangle|^2\lambda_n/\lambda_0$（$n$ は類 $(1,0)$）で、$L=3$、$\beta=-0.5$ では -0.1306 と負

です。サイト反射（$t_0 = 1$、$F = W(2)$）では $\langle W(0)W(2)\rangle = +0.0183$ です。転送行列を使わないモンテカルロ（$3 \times 3 \times 18$）でも $-0.1305(18)$・$+0.0189(11)$ で、誤差の範囲で合います 計算 。

図 2　$\mathbb{Z}_2$ の転送行列の固有値（空間 3×3） — つまみで β（−1〜2）を動かすと、縦線が固有値の比 λ/λ_0 の位置に動きます（黒：零の類の λ_0・λ_1、茶：類 $(1,0)$・$(0,1)$ で絶対値が最大のもの）。



β = 0.5：零の類 λ₁/λ₀ = 0.0663（m = 2.71）、類 (1,0) の最大 λ/λ₀ = 0.190。固有値はすべて正。

計算 この図の数値はこの端末で計算した。

計算 表 1　零の類（巻き付く線の無い状態）の隙間 $m = \log(\lambda_0/\lambda_1)$ と、類 $(1,0)$ の最低のエネルギー $E_w = \log(\lambda_0/\lambda_0^{(1,0)})$（格子単位）。

β	m (L=3)	m (L=4)	−4 log tanh β	E_w (L=3)	E_w (L=4)
0.10	9.233	9.233	9.224	6.915	9.223
0.75	1.587	1.153	1.816	0.1860	0.1443
1.00	2.991	2.840	1.089	0.0200	0.00459

読み方。(i) $\beta > 0$ では固有値はすべて正で $m > 0$（05 節の (d)）。(ii) 小さい β では $m \approx -4 \log\tanh\beta$（長さ 4 の線。5-02 の m_0）、$E_w \approx -L \log\tanh\beta$（巻き付く線の長さに比例。閉じ込めの形）。(iii) 大きい β では E_w は L とともに急に小さくなります。(iv) $\beta = 0.75$ の近くでは m が L で大きく動きます。三次元の $\mathbb{Z}_2$ ゲージ理論は三次元イジング模型と双対で相転移があるとされ（Wegner 1971）既知 、有限の箱の m だけでは無限体積の隙間は決まりません。(v) $\beta < 0$・$L = 3$ では類 $(1,0)$・$(0,1)$ の 512 個の固有値がすべて 0 以下で（$\beta = -1$ で最小 $-0.788\lambda_0$）、$\langle W(0)W(t)\rangle$ は t の偶奇で符号を変えます（$\beta = -0.5$、$t = 3$ で -0.0027）計算 。

09

何が保たれ、何が残るか

極限で保たれる。(3) は不等式なので、格子の列で期待値が収束し、鏡の面がどの段でも格子の面に乗っていれば、極限の測度も反射正値です（7-01 §07）既知 。四次元の非可換な場合、連続極限の存在は 2026-11 に公開された構成が示し、極限の相関の鏡映正値性もそこで言

われています（Lean で証明されている、と委員会が評価した。12-01・12-05）。ただし極限は相関関数の水準で、測度としての極限は作られていません（6-04）。

作用を替えると失われうる。次元 6 の項を足す改良（5-05 の Symanzik の改良）では、Lüscher–Weisz 1984 の要旨が 'physical positivity is lost in general' と書き、転送行列に複素数の固有値が現れうること（減衰振動する相関）と、二点関数のスペクトル分解に負の重みが必ず出ることを述べます 既知 。08 節の $\beta < 0$ は、転送行列が正でなくなる最も簡単な例です（固有値は実で負）。連続の正則化は 4-10 §08。

言わないこと。$m_L > 0$ が $L \to \infty$（強結合側は 5-04）・$a \to 0$ で残るかに、この章の道具は答えません。回転対称性の回復も極限の側の課題です。

この章が言えている範囲

内容	状態
格子ゲージ理論の反射正値性と正の自己共役な転送行列	既知 （Osterwalder–Seiler 1978 の要旨）
(3) の β の条件：サイト反射はすべての β、リンク反射は $\beta \geq 0$	紙 （この章の (6)〜(8)）
$\beta < 0$ でリンク反射が破れる例	計算 （08 節の $\mathbb{Z}_2$、$L = 3$）
T の自己共役・$\beta \geq 0$ で正	既知 （Osterwalder–Seiler 1978、Lüscher 1977）
$\beta > 0$ で T が 0 を固有値に持たない	紙 （05 節の (c)、06 節の $\lambda_r > 0$）
λ_0 の単純性、箱ごとの $m_L > 0$（$\beta > 0$）	既知 （Jentzsch の定理の一般化。Schaefer 1974）
(12)〜(16)	式は 既知 、06 節の数値と $SU(3)$ の一般形の確認は 計算 。(15)(16) の係数はこの章の規約、$a_t \to 0$ は固有値ごとの近似
$\mathbb{Z}_2$（$L \leq 4$）の表 1・図 2	計算 （対角化と独立なモンテカルロ）
質量ギャップ・連続極限	何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1・図 2・本文の数値	計算	python3（NumPy、SciPy）：`table1.py`・`one_link.py`・`z2_transfer.py`・`check_lanczos.py`・`even_L_check.py`・`winding_corr.py`・`mc_check.py`・`fig_data.py`・`su3_casimir.py`。$\langle W(0)W(t)\rangle$ はスペクトル表示とモンテカルロの二通り
問題文 §6.5	既知	A. Jaffe, E. Witten, "Quantum Yang–Mills Theory" (2000)。本文を確認

もの	種別	出典・道具
反射正値性・転送行列	既知	K. Osterwalder, E. Seiler, "Gauge field theories on a lattice", Ann. Phys. 110 (1978) 440–471（要旨を確認、本文は未確認）／M. Lüscher, Commun. Math. Phys. 54 (1977) 283–292（題と要旨を確認）
(16)・改良した作用	既知	J. Kogut, L. Susskind, Phys. Rev. D 11 (1975) 395–408／M. Creutz, Phys. Rev. D 15 (1977) 1128–1136／M. Lüscher, P. Weisz, Nucl. Phys. B 240 (1984) 349–361。いずれも要旨を確認
Perron–Frobenius・Jentzsch	既知	O. Perron, Math. Ann. 64 (1907) 248–263／R. Jentzsch, "Über Integralgleichungen mit positivem Kern", J. reine angew. Math. 141 (1912) 235–244。いずれも書誌を Crossref で確認、本文は書誌のみ（Jentzsch の主張〔正方形の上の連続で正の核では、スペクトル半径が正の固有関数をもつ単純な固有値〕は二次資料 arXiv:1910.01120 で確認）。コンパクト空間上の核への一般化：H. H. Schaefer, *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer (1974) p. 337 の定理（核 $N \geq 0$ の積分作用素で、ある冪がコンパクト、かつ正の測度の集合 S とその補集合をつなぐ核の積分が正なら、スペクトル半径はほとんど至る所正の固有関数をもつ単純な固有値。$N > 0$ ならほかの固有値の絶対値はそれより小さい）。書誌のみ（主張は arXiv:1910.01120・arXiv:1501.06011 の引用で確認。有限の箱の連続で正の核は Hilbert–Schmidt なのでこの仮定を満たす）。M. G. Krein, M. A. Rutman, Uspekhi Mat. Nauk 3:1(23) (1948) 3–95（英訳 Amer. Math. Soc. Translation 26, 1950）。書誌を Math-Net.Ru で確認、本文は書誌のみ
I_ν の漸近形	既知	NIST DLMF 10.40.1・10.17.1。式を確認
$\mathbb{Z}_2$ とイジングの双対	既知	F. J. Wegner, J. Math. Phys. 12 (1971) 2259–2272。書誌のみ

次に読む章：5-04 無限体積極限とクラスター展開。

無限体積極限とクラスター展開 — 小さい β では塊の展開が箱によらず収束し、極限と格子の隙間が出る

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 無限体積極限は部分列ならいつも取れるが一つとは限らないこと。小さい β ではプラケットの塊の展開が箱によらず収束し、極限の存在・解析性・相関の指数減衰（格子単位の隙間）が出ること。境界条件によらない一意性は Shen–Zhu–Zhu が Langevin 力学の道で示したこと（§08）。どちらも保証の範囲がずっと狭いこと。

前提となる章 — 5-02。4-11・5-03・7-04 も参照します。β は 5-01 の格子の逆結合で、4-06 の β 関数 $\beta(g)$ とは別の量です。

先に言うこと — 格子間隔を固定した小さい β の側の話で、連続極限 $\beta \to \infty$ の反対の岸です。連続の理論の無限体積極限と質量ギャップについて、この章は何も示していません。表 3 は粗い評価の当てはめで、文献の最良の値ではありません。

この章の順序

1. 箱から全空間へ — 無限体積極限とは何か
2. 極限はいつも取れるが、一つとは限らない（図 1・表 1）
3. 寄り道：Elitzur の定理 — ゲージを変える量は、どの極限でも 0
4. 塊に分ける — 閉じた塊だけが残る
5. 塊を数える — 数は指数で増え、重みも指数で減る（表 2）
6. 収束の条件 — Kotecký–Preiss（図 2・表 3）
7. 展開から出るもの — 極限・解析性・格子の隙間
8. 別の道 — Langevin 力学と Poincaré 不等式
9. どこで止まるか — 強結合の岸と連続極限の岸（表 4）

01

箱から全空間へ — 無限体積極限とは何か

格子ゲージ理論はまず一辺 L の箱 Λ_L で定義します。Wilson 作用（5-01）と Haar 測度の重みは、コンパクトな空間の上の普通の確率測度です。

$$\langle F\rangle_L = \frac{1}{Z_L}\int F(U)\, e^{-S_W(U)} \prod_{\ell\in\Lambda_L} dU_\ell, \qquad S_W = \beta\sum_P \Big(1 - \tfrac{1}{N}\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\, U_P\Big) \tag{1}$$

質量ギャップは距離を無限に延ばしたときの言明（4-11 §02）なので、箱を大きくした極限を考えます。有限個のリンクで決まる連続関数を**局所観測量**と呼び、全格子の上の確率測度 μ が

$$L_k \to \infty \text{ となる列があって、すべての局所観測量 } F \text{ で } \quad \langle F\rangle_{L_k} \longrightarrow \int F\, d\mu \tag{2}$$

を満たすとき、μ を**無限体積極限**と呼びます。測度の弱収束です。Chatterjee（2018）§3 は “a weak limit of the above probability measures as $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^n$” と書きます 既知 。

例：二次元で自由境界なら、ゲージを木に沿って固定するとプラケット変数が独立になり、どの箱でも $\langle W_{R\times T}\rangle = u^{RT}$（5-02 §04）で、極限は自明です 既知 。

02

極限はいつも取れるが、一つとは限らない

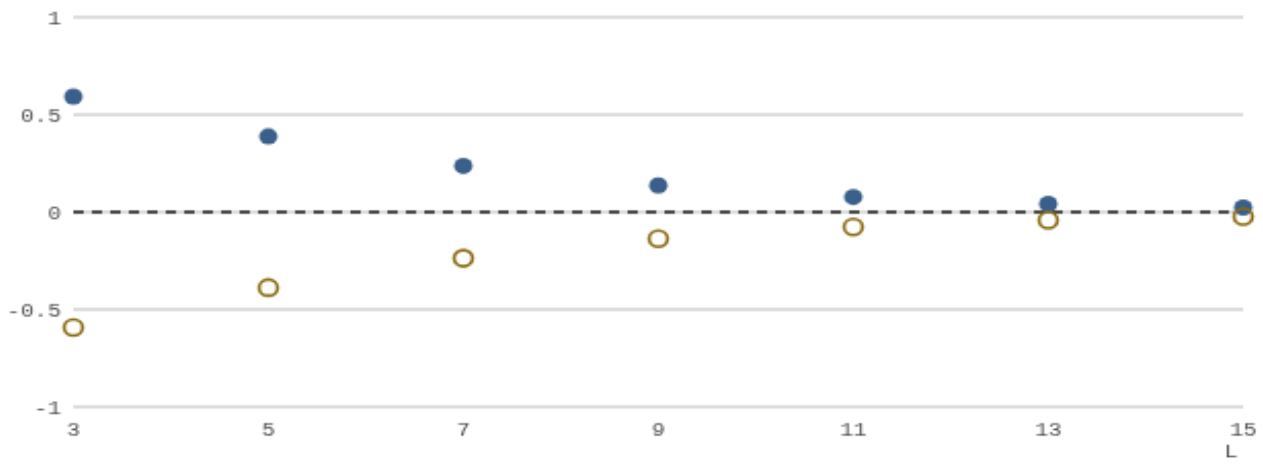
存在はコンパクト性でほぼ無料です。$\langle F\rangle_L$ は有界な数列なので収束する部分列があり、局所観測量を近似する可算個の関数について対角線論法で同時に収束させられます 既知 。

難しいのは**一意性**です。Chatterjee（2018）§3 は “The infinite volume limit may or may not be unique. Indeed, the uniqueness (or non-uniqueness) is in general unknown for lattice gauge theories in dimensions higher than two when β is large.” と書きます 既知 。破れる例を二次元イジング模型（2-09）で見ます。$L\times L$ の箱の外周を ± 1 に固定し、中心のスピンの平均を測ります。

$$\langle \sigma_0\rangle_L^{\pm} \xrightarrow{L\to\infty} \pm m^*, \qquad m^* = \begin{cases} 0 & \beta \le \beta_c \\ \big(1-\sinh^{-4}2\beta\big)^{1/8} & \beta > \beta_c \end{cases}, \qquad \beta_c = \tfrac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) \tag{3}$$

右は自発磁化の厳密な式です 既知 。$\beta > \beta_c$ では境界条件ごとに異なる極限が現れます（相転移。2-08）。

図 1　外周が＋（●）と −（○）の箱の中心のスピン（$L = 3, \dots, 15$）、破線は $\pm m^*$。つまみ・「動かす」・表 1 の行で β が変わります。



β = 0.30 L=15：±0.023 m* = 0.000

計算 この図の数値はこの端末で計算した（列の転送行列）。JavaScript が無効なら表 1 が中身です。

表 1　$\langle\sigma_0\rangle_L^{+}$（– 境界では符号が逆）。行を選ぶと図 1 の β が変わります 計算

β	$L=5$	$L=15$	m^*	**読み**
0.30	**0.3882**	**0.0231**	**0**	**境界の影響が指数で消える**
0.44	0.8473	0.7544	0	臨界点の近く。箱が小さい
0.50	0.9241	0.9119	0.9113	$\pm m^*$ に分かれる

中心と外周の距離は $(L+1)/2$ で、$\beta=0.2$ の $\ln(\langle\sigma_0\rangle_{13}/\langle\sigma_0\rangle_{15})=1.219$ は相関の減衰率 $2(K^*-K)=1.223$（2-09 §06）とほぼ同じです 計算 。**境界の影響は相関と同じ速さで消えます。**ゲージ理論で相関の減衰を示す道具が §04 からの塊の展開です。

03

寄り道：Elitzur の定理 — ゲージを変える量は、どの極限でも 0

飛ばしてよい節です。

ゲージ理論では境界が向きを選べません。箱の内部の一点 x だけでゲージ変換 g をしても（出るリンクは gU_ℓ、入るリンクは $U_\ell g^{-1}$）、S_W も Haar 測度も境界も変わらないので、g について平均でき、x から出るリンク ℓ で

$$\langle \operatorname{tr} U_\ell\rangle_L=\left\langle \operatorname{tr}\Big(\textstyle\int_G g\,dg\,U_\ell\Big)\right\rangle_L=0 \tag{4}$$

が、どの箱・どの境界条件でも、したがってどの極限でも成り立ちます。$\int_G g\,dg=0$ は、中心の元 ωI（$SU(N)$ では $\omega=e^{2\pi i/N}$、$U(1)\cdot\mathbb{Z}_2$ では -1 など）を掛けても Haar 測度が変わらないので $\int g\,dg=\omega\int g\,dg$ となることから出ます。Elitzur（1975）の要旨は “It is argued that a spontaneous breaking of local symmetry for a symmetrical gauge theory without gauge fixing is impossible.” です 既知 。正確には、言えるのは「ゲージを変える量は秩序の目印にならない」ことで、相転移が無いこ

とではありません。相の違いはゲージ不変な量（面積則、Polyakov ループ。18-03）に現れえます（5-06）。

04

塊に分ける — プラケットの塊の気体

小さい β では各プラケットの重みがほぼ定数です。重みを「定数×(1＋小さなずれ)」に分けて積を開きます。

$$e^{\frac{\beta}{N}\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U} = c_0(\beta)\big(1+f(U)\big), \qquad c_0 = \int_G e^{\frac{\beta}{N}\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U}\,dU, \qquad \int_G f\,dU = 0 \tag{5}$$

ずれを拾うプラケットの集合 X を、**リンクを共有すればつながる**という規則で連結な部分に分けます。リンクを共有しない部分の積分は独立なので、積に分かれます。

$$\frac{Z_L}{(e^{-\beta}c_0)^{|\mathcal{P}|}} = \sum_{\{X_1,\dots,X_k\}\ \text{互いにリンクを共有しない}} \prod_{i=1}^{k} z(X_i), \qquad z(X) = \int \prod_{P\in X} f(U_P) \prod_{\ell\in X} dU_\ell \tag{6}$$

$|\mathcal{P}|$ は箱のプラケットの数です。これは 7-04 §03 のポリマー模型そのものです 既知 。活量について二つの事実が効きます。

$$|z(X)| \le \varepsilon^{|X|}, \quad \varepsilon(\beta) = \sup_U |f(U)|; \qquad z(X) = 0 \quad (X \text{ の一枚にしか含まれないリンクがある}) \tag{7}$$

右は、そのリンクが一枚の $f(AU_\ell B)$ にしか現れず、Haar 測度の不変性で $\int f(AU_\ell B)\,dU_\ell = \int f = 0$ となるからです。残るのは、どのリンクも二枚以上に囲まれた**閉じた塊**だけです。最小は単位立方体の表面（6 枚）です。

例：$\mathbb{Z}_2$ では $f = \tanh\beta\cdot U$ で立方体の活量は $\tanh^6\beta$。$SU(2)$ では各面を 5-02 の (3) で $f = \sum_{j\neq 0} d_j\,u_j\,\chi_j$ と展開し、5-02 の (5) で積分すると、全部の面が同じ表現 j を持つ項だけが残ります。閉じた面では、その寄与が $d_j^{F-E+V}u_j^F$ になるという規則が知られています（F,E,V は面・辺・頂点の数、$F-E+V$ は面のオイラー標数で、立方体の表面は球なので $6-12+8=2$）既知 。立方体なら次のように確かめられます。隣り合う面を (5) の右の式で 5 回貼ると（1 回ごとに $1/d_j$）、6 枚は一枚の円板になります。その縁を一周する積では、残る 7 本のリンクが $U_\ell U_\ell^{-1}$ と隣り合うものから順に打ち消し合い、単位行列が残ります。したがって $d_j^6\cdot d_j^{-5}\cdot\chi_j(1) = d_j^2$ です。

$$z(\text{立方体}) = \sum_{j=1/2,1,\dots} (2j+1)^2\,u_j^6 \approx 4u^6, \qquad u_j = \frac{I_{2j+1}(\beta)}{I_1(\beta)} \tag{8}$$

$\beta = 1$ で 7.682×10^{-4}、Monte Carlo の直接積分は $7.63(8) \times 10^{-4}$ です 計算 。

05

塊を数える — 数は指数で増え、重みも指数で減る

言葉を四つ決めます（詳しくは 7-04 §03・§04）。(6) の X を**ポリマー**（塊）と呼びます。二つの塊がリンクを共有するとき**相容れない**と言います。相容れない関係で一つにつながった塊の列（同じ塊が何度出てもよい）を**クラスター**と呼びます。(6) の左辺の対数はクラスターごとの項の和に書き直せ、問題はその和が箱によらず絶対収束するかどうかです 既知 。

収束は塊の**数の増え方**と重み ε^n の勝負です。根のプラケットを含むリンクでつながった n 枚の集合の数を c_n とします。一枚のプラケットには 4 本のリンクがあり、一本のリンクは $2(d-1)$ 枚に含まれるので、リンクを共有する相手は $D = 4(2(d-1)-1) = 4(2d-3)$ 枚（四次元で 20）です。Borgs–Chayes–Kahn–Lovász（2010）の補題 2.1(c) の上界があります 既知 。

$$c_n \le \frac{1}{n}\binom{nD}{n-1}, \qquad \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{n}\binom{nD}{n-1}\Big)^{1/n} = \frac{D^D}{(D-1)^{D-1}} \approx 53.0 \quad (D=20) \tag{9}$$

表 2　四次元の c_n（Redelmeier の方法で列挙） 計算

n	c_n	比	閉じた塊	(9) の上界
2	20	20.0	0	20
3	458	22.9	0	590
4	11 132	24.3	0	20 540
5	280 175	25.2	0	784 245
6	7 218 768	25.8	4	31 763 004

比は $n=6$ で約 26、上界の増え方 53 はその倍ほどです。閉じた塊は $n \le 5$ に無く、$n=6$ の 4 個は四つの立方体です 計算 。この数え方で収束を保証するには、ε が塊の増え方の逆数（表 2 の比から $1/26$ より小さく、(9) から $1/53$ より大きいと見込まれる値）より小さいことが要ります。

比喩で言えば、一枚ごとに $\ln(1/\varepsilon)$ の費用と $\ln 26$ ほどの選び方の得の勝負です。正確には、得が勝っても展開が使えなくなるだけで、相転移が起きるとは限りません（7-04 §10）。

06

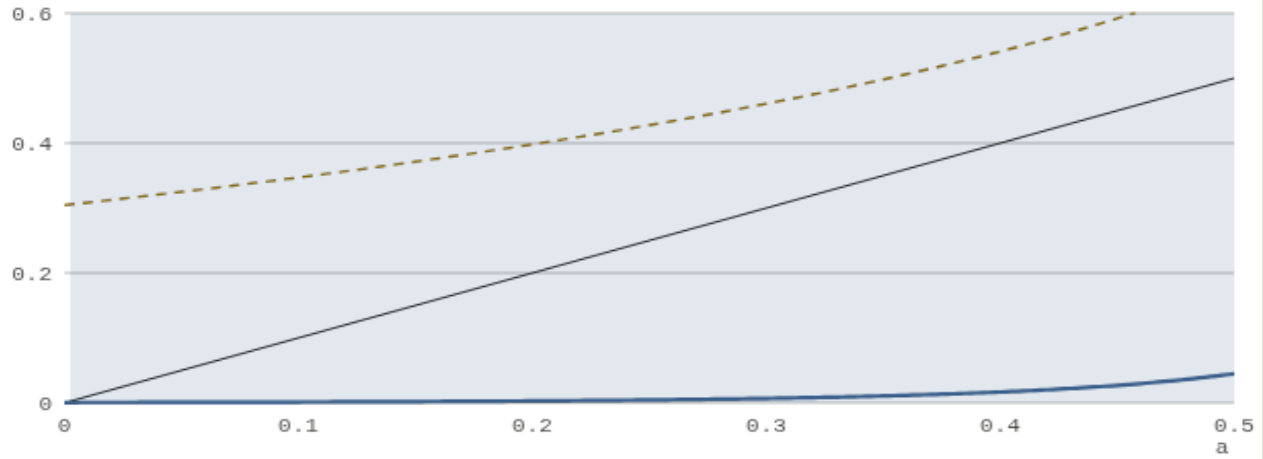
収束の条件 — Kotecký–Preiss の条件を当てはめる

勝負を定理にするのが Kotecký–Preiss の条件です（7-04 §06）。定理の形では、ある $a>0$ があって、すべての塊 X で (10) の左の不等式が成り立てば、(6) の対数のクラスターの和は箱によらず絶対収束します 既知 。各塊に予算 $a|X|$ を配り、相容れない相手の重み（$e^{a|X'|}$ を掛けたもの）の合計が予算に収まる、という読み方です。

$$\sum_{X' \text{ が } X \text{ とリンクを共有}} |z(X')|\, e^{a|X'|} \le a|X| \quad \Longleftarrow \quad 8(d-1)\,G\!\left(\varepsilon e^{a}\right) \le a, \qquad G(x)=\sum_{n} c'_n\, x^{n} \tag{10}$$

右は、X のリンクが高々 $4|X|$ 本、一本のリンクを含む塊はその $2(d-1)$ 枚のどれかを含む、という勘定です。c'_n は閉じた塊の数（$n\le 6$ は表 2、$n\ge 7$ は (9)）です。$\varepsilon = x\,e^{-8(d-1)G(x)}$ を $x=\varepsilon e^{a}$ について最大化すると保証の上限 $\varepsilon_{\max}$ が出て、$\varepsilon(\beta)=\varepsilon_{\max}$ を解けば β の範囲です。

図 2　四次元の条件 (10)。細線は右辺 a、太線は左辺 $24G(\varepsilon e^{a})$（閉じた塊）、破線は連結な塊すべて。太線が細線の下に来る帯があれば収束が保証されます。つまみで β、ボタンで群が変わります。



SU(2)　β = 0.0100　ε = 0.0100　条件を満たす　a：0.003〜0.500

計算 この図の数値はこの端末で計算した。JavaScript が無効なら表 3 が中身です。

表 3　(10) が保証する β の上限（連結な塊すべてを数えると 0.0087）計算 と Shen–Zhu–Zhu の条件をこの本の Wilson の β に直した値 既知 （規約の換算は 5-01 表 4）

四次元	$\varepsilon_{\max}$	$\mathbb{Z}_2$	$U(1)$	$SU(2)$	$SU(3)$
閉じた塊	0.0161	0.0161	0.0160	0.0160	0.0160
Shen–Zhu–Zhu 既知	–	–	–	0.0833	0.1875

保証されるのは $\beta<0.016$ 程度で、$\varepsilon\approx\beta$ なので群にほぼ依りません。5-02 表 2 で強結合の式が数値と合った $\beta\le 1$ より二桁狭く、出所は上限ノルム（$SU(2)$・$\beta=0.1$ で $\varepsilon=0.104$、$u=0.025$）、(9) の粗さ、打ち消し合いの無視です 計算 。表 3 は「展開が止まる場所」ではありません。

07

展開から出るもの — 極限・解析性・指数的なクラスター性・格子の隙間

(10) が箱によらず成り立つと、7-04 §08 から次が出ます 既知 。

(a) 解析性。一枚あたりの $\ln Z_L$ の極限は β の解析関数（複素の β まで広げても収束する）で、その範囲に相転移はありません。**(b) 極限の存在**。$\langle F\rangle_L$ は部分列を取らずに収束します（境界の影響は表 1 と同じく指数で消える）。言えるのはその境界条件の列での極限の存在で、境界条件によらない一意性は §08 の道によります。**(c) 指数的なクラスター性**。二つの局所観測量の連結相関には両方の台に触れるクラスターだけが残り、距離 r を結ぶには r 枚程度以上が要ります。

$$\big|\langle FG\rangle - \langle F\rangle\langle G\rangle\big| \le C_{F,G}\, e^{-m\,\mathrm{dist}(F,G)}, \qquad m>0 \tag{11}$$

例：二枚のプラケットを結ぶ最小の塊は、その二枚を両端とする側面 $4t$ 枚の管（両端と合わせて閉じた面）で、主項は $m_0 = -4\ln u$（5-02 §05）。(11) はそれを箱によらず正当化します。

(d) 格子の隙間。転送行列 T（5-03 §05）を、真空 Ω の固有値が 1 になるよう規格化します。ゲージ不変な局所観測量 F が作る状態 $F\Omega$ から真空の成分を引いたものについて、時間の向きの (11) は $\langle F\Omega, T^t F\Omega\rangle$ がどの F でも e^{-mt} の速さで減ることを言います。こうした状態は真空に直交するゲージ不変な状態の全体で稠密なので、スペクトル定理から、そこでの T のスペクトルは $[0, e^{-m}]$ に収まります（4-11 §02）。つまり真空に直交するゲージ不変な状態の上で $\|T\| \le e^{-m}$ で、$-\ln T$ の隙間は m 以上です。

文献では、Shen–Zhu–Zhu（2023）§1 が Osterwalder–Seiler（1978）の内容を “the existence of a mass gap (exponential clustering) follows from convergence of the cluster expansion, so do existence of the infinite volume limit and analyticity of Schwinger functions in the inverse coupling.” とまとめ、一意性は “should also follow” と弱く書きます。Chatterjee（2018）§6 は “quark confinement and the existence of a positive self-adjoint transfer matrix” が示されたと書きます 既知 。原論文の要旨も “We then prove existence and analyticity of the infinite volume limit of strongly coupled Yang-Mills theories on the lattice and we verify Wilson's confinement bound.” と述べます（本文は読んでいません）。

この本の定義の上で機械検査した形は 20-01〜20-04 に在ります。

08

別の道 — Langevin 力学と Poincaré 不等式

塊を数えずに届く道もあります。言葉を三つ用意します。

三つの言葉 — Langevin 力学・Ricci 曲率・ヘッセ行列

Langevin 力学は、リンク変数を $dQ = -\nabla S_W(Q)\,dt + \sqrt{2}\,dB$ の形で確率的に動かす力学です。∇ はリンク変数の群の上の勾配、B は群の上のブラウン運動（各リンクに独立な揺らぎ）です。坂を下る力と揺らぎの釣り合いで、測度 (1) を変えない（不変測度に持つ）ように作ってあります（7-09）。**Ricci 曲率**は、群を曲がった面と見たときの曲がり具合です。球面のように正に曲がっていると、近くから出た測地線が寄り集まります。$SU(N)$ では至る所で同じ正の定数（Shen–Zhu–Zhu の内積の規格で $N/2$）です。**ヘッセ行列**は、作用 S_W の二階微分を群の上で取ったものです。

Poincaré 不等式と Bakry–Émery の判定法

鍵は Poincaré 不等式（1-10）です。

$$\mathrm{Var}_\mu(F) \le C_P\, \mathbb{E}_\mu\big[\,|\nabla F|^2\,\big] \tag{12}$$

C_P が箱によらないことが「一様な評価」に当たります。1-10 の (9) では、一次元で $V'' \ge \kappa > 0$ なら $C_P \le 1/\kappa$ でした。群の上では曲率がこの κ に加わり、Bakry–Émery の判定法は次の形になります [既知]。

$$\text{Ricci 曲率} + \text{作用のヘッセ行列} \;\ge\; K_S > 0 \quad\Longrightarrow\quad \text{(12) が箱によらない } C_P \text{ で成り立つ}$$

Shen–Zhu–Zhu の強結合の条件（Shen–Zhu–Zhu の仮定 1.1）は、$SU(N)$ で $K_S = N/2 - 8N|\beta_{\mathrm{SZZ}}|(d-1) > 0$ です。右の項は、ヘッセ行列が $-8N|\beta_{\mathrm{SZZ}}|(d-1)$ より下がらないという評価から来ます。ヘッセ行列が $|\beta|N$ の程度に収まることが要です（一本のリンクの例は 5-11）。比喩で言えば、丸い器の底へ戻す力が作用の凸凹より強い状態です。正確には、比べるのは曲率 $N/2$ と、ヘッセ行列が負になりうる大きさ $8N|\beta_{\mathrm{SZZ}}|(d-1)$ です。

Shen–Zhu–Zhu の定理

Shen–Zhu–Zhu（2023）は $SU(N)$ で $|\beta_{\mathrm{SZZ}}| < 1/(16(d-1))$（$\beta = N^2\beta_{\mathrm{SZZ}}$。換算は 5-01 表 4）の下で、要旨に “The finite volume Yang–Mills measures converge to this unique invariant measure in the infinite volume limit”、“the infinite volume measure has a strictly positive mass gap” と書きます。不変測度の一意性の定理（Shen–Zhu–Zhu の定理 1.2）は、Langevin 力学の不変測度が一つしかないこと (1) と、周期境界の箱の測度の極限が部分列によらずそれに一致すること (2) を示します。群がコンパクトなので箱の測度の列はい

