ヤン–ミルズと質量ギャップ

# 第二巻　存在 — 公開された構成を読む

Kiichi, Shiori and Rin · 2026-11-14 の版 · https://computoergosum.com/principia/yang-mills/

> この PDF は Web 版の各章をそのまま刷ったものです。動かせる図は刷った時点の姿で止まっています。章の間のリンクは Web 版へ飛びます。最新の内容は Web 版に在ります。


| 章 | | 頁 |
|---|---|---|
| **第 6 部 何が証明されたか** | | |
| 6-00 | 入口 — この巻の約束 | 6 |
| 6-01 | 問題文の四つの要求と、公開された構成 | 14 |
| 6-02 | 言明を読む — 公開の定理・構成の定理・委員会の結合の目標 | 21 |
| 6-03 | 証明の骨組み（一枚の図） | 31 |
| 6-04 | 示されていないこと — 第三巻への橋 | 42 |
| **第 7 部 構成的場の理論** | | |
| 7-01 | 構成的場の理論とは | 50 |
| 7-02 | 二次元の可解性とヤン–ミルズ測度 | 63 |
| 7-03 | スカラー場の構成 | 74 |
| 7-04 | クラスター展開 | 86 |
| 7-05 | 繰り込み群の段の列 | 97 |
| 7-06 | 三次元ヤン–ミルズの紫外安定性 | 108 |
| 7-07 | 四次元 | 119 |
| 7-08 | 四次元の $\varphi^4$ の自明性 | 130 |

| 章 | | 頁 |
|---|---|---|
| 7-09 | 確率量子化と正則性構造 | 140 |
| 7-10 | 四次元で止まる場所 | 152 |
| 7-11 | 発散以外の障害 | 164 |
| 7-12 | 寄り道：「1/0 に記号を与えれば」 | 175 |
| **第 8 部 格子から連続へ — 対象** | | |
| 8-01 | 格子・Wilson の測度・規約 | 186 |
| 8-02 | 段取り — 間隔の列・体積の列・育つ辺 | 194 |
| 8-03 | 局所場の札と格子の代表 | 201 |
| 8-04 | 繰り込んだ挿入 | 209 |
| 8-05 | 相関関数と極限の順 | 216 |
| **第 9 部 繰り込みの一段** | | |
| 9-01 | ブロックの核 — 一段は写像でなく確率の核 | 223 |
| 9-02 | パッチと重み — 中心に置いたブロックと一様分布の畳み込み | 231 |
| 9-03 | ゲージ固定の二本立て — 対称な最小化と、確率で引く軸ゲージ | 238 |
| 9-04 | 予測子と群への射影 — 輸送の重みつき平均を群へ | 245 |
| 9-05 | 対称性 — 超立方の群と粗い並進での不変性、ゲージの共変性 | 252 |
| 9-06 | 密度の表示 — 真空の項・主な作用・正則な活動・強制された活動の気体 | 259 |
| 9-07 | 小さい場の閾と、切った作用 — 段に依る閾 | 267 |
| **第 10 部 結合の合わせと漸近自由** | | |
| 10-01 | 「段 m の結合」とは何か — 表示の中の係数 | 274 |
| 10-02 | 一段の写像と一ループの計算 — 殻の積分と係数 $11C_g/(24\pi^2)$ | 281 |
| 10-03 | 読み直し — 二つの配位での密度の対数比から結合を読む | 288 |
| 10-04 | 射撃法 — 入れ子の区間と中間値の定理で裸の結合を選ぶ | 295 |

| 章 | | 頁 |
|---|---|---|
| 10-05 | 辺を育てる理由と暦 — 一段の誤差を log b で割って消す | 303 |
| 10-06 | 走りの定理と短距離の実効の結合 — 依存の内と外 | 310 |
| **第 11 部 多段の評価と大きい場** | | |
| 11-00 | 入口 — 帰納の仮定と一段の証書 | 318 |
| 11-01 | 各段の密度の形と帰納の仮定 | 325 |
| 11-02 | 一番細かい段 — 裸の Wilson の重みを表示に分ける | 332 |
| 11-03 | 一段の作用の分解と区画 | 337 |
| 11-04 | 種一つあたりのエネルギー | 344 |
| 11-05 | 値段の配分と塊の和 | 351 |
| 11-06 | 粗い段の活動の組み直し | 357 |
| 11-07 | 帳簿の換算と、段を跨ぐ持続 | 362 |
| 11-08 | 暦 — 定数を選ぶ順 | 368 |
| 11-09 | 小さい場の一段 | 374 |
| 11-10 | 固定した段の収束と、段を外す一段 | 383 |
| 11-11 | この部で読めていない所 | 392 |
| **第 12 部 無限体積と再構成** | | |
| 12-01 | 格子の鏡映正値性 — 二種類の面 | 399 |
| 12-02 | チェス盤と、根の半ノルム | 407 |
| 12-03 | 紫外から無限体積へ渡す評価 — 根の半ノルムで測った観測量の大きさ | 415 |
| 12-04 | 転送作用素と同程度連続性 | 422 |
| 12-05 | Arzelà–Ascoli と、極限に移る性質 | 429 |
| 12-06 | Euclid 不変 | 437 |
| 12-07 | 相の分解 | 445 |

| 章 | | 頁 |
|---|---|---|
| 12-08 | 再構成と Wightman の公理 | 453 |
| **第 13 部 ヤン–ミルズである証拠** | | |
| 13-01 | 応力テンソルは一本の直線の上に在る | 462 |
| 13-02 | 跡の異常と、自由でないこと | 469 |
| 13-03 | 短距離の自由な Maxwell 場 | 478 |
| 13-04 | 演算子積展開と接触項 | 487 |
| **第 14 部 比べ — 本書の Lean と、本書の検討に無かった発想** | | |
| 14-01 | 骨組みの比べ — 段ごとの表 | 493 |
| 14-02 | 一段の設計の比べ — 押し出しの写像と確率の核 | 502 |
| 14-03 | 合わせの比べ — 測度で決まる量と、表示の中の係数 | 511 |
| 14-04 | 大きい場 — この本の検討の詰まりと、公開された構成の扱い | 520 |
| 14-05 | この本の検討に無かった発想 — 七つの群の一覧 | 529 |
| 14-06 | この本に在って、公開された構成に無いもの — 第三巻への橋 | 539 |
| **第 15 部 紫外の制御の試みの記録** | | |
| 15-00 | 入口 — 紫外の制御とは何か | 550 |
| 15-01 | 紫外の難しさ — 無次元の結合・群値の場・ゲージ | 561 |
| 15-02 | 原典の地図 — Bałaban の計画・BBS の鎖・原典に無い二行 | 571 |
| 15-03 | 分解の言明 — 有限個の母数で閉じる類と三つの剰余 | 583 |
| 15-04 | 一リンクの熱核の類と階層模型 | 602 |
| 15-05 | 束の網の定理 — 横の縮みと母数の流れを一つの射影で | 618 |
| 15-06 | 母数の数え方 — ループの形ごとの結合と引き込む先の類 | 633 |
| 15-07 | 背景に依る揺らぎ η — 一段ごとの吸収 | 647 |
| 15-08 | 閉じない四行と、その案 | 672 |

| 章 | | 頁 |
|---|---|---|
| 15-09 | 言えないこと・問いの索引・依存の図 | 708 |
| 15-10 | 体系の試み — 記録の繰り返しの型に名前を与える | 728 |
| 15-11 | 入口 — 一段と一つの尺度 | 758 |
| 15-12 | 自由場の一段と多段 — 重み (1/8, 3/4, 1/8)、真空の背景、線形化 | 761 |
| 15-13 | ブロック写像の線形化と押し出しの共分散 | 771 |
| 15-14 | 後半（15-11〜15-13）が言えていること・言えていないこと | 779 |

# 入口 — この巻の約束

この章は案内です。

**この章で分かること** — 第二巻が何を読むのか（公開された Lean のコードと、委員会の評価書）。出典の書き方。第二巻の札 源 推 評 の意味と、第一巻・第三巻の札との関係。「Lean で証明されている、と委員会が評価した」という確かさの水準と、この本が自分で確かめた範囲の線引き。部ごとに、どこまで読めたか。

**前提となる章** — 0-03 問題文を一語ずつ読む、4-09 場の量子論の公理、4-10 Osterwalder–Schrader の公理と再構成。構成の歴史の背景は 7-07 四次元。

**先に言うこと** — この本は公開された Lean のコードを組み立ても実行もしていません。証明が正しいかどうかは、委員会の評価の水準のまま引きます。この本が自分で確かめたのは、定義と言明の形を源で読んだことまでです。公開された構成は質量ギャップを示していません（6-04）。

この章の順序

1. この巻が読むもの — 二つの一次資料と、委員会
2. 確かさの水準 — 三つの水準と、この本がしていないこと
3. 札の凡例 — 源 推 評 と、第一巻・第三巻の札との関係
4. 引用の仕方 — 在りかの書き方、写さないこと、名前
5. どの目標に入っている言明か — 五つの区別と「使われている」の意味
6. 読めた深さ — 部ごとに、読んだ所と読めていない所
7. 第二巻の章の形と、この部の章 — 四段の形と、第 6 部の五章

---

01

## この巻が読むもの

2026 年 11 月 10 日に、四次元の純粋なヤン–ミルズ理論の存在の構成を Lean 4 で書いたコードと、それを検査した委員会の評価書が公開されました[評]。第二巻は、この二つを一次資料として読みます。

| 資料 | 中身 | 版 |
|---|---|---|
| コード `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0） | OpenAI が 2026-10-28 に提出した Lean 4 の源。9,477 本のファイル、約 99 万行[源] | 3456e5e |
| 評価書 `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf` | 委員会の評価（35 頁、2026-11-10）。第 I 部は構成の結果と問題文との比べ、第 II 部は検査の記録 | 55ba9fc |
| 委員会の声明 | Kavli Institute for Theoretical Physics の頁の第三の声明（2026-11-09）。署名は Michael R. Douglas、David J. Gross（委員長）、Arthur Jaffe、Igor R. Klebanov、Nikita Nekrasov | — |

評価書の本文には委員の名はありません。名は声明の署名によります。評価書の冒頭の判定は次のとおりです[評]。提出されたコードは、四次元の Wilson 格子ゲージ理論の尺度の極限として、Wightman の公理を満たす相対論的な場の量子論が作れることを、任意の単純なコンパクト群について証明している。無限体積の極限が一意であることと、質量ギャップが在ることは証明していない。

評価書は、次のことも自分で書いています。

- 評価に使ったのは Lean の源だけで、別に在る紙の証明の原稿は使っていない[評]。
- Lean のコードを読む助けに、OpenAI のモデル Astra を使った[評]。
- 委員会は、証明をまだ完全には理解しているとは言わない（"We do not claim to fully understand the proof yet."）[評]。

この本は、委員会のこの位置をそのまま引き継ぎます。第二巻が「何が証明されたか」と書くとき、それは「委員会がそう評価した」の意味です。

02

## 確かさの水準

第二巻の言明は、次の三つの水準のどれかに在ります。上の二つは委員会の側、三つ目がこの本の側です。

| 水準 | 中身 | 誰が確かめたか | この水準が保証しないこと |
|---|---|---|---|
| Lean の核が受け入れた | 組み直し、公理の点検、核での再検査、Comparator による言明と定義の照合が通った（評価書 §9.1・§9.2） | 委員会 評 | 定義が問題の意図を表していること |
| 言明が問題の意図を表している | 定義の人の目の読み（評価書は「広く、ただし網羅的ではない」と書く）と、独立に書かれた公理との照合（§9.3・§10・§11） | 委員会 評 | 証明を人が完全に理解したこと |
| 言明と定義の形を読んだ | 源のファイルを開き、宣言の名・行・量化の順・仮定を読んだ | この本 源 | 証明の中身が正しいこと |

この本が**していないこと**を、ここで一度だけはっきり書きます。

- 公開された Lean のコードを組み立てていません。実行もしていません。
- 核での再検査や Comparator を、自分の端末で繰り返していません。
- 証明の中身（タクティクの列や補題の証明）は、一部の筋を読んだだけです。どこを読めていないかは各章の末尾の節に書きます。

したがって、第二巻は公開された構成の結果を全て「Lean で証明されている、と委員会が評価した」の水準で書きます。この本が言えるのは、その言明が源にその形で書いてある、というところまでです。

03

## 札の凡例

第二巻に固有の札は、次の三つです。一つの文に札は一つです。

| 札 | 意味 | 添えるもの | 保証しないこと |
|---|---|---|---|
| 源 | 公開された構成の源（定義・言明の字句）か、評価の側の源（委員会の検査のコードと例）を読んだ | ファイルの相対パス・宣言の名・行 | 証明が正しいこと |
| 推 | 本書の推し量り（名前・説明文・証明の筋から） | 何から推したか | 源にそう書いてあること |
| 評 | 委員会の評価書による | 評価書の節 | この本が確かめたこと |

但し書きの要る 源 は「源 （名前の検索の範囲）」のように括弧で添えます。「源に無い」と書くときは、探した語と範囲を添えます。

第一巻（第 0〜5 部）・第三巻（第 16〜28 部）の札との関係を書いておきます。

- 第二巻の本文でも、本全体の札を、それぞれの巻と同じ意味で使います。第三巻の札 初 典 機 読 仮 と Lean 、第 7 部と第 15 部の一部では第一巻の札（ Lean ・ 紙 ・ 計算 ・

既知 ・物理 ）です。札の意味は 0-01 の「札」にあります。

- 典 は、文献で確かめた既知の結果（Osterwalder–Schrader の再構成、Arzelà–Ascoli の定理の類）にだけ使います。公開された構成の定理と定義について書く文は源 、「証明されている」という水準に触れる文は評 です。一つの文に典 と源 を並べて付けません。
- 読 は「数値の読み・観察」（浮動小数・Monte Carlo・当てはめ）の意味だけで、源を読んだことは源 で表します。
- 出典の表の「種別」の欄では、問題文や声明のような書誌を「典」と書きます。
- 第二巻の「本書の検討で見えていたこと」の節で本書の Lean の定理を引くときは、第三巻と同じ書き方にします（定理の名と範囲を同じ行に）。

04

## 引用の仕方

出典は二種類です。

- **コード**：ファイルの相対パス・宣言の名・行。例：`ChallengeSpec.lean` の `JointExistence`（186 行）。パスは断りがなければリポジトリ `OpenAI-YM-20261028` の根からの相対です。委員会の検査のコードは、リポジトリ `YM` の `submissions/openai-20261028/` からの相対で書きます。
- **評価書**：節の番号。例：評価書 §5。付録の用語集は「評価書 付録 A」。

公開された構成の文とコードは、長く写しません。数学として自分の言葉で書きます。Lean の言明をそのまま示すのは、形そのものが大事な所だけで、数行までです（6-02 の公開の定理など）。

名前の決まりは次のとおりです。

- 公開された構成の対象は、**意味の名前**で呼びます（確率の核、予測子、切った作用、強制された活動、帰納の仮定 など）。識別子は出典として等幅で添えます。
- コードの置き場や宣言には、数学の中身と結びつかない名前が多く在ります。評価書も、名前の付け方が慣例から外れていると書いています（§9.1）評 。そうした名前は在りかとしてだけ書き、地の文の名前にはしません。
- 行の番号は、上の版のものです。

05

## どの目標に入っている言明か

公開されたコードには、強さの違う「主定理」が幾つか在ります。どの言明がどれに入っているかで、引いてよい強さが変わります。第二巻は、次の五つを区別して書きます。

| 区別 | 中身 | 在りか |
|---|---|---|
| 公開の定理 | 公開された問いの形の言明。仮定は「群の Lie 環が単純」だけ | `ChallengeSpec.lean` の `JointExistence`、証明は `Solution.lean` の `jointExistence` |
| 構成の定理 | 公開の定理を射影として含む、強い言明 | `Construction.lean` の `constructed` |
| 委員会の結合の目標 | 構成の定理の上に、委員会が独立の検査を一つの族の上で束ねた言明 | `YM` の `submissions/openai-20261028/checks/CombinedAcceptance.lean` の `combined_acceptance` |
| 見出しの定理のどれかから届く | 検証の記録が挙げる 17 の見出しの定理の、どれかの依存に入る（表の status は、見出しそのものが headline、依存が used） | `verification/joint-headlines.txt`・`declaration-usage.tsv` |
| 依存の外 | 17 の見出しのどれからも届かない | 同じ表で status が outside |

一つ注意が要ります。検証の記録の表 `verification/declaration-usage.tsv` の status は三つの値を取ります：headline（17 の見出しそのもの）・used（100,151）・outside（150,151）源 。「使われている（used）」とは、17 の見出しの定理の**どれか**から届く、という意味です（`verification/Usage.lean` 17〜40 行）源 。17 の中には、公開の定理と構成の定理のほかに、別の主題の見出しも入っています源 。だから「used」は「公開の定理が使う」とは限りません。

第二巻で「主定理の証明に使われている」と書くのは、公開の定理か構成の定理まで、依存の鎖を一つずつ確かめた宣言だけです。確かめていないものは「確かめていない」と書きます。例として、短距離の実効の結合（評価書 §7.4 の定理 7.2）を挙げます。評価書は Lean の在りかを名指ししておらず、源には近い形のものが三つ在ります源 。

- `YM.PertExtension.Running.ratio`（`YM/PertExtension/Running.lean:145`）：比の形の言明で、status は outside（依存の外）。
- `YM.Trace.Pilot.wilson_link`（`YM/TraceExtension/Atlas/Sink.lean:50`）：status は used。最初の見出しは `continuum_with_position_tests`、直接の使い手は `crest_ready` で、跡の解析の途中の段として使われる。定理 7.2 の言明に字句が近いのはこちらです推 。結論は公開の定理・構成の定理・委員会の結合の目標のどの結論にも残りません源 。
- `YM.Pert.Asymptotics.comparison`（`YM/Pert/Asymptotics/RawAxis.lean:36`）：見出しの定理そのもの（headline）。切断つきの段 $i$ の結合 $\beta(N_i, k_i, i)^{-1/2}$ の走りで、$g_W$ とは別の量

です。

詳しくは 6-02 と 13-03 で扱います。

06

## 読めた深さ

部ごとに、源で読んだ範囲と、読めていない主な所を並べます。各章の末尾の「読めていない所」の節が、これを細かくしたものです。

| 部 | 読んだ所 源 | 読めていない主な所 |
|---|---|---|
| 第 6 部 何が証明されたか | 公開の定理の全文、構成の定理の言明、主定理の鎖、委員会の結合の目標の言明、検証の記録の要約 | 委員会の独立の検査の各ファイルの証明 |
| 第 8 部 格子から連続へ ― 対象 | Wilson の族・相関・極限の順の定義、場の札と商の定義 | 繰り込みの輸送の逆の中身（恒等の場との混ざり方） |
| 第 9 部 繰り込みの一段 | 確率の核、パッチと重み、予測子、ゲージ固定の分かれ目、対称性の言明 | 対称なゲージ固定を作る平均の、証明の細部 |
| 第 10 部 結合の合わせと漸近自由 | 暦、射撃の帯、一段の結合の差の言明 | 暦の条件を満たす定数の陽な形 |
| 第 11 部 多段の評価と大きい場 | 帰納の仮定・一段の証書の形、大きい場の区画と種の定義、一段の不等式の言明 | 一段の定理の証明の芯、一段のあとの活動の組み直し、Haar の損失の補題 |
| 第 12 部 無限体積と再構成 | 鏡映正値性、チェス盤の不等式、紫外からの入力、Arzelà–Ascoli の取り出し、相の分解、再構成の言明 | 転送作用素の評価の本体、相の環が可換であることの証明の筋 |
| 第 13 部 ヤン–ミルズである証拠 | 応力テンソル・Ward の恒等式・跡の法則・演算子積展開の言明 | 跡についての強い形の幾つかの欄の中身、第二の結合の在りか |

全体として、この本が読めたのは「何がどこにどの形で言明されているか」と「どの順に組まれているか」までです。コードの約 7 割を占める多段の評価（第 11 部）は、言明の形と幾つかの補題の筋までしか読めていません 推 。

07

## 第二巻の章の形と、この部の章

第 8〜13 部の章は、次の四つの節をこの順に持ちます。

1. **言明** ― 公開された構成が、その主題について何を定義し何を言明しているか。出典つき。

2. **仕組みの骨子** — どういう順で、何を使って組まれているか。式を使って。

3. **本書の検討で見えていたこと** — 本書の研究と Lean が、その主題についてどこまで持っていたか。無ければ「無い」。

4. **読めていない所** — 読めていない所と確かめていない所を、在りかつきで。

章の終わりには、第一巻・第三巻と同じく「この章が言えている範囲」と「出典と再現」の表を置きます。第 14 部は比べの部で、第 15 部は本書の紫外の試みの記録です。

この部（第 6 部）は入口と総覧の部です。四段の形にそのままは従いませんが、各章に「本書の検討で見えていたこと」と「読めていない所」の節は置きます。

| 章 | 一行 |
|---|---|
| 6-01 問題文の四つの要求と、公開された構成 | 公理・局所場・短距離・質量ギャップの四つのうち、何が届き何が届いていないか。 |
| 6-02 言明を読む | 公開の定理・構成の定理・委員会の結合の目標の言っている範囲の違い。誰が何を選ぶか。検証の記録が確かめたこと。 |
| 6-03 証明の骨組み | 暦から証拠までの十の段を一枚の図と表で。各段を扱う第二巻の章の案内と、コードの層ごとの大きさ。 |
| 6-04 示されていないこと | 収束と一意性・確率測度・質量ギャップ・Wilson ループ・一粒子の状態など。第三巻への橋。 |

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 評 委員会は、提出されたコードが Wightman の公理を満たす理論の構成を証明していると判定した（評価書 冒頭） | 委員会自身が証明を完全に理解しているとは言っていない。一意性と質量ギャップは示されていない |
| 源 第二巻が引く言明は、源のその在りかにその形で書いてある | 証明の中身の正しさ（この本は組み立ても実行もしていない） |
| 凡例（札・水準・引用・目標の区別） | —（約束であって、数学の言明ではない） |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 公開されたコード | 源 | yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028（Apache-2.0、2026-10-28 提出、版 3456e5e）。ファイルの数と行の数はこの端末で数えた |
| 評価書 | 評 | yang-mills-group/YM の docs/assessment-1.pdf（2026-11-10、35 頁、版 55ba9fc）。冒頭・§9・§12。委員の名は本文に無い |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 委員会の声明 | 典 | Kavli Institute for Theoretical Physics の頁の第三の声明（2026-11-09）。署名：Michael R. Douglas、David J. Gross（委員長）、Arthur Jaffe、Igor R. Klebanov、Nikita Nekrasov |
| 「used」の意味と status の三値 | 源 | `verification/Usage.lean` 17〜40 行、`verification/joint-headlines.txt`（17 行）、`verification/declaration-usage.tsv` |
| 短距離の実効の結合の三つの在りか | 源 | `YM/PertExtension/Running.lean:145`、`YM/TraceExtension/Atlas/Sink.lean:50`、`YM/Pert/Asymptotics/RawAxis.lean:36` |
| 問題文 | 典 | Jaffe–Witten の問題文。読み方は 0-03 |

**この章で使った語** — 評価書・委員会の結合の目標・公開の定理・構成の定理・見出しの定理・依存の外・Comparator・核での再検査。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：6-01 問題文の四つの要求と、公開された構成 — 問題文が求める四つと、公開された構成が届いた所を一つの表に並べます。

# 問題文の四つの要求と、公開された構成

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§05 は本書の検討です。

**この章で分かること** — 評価書が問題文から取り出した四つの要求。公開された構成が、それぞれの要求にどこまで届いているか（届いている所・届いていない所・Lean の在りか・評価書の節）。委員会が採った「存在」の基準と、委員会自身が書いている留保。本書の第三巻の結果がこの四つのどこに在るか。

**前提となる章** — 6-00 入口（札と確かさの水準）、0-03 問題文を一語ずつ読む、4-09 場の量子論の公理、4-06 漸近自由。

**先に言うこと** — 四つの要求の言い方は評価書 §1 のまとめで、問題文の原文そのものではありません。公開された構成は、四つ目の質量ギャップについて何も主張していません。この章の「届いている」は、全て「Lean で証明されている、と委員会が評価した」の水準です。

この章の順序

1. 問題文の四つの要求 — 評価書 §1 のまとめ
2. 公開された構成が与えるもの — 評価書の冒頭の判定と §2
3. 四つの要求ごとの対照 — 届いている所・届いていない所・在りか（表 1）
4. 委員会の「存在」の基準と留保 — 部分列、真空、理解の程度
5. 本書の検討で見えていたこと — 本書の結果が四つのどこに在るか（表 2）
6. 読めていない所 — 原文との照合、在りかの分からない言明

---

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

01

## 問題文の四つの要求

導入は 0-03。評価書 §1 は、Jaffe–Witten の問題文が構成されたヤン–ミルズ理論に求めるものを、次の四つにまとめています[評]。

1. **公理を満たす自明でない理論**。正値性・時空の対称性・局所性・正則性・真空の表現が、Wightman か Osterwalder–Schrader（OS）の枠組みの強さで成り立ち、本物の局所的な観測量を持つこと。
2. **ヤン–ミルズの局所場**。作用素の空間が、曲率 $F$ とその共変微分のゲージ不変な多項式に対応すること。
3. **予言された短距離の振る舞い**。漸近自由と摂動の繰り込みの理論、応力テンソル、予言された特異性を持つ演算子積展開。
4. **正の質量ギャップ**。非負のハミルトニアン $H$ について、ある $\Delta > 0$ で次が成り立つこと。

$$\sigma(H) \subset \{0\} \cup [\Delta, \infty). \tag{1}$$

評価書は、四つ目について「そのような隙間の上限が有限であること」も添えています[評]。(1) の $\Delta$ が質量ギャップです。零エネルギーの空間に直交する状態のエネルギーが $\Delta$ 以上離れている、という意味です。零エネルギーの空間が真空の倍だけであること（真空の一意性）は、(1) とは別の公理です。Euclid の言葉では、相関の指数的な減衰に当たります（4-10）。

02

## 公開された構成が与えるもの

評価書の冒頭の判定を、もう一度書きます[評]。提出された Lean のコードは、四次元の Wilson 格子ゲージ理論の尺度の極限として、Wightman の公理を満たす相対論的な場の量子論が作れることを、任意の単純なコンパクト群について証明している。無限体積の極限が一意であることと、質量ギャップが在ることは証明していない。

評価書 §2 は、構成が与えるものを四つに分けています[評]。

- Wilson の格子ゲージ理論から出発し、曲率の多項式に繰り込んだ格子の観測量を対応させ、その相関が Euclid の場の理論を定める極限に収束することを示す。そこから OS の再構成で、構成自身の版の Wightman の公理を満たす理論を作る。自明でないことも示す。
- 曲率の多項式に当たる繰り込んだ局所作用素を定義する。保存する応力テンソルを含む。短距離の検査が幾つか在る。

- 誤差の上界つきの演算子積展開を与える。ただし摂動展開の予言との一致は示さない。漸近自由に要る結合の尺度の振る舞いを与える。応力テンソルの跡を定義し、その性質を示す。
- **質量ギャップについては、肯定も否定も、何の証拠も与えない。**

この四つは、§01 の四つの要求とほぼ一つずつ対応します。次の節で、要求ごとに源の在りかを並べます。

03

## 四つの要求ごとの対照

評価書の冒頭の判定が「証明している」とするのは、要求 1 に当たる Wightman の公理を満たす理論の構成です[評]。§7 は、個々の短距離の結果（跡の短距離の法則、実効の結合、二つの結合の比、自由な Maxwell 場との比べ）を、提出物が証明する定理として述べています（"The submission proves that …"、§7.2・§7.4）[評]。そのうえで評価書は、それらを合わせて「主な項の水準の、相当な短距離の証拠」とし、格子の出自・局所場・応力テンソル・演算子積展開と合わせて、構成がヤン–ミルズを記述することの相当な証拠と書きます（§7.4 の末、冒頭）[評]。要求 2・3 については、評価書は局所作用素の定義と「幾つかの短距離の確かめ」を挙げ、それらを合わせて「ヤン–ミルズであることの相当な証拠」と書き、摂動論との全次数の一致は証明されていないとしています（§2・§7・§9.4）[評]。表 1 の 2・3 行目はこの書き方で読んでください。表 1 の「在りか」は、公開の定理の言明の中の欄です（`ChallengeSpec.lean`）。公開の定理・構成の定理・委員会の結合の目標の違いは 6-02 で扱います。

表 1　問題文の四つの要求と、公開された構成（札は行の中の主張ごと）

| 要求 | 構成が与えるもの | 届いていない所 | 在りか・評価書 |
|---|---|---|---|
| 1 公理と自明でないこと | [評] 無限体積の理論を相に分解し、各成分（相）が群がりを含む OS の公理の変種を満たす。各成分から Wightman の理論を再構成する。選んだ相で跡の二点関数が 0 でない | [評] 体積の極限は部分列で、一意性は示されていない。分解する前の理論の真空の一意性は示されていない。[評] 委員会が独立に書かれた OS の公理と照合したのは、選んだ相の跡のスカラーの階層だけ（§10.1） | `Hierarchy.Reconstructed`（117 行）、`Properties.reconstruction`・`nonfree`（177〜181 行）。評価書 §5・§6・§10 |

| 要求 | 構成が与えるもの | 届いていない所 | 在りか・評価書 |
|---|---|---|---|
| 2 ヤン–ミルズの局所場 | 評 重み $d$ 以下のゲージ不変な曲率の多項式の空間 $V_d$ を札として持ち、点の離れた相関が全て消える部分 $N_d$ で割った $F_d = V_d/N_d$ を場の空間とする。評 $F_d$ は自由な Maxwell 理論の多項式の空間と線形同型 | 源 公開の言明では札の型 `Token` は抽象の型で、曲率の多項式という意味は書かれていない（構成の定理の `C.Makes` の側に在る）。源 線形同型は相関の一致ではない、と委員会の検査の例が書く（同じファイルの 84〜86 行）。源 札は一点での多項式で、線の欠陥（line defects）のような局所でない観測量についての完全性は示さない、と委員会の検査の例が書く（`submissions/openai-20261028/docs/examples/OperatorContent-20261028.lean` 35〜38 行） | `Hierarchy.Field`（28 行）、`PublicWilson.lean` の `Token`（44 行）。評価書 §3・§4.1・§9.4 |
| 3 短距離の振る舞い | 源 裸の結合が $\beta_{N,p}/\log(1/a_N)$ で正の傾きに近づく（体積に一様）。評 応力テンソルは保存する対称テンソルの一次元の空間の上の一点で、Ward の恒等式で正規化される。評 跡の二点関数の短距離の法則 (2)。評 誤差の上界つきの演算子積展開。評 一つの尺度の列に沿って、応力の相関が自由な Maxwell 場の相関に近づく | 評 摂動論との全ての次数の一致は示されていない。評 演算子積展開の係数を摂動の係数と比べていない。源 公開の言明では、跡の欄は $F_4$ の任意の元で、応力の跡であることは書かれていない。源 短距離の実効の結合（評価書 §7.4）に近い形の宣言は三つ在り、どれも三つの目標の結論に残らない：`Running.ratio` は依存の外、`wilson_link` は依存の中の途中の段（字句が定理 7.2 に近い 推）、見出しの `Asymptotics.comparison` は切断つきの段の結合で $g_W$ とは別の量（6-00 §05） | `WilsonRegularity.running`（13〜14 行）、`TraceTest`（168〜175 行）、`OperatorProductExpansion`。評価書 §7 |
| 4 質量ギャップ | — | 評 主張していない。源 在るのは各相で一様な多項式の評価（低いエネルギーのスペクトルの重みが $Mu^2$ 以下、熱の評価が $M\tau^{-2}$ 以下）で、指数の減衰ではない | `YM/EveryPhase/Light.lean` の `light_bound`（221 行）、`YM/EveryPhase/Decay.lean` の `inverse_square`（173 行）。評価書 §2・§8 |

表 1 の三つ目の行の短距離の法則は、選んだ相 $\xi_*$ での中心化した跡 $\Theta$ の二点関数について、次の形です 源（`ChallengeSpec.lean` 173〜174 行、評価書 §7.2 の式 (16)）。

$$\lim_{r\downarrow 0}\; r^{8}\,\log^{2}(1/r)\;S^{\xi_*}_{\Theta,\Theta}\!\left(-\tfrac{r}{2}e_0,\;\tfrac{r}{2}e_0\right) \;=\; \frac{3\,\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{g}}{\pi^{4}}. \tag{2}$$

$r^{-8}$ は次元 4 の場の二点関数の素朴な冪です。$\log^{-2}$ は、跡が結合の走りで小さくなる係数を持つことの痕跡です 推。この対数が、有限個の質量の自由場の多項式では出ない形であることから、「自由でない」ことが言われます（13-02）。

四つ目の行の多項式の評価は、局所可換性と前向きの光円錐から出る一般の形です[推]。質量 0 の理論とも両立するので、(1) の代わりにはなりません。

04

## 委員会の「存在」の基準と留保

委員会は「存在」をどの強さで認めたのかを、自分で書いています。

- **部分列**。無限体積の極限は、コンパクト性（Arzelà–Ascoli）による部分列でだけ取られている[評]。評価書 §5 は、Jaffe–Witten の問題文が「コンパクト性で得た部分列の極限は、極限の性質を示す別の議論が無ければ不十分」とみなすことを書き、そのうえで、再構成と局所場の定理がコンパクト性を超える情報を与えている、と述べています[評]。
- **真空**。評価書は、ここで採った存在の基準では「真空の状態の精密な特徴づけを求めていない」と書いています[評]。
- **一意性の欠け**。無限体積の極限と真空の一意性が示されていないことは、それらが一意だという一般の予想と矛盾しない、と委員会は書いています[評]。予想は予想で、示されたことではありません。
- **理解の程度**。委員会は、証明をまだ完全には理解しているとは言っていません。評価に使ったのは Lean の源で、紙の証明の原稿は使っていません[評]。

さらに、公開の定理（`JointExistence`）は、もともと格子との結びつきの一部を言明に含んでいませんでした。評価書 §9 は、OpenAI からその旨の知らせを受けたこと、委員会の判定はより強い結合の目標の上に立てたことを書いています[評]。この違いは 6-02 §05 で読みます。

まとめると、冒頭の判定が「証明している」とするのは要求 1 の構成で、その強さは部分列と相の選びを含む形です。要求 2・3 は、局所場の札と商、主な項の水準の短距離の法則という部分的な形です。個々の短距離の結果は提出物の定理として述べられ、それらを合わせたものを評価書は「ヤン–ミルズであること」の証拠と呼んでいます。要求 4 は、届いていない以前に主張の外です。

05

## 本書の検討で見えていたこと

本書は、第三巻で、四つの要求のうち幾つかに当たる言明を、**格子間隔を固定した一つの格子の上で**持っています。連続の理論については何も示していません。表 2 は、その位置を表 1 と

同じ行で並べたものです。

表 2　四つの要求と、本書の第三巻の結果の位置（本書の側は全て格子間隔を固定した言明）

| 要求 | 公開された構成 | 本書の第三巻 |
|---|---|---|
| 1 公理 | 連続の極限で、相ごとの Wightman の理論 | 強結合の窓の中の格子で、部分列なしの無限体積の極限・鏡映正値性・再構成（20-03・20-04）。連続の極限は無い |
| 2 局所場 | 札の空間と商 $F_d$ | 無い。本書の観測量は面の平均・Wilson ループ・捩れた分配関数の比 |
| 3 短距離 | 結合の走り・応力・跡・演算子積展開 | 一ループの水準の部品と、紫外の一つの尺度の定理（第 15 部の後半）。全ての尺度の制御は無い |
| 4 質量ギャップ | 主張なし | 強結合の窓の中の格子でだけ、転送作用素の隙間（20-04）。渦の床（21-03）は質量ギャップの言明ではない |

本書がこれまで「示すべき言明」として並べてきたもの（19-07）のうち、紫外の側の存在に当たる部分には、公開された構成が委員会の評価の水準で答えています。一様な減衰と質量ギャップの側は、どちらの側でも開いたままです（6-04）。

06

## 読めていない所

- §01 の四つは評価書のまとめです。Jaffe–Witten の原文の各文と一つずつ照らし合わせることは、この章ではしていません（原文の読みは 0-03）。
- 要求 3 の「摂動の繰り込みの理論」に当たる Lean の言明は、見つけていません。評価書 §7.4 の第二の結合（テンソルとスカラーの相関で測るもの）の在りかも確かめていません。`YM/Pert/Position/Four.lean` の近くと推しています[推]。
- 再構成の言明（`Hierarchy.Reconstructed`）の欄は一覧として読みましたが、各欄を 4-09 の公理と一つずつ突き合わせることはしていません。委員会の独立の照合（評価書 §10）は跡のスカラーの階層についてのものです[評]。
- 多項式の評価（`light_bound`・`inverse_square`）の証明は読んでいません。出所が局所可換性であることは、証明の中の補題の名から推したものです[推]。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| [評] 要求 1（Wightman の公理を満たす理論の構成）は、部分列と相の選びを含む形で、Lean で証明されていると委員会が評価した | 無限体積の極限の一意性、分解する前の理論の真空の一意性 |

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 評 要求 2・3 は、局所場の札と商、主な項の水準の短距離の法則として在る。個々の短距離の結果は提出物の定理として述べられ、合わせたものを評価書は「ヤン–ミルズであること」の相当な証拠と書く | 摂動論との全次数の一致、局所場の完全な同定 |
| 源 表 1 の在りかに、表 1 の形の言明が在る | 証明の正しさ（読んでいない） |
| 評 要求 4（質量ギャップ）は主張されていない | — |
| 表 2 の本書の結果は、格子間隔を固定した言明 | 連続の極限・弱結合・質量ギャップの本体について、本書は何も示していない |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 四つの要求 | 評 | 評価書 §1。原典は Jaffe–Witten の問題文（評価書の文献 [JW]）。読み方は 0-03 |
| 判定と構成が与えるもの | 評 | 評価書 冒頭・§2 |
| 公開の言明の欄 | 源 | OpenAI-YM-20261028：`ChallengeSpec.lean` 12〜48・117〜181 行、`PublicWilson.lean` 35〜46 行 |
| 多項式の評価 | 源 | `YM/EveryPhase/Light.lean` 221 行、`YM/EveryPhase/Decay.lean` 173 行 |
| 部分列・真空・理解の程度・原稿 | 評 | 評価書 冒頭・§5・§9 |
| 短距離の実効の結合の三つの在りか | 源 | `YM/PertExtension/Running.lean:145`（outside）、`YM/TraceExtension/Atlas/Sink.lean:50`（used）、`YM/Pert/Asymptotics/RawAxis.lean:36`（headline）。`verification/declaration-usage.tsv` |
| 本書の結果 | — | 第 20・21 部の各章の出典の表 |

**この章で使った語** — 質量ギャップ・Wightman の公理・OS の公理・相の分解・場の札・跡の異常・演算子積展開・部分列の極限。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：6-02 言明を読む — 表 1 の「在りか」が属する公開の定理を全文で読み、構成の定理と委員会の結合の目標との違いを並べます。

# 言明を読む — 公開の定理・構成の定理・委員会の結合の目標

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§08 は本書の検討です。

**この章で分かること** — 公開の定理の全文と、その論理の形。存在の量化の中身（読者が選ぶもの・証明する側が選ぶもの・言明が課す条件）。構成の定理が公開の定理に足しているもの。委員会が自分で書いた結合の目標が足しているもの。三つの言っている範囲の違い（表 3）。検証の記録が確かめたことと、確かめていないこと。

**前提となる章** — 6-00 入口（§05 目標の区別）、6-01。Lean の読み方は A-04。

**先に言うこと** — この章で読むのは言明の形で、証明の中身ではありません。この本は検証を自分の端末で繰り返していません。検証の結果は全て評価書と記録の写しから引きます評。

この章の順序

1. 公開の定理 — 全文と論理の形
2. 存在の量化の中身 — 誰が何を選ぶか（表 1）
3. 公開の定理の四つの結論 — wilson・reconstruction・ope・nonfree
4. 構成の定理 — 罰の係数・族の証書・順序の細分と結論の束
5. 委員会の結合の目標 — 一つの族と一つの証人の上の検査（表 2）
6. 三つの言っている範囲の違い — 項目ごとの対照（表 3）
7. 検証の記録が確かめたこと・確かめていないこと — 組み直し・核・公理・Comparator（表 4）
8. 本書の検討で見えていたこと — 本書の言明の形との比べ
9. 読めていない所

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。パスは断りがなければリポジトリ `OpenAI-YM-20261028` の根からの相対です。

01

## 公開の定理

公開された問いの形の言明は `ChallengeSpec.lean` の 186〜188 行に在ります源。形が大事なので、字のまま三行を示します。

```
def JointExistence : Prop := ∀ g : GaugeGroup, g.IsSimple → ∃ C : WilsonFamily g,
  WilsonRegularity C ∧ ∀ p : ℕ → ℕ, StrictMono p → ∃ q : ℕ → ℕ, StrictMono q ∧
    ∃ T : Hierarchy C, T.Properties (p ∘ q)
```

数学の言葉に直すと次のとおりです。

行列のなす閉じた部分群 $G \subset U(m)$ で、その実 Lie 環 $\mathfrak{g}$ が単純なもの全てについて、次を満たす Wilson の族 $C$ が在る。$C$ は正則性の四条件を満たし、体積の番号の狭義増加の列 $p$ をどう与えても、その細分 $q$（狭義増加）と連続の理論の一式 $T$ が在って、$T$ は細分した列 $p \circ q$ に沿って四つの性質を持つ。

証明は `Solution.lean` の `jointExistence`（4 行）で、構成の定理を罰の係数 1 で呼び、その結論の一部を取り出すだけです源。

「単純」の定義は `PublicTheory.lean` の `IsSimple`（39 行）で、Lie 環が可換でないこと（交換子が 0 でない元の組が在る）と、0 と全体のほかにイデアルを持たないことです源。公開の定理の仮定はこれだけです源。

02

## 存在の量化の中身

公開の定理を読むときに一番大事なのは、∃ の中身を**証明する側が選ぶ**ことです。言明が課すのは、選んだものが満たすべき条件だけです。表 1 に、読者の側（∀）と証明する側（∃）を分けて並べます。

表 1　公開の定理の量化の中身（在りかは `PublicWilson.lean`・`ChallengeSpec.lean`）

| もの | 選ぶのは | 中身 | 言明が課すこと |
|---|---|---|---|
| 群 $G$ | 読者（∀） | 行列の閉じた部分群 | 仮定：Lie 環が単純 |
| Wilson の族 $C$ | 証明する側（∃） | 体積の辺 $L_p$、分母 $D_N$（間隔 $a_N = 1/D_N$）、裸の結合 $\beta_{N,p}$、群の上の測度、札の型、札ごとの格子の挿入（`WilsonFamily`、35〜46 行） | $L_p$・$D_N$ は狭義増加。測度は確率測度で Haar 測度。正則性の四条件（下） |
| 体積の列 $p$ | 読者（∀） | 狭義増加の列 | — |
| 細分 $q$ | 証明する側（∃） | 狭義増加の列 | — |
| 連続の理論の一式 $T$ | 証明する側（∃） | Hilbert 空間と Wightman の理論、次数ごとの場の空間、札から場への写像、相の空間とその上の測度、選んだ相、相関、解析接続、演算子積展開の係数、中心化した跡の欄（`Hierarchy`、24〜48 行） | 四つの性質 `Properties`（177〜181 行） |

正則性の四条件 `WilsonRegularity`（12〜22 行）は次のとおりです源 。

- **走り**：ある正の数 $s$（傾き）が在って、$\beta_{N,p}/\log(1/a_N) \to s$。収束は体積 $p$ について一様。
- **連続**：各挿入はリンクの配位について連続。
- **ゲージ不変**：各挿入は格子のゲージ変換で変わらない。
- **局所**：札ごとに有限の型紙（格子の単位での変位の有限集合）が在り、挿入はその型紙の中のリンクだけに依る。型紙は間隔・体積・位置に依らない。

表 1 から読めることを三つ書きます。

- 言明が求めるのは、正の傾き $s$ が在ることだけで、値は入っていません源 。構成が満たす値は $s = 11C_{\mathfrak{g}}/(24\pi^2)$ です（評価書 付録 A）評 。
- 札の型は抽象の型で、札が曲率のどの多項式を表すかは言明に入っていません源 。中心化した跡の欄は、次数 4 の場の空間の任意の元です（48 行）源 。跡の欄を縛るのは、§03 の四つ目の性質の条件だけです。
- 間隔の列 $a_N$ も族が選びます源 。だから「どの間隔の列でも収束する」という普遍性は、言明の外です（評価書 §4.3）評 。

03

## 公開の定理の四つの結論

`Properties` の四つの欄を、意味で読みます源 。

1. **wilson**（178 行）：格子との結びつき。点が互いに異なる配置の上の試験関数 $t$ で均した格子の相関 $C_{N,p}(v;t)$ が、収まる各体積 $p$ で $N \to \infty$ の極限を持ち、その極限が細分した体積の列に沿って $\int t\, S^{\mathrm{mix}}$ に近づく（`PublicWilson.lean` の `Converges`、85〜90 行）。刻みの極限は族の選んだ間隔の列の全体に沿います。部分列になるのは体積の極限です。
2. **reconstruction**（179 行）：Wightman の公理、場の忠実さ、相の測度が確率測度で台が全体、相関の置換対称と滑らかさ、相についての連続、相の平均が混合の相関に等しいこと、解析接続と境界値（`Hierarchy.Reconstructed`、117〜143 行）。真空の一意性を含む公理と、付帯の欄（忠実さ・解析接続・境界値）は、選んだ相の理論について言われます。全ての相での Wightman の公理は、構成の定理の側に在ります（§04）。
3. **ope**（180 行）：演算子積展開の係数と、次数で切った残りの冪の上界。残りの上界は状態に一様です（13-04）。
4. **nonfree**（181 行）：中心化した跡の欄の二点関数が、選んだ相で 6-01 の式 (2) の短距離の法則を満たし、有限個の質量殻の Wick の形のどの有限和とも 0 の近くで一致しない（168〜175 行）。この欄の一つ `amplitudePositive` は、理論 $T$ を含まない定数の不等式です。

相関は全て、点が互いに異なる所でだけ定まっています源 。点の重なる所は公開の定理の外です（6-04）。

04

## 構成の定理

構成の定理は `Construction.lean` の `constructed`（15 行）です源 。形は次のとおりです。

単純な $G$ と、正の**罰の係数** $c_{\mathrm{pen}}$（源の字句では `kernel.penalty`。一段の確率の核で、粗いリンクを予測子のまわりに引き寄せる重みの係数、9-01）ごとに、族 $C$ が在って、次を満たす。核の罰の係数は $c_{\mathrm{pen}}$ に等しい。族の証書 `C.Makes` が成り立つ。正則性の四条件が成り立つ。さらに、刻みと体積の部分列の組（順序 `Extraction.Order`）をどう与えても、その細分と、相関の表・最終の証人・全ての相の再構成の束（`EveryPhase.Almanac`）・演算子積展開の読み手・接触の装置・尺度の列が在って、十数個の結論が同時に成り立つ源 。

公開の定理に足されている主なものは次の四つです。

- **族の証書** `C.Makes`（`YM/Source/Construction.lean` 44 行）：全ての段の繰り込みの関係（`path.Selected`）、局所の切り口の健全さ、札の型紙が箱に収まること、挿入の係数が基

準の段で読むとちょうど札の係数になること（`calibrated`）源。札の曲率の多項式としての意味と繰り込みは、ここで固定されます（評価書 §9.4）評。

- **紫外の極限の強い形** `FullVolume.PositionsUV C Extraction.Sequence.full`：体積ごとに、点の重ならない所で滑らかな核が在り、刻みの列の全体に沿って、差分つきで局所一様に近づく源。公開の定理の wilson は均した値の収束だけで、この形は構成の定理の結論にだけ在ります源。
- **跡の同定**：中心化した跡の欄が、応力テンソルの跡から真空期待値を引いたものであること（`HierarchyBridge.lean` 42 行、`YM/Nonperturbative/HeadlineSpec.lean` 87〜91 行の `identified`）源。
- **全ての相**：選んだ相だけでなく、全ての相での Wightman の公理源。
- **自由な Maxwell 場との比べ**：混合の理論（相の平均）の相関が、一つの尺度の列に沿って自由な Maxwell 場の相関に近づくこと（`Pert.FirstExtension`）。源の説明文は「平均の相関だけ」と書いています（`YM/Pert/FirstTarget.lean` 4 行）源。

構成の定理の証明は、主定理の鎖 `Nonperturbative.existence`（`YM/Nonperturbative/Headlines.lean` 19 行）→ `continuum_with_position_tests` → 一つの走の選び `constructionRun`（`YM/Independent/ConstructionRun.lean` 14 行）へ下ります源。罰の係数ごとに走を一度だけ選び、以後の全ての対象をその走の上で作る、という組み方です源。鎖の続きは 6-03 で読みます。

05

## 委員会の結合の目標

評価書 §9 によれば、提出の後に OpenAI から、もとの公開の目標 `jointExistence` は証明が立てた格子の構成との結びつきの一部を落としていた、という知らせがありました評。委員会は、その結びつきを保つ目標を自分で書き、判定をその上に立てました評。それが `YMReview.Acceptance.combined_acceptance` です（リポジトリ `YM` の `submissions/openai-20261028/checks/CombinedAcceptance.lean` 111 行、言明の型は `AcceptanceSpec.lean` 172 行の `CombinedAcceptance`）源。

形は「罰の係数ごとに一つの族を先に固定し、どの順序にも一つの細分・一つの表・一つの最終の証人が在って、全ての検査の欄が**同じ**それらの上で成り立つ」です源。証明は構成の定理を呼び、その結論を委員会の欄へ写します源。表 2 に欄を並べます。

表 2　委員会の結合の目標の欄（`AcceptanceSpec.lean` 34〜170 行）

| 欄 | 中身（欄の名と型は源で読んだ。意味は右の節による） | 評価書 |
|---|---|---|

| 欄 | 中身（欄の名と型は源で読んだ。意味は右の節による） | 評価書 |
|---|---|---|
| 格子と尺度 | 族の証書と正則性。有限の格子の測度が、独立に書かれた格子ゲージ理論の Wilson の測度と一致（結合の換算 $\beta_{\mathrm{lgt}} = \beta/m$）。刻みの列の全体での順序。公開の極限。紫外の強い形。基準の間隔 $a_0 = 1$。全ての $N, p$ で段 0 の結合が同じ正の値。挿入の読み出しの正規化 | §11（A3・A5） |
| 相と OS | 相の測度は確率測度で台が全体。相の平均。選んだ相の中心化した跡の階層が、独立に書かれた OS の公理と増大の条件（E0′）を満たす。その跡が構成の跡と同じ | §10（A1） |
| 並進の Ward の恒等式 | 符号と係数を固定した形で、全ての相・全ての場について。被積分関数の可積分性と、切り取りの関数の取り方に依らないこと | §11（A6） |
| 作用素の中身 | 不変な多項式が全て札に入る。次数ごとの場の空間と自由な Maxwell の殻の空間の線形同型（各相でも）。語の稠密性と忠実さ | §3・§9.4（A2） |
| 跡の主な項 | 同じ選んだ相の場で、全ての方向からの短距離の法則 | §7.2（A4） |
| 格子の正の探り | 固定した試験関数で、二重の極限が 0 でない値を持つ | §11（A5） |
| 源の結論 | 構成の定理の結論の束を、そのまま保つ | §9.3 |

`AcceptanceSpec.lean` の説明文は、源の結論を束ねたことは各定義の独立の意味の検査ではない、と自分で書いています源。演算子積展開の言明の照合（`YMReview.OPE.constructed`）は、結合の目標とは別の終点です（評価書 §11）評。

06

## 三つの言っている範囲の違い

表 3　公開の定理・構成の定理・委員会の結合の目標（○ 言明に在る、— 無い。全て源）

| 項目 | 公開の定理 | 構成の定理 | 結合の目標 |
|---|---|---|---|
| 仮定 | Lie 環が単純 | 単純、罰の係数 $c_{\mathrm{pen}} > 0$ | 同じ |
| 格子の測度が Wilson の測度 | ○（族の測度の定義） | ○ | ○ 独立の定義とも一致 |
| 札が曲率の多項式を表す・繰り込みの係数 | —（札は抽象） | ○（族の証書） | ○ |
| 刻みの極限（均した値） | ○ 族の間隔の列の全体 | ○ | ○ |
| 刻みの極限（滑らかな核・差分つき） | — | ○ | ○ |
| 体積の極限 | 部分列 | 部分列 | 部分列 |
| 全ての間隔・体積で共通の単位（$a_0 = 1$、段 0 の結合が共通） | — | 族の証書の中 | ○ 欄として |

| 項目 | 公開の定理 | 構成の定理 | 結合の目標 |
|---|---|---|---|
| Wightman の公理 | 選んだ相 | 全ての相 | 全ての相（源の結論） |
| 独立に書かれた OS の公理との照合 | — | — | ○ 選んだ相の跡のスカラーだけ |
| 跡の欄が応力の跡 | — | ○ | ○ |
| 並進の Ward の恒等式 | — | ○（応力の法則として） | ○ 係数を固定した形 |
| 短距離で自由な Maxwell 場（混合の理論の相関、一つの尺度の列） | — | ○ | ○（源の結論） |
| 短距離の実効の結合（評価書 §7.4 の定理） | — | —（結論に無い。字句の近い補題は依存の中の途中の段） | — |
| 質量ギャップ | — | — | — |

表 3 の最後の二行が大事です。評価書の本文は定理 7.2 として短距離の実効の結合を挙げますが、Lean の在りかを名指ししていません[評]。源には近い形の宣言が三つ在ります[源]。

- `YM.PertExtension.Running.ratio`（`YM/PertExtension/Running.lean:145`）：比の形（$\mu \to \infty$、$a_m \le 1/\mu$）。依存の外（outside）[源]。
- `YM.Trace.Pilot.wilson_link`（`YM/TraceExtension/Atlas/Sink.lean:50`）：依存の中（used、最初の見出しは `continuum_with_position_tests`、直接の使い手は `crest_ready`）で、跡の解析の途中の段[源]。仮定に `PostT` が在り、結論は途中の証書に入ったあと、三つの目標の結論からは落ちます[源]。定理 7.2 の言明（$\log(1/r)\, g_W(r)^2 \to 1/(2b_0)$）に字句が近いのはこちらです[推]。
- `YM.Pert.Asymptotics.comparison`（`YM/Pert/Asymptotics/RawAxis.lean:36`）：見出しの定理そのもの（headline）で、切断つきの段 $i$ の結合 $\beta(N_i, k_i, i)^{-1/2}$ の走り。$g_W$ とは別の量です[源]。

第二巻では、短距離の実効の結合を「近い形の宣言は在るが、公開の定理・構成の定理・委員会の結合の目標のどの結論にも残らない」として引きます（10-06・13-03）。

07

## 検証の記録が確かめたこと・確かめていないこと

評価書 §9 は、形式的な検証（証明が定義と許された公理から言明を導くこと）と、妥当性（形式的な言明が意図した問題を正しく表していること）を分けています[評]。表 4 は、検査ごとに確かめたことと確かめていないことを並べたものです。

表 4　検証の記録（全て 評 。記録の写しの行は 源 で確かめた）

| 検査 | 確かめたこと | 確かめていないこと |
|---|---|---|
| 組み直し（§9.1） | Lean 4.32.0 で、既存の成果物なしに 9,470 のモジュールを組み直し、誤り 0（約 184 分）。9,477 本の源が提出の目録と一致 | 警告 2,453 件は残る（多くは未使用の変数など） |
| 目録（§9.1） | 読み込まれる 250,319 の宣言に、独自の公理・`sorryAx` への直接の参照・`unsafe` の印が無い | — |
| 核での再検査（§9.1） | 提出側の検証器 `VerifyJoint.lean` によるもので、Comparator とは別。17 の見出しの定理が依存する 100,168 の宣言を、外部のライブラリだけで初期化した新しい核の環境で再検査。境の外部の宣言 14,364。公理は `propext`・`Classical.choice`・`Quot.sound` だけ | 17 の見出しから届かない宣言（目録の残り約 15 万）は再検査の対象外 |
| Comparator（§9.2） | 固定した参照の言明と定義に照らして、言明と定義の一致・公理・核の再検査。公開の定理（10-30）、結合の目標（11-03）、演算子積展開の照合（11-05）が通過。四つの対照（正しい証明は通り、言明・定義を変えたものと禁じた公理は拒まれる） | macOS での実行で、悪意のあるかもしれないビルドのコードを隔離する検査はしていない。別の実装の核は使っていない |
| 人の読み（§9.3） | 付録の用語集の定義を、問題文と予想に照らして読んだ | 網羅的ではない、と評価書が書く |
| 独立の公理との照合（§10・§11） | 選んだ相の跡の階層が、先に独立に書かれた OS の公理を満たす。有限の Wilson の測度が独立の定義と一致。Ward の恒等式・共通の単位・跡の法則 | 解析の評価そのものは提出の証明に依る。照合は跡のスカラーの階層についてで、全ての場ではない。対角で平らな試験関数では接触項が見えない |

記録の写し `verification/joint-check.log` には、公開の定理の型の一致（`TYPE_MATCH YangMills.jointExistence`）と、再検査の数（project 100,168・external 14,364・終点 17）が残っています 源 。評価書は、宣言の総数に比べて主定理の依存に入る数が少ないことを、コードの質への懸念として書いています 評 。

確かめていないことの中で、この本の読みに効くのは二つです。一つは、核が受け入れたことは定義が意図を表していることを決めない、という点です（§9.3） 評 。もう一つは、委員会の OS の照合が跡のスカラーの階層に限られる点です（§10.1） 評 。

08

## 本書の検討で見えていたこと

本書の Lean は、二種類の言明でできています（19-00）。格子の上に定義した具体の対象についての定理と、仮定を欄に置いた含意（鎖の定理）です。公開された構成で一番近い形は次の三つです 推 。

- 評価を仮定に置いて極限を結論する含意（`YM/FullVolume/Profiles.lean` の `positioned`、42 行）源。
- 族の証書・順序・点の極限・表の公理の束を一つにまとめた証書（`YM/Spec/Closed.lean` の `Seed`、20 行）源。これを「条件つきで性質を極限の表へ移す組み立て」と読むのは本書の推し量りです推。
- 依頼の命題を型として外に置き、別の場所の証明で閉じて上の定理へ渡す組み方推。

違いは終点です。公開された構成は全ての仮定を最後に閉じ、仮定が「単純」だけの言明に着いています評。本書の鎖の定理は、段を跨ぐ一様な評価などを前提に置いたまま止まっています（28-04）。もう一つの違いは、族を存在の量化の中で選ぶことです。本書の鎖は裸の結合の列を外から与える形で、合わせで決める形ではありませんでした（14-03）。

09

## 読めていない所

- 構成の定理の十数個の結論のうち、`Independent.Core`・`Pert.Position.FourMeters`・接触の装置の欄の中身は読んでいません。
- `HierarchyBridge.lean` の橋（公開の型への写し）は、跡の欄の行を除いて読んでいません。
- 委員会の検査のファイル（`CompleteOS.lean`・`CompletenessAudit.lean`・`LGTWilsonBridge.lean` など）の証明は読んでいません。言明の型（`AcceptanceSpec.lean`）だけを読みました。
- 記録の写しのハッシュ値を、自分で計算して照らしてはいません。
- 17 の見出しの定理のうち、公開の定理・構成の定理の系統でないもの（例：`YM.SharpGram.habitat`）が何を言うかは読んでいません。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
| --- | --- |
| 源 公開の定理の仮定は「Lie 環が単純」だけで、族・細分・理論の一式は存在の量化の中身 | 証明が正しいこと（評価の水準） |
| 源 公開の定理では、刻みの極限は族の間隔の列の全体に沿う均した値の収束、体積は部分列 | 間隔の列の取り方への普遍性、体積の極限の一意性 |

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 札の意味・跡の同定・紫外の強い形は構成の定理の側に在る | 公開の定理だけからそれらを読むこと |
| 評 判定は委員会の結合の目標の上に立てられている | 結合の目標の検査が全ての定義の独立の意味の検査であること |
| 源 短距離の実効の結合に近い形の宣言は三つ在り、どれも三つの目標の結論に残らない | 評価書の定理 7.2 の在りかがどれか（評価書に名が無い） |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 公開の定理 | 源 | OpenAI-YM-20261028：`ChallengeSpec.lean` 12〜48・117〜188 行、`PublicWilson.lean` 35〜90 行、`PublicTheory.lean` 39 行、`Solution.lean` 4 行 |
| 構成の定理 | 源 | `Construction.lean` 15〜40 行、`YM/Source/Construction.lean` 44〜65 行、`HierarchyBridge.lean` 27〜42 行、`YM/Nonperturbative/HeadlineSpec.lean` 84〜91 行、`YM/Nonperturbative/Headlines.lean` 19〜22 行、`YM/Independent/ConstructionRun.lean` 14 行 |
| 結合の目標 | 源 | yang-mills-group/YM（版 55ba9fc）：`submissions/openai-20261028/checks/AcceptanceSpec.lean` 34〜176 行、`CombinedAcceptance.lean` 111〜121 行 |
| 結合の目標を書いた理由 | 評 | 評価書 §9（冒頭）・§9.3・§9.4 |
| 検証の記録 | 評 | 評価書 §9.1・§9.2・§10・§11・§12.2。記録の写し `verification/joint-check.log`・`build.log` |
| 依存の内と外 | 源 | `verification/declaration-usage.tsv`、`verification/Usage.lean`、`verification/joint-headlines.txt` |
| 短距離の実効の結合 | 源 | `YM/PertExtension/Running.lean:145`（outside）、`YM/TraceExtension/Atlas/Sink.lean:50`（used）、`YM/Pert/Asymptotics/RawAxis.lean:36`（headline）。評価書 §7.4 |
| 平均の相関だけ | 源 | `YM/Pert/FirstTarget.lean` 1〜5 行。評価書 §7.4 |

**この章で使った語** — 存在の量化・Wilson の族・正則性の四条件・札・罰の係数・族の証書・順序と細分・結合の目標・Comparator・核での再検査。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：6-03 証明の骨組み — 構成の定理の鎖を下りて、暦から証拠までの十の段を一枚の図と表で見ます。

# 証明の骨組み（一枚の図）

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は案内、§07 は本書の検討です。

**この章で分かること** — 公開された構成が、格子の Wilson の測度から Wightman の理論と「ヤン–ミルズである証拠」まで、どの順に何を組んでいるか。十の段のそれぞれで、何を定め何を示すか（式つき）。段と段を結ぶ接口。各段の主な宣言の在りかと、第二巻で扱う章。コードの約 99 万行が段にどう配分されているか。

**前提となる章** — 6-02 言明を読む（構成の定理と、一つの走の選び）。繰り込みの段の考え方は 7-05 繰り込み群の段の列、鏡映正値性と転送行列は 5-03。

**先に言うこと** — この章は総覧です。各段の言明は形を読んだもので、証明の中身は各部の章で、読めた範囲だけを扱います。段の分け方は読みやすさのための本書の整理で、コードの置き場の分け方とは一致しません。行の数の配分は置き場の単位の粗い勘定です推。

この章の順序

1. 一枚の図 — 十の段と、一つの走（図 1）
2. 段 1〜5：格子の上の繰り込み — 暦・一段・表示と帰納・射撃・較正
3. 段 6〜10：極限と再構成 — 紫外の極限・無限体積・Euclid 不変と相・再構成・証拠
4. 段と段を結ぶもの — 押し出しの等式・連続な曲線・根の半ノルム・終点
5. コードの大きさと層の配分 — 置き場の単位の勘定（表 2）
6. 第二巻の章の案内 — 段ごとの章（表 1 の右の列）
7. 本書の検討で見えていたこと — 本書の段取りとの比べ
8. 読めていない所

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。パスは断りがなければリポジトリ `OpenAI-YM-20261028` の根からの相対です。

01

## 一枚の図

構成の定理は、罰の係数 $c_{\mathrm{pen}} > 0$ ごとに、条件を満たす「走」を一度だけ選びます（`YM/Independent/ConstructionRun.lean` の `constructionRun`、14 行）源 。以後の対象は全て、この一つの走の上で作られます。別々に存在を示した対象を後から組み合わせると両立しないかもしれないので、存在の証明を一本にまとめる、という設計です推 。図 1 は、その走の上の十の段です。

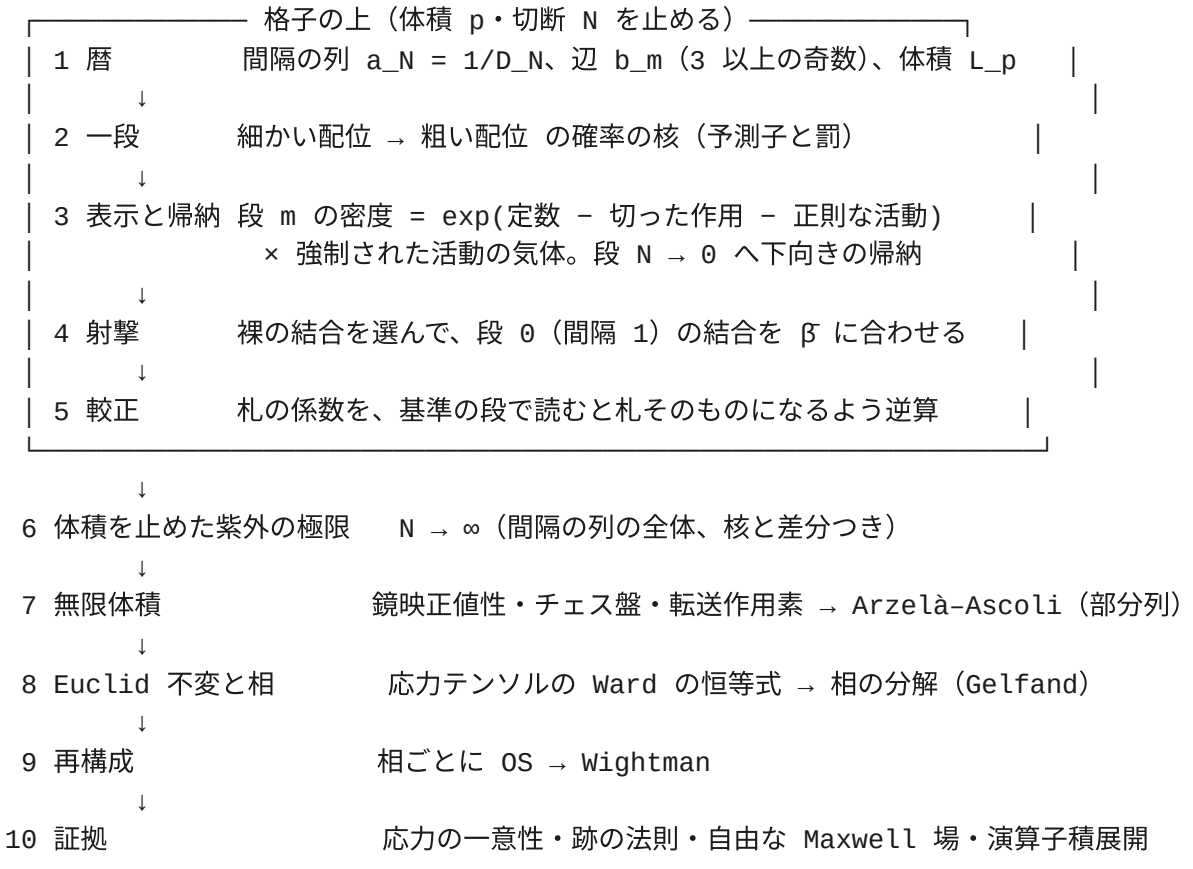



図 1　証明の骨組み。段 1〜5 は格子の上の繰り込みで、体積と切断を止めたまま全ての段を組みます。段 6 で切断を外し、段 7 で体積を外します。

表 1 に、段ごとの中身・主な宣言・扱う章をまとめます。中身の札は、その行の言明の形を源で読んだことを表します。

表 1　十の段（中身は全て 源 。証明の正しさは評価の水準）

| 段 | 何を定め、何を示すか | 主な宣言（在りか） | 章 |
|---|---|---|---|
| 1 暦 | 辺 $b_m$（3 以上の奇数）、体積の辺 $L_p$（4 の倍数、狭義増加）、$D_N = \prod_{k<N} b_k$。段ごとの定数と基準の結合 $\bar{\beta}$ | `Schedule`（`YM/Lattice/Scale.lean` 28 行）、`Calendar`（`YM/RG/History.lean` 64 行） | 8-02・10-05・11-08 |
| 2 一段 | 細かい配位から粗い配位への確率の核 | `StepData.density`・`push`（`YM/RG/Block.lean` 71・77 行） | 9-01〜9-05 |
| 3 表示と帰納 | 段ごとの密度の表示、帰納の仮定、一段の関係、一段の定理 | `Rep`・`History.Conv`・`Transfer`・`Selected`（`YM/RG/History.lean` 165・213・223・234 行）、`Directed.Program`（`YM/PCalc/Band.lean` 65 行） | 9-06・9-07・11-00〜11-09 |
| 4 射撃 | 段 0 の結合を $\bar{\beta}$ に合わせる裸の結合の選び | `Arc.bought`（`YM/FullVolume/Arc.lean` 95 行）、主定理の道では `rodB`（`YM/FullVolume/Stage/Rods.lean` 26 行） | 10-04 |
| 5 較正 | 挿入の係数を、繰り込みの輸送の逆で決める | `Family.Makes` の `calibrated`（`YM/Source/Construction.lean` 44〜65 行） | 8-04・11-10 |
| 6 紫外の極限 | 体積ごとに、刻みの列の全体に沿う、核と差分つきの収束 | `Campaign.realUV`（`YM/FullVolume/Fields/Filled.lean` 45 行）、`positioned`（`YM/FullVolume/Profiles.lean` 42 行） | 11-10 |
| 7 無限体積 | 鏡映正値性、チェス盤の不等式、紫外からの入力、同程度連続性、部分列の極限 | `reflected_positive`（`YM/Slice/Reflection.lean` 98 行）、`tiles`・`adds`（`YM/Cells/Chess.lean` 80・108 行）、`Wcmain`（`YM/Extraction/Center.lean` 38 行）、`first_surface`（`YM/Extraction/Lipschitz.lean` 166 行） | 12-01〜12-05 |
| 8 Euclid 不変と相 | 応力テンソルと Ward の恒等式、回転の流束の消滅、相の分解 | `YM/Euclid/Stress.lean`、`OS.Selection`（`YM/Phase/Mixture.lean` 127 行） | 12-06・12-07 |
| 9 再構成 | 各相で OS の再構成と Wightman の公理 | `Hierarchy.Reconstructed`（`ChallengeSpec.lean` 117 行）、`EveryPhase.every`（`YM/EveryPhase/Vacuum.lean` 146 行） | 12-08 |
| 10 証拠 | 応力の一意性、跡の短距離の法則、自由な Maxwell 場との比べ、演算子積展開 | `YM.Pert.one_line`（`YM/Pert/Weak.lean` 68 行）、`ChallengeSpec.lean` 168〜175 行、`YM/Pert/FirstTarget.lean` | 13-01〜13-04 |

02

## 段 1〜5：格子の上の繰り込み

### 段 1　暦

格子間隔は $a_N = 1/D_N$、$D_N = \prod_{k<N} b_k$ です源。辺 $b_m$ は 3 以上の奇数で、段とともに育ちます。ただし $\log b_m / \log D_m \to 0$（`Schedule.Gentle`）源。体積は物理の単位で辺 $L_p$ のトーラスで、格子の上では一辺 $L_p D_N$ 点です源。段 0 の間隔が 1 で、これが長さの共通の単位になります評。

暦は段ごとの基準の値を定めます源。$C_{\mathfrak{g}}$ を随伴表現の Casimir の定数として、

$$\hat\beta_m = \bar\beta + \frac{11 C_{\mathfrak{g}}}{24\pi^2}\log\frac{1}{a_m}, \qquad \hat g_m = \hat\beta_m^{-1/2}, \qquad \mathrm{monitor}_m = \exp\!\big((\log\log\hat\beta_m)^2\big). \tag{1}$$

小さい場の閾は $\hat g_m \cdot \mathrm{monitor}_m$、正則な活動の許容は $\hat g_m^{11/5}$、強制された活動の許容は $\exp(-\mathrm{monitor}_m^{1/5})$ です（`YM/RG/History.lean` 80〜87 行）源。(1) の傾きは一ループの漸近自由の係数です（4-06）。

### 段 2　一段

一段は、細かい配位 $U$ から粗い配位 $V$ への**確率の核**です源。決定的な写像ではありません。核は次の形です（`YM/RG/Block.lean` 53〜72 行）源。

$$K_\beta(U,V) = \sum_{t} \ell(U,t) \prod_{b} \frac{e^{-\beta\, c_{\mathrm{pen}}\, \mathrm{price}(V_b\, Q_b(U,t)^{-1})}}{Z_\beta}. \tag{2}$$

和は選び $t$（粗い格子点ごとのゲージの枠と、粗いリンクごとの予測子の札）についてで、$\ell(U,t)$ はその選びの確率です。$Q(U,t)$ は粗いリンクの**予測子**、$c_{\mathrm{pen}}$ は罰の係数（源の字句では `kernel.penalty`）、$\mathrm{price}(u) = 1 - \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,u/m$ は Wilson の作用と同じ形の、単位元からの離れ方（`YM/Gauge/MatrixGroup.lean` 112 行）、$Z_\beta$ は正規化です。粗いリンクは予測子のまわりにガウス型に散らばります推。押し出しは $\mathrm{push}_\beta F(V) = \int K_\beta(U,V) F(U)\, dU$ です（77 行）源。選びを確率で平均することで、格子の対称性を保つゲージ固定になります（評価書 §6.3）評。

### 段 3　表示と帰納

切断 $N$・体積 $p$ の理論を段 $m \le N$ まで押し出した密度を、次の形で持ちます（`YM/RG/History.lean` 165〜179 行）源。

$$\mathrm{eval}_m(U) = \exp\!\Big(v\,|\Lambda_m| - A_m(U) - \sum_X E_X(U)\Big) \cdot \mathrm{Gas}_m(U). \tag{3}$$

$A_m$ は道の作用（閾で切った作用）、$E_X$ は正則な活動、$\mathrm{Gas}_m$ は閾を超えた面の印をちょうど覆う**強制された活動**の気体です[推]。**帰納の仮定**（`History.Conv`、213 行）は、各段でこの表示が暦の許容に収まり、結合が $[\hat\beta_m/2,\,2\hat\beta_m]$ に在ることです[源]。**一段の関係**（`Transfer`、223 行）は次の二つです[源]。

$$\mathrm{eval}_m = \mathrm{push}_{\beta_{m+1}}\,\mathrm{eval}_{m+1}, \qquad \left|\beta_{m+1}-\beta_m-\frac{11C_{\mathfrak g}}{24\pi^2}\log b_m\right| \le \mathrm{drift}_{m+1}. \tag{4}$$

一つ目は近似ではない等式です[源]。だから分配関数は全ての段で保たれます（`History.partition_eq`、242 行）[源]。全段の言明 `History.Selected`（234 行）は、段 $N$ が裸の Wilson の測度であること、全ての段で帰納の仮定と一段の関係、段 0 で結合が $\bar\beta$ に等しいこと、結合の走りをまとめたものです[源]。一段の定理は「結合の区間の上で連続な表示の曲線」の形で書かれます（`YM/PCalc/Band.lean` 65 行）[源]。その証明は第 11 部の主題で、本書が読めたのは一部です。

### 段 4　射撃

段 $N$ から 0 へ下向きに帰納すると、裸の結合の区間の上に表示の弧ができます[源]。帯の両端は

$$\mathrm{low}_m = \tfrac{3}{4}\bar\beta + \tfrac{5}{8}\,s\log D_m, \qquad \mathrm{high}_m = \tfrac{5}{4}\bar\beta + \tfrac{3}{2}\,s\log D_m, \qquad s=\frac{11C_{\mathfrak g}}{24\pi^2} \tag{5}$$

です（`YM/FullVolume/Arc.lean` 21〜22 行）[源]。段 0 で弧の結合は $\frac{3}{4}\bar\beta$ と $\frac{5}{4}\bar\beta$ を両端に持つので、中間値の定理で段 0 の結合がちょうど $\bar\beta$ になる裸の結合が選べます[源]。こうして全ての $N,p$ で、間隔 1 の結合が同じ値に揃います（評価書 §11）[評]。一段の定理を結合について連続な形で運ぶのは、この中間値の定理を使うためです[推]。

### 段 5　較正

次数 $d$ の札ごとに、切断に依らない基準の段 $r(d)$ を決めます[源]。繰り込みの輸送は、局所の多項式の係数の空間の上の可逆な線形写像を引き起こします[評]。切断 $N$ での挿入の係数は、その逆で「段 $r(d)$ まで運ぶとちょうど札の係数になる」ように決めます（`YM/Source/Construction.lean` 62 行の `calibrated`、65 行の `normalized`）[源]。逆の行列の成分の陽な式はありません（評価書 付録 A）[評]。

```
03
```

## 段 6〜10：極限と再構成

### 段 6　体積を止めた紫外の極限

体積ごとに、刻みの列の全体に沿う、核と差分つきの収束です（`YM/FullVolume/Fields/Filled.lean` 45 行の `realUV`）源。形は含意 `positioned`（`YM/FullVolume/Profiles.lean` 42 行）で、分離した配置での一様な有界性と、一般の位置での点ごとの Cauchy 性から、差分つきの局所一様な収束を出します源。Cauchy 性は、固定した粗い段 $j$ の対象の切断についての収束と、$j \to \infty$ で段 $j$ を外す評価を合わせて出します推。後者が点の離れていることを使うので、試験関数は点の重なりを避けます推。収束の源は、量で比べる評価ではなく、コンパクト性と極限の一意性と部分列の原理です推（11-10）。

### 段 7　無限体積

鏡映正値性は、元の格子の Wilson の測度について、格子点を通る面と辺の中点を通る面の両方、四つの軸の全てで言われます（$\beta \geq 0$）源。そこからチェス盤の不等式と、その根の三角不等式（根が半ノルムであること）が出ます源。紫外からの主な入力 `Wcmain` は、チェス盤の根で測った繰り込んだ観測量の大きさが、全ての体積で一様に次で抑えられることです源。

$$\mathrm{root}(O_d) \leq A\, a_m^{-d-\varepsilon} \qquad (m \geq r(d),\ N \text{ 十分大, 全ての } p). \tag{6}$$

これと転送作用素の表示から、局所の有界性と同程度連続性が出て、Arzelà–Ascoli で体積の部分列の極限が取れます（`YM/Extraction/Lipschitz.lean` 166 行）源。紫外からの入力は `Wcmain` だけではありません。同じ軌道から他の欄も渡されています源。`first_surface` の仮定（`TransferLip`・`Bound`）は上界と連続性の率で、極限の一意性の材料は入っていません源。

### 段 8　Euclid 不変と相

格子は有限の対称しか持たないので、連続の Euclid 不変は別に示します。評価書 §6.3 は三つの部分を挙げます評。ゲージ固定が格子の対称を保つこと、発散の無い応力テンソルと局所の Ward の恒等式、そして応力の流束が無限遠で十分速く消えて不変性が自発的に破れないこと。そのあとで、零エネルギーの空間に圧縮した作用素の可換な環を Gelfand 表現し、相の空間 $X$ と確率測度 $\mu$（源の `phaseMeasure`。評価書の式 (12) では $\nu$）を得ます源。

$$S^{\mathrm{mix}} = \int_X S^{\xi}\, d\mu(\xi). \tag{7}$$

環が可換であることの証明に回転の不変を仮定として使うので、順は「Euclid 不変 → 相の分解」です[源]。

### 段 9　再構成

各相 $S^{\xi}$ は群がりを含む OS の公理の変種を満たし、そこから Wightman の理論が再構成されます[評]。各相で零エネルギーの空間は一次元です（真空の一意性、速さなし）[源]。選んだ相 $\xi_{*}$ が公開の定理の Wightman の理論です（12-08）。

### 段 10　証拠

応力テンソルは、保存する対称テンソルの一次元の空間の上に在ります[源]。中心化した跡の二点関数は $r^{8}\log^{2}(1/r)$ を掛けて $3\dim\mathfrak{g}/\pi^{4}$ に近づきます[源]。一つの尺度の列に沿って、混合の理論（相の平均）の応力の相関は自由な Maxwell 場の相関に近づきます[評]。演算子積展開の係数は状態に依らず、残りは状態に一様に抑えられます[源]。中身は第 13 部です。

04

## 段と段を結ぶもの

骨組みを支えている接口を四つ挙げます。

- **押し出しの等式**（段 3）：(4) の一つ目が等式なので、段 0 の表示は元の Wilson の測度をそのまま押し出したものです[源]。近似の誤差は、表示の中の活動として運ばれます[推]。
- **結合について連続な曲線**（段 3 → 段 4）：一段の定理が結合のパラメータについて連続な形をしているので、全段の後で中間値の定理が使えます[推]。
- **根の半ノルム**（段 6 → 段 7）：体積に一様な評価は、元の格子の鏡映正値性から作るチェス盤の根の言葉で受け渡されます[源]。繰り込みの側でも、一段の帳簿は点ごとの和で、体積に依りません[推]。体積の指数を含むのは、密度や分配関数の水準の評価です[推]。
- **終点が局所場の相関であること**（段 5・段 6）：粗い格子の測度ではなく局所場の点の離れた相関を終点にするので、観測量の較正（段 5）と、粗い段 $j$ を外す一段（段 6）が要ります[推]。

05

## コードの大きさと層の配分

源は 9,477 本のファイル、約 99 万行です[源]。宣言は自動で作られたものを含めて 250,319 で、そのうち 17 の見出しの定理の依存に入るのは 100,168 です[評]。置き場（ディレクトリ）

を表 1 の段に粗く割り当てて数えると、表 2 になります。

表 2　置き場の単位で割った層ごとの行の数（置き場の中身は混ざっているので割合は目安[推]。数は置き場の地図の勘定）

| 層 | 段 | 置き場 | ファイル | 行 | 割合 |
|---|---|---|---|---|---|
| 公開の言明と組み立て | — | 10 | 97 | 10,071 | 1.0% |
| 土台（群・格子・測度） | 1 | 20 | 133 | 16,449 | 1.6% |
| 一段の定義 | 2 | 15 | 88 | 12,028 | 1.2% |
| 多段の帰納と評価 | 3・4 | 22 | 6,223 | 696,999 | 69.9% |
| 体積を止めた紫外 | 5・6 | 3 | 1,184 | 97,171 | 9.7% |
| 無限体積 | 7 | 4 | 39 | 4,607 | 0.5% |
| 再構成 | 8・9 | 12 | 249 | 40,167 | 4.0% |
| 局所場・演算子積展開・跡 | 10 | 14 | 1,253 | 100,546 | 10.1% |
| 摂動との比べ | 10 | 2 | 148 | 12,726 | 1.3% |
| 使われていない置き場 | — | 2 | 63 | 6,299 | 0.6% |

表 2 の行の数は、ファイルごとの末尾の行を一つ多く数えた勘定です（合計 997,063。行の終わりの数で数えると 987,586）[源]。読み取れることは三つです[推]。

- 証明の重さの約 7 割は、多段の帰納と評価（段 3・4）に在ります。第 11 部がこれに当たります。
- 定義の層は浅く短いです。帰納の表示を定める `YM/RG/History.lean` は約 250 行（251 行）です[源]。
- 無限体積の置き場は小さく浅いです。重い入力は紫外の側の一様な評価から来ます。

06

## 第二巻の章の案内

表 1 の右の列を、部ごとに読む順でまとめます。

- **第 8 部 格子から連続へ** — **対象**：段 1 の間隔と体積の列、札と繰り込んだ挿入（段 5 の定義の側）、極限の順。8-01 から。
- **第 9 部 繰り込みの一段**：段 2 の確率の核と、段 3 の表示の形。9-01 から。
- **第 10 部 結合の合わせと漸近自由**：段 1 の暦の理由、段 3 の結合の一段、段 4 の射撃。10-01 から。

- **第 11 部 多段の評価と大きい場**：段 3 の帰納の中身と、段 6 の固定した段の収束。11-00 から。
- **第 12 部 無限体積と再構成**：段 7〜9。12-01 から。
- **第 13 部 ヤン–ミルズである証拠**：段 10。13-01 から。
- **第 14 部 比べ**：段ごとに、本書の Lean との比べ。14-01 から。

第 7 部（構成的場の理論）は、この骨組みの歴史の背景です。段 2〜4 は Bałaban の方針に沿い、多くの改良を加えたもの、と評価書 §4.3 は書いています[評]。

07

## 本書の検討で見えていたこと

本書の検討は、証明が含むべき段を七つに分けていました（16-09）。「体積を止めた紫外の極限 → コンパクト性で無限体積」という段取りは、公開された構成と同じ向きです。段ごとの違いは次のとおりです（詳しくは 14-01）。

- **段 1・4**：本書は裸の結合の列を外から与えていました。合わせで決める錨（段 0 の結合を固定すること）はありませんでした。奇数の辺で中心に置いたブロックは、本書の検討でも試していた向きです（辺 3 の設計、14-02）。辺を段とともに育てることはしていません。
- **段 2**：本書のブロック写像は決定的な写像で、押し出しの測度はその像です（19-04）。確率の核ではありません。
- **段 3**：本書の紫外の Lean は一つの尺度（一段）の定理までで（第 15 部の後半）、段を跨ぐ一様な評価は前提に置いたままです（28-04）。
- **段 6**：本書の鎖は部分列の極限の形でした。公開された構成は、刻みについて列の全体の収束を持ちます。
- **段 7**：鏡映正値性とチェス盤の評価は本書にも在ります（20-01、22-01）。本書は格子点を通る面と真ん中の面の鏡映正値性を持ちます。根の三角不等式（根が半ノルムであること）は、本書の固い定理の目録に載っていません。
- **段 8〜10**：本書の Lean には、連続の極限での相の分解・再構成・応力テンソルは在りません。在るのは、強結合の窓の中の格子での再構成と質量ギャップです（20-04）。

08

## 読めていない所

- 一段の定理の証明の芯（在りかは `YM/PhysicalNext/RG_NEXT_COMPLETE_REPEATABLE_NONLINEAR_STEP/Mallow/Pediment.lean` 41 行の `Mallow.faces`）。言明だけを読みました。
- 一段のあとに活動を次の段の許容に収め直す構成と、Haar の測度の損失の補題。
- 走の選びの条件（`Funded` の各欄）の数学の意味。数値の条件と推しています[推]。
- 転送作用素の評価の本体（`YM/Slice/Calendar.lean` の `Time.powering` の中）、相の環の可換性の証明で回転を使う筋、全ての相への真空の一意性の広げ方。
- 大きい場の補題の多くは、依存の表を辿ると見出しが別の定理になります。主定理の道に載るかどうかは、鎖で確かめたもの（射撃の `rodB` から一段の帰納へ、`realUV` から走の総合へ、など）以外は確かめていません。
- 表 2 の層への割り当ては置き場の単位で、置き場の中の配分は測っていません。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| [源] 表 1 の宣言が、その在りかにその形で在る。(1)〜(7) は源の定義と言明の読み | 証明の正しさ（評価の水準）。一段の定理の証明の芯 |
| [源] 一段の関係の一つ目は等式で、分配関数は全ての段で保たれる | 等式であることから、本書の前提が外れること |
| [源] 射撃は Arc の帯 (5) と中間値の定理で段 0 の結合を $\bar{\beta}$ に合わせる | 暦の条件を満たす定数の陽な値 |
| [推] コードの約 7 割が多段の帰納と評価 | 置き場の中の正確な配分 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 段 1〜4 | 源 | OpenAI-YM-20261028：`YM/Lattice/Scale.lean` 28〜44・128〜129 行、`YM/RG/History.lean` 64〜87・165〜250 行、`YM/RG/Block.lean` 53〜77 行、`YM/PCalc/Band.lean` 65 行、`YM/FullVolume/Arc.lean` 21〜22・95 行、`YM/FullVolume/Stage/Rods.lean` 26 行 |
| 段 5・6 | 源 | `YM/Source/Construction.lean` 44〜65 行、`YM/FullVolume/Profiles.lean` 25・42 行、`YM/FullVolume/Fields/Filled.lean` 45 行 |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 段 7〜9 | 源 | `YM/Slice/Reflection.lean` 98 行、`YM/Cells/Chess.lean` 80・108 行、`YM/Extraction/Center.lean` 38〜41 行、`YM/Extraction/Lipschitz.lean` 166 行、`YM/Phase/Mixture.lean` 127 行、`YM/EveryPhase/Vacuum.lean` 146 行、`ChallengeSpec.lean` 117 行 |
| 段 8 の三つの部分、段 2〜4 と Bałaban の方針 | 評 | 評価書 §4.3・§6.3 |
| 共通の単位、較正、宣言の数 | 評 | 評価書 §9.1・§11、付録 A |
| 行の数 | 源 | この端末で `.lean` の行を数えた（9,477 本・987,586 行）。層の配分は置き場の地図の勘定 |

**この章で使った語** — 暦・確率の核・予測子・罰の係数・帰納の仮定・一段の関係・切った作用・正則な活動・強制された活動・射撃・較正・根の半ノルム・相の分解。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：6-04 示されていないこと — この骨組みが届いていない所を、評価書の五つの開いた問いと、源の「言っていないこと」から並べます。

# 示されていないこと — 第三巻への橋

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§08 は本書の検討、§01〜§07 の「示されていない」側は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 公開された構成が届いていない九つの項目。それぞれについて、評価書が何と書き、源のどこまでが在り、どこから先が無いか。質量ギャップの代わりに在る多項式の評価が何を言い何を言わないか。本書の第三巻の結果が、どの項目の反対の端（強結合・格子間隔は固定）に在るか。

**前提となる章** — 6-01（四つの要求）、6-02（三つの目標）、6-03（骨組み）。

**先に言うこと** — 「示されていない」は「偽である」ではありません。委員会は、一意性が示されていないことは一意だという一般の予想と矛盾しない、と書いています評。「源に無い」と書くものの多くは、検索の範囲での判断です。本書の第三巻の結果は全て格子間隔を固定した言明で、ここに並ぶ項目のどれも、本書は示していません。

この章の順序

1. 一覧 — 九つの項目と在りか（表 1）
2. 収束と一意性 — 体積の部分列と、部分列に依るかもしれない量
3. 連続の理論の確率測度 — 相関の表と OS の空間だけ
4. 一様な質量ギャップ — 在るのは多項式の評価
5. Wilson ループと面積則、一粒子の状態 — 局所の札の外
6. 間隔の列・点の重なり・摂動論 — 普遍性、接触項、全次数の一致
7. フェルミオン — 純粋なヤン–ミルズの構成
8. 第三巻への橋 — 本書の結果が項目ごとにどこに在るか（表 2）
9. 読めていない所

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。パスは断りがなければリポジトリ `OpenAI-YM-20261028` の根からの相対です。

01

## 一覧

評価書 §8 は、今の構成が扱っていない主な点を、五つの開いた問いとして挙げています評。

1. 部分列でなく収束を示し、無限体積の極限が一意であることを示す。
2. 連続の理論の確率測度を適切な空間の上に定め、それが構成の Schwinger 関数を与えるようにする。
3. 一様な質量ギャップを示す。対応する相関の指数的な減衰と、OS のハミルトニアンのスペクトルの隙間を含む。
4. Wilson ループの観測量を作り、構成の局所の観測量と関係づける。Wilson ループの面積則を示す。
5. 一粒子の状態を作り、そのエネルギー運動量のスペクトルを調べる。二・三次元の多くの構成的な模型では、この解析がなされている。

表 1 は、この五つに、評価書の本文と源の「言っていないこと」から四つを足したものです。

表 1　示されていない九つの項目（右の列は第三巻の関わる章）

| 項目 | 評価書 | 源に在るもの | 源に無いもの | 第三巻 |
|---|---|---|---|---|
| 収束と一意性 | §8 の 1、§5・§6.2 | 体積の部分列の極限、同じ部分列の上での極限の一意性 | 体積についての収束、部分列に依らないこと | 16-03・20-03 |
| 確率測度 | §8 の 2、§3 | 相関の表と OS の空間 | 連続の測度 | 16-02 |
| 一様な質量ギャップ | §8 の 3、§2 | 各相で一様な多項式の評価 | 指数の減衰、スペクトルの隙間 | 20-04・16-04 |
| Wilson ループと面積則 | §8 の 4 | 格子の道に沿う平行移動 | 連続のループの観測量、面積則 | 20-06・21-03 |
| 一粒子の状態 | §8 の 5 | — | 一粒子の状態、質量殻 | 16-02 |
| 間隔の列への普遍性 | §4.3・§9.4 | 族が選んだ一つの間隔の列の全体での収束 | 他の間隔の列での収束 | — |

| 項目 | 評価書 | 源に在るもの | 源に無いもの | 第三巻 |
|---|---|---|---|---|
| 点の重なる所 | §7.5・§10 | 点の離れた相関、接触項の延長の存在 | 延長の一意性・OS の正値性・格子からの収束 | — |
| 摂動論との全次数の一致 | §7.4・§7.5 | 結合の一ループの走り、跡の主な項の係数 | 全ての次数での一致 | — |
| フェルミオン | （扱っていない） | — | 物質の場 | 20-05 |

02

## 収束と一意性

体積の極限は、Arzelà–Ascoli のコンパクト性による部分列でだけ取られています（評価書 §5）[評]。一つの部分列が全ての相関に同時に効くことは示されています[評]。極限の相関が選んだ部分列に依るかどうかは未解決です[評]。

源の側で言うと、体積の極限を取る定理 `first_surface`（`YM/Extraction/Lipschitz.lean` 166 行）に入るのは、局所の有界性と同程度連続性の上界だけです[源]。体積を変えたときの差、相関の減衰、境界条件への依存が消えることのような、一意性の材料になる言明は入っていません[源]。`Order.unique`（`YM/Extraction/Orders.lean` 70 行）が言う一意性は、同じ部分列の上での極限の一意性で、Hausdorff の空間での極限の一意性です[源]。この補題は依存の外（outside）で、どの見出しからも届きません[源]。

部分列に依るかもしれない量が、ほかにも在ります[評]。

- 相の成分どうしが等しいかどうか。各成分は群がりを持ちますが、混合の理論 $S^{\mathrm{mix}}$ の群がりは示されていません（§6.2）。混合が群がりを持てば全ての成分が等しくなりますが、それでも無限体積の極限の一意性には足りない、と評価書は書いています。
- 演算子積展開の係数が、体積の部分列の選び方に依らないこと（§7.5）。
- 短距離の実効の結合 $g_W(r)$ が、体積の部分列に依らないこと（§7.4）。

刻みの側は事情が違います。体積を止めた紫外の極限は、族の選んだ間隔の列の全体に沿って収束します[源]。部分列が残るのは体積の側だけです（6-02 表 3）。

03

## 連続の理論の確率測度

形式的な表示 $Z^{-1}\exp\!\big(-\tfrac{1}{2g^2}\int\sum_{\mu<\nu}\|F_{\mu\nu}\|^2\big)\,\mathcal{D}A$ に当たる確率測度を、適切な空間の上に定めることは、提出物が主張していることではない、と評価書 §3 は書いています[評]。構成され

た連続の対象は、局所の観測量の相関関数と、そこから再構成した量子場です[評]。

源の側でも、連続の対象は相関の表と OS の Hilbert 空間で、測度ではありません[推]。繰り込みの途中の対象についても、固定した段 $m$ の有効な密度は切断について一様に Cauchy ですが、その極限の測度は名前を持った対象として定義されていません[推]。押し出しの測度の鏡映正値性も言われていません[推]。一段の核のパッチが鏡映の面をまたぐからです[推]。

04

## 一様な質量ギャップ

構成は、質量ギャップについて肯定も否定も、何の証拠も与えていません（評価書 §2）[評]。§8 の 3 が求めるのは、相関の指数的な減衰と、OS のハミルトニアン $H$ のスペクトルの隙間です[評]。

源に在るのは、各相で一様な、次の二つの多項式の評価です[源]。

$$\sigma_A\big((0,u]\big) \le M\,u^{2} \quad (0<u\le 1), \qquad 0 \le \big\langle A,\,(e^{-\tau H}-P_0)\,A\big\rangle \le M\,\tau^{-2} \quad (\tau \ge 1). \tag{1}$$

左は、有限個の語から作ったベクトル $A$ のスペクトル測度 $\sigma_A$（源の名は `vletter`）の、エネルギー $(0,u]$ の重みです（`YM/EveryPhase/Light.lean` の `light_bound`、221 行）[源]。右は熱の評価で、$\tau$ は Euclid の時間、$P_0$ は零エネルギーの空間への射影です（`YM/EveryPhase/Decay.lean` の `inverse_square`、173 行）[源]。どちらも依存の表では used で、最初の見出しは `YM.SharpGram.habitat` です[源]。公開の定理・構成の定理まで届くかは確かめていません。

質量ギャップ $\Delta$ が在れば、$u<\Delta$ で左の重みは 0 になり、右は $e^{-\Delta\tau}$ で減ります。(1) はその代わりにはなりません。質量 0 の粒子を持つ理論とも両立する形だからです[推]。(1) の出所は局所可換性と前向きの光円錐で、ヤン–ミルズに特有の入力ではないと読んでいます[推]。言い直すと、質量ギャップの問いは「(1) の重みを、ある $\Delta$ 以下で 0 にする」問いです[推]。

もう一つ、構成の範囲の端を書いておきます。繰り込みの段は、間隔 1 の段 0 で結合が基準の値 $\bar\beta$ になった所で止まります[源]。$\bar\beta$ について源から読めるのは、暦の条件が $\hat\beta_m > 1$ を出すこと（`YM/PertExtension/Running.lean` 142 行で使われる `fits.delayed`）までです[源]。どれだけ大きく取るかは推し量りです[推]。そこから先の長い距離は、繰り込みでなく、鏡映正値性・チェス盤・Arzelà–Ascoli で扱われます[源]。質量ギャップの問いは、この間隔 1 の格子の理論を長い距離まで追う問いとして立て直せる見込みです[推]。そう言い直すには、極限の対象・体積に一様な局所の評価・観測量の像の三つが先に要ります（16-03）。

05

## Wilson ループと面積則、一粒子の状態

格子の道に沿う平行移動は、源の土台に在ります（`YM/Lattice/Path.lean` の `travel`、105 行）源。しかし、連続の極限での Wilson ループの観測量と、その面積則の言明は見つけていません源（名前の検索の範囲）。`.lean` 全体で area law・area_law・Wilson loop・wilson_loop・WilsonLoop の語は 0 件でした。loop の語は多く出ますが、一ループの係数や暦の `loopCap` の類です推。札は一点での曲率の多項式で、線の欠陥（line defects）のような局所でない観測量についての完全性は示さない、と委員会の検査の例は書いています（`submissions/openai-20261028/docs/examples/OperatorContent-20261028.lean` 35〜38 行）源。§8 の 4 は、Wilson ループを作るだけでなく、局所の観測量と関係づけることを求めています評。

相互作用する理論の一粒子の状態とそのスペクトルの解析も、源の中に見つけていません源（名前の検索の範囲：one particle・single particle・oneParticle）。語が出るのは一か所だけで、`YM/TraceExtension/Fock/Weyl.lean` 4 行の説明文 "One particle test vectors" です源。Fock の置き場に在るので、自由場の Fock 空間の側のものと推しています推。ほかに、`YM/TraceExtension/Damping.lean` 5 行の説明文に「一点の挿入の状態とスペクトル表示」の見出しが在り、同じ説明文は質量ギャップを仮定しないと書いています源。§8 の 5 は、この解析が二・三次元の多くの構成的な模型ではなされていると書いています評（7-03）。

06

## 間隔の列・点の重なり・摂動論

### 間隔の列への普遍性

間隔の列 $a_N$ は族が選びます。収束は、その選んだ列の全体に沿うものです評。どんな種類の間隔の列でも同じ極限になる、という普遍性の結果は無い、と評価書 §4.3 は書いています評。構成の列は、辺 $b_m$ が 3 以上の奇数で段とともに育つ特別な列です源。辺を育てることは、一段の誤差を $\log b_m$ で割って消すための選びと読んでいます推（10-05）。

### 点の重なる所

相関は、点が互いに異なる配置の上の試験関数でだけ定まっています評。演算子積展開を使って、点の重なる所を含む試験関数へ相関を延ばすことはできます評。しかし、その延長の一意性、制限の無い Euclid の試験関数の上での OS の正値性、格子からの収束は示されてい

ません（§7.5）評。委員会の独立の OS の照合は、全ての対角で全ての階の微分が消える試験関数を使うので、対角に台を持つ接触項は見えません（§10）評。

### 摂動論との全次数の一致

摂動論との全ての次数での一致は示されていません（§7.5）評。演算子積展開の切る次数 $D$ は札の次数で、ループの次数ではありません評。委員会の照合は、展開の係数を独立に計算したり、摂動の係数と比べたりしていません（§11）評。一致が言われているのは、主な項の水準のものです。結合の一ループの走り（6-01 表 1）と、跡の短距離の法則の係数です評。短距離の実効の結合（§7.4）に近い形の宣言は三つ在ります。`Running.ratio` は依存の外、`wilson_link` は依存の中の途中の段、見出しの `Asymptotics.comparison` は切断つきの段の結合で $g_W$ とは別の量で、どれも三つの目標の結論には残りません（6-02）源。

## 07 フェルミオン

構成は純粋なヤン–ミルズ理論のものです。公開の定理の格子の測度は、リンクの変数の Haar 測度に Wilson の作用の重みを付けたもので、物質の場を持ちません（`PublicWilson.lean` の `wilsonLaw`、29〜33 行）源。源の `.lean` で fermion・Grassmann の語を探すと、自由場の Wick の置き場の説明文に「フェルミオンの次数づけからの符号は無い」と一度出るだけでした源。クォークを含む理論（量子色力学）の構成は、この構成の範囲の外です推。

## 08 第三巻への橋

第三巻は、ここに並んだ項目のうち、赤外の側（一意性・質量ギャップ・面積則）を扱います。本書の結果は全て格子間隔を固定した言明で、連続の理論については何も示していません。公開された構成が残した問いとは反対の端（強結合・格子間隔は固定）の言明で、公開された構成に無い種類の言明です。表 2 に、項目ごとの位置を並べます。

表 2　示されていない項目と、本書の第三巻の結果（本書の側は全て格子間隔を固定）

| 項目 | 本書の結果 | 言っていないこと |
|---|---|---|
| 収束と一意性 | 強結合の窓の中で、部分列なしの無限体積の極限（列の全体の収束、20-03） | 弱結合、連続の極限 |
| 質量ギャップ | 強結合の窓の中の格子で、転送作用素の隙間（20-04） | 窓の外、連続の極限での一様な隙間 |

| 項目 | 本書の結果 | 言っていないこと |
|---|---|---|
| 面積則・閉じ込め | 強結合の窓の中の格子で、Wilson ループの面積則と、渦の自由エネルギーの上界（20-06）。窓の中では率が横の大きさに依らない形が在る（前の因子、横の面積は残る）。捩れた箱の渦の床（21-02・21-03） | 窓の外で横の大きさに一様な形、連続の極限での面積則 |
| 境界条件への依存 | 捩れた境界条件の分配関数の比と Polyakov ループ（21-06） | 無限体積の極限での一意性への含意 |
| 大きい場の稀さ | 一つの尺度の Wilson の測度で、体積に一様な稀さ（22-01） | 粗い尺度の測度、段を跨ぐ形 |
| フェルミオン | Wilson–Dirac の重みつきの器（20-05） | 連続の極限、カイラル対称性 |

公開された構成は周期境界の格子だけを扱い、捩れた境界条件や渦の自由エネルギーの言明を持ちません[推]。本書の渦の結果は、境界条件への依存を測る量です。それを連続の理論や一様な隙間へ運ぶ鎖は、まだ前提に置いたままです（28-04）。開いた問いの整理は 16-02、本書の位置は 16-04 で扱います。

09

## 読めていない所

- 「源に無い」とした項目（連続の Wilson ループ・一粒子の状態・連続の測度）は、§05 に書いた語の検索の範囲での判断です。別の名前で同じ中身を扱う宣言が在る可能性は除けていません。
- (1) の証明は読んでいません。出所が局所可換性であることは、証明の中の補題の名から推したものです。
- 構成が $\bar{\beta}$ をどれだけ大きく取るかの陽な条件は、確かめていません。
- 固定した段の極限の測度について、名前のついた言明が本当に無いかは、置き場の一部（`YM/FullVolume/` の下）でしか探していません。
- `Weyl.lean` の "One particle test vectors" と `Damping.lean` の「一点の挿入の状態」が、相互作用する理論の一粒子の状態とどう関わるかは読んでいません。

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 評 評価書は五つの開いた問いを挙げ、質量ギャップについて構成は何の証拠も与えないと書く | それらが偽であること（示されていないだけ） |
| 源 体積の極限の定理に入るのは上界だけで、一意性は同じ部分列の上だけ | 極限が部分列に依らないこと |
| 源 各相で一様な多項式の評価 (1) が在る | 指数の減衰、スペクトルの隙間 |
| 源 格子の測度に物質の場は無い | — |
| 表 2 の本書の結果は格子間隔を固定した言明 | 表 1 のどの項目も、本書は連続の理論について示していない |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 五つの開いた問い | 評 | 評価書 §8 |
| 部分列・相・係数・結合の依り方 | 評 | 評価書 §5・§6.2・§7.4・§7.5 |
| 体積の極限の入力と一意性 | 源 | OpenAI-YM-20261028：`YM/Extraction/Lipschitz.lean` 166 行、`YM/Extraction/Orders.lean` 70 行 |
| 多項式の評価 | 源 | `YM/EveryPhase/Light.lean` 221 行、`YM/EveryPhase/Decay.lean` 173 行 |
| 平行移動 | 源 | `YM/Lattice/Path.lean` 105 行 |
| 線の観測量の完全性 | 源 | yang-mills-group/YM：`submissions/openai-20261028/docs/examples/OperatorContent-20261028.lean` 35〜38 行 |
| 確率測度・普遍性・接触項・摂動 | 評 | 評価書 §3・§4.3・§7.5・§10・§11 |
| 純粋なヤン–ミルズであること | 源 | `PublicWilson.lean` 29〜33 行。語の検索（fermion・Grassmann）は `YM/Maxwell/Wick.lean` 10 行だけ |
| 本書の結果 | — | 第 20〜22 部の各章の出典の表 |

**この章で使った語** — 部分列の極限・一意性・群がり・質量ギャップ・スペクトル測度・熱の評価・Wilson ループ・面積則・一粒子の状態・普遍性・接触項・摂動論との一致。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：7-01 構成的場の理論とは — 公開された構成の背景にある、構成的場の理論の道具と歴史に戻ります。第三巻へ進むなら 16-02 五つの開いた問い。

# 構成的場の理論とは — 場の量子論を「作る」ことを六つの段に分ける

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

**この章で分かること** — 場の量子論を「作る」とは、公理を満たすガウスでない確率測度を近似の列の極限として示すことだ、という考え方。その道筋の六つの段と各段の難しさ。第 7 部の各章がどの段を扱うか。

**前提となる章** — 4-10 Osterwalder–Schrader の公理と再構成。4-02・4-11・5-01 も参照します。第二巻の中では、6-04 示されていないこと の次に読みます。

**先に言うこと** — 六つの段は、この本が問題文（Jaffe–Witten）の記述に沿って置いた整理で、分野の標準の用語ではありません。この章は既知の枠組みの説明で、四次元のヤン–ミルズについて何かを示すものではありません。第 7 部は第二巻の序として、公開された構成（第 6 部）を細かく読む前に、構成的場の理論の道具と、2026 年より前の文献の到達点を整理します。公開された構成がどの段まで届いたかは 6-01・6-04 で扱います。

この章の順序

1. 作るとは何を作ることか — ガウスでない測度
2. 形式的な式のどこが壊れているか — 三か所（計算の表）
3. 六つの段 — 地図と到達点（動く図）
4. 正則化と有限体積の段 — 保つもの、壊すもの
5. 紫外極限の段 — 繰り込みと一様な評価
6. 無限体積極限の段 — クラスター性
7. 公理の段 — 反射正値性
8. 一様なギャップの段 — 「一様に」が本体
9. 寄り道：一次元の鎖で六つの段を全部通す — 動く図
10. 第 7 部の読み方 — 段と章の対応

01

## 作るとは何を作ることか

物理の教科書は理論が在ると仮定して計算します。数学の問いはその手前、公理（4-09・4-10）を満たす対象が在るか、です。問題文は、四次元で公理を満たす非自明な相対論的場の理論を一つも知らない、と書いています（JW §6、2000 年）。

問題文は存在を示す方法を二つに分けます（JW §6.1）。(i) 閉じた形の正確な解を見つける。(ii) 近似の問題の列を解き、解が極限に収束することを示す。**構成的場の理論**（constructive quantum field theory）は (ii) を指し、中心は近似によらない不等式――一様な事前評価――です。 既知

ユークリッドの形（4-02）では、作る対象は超関数の空間 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ の上の確率測度 $\mu$ です。その積率

$$S_n(f_1,\dots,f_n)=\int \phi(f_1)\cdots\phi(f_n)\,\mathrm{d}\mu(\phi) \tag{1}$$

が OS の公理を満たせば、再構成定理でヒルベルト空間とハミルトニアンが得られます（$\phi(f)$ は場を試験関数 $f$ で均した値）。物理では同じ測度を

$$\mathrm{d}\mu(\phi)=\frac{1}{Z}\,e^{-S(\phi)}\,\mathcal{D}\phi \tag{2}$$

と書きます。目標の形ですが、右辺の記号はどれも、このままでは数学の対象ではありません。

**例：**質量 $m$ の自由場は、平均 0・共分散 $C=(-\Delta+m^2)^{-1}$（$\Delta$ はラプラシアン。質量ギャップの $\Delta$ とは別）のガウス測度で、OS の公理を満たしますが、相互作用が無く自明です（JW §6.2）。仕事は**ガウスでない**測度を作ることです。問題文によれば、公理を満たす形の（ガウスでない測度としての）最初の構成は 1970 年代で、二次元の小さい多項式相互作用の場でした（JW §6.2）。

次元で何が切り替わるかを十一行に並べた図は 1-12 §10 図 4（d = 4 で開く。最下段は表 2 の YM の行）。

02

## 形式的な式のどこが壊れているか

式 (2) の壊れた場所は三つです。(i) $\mathcal{D}\phi$：無限次元の空間では、平行移動で変わらず、どの球にも有限の重さを配る測度は 0 しかありません（1-09 §02）。(ii) 点での値：二次元以上では

自由場の見本は超関数で、$\phi(x)^4$ に意味がありません（1-11）。(iii) 体積：$\mathbb{R}^d$ 全体では作用が無限大です。スカラー場の作用は

$$S(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} \left( \tfrac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \tfrac{1}{2} m^2 \phi^2 + \lambda\, \phi^4 \right) \mathrm{d}x \tag{3}$$

で、ヤン–ミルズでは場が接続 $A$、作用は曲率 $F$ の二乗の積分です（3-03）。

(ii) は数で見えます。格子 $a\mathbb{Z}^d$ の自由場の一点の分散は

$$G_a(0) = \langle \phi(x)^2 \rangle_a = \int_{[-\pi/a,\,\pi/a]^d} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \, \frac{1}{m^2 + \frac{4}{a^2} \sum_{j} \sin^2 \frac{k_j a}{2}} \tag{4}$$

で、分母は $m^2 + |k|^2$ の格子版、運動量は $|k_j| \le \pi/a$ に切られています。

計算 表 1　$G_a(0)$（$m = 1$）。熱核の表示 $G_a(0) = a^{2-d} \int_0^\infty e^{-m^2 a^2 s} \, [e^{-2s} I_0(2s)]^d \, \mathrm{d}s$（$I_0$ は変形ベッセル関数）の数値積分。$d = 1$ は閉じた式 $1/(m\sqrt{m^2a^2+4})$ と 5 桁一致。

| $a$ | $d = 1$ | $d = 2$ | $d = 3$ | $d = 4$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.44721 | 0.25405 | 0.1705 | 0.127 |
| 1/4 | 0.49614 | 0.49320 | 0.9289 | 2.431 |
| 1/16 | 0.49976 | 0.71675 | 3.9634 | 39.598 |
| 1/64 | 0.49998 | 0.93768 | 16.0950 | 634.524 |
| $a \to 0$ | $\to 0.5$ | $\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{a} + 0.2758$ | $0.2527/a$ | $0.1549/a^2$ |

二次元以上では分散が無限大に向かい、点での値は確率変数になりません。$\phi^4$ は $a$ に依存する引き算で定義し直す必要があり、これが紫外極限の段の繰り込みの入口です。

## 03 六つの段

壊れた場所を有限のもので置き換え（正則化と有限体積）、最後に外す（二つの極限）。極限が取れたら、公理とスペクトルの隙間を確かめる。問題文も格子について、格子間隔を 0 に、体積を無限大にしたときの期待値の極限を確かめよ、と書いています（JW §6.5）。

| 段 | 何をするか | 要るもの |
|---|---|---|
| 1 正則化 | 場を有限個の自由度に置き換える | 格子間隔 $a$ |
| 2 有限体積 | 一辺 $L$ の箱で測度を作る | 測度 $\mu_{a,L}$ |
| 3 紫外極限 | $a \to 0$ | 繰り込み・一様な評価 |
| 4 無限体積 | $L \to \infty$ | クラスター性 |

| 段 | 何をするか | 要るもの |
|---|---|---|
| 5 公理 | 極限が OS の公理を満たす | 反射正値性 |
| 6 ギャップ | ハミルトニアンの隙間 | 一様な指数減衰 |

正則化の段から無限体積の段までの四つは、二重の極限

$$\mu = \lim_{L\to\infty} \lim_{a\to 0} \mu_{a,L} \tag{5}$$

を作ることで、公理の段と一様なギャップの段は $\mu$ の性質です。格子の強結合の結果のように $a$ を固定して $L \to \infty$ を先に取る道もあり、そのとき紫外極限の段は後に残ります。ただし強結合の領域（格子の結合 $g$ が大きく、$\beta = 2N/g^2$ が小さい側）は連続極限（$\beta \to \infty$）から離れているので、この道はそのままでは紫外極限の段につながりません。既知

図 1　理論を選ぶ（下のボタンか表 2 の行）と、段ごとの到達点が変わる




YM 四次元：格子・有限体積の紫外安定性（Bałaban 1987–89。有効結合が十分小さい区間に入るという仮定つき、7-07）。MRS 1993 は赤外切断つきの構成の概略。連続の有限体積測度は未構成

既知 表 2　理論ごとの 2026 年より前の到達点（閉＝定理がある／一部／未／—＝問いが立ちにくい／取らない＝その道では段を通らない）。問題文と一次資料による。年は代表する論文の掲載年（16-01 の年表は最初の公開年で数えるので、Sengupta は 1992–93、Lévy は 2001 になる）。行を選ぶと図 1 が変わる。

| 理論 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 要点 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 自由場 | 閉 | 閉 | 閉 | 閉 | 閉 | 閉 | 相互作用が無く自明 |
| $\phi^4_2$ 弱結合 | 閉 | 閉 | 閉 | 閉 | 閉 | 閉 | 公理・粒子の質量・非自明な散乱（JW §6.2） |
| $\phi^4_3$ 弱結合 | 閉 | 閉 | 閉 | 閉 | 閉 | 閉 | 非ガウス測度・Wightman 公理（JW §6.2）。質量ギャップは Feldman–Osterwalder 1976（題名による・書誌のみ） |

| 理論 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 要点 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| YM 二次元 | 閉 | 閉 | 閉 | 閉 | 一部 | — | コンパクトな曲面の上の連続測度（Sengupta 1997・Lévy 2003）、平面上の連続測度とユークリッド不変性（Driver 1989）。伝播する自由度が無い |
| YM 三次元 | 閉 | 閉（格子） | 一部 | 未 | 未 | 未 | 格子の一様評価（Bałaban 1985）。連続の有限体積測度は $T^3$ でも未構成（Chevyrev 2022） |
| YM 四次元 | 閉 | 閉（格子） | 一部 | 未 | 未 | 未 | 格子・有限体積の紫外安定性（Bałaban 1987–89。有効結合が十分小さい区間に入るという仮定つき、7-07）。MRS 1993 は赤外切断つきの構成の概略。連続の有限体積測度は未構成 |
| 格子 YM 四次元・強結合 | 閉 | 閉 | 取らない | 閉 | 一部 | 閉 | a を固定したまま。無限体積・反射正値性（Osterwalder–Seiler 1978）、指数減衰（Shen–Zhu–Zhu 2023、β が小さい領域）。回転の対称性は無い |

公開された構成（2026）を入れた今の印は、1-12 表 4 と 7-07 表 4 に在ります。四次元は、構成の六つの段のうち、正則化・有限体積（格子）・紫外極限・公理の段が閉、無限体積の段が一部（体積の部分列まで）、一様なギャップの段が未です（1-12 の印のとおり）。

表 2 の「—」は、問いがそのままの形では立ちにくいことを表します。二次元のヤン–ミルズには伝播する自由度（遠くへ伝わる波。電磁気の光に当たるもの）が無いので、スペクトルの隙間という問いが四次元と同じ形では立ちません（7-02）。既知 「取らない」は、その道では段を通らないことです。格子の強結合では $a$ を固定したままなので、紫外極限の段を通りません。三次元・四次元のヤン–ミルズの有限体積の段は、格子なら式 (6) で閉じます（§04）。連続のまま有限体積の測度を作ることはまだできておらず、その部分は紫外極限の段の「一部」と要点の欄に書いています。

表 2 の YM 四次元の行は、2026 年より前の文献の到達点です。2026-11-10 に、四次元の Wilson の格子ゲージ理論の尺度の極限として Wightman の公理を満たす理論が作れることの Lean による形式化と、委員会の評価書が公開されました。Lean で証明されている、と委員会が評価したのは、局所の観測量の相関関数の形での紫外極限、体積の部分列に沿った無限体積の極限、そこからの公理の確かめと再構成までです（6-01、再構成は 12-08）。無限体積の極限の収束と一意性、連続の理論の確率測度、一様な質量ギャップ（指数の減衰）は示されていません（6-04）。

04

## 正則化と有限体積の測度の段

正則化には**格子**（場を格子点や辺に置く）と**運動量の切断**（フーリエ成分を $|k| \le \kappa$ に制限する）があり、どちらも何かを壊します。

| 性質 | 格子（Wilson 作用） | 運動量の切断 |
|---|---|---|
| ゲージ不変性 | そのまま保つ | 壊す。戻す相殺項が要る（MRS 1993 §I） |
| 反射正値性 | 保つ（Osterwalder–Seiler 1978） | 失われやすい。正則化で失った反射正値性を取り戻す方法は一般に乏しい（JW §6.5）。MRS 1993 §I は、正値性を欠くゲージの選び方（Feynman 型）は最初から直接には使えないとし、OS 正値性は、まず格子で切断し、その後で運動量の切断を使えば示せるだろう、としている |
| 回転の対称性 | 壊す | 切断そのものは回転対称にできる。ただしゲージ固定（ゲージ変換で移り合う場から代表を一つ選ぶこと）や有限の箱は回転を壊しうる。MRS 1993 は特定の方向を特別に扱うゲージ（axial ゲージ）と赤外の切断を使う |

格子では有限体積の測度が直ちに意味を持ちます。ゲージ群 $G$ がコンパクトなら

$$\mathrm{d}\mu_{a,L}(U) = \frac{1}{Z_{a,L}}\, e^{-S_W(U)} \prod_{\ell} \mathrm{d}U_\ell \tag{6}$$

で、$\ell$ は格子の辺、$U_\ell \in G$、$\mathrm{d}U_\ell$ は Haar 測度（重さ 1 の不変な測度）、$S_W$ は Wilson 作用

$$S_W(U) = \beta \sum_{P} \Big(1 - \tfrac{1}{N} \operatorname{Re}\operatorname{tr} U_P\Big), \qquad \beta = \frac{2N}{g^2} \quad (G = SU(N))$$

です。和は格子の最小の正方形（プラケット）$P$ についてとり、$U_P$ は $P$ の四辺の $U_\ell$ を一周する順に掛けた積です（5-01）。被積分関数は有界で連続、範囲はコンパクトなので $Z_{a,L}$ は有限で正です（JW §6.5）。既知

**例：**四次元・一辺 16 点の周期格子の辺は $4 \times 16^4 = 262144$ 本、`SU(3)` は実 8 次元なので、式 (6) は 2,097,152 次元の積分です。計算

連続のまま作るのは難しく、三次元のヤン–ミルズでもトーラス $T^3$ の上でまだ構成されていません（Chevyrev 2022）。格子なら有限体積の段は式 (6) で閉じ（表 2 の「閉（格子）」）、代わりに回転の対称性の回復が公理の段に回ります。

```
05
```

## 紫外極限の段

$a \to 0$ では、作用の係数（裸の結合）を $a$ に応じて動かさないと、極限は発散するか自明に潰れます。この動かし方が繰り込みです（4-04）。問題文によれば、$\phi^4$ では切断に依存する定数を摂動論の示す形で選べば、定数は発散しても期待値は収束します。二次元では少数の定数で足り、三次元では係数の全部に加えて波動関数の繰り込み、つまり状態のベクトル（2-06 の Fock 空間のベクトル）を切断とともに発散する定数で規格化し直すことが要ります（JW §6.2）。既知

何が要るかは次元の数え方で見当が付きます。既知 作用が単位を持たないことから、質量の単位で

$$[\phi] = \frac{d-2}{2}, \qquad [\lambda] = 4 - d, \qquad [g^2] = 4 - d \tag{7}$$

です（$g$ はヤン–ミルズの結合）。$d < 4$ では結合が正の質量次元を持ち（**超繰り込み可能**）、表面的に発散するダイアグラム（摂動論の各項を図にしたもの。4-03）の型は有限個です。「表面的に」は、図に付く積分の運動量の冪を数えるだけで発散と判定される、という意味です（4-04。教科書として Rivasseau 1991）。$d = 4$ は結合が単位を持たない境目です。表 1 も同じ数え方で読めます。$[\phi^2] = d - 2$ なので $G_a(0)$ は $a^{2-d}$ で増え、$d = 2$ では対数になります（1-12）。

**例：**二次元では積を $:\!\phi^4\!:_a = \phi^4 - 6G_a(0)\phi^2 + 3G_a(0)^2$ と定義し直し（Wick の順序積）、これと真空のエネルギーの定数で足ります（JW §6.2 の $\alpha, \gamma$）。

示したいのは、期待値が $a$ によらない定数で抑えられること、

$$\sup_{a>0} \left| \langle \Phi \rangle_{a,L} \right| \le C_\Phi \tag{8}$$

です。一様な評価 (8) があれば、測度の列から弱い意味で収束する部分列が取れます（有界な数列から収束する部分列が取れることの、測度の版）。ただし極限は一意とは限らず、公理やギャップは別の問題です。問題文は、コンパクト性による弱い存在だけでは、極限の性質を別に示さない限り解と認めない、としています（JW 脚注 2）。四次元は 7-07 で扱います。

06

## 無限体積極限の段

$L \to \infty$ には $L$ によらない評価が要り、とくに遠く離れた量がほぼ独立になること（**クラスター性**）が鍵です。問題文は評価の立て方として (a) 相関不等式、(b) 対称性、(c) 収束する展開

（クラスター展開）を挙げ、(a) はスカラー場や可換なゲージ理論に限られがちで、(c) が中心の道具になったとしています（JW §6.1）。示したい形は

$$\left|\langle A\, B_x\rangle_L - \langle A\rangle_L \langle B_x\rangle_L\right| \le C\, e^{-m|x|} \quad (C,\, m \text{ は } L \text{ によらない}) \tag{9}$$

です（$B_x$ は $B$ を $x$ だけずらしたもの）。減衰の速さ $m$ があれば、箱の縁の影響は $e^{-mL}$ 程度しか届きません。

**例：**一次元の鎖で、長さ $L$ の輪の一点の分散と無限の鎖の値の差は、$L$ が大きいとほぼ $e^{-mL}/m$ です。$m=1$ なら $L=16$ で $1.1\times10^{-7}$、$m=0.1$ ならまだ 2.5。近づく速さは $m$ が決めます。計算

四次元のヤン–ミルズでは、長い距離で結合が強くなると考えられています。物理 これは摂動論の繰り込み群から来る見方です（4-04）。MRS 1993 §I は、赤外の切断を外さない理由として 'this would lead to large values of the coupling constant'（結合定数が大きな値になってしまう）と書き、さらに 'there is no easy solvable model of these phenomenons around which to expand'（展開の出発点にできる、これらの現象の簡単に解ける模型が無い）と書いています。

比喩で言えば、展開の足場が無くなります。正確には、展開の出発点にできる解ける模型も、展開に使える小さいパラメータも無い、ということです。問題文も $T^4 \to \mathbb{R}^4$ を得る方法を今の手法は示唆しない、としています（JW §6）。

07

## 公理の段

正則化で成り立つ公理は極限に引き継がれやすく、壊したものは取り戻す必要があります。要は**反射正値性**です。時間の反転 $\Theta : t \mapsto -t$ について、$t>0$ の場だけに依る $F$ に対し

$$\left\langle\, \overline{\Theta F}\; F \,\right\rangle \;\ge\; 0 \tag{10}$$

が成り立つこと。これがヒルベルト空間とハミルトニアンを取り出す条件です（5-03）。

式 (10) は不等式なので、極限に引き継がれます。既知 条件は三つです。極限をとる $F$ が、正の時間の側の格子の場だけに依る関数で近似できること。その期待値が収束すること。反射の面が格子の面（格子点を通る面か、隣り合う格子点の間の面）であること。このとき各 $\mu_{a,L}$ での非負の値の極限なので、極限でも非負です。格子ゲージ理論では、格子の面についての反射正値性が示されています（Osterwalder–Seiler 1978。MRS 1993 §I もこれを文献として引いています）。

逆に、失った反射正値性を取り戻す方法は乏しく、ヒルベルト空間を立てること自体が問題の一部だと問題文は書いています（JW §6.5）。格子で壊した回転の対称性は、回復を別に示します。既知 公開された構成がこれらをどう満たすかは第 12 部で読みます（12-01 格子の鏡映正値性、12-06 Euclid 不変、12-08 再構成と Wightman の公理）。

**例：**ガウス測度では、反射正値性は $\Theta C$ を正の時間の側に制限したものの正値性と同じです（JW §6.2）。一次元では $C(t) = e^{-m|t|}/(2m)$ なので、$t_i, t_j > 0$ で

$$\sum_{i,j} f_i \, f_j \, C(t_i + t_j) = \frac{1}{2m} \Big( \sum_i f_i \, e^{-m t_i} \Big)^2 \;\geq\; 0 \tag{11}$$

と平方になります。格子の鎖で 40 点・乱数の $f$ を 20000 本試すと、最小値は $1.4 \times 10^{-8}$ で負になりません。平方なので当然で、これは式の確かめです。対照として、符号を変えた共分散 $-C(t_i + t_j)$ では行列の最小固有値が $-2.49$ になり、反射正値性が成り立ちません。計算

確率量子化（7-09）は測度を方程式の不変測度として作るので、反射正値性は出力に含まれず、別に示す課題になります。

08

## 一様なギャップの段

次に、ハミルトニアンのスペクトルの隙間を問います（4-11）。ユークリッドの側では相関の減衰の速さです。格子では時間方向の減衰率が格子単位の隙間 $m_{\mathrm{lat}}$ で、物理の単位のギャップは

$$\Delta = \lim_{a \to 0} \frac{m_{\mathrm{lat}}(a)}{a} \tag{12}$$

です。これが正で有限で、しかも体積に一様であることを示したい。

有限の箱の格子では、隙間は自動的に在ります。既知 **転送行列** $T$ は、時刻 $t$ の切り口（その時刻の格子の場の値の組 $u$）から時刻 $t + a$ の切り口 $v$ へ重みを運ぶ積分作用素

$$(T f)(u) = \int K(u, v) \, f(v) \, \mathrm{d}v$$

です。核 $K(u, v)$ は、二つの時刻をつなぐ作用の部分 $S_{t,t+a}(u, v)$ から $e^{-S_{t,t+a}(u,v)}$ として作ります。反射正値性から $T$ は正の作用素になり、ハミルトニアンは $T = e^{-aH}$ で決まります。場の値の範囲が有界で閉じていて（ゲージ群がコンパクトな格子ゲージ理論はこれに当たる）、核が連続かつ正なら、最大固有値 $\lambda_0$ は重複しません。成分がすべて正の行列についての Perron–Frobenius の定理の、無限次元の版（Jentzsch の定理の一般化）です 既知 （一般化は Schaefer 1974。出典は 5-03）。よって次の固有値 $\lambda_1$ との比は $\lambda_1 / \lambda_0 < 1$ で、隙間

$-\log(\lambda_1/\lambda_0)/a > 0$ が在ります（5-03。格子ゲージ理論の正の自己共役な転送行列は Osterwalder–Seiler 1978）。問われるのは $a \to 0$・$L \to \infty$ のもとでの一様さで、問題文は、体積に一様なギャップには新しい考えが要ると書いています（JW §6.5）。

**例：**$m = 1$ の鎖では $m_{\mathrm{lat}}/a$ が 0.9624（$a = 1$）、0.9974（$a = 0.25$）、0.99990（$a = 0.05$）と 1 に近づき、格子単位の $m_{\mathrm{lat}}$ そのものは $a = 0.05$ で約 0.05 と 0 に向かいます。連続極限では**格子単位の隙間は閉じていくのが正しい姿**で、見るべきは比 (12) です（5-09）。転送行列の固有値の比 $-\log(\lambda_1/\lambda_0)/a$ は、相関の減衰率と一致し、差は $5 \times 10^{-14}$ 以下です。計算

09

## 寄り道：一次元の鎖で六つの段を全部通す

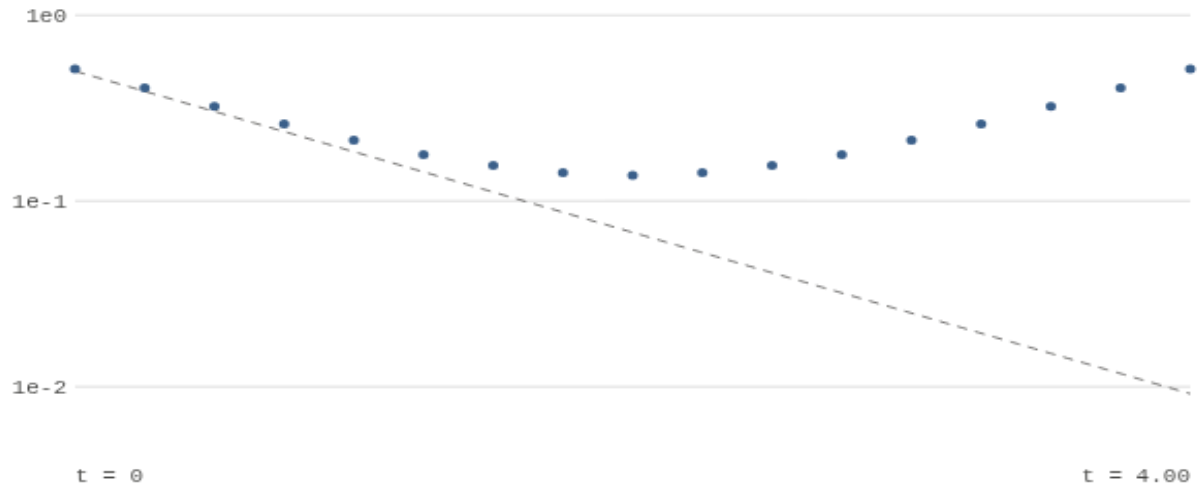
飛ばしてよい節です。

$d = 1$ のユークリッド場の理論は量子力学で、場 $\phi(t)$ は粒子の位置、作用 $\int (\frac{1}{2}\dot\phi^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2)\,\mathrm{d}t$ は調和振動子の虚時間の作用です（2-06・2-07）。正則化の段で時間を間隔 $a$ で刻み、有限体積の段で長さ $L$ の輪にし、紫外極限の段と無限体積の段で $a \to 0$・$L \to \infty$。公理の段は式 (11)、一様なギャップの段のギャップは準位の間隔 $m$ です。$N = L/a$ 点の輪の相関は閉じた式で書けます。

$$\cosh m_{\mathrm{lat}} = 1 + \tfrac{1}{2}m^2a^2, \qquad \langle \phi_0\, \phi_n \rangle_L = \frac{a\,\cosh\!\big(m_{\mathrm{lat}}(N/2 - n)\big)}{2\sinh m_{\mathrm{lat}}\,\sinh(m_{\mathrm{lat}}N/2)} \tag{13}$$

作用の行列を直接逆にした値と $10^{-14}$ の桁で一致します。計算

図 2　$a$・$L$・$m$ を動かすと、輪の上の相関（縦は対数）と格子のギャップ $m_{\mathrm{lat}}/a$ が変わる




a = 0.25, L = 4.00（16 点）, m = 1.00  m_lat/a = 0.9974  <φ²>_L = 0.5148（連続・無限 0.5000）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（式 (13)）。点は格子の値、破線は無限・連続の $e^{-mt}/(2m)$。

$L$ を伸ばすと、輪を回り込む寄与（右側の持ち上がり）が消えて破線に重なります。$m$ を小さくすると、要る $L$ が $1/m$ に比例して長くなります。ギャップが無限体積極限の速さを決める、という無限体

積の段と一様なギャップの段のつながりで、問題文も一様なギャップが無限体積極限の証明で基本的な役割を果たしうると書いています（JW §5）。二つの極限を別々の表で見ます（どちらも $m = 1$）。

計算 表 3　格子間隔 $a$ を細かくする（紫外極限の段・一様なギャップの段。無限の鎖）。

| $a$ | $m_{\mathrm{lat}}/a$ | $\langle\phi^2\rangle$（無限の鎖） |
|---:|---:|---:|
| 1 | 0.962424 | 0.447214 |
| 0.25 | 0.997414 | 0.496139 |
| 0.05 | 0.999896 | 0.499844 |
| 0.01 | 0.999996 | 0.499994 |
| $a \to 0$ | $\to 1$ | $\to 1/(2m) = 0.5$ |

計算 表 4　輪の長さ $L$ を伸ばす（無限体積の段。$a = 0.05$）。$L = \infty$ の値は無限の鎖の 0.499844（表 3 の $a = 0.05$ の行）。

| $L$ | $\langle\phi^2\rangle_L$ | 無限の鎖との差 |
|---:|---:|---:|
| 1 | 1.081735 | $5.8 \times 10^{-1}$ |
| 2 | 0.656350 | $1.6 \times 10^{-1}$ |
| 4 | 0.518503 | $1.9 \times 10^{-2}$ |
| 8 | 0.500180 | $3.4 \times 10^{-4}$ |
| 16 | 0.499844 | $1.1 \times 10^{-7}$ |

一次元で全部が通るのは、点での値が確率変数で、紫外極限の段に発散が無いからです（表 1）。非調和な項 $\lambda\phi^4$ を足しても量子力学として意味を持ちます。既知

10

## 第 7 部の読み方

表 2 の各行は、正則化の段から順に閉じていく様子を並べたものです。第 7 部の各章は、その「閉」がどの道具で得られたか、「一部」「未」がどこで止まっているかを、段ごとに追います。二次元のヤン–ミルズとスカラー場は段が通った例として、クラスター展開と繰り込み群はそれが効く段の道具として、三次元・四次元の章は止まっている段の記録として読むと、各章の位置が分かります。一つの章が複数の段に触れることもあるので、下の対応は主に扱う段です。

- 正則化から無限体積までの段：7-02 二次元のヤン–ミルズ
- 六つの段の全て：7-03 $\phi^4_2$・$\phi^4_3$（六段が通った例）
- 無限体積の段と一様なギャップの段：7-04 クラスター展開

- 紫外極限の段：7-05 繰り込み群、7-06 三次元、7-07 四次元、7-08 自明性、7-12 寄り道：1/0
- 有限体積の段と紫外極限の段を別の道で：7-09 確率量子化
- 全部：7-10 四次元で止まる場所、7-11 発散以外の障害、16-01 年表

---

## この章が言えている範囲

| | 内容 |
|---|---|
| **言えている** | 構成的場の理論は近似の列の極限で公理を満たす非ガウス測度を示す方法で、一様な評価が中心（JW §6.1） 既知 |
| **言えている** | 格子の自由場の一点の分散は $d=1$ で有限、$d=2,3,4$ で $\log(1/a)$・$1/a$・$1/a^2$ で増える（$a \geq 1/64$） 計算 |
| **言えている** | 一次元の鎖では六つの段が閉じた式で通り、相関の減衰率と転送行列の固有値比が一致する 計算 |
| **言えていない** | 六つの段という分け方は、この本の整理で、分野の標準の区分ではない |
| **言えていない** | 表 2 の「閉」の中身（原論文の証明は追っていない。$\phi^4_2$・$\phi^4_3$ は問題文による。$\phi^4_3$ のギャップは文献の題名による） |
| **言えていない** | 四次元のヤン–ミルズで、無限体積の極限の一意性と一様なギャップの段を進める方法（問題文〔2000 年〕は方向を指す考えが無いとする。2026-11-10 に公開された構成も、この二つは示していない。6-04） |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| JW の記述と引用（§5・§6・§6.1・§6.2・§6.5・脚注 2） | 一次資料（本文で確認） | A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*, Clay Mathematics Institute の公式問題文（2000） |
| OS の公理・教科書 | 書誌のみ | K. Osterwalder, R. Schrader, Comm. Math. Phys. 31 (1973) 83–112; 42 (1975) 281–305。J. Glimm, A. Jaffe, *Quantum Physics*, 2nd ed., Springer (1987) |
| $\phi^4_2$・$\phi^4_3$ | 書誌のみ（問題文の文献表） | Glimm–Jaffe–Spencer, Ann. Math. 100 (1974) 585–632; Glimm–Jaffe, Fortschr. Phys. 21 (1973) 327–376; J. Feldman, K. Osterwalder, “The Wightman axioms and the mass gap for weakly coupled $\phi^4_3$ quantum field theories”, Ann. Phys. 97 (1976) 80–135 |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 摂動論と繰り込みの教科書 | 書誌のみ（問題文の文献表） | V. Rivasseau, *From Perturbative to Constructive Renormalization*, Princeton Univ. Press (1991) |
| 格子の反射正値性・正の自己共役な転送行列・強結合の無限体積 | 書誌と要旨のみ | K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471 |
| Perron–Frobenius・Jentzsch の定理 | 既知の定理（Perron 1907・Jentzsch 1912 は書誌のみ。コンパクト空間上の核への一般化は Schaefer 1974〔書誌のみ、主張は二次資料で確認〕・Krein–Rutman 1948〔書誌のみ〕） | 5-03 を参照 |
| 強結合の指数減衰 | 要旨で確認 | H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, Comm. Math. Phys. 400 (2023) 805–851, arXiv:2204.12737 |
| 二次元の連続測度（平面） | 要旨と序論で確認 | B. K. Driver, Comm. Math. Phys. 123 (1989) 575–616 |
| 二次元の連続測度（コンパクトな曲面） | 書誌のみ（Lévy 2003 は要旨まで確認） | A. Sengupta, Mem. Amer. Math. Soc. 126 no. 600 (1997); T. Lévy, Mem. Amer. Math. Soc. 166 no. 790 (2003), arXiv:math/0101239 |
| 三次元・四次元の紫外安定性 | 1985 と 1989（CMP 122, 355–392）は冒頭と主定理（条件つきの紫外安定性の定理。Theorem 1）を確認。1987 と系列の他は書誌のみ | T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 102 (1985) 255–275; 109 (1987) 249–301; 122 (1989) 355–392 |
| 赤外切断つきの構成 | 要旨と §I を確認 | J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, Comm. Math. Phys. 155 (1993) 325–383 |
| 三次元の測度は未構成 | 本文 §1.1 を確認 | I. Chevyrev, arXiv:2202.13359 (2022) |
| 表 1・次元の数・一次元の鎖 | 計算 | この端末の Python（numpy・scipy）：`point_variance.py`・`counts.py`・`chain.py`（転送行列は位置を 1601 点で対角化） |
| 図 1・図 2 | 図 | SVG・canvas と素の JavaScript。図 1 は表 2 を読む（JavaScript が無効なら YM 四次元の静止図）。図 2 は式 (13) を計算 |

次に読む章：7-02 二次元の可解性とヤン–ミルズ測度（正則化から無限体積までの四つの段が閉じる例）。

# 二次元の可解性とヤン–ミルズ測度 — 平面ではプラケットが独立になり、測度が作れる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

**この章で分かること** — 二次元の格子では、ゲージを木の上で固定するとプラケットが独立になり、面積則がすべての結合で正確に成り立つこと。連続極限で群の熱核が現れ、平面と閉じた曲面の上で連続の測度が構成されていること。トーラスの上では確率量子化でも同じ測度に着いたこと。

**前提となる章** — 5-01 Wilson の格子。指標は 1-04 の範囲をその場で補います。期待値・独立・密度は 1-08、白色雑音とブラウン運動は 1-09、六つの段は 7-01。

**先に言うこと** — 二次元の純ヤン–ミルズは四次元の縮小版ではありません。伝播する自由度が無く、測度は面積だけを見ます。可解性の芯は四次元に持ち越せません（§09）。この章は既知の結果の紹介です。

この章の順序

1. なぜ二次元から始めるか — 非可換群で連続の測度が構成されているのは二次元だけ
2. 木を固定するとプラケットが独立になる — 辺の数と面の数が一致する
3. 面積則はすべての β で正確 — 指標の補題で面を一枚ずつ剝がす
4. 連続極限：群の熱核 — 面積が熱方程式の時刻になる
   - 寄り道：面積しか見ない理論 — 面積を保つ変形で期待値は変わらない
5. Driver と Gross–King–Sengupta — 場の強さが白色雑音になり、平行移動が確率微分方程式になる
6. 閉じた曲面の上へ — 面は独立でなくなるが、測度は構成されている
   - 寄り道：面積を 0 に近づけると — 平坦接続の空間の体積が出る
7. 転送行列で見る — 最低の励起は円周の長さに比例し、伝わる粒子は無い

8. 確率量子化での再構成 — トーラスの上で、同じ測度を不変測度として得る

9. 持ち出せるもの、持ち出せないもの — 方法は延びるが、面の独立性は延びない

---

01

## なぜ二次元から始めるか

非可換のゲージ群で連続のヤン–ミルズ測度が構成されているのは、いまのところ二次元だけです。Chatterjee（2018）は、Wilson ループが自明でないふるまいをする連続極限は二次元より高い次元では一つも構成されていないと書いています。既知 2026-11-10 に公開された四次元の構成も、局所の観測量の相関関数の形で連続の理論を作るもので、確率測度と Wilson ループの観測量は作っていません（6-04）。二次元では場の強さの成分が一つです。

$$F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 + [A_1, A_2], \qquad S(A) = \frac{1}{2g^2} \int_{\mathbb{R}^2} |F_{12}|^2 \, d^2x \tag{1.1}$$

$A$ はリー環に値をとる接続（3-02）、$|\cdot|$ は共役で変わらない長さです。$F$ は長さの二乗の逆数の次元なので、作用が無次元であるには $g^2$ が**面積の逆数**の次元を持ち、尺度は $g$ 自身が与えます。四次元では $g$ が無次元で、尺度は量子効果で生まれると考えられています物理（4-07）。この章の主役は、**ゲージを適切に固定すると面ごとの自由度が独立になる**という二次元だけの性質です。六つの段（7-01）で言えば正則化の段から無限体積の段までが閉じ、公理の段は一部（ユークリッド不変性。§05）、一様なギャップの段のギャップは四次元と同じ意味の問いになりません（§07）。

02

## 木を固定するとプラケットが独立になる

設定は 5-01 のとおりで、辺 $\ell$ に $U_\ell \in G$、面 $p$ の周りの積を $U_p$、重みを $\prod_p e^{\beta \operatorname{Re}\operatorname{tr} U_p}$（$dU$ は Haar 測度）とします。この章の β は、$SU(2)$ で慣用の $\beta_W$（Wilson 作用 $\beta_W \sum_p \big(1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{Re}\operatorname{tr} U_p\big)$、四次元では $\beta_W = 4/g^2$）の半分です：$\beta = \beta_W/2$。§03 の β = 1 は $\beta_W = 2$ に当たります。ゲージ変換 $U_{xy} \mapsto g_x U_{xy} g_y^{-1}$ は $\operatorname{tr} U_p$ を変えません。木（閉路の無い辺の集まり）の上の変数は、根から順に $g_x$ を選べば 1 にでき、ゲージ不変な量の期待値は変わりません。既知 $L \times L$ の正方格子（自由境界）で数えると

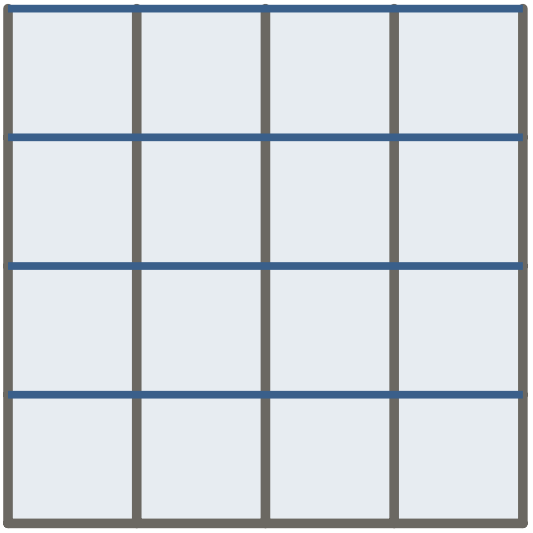
$$V = (L+1)^2, \quad E = 2L(L+1), \quad P = L^2, \qquad E - (V-1) = P. \tag{2.1}$$

木は $V-1$ 本なので、残る辺は面と同じ数です（円板のオイラーの公式）。木を縦の辺と下端の辺に取ると（Driver 1989 と同じ）、残るのは横の辺 $h_{i,j}$（$h_{i,0}=1$）で

$$U_{p(i,j)} = h_{i,j}\,h_{i,j+1}^{-1} \iff h_{i,j+1} = U_{p(i,j)}^{-1} h_{i,j}. \tag{2.2}$$

下から順に解けて一対一に対応し、Haar 測度は掛け算で動かないので測度も移ります。**面の変数は互いに独立で、それぞれ密度 $\rho_\beta(U) = e^{\beta\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U}/z(\beta)$ に従います。**既知 平面全体に広げると、無限体積の極限が境界条件に依らず存在し、有限の領域では自由境界の測度に一致します（Driver の定理 7.2。Haar 測度の不変性で外側の辺を積分して示され、Driver はこの定理が Dosch–Müller 1979 にほぼ含まれると書いています）。既知

**図 1　木ゲージ** — つまみ $L$ で格子の大きさが変わります。「動かす」で木（灰色）を 1 に固定し、面を下から塗ります。面を一つ塗るたびに上の辺が一つ決まります。



L = 4：頂点 25・辺 40・面 16。木の 24 本を 1 に固定すると、残る辺は 16 本で面の数と一致します。

計算 この図の数値（頂点・辺・面の数）はこの端末で計算した。数は式 (2.1)。

03

## 面積則はすべての β で正確に成り立つ

道具は**指標** $\chi_\lambda(U) = \mathrm{tr}\,\lambda(U)$（$\lambda$ は既約ユニタリ表現、次元 $d_\lambda$）です。共役で変わらず、$\int_G \chi_\lambda \overline{\chi_\mu}\,dU = \delta_{\lambda\mu}$。$SU(2)$ ではスピン $j$ の表現が $2j+1$ 次元で、固有値 $e^{\pm i\theta}$ の元に対し $\chi_j = \sin((2j+1)\theta)/\sin\theta$ です（1-04）。鍵は補題：$X$ の密度が共役で変わらず $X$ が $A$ と独立なら

$$\mathbb{E}[\chi_\lambda(XA)] = w_\lambda\,\chi_\lambda(A), \qquad w_\lambda = \mathbb{E}[\chi_\lambda(X)]/d_\lambda. \tag{3.1}$$

$\mathbb{E}[\lambda(X)]$ がすべての $\lambda(V)$ と可換なので、Schur の補題で $w_\lambda I$ になるからです。単純閉曲線 $C$ が $n$ 枚の面を囲むとき、木ゲージの $U_C$ には囲まれた面の変数が、他の面の変数による共役を

伴って一回ずつ現れます。密度が共役で変わらないので (3.1) がそのまま使え、トレースの巡回性で一枚ずつ先頭に回して剝がすと

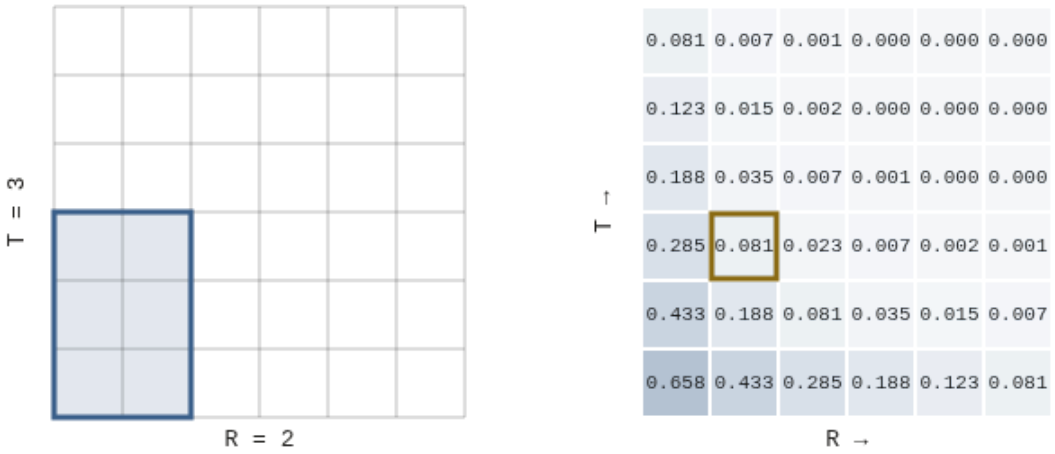
$$\frac{\mathbb{E}[\chi_\lambda(U_C)]}{d_\lambda} = w_\lambda(\beta)^n, \qquad \langle W_C \rangle = e^{-\sigma_{\mathrm{lat}} n}, \quad \sigma_{\mathrm{lat}} = -\ln w_{\mathrm{fund}}. \tag{3.2}$$

ここで $W_C = \chi_{\mathrm{fund}}(U_C)/d_{\mathrm{fund}}$（基本表現での値。$SU(2)$ では $\frac{1}{2}\operatorname{tr} U_C$）です。Migdal（1975）は、格子を粗くするときの重みの変換規則（再帰式）が二次元では正確になることを示し、指標の期待値が囲む面積 $A$ の指数 $\langle \chi_q \rangle = d_q e^{-g_q^2 A}$（$q$ は表現、$g_q^2$ は表現ごとの定数）になる式を書いて、「Wilson の面積則にほかならない」と述べています。既知 値は面積だけで決まり、**すべての β で**成り立ちます。四次元の面積則が強結合の側でしか示されていないこと（5-02）と対照的です。係数は次の修正 Bessel 関数の式で書け、数値積分との差は $2 \times 10^{-16}$ 以下でした。計算

$$SU(2):\ w_j = \frac{I_{2j+1}(2\beta)}{I_1(2\beta)}, \qquad U(1):\ w_n = \frac{I_n(\beta)}{I_0(\beta)} \tag{3.3}$$

$I_n$ は修正 Bessel 関数で、整数 $n$ に対し $I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos\theta}\cos n\theta\, d\theta$ です。$x$ が大きいと比 $I_n(x)/I_1(x)$ は 1 に近づき、§04 はその近づき方を使います。

**図 2　面積則（SU(2)）** ― つまみ β で一枚の面の値 $w$ が、R・T でループの形が変わります。右は 6×6 通りの長方形の $w^{RT}$ で、面積が同じなら同じ値です。




β = 2.0：w = 0.6580、σ = 0.4185。2×3（面積 6、周 10）：⟨W⟩ = 0.0812。

計算 この図の数値はこの端末で計算した。図の $w$ は (3.3) の Bessel 級数をその場で足したもので、scipy で計算した値と小数第 5 位まで一致する。JavaScript が無効なら表 1 を。

**表 1**　$SU(2)$。「乱数」は**ゲージを固定しない** 6×6 の格子（自由境界）の熱浴モンテカルロ。括弧は最後の桁の誤差。計算

| β | $w$ | $\sigma_{\mathrm{lat}}$ | 2×2 式 | 2×2 乱数 | 3×3 式 | 3×3 乱数 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.4331 | 0.8367 | 0.0352 | 0.0366(11) | 0.0005 | −0.0002(15) |
| 2 | 0.6580 | 0.4185 | 0.1875 | 0.1893(12) | 0.0231 | 0.0223(16) |

| β | $w$ | $\sigma_{\mathrm{lat}}$ | 2×2 式 | 2×2 乱数 | 3×3 式 | 3×3 乱数 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 0.8192 | 0.1994 | 0.4505 | 0.4514(12) | 0.1662 | 0.1649(29) |

ゲージを固定しない計算が、木ゲージの式と誤差の範囲で合います。

04

## 連続極限：群の熱核が現れる

格子間隔 $a$ では、面積 $A$ のループが囲む面は $n = A/a^2$ 枚です。(1.1) の長さを $|X|^2 = -2\,\mathrm{tr}\,X^2$ に取ると、$U_p \approx e^{a^2 F_{12}}$ の展開から $SU(2)$ では $\beta = 2/(g^2 a^2)$ です。$I_n(x)/I_1(x) = 1 - \frac{n^2-1}{2x} + O(x^{-2})$ より $w_j = 1 - j(j+1)/\beta + O(\beta^{-2})$ なので

$$w_j(\beta)^{A/a^2} \longrightarrow e^{-g^2 A\, j(j+1)/2} \qquad (a \to 0). \tag{4.1}$$

右辺は群の**熱核** $Q_t$ の係数です。$\Delta$ は群の上のラプラシアン（質量ギャップの $\Delta$ とは別）で、指標を固有関数に持ち $\Delta \chi_\lambda = -c_\lambda \chi_\lambda$ となる作用素です。$c_\lambda \ge 0$ は表現ごとに決まる Casimir の値で、$SU(2)$ では $c_j = j(j+1)$。熱核は熱方程式 $\partial_t Q_t = \frac{1}{2}\Delta Q_t$ の、時刻 0 で単位元に集中した解で、指標で展開すると

$$Q_t(U) = \sum_{\lambda} d_\lambda\, e^{-c_\lambda t/2} \chi_\lambda(U), \qquad Q_s * Q_t = Q_{s+t} \tag{4.2}$$

(4.1) の右辺は $t = g^2 A$ での係数 $e^{-c_j t/2}$ です。つまり**面積 $A$ の単純閉曲線のホロノミーは熱核 $Q_{g^2 A}$ に従います**。既知 半群性は「面積を足すと時刻が足される」ことです。表 2 では $j = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ のどれもが熱核に近づき、誤差は $a$ を半分にするたび 1/4 になります。計算

表 2　$SU(2)$、$g = 1$、面積 1、$\beta = 2/a^2$。値は $w_j^n$。計算

| $a$ | $n$ | $j = \frac{1}{2}$ | $j = 1$ | $j = \frac{3}{2}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1/2 | 4 | 0.67919 | 0.35713 | 0.14579 |
| 1/4 | 16 | 0.68527 | 0.36504 | 0.15119 |
| 1/32 | 1024 | 0.68726 | 0.36783 | 0.15332 |
| 熱核 | ∞ | 0.68729 | 0.36788 | 0.15335 |

面の重みを最初から熱核に取ると、半群性で面の分け方に依らない測度になります（Migdal の観察）。Driver は、熱核の重み（Villain 作用）と Wilson 作用の格子が同じ連続の測度に収束することを示し、後者には群値の中心極限定理（Borgs–Seiler）を使っています。既知

### 寄り道：面積しか見ない理論

飛ばしてよい小節です。

Driver の系 6.7 によれば、ゲージ不変な量の期待値は**面積を保つ微分同相写像**で変わりません（曲線の配置が許容される形のまま移る限り）。比喩で言えばゴム膜の上の理論で、面積を保って膜を伸ばしても何も変わりません。正確には、期待値が熱核の積の有限次元積分で書け、入るのが面の面積と曲線の交わり方だけだ、ということです（定理 6.4）。

05

## 連続の測度：Driver と Gross–King–Sengupta

木ゲージの連続版は**完全軸ゲージ**（$A_2 = 0$、かつ $x$ 軸の上で $A_1 = 0$）です。このとき $[A_1, A_2] = 0$ なので場の強さは線形になり、重み $e^{-S}$ は $F$ についてガウス型になります。

$$F_{12} = -\partial_2 A_1, \qquad \mathbb{E}\big[F^a(R) F^b(R')\big] = g^2 \delta^{ab} |R \cap R'| \tag{5.1}$$

$F$ は**リー環に値をとる白色雑音**で（$F^a(R)$ は領域 $R$ の上の積分、$|R|$ は面積。1-09）、互いに素な領域の値は独立です。格子の「面ごとに独立」の連続版です。既知 $F$ は点ごとに定まらないので、平行移動は**確率微分方程式**になります。駆動項に白色雑音（ブラウン運動の増分）を含む常微分方程式のことで、確率積分の取り方を一つ決めて解きます。水平な曲線に沿う平行移動の駆動項は、曲線と $x$ 軸のあいだの $F$ の積分で、各成分はその面積を時間とするブラウン運動（1-09）です（Driver の命題 3.2）。この方法は Gross–King–Sengupta（1989）に由来します。

Driver の結果は、(i) ホロノミーのゲージ不変な関数の期待値が熱核の積を密度とする有限次元積分で書けること（時刻は面の面積、引数は曲線の交わり方。定理 6.4）、(ii) 面積を保つ写像での不変性（系 6.7）、(iii) 格子の収束、です。既知 系 6.7 から、ゲージ不変な期待値のユークリッド不変性（公理の一部）が出ます。反射正値性を含む Osterwalder–Schrader の公理（4-10）全体の検証は、Driver は主張していません。観測量は曲線に沿う量で、Driver は Wilson ループの変数が「$d = 3$、とくに $d = 4$ ではかなり特異」だと書いています。

06

## 閉じた曲面の上へ：Sengupta と Lévy

種数 $\gamma$ の閉曲面ではオイラーの公式が $V - E + P = 2 - 2\gamma$ になり、木を固定した後に残る辺は $P - 1 + 2\gamma$ 本です。面の変数に全体で一つの拘束がかかり、穴を回る $2\gamma$ 個の変数が加わる

ので、面は独立ではありません。それでも測度は構成されています。Sengupta（1992–97）はコンパクトな曲面の上で構成し（原論文は書誌のみ）、Lévy（2003）は離散と連続極限を統一的に扱って、曲面を切り貼りする操作に関する**マルコフ性**（曲線で切ったとき、切り口の値を固定すると両側が互いに影響しないこと）を示しました。曲面の上でゲージ場を貼り合わせる仕方には位相的な種類があり（1-07）、その自明でない種類（自明でない主束）は Lévy（2006）、ホロノミー場の一般論は Lévy（2010）です。既知 離散版は各面 $F$ に熱核を置く形です。

$$\mathbb{E}[f] = \frac{1}{Z}\int f(h)\prod_{F} Q_{g^2|F|}\big(h(\partial F)\big)\prod_{e} dh_e, \qquad Z_\gamma(T) = \sum_{\lambda} d_\lambda^{2-2\gamma} e^{-c_\lambda g^2 T/2} \tag{6.1}$$

$h(\partial F)$ は面の縁に沿う積、$T$ は全面積で、$Z$ は定数倍を除きます。既知 トーラスの $Z_1$ は §07 のハミルトニアンの $\operatorname{Tr} e^{-\tau H}$ と同じ形です。

### 寄り道：面積を 0 に近づけると

飛ばしてよい小節です。

$\gamma \geq 2$ なら $T \to 0$ で $Z_\gamma \to \sum_\lambda d_\lambda^{2-2\gamma}$ です。測度は曲率 0 の接続（平坦接続）に集中し、この極限から**平坦接続のモジュライ空間**（平坦接続をゲージ変換で同一視したものの空間）の体積が出ます。これが Witten の体積公式で、正確な極限の形は Sengupta（2003）が与えています（総説の定理 4.1）。定理 4.1 は $G$ が単連結で $\gamma \geq 2$ であることを仮定しており、$SU(2)$・$\gamma \geq 2$ はそれを満たします。既知 $SU(2)$ では次元が $1, 2, 3, \ldots$ なので極限は $\zeta(2\gamma - 2)$ です。計算

| $\gamma$ | $T = 1$ | $T = 0.1$ | $T = 0.01$ | $T \to 0$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2.2738 | 7.5201 | 24.597 | 発散 |
| 2 | 1.2247 | 1.4713 | 1.5849 | ζ(2) = 1.6449 |
| 3 | 1.0482 | 1.0767 | 1.0817 | ζ(4) = 1.0823 |

07

## 転送行列で見る：最低の励起は円周の長さに比例する

質量ギャップはハミルトニアンのスペクトルの隙間です（4-11）。格子では**転送行列** T を使います。時間を一段進める重みを核とする作用素で、$\mathsf{T} = e^{-aH}$ によってハミルトニアン $H$ を定めます（5-03）。空間を $L$ 本の辺の円周に取り、時間方向は周期的にしません（開いた円柱）。すると時間方向の辺は閉路を作らないので 1 に固定でき、ゲージ不変な状態は一周のホロノミー $V_1 \cdots V_L$ の共役類の関数、つまり指標の重ね合わせです。一段の時間発展で各辺に独立な面の変数が一つずつ掛かるので、(3.1) を $L$ 回使って

$$\mathsf{T}\chi_\lambda = w_\lambda(\beta)^L \chi_\lambda, \qquad E_\lambda = -L \ln w_\lambda(\beta) \quad (\text{格子単位},\ E_0 = 0). \tag{7.1}$$

最低の励起は基本表現の $E = \sigma_{\mathrm{lat}} L$ で、円周を一周する「力線の輪」のエネルギーです。張力は §03 の面積則と同じ数です。$SU(2)$・β = 1 で $E_{1/2}$ は $L = 4$ で 3.3469、$L = 8$ で 6.6938。比 $E_1/E_{1/2}$ は β = 1, 32, 512 で 2.4044, 2.6664, 2.6667 と Casimir の比 $8/3$ に近づきます。補題 (3.1) も乱数（$2 \times 10^6$ 個）で確かめました。計算

連続極限は §04 と同じ置き方で取れます。物理の長さ $L_{\mathrm{phys}} = La$ を固定し、$\beta = 2/(g^2 a^2)$ と $-\ln w_\lambda = c_\lambda/\beta + O(\beta^{-2})$ を (7.1) に入れると

$$\frac{E_\lambda}{a} = -\frac{L_{\mathrm{phys}}}{a^2} \ln w_\lambda(\beta) = \tfrac{1}{2} g^2 L_{\mathrm{phys}}\, c_\lambda + O(a^2). \tag{7.2}$$

$\Delta \chi_\lambda = -c_\lambda \chi_\lambda$（§04）と合わせると、連続極限のハミルトニアンは群の上のラプラシアンの定数倍 $-\frac{1}{2} g^2 L_{\mathrm{phys}} \Delta$ です（共役類の関数に働く）。紙 導出はこの章のもので、$g = 1$・$L_{\mathrm{phys}} = 1$ の $SU(2)$ では $a = 1/64$ で $j = \frac{1}{2}$ の値が 0.375011（極限 0.375）、差は $a$ を半分にするたび 1/4 になりました。計算

円周を長くする（$L \to \infty$）と真空以外の固有値はすべて無限遠に去り、有限のエネルギーで伝わる励起（粒子）はありません。相関長もここで定めておきます。プラケット $p_x$ の量 $P_x = \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\, U_{p_x}$ の連結相関 $\langle P_x P_y \rangle - \langle P_x \rangle \langle P_y \rangle$ が $e^{-|x-y|/\xi_{\mathrm{lat}}}$ のように減るときの長さ $\xi_{\mathrm{lat}}$（格子単位）が相関長です。平面では異なるプラケットが独立なので連結相関はちょうど 0 で、どの β でも $\xi_{\mathrm{lat}} = 0$ です（何を固定して極限を取るかは 5-09）。四次元の問い（相関長が発散し、物理の単位で有限の質量が残るか）は、二次元には現れません。

08

## 確率量子化での再構成

**確率量子化**は、測度を直接書かず、それを不変測度に持つ確率的な時間発展 $\partial_t A = -\frac{1}{2} \nabla S(A) + \xi$（$\xi$ は時空の白色雑音）を解く方法です。この方程式を **Langevin 方程式**と呼びます。有限次元ならこの方程式の不変測度は $e^{-S}$ に比例します。二次元でも $A$ は分布なので、繰り込みとゲージとの整合が要ります。その道具（正則性構造・DeTurck の方法）は 7-09 で扱い、ここでは結果だけを見ます。既知

Chevyrev（2019）は $T^2$ の測度を分布的な 1 形式として実現し、Chandra–Chevyrev–Hairer–Shen（2022）は分布的な接続とゲージ軌道の空間（Polish 空間＝確率論が普通に使える良い距離空間）を作り、法則の意味でゲージと整合する **Markov 過程**（未来の分布が現在の状態だけで決まる確率過程）を定めました。Chevyrev–Shen（arXiv 2023、2026 年に Comm. Pure Appl. Math.）は、$T^2$ 上の自明な主束のヤン–ミルズ測度がこの過程の**一意な不**

**変確率測度**であることを示しました（定理 2.16）。系として過程の長時間存在、Wilson・Villain・Manton の格子の極限が同じ測度になること（Villain 作用については Lévy 2006 で既に知られていたと論文は書いています）、ガウス自由場（1-09）とほぼ Lipschitz な剰余への分解が出ます。 既知

この道も可解性から離れてはいません。Chevyrev–Shen は格子のゲージ固定を使い、モーメント評価を二次元の可解性から得ています。論文はこの評価を高次元や二次元のヤン–ミルズ–Higgs 模型に延ばすことを未解決とし、非可換 Higgs 模型の構成は二次元でも未解決と書いています。 既知 2026 年 7 月にはプレプリントが二つ出ています（未査読・要旨による）。Chevyrev–Klose–Mohamed は既存の測度に最適な正則性のゲージ固定の表示を与え、Chhaibi–Dang–Guedes Bonthonneau–Rivière–Tô は Morse 理論（曲面の上の関数の臨界点で曲面を分解する方法）を使って格子を経ずに曲面上の測度を作り、Migdal・Witten・Lévy の公式を再現したとしています。 既知

09

## 二次元から持ち出せるもの、持ち出せないもの

可解性の芯は §02 の数え上げでした。$d$ 次元の格子では格子点あたり、ゲージで消した後に残る辺が $d-1$ 本、面が $\binom{d}{2}$ 枚で、$d=2,3,4$ で 1 と 1、2 と 3、3 と 6 です。三次元以上では面の変数が立方体ごとの拘束（格子の Bianchi 恒等式）で結ばれ、独立にとれません。 既知

| 性質 | 二次元 | 四次元 |
|---|---|---|
| 面積則 | すべての β | 強結合の側だけ（5-02・5-06） |
| 結合定数 | 面積の逆数の次元 | 無次元。β の走り方は、疑いもあり数学的に未解決（Chatterjee 2018）。2026-11-10 に公開された構成は、漸近自由に要る結合の尺度の振る舞いを与える、と委員会は評価した（6-01） |
| 連続の測度 | 平面・閉曲面で構成済み | 未構成（公開された構成も測度は作らない。6-04）。三次元でも $T^3$ 上で未構成（7-06・7-07） |
| 相関長 | 0 | 質量ギャップの本体 |

持ち出せるのは方法の側です。曲線に沿うホロノミーを観測量に取ること、指標による展開（強結合展開の道具）、格子作用の普遍性の証明の型、確率量子化の枠組み。持ち出せないのは、面の独立性、面積だけに依ること、伝播する自由度が無いことです。Jaffe–Witten の問題文が、公理を満たす相互作用するゲージ理論の「唯一の完全な例」として挙げるのも、二次元の可換 Higgs 模型（Brydges–Fröhlich–Seiler）です。 既知

## この章が言えている範囲

| | 内容 | 札 |
|---|---|---|
| 言えている | 平面の格子では面の変数が独立で、Wilson ループは $w(\beta)^{\text{面積}}$（すべての β）。ゲージを固定しない乱数と一致 | 既知 計算 |
| 言えている | 連続極限でホロノミーは熱核 $Q_{g^2 A}$ に従い、誤差は $a^2$ に比例。円周上の最低の励起は円周の長さに比例し、連続極限のハミルトニアンは $-\frac{1}{2}g^2 L_{\text{phys}}\Delta$（式 (7.2) はこの章の導出） | 既知 紙 計算 |
| 言えている | 平面の連続測度の構成と格子の収束（Driver、Gross–King–Sengupta）。閉曲面の上の構成（Sengupta、Lévy）。$T^2$ では Langevin 方程式の過程の一意な不変測度（Chevyrev–Shen） | 既知 |
| 言えている | ゲージ不変な期待値のユークリッド不変性（Driver の系 6.7 から。公理の段の一部） | 既知 |
| 言えていない | この方法が三次元以上に延びること。反射正値性を含む OS 公理全体の検証（Driver・Sengupta の総説・Chevyrev–Shen は主張していない）。非可換 Higgs 模型（二次元でも未構成） | |
| 言えていない | 2026 年のプレプリントの中身（要旨のみ）。書誌のみの文献の本文 | |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 二次元で再帰式が正確・$\langle \chi_q \rangle = d_q e^{-g_q^2 A}$（面積 $A$）・「Wilson の面積則にほかならない」 | 本文 §2 | A. A. Migdal, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 69 (1975) 810–822［英訳 Sov. Phys. JETP 42 (1976) 413–418］ |
| 白色雑音・命題 3.2・定理 6.4・系 6.7（とユークリッド不変性）・定理 7.2 と Dosch–Müller への言及・8.5・8.8・「かなり特異」 | 本文 | B. K. Driver, Comm. Math. Phys. 123 (1989) 575–616 |
| ホロノミーの法則・離散測度・細分不変性・分配関数・定理 4.1（$G$ 単連結・$\gamma \geq 2$）と体積公式の帰属 | 総説の本文 | A. N. Sengupta, arXiv:0707.4136 (2007) |
| 統一とマルコフ性／自明でない束／ホロノミー場 | 要旨 | T. Lévy, Mem. AMS 166 no. 790 (2003)；Probab. Theory Relat. Fields 136 (2006) 171–202；Astérisque 329 (2010) |
| 平行移動の確率微分方程式 | 書誌のみ | L. Gross, C. King, A. Sengupta, Ann. Phys. 194 (1989) 65–112 |
| 無限体積の極限（定理 7.2 がほぼ含まれるもの） | 書誌のみ（Driver の文献 [23] による） | H. G. Dosch, V. F. Müller, Fortschr. Phys. 27 (1979) 547–559 |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 群値の中心極限定理 | 書誌のみ（Driver の定理 8.8 による） | C. Borgs, E. Seiler, Comm. Math. Phys. 91 (1983) 329–380 |
| コンパクトな曲面の上の測度 | 書誌のみ・未確認 | A. N. Sengupta, J. Funct. Anal. 108 (1992)（題・頁は未確認）；Quantum gauge theory on compact surfaces, Ann. Phys. 221 (1993) 17–52；Gauge theory on compact surfaces, Mem. AMS 126 no. 600 (1997)（1993・1997 の題・頁は総説の文献表による） |
| 体積公式とその正確な極限 | 書誌のみ | E. Witten, J. Geom. Phys. 9 (1992) 303–368（式 (4.72)。総説による帰属）；A. N. Sengupta, J. Geom. Phys. 47 (2003) 398–426（総説の定理 4.1 の出典）。関連：E. Witten, Comm. Math. Phys. 141 (1991) 153–209 |
| 可換 Higgs 模型 | 書誌のみ | D. Brydges, J. Fröhlich, E. Seiler, Ann. Phys. 121 (1979) 227–284；Comm. Math. Phys. 71 (1980) 159–205；Comm. Math. Phys. 79 (1981) 353–399 |
| 確率量子化 | 要旨 | Chevyrev, Comm. Math. Phys. 372 (2019)；Chandra–Chevyrev–Hairer–Shen, Publ. Math. IHÉS 136 (2022) |
| 定理 2.16・系・§1.2 の未解決問題・Villain 作用は既知（Lévy 2006）という記述 | 本文 §1・§2 | Chevyrev–Shen, arXiv:2302.12160v3（2023）；Comm. Pure Appl. Math. (2026)（巻・頁は未確認） |
| 2026 年のプレプリント | 要旨（未査読） | Chevyrev–Klose–Mohamed, arXiv:2607.22236；Chhaibi ほか, arXiv:2607.24640 |
| 高次元で非自明な連続極限が無いこと・β の走り | 総説の本文 | S. Chatterjee, arXiv:1803.01950 (2018) |
| 「唯一の完全な例」 | 問題文 §6.4 | Jaffe–Witten, Quantum Yang–Mills theory（Clay） |
| 表・図・補題・式 (7.2) の確認 | 計算 | python3（numpy・scipy）。乱数は SU(2) を四元数で表した熱浴法（6×6・自由境界・ゲージ固定なし・7000 掃引・35 ブロック・種は固定）。図は素の JavaScript |

次に読む章：7-03 スカラー場の構成。

# スカラー場の構成 — φ⁴ が二次元と三次元で公理を満たすまで

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

**この章で分かること** — 六つの段が最初に通った相互作用のある例、$\phi^4_2$・$\phi^4_3$ の構成の筋。二次元では Wick 積で紫外が足り、壁は「下から有界でない」ことだったこと。場の方程式の道と統計力学の道。三次元で要るもう一段の繰り込みの数え方。

**前提となる章** — 7-01 構成的場の理論とは。4-10・1-11・4-04 も参照します。

**先に言うこと** — 1965〜1976 年の既知の構成とその後の別証明の紹介で、証明は筋だけを追います。表の数値は有限の格子と見本の計算で、極限の存在の証明ではありません。四次元のヤン–ミルズについて何かを示すものではありません。

この章の順序

1. なぜスカラー場から始めるか — 目標の文
2. Wick 積：どの冪が確率変数になるか — 計算の表
3. 二次元の壁：下から有界でない — 動く図
4. 二つの道：場の方程式と統計力学
5. 弱結合：クラスター展開・質量ギャップ・散乱
6. 三次元：もう一段の繰り込み — 動く図
7. 別の道でもう一度
8. 寄り道：強結合の $\phi^4_2$ と相転移
9. 四次元へ持ち出せるもの、持ち出せないもの

01

## なぜスカラー場から始めるか

7-01 の地図（六つの段）で、相互作用のある理論として六つの段がすべて閉じた例は、二次元と三次元の $\phi^4$ でした。場は各点に実数を一つ持つだけで、ゲージ対称性も拘束もなく、難しさは点での積（紫外）と体積（赤外）に絞られます。ユークリッドの作用は、質量 $m_0$ の自由場の作用に問題文の式 (3) の多項式を足したものです。

$$S(\phi)=\int\Big(\tfrac12|\nabla\phi|^2+\tfrac12 m_0^2\phi^2+\lambda\phi^4+\tfrac12\sigma\phi^2+c\Big)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

$\lambda>0$ は結合定数、$\sigma=\alpha\lambda+\beta\lambda^2$ と $c=\gamma\lambda+\delta\lambda^2+\varepsilon\lambda^3$ は切断に依存させる相殺項です（JW §6.2）。$\phi^4_d$ の $d$ は時空の次元で、二次元では下に有界な多項式 $P$ に広げた $P(\phi)_2$ も同じ方法で扱われました。目標は問題文の一文です：'For $0<\lambda\ll 1$, one can choose σ(λ), c(λ) so the field theory described by (3) exists, is unique, and has a mass equal to m such that $|\mathrm{m}-\mathrm{m}_0|$ is small'（JW §6.2）。四次元では格子の極限がガウスに潰れます（7-08）。既知

02

## Wick 積：どの冪が確率変数になるか

7-01 の表 1（壊れている場所）で、二次元以上では格子の一点の分散 $c_a=G_a(0)$ が $a\to 0$ で無限大になることを見ました。Wick 積は期待値が 0 になるように低い冪を引いた積で、次の条件で順に決まります（Summers 2016 §3.1）。

$$:\!\phi^0\!:=1,\qquad \frac{\partial}{\partial\phi}:\!\phi^n\!:=n:\!\phi^{n-1}\!:,\qquad \int :\!\phi^n\!:\mathrm{d}\mu_C=0 \tag{2}$$

分散 $c$ の一変数なら $:\!x^2\!:=x^2-c$、$:\!x^4\!:=x^4-6cx^2+3c^2$ で、尺度を合わせた Hermite 多項式です。要は、平均 0・共分散 $C$ のガウス場で

$$\big\langle :\!\phi(x)^n\!:\,:\!\phi(y)^k\!:\big\rangle=\delta_{nk}\,n!\,C(x-y)^n \tag{3}$$

が成り立つことです。均した $:\!\phi^n\!:(f)$ の分散は $n!\iint f(x)f(y)C(x-y)^n$ で、$C$ は近距離で $d=2$ なら $\log(1/|x|)$、$d\ge 3$ なら $|x|^{-(d-2)}$ のように振る舞うので

$$\int_{|x|<1} C(x)^n\,\mathrm{d}^dx<\infty\iff n(d-2)<d \tag{4}$$

です。二次元ではすべての $n$ が有限、三次元では $n\le 2$ だけで、$n=3$ が対数の境目、$n=4$ は $1/a$ で発散します。既知

計算 表 1　格子の $\int C^n\approx a^d\sum_x G_a(x)^n$（m = 1。周期箱の一辺は二次元で 8、三次元で 4）。二次元の最下行は連続・無限体積の $\int_0^\infty 2\pi r\,(K_0(r)/2\pi)^n\,\mathrm{d}r$。

| a | d=2, n=2 | n=3 | n=4 | d=3, n=2 | n=3 | n=4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1/8 | 0.08086 | 0.01571 | 0.00487 | 0.04771 | 0.02128 | 0.03050 |
| 1/16 | 0.08026 | 0.01518 | 0.00453 | 0.04712 | 0.02589 | 0.06776 |
| 1/32 | 0.08007 | 0.01498 | 0.00436 | 0.04678 | 0.03038 | 0.14358 |
| 1/64 | 0.08001 | 0.01491 | 0.00429 | 0.04661 | 0.03482 | 0.29652 |
| 1/256 | 0.07999 | 0.01487 | 0.00425 | – | – | – |
| $\to 0$ | 0.07958 | 0.01484 | 0.00424 | 収束 | 対数 | $\propto$ 1/a |

二次元の列はどれも連続の値に近づきます。三次元では $\int C^2$ が収束し、$\int C^3$ は $a$ を半分にするごとの増分が $0.0044$ 前後に近づき（連続の予想は $\log 2/(16\pi^2) = 0.00439$）、$\int C^4$ はほぼ 2 倍ずつ増えます。二次元の $:\phi^4:(f)$ は確率変数ですが、三次元のそれは違います。この二列は §06 で頂点が二つの図としてもう一度現れます。

03

## 二次元の壁：下から有界でない

$V = \int_\Lambda :\phi^4: \,\mathrm{d}x$（$\Lambda$ は有限の箱）が確率変数でも、測度 $e^{-\lambda V}\mathrm{d}\mu_C / Z$ を作るには $e^{-\lambda V}$ が積分できなければなりません。古典的な $\phi^4$ は非負ですが、Wick 積は違います。$:x^4: = (x^2 - 3c)^2 - 6c^2$ なので

$$:x^4: \;\geq\; -6c^2, \qquad V_a \;\geq\; -6\,c_a^2\,|\Lambda| \tag{5}$$

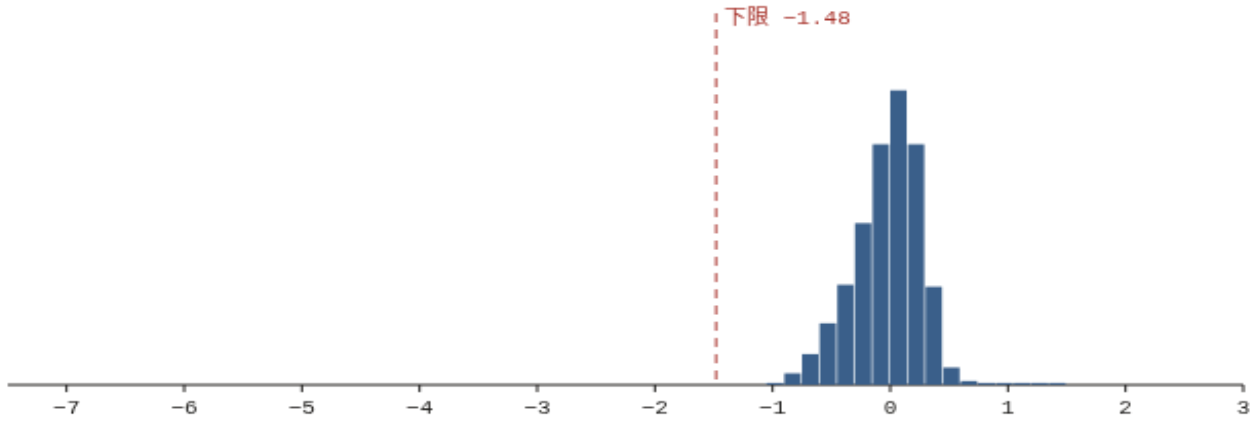
で、二次元では $c_a = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{a} + O(1)$ ですから、下限は $(\log\frac{1}{a})^2$ の速さで $-\infty$ へ逃げます。Jaffe（2000）は、二次元の初期の進展が、空間を円周にした $\phi^4$ のハミルトニアンの安定性（下に有界であること）を示した Nelson の 1965 年の論文に多くを負うとしています。既知

下限が逃げても積分できることを示す議論の筋は三段です。(i) 切断した $V_a$ は式 (5) で下から抑えられる。(ii) $V - V_a$ の分散は表 1 の収束のように $a$ の冪で小さくなる。(iii) ガウス場の 4 次の多項式は、標準偏差が $s$ なら $t$ を超える確率が $\exp(-\mathrm{const}\cdot(t/s)^{1/2})$ 程度。$V < -M$ には $V - V_a$ が大きく負である必要があり、$a$ を $M$ に合わせて選ぶと、その確率は $e^{-pM}$ より速く減ります。結論は（Summers 2016 §3.1）既知

$$e^{-\lambda V} \in L^p(\mathrm{d}\mu_C) \qquad (\text{すべての } p < \infty) \tag{6}$$

ここで $X \in L^p(\mathrm{d}\mu_C)$ は $E[|X|^p] < \infty$、つまり $p$ 乗の期待値が有限という意味です（$E$ は自由場の測度 $\mu_C$ での期待値）。$p = 1$ なら正規化の定数 $Z = E[e^{-\lambda V}]$ が有限で、測度 $e^{-\lambda V}\mathrm{d}\mu_C/Z$ が作れます。

図 1　a を細かくすると、下限 $-6c_a^2$（破線）は左へ逃げるが、二次元では $V_a$ の分布が動かない。三次元に切り替えると広がる




d = 2　a = 1/4　下限 −1.48　標準偏差 0.406　0.1% 点 −0.969　log E[e^(−V)] = 0.0575（見本 20000 本）

計算　この図の数値はこの端末で計算した。一辺 1 の周期箱・m = 2 の格子の自由場の見本 20000 本（三次元の a = 1/64 は 6000 本）で $V_a = a^d \sum_x :\phi_x^4:$ を数えた。横軸は $V_a$、縦軸は密度。

計算　表 2　図 1 の分布（抜粋）。標準偏差は式 (3) から正確に、0.1% 点と $\log E[e^{-V}]$（λ = 1）は見本から（後者の誤差は二次元で ±0.002、三次元で ±0.005〜0.17）。括弧はガウス近似 $\mathrm{Var}(V)/2$。

| d, a | 下限 | 標準偏差 | 0.1% 点 | $\log E[e^{-V}]$ |
|---|---|---|---|---|
| 2, 1/4 | −1.48 | 0.4060 | −0.969 | 0.0575 |
| 2, 1/16 | −3.15 | 0.3860 | −0.991 | 0.0479 |
| 2, 1/64 | −5.37 | 0.3788 | −0.946 | 0.0505 |
| 2, 1/128 | −6.70 | 0.3779 | −0.923 | 0.0500 |
| 3, 1/4 | −5.91 | 0.6806 | −1.944 | 0.176（0.232） |
| 3, 1/16 | −97.20 | 1.3599 | −4.152 | 0.865（0.925） |
| 3, 1/32 | −390.73 | 1.9229 | −5.866 | 1.746（1.849） |
| 3, 1/64 | −1566.46 | 2.7194 | −8.151 | 3.54（3.70） |

二次元では、下限が −1.5 から −6.7 へ下がっても 0.1% 点は −0.9〜−1.0 から動かず、$\log E[e^{-V}]$ は 0.05 前後に落ち着きます。下限は遠くても、そこまで行く確率が極端に小さい、という式 (6) の中身です。三次元では標準偏差が半分ごとに $\sqrt{2}$ 倍、$\log E[e^{-V}]$ がほぼ 2 倍になってガウス近似に近づきます。$1/a$ で増える定数を $\lambda^2$ の次数で引く必要があり、これが問題文の $\delta$ に当たります（§06）。計算

04

## 二つの道：場の方程式と統計力学

最初の構成（Glimm–Jaffe の四部作、1968–1972）は、ミンコフスキー時空で場の方程式を作用素として解く形でした。二次元の方程式は

$$\partial_t^2\phi - \partial_x^2\phi + m_0^2\phi + 4\lambda :\phi^3: = 0, \qquad :\phi^3: = \lim_{\kappa\to\infty}\left(\phi_\kappa^3 - 3c_\kappa\phi_\kappa\right) \tag{7}$$

です（$\phi_\kappa$ はフーリエ成分を $|k|\le\kappa$ で切った場、$c_\kappa\sim\log\kappa$。Jaffe 2000 §3）。空間を関数 $g$ で切った $H(g)=H_0+\lambda\int :\phi(0,x)^4: g\,\mathrm{d}x$ が Fock 空間で本質的自己共役（切断した式から自己共役作用素がただ一つに決まること）・下に有界・最低の固有値が単純であることを示し、信号が光速を超えないことを使って $g\to 1$ でポアンカレ不変な真空を得ます（有限体積の段→無限体積の段。Summers 2016 §2）。表現は Fock 表現と同値でありませんが（4-09 の Haag の定理）、有界な領域に制限すると同値です。既知

1970 年代前半には、Nelson の Markov 場（ここでは名前だけ挙げます）と Osterwalder–Schrader の公理（4-10）で、ユークリッドの測度

$$\mathrm{d}\mu_\Lambda = \frac{1}{Z}\,e^{-\lambda U_\Lambda}\,\mathrm{d}\mu_C, \qquad U_\Lambda = \int_\Lambda :P(\phi):\mathrm{d}^2x \tag{8}$$

として作る道が開きました（式 (6) で意味を持つ）。二次元の格子では、差分の項が隣り合う点の組 $\langle xy\rangle$ について

$$\tfrac12\sum_{\langle xy\rangle}(\phi_x-\phi_y)^2 = \sum_{\langle xy\rangle}\left(\tfrac12\phi_x^2+\tfrac12\phi_y^2\right) - \sum_{\langle xy\rangle}\phi_x\phi_y \tag{9}$$

となり、最後の項は $e^{-S}$ の中で $e^{+\phi_x\phi_y}$ として隣どうしに同じ符号を好ませます。スピンが実数全体を動く強磁性体です（Guerra–Rosen–Simon 1975 の題は 'as classical statistical mechanics'）。そこで相関不等式（GKS 型。隣どうしが同じ符号を好む系で、相関が非負になることを言う不等式）が効き、$P$ が偶多項式から $h\phi$（$h\ge 0$）を引いた形なら、Schwinger 関数は非負で、境界条件を工夫すると箱とともに増えます。一様な上界と合わせれば単調収束で無限体積極限が取れ（無限体積の段）、結合の大きさに制限はありません（Summers 2016 §3.1）が、問題文は相関不等式がスカラーのボソンや可換なゲージ理論に限られがちだとしています（JW §6.1）。反射正値性は極限に引き継がれます（公理の段、7-01）。既知

05

## 弱結合：クラスター展開・質量ギャップ・散乱

一様なギャップの段まで通したのは Glimm–Jaffe–Spencer（1974）です。$\lambda/m_0^2$ が十分小さいとき、クラスター展開で無限体積極限と OS の公理を示し、相関の指数減衰（7-01 の式 (9)）

を得ました。質量作用素 $M = \sqrt{H^2 - P^2}$（$P$ は運動量）については

$$\operatorname{spec} M \subset \{0\} \cup \{m\} \cup [m_1, \infty), \qquad m \to m_0, \quad m_1 \to 2m_0 \quad (\lambda \to 0) \tag{10}$$

が示されています（Summers 2016 §3.1）。0 は真空、孤立した $m$ は一粒子、$m_1$ より上は二粒子以上です。孤立した一粒子があれば Haag–Ruelle の散乱理論（孤立した粒子の状態から、遠い過去と遠い未来の散乱の状態を組み立てる一般論。ここでは名前だけ挙げます）が使え、Osterwalder–Sénéor（1976）は散乱行列が自明でなく、摂動級数がその漸近展開になることを示しました（Summers 2016 §3.1）。一方、存在とギャップの証明に使うクラスター展開は $\lambda$ の冪級数ではなく、$n$ 番目の項が $\lambda^n G_n(\lambda)$（$G_n$ は $\lambda \to 0$ で有界）の形をした収束する展開です（Jaffe 2000 §4）。摂動級数のほうは発散し（4-12）、正確な答えの漸近展開になるだけです。仕組みは 7-04 で扱います。 既知

例：$\lambda = 0$ なら二点関数は $C(x)$ で、遠方で $e^{-m_0|x|}$ のように減衰し、ギャップは $m_0$ です。弱結合の結果は、この隙間が小さな相互作用で潰れないことを言っています。ギャップの出どころは作用に書き込んだ $m_0$ です（§09）。

06

## 三次元：もう一段の繰り込み

何が増えるかは摂動論の図の数え方で見当が付きます（4-03・4-04）。頂点が $n$ 個・外線が $E$ 本の連結な図は、内線が $I = 2n - E/2$ 本、ループが $L = n - E/2 + 1$ 個です。ループの積分は運動量の $d$ 乗、伝播関数は $-2$ 乗を運ぶので、見かけの発散の次数は

$$\omega = dL - 2I = d + (d-4)\,n - \frac{d-2}{2}\,E \tag{11}$$

で、$\omega \geq 0$ が紫外で発散しうる図（$\omega = 0$ は対数）です。頂点が一つの図は自分とつながる線だけでできていて、Wick 積で消えます。

図 2　次元 d を動かすと、発散しうる図の型（色の枠。濃いのは ω > 0、薄いのは ω = 0）が変わる。破線は頂点が一つで Wick 積で消える型、「木」はループの無い図、「一」は連結な図が無い型

| E＼n | n = 1 | n = 2 | n = 3 | n = 4 | n = 5 | n = 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| E = 0 | **ω = 2** | **ω = 1** | **ω = 0** | ω = −1 | ω = −2 | ω = −3 |
| E = 2 | **ω = 1** | **ω = 0** | ω = −1 | ω = −2 | ω = −3 | ω = −4 |
| E = 4 | 木 | ω = −1 | ω = −2 | ω = −3 | ω = −4 | ω = −5 |
| E = 6 | — | 木 | ω = −3 | ω = −4 | ω = −5 | ω = −6 |
| E = 8 | — | — | 木 | ω = −5 | ω = −6 | ω = −7 |

d = 3.00　Wick の後に残る発散の型（n ≥ 2）：3 個

計算 この図の値は式 (11) をその場で計算したもの。表 3 はこの端末の計算と一致する。

計算 表 3　ω ≥ 0 となる型 (n, E) と ω。

| d | 頂点が一つ（Wick 積で消える） | Wick の後に残る型 |
|---|---|---|
| 2 | (1, 0)・(1, 2)：0 | なし |
| 3 | (1, 0)：2、(1, 2)：1 | (2, 0)：1、(2, 2)：0、(3, 0)：0 |
| 4 | (1, 0)：4、(1, 2)：2 | すべての n で E = 0, 2, 4（ω = 4, 2, 0） |

三次元で残る型のうち二つは表 1 の列そのものです。(2, 0) は二つの頂点を四本の線で結んだ真空の泡で $\int C^4$（$1/a$）、(2, 2) は三本の線で結んだ自己エネルギーで $\int C^3$（対数）です。図 2 で $d$ を 2.66 から 2.67 へ動かすと、(2, 0) が発散しうる型に入ります。境目は $d = 8/3$ で、式 (4) の $n = 4$ の境目と一致します。計算

問題文は、二次元では $\alpha, \gamma$ を、三次元では五つすべてを切断に依存させるとしています（JW §6.2）。既知 問題文はどの定数がどの図に当たるかを書いていませんが、$\lambda$ の次数を頂点の数と読むと、$\alpha, \gamma$ は $n = 1$、$\beta, \delta$ は $n = 2$、$\varepsilon$ は $n = 3$ に当たり、表 3 の型の数と合います。計算 Jaffe（2000 §6）も、三次元では Wick 積に加えて、対数で発散する質量の相殺項と、線形と対数で発散する二つの真空のエネルギーの相殺項が要るとしています。$\lambda$ 自身は繰り込まれません。既知

さらに三次元では、Wick 積をとったハミルトニアンが稠密に定義された作用素（どのベクトルにもいくらでも近いベクトルを含む部分空間の上で定義された作用素）にならず、状態ベクトルを切断とともに 0 に向かう定数で掛け直す必要があり（問題文の言う波動関数の繰り込み）、表現は Fock 表現と同値になりません（Jaffe 2000 §6）。Jaffe はこれを、有界な領域では Fock 表現と同値になる二次元（§04）とはまったく違う、としています。制御の道具は Glimm–Jaffe（1973）の位相空間の細胞（位置と運動量の尺度の両方で区切った箱）への局所

化で、ある尺度の評価から二倍の尺度を評価する帰納は繰り込み群の考えにつながります（同。7-05）。その上で Feldman–Osterwalder（1976）と Magnen–Sénéor（1976）が独立に、$\lambda/m_0^2$ が小さいとき切断と体積を外した極限で OS の公理を示しました（Summers 2016 §3.2。前者は題に質量ギャップを掲げる）。$\lambda/m_0^2$ の制限は後に Seiler–Simon（1976）と Park（1977）が別の方法で外し、Burnap（1977）は一粒子状態の存在を示して Haag–Ruelle の散乱理論が使えるようにしました（Summers 2016 §3.2。原論文は書誌のみ）。

既知

07

## 別の道でもう一度

$\phi^4_2$・$\phi^4_3$ はその後も、新しい方法が既知の結果を再現できるかを確かめる例になりました。方法ごとに、出力に含まれる段が違います。Brydges–Fröhlich–Sokal（1983）は格子・Schwinger–Dyson 方程式・相関不等式で、弱結合の存在と非自明性を格子理論の部分列の極限として示しました。確率量子化（7-09）は測度 $e^{-S}$ を

$$\partial_t \phi = -\frac{\delta S}{\delta \phi} + \sqrt{2}\,\xi \qquad (\xi \text{ は時空の白色雑音}) \tag{12}$$

の不変測度（この方程式で時間発展させても分布が変わらない測度）として作ります。Hairer（2014）は正則性構造で、有限体積の $\Phi^4_3$ に対応する確率量子化の方程式 (12) の解を（爆発するかもしれない時刻までの局所解として）作りました。要旨はこれを、その測度に関して対称な自然な Markov 過程を作る問題の解決と述べていますが、本文では解が大域的であることや測度の不変性は示されておらず、期待されるとしています。Gubinelli–Hofmanová（2021）は $\mathbb{R}^3$ 上で、極限点がどれも非ガウスで反射正値性と並進不変性を持つことを示し、要旨は回転不変性とクラスター性を除いて OS の公理を確かめたとしています。有限体積（三次元トーラス）では、測度を確率最適制御で変分的に書く方法もあります（Barashkov–Gubinelli 2020）。なお問題文は、ヤン–ミルズの問題の存在の部分について、コンパクト性による弱い存在だけでは、極限の性質（質量ギャップや公理）を別に示さない限り解答と認めないとしています（JW 脚注 2）。既知

08

## 寄り道：強結合の φ⁴₂ と相転移

飛ばしてよい節です。

二次元の $\phi^4$ は正の $\lambda$ のすべてで存在しますが、$\lambda \gg 1$ では解が二つに分かれます（JW §6.3）。並べ直すと二つの谷を持つ形

$$\lambda'\Big(\phi^2-\frac{1}{\lambda'}\Big)^2+\tfrac{1}{2}\sigma'\phi^2+c' \qquad (\lambda'\ll 1) \tag{13}$$

になり、谷ごとにクラスター展開を組んで谷の間を行き来する確率が小さいことを示すと、$\phi\to-\phi$ の対称性が破れた二つの相が得られます（Glimm–Jaffe–Spencer 1976）。臨界値 $\lambda_c$ に下から近づくとギャップは単調かつ連続に 0 まで下がり、その近くは 'practically nothing has been proved' とされます（JW §6.3）。ギャップは結合を変えれば閉じうる量で、4-11 の言葉では相関長が無限大に向かう点が臨界点です。式 (9) の見方を押し進めると、格子と有限体積で切断した $\phi^4_2$ はイジングのスピンの集まりで近似できます（Simon–Griffiths 1973）。この仕事は Lee–Yang の定理（分配関数の零点の位置から、外場があると相転移が起きないことを導く定理）を $\phi^4_2$ に広げてもいて、そこから外場 $h\neq 0$ を加えた模型の真空が一意であることが従います（Summers 2016 §3.1）。イジング模型のギャップは 2-09 にあります。既知

09

## 四次元へ持ち出せるもの、持ち出せないもの

既知 表 4　四つの理論（結合の質量次元は 7-01 の式 (7)、発散の型は表 3）。

| | $\varphi^4_2$ | $\varphi^4_3$ | $\varphi^4_4$ | ヤン–ミルズ（四次元） |
|---|---|---|---|---|
| 結合の質量次元 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 発散しうる図の型（$\varphi^4$ は Wick の後） | なし | 3 | E = 0, 2, 4 の三種がすべての n に（相殺項の種類は有限） | すべての次数に現れる（相殺項の種類は有限。4-04） |
| 短距離での結合 | 効きが弱い（超繰り込み可能） | | 漸近自由でない | 弱くなる（4-06） |
| ギャップの出どころ | 作用の質量 $m_0$ | | — | 作用に質量が無い |
| 構成 | 公理・ギャップ・散乱 | 公理・ギャップ・一粒子状態（Summers §3.2） | 格子の極限はガウス（7-08） | 2026 年より前は未（7-07）。2026-11 に公開された構成は、Wightman の公理を満たす理論の構成まで（6-01）。質量ギャップは示されていない |

持ち出せるものは四つです。(1) 相殺項の形を摂動論から読み、切断に依存させること。(2) 尺度ごとの評価を積み上げること（位相空間の細胞は繰り込み群の段の列になった。7-05）。(3) 反射正値性のような不等式の性質は極限に引き継がれること。(4) 弱結合の展開で相関の指数減衰を示せば、それがギャップになること。

持ち出せないものの中心はギャップの出どころです。$\phi^4_2$・$\phi^4_3$ では作用に $m_0>0$ を書き込み、$|m-m_0|$ が小さいことを示しました。ヤン–ミルズの作用には質量の項が無く、期待されているギャップの尺度は $e^{-\mathrm{const}/g^2}$ の形で結合に依存し、$g$ の冪には展開できません（4-07）。弱結

合の展開の足場になる質量が、はじめから無いのです。加えて四次元では発散する図がすべての次数に現れ、場は接続でゲージ不変性を保たねばなりません（5-01）。既知 物理

一方で問題文は、四次元の $\phi^4$ が漸近自由でないことを自明性の証拠に挙げ、短距離で結合が弱くなるヤン–ミルズを四次元の構成的場の理論の自然な候補としています（JW §6.2）。止まる場所は 7-10 で見ます。

---

## この章が言えている範囲

| | 内容 |
|---|---|
| **言えている** | 格子の $\int C^n$ は二次元の n = 2, 3, 4 で収束、三次元では n = 2 が収束・n = 3 が対数・n = 4 が 1/a で増える（a ≥ 1/256・1/64） 計算 |
| **言えている** | 二次元では下限 $-6c_a^2$ が下がっても $V_a$ の左の裾と $\log E[e^{-V_a}]$ は動かず、三次元では $\log E[e^{-V_a}]$ が 1/a で増える（a ≥ 1/128・1/64） 計算 |
| **言えている** | Wick の後に残る発散しうる図の型は d = 2 でなし、d = 3 で三つ、d = 4 では E = 0, 2, 4 の三種がすべての n に現れる。三次元の三つは、定数の次数を頂点の数と読むと問題文と Jaffe（2000）の相殺項の記述に合う 計算 既知 |
| **言えている** | 弱結合の $\varphi^4_2$・$\varphi^4_3$ は公理と質量ギャップを満たし、強結合の $\varphi^4_2$ は二つの相を持つ（問題文と総説による） 既知 |
| **言えていない** | 式 (6)・クラスター展開・位相空間の細胞の証明（筋のみ。原論文は書誌のみ） |
| **言えていない** | 表 1・表 2 の数値からの極限の存在（有限の a と有限の見本の計算） |
| **言えていない** | 臨界点の近く、確率量子化の道での回転不変性とクラスター性（その後の文献は追っていない） |
| **言えていない** | 確率量子化の道での大域解・不変性（Hairer 2014 の後の文献は追っていない） |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 問題文 §6.1–6.3・脚注 2 | 一次資料（本文で確認） | A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*, Clay Mathematics Institute の公式問題文（2000） |
| 歴史・式 (7)・三次元の相殺項と表現・位相空間の細胞 | 総説（本文で確認） | A. Jaffe, Constructive quantum field theory, in *Mathematical Physics 2000*, World Scientific (2000) |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 式 (2)・(6)・(8)・(10)、段取り、相関不等式、§3.1 の散乱と Lee–Yang の定理の拡張、§3.2 の制限の除去と一粒子状態 | 総説（本文で確認） | S. J. Summers, A Perspective on Constructive Quantum Field Theory, arXiv:1203.3991（v2, 2016） |
| 二次元の原論文 | 書誌のみ（問題文・総説の文献表） | Nelson, 1965 年の会議の会議録 *Mathematical Theory of Elementary Particles*（R. Goodman・I. Segal 編、MIT Press 1966）。Glimm–Jaffe, Phys. Rev. 176 (1968) 1945–1951; Ann. Math. 91 (1970) 362–401; Acta Math. 125 (1970) 203–267; J. Math. Phys. 13 (1972) 1568–1584。Nelson, Proc. Sympos. Pure Math. XXIII, AMS (1973) 413–420。Osterwalder–Schrader, Comm. Math. Phys. 31 (1973) 83–112; 42 (1975) 281–305。Guerra–Rosen–Simon, Ann. Math. 101 (1975) 111–259。Glimm–Jaffe–Spencer, Ann. Math. 100 (1974) 585–632。Osterwalder–Sénéor, Helv. Phys. Acta 49 (1976) 525–535 |
| 三次元の原論文 | 書誌のみ | Glimm–Jaffe, Fortschr. Phys. 21 (1973) 327–376。Feldman–Osterwalder, Ann. Phys. 97 (1976) 80–135。Magnen–Sénéor, Ann. Inst. H. Poincaré A 24 (1976) 95–159。Seiler–Simon, Ann. Phys. 97 (1976) 470–518。Park, J. Math. Phys. 18 (1977) 354–366。Burnap, Ann. Phys. 104 (1977) 184–196 |
| 別の構成 | Brydges–Fröhlich–Sokal は書誌と要旨の要約のみ。Hairer は要旨と arXiv 版 v4 の本文（Remark 1.18）、他は要旨で確認 | Brydges–Fröhlich–Sokal, Comm. Math. Phys. 91 (1983) 141–186。Hairer, Invent. Math. 198 (2014) 269–504, doi:10.1007/s00222-014-0505-4, arXiv:1303.5113。Barashkov–Gubinelli, Duke Math. J. 169 (2020) 3339–3415, arXiv:1805.10814。Gubinelli–Hofmanová, Comm. Math. Phys. 384 (2021) 1–75, arXiv:1810.01700 |
| 相転移 | 書誌のみ | Glimm–Jaffe–Spencer, Ann. Phys. 101 (1976) 610–630, 631–669。Simon–Griffiths, Comm. Math. Phys. 33 (1973) 145–164。臨界への減少（JW §6.3 の文献）：Glimm–Jaffe, Phys. Rev. D 10 (1974) 536–539。Guerra–Rosen–Simon, Comm. Math. Phys. 41 (1975) 19–32。McBryan–Rosen, Comm. Math. Phys. 51 (1976) 97–105 |
| 四次元の $\varphi^4$ | 書誌のみ（7-08 で扱う） | Aizenman–Duminil-Copin, Ann. of Math. 194 (2021) 163–235, arXiv:1912.07973 |
| 表 1〜3・図 1 | 計算 | この端末の Python（numpy・scipy）：`wick_powers.py`・`wick_mc.py`（FFT で周期格子の自由場を生成、乱数の種は固定。(d, a) ごとに分けて走らせ、各 5 分以内。最も重い三次元の a = 1/64 で約 3 分 40 秒）・`fig_data.py`・`power_count.py` |
| 図 1・図 2 | 図 | canvas・SVG と素の JavaScript。図 1 は表 2 の見本の度数（密度を 0.01 刻み）、図 2 は式 (11) を計算 |

次に読む章：7-04 クラスター展開（§05 で使った道具の仕組み）。

# クラスター展開 — 弱く結びついた小さな塊に分けて、対数を収束する和に書き直す道具

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

**この章で分かること** — 分配関数の対数を「つながった塊（クラスター）」の和に書く式と、その収束条件。収束すれば無限体積極限・解析性・相関の指数減衰が一度に出ること。連続の場も立方体ごとに切り離せること。

**前提となる章** — 7-03。7-01 の無限体積の段と一様なギャップの段、4-11、1-08（ガウス測度）も使います。グラフの言葉はその場で定義します。

**先に言うこと** — 小さな径数（弱い結合・高温・格子の強結合）があるときの道具で、四次元のヤン–ミルズの無限体積極限とギャップには届いていません（2026-11-10 に公開された構成の無限体積の極限は、展開ではなくコンパクト性による体積の部分列です。12-05）。計算は一次元の模型と小さなグラフについてのものです。

この章の順序

1. 何のための道具か — 独立なら対数は和。弱い結びつきを補正として足し込む
2. いちばん小さい例：一次元の剛体格子気体 — 係数・収束半径 1/4・負の活量の側の特異点（計算の表）
3. ポリマー模型 — 相容れない塊の気体という共通の形
4. 対数を取る：Ursell 関数と連結グラフ — 連結なクラスターだけが残る
5. なぜ収束しうるか：打ち消し合いと木 — 符号が打ち消し合い、木の数だけが残る（動く図）
6. 収束の判定条件 — Kotecký–Preiss などの不等式と、保証される範囲（動く図）
7. 寄り道：確率論の局所補題と同じ不等式 — Lovász の局所補題と独立集合多項式の零点
8. 展開から出るもの：無限体積・解析性・指数減衰 — 相関の減衰率がこの模型の「質量ギャップ」

9. 連続の場へ：立方体に切って補間で切り離す — 立方体の塊の気体に書き直す
10. ゲージ場での使い道と限界 — 強結合の側で働き、四次元の赤外には届かない

---

01

## 何のための道具か

無限体積の段と一様なギャップの段で要るのは、箱の大きさに依らない評価と、遠く離れた量がほぼ独立になることでした（7-01 の式 (9)）。問題文は、摂動級数はたいてい発散するので「cluster expansions」と総称される展開法が発達したとし、'Refined estimates yield the rate of exponential decay of Green's functions, magnitude of masses, ...' と書いています（JW §6.1）。既知

芯は一つです。区画どうしが独立なら、分配関数は積、対数は和です。

$$Z_\Lambda = \prod_j Z_j \quad \Longrightarrow \quad \log Z_\Lambda = \sum_j \log Z_j \tag{1}$$

和なら体積当たりの量は箱に依らず、遠くの区画は効きません。実際の区画は弱く結びついており、クラスター展開はその結びつきを「つながった区画の組」ごとの補正として足し込み、和の収束を示します。比喩で言えば、ほとんどぶつからない薄い気体です。正確には、(i) $n$ 個をつなぐ補正が小さな数の $n$ 乗程度、(ii) つなぎ方の数が $n!$ で割って指数関数程度（§05）の二つが要ります。

**例：**区画が「空」か「粒子一つ（重み $z$）」で独立なら $Z = (1+z)^N$。$\log Z/N = z - \frac{z^2}{2} + \cdots$ は $|z| < 1$ で収束し、$Z = 0$ となる $z = -1$ で止まります。級数の届く範囲は、複素数の $z$ で分配関数が 0 になる場所が決めます。

02

## いちばん小さい例：一次元の剛体格子気体

章を通して使う例です。点 $x = 1, \dots, N$ に粒子を置き（$n_x \in \{0,1\}$）、隣どうしの同時占有を禁じ（**剛体の反発**）、粒子一つに重み $z$（**活量**）を付けます。

$$\Xi_N(z) = \sum_{\substack{n \in \{0,1\}^N \\ n_x n_{x+1} = 0}} z^{n_1 + \cdots + n_N} \tag{2}$$

点 $N$ と点 $1$ も隣どうしとみなして輪にすると、転送行列 $T=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{z}\\ \sqrt{z} & 0\end{pmatrix}$ で $\Xi_N=\operatorname{tr}T^N$ と書けます（転送行列は 2-08 §03。イジング模型の例は 2-09、格子ゲージでは 5-03）。成分は $T_{nn'}=z^{(n+n')/2}$（$n,n'\in\{0,1\}$。ただし $n=n'=1$ だけ $0$）です。だから $\operatorname{tr}T^N=\sum_{n_1,\dots,n_N}\prod_{x=1}^{N}T_{n_x n_{x+1}}$（$n_{N+1}=n_1$）では、各 $n_x$ の重みを半分ずつ二回拾って $z^{n_x}$ になり、隣どうしの同時占有は $0$ で消えます。これは輪の上の式 (2) そのものです。固有値 $\lambda_\pm=\tfrac12(1\pm\sqrt{1+4z})$ の大きいほうが残ります。次の $p(z)$ を**圧力**と呼びます（物理の圧力に逆温度を掛けたもので、体積当たりの log 分配関数です）。

$$p(z)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log\Xi_N=\log\frac{1+\sqrt{1+4z}}{2}=\sum_{n\ge1}b_n z^n,\qquad b_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\binom{2n-1}{n}\tag{3}$$

計算 表 1　係数 $b_n$（有理数の級数演算で $n\le24$ まで閉じた式と一致）。

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 6 | 20 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $b_n$ | -3/2 | 10/3 | -35/4 | -77 | -3.4×10⁹ | -8.1×10³² |
| $\lvert b_n/b_{n-1}\rvert$ | 1.500 | 2.222 | 2.625 | 3.056 | 3.705 | 3.901 |

比は $4$ に近づき、収束半径は $1/4$。べき級数の収束半径は、関数が複素平面で解析的でなくなる点のうち、原点に最も近いものまでの距離です（複素解析の定理）既知。ここでその点は、根号の中が $0$ になって固有値が重なる $z=-1/4$ です。$z>0$ に相転移は無いのに、級数は $1/4$ の先へ進めません。**展開の届く範囲は、物理的でない負の活量の側の特異点で決まります**。長さ $n$ の鎖の $\Xi$ の零点で原点に最も近いものは $-1/(4\cos^2\frac{\pi}{n+2})$（Scott–Sokal 2005, Ex. 3.2）で、$n=5,10,20$ で $-0.3080,-0.2679,-0.2552$ です。計算

## 03 ポリマー模型

構造を抜き出します。有限の塊（**ポリマー**）$\gamma$ の集まり $\mathcal{P}$、**相容れない**という関係 $\gamma\not\sim\gamma'$（重なる・接するなど。自分とも相容れない）、複素数の活量 $z_\gamma$ を用意し、どの二つも相容れる組だけを数えます。

$$\Xi_\Lambda=1+\sum_{n\ge1}\frac{1}{n!}\sum_{(\gamma_1,\dots,\gamma_n)\in\Lambda^n}z_{\gamma_1}\cdots z_{\gamma_n}\prod_{j<k}\mathbf{1}\{\gamma_j\sim\gamma_k\}\tag{4}$$

$\Lambda$ は有限の集まり、$\mathbf{1}\{\cdot\}$ は条件が真なら 1、偽なら 0。この形式は Gruber–Kunz（1971）が導入したとされます（Fernández–Procacci 2007 §1）。既知

**例：** §02 はポリマー＝占有された一点、相容れない＝同じ点か隣。外場なしの高温のイジング模型（2-08）では、ポリマーは各点の次数が偶数の辺の連結な集まり、頂点を共有すれば相

容れない、活量は $(\tanh\beta)^{\text{辺の数}}$ です。格子ゲージの強結合（5-04）はプラケットの連結な集まり、弱結合の連続の場（§09）は立方体の連結な集まりです。塊が小さい理由が、展開の小さな径数になります。

04

## 対数を取る：Ursell 関数と連結グラフ

Mayer の名で呼ばれる手口（Mayer 1937 に遡るとされる）では、$\mathbf{1}\{\gamma_j \sim \gamma_k\} = 1 + \zeta_{jk}$（相容れなければ $-1$、相容れれば $0$）と書いて積を展開します。各項は点 $1,\dots,n$ の上の**グラフ**（点と、点の対を結ぶ辺）に対応し、対数では連結なグラフだけが残ります。理由は、グラフの重みが連結成分ごとの重みの積に分かれることです。点を連結成分に分ける分け方で整理すると、$1/n!$ を付けて全部の $n$ で足した和どうしで、**全グラフの和 = $\exp$（連結なグラフの和）**（**指数公式**）が成り立ち、対数を取れば連結なものだけが残ります。 既知

$$\log \Xi_\Lambda = \sum_{n\ge 1} \frac{1}{n!} \sum_{(\gamma_1,\dots,\gamma_n)} \varphi^{\mathrm{T}}(\gamma_1,\dots,\gamma_n)\, z_{\gamma_1}\cdots z_{\gamma_n}, \qquad \varphi^{\mathrm{T}} = \sum_{\substack{G\subset G_\gamma \\ \text{連結・全域}}} (-1)^{|E(G)|} \tag{5}$$

$G_\gamma$ は $\gamma_j \not\sim \gamma_k$ のとき $j,k$ を結んだグラフ、和は全部の点を使う連結な部分グラフについて、$|E(G)|$ は辺の数です（$n=1$ では $1$）。$\varphi^{\mathrm{T}}$ は **Ursell 関数**（場 $\phi$ とは無関係）で、$G_\gamma$ が連結でなければ $0$。寄与するのは相容れなさでつながった組、つまり**クラスター**だけです（Fernández–Procacci (2.3)(2.4)。まだ形式的な級数）。

**例：** §02 では並進で平均して $b_n = \frac{1}{n!}\sum_{x_2,\dots,x_n} \varphi^{\mathrm{T}}(0,x_2,\dots,x_n)$。$n=2$ では $x_2 = -1, 0, 1$ がどれも辺一本で $-1$、よって $b_2 = -3/2$。配置では禁じられた $(0,0)$ が対数には現れます。$n \le 6$ まで総当たりで足すと表 1 と有理数で一致しました。 計算

05

## なぜ収束しうるか：打ち消し合いと木

式 (5) の和は巨大です。どの二つも相容れないとき $G_\gamma$ は**完全グラフ** $K_n$（全部の対を結ぶ）で、連結な全域部分グラフは全グラフとほぼ同数あり、$\pm 1$ のまま残れば $n!$ で割っても収束しません。ところが和は打ち消し合い、$(-1)^{n-1}(n-1)!$ だけが残ります。

計算 表 2　$K_n$（$n \le 6$ は総当たり、$n = 10$ は漸化式）。

| $n$ | 連結な全域部分グラフ | 全域木 $n^{n-2}$ | 交代和 |
|---|---|---|---|
| 4 | 38 | 16 | −6 |

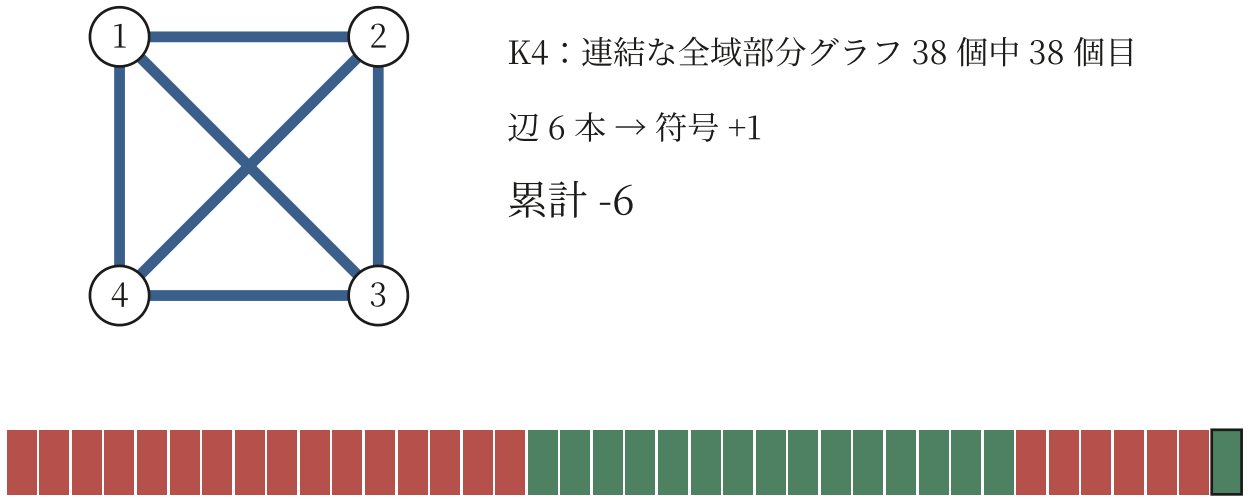
| $n$ | 連結な全域部分グラフ | 全域木 $n^{n-2}$ | 交代和 |
|---|---|---|---|
| 10 | 34 496 488 594 816 | 100 000 000 | −362 880 |

仕組みは Penrose（1967）によります。連結な全域部分グラフを**全域木**（全点をつなぐ輪の無い部分グラフ）$T$ ごとの区間 $[T, R(T)]$ に分けると、区間内の符号の和は $\prod_{e \in R(T)\setminus T}(1-1)$ の因子で消え、$R(T)=T$ の木（Penrose 木）だけが残ります（Fernández–Procacci, Prop. 5）。既知

$$\varphi^{\mathrm{T}}(\gamma_1,\dots,\gamma_n) = (-1)^{n-1}\,\#\{\text{Penrose 木}\} \quad\Longrightarrow\quad \left|\varphi^{\mathrm{T}}\right| \le \#\{G_\gamma \text{ の全域木}\} \tag{6}$$

Penrose 木の数は $n \le 6$ の総当たりで交代和の絶対値と一致しました計算。全域木は $K_n$ でも $n^{n-2}$ 個で、$n^{n-2}/n!$ は $e^n$ 程度。**$n!$ で割って残るのが指数関数だけ**なので、活量が小さければ (5) は収束しえます。和を初めから木や森で書く恒等式は、Brydges–Federbush（1978）から Brydges–Kennedy（1987）の森の公式へ整えられました（Abdesselam–Rivasseau 1994）。

図 1　グラフを選んで「動かす」と、連結な全域部分グラフを辺の少ない順に数え、符号 $(-1)^{|E|}$ の累計が変わる（帯：緑 +1・赤 −1）




計算 この図の数値はこの端末で計算した。$K_4$ の累計は辺 3 本（全域木 16 個）で −16、4 本（15 個）で −1、5 本（6 個）で −7、6 本で −6。$C_4$ は −3、$P_4$ は −1、$K_3$ は +2。

06

## 収束の判定条件

木の評価を足し上げると条件が出ます。広く使われる Kotecký–Preiss（1986）の条件は、各塊に「予算」$a(\gamma) \ge 0$ を割り当てて

$$\sum_{\gamma' \not\sim \gamma} |z_{\gamma'}|\, e^{a(\gamma')} \;\le\; a(\gamma) \qquad (\text{すべての } \gamma) \tag{7}$$

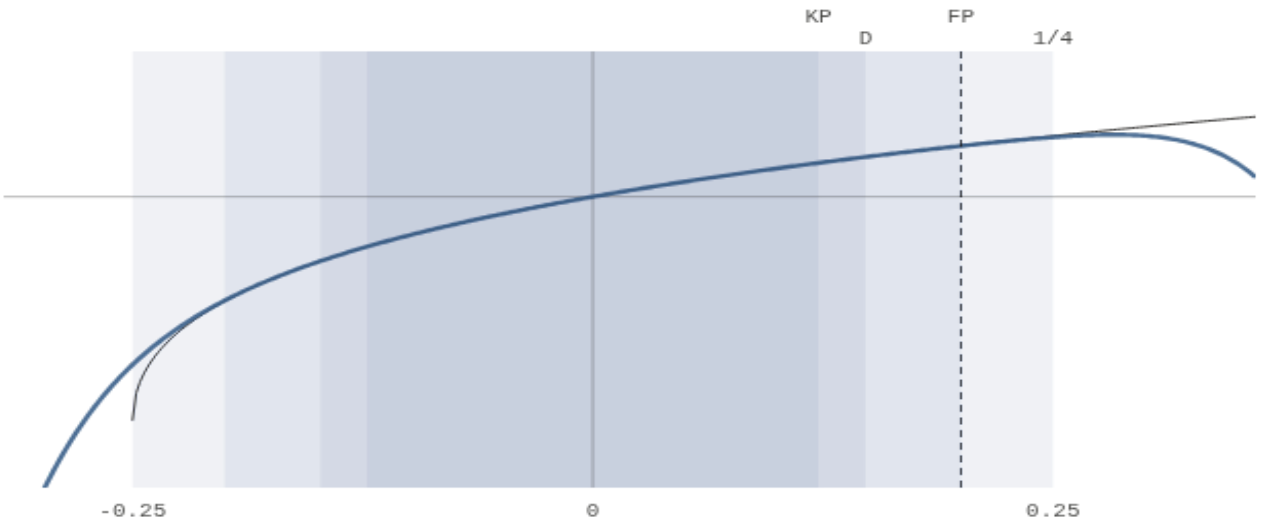
とするもので（左辺は $\gamma$ 自身も含む）、成り立てば、$\log \Xi_\Lambda$ を $z_{\gamma_0}$ で微分した級数（塊 $\gamma_0$ を含むクラスターの和。ポリマー一つ当たりの和）は、各項を絶対値に替えても $\Lambda$ によらず $e^{a(\gamma_0)}$ 以下です（Fernández–Procacci (2.6)(2.7)(2.14)(2.15)）。$\log \Xi_\Lambda$ そのものは体積とともに大きくなりますが、この一つ当たりの上界が $\Lambda$ によらないので、(5) は $\Lambda$ に一様な評価つきで絶対収束します（同 (2.7) の直後の文）。塊 $\gamma_0$ を除いたときの対数の変化も $|z_{\gamma_0}|e^{a(\gamma_0)}$ 以下です（同 (2.11)）。「相容れない相手の重み付きの活量の合計が、自分の予算に収まる」と読みます。同じ型の Dobrushin（1996）・Fernández–Procacci（2007）の条件は、順に適用範囲が広がります。 既知

計算 表 3　§02 の気体（最大次数 $\Delta = 2$）で保証される範囲。数値的な最大化が Fernández–Procacci Table 1 の式と一致。

| 条件 | この気体での形 | 保証される $\lvert z\rvert$ |
|---|---|---|
| Kotecký–Preiss | $3\lvert z\rvert e^{a} \le a$ | $1/(3e) = 0.1226$ |
| Dobrushin | $\lvert z\rvert \le \mu/(1+\mu)^3$ | $4/27 = 0.1481$ |
| Fernández–Procacci | $\lvert z\rvert \le \mu/(1+3\mu+\mu^2)$ | $1/5 = 0.2000$ |
| 正確な半径 | 式 (3) | $1/4 = 0.2500$ |

$1+3\mu+\mu^2$ は相容れない三点のうち互いに相容れる部分集合（空・一点三つ・$\{x-1, x+1\}$）の数え上げで、$(1+\mu)^3$ はそうでない組も数える分だけ粗くなります。最後の行の $1/4$ は、各点の次数が $\Delta$ の無限の木で正確な値 $(\Delta-1)^{\Delta-1}/\Delta^{\Delta}$（Shearer／Scott–Sokal。Fernández–Procacci Table 1 の星印）に $\Delta = 2$ を入れたものです。$\Delta = 2$ のこの木は整数の直線そのものなので、式 (3) の $1/4$ と一致します。上の三つの条件はどれも**十分条件**です。

図 2　項の数 $N$ を増やすと、級数 (3) の部分和（太線）は $|z| < 1/4$ で正確な圧力（細線）に重なり、外では暴れる（帯は各条件の範囲）




N = 10, z = 0.200：部分和 0.15732、差 3.86e-4

計算 この図の数値はこの端末で計算した。$|S_N(z)-p(z)|$ は $N=5,20,40$ で、$z=0.2$ なら 3e−3・1.5e−5・6.4e−8、$z=0.3$ なら 0.029・0.063・0.88。

07

## 寄り道：確率論の局所補題と同じ不等式

飛ばしてよい節です。

組合せ論の **Lovász の局所補題**（Erdős–Lovász 1975）は、「悪い事象」$A_x$ がどれも起きない確率が正になる条件です。事象どうしの依存の仕方をグラフで表します。点 $x$ に隣り合う点の集合を $\Gamma(x)$ と書きます。

**依存グラフ：**各 $A_x$ が、$x$ とその隣 $\Gamma(x)$ 以外の事象たち（全体をまとめたもの）と独立なとき、このグラフを依存グラフと呼びます。定理は次の形です（Scott–Sokal 2005, Thm 1.1。$A_x^c$ は $A_x$ が起きないという事象）。

$$0\le r_x<1,\quad \mathbb{P}(A_x)\le r_x\prod_{y\in\Gamma(x)}(1-r_y)\ (\text{すべての } x)\ \Longrightarrow\ \mathbb{P}\Big(\bigcap_x A_x^c\Big)\ge\prod_x(1-r_x)>0 \tag{8}$$

Scott–Sokal は次の同値を示しました。依存グラフ $G$ を持ち $\mathbb{P}(A_x)\le p_x$ となる**どの**事象の族でも局所補題の結論（どれも起きない確率が正）が成り立つことは、$G$ の上の剛体気体の分配関数が、半径 $p_x$ の多重円板（すべての $x$ で $|z_x|\le p_x$ となる複素数の組 $(z_x)$）で 0 にならないことと同値です。この分配関数は、互いに隣り合わない点の集合 $S$ についての和 $\sum_S\prod_{x\in S}z_x$（**独立集合多項式**。点ごとに活量を変えた多変数版）で、$G$ が道なら §02 の気体になります。局所補題の通常の証明は、Shearer（1985）が暗に、Dobrushin が明示的に見つけた「零点が無いこと」の帰納法と対応する、とも示しています（要旨）。

$r=\mu/(1+\mu)$ と置けば (8) の仮定は表 3 の Dobrushin の形で、左右にだけ依存する事象の列なら $p\le 4/27$ で十分です。最良は $1/4$ で、上からは Scott–Sokal §8.4 の Example 8.1（有限の道の零点が $-1/4$ に近づく）、下からは表 3 の正確な半径（Shearer の値 $(\Delta-1)^{\Delta-1}/\Delta^{\Delta}$ に $\Delta=2$）が押さえます。教科書でよく見る対称版もここから出ます。各事象が高々 $d$ 個の他の事象に依存し、確率がどれも $p$ 以下のとき、(8) で $r_x=1/(d+1)$ と置くと $r(1-r)^d=\frac{1}{d+1}\big(\frac{d}{d+1}\big)^d\ge\frac{1}{e(d+1)}$ なので、$ep(d+1)\le 1$ で十分です。$d=2$ では $1/(3e)$、表 3 の Kotecký–Preiss の値です。こうして表 3 の四つの値は、局所補題の側にもすべて現れます。既知

08

## 展開から出るもの：無限体積・解析性・指数減衰

条件 (7) が体積に依らず成り立つと三つが出ます。(i) 圧力の極限が存在し、円板の中で解析的。(ii) 箱の大きさを感じるのは縁に触れるか一周するクラスターだけ。(iii) 打ち切り相関に

は $x$ と $y$ の両方に触れる、つまり相容れなさの鎖で $x$ から $y$ までつながるクラスターだけが残り、輪ごとに $|z|$ 程度が掛かる（Ueltschi 2004, Thm 3）。既知

$$\left|\langle A_x B_y\rangle - \langle A_x\rangle\langle B_y\rangle\right| \;\le\; C\,e^{-m|x-y|} \tag{9}$$

**例：** §02 の気体を 14 点の輪で数えると、$\log \Xi_{14}/14$ の係数は $n \le 13$ で $b_n$ と一致し、$n = 14$ でずれました（一周には 14 点全部が要る）。補正は $\frac{1}{N}\log\left(1 + (\lambda_-/\lambda_+)^N\right)$ で、小さい $z$ では $\lambda_-/\lambda_+ \approx -z$ なので $(-z)^N/N$ 程度です（$n = 14$ の係数のずれはちょうど $1/14$）。密度の打ち切り相関は $(\lambda_-/\lambda_+)^{|x-y|}$ に比例し、減衰率は $m(z) = \log(\lambda_+/|\lambda_-|)$ です。計算

計算 表 4　減衰率 $m(z)$ と、鎖からの見積もり $\log(1/|z|)$。

| $z$ | −0.249 | −0.1 | 0.01 | 0.25 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $m(z)$ | 0.1267 | 2.0634 | 4.6249 | 1.7627 | 0.9624 |
| $\log(1/\lvert z\rvert)$ | 1.3903 | 2.3026 | 4.6052 | 1.3863 | 0 |

小さい $z$ では $m \approx \log(1/z)$ で鎖の絵が当たり、$z \to -1/4$ で $m \to 0$（半径を決めた特異点で減衰が止まる）。$z = 1$ は半径の外でも $m > 0$：収束は十分条件です。

$m(z)$ は転送行列の固有値の比、この模型の「質量ギャップ」です（7-01 の一様なギャップの段・4-11）。場の理論でも、時間方向の打ち切り相関が体積に一様に $e^{-mt}$ で減衰し、その減衰が示せる観測量から作ったベクトル $\psi$（真空の成分を引いたもの）が、真空と直交する部分空間で稠密なら、OS の再構成（4-10）のハミルトニアン $H$ は $(0, m)$ にスペクトルを持ちません。既知

道具は**スペクトル測度**です。$\psi$ ごとに $\langle \psi, e^{-tH}\psi\rangle = \int e^{-t\lambda}\,\mathrm{d}\mu_\psi(\lambda)$ となる $[0,\infty)$ 上の測度 $\mu_\psi$ があります（1-10 のスペクトル定理。固有ベクトルの基底 $e_k$ があるなら、$\mu_\psi$ は各固有値 $\lambda_k$ に重み $|\langle e_k, \psi\rangle|^2$ を置くもの）。$\int e^{-t\lambda}\mathrm{d}\mu_\psi \le Ce^{-mt}$ が全ての $t$ で成り立てば、$t \to \infty$ を見て $\mu_\psi$ は $\lambda < m$ に重みを置けません。これが稠密な $\psi$ で言えるので、$(0, m)$ にスペクトルが残りません。逆向きは問題文 §5 の式 (2) です。

09

## 連続の場へ：立方体に切って補間で切り離す

連続の場では自由場の共分散 $C(x, y)$ が離れた点も結びます。箱を単位立方体 $b_i$（指示関数 $\chi_i$）に切り、立方体をまたぐ部分に $s_{ij} \in [0, 1]$ を掛けます。

$$C(\mathbf{s})(x, y) = \sum_i \chi_i(x) C(x, y) \chi_i(y) + \sum_{i \ne j} s_{ij}\,\chi_i(x) C(x, y) \chi_j(y), \qquad s_{ij} = s_{ji} \tag{10}$$

$s$ が全部 1 なら元の共分散、全部 0 なら立方体ごとに独立です（Abdesselam–Rivasseau 1994 (V.A.5)）。間を Taylor の公式でつなぎます（同 (III.1)）。式 (11) の添字 $\ell$ は立方体の対 $\{i,j\}$ を走り、$s_\ell = s_{ij}$ です。$f(\mathbf{s})$ は共分散を $C(\mathbf{s})$ にしたときの分配関数、$I$ は対の集まり、$\psi_I(h)$ は $\ell \in I$ で $s_\ell = h_\ell$、$\ell \notin I$ で $s_\ell = 0$ とした点です。

$$f(1,\dots,1) = \sum_{I \subset \{\text{対}\}} \prod_{\ell \in I} \int_0^1 \mathrm{d}h_\ell \, \Big( \prod_{\ell \in I} \frac{\partial}{\partial s_\ell} \Big) f\big(\psi_I(h)\big) \tag{11}$$

対が一つなら $f(1) = f(0) + \int_0^1 f'(h)\,\mathrm{d}h$ で、(11) はこれを対ごとに繰り返したものです。$\partial/\partial s_\ell$（$\ell = \{i,j\}$）は立方体 $b_i, b_j$ を結ぶ線を一本下ろし、その大きさは $|C|$ 程度、質量 $m_0$ なら $e^{-m_0|x-y|}$ 程度です。微分された対が塊をなし、積分は塊ごとに分かれて、立方体の連結な集まり $Y$ をポリマーとする気体になります（同 (V.A.7)(V.A.8)）。

ただし補間した共分散は正定値（ガウス測度として意味を持つ条件）であり続ける必要があるので、実際には**森の公式**（Brydges–Kennedy の Taylor 森の公式、同 Thm III.1）を使います。これは、二つの立方体を結ぶ径数を、森をなす木の中で二つを結ぶ道に沿った $h_\ell$ の最小値で置く版で、こうすると正定値性が保たれます（同 (V.A.9)・Thm IV.5）。この形で、任意の定数 $K$ に対し、紫外の切断を入れたうえで結合 $g$ を（$K$ に応じて）十分小さくとれば $\sum_{Y \ni 0} |A(Y)| K^{|Y|} \le 1$ です（同 (V.A.10)。$|Y|$ は $Y$ の立方体の数）。この型の展開を構成的場の理論に持ち込んだのは Glimm–Jaffe–Spencer で（同 §I）、結果は 7-03 §05・§08 にあります。既知

**例：**道具は**ガウスの部分積分**です（ガウス分布は 1-08 §06）。標準正規の $\phi$ では、密度 $e^{-\phi^2/2}$ の微分が $-\phi\, e^{-\phi^2/2}$ なので、部分積分で $\mathbb{E}[\phi F(\phi)] = \mathbb{E}[F'(\phi)]$ が出ます。これを共分散行列 $C(s)$ の平均 0 のガウス変数に広げると $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbb{E}_s[H] = \frac{1}{2}\sum_{a,b} \frac{\mathrm{d}C_{ab}}{\mathrm{d}s}\, \mathbb{E}_s[\partial_a \partial_b H]$ です既知。分散 1・共分散 $sc$ のガウス変数 $(\phi_1,\phi_2)$ では $\mathrm{d}C_{12}/\mathrm{d}s = \mathrm{d}C_{21}/\mathrm{d}s = c$ なので $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbb{E}_s[F(\phi_1)G(\phi_2)] = c\,\mathbb{E}_s[F'(\phi_1)G'(\phi_2)]$。$s=0$ では二つは独立なので、$s$ について 0 から 1 まで積分して

$$\operatorname{Cov}\big(F(\phi_1),G(\phi_2)\big) = c\int_0^1 \mathbb{E}_s\big[F'(\phi_1)\,G'(\phi_2)\big]\,\mathrm{d}s, \qquad \big|\operatorname{Cov}\big| \le |c|\,\sup|F'|\,\sup|G'| \tag{12}$$

で、塊の相関はつなぐ共分散 $|c|$ で抑えられます。$F = G = \cos$ なら値は $e^{-1}(\cosh c - 1)$（$c = 0.9$ で $0.15932358$）で、左辺・右辺の数値積分と 8 桁一致しました。計算

10

## ゲージ場での使い道と限界

**格子の強結合**。小さい $\beta$ ではプラケットの塊の展開が働き（5-02・5-04）、無限体積極限の存在と解析性、閉じ込めの評価が示されています（Osterwalder–Seiler 1978）。ただしこの面積

則は $U(1)$ を含むどの群でも成り立ち、非可換な閉じ込めの証拠にならない、と Chatterjee（2018）は注意しています。既知

**位相空間の展開**。単位の尺度で小さな径数が無いときは、場を尺度ごとに分け、各尺度の「位相空間の細胞」で展開して積み上げます（Battle–Federbush 1982。JW §6.1 の 'phase-space localization'）。格子ゲージ理論では Bałaban の系列がこれにあたります（7-05）。既知

**赤外の限界**。四次元では長い距離で結合が強くなります。Magnen–Rivasseau–Sénéor 1993 §I は 'there is no easy solvable model of these phenomenons around which to expand' と書き、問題文も体積に一様なギャップには新しい考えが要るとします（JW §6.5）。展開が収束する小さい $\beta$ は、連続極限 $\beta \to \infty$ の反対の岸です。正確には、展開が収束するのは $\beta$ が小さい側の有限の区間で、連続極限は $\beta \to \infty$ で取ります（5-09）。

切れ目　届く範囲と行きたい場所

§02 では展開を止めた特異点は負の活量の側でした。四次元の $U(1)$ 格子では、大きい $\beta$ で面積則が破れる相が実際に在ります（Guth 1980。完全な証明と質量ゼロの相は Fröhlich–Spencer 1982）。非可換（$SU(2)$・$SU(3)$ の Wilson 作用）では、閉じ込めを失う相転移は無いと信じられています物理 が、定理ではありません。展開の収束が止まる場所は、その先の相転移の有無を教えません。この本の整理では、弱結合の紫外（7-05〜7-07）と強結合の展開のあいだ、結合が $O(1)$ になる一段が欠けています（7-10）。

## この章が言えている範囲

| | 内容 |
|---|---|
| **言えている** | 展開の式・Penrose の恒等式・三つの収束条件とその帰結（解析性・指数減衰）既知 |
| **言えている** | 一次元の剛体格子気体の係数・半径 $1/4$・閾値・減衰率。$K_n$ の交代和と Penrose 木の一致（$n \le 6$）。式 (12)計算 |
| **言えていない** | 連続の場と格子の強結合での収束の証明の中身（原論文は追っていない。5-04）。四次元の赤外で使える展開（知られていない） |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 問題文の引用（§5・§6.1・§6.5） | 本文で確認 | A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*, Clay Mathematics Institute (2000) |
| 式 (4)〜(7)・Dobrushin と FP の条件・表 3 の式 | 本文で確認 | R. Fernández, A. Procacci, CMP 274 (2007) 123–140, arXiv:math-ph/0605041 |
| 式 (10)(11)・森の公式／相関の減衰 | 本文で確認 | A. Abdesselam, V. Rivasseau, arXiv:hep-th/9409094 (1994)。D. Ueltschi, Moscow Math. J. 4 (2004) 511–522 |
| 局所補題・同値・鎖の零点・$\lambda_c \le 1/4$・Shearer の値 | 要旨・§1・§4.1・§5.2・§8.4 を確認 | A. D. Scott, A. D. Sokal, J. Stat. Phys. 118 (2005) 1151–1261, arXiv:cond-mat/0309352 |
| 原典・系譜 | 書誌のみ | Kotecký–Preiss, CMP 103 (1986) 491。Dobrushin, AMS Transl. (2) 177 (1996) 59。Gruber–Kunz, CMP 22 (1971) 133。Penrose, in *Statistical Mechanics: Foundations and Applications* (T. A. Bak ed.), Benjamin (1967) 101–109。Mayer, J. Chem. Phys. 5 (1937) 67。Brydges–Federbush, J. Math. Phys. 19 (1978) 2064。Brydges–Kennedy, J. Stat. Phys. 48 (1987) 19。Battle–Federbush, Ann. Phys. 142 (1982) 95。Glimm–Jaffe–Spencer, in *Constructive Quantum Field Theory* (G. Velo, A. Wightman eds.), Lecture Notes in Physics 25, Springer (1973)（Part II: The cluster expansion）、および Ann. Math. 100 (1974) 585。Erdős–Lovász, in *Infinite and Finite Sets* II, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 10, North-Holland (1975) 609–627。Shearer, Combinatorica 5 (1985) 241 |
| 格子の強結合・$U(1)$ の相・赤外の引用 | 要旨・本書の材料の検査による | Osterwalder–Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（本文未入手）。Chatterjee, arXiv:1803.01950 §4。Guth, PRD 21 (1980) 2291（書誌は Chatterjee の文献表による）。Fröhlich–Spencer, CMP 83 (1982) 411。Magnen–Rivasseau–Sénéor, CMP 155 (1993) 325 |
| 指数公式・スペクトル測度・ガウスの部分積分・収束半径と特異点 | 既知 | 標準的な事実（1-08・1-10） |
| 表・零点・輪・式 (12)・図 | 計算 | この端末の Python：`hardcore1d.py`・`graphs.py`・`decouple.py`。図は素の JavaScript |

次に読む章：7-05 繰り込み群の段の列（展開を尺度の列に積み上げる）。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 7 部 構成的場の理論 繰り込み群

# 繰り込み群の段の列 — 尺度を一段ずつ積分し、小さい場と大きい場に分けて進む

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

**この章で分かること** — 格子を一段ずつ粗くする変換（ブロック化）を重ねて紫外の極限を押さえる考え方。各段で場を「小さい場」と「大きい場」に分けること。ゲージ場では群の元の平均と局所的なゲージが要ること。

**前提となる章** — 7-01（紫外極限の段）と 4-04（結合の走り）。7-04 のポリマー、4-06 §02 の $b_0$、7-02 の二次元の $U(1)$（プラケットの角の独立性・熱核）も使います。プラケットと Wilson の作用は 5-01 の言葉ですが、要る分はその場で定義します。

**先に言うこと** — 方法の骨組みの説明で、Bałaban の証明を追ったものではありません。四次元ではこの方法の主定理も仮定つきで、連続極限の一意性・無限体積・質量ギャップには届いていません（§07・§09）。2026-11-10 に公開された構成が繰り込みの一段と大きい場をどう扱うかは、第 9 部と第 11 部で読みます。ゲージ場の細部は一次資料の序文と定理の文面、スカラー場での解説（Dimock）の範囲です。計算は二次元の $U(1)$・自由場・一ループの走りについてで、四次元の非可換理論の数値ではありません。

この章の順序

1. なぜ段の列にするのか — 全尺度に共通の小さな数が無いので、尺度を一段ずつ積分する（式 (1)）
2. 一段の変換：ブロック化 — 平均を緩く固定して細かい変数を積分すると、作用の形が一段で変わる（表 1）
3. 自由場なら一段は正確に書ける — 極小配位と、平均の制約だけで生まれるグリーン関数の局所性（表 2）
4. 小さい場と大きい場（動く図） — 各段で領域を分け、大きい場は小さな因子を運ぶ（図 1・表 3）

5. ゲージ場で加わること — 拡大縮小できない・足して割れない・ゲージは局所的に選ぶ（式 (8)）
6. 結合の走りと段の数（動く図） — 四次元では補正の和が段数とともに増え続ける（図 2・表 4）
7. 帰納の形 — 各段で同じ形の評価を保ち、定数を段と格子間隔によらせない（式 (10)）
8. 寄り道：「位相空間の細胞」という呼び名 — 段ごとに積分する自由度を数える（式 (11)）
9. 別の道と、止まる場所 — 連続の切断による構成と、結合が $O(1)$ になる尺度

---

01

## なぜ段の列にするのか

紫外極限の段で示したいのは、期待値が格子間隔 $a$ によらず有界であることでした（7-01 の式 (8)）。四次元のヤン–ミルズでは、漸近自由（4-06）により細かい尺度で結合 $g$ が小さく、粗い尺度で $O(1)$ になります。どの尺度にも小さな数はあるが、全尺度に共通の小さな数は無い。そこで尺度を一段ずつ積分します。

$$a \;\to\; La \;\to\; L^2 a \;\to\; \cdots \;\to\; L^K a = a_0, \qquad K = \log_L \frac{a_0}{a} \tag{1}$$

倍率 $L$ の変換を $K$ 回重ね、各段ではその尺度の結合だけを小さな数として使います（$L$ は 7-01 の箱の大きさとは別物、$a_0$ は固定）。段 $k$ の後の重み（有効密度）を $\rho_k$ とすると $Z = \int \rho_0 = \int \rho_1 = \cdots = \int \rho_K$ です。問題文はこの変換を「大きい運動量の自由度を積分し、尺度を戻す」と説明し（JW §6.5）、Bałaban 1985 の序文は K. Wilson の提案した形に従うと書きます。既知

**例：** $L = 2$、$a_0 = 1$、$a = 2^{-20}$ なら $K = 20$。$a$ を半分にするたびに段が一つ増えるので、示すべきは **$K$ によらない**評価です。

02

## 一段の変換：ブロック化

一段では、粗い格子の変数を決め、その値を保つように細かい変数を積分します。スカラー場で書くと、一辺 $L$ 点のブロック $B(y)$ の平均が (2) で、Bałaban の方法を解説した Dimock は平均をガウスの重みで緩く固定します（$\alpha > 0$ は任意、$N$ は積分を保つ定数）。

$$(Q\Phi)(y) = \frac{1}{L^{d}} \sum_{x \in B(y)} \Phi(x) \tag{2}$$

$$\tilde{\rho}_{k+1}(\Phi') = \frac{1}{N} \int \exp\Big( -\frac{\alpha}{2L^{2}} \big\| \Phi' - Q\Phi \big\|^{2} \Big)\, \rho_{k}(\Phi)\, \mathrm{d}\Phi \tag{3}$$

そのあと格子を単位の間隔に縮め、場を掛け直して $\rho_{k+1}$ とします（Dimock I の (26)(27)）。 既知

**例：**二次元の $U(1)$ で見ます。$U(1)$ の元は角 $\theta$ で $e^{i\theta}$ と書けます。格子の単位正方形 $p$ を**プラケット**と呼び、その四辺の変数を向きに沿って順に掛けた積を $U(\partial p) = e^{i\theta_p}$ と書いて、$\theta_p$ をプラケットの角と呼びます（5-01 §03）。各プラケットに重み $e^{\beta \cos\theta_p}$ を置くのが **Wilson 型**の作用です（$\beta$ は格子の逆結合で、大きいほど結合は弱い。§06 の β 関数とは別の量）。自由境界の二次元ではプラケットの角が独立で（7-02 §02）、$2\times 2$ のブロックの角は四つの角の和です。独立な角の和では、分布のフーリエ係数が各々の係数の積になります。一つの角の係数

$$c_{n}(\beta) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}\, e^{\beta\cos\theta}\, \mathrm{d}\theta}{\int_{-\pi}^{\pi} e^{\beta\cos\theta}\, \mathrm{d}\theta}$$

を使うと、ブロックの角の係数は一段で $c_{n}(\beta)^{4}$ になります。$I_{n}(\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} e^{\beta\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$ と置けば $c_{n} = I_{n}(\beta)/I_{0}(\beta)$ で、$I_{n}$ は変形 Bessel 関数と呼ばれる特殊関数です。一段の後も Wilson 型なら、$c_{1}$ で決めた $\beta'$ で $c_{2}$ も合うはずです。

計算 表 1　二次元 $U(1)$・Wilson 型の一段（$L=2$）。$\beta'$ は $c_{1}(\beta') = c_{1}(\beta)^{4}$ で決めた値、ずれは $c_{2}(\beta')/c_{2}(\beta)^{4} - 1$。

| $\beta$ | 2 | 10 | 50 | 100 | 400 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\beta'$ | 0.488 | 2.996 | 12.892 | 25.383 | 100.377 |
| ずれ | 2.43 | 6.6e−2 | 2.8e−4 | 3.2e−5 | 4.8e−7 |

合いません。一段で作用の形が変わり、新しい項が生まれます。計算 重みをはじめから係数が $c_{n} = e^{-n^{2}/2\beta}$ になるものに取ると、$c_{n}^{4} = e^{-n^{2}/(2\cdot\beta/4)}$ で、形は正確に保たれます。この重みは円周上の**熱核**（Villain 型とも呼ばれる）で、分散 $1/\beta$ の正規分布の密度を $2\pi$ ずつずらして足し合わせた円周上の分布、つまり正規分布を円周に**巻きつけた**ものです（7-02 §04）。一般には主要な局所項を追い、残りを塊 $X$ ごとの補正 $E_{k}(X)$ にまとめます（Dimock I の (105)(108)。7-04 のポリマーの形）。既知

03

## 自由場なら一段は正確に書ける

重みがガウス型（自由場）なら (3) は何段でも閉じた形で書けます。$k$ 段後の密度は、粗い値 $\Phi$ を与えたとき細かい場の作用を最小にする配位 $\phi_{k}$——**極小配位**、または背景場——で決ま

ります（Dimock I の (45)〜(52)）。

$$\rho_k(\Phi) = Z_k\, e^{-S_k(\Phi,\,\phi_k)}, \qquad \phi_k = \alpha_k G_k Q_k^{\mathsf T}\Phi, \qquad G_k = \big(-\Delta + \bar\mu_k + \alpha_k Q_k^{\mathsf T}Q_k\big)^{-1} \tag{4}$$

$\Delta$ は格子のラプラシアン（質量ギャップの $\Delta$ とは別）、$Q_k$ は $k$ 段分の平均、$Q_k^{\mathsf T}Q_k$ はブロックの上で定数な関数への射影、$\bar\mu_k$ は質量の二乗、$\alpha_k = \alpha(1-L^{-2})/(1-L^{-2k})$（Dimock I の (32)）は $k$ 段分の重みをまとめた定数です。極小配位からの揺らぎはガウス変数で、積分すると定数 $Z_k$ を残します。要は $G_k$ の局所性です。$\bar\mu_k$ が 0 に近くても平均に掛かる項が質量の役を果たし、$x$ が立方体 $\Delta_y$ に、$f$ の台が立方体 $\Delta_{y'}$ にあるとき（$\Delta_y$ は一辺 $M=L^m$ の大きい立方体、$d(y,y')$ はこの立方体を単位に測った距離）

$$\big|(G_k f)(x)\big| \le C\, e^{-\gamma\, d(y,y')}\, \|f\|_\infty \tag{5}$$

が成り立ちます（Dimock I の (85)。そこでは $\gamma = \tfrac12\gamma_0$。文献は Bałaban, CMP 89 (1983) ほか）。既知 質量の無い $(-\Delta)^{-1}$ は二次元では距離の対数でしか変わりません。

**例：**二次元の周期格子（一辺 32 ブロック）で $(-\Delta+\ell^{-2}P)^{-1}$（$P$ は一辺 $\ell$ のブロックの平均への射影）を、ブロック単位の距離 $r$ で並べました。

計算 表 2　$G(r)/G(0)$。最下行は $r=4$〜$12$ の値に $e^{-\gamma r}$ を当てはめた $\gamma$（一ブロックあたりの減衰率）。右端は全体に質量 $\ell^{-2}$ を入れたもの。

| $r$ | $\ell=2$ | $\ell=4$ | $\ell=8$ | **質量（$\ell=8$）** |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.181 | 0.135 | 0.111 | 0.111 |
| 4 | 4.29e-3 | 3.12e-3 | 2.53e-3 | 2.94e-3 |
| 8 | 5.10e-5 | 3.47e-5 | 2.76e-5 | 3.87e-5 |
| 減衰率 | 1.089 | 1.106 | 1.111 | 1.064 |

減衰率は一ブロックあたり約 1.1 で、$\ell$ にほとんどよりません。制約はブロックの平均にしか掛からないのに、全体に質量を入れた場合（同じ当てはめで $\ell=2,4,8$ について 1.055〜1.064）と同程度で、やや速いくらいです。段によらないこの局所性が、各段でクラスター展開（7-04）を使える理由です。計算

## 04 小さい場と大きい場

摂動の形の解析は場が小さいときしか使えません。Bałaban の方法の特徴は、各段で格子を**小さい場の領域 $\Omega$** とその外に分け、すべての分け方について和を取ることです（Dimock II §1）。

$$1 = \sum_{\Omega} \zeta(\Omega^c, \Phi)\, \chi(\Omega, \Phi) \tag{6}$$

$\chi$ は $\Omega$ で小さい場の条件が成り立つこと、$\zeta$ は $\Omega^c$ の各立方体で条件がどこかで破れることの指示関数です。Dimock I の序文（§1.1）の言葉では 'The large field region is treated crudely but makes a small contribution due to the fundamental stability of the interaction'。次の段は前の段の小さい場の領域の中で分けるので、$\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \cdots$ と減っていきます。既知

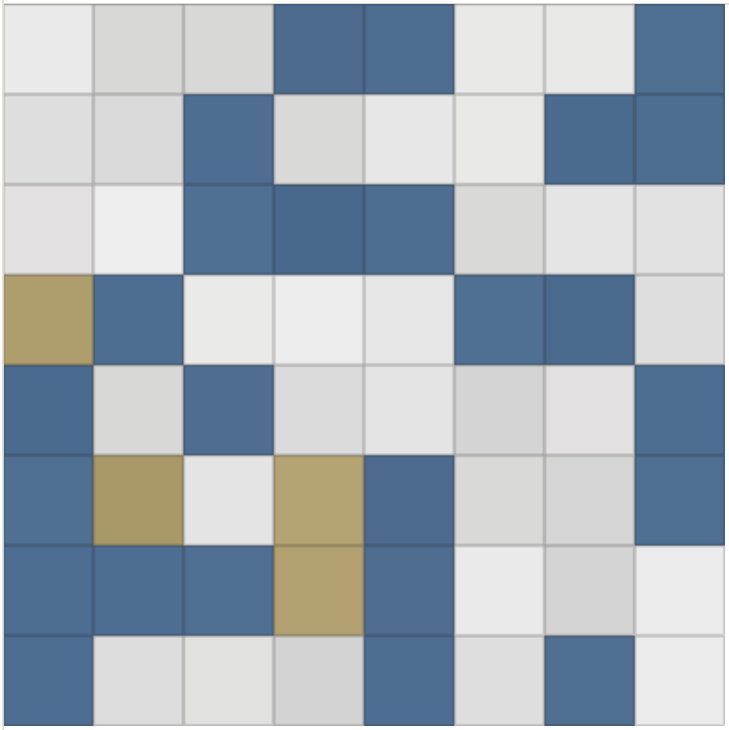
ゲージ場では条件をプラケットに置きます。Bałaban 1985 は最初の段（裸の結合 $g_0$）で、各プラケット $p$ に

$$|U(\partial p) - 1| < \varepsilon_1, \qquad \varepsilon_1 = g_0\, p(g_0), \qquad p(g) = c\,(1 + \log g^{-1})^{p_0}, \quad p_0 > 2 \tag{7}$$

を課し（$c$ は十分大きい定数）、破れたプラケットから十分離れたブロックの和を小さい場の領域とします（同 p.256–257 の (4)(7)。記号は本書に合わせた）。既知

大きさの感じを、目安として見積もります。重みはおおよそ $e^{-|U(\partial p)-1|^2/g^2}$ なので典型的な大きさは $g$ 程度、閾値はその $p(g)$ 倍です。すると大きい場は、目安として $e^{-O(1)\,p(g)^2}$ 程度の因子を運びます。これは $g$ のどの冪よりも速く小さい。スカラー場の解説では、大きい場の立方体一つごとに $e^{-O(1)\,p_0^2}$ の因子が出ると書かれています（Dimock II §1。そこでの $p_0 = (-\log \lambda_0)^p$ は閾値の大きさで、(7) の指数 $p_0$ とは別の記号）。既知 **例：** $c = 1$、$p_0 = 3$、$g = 0.1$ で $p \approx 36.0$。$O(1)$ を 1 とすると $e^{-p^2} \approx e^{-1298}$ で、$g^{10} = e^{-23}$ と桁違いです。計算

図 1　段 k を進めると、ブロックの角の大きさ（地の濃さ）、大きい場（■ 濃い塗り）、前の段で小さい場の領域から外れた部分（■ 薄い塗り）がどう増えるか



```
段 2（4×4） β_k = 4.000  ε = 0.50  大きい場 25/64  領域の外 29/64
```

計算 この図の数値はこの端末で計算した（32×32 の標準正規の標本を約 0.1 刻みで埋め込み、角 $\theta_p = z_p/\sqrt{\beta}$ とブロックの和はその場で計算）。

計算 表 3　図 1 の標本（$\beta = 64$、$\varepsilon = 0.5$。段 0 は 0/1024）。「正確」は分散 $4^k/\beta$ の巻きつけた正規分布での確率。

| 段 $k$ | $\beta_k$ | 大きい場（標本） | 同（正確） | 領域の外 |
|---:|---:|---:|---:|---:|
| 1 | 16 | 13/256 | 0.043 | 13/256 |
| 2 | 4 | 25/64 | 0.312 | 29/64 |
| 3 | 1 | 13/16 | 0.613 | 15/16 |

図の模型は §02 の熱核型で、段 $k$ の有効結合は正確に $\beta_k = \beta/4^k$ です。二次元では結合が段ごとに強まり、閾値を固定すると数段で大きい場が埋めます。結合が $O(1)$ になる前に止める所が (1) の $a_0$ です。四次元の強まり方はずっと遅い（§06）。

05

## ゲージ場で加わること

ゲージ場では三つが加わります。既知 **(i) 群の元は拡大縮小できない**。Bałaban 1985 は 'we use improvement of regularity properties of typical gauge fields instead of non-existing scalings' と書きます。**(ii) 群の元は足して割れない**。粗い辺の変数は細かい辺の変数から作りますが、群の元の平均は群から外れます。平均の作り方そのものが一篇の主題です（Bałaban, CMP 98 (1985) 17–51、書誌のみ）。電荷を持つ場なら、道に沿った位相を掛けてゲージ共変に平均します（Dimock の QED の論文の式 (20)）。**(iii) ゲージは局所的に、尺度ごとに選ぶ**。$U = e^{igA}$ と書いて展開するにはゲージを固定する必要がありますが、大域的に連続な選び方は存在しません（Singer 1978、3-04・4-08）。格子では群がコンパクトなので $Z$ の定義にゲージ固定は要らず、要るのは局所的な選択だけです。問題文によれば、ゲージは時空の場所と尺度ごとに選ばれ（'phase cells'）、段とともに紫外のゲージから赤外のゲージへ選び直されます（JW §6.5。三次元の仕事の説明）。

局所的である理由は初等的です。行列 $A$ の**作用素ノルム**を、ベクトルを最も伸ばす倍率 $\|A\| = \max_{|v|=1} |Av|$ で定めます。ユニタリ行列は長さを変えないので $\|U\| = 1$ です。ユニタリ行列 $U, V, W$ について

$$\|UV - 1\| \le \|U - 1\| + \|V - 1\|, \qquad \|WUW^{-1} - 1\| = \|U - 1\| \tag{8}$$

です（前者は $UV - 1 = U(V-1) + (U-1)$ と $\|U(V-1)\| \le \|U\|\,\|V-1\| = \|V-1\|$ から、後者は $W$ も $W^{-1}$ も長さを変えないことから）。紙 ゲージ変換でプラケットの変数は $WU(\partial p)W^{-1}$ の形に変わるので、後者から、作用素ノルムで測った条件 (7) はゲージ変換で変

わりません。二次元の一辺 $\ell$ のブロックで縦の辺と底の横の辺を 1 にする（完全軸性ゲージ）と、高さ $y$ の横の辺は真下の $y$ 枚のプラケットの変数の逆の積なので、(8) を繰り返し使って $\|U_b - 1\| < \ell\,\varepsilon_1$ です。紙 **例：** $\varepsilon_1 = 0.05$ なら $\ell = 8$ で 0.4 以内。$\ell = 64$ では 3.2 で、常に $\|U - 1\| \le 2$ だから何も言いません。ゲージが効くのはブロック程度の範囲です。

06

## 結合の走りと段の数

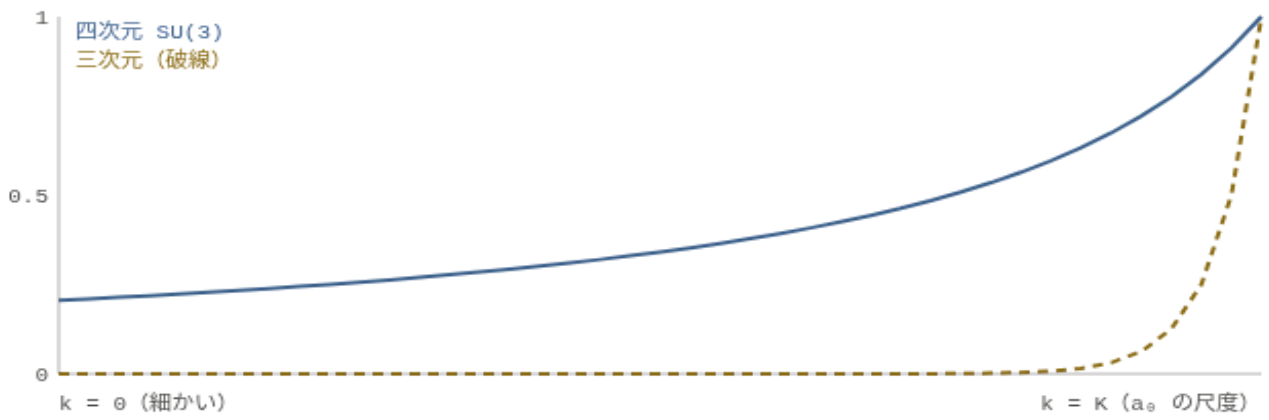
段ごとに変わる主なものは有効結合 $g_k$ です。四次元では一ループの走り（4-06 §01 の β 関数 $\mu\,\mathrm{d}g/\mathrm{d}\mu = -b_0 g^3 + O(g^5)$、$b_0 = 11N/48\pi^2$ を積分した $1/g^2(\mu) = 1/g^2(\mu_0) + 2b_0 \ln(\mu/\mu_0)$。物理の側からの同じ式は 17-01 の式 (2)）を段に刻むと

$$\frac{1}{g_{k+1}^2} = \frac{1}{g_k^2} - 2b_0 \ln L \tag{9}$$

で、粗くするたびに一定量ずつ強まります。三次元では $g^2$ が質量の次元を持ち、段 $k$ の無次元の結合 $g_k^2 = g^2 L^k a$ は細かい側で幾何級数的に小さい。既知

ここからは式 (9) だけを使った目安の議論で、Bałaban の評価そのものではなく、定理の水準の主張でもありません。違いは足し算に出ます。一段ごとに $g_k^2$ 程度の補正が出るとすると、三次元の $\sum_k g_k^2$ は有限ですが、四次元では $g_k^2 \approx 1/(2b_0 \ln L \cdot (K-k))$ で和が段数の対数で増え続け、誤差として積むことができません。その大きさの補正は結合の走りそのものに繰り込んで追う必要がある、というのがこの目安の示すことです。残りが $g_k^3$ 程度なら和は収まります。四次元への拡張の論文（Bałaban, CMP 109 (1987)。JW の文献表による）の題は 'a coupling constant renormalization in 4D' を含みます。既知

図 2　段の数 K（a = 2^−K）を動かすと、有効結合 g_k² の並び（右端で g² = 1）と和がどう変わるか。三次元は g_k² = 2^(k−K)




K = 40　四次元：g₀² = 0.206　Σg² = 16.99　Σg³ = 11.88　三次元：Σg² = 2.000

計算 この図の数値はこの端末で計算した（式 (9) の部分和。表 4 と一致）。

計算 表 4　$SU(3)$、$L=2$、右端で $g_K^2=1$。$g_0^2$ は最も細かい段の値。

| $K$ | $g_0^2$ | $\sum g_k^2$ (4D) | $\sum g_k^3$ (4D) | $\sum g_k^2$ (3D) |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 0.509 | 7.76 | 6.63 | 1.999 |
| 40 | 0.206 | 16.99 | 11.88 | 2.000 |
| 160 | 0.061 | 29.54 | 16.12 | 2.000 |
| 320 | 0.031 | 36.38 | 17.56 | 2.000 |

**例：**右端の $g^2=1$ から最も細かい段で $g^2=0.1$ にするには、$SU(3)$ で約 93 段（$a\approx 9\times 10^{-29}$）、$SU(2)$ で約 140 段。$\sum g_k^2$ は $K$ を倍にするたびに約 7.2 増え、$\sum g_k^3$ は約 21.2 に、三次元の $\sum g_k^2$ は 2 に収まります。計算

07

## 帰納の形：各段で何を仮定し何を示すか

証明は段 $k$ についての帰納法です。仮定は「$\rho_k$ が決まった形と評価を満たす」こと。形は、小さい場の領域での主要な作用、塊 $X$ に局在し指数的に小さい補正 $E_k(X)$、大きい場の領域の和、からなります（Dimock II §1）。一段 (3) の後も同じ形と評価が成り立つことを示し、定数が $k$ と $a$ によらないことが要です。三次元の論文の主定理の評価は次の形です（Bałaban 1985 の (5)。記号は本書に合わせた）。

$$\chi(U)\,\exp\Big(-\frac{1}{g_k^2}A\big(U_k(U)\big)-C\,|T_k|\Big)\;\le\;\rho_k(U)\;\le\;\exp\big(C\,|T_k|\big)\tag{10}$$