つも緊密（tight）で、(2) の “every tight limit” は §02 の意味の部分列の極限と読んでよいものです。注意 1.3 は、周期境界を Dirichlet などの境界条件に替えても極限は同じ不変測度だと述べます。強結合の範囲での §02 の問いへの一つの答えです 既知 。四次元 $SU(2)$ なら $\beta < 1/12$ です。

注意　二つの隙間

(12) の $1/C_P$ は Langevin の人工的な時間の隙間で、転送行列の隙間とは別の量です（18-03）。Shen–Zhu–Zhu の質量ギャップは、(12) から導いた、格子の上の距離についての（Langevin の人工的な時間ではない）相関の指数減衰（Shen–Zhu–Zhu の系 1.6）で、(11) と同じ意味の言明です。

09

どこで止まるか — 強結合の岸と連続極限の岸

表 4　四次元 $SU(2)$（作用 (1)）の β の目盛り

β	言えていること	水準
< 0.016	この章の当てはめ（表 3）	計算
< 0.083	一意な極限と相関の指数減衰（Shen–Zhu–Zhu）	既知
$\lesssim 1$	強結合の式が数値と合う（5-02 表 2）	計算
≈ 2	面の荒れ（5-02 §07）	物理
2.3 以上	連続極限へ外挿する数値（5-08）	物理
$\to \infty$	連続極限（5-05）。相関関数の極限は 2026-11 に公開された構成が作った（体積は部分列。6-00）。一意性と物理の単位の隙間の定理は無い（6-04）	委員会の評価

表の上と下で「無限体積極限」の意味が変わります。この章の極限は格子間隔を固定したものです。連続極限では $a \to 0$ と同時に格子単位の箱も無限大になり、隙間は格子単位で $m(\beta) \to 0$ と閉じるはずです（5-09） 物理 。要るのは物理の単位で一様な隙間で、そこに小さな ε はありません。問題文 §6 は “no present ideas point the direction to establish the existence of a mass gap that is uniform in the volume. Nor do present methods suggest how to obtain the existence of the infinite volume limit $\mathrm{T}^4 \to \mathrm{R}^4$.” と書きます 既知 。

また、解析性は (10) が保証する複素 β の小さい円板の外を語りません。四次元の $U(1)$ では大きい β で面積則が破れ（Guth 1980。Chatterjee（2018）§4 によれば完全に厳密な証明は Fröhlich–Spencer 1982。5-06）、非可換群では有限の β に臨界点が無い（相関長は $\beta \to \infty$

でだけ発散する）ことは Chatterjee（2018）§5 の “It is believed that … many of the non-Abelian lattice models of interest have βc = ∞.” の水準です 物理 （7-10）。

この章が言えている範囲

事項	言えている	言えていない
(2)〜(8)	部分列の極限の存在・Elitzur・塊の気体 既知 。表 1 と立方体の活量 計算	大きい β での一意性
表 2・表 3	$n \le 6$ の数と、(10) の粗い十分条件 計算	文献の最良の範囲、展開が止まる β
(a)〜(d)・(11)・(12)	強結合側の既知の結果の紹介（Osterwalder–Seiler は要旨と二次資料による）。境界条件によらない一意性は、塊の展開からは “should also follow” の水準で、Shen–Zhu–Zhu が Langevin 力学の道で示した 既知	証明の細部。連続極限での一意性と隙間。この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§01・§02・§07・§09 の引用	本文 §3・§4・§5・§6	S. Chatterjee, arXiv:1803.01950 (2018)
§07・§08 の引用、仮定 1.1・定理 1.2・注意 1.3・定理 1.4・系 1.6・式 (1.2)・(4.7)・(4.8)	要旨・本文 §1・§4	H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, Commun. Math. Phys. 400 (2023) 805–851, arXiv:2204.12737
§07 の Osterwalder–Seiler	要旨（転送行列の正値性・強結合での無限体積の極限の存在と解析性・Wilson の閉じ込めの評価。INSPIRE の要旨）・本文は書誌のみ	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471
原典（(10) を含む）	書誌のみ（内容は上の二つと 7-04 による）	R. Kotecký, D. Preiss, CMP 103 (1986) 491。E. Seiler, *Gauge theories as a problem of constructive quantum field theory and statistical mechanics*, Springer (1982)
§03 の引用	要旨	S. Elitzur, Phys. Rev. D 12 (1975) 3978–3982
(9)	本文 補題 2.1(c)	C. Borgs, J. Chayes, J. Kahn, L. Lovász, arXiv:1002.0115 (2010)
表 2 の列挙法	書誌のみ	D. H. Redelmeier, Counting polyominoes: yet another attack, Discrete Math. 36 (1981) 191–203

もの	種別	出典・道具
(8) の d^{F-E+V} の規則	本文 §3.4（貼り合わせの式 (3.17)・(3.19) と、閉じた面で $(\dim R)^{2-2p}$ が出ること。二次元の理論の形で）	S. Cordes, G. Moore, S. Ramgoolam, Lectures on 2D Yang–Mills theory, equivariant cohomology and topological field theories, arXiv:hep-th/9411210 (1994)
§09 の問題文	本文 §6（材料で逐語確認）	A. Jaffe, E. Witten, Quantum Yang–Mills Theory, Clay Mathematics Institute (2000)
(3) の $m^*/U(1)$ の相	書誌のみ	C. N. Yang, Phys. Rev. 85 (1952) 808–816／A. H. Guth, Phys. Rev. D 21 (1980) 2291、J. Fröhlich, T. Spencer, Commun. Math. Phys. 83 (1982) 411
表 1〜3・図・(8)	この端末で計算	Python 3・NumPy・SciPy：ising_box.py・animals.py・kp.py・cube.py・cube_check.py

次に読む章：5-05 弱結合と連続極限（反対の岸）。一般論は 7-04。

弱結合と連続極限 — β を上げると格子は細かくなり、その速さは漸近自由が決める

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — β を上げると格子間隔 $a(\beta)$ が 0 に近づき、a は物理量で目盛って決める出力であること。「スケーリング」と「漸近スケーリング」の違い。格子の誤差が a^2 で消え、改良作用と連続外挿で減らせること。

前提となる章 — 5-01（Wilson の格子）と 4-06（β 関数）。連続極限の一般論は 2-08 §08、質量ギャップは 4-11。この章の β は 5-01 の格子の逆結合 $2N/g_0^2$ で、4-06 の β 関数 $\beta(g)$ とは別の量です。§03 の「格子の β 関数」は、この β の a への依り方 (3) を指します。

先に言うこと — $a(\beta)$ の漸近形と a^2 の誤差は摂動論と数値の水準の話です 物理 。四次元の非可換な格子の連続極限は、2026-11 に公開された構成が、裸の結合を漸近自由の走りに合わせて選んだ族について作りました（Lean で証明されている、と委員会が評価した。6-00）。物理量で目盛りを決めた形の極限、(4) の比の極限、質量ギャップは示されていません（6-04）。この章も連続極限と質量ギャップについて何も示していません。

この章の順序

1. 連続極限は臨界点に近づくこと
2. 格子間隔は出力である — 何で目盛るか
3. 格子の β 関数と漸近スケーリング — a を半分にする $\Delta\beta$（表 1・図 1）。寄り道：連続極限の値段
4. スケーリング — 無次元の比が止まる
5. 格子の誤差の形 — 自由場で見る a^2（表 2・図 2）
6. Symanzik の有効理論と改良作用 — 長方形を足して a^2 を消す（表 3）、量子論の対数補正。寄り道：改良の代償
7. 連続外挿 — a^2 に対して直線を引く

8. 数学から見た連続極限 — 示されたことと、示されていないこと

01

連続極限は臨界点に近づくこと

格子の理論には長さの単位がなく、出るのは「格子何個分」という数です。たとえば二つのプラケットの相関が $e^{-|x|/\xi_{\mathrm{lat}}}$ で減るときの相関長 $\xi_{\mathrm{lat}}(\beta)$ です（4-11）。物理の単位の質量は格子間隔で割って得ます。

$$\Delta = \frac{1}{a(\beta)\,\xi_{\mathrm{lat}}(\beta)} \tag{1}$$

$\beta = 2N/g_0^2$（5-01）の格子で Δ を止めて $a \to 0$ とするには $\xi_{\mathrm{lat}} \to \infty$、つまり臨界点に近づく必要があります。Chatterjee（2018）§5 は物理の用法を “the model has a continuum limit if there is a critical point βc ∈ [0,∞] such that as β → βc, the correlation length tends to infinity” とまとめ、四次元の非可換な模型では “It is believed ⋯ βc = ∞” と書きます 既知 。$\beta = \infty$ は $g_0 \to 0$ で、漸近自由（4-06）と同じ向きです。

極限は二つで、先に β を止めて箱を無限にし（5-04）、その後で $\beta \to \infty$ とします。

02

格子間隔は出力である — 何で目盛るか

a が何 fm かは、質量次元 k の量 Q の格子での値 $\widehat{Q} = a^k Q$ と物理の値を突き合わせて後から決めます。

$$a_Q(\beta) = \left(\widehat{Q}(\beta)/Q_{\mathrm{phys}}\right)^{1/k} \tag{2}$$

基準には弦張力 σ（Creutz 1980 は “hold fixed the string tension” として a を決めた）、力から定める長さ r_0、勾配流の t_0（Lüscher 2010）が使われます 既知 。r_0 は、静的な電荷の対に働く力 $F(r)$ から $r_0^2 F(r_0) = 1.65$ で決める長さです（Sommer 1994。4-06 §07）。t_0 は、場を拡散方程式で滑らかにする操作（勾配流）で決める長さです（18-04 §08 では同じものを Wilson 流と呼びます）。

例：純 SU(3) の r_0/a は $\beta = 5.7$ で 2.922、6.4 で 9.74 です（Necco–Sommer 2002 の表 1。$\beta \le 6.4$ は先行の計算の値の再掲）。$r_0 \approx 0.5$ fm（QCD での目安の値。Necco–Sommer の

序）と置くと $a \approx 0.171$ fm と 0.051 fm です（$1\ \mathrm{fm} = 10^{-15}$ m） 計算 。r_0 の物理の値は格子の外から来る入力です。

基準を変えると有限の β で $a(\beta)$ は少し違い、二つの a の比は格子で測った比 $\widehat{Q}_1/\widehat{Q}_2$ で決まります。この比が落ち着くことが §04 のスケーリングです。数学の定式化（§08）でも目盛りの選び方が問題になり、どちらの流儀の $\varepsilon(\beta)$ も存在は未証明です（5-09）。

03

格子の β 関数と漸近スケーリング

格子を細かくしても同じ物理を保つには裸の結合 g_0 を弱めます。その速さは方式に依らない b_0, b_1 で始まります（4-06 §05） 既知 。$\mu = 1/a$ と読み $\beta = 2N/g_0^2$ に書き直すと

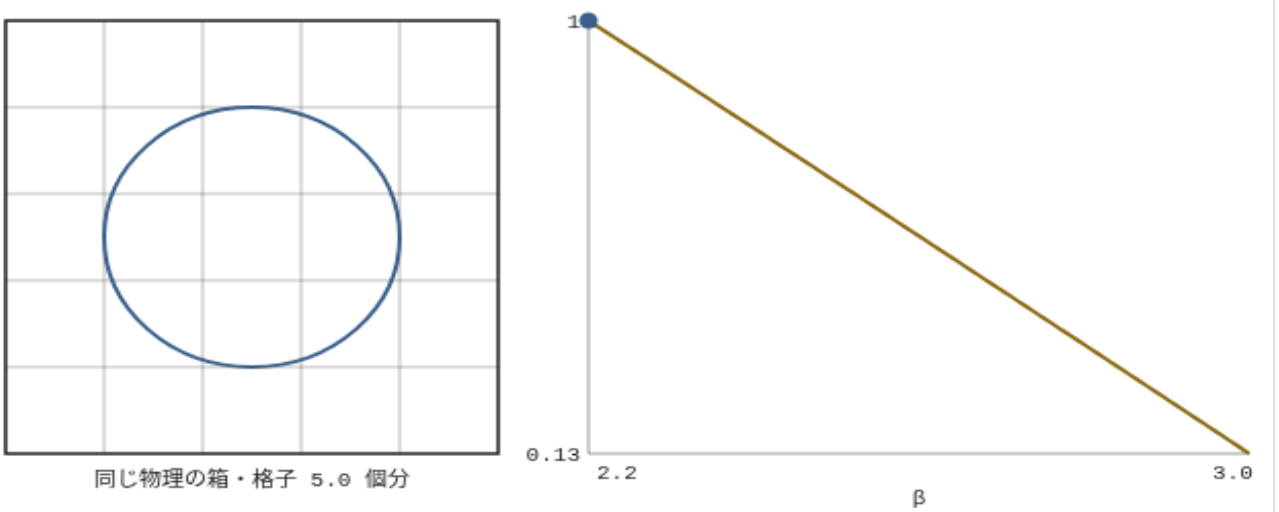
$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{d\ln(1/a)} &= 4Nb_0 + \frac{8N^2 b_1}{\beta} + O(\beta^{-2}), \\ a\Lambda_{\mathrm{L}} &= (b_0 g_0^2)^{-b_1/(2b_0^2)} e^{-1/(2b_0 g_0^2)} \bigl(1 + O(g_0^2)\bigr) \end{aligned} \tag{3}$$

で、下の式は上を積分した 4-06 の式 (8) です。積分定数 Λ_{L}（4-07）は出ませんが、比 $a(\beta)/a(\beta')$ は出ます。一ループでは $a \propto e^{-\beta/(4Nb_0)}$ で、a を半分にする上げ幅は $\Delta\beta = 4Nb_0 \ln 2$：SU(2) で $4Nb_0 = 11/(3\pi^2)$ から 0.2575、SU(3) で 0.5794 です 計算 。

表 1　式 (3)（二ループ）の $a(\beta)$ 計算

群	β	a/a_{ref}	同じ箱の格子点 ×	半分にする $\Delta\beta$
SU(2)	2.2	1	1	0.2760
SU(2)	2.6	0.3656	56.0	0.2732
SU(2)	3.0	0.1323	3263.5	0.2711
SU(3)	5.7	1	1	0.6155
SU(3)	6.3	0.5088	14.9	0.6121
SU(3)	6.9	0.2579	225.9	0.6092

図 1　β を上げると、同じ物理の箱（左）の格子が式 (3) に従って細かくなり、相関長（円）にまたがる格子が増えます。右は a/a_{ref} の対数。



SU(2) β = 2.20 a/a(2.2) = 1.0000 格子単位の ξ ×1.00 格子点の数 ×1.0 a を半分にする Δβ = 0.2760

計算 この図の数値はこの端末で計算した（式 (3) をその場で計算。表 1 と 4 桁で一致。JavaScript が無効なら表 1）。

格子の数値が (3) に従うことを**漸近スケーリング**と呼びます。Creutz（1980）は SU(2) で “a logarithmic decrease of the bare coupling constant in a manner consistent with the perturbative renormalization-group prediction” を見ました 既知 。純 SU(3) のデータの上げ幅は $\beta = 5.70$ で 0.354、6.20 で 0.524 で、二ループの 0.61 に届きません（4-06 の表 4）物理 。Lepage–Mackenzie（1993）の要旨は、物理量で定義した結合で展開すると摂動論と数値がよく合うと述べます。裸の結合の代わりにその結合を使えば、$\beta = 5.7$ 程度から既にスケーリングは摂動論に従う、とも要旨は述べます。裸の結合で見たずれは、結合の選び方に由来する部分が大きいということです。

寄り道：連続極限の値段

飛ばしてよい小節です。

箱を止めて a を半分にすると、四次元では格子点が 16 倍です。SU(2) で β を 2.2 から 3.0 に上げると約 3,300 倍（表 1）。比喩なら「解像度を倍にするたびに画素が 16 倍、しかも一筆が遅くなる絵」です。正確には、費用は格子点の数と自己相関時間の積で、後者も ξ_{lat} の冪で増えると見込まれます（5-07）物理 。

04

スケーリング — 無次元の比が止まる

連続極限に要るのは、物理の量どうしの**比**が β に依らなくなることです。

$$R(\beta) = \widehat{Q}_1(\beta)/\widehat{Q}_2(\beta) = R_0\big(1 + s\,a^2 Q_2^2 + \cdots\big) \tag{4}$$

が誤差の内で一定になることを**スケーリング**、その β の範囲をスケーリングの窓と呼びます。例：Necco–Sommer（2002）は力で定めた二つの長さの比 r_c/r_0 で “No dependence on the resolution is seen within the errors of below 1%” と書き、外挿で 0.5133(24) を得ています 既知 。$m/\sqrt{\sigma}$ は 5-08 で見ます。

スケーリングは比が止まることで、連続極限に必要です。**漸近スケーリング**は $a(\beta)$ 自体が (3) に従うことで、格子を摂動論の Λ に結ぶ追加の主張です 物理 。二つの量が (3) から同じだけずれていれば、ずれは比の中で消えます。格子で求めた $m/\sqrt{\sigma}$ のような結果はスケーリングに依ります（18-04 §05）。

05

格子の誤差の形 — 自由場で見る a²

(4) の補正が a^2 から始まる理由を、厳密に解ける自由場で見ます。左右対称な差分 $f(x+a)-2f(x)+f(x-a)$ では a の奇数乗が打ち消し合います。質量 m の自由なスカラー場では、転送行列（5-03）から格子で見える質量 E が決まります 既知 。具体的には、格子の伝播関数 $1/(\hat{p}^2+m^2)$（$\hat{p}^2$ は下の式 (6)）の極を、空間運動量 0・虚の運動量 $p=iE$ で探すと $\frac{4}{a^2}\sinh^2\frac{aE}{2}=m^2$ になり、これを書き直したのが次の上の式です。

$$\begin{aligned} \cosh(aE) &= 1+\tfrac{1}{2}(am)^2, \\ \frac{E}{m} &= 1-\frac{(am)^2}{24}+\frac{3(am)^4}{640}-\cdots \end{aligned} \tag{5}$$

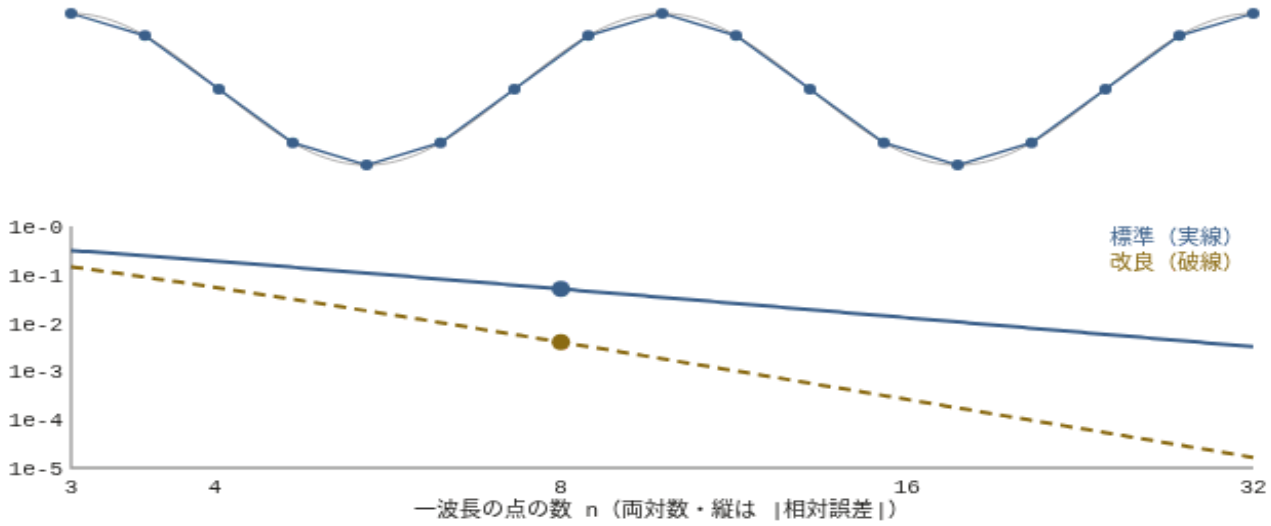
表 2　自由場の格子の質量 (5) と二点外挿 (8) 計算

am	$(E/m-1)/(am)^2$	**外挿の誤差**
1.0	-0.03758	-9.9×10⁻⁴
0.4	-0.04093	-2.9×10⁻⁵
0.2	-0.04148	-1.9×10⁻⁶
0.1	-0.04162	-1.2×10⁻⁷

二列目は $-1/24=-0.04167$ に近づきます。空間方向でも同じで、波数 p の波に格子のラプラシアンを掛けると p^2 の代わりに $\hat{p}^2$ が出ます。二つ先の点まで使う差分を重み $\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}$ で組むと a^2 の項が消えます。これが改良の最も簡単な例です。

$$\begin{aligned} \hat{p}^2 &= \tfrac{4}{a^2}\sin^2\tfrac{pa}{2} = p^2\big(1-\tfrac{(pa)^2}{12}+\cdots\big), \\ \hat{p}^2_{\mathrm{imp}} &= \tfrac{4}{3}\hat{p}^2-\tfrac{1}{3a^2}\sin^2(pa) = p^2\big(1-\tfrac{(pa)^4}{90}+\cdots\big) \end{aligned} \tag{6}$$

図 2　一波長の格子点の数 n を変えると、上の標本点と、下（両対数）の標準（実線）・改良（破線）の差分の誤差の位置が動きます。



n = 8 pa = 0.785 標準 -5.036 % 改良 -0.4002 %

計算 この図の数値はこの端末で計算した（(6) をその場で計算）。JavaScript が無効なら：$\hat{p}^2/p^2 - 1$ は $n = 4, 8, 16, 32$ で標準 −0.189・−0.0504・−0.0128・−0.00321、改良 −0.0543・−0.00400・−0.000261・−0.0000165。n を倍にすると標準は約 1/4、改良は約 1/16 になります。

06

Symanzik の有効理論と改良作用

Symanzik（1983）は小さい a の格子の理論を「連続の理論に a の冪つきの項を足したもの」と読み、要旨で “Corrections to continuum theory results stemming from finite lattice spacing can be diminished systematically by use of lattice actions that also include suitable irrelevant terms” と述べます 既知 。純粋なゲージ理論では次の形と考えられています 物理 。

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + a^2 \sum_{i=1}^{3} c_i(g_0)\,\mathcal{O}_i + O(a^4) \tag{7}$$

第一項は 5-01 と同じ規格（共変微分に g_0 を入れる）です。$\mathcal{O}_i$ は質量次元 6 のゲージ不変な項です（$\mathrm{tr}F^2$ の次元は 4 なので a^2 が掛かる。4-04）。Lüscher–Weisz（1985）の要旨によれば、スペクトルの量（安定な粒子の質量や静的ポテンシャルなど）だけを改良するなら三つの係数の一つは自由に選べます 既知 。**なぜ a^1 が無いか**：次元 5 の項は場の強さ二つと微分一つで添字が 5 個です。格子は各軸の反転で不変なので、各方向の添字は偶数回ずつ現れねばならず、奇数個の添字は置けません 物理 。これは作用とスペクトルの量（質量）についての議論です。静的電荷の間の力のように演算子を含む量では、補正が a^2 から始まることを別に示す必要があり、Necco–Sommer（2002）§4 がその議論を与えています。

長方形を足す

プラケットに 1×2 の長方形を重み c_0, c_1（$c_0+8c_1=1$）で足します。長方形は面ごとに二つの向きがあり、面積が 2 倍で主項に 4 倍効くので 8 です。最低次（古典）の係数は Lüscher–Weisz（1985）が与えたとされ、長方形だけを足す作用では $c_1=-\frac{1}{12}$（$c_0=\frac{5}{3}$）になります 既知 。この数値は表 3 で再現します。二次元トーラスの滑らかな U(1) 場（六つの波数の和。磁束は原始関数で誤差なく計算）で確かめます。

表 3　二次元の滑らかな U(1) 場（古典）での作用の相対誤差 計算

$L=1/a$	**Wilson**	$/a^2$	**改良** $c_1=-\frac{1}{12}$	$/a^4$
4	-0.2718	-4.35	-0.1229	-31.5
16	-0.02121	-5.43	-1.06×10⁻³	-69.2
32	-0.005370	-5.50	-6.94×10⁻⁵	-72.8
64	-0.001347	-5.52	-4.39×10⁻⁶	-73.7

a を半分にしたときの誤差の比は Wilson で 3.95→3.99（→4）、改良で 15.2→15.8（→16）。Wilson の係数は予想値 $-\frac{1}{12}\int|\nabla F|^2/\int F^2=-5.522$ に近づきます。$L=16$ で $c_1=0,\,-\frac{1}{24},\,-\frac{1}{12},\,-\frac{1}{8}$ とすると a^2 で割った誤差は $-5.43,\,-2.85,\,-0.27,\,+2.31$ と直線的に動きます 計算 。四次元の非可換な場は 5-01 の表 3。

量子論での係数と対数補正

量子論では c_i が g_0 に依ります（一ループは Lüscher–Weisz 1985）。漸近自由のため誤差の主項は $a^2[\bar g^2(a^{-1})]^{\hat\gamma_1}$ の形の対数補正を伴い、Husung–Marquard–Sommer（2020）はヤン–ミルズで “the log-corrections are a rather weak modification” と結論しています 物理 。ここで $\bar g^2(a^{-1})$ は尺度 $1/a$ での走る結合（4-06）で、$1/\ln(1/(a\Lambda))$ のように 0 に近づきます。$\hat\gamma_1$ は補正項ごとに決まる指数（異常次元に当たる数）です。したがって誤差は a^2 に $\ln(1/a)$ の冪が掛かった形になります。

寄り道：改良の代償

飛ばしてよい小節です。

Wilson 作用は反射正値性を持ち、正の転送行列＝格子のハミルトニアンを与えます（5-03）。Lüscher–Weisz（1984）の要旨は、次元 6 の演算子を足すと “physical positivity is lost in general” で、転送行列は定義できるが複素固有値が現れうること、二点関数のスペクトル分解に負の重みの寄与が必ずあることを示しました 既知 。精度を取るか、格子のハミルトニアン（4-10）を取るか、の選択です（18-04）。

07

連続外挿 — a² に対して直線を引く

計算機で $a=0$ には行けないので、いくつかの β で比 R を測り、横軸 a^2 で直線を引いて切片を取ります。

$$R(a) = R_0 + c\,a^2 + O(a^4) \quad\Longrightarrow\quad R_0 \approx \tfrac{1}{3}\big(4R(a/2) - R(a)\big) \tag{8}$$

表 2 の三列目がこの二点外挿の誤差で、誤差は a^4 に下がります。傾き c は作用ごとに違っても、切片 R_0 は共通のはずです（普遍性。§ 08）。表 3 の Wilson でも $L=16, 32$ から作ると相対誤差は 0.54 % から 0.009 % になります 計算 。実際の数値では、Necco–Sommer（2002）が力を $(1 + s(a/r_c)^2)$ の形で当てはめ、傾き s は有意でないと報告しています 既知 。

落とし穴は、粗すぎる点（表 3 の $L=4$ は $/a^2$ が 2 割ずれる）・§ 06 の対数補正・小さすぎる箱です。どれも $R(a)$ が (8) の形だという前提の上の手続きで、前提は定理ではありません 物理 。

08

数学から見た連続極限 — 示されたことと、示されていないこと

Chatterjee（2018）§ 3 は “the general belief in the physics community is that β should scale like log(1/ε) in dimension four, although there are doubts about this belief and the question remains an open mathematical problem” と書きます（2018 年の記述） 既知 。式 (3) の上の式を積分すると $\beta \approx 4Nb_0 \log(1/a)$ になり、これがこの $\log(1/\varepsilon)$ です。同 § 5 の連続の弦張力の問題（Chatterjee の Problem 5.2）は、無限体積の理論で $\beta \to \infty$ のとき、列 $\varepsilon(\beta) \to 0$、$c(\beta) \to \infty$ と 0 でない d が在って、縦 R・横 T の長方形の輪について

$$\log\big\langle W_{\gamma_{R/\varepsilon,\,T/\varepsilon}}\big\rangle = -c\,(R+T) - d\,RT + o(1) \tag{9}$$

となることを問います。d が連続の弦張力で、周の項については “it is not clear to me whether the renormalization term c(R+T) is indeed necessary” とあります 既知 。

二次元では Wilson・Villain・Manton の格子作用が同じヤン–ミルズ測度に行くこと（Chevyrev–Shen、トーラスの自明な束。7-02）が示されています 既知 。四次元の U(1) は様子が違い（弱結合側に質量の無い光子の相があり、臨界点が有限の β にある。5-06）、非可換な場合の繰り込みの段は 7-07 で扱います。四次元の非可換な場合、2026-11 に公開された構成が、間隔の列を選んだ Wilson の作用の族について、繰り込んだ局所の観測量の相関が収束することを示しました（Lean で証明されている、と委員会が評価した。体積の極限は部分

列。8-02・8-05)。その族の裸の結合は、β と log(1/a) の比が一定の値に近づくように選ばれています（10-06)。作用や間隔の列に依らないこと、(4) の比の極限、連続の弦張力の問題は定理ではありません（6-04)。この章の表と図は極限を仮定したときの手続きで、存在の証拠ではありません。第二巻は、この構成を対象（8-01〜8-05)、繰り込みの一段（9-01〜9-07)、結合の合わせ（10-01〜）の順に読みます。

この章が言えている範囲

事項	言えている	言えていない
連続極限＝臨界点 (1)	物理の用法の紹介 既知	四次元の非可換な格子で ξ_{lat} が存在し発散すること
二ループの $a(\beta)$ (3)・表 1・図 1	普遍な b_0, b_1 からの計算 計算	実際の $a(\beta)$ が (3) に従うこと（数値ではずれが残る 物理 ）
スケーリング (4)	数値での支持の紹介 物理	比が極限を持つこと（定理なし）
誤差が a^2 で始まる・改良 $c_1 = -\frac{1}{12}$	自由場と二次元 U(1)（古典） 計算 。有効理論の説明 物理	四次元の量子論での証明・係数・対数補正
連続外挿 (8)	自由場・古典場で 計算	実際の数値での妥当性
連続極限の存在・質量ギャップ	—	この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§01・§08 の引用	一次資料（本文を確認）	S. Chatterjee, “Yang–Mills for probabilists”, arXiv:1803.01950 (2018) §3・§5
§02・§03 の弦張力による目盛り	一次資料（要旨を確認）	M. Creutz, “Monte Carlo Study of Quantized SU(2) Gauge Theory”, Phys. Rev. D 21 (1980) 2308
§02 の r_0・t_0	一次資料（要旨を確認）	R. Sommer, Nucl. Phys. B 411 (1994) 839, arXiv:hep-lat/9310022／M. Lüscher, JHEP 1008 (2010) 071, arXiv:1006.4518
§02 の r_0/a（表 1 の $\beta \le 6.4$ は先行の計算の再掲）と $r_0 \approx 0.5$ fm・§04 の r_c/r_0・§06 の力の a^2・§07 の当てはめ	一次資料（本文を確認。§4 は書誌のみ）	S. Necco, R. Sommer, Nucl. Phys. B 622 (2002) 328, arXiv:hep-lat/0108008
§03 の Lepage–Mackenzie	一次資料（要旨を確認）	G. P. Lepage, P. B. Mackenzie, Phys. Rev. D 48 (1993) 2250, arXiv:hep-lat/9209022