$A$ は Wilson の作用、$U_k(U)$ は極小配位、$\chi$ は小さい場の条件の指示関数、$|T_k|$ は段 $k$ の格子の点の数で、$C$ は $a$ にも $k$ にもよりません。積分すれば分配関数の $a$ に一様な上下界が出ます（同 (6)）。四次元では 1989 年の論文が 'If the sequence of the effective coupling constants is contained in an interval ]0, γ] with a sufficiently small positive γ' という仮定のもとで、四次元の紫外安定性を主定理（条件つきの紫外安定性の定理。Bałaban 1989 の Theorem 1）として述べています。既知

**例：**三次元の $\phi^4$ では Dimock の紫外安定性の定理（Dimock の Theorem 1）が同じ型で、相殺項を選べば $e^{-c\,\mathrm{Vol}}\le Z/Z_{\mathrm{free}}\le e^{c\,\mathrm{Vol}}$ が紫外の切断と体積によらず成り立ちます（7-03 §06）。

切れ目　評価の型と、それで言えること

(10) の型から出るのは、分配関数と有効作用の一様な有界性までです。1989 年の論文は、仮定を外す基本の不等式（Bałaban 1989 の Theorem 2。二次の摂動計算による）の証明は未公刊と序文で述べ、Wilson ループなどの期待値の解析を今後の課題とします。

MRS 1993 は、ここから滑らかにした Wilson ループの紫外極限が部分列の水準で従うはずだが一意とは限らない、と評します。問題文はコンパクト性だけの弱い存在を、極限の性質を別に示さない限り解と認めません（JW 脚注 2）。三次元は 7-06、四次元は 7-07 で。

08

## 寄り道：「位相空間の細胞」という呼び名

飛ばしてよい節です。

この方法は「phase cell renormalization」とも呼ばれます（Chatterjee 2018 §6）。既知 呼び名の意味を、この章の言葉で説明します。段 $k$ の揺らぎは空間では一辺 $L^k a$ のブロックに、運動量では $1/(L^k a)$ 程度に局在します。そこで位置と運動量の幅の積が $O(1)$ の箱――位相空間の細胞――ごとに、自由度がおよそ一つあると数えます。中身は (5) の指数的な局在です。三次元のスカラー場では、同じ考えが Glimm–Jaffe（1973）の位相空間の細胞への局所化として現れました（7-03 §06）。

$$n_k = L^{d(K-k)}\bigl(1 - L^{-d}\bigr), \qquad \sum_{k=0}^{K-1} n_k = L^{dK} - 1 \tag{11}$$

$n_k$ は単位体積で段 $k$ に積分される変数の数。**例：**四次元・$L = 2$・$K = 20$ で点は $2^{80} \approx 1.2 \times 10^{24}$ 個、最初の段でその 15/16 を積分します。計算 同じ言葉は 7-04 §10 にも現れます。

09

## 別の道と、この方法が止まる場所

Magnen–Rivasseau–Sénéor（MRS 1993）は、連続の運動量の切断で四次元の $SU(2)$ を扱いました（赤外の切断つき・自明な位相セクター）。大きい場では軸性ゲージ、小さい場では背景場に依存するゲージを使い、切断が壊すゲージ不変性を相殺項で戻します。序文は、この論文が詳細な証明を与えていないことを明記しています（'we do not provide a detailed proof'）。Bałaban の結果への序文の評は §07 の切れ目で見ました。既知 格子から始める利点は、ゲージ不変性と反射正値性が保たれることです（JW §6.5、5-03）。代わりに、壊した回転対称性を極限で戻す課題が残ります（7-01 の公理の段）。

止まる場所は (1) の右端で、$a_0$ より長い尺度には展開の足場がありません。MRS は赤外の切断を外さない理由を 'this would lead to large values of the coupling constant, and presumably to so-called non-perturbative effects corresponding to confinement' と書き、問題文は体積に一様なギャップには新しい考えが要るとします（JW §6.5）。**例：**図 2 で

$K$ を増やしても、右端の $g_K^2 = 1$ は動きません。右端の先に段を足す方法は、この章の道具に含まれていません。続きは 7-10・7-11。

---

## この章が言えている範囲

| | 内容 |
|---|---|
| **言えている** | 式 (3)〜(7)・(10) の形（Dimock の解説と Bałaban 1985 の定理の文面による）。1989 年の主定理の仮定（序文による） 既知 |
| **言えている** | 表 1〜4 と図の値（二次元の模型と式 (9) の算術） 計算 |
| **言えている** | 不等式 (8) と二次元の完全軸性ゲージでの辺の評価（その場の証明） 紙 |
| **言えていない** | ゲージ場での平均・ゲージの選び方・大きい場の操作の中身（系列の多くは本文未入手） |
| **言えていない** | §04 の大きい場の因子 $e^{-O(1)p(g)^2}$ の見積もりと、§06 の補正の和の議論（どちらも目安で、定理の水準ではない） |
| **言えていない** | Bałaban の方法での四次元の証明の完結（主定理は仮定つき。7-07）。表 4 が実際の有効結合の列であること。無限体積とギャップ |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 変換・ゲージ・反射正値性・脚注 2 | 本文で確認 | A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*, Clay Mathematics Institute (2000) §6.5 |
| 三次元の主定理・(7)(10)・Wilson の繰り込み群 | 本文 p.255–257 を確認 | T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 102 (1985) 255–275 |
| 四次元の主定理の仮定・未公刊の基本の不等式（Theorem 2） | 要旨と序文を確認 | T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 122 (1989) 355–392 |
| Bałaban の系列の他の論文（平均・ゲージ固定・四次元 I, II ほか） | 書誌のみ | CMP 89 (1983)；95, 96 (1984)；98, 99 (二篇), 102 (277–309) (1985)；109 (1987) 249–301；116, 119 (1988)；122 (1989) 175–202（Dimock I と Chatterjee の文献表で照合） |
| (2)〜(6)・帰納の形・$\phi^4_3$ の定理・荷電場の平均 | I §1–3・II §1・QED §2.3 を確認、III は要旨 | J. Dimock, The renormalization group according to Balaban I・II・III, arXiv:1108.1335, 1212.5562, 1304.0705；Quantum electrodynamics on the 3-torus I, arXiv:math-ph/0210020 |
| 連続の切断・Bałaban への評・赤外の留保・詳細な証明が無いことの明記 | p.325–327 を確認 | J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, Comm. Math. Phys. 155 (1993) 325–383 |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| phase cell renormalization の呼び名 | §6 を確認 | S. Chatterjee, Yang–Mills for probabilists, arXiv:1803.01950 |
| 大域的なゲージ固定の不可能性 | 書誌のみ | I. M. Singer, Comm. Math. Phys. 60 (1978) 7–12 |
| 三次元のスカラー場での位相空間の細胞への局所化 | 書誌のみ（帰属は 7-03 §06 による） | J. Glimm, A. Jaffe, Fortschr. Phys. 21 (1973) 327–376 |
| 表 1〜4・図の標本・§04 と §08 の数値 | 計算 | この端末の Python（numpy・scipy）：`wilson_step.py`・`greens.py`・`villain2d.py`・`running.py`・`numbers.py`（§04 と §08 の数値）。図は canvas と素の JavaScript |

次に読む章：7-06 三次元ヤン–ミルズの紫外安定性（この方法が最初に使われた場所で、何が示され、何が未構成か）。

# 三次元ヤン–ミルズの紫外安定性 — 格子の評価は一様になったが、測度はまだ無い

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

**この章で分かること** — 三次元では結合定数が長さの逆数の次元を持ち、発散しうる図が有限個になること。Bałaban（1985）の定理が格子の上で何を一様に評価したか。連続の測度と観測量がまだ無い理由。

**前提となる章** — 7-05 繰り込み群の段の列。7-01・5-01・4-04 も参照します。

**先に言うこと** — 既知の結果の紹介で、証明は筋だけを追います。表と図の数値は自由場（ガウス）と段の数え方の計算で、三次元ヤン–ミルズの測度について何かを示すものではありません。非可換の三次元の連続の測度は、有限体積でも構成されていません。

この章の順序

1. 三次元という中間 — 二次元は構成済み、四次元は 2026-11 に相関関数の形の構成が公開された、三次元は紫外の一様な評価まで
2. 結合定数が長さを持つ — 格子で見える結合は $g^2 a$、細かいほど弱い
3. 発散を数える — 発散しうる型は有限個で、要る相殺項は定数一つ。計算の表
4. Bałaban 1985 の定理 — 有効密度の上下界が格子間隔によらない。動く図
5. 証明の筋 — 小さい場と大きい場、局所的な軸ゲージ、半単純性を使う一か所
6. 定理が言っていないこと — 一様な評価から極限・観測量・公理までの距離
7. 観測量の壁：三次元の Wilson ループ — 線積分は潰れ、均した場では値が残る。計算の表・動く図
8. 別の道：確率量子化と状態空間 — 方程式の側から測度に近づく道と、均した場で作る状態空間
9. 寄り道：2+1 次元の格子の数値 — 数値ではグルーボールの質量も弦張力もある（物理の水準）

10. 三次元の現在地 — 段ごとの到達点と、四次元との違い

01

## 三次元という中間

二次元の純ヤン–ミルズは格子の上で正確に解け、連続の測度まで構成されています（7-02）。四次元は、Bałaban と MRS の系列では紫外の側が有限体積で「制御の水準」まで来ていて未完でした（7-07）。2026-11-10 に公開された構成は、局所の観測量の相関関数の形で Wightman の公理を満たす理論を作った、と委員会は評価しています（6-01）。連続の確率測度は作られていません（6-04）。三次元はそのあいだで、2+1 次元の時空に対応します。

総説は、二次元・三次元は超繰り込み可能（発散しうる図が有限個しか無いこと。§03）なので 'substantially simpler' と考えられているとしたうえで、'a construction of the 3D YM measure and a description of its gauge-invariant observables, even on T3, remains open' と書きます（Chevyrev 2022 §1.1）。既知

先に一文で言うと、三次元で示されているのは格子の上の**一様な評価**で、評価を**極限**に変えることと、極限で何を測るか（**観測量**）を決めることが残っています。場所は六つの段の紫外極限の段です。「二次元と三次元ではできている」という言い方は、スカラー場（7-03）では正確で、可換群でも連続極限までは示されています（表 3）。非可換では「三次元は紫外の一様な評価まで」が正確です。

02

## 結合定数が長さを持つ

この章では結合を作用の前に出し、$A$ は $g$ を含まないものとします。$A$ は反エルミートな行列（$X^\dagger = -X$ を満たす行列。$SU(N)$ のリー環はこの形、1-03）に値を取る 1 形式で、$F_A = dA + A \wedge A$、$|F_A|^2 = -\sum_{\mu,\nu} \operatorname{tr} F_{\mu\nu}^2 \geq 0$ です（3-03）。物理の章のエルミートな $A_\mu$（3-02、結合を吸収した書き方）とは $A = -iA_\mu dx^\mu$、$F_A = -iF$ の関係です。

作用 $S(A) = \frac{1}{2g^2}\int |F_A|^2\, d^dx$ は次元の無い数です。$A$ は長さの $-1$ 乗、曲率は $-2$ 乗、体積要素は $d$ 乗の次元なので、結合定数の次元と、間隔 $a$ の格子で見える無次元の結合が決まります。

$$[g^2] = (\text{長さ})^{d-4}, \qquad g_0^2 = g^2 a^{4-d} = g^2 a \quad (d=3) \tag{1}$$

右の式は Bałaban（1985）の出発点です。$g_0^2 = g^2 a$ は次元から決まる関係で、比例定数は作用の規格化によります。本書の規約（5-01・付録 A-01）では、$SU(N)$ の Wilson 作用を $\beta \sum_p \left(1 - \frac{1}{N} \operatorname{Re}\operatorname{tr} U_p\right)$ と書いて $\beta = 2N/g_0^2$ です。論文の作用とは tr の規格化が揃っているとは限らないので、論文の $g_0$ とは定数倍の違いがありえます。どちらの規約でも、三次元の $\beta = 2N/(g^2 a)$ は $1/a$ に比例します。既知

例：$g^2 = 1$ の単位で $a = 2^{-20}$ なら $g_0^2 \approx 10^{-6}$。細かい格子ほど結合はひとりでに弱くなり、漸近自由（4-06）の対数の遅さを待つ必要がありません。長さ $1/g^2$ では結合は 1 程度で、長さの尺度はこれ一つなので、理論が在って質量を持つならそれは $g^2$ の定数倍です（四次元は 4-07）。物理

本書での使い方は 15-01 §01（四次元では損の和が対数で発散する）。

03

## 発散を数える

摂動論で発散しうる図を数えます（4-04、スカラー場は 7-03）。摂動論では $A \to gA$ と置き直します。作用は $\frac{1}{2}\int |dA|^2$ に、$g$ を運ぶ三点の頂点と $g^2$ を運ぶ四点の頂点が付いた形になります。外線がグルーオン $E$ 本・ループ $L$ 個の 1 粒子既約な図（線を一本切っても二つに分かれない図）は $g^{E-2+2L}$ を運ぶので、運動量の次元から $g$ の冪の次元を引いて

$$\omega(E, L) = d - E + (4 - d)(1 - L) \tag{2}$$

が見かけの発散の次数です。四次元では $\omega = 4 - E$ で $L$ によらず、どの次数にも発散が現れます。三次元では $\omega = 4 - E - L$ で、ループが増えるごとに 1 下がります。

計算 表 1　三次元の $\omega(E, L)$。太字が $\omega \geq 0$。$E = 1$ は色の対称性で消える。外線はグルーオンに限る（ゴーストの外線を持つ型は省く）。

| E\L | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0（真空） | **3** | **2** | **1** | **0** | −1 |
| 2 | **1** | **0** | −1 | −2 | −3 |
| 3 | **0** | −1 | −2 | −3 | −4 |
| 4 | −1 | −2 | −3 | −4 | −5 |

外線をグルーオンに限ると、$\omega \geq 0$ の型は三次元で七つです（二次元は三つ、四次元は無数）。

### 相殺項は定数一つ

七つのうち真空以外の三つ（$E = 2$ の 1・2 ループと $E = 3$ の 1 ループ）の発散は、ゲージ不変性を保つ正則化のもとでは相殺項を要しません。理由は相殺項の形にあります。相殺項はゲ

ージ不変な局所項（一点での場とその微分の多項式を積分したもの）で、係数が $g^2$ の冪で書けるものです。三次元では $g^2$ が長さの $-1$ 乗の次元を持つので、§02 の規約で次元が 3 以下の項に限られ、そういう項は定数だけです。次元 2 の候補の $F$ について一次の項は、リー環の上の一次式で随伴作用（$X \mapsto hXh^{-1}$）で不変なものでなければならず、半単純な群では 0 しか無い（行列で書けば $\operatorname{tr} F = 0$）。次元 3 の候補の Chern–Simons 項は向きの反転（パリティ）で符号を変えるので、反転で不変な作用からは出ません。既知

この論法は連続の摂動論のものです。格子では回転対称性が壊れていて（立方格子の回転と反転だけが残る）、そのまま当てはめることはできません。格子の上でこれに当たるのが、§05 で見る Bałaban の「半単純性を使う一か所」です。Bałaban の出発点の密度も、Wilson 作用のほかは 'vacuum energy renormalization counterterms' を含む定数だけです。$L$ ループの真空の図は $g_0^{2(L-1)}$ の次数で、最後の $L=4$ が $g_0^6$ に当たり、論文が $g_0$ の 6 次まで展開することと数が合います（この章の照合）。

04

## Bałaban 1985 の定理

### 定理の文面

一辺を固定したトーラス $\mathbb{T}$ を間隔 $a$ の格子で近似します（Bałaban の論文では格子間隔を $\varepsilon$ と書きます）。出発点の密度は

$$\rho_0(U) = \exp\bigl[-A(U)/g_0^2 - E_0\bigr]$$

で（論文の式 (1)）、$A$ は Wilson 作用、$E_0$ は規格化と真空のエネルギーの相殺項を含む定数です（論文では $E$。§03 の外線の数と区別して $E_0$ と書きます）。§03 で相殺項が定数一つで足りたことに当たります。繰り込み変換 $T$（$L$ 倍に粗くするブロック化。7-05）で $\rho_{k+1} = T\rho_k$ を作り、$L^K a = a_0$（$a_0$ は $g$ だけで決まる正の定数）で止めます。紫外安定性とは最後の密度の上下界が $a$ によらないことで、論文の式 (3) は

$$\chi(U)\, e^{-O(1)|\mathbb{T}|} \;\le\; \rho_K(U) \;\le\; e^{O(1)|\mathbb{T}|} \tag{3}$$

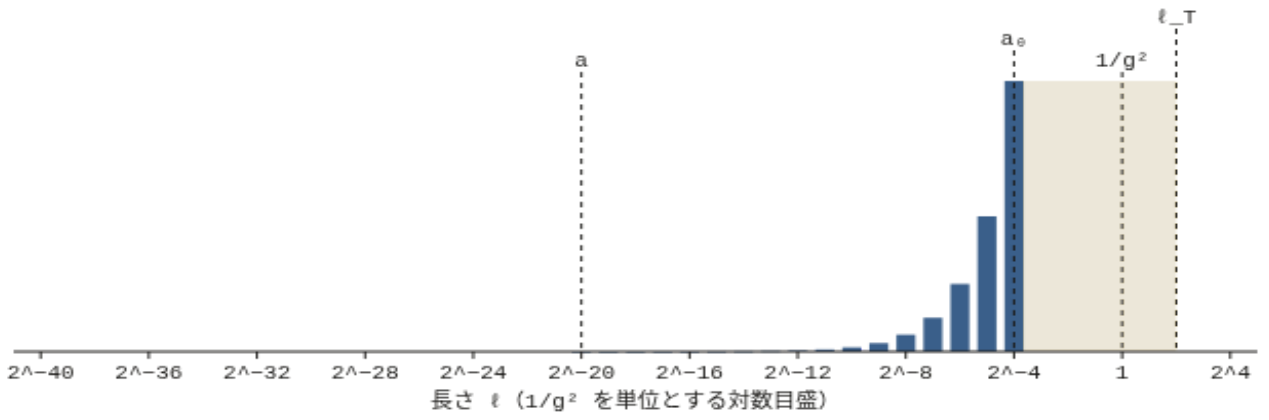
です。$U(\partial p)$ はプラケット $p$ の縁を一周するリンク変数の積、$\chi$ は最後の粗い格子（間隔 $a_0$）のすべてのプラケットで $|U(\partial p) - 1|$ が小さいとき 1、そうでないとき 0 を取る関数（指示関数）、$|\mathbb{T}|$ は体積、$O(1)$ は $g$ と $a_0$ だけで決まる定数です。既知

論文は、この $O(1)$ が $g \to 0$ で $\infty$ に行くことを注意し、$g$ で発散する作用の項を書き出した形に直して、全段 $k$ に広げます。その不等式 (5) が主定理です（形は 7-05 の式 (10)）：'The lattice approximations of the three-dimensional pure Yang-Mills theory with a semi-

simple compact group Lie G are ultraviolet stable in the sense that the sequence of densities ρk … satisfies the bounds (5).' 系は 'uniform in ε bounds for the partition function'。著者は 'the proof is very sketchy' と断っています。既知

### 段の和

図 1　格子間隔 $a$ を細かくすると、段（青い棒＝その段で見える結合 $g_k^2$）が左端に足される。黄の帯は段の外に残る尺度（$a_0$ からトーラスの一辺 $\ell_T = 4/g^2$ まで）




a = 2^−20/g²　段の数 K = 16　g₀² = 9.5e-7　Σ g_k² = 0.124999（0.125 未満）　細かい格子の点 ≈ 10^19.9

計算 この図の数値はこの端末で計算した（$g^2 = 1$ の単位、$L = 2$、$g^2 a_0 = 1/16$ は説明のための値）。

段 $k$ の格子で見える結合は $g_k^2 = g^2 L^k a$（論文の $g_k = g(L^k a)^{1/2}$）で、細かい側へ一段ごとに $1/L$ 倍です。新しい段は左端に前より小さい結合で足されるだけで、和は $\frac{L}{L-1} g^2 a_0$ を超えません（$g^2 a = 2^{-8}, 2^{-20}, 2^{-40}$ で段は 4・16・36、和は 0.121094・0.124999・0.125000）。計算

四次元では同じ和が段数の対数で増えます（7-05 の §06。段数を倍にするごとに約 7.2 増える）。$a_0$ より上は、点の数が $a$ によらない格子（図では 262144 点）の上の有限次元の積分で、コンパクト群の上なので有界です。ただしトーラスが $1/g^2$ より大きければ、結合が 1 を超える尺度がそこに入ります。計算

05

## 証明の筋

証明は先行論文群（伝播関数・平均化・正則な配位の空間・変分問題）の上に立ち、三次元の Higgs 模型での著者自身の方法をなぞります。既知

**小さい場と大きい場**。プラケットごとに $|U(\partial p) - 1|$ の大小で 1 を分割します（1 を「小さい」と「大きい」の二つの関数の和に書き、場合ごとに評価する）。大きいプラケットは $A(U)/g_0^2$ を大きくするので、最後には大きい場のプラケットごとに小さい因子 $\exp(-\frac{1}{4}p^2(g_j))$ が出ま

す。$g_j = g(L^j a)^{1/2}$ は段 $j$ の結合、$p(g)$ は大きい場の閾値の倍率で、$\log g^{-1}$ の冪で増えます（7-05 の式 (7)）。この因子は $g_j$ のどの冪よりも速く小さくなります。

**小さい場の中**。ブロックごとに Faddeev–Popov の手続き（ゲージを一つに固定し、その代わりの因子を積分に掛ける方法。4-08）で軸ゲージ（ブロックの中で、決めた向きのリンク変数を 1 に置くゲージ）を取り（大域的なゲージ固定は無いので局所に。3-04）、作用を最小にする配位（背景場）と揺らぎに分けます。揺らぎは指数的に減衰する共分散のガウス測度と局所的な相互作用になり、$g_0 = g a^{1/2}$ が小さいので $g_0$ の 6 次までの展開と 6 頂点までの真空の図で足ります。論文は、この積分は本来クラスター展開（7-04）で表せるが超繰り込み可能性による簡略化を使う、と書きます。

**二つの特徴**。群に値を取る格子の場は拡大縮小できないので、尺度変換の代わりに 'improvement of regularity properties of typical gauge fields' を使うこと。半単純性は一か所でだけ使い、随伴作用で不変なリー環の元が 0 しか無いことから 'there are no relevant variables in the effective action'（段を進めるごとに育つので追跡が要る量が、有効作用に無い）を導くこと。§03 の「相殺項は定数だけ」の格子の側の言い方がこれに当たります（この章の読み）。問題文はこの仕事を、ゲージを位相空間の細胞ごと・尺度ごとに紫外向きから赤外向きへ選び直すものと紹介します（JW §6.5）。既知

06

## 定理が言っていないこと

式 (3) は有効密度と分配関数が一様に有界だと言うだけで、極限については何も言いません。

$$\sup_a |\log Z_a| < \infty \quad \not\Longrightarrow \quad \lim_{a\to 0}\langle \mathcal{O}\rangle_a \text{ が在る} \quad \not\Longrightarrow \quad \text{公理とギャップ} \tag{4}$$

**評価から極限へ**。一様な評価からはコンパクト性（有界な列から収束する部分列が取れる、という性質）で部分列の極限の見込みが立ちますが、一意性は出ません（部分列の存在を「紫外安定性」と呼ぶ用法もあります。Chatterjee 2018 §6）。問題文の脚注 2 は、四次元の問題で 'weak-existence (compactness)' だけでは解と認めない（極限の性質を別に示すなら別）としています。既知

**何を測るか**。問題文は 'These results need to be extended to the study of expectations of gauge-invariant functions of the fields' と書きます（JW §6.5）。三次元ではこれが観測量の定義の問題です（次節）。

**その先**。定数 $O(1)|\mathbb{T}|$ は体積に比例し、無限体積（無限体積の段）には何も言いません。反射正値性は格子で成り立ちますが（Osterwalder–Seiler 1978、5-03）、回転対称性の回復とギャ

ップ（公理の段と一様なギャップの段）は手つかずです。二次元の確率量子化の力学を扱った Chevyrev–Shen の論文も、2026 年の版の §1.2 で 'the construction of the 3D YM measure in the continuum is open, even in finite volume' と書きます。既知

07

## 観測量の壁：三次元の Wilson ループ

### 線積分が定まらない

二次元では Wilson ループ $W(\gamma) = \operatorname{tr} \mathcal{P} \exp \oint_\gamma A$ が自然な観測量で、面積則が正確に成り立ちます（7-02）。三次元のヤン–ミルズは短い距離でガウス自由場（GFF。1-09）のように振る舞うと考えられ、その共分散は $1/|x-y|$ の程度なので、線分の上の線積分の分散は $\int_0^1 \int_0^1 ds\, dt / |t-s| = \infty$ です（Chevyrev 2022 §3.1。Cao–Chatterjee の要旨も 'line integrals of the GFF do not exist in such dimensions'）。既知

最も簡単な場合で確かめます。U(1) の自由場（ガウス測度）を格子で作り、一辺 1 の正方形のループ、結合 $e^2 = 1$ とすると、ゲージによらず $\langle W \rangle = \exp(-\tfrac{1}{2} \operatorname{Var} \oint A)$ で、

$$\operatorname{Var} \oint_\gamma A = \oint_\gamma \oint_\gamma G(x-y)\, dx \cdot dy, \qquad G_t(r) = \frac{\operatorname{erf}\left(r/\sqrt{8t}\right)}{4\pi r} \quad (d=3) \tag{5}$$

です。$G$ は格子のラプラシアンの逆、$G_t$ は熱流 $A \mapsto e^{t\Delta} A$（ヤン–ミルズ流の線形化）で均した場の共分散の連続版です。$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds$ は誤差関数で、$x$ が大きいと 1 に近づきます。均す幅は erf の引数の長さ $\sqrt{8t}$ 程度で、それより遠い二点では $G_t$ は $1/(4\pi r)$ とほぼ同じ、近い二点では有限の値に抑えられます。

計算 表 2　一辺 1 の正方形の $\langle W \rangle$。t は熱流の時間。最下行は式 (5) を連続で積分した値。

| a | 二次元 | 三次元 | 三次元 t = 0.01 | 四次元 | 四次元 t = 0.01 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1/4 | 0.6065 | 0.4837 | 0.6919 | 1.96e−1 | 0.6175 |
| 1/16 | 0.6065 | 0.3150 | 0.7396 | 5.22e−4 | 0.7127 |
| 1/128 | 0.6065 | 0.1631 | 0.7421 | 1.67e−28 | 0.7174 |
| 連続 | $e^{-1/2}$ | 0 | 0.7421 | 0 | 0.7175 |

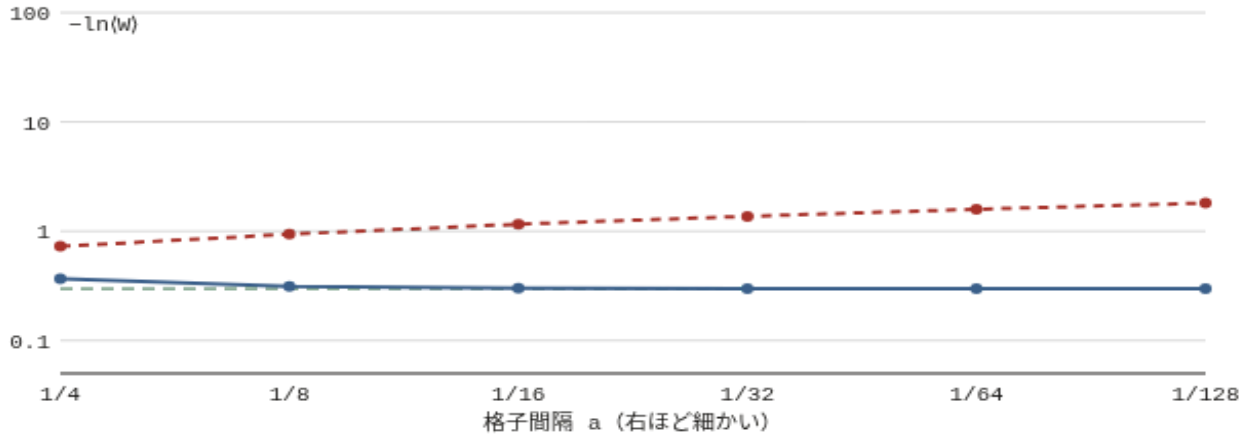
### 表 2 の読み

二次元ではどの格子でも $\operatorname{Var} = 1$（面積）で $\langle W \rangle = e^{-1/2}$ が正確に出ます。三次元では Var が $\ln(1/a)$ に比例して増え、$\langle W \rangle \to 0$ です。Var の $\ln(1/a)$ に対する傾きは 0.613 から 0.635 へ

（$2/\pi \approx 0.637$ に近づく）。$a$ を半分にするごとの増分では 0.425 から 0.440 で、$(2/\pi)\ln 2 \approx 0.441$ に近づきます。四次元では $\mathrm{Var} \approx 1/a$ です。計算

均すと、三次元でも四次元でも格子の値は連続の値に収束します。観測量を「均した場の Wilson ループ」で定める Cao–Chatterjee と CCHS の出発点の、最小の例です。計算

図 2　熱流の時間 $t$ を動かすと、均した Wilson ループ（青）は格子を細かくしても連続の値（緑の破線）に落ち着く。赤の破線は均さないもの




d = 3　t = 0.01　a = 1/128：均さない −ln(W) = 1.81、均した値 0.298（連続 0.298）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（表 2 と同じ計算）。

08

## 別の道：確率量子化と状態空間

### 方程式を解く道

測度を直接作る代わりに、それを不変測度（時間が経っても分布が変わらない測度）に持つはずの確率偏微分方程式を解く道があります（7-09）。Chandra–Chevyrev–Hairer–Shen（CCHS 2024）は三次元のヤン–ミルズ–Higgs で、分布の非線形な距離空間にゲージ同値を広げ、正則性構造（特異な確率偏微分方程式の解の理論。7-09 で扱う）で繰り込んだ方程式の局所解（短い時間だけ在る解）を作り、'there is a unique choice of renormalisation counterterms such that these solutions are gauge covariant in law' を示しました。既知

Higgs 場は無くてもよく、純ヤン–ミルズに制限した述べ方は Chevyrev 2022 Remark 1.2 にあります。結果として、軌道空間の上の Markov 過程（先の振る舞いが現在の状態だけで決まる確率過程）が、有限時間の爆発（解が有限の時間で無限大になること）の可能性つきで定まります。

### 状態空間

状態空間の作り方が前節への答えです。線積分は使えないので、決定論的なヤン–ミルズ流（DeTurck の項つき。ゲージの向きの項を足して熱方程式の形にしたもの）を「ゲージと両立する均し」とし、均した後の場でゲージ同値を定めます（Chevyrev 2022 §3.1）。軌道の空間は二次元では Polish 空間（完備な距離が入り、可算な稠密部分集合を持つ空間）ですが、三次元では 'completely Hausdorff (and separable)'（異なる二点を連続関数で分けられ、可算な稠密部分集合を持つ）までしか分かっていません（同 Remark 1.5）。非可換では軌道の空間が非線形で、状態空間から難しくなります（同 §1.1、3-04）。

残っているのは不変測度で、それが唯一に在ると示されれば有限体積の三次元ヤン–ミルズ測度の構成になる、と総説は書きます（同 §4）。Cao–Chatterjee（2024）は、理論が短い距離で GFF のように振る舞うと仮定すれば、単位トーラスの上で理論を 'random distributional gauge orbits' として実現でき、均した Wilson ループが定義できることを示しました。これも状態空間の結果です。 既知

09

## 寄り道：2+1 次元の格子の数値

飛ばしてよい節です。

物理の側では、三次元のヤン–ミルズは閉じ込めと質量ギャップを持つと考えられています。Teper（arXiv 1998、Phys. Rev. D 1999）は SU(2)〜SU(5) の格子理論を 2+1 次元でモンテカルロ法（5-07）で計算し、グルーボールの質量と弦張力の比を連続極限へ外挿しました。要旨によれば比は N にほとんどよらず、弦張力は N が大きくても 0 になりません。$\beta = 2N/(g^2 a)$ なので格子単位の相関長 $\xi/a = \beta/\big(2N\,(m/g^2)\big)$ は $\beta$ に比例して伸びるだけです（四次元では指数的。5-05）。 物理

問題文は、ギャップが四次の項 $(A \wedge A)^2$ から来るという見方の文献に Feynman の 2+1 次元の論文（1981）を挙げます（JW §6.6）。三次元の U(1) 格子ゲージ理論は、格子間隔を固定したまま、すべての結合で静的な電荷を閉じ込めることが示されています（Göpfert–Mack 1982。四次元の U(1) は 5-06）。 既知 連続極限は自由な電磁場なので（Gross 1983）、この閉じ込めは連続極限には残らないと考えられます。 物理

10

## 三次元の現在地

既知 表 3　三次元での到達点（段は 7-01。区分は 7-01 の表 2 と同じ）。

| 段 | 非可換ヤン–ミルズ | 可換 U(1)（参考） |
|---|---|---|
| 1 正則化 | 閉 | 閉 |
| 2 有限体積の測度 | 閉（格子）。連続のまま作ることは紫外極限の段の「一部」に含める | 閉（格子） |
| 3 紫外 | 一部：格子の一様な評価（Bałaban 1985）。連続の測度は未構成。確率量子化は力学まで（CCHS 2024） | 連続極限（Gross 1983、別種の収束で。極限は自由場）。Higgs つきは King 1986 |
| 4 無限体積 | 未 | Higgs つきで極限（King 1986） |
| 5 公理 | 未 | ここでは確かめていない |
| 6 ギャップ | 未（数値では在る。物理） | 格子（a 固定）で全結合の閉じ込め（Göpfert–Mack 1982）。連続極限（紫外極限の段）ではこの性質は残らないと考えられる物理 |

U(1) の欄は参考です。一様なギャップの段の行に書いたのは閉じ込め（静的な電荷のあいだの力が距離とともに弱まらないこと）で、閉じ込めと質量ギャップは別の性質です（17-02 §02）。

四次元（7-07）との違いは、紫外で結合を弱めるのが次元そのものであることです。共通して残るのは、評価を極限に変えること、極限で測る量を決めること、体積に一様な評価です。無限体積では三次元も長さ $1/g^2$ で結合が 1 程度になり、四次元の赤外と同じ種類の困難に入ります（この章の読み。7-10）。

---

## この章が言えている範囲

| | 内容 |
|---|---|
| 言えている | 格子で見える結合は $g^2 a$。外線をグルーオンに限ると発散しうる型は七つ計算 。ゲージ不変な局所項の次元から、要る相殺項は真空のエネルギーの定数一つ既知 |
| 言えている | Bałaban（1985）の定理：有効密度の格子間隔に一様な上下界と、分配関数の一様な評価（本文で確認）既知 |
| 言えている | U(1) 自由場の Wilson ループは三次元で $\ln(1/a)$、四次元で $1/a$ の速さで潰れ、熱流で均すと連続の値に収束する（$a \geq 1/128$ の範囲）計算 |
| 言えている | 非可換の三次元の連続の測度は有限体積でも未構成（Chevyrev 2022、Chevyrev–Shen）既知 |
| 言えていない | Bałaban の証明の細部（著者自身が概略と書く）。相互作用のある理論で均した Wilson ループが極限を持つか（表 2 は自由場） |

| | 内容 |
|---|---|
| **言えていない** | 三次元の質量ギャップと閉じ込め（数値は物理の水準）。2024 年以降の文献の網羅 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| §02〜§05 | 一次資料（本文で確認） | T. Bałaban, Ultraviolet stability of three-dimensional lattice pure gauge field theories, Comm. Math. Phys. 102 (1985) 255–275 |
| §05・§06・§09 の引用 | 一次資料（本文で確認） | A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*, Clay Mathematics Institute の公式問題文（2000） |
| §01・§07・§08 の引用 | 総説（本文で確認） | I. Chevyrev, Stochastic quantisation of Yang–Mills, arXiv:2202.13359（2022）§1.1・Remark 1.2・Remark 1.5・§3.1・§4 |
| §06・表 3 の可換群 | 総説（本文で確認） | S. Chatterjee, Yang–Mills for probabilists, arXiv:1803.01950（2018）§4・§6 |
| §06 の連続の測度の現状 | 一次資料（§1.2 を本文で確認） | I. Chevyrev, H. Shen, Invariant measure and universality of the 2D Yang–Mills Langevin dynamic, Comm. Pure Appl. Math.（2026）, arXiv:2302.12160（v3, 2026） |
| §07・§08・§09 | 要旨で確認 | A. Chandra, I. Chevyrev, M. Hairer, H. Shen, Stochastic quantisation of Yang–Mills–Higgs in 3D, Invent. Math. 237 (2024) 541–696, arXiv:2201.03487。S. Cao, S. Chatterjee, A state space for 3D Euclidean Yang–Mills theories, Comm. Math. Phys. 405 (2024), arXiv:2111.12813。M. Teper, Phys. Rev. D 59 (1999) 014512, arXiv:hep-lat/9804008 |
| 可換群・Feynman・反射正値性 | 書誌のみ | L. Gross, CMP 92 (1983) 137–162。C. King, CMP 102 (1986) 649–677; 103 (1986) 323–349。M. Göpfert, G. Mack, CMP 82 (1982) 545–606（この一篇は要旨まで確認：Villain 作用・全結合で弦張力が正。INSPIRE。本文は未読。年は Crossref の発行年で、INSPIRE は 1981）。R. P. Feynman, Nucl. Phys. B 188 (1981) 479–512。K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471 |
| 表・図 | 計算 | この端末の Python：`powercount.py`（表 1）、`ladder.py`（§04 の段の和・図 1）、`wilson_free.py`（表 2・図 2。scipy で格子のグリーン関数を熱核の Bessel 表示から積分し、二次元の Var = 1 を 1e−10 で再現。約 10 秒）。図は canvas と素の JavaScript |

次に読む章：7-07 四次元（同じ方法の四次元版）。

# 四次元：Bałaban と Magnen–Rivasseau–Sénéor — 紫外の側は有限体積で「制御の水準」まで来たが、この二つの系列では構成は完了していない

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

**この章で分かること** — 四次元では結合が対数でしか弱まらず、結合そのものを繰り込む必要があること。Bałaban の 1989 年の主定理が何を仮定し何を結論するか。MRS 1993 が連続の切断で何をしたか。「制御の水準」がどこまでを含み、どこから先を含まないか。

**前提となる章** — 7-05 繰り込み群の段の列。7-06・7-01 の紫外極限の段・4-06 も参照します。

**先に言うこと** — 既知の結果の紹介です。Bałaban の四次元の系列は、1989 年の論文の要旨と序文のほかは書誌だけで扱います。MRS は序文と設定の節までです。表と図の数値は結合の走りの算術です。この章の二つの系列では、四次元のヤン–ミルズの構成は有限体積のトーラスの上でも完了していません。2026-11-10 に、別の設計による構成の Lean での形式化と、委員会の評価書が公開されました。その読みは第 6 部と第 8〜14 部で、この章はその前の到達点の記録です（表 4 の右の列だけが公開された構成）。

この章の順序

1. 四次元で何が変わるか — 結合は対数でしか弱まらない
2. Bałaban の四次元の系列 — 土台から四次元まで、六年にわたる 13 篇
3. 1989 年の主定理を読む — 仮定つきの定理
4. 仮定を数で見る — 動く図・表
5. 「紫外安定性」の三つの読み — 評価・部分列・一意性
6. MRS 1993：連続の切断で — 軸性ゲージと Slavnov 恒等式
7. 二つの道を並べる — 格子と連続の切断、場の最初の上界
8. 「制御の水準」の意味 — 動く図・表

9. 寄り道：数百頁の証明をどう確かめるか

01

## 四次元で何が変わるか

三次元では、格子を細かくすると結合がひとりでに弱まりました（7-06 §02）。四次元では結合 $g$ に長さの次元が無く、細かい尺度で結合を弱めるのは漸近自由だけです（4-06）。長さの尺度 $\ell$ での結合 $g(\ell)$ は、純ゲージの $SU(N)$ で

$$\ell \frac{dg}{d\ell} = b_0 g^3 + b_1 g^5 + \cdots, \qquad b_0 = \frac{11N}{48\pi^2}, \qquad b_1 = \frac{17N^2}{384\pi^4} \tag{1}$$

に従います（PDG の式 (9.3) をこの本の規約に直した値）。既知 一ループだけを残すと

$$\frac{1}{g^2(\ell)} = \frac{1}{g^2(\ell')} + 2b_0 \ln \frac{\ell'}{\ell} \tag{2}$$

で、尺度を半分にするごとに $1/g^2$ が $2b_0 \ln 2$ だけ増えます。**例：**$g^2 = 0.2$ から格子間隔を半分にすると、$SU(3)$ では $1/g^2$ が 5 から 5.0966 になり $g^2$ は 1.9% 減、$SU(2)$ では 1.3% 減です。三次元なら $g_0^2 = g^2 a$ が半分になります。計算

この遅さのため、段ごとの $g_k^2$ 程度の補正の和は段数の対数で増え続け、誤差として積めません（7-05 §06）。補正を結合そのものに繰り込む必要があり、四次元の系列の最初の論文の題は 'a coupling constant renormalization in four dimensions' を含みます。既知

02

## Bałaban の四次元の系列

Bałaban の仕事は、三次元と共通の土台（1983–85）の上に四次元の論文（1987–89）を積んだ系列で、総説は 'a long series of papers spanning six years' と書きます（Chatterjee 2018 §6）。既知

既知 表 1　系列の並び（書誌は Chatterjee 2018・Dimock 2011・Crossref で照合）。

| 年 | 誌 CMP | 内容（題から） | 確認 |
|---|---|---|---|
| 1983–85 | 89・95・96・98・99（二篇）・102 | 伝播関数・平均化・ゲージ固定・背景場などの土台 | 書誌のみ |
| 1985 | 102, 255–275 | 三次元の紫外安定性（7-06 §04） | 本文 p.255–257 |

| 年 | 誌 CMP | 内容（題から） | 確認 |
|---|---|---|---|
| 1987 | 109, 249–301 | 小さい場の近似での有効作用と、四次元の結合定数の繰り込み | 書誌のみ |
| 1988 | 116, 1–22；119, 243–285 | 同 II：クラスター展開；収束する繰り込み展開 | 書誌のみ |
| 1989 | 122, 175–202 | 大きい場の繰り込み I：R 操作の基本の段 | 書誌のみ |
| 1989 | 122, 355–392 | 大きい場の繰り込み II：局所化・指数化・評価 | 要旨と序文 |

問題文はこの拡張を 'a qualitative breakthrough' と呼び、'an analysis of asymptotic freedom to control the renormalization group flow as well as obtaining quantitative estimates on effects arising from large values of the gauge field' と要約します（JW §6.5）。題に即せば、1987 年の論文が小さい場と結合の走りを、1989 年の二篇が大きい場（7-05 §04 の $\Omega^c$）を受け持ちます。既知

本書での使い方は 15-02 §01（連作の五段の地図）。

03

## 1989 年の主定理を読む

最後の論文の序文の定理（条件つきの紫外安定性の定理。Bałaban 1989 の Theorem 1）です。

'Theorem 1. If the sequence of the effective coupling constants is contained in an interval ]0, γ] with a sufficiently small positive γ, then the effective densities $\rho_k$ have the form, and satisfy all the conditions and bounds, described in Sect. 2 [III].'

有効結合の列とは、段 $k = 0, \dots, K$（細かい段から単位格子まで）ごとの結合 $g_k$ です。「形と条件と評価」は 7-05 §07 の帰納の形を指します。論理の形だけを取り出すと

$$\underbrace{0 < g_k \le \gamma \ \ (k = 0, \dots, K)}_{\text{仮定}} \implies \underbrace{\rho_k \text{ が帰納的な表示と評価を満たす}}_{\text{定理 1}} \tag{3}$$

です。著者は、仮定は先行論文の定理 2 から出る基本不等式に従うので外せるが、'The proof of Theorem 2, which is based on second order perturbative calculations, is very awkward and long ... and has not been published yet, so we have Theorem 1 with the assumption' と続けます（Theorem 2 は、仮定を外すための基本の不等式）。1989 年の時点で、四次元の紫外安定性は**仮定つきの定理**です。探した範囲（著者の 1989 年以後の論文の書誌）では、基本の不等式（Theorem 2）の証明を載せた論文は見当たりません。既知

定理から 'the ultraviolet stability bounds of the same type as for superrenormalizable models in [16]' が出て、定数 $E_\pm$ は 'independent of k, $T_\eta$, $U_k$' です。ループ変数などの期待値の解析は今後の課題とされています。既知

超繰り込み可能な模型（原論文の文献 [16]）と同じ型の評価、という意味です。三次元のヤン–ミルズは超繰り込み可能なので（7-01 の式 (7)）、形は 7-05 の式 (10) と同じ型と読めます。$T_\eta$ は論文の格子、$|T_\eta|$ はその点の数で、7-05 の式 (10) の $|T_k|$ に当たります。$U_k$ は段 $k$ の場の配位です。定数が段にも格子の大きさにも場にもよらない、ということです（この段落はこの章の読み）。

**例：**論文の有効結合 $g_k$ は論文の中で段ごとに定められるもので、式 (2) の走りそのものではありません。一ループの走り (2) で読めば $g_k$ は粗い側ほど大きく、列の最大は単位格子の $g_K$ なので、仮定 (3) は $g_K \le \gamma$ の一条件に縮みます（この章の読み）。

04

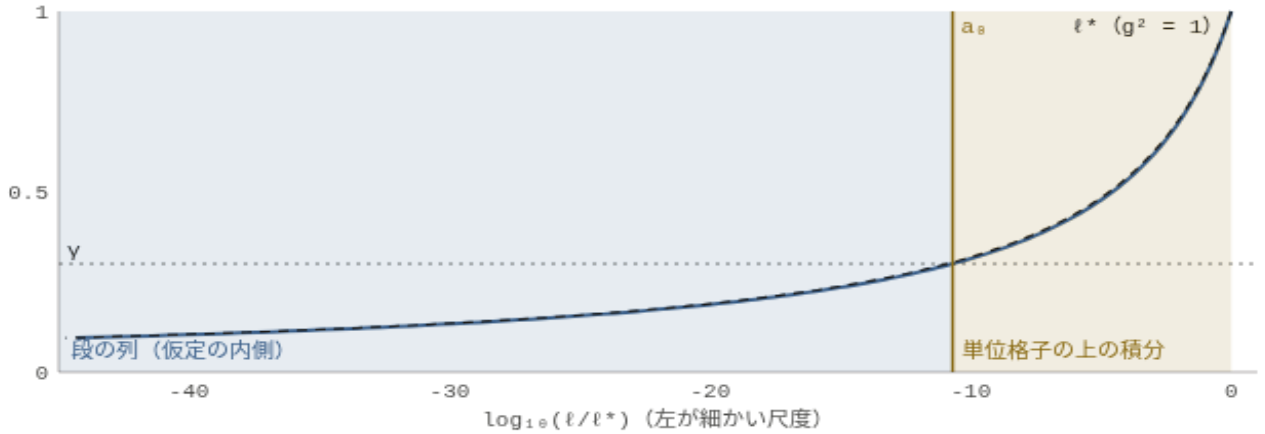
## 仮定を数で見る

段の列が止まる単位格子の尺度を $a_0$ とすると（7-05 の式 (1)）、仮定は単位格子の尺度で結合が小さいことで、ここでは $g^2(a_0) \le \gamma$ と書きます。式 (1) を粗い側へ延ばして $g^2 = 1$ になる長さを $\ell_*$ と書きます。$\ell_*$ は摂動論を信頼できない所まで延ばした**目安の長さ**で、閉じ込めや質量が現れると物理で考えられている尺度の見当です。物理 $u = g^2$ として式 (1) を積分すると

$$\ln \frac{\ell_*}{a_0} = \int_\gamma^1 \frac{du}{2u^2\,(b_0 + b_1 u)} \;\approx\; \frac{1}{2b_0}\Big(\frac{1}{\gamma} - 1\Big) \tag{4}$$

右は一ループの近似です。定理の文面で $\gamma$ は 'sufficiently small' とあるだけなので、下の $\gamma$ は説明のための値です。ここでは $\gamma$ を $g^2$ の上限として使います（式 (3) の $g_k \le \gamma$ とは $\gamma$ の付け替えだけの違いです）。

図 1　γ を動かすと、段の列が止まる尺度 $a_0$（縦線）と $g^2 = 1$ の目安 $\ell^*$（右端）の距離が変わる




SU(2)　γ = 0.30　$\log_{10}(a_0/\ell^*)$ = −10.70（二ループ）・−10.91（一ループ）　一辺 $\ell^*$ のトーラスの単位格子の点 ≈ 10^42.8

計算 この図の数値はこの端末で計算した（式 (4)。実線が二ループ、破線が一ループ。表 2 と一致）。

計算 表 2　$\log_{10}(\ell_*/a_0)$（一ループ／二ループ）と、一辺 $\ell_*$ の四次元トーラスの単位格子の点の数（二ループ）。

| $\gamma$ | SU(2) | SU(3) | 点 SU(2) | 点 SU(3) |
|---|---|---|---|---|
| 0.5 | 4.68 / 4.55 | 3.12 / 3.00 | 10^18.2 | 10^12.0 |
| 0.3 | 10.91 / 10.70 | 7.27 / 7.06 | 10^42.8 | 10^28.2 |
| 0.2 | 18.70 / 18.42 | 12.47 / 12.18 | 10^73.7 | 10^48.7 |
| 0.1 | 42.08 / 41.67 | 28.06 / 27.64 | 10^166.7 | 10^110.6 |

表 2 の範囲（$\gamma = 0.1$〜$0.5$）では、$a_0$ は $\ell_*$ より 3〜42 桁細かい所にあり、一辺 $\ell_*$ の四次元トーラスの単位格子の点は $10^{12}$〜$10^{167}$ 個です。計算

読み方（この章の読み）。段の列で押さえるのは $a_0$ より細かい尺度だけです。その先は単位格子の上の有限次元の積分で、群がコンパクトなので有界ですが、定数は $e^{E|T|}$ の形です。$|T|$ は単位格子の点の数で、7-05 の式 (10) の $|T_k|$（§03 の $|T_\eta|$）の最後の段に当たります。一辺 $\ell_*$ のトーラスなら $|T|$ は上の点の数の大きさです。紫外安定性は $\ell_*$ の尺度についての情報ではありません。

05

## 「紫外安定性」の三つの読み

同じ言葉が違う強さで使われます。既知 **評価として：**'The ultraviolet stability means that the actions $\rho_K$ have bounds independent of the lattice spacing $\varepsilon$'（Bałaban 1985）。**部分列として：**'The existence of a convergent subsequence is known as ultraviolet stability'（Chatterjee 2018 §6）。「**一つの形**」**として：**MRS と Bałaban について 'a form of ultraviolet stability' が示された（Chevyrev 2022 §1.1）。

評価から部分列へ進む道具はコンパクト性で、いちばん簡単な形は Bolzano–Weierstrass の定理です。

$$\sup_K |x_K| < \infty \implies \text{ある } K_1 < K_2 < \cdots \text{ について } x_{K_j} \text{ が収束する} \tag{5}$$

極限は一つとは限りません。**例：**$x_K = \sin K$ は $|x_K| \le 1$ ですが収束せず、$K = 33, 77$ では $0.99991, 0.99952$、$K = 11, 55$ では $-0.99999, -0.99976$ で、1 に近づく部分列と $-1$ に近づく部分列が取れます。計算

MRS の序文は Bałaban の結果をこう評します。'From this result the existence of an ultraviolet limit for gauge invariant observables such as "smoothed Wilson loops" should follow, at least through a compactness argument using a subsequence of

approximations; but the limit is not necessarily unique.' 問題文の脚注 2 は、コンパクト性による弱い存在を、極限の性質（ギャップと公理）を別に示さない限り解と認めません（JW §6.5。7-06 §06 も参照）。既知

06

## MRS 1993：連続の切断で

Magnen–Rivasseau–Sénéor は格子を使わず、連続の運動量の切断から出発しました。対象は四次元の純 $SU(2)$、自明な位相セクター、固定した赤外の切断で、紫外の切断を外した、正則化した軸性ゲージの Schwinger 関数です。既知 言葉を順に定義します。

- **軸性ゲージ**：一つの座標方向の成分を 0 にそろえるゲージの選び方です（$A_4 = 0$ など。ゲージ固定は 4-08）。
- **自明な位相セクター**：インスタントン数（3-05）が 0 の配位だけを扱うことです。
- **Schwinger 関数**：ゲージを一つ固定したときの場の積の期待値 $\langle A(x_1) \cdots A(x_n) \rangle$ です。

中心は場の大きさの見積もりです。切断が壊したゲージ不変性を戻す相殺項が場を $\lambda^{-1}$ 程度に抑えます（$\lambda$ は結合）。軸性ゲージでは、ゲージを固定した後の測度が正の重みのまま残ります。これが軸性ゲージの**正値性**で、MRS は Feynman ゲージなどを出発点に使えない理由として 'lack of positivity' を挙げています。この正値性と合わせると、確率の意味で場はおよそ $\lambda^{-1/2}$ になります。そこで小さい場と大きい場の領域に分けて扱います。MRS の曲率で書くと

$$F = dA - \lambda[A, A], \qquad \frac{\lambda |A|^3}{|A|^2} = \lambda |A|, \qquad \frac{\lambda^2 |A|^4}{|A|^2} = \lambda^2 |A|^2 \tag{6}$$

です。作用 $|F|^2$ を展開すると二次・三次・四次の項が出ます。右の二つは三次の項と四次の項を二次の項で割った比で、微分の数を数えない大きさの目安です（この章の読み）。$|A| \sim \lambda^{-1}$ では比はどちらも 1、$|A| \sim \lambda^{-1/2}$ では $\lambda^{1/2}$ と $\lambda$ です。$\lambda^{-1}$ では非線形の項が二次の項と同じ大きさで、MRS も $\lambda^{-1}$ の情報だけでは 'not enough to start perturbation theory' と書きます。**例：**$\lambda = 0.01$ なら、$|A| \sim 100$ で比は 1 と 1、$|A| \sim 10$ で 0.1 と 0.01。計算

小さい場の領域ではゲージを摂動計算向きの、背景場に依存するものに替えます。結論は 'The ultraviolet limit as ρ → ∞ of the Schwinger functions … exists; furthermore these functions in the ultraviolet limit satisfy the Slavnov identities' です。Slavnov 恒等式は、小さいゲージ変換への不変性がゲージを固定した相関関数の間に残す関係式です（4-08）。
既知

留保も著者自身が書いています。'we do not provide a detailed proof of this statement'、詳細な証明は 'would presumably be several hundred pages long'。軸性ゲージに限られ、インスタントンを扱わず、赤外の切断を外しません。外せば結合が大きくなり 'presumably to so-called non-perturbative effects corresponding to confinement' に至るからです。 既知

07

## 二つの道を並べる

MRS は自分たちの切断の役割を 'quite similar to the role played by compactness of integration over the gauge group in Balaban' だとします。式にすると

$$\text{格子：}\ U_\ell \in G\ \text{（コンパクト）}\ \Rightarrow \|U_\ell - 1\| \le 2, \qquad \text{連続：相殺項} \Rightarrow |A| \lesssim \lambda^{-1} \tag{7}$$

で、どちらも場の最初の上界です。 既知 格子の側は群の元、連続の側はリー環の元で書いているので、大きさをそろえます。$SU(2)$ で $U_\ell = e^{igB_\ell}$（$B_\ell$ はリー環の元）と書けば、回転角を $0$ から $\pi$ に取れるので $|B_\ell| \le \pi/g$ です。つまり格子の側でもリー環の場は $1/g$ 程度に抑えられ、両辺とも「場 $\lesssim$ 1/結合」の形になります（この章の読み）。**例：**$SU(2)$ で $\|U-1\| = 2$ になるのは $U = -1$、回転角 $\pi$ のとき。 計算 上界だけでは摂動を始められない点も共通です。

既知 表 3　二つの道。

| | Bałaban（1987–89） | MRS（1993） |
|---|---|---|
| 正則化 | 格子（Wilson 作用） | 運動量の切断（ゲージ不変性を壊し相殺項で戻す） |
| 群・赤外 | コンパクトなリー群 $G$（三次元の論文の設定。四次元の細部は未確認）・トーラスの上 | $SU(2)$・固定した赤外の切断 |
| 押さえたもの | 有効密度と分配関数の、格子間隔によらない上下界 | 軸性ゲージの Schwinger 関数の紫外極限と Slavnov 恒等式 |
| ゲージ | 場所と尺度ごとに局所的に選ぶ（考え方は 7-05 §05。四次元の論文での具体的な選び方は本文で確かめていない） | 大きい場で軸性、小さい場で背景場に依存 |
| 反射正値性 | 各格子間隔の Wilson 測度では成り立つ（JW §6.5、5-03）。極限での成立は扱っていない | 未。格子を最初の切断にすれば示せるだろう、と著者 |
| 証明 | 主定理は仮定つき（§03） | 詳細な証明は無い（著者） |

MRS は、Bałaban の仕事がゲージを固定した Schwinger 関数を扱わないことを指摘し、'one can consider in fact that the ultraviolet problem for the Yang-Mills field theory is not yet understood until this point is clarified' と書きます。逆に MRS は反射正値性と赤外を後に残しています。 既知

08

## 「制御の水準」の意味

紫外極限の段（7-01）の中とその先を、摂動論の水準から一様なギャップの水準までの八つの水準に分けます（表 4 の行。非自明性の水準は極限が自由場（ガウス）でないことで、問題文はさらに短距離の振る舞いが漸近自由の予言と一致することを求めます。一様なギャップの水準は体積に一様な質量ギャップ）。式 (8) の数字は表 4 の行の番号です。文献の言葉を矢印に載せると

$$1 \xrightarrow{\text{従うはず（MRS）}} 2 \xrightarrow{\text{一意とは限らない}} 3 \longrightarrow 4,5 \longrightarrow 6,7 \tag{8}$$

で、定理があるのは一様な評価の水準だけです（四次元では仮定つき）。既知

図 2　仕事を選ぶと、各水準の状態（定理・仮定つき・概略・見込み・未）が変わる




Bałaban 四次元：一様な評価の水準が仮定つきの定理、部分列の極限の水準は「従うはず」

既知 表 4　制御の水準（「見込み」は文献が「従うはず」「示せるだろう」と書くもの。問題文が求めるのは理論の存在と性質で、一様な評価の水準は方法の段）。右の列は 2026-11-10 に公開された構成で、「定理」は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」の意味です（6-01・6-04）。

| 水準 | Bałaban 四次元 | MRS | 問題文 | 公開された構成（2026-11-10） |
|---|---|---|---|---|
| 0 摂動論 | 前提 | 前提 | 前提 | 前提 |
| 1 一様な評価 | 定理（仮定つき） | 概略 | （方法として通常は要る） | 定理（多段の評価。第 11 部） |
| 2 部分列の極限 | 見込み | 概略 | 単独では不可（脚注 2） | 定理 |
| 3 一意性 | 未 | 概略 | 要る | 族の選んだ間隔の列の全体で収束。ほかの間隔の列への普遍性は未（6-04） |

| 水準 | Bałaban 四次元 | MRS | 問題文 | 公開された構成（2026-11-10） |
|---|---|---|---|---|
| 4 対称性・反射正値性 | 未（各格子間隔の Wilson 測度では成り立つ） | Slavnov は概略、OS 正値性は見込み | 要る | 定理（相の各成分が OS の公理の変種を満たす。第 12 部） |
| 5 非自明性 | 未 | 未 | 要る | 定理 |
| 6 無限体積 | 未 | 未（赤外の切断を外さない） | 要る（$\mathbb{R}^4$） | 体積の部分列に沿って定理。収束と一意性は未（6-04） |
| 7 一様なギャップ | 未 | 未 | 要る（$\Delta > 0$） | 未（在るのは多項式の評価だけ。6-04） |

「制御の水準まで来ている」とは、一様な評価の水準が通り（四次元では仮定つき）、部分列の極限・一意性・対称性と反射正値性の水準の一部が見込みか概略として書かれている状態のことです。問題文は $T^4$ について 'while the construction is not complete, there is ample indication that known methods could be extended to construct Yang–Mills theory on T4' と書き、コンパクトな空間の上の詳細な構成だけでも 'a major breakthrough' だとします（JW §6）。2004 年の報告も 'The state of the art remains the works of Balaban and of Magnen, Rivasseau and Sénéor' と書きます（Douglas 2004）。既知 2026-11-10 に公開された構成は、表 4 の右の列のとおり、一様な評価から非自明性までの水準と、体積の部分列に沿った無限体積に届いている、と委員会は評価しています。一様なギャップの水準には届いていません（6-01）。

**例：**物差しとして、弱結合の三次元の $\phi^4$ では一様な評価の水準から一様なギャップの水準までに当たるものがすべて定理です（JW §6.2、7-03 §06）。非自明性の水準に当たるのは、極限の測度が非ガウスであること（JW §6.2 の 'a remarkable non-Gaussian measure'）です。非自明性の水準が別に示す必要のある性質であることは 7-08、無限体積の水準と一様なギャップの水準で出題者が新しい考えを求めていることは 7-10 で扱います。

09

## 寄り道：数百頁の証明をどう確かめるか

飛ばしてよい節です。

二つの仕事には長さという共通の困難があります。表 1 の論文の頁を足すと

$$\underbrace{221}_{\text{土台 7 篇}} + \underbrace{21}_{\text{三次元}} + \underbrace{184}_{\text{四次元 5 篇}} = 426 \text{ 頁} \tag{9}$$

です（頁の範囲の足し算）。計算 MRS は Bałaban の仕事を 'not easily accessible ... the results are scattered over many publications; hence to check the consistency of all the arguments is very difficult' と評し、自分たちの詳細な証明を書くことは 'an extremely valuable task' だと結びます。既知

一つの応答は易しい模型での書き直しで、Dimock は 'others have been slow to adopt the approach' として三次元の $\phi^4$ で方法を解説しました（7-05）。もう一つは長い証明を機械で検査する道具で、考え方は Lean の案内 にあります。

## この章が言えている範囲

| | 内容 |
|---|---|
| 言えている | 条件つきの紫外安定性の定理（Theorem 1）の文面と仮定・未公刊の基本の不等式（Theorem 2）、MRS 1993 の設定と留保、出題者と総説の評価（一次資料で確認）既知 |
| 言えている | 式 (1)(2)(4)(6) の算術、表 2・図 1、§01・§04〜§07 の例と数値、式 (9)計算 |
| 言えていない | Bałaban の四次元の証明の中身と設定の細部。$\gamma$ の値。表 2 の $a_0$ が論文の単位格子の尺度に一致すること（この章の読み） |
| 言えていない | 基本の不等式（Theorem 2）の証明の公刊（探した範囲＝著者の 1989 年以後の論文の書誌では見当たらない）。2004 年以後の文献での四次元の紫外側の進展の有無（2026 年の総説は書誌と要旨のみで、評価には使っていない。2026-11-10 に公開された構成は第二巻で読む） |
| 言えていない | 四次元での極限の一意性・公理・非自明性・無限体積・質量ギャップ。どれについても、この章もこの本も自分では示していない。2026-11-10 に公開された構成では、公理・非自明性・体積の部分列に沿った無限体積までが Lean で証明されている、と委員会が評価した。体積の極限の一意性と質量ギャップは示されていない（6-04） |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| Theorem 1・Theorem 2 | 要旨と序文 p.355–356 | T. Bałaban, Large field renormalization. II, Comm. Math. Phys. 122 (1989) 355–392 |
| 紫外安定性の定義（三次元） | 本文 p.255–257 | T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 102 (1985) 255–275 |
| 系列の他の論文（表 1） | 書誌のみ | CMP 89 (1983)；95, 96 (1984)；98, 99, 102 (1985)；109 (1987)；116, 119 (1988)；122 (1989) 175–202。題は Chatterjee の文献表と Crossref で照合 |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 基本の不等式（Theorem 2）の公刊の有無 | 書誌のみ | Crossref の著者検索（T. Bałaban、1989 年以後）。ゲージ場を含む論文は T. Bałaban, M. O'Carroll, R. Schor, J. Math. Phys. 32 (1991) 3199–3208（外部ゲージ場の中のフェルミオンのブロック繰り込み）だけで、基本の不等式の証明に当たるものは見当たらない |
| MRS の内容と Bałaban への評 | p.325–328 | J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, Construction of $\mathrm{YM}_4$ with an infrared cutoff, Comm. Math. Phys. 155 (1993) 325–383 |
| 出題者の評価・脚注 2・$\phi^4_3$ の非ガウス性 | 本文 | A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*, Clay Mathematics Institute (2000) §6, §6.2, §6.5 |
| 'state of the art' | 本文 | M. R. Douglas, Report on the Status of the Yang–Mills Millenium Prize Problem, Clay Mathematics Institute (2004) |
| 紫外安定性の用法・文献表 | §6 | S. Chatterjee, Yang–Mills for probabilists, arXiv:1803.01950 |
| 'a form of ultraviolet stability' | §1.1 | I. Chevyrev, Stochastic quantisation of Yang–Mills, J. Math. Phys. 63 (2022) 091101, arXiv:2202.13359 |
| 解説の動機・文献表 | §1.1 | J. Dimock, The renormalization group according to Balaban, I. Small fields, arXiv:1108.1335 |
| $b_0, b_1$ | §9.1.1 式 (9.3) | S. Navas et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. D 110 (2024) 030001 |
| 2026 年の総説 | 書誌と要旨のみ（評価には使っていない） | M. R. Douglas, The Yang–Mills Millennium problem, Nature Reviews Physics 8 (2026) 86–97 |
| 表 2・図 1・例・式 (9) | 計算 | この端末の Python：`running_gamma.py`（式 (4) を数値積分と照合）、`ratios_quartic.py`（式 (6) の比と $SU(2)$ の $\lvert B\rvert \le \pi/g$） |

次に読む章：7-08 四次元の $\varphi^4$ の自明性（非自明性の水準が、なぜ別に示す必要のある性質なのか）。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 7 部 構成的場の理論 自明性

# 四次元の φ⁴ の自明性 — 格子で作った極限はガウスに潰れる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

**この章で分かること** — 「自明」がガウスを指すこと。四次元が境目になる数え方と、それを二本の酔歩の出会いで見る見方。Aizenman–Duminil-Copin の定理（2021）の仮定と結論。ヤン–ミルズで「非自明」が別の要件になる理由。

**前提となる章** — 7-03 スカラー場の構成（2-08・7-07 も参照）。§08 の一ループの式だけは 4-04 発散と繰り込み（と 1-11 の Parseval の等式）を使います。

**先に言うこと** — 証明は筋だけを追います。表の数値は自由場と単純酔歩の計算で、イジング模型の計算ではありません。§08・§09 は一ループの絵で定理ではありません。ヤン–ミルズが自明か非自明かについて、この章は何も示しません。

この章の順序


1. 自明とは何か：ガウスと Wick の法則
2. 格子から連続へ：臨界点に寄せる
3. 次元を数える：樹形図の上界と $L^{4-d}$
4. ランダムカレント：Wick からのずれは塊の出会い
5. 二本の酔歩の出会い：稀だが、まとめて出会う
6. 泡の図：四次元の対数
7. 定理を読む：範囲と年表
8. 物理の絵：一ループの走る結合
9. 表と図で読む：潰れる結合と Landau 極（寄り道：赤外で自由になる側）
10. 非自明性の要件：ヤン–ミルズでは何が要るか

01

## 自明とは何か：ガウスと Wick の法則

ユークリッド化した場の理論は確率測度で、中身は相関関数 $S_n(x_1,\dots,x_n)=\langle \Phi(x_1)\cdots\Phi(x_n)\rangle$ に表れます（7-01）。ガウス測度では、偶数点の相関が二点関数を対に分けるだけで決まります（1-08）。

$$S_{2n}(x_1,\dots,x_{2n})=\sum_{\pi}\prod_{j=1}^{n} S_2\big(x_{\pi(2j-1)},x_{\pi(2j)}\big) \tag{1}$$

和は $2n$ 点を二つずつ組にする分け方 $\pi$ の全体です。この Wick の法則は相互作用が無いことを意味し、そのためガウスな場は**自明（trivial）**と呼ばれてきました（ADC §1.1）。ずれを測る最初の量が四点の Ursell 関数です。既知

$$U_4(x,y,z,t)=S_4(x,y,z,t)-\big[S_2(x,y)S_2(z,t)+S_2(x,z)S_2(y,t)+S_2(x,t)S_2(y,z)\big] \tag{2}$$

Lee–Yang の性質（分配関数の磁場についての零点が虚軸上に並ぶ性質。2-08 の Lee–Yang の定理）を持つ模型では、極限で $U_4$ が消えればガウス性が従います（Newman 1975、ADC §6.3）。既知 **例：**$\pm1$ を等確率で取るスピン一つでは $\langle\sigma^4\rangle-3\langle\sigma^2\rangle^2=-2$、独立な $N$ 個の和では比 $U_4/\mathrm{Var}^2$ が $-2/N$ で潰れます（1-08）。臨界点の近くのスピンは強く相関するのでこの理由は使えず、三次元の $\phi^4$ は非ガウスな測度を与えます（JW §6.2、7-03）。

02

## 格子から連続へ：臨界点に寄せる

対象は、格子 $\mathbb{Z}^d$ の各点に実数 $\phi_x$ を置き、隣どうしを強磁性の結合 $J\ge 0$ でつないだ模型です（ADC 式 (1.12)。7-03 の式 (1) の格子版）。

$$\langle F\rangle=\frac{1}{Z}\int F(\phi)\,\exp\Big(\sum_{\{x,y\}}J_{xy}\phi_x\phi_y\Big)\prod_x e^{-\lambda\phi_x^4+b\phi_x^2}\,\mathrm{d}\phi_x \tag{3}$$

$b=2\lambda\to\infty$ で一点の分布が $\pm1$ に集まり、イジング模型になります（ADC 式 (1.20)）。見る尺度を格子の単位で $L$（連続の単位の格子間隔は $a=1/L$）とし、均した和を、箱 $\Lambda_L$ の和の標準偏差 $\sqrt{\Sigma_L}$ で割った量を追います（$\Lambda_L=[-L,L]^d$、ADC 式 (1.14)(1.15)）。

$$T_{f,L}(\phi)=\frac{1}{\sqrt{\Sigma_L}}\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} f(x/L)\,\phi_x,\qquad \Sigma_L=\Big\langle\Big(\sum_{x\in\Lambda_L}\phi_x\Big)^2\Big\rangle \tag{4}$$

体積を先に無限大にしてから $L\to\infty$ とし、途中で $(J,\lambda,b)$ を動かしてよいとします。尺度 $L$ で滑らかな相関を得るには臨界点に寄せて相関長を $L$ 程度以上にします。相関長が格子の単位

で有限のままなら極限は白色雑音です（ADC 脚注 1、2-08）。イジング模型（$b = 2\lambda \to \infty$）では $J$ を $\beta J$ と書き、$\beta$ を逆温度、$\beta_c$ を相関長が発散する臨界値と呼びます（2-08）。遠方で $S_2 \to 0$ となるのは $\beta \le \beta_c$ の側で（ADC 式 (1.10)）、この章はこの側に限ります。既知

周辺的自明性の定理（Aizenman–Duminil-Copin 2021 の THEOREM 1.2）

$d = 4$ では、上の作り方で到達でき、遠方で $S_2 \to 0$ となる確率場は、どれも一般化されたガウス過程である。既知

**一般化されたガウス過程**とは、テスト関数 $f$ ごとの $T_f(\Phi)$（式 (4) の $T_{f,L}$ の $L \to \infty$ での極限）の有限個の組が、どれも多変数ガウス分布に従う超関数値の確率場のことです（1-09 のガウス測度）。

03

## 次元を数える：樹形図の上界と $L^{4-d}$

五次元以上の自明性は二つの不等式で示されました（Aizenman 1981・1982、Fröhlich 1982）。四点のずれを「四本の足が一点 $u$ で出会う図」で抑える**樹形図の上界**と、臨界点でも二点関数が自由場の形を超えない赤外の上界です（イジング模型、ADC 式 (1.22)(1.23)）。

$$|U_4(x,y,z,t)| \le 2 \sum_{u \in \mathbb{Z}^d} S_2(u,x) S_2(u,y) S_2(u,z) S_2(u,t), \qquad S_2(x,y) \le \frac{C}{|x-y|^{d-2}} \ (\beta = \beta_c) \tag{5}$$

四点が互いに距離 $L$ 程度なら、$S_4 \sim S_2^2 \sim L^{-2(d-2)}$、右辺は $u$ の和が $L^d$、因子四つが $L^{-4(d-2)}$ です。

$$\frac{|U_4|}{S_4} \lesssim \frac{L^d \, L^{-4(d-2)}}{L^{-2(d-2)}} = L^{4-d} \tag{6}$$

$d > 4$ なら 0 に向かい、細部を除けばこれが五次元以上の定理の骨です（ADC §1.3）。$d = 4$ では $L^0$ で、一次資料は 'clearly inconclusive for d = 4' と書きます。問題文も、五次元以上で四次の自己相互作用を持つスカラー場は存在せず、その証明は一成分の場に当てはまると書きます（JW §6.2）。既知 同じ指数は 7-01 の式 (7) の結合の次元 $[\lambda] = 4 - d$ にも現れ、$d > 4$ では結合が遠くで効かなくなる向きです。物理

04

## ランダムカレント：Wick からのずれは塊の出会い

樹形図の上界の出どころは**ランダムカレント表示**です。重み $e^{\beta J \sigma_x \sigma_y}$ を辺ごとに Taylor 展開し、次数 $n(x,y)$ を辺の整数（カレント）と見てスピンの和を取ると、次数の和が奇数の点（源）の集合 $\partial n$ が相関を取る点の集合 $A$ に一致する配置だけが残ります（ADC 式 (3.5)）。

$$\left\langle \prod_{x \in A} \sigma_x \right\rangle = \frac{\sum_{\partial n = A} w(n)}{\sum_{\partial n = \varnothing} w(n)}, \qquad w(n) = \prod_{\{x,y\}} \frac{(\beta J_{xy})^{n(x,y)}}{n(x,y)!} \tag{7}$$

源の無い配置はループの集まりで、二点相関は「$x$ と $y$ を結ぶ道を一本入れる効果」です。源を付け替える恒等式（切り替え補題）から次が出ます（ADC 式 (3.11)）。

$$U_4(x,y,z,t) = -2\, S_2(x,y)\, S_2(z,t)\, \mathbf{P}^{xy,zt}\big[\, \mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(z) \neq \varnothing \,\big] \tag{8}$$

$\mathbf{P}^{xy,zt}$ は、源がそれぞれ $\{x,y\}$ と $\{z,t\}$ の独立な二つのカレント $n_1, n_2$ の法則です（式 (7) の重みを確率に直したもの）。$\mathcal{C}(x)$ は、和 $n_1 + n_2$ が正の辺をたどって $x$ につながる点の集合で、$\mathcal{C}(z)$ も同じです。$\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(z) \neq \varnothing$ は、$x$ と $z$ が $n_1 + n_2$ の中でつながることを意味します。Wick の法則からのずれは、この出会いの確率そのものです。既知

二つの塊は独立ではありません。そこで源の無いカレントを足して、独立な二つの塊に置き換えます。そうしても交わる確率は増えるだけです（ADC 式 (3.13)(3.14)）。その確率を交点の数の期待値で抑え、切り替え補題をもう一度使うと、式 (5) の一つ目の不等式（樹形図の上界）になります（ADC §3.2）。既知

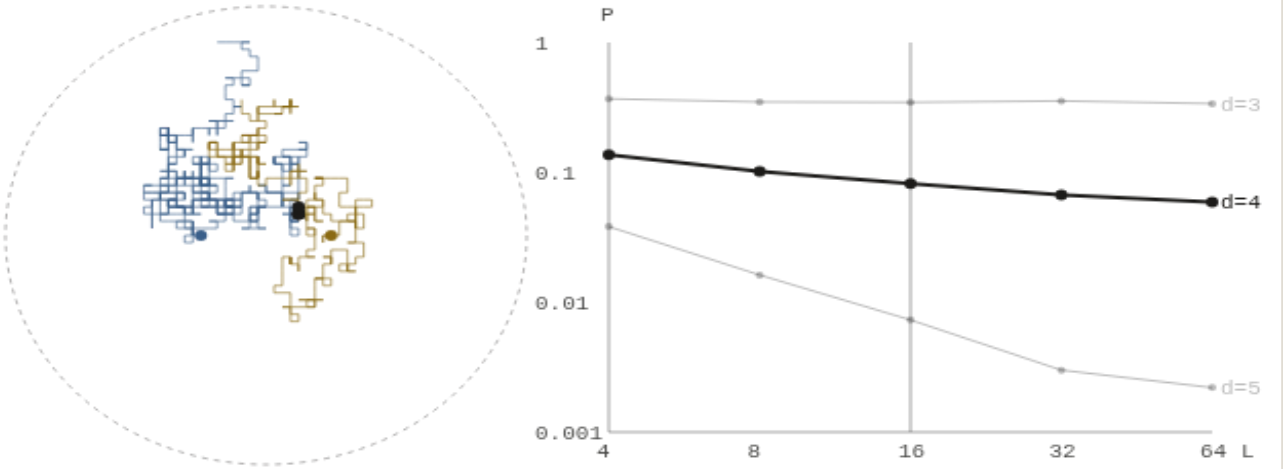
05

## 二本の酔歩の出会い：稀だが、まとめて出会う

二つの塊を、$x$ と $y$、$z$ と $t$ を結ぶ酔歩に見立てると直感がつかめます（一次資料もこの類推を案内に使います）。四次元で、距離 $L$ 離れた二点から出て、半径 $L$ 程度の範囲を出るまで（歩数で $L^2$ 程度）歩かせた二本の軌跡を考えます。交わる確率は $1/\log L$ のように 0 に向かうのに、交点の数の期待値は $L$ によらない正の定数より小さくなりません。交わるのは稀でも、交わると交点が $\log L$ で増えるからです（ADC §3.2）。既知

目安は、酔歩の軌跡が二次元的（半径 $L$ で約 $L^2$ 点）で、二次元どうしが出会う境目が $2+2=4$ だということです。正確には、交点の数の期待値が式 (6) の $L^{4-d}$ で振る舞うこと（表 2 の $E$）がこの目安の中身です。

図 1　次元と L を選ぶと、二本の酔歩（最初の二座標への射影）と d 次元で重なった点（黒丸）が変わる。右（狭い画面では下）は交わる確率 P（表 2 の計算。縦軸は対数）。交点の数は一つの見本の値で、平均ではない




d = 4　L = 16　この見本の交点 5 個（見本の値）　平均：P = 0.082　E = 0.3

計算 P の点と表 2 はこの端末で計算した。酔歩の絵は決まった種の乱数による見本（最初の図は交わる例を選んだ）。射影で重なって見える所の大半は $d$ 次元では重なっていない。

計算 表 2　二本の単純酔歩を $\pm(L/2)e_1$ から出し、半径 $2L$ の球を出るまで歩かせたときの共通の格子点の数の平均 $E$、交わる確率 $P$、交わったときの平均 $E/P$（各 6000 組。$P$ の標準誤差は 0.003〜0.0044。$L=8,32$ は図 1）。

| L | E（d=3） | E（d=4） | E（d=5） | P（d=4） | E/P（d=4） |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 1.75 | 0.32 | 0.064 | 0.137 | 2.35 |
| 16 | 5.86 | 0.30 | 0.013 | 0.082 | 3.67 |
| 64 | 23.03 | 0.27 | 0.004 | 0.059 | 4.61 |

$E$ は三次元で $L$ に比例し、五次元で $1/L$ のように減り、四次元ではほぼ一定で、式 (6) の $L^{4-d}$ どおりです。四次元では $P$ がゆっくり下がり $E/P$ が増える、「稀だが、出会うときはまとめて出会う」形です。有限の $L$ なので $1/\log L$ の速さの確認にはなりません。計算

06

## 泡の図：四次元の対数

四次元で樹形図の上界を改良する鍵は、距離 $L$ で切った泡の図 $B_L$ です（ADC 式 (1.25)）。二点関数を二本つないで一周する図です。自由場の二点関数 $G$（格子のラプラシアンの逆）なら、同じ点から出た二本の酔歩が同じ点を踏む回数の期待値に比例し、四次元の遠方で $G(x)\approx 1/(4\pi^2|x|^2)$ なので対数で増えます。既知

$$B_L=\sum_{x\in\Lambda_L} S_2(0,x)^2,\qquad \sum_{x\in\Lambda_L}G(x)^2\approx\int_{1<|x|<L}\frac{\mathrm{d}^4x}{16\pi^4|x|^4}=\frac{\ln L}{8\pi^2}+\text{定数}\tag{9}$$

計算 表 1　自由場の格子の泡 $\sum_{x\in[-L,L]^d}G(x)^2$（無限格子・質量 0、$G(x)=\int_0^\infty\prod_i e^{-2t}I_{x_i}(2t)\,\mathrm{d}t$ を数値積分。$I_n$ は変形ベッセル関数で、$e^{-2t}I_n(2t)$ は左右へそれぞれ率 1 で跳ぶ一次元の連続時間酔歩が時刻 $t$ に $n$ にいる確率）。増分は $L$ を倍にしたときの差で、式 (9) からは $\ln 2/(8\pi^2)=0.00878$。

| L | d=3 | d=4 | d=4 の増分 | d=5 |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 0.4504 | 0.05123 | 0.00738 | 0.01866 |
| 8 | 0.8388 | 0.05926 | 0.00803 | 0.01898 |
| 16 | 1.6161 | 0.06766 | 0.00839 | 0.01916 |
| 32 | 3.1711 | 0.07624 | 0.00858 | 0.01925 |

四次元の増分は 0.00878 に近づき、三次元は増分が倍々（$\propto L$）、五次元は半分ずつで収束します。計算 改良された樹形図の上界（Aizenman–Duminil-Copin の定理 1.3）は、四次元の最近接強磁性のイジング模型で $\beta \le \beta_c$、$L \le \xi(\beta)$、互いに $L$ より離れた四点について、ある $c, C > 0$ で次を与えます（ADC 式 (1.24)）。

$$|U_4(x,y,z,t)| \le \frac{C}{B_L(\beta)^c} \sum_{u \in \mathbb{Z}^4} S_2(u,x) S_2(u,y) S_2(u,z) S_2(u,t) \tag{10}$$

二点関数が赤外の上界をほぼ満たすなら（四次元で予想されている場合）$B_L$ は $\log L$ 程度で $|U_4|/S_4 = O((\log L)^{-c})$、ずっと小さいなら式 (5) だけで足ります。四点から先は、式 (4) の量の特性関数が $(\log L)^{-c}$ の誤差でガウスに近いことで閉じます（特性関数がガウスに近いことの命題。ADC の命題 1.4）。証明の中心は、交わったときの交点の数が $(\log L)^c$ 以上に増えることの多重尺度の解析です（ADC §4・§6）。既知

07

## 定理を読む：範囲と年表

周辺的自明性の定理（ADC の定理 1.2）は相殺項の選び方によりません。結果は相殺項の計算でなく、どんな極限にも現れうる Schwinger 関数（§01 の $S_n$）どうしの次元に依存した関係に基づきます（ADC §1.1）。「硬い」$\phi^4$ もイジング模型も含みます（スピンの塊の平均で $\phi^4$ を作る Griffiths–Simon の構成）。一方、対象は最近接・強磁性・一成分・格子の切断の模型の極限に限られ、あらゆる構成法の定理ではありません。対数の補正の正確な大きさと極限の共分散も与えていません（ADC §1.2）。既知

既知 表 3　自明性の主な結果（区分は ADC §1.1–1.2。§1.1 は下の小さい λ の結果の一部も $d = 4$ の部分的な結果に数える。掲載先は末尾）。

| 年 | 著者 | 内容 |
|---|---|---|
| 1981–82 | Aizenman；Fröhlich | $d > 4$ でガウス |
| 1983 | Aizenman–Graham；Aragão de Carvalho–Caracciolo–Fröhlich | $d = 4$ の部分的な結果 |
| 1985–87 | Gawędzki–Kupiainen；Feldman–Magnen–Rivasseau–Sénéor；Hara–Tasaki | 小さい λ（繰り込み群） |

| 年 | 著者 | 内容 |
|---|---|---|
| 2014 | Bauerschmidt–Brydges–Slade | 小さい $\lambda$、$n$ 成分 |
| 2021 | Aizenman–Duminil-Copin | $d=4$、すべての $\lambda$ とイジング |

その後、一頁の訂正（2024）と有効次元が四以上への拡張（Panis 2026）が出ています（書誌のみ）。

08

## 物理の絵：一ループの走る結合

物理の側の理由は、四次元の四次の結合が漸近自由でないことです（JW §6.2）。以下は一ループの絵で、定理ではありません。物理 4-04 を読んでいなければ、式 (11) の右端だけを受け入れて読み進めてかまいません。相互作用を $\frac{u}{4!}\phi^4$ と書きます（式 (3) なら $u=24\lambda$）。一ループでは四点の結合が泡を一つ挟んだぶんずれ、挟み方は三通り（式 (2) の三つの対）、各々に対称因子 $\frac12$、泡は式 (9) と同じ $\frac{1}{8\pi^2}\ln$ です（位置の和 $\sum G^2$ と運動量の積分は Parseval の等式で等しい。1-11）。$\Lambda$ を切断、$\mu$ を見る尺度として

$$u(\mu)\approx u(\Lambda)-\frac{3}{2}u(\Lambda)^2\frac{\ln(\Lambda/\mu)}{8\pi^2},\qquad \frac{1}{u(\mu)}=\frac{1}{u(\Lambda)}+\frac{3\ln(\Lambda/\mu)}{16\pi^2}\ \Longrightarrow\ u(\mu)<\frac{16\pi^2}{3\ln(\Lambda/\mu)}\tag{11}$$

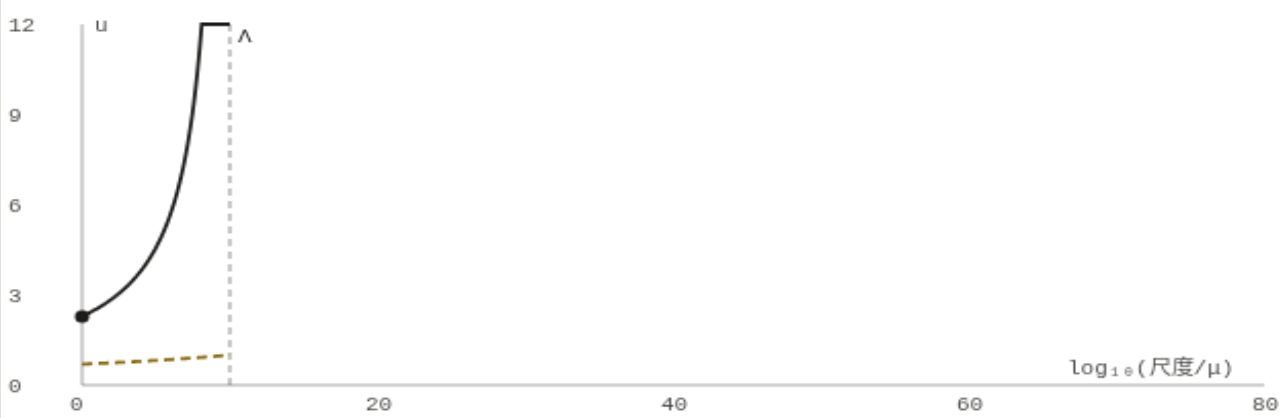
です（中央は流れの式 $\mu\,du/d\mu=3u^2/16\pi^2$ の積分）。裸の結合 $u(\Lambda)$ をどれほど大きくしても、切断を上げると $u(\mu)$ は 0 に向かいます。逆に $u(\mu)=1$ を保って上へ延ばすと、$\ln(\Lambda/\mu)=16\pi^2/3\approx 52.6$（$\Lambda/\mu\approx 10^{22.9}$）で分母が 0 になります（Landau 極）。ヤン–ミルズでは符号が逆で（7-07 の式 (2)）、$g^2(\mu)$ を固定して $\Lambda$ を上げても、裸の結合 $g^2(\Lambda)$ が 0 に向かうだけです。物理 計算

09

## 表と図で読む：潰れる結合と Landau 極

式 (11) を数で見ます。表 4 の左の二列が $\phi^4$、右端がヤン–ミルズで、図 2 は同じ量を尺度の関数として描きます。

図 2　切断 Λ（縦線）を上げると、$\phi^4$ では尺度 μ（左端）の結合が潰れ、ヤン–ミルズでは裸の結合（縦線上）が 0 に向かう（一ループ）。$\phi^4$ の実線は裸の結合 $u(\Lambda)=\infty$、破線は $u(\Lambda)=1$




φ⁴ log₁₀(Λ/μ) = 10 u(μ) < 2.286（裸の結合が ∞ でも） u(Λ) = 1 なら 0.696

計算 この図の数値はこの端末で計算した（式 (11) と 7-07 の式 (2)。表 4 と一致）。

計算 物理 表 4　式 (11) の $u(\mu)$ と、$SU(3)$ で $g^2(\mu)=1$ を保つ裸の結合 $g^2(\Lambda)$（$b_0 = 11\cdot 3/48\pi^2$）。

| log₁₀(Λ/μ) | u(Λ) = ∞ | u(Λ) = 1 | g²(Λ) |
|---:|---:|---:|---:|
| 2 | 11.430 | 0.920 | 0.609 |
| 10 | 2.286 | 0.696 | 0.238 |
| 40 | 0.572 | 0.364 | 0.072 |
| 80 | 0.286 | 0.222 | 0.038 |

潰れる速さは $1/\ln\Lambda$ で、式 (10) の $(\log L)^{-c}$ と同じ型の遅さです。一ループの式は結合が大きい所では信頼できず、自明性の証明にはなりません。問題文は 2000 年の時点で 'all insights from random walks, perturbation theory, and renormalization analysis point toward triviality' と書いていました（JW §6.2）。定理としての答えが §02〜§07 です。既知

## 寄り道：赤外で自由になる側

飛ばしてよい小節です。

一次資料は、構成的場の理論から見て 'disappointment' とされうるものが、統計力学から見れば 'a positive and constructive result' だと書きます（ADC §1.2）。四次元の臨界イジング模型の大きな尺度はガウスで書ける、という答えだからです。既知

式 (11) を長い距離の側に読むと、$u$ は対数的に 0 に向かいます。**例：**表 4 の $u(\Lambda)=1$ の列は、$u=1$ の尺度から 10 桁長い距離で 0.696、80 桁で 0.222 と読めます。結合が小さく保たれるので、繰り込み群（7-05）を制御しやすい側です。物理 表 3 の Gawędzki–Kupiainen の題（'Massless Lattice $\Phi^4_4$ Theory: Rigorous Control of a Renormalizable Asymptotically Free Model'）の 'asymptotically free' は、質量ゼロ（題の 'Massless'）の模型で結合が長距離の側で 0 に向かう（式 (11) を赤外に読んだもの）という意味と読めます。物理 ヤン–ミルズは正反対で、結合は長い距離で強くなり、ギャップはその強い側から来ると考えられています（7-07 §01）。物理

10

## 非自明性の要件：ヤン–ミルズでは何が要るか

問題文は 'a non-trivial quantum Yang–Mills theory exists on $\mathrm{R}^{4}$' を求め、相関関数が短距離で漸近自由と摂動的繰り込みの予言に一致することを要求します（JW §4、0-03）。既知 摂動論の予言では、短距離で $g^2(\ell) \approx 1/(2b_0 \ln(\ell_0/\ell))$ のように結合が対数的に 0 に向かいますが、恒等的に 0 ではありません（4-06、例は表 4 の右端）。物理 要件の意味は三つに整理できます（この章の読み）。

1. **非自明性は別に示す性質である**。紫外の評価や極限の存在からは従いません（7-07 の非自明性の水準）。四次元の $\phi^4$ は、最近接・強磁性・一成分の格子の族の中では、パラメタをどう動かしても（遠方で $S_2 \to 0$ なら）ガウスになる実例です。
2. **$\phi^4$ の定理はヤン–ミルズの自明性を示さない**。問題文は漸近自由の有無で両者を対比し、ヤン–ミルズを 'natural candidate' とします（JW §6.2）。2026-11-10 に公開された四次元のヤン–ミルズの構成は、自明でないことも示している、と委員会は評価しています（6-01。ヤン–ミルズである証拠は第 13 部）。$SU(2)$ のヤン–ミルズ–ヒッグス模型のガウスな極限は、ゲージ結合を格子間隔に連動させて 0 にする取り方によるもので、非ガウスな極限は未解決とされています（Chatterjee 2026）。
3. **証明の道具はそのままでは持ち出せない**。ランダムカレント表示は、イジング型の模型の構造です。

2026 年より前の状況は、問題文の 'at present we do not know any non-trivial relativistic field theory that satisfies the Wightman (or any other reasonable) axioms in four dimensions'（JW §6）と、総説の 'there is yet no construction of a continuum limit of a lattice gauge theory in any dimension higher than two where Wilson loop variables have been shown to have nontrivial behavior'（Chatterjee 2018 §6）のとおりでした。既知 2026-11-10 に公開された構成について、委員会は自明でないことも証明されていると評価しています（上の二つ目）。止まる場所の全体は 7-10 で見ます。

---

## この章が言えている範囲

| | 内容 |
|---|---|
| **言えている** | 「自明」はガウスのことで、四点の Ursell 関数が目印であること。格子で紫外を切った一成分の $\phi^4$ とイジング模型の、臨界点に寄せる極限が $d > 4$ で 1981〜82 年に、$d = 4$ で 2021 年にガウスと示されたこと（$d > 4$ は ADC §1.1 の記述と JW §6.2 による。$d = 4$ は ADC の本文で確認）既知 |

| | 内容 |
|---|---|
| **言えている** | 式 (6) の数え方が自由場の泡（表 1）と酔歩の見本（表 2）に現れること。表 4 と図 2 の算術 計算 。一ループの絵での $\phi^4$ とヤン–ミルズの対比 物理 |
| **言えていない** | 格子・最近接・一成分の外での $\phi^4_4$ の自明性。対数の補正の正確な大きさ、極限の共分散、訂正の中身。表 1・2 のイジング模型での値。四次元のヤン–ミルズの非自明性と自明性（この章もこの本も、どちらも示していない） |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 式 (1)–(10)、定理 1.2・1.3、命題 1.4、§03・§07・§09 の引用 | 本文（arXiv 第 4 版） | M. Aizenman, H. Duminil-Copin, Marginal triviality of the scaling limits of critical 4D Ising and $\phi^4_4$ models, Ann. of Math. 194 (2021) 163–235, arXiv:1912.07973 |
| 表 3 の他の文献 | 書誌のみ | Aizenman, PRL 47 (1981) 1–4, CMP 86 (1982) 1–48；Fröhlich, NPB 200 (1982) 281–296；Aizenman–Graham, NPB 225 (1983) 261–288；Aragão de Carvalho–Caracciolo–Fröhlich, NPB 215 (1983) 209–248；Gawędzki–Kupiainen, CMP 99 (1985) 197–252；FMRS, CMP 109 (1987) 437–480；Hara–Tasaki, JSP 47 (1987) 99–121；BBS, JSP 157 (2014) 692–742 |
| Newman・赤外の上界・訂正・拡張 | 書誌のみ | Newman, CMP 41 (1975) 1–9；Fröhlich–Simon–Spencer, CMP 50 (1976) 79–95；Glimm–Jaffe, Positivity of the $\phi^4_3$ hamiltonian, Fortschr. Phys. 21 (1973) 327–376（ADC は赤外の上界 (1.23) の出典として [19, 21] でこの二つを引く）；Ann. of Math. 199 (2024) 479；R. Panis, Ann. Probab. 54 (2026) no. 2 |
| 問題文の要求・$\phi^4$ との対比・現状 | 本文 §4・§6・§6.2 | A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*, Clay Mathematics Institute (2000) |
| ゲージ理論の非自明な連続極限・YMH のガウス極限 | §6・要旨 | S. Chatterjee, Yang–Mills for probabilists, arXiv:1803.01950；A scaling limit of SU(2) lattice Yang–Mills–Higgs theory, Prob. Math. Phys. 7 (2026) 339–381, arXiv:2401.10507 |
| 表 1・2・4、図 1・2、Landau 極 | 計算 | この端末の Python：`bubble.py`・`rw_intersect.py`・`running.py` |

次に読む章：7-09 確率量子化と正則性構造（劣臨界と臨界。四次元が境目になることの、方程式の側の顔）。

# 確率量子化と正則性構造 — 測度を「動かして」作る道と、四次元の手前で止まる理由

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

**この章で分かること** — 測度 $e^{-S}$ を、それを不変にする確率的な時間発展から作る考え方。場で積が定義できなくなる理由と、二次元・三次元の処方。劣臨界 $d < 4$ の出どころと、ヤン–ミルズで得られていること。

**前提となる章** — 7-01 構成的場の理論とは、1-09 無限次元の確率。7-03（Wick 積）・1-03（リー環の括弧）・1-07（接続と曲率）も参照します。§07・§08 で使うゲージ場の記号と確率過程の用語は、その場で一行ずつ定義します。

**先に言うこと** — 既知の結果の紹介で、証明は筋だけを追います。数値は一次元の模型・次数の勘定・記号の数え上げで、ヤン–ミルズの測度について何かを示すものではありません。三次元のヤン–ミルズは力学（局所解と Markov 過程）までで、測度は有限体積でも未構成です。四次元は臨界で、正則性構造の一般論の外です。

この章の順序

1. なぜ「動かして」測度を作るのか — 坂を下る流れと雑音の釣り合いで $e^{-S}/Z$ が動かなくなる。一次元の玉の動く図
2. 確率熱方程式と自由場 — 線形なら定常分布はガウス自由場。雑音の粗さの勘定
3. 積が定義できない — 分布の積は次数の和が正のときだけ。次元ごとの「余裕」の表
4. 二次元：解を二つに分ける — 粗い部分を Wick 積で先に作り、残りを不動点定理で解く
5. 三次元：正則性構造 — Taylor 展開の多項式を、雑音から作った記号に取り替える
6. 劣臨界と臨界 — 拡大すると非線形項が消えるのは $d < 4$。記号の数が次元で増える動く図
7. ゲージ場：DeTurck の項と共変性 — 軌道の方向に均す項を足し、繰り込みの定数を共変性と両立させる

8. ヤン–ミルズの到達点 — 状態空間・Markov 過程・二次元の不変測度と、残る問題の表
9. 寄り道：無限の彼方から降りてくる — 大きな初期値を忘れる評価が、不変測度を作る鍵になる
10. 四次元へ持ち出せるもの — 見方と状態空間は持ち出せ、局所劣臨界という前提は持ち出せない

---

01

## なぜ「動かして」測度を作るのか

有限次元の密度 $e^{-S(x)}/Z$（$Z$ は正規化の定数）から点を引くには、点を坂 $S$ に沿って下らせながら雑音で揺すり続けます。

$$dX_t = -\nabla S(X_t)\,dt + \sqrt{2}\,dW_t \tag{1}$$

$W_t$ はブラウン運動（1-09）です。式 (1) は、小さな刻み $\Delta t$ で

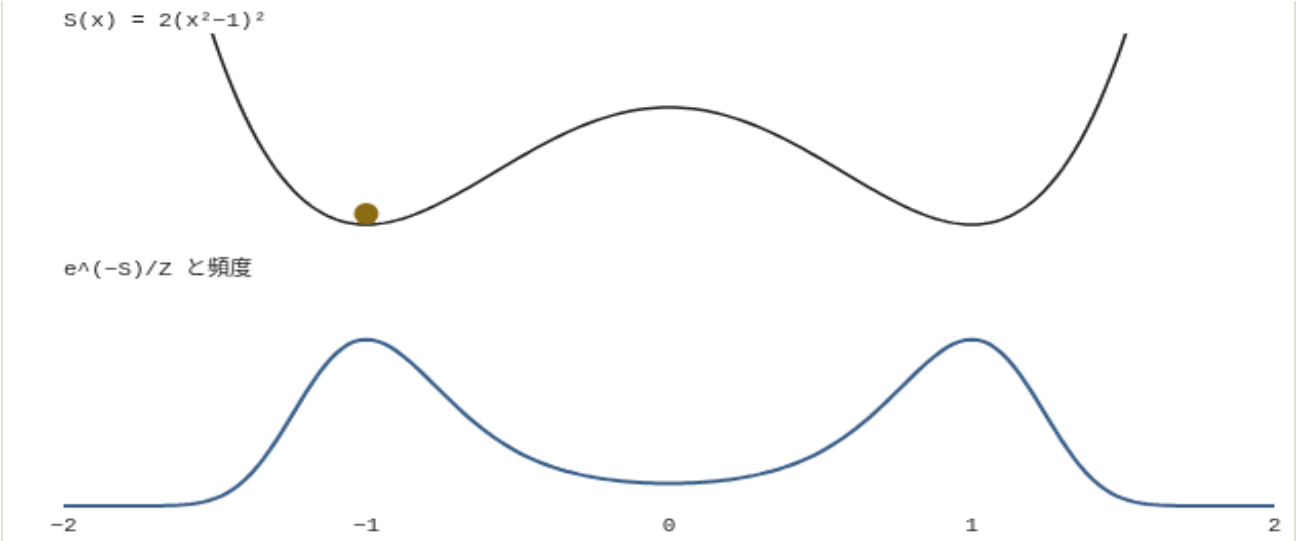
$$X_{t+\Delta t} = X_t - \nabla S(X_t)\,\Delta t + \sqrt{2\Delta t}\;N$$

（$N$ は毎回新しく引く標準正規乱数）と進める規則の、$\Delta t \to 0$ の極限という意味です。図 1 の玉もこの規則で動きます（Euler–丸山法）。式 (1) を **Langevin 方程式**、それが定める時間発展を Langevin 力学と呼びます。

点をたくさん同時に走らせると、点の群れの密度 $\rho(t,x)$ は Fokker–Planck 方程式 $\partial_t \rho = \nabla\cdot(\nabla\rho + \rho\nabla S)$ に従います。右辺が流れの湧き出しの形なので、点の総数は保たれます（密度が従う保存則）。$\rho = e^{-S}/Z$ では括弧の中が 0 で動きません。これが**不変測度**です。比喩で言えば、坂を下る流れと雑音が広げる流れの釣り合いです。正確には、$S$ が無限遠で十分速く増えるとき、$X_t$ の法則はどこから始めても $e^{-S}/Z$ に近づきます。既知

場の測度をこの形の方程式の不変測度として作るのが**確率量子化**で、ゲージ理論の文脈で Parisi–Wu（1981）が提案しました（Chevyrev 2022 §1.2）。7-02 の式は時間の尺度を取り直した同じもので、モンテカルロ法（5-07）も同じ考えです。例は $x = \pm 1$ に谷を持ち、山の高さが $h$ の $S_h(x) = h(x^2-1)^2$ です。

図 1　つまみで山の高さ $h$（0.5・1・2・3・4 の五段）を変え、「動かす」で玉を式 (1) で揺らす。下の棒は玉のいた場所の頻度、線は $e^{-S_h}/Z$




h = 2　t = 0.0　標本 0　〈x²〉 = –（積分 0.852）　谷を渡った回数 0（T = 5.129）

計算 この図の $Z$・$\langle x^2\rangle$・$T$ はこの端末で計算した値。玉はその場で Euler–丸山法で動かす。表 1 の模擬は $x=-1$ から出る 2000 本の鎖（刻み 0.002、時刻 20〜120）、$T$ は $-1$ から $+1$ への平均到達時間 $\int_{-1}^{1} e^{S(y)} \int_{-\infty}^{y} e^{-S(z)}\,dz\,dy$。

| h | 〈x²〉積分 | 〈x²〉模擬 | T |
|---|---|---|---|
| 0.5 | 0.8935 | 0.8932 | 3.35 |
| 1 | 0.8327 | 0.8316 | 3.57 |
| 2 | 0.8521 | 0.8497 | 5.13 |
| 3 | 0.8893 | 0.8872 | 8.88 |
| 4 | 0.9177 | 0.9152 | 17.3 |

$\langle x^2\rangle$ は 0.3% 以内で合います。一方 $T$ は $h$ が大きいと指数関数的に伸び（$h=6,8$ で 80.9・437.5）、$h=4$ では時刻 10 でも鎖の平均 $\langle x\rangle$ が −0.33 と左の谷に偏っています。計算

大きい $h$ での伸び方には Kramers の公式があり、谷の底と山の頂の曲がり具合 $S_h''(\pm1)=8h$・$S_h''(0)=-4h$ から

$$T \approx \frac{2\pi}{\sqrt{S_h''(-1)\,|S_h''(0)|}}\,e^{h} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}\,h}\,e^{h}$$

となります。既知 計算した $T$ から $T\cdot h/e^{h}$ を作ると $h=4,6,8$ で 1.27・1.20・1.17 で、係数 $\pi/(2\sqrt{2})\approx 1.11$ にゆっくり近づいています。計算 不変測度が在ることと、そこへ速く近づくことは別の問題で、場の理論でも時間に一様な評価が難所です（§08）。

02

## 確率熱方程式と自由場

トーラス $T^d$ 上の場で $S(\phi)=\int \left(\tfrac12|\nabla\phi|^2+\tfrac12 m^2\phi^2+\tfrac{\lambda}{4}\phi^4\right)dx$ とすると、式 (1) は

$$\partial_t \phi = \Delta\phi - m^2\phi - \lambda\phi^3 + \sqrt{2}\,\xi \tag{2}$$

になります（$\Delta$ はラプラシアン。質量ギャップの $\Delta$ とは別）。$\xi$ は時空の白色雑音で、形式的に $\mathbb{E}[\xi(t,x)\xi(s,y)] = \delta(t-s)\,\delta(x-y)$ を満たすランダムな分布です（1-09）。$\lambda = 0$ の線形の**確率熱方程式**はフーリエ成分ごとに独立な $d\hat\phi_k = -(|k|^2 + m^2)\hat\phi_k\,dt + \sqrt{2}\,dW_k$ に分かれ、定常分布は共分散 $(-\Delta + m^2)^{-1}$ のガウス自由場（7-03 の出発点の測度）です。既知

時間を長さ二つ分と数える放物型の尺度で、白色雑音は次数 $-(d+2)/2$ のすぐ下の正則性を持ち、熱方程式で解くと 2 上がります（Hairer 2014 §8）。線形の解 $\Psi$ は

$$\Psi \in \mathcal{C}^{\,1-d/2-\kappa} \qquad (\kappa > 0 \text{ は任意に小さい}) \tag{3}$$

にあります。$\mathcal{C}^\alpha$ は、$0 < \alpha < 1$ なら $|f(x) - f(y)| \lesssim |x-y|^\alpha$ の滑らかさ、$\alpha < 0$ なら幅 $r$ の山形の関数で均した値が $r^\alpha$ 程度に収まる分布の空間です。$d = 1$ で $\frac{1}{2} - \kappa$（ブラウン運動の粗さ）、$d = 2$ で $-\kappa$（もう関数でない）、$d = 3$ で $-\frac{1}{2} - \kappa$ です。

03

## 積が定義できない

困るのは $\phi^3$ です。分布の積には次の限界があります（Hairer 2014 §1、Chevyrev 2022 §1.3。$\alpha, \beta$ は整数でない）。既知

$$(f,g) \mapsto fg \text{ が } \mathcal{C}^\alpha \times \mathcal{C}^\beta \text{ に連続に延びる} \iff \alpha + \beta > 0 \tag{4}$$

$d = 2$ の $\Psi \in \mathcal{C}^{-\kappa}$ では $\Psi^2$ が定義できず、切断した $\Psi_\varepsilon^2$ の平均は $\log(1/\varepsilon)$ の程度で発散し、定数を引く（Wick 積。7-03）と極限が取れます。表 2 の**余裕**は「非線形項の次数 − 雑音の次数」で、正なら細かい尺度で非線形項は雑音より滑らかな補正にとどまります。

計算 表 2　次数の勘定（$\kappa$ を除く。`trees.py` が有理数で出力）。$d = 4$ が臨界、$d = 5$ が超臨界。

| d | 雑音 ξ | Ψ | φ³ | A∂A | 余裕 φ⁴ | 余裕 YM |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | −2 | 0 | 0 | −1 | 2 | 1 |
| 3 | −5/2 | −1/2 | −3/2 | −2 | 1 | 1/2 |
| 4 | −3 | −1 | −3 | −3 | 0 | 0 |
| 5 | −7/2 | −3/2 | −9/2 | −4 | −1 | −1/2 |

余裕は $\phi^4$ で $4-d$、$A\partial A$ で $(4-d)/2$（$A^3$ は $\phi^3$ と同じ）で、$d < 4$ で正です。Hairer はこれを**局所劣臨界**の条件とし、$\phi^4$ では $d < 4$ と同値だと確かめています（Hairer 2014 Assumption 8.3・§8）。既知

04

## 二次元：解を二つに分ける

二次元では解を「雑音のいちばん粗い部分」と残りに分け、$\phi = \Psi + v$ と置きます。

$$\partial_t v = \Delta v - m^2 v - \lambda\big(v^3 + 3v^2\Psi + 3v{:}\Psi^2{:} + {:}\Psi^3{:}\big) \tag{5}$$

${:}\Psi^n{:}$ は確率の計算で先に作れる $\mathcal{C}^{-\kappa}$ の Wick 積です。右辺が $\mathcal{C}^{-\kappa}$ なので $v \in \mathcal{C}^{2-\kappa}$ で、$v \cdot {:}\Psi^2{:}$ は次数の和が正になって (4) に入り、普通の不動点定理で解けます（短い時間なら、方程式を積分の形に書いた右辺が縮小写像になり、不動点がちょうど一つ在る）。$\phi$ に戻すと、$\phi^3$ を $\phi^3 - 3C_\varepsilon\phi$（$C_\varepsilon$ は $\log(1/\varepsilon)$ の程度）に替えた方程式の極限です。Da Prato–Debussche（2003）がこれで二次元の**強い解**（与えられた雑音の実現ごとに方程式を満たす解）を得ました。 既知

過程の構成はそれより前からあります。Jona-Lasinio–Mitter（1985）は、Dirichlet 境界の正方形の上で、作用素の冪で均した方程式の弱い解（雑音ごと取り替えてよく、法則として方程式を満たす解）として、時刻が無限大で $\phi^4_2$ 測度に収束する **Markov 過程**（未来の分布が現在の状態だけで決まる確率過程）を作っています（Summers 2016 §5）。Hairer 2014 §1 は二次元の先行研究に Albeverio–Röckner（1991）と Da Prato–Debussche（2003）を挙げています。 既知

$a = 1 - d/2$ とすると $v \in \mathcal{C}^{2+3a}$ なので、$v \cdot {:}\Psi^2{:}$ には $5a + 2 > 0$、つまり $d < 14/5$ が要ります。三次元では一段の分け方では足りません（Hairer 2014 §8）。 計算

05

## 三次元：正則性構造

滑らかな関数は各点の近くで Taylor の多項式で書けます。Hairer（2014）はこの多項式を、問題ごとに雑音から作った分布の組（要旨の言葉で「目の前の問題のために作ったモデル」）に取り替えました。

$$\phi(y) - \phi(x) \approx \sum_{\tau} \phi_\tau(x)\,(\Pi_x\tau)(y) \qquad (\text{誤差は } |y-x|^\gamma \text{ の程度}) \tag{6}$$

$\tau$ は $\Psi \cdot \mathcal{I}(\Psi^3)\Psi$（$\mathcal{I}$ は熱方程式で解く操作）・多項式 $X$ などの**記号**、$\Pi_x\tau$ はそれを点 $x$ 中心に置き直した分布です。定義できない積は記号の代数に移り、解析に要るのは確率の計算で作れる有限個の $\Pi_x\tau$ だけです。その発散を引く操作は「繰り込み群」の作用として現れます（同要旨。代数は Bruned–Hairer–Zambotti 2019）。三次元の $\phi^4$ では

$$\partial_t u_\varepsilon = \Delta u_\varepsilon + (3C_1^\varepsilon - 9C_2^\varepsilon)\,u_\varepsilon - u_\varepsilon^3 + \xi_\varepsilon \tag{7}$$

で、$C_1^\varepsilon \sim \varepsilon^{-1}$、$C_2^\varepsilon \sim \log \varepsilon$ です（同 (9.21)・Remark 10.23）。負の次数の記号は $\Xi, \Psi, \Psi^2, \Psi^3, \Psi^2 X_i, \mathcal{I}(\Psi^3)\Psi, \mathcal{I}(\Psi^2)\Psi^2, \mathcal{I}(\Psi^3)\Psi^2$ の 8 個です（同 §10.5、Theorem 10.22 の証明）。paracontrolled 分布（Gubinelli–Imkeller–Perkowski 2015）という別の道もあり、その後の不変測度と公理の結果は表 4 と 7-03 にあります。既知

06

## 劣臨界と臨界

$\phi_\delta(t,x) = \delta^{(d-2)/2}\phi(\delta^2 t, \delta x)$ と拡大すると（ゲージ場 $A$ も同じ拡大をします）、雑音の法則と $\Delta$ は変わらず、非線形項の係数だけが変わります。式 (8) の右はヤン–ミルズの結合 $g$ です。作用を $\frac{1}{g^2}\int |F_A|^2$ とし、$A$ を $gA$ と置き直すと、§07 の式 (9) の $A\partial A$ の項に $g$、$A^3$ の項に $g^2$ が付きます。

$$\lambda \longrightarrow \lambda\,\delta^{4-d}, \qquad g^2 \longrightarrow g^2\,\delta^{4-d} \tag{8}$$

$d < 4$ なら細かい尺度 $\delta \to 0$ で非線形項は消え、方程式は確率熱方程式の摂動になります。これが劣臨界で、超繰り込み可能に対応します（Chevyrev 2022 §1.3：劣臨界は $d<4$ と同値）。正則性構造の一般論は局所劣臨界を仮定しています（Hairer 2014 Assumption 8.3）。既知 余裕 $4-d$ を、四で切り替わる他の量と並べた図は 1-12 §10 の次元のつまみです。

$d = 4$ は臨界で、一般論はどちらの模型も含みません。$\phi^4$ について、Hairer 2014 §1 は四次元で非自明な意味を持つとは期待しないと書き、格子からの極限が自明になることはのちに Aizenman–Duminil-Copin が示しました（7-08）。既知 ヤン–ミルズは漸近自由で、結合が細かい尺度で対数的に小さくなると考えられています。これは摂動論の β 関数としての結果（4-06）で、非摂動の定理ではありません。物理

### 記号の数で見る

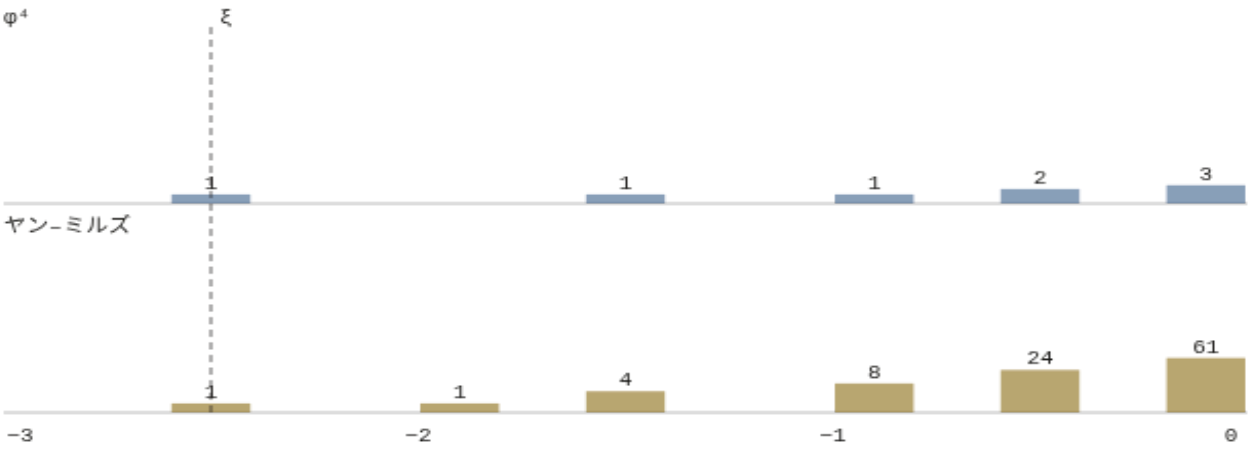
臨界に近づく様子は、§05 の記号の数でも見えます。次の三つの規則で記号を組み、次数が負のものを数えます。$\kappa$ は正の無限小として扱い、$X_i$ の向きや場の成分の添字は区別しません。

1. **材料**。雑音 $\Xi$（次数 $-(d+2)/2-\kappa$）と、すでにできた記号 $\tau$ に $\mathcal{I}$（§05 の、熱方程式で解く操作）を掛けた $\mathcal{I}(\tau)$（次数 +2）と、その微分 $\partial\mathcal{I}(\tau)$（次数 +1）。$\Psi = \mathcal{I}(\Xi)$ です。
2. **積**。非線形項の形に合わせて材料を席に並べて掛けます（次数は和）。$\phi^4$ は $\phi^3$ の三つの席に $\mathcal{I}(\cdot)$ を一つから三つ。ヤン–ミルズは $A\partial A$ の二つの席に $\mathcal{I}(\cdot)$ と $\partial\mathcal{I}(\cdot)$ を一つずつまで、または $A^3$ の三つの席に $\mathcal{I}(\cdot)$ を一つから三つ。

3. **空いた席**。席が一つでも空いていれば、そこに多項式 $X$（次数 +1、何乗でもよい）を置いてよい。

**例**（$d=3$ の $\phi^4$）：$\Xi$ は $-\frac{5}{2}-\kappa$、$\Psi$ は $-\frac{1}{2}-\kappa$。三つの席を $\Psi$ で埋めた $\Psi^3$ は $-\frac{3}{2}-3\kappa$ で、それに $\mathcal{I}$ を掛けた $\mathcal{I}(\Psi^3)$ は $\frac{1}{2}-3\kappa$ です。二つの席に $\mathcal{I}(\Psi^3)$ と $\Psi$ を置いた $\mathcal{I}(\Psi^3)\Psi$ は $-4\kappa$ で、0 のすぐ下なので数えます。空いた三つ目の席に $X$ を置くと $1-4\kappa$ で正になり、数えません。新しい負の記号が出なくなるまで、これを繰り返します。

図 2　つまみで次元 $d$ を動かすと、負の次数の記号の数が次数ごとに変わる（上 $\phi^4$、下ヤン–ミルズ。棒の高さは個数の対数、点線は雑音の次数）




d = 3.00　雑音の次数 −2.500　負の次数の記号：φ⁴ 8 個、ヤン–ミルズ 99 個

計算　この図と表 3 の数値はこの端末で計算した（`trees.py`。上の規則による「形」の数、— は計算していない）。

| d | 2 | 2.8 | 3 | 22/7 | 10/3 | 3.5 | 3.7 | 3.8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| φ⁴ | 4 | 5 | 8 | 10 | 22 | 44 | 525 | 38561 |
| YM | 11 | 27 | 99 | 163 | 1918 | 65197 | — | — |

$\phi^4$ は $d=3$ で §05 の 8 個と一致します。$d=14/5$ で加わる $\mathcal{I}(\Psi^3)\Psi^2$ は §04 の分け方が壊れる境目、$d=22/7$ で加わる二つは Hairer 2014 §9.2 が $\alpha=-18/7$ として注意する境目です。余裕が半分のヤン–ミルズは増え方がずっと速く、$d=4$ では $\mathcal{I}(\tau)\Psi^2$ を重ねても次数が変わらないので無限個になります。計算　$\phi^4$ では Chandra–Moinat–Weber が雑音を $\mathcal{C}^{-3+\delta}$ に取って非整数の次元をまね、劣臨界の全範囲で事前評価を与えています。既知

07

## ゲージ場：DeTurck の項と共変性

ゲージ場 $A=(A_1,\dots,A_d)$ の成分はリー環の元（行列）で、$[X,Y]=XY-YX$ はリー環の括弧です（1-03）。$d_A=d+[A,\cdot]$ は共変微分、$F_A$ はその曲率（場の強さ）、$d_A^*$ は $d_A$ の随伴（内積について転置に当たる作用素）です（1-07）。作用 $S(A)=\int|F_A|^2$ に式 (1) を当て、時

刻を 2 倍に数え直すと $\partial_t A = -d_A^* F_A + \xi$ になります。この式は雑音が無くても**放物型**（熱方程式 $\partial_t u = \Delta u$ と同じく、どの向きの細かい揺らぎも時間とともにならす型）ではありません。作用がゲージ変換で変わらず、軌道の方向に均す力が働かないからです（Chevyrev 2022 §1.2）。軌道に接する項 $-d_A d^* A$（$d^* A = -\sum_i \partial_i A_i$）を足すと（Zwanziger 1981・Donaldson 1985、Ricci 流では DeTurck 1983）

$$\partial_t A_i = \Delta A_i + [A_j,\, 2\partial_j A_i - \partial_i A_j + [A_j, A_i]] + \xi_i \tag{9}$$

と放物型になります（同 (1.3)。略記 $\partial_t A = \Delta A + A\partial A + A^3 + \xi$）。形式的には、解 $A$ を時間に依存するゲージ変換 $g$ で移した $B = A^g$ も、雑音 $\mathrm{Ad}_g \xi = g\xi g^{-1}$（$g$ で挟んで回したもの）で同じ式を満たし、$\mathrm{Ad}_g \xi$ は $\xi$ と同じ法則を持ちます。この**法則の意味でのゲージ共変性**が、軌道の上の過程を定める根拠です。既知

繰り込みでは、雑音を幅 $\varepsilon$ で均した方程式に質量の項 $(C^\varepsilon_{\mathrm{bphz}} + \mathring{C})A$ を足します。$C^\varepsilon_{\mathrm{bphz}}$（BPHZ 定数）は $\varepsilon$ に依る部分で、二次元では打ち消し合いで有限の値に収束し、三次元では $\varepsilon^{-1}$ の程度で発散します（Chevyrev 2022 Remark 1.10）。$\mathring{C}$（裸の質量）は $\varepsilon$ に依らない有限の部分で、自由に選べます。この質量の項も、雑音を均すことも、共変性を壊します。Chandra–Chevyrev–Hairer–Shen（CCHS）は、$\mathring{C}$ をある値 $\check{C}$ に選ぶと二つの破れが極限で打ち消し合うことを、二次元（2022）と三次元（2024）で示しました。既知

$\check{C}$ が一つに決まるかは二段で答えられています。CCHS は、ある結合（ゲージ同値な二つの初期値からの解を、回した雑音で同じ確率空間に並べて比べる作り方）の意味では一意な選び方があることを示しました（Chevyrev 2022 Theorem 1.14）。法則の意味でゲージ共変な解を与える質量の繰り込みが一つしかないことは、二次元では Chevyrev–Shen（Comm. Pure Appl. Math. 2026、arXiv:2302.12160 の Theorem 2.15）、三次元では Chevyrev–Shen（Arch. Ration. Mech. Anal. 2026、arXiv:2503.03060）が示し、CCHS の結果を強めました。既知

**例：**$G = U(1)$ では式が $\partial_t A = \Delta A + CA + \xi$ となり、$T^d$ 上で共変なのは $C = 0$ だけです（$C \neq 0$ だと、$A_1$ を定数 $2\pi$ ずらした同値な初期値で $e^{i\int A_1}$ の期待値が食い違う。同 §1.4）。既知

## 08 ヤン–ミルズの到達点

解が住む**状態空間**も要ります。二次元では線分に沿う線積分が意味を持ち、軌道の空間は Polish 空間（完備で、可算な稠密部分集合を持つ距離空間。確率測度を扱うのに都合がよい）になります（CCHS 2022）。三次元ではガウス自由場の線積分が既に発散する（$\mathbb{E}|A(\ell)|^2 \asymp$

$\int_0^1\int_0^1 |\ell|/|t-s|\,ds\,dt=\infty$）ので、ヤン–ミルズ流（式 (9) から雑音を除いた決定論的な流れ）で均した場でゲージ同値を定める非線形な空間を使います（Chevyrev 2022 §3.1、7-06）。得られたのは軌道の空間の上の Markov 過程（§04）で、有限時間での爆発の可能性を残した形です。二次元では Chevyrev–Shen（Comm. Pure Appl. Math. 2026）が、$T^2$ 上のヤン–ミルズ測度がその一意な不変測度であることを、可解性によるモーメント評価・格子上のゲージ固定・Bourgain の論法で示しました（7-02）。力学では避けたゲージ固定を、不変測度の証明では格子の上で使っています。既知

既知 表 4　確率量子化の到達点（有限体積は原則トーラス）。

| 模型 | 局所解・過程 | 不変測度 | 無限体積・公理 |
|---|---|---|---|
| $\phi^4_2$ | Da Prato–Debussche 2003（強い解。過程は Jona-Lasinio–Mitter 1985・Albeverio–Röckner 1991 が先） | $\phi^4_2$ 測度（構成的場の理論で既知）に収束する過程：Jona-Lasinio–Mitter 1985（正方形・Dirichlet 境界、作用素の冪で均した方程式） | 他の方法で既知（7-03） |
| $\phi^4_3$ | Hairer 2014 | Mourrat–Weber 2017 | Gubinelli–Hofmanová 2021（回転不変性・クラスター性を除く） |
| YM 二次元 | CCHS 2022（爆発の可能性つき） | Chevyrev–Shen（Comm. Pure Appl. Math. 2026）：YM 測度が一意な不変測度 | $T^2\to\mathbb{R}^2$ はこの方法では未 |
| YM 三次元 | CCHS 2024（同。Higgs つきも。質量の繰り込みの一意性は Chevyrev–Shen, Arch. Ration. Mech. Anal. 2026） | 未解決 | 未 |
| YM 四次元 | 臨界で、正則性構造の一般論の外 | | |

総説の未解決問題は、不変測度の存在（三次元なら、まだ有限体積でも無いヤン–ミルズ測度の構成）、$T^d\to\mathbb{R}^d$（二次元でも自明でない）、自明でない主束、$N\to\infty$ です（Chevyrev 2022 §4）。Chevyrev–Shen（Comm. Pure Appl. Math. 2026）は二次元に限られる理由を Bourgain の論法が要するモーメント評価に帰し、高次元への拡張を未解決としています。反射正値性も別の課題です（7-01）。既知

09

## 寄り道：無限の彼方から降りてくる

飛ばしてよい節です。

不変測度の標準の作り方は、時間平均の一様な評価から極限を取る方法（Krylov–Bogoliubov）で、「どんな大きな初期値からも、決まった時間で決まった大きさまで戻る」評価が効きます。最も簡単な

例が $\dot{x} = -x^3$ です。

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 + 2x_0^2\, t}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2t}} \qquad (x_0 \to \infty) \tag{10}$$

大きさは $1/\sqrt{2t}$ を超えず、初期値を忘れます。$t = 0.01$ で $x_0 = 10, 10^3, 10^6$ の解は 5.7735・7.0709・7.0711 で、極限 7.0711 に並びます。線形の $\dot{x} = -x$ の解 $x_0 e^{-t}$ は初期値を覚えたままです（$x_0 = 10^6$ なら $9.90 \times 10^5$）。計算

Mourrat–Weber（2017）は三次元の $\phi^4$ でこの型の評価（題名の「無限から降りてくる」）を示し、不変測度を作りました（要旨）。ヤン–ミルズでは可換の $U(1)$ でさえ、式 (9) の解の空間平均 $\int A_i$ がブラウン運動のように動いて不変確率測度が無く、軌道に移したときにだけ不変測度が現れます（Chevyrev 2022 Remark 1.17）。非可換の三次元で要る評価が、§08 の未解決問題の中身です。既知

10

## 四次元へ持ち出せるもの

**持ち出せるもの：**測度をゲージと両立する力学の不変測度として捉える見方。ヤン–ミルズ流で均してから比べる状態空間（格子の側でも、流れた場が滑らかな繰り込まれた場になることが理論と数値から示唆される、と Lüscher 2010 は書きます物理）。DeTurck の項がもとは Ricci 流の工夫だったことは、16-06 で「何が Ricci 流に当たるか」を考える手がかりです。

**持ち出せないもの：**局所劣臨界という前提です。四次元では余裕が 0 で、記号は有限個に収まりません（表 3）。三次元でさえ不変測度の存在・無限体積・反射正値性が残ります。質量ギャップは無限体積のハミルトニアンのスペクトルの性質（4-11）で、有限体積の不変測度からは直接には出ません。四次元の止まり方は 7-10 でまとめます。

---

## この章が言えている範囲

| | 内容 |
|---|---|
| 言えている | 式 (1) の模擬は 0.3% 以内で積分と一致し、谷を渡る時間は $h$ とともに指数関数的に伸びる（$T \cdot h/e^h$ は $h = 8$ で 1.17 と、Kramers の係数 $\pi/(2\sqrt{2}) \approx 1.11$ に近づく）。余裕は $\phi^4$ で $4 - d$、$A\partial A$ で $(4-d)/2$。負の次数の記号は $\phi^4$ の $d = 3$ で 8 個（Hairer 2014 と一致）、$d = 3.8$ で 38561 個、ヤン–ミルズの $d = 3.5$ で 65197 個計算 |
| 言えている | $T^2$ 上のヤン–ミルズ測度は Langevin 力学の一意な不変測度。三次元のヤン–ミルズ（–Higgs）は局所解と軌道空間上の Markov 過程まで。法則の意味でゲージ共変にする質量の繰り込みは、二次元・三次元とも一つに決まる既知 |

| | 内容 |
|---|---|
| **言えていない** | 記号の数は「形」の数で、文献が数える「繰り込みに寄与しうる記号」とは定義が違う。三次元のヤン–ミルズ測度と四次元への延長（未解決）。正則性構造の証明の中身。2025 年以降の文献の網羅 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 次数・積・式 (7)・記号 | 本文で確認（§1・§8・§9・§10） | M. Hairer, Invent. Math. 198 (2014) 269–504, arXiv:1303.5113 |
| 引用・式 (9)・Remark 1.10・Theorem 1.14・Remark 1.17 | 総説、本文で確認 | I. Chevyrev, J. Math. Phys. 63 (2022) 091101, arXiv:2202.13359 |
| 二次元の不変測度・質量の繰り込みの一意性 | 本文で確認（§1、Theorem 2.15・2.16、§9.1 の題） | I. Chevyrev, H. Shen, Comm. Pure Appl. Math. (2026), arXiv:2302.12160 |
| §04〜§09 の結果 | 要旨で確認 | CCHS: arXiv:2006.04987（Publ. IHÉS 2022）、2201.03487（Invent. Math. 2024）。Chevyrev–Shen: 2503.03060（Arch. Ration. Mech. Anal. 250 (2026) Paper No. 11）。Da Prato–Debussche, Ann. Probab. 31 (2003)。Mourrat–Weber: 1601.01234。Gubinelli–Hofmanová: 1810.01700。Chandra–Moinat–Weber: 1910.13854 |
| Jona-Lasinio–Mitter | 総説による（原論文は書誌のみ） | S. J. Summers, arXiv:1203.3991v2（2016）§5。Jona-Lasinio–Mitter, CMP 101 (1985) 409–436 |
| Albeverio–Röckner | 書誌のみ（Hairer 2014 の文献表） | S. Albeverio, M. Röckner, Probab. Theory Related Fields 89 (1991) 347–386 |
| §01・§05・§07・§10 | 書誌のみ（Chevyrev 2022 の文献表） | Parisi–Wu, Sci. Sinica 24 (1981)。Zwanziger, Nucl. Phys. B 192 (1981)。DeTurck, J. Diff. Geom. 18 (1983)。Donaldson, PLMS 50 (1985)。Gubinelli–Imkeller–Perkowski, Forum Math. Pi 3 (2015)。Bruned–Hairer–Zambotti, Invent. Math. 215 (2019) |
| §10 の Lüscher の「示唆」 | 要旨で確認 | M. Lüscher, JHEP 2010(8) 071 |
| §01 の Kramers の公式 | 標準の結果（原論文は未確認） | 谷の底と山の頂の二階微分で決まる、山越えの平均時間の近似。表 1 の $T$ との比は `kramers.py` で計算 |
| 表 1〜3・図・§09 の数値 | 計算 | この端末の Python：`langevin.py`（約 1 分）、`kramers.py`（$h = 0.5$〜$8$ の $T$ と $T \cdot h/e^{h}$）、`trees.py`（有理数で数え上げ。$\phi^4$ の $d = 3$ の 8 個と $d = 22/7$ の境目で検算。約 30 秒）、`fig2_pack.py`、`comedown.py`。図は canvas と素の JavaScript |

次に読む章：7-10 四次元で止まる場所。確率量子化を新しい概念の候補として見るのは 16-06。

# 四次元で止まる場所 — 紫外は有限体積で見込み、止まっていたのは無限体積と一様なギャップ（2026 年の公開より前の地図）

この章は未解決の問いの地図です。§01・§03・§06・§08・§09 は既存の知見です。

**この章で分かること** — 出題者（Jaffe–Witten 2000）が $T^4$ の構成を「見込み」、$T^4 \to \mathbb{R}^4$ と一様なギャップを「方向を指す考えが無い」と書き分けたこと。六つの段の四次元での到達点と文献の言葉。問題文のクラスター性の式を自由場の数で読むこと。

**前提となる章** — 7-07 四次元：Bałaban と MRS。六つの段は 7-01、非自明性は 7-08、ギャップの定義は 4-11。

**先に言うこと** — 既知の文献の言葉を段ごとに並べ直した章で、示す定理はありません。2026 年の公開より前の文献では、四次元のヤン–ミルズは $T^4$ の上でも構成が完了していません。2000 年以後の文献は、本文か要旨を確かめた範囲に限ります。2026-11-10 に公開された構成では、紫外極限の段・体積の部分列に沿った無限体積の段・公理の段までが Lean で証明されている、と委員会が評価しました。止まっている所は、無限体積の極限の一意性と一様なギャップの段に移りました（6-04、第三巻の 16-02・16-03）。

この章の順序

1. 出題者の二つの文 — $T^4$ の構成は「十分な兆候」、一様なギャップと $T^4 \to \mathbb{R}^4$ は「方向を指す考えが無い」
2. 段ごとの地図 — 六つの段に、四次元の到達点と文献の言葉を重ねる（動く図）
3. 正則化と有限体積：格子なら閉じている — 格子では有限次元の積分になるが、回転の対称性が壊れる
4. 紫外極限の段：有限体積で「見込み」 — 閉じた姿は繰り込んだ Wilson ループの極限、残るのは一意性と非自明性
5. 無限体積の段：ここで止まっていた — 結合が $O(1)$ に育つ尺度を、体積によらず渡る一段が無い

6. 公理の段：公理と問題文の追加の条件 — 反射正値性は引き継がれる、問題文は局所場・漸近自由・非自明性・$m < \infty$ を足す
7. 一様なギャップの段：体積に一様なギャップ — 一様なギャップが無限体積への道を開きうる、と出題者は書く
8. クラスター性の式 JW (2) を読む — 自由場の数で $C < \Delta$ と「十分遠く」の意味を見る（計算・動く図）
9. 寄り道：古典では見えないギャップ — Debye 遮蔽では、変数の取り替えで質量が見える

---

01

## 出題者の二つの文

問題文（Jaffe–Witten 2000、以下 JW）の §6 は、四次元の現状を二つの文に分けます。

既知

'Some results are known for Yang–Mills theory on a 4-torus $T^4$ approximating $R^4$, and, while the construction is not complete, there is ample indication that known methods could be extended to construct Yang–Mills theory on $T^4$.' ／ 'Yet, even if this were accomplished, no present ideas point the direction to establish the existence of a mass gap that is uniform in the volume. Nor do present methods suggest how to obtain the existence of the infinite volume limit $T^4 \to R^4$.'

トーラス $T^4$（箱の向かい合う面を貼り合わせたもの）の上の構成は未完了だが、既知の方法を延ばせば作れる兆候が十分にある。体積に一様なギャップと $T^4 \to \mathbb{R}^4$ には、方向を指す考えが今は無い。一辺 $L$ の箱の測度を $\mu_L$、ハミルトニアンの隙間を $\Delta_L$ とすると、対象は

$$\underbrace{\mu_L = \lim_{a\to 0} \mu_{a,L} \quad (L \text{ は固定})}_{\text{兆候は十分}} \qquad \underbrace{\inf_L \Delta_L > 0, \qquad \lim_{L\to\infty} \mu_L}_{\text{方向を指す考えが無い}} \tag{1}$$

です（$\mu_{a,L}$ は格子間隔 $a$ の測度。7-01 の式 (6)）。**例：**出題者は見立ての強さを言葉で書き分けています（表 1）。この章はその差を段に写します。

既知 表 1　問題文の強さの言葉（Clay の PDF の本文で確認）。

| 言葉 | 訳 | 何について | 節 |
|---|---|---|---|
| 'ample indication' | 十分な兆候 | $T^4$ の上の構成 | §6 |
| 'no present ideas point the direction' | 方向を指す考えが無い | 体積に一様なギャップ | §6 |
| 'New ideas are needed' | 新しい考えが要る | 体積に一様なギャップ | §6.5 |
| 'may play a fundamental role' | 基本的な役割を果たしうる | 一様なギャップ → 無限体積極限 | §5 |

02

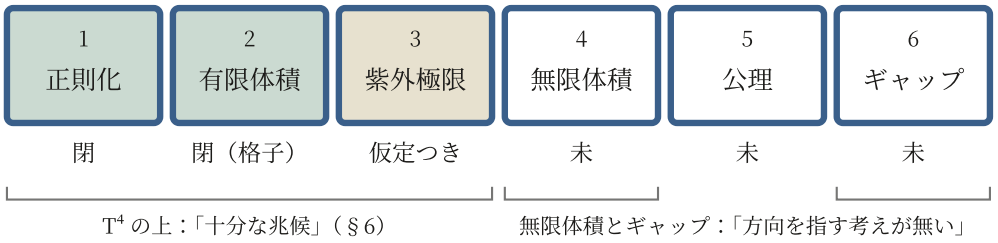
## 段ごとの地図

7-01 の六つの段に、四次元の到達点と文献の言葉を重ねます。到達点は**閉**（定理がある）、**仮定つき**（仮定の下の定理か、詳細な証明の無い概略）、**未**（定理が無い）の三つです。正則化の段から紫外極限の段までは二重の極限

$$\mu = \lim_{L\to\infty}\ \lim_{a\to 0}\ \mu_{a,L} \tag{2}$$

の内側、無限体積の段は外側、公理の段と一様なギャップの段は $\mu$ の性質です。式 (1) の前の文は内側を、後の文は外側と一様なギャップの段を指します。

図 1　文献を選ぶと、言及した段が縁取られ要点が出る（段の箱か表 2 の行を押すとその段の言葉）。「動かす」で文献を巡る




**問題文 2000**

正則化の段：Wilson は格子の上にゲージ不変な作用を定めた（JW §6.5）。

有限体積の段：コンパクトな群と時空なら、格子で関数積分が有限次元の積分になる（JW §6.5）。

紫外極限の段：T⁴ の構成は未完了だが十分な兆候（JW §6）。

無限体積の段：T⁴ → R⁴ を今の手法は示唆しない（JW §6）。

公理の段：反射正値性は Wilson 近似で成り立ち、失えば取り戻しにくく、ヒルベルト空間を立てることが問題の一部（JW §6.5）。

ギャップの段：体積に一様なギャップには方向を指す考えが無く、新しい考えが要る（JW §6・§6.5）。

既知　この図の文は表 2 と同じ（問題文・報告・論文・総説の本文）。下の括弧は、§6 の前の文が正則化から紫外極限までの段を、後の文が無限体積の段と一様なギャップの段を指すことを示す。

既知　表 2　四次元のヤン–ミルズの段ごとの到達点（連続の理論として。2026-11-10 の公開より前の文献による。公開された構成は表のあとの段落）。

| 段 | 到達点 | 文献の言葉（要点） | 章 |
|---|---|---|---|
| 1 正則化 | 閉 | Wilson は格子の上にゲージ不変な作用を定めた（JW §6.5）。 | 5-01 |
| 2 有限体積 | 閉（格子） | コンパクトな群と時空なら、格子で関数積分が有限次元の積分になる（JW §6.5）。連続の測度は三次元でも $T^3$ の上で未構成（Chevyrev 2022）。 | 7-06 |

| 段 | 到達点 | 文献の言葉（要点） | 章 |
|---|---|---|---|
| 3 紫外極限 | 仮定つき | $T^4$ の構成は未完了だが十分な兆候（JW §6）。紫外極限は概略で、詳細な証明は無い（MRS 1993）。Douglas の知る限り、ここ数年突破は無く、到達点は今も Bałaban と MRS（Douglas 2004）。二次元より上で非自明な連続極限の構成は無い（Chatterjee 2018）。四次元では「一つの形の紫外安定性」（Chevyrev 2022）。 | 7-07 |
| 4 無限体積 | 未 | $T^4 \to R^4$ を今の手法は示唆しない（JW §6）。赤外の切断は外さない、外せば結合が大きく、足場になる解ける模型が無い（MRS 1993）。大きい β での一意性は $d > 2$ で一般に未知（Chatterjee 2018）。 | 5-04 |
| 5 公理 | 未 | 反射正値性は Wilson 近似で成り立ち、失えば取り戻しにくく、ヒルベルト空間を立てることが問題の一部（JW §6.5）。赤外の切断があるので OS の公理の全体は扱えない（MRS 1993）。 | 4-10 |
| 6 ギャップ | 未 | 体積に一様なギャップには方向を指す考えが無く、新しい考えが要る（JW §6・§6.5）。格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）：すべての β で相関長が有限、$\beta \to \infty$ で無限大（Chatterjee 2018）。 | 5-09 |

この章が読んだ範囲で、2000 年以後の四次元の結果は二種類です。一つは格子間隔を固定した側です（§05）。もう一つは、Higgs 場（ゲージ場と結合する物質場の一つ。3-07）を加えた $SU(2)$ の模型で、格子間隔・結合・Higgs 場の長さを連動させて取る特殊なスケーリング極限です（次元 $d \geq 2$ のどれでもよい）。その極限はガウス（自由場）で、著者は 'The question of constructing a non-Gaussian scaling limit remains open' と書きます（Chatterjee 2026）。既知 純粋なヤン–ミルズの連続の紫外極限の段から一様なギャップの段までを閉じたとする文献は、2026 年の公開より前には、この章が読んだ範囲に見当たりません。

2026-11-10 に公開された構成は、紫外極限の段（族の選んだ間隔の列の全体での収束）、体積の部分列に沿った無限体積の段、公理の段（相の各成分が OS の公理の変種を満たし、そこから Wightman の理論を再構成する）までを、Lean で証明されている、と委員会が評価しました。一様なギャップの段と、無限体積の極限の一意性は示されていません（6-01・6-04。再構成は 12-08）。

03

## 正則化と有限体積：格子なら閉じている

正則化の段と有限体積の段は、四次元でも格子の上なら閉じています。JW §6.5 は 'the lattice approximation reduces the functional integration to a finite-dimensional integral' と書き、反射正値性も成り立つとします（Osterwalder–Seiler 1978）。既知 Chatterjee（2018）の書き方で、プラケット（最小の正方形）の集合を $P$、$U_p$ を $p$ を一周する群の元の積とすると

$$S(U)=\sum_{p\in P}\operatorname{Re}\operatorname{tr}\big(I-U_p\big),\qquad 0\le \operatorname{Re}\operatorname{tr}(I-U_p)\le 2N,\qquad e^{-2N\beta|P|}\le Z=\int e^{-\beta S(U)}\prod_{\ell}\mathrm{d}U_\ell \tag{3}$$

です。$U_p\in SU(N)$ の固有値は絶対値 1、Haar 測度 $\mathrm{d}U_\ell$ は重さ 1 だからです。**例：**一辺 4 点の四次元の周期格子のプラケットは $6\times 4^4=1536$ 枚で、$SU(2)$ なら $e^{-6144\beta}\le Z\le 1$。計算

代わりに格子は回転の対称性を壊し、連続の切断はゲージ不変性を壊します（7-07 §06）。反射正値性について JW §6.5 は、正則化で失うと取り戻す方法が少ないと書きます（引用は 0-03 §03）。既知 ゲージ不変性・反射正値性・ユークリッド不変性・紫外の制御の四つを同時に保つ四次元の正則化は、この章が読んだ文献に見当たりません（この章の読み）。

04

## 紫外極限の段：有限体積で「見込み」

中身は 7-07 で読みました（Bałaban 1989 は仮定つきの評価、MRS 1993 は概略）。出題者は §6.5 でこう書きます。既知

'One presumably needs to revisit known results at a deep level, simplify the methods, and extend them.'

見直し、簡素にし、延ばす。紫外極限の段について求められているのは新しい考えではなく、この作業です。閉じた姿は Wilson ループ $W_\gamma$（閉じた道 $\gamma$ に沿った群の元の積の $\frac{1}{N}\operatorname{tr}$。5-01）で書けます。格子の道 $\gamma_a\to\gamma$ について

$$\big\langle W_{\gamma_a}\big\rangle^{\mathrm{ren}}_{a,L}\xrightarrow[a\to 0]{}\big\langle W_\gamma\big\rangle_L\qquad\text{(部分列でなく列全体で、自由場でない極限へ)}\tag{4}$$

です（ren は次の段落の繰り込み。形は Chatterjee 2018 §5・§6 に倣った）。

繰り込みが要る理由は、Chatterjee 2018 の連続の弦張力の問題（Problem 5.2。連続極限）に見えます。無限体積の四次元の格子で、物理的な大きさが $R\times T$ の長方形の道（格子の上では $R/a$ 歩と $T/a$ 歩）を $\gamma_{R/a,T/a}$ と書くと、問題は $\beta\to\infty$ で

$$\log\big\langle W_{\gamma_{R/a,\,T/a}}\big\rangle=-c\,(R+T)-\sigma\,RT+o(1),\qquad a=a(\beta)\to 0,\quad c=c(\beta)\to\infty,\quad \sigma\neq 0$$

となる列を見つけることです（$\sigma$ は連続の理論の弦張力。原文の記号は $d$）。$R+T$ は周の長さに比例し、$RT$ は面積です。$c\to\infty$ なので、そのままでは $\log\langle W\rangle\to-\infty$、つまり期待値は 0 に潰れます。周の長さに比例する項 $c(R+T)$ を足し戻してから極限を取るのが、ここでの繰り込みです。既知 ただし Chatterjee 自身は 'it is not clear to me whether the renormalization term c(R + T) is indeed necessary' と書いており、この項が本当に要るかも開いた問いです。

**例：**可換な $U(1)$ の四次元の格子には、連続極限の構成があります（Driver 1987）。Chatterjee 2018 §6 は、Gross が三次元の $U(1)$ で通常とは別の意味の収束として示した方法を、Driver が四次元に使ったと紹介します。既知 可換な群では格子の作用の二次より高い項（場の自己相互作用）が連続極限に残らず、極限は自由な電磁場と見込まれる、というのがこの章の説明です（Driver の本文は未読）。

非可換で式 (4) に届くまでに、段差が二つあります。(i) 紫外安定性は、部分列が収束することしか与えません（Chatterjee 2018 §6）。列全体が収束すること、つまり極限の一意性は別の仕事です（7-07 §05）。(ii) 極限が在っても、それはガウス（自由場）かもしれません。自由場でないこと、つまり非自明性も別の仕事です（7-08 §10）。脚注 2 は、コンパクト性による弱い存在を、極限の性質を別に示さない限り解と認めません（§6.5 末尾）。2026-11-10 に公開された構成は、局所の観測量の相関について (i) を族の選んだ間隔の列の全体での収束で越え、(ii) の非自明性も示した、と委員会は評価しています。ただし式 (4) の Wilson ループの観測量そのものは作っていません（6-04）。

05

## 無限体積の段：ここで止まっていた

出題者の言葉は 'Nor do present methods suggest how to obtain the existence of the infinite volume limit' の一文です（§6）。当事者の MRS 1993 §I は、赤外の切断を外すと結合が大きくなるとして、'there is no easy solvable model of these phenomenons around which to expand' と書きます。既知 繰り込み群の段の列（7-05）を尺度の軸に並べると

$$\underbrace{a \to 2a \to \cdots \to a_0}_{g^2 \le \gamma\text{: 段 3（仮定つき）}} \longrightarrow \underbrace{a_0 \to \cdots \to \ell_*}_{g^2 \text{ が } O(1) \text{ へ育つ}} \longrightarrow \underbrace{\ell_* \to \cdots \to L \to \infty}_{\text{段 4}} \tag{5}$$

です。$a_0$ は仮定の届く最も粗い尺度（$g^2(a_0) \le \gamma$。7-07 と同じく $\gamma$ を $g^2$ の上限として使う）、$\ell_*$ は走りを延ばして $g^2 = 1$ になる目安の長さで、$\gamma = 0.3$ の $SU(2)$ なら $\ell_*/a_0 \approx 10^{10.7}$（二ループ。7-07 §04 の表 2）です。計算 $\ell_*$ を閉じ込めの尺度と読むのは物理の見当です。物理 この本の整理では、欠けているのは真ん中、結合が $O(1)$ に育つ尺度を体積によらない評価で渡る一段です（7-04 §10）。2026-11-10 に公開された構成は、体積によらない評価から、体積の部分列に沿った無限体積の極限を取っています（第 12 部、12-03・12-05）。極限の一意性と、体積に一様な指数の減衰は示されていません（6-04）。

**例：**格子間隔を固定すれば、無限体積の段は強結合の側で閉じています（Osterwalder–Seiler 1978）。Shen–Zhu–Zhu 2023 は、$SU(N)$ で $|\beta| < 1/(16(d-1))$、$d = 4$ なら $1/48 \approx 0.0208$ のとき、無限体積の測度の一意性と相関の指数減衰を示しました。この $\beta$ は 't Hooft

の規約の値です。この規約では作用の前の逆結合を $\beta N$ と書くので、式 (3) の $\beta$ に直すと $N$ 倍になり、条件は $|\beta| < N/48$ です（この本の Wilson の $\beta$ では $N^2/48$。五つの規約の換算は 5-01 表 4）。弱結合の側では非可換群の一意性すら一般に未知で（Chatterjee 2018 §3）、指数減衰は有限群でだけ示されています（Adhikari–Cao 2025、5-10）。$U(1)$ には大きい $\beta$ で閉じ込めない相が在り（Guth 1980、Fröhlich–Spencer 1982）、非可換で相転移が無いことは信じられているだけです物理（5-06）。

06

## 公理の段：公理と問題文の追加の条件

公理の段は Osterwalder–Schrader の公理です（4-10）。反射正値性は格子の各間隔で成り立ち、不等式なので極限に引き継がれます（7-01 §07）。回転の対称性の回復は別の仕事で、ヒルベルト空間を立てること自体が問題の一部です（JW §6.5）。既知 公開された構成がこれらをどう満たすかは第 12 部で読みます（12-01 格子の鏡映正値性、12-06 Euclid 不変、12-08 再構成と Wightman の公理）。

§4 は条件を足します。(i) $\mathrm{Tr}\, F_{ij}F_{kl}(x)$ のような曲率のゲージ不変な局所多項式に対応する局所場（脚注 1：自然な一対一対応は繰り込みのために無い）。(ii) 短距離で漸近自由と摂動的繰り込みの予言に一致すること（応力テンソルと演算子積展開を含む）。(iii) 非自明性（7-08）。そして

$$\mathrm{spec}\, H \cap (0, \Delta) = \varnothing \quad (\Delta > 0), \qquad m = \sup\{\Delta\}, \qquad m < \infty \tag{6}$$

です（$H \geq 0$ はハミルトニアン、$m$ は質量）。**例：** $H \geq 0$ なので、$m < \infty$ は $H$ のスペクトルが正の点を含むこと、つまり $H \neq 0$ と同じです。$m = \infty$ なら $(0, \infty)$ にスペクトルが無く、$H = 0$ です。さらに真空の一意性を並進について述べる形（並進で不変な単位ベクトルがただ一つ。nLab の「Wightman axioms」の Axiom 3 の書き方）を使うと、スペクトル条件（エネルギーと運動量が前方の錐に入る）から運動量も 0、すべてのベクトルが並進で不変になり、ヒルベルト空間は真空だけになります。この形の公理の下では、$m < \infty$ は空の理論を除く条件と読めます（この章の読み）。問題文 §3 の要約は「Poincaré 不変な真空ベクトルが位相を除いて一意」という形で、こちらからは同じ結論がすぐには出ません。(iii) で落ちる例は、格子からの極限がガウスになる四次元の $\phi^4$ です（Aizenman–Duminil-Copin 2021）。

07

## 一様なギャップの段：体積に一様なギャップ

有限の箱の格子では隙間は自動的に在り（7-01 §08）、問いは一辺 $L$ によらないことです。JW §6.5 は 'New ideas are needed to prove the existence of a mass gap that is uniform in the volume of space-time. Such a result presumably would enable the study of the limit as $\mathrm{T}^4 \to \mathrm{R}^{4}$' と書きます（§5 も同じ向き。表 1）。既知

出題者は、有限体積で一様なギャップ（一様なギャップの段）が無限体積（無限体積の段）への道を開きうると書きます（§5 の 'may play a fundamental role'、§6.5 の 'presumably would enable'）。7-01 で無限体積の段を先に置いたのは、ギャップが $\mathbb{R}^4$ の理論について定義されるからで、証明の順ではありません。仕組みは一行の評価です。箱のハミルトニアン $H_L$、真空 $\Omega_L$、隙間 $\Delta_L$ について、スペクトル分解で真空の成分とそれ以外を分けると

$$\left| \langle \Omega_L,\, A\, e^{-tH_L} B\, \Omega_L \rangle - \langle \Omega_L, A\,\Omega_L\rangle \langle \Omega_L, B\,\Omega_L\rangle \right| \;\le\; \|A^{*}\Omega_L\|\, \|B\,\Omega_L\|\, e^{-\Delta_L t} \tag{7}$$

で（虚時間 $t$ だけ離れた相関）、$\Delta_L \ge \Delta_{*} > 0$ が $L$ によらなければ減衰の速さも $L$ によりません。既知 **例：**二次元イジング模型の帯では、臨界点で $E_1 - E_0$ が $1/L$ で閉じ、低温では指数的に閉じます（2-09 §07・§08）。弱結合の $\phi^4_2$・$\phi^4_3$ では小さい径数の展開が無限体積の段と一様なギャップの段を同時に与えました（7-04 §08）が、四次元のヤン–ミルズの長い距離にはその径数がありません。

08

## クラスター性の式 JW (2) を読む

JW §5 はギャップの帰結として 'For any positive constant C < Δ and for any local quantum field operator O ... such that ⟨Ω, OΩ⟩ = 0, one has (2) |⟨Ω, O(x)O(y)Ω⟩| ≤ exp(−C|x − y|), as long as |x − y| is sufficiently large' と書きます（$x, y$ は空間の点。以下この不等式を JW (2) と書き、この章の式 (2) と区別します）。既知 要は $C < \Delta$ と「十分大きい」距離です。右辺に定数が無くてよいのは、$C$ を $\Delta$ より真に小さく取っているので、定数倍も冪の因子も、十分遠くでは $e^{-(\Delta - C)r}$ に負けるからです。 質量 $\Delta$ の自由なスカラー場の同時刻の相関は

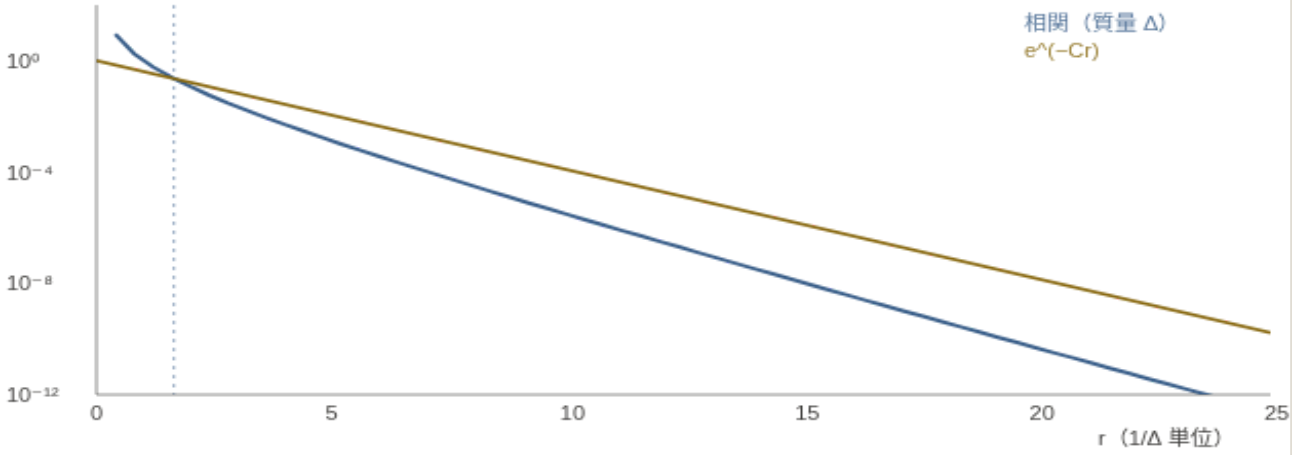
$$\langle \Omega, \phi(x)\phi(y)\Omega\rangle = \frac{\Delta\, K_1(\Delta r)}{4\pi^2 r} \;\sim\; \frac{\sqrt{\pi/2}}{4\pi^2}\,\frac{\Delta^{1/2}}{r^{3/2}}\, e^{-\Delta r} \qquad (r = |x-y| \to \infty) \tag{8}$$

で、ユークリッドの二点関数と同じ形です（$K_1$ は第二種の変形 Bessel 関数。点の場は局所作用素の代わりの見本で、均しても遠方の形は定数倍しか変わらない）。$r = 1/\Delta$ で 1 に規格化して $e^{-Cr}$ と比べ、質量 0（相関は $1/r^2$ に比例）も並べます。

計算 表 3　規格化した相関が $e^{-Cr}$ 以下になる $r$ の範囲（$r$ は $1/\Delta$ 単位、$r \le 5000$ で調べた）。

| $C/\Delta$ | 質量 $\Delta$ | 質量 0 |
|---|---|---|
| 0.10 | $r \ge 1.04$ | $1.05 \le r \le 90$ |
| 0.50 | $r \ge 1.25$ | $1.43 \le r \le 8.6$ |
| 0.90 | $r \ge 1.65$ | 成り立たない |
| 1.00 | $r \ge 1.82$ | 成り立たない |
| 1.05 | $1.93 \le r \le 132$ | 成り立たない |
| 1.20 | $2.47 \le r \le 17.8$ | 成り立たない |

図 2　C/Δ を動かすと、直線 $e^{-Cr}$ と相関（縦は対数）の上下が入れ替わる距離が変わる。「Δ = 0 と比べる」で質量 0 の相関を重ねる




C/Δ = 0.90：質量 Δ なら r ≥ 1.65 で成り立つ

計算 この図の数値はこの端末で計算した（式 (8)。縦の点線は、質量 Δ で JW (2) が成り立ち始める距離と破れ始める距離）。

読み方：(a) $C < \Delta$ なら $r$ が 2 程度より先で成り立つ。(b) $C = \Delta$ でも冪 $r^{-3/2}$ のおかげで成り立つが、問題文は $C < \Delta$ しか言わない。(c) $C > \Delta$ では遠方で必ず破れる。(d) 質量 0 では、どの $C > 0$ も遠方で破れる。遠方の傾き $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\log$ は $r = 10$ で $1.153\Delta$、$r = 100$ で $1.015\Delta$ と上から $\Delta$ に近づきます。計算 格子の測定は空間で和を取って運動量 0 の成分を取り出し、時間方向の相関から同じ種類の冪の因子を消して、指数関数 $e^{-mt}$ の和を見ます（5-08）。自由場なら、ユークリッドの二点関数を空間で積分した時間方向の相関はちょうど $e^{-\Delta|t|}/(2\Delta)$ です。既知 一様なギャップの段から無限体積の段へ渡るには、JW (2) や式 (7) が箱の大きさによらずに成り立つことが要ります。

```
09
```

## 寄り道：古典では見えないギャップ

飛ばしてよい節です。

JW §6.6 は '... a theory in which the mass gap is not classically visible, to demonstrate it may require a non-classical change of variables or "duality transformation."' と書きます。古典のヤン–ミルズ方程式を小さい場で線形にすると波動方程式で、振動数は $\omega(k) = |k|$、質量 0 です（3-03）。挙げられた例は Coulomb 気体（正と負の点電荷が、距離 $r$ に反比例するポテンシャル $1/r$ を及ぼし合う気体）の Debye 遮蔽です。試験電荷の間の力が指数的に減ることを、分配関数を sine-Gordon の場の理論（作用に $\cos(\lambda\phi)$ の項をもつスカラー場 $\phi$ の理論）のものに書き換え、谷の底を放物線で近似して示します（Brydges–Federbush 1980）。既知

$$-z\cos(\lambda\phi) = -z + \tfrac{1}{2}\, z\lambda^2\, \phi^2 + O(\phi^4) \tag{9}$$

$\phi^2$ の係数 $z\lambda^2$ が質量の二乗の役をし（$z$ は活量＝粒子の出やすさ。化学ポテンシャル $\mu$ と温度 $T$ で $z \propto e^{\mu/k_{\mathrm{B}}T}$）、$1/r$ の言葉では見えなかった質量が谷の曲率として見えます。正確には (9) は近似の形で、証明はそれが効く条件を評価するものです。同じ節は四次の項 $(A \wedge A)^2$（Feynman 1981）、平らな方向のある量子力学の束縛状態（Simon 1983。2-05）、大 $N$ の双対（17-04）も挙げます。

## この章が言えている範囲

| | 内容 |
|---|---|
| 言えている | 問題文 §3〜§6.6・脚注、2004 年の報告（Clay の PDF の本文）、MRS 1993・Chatterjee 2018（Problem 5.1・5.2・§6）・Chevyrev 2022 の文。Shen–Zhu–Zhu・Adhikari–Cao は本文 §1（式 (1.2) (1.3)・序論）、Chatterjee 2026 は要旨の文 既知 |
| 言えている | 2026 年の公開より前の文献では、四次元の連続では紫外極限の段が有限体積で仮定つき・概略、無限体積・公理・一様なギャップの段は未。格子間隔を固定すれば無限体積の段と一様なギャップの段は強結合の側で閉。式 (3)・(7) の一行の評価 既知 |
| 言えている | 自由場で読んだ JW (2)：表 3・図 2 と遠方の傾き。$\ell_*/a_0 \approx 10^{10.7}$（7-07 の計算） 計算 |
| 言えていない | 一様なギャップから無限体積極限へ渡る道が、四次元のヤン–ミルズで実際に通ること（出題者も 'may'・'presumably' と書く） |
| 言えていない | 「欠けている一段」、$m < \infty$ を空の理論を除く条件と読むこと（真空の一意性の形による）、四つを保つ正則化が無いという見立て（この本の読み）。Driver 1987 の極限が自由な電磁場であること（本文未読）。2000 年以後の文献の網羅（2026 年の Douglas の総説は書誌のみ）。四次元の紫外極限の段から一様なギャップの段のどれについても、この本は自分では示していない（公開された構成の読みは第二巻） |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 問題文（§4〜§6.6、脚注 1・2、文献表） | 本文 | A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*, Clay Mathematics Institute (2000) |
| 2004 年の報告 | 本文 | M. R. Douglas, *Report on the Status of the Yang–Mills Millenium Prize Problem*, Clay Mathematics Institute (2004) |
| 赤外の切断と公理の留保 | 本文 pp.325–327 | J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, Comm. Math. Phys. 155 (1993) 325–383 |
| 作用・一意性・Problem 5.1・5.2・紫外安定性と Driver の紹介（§6） | 本文 | S. Chatterjee, *Yang–Mills for probabilists*, arXiv:1803.01950 (2018) |
| 真空の一意性を並進で述べる形（§06） | 本文 | nLab, *Wightman axioms*（Axiom 2・Axiom 3） |
| 紫外安定性・三次元 | 本文 §1.1・§4 | I. Chevyrev, arXiv:2202.13359, J. Math. Phys. 63 (2022) 091101 |
| Bałaban 1989 の定理 | 要旨と序文（7-07） | T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 122 (1989) 355–392 |
| 強結合・有限群の結果 | 本文 §1（式 (1.2)(1.3)・序論。16-01 の照合） | H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, arXiv:2204.12737, CMP 400 (2023) 805–851／A. Adhikari, S. Cao, arXiv:2202.10375, Ann. Probab. 53 (2025) 140–174 |
| ヤン–ミルズ–Higgs の結果 | 要旨のみ | S. Chatterjee, arXiv:2401.10507, Probab. Math. Phys. 7 (2026) 339–381 |
| §03〜§06・§09 のその他の文献 | 書誌のみ | Osterwalder–Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471／Guth, Phys. Rev. D 21 (1980) 2291–2307／Fröhlich–Spencer, CMP 83 (1982) 411–454／Driver, CMP 110 (1987) 479–501／Aizenman–Duminil-Copin, Ann. of Math. 194 (2021) 163–235／Brydges–Federbush, CMP 73 (1980) 197–246／Feynman, Nucl. Phys. B188 (1981) 479–512／Simon, Ann. Phys. 146 (1983) 209–220 |
| 2026 年の Douglas の総説（範囲の表） | 書誌のみ | M. R. Douglas, Nature Reviews Physics 8 (2026) 86–97（書誌は検索結果による） |
| 表 3・図 2・遠方の傾き・式 (3) の例 | 計算 | この端末の Python（SciPy の $K_1$。熱核の積分表示と相対差 $2\times10^{-8}$ 以内で一致。$r\le 50$ で刻み $10^{-4}$、$50<r\le 5000$ で刻み $10^{-2}$）。式 (3) の例は算術 |
| $\ell_*/a_0\approx 10^{10.7}$（§05） | 計算 | 7-07 の計算（表 2。$SU(2)$、$\gamma=0.3$、二ループ） |

次に読む章：7-11 発散以外の障害。無限体積・公理・一様なギャップの段で止まっていた理由を、発散とは別の障害として並べます。年表と次元ごとの表は 16-01。

# 発散以外の障害 — 無限大を一つも含まない格子の上にも、問題は残っている

この章は既存の知見の整理です。§02・§08 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 紫外の発散を取り除いた格子にも残る六つの障害と、そのどこまでが発散の問題か。三つを最小の例の計算で見ること（摂動論の次数と $e^{-c/\alpha}$、ゲージ固定の符号の和 0、体積だけで 0 に向かう真空の重なり）。

**前提となる章** — 7-10 四次元で止まる場所。道具は 2-06（Fock 空間）・3-04（ゲージ軌道空間）・4-08（ゲージ固定）・4-10（反射正値性）・5-01（格子）。

**先に言うこと** — 文献にある障害を並べ直した章で、どれも取り除いていません。六つという数え方と発散かどうかの判定はこの本の整理です。計算は最小の例で、四次元のヤン–ミルズの計算ではありません。

この章の順序

1. 試し方 — 格子間隔を固定する
2. 赤外に小さな径数が無い — 群を替える
3. 摂動論に映らない — 表 1・図 1
4. 自由場に潰れないこと — 自明性と 0/0
5. 状態空間が曲がっている — 発散に還元できる部分と、残る 0/0（表 2）
6. 反射正値性 — 破れる例
7. 無限自由度の構造 — 真空の重なり（図 2）
8. 六つを並べる — 表 4
9. 寄り道：位相のセクターと θ

01

## 試し方：発散を消しても残るか

「難しさは無限大の処理だ」という説明は一面です。この章は障害を次の試しにかけます。**格子間隔 $a$ を固定したまま（紫外の切断を残したまま）でも、その障害は残るか**。残るなら、発散をどう処理しても片づきません。

発散とは、自由場の一点の分散 $G_a(0) \approx 0.1549/a^2$（四次元）のように切断を外すと無限大に向かう量でした（7-01 §02）。格子間隔を固定した有限の箱の格子ゲージ理論は、有限次元の積分です。

$$\langle F \rangle_{\beta,\Lambda} = \frac{1}{Z_{\beta,\Lambda}} \int F(U)\, e^{-\beta S(U)} \prod_{\ell \in \Lambda} \mathrm{d}U_\ell, \qquad 0 < Z_{\beta,\Lambda} \le 1 \tag{1}$$

$\Lambda$ は箱の辺の集合、$\mathrm{d}U_\ell$ は重さ 1 の Haar 測度、$S$ は Wilson の作用、$\beta$ は格子の逆結合（逆温度ではない。大きい $\beta$ が弱結合）です（7-10 の式 (3)）。無限大は一つもありません。

**例：**それでも、箱だけを $\mathbb{Z}^4$ へ広げた理論について、Chatterjee の講演スライド（日付の記載なし。PDF の作成日は 2020 年 9 月）は 'Even showing any kind of correlation decay at large β for non-Abelian theories in 3D and 4D is open.' と書きます。既知 その後、有限群については Adhikari–Cao が弱結合での相関の減衰を示しました。既知 この章が読んだ文献の範囲では、いま開いているのは、連続な非可換 Lie 群（$SU(N)$ など）の場合です。結果は表 4 にまとめます。

02

## 赤外に小さな径数が無い

数学的な評価の多くは小さな数による展開ですが、四次元のヤン–ミルズの結合は短い距離で弱く（漸近自由）、長い距離で強くなり、赤外の側には展開の足場が見当たりません（7-10 §05）。展開が収束する小さい $\beta$（強い結合）は、連続極限 $\beta \to \infty$ の反対の岸です。正確には、強結合展開が収束する $\beta$ の範囲は 0 の近くに限られ、連続極限が要る $\beta \to \infty$ とは重なりません。

格子の上の目標は Chatterjee（2018）の格子の相関長の問題（Problem 5.1）です。ゲージ不変な局所的な量の相関が $e^{-|x-y|/\xi}$ で減る長さ $\xi(\beta)$（格子単位）について

$$0 < \xi(\beta) < \infty \quad (\text{すべての } \beta > 0), \qquad \lim_{\beta \to \infty} \xi(\beta) = \infty \tag{2}$$

を示すこと（四次元・コンパクトな非可換 Lie 群）。既知 前半はどの格子間隔でもギャップがあること、後半は連続極限の見込みです（5-09）。

**例：**群を替えると (2) は壊れます。$U(1)$ は大きい $\beta$ で質量ゼロの相に入り、面積則が破れます（Guth 1980、完全な証明は Fröhlich–Spencer 1982）。既知 有限群は弱結合で相関が指数的に減りますが（Adhikari–Cao）既知、閉じ込めず連続極限も無いと考えられています。物理 $SU(N)$ はすべての $\beta$ で閉じ込めの相と信じられています。物理

どの群にも同じく働く議論は $U(1)$ で誤るので、効くはずなのは「連続で非可換な群で、相転移の点が $\beta=\infty$ にあってもギャップが残る」ことです（5-06・5-10）。欠けているのは、結合が $O(1)$ に育つ尺度を体積によらずに渡る評価です。

03

## 摂動論に映らない

物理の見立てでは、質量ギャップは理論のただ一つの尺度 $\Lambda$ の定数倍で（4-07）、一ループの繰り込み群では尺度 $\mu$ での結合 $g$ と次の関係にあります。物理

$$\frac{\Lambda}{\mu}=\exp\Big(-\frac{1}{2b_0 g^2}\Big)=\exp\Big(-\frac{c_N}{\alpha}\Big),\qquad b_0=\frac{11N}{48\pi^2},\quad \alpha=\frac{g^2}{4\pi},\quad c_N=\frac{6\pi}{11N} \tag{3}$$

$b_0$ は結合の走り $\mu\,\mathrm{d}g/\mathrm{d}\mu=-b_0 g^3+\cdots$ の係数です（4-06）。右辺はどの冪よりも速く 0 に近づきます。

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\alpha^{-n}e^{-c/\alpha}=0\qquad (n=0,1,2,\dots) \tag{4}$$

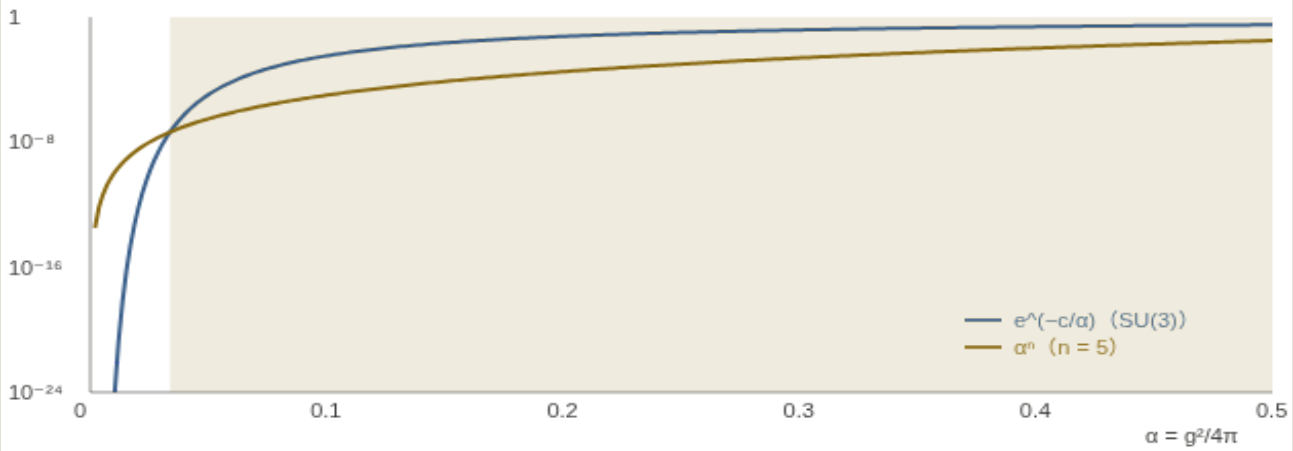
だから $\alpha=0$ のテイラー係数はすべて 0 で、摂動論はどの次数でも $\Lambda=0$ と答えます（量子力学では 2-06）。既知

**例：**$\alpha^n$ が $e^{-c_N/\alpha}$ と等しくなる次数 $n_*=c_N/\big(\alpha\ln(1/\alpha)\big)$ は、結合が小さいほど増えます。

計算 表 1　$e^{-c_N/\alpha}$ と次数 $n_*$（$c_2=0.8568$、$c_3=0.5712$）。

| $\alpha$ | $SU(2)$ | $n_*$ | $SU(3)$ | $n_*$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.30 | 5.75e−2 | 2.37 | 1.49e−1 | 1.58 |
| 0.10 | 1.90e−4 | 3.72 | 3.31e−3 | 2.48 |
| 0.05 | 3.61e−8 | 5.72 | 1.09e−5 | 3.81 |
| 0.02 | 2.48e−19 | 10.95 | 3.95e−13 | 7.30 |
| 0.01 | 6.16e−38 | 18.61 | 1.56e−25 | 12.40 |

図 1　$n$ を動かすと、$e^{-c/\alpha}$ が $\alpha^n$ を上回る帯（縦は常用対数）が動く。帯の左には $\alpha^n$ が大きい範囲が必ず残る




SU(3)、n = 5：0.0337 < α < 0.878 でだけ e^(−c/α) が αⁿ を上回る。α < 0.0337 では αⁿ の方が大きい

計算 この図の数値はこの端末で計算した（式 (3) と交点の二分法）。

欠けているのは無限大の値ではなく、級数に載らない情報です。級数の発散は別の現象です。問題文（Jaffe–Witten 2000、以下 JW）は §6.1 で、摂動級数は多くの例で 'divergent expansions' だと書きます。Beneke（1999）は 'The sum of a convergent series may still differ from R by exponentially small terms exp(−1/α)' と書きます。既知 収束する級数でも $e^{-c/\alpha}$ は取りこぼされえます（4-12・7-12）。

04

## 自由場に潰れないこと

発散を処理して極限が取れても、自由場（ガウス測度）なら答えではありません（JW §4 は非自明な理論を求める）。平均 0 の場の二点・四点の相関 $S_2$、$S_4$ から

$$u_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = S_4 - \big[S_2(x_1,x_2)S_2(x_3,x_4) + S_2(x_1,x_3)S_2(x_2,x_4) + S_2(x_1,x_4)S_2(x_2,x_3)\big] \tag{5}$$

を作ると、ガウスなら $u_4 \equiv 0$ です（Wick の法則。7-08 §01）。

**例：**四次元の $\phi^4$ は、格子で紫外を切って臨界点に寄せた無限体積のスケーリング極限がガウスになります（Aizenman–Duminil-Copin 2021）。既知 発散は処理済みで、それでも極限は自由場です。$SU(2)$ のヤン–ミルズ–Higgs の特別なスケーリング極限もガウスで、非ガウスな極限は 'remains open' とされます（Chatterjee 2026）。既知

何を固定するかも同種の問題です。物理の単位の質量 $m_{\mathrm{lat}}(\beta)/a(\beta)$ は 0/0 の形で、意味を持つのは $m/\sqrt{\sigma}$ のような次元の無い比の極限、つまり 0 に向かう速さの比です（5-09）。要件は 7-08 §10。

05

## 状態空間が曲がっている

測度を置く場所は、接続の空間をゲージ変換で割った軌道空間で、線形空間ではありません（3-04）。軌道とは、ゲージ変換で互いに移り合う接続の集まりです。Singer（1978）は、$S^4$（$\mathbb{R}^4$ に無限遠点を一つ足したもの）の上で、非可換なコンパクト群について、各軌道から接続をちょうど一つずつ連続に選ぶことはできないと示しました（'No gauge fixing is possible.'）。既知 題の「曲がっている」は比喩で、正確には、この二つ（線形空間でないこと、代表を大域的に連続には選べないこと）を指します。

### 発散に還元できる部分

形式的な $\mathrm{d}A$（無限次元のルベーグ測度のつもりのもの）では $Z = \infty$ になり（Chatterjee 2018）、軌道の体積も無限大と見込まれます（Singer 1978）。格子はここを片づけます。式 (1) はゲージを固定せずに有限です。

### 残る 0/0

残るのは、弱結合の解析でゲージの固定が要るときです。Bałaban は細胞ごとに変わる局所的なゲージを使います（7-05 §05）。格子の全体で一つの共変な（Landau 型の）ゲージを BRST 対称に固定すると、次の 0/0 が現れます（Neuberger 1987。式は Mehta–Daleo–Hauenstein–Seaton 2014 の (2)）。既知 使う言葉を一行ずつ定義します（詳しくは 4-08）。

- **Landau 型のゲージ**：変換後の辺の変数が 1 からどれだけ離れているかを測る関数 $F$（ゲージ変換の関数）を作り、その臨界点を軌道の代表に選ぶ固定です。下の例の $F$ がその形です。
- **Gribov のコピー**：一つの軌道の上に $F$ の臨界点が複数あるときの、その一つひとつです。
- **Faddeev–Popov の行列 $M_{\mathrm{FP}}$**：臨界点での $F$ の二階微分の行列です。ゲージを固定した積分は $\det M_{\mathrm{FP}}$ を重みに持ちます。
- **BRST 対称な固定**：ゲージを固定した後にも形式的な対称性（BRST）が残るように固定するやり方です。このとき一つの軌道の寄与は、すべてのコピーの $\operatorname{sign}\det M_{\mathrm{FP}}$ の和になります。
- **Euler 標数 $\chi$**：コンパクトで境界の無い多様体（1-05）の上の滑らかな関数（臨界点が退化していないもの）の臨界点を、二階微分の行列の行列式の符号（負の固有値が偶数個なら $+1$、奇数個なら $-1$）をつけて足した数です。関数の選び方によりません（Poincaré–Hopf の定理）。曲面なら「極小と極大の数 − 鞍点の数」で、球面では 2 です。円では極小が $+1$、極大が $-1$ と数えるので 0 です。

$$Z_{\mathrm{GF}} = \sum_{\text{Gribov のコピー}} \operatorname{sign}\det M_{\mathrm{FP}} = \chi(G)^{N} = 0 \tag{6}$$

$N$ は格子点の数で、ゲージ変換は各点に群 $G$ の元を一つずつ置くものなので、動かす空間は $G$ の $N$ 個の積です。符号の和はその Euler 標数 $\chi(G)^N$ で、正の次元のコンパクトな連結 Lie 群では $\chi(G)=0$ です。ゲージ不変な量は軌道の上で一定なので、ゲージを固定した期待値は分子も分母も 0 になり、0/0 です。

**例：**円 $S^1 = U(1)$ の上の滑らかな関数では極大と極小が交互に並び、符号の和は $\chi(S^1)=0$ です。$N$ 点の環で、Mehta らの式 (3) の $F=\sum_j \big(1-\cos(\phi_j+\theta_{j+1}-\theta_j)\big)$ の臨界点をすべて数えました（$\theta_j$ は点 $j$ のゲージ変換の角で、全体を一様に回す自由度を除くため $\theta_0=0$ とおく。$\phi_j$ は辺の角で一様乱数、300 軌道）。

計算 表 2　$U(1)$ の環のゲージ固定。

| $N$ | コピーの数 | 符号の和 | 極小の数 |
|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 0 | 1 |
| 3 | 6 | 0 | 1〜2 |
| 4 | 12 | 0 | 2 |
| 8 | 280 | 0 | 4 |
| 12 | 5544 | 0 | 6 |

コピーの数は調べた軌道ですべて同じで、偶数の $N$ で $\frac{N}{2}\binom{N}{N/2}$ と指数的に増え、符号の和は常に 0 でした。計算 極小に限れば 0/0 は避けられますが、極小の数が軌道で変わりうる（$N=3$）ことが別の困難です（Mehta ら §I）。0 は位相から来ています。Singer 自身は、回避の道として、局所的な被覆を 1 の分割で貼り合わせる局所化を挙げました（4-08・7-12）。

06

## 反射正値性を保つ正則化が乏しい

ユークリッドから時空へ戻る道は反射正値性 $\langle \overline{\Theta F}\, F\rangle \geq 0$（$\Theta$ は時間の反射、$F$ は正の時間の側の量）に懸かっています（4-10）。Wilson の作用はこれを保ち（Osterwalder–Seiler 1978）、回転の対称性を壊します。連続の正則化は逆で、問題文は、正則化で失った反射正値性を取り戻す方法は少ないと書き、例に次元正則化と Pauli–Villars を挙げます（JW §6.5。引用は 0-03 §03）。既知

**例：**自由場の空間運動量 $p$ を固定すると、二点関数の時間の依存は $G(t)=e^{-\omega|t|}/(2\omega)$（$\omega=\sqrt{p^2+m^2}$）。ガウスの場では反射正値性は、正の時刻 $t_i$ と実数 $f_i$ について

$$Q(f) = \sum_{i,j} f_i f_j \, G(t_i + t_j) \;\geq\; 0 \tag{7}$$

です。$G$ が正の重み $\rho(E)$ の指数関数の和なら $Q = \sum_E \rho(E) \big( \sum_i f_i e^{-E t_i} \big)^2 \geq 0$。Pauli–Villars は重い質量 $M$ の項を引き $G_{\mathrm{PV}}(t) = e^{-\omega t}/(2\omega) - e^{-\Omega t}/(2\Omega)$（$\Omega = \sqrt{p^2 + M^2}$）とするので、$\sum_i f_i e^{-\omega t_i} = 0$ となる $f$ で $Q = -\frac{1}{2\Omega} \big( \sum_i f_i e^{-\Omega t_i} \big)^2 < 0$ です。$p = 0$、$m = 1$、$M = 5$、$t = (0.1, 0.2)$、$f = (1, -e^{0.1})$ で $Q = -4.0 \times 10^{-3}$。計算 $M \to \infty$ で破れは縮みますが、切断を残す段では使えません。

二次元より上で Wilson ループを熱流で均す必要がある（Cao–Chatterjee）のは紫外の問題ですが、正値性を保つ正則化、回転の対称性の回復、点でなく曲線に値を持つ観測量（Chatterjee 2018）を公理に載せることは構造の問題です。既知

07

## 無限自由度の構造

振動子が有限個なら正準交換関係の既約な表現は本質的に一つですが（Stone–von Neumann。2-06）、無限個では同値でない表現が無数に現れます。既知 帰結の一つが Haag の定理で、相互作用する理論を自由場の Fock 空間に（相互作用表示で）載せることはできないとされます（Haag 1955、Hall–Wightman 1957。4-09）。

仕組みは無限大なしに見えます。周波数 $\omega \neq \omega'$ の振動子の基底状態の重なりは $\big( 2\sqrt{\omega\omega'}/(\omega + \omega') \big)^{1/2} < 1$ で、一辺 $L$ 点・間隔 $a$ の三次元の周期的な格子の、質量 $m$ と $m'$ の自由場の真空の重なりはモードごとの積です。

$$\langle \Omega_m, \Omega_{m'} \rangle = \prod_{k} \left( \frac{2\sqrt{\omega_k \omega_k'}}{\omega_k + \omega_k'} \right)^{1/2}, \qquad (a\omega_k)^2 = (am)^2 + 4 \sum_{j=1}^{3} \sin^2 \frac{\pi n_j}{L} \tag{8}$$

積は $k = (n_1, n_2, n_3)$、$n_j = 0, \dots, L-1$ の $L^3$ 個のモードにわたります（$\omega_k'$ は $m'$ で同様）。各モードの対数は負です。

**例：**二つの極限を比べます。A は格子間隔を固定して（$am = 0.5$）箱を広げ、B は箱を固定して（一辺 $2/m$）格子を細かくします。どちらも一辺の点の数 $L$ を増やします。

計算 表 3　$m' = 1.2m$ の真空の重なり $\langle \Omega_m, \Omega_{m'} \rangle$。

| $L$ | A の重なり（箱の一辺 $0.5L/m$） | B の重なり（格子間隔 $2/(Lm)$） |
|---|---|---|
| 4 | 0.9974 | 0.99741 |
| 32 | 0.6237 | 0.99745 |
| 64 | 0.02289 | 0.99746 |

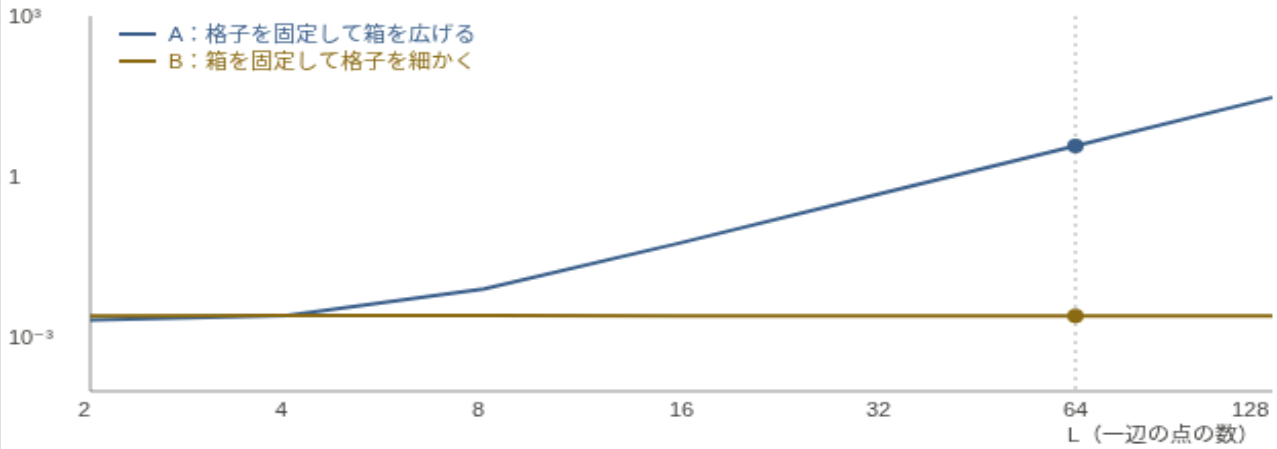
| $L$ | A の重なり（箱の一辺 $0.5L/m$） | B の重なり（格子間隔 $2/(Lm)$） |
|---|---|---|
| 128 | 7.53e-14 | 0.99747 |

A では $-\ln\langle\Omega_m,\Omega_{m'}\rangle$ が $L^3$ に比例し（一点あたり $1.44\times10^{-5}$）、重なりは 0 に向かいます。

計算

B で重なりが正の値に落ち着く理由は、大きい運動量のモードにあります。$\omega_k$ が大きいとき、一つのモードの対数の寄与はおよそ $-(m'^2-m^2)^2/(64\omega_k^4)$ で、$\omega_k$ は $|k|$ にほぼ比例して増えるので、全体は $\sum_k |k|^{-4}$ の形の和になります。三次元では $|k|\approx R$ の殻にあるモードはおよそ $R^2$ 個で、殻ごとの寄与は $R^{-2}$ のように減るので、この和は収束します。計算

図 2　$m'/m$ を選ぶと $-\ln\langle\Omega_m,\Omega_{m'}\rangle$（両対数）が変わる。「動かす」で $L$ を増やす。A は傾き 3（体積に比例）、B は平ら




m'/m = 1.2、L = 64：A の重なり 0.0229（箱の一辺 32/m）／B の重なり 0.99746（格子間隔 0.0313/m）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（式 (8)。m′/m = 1.1, 1.2, 1.5, 2）。

重なりが 0 に向かうのは紫外ではなく体積のせいです（質量の違う自由場の表現が同値でないことは Haag の定理の一般化とされる。Reed–Simon）。構成的場の理論は、有限の箱と格子で測度を密度として作り、その極限から状態空間を再構成します（4-10）。状態空間は入力ではなく出力です（Chatterjee 2018 の 'we do not even know for certain the right spaces'）。

関連する現象と対比しておきます。この節の真空（固定した時刻の、空間三次元の格子の上のもの）は、有限の体積なら重なりが正です（表 3 の B）。質量の違う二つの自由場を、ユークリッドの四次元の時空の測度として比べると、有限の箱（トーラス）でも紫外のために互いに特異になります（1-09 の寄り道、式 (11)）。効き方は、空間の次元 3 と時空の次元 4 で分かれます。

```
08
```

## 六つを並べる：どこまでが発散か

表 4　六つの障害と発散の部分（紫外の切断を外したときにだけ起きる部分。判定はこの本の整理）。

| 障害 | $a$ を固定しても | 発散の部分 | 欠けているもの |
|---|---|---|---|
| 1 赤外の径数 | 残る | 無し | 結合が $O(1)$ の尺度を渡る一様な評価 |
| 2 摂動論に映らない | 残る | 無し | 級数に載らない $e^{-c/\alpha}$ の扱い |
| 3 非自明性 | 連続極限の問い | 無し | 自由場でないことの証明 |
| 4 状態空間 | 局所ゲージと 0/0 | 形式的な $Z=\infty$、軌道の体積 | 大域的なゲージ固定に代わるもの |
| 5 反射正値性 | 回転の回復 | 粗い場の観測量 | 正値性を保つ正則化、曲線の観測量の公理 |
| 6 無限自由度 | 残る（体積で直交） | この例（自由場・質量の違い）では無し。時空四次元の測度では紫外も効く（1-09） | 状態空間を理論から作ること |

2026 年の公開より前の文献では、紫外の側も完了していませんでした（Bałaban の四次元の結果は仮定つきの評価まで。部分列の極限は見込みでした。7-07 §05）。2026-11-10 に公開された構成では、紫外の側と、体積の部分列に沿った無限体積の極限が、Lean で証明されている、と委員会が評価しました（6-01）。それでも、出題者が新しい考えを求めた体積に一様なギャップの側は、示されていません（7-10 §01・6-04）。表 4 の障害のうち、赤外の径数の障害は、公開された構成でも越えられていない側に在ります（この本の読み）。六つの外に局所場との対応（JW 脚注 1）と位相のセクター（寄り道）があります。切れ目は 16-05（名前の対訳は 16-05 の対訳表）、課題は 16-07。

09

## 寄り道：位相のセクターと θ

飛ばしてよい節です。

滑らかな接続は整数の位相電荷（第二 Chern 数）でセクターに分かれます（3-05）。格子では事情が変わります。二次元の $U(1)$ で、プラケット $p$ の角 $\theta_p \in (-\pi,\pi]$（$U_p$ の偏角の主値）から

$$Q=\frac{1}{2\pi}\sum_{p}\theta_p \;\in\; \mathbb{Z} \tag{9}$$

を作ると、周期的な格子では整数です。辺の角をそのまま足した総和は、各辺が逆向きに二回ずつ現れるので 0 で、主値に直すずれは $2\pi$ の整数倍だからです。[紙] ただし配位を連続に動かすと、$\theta_p$ が $\pm\pi$ を横切るとき $Q$ は跳び、すべてのプラケットが 1 に近い（作用の密度が小さい）配位に限れば跳びません。Lüscher（1982）は四次元の非可換の格子場でこれを示し、$Q$ が古典的な連続極限で Chern 数に

戻ることも示しました。既知 典型的な配位は粗いので、セクターにはこの種の条件が要ります。Magnen–Rivasseau–Sénéor（1993、MRS）の構成は、自明なセクターに限っています（7-07 §06）。

重みに $e^{i\theta Q}$ を掛ける θ 項は摂動論に見えません。$\theta = \pi$ ではアノマリーのため真空は自明で縮退の無いギャップ状態ではありえない、と論じられています（Gaiotto–Kapustin–Komargodski–Seiberg 2017）。物理 問題文は θ に触れておらず、暗に $\theta = 0$ を指しています。

## この章が言えている範囲

| | 内容 |
|---|---|
| **言えている** | 六つの障害の一次資料の言葉と、格子間隔を固定しても残ること既知 |
| **言えている** | 表 1〜3・図 1〜2・Pauli–Villars の例計算 、式 (9) の $Q$ が整数であること紙 |
| **言えていない** | 六つの数え方と表 4 の判定（この本の整理）。式 (3)・$\Delta \propto \Lambda \cdot \theta = \pi$（物理の水準）。計算は最小の例で、式 (8) は Haag の定理の証明ではない。どの障害もこの本は取り除いていない |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 問題文・格子の相関長の問題・講演スライドの引用 | 本文 | A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*, Clay Math. Inst. (2000)／S. Chatterjee, *Yang–Mills for probabilists*, arXiv:1803.01950 (2018)／同, *Yang–Mills on the lattice: New results and open problems*（講演スライド。PDF の作成日 2020-09。日付の記載なし） |
| 指数的に小さい項・ゲージ固定の不可能性 | 本文 | M. Beneke, *Renormalons*, Phys. Rept. 317 (1999) 1–142／I. M. Singer, CMP 60 (1978) 7–12 |
| 式 (6)・環の関数・極小に限る注意 | 本文 §I–II | D. Mehta, N. S. Daleo, J. D. Hauenstein, C. Seaton, Phys. Rev. D 90 (2014) 054504, arXiv:1406.6678 |
| 有限群・$U(1)$・自明性・ガウスな極限・Wilson ループ・位相電荷・$\theta = \pi$ | 要旨 | A. Adhikari, S. Cao, Ann. Probab. 53 (2025) 140–174, arXiv:2202.10375／J. Fröhlich, T. Spencer, CMP 83 (1982) 411–454／M. Aizenman, H. Duminil-Copin, Ann. of Math. 194 (2021) 163–235, arXiv:1912.07973／S. Chatterjee, arXiv:2401.10507, Probab. Math. Phys. 7 (2026) 339–381／S. Cao, S. Chatterjee, arXiv:2111.12813／M. Lüscher, CMP 85 (1982) 39–48／J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, CMP 155 (1993) 325–383／D. Gaiotto, A. Kapustin, Z. Komargodski, N. Seiberg, JHEP 05 (2017) 091 |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 0/0・Gribov・$U(1)$ の相・反射正値性の原典 | 書誌のみ | H. Neuberger, Phys. Lett. B 183 (1987) 337／M. Schaden, Phys. Rev. D 59 (1999) 014508／V. N. Gribov, Nucl. Phys. B 139 (1978) 1–19／A. H. Guth, Phys. Rev. D 21 (1980) 2291–2307／K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471 |
| 無限自由度と表現の一意性 | 本文 §4.3 | Stanford Encyclopedia of Philosophy, “Quantum Field Theory” |
| Haag の定理と異なる質量への一般化 | 書誌のみ（二次資料で確認） | R. Haag, Mat.-Fys. Medd. 29 (1955) no. 12／D. Hall, A. S. Wightman, Mat.-Fys. Medd. 31 (1957) no. 5／M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics* II (1975), Theorem X.46（二次資料による。本文未確認） |
| 表 1・図 1 | 計算 | この端末の Python。式 (3) と $n_*$、交点の二分法 |
| 表 2 | 計算 | 臨界点を組合せで列挙し、固有値で符号と極小を判定（$N=3$ は Newton 法と一致） |
| Pauli–Villars の例 | 計算 | 式 (7) を二点で評価（$M/m = 2, 5, 10, 100$ で負） |
| 表 3・図 2 | 計算 | 式 (8) を全モードで計算（$L \le 180$）。振動子の式は数値積分と一致 |

次に読む章：7-12 寄り道：「1/0 に記号を与えれば」。§03 の $e^{-c/\alpha}$ と §05 の 0/0 を記号の側から見直します。物理の側からは 17-01。

# 寄り道：「1/0 に記号を与えれば」 — 値を置くと近づき方が消え、ギャップに期待される尺度は $e^{-1/g^2}$ の形をしている

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

**この章で分かること** — $1/0$ に値を置く体系が手放すもの。$0/0$ が運ぶ近づき方と、それを保つ爆発。どの次数でも 0 に見える $e^{-1/g^2}$ と、Borel 平面の極との結び目。

**前提となる章** — 4-05 発散の代数、4-12 寄り道：摂動級数は発散する。使う分はその場で定義します。

**先に言うこと** — 既知の数学と文献の整理で、ヤン–ミルズについて何かを示す章ではありません。「$1/0$ を記号にしても核心は変わらない見込みが高い」は定理ではなく見立てです。$\Delta \propto \Lambda$ と renormalon は物理の水準の期待です。

この章の順序

1. 問いを三通りに読む
2. 1/0 に値を置く体系と、その代償
3. 経路を決めると値が決まる
4. 0/0 は方向を持つ：爆発
5. 方向を保つ置き換えが効いてきた場所
6. 発散の代数は 1/0 より多くを運ぶ
7. どの次数でも 0 に見える量
8. 1/0 は Borel 平面に現れる
9. 食い違いを記録する：transseries と renormalon
10. 記号が運ぶべきもの — 寄り道：論理の側から

01

## 問いを三通りに読む

「$1/0$ を記号として数学に組み込めば、発散に悩む場の理論の状況は変わるのではないか」。問いは三通りに読めます。(i) **値を置く**：$1/0$ や $0/0$ に一つの値（$\infty$、$0$、新しい記号 $\perp$ など）を与える。(ii) **置き換える**：特異点を、近づく方向の集まりや境界に取り替える。(iii) **公理を替える**。

(iii) は別の問題になります。問題文は 'Existence includes establishing axiomatic properties at least as strong as those cited in [45, 35]'（Wightman と Osterwalder–Schrader の公理）と性質を名指ししているからです（0-03）。既知 この章は (i) と (ii) を調べ、次にたどり着きます。

$$\begin{aligned} \text{値を置く} &\Rightarrow \text{近づき方が消える} \\ \text{方向を保つ置き換え} &\Rightarrow \text{幾何と摂動論で効いた} \end{aligned} \tag{1}$$

**例：** $\sin x/x$ は $x=0$ で $0/0$ の形でも、極限は $1$ に決まります。直線の上の近づき方は左右の二通りで、どちらからも同じ値だからです。平面ではそうはいきません（§04）。

02

## 1/0 に値を置く体系と、その代償

$1/0$ に値を置く体系はいくつもあり、どれも矛盾なく作られていますが、何かを手放しています（表 1）。

既知 表 1　$1/0$ に値を置く体系（IEEE 754 は計算、transreal は書誌のみ）。

| 体系 | $1/0$・$0/0$ | 手放すもの |
|---|---|---|
| リーマン球面 | $1/0=\infty$ | $0\cdot\infty$・$\infty-\infty$ は未定義。順序は $\infty$ で切れる |
| wheel（Carlström） | $0/0$ も一つの元 | $0x=0$ が一般に成り立たない。$x-x=0x^2$、$x/x=1+0x/x$ |
| meadow（Bergstra ほか） | $0^{-1}=0$ | 可換環の公理に式 (2) を足すだけで公理化。$x\neq 0$ でも $x\,x^{-1}\neq 1$ がありうる |
| transreal（Anderson ほか） | $\pm\infty$、$\Phi=0/0$ | 体ではない。分配則が一部で崩れるとされる |
| IEEE 754 の浮動小数点 | $1/\pm 0=\pm\infty$、$0/0=\mathrm{NaN}$ | 等号の反射律と「$x=y\Rightarrow 1/x=1/y$」 |
| ゼロ除算の算法（Saitoh ほか） | $b/0=0$ | 正則化の経路を一つに固定する（§03） |

meadow は可換環（足し算・引き算・掛け算が普通の規則で使える集合。割り算は仮定しない）に、逆元の演算 $x \mapsto x^{-1}$ を足し、

$$(x^{-1})^{-1} = x, \qquad x \cdot (x \cdot x^{-1}) = x \tag{2}$$

だけを課します。ここから $0^{-1} = 0$ が出ます。体（0 以外の元で割り算ができる可換環。$\mathbb{Q}$ など）に $0^{-1} = 0$ と約束したものは meadow で、その直積（成分ごとの演算）も meadow です。たとえば $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ の $x = (1, 0)$ では $x^{-1} = (1, 0)$、$x \cdot x^{-1} = (1, 0) \neq (1, 1)$ です。計算

IEEE 754 の倍精度をこの端末で確かめると、NumPy 1.26 では `1/0`・`1/(-0)`・`0/0` が `inf`・`-inf`・`nan`、`0.0 == -0.0` は `True`、`nan == nan` は `False` で、Python の `1.0/0.0` は例外 `ZeroDivisionError` です。計算 同じ数でも答えが違います。「$1/0$ の値」は体系の約束です。符号つきの 0 は「どちら側から来たか」を一ビット残す記号で、代わりに $0 = -0$ なのに逆数が分かれます。ヤン–ミルズの道具（ヒルベルト空間・スペクトル。1-10）は $0 \cdot x = 0$・引き算・等号に頼ります。隣には $1/\varepsilon$ は持つが $1/0$ は定義しない非標準解析、超関数の積を許す代わりに等号を弱める Colombeau の代数があります（1-11）。

03

## 経路を決めると値が決まる

Saitoh の草稿（2023）の §2.1 は、$b/a$ を方程式 $ax = b$ の解と見て、Tikhonov の正則化で定めます。既知

$$x_\lambda(a, b) = \arg\min_x \left[\lambda x^2 + (ax - b)^2\right] = \frac{ab}{\lambda + a^2}, \qquad \frac{b}{a} := \lim_{\lambda \to +0} x_\lambda(a, b) \tag{3}$$

$a \neq 0$ なら普通の $b/a$、$a = 0$ なら $x_\lambda = 0$ なので $b/0 = 0$ です。罰則を $\lambda(x - c)^2$ に替えると

$$x_\lambda = \frac{\lambda c + ab}{\lambda + a^2} \xrightarrow[\lambda \to +0]{} \begin{cases} b/a & (a \neq 0) \\ c & (a = 0) \end{cases} \tag{4}$$

で、$a = 0$ の答えは $c$ そのものです。**例：** $(a, b) = (0, 1)$ では $\lambda = 1$ から $10^{-8}$ まで常に $x_\lambda = c$。$(a, b, c) = (2, 1, 5)$ では $1.4,\ 0.511,\ 0.5001,\ 0.5$ と $b/a$ に近づきます。計算

式 (3) は、方程式 $ax = b$ の Moore–Penrose の一般逆による解の自明な場合でもあり（草稿 §2.1）、矛盾のない定義です。言えるのは、$b/0$ の値が方程式からではなく、足した罰則——正則化の経路——から来ていることです。場の理論の繰り込みが追いかけるのは、この経路への依存です（§06）。

04

## 0/0 は方向を持つ：爆発

平面では極限が方向で変わります。

$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}\qquad \big((x,y)\neq(0,0)\big) \tag{5}$$

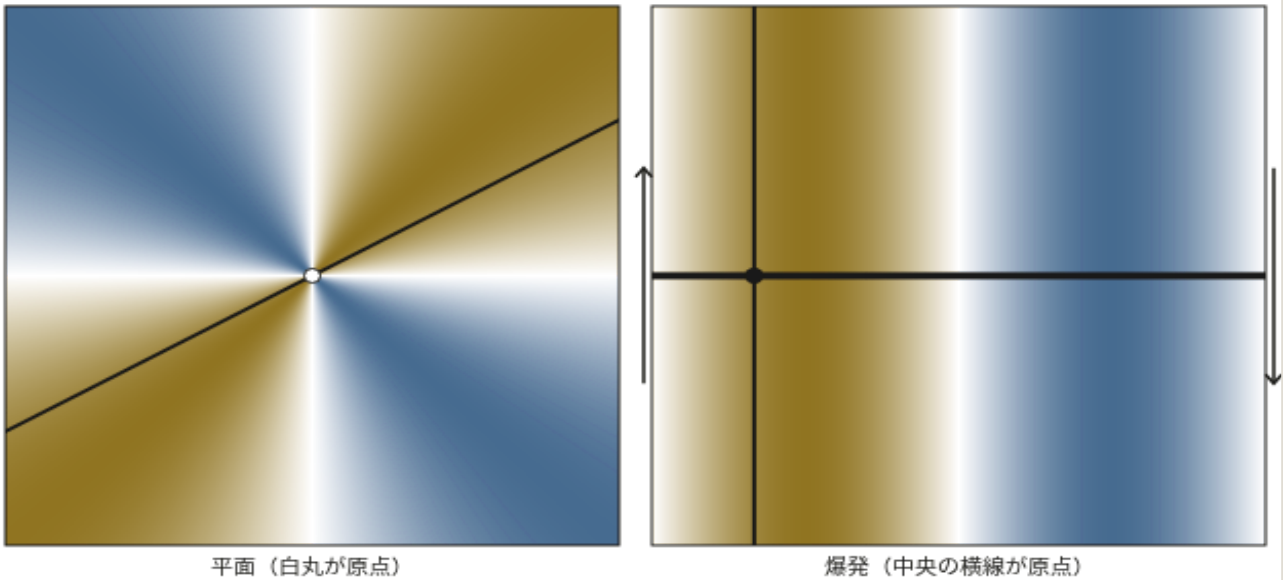
角 $\theta$ の半直線 $(r\cos\theta,\, r\sin\theta)$ の上では $f=\sin 2\theta$ で、$r$ によりません。原点に値を一つ決めても $f$ は連続になりません。既知

**爆発**（blow-up）は、原点を方向の集まり（射影直線 $\mathbb{RP}^1$。$\theta$ と $\theta+\pi$ を同じと見た円）に取り替える操作です。方向は $[u:v]$ と書きます。$[u:v]$ は $(u,v)\neq(0,0)$ を 0 でない数倍を除いて見たもの、つまり原点を通る直線の名前です（$[1:2]=[-2:-4]$）。正確には、点と方向の組の集合

$$\widetilde{\mathbb{R}^2}=\big\{\,((x,y),[u:v])\ :\ xv=yu\,\big\} \tag{6}$$

を作ります。原点の外では方向が一つに決まるので元の平面と同じで、原点の上にだけ円が一つ載り、全体は開いたメビウスの帯です（1-05）。この上で $f=2uv/(u^2+v^2)$ は、原点の上の円まで込めて連続です。

図 1　つまみで方向 $\theta$ を回すと、その方向から原点に近づくときの値 $\sin 2\theta$ が、左の平面と右の爆発に同時に示される。右は横が $\theta\in[0,\pi)$、縦が符号つきの距離 $r$ で、中央の横線 $r=0$ が原点の代わりの円。左右の辺は矢印に合わせて上下を逆に貼る。「動かす」で方向が回る




θ = 30°：この方向の直線に沿って近づくと f → sin 2θ = 0.866（爆発の中央の横線の上の黒丸）

計算 この図の値は式 (5) を図の中で計算している（色の濃さが $|f|$、二色が符号）。

右の絵は、点 $(r\cos\theta,\, r\sin\theta)$ を $\theta\in[0,\pi)$ と符号つきの $r$ で表したものです。$r<0$ の点は方向 $\theta+\pi$ の側にありますが、$\sin 2\theta$ は $\theta\to\theta+\pi$ で変わらないので、値は縦の縞になり、中央

の横線 $r=0$ を横切っても途切れません。$\theta=\pi$ は $\theta=0$ と同じ方向で、そこでは $r$ の符号が入れ替わるので、右の辺の $(\pi, r)$ を左の辺の $(0,-r)$ と貼ります。上下を逆に貼るので、帯はメビウスの帯になります。$0/0$ に一つの値を置く記号には、この縞を載せる場所がありません。

05

## 方向を保つ置き換えが効いてきた場所

特異点を取り替えて効いてきた例は、どれも近づき方を保つ形です。既知

- **無限遠に一点を足す**。Uhlenbeck（1982）の除去可能特異点定理により、$\mathbb{R}^4$ 上で作用が有限なヤン–ミルズ方程式の解は、ゲージ変換を除いて $S^4=\mathbb{R}^4\cup\{\infty\}$ 上の滑らかな解から来ます（3-05）。直観的には、有限な作用が無限遠への近づき方を縛るためです。
- **衝突を方向で置き換える**。Fulton–MacPherson（1994）は配置空間（$n$ 個の点の位置の組全体）の対角線（二点以上が重なる所）を、衝突の方向と尺度を記録する境界に替えます。Axelrod–Singer の第 II 部（1994）はこの型のコンパクト化で、三次元のゲージ理論の一つである Chern–Simons 理論の摂動論の位相不変性を示しました。Bergbauer–Brunetti–Kreimer（2009）は、wonderful model（De Concini–Procesi。Fulton–MacPherson 型のコンパクト化を一般化したもの）への延長が Epstein–Glaser の繰り込みと一致することを示しました。

ヤン–ミルズの中でも同じです。Singer（1978）は、連続な大域的ゲージ固定が無いことから Faddeev–Popov の方法に 'an infinity in the determinant of the Jacobian' が生じると注意し、局所的なゲージ固定を 1 の分割で貼り合わせる道を挙げます（3-04・4-08）。格子の $\Delta=m_{\mathrm{lat}}/a$ は $a\to 0$ で $0/0$ の形で、意味を持つのは次元の無い比 $m_{\mathrm{lat}}/\sqrt{\sigma_{\mathrm{lat}}}$ の極限です（5-09）。効いてきたのは幾何と摂動論の側で、非ガウスの測度と質量ギャップには、まだ届いていません。

06

## 発散の代数は 1/0 より多くを運ぶ

紫外発散は正則化した量の族として来ます。小さな模型：

$$
\begin{aligned}
I(p;\eta) &= \int_{\eta}^{\infty} \frac{e^{-p x}}{x}\,dx, \\
I(p;\delta) &= \int_{0}^{\infty} x^{\delta-1} e^{-p x}\,dx = \Gamma(\delta)\,p^{-\delta}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

左は下端を切って $\ln(1/\eta)$ のように、右は冪をずらして $1/\delta$ のように発散します。「$1/0$」と書けば同じですが、速さも形も違い、それでも差は同じ値に行きます。

$$I(1;\cdot) - I(2;\cdot) \;\longrightarrow\; \ln 2 = 0.693147\ldots \tag{8}$$

計算 表 2　二つの正則化（この端末の SciPy）。

| $\eta$ | $I(1;\eta)$ | 差 | $\delta$ | $I(1;\delta)$ | 差 |
|---|---|---|---|---|---|
| $10^{-2}$ | 4.037930 | 0.683222 | $10^{-2}$ | 99.432585 | 0.686831 |
| $10^{-4}$ | 8.633225 | 0.693047 | $10^{-4}$ | 9999.422883 | 0.693083 |
| $10^{-8}$ | 17.843465 | 0.693147 | $10^{-6}$ | 999999.422785 | 0.693147 |

尺度 $\mu$ を選んで $I_R(p;\mu) = \lim_{\eta\to 0}[I(p;\eta) + \ln(\eta\mu)] = -\gamma - \ln(p/\mu)$（$\gamma$ は Euler の定数）と差し引くと、有限部分は $\mu$ によりますが差はよりません。計算 この自由度と、$\mu$ を動かしたときの有限部分の動きが、繰り込み群の芽です（4-04）。

場の理論では「どう発散するか」を運ぶ記号化が既に数学的に作られています（4-05）。BPHZ の差し引き、無限大が一度も現れない Epstein–Glaser の方法、次元正則化の極 $1/\varepsilon$ を形式的な記号として Birkhoff 分解する Connes–Kreimer の Hopf 代数です。ヤン–ミルズの摂動的な繰り込み可能性は 't Hooft、't Hooft–Veltman、Lee–Zinn-Justin らにより 1971–72 年に確立し（BRS 対称性による整理が続きます）、Costello が BV 形式で別の証明を与えました。既知 記号化は $1/0$ より多くを運ぶ形で実現していて、それでも問題は残っています。残りは値の割り当ての問題ではありません。

07

## どの次数でも 0 に見える量

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \le 0) \end{cases} \tag{9}$$

は微積分の定番です。$x>0$ で $h^{(n)}(x) = P_n(1/x)\,e^{-1/x}$、$P_{n+1}(u) = u^2(P_n(u) - P_n'(u))$（たとえば $P_2 = u^4 - 2u^3$）で、$u\to\infty$ で $u^k e^{-u}\to 0$ だから、すべての $n$ で $h^{(n)}(0) = 0$。テイラー級数は恒等的に 0 なのに、$h$ は $x>0$ で 0 ではありません。既知

$e^{-1/x}$ はどの冪よりも速く 0 に行きますが、勝ち始めるのは遅く、$e^{-1/x}/x^k$ の最大値は $x = 1/k$ での $k^k e^{-k}$ です。**例：** $e^{-1/x}/x^{10}$ は $x=0.1$ で $4.5\times 10^5$、$x=0.05$ で $2.1\times 10^4$、$x=0.02$ でやっと $1.9\times 10^{-5}$ です。計算

物理ではこの形が尺度 $\Lambda$ に現れます。一ループの走る結合は $\alpha_s(\mu^2) = (b_0\ln(\mu^2/\Lambda^2))^{-1}$ で、Particle Data Group（PDG）の総説は $\Lambda$ を 'the scale where the perturbatively-defined

coupling would diverge' と説明します（一ループでの走る結合の「1/0」）。逆に解くと

$$\begin{aligned}\Lambda &= \mu\,\exp\!\Big(-\frac{1}{2b_0\,\alpha_s(\mu^2)}\Big)\\ &= \mu\,\exp\!\Big(-\frac{8\pi^2}{\beta_0\,g^2}\Big),\quad \beta_0=\frac{11N}{3}\end{aligned}\tag{10}$$

です（純 $SU(N)$、$\alpha_s=g^2/4\pi$。PDG の $b_0=(33-2n_f)/12\pi$ で $N=3$、$n_f=0$。4-07）。(10) は $g^2$ の関数として (9) の形なので、$\Lambda$ に比例する量は $g$ の冪級数のどの次数でも 0 に見えます。質量ギャップは $\Lambda$ に比例すると期待されています。物理 **例：$SU(3)$ で $g^2=1$ なら $\Lambda/\mu=7.6\times10^{-4}$、$g^2=2$ なら $2.8\times10^{-2}$**（$g^2$ は仮）。計算 問題文 §6.6 も 'the mass gap is not classically visible' と書きます（7-10）。

08

## 1/0 は Borel 平面に現れる

係数が $n!$ の級数

$$F(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n\tag{11}$$

は各項が有限でも、どの $x>0$ でも収束しません。項は $n$ が $1/x$ に届くまで減り、その先で増えます。最小の項は Stirling の公式から $\sqrt{2\pi/x}\,e^{-1/x}$ 程度で、打ち切りの精度はそこで頭打ちです（図 2）。**Borel 和**は、係数を $n!$ で割った $B(t)=\sum t^n=1/(1-t)$ を作り、$\int_0^\infty e^{-t}t^n\,dt=n!$ で戻します。

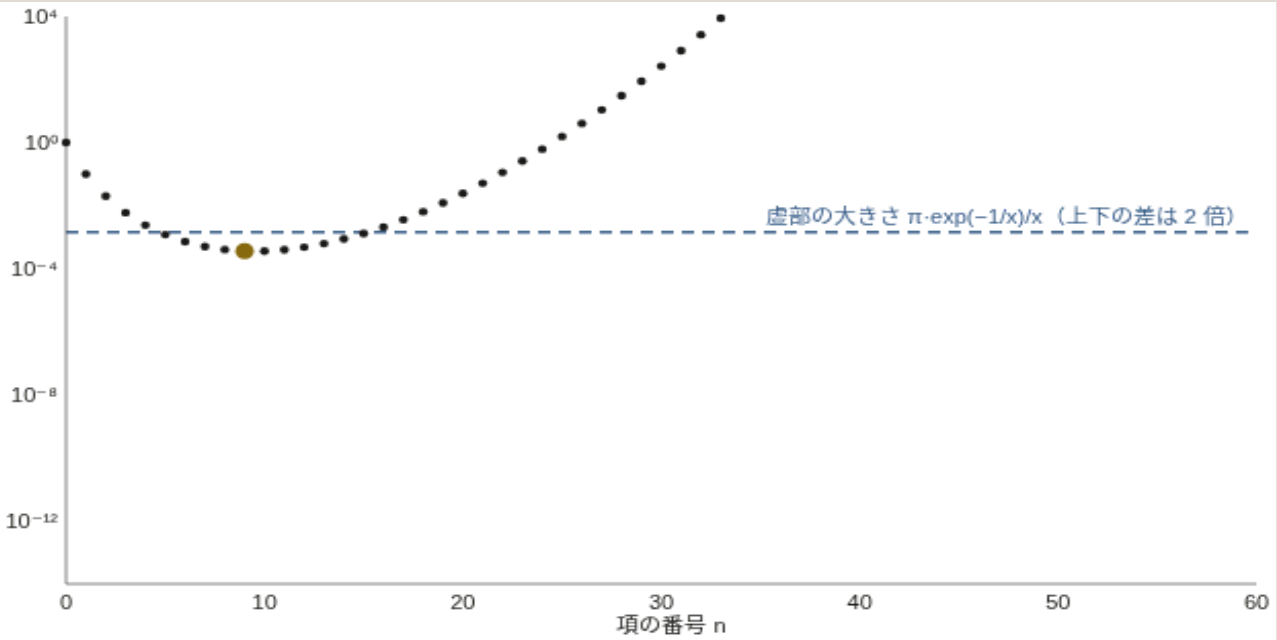
$$S(x)=\int_0^\infty e^{-t}\,B(xt)\,dt=\int_0^\infty\frac{e^{-t}}{1-xt}\,dt\tag{12}$$

積分の道の上、$t=1/x$ に極があります。この章の「1/0」はここ——Borel 平面——に現れます。小さな半円 $t=1/x+\rho e^{i\phi}$ で極を避けると、上を回れば $\phi$ は $\pi$ から 0 へ、下を回れば $-\pi$ から 0 へ動くので、$\int dt/(t-1/x)=\int i\,d\phi$ は上で $-i\pi$、下で $+i\pi$ です。被積分関数は $\frac{1}{1-xt}=-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{t-1/x}$ なので符号が反転し、極の近くで $e^{-t}\approx e^{-1/x}$ と置くと、半円の寄与は上で $+i\pi e^{-1/x}/x$、下で $-i\pi e^{-1/x}/x$ になります。上を回る和を $S_+$、下を回る和を $S_-$ と書くと

$$\begin{aligned}S_\pm(x)&=\mathrm{PV}\!\int_0^\infty\frac{e^{-t}\,dt}{1-xt}\pm i\pi\,\frac{e^{-1/x}}{x},\\ \mathrm{PV}\!\int_0^\infty\frac{e^{-t}\,dt}{1-xt}&=\frac{e^{-1/x}\,\mathrm{Ei}(1/x)}{x}\end{aligned}\tag{13}$$

と食い違います。PV は極の両側から対称に近づけた主値、$\mathrm{Ei}(y) = \mathrm{PV}\int_{-\infty}^{y} e^{s}\,ds/s$ は指数積分です。二つは虚部の符号だけが違い、虚部の大きさは $\pi e^{-1/x}/x$ です。上下の差は $S_{+} - S_{-} = 2\pi i\, e^{-1/x}/x$ で、大きさはその 2 倍です。最適な打ち切りの誤差も食い違いも、$e^{-1/x}$ に $x$ の冪を掛けた大きさです（表 3）。計算

図 2　つまみで $x$ を変えると、項 $n!\,x^{n}$（対数目盛）の谷が動き、Borel 和の虚部の大きさ $\pi e^{-1/x}/x$（破線。上下の差はその 2 倍）と並ぶ。「動かす」で $x$ が往復する




x = 0.100：項は n = 9 で最小（3.63e-4）。虚部の大きさ π·exp(−1/x)/x = 1.43e-3（上と下の和の差はその 2 倍）。

計算 この図の値は、項 $n!\,x^{n}$ と $\pi e^{-1/x}/x$ を図の中で計算している。

計算 表 3　表の数値はこの端末で計算した（SciPy）。$N^{*}$ は最小の項の番号。右端の列は Borel 和の虚部の大きさで、上下の差はその 2 倍。

| $x$ | 主値 PV | $N^{*}$ | 最小の項 | $\min_N \lvert S_N - \mathrm{PV}\rvert$ | 虚部の大きさ $\pi e^{-1/x}/x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.05 | 1.055956 | 19, 20 | 2.32e−8 | 7.70e−9 | 1.30e−7 |
| 0.10 | 1.131470 | 9, 10 | 3.63e−4 | 1.20e−4 | 1.43e−3 |
| 0.15 | 1.239251 | 6 | 8.20e−3 | 2.74e−3 | 2.67e−2 |
| 0.20 | 1.353831 | 4, 5 | 3.84e−2 | 1.26e−2 | 1.06e−1 |

09

## 食い違いを記録する：transseries と renormalon

食い違いを残すには、$e^{-1/x}$ を独立な単位として足します。

$$F(x) = \sum_{n\ge 0} n!\,x^{n} \;+\; \sigma\,\frac{e^{-1/x}}{x} \;+\; \cdots \tag{14}$$

極の避け方の選択は係数 $\sigma$ の選択に移り、近づき方の情報は $1/0$ の値ではなく $e^{-1/x}$ の係数に記録されます。このような形式的な和を **transseries**、この方向の研究を resurgence と呼びます（4-12）。既知

ヤン–ミルズでは摂動級数が $\alpha_s^n\, n!$ 型に発散すると考えられています（renormalon）。（赤外）renormalon の $n!$ は、ループ運動量の積分のうち運動量が $\Lambda$ に近い領域——一ループの走る結合が発散する点の近く——からの寄与と考えられています。運動量の大きい側から来る紫外の renormalon も別にあるとされます。PDG は 'closely connected with non-perturbative contributions' と書きつつ、今ある次数では 'not usually visible' とします。物理
resurgence の物理の水準の結果は、$\mathbb{R} \times S^1$ 上の二次元 $CP(N-1)$ 模型（ねじれた境界条件。Dunne–Ünsal 2012）や、$\mathbb{R}^3 \times S^1$ にコンパクト化した、随伴フェルミオンつきの四次元ゲージ理論（Argyres–Ünsal 2012）にあり、$\mathbb{R}^4$ 上の純ヤン–ミルズにはありません。

10

## 記号が運ぶべきもの

値を置く体系は、演算の規則を弱めるか経路を一つに固定して成り立ち、近づき方の情報を捨てます。効いてきたのは近づき方を保つ置き換えと、発散の速さを運ぶ記号（$1/\varepsilon$ の Birkhoff 分解、繰り込み群）で、どちらも幾何と摂動論の側です。既知 ギャップの尺度と期待される $\Lambda$ は $e^{-1/g^2}$ の形で、どの次数にも映りません。物理 2026 年より前に残っていた障害——体積に一様な評価・無限体積極限・非自明性・反射正値性・ゲージ軌道空間——は値の割り当ての問題ではありません（7-11）。公開された構成（2026）のあとの今の状態は、7-11 と 6-04 にあります。

### 寄り道：論理の側から

飛ばしてよい小節です。

元の言語の文について新しい定理を生まない拡張が**保守的拡大**です。Nelson（1977）の内部集合論 IST の Theorem 8.8 は 'Every internal theorem of IST is a theorem of ZFC'（Powell の結果）です。ZFC は通常の数学の公理系、内部定理は IST が新たに足した述語「標準」を使わない文で書かれた定理のことです。IST は $1/\varepsilon$ を扱い、$1/0$ は定義しません。既知 ただ「保守的な記号は定理を増やさないから無力」は決め手になりません。グラフの Hopf 代数も正則性構造も Perelman のエントロピーも通常の数学の中の定義による拡張です。それでも、正則性構造は特異確率偏微分方程式の解の構成に、Perelman のエントロピーは幾何化予想の証明に使われ、Hopf 代数は繰り込みの組合せを見通しよくしました。記号の評価は「何を運ぶか」の水準でしかできません。

この本の読み（未検証）

「質量ギャップは $1/0$ の問題ではなく $e^{-1/g^2}$ の問題である」。確信度は中程度です。transseries も形式的な対象で、それだけでは測度も体積に一様な評価も与えません。$\mathbb{R}^4$ 上の純ヤン–ミルズでは、resurgence は物理の水準でも確立していません。

## この章が言えている範囲

| | 内容 |
|---|---|
| **言えている** | 表 1 の体系は演算の規則を弱めるか経路を一つに固定している（wheel・meadow・ゼロ除算の算法は本文、IEEE 754 はこの端末で確かめた範囲。transreal は書誌のみ）既知 計算 |
| **言えている** | 式 (5) の爆発、式 (9) のテイラー係数が 0 であること、§05・§06 の既知の例 既知 |
| **言えている** | 表 2・表 3 と §02・§03・§07 の数値。Borel 和の食い違いと最適な打ち切りの誤差が、ともに $e^{-1/x}$ に冪を掛けた大きさであること 計算 |
| **言えていない** | 四次元ヤン–ミルズの摂動級数の発散・renormalon・$\Delta \propto \Lambda$（物理の期待）。$1/0$ の記号化が原理的に無力であること（見立て）。$e^{-1/g^2}$ を運ぶ記号がギャップに届くこと（この本の読み）。この本はヤン–ミルズについて何も示していない |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 問題文（§6.6・公理の指定） | 本文 | A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*, Clay Mathematics Institute (2000) |
| 走る結合・$b_0$・renormalon | 本文 §9.1.1・脚注 1 | Particle Data Group, *Review of Particle Physics* (2024), §9 |
| wheel・meadow・ゼロ除算の算法 | 本文 | J. Carlström, Research Reports in Math. 2001:11, Stockholm Univ.（誌版 Math. Struct. Comput. Sci. 14 (2004) 143–184）／Bergstra–Hirshfeld–Tucker, arXiv:0901.0823 §1／S. Saitoh, *Division by Zero Calculus; an extended version*（草稿 2023）§2.1 |
| IST・Singer の注意 | 本文 | E. Nelson, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977) 1165–1198（p.1196）／I. M. Singer, Comm. Math. Phys. 60 (1978) 7–12 |
| その他 | 要旨 | Axelrod–Singer, J. Differential Geom. 39 (1994) 173–213／Bergbauer–Brunetti–Kreimer, arXiv:0908.0633／Connes–Kreimer, Comm. Math. Phys. 210 (2000) 249–273／Epstein–Glaser, Ann. IHP A 19 (1973) 211–295／Dunne–Ünsal, arXiv:1210.2423, JHEP 11 (2012) 170（$\mathbb{R} \times S^1$・ねじれた境界条件は本文の節見出しで確認）／Argyres–Ünsal, arXiv:1206.1890, JHEP 08 (2012) 063 |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| ゼロ除算の算法の原典 | 書誌のみ | M. Kuroda, H. Michiwaki, S. Saitoh, M. Yamane, Int. J. Appl. Math. 27 (2014) 191–198／S. Saitoh, Springer Proc. Math. Stat. 177 (2016) 151–182（ISAAC 2015 の講演録）。いずれも草稿の文献表 [58]・[115] による |
| 繰り込み可能性 | 書誌のみ | G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 33 (1971) 173–199 と B 35 (1971) 167–188／'t Hooft–Veltman, Nucl. Phys. B 50 (1972) 318–353／B. W. Lee, J. Zinn-Justin, Phys. Rev. D 5 (1972) 3121–3137（続編 3137・3155）／Becchi–Rouet–Stora, Ann. Phys. 98 (1976) 287–321／Costello, AMS (2011) |
| その他 | 書誌のみ | Anderson–Völker–Adams, Proc. SPIE 6499 (2007)／IEEE Std 754-2019／Colombeau, North-Holland (1984)／Uhlenbeck, Comm. Math. Phys. 83 (1982) 11–29／Fulton–MacPherson, Ann. of Math. 139 (1994) 183–225／'t Hooft–Veltman, Nucl. Phys. B 44 (1972) 189–213（次元正則化）／M. Beneke, Phys. Rep. 317 (1999) 1–142, arXiv:hep-ph/9807443（renormalon）／M. Hairer, Invent. Math. 198 (2014) 269–504（正則性構造）／G. Perelman, arXiv:math/0211159（エントロピー） |
| 表 2・表 3、§02・§03・§07 の例、図 1・図 2 | 計算 | この端末の Python 3・NumPy 1.26・SciPy 1.11（$E_1$・$\Gamma$・$\mathrm{Ei}$、主値は Cauchy 重みの数値積分と 12 桁一致、meadow は有理数で検算）。図は式 (5) と $n!\,x^n$ を図の中で計算 |

次に読む章：8-01 格子・Wilson の測度・規約。第二巻は第 8 部から、公開された構成の対象の定めに入ります。物理の側の見方は第三巻の 17-01 物理はどう見ているか で、尺度 $\Lambda$ を物理がどう扱うかから第 17 部が始まります。

# 格子・Wilson の測度・規約

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§05 は本書の検討です。

**この章で分かること** — 公開された構成が出発点に置く対象 — 群 $G \subset U(m)$、周期の格子、面のホロノミー、Wilson の測度 — の定義と、その規約（$\beta = 1/g_0^2$、内積 $\langle X, Y\rangle_{\mathfrak{g}} = -m^{-1}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}(XY)$、Casimir の定数 $C_{\mathfrak{g}}$）です。最後に、本書の規約（$SU(2)$ の標準の $\beta = 4/g^2$）との換算を一つの表にします。

**前提となる章** — 5-01 Wilson の格子（導入）、19-01 格子・リンクの変数・Wilson の測度（本書の規約）、4-06 漸近自由（一ループの係数）。この巻の引用の約束は 6-00。

**先に言うこと** — この章は定義と規約の章です。格子間隔の列と体積の列は次の 8-02、連続の極限は 8-05 で扱います。公開された構成の結果は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」の水準で引き、本書が自分で確かめたのは定義と言明の形を読んだことまでです。

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

この章の順序

1. 言明 — 群・格子・Wilson の測度：公開の言明が置く対象
2. 連続の規約 — β = 1/g² と内積：面の項が曲率の二乗に近づく仕組み
3. Casimir の定数 C_g：定義、SU(N) での値、表現の大きさへの依り方
4. 換算表 — 公開された構成・本書・標準の規約：同じ数がどの規約で何を意味するか
5. 本書の検討で見えていたこと：本書の Lean の規約との比べ
6. 読めていない所：在りかつき

01

## 言明 — 群・格子・Wilson の測度

公開された構成は、Lean のリポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）として公開され、委員会の評価書 `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10、以下「評価書」）がそれを評価しています。この部では、その構成が格子の上に置く対象と、格子から連続へ渡る道具を読みます。以下、ファイルの相対パスはこのリポジトリの中のものです。

**群**。入力は、ある $m$ について $U(m)$ の閉じた部分群 $G$ で、その実の Lie 環 $\mathfrak{g}$ が非可換で単純なもの（真の非零のイデアルを持たない）です 源 （`PublicTheory.lean` の `GaugeGroup`・`GaugeGroup.IsSimple`、25〜45 行）。$m$ は「行列の大きさ」で、群の階数や $\dim \mathfrak{g}$ とは別の数です。$G = SU(2)$ は二次元の定義表現で与えられ、$m = 2$ です 源 （`ConcreteSU2.lean` の `su2`）。

**格子**。間隔の番号 $N$ と体積の番号 $p$ の二つの添字があります。辺の点の数は $L_p D_N$ で、格子は

$$\Lambda_{N,p} = \big(\mathbb{Z}/(L_p D_N)\mathbb{Z}\big)^4, \qquad a_N = D_N^{-1} \tag{1}$$

です。格子点 $y$ は連続の点 $a_N \cdot y$（各座標を $-\tfrac{1}{2}L_pD_N$ から $\tfrac{1}{2}L_pD_N$ の間の代表で読む）に置かれます 源 （`PublicWilson.lean` の `Site`・`mesh`・`place`、11・50〜52 行）。辺の長さは連続の単位で $a_N \cdot L_p D_N = L_p$ です。$D_N$ と $L_p$ の選び方は 8-02 で読みます。

**面と Wilson のエネルギー**。リンクの変数 $U_{y,\mu} \in G$ を正の向きの辺ごとに置き、面のホロノミーを

$$U_{\square} = U_{y,\mu}\, U_{y+e_\mu,\nu}\, U_{y+e_\nu,\mu}^{-1}\, U_{y,\nu}^{-1} \qquad (\mu < \nu) \tag{2}$$

とします 源 （`plaquette`、20〜23 行）。Wilson のエネルギーは、格子点と向きの組 $\mu < \nu$ の全てにわたる和

$$E(U) = \sum_{y \in \Lambda_{N,p}} \sum_{\mu<\nu} \Big(1 - \frac{1}{m} \operatorname{Re}\operatorname{Tr} U_{\square}\Big) \tag{3}$$

です 源 （`wilsonEnergy`、25〜27 行。分母は `g.n+1` で、これが $m$）。面は一枚ずつ一度だけ数えられ、全部で $6|\Lambda_{N,p}|$ 枚です。

**Wilson の測度**。Haar の確率測度 $h$ の積に密度 $e^{-\beta E}$ を掛けて正規化したもの

$$d\mu^{\mathrm{W}}_{N,p}(U) = Z_{N,p}^{-1} \exp\big(-\beta_{N,p} E(U)\big) \prod_{e} dh(U_e) \tag{4}$$

が格子の理論です 源 （`wilsonLaw`、29〜33 行）評 （評価書 §4、式 (3)）。公開の構造 `WilsonFamily`（35〜46 行）は、体積の列 `period`、間隔の分母の列 `denominator`（どちらも狭義に増える）、結合 `beta N p`、Haar の測度（確率で、左不変）、札の型 `Token` と挿入 `insertion` を欄に持ちます。札と挿入は 8-03・8-04 の主題です。

この構造と、それが満たす条件 `WilsonRegularity`（`ChallengeSpec.lean` 12〜22 行）は、公開の定理 `JointExistence`（同 186〜188 行）の言明の一部です 源 。つまり「どの格子の上のどの測度から始めるか」は、公開の言明そのものに書かれています。

格子の側の定義は、独立に作られた格子ゲージ理論の Lean の定式化（`mrdouglasny/lgt`）と照合されています。委員会の記録では、その照合は格子点・リンク・面の添字を付け替え、作用・分配関数・確率測度が一致することを Lean で示したもので、結合の換算は $\beta_{\mathrm{submission}} = m\,\beta_{\mathrm{lgt}}$ です 評 （評価書 §11）。字句は委員会の注釈つきの例 `LatticeAndScale-20261028.lean` の `same_plaquette`・`coupling_conversion`（35・55 行）に在ります 源 。

02

## 連続の規約 — β = 1/g² と内積

評価書 §3 は、連続の Yang–Mills の規約を次のように置きます 評 。滑らかな $\mathfrak{g}$ 値の接続 $A$ の曲率を $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$ とし、$\mathfrak{g}$ の上の不変な内積を

$$\langle X, Y \rangle_{\mathfrak{g}} = -\frac{1}{m}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}(XY) \tag{5}$$

とします。形式的な測度は

$$Z^{-1}\exp\!\Big(-\frac{1}{2g^2}\int_{\mathbb{R}^4}\sum_{\mu<\nu}\|F_{\mu\nu}(x)\|_{\mathfrak{g}}^2\,d^4x\Big)\,\mathcal{D}A \tag{6}$$

です。この規約で、式 (4) の $\beta$ は $\beta = 1/g_0^2$（$g_0$ は切断での結合）と読まれます 評 （評価書 §4）。評価書は、(6) に当たる確率測度を作ることは主張されていない、と明記しています。作られるのは局所の観測量の相関関数です（8-05）。

なぜ $\beta = 1/g^2$ かは、面の項の Taylor 展開で分かります 初 。リンクが滑らかな接続の平行移動から来ているとき、間隔 $a$ の面のホロノミーは $U_{\mu\nu} = \exp X$、$X = a^2 F_{\mu\nu}(x) + O(a^3)$ と書けます。$X$ は反エルミートなので $\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,X = 0$ で、$\exp X$ を二次まで展開すると

$$1 - \frac{1}{m}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,U_{\mu\nu} = -\frac{1}{2m}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}(X^2) + O(a^8) = \frac{a^4}{2}\|F_{\mu\nu}\|_{\mathfrak{g}}^2 + O(a^5) \tag{7}$$

です。格子点の和 $\sum_y$ は $a^{-4}\int d^4x$ に当たるので、

$$\beta\, E(U) \;\approx\; \frac{\beta}{2}\int \sum_{\mu<\nu} \|F_{\mu\nu}\|_{\mathfrak{g}}^2 \, d^4x \tag{8}$$

となり、(6) と比べて $\beta = 1/g^2$ です。評価書 §4.1 の式 (4)、$a^{-4}\bigl(1 - \frac{1}{m}\operatorname{Re}\operatorname{Tr} U_{\mu\nu}\bigr) \to -\frac{1}{2m}\operatorname{Tr} F_{\mu\nu}(0)^2$ は (7) と同じ事実です 評 。

この内積で長さを測ることは、ただの約束ではありません。後で出る係数 — 走る結合の傾き、Casimir の定数、跡の異常の係数 — は全てこの内積に対して書かれます。規約を変えれば係数の数値が変わり、意味は変わりません。§04 の表は、その数値の対応です。

03

## Casimir の定数 C_g

公開の言明 `WilsonRegularity.running` が求めるのは、$\beta_{N,p}/\log(1/a_N)$ がある正の傾き $s$ に近づくこと — 正の傾きが**在ること** — だけです 源 （`ChallengeSpec.lean` 13〜14 行）。構成はこれを $s = 11C_{\mathfrak{g}}/(24\pi^2)$ で満たします 源 （`HierarchyBridge.lean` の `regular`、18 行） 評 （評価書 定理 4.1 の式 (7)）。ここで $C_{\mathfrak{g}}$ は、(5) の内積に対する随伴の Casimir の定数で、次の等式で決まる数です。

$$-\operatorname{tr}\bigl(\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y\bigr) = C_{\mathfrak{g}}\,\langle x, y\rangle_{\mathfrak{g}} \qquad (x, y \in \mathfrak{g}) \tag{9}$$

Lean では、(5) の内積で正規直交な基底 $b_i$ について $C_{\mathfrak{g}} = -\sum_i \operatorname{tr}(\operatorname{ad} b_i \circ \operatorname{ad} b_i)/\dim \mathfrak{g}$ と定義され（`YM/Gauge/Colors.lean` の `casimir`、180 行）、単純な $\mathfrak{g}$ について (9) が成り立つことが `trace_adjoint`（`YM/Gauge/Casimir.lean`、140 行）です 源 。内積が (5) であることは `trace_color`（`Colors.lean`、71 行。$-\operatorname{Re}\operatorname{Tr}(cd) = m\langle c, d\rangle$）で読めます 源 。傾きの定数は `slopeConstant` $= 11C_{\mathfrak{g}}/(24\pi^2)$（`Colors.lean`、184 行）、$b_0 = 11C_{\mathfrak{g}}/(48\pi^2)$（`YM/Pert/Asymptotics/RawAxis.lean`、13 行）で、$2b_0$ が傾きです 源 。

**$SU(N)$ の定義表現での値。** $\mathfrak{su}(N)$ の Killing 形式は $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} x\ \operatorname{ad} y) = 2N\operatorname{Tr}(xy)$ です。(5) で $m = N$ とすると $-2N\operatorname{Tr}(xy) = C_{\mathfrak{g}}\cdot(-\operatorname{Tr}(xy)/N)$ なので

$$C_{\mathfrak{su}(N)} = 2N^2, \qquad C_{\mathfrak{su}(2)} = 8 \tag{10}$$

です 初 （$N = 2, 3, 4$ で数値でも確かめました。$8, 18, 32$）。傾きは $SU(2)$ で $11\cdot 8/(24\pi^2) = 11/(3\pi^2) \approx 0.3715$ です。

**表現の大きさへの依り方。** (5) は行列の跡を $m$ で割るので、同じ Lie 環でも、どの $U(m)$ に埋め込むかで内積が変わり、$C_{\mathfrak{g}}$ の値も変わります。たとえば同じ $\mathfrak{su}(2)$ を三次元の随伴表現（$SO(3) \subset U(3)$、$m = 3$）で持つと、(9) から $C_{\mathfrak{g}} = 3$ になります 初 （数値で確かめました）。

そのときは $\beta$ と $g$ の意味も (5) に合わせて変わります。**$C_{\mathfrak{g}}=8$ は「$SU(2)$ を二次元の表現で持つ」規約での値**です。数値だけを他の規約の式に持ち込まないでください。

**標準の規約との照合。**$SU(N)$ の標準の規約では $\beta_{\mathrm{std}}=2N/g_{\mathrm{std}}^2$、一ループの係数は $b_0^{\mathrm{std}}=11N/(48\pi^2)$ です（Gross–Wilczek、Politzer。4-06）。漸近自由の一ループの走り $1/g_{\mathrm{std}}^2\approx 2b_0^{\mathrm{std}}\log(1/a)$ を $\beta$ に直すと $\beta_{\mathrm{std}}/\log(1/a)\to 2N\cdot 2b_0^{\mathrm{std}}=11N^2/(12\pi^2)$ で、(10) を入れた $11C_{\mathfrak{g}}/(24\pi^2)=11\cdot 2N^2/(24\pi^2)$ と一致します 初 。

04

## 換算表 — 公開された構成・本書・標準の規約

本書の第三巻の対象は $SU(2)$ で、重みを $\exp\bigl(\beta\sum_p \mathrm{Re}\,U_p\bigr)$（$\mathrm{Re}\,U_p=\frac12\,\mathrm{tr}\,U_p$、四元数の実部）と書きます（19-01 §05）。公開された構成で $G=SU(2)$、$m=2$ とすると、$\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,U/m=\frac12\,\mathrm{tr}\,U=\mathrm{Re}\,U$ なので

$$e^{-\beta E(U)}=e^{-6|\Lambda|\beta}\exp\Bigl(\beta\sum_p \mathrm{Re}\,U_p\Bigr) \tag{11}$$

で、定数は正規化で消えます 初 。**$SU(2)$ では、公開された構成の $\beta$ と本書の $\beta$ は同じ数です。**違うのは、その数を $g$ で書くときの規約だけです。

| 量 | 公開された構成（$G\subset U(m)$） | 本書（$SU(2)$） | 標準の規約（$SU(N)$、定義表現） |
|---|---|---|---|
| 面の重み | $\exp\bigl(-\beta\sum(1-\frac1m\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,U_\square)\bigr)$ | $\exp\bigl(\beta\sum\mathrm{Re}\,U_p\bigr)$（定数倍を除き左と同じ） | $\exp\bigl(-\beta_{\mathrm{std}}\sum(1-\frac1N\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,U_p)\bigr)$ |
| $\beta$ と $g$ | $\beta=1/g^2$（内積 (5)） | $\beta=4/g_{\mathrm{std}}^2$ | $\beta_{\mathrm{std}}=2N/g_{\mathrm{std}}^2$ |
| $g$ どうし | $g_{\mathrm{std}}^2=2m\,g^2$。$SU(2)$ では $g_{\mathrm{std}}^2=4g^2$、$\beta$ の数は三つとも同じ 初 | | |
| Casimir | $C_{\mathfrak{g}}$（(9)、内積 (5) に対して）。$SU(N)$ の定義表現で $2N^2$、$SU(2)$ で 8 | （使わない） | $C_A=N$（$\mathrm{tr}\,T^aT^b=\frac12\delta^{ab}$ の規約） |
| 一ループの係数 | $b_0=11C_{\mathfrak{g}}/(48\pi^2)$。$SU(2)$ で $11/(6\pi^2)$ | （$\beta$ の単位で書く。下の行） | $b_0^{\mathrm{std}}=11N/(48\pi^2)$。$SU(2)$ で $11/(24\pi^2)$ |
| $\beta$ の走りの傾き | $\beta/\log(1/a)\to 2b_0=11C_{\mathfrak{g}}/(24\pi^2)$。$SU(2)$ で $11/(3\pi^2)\approx 0.3715$ | 辺 2 の一段で $\frac{11}{3\pi^2}\ln 2\approx 0.2575$（15-01） | $2N\cdot 2b_0^{\mathrm{std}}=11N^2/(12\pi^2)$ |
| 独立の格子の定式化 | $\beta=m\,\beta_{\mathrm{lgt}}$ 評 | — | — |
| 跡の異常の係数（13-02） | $3\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{g}/\pi^4$。$SU(2)$ で $9/\pi^4\approx 0.0924$ | （対応物なし） | — |

二つの $b_0$ の比は 4 で、これは $g^2_{\mathrm{std}} = 4g^2$ から来ます。$\beta$ で書いた傾きは三つの規約で一致します（$\beta$ は同じ数だから）。本書の辺 2 の一段の値は **傾き** $\times \ln 2$ で、公開された構成の辺は 3 以上の奇数なので（8-02）、辺 2 の一段そのものは扱われていません。比べられるのは $\log b$ の係数だけで、一段の $O(1)$ の定数は比べられません 推 。

体積の単位にも注意が要ります。公開された構成の長さの単位は「段 0 の間隔」で、$a_0 = 1$ です（8-02）。本書の第三巻の格子は間隔 1 の一つのトーラスです。同じ「1」でも、公開された構成では $\beta$ を段 0 で決まった値 $\bar{\beta}$ に合わせることで物理の単位が決まっています（10-01）。本書の格子間隔 1 には、そうした合わせは入っていません。

05

## 本書の検討で見えていたこと

本書の Lean は $SU(2)$ だけを、単位の四元数で扱いました（19-01）。重みの形・$\beta$ の意味・Haar の測度の積は、§04 のとおり公開された構成の $m = 2$ の場合と同じです。違いは次の三つです。

- 本書の格子は間隔 1 に固定した一つのトーラスで、間隔の列も体積の列もありません。公開された構成は二つの添字 $(N, p)$ の族を最初から持ちます。
- 本書の Lean は Lie 環の内積も Casimir の定数も定義していません。一ループの値 $\frac{11}{3\pi^2}\ln 2$ は、紙と数値の側（15-01 など）で使っただけです。
- 公開された構成は、任意の単純な閉じた行列群について同じ言明を立て、$SU(2)$ はその特別な場合です（`ConcreteSU2.lean` の `su2Theory`）。

規約の上で食い違う所は見つかりませんでした。本書の $\beta$ で書いた数（強結合の窓 $|\beta| < 0.0556$ など、第 20 部）は、公開された構成の $\beta$ に同じ数のまま読めます。ただし公開された構成は全ての段で $\beta$ を大きく保ち（10-01）、強結合の窓は通りません。

06

## 読めていない所

- `GaugeGroup` から構成の内部の型 `Gauge` への移し（`g.core`・`GaugeGroup.coreSimple`）の中身は読んでいません。$C_{\mathfrak{g}} > 0$（`casimir_pos`）の証明も読んでいません。
- (7) の展開は本書の手計算です。構成が札の代表を選ぶときの Taylor の条件（8-03）は読みましたが、面の項そのものについて (7) を述べる宣言は探していません。

- 委員会の側の `submissions/openai-20261028/checks/ImportedAFGauge.lean`（81〜86 行）は、一ループの係数を別の規約 $\mu\, dg/d\mu = -b_0 g^3/(16\pi^2)$、$b_0 = \frac{11}{3} C_2(\mathrm{adj})$ で持ちます 源 。$SU(N)$ では $11N/3$ で、$16\pi^2$ で割ると標準の $b_0^{\mathrm{std}} = 11N/(48\pi^2)$ と同じです 推 。この規約の係数が委員会の検査のどこで使われるかは読んでいません。
- 独立の格子の定式化との照合（§01 の最後）は、注釈つきの例の言明を読んだだけで、照合の証明は読んでいません。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 公開の言明は、$G \subset U(m)$（Lie 環が単純）、格子 (1)、面 (2)、エネルギー (3)、測度 (4) の族から始まる（`PublicWilson.lean` 20〜46 行） | どの $\beta_{N,p}$ を選ぶか（それは構成の側。10-04） |
| 評 $\beta = 1/g_0^2$、内積は (5)（評価書 §3・§4） | (6) に当たる連続の確率測度の存在（評価書が主張されていないと明記） |
| 源 $C_{\mathfrak{g}}$ の定義と (9)（`casimir`・`trace_adjoint`） | $C_{\mathfrak{g}}$ の値が表現に依らないこと（依る。§03） |
| 初 $SU(N)$ の定義表現で $C_{\mathfrak{g}} = 2N^2$、$SU(2)$ で 8。傾きは $11/(3\pi^2)$ | 他の埋め込み・他の群での値の一覧 |
| 初 $SU(2)$ で公開された構成の $\beta$ と本書の $\beta$ は同じ数（(11)） | 一段の $O(1)$ の定数の比べ（辺が違う） |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 格子・面・エネルギー・測度・`WilsonFamily` | 源 | `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0、版 3456e5e）の `PublicWilson.lean` 10〜46 行、`ChallengeSpec.lean` 12〜22・186〜188 行、`PublicTheory.lean` 25〜45 行、`ConcreteSU2.lean` |
| 規約 (5)(6)、$\beta = 1/g_0^2$、式 (3)(4) | 評 | 評価書 `yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）§3・§4・§4.1 |
| $C_{\mathfrak{g}}$・傾き・$b_0$ | 源 | `YM/Gauge/Colors.lean` 71・180・184 行、`YM/Gauge/Casimir.lean` 140 行、`YM/Pert/Asymptotics/RawAxis.lean` 13 行 |
| 独立の格子の定式化との照合 | 評 | 評価書 §11 |
| 独立の格子の定式化との照合（注釈つきの例） | 源 | 評価の側 `yang-mills-group/YM`・版 55ba9fc の `submissions/openai-20261028/docs/examples/LatticeAndScale-20261028.lean` 35・55 行 |
| $\mathfrak{su}(N)$ の Killing 形式、一ループの係数 | 典 | D. J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1343；H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1346（4-06） |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| $C_{\mathfrak{g}}$ の値（$N = 2, 3, 4$、随伴の埋め込み）、24 と 48/16 の勘定 | 初 | 本書の検討の数値の記録（`numcheck.py`。行列の跡と随伴の作用を数値で組み、(9) の比を計算） |

**この章で使った語** — Wilson の測度、面のホロノミー、Casimir の定数、一ループの係数、規約。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：8-02 段取り — 間隔の列・体積の列・育つ辺 — 格子の族の二つの添字が、どう選ばれているか。

# 段取り — 間隔の列・体積の列・育つ辺

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討です。

**この章で分かること** — 格子の族 $\Lambda_{N,p}$ の二つの添字 — 間隔の番号 $N$ と体積の番号 $p$ — が、公開の言明と構成の側でそれぞれどう決まっているかです。間隔は $a_N = 1/D_N$、$D_N = \prod_{k<N} b_k$ で、比 $b_k$ は 3 以上の奇数、番号とともに減らず、無限に育ちます。体積の辺 $L_p$ は段 0 の間隔を 1 とする単位で測ります。

**前提となる章** — 8-01 格子・Wilson の測度・規約。繰り込みの段の考えは 7-05、本書のブロック写像は 19-04。

**先に言うこと** — 間隔の列は構成が選ぶもので、公開された構成は「どんな間隔の列でも同じ極限になる」とは言っていません。辺を育てる理由の詳しい勘定は 10-05、定数を選ぶ順は 11-08 に置きます。

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

この章の順序

1. 言明 — 公開の言明が求めること：狭義に増える二つの列と、走りの条件
2. 段の向きと格子の大きさ：段 N が最も細かく、段 0 が間隔 1
3. 比の列 — 奇数・非減少・育つ：暦の条件から読めること
4. なぜ辺を育てるか（あらまし）：一段の誤差を log b で割る
5. 体積の列と単位：L_p = 4(M+p+1)、試験関数の置き場所
6. 本書の検討で見えていたこと：辺 2・辺 3 の固定したブロック
7. 読めていない所

01

## 言明 — 公開の言明が求めること

公開の構造 `WilsonFamily`（8-01）は、体積の列 $p \mapsto L_p$（`period`）と間隔の分母の列 $N \mapsto D_N$（`denominator`）を持ち、どちらも正の整数で**狭義に増える**ことだけを求めます 源（`PublicWilson.lean` 36〜39 行）。間隔は $a_N = 1/D_N$（`mesh`、50 行）です。

この族に課される条件 `WilsonRegularity` の一つ目が、結合の走りです 源（`ChallengeSpec.lean` 13〜14 行）。

$$\exists\, s > 0 \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_0 \;\; \forall N \ge N_0 \;\; \forall p : \qquad \left| \frac{\beta_{N,p}}{\log(1/a_N)} - s \right| < \varepsilon \tag{1}$$

量化の順に注意します。$N_0$ は $\varepsilon$ だけで決まり、体積の番号 $p$ には依りません。つまり走りは**体積に一様**です。構成はこの傾きを $s = 11C_{\mathrm{g}}/(24\pi^2)$（評価書が一ループの係数の二倍として書く値。8-01 §03）で満たします 源（`HierarchyBridge.lean` の `regular`、16〜25 行）評（評価書 定理 4.1 の式 (7)）。走りの証明は 10-06 で読みます。

評価書は、この族について次のことをはっきり書いています 評（評価書 §4・§4.3）。

- 構成は二つの列を**選ぶ**。紫外の収束の定理は、ありうる全ての間隔の列についての収束を言っていない。
- 収束は、選ばれた間隔の列の**全体**に沿って成り立つ（部分列ではない）。ただし、間隔の列の型についての普遍性の結果は無い。

評価書の付録（Lean の言明の用語集）は、構成の選び方を $L_p = 4(M + p + 1)$（$M$ は大きさの条件を満たすよう十分大きく固定）、$D_N = \prod_{k<N} b_k$、$b_N \ge 3$ は奇数で $b_{N+1} \ge b_N$、$\log b_N / \log D_N \to 0$ と説明します 評（評価書 付録 A の `WilsonFamily.period`・`denominator`）。§02〜§05 で、構成の側の定義と照らします。

02

## 段の向きと格子の大きさ

構成の側の段取りは、構造 `Schedule` にまとまっています 源（`YM/Lattice/Scale.lean` 28〜34 行）。欄は、比の列 `block`（各 $b_m$ は奇数で $b_m \ge 3$）と体積の列 `period`（4 で割り切れ、狭義に増える）です。そこから

$$D_0 = 1, \quad D_{m+1} = D_m\, b_m, \qquad a_m = \frac{1}{D_m}, \qquad n_{m,p} = L_p\, D_m \tag{2}$$

と定義されます 源 （`denominator` 39〜41 行、`a` 99 行、`side` 67 行）。$n_{m,p}$ は段 $m$ の格子の一辺の点の数で、段 $m$ の格子は $(\mathbb{Z}/n_{m,p})^4$ です。物理の辺の長さは

$$a_m \cdot n_{m,p} = L_p \qquad (\text{全ての } m) \tag{3}$$

で、段に依りません 初 （委員会の例の `side_length_in_physical_units`、`LatticeAndScale-20261028.lean` 92 行でも確かめられています 源 ）。

**段の向き**。切断 $N$ の理論は、段 $N$（最も細かい、間隔 $a_N$）の Wilson の測度から始まり、繰り込みの一段（9-01）を $N$ 回施して段 $0$（間隔 $a_0 = 1$）まで粗くします。段 $m$ から段 $m-1$ への一段で、辺の点の数は $b_{m-1}$ で割られます。$D_m$ が奇数の積なので、粗い点を細かいブロックの**中心**に置けます（9-02）。

| 記号 | 意味 | Lean の側 |
|---|---|---|
| $N$ | 切断の番号（最も細かい段） | 公開の `WilsonFamily` の添字 `N` |
| $m \in \{0,\dots,N\}$ | 繰り込みの段（$m=N$ が裸、$m=0$ が間隔 1） | `History` の段の添字 |
| $b_m$ | 段 $m+1$ から段 $m$ への比（ブロックの辺） | `Schedule.block m` |
| $D_m,\ a_m$ | 分母と間隔 | `Schedule.denominator`・`Schedule.a` |
| $L_p$ | 物理の辺の長さ（段 0 の間隔が単位） | `Schedule.period p`（公開の `period`） |
| $\log(1/a_m) = \sum_{k<m} \log b_k$ | 段の目盛り | `Schedule.scale`（`scale_succ`、124 行） |

公開の言明の分母 $D_N$ は、ここの `Schedule.denominator` そのものです 源 （`WilsonBridge.lean` の `wilsonFamily`、20〜30 行）。

03

## 比の列 — 奇数・非減少・育つ

`Schedule` 自身が求めるのは「奇数で 3 以上」だけです。残りの性質は、暦 `Calendar` とその条件 `Calendar.Fits` から来ます 源 （`YM/RG/History.lean` 64〜77 行と 97 行から）。暦は、段の定数の組の列 $j \mapsto \mathrm{stage}(j)$、辺の候補の列 $j \mapsto \mathrm{factor}(j)$、段の深さ $J(m) \geq 4$ を持ち、`Fits` は次を求めます。

- `sameFactor`：$b_m = \mathrm{factor}(J(m+1))$。`monotoneL`：factor は単調。`mono`：$J$ は単調。`stepSlow`：$J(m+1) \leq J(m)+1$。`deep`：$J(m) \to \infty$。
- `mesh`（`Gentle`、`Scale.lean` 129〜130 行）：$\log b_m / \log(1/a_m) \to 0$。
- `driftSmall`：段 $m+1$ の定数の組の drift について $\mathrm{drift}/\log b_m \leq J(m+1)^{-2}$。

- `logCost`：$\log\bigl(1+\mathrm{paths}+\mathrm{width}^{-1}+\mathrm{columns}+\mathrm{relaxation}+\mathrm{supportExponent}\bigr)/\log b_m \le J(m+1)^{-2}$。
- 大きさの条件（`sizeT`・`fitsPatch`）：格子の辺が、被覆の大きさやパッチの半径の 100 倍より大きい、など。

ここから読めることを並べます。

**非減少**。$b_m=\mathrm{factor}(J(m+1))$ で、factor も $J$ も単調なので $b_{m+1}\ge b_m$ です 初 。

**無限に育つ**。定数の組の欄 columns は 1 以上（`columns_ge`）なので、`logCost` の分子は $\log 2$ 以上です。すると $\log b_m \ge J(m+1)^2\log 2$ で、$J\to\infty$ から $b_m\to\infty$ です 推 （定義からの導出。分子の他の項が負でないことを使う）。評価書の付録は「$b_N$ は RG の変換に現れる定数で書いた、込み入っているが陽な不等式を満たすよう選ばれる」と書きます 評 。

**ゆっくり育つ**。`Gentle` は $b_m$ が $D_m$ に比べて小さい（$\log b_m = o(\log D_m)$）ことを言います。`Scale.lean` の `mesh_inequality`（133 行）は、そこから $c\,a_m^2 \le a_{m+1}$ となる $c>0$ が在ることを出します 源 。間隔が段ごとに急に縮みすぎない、という意味です。

跡の短距離の解析（13-03）は、暦にさらに条件 `PostT` を課します。その一つ `bloom` は $b_i \le \log \hat\beta_i$（$\hat\beta_i$ は段 $i$ の一ループの走り）で、比の列が対数より遅く育つことを求めます 源 （`YM/TraceExtension/Terrace/Base.lean` 29〜34 行）。

まとめると、比の列は「3 以上の奇数、減らない、無限に育つ、ただし $\log D_m$ に比べればゆっくり」です。具体的な $b_m$ の式は、言明の中にはありません（§07）。

04

## なぜ辺を育てるか（あらまし）

詳しくは 10-05 で読みます。ここでは骨だけを書きます。

一段の結合の移りは、一ループの値からのずれ（drift）を持ちます。一段の移りの式は $|\beta_{m+1}-\beta_m-s\log b_m|\le \mathrm{drift}$ の形で 源 （`History.Transfer`、`History.lean` 223 行）、drift は段の定数の組の実数の欄です。構成はこのずれを段の定数（$O(1)$）でしか抑えていない、と本書は読みます 推 。辺を一定の $b$ に固定すると、$N$ 段の和は $N\cdot O(1)=\frac{\log D_N}{\log b}\cdot O(1)$ で、$\log D_N$ と同じ大きさになり、(1) の傾きが決まりません 推 。`driftSmall` は $\mathrm{drift}_m \le \log b_m/J(m+1)^2$ を求めるので、ずれの和は

$$\sum_{m<N}\mathrm{drift}_m \le \sum_{m<N}\frac{\log b_m}{J(m+1)^2} = o\Bigl(\sum_{m<N}\log b_m\Bigr) = o(\log D_N) \tag{4}$$

となります 推 （$J \to \infty$ と $\sum \log b_m = \log D_N \to \infty$ から。正確な形は 10-05）。一段の誤差を $O(1)$ のまま、$\log b$ で割って消す設計です。二ループの係数は使われていません。

もう一つの理由は、段の定数そのものが段とともに増えることです。次数 $d$ の局所場（8-03）を扱うには、基準の段から先で段の Taylor の次数が $d+1$ 以上である必要があります 源 （`YM/Source/Construction.lean` の `Makes.stages`、47〜49 行：$d+3 \le J(r(d))$、段 $r(d)$ から先で order $\ge d+1$）。全ての次数の場を得るので、段の深さ $J$ は無限に育ち、それに合わせて辺も育ちます 推 。

代価は、**間隔の列が構成に合わせた特別なもの**になることです。これが §01 の「普遍性は言われていない」の中身です。

05

## 体積の列と単位

体積の辺は $L_p = \mathrm{page}(M+p) = 4(M+p+1)$ です 源 （`YM/Price/Waits.lean` 87・102 行）。$M$ は暦を満たすよう十分大きく取った自然数で、評価書は「最小の大きさと初めの体積の評価を満たすよう固定」と書きます 評 。

**単位**。長さの単位は段 0 の間隔で、$a_0 = 1$ です。委員会は、全ての切断 $N$ と体積 $p$ が同じ物差しを使うことを、次の四つの事実として確かめています 評 （評価書 §11、委員会の結合の目標の一部）。

1. 基準の間隔は $a(0) = 1$。
2. 全ての $N, p$ で、RG の軌道は段 0 で同じ基準の結合 $\beta_{N,p}(0) = \bar{\beta} > 0$ に着く（10-04）。
3. 有効作用の二次の項は単位行列に正規化される（10-01）。
4. 次数 $d$ の札の係数は、基準の段 $r(d)$ で、切断と体積に依らず札そのものに等しい（8-04）。

つまり「1」の長さは、ただの格子の目盛りではなく、段 0 で結合を $\bar{\beta}$ に合わせることで物理の単位として決まっています。

**試験関数の置き場所**。体積 $p$ で使えるのは、台が $\big((-L_p/2, L_p/2)^4\big)^n$ の内側に**真に**入る試験関数だけです 源 （`PublicWilson.lean` の `suitable`、75〜77 行）。固定した試験関数は、十分大きい $p$ で必ずこの条件を満たします。

**間隔 1 より長い距離**。繰り込みは段 0 で止まり、間隔 1 より粗い尺度へは進みません。体積の極限は、鏡映正値性・チェス盤の評価・転送作用素・コンパクト性で扱われます（第 12 部）。

06

## 本書の検討で見えていたこと

本書のブロック写像は、辺 2 と辺 3 の二つの設計を持ち、どちらも辺は固定です（19-04）。段 $m$ の箱は $(\mathbb{Z}/2^m L)^4$ の形で、段の向きは公開された構成と同じ（細かい側が大きい番号）です。

- 辺 3 の設計（奇数の辺、中心に置く）は、公開された構成の作りに近い所があります。違いは、公開された構成では辺が育つことです。
- 本書の鎖では、裸の結合の列 $\beta_N$ を外から与えて段を跨ぐ評価を前提に置きました（28-04）。辺を固定すると一段の誤差が積もる、という事情は §04 と同じで、本書はそれを前提の側に置いていました。
- 体積の単位を段 0 の合わせで決める考えは、本書の「合わせ」（単位の長さで決まる量を固定の値に合わせる）と同じ向きです。合わせに使う量は違います（14-03）。