もの	種別	出典・道具
§06 の Symanzik	一次資料（要旨を確認）	K. Symanzik, Nucl. Phys. B 226 (1983) 187・205
§06 の係数・寄り道の転送行列	一次資料（要旨を確認。$-\frac{1}{12}$ の数値は本文未確認で、要旨は係数を最低次で定めたことまで）	M. Lüscher, P. Weisz, Commun. Math. Phys. 97 (1985) 59；Erratum 98 (1985) 433／Phys. Lett. B 158 (1985) 250／Nucl. Phys. B 240 (1984) 349
§06 の対数補正	一次資料（要旨を確認）	N. Husung, P. Marquard, R. Sommer, Eur. Phys. J. C 80 (2020) 200, arXiv:1912.08498
§08 の二次元の普遍性	一次資料（要旨を確認）	I. Chevyrev, H. Shen, arXiv:2302.12160；Comm. Pure Appl. Math. (2026)（巻・頁は未確認）
表 1〜3・図 1・図 2・本文の数値	この端末で計算	Python 3.12・NumPy：`a_of_beta.py`（§02 の a の fm 換算を含む）・`freefield.py`・`improve2d.py`。図の式は `jscheck.js` で照合。b_0, b_1 と SU(3) の上げ幅は 4-06

次に読む章：5-06 U(1) と非可換の違い。

U(1) と非可換の違い — 同じ格子でも、可換な群は途中で相が変わる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 四次元の格子で群を $U(1)$ にすると、大きい β で質量ゼロの光子の相に入り、途中に相転移があることが（少なくとも Villain 型の作用で）定理になっていること（Guth・Fröhlich–Spencer）。$SU(2)$ では跳びが数値に見えず、有限の β で相関長が発散しない（$\beta_c = \infty$）と信じられていること。「非可換だから」の正確な形。

前提となる章 — 5-02 強結合展開。2-08 の相転移と 4-06 の一ループ係数も借ります。

先に言うこと — 定理は $U(1)$・有限群・三次元についてのものです。四次元の $SU(N)$ では、$\beta_c = \infty$ も隙間も証明されていません。数値は 6^4 の小さな格子での観察です。

この章の順序

1. 同じ格子に二つの群 — 角度の和と行列の積
2. 強結合の側では区別がつかない — どちらも面積則
3. 弱結合の U(1) は光子の気体 — Coulomb の力（図 1）
4. 二つの岸の間で線が折れる — Guth・Fröhlich–Spencer（図 2）
5. 寄り道：単極子の輪 — 四次元と三次元
6. SU(2) には跳びが見えない — 交差だけがある
7. 違いの源は結合が走ること — C_A と $\beta_c = \infty$
8. 「非可換だから」の正確な形 — 反例の表
9. 数学として残っていること

01

同じ格子に二つの群 — 角度の和と行列の積

Wilson の格子（5-01）はどのコンパクト群でも同じ形です。辺に群の元を置き、プラケットの四辺の積に重みを付けます。$U(1)$（2-03 §08）では辺に角度 θ_ℓ が載り、積は角度の和 θ_P になります。$SU(2)$ では 2×2 の行列 U_ℓ が載り、積は行列の積 U_P です。

$$S_{U(1)}=\beta\sum_P(1-\cos\theta_P),\quad \theta_P=\theta_{x,\mu}+\theta_{x+\hat\mu,\nu}-\theta_{x+\hat\nu,\mu}-\theta_{x,\nu},\quad \beta=\tfrac{1}{g^2};\qquad S_{SU(2)}=\beta\sum_P\Big(1-\tfrac{1}{2}\operatorname{tr}U_P\Big)\tag{1}$$

β の規約は古典的な連続極限で Maxwell・Yang–Mills の作用に戻るように決めたものです 既知 。$U(1)$ の $\beta=1/g^2$ は、$SU(N)$ の $\beta=2N/g^2$ に $N=1$ を入れた $2/g^2$ ではありません。生成元の規格化が違うためです（$U(1)$ は辺に e^{-iagA_μ}（符号は 5-01 の (2) と同じ）、$SU(N)$ は $\operatorname{tr}T^aT^b=\delta^{ab}/2$）。$U(1)$ では $\theta_P\approx -a^2gF_{\mu\nu}$ と $1-\cos\theta_P\approx\theta_P^2/2$ から作用はおよそ $\frac{\beta g^2}{4}\sum_x a^4\sum_{\mu,\nu}F_{\mu\nu}^2$ となり、Maxwell の $\frac14\int F^2$ に一致させると $\beta=1/g^2$ です。違いは式の形に出ています。θ_P は辺の角度の**一次式**（格子の回転）で、$U(1)$ の作用の非線形性は cos の周期性、つまり群がコンパクトなことだけです。$SU(2)$ で $U_\ell=e^{i\vartheta_\ell\cdot\sigma}$ と書くと、U_P の指数には交換子 $[\vartheta,\vartheta]$ の項が入ります（1-03）。これが格子の上の自己相互作用です（3-02）。例：四辺の角度が $0.1,0.2,0.3,0.4$ なら $\theta_P=-0.4$ で、足す順は効きません。$SU(2)$ で $A=e^{0.3i\sigma_1}$、$B=e^{0.3i\sigma_3}$ とすると、$\frac12\mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1})=0.9847$、順を替えた $\frac12\mathrm{tr}(ABB^{-1}A^{-1})=1$ です 計算 。$U(1)$ なら角度の和はどちらも 0 です。ただし巡回的な並べ替え（$BA^{-1}B^{-1}A$ など）では $\operatorname{tr}XY=\operatorname{tr}YX$ により値は変わりません。

02

強結合の側では区別がつかない — どちらも面積則

β が小さい側では二つの群は同じように振る舞います。5-02 の指標展開の変数 u は

$$u_{U(1)}=\frac{I_1(\beta)}{I_0(\beta)},\qquad u_{SU(2)}=\frac{I_2(\beta)}{I_1(\beta)},\qquad \langle W_{R\times T}\rangle\approx u^{RT},\quad \sigma\approx-\log u\tag{2}$$

で（I_n は変形 Bessel 関数）、$u<1$ なのでどちらも面積則です。例：$U(1)$ の $\beta=0.5$ で $u=0.2425$・$\sigma\approx1.417$、$\beta=1$ で $u=0.4464$・$\sigma\approx0.807$ 計算 。小さい β の面積則と指数減衰は、任意のコンパクト群で定理です（Osterwalder–Seiler 1978）既知 。格子が粗いことの性質で、非可換性を使いません（5-02 §08）。

違いは数値の係数にだけ出ます。$\beta\to0$ では $u_{U(1)}\approx\beta/2$、$u_{SU(2)}\approx\beta/4$ なので、$\sigma\approx-\log u$ はどちらも $\log(1/\beta)$ の形で大きくなり、差は定数 $\log 2$ です。$\beta=1$ では $u_{SU(2)}=0.2402$・$\sigma\approx1.426$ で、同じ β の $U(1)$（$\sigma\approx0.807$）より大きく出ます 計算 。(1) の規約が群ごとに違

うので、同じ β どうしの大小に意味はあまりありません。効いているのは、どちらも同じ形の面積則になることです。

03

弱結合の U(1) は光子の気体 — Coulomb の力と周長則

β が大きいと重みは $\theta_P \approx 0$ を求め、$1-\cos\theta_P \approx \theta_P^2/2$ とすると作用は二次式です。θ_P が一次式なので、これは相互作用の無い格子の Maxwell 場（光子）です。

$$S_{U(1)} \approx \frac{\beta}{2}\sum_P \theta_P^2, \qquad \langle \theta_\mu(k)\theta_\nu(-k)\rangle = \frac{\delta_{\mu\nu}}{\beta\,\hat{k}^2}, \qquad \hat{k}^2 = \sum_\mu 4\sin^2\frac{k_\mu}{2} \tag{3}$$

(3) の右の式は、ゲージを一つ固定したときの形です（Feynman ゲージ、4-08）既知 。ゲージ不変な量（Wilson ループ）はこの選び方に依りません。

$\hat{k}\to 0$ で $1/\hat{k}^2$ が発散するのが「質量ゼロ」で、場の強さの相関は冪 $|x|^{-4}$ で減ります 既知 。

一点あたり物理の自由度は 3 つ（辺 4 本からゲージの 1 つを引く）、プラケットは 6 枚です。ガウス積分 $\int x^2 e^{-x^2/2}dx \big/ \int e^{-x^2/2}dx = 1$ から、二次の作用 $\frac{\lambda}{2}x^2$ を持つ一つのモードの作用の平均は $1/2$ です（等分配）。したがって $6\cdot\frac{\beta}{2}\langle\theta_P^2\rangle = \frac{3}{2}$、すなわち

$$\langle\cos\theta_P\rangle \approx 1-\frac{1}{4\beta}\ \ (U(1)), \qquad \left\langle \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,U_P\right\rangle \approx 1-\frac{3}{4\beta}\ \ (SU(2)) \tag{4}$$

です（$SU(2)$ は生成元が 3 つ）。例：$U(1)$・$\beta=2$ で 0.875、モンテカルロは 0.865（表 2）計算 。

静的な電荷の間の力

$R\times T$ の Wilson ループは、静的な電荷の対を時間 T 置いた振幅です。ガウスの場では閉じた形で書け、$T\to\infty$ で

$$V(R) = -\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log\langle W_{R\times T}\rangle = \frac{G_3(0)-G_3(R)}{\beta}, \qquad G_3(r) = \int_{[-\pi,\pi]^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{e^{ik\cdot r}}{\sum_i 4\sin^2(k_i/2)} \tag{5}$$

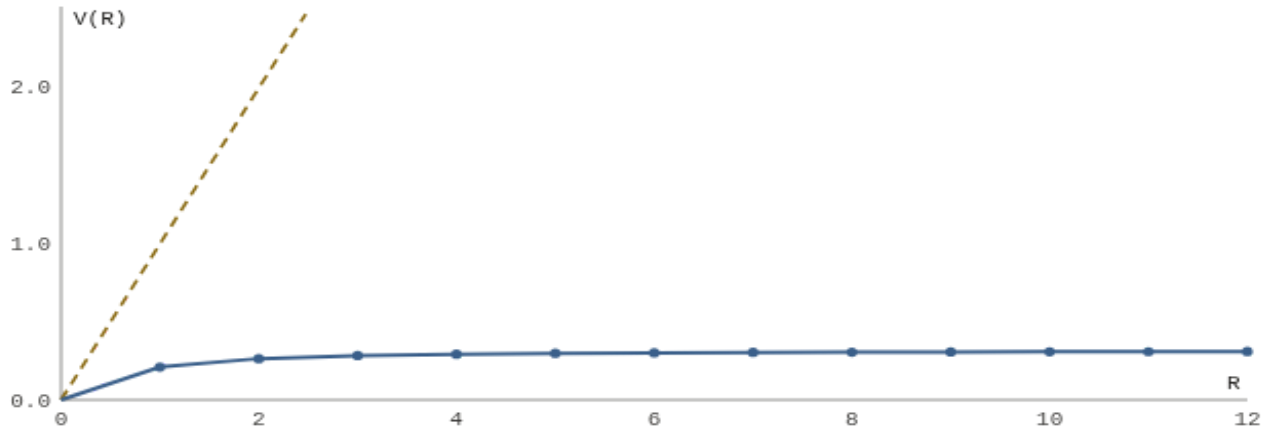
が残ります 既知 。G_3 は三次元の格子の Green 関数で、遠方で $1/(4\pi R)$。したがって V は Coulomb の形で、有限の値 $G_3(0)/\beta$ に止まります。閉じ込めません。$G_3(r,0,0) = \int_0^\infty e^{-6t}I_r(2t)I_0(2t)^2dt$ で計算して $G_3(0)=0.252731$ です 計算 。$R=1$ の $1/6$ は $6G_3(0)-6G_3(1)=1$ による検算です。

計算 表 1　弱結合の $U(1)$ の $\beta V(R)$（式 (5)）と Coulomb の近似

R	$\beta V(R)$	$G_3(0)-\frac{1}{4\pi R}$

R	$\beta V(R)$	$G_3(0)-\frac{1}{4\pi R}$
1	0.16667	0.17315
4	0.23244	0.23284
16	0.24775	0.24776
∞	0.25273	0.25273

図 1　$U(1)$ の静的ポテンシャル。つまみ β で、強結合の σR（破線）と弱結合の Coulomb の形（実線）が変わる



β = 0.80：強結合 σ = 0.991（直線）、弱結合 V(∞) = 0.316（有界）。強結合の近似が使える側

計算 この図の数値はこの端末で計算した（実線は表 1 の計算、破線は I_1/I_0 の級数をその場で計算）。$\beta \approx 1$ の近くではどちらの近似も使えません（§ 04）。

有限の正方形 $R \times R$ でも、64^4 の周期格子で Fourier 和から $-\beta \log\langle W\rangle$ を求めました。$R = 1, 4, 8, 16$ で $0.250,\ 1.631,\ 3.584,\ 7.557$：面積 R^2 で割ると $0.250 \to 0.030$ と 0 に向かい、周長 $4R$ で割ると $0.063,\ 0.102,\ 0.112,\ 0.118$ とほぼ一定に落ち着きます（周長則）。周長あたりの値は $R \to \infty$ で $G_3(0)/2 \approx 0.126$ に近づきます（長い長方形の極限と同じ）。その近づき方は $1/R$ と角の対数の補正です計算 。

04

二つの岸の間で線が折れる — Guth と Fröhlich–Spencer

近似をやめても同じ絵が残ることは、$U(1)$ では定理になっています。ただし定理は Villain 型の作用についてのものです（Guth の要旨）。Villain 型は $e^{\beta\cos\theta}$ の代わりに周期的なガウス $\sum_n e^{-\frac{\beta}{2}(\theta+2\pi n)^2}$ を重みにした作用です。Fröhlich–Spencer の要旨には作用の型が書かれていません（本文は未入手）。(2)(4)・表 2・図 2・下の β_T は Wilson 作用 (1) の数値です。

定理の論理は短く、弦張力が小さい β で正、大きい β で 0 なら、$\sigma(\beta)$ は解析関数ではありえません。解析関数は区間で 0 なら至る所 0 だからです。熱力学の量が解析的でない点が相転移

です（2-08 §04）。

$$\sigma(\beta) > 0 \ (\beta < \beta_1), \quad \sigma(\beta) = 0 \ (\beta > \beta_2) \implies \sigma \text{ は } [\beta_1, \beta_2] \text{ のどこかで解析的でない} \quad (6)$$

後半を示したのが Guth（1980）で、Villain 型の作用で、$g^2 < 0.168$ のとき Wilson ループの下界が “has the form of a Coulomb interaction and guarantees that electric charges are not confined”（Coulomb 相互作用の形で、電荷が閉じ込められないことを保証する）と示し、Osterwalder–Seiler の強結合の結果と合わせて “this model has at least one phase transition”（この模型には少なくとも一つの相転移がある）と結論します（要旨） 既知 。

Fröhlich–Spencer（1982）の要旨は “We give a new, elementary proof for the existence of a deconfining transition to a massless (QED) phase in the four-dimensional U(1) lattice gauge theory”（四次元の U(1) 格子ゲージ理論で、質量ゼロ（QED）の相への非閉じ込め転移が在ることの、新しい初等的な証明を与える）です 既知 。Chatterjee（2018）§4 は “A fully rigorous proof of Guth's theorem”（Guth の定理の完全に厳密な証明）と紹介します。

連続極限への収束 — Driver

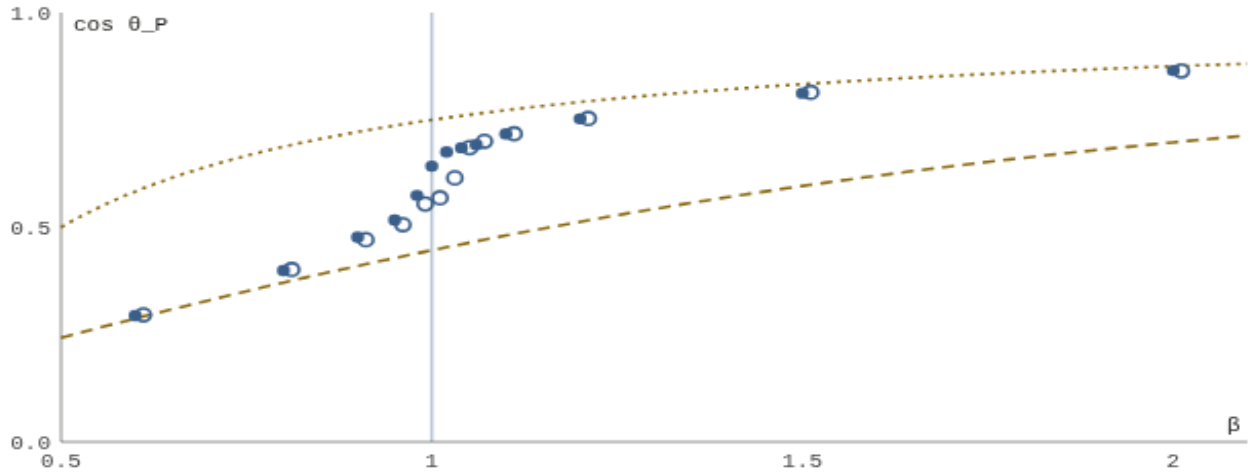
Driver（1987）の要旨は連続極限を扱います。“compact U(1) lattice gauge theory with general energy function converges to a renormalized free electromagnetic field on the current sector as the lattice spacing approaches zero”（一般の作用のコンパクトな U(1) 格子ゲージ理論は、格子間隔を 0 にすると、電流の部分で繰り込まれた自由な電磁場に収束する）に、条件 “provided the coupling constant is sufficiently large”（結合定数が十分大きければ）が付きます。Wilson 作用については “it is possible, by judicious choice of the Gibbs state, to get convergence for arbitrary coupling strengths”（Gibbs 状態をうまく選べば、任意の結合の強さで収束させられる）とあります 既知 。「電流の部分（current sector）」は、場を滑らかな電流で均した観測量の範囲のことです。要旨の “coupling constant” が β の側か g の側かは、本文を読めていないため確かめていません。

数値で見る跳び

Wilson 作用での転移点は数値で $\beta_T = 1.011128(11)$ と報告され、一次転移の証拠が挙げられています（Arnold ほか 2001、会議録。後続の会議録 hep-lat/0210010 の要旨も “strong evidence for a first-order phase transition”（一次転移の強い証拠）と書きます） 物理 。一次転移とは、プラケットの平均が β_T で跳ぶ転移で、そこでは二つの相が共存しえます。共存しうるので、片方の相から始めた列はしばらくその相に留まり、β を上げる列と下げる列で値が食い違います。これが履歴現象です。

この端末では 6^4 の格子のメトロポリス法で、β を上から下げる列（冷たい始まり）と下から上げる列（熱い始まり）を比べました（各 β で 100 掃引を捨て 100 掃引を測定）。

図 2　プラケットの平均。ボタンで群、つまみで β の点を選ぶと縦線と読み値が変わる（冷たい ●・熱い ○・強結合の主項は破線・弱結合の主項は点線）



U(1)、β = 1.00：冷たい 0.6425、熱い 0.5684（差 0.0741）、強結合 0.4464、弱結合 0.7500

計算 この図の数値はこの端末で計算した（点はモンテカルロで表 2 はその抜粋、曲線は (2)・(4) をその場で計算）。

計算 表 2　6^4 の格子のプラケットの平均（括弧は区間平均の誤差。転移の近くでは過小評価）

群	β	冷たい	熱い	強結合	弱結合
U(1)	0.98	0.5742(55)	0.5541(27)	0.4393	0.7449
U(1)	1.00	0.6425(39)	0.5684(35)	0.4464	0.7500
U(1)	1.02	0.6756(18)	0.6150(38)	0.4534	0.7549
U(1)	2.00	0.8652(4)	0.8641(5)	0.6978	0.8750
SU(2)	1.8	0.4440(10)	0.4371(18)	0.3994	0.5833
SU(2)	2.2	0.5685(20)	0.5638(18)	0.4645	0.6591
SU(2)	4.0	0.7997(8)	0.7994(6)	0.6580	0.8125

$U(1)$ では $\beta = 0.98$〜1.02 で二つの列が食い違い、$\beta = 1$ で差は 0.074 です。それぞれの列が元の相に留まっている、と読めます（上の履歴現象）。$U(1)$ の転移は Creutz–Jacobs–Rebbi（1979）の数値でも見られています 物理 。この表は小さな格子の短い列で、次数を判定する力はありません（5-07）。

05

寄り道：単極子の輪 — 四次元と三次元

飛ばしてよい節です。

θ_P は 2π の整数倍を区別しません。小さな立方体の六面の θ_P を $(-\pi, \pi]$ に戻して足すと 2π の整数倍が余ることがあり、それが格子の磁気単極子です。四次元では単極子は閉じた輪（世界線）で、長さ ℓ の輪は作用をおよそ $\beta\varepsilon\ell$ 払い、描き方がおよそ μ^{ℓ} 通りあります。

$$\sum_{\ell} \mu^{\ell} e^{-\beta\varepsilon\ell} = \sum_{\ell} e^{-(\beta\varepsilon - \log\mu)\ell} \tag{7}$$

$\beta\varepsilon < \log\mu$ なら長い輪が空間を埋めて力線を乱し、面積則を生みます。β が大きいと短い輪しか残らず、光子が生き残ります。この種の見積もりは Banks–Myerson–Kogut（1977）にあります 物理 。正確には (7) は輪の相互作用を省いた形で、定理は §04 のほうです。

三次元では単極子は点になり、点の気体は任意の結合で Debye 遮蔽（点電荷の気体が遠方の場を弱める働き）を起こします。Polyakov（1977）はこの機構で三次元のコンパクト $U(1)$ の閉じ込めを示しました（半古典の議論） 物理 。Göpfert–Mack（1982）は Villain 作用で “string tension α is nonzero for all values of the coupling constant g^2”（弦張力 α は結合 g^2 のすべての値で 0 でない）を証明しました 既知 。同じ要旨は、連続極限で物理の単位の弦張力が無限大に行くと書きます。可換でも閉じ込め、尺度が一つにならない例です（17-02 §03）。

06

SU(2) には跳びが見えない — 交差だけがある

表 2 の $SU(2)$ では、二つの列の差は最大 0.007 程度で、$U(1)$ の十分の一ほどです。$\beta = 1.8$ の差 0.0069 は表の誤差の約 3 倍ありますが、各 β で 100 掃引しか熱化していない列どうしの差で、β を変えても冷たい列と熱い列が系統的な二つの枝に分かれません（熱化の不足と跳びの見分け方は 5-07）。プラケットは $\beta \lesssim 1.8$ で強結合の主項に沿い、$\beta \gtrsim 3$ で弱結合の主項に近づき、その間を $\beta \approx 2.2$ のあたりで滑らかにつなぎます 計算 。

Creutz（1980）の要旨は、弦張力を固定して格子を細かくし、裸の結合が繰り込み群の予言どおり対数的に減ることを見て、“This supports the coexistence of confinement and asymptotic freedom”（閉じ込めと漸近自由が両立することを支持する）と書きます 物理 。

交差のあたりの比熱の山は、随伴表現の項を足した作用の族で近くにある臨界の端点の “shadow”（影）だとされます（Bhanot–Creutz 1981） 物理 。相転移の有無は作用の選び方に依りうるので、連続極限とは切り離して考えます。四次元の $SU(2)$ で有限の β に相関長が発散する点が無いことは信じられている文で、定理ではありません。Chatterjee（2018）§5 は “It is believed … βc = ∞”（$\beta_c = \infty$ と信じられている）と書きます（5-05 §01）。

07

違いの源は結合が走ること — C_A と $\beta_c = \infty$

$U(1)$ と $SU(2)$ を分けるのは、有効な結合が距離とともに変わるかどうかです（4-06）。一ループで

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = -b_0 g^3, \qquad b_0 = \frac{11\, C_A}{48\pi^2}, \qquad \frac{1}{g^2(L)} \approx \frac{1}{g_0^2} - 2b_0 \log \frac{L}{a} \tag{8}$$

です。C_A は随伴表現の Casimir 数で $SU(N)$ では N、$U(1)$ では 0 既知 。右の式は間隔 a で g_0 の結合を長さ L で見た値です。

物質場の無いとき、b_0 は $U(1)$ で 0、$SU(2)$ で 0.04644、$SU(3)$ で 0.06966 です 計算 。

$U(1)$ では $b_0 = 0$ なので、β が大きければガウスの近似がすべての距離で自己無撞着で、§03 の Coulomb の力が遠方まで続きます。$SU(2)$ では、どれほど β が大きくても L を十分大きく取れば (8) の右辺は 0 に近づき、結合は強くなります。目安は $L \sim a\, e^{\beta/(4Nb_0)}$ で、5-05 §03 の $a(\beta)$ と同じ形です。有限の β で相関長が無限大になる点が無い、というのが「$\beta_c = \infty$」です 物理 。例：$SU(2)$ で、一ループでは β を 1 上げると相関長はおよそ $e^{1/0.3715} \approx 15$ 倍です（$4Nb_0 = 11/(3\pi^2)$） 計算 。これは一ループだけの目安で、二ループ以上の補正と、実際に使う β の範囲での漸近スケーリングの破れは 5-05 で扱います。

08

「非可換だから」の正確な形 — 四つの言い方と反例

群と次元を入れ替えた既知の例で、どの言い方が成り立たないかを並べます（16-08 §04 も参照）。

既知 表 3　言い方と、それを破る例（大きい β の側）

言い方	破る例	出典
可換なら閉じ込めない	三次元の $U(1)$ はすべての結合で面積則（Villain 作用）	Göpfert–Mack
非可換なら閉じ込める	四次元の非可換な有限群は、閉じ込めないと考えられている 物理	Chatterjee の講義資料・5-10
指数減衰は非可換だから	有限群は可換・非可換を問わず弱結合で指数減衰が定理	Adhikari–Cao
相の数は群が可換かどうかで決まる	四次元の可換な $\mathbb{Z}_N$（N が大きい）は、閉じ込め・質量ゼロ（QED 的）・遮蔽の少なくとも三相を持つ	Elitzur–Pearson–Shigemitsu、Guth（Villain 型・$N > 37$）、Fröhlich–Spencer、数値は Creutz–Jacobs–Rebbi

表 3 の「遮蔽」は Elitzur–Pearson–Shigemitsu の “screened” で、Wilson ループが周長則に従い、励起に質量がある相を指します。§05 の Debye 遮蔽（閉じ込めを生む側）とは別の意味です。同論文は、この相の並びを O(2) 模型の相の存在から、自己双対性と相関不等式で導いています（要旨）。数値では Creutz–Jacobs–Rebbi（1979）の要旨が $N \geq 5$ で二つの転移を報告しています 物理 。

効いているのは「非可換」だけではなく、群が**連続**であることです。ただし連続性が効くのは、十分大きい β の端で質量ゼロの波が残るかどうか、という点です。有限群では辺の値が飛び飛びで、十分大きい β では辺が単位元に凍りつき、光子のような質量ゼロの波が作れません 物理 。一方で $\mathbb{Z}_N$（N が大きい）には、中間の β に質量ゼロの相があります（表 3 の 4 行目）。有限群の大きい β の指数減衰は、連続の理論の隙間とは別物です（5-10）。$U(1)$ は連続なので質量ゼロの波を持ち、$C_A = 0$ なのでそれが生き残ります。

正確な形

四次元・連続な非可換コンパクト群では、(i) 有限の β に相関長が発散する点が無く（$\beta_c = \infty$）、(ii) $\beta \to \infty$ で格子単位の隙間 $1/\xi$ は 0 に行くが、次元の無い比（例えば $m/\sqrt{\sigma}$）は正の値に止まる 物理 。

(ii) は 5-09 の格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）の形です。(i)(ii) はどちらも証明されていません。非可換性の役目は「隙間を作ること」ではなく「弱結合の質量ゼロの絵を遠方で壊すこと」と言うほうが正確です。

09

数学として残っていること

定理の側は、§02 の強結合の結果、§04 の Guth・Fröhlich–Spencer（Villain 型の作用）と Driver（要旨の条件つき）、§05 の Göpfert–Mack、表 3 の 1・3 行目と 4 行目の Guth・Fröhlich–Spencer です 既知 。§05 の (7) と Polyakov、表 3 の 2 行目は物理の水準です。信念の側：四次元の $SU(N)$ で、有限の β に相関長が発散する点が無いこと（$\beta_c = \infty$、Chatterjee §5）、すべての β の面積則、連続極限で隙間が物理の単位で残ること 物理 。作用によっては、相関長の発散を伴わない bulk な（格子の尺度の）相転移がありえます。N が大きい $SU(N)$ の格子計算では、強結合の側にそのような転移があり、計算できる範囲を限ると報告されています（Lucini–Teper–Wenger 2005 の要旨）物理 。これは $\beta_c = \infty$ と食い違いません。Chatterjee（2018）の格子の面積則の問題（Chatterjee の Problem 4.1）は、四次元の非可換なコンパクト群ですべての $\beta > 0$ の面積則を問い、大きい β では “remains elusive” と書きます（5-02 §08）。

$U(1)$ の定理が教えるのは、群を区別せずに強結合の結果を弱結合へ延ばす議論は誤りだということです。$SU(N)$ で示すべきことは「相関長の発散と面積則の破れが有限の β で起きない」という否定の文を含み、それを β の全範囲で言う道具は今は強結合の側にしかありません（7-10・16-07）。

この章が言えている範囲

事項	言えている	言えていない
主項 (2)(3)(4)・見積もり (7)	標準の近似 既知 。表 2 と両端で整合 計算 。(7) は物理の見積もり 物理	中間の β での誤差。(7) の係数
静的ポテンシャル・周長則	ガウス近似の中での有界な Coulomb の力と周長則 計算	近似を外した評価
四次元 $U(1)$ の相転移（Villain 型の作用）	定理の紹介 既知 。Wilson 作用の 6^4 での履歴の観察 計算	転移の次数・位置。Wilson 作用での定理の形
$SU(2)$ の $\beta_c = \infty$	小さな格子で跳びが見えないこと 計算	有限の β で相関長が発散しないことの証明
「非可換だから」	既知の反例による言い方の整理 既知	(i)(ii) の証明。質量ギャップと連続極限について、この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§04・表 3	要旨（本文は未入手）	A. H. Guth, Phys. Rev. D 21 (1980) 2291
§04・表 3	要旨（本文は未入手。作用の型は要旨に無い）	J. Fröhlich, T. Spencer, Commun. Math. Phys. 83 (1982) 411–454
§04 の連続極限	要旨（本文未入手）	B. K. Driver, Commun. Math. Phys. 110 (1987) 479–501
§02 の強結合の定理	書誌のみ	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471
§04・§06・§09	本文 §4・§5	S. Chatterjee, arXiv:1803.01950 (2018)
§09 の bulk な転移	要旨	B. Lucini, M. Teper, U. Wenger, “Properties of the deconfining phase transition in SU(N) gauge theories”, JHEP 0502 (2005) 033, arXiv:hep-lat/0502003