07

## 読めていない所

- $b_m$ の具体的な式。暦を作る `Wait.ready`（`YM/Price/Waits.lean` 137 行）と `Program.exhaust`・`Rolls` は言明だけ読みました。
- $M$ の大きさと、それを決める「初めの体積の評価」の中身。
- 段の定数の組 `Stage` の各欄の値（paths・width・columns・relaxation など）。どれが $J$ とともにどの速さで増えるか。
- (4) は本書の推し量りで、構成の中の同じ勘定 `YM.RG.Supply.Large`（`YM/Price/Intent.lean` 39〜47 行）の条件 `slow`（drift/log L ≤ 1/j²）と `kick`（drift/log L ≤ s/4）は `driftSmall` と同じ形で、(4) と矛盾しません。勘定の全体は突き合わせていません。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
| --- | --- |
| 源 公開の言明は、狭義に増える $L_p$・$D_N$ と、体積に一様な走り (1) を求める | 走りの傾き以外の、$\beta_{N,p}$ の $p$ への依り方 |

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 $b_m$ は 3 以上の奇数、$D_m = \prod b_k$、$a_m = 1/D_m$、$L_p$ は 4 の倍数で $4(M+p+1)$ | $b_m$ と $M$ の具体的な値 |
| 初 暦の条件から $b_m$ は非減少。推 $b_m \to \infty$ | 育つ速さの陽な形 |
| 評 収束は選ばれた間隔の列の全体に沿う | 間隔の列の取り方への普遍性（評価書が開いていると明記） |
| 評 全ての $N, p$ で同じ物差し（基準の間隔・基準の結合・運動項・札の較正） | $\beta$ を変えたときの依り方 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 公開の列と走りの条件 | 源 | `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0、版 3456e5e）の `PublicWilson.lean` 36〜39・50・75〜77 行、`ChallengeSpec.lean` 13〜14 行、`HierarchyBridge.lean` 16〜25 行、`WilsonBridge.lean` 20〜30 行 |
| 段取りと暦 | 源 | `YM/Lattice/Scale.lean` 28〜34・39〜41・67・99・124・129〜133 行、`YM/RG/History.lean` 64〜77・97〜118・223 行、`YM/Price/Waits.lean` 87・102 行、`YM/Source/Construction.lean` 47〜49 行 |
| 普遍性の無さ、列の選び方、共通の物差し | 評 | 評価書 `yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）§4・§4.3・§11・付録 A（`WilsonFamily` の項） |
| 段に依らない辺・共通の物差し（注釈つきの例） | 源 | 評価の側 `yang-mills-group/YM`・版 55ba9fc の `submissions/openai-20261028/docs/examples/LatticeAndScale-20261028.lean` 90〜105 行 |

**この章で使った語** — 繰り込みの段、ブロックの辺、暦、普遍性、物理の単位。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：8-03 局所場の札と格子の代表 — この格子の上で、何を「場」と呼ぶか。

# 局所場の札と格子の代表

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討です。

**この章で分かること** — 公開された構成で、局所場が三つの段 — 札（代数の対象）、格子の代表（有限個のリンクの多項式）、場（相関で区別できる札の類）— で与えられることです。場の空間 $F_d = V_d / N_d$ は相関の零空間による商として内在的に定義され、各次数で自由な Maxwell 場の多項式の空間と線形同型です。

**前提となる章** — 8-01（格子と規約）、8-02（間隔の列）。古典の曲率と共変微分は 3-02、公理の中の場は 4-09。

**先に言うこと** — この章は札と代表の**定義**までです。代表に掛ける繰り込みの係数は 8-04、相関の作り方は 8-05 です。Maxwell 場との線形同型は「場の数が同じ」ことで、相関が自由場と同じだという意味ではありません。

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

この章の順序

1. 言明 — 公開の言明に在る場：抽象の札の型と、有限次元の場の空間
2. 札 — 次数 d までの曲率の多項式：重みの付け方と基底
3. 格子の代表 — Taylor 展開で合う多項式：有限の型紙と七つの条件
4. 場の空間 — 相関の零空間で割る：内在的な定義と、相の間で変わらないこと
5. 自由な Maxwell 場との線形同型：何が同じで、何が同じでないか
6. 本書の検討で見えていたこと：面の平均は次数 4 の素朴な代表
7. 読めていない所

01

## 言明 — 公開の言明に在る場

公開の定理 `JointExistence` の中で、場は次の形で現れます 源 （`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028` の `PublicWilson.lean` 44〜46 行、`ChallengeSpec.lean` 28〜33 行）。

- 格子の族 `WilsonFamily` は、型 `Token`（札）と、札・格子点・配位に複素数を返す挿入 `insertion` を持つ。
- 連続の側の階層 `Hierarchy` は、次数 $d$ ごとの有限次元の複素ノルム空間 `Field d`（$= F_d$）、ラベルの空間への線形写像 `toLabel`、札を場へ送る `project` を持つ。
- 再構成の欄（`Reconstructed`、同 120〜123 行）は、`toLabel` が単射、全ての場が何かの札の像（`represents`）、ラベルの空間が場の像で尽くされる（`covers`）ことを求める。

公開の言明を読むだけでは、`Token` は中身の分からない型です。**札がどの曲率の多項式を表すかは、公開の構造には書かれていません** 源 （`PublicWilson.lean` 44 行は `Token : Type` だけ）。それが書かれているのは構成の側（`YM.Register.Token`、`YM.Labels.Frame`）と、委員会の検査です 評 （評価書 §3、付録 A の `WilsonFamily.Token` の項）。この章は、構成の側の中身を読みます。

評価書 §3 の要約は次のとおりです 評 。局所の観測量は一点での曲率と共変微分のゲージ不変な多項式で、関数や分布としてではなく、ベクトル空間の元である**抽象の札**として定義される。札には重み（次数）があり、重み $d$ 以下の札は有限次元の複素ベクトル空間 $V_d$ をなす。札の間には Bianchi の恒等式などから来る線形の関係があり、その関係は相関関数で定式化される。主定理の場は、商 $F_d = V_d / N_d$ の全ての次数の和の元である。

02

## 札 — 次数 d までの曲率の多項式

**重み**。曲率 $F_{\mu\nu}$ に重み 2、共変微分一つに重み 1 を与え、積の重みは和とします。$k$ 階の共変微分を掛けた曲率 $D_{\lambda_1}\cdots D_{\lambda_k}F_{\mu\nu}$ の重みは $k+2$ です。ゲージ不変な多項式で、どの単項式も重み $d$ 以下のものの全体が $V_d$ です。例 評 （評価書 §3）：

$$-\operatorname{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}) \in V_4, \qquad -\operatorname{Tr}\big((D_\lambda F_{\mu\nu})(D_\kappa F_{\rho\sigma})\big) \in V_6 \tag{1}$$

重みは、場の「工学的な次元」（長さの $-d$ 乗で尺度が変わる）に当たります。$V_d \subset V_{d+1}$ なので、次数は上限です。

構成の側では、多項式は二つの数の組（二重次数）で分類されます 源
（`YM/Labels/Grading.lean` の `weight_slot`、76〜79 行）：一つ目は上の重み、二つ目は曲率の因子の数です（$k$ 階の微分を掛けた曲率の変数一つが $(k+2,1)$ を持つ）。

**基底と札**。構造 `Frame G d` は $V_d$ の基底を一つ選びます 源 （`YM/Labels/Basis.lean` 50〜57 行）。条件は三つです。

- 基底の 0 番目は恒等の場 $\mathbf{1}$（定数の多項式 1）。
- 各基底の元は実（複素共役の操作で変わらない）。
- 各基底の元は一つの二重次数に属し、重みは $d$ 以下。

札は組 $(d, c)$ で、$c$ はこの基底での係数のベクトルです 評 （評価書 付録 A の `WilsonFamily.Token`）。恒等の場が基底の先頭に入っていることは、繰り込みで恒等の場との混合を扱うときに効きます（8-04）。

委員会の注釈つきの例は、どのゲージ不変な多項式も、ある次数 $d$ の札として現れることを示しています（全体に上限の次数は課されない） 源 （評価の側 `yang-mills-group/YM`・版 55ba9fc の `submissions/openai-20261028/docs/examples/OperatorContent-20261028.lean` の `every_registered_polynomial_appears`、41 行）。同じ例は、これが「提出された代数の辞書に対して尽くしている」ことで、辞書を意図した局所場と同一視するのは人の審査であり、線の欠陥のような非局所の観測量の完全性は言わない、と書いています（35〜38 行）。

03

## 格子の代表 — Taylor 展開で合う多項式

札は代数の対象で、相関を持ちません。格子の上で測るには、札ごとに**格子の代表**を選びます。考え方は評価書 §4.1 の例で見えます 評 。滑らかなリンクでは $U_{\mu\nu} = 1 + a^2 F_{\mu\nu}(0) + O(a^3)$ なので

$$a^{-4}\Big(1 - \frac{1}{m}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,U_{\mu\nu}\Big) \;\longrightarrow\; -\frac{1}{2m}\,\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}(0)^2 \tag{2}$$

です（8-01 の (7) と同じ計算）。だから $1 - \frac{1}{m}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,U_{\mu\nu}$ は札 $-\frac{1}{2m}\,\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}^2$ の**代表の候補**になります。ただし評価書は、構成は追加の対称性のためにこの素朴な面の項そのものを代表には選んでいない、と注意しています。

構成の側の定義は次の二段です。

**型紙と多項式**。次数 $d$ ごとに、有限の型紙（格子点のずれの有限集合）$S_d \subset \mathbb{Z}^4$ と、係数ベクトルから多項式への線形写像を選びます。多項式の変数は、型紙の中の辺のリンクの行列成分

とその複素共役です 源 （`YM/Source/Local.lean` の `SectionData`、103〜105 行。変数の添字 `Index` は 92〜93 行）。型紙と多項式は $N, p$ に依りません 評 （付録 A の `WilsonFamily.insertion`）。点 $x$ での代表は、型紙を $x$ へ平行移動したものです（`places`）。

**健全さの七つの条件**。`SectionData.Sound` は次を求めます 源 （`Local.lean` 140〜147 行）。

1. 型紙は原点を含む。
2. 型紙は超立方の群（符号つきの座標の置換）で不変。
3. 多項式はゲージ不変。
4. 恒等の場の係数ベクトルは定数 1 に写る。
5. 超立方の群の作用と両立する（配位を回すことは、係数ベクトルを回すことと同じ）。
6. 係数の複素共役は値の複素共役に写る（とくに実の係数ベクトルは実の値を持つ。`ordinary_real`）。
7. **Taylor の条件**（`Projects`、85〜90 行）：全ての「ジェット」$J$（多項式のゲージ・ポテンシャルの係数）について、尺度 $h$ の平行移動から作ったリンクの上での多項式の値 $f(h)$ と、$J$ を尺度 $h$ で縮めたもの（$i$ 階の係数に $h^{i+2}$ を掛ける）での連続の札の値 $g(h)$ が、$h = 0$ で $d$ 階まで同じ微分を持つ。

7 が「Taylor 展開が $d$ 次まで合う」の正確な形です。評価書の言い方では「多項式のゲージ・ポテンシャルの平行移動で得たリンクの上で、間隔についての Taylor 展開が、尺度を合わせた連続の札と $d$ 次まで一致する」 評 。条件 2 と 5 は、格子の対称性（超立方の群）を代表の段階で保つためのもので、評価書の「追加の対称性」に当たる、と本書は読みます 推 。

公開の言明の側では、挿入について三つの性質だけが求められます 源 （`ChallengeSpec.lean` 15〜22 行）：配位について連続、ゲージ変換で不変、そして札ごとに $N, p, x$ に依らない有限の型紙が在って、挿入はその中のリンクにしか依らない（`localSupport`）。

04

## 場の空間 — 相関の零空間で割る

異なる札が同じ相関を持つことがあります（Bianchi の恒等式、運動方程式など）。構成は、その同一視を**相関関数そのもの**で定義します 源 （`YM/Euclid/Null.lean`）。

連続の相関の表 $S$（8-05 の $S^{\mathrm{mix}}$）について、次数 $d$ の札 $v$ が**零**であるとは、任意の個数の傍観者の札 $B_1, \dots, B_n$ と、互いに異なる任意の点 $x_0, \dots, x_n$ について

$$S\big(v(x_0)\, B_1(x_1) \cdots B_n(x_n)\big) = 0 \tag{3}$$

となることです（`criterion`、36〜38 行。零の空間 `null` は 34 行で、全ての点の離れた相関を並べる線形写像の核）。場の空間は商

$$F_d = V_d / N_d \tag{4}$$

です（`Field`、74 行）。ノルムは、基底の係数の最大値のノルムから来る商のノルムです 評（付録 A の `Hierarchy.Field`）。

単射が二つ出てくるので分けます。一つは、商 $F_d$ から点の離れた相関の全体への、零の空間を核とする写像から誘導される写像（`spectra`、`Null.lean` 93 行）で、これは商の定義から単射です 源。もう一つは公開の言明の `toLabel` で、場の空間から再構成した理論のラベルの空間への線形写像です（`ChallengeSpec.lean` 32 行）。その単射は公開の欄 `Reconstructed.injective`（120 行）として求められ、構成では `toLabel := S.pin` と置かれます 源（`HierarchyBridge.lean` 32 行）。委員会の例は、前者について「単射だけでは、場を殺しすぎていないことは言えない」と注意し、実質の結果は次の §05 の次元の比べだと書いています 源（`OperatorContent-20261028.lean` 71〜86 行）。

**相を選んでも場は失われない。** 8-05 で、混ざった理論 $S^{\mathrm{mix}}$ は成分（相）$S^{\xi}$ の平均に分けられます。委員会の例は、全ての相 $\xi$ で零の空間が $S^{\mathrm{mix}}$ のものと同じであることを示しています 源（`each_phase_retains_the_dictionary`、103 行）。量化は「ほとんど全ての相」ではなく「全ての相」で、混ざった理論が相の平均であることより強い言明です。

商で場を定める考えは、相関で区別できないものは同じとする、という自然な選びです。場の空間は格子の代表の選び方に依らず、連続の相関だけで決まります。

05

## 自由な Maxwell 場との線形同型

評価書 §3 は、各次数 $d$ で $F_d$ が古典の Maxwell 理論から来るゲージ不変な多項式の空間と**線形同型**であることを、構成が示したと書きます 評。比べる空間は、自由な曲率とその微分の多項式で重み $d$ 以下のものを、源のない Maxwell 方程式と Bianchi の恒等式を満たす形式的な曲率のデータの上で一致するものどうし同一視したもの（`Maxwell.shellSector G d`）です。

$$F_d \;\cong_{\mathbb{C}\text{-線形}}\; (\text{Maxwell の殻の上の多項式、重み} \le d) \tag{5}$$

委員会の例は (5) を Lean の言明として示しています 源
（`interacting_field_dictionary`、`OperatorContent-20261028.lean` 89〜91 行。評価の側の `submissions/openai-20261028/checks/CompletenessAudit.lean` 45 行の `local_field_content` から）。自由の側では、比べる空間に余分な零が無いことも示されています（`free_residual_vanishes`、62 行）。

**何が同じで、何が同じでないか。**同じ例が、次のことを明記しています 源 （84〜86 行）。

- (5) は**ベクトル空間の同型**で、相互作用する相関と自由な相関が等しいことではない。
- 代数の同型でも、量子場の理論のユニタリ同値でもない。
- 独立に作った標準の Yang–Mills の Hilbert 空間との比べでもない。

(5) が言っているのは「各次数で、独立な場の数が自由な Maxwell 場と同じ」ことです。言い換えると、相関で消える札の関係は、自由な場の関係（運動方程式と Bianchi の恒等式）とちょうど同じだけ在る 推 。場の数が多すぎも少なすぎもしないことは、「場の空間が曲率の多項式に対応する」という問題文の要求（評価書 §1 の 2）を、数の水準で確かめるものです。

この比べは委員会の結合の目標（`combined_acceptance`）の一部です 評 （評価書 §9.3 の field-content の検査）。構成の側では、比べの源は証人の欄 `F.phase.transport.comparator`（`Maxwell.Ranks`）です 源 （`YM/Spec/Closed.lean` 40 行の `comparator` の欄）。

06

## 本書の検討で見えていたこと

本書の Lean には局所場の札も、場の空間も、Maxwell 場との比べも**無い**です。本書の観測量は粗い格子のリンクの関数 — 面の平均、Wilson ループ、捩れた分配関数の比 $\theta_M$ — でした（第 19〜21 部）。

- 面の平均 $\frac{1}{6}\sum_{\mu<\nu}\mathrm{Re}\,U_{\mu\nu}$ は、(2) から見て次数 4 の札（$\mathrm{Tr}\,F^2$ の形）の**素朴な代表**（と定数の和）です 推 。ただし公開された構成で相関が収束するのは、次の 8-04 の繰り込んだ挿入だけで、その係数には恒等の場との混合（$a^{-4}$ の項）が入るはずです。本書の面の平均の連続の極限を語るには、この混合を本書の帳簿で読み直す必要があります（14-06）。
- Wilson ループや捩れた分配関数は局所の札の空間に入りません。委員会の例も線の欠陥を明示的に外しています。
- 相関の零空間で割って対象を内在的に定める形は、本書の非局所の観測量の連続の対象を定めるときにも使える型です 推 。

07

## 読めていない所

- 代表の多項式の具体形（型紙の大きさ、どの多項式か）。`SectionData` の実例を作る所は読んでいません。
- Taylor の条件の中の平行移動の流れ（`Hol.flow`・`links`）と、連続の札の読み（`read`）の定義の細部。
- (5) の証明（`Maxwell.Ranks` とその源）。比べる空間の基底の数を数える所。
- 二重次数の二つ目の成分（曲率の因子の数）が繰り込みの尺度（8-04 の `scaled`）以外のどこで使われるか。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 公開の言明の札は抽象の型、場は有限次元の空間 `Field d` | 公開の言明だけからの、札の意味（構成の側と委員会の検査に在る） |
| 源 代表は有限の型紙の上のリンクの多項式で、七つの条件（Taylor の条件を含む）を満たす | 代表の具体形 |
| 源 $F_d = V_d/N_d$、$N_d$ は全ての点の離れた相関が消える札 | 点が重なる所での関係（相関は点の離れた所だけ。8-05） |
| 源 各次数で $F_d$ は Maxwell の殻の上の多項式の空間と線形同型。全ての相で同じ | 相関の一致・代数の同型・ユニタリ同値。線の欠陥の完全性 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 公開の札・場・挿入の条件 | 源 | `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0、版 3456e5e）の `PublicWilson.lean` 44〜46 行、`ChallengeSpec.lean` 15〜33・117〜123 行 |
| 重み・基底・代表・Taylor の条件 | 源 | `YM/Labels/Grading.lean` 76〜79 行、`YM/Labels/Basis.lean` 50〜57 行、`YM/Source/Local.lean` 85〜105・140〜147 行 |
| 零の空間と商 | 源 | `YM/Euclid/Null.lean` 34〜38・74 行 |
| 札の説明、Maxwell との比べ、例 (1)(2) | 評 | 評価書 `yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）§3・§4.1・§9.3・付録 A |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
| --- | --- | --- |
| 委員会の例（尽くすこと・線形同型・相の保持） | 源 | 評価の側の `submissions/openai-20261028/docs/examples/OperatorContent-20261028.lean` 35〜38・41・62・71〜91・103 行、`submissions/openai-20261028/checks/CompletenessAudit.lean` 45 行 |

**この章で使った語** ― 札、格子の代表、型紙、Taylor の条件、相関の零空間、場の空間、Maxwell の殻。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：8-04 繰り込んだ挿入 ― 代表にどんな係数を掛ければ、相関が収束するか。

# 繰り込んだ挿入

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§07 は本書の検討です。

**この章で分かること** — 公開された構成で、相関が収束するのは札の素朴な代表ではなく**繰り込んだ挿入**だ、ということと、その係数の決め方です。挿入を一段ずつ正確に粗い段へ運び、基準の段で係数が札そのものになるよう、細かい段の係数を輸送の逆で選びます。

**前提となる章** — 8-03 局所場の札と格子の代表。発散と繰り込みの考えは 4-04、繰り込みの一段は 9-01・9-06。

**先に言うこと** — 係数には陽な式がありません（評価書もそう書いています）。恒等の場との混合がどう入るかは、源の型から読める範囲までで、混合の行列の形は読めていません。係数が $N$ について収束することの証明の筋は 11-10 で扱います。

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

この章の順序

1. 言明 — 挿入の形：$a_N^{-d}$ と係数を掛けた代表の和
2. なぜ係数が要るか — 混合：素朴な代表の相関が発散する理由
3. 輸送とその逆 — 基準の段での較正：挿入を正確に運び、基準の段で読む
4. 恒等の場と次数の低い場との混合の在りか：係数の空間の座標の中で
5. 切断について安定すること（あらまし）：有限次元の線形の写しと、縮む剰余
6. 言っていないこと
7. 本書の検討で見えていたこと
8. 読めていない所

01

## 言明 — 挿入の形

公開の言明は、挿入 $I_{N,p}(v,x;U)\in\mathbb{C}$ に、連続・ゲージ不変・有限の型紙への局所性の三つしか求めません（8-03 §03）源。挿入が具体的に何かは、構成の側に在ります。

評価書 §4.2 は次のように書きます評。重み $d$ の札 $v\in V_d$ と、$V_d$ の基底 $v_1,\dots,v_M$ について、紫外の収束の言明は $v$ に

$$I_{N,p}(v,x;U)=\sum_{j=1}^{M} c_j(N,p;v)\,L_{v_j}(x;U) \tag{1}$$

という**繰り込んだ格子の観測量**を対応させる。係数は $v$ について線形で、間隔の冪を含み、極限で発散してよい。収束の定理は、相関を収束させる繰り込みの係数 $c_j(N,p;v)$ が**在る**ことを言う。提出物は係数を格子の繰り込みの変換で書いた式を与えるが、和や積分で陽に表してはいない。

付録 A の `WilsonFamily.insertion` の項は、もう一段詳しく書きます評。十分細かい間隔では、繰り込みの輸送が、間隔 $a_N$ での係数から基準の間隔 $a_{r(d)}$（$r(d)\le N$、$r(d)$ は $d$ だけに依る）での係数への**可逆な線形写像**を与える。構成はその逆を $c$ に施し（輸送した係数が $c$ に等しくなるように）、座標ごとの尺度の因子を掛ける。結果の係数を $\tilde c_{N,p,j}$ と書くと

$$I_{N,p}\big((d,c),x;U\big)=a_N^{-d}\sum_{j=1}^{k}\tilde c_{N,p,j}\,P_{d,j}(x;U) \tag{2}$$

で、$P_{d,j}$ は 8-03 の格子の代表です。コードはこの写像を定義し、可逆であることを示しているが、逆の行列成分の陽な式は与えていない。

02

## なぜ係数が要るか — 混合

8-03 の面の例で考えます。$P=1-\frac{1}{m}\operatorname{Re}\operatorname{Tr}U_{\mu\nu}$ の期待値は、滑らかな配位の Taylor 展開 $a^4\cdot\frac12\|F\|^2$ だけでは決まりません。量子の揺らぎは間隔 $a$ の尺度で起き、その寄与は $P$ の期待値に、$a^4$ よりはるかに大きい量として入ります。弱結合では $\langle P\rangle$ は $g_0^2$ の程度で、$g_0^2\sim 1/(2b_0\log(1/a))$ なので、間隔について対数でしか小さくなりません推。すると $a^{-4}P$ の期待値は $a^{-4}/\log(1/a)$ の程度で発散します。これは次数 4 の場 $\operatorname{Tr}F^2$ が**恒等の場 $\mathbf{1}$（次数 0）と混ざる**ことの現れです。同じ理由で、一般に次数 $d$ の場は、同じ対称性を持つ次数の低い場と $a^{-(d-d')}$ の係数で混ざります（合成演算子の繰り込み。4-04）。

だから、素朴な代表の一次結合の係数を $a$ とともに調整して、混合を打ち消す必要があります。打ち消し方を陽に書くには、全ての次数の混合の係数を知らねばなりません。公開された構成は、それを陽に書く代わりに、**繰り込みの変換そのものに係数を運ばせる**方法を取ります。

03

## 輸送とその逆 — 基準の段での較正

**挿入つきの密度**。構成は、挿入を密度の一次の摂動として扱います。段 $m$ で、挿入の情報は組（`Coefficient`）で持たれます 源 （`YM/Source/Insertion.lean` 26〜30 行）：

- 局所の係数 $x \in \mathbb{C}^k$（8-03 の基底での座標。0 番目が恒等の場）、
- 正則な剰余（台つきの関数の列）、
- 大きい場の剰余（強制された活動に付く部分）。

挿入つきの密度は、段 $m$ の密度 $\rho_m$（9-06）に「$x_0$＋恒等以外の係数を局所の代表に置いたもの＋正則な剰余」を掛け、大きい場の部分を足したものです 源 （`density`、47〜49 行。説明文は「源 $\lambda$ について $\lambda^2 = 0$ で書いた式」）。恒等以外の係数は、段 $m$ の小さい場の閾 $t_m$（9-07）の冪で尺度を付けて置かれます（`exponentialEntry`、37〜39 行。尺度の写像 `scaled` は曲率の因子の数を冪に持つ。`YM/Labels/Reference.lean` 58 行）。

**輸送**。次数 $d$ の札、切断 $N$、体積 $p$ ごとに、構成は輸送の族 `TransferData` を持ちます 源 （`Insertion.lean` 73〜75 行）：各段 $m$ で入力 $v$ に段 $m$ の組を返す `entries m v` と、係数の空間の線形同型 `terminal`。条件 `Based`（89〜114 行）の主な欄は次のとおりです。

| 欄 | 中身 |
|---|---|
| `bare_coord`・`bare_germ` | 段 $N$ では局所の係数が入力 $v$ そのもので、剰余は 0 |
| `encode` | 段 $N$ の挿入つきの密度は、裸の Wilson の重みに初期の挿入を掛けたもの（$a_N^d$ の因子つき） |
| `unnormalized` | 段 $m$ の挿入つきの密度 $= b_m^d \cdot$（段 $m+1$ の挿入つきの密度を一段の核で押し出したもの）。**近似でなく等式** |
| `reads` | 基準の段 $r$ での局所の係数は $\mathrm{terminal}(v)$ |
| `unit_coord` | 恒等の場は恒等の場へ：段 $N$ の $a_N^d \mathbf{1}$ は段 $m$ で $a_m^d \mathbf{1}$ に写る |
| `back`・`front` | 隣り合う段の係数の大きさの、両向きの評価 |
| `linear` | 係数と剰余は $v$ について線形 |

つまり「段 $N$ で係数 $v$ を置き、正確な押し出しで段 $r$ まで運ぶと、段 $r$ の局所の係数が $\mathrm{terminal}(v)$ になる」という線形写像が `terminal` です。

**逆で較正する**。札 $v$ の挿入は、入力に $\mathrm{terminal}^{-1}(v)$ を使います 源 （`cylinder`、87 行。`Family.O`、`YM/Source/Construction.lean` 42 行）：

$$I_{N,p}(v) = \mathrm{initial}\big(\mathrm{terminal}_{N,p}^{-1}\, v\big), \qquad \mathrm{initial}(w) = a_N^{-d} \cdot P_d\big(\mathrm{scaled}_{t_N^{-1}}\, w\big) \tag{3}$$

（`initial`、77〜79 行）。すると基準の段での読みは $\mathrm{terminal}(\mathrm{terminal}^{-1} v) = v$ で、**札そのもの**になります（`normalized`、`Construction.lean` 65〜68 行。仮定は `Makes` と $r(d) \le N$ ） 源 。構成の証人の条件 `Makes.calibrated`（62 行）が、全ての $d, N, p$（$r(d) \le N$）でこの `Based` を求めます。

委員会は、これを全ての体積で共通の正規化の一つとして確かめています 評 （評価書 §11 の四つ目：「次数 $d$ の札 $v$ の正規化した係数は、基準の段 $r(d)$ で、切断と体積に依らず $v$ に等しい」）。字句は委員会の注釈つきの例 `LatticeAndScale-20261028.lean` の `insertion_has_the_prescribed_reference_value`（105 行）に在ります 源 。

(2) と (3) を見比べると、評価書の $\tilde{c}_{N,p}$ は $\mathrm{scaled}_{t_N^{-1}}\big(\mathrm{terminal}_{N,p}^{-1} c\big)$ に当たります 推 。「座標ごとの尺度の因子」は、段 $N$ の閾 $t_N$ の、曲率の因子の数を冪にしたものです。

04

## 恒等の場と次数の低い場との混合の在りか

係数の空間は、次数 $d$ 以下の札の基底（8-03 の `Frame`）の座標です。基底の 0 番目は恒等の場、ほかの基底の元の重みは $d$ 以下なので、**次数の低い場も同じ空間に入っています** 源 （`YM/Labels/Basis.lean` 50〜57 行）。そこで、§02 の混合は、段ごとの線形の写し（§05 の `leanings`）の行列の**非対角の成分**として現れる、と読めます 推 。

- `unit_coord` は恒等の場の列を固定します（恒等の場は恒等の場へ、段の尺度 $a^d$ の比だけを掛けて） 源 。
- 他の場から恒等の場へ流れる成分（$a^{-4}$ の型）は、第 0 座標として許されています 推 。§02 の $\mathrm{Tr}\, F^2$ と $\mathbf{1}$ の混合は、ここに入るはずです。
- 剰余の評価は、恒等の場の成分を除いた部分 `core`（`Reference.lean` 123 行）の大きさで書かれています 源 。

混合を三角の行列の形で書く言明や、恒等の場の成分を引き算する言明は、読んだ範囲には見当たりませんでした。逆写像 $\mathrm{terminal}^{-1}$ は、混合をまとめて打ち消す形で働いています。

05

## 切断について安定すること（あらまし）

(3) の係数は $N$ ごとに違います。相関が $N \to \infty$ で収束するには、輸送の写しが $N$ について安定する必要があります。構成の筋は次のとおりです 源 （詳しくは 11-10）。

1. 段ごとの写し（`Club`、`YM/FullVolume/Mark/Nursery.lean` 11〜16 行）：段 $m+1$ の係数から段 $m$ の係数への線形同型 `leanings` で、段 $m+1$ の剰余の Gram に依る。逆は一様に有界（`hail`）。剰余の写像 `flow` は差を半分に縮める（`trail`）。
2. 基準の段 $r$ で値を固定し、細かい側へ逆写像で運ぶ（`Gear.spends`、`Mark/Sages.lean` 66 行）：基準の段で Cauchy、各段の写しが $N$ について収束し、逆が有界なら、上の全ての段で Cauchy。
3. その結果、段 $m \geq r$ の係数と挿入の値が $N$ について Cauchy（`Branch.winds`・`stays`、`Gables/Master.lean` 44・50 行）。

写しは有限次元の線形写像で、剰余は上から縮みます。そのためこの部分にはコンパクト性が要りません。速さの言明は無く、収束は質的です 源 。

06

## 言っていないこと

- 係数 $\tilde{c}_{N,p,j}$ の陽な式（評価書が明記） 評 。
- 混合の行列が三角であること、恒等の場の成分を引き算の形で書くこと（読んだ範囲に無い）。
- 基準の段 $r(d)$ の選び方に係数や極限が依らないこと。
- 係数が摂動論の合成演算子の繰り込みと一致すること。

07

## 本書の検討で見えていたこと

本書の Lean には、合成演算子の繰り込みは**無い**です。

- 本書の観測量（面の平均、捩れた分配関数の比）は繰り込まずに使いました。粗い段の面の平均を段 $m_0$ で固定の値に合わせる鎖（第 28 部）では、観測量そのものに係数を掛ける必要が起きない作りでした。

- 本書はブロック写像の線形化と押し出しの共分散を扱いました（15-13）。そこでは線形化は場の揺らぎの運び方で、局所の観測量の係数の空間の上の写しとしては使っていません。
- 「合成場の繰り込みを、繰り込みの輸送の線形化の逆として与える」という見方は、本書に無かった発想です（14-05）。本書の面の平均の連続の極限を語る入口にもなります。

08

## 読めていない所

- 段ごとの線形同型の中身（`Gram.reads`、`Mark/Hinge.lean`）と、その行列の形。
- `terminal` が実際にどう作られるか（`Family.factory` の実例）。
- 基準の段 $r(d)$ の値。`Makes.stages` が $d+3 \le J(r(d))$ を求めること以外は読んでいません。
- 挿入つきの密度の大きい場の剰余（`marked`）が、一段の押し出しでどう組み直されるか。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 評 挿入は代表の一次結合で、係数は繰り込みの輸送の逆と尺度の因子から決まり、陽な式は無い | 係数の陽な式 |
| 源 輸送は一段の核の正確な押し出し、基準の段での読みは terminal$(v)$、挿入は terminal$^{-1}(v)$ を入力にする | terminal の具体形 |
| 源 基準の段で係数は札そのもの（切断・体積に依らない） | 基準の段の選び方への非依存 |
| 推 恒等の場との混合は、線形の写しの第 0 座標への成分として入る | 混合の行列の形（三角かどうか） |
| 源 段 $m \ge r$ の係数は $N$ について Cauchy | 収束の速さ |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 挿入の組・密度・輸送・較正 | 源 | `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0、版 3456e5e）の `YM/Source/Insertion.lean` 26〜49・73〜114 行、`YM/Source/Construction.lean` 24〜30・42・62・65〜68 行、`YM/Labels/Reference.lean` 58・123 行 |
| 係数の安定 | 源 | `YM/FullVolume/Mark/Nursery.lean` 11〜16 行、`YM/FullVolume/Mark/Sages.lean` 66 行、`YM/FullVolume/Gables/Master.lean` 44・50 行 |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 式 (1)(2)、陽な式が無いこと、共通の正規化 | 評 | 評価書 `yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）§4.2・§11・付録 A（`WilsonFamily.insertion`） |
| 共通の正規化（注釈つきの例） | 源 | 評価の側 `yang-mills-group/YM`・版 55ba9fc の `submissions/openai-20261028/docs/examples/LatticeAndScale-20261028.lean` 105 行 |
| 合成演算子の混合 | 典 | 導入は 4-04 |

**この章で使った語** — 繰り込んだ挿入、繰り込みの輸送、基準の段、較正、恒等の場、混合。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：8-05 相関関数と極限の順 — 繰り込んだ挿入の相関を、どの順の極限で連続へ運ぶか。

# 相関関数と極限の順

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§07 は本書の検討です。

**この章で分かること** — 公開の言明 `JointExistence` の中の収束の言明 `Converges` の形です。均した格子の相関 $C_{N,p}(v;f)$ を、(i) 体積 $p$ を止めて $N\to\infty$（選ばれた間隔の列の全体で）、(ii) そのあと体積の部分列で、の順に極限を取り、混ざった理論 $S^{\mathrm{mix}}$ を得ます。$S^{\mathrm{mix}}$ は成分 $S^{\xi}$ の確率の平均です。

**前提となる章** — 8-02（間隔と体積）、8-03（札と場）、8-04（繰り込んだ挿入）。分布と試験関数は 1-11、OS の公理は 4-10。

**先に言うこと** — 相関は全て、点が互いに異なる所でだけ定まっています。体積の極限は部分列で、極限が部分列の選び方に依らないことは示されていません。二つの極限の順を入れ替えてよいとも言っていません。相の分解と再構成の中身は第 12 部で扱います。

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

この章の順序

1. 均した格子の相関：式と、許される試験関数
2. 収束の言明 — 二つの極限とその順：`Converges` の三つの欄
3. 公開の定理の量化 — 部分列と一つの階層：$\forall p\ \exists q\ \exists T$
4. なぜ点の離れた試験関数か：特異点と接触項
5. 混ざった理論と成分：$S^{\mathrm{mix}}=\int S^{\xi}\,d\mu$
6. 言っていないこと
7. 本書の検討で見えていたこと
8. 読めていない所

01

## 均した格子の相関

札の並び $v = (v_1, \dots, v_n)$ と試験関数 $f$ について、格子の相関を

$$C_{N,p}(v; f) = a_N^{4n} \sum_{x_1, \dots, x_n \in \Lambda_{N,p}} f(a_N x_1, \dots, a_N x_n)\, \mathbb{E}_{\mu^{\mathrm{W}}_{N,p}}\Big[\prod_{j=1}^{n} I_{N,p}(v_j, x_j; U)\Big] \tag{1}$$

と定めます 源 （`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028` の `PublicWilson.lean`：`finiteMoment` 54〜57 行、`smear` 79〜81 行） 評 （評価書 §4.3 の式 (6)）。和は格子点の順序つきの $n$ 組の全てにわたり、$a_N^{4n}$ は格子の和を積分 $\int d^{4n}x$ に合わせる因子です。$I_{N,p}$ は 8-04 の繰り込んだ挿入、$\mu^{\mathrm{W}}_{N,p}$ は 8-01 の Wilson の測度です。

**許される試験関数** 源 （58〜77 行）：

- 開集合 $\{(x_1, \dots, x_n) : x_i \neq x_j \ (i \neq j)\}$（`separated n`）の上の、滑らかでコンパクトな台の複素関数（`SeparatedTest n`）。台は点の重なる所から離れています。
- 積の形 $f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$ に限りません。
- 体積 $p$ で使うときは、台が $\big((-L_p/2, L_p/2)^4\big)^n$ の内側に入ること（`suitable p`）。固定した $f$ は、十分大きい $p$ で必ずこれを満たします。

02

## 収束の言明 — 二つの極限とその順

体積の番号の狭義に増える列 $k \mapsto p_k$（`volumeOrder`）と、連続の側の相関 $S$ について、`Converges` は次の三つを求めます 源 （`PublicWilson.lean` 85〜90 行）。全ての $n$、札の並び $v$、試験関数 $f$ について

1. 十分大きい $k$ で、$f$ は体積 $p_k$ に収まる。
2. ある数列 $\mathrm{row}(p)$ が在って、$f$ が収まる**全ての**体積 $p$ で $C_{N,p}(v; f) \to \mathrm{row}(p)$（$N \to \infty$、**全ての** $N$ にわたって）。
3. $\mathrm{row}(p_k) \to \int f(x)\, S(v; x)\, dx$（$k \to \infty$）。

評価書の書き方では 評 （付録 A の `Properties.wilson`）

$$\lim_{k \to \infty} \lim_{N \to \infty} C_{N,p_k}(v; f) = \int_{(\mathbb{R}^4)^n} f(x)\, S^{\mathrm{mix}}(v; x)\, dx \tag{2}$$

です。**内側が切断、外側が体積**で、この順は固定です。

**内側の極限**。評価書の定理 4.1 は、体積を止めた紫外の極限 $S_p(v;f)=\lim_N C_{N,p}(v;f)$ が選ばれた間隔の列の全体に沿って在り、さらに核 $S_p(v;x)$ が点の重なり（周期 $L_p$ を法として）から離れた所で $C^\infty$ であることを述べます 評 。証明は、構成の繰り込みの正規化を使って十分細かい切断どうしを比べ、$N$ について Cauchy であることを示すもの、と評価書は要約しています。その筋は 11-10 で読みます。

**外側の極限**。評価書の定理 5.1 は、体積の極限が部分列で取れること、**一つの部分列が全ての相関に共通に効く**ことを述べます 評 。道具は Arzelà–Ascoli のコンパクト性で、点の離れた配位のコンパクト集合 $K$ ごとに、体積に一様な有界性と同程度連続性

$$\sup_{p\ge p_0(K)}\ \sup_{x\in K}|S_p(v;x)|\le M_K,\qquad |S_p(v;x)-S_p(v;y)|\le \omega_K(|x-y|) \tag{3}$$

を示します（評価書 §5 の式 (11)）。評価書は、この二つの評価が鏡映正値性・チェス盤の評価・転送作用素の表示・Cauchy の評価という一般の道具から出ること、構成に固有の入力は繰り込んだ観測量の、間隔に一様な制御であることを書いています 評 。中身は 12-04・12-05 です。

委員会の注釈つきの例は、この言明が「点の重なりでの点ごとの主張をしない」「紫外と赤外の極限を入れ替えられるとは言わない」ことを明記しています 源 （評価の側 `yang-mills-group/YM`・版 55ba9fc の `submissions/openai-20261028/docs/examples/LeadingTrace-20261028.lean` 113〜116 行）。

03

## 公開の定理の量化 — 部分列と一つの階層

公開の定理は次の形です 源 （`ChallengeSpec.lean` 186〜188 行）。

```
∀ g（単純）, ∃ C : WilsonFamily g, WilsonRegularity C ∧
  ∀ p（狭義に増える体積の列）, ∃ q（狭義に増える）,
    ∃ T : Hierarchy C, T.Properties (p ∘ q)
```

読み方を三点に分けます。

- **族が先**。格子の族 $C$（間隔・体積・結合・挿入）は、体積の列を聞かれる前に一つ決まります。
- **どの体積の列にも部分列**。求めた体積の列 $p$ ごとに、さらに部分列 $q$ を取れば、$p\circ q$ に沿って (2) が成り立ちます。これはコンパクト性の言明の形です。

- **一つの階層**。その部分列の上で、一つの階層 $T$（場・相関・再構成した理論・OPE・跡の場）が、四つの性質 — 収束 `wilson`、再構成 `reconstruction`、OPE `ope`、自由でないこと `nonfree` — を同時に満たします（`Properties`、177〜181 行）。

$T$ は $p$ ごとに選ばれ、違う $p$ で同じ $T$ になるとは言っていません。評価書は、極限の相関が選んだ部分列に依るかどうかは未解決だと書き、Jaffe–Witten の問題文が、コンパクト性による部分列の極限だけでは（極限の性質を示す議論が加わらない限り）足りないとしていることに触れています 評 （評価書 §5）。

構成の定理 `constructed` の結論は公開の言明より多くを含み、その中に言明 `FullVolume.PositionsUV C Sequence.full` が在ります 源 （`Construction.lean` 24 行）。定義（`YM/FullVolume/Profiles.lean` 25〜36 行）は、体積 $p$ ごとに、点の離れた所で滑らかな核が在って、切断の列の全体に沿って均した相関がその核に収束し、差分をとった相関も核の導関数に収束する、という形です 源 （読んだのは定義の形まで）。公開の言明でも切断は列の全体で、体積だけが部分列です。核と差分つきの強い形は構成の定理にだけ在ります。

04

## なぜ点の離れた試験関数か

局所場の相関は、点が近づくと特異になります。たとえば次数 4 の場の二点関数は、素朴には $|x-y|^{-8}$ の大きさで、さらに対数の補正が付きます（13-02）。これは $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ の上で局所可積分でないので、点の重なりを含む試験関数で均すには、重なりの上に台を持つ項（接触項）を決める必要があります。接触項は理論から一意には決まりません（繰り込みの任意性。4-04）。

公開された構成は、収束の言明をはじめから点の離れた試験関数に限ることで、この問題を収束の言明から外しています。点の重なりまで延ばした分布が**在る**ことは別の言明（接触項の延長、存在だけ）として構成の定理に入っています（13-04）。

委員会の OS の公理の独立の検査は、別の試験関数の空間 — 全ての対角線の上で全ての階の微分が消える Schwartz の関数 — を使います 評 （評価書 §10 の式 (21)）。これは点の離れたコンパクトな台の関数を含みますが、対角線の上の接触項は見えません。

05

## 混ざった理論と成分

(2) の極限 $S^{\mathrm{mix}}$ は「混ざった」理論と呼ばれます。遠く離した二組の相関が積に分かれる性質（群がり、clustering）が示されていないからです 評 （評価書 §6）。群がりが無いと、OS

の再構成から出る理論の真空が一つとは限りません。

構成はこれを**相の分解**で回ります 評 （評価書 §6.1、付録 A の `Hierarchy.Character`）。$S^{\mathrm{mix}}$ から作った OS の Hilbert 空間で、エネルギー零の部分空間 $H_0$ に圧縮した作用素の生成する C*-環が可換であることを示し、その Gelfand のスペクトル $X$（コンパクトな距離空間）を相の空間とします。真空の状態を表す $X$ の上の確率測度 $\mu$（源の `phaseMeasure`。評価書は $\nu$ と書きます） について

$$S^{\mathrm{mix}}(v;x) = \int_X S^{\xi}(v;x)\, d\mu(\xi) \qquad (x \text{ は点の離れた配位}) \tag{4}$$

です。公開の言明では、相関は `correlation none`（$S^{\mathrm{mix}}$）と `correlation (some ξ)`（$S^{\xi}$）の二通りで、(4) は再構成の欄 `mixture` です 源 （`ChallengeSpec.lean` 41・133〜134 行）。同じ欄の集まりに、$\mu$ が確率測度（`normalized`）で台が全体（`fullSupport`）、$\xi \mapsto S^{\xi}(v;x)$ が連続（`characterContinuity`）が入っています（124〜125・131〜132 行）。

各成分 $S^{\xi}$ は群がりを含む OS の公理の変種を満たし、一つの相 $\xi^{*}$（`selected`）を選んで Wightman の理論を再構成します。中身は 12-07・12-08 です。

**極限が零でないこと**。委員会は、固定した点の離れた試験関数 $f$ について、繰り込んだ跡の場の二点の格子の相関が、同じ極限の順で零でない極限を持つことを確かめています 評 （評価書 §11 の式 (23)）：

$$\lim_{k\to\infty}\ \lim_{N\to\infty} \left| C_{N,p(q(k))}(\Theta,\Theta;f) \right|^{1/8} = \left| S_2^{\mathrm{mix}}(\Theta,\Theta;f) \right|^{1/8} > 0 \tag{5}$$

委員会の例は、これがスペクトルの質量でも質量ギャップでも収束の速さでもなく、試験関数とその正規化が証人に依り得るので相に依らない固有の尺度でもない、と書いています（`LatticeAndScale-20261028.lean` 136〜157 行）。

06

## 言っていないこと

- 間隔の列の取り方への普遍性 評 。
- 体積の極限の一意性（部分列の選び方に依らないこと）。評価書 §8 の開いた問いの一つ目 評 （16-02）。
- $S^{\mathrm{mix}}$ の群がり。成分どうしが等しいこと。各成分が元の周期の体積の状態の部分列の極限であること 源 （`LeadingTrace-20261028.lean` 151〜153 行）。
- 二つの極限の順の入れ替え。点の重なりでの値。

- 連続の確率測度（相関はあるが、場の配位の上の測度は作られていない。評価書 §8 の二つ目）[評]。

07

## 本書の検討で見えていたこと

本書の第三巻の鎖は、粗い段の**ブロック変数の分布**（押し出しの測度）を対象にしました（28-01）。局所場の点の離れた相関ではありません。

- 共通する所：物理の大きさを固定した箱で、切断を外す極限を先に考え、極限はコンパクト性による部分列で取る、という形。
- 違う所：本書の含意は、部分列の極限の存在をコンパクト性だけから出し、性質を仮定の欄で運びました。公開された構成は、体積を止めた紫外の極限を**部分列でなく列の全体で**出しています（その源は 11-10 の「錨と縮み」による一意性）。
- 本書には相の分解に当たるものは無く、本書の非退化の条件（面の平均の期待値を固定の値に合わせる）は、(5) の零でない極限と同じ役を、別の観測量で担う設計でした[推]。

08

## 読めていない所

- `FullVolume.PositionsUV` の中の差分の作り方（`squall`・`Cluster`・`Meets`）と、その証明。
- (3) の $p_0(K)$ がどう決まるか。体積の下限が $K$ に依る理由の細部。
- 公開の `Converges` を構成から出す `wilsonLimit`（`HierarchyBridge.lean` 44〜56 行）の先の `fromWilson` の証明。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| [源] 相関は (1) の形で、点の離れた滑らかなコンパクト台の試験関数（積の形に限らない）で均す | 点の重なりを含む試験関数での収束 |
| [源] 極限の順は「体積を止めて切断を全列で外す → 体積の部分列」 | 順の入れ替え |
| [源] 族は先に一つ決まり、どの体積の列にも部分列と一つの階層が在る | 階層が部分列に依らないこと |
| [源] $S^{\mathrm{mix}} = \int S^{\xi} d\mu$、$\mu$ は台が全体の確率測度 | $S^{\mathrm{mix}}$ の群がり、成分の一致 |

| 言えている | 言えていない |
| --- | --- |
| 評 跡の場の二点の格子の相関は零でない極限を持つ (5) | (5) が質量や尺度の固有の値であること |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
| --- | --- | --- |
| 相関・試験関数・収束の言明・公開の定理 | 源 | `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0、版 3456e5e）の `PublicWilson.lean` 54〜90 行、`ChallengeSpec.lean` 41・117〜134・177〜188 行、`Construction.lean` 15〜31 行、`HierarchyBridge.lean` 44〜56 行 |
| 定理 4.1・5.1、式 (6)(11)(23)、相の分解、開いた問い | 評 | 評価書 `yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）§4.3・§5・§6・§6.1・§8・§10・§11・付録 A |
| 委員会の注釈つきの例 | 源 | 評価の側の `submissions/openai-20261028/docs/examples/LeadingTrace-20261028.lean` 113〜116・151〜153 行、`submissions/openai-20261028/docs/examples/LatticeAndScale-20261028.lean` 136〜157 行 |
| Jaffe–Witten の問題文 | 典 | A. Jaffe, E. Witten（Clay 数学研究所の公式の問題文、2000）。0-03 |

**この章で使った語** — 均した相関、点の離れた試験関数、極限の順、部分列、混ざった理論、相（成分）、群がり。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：9-01 ブロックの核 — 第 9 部では、ここで「繰り込みの一段」と呼んだものの中身を読みます。

# ブロックの核 — 一段は写像でなく確率の核

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討、§07 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 公開された構成で「繰り込みの一段」がどういう数学の対象として定義されているか。細かい配位 $U$ から粗い配位 $V$ への確率の核 $T_\beta(U, V)$ の式、罰の係数 $c_{\mathrm{pen}}$ の役割、核に入る $\beta$ が細かい側の段の値であること、そしてこれらの宣言がどの目標に使われているか。

**前提となる章** — 8-01 格子・Wilson の測度・規約、8-02 段取り、7-05 繰り込み群の段の列。比べる相手として 19-04 ブロック写像と繰り込みの一段。

**先に言うこと** — 公開された構成の結果は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」の水準で書きます。本書が確かめたのは、源の定義と言明の形を読んだことまでです。核の中に入る予測子・ゲージ固定・重みの中身は 9-02〜9-04 で読みます。核が鏡映について正値型かどうかは、源の言明に見当たらず、本書も調べていません。

この章の順序

1. **言明 — 一段は確率の核**：`StepData.density` と `push`、核であることの定理
2. **核の式を三つの因子で読む**：選び方の確率・予測子・ガウス型の雑音
3. **罰の係数**：任意の正の数で、主定理はそれごとに量化する
4. **核の β は細かい側の段の β**：一段の等式と分配関数の保存
5. **どの目標に入っているか**：宣言と記録の表
6. **本書の検討で見えていたこと**：決定的なブロック写像の押し出しとの違い
7. **読めていない所**

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。源はリポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）、評価書は `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）です。公開された構成の定理は源 で言明の字句を、「証明されている」という水準は評 で書きます。記号：一ループの傾きを $s = 11C_g/(24\pi^2)$（評価書では一ループの係数の二倍として書かれる量、源の `slopeConstant`）と書きます。

01

## 言明 — 一段は確率の核

公開された構成は、格子間隔 $a_N = 1/D_N$ の Wilson の測度から出発し、ブロック変換を $N$ 回施して間隔 1 の段まで粗くします（段の番号は 8-02：$m = N$ が一番細かく、$m = 0$ が一番粗い）。この「一段」は、細かい配位 $U$ から粗い配位 $V$ を一つ決める写像ではありません。**粗い配位を確率で引く核**として定義されています源 。

記号を置きます。ゲージ群 $G \subset U(d_G)$ の元 $u$ に対して

$$\mathrm{price}(u) = 1 - \frac{\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,u}{d_G}, \qquad \mathrm{chord}(u) = \frac{\|u - 1\|_F}{\sqrt{d_G}}, \qquad \mathrm{price}(u) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{chord}(u)^2 \tag{1}$$

と書きます（$\|\cdot\|_F$ は Frobenius のノルム。最後の等式は `YM/Gauge/MatrixGroup.lean` の `chord_price`、117 行）源 。price は Wilson の作用の一枚の面の項 $1 - \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U_p/d_G$ と同じ形の関数で、$u = 1$ で 0、群の上で非負です。SU(2) では $d_G = 2$ で、本書の $1 - \mathrm{Re}\,U_p$（19-01）と一致します初 。

一段の核は、源の `YM/RG/Block.lean` の `StepData.density`（71 行）で次の形に定義されています源 。

$$T_\beta(U,V) = \sum_{\tau} P(\tau \mid U) \prod_{b} \frac{1}{Z_\beta} \exp\Big(-c_{\mathrm{pen}}\,\beta\ \mathrm{price}\big(V_b\,Q_b(U,\tau)^{-1}\big)\Big), \qquad Z_\beta = \int_G e^{-c_{\mathrm{pen}}\beta\,\mathrm{price}(v)}\,dv \tag{2}$$

和の $\tau$ は有限個の離散の選び（9-03・9-04 で読む「枠の札」と「道の札」の組）、$P(\tau \mid U)$ はその選びの確率、積の $b$ は粗い格子の正の向きのリンク全体、$Q_b(U,\tau) \in G$ は細かい配位から作った粗いリンクの**予測子**（9-04）、$h$ は確率に正規化した Haar 測度です。核による関数の運び（押し出し）は

$$(\mathcal{T}_\beta F)(V) = \int T_\beta(U,V)\,F(U) \prod_{\ell} dh(U_\ell) \tag{3}$$

で、源の名は `StepData.push`（同 77 行）です源。出力は「粗い格子の Haar の積に対する密度」として読む約束です（説明文 74〜76 行）。

核であることは定理として言われています。`StepData.isKernel`（同 203 行）は、9-03・9-04 の三つの義務 `Patch.Branches`（枠の最小元の一意性・予測子の一意性・大きい場で引く札が空でないこと）を仮定して、全ての $\beta$ で次の五つを結論します源：$T_\beta \ge 0$、$(U,V)$ について可測、上に有界、各 $U$ で $V$ について可積分、$\int T_\beta(U,V)\,dV = 1$。三つの義務は、罰の係数を固定するごとに全てのパッチで満たせることが別に示されています（§03 の `Axial.viable`）源。

02

## 核の式を三つの因子で読む

式 (2) は、粗い配位を次の順で引く手続きを確率の言葉で書いたものです推。

1. **選びを引く**。細かい配位 $U$ を見て、離散の選び $\tau$ を確率 $P(\tau \mid U)$ で引きます。源の `likelihood`（49 行）は、粗い点ごとの枠の札の確率 `frameMass` と、粗いリンクごとの道の札の確率 `predictorMass` の積です。小さい場では札は使われず、一様な確率が形式的に置かれます（9-03・9-04）。
2. **予測子を作る**。$U$ と $\tau$ から、粗いリンクごとに群の元 $Q_b(U,\tau)$ を一つ作ります（`prediction`、44 行）。
3. **雑音を足す**。粗いリンク $V_b$ を、リンクごとに独立に、$Q_b$ を中心とする重み $e^{-c_{\mathrm{pen}}\beta\,\mathrm{price}(V_bQ_b^{-1})}$ で引きます（`noise`、68 行）。

三つ目の因子は、各 $Q$ について $V$ の確率測度です。Haar 測度の右不変性で $\int Z_\beta^{-1} e^{-c_{\mathrm{pen}}\beta\,\mathrm{price}(vQ^{-1})}\,dh(v) = 1$ となるからです（`noise_mass`、146 行）源。一つ目の因子の和が 1 であること（`chosen`、123 行）と合わせて、$\int T\,dV = 1$ が出ます初。

雑音の幅を見ておきます。$V_bQ_b^{-1} = e^X$（$X$ は Lie 環の小さな元）と書くと、評価書の内積 $\langle X,Y\rangle = -\operatorname{Re}\operatorname{tr}(XY)/d_G$（評価書 §3）で $\mathrm{price}(e^X) = \tfrac12\langle X,X\rangle + O(|X|^3)$ です初。だから重みはおよそ $\exp(-\tfrac12 c_{\mathrm{pen}}\beta\langle X,X\rangle)$ で、$V_b$ は $Q_b$ のまわりに幅 $(c_{\mathrm{pen}}\beta)^{-1/2}$ ほどで散らばります推。$\beta$ が大きい弱結合の段では、核は予測子の近くに強く集まりますが、一点には潰れません。

**決定的な写像（比べる相手）**

粗い配位を $V = B(U)$ と一つに決めます。押し出しは $\int F(B(U))\, d\mu(U)$ で、核で書けば $V$ についての点測度 $\delta_{B(U)}$ です。

**確率の核（公開された構成）**

$V$ は予測子のまわりで幅 $(c_{\mathrm{pen}}\beta)^{-1/2}$ の揺らぎを持ちます。$\delta$ 拘束は置きません。`Block.lean` の説明文も、核の外で密度による割り算をしないと述べています。

03

## 罰の係数 — 任意の正の数で、主定理はそれごとに量化する

式 (2) の $c_{\mathrm{pen}}$ は、源の `KernelChoices.penalty`（`YM/RG/Patch.lean` 37〜45 行）です。`KernelChoices` は、罰の係数と三つの閾（枠の閾 `frame_cut`、予測子の閾 `predictor_cut`、軸ゲージの倍率 `axial_factor`）を正の数として束ねた構造で、説明文は「一度だけ選ぶ」と書いています源。本書は罰の係数を $c_{\mathrm{pen}}$ と書きます。

罰の係数は任意の正の数に取れます。`Axial.viable`（`YM/Branch/Pick.lean` 137 行）は、任意の $c_{\mathrm{pen}} > 0$（源の引数の名は $\kappa$）に対し、`penalty` がその値で、枠と予測子の閾がゲージ群だけで決まり、軸ゲージの倍率が 16 の組が在って、**全てのパッチ**（辺 $L$ と平滑の指数 $J$ に依らない）で三つの義務 `Branches` が成り立つ、と言います源。

構成の定理 `YangMills.constructed`（`Construction.lean` 15〜16 行）は $b > 0$ を引数に取り、罰の係数がちょうど $b$ の族を作ります。つまり主な結論は罰の係数ごとに量化されています源。公開の定理 `YangMills.jointExistence`（`Solution.lean` 4 行）は、この $b$ に 1 を入れて使っています源。説明文には「罰の係数は族を選ぶ前に固定する」とあり（`Construction.lean` 13 行）、段ごとの定数は罰の係数を決めた後に選ばれます源。

罰の係数は核の外でも効きます。一段の自由場の精度の行列は $K + c_{\mathrm{pen}} Q^{\mathsf{T}} Q$ と定義されていて（`YM/Push/FREE_RESOLVENT/Flat.lean` 80〜81 行 `baseMatrix`）、木のゲージの切り口での精度の下界は $\min(a, c_{\mathrm{pen}})/(1 + \beta_L + \gamma_L)$ の形です（同 189〜198 行 `treeFare`・`tree_gap`）源。罰の係数が小さいと、この下界と伝播関数の減衰の定数がそれに比例して悪くなります推。小さい場の一段の詳しい形は 11-09 で読みます。$c_{\mathrm{pen}} \to 0$ や $c_{\mathrm{pen}} \to \infty$ で一様な評価は、源の言明に見当たりません源。

04

### 核の β は細かい側の段の β

式 (2) の $\beta$ にどの値を入れるかは、一段の等式の側で決まっています。`YM/RG/History.lean` の `History.Transfer`（223〜227 行）は、段 $m$ の密度の表示 $\rho_m$（9-06）について

$$\rho_m = \mathcal{T}_{\beta_{m+1}}\,\rho_{m+1}, \qquad \left|\beta_{m+1} - \beta_m - s\log b_m\right| \le \mathrm{drift}_{m+1} \tag{4}$$

を課します源。核に入るのは**細かい側の段**の結合 $\beta_{m+1} = \beta(N, p, m+1)$ です（225 行）。ここで $b_m$ は段 $m$ の辺、$s = 11C_g/(24\pi^2)$ は 10-02 の傾き、drift は段の定数です。

この選びから、二つのことが読めます。

- 核は段ごとに違います。$\beta(N, p, m+1)$ は切断 $N$ と体積の番号 $p$ に依るので（第 10 部）、同じ段 $m$ の一段でも $N$ が変われば核が変わります推。「押し出しの測度」は、$N$ とともに写像そのものが変わる対象です（11-10）。
- 分配関数は保たれます。核の全質量が 1 なので $\int \mathcal{T}_\beta F = \int F$ です（`YM/RG/Push.lean` 37 行 `push_integral`）源。これを段 $N$ から繰り返すと、`History.partition_eq`（`History.lean` 242 行）は、どの段の表示を積分しても段 $N$ の Wilson の分配関数 $Z_N(\beta_N)$ に等しい、と言います源。

一段の等式 (4) の第一式は**等式**で、近似ではありません源。測度は一段で変わらず、表示（9-06）の側が書き直されます。

05

### どの目標に入っているか

源の `verification/declaration-usage.tsv` は、検証の記録が挙げる 17 の見出しの定理のどれかから届く宣言を `used`、届かないものを `outside` と記録しています。`used` は「公開の定理が使う」という意味ではありません（6-02）源。

| 宣言（在りか） | 中身 | 記録 | 目標との関係 |
|---|---|---|---|
| `StepData.density`（`RG/Block.lean`:71） | 核 (2) | used | 構成の定理の結論 `C.Makes` の欄 `History.Selected` の一段の等式に入る源 |
| `StepData.isKernel`（:203） | 確率の核であること | used | 見出しの定理のどれかから届く。存在の道の鎖は辿っていない |
| `Axial.viable`（`Branch/Pick.lean`:137） | 任意の罰の係数で義務が立つ | used | 同上 |

| 宣言（在りか） | 中身 | 記録 | 目標との関係 |
|---|---|---|---|
| `History.Transfer` ・ `Selected`（`RG/History.lean`:223, 234） | 一段の等式と段の列 | used | `Family.Makes` の欄 `wilson`（`Source/Construction.lean`:45）。構成の定理の結論 源 |
| `History.partition_eq`（:242） | 分配関数の保存 | used | 見出しの定理のどれかから届く |

公開の定理 `JointExistence` の言明には、核も段の列も現れません（評価書の用語集、23 頁） 評 。核は、公開の定理の**証人**を作る構成の内側の対象です。

06

## 本書の検討で見えていたこと

本書の第三巻と第 15 部の一段は、**決定的な**ブロック写像 $B$ です（19-04）。道の積の重みつきの平均を球へ引き戻して粗いリンクを一つ決め、測度は押し出し $B_*\mu$ で運びます（19-04 §押し出し）。核の言葉では、本書の一段は $V$ についての点測度で、公開された構成の一段は予測子のまわりの幅 $(c_{\mathrm{pen}}\beta)^{-1/2}$ の揺らぎです 推 。

本書の検討は、ブロックの設計を二つ持っていました。一つは辺 2・重なる重み $(1/8, 3/4, 1/8)$ の今の設計（28-05）、もう一つは辺 3・粗い点を中心に置くブロック・一様な重みの設計です。後者について、SU(2) の Wilson の測度を $m$ 段押し出した測度が、格子点の面の鏡映について鏡映正値性を持つこと（二枚の粗い格子点の面の間に厳に入る粗いリンクだけに依る有界可測な関数について）は Lean で機械検査されています Lean ：`Block3.rp_push` ・ `Block3.rp_push_prob`（格子の辺が偶数の周期格子、任意の実数 $\beta$）。これは既知の型の結果（鏡映と可換な局所の写像は押し出しで鏡映正値性を保つ）の形式化です。

この議論は、決定的な写像が鏡映と可換であることと、写像の局所性を使います。公開された構成の一段は核なので、同じ議論はそのままでは移りません 推 。核が鏡映について正値型であるか、という別の問いが立ちます。公開された構成の側でも、一段の核の鏡映正値性の言明は、読んだ範囲には見当たりません 源 。鏡映正値性は元の Wilson の測度について言われています（12-01）。設計の比べは 14-02 にまとめます。

07

## 読めていない所

- 核の鏡映正値性：一段の核が鏡映について正値型かどうかの言明を、リポジトリ全体では検索していません（読んだのは `YM/RG/` と `YM/Branch/` の範囲）。
- `isKernel`・`Axial.viable` が公開の定理の存在の道に載るかは、鎖を辿っていません。記録の上で見出しの定理のどれか（`SharpGram.habitat` が証人）から届く、までです。
- 罰の係数を動かしたときに段の定数がどう変わるか（定数は罰の係数を固定した後に選ばれる、という説明文の読みまで）。
- 核の $\beta$ を細かい側に取る理由の説明は源に見当たらず、§04 の読みは定義からの推し量りです。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 一段は式 (2) の確率の核として定義され、押し出しは式 (3)（`StepData.density`・`push`） | 核を決定的な写像の極限として扱う言明（源に無い） |
| 源 三つの義務のもとで核は確率の核（`isKernel`）、義務は任意の罰の係数で全てのパッチに立つ（`Axial.viable`） | 罰の係数について一様な評価 |
| 源 構成の定理は罰の係数 $b > 0$ ごとに量化され、公開の定理は $b = 1$ を使う | 罰の係数に依らない形の結論 |
| 源 核に入る $\beta$ は細かい側の段の値（`History.lean`:225） | その選びの理由（源の説明文に無い） |
| 源 一段で分配関数が保たれる（`push_integral`・`partition_eq`） | 一段の核の鏡映正値性（言明が見当たらない） |
| Lean 本書の辺 3・中心の設計で、押し出した測度の格子点の面の鏡映正値性（`Block3.rp_push`） | 同じ形の主張を確率の核について（本書は調べていない） |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 核・押し出し・核であること | 源 | `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）`YM/RG/Block.lean`：`StepData.density` 71 行、`push` 77 行、`noise_mass` 146 行、`isKernel` 203 行 |
| price と chord | 源 | 同 `YM/Gauge/MatrixGroup.lean` 112・115・117 行 |
| 罰の係数と三つの閾、義務 | 源 | 同 `YM/RG/Patch.lean` 37〜45・182〜185 行、`YM/Branch/Pick.lean` 137 行 `Axial.viable` |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 罰の係数の量化 | 源 | 同 `Construction.lean` 13〜16 行 `YangMills.constructed`、`Solution.lean` 4〜6 行 |
| 精度の行列と木の切り口の下界 | 源 | 同 `YM/Push/FREE_RESOLVENT/Flat.lean` 80〜81・189〜198 行 |
| 一段の等式・分配関数 | 源 | 同 `YM/RG/History.lean` 223〜227・242 行、`YM/RG/Push.lean` 37 行 |
| 依存の記録 | 源 | 同 `verification/declaration-usage.tsv`、`verification/Usage.lean` |
| 規約と用語集 | 評 | `yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）§3、付録 A |
| 本書の決定的なブロック写像と押し出し | Lean | 19-04 の出典の表 |
| 辺 3・中心の設計の鏡映正値性 | Lean | 本書の Lean の束（`Block3.rp_push`・`Block3.rp_push_prob`、部品 `Block3.down_refl`・`down_local`）。Lean の核の検査を通った束 |

**この章で使った語** — ブロックの核、確率の核、押し出し、予測子、罰の係数、price、chord、一段の等式、分配関数の保存、見出しの定理、used と outside。意味は A-02 用語集にあります。

次に読む章：9-02 パッチと重み — 予測子を作るときに使う、粗い点の中心に置いたパッチと、一様分布の畳み込みの重みを読みます。

# パッチと重み — 中心に置いたブロックと一様分布の畳み込み

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討、§07 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 一段の核（9-01）の中で使う、粗い点ごとの細かい点の箱（パッチ）と、その上の重み $w_J$ の定義。粗い点がブロックの中心に座ること、重みが一様分布の $J$ 回の畳み込みであること、支えが隣のブロックと大きく重なること、$J$ が段とともに無限大へ育つこと。

**前提となる章** — 9-01 ブロックの核、8-02 段取り。確率の畳み込みは 1-08。

**先に言うこと** — 重みとパッチは定義で、ここに定理はほとんどありません。重みの選び（なぜ畳み込みか、なぜ $J \geq 4$ か）の理由は源の説明文に書かれておらず、§04 の読みは推し量りを含みます。

この章の順序

1. **言明 — パッチと重みの定義**：`Patch`、`radius`、`weight`
2. **粗い点はブロックの中心に座る**：奇数の辺と埋め込み $x \mapsto Lx$
3. **一様分布の畳み込み**：一軸ごとの形と、$L = 3,\ J = 4$ の例
4. **支えの半径と重なり**：$J(L-1)/2$ と隣の粗い点までの距離 $L$
5. **J は段とともに育つ**：`Calendar.op` と `Fits`
6. **本書の検討で見えていたこと**：辺 2・横のずらしの重み、辺 3・中心・一様
7. **読めていない所**

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。源はリポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）、評価書は `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）です。公開された構成の定理は源 で言明の字句を、「証明されている」という水準は評 で書きます。

01

## 言明 — パッチと重みの定義

一段の形は、源の `YM/RG/Patch.lean` の構造 `Patch`（29〜34 行）で決まります。中身は四つです源 。

- 辺 $L$：奇数で $L \geq 3$（`odd_side`・`coarse`）。粗い格子の間隔は細かい格子の間隔の $L$ 倍で、細かいトーラスの辺は粗いトーラスの辺の $L$ 倍です（`StepData.sizes`）。
- 平滑の指数 $J$：$J \geq 4$（`order_cut`）。
- パッチの半径 $R = (J+3)L$（`radius`、51 行）。パッチは細かい格子の、原点を中心とする一辺 $2R+1$ の箱 $\{z \in \mathbb{Z}^4 : |z|_\infty \leq R\}$ です（`sites`、53 行）。
- 重み $w_J$（`weight`、87 行）：パッチの点の上の確率。

重みの定義を式で書きます。小さな箱 $C = \{z : |z|_\infty \leq (L-1)/2\}$（源の `Small` は `box (L/2)` で、$L$ が奇数なので半径は $(L-1)/2$）をとり、$C$ の点の $J$ 個の組 $(z_1, \dots, z_J)$ を一様に引いたときの和 $z_1 + \cdots + z_J$ の分布を $w_J$ とします源 。

$$w_J(x) = \frac{\#\{(z_1,\dots,z_J) \in C^J : z_1 + \cdots + z_J = x\}}{|C|^J} = \big(u_C^{*J}\big)(x), \qquad u_C = \frac{1}{|C|}\mathbf{1}_C. \tag{1}$$

$u_C$ は $C$ の上の一様分布、$*$ は畳み込みです。源は `weight_sum`（90 行）で $\sum_x w_J(x) = 1$ を、`weight_nonneg`（96 行）で非負を示しています源 。和 $z_1 + \cdots + z_J$ は半径 $J(L-1)/2$ の箱に入り、それはパッチ（半径 $(J+3)L$）の中なので、重みはパッチの点の上で定義されます（`roll_sites`、63 行）源 。

説明文は、パッチの形を「一つの形で、辺の比を決める前の解析の約束にも使う」と書いています（28 行）源 。

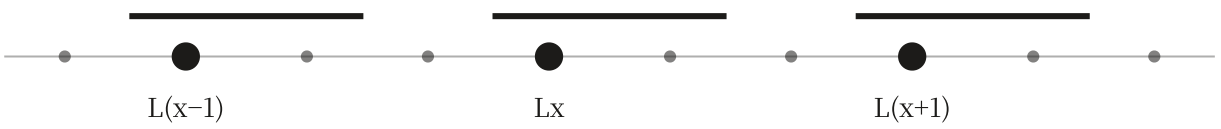
02

## 粗い点はブロックの中心に座る

粗い点 $x$ は細かい点 $Lx$ に写されます。源の `Ratio.embed`（`YM/Lattice/Subdivision.lean` 29 行）は、粗い点を中心に取った代表 `lift x` に $L$ を掛け、細かいトーラスに巻き戻したものです源。そしてパッチは、細かい配位を点 $Lx$ から見た配位（`expandAt`、`YM/Lattice/Path.lean` 224 行）の上で、原点を中心に置かれます（`StepData.frames`、`YM/RG/Block.lean` 36〜37 行）源。

$L$ が奇数なので、細かい格子は粗い点を中心とする一辺 $L$ の立方体 $Lx + C$ に、重なりも隙間もなく分かれます初。粗い点はそれぞれ自分の立方体の真ん中に座ります。辺が偶数だとこの形の分け方はできず、粗い点はブロックの角か、細かい点のない位置に来ます。

図 1　一軸に沿って見た、辺 $L = 3$ のブロック（太い区間）と粗い点（●）。粗い点 $Lx$ は自分のブロックの中心に座る。




図は一軸の断面です。四次元では $L^4$ 個の細かい点が一つのブロックになります。

03

## 一様分布の畳み込み

$C$ は四つの軸の区間 $\{-(L-1)/2, \dots, (L-1)/2\}$ の直積なので、$u_C$ は一軸の一様分布の積で、畳み込みも軸ごとに分かれます初。

$$w_J(x) = \prod_{i=1}^{4} v_J(x_i), \qquad v_J = \left(\tfrac{1}{L}\mathbf{1}_{\{-(L-1)/2,\dots,(L-1)/2\}}\right)^{*J}. \tag{2}$$

例として $L = 3,\ J = 4$ をとります。一軸の分布は $\{-1, 0, 1\}$ の一様分布の 4 回の畳み込みで、

$$v_4(-4), \dots, v_4(4) = \frac{1,\ 4,\ 10,\ 16,\ 19,\ 16,\ 10,\ 4,\ 1}{81} \tag{3}$$

です初。中心で一番大きく、端に向かって減る山の形です。一軸の分散は $J(L^2-1)/12$ で、$J$ が大きいと $v_J$ は中心極限の定理で離散のガウス型に近づきます初。

重みは超立方の群（軸の入れ替えと符号の反転）で不変です。源の `weight_invariant`（`YM/Branch/Transport.lean` 135 行）は、符号つきの置換 $s$ について $w_J(s \cdot x) = w_J(x)$ を

示しています源。一様分布 $u_C$ が不変なので、その畳み込みも不変、という形の証明です。この不変性は、一段の核の対称性（9-05）の出どころの一つです。

重みが使われるのは予測子の側です（9-04）源。

- 重みつきの平均：粗いリンクの予測子は、パッチの点 $z$ ごとの輸送 $Y(z)$ の $w_J$ による平均から作ります（`bondCost`、`Patch.lean` 159 行）。
- 一本を引く確率：平均が使えないときは、点 $z$ を確率 $w_J(z)$ で引いて $Y(z)$ をそのまま使います（`predictorMass`、177 行）。

ゲージ固定（9-03）の平均は重みを使わず、パッチの全ての点の対についての一様な平均です源。

04

## 支えの半径と重なり

$w_J$ の支えは半径 $J(L-1)/2$ の箱です初。隣の粗い点までの距離は $L$ なので、$J(L-1)/2 \geq L$ なら隣のブロックの中心まで届きます。$J \geq 4,\ L \geq 3$ では $J(L-1)/2 \geq 2(L-1) \geq L$ で、いつも届きます初。

| $L$ | $J$ | 支えの半径 $J(L-1)/2$ | パッチの半径 $(J+3)L$ | 支えが届く粗い点の層 |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 4 | 21 | 1 |
| 3 | 10 | 10 | 39 | 3 |
| 5 | 4 | 8 | 35 | 1 |
| 9 | 6 | 24 | 81 | 2 |

表の最後の列は $\lfloor J(L-1)/(2L) \rfloor$ で、隣から数えて何層目の粗い点まで支えが届くかです初。$J$ が育つと、一つの粗いリンクの予測子が見る細かい領域は、粗い格子の単位で $J/2$ 層ほどに広がります。パッチの半径 $(J+3)L$ は粗い格子の単位で $J+3$ 層で、支え（およそ $J/2$ 層）より、およそ $J/2+3$ 層広く取られています（`Patch.radius`、`YM/RG/Patch.lean` 51 行）源。枠（9-03）がパッチの全ての点の上で定義されるので、予測子の平均に使う点の外側にも余白がある形です推。

重なりは大きいです。一つの細かいリンクは、多くの粗いリンクの予測子の平均に入ります。核の式（9-01 の (2)）が粗いリンクごとに独立な雑音の積であっても、予測子 $Q_b(U,\tau)$ どうしは同じ細かいリンクを通じて関係します推。押し出した測度で、離れた粗いリンクがどう独立になるか（あるいはならないか）は、核の定義だけからは読めません。

格子が十分大きいことは暦の条件で課されています。`Calendar.Fits` の欄 `fitsPatch`（`YM/RG/History.lean` 110 行）は、$100 \cdot (\text{パッチの半径} + 1) \le$ 細かい側の格子の辺、を要求します源。パッチがトーラスを一周して自分に重なることはありません。

05

## J は段とともに育つ

段 $m+1$ から段 $m$ への一段 `Calendar.op m p`（`History.lean` 88〜91 行）は、辺 $L = b_m$（段 $m$ の辺）と平滑の指数 $J = J(m+1)$ のパッチを使います源。$J$ は暦の欄 `J : ℕ → ℕ` で、`Calendar.Fits`（97〜118 行）が次を課します源。

- `mono`：$J$ は非減少。`stepSlow`：一段で高々 1 しか増えない。`deep`：$J \to \infty$。
- `sameFactor`：辺 $b_m$ は $J(m+1)$ だけで決まる値 `factor (J (m+1))`。`monotoneL`：その値は $J$ について非減少。
- `deepOrder` ほか：Taylor の次数などの段の定数 `Stage` は $J$ で番号づけられ、$J$ について単調。

つまり $J$ は「段の定数の組の番号」でもあり、辺 $b_m$・重みの畳み込みの回数・作用の展開の次数（9-06）が、同じ番号でいっしょに育ちます源。$J \to \infty$ と `logCost` の条件から辺 $b_m \to \infty$ が出ます（10-05）推。辺を育てる理由は 10-05 で読みます。

畳み込みの回数が増えると重みは滑らかになり、ブロックの縁での重みの段差が小さくなります推。源の説明文は畳み込みを選んだ理由を述べていません。

06

## 本書の検討で見えていたこと

本書の検討の二つの設計と並べます（本書の設計は 19-04 § 重み、28-05）。

| 項目 | 公開された構成 | 本書の今の設計 | 本書の辺 3 の設計 |
|---|---|---|---|
| 辺 | 奇数 $\ge 3$、段とともに育つ | 2（固定） | 3（固定） |
| 粗い点の位置 | ブロックの中心 | 細かい点の上（ブロックの角） | ブロックの中心 |
| 重みの対象 | パッチの点（四次元の全ての平行移動） | 道の横のずれ $-1, 0, +1$ | ブロックの中の一様な平均 |
| 重みの形 | 一様分布の $J$ 回の畳み込み（$J \ge 4$、育つ） | $(1/8,\ 3/4,\ 1/8)$ | 一様 |

| 項目 | 公開された構成 | 本書の今の設計 | 本書の辺 3 の設計 |
|---|---|---|---|
| 隣との重なり | 大きい（支えの半径 $J(L-1)/2 \geq L$） | あり（横に 1 ずれる） | — |

中心に置く点は、本書の辺 3 の設計と同じ向きです。辺 3 の設計では、粗い点を中心に置くことと格子点の面の鏡映が合うことを使って、押し出した測度の鏡映正値性が Lean で閉じています（9-01 §06、`Block3.rp_push`）Lean 。公開された構成の重みは支えが育って隣と大きく重なるので、本書の鏡映正値性の議論の前提（写像の局所性と鏡映の面を跨がないこと）とは合いません推。重みを畳み込みで滑らかにし、$J$ を育てる発想は、本書の検討には無かったものです。

07

## 読めていない所

- なぜ $J \geq 4$ で、なぜパッチの半径が $J+3$ 層か。源の説明文に理由が無く、下流の評価（Taylor の次数、支えの評価）のどこで使うかを辿っていません。
- 重みの滑らかさ（畳み込みの回数）が、どの評価で効いているか。小さい場の一段（11-09）の中で使われていると推しますが、確かめていません。
- 重なりの大きい予測子どうしの依存が、活動の局所性（9-06 の正則な活動の支え）にどう反映されるか。
- 辺 $b_m$ の具体的な列（`YM/Price/Waits.lean` の構成）は言明だけ読みました。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 パッチは奇数の辺 $L \geq 3$、$J \geq 4$、半径 $(J+3)L$ の箱で、粗い点 $x$ は細かい点 $Lx$ に中心で座る | $J \geq 4$ と $J+3$ の理由 |
| 源 重みは一様分布の $J$ 回の畳み込みで、総和 1・非負・超立方の群で不変（`weight_sum`・`weight_invariant`） | 畳み込みを選んだ理由（説明文に無い） |
| 初 支えの半径 $J(L-1)/2$ は $J \geq 4$ でいつも $L$ 以上で、隣のブロックと重なる | 重なりが押し出した測度の独立性にどう効くか |
| 源 段 $m$ の一段は $L = b_m$、$J = J(m+1)$ を使い、$J$ は非減少で一段に高々 1 増え、無限大へ育つ | $J$ の具体的な増え方（暦の構成は言明だけ読んだ） |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| パッチ・半径・重み | 源 | `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）`YM/RG/Patch.lean`：`Patch` 29 行、`radius` 51 行、`roll_sites` 63 行、`weight` 87 行、`weight_sum` 90 行、`bondCost` 159 行、`predictorMass` 177 行 |
| 埋め込みと配位の見方 | 源 | 同 `YM/Lattice/Subdivision.lean` 29 行 `Ratio.embed`、`YM/Lattice/Path.lean` 224 行 `expandAt`、`YM/Lattice/Box.lean` 13 行 `box` |
| 重みの不変性 | 源 | 同 `YM/Branch/Transport.lean` 135 行 `weight_invariant` |
| 段ごとのパッチと暦 | 源 | 同 `YM/RG/History.lean` 88〜91 行 `Calendar.op`、97〜118 行 `Calendar.Fits` |
| (3) の数・表の数 | 初 | 本文の手計算（$(1+x+x^2)^4$ の係数） |
| 本書の二つの設計 | Lean | 19-04 の出典の表、本書の Lean の束（`Block3.paths`・`Block3.wts`・`Block3.rp_push`） |

**この章で使った語** — パッチ、平滑の指数、一様分布の畳み込み、支えの半径、ブロックの中心、超立方の群、暦。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：9-03 ゲージ固定の二本立て — パッチの上で、細かい配位をどの枠で見るか（小さい場の対称な最小化と、大きい場の確率で引く軸ゲージ）を読みます。

# ゲージ固定の二本立て — 対称な最小化と、確率で引く軸ゲージ

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討、§07 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 一段の核（9-01）に入る「枠」の定義。枠はパッチの点ごとの群の元で、細かい配位をそれで見直してから粗いリンクの予測子を作ります。小さい場の枠（対称な最小化、Landau 型）と大きい場の枠（根と軸の順を確率で引く軸ゲージ）、二つを分ける条件、そして大きい場で対称を破る選び方を確率で引いて和を取ることで、核の離散の対称が保たれること。

**前提となる章** — 9-01 ブロックの核、9-02 パッチと重み。ゲージ固定一般は 4-08。

**先に言うこと** — 最小元の一意性（`Branch.align`）と、引いてよい札が在ること（`Axial.existence`）の証明の中身は読んでいません。閾の具体的な値も読んでいません。言えるのは定義と、閾を十分小さく取れば一意性が成り立つという言明の形までです。

この章の順序

1. **言明 — 枠とその二本立て**：`Patch.frame`、`usesMin`、`frameMass`
2. **小さい場の枠 — 対称な最小化**：全ての点の対と 24 通りの軸の順についての平均
3. **大きい場の枠 — 確率で引く軸ゲージ**：根と軸の順の札、引いてよい札の条件
4. **分岐の条件**：中心の軸ゲージでの輸送の chord と閾
5. **なぜ二本立てか**：一意性・連続性・離散の対称
6. **本書の検討で見えていたこと**：道の族の対称な平均
7. **読めていない所**

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。源はリポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）、評価書は `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）です。公開された構成の定理は源 で言明の字句を、「証明されている」という水準は評 で書きます。

01

## 言明 — 枠とその二本立て

パッチ $B$（9-02）の上の**枠**とは、点ごとの群の元の組 $h : B \to G$ です（源の `Patch.Frame`、`YM/RG/Patch.lean` 99 行。型そのものは正規化を含みません）。中心での正規化 $h(0) = 1$ は、小さい場では最小化の条件 `minimizing`（121 行）に入り、大きい場の軸ゲージの枠は式 (3) で自動的に満たします。枠はパッチの上のゲージ変換で、細かい配位をこれで見直してから予測子を作ります（9-04）源 。

記号を置きます。軸の順 $l$（四つの軸の並べ方、24 通り。`Order` は $\{0,1,2,3\}$ の置換、`YM/Lattice/Box.lean` 39 行）と二点 $z, z'$ について、$\Gamma_l(z \to z')$ を「$l$ の順に一軸ずつまっすぐ進んで $z$ から $z'$ へ行く座標の道」とします（`route`、同 44 行）。配位 $U$ の道に沿った積（輸送）を $U(\Gamma)$ と書きます源 。

枠は二本立てで定義されています（`Patch.frame`、153〜155 行）源 。

$$h = \begin{cases} h^{\mathrm{sym}}(U) & \text{(小さい場：}\ \texttt{usesMin}\ \text{が成り立つ)}, \\ h^{\mathrm{ax}}_{(r,l)}(U) \ \text{ただし札 } (r,l) \text{ を確率で引く} & \text{(大きい場)}. \end{cases} \tag{1}$$

札 $(r,l)$ の確率は `frameMass`（148〜151 行）です。小さい場では全ての札に一様な確率 $1/|B \times \mathrm{Order}|$ を置き（札は使われない）、大きい場では「引いてよい札」の集合 $E(U)$ の上の一様な確率 $1/|E(U)|$ を置きます源 。この確率が、核の式（9-01 の (2)）の $P(\tau \mid U)$ の枠の部分です。

二つの枠がちゃんと定まることは、三つの義務 `Patch.Branches`（182〜185 行）のうちの二つです：小さい場の最小元が一つに決まること（`frame_unique`）と、引いてよい札が空でないこと（`axial_exists`）源 。前者は `RG.frame_unique`（`YM/Branch/Uniform.lean` 18 行）が「枠の閾が群だけで決まるある $\delta > 0$ 以下なら、全てのパッチで一意」と言い、後者は `Axial.viable`（`YM/Branch/Pick.lean` 137 行）が倍率 16 で満たします源 。

02

## 小さい場の枠 — 対称な最小化

小さい場の枠は、次の関数を最小にする枠です（`score`、114〜115 行、`minimizing`、121〜122 行）源 。

$$\mathcal{S}_U(h) = \frac{1}{|B|^2 \cdot 24} \sum_{z \in B} \sum_{z' \in B} \sum_{l} \operatorname{price}\Big( h(z)\, U\big(\Gamma_l(z \to z')\big)\, h(z')^{-1} \Big), \qquad h(0) = 1. \tag{2}$$

$\operatorname{price}(u) = 1 - \operatorname{Re}\operatorname{tr} u / d_G$（9-01 の (1)）です。和はパッチの**全ての点の対**と**全ての軸の順**にわたります。最小元は、中心で 1 に固定した枠の集合のコンパクト性（群がコンパクト）で在り（`min_exists`、124 行）、選んだ一つを `selected` と呼びます（129 行）源 。

この最小化は Landau ゲージの離散の形の一つです。Landau ゲージは隣り合う点の間のリンクだけを見て $\sum \operatorname{price}(h(z) U_{zz'} h(z')^{-1})$ を最小にしますが、(2) は全ての点の対を座標の道でつなぐので、パッチの上の完全グラフの Landau 型です推 。全ての点の対を一様に見ることと、24 通りの順を平均することで、(2) は超立方の群（軸の入れ替えと反転）で不変な関数になります推 。

最小元は自己無撞着の式を満たします。源の `Branch.self_consistent`（`YM/Branch/Synchronize.lean` 100 行）は、各点 $z$ で $h(z)$ が「ほかの全ての点から運んだ $h$ の値の平均」に一番近い群の元であることを言います源 。最小元を一つに決める補題 `Branch.align`（同 232 行）の説明文は、平均の差が法の切り口に入ることと、最近点の写像の微分の評価から、二つの最小元の差が上限のノルムで縮むことを使う、と書いています源 。証明の中身は読んでいません。

03

## 大きい場の枠 — 確率で引く軸ゲージ

大きい場では、札 $(r, l)$（根 $r \in B$ と軸の順 $l$）を一つ引き、根から座標の道で輸送した値で枠を作ります（`axial`、102〜103 行と `frame` の第二の枝）源 。

$$A_{r,l}(z) = U\big(\Gamma_l(r \to z)\big), \qquad h^{\mathrm{ax}}_{(r,l)}(z) = A_{r,l}(0)^{-1} A_{r,l}(z). \tag{3}$$

これは根 $r$ からの軸ゲージ（木のゲージの一つ）を、中心 0 で $h = 1$ になるように左から正規化したものです推 。軸ゲージでは、根から出る座標の道の上のリンクが全て 1 になり、残りのリンクの値は曲率（面の値）の積で書けます。

引いてよい札は、軸ゲージでのリンクの chord の和が、面の chord の和の決まった倍以下のものです（`eligible`、143〜146 行）源 。

$$E(U)=\Big\{(r,l):\ \sum_{\text{パッチの中のリンク } e}\operatorname{chord}\big(U_e^{h^{\mathrm{ax}}_{(r,l)}}\big)\ \le\ c_{\mathrm{ax}}\,(2R+1)\sum_{\text{パッチの中の面 } p}\operatorname{chord}(U_p)\Big\}. \tag{4}$$

$c_{\mathrm{ax}}$ は `axial_factor`、$R$ はパッチの半径です。`Axial.existence`（`Pick.lean` 80 行）は、どの配位でも軸の数×層の数×4 の倍で抑えられる根が在ることを示し、四つの軸で倍率 16 にすると $E(U)$ が空でないことが出ます（`Axial.eligible`、同 119 行。倍率が 16 以上なら、どの軸の順についても引いてよい根が在る）源 。意味は「リンクの大きさが曲率の大きさで抑えられる軸ゲージを選ぶ」ことです。大きい場では面の値が大きい所があり、そうでない所も含めて、リンクの値の総量を曲率の総量で測れる枠を取ります推 。

札の選び方は対称を破ります。根の位置と軸の順を一つ選ぶと、超立方の群の作用で別の札に移ります。そこで札を一つに決めずに、**引いてよい札の上で一様に引き、核の中で和を取ります**。群の元 $s$ は引いてよい札の集合を札の集合へ一対一に写すので（9-05 の `orient`）、和を取った核は対称です源 。

04

## 分岐の条件

どちらの枠を使うかは、`usesMin`（109〜110 行）で決まります源 。

$$\mathtt{usesMin}(U)\iff\forall\,l,\ k,\ z,\ z':\quad \operatorname{chord}\Big(A_{0,l}(z)\,U\big(\Gamma_k(z\to z')\big)\,A_{0,l}(z')^{-1}\Big)<\delta_F. \tag{5}$$

つまり、**中心 0 を根とする軸ゲージ**（どの軸の順 $l$ でも）で見て、パッチの全ての点の対を結ぶ全ての座標の道の輸送が単位元から $\delta_F$ 未満の距離にあるとき、小さい場の枠を使います。$\delta_F$ は `frame_cut` です源 。

条件は面の大きさではなく、**輸送の chord** で書かれています。面の値がどれも小さくても、パッチの大きさ（半径 $(J+3)L$）にわたって曲率が積もれば輸送は大きくなりえます推 。(5) は軸ゲージでゲージ不変な形に直した条件で、配位のゲージ変換で変わりません（ゲージ不変性は 9-05）。

| | 小さい場（usesMin） | 大きい場（そうでない） |
|---|---|---|
| 枠 | (2) の最小元（一つ） | 札 $(r,l)$ ごとの軸ゲージ (3) |
| 札の確率 | 一様（使われない） | 引いてよい札 $E(U)$ の上で一様 |
| 対称の保ち方 | (2) が不変で、最小元が一意 | 札の和 |
| 使う閾 | $\delta_F$（最小元の一意性に足りる小ささ） | 倍率 $c_{\mathrm{ax}}=16$ |

05

### なぜ二本立てか

源の説明文と定義から、二本立ての役割を次のように読みます[推]。

- **小さい場で最小化を使う理由**。最小元は一意で（§01）、対称な関数の一意な最小元なので対称の作用と可換です。さらに、配位について連続に（解析的に）動くと見込まれ、小さい場の一段の展開（11-09）に向きます。
- **大きい場で最小化を使わない理由**。輸送が大きいと最小元が一意とは限らず、選び方が配位について不連続になりえます。軸ゲージは陽な式 (3) で、一意性の問題がありません。
- **確率で引く理由**。軸ゲージは根と順の選びで対称を破ります。一つの規則で選ぶと、核は超立方の群で不変でなくなります。札を一様に引いて和を取れば、核のレベルで対称が戻ります。

説明文は、小さい場の枝を「開いた枝」と呼び（`Patch.lean` 108 行）、分岐の閾と一意性の存在を「証明の義務で、どのゲージ群についても仮定しない」と書いています（10〜12 行）[源]。分岐の境で枠は不連続に切り替わりますが、核は二つの枝の確率の和として可測に定まり（9-01 の `density_meas`）、それで足りる設計です[推]。

06

### 本書の検討で見えていたこと

本書の決定的なブロック写像（19-04 §道の族）は、ゲージ固定をしません。粗いリンクを、細かい道の積の重みつきの平均で作り、道の族そのものを横の向きの入れ替えと反転について対称に取ることで、写像を離散の対称と可換にしました。道の積は両端だけでゲージ変換を受けるので、ゲージ共変性は道の積から直接出ます。

公開された構成は、枠でゲージを固定してから平均を取ります（9-04）。目的は同じ（離散の対称との可換性とゲージ共変性）で、道は別です。

- 本書は「道を対称に平均する」、公開された構成は「枠を対称に最小化する（小さい場）／対称を破る選びを確率で引いて和を取る（大きい場）」。
- 本書のブロック写像は大きい場でも同じ式で、平均が小さくなると球の内側に引き戻すだけです（19-04）。大きい場を写像の定義の中で別の枝として扱う設計は、本書の検討には無かったものです。
- 本書の検討の段ごとのゲージは Landau の切り口・軸のゲージ・木のゲージが場所によって混在していました（28-05 §05）。公開された構成は一段の核の定義の中に、二つの枠を条件で切り替える形で一度に入れています。

本書の検討で、大きい場の枠を確率で引くという発想は持っていませんでした。比べは 14-02 と 14-05 にまとめます。

07

## 読めていない所

- `Branch.align`（`YM/Branch/Synchronize.lean` 232 行）の証明の中身と、枠の閾 $\delta_F$ の値。
- `Axial.existence`（`YM/Branch/Pick.lean` 80 行）の証明の細部（層ごとに面の和が最小の切り口を選んで帰納する形までは読んだ）。
- 枠が小さい場の中で配位について解析的に動くことの言明の在りか（予測子の微分の側 `YM/PREC/FrameResponse` の名前だけ見た）。
- 分岐の境での枠の不連続が、小さい場の一段の評価にどう効かないようにしてあるか。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 枠は二本立てで、中心の軸ゲージでの全ての座標の道の輸送の chord が閾未満なら対称な最小化 (2)、そうでなければ確率で引く軸ゲージ (3) | 閾 $\delta_F$ の値 |
| 源 枠の閾が群だけで決まる値以下なら、小さい場の最小元は全てのパッチで一意（`RG.frame_unique`） | その証明の中身（読んでいない） |
| 源 倍率 16 で引いてよい札の集合 (4) は空でない（`Axial.viable`・`Axial.eligible`） | 倍率 16 が必要かどうか |
| 推 大きい場で対称を破る選びを確率で引いて和を取ることで、核の対称が保たれる（言明は 9-05） | 枠の不連続が評価に効かない仕組み |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 枠・札・score・分岐・引いてよい札 | 源 | `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）`YM/RG/Patch.lean`：99〜155 行（`Frame`・`axial`・`via`・`usesMin`・`score`・`minimizing`・`selected`・`facesum`・`axialCost`・`eligible`・`frameMass`・`frame`）、義務 182〜185 行 |
| 座標の道と軸の順 | 源 | 同 `YM/Lattice/Box.lean` 30〜44 行（`axisRoute`・`Order`・`route`） |
| 最小元の一意性 | 源 | 同 `YM/Branch/Uniform.lean` 18 行 `RG.frame_unique`、`YM/Branch/Synchronize.lean` 100 行 `self_consistent`・232 行 `align` |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
| --- | --- | --- |
| 引いてよい札の存在 | 源 | 同 `YM/Branch/Pick.lean` 80 行 `Axial.existence`、119 行 `Axial.eligible`、137 行 `Axial.viable` |
| 本書の道の族の対称な平均 | Lean | 19-04 の出典の表 |

**この章で使った語** — 枠、対称な最小化、Landau ゲージ、軸ゲージ、札、引いてよい札、分岐の条件、chord、超立方の群。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：9-04 予測子と群への射影 — 枠で見直した輸送を重みで平均し、群へ射影して粗いリンクの予測子を作る手続きを読みます。

# 予測子と群への射影 — 輸送の重みつき平均を群へ

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討、§07 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 一段の核（9-01）の中心 $Q_b(U,\tau)$ の作り方。隣り合う二つのパッチの対応する点を結ぶ平行な直線の輸送、その重みつき平均、群への射影（最近点）、一本を確率で引く側へ切り替える条件（散らばりと、平均と群の距離の両方）。予測子が Bałaban 型の拘束つき最小化の背景場とは別物であること。

**前提となる章** — 9-01 ブロックの核、9-02 パッチと重み、9-03 ゲージ固定の二本立て。

**先に言うこと** — 予測子の閾 $\delta_P$ の値と、予測子が配位について滑らかに動くことの評価は読んでいません。§05 の「背景場ではない」は定義の比べで、二つの対象の間の評価を言うものではありません。

この章の順序

1. **言明 — 予測子の定義**：`connector`、`bondCost`、`best`、`predict`
2. **平行な直線の輸送**：隣り合うパッチの対応する点を結ぶ
3. **重みつき平均の最小化は群への射影**：`Branch.min_iff` と、散らばり＋距離の恒等式
4. **一本を確率で引く側へ切り替える条件**：散らばりと、平均と群の距離の両方
5. **予測子は背景場ではない**：陽に作った中心値と、解析の中の停留点
6. **本書の検討で見えていたこと**：引き戻しと射影は SU(2) で一致する
7. **読めていない所**

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。源はリポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）、評価書は `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）です。公開された構成の定理は源 で言明の字句を、「証明されている」という水準は評 で書きます。

01

## 言明 — 予測子の定義

粗いリンク $b=(x,i)$（粗い点 $x$ から向き $i$）の**予測子** $Q_b(U,\tau)\in G$ は、源の `StepData.prediction`（`YM/RG/Block.lean` 44 行）で、次の三段で作られます源 。

1. **輸送の組**（`connector`、39〜42 行）：パッチの点 $z$ ごとに

$$Y_b(z)=h_x(z)\,U\big(Lx+z\ \to\ Lx+z+Le_i\ \text{の直線}\big)\,h_{x+e_i}(z)^{-1}. \tag{1}$$

   $h_x$ は粗い点 $x$ のパッチの枠（9-03）、$L$ は辺です。

2. **重みつきの費用**（`bondCost`、`YM/RG/Patch.lean` 159 行）：群の元 $u$ について

$$\mathcal{C}_b(u)=\sum_{z} w_J(z)\ \mathrm{price}\big(Y_b(z)\,u^{-1}\big). \tag{2}$$

   その最小元の一つを $u_b^{*}$（`best`、169 行）とします。最小元はコンパクト性で在ります（`bond_min`、164 行）。

3. **枝分かれ**（`predict`、173〜175 行）：

$$Q_b=\begin{cases} u_b^{*} & \mathcal{C}_b(u_b^{*})<\delta_P,\\ Y_b(r)\ \ (r\ \text{を確率}\ w_J(r)\ \text{で引く}) & \text{そうでないとき.}\end{cases} \tag{3}$$

   $\delta_P$ は予測子の閾 `predictor_cut` です。一本を引く確率は `predictorMass`（177〜179 行）で、平均を使う枝では札 $r$ は使われず、一様な確率が置かれます。

平均を使う枝で最小元が一つに決まることは、三つの義務 `Branches` の二つ目 `predictor_unique` です。`RG.predictor_unique`（`YM/Branch/Uniform.lean` 58 行）は、予測子の閾が群だけで決まるある値以下なら、全てのパッチで一意と言います源 。

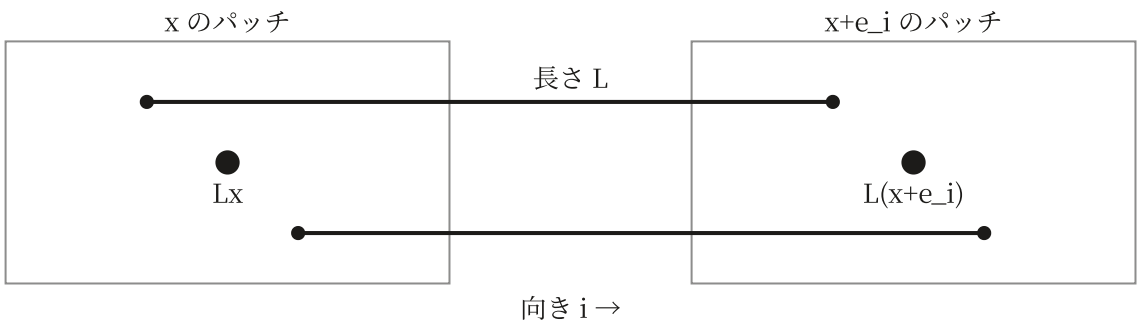
02

## 平行な直線の輸送

式 (1) の直線は、粗いリンクの始点のパッチの点 $Lx+z$ から、向き $i$ にちょうど $L$ 歩進んで、終点のパッチの**対応する点** $L(x+e_i)+z$ へ行きます源 。$z$ はパッチ（半径 $(J+3)L$ の四次元の箱）の全ての点を動くので、直線は四次元の全ての平行移動を含みます。向き $i$ に沿ったずれ（縦のずれ）も、横のずれも入ります源 。

輸送の両端に、それぞれのパッチの枠を掛けます。枠はパッチの上のゲージ変換なので、$Y_b(z)$ は「始点の枠で見た点 $z$ から、終点の枠で見た点 $z$ への輸送」です推 。細かい配位のゲージ変換 $g$ を施すと、枠は $h_x(z) \mapsto g(Lx)\,h_x(z)\,g(Lx+z)^{-1}$ と動き（中心で $h=1$ と正規化しているので、粗い点の値 $g(Lx)$ が左に付く）、$Y_b(z)$ は $g(Lx)\,Y_b(z)\,g(L(x+e_i))^{-1}$ と、$z$ **に依らない**両端の元だけで変わります（9-05 の `bond_gauge`）推 。だから $z$ について平均してもゲージ共変性が崩れません。

図 1　粗いリンク $b=(x,i)$ の輸送の組。始点のパッチの点 $z$ と終点のパッチの同じ点 $z$ を、向き $i$ の長さ $L$ の直線で結ぶ（ここでは二本だけ描く）。




パッチの全ての点を使うので、一つの粗いリンクの予測子は、二つのパッチの和の領域の細かいリンクに依ります推 。重み $w_J$ が効くのはその中心の半径 $J(L-1)/2$ の部分ですが（9-02）、枠はパッチの全体で決まります。

03

## 重みつき平均の最小化は群への射影

群の元を $d_G \times d_G$ の行列 $\mathrm{mat}(u)$ として見て、平均の行列を

$$M_b = \sum_{z} w_J(z)\ \mathrm{mat}\big(Y_b(z)\big) \tag{4}$$

と置きます。$M_b$ は一般に群の元ではありません。源の `Branch.min_iff`（`YM/Branch/Center.lean` 72 行）は、重みの和が 1 のとき

$$u \text{ が } (2) \text{ の最小元} \iff \mathrm{mat}(u) \text{ は } M_b \text{ に Frobenius のノルムで一番近い群の元} \tag{5}$$

と言います[源]。「一番近い」は `Gauge.Nearest`（`YM/Gauge/Nearest.lean` 26 行）で、全ての $v$ について $\|M - \mathrm{mat}\,u\|_F \le \|M - \mathrm{mat}\,v\|_F$ という意味です[源]。だから平均を使う枝の予測子は、平均の行列の**群への射影** $\Pi_G(M_b)$ です。

証明の芯は一つの恒等式です（`min_iff` の中の `hk`、76〜77 行）[源]。$\|\mathrm{mat}(u) - \mathrm{mat}(v)\|_F^2 = 2d_G\,\mathrm{price}(uv^{-1})$（`price_diff`、63 行）を使って展開すると、

$$2d_G\,\mathcal{C}_b(v) = \underbrace{\sum_z w_J(z)\,\big\|\mathrm{mat}\,Y_b(z) - M_b\big\|_F^2}_{\text{重みつきの散らばり}} \;+\; \big\|M_b - \mathrm{mat}(v)\big\|_F^2 \tag{6}$$

です[初]。第一項は $v$ に依らないので、$\mathcal{C}_b$ の最小化は第二項、つまり $M_b$ から群への距離の最小化と同じです。最小元が一意であることは、`Branch.weighted_unique`（`Center.lean` 95 行）が、$\mathcal{C}_b$ がある群の元で十分小さければ $M_b$ は群の近くの管に入り、そこで最近点が一つに決まる（`nearest_tube`、`Nearest.lean` 141 行）ことから出しています[源]。

## 04 一本を確率で引く側へ切り替える条件

(3) の切り替えの条件は $\mathcal{C}_b(u_b^*) \ge \delta_P$ です（`usesBest` の否定、`Patch.lean` 171 行）[源]。(6) に最小元を入れると

$$2d_G\,\mathcal{C}_b(u_b^*) = \sum_z w_J(z)\big\|\mathrm{mat}\,Y_b(z) - M_b\big\|_F^2 + \mathrm{dist}_F\big(M_b, G\big)^2 \tag{7}$$

なので[初]、一本を引く側へ切り替わるのは

$$\text{重みつきの散らばり} + \text{平均と群の距離}^2 \;\ge\; 2d_G\,\delta_P \tag{8}$$

のときです[初]。**二つの項の両方が効きます**。「平均が群から遠いとき」だけと書くと、散らばりの寄与が落ちます。たとえば輸送の値が群の中で二つの離れた所に分かれていると、平均がたまたま群に近くても散らばりが大きく、一本を引く側に入ります[推]。

この枝では、点 $r$ を重み $w_J(r)$ で引き、その一本の輸送 $Y_b(r)$ をそのまま予測子にします。群の元なので射影は要りません。引き方の確率は核の和の中に入り（9-01 の $P(\tau \mid U)$）、重みが超立方の群で不変なので、和を取った核は対称です（9-05）[源]。

| 枝 | 条件 | 予測子 | 札の確率 |
|---|---|---|---|
| 平均 | (8) の左辺 $< 2d_G\delta_P$ | $\Pi_G(M_b)$（一意） | 一様（使われない） |
| 一本 | (8) の左辺 $\ge 2d_G\delta_P$ | $Y_b(r)$ | $w_J(r)$ |

05

## 予測子は背景場ではない

Bałaban の計画（7-07）では、粗い変数を固定したまま細かい作用を最小にする配位（拘束つきの最小化元、背景場）を作り、そのまわりで揺らぎを積分します。公開された構成の予測子は、それとは別の対象です源 。

- 予測子は、細かい配位から陽な規則（枠・平行な直線・重みつき平均・射影、または一本を引く）で作る**中心値**です。作用の最小化は入りません（枠の最小化は price の平均の最小化で、作用の最小化ではない）。
- 粗い配位は予測子に拘束されず、まわりにガウス型で揺らぎます（9-01）。

停留点にあたるものは、小さい場の一段の**解析**の中に別に出てきます。`YM/PCalc/Loop.lean` の `Kin`（74〜78 行）の欄 `stationary` は、細かい作用に罰の項を足した「結合の作用」の停留点で、その性質（実解析・Hessian の下界・粗い作用との 4 次までの jet の一致）は `Kin.Planned` の欄として運ばれます（93〜116 行）源 。これは積分の変数を置くための対象で、核の定義には入りません。詳しくは 11-09 で読みます。

06

## 本書の検討で見えていたこと

本書のブロック写像（19-04 §非線形のブロック写像）は、道の積の重みつきの平均 $q_b(U)$（四元数）を作り、閾 $r_0 \in (0,1]$ の引き戻し $\rho_{r_0}(q) = q/\max(|q|, r_0)$ で球へ戻します。SU(2) では、この二つの作り方の間に一つの関係があります初 。

SU(2) の元の実数係数の一次結合は、単位の四元数の実数係数の一次結合なので、四元数 $q$（$2\times 2$ の行列 $q_0\mathbf{1} + iq\cdot\sigma$）です。Frobenius のノルムは $\|q\|_F^2 = 2|q|^2$ で、SU(2) は $|q| = 1$ の球面です。だから $q \neq 0$ の最近点は $q/|q|$ です初 。つまり

$$\Pi_{SU(2)}(q) = \frac{q}{|q|} = \rho_{r_0}(q) \qquad (|q| \geq r_0). \tag{9}$$

平均が閾以上の所では、本書の引き戻しと公開された構成の射影は同じ写像です初 。違うのは三点です。

- **何を平均するか**：本書は固定した道の族（横に $\pm 1$ ずれる道）の積、公開された構成は枠で見直した平行な直線の輸送（パッチの全ての点、縦のずれも含む）。
- **平均が使えない所**：本書は $|q| < r_0$ で球の内側の値 $q/r_0$ を返し、配位の空間を球に広げます。公開された構成は散らばり＋距離$^2$ で枝を切り替え、一本を確率で引いて群の値に留ま

ります。

- **中心値のあと**：本書は中心値そのものを粗いリンクにし（決定的）、公開された構成は中心値のまわりにガウス型の揺らぎを足します（9-01）。

本書の検討の解析の側（第 15 部・28-05 §05）は、背景として拘束つきの作用の最小化元を使っていました。陽に作った中心値で核を定義し、停留点は解析の道具にだけ使う、という分け方は、本書の検討に無かった発想です（14-05）。

07

## 読めていない所

- 予測子の閾 $\delta_P$ の値（`weighted_unique` が群の最近点の管の半径から作る、までは読んだ）。
- 予測子が小さい場の中で配位について滑らかに動くことの評価（`YM/PREC/FrameResponse` の名前だけ見た）。
- 一本を引く枝が、大きい場の評価（11-04）でどう払われるか。
- 平行な直線が縦のずれも含むことが、予測子の一次の部分（線形化）でどういう核になるか。本書の道の核（19-04）に当たるものの式は読んでいません（候補は `YM/Push/FREE_RESOLVENT/Flat.lean` の `probe`）。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 予測子は、枠で見直した平行な直線の輸送 (1) の重みつき平均から作り、費用 (2) の最小値が閾以上なら一本を確率 $w_J$ で引く | 閾 $\delta_P$ の値 |
| 源 (2) の最小元は平均の行列 (4) の群への最近点（`Branch.min_iff`）、閾が十分小さければ一意（`RG.predictor_unique`） | 最小元が配位について滑らかに動く評価 |
| 初 切り替えは「重みつきの散らばり＋平均と群の距離$^2$」が $2d_G\delta_P$ 以上のとき（両方の項が効く） | — |
| 源 予測子は拘束つきの作用の最小化元ではない。停留点は解析の中の `Kin.stationary` として別に入る | 予測子と停留点の差の評価 |
| 初 SU(2) では群への射影は $q/\lvert q\rvert$ で、本書の引き戻しと $\lvert q\rvert \geq r_0$ で一致する | 平均する輸送の族の違いがどう効くか |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 輸送の組・予測子 | 源 | `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）`YM/RG/Block.lean` 39〜45 行（`connector`・`prediction`） |
| 費用・最小元・枝分かれ | 源 | 同 `YM/RG/Patch.lean` 159〜179 行（`bondCost`・`bond_min`・`best`・`usesBest`・`predict`・`predictorMass`） |
| 射影であること・恒等式 | 源 | 同 `YM/Branch/Center.lean` 63 行 `price_diff`、72 行 `min_iff`（76〜77 行の恒等式）、`weighted_unique`；`YM/Gauge/Nearest.lean` 26 行 `Nearest`、141 行 `nearest_tube` |
| 予測子の一意性 | 源 | 同 `YM/Branch/Uniform.lean` 58 行 `RG.predictor_unique` |
| 停留点（解析の中） | 源 | 同 `YM/PCalc/Loop.lean` 74〜116 行（`Kin`・`Kin.Planned`） |
| (6)〜(9) | 初 | 本文の計算 |
| 本書のブロック写像と引き戻し | Lean | 19-04 の出典の表 |

**この章で使った語** — 予測子、輸送、平行な直線、重みつきの費用、群への射影、最近点、散らばり、背景場、停留点、引き戻し。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：9-05 対称性 — 枠・重み・予測子の作りから、一段の核が超立方の群・粗い並進について不変で、ゲージについて共変であることを読みます。

# 対称性 — 超立方の群と粗い並進での不変性、ゲージの共変性

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討、§07 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 一段の核 $T_\beta(U, V)$ が満たす二つの等式（離散の時空の対称での不変性、ゲージ変換での共変性）の正確な形と、それがどの部品から出てくるか。大きい場で対称を破る選び方を確率で引いて和を取る仕組みが、ここで効きます。

**前提となる章** — 9-01〜9-04。超立方の群は 1-02、ゲージ変換は 19-01。

**先に言うこと** — 対称の群は、粗い格子の点の写像 $x \mapsto s \cdot x + b$（$s$ は符号つきの置換、$b$ は粗い点）全体です。粗い格子点を通る面での鏡映も、粗いリンクの真ん中を通る面での鏡映も、この中に入ります（§02）。これは核の**対称としての共変性**の等式で、鏡映正値性の言明ではありません。連続の回転は格子の段では言われず、極限で別に上げます（12-06）。

この章の順序

1. **言明 — 二つの等式**：`StepData.channel` と `StepData.covary`
2. **群の作用の形**：符号つきの置換 384 元と粗い点だけのずらし、二種類の面での鏡映
3. **出どころ (1) — 重みとパッチの不変**
4. **出どころ (2) — 最小元の一意性と、札の和**
5. **出どころ (3) — 向きの反転と逆元、ゲージ共変性**
6. **本書の検討で見えていたこと**：対称な道の族と、辺 3 の設計の鏡映との交換
7. **読めていない所**

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。源はリポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）、評価書は `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）です。公開された構成の定理は源 で言明の字句を、「証明されている」という水準は評 で書きます。

01

## 言明 — 二つの等式

源の `YM/Branch/Covariant.lean` は、三つの義務 `Branches`（9-03・9-04）を仮定して、一段の核について二つの等式を示しています源 。

$$T_\beta\big(\mathrm{pull}_{s,Lb}\,U,\ \mathrm{pull}_{s,b}\,V\big) = T_\beta(U,V) \qquad (\texttt{StepData.channel},\ 50\ \text{行}) \tag{1}$$

$$T_\beta\big(g\cdot U,\ (g\circ\iota)\cdot V\big) = T_\beta(U,V) \qquad (\texttt{StepData.covary},\ 56\ \text{行}) \tag{2}$$

(1) は全ての符号つきの置換 $s$、全ての粗い点 $b$、全ての $\beta$ で、(2) は細かい格子の全てのゲージ変換 $g$（点ごとの群の元）と全ての $\beta$ で成り立ちます。$\iota$ は粗い点を細かい点 $Lx$ へ写す埋め込み（9-02）、$g\cdot U$ はリンクごとに $U_{z,z+e}\mapsto g(z)U_{z,z+e}g(z+e)^{-1}$ とする作用です源 。

(2) は「細かい配位をゲージ変換し、粗い配位を粗い点での値 $g(Lx)$ でゲージ変換すれば、核は変わらない」と読めます。粗い格子のゲージ変換は細かいゲージ変換の粗い点への制限です推 。

この二つは、暦の構造 `Calendar.BlockControl`（`YM/RG/History.lean` 120〜128 行）の欄 `symmetric`・`gauge` として段ごとに要求され、`Calendar.blocks_go`（`Covariant.lean` 70 行）が (1)(2) から供給します源 。`BlockControl` は段の列の構造 `Levels` の欄なので、構成の定理の結論 `Family.Makes` の下にある `History` の段の列は、全ての段でこの対称を持つ核を使っています源 。

02

## 群の作用の形

符号つきの置換 $s$ は、四つの軸の置換と軸ごとの符号の反転の組です（源の `Signed`、`YM/Space/Index.lean` 23 行）。元の数は $4!\times 2^4 = 384$ で、これは四次元の超立方体の対称の群（超八面体群）です初 。

配位への作用 $\mathrm{pull}_{s,b}$（`YM/Lattice/Path.lean` 147 行）は、点のアフィン写像 $x \mapsto s \cdot x + b$（`affine`、145 行）で配位を引き戻したものです。向きが反転するリンクでは、逆向きにたどった値、つまり逆元を読みます（`Step.pull_read`）源。

$s$ は原点のまわりに働き、そのあと $b$ だけずらします。粗い点 $b$ の**まわり**の回転ではありません源。(1) の $b$ は全ての粗い点を動くので、群は次の写像を全て含みます初。

- **粗い並進**：$s = 1$ なら $x \mapsto x + b$。細かい側では $Lb$ だけの並進です。
- **格子点を通る面での鏡映**：$s$ を軸 $i$ の符号の反転（源の `Signed.mirror`、`YM/Space/Index.lean` 55 行）、$b = 0$ とすると $x_i \mapsto -x_i$。面 $x_i = 0$ での鏡映です。$b = 2c\,e_i$ なら面 $x_i = c$（粗い格子点を通る面）での鏡映です。
- **粗いリンクの真ん中を通る面での鏡映**：同じ $s$ で $b = e_i$ とすると $x_i \mapsto 1 - x_i$。面 $x_i = \frac{1}{2}$ での鏡映で、粗いリンク $(0, e_i)$ の真ん中を通ります。細かい格子では面 $x_i = L/2$ で、$L$ が奇数なのでブロックの境、つまり細かいリンクの真ん中を通る面です。$b = (2c+1)e_i$ なら面 $x_i = c + \frac{1}{2}$ です。
- **軸の入れ替えと、それと並進の組**：$s$ が置換を含む場合。たとえば $b = 0$ で原点のまわりの超立方の回転です。

したがって (1) は、粗い格子の二種類の面（格子点を通る面と、リンクの真ん中を通る面）での鏡映を**両方**含みます初。この二種類は、元の Wilson の測度の鏡映正値性が言われる二種類の面（12-01）と同じ形です。ただし (1) は核が対称と可換であるという**共変性**の等式で、押し出した測度の鏡映正値性を言うものではありません源。一段の核の鏡映正値性の言明は、読んだ範囲に見当たりません（9-01 §07）。

03

## 出どころ (1) — 重みとパッチの不変

パッチは原点を中心とする箱で、重みは一様分布の畳み込みです（9-02）。どちらも符号つきの置換で不変です。源は箱の点の置換 `offset`（`YM/Branch/Transport.lean` 18 行）を作り、`weight_invariant`（135 行）で $w_J(s \cdot z) = w_J(z)$ を示しています源。

この不変性が予測子の側に効きます。費用 $\mathcal{C}_b(u) = \sum_z w_J(z)\,\mathrm{price}(Y_b(z)u^{-1})$（9-04 の (2)）は、輸送の組を $z \mapsto s \cdot z$ で並べ替えても値が変わらないので、最小元と一本を引く確率が並べ替えと可換です（`bond_pull`、`YM/Branch/Predict.lean` 37 行）源。

04

## 出どころ (2) — 最小元の一意性と、札の和

枠（9-03）の二つの枝で、対称の出方が違います源。

- **小さい場**：最小化する関数 $\mathcal{S}_U(h)$（9-03 の (2)）は、全ての点の対と全ての軸の順についての平均なので、符号つきの置換で不変です（`via_channel`、`Transport.lean` 26 行）。分岐の条件も不変です（`min_channel`、34 行）。**最小元が一意**なので、回した配位の最小元は、最小元を回したものに等しくなります（`selected_channel`、56 行）。一意でなければ、選んだ最小元が対称と可換になる保証はありません推。
- **大きい場**：軸ゲージの札 $(r, l)$ は、群の元 $s$ で $(s \cdot r,\ s \circ l)$ に移ります（`orient`、20 行）。引いてよい札の集合も一対一に移ります（`frames_channel` の証明の中、77〜90 行）。札の確率は集合の上の一様分布なので、回した配位の札の確率は、札を移した確率に等しくなります。そこで核の和 $\sum_\tau$ の変数を $\tau \mapsto s \cdot \tau$ と取り替えると（`withinChoice`、`Predict.lean` 88 行、`Equiv.sum_comp`）、核の値が戻ります（`mass_channel`、`Covariant.lean` 22 行）。

一つの札で決めた軸ゲージは対称を破りますが、**札を引く確率ごと核に入れて和を取る**ことで、核は等式として不変になります推。一本を引く予測子の枝（9-04）も、重み $w_J$ が不変なので同じ形で戻ります。

05

## 出どころ (3) — 向きの反転と逆元、ゲージ共変性

符号の反転で、粗いリンク $b$ が負の向きのリンクに移ることがあります。そのときは、反対の向きの粗いリンクの予測子が逆元になることを使います。`bond_inv`（`Predict.lean` 44 行）は、輸送の組を逆元にすると予測子が逆元になり、一本を引く確率は変わらない、と言います源。証明は $\mathrm{price}(k^{-1}u) = \mathrm{price}(ku^{-1})$（price の逆元と共役での不変性 `price_inv`・`price_conj`）です源。雑音の因子も同じ不変性で戻ります（`noise_channel`、`Covariant.lean` 37 行）。

ゲージ共変性 (2) は、三つの部品からです源。

1. 枠：細かいゲージ変換で、枠は粗い点の値を左に付けた形で動き、札の確率は変わりません（`frame_gauged`、`Transport.lean` 111 行）。分岐の条件と引いてよい札の集合はゲージ不変です。
2. 予測子：輸送の組を両側から定数 $u, v$ で挟むと、予測子も同じ $u, v$ で挟まれ、一本を引く確率は変わりません（`bond_gauge`、`Predict.lean` 54 行）。

3. 雑音：$\mathrm{price}\big(uxv^{-1}(uyv^{-1})^{-1}\big) = \mathrm{price}(xy^{-1})$（共役での不変性、`covary` の証明の最後）。

9-04 §02 で見たとおり、輸送の組 $Y_b(z)$ は $z$ に依らない両端の元 $g(Lx)\cdot g(L(x+e_i))^{-1}$ で挟まれるので、予測子の部品（bond_gauge）の形がそのまま使えます[初]。

| 核の部品 | 時空の対称 (1) の出どころ | ゲージ (2) の出どころ |
|---|---|---|
| 重み $w_J$・パッチ | `weight_invariant`・`offset` | — |
| 小さい場の枠 | score の不変＋最小元の一意（`selected_channel`） | `frame_gauged` |
| 大きい場の枠 | 札の置換 `orient`＋札の和 | `frame_gauged` |
| 予測子（平均・一本） | `bond_pull`・`bond_inv` | `bond_gauge` |
| 雑音 | `noise_channel`（price の逆元・共役不変） | price の共役不変 |

この対称は表示の側にも引き継がれます。主な作用は符号つきの置換で平均した形で書かれ（9-06 の `inChannels`）、活動の族は置換で移り合う（`Activities.Moves`）ことが表示の条件に入っています[源]。小さい場の一段で、曲率の方向の対数 Hessian の和が $\delta_{ab}\Delta$ の形になる（等方になる）のも、この対称からです（11-09）[推]。

06

## 本書の検討で見えていたこと

本書のブロック写像は、道の族を横の向きの入れ替えと反転について対称に取ることで、離散の対称と可換にしました（19-04 § 道の族）。ゲージ共変性は道の積が両端だけでゲージ変換を受けることから出ます。

本書の Lean で閉じている対称の言明は次のとおりです[Lean]。

- 今の設計（辺 2）：細かい側の段が十分大きいとき、押し出した Wilson の測度は粗い並進で不変（有界で連続な関数の期待値について。Lean：`hsym_translation`、結合に仮定なし）。
- 辺 3・中心の設計：格子点の面の鏡映との交換（全ての段、ゲージ変換なし、Lean：`Block3.blockMap_refl_cfg`・`Block3.down_refl`）、粗い並進（`Block3.blockMap_trans`・`down_trans`）、符号の反転（`Block3.blockMap_flip`）、境の鏡映（`Block3.down_reflB`）。

本書の写像は決定的なので、対称は写像の等式（$B(\Theta U)=\Theta B(U)$ の形）で言えます。公開された構成は核なので、対称は核の等式 (1) で言われ、配位ごとに対称を破る選び（軸ゲージの札・一本を引く点）を確率ごと核に入れて和で戻します。目的は同じで、道が違います。本書の検討には、対称を破る選びを確率で平均して戻すという発想はありませんでした（14-05）。

07

## 読めていない所

- 一段の核について、鏡映正値性（鏡映についての正値型）が言われているか。(1) は対称としての共変性で、正値性の言明は読んだ範囲に見当たりません。鏡映正値性は元の Wilson の測度について、二種類の面で言われています（12-01）。
- `selected_channel`・`min_channel`・`good_channel` の証明の細部（言明と使われ方だけ読んだ）。
- (1)(2) が、表示の対称（`Activities.Moves`）を段から段へ運ぶ証明のどこで使われているか（`Push/SectorMeasure` の `push_columns` が使う、という記録まで）。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 義務 `Branches` のもとで、核は粗い格子の点の写像 $x \mapsto s \cdot x + b$（符号つきの置換 384 元と粗い点 $b$）について不変で、粗い並進と、格子点を通る面・粗いリンクの真ん中を通る面の両方の鏡映を含む（`StepData.channel`） | 一段の核の鏡映正値性（この等式は対称としての共変性で、正値性ではない） |
| 源 同じ仮定で、核は細かいゲージ変換と粗い点への制限について共変（`StepData.covary`） | — |
| 源 段ごとの `BlockControl` が二つの等式を要求し、`blocks_go` が供給する | 表示の対称を段から段へ運ぶ証明の細部 |
| 推 出どころは、重みとパッチの不変、小さい場の最小元の一意性、大きい場の札の和、price の逆元・共役での不変 | — |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 二つの等式と供給 | 源 | `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）`YM/Branch/Covariant.lean`：`prediction_channel` 13 行、`mass_channel` 22 行、`noise_channel` 37 行、`channel` 50 行、`covary` 56 行、`Calendar.blocks_go` 70 行 |
| 段ごとの要求 | 源 | 同 `YM/RG/History.lean` 120〜134 行（`BlockControl`・`Levels`） |
| 符号つきの置換とアフィンの引き戻し | 源 | 同 `YM/Space/Index.lean` 23 行 `Signed`、`YM/Lattice/Path.lean` 145〜147 行 `affine`・`pull` |
| パッチと札の置換、枠の対称とゲージ | 源 | 同 `YM/Branch/Transport.lean`：`orient` 20 行、`offset` 18 行、`via_channel` 26 行、`min_channel` 34 行、`selected_channel` 56 行、`frames_channel` 77 行、`frame_gauged` 111 行、`weight_invariant` 135 行 |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 予測子の対称とゲージ | 源 | 同 `YM/Branch/Predict.lean`：`bond_pull` 37 行、`bond_inv` 44 行、`bond_gauge` 54 行、`withinChoice` 88 行 |
| 本書の対称の言明 | Lean | 本書の Lean の束（`hsym_translation`、`Block3.blockMap_refl_cfg`・`down_refl`・`blockMap_trans`・`down_trans`・`blockMap_flip`・`down_reflB`）。Lean の核の検査を通った束 |

**この章で使った語** — 符号つきの置換、超八面体群、粗い並進、ゲージの共変性、最小元の一意性、札の和、向きの反転。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：9-06 密度の表示 — 一段で運ばれる密度を、真空の項・主な作用・正則な活動・強制された活動の気体に分けて書く「表示」を読みます。

# 密度の表示 — 真空の項・主な作用・正則な活動・強制された活動の気体

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討、§07 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 段 $m$ の密度 $\rho_m$ を書く形 `Rep` の四つの部分と、その上に課される条件（正規化・帳簿・対称）。$\beta$ がこの表示の中の運動項の係数として定義されること。一番細かい段で表示が裸の Wilson の重みに一致すること。表示は一つに決まるとは言われていないこと。

**前提となる章** — 9-01 ブロックの核、9-05 対称性。ポリマー（塊）の気体は 7-04。

**先に言うこと** — ここは表示の**定義**と条件の形の章です。段から段へこの形が保たれることの証明は第 11 部（11-01〜11-09）で読みます。小さい場の閾と切った作用の細部は 9-07。

この章の順序

1. **言明 — 表示の形**：`Rep` と `Rep.eval`
2. **主な作用**：切った面の項・輸送した曲率の二乗・三次と四次の原子・一ループの原子
3. **二つの正規化**：運動項の係数 `metric_zero` と一ループの部分 `loop_jets`
4. **正則な活動と強制された活動の気体**：`Activities` と `gas`
5. **表示に課される条件と、言っていないこと**：`Conv`・`Lawful`、一意性なし
6. **本書の検討で見えていたこと**：押し出しの測度そのものと、表示の中の係数
7. **読めていない所**

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。源はリポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）、評価書は `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）です。公開された構成の定理は源 で言明の字句を、「証明されている」という水準は評 で書きます。記号：一ループの傾きを $s = 11C_g/(24\pi^2)$（評価書では一ループの係数の二倍として書かれる量、源の `slopeConstant`）と書きます。

01

## 言明 — 表示の形

一段の核（9-01）で密度を運ぶと、密度は配位の任意の関数になりえます。公開された構成は、各段の密度を**決まった形**で書けることを、段の列の構造の欄として要求します。その形が `YM/RG/History.lean` の `Rep`（165〜171 行）で、六つの欄（道のデータ・切りの母数・活動・帳簿の点・$\beta$・$v$）の組です源 。`Rep.eval`（179 行）は

$$\rho(U) = \exp\Big( v\,|\Lambda| \;-\; S^{\mathrm{ch}}_{\beta}(U) \;-\; \sum_{i} \mathbf{1}\big[\text{支え } X_i \text{ が健康}\big]\, E_i(U) \Big) \cdot \mathrm{gas}(U) \tag{1}$$

です源 。四つの部分を名前で呼びます。

| 部分 | 名前 | 源 | この本の章 |
|---|---|---|---|
| $v\lvert\Lambda\rvert$ | 真空の項（$\lvert\Lambda\rvert$ は点の数） | `Rep.v` | 本章 |
| $S^{\mathrm{ch}}_{\beta}$ | 主な作用（符号つきの置換で平均したもの） | `PathData.inChannels` | §02・§03、9-07 |
| $\sum \mathbf{1}[\cdot]E_i$ | 正則な活動の和（健康な所だけ） | `Activities.additive` | §04、11-09 |
| gas | 強制された活動の気体 | `Activities.gas` | §04、11-06 |

「健康」は、支えの点に旗が立っていないことです。旗は、面の chord が段の閾 $t_m$ を超える面に触れる点です（9-07）源 。

段の列 `History` は、全ての $(N, p, m)$ に表示を一つずつ持ちます（204〜206 行）。構造 `History.Selected`（234〜240 行）の欄 `represents` は全ての段 $m \le N$ で表示が条件 `Conv` を満たすこと、`starts` は一番細かい段 $m = N$ で $v = 0$ かつ表示が裸の Wilson の重み $e^{-\beta_N S_{\mathrm{W}}(U)}$ に等しいこと、`steps` は一段の等式（9-01 の (4)）を要求します源 。`Selected` は構成の定理の結論 `Family.Makes` の欄 `wilson` です（`YM/Source/Construction.lean` 45 行）源 。

02

## 主な作用

主な作用は `PathData.principal`（`YM/RG/PathActions.lean` 236〜238 行）を、符号つきの置換 $R$（384 元、9-05）で平均したものです（`inChannels`、241〜242 行）源。

$$S_\beta^{\mathrm{ch}}(U) = \frac{1}{384}\sum_{R} S_\beta^{\mathrm{pr}}(\mathrm{pull}_{R,0}\,U), \tag{2}$$

$$S_\beta^{\mathrm{pr}}(U) = \beta\Big[\sum_{p}\Big(\mathrm{clip}_t\big(\mathrm{chord}\,U_p\big) + \mathbf{1}[\mathrm{kept}]\,\tfrac{1}{2}\|\ell_p(U)\|^2\Big) + \sum_{x}\big(\text{三次の原子} + \text{四次の原子}\big)\Big] \tag{3}$$

四つの材料を順に読みます源。

- **切った面の項** $\mathrm{clip}_t(\sigma)$（`clipped`、218 行）：面の $\mathrm{chord}\,\sigma = \mathrm{chord}\,U_p$ が閾 $t$ 以下なら $c_{\mathrm{dir}}\sigma^2/2$、超えれば一次の $c_{\mathrm{lin}}\,t\,\sigma$。形と折れ目の条件 $c_{\mathrm{lin}} < c_{\mathrm{dir}}/16$ は 9-07 で読みます。
- **輸送した曲率の二乗** $\frac{1}{2}\|\ell_p\|^2$：面 $p$ ごとの Lie 環の値 $\ell_p(U) = \sum_k r_{p,k}\,\mathrm{Ad}\big(U(\gamma_k)\big)F(U_{p_k})$（`ell`、190 行）。$F(u)$ は $(u-u^{-1})/2$ の Lie 環への射影（`Gauge.curvature`、`YM/Gauge/Colors.lean` 173 行）、$\gamma_k$ は道、$p_k$ は別の面で、係数の並び $r_{p,k}$ が道のデータの「行」です（`PathData.row`、151 行、`Slot`、38〜56 行）。離れた面の曲率を道で運んで足す項です。この項は配位が条件 kept（全ての面で chord が $t\,e^{\mathrm{dist}/\text{緩和長}}$ 以下、210〜211 行）を満たすときだけ入ります。
- **三次・四次の原子**：Lie 環の値の三つ・四つの積の、係数つきの和（`Atom`、84〜105 行）。旗の立った所では 0 にします（`placed` が `masked` を使う、107〜108 行）。
- **一ループの原子**：二つの脚の原子で、**$\beta$ が掛かりません**。$\beta$ に依らない一ループの寄与を持つ部分です。

主な作用の係数（行・原子）は、段 $m$ と切断 $N$ ごとの道のデータ `PathData` に入っていて、体積の番号 $p$ に依りません（`Selected.path_shared`、235 行）源。

03

## 二つの正規化

表示 (1) の $\beta$ は、主な作用の前に掛かる**一つの実数**です。そのままでは $\beta$ と一ループの原子や正則な活動の間で $F^2$ の項を付け替えられるので、二つの正規化で付け替えを止めています（道のデータの条件 `PathData.Bounds`、173〜185 行の欄 `metric` と `loop_normal`）源。

**運動項の係数**（`metric_zero`、161〜162 行）。行の係数の零運動量の和を $S^{(0)}_{k,i} = \sum_{\text{行のうち面の型 } i \text{ のもの}} r$（`symbol0`、158 行）として、全ての面の型 $i, j$ で

$$c_{\mathrm{dir}}\,\delta_{ij} + \sum_{k} S^{(0)}_{k,i}\,S^{(0)}_{k,j} = \delta_{ij}. \tag{4}$$

滑らかで小さい配位では $\operatorname{chord} U_p \approx |F_p|$、$\ell_p \approx \sum_j S^{(0)}_{p,j} F_j$（零運動量）なので、主な作用の二次の部分は零運動量で $\frac{\beta}{2}\sum_{ij}\big(c_{\mathrm{dir}}\delta_{ij} + (S^{(0)\mathsf{T}}S^{(0)})_{ij}\big)F_iF_j = \frac{\beta}{2}\sum_i F_i^2$ になります[推]。(4) は「$\beta$ をちょうど運動項の係数として読む」ための正規化です。

**一ループの部分**（`loop_jets`、167〜169 行）。一ループの原子の係数について、面の型と色の組ごとに、係数の和が 0、各向きの一次のモーメント（二つの脚の位置の差を掛けた和）も 0 であることを要求します[源]。これは、一ループの部分に零運動量と一次の運動量の $F^2$ の項が残らないこと、つまり限界的な $F^2$ の項が全て $\beta$ に集まることを意味します[推]。

源の説明文（`History.lean` 25〜33 行）は、$\beta$ を「表示の基の部分の中の実際のスカラーで、平らな係数の配列と運動項の計量の正規化、先頭の Fourier の係数を除いた一ループの核、affine な剰余の消滅の条件のもとでのもの。測度に独立に結びついた数ではない」と書いています[源]。この定義から始まる「段 $m$ の結合」の話は 10-01 で読みます。

04

## 正則な活動と強制された活動の気体

活動の族 `Activities`（`YM/RG/Activities.lean` 62〜66 行）は、番地を自然数で付けた二種類の関数の列です[源]。

**正則な活動** $E_i$：番地は錨の点と支え（`RegularAddress`、37〜40 行）。表示の中では支えが健康なときだけ入ります（`regularOccurrence` が `masked`、131 行）。条件 `RegularFamily`（70〜75 行）は、支えの上の局所性・ゲージ不変・健康な所での $C^{\mathrm{order}}$ の滑らかさ、**平らな配位で 0**（$E_i(1) = 0$）、**affine な方向の対数 Hessian が 0** を要求します。後の二つは、定数は真空の項 $v$ へ、限界的な二次の項は $\beta$ へ移した**後の姿**であることを表します（小さい場の一段の読み直し、11-09）[推]。

**強制された活動** $K_i$：番地は支えと「在庫」（旗を担当する点の空でない集合、`ForcedAddress`、42〜47 行）。条件 `ForcedFamily`（77〜84 行）の欄 `permit` は、$K_i \neq 0$ なら支えの中の旗がちょうど在庫に一致することを要求します[源]。気体は

$$\mathrm{gas}(U) = \sum_{\substack{b:\ \text{支えが互いに素},\\ \bigcup_{i\in b}\text{在庫}_i = \text{旗}(U)}} \ \prod_{i\in b} K_i(U) \tag{5}$$

です（`admissible`・`gasOccurrence`・`gas`、114〜129 行）源。旗の全体を、支えが重ならない強制された活動で**ちょうど覆う**組だけの和です。旗が一つも無ければ空の組だけが残り、$\mathrm{gas} = 1$ です（`gas_one`、135 行）源。大きい場の寄与は全てこの気体に入り、旗の無い小さい場では表示は (1) の指数の部分だけになります。

大きさの帳簿は、点ごとの重みつきの和で測ります（`EBound`・`KBound`、98〜104 行）源。正則な活動は錨の点ごとに、強制された活動は支えが含む点ごとに、$e^{c_{\mathrm{sup}}\cdot(\text{被覆数})} \times (\text{大きさ})$ を足して帳簿以下にします。$c_{\mathrm{sup}}$ は段の定数 `supportExponent`、被覆数は、格子の最大値の距離で半径 $B_m = \lceil (\log \hat{\beta}_m)^2 \rceil$ の球（中心を持つ辺 $2B_m + 1$ の立方体）を、和がつながるように並べて支えを覆う最小の数で（`coverNumber`、`YM/Lattice/Support.lean` 71 行。`BudgetPoint.mass`、`YM/RG/Masks.lean` 144 行）、正則な活動の「大きさ」は健康な配位での、大きさ $t_m$ の方向への有限階の微分の上限です（`supBounds`、164〜166 行）。点ごとの和なので、帳簿は体積に依らない形です推。

05

## 表示に課される条件と、言っていないこと

段 $m$ の表示が満たす条件 `History.Conv`（`History.lean` 213〜218 行）は四つです源。

| 欄 | 中身 |
|---|---|
| `vac` | 帳簿の点（閾 $t_m$、被覆の尺度 $B_m$、次数）は段 $m$ の決まった値 `budget m` |
| `clip` | 切りの母数は段の定数 |
| `good` | 道のデータの帳簿（`Bounds`）と活動の帳簿（`Valid`）。正則な活動の帳簿は $\hat{g}_m^{11/5}$（`allowance`）、強制された活動の帳簿は $e^{-P_m^{1/5}}$（`forcedAllowance`） |
| `band` | $\beta(N,p,m) \in [\hat{\beta}_m/2,\ 2\hat{\beta}_m]$ |

ここで $\hat{\beta}_m = \bar{\beta} + s \log D_m$、$\hat{g}_m = \hat{\beta}_m^{-1/2}$、$P_m = \exp((\log\log \hat{\beta}_m)^2)$ です（`Calendar` の定義、79〜86 行）源。活動の帳簿には対称の条件（`Activities.Moves`、87〜96 行：符号つきの置換で番地ごと移り合う）も入っています。

一番細かい段の表示は裸の Wilson の重みそのもので（`starts`）、道のデータの主な作用の 4 次までの jet が Wilson のエネルギーに一致し、一ループの原子の係数は 0 です（`Kin.Planned` の欄 `peak`・`initial`、`YM/PCalc/Loop.lean` 100・102 行）源。粗い段の主な作用は、「細かい段の主な作用に罰の項を足した作用の停留値と、平らな配位で 4 次までの jet が一致する」という条件（`ClassicalMatch`、同 108 行の欄）で細かい段と結ばれますが、これは条件で、主な作用を停留値の展開として定めるものではありません源。

**言っていないこと**。源の説明文は二か所で、表示が一つに決まることを言わない、と書いています[源]。

- `PathActions.lean` 25〜26 行：あてはめた表示が関数として一意であることは主張も使用もしない。
- `History.lean` 29〜31 行：そのような表示と継続が**在る**という形の定式化で、一意性も、実装の道の選びの再現も要求しない。

同じ測度（同じ密度 $\rho_m$）が別の表示を持ちうるので、表示の中の $\beta$ は測度だけからは決まりません。この点は 10-01 の主題です。

06

## 本書の検討で見えていたこと

本書の検討の繰り込みの一段は、押し出しの測度 $B_*\mu$ そのものを対象にしていました（19-04 §押し出し）。粗い段の理論を、決まった形の表示で書くことはしていません。示すべき言明（19-07）も、押し出しの測度と観測量の期待値だけで書いています。

前提の一覧（28-04）の側では、実効の結合の定義に「ブロック化した作用の係数として読む」案と「繰り込んだ結合として読む」案が紙に二つあり、未定でした（28-05 §06）。公開された構成は前者の形を、二つの正規化 (4)・`loop_jets` つきで決め、表示の存在を各段で要求する、という形を取っています。代わりに、表示が一つに決まることは言わず、$\beta$ は表示に依る数になります。

強制された活動を「旗をちょうど覆う」気体として表示に持つ形は、本書の検討の大きい場の扱い（前提の一覧の大きい場の評価と気体の行）と比べる軸になります。比べは 14-04 に置きます。

07

## 読めていない所

- 道のデータの行 $r_{p,k}$ と道 $\gamma_k$ の具体的な作り方（主な項の「陽な繰り込みの写像」の本体）。候補の在りかは `YM/Push/BETA_TRANSPORT`・`LOOP_COEFFICIENT`・`FREE_RESOLVENT`・`STATIONARY_UNIFORM` で、読んでいません。
- 条件 kept の緩和長（`Clip.relaxation`）の値と、それが段の定数のどこから来るか。
- 一段の後に強制された活動を帳簿 $e^{-P_m^{1/5}}$ に収め直す構成（11-06 の主題。本書の検討でも帳尻は確かめていない）。

- (4) の正規化を満たす道のデータが各段で在ることの証明。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 各段の密度は (1) の形の表示で書かれることが、段の列の構造の欄として要求される（構成の定理の結論に入る） | 表示の一意性（源が言わないと明記） |
| 源 主な作用は切った面の項・輸送した曲率の二乗（kept のときだけ）・三次と四次の原子・$\beta$ の掛からない一ループの原子を、符号つきの置換で平均したもの | 道のデータの具体的な作り方 |
| 推 正規化 (4) は $\beta$ を零運動量の運動項の係数として読ませ、`loop_jets` は限界的な $F^2$ を一ループの部分に残さない | 正規化を満たす道のデータの存在の証明（読んでいない） |
| 源 旗が無ければ気体は 1（`gas_one`）。気体は旗をちょうど覆う支えの重ならない組の和 | 一段の後の強制された活動の収め直し |
| 源 一番細かい段で表示は裸の Wilson の重み、帳簿は $\hat{g}^{11/5}$ と $e^{-P^{1/5}}$、$\beta$ は帯 $[\hat{\beta}_m/2, 2\hat{\beta}_m]$ | 帳簿が段から段へ保たれる証明（第 11 部） |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 表示・段の列・条件 | 源 | `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）`YM/RG/History.lean`：説明文 25〜33 行、`Calendar` 79〜86 行、`Rep` 165〜179 行、`History` 204 行、`Conv` 213〜218 行、`Selected` 234〜240 行 |
| 主な作用と正規化 | 源 | 同 `YM/RG/PathActions.lean`：説明文 25〜26 行、`Slot` 38 行、`Atom` 84 行、`Clip` 139 行、`PathData` 150 行、`symbol0` 158 行、`metric_zero` 161 行、`loop_jets` 167 行、`Bounds` 173 行、`ell` 190 行、`kept` 210 行、`clipped` 218 行、`principal` 236 行、`inChannels` 241 行 |
| 曲率 | 源 | 同 `YM/Gauge/Colors.lean` 173 行 `curvature` |
| 活動・気体・帳簿 | 源 | 同 `YM/RG/Activities.lean` 37〜135 行；`YM/RG/Masks.lean` 125〜166 行（`BudgetPoint`・`mass`・`Regular`・`supBounds`） |
| 一番細かい段の条件・粗い主な作用の条件 | 源 | 同 `YM/PCalc/Loop.lean` 100・102・108 行（`Kin.Planned` の欄） |
| 構成の定理の結論との関係 | 源 | 同 `YM/Source/Construction.lean` 44〜45 行 `Family.Makes.wilson` |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 本書の押し出しの測度と示すべき言明 | Lean | 19-04、19-07 の出典の表 |

**この章で使った語** ― 表示、真空の項、主な作用、切った面の項、輸送した曲率、原子、一ループの原子、運動項の正規化、正則な活動、強制された活動、在庫、旗、健康、気体、帳簿、被覆数。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：9-07 小さい場の閾と、切った作用 ― 表示の中で大きい場と小さい場を分ける段ごとの閾と、面の項を一次に切る形を読みます。

# 小さい場の閾と、切った作用 — 段に依る閾

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討、§07 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 段 $m$ の表示（9-06）の中で、面が「大きい」かどうかを決める閾 $t_m$ の式と性質。閾を超える面に触れる点に立つ旗と、旗の無い「健康な」支え。主な作用の面の項を閾の上で一次に切る形と、折れ目の条件 $c_{\mathrm{lin}} < c_{\mathrm{dir}}/16$。閾が段とともに 0 へ行き、しかも揺らぎの大きさ $\hat{\beta}_m^{-1/2}$ よりずっと大きいこと。

**前提となる章** — 9-06 密度の表示、8-02 段取り。

**先に言うこと** — 切った作用は表示の主な部分の**形**で、測度を変えるものではありません。一段の等式は等式のままで、切った差は活動に入ります。切ることで大きい場の困難が消える、とは読めません。大きい場の評価そのものは第 11 部（11-03・11-04）で読みます。

この章の順序

1. **言明 — 段の閾**：`Calendar.threshold` と暦の条件
2. **閾の大きさ**：0 へ行くが、揺らぎの大きさより因子 $P_m$ だけ大きい
3. **旗と健康な配位**：`flags`・`Healthy`・`masked`
4. **切った作用**：`clipped` の形と折れ目の条件
5. **閾が段に依ること**：一段の中の二つの閾
6. **本書の検討で見えていたこと**：固定の閾と、段の閾
7. **読めていない所**

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。源はリポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）、評価書は `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）です。公開された構成の定理は源 で言明の字句を、「証明されている」という水準は評 で書きます。記号：一ループの傾きを $s = 11C_g/(24\pi^2)$（評価書では一ループの係数の二倍として書かれる量、源の `slopeConstant`）と書きます。

01

## 言明 — 段の閾

源の `YM/RG/History.lean` の暦 `Calendar`（79〜86 行）は、段 $m$ ごとに次の量を定義しています源。

$$\hat\beta_m = \bar\beta + s\log D_m, \qquad \hat g_m = \hat\beta_m^{-1/2}, \qquad P_m = \exp\big((\log\log\hat\beta_m)^2\big), \qquad t_m = \hat g_m\, P_m. \quad (1)$$

$\bar\beta$ は段 0 で合わせる値（10-01）、$D_m$ は段 $m$ の格子間隔の逆数、$s = 11C_g/(24\pi^2)$ は一ループの傾きです（`hatBeta`・`hatCoupling`・`monitor`・`threshold`）。$\hat\beta_m$ は一ループの走りで予想される段 $m$ の結合、$\hat g_m$ はその結合の大きさです。$t_m$ が段 $m$ の**小さい場の閾**で、表示の帳簿の点（`budget m`）の閾として使われます（`Levels.budget`、141〜156 行）源。

暦の条件 `Calendar.Fits` は、全ての段で $1 < \hat\beta_m$（`delayed`）と $t_m \le 1$（`smallField`）を要求します（107〜108 行）源。後者は、$\bar\beta$ の条件 `Supply.Bar.threshold`（`YM/Price/Intent.lean` 127 行）：$x \ge \bar\beta$ なら $x^{-1/2}e^{(\log\log x)^2} \le 1$、から供給されます源。$\hat\beta_m \ge \bar\beta$ なので、全ての段で閾は 1 以下です初。

同じ暦は、被覆の尺度 $B_m = \lceil(\log\hat\beta_m)^2\rceil$（`coverSize`）、正則な活動の帳簿 $\hat g_m^{11/5}$（`allowance`）、強制された活動の帳簿 $e^{-P_m^{1/5}}$（`forcedAllowance`）も、同じ $\hat\beta_m$ の関数として定めます（82〜85 行）源。

02

## 閾の大きさ

$P(x) = e^{(\log\log x)^2}$ は、$\log x$ のどの冪よりも速く、$x$ のどの正の冪よりも遅く育ちます初。$\log P = (\log\log x)^2$ が、$\log(\log x)^k = k\log\log x$ より速く、$\log x^\epsilon = \epsilon\log x$ より遅いからです。源の `YM/SectorNext/LARGE_FIELD_REMAINDERS/Delay.lean` の `cover_pay`・`inactive_price` は、この性質の形（$b^n/P^a \to 0$ など）を言明しています源。

したがって、$\hat\beta \to \infty$ で

$$t = \hat g\, P \;\longrightarrow\; 0, \qquad \frac{t}{\hat g} = P \;\longrightarrow\; \infty, \qquad \hat\beta\, t^2 = P^2 \;\gg\; (\log \hat\beta)^k \ \text{(全ての } k\text{)} \tag{2}$$

です[初]。弱結合の段では、面の典型的な揺らぎの大きさは $\hat g$ 程度です[推]。閾はそれより因子 $P$ だけ大きいので、閾を超える面は「典型から大きく外れた面」です。一方で $t \to 0$ なので、閾の下では作用の小さい場の展開が使えます[推]。閾を超える面一枚の作用の重さは $\beta t^2 \approx P^2$ 程度で、これが被覆の数え上げの損（$\log \hat\beta$ の冪の程度）を上回るように選ばれた形です[推]。

| $\hat\beta$ | $P$ | $t = \hat\beta^{-1/2} P$ | $\hat\beta t^2 = P^2$ | $B = \lceil (\log \hat\beta)^2 \rceil$ | $e^{-P^{1/5}}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $10^{5}$ | 392 | 1.24 | 1.5e5 | 133 | 3.7e-2 |
| $10^{6}$ | 987 | 0.987 | 9.7e5 | 191 | 1.9e-2 |
| $10^{8}$ | 4.86e3 | 0.486 | 2.4e7 | 340 | 4.2e-3 |
| $10^{12}$ | 6.08e4 | 0.0608 | 3.7e9 | 764 | 1.2e-4 |
| $10^{24}$ | 9.79e6 | 9.8e-6 | 9.6e13 | 3054 | 1.4e-11 |

表は (1) を電卓で評価した値です（有効数字 2〜3 桁）[初]。$t \le 1$ には $\hat\beta$ がおよそ $10^6$ 以上要ります。$\bar\beta$ は大きく取る、という暦の作り（10-05）と合っています。$\bar\beta$ の具体的な値は源に無く、存在の形で選ばれます[源]。

## 03 旗と健康な配位

閾 $t$ を超える面に触れる点に**旗**が立ちます。源の `flags`（`YM/RG/Masks.lean` 34〜36 行）は

$$\mathrm{flags}_t(U) = \big\{ x : \exists p \ \text{（面）}, \ x \in \partial p \ \text{かつ} \ \mathrm{chord}(U_p) > t \big\} \tag{3}$$

です。$\partial p$ は面の四つの頂点です[源]。面の値は配位のゲージ変換で共役を受けるだけなので、旗はゲージ不変です（`gauge_flags`、43 行）[源]。点の集合 $X$ が**健康**とは、$X$ に旗が無いことです（`Healthy`、41 行）[源]。

旗は表示の三か所で使われます[源]。

- 正則な活動 $E_i$ と、三次・四次・一ループの原子は、支え（原子では足跡）が健康なときだけ入り、そうでなければ 0 にします（`masked`、70〜72 行。`Atom.placed`、`Activities.regularOccurrence`）。
- 強制された活動の気体は、旗の全体をちょうど覆う組の和です（9-06 の (5)）。旗が無ければ気体は 1 です。

- 輸送した曲率の項 $\frac{1}{2}\|\ell_p\|^2$ は、全ての面 $q$ で $\operatorname{chord} U_q \le t\, e^{\operatorname{dist}(p,q)/\text{緩和長}}$ のとき（kept）だけ入ります（`PathActions.lean` 210〜211 行）。遠い面ほど緩い閾で、配位の全体を見る条件です。

正則な活動の大きさは、健康な配位で、大きさ $t$ の方向（`dirBound`：リンク $e$ の方向の大きさが $t(1+\operatorname{dist}(e,o))^{\text{power}}$ 以下）への有限階の微分の上限で測ります（`Masks.lean` 141〜166 行）源。閾 $t$ は、旗の判定と、活動の大きさの物差しの両方に入っています。

04

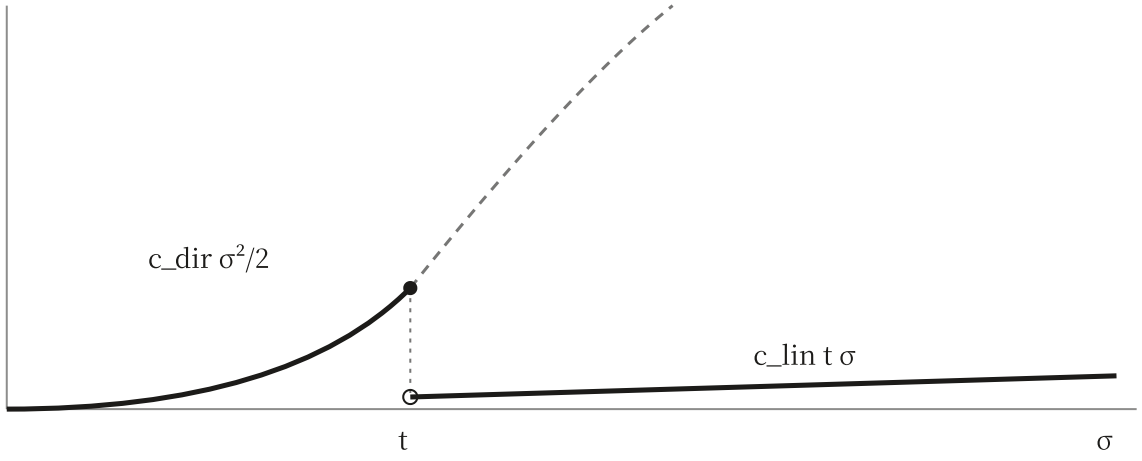
## 切った作用

主な作用の面の項は、$\operatorname{chord}\sigma = \operatorname{chord} U_p$ の関数として、閾 $t$ の上で一次に切られます（`clipped`、`PathActions.lean` 218〜219 行）源。

$$\operatorname{clip}_t(\sigma) = \begin{cases} \dfrac{c_{\text{dir}}}{2}\,\sigma^2 & \sigma \le t, \\ c_{\text{lin}}\, t\, \sigma & \sigma > t, \end{cases} \qquad 0 < c_{\text{lin}} < \frac{c_{\text{dir}}}{16}. \tag{4}$$

$c_{\text{dir}}, c_{\text{lin}}$ と緩和長は段の定数 `Clip`（139〜146 行）で、折れ目の条件 `kink` が $c_{\text{lin}} < c_{\text{dir}}/16$ です源。$c_{\text{dir}}$ は運動項の正規化（9-06 の (4)）にも入ります。

図 1　切った面の項 (4) の形（$c_{\text{lin}} = c_{\text{dir}}/20$ の例）。$\sigma = t$ で値が下へ跳び、その先は傾き $c_{\text{lin}}t$ の直線。破線は切らない二次の項。




(4) は $\sigma = t$ で連続ではありません。左からの値 $c_{\text{dir}}t^2/2$ から、右の値 $c_{\text{lin}}t^2 < c_{\text{dir}}t^2/16$ へ下に跳びます初。作用は $\sigma$ について単調でも凸でもありません初。閾を超えた面の項は $c_{\text{lin}}t\,\sigma \ge c_{\text{lin}}t^2$ で下から抑えられ、$\beta$ を掛けると $\beta c_{\text{lin}}t^2 \approx c_{\text{lin}}P^2$ 程度です（帯 $\beta \in [\hat\beta/2, 2\hat\beta]$ のもとで）推。

切った作用の意味を、源の定義に沿って書きます源。

- 切るのは**表示の主な部分**だけです。一段の等式 $\rho_m = \mathcal{T}_{\beta_{m+1}}\rho_{m+1}$ は等式のままで、測度は変わりません。切った差は正則な活動と強制された活動の側に入ります。
- 大きい場の評価は、切った作用を使って、ゲージの切り口と区画の条件を満たす配位について一様な不等式を立てる形で書かれています（11-04 の `Teller.Grants`。資金の仮定つき）。

一次の尾は、閾の上で面の項が二次で育たないようにする形です。大きい場の領域で二次の作用を使うと、一段の中の作用の分解（細かい面・罰・粗い面の釣り合い）で負の項が二次で育ちうるので、それを一次に抑えていると読めます推。折れ目の数 16 の出どころは読んでいません。

05

## 閾が段に依ること

$\hat{\beta}_m$ は $m$ とともに増えるので（細かい段ほど大きい）、$t_m$ は細かい段ほど小さくなります初。閾は格子の単位で測った chord の閾で、物理の単位の量ではありません推。段ごとに閾・被覆の尺度・帳簿・切りの母数（`Conv.clip` は段の定数 `(params m).clip`）が決まり直します（9-06 の `Conv`）源。

一段（段 $m+1$ から段 $m$）の中では、**二つの閾**が同時に現れます源。

| 閾 | 値 | 使われる所 |
|---|---|---|
| 細かい側 | $t_{m+1}$（小さい） | 入ってくる表示の旗。大きい場の評価で、種（大きい場の印）の判定と細かい面の側の不等式の左辺（源の `fiery`） |
| 粗い側 | $t_m$（大きい） | 出ていく表示の旗。粗い面の側の不等式の右辺、区画の余白 $5\lceil(\log\hat{\beta}_m)^2\rceil$ |

どの不等式でどちらの閾を使うかは、本書の検討で源の言明を一つずつ確かめました（11-03・11-04 で引きます。第 11 部の章ごとの閾の字は 11-01 の閾の字の対応の表）。前の段から来た大きい場の活動が載る所は、必ずこの段の種になる、という形で二つの閾がつながっています（`Allocation` の `flagged`）源。

閾が段に依ることで、帳簿は毎段その段の結合の関数として定義し直されます。一段の証書は「出口が次の段の決まった帳簿に入る」ことだけを示す形です（11-07）推。段の数に一様な条件は、暦の側（辺・定数を選ぶ順）で払われます（10-05）源。

06

## 本書の検討で見えていたこと

本書の検討で「大きい面」を分ける閾は、段に依らない固定の値でした[初]。

- 大きい面の稀さの定理（22-01）は、$\operatorname{Re} U_p < 0$ の面を数えます。Wilson の測度だけで書け、閾は固定です。
- ブロック写像の引き戻しの閾 $r_0 \in (0,1]$（19-04）も固定の母数です。
- 前提の一覧の側では、段ごとの閾を置く行がありましたが、その形は決まっていませんでした（28-05 §08 表 3）。

公開された構成の閾 (1) は、段の結合の関数として陽に決まり、揺らぎの大きさ $\hat{g}$ と 1 の間に、多重対数の損を吸う余白 $P$ を両側に残す形です[推]。帳簿の指数 $11/5$（二次の 2 と最初の限界でない次数 3 の間）と $e^{-P^{1/5}}$ も同じ $\hat{\beta}_m$ の関数です。閾と帳簿を段ごとに結合の関数として置き直す設計は、本書の検討には無かったものです（14-05）。本書の検討で大きい場の評価が詰まった所との関係は 14-04 で扱います。

07

## 読めていない所

- 折れ目の条件の 16 と、軸ゲージの倍率 16（9-03）の関係。同じ数ですが、つながりは確かめていません。
- 緩和長（`Clip.relaxation`）の値と、条件 `slow_selector`（$12 \le$ 緩和長 $\times$ 幅、`History.lean` 59 行）の役割。
- 指数 $(\log\log)^2$ の 2 と帳簿の $1/5$ が、どの評価で最初に要るか。読んだのは、$0 \le \delta < 2$ の任意の指数で十分大きい結合について $e^{-AP^{\delta}}$ の形の上界を言う `dictionary_fit`（`YM/AnalyticNext/CONNECTED_ACTIVITY_JETS_E6/Bulkhead.lean` 78 行）の言明までです。
- $\bar{\beta}$ の下限の陽な形（存在の形で選ばれ、源に数は無い）。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| [源] 段 $m$ の閾は $t_m = \hat{\beta}_m^{-1/2} e^{(\log\log \hat{\beta}_m)^2}$、暦の条件で全ての段で $t_m \le 1$ | $\bar{\beta}$ の陽な下限 |

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 初 $t_m \to 0$、$t_m/\hat{g}_m = P_m \to \infty$、$\hat{\beta} t^2 = P^2$ は $\log \hat{\beta}$ のどの冪より大きい | 指数 2 と $1/5$ がどの評価で要るか |
| 源 旗は閾を超える面に触れる点（ゲージ不変）。正則な活動と原子は健康な支えでだけ入る | — |
| 源 面の項は閾の上で一次に切られ、$c_{\mathrm{lin}} < c_{\mathrm{dir}}/16$。$\sigma = t$ で下に跳び、単調でも凸でもない | 16 の出どころ |
| 源 切るのは表示の主な部分で、一段の等式は等式のまま。差は活動に入る | 切ることで大きい場の困難が消える、という読み（そうは書けない） |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 段の量と閾・暦の条件 | 源 | `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）`YM/RG/History.lean` 79〜86 行（`hatBeta`・`hatCoupling`・`monitor`・`coverSize`・`threshold`・`allowance`・`forcedAllowance`）、107〜108 行（`delayed`・`smallField`）、141〜156 行 `Levels.budget` |
| $\bar{\beta}$ の閾の条件 | 源 | 同 `YM/Price/Intent.lean` 123〜127 行 `Supply.Bar` |
| $P$ の増え方 | 源 | 同 `YM/SectorNext/LARGE_FIELD_REMAINDERS/Delay.lean`（`cover_pay`・`inactive_price`。言明だけ） |
| 旗・健康・覆い | 源 | 同 `YM/RG/Masks.lean` 34〜72 行（`flags`・`Healthy`・`gauge_flags`・`masked`）、141〜166 行 |
| 切った作用と kept | 源 | 同 `YM/RG/PathActions.lean` 139〜146 行 `Clip`、210〜219 行 `kept`・`clipped` |
| 表 1 の数 | 初 | (1) を浮動小数で評価した値 |
| 本書の固定の閾 | Lean | 22-01、19-04 の出典の表 |

**この章で使った語** — 小さい場の閾、旗、健康、切った作用、折れ目の条件、被覆の尺度、帳簿、多重対数の余白、細かい側の閾と粗い側の閾。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：10-01 「段 m の結合」とは何か — 表示の中の係数として定義された $\beta$ と、その二つの正規化が、測度だけからは決まらない数であることを読みます。

# 「段 m の結合」とは何か — 表示の中の係数

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討、§07 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 公開された構成で $\beta(N, p, m)$ と書かれる数の定義。表示 `Rep` の欄 `beta` であり、二つの正規化（運動項・一ループの部分）で $F^2$ の付け替えを止めたうえでの係数であること。裸の結合 $\beta_{N,p} = \beta(N, p, N)$、段 0 の目標値 $\bar{\beta}$、一段ごとの減り。測度だけから読める不変量ではないこと。

**前提となる章** — 9-06 密度の表示、8-01 格子・Wilson の測度・規約。漸近自由の物理は 4-06。

**先に言うこと** — この章は定義の章です。「段 $m$ の結合」が表示に依ることは源自身が明記しており、本書の推し量りではありません。表示が一つに決まらないことと、測度から決まる別の結合の定義があるかどうかは別の話で、後者について源は何も言っていません。

この章の順序

1. **言明 — 段 m の結合の定義**：`History.β` と `Rep.beta`
2. **二つの正規化**：運動項の係数と、一ループの部分の先頭の Fourier の係数
3. **段の向きと、段 0 の目標値**：裸の結合 $\beta_{N,p}$、$\bar{\beta}$、一段の減り
4. **測度だけから決まる数ではない**：源の説明文の三か所
5. **規約の換算**：$\beta = 1/g_0^2$、$C_g$、本書の $\beta$ との関係
6. **本書の検討で見えていたこと**：測度だけで定義できる合わせの量
7. **読めていない所**

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。源はリポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）、評価書は `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）です。公開された構成の定理は源 で言明の字句を、「証明されている」という水準は評 で書きます。記号：一ループの傾きを $s = 11C_g/(24\pi^2)$（評価書では一ループの係数の二倍として書かれる量、源の `slopeConstant`）と書きます。

01

## 言明 — 段 m の結合の定義

公開された構成は、切断 $N$（格子間隔 $a_N = 1/D_N$）と体積の番号 $p$（物理の辺 $L_p$）ごとに、段 $m = N, N-1, \dots, 0$ の密度の表示 `rep N p m` を持ちます（`YM/RG/History.lean` 204〜206 行）。「段 $m$ の結合」は、その表示の欄 `beta` です源 。

$$\beta(N,p,m) \;:=\; (\mathbf{rep}\ N\ p\ m).\mathbf{beta} \qquad (\mathbf{History}.\beta,\ 211\ 行). \tag{1}$$

表示の形（9-06 の (1)）では、この数は主な作用 $S_\beta^{\mathrm{pr}}$ の前に掛かり、切った面の項・輸送した曲率の二乗・三次と四次の原子の全体の係数です。$\beta$ の掛からない一ループの原子、正則な活動、強制された活動の気体とは別の欄にあります源 。

一番細かい段の値が**裸の結合**です。`Family.beta N p` は $\beta(N,p,N)$ と定義され（`YM/Source/Construction.lean` 38 行）、公開の定理の族の欄 `WilsonFamily.beta` になります源 。評価書の用語集は、この欄を「Wilson のエネルギーに掛かる結合で、構成は各 $N,p$ について、$N$ 回の繰り込みの後の結合が固定の基準値 $\bar\beta$ に等しくなるように裸の結合を選ぶ」と説明しています（付録 A、23 頁）評 。

02

## 二つの正規化

表示の中の一つの係数を「結合」と呼ぶには、ほかの欄との間で $F^2$ の項を付け替えられないようにする必要があります。たとえば一ループの原子に $\sum_p F_p^2$ に比例する項を足し、$\beta$ を減らせば、同じ密度を別の $\beta$ で書けてしまいます推 。源は、道のデータの条件 `PathData.Bounds` の二つの欄でこれを止めています（`YM/RG/PathActions.lean` 161〜169・181〜185 行）源 。

- **運動項の正規化**（`metric_zero`）：零運動量での二次の係数の行列が単位行列になる（9-06 の (4)）。評価書の言う「運動項の正規化」にあたります[推]。これで、滑らかな小さい配位での主な作用の二次の部分は $\frac{\beta}{2}\sum F^2$ です[推]。
- **一ループの部分の正規化**（`loop_jets`）：$\beta$ に依らない一ループの原子の係数の、零次と一次の Fourier の係数（和と一次のモーメント）が 0。限界的な $F^2$ の項が一ループの部分に残りません[推]。

正則な活動の側にも、平らな配位で 0、affine な方向の対数 Hessian が 0、という条件があります（`RegularFamily`、9-06 §04）[源]。三つを合わせて、限界的な $F^2$ の係数は全て $\beta$ に集まる、という形です[推]。評価書は §7.4 で「長さ $r$ より短い揺らぎを積分すると、有効作用の曲率の二乗の項の係数が変わる。固定した正規化でのその平方根の逆が走る結合である」と書いています[評]。

03

## 段の向きと、段 0 の目標値

段の列の構造 `History.Selected`（`History.lean` 234〜240 行）は、結合の列に次を課します[源]。

| 欄 | 中身 |
|---|---|
| `starts` | 段 $N$（一番細かい）の表示は裸の Wilson の重み $e^{-\beta_{N,p}S_{\mathrm{W}}}$、$v=0$ |
| `steps` | 一段の等式と $\lvert\beta(N,p,m+1)-\beta(N,p,m)-s\log b_m\rvert\le \mathrm{drift}_{m+1}$（`Transfer`、223〜227 行） |
| `represents` | $\beta(N,p,m)\in[\hat\beta_m/2,\ 2\hat\beta_m]$（`Conv.band`） |
| `reaches` | 全ての $N,p$ で $\beta(N,p,0)=\bar\beta$ |
| `running` | $\lvert\beta(N,p,m)-\hat\beta_m\rvert\le\varepsilon\log(1/a_m)$（十分大きい $m$、$N,p$ に一様。`Running`、229〜230 行） |

ここで $s=11C_g/(24\pi^2)$（源の `slopeConstant`、`YM/Gauge/Colors.lean` 184 行）、$\hat\beta_m=\bar\beta+s\log D_m$ です[源]。一段粗くするごとに、結合はおよそ $s\log b_m$ だけ**減ります**（結合定数 $g^2=1/\beta$ は増える）。細かい段ほど $\beta$ が大きく、これが漸近自由の向きです[推]。

段 0（格子間隔 1）で結合は全ての $N,p$ について同じ値 $\bar\beta$ に合わせられます。裸の結合 $\beta_{N,p}$ は、この条件を満たすように選ばれた数です（選び方は 10-04）[源]。$\bar\beta$ は暦の欄 `Calendar.bar`（67 行）で、大きく取ります（9-07 の表：閾が 1 以下になるにはおよそ $10^6$ 以上）。全ての段で結合は帯 $[\hat\beta_m/2,2\hat\beta_m]$ に留まり、強結合の領域を繰り込みで通りません[推]。

`History.Selected` は構成の定理の結論 `Family.Makes` の欄 `wilson` です（`Construction.lean` 45 行）[源]。`running` から公開の定理の言明

`WilsonRegularity.running` が出ます（10-06）。

04

## 測度だけから決まる数ではない

源の説明文は三か所で、この結合が測度の不変量ではないことを書いています[源]。

1. `YM/RG/History.lean` 25〜33 行：逆結合の定義はここでは、表示の基の部分の中の実際のスカラーで、平らな係数と運動項の計量の正規化、先頭の Fourier の係数を除いた一ループの核、affine な剰余の消滅などの条件のもとでのもの。**測度に独立に結びついた数ではない**。そのような表示と継続が**在る**という形の定式化で、一意性は要求しない。`Running` を越える通常のベータ関数の主張を推し量らないこと。
2. `YM/UVNext/COUPLING_RESET/Reset.lean` の説明文：道と活動を決めていない測度の上に、内在的な $\beta$ の読み出しが在るとは何も言っていない。
3. `YM/Pert/Asymptotics/RawAxis.lean` の説明文：同じ走る逆作用の係数の先頭の対数を取り出すもので、それが物理の座標空間の方式の結合に等しいとは、取り出した比べを越えては言わない。

表示が一つに決まらない以上（9-06 §05）、同じ密度 $\rho_m$ に対して別の表示の別の $\beta$ がありえます[推]。だから「段 $m$ の結合」は、構成が選んだ段の列 `History` の中の数です。合わせの条件 $\beta(N,p,0)=\bar\beta$ も、その表示の中の係数を合わせる条件で、段 0 の測度の性質を一つ固定する条件ではありません[推]。

測度の側から見える結合は、別に二つ定義されています（10-06）[源]。

- $g_W(r)$：裸の結合の列から出発し、長さ $r$ の直下の段まで繰り込み、極限を取った表示の係数の $-1/2$ 乗。これも表示の係数です。
- 連続の相関から作る第二の結合：スカラーの二点の微分とテンソル・スカラー・スカラーの積分した相関を自由場の値に正規化し、テンソル・スカラーの相関の微分で測る（評価書 §7.4）[評]。これは極限の相関だけで書かれます。評価書は、この結合と $g_W$ の比が 1 に近づくことを構成が証明している、と書いています[評]。Lean では構造 `FieldComparison` の欄 `calibrationX`（`YM/TraceExtension/Endpoint.lean` 49 行）で、どの目標の結論に残るかは 10-06 §05 にまとめます。

05

## 規約の換算

評価書の規約では、Wilson の測度は $\exp\bigl(-\beta\sum_p(1-\operatorname{Re}\operatorname{tr}U_p/d_G)\bigr)$、Lie 環の内積は $\langle X,Y\rangle=-\operatorname{Re}\operatorname{tr}(XY)/d_G$、そして $\beta=1/g_0^2$ と読みます（§3・§4）[評]。$C_g$ は随伴表現の Casimir の定数で、源は $-\operatorname{tr}(\operatorname{ad}x\ \operatorname{ad}y)=C_g\langle x,y\rangle$ と定めています（`YM/Gauge/Casimir.lean` 140 行、`Colors.lean` 180〜182 行）[源]。

SU(2)（$d_G=2$）では、この内積で正規直交な基底 $i\sigma_a$ をとると $C_g=8$ で、$s=11\cdot 8/(24\pi^2)=11/(3\pi^2)\approx 0.3715$ です[初]（数値の検算は浮動小数で行った）。重み $1-\operatorname{Re}\operatorname{tr}U_p/2$ は本書の $1-\operatorname{Re}U_p$（19-01）と同じなので、公開された構成の $\beta$ と本書の $\beta$ は同じ重みの係数として同じ数です[初]。本書の第三巻が一段の傾きとして使う値 $11/(3\pi^2)$ は、この $s$ に一致します（23-01）[初]。本書の $\beta$ は $4/g_{\mathrm{std}}^2$、公開された構成の $\beta$ は $1/g^2$ で、$g_{\mathrm{std}}^2=4g^2$ なので同じ数です（8-01 §04）[初]。

$C_g$ の値は、群をどの $U(d_G)$ に入れるか（表現）に依ります。内積を $d_G$ で割る規約なので、$SU(N)$ の定義表現では $C_g=2N^2$（$SU(2)$ で 8、$SU(3)$ で 18）、別の表現で入れると別の値です[初]。換算の全体（$g_{\mathrm{std}}^2=2d_G\,g^2$、$SU(2)$ では三つの規約で $\beta$ が同じ数）は 8-01 §04 の換算表 を基準にします。評価の側のリポジトリ（`yang-mills-group/YM`）の `submissions/openai-20261028/checks/ImportedAFGauge.lean` には別の規約の $b_0$ が書かれていますが、説明文しか読んでいません。

06

## 本書の検討で見えていたこと

本書の検討の「合わせ」は、**測度だけで定義できる量**を固定の値に合わせる形でした（示すべき言明の一つ、19-07 §合わせ）。

- 押し出した測度の粗い面の平均の期待値：決定的なブロック写像で段 $m_0$ まで押し出した測度の下での、粗い面の Re の平均の期待値。辺 3・中心の設計で、各 $k$ でこの値を目標 $\kappa_0\in[0,1)$ にする非負の結合が在ることが Lean で閉じています[Lean]：`Block3.tuned3_exists`（仮定は設計の値と算術だけ。結合の単調性・発散・一意性は言っていない）。今の設計でも、期待値の連続性と、値の間に解が在ることが閉じています（`continuous_Yc`・`exists_tuning`）。
- 渦の比 $\theta_M$：捩れた分配関数の比で、全ての $\kappa_0\in[0,1)$ に $\theta(\beta)=\kappa_0$ の解が在ること（`tuning_all`、21-07）[Lean]。

どちらも既知の型の議論（連続関数の中間値）の形式化です。違いを表にします。

| | 公開された構成 | 本書の検討 |
|---|---|---|
| 合わせる量 | 段 0 の表示の $F^2$ の係数 | 粗い面の平均の期待値、渦の比 |
| 測度だけで書けるか | 書けない（表示が先に要る） | 書ける |
| $F^2$ の係数との関係 | 定義そのもの | 別に示す必要がある（示していない） |
| 結合の領域 | 全段で弱結合の帯の中 | $\beta \geq 0$ の全体（強結合も含む） |

共通するのは、単位の長さで決まる量を固定の値に合わせることで尺度を決める、という考え方です[推]。公開された構成の読み直しの道具（二つの配位の対数比と強い単調性、10-03）は、「観測量の値」と「$F^2$ の係数」を一段ごとに結ぶ手本になりえます[推]。比べは 14-03 にまとめます。

07

## 読めていない所

- 表示の一意性が無いことの具体例（同じ密度の二つの表示）を源は与えておらず、本書も作っていません。§02 の付け替えの例は推し量りです。
- $\bar{\beta}$ を変えたとき、極限の相関がどう変わるか（長さの付け替えで写り合うか）。源の `YM/Extension/UV/` の近い目標への射撃は依存の外（outside）で、その意味は読んでいません。
- 評価の側の `submissions/openai-20261028/checks/CommonScaleAudit.lean`（`calibrated_reset`、67 行）の中身（言明の形だけ）。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| [源] 段 $m$ の結合は表示の欄 `beta`（主な作用の係数）で、裸の結合は段 $N$ の値 | 測度だけから決まる結合としての読み（源が否定） |
| [源] 運動項と一ループの部分の二つの正規化が $F^2$ の付け替えを止める | 表示が一つに決まること（言っていない） |
| [源] 段 0 で全ての $N, p$ について $\beta = \bar{\beta}$、全段で帯 $[\hat{\beta}_m/2, 2\hat{\beta}_m]$、一段で約 $s \log b_m$ 減る（構成の定理の結論の欄） | $\bar{\beta}$ を変えたときの依り方 |
| [初] SU(2) で $C_g = 8$、$s = 11/(3\pi^2)$。本書の $\beta$ と同じ重みの係数 | 別の内積の規約での値の比べ（評価の側は説明文だけ読んだ） |
| [Lean] 本書の合わせの量（粗い面の平均の期待値・渦の比）は測度だけで書け、解の存在が Lean で閉じている | それと $F^2$ の係数の関係 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 段の結合・段の列・説明文 | 源 | `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）`YM/RG/History.lean` 25〜33・67・79・204〜240 行 |
| 正規化 | 源 | 同 `YM/RG/PathActions.lean` 161〜185 行 |
| 裸の結合・構成の定理の欄 | 源 | 同 `YM/Source/Construction.lean` 38・44〜45 行 |
| 傾きと Casimir | 源・初 | 同 `YM/Gauge/Colors.lean` 180〜184 行、`YM/Gauge/Casimir.lean` 140 行。SU(2) の値は手計算と浮動小数の検算 |
| 説明文（読み直し・先頭の対数） | 源 | 同 `YM/UVNext/COUPLING_RESET/Reset.lean` 冒頭、`YM/Pert/Asymptotics/RawAxis.lean` 冒頭 |
| 評価書の規約と結合の説明 | 評 | `yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）§3・§4・§7.4、付録 A |
| 本書の合わせの量 | Lean | 本書の Lean の束（`Block3.tuned3_exists`、`continuous_Yc`・`exists_tuning`、`tuning_all`）。Lean の核の検査を通った束。19-07・21-07 |

**この章で使った語** — 段の結合、裸の結合、表示、運動項の正規化、一ループの部分の正規化、合わせ、基準値 β、帯、走る結合、Casimir の定数。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：10-02 一段の写像と一ループの計算 — 一段で結合がどれだけ減るかの主部 $s \log b$ を、殻の積分として計算する所を読みます。

# 一段の写像とループの計算 — 殻の積分と係数 11C_g/(24π²)

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討、§07 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 一段の結合の移り $\alpha(N,m)$ の条件 $|\alpha + s\log b_m| + 1 \le \mathrm{drift}_{m+1}$、その主部を出す殻の積分 $(2\pi)^{-4}\int_{\mu<|k|\le 1}$ の計算（式で）、連続の殻と格子の Brillouin 域の積分の差を $L$ に依らない定数で抑える評価、そして二ループの係数を使わずに済む理由の入口。

**前提となる章** — 10-01 段 m の結合、4-06 漸近自由。四次元の極座標と球面の上の平均は 1-11。

**先に言うこと** — 殻の積分の言明と格子との差の言明は読みましたが、それが一段の移り $\alpha$ と結ばれる証明（`alphaPay` と `Kin.alpha` のつなぎ）は辿っていません。一段の写像の「一ループ」の部分の全体（停留点のまわりのガウスの積分）は 11-09 で読みます。

この章の順序

1. **言明 — 一段の移りの条件**：`Kin.Planned.kinetic` と、一段の結合の写像
2. **一ループの有効作用と二階微分**：`FiniteBound`
3. **殻の積分**：被積分関数の主部と角度の平均、`poleSpin`
4. **格子との差**：内側の球・殻・外側に分ける `absoluteGeode`、辺に依らない定数 `HorizCalc`
5. **二ループは使わない**：一段の誤差は定数のまま
6. **本書の検討で見えていたこと**：辺 2 の一段の係数 $11\ln 2/(3\pi^2)$
7. **読めていない所**

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。源はリポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）、評価書は `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）です。公開された構成の定理は源 で言明の字句を、「証明されている」という水準は評 で書きます。記号：一ループの傾きを $s = 11C_g/(24\pi^2)$（評価書では一ループの係数の二倍として書かれる量、源の `slopeConstant`）と書きます。

01

## 言明 — 一段の移りの条件

一段（段 $m+1$ から段 $m$）で、結合は次の形で移ります源 。

$$\beta(N,p,m) = \beta(N,p,m+1) + \alpha(N,m) + d, \qquad |d| \le 1. \tag{1}$$

$\alpha(N,m)$ は**一ループの移り**で、源の `Kin.alpha`（`YM/PCalc/Loop.lean` 75 行）です。体積の番号 $p$ を引数に持ちません源 。$d$ は表示を読み直すときの補正で、10-03 で読みます。$|d| \le 1$ は一段の構造 `Directed.Move` の欄 `δ`（`YM/PCalc/Band.lean` 55 行：$|u.\beta - v.\beta - \alpha| \le 1$）で、`CouplingReset.advance` が $|d| \le$ 幅、幅 $\le 1$（`ResetPrices.unit`、`YM/UVNext/COUPLING_RESET/Prices.lean` 43 行）から供給します源 。

一ループの移りには、条件 `Kin.Planned.kinetic`（同 110 行）が課されています源 。

$$\left|\alpha(N,m) + s\log b_m\right| + 1 \;\le\; \mathrm{drift}_{m+1}. \tag{2}$$

$s = 11C_g/(24\pi^2)$、$b_m$ は段 $m$ の辺、$\mathrm{drift}_{m+1}$ は段の定数です。(1) と (2) を合わせると $|\beta(N,p,m+1) - \beta(N,p,m) - s\log b_m| \le \mathrm{drift}_{m+1}$ で、これが段の列の一段の条件 `History.Transfer`（`YM/RG/History.lean` 226〜227 行）の第二式です初 。説明文は、drift を「普遍な一ループの主部からの剰余の段ごとの大きさで、特定の一ループの計算の同定ではない」と書いています（220〜222 行）源 。

$\alpha$ が体積に依らないことが、走りの評価が $p$ に一様になる（10-06）理由の一つです推 。

02

## 一ループの有効作用と二階微分

一ループの移りの意味は、条件 `FiniteBound`（`Loop.lean` 62〜71 行）から読めます源 。粗い場 $u$ を固定し、細かい場を停留点（細かい作用に罰の項を足した作用の停留点、9-04 §05）

のまわりでガウスの積分をすると、粗い場の有効作用に

$$\Gamma^{1\mathrm{loop}}(u) = \text{一ループの原子}(u) + \tfrac{1}{2}\log\det \mathrm{Hess}(u) - \log(\text{座標の Jacobian}) \tag{3}$$

が出ます（`thermal`、46〜49 行）。`FiniteBound` の欄 `wave_price` は、平面波の二方向で取った $\Gamma^{1\mathrm{loop}}$ の二階微分が、$\alpha \times (\text{運動項の二次の部分}) + (\text{一ループの原子})$（`draft`、51 行）の二階微分と、点の数 × 定数 × $e^{-\gamma\cdot(\text{辺})}$ 以内で一致することを要求します源。つまり $\alpha$ は、一ループの有効作用の運動項の係数の移りです推。

二階微分を平面波で取るので、$\alpha$ は運動量の空間の積分で書けます。細かい格子の単位で、外の運動量について二階の係数を取り、粗い尺度より長い波長を切る赤外の切断 $\mu = 1/L$ を入れた Brillouin 域の積分になります推。源はこの係数を `alphaPay`（`YM/Next/STATIONARY/Films/LeadingRay.lean` 699 行）と呼んでいます源。

03

## 殻の積分

被積分関数の、運動量 $k \in \mathbb{R}^4$ について $-4$ 次の斉次の主部は（`poleVec`、`YM/Next/STATIONARY/OneLoop/Bubbles.lean` 125 行）源

$$\Pi(k) = 4C_g\Big(\frac{k_1^2}{|k|^6} - \frac{4k_1^2k_0^2}{|k|^8} - \frac{1}{|k|^4}\Big). \tag{4}$$

$k_0$ は外の運動量の向き（二階微分を取る向き）、$k_1$ は場の色・偏りの向きにあたる成分です推。`poleSpin`（`YM/Next/STATIONARY/OneLoop/MomentumIntegral.lean` 326 行）は、$0 < \mu \le 1$ について

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{\mu<|k|\le 1} \Pi(k)\, d^4k = -\,s\,\log\frac{1}{\mu}, \qquad s = \frac{11C_g}{24\pi^2} \tag{5}$$

と言います源（係数 $(2\pi)^{-4}$ は `cartWeight`、28 行）。

手で確かめます初。四次元の単位球面の上の平均を $\langle\cdot\rangle$ と書くと、対称性から

$$\langle \hat k_1^2\rangle = \frac{1}{4}, \qquad \langle \hat k_1^2 \hat k_0^2\rangle = \frac{1}{d(d+2)} = \frac{1}{24} \quad (d=4). \tag{6}$$

よって $|k| = r$ の球面の上で $\Pi$ の平均は $\frac{4C_g}{r^4}\big(\frac14 - \frac{4}{24} - 1\big) = -\frac{11C_g}{3r^4}$ です。四次元の球殻の体積の要素は $2\pi^2 r^3\,dr$ なので

$$\int_{\mu<|k|\le 1}\Pi\, d^4k = -\frac{11C_g}{3}\cdot 2\pi^2\int_\mu^1 \frac{dr}{r} = -\frac{22\pi^2 C_g}{3}\log\frac{1}{\mu}, \qquad \frac{1}{16\pi^4}\cdot\Big(-\frac{22\pi^2C_g}{3}\Big) = -\frac{11C_g}{24\pi^2}. \tag{7}$$

本書は (6) と (5) を、単位球面の上の一様な点 40 万個の平均でも確かめました（$\langle \hat{k}_1^2 \rangle \approx 0.2503$、$\langle \hat{k}_1^2 \hat{k}_0^2 \rangle \approx 0.0417$、$\mu = 0.05$ で積分の値の差は $10^{-4}$ 程度、SU(2) で $C_g = 8$）初。

$\mu = 1/L$ と置くと、殻の積分は $-s \log L$ です。辺 $L$ の一段で、主部は結合を $s \log L$ だけ減らします。これが (2) の $-s \log b_m$ です推。三つの項のうち $-1/|k|^4$ が一番大きく（係数 $-1$）、前の二つ（$+1/4$ と $-1/6$）が補正です初。四次元の $1/|k|^4$ の積分が対数になることが、結合が無次元で対数で走ることの計算上の姿です推。

## 04 格子との差

実際の $\alpha$ は格子の Brillouin 域の上の積分で、被積分関数は主部 $\Pi$ そのものではありません。`absoluteGeode`（`MomentumIntegral.lean` 346 行）は、域を三つに分けて差を抑えます源。

- 内側の球 $|k| \le \mu$：被積分関数 $g$ の大きさの仮定 `Waves1`：$|g(k)| \le A/(|k| + \mu)^4$（`Bubbles.lean` 276 行）で、体積 $\sim \mu^4$ との積が $O(A)$。
- 殻 $\mu < |k| \le 1$：主部との差の仮定 `Waves2`：$|g(k) - \Pi(k)| \le D/|k|^3 + D\mu^2/|k|^6$（277 行）で、$\int_\mu^1 (r^{-3} + \mu^2 r^{-6}) r^3 dr = O(1)$。
- 外側（Brillouin 域の残り）：`Waves1` で $O(A)$。

結論は $|\alpha_{\mathrm{pay}} + s \log \mu^{-1}| \le (2\pi)^{-4} c(A, D)$ で、右辺は $\mu$ に依りません源。`HorizCalc`（`YM/Next/STATIONARY/Level/Transition.lean` 20 行）は、これを辺の言葉で言い直した形の言明です：ある $L_{\min}$ と $D \ge 0$ が在って、$L_{\min}$ 以上の全ての奇数の $L$ で $|\alpha_{\mathrm{pay}} + s \log L| \le D$源（言明はさらに、辺の列・道のデータ・床の条件などについての「全ての」と、評価する量の「在る」を含みます。ここではそれらを略して書きました）。そして `pouring`（`YM/Next/STATIONARY/FullPlanned.lean` 17 行）は、ゲージ群が単純なら、この形の評価の束 `Fluent G` が成り立つと言います源。

大事なのは、差の定数 $D$ が**辺 $L$ に依らない**ことです源。一段の誤差は $O(1)$ で、$\log L$ に比べて小さい、という形です。

## 05 ニループは使わない

標準の摂動論では、結合の走りは $\mu\, dg/d\mu = -b_0 g^3 - b_1 g^5 - \cdots$（4-06）で、一段の移りの $O(1)$ の部分には二ループ以上の寄与と格子の有限の効果が入ります典。公開された構成はこ

の $O(1)$ を計算しません源。(2) は $\alpha$ を主部 $-s\log b$ から定数 drift 以内に置くだけで、drift の中身は評価しません。

辺が固定なら、$n$ 段の誤差は $n\cdot O(1)$ で、主部 $s\,n\log b$ と同じ大きさになり、傾き $s$ が確定しません。公開された構成は辺を段とともに育て、$\mathrm{drift}/\log b_m \to 0$ にすることで、誤差の和を主部の $o(\cdot)$ にしています（10-05）源。二ループの係数を使わずに一ループの傾きを確定させる、という設計です。その代わり、間隔の列は特別なものになります（評価書 §4.3：間隔の列の型についての普遍性は無い）評。

走りの定理が言うのも主部だけです。二ループの係数、$\log\log$ の補正、$\beta-(\bar\beta+s\log D)$ の有界性は言われていません（10-06）源。

06

## 本書の検討で見えていたこと

本書の第 15 部と第三巻は、辺 2 の一段で結合が減る量の主部を $\frac{11}{3\pi^2}\ln 2$（SU(2)）としていました（15-01・23-01）。数値は $11\ln 2/(3\pi^2)\approx 0.2575$ です。

規約を揃えると、公開された構成の傾き $s$ は SU(2) で $11/(3\pi^2)$ で（10-01 §05、換算は 8-01 §04）、辺 2 の一段ぶん $s\ln 2$ は本書の値と一致します初。前提は、本書の $\beta$ が $\sum_p(1-\mathrm{Re}\,U_p)$ の係数であること（19-01）です。一致は本書の検討の手計算で、Lean の言明ではありません。

- 公開された構成は 3 以上の奇数の辺しか使わないので、辺 2 は扱っていません源。
- 一致するのは $\log b$ の係数だけで、一段の $O(1)$ の定数は比べられません推。
- 本書の検討の紫外の試み（第 15 部）は、辺を 2 に固定し、一段の正味の括弧（主部 ± 一段の取りこぼし）を段に一様に払う形を探していました。辺を育てて $O(1)$ を $\log b$ で割って消すという道は取っていません（14-05）。

07

## 読めていない所

- `alphaPay` と `Kin.alpha` をつなぐ証明（`YM/Next/STATIONARY/FullPlanned.lean` の先、`under_contract` 以下）。
- `alphaPay` の正確な定義（`leapTip`・`profitable` の中身）と、(4) の $k_0,k_1$ の意味（§03 の読みは推し量り）。
- 仮定 `Waves1`・`Waves2` の定数の供給（`astronomy`・`saunter`・`vintageWilson`）。

- これらの宣言が公開の定理の存在の道に載るか。記録の上では `poleSpin`・`absoluteGeode`・`HorizCalc`・`pouring`・`Kin.Planned.kinetic` は used（証人 `SharpGram.habitat`）で、存在の道の鎖は辿っていません。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 一段の移りは $\beta_m = \beta_{m+1} + \alpha + d$、$\lvert d\rvert \le 1$、$\lvert\alpha + s\log b_m\rvert + 1 \le \mathrm{drift}_{m+1}$、$\alpha$ は体積に依らない | drift の中身（評価しない設計） |
| 源 $(2\pi)^{-4}\int_{\mu<\lvert k\rvert\le 1}\Pi = -s\log(1/\mu)$（`poleSpin`） | 二ループの係数 |
| 初 角度の平均 $1/4$・$1/24$ と殻の体積 $2\pi^2 r^3 dr$ から係数 $11C_g/(24\pi^2)$ が出る（数値でも確認） | — |
| 源 格子の積分と主部の差は辺に依らない定数で抑えられる（`absoluteGeode`・`pouring`） | `alphaPay` と `Kin.alpha` のつなぎ（辿っていない） |
| 初 SU(2) で辺 2 の一段ぶん $s\ln 2 = 11\ln 2/(3\pi^2)$ は本書の値と一致（規約を揃えた手計算） | 一段の $O(1)$ の定数の比べ |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 一段の移りの条件・有効作用 | 源 | `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）`YM/PCalc/Loop.lean` 46〜51 行（`thermal`・`draft`）、62〜71 行 `FiniteBound`、75 行 `Kin.alpha`、110 行 `kinetic` |
| 主部と殻の積分 | 源 | 同 `YM/Next/STATIONARY/OneLoop/Bubbles.lean` 125・276・277 行、`MomentumIntegral.lean` 28・174・326・346 行 |
| 辺に依らない定数 | 源 | 同 `YM/Next/STATIONARY/Level/Transition.lean` 20 行 `HorizCalc`、`FullPlanned.lean` 17 行 `pouring`、`Films/LeadingRay.lean` 699 行 `alphaPay` |
| 段の列の一段の条件 | 源 | 同 `YM/RG/History.lean` 220〜227 行 |
| (6)(7) と数値の検算 | 初 | 本文の手計算。球面の上の一様な点 40 万個の平均（浮動小数の計算の記録） |
| 普遍性が無いこと | 評 | `yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）§4.3 |
| 本書の辺 2 の一段の値 | 初 | 15-01・23-01 |

**この章で使った語** — 一ループの移り、drift、一ループの有効作用、殻の積分、角度の平均、Brillouin 域、赤外の切断、二ループ、傾き $2\mathrm{b}_0$。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：10-03 読み直し ― 一段の後に表示の $\beta$ を、二つの配位での密度の対数比から読み直す手続きを読みます。

# 読み直し — 二つの配位での密度の対数比から結合を読む

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討、§07 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 一段の移りの式 $\beta_m = \beta_{m+1} + \alpha + d$（10-02 の (1)）の補正 $d$ がどう決まるか。押し出した密度 $H$ の、平らな配位 $\mathbf{1}$ と試験配位 $V$ での値の対数比を、表示の式に合わせる一つの方程式。その左辺が $d$ について傾き $K(V)/2$ 以上で増えること（強い単調性）から、根が一つで、入力に連続に依り、$|d| \le 1$ であること。

**前提となる章** — 10-01 段 m の結合、10-02 一段の写像と一ループの計算、9-06 密度の表示。

**先に言うこと** — 読み直しが決めるのは二つのスカラー（$\beta$ と真空の項 $v$）だけです。表示が密度に**全ての配位で**等しいことは、別の剰余の評価（`Remainder`）から出ます。その評価の中身（小さい場の一段の展開）は 11-09 の範囲で、この章では言明の形だけ読みます。試験配位 $V$ の具体形は読んでいません。

この章の順序

1. **言明 — 二つのスカラーの読み直し**：`Template` ・ `residual` ・ `correct` ・ `advance`
2. **二つの配位**：平らな配位で $v$、試験配位で $\beta$
3. **強い単調性と一意な根**：`Response` と `solve`
4. **ずれの上界と連続性**：`posterior` ・ `balance`、$|d| \le 1$
5. **二点の等式から全体の等式へ**：`ShapeControl` と `realizes`
6. **本書の検討で見えていたこと**：観測量の値と $F^2$ の係数を結ぶ道具
7. **読めていない所**

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。源はリポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）、評価書は `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）です。公開された構成の定理は源 で言明の字句を、「証明されている」という水準は評 で書きます。

01

## 言明 — 二つのスカラーの読み直し

一段の後、段 $m$ の密度は核で押し出した関数 $H = \mathcal{T}_{\beta_{m+1}}\rho_{m+1}$（9-01）です。これを段 $m$ の表示（9-06）で書き直すとき、源は表示の残りの部分（道のデータ・切りの母数・帳簿の点・活動の族）を先に決め、二つのスカラー $\beta$ と $v$ を最後に読み直します（`YM/UVNext/COUPLING_RESET/Reset.lean`、`Advance.lean`）源 。

表示の指数の部分を、$\beta$ について一次の形に分けて書きます（`Template`、`Reset.lean` 43〜47 行、60〜62 行）源 。

$$-\log\frac{\rho(U)}{e^{v|\Lambda|}} = \beta\,K(U) + B(U) + A_d(U) \qquad (\text{旗の無い } U). \tag{1}$$

$K$ は主な作用の $\beta$ の掛かる部分（`leg`、源の `kinetic`）、$B$ は $\beta = 0$ の主な作用、つまり一ループの原子（`background`）、$A_d$ は正則な活動の和（`add`）です。活動は補正 $d$ に依ってよい形になっています（`terms : ℝ → ℝ → Activities`）。旗が無ければ気体は 1 です（9-06）。

読み直しの方程式は、源の `residual`（64〜65 行）源 ：

$$\Phi_x(d) = \big(\beta_x^{\mathrm{pred}} + d\big)K(V) + B(V) + A_{x,d}(V) - \big[\log H_x(\mathbf{1}) - \log H_x(V)\big] = 0. \tag{2}$$

$x$ は曲線の径数（射撃の裸の結合、10-04）、$\beta_x^{\mathrm{pred}} = \beta_{m+1}(x) + \alpha(N,m)$ は一ループの予測（`predictor`、`Advance.lean` 51 行）、括弧の中は二つの配位での密度の対数比（`contrast`、`Reset.lean` 50 行）です。

定理 `CouplingReset.correct`（`Advance.lean` 157 行）は、仮定（試験配位の条件 `Usable`、入力の資金 `Income`、入力が段 $m+1$ の曲線であること）のもとで、(2) の根 $d(x)$ が在り、$x$ について連続で、読み直した表示が $\mathbf{1}$ と $V$ の二点で $H_x$ に等しい、と言います源 。`advance`（175 行）は、さらに剰余の仮定 `Remainder` のもとで、読み直した表示が一段の等式（全ての配位での等式）を満たし、$|d(x)| \le$ 幅 $\le 1$ であることを言います源 。

02

## 二つの配位

読み直しは二つの配位だけを使います源。

- **平らな配位 $\mathbf{1}$**（全てのリンクが単位元）：面の値は全て 1 で、主な作用も一ループの原子も 0、正則な活動は条件 $E_i(\mathbf{1}) = 0$ で 0、旗は無く気体は 1 です。表示の値は $e^{v|\Lambda|}$ だけなので、$v = \log H(\mathbf{1})/|\Lambda|$ と読めます（`scalar`・`scalar_eq`、51・85 行）。
- **試験配位 $V$**：旗が無く、主な作用の $\beta$ の部分が点の数に比べて大きい配位です。条件 `Usable`（`Advance.lean` 55〜58 行）は、$\mathrm{flags}_{t_m}(V) = \varnothing$ かつ $K(V) \geq |\Lambda|\,\eta\,t_m^2$（$\eta$ は段の定数、$t_m$ は 9-07 の閾）を要求します。そのような $V$ が在ることは `usable`（60 行）が供給します。

二つの配位での表示の値を $H$ に合わせる二つの等式は、二つの未知数 $v, \beta$ に対して、$v$ は平らな配位で、$\beta$ は対数比 (2) で決まる、という分かれた形です（`contrast_eq`、88 行）源。対数比を使うので、密度に正の定数を掛けても $v$ が動くだけで $\beta$ は変わりません（説明文、`rescale_*`）源。

読むのが旗の無い小さい場の配位だけなので、$\beta$ は「小さい場での有効作用の運動項の係数」として読まれます推。説明文は、他の配位での一致には分離のほかに剰余の評価の代価が要る、と書いています（`Reset.lean` 冒頭）源。

03

## 強い単調性と一意な根

源の `Response`（`Root.lean` 27〜31 行）は、二変数の関数 $\Phi(x, d)$ について次の四つを束ねた構造です源。

$$\mu > 0, \qquad a \leq b \;\Rightarrow\; \Phi(x,b) - \Phi(x,a) \geq \mu\,(b-a), \qquad d \mapsto \Phi(x,d) \text{ 連続}, \qquad x \mapsto \Phi(x,a) \text{(連}$$

二つ目が**強い単調性**（傾きが $\mu$ 以上）です。`correct` は、(2) について $\mu = K(V)/2$ の `Response` を作ります源。(2) の $d$ についての傾きは $K(V)$ と、活動の $d$ への依り方 $\partial_d A_{x,d}(V)$ の和です。源の `response`（`Reset.lean` 131 行）は、活動の変化が $-(K(V) - \mu)(b-a)$ 以上であれば傾きが $\mu$ 以上になる、という形の十分条件で、その代価は `Income` の欄として払います源。

強い単調性から根は高々一つです。在ることは中間値の定理からです：`solve`（`Root.lean` 60 行）は、各 $x$ で $\Phi(x, \mathrm{lo}) \leq 0 \leq \Phi(x, \mathrm{hi})$ となる括弧が在れば、根 $d(x) \in [\mathrm{lo}, \mathrm{hi}]$ が在り、$x$ について連続であると言います源。

強い単調性が**補正 $d$ についての性質**であることに注意します。説明文（`response` の上、127〜130 行）は、強い単調性には既に決めた道の寄与が含まれるので、**入ってくる裸の結合についての単調性は求めない**、と書いています[源]。射撃の側（10-04）でも、裸の結合から段 0 の結合への写像の単調性は使われません。

04

## ずれの上界と連続性

強い単調性から、根のずれが方程式の値で抑えられます[源]（`Response.inverse`・`posterior`、`Root.lean` 42・49 行）。

$$|b-a| \le \frac{|\Phi(x,b)-\Phi(x,a)|}{\mu}, \qquad |d(x)-a| \le \frac{|\Phi(x,a)|}{\mu}. \tag{4}$$

$a=0$ と置けば、一ループの予測そのもので方程式がどれだけ外れているか $|\Phi(x,0)|$ で補正の大きさが抑えられます[初]。`balance`（72 行）は、$|\Phi(x,0)| \le \mu r$ なら $\pm r$ が括弧になり、根は $[-r,r]$ に在る、と言います[源]。`correct` はこれを幅 $r$（`width`、源の価格の表 `ResetPrices.radius`）で使い、`advance` の結論 $|d| \le$ 幅、さらに幅 $\le 1$（`q.unit`）を出します[源]。

(4) の一つ目から、根は入力に連続に依ります（`Response.continuous`、`Root.lean` 54 行）[源]。$x \mapsto \Phi(x,a)$ が連続なら $x \mapsto d(x)$ も連続です。これが射撃法（10-04）で、裸の結合を動かしたとき段ごとの結合が連続な曲線になる（`Curve`）ことの一つの部品です[推]。

| 道具 | 使う性質 | 出るもの |
|---|---|---|
| 中間値の定理（`solve`） | 括弧と連続性 | 根の存在 |
| 強い単調性 | 傾き $\ge \mu$ | 根の一意性 |
| `posterior` | 強い単調性 | 補正の上界 $\lvert\Phi(x,0)\rvert/\mu$ |
| `Response.continuous` | 強い単調性＋$x$ についての連続 | 根の連続性 |

05

## 二点の等式から全体の等式へ

二つの配位で合わせただけでは、表示が全ての配位で密度に等しいとは言えません。源はこの段差を、別の仮定で埋めます[源]。

`ShapeControl`（`Reset.lean` 115〜117 行）は、各 $x$・各配位 $U$ について、表示の形の部分（$e^{v|\Lambda|}$ を除いたもの）と $H_x(U)/H_x(\mathbf{1})$ の差が、(2) の値 $|\Phi_x(a)|$ の定数倍で抑えられる、という

仮定です。`realizes`（119 行）は、根 $d(x)$ では右辺が 0 なので、表示が $H_x$ に**全ての配位で等しい**と結論します源 。

つまり、一段の等式（近似なしの等式、9-01 §04）の中身は、(i) 小さい場の一段の展開で「表示の形がスカラー以外で一致する」ことを別に示し（`Remainder` の欄 `shape`）、(ii) 残る二つのスカラーを読み直しで合わせる、という分担です推 。小さい場の一段の展開は、ガウスの近似の誤差も非ガウスの残りも被積分関数の中に残したまま運ぶ三つの等式で、`Move.ident` を出します（11-09）源 。

どの目標に入っているか。`correct`・`advance`・`residual`・`solve` は記録の上で used（証人 `SharpGram.habitat`）で、`advance` の直接の使い手は `AnalyticBridge.VerifiedReset.Return.reset` です源 。本書の検討は源を辿り、公開の定理の存在の道（`rodB` から）に `reset` が載ることを鎖で確かめています源 。

06

## 本書の検討で見えていたこと

本書の検討の合わせ（10-01 §06）は、押し出した測度の粗い面の平均の期待値や渦の比を、裸の結合 $\beta$ の連続関数として見て、中間値の定理で目標に合わせる形でした。Lean で閉じているのは解の存在までで、$\beta$ についての単調性・一意性は言っていません（`Block3.tuned3_exists`・`tuning_all`）Lean 。

公開された構成の読み直しは、別の場所で一意性を得ています。

- 動かすのは裸の結合ではなく、**表示の中の補正** $d$ です。表示の他の部分を固定すると、対数比の方程式は $d$ について傾き $K(V)/2$ 以上で増え、根は一つです。
- 裸の結合についての単調性は求めず、射撃（10-04）は存在だけを使います。

本書の検討で欠けていた「観測量の値 $\leftrightarrow$ $F^2$ の係数」の関係（10-01 §06 の表）を一段ごとに運ぶ道具として、二つの配位の対数比と強い単調性による読み直しは手本になりえます推 。ただし、公開された構成の対数比は表示の中の量で、本書の合わせの量（測度だけで書ける期待値）とは別物です。両者を結ぶ言明は、本書の側にも公開された構成の側にもありません推 。比べは 14-03 にまとめます。

07

## 読めていない所

- 試験配位 $V$ の具体形（`YM/UVNext/COUPLING_RESET/Probe.lean`。説明文だけ読んだ）と、`usable` の証明の中身。
- 入力の資金 `Income` と剰余の仮定 `Remainder` が、存在の道でどう供給されるか（`AnalyticBridge/VERIFIED_RESET_STEP` の側）。
- 説明文が言う一意性 `scalars_unique`（`Advance.lean` 冒頭）の言明の在りかと形。
- 幅 `ResetPrices.radius` の値と、それが段の定数のどこから来るか。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 $v$ は平らな配位で、$\beta$ は平らな配位と旗の無い試験配位での密度の対数比で読み直す（方程式 (2)） | 試験配位の具体形 |
| 源 仮定のもとで (2) は $d$ について傾き $K(V)/2$ 以上で増え、根は一つで入力に連続（`correct`・`solve`） | 裸の結合についての単調性（求めていない） |
| 源 剰余の仮定のもとで読み直した表示は全ての配位で密度に等しく、$\lvert d\rvert \le 1$（`advance`・`realizes`） | 剰余の仮定の供給（11-09 の範囲） |
| 源 存在の道に読み直しが載ることは、本書の検討で鎖を源で辿って確かめた | — |
| 推 読み直しは、観測量の値と $F^2$ の係数を一段ごとに結ぶ道具の手本になりうる | 本書の合わせの量と表示の係数を結ぶ言明（どちらの側にも無い） |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 形・方程式・二点の等式・全体の等式 | 源 | `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）<br>`YM/UVNext/COUPLING_RESET/Reset.lean`：`Template` 43 行、`contrast` 50 行、`scalar` 51 行、`leg`・`background`・`add` 60〜62 行、`residual` 64 行、`scalar_eq` 85 行、`contrast_eq` 88 行、`passes` 99 行、`ShapeControl` 115 行、`realizes` 119 行、`response` 131 行 |
| 強い単調性と根 | 源 | 同 `Root.lean`：`Response` 27 行、`inverse` 42 行、`posterior` 49 行、`continuous` 54 行、`solve` 60 行、`balance` 72 行、`balance_solve` 80 行 |
| 一段の読み直し | 源 | 同 `Advance.lean`：`predictor` 51 行、`Usable` 55 行、`usable` 60 行、`Income` 78 行、`Remainder` 97 行、`correct` 157 行、`advance` 175 行 |
| 依存の記録 | 源 | 同 `verification/declaration-usage.tsv` |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
| --- | --- | --- |
| 本書の合わせの存在 | Lean | 本書の Lean の束（`Block3.tuned3_exists`・`tuning_all`）。21-07 |

**この章で使った語** — 読み直し、対数比、平らな配位、試験配位、強い単調性、根、括弧、ずれの上界、剰余の評価、一段の等式。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：10-04 射撃法 — 段ごとの帯の入れ子の区間と中間値の定理で、段 0 の結合を $\bar{\beta}$ にする裸の結合を選ぶ所を読みます。

# 射撃法 — 入れ子の区間と中間値の定理で裸の結合を選ぶ

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§07 は本書の検討、§08 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 切断 $N$ と体積 $p$ ごとに、段 $N$ の裸の結合 $x$ を径数として段ごとの結合を連続な曲線 $x \mapsto \beta_m(x)$ と見て、段ごとの帯の入れ子の区間を作り、段 0 で中間値の定理を使って $\beta_0(x) = \bar{\beta}$ の $x$ を取る手続き。使うのは曲線の連続性と、一段の誤差の不等式 $\mathrm{drift} \le (s/4)\log b$ だけであること。一意性がどこで言われ、どこで言われていないか。

**前提となる章** — 10-01 段 m の結合、10-03 読み直し。中間値の定理は 第 1 部 の前提の範囲です。

**先に言うこと** — 源には射撃の帯が二通り在ります。公開の定理の存在の道に載るのは `YM/FullVolume/Arc.lean` の帯で、`YM/Shoot/` の帯（段 0 で一点に潰れる）は別の見出しの定理の側です。この章は前者を主に書き、後者は §05 で区別のために書きます。射撃は存在だけを与え、裸の結合の一意性は射撃の道では言われません。

この章の順序

1. **言明 — 段 0 の結合を $\beta$ にする裸の結合が在る**：`Arc.bought` ・ `covers` ・ `rodB`
2. **帯と、一段で帯を越える不等式**：`low` ・ `high` ・ `crosses`
3. **入れ子の区間**：`narrow`（中間値の定理を二回）と、段 $N$ から段 0 への帰納
4. **段 0 で一点を取る**：`nearby` と `covers`、選択
5. **二つの射撃の帯を取り違えない**：`Shoot/` の帯との違い
6. **一意性について**：射撃の道では言わず、固定した再帰の中の一意性の欄が別に在る
7. **本書の検討で見えていたこと**：大域の端による合わせ
8. **読めていない所**

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。源はリポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）、評価書は `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）です。公開された構成の定理は源 で言明の字句を、「証明されている」という水準は評 で書きます。記号：一ループの傾きを $s = 11C_g/(24\pi^2)$（評価書では一ループの係数の二倍として書かれる量、源の `slopeConstant`）と書きます。

01

## 言明 — 段 0 の結合を β にする裸の結合が在る

段の列の構造 `History.Selected` の欄 `reaches` は、全ての $N, p$ で段 0 の結合が $\bar{\beta}$ であることを要求します（10-01）。その裸の結合 $\beta_{N,p}$ を選ぶのが射撃法です。公開の定理の存在の道では、次の三つで行われます源 。

1. `FullVolume.Arc.bought`（`YM/FullVolume/Arc.lean` 95 行）：仮定（再帰の材料 `Issues`、群が単純、一段の誤差の条件 `Drifting`）のもとで、各 $m \le N$ に「弧」`Arc` が在る源 。
2. `Arc.covers`（71 行）：段 0 の弧について、区間 $[\frac{3}{4}\bar{\beta}, \frac{5}{4}\bar{\beta}]$ は「裸の結合 $x \mapsto$ 段 0 の結合」の像に含まれる源 。
3. `FullVolume.rodB`（`YM/FullVolume/Stage/Rods.lean` 26 行）：`bought` と `covers` を使い、$\bar{\beta}$ が区間の内部にあること（`centers`、`Arc.lean` 25 行）から、各 $N, p$ で段 0 の結合が $\bar{\beta}$ になる裸の結合を一つ**選び**（`choose`）、段の列 `Selected` を組み立てる源 。

`rodB` は、本書の検討で公開の定理の存在の道に載ることを鎖で辿って確かめた宣言の一つで、記録の上でも `Arc.bought`・`covers` の直接の使い手です源 。`Issues` は仮定のままではなく、存在の道では `Roof.Lyrics.supplier`（`YM/FullVolume/C/Songbook.lean` 76 行）が供給します源 。

02

## 帯と、一段で帯を越える不等式

段 $m$ の帯を次のように置きます（`low`・`high`、`Arc.lean` 21〜22 行）源 。

$$\mathrm{low}_m = \tfrac{3}{4}\bar{\beta} + \tfrac{5}{8}\cdot s \log D_m, \qquad \mathrm{high}_m = \tfrac{5}{4}\bar{\beta} + \tfrac{3}{2}\cdot s \log D_m. \tag{1}$$

段 0 では $D_0 = 1$ なので帯は $[\frac{3}{4}\bar\beta, \frac{5}{4}\bar\beta]$ で、一点に潰れません。どの段でも帯は表示の帯 $[\hat\beta_m/2, 2\hat\beta_m]$（$\hat\beta_m = \bar\beta + s\log D_m$）の中にあります（`fits`、31 行）源 。係数を比べれば $\frac{3}{4} \ge \frac{1}{2}$、$\frac{5}{8} \ge \frac{1}{2}$、$\frac{5}{4} \le 2$、$\frac{3}{2} \le 2$ です初 。

一段の誤差の条件 `Drifting`（`YM/Shoot/Reach.lean` 70〜71 行）は $\mathrm{drift}_{i+1}/\log b_i \le s/4$ です源 。一段の関係 $|\beta_{i+1} - \beta_i - s\log b_i| \le \mathrm{drift}_{i+1}$（10-02）と合わせると、次が出ます（`crosses`、`Arc.lean` 75 行）源 。

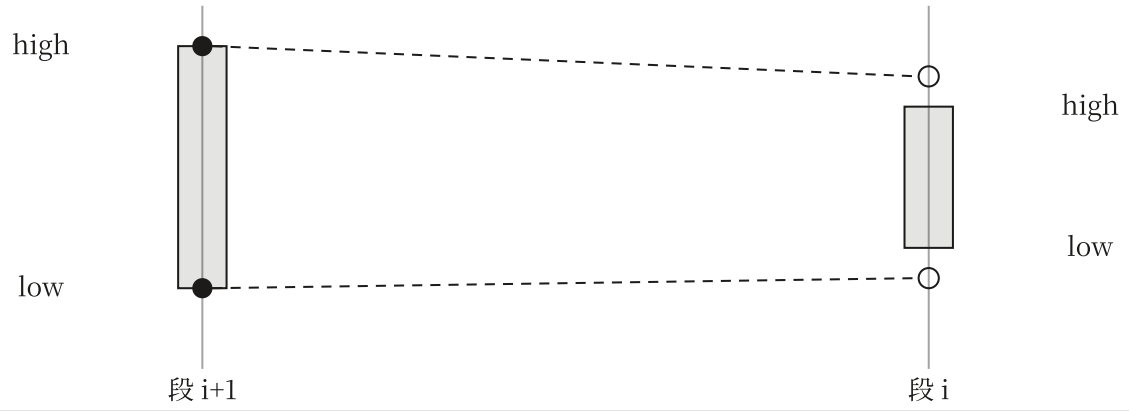
$$\beta_{i+1} = \mathrm{low}_{i+1} \;\Rightarrow\; \beta_i < \mathrm{low}_i, \qquad \beta_{i+1} = \mathrm{high}_{i+1} \;\Rightarrow\; \beta_i > \mathrm{high}_i. \tag{2}$$

確かめます初 。$\ell = \log b_i$ と書くと、$\mathrm{low}_{i+1} = \mathrm{low}_i + \frac{5}{8}s\ell$、$\mathrm{high}_{i+1} = \mathrm{high}_i + \frac{3}{2}s\ell$ です。一段で $\beta$ は $s\ell \pm \frac{1}{4}s\ell$ だけ減るので、

$$\beta_i \le \mathrm{low}_i + \tfrac{5}{8}s\ell - s\ell + \tfrac{1}{4}s\ell = \mathrm{low}_i - \tfrac{1}{8}s\ell, \qquad \beta_i \ge \mathrm{high}_i + \tfrac{3}{2}s\ell - s\ell - \tfrac{1}{4}s\ell = \mathrm{high}_i + \tfrac{1}{4}s\ell. \tag{3}$$

帯の床は一段で $\frac{5}{8}s\ell$ しか下がらないのに、結合は $\frac{3}{4}s\ell$ 以上下がる。帯の天井は $\frac{3}{2}s\ell$ 下がるのに、結合は $\frac{5}{4}s\ell$ 以下しか下がらない。だから細かい段で帯の端にいた軌道は、一段粗い段で帯の外に出ます。

図 1　一段（段 $i+1 \to$ 段 $i$）での帯と軌道。左の段の床・天井にいた軌道（●）は、右の段で帯の外（○）に出る。その間の軌道の値は中間値の定理で帯を覆う。




図は縦の位置を、帯の形が見えるように段ごとに描き直したもので、目盛りは正確ではありません。

## 03 入れ子の区間

`Arc`（`Arc.lean` 58〜67 行）は、段 $m$ について次の組です源 ：区間 $[l, u]$ と、各 $x \in [l, u]$ の段 $N$ から段 0 までの軌道 $x \mapsto$ (段ごとの表示)。条件は、段 $N$ の結合が $x$（$x$ が裸の結

合)、段 $m$ から $N$ までの各段で $x \mapsto \beta_i(x)$ が連続な曲線（`Curve`）、各段で帯の中と一段の関係、そして段 $m$ で $\beta_m(l) = \mathrm{low}_m$、$\beta_m(u) = \mathrm{high}_m$。

`bought` は段 $N$ から下へ帰納で弧を作ります源 。

1. **段 $N$**：`Issues.initial`（`YM/Shoot/Criteria.lean` 100〜101 行）の連続な曲線（表示を裸の結合で径数づけたもの）を使い、区間 $[\mathrm{low}_N, \mathrm{high}_N]$ を取ります。段 $N$ の結合は $x$ そのものです。
2. **段 $k+1$ から段 $k$**：`Issues.advances`（102〜106 行）が、段 $k+1$ の連続な曲線から段 $k$ の連続な曲線を作ります（一段の繰り込みと読み直し、10-03）。区間の端の軌道は (2) で段 $k$ の帯の外に出ます。そこで `narrow`（`Reach.lean` 18 行）が、中間値の定理を二回使って部分区間 $[l', u'] \subset [l, u]$ を選びます：$\beta_k(l') = \mathrm{low}_k$、$\beta_k(u') = \mathrm{high}_k$、かつ $[l', u']$ の上で $\beta_k$ は帯 $[\mathrm{low}_k, \mathrm{high}_k]$ に値をとる。

`narrow` の選び方は、$\beta_k = \mathrm{high}_k$ となる点の集合の下限 $w$ を取り、$[l, w]$ で $\beta_k = \mathrm{low}_k$ となる点の集合の上限 $z$ を取る、というものです（`sInf`・`sSup`）源 。こうすると $[z, w]$ の内部で $\beta_k$ は二つの端の値の間に留まります初 。

区間は段を下るごとに入れ子に狭まり、全ての段で帯の中の軌道だけが残ります。使うのは**曲線の連続性と一段の誤差の不等式だけ**です源 。一段の写像の微分の評価は使いません。説明文（`Arc.lean` 冒頭）は「一段の微分の評価より前の射撃」と書いています源 。

04

## 段 0 で一点を取る

段 0 の弧では、$\beta_0(l) = \mathrm{low}_0 = \frac{3}{4}\bar{\beta}$、$\beta_0(u) = \mathrm{high}_0 = \frac{5}{4}\bar{\beta}$ です。連続な曲線 $x \mapsto \beta_0(x)$ に中間値の定理を使うと、$[\frac{3}{4}\bar{\beta}, \frac{5}{4}\bar{\beta}]$ の全ての値が像に入ります（`covers`）源 。$\bar{\beta} > 0$ なので $\bar{\beta}$ はこの区間の内部です（`centers`）源 。だから $\beta_0(x) = \bar{\beta}$ となる裸の結合 $x$ が在り、`rodB` はそれを選択公理で一つ取ります源 。

こうして選んだ軌道から、段の列 `Selected` の全ての欄（`starts`・`steps`・`represents`・`reaches`・`running`）が組まれます（`Rods.lean` 39〜46 行）。`running` は一段の誤差の和から出ます（`Shoot.trajectory`、10-05）源 。

帯を段 0 で潰さず、$\bar{\beta}$ のまわりの幅を残す形なので、同じ暦で目標を $[\frac{3}{4}\bar{\beta}, \frac{5}{4}\bar{\beta}]$ の他の値に取り替えても射撃できます推 。説明文は「少し動かした目標に射撃できるかは、別の暦を処方する問題ではない」と書いています（`Arc.lean` 冒頭）源 。ただし弧は**前向きの曲線**だけを言い、逆写像（段 0 の値 → 裸の結合）が関数であるとは言っていません（同）源 。

05

## 二つの射撃の帯を取り違えない

源には、もう一つの射撃 `YM/Shoot/Reach.lean` が在ります源 。帯は床 $\bar\beta+\frac12\cdot s\log D_m$、天井 $\bar\beta+2\cdot s\log D_m$（`floorBeta`・`ceilBeta`）で、段 0 で一点 $\bar\beta$ に潰れます。`gates`（81 行）が (2) と同じ役をし、`steps`（112 行）・`successful`（156 行）が区間の左端を取ります。`Recipe.races`（`YM/Shoot/Race.lean` 67 行）がこれから `Selected` を組み立てます。説明文は「どの族についても `Issues` が在るとは主張しない」と書いています（`Race.lean` 5 行）。

| | `FullVolume/Arc.lean` | `Shoot/Reach.lean` |
|---|---|---|
| 床 | $\frac34\bar\beta+\frac58\cdot s\log D_m$ | $\bar\beta+\frac12\cdot s\log D_m$ |
| 天井 | $\frac54\bar\beta+\frac32\cdot s\log D_m$ | $\bar\beta+2\cdot s\log D_m$ |
| 段 0 | $[\frac34\bar\beta,\frac54\bar\beta]$（潰れない）、`covers` で $\bar\beta$ を取る | 一点 $\bar\beta$、区間の左端 |
| 一段の条件 | 同じ `Drifting`（$\mathrm{drift}\le\frac14\cdot s\log b$） | |
| 記録 | used、直接の使い手 `rodB`（証人は存在の側の見出し） | used、証人 `parityEndpoint`（`Graces.winnow` の側） |

存在の道は `Shoot.successful` を使わず、`Arc.bought` を使います（記録の上で `Arc.bought` の直接の使い手は `rodB`）源 。二つは区間を狭める道具 `narrow` を共有します。存在の道の射撃として引くのは `Arc.lean` の帯です。

06

## 一意性について

射撃の道（`Arc.bought`・`covers`・`rodB`）は、裸の結合の**存在**だけを与えます源 。`rodB` は選択で一つ取り、他に解があるかは言いません。`Rods.lean` の説明文も「この最初の購入は上への写像であることだけ。一意性は今後の解析性の評価が課すべきもの」と書いています源 。

一方、源には一意性を言う欄も在ります。`FullVolume.Final.Jewel`（`YM/FullVolume/Finale/Program.lean` 133 行）の欄 `unique`（142 行）は、各 $p,N$ と $\zeta\in[-1,1]$ について、段 0 の結合を $\bar\beta+\zeta\cdot w$（$w$ は幅 `beamWidth`）にする「成功する」裸の結合が**ただ一つ**在る、と言います。欄 `tuning`（143 行）は、その裸の結合が $\zeta$ の解析関数（単位円板で）で与えられる、と言います源 。供給は `wins`（60 行）と `bareTrial`（70 行）で、仮定は構造 `Winter` です源 。源で確かめた食い違いの無い読み方は次のとおりです。

- 「成功する」（`successful`、57〜58 行）は、**固定した再帰**（`T.L.tunes`）の中で、段 $N$ から段 0 まで競う軌道が在ること、の意味です。説明文（17〜20 行）は「この再帰の中での一意性だけで、考えうる全ての表示の中での一意性ではない」と明記しています源 。
- 一意性の芯は `Winter.unique`（`YM/FullVolume/Glide/Vac.lean` 40 行）：段 0 の結合が等しい二つの競う軌道は、全ての段で一致する。これは 11-10 の一意性（段 0 に錨を下ろす）と同じ型の主張です推 。
- 記録の上では、`wins` は used（`Jewel` を組むために使われ、証人は存在の側の見出し）、欄 `Jewel.unique`・`Jewel.tuning` そのものは outside（どの見出しの定理からも読まれていない）です源 。

まとめると、公開の定理の存在の道で裸の結合を選ぶ所は存在と選択だけを使い、一意性は使いません。固定した再帰の中の一意性と解析性は、別の構造 `Jewel` の欄として在り、その欄を満たす補題 `wins`・`bareTrial`（`Program.lean` 60・70 行、used）が在ります。欄そのもの（`unique`・`tuning`）は、どの見出しの定理からも読まれていません（outside）源 。どちらも「全ての表示の中で一意」とは言っていません。

07

## 本書の検討で見えていたこと

本書の検討で Lean で閉じた「合わせた列の存在」（10-01 §06）は、一つの連続関数の**大域的な端**から存在を出す形です Lean ：粗い面の平均の期待値は $\beta = 0$ で 0、$\beta \to \infty$ で 1 に近づき（`Block3.Y3_zero`・`Block3.tendsto_Y3_one`）、その間の値 $\kappa_0$ は中間値の定理で取れる（`Block3.tuned3_exists`）。渦の比も同じ形です（`tuning_all`）。

公開された構成の射撃は、段ごとの**局所的な帯の端**と一段の誤差の不等式で入れ子の区間を作る形です。違いは三つです推 。

- 本書は端の値が大域的に分かっているので、射撃の帰納は要りません。代わりに、全ての $\beta \geq 0$（強結合も）を通ります。
- 公開された構成は全ての段を弱結合の帯の中で運び、段ごとの連続性（`Issues`）を繰り込みの解析から得ます。
- どちらも存在だけで、一意性・単調性は使いません（公開された構成の固定した再帰の中の一意性は §06）。

射撃の要が「一段の誤差 $\leq \frac{1}{4} \cdot s \log b$」という一つの不等式であることは、本書の検討で段を跨ぐ誤差の和が詰まった所（第 15 部）と比べる軸になります（14-03）。

08

## 読めていない所

- `Roof.Lyrics.supplier` が `Issues` を閉じる中身（材料 `Graces.hops`・`Chord.spores`・`moves` の名前まで）。
- `Winter` の供給 `offers`（`Glide/Vac.lean` 65 行）の仮定と、`Jewel` の再帰が `rodB` の再帰と同じものか。
- 段 0 での一意性 `one`（`YM/FullVolume/Gain/Resolve.lean` 40 行）の証明の中身。
- `Arc` の帯の係数 $\frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$ が、`Shoot/` の係数からどう選び直されたか（説明文に理由が無い）。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 仮定のもとで、各 $N, p$ に段 0 の結合を $[\frac{3}{4}\bar{\beta}, \frac{5}{4}\bar{\beta}]$ の全ての値にする裸の結合が在る（`Arc.bought`・`covers`） | 逆写像が関数であること（言っていない） |
| 初 一段の誤差 $\le \frac{1}{4}\cdot s \log b$ なら、帯の端の軌道は一段で帯の外に出る（(3)） | — |
| 源 存在の道（`rodB`）は `Arc.lean` の帯を使い、選択で一つ取る。`Shoot/` の帯は別の見出しの側 | — |
| 源 固定した再帰の中の一意性と解析性の欄（`Jewel.unique`・`tuning`）が在り、供給 `wins` は used、欄そのものは outside | 全ての表示の中での一意性（源が否定） |
| Lean 本書の合わせの存在は大域の端と中間値の定理から（`Block3.tuned3_exists`・`tuning_all`） | 本書の側の一意性・単調性 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 存在の道の射撃 | 源 | `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）`YM/FullVolume/Arc.lean`：`low`・`high` 21〜22 行、`nearby` 24 行、`centers` 25 行、`fits` 31 行、`Arc` 58 行、`covers` 71 行、`crosses` 75 行、`bought` 95 行 |
| 選択と段の列の組み立て | 源 | 同 `YM/FullVolume/Stage/Rods.lean` 26 行 `rodB`（説明文 5〜14 行）、`YM/FullVolume/C/Songbook.lean` 76 行 `Roof.Lyrics.supplier` |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 再帰の材料と一段の条件 | 源 | 同 `YM/Shoot/Criteria.lean` 63・88・99 行（`band`・`Relays`・`Issues`）、`YM/Shoot/Reach.lean` 18 行 `narrow`、70 行 `Drifting` |
| もう一つの射撃 | 源 | 同 `YM/Shoot/Reach.lean` 81・112・156 行、`YM/Shoot/Race.lean` 5・67 行 |
| 固定した再帰の中の一意性 | 源 | 同 `YM/FullVolume/Finale/Program.lean` 説明文 17〜20 行、`successful` 57 行、`wins` 60 行、`bareTrial` 70 行、`Jewel` 133 行（`unique` 142 行・`tuning` 143 行）；`YM/FullVolume/Glide/Vac.lean` 31〜40 行 `Winter`；`YM/FullVolume/Ray/Gain.lean` 22 行 `sun`；`YM/FullVolume/Gain/Resolve.lean` 72 行 `ask` |
| 依存の記録 | 源 | 同 `verification/declaration-usage.tsv`（`Arc.bought`・`covers`・`rodB`・`wins` は used、`Jewel.unique`・`tuning`・`july` は outside、`Shoot.successful` は証人 `parityEndpoint`） |
| (3) と図 | 初 | 本文の計算 |
| 本書の合わせの存在 | Lean | 本書の Lean の束（`Block3.Y3_zero`・`tendsto_Y3_one`・`tuned3_exists`、`tuning_all`）。Lean の核の検査を通った束 |

**この章で使った語** ― 射撃法、帯、弧、入れ子の区間、中間値の定理、選択、一段の誤差、固定した再帰の中の一意性、前向きの曲線。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：10-05 辺を育てる理由と暦 ― 一段の誤差を定数のまま $\log b$ で割って消すために辺を育てる設計と、定数を選ぶ順を読みます。

# 辺を育てる理由と暦 — 一段の誤差を log b で割って消す

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§07 は本書の検討、§08 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 辺 $b_m$ が 3 以上の奇数で非減少、しかも無限大へ育つこと。その理由（一段の誤差 drift を $O(1)$ のまま $\mathrm{drift}/\log b_m \to 0$ にし、誤差の和を $o(\log D_m)$ にする）と、走りの評価 `Running` がそこから出る計算。暦の条件と、定数を選ぶ順。代価として間隔の列が特別なものになること。

**前提となる章** — 10-02 一段の写像と一ループの計算、10-04 射撃法、8-02 段取り。

**先に言うこと** — 辺を育てても、段の数に一様な条件が要らなくなるわけではありません。段に一様な条件は暦の側（各段の入口の結合・辺の下限・余白など）で払われます。暦の全体（大きい場の定数を含む）は 11-08 で読みます。この章は結合の走りに関わる所に絞ります。

この章の順序

1. **言明 — 辺の列と暦の条件**：`Schedule` ・ `Calendar.Fits` ・ `Supply.Large`
2. **一段の誤差を log b で割って消す**：`Shoot.trajectory` の計算
3. **辺は無限大へ育つ**：`logCost` と平滑の指数
4. **Gentle — 一段が全体に比べて小さい**：$\log b_m / \log D_m \to 0$
5. **定数を選ぶ順**：`Sheet` → `Rolls` → `Protection` → `Delays` → `Bar` → `Wait` → `Paid`
6. **代価 — 間隔の列が特別になる**
7. **本書の検討で見えていたこと**：辺を固定した一段の正味の括弧
8. **読めていない所**

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。源はリポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）、評価書は `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）です。公開された構成の定理は源 で言明の字句を、「証明されている」という水準は評 で書きます。記号：一ループの傾きを $s = 11C_g/(24\pi^2)$（評価書では一ループの係数の二倍として書かれる量、源の `slopeConstant`）と書きます。

01

## 言明 — 辺の列と暦の条件

段の取り方は `Schedule`（`YM/Lattice/Scale.lean` 28〜34 行）です源 ：辺 $b_m$ は奇数で $b_m \geq 3$、$D_m = \prod_{k<m} b_k$、格子間隔 $a_m = 1/D_m$、$\mathrm{scale}(m) = \log D_m$（`scale`、115 行）、物理の辺 $L_p$ は 4 の倍数で狭義に増える。条件 `Gentle`（129〜130 行）は $\log b_m / \log D_m \to 0$ です。評価書の用語集は、構成が $L_p = 4(M + p + 1)$（$M$ は十分大きく固定）と取ることを説明しています（付録 A、23 頁）評 。

暦の条件 `Calendar.Fits`（`YM/RG/History.lean` 97〜118 行）のうち、結合の走りに関わるのは次です源 。

| 欄 | 中身 |
|---|---|
| `mesh` | `Gentle` |
| `sameFactor` ・ `monotoneL` | $b_m$ は平滑の指数 $J(m+1)$ だけで決まる値で、$J$ について非減少 |
| `mono` ・ `stepSlow` ・ `deep` | $J$ は非減少、一段に高々 1 増え、$J \to \infty$ |
| `driftSmall` | $\mathrm{drift}_{m+1} / \log b_m \leq 1/J(m+1)^2$ |
| `logCost` | $\log(1 + \text{段の定数の和}) / \log b_m \leq 1/J(m+1)^2$ |
| `delayed` ・ `smallField` | $1 < \hat{\beta}_m$、閾 $t_m \leq 1$（9-07） |

辺の候補の側の条件 `Supply.Large`（`YM/Price/Intent.lean` 39〜48 行）は、平滑の指数 $j$ と辺 $L$ について、$\mathrm{drift}/\log L \leq s/4$（`kick`：射撃の条件 `Drifting`、10-04）、$\mathrm{drift}/\log L \leq 1/j^2$（`slow`）、$\log(1 + \text{段の定数})/\log L \leq 1/j^2$（`fits`）を課します源 。`Rolls.eventually_large`（55 行）は、各 $j$ で十分大きい全ての奇数 $L$ がこれを満たすことを言い、`Rolls.exists_rolls`（79 行）は辺の列が在ることを言います源 。評価書はこれを「ブロックの比は、繰り込みの変換に現れる定数を使った、込み入っているが陽な不等式を満たすように選ばれる」と書いています（付録 A）評 。

02

## 一段の誤差を log b で割って消す

一段の関係（10-02）は $|\beta_{m+1}-\beta_m-s\log b_m|\le \mathrm{drift}_{m+1}$、合わせの条件は $\beta_0=\bar\beta$ です。$\hat\beta_m=\bar\beta+s\sum_{k<m}\log b_k$ なので、三角不等式で

$$\left|\beta(N,p,m)-\hat\beta_m\right| \;\le\; \sum_{k=1}^{m}\mathrm{drift}_k \tag{1}$$

です[初]。源の `Shoot.trajectory`（`YM/Shoot/Race.lean` 23 行）はこれを補題 `hd` として示し、和を `βCost` と呼んでいます[源]。

辺を固定すると（$b_k=b$、drift も一定の $\delta$）、右辺は $m\delta$、主部 $s\log D_m$ は $s\,m\log b$ で、比は $\delta/(s\log b)$ のまま 0 になりません[初]。傾き $s$ が確定しません。

公開された構成は `driftSmall` で $\mathrm{drift}_{k+1}\le \log b_k/J(k+1)^2$ とし、$J\to\infty$ を使います。`trajectory` の証明（`Race.lean` 32〜52 行）は、$\varepsilon>0$ について $1/J(k+1)^2\le\varepsilon/2$ となる段 $j$ を取り、

$$\sum_{k\le i}\mathrm{drift}_k \;\le\; \sum_{k\le j}\mathrm{drift}_k+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{j\le k<i}\log b_k=\mathrm{const}_j+\frac{\varepsilon}{2}\big(\log D_i-\log D_j\big) \tag{2}$$

とし、$\log D_i\to\infty$ で $\mathrm{const}_j\le\frac{\varepsilon}{2}\log D_i$ となる段から先で $\varepsilon\log D_i$ 以下、と結論します[源]。これが `History.Running`：$|\beta(N,p,m)-\hat\beta_m|\le\varepsilon\log(1/a_m)$（十分大きい $m$、$N,p$ に一様）です[源]。誤差の和は主部の $o(\cdot)$ になり、二ループの係数を一度も計算せずに、傾き $s$ が確定します[推]。

(2) の要は、一段の誤差 drift が**大きくてよい**（$O(1)$ で、段とともに増えてもよい）ことです。小さくするのは比 $\mathrm{drift}/\log b$ で、それを辺を育てることで払います[推]。

03

## 辺は無限大へ育つ

源の `Schedule` は辺が育つことを直接は要求しません（$b_m\ge 3$ と `Gentle` だけ）。しかし暦の条件から $b_m\to\infty$ が出ます[推]：`logCost` で $\log(1+\cdots+\mathrm{columns}+\cdots)/\log b_m\le 1/J^2$、段の定数の `columns` は 1 以上（`Stage.columns_ge`、`History.lean` 60 行）なので分子は $\log 2$ 以上、よって $\log b_m\ge J(m+1)^2\log 2\to\infty$ です[初]。この導出は、暦の条件を満たす暦が在ること（`Wait.ready`）を前提にしています[推]。

段の定数（Taylor の次数 `order`、冪 `power`、支えの指数など）は平滑の指数 $J$ で番号づけられ、$J$ について単調に増えます（`deepOrder` ほか）源 。構成の定理の結論 `Family.Makes` の欄 `stages` は、次数 $d$ の局所場を扱う基準の段から先で、Taylor の次数が $d+1$ 以上であることを要求します（`YM/Source/Construction.lean` 47〜49 行）源 。全ての次数の局所場を扱うために段の定数を育て、その対数の損 $\log(1+\text{段の定数})$ を辺の対数で吸う、という形です（`logCost`）推 。

04

## Gentle — 一段が全体に比べて小さい

`Gentle`：$\log b_m / \log D_m \to 0$ は、辺が育っても一段の対数が全体の対数に比べて無視できる、という条件です源 。これがあると、長さ $r$ を「$r$ の直下の段」で読んでも、$\log(1/r)$ と $\log D_m$ の比が 1 に近づきます推 。短距離の実効の結合 $g_W(r)$ の定理（10-06）の補題 `pace_log` は、`Gentle` ではなく、同じ向きのより強い条件、跡の側の暦の追加の条件 `PostT` の欄 `bloom`：$b_i \le \log \hat{\beta}_i$（`YM/TraceExtension/Terrace/Base.lean` 31 行）を使っています源 。これで一段の対数 $\log b_{i-1}$ が $\hat{\beta}_i$ に比べて無視できます。

`Gentle` から、格子間隔の比の下からの評価 $c\,a_m^2 \le a_{m+1}$ も出ます（`mesh_inequality`、`Scale.lean` 133 行。説明文「別に仮定する必要は無い」）源 。辺の育ち方は対数の比で抑えられた、ゆっくりした育ち方です。

| 条件 | 役目 | 章 |
|---|---|---|
| $\text{drift}/\log b \le s/4$ | 射撃の帯の入れ子（一段で帯の外に出る） | 10-04 |
| $\text{drift}/\log b \le 1/J^2 \to 0$ | 誤差の和を $o(\log D)$ に（走り） | 本章 §02 |
| $\log(1+\text{定数})/\log b \le 1/J^2$ | 育つ段の定数の損を吸う。$b \to \infty$ | 本章 §03 |
| $\log b_m / \log D_m \to 0$ | 一段の対数が全体に比べて小さい | 本章 §04 |
| $b_i \le \log \hat{\beta}_i$（`PostT.bloom`、跡の側） | $r$ の直下の段で結合を読んでも比が崩れない | 10-06 §04 |

05

## 定数を選ぶ順

`YM/Price/Intent.lean` は、暦を作る材料を、選ぶ順に並んだ構造の列として定義しています源 。

1. **`Sheet`**（26〜36 行）：核の選び（罰の係数と三つの閾）、段の定数の表 `profile`、最初の指数、辺の下限 `floorL`。説明文は「次数と定数はブロックの比より**前**に選ぶ」と書いてい

ます（冒頭）。

2. **`Rolls`**（50〜53 行）：平滑の指数 $j$ ごとの辺 $L_j$（`Large` を満たし、$j$ について非減少）。
3. **`Protection`**（88〜92 行）：$L$ を選んだ後に固定する余白 $\theta_j \le 1/j$（減少）。説明文「L の後の冪を収める θ」。
4. **`Delays`**（115〜120 行）：各段の入口の結合の下限 `betaEntry` など、余白の後の締め切り。
5. **`Bar`**（123〜127 行）：$\bar{\beta}$。$\bar{\beta} > 1$、最初の段の入口以上、$x \ge \bar{\beta}$ で閾 $\le 1$。
6. **`Wait`**（134 行〜）：作業の窓（$o(\cdot)$ の幅）。
7. **`Paid`**（145〜159 行）：暦がこれらに合うこと。各段で `betaEntry` $\le \hat{\beta}_m$（`pays`）、体積の下限など。

`Wait.ready`（`YM/Price/Waits.lean` 137 行）は、全ての要求を満たす段の列 `Levels` が在ることを言います源。説明文は、この存在の結果は「既に選んだ任意の定数について働く。だから $L$ より前の全ての割り当てと比の後で、$L$ より後の遅れを任意に大きく選べ」と書き、同時に「繰り込みの議論が実際にこの依存の順に合うかは検査しない」と書いています（`Intent.lean` 冒頭）源。順が合うことは、各段の議論の側の仮定（段の定数が $L$ に依らないこと）として払われます推。

段に一様な条件は、この順の中で払われています推。一段の証書（第 11 部）の定数は段の定数 $J$ に依って育ってよく、その代わり段 $m$ の入口の結合 $\hat{\beta}_m$ が `betaEntry` 以上であること（`pays`）を暦で保証します。結合が十分大きい所でだけ一段を行う形です。

06

## 代価 — 間隔の列が特別になる

辺の列は、繰り込みの定数に合わせて選んだ特別な列です。評価書は §4.3 で「収束は証明で使う間隔の列の全体に沿って成り立つが、間隔の列の型についての普遍性の結果は無い」と書き、§4 の冒頭で「構成は二つの列（間隔と体積）を選ぶので、紫外の収束の定理は間隔の全ての列についての収束を主張しない」と書いています評。

辺を育てる設計は、一ループの傾きを二ループの評価なしに確定させる代わりに、極限の理論が別の間隔の列（たとえば辺 2 で半分ずつ）で同じになるかを言わない、という交換です推。この普遍性は 16-02 の問いと関わります。

07

## 本書の検討で見えていたこと

本書の検討の紫外の試み（第 15 部）は、辺を 2 に固定し、一段で結合が $s \ln 2$（SU(2) で $s = 11/(3\pi^2)$）の主部 ± 一段の取りこぼしだけ減ることを、段に一様に払う形を探していました（結合の一段の正味の括弧、15-03）。辺が固定だと、§02 のとおり一段の $O(1)$ の誤差の和が主部と同じ大きさになり、傾きを確定させるには一段の誤差そのものを段について和が取れる形（たとえば段とともに減る形）で評価する必要がありました[推]。

公開された構成は、一段の誤差を $O(1)$ のまま残し、辺を育てて $\log b$ で割る、という別の道を取っています。代価は §06 の普遍性で、段に一様な条件は暦の側に移ります。この道は本書の検討には無かった発想です（14-05）。本書の今の設計（辺 2）と辺 3 の設計はどちらも辺を固定しており、辺を育てる設計の Lean は持っていません。

08

## 読めていない所

- 辺の列の具体的な作り方（`YM/Price/Waits.lean` の `Program.exhaust`、41 行。言明だけ読んだ）と、辺がどれほどゆっくり育つか。
- drift の値が段の定数の表のどこから来るか（`Stage.drift` は表の欄で、中身の計算は読んでいない）。
- `Delays` の `scaleEntry`・`shells`・`growth` の役目（大きい場の側。11-08）。
- 依存の順が実際の議論に合うことを、どの宣言が保証しているか（説明文は検査しないと書く）。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| [源] 辺は 3 以上の奇数、$J$ について非減少、`Gentle`、drift$/\log b \le 1/J^2$、$\log(1+\text{定数})/\log b \le 1/J^2$ | 辺の列の具体形 |
| [初] 結合と一ループの走りの差は一段の誤差の和で抑えられ、辺が固定なら和は主部と同じ大きさ | — |
| [源] 誤差の比が 0 へ行くので、走り `Running` が $N, p$ に一様に成り立つ（`Shoot.trajectory`） | 二ループの係数・$\log\log$ の補正 |
| [初] 暦の条件から $b_m \to \infty$（$\log b_m \ge J(m+1)^2 \log 2$） | 暦が在ることそのもの以外の前提（`Wait.ready` が供給） |

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 定数は段の定数 → 辺 → 余白 → 遅れ → $\bar{\beta}$ の順に選ぶ | この順が実際の議論に合うことの検査（説明文は検査しないと書く） |
| 評 間隔の列の型についての普遍性は無い | 別の間隔の列での極限の一致 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 段の取り方 | 源 | `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）`YM/Lattice/Scale.lean` 28〜34 行 `Schedule`、115 行 `scale`、129 行 `Gentle`、133 行 `mesh_inequality` |
| 暦の条件と段の定数 | 源 | 同 `YM/RG/History.lean` 45〜61 行 `Stage`、97〜118 行 `Calendar.Fits` |
| 走りの導出 | 源 | 同 `YM/Shoot/Race.lean` 19〜52 行（`βCost`・`trajectory`） |
| 選ぶ順 | 源 | 同 `YM/Price/Intent.lean`：冒頭の説明文、`Sheet` 26 行、`Large` 39 行、`Rolls` 50 行、`eventually_large` 55 行、`exists_rolls` 79 行、`Protection` 88 行、`Delays` 115 行、`Bar` 123 行、`Wait` 134 行、`Paid` 145 行；`YM/Price/Waits.lean` 137 行 `Wait.ready` |
| 局所場の次数と段の深さ | 源 | 同 `YM/Source/Construction.lean` 47〜49 行 `Makes.stages` |
| 普遍性・ブロックの比の説明 | 評 | `yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）§4・§4.3、付録 A |
| 本書の辺 2 の一段 | 初 | 15-03 の出典の表 |

**この章で使った語** — 辺、暦、drift、平滑の指数、Gentle、走り、誤差の和、段の定数、依存の順、普遍性。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：10-06 走りの定理と短距離の実効の結合 — 段の列の走りから公開の言明 `WilsonRegularity.running` が出る所と、短距離の実効の結合 $g_W(r)$ の定理を、依存の内と外を分けて読みます。

# 走りの定理と短距離の実効の結合 — 依存の内と外

> この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討、§07 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 段の列の走り（`History.Running`）から、公開の定理の言明に入る `WilsonRegularity.running`：$\beta_{N,p}/\log(1/a_N) \to s$（$p$ に一様）が出る道筋。検証の記録の見出しの定理 `Pert.Asymptotics.comparison`。短距離の実効の結合 $g_W(r)$ の定義と定理、連続の相関から作る第二の結合との比。そして、それぞれがどの目標に入っているか。

**前提となる章** — 10-01、10-05。漸近自由の物理は 4-06、極限の取り方は 8-05。

**先に言うこと** — 走りの定理は一ループの主部だけを言い、二ループの係数・$\log\log$ の補正・$\beta - (\bar\beta + s\log D)$ の有界性は言いません。短距離の実効の結合 $g_W$ は、極限の取り方（無限体積の部分列）に依らないことが示されていません。$g_W$ の定理は、公開の定理・構成の定理・委員会の結合の目標のどの結論にも残りません（§05 で、三つの在りかを分けて書きます）。

この章の順序

1. **言明 — 走りの定理**：公開の言明 `WilsonRegularity.running`
2. **走りの道筋**：`Running` → `zeroUp_bound` → `regular`
3. **見出しの定理 comparison**：段 $i$ の結合の $-1/2$ 乗と $\sqrt{\log(1/a_i)}$
4. **短距離の実効の結合 g_W(r)**：極限の段の係数と、$r$ の直下の段
5. **依存の内と外**：二つの Lean の形と、公開の定理の言明
6. **本書の検討で見えていたこと**
7. **読めていない所**

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。源はリポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）、評価書は `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）です。公開された構成の定理は源 で言明の字句を、「証明されている」という水準は評 で書きます。記号：一ループの傾きを $s = 11C_g/(24\pi^2)$（評価書では一ループの係数の二倍として書かれる量、源の `slopeConstant`）と書きます。

01

## 言明 — 走りの定理

公開の定理 `JointExistence` は、各単純なゲージ群について、Wilson の族 $C$ で条件 `WilsonRegularity C` を満たすものが在ることを言います（評価書の用語集、23 頁）評 。その条件の欄 `running`（`ChallengeSpec.lean` 13〜15 行）は源

$$\exists\, s_* > 0 \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_0 \;\; \forall N \ge N_0 \;\; \forall p : \qquad \left| \frac{\beta_{N,p}}{\log(1/a_N)} - s_* \right| < \varepsilon \tag{1}$$

です。裸の結合の、格子間隔の逆数の対数に対する比が、正の傾き $s_*$ に**体積の番号 $p$ について一様に**近づきます。構成は $s_* = s = 11C_g/(24\pi^2)$ を使います（評価書は、この傾きを一ループの係数の二倍として書いています）（用語集、25 頁）評 。評価書の定理 4.1 の式 (7) も同じ内容を $\lim_N \sup_p |\beta_{N,p}/\log a_N^{-1} - 11C_g/(24\pi^2)| = 0$ と書いています評 。

これは漸近自由の先頭の形です。$\beta = 1/g_0^2$ と読むと、$g_0^2 \log(1/a_N) \to 1/s$、つまり裸の結合定数は $1/\sqrt{s \log(1/a)}$ の速さで 0 に近づきます初 。4-06 の標準の規約の式 $1/g^2_{\mathrm{std}}(\mu) = 1/g^2_{\mathrm{std}}(\mu_0) + c_{\mathrm{std}} \ln(\mu/\mu_0)$（$c_{\mathrm{std}} = 11N/(24\pi^2)$）を $\beta$ の単位に直すと同じ傾きです：$SU(2)$ では $\beta = 4/g^2_{\mathrm{std}}$、$4c_{\mathrm{std}} = 4 \cdot 22/(24\pi^2) = 11/(3\pi^2) = s$初 （規約の換算は 8-01 §04）。

走りの定理は**公開の定理の言明に入っています**：`Solution.lean` は構成の定理から族と `WilsonRegularity` を取り出して `JointExistence` を示し、構成の定理はそれを `YangMills.regular` から得ます（`Construction.lean` 33 行）源 。

02

## 走りの道筋

(1) は三段で出ます源 。

1. **段の列の走り** `History.Running`（`YM/RG/History.lean` 229〜230 行）：$\forall \varepsilon > 0$、十分大きい $m$、全ての $N \geq m$ と $p$ で $|\beta(N,p,m) - \hat{\beta}_m| \leq \varepsilon \log(1/a_m)$。射撃で選んだ列について `Shoot.trajectory` が一段の誤差の和から出します（10-05 §02）。
2. **比の形** `Pert.Asymptotics.zeroUp_bound`（`YM/Pert/Asymptotics/RawAxis.lean` 15 行）：十分大きい $m$ と全ての $N \geq m$、$p$ で $|\beta(N,p,m)/\log(1/a_m) - s| < \varepsilon$。$\hat{\beta}_m = \bar{\beta} + s\log(1/a_m)$ の $\bar{\beta}$ が $\log(1/a_m) \to \infty$ で無視できることを使います。
3. **公開の言明** `YangMills.regular`（`HierarchyBridge.lean` 16 行）：`zeroUp_bound` で $m = N$ と置いて (1) を出します。

使っているのは段の列の性質だけで、極限の相関も無限体積も使いません源。体積に一様なのは、一段の移り $\alpha$ が体積に依らず（10-02）、射撃が全ての $p$ で同じ $\bar{\beta}$ を目標にし、一段の誤差の上界 drift が段の定数で $p$ に依らないからです推。

**言っていないこと**源：二ループの係数、$\log\log(1/a)$ の補正、$\beta_{N,p} - (\bar{\beta} + s\log D_N)$ が有界であること。(1) は比の極限で、差は $o(\log D_N)$ までしか言いません。`History.lean` の説明文も「`Running` を越える通常のベータ関数の主張を推し量らない」と書いています（32〜33 行）。

03

## 見出しの定理 comparison

検証の記録が挙げる 17 の見出しの定理（`verification/joint-headlines.txt`）の一つに、`YM.Pert.Asymptotics.comparison`（`RawAxis.lean` 36 行）が在ります源。段 $i$ の結合から作る量 $g_{\mathrm{reg}}(N,p,i) = \beta(N,p,i)^{-1/2}$（`regulatorRun`、35 行）について、切断と体積の列 $N(i) \geq i$（十分大きい $i$ で）、$k(i)$ を任意に取ると

$$g_{\mathrm{reg}}\big(N(i),k(i),i\big)\,\sqrt{\log(1/a_i)} \;\longrightarrow\; \frac{1}{\sqrt{s}} \qquad (i \to \infty) \tag{2}$$

です源。段 $i$ の結合を、どの切断・体積から読んでも、一ループの走りの主部に乗っていることを言います。説明文は「取り出した比べを越えて、これが物理の座標空間の方式の結合に等しいとは言わない」と書いています（冒頭）源。(2) は見出しの定理ですが、公開の定理 `JointExistence` の言明には入っていません源。

04

## 短距離の実効の結合 g_W(r)

評価書 §7.4 は、短距離の実効の結合を次のように説明しています[評]。定理 4.1 の裸の結合の族から出発し、長さ $r$ の**直下の格子間隔の段**まで繰り込み、切断を 0 に送り、無限体積の部分列の極限を取ったうえで、正規化した作用の係数の $-1/2$ 乗を $g_W(r)$ とする。定理 7.2：小さい $r$ と、選んだ任意の無限体積の部分列の極限について、$g_W(r) > 0$ で

$$\log(1/r)\, g_W(r)^2 \;\longrightarrow\; \frac{1}{s} \qquad (r \downarrow 0). \tag{3}$$

評価書は「$g_W(r)$ が無限体積の部分列の極限の選びに依らないことは示されていない」と書いています[評]。

源での形を読みます[源]。

- **極限の段の係数**：`Terrace.Arch` と `steep`（`YM/TraceExtension/Terrace/Dusk.lean` 65〜71 行）。$(N,p)$ の超フィルタ $\mathcal{L}$ に沿って各段 $i$ の結合 $\beta(N,p,i)$ が極限 $Z.\beta_i$ を持つこと。`holds`（79 行）は $Z.\beta_i \in [\hat\beta_i/2, 2\hat\beta_i]$、`gamut`（89 行）は $Z.\beta_i/\hat\beta_i \to 1$。
- **$r$ の直下の段**：`glen`（`YM/TraceExtension/Atlas/Sink.lean` 14 行）は、格子間隔 $a_i$ が $r$ を下回る最初の段 $i$。
- **$g_W$**：`Pilot.wilson`（44 行）$g_W(r) = Z.\beta^{-1/2}_{\mathrm{glen}(r)}$。`Coupling`（45〜47 行）は「$r \downarrow 0$ で十分小さい $r$ で正、$\log(1/r)g^2 \to 1/s$」の形。`wilson_link`（50 行）が $g_W$ について `Coupling` を示します[源]。

証明は短い形です[推]：`gamut` で $Z.\beta/\hat\beta \to 1$、`pace_log`（21 行）で $\log(1/r)/\hat\beta_{\mathrm{glen}(r)} \to 1/s$。後者は $\hat\beta_i = \bar\beta + s\log D_i$ と、跡の側の暦の追加の条件 `PostT` の欄 `bloom`：$b_i \le \log\hat\beta_i$（`YM/TraceExtension/Terrace/Base.lean` 31 行）から出ます。これで $\log D_i - \log D_{i-1} = \log b_{i-1}$ が $\hat\beta_i$ に比べて無視でき、$r$ の直下の段で読んでも比が崩れません[源]（`pace_log` の証明の中の `H.bloom`）。`wilson_link` の仮定にも `PostT` が入っています（50 行）。二つを掛ければ (3) です。

連続の相関から作る第二の結合 `Sundial.glo`（`YM/TraceExtension/Sundial/Noon.lean` 28 行）について、`calibrationX` の欄（`YM/TraceExtension/Endpoint.lean` 49 行）は $\mathrm{glo}/g_W \to 1$ を言います[源]。評価書は「走りの法則は有効作用だけでなく連続の観測量にも見える」と書いています[評]。

```
05
```

## 依存の内と外

評価書は定理 7.2 の Lean の名を挙げていません[評]。読んだ範囲で、(3) に近い言明は二か所に在り、見出しの定理の (2) と合わせて、三つの在りかを分けて書きます[源]（依存の記録は `verification/declaration-usage.tsv`）。

| 在りか | 中身 | 記録 | 目標 |
|---|---|---|---|
| (a) `YM.PertExtension.Running.ratio`（`YM/PertExtension/Running.lean`:145） | 比の形：$\mu \to \infty$ で $g(\mu)\,(s \log \mu)^{1/2} \to 1$。$g$ は段の極限の、$a_m \le 1/\mu$ となる最初の段での値の逆平方根（`gLedger`、130 行） | outside | **依存**<br>定理 |
| (b) `YM.Trace.Pilot.wilson_link`（`YM/TraceExtension/Atlas/Sink.lean`:50） | $\log(1/r)\, g_W(r)^2 \to 1/s$（$r \downarrow 0$、$r$ を下回る最初の間隔の段）。仮定に `PostT`（$b_i \le \log \hat{\beta}_i$） | used（最初の見出しは `continuum_with_position_tests`、直接の使い手は `crest_ready`） | **依存**<br>論は<br>`Fiel`<br>に入<br>へ移 |
| (c) `YM.Pert.Asymptotics.comparison`（`YM/Pert/Asymptotics/RawAxis.lean`:36） | (2)：切断つきの段 $i$ の結合 $\beta(N_i, k_i, i)^{-1/2}$ の走り。$g_W$ とは別の量 | headline | 検証<br>理そ<br>の言 |

(b) の結論が現れる所を、源で確かめました[源]。跡の短距離の解析の途中の構造 `Crest`（`YM/TraceExtension/Belfry.lean` 16 行）の欄 `charts`（20〜22 行）と、比べの構造 `FieldComparison` の欄 `wilson`（`YM/TraceExtension/Endpoint.lean` 50 行）です。跡の法則（13-02）の証明が、結合の走りを途中の段として使っていると読めます[推]。これらの構造から公開の跡の試験 `Tests` へ移る `Integration.ManuscriptTraceTests.of_result`（`YM/Integration/ManuscriptTraceTests.lean` 77 行）では、`Tests` の欄（62〜75 行）に結合の比べは無く、比べの欄は落とされています[源]。

**目標についてのまとめ。**

- 公開の定理 `JointExistence`：言明に入る走りは (1) の裸の結合の走り `WilsonRegularity.running` だけです[源]。公開の言明が求めるのは「ある正の傾きが在ること」で、$s = 11C_g/(24\pi^2)$ は構成が満たす値です[源]。
- 構成の定理 `constructed`：結論の欄（`Construction.lean` 15〜31 行）に実効の結合の言明はありません[源]。

- 委員会の結合の目標：結合の検査は含みません（13-03）。
- 検証の記録：(a) は依存の外、(b) は依存の中の途中の段、(c) は見出しの定理そのもの。**どの見出しの定理の結論にも $g_W$ の走りは残りません**が、(c) の裸の段の結合の走りは見出しの結論です。

評価書の定理 7.2 の言明（$\log(1/r)g_W^2 \to 1/s$。評価書は右辺を一ループの係数の二倍の逆数として書く。$r \downarrow 0$、$r$ を下回る最初の間隔）に字句が近いのは (b) です[推]。本書は、短距離の実効の結合を「Lean に在り、委員会が評価書の定理 7.2 として述べているが、公開の定理・構成の定理・委員会の結合の目標のどの結論にも残らない結果」として扱います。13-03 も同じ形です。

06

## 本書の検討で見えていたこと

本書の検討は、裸の結合の列を外から与える形でした。示すべき言明の合わせ（19-07）は、結合の列が在ることを測度の量で言うもので、その列が $\log(1/a)$ に対して傾き $s$ で育つこと（走り）は、言明にも Lean にもありません。本書の第三巻の一段の傾き（値 $11/(3\pi^2)$）は、一段の結合の減りの主部として置かれた数で（23-01）、走りの定理ではありません。

公開された構成は、走りを「表示の中の係数の列」についての定理として、合わせ（段 0 で $\bar{\beta}$）と一ループの一段の評価と辺を育てる暦から出しています。本書の検討の合わせの量は測度だけで書けますが、それと表示の係数を結ぶ道具が無いので、同じ形の走りの定理は本書の側では言えません[推]。この違いは 14-03 と、第三巻の残る問い（16-03）で扱います。

もう一つ、公開された構成は全ての段を弱結合の帯 $[\hat{\beta}/2, 2\hat{\beta}]$ の中で運び、段 0（間隔 1）で止めます。強結合の領域を繰り込みで通りません。本書の第三巻の確かな定理は強結合の窓の側にあり（第 20 部）、公開された構成の赤外の端（弱結合のまま間隔 1）とは重なりません[推]（16-04）。

07

## 読めていない所

- `wilson_link` から見出しの定理までの鎖（`crest_ready` → … → `continuum_with_position_tests`）と、`Crest` が見出しの定理の言明に現れるか証明の中だけか。
- 評価書が定理 7.2 の在りかとした宣言の名（本文に名が無い）。

- 第二の結合 `glo` の定義の中身（`lampX`）と、`calibrationX` の証明。
- $g_W$ が部分列の極限の選びに依らないかどうか（評価書は示されていないと書く）。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 公開の定理の言明に、裸の結合の走り $\beta_{N,p}/\log(1/a_N) \to s$（$p$ に一様）が入る | ニループの係数・$\log\log$ の補正・差の有界性 |
| 源 段の列の走り → 比の形 → 公開の言明（`trajectory`・`zeroUp_bound`・`regular`） | — |
| 源 見出しの定理 `comparison`：段 $i$ の結合の $-1/2$ 乗 $\times \sqrt{\log(1/a_i)} \to s^{-1/2}$ | 物理の方式の結合との同一視（源が否定） |
| 評 短距離の実効の結合：$\log(1/r)g_W(r)^2 \to 1/s$、第二の結合との比 $\to 1$ | 部分列の極限の選びに依らないこと |
| 源 在りかは三つ：`Running.ratio` は依存の外、`wilson_link` は依存の中の途中の段（結論は公開の跡の試験へ移るとき落ちる）、`comparison` は見出しの定理（別の量）。$g_W$ の走りは公開の定理・構成の定理・委員会の結合の目標のどの結論にも残らない | 評価書の定理 7.2 の在りかの宣言（評価書に名が無い。字句が近いのは `wilson_link`、推） |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 公開の言明と供給 | 源 | `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）`ChallengeSpec.lean` 13〜15 行、`HierarchyBridge.lean` 16 行 `regular`、`Construction.lean` 33 行、`Solution.lean` 4〜10 行 |
| 段の列の走りと比の形 | 源 | 同 `YM/RG/History.lean` 229 行 `Running`、`YM/Shoot/Race.lean` 23 行 `trajectory`、`YM/Pert/Asymptotics/RawAxis.lean` 13〜36 行（`b0`・`zeroUp_bound`・`regulatorRun`・`comparison`） |
| 短距離の実効の結合 | 源 | 同 `YM/TraceExtension/Terrace/Dusk.lean` 65〜95 行、`YM/TraceExtension/Atlas/Sink.lean` 11〜50 行、`YM/TraceExtension/Belfry.lean` 16・20〜22・31 行、`YM/TraceExtension/Terrace/Base.lean` 29〜34 行（`PostT`）、`YM/Integration/ManuscriptTraceTests.lean` 62〜77 行（`Tests`・`of_result`）、`Construction.lean` 15〜31 行、`YM/TraceExtension/Sundial/Noon.lean` 28 行、`YM/TraceExtension/Endpoint.lean` 49〜50 行、`YM/PertExtension/Running.lean` 145 行 |
| 依存の記録と見出し | 源 | 同 `verification/declaration-usage.tsv`、`verification/joint-headlines.txt` |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
| --- | --- | --- |
| 定理 4.1・定理 7.2・用語集 | 評 | `yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）§4.3・§7.4、付録 A |