もの	種別	出典・道具
§04 の β_T	要旨（会議録）	G. Arnold, T. Lippert, T. Neuhaus, K. Schilling（著者の順は arXiv による）, “Finite size scaling analysis of compact QED”, Nucl. Phys. B Proc. Suppl. 94 (2001) 651–656, arXiv:hep-lat/0011058
§04 の後続の会議録	要旨	G. Arnold, B. Bunk, T. Lippert, K. Schilling, Lattice 2002, arXiv:hep-lat/0210010
§04 の数値・表 3 の 4 行目	要旨	M. Creutz, L. Jacobs, C. Rebbi, Phys. Rev. D 20 (1979) 1915
§05	要旨	T. Banks, R. Myerson, J. B. Kogut, Nucl. Phys. B 129 (1977) 493／A. M. Polyakov, Nucl. Phys. B 120 (1977) 429
§05・表 3	要旨	M. Göpfert, G. Mack, Commun. Math. Phys. 82 (1982) 545–606（年は Crossref の発行年。INSPIRE は 1981）
§06	要旨	M. Creutz, Phys. Rev. D 21 (1980) 2308／G. Bhanot, M. Creutz, Phys. Rev. D 24 (1981) 3212
表 3	要旨	A. Adhikari, S. Cao, Ann. Probab. 53 (2025) 140, arXiv:2202.10375／S. Elitzur, R. B. Pearson, J. Shigemitsu, Phys. Rev. D 19 (1979) 3698
表 3 の 2 行目	講義スライドの本文（主語は面積則：“It is not expected to hold for 4D Abelian theories at large β, nor even for 4D non-Abelian theories with finite gauge groups”）。同じスライドは、Cao（2020）が四次元の任意の有限群で大きい β の Wilson ループの主項を求めた、と紹介する（Cao の論文は書誌のみ・未確認）	S. Chatterjee, “Yang–Mills on the lattice: New results and open problems”（講義スライド。年は未確認、PDF の作成日は 2020 年）
表 2・図 2	この端末で計算	Python 3・NumPy。mc_u1.py・mc_su2.py（メトロポリス法、引数 6 100 100、一本 1〜2 分）、approx.py
§01 の順序の例・§02 の u の比較	この端末で計算	Python 3・SciPy。order_su2.py
表 1・§03 の周長則・図 1・§07 の b_0	この端末で計算	Python 3・SciPy。coulomb.py（G_3 の積分・64^4 の Fourier 和）、g3table.py

次に読む章：5-07 モンテカルロ法（表 2 を作った方法と誤差の見方）。

モンテカルロ法 — 重みに従う配位を作り、相関を数えて誤差を出す

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること

- 格子の期待値の積分（数万次元）を、重みに従うマルコフ連鎖の標本平均で見積もる仕組み。
- 標本どうしの相関が誤差を大きくする分の数え方（自己相関時間・ビン分け・Γ 法）。
- 連続極限に近づくと相関の時間が ξ^z で伸びる臨界減速（自由場では式で $z=2$）。

前提となる章 — 5-01 Wilson の格子、1-08 確率と測度。数学の側は 18-03 §06〜§08 を参照します。

先に言うこと — モンテカルロ法は有限の格子での期待値を誤差つきで見積もる方法で、質量ギャップや連続極限を証明するものではありません。この章の計算は 6^4 の $SU(2)$ の一点と二次元の自由場という小さな例です。

この章の順序

1. なぜ乱数で積分するか
2. マルコフ連鎖と詳細釣り合い
3. リンクを一本ずつ動かす — 歩幅（図 1・表 1）
4. 熱浴と過緩和
5. 熱化と自己相関 — 三つの更新法（表 2）
6. 誤差の見積もり — ビン・ジャックナイフ・Γ 法
7. 臨界減速 — 自由場の $z=2$（図 2・表 3）
8. HMC と位相の凍結
9. 数学から見たモンテカルロ — 定理と観察の境目

この章の β は Wilson 作用の結合（5-01）で、逆温度ではありません。

01

なぜ乱数で積分するか — 一万五千次元の積分

格子の期待値は全リンクについての積分です（5-01 §06。dU_ℓ は Haar 測度）。

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int O(U)\, e^{-S_W(U)} \prod_\ell dU_\ell \tag{1}$$

一辺 6 の四次元格子のリンクは 5,184 本、$SU(2)$ は一本 3 次元なので 15,552 次元の積分です 計算 。そこで重み e^{-S_W}/Z に従う配位 $U^{(n)}$ を作り、標本平均を取ります。

$$\overline{O}_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} O\big(U^{(n)}\big), \qquad \text{独立なら}\ \ \mathrm{Var}\,\overline{O}_N = \frac{\mathrm{Var}\,O}{N} \tag{2}$$

誤差は次元に依らず $1/\sqrt{N}$ で減ります（1-08） 既知 。一様に引く手は使えません。$\beta = 2.3$・6^4 でプラケット 7,776 枚の平均は平衡で 0.6026、一様な配位では 0 の周りに標準偏差 0.00567 で散らばり、平衡の値は 106 標準偏差先です 計算 。

02

マルコフ連鎖と詳細釣り合い — 止まる分布を作る

配位を一歩ずつ変える確率的な規則（マルコフ連鎖、遷移確率 $P(x,y)$）を作り、長い時間の後に重み π に従わせます。一歩で分布が変わらないこと（定常）の十分条件が**詳細釣り合い**です。

$$\sum_x \pi(x)P(x,y) = \pi(y), \qquad \pi(x)P(x,y) = \pi(y)P(y,x) \tag{3}$$

右を x で足すと左です。右を満たす連鎖を**可逆**と呼びます。さらにどこからどこへも行ける（既約）なら、有限状態の連鎖の時間平均は期待値に収束します（エルゴード定理）。周期も無ければ（非周期）、分布そのものが π に近づきます（収束定理） 既知 。連続な状態空間でも、遷移に密度があって正であるなどの条件の下で、同じ形の大数の法則と中心極限定理があります（Tierney 1994） 既知 。

Metropolis 法（Metropolis ほか 1953。最初の応用は二次元の剛体球の状態方程式）は対称な提案 $q(x,y) = q(y,x)$ で候補 y を出し、次の確率で受理し、棄却なら留まります。

$$A(x \to y) = \min\bigl(1,\ \pi(y)/\pi(x)\bigr) = \min\bigl(1,\ e^{-\Delta S}\bigr) \tag{4}$$

$\pi(y) \le \pi(x)$ なら $\pi(x) q \cdot \pi(y)/\pi(x) = \pi(y) q \cdot 1$ で (3) が成り立ち、Z は要りません。例：二状態、$\pi = (0.2, 0.8)$、提案「もう一方へ」で $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$、固有値は $1, -0.25$ で、状態 0 からの分布は 5 歩で $(0.1992, 0.8008)$ です 計算 。ずれは 1 以外で絶対値が最大の固有値（ここでは -0.25）の冪で減り、これが §05 の自己相関時間の源です。

03

リンクを一本ずつ動かす — メトロポリスと歩幅

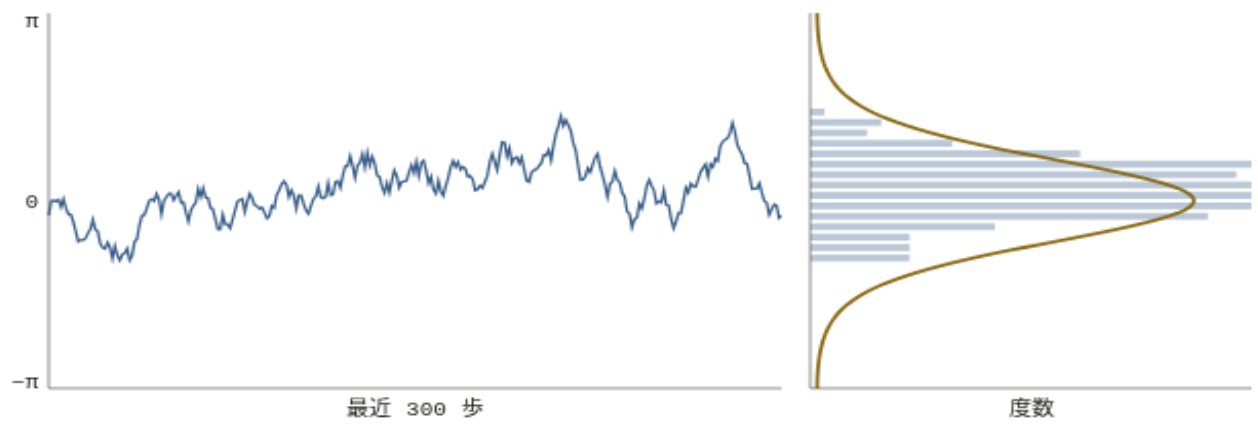
リンク U_ℓ を含むプラケットは四次元で 6 枚で、作用の U_ℓ に依る部分は次の形です。

$$S_W = -\frac{\beta}{N}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\bigl(U_\ell A_\ell\bigr) + (\,U_\ell \text{ を含まない項}\,), \qquad A_\ell = \sum_{6\text{ 枚}} \text{ステープル} \tag{5}$$

ステープルはプラケットから U_ℓ を除いた三辺の積です（5-01 §03）。全リンクを一巡する単位を**一掃**と呼びます。

メトロポリスの提案は今の値の近くです。歩幅 δ が大きいと棄却が増え、小さいと少ししか動きません。$U(1)$ のリンク一本（重み $e^{\kappa \cos\theta}$）で見ます。

図 1　$U(1)$ のリンク一本（$\kappa = 2$）。つまみで歩幅 δ、「動かす」で連鎖が進む。左は最近 300 歩の θ、右は度数と目標の密度



δ = 0.25：受理率 0.937（図の走行 0.973）、τ_int(cos θ) = 63.9 ± 5.53

計算 この図の数値はこの端末で計算した（読み値は表 1。図の連鎖はその場で走らせた例）。

計算 表 1　リンク一本のメトロポリス（各 20 万歩）。受理率は数値積分の厳密値（走行と 0.002 以内で一致）。厳密な $\langle\cos\theta\rangle = I_1(2)/I_0(2) = 0.69777$

δ	受理率	$\tau_{\mathrm{int}}(\cos\theta)$	$\langle\cos\theta\rangle$
0.1	0.975	242(37)	0.747(17)
0.25	0.937	63.9(5.5)	0.695(10)

δ	受理率	$\tau_{\mathrm{int}}(\cos\theta)$	$\langle\cos\theta\rangle$
1	0.757	5.90(18)	0.6972(31)
2.5	0.494	1.94(4)	0.6990(18)
π	0.426	2.00(4)	0.6990(18)

δ を 0.1 から 2.5 に広げると、受理率は半分に、τ_{int}（§05）は約 120 分の 1 になります。受理率の高さは効率を示しません。$\delta = 0.1$ の平均は厳密値から 2.9 標準偏差ずれ、遅い連鎖では誤差の見積もりも不確かです。

04

熱浴と過緩和 — 条件つき分布から引き直す

熱浴法はリンク一本を、残りを止めた条件つき分布 $\propto e^{\frac{\beta}{2}\mathrm{tr}(U_\ell A_\ell)}$ から直接に引き直します。$SU(2)$ の行列の和は $SU(2)$ の行列の実数倍なので（1-04 の四元数）$A_\ell = kV$（$V \in SU(2)$）と書け、$X = U_\ell V$ も Haar 測度で動き、重みは $e^{\beta k x_0}$（$x_0 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}X$）です。$SU(2)$ は三次元球面 $x_0^2 + |x|^2 = 1$ で、Haar 測度はその上の一様な測度です。x_0 を止めた切り口は半径 $\sqrt{1-x_0^2}$ の二次元球面で、面積は $1-x_0^2$ に比例します。x_0 を dx_0 だけ動かしたときの三次元球面の上の幅（弧の長さ）は $dx_0/\sqrt{1-x_0^2}$ です。積が $\sqrt{1-x_0^2}\,dx_0$ なので

$$p(x_0) \;\propto\; \sqrt{1-x_0^2}\,e^{\beta k x_0} \qquad (-1 \le x_0 \le 1) \tag{6}$$

から x_0 を引き、残りの向きを一様に選び、$U_\ell = XV^{-1}$ とします 既知 。Creutz（1980）の $SU(2)$ の計算で使われたとされる方法です。Kennedy–Pendleton（1985）は (6) を速く引く改良、Cabibbo–Marinari（1982）は $SU(N)$ を $SU(2)$ の部分群ごとに更新する方法です。

過緩和は作用を変えずに大きく動く一手で、$SU(2)$ では $U_\ell \mapsto V^{-1}U_\ell^{-1}V^{-1}$ です。$X' = X^{-1}$ で作用は変わらず、二回で元に戻り Haar 測度を保つので詳細釣り合いを満たします。単独ではエルゴード的でないので熱浴と混ぜます（Adler 1981・Creutz 1987・Brown–Woch 1987）。なお、順に並べた一掃は一般に可逆でなく（時間を逆向きに見た連鎖は、逆の順に更新したものになる）、定常性だけが残ります 既知 。

05

熱化と自己相関 — 出発点を忘れ、相関を数える

連鎖は全リンクを単位行列にした**冷たい出発点**か、一様に引いた**熱い出発点**から始め、初めの区間を捨てます（熱化）。6^4・$\beta = 2.3$ のプラケット（平衡 0.6026、表 2 の熱浴）は、熱浴なら両側から 20 掃で平衡の帯に入り、メトロポリスの熱い側は 20 掃で 0.482、150 掃で 0.593

と遅れます 計算 。二つの出発点の一致は必要条件にすぎません（5-06 §04。数学の対応物は 18-03 §06 の混合時間）。

平衡でも配位は独立でありません。時系列の t 歩離れた相関を分散で割った**自己相関関数**と、**積分自己相関時間**を

$$\rho(t)=\frac{\langle \delta O_n\,\delta O_{n+t}\rangle}{\langle \delta O^2\rangle},\qquad \tau_{\mathrm{int}}=\frac{1}{2}+\sum_{t\ge 1}\rho(t),\qquad \operatorname{Var}\overline{O}_N\approx\frac{2\tau_{\mathrm{int}}\operatorname{Var}O}{N} \tag{7}$$

とします（$\delta O=O-\langle O\rangle$、$N\gg\tau_{\mathrm{int}}$）。実効的に独立な標本は $N/(2\tau_{\mathrm{int}})$ 個です（Wolff 2004 の式 (23)(25)） 既知 。表 2 の熱浴では $9{,}500/(2\cdot 5.08)\approx 935$ 個です。最も遅い減衰の時間 $\tau_{\exp}$ は、遷移の固有値のうち 1 以外で絶対値が最大のもの $\lambda_\star$ で決まり、$\tau_{\exp}=-1/\log\lambda_\star$ です（§02 の例では $\lambda_\star=0.25$）。

数学の側では、遅さを **Poincaré 定数** C_P で測ります。C_P は、すべての関数 f について $\operatorname{Var} f\le C_P\,\mathbb{E}|\nabla f|^2$ を満たす最小の定数です（1-10 §07。離散の連鎖では右辺を一歩での変化の二乗平均の半分 $\frac12\sum_{x,y}\pi(x)P(x,y)(f(y)-f(x))^2$ に置き換えます）。**Langevin 力学**は、作用の勾配に沿って下る動きに雑音を加えた連続時間の力学で、そこでは $\tau_{\exp}=C_P$ が等号で成り立ちます。離散時間の連鎖では、次の三つが別の量になります 既知 （Levin–Peres–Wilmer §12.2、18-03 §06）。

- $C_P=1/\gamma$：$\gamma=1-\lambda_2$ は 1 と二番目に大きい固有値 λ_2 との隙間。
- 緩和時間 $t_{\mathrm{rel}}=1/\gamma_\star$：$\gamma_\star=1-\lambda_\star$ は絶対ギャップ。
- $\tau_{\exp}=-1/\log\lambda_\star$。

$\gamma_\star$ が小さいとき、後の二つの比は $1+O(\gamma_\star)$ です。表 2 の最後の列の **Polyakov ループ**は、各空間点で時間方向に一周するリンクの積のトレースを取り、空間で平均した量です（ここではその絶対値を見ます）。格子全体に広がる、遅く動く量の例です。

計算 表 2　四次元 $SU(2)$・6^4・$\beta=2.3$（最初の 500 掃を捨てる）。τ_{int} は掃。費用はリンク一本あたりのステープル計算の回数

方法	費用	プラケット	τ：プラケット	τ：|Polyakov|
メトロポリス	1	0.60291(57)	42(10)	79(24)
熱浴	1	0.60261(21)	5.1(6)	6.0(7)
熱浴＋過緩和 3	4	0.60297(19)	2.1(2)	0.87(6)

標本数は 9,500・9,500・4,500 です。同じ標本数でメトロポリスの誤差は熱浴の 2.7 倍で、$\sqrt{42/5.1}\approx 2.9$ と整合します。費用を掛けた τ で比べると、過緩和はプラケットでは 8.3 対 5.1 と損をし、Polyakov ループでは 3.5 対 6.0 と得をします。得をするのは遅い大域的な量で

す 計算 。$SU(3)$ でも、過緩和で Polyakov ループの大きさの τ が 28 掃から 9 掃に縮んだと報告されており（Brown–Woch 1987）、傾向は一致します 物理 。

06

誤差の見積もり — ビン・ジャックナイフ・Γ 法

τ_{int} はデータから見積もります。**ビン分け**は時系列を長さ B の区間に切り、区間平均を独立とみなします。$B \gg \tau_{\mathrm{int}}$ で誤差が頭打ちになる所を読みます（Flyvbjerg–Petersen 1989）。**ジャックナイフ**は区間を一つずつ除いた平均 $\bar{b}_{(i)}$ から非線形な量 f の誤差を出します。

$$\sigma_f^2 = \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(f(\bar{b}_{(i)}) - \overline{f(\bar{b}_{(\cdot)})}\Big)^2, \qquad n = N/B \tag{8}$$

Creutz 比や質量（5-02 §06・5-08）で使います。表 2 の熱浴のプラケットでは、（ビンの誤差／素朴な誤差）^{2} が $B = 1, 5, 20, 100$ で 1.00・2.85・6.23・10.19 と伸び、Γ 法の $2\tau_{\mathrm{int}} = 10.2$ に届きます。$B = 200$〜1000（47〜9 区間）では 7.4〜7.7 と下に揺れます。区間が少ないと誤差の誤差が効きます（比の二乗では相対誤差 約 $\sqrt{2/(n-1)}$） 計算 。

Γ 法は (7) の和を窓 W で切って直接に見積もります。

$$\tau_{\mathrm{int}}(W) = \frac{1}{2} + \sum_{t=1}^{W}\rho(t), \qquad \langle(\delta\tau_{\mathrm{int}})^2\rangle \approx \frac{4}{N}\Big(W + \frac{1}{2} - \tau_{\mathrm{int}}\Big)\tau_{\mathrm{int}}^2 \tag{9}$$

右は Wolff（2004）の式 (42) です。Madras–Sokal（1988）が与えた窓の和の誤差の近似式（Wolff の式 (40)）から、誤差伝播で導かれています 既知 。W が短いと偏り、長いと雑音が効きます。この章の τ_{int} は Wolff（2004）の自動の窓（$S = 1.5$）によります。Wolff は $\tau_{\mathrm{int}}(W)$ が平らなことを “verify by eye” するよう求めます。図 2（§07）の下段で、縦線の窓 W のまわりが平らなことを目で確かめられます。

07

臨界減速 — 自由場で $z = 2$ を式で見る

連続極限に近づくと相関長 ξ（格子単位）が伸び（5-05 §01）、局所的な更新の τ も伸びます。物理は $\tau \propto \xi^{z}$ と書き、z を動的指数と呼びます（Hohenberg–Halperin 1977 の総説、18-03 §07） 物理 。式で確かめられるのが格子の自由場（1-08 §07）です。

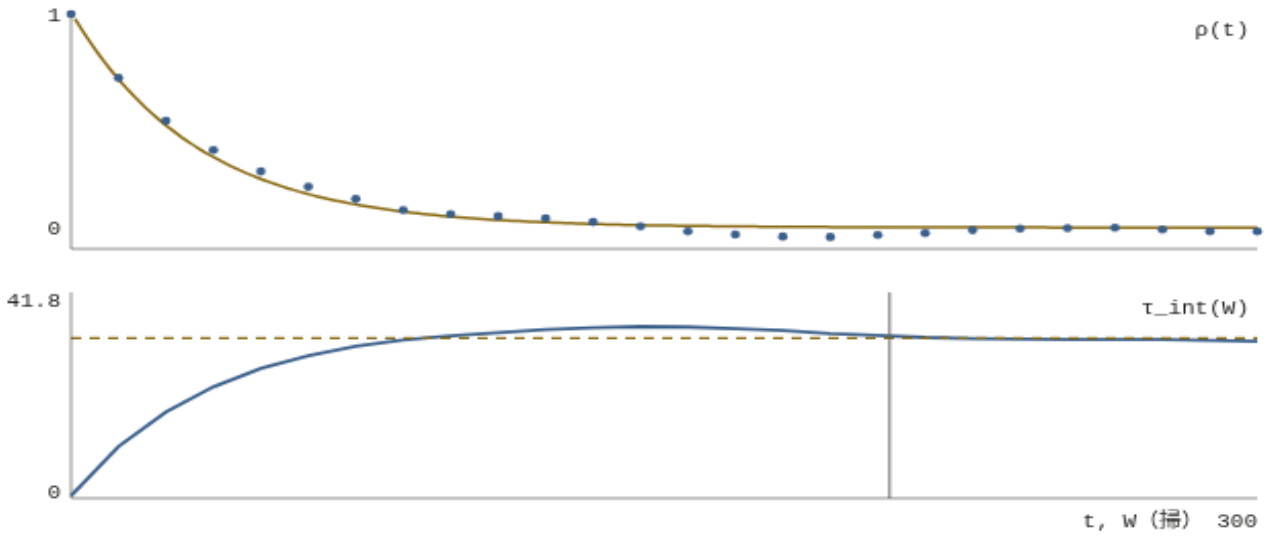
$$S = \frac{1}{2}\sum_{x}\Big[\sum_{\mu}(\phi_{x+\hat{\mu}} - \phi_x)^2 + m^2\phi_x^2\Big], \qquad \phi_x \,|\, \text{近傍} \sim \mathcal{N}\Big(\frac{\sum_{y\sim x}\phi_y}{2d+m^2}, \frac{1}{2d+m^2}\Big) \tag{10}$$

市松の熱浴で偶の点の和を M_e、奇を M_o とすると、奇の点は $2d$ 個の偶の点の隣なので $M_e' = rM_o +$（雑音）、$r = 2d/(2d+m^2)$ です。零運動量 $M = M_e + M_o$ について

$$\rho_M(t) = \tfrac{1+r}{2}\, r^{2t-1}\ (t \ge 1), \qquad \tau_{\mathrm{int}}(M) = \frac{1}{2(1-r)} = \frac{1}{2} + \frac{d}{m^2}, \qquad \tau_{\exp} = \frac{-1}{\log r^2} \approx \frac{d}{m^2} \tag{11}$$

$\cosh(1/\xi) = 1 + m^2/2$ から $\xi \approx 1/m$ で、$\tau \approx d\xi^2$、この力学では $z = 2$ です 計算 。直観は酔歩で、局所の更新は距離 ξ を伝えるのに ξ^2 歩かかります。正確には、(11) の $r = 1 - m^2/(2d+m^2)$ が $m \to 0$ で 1 に近づくので、一掃で縮む割合が $1 - O(\xi^{-2})$ になります。

図 2　二次元の自由場・市松の熱浴。つまみで m（上：$\rho_M(t)$、点は測定・曲線は (11)。下：$\tau_{\mathrm{int}}(W)$、破線は (11)、縦線は自動の窓 W）。「重ねる」で横軸を t/ξ^2 にすると四つが重なる



m = 0.25（ξ = 4.01、64²）：τ_int 測定 33.14 ± 3.91（窓 W = 207）、(11) 32.5、τ_int/ξ² = 2.02

計算 この図の数値はこの端末で計算した（曲線は (11) をその場で計算。JavaScript が無効なら表 3）。

計算 表 3　二次元の自由場・市松の熱浴（一辺 16〜64、5〜6 万掃）。τ は掃

m	ξ	$\tau_{\mathrm{int}}(M)$ 測定	(11)	(11)/ξ^2
1	1.039	2.57(10)	2.5	2.316
0.5	2.020	8.17(53)	8.5	2.082
0.25	4.010	33.1(3.9)	32.5	2.021
0.125	8.005	125(23)	128.5	2.005

ξ を倍にするごとに $\tau_{\mathrm{int}}(M)$ は約 4 倍です。同じ精度の計算は ξ^{d+z} 程度で増えると見積もられます（5-05）物理 。Langevin 力学（§05）では緩和時間が $1/m^2 = C_P$ です（18-03。場の値 ϕ_x そのものを座標にして勾配を測る自由場の正規化で、座標の取り方を変えると C_P は定数倍だけ変わります）。どちらも m^{-2}（$\propto \xi^2$）に比例します。熱浴の τ は掃、Langevin の τ は Langevin の時間で測るので、係数は比べません。

08

HMC と位相の凍結 — 大域的な一歩と、越えにくい壁

HMC（ハイブリッド・モンテカルロ、Duane ほか 1987）は全リンクを一度に動かします。運動量 P_ℓ（エルミートでトレース 0 の行列。1-03 の T^a の実係数の組み合わせ）を正規分布で与え、

$$H(P,U) = \frac{1}{2}\sum_{\ell} \operatorname{tr} P_\ell^2 + S_W(U) \tag{12}$$

の古典力学をリープフロッグ法で動かし、確率 $\min(1, e^{-\Delta H})$ で受理します。リープフロッグ法は時間を戻せて相空間の体積を保つので、刻みの誤差があっても e^{-S_W} が正確に定常分布です 既知 。HMC の自己相関時間を Langevin の C_P で見積もるのは仮定です（生成作用素が違います）。

連続極限に近づくと、場は位相電荷 Q（連続の場では整数値をとる、場のねじれ方の数。格子での定義は 3-05 §08）の区画に分かれ、小さな一歩では移りにくくなります。Schaefer–Sommer–Virotta（2011）は、純ゲージの HMC で Q^2 の “effective dynamical critical exponent of about 5” を報告し、Wilson ループはこの遅いモードから切り離せるとしました 物理 。Lüscher–Schaefer（2011）は時間方向に開いた境界条件で位相電荷を出入りさせる方法を示しました 物理 。比喩なら谷の多い地形の峠越えです。正確には、区画の境界付近の測度が小さいと Poincaré 定数が大きくなります（18-03 §08）既知 が、それが凍結の原因かは確かめられていません。

09

数学から見たモンテカルロ — 定理と観察の境目

有限の格子で (1) はコンパクトな空間の上の確率測度です（5-01 §06）。定理として言えるのは、エルゴード定理による時間平均の収束（連続な状態空間では §02 の条件の下で）と、中心極限定理です。可逆な連鎖では、漸近分散が有限なら (7) の形の中心極限定理が成り立ちます（Kipnis–Varadhan 1986）既知 。観察にとどまるのは誤差棒です。有限の N では見えない遅いモードがあれば誤差棒は小さく出ます（表 1 の $\delta = 0.1$、§08）。有限体積と有限の a からの外挿（5-05 §07・5-09）も別の仮定を要します。

5-08 のグルーボールの質量や弦張力は、その外挿による物理の結果で 物理 、問題文の存在と隙間の証明（4-11）ではありません。一方、C_P は数学の対象で、強結合では格子ヤン–ミルズの Poincaré 不等式が示されています（Shen–Zhu–Zhu 2023、5-04）既知 。$\xi \to \infty$ の側で C_P の ξ 依存を決めた定理は、四次元のヤン–ミルズにはありません。

本書での使い方は 23-08 §01・§03（区間演算で数値の不等式を確かめ、札「機」を付ける）。

この章が言えている範囲

事項	言えている	言えていない
更新法	メトロポリス・熱浴・過緩和・HMC が定常分布を保つこと、(6) 既知	四次元の格子での混合の速さ
表 1・表 2	小さな例での τ_{int} と誤差 計算	大きな格子への一般化。誤差棒が上界であること
臨界減速	自由場・市松の熱浴で (11)、$z = 2$ 計算 。一般の $\tau \propto \xi^{z}$ は仮説 物理	四次元ヤン–ミルズの z
位相の凍結	要旨の数値（有効指数 約 5） 物理	凍結の数学的な説明
質量ギャップ	—	この章は質量ギャップ・連続極限について何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§02	要旨	N. Metropolis ほか, J. Chem. Phys. 21 (1953) 1087
§02 のエルゴード定理・収束定理、§05 の緩和時間	本文	D. A. Levin, Y. Peres, E. L. Wilmer, *Markov Chains and Mixing Times*, 2nd ed.：定理 C.1（エルゴード定理、付録 C.1）・定理 4.9（収束定理、§4.3）・§12.2・定理 12.4–12.5（緩和時間と混合時間）
§02・§09 の連続な状態空間	要旨	L. Tierney, Ann. Statist. 22 (1994) 1701
§04・§05（Brown–Woch の 28→9 掃）	要旨（熱浴の Creutz への帰属は未確認）	M. Creutz, PRD 21 (1980) 2308／N. Cabibbo, E. Marinari, PLB 119 (1982) 387／A. D. Kennedy, B. J. Pendleton, PLB 156 (1985) 393／S. L. Adler, PRD 23 (1981) 2901／M. Creutz, PRD 36 (1987) 515／F. R. Brown, T. J. Woch, PRL 58 (1987) 2394
§05・§06 の (7)(9)・自動の窓	本文（式 (23)(25)(40)(42)(50)–(52)。(42) は (40) からの誤差伝播）	U. Wolff, CPC 156 (2004) 143（erratum: CPC 176 (2007) 383）, arXiv:hep-lat/0306017
§06（窓の和の誤差の式 (40) の出所、ビン分け）	要旨	N. Madras, A. D. Sokal, J. Stat. Phys. 50 (1988) 109／H. Flyvbjerg, H. G. Petersen, J. Chem. Phys. 91 (1989) 461
§07 の動的指数 z	要旨	P. C. Hohenberg, B. I. Halperin, Rev. Mod. Phys. 49 (1977) 435

もの	種別	出典・道具
§08	要旨	S. Duane, A. D. Kennedy, B. J. Pendleton, D. Roweth, PLB 195 (1987) 216／S. Schaefer, R. Sommer, F. Virotta, NPB 845 (2011) 93, arXiv:1009.5228／M. Lüscher, S. Schaefer, JHEP 07 (2011) 036, arXiv:1105.4749
§09	書誌のみ／要旨	C. Kipnis, S. R. S. Varadhan, CMP 104 (1986) 1／H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, CMP 400 (2023) 805, arXiv:2204.12737
表 1〜3・図 1・図 2・§01・§02・§05〜§07 の数	この端末で計算	Python 3・NumPy・SciPy。one_link_metropolis.py、su2_algos.py・analyze_su2.py、free_field.py・exact_tint.py、free_field_ext.py（図 2 の延長）、gamma_method.py（AR(1) で検算）、small_numbers.py

次に読む章：5-08 グルーボールと弦張力の測定（この章の方法で作った配位から質量と弦張力を読む）。

グルーボールと弦張力の測定 — 相関の減り方から質量を読み、比 $m/\sqrt{\sigma}$ を作る

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 格子の質量は、時間片の演算子の相関が虚時間で減る速さから読み、その値は上から近づく上界です。平滑化と変分法が近づきを速めます。弦張力は周期的な弦から弦の補正を仮定して取り出し、比 $m(0^{++})/\sqrt{\sigma}$ は一次資料で $SU(2)$ 3.78〜3.84、$SU(3)$ 3.41〜3.61（二次情報の Meyer の値を含めると 3.35〜3.61）です。

前提となる章 — 5-07 モンテカルロ法。転送行列（5-03）、質量ギャップの定義（4-11）、変分原理（1-10）を使います。β は 5-01 の格子の逆結合で、4-06 の β 関数 $\beta(g)$ とは別の量です。

先に言うこと — この章の数はすべて数値の水準で、定理ではありません。有限の箱・β・時間の窓で測り、外挿と弦の絵を通しています。この端末の実演は三次元 $\mathbb{Z}_2$ ゲージ理論で、四次元ヤン–ミルズではありません。質量ギャップの存在について、この章は何も示しません。