**この章で使った語** — 走りの定理、漸近自由、傾き $2b_0$、体積に一様、見出しの定理、短距離の実効の結合、第二の結合、超フィルタ、部分列の極限、依存の外。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：11-00 入口 — 帰納の仮定と一段の証書 — 一段の表示が段から段へ保たれることを、帰納の仮定と一段の証書の二つの帳簿で示す第 11 部へ進みます。

# 入口 — 帰納の仮定と一段の証書

この章は案内です。§02 は第二巻での引用の水準の約束、§05 は本書の検討です。

**この章で分かること** — 公開された構成が、段 $N$（裸の Wilson の測度）から段 0（間隔 1）まで繰り込みを重ねるときに、各段で保つ「帰納の仮定」と、一段ごとに出す「一段の証書」の形です。二つは強さの違う帳簿を持ちます。この部の十一の章が、その仕組みのどこを扱うかを表にします。

**前提となる章** — 9-01 ブロックの核（一段の確率の核）、9-06 密度の表示、9-07 小さい場の閾と、切った作用、10-04 射撃法、10-05 辺を育てる理由と暦。

**先に言うこと** — この部が書くのは、公開された構成の定義と言明を、本書が源で読んだ範囲です。公開された構成の結果の確かさは「Lean で証明されている、と委員会が評価した」水準で、本書が確かめたのは定義と言明の形までです。読めていない所が多く残ります（11-11）。この部は、質量ギャップや無限体積での一意性について何も言いません。

この章の順序

1. この部が読むもの — 段を下りる帰納の、三つの部品。
2. 引用の水準と札 — 源 推 評 と、どの目標に入る言明か。
3. 二つの帳簿 — 帰納の仮定は弱く、一段の証書は強く。
4. この部の地図 — 十一の章と主な宣言。
5. 本書の検討で見えていたこと — 領域を積み上げる形との違い。
6. 読めていない所 — 一覧は 11-11 に。

---

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

01

## この部が読むもの

公開された構成は、間隔 $a_N = 1/D_N$ の格子の Wilson の測度から出発し、ブロックの辺 $b_{N-1}, \dots, b_0$ の繰り込みを順に施して、間隔 $a_0 = 1$ の段 0 まで下ります。一段は決まった写像ではなく、確率の核です（9-01）。段 $m$ の格子の配位 $V$ の上に、正規化していない密度 $\rho_{N,p,m}(V)$ が載り、段の間は押し出しの等式でつながります源 。

$$\rho_{N,p,m}(V) = \int T_{\beta_{m+1}}(U,V)\,\rho_{N,p,m+1}(U)\,dU, \qquad \rho_{N,p,N} = e^{-\beta_N S_{\mathrm{W}}}. \tag{1}$$

ここで $p$ は体積の番号、$T_\beta$ は一段の核、$dU$ は確率の Haar の積です。式 (1) は等式で、近似ではありません。この部が読むのは、この等式の列を「評価つきで」運ぶための三つの部品です。

1. **帰納の仮定**：どの段の密度も同じ形の表示を持ち、その材料に段ごとの帳簿が掛かっていること（11-01）。
2. **一段の証書**：段 $m+1$ の表示から段 $m$ の表示を作り、式 (1) と帳簿を出すこと。大きい場（11-02〜11-08）と小さい場（11-09）に分かれます。
3. **固定した段の収束**：段 $m$ を止めて $N \to \infty$ としたとき、表示の材料が列の全体で収束し、そこから格子の相関が収束すること（11-10）。

02

## 引用の水準と札

第二巻は、2026 年 11 月に公開された純粋ヤン–ミルズの存在の構成の Lean の源（リポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`、Apache-2.0）と、委員会の評価書（`yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`、2026-11-10）を引用して読みます。

**確かさの水準**。委員会は、17 の見出しの定理の依存に入る宣言（約 10 万）が新しく初期化した Lean の核の環境（固定した外部の版を読み込んだもの）で検査し直され、許された三つの公理だけを使うことを記録しています評 （評価書 §9.1）。公開の定理 `YangMills.jointExistence` と、委員会自身の結合の目標 `YMReview.Acceptance.combined_acceptance` は、別の比較の道具（Comparator）も通っています評 （評価書 §9.2）。評価書は、別の核の実装は使っていないとも書いています評 （§9.2）。したがって、この部で「公開された構成の言明」と書くものは、**Lean で証明され**

**ている、と委員会が評価した**水準の結果です。本書が自分で確かめたのは、定義と言明の形を源で読んだことまでです。証明の中身は、要所しか読んでいません。

札は 6-00 の凡例のとおり、源（公開された構成の源の定義か言明を読んだ）・推（本書の推し量り）・評（委員会の評価書による）の三つです。源は証明が正しいことを保証しません。それは委員会の評価の水準です。

**どの目標に入る言明か。**検証の記録（`verification/declaration-usage.tsv`）は、各宣言が 17 の見出しの定理のどれかの依存に入るか（used）、入らないか（outside）を記します。used は「公開の定理が使う」という意味ではありません。6-00 は目標を五つに分けます（公開の定理・構成の定理・委員会の結合の目標・見出しの定理のどれかから届く・依存の外）。この部の宣言の多くは、前の三つの結論そのものではなく、その証明の部品です。そこでこの部では、次の三つの書き方で、どこまで確かめたかを示します。一つ目は、構成の定理（と、それを射影として含む公開の定理）の証明の鎖に、字面で辿って載ることを確かめたもの、二つ目と三つ目は 6-00 の後の二つの区別そのものです。

| 書き方 | 意味 | 例 |
|---|---|---|
| 存在の定理の鎖に載る | `Nonperturbative.existence`（構成の定理 `constructed` が呼ぶ）から、宣言の字面で辿って確かめた | `rodB` → `Roof.Lyrics.supplier` → … → `Return.reset`、`Window.allB`、`sailsW`、`realUV` |
| 見出しの定理のどれかから届く | 記録の used。存在の定理の鎖に載るかは確かめていない | 大きい場の補題の多く（記録の上の証人は `SharpGram.habitat`） |
| 依存の外 | 記録の outside。主な結果の証明に使われていない | `Remainder.hole_price`、`Directed.holding` |

出典は「ファイルのパス（リポジトリの根からの相対。版は 6-00 の凡例のとおり）・宣言の名・行」で書きます。行は本書が源を開いて確かめたものです。

03

## 二つの帳簿

段 $m$ の基準の結合を $\hat{\beta}_m = \bar{\beta} + s\log(1/a_m)$（$s = 11C_g/(24\pi^2)$ は一ループの傾き）、$\hat{g}_m = \hat{\beta}_m^{-1/2}$、超多重対数の量を $P_m = \exp\left((\log\log\hat{\beta}_m)^2\right)$ と書きます（暦 `Calendar`、`YM/RG/History.lean:64-90`）源。小さい場の閾は $t_m = \hat{g}_m P_m$ です。

**帰納の仮定** `History.Conv`（`YM/RG/History.lean:213`）は、段 $m$ の表示に次を要求します源。

- 正則な活動（小さい場の補正）の帳簿 $\le \hat{g}_m^{11/5}$（`allowance`、:84）。

- 強制された活動（大きい場の補正）の帳簿 $\le \exp(-P_m^{1/5})$（`forcedAllowance`、:85）。
- 結合が帯の中：$\beta_m \in [\hat{\beta}_m/2,\, 2\hat{\beta}_m]$。

**一段の証書** `Directed.Move`（`YM/PCalc/Band.lean:49`）は、段 $m+1$ の表示 $v$ と段 $m$ の表示 $u$ について、押し出しの等式 $u.\mathrm{eval} = \mathrm{push}_{\beta_v}(v.\mathrm{eval})$ と、帰納の仮定の形（弱い帳簿）に加えて、強制された活動について**強い**帳簿を言います源。

$$\text{帰納の仮定：}\ \|K\| \le e^{-P_m^{1/5}}, \qquad \text{一段の証書：}\ \|K\| \le e^{-g\,P_{m+1}^2}. \tag{2}$$

ここで $\|K\|$ は被覆の重みつきの点ごとの和（`KBound`、`YM/RG/Activities.lean:102`）、$g > 0$ は暦が段ごとに選ぶ定数です。強い帳簿は、その段の大きい場の値段（一段の積分から種一つあたりに出る因子 $e^{-c_E P^2}$ の指数。種は 11-03、印は 11-05 で定義）から作り直されます（11-05）。弱い帳簿へは、$P$ の指数を落とす一行の不等式で移ります（11-07）源。

帰納の仮定は弱い帳簿だけを運び、一段の中で強い見積もりを作り直してから弱い帳簿へ緩めます。強い帳簿を次の段の仮定として運ぶ必要はありません推。弱い帳簿も段 $m$ の関数で、毎段作り直されます。段に一様に成り立たせる条件は、暦の定数（β の入口、辺の下限など）の側で払っています（11-08）源。

## 04 この部の地図

| 章 | 主題 | 主な宣言（源） | 目標への載り方 |
|---|---|---|---|
| 11-01 | 各段の密度の形と帰納の仮定 | `Rep`・`Rep.eval`・`Conv`・`Transfer`・`Selected` | 存在の定理の鎖の対象（`Makes` が `Selected` を含む） |
| 11-02 | 一番細かい段 | `WilsonStartup.due_eq` | 見出しの定理のどれかから届く |
| 11-03 | 作用の分解・種の型・区画・一の分割 | `Tube.locates`・`Stores`・`Seeded`・`Plot`・`Allocation` | 見出しの定理のどれかから届く |
| 11-04 | 種一つあたりのエネルギー | `Bid.Crowds`・`Seals`・`Lapse`・`Teller.Grants` | 見出しの定理のどれかから届く |
| 11-05 | 値段の配分と塊の和 | `Buy.quote`・`Cash.armK` | 見出しの定理のどれかから届く |
| 11-06 | 粗い段の活動の組み直し | `ThinP`・`ThickP`・`Collection.vac` | 見出しの定理のどれかから届く |

| 章 | 主題 | 主な宣言（源） | 目標への載り方 |
|---|---|---|---|
| 11-07 | 帳簿の換算と段を跨ぐ持続 | `Time.late_force`・`Postage.saved`・`Time.now` | 見出しの定理のどれかから届く |
| 11-08 | 暦 — 定数を選ぶ順 | `Supply.Large`・`Bid.pricing_order`・`Calendar.Fits` | 見出しの定理のどれかから届く |
| 11-09 | 小さい場の一段 | `Return.earnings`・`atlas`・`Local.actual`・`Return.reset` | `reset` まで存在の定理の鎖 |
| 11-10 | 固定した段の収束と、段を外す一段 | `Window.allB`・`accord`・`Flux.fanned`・`Sever.echoes`・`Rising.arrives` | 存在の定理の鎖 |
| 11-11 | 読めていない所の一覧 | — | — |

読む順は表の順を勧めます。大きい場の章（11-02〜11-08）を飛ばして、11-01 から 11-09・11-10 へ進んでも、筋は追えます。

## 記号の対応

第 9〜11 部の章は、それぞれ源の字に近い記号で書いたので、同じ対象が章によって別の字になっている所と、同じ字が章によって別の対象を指す所が在ります。読むときの対応を一つの表にまとめます。

| 対象 | 第 9・10 部 | 第 11 部 | 注 |
|---|---|---|---|
| Wilson の作用 | $S_{\mathrm{W}}$（9-06・10-01） | $S_{\mathrm{W}}$（式 (1)）。11-02 の式 (1) は面ごとの値段の和 $\sum_{\square}\mathrm{price}(U_{\square})$ で書く | 同じもの。どちらも β を掛ける前の面の和で、重みは β を掛けて指数に入れます（A-01 §05 の S_W は β を含めた形で書いています） |
| 小さい場の閾 | $t_m$（段 $m$）、$t_{m+1}$（段 $m+1$）（9-07） | 章によって $t_m$・$\tau$・$t$・$t_y$ | 11-01 の閾の字の対応の表 |
| 被覆の尺度 | $B_m = \lceil(\log\hat{\beta}_m)^2\rceil$（9-06・9-07） | $B_m$（11-01・11-08・11-10）、$R=\mathrm{radiusB}(x)$（11-03・11-04。$x=\hat{\beta}_m$ で $B_m$ と同じ値） | 9-02〜9-04 の $R=(J+3)L$ はパッチの半径で、別の量 |
| 核の離散の選び（枠の札と道の札の組） | $\tau$（9-01〜9-05：$P(\tau\mid U)$、$Q_b(U,\tau)$） | $k$（11-03・11-04：$Q=Q(U,k)$） | 11-06 の $k$ は融合の指数で、別の量 |
| 精度の行列の中の、予測子の線形化 | $Q$（9-01：$K+c_{\mathrm{pen}}Q^{\mathsf{T}}Q$） | $\Pi$（11-09：$K+c_{\mathrm{pen}}\Pi^{\mathsf{T}}\Pi$） | 同じ行列（`FreeResolvent.baseMatrix`）。9-04 の $\Pi_G$ は群への射影で、別のもの |
| 表現の次元 | $d_G$（9-01・10-01） | $d$（11-01・11-02） | 11-05・11-10 の $d$ は次数で、別の量 |

| 対象 | 第 9・10 部 | 第 11 部 | 注 |
|---|---|---|---|
| 結合の補正（一ループの予測からのずれ） | $d$（10-02 の (1)、10-03 の読み直しの方程式の根） | $u = \beta_F -$ 予測子 と $\Delta$（11-09） | 同じ量（11-09 §06） |
| 一段の証書の強い帳簿の係数 | — | $g$（式 (2)、11-08）、$d$（11-07。源の `late_force` の字） | 同じ係数。11-10 の $g_m$ は一段の結合のずれで、別の量 |
| 表示の欄の名 | 主な作用・切りの母数・帳簿の点・支え（9-06） | 道の作用・切りの定数・予算の点・台（11-01 以降） | 同じもの |

05

## 本書の検討で見えていたこと

本書の検討は、紫外の側を「ブロック写像の鎖」として扱い、大きい場の領域を段ごとに積み上げて以後固定する形（Bałaban の型）で考えていました。そこで開いていたのは、ブロック写像で形の変わらない配位の近くで、何段も持続する欠陥をどう扱うか、という所です（前提の一覧の「大きい場の評価」「大きい場の気体」、28-04・28-06）。本書が Lean で持っていたのは、一つの尺度での大きい面の稀さ（22-01）と、自由場の一段（15-12）までです。

公開された構成は、この詰まりに**別の形で答えています**。領域の履歴を持たず、段ごとに種を数え直し、ゲージの切り口と区画の条件を満たす配位について一様な不等式で、種あたりの因子を毎段出します。測度は変えていません（式 (1) は等式のまま）源 （形を読んだ）・推 （本書の詰まりとの対応の読み）。比べの全体は 14-04 に置きます。

06

## 読めていない所

この部の各章の末に、その章の主題で読めていない所を在りかつきで書きます。部の全体の一覧は 11-11 です。大きいものは三つです。

- 大きい場の値段を出したあとに残る積分の上界の全体（`YM/SectorNext/LARGE_FIELD_REMAINDERS` から先）。
- 一段の定理の組み立ての中身（`Use.Machine.run`、`YM/AnalyticBridge/VERIFIED_RESET_STEP/Downstream.lean:65`）。

- 粗い段の活動を組み直す補題の証明
  （`YM/PhysicalNext/RG_NEXT_COMPLETE_REPEATABLE_NONLINEAR_STEP` の中）。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 段の間は押し出しの等式でつながり、帰納の仮定は弱い帳簿 $e^{-P_m^{1/5}}\cdot\hat{g}_m^{11/5}$ と結合の帯を持つ（`Conv`・`Transfer`） | 表示が一意であること（源は一意を言わない） |
| 源 一段の証書は強制された活動に強い帳簿 $e^{-gP_{m+1}^2}$ を言う（`Move.forced`） | 強い帳簿が後の段でどう使われるか（読めていない） |
| 評 17 の見出しの定理の依存は、新しく初期化した核の環境で検査し直された（評価書 §9.1。別の核の実装は使っていない、§9.2） | この部の各補題の証明を本書が確かめたこと |
| 推 強い帳簿は次の段の仮定として運ばれず、一段の中で作り直してから弱い帳簿へ緩められる | 段の数に一様な条件が要らないこと（暦の側で払う） |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 公開された構成の Lean の源 | 源 | `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）。本書は写しを読んだだけで、組み立ても実行もしていない |
| 委員会の評価書 | 評 | `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）、§4.3・§9.1・§9.2。版は 6-00 の凡例のとおり（コード 3456e5e・評価の側 55ba9fc） |
| 暦と帳簿 | 源 | `YM/RG/History.lean:64`（`Calendar`）、:84（`allowance`）、:85（`forcedAllowance`） |
| 帰納の仮定・一段の関係・全段 | 源 | `YM/RG/History.lean:213`（`Conv`）、:223（`Transfer`）、:234（`Selected`） |
| 一段の証書 | 源 | `YM/PCalc/Band.lean:49`（`Directed.Move`）、:65（`Program`） |
| 依存の記録 | 源 | `verification/declaration-usage.tsv`（status と見出しの証人の列） |

**この章で使った語** — 帰納の仮定、一段の証書、帳簿、正則な活動、強制された活動、押し出しの等式、見出しの定理。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：11-01 各段の密度の形 — 帰納の仮定が運ぶ表示を、式で読みます。

# 各段の密度の形と帰納の仮定

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§04 は本書の検討、§05 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 段 $m$ の正規化していない密度が、どんな材料のどんな関数として書かれ、その材料にどんな帳簿が掛かるか。帰納の仮定 `History.Conv`、一段の関係 `History.Transfer`、全段の言明 `History.Selected` の中身です。

**前提となる章** — 11-00（札と引用の水準）、9-06 密度の表示、9-07 小さい場の閾と、切った作用。

**先に言うこと** — 表示は存在の量化で言われ、一意ではありません（源の説明文が明言）。帳簿は段ごとの量で、体積に依らない点ごとの和の形ですが、密度そのものの大きさは体積の指数を含みます。この章は形を読むだけで、帳簿が保たれる証明は 11-02〜11-09 の主題です。

この章の順序

1. 言明 — 表示・帰納の仮定・一段の関係・全段
2. 切った作用と道の作用 — 閾を超えると一次。
3. 二種類の活動と気体 — 正則な活動は健康な所だけ、強制された活動は旗の上だけ。
4. 本書の検討で見えていたこと
5. 読めていない所

---

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

```
01
```

## 言明 — 表示・帰納の仮定・一段の関係・全段

記号は暦（11-00 §03）のとおり：$\hat\beta_m$、$\hat g_m = \hat\beta_m^{-1/2}$、$P_m = \exp((\log\log\hat\beta_m)^2)$、閾 $t_m = \hat g_m P_m$、被覆の尺度 $B_m = \lceil(\log\hat\beta_m)^2\rceil$。段 $m$ の格子を $\Lambda_m$、その上の配位を $V$ とします。

**閾の字の対応**。一段（段 $m+1$ から段 $m$）の中では、細かい側と粗い側の二つの閾が現れます（9-07）。章によって字が違いますが、どれも暦の閾 $t_m = \hat g_m P_m$ の、段 $m$ か段 $m+1$ での値です。源の `temp`（`YM/Pressure/Seeds.lean:25`）は $\mathrm{temp}(\hat\beta_m) = t_m$、`fiery`（:26）は $\mathrm{fiery}(\hat\beta_m, L) = \mathrm{temp}(\hat\beta_m + s\log L) = t_{m+1}$ です源。

| 章 | 粗い側（段 $m$）の閾 | 細かい側（段 $m+1$）の閾 | 注 |
|---|---|---|---|
| 9-07・11-00・11-01・11-08 | $t_m$ | $t_{m+1}$ | 暦の記号のまま |
| 11-02 | — | $t$（$= t_N$） | 一番細かい段 $N$ の閾 |
| 11-03・11-04 | $\tau = \mathrm{temp}(x)$ | $t = \mathrm{fiery}(x, L)$ | $x = \hat\beta_m$ |
| 11-05 | — | $t = \mathrm{fiery}(x, L)$ | $x = \hat\beta_m$ |
| 11-06・11-07 | $t_m$ | $t_y$ | $y$ は細かい段の基準の結合 |
| 11-09 | $t = \hat g P$ | — | $x = \hat\beta_m$、$\hat g = x^{-1/2}$。11-03 の $t$ とは逆の側 |

この章の §02・§03 の $t$ は、その表示の予算の点の閾です（段 $m$ の表示なら $t_m$）。

**表示** `Rep`（`YM/RG/History.lean:165`）は六つの材料の組です源：道のデータ（作用に入る道とその係数）、切りの定数 `Clip`（9-06 の「切りの母数」）、活動の族 `Activities`、予算の点 `BudgetPoint`（9-06 の「帳簿の点」。閾・被覆の尺度・微分の階数など）、結合 $\beta$、真空の定数 $v$。その値は

$$\mathrm{eval}(V) = \exp\Big(v\,|\Lambda_m| - S_\beta^{\mathrm{ch}}(V) - \sum_i \mathbf{1}[\text{健康}]\,E_i(V)\Big)\cdot \mathrm{gas}(V) \tag{1}$$

です（`Rep.exponent`・`Rep.eval`、:176・:179）源。$S_\beta^{\mathrm{ch}}$ は道の作用を超立方の群の符号つきの向き（384 通り）で平均したもの（`PathData.inChannels`、`YM/RG/PathActions.lean:241`）、$E_i$ は正則な活動、gas は強制された活動の気体です。

**帰納の仮定** `History.Conv N p m`（`YM/RG/History.lean:213`）は四つの欄を持ちます源。

1. 予算の点が段 $m$ のもの（閾 $t_m$、被覆の尺度 $B_m$ など）。
2. 切りの定数が段の定数のもの。

3. 表示が `Lawful`：道のデータが `Bounds` を満たし、活動が `Valid` で、正則な活動の帳簿 $\le \hat{g}_m^{11/5}$、強制された活動の帳簿 $\le e^{-P_m^{1/5}}$。

4. 結合が帯の中：$\beta_{N,p,m} \in [\hat{\beta}_m/2,\, 2\hat{\beta}_m]$。

**一段の関係** `History.Transfer N p m`（:223）は二つの式です源。

$$\mathrm{eval}_m = \mathrm{push}_{\beta_{m+1}} \mathrm{eval}_{m+1}, \qquad \left|\beta_{m+1} - \beta_m - s \log b_m\right| \le \mathrm{drift}_{m+1}. \tag{2}$$

押し出し $\mathrm{push}_\beta F(V) = \int T_\beta(U,V) F(U)\, dU$ は一段の核の積分（`YM/RG/Block.lean:77`）で、核の $\beta$ は**細かい側**の段の結合です。第二式は一ループの走りからのずれの大きさです（$s = 11 C_g/(24\pi^2)$ は一ループの傾き）。

**全段の言明** `History.Selected`（:234）は、全ての $N, p$ と $m \le N$ について次を束ねます源：道のデータは体積 $p$ に依らない（`path_shared`）、各段で帰納の仮定（`represents`）、段 $N$ は $v = 0$ で裸の Wilson の重みにちょうど等しい（`starts`、:237）、各段で一段の関係（`steps`）、段 $0$ で $\beta = \bar{\beta}$（`reaches`、:239）、走り（`running`）。

系として、分配関数が段を通して保たれます源（`History.partition_eq`、:242）：

$$\int \mathrm{eval}_{N,p,m}\, dV = Z_{\Lambda_N}(\beta_{N,p,N}) \qquad (m \le N). \tag{3}$$

**どの目標に入るか**。構成の族の証書 `Family.Makes`（`YM/Source/Construction.lean:44`）が `path.Selected` を含み、`constructed` の結論に族が出ます。この章の対象は存在の定理の鎖の上の対象です源。

02

## 切った作用と道の作用

面 $p$ のホロノミー $U_p$ について、弦の距離 $\sigma = \mathrm{chord}(U_p) = \|U_p - 1\|/\sqrt{d}$ を使います（$d$ は表現の次元。$\mathrm{price}(U_p) = 1 - \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\, U_p/d = \sigma^2/2$）。**切った作用**（`PathData.clipped`、`YM/RG/PathActions.lean:218`）は

$$\mathrm{clip}_t(\sigma) = \begin{cases} c_{\mathrm{dir}}\,\sigma^2/2 & (\sigma \le t) \\ c_{\mathrm{lin}}\,t\,\sigma & (\sigma > t) \end{cases}, \qquad 0 < c_{\mathrm{lin}} < c_{\mathrm{dir}}/16 \tag{4}$$

です（`Clip`、:139。最後の不等式は欄 `kink`）源 。閾 $t$ を超えると、作用は二次から一次に下がります。$\sigma = t$ で値は下へ跳び、関数は単調でも凸でもありません源 。

面の基本の項（`baseTerm`、:221）は $\mathrm{clip}_t(\sigma_p)$ に、面のまわりの場が小さい（`kept`、:210：面から離れるほど緩む閾で全ての面の弦が押さえられる）ときだけ、輸送した曲率の二乗 $\|\ell_p\|^2/2$ を足したものです。道の作用（9-06 の「主な作用」）は

$$S_\beta(V) = \beta\Big(\sum_p \mathrm{base}_p(V) + \sum_x (\text{三次・四次の原子})\Big) + \sum_x (\text{ループの原子}) \tag{5}$$

（`principal`、:236）で、$S_\beta^{\mathrm{ch}}$ はその向きの平均です源 。

意味推 ：閾より上で作用を一次に弱めて表示に残すと、大きい場の配位の稀さは、気体の中ではなく作用の項の中に陽に残ります。粗い段へ渡す作用を弱くしたことが、一段の積分で「正の余り」として値段を生みます（11-04）。

03

## 二種類の活動と気体

**旗と健康**。閾 $t$ で、弦が $t$ を超える面に触れる点の集合を旗 $\mathrm{flags}_t(V)$ と呼びます（`YM/RG/Masks.lean:34`）。台（9-06 の「支え」）$X$ が旗と交わらないとき、$X$ は健康です（`Healthy`、:41）源 。

**正則な活動**（`RegularAddress`・`E`）は、錨の点と台を持つ関数 $E_i$ で、健康なときだけ密度に入ります（`masked`、:70 の指示関数）。条件 `RegularFamily`（`YM/RG/Activities.lean:70`）は、健康な所で有限階まで滑らか、平らな配位で $E_i(1) = 0$、錨での affine な方向の対数 Hessian が 0、の三つです源 。後の二つは、限界的な項（定数と二次）を真空の項と結合へ移した後の姿です（11-09）。

**強制された活動**（`ForcedAddress`・`K`）は、台と、その中の空でない「在庫」を持つ関数 $K_i$ です。$K_i(V) \neq 0$ なら、台と旗の交わりが在庫にちょうど一致します（`permit`）源 。気体は

$$\mathrm{gas}(V) = \sum_{b} \mathbf{1}\Big[\text{台が互いに素}, \bigcup_{i\in b} \mathrm{inv}_i = \mathrm{flags}_t(V)\Big] \prod_{i\in b} K_i(V) \tag{6}$$

です（`admissible`・`gas`、`YM/RG/Activities.lean:114-129`）源。旗が空なら気体は 1 です（`gas_one`、:135）。つまり強制された活動は、**その段の場の旗の上にしか生きていません**。

**帳簿**。どちらの活動にも、点ごとの和の帳簿が掛かります（`EBound`・`KBound`、:98・:102）源：

$$\sup_x \sum_{i:\,\mathrm{site}_i = x} e^{c_{\sup}\,\mathrm{cov}_B(X_i)}\,\|E_i\|_{t,k} \le \hat{g}_m^{11/5}, \qquad \sup_x \sum_{i:\,x\in X_i} e^{c_{\sup}\,\mathrm{cov}_B(X_i)}\sup|K_i| \le e^{-P_m^{1/5}}. \tag{7}$$

正則な活動の和は錨が $x$ の片について、強制された活動の和は台が $x$ を含む片について取ります。$c_{\sup}$ は予算の点の被覆の指数（`supportExponent`）です。$\mathrm{cov}_B(X)$ は、格子の最大値の距離で半径 $B$ の球（中心を持つ辺 $2B+1$ の立方体）を、和がつながるように並べて台を覆う最小の数（`coverNumber`、`YM/Lattice/Support.lean:71`）、$\|E\|_{t,k}$ は健康な配位で、大きさ $t$ の方向へ $k$ 階までの微分の上限です（`supBounds`、`YM/RG/Masks.lean:164`）源。和は点ごとなので、帳簿そのものは体積に依りません源。

04

## 本書の検討で見えていたこと

本書の検討でも、大きい場の補正を「穴ごとの活動」として持ち、各段・各穴で $|z_t(\gamma)| \le \exp(-\gamma_E \beta S^\flat(\gamma))$ の形の評価を前提に置いていました（前提の一覧の「大きい場の評価」「大きい場の気体」、28-04）。二つの違いがあります。

- 本書の前提は稀さ $e^{-c\beta}$ を活動の側に置き、領域を段ごとに積み上げる形でした。公開された構成は、稀さを切った作用の側に残し、活動の帳簿は弱い $e^{-P^{1/5}}$ です推。
- 本書の決定的なブロック写像で、粗い密度が全ての段で式 (1) の形の表示を保つことは示されていません。表示そのものを全段で運ぶことが、本書に足りない部品です推（11-10 §06）。

05

## 読めていない所

- 道のデータの `Bounds`（`YM/RG/PathActions.lean:173`）の欄の全部の意味。読んだのは `metric_zero`・`loop_jets` の名までです。
- 強制された活動の `extraTest`（追加の条件）の役。
- 向きの平均 $S^{\mathrm{ch}}$ と、一つの向きの道の作用との差が、一段の値段の勘定でどう扱われるか（11-07 §06）。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 各段の密度は式 (1) の形の表示を持ち、帰納の仮定は帳簿 (7) と結合の帯を要求する | 表示が一意であること（源は存在だけを言う） |
| 源 段の間は押し出しの等式 (2) で、分配関数は保たれる (3) | 押し出しの測度の鏡映正値性（言われていない） |
| 源 切った作用は閾を超えると一次で、一次の係数は $c_{\mathrm{dir}}/16$ 未満 | 切った作用が「有効作用の近似」であること（表示の部品にすぎない） |
| 源 強制された活動は旗の上だけで生き、旗が空なら気体は 1 | 気体が体積に一様に有界であること（密度の水準の評価は体積の指数を含む） |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 表示・値・Lawful | 源 | `YM/RG/History.lean:165`（`Rep`）、:179（`eval`）、:181（`Lawful`） |
| 帰納の仮定・一段の関係・全段・分配関数 | 源 | `YM/RG/History.lean:213`・:223・:234・:242 |
| 切った作用 | 源 | `YM/RG/PathActions.lean:139`（`Clip`）、:210（`kept`）、:218（`clipped`）、:221（`baseTerm`）、:241（`inChannels`） |
| 活動・気体・帳簿 | 源 | `YM/RG/Activities.lean:62`（`Activities`）、:70、:98、:102、:106（`Valid`）、:129（`gas`）、:135（`gas_one`） |
| 旗・健康・帳簿の重み | 源 | `YM/RG/Masks.lean:34`・:41・:70・:144（`mass`）・:164（`supBounds`） |
| 族の証書 | 源 | `YM/Source/Construction.lean:44`（`Family.Makes`） |

**この章で使った語** — 表示、切った作用、旗、健康、正則な活動、強制された活動、気体、帳簿、被覆数。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：11-02 一番細かい段 — 裸の Wilson の重みを、この表示に分ける最初の一歩です。

# 一番細かい段 — 裸の Wilson の重みを表示に分ける

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§04 は本書の検討、§05 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 帰納は段 $N$ で「表示の値が裸の Wilson の重みにちょうど等しい」ことから始まります。その表示を作る面ごとの恒等式と、残りの差 due が非負で、大きい面では $t^2/4$ 以上になることです。最初の強制された活動が小さい理由がここにあります。

**前提となる章** — 11-01 各段の密度の形（切った作用、旗、健康、二種類の活動）。

**先に言うこと** — 恒等式は面ごとの等式で、$\beta$ は掛かっていません。最初の活動がどんな塊に並べられて帳簿に入るかは、本書は名前と説明文までしか読んでいません。この章の補題は、検証の記録で見出しの定理のどれかから届きますが、存在の定理の鎖に載るかは確かめていません。

この章の順序

1. 言明 — 始まりの条件と面ごとの恒等式
2. 仕組みの骨子 — 四つの項への分け方
3. 差の行き先 — 最初の正則な活動と強制された活動
4. 本書の検討で見えていたこと
5. 読めていない所

---

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

```
01
```

## 言明 — 始まりの条件と面ごとの恒等式

**始まりの条件**。全段の言明 `History.Selected` の欄 `starts`（`YM/RG/History.lean:237`）は、段 $N$ の表示が $v = 0$ で、その値が裸の Wilson の重みにちょうど等しいことを要求します源：

$$\mathrm{eval}_{N,p,N}(U) = \exp\Big(-\beta_N \sum_{\square} \mathrm{price}(U_{\square})\Big), \qquad \mathrm{price}(u) = 1 - \tfrac{1}{d}\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,u = \tfrac{1}{2}\mathrm{chord}(u)^2. \tag{1}$$

ここで eval の添字の $p$ は体積の番号で、和は全ての面 $\square$ についてとります。式 (2) からは体積の番号は出てこないので、面を $p$ と書きます。一段の定理の側の始まりの欄 `Recipe.Starter`（`YM/Shoot/Criteria.lean:93`）も同じ二つ（$v = 0$、値が裸の重み）を要求します源。

**面ごとの恒等式** `WilsonStartup.due_eq`（`YM/Extra/WILSON_STARTUP/Ownership.lean:68`）源：切りの定数が $c_{\mathrm{dir}} \le 1$ なら、全ての配位 $U$ と面 $p$ で

$$\mathrm{price}(U_p) = \mathrm{base}_p(U) + \mathbf{1}[\text{健康}]\, Q_p(U) + (1 - c_{\mathrm{dir}})\,\mathbf{1}[\text{健康}]\, R_p(U) + \mathrm{due}_p(U). \tag{2}$$

ここで $\mathrm{base}_p$ は最初の段の道のデータ `top`（`Design.lean:34`）の基本の項（切った作用と、`kept` のときの二次の項）、$Q_p$ は曲率の四次の項（係数 $1 - c_{\mathrm{dir}}$）、$R_p$ は値段から二次と四次を除いた剰余（`surplus`、`Curvature.lean:166`）、「健康」は面の触れる点が旗に入らないことです。差 $\mathrm{due}_p$ について、次の三つが言われています源。

- `due_range`：$0 \le \mathrm{due}_p \le 2$（$c_{\mathrm{dir}} \le 1$ の下で）。
- `due_large`：弦が閾を超える面（$\mathrm{chord}(U_p) > t$）では $\mathrm{due}_p \ge t^2/4$。
- `owed_zero`（:193）：向きの枠で読んだ同じ量は、旗の $B$-ハロの外で $0$。仮定は `Decent`（$c_{\mathrm{dir}} \le 1$、$B \ge 2$、閾と緩みの長さの条件）の全体です。

**どの目標に入るか**。`due_eq`・`owed_zero` は検証の記録で used で、記録の上の証人は見出しの定理 `SharpGram.habitat` です。存在の定理の鎖に載るかは確かめていません源。

02

## 仕組みの骨子 — 四つの項への分け方

弦を $\sigma = \mathrm{chord}(U_p)$、閾を $t$ とします。最初の道のデータ `top` は、面そのものを道とし、輸送した曲率を $\ell_p = \sqrt{1 - c_{\mathrm{dir}}}\,\mathrm{curv}(U_p)$ とするものです（`ell_sq`、`Design.lean:86`：$\|\ell_p\|^2 = (1 - c_{\mathrm{dir}})\|\mathrm{curv}\|^2$）源。due の定義（`Ownership.lean` の `due`）は三つの場合に分かれます源。

| 場合 | 表示に入る分 | due |
|---|---|---|
| $\sigma > t$（大きい面） | 切った作用 $c_{\mathrm{lin}} t \sigma$ だけ | $\mathrm{price} - c_{\mathrm{lin}} t \sigma$ |
| $\sigma \le t$、健康で `kept` | $c_{\mathrm{dir}}\sigma^2/2 + \|\ell\|^2/2$＋四次＋剰余 | $0$ |
| $\sigma \le t$、それ以外 | $c_{\mathrm{dir}}\sigma^2/2$（と、健康なら四次と剰余） | 二次の項の過不足（$[0,2]$ の中） |

小さい場（二行目）では、裸の値段 $\sigma^2/2$ の $c_{\mathrm{dir}}$ 倍を切った作用の二次として、残りの $1 - c_{\mathrm{dir}}$ 倍を曲率の二乗・四次・剰余として表示に入れ、差は残りません源（式）。

**大きい面での下界**は短い計算です（`due_large` の証明の筋）源。切りの定数の条件 $c_{\mathrm{lin}} < c_{\mathrm{dir}}/16 \le 1/16$ から $c_{\mathrm{lin}} \le 1/4$。$t < \sigma$ なので

$$\mathrm{due}_p = \tfrac{1}{2}\sigma^2 - c_{\mathrm{lin}}\, t\,\sigma \;\ge\; \tfrac{1}{2}\sigma^2 - \tfrac{1}{4}\sigma^2 = \tfrac{1}{4}\sigma^2 > \tfrac{1}{4}t^2. \tag{3}$$

つまり、閾を超えた面では、切った作用は裸の値段の半分以下しか表示に入れず、残りの少なくとも $t^2/4$ を due として外へ出します。

03

## 差の行き先 — 最初の正則な活動と強制された活動

恒等式 (2) に $\beta_N$ を掛けて和を取り、指数に戻すと、裸の重みは「切った作用の指数 × 健康な所の項の指数 × $e^{-\beta_N \sum \mathrm{due}}$」の積になります。源の見出しの説明文は「残りの（非負の）差は全て強制の塊に負わせる。対数の付加はこの計画には無い」と書きます源（説明文）。

- 健康な所の剰余の項は、最初の正則な活動になると読みます（置き場 `YM/Extra/WILSON_STARTUP/Ink.lean`）推。
- due は、旗の $B$-球が重なるものをつないだ塊の上の、最初の強制された活動になると読みます（置き場 `YM/Extra/WILSON_STARTUP/Packets.lean`）推。

大きさ推：閾の定義から $\hat{\beta}_N t_N^2 = P_N^2$ です。実際の結合 $\beta_N$ は帯 $[\hat{\beta}_N/2,\, 2\hat{\beta}_N]$ の中にあるので（`Conv.band`、`YM/RG/History.lean:218`）、$\beta_N t_N^2 \ge P_N^2/2$ で、旗の面一つあたり $e^{-\beta_N \mathrm{due}} \le$

$e^{-P_N^2/8}$ です。最初の強制された活動は、帰納の仮定の帳簿 $e^{-P_N^{1/5}}$ よりずっと小さい所から始まります。

04

## 本書の検討で見えていたこと

本書の検討の紫外の鎖は、段 $N$ を裸の Wilson の測度として置き、大きい場の領域を最初の段から積み上げる形でした（28-04 の前提「大きい場の評価」）。最初の段で、作用を閾で切り、差を有界な因子として活動に押し付ける、という初期条件の作り方は持っていませんでした。比べる価値のある所として記しておきます。

05

## 読めていない所

- 最初の強制された活動を塊に並べる構成（`YM/Extra/WILSON_STARTUP/Packets.lean`）と、最初の帳簿に入ること（`Treats.start`、在りかは未確認）。
- 健康な所の剰余を最初の正則な活動にする所（`YM/Extra/WILSON_STARTUP/Ink.lean`）と、その帳簿 $\hat{g}_N^{11/5}$。
- `due_eq` が存在の定理の鎖に載るか（記録の上の証人は `SharpGram.habitat`）。
- `owed`（向きの枠で読んだ due）と `due` の対応の細部。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 段 $N$ の表示は $v=0$ で裸の Wilson の重みに等しい（`Selected.starts`） | この表示が一意であること |
| 源 面ごとの恒等式 (2)：裸の値段＝基本の項＋健康な所の四次と剰余＋due（$c_{\mathrm{dir}} \le 1$） | 恒等式から最初の帳簿までの組み立て（読めていない） |
| 源 $0 \le \mathrm{due} \le 2$、大きい面で $\mathrm{due} \ge t^2/4$ | due が旗の近くの全ての面で大きいこと（小さい面では 0 もありうる） |
| 推 最初の強制された活動は旗あたり $e^{-P_N^2/8}$ 以下の程度 | その大きさが言明として書かれていること（本書は見ていない） |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 始まりの条件 | 源 | `YM/RG/History.lean:237`（`Selected.starts`）、`YM/Shoot/Criteria.lean:93`（`Starter`） |
| 面ごとの恒等式と性質 | 源 | `YM/Extra/WILSON_STARTUP/Ownership.lean:68`（`due_eq`）、`due_large`・`due_range`（同じファイル）、:193（`owed_zero`） |
| 最初の道のデータ | 源 | `YM/Extra/WILSON_STARTUP/Design.lean:23`（`bulk`）、:34（`top`）、:86（`ell_sq`）、`Curvature.lean:166`（`surplus`） |
| 依存の記録 | 源 | `verification/declaration-usage.tsv`（`due_eq`・`owed_zero` は used、証人 `SharpGram.habitat`） |

**この章で使った語** — 裸の Wilson の重み、切った作用、旗、健康、due（残りの差）、強制された活動、正則な活動。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：11-03 一段の作用の分解と区画 — 一段の積分の中で、作用を局所の行に分け、配位を種の型で分けます。

# 一段の作用の分解と区画

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討、§07 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 一段の積分で現れる「細かい作用＋罰–粗い作用」を、面と辺ごとの局所の行の和に書く代数の恒等式と、配位を三種類の種の集合（種の型）で分ける区画です。区画は重なり、滑らかな一の分割で貼り合わせます。区画の条件は全体に課し、評価には種のまわりに局所化した形を使います。

**前提となる章** — 11-01（切った作用・旗）、9-01 ブロックの核（予測子と罰）、9-04 予測子と群への射影。

**先に言うこと** — 行の恒等式は代数の等式で、評価は含みません。評価（種一つあたりのエネルギー）は 11-04 です。この章の宣言は検証の記録で見出しの定理のどれかから届きますが、存在の定理の鎖に載るかは確かめていません。

この章の順序

1. 舞台 — 一段の積分と三つの闕
2. 言明 1 — 行の恒等式
3. 言明 2 — 種の型と区画
4. 言明 3 — 一の分割と、旗は必ず種に触れること
5. 仕組みの骨子 — なぜ重なる区画か、なぜ全体と局所の二本か
6. 本書の検討で見えていたこと
7. 読めていない所

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

01

## 舞台 — 一段の積分と三つの閾

一段のデータを $S$（細かい格子 $f$ から粗い格子 $c$ へ、ブロックの辺 $L$）とします。細かい配位 $U$、粗い配位 $V$、核の中の離散の選び（ゲージの枠と予測子の札）$k$ があり、予測子 $Q = Q(U,k)$ は細かい場から作った粗い辺の値です（9-04）。粗い辺 $b$ の「ずれ」を $\mathrm{wire}_b = \mathrm{chord}(V_b Q_b^{-1})$ と書きます（`YM/Pressure/Cost.lean:187`）源 。

粗い段の基準の結合を $x$（$= \hat\beta_m$）とし、三つの量を使います（`YM/Pressure/Seeds.lean:22-27`）源 。

| 記号 | 定義 | 意味 |
|---|---|---|
| $\tau = \mathrm{temp}(x)$ | $x^{-1/2}\exp((\log\log x)^2)$ | 粗い段の閾 |
| $t = \mathrm{fiery}(x,L)$ | $\mathrm{temp}(x + s\log L)$（$s$ は一ループの傾き） | 細かい段の閾 |
| $R = \mathrm{radiusB}(x)$ | $\lceil(\log x)^2\rceil$ | ハロ（種のまわりの近傍）の尺度 |

$x = \hat\beta_m$ のとき、9-07・11-01 の記号では $\tau = t_m$（粗い側）、$t = t_{m+1}$（細かい側）、$R = B_m$（被覆の尺度）です（11-01 の閾の字の対応）。

面の「大きさ」は $\mathrm{toll}(U_p) = \mathrm{chord}(U_p)$ です（`YM/Pressure/Rows.lean:55` の `toll`）。

02

## 言明 1 — 行の恒等式

細かい面の作用を $\mathrm{crown}_p^f$（切った作用＋`kept` のときの二次の項）、粗い面の作用を $\mathrm{crown}_q^c$、粗い辺の罰の項を $\mathrm{pen}_b$（`monetary`、`Rows.lean:112`）と書きます。**行の恒等式** `Tube.locates`（`YM/Pressure/Rows.lean:145`）は源

$$\sum_f \mathrm{workF} + \sum_b \mathrm{workI} + \sum_q \mathrm{workC} + \sum \mathrm{workN} + \sum_q (\mathrm{workL} + \mathrm{workD}) = \sum_p \mathrm{crown}_p^f + \sum_b \mathrm{pen}_b - \sum_q (\mathrm{lo}$$

です。証明は線形の恒等式の足し合わせだけです（`linarith`）。行の中身は次のとおりです源。粗い面 $q$ の曲率に $\sqrt{c_{\mathrm{dir}}}$ を掛けたものを $X^c_q$ とし、それを閾 $\tau$ で縮めたもの

$$\mathrm{vision}_q = \min\bigl(1,\ \tau/\mathrm{toll}(V_q)\bigr)\, X^c_q \tag{2}$$

（`thinned`、:71、`vision`、:104）を、ブロック化の核 $\Phi$（`leap`、:46）で細かい面へ配ったものを $M_v = \Phi \cdot \mathrm{vision}$ とします。

- $\mathrm{workC}_q = \langle \mathrm{vision}_q, X^c_q \rangle - \frac{1}{2}\|\mathrm{vision}_q\|^2 - \mathrm{crown}^c_q$（粗い面の行、:129）。
- $\mathrm{workF}_p = \mathrm{crown}^f_p + \frac{1}{2}\|M_v\|^2 - \langle M_v, X^f_p \rangle$（細かい面の行、:122）。
- $\mathrm{workI}_b$：罰の項と、雑音の側へ配った vision との平方の完成（:126）。
- $\mathrm{workL}_q$：粗い曲率と、細かい曲率と雑音から作り直した曲率との「ずれ」と vision の内積（:133）。workN・workD は平方を閉じるための残り。

意味推：粗い曲率を「細かい曲率をブロック化したもの＋雑音」と比べ、平方を完成させて差を局所の行に配っています。どの行も一つの面か辺の近くだけに依ります。

03

## 言明 2 — 種の型と区画

**種の型** `Stores`（`YM/Pressure/Seeds.lean:34`）は三つの有限集合の組 $A = (\mathrm{costs}, \mathrm{aisles}, \mathrm{flags})$ です源：大きい細かい面の集合、予測から大きくずれた粗い辺の集合、粗い段の旗の点の集合。**種の数**は $\#A = |\mathrm{costs}| + |\mathrm{aisles}| + |\mathrm{flags}|$（`shares`、:46）です。ここで「種」とは、この三つの集合の元の一つ一つを指す、公開された構成の作業の語です。

**全体の区画の条件** `Seeded A U k V x W`（`YM/Push/SECTOR_MEASURE/Cells.lean:51`）源は、**全ての**細かい面 $p$ と全ての粗い辺 $b$ に次を課します。

$$\begin{aligned}
&p \in \mathrm{costs} \Rightarrow \mathrm{toll}(U_p) \ge t/4, \qquad p \notin \mathrm{costs} \Rightarrow \mathrm{toll}(U_p) \le t/2,\\
&b \in \mathrm{aisles} \Rightarrow \mathrm{wire}_b \ge Wt, \qquad b \notin \mathrm{aisles} \Rightarrow \mathrm{wire}_b \le 2Wt,\\
&\mathrm{flags} = \mathrm{flags}_\tau(V) \quad \text{(ちょうど一致)}.
\end{aligned} \tag{3}$$

$W$ は大きく取る定数です。面と辺の条件には、$t/4$ と $t/2$（$Wt$ と $2Wt$）の間の幅、つまりヒステリシスがあります。旗には幅がなく、粗い場の旗に完全に一致させます。

**局所の区画の条件** `Plot A U k V x W`（`YM/Pressure/Seeds.lean:51`）源 は、同じ条件を、種の置き場所の半径 $5R$ の近傍（`dome (5*radiusB x)`）に触れる面と辺だけに課し、そこで旗の一致を求め、さらに選び $k$ の枠の重みが正であることを足したものです。全体の条件から局所の条件が出ます（`Seeded.plot`、`Cells.lean`：選び $k$ の尤度が正なら）源 。

評価の対象は、種の半径 $2R$ の近傍の行の和

$$\mathrm{assessed}(A) = \sum_{\mathrm{dome}(2R)} \big(\mathrm{workF} + \mathrm{workI} + \mathrm{workC} + \mathrm{workN} + \mathrm{workL} + \mathrm{workD}\big) \tag{4}$$

です（`Stores.assessed`、`Seeds.lean:85`）源 。

04

## 言明 3 — 一の分割と、旗は必ず種に触れること

**一の分割** `Allocation`（`YM/Push/SECTOR_MEASURE/Profile.lean:30`）は、種の型ごとの重み $\mathrm{bill}_A(k, U, V)$ で源

$$\mathrm{bill}_A \ge 0, \qquad \sum_A \mathrm{bill}_A = 1, \qquad \mathrm{bill}_A \neq 0 \;\Rightarrow\; \texttt{Seeded}\ A. \tag{5}$$

を満たし、可測なものです。重みが $0$ でない所では**全体の条件**が成り立ち、選びが生きていれば局所の条件 `Plot` が取り出せます（`plots`、:50）源 。

**旗は必ず種に触れる**（`flagged`、:56）源 ：$\mathrm{bill}_A \neq 0$ で、点 $i$ が細かい段の閾 $t$ の旗に入るなら、$i$ に触れる面 $p \in \mathrm{costs}$ が在ります。証明は、旗の面は $\mathrm{toll} > t > t/2$ なので、全体の条件 (3) の二つ目の対偶で costs に入る、というものです。前の段から入ってきた強制された活動は細かい段の旗の上にしか生きていないので（11-01 §03）、**入ってきた活動の在庫の点は、必ずこの段の種（costs の面）に触れます**源 （言明を読んだ）・推 （意味の読み）。

**どの分割が使われるか**。特性関数で分ける版 `Allocation.hard`（:68、閾 $t/4$ と $Wt$ でちょうど切る `booking`、`Cells.lean:87`）は依存の外です源 （記録）。記録で used なのは、滑らかな遷移関数 $\chi$ で作る積の重み

$$\mathrm{share}_J = \prod_{i \in J} \left(1 - \chi((r_i/d)^2)\right) \prod_{i \notin J} \chi((r_i/d)^2), \qquad \sum_J \mathrm{share}_J = 1 \tag{6}$$

（`Chi.share`・`share_sum`、`Profile.lean:126-133`）の系統です源。$\chi$ は $y \le 1$ で 1、$y \ge 4$ で 0 の滑らかな遷移で、$\chi((r/d)^2) \neq 0$ なら $r < 2d$、$1 - \chi((r/d)^2) \neq 0$ なら $r > d$ なので（`chosen_lt`・`exterior_gt`）、$d = t/4$ と置けば式 (3) の幅 $[t/4, t/2]$ に合います推（$d$ の当て方は読んでいない）。

05

## 仕組みの骨子 — なぜ重なる区画か、なぜ全体と局所の二本か

1. **重なる区画**。閾でちょうど切ると、閾の近くの配位で区画が不連続に変わります。幅を持たせた区画は重なり、滑らかな一の分割で貼れば、積分の中で区画を微分したり動かしたりしても境目の問題を避けられます推。源の説明文も、特性関数の分け方は可測な分割のためのもので、滑らかな重みとしては使わない、と書いています源（説明文）。
2. **全体と局所の二本**。一の分割に付く条件 `Seeded` は配位の全体に課す条件です。一方、評価（種一つあたりのエネルギー）で使うのは、種の近傍 $5R$ に局所化した `Plot` と、半径 $2R$ の近傍の行の和 (4) です。局所化した形は全体の条件から取り出すので、評価の側は種の近くだけを見れば足ります源（`plots` を読んだ）・推（意図の読み）。
3. **ハロの尺度**。$R = \lceil (\log x)^2 \rceil$ は粗い段の $\hat{\beta}$ で測ります。局所の条件は $5R$、評価の和は $2R$ です源。
4. **区画を一つ止めた積分**が、一段の大きい場の解析の単位になります。区画はその段の場だけで決まり、前の段から引き継ぎません源（`Stores` の欄を読んだ）・推（意味の読み）。

06

## 本書の検討で見えていたこと

本書の検討は、小さい場の特性関数で配位を分け、大きい場の領域 $\Omega^c$ を段ごとに積み上げて以後固定する形で考えていました。一つの区画 $A$ を止めた積分は、本書の「$\Omega^c$ を止めた積分」に当たります推。違いは二つです。

- 公開された構成の区画は**その段だけで決まり**、領域の履歴を持ちません。入ってきた活動の場所は、`flagged` によって自動でこの段の種に含まれます。

- 公開された構成は幅のある重なった区画と滑らかな一の分割を使います。本書の検討は特性関数で切る形でした。

行の恒等式 (1) に当たる、一段の作用の差を局所の平方の完成で書く式は、本書の側にはありませんでした。

07

## 読めていない所

- 主定理の側で実際に使われる一の分割の組み立て（`Chi` の重みを種の型の `Allocation` に組む所）と、$d$ の当て方。
- 区画どうしの重なりの説明（`YM/Push/SECTOR_MEASURE/Overlap.lean`）の中身。
- ブロック化の核 $\Phi$（`leap`）・雑音への配り $\Phi'$（`kick`）の作り方と、行 workN・workD の意味の細部。
- 選び $k$ の枠の重みが正であるという条件（`Plot` の欄 `list`）の役。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 細かい作用＋罰−粗い作用は局所の行の和に等しい（代数の恒等式 (1)） | 行のどれかが正であること（それは 11-04 の評価） |
| 源 区画の条件 `Seeded` は全体に課し、局所の `Plot`（半径 $5R$）は後から取り出す | 区画の条件がハロの外の場について何かを言うこと（`Plot` は言わない） |
| 源 ヒステリシスは costs と aisles だけで、flags は粗い場の旗に完全に一致させる | 区画が配位の分割であること（重なる） |
| 源 一の分割の重みが 0 でなければ、細かい旗の点は必ず costs の面に触れる（`flagged`） | この補題が存在の定理の鎖に載ること（記録の上の証人は `SharpGram.habitat`） |
| 源 特性関数の分割 `hard` は依存の外、滑らかな `Chi.share_sum` は used | 滑らかな分割の組み立ての細部 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 閾とハロ | 源 | `YM/Pressure/Seeds.lean:22`（`radiusB`）、:25（`temp`）、:26（`fiery`） |
| ずれ | 源 | `YM/Pressure/Cost.lean:187`（`wire`） |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 行と恒等式 | 源 | `YM/Pressure/Rows.lean:46`（`leap`）、:71（`thinned`）、:104（`vision`）、:112（`monetary`）、:122・:126・:129・:133（行）、:145（`locates`） |
| 種の型・局所の区画・評価の和 | 源 | `YM/Pressure/Seeds.lean:34`（`Stores`）、:46（`shares`）、:51（`Plot`）、:85（`assessed`） |
| 全体の区画・特性関数の分け方 | 源 | `YM/Push/SECTOR_MEASURE/Cells.lean:51`（`Seeded`）、:87（`booking`） |
| 一の分割 | 源 | `YM/Push/SECTOR_MEASURE/Profile.lean:30`（`Allocation`）、:50（`plots`）、:56（`flagged`）、:68（`hard`、outside）、:85（`Chi`）、:133（`share_sum`） |

**この章で使った語** — 行の恒等式、種、種の型、区画、ヒステリシス、一の分割、旗、ハロ。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：11-04 種一つあたりのエネルギー — 区画の上で、近傍の行の和が種の数に比例して正であることを示す三つの不等式です。

# 種一つあたりのエネルギー

> この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討、§07 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 区画の上で $c_E\, t^2 \cdot \#\text{種} \le \text{assessed}$ が成り立つ、という一段の配位ごとの不等式の正確な形（量化の順と仮定）と、それを組む三つの不等式です。粗い段へ渡す作用を一次に切ったことが正の余りを生み、一次の量がブロック化で $L^{-2}$ に縮むことが細かい側を勝たせます。

**前提となる章** — 11-03（行の恒等式・種の型・区画・三つの閾）、11-01 §02（切った作用）。

**先に言うこと** — この章の不等式は一段の、配位ごとの不等式で、段を跨ぐ主張ではありません。三つの不等式の証明（置き場 `YM/Work/E05`〜`E07`）は本書は読んでおらず、言明だけを読みました。この章の宣言は検証の記録で見出しの定理のどれかから届きますが、存在の定理の鎖に載るかは確かめていません。

この章の順序

1. 言明 — 種一つあたりのエネルギー（量化の順と仮定）
2. 粗い面の下界 — 正の余り
3. 細かい面と罰の下界
4. 大きい粗い面の支払い
5. 組み立てと、積分から出る因子
6. 本書の検討で見えていたこと
7. 読めていない所

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

01

## 言明 — 種一つあたりのエネルギー（量化の順と仮定）

記号は 11-03 §01 のとおりです：粗い段の基準の結合 $x$、粗い閾 $\tau = \mathrm{temp}(x)$、細かい閾 $t = \mathrm{fiery}(x, L)$、ハロの尺度 $R = \mathrm{radiusB}(x)$、種の型 $A$、種の数 $\#A$、近傍の行の和 $\mathrm{assessed}(A)$。粗い閾 $\tau$ と細かい閾 $t$ は、9-07 の記号では $t_m$ と $t_{m+1}$ です（11-01 の閾の字の対応）。

**注文の束** `Teller`（`YM/Pressure/Seeds.lean:89`）は、核の選び、細かい段と粗い段の段の定数、ブロックの重みの畳み込みの回数 $j$ などを束ねた入力です。一段のデータ $S$ と管 $T$（細かい段と粗い段の道のデータの組）がそれに合うことを `Funds` と言います（核の選びが一致、$J = j$、核の三つの義務 `Branches`、管の道のデータの `Bounds` と `Roll` など）源 。

**種一つあたりのエネルギー** `Teller.Grants`（`YM/Pressure/Seeds.lean:129`）源 の量化の順は次のとおりです（`Funds` ・ `live` ・ `Serves` ・ `cash`、:101-127）。

$$\exists i\, \forall L \ge i\ \ \forall^{\infty} W\ \ \exists c_E > 0\ \ \forall^{\infty} x\ \ \forall (S, T, F, A, U, k, V):\ \ c_E\, t^2\, \#A\ \le\ \mathrm{assessed}(A). \tag{1}$$

$\forall^{\infty}$ は「十分大きい全ての」です。最後の $\forall$ の範囲には、次の仮定が全て付きます源 。

1. $S$ のブロックの辺がちょうど $L$（`S.patch.L = L`）。
2. **格子の辺の下限**：粗い格子の辺 $\ge 100(1 + R)$。
3. $S, T$ が注文に合う（`Funds`）。
4. **ゲージの切り口**：細かい場 $U$ が、ブロックの木の幹の上で 1（`SliceSet F U`、:48）。木のゲージの切り口の上の不等式です。
5. 局所の区画の条件 `Plot A U k V x W`（11-03 §03）。

$c_E$（源の字句は `Grants` では κ、値段の欄では μ）は $L$ と $W$ に依ってよく、$x$ の下限は $L, W, c_E$ に依ります源 。閾 $t$ は**細かい側**の閾です。

この言明は全ての注文について仮定なしに成り立ちます：`Next.Fluctuations.grants`（`YM/Next/FLUCTUATIONS/Grants.lean:24`）源 。その中身は

`Integrated.pressure_grants`（`YM/Integrated.lean:222`）で、十の部品の言明（置き場 `YM/Bid/Energy.lean` の E01〜E09 と、外側の小ささ `EBare`）から `Bid.issues`（:155）で組み立てます。部品は `YM/Work/` の下で証明され、`EBare` は `YM/Next/FLUCTUATIONS/Bare.lean:64` の `bare` が閉じます源。

02

## 粗い面の下界 — 正の余り

**粗い面の下界**：構造 `Bid.Crowds`（`YM/Bid/Energy.lean:94`）と、それを全ての注文について求める `def E05`（:101）源：$\exists \delta > 0\ \exists B > 0\ \forall L\ \forall W$、十分大きい $x$ で、区画を満たす配位（§01 の仮定つき）と全ての粗い面 $q$ について、$\sigma = \mathrm{toll}(V_q)$ と置くと

$$\begin{aligned} \tau < \sigma \le \delta \ &\Rightarrow\ \tfrac{c^c_{\mathrm{dir}}}{4}\,\tau\,\sigma \ \le\ \mathrm{workC}_q, \\ \sigma \le \tau \ &\Rightarrow\ -B\tau^4 \ \le\ \mathrm{workC}_q, \\ \sigma > \delta \ &\Rightarrow\ -c^c_{\mathrm{lin}}\,\tau\,\sigma \ \le\ \mathrm{workC}_q. \end{aligned} \tag{2}$$

閾は全て**粗い側** $\tau$、切りの定数も粗い側のものです。

**意味**推：中くらいの面（$\tau < \sigma \le \delta$）で $|\mathrm{curv}| \approx \sigma$ と見ると、vision は $\tau/\sigma$ 倍に縮むので、粗い面の行の最初の二項は

$$\langle \mathrm{vision}, X^c \rangle - \tfrac{1}{2}\|\mathrm{vision}\|^2 \approx c_{\mathrm{dir}}\big(\tau\sigma - \tfrac{1}{2}\tau^2\big) \ \ge\ \tfrac{1}{2}c_{\mathrm{dir}}\,\tau\sigma. \tag{3}$$

一方、粗い段の作用は切った作用で $c_{\mathrm{lin}}\tau\sigma$（$c_{\mathrm{lin}} < c_{\mathrm{dir}}/16$）です。差は $c_{\mathrm{dir}}\tau\sigma/4$ 以上の正の余りになります。もし粗い段の作用が二次 $c_{\mathrm{dir}}\sigma^2/2$ のままなら、同じ計算で $\mathrm{workC} \approx -c_{\mathrm{dir}}(\sigma-\tau)^2/2 \le 0$ です。**正の余りは、粗い段へ渡す作用を一次に切ったことから出ます。**

03

## 細かい面と罰の下界

**細かい面と罰の下界**：`Bid.Seals`（`YM/Bid/Energy.lean:103`。`def E06` は :110）源：$\exists N\ \forall L \ge N\ \forall^\infty W\ \exists d > 0$、十分大きい $x$ で、§01 の仮定のもと

$$\begin{aligned} \tfrac{c_{\mathrm{lin}}^{f}}{2}\,t \sum_{p \in \mathrm{costs},\ \mathrm{toll} > t} \mathrm{toll}(U_p) \;+\; d\,t^{2}\,\#\{p \in \mathrm{costs} : \mathrm{toll} \le t\} \;\le\; \sum_{\mathrm{dome}(2R)} \mathrm{workF}, \\ \tfrac{c_{\mathrm{pen}}}{8} \sum_{b \in \mathrm{aisles}} \mathrm{wire}_b^{2} \;\le\; \sum_{\mathrm{dome}(2R)} \mathrm{workI}. \end{aligned} \tag{4}$$

閾は**細かい側** $t$、$c_{\mathrm{pen}}$ は核の罰の係数（源の字句は `S.kernel.penalty`）です。

意味[推]：細かい面の行 $\mathrm{workF} = \mathrm{crown}^{f} + \tfrac{1}{2}\|M_v\|^{2} - \langle M_v, X^{f}\rangle$ の交差項は、大きさの上限（`Maximum`、:83：$\|M_v\| \le (C/L^{2})\,t$）から $(C/L^{2})\,t\,\mathrm{toll}$ 程度です。$L \ge N$ を要るのは、これを切った作用の一次の項 $c_{\mathrm{lin}} t\,\mathrm{toll}$ の半分以下にするためです。

04

## 大きい粗い面の支払い

粗い面の下界の第三行は、とくに大きい粗い面（$\sigma > \delta$）で負になりえます。その総量を払うのが **大きい粗い面の支払い** `Bid.Lapse`（`YM/Bid/Energy.lean:121`。`def E07` は :130）です[源]：$\exists C > 0\ \forall L\ \forall W > 0\ \exists Z > 0$、十分大きい $x$ で、§01 の仮定のもと

$$\sum_{q \in \mathrm{hit}} (\mathrm{workL} + \mathrm{workD})_q + \frac{C}{L^{2}}\,t \sum_{\substack{p \in \mathrm{costs} \\ \mathrm{toll} > t}} \mathrm{toll}(U_p) + C\,t \sum_{b \in \mathrm{aisles}} \mathrm{wire}_b + Z\,t^{2} R^{4}\,\#A_{\mathrm{sp}} \;\ge\; c_{\mathrm{lin}}^{c}\,\tau \sum_{\substack{q \\ \mathrm{toll}(V_q) > \delta}} \mathrm{toll}(V_q). \tag{5}$$

左辺の閾は細かい側 $t$、右辺は粗い側 $\tau$ です。$\#A_{\mathrm{sp}}$ は、とくに大きい面（$\mathrm{toll} > \beta_{f}^{-0.49}$ の程度）とずれだけで作った種の数（`spend`）、hit はその近くの粗い面です[源]。

払い方[推]：右辺を直接埋めるのは、hit の上の交差の行 $\mathrm{workL} + \mathrm{workD}$ です。左辺の他の三項はその誤差の勘定です。

- $(C/L^{2})\,t \sum \mathrm{toll}$ は、細かい面と罰の下界の $(c_{\mathrm{lin}}/2)\,t \sum \mathrm{toll}$ で払う。だから $L$ を大きく取ります。
- ずれの一次の項は、罰の行の下界の二次で払う。
- $Z t^{2} R^{4} \# A_{\mathrm{sp}}$ は、とくに大きい面の一次の作用で払う（$t \cdot \beta^{-0.49} \gg t^{2} (\log \beta)^{8}$）。

**$L^{-2}$ の縮み**。ブロック化の核 $\Phi$ の行和（細かい面ごとの和）は $C/L^{2}$、列和（粗い面ごと）は $CL^{2}$ です（核の行和 `Allowance`、:61）[源]。粗い曲率がおよそ $\sum_{p} \Phi(p,q) X_{p}^{f}$ なので、一次の量について $\sum_{q} |\mathrm{curv}_q| \lesssim (C/L^{2}) \sum_{p} |\mathrm{curv}_p|$ です[推]。二次の作用はブロック化で形を保ち

ますが、一次の作用の総和は $L^{-2}$ に縮みます。四次元で $L^4$ 個の細かい曲率を重み $L^{-2}$ で集めると、滑らかな場の $\sigma_c \approx L^2 \sigma_f$ と整合します[推]。

05

## 組み立てと、積分から出る因子

残りの部品は次のとおりです[源]（言明の名と形）。

| 組の名 | 宣言 | 中身 |
|---|---|---|
| E01 | `Payments`（:27） | 大きい粗い面はとくに大きい種の近くにしかなく、その数 $\le K\#A_{\mathrm{sp}}$。粗い旗の数 $\le 4\times$（閾 $\tau$ を超える面の数） |
| E03 | `Allowance`（:61） | 核 $\Phi$ の行和 $C/L^2$、列和 $CL^2$ |
| E04 | `Maximum`（:83） | $\|\mathrm{vision}\| \le Ct$、$\|M_v\| \le (C/L^2)t$ |
| E08 | `Stitches`（:134） | 種に当たらない外側では、局所のゲージで粗い場も細かい場も小さい |
| 外側の小ささ | `Belly`（:142） | 外側の行の負の部分 $\ge -\varepsilon t^2 \# A$（全ての $\varepsilon > 0$） |
| E09 | 同じファイル | 以上から `Grants` を組む |

**積分から因子を出す**：`Sector.peel`（`YM/Next/FLUCTUATIONS/Sector.lean:229`）[源]は、区画の上で (1) が成り立つとき、区画の上の積分について

$$\sum_k \int_{\text{区画}} g \cdot \mathrm{incoming} \;\le\; \mathrm{pref} \cdot e^{-\beta c_E t^2 \# A} \sum_k \int_{\text{区画}} g \cdot \mathrm{outgoing} \tag{6}$$

を言います。outgoing は近傍の外の行の指数です。$\beta$ を細かい段の結合の程度に取ると $\beta t^2 \approx P^2$（$P = \exp((\log\log\beta)^2)$）なので、**種一つあたり $e^{-c_E P^2}$ 程度の因子**が外へ出ます[推]。outgoing の積分の大きさは、この補題は言いません[源]（11-05・11-11）。

$P^2$ は $\log\beta$ のどの冪よりも速く育つので、ハロの体積 $L^4 R^4$・多重対数の損失はこの因子で払えます（`Delay.inactive_price`、`YM/SectorNext/LARGE_FIELD_REMAINDERS/Delay.lean:120`）[源]（漸近の言明）。

06

## 本書の検討で見えていたこと

本書の検討で開いていたのは、ブロック写像で形の変わらない配位の近くで、作用の利得が釣り合って稀さが段ごとに出ない恐れでした（28-06 の「大きい場の評価」の行）。公開された構成はこれに**別の形で答えています**：表示の主な部分（粗い段へ渡す作用）を一次に切り、差を活動に入れて、**ゲージの切り口と区画の条件を満たす配位について一様な不等式** (1) を立てます。一段の写像は等式のままで、測度は変わりません。言明 (1)〜(5) には、例外の配位の型を除く仮定はありません源 。

本書が Lean で持っていたのは、一つの尺度（細かい格子の Wilson の測度そのもの）での大きい面の稀さ（22-01、チェス盤の評価から、体積に一様）でした。押し出した粗い尺度での配位ごとの不等式は、持っていませんでした。

07

## 読めていない所

- 三つの不等式の証明（`YM/Work/E05`〜`YM/Work/E07`）。言明と説明文だけを読みました。
- 殻の比べ（`Cops`、組の名 E02）と外側の小ささ（`Stitches`、E08）の役の細部、`Funds` の管の欄（`Deep`・`Roll`）の意味。
- `Grants`・`peel` が存在の定理の鎖に載るか（記録の上の証人は `SharpGram.habitat`）。
- 向きの平均の作用と一つの向きの crown の差を、段を跨いでどう数えているか。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 量化 (1) の形で、区画（とゲージの切り口・辺の下限・`Funds`）の上で $c_E t^2 \# A \le$ assessed。全ての注文で成り立つ（`grants`） | 段を跨ぐ主張（一段・配位ごとの不等式） |
| 源 粗い面の行の下界 (2)：中くらいの面で正の余り $c_{\mathrm{dir}} \tau \sigma / 4$ | $c_E$ の陽な値（$L, W$ に依る存在だけ） |
| 源 細かい面・罰の下界 (4)、大きい粗い面の支払い (5) | (2)・(4)・(5) の証明を本書が読んだこと |
| 源 区画の積分から $e^{-\beta c_E t^2 \# A}$ が出る（`peel`） | 残りの積分の大きさ（`peel` は言わない） |
| 推 正の余りは粗い作用を一次に切ったことから出る | 持続する配位の問題がこの切り方だけで消えること（言えるのは、切り口と区画の条件を満たす配位で一様な不等式が立つ、まで） |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 注文・切り口・量化・種一つあたりのエネルギー | 源 | `YM/Pressure/Seeds.lean:48`（`SliceSet`）、:89（`Teller`）、:101-127（`Funds`・`live`・`Serves`・`cash`）、:129（`Grants`） |
| 三つの不等式と部品 | 源 | `YM/Bid/Energy.lean:27`（E01）、:61（E03）、:83（E04）、:94（`Crowds`）・:101（`def E05`）、:103（`Seals`）・:110（`def E06`）、:121（`Lapse`）・:130（`def E07`）、:134（`Stitches`）、:142（`Belly`）、:155（`issues`） |
| 仮定なしの成立 | 源 | `YM/Next/FLUCTUATIONS/Grants.lean:24`（`grants`）、`YM/Integrated.lean:222`、`YM/Next/FLUCTUATIONS/Bare.lean:64` |
| 積分から因子を出す | 源 | `YM/Next/FLUCTUATIONS/Sector.lean:229`（`peel`） |
| 漸近の補題 | 源 | `YM/SectorNext/LARGE_FIELD_REMAINDERS/Delay.lean:62`（`cover_pay`）、:120（`inactive_price`） |
| 依存の記録 | 源 | `verification/declaration-usage.tsv`（`Teller.Grants`・`Crowds`・`Seals`・`Lapse`・`Sector.peel` は used、証人 `SharpGram.habitat`） |

**この章で使った語** — 種、種の数、区画、ゲージの切り口、正の余り、ブロック化の核、注文の束。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：11-05 値段の配分と塊の和 — 出てきた因子を、印と組合せの支払いに分けます。

# 値段の配分と塊の和

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§05 は本書の検討、§06 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 区画の積分から出た種一つあたりの因子 $e^{-\beta c_E t^2}$ を、どう配るかです。保証された下界 $c_E P^2/2$ の半分 $c_E P^2/4$ を「印」として出口の活動に残し、残りで塊の木の展開と被覆の組合せと多重対数の費用を払います。その結果、種を含む連結な塊の点ごとの和が $e^{-c_E P^2/4}$ に比例する量で押さえられます。

**前提となる章** — 11-04 種一つあたりのエネルギー（種一つあたりのエネルギーの定数 $c_E$ と `peel`）、7-04 クラスター展開（塊の展開と木の評価の考え方）。

**先に言うこと** — 勘定の欄の式は源で読みましたが、塊の和の評価の証明（Ursell の係数と木の不等式）は名前と型までしか読んでいません。この章の宣言は検証の記録で見出しの定理のどれかから届きますが、存在の定理の鎖に載るかは確かめていません。

この章の順序

1. 言明 — 値段の欄と印
2. 言明 — 種を含む塊の点ごとの和
3. 仕組みの骨子 — なぜ超多重対数の $P$ で足りるか
4. この後の流れ — 率への換算
5. 本書の検討で見えていたこと
6. 読めていない所

---

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

01

## 言明 — 値段の欄と印

記号：粗い段の基準の結合 $x$、細かい段の $\beta_f = x + s\log L$（$s$ は一ループの傾き）（`betaF`）、細かい閾 $t = \mathrm{fiery}(x, L)$、$P = \exp((\log\log\beta_f)^2)$（`fineMonitor`）。$\beta_f t^2 = P^2$ です源（定義から）。$c_E > 0$ は種一つあたりのエネルギーの定数（11-04 の $c_E$。この置き場の源の字句は μ）です。

**収入**。種一つの収入は $\mathrm{gain} = \beta\, c_E\, t^2$（`credit`、`YM/Push/ABSOLUTE_SUMS/Grants.lean:48`）で、実際の $\beta$ に依ります源。帯の条件 $\beta \ge u\,\beta_f$ の下で、収入は

$$\mathrm{gain} = \beta c_E t^2 \;\ge\; \mathrm{hatWin}(c_E, u) = c_E\, u\, P^2 \tag{1}$$

で下から押さえられます（`Delay.comparison`、`YM/Push/ABSOLUTE_SUMS/Delay.lean:43`、`hatWin` は :28）源。$u = 1/2$ なら、**保証された下界**は $c_E P^2/2$ です。

**値段の欄** `Buy.quote`（`YM/Push/ABSOLUTE_SUMS/Buy.lean:31`）は、勘定の型 `Costs`（`Mixed.lean:26`）の欄を次のように埋めます源。使う所 `Target.costs`（`YM/AnalyticNext/CONNECTED_ACTIVITY_JETS_E6/OptionCost.lean:83`）では $u = 1/2$ です。

| 欄 | 値（$u = 1/2$） | 役 |
|---|---|---|
| gain | $\beta c_E t^2$（$\ge c_E P^2/2$） | 種一つの収入 |
| markSeed（印） | $\mathrm{hatWin}(c_E/2, 1/2) = c_E P^2/4$ | 出口の活動に残す稀さ |
| packetRatio | $e^{-c_E P^2/8}$ | 塊の比（木の展開の収束） |
| rootHit | $e^{-c_E P^2/16} + \gamma$ | 木の根の重み |
| spendSeed | $C \cdot \mathrm{bill}^5$、$\mathrm{bill} = 1 + R + (\log\beta_f)^2$ | 種一つあたりの対数の費用（多重対数） |
| cap・extraSeed | $1$・$0$ | 塊に課す定数 |
| optionalHit $\gamma$ | $\beta_f^{\,r}$（$-1/2 < r < 0$） | 付加の重み |

源の説明文は「保証された収入の半分を、取り出す印として使う」と書きます源（説明文）。ここで**保証された収入とは下界 (1) の $c_E P^2/2$ のこと**で、印 $c_E P^2/4$ はその半分です。実際の収入 $\beta c_E t^2$ の半分ではありません（$\beta$ は帯の中で動くため）。

**十分条件** `Buy.quoted`（`Buy.lean:67`）源：$c_E > 0$、$z < 2$、定数 $D \ge 0$、次数 $d$ を固定すると、十分大きい $x$ で、種一つあたりの対数の費用と塊の定数の対数が $\mathrm{fee} = D \cdot \mathrm{bill}^d \cdot P^z$ 以

下で、$\gamma$ が小さければ、組合せの条件 `Buy` が成り立ちます。`Target.pay_for`（`OptionCost.lean`）が $d = 5$ で当てています源 。

02

## 言明 — 種を含む塊の点ごとの和

一段の積分の結果は、種と字（入ってきた活動の番地など）の有限集合である「塊」の和に並べ直されます（11-06）。塊の重みと被覆の重みの幾何級数の十分条件が `Packets.income`・`fit`（`YM/Push/ABSOLUTE_SUMS/Charge.lean:22-38`）です源 ：

$$\mathrm{income}(C, \mathrm{spend}, \mathrm{gain}, m) = C\, e^{(\mathrm{spend}-\mathrm{gain})\, m}, \qquad (\text{被覆の重み}) = e^{a\,\mathrm{cov}_B}. \tag{2}$$

種を含む連結な塊の点ごとの和の上界 `Cash.stocks`（`YM/AnalyticNext/CONNECTED_ACTIVITY_JETS_E6/Bulkhead.lean`、`armK` は :41）源 ：各点 $x$ で、$x$ を含み、印を持ち、$m$ 個以上の元を持つ塊 $r$ についての、被覆の重み × 塊の重みの和は

$$\sum_{r \ni x,\ \#r \ge m} (\cdots) \;\le\; \mathrm{armK} = 2^{-m}\, e^{-\mathrm{mark}} \cdot \mathrm{mergeScale} \cdot 2 \tag{3}$$

以下です。$\mathrm{mark} = c_E P^2/4$、mergeScale は $\beta$ の負の冪の速さで 0 へ行く量です源 （`tempo` の言明の型）。

**どの目標に入るか。** `Buy.quote`・`Cash.armK`・`dictionary_fit` は検証の記録で used、記録の上の証人は `SharpGram.habitat` です源 。

03

## 仕組みの骨子 — なぜ超多重対数の $P$ で足りるか

1. **収入の割り方。** 欄の値は、印 $c_E P^2/4$、塊の比 $e^{-c_E P^2/8}$、木の根 $e^{-c_E P^2/16}$ です源 （欄の値）。これを「保証された下界 $c_E P^2/2$ を割る」と読むのは本書の読みで（$1/4 + 1/8 + 1/16 = 7/16 \le 1/2$）、源に一つの勘定として書かれているわけではありません推 。印は塊の和 (3) に $e^{-\mathrm{mark}}$ として一度だけ残り、塊の比と根の重みが、連結な塊の木の展開の収束を払います推 。

2. **多重対数の費用**。ハロの体積、被覆の数、Haar の損失などは種一つあたり $\log\beta$ の冪の程度で、欄 $\mathrm{spendSeed} = C\,\mathrm{bill}^{5} \approx C(\log\beta)^{10}$ にまとめられます源 （欄を読んだ）・推 （何が入るかの読み）。
3. **$P$ の育ち方**。$P = \exp((\log\log\beta)^2)$ は $\log\beta$ のどの冪よりも速く、$\beta$ のどの正の冪よりも遅く育ちます。だから $P^2$ は費用 $D\,\mathrm{bill}^{d}P^{z}$（$z<2$）に必ず勝ち、一方で閾 $t=\beta^{-1/2}P$ は $0$ へ行きます（`Delay.cover_pay`・`inactive_price`）源 （漸近の言明）。
4. **割合で書く理由**。欄は全て $c_E$ と $P$ の関数で、$\beta$ の帯の中の位置に依らない下界で書かれます。減りを次の段へ持ち越す欄は帰納の仮定に無く源 （`Conv`）、各段の $c_E$ と率は段ごとに選ばれます。段に一様な条件は暦の側で払います（11-08・11-07）推 。

04

## この後の流れ — 率への換算

塊の和 (3) は、出口の強制された活動の「率」に換算されます源 。

- `eventual_resize`（`YM/PhysicalNext/RG_NEXT_COMPLETE_REPEATABLE_NONLINEAR_STEP/Rent.lean:34`）：率 $h \le c_E/16$ なら、十分大きい $x$ で $\mathrm{armK} \le c\cdot Ce^{-h\,(t_y/\mathrm{gap}\,\beta)^2}$。源の説明文は「強い帳簿の更新には $P^{\delta}$（$\delta<2$）でなく $P^2$ に比例する率が要る。小さい指数へ落とす前に、積分した見積もりから読み戻す」と書きます。
- `Pocket`・`pockets`（同じファイル :70・:76）：与えた率の上限 $H$ に対し、率 $\le \min(H, c_E/64)$ と $h=c_E/32$ を選ぶ。
- `dictionary_fit`（`Bulkhead.lean:78`）：任意の $0\le\delta<2$ と $A\ge 0$ で、十分大きい $x$ で $\mathrm{armK} \le e^{-AP(x)^{\delta}}$。ここの $P(x)$ は粗い側の基準の結合 $x$ での値です。

換算の鎖の全体は 11-07 で読みます。

05

## 本書の検討で見えていたこと

本書の検討では、大きい場の稀さを $e^{-c/g^2}=e^{-c\beta}$ の型で考え、それを活動の帳簿に持たせる前提でした（28-04 の「大きい場の評価」）。公開された構成の種あたりの値段は $e^{-c_E P^2}$ で、$e^{-c\beta}$ よりずっと弱い稀さです。それで足りるのは、帰納の仮定が要求する帳簿 $e^{-P^{1/5}}$ がさらに弱いからです推 。収入を割合で割って印を残す勘定の形も、本書の側にはありませんでした。

06

## 読めていない所

- 塊の和 (3) の証明：Ursell の係数と Penrose 型の木の不等式（`YM/Push/ABSOLUTE_SUMS/Ursell.lean`・`Graph.lean`）、連結な活動の辞書（`YM/AnalyticNext/CONNECTED_ACTIVITY_JETS_E6`）。
- Haar の損失を spendSeed の欄に入れる具体の補題（11-11）。
- 組合せの条件 `Buy` の欄の全部。
- mergeScale の定義と、$\beta$ の負の冪で 0 へ行く言明（`tempo`）の細部。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 $\beta \ge \beta_f/2$ なら収入 $\beta c_E t^2 \ge c_E P^2/2$（保証された下界） | 実際の収入の値（$\beta$ は帯の中で動く） |
| 源 印は保証された下界 $c_E P^2/2$ の半分 $c_E P^2/4$、塊の比 $e^{-c_E P^2/8}$、根 $e^{-c_E P^2/16}+\gamma$ | 印が「収入の半分」であること（下界の半分） |
| 源 種を含む連結な塊の点ごとの和 $\le 2^{1-m} e^{-c_E P^2/4}\,\mathrm{mergeScale}$ | その証明の中身（本書は読んでいない） |
| 源 費用 $D\,\mathrm{bill}^d P^z$（$z<2$）までは十分大きい $x$ で払える（`quoted`） | Haar の損失がこの欄に入ることの言明（未確認） |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 収入と保証された下界 | 源 | `YM/Push/ABSOLUTE_SUMS/Grants.lean:48`（`credit`）、`Delay.lean:28`（`hatWin`）、:43（`comparison`） |
| 値段の欄 | 源 | `YM/Push/ABSOLUTE_SUMS/Mixed.lean:26`（`Costs`）、`Buy.lean:31`（`quote`）、:67（`quoted`）、`YM/AnalyticNext/CONNECTED_ACTIVITY_JETS_E6/OptionCost.lean:83`（`Target.costs`） |
| 塊の重み | 源 | `YM/Push/ABSOLUTE_SUMS/Charge.lean:22-38`（`income`・`fit`） |
| 塊の和 | 源 | `YM/AnalyticNext/CONNECTED_ACTIVITY_JETS_E6/Bulkhead.lean:41`（`armK`）、`stocks`、:78（`dictionary_fit`） |
| 率への換算 | 源 | `YM/PhysicalNext/RG_NEXT_COMPLETE_REPEATABLE_NONLINEAR_STEP/Rent.lean:34`（`eventual_resize`）、:70（`Pocket`）、:76（`pockets`） |

**この章で使った語** — 値段、収入、保証された下界、印、塊、塊の比、被覆の重み、多重対数の費用。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：11-06 粗い段の活動の組み直し — 塊を、粗い旗を含むものと含まないものに分けて、出口の表示に入れます。

# 粗い段の活動の組み直し

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§05 は本書の検討、§06 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 一段の積分の結果を、塊の和として並べ直した後、粗い段の表示のどこへ入れるかです。粗い旗を含む塊は出口の強制された活動の気体に、含まない塊は正則な活動の側に入ります。後者の定数は真空の項へ、錨での二次の部分は結合の直しへ流れます。

**前提となる章** — 11-01（表示と気体）、11-05（塊と印）。

**先に言うこと** — この章は、組み直しの**分類と行き先の式**を読んだものです。粗い旗を含まない塊の値が正則な活動の番地に入る写像そのものは、本書は読んでいません。そこは推で書き、§06 に挙げます。

この章の順序

1. 言明 — 二種類の塊と気体の値
2. 言明 — 硬い群れと柔らかい群れの融合
3. 仕組みの骨子 — 小さい場に戻った欠陥の行き先
4. 読めた範囲と読めていない写像
5. 本書の検討で見えていたこと
6. 読めていない所

---

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

```
01
```

## 言明 — 二種類の塊と気体の値

一段の積分で出る量は、塊（`Molecule`：種と字の有限集合）の和に並べ直されます。塊 $M$ の種の型を合わせたもの（`roster`）の粗い旗の集合で、塊を二つに分けます（`YM/AnalyticNext/CONNECTED_ACTIVITY_JETS_E6/Colony.lean:26-27`）源。

$$\mathrm{ThickP} = \{M : \mathrm{roster}(M).\mathrm{flags} \neq \emptyset\}, \qquad \mathrm{ThinP} = \{M : \mathrm{roster}(M).\mathrm{flags} = \emptyset\} \tag{1}$$

（どちらも台が空でないもの）。粗い旗を含む塊を「旗を含む塊」、含まない塊を「旗を含まない塊」と呼ぶことにします。

**旗を含む塊の気体**（`banked`、:43）源：旗を含む塊の有限集合 $\mathcal{A}$ について、その旗の在庫の和が粗い場の旗 $\mathrm{flags}_{t_m}(V)$ にちょうど一致するときだけ、台が互いに素なものの気体の値を取り、そうでなければ $0$ です。これは粗い段の表示の気体（11-01 §03 の式 (6)）と同じ形です。

**旗を含まない塊**は、その値（`entries`）が別の気体（`ignores`・`inlet`）として、旗を含む塊の台を避けて並びます源（定義の形）。

**真空の項**（`Collection.vac`、`YM/AnalyticBridge/VERIFIED_RESET_STEP/Evaluation.lean:29`）源：出口の真空の定数は

$$v_{\mathrm{out}} = \tau - \frac{1}{|\Lambda_m|}\sum_{i} \log\text{-値}_i(1) \tag{2}$$

です。$\tau$ は積分の規格化から来る定数、$\log\text{-値}_i(1)$ は正則な活動の側の各片の、平らな配位での値です。

02

## 言明 — 硬い群れと柔らかい群れの融合

出口の強制された活動の番地は、二つの群れをつないで作ります源。

- **硬い群れ**：旗を含む塊の値。点ごとの和は $\mathrm{strong} = C\,e^{-r(t_y/\mathrm{gap}\,\beta)^2}$ で押さえられます（$r$ は率、$y$ は細かい段の基準の結合。`Pairing.strong`、`YM/Progress/DIRECTED_RECIPE/Economy.lean`）。

- **柔らかい群れ**：粗い段の健康でない所に台を持つ、小さい場の対数の片。和は $\mathrm{mild} = C(1+B)^{d} P^{e}\,\mathrm{gap}^{p}$（$p>0$）で、$\beta$ の正の冪の速さで小さくなります（`Pairing.mild`、同じファイル）。

融合の条件 `Rates`（`YM/Progress/DIRECTED_RECIPE/Tender.lean:33`）と定理 `tender`（:124）源：指数 $k \ge 0$（源の字は κ）、硬い和 $a$、柔らかい和 $b \le 1$ について

$$e^{-k}\left(e^{e^{k}a+2b}-1\right) \;\le\; w \tag{3}$$

（左辺は `Bid.quote`、`YM/Bid/Kitchen.lean:18`）と、被覆の数の条件 $(2B+1)^{4}(e^{k}a+2b) \le 1$ が成り立てば、融合した活動は帳簿 $w$ の `KBound` を満たします。`Pairing.currency`（`Economy.lean:76`）が $w = e^{-k}$、$k = \mathrm{kGoal} = \mathrm{rate}\cdot(t_y/\mathrm{gap}\,\beta)^{2}$、$a = \mathrm{strong}$、$b = \mathrm{mild}$ で `Rates` を満たします。率は $r > \mathrm{rate}$ なので $e^{k}\,\mathrm{strong} = Ce^{-(r-\mathrm{rate})(\cdots)^{2}} \to 0$ です源（言明を読んだ）・推（$e^{k}a$ が小さくなる理由の読み）。

各番地は粗い旗を含むので（強制された活動の `permit`）、少なくとも一つの硬い片を含み、$e^{-k}$ が一度掛かると読みます推。

## 03 仕組みの骨子 — 小さい場に戻った欠陥の行き先

細かい段で大きかった面（種）が、粗い段では閾 $t_m$ を超えない、つまり**粗い段で小さい場に戻る**場合を考えます。その種を含む塊は粗い旗を含まないので旗を含まない塊になり、強制された活動の気体には入りません。気体は旗が空なら 1（`gas_one`）なので、そもそも強制された活動として残す場所がありません源。

行き先は次のとおりと読みます推。

1. 旗を含まない塊の値は、正則な活動の側（健康な所でだけ生きる）に入る。
2. その平らな配位での値は、式 (2) で真空の項 $v$ へ移る。
3. 錨での曲率方向の二次の部分は、結合の直し $\Delta$ として $\beta$ へ移る（`Averaging.delta`、11-09 §06）。
4. 残りは「平らな所で 0、affine な方向の二次で 0」に揃えられ（`rebate`）、正則な活動の帳簿 $\hat{g}^{11/5}$ に入る。種の印 $e^{-c_E P^{2}/4}$ があるので、帳簿を十分下回る。

粗い段でもまだ大きければ、旗を含む塊として新しい強制された活動の在庫になり、帳簿 $e^{-P^{1/5}}$ に収まればよい、という流れです（11-07）。この分け方は、欠陥が戻ったかどうかの場合分けを、粗い旗を含むかという局所の判定一つで済ませています推。

04

## 読めた範囲と読めていない写像

| 部品 | 水準 | 在りか |
|---|---|---|
| 二種類の塊の定義 (1) | 源 | `Colony.lean:26-27` |
| 旗を含む塊の気体の値（旗との完全一致） | 源 | `Colony.lean:43`（`banked`） |
| 旗を含まない塊の値が Ursell の項に入り、0 でなければ粗い閾で健康 | 源 | `Fire.lean:43`（`trained`）、`Street.lean:68`（`clean_claim`）（同じ置き場） |
| 真空の項の式 (2) | 源 | `Evaluation.lean:29` |
| 融合の条件 (3) と `currency` | 源 | `Tender.lean:33`・:124、`Economy.lean:76` |
| 旗を含まない塊の値が正則な活動の番地（log-値）に入る写像 | 推 | `entries` から先。読んでいない |
| 入ってきた活動の番地の扱い（足跡 `forcedFoot`、被覆の費用 `forcedExtra`） | 源 定義のみ | `Inherited.lean:150`・:162 |

**どの目標に入るか。** `Collection.vac` は検証の記録で used、証人は `SharpGram.habitat` です。小さい場の一段の定理 `Return.reset` の結論に $v_F = \mathrm{vac}$ が入り、`reset` は存在の定理の鎖の上にあります（11-09）源。

05

## 本書の検討で見えていたこと

本書の検討では、大きい場の領域を以後固定するので、欠陥が粗い段で小さい場に戻った場合の扱いを別に考える必要がありました。公開された構成はこの場合分けを、粗い旗を含むかどうかの局所の判定で行い、戻った分を真空の項と結合の流れに乗せます推。結合の直しが表示の中の係数として決まる仕組み（10-03）と組になっています。

06

## 読めていない所

- 旗を含まない塊の値を正則な活動の番地へ入れる写像（`Colony` の `entries` から先、`YM/AnalyticNext/CONNECTED_ACTIVITY_JETS_E6`）。
- 入ってきた活動の扱い（`Sales`・`ratesCombine`、`OptionCost.lean`）から先。

- 組み直しの補題（`YM/PhysicalNext/RG_NEXT_COMPLETE_REPEATABLE_NONLINEAR_STEP` の `Marlin`・`Trio`・`Meadow`）の証明。
- 一段の後に新しい強制された活動を作り直し、帳簿 $e^{-P_m^{1/5}}$ に収める構成の全体（11-11）。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 塊は粗い旗を含むかで二つに分かれ、旗を含む塊の気体は旗との完全一致のときだけ値を持つ | 旗を含まない塊の値が正則な活動の番地に入る写像（読めていない） |
| 源 出口の真空の項は $\tau - \sum \log$-値$(1)/\lvert\Lambda\rvert$ | $\tau$ の中身（規格化の行列式など）の評価 |
| 源 硬い群れ・柔らかい群れの融合の条件 (3) を `currency` が満たす | 融合の証明の細部 |
| 推 粗い段で小さい場に戻った欠陥は、真空の項と結合の直しに流れる | その流れが言明として書かれていること |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 二種類の塊・気体の値 | 源 | `YM/AnalyticNext/CONNECTED_ACTIVITY_JETS_E6/Colony.lean:26`・:27・:43 |
| 入ってきた活動の番地 | 源 | `YM/AnalyticNext/CONNECTED_ACTIVITY_JETS_E6/Inherited.lean:150`（`forcedFoot`）・:162（`forcedExtra`） |
| 真空の項 | 源 | `YM/AnalyticBridge/VERIFIED_RESET_STEP/Evaluation.lean:29`（`vac`） |
| 融合 | 源 | `YM/Progress/DIRECTED_RECIPE/Economy.lean:47`（`kGoal`）・:76（`currency`）、`Tender.lean:33`（`Rates`）・:124（`tender`）、`YM/Bid/Kitchen.lean:18`（`quote`） |

**この章で使った語** — 塊、旗を含む塊、旗を含まない塊、硬い群れ、柔らかい群れ、真空の項、結合の直し。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：11-07 帳簿の換算 — 出口の強い見積もりを、帰納の仮定の弱い帳簿へ移します。

# 帳簿の換算と、段を跨ぐ持続

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§05 は本書の検討、§06 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 値段から率までの換算の鎖の終わりの部分です。一段の出口の強制された活動は、まず強い形 $e^{-\mathrm{rate}\cdot P_y^2}$ で押さえられ、それを二通りに弱めます：一段の証書に記録する $e^{-dP_y^2}$ と、帰納の仮定が持つ $e^{-P_x^{1/5}}$。そのうえで、何段も持続する欠陥がこの帳簿の下でどう扱われるかを読みます。

**前提となる章** — 11-00 §03（二つの帳簿）、11-05（印と率への換算）、11-06（出口の活動の作り方）。

**先に言うこと** — 弱い帳簿も段 $m$ の関数です。段に一様に成り立たせる条件は暦（β の入口・辺の下限・率の選び）の側で払っています。入ってくる活動の評価は、出口の率の式には入りませんが、一段の仮定の側で和を収束させるのに使われます。この章の換算の補題は検証の記録で見出しの定理のどれかから届きますが、存在の定理の鎖に載るかは確かめていません。

この章の順序

1. 言明 — 値段から帳簿までの換算の鎖
2. 言明 — 指数を落とす一行の不等式
3. 一段の証書の持ち運び
4. 仕組みの骨子 — 何段も持続する欠陥
5. 本書の検討で見えていたこと
6. 読めていない所

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

01

## 言明 — 値段から帳簿までの換算の鎖

記号：細かい段の基準の結合 $y$、粗い段の $x$、$P_y = P(y) = \exp((\log\log y)^2)$、閾 $t_y$。種一つあたりのエネルギーの定数を $c_E$ とします。一段の中の換算は次の鎖です源 （各段の言明）。

| 順 | 量 | 在りか |
|---|---|---|
| 1 | 区画の上で $c_E t^2 \#A \le \text{assessed}$ | `Teller.Grants`（11-04） |
| 2 | 保証された下界 $c_E P_y^2/2$ の半分を印 $c_E P_y^2/4$ に | `Buy.quote`（11-05） |
| 3 | 種を含む塊の点ごとの和 $\le \text{armK} \propto e^{-c_E P_y^2/4}$ | `Cash.armK` |
| 4 | 率 $h \le c_E/16$ の見積もり $\text{armK} \le c\,C e^{-h(t_y/\text{gap}\,\beta)^2}$ | `eventual_resize` |
| 5 | $h = c_E/32$、率 $\le c_E/64$ を選ぶ | `Pocket` ・ `pockets` |
| 6 | 融合した出口の活動 $\le e^{-\text{kGoal}}$、$\text{kGoal} = \text{rate}\cdot(t_y/\text{gap}\,\beta)^2$ | `tender` ・ `Pairing.currency`（11-06） |
| 7 | $e^{-\text{kGoal}} \le e^{-dP_y^2}$ と $\le e^{-P_x^{1/5}}$ | `Time.late_force`（下の §02） |

帯の中の $\beta$ では $t_y/\text{gap}\,\beta$ は $P_y$ の定数倍の程度なので、kGoal は $\text{rate}\cdot P_y^2$ の程度です推 （`late_force` の証明の中の比べ $P_y \le 2\,t_y/\text{gap}\,\beta$ から）。

### 一段の出口のまとめ `Time.now`

（`YM/AnalyticBridge/VERIFIED_RESET_STEP/Opening.lean:84`）源 は、正則な活動の出口の帳簿 $\text{forecastE} = \text{credit}\cdot\hat{g}_m^{11/5}$ と、強制された活動の出口の見積もり（`forecastK`、硬い群れの strong）を束ね、同じ見積もりから二つを出します（`K_rises` で帳簿を緩める）：帰納の仮定の形 $\|K\| \le e^{-P_m^{1/5}}$ と、一段の証書の形 $\|K\| \le e^{-d\,P_{m+1}^2}$。

02

## 言明 — 指数を落とす一行の不等式

`Time.late_force`（`Opening.lean:19`）源 ：$d > 0$ と定数 $c$ について、十分大きい $x$ で、$d \le \text{rate}/4$ を満たす全ての率と、$y = x + c$ の帯の中の全ての $\beta$ について、$r = e^{-\text{kGoal}(y,\beta)}$ は

$$r \le e^{-d\,P_y^{2}}, \qquad r \le e^{-P_x^{1/5}} \tag{1}$$

を満たします。ここでの $d$ は、§01・§03 の一段の証書の係数と同じものです（`Time.now` は、暦が選ぶ係数で $d \le \mathrm{rate}/4$ を確かめて `late_force` を使います）源。後半は `Postage.saved`（`YM/Next/SCHEDULE/Salary.lean:178`）から来ます源：二つの尺度が近い（`Alike`：$P_x \le 2P_y$ などを含む）とき、十分大きい $y$ で

$$e^{-d\,P_y^{2}} \le e^{-P_x^{1/5}}. \tag{2}$$

証明は $P_x^{1/5} \le (2P_y)^{1/5} \le 2P_y \le dP_y^{2}$ の一行で、指数 $1/5 \le 1$ を使います源。指数が 2 未満なら何でもよい形は別の所で言われています：`Cash.dictionary_fit`（`YM/AnalyticNext/CONNECTED_ACTIVITY_JETS_E6/Bulkhead.lean:78`）は任意の $0 \le \delta < 2$ で $\mathrm{armK} \le e^{-AP(x)^{\delta}}$（$P(x)$ は粗い側の値）です源。

注意：`late_force` は $r$ が実際の活動の上界であることは言いません。それは §01 の鎖の 1〜6 が別に出します源。

## 03 一段の証書の持ち運び

一段の証書 `Directed.Move`（`YM/PCalc/Band.lean:49`）の欄 `forced` は、段 $m$ の表示 $u$ の強制された活動について $\|K\| \le e^{-d\,P_{m+1}^{2}}$ を言います。$P$ は**細かい段** $m+1$ の値です源。

帰納の仮定 `Conv` と、一段の定理の入力の条件（`Program.advances`、:65）は弱い帳簿だけを持ち、強い帳簿は入りません源。強い帳簿を Move ごとに記録する補題 `Directed.holding`（:92）は**依存の外**です源（記録）。存在の定理の鎖では、`Roof.Lyrics.supplier`（`YM/FullVolume/C/Songbook.lean:76-89`）が、一段の結果の Move を段の記録（`tunes.next`）に詰めて持ち運びます源。後の段で `Move.forced` を誰が使うかは、本書は確かめていません。

## 04 仕組みの骨子 — 何段も持続する欠陥

**読めること**源。

1. 帰納の仮定の大きい場の部分は、各段 $m$ で「強制された活動の被覆の重みつきの和 $\le e^{-P_m^{1/5}}$」だけで、**領域の履歴の欄を持ちません**（`Rep`・`Conv`、`YM/RG/History.lean:165-218`）。
2. 強制された活動は、その段の旗の上でしか 0 でありません（`permit`・`admissible`）。
3. 一の分割の重みが 0 でない所では、細かい段の旗は必ずこの段の種に触れます（`flagged`）。
4. 出口の率の式（kGoal・strong・mark）は $c_E$・$P$・$\beta$ の関数で、**入ってくる活動の評価はこの式には入りません**（`Economy.lean:40-47`、`Threshold.lean:66`）。
5. 入ってくる活動の評価は、一段の**仮定の側**で使われます：`Target.Invoices` の欄 `intake`（`YM/AnalyticNext/CONNECTED_ACTIVITY_JETS_E6/Issue.lean:73-88`）と、入ってきた番地の被覆の費用 `forcedExtra` を含む和の条件 `Sales`。和を収束させるのに使います。
6. 種一つあたりのエネルギー (`Grants`) は、ゲージの切り口と区画を満たす配位（全体の区画の条件を満たすもの）の全てについて言われます。全ての段で、その段の閾をちょうど超え続ける配位も、同じ不等式に入ります。

**読みの組み立て**推：何段も持続する欠陥は、各段で種として数え直され、その段の作用の差から新しい値段 $e^{-c_E P^2}$ を受け取り、粗い段でもまだ大きければ旗を含む塊として新しい強制された活動の在庫になります。前の段で払った稀さは弱い帳簿へ緩められ（`K_rises`）、次の段では、その段の作用の差から改めて取り出されます。換算の鎖で定数は段ごとに数分の一に減りますが、減りを次の段へ持ち越す欄は帰納の仮定に無く源（`Conv`）、各段の $c_E$ と率は段ごとに選ばれます。

**段に一様な条件の払い先**源：弱い帳簿 $e^{-P_m^{1/5}}$ も、閾 $t_m$ も、段 $m$ の関数です。全ての段でこの換算が成り立つための「十分大きい $x$」の条件は、暦の定数として段ごとに払われます：β の入口（`Delays.betaEntry`）、辺の下限（`floorL`）、率の選び（`Pocket`）、出口の条件（`Opened`）。詳しくは 11-08。

まとめると、公開された構成は持続する欠陥について、段の数に一様な一つの評価を作るのではなく、段ごとに同じ形の弱い帳簿へ戻る評価を毎段作り、段に一様な部分を暦の条件に押し付けています推。

05

## 本書の検討で見えていたこと

本書の検討は、大きい場の領域を段ごとに積み上げて固定し、ブロック写像で形の変わらない配位の近くで持続する欠陥の稀さを、段の数に一様に保つ必要があると考えていました（28-

06 の「大きい場の評価」)。公開された構成は**別の形で答えています**：領域の履歴を持たず、段ごとに種を数え直し、ゲージの切り口と区画の条件を満たす配位について一様な不等式で、種あたりの因子を毎段出します。測度は変えていません。

本書の検討に足りなかった部品は、この章の換算の鎖と「二つの帳簿」の作りでした[推]。本書の帳簿 $e^{-c/g^2}$ を「弱い帳簿と毎段の作り直し」に取り替える形が、比べの章 14-04 の材料です。

06

## 読めていない所

- 一段の後に新しい強制された活動を作り直し、帳簿に収める構成の全体（`YM/PhysicalNext/RG_NEXT_COMPLETE_REPEATABLE_NONLINEAR_STEP`・`V9_JOINT_ENDPOINT_LOAD`・`ANNULUS_RATIO_INSERTIONS`）。§04 の読みの組み立ての帳尻はここにあります。
- 入ってくる活動を一段の積分の中でどう扱うか（`Sales`・`ratesCombine`、`OptionCost.lean:39` から先)。
- `Move.forced` を後の段で使う所。
- 段 $m$ で引いた粗い作用が段 $m-1$ の細かい作用と同じ道のデータになり、作用の差が段を跨いで二重に数えられていないこと。向きの平均の作用と一つの向きの作用の差を含めた形は確かめていません。
- `late_force`・`saved` が存在の定理の鎖に載るか（記録の上の証人は `SharpGram.habitat`)。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 出口の見積もり $e^{-\mathrm{kGoal}}$ は $e^{-dP_y^2}$（$d \le \mathrm{rate}/4$）と $e^{-P_x^{1/5}}$ の両方以下（`late_force`） | $e^{-\mathrm{kGoal}}$ が活動の上界であること自体（別の補題が出す） |
| 源 $P_x \le 2P_y$ なら $e^{-dP_y^2} \le e^{-P_x^{1/5}}$（証明は指数 $\le 1$ を使う)。任意の $\delta < 2$ の形は `dictionary_fit` | 「1/5 に意味がある」こと |
| 源 帰納の仮定は弱い帳簿だけを持ち、領域の履歴の欄は無い | 強い帳簿が後の段で使われる所（確かめていない） |
| 源 入ってくる活動の評価は出口の率の式に入らず、一段の仮定（`Invoices` の intake・`Sales`）で使われる | 入ってくる活動の評価が一段に要らないこと（仮定の側で使われる） |

| 言えている | 言えていない |
| --- | --- |
| 源 段に一様な条件は暦の定数（β の入口・辺の下限・率の選び）の側で払う | 段に一様な条件が要らないこと（暦の側で払う） |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
| --- | --- | --- |
| 指数を落とす換算 | 源 | `YM/AnalyticBridge/VERIFIED_RESET_STEP/Opening.lean:19`（`late_force`）、:84（`now`）、`YM/Next/SCHEDULE/Salary.lean:178`（`saved`）、`YM/Next/SCHEDULE/Dues.lean:57`（`w`）、:118（`Alike`） |
| 任意の指数 $\delta < 2$ | 源 | `YM/AnalyticNext/CONNECTED_ACTIVITY_JETS_E6/Bulkhead.lean:78`（`dictionary_fit`） |
| 出口の率 | 源 | `YM/Progress/DIRECTED_RECIPE/Economy.lean:47`（`kGoal`）、`YM/PhysicalNext/RG_NEXT_COMPLETE_REPEATABLE_NONLINEAR_STEP/Rent.lean:34`・:70・:76 |
| 一段の証書と持ち運び | 源 | `YM/PCalc/Band.lean:49`（`Move`）、:65、:92（`holding`、依存の外）、`YM/FullVolume/C/Songbook.lean:76`（`supplier`） |
| 入ってくる活動の評価の使い所 | 源 | `YM/AnalyticNext/CONNECTED_ACTIVITY_JETS_E6/Issue.lean:73`（`Invoices`） |

**この章で使った語** — 帳簿、強い見積もり、弱い帳簿、率、一段の証書、持続する欠陥、暦。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：11-08 暦 — 定数を選ぶ順 — 段に一様な条件を払う定数の選び方です。

# 暦 — 定数を選ぶ順

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§05 は本書の検討、§06 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 一段の評価の言明は「$L$ が十分大きければ」「$W$ が十分大きければ」「$x$ が十分大きければ」の形を重ねています。その「十分」を、どの順でどの定数に払わせるかの取り決めが暦です。順は、段の定数 → ブロックの辺 → 区画の幅 → エネルギーの下界の定数 → 率 → 結合の入口、です。

**前提となる章** — 10-05 辺を育てる理由と暦、8-02 段取り、11-04・11-07（「十分大きい」の付いた言明）。

**先に言うこと** — 暦の型は、定数の依存の順を型で固定しますが、源の説明文が言うとおり「繰り込みの議論が実際にその順に収まること」を型そのものは確かめません。それは一段の定理の側の証明の仕事です。辺を育てる理由（一段の誤差を $\log b$ で割る）は第 10 部の主題で、この章は大きい場の側からの見え方だけを書きます。

この章の順序

1. 言明 — 暦と、その適合の条件
2. 言明 — 定数を選ぶ順の型
3. 言明 — 大きい場の値段の順（pricing_order）
4. 仕組みの骨子 — $c_E$ が $L$ に依っても勝てる理由
5. 本書の検討で見えていたこと
6. 読めていない所

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

01

## 言明 — 暦と、その適合の条件

**段取り** `Schedule`（`YM/Lattice/Scale.lean:28`）源：ブロックの比 $b_m$（奇数、$\geq 3$）と体積の周期 $L_p$（4 の倍数、狭義増加）。$D_N = \prod_{k<N} b_k$、間隔 $a_m = 1/D_m$。条件 `Gentle`（:129）は $\log b_m / \log D_m \to 0$ です。

**暦** `Calendar`（`YM/RG/History.lean:64`）源：段取り、核の選び、基準の結合 $\bar{\beta}$、段の定数の表 `stage`、辺の表 `factor`、$\theta$、畳み込みの回数 $J$（$\geq 4$）。ここから段ごとの量が決まります（$s = 11C_g/(24\pi^2)$ は一ループの傾き）：

$$\hat{\beta}_m = \bar{\beta} + s \log \tfrac{1}{a_m}, \quad P_m = e^{(\log\log \hat{\beta}_m)^2}, \quad t_m = \hat{\beta}_m^{-1/2} P_m, \quad B_m = \lceil (\log \hat{\beta}_m)^2 \rceil. \tag{1}$$

**適合の条件** `Calendar.Fits`（:97）源 の主な欄：

- `mesh`：`Gentle`。`sameFactor`：$b_m$ は辺の表の $J(m+1)$ 番目。`monotoneL`・`mono`：辺と $J$ は非減少。`stepSlow`：$J(m+1) \leq J(m)+1$。`deep`：$J \to \infty$。
- `delayed`：$\hat{\beta}_m > 1$。`smallField`：$t_m \leq 1$。
- `sizeT`：段 $m$ の格子の辺 $\geq 100(B_m+1)$。`fitsPatch`：細かい格子の辺 $\geq 100$(パッチの半径+1)。
- `driftSmall`：$\mathrm{drift}/\log b_m \leq J(m+1)^{-2}$。`logCost`：$\log(1 + \text{段の定数の和})/\log b_m \leq J(m+1)^{-2}$。

最後の二つが、辺を育てる条件の中身です：段の定数の対数の費用と一ループからのずれを、$\log b_m$ で割って $J^{-2}$ まで小さくします。$J \to \infty$ と合わせて $b_m \to \infty$ が出ます源（欄を読んだ）・推（導出の読み）。

02

## 言明 — 定数を選ぶ順の型

`YM/Price/Intent.lean` は、定数を選ぶ順を型の入れ子で固定します源。源の見出しは「ブロックの比より前に選ぶ順と定数」「すでに選んだ任意の定数について成り立つ」「型そのものは、繰り込みの議論がその依存の順に収まるかを確かめない」と書きます源（説明文）。

| 順 | 型 | 決めるもの |
|---|---|---|
| 1 | `Sheet`（:26） | 核の選び、段の定数の表 profile、最初の番号、辺の下限の表 floorL（ブロックの比より前） |
| 2 | `Rolls`（:50） | 辺 $L_j$。各 $j$ で `Large`（:39）：奇数、$\geq 3$、$\geq \mathrm{floorL}(j)$、一段の動き（drift）が $(s/4)\log L$ 以下（`kick`）かつ $\mathrm{drift}/\log L \leq j^{-2}$（`slow`）、$\log(1+\text{定数})/\log L \leq j^{-2}$。$L_j$ は非減少 |
| 3 | `Protection`（:88） | $\theta$ |
| 4 | `Delays`（:115） | 結合の入口 betaEntry（辺の後）など |
| 5 | `Bar`（:123） | 基準の値 $\bar{\beta}$（$>1$、最初の入口以上 `ready`（:126）、それ以上の全ての $x$ で $x^{-1/2}e^{(\log\log x)^2} \leq 1$ `threshold`（:127）） |
| 6 | `Wait`（:134） | 待ちと窓、体積の最小 |
| 7 | `Levels` と `Paid`（:145） | 暦。`pays`（:154）：$\mathrm{betaEntry}(J(m+1)) \leq \hat{\beta}_m$。`volume`：体積の辺の下限 |

`Paid.pays` が「β の入口」を段の基準の結合で払う所です。入口の値そのもの（`Delays.betaEntry`、:116）は、「十分大きい $x$ で成り立つ」性質の束から存在として取り出されるもので（`open_shop`）、式も数も源にありません源。基準の値の条件 `Bar.threshold` だけから、$\bar{\beta}$ は少なくとも約 $9\times10^5$ です読（$\frac{1}{2}\log x = (\log\log x)^2$ の大きい方の根 $x \approx 8.97\times10^5$ を数値で求めた）。`Calendar.Fits` の `logCost`・`driftSmall` は、`Large` の欄を $L = b_m$ で読んだものです源。

03

## 言明 — 大きい場の値段の順（pricing_order）

`Bid.pricing_order`（`YM/Bid/Energy.lean:173`）源：全ての $(j,i)$ で種一つあたりのエネルギー `Grants` が成り立つなら、辺の下限の表 $k$ が在って、$k$ 以上の任意の下限の表 $n$、それに合う任意の辺の選び（`Rolls`）、任意の $\theta$、任意の入口の選び $V$ について、入口だけを上げた $W$（$V.\mathrm{betaEntry} \leq W.\mathrm{betaEntry}$、他の欄は同じ）が在り、値段の条件（`Ringing`）が任意の高さまで成り立ちます。

`Grants` の言明の $\exists i\ \forall L \geq i$ の $i$ が、辺の下限 $k$ になります（細かい面と罰の下界の $N$ を含む）。全ての注文で `Grants` が成り立つので（`Next.Fluctuations.grants`）、この順は

`pressure_pricing`（`YM/Next/FLUCTUATIONS/Grants.lean`）として仮定なしに出ます源。

一段の大きい場の定数を選ぶ順は、次のとおりと読みます源（各型と欄の依存を読んだ）・推（一列に並べたのは本書）。

$$\underbrace{L}_{\text{辺}} \to \underbrace{W}_{\text{区画の幅}} \to \underbrace{c_E}_{\text{エネルギーの下界}} \to \underbrace{\text{rate},\, h}_{\text{率（Pocket）}} \to \underbrace{g \le \text{rate}/4}_{\text{証書の率}} \to \underbrace{\text{betaEntry}}_{\text{結合の入口}} \tag{2}$$

- $L$：`Grants` の $i$ 以上（細かい面の行の交差項 $(C/L^2)t$ を勝たせる）。
- $W$：`Grants` の $\forall^\infty W$。罰の行が十分大きいずれを払う。
- $c_E$：`Grants` の $\exists c_E$（源の字は $\kappa$）。$L$ と $W$ に依ってよい。
- 率：`Pocket` で $h = c_E/32$、率 $\le c_E/64$（11-05 §04）。
- $g$：一段の証書の帳簿の係数（`PostCost`、`YM/PCalc/Loop.lean:81`）。`Time.now` は $g \le \text{rate}/4$ を仮定に取ります（`Opening.lean:84`）。
- betaEntry：以上の全ての「$x$ が十分大きければ」を、ここでまとめて払います。出口の条件 `Opened`（`Opening.lean:45`）は入口以上の全ての $x$ で一段の値段が払えることで、`open_shop` が入口を上げてそれを作ります源。

04

## 仕組みの骨子 — $c_E$ が $L$ に依っても勝てる理由

1. エネルギーの下界の定数 $c_E$ は $L$ と $W$ に依ります。損失（ハロの体積 $L^4R^4$、多重対数）も $L$ に依ります源。Haar の損失も同じ型と読みますが、その補題の在りかは確かめていません推。
2. しかし種一つあたりの値段は $c_E P^2$ で、$P = \exp((\log\log\beta)^2)$ は $\beta$ とともに $\log\beta$ のどの冪よりも速く育ちます。$L$ を止めて β の入口を上げれば、$c_E P^2$ は $L$ に依る全ての損失に勝ちます推。
3. β の入口を上げることは、暦の上では「段 $m$ の基準の結合 $\hat\beta_m$ が入口以上」という条件（`pays`）になります。$\hat\beta_m$ は $\bar\beta$ と $\log(1/a_m)$ とともに増えるので、$\bar\beta$ を大きく取ること（`Bar`）と、細かい段ほど $\hat\beta$ が大きいことで払われます推。
4. 辺 $L_j$ は段とともに育ちます（`Rolls.grow`）。`Large` の条件は段 $j$ の定数に対する比の条件なので、段の定数が段とともに悪くなっても、それより速く辺を育てて吸います源（欄を読んだ）・推（意味の読み）。

この順の全体が、11-07 の「段に一様な条件は暦の側で払う」の中身です。弱い帳簿 $e^{-P_m^{1/5}}$ を毎段作り直すことは、段ごとに入口・辺・率を選び直すことと組になっています。

05

## 本書の検討で見えていたこと

本書の検討でも、辺を育てる・段の定数を先に固定する・帳簿を弱く取る、という三つの手は候補として持っていました（28-05）。辺を固定した設計の下で、大きい場の稀さを段に一様に保つ道を探していました。公開された構成は、三つを全て使い、定数の依存の順を型で固定しています。本書には、この「選ぶ順の型」に当たるものはありませんでした。

06

## 読めていない所

- 値段の条件 `Ringing`（`YM/Pressure/Seeds.lean:155` の `Stamp`、:161 の `Ringing`）の中身。
- $\bar{\beta}$ を大きく取る条件の陽な形（言明から言えるのは $\bar{\beta} > 1$ と、入口以上であることまで）。
- `Wait` の窓（`window`）と体積の下限 `volume` が、どの評価のために要るか。
- 暦の全体を満たす具体の暦が在ること（`Fits` を満たす `Calendar` の構成）を、本書は鎖では辿っていません。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 暦は $\hat{\beta}_m$・$P_m$・$t_m$・$B_m$ と帳簿を段ごとに定め、`Fits` が辺・定数・格子の大きさの条件を課す | 型そのものが繰り込みの議論の依存の順を確かめること（源が否定） |
| 源 定数の型の順は Sheet → Rolls → Protection → Delays → Bar → Wait → Levels・Paid | 各型の欄の全部の役 |
| 源 `pricing_order`：`Grants` から辺の下限を作り、入口だけを上げた選びを返す | `Ringing` の中身 |
| 推 大きい場の定数は L → W → c_E → 率 → g → 入口の順に選ばれ、「十分大きい x」は入口で払う | この順が一つの宣言に書かれていること（各型の依存から並べた） |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 段取り | 源 | `YM/Lattice/Scale.lean:28`（`Schedule`）、:129（`Gentle`） |
| 暦と適合の条件 | 源 | `YM/RG/History.lean:64`（`Calendar`）、:79-86（段ごとの量）、:97（`Fits`） |
| 定数を選ぶ順の型 | 源 | `YM/Price/Intent.lean:26`（`Sheet`）、:39（`Large`）、:50（`Rolls`）、:115（`Delays`）、:123（`Bar`）、:145（`Paid`）、:154（`pays`） |
| 値段の順 | 源 | `YM/Bid/Energy.lean:173`（`pricing_order`）、`YM/Next/FLUCTUATIONS/Grants.lean:32`（`pressure_pricing`） |
| 証書の率と出口の条件 | 源 | `YM/PCalc/Loop.lean:81`（`PostCost`）、`YM/AnalyticBridge/VERIFIED_RESET_STEP/Opening.lean:45`（`Opened`）、:84（`now`） |

**この章で使った語** — 暦、段取り、ブロックの比、辺の下限、結合の入口、率、区画の幅。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：11-09 小さい場の一段 — 種から離れた所のガウスの積分と、正則な活動の帳簿です。

# 小さい場の一段

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§08 は本書の検討、§09 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 一段の積分のうち、種から離れた所をガウスの積分として扱う部分です。押し出しの値を、近似を使わずに三つの等式でつないで粗い段の表示に書き直し、正則な活動の帳簿 $\hat{g}^{11/5}$ に収めます。共分散を窓つきの近似の逆に取り直し、その誤差を被積分関数に残すのが要です。

**前提となる章** — 11-01（表示と帳簿）、11-03（区画）、9-03 ゲージ固定の二本立て、10-02 一段の写像と一ループの計算。

**先に言うこと** — 等式でつなぐのは一段の**表示**です。帳簿（正則な活動・強制された活動の上界）は不等式で、評価に近似を使わないという意味ではありません。展開の中身（Ursell の係数・キュムラント）と、早い帳簿から出口の帳簿への組み直しの補題は、本書は読んでいません。停留点が粗い作用と四次まで一致することは、言明の中では**条件**として運ばれ、別の定理が供給します。

この章の順序

1. 言明 — 一段の表示を等式でつなぐ
2. 座標 — 木のゲージと相対座標
3. ガウスの部分 — 精度・ギャップ・窓つきの近似の逆・減衰
4. 停留点 — 粗い作用との一致は条件として運ばれる
5. 補正の展開と早い表示
6. 限界的な項の取り出し
7. 帳簿 — なぜ $\hat{g}^{11/5}$ か
8. 本書の検討で見えていたこと
9. 読めていない所

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

01

## 言明 — 一段の表示を等式でつなぐ

記号：段 $m+1$ の表示を $Y$（結合 $\beta=\beta_{m+1}$）、段 $m$ の基準の結合 $x=\hat{\beta}_m$、$\hat{g}=x^{-1/2}$、$P=\exp((\log\log x)^2)$、閾 $t=\hat{g}P$（粗い側の閾。9-07 の $t_m$、11-03 の $\tau$ に当たります。11-01 の閾の字の対応）、被覆の尺度 $B=\lceil(\log x)^2\rceil$。一段の核は $T_\beta(U,V)\propto\exp(-c_{\mathrm{pen}}\beta\sum_e \mathrm{price}(V_eQ_e(U)^{-1}))$（9-01。$c_{\mathrm{pen}}$ は罰の係数で、源の字句は `kernel.penalty`）。

押し出しの値から粗い段の表示までを、次の三つの**等式**でつなぎます源 。

$$\mathrm{push}_\beta\, Y.\mathrm{eval}\overset{(a)}{=}\mathrm{gaussian}(Y)\overset{(b)}{=}\mathrm{earlyValue}(X,v,\beta,\tau,\alpha)\overset{(c)}{=}F.\mathrm{eval}. \tag{1}$$

a. `Return.earnings`（`YM/AnalyticBridge/VERIFIED_RESET_STEP/Inputs.lean:56`）：押し出しは、区画の和 × 選びの和 × 前の因子 × 凍らせたリンクの Haar の積分 × ガウスの積分（`gaussian`、:40）に等しい。

b. `Return.atlas`（:70）：ガウスの区画の式が、活動の一覧 $X$・値 $v$ で書いた「早い表示」に等しい、という**命題**です。説明文は「どの場の形がそのような一覧を許すかは証明しない」と書きます。この命題の実例を作るのは `Rain.sprint`（`YM/PhysicalNext/RG_NEXT_COMPLETE_REPEATABLE_NONLINEAR_STEP/Rain/Glazing.lean:85`）で、`Song.forward`（`Song/Embassy.lean:87`：早い表示 ＝ 押し出し）はその材料です。

c. `Collection.Local.actual`（`Evaluation.lean:93`）：早い表示が、限界的な項を取り出して読み直した表示の値に等しい。

**小さい場の一段の定理** `Return.reset`（`Advance.lean:65`）源 は、(b) の命題・帳簿の仮定・段 $m+1$ の連続な曲線 $Y$ から、段 $m$ の連続な曲線 $F$ を作り、各点で次を言います：許可の条件（`licensed`）、一段の証書 `Move`（押し出しの等式を含む）、結合のずれ $u=\beta_F-$ **予測子** について $|u|\le$ 幅 と $t^2|u|\le H$（$u$ は §06 の $\Delta$ に等しく、10-03 の補正 $d$ に当たります）、真空の項 $v_F=\mathrm{vac}$。一段の定理 `Use.Machine.run`（`Downstream.lean:65`）がこれを呼び、`Mallow.Spring.moves`（`Mallow/Pediment.lean:58`）が三つの入力（帳簿 `Rain.varnish`、一覧 `Rain.sprint`、連続性 `Rain.blinking`）を渡します源 。

**どの目標に入るか**。存在の定理への道 `rodB`（`YM/FullVolume/Stage/Rods.lean:26`）→ `Roof.Lyrics.supplier`（`YM/FullVolume/C/Songbook.lean:76`）→ `Chord.spores`（:53）→ `Spring.moves` → `Machine.run` → `reset` は、宣言の字面で辿って確かめてあります源。ただし検証の記録の上の証人は、`reset`・`Machine.run`・`Spring.moves`・`atlas`・`earnings` とも `SharpGram.habitat` です（証人は深さ優先で最初に見つかった一つだけ）。`supplier` の証明は、`Spring.moves` が返す一段の Move を受け取って段の記録に詰めます。この章の下位の補題（`tree_gap`・`fog`・`late_cubic` など）は、記録の上の証人が `SharpGram.habitat` で、存在の定理の鎖に載るかは確かめていません。

02

## 座標 — 木のゲージと相対座標

1. **背景**。粗い配位 $V$ を固定し、細かい格子に背景 $\mathrm{replica}(V)$ を置きます（`YM/PCalc/Chart.lean:35`）。ブロックの中のリンクは 1、ブロックを跨ぐリンクは $V$ の値です源。
2. **木のゲージ**。各ブロックに木を張り、木の上のリンクを固定します。ゲージの自由度は根を固定したゲージ変換で割ります源。
3. **相対座標**。自由なリンクを $u_i = \exp(a_i)\,\mathrm{replica}(V)_i$（$a_i$ は Lie 環の値）と書きます（`lifting`、:60）源。
4. **凍らせるリンクと動かすリンク**。種の近く（半径 $10R$ の近傍）に触れるリンクは Haar の測度のまま残し（`Frozen`、`YM/SectorNext/GAUSSIAN_SECTOR_CHANGE/Shell.lean:42`）、残りのリンクだけを $a = \bar{a} + \hat{\beta}^{-1/2} z$ と置いてガウスの変数で積分します源。分け方は区画（種の型）ごとに決まり、段を跨いで運ばれません。

03

## ガウスの部分 — 精度・ギャップ・窓つきの近似の逆・減衰

**二次の部分**。動かすリンクの座標 $a$ について、作用を二次の部分 $\frac{1}{2}|Da + h|^2$ と残り residual に分けます（`Remainder.lean:58`）。$D$（`move`、`Affine.lean:208`）は、細かい面の曲率の線形化の行と、粗いリンクの罰の線形化の行を持ちます。精度は $\mathrm{gram} = D^{\mathsf{T}} D$ です源。平らな背景では、精度は $K + c_{\mathrm{pen}}\,\Pi^{\mathsf{T}}\Pi$（$K$ は面の場の運動の部分、$\Pi$ は予測子の線形化）の形です（`FreeResolvent.baseMatrix`、`YM/Push/FREE_RESOLVENT/Flat.lean:81`）源。

**木の切り口のギャップ** `tree_gap`（`Flat.lean:198`）源：曲率の部分がギャップ $a$ を持つなら、木の切り口に制限した平らな精度のギャップは

$$\mathrm{gap} \;\geq\; \frac{\min(a,\, c_{\mathrm{pen}})}{1+\beta_L+\gamma_L} \tag{2}$$

以上です。$\beta_L$ はブロックの辺 $L$・畳み込みの回数・核の選びだけで、$\gamma_L$ は $L$ だけで決まり、体積の周期に依りません。罰の係数 $c_{\mathrm{pen}}$ が直接入ります。

**減衰** `resolve_point`（`YM/Push/FREE_RESOLVENT/Inverse.lean:120`）源：重みつきの行和 $\sum_j e^{\sigma d(i,j)}|A_{ij}| \le M$ とギャップ $r>0$ から、$0 \le \gamma \le \min(\sigma/2,\; r\sigma/(4(M+1)))$ について

$$\left|(A+u)^{-1}_{ij}\right| \le e^{-\gamma d(i,j)}\,(r/2+u)^{-1}. \tag{3}$$

Combes–Thomas 型の評価で、定数は次元にも体積にも依りません。

**窓つきの近似の逆**。実際の積分では $\mathrm{gram}^{-1}$ を使わず、各番地のまわりの窓（親の距離が $R/20$ 以内の組）で Gram を逆にし、その列を集めて対称化した $C$（`fog`、`Chosen.lean:69`）を共分散に使います源。`SectorChange.windows`（`Windows.lean:184`）源：対称でギャップと重みつきの行和を持つ $A$ について、ある $v, C', \lambda > 0$ が在って、窓の半径 $\ell$ が十分大きければ

$$\left\|\mathrm{clouded}(W,A) - A^{-1}\right\|_{\text{重みなしの行和}} \le C' e^{-v\ell}, \qquad \mathrm{clouded}(W,A)\ \text{は正定値でギャップ}\ \lambda. \tag{4}$$

差を測るのは**重みなし**の行和です。任意の窓で正定値であるとは言っていません（説明文が明記）。

**変数変換と誤差の置き場**。中心 $\bar a$（`meanLog`、`Chosen.lean:72`：二次の部分の最小化元を窓つきの逆で近似したもの）のまわりで $a = \bar a + \hat\beta^{-1/2} z$ と置き、$z$ を共分散 $C$ のガウスで積分します。被積分関数（`dyed`、`Change.lean:63`）には、$e^{-\beta\,\mathrm{residual}}$、尤度、区画の重み、そして**近似の誤差** $\mathrm{adjustment} = \frac{1}{2}(\cdots) - \mathrm{guide}(\bar a + gz)/g^2$（`Remainder.lean:124`：$C^{-1} - \mathrm{gram}$ の二次形式・中心のずれ・定数）が入ります源。近似を外へ出さず、すべて被積分関数に残すので、(a) は等式のままです。共分散が有限の到達を持つので、離れた集合のガウスの期待値は正確に独立になり、後の展開の土台になります推。