この章の順序

1. 質量は相関の減り方 — 有効質量は上界
2. グルーボールの名札 — 立方体の回転群
3. 雑音は減らない — 相対誤差は指数で増える
4. 演算子を太らせる — 空間だけの平滑化
5. 変分法 — 上界の最良化
6. 弦張力を測る — Creutz 比と周期的な弦
7. この端末での実演 — 三次元 $\mathbb{Z}_2$
8. 一次資料の数値 — $m/\sqrt{\sigma}$ の表
9. 数が言っていること、言っていないこと — 上界・窓・外挿・弦の仮定

01

質量は相関の減り方 — 有効質量は上界

格子で時間を一段進めることは、転送行列 $T = e^{-aH}$ を一回掛けることです（5-03）。H の固有値は、一つの時間片 t の上の量で作った演算子 $O(t)$ の相関の減り方から読みます。O は空間で和を取って運動量を 0 にし、真空の期待値を引きます（格子単位 $a = 1$）。

$$C(t) = \langle O(t)\, O(0) \rangle - \langle O \rangle^2 = \sum_{n \geq 1} |\langle n|O|\Omega\rangle|^2 \, e^{-E_n t}, \qquad m_{\text{eff}}(t) = \ln \frac{C(t)}{C(t+1)} \tag{1}$$

$|\Omega\rangle$ は真空、E_n は真空から測った固有値です。重み $|\langle n|O|\Omega\rangle|^2$ は絶対値の二乗なので 0 以上です。固有値 e^{-E_n} が正の実数なのは、リンク反射の正値性（$\beta \geq 0$）から $T \geq 0$ となり、$\beta > 0$ なら T が 0 を固有値に持たないことによります（5-03 §鎖・§転送行列）。0 以上の重みを持つ正の指数の和は対数凸（Cauchy–Schwarz で $C(t)^2 \leq C(t-1)C(t+1)$）なので、有効質量 $m_{\text{eff}}(t)$ は t について単調に減り、O が触れる最も軽い状態のエネルギーに上から近づきます 既知 。有限の t で読んだ値は**上界**で、下界は出ません（有限の窓の例は 4-11 §窓）。時間方向が周期的（長さ N_t）な格子では、各項に逆向きの $e^{-E_n(N_t - t)}$ が付きます。§07 の $N_t = 32$、$t \leq 7$ では無視できる大きさです。

例。$C(t) = 0.8\, e^{-0.77t} + 0.2\, e^{-1.8t}$ では、m_{eff} は $t = 0, \ldots, 5$ で 0.908、0.824、0.790、0.777、0.773、0.771 と下ります 計算 。

02

グルーボールの名札 — J^{PC} と立方体の回転群

ゲージ不変な状態をグルーボールと呼び、スピン J・空間反転 P・荷電共役 C で分類します。P は空間の座標を反転 $x \to -x$ する操作（リンクもそれに合わせて写す）、C はリンクを複素共役 $U \to U^*$ に写す操作です。ループの跡では $\operatorname{tr} U^* = \overline{\operatorname{tr} U}$ で、これは向きを逆にしたループの跡なので、C はループの向きの反転です。最も軽いと考えられているのが 0^{++}、次が 2^{++} です 物理 。

立方体の回転群と指標

格子に残る回転は立方体を自分に重ねる 24 個だけで、この群 O の既約表現は A_1, A_2, E, T_1, T_2（次元 1, 1, 2, 3, 3）です。「名札」は比喩で、正確には、状態が属する O の既約表現と、P・C の固有値（± 1）の組です。

スピン J の表現は格子の上でこれらの和に割れます。割れ方を決めるのが指標です。表現の指標 $\chi(g)$ は、元 g を表す行列の跡です。O の 24 個の元は、指標が同じ値を取る五つの組（共役

類）に分かれます：恒等（1 個）、面の中心を通る軸の 90° 回転（6 個）、同じ軸の 180° 回転（3 個）、対角線の軸の 120° 回転（8 個）、辺の中点を通る軸の 180° 回転（6 個）。表現 Γ が現れる回数は次の和で、これは有限群の指標の直交性という定理から出ます（ここでは使い方だけ）既知 。

$$n_\Gamma = \frac{1}{24}\sum_{g\in O} \chi_J(g)\,\chi_\Gamma(g), \qquad \chi_J(\theta) = \frac{\sin\!\big((2J+1)\theta/2\big)}{\sin(\theta/2)}$$

θ は g の回転角です。例えば $J=2$ では $\chi_2 = (5,-1,1,-1,1)$ で、$n_E = \frac{1}{24}(5\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 2 + 8\cdot(-1)\cdot(-1)) = 1$ です。

既知 **O の指標**　列は上の五つの共役類（個数）。

	恒等 (1)	90° (6)	180° (3)	120° (8)	辺 180° (6)
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	−1	1	1	−1
E	2	0	2	−1	0
T_1	3	1	−1	0	−1
T_2	3	−1	−1	0	1

計算 既知 **表 1**　スピン J の表現の、立方体の回転群 O への分かれ方（五つの共役類の指標から計算。次元の和が $2J+1$ になることを確かめた）。

J	0	1	2	3	4
分かれ方	A_1	T_1	$E + T_2$	$A_2 + T_1 + T_2$	$A_1 + E + T_1 + T_2$

0^{++} は A_1^{++} で測りますが、A_1 には $J=4$ も入ります。Lucini–Teper 2001 は、励起 0^{++*} が最も軽い 4^{++} である可能性を自ら挙げています。2^{++} は E^{++} と T_2^{++} に現れ、二つが揃うことが回復の目安です（Athenodorou–Teper 2021 の $SU(\infty)$ で 4.582(14) と 4.578(11)）物理 。

例。三つの向きの空間プラケットの和 $P_{12}+P_{23}+P_{31}$ は A_1^{++}、差 $P_{12}-P_{23}$ は E^{++} です。$SU(2)$ では $U^{*} = gUg^{-1}$（$g = i\sigma_2 \in SU(2)$、σ_2 は 1-04 のパウリ行列）なので、C はすべての点で同じゲージ変換をすることと同じです。そのためゲージ不変な状態はすべて $C=+$ です。

```
03
```

雑音は減らない — 信号は指数で減り、ゆらぎは残る

$C(t)$ は N 個の配位の平均で推定します（配位の作り方と誤差は 5-07）。誤差を決める積 $O(t)O(0)$ の分散は、t が大きくなると $\langle O^2\rangle^2$ ほどの一定値に近づき、減りません。信号は $e^{-E_{\min}t}$ で減るので

$$\frac{\delta C(t)}{C(t)} \;\approx\; \frac{\text{一定}}{\sqrt{N}}\, e^{+E_{\min}t} \tag{2}$$

です。この議論は格子分光の標準で、Parisi 1984 に遡るとされます 既知 。グルーボールは $E_{\min}$ が大きく、0^{++} は真空の引き算も要るので、特に強く効きます。

例。§07 の実演（$E_{\min}\approx 0.77$、約 35,000 配位）で、プラケットの $C(t)$ の相対誤差は $t=0,\dots,7$ で 0.004、0.011、0.025、0.050、0.121、0.214、0.379、0.657 でした 計算 。一段ごとの倍率 1.8〜2.9 は $e^{0.77}\approx 2.2$ と同じ程度です。

04

演算子を太らせる — 空間だけの平滑化とブロック化

プラケットの大きさは a ですが、物理の長さ $1/\sqrt{\sigma}$ は $SU(2)$・$\beta=2.60$ で約 $7.5a$ です（表 2）。そこで演算子を「太らせ」ます。正確には、リンクを近くの経路の平均で置き換え、演算子が広がった状態に大きく重なるようにします。

$$U_i(x) \;\longmapsto\; \mathrm{Proj}\Big[\,U_i(x)+\alpha\sum_{j\neq i}\big(U_j(x)\,U_i(x+\hat{\jmath})\,U_j(x+\hat{\imath})^{\dagger}+(\text{逆向き})\big)\Big] \tag{3}$$

i,j は空間の向きだけを走り、Proj は和を群に戻す操作です。長さ $2a$ のリンクを作るブロック化もあります。Lucini–Teper 2001 は、これらを標準の方法として Teper 1987 と Albanese ほか 1987（APE の平滑化）を引いています 既知 。空間だけで平均するのが要で、演算子が一つの時間片に載ったままなので (1) の正の重みと「上から近づく」が保たれます。

良さは基底状態の重みの割合 c_0^2 で測ります。Lucini–Teper 2001 の最良の演算子では、0^{++} で、粗い格子で約 0.95（$SU(2)$）から約 0.90（$SU(5)$）、細かい格子で約 0.92 から約 0.85 でした。周期的な弦ではどちらの格子でも約 0.90 から約 0.75 です。N が大きいほど重なりが悪くなります 物理 。

§07 の三次元 $\mathbb{Z}_2$ では、割合の目安 $C(2)e^{2m}/C(0)$（$m=1/1.296$。大きめに出る）がプラケットで 0.57、3×3 のループで 0.85 でした。Proj をリンクと二本のステープルの多数決にした平滑化では、0.59 が 1 回で 0.66 に上がりました 計算 。

05

変分法 — 一般化固有値問題と、上界の最良化

候補 $O_1, \dots, O_N$ を並べ、最良の一次結合を相関そのものに選ばせます。相関行列 $C_{ij}(t) = \langle O_i(t) O_j(0) \rangle - \langle O_i \rangle \langle O_j \rangle$ について

$$C(t)\, v_n = \lambda_n(t, t_0)\, C(t_0)\, v_n, \qquad E_n^{\mathrm{eff}}(t) = \ln \frac{\lambda_n(t, t_0)}{\lambda_n(t+1, t_0)} \tag{4}$$

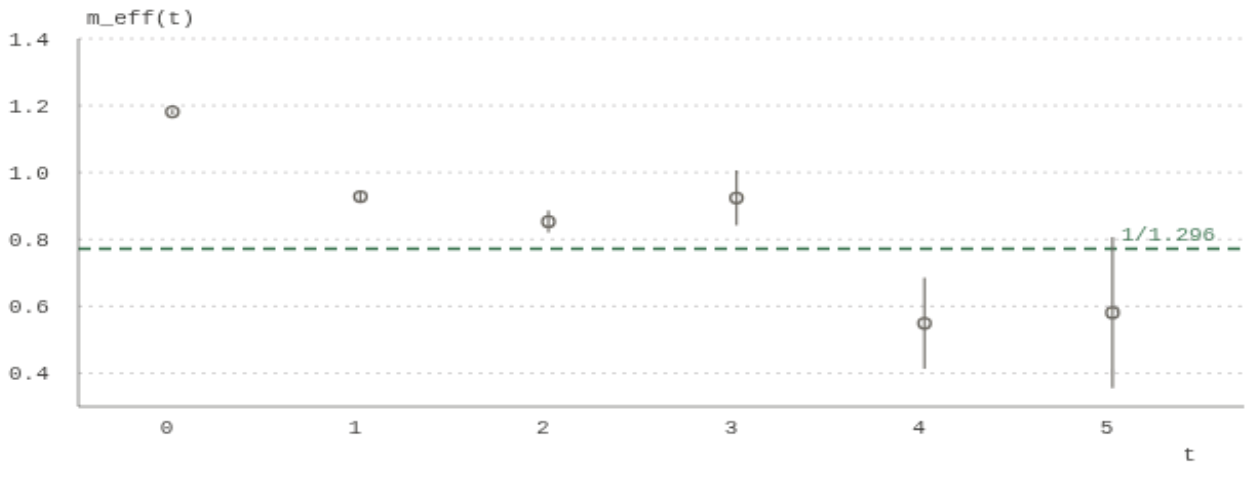
を解きます。変分の考えは Wilson の 1981 年の講演に始まり、グルーボールには Berg 1982・Michael–Teasdale 1983 が使ったとされます。t_0 を入れた一般化固有値問題の形と補正の評価は Lüscher–Wolff 1990 とされます（Blossier ほか 2009 の序による） 既知 。Blossier ほか 2009 は、$t_0 \geq t/2$ に取れば補正が $\exp\!\big(-(E_{N+1} - E_n)t\big)$ で消えることを示しています。図 1 の $t_0 = 0$ はこの条件の外で、式 (5) の上界の意味だけで使っています。

$t_0 = 0$、$t = 1$ では Rayleigh–Ritz の変分原理そのものです（1-10、2-05）。$\psi = \sum_i v_i O_i |\Omega\rangle$（真空成分は引いたもの）について

$$\lambda_{\max}(1, 0) = \max_{v} \frac{v^{\dagger} C(1)\, v}{v^{\dagger} C(0)\, v} = \max_{\psi} \frac{\langle \psi | T | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \leq e^{-E_1} \tag{5}$$

なので、$-\ln \lambda_{\max}$ は候補の張る空間の中で最良の上界です 既知 。変分法は上界を良くしますが、上界であることは変えません。

図 1　三次元 $\mathbb{Z}_2$ の 0^+ の有効質量。ボタンで演算子を選ぶと点が変わる。破線は一次資料の $1/1.296$



1×1：m_eff(0) = 1.181、m_eff(3) = 0.924±0.082（参照 0.772）

計算 この図の数値はこの端末で計算した。

計算 図 1 の数値（ジャックナイフ誤差、39 ビン。変分は $1\times1 \cdot 1\times2 + 2\times1 \cdot 2\times2 \cdot 3\times3$、$t_0 = 0$）。

t	0	1	2	3	割合
1×1	1.181(7)	0.928(17)	0.853(33)	0.924(82)	0.57
2×2	0.940(6)	0.858(14)	0.841(29)	0.842(70)	0.78
3×3	0.883(6)	0.818(13)	0.831(29)	0.795(61)	0.85
変分（4 個）	0.860(6)	0.824(13)	0.831(29)	0.803(63)	0.87

読み方。$t=0$ では変分が最も低く（式 (5)）、どの列も $t=2,3$ で 0.80〜0.85 に下り、参照値 0.772 に上から寄ります。$t\ge4$ は誤差が 0.1 を超えます（図 1）。右端は割合の目安（§ 04）。

06

弦張力を測る — Creutz 比と周期的な弦

弦張力 σ は、離した二つの静的な電荷のエネルギー $V(R)$ の傾きです。$R\times T$ の Wilson ループ（5-01）は $e^{-V(R)T}$ のように減り、長い距離では次の形が使われます（17-03）物理 。

$$V(R)=\sigma R+\mu-\frac{\pi(d-2)}{24R},\qquad \chi(R,R)=-\ln\frac{W(R,R)\,W(R-1,R-1)}{W(R,R-1)\,W(R-1,R)} \tag{6}$$

d は時空の次元です。Creutz 比 χ（Creutz 1980 とされる）では周長と角の寄与が消えます。式 (6) の形を仮定し、有限の T の補正を無視すれば、$\chi(R,R)\approx V'(R-\tfrac12)=\sigma+\pi(d-2)/\big(24(R-\tfrac12)^2\big)$ は σ に上から近づきます 物理 。

周期的な弦

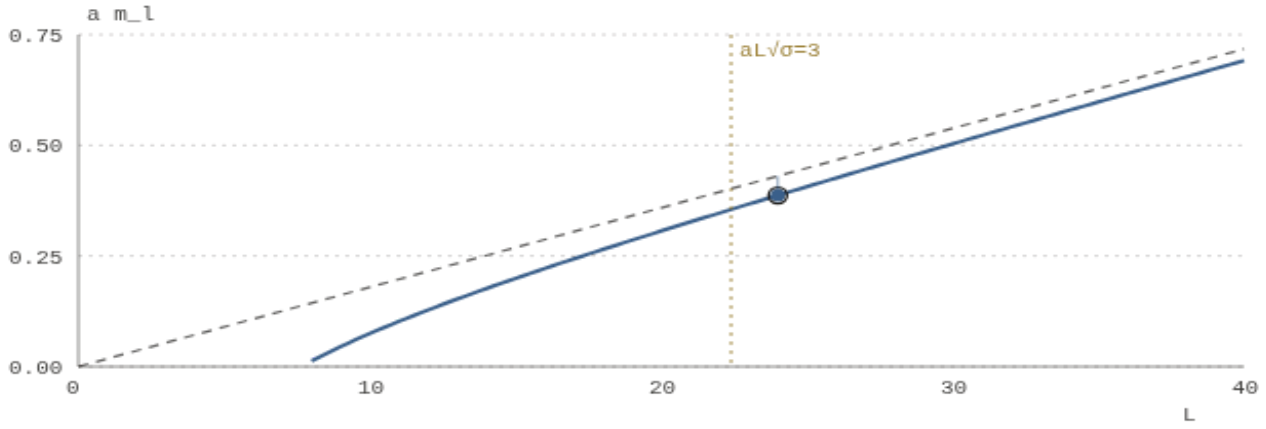
もう一つは、空間の周期 L を一周する閉じた電束（周期的な弦）の質量 m_l を § 01 と同じ方法で読むことです。Lucini–Teper 2001 は四次元で次の式から σ を取り出しました（補正は一般に $\pi(d-2)/(6L)$。三次元では $\pi/(6L)$。17-03 § 閉じた弦 の式 (7)）。

$$a\,m_l=a^2\sigma L-\frac{\pi}{3L} \tag{7}$$

著者は 'in using eqn(4) we are assuming that we have linear confinement … Nambu-Gotto universality class' と書き（Nambu–Goto は、弦を面積に比例する作用の膜として扱う近似。17-03）、二つの L では 'we cannot claim to have evidence for both the 1/L functional form and for its coefficient' と断っています。使うのは $aL\sqrt{\sigma}\ge3$ の格子だけです。弦の補正そのものを調べるには、周期的な弦のほうが Wilson ループよりずっと良いと著者は書いています。補正の係数が大きく（$\pi/3$ 対 $\pi/12$）、静的な電荷の Coulomb 項（同じ $1/r$ の形で短い距離を支配する）が混ざらないからです。

周期的な弦がグルーボールと混ざらないのは中心対称性によります。空間の向き i の面 $x_i = c$ を横切る i 向きのリンクすべて（すべての時刻で）に、群の中心の元（すべての元と可換な元。$SU(2)$ なら -1。1-04）を掛けます。どのプラケットもこのリンクを含まないか、行きと帰りの組で含むので、作用は変わりません。i 向きに一周する輪は面を一度横切るので中心の元が一つ掛かり（$SU(2)$ なら符号が変わり）、縮められる閉じた輪は変わりません。閉じ込め相ではこの対称性が破れていないので、両者の相関は 0 です 既知 。

図 2　L を動かすと、弦の質量（実線）と σL（破線）の差、素朴な $\sqrt{m_l/L}$ のずれが変わる。$SU(2)$、$\beta = 2.60$。丸は同論文の $L = 24$ の測定値



L = 24：a m_l = 0.3870　補正の割合 10.1%　素朴な a√σ = 0.1270（真の値の 94.8%）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（式 (7)）。

計算 **表 2**　Lucini–Teper 2001 の表 1（$SU(2)$）の am_l から式 (7) で出し直した $a\sqrt{\sigma}$。六点の β と質量の正本は 16-05 表 3。

β	L	am_l	$a\sqrt{\sigma}$	補正の割合	$L\,a\sqrt{\sigma}$
2.25	8	1.301(17)	0.4231(25)	9.1%	3.38
2.30	10	0.861(11)	0.3108(18)	10.8%	3.11
2.40	12	0.745(9)	0.2634(14)	10.5%	3.16
2.475	16	0.585(8)	0.2016(12)	10.1%	3.23
2.55	20	0.453(4)	0.1590(6)	10.4%	3.18
2.60	24	0.387(4)	0.1340(6)	10.1%	3.21

読み方。同論文の $a\sqrt{\sigma}$ は式 (7) から丸めの範囲で再現されます（最終桁の誤差で 1 以内）。$L\,a\sqrt{\sigma}$ はどの β でも 3.1〜3.4 で、箱は物理の長さでほぼ一定です。補正は σL の約 10% で、入れなければ $\sqrt{\sigma}$ を約 5% 小さく見積もります 計算 。

> 07

この端末での実演 — 三次元 $\mathbb{Z}_2$ ゲージ理論

同じ測り方を、最も簡単なゲージ理論で確かめます。リンクに ± 1 を置き、Wilson 作用 $S = -\beta \sum_p U_p$ を使う三次元の $\mathbb{Z}_2$ ゲージ理論です。双対性で三次元のイジング模型に移ることが知られています（Wegner 1971 とされる。対応の使い方は Agostini ほか 1997）。0^+ の質量はイジング模型の相関長の逆数に、弦張力は界面張力（上向きと下向きの領域の境目が単位面積あたりに持つ自由エネルギー。2-09 §低温）に対応します 既知 。

Agostini ほか 1997 は $\beta = 0.72484$ で $\xi_{0^+} = 1.296(3)$（$N_s \geq 16$ で安定、同論文の表 2）、$\sigma = 0.05558(10)$、$\sigma\xi^2 = 0.0934(6)$（表 6、界面張力の文献から）を与え、$m/\sqrt{\sigma} = 3.27$ です 物理 。

この端末では $16^2 \times 32$ の格子で熱浴法の更新を約 35,000 回（独立な三本の列）行い、§04・§05 の演算子と周期的な弦を毎回、Wilson ループを 5 回に一度測りました（多数決の平滑化は別の二本の列）。

計算 **表 3**　三次元 $\mathbb{Z}_2$、$\beta = 0.72484$ の実演と参照値。σ は周期的な弦の $m_{\mathrm{eff}}(2)$ を $m_l = \sigma L - \pi/(6L)$ に入れたもの。Creutz 比の目安は $\chi \approx V'(R - \tfrac{1}{2})$ の粗い近似で、有限の T（ループが正方形であること）の補正を含まない。

量	この端末	参照値
m_{0^+}（変分、$t = 3$）	0.803(63)	0.7716(18)
m_l（$L = 16$）	0.872(39)	0.857（式から）
σ	0.0566(24)	0.05558(10)
$m/\sqrt{\sigma}$	3.38(27)	3.27
$\chi(R,R)$、$R = 4, 5, 6$	0.0698(6), 0.0645(11), 0.0664(26)	目安 $\sigma + \frac{\pi}{24(R-1/2)^2}$：0.066, 0.062, 0.060

読み方。質量も弦張力も誤差の内で参照値と合います。質量の中心値は参照値より上にありますが、差は誤差の約 0.5 倍で、区別できません。上界なのは厳密な期待値 $C(t)$ についての性質で、有限の配位数の推定値は雑音で下にも出ます（図 1 の $t \geq 4$）。$t_0 = 0$ の $t = 3$ の値は二つの最大固有値の比で、式 (5) のような厳密な上界でもありません。Creutz 比は $R = 5, 6$ でも σ より 16〜19% 大きく、目安よりも少し上です。周期的な弦は $L = 16$ の一点から 4% の精度で σ を与えました。

比は理論ごとに違います。Agostini ほか 1997 の連続極限の値は $m_{0^+}/\sqrt{\sigma} = 3.08(3)$、同論文の表 9 が別の文献から引く三次元 $SU(2)$ の値は 4.763(31) です 物理 。

08

一次資料の数値 — $m/\sqrt{\sigma}$ の表

四次元の純粋なヤン–ミルズ理論の、一次資料の連続極限の値です（外挿の手順は 5-09 §比）。

物理 計算 **表 4**　$m/\sqrt{\sigma}$ の連続極限と、この端末で割った $2^{++}/0^{++}$（誤差は独立として合成。Meyer の行だけは出典の表の比で、この端末で割ると 1.47(4)）。LT = Lucini–Teper 2001、AT = Athenodorou–Teper 2020（$SU(3)$）・2021（$SU(2)$、$SU(\infty)$、2^{++} は E^{++}）。$SU(\infty)$ は $1/N^2$ の外挿。

出典・群	0^{++}	2^{++}	$2^{++}/0^{++}$
LT $SU(2)$	3.844(61)	5.59(15)	1.45(5)
LT $SU(3)$	3.607(87)	5.13(22)	1.42(7)
LT $SU(4)$	3.49(14)	5.21(21)	1.49(9)
LT $SU(5)$	3.38(16)	4.88(38)	1.44(13)
LT $SU(\infty)$	3.37(15)	4.93(30)	1.46(11)
AT $SU(2)$	3.781(23)	5.349(20)	1.415(10)
AT $SU(3)$	3.405(21)	4.894(22)	1.437(11)
AT $SU(\infty)$	3.072(14)	4.582(14)	1.492(8)
Meyer $SU(3)$（GKN II 経由）	3.347(68)	4.916(91)	1.46(5)

Morningstar–Peardon 1999 と Chen ほか 2006 は $SU(3)$ を Sommer の尺度 r_0（静的な電荷のあいだの力 F が $r_0^2F(r_0)=1.65$ を満たす距離）の単位で $r_0m(0^{++})=4.21(11)(4)$、$4.16(11)(4)$ と報告しており、AT 2020 の $r_0\sqrt{\sigma}=1.160(6)$ で割ると 3.63(10)、3.59(10) です 計算 。出典の違う数を組んだ換算で、目安にとどまります。

読み方。0^{++} の比は N とともに下がり、$2^{++}/0^{++}$ はどの N でも 1.4〜1.5 です。同じ群でも出典でずれ、$SU(2)$ の LT と AT の差 0.063 は合成誤差の約 1 倍、$SU(3)$ の差 0.20 は約 2.3 倍です 計算 。差の原因をこの章では特定しません。GeV への換算は 5-09 §寄り道、大 N は 17-04 で扱います。

09

数が言っていること、言っていないこと — 上界・窓・外挿・弦の仮定

表 4 は、正の隙間が $\sqrt{\sigma}$ の 3〜4 倍ほどある、という物理の見方を支える数値です。数学の言明にするには四つが残ります。

1. **上界**。各 β の am は有限の t の上界か、平坦域への当てはめです（§01・§05）。有限の窓から下界は出ません（4-11 §窓）。
2. **箱と量子数**。有限の箱では二つのグルーボールや一対の周期的な弦も同じ量子数に現れます（Morningstar–Peardon 1999 は要旨でそれらを区別したと述べます）。スピンは立方体の表現を通して同定します（§02）。
3. **外挿**。連続極限の値は a^2 の補正の形を仮定した外挿です（5-09、5-05）。質量や弦張力の比の極限が在ることは示されていません（2026-11 に公開された構成は局所の場の相関の極限を作りましたが、質量ギャップと Wilson ループは扱っていません。6-04）。
4. **弦の仮定**。σ は線形の閉じ込めと Nambu–Goto 型の補正を仮定して取り出しています（§06）。四次元の非可換群で大きい β の閉じ込めは証明されていないので、この σ を閉じ込めの証拠に使うと循環します（17-03）。

質量ギャップの問題（4-11）が求めるのは連続極限の理論と隙間の**下界**で、この章の方法はどれも上から近づきます。何を固定して極限を取るかは 5-09 で扱います。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	有効質量が単調に減り、最低エネルギーの上界を与えること。$t_0 = 0, t = 1$ の一般化固有値問題が Rayleigh–Ritz の上界であること。空間だけの平滑化が一つの時間片の演算子を保つこと。J の立方体の群への分かれ方（表 1）既知 。
数値の水準	一次資料の $m/\sqrt{\sigma}$（表 4）と、式 (7) による $a\sqrt{\sigma}$ の再現（表 2）物理 計算 。三次元 $\mathbb{Z}_2$ の実演が誤差の内で参照値と合ったこと（図 1・表 3）計算 。
言えていない	四次元ヤン–ミルズの連続極限と $m/\sqrt{\sigma}$ の極限が在ること、隙間の下界。弦の補正の独立な確認。$SU(3)$ の値のずれの原因。この章は質量ギャップの存在について何も示していない。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
$SU(N)$ の am_l・$a\sqrt{\sigma}$・am（同論文の表 1）、式 (4)、連続値（同論文の表 5）、演算子と変分の手順、c_0^2、4^{++} の問い、逐語引用	一次（本文）	B. Lucini, M. Teper, JHEP 0106 (2001) 050, arXiv:hep-lat/0103027

もの	種別	出典・道具
$m/\sqrt{\sigma}$、$r_0\sqrt{\sigma}$、E^{++} と T_2^{++}	一次（検査済みの材料による本文照合）	A. Athenodorou, M. Teper, JHEP 11 (2020) 172, arXiv:2007.06422；JHEP 12 (2021) 082, arXiv:2106.00364
$r_0 m$、要旨	一次（材料による本文照合）	C. Morningstar, M. Peardon, Phys. Rev. D 60 (1999) 034509, arXiv:hep-lat/9901004；Y. Chen ほか, Phys. Rev. D 73 (2006) 014516, arXiv:hep-lat/0510074
Meyer の $SU(3)$ の値と比 1.46(5)	二次（原典は未入手）	H. B. Meyer, arXiv:hep-lat/0508002 の値を U. Gürsoy, E. Kiritsis, F. Nitti, JHEP 0802 (2008) 019, arXiv:0707.1349 の表から
三次元 $\mathbb{Z}_2$ の ξ_{0^+}（同論文の表 2）、$\sigma \cdot \sigma\xi^2$（表 6）、3.08(3)、双対の対応の使い方	一次（本文）	V. Agostini, G. Carlino, M. Caselle, M. Hasenbusch, Nucl. Phys. B 484 (1997) 331, arXiv:hep-lat/9607029
三次元 $SU(2)$ の 4.763(31)	二次（Agostini ほか 1997 の表 9 経由・原典は未確認）	同上の表 9
一般化固有値問題の補正と条件 $t_0 \geq t/2$、変分の経緯（同論文の序）	一次（本文）	B. Blossier ほか, JHEP 0904 (2009) 094, arXiv:0902.1265
変分の起点（Wilson 1981 の講演・Berg 1982）	書誌のみ（Blossier ほか 2009 の序による・原典は未確認）	同上の序の引用
変分法・平滑化・ブロック化・Creutz 比・雑音の議論・弦の補正・双対性	書誌のみ（帰属は「とされる」）	Michael–Teasdale, Nucl. Phys. B 215 (1983) 433（書誌は Blossier ほか 2009 の引用による）；M. Lüscher, U. Wolff, Nucl. Phys. B 339 (1990) 222；M. Albanese ほか, Phys. Lett. B 192 (1987) 163；M. Teper, Phys. Lett. B 183 (1987) 345；M. Creutz, Phys. Rev. D 21 (1980) 2308；G. Parisi, Phys. Rept. 103 (1984) 203；M. Lüscher, Nucl. Phys. B 180 (1981) 317；F. J. Wegner, J. Math. Phys. 12 (1971) 2259
Sommer の尺度 r_0 の定義	書誌のみ（定義の式は検査済みの材料で照合）	R. Sommer, Nucl. Phys. B 411 (1994) 839, arXiv:hep-lat/9310022
表 1、表 3・図 1（熱浴法・ジャックナイフ・一般化固有値問題）、表 2・図 2、表 4 の比と換算、§01 の例	計算	python3（numpy・scipy）。スクリプトと出力は本書の検討の記録に保存。多数決の平滑化は三本の列を走らせ、一本は打ち切りで記録が壊れたので使っていない

次に読む章：5-09 何を固定して極限を取るか（格子単位の数を物理の量に直し、何を止めて $\beta \to \infty$ に行くか）。

何を固定して極限を取るか — 格子の数に単位を与えるのは、こちらが決める目盛りである

この章は既存の知見の整理です。§05・§06 は未解決の地図です。

この章で分かること — 格子の計算が返す数はすべて「格子間隔を単位にした」次元の無い数で、物理の単位は一つの量を固定したときにだけ付くこと。固定の仕方によらず意味を持つのは次元の無い比（たとえば $m/\sqrt{\sigma}$）であること。格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）が格子単位の相関長の発散を求めていて、「格子単位の隙間が一様に正」はその反対であること。