04

## 停留点 — 粗い作用との一致は条件として運ばれる

停留点は二通りに現れます源 。

1. **積分の中心** $\bar{a}$（§03）。二次の部分の最小化元の局所的な近似です。
2. **結合の作用の停留点** $\rho$：粗い対数の場 $\phi$ から細かい動かす座標への写像 $\phi \mapsto \rho(\phi)$ で、結合の作用 $\mathrm{tested}(\phi, \cdot) =$（段 $m+1$ の主な作用）$+ c_{\mathrm{pen}} \cdot$（罰）の停留点です。性質は四つの条件で書かれます（`YM/PCalc/Chart.lean`）：
   - `Critical`（:88）：$\rho(0) = 0$、$\rho$ は実解析、$\phi$ の近くで $\rho(\phi)$ は停留点。
   - `PriceGap`（:100）：0 での Hessian $\geq \eta$。
   - `Guessed`（:97）：$\rho$ の一階の微分が陽な線形写像に等しい。
   - `ClassicalMatch`（:108）：全ての予測子の選び $i$ と $j \leq 4$ について、**平らな配位** $\phi = 0$ **での** $j$ 階の jet が一致する：$\phi \mapsto \mathrm{tested}_i(\phi, \rho(\phi))$ と $\phi \mapsto \mathrm{mainTerm}_{\text{粗い道のデータ}}(\phi)$。

**この一致は条件です**。四つの条件は `Kin.Planned`（`YM/PCalc/Loop.lean:93`）の欄（`critical`・`gap`・`classicalPart` など）として、一段の定理の束 `Directed` の欄 `support`（`YM/PCalc/Band.lean:34`）と、供給の束の欄 `paths`（`YM/FullVolume/Roll/Fiscal.lean:37`）で**仮定の形で運ばれ**、`sailsW`（`Fiscal.lean:97`）が閉じます源 。`sailsW` の証明は `Stationary.verdant` と `Stationary.pouring` を使い、仮定は群の単純性・核の三つの義務・順の下書き・定数の列だけです。`sailsW` は記録の上で `continuum_with_position_tests`（存在の定理が呼ぶ）から届きます源 。

粗い段の主な作用は、**別に与えられる道のデータ**です（供給の束の欄 `layer`）。停留値から粗い作用を作るのではなく、与えられた粗い作用と停留値の jet が四次まで一致する、という条件を運び、別の定理がそれを満たす、という形です源 。細かい側の作用は段 $m+1$ の主な作用で、Wilson の作用と一致するのは段 $N$ だけです（`Planned` の欄 `peak`：段 $N$ で四次まで一致。供給の束 `Imperial` の欄 `top`（`YM/FullVolume/Roll/Fiscal.lean:38`）：段 $N$ の道のデータは最初の段のもの、11-02）源 。予測子（核を定義する陽な写像、9-04）とは別の対象です。

05

## 補正の展開と早い表示

ガウスの積分の後には、局所の因子の積を有限到達の共分散で積分したものが残ります。展開の部品は、硬い芯の Ursell の係数と Penrose 型の木の不等式（`YM/Push/ABSOLUTE_SUMS`）、局所の語のガウスのモーメントとキュムラント

（`YM/Primitives/CONNECTED_GAUSSIAN_CUMULANTS`）、連結な活動の jet（`YM/AnalyticNext/CONNECTED_ACTIVITY_JETS_E6`）と読みます推（名前と説明文から）。

結果は一つの辞書にまとめられ、`Song.forward` の**等式**「早い表示 = 押し出し」になります源。早い帳簿 `Song.loaded`（`Embassy.lean:108`）は、正則な活動の片を octaveNeed（`Song/Litho.lean:60`：$|\alpha|t^2$・$\beta$·三次の原子・$\beta$·四次の原子・一ループの原子の和）の程度で押さえます。その大きさは $\le \beta^{-7/16}$ で、出口の帳簿より大きい量です（`suns`、`Boulevard/Dawn.lean:76`）源。同じ一覧を組み直した後で、出口の帳簿 $\mathrm{forecastE} = \mathrm{credit}\cdot\hat{g}^{11/5}$ に入ります（`Rain.varnish`、`Glazing.lean:56`）。大きい台の片は、重み $e^{-(w/4)B}$ を掛けて $\beta_f^{-23/20}$ 以下です（`suns` の第三の結論、`Dawn.lean:76`。上界の量は `gold`、:30）源。

06

## 限界的な項の取り出し

早い表示を、次のように並べ直します（`Local.actual`・`reset`）源。

1. **真空の項**：各正則な活動の片の平らな値を集めて $v = \tau - \sum_i E_i(1)/|\Lambda|$（`vac`、`Evaluation.lean:29`）。
2. **結合の移り**：各片の錨での曲率方向の対数 Hessian を集めると、超立方の対称で $\delta_{ab}\Delta$ の形になります（`Averaging.isotropic`、`Isotropy.lean:77`）。$\Delta$（`delta`、:75）を運動項の係数へ移し、$\beta_{\mathrm{out}} = \beta_{\mathrm{in}} + \alpha + \Delta$。$\alpha$ は一ループの係数で、道のデータの側が前もって持ちます。
3. **正則な活動の正規化**：各片を $\mathrm{rebate} = (E - E(1)) - (\text{錨での二次の多項式})$（`Residual.lean:28`）に換えます。これで正則な活動は平らな所で 0、affine な方向の Hessian 0 になり、11-01 §03 の条件 `RegularFamily` の形に戻ります。
4. **結合の決め方**：`reset` は、二つの試験配位（平らな配位と、旗の無い小さい場の配位）で密度の比が合うように $\beta$ を解き、その解が「予測子 $+\Delta$」に一致することを示します（`yield_shape`、`Advance.lean:25`）。`yield_shape` は、読み直しの方程式（10-03 の (2)）の左辺が $d - \Delta$ の正の定数倍に等しいことを言うので、根は $d = \Delta$ です。この $\Delta$ が 10-03 の補正 $d$ に当たり、§01 の $u$ も $\Delta$ に等しくなります（`reset` の証明、`Advance.lean:54・:84`）源。結合は表示の中の運動項の係数として決まります（10-03）。

07

## 帳簿 — なぜ $\hat{g}^{11/5}$ か

正則な活動の帳簿は「大きさ $t$ の方向への有限階の微分の上限」で測るので、場について $k$ 次の項 $c\cdot(\text{場})^k$ は $ct^k$ 程度に効きます。正則な活動に入るものの大きさは次のように読めます推（根拠の言明は源）。

| 入るもの | 大きさ | 根拠 |
|---|---|---|
| 木の段の五次以上の残り | $\beta t^5 \approx \hat{g}^3 P^5$ | 四次までの jet の一致の条件 |
| 一ループの三次以上の残り | $t^3 \approx \hat{g}^3 P^3$ | `FiniteBound`（`YM/PCalc/Loop.lean:62`）は二階の微分を合わせる |
| $\alpha$ の三次の残り | $(\log L)\,t^3$ | `late_cubic`・`CubicGate`（`YM/UVNext/COUPLING_RESET/Precision.lean:71`・:96） |
| 大きい台の片 | $e^{-(w/4)B}\cdot$ $\mathrm{octaveNeed} \le \beta_f^{-23/20}$ | `suns`・`gold` |

小さい片（前の三行）は $\hat{g}^{3-\varepsilon}$ 程度、大きい台の片は $\hat{g}^{2.3}$ 程度（$\beta_f^{-23/20}$）で、どれも $\hat{g}^{11/5}$ の帳簿に入ります。一方、二次（限界的）の係数は正則な活動に残さず $\beta$ へ（$\Delta$ と $\alpha$）、定数は $v$ へ移します。$11/5$ は、限界の次数 $2$ と最初の非限界の次数 $3$ の間にあって、両側に多重対数を吸う余白を残す数と読めます推。`late_cubic`（:71）は、任意の $C$ について十分大きい $x$ で $C\theta^3 \le \hat{g}^{11/5}$（$\theta = \hat{g}P$）を言います源。読み直しの損は段の定数 $\mathrm{credit} = 1/(64(1+\mathrm{base}))$（`Tables.lean:36`）が先払いします源。

08

## 本書の検討で見えていたこと

本書は、自由場の一段を Lean で持っています：線形化したブロック写像の押し出しの共分散 $CTC^\dagger$、面の場の共分散の上界、段に一様な縮み（15-12・15-13）。非ガウスの一段（頂点の評価、局所化、受け渡しの余白の損）は紙の検討までです。

- 本書の「線形化したブロック写像」に当たるのは、予測子の線形化 $\Pi$ です。平らな精度 $K + c_{\mathrm{pen}}\Pi^{\mathsf{T}}\Pi$ のギャップ (2) と減衰 (3) が、本書の面の場の共分散の上界に当たります推。
- 公開された構成には、段を跨いで共分散を分解して使う作り（本書の段に一様な縮み）はありません。一段ごとにその段の有限到達の共分散を作り直します推。
- 共分散を窓つきの近似の逆に取り直し、誤差を被積分関数に残す作りは、本書の「受け渡しの余白の損」を、評価の損でなく被積分関数の項として運ぶ形です推。
- 帳簿を毎段その段の $\hat{\beta}$ の関数として定義し直し、有限階の微分のノルムで測る作りで、本書の紙の検討で段ごとに積もっていた閾と半径の損を、帰納の仮定が運ばない作りになってい

ます[推]。

09

## 読めていない所

- 早い帳簿から出口の帳簿への組み直しの中身（`Marlin`・`Trio`・`Meadow`・`Rain` の `innings`）。とくに $\beta$-三次の原子が打ち消し合う所。
- `Kin.Planned` の供給の証明の中身（`YM/Next/STATIONARY` から `sailsW` まで）。
- 平らでない背景での Gram のギャップ（`YM/SectorNext/GAUSSIAN_SECTOR_CHANGE/Gap.lean`）と (2) の繋ぎ。
- 展開の型（連結な活動の辞書、Ursell の係数の評価）の具体。
- 規格化の行列式の評価（真空の項の $\tau$ の中身）。
- 予測子の線形化と、粗い道のデータの運動項（輸送した曲率）の関係。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| [源] 押し出し ＝ ガウスの区画の式 ＝ 早い表示 ＝ 読み直した表示、の三つの等式で一段の表示をつなぐ（一覧の実例は `Rain.sprint`） | 評価に近似を使わないこと（帳簿は不等式） |
| [源] 木の切り口のギャップ (2)、減衰 (3)、窓つきの近似の逆の誤差 (4)（重みなしの行和） | 任意の窓での正定値性 |
| [源] 停留値と粗い作用の、平らな配位での四次までの jet の一致は `Kin.Planned` の条件として運ばれ、`sailsW` が供給する | 粗い作用を停留値から作ること（粗い作用は別に与えられる道のデータ） |
| [源] 限界的な項：平らな値は真空の項へ、錨での二次 $\Delta$ は結合へ、残りは rebate で正規化 | 組み直しの補題の中身 |
| [推] 帳簿 $\hat{g}^{11/5}$ は限界の次数 2 と最初の非限界の次数 3 の間の数 | $11/5$ の選びの理由が源に書かれていること |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 三つの等式と一段の定理 | 源 | `YM/AnalyticBridge/VERIFIED_RESET_STEP/Inputs.lean:40`・:56・:70、`Evaluation.lean:29`・:93、`Advance.lean:25`・:65、`Downstream.lean:65` |
| 一覧の実例と材料 | 源 | `YM/PhysicalNext/RG_NEXT_COMPLETE_REPEATABLE_NONLINEAR_STEP/Rain/Glazing.lean:56`・:85、`Song/Embassy.lean:87`・:108、`Song/Litho.lean:60`、`Boulevard/Dawn.lean:30`・:76、`Mallow/Pediment.lean:58` |
| 存在の定理への道 | 源 | `YM/FullVolume/Stage/Rods.lean:26`、`YM/FullVolume/C/Songbook.lean:53`・:76 |
| 座標 | 源 | `YM/PCalc/Chart.lean:35`・:60、`YM/SectorNext/GAUSSIAN_SECTOR_CHANGE/Shell.lean:42` |
| ガウスの部分 | 源 | `YM/Push/FREE_RESOLVENT/Flat.lean:81`・:198、`Inverse.lean:120`、`YM/SectorNext/GAUSSIAN_SECTOR_CHANGE/Affine.lean:208`、`Remainder.lean:58`・:124、`Windows.lean:184`、`Chosen.lean:69`・:72、`Change.lean:63` |
| 停留点の条件と供給 | 源 | `YM/PCalc/Chart.lean:88`・:97・:100・:108、`YM/PCalc/Loop.lean:62`・:74・:93、`YM/PCalc/Band.lean:34`、`YM/FullVolume/Roll/Fiscal.lean:37`・:97 |
| 限界的な項と帳簿 | 源 | `YM/AnalyticBridge/VERIFIED_RESET_STEP/Isotropy.lean:75`・:77、`Residual.lean:28`、`Tables.lean:36`、`YM/UVNext/COUPLING_RESET/Precision.lean:71`・:96 |

**この章で使った語** — 相対座標、木のゲージ、精度、木の切り口のギャップ、窓つきの近似の逆、停留点、jet の一致、早い表示、真空の項、結合の移り。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：11-10 固定した段の収束と、段を外す一段 — 段を止めて $N \to \infty$ とする議論です。

# 固定した段の収束と、段を外す一段

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討、§07 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 段 $m$ の表示の材料（結合・活動・道のデータ）が、切断 $N$ について列の全体で収束する理由です。源は「$N$ と $N'$ を量で比べる評価」ではなく、コンパクト性と、段 $0$ に錨を下ろし上から縮む一意性と、部分列の原理です。そこから密度の一様収束、観測量の像、段を外す一段を経て、体積を止めた紫外の極限が列の全体で出ます。

**前提となる章** — 11-01（表示）、10-04 射撃法（段 $0$ で $\beta = \bar{\beta}$）、8-05 相関関数と極限の順、8-04 繰り込んだ挿入。

**先に言うこと** — 収束は質的で、速さは言明にありません。体積 $p$ ごとの収束で、$p$ に一様な言明はありません。極限の対象（極限の測度、極限の表示）は定義されていません。一段の写像の縮みの定数 $1/16$ の源（一段の写像の解析的な評価）は、本書は読んでいません。

この章の順序

1. 言明 — 材料の収束・密度の一様収束・段を外す評価・紫外の極限
2. 仕組みの骨子 1 — 材料の収束の源
3. 仕組みの骨子 2 — 密度・観測量・較正
4. 仕組みの骨子 3 — 段を外す一段
5. 極限の対象は作られていない — 段 0 の理論について言えること・言えないこと。
6. 本書の検討で見えていたこと
7. 読めていない所

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

01

## 言明 — 材料の収束・密度の一様収束・段を外す評価・紫外の極限

**体積を止めた紫外の極限**（委員会の評価書の定理 4.1）評 ：構成は間隔の列 $a_N \to 0$、体積の列 $L_p$、結合 $\beta_{N,p}$ を選び、各体積 $p$ と各ラベルの列・各試験関数（点の重なりを避け、体積の内側に台を持つ）について、相関 $C_{N,p}(v;f)$ の極限 $S_p(v;f) = \lim_{N\to\infty} C_{N,p}(v;f)$ が**選んだ間隔の列の全体に沿って**在り、点の重なりの外で $C^\infty$ の核で表されます（評価書 §4.3）。間隔の列についての普遍性は無い、とも書いています評 。Lean の側では `Campaign.realUV : PositionsUV R.family Sequence.full`（`YM/FullVolume/Fields/Filled.lean:45`）です源 。公開の言明でも、各体積 $p$ で切断 $N$ について列の全体の収束を要求し、部分列になるのは体積の列だけです（`Converges`、`PublicWilson.lean:85-90`）源 。核と差分つきの強い形（`PositionsUV … Sequence.full`）は、構成の定理 `constructed` の結論にだけあります源 。

その筋の部品は次のとおりです源 。どれも記録の上で `continuum_with_position_tests`（存在の定理が呼ぶ）から届きます。

| 順 | 言明 | 在りか |
|---|---|---|
| 1 | 材料の収束の束：段 $k$ 以上で $\beta(N,p,i)$ が Cauchy、活動がノルム `Show` で Cauchy、道のデータが収束 | `Helmet`（`YM/FullVolume/Gables/Honors.lean:30`）、供給 `helmed`（:62） |
| 2 | 源：段 0 の結合が収束する軌道の列は、全段の材料が列の全体で収束する | `Window.allB`（`YM/FullVolume/Glide/Triumph.lean:37`） |
| 3 | 段 $m$ の有効密度（真空の定数を外したもの）が、配位の空間の上の上限ノルムで $N$ について一様に Cauchy、総量も Cauchy | `Flux.fanned`（`YM/FullVolume/Fields/Cement.lean:50`）、`Flux.lacks`（:56） |
| 4 | 観測量の段 $m$ への像が一様に Cauchy | `Rising.hail`（`YM/FullVolume/Fields/Capital.lean:57`） |
| 5 | 真の格子の相関と段 $j$ の読み出しの差 $\le$ $\mathrm{refreeze}/(e^{B_j/64}/2)$（$N$ に依らない） | `Sever.echoes`（`YM/FullVolume/Fields/Peat.lean:42`） |
| 6 | 真の格子の相関が $N$ について Cauchy | `Rising.arrives`（`YM/FullVolume/Fields/Timber.lean:74`） |
| 7 | 一様な有界性＋一般の位置での点ごとの Cauchy ⇒ 微分つきの局所一様収束 | `positioned`（`YM/FullVolume/Profiles.lean:42`） |

「一様に Cauchy」は型 `Confluence`（`YM/FullVolume/Fields/Basin.lean:10`）で、最終的な一様有界性と、$\forall \varepsilon\ \exists N_0\ \forall n, n' \ge N_0\ \forall V:\ \mathrm{dist}(f_n(V), f_{n'}(V)) \le \varepsilon$ の二つです源。3 の仮定 `Flux` は `Rising.flooded`（`Capital.lean:31`）が段 $k \le m$ で与え、主定理では $k = 0$ です（`sees`、`Filled.lean:30`）。したがって全ての段 $m \ge 0$、全ての $p$ で、切断の列の全体について成り立ちます源。

02

## 仕組みの骨子 1 — 材料の収束の源

**座標**。段 $m$ の結合を基準の値 $\hat{\beta}_m$ に対する比の座標 $\lambda_m$ で測り（許される帯は有界区間）、活動を段 $m$ の目盛りのノルム `Show`（`YM/FullVolume/Table/Tabs.lean:66`）で測ります。`Show` は、点ごとに錨を下ろした多角形の、被覆数の指数で重みを付けた微分の上限の和を、段の帳簿（$\hat{g}_m^{11/5}$ と $e^{-P_m^{1/5}}$）で割ったものの上限で、体積に依らない形です源。どの軌道でも、活動のノルムは $1/8$ 以下です源。

**一段の写像の縮み** `Muse.ticket`（`YM/FullVolume/Gain/Rate.lean:94`）源：$(\lambda, K)$ に最大のノルムを入れると

$$\|\Delta K_m\| \le \tfrac{1}{16}\max\big(|\Delta\lambda_{m+1}|, \|\Delta K_{m+1}\|\big), \qquad |\Delta g_m| \le 8 f_m \max(\cdots). \tag{1}$$

$g_m$ は一段の結合のずれ（一ループの部分を除いた残り）、$f_m$ は段に依る定数です。証明は解析性からの Cauchy の評価です源（言明を読んだ）・推（意味の読み）。`Window.curls`（`Glide/Duty.lean:45`）は同じ評価を完備化の距離で書いたものです。

**四つの部品**源。

1. **コンパクト性**（`thinning`、`Triumph.lean:28`）：各段の $\lambda_m$ は有界区間に入るので、可算積のコンパクト性から、全段で同時に収束する部分列が取れる。
2. **結合が収束すれば活動も収束**（`bankA`、:25）：段 $b$ で活動を $0$ から始め直した軌道との差は、段 $m$ で $(1/16)^{b-m}$ 以下（`Window.culprit`、`Glide/Wings.lean:59`、上端の忘却）。始め直した軌道どうしは有限段の連続性で比べる。$\varepsilon/3$ で閉じる。
3. **一意性**（`Window.accord`、`Glide/Coincide.lean:58`）：段 $0$ の結合の極限が等しい二つの極限の軌道は、全段で一致する。
4. **部分列の原理**（`travels`、`YM/FullVolume/Artes/Events.lean:11`）：任意の部分列がさらに同じ極限への部分列を持てば、列の全体が収束する。

**一意性の自己評価**。二つの軌道の段 $i$ の差を $y_i = \max(|\Delta\lambda_i|, \|\Delta K_i\|)$、$Y = \sup_i y_i$ とします。活動は上（細かい側）から縮んで $\|\Delta K_i\| \le Y/16$。結合は段 $0$ で等しく（錨）、細かい側へは一段のずれの和で伝わります（`arrest`、`Coincide.lean:43`）：

$$|\Delta\beta_i| \le \sum_{j<i} 4\,\mathrm{stow}(j)\,Y \le 4Y\cdot \mathrm{glint}\cdot \mathrm{brace}(i). \tag{2}$$

最後の不等号は暦の条件 `Search.radiusB`（`YM/FullVolume/Gain/Motion.lean:48`：$\sum_{i<m}\mathrm{stow}(i) \le \mathrm{glint}\cdot\mathrm{brace}(m)$）です。座標の取り替えから $|\Delta\lambda_i| \le Y/32$。合わせて $Y \le Y/16$、よって $Y = 0$ です源。

意味推：段 $0$ で結合を、段 $\infty$ で「活動が有界」を境界条件とする、段 $[0,\infty)$ の上の二点境界値問題の解の一意性です。限界的な方向（結合）は段 $0$ に錨を下ろし、射撃（10-04）で全ての $N, p$ で $\beta = \bar\beta$ に揃えます。無関係な方向（活動）は上から縮みます。上端（裸の Wilson の段）の差は小さい必要が無く、有界であれば足ります。

源の鎖は `helmed` ← `Winter.convergence` ← `allB` です（`Winter`、`Glide/Vac.lean:31`）源。速さは出ません：コンパクト性を通るからです源。

03

## 仕組みの骨子 2 — 密度・観測量・較正

**密度**。段 $m$ の表示は材料の連続関数です：道の作用は結合と道のデータについて一様に連続、活動の和も連続、気体は箱の上の有限の和と積です。`Confluence` が和・積・連続写像の合成で閉じていることから、密度が上限ノルムで一様に Cauchy になり（`fanned`）、配位の空間がコンパクトで基準の測度が確率測度なので、総量も Cauchy です（`lacks`）源（言明を読んだ）・推（筋の読み）。

正規化した密度 $\mathrm{eval}/Z_N$ の一様収束は、名前のついた言明としてはありません。`fanned`・`lacks` と、分母の $N$ に依らない正の下界（`lingers`、`YM/FullVolume/Fields/Till.lean:20`）から一行で出ます。上限ノルムの収束は全変動の収束を含みます推。

**観測量の較正**。次数 $\le d$ の局所場の係数は有限次元の空間に住み、一段で線形同型 `leanings`（`YM/FullVolume/Mark/Nursery.lean:11` の `Club`）で写り、逆は一様に有界、剰余は一段で $1/2$ に縮みます。基準の段 $r = \mathrm{ref}(d)$ で読むとちょうど $v$ になるよう係数を逆算し（8-04）、段 $r$ から逆写像で運ぶと、段 $m \ge r$ の係数が $N$ について Cauchy になります

（`Gear.spends`、`YM/FullVolume/Mark/Sages.lean:66`；`Branch.winds`・`stays`、`YM/FullVolume/Gables/Master.lean:44`・:50）源。構造は §02 と同じ「錨のある限界的な方向＋縮む剰余」で、線形で有限次元なのでコンパクト性は要りません推。

04

## 仕組みの骨子 3 — 段を外す一段

段 $j$ を止めると、段 $j$ の表示の上で観測量の段 $j$ の像を使った読み出しは $N$ について Cauchy です（`latter`、`Timber.lean:58`）源。一方、`echoes` は

$$\left\| \text{真の格子の相関} - \text{段 } j \text{ の読み出し} \right\| \le \frac{\mathrm{refreeze}}{e^{B_j/64}/2}, \qquad B_j = \lceil (\log \hat{\beta}_j)^2 \rceil \tag{3}$$

を、点の隔たりが段 $j$ の単位で $B_j^2$ 以上という仮定（`Drake`）の下で言います源。右辺は $N$ に依りません。refreeze（`YM/FullVolume/Fields/Flight.lean:28`）は基準の段の格子の点の数の指数を含み、体積 $p$ に一様ではありません源。小ささ $e^{-B_j/64}$ は $a_j$ のどの冪よりも遅い速さです推。物理の長さでは $B_j^2 a_j \to 0$ なので、固定した離れた点は十分細かい段で仮定を満たします推。

`arrives` は、$\varepsilon/4$ を取り、(3) の右辺が $\varepsilon/4$ 以下になる段 $j$ を選び、`latter` と三角不等式で、真の格子の相関が $N$ について Cauchy であることを出します源。最後に `positioned` が、一様な有界性（`FixedBounds`）と同程度連続性で、稠密な点から局所一様・微分つきへ広げます源。

図を言葉で書きます。縦に段（下が 0、上が細かい側）、横に切断 $N$ を取ると、各 $N$ の軌道は段 $N$（裸の Wilson）から段 0（結合 $\bar{\beta}$）までの縦の線です。固定した高さ $m$ の横線の上で、切り口（段 $m$ の表示）が $N$ とともに収束するのが §02・§03 です。`arrives` は、高さ $j$ を十分上に取れば、頂上（真の相関）と高さ $j$ の切り口の差が $N$ に依らず小さい、と言います。段 0 は単位を決める所で、相関の評価には使われません。

05

## 極限の対象は作られていない

- 段 $m$ の極限の測度 $\mu_{\infty,p,m}$、極限の密度、極限の表示に、名前のついた定義はありません源（検索の範囲は FullVolume・RG・Extraction）。在るのは材料の収束（結合の Cauchy、活動の Cauchy、ある極限の道のデータの存在）までです。

- 極限の密度が同じ形の表示を持つこと、段の間で $\mu_{\infty,p,m} = \mathrm{push}(\mu_{\infty,p,m+1})$ と整合することは、言われていません源 。
- 一段の核は $\beta(N,p,m+1)$ に依るので、段 $m$ の押し出しの測度は「固定した写像で Wilson の測度を押し出したもの」ではなく、$N$ とともに写像そのものが動く対象です源（`Transfer` の形）。
- 証明の筋は極限の対象を作らず、固定した段の Cauchy から段を外して、真の格子の相関の Cauchy へ直接行きます。
- 繰り込んだ段（段 0 を含む）の測度の鏡映正値性は言われていません源 （名前の検索の範囲）。鏡映正値性の言明は、裸の Wilson の測度についての `Slice.reflected_positive`（`YM/Slice/Reflection.lean:98`）です。核のパッチが面を跨ぐので、押し出しが自動では継がないと読みます推 。
- 段 0（間隔 1）より粗い尺度への繰り込みはありません。段の番号は自然数で、段 0 が最も粗い段です源 （名前の検索の範囲）。
- 体積：縮みと Lipschitz の定数は $p$ に依りませんが、収束は $p$ ごとの質的な言明です。密度の水準の評価（`refreeze`、分母の下界）は体積の指数を含みます。一方、一段の帳簿（`EBound`・`KBound`、`Show`）は点ごとの和で、体積に依りません源 。

### 段 0 の理論について言えること・言えないこと

残る問いを「段 0（間隔 1）の有効な格子の理論の、長い距離の問い」と言い直すときに、源から言えることと言えないことを並べます。

| 項目 | 源に在ること | 源に無いこと |
|---|---|---|
| 結合 | 全ての $N,p$ で $\beta(N,p,0)=\bar{\beta}$（`Selected.reaches`、`YM/RG/History.lean:239`）源 | — |
| 極限の対象 | 段 0 の有効密度が $N$ について一様に Cauchy（$p$ は固定）源 | 極限の測度の定義と、その表示源 （名前の検索の範囲） |
| 観測量の像 | 段 $m$ への像は、基準の段 $\psi(d)\le m$ の観測量について（`hail` の仮定、`YM/FullVolume/Fields/Capital.lean:57`）源 。段 0 では基準の段が 0 以下の観測量だけ | 基準の段が 0 より上の観測量の、段 0 での像 |
| 体積 | 体積に依らないのは一段の帳簿（点ごとの和）源 | 密度の水準の評価の体積に一様な形（`refreeze` などは体積の指数を含む） |
| 鏡映正値性 | 裸の Wilson の測度について（`Slice.reflected_positive`）源 | 段 0 の測度について |

| 項目 | 源に在ること | 源に無いこと |
|---|---|---|
| 一段の評価の入口 | 平滑化の番号 $j$ と結合の値 $x$ について「$\mathrm{betaEntry}(j) \le x$ なら成り立つ」の形（`Delays.betaEntry`、`YM/Price/Intent.lean:116`；`Opened`、`YM/AnalyticBridge/VERIFIED_RESET_STEP/Opening.lean:45`）源 | 入口の値の式や数。値は「十分大きい $x$ で成り立つ」性質の束から存在として取り出される |
| 基準の結合 $\bar\beta$ | $\bar\beta > 1$、最初の入口以上（`Bar.ready`）、$\bar\beta$ 以上の全ての $x$ で $x^{-1/2}e^{(\log\log x)^2} \le 1$（`Bar.threshold`、`YM/Price/Intent.lean:126-127`）源。最後の条件だけから $\bar\beta \gtrsim 9 \times 10^5$ 読（数値で根を求めた） | $\bar\beta$ の陽な値 |
| 粗い側への繰り込み | — | 段 0 より粗い段（強結合の側へ流す段） |
| 粗い Wilson ループとの関係 | —（言明は無い） | 段 0 の配位の Wilson ループと、細かい場（あるいは連続）の Wilson ループの関係 源（名前の検索の範囲。16-03 §04） |

06

## 本書の検討で見えていたこと

本書の検討の紫外の鎖は、固定した粗い格子の上の押し出しの測度 $\nu_{n,m}$ の族について、**部分列の極限**を取り、性質を移すものでした（28-01 部分列の極限の含意）。

- 公開された構成の固定した段の収束は、本書の「部分列の極限」の位置に当たり、部分列なしで出ています源（言明を読んだ）・推（対応の読み）。
- ただし対象は同じではありません。公開された構成の押し出しは $\beta(N, p, m+1)$ に依る確率の核の合成で、本書の押し出しは $N$ に依らない決定的なブロック写像です。公開された構成の収束から本書の $\nu_{n,m}$ の収束は出ません推。
- そのまま借りられる型推：部分列を消す骨格（コンパクト性・一意性・部分列の原理）、上端の忘却、自己評価 $Y \le Y/16$ の型。どれも写像が決定的かどうかに依りません。
- 借りられないもの推：全段で同じ形を保つ表示そのもの（大きい場の扱いと同じ所）と、**錨**。本書は $\beta_N$ を外から与える設計なので、限界的な方向に錨がありません。本書の部分列の曖昧さは、ここから来ている可能性があります。

07

## 読めていない所

- 一段の写像の解析的な評価の源（`Muse.income`・`Pass.income`）。縮みの定数 $1/16$ の出どころで、小さい場・大きい場の解析の本体です。
- 切断の違う一段写像を比べる連続性（`Bill.taxes` の中の `Pith.shall`）。
- 有限の $N$ での射撃の一意性（`Jewel.unique` の供給の中身）。
- 係数の写し `leanings` の行列の形（恒等の場・次数の低い場との混合が三角か）。
- `Show` の完備性、極限の活動の存在。
- `Next.Free.Amplify`（`Helmet` の欄 `rises`）の意味。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 評 体積を止めた紫外の極限は、選んだ間隔の列の全体に沿って在る（評価書の定理 4.1）。公開の言明（`Converges`）も切断について列の全体を要求し、部分列は体積だけ 源 | 間隔の列についての普遍性、体積に一様な収束、無限体積の極限の一意性 |
| 源 材料の収束の源は、コンパクト性＋段 0 の錨と上からの縮みによる一意性＋部分列の原理（`allB`） | 収束の速さ（言明に無い） |
| 源 段 $m$ の有効密度は上限ノルムで $N$ について一様に Cauchy（全ての $m \geq 0$、$p$、列の全体） | 正規化した密度の収束の名のついた言明（一行で出るが無い） |
| 源 段を外す差は $N$ に依らず $\mathrm{refreeze} \cdot 2e^{-B_j/64}$ 以下（点の隔たり $\geq B_j^2$） | この差の $p$ に一様な評価 |
| 源 極限の測度・極限の表示・段の間の整合は定義も言明も無い | 極限の対象の性質（鏡映正値性など） |
| 源 鏡映正値性は裸の Wilson の測度についてだけ言われ、段 0 より粗い繰り込みは無い | 繰り込んだ段（段 0 を含む）の測度の鏡映正値性 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 体積を止めた紫外の極限 | 評 | 評価書 §4.3（定理 4.1） |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
| --- | --- | --- |
| 材料の収束と源 | 源 | `YM/FullVolume/Gables/Honors.lean:30`・:62、`Glide/Vac.lean:31`、`Glide/Triumph.lean:25`・:28・:37、`Glide/Coincide.lean:43`・:58、`Glide/Wings.lean:59`、`Glide/Duty.lean:45`、`Gain/Rate.lean:94`、`Gain/Motion.lean:48`、`Artes/Events.lean:11`、`Table/Tabs.lean:66` |
| 密度・観測量 | 源 | `YM/FullVolume/Fields/Basin.lean:10`、`Cement.lean:50`・:56、`Capital.lean:31`・:57、`Till.lean:20`、`Filled.lean:30`・:45 |
| 較正 | 源 | `YM/FullVolume/Mark/Nursery.lean:11`、`Mark/Sages.lean:66`、`Gables/Master.lean:44`・:50 |
| 段を外す一段 | 源 | `YM/FullVolume/Fields/Peat.lean:42`、`Flight.lean:28`、`Timber.lean:58`・:74、`YM/FullVolume/Profiles.lean:42` |
| 依存の記録 | 源 | `verification/declaration-usage.tsv`（この章の宣言は used、証人 `continuum_with_position_tests`） |

**この章で使った語** — 材料の収束、一様に Cauchy、上端の忘却、錨、二点境界値問題、部分列の原理、較正、段を外す一段。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：11-11 この部で読めていない所 — 部の全体の一覧です。その後は 第 12 部 無限体積と再構成 へ。

# この部で読めていない所

この章は未解決の地図です。§01 は案内です。

**この章で分かること** — 第 11 部の各章で書いた「読めていない所」を一つの表にまとめ、在りか（ファイルの相対パス・宣言）と、その所が部のどの主張の帳尻に当たるかを並べます。

**前提となる章** — 11-00（札と引用の水準）。各行の主題は、表の右の列の章にあります。

**先に言うこと** — ここに挙げるのは、本書が源を読めていない所です。公開された構成の証明に穴があるという意味ではありません。公開された構成の結果は、委員会が Lean で証明されていると評価した水準のままです。

この章の順序

1. この一覧の読み方
2. 大きい行 — 部の主張の帳尻に当たる所
3. 章ごとの一覧
4. どの目標に載るかを確かめていない宣言
5. 読むときの注意

---

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

01

## この一覧の読み方

行ごとに、何が読めていないか、在りか（`YM/` からの相対パスと宣言の名）、その所が部の中のどの主張に効くかを書きます。在りかは、名前と型までは本書が源で確かめたものです。証明の中身は読んでいません。在りかが候補でしかないものは「候補」と書きます。

02

## 大きい行 — 部の主張の帳尻に当たる所

| 読めていない所 | 在りか | 効く主張 |
|---|---|---|
| **Haar の損失の補題の在りか。** 種の近くで Haar の測度のまま積分するリンクの、ガウスの規格化に対する損失を、どの補題がどこへ入れるか。大きい場の置き場の `Marginal`（45 宣言）・`Haar`（3）・`Leases`（26）・`Grant`（10）は全て依存の外 | 候補：`YM/SectorNext/GAUSSIAN_SECTOR_CHANGE/Haar.lean`・`Counting.lean`、`YM/AnalyticBridge/SELECTED_ORDERED_KERNELS`、`YM/AnalyticNext/CONNECTED_ACTIVITY_JETS_E6/IssuePlan.lean:34`（`Expense`） | 種一つあたりの対数の費用の欄に入るという読み（11-05 §03） |
| **値段を出したあとの残りの積分の上界の全体。** `peel` は残り（outgoing）の積分の大きさを言わず、置き場の説明文も「出口の乗数の費用に条件つき」と書く | `YM/Next/FLUCTUATIONS/Sector.lean:229`（`peel`）、`YM/Push/ABSOLUTE_SUMS/Grants.lean`（説明文）、`YM/SectorNext/LARGE_FIELD_REMAINDERS`（`Annulus.lean:47`・`CorePacket.lean:62`）→ `YM/AnalyticBridge/ANNULUS_RATIO_INSERTIONS` → `YM/PhysicalNext/V9_JOINT_ENDPOINT_LOAD` | 種あたりの因子が実際に一段の出口まで届くこと（11-04 §05） |
| **一段の定理の組み立ての中身。** 三つの入力（一覧の等式・帳簿・連続性）から Move を出す所と、大きい場の帳簿との結び | `YM/AnalyticBridge/VERIFIED_RESET_STEP/Downstream.lean:65`（`Use.Machine.run`）、`YM/PhysicalNext/RG_NEXT_COMPLETE_REPEATABLE_NONLINEAR_STEP/Venue.lean:47`（欄 `machine`） | 一段の証書（11-00 §03） |

| 読めていない所 | 在りか | 効く主張 |
|---|---|---|
| **組み直しの補題**。早い帳簿 $\beta^{-7/16}$ から出口の帳簿 $\hat{g}^{11/5}$ への組み直し（三次の原子の打ち消し）と、一覧の実例を作る所の中の補題 | `YM/PhysicalNext/RG_NEXT_COMPLETE_REPEATABLE_NONLINEAR_STEP/Marlin`（`carries` など）・`Trio`・`Meadow`・`Beam`（`travels`）・`Rain`（`innings`） | 正則な活動の帳簿（11-09 §05） |
| **一段の後に新しい強制された活動を作り直し、帳簿に収める構成の全体** | `YM/PhysicalNext/RG_NEXT_COMPLETE_REPEATABLE_NONLINEAR_STEP`（`Roost`・`Lotus`・`Sward`）、`YM/AnalyticNext/CONNECTED_ACTIVITY_JETS_E6`（`OptionCost.lean:39` の `ratesCombine` から先） | 段を跨ぐ持続の読みの帳尻（11-07 §04） |
| **一段の写像の解析的な評価の源**。縮みの定数 1/16 の出どころ | `YM/FullVolume/Gain/Rate.lean`（`Muse.income`）、`Pass.income` | 材料の収束（11-10 §02） |

03

## 章ごとの一覧

| 章 | 読めていない所 | 在りか |
|---|---|---|
| 11-01 | 道のデータの `Bounds` の欄の全部の意味 | `YM/RG/PathActions.lean:173` |
| 11-01 | 強制された活動の追加の条件（`extraTest`）の役 | `YM/RG/Activities.lean`（`ForcedAddress`） |
| 11-02 | 最初の強制された活動を塊に並べる構成と、最初の帳簿に入ること | `YM/Extra/WILSON_STARTUP/Packets.lean`・`Ink.lean` |
| 11-02 | 向きの枠で読んだ due（`owed`）と due の対応 | `YM/Extra/WILSON_STARTUP/Ownership.lean:193` |
| 11-03 | 滑らかな一の分割を種の型の分割に組む所と、遷移の幅の当て方 | `YM/Push/SECTOR_MEASURE/Profile.lean`（`Chi`） |
| 11-03 | 区画どうしの重なりの説明、ブロック化の核 Φ・雑音への配りの作り方 | `YM/Push/SECTOR_MEASURE/Overlap.lean`、`YM/Pressure/Rows.lean`（`leap`・`kick`） |

| 章 | 読めていない所 | 在りか |
|---|---|---|
| 11-04 | 粗い面・細かい面と罰・大きい粗い面の支払いの三つの不等式の証明 | `YM/Work/E05` 〜 `YM/Work/E07` |
| 11-04 | 注文に合う条件 `Funds` の管の欄（`Deep`・`Roll`）の意味 | `YM/Pressure/Seeds.lean:101` |
| 11-05 | 種を含む塊の和の証明（Ursell の係数、Penrose 型の木の不等式、連結な活動の辞書） | `YM/Push/ABSOLUTE_SUMS/Ursell.lean`・`Graph.lean`、`YM/AnalyticNext/CONNECTED_ACTIVITY_JETS_E6` |
| 11-05 | 組合せの条件 `Buy` の欄の全部、塊の尺度の量の定義 | `YM/Push/ABSOLUTE_SUMS/Mixed.lean`、`Bulkhead.lean` |
| 11-06 | 旗を含まない塊の値が正則な活動の番地に入る写像 | `YM/AnalyticNext/CONNECTED_ACTIVITY_JETS_E6/Colony.lean`（`entries` から先） |
| 11-06 | 入ってきた活動の扱い（`Sales`・`ratesCombine`）から先 | `YM/AnalyticNext/CONNECTED_ACTIVITY_JETS_E6/OptionCost.lean:39` |
| 11-07 | 一段の証書の強い帳簿 `Move.forced` を後の段で使う所 | 未確認 |
| 11-07 | 段を跨いで作用の差を二重に数えていないこと（向きの平均の作用と一つの向きの作用の差を含めた形） | `Testing.ships` ほか（未確認） |
| 11-08 | 値段の条件 `Ringing` の中身、$\bar{\beta}$ を大きく取る条件の陽な形、`Fits` を満たす暦の構成の鎖 | `YM/Pressure/Seeds.lean:155`・:161、`YM/Price/Intent.lean:123` |
| 11-09 | 停留点の条件の供給の証明の中身 | `YM/Next/STATIONARY` → `YM/FullVolume/Roll/Fiscal.lean:97`（`sailsW`） |
| 11-09 | 平らでない背景での Gram のギャップと、平らな場合のギャップの繋ぎ | `YM/SectorNext/GAUSSIAN_SECTOR_CHANGE/Gap.lean` |
| 11-09 | 規格化の行列式の評価（真空の項の中身）、予測子の線形化と粗い道のデータの運動項の関係 | 未確認 |
| 11-10 | 切断の違う一段写像を比べる連続性、有限の $N$ での射撃の一意性 | `YM/FullVolume/Glide/Bill.lean`（`Bill.taxes`）、`YM/FullVolume/Finale/Program.lean:133`（`Jewel`） |

| 章 | 読めていない所 | 在りか |
|---|---|---|
| 11-10 | 係数の写しの行列の形（恒等の場・次数の低い場との混合）、`Show` の完備性と極限の活動 | `YM/FullVolume/Mark/Hinge.lean`（`Gram.reads`）、`YM/FullVolume/Table/Tabs.lean:66` |

### 段 0 の理論について源に無いこと

くわしくは 11-10 §05 の表。ここでは源に無いことだけを並べます源（名前の検索の範囲）。

- 段 0 の極限の測度の定義と、その表示。
- 基準の段が 0 より上の観測量の、段 0 での像（`hail` は $\psi(d) \le m$ を仮定する）。
- 密度の水準の評価の、体積に一様な形（体積に依らないのは一段の帳簿だけ）。
- 繰り込んだ段（段 0 を含む）の測度の鏡映正値性。段 0 より粗い繰り込み。
- 段 0 の配位の Wilson ループと、細かい場（あるいは連続）の Wilson ループの関係（粗い Wilson ループとの関係。16-03 §04）。
- 一段の評価の入口 $\mathrm{betaEntry}(j)$（`YM/Price/Intent.lean:116`）と基準の結合 $\bar{\beta}$ の陽な値。源に在るのは存在と、`Bar.ready`・`Bar.threshold`（:126-127）の条件だけで、後者だけから $\bar{\beta} \gtrsim 9 \times 10^{5}$ です読。

## 04 どの目標に載るかを確かめていない宣言

検証の記録で used（17 の見出しの定理のどれかの依存）で、記録の上の証人が `SharpGram.habitat` のものは、存在の定理の鎖に載るかを本書は確かめていません。記録の証人は深さ優先の探索で最初に見つかった一つだけなので、載らないという意味でもありません源（記録の作り）。この部で引いたものは次のとおりです。

- 大きい場：`WilsonStartup.due_eq`・`owed_zero`、`Tube.locates`、`Stores.Plot`、`Allocation.flagged`、`Chi.share_sum`、`Bid.Crowds`・`Seals`・`Lapse`、`Teller.Grants`、`Sector.peel`。
- 値段と換算：`Buy.quote`、`Cash.armK`・`dictionary_fit`、`eventual_resize`、`Time.late_force`・`Time.now`、`Postage.saved`、`Collection.vac`。
- 小さい場の下位の補題：`tree_gap`、`resolve_point`、`late_cubic`、`Rain.sprint`、`Song.forward`。ただし一段の定理 `Return.reset` までの道は、存在の定理の側から字面

で辿ってあります（11-09 §01）。

依存の外（outside）と確かめたもの：`Remainder.hole_price`・`bulk_price`、大きい場の置き場の `Marginal`・`Haar`・`Leases`・`Grant`、`Allocation.hard`、`Directed.holding` 源 。

05

## 読むときの注意

- 源の宣言の名とファイルの名は、中身を表さないものが多くあります。説明文の語（「凍らせる」「穴」「遅れ」など）を手掛かりにすると、依存の外の道を読んでしまうことがあります。読む前に、検証の記録で used かどうかを確かめるのが確かです。
- 源の説明文には、証明の書き手への覚え書き（「〜してはいけない」の形）が多く含まれます。本書はそれらを書き手への注意として扱い、数学の主張としては引いていません。
- 源が引く紙の式の番号（行の恒等式・切った作用の本体などの番号）は、紙が公開されていないので辿れていません。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 各行の在りか（ファイルと宣言の名）は、名前と型まで源で確かめた（候補と書いたものを除く） | 各行の証明の中身 |
| 源 依存の外の宣言（`hole_price` など）は検証の記録で outside | 依存の外の道が数学として誤りであること（何も言わない） |
| 評 17 の見出しの定理の依存は新しく初期化した核の環境で検査し直された（評価書 §9.1） | この一覧の所に誤りが無いことを本書が確かめたこと |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 公開された構成の Lean の源 | 源 | `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）。在りかは各行のとおり |
| 依存の記録 | 源 | `verification/declaration-usage.tsv`（status・見出しの証人） |
| 委員会の評価書 | 評 | `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）、§9.1 |

**この章で使った語** — 依存の記録、見出しの定理、依存の外、存在の定理の鎖。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：12-01 格子の鏡映正値性 — 二種類の面 — 第 12 部、無限体積と再構成へ進みます。

# 格子の鏡映正値性 — 二種類の面

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§05 は本書の検討、§06 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 公開された構成は、周期の格子の上の Wilson の測度について、鏡に映した関数との積の期待値が負にならないこと（鏡映正値性）を、格子点を通る面と辺の中点を通る面の両方で、四つの座標軸の全てについて、$\beta \geq 0$ で言明しています。この章は、その言明の形（関数の類）、証明の骨（面の上の切片を止め、面を横切る相互作用を正の核にする）、この部の後の章でどう使われるかを読みます。

**前提となる章** — 5-03（反射正値性と転送行列）、4-10（OS の公理）、8-01（公開された構成の格子と Wilson の測度の規約）。本書の側の同じ主題は 20-01。

**先に言うこと** — ここに書く公開された構成の結果は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」水準のものです。本書が確かめたのは、源の定義と言明の形を読んだことまでで、証明の正しさは確かめていません。鏡映正値性は一つの有限の格子の上の性質で、言明は元の Wilson の測度についてだけです。繰り込みの段の測度（押し出しの測度）についての鏡映正値性は、読んだ範囲には在りません。

この章の順序

1. 札の凡例
2. 言明 — 面・関数の類・正値性
3. 二種類の面と四つの軸
4. 仕組みの骨子 — 切片に分け、面の上を止め、横切る相互作用を正の核にする
5. この部の中での使われ方
6. 本書の検討で見えていたこと
7. 読めていない所

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。公開された構成の定理が「Lean で証明されている」という水準は、委員会の評価によります評 。

01

## 言明 — 面・関数の類・正値性

導入は 5-03 です。舞台は、一辺 $n$（偶数、$n = 2h$）の周期の格子 $(\mathbb{Z}/n)^4$ と、その上のゲージ群 $G$（閉じた行列群 $G \subset U(m)$）の Wilson の測度です。面 $p$ のホロノミー $U_p$ に「値段」

$$\mathrm{price}(U_p) \;=\; 1 - \frac{\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U_p}{m} \tag{1}$$

を付け、Haar の積に密度 $Z^{-1}\exp\bigl(-\beta\sum_p \mathrm{price}(U_p)\bigr)$ を付けたものが Wilson の測度 $\mu_\beta^{\mathrm{W}}$、その期待値が $\langle\cdot\rangle_\beta$ です源 （構成の源 `YM/Gauge/MatrixGroup.lean:112` `Gauge.price`、`YM/Wilson/Law.lean:87` `law`、:99 `moment`）。本書の規約とは、重みの正の定数倍が違うだけです。SU(2) の二次元表現では $\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U_p/2$ が本書の $\mathrm{Re}\,U_p$（四元数の実部）なので、$\beta$ の目盛りは同じです初 （規約の全体は 8-01）。

面 $C$ は四つのデータで決まります：向き（座標軸）$a$、種類（格子点を通る面か、辺の中点を通る面か）、基準の位置 $b$、半分の長さ $h$（$n = 2h$）源 （`YM/Cells/Cut.lean:40` `Cut`）。面には「片側の帯」$\Lambda_C$（`sector`）が付きます。関数の類は次の四条件です。

定義（面の片側に局所な関数の類）

配位の関数 $F\colon (\text{リンクの配位}) \to \mathbb{C}$ が帯 $\Lambda_C$ について**内側の関数**であるとは、(i) ゲージ不変、(ii) 可測、(iii) 両端が $\Lambda_C$ に在るリンクだけに依る（局所）、(iv) 有界、の四つを満たすことです。

源 構成の源 `YM/Cells/Cut.lean:109` `Interior`（欄 `gauge`・`borel`・`localSites`・`cost`）。局所性は `YM/Lattice/Path.lean:196` `LocalOn`（両端が集合に在るリンクで一致する二つの配位で値が等しい）。

言明（格子の鏡映正値性）

$\beta \ge 0$ とします。全ての面 $C$（二種類・四つの軸・全ての基準の位置）と、$\Lambda_C$ の内側の全ての関数 $F$ について、

$$0 \;\le\; \big\langle F \cdot \overline{F \circ \Theta_C} \big\rangle_\beta . \tag{2}$$

ここで $\Theta_C$ は面 $C$ での鏡映を配位に引き戻す写像、不等号は複素数の順序（左辺が非負の実数であること）です。

源 公開された構成の定理（Osterwalder–Seiler の型の鏡映正値性）。Lean：`YM.Slice.reflected_positive`（構成の源 `YM/Slice/Reflection.lean:98`。仮定は $0 \le \beta$ だけ）。正値の定義は `YM/Cells/Cut.lean:116` `Positive`。

源 言明の形と、関数の類の四条件は源で読みました。不等式 (2) が全ての $C$ で成り立つという束は `YM/Cells/Certificate.lean:14` `Seam` の欄 `positive` にまとめられ、`laws`（同 :20）が $\beta \ge 0$ から束全体を出します。

**どの目標に入っているか。**宣言の使われ方の記録（`verification/declaration-usage.tsv`）では `reflected_positive` の状態は `used` です。この記録の `used` は「検証の記録が挙げる 17 の見出しの定理のどれかから届く」という意味で、公開の定理 `JointExistence` まで鎖を確かめたことにはなりません（記録が最初に見つけた見出しは `SharpGram.habitat`）。公開の定理への道は、§04 の `seamless` と `crops` を経る筋と推し量ります推。

02

## 二種類の面と四つの軸

向き $a$ の座標を $x_a \in \mathbb{Z}/n$ とし、基準の位置を $b$ とします。面の種類ごとに、鏡映と帯は次のとおりです源（`YM/Cells/Cut.lean` の `Kind.shift`・`Kind.Strict`・`reflect_here`）。

| 種類 | 面の位置 | 鏡映 $x_a \mapsto$ | 帯 $\Lambda_C$（$r := x_a - b \bmod n$） |
|---|---|---|---|
| 格子点を通る面（site） | $x_a = b$ と $x_a = b + h$ | $2b - x_a$ | $0 < r < h$（面の上の点を含まない） |
| 辺の中点を通る面（link） | $x_a = b - \frac{1}{2}$ と $x_a = b + h - \frac{1}{2}$ | $2b - 1 - x_a$ | $0 \le r < h$ |

他の三つの座標は動きません。向き $a$ は四つの軸のどれでもよく、基準の位置 $b$ も任意です。

**格子点を通る面。**鏡は格子点の層 $x_a = b$（と周期で向かい側の $x_a = b + h$）を固定します。帯は二枚の鏡の間の**開いた**部分で、鏡の上の点を含みません。関数は両端が帯に在るリンクだけに依るので、鏡の上のリンクにも、鏡から出る向き $a$ のリンクにも依りません源（源の冒頭の注「site tilings do not read transverse links at seams」）。

**辺の中点を通る面。**鏡は向き $a$ のリンクの真ん中を通り、格子点を固定しません。帯は $x_a = b, \dots, b + h - 1$ の $h$ 枚の層で、鏡に写すと向かい側の $h$ 枚に移ります（`Cut.link_switch`：帯の点の写しは帯に無い）。鏡を横切るリンク（$x_a = b - 1$ から $b$ へ、$b + h - 1$ から $b + h$ へ）

は、どちらの帯の内側のリンクでもありません。源の注は $h = 1$ の退化した場合も含むと書いています源（`YM/Slice/Gate.lean` 冒頭）。

**関数は複素数値で、ゲージ不変。**公開された構成の類は複素数値の関数を許し、そのかわり両方の種類でゲージ不変を課します。(2) の左辺の共役は、複素数値の関数の対を半正定値にするためのものです初（$F = \sum_i c_i F_i$ と置けば、(2) は行列 $\left(\langle F_j \overline{F_i \circ \Theta} \rangle\right)$ が半正定値であることになります）。

03

## 仕組みの骨子 — 切片に分け、面の上を止め、横切る相互作用を正の核にする

考え方は 5-03 §04 と同じです。源の組み方を三段に分けて書きます源（言明と補題の名まで。各補題の証明の中身は読んでいません）。

### 段 1：配位を切片に分ける

向き $a$ の座標で格子を層に切ります。一枚の層の中のリンク（向き $a$ に垂直な三次元の格子のリンク）の配位を**切片**（`Leaf`）、隣り合う層をつなぐ向き $a$ のリンクの組を**糸**（`Thread`）と呼びます。配位の全体を、次の四つに分けます。

- 鏡の上の切片（`Posts`、格子点を通る面のとき）
- 鏡を横切る糸（`Doors`、辺の中点を通る面のとき）
- 帯の内側の切片と糸（`Open`）
- その鏡の写し（`Open` の二つ目の写し。糸は逆元で読む）

この分け方が Haar の積の測度を保つ同型であることが補題です源（`YM/Slice/Independent.lean:165` `board`。糸を逆元で読む写しが測度を保つことは同 :149 `twisted`）。Haar の測度が逆元で不変なことを使います。

### 段 2：鏡の上を止めると、二つの写しが同じ分布で独立になる

鏡の上の切片と横切る糸を止めます。帯の内側とその写しは、Haar の積の下で独立で、同じ分布です。Wilson の重みの対数（作用）は、帯の内側の面・写しの側の面・鏡に触れる面に分かれます。鏡に触れない部分は $A(U_>) + A(U_<)$ の形で、$F$ と同じ側にまとめられます。

### 段 3：鏡を横切る相互作用は正の核

格子点を通る面では、関数が鏡の上の切片と鏡から出る糸を読まないので、止めた鏡の上の値ごとに、被積分関数は $g(U_>)\,\overline{g(U_<)}$ の形になり、二つの写しで積分すると $\left|\int g\right|^2 \geq 0$ です（核

は定数 1)。

辺の中点を通る面では、鏡を横切る糸が帯の両側の切片をつなぎます。横切る糸を積分すると、両側の端の切片 $X$・$Y$ の関数として、転送作用素の核

$$K_\beta(X,Y) \;=\; \int \mathrm{weight}_\beta(X,Y,u)\,du \tag{3}$$

が出ます（$u$ は横切る糸、weight はその糸を辺に持つ面の重み）源（`YM/Slice/Positive.lean:54` `heat`）。$\beta \ge 0$ なら、この核は**正値の核**（任意の有限個の点 $X_1,\dots,X_k$ で行列 $K_\beta(X_i,X_j)$ が半正定値）です源（Lean：`YM.Slice.step_positive`、`YM/Slice/Positive.lean:81`。核の正値の定義は `YM/Analysis/Nonnegative.lean:18` `NNKernel`）。正値の核について、対の積分

$$\iint \overline{g(X)}\,K_\beta(X,Y)\,g(Y)\,d\nu(X)\,d\nu(Y) \;\ge\; 0 \tag{4}$$

が成り立つ、というのが最後の段です源（`NNKernel.integrated`、`YM/Slice/Reflection.lean:72` で使用。`portPos`、`YM/Slice/Gate.lean:94` が二種類の面の核をまとめて正値にする：格子点の面では核は 1、辺の中点の面では $K_\beta$ の積）。

**ゲージ不変と $\beta \ge 0$ の役**。$\beta \ge 0$ は段 3 の核の正値に使われます。ゲージ不変は類の定義に入っていますが、格子点を通る面の段 1〜3 のどこでそれが要るかは読めていません推（辺の中点の面では、横切る糸の扱いに要る）。本書の側の証明（20-01 §05）では、辺の中点の面で、横切るリンクをゲージで 1 に消すためにゲージ不変を使いました。公開された構成は横切る糸を消さず、積分して核にします。

## 04 この部の中での使われ方

読んだ範囲では、鏡映正値性は構成の中で**元の格子の Wilson の測度**に対してだけ使われます源（名前の検索の範囲）。構成の族は、切断 $N$・体積 $p$ ごとに一辺 $n = L_p/a_N$ の格子と結合 $\beta_{N,p}$ を持ち（8-02）、全ての $(N,p)$ で $\beta_{N,p} \ge 0$ であることから束 `Seam` が立ちます源（Lean：`YM.Cells.seamless`、`YM/Cells/Packing.lean:81`。$\beta_{N,p}$ が非負なのは、結合が帯 $[\hat\beta/2,\,2\hat\beta]$ に入り $\hat\beta > 1$ であることから）。

| 使い道 | 何に当てるか | 章 |
|---|---|---|
| チェス盤の不等式と根の三角不等式 | 帯の面（`bandCut`）の全てでの正値 | 12-02 |
| 転送作用素の核の正値 | 辺の中点を通る面の核 (3) | 12-04 |
| 連続の極限の鏡映正値性 | 格子点を通る面（座標 0）の Gram 行列の非負 | 12-05 |

| 使い道 | 何に当てるか | 章 |
|---|---|---|
| OS の Hilbert 空間 | 極限の表の鏡映正値性（連続の側） | 12-07・12-08 |

**押し出しの測度には使われない。**繰り込みの段 $m$ の測度（細かい格子の測度を確率の核で押し出したもの、9-01）の鏡映正値性の言明は、読んだ範囲には在りません源（名前の検索の範囲）。核のパッチが面をまたいで重なる設計なので、押し出しが鏡映正値性を自動では受け継がない、と推し量ります推。構成の観測量の評価（12-03）も、段 $N$ の Wilson の測度 $\mu^{\mathrm{W}}_{N,p}$ の下の期待値として述べられています源。

**評価書の言い方。**評価書 §5 は、無限体積の極限での局所の有界性と同程度連続性が「鏡映正値性、チェス盤の評価、転送作用素の表示、Cauchy の評価に基づく一般の議論」から出ると書いています評。

05

## 本書の検討で見えていたこと

本書の Lean は、SU(2) の格子 $(\mathbb{Z}/2M)^4$ の Wilson の測度について、三つの形の鏡映正値性を持っていました（20-01）。

| | 公開された構成（`reflected_positive`） | 本書 |
|---|---|---|
| 群 | 閉じた行列群 $G$ の全て | SU(2)（単位の四元数） |
| 格子点を通る面 | $\beta \geq 0$、四つの軸、ゲージ不変・複素数値・帯（鏡の上を含まない）に局所 | 全ての実の $\beta$、四つの軸、ゲージ不変を課さない・実数値・閉じた正の半分（鏡の上を含む）に局所（`TorusRP.wilson_rp`・`PeierlsPerm.wilson_rp_dir`） |
| 辺の中点を通る面 | $\beta \geq 0$、四つの軸、ゲージ不変 | $\beta \geq 0$、時間の向きだけ、ゲージ不変、$M \geq 2$（`MidRP.wilson_rp_mid`） |
| 横切るリンクの扱い | 積分して転送作用素の核にする（正値の核） | ゲージで 1 に消し、残った横切る面を座標の積の和にする |

Lean 本書の三つの定理は Osterwalder–Seiler の型の結果の形式化です（Lean：`TorusRP.wilson_rp`・`MidRP.wilson_rp_mid`・`PeierlsPerm.wilson_rp_dir`。範囲は 20-01 の表のとおり）。

違いは二つです。一つ目、公開された構成は辺の中点を通る面を四つの軸の全てで持ち、本書は時間の向きだけでした。二つ目、公開された構成は格子点の面でもゲージ不変を課し $\beta \geq 0$

に限り、本書は格子点の面では $\beta$ の符号もゲージ不変も問いませんでした。どちらの類が広いかは一方向ではありません。

押し出しの測度について、本書は別の設計（辺 3・中心に置いたブロック・一様な重みのブロック写像）で、格子点の面の鏡映正値性を Lean で持っていました（Lean：`Block3.rp_push`・`Block3.rp_push_prob`。任意の実の $\beta$、二枚の粗い格子点の面の間に厳に入るリンクだけに依る有界可測な関数）。公開された構成の設計とは段の作り方が違い（公開された構成は確率の核、本書は決定的な写像）、同じ対象の比べにはなりません。この設計は本書の本線ではありません（28-05）。

06

## 読めていない所

- **格子点の面でゲージ不変がどこで要るか**。段 1〜3 の補題の名までしか読んでいません（`YM/Slice/Reflection.lean` の `link_positive`・`insidePos`）。
- **核の正値の証明の中身**。`step_positive`（`YM/Slice/Positive.lean:81`）の証明は開いていません。重みが面ごとの $\exp(\beta\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(\cdot)/m)$ の積であることから、展開して正値の核の積にする筋と推し量ります推。
- **公開の定理への鎖**。記録の `used` は見出しの定理のどれかから届くという意味で、`JointExistence` までの鎖は一つずつは辿っていません。
- **押し出しの測度の鏡映正値性が無いこと**。名前（reflection・RP・positive）での検索の範囲での判断で、リポジトリ全体を読んだわけではありません。
- **回転させた面**。`YM/Euclid/OtherPlanes.lean` は連続の側の別の面を扱うようですが、記録では使われていない宣言の置き場です源（記録）。中身は読んでいません。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 周期の格子の Wilson の測度は、$\beta \geq 0$ で、二種類の面・四つの軸の全てについて、ゲージ不変・可測・帯に局所・有界な複素数値の関数の類で鏡映正値（`YM.Slice.reflected_positive`） | $\beta < 0$。繰り込みの段の測度（押し出し）の鏡映正値性。連続極限そのもの |
| 源 言明の形・関数の類の四条件・面と帯の定義・証明の段の補題の名を源で読んだ | 補題の証明の中身。格子点の面でのゲージ不変の役 |

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 構成の全ての $(N,p)$ で $\beta_{N,p} \geq 0$ から束 `Seam` が立つ（`seamless`） | 公開の定理 `JointExistence` までの鎖を宣言ごとに確かめたこと |
| `Lean` 本書の三つの形（20-01）との違い：公開された構成は辺の中点の面を四つの軸で持ち、本書は格子点の面で $\beta$ の符号とゲージ不変を問わない | 二つの類のどちらかが他方を含むこと（含まない） |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 格子ゲージ理論の鏡映正値性 | 典 | K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440。導入は 5-03、文献は A-03 |
| (2) と面・類の定義 | 源 | 構成の源 `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）：`YM/Slice/Reflection.lean:98` `reflected_positive`、`YM/Cells/Cut.lean:40` `Cut`・:109 `Interior`・:116 `Positive`、`YM/Lattice/Path.lean:196` `LocalOn`、`YM/Wilson/Law.lean:87` `law`、`YM/Gauge/MatrixGroup.lean:112` `price` |
| 証明の段の補題 | 源 | `YM/Slice/Independent.lean:165` `board`、`YM/Slice/Positive.lean:54` `heat`・:81 `step_positive`、`YM/Slice/Gate.lean:94` `portPos`、`YM/Analysis/Nonnegative.lean:18` `NNKernel` |
| 束と、構成への当てはめ | 源 | `YM/Cells/Certificate.lean:14` `Seam`・:20 `laws`、`YM/Cells/Packing.lean:81` `seamless`。使われ方は `verification/declaration-usage.tsv` |
| 評価書の記述 | 評 | `yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）§5 |
| 本書の対応する定理 | Lean | `TorusRP.wilson_rp`・`MidRP.wilson_rp_mid`・`PeierlsPerm.wilson_rp_dir`（20-01）、`Block3.rp_push`・`Block3.rp_push_prob`。sorry 0、公理は標準の三つ |

**この章で使った語** — 鏡映正値性・格子点を通る面・辺の中点を通る面・帯・内側の関数・ゲージ不変・切片・糸・転送作用素の核・正値の核・押し出しの測度。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：12-02 チェス盤と、根の半ノルム — 鏡映正値性を全ての帯の面で重ねて、箱ごとの大きさを測る半ノルムを作ります。

# チェス盤と、根の半ノルム

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討、§07 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — トーラスを同じ大きさの箱で敷き詰め、一つの箱に局所な関数を鏡映で全ての箱に写して掛け合わせると、その期待値の大きさは「各関数を全ての箱に写したときの期待値の、箱の数分の一乗（根）」の積で押さえられます（チェス盤の不等式）。公開された構成はこれに加えて、根が関数の和について三角不等式を満たすこと、つまり根が半ノルムであることを持っています。この章はその二つの言明、証明の骨、構成の中の使い道を読みます。

**前提となる章** — 12-01（格子の鏡映正値性と関数の類）。チェス盤の評価の考え方は 22-01 にもあります。

**先に言うこと** — 公開された構成の結果は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」水準です。本書が確かめたのは定義と言明の形までです。チェス盤の不等式は一つの有限の格子の上の不等式で、仮定は「全ての帯の面での鏡映正値性」だけです。体積に一様な量が出るのは、根が箱一つあたりの量だからで、根そのものの大きさを押さえる仕事は別にあります（12-03）。

この章の順序

1. 札の凡例
2. 言明の前に — 敷き詰め・写し・根
3. 言明 (1) — チェス盤の不等式
4. 言明 (2) — 根の三角不等式（根は半ノルム）
5. 仕組みの骨子 — 最大化と鏡映、展開と根
6. 構成の中の使い道
7. 本書の検討で見えていたこと
8. 読めていない所

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。公開された構成の定理が「Lean で証明されている」という水準は、委員会の評価によります評 。

01

## 言明の前に — 敷き詰め・写し・根

一辺 $n$ の周期の格子 $(\mathbb{Z}/n)^4$ を、一辺 $s$ の箱で敷き詰めます。箱は $(\mathbb{Z}/P)^4$ で番号を付け（$P$ は偶数、$n = Ps$）、箱の種類は鏡映の面の種類（格子点を通るか、辺の中点を通るか）と合わせます源 （構成の源 `YM/Cells/Tiling.lean:19` `Tiling` ：欄 `period` ＝$P$、`units` 、`widthHalf` ＝$P/2$、`kind` 、`base` ＝基準の箱の角）。箱 $v$ の**内側**（`chamber v` ）は、12-01 の帯と同じ規則で、箱の縁を含まない（格子点の箱）か、縁の片側を含む（辺の中点の箱）点の集合です。

**写し**。基準の箱 $0$ の内側に局所な関数 $F$ を、箱 $v$ へ運びます。運び方は、各軸 $j$ について $v_j$ が奇数なら向き $j$ の鏡映を一回入れ、そのうえで平行移動する、というものです源 （同 :58 `omega` 、:63 `translateBy` 、:65 `copyMap` ）。鏡映の回数が奇数の箱では複素共役を付けます：

$$\mathrm{copy}_v F(U) \;=\; \begin{cases} \overline{F(\vartheta_v^{*}U)} & \text{(鏡映の回数が奇数)} \\ F(\vartheta_v^{*}U) & \text{(偶数)} \end{cases} \tag{1}$$

ここで $\vartheta_v^{*}$ は箱 $0$ を箱 $v$ に写す写像の配位への引き戻しです源 （同 :220 `hand` 、:222 `copy` ）。隣り合う二つの箱の写しは、その間の面について互いに鏡像です。チェス盤の白と黒のように、向きが一つおきに反転します。

**根**。一つの関数 $F$ を全ての箱に写して掛けた期待値の大きさの、箱の数分の一乗を

$$\|F\|_{\square} \;:=\; \Big|\Big\langle \prod_{v} \mathrm{copy}_v F \Big\rangle_{\beta}\Big|^{1/P^4} \tag{2}$$

と書き、**チェス盤の根**と呼びます源 （同 :226 `rootTest` ）。添字の $\square$ は、どの敷き詰めで測るかを表します。根は箱一つあたりの量です。全ての箱に同じ関数が置かれるので、体積を大きくして箱の数が増えても、箱一つあたりの寄与として比べられます。

**例** 初 。$F \equiv c$（定数）なら $\|F\|_{\square} = |c|$ です。$F$ が箱 $0$ の中のある事象の指示関数 $\mathbf{1}_E$ なら、$\|F\|_{\square}^{P^4}$ は「全ての箱で（写した）事象が同時に起きる確率」で、$\|F\|_{\square}$ はその確率の箱あたりの率です。

02

## 言明 (1) — チェス盤の不等式

言明（チェス盤の不等式）

敷き詰めの全ての帯の面（箱の縁を通る面。向き $a$・位置 $p$ ごとに一枚）で鏡映正値性が成り立つとします。箱 $0$ の内側の関数（12-01 の類：ゲージ不変・可測・局所・有界）を箱ごとに $F_v$ と選ぶと、

$$\left|\left\langle \prod_{v} \mathrm{copy}_v\, F_v \right\rangle_{\beta}\right| \;\le\; \prod_{v} \|F_v\|_{\square}. \tag{3}$$

源 公開された構成の定理（Fröhlich–Israel–Lieb–Simon の型のチェス盤の評価）。Lean：`YM.Cells.Tiling.tiles`（構成の源 `YM/Cells/Chess.lean:80`。源の説明文の名は WFS1。仮定は全ての `bandCut` での `Positive` と、各 $F_v$ が箱 $0$ の内側の関数であること）。

源 帯の面は `YM/Cells/Tiling.lean:40` `bandCut`（半分の長さは $s \cdot P/2$、向き $a$、基準は箱 $p$ の角）。左辺の期待値の大きさは `YM/Cells/Polar.lean:91` `rootPower`（$\|\langle \prod_v \mathrm{copy}_v\, F_v \rangle\|$）として書かれています。

**意味**。右辺は「各関数を全ての箱に複製したときの箱あたりの大きさ」の積です。違う関数を違う箱に置いた相関が、同じ関数を全部の箱に置いた相関で押さえられます。これは鏡映正値性から出る Cauchy–Schwarz の不等式を、全ての面について何度も重ねた結果です（§ 04）。

03

## 言明 (2) — 根の三角不等式（根は半ノルム）

言明（根の三角不等式）

同じ仮定のもとで、箱 $0$ の内側の二つの関数 $F, F'$ について

$$\|F + F'\|_{\square} \;\le\; \|F\|_{\square} + \|F'\|_{\square}. \tag{4}$$

源 公開された構成の定理。Lean：`YM.Cells.Tiling.adds`（構成の源 `YM/Cells/Chess.lean:108`。説明文の名は WFS2）。

根は定数倍について $\|cF\|_{\square} = |c|\,\|F\|_{\square}$ を満たします初 （源の `rootPower_scale`、`YM/Cells/Chess.lean:70` は非負の実の倍だけを言う。複素の $c$ へは、鏡映の回数が奇数の箱で共役を取る写しの定義 (1) から $|c|^{P^4}$ の倍になることで広がる）。(4) と合わせて、根は箱 $0$ の内側の関数の空間の上の**半ノルム**です（$\|F\|_{\square} = 0$ でも $F \neq 0$ はありうるので、ノルムとは限りません）初 。

**束**。鏡映正値性・チェス盤の不等式・根の三角不等式の三つは、一つの束 `Seam`（`YM/Cells/Certificate.lean:14`：欄 `positive`・`inequality`・`semi`）にまとめられ、$\beta \geq 0$ から `laws` が三つを同時に出します源 。構成の全ての切断 $N$ と体積 $p$ で、この束が成り立ちます（`seamless`、`YM/Cells/Packing.lean:81`。12-01 §04）。

**なぜ半ノルムが役に立つか**。観測量が「主な部分＋小さい残り」に分かれるとき、(4) で根を部分ごとに足せます。紫外の評価で、繰り込んだ観測量を多くの項の和として持つとき、各項の根を押さえて足すだけで全体の根が押さえられます（12-03）推 （使われている場所の名からの読み）。

04

## 仕組みの骨子 — 最大化と鏡映、展開と根

源の筋を、Fröhlich–Israel–Lieb–Simon の型の議論として書きます源 （補題の名と言明。細部は推し量り）。

### 段 1：一枚の面での Cauchy–Schwarz

一枚の帯の面 $C$ は箱を二つの半分に分けます。箱の割り当て $F_{\bullet}$ の積を、面の正の側の部分 $\Pi_+$ と負の側の部分に分けると、負の側は正の側の別の割り当て $\Pi'_+$ の鏡像になります源 （`YM/Cells/Copies.lean:124` `reflect_equation`：割り当てを「半分は $F$、残り半分は $Q$ の鏡像」に組み替えた積が $\Pi_+(F)\cdot\overline{\Pi_+(Q)\circ\Theta_C}$ になる）。鏡映正値性は対 $(X,Y)\mapsto\langle X\cdot\overline{Y\circ\Theta_C}\rangle$ を半正定値にするので、Cauchy–Schwarz により

$$\left|\langle \Pi_+(F)\,\overline{\Pi_+(Q)\circ\Theta_C}\rangle\right|^2 \;\leq\; \langle \Pi_+(F)\,\overline{\Pi_+(F)\circ\Theta_C}\rangle\,\langle \Pi_+(Q)\,\overline{\Pi_+(Q)\circ\Theta_C}\rangle. \tag{5}$$

右辺の二つの因子は、どちらも「片側の割り当てを鏡で反対側に複製した」割り当ての期待値です。

### 段 2：最大を取る割り当ては、鏡映で対称にしても最大のまま

関数の有限個の候補 $f_1, \dots, f_k$ から箱ごとに一つ選ぶ割り当て $A$ を考え、$\|\langle \prod_v \mathrm{copy}_v\, f_{A(v)} \rangle\|$ を最大にする $A$ を取ります。(5) から、最大の割り当てを任意の面で片側から複製しても最大のままです。これを全ての向きと位置の面について繰り返すと、全ての箱に同じ候補 $f_c$ を置いた割り当てが最大の一つになります源 （`YM/Cells/Chess.lean:32` `maximize`：ある $c$ があって、全ての割り当て $A$ で値が $f_c$ を全ての箱に置いた値以下）。

### 段 3：正規化して (3) へ

各 $F_v$ を $\|F_v\|_{\square} + \varepsilon$ で割った関数に段 2 を当てると、左辺 $\le 1$ になり、$\varepsilon \to 0$ で (3) が出ます源 （`tiles` の証明の形：$\varepsilon$ を足して割り、極限を取る）。

### 段 4：展開して根を取る

$\prod_v \mathrm{copy}_v(F + F')$ を展開すると、各箱に $F$ か $F'$ を選ぶ $2^{P^4}$ 個の割り当ての和になります。各項に (3) を当てると

$$\|F + F'\|_{\square}^{P^4} \;\le\; \sum_{\text{割り当て}} \prod_{v} \|F_{\text{選んだ方}}\|_{\square} \;=\; \left(\|F\|_{\square} + \|F'\|_{\square}\right)^{P^4} \tag{6}$$

で、$P^4$ 乗根を取れば (4) です初 （源の `adds` は、割り当て $i\colon$ 箱 $\to \{$真, 偽$\}$ についての和への展開を補題として持っています）。

05

## 構成の中の使い道

**中心に置いた敷き詰め**。構成が使う敷き詰めは、段 $m$ の格子間隔 $a_m$ を一辺とする箱で、基準の箱を観測点 $o$ の**真ん中**に置いたものです源 （`YM/Cells/Packing.lean:34` `center`：種類は辺の中点の箱、箱の一辺は細かい格子の点で奇数個、物理の一辺は $a_m$（`trueLength`）、箱の数の逆数は $(a_m/L_p)^4$（`root_fraction`））。この敷き詰めの根を $\|\cdot\|_{m,o}$ と書きます。

| 使い道 | 何をするか | 在りか | 章 |
|---|---|---|---|
| 紫外からの入力の形 | 繰り込んだ観測量の根 $\|\cdot\|_{m,o}$ に上界を課す | `YM/Extraction/Center.lean:21` `centeredBudget`・:38 `Wcmain` | 12-03 |
| 局所の有界性 | 離れた点の観測量を別々の箱で囲み、(3) で相関を根の積で押さえる | `YM/Extraction/Held.lean:120` `Around.size_done` | 12-03・12-05 |
| 同程度連続性 | 転送作用素の表示の「柱」のノルムを根で押さえる | `YM/Extraction/Difference.lean:51` `reading` | 12-04 |

| 使い道 | 何をするか | 在りか | 章 |
|---|---|---|---|
| 紫外の側の評価 | 三角不等式（欄 `semi`）で項ごとの根を足す | `YM/FullVolume/Rent.lean` ほか、`.semi` を使う置き場源（検索） | 第 11 部 |

**評価書の言い方**。評価書 §5 は、無限体積の極限の有界性と同程度連続性が鏡映正値性・チェス盤の評価・転送作用素の表示・Cauchy の評価という「Yang–Mills に固有でない一般の仕組み」から出て、構成に固有の入力は繰り込んだ格子の観測量の制御だ、と書いています評。

06

## 本書の検討で見えていたこと

本書の Lean にも、SU(2) の格子 $(\mathbb{Z}/2m)^4$ の Wilson の測度についてのチェス盤の評価が在りました。

Lean 単位の立方体のリンクだけに依る有界可測な関数の族を各ブロックに運んだ積の期待値 $V$ について $|V(F)|^{N^4} \le \prod_w V(\text{定数の族 } F_w)$。全ての偶数の辺、全ての実の $\beta$。Fröhlich–Israel–Lieb–Simon の型の形式化。Lean：`FoldWilson.wilson_chessboard_even`（22-01）。

違いは三つです。

- **使い道が違いました**。本書はチェス盤を**大きい面の稀さ**（面の集合 $X$ の全てで $\mathrm{Re}\,U_p < 0$ となる確率が $q^{\lfloor |X|/6 \rfloor}$ 以下、$q$ は体積に依らない。Lean：`FoldCap.rarity_explicit`、$\beta \ge 81$）に使いました。公開された構成はチェス盤を観測量の大きさの評価にだけ使い、面の稀さの言明は読んだ範囲に在りません推（検索の範囲）。
- **根の三角不等式は、本書の検討に在りませんでした**。本書の評価は、指示関数の積という一つの形にだけ当てていて、根を関数の空間の半ノルムとして使う形にはしていませんでした。
- **箱の作り**。本書の箱は単位の立方体（格子間隔 1 の箱）で、公開された構成は段 $m$ の間隔の箱を観測点の真ん中に置きます。

本書の稀さの言明は、根の言葉で言い直せる形をしています初：$F = \mathbf{1}\{\text{箱の中の決めた面で } \mathrm{Re}\,U_p < 0\}$ と置けば、稀さの評価は根 $\|F\|_{\square}$ の上界を述べています。この言い直しの細部（箱の大きさと面の選び方）は確かめていません。言い直しは第三巻の第 22 部で扱います。

07

## 読めていない所

- **最大化の議論の細部。** `maximize`（`Chess.lean:32`）の中の「鏡映で反射しても最大のまま」の型（`T.Reflects`）の言明は読みましたが、帯の面の全てを渡り歩く帰納の組み方は読んでいません。
- **辺の中点の箱の内側の正確な形。** `chamber` の定義（`Tiling.lean:36`）は読みましたが、二つの種類の箱の縁の扱いを全ての場合で確かめてはいません。
- **紫外の側の `semi` の使われ方。** 使う置き場を名前で見つけただけで、どの評価のどの段で使うかは読んでいません。
- **公開の定理への鎖。** `tiles`・`adds` は記録で `used`（見出しの定理のどれかから届く）です。公開の定理までの鎖を宣言ごとには辿っていません。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 チェス盤の不等式 (3)：全ての帯の面での鏡映正値性から（`Tiling.tiles`） | 鏡映正値性の無い測度（押し出しの測度など）への当てはめ |
| 源 根の三角不等式 (4)、根は半ノルム（`Tiling.adds`） | 根がノルムであること（零でない関数の根が 0 になりうる） |
| 源 敷き詰め・写し・根・中心に置いた敷き詰めの定義を源で読んだ | 最大化の帰納の細部 |
| 初 (4) は (3) の展開と根から出る（(6)） | — |
| Lean 本書のチェス盤の評価（`FoldWilson.wilson_chessboard_even`）と大きい面の稀さ（`FoldCap.rarity_explicit`） | 稀さを根の言葉で書き直した形の細部。本書の側の根の三角不等式 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| チェス盤の評価（鏡映正値性から） | 典 | J. Fröhlich, R. Israel, E. H. Lieb, B. Simon の鏡映正値性とチェス盤の評価（書誌は 22-01 と A-03 に従う） |
| (3)・(4) と定義 | 源 | 構成の源 `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）：`YM/Cells/Chess.lean:80` `tiles`・:108 `adds`・:23 `powering`・:32 `maximize`、`YM/Cells/Tiling.lean:19` `Tiling`・:40 `bandCut`・:222 `copy`・:226 `rootTest`、`YM/Cells/Polar.lean:91` `rootPower`、`YM/Cells/Copies.lean:124` `reflect_equation` |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 束と中心に置いた敷き詰め | 源 | `YM/Cells/Certificate.lean:14` `Seam`、`YM/Cells/Packing.lean:34` `center`・:81 `seamless` |
| 使い道 | 源 | `YM/Extraction/Center.lean:38` `Wcmain`、`YM/Extraction/Held.lean:120` `size_done`、`YM/Extraction/Difference.lean:51` `reading` |
| 評価書の記述 | 評 | `yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf` §5 |
| 本書のチェス盤と稀さ | Lean | `FoldWilson.wilson_chessboard_even`・`FoldCap.rarity_explicit`（22-01）。sorry 0、公理は標準の三つ |

**この章で使った語** — チェス盤の評価・敷き詰め・箱の内側・写し・チェス盤の根・半ノルム・帯の面・中心に置いた敷き詰め・大きい面の稀さ。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：12-03 紫外から無限体積へ渡す評価 — 根の半ノルムで測った観測量の大きさ — 繰り込んだ観測量の根に、体積に一様な上界を課す入力の形を読みます。

# 紫外から無限体積へ渡す評価 — 根の半ノルムで測った観測量の大きさ

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§05 は本書の検討、§06 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 公開された構成は、繰り込んだ局所の観測量を観測点の真ん中に置いた箱の敷き詰めで写し、そのチェス盤の根（12-02）が $A\,a_m^{-d-\varepsilon}$ 以下である、という評価を、全ての体積で一様な形で持っています（Lean の名は `Wcmain`）。この評価が、無限体積の極限を取るコンパクト性の議論の入力になります。この章はその言明の形、それが局所の有界性へ変わる仕組み、そして「これは紫外から受け取る入力の一つで、ほかにも在る」ことを読みます。

**前提となる章** — 12-02（根と中心に置いた敷き詰め）、8-04（繰り込んだ挿入）、8-02（間隔の列 $a_m$・体積の列 $L_p$）。

**先に言うこと** — 公開された構成の結果は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」水準で、本書が確かめたのは言明の形を読んだことまでです。`Wcmain` は無限体積のコンパクト性（`crops`）への入力で、紫外から赤外の側へ渡る入力の**全て**ではありません。同じ構成の走りから、ほかの評価（`Scrim` など）も同時に渡ります。`Wcmain` そのものをどう示しているか（紫外の側の評価の中身）は、この章では読みません。

この章の順序

1. 札の凡例
2. 言明 — 根で測った繰り込んだ観測量の大きさ
3. 言明の読み方 — 何に一様で、何に依るか
4. 仕組みの骨子 (1) — 根の上界から局所の有界性へ
5. 仕組みの骨子 (2) — コンパクト性への受け渡しと、ほかの入力
6. 本書の検討で見えていたこと
7. 読めていない所

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。公開された構成の定理が「Lean で証明されている」という水準は、委員会の評価によります評 。

01

## 言明 — 根で測った繰り込んだ観測量の大きさ

記号を決めます（8-02）。切断 $N$ の格子間隔を $a_N$、体積の番号 $p$ の箱の物理の一辺を $L_p$ とし、切断 $N$・体積 $p$ の格子の上の Wilson の測度を $\mu^{\mathrm{W}}_{N,p}$（結合 $\beta_{N,p}$）とします。段 $m \le N$ の間隔 $a_m$ は粗い側の目盛りです。次数 $d$ の局所場の札 $v$（係数のベクトル、8-03）に、繰り込んだ挿入 $O_{N,p}(v;o)$（格子点 $o$ に置いた、有限個のリンクの多項式。8-04）が対応します源（構成の源の `C.seen v o`、`C.O N p v x`）。

格子点 $o$ を真ん中に置き、一辺の物理の長さが $a_m$ の箱で敷き詰めた敷き詰めの根を $\|\cdot\|_{m,o}$ と書きます（12-02 §05、`YM/Cells/Packing.lean:34` `center`）。

言明の形（根で測った繰り込んだ観測量の評価）

全ての次数 $d$、半径 $R>0$、$\varepsilon>0$ について、ある定数 $A \ge 0$ があって、基準の段 $r(d)$ 以上の全ての段 $m$ で、十分大きい全ての切断 $N$ について、全ての体積 $p$、$\|v\| \le R$ の全ての札 $v$、全ての格子点 $o$ で

$$O_{N,p}(v;o) \text{ は中心の箱の内側の関数で、} \quad \big\|O_{N,p}(v;o)\big\|_{m,o} \;\le\; A\, a_m^{-d-\varepsilon}. \qquad (1)$$

根は $\mu^{\mathrm{W}}_{N,p}$（結合 $\beta_{N,p}$）で取ります。

源 これは構成の源の述語 `YM.Extraction.Wcmain`（`YM/Extraction/Center.lean:38`（38〜40 行））の中身です。一つの箱の評価は同 :21 `centeredBudget`（$m \le N$、$r(d) \le N$、全ての $o$ で「内側の関数であること」と「根 $\le$ 上界」）。

`Wcmain` は述語（性質の名）で、構成の族がそれを満たすことは別の定理が与えます。例えば `YM/FullVolume/Dusk/Graff.lean:20` の `oboes` や、`YM/MergeProof/Noel.lean:24` の `noel` の結論に `Wcmain C` が現れます源 。どの定理が公開の定理 `JointExistence` への道に載っているかは確かめていません。

02

## 言明の読み方 — 何に一様で、何に依るか

| 量 | (1) での扱い | 意味 |
|---|---|---|
| 体積 $p$ | 一様（$\forall$ p が $\exists$ A の内側） | 無限体積へ渡すための肝心の一様性 |
| 観測点 $o$ | 一様 | 並進で動かしても同じ上界 |
| 切断 $N$ | 十分大きい $N$ で（$m$ ごとに閾が在る） | 紫外の極限の側で言える形 |
| 段 $m$ | $a_m^{-d-\varepsilon}$ の冪で依る | 次数 $d$ の場の素朴な次元 $a^{-d}$ に、$\varepsilon$ の損 |
| 札 $v$ | $\|v\| \le R$ で一様 | 係数の有界な集合の上で |

**なぜ根で測ると体積に一様な量になりうるか。**根は「同じ関数を全ての箱に写した期待値」の箱あたりの量です（12-02 (2)）。体積が大きくなると箱の数が増えますが、箱あたりの量は増えません。だから (1) のような体積に一様な上界が意味を持ちます初。ただし、上界が実際に体積に一様に成り立つことは (1) の**中身**で、それを示す仕事は紫外の側（第 11 部）にあります。紫外の側の一段の帳簿（活動のノルム、縮小の定数）は点ごとの和で書かれていて体積に依りませんが、密度や分配関数の水準の評価は体積の指数を含みます源（活動の帳簿 `EBound`・`KBound` は `YM/RG/Activities.lean:98-104` で格子点ごとの和、`refreeze` は `YM/FullVolume/Fields/Flight.lean:28` で格子点の数を指数に含む。11-10）。どの評価から (1) の体積への一様性が出るかの鎖は、読めていません（§06）。

**$a_m^{-d}$ の読み。**次数 $d$ の場（曲率に重み 2、微分に重み 1）は、長さの $-d$ 乗の次元を持ちます。一辺 $a_m$ の箱の中に置いた場の「典型的な大きさ」が $a_m^{-d}$ である、という次元の勘定に $\varepsilon$ の余裕を足したものが (1) の右辺です推。

**評価書の言い方。**評価書 §5 は、無限体積の有界性と同程度連続性の議論で「構成に固有の入力は、繰り込んだ格子の観測量の、間隔に一様な制御である」と書いています評。(1) はその入力の形の一つです。

03

## 仕組みの骨子 (1) — 根の上界から局所の有界性へ

(1) から、点の離れた $n$ 点関数の有界性が出ます。筋は次のとおりです源（`YM/Extraction/Held.lean:74` `fits_budget` と :120 `Around.size_done` の言明と証明の段）。

1. 連続の点 $x_1, \dots, x_n$ が互いに距離 $r$ 以上離れているとします。$a_m < r$ となる段 $m$ を選び、間隔 $a_m$ の箱で敷き詰めます。

2. 各点が別々の箱の内側（縁から十分離れた所）に入るように、敷き詰めの位置をずらします。点が離れているので、二つの点が同じ箱に入ることはありません（`fits_budget` の中の単射 $D$）。
3. 各観測量 $O(v_i; x_i)$ は、基準の箱の内側の関数 $f_i$ の箱 $D(i)$ への写しです。観測量の無い箱には定数 $1$ を置きます。
4. チェス盤の不等式（12-02 (3)）で、$n$ 点関数の大きさは各 $f_i$ の根の積以下です。定数 $1$ の根は $1$ です。

$$\left| \left\langle \prod_{i=1}^{n} O_{N,p}(v_i; x_i) \right\rangle_{\mu^{\mathrm{W}}_{N,p}} \right| \;\le\; \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{\square} \;\le\; A^n. \tag{2}$$

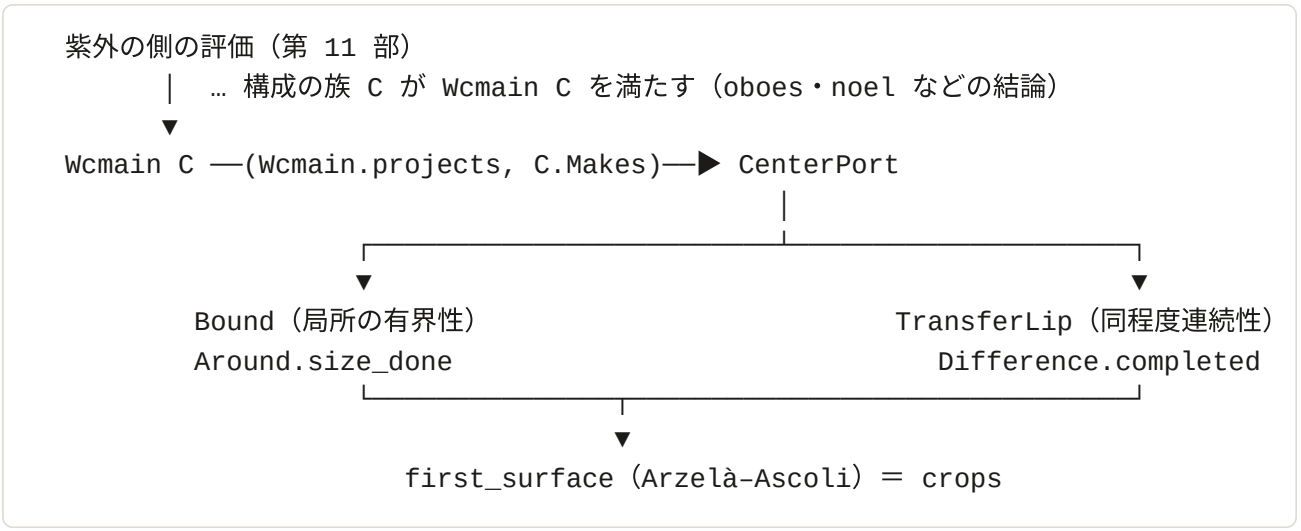
ここで $A$ は (1) から来る箱あたりの上界です源（`fits_budget` の結論 $\|\cdot\| \le A^n$）。この上界は体積 $p$ にも点の位置にも依りません。これが、評価書の式 (11) の一つ目（コンパクト集合の上の一様な有界性）に当たる `Extraction.Bound`（`YM/Extraction/Integrate.lean:25`）です源。`Bound` は二つの欄を持ちます：`cyclic`（体積を止め、切断に一様）と `volume`（体積にも切断にも一様、十分先の体積で）。

同程度連続性（評価書の式 (11) の二つ目）は、(1) を転送作用素の表示と組み合わせて出します。これは 12-04 で読みます。

04

## 仕組みの骨子 (2) — コンパクト性への受け渡しと、ほかの入力

**受け渡しの形。**(1) は、抽出の列（切断の部分列と体積の部分列の組）に沿った形 `CenterPort`（`Center.lean:30`：欄 `per` と `cells`）に直されます源（`Wcmain.projects`、同 :42。構成の証書 `C.Makes` を仮定に取る）。`cells` の欄 `CellHyp`（`YM/Cells/Packing.lean:68`）は、全ての $(N, p)$ での束 `Seam`（12-01・12-02）と、根の上界を十分先の体積で $\eta$ の余裕つきで述べたものを持ちます。`CenterPort` から、有界性 `Bound` と同程度連続性 `TransferLip` が出て、Arzelà–Ascoli の議論 `first_surface` に渡ります（`crops`、`YM/Extraction/Held.lean:136`。12-05）。




**紫外からの入力は、これ一つではない。** `Wcmain` を使う補題 `MergeProof.Accent.rated`（`YM/MergeProof/Powder.lean:48`）は、`Wcmain C` と同時に、評価の束 `Scrim` と、階数と計量に関する仮定を取ります源。これが「ほかにも在る」の主な根拠です。補助に、構成の走りが紫外の側から一度に持ち出す束 `Run.Ties`（`YM/FullVolume/Cross.lean:65-71`）も、`control : Wcmain` と並べて `tabs`・`scrim`・`fridge`・`receipts`・`detectors` の欄を持ちます源（宣言の使われ方の記録では、`Run.Ties` と欄 `detectors` は `used`、欄 `control` は `outside`）。だから正確には、**`Wcmain` はコンパクト性（`crops`）への入力で、紫外からの入力はほかにも在る**、と読みます。ほかの入力が何に使われるか（場の空間の商、応力テンソル、演算子積展開など）は、この部の外の章（第 13 部）と第 11 部に関わります推。

また `Wcmain` は、紫外の側の補題の仮定としても現れます（例：`YM/FullVolume/Rent.lean:120` `primaries`）源。片方向の「出力」ではなく、構成の中で何度も参照される評価です。

05

## 本書の検討で見えていたこと

**この形の言明は、本書の検討に在りませんでした。** 本書の紫外の側の結果（第 15 部）は、自由場の一段の共分散の挟みや、ブロック写像の線形化など、一つの尺度の言明でした。繰り込んだ局所の観測量の大きさを、体積に一様な半ノルムで述べた評価はありません。本書の条件つきの鎖の定理（28-01、Lean：`BoxWalk.chain_end_to_end_box`）は、押し出しの測度についての稀さ・観測量の分かれ方・鏡映正値性などを仮定の欄に置き、部分列の極限の存在と性質を結論にする含意でした。そこで仮定に置いた量は、格子から定義されていません。

公開された構成の (1) は、「紫外の結果を、どういう形で赤外の議論に渡せば足りるか」の一つの答えです。本書の紫外の側の出力を置くべき位置として読めます推。本書の大きい面の稀さ（22-01、Lean：`FoldCap.rarity_explicit`）は、元の Wilson の測度の上の、単位の大き

さの箱の指示関数の根を押さえる形に言い直せます（12-02 §06）。ただしそれは繰り込んだ観測量の評価ではなく、(1) の代わりにはなりません。

**体積に一様な評価の源について。**本書の強結合の窓の中の無限体積の極限（20-03）は、Dobrushin の一意性の議論から体積に一様な減衰を得ていました。公開された構成の (1) は、チェス盤の根という箱あたりの量に上界を課す形で一様性を表します。一様性の言い表し方が違います（(1) の体積への一様性がどの評価から出るかは §06 のとおり読めていません）。

06

## 読めていない所

- **(1) の証明。**`Wcmain C` を結論に持つ定理（`oboes`・`noel`・`gardena` の使われ方）の中身は読んでいません。紫外の側のどの評価から体積への一様性が出るかの鎖も、確かめていません。
- **どの定理が公開の定理の道に載るか。**`Wcmain` を結論に持つ定理が複数在り、`JointExistence` の証明がどれを通るかは辿っていません。記録の `used` の見出しは `SharpGram.habitat` です。
- **ほかの入力の中身。**`Scrim`・`tabs`・`fridge`・`receipts` の欄が何を言っているかは、名前を見ただけです。
- **$\varepsilon$ の損の出所。**$a_m^{-d-\varepsilon}$ の $\varepsilon$ がどこから来るかは読んでいません。
- **基準の段 $r(d)$ の決め方。**次数ごとの基準の段（`C.ref d`）の定義は辿っていません（8-04 の材料）。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 根で測った繰り込んだ観測量の評価 (1) の形：体積と観測点に一様、段 $m$ について $a_m^{-d-\varepsilon}$、十分大きい切断で（`Wcmain`） | (1) の証明の中身。体積への一様性がどの評価から出るか |
| 源 (1) とチェス盤の不等式から、点の離れた $n$ 点関数が体積に一様に有界 (2)（`fits_budget`・`size_done`） | 点が重なる所での評価（扱わない） |
| 源 `Wcmain` はコンパクト性（`crops`）への入力。同じ走りから `Scrim` などのほかの入力も渡る（`rated`・`Run.Ties`） | 「紫外からの入力は一つ」とは言えない。ほかの入力の中身 |
| 推 $a_m^{-d}$ は次数 $d$ の場の次元の勘定 | $\varepsilon$ の出所 |
| 本書に同じ形の評価は無い | 本書の紫外の結果を (1) の形に言い直すこと |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| (1) の述語と箱の評価 | 源 | 構成の源 `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）：`YM/Extraction/Center.lean:21` `centeredBudget`・:30 `CenterPort`・:38 `Wcmain`・:42 `Wcmain.projects`、`YM/Cells/Packing.lean:34` `center`・:68 `CellHyp` |
| 局所の有界性 | 源 | `YM/Extraction/Held.lean:74` `fits_budget`・:120 `Around.size_done`・:136 `crops`、`YM/Extraction/Integrate.lean:25` `Bound` |
| ほかの入力 | 源 | `YM/MergeProof/Powder.lean:48` `Accent.rated`、`YM/FullVolume/Cross.lean:65-71` `Run.Ties`、`YM/FullVolume/Rent.lean:120` `primaries` |
| (1) を結論に持つ定理 | 源（言明のみ） | `YM/FullVolume/Dusk/Graff.lean:20` `oboes`、`YM/MergeProof/Noel.lean:24` `noel` |
| 評価書の記述 | 評 | `yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf` §5 と式 (11) |
| 本書の関連 | Lean | `BoxWalk.chain_end_to_end_box`（含意、28-01）、`FoldCap.rarity_explicit`（22-01） |

**この章で使った語** — 繰り込んだ挿入・チェス盤の根・中心に置いた敷き詰め・体積に一様・局所の有界性・同程度連続性・抽出の列・コンパクト性。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：12-04 転送作用素と同程度連続性 — 挿入を動かしたときの相関の差を、転送作用素のトレースの表示と Hölder の不等式で押さえます。

# 転送作用素と同程度連続性

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§05 は本書の検討、§06 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 挿入の一つを格子の上で $\ell$ 歩動かしたとき、点の離れた相関がどれだけ変わるかを、公開された構成は $\left(\prod_i c_i\right) \ell / r$ の形で押さえています（$r$ は点の間の余白、$c_i$ は各挿入のチェス盤の根の上界）。道具は、格子の転送作用素の正値性、期待値を転送作用素の冪と挿入の作用素の積のトレースで書く表示、隙間の付け替え、Hölder の不等式です。この章はその言明の形と仕組みを読みます。体積に一様な同程度連続性が、Arzelà–Ascoli の議論（12-05）の二つ目の入力になります。

**前提となる章** — 12-01（転送作用素の核の正値）、12-02（根）、12-03（根の上界）。転送行列の導入は 5-03。

**先に言うこと** — 公開された構成の結果は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」水準で、本書が読んだのは言明の形までです。隙間の付け替えの評価の本体（`TimeKernel.passage`）の証明は読めていません。格子の転送作用素は、構成の中では同程度連続性のためにだけ使われ、時間の向きの解析接続やスペクトルの条件は、極限の連続の側の半群から別に出します（12-07）。

この章の順序

1. 札の凡例
2. 言明 (1) — 転送作用素の核と正値性
3. 言明 (2) — 隙間を付け替えたときの差の評価
4. 仕組みの骨子 — トレースの表示、付け替え、Hölder
5. 挿入を一つ動かす形と、同程度連続性への組み立て
6. 本書の検討で見えていたこと
7. 読めていない所

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。公開された構成の定理が「Lean で証明されている」という水準は、委員会の評価によります評 。

01

## 言明 (1) — 転送作用素の核と正値性

導入は 5-03 です。時間の向き $a$（四つの軸のどれでもよい）を一つ選び、格子を向き $a$ に垂直な層に切ります。一枚の層の中のリンクの配位を**切片** $X$、隣り合う層をつなぐ向き $a$ のリンクの組を**糸** $u$ と呼びます（12-01 §03）。隣り合う二枚の切片 $X$・$Y$ と、その間の糸 $u$ の面の重みを $\mathrm{weight}_\beta(X,Y,u)$ とし、糸を Haar で積分した

$$K_\beta(X,Y) \;=\; \int \mathrm{weight}_\beta(X,Y,u)\,du \tag{1}$$

が一段の転送作用素の核です源 （構成の源 `YM/Slice/Positive.lean:54` `heat`）。重みは正です（`YM/Slice/Hamilton.lean` `weight_pos`）。

言明（転送作用素の核の性質）

(i) $\beta \ge 0$ なら、核 $K_\beta$ は正値の核：任意の有限個の切片 $X_1,\dots,X_k$ について行列 $\big(K_\beta(X_i,X_j)\big)$ は半正定値。(ii) 糸の向きを逆にすると核の引数が入れ替わる（時間の反転で随伴）。

源 公開された構成の定理。Lean：`YM.Slice.step_positive`（`YM/Slice/Positive.lean:81`、仮定 $0 \le \beta$）、`YM.Slice.transition_reflect`（`YM/Slice/Hamilton.lean:121`）。

(i) と (ii) から、核で積分する作用素 $T$ は、切片の空間の $L^2$ の上の正の自己共役作用素です初 （(ii) で対称、(i) で正）。挿入（観測量）の作用素も、切片の関数を掛ける形や、何枚かの層をまたぐ「ブロック」（`Brick`：幅 $w$ の層の帯に局所な関数を、転送作用素の積の間に挟む作用素）として書けます源 （`Brick` の名と使われ方。定義の全体は読んでいない）。

02

## 言明 (2) — 隙間を付け替えたときの差の評価

時間の円（長さ $n$）の上に、幅 $w$ のブロック $B_1, \dots, B_k$ をこの順に置き、ブロックの間の隙間を $Y_1, \dots, Y_k$（層の数）とします（$kw + \sum_i Y_i = n$）。この配置の積の期待値を $\langle B; Y \rangle_\beta$ と書きます。

ブロック $B_i$ の**柱**とは、$B_i$ とその鏡像 $\vartheta B_i$ を交互に $p$ 組、時間の円を埋めるように並べた配置です（$n = 2pw$）源 （`YM/Slice/Calendar.lean:60` `column`）。柱は、時間の向きの一方向のチェス盤の写しです。

言明（隙間の付け替えの Lipschitz の評価）

$\beta \geq 0$、$n = 2pw$、全ての隙間が $2r$ より大きく（$Y_i > 2r$）、隙間の組 $Z$ は $Y$ から二つの隙間 $i \neq j$ の間で $\ell$ 層を移したもの（$Z_i = Y_i + \ell$、$Z_j = Y_j - \ell$、他は同じ）で、$\ell \leq r$ とします。柱の期待値の大きさの冪 $\|\langle \text{柱}(B_i) \rangle\|^{\rho_p}$（$\rho_p = 1/(2p)$、源の `Holder.rate p`、`YM/Complex/Gaps.lean:105`）が $K_i$ 以下なら、

$$\left| \langle B; Z \rangle_\beta - \langle B; Y \rangle_\beta \right| \;\leq\; \frac{\prod_i K_i}{r}\, \ell. \tag{2}$$

ブロックの列を時間の円の上でどこから読み始めるか（基準の位置）は、両辺で違ってよい（源は二つの語を別の基準の位置 `b`・`c` で読む）。

源 公開された構成の定理。Lean：`YM.Slice.Time.powering`（`YM/Slice/Calendar.lean:72`）。本体の評価は `YM.TimeKernel.passage`（`YM/TimeKernel/Unit.lean:76`）。

**意味**。二つの挿入の間の距離を $\ell$ だけ縮め、その分だけ別の二つの挿入の間を広げても、相関は $\ell/r$ に比例する量しか変わりません。比例の定数は、各挿入を時間の向きに複製したときの箱あたりの大きさ（柱の冪）の積です。$r$ は挿入どうしの余白で、余白が大きいほど差は小さくなります。

03

## 仕組みの骨子 — トレースの表示、付け替え、Hölder

### 段 1：期待値をトレースで書く

周期の格子の期待値は、時間の円を一周する作用素の積のトレースを分配関数で割ったものです源 （源の説明文と、`closed`・`along` の定義。`YM/TimeKernel/Unit.lean:17`）：

$$\langle B;Y\rangle_\beta \;=\; \frac{\operatorname{Tr}\bigl(B_1T^{Y_1}B_2T^{Y_2}\cdots B_kT^{Y_k}\bigr)}{\operatorname{Tr}T^{\,n}}. \tag{3}$$

分子と分母は $T$ を正の定数倍しても同じ比で変わるので、$\|T\|=1$ と正規化してよい[初]。

### 段 2：隙間を付け替えた差は $\ell/r$ の程度

$T$ は正で $\|T\|=1$ なので、固有値 $\lambda\in[0,1]$ について、$s\ge Y>2r$ で

$$\Bigl|\frac{d}{ds}\lambda^s\Bigr| \;=\; \lambda^s\,|\log\lambda| \;\le\; \frac{1}{e\,s} \;\le\; \frac{1}{2e\,r} \tag{4}$$

です[初]（$t\mapsto te^{-t}$ の最大値は $1/e$）。隙間を $\ell$ 動かすことは、二つの冪 $T^{Y_i}\cdot T^{Y_j}$ を $T^{Y_i+\ell}\cdot T^{Y_j-\ell}$ に替えることで、(4) から一つの冪あたりの変化は $\ell/r$ の程度です。これが (2) の $\ell/r$ の出所と推し量ります[推]。

### 段 3：残りの因子を Hölder で柱に分ける

(3) の分子の差は、まだ全てのブロックと冪の積のトレースです。トレースの Hölder の不等式で、これを各ブロックの「Schatten 型のノルム」の積に分けます。ブロック $B_i$ と隙間の冪の組の Schatten ノルムを $2p$ 乗すると、$B_i$ とその随伴を交互に並べた積のトレース、つまり柱の期待値（の分配関数倍）になります[推]（源の説明文「Read replica column strengths $\operatorname{Tr}((B^*B)^p)$」から）。だから定数は柱の期待値の冪 $K_i$ の積になります。

源の説明文によれば、核を有限の行列で近似し（`Quad.shrink`）、近似の行列で評価してから極限に移しています。分配関数は下から実際の値で押さえ、基底状態についての仮定は置いていません[源]（説明文）。

### 段 4：柱は根で押さえられる

柱は時間の向きの一方向の写しなので、柱の期待値は、チェス盤の根（12-02）で押さえられます[源]（`YM/Extraction/Difference.lean:51` `reading`：観測量とその向き $a$ の鏡像の根が $c$ 以下なら、柱の冪が $c$ 以下のブロックが作れる）。こうして (2) の $K_i$ を、12-03 の根の上界 $A\,a_m^{-d-\varepsilon}$ で置き換えられます。

04

## 挿入を一つ動かす形と、同程度連続性への組み立て

言明（一つの挿入を一方向に動かす評価）

構成の族の切断 $N$・体積 $p$ の格子で、$m+1$ 個の繰り込んだ挿入を点 $x_0,\dots,x_m$ に置き、向き $a$ の座標が互いに $2h_{\square}+2r$ より離れているとします（$h_{\square}$ は中心の箱の一辺の格

子の点の数。源の字は `d` で、場の次数とは別の量)。各挿入とその向き $a$ の鏡像の根が $c_i$ 以下なら、一つの点 $x_u$ を向き $a$ に $\ell \le r$ 歩動かしたときの $(m+1)$ 点関数の差は $\left(\prod_i c_i\right) \ell / r$ 以下です。

源 公開された構成の定理。Lean：`YM.Extraction.Difference.primitive`（`YM/Extraction/Difference.lean:90`）。途中の形は `YM.Slice.Time.organized`（`YM/Slice/Ordered.lean:68`）。

**なぜ向きの座標が離れている必要があるか。**(3) の表示は、時間の向き $a$ に挿入が順に並んでいることを使います。二つの挿入の向き $a$ の座標が近いと、同じ層の帯に入ってしまい、ブロックに分けられません。だから同程度連続性の言明は、全ての座標軸で座標が互いに異なる配置（`generic`）の上で述べられます源。格子の超立方の対称で、時間の向きは四つの軸のどれにでも取れるので、四つの向きの動きを合わせて全方向の Lipschitz の評価になります推。

定義（同程度連続性の入力 `TransferLip`）

(i) 体積 $p$ を止めて：周期の像まで含めて点の重ならないコンパクト集合 $K$ の上で、任意の $\varepsilon > 0$ に $\delta > 0$ があり、十分細かい切断で、$K$ の中の距離 $\delta$ 未満の二つの配置の格子の相関の差が $\varepsilon$ 未満。(ii) 体積も動かして：全ての軸で座標の異なる配置のコンパクト集合 $K$ の上で、同じことが十分先の体積と切断で一様に。

源 構成の源 `YM/Extraction/Lipschitz.lean:26` `TransferLip`（欄 `grid`・`expanding`）。

源 根の上界の束（`CenteredBook`）と構成の証書から `TransferLip` が出る、が公開された構成の定理です（Lean：`YM.Extraction.Difference.completed`、`YM/Extraction/Equicontinuity.lean:181`）。これは評価書の式 (11) の二つ目（コンパクト集合の上の一様な連続の度合い $\omega_K$）に当たります評。

**格子の転送作用素の役はここまで。**構成の中で、格子の転送作用素は同程度連続性のために使われます。極限の理論の時間の発展 $e^{-tH}$・スペクトルの条件・解析接続は、極限の表の鏡映正値性から作る連続の側の OS の空間で扱います（12-07・12-08）推（名前と使われ方からの読み）。

> 05

## 本書の検討で見えていたこと

**転送作用素の表示による同程度連続性は、本書の検討に在りませんでした。**本書の転送の作用素は、再構成の器の中の抽象の作用素 $T$（19-03 の器）で、強結合の窓の中の無限体積の極限の測度から OS の再構成で作ったものです（20-04）。そこで示したのは $T \geq 0$ と $\|T - P_\Omega\| \leq e^{-m}$（質量ギャップの形）で、相関の連続の度合いに使ったことはありません。

Lean 本書の $T \geq 0$：$\beta \geq 0$ と Dobrushin の窓で、極限点の器の転送の作用素が正（Lean：`FullT.wilson_Tpos_full`。元は辺の中点の面の鏡映正値性をゲージ変換の平均で広げた `FullT.full_rp_torus`）。Osterwalder–Seiler の型の形式化で、格子間隔は 1 に固定、強結合の窓の中だけです。

公開された構成の (2) は、点の位置を連続に動かす連続極限の問題のための評価で、格子間隔 1 の本書の設定では、点の位置は離散で、同程度連続性という問い自体が立ちませんでした。本書の条件つきの鎖の定理（28-01）では、観測量の連続の度合いを「観測量の分かれ方」という**仮定**（Lean の欄 `split`・`lattice_vanishing`・`shift_vanishing`）として置いていました。公開された構成はそれを、転送作用素と根の上界から**出して**います。

06

## 読めていない所

- **`TimeKernel.passage` の証明**（`YM/TimeKernel/Unit.lean:76`）。§03 の段 2・段 3 は、説明文と言明の形からの推し量りです。Hölder の指数は `Holder.rate p` $= 1/(2p)$（`YM/Complex/Gaps.lean:105`）までは確かめました。
- **ブロック `Brick` の定義の全体**と、ブロックの作用素がトレースの中にどう入るか。
- **有限の行列での近似**（`Quad.shrink`）の組み方と、極限への移し。
- **四つの向きの合わせ方。** `primitive` から `completed` までの組み立て（`Equicontinuity.lean` の `stepTotal` など）は言明の名までです。
- **公開の定理への鎖。**記録では `completed` の直接の使い手は `crops` です。`crops` から公開の定理への道は 12-05 に書く範囲までしか辿っていません。

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 格子の転送作用素の核は $\beta \geq 0$ で正値、時間の反転で随伴（`step_positive`・`transition_reflect`） | $\beta < 0$。核のスペクトルについての量の評価 |
| 源 隙間を $\ell$ 付け替えた差 $\leq (\prod K_i)\,\ell/r$（`Time.powering`） | 余白 $r$ が無いとき（点が近いとき） |
| 源 一つの挿入を一方向に動かす評価（`Difference.primitive`）と、同程度連続性の入力 `TransferLip`（`Difference.completed`） | 向きの座標が一致する配置での評価 |
| 初 正規化と $\lvert d\lambda^s/ds\rvert \leq 1/(es)$ | — |
| 推 差の評価は「冪の微分 $\sim 1/r$」と「トレースの Hölder で柱へ」の二段 | `passage` の証明の実際の組み方 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 転送行列と鏡映正値性 | 典 | K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440。5-03 |
| 核と正値 | 源 | 構成の源 `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）：`YM/Slice/Positive.lean:54` `heat`・:81 `step_positive`、`YM/Slice/Hamilton.lean:121` `transition_reflect` |
| (2) と本体 | 源 | `YM/Slice/Calendar.lean:60` `column`・:72 `Time.powering`、`YM/TimeKernel/Unit.lean:17` `along`・:76 `passage`（言明と説明文のみ） |
| 一つの挿入を動かす評価と組み立て | 源 | `YM/Slice/Ordered.lean:68` `organized`、`YM/Extraction/Difference.lean:51` `reading`・:90 `primitive`、`YM/Extraction/Equicontinuity.lean:181` `completed`、`YM/Extraction/Lipschitz.lean:26` `TransferLip` |
| 評価書の記述 | 評 | `yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf` §5、式 (11) |
| 本書の $T \geq 0$ | Lean | `FullT.wilson_Tpos_full`・`FullT.full_rp_torus`（20-04） |

**この章で使った語** — 転送作用素・切片・糸・正値の核・柱・トレースの表示・隙間の付け替え・Hölder の不等式・同程度連続性・全ての軸で座標の異なる配置。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：12-05 Arzelà–Ascoli と、極限に移る性質 — 有界性と同程度連続性から、二段の部分列で極限の相関を取り出します。

# Arzelà–Ascoli と、極限に移る性質

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討、§05・§07 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 局所の有界性（12-03）と同程度連続性（12-04）から、公開された構成は二段の部分列で極限の相関を取り出します：一段目は全ての体積に共通の切断の部分列、二段目は体積の部分列です。切断の部分列は、紫外の側の収束を使って最後に列の全体へ戻されます。極限には、鏡映正値性・格子の超八面体群の対称・並進不変が移ります。この章はその組み立てと、極限の一意性や列の全体での収束がなぜ言えないかを読みます。

**前提となる章** — 12-03・12-04、8-05（相関関数と極限の順）。Arzelà–Ascoli の定理は 1-09 の範囲の関数解析です。

**先に言うこと** — 公開された構成の結果は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」水準で、本書が確かめたのは言明の形を読んだことまでです。無限体積の極限は**体積の部分列に沿ってだけ**取られていて、極限が部分列の選び方に依らないこと（一意性）や、体積の列の全体での収束は示されていません。評価書もそれを開いた問いの一つ目に挙げています。

この章の順序

1. 札の凡例
2. 言明 — 部分列の極限の形
3. 仕組みの骨子 (1) — 二段の Arzelà–Ascoli
4. 仕組みの骨子 (2) — 切断の部分列を列の全体へ戻す
5. 極限に移る性質
6. 一意性と収束が言えない理由
7. 本書の検討で見えていたこと
8. 読めていない所

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。公開された構成の定理が「Lean で証明されている」という水準は、委員会の評価によります評 。

01

## 言明 — 部分列の極限の形

体積 $p$ を止めて切断 $N \to \infty$ とした相関の核を $S_p(v;x)$ と書きます（8-05）。$x = (x_1, \dots, x_n)$ は互いに異なる点の配置、$v$ は場の札の列です。

言明（部分列に沿う無限体積の極限、評価書の定理 5.1）

体積の番号の任意の狭義増加の列 $p(k)$ について、狭義増加の $q(k)$ と、点の重ならない配置の上で滑らかな核 $S^{\mathrm{mix}}(v;x)$ が在って、全ての札の列 $v$ と、点の重ならない所に台を持つ全ての滑らかでコンパクトな台の試験関数 $f$ について

$$\lim_{k\to\infty} S_{p(q(k))}(v;f) \;=\; \int f(x)\, S^{\mathrm{mix}}(v;x)\, dx. \tag{1}$$

一つの部分列 $q$ が、全ての相関に共通に効きます。

評 評価書 §5 の定理 5.1。源 公開の定理 `JointExistence`（構成の源 `ChallengeSpec.lean:186`）の「任意の狭義増加の $p$ に、狭義増加の $q$ と表 $T$ が在って $T.\mathrm{Properties}(p \circ q)$」の欄 `wilson`（`C.Converges (p∘q) …`）がこれに当たります。`Converges`（`PublicWilson.lean:85-90`）は「試験関数の収まる全ての体積で、切断の**列の全体**に沿った極限 $\mathrm{row}(p)$ が在り、$\mathrm{row}(p(q(k)))$ が $\int f\, S^{\mathrm{mix}}$ に収束する」という形です。

極限の記号 $S^{\mathrm{mix}}$ の「mix」は、のちに相の混ざりとして分解されることを先取りした名です（12-07）評 。

02

## 仕組みの骨子 (1) — 二段の Arzelà–Ascoli

**抽出の列**。構成は、切断の部分列 mesh と体積の部分列 per の組を**抽出の列**（`Extraction.Order`、`YM/Extraction/Orders.lean:34`）として持ち、細分（`refine`、同

:40）は二つの部分列をそれぞれ合成します源 。極限の意味（`limits`、同 :61）は「十分先の体積で、各体積を止めて mesh に沿って極限 $v(p)$ が在り、$v(\mathrm{per}(k))$ が極限に収束する」という二つの通常の極限です。

言明（共通の部分列の極限）

抽出の列 $f$ について、局所の有界性（`Bound`）と同程度連続性（`TransferLip`）が成り立つなら、細分 $g$ と、極限の表 $S$、体積ごとの表 $P_p$ が在って：(i) $S$ の読みは全ての軸で座標の異なる配置の上で連続、(ii) 各体積で格子の相関は $f \circ g$ の切断の部分列に沿って $P_p$ に、点の重ならない（周期の像を含めて）コンパクト集合の上で一様に近づく、(iii) $P_{\mathrm{per}(k)}$ は $S$ にコンパクト集合の上で一様に近づく、(iv) $S$ の均した読みは格子の均した相関の二重の極限である。

源 公開された構成の定理（Arzelà–Ascoli の型）。Lean：`YM.Extraction.first_surface`（`YM/Extraction/Lipschitz.lean:166`、結論 `RawLimits`：同 :156）。構成の入力から呼ぶのは `YM.Extraction.crops`（`YM/Extraction/Held.lean:136`）。

証明は二段です源 （補題の言明と証明の段）。

1. **切断の部分列（全ての体積に共通）**。体積 $p$ と札の列の組は可算個です。各組について、体積 $p$ の格子の相関の族は、点の重ならないコンパクト集合の上で有界（`Bound.cyclic`）で同程度連続（`TransferLip.grid`）です。可算個の族に同時に Arzelà–Ascoli を当て、全ての体積に共通の切断の部分列 $t$ と、体積ごとの極限 $P_p$ を得ます（`setMeshes`、`Lipschitz.lean:78`）。
2. **体積の部分列**。今度は $P_p$ の族（$p$ が動く）を、全ての軸で座標の異なる配置の上で考えます。有界性（`Bound.volume`）と同程度連続性（`TransferLip.expanding`）は十分先の体積で一様なので、もう一度 Arzelà–Ascoli を当てて体積の部分列 $u$ と極限 $S$ を得ます（`localAscoli`、`YM/Extraction/Tame.lean:100`）。

`localAscoli` は、可算個の添字の関数の族について、各点の有界性と「振動」の制御（同程度連続性の局所の形、`oscillation`）から、全ての添字に共通の部分列と極限を選ぶ補題です。中身は、可算な稠密集合の上で対角線の部分列を取り、同程度連続性で全体へ広げる、という古典の筋です典 （Arzelà–Ascoli の定理）。源で読んだのは、補題の言明と、`simultaneous`・`growFrom` を使う証明の形です源 。

極限の核が**測度でなく相関関数の表**として取られていることに注意します。評価書は、連続の確率測度を定義することを開いた問い 2 に挙げています[評]。

03

## 仕組みの骨子 (2) — 切断の部分列を列の全体へ戻す

§02 の一段目で切断の部分列を取りましたが、公開の言明の `Converges` は、各体積で切断の**列の全体**に沿った極限を要求します（§01）。構成はこれを紫外の側の収束で払います[源]。

- 紫外の側は、体積を止めて、切断の列の全体に沿って格子の核が収束すること（差分の列も含めて）を、核の Cauchy 性から示します（`PositionsUV C e`、`YM/FullVolume/Profiles.lean:25`、列 $e$ が全体のとき `Sequence.full`。第 11 部 11-10）。
- 部分列 $f$ で作った最終の証書と `PositionsUV C full` から、「切断は列の全体、体積は $f$ の体積の部分列」の抽出の列について、極限の表が二重の極限として読めることが出ます（`from_spec`、`YM/FullVolume/Finale/Program.lean:117`）。

極限の一意な数列について部分列で極限を取れば、列の全体の極限と一致します。体積を止めた紫外の極限は列の全体で在るので、切断の部分列は最後に外せます[初]。外せないのは体積の部分列のほうです。

**どの目標に入っているか。**公開の定理の欄 `wilson` でも、紫外（切断）は列の全体、無限体積は部分列 $p \circ q$ です。核と差分つきの強い形 `PositionsUV … Sequence.full` は構成の定理 `constructed` の結論にだけ在り、公開の定理には在りません[源]（6-02）。

04

## 極限に移る性質

有限の格子でちょうど成り立つ性質は、極限で非負性や等式として保たれます。構成は次の四つを移しています[源]。

| 性質 | 格子の側 | 極限の側 | Lean（構成の源） |
|---|---|---|---|
| 鏡映正値性 | 格子点を通る面（座標 0、四つの軸）の鏡映正値性（12-01） | 正の時間に台を持つ均した語の Gram 行列が半正定値（`RPSmear`） | `Order.realPositive`（`YM/Extraction/Harvest.lean:46`）。格子の面は `Banks.plane`（`Banks.lean:19`：種類 site、基準 0） |

| 性質 | 格子の側 | 極限の側 | Lean（構成の源） |
|---|---|---|---|
| 離散の対称 | 格子の超八面体群（座標の置換と符号）の共変性と実性 | `RealSpin` | `Order.spin`（`YM/Extraction/Inherited.lean:124`） |
| 並進不変 | 格子の並進での不変 | 連続の並進での不変（`Homogeneous`） | `Order.homogeneous`（`Inherited.lean:83`） |
| 基本の性質 | 対称・0 点は 1・単位の場は外せる | `Basic` | `Order.limits_basic`（`Inherited.lean:151`） |

四つとも、極限の表の滑らかさ（`S.Smooth`）を仮定に取ります（`realPositive` は対称 `S.Symmetric` も）源 。

**鏡映正値性の移し方**。格子の側の鏡映正値性は、有限個の語の一次結合 $\sum_i c_i F_i$ について Gram 行列 $\left(\langle F_j \overline{F_i \circ \Theta} \rangle\right)$ が半正定値であることと同じです（12-01 §02）。各成分が切断と体積の二重の極限で収束するので、半正定値の行列の極限として、極限の Gram 行列も半正定値です初 （源の `posVectors` と、和の極限）。連続の側の鏡映正値性の定義 `Table.RP`（`YM/Euclid/Words.lean:123`）は、全ての座標軸 $a$ について、正の時間の語の族の Gram 行列が半正定値であることで、並進不変と合わせて座標面に平行な全ての面で成り立ちます源 。

**極限の表の束**。四つの性質に、点の重ならない所での滑らかさ（`Smooth`）と増大の条件（`Capped`）を足すと、公開された構成の版の Euclid の公理の束 `Table.Hierarchy`（`Words.lean:141`）になります（`Order.assembles`、`Harvest.lean:62`）源 。`assembles` は滑らかさと増大の条件を**仮定**として取ります。それらがどこから来るかは 12-08 に書く範囲までしか読んでいません。連続の回転（O(4)）の不変はこの束に入っていません（12-06）。

05

## 一意性と収束が言えない理由

§02 の入力は、有界性と同程度連続性という**上界だけ**です。コンパクト性は部分列の極限の存在を与えますが、極限が一つであることは与えません初 。極限の一意性や列の全体での収束を出すには、例えば次のような種類の言明が要ります：体積を変えたときの相関の差が小さくなること（体積についての Cauchy 性）、体積に一様な相関の減衰、境界条件への依存が消えること、DLR の型の一意性。読んだ範囲では、これらのどれも入力に入っていません源 （入力の型と、名前での検索の範囲）。

源の `Order.unique`（`YM/Extraction/Orders.lean:70`）は「同じ抽出の列に沿った二つの極限は等しい」（Hausdorff の空間での極限の一意性）を言うだけで、部分列の選び方への非依存ではありません。宣言の使われ方の記録で、この宣言の状態は `outside`（17 の見出しの定理のどれからも届かない）です源。

評価書は §5 で「部分列の極限が選んだ部分列に依るかは未解決」とし、§8 の開いた問い 1 に「部分列でなく収束を、無限体積の極限の一意性を示す」ことを挙げています評。同じ §5 は、Jaffe–Witten の問題の文はコンパクト性で得た部分列の極限を、極限の性質を示す別の議論が無い限り不十分とみなす、とも書いています評。

06

## 本書の検討で見えていたこと

**(1) 部分列の極限と性質の移しの含意**。本書の条件つきの鎖の定理（28-01）は、押し出しの測度の族について、コンパクト性から部分列の極限を取り、鏡映正値性・不変性・閉じた集合の質量の下界・観測量の連続の度合いを極限に移す部分を含んでいました。

Lean 含意として機械検査（仮定の欄は 28-01 の表のとおり）。Lean：`BoxWalk.chain_end_to_end_box`、`ChainBlockMap.chain_end_to_end_blockMap`。

部分列の極限と性質の移しという**骨組みは同じ向き**でした。違いは、本書は極限を**測度**で取り（コンパクトな配位の空間の上の確率測度の族は常に収束する部分列を持つ）、有界性・連続の度合いを**仮定の欄**に置いたのに対し、公開された構成は極限を**相関関数の表**で取り、有界性と同程度連続性を根の上界と転送作用素から**出して**いることです（12-03・12-04）。

**(2) 強結合の窓の中の、部分列なしの極限**。本書は、強結合の窓の中で、無限体積の極限を部分列なしで持っています。

Lean $0<\beta$、$18\tanh\beta<1$ のとき、$(\mathbb{Z}/2(n+1))^4$ の SU(2) Wilson の測度の周期の持ち上げの列は、部分列なしで $\mathbb{Z}^4$ の上の一つの確率測度 $\nu_\beta$ に弱収束し、全ての大きさの列も同じ極限を持つ。Osterwalder–Seiler の強結合・Dobrushin の一意性の型の形式化。Lean：`InfVol.wilson_infvol_unique`、`AllN.wilson_infvol_allN`（20-03）。並進不変・鏡映正値性・質量ギャップまでを一本にまとめた言明は `InfMain2.wilson_infvol_main2`（20-04）です。

これは収束と一意性を持つ点で、公開された構成の部分列の極限より強い形です。ただし**別の領域**の話です：格子間隔は 1 に固定、結合は強結合の窓（$|\beta|<0.0556$ ほど）の中だけで、連続極限は取っていません。公開された構成は全ての段を弱結合のまま運び、格子間隔 $a_N\to 0$ の連続極限を取ったあとで無限体積へ行きます。二つは対象も極限の順も違い、比べられるの

は「どういう種類の入力が一意性を与えるか」の型（本書は Dobrushin の条件による体積に一様な減衰）までです。

**(3) 捩れた境界条件**。公開された構成の格子は周期の境界条件だけです源 。本書は捩れた境界条件の分配関数と渦の自由エネルギーの上界と下界を持っています（第 21 部）。これらは格子間隔を固定した格子の上の言明で、公開された構成の赤外の部品とは重なりません。

07

## 読めていない所

- **Arzelà–Ascoli の補題の証明の細部**（`simultaneous`・`growFrom`・`components`）。
- **公開の定理への鎖**。記録では `crops` の直接の使い手は `MergeProof.Accent.rated` で、記録の見出しは `SharpGram.habitat` です。字面では、構成の鎖の `fromFunded`（`YM/R2I/Campaign/Accepted.lean:150`）が :157 で `Run.extractible17`（`YM/RG17/Joint.lean:61`）を呼び、それが構造体 `Chateau` の欄 `reception`（`YM/MergeProof/Almandine.lean:31`）を使い、その欄を満たす補題 `grantor`（同 :40）の証明の中（同 :79）で `rated` が呼ばれるので、公開の定理への道に載る見込みです推 。宣言ごとの鎖は確かめていません。
- **滑らかさと増大の条件の出所**。`assembles` の仮定 `Smooth`・`Capped` を誰が払うかは辿っていません。
- **体積についての Cauchy 性が無いこと**。入力の型と名前の検索からの判断で、リポジトリの全体を読んだわけではありません。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 有界性と同程度連続性から、二段の Arzelà–Ascoli で共通の部分列の極限（`first_surface`・`crops`） | 極限の一意性。体積の列の全体での収束 |
| 源 切断の部分列は、紫外の側の列の全体での収束で最後に外す（`from_spec`・`PositionsUV … full`） | 体積の部分列を外すこと |
| 源 鏡映正値性・超八面体群の対称・並進不変・基本の性質が極限に移る（`realPositive`・`spin`・`homogeneous`・`limits_basic`） | 連続の回転の不変（12-06 で別に）。極限の確率測度 |
| 評 評価書：部分列の極限、選び方への依存は未解決（§5、§8 の 1） | — |
| Lean 本書の強結合の窓の中の部分列なしの極限（`wilson_infvol_unique`・`wilson_infvol_allN`） | 格子間隔を動かすこと。弱結合。連続極限 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| Arzelà–Ascoli の定理 | 典 | 関数解析の標準の定理（1-09） |
| 抽出の列と二段の極限 | 源 | 構成の源 `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）：`YM/Extraction/Orders.lean:34` `Order`・:40 `refine`・:61 `limits`・:70 `unique`、`YM/Extraction/Lipschitz.lean:78` `setMeshes`・:156 `RawLimits`・:166 `first_surface`、`YM/Extraction/Tame.lean:100` `localAscoli`、`YM/Extraction/Held.lean:136` `crops` |
| 列の全体へ戻す | 源 | `YM/FullVolume/Profiles.lean:25` `PositionsUV`、`YM/FullVolume/Finale/Program.lean:117` `from_spec`、`PublicWilson.lean:85-90` `Converges`、`ChallengeSpec.lean:186` `JointExistence` |
| 極限に移る性質 | 源 | `