前提となる章 — 5-05 弱結合と連続極限（$a(\beta)$ と漸近自由の格子版）、4-11 質量ギャップの定義（隙間・相関長・体積に一様なこと）。5-01 の記号（β・リンク・Wilson ループ）と、2-08 §連続極限 の「臨界点は格子を消す場所」を使います。

先に言うこと — この章は問いの立て方の章です。格子の相関長の問題も、連続の弦張力の問題（Chatterjee の Problem 5.2）も未解決で、この章は連続極限の存在についても質量ギャップについても何も示していません。数値はすべて一次資料の格子計算（数値の水準）と、それをこの端末で計算し直したものです。

この章の順序

1. 格子の数には単位が無い — 測れるのは格子間隔を単位にした数だけ
2. 目盛りを一つ決める — σ・r_0・相関長・Λ のどれかを固定する（寄り道：MeV は借り物）
3. 次元の無い比 — 目盛りの選び方が消える量と、a^2 の外挿
4. 「一様な隙間」の誤読 — 格子単位の隙間を止めると、物理の質量は無限大へ
5. 格子の相関長の問題を読む — 相関長が各 β で有限、かつ $\beta \to \infty$ で発散
6. 連続の弦張力の問題と比の出どころ — Wilson ループで目盛りを決める、もう一つの書き方
7. 何について一様か — 体積・格子単位・物理単位の三つの「一様」
8. 固定しただけでは足りない — 自明な極限の三つの型

9. 極限の順序 — 先に体積、次に β。数値の側の近道

01

格子の数には単位が無い — 測れるのは格子間隔を単位にした数だけ

純粋なヤン–ミルズの格子理論（5-01 §作用）には、径数が一つしかありません。作用に掛かる β です。格子は整数の点 $\mathbb{Z}^4$ の上に置かれ、どこにも「メートル」や「MeV」は書かれていません。

ですから、格子の計算が返す数は、すべて格子の一目盛りを単位にした数です。質量なら am（格子間隔 a と質量 m の積）、弦張力なら $a^2\sigma$、相関長なら $\xi = 1/(am)$（格子間隔の何個分か）という形でしか出てきません。この本では、格子単位の質量を m_{lat}、格子単位の相関長を ξ と書きます。

$$m_{\mathrm{lat}}(\beta) = a\,m, \qquad \xi(\beta) = \frac{1}{m_{\mathrm{lat}}(\beta)}, \qquad \sigma_{\mathrm{lat}}(\beta) = a^2\sigma \tag{1}$$

左辺はどれも β だけの関数で、次元を持ちません。右辺の a と m は、この段階ではまだ別々には決まっていません。格子の上で決まっているのは積だけです。

比喩で言えば、目盛りの間隔が書かれていない定規で物を測っているようなものです。「目盛り 4 個分」とは言えても、「何センチ」とは言えません。正確には、格子理論は β を与えると m_{lat}・σ_{lat} などの次元の無い関数の組を決め、a はその組のどれか一つに物理の値を割り当てたときに定義されます。

例。一次資料の格子計算（Lucini–Teper 2001、$SU(2)$）の数を表 1 に写します。$\beta = 2.60$ の $a\sqrt{\sigma} = 0.13395$ は「弦張力の平方根は格子間隔の逆数の 0.134 倍」、$m_{\mathrm{lat}} = 0.514$ は「最も軽いスカラーのグルーボールの質量は 0.514 倍」という意味で（このグルーボールを 0^{++} と書きます。スピン 0・パリティ正・荷電共役正の状態で、記法は 5-08）、どちらも単位の無い数です 物理 。

計算 **表 1**　この章で使う数（$a\sqrt{\sigma}$・$m_{\mathrm{lat}} = a\,m(0^{++})$・格子の大きさは Lucini–Teper 表 1。六点の m_{lat} は 16-05 表 3（正本）と同じ。$\xi = 1/m_{\mathrm{lat}}$ と、箱の一辺を $1/\sqrt{\sigma}$ 単位で測った $L\,a\sqrt{\sigma}$ はこの端末で計算）。

β	格子	$a\sqrt{\sigma}$	m_{lat}	ξ	$L\,a\sqrt{\sigma}$
2.25	8^4	0.4231(25)	1.390(30)	0.72	3.38

β	格子	$a\sqrt{\sigma}$	m_{lat}	ξ	$L\,a\sqrt{\sigma}$
2.30	10^4	0.3108(17)	1.090(33)	0.92	3.11
2.40	12^4	0.2634(14)	0.953(19)	1.05	3.16
2.475	16^4	0.2016(13)	0.754(10)	1.33	3.23
2.55	20^4	0.15896(63)	0.586(10)	1.71	3.18
2.60	24^4	0.13395(62)	0.514(8)	1.95	3.21

02

目盛りを一つ決める — σ・r_0・相関長・Λ のどれかを固定する

単位を付けるには、次元を持つ量を一つ選び、その値を約束で決めます。これを**尺度の設定**と呼びます。選んだ量を Q（質量の次元）、約束した値を Q_* とすると、格子間隔が次のように定まります。

$$a_Q(\beta) := \frac{(aQ)(\beta)}{Q_*} \tag{2}$$

分子は格子の数、分母は約束の数です。ほかの量は $m = m_{\mathrm{lat}}(\beta)/a_Q(\beta)$ のように物理の単位に直せます。選び方はいくつもあります。

- **弦張力 σ**：Creutz 1980 は 'hold fixed the string tension' として、弦張力を固定すると裸の結合が対数的に減ることを数値で見ています（要旨） 物理 。
- **Sommer の尺度 r_0**：静的な電荷の間の力 F について $F(r_0)\,r_0^2 = 1.65$ で定める長さです（Sommer 1994） 物理 。
- **相関長そのもの**：Chatterjee 2018 §5 は、相関長が有限の正の値に近づくように格子間隔 ϵ を 0 に送る、と説明します 既知 。
- **漸近自由の Λ**：二ループの式で $a\Lambda_{\mathrm{L}}$ を β の関数として与え、Λ_{L} を固定します（5-05、4-06 §二ループ）。

二つの選び方 Q と Q' で作った格子間隔の比は、格子の数だけで書けます。

$$\frac{a_Q(\beta)}{a_{Q'}(\beta)} = \frac{(aQ)(\beta)}{(aQ')(\beta)} \cdot \frac{Q'_*}{Q_*} \tag{3}$$

右辺の第一因子は次元の無い比 Q/Q' の格子の値です。これが $\beta \to \infty$ で定数に落ち着けば、二つの目盛りは極限で定数倍しか違いません。落ち着くことは定理ではなく、数値で支持されている事柄です（§03）。

例。弦張力で決めた目盛りと、二ループの Λ_{L} で決めた目盛りを比べます。$SU(2)$ では $g^2 = 4/\beta$、$b_0 = 11N/(48\pi^2)$、$b_1 = \frac{34}{3}\left(\frac{N}{16\pi^2}\right)^2$ として

$$a\Lambda_{\mathrm{L}} = (b_0 g^2)^{-b_1/(2b_0^2)}\, e^{-1/(2b_0 g^2)} \tag{4}$$

です。表 1 の $a\sqrt{\sigma}$ を (4) で割ると、表 2 になります（(4) の高次の補正は入れていない）。

計算 **表 2**　$SU(2)$ で二つの目盛りの比 $\sqrt{\sigma}/\Lambda_{\mathrm{L}}$。

β	2.25	2.30	2.40	2.475	2.55	2.60
$a\Lambda_{\mathrm{L}} \times 10^3$	6.704	5.914	4.600	3.809	3.152	2.777
$\sqrt{\sigma}/\Lambda_{\mathrm{L}}$	63.1	52.6	57.3	52.9	50.4	48.2

$\beta = 2.25$・2.30 は格子が粗く（$a\sqrt{\sigma} > 0.3$）比が上下するので、比較は 2.40 以上で行います。$\beta = 2.40$ から 2.60 の間で、比は 57 から 48 へ 16% ほど動きます。この範囲の β では「σ を固定する」と「裸の結合の Λ_{L} を固定する」は同じ目盛りを与えていません。この区別（スケーリングと漸近スケーリング）は 18-04 §連続極限と a(β) と 5-05 で扱います 物理 。

寄り道：MeV は借り物

飛ばしてよい小節です。

純粋な $SU(2)$ のヤン–ミルズ理論に当たる実験は無く、「MeV」で書くときの $\sqrt{\sigma}$ や r_0 の値は外から持ち込んだ約束です。$SU(3)$ でも同じです。Athenodorou–Teper 2020 は連続極限の $r_0\sqrt{\sigma} = 1.160(6)$ に、クォークを含む格子 QCD から出た $r_0 = 0.472(5)$ fm を当てて $\sqrt{\sigma} = 485(6)$ MeV とし、0^{++} を 1.653(26) GeV と書きます 物理 。同じ箇所で著者自身が 'Strictly speaking this is of course not possible: the pure gauge theory and QCD … are two different theories' と断っています。

比喩で言えば、隣の国の物差しを借りて測っているようなものです。正確には、純粋なヤン–ミルズ理論が予言するのは次節の次元の無い比だけで、GeV の値はそこに外から一つの約束を掛けたものです。

03

次元の無い比 — 目盛りの選び方が消える量と、a^2 の外挿

二つの格子の数を割ると、格子間隔が約分されます。

$$\frac{m_{\mathrm{lat}}(\beta)}{\sqrt{\sigma_{\mathrm{lat}}(\beta)}} = \frac{a\,m}{a\sqrt{\sigma}} = \frac{m}{\sqrt{\sigma}} \tag{5}$$

この比は、どの目盛りを選んでも同じ値です。式 (2) の Q_* がどこにも入らないからです。純粋なヤン–ミルズ理論には、繰り込んだあとに自由に選べる次元の無い径数が残りません（次

元転移、4-07 §径数が一つ消える)。そのため、理論の予言として意味を持つのは (5) のような比の極限値だけです 物理 。

有限の β では、比にも格子の補正が残ります。Wilson 作用ではその主項が a^2 に比例すると考えられ、Lucini–Teper は次の形で外挿しています（同論文の式 (5)。係数 c は本来 g^2 の冪級数ですが、定数として扱うと断っています） 物理 。

$$\frac{m(a)}{\sqrt{\sigma(a)}} = \frac{m(0)}{\sqrt{\sigma(0)}} + c\,a^2\sigma \tag{6}$$

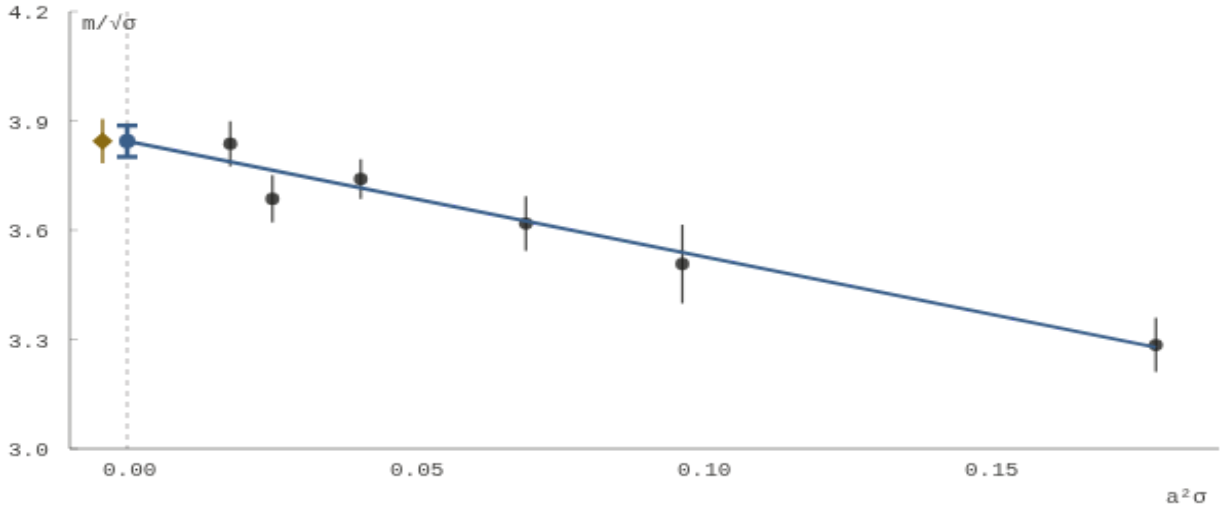
同論文の手順は、全部の点で当てはめ、当てはまりが悪ければ最も粗い点から一つずつ落とす、というものです。表 3・表 4 は表 1 の数から、この端末で当てはめをやり直したものです。

当てはめは、各点の誤差 δ_i から重みを $1/\delta_i^2$ とした最小二乗です。当てはまりの良し悪しは次の量で測ります。

$$\chi^2 = \sum_i \left(\frac{y_i - (\text{直線の値})}{\delta_i} \right)^2$$

ここで y_i は各点の $m/\sqrt{\sigma}$ です。χ^2 を自由度（点の数 − 2）で割った値が 1 前後なら、誤差の大きさと見合う当てはまりです。信頼度は、直線が正しいときにこれ以上大きな χ^2 が偶然出る確率で、小さいほど当てはまりが悪いことを示します。

図 1　縦軸は $m(0^{++})/\sqrt{\sigma}$、横軸は $a^2\sigma$（右ほど粗い格子）。ボタンで粗い側の点を落とすと、直線と切片（$a=0$ の外挿値）が変わる。菱形は同論文の表 5 の値 3.844(61)



6 点で当てはめ：切片 3.844(43)　傾き c = −3.16(53)　χ²/自由度 = 0.60

計算 この図の数値はこの端末で計算した（点は表 3、直線は表 4 の当てはめ）。

計算 **表 3**　各 β の比（誤差は m_{lat} と $a\sqrt{\sigma}$ の誤差を独立として伝播）。右端は §04 で使う「誤読」の値（m_{lat} を 1.390 に止めたとき）。

β	2.25	2.30	2.40	2.475	2.55	2.60
$a^2\sigma$	0.1790	0.0966	0.0694	0.0406	0.0253	0.0179
$m/\sqrt{\sigma}$	3.285(74)	3.507(108)	3.618(75)	3.740(55)	3.686(65)	3.837(62)
誤読	3.29	4.47	5.28	6.89	8.74	10.38

計算 **表 4**　式 (6) の重み付き当てはめ。

使った点	切片 $m(0)/\sqrt{\sigma(0)}$	傾き c	χ^2/自由度	信頼度
6 点（2.25〜2.60）	3.844(43)	−3.16(53)	0.60	0.66
5 点（2.30〜）	3.855(61)	−3.5(1.3)	0.77	0.51
4 点（2.40〜）	3.849(72)	−3.3(1.8)	1.15	0.32
3 点（2.475〜）	3.84(11)	−2.9(3.6)	2.28	0.13

読み方。格子の比は 3.29 から 3.84 へ動きますが、$a^2\sigma$ の直線に乗せると切片は 3.84〜3.86 に揃います。6 点の切片の中心値は同論文の表 5 の 3.844 と一致します（誤差の付け方は同論文のほうが大きい）。比はおおむね増えて下から近づきますが、$\beta = 2.475 \to 2.55$ で一度、誤差の内で下がります 物理 。より新しい計算（Athenodorou–Teper 2021、5-08 §数値）では 3.781(23) です 物理 。

ここで言えるのは「a^2 の補正を仮定すると、この範囲の数は一つの値に揃う」ことまでです。極限が在ることの証明ではありません。測り方（変分法・弦張力の取り出し）は 5-08 で扱います。

04

「一様な隙間」の誤読 — 格子単位の隙間を止めると、物理の質量は無限大へ

ここで、読み違えやすい点に来ます。格子の上の「質量ギャップ」を、「格子単位の隙間 $m_{\mathrm{lat}}(\beta)$ が、すべての β で一定の正の数以上」と読みたくなります。有限の格子の隙間が正であることはほぼ自明で（4-11 §有限の箱と一様性）、それを β に一様にすればよさそうに見えるからです。

しかし物理の単位の質量は、格子単位の質量を格子間隔で割ったものです。

$$m_{\mathrm{phys}}(\beta) = \frac{m_{\mathrm{lat}}(\beta)}{a(\beta)}, \qquad \inf_{\beta} m_{\mathrm{lat}}(\beta) \geq c > 0 \ \text{かつ} \ a(\beta) \to 0 \implies m_{\mathrm{phys}}(\beta) \geq \frac{c}{a(\beta)} \to \infty \tag{7}$$

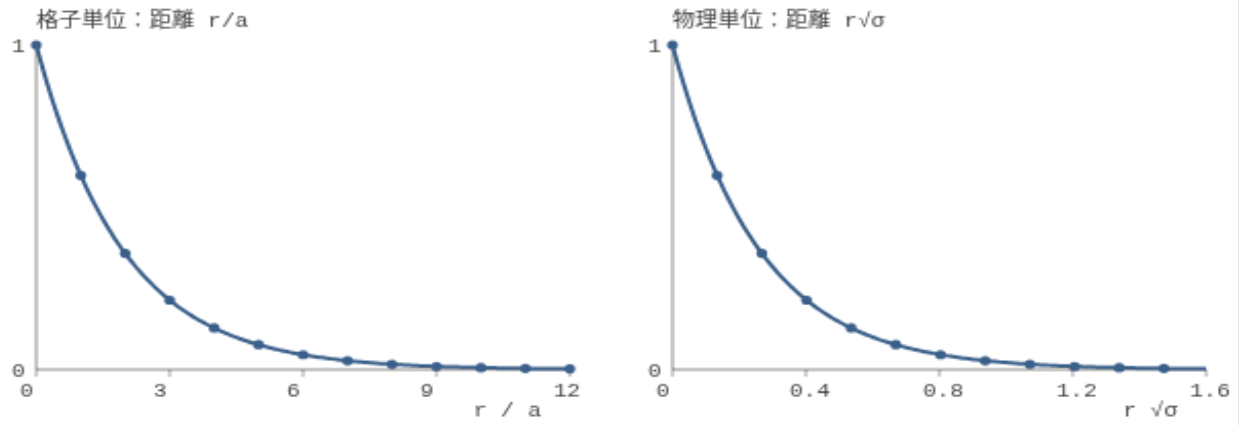
連続極限では $a \to 0$ ですから、格子単位の隙間が一様に正なら、物理の質量は無限大に行きます。相関は物理の距離で 0 の幅に縮み、離れた二点の相関は 0 になります。これは「質量が正」ではなく「何も伝わらない」極限です。

連続極限で質量が有限の正の値に残るには、反対に m_{lat} が a と同じ速さで 0 に向かう必要があります。

$$m_{\mathrm{lat}}(\beta) \sim m_{\infty}\, a(\beta) \ \ (\beta \to \infty), \qquad \text{つまり} \quad \xi(\beta) \to \infty \tag{8}$$

比喩で言えば、定規の目盛りを細かくしていくとき、物の長さが一定なら、物は「目盛り何個分」かが増えていくはずです。いつも目盛り 2 個分なら、物は縮んでいます。正確には、(8) は格子単位の相関長 ξ が発散し、物理の単位の相関長 $a\xi$ が一定に保たれることです（2-08 § 連続極限 のガウス鎖で厳密に見た形）。

図 2　つまみで β を選ぶと、左（格子単位の距離）では相関 $e^{-m_{\mathrm{lat}} r/a}$ の減衰が伸び、右（$1/\sqrt{\sigma}$ を単位にした物理の距離）では減衰の形がほぼ変わらない。「誤読」を押すと m_{lat} を $\beta = 2.25$ の値に止め、右の減衰が急になる



β = 2.60　a√σ = 0.134　m_lat = 0.514　ξ = 1.95　m/√σ = 3.84

計算　この図の数値はこの端末で計算した（$a\sqrt{\sigma}$ と m_{lat} は表 1。曲線は指数関数をその場で描いたもの）。

$\beta = 2.25 \to 2.60$ で格子間隔は約 3.2 分の 1 になり、m_{lat} は約 2.7 分の 1 になります。二つがほぼ同じ速さで縮むので、比はほぼ一定です。表 3 の誤読の列は $1/a$ に比例して増え続けます。なお、この範囲の ξ は 2 格子間隔に届いておらず、数値は極限そのものを見ているわけではありません 物理 。

05

格子の相関長の問題を読む — 相関長が各 β で有限、かつ $\beta \to \infty$ で発散

前節の向きを、数学の問いとしてはっきり書いたものがあります。Chatterjee の概説 "Yang–Mills for probabilists"（arXiv:1803.01950、2018）§ 5 の格子の相関長の問題（Mass gap）

です 既知 。要点を訳します。

> 任意のコンパクトな非可換 Lie 群 $G \subseteq U(N)$（$N \geq 2$）と、四次元の格子ゲージ理論の任意の無限体積極限を考える。各 $x \in \mathbb{R}^4$ に最も近いプラケット p_x を取り、W_{p_0} と W_{p_x} の相関を $f_\beta(x)$ とする。任意の $\beta > 0$ について、ある $\xi(\beta) \in (0, \infty)$ があって

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{\log f_\beta(x)}{|x|} = -\frac{1}{\xi(\beta)} \tag{9}$$

> となることを示せ。さらに $\lim_{\beta \to \infty} \xi(\beta) = \infty$ を示せ。

格子の相関長の問題の β は 5-01 §作用 の $\beta' = \beta/N$ に当たりますが、$\beta \to \infty$ を問う限り違いはありません。

ここで相関は連結相関 $\langle W_{\gamma_1} W_{\gamma_2} \rangle - \langle W_{\gamma_1} \rangle \langle W_{\gamma_2} \rangle$ で、対数を取るのは指数の前に冪の補正がありうるからだと同節は書きます。続けて 'The number ξ represents the reciprocal of the mass of the lightest glueball in the theory.' とあります。

この問いは二つの部分から成ります。

1. **各 β での有限性**：$\xi(\beta) < \infty$、つまり格子単位で相関が指数関数的に減ること。これは格子単位で隙間が正であることに当たります（4-11 §相関長）。
2. **$\beta \to \infty$ での発散**：$\xi(\beta) \to \infty$。§04 の (8) の向きです。格子単位の隙間は 0 に向かわなければなりません。

前半だけなら「格子単位で一様に正」とは矛盾しません。矛盾するのは後半です。格子の相関長の問題は、前半を各 β ごとに求め、後半で一様性を明確に否定しています。

この問いが求めていないこと

この問いが**求めていないこと**も書いておきます。発散の速さは求めていません。漸近自由が予言するのは $\xi \propto e^{\beta/(4Nb_0)}$ のような形です（β は 5-01 の Wilson の規格化。5-05 の一ループの式 $a \propto e^{-\beta/(4Nb_0)}$ の逆数で、Chatterjee の β' で書けば $e^{N\beta'/(4Nb_0)} = e^{\beta'/(4b_0)}$）。比 $m/\sqrt{\sigma}$ も文面に出てきません。極限の理論が在ることや、それが Osterwalder–Schrader の公理（4-10）を満たすことも別の問いです。格子の相関長の問題が示されても、Clay の問題文（0-03 §質量ギャップ）の質量ギャップがそのまま出るわけではありません。

例。表 1 の ξ は β とともに 0.72 から 1.95 へ伸びています。これは後半の向きと合う数値ですが、有限個の β で ξ が伸びることは、極限での発散の証明にはなりません 物理 。

06

連続の弦張力の問題と比の出どころ — Wilson ループで目盛りを決める、もう一つの書き方

同じ §5 の連続の弦張力の問題（Continuum limit）は、目盛りの決め方をもう一つ与えています[既知]。長方形の Wilson ループ $W_{R,T}$（5-01 §プラケットと Wilson ループ）について、$\beta \to \infty$ で $\epsilon(\beta) \to 0$、$c(\beta) \to \infty$ となる列と、0 でない定数 d があって、任意の R, T で

$$\log \langle W_{R/\epsilon, T/\epsilon} \rangle = -c\,(R+T) - d\,RT + o(1) \tag{10}$$

となることを示せ、という問いです。$o(1)$ は $\beta \to \infty$ で 0 に行く項です。RT は縮めたループの面積で、d が連続理論の弦張力に当たる、と同節は書きます。$R+T$ は縮めたループの周長に比例する量です（周長の半分。係数 2 は c に吸収されます）。ここの d は面積の係数で、時空の次元ではありません。

(10) では、$\epsilon(\beta)$ は「その目盛りで見ると Wilson ループの面積の係数が一定になる」ものが存在する、とだけ求められています。つまり弦張力で目盛りを決める書き方です。§5 の説明の段落のほうは相関長で目盛りを決めます。連続の弦張力の問題は格子の相関長の問題を前提にしていません。どちらの $\epsilon(\beta)$ も、存在は示されていません。

もう一つ注意があります。周長の項 $c(R+T)$ について、Chatterjee は同じ節で 'it is not clear to me whether the renormalization term c(R + T) is indeed necessary. It seems entirely possible that the limit in (5.2) holds without the renormalization term.' と書いています。周長の項を引くことは、この問いの立て方の一つの提案です。

二つの問いを同じ目盛りで組む

比 $m/\sqrt{\sigma}$ は、二つの問いを**同じ** $\epsilon(\beta)$ で組んだときに現れます。連続の弦張力の問題が成り立ち、さらに $\epsilon(\beta)\,\xi(\beta) \to \ell \in (0, \infty)$ だとします。物理の相関長は $\epsilon\xi \to \ell$、物理の質量は $1/\ell$、弦張力は d ですから、

$$\frac{m}{\sqrt{\sigma}} = \frac{1}{\ell\sqrt{d}} = \lim_{\beta\to\infty} \frac{1/\xi(\beta)}{\sqrt{\sigma_{\mathrm{lat}}(\beta)}}, \qquad \sigma_{\mathrm{lat}}(\beta) \approx d\,\epsilon(\beta)^2 \tag{11}$$

となり、ϵ は約分されて消えます。§03 の (5) を極限で書いたものです。この組み立ては Chatterjee の文面には無く、二つの問いの読み合わせです。二つの極限が同じ ϵ で同時に存在すること自体が仮定である点に注意が要ります。

例。(11) の右辺の格子の値が表 3 の $m/\sqrt{\sigma}$ の行です。$\beta = 2.60$ では $(1/1.95)/0.134 \approx 3.84$ です。

07

何について一様か — 体積・格子単位・物理単位の三つの「一様」

「一様な隙間」という言葉は、何について一様かを言わないと意味が定まりません。質量ギャップの議論には、少なくとも三つの「一様」が出てきます。

何について一様か	式の形	連続極限での意味	どこで出てくるか
体積 L について	$\inf_L m(L) \geq c > 0$	必要。箱を広げても隙間が閉じない	問題文 §6.5（下の引用）、4-11 §有限
β について、格子単位で	$\inf_\beta m_{\mathrm{lat}}(\beta) \geq c > 0$	(7) により物理の質量が無限大。求めるものの反対	強結合の評価が与える形（β の小さい範囲）
β について、物理単位で	$\inf_\beta m_{\mathrm{lat}}(\beta)/a(\beta) \geq c > 0$	求めるもの。$a(\beta)$ の選び方込みで意味を持つ	格子の相関長の問題と連続の弦張力の問題を組んだ形（§06）

Clay の問題文 §6.5 は 'New ideas are needed to prove the existence of a mass gap that is uniform in the volume of space-time.' と書きます 既知 。直後の文は 'Such a result presumably would enable the study of the limit as T4 → R4' で、コンパクトな時空 T^4 から $\mathbb{R}^4$ への極限を念頭に置いた文です。ここの一様は一行目、体積についての一様です。三行目とは別の要求で、両方が要ります。

二行目の形の定理は在ります。Shen–Zhu–Zhu は $SU(N)$ で β が十分小さいとき（四次元では、逆結合を $N\beta$ とする同論文の規格化で $\beta < 1/48$。この本の Wilson の β では $\beta < N^2/48$ ：5-01 表 4）に無限体積の測度の一意性と相関の指数減衰を示しています（要旨） 既知 。より古くは Osterwalder–Seiler 1978 が、小さい β で面積則を厳密に示しました（Chatterjee 2018 §4 の本文による） 既知 。同論文の要旨は、強結合（小さい β）で無限体積の極限が在り、β について解析的であることも示したと述べます（本文は未読）。これらは β を小さい範囲に固定した結果で、格子間隔を止めたままの世界の定理です。連続極限（$\beta \to \infty$）とは反対の側に居ます（5-02 §管、5-04）。

これらの評価の定数は $\beta \to \infty$ へは延びず、連続極限で問う「目盛りを細かくしたときの振る舞い」には届きません。

有限群のゲージ理論では、大きい β でゲージ不変な量の相関の指数減衰が証明されています（Adhikari–Cao、要旨） 既知 。これは格子の相関長の問題の前半の形が大きい β で成り立つ例ですが、群が連続でないので、後半の $\xi \to \infty$ を求める問いとは別の場面です（5-10）。

08

固定しただけでは足りない — 自明な極限の三つの型

目盛りを一つ固定して $\beta \to \infty$ とすれば、何かの極限は取れそうに見えます。けれども、取れた極限が求める理論である保証はありません。うまくいかない型を三つ並べます。

型 1：相関長が伸びない

$\xi(\beta)$ が有界なら、どんな $\epsilon(\beta) \to 0$ を選んでも $\epsilon\xi \to 0$ です。物理の相関長は 0、質量は無限大で、§04 の誤読の世界そのものです。極限に残るのは、どの二点も相関しない（白色雑音のような）場です。

型 2：相関長は伸びるが、比が 0 か無限大に行く

二つの量の発散の速さが違うと、一方で目盛りを決めたとき、もう一方は 0 か無限大に逃げます。三次元のコンパクトな $U(1)$ の格子理論では、Göpfert–Mack がすべての β で面積則を証明しました（Chatterjee 2018 §4 の本文による）既知 。それでも連続極限は自由なスカラー場で、質量の単位で見た弦張力は無限大へ行く、と同論文の要旨は述べます（Villain 作用。本文は未読）既知 。格子のどの β でも閉じ込めているのに、比 $m/\sqrt{\sigma}$ は 0 に向かう例です。

型 3：比は有限だが、ガウスに潰れる

相関長を固定して極限が取れても、それが自由場（ガウス測度）なら、非自明な理論ではありません。四次元の Ising 型の模型と φ^4（スカラー場に四次の自己相互作用を足した模型。7-03）では、臨界点付近のスケーリング極限がガウス的であることが示されています（Aizenman–Duminil-Copin 2021）既知 。問題文が「非自明な」理論を求める理由がここにあります（0-03 §非自明な、7-08）。

三つをまとめると、求める極限の条件は次の組になります。

$$\xi(\beta) \to \infty, \qquad \frac{m_{\mathrm{lat}}}{\sqrt{\sigma_{\mathrm{lat}}}} \to R_\infty \in (0, \infty), \qquad \text{極限はガウスでない} \tag{12}$$

二つ目は閉じ込めを使う書き方で、問題文そのものは閉じ込めを要求していません（4-11 §定義）。弦張力の代わりに r_0 など別の目盛りを使っても、(12) の二つ目は「二つの次元を持つ量の比が有限で正」の形になります。数値の側では、表 3・表 4 が二つ目を $SU(2)$ で支持しています 物理 。

```
09
```

極限の順序 — 先に体積、次に β。数値の側の近道

問題文の理論には二つの極限が要ります。体積 $L \to \infty$ と、格子間隔 $a \to 0$（四次元では $\beta \to \infty$ と連動して）です（5-01 §第 5 部の地図）。格子の相関長の問題は、各 β で**先に**無限体積の極限を取り、そのあとで $\beta \to \infty$ を考える順序で書かれています。

$$\xi(\beta) = \xi\big(\lim_{L\to\infty} \mu_{L,\beta}\big), \qquad \text{そのあと } \beta \to \infty \tag{13}$$

一つ目の極限でさえ、Chatterjee 2018 §3 は 'the uniqueness (or non-uniqueness) is in general unknown for lattice gauge theories in dimensions higher than two when β is large.' と書きます [既知]。格子の相関長の問題が「任意の無限体積極限」と言うのはこのためです。

数値の計算は別の道を通ります。表 1 の右端の列 $L\,a\sqrt{\sigma}$ は、格子の一辺 L（格子点の数）を物理の単位で測った箱の一辺です。

格子を細かくするたびに格子点の数を増やし、物理の箱の大きさをほぼ $3.2/\sqrt{\sigma}$ に保っています。つまり数値の外挿は「物理の体積を固定して $a \to 0$」という道です。同論文は、閉じた電束管の質量から弦の補正 $\pi/(3L)$ を引いて弦張力を出す式（同論文の式 (4)）が使える長さとして、$aL\sqrt{\sigma} \geq 3$ の格子だけを使います。グルーボールの有限体積効果もこの大きさで見えなくなる、と同論文は書いています [物理]。

2026-11 に公開された構成も、体積を止めて a → 0 を取る道を通り、そのあと体積の部分列で極限を取っています。二つの極限の順を入れ替えてよいとは言っていません（8-05）。

この道と (13) の道が同じ値に着くこと、つまり二つの極限の入れ替えは、数値で確かめる事柄であって定理ではありません。入れ替えには箱の大きさに一様な評価が要り、それが §07 の表の一行目の要求です。

この本の第 23 部は、ここで立てた向き（格子単位の隙間は 0 に向かうべきこと）を出発点に使います。そこで宣言する定義との対応は 23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定 にあります。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	格子の数は格子間隔を単位にした次元の無い数で、物理の単位は一つの量を固定して付くこと（式 (1)〜(3)、定義の整理）。格子単位の隙間が β に一様に正なら、$a \to 0$ で物理の質量は無限大へ行くこと（式 (7)、初等的な帰結）。二つの問題（Chatterjee の Problem 5.1・5.2）の文面、周長項についての Chatterjee の留保、無限体積極限の一意性が大きい β で未知であること（Chatterjee 2018 の本文） 既知 。二つの問いを同じ ϵ で組めば比 $m/\sqrt{\sigma}$ が (11) の形で現れること（仮定のもとでの代数）。
数値の水準	$SU(2)$ の $m/\sqrt{\sigma}$ が a^2 の外挿で 3.84〜3.86 に揃うこと、$\sqrt{\sigma}/\Lambda_{\mathrm{L}}$ が $\beta = 2.40$〜2.60 で 16% 動くこと、数値の箱が物理の大きさでほぼ一定に保たれていること（Lucini–Teper の表をこの端末で計算し直したもの） 物理 計算 。$O(a^2)$ の形は仮定で、弦張力の取り出しには弦の補正の仮定が入る。
言えていない	格子の相関長の問題と連続の弦張力の問題のどちらも未解決で、$\xi(\beta) \to \infty$ も、$m/\sqrt{\sigma}$ の極限の存在も、極限の順序の入れ替えも示されていない。三次元のコンパクトな $U(1)$ の連続極限についての記述は要旨の水準で、本文は確かめていない。この章は連続極限の構成についても質量ギャップについても何も示していない。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
格子の相関長の問題と連続の弦張力の問題（Problem 5.1・5.2）、§3 の一意性の文、§4 の Göpfert–Mack の記述、周長項の留保	一次（本文）	S. Chatterjee, "Yang–Mills for probabilists", arXiv:1803.01950（2018。PDF 本文 §3〜§5）
$SU(2)$ の $a\sqrt{\sigma}$・$am(0^{++})$・格子の大きさ、外挿式 (6)、連続値 3.844(61)、$aL\sqrt{\sigma} \geq 3$	一次（本文）	B. Lucini, M. Teper, JHEP 0106 (2001) 050, arXiv:hep-lat/0103027（表 1・式 (4) (5)・表 5）
表 1 の $\xi \cdot L\,a\sqrt{\sigma}$、表 2〜4、図 1・図 2 の数値	計算	python3（重み付き最小二乗・χ^2 の信頼度・二ループの式 (4)）。スクリプトと出力は本書の検討の記録に保存
'uniform in the volume of space-time'	一次（本文 §6.5）	A. Jaffe, E. Witten, "Quantum Yang–Mills theory"（Clay の問題文）§6.5
弦張力を固定する処方	要旨	M. Creutz, Phys. Rev. D 21 (1980) 2308
r_0 の定義 $F(r_0)r_0^2 = 1.65$	要旨	R. Sommer, Nucl. Phys. B 411 (1994) 839, arXiv:hep-lat/9310022
$SU(3)$ の $r_0\sqrt{\sigma}$・$\sqrt{\sigma} = 485(6)$ MeV・著者の断り	一次（検査済みの材料による本文照合）	A. Athenodorou, M. Teper, JHEP 11 (2020) 172, arXiv:2007.06422（式 (8) (9)・表 17・§5.2）

もの	種別	出典・道具
$SU(2)$ の $m(0^{++})/\sqrt{\sigma} = 3.781(23)$	一次（検査済みの材料による本文照合）	A. Athenodorou, M. Teper, JHEP 12 (2021) 082, arXiv:2106.00364（表 23）
三次元コンパクト $U(1)$ の面積則と連続極限	要旨（連続極限・Villain 作用。INSPIRE の要旨）・本文は未読	M. Göpfert, G. Mack, Commun. Math. Phys. 82 (1982) 545–606（年は Crossref の発行年。INSPIRE は 1981。面積則は Chatterjee 2018 §4 の本文でも確認）
四次元 Ising 型・φ^4 のスケーリング極限がガウス的	要旨	M. Aizenman, H. Duminil-Copin, Ann. Math. 194 (2021) 163, arXiv:1912.07973
小さい β での面積則・無限体積の極限	要旨（無限体積の極限の存在と解析性・Wilson の閉じ込めの評価。INSPIRE の要旨）・面積則は Chatterjee §4 の記述でも確認	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440
$SU(N)$ の強結合での一意性と指数減衰（四次元で $\beta_{\mathrm{SZZ}} < 1/48$）	要旨	H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, arXiv:2204.12737
有限群の弱結合での相関の指数減衰	要旨	A. Adhikari, S. Cao, arXiv:2202.10375（Ann. Probab. 53 (2025)）

次に読む章：5-10 有限群の格子ゲージ理論（大きい β で相関が減るのに、連続極限の向きには進まない例）。

有限群の格子ゲージ理論 — 弱結合の指数減衰は定理だが、そこは連続極限の反対側

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 辺に有限群の元を置くと、弱結合では辺が凍りつき、作用の隙間 Δ_G を払う欠陥だけが残ります。そこから Wilson ループの一次の式（Chatterjee・Cao）と相関の指数減衰の定理（Adhikari–Cao）が出ます。その減衰は相関長が 0 に向かう側、つまり連続極限の反対側の話です。

前提となる章 — 5-02。道具：5-01・1-08・4-11。§07 は 5-09 の後だと短く読めます。

先に言うこと — 定理はすべて格子間隔を固定した有限群の理論のものです。連続な群の質量ギャップと連続極限について、この章は何も示していません。「弱結合で閉じ込めない」は物理の見方で、引く定理の主張ではありません（§08）。

この章の順序

1. 群を有限にする — 辺の値だけが飛び飛びになる
2. 凍りつく辺 — 最小の欠陥と Δ_G
3. 欠陥の形は次元で決まる — 面積則と周長則
4. 途中で線が折れる — 双対性と一次転移（表 1）
5. 周の長さだけで決まる — Wilson ループ（図 1・表 2）
6. 相関の指数減衰 — Adhikari–Cao（図 2・表 3）／寄り道：非可換な欠陥は絡み目になる
7. 連続極限の反対側 — 相関長は 0 へ
8. 三つの「ギャップ」 — 隙間はあるが閉じ込めない（表 4）
9. SU(2) の部分群で近づけても — $\Delta_G \to 0$

01

群を有限にする — 同じ格子で、辺の値だけが飛び飛びになる

辺に置く群を有限群 G に替えても、格子・プラケット・ゲージ変換・Wilson ループの定義はそのままです（5-01 §02）。辺ごとの積分は $|G|$ 個の元の平均になります。作用には忠実なユニタリ表現 ρ（次元 d。$g \neq 1$ なら $\rho(g) \neq I$）の指標 $\chi = \operatorname{tr}\rho$ を使い、プラケット p を一周する積を σ_p とします。

$$S_\Lambda(\sigma) = \sum_p \operatorname{Re}\big(\chi(1) - \chi(\sigma_p)\big), \qquad \mu_{\Lambda,\beta}(\sigma) = \frac{1}{Z_{\Lambda,\beta}}\, e^{-\beta S_\Lambda(\sigma)} \tag{1}$$

（Adhikari–Cao (1.2)(1.3)）既知 。$\chi(g)$ は絶対値 1 の固有値 d 個の和なので各項は 0 以上で、0 になるのは $\sigma_p = 1$ のときだけです。

例。$\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ では重みが $e^{\beta \sum_p \sigma_p}$ に比例する Ising 格子ゲージ理論で、Chatterjee（2020）は Wegner（1971）の定義した最初の格子ゲージ理論としています 既知 （2-09）。$\mathbb{Z}_N$ は角度を $2\pi/N$ の倍数に制限した $U(1)$ です。$SU(2)$ の有限部分群 $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$（四元数の単位）と、$\bar{T}$・$\bar{O}$・$\bar{I}$（正四面体・正八面体・正二十面体の回転群〈$SO(3)$ の部分群〉を $SU(2)$ に引き戻した群。位数 24・48・120。1-12 §08）では $\chi = \operatorname{tr}$、Wilson の規約とは $\beta_W = 2\beta$ です。

有限群にはリー環が無く、単位元に近い元もありません。5-01 §05 の $U = e^{iaA}$ から始まる古典的な連続極限は無く、同じゲージの構造を持つ格子の模型として読みます。

02

凍りつく辺 — 最小の欠陥と、作用の隙間 Δ_G

β が大きいと、重みはすべてのプラケットが単位元の配位を強く好みます。箱の上でそうなる配位は純粋なゲージ（$\sigma_{(x,y)} = h_x h_y^{-1}$）だけで、ゲージを除けば「すべての辺が単位元」の一つです。弱結合の理論はそのまわりの小さな揺らぎで、これを「辺が凍りつく」と言います。

以下、格子の次元を D と書き、d は表現の次元に限ります。最も安い揺らぎは、辺を一本だけ $g \neq 1$ に変えることです。D 次元の格子でその辺を含むプラケットは $2(D-1)$ 枚で、積はどれも $g^{\pm 1}$ の共役です。$\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ なので

$$\Delta S = 2(D-1)\operatorname{Re}\big(\chi(1) - \chi(g)\big) \;\geq\; 2(D-1)\,\Delta_G, \qquad \Delta_G := \min_{g \neq 1} \operatorname{Re}\big(\chi(1) - \chi(g)\big) \tag{2}$$

です。$\Delta_G > 0$ は ρ が忠実であることと同値です（Cao §1.2）既知 。例：四次元の $\mathbb{Z}_2$ は $\Delta_G = 2$ で、この欠陥の重みは $e^{-12\beta}$。この 12 が §05 の定理に現れます。

$U(1)$ で辺を $e^{i\theta}$ にすると増分は $\approx (D-1)\theta^2$ でいくらでも小さく、長い波（光子）が安く作れます（5-06 §03）。Δ_G は 4-11 の質量ギャップとは別物です。

03

欠陥の形は次元で決まる — 点・輪・閉じた面と、面積則・周長則

$\mathbb{Z}_2$ で γ を縁とする面（プラケットの集まり）P を取ると、内側の辺は二回ずつ現れて消えます（離散版の Stokes。P の存在は Chatterjee 2020 の補題 3.1）既知 。

$$W_\gamma = \prod_{e\in\gamma}\sigma_e = \prod_{p\in P}\sigma_p = (-1)^{\#\{p\in P:\,\sigma_p=-1\}} \tag{3}$$

ここで双対格子を使います。各 D 次元立方体の中心を頂点とする格子で、元の格子の k 次元の胞体（辺・面・立方体…）は双対格子の $D-k$ 次元の胞体と一対一に対応します。同論文の補題 3.3 では、負のプラケットは「渦」に分かれ、各渦の双対は閉じています。プラケット（$k=2$）の双対は $(D-2)$ 次元の胞体なので、渦は二次元で点、三次元で閉じた輪、四次元で閉じた面です 既知 。符号を変えるのは γ と絡む渦だけで（補題 3.2）、その数 N が平均 μ の Poisson 分布なら $\mathbb{E}[(-1)^N] = e^{-2\mu}$ です（1-08・17-02 §06）。

例。二次元の自由境界ではプラケットが独立で $\mathbb{E}\sigma_p = \tanh\beta$ なので、面積 A のループで

$$\langle W_\gamma\rangle = (\tanh\beta)^A, \qquad \sigma_{\text{lat}} = -\ln\tanh\beta > 0 \quad (\text{すべての } \beta) \tag{4}$$

です 既知 。二次元では有限群でもすべての β で面積則です（一般の群は 7-02 §03）。三・四次元の大きい β では渦は小さく、γ と絡むのは近くのものだけで、数は周に比例します（周長則）物理 。小さい β での面積則は強結合展開の定理です（5-02 §03）既知 。

04

途中で線が折れる — 双対性と四次元 $\mathbb{Z}_2$ の一次転移

Chatterjee 2020 の定理 4.1 は、四次元 $\mathbb{Z}_2$ の分配関数を双対格子の同じ理論で書き、強弱を入れ替える λ に結合を移します 既知 。

$$\lambda(\beta) = -\tfrac{1}{2}\log\tanh\beta, \qquad \lambda(\beta_{\text{sd}}) = \beta_{\text{sd}} \iff \beta_{\text{sd}} = \tfrac{1}{2}\ln\bigl(1+\sqrt{2}\bigr) = 0.44069 \tag{5}$$

(5) の数値は 計算 。双対性は転移点を転移点に移すので、転移がちょうど一つならそれは自己双対点に来ます 既知 。Wegner（1971）の要旨によれば、単純立方格子の Ising 模型の双対は四スピン積（プラケット）の模型、つまり三次元の $\mathbb{Z}_2$ ゲージ理論です 既知 。

一次転移とは、プラケットの平均のような量が β の一点で跳ぶ転移です。β を上げる列と下げる列の食い違い（履歴）がその兆候になります。四次元では Creutz–Jacobs–Rebbi（1979）が一次転移を数値で報告し、$\mathbb{Z}_N$ では $N \geq 5$ で一次でない転移が二つになり一方は N とともに $\beta \to \infty$ へ動く、と報告しました 物理 。

この端末でも 8^4 の周期格子で熱浴法を走らせました（β を上げる列は乱雑な開始、下げる列は全辺 $+1$ の開始、各 β 200 掃引の後半の平均）。主項 $1 - 8e^{-12\beta}$ は、四本の辺のどれかに §02 の欠陥が乗る確率 $\approx 4e^{-12\beta}$ から出ます。

計算 表 1　四次元 $\mathbb{Z}_2$、8^4 のプラケットの平均（抜粋）

β	上げる列	下げる列	$\tanh\beta$	$1 - 8e^{-12\beta}$
0.40	0.4214	0.4205	0.3799	0.9342
0.44	0.5025	0.9117	0.4136	0.9593
0.46	0.9206	0.9422	0.4301	0.9680
0.60	0.9928	0.9930	0.5370	0.9940

$\beta = 0.43$〜0.45 で二つの列が食い違い（0.44 で差 0.41）、その区間は自己双対点をまたぎます 計算 。小さな格子の短い列で、転移の次数（一次か、跳びの無い転移か）を判定する力はありません（5-07。$U(1)$・$SU(2)$ の同じ比べは 5-06 §04）。

05

周の長さだけで決まる — 弱結合の Wilson ループの一次の式

Chatterjee（2020）の定理 1.1：ℓ を γ の辺の数、ℓ_0 を角の辺の数（γ の別の辺と同じプラケットに乗る辺。長方形なら 8 本）とすると、ある β_0 以上で、普遍定数 C_1, C_2 により 既知

$$\left| \langle W_\gamma \rangle_\beta - e^{-2\ell e^{-12\beta}} \right| \leq C_1 \left(e^{-2\beta} + \sqrt{\ell_0/\ell} \right)^{C_2} \tag{6}$$

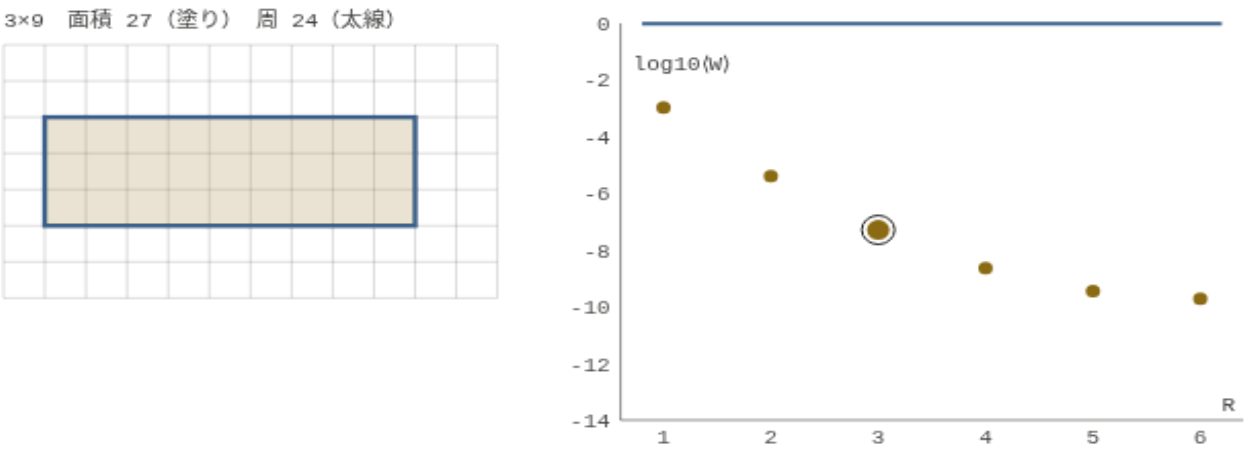
論文は “Nontrivial behavior happens if and only if ℓ is like a constant multiple of $e^{12\beta}$” と読みます。各辺が確率 $\approx e^{-12\beta}$ で §02 の欠陥の中心になり符号を一回変える、その数が Poisson なら (6) の主項です（§03） 物理 。

Cao（2020）は任意の有限群に広げました。その定理 1.2.1 は単一の自己回避ループ γ についてのもので、条件は $\beta \geq (1000 + 14 \log|G|)/\Delta_G$ と $\|A_\beta\|_{\mathrm{op}} < 1$ です。その下で主項は

$$\langle W_\gamma \rangle_\beta \approx \sum_{i=1}^{d} e^{-\ell\, r_\beta (1 - \lambda_i(\beta))}, \qquad r_\beta = \sum_{g \neq 1} e^{-6\beta\, \mathrm{Re}(\chi(1) - \chi(g))} \tag{7}$$

で、λ_i は欠陥の運ぶ $\rho(g)$ を欠陥の重みで平均した行列 A_β の固有値、$\|A_\beta\|_{\mathrm{op}}$ はその作用素ノルム（単位ベクトルを伸ばす倍率の最大）です 既知 。後者の条件のため、$\mathbb{Z}_2$（$A_\beta=-1$、ノルム 1）はこの定理に直接は入りません（Cao の注意 1.2.3） 既知 。それでも主項の形は、$\mathbb{Z}_2$ の $r_\beta=e^{-12\beta}$・$\lambda=-1$ を入れると (6) と一致します 計算 。主項は周の長さだけの関数で、同じ周なら細長くても正方形でも同じ値です。二次元の (4) は面積だけの関数でした。

図 1　周 24 の長方形 $R\times(12-R)$。β・R・「動かす」で、二次元 (4)（点）と四次元の主項 (6)（横線）の $\log_{10}\langle W\rangle$ が変わる



β = 0.60、3×9：二次元 10^-7.29、四次元の主項 0.9648

計算 この図の数値はこの端末で計算した（(4)(6) をその場で計算）。例：$\beta=0.7$ の 1×11・3×9・6×6 で二次元は 3.9×10^{-3}・1.2×10^{-6}・1.3×10^{-8}、四次元はどれも 0.989。定理 1.1 が保証するのは十分大きい β（β_0 以上。値は論文に明示されない）です。0.4407 は転移の目安で、それより下（破線）では主項は形としても当てはまりません。

計算 表 2　四次元 $\mathbb{Z}_2$、8^4 の Wilson ループ（3000 掃引・ジャックナイフ）

β	$R\times T$	$\langle W\rangle$	$-\ln W$／面積	$-\ln W$／周
0.40	1×1	0.42137(39)	0.864	0.216
0.40	2×3	0.00660(18)	0.837	0.502
0.50	1×1	0.97190(20)	0.0285	0.00713
0.50	3×3	0.91281(59)	0.0101	0.00760

$\beta=0.40$ では面積で割った値が、$\beta=0.50$ では周で割った値がそろいます 計算 。後者は (6) の $2e^{-6}=0.00496$ の約 1.5 倍で、転移のすぐ上では角や大きな渦の補正が効きます。

```
06
```

相関の指数減衰 — Adhikari–Cao の定理と Δ_G

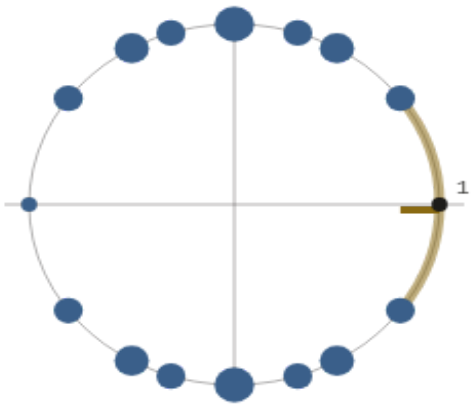
離れた観測量が独立に近づくこと（相関の減衰）は、弱結合の可換な有限群では先行の結果があり（$\mathbb{Z}_2$ は Chatterjee 2020 §5、ほかに Adhikari–Cao §1.1 が挙げる Seiler・Forsström の結果）、非可換を含めて四次元で示したのが Adhikari–Cao（Ann. Probab. 2025）です。B_1, B_2 を ℓ^∞ 距離（各座標の差の最大）で L 以上離れた長方形とし、$|B|$ を長方形 B に含まれるプラケットの数とします。f_i は B_i の中のループのホロノミー（ループに沿った辺の元の積 σ_γ。5-01 §02）の関数で、各引数について共役不変（$f(h^{-1}gh) = f(g)$）なものです。Wilson ループの任意の関数を含みます。$\|f\|_\infty = \max|f|$、Cov は共分散です（1-08）。$\beta \geq (114 + 4\log|G|)/\Delta_G$ なら、どの有限の箱でも 既知

$$\left|\mathrm{Cov}(f_1, f_2)\right| \;\leq\; 4\left(4\cdot 10^{24}|G|^2\right)^{|B_1|+|B_2|}\,\|f_1\|_\infty\|f_2\|_\infty\, e^{-(\beta/2)\Delta_G\,(L-1)} \tag{8}$$

箱に依らない評価です。定数は観測量の台（B_1, B_2）の大きさについて指数的に増えますが、L には依りません。著者たちは “can be interpreted as showing the existence of a mass gap in the setting of finite (non-Abelian) gauge groups at large β” と書きます（小さい β は 5-04 §07）。証明は、独立な二つの配位を領域で入れ替える写像が測度を保つことを使い、共分散を「欠陥が B_1 から B_2 までつながる確率」で抑えます。

条件と速さは Δ_G で決まります（$\mathbb{Z}_N$ で $1-\cos(2\pi/N)$、$SU(2)$ の部分群で $2-2\cos\theta_{\min}$）。

図 2　群の元の固有値を単位円に置く。ボタンで群を選ぶと、1 に最も近い角 $\theta_{\min}$（弧）と $1-\cos\theta_{\min}$（太線）、定理の条件が変わる



Ī Δ_G = 0.381966

Ī（位数 120）：θ_min = 36°、Δ_G = 0.3820、Adhikari–Cao の条件 β ≥ 348.59（β_W ≥ 697.18）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（群を積で閉じるまで作り、固有値の角と Δ_G を数えた。表 3 と同じ）。

計算 表 3　Δ_G と定理の β の条件（$SU(2)$ の部分群は $\chi = \mathrm{tr}$）

群	位数	$\theta_{\min}$	Δ_G	Adhikari–Cao	同 β_W

群	位数	$\theta_{\min}$	Δ_G	Adhikari–Cao	同 β_W
$\mathbb{Z}_2$	2	180°	2	58.39	–
$\bar{T}$	24	60°	1	126.71	253.42
$\bar{O}$	48	45°	0.5858	221.04	442.09
$\bar{I}$	120	36°	0.3820	348.59	697.18

群が細かいほど Δ_G は小さく条件は $1/\Delta_G$ で大きくなります（$\mathbb{Z}_N$ で $\approx 2\pi^2/N^2$）。Cao 2020 は自身の (7) の条件を “very loose” と書いています（Adhikari–Cao の閾値はこれより一桁ほど小さい）。

寄り道：非可換な欠陥は絡み目になる

飛ばしてよい小節です。

Adhikari–Cao §1.2 によれば、可換なら離れた欠陥は独立に現れますが、非可換では絡んだ二つの欠陥の輪はどれほど離れても分解しません 既知 。欠陥の運ぶ元は別の欠陥を回ると $g \mapsto hgh^{-1}$ と変わるからです（Q_8 で $jij^{-1} = -i$ 計算 ）。同論文は非可換な場合を “do not (as of yet) admit a cluster expansion” と書きます。

07

連続極限の反対側 — 相関長は 0 へ向かう

(8) の定数は観測量の台の大きさに依りますが L には依らないので、(8) は相関長の上界を与えます（4-11 §07）。

$$\xi(\beta) \;\le\; \frac{2}{\beta\,\Delta_G} \xrightarrow{\beta\to\infty} 0 \tag{9}$$

既知 （(8) からの帰結。4-11 §07 の定義で）

条件ちょうどの β で、上界は $\mathbb{Z}_2$ で 0.0171、$\bar{I}$ で 0.0150 格子間隔です。(7) の主項が 1 から離れる周の長さ $1/\big(r_\beta(1-\lambda)\big)$ は、Cao の条件ちょうどの β で $\bar{T}$ が $10^{2721.1}$、$\bar{I}$ が $10^{2780.1}$ です 計算 。条件は緩いので大事なのは向きで、弱結合の有限群は相関が格子一つ分も届かない凍った格子です。

5-09 §05 の格子の相関長の問題（Chatterjee 2018 の Problem 5.1、arXiv:1803.01950）は、四次元の非可換なコンパクト群で、各 β で $\xi(\beta) < \infty$、かつ $\beta \to \infty$ で $\xi \to \infty$ を求めます。有限群は大きい β で前半を満たし、後半とは正反対の $\xi \to 0$ に向かいます 既知 。5-09 §08 の「型 1」で、物理の質量は無限大です。

08

「隙間はあるが閉じ込めない」の正確な形 — 三つの「ギャップ」

有限群の理論は「ギャップはあるが閉じ込めない」例として引かれます。この「ギャップ」には意味が三つあります。

既知 表 4 「ギャップ」の三つの意味と、弱結合の有限群での状態

意味	中身	弱結合の有限群
(a) 問題文の隙間	連続・無限体積の理論のスペクトルの隙間（4-11）	連続の理論が無く、当てはまらない
(b) 強い形	任意の境界条件の下での指数減衰（強い減衰の定義〈Chatterjee 2021 の定義 2.3〉）	示されていない（一様な減衰から面積則への定理〈Chatterjee 2021 の定理 2.4〉は連結な群が仮定で、有限群は字義どおりには入らない）
(c) 弱い形	決まった測度での共分散の減衰（(8) の形）	定理（Adhikari–Cao）

Chatterjee（2021）の一様な減衰から面積則への定理は、群 G を $U(n)$ の閉じた連結な部分群とし、中心に非自明に作用する表現について、(b) から面積則を導きます 既知 。自明でない有限群は連結でないので、この仮定には字義どおりには入りません。それでも同論文 p.8 は有限群の理論を “believed to be ‘gapped’ … not confining at large β” の例に挙げ、これが一様な減衰から面積則への定理と矛盾しない理由を、そこでの減衰が強い減衰の定義より弱い意味（ある種の境界条件での二点の切断相関）だからだと説明しています 既知 。同論文は、いくつかの理論では Gibbs 測度が複数あることが厳密に示されている、とも続けています。連結性を外しても証明が通るなら、という条件つきで読めば、閉じ込めない有限群では (b) は成り立ちません。

(6)(7) の誤差はループを大きくしても 0 に行かないので、固定した β で弦張力が 0 であることは、ここで引いた定理の主張ではありません（可換な有限群での周長則を直接言う結果は、この章では確かめていない）。物理の標準の見方です（表 2 と整合） 物理 。閉じ込めとギャップは別の文です（17-02 §02）。

09

SU(2) の部分群で近づけても — $\Delta_G \to 0$ と一様性

Petcher–Weingarten（1980）の要旨によれば、$\bar{T}$・$\bar{O}$・$\bar{I}$ はどれも一次転移を持ち、位数を上げると臨界の結合は 0 に向かいます。$\bar{I}$ は広い結合の範囲で $SU(2)$ の数値と一致しました 物理 。

目安を作ります。5-02 の $SU(2)$・$\beta_W = 2.4$ では $\langle 2 - \operatorname{tr} U_p \rangle = 0.739 > \Delta_{\bar{I}} = 0.382$ です。弱結合の主項 $\langle \frac{1}{2} \operatorname{tr} U_p \rangle \approx 1 - 3/(4\beta_W)$（5-06 §04）から、$\langle 2 - \operatorname{tr} U_p \rangle \approx 3/(2\beta_W)$ が Δ_G に等しく

なるのは

$$\beta_W \approx \frac{3}{2\Delta_G}: \qquad \bar{T}\ 1.50, \qquad \bar{O}\ 2.56, \qquad \bar{I}\ 3.93 \tag{10}$$

です 計算 。これより大きい β_W では $SU(2)$ の揺らぎが有限群の刻みより細かい、という粗い見積もりで、転移点の値ではありません 物理 。

要点は定数の向きです。部分群を $SU(2)$ に近づけると $\Delta_G \to 0$ で、条件 $\propto 1/\Delta_G$ も速さ $(\beta/2)\Delta_G$ も退化します。$SU(2)$ で要るのは、作用に隙間の無い領域で相関長が有限で、しかも $\beta \to \infty$ で発散することです。その質量の隙間は結合が距離とともに強くなることから来ると考えられています（5-06 §07・4-07） 物理 。

この章が言えている範囲

事項	言えている	言えていない
(1)〜(5)	定義・最小の欠陥・渦・二次元の面積則・双対性 既知 。表 1・表 3 計算	渦の気体の読み（見積もり）。四次元の転移の次数
(6)(7)	主項の定理 既知 。$\mathbb{Z}_2$ での主項の形の一致・表 2 計算	固定した β で弦張力が 0 であること
(8)(9)	四次元・有限群・弱結合の指数減衰と $\xi \to 0$ 既知	(b) の強い形。他の次元
$SU(2)$ との関係	部分群の数値の報告 物理 。(10) の算術 計算	連続な群の質量ギャップ・連続極限・閉じ込め。この章は何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
(1)(2)(8)・引用・寄り道	本文 §1	A. Adhikari, S. Cao, arXiv:2202.10375v3; Ann. Probab. 53(1) (2025), doi:10.1214/24-AOP1702。§1.1 が挙げる Seiler・Forsström の先行結果は書誌のみ
(3)(5)(6)・引用・§06 の $\mathbb{Z}_2$	本文 §1–§5	S. Chatterjee, arXiv:1811.09770v3; Commun. Math. Phys. 377 (2020) 307–340, doi:10.1007/s00220-020-03738-9
(7)・条件の注	本文 §1.2（定理 1.2.1・注意 1.2.2–1.2.3）	S. Cao, arXiv:2001.05627v3; Commun. Math. Phys. 380 (2020) 1439–1505, doi:10.1007/s00220-020-03912-z
§08 の一様な減衰から面積則への定理・引用	本文 §2（定義 2.1・2.3、定理 2.2・2.4、p.8）	S. Chatterjee, Commun. Math. Phys. 385 (2021) 1007–1039, arXiv:2006.16229

もの	種別	出典・道具
§04 の双対・転移	要旨	F. J. Wegner, J. Math. Phys. 12 (1971) 2259；M. Creutz, L. Jacobs, C. Rebbi, Phys. Rev. Lett. 42 (1979) 1390・Phys. Rev. D 20 (1979) 1915
§09 の部分群	要旨	D. Petcher, D. H. Weingarten, Phys. Rev. D 22 (1980) 2465
表 1〜3・図 1・図 2・(5)(7)(10) と §07 の数	この端末で計算	python3（この端末の計算：群の表・四次元 $\mathbb{Z}_2$ の熱浴法〈約 100 秒〉・面積と周の比べ）

次に読む章：5-11 寄り道：Bakry–Émery と一リンク積分（強結合側で定理が出る仕組みを一本のリンクで見る）。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 5 部 格子ゲージ理論 Bakry–Émery

寄り道：Bakry–Émery と一リンク積分 — 曲率で隙間を出す判定法と、先に積分して定数を動かす一例

> この章は本書の検討です。§02・§03 は既存の知見です。

この章で分かること — 「曲率が正なら Poincaré 不等式」という Bakry–Émery の判定法と、それが一本のリンクでどれだけ控えめか。格子 $SU(2)$ で、どのプラケットにも一本ずつ含まれるリンクの族を先に積分すると、作用の曲がりが $O(\beta^2)$ に下がり、閾値が $1/12$ から $\sqrt{2/27} \approx 0.272$ に動くこと（このサイトの論文）と、定数 27 の内訳。

前提となる章 — 5-02・1-10。5-04 §08 と 1-08 §03（$SU(2)$ の Haar 測度）も使います。

先に言うこと — 格子間隔を固定した小さい β の側、連続極限の反対の岸の話で、連続極限と問題文の質量ギャップについては何も示していません。Lean の定理は曲がりの下界と族の組合せまでで、質量ギャップは Lean の定理ではありません。強結合の範囲を広げたとも主張していません（§07）。

この章の順序

1. この章の位置 — 強結合側の一例
2. 曲率が隙間を作る — 判定法と証明
3. 一本のリンクで見る — 本当の隙間は κ とともに増える（図 1・表 1）
4. 格子全体に当てはめる — 1/12 と 1/8
5. 先に積分する — 完全な族（表 2）
6. 27 の内訳 — $36 \times 6 \div 8$
7. 閾値を比べる — 直線と放物線（図 2・表 3）
8. 寄り道：完全な族は四次元まで — Hamming 限界の等号
9. 方法の限界と位置 — 何が Lean か

この章の β は $SU(2)$ の規約 $\beta = 4/g^2$ で、結合 g の二乗に反比例します（5-01）。統計力学の逆温度の役をします（5-02）。

$$S(U) = \beta \sum_{P} \Big(1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{tr} U_P\Big), \qquad \mu_\beta(dU) = \frac{1}{Z}\, e^{-S(U)} \prod_{\ell} dU_\ell \tag{1}$$

$SU(2)$ の元は長さ 1 の四元数で、群は単位球面 S^3 です（1-02）。内積は $\langle u, v\rangle = \tfrac{1}{2}\operatorname{tr}(uv^\dagger)$ です。

01

この章の位置 — 強結合側の一様な評価の一例

5-04 §08 の Langevin の道の鍵は **Bakry–Émery の判定法**で、「群の丸さ（曲率）が作用の凸凹に勝てば、Poincaré 不等式が箱によらない定数で成り立つ」と言います。この章はそれを一本のリンク（§02・§03）と格子全体（§04〜§07）で具体的に見ます。

得られるのは格子間隔を固定した格子単位の相関の減衰で（4-11）、連続極限で欲しい「格子単位の隙間が正しい速さで閉じること」（5-09）の反対の岸です。

5-04 §08 では判定法を結論だけ使いました。この章で加わるのは三つです。判定法の証明の筋（§02）、一本のリンクでの本当の隙間との比較（§03）、そしてリンクの一部を先に積分すると曲がりが β の一次から二次に下がり、閾値の定数が動くこと（§05〜§07）です。

読む順は、まず図 1 で「判定法がどこで控えめになるか」を目で見て、次に §04 の直線 $2 - c\beta$ の閾値、最後に §05〜§07 の放物線 $2 - 27\beta^2$ の閾値へ進むのが近道です。§06 の内訳と §08 の寄り道は飛ばしても筋は追えます。

02

曲率が隙間を作る — 判定法と一行の証明

1-10 §08 で、直線上の $e^{-V}dx/Z$ について「$V'' \geq \kappa > 0$ なら $C_P \leq 1/\kappa$」を見ました。群の上ではこれに空間そのものの丸さが加わります。

比喩で言えば、赤道から真北へ歩き出した二人は北極で出会います。正確には、単位ベクトル v の向きに出た測地線の束が v に垂直な各方向で寄っていく度合いを足したものが Ricci 曲率 $\mathrm{Ric}(v,v)$ で、半径 1 の n 次元球面では $(n-1)|v|^2$ です [既知] 。群の上の測地線は $\tau \mapsto U e^{\tau X}$（$X$ は純虚の四元数＝リー環の元。1-03）で、これに沿う二階微分を $\mathrm{Hess}\, V(X,X)$ と書きます。直線の V'' に当たるものです。

$$\mathrm{Ric}(X,X)=2|X|^2\ (S^3),\qquad \mathrm{Ric}+\mathrm{Hess}\,V\ge K>0\implies \mathrm{Var}_\mu(f)\le\frac{1}{K}\int|\nabla f|^2d\mu \quad (2)$$

右が Bakry–Émery（1985）の判定法の Poincaré 版です（$\mu=e^{-V}\mathrm{vol}/Z$、条件は全ての点で）既知。対数 Sobolev 不等式も出ます。**定数に次元が入らない**ので、曲率の下界が箱によらなければ Poincaré の定数も箱によりません。

証明の筋は 1-10 §08 と同じです。$Lf=-\Delta f+\nabla V\cdot\nabla f$（$\Delta$ は群の上のラプラシアンで、質量ギャップの Δ とは別）、$Lf=\lambda f$ とすると、部分積分を二回して（積分した Bochner の公式）既知

$$\lambda^2\int f^2d\mu=\int(Lf)^2d\mu=\int\|\nabla^2 f\|^2d\mu+\int(\mathrm{Ric}+\mathrm{Hess}\,V)(\nabla f,\nabla f)\,d\mu\ \ge\ K\lambda\int f^2d\mu \quad (3)$$

となり（$\int|\nabla f|^2d\mu=\lambda\int f^2d\mu$）、$\lambda\ge K$ です。(3) は 1-10 の $\int|g'|^2+\int V''g^2=\lambda\int g^2$ を多次元にしたもので、V'' が $\mathrm{Hess}\,V$ に置き換わり、空間の丸さが Ric として加わります。例：一様な S^3 では判定法は「隙間 ≥ 2」、本当は 3 です（一次の球面調和関数。表 1 の一行目）。次元を使わない分だけ控えめです。

本書での使い方は 24-06 §02（閉じた群の上での凸性の天井は 24-06 §03）。

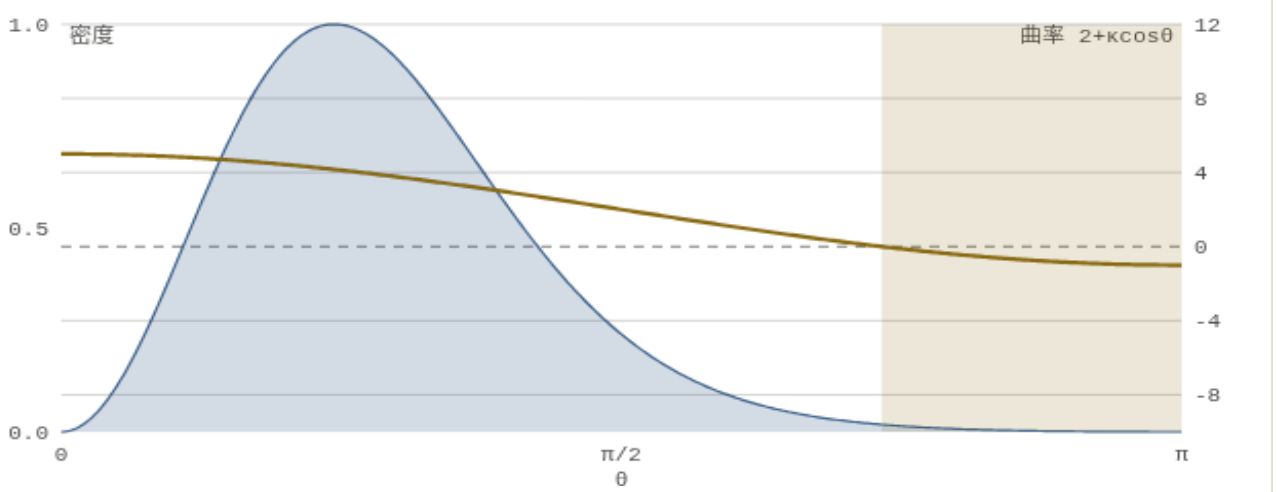
03 一本のリンクで見る — 本当の隙間と判定法

一本のリンク u 以外を止めると、重みは u を含む六枚のプラケットから来ます。プラケットから u を除いた残り三本のリンクの積（コの字形）を**ステープル**と呼びます。六枚のステープル $V_1,\dots,V_6$ を向きを揃えて足したもの $M=\sum_i V_i$ を使うと、重みは $e^{\beta\langle u,M\rangle}$ です（23-02 四次元格子で試した道と壁 と同じ設定。熱浴法の分布。5-07）。M の向きを北極に取り、θ を北極からの角とすると、高さ $\cos\theta$ のヘッセ行列は $-\cos\theta$ 倍の計量なので

$$\mu_\kappa(du)\propto e^{\kappa\cos\theta}du\ \ (\kappa=\beta|M|\le 6\beta),\qquad \mathrm{Ric}+\mathrm{Hess}\,V=(2+\kappa\cos\theta)|X|^2\ge(2-\kappa)|X|^2 \quad (4)$$

です既知。判定法が言えるのは $\kappa<2$ で隙間 $\ge 2-\kappa$ だけですが、本当の隙間は κ とともに**増えます**（北極に寄った測度は分散 $1/\kappa$ のガウスに近い）。判定法は、測度がほとんど乗らない南極の負の曲率に足を取られます。

図 1　つまみ・「動かす」で κ が変わる。塗りは密度 $e^{\kappa\cos\theta}\sin^2\theta$、実線は曲率 $2+\kappa\cos\theta$（右の目盛り）、帯は曲率が負の範囲。



κ=3.00　判定法 0.00　隙間 4.1160　負の曲率の重み 0.0039

計算 この図の数値はこの端末で計算した（隙間は表 1 の計算の 41 点、他はその場で式から）。JavaScript が無効なら表 1 が中身です。

表 1　μ_κ の隙間 λ_1 と判定法 計算 （S^2 の角運動量 $l=0,1,2$ ごとの固有値問題。刻み 800 と 1600 で 5 桁一致。右端は $\int_{\arccos(-2/\kappa)}^{\pi} e^{\kappa\cos\theta}\sin^2\theta\,d\theta \big/ \int_0^{\pi}$ の数値積分）

κ	$l=1$＝隙間	判定法	負の曲率の範囲の重み
0	3.0000	2.0	0
1	3.1323	1.0	0
2	3.5164	0	0
4	4.8782	–	0.0027
6	6.6746	–	0.00059
10	10.580	–	1.5×10^{-5}

隙間は $l=1$（M に垂直に傾ける揺らぎ）で決まります。判定法は正しいが粗い道具です。

注意。$\lambda_1=1/C_P$ は Langevin の時間の隙間で、転送行列の隙間（5-03）とは別です（18-03）。

04

格子全体に当てはめる — 閾値 1/12 と 1/8

格子全体の配位の空間は S^3 の直積で、Ricci 曲率は各リンクで 2 のままです。判定法が求めるのは次です。

$$K(\beta)=2+\inf_{U}\lambda_{\min}\big(\mathrm{Hess}\,S(U)\big)>0 \tag{5}$$

下界は $-c\beta$ の形です。Shen–Zhu–Zhu（2023）はプラケットごとの見積もりで、$SU(N)$ について $|\beta_{\mathrm{SZZ}}|<1/(16(d-1))$ の下で、無限体積の測度の一意性と相関の指数減衰（要

旨：“the infinite volume measure has a strictly positive mass gap”）を示しました 既知 。規約は $SU(2)$ で $\beta = 4\beta_{\mathrm{SZZ}}$ なので、四次元では $\beta < 1/12 = 0.0833$、この章の書き方で $K = 2 - 24\beta$ です（$\beta < 1/12$ は 5-04 表 4 と同じ）。

一方、全てのプラケットが -1 の $\mathbb{Z}_2$ 配位で $\lambda_{\min}(\mathrm{Hess}\, S) = -16\beta$ になります（初等的） 紙 。論文の数値探索ではそれより下は見つかっていませんが、これは証明ではありません（論文 §1・§8）。天井 $1/8$ は初等的な側だけから出ます：この配位で $K \le 2 - 16\beta$ なので、**積分せずに判定法を使う限り、$\beta < 1/8$ で頭打ちです。**

05

先に積分する — 完全な族と一リンク積分

このサイトの論文は、判定法の前にリンクの一部を（不等式で抑えるのでなく）等式のまま積分します。積分する集合 I^* に次を課します。

$$I^* \text{ が完全な族} \iff \text{どのプラケット } P \text{ でも } |P \cap I^*| = 1 \tag{6}$$

族の二本は同じプラケットに乗らないので、各リンクは独立に積分でき、しかも全てのプラケットが族のリンクを含むので、**積分後の残りの作用には裸のプラケットが一枚も残りません。** 族の密度は $1/4$ で、四次元には周期 2 の族があります（数え上げと図は 23-02 四次元格子で試した道と壁、四次元までの理由は §08）。

一本の積分はカタラン数で出ます。Haar 測度の下で $\mathrm{tr}\, u = 2\cos\theta$ は半円の分布で（1-08 (4)）、偶数次の積率は $\mathbb{E}[(2\cos\theta)^{2k}] = \mathrm{Cat}_k$ です（1-08 の寄り道）。指数関数を展開し、$\mathrm{Cat}_k/(2k)! = 1/(k!(k+1)!)$ を使うと

$$\int_{SU(2)} e^{\beta\langle u, M\rangle}\, du = \sum_{k\ge 0} \frac{\kappa^{2k}\,\mathrm{Cat}_k}{(2k)!\,4^k} = F_0\!\left(\frac{\kappa^2}{4}\right) = \frac{2I_1(\kappa)}{\kappa}, \qquad F_0(x) = \sum_{k\ge 0} \frac{x^k}{k!\,(k+1)!} \tag{7}$$

です（I_1 は変形 Bessel 関数） 既知 。論文ではこれが Haar 測度の左不変性だけから Lean で示されています Lean （`IsHaarS3.one_link`。仮定は Haar の性質だけ）。残りのリンクの周辺密度は $e^{-\Phi}$ で、族のリンク s（「星」）ごとの和です。

$$\Phi = -\sum_{s\in I^*} G\big(|M_s|^2\big), \qquad G(t) = \ln F_0\!\left(\frac{\beta^2 t}{4}\right) = \frac{\beta^2 t}{8} - \frac{\beta^4 t^2}{384} + O(\beta^6 t^3) \tag{8}$$

微分には $F_1(x) = \sum_{k\ge 0} x^k/(k!\,(k+2)!) = F_0'(x)$、$F_2 = F_1'$ を使います。連鎖律で

$$G'(t) = \frac{\beta^2}{4}\,\frac{F_1}{F_0}, \qquad G''(t) = \left(\frac{\beta^2}{4}\right)^2 \frac{F_0F_2 - F_1^2}{F_0^2} \qquad \left(F_i \text{ の引数は } \tfrac{\beta^2 t}{4}\right)$$

なので、$G' \le \beta^2/8$ は $2F_1 \le F_0$ と、$G'' \le 0$ は Turán 型の不等式 $F_1^2 \ge F_0 F_2$ と同じです。

$O(\beta)$ の項が消え、曲がりは $O(\beta^2)$ からです（長さ 6 のループが結合 $\beta^2/4$ で現れる。23-02 §02）。

表 2　(7) の級数と Bessel の閉形、比 $r = 2F_1/F_0 = G'(t)/(\beta^2/8)$ 計算　（角度の数値積分とも 12 桁一致）

κ	$F_0(\kappa^2/4)$	$2I_1(\kappa)/\kappa$	r
1	1.130318207985	1.130318207985	0.9608
4	4.879732576852	4.879732576852	0.6580
8	99.96828419564	99.96828419564	0.4096

06

27 の内訳 — 36 × 6 ÷ 8

論文の中心の定理は、Φ の測地線に沿う二階微分の下界です。全ての β・全ての配位で成り立ち、小ささは仮定しません Lean （`StaplePerturbation.hess_gauge`。仮定は周期 L が偶数で $L \ge 3$（つまり 4 以上の偶数。$L = 2$ では向かい合うステープルがリンクを共有して数え方が変わる）、$\|U_e\| = 1$、X_e は純虚。周辺密度が $e^{-\Phi}$ なのは `WilsonOneLink.integral_star_links`）。

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\Phi\big(U e^{\tau X}\big)\Big|_0 \ge -27\beta^2 \sum_e \|X_e\|^2 \tag{9}$$

÷ 8 — 一リンク積分

$0 \le G' \le \beta^2/8,\ G'' \le 0$

表 2 の $r \le 1$（$\iff 2F_1 \le F_0$）。凹性（$\iff F_1^2 \ge F_0 F_2$）はカタラン数の恒等式から Lean （`turan_series`）

× 36 — 一つの星

$(|M_s|^2)'' \le 36 \sum \|X\|^2$

重み付き Cauchy–Schwarz と平方和 Lean （`StarInequality.star_S` と `StapleCurve.second_deriv_le`。等号は `StapleCurve.second_deriv_sharp`）

× 6 — 数え方

残りの各リンクはちょうど 6 つの星に乗る

Lean （`star_count`。$L \ge 3$）

つなぎ方は一行です。星の項の二階微分は、$t = |M_s|^2$ として

$$-\big(G(t)\big)'' = -G'(t)\,t'' - G''(t)(t')^2 \ \ge\ -G'(t)\max(t'', 0) \ \ge\ -\frac{\beta^2}{8}\cdot 36 \sum_{\text{星の中}} \|X\|^2 \tag{10}$$

で、$G'' \le 0$ のおかげで $(t')^2$ の項は邪魔をしません。星について足すと各リンクは 6 回数えられ、$-\frac{\beta^2}{8}\cdot 36 \cdot 6 = -27\beta^2$ です。$G' \le \beta^2/8$ は「傾いた Haar 測度の揺らぎは Haar 測度の揺ら

ぎを超えない」という主張で、これが $SU(2)$ に特有です（§09）。

例。星の比 $t''/(36\sum\|X\|^2)$ は無作為な 20 万組で最大 0.371、等号は $s=(+,+,+,-,-,-)$・三本の向きを $s_i\,i$ に揃えた配位で出ます（1.000000）計算 。緩みは星をつなぐ側にあります（§09）。

07

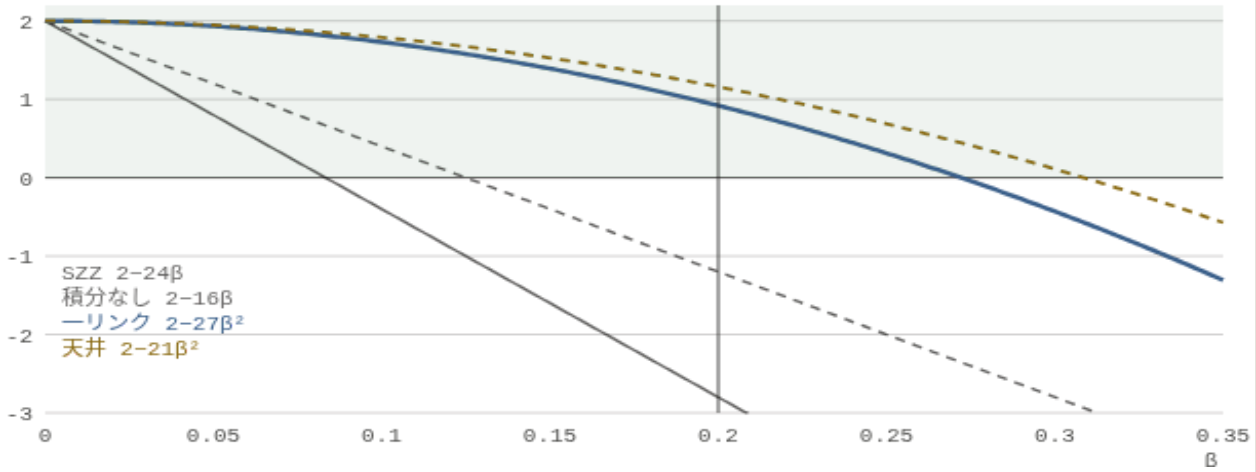
閾値を比べる — 直線と放物線

(9) と $\mathrm{Ric}=2$ を合わせると、残りのリンクの周辺測度の曲率は $K'=2-27\beta^2$ 以上で、閾値は

$$\beta < \sqrt{2/27} = 0.27217 \qquad (\beta_{\mathrm{SZZ}} < 0.06804) \tag{11}$$

です。$1/12$ の $4\sqrt{2/3}=3.27$ 倍、天井 $1/8$ の 2.18 倍です 計算 。族のある d では閾値 $\sqrt{2/3}/(d-1)$ で、比 3.27 は d によりません 紙 （Lean は $d=4$ だけ）。

図 2　四通りの曲率の下界 $K(\beta)$。つまみ・「動かす」で β が動き、各値と $K>0$ かが下に出る。



β = 0.200　SZZ -2.800（使えない）　積分なし -1.200（使えない）　一リンク +0.920（使える）　天井 +1.160（この道の上限）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（表 3 の式）。JavaScript が無効なら表 3 が中身です。

表 3　四次元 $SU(2)$ の曲率の下界と閾値 計算

見積もり	$K(\beta)$	閾値	$\beta=0.2$	水準
Shen–Zhu–Zhu の数え方	$2-24\beta$	0.0833	−2.80	既知
積分しない最良	$2-16\beta$	0.1250	−1.20	紙 （$\le -16\beta$）＋論文の数値探索
完全な族を先に積分	$2-27\beta^2$	0.2722	+0.92	Lean ＋既知

見積もり	$K(\beta)$	閾値	$\beta = 0.2$	水準
この道の天井	$2 - 21\beta^2$	`0.3086`	`+1.16`	論文 §8 の誤差の無い整数演算による計算（機械検査なし・この端末では再計算していない。§09）

強結合の古典である Osterwalder–Seiler（1978）のクラスター展開の到達範囲は、この章では数値で比べられません（出典表：書誌のみ）。論文 §9 の粗い Kotecký–Preiss の見積もりは $\beta \lesssim 0.014$（Mayer 形）〜0.06（指標展開）で、前者は 5-04 表 3 と同じ桁です。一方、指標展開が絶対収束するための必要条件は β が 0.4〜0.8 まで許し、注意深い展開はもっと先へ届きうる。**だから論文は強結合の範囲を広げたとは主張せず、「Bakry–Émery の方法の中で定数が 3.27 倍よくなる」とだけ言います。**同じ力学の方法は面積則にも使われています（Cao–Nissim–Sheffield）既知 。

08

寄り道：完全な族は四次元まで — 符号理論の一行

飛ばしてよい節です。

完全な族は $\mathbb{Z}^d$ で $d \le 4$ のときだけ存在します Lean （`no_perfectZ_of_five`、周期の仮定なし。周期 L の箱では「$d \le 4$ かつ L が偶数」と同値：`PerfectFamily.perfectK_one_iff`、$d \ge 2$）。23-02 §02 は頂点の数え方で示します。論文の紙の筋は符号理論です。言葉を三つ用意します。長さ n の 0 と 1 の列の集まりを**二元符号**、その列を**語**と呼び、二つの列の **Hamming 距離**は食い違う座標の数、**最小距離**は異なる二語の距離の最小です。

単位 d 立方体の中で、向き μ の族のリンクは残りの $d-1$ 座標（0 か 1）で位置が決まるので、長さ $n = d-1$ の二元符号 C_μ になります。語数は面の数え方から出ます。向き μ, ν の面は 2^{d-2} 枚あり、各面が族のリンクをちょうど一本含むので $|C_\mu| + |C_\nu| = 2^{d-2}$、三つの向きで連立すると $|C_\mu| = 2^{d-3}$ です。三次元の部分立方体の面の条件から、どの二座標を消しても語が区別できる、つまり最小距離は 3 以上です。距離 3 以上の語のまわりの半径 1 の球は重ならないので（Hamming 限界）

$$2^{d-3}(1+n) \le 2^n \iff d \le 4 \qquad (d=4:\ 8=8,\quad d=5:\ 20>16) \tag{12}$$

$d = 4$ は等号で、長さ 3 の繰り返し符号 $\{000, 111\}$ が $\{0,1\}^3$ をちょうど埋めます 計算 。この「4」は格子の組合せの数で、物理の四次元時空とは関係しない一致です。$d \ge 5$ では「高々一本」の族しか取れず（密度 $1/d$ 以下 Lean ）、改善は 1.72 倍に落ちます。

09

方法の限界と位置 — 21 と 27・大きい β・SU(N)・何が Lean か

論文 §8 の四つの限界は、「局所的な曲率の方法は定数を動かせても岸は動かせない」ことの別の面です。

(a) 27 と 21。陽な配位で $\lambda_{\min}(\mathrm{Hess}\,\Phi) = -21\beta^2$ がちょうど出ます（論文 §8 の $\mathbb{Z}[e^{i\pi/3}]$ での誤差の無い整数演算による計算。機械検査なし、この端末では再計算していない）。真の値は 21 と 27 の間、天井は $\sqrt{2/21} = 0.3086$ です。

(b) 大きい β。β が大きいと、先に積分する方が悪くなります。$\lambda_{\min}$ は $\beta = 1$ ではまだ -12.1 対 -16（積分あり対なし）ですが、$\beta = 2$ で $-43.1\beta^2$（積分なしは -32β）と逆転します。どちらの値でも $K < 0$ で、判定法は使えません（論文の数値計算。この端末では再計算していない）。§03 と同じく判定法は全ての配位で曲率を要求し、$\mathrm{Ric} = 2$ は β で動かないので、閾値は $O(1)$ を超えません。

(c) 繰り返せない。もう一本積分すると重みは Bessel 型に戻りません 紙 。

(d) $SU(2)$ だけ。「傾けても揺らぎは増えない」は $U(2)$、$M = \mathrm{diag}(s, 0)$ で既に偽です。論文が直接測ったのは主に $U(N)$ の星の定数です。$N = 2, 3, 4$ で測った閾値はほぼ一定（$\beta_{\mathrm{SZZ}} \approx 0.093$）ですが、大きい N では $\beta^* \sim 0.0962/\sqrt{N}$ と見積もられ（論文 §8）、$N \gtrsim 21$ で Shen–Zhu–Zhu の N によらない閾値を下回ります。't Hooft の極限で利得は消えます（論文の数値計算と漸近の見積もり。この端末では再計算していない）。

何が Lean か。Lean の定理は (7)・周辺密度 $e^{-\Phi}$・三つの因子・(9)・族の $d \le 4$ です。$\mathrm{Ric} = 2$ と判定法は標準の事実 既知 、相関の指数減衰と一意性へ進む段（Shen–Zhu–Zhu の議論の移し替え）は定数つきの**概略** 紙 です。つまり $\beta < 0.2722$ での格子単位の質量ギャップは Lean の定理ではありません。論文の探した範囲では同じ組み立ては見当たりませんが、モンテカルロ法の分散低減の文脈で知られているかもしれない、と論文は書きます。

曲率の方法が一様に効くのは $C_P = O(1)$、相関長が格子間隔の数倍の世界で、連続極限で欲しいことの反対側です（23-01）。この評価をいくら良くしても問題文の質量ギャップには近づきません。

この章が言えている範囲

事項	言えている	言えていない
(2)〜(4)・(7)	判定法・一リンク積分 既知	判定法の細部（原典は書誌のみ）
表 1	一本のリンクの隙間は κ とともに増え、判定法は $\kappa < 2$ だけ 計算	格子全体の隙間
§04	$\beta < 1/12$ の換算 既知 、積分なしの天井 $1/8$ 紙	クラスター展開の到達範囲（原典は書誌のみ）

事項	言えている	言えていない
(9)・(11)	下界 $-27\beta^2$ Lean 、曲率の閾値 0.2722	最良の定数。質量ギャップは紙の概略。範囲を広げたとは言えない
§08	族は $d \le 4$ Lean	物理の四次元との関係（無い）
章全体	格子間隔を固定した強結合側の一例	連続極限・問題文の質量ギャップについては何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§04〜§09 の定理・定数・限界	本文 §1〜§11（草稿・未投稿・査読なし）	このサイトの論文 “One-link integration before Bakry–Émery for SU(2) lattice Yang–Mills”（2026-09-25 版、論文の一覧）
§04 の条件と引用	要旨（本文の番号は上の論文の引用による）	H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, Commun. Math. Phys. 400 (2023) 805–851, arXiv:2204.12737
(2) の判定法	書誌のみ	D. Bakry, M. Émery, Diffusions hypercontractives, Séminaire de Probabilités XIX (1985) 177–206
§04 の -16β より下が無いこと、§09 (a)(b)(d) の値（$-21\beta^2$・$-12.1\beta^2$・$-43.1\beta^2$・$U(2)$ の反例・$N=2,3,4$ の閾値）	論文の計算（この端末では再計算していない）	上の論文 §8（数値探索・整数演算。機械検査なし）
§07 の Kotecký–Preiss の見積もり	論文の粗い見積もり	上の論文 §9
§07 の面積則	要旨	S. Cao, R. Nissim, S. Sheffield, Dynamical approach to area law for lattice Yang–Mills, arXiv:2509.04688
強結合の古典	書誌のみ	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110(2) (1978) 440–471
Turán 型 $F_1^2 \ge F_0 F_2$	要旨	Á. Baricz, S. Ponnusamy, Proc. Amer. Math. Soc. 141(2) (2013) 523–532, arXiv:1010.3346
表 1〜3・図 1・2・§06 の比・(11)(12)	この端末で計算	Python 3・NumPy・SciPy：gap_s3.py（$l=0,1,2$ の三重対角の固有値問題と、表 1 の負の曲率の範囲の重みの数値積分）・onelink_series.py（$F_1^2-F_0F_2$ の係数を $n \le 30$ まで有理数で照合）・star_check.py・thresholds.py

次に読む章：6-00 入口 — この巻の約束。あわせて読むなら 7-01 構成的場の理論とは（二つの岸のあいだ）。族は 23-02 で再び使います。Lean は 手引き・一覧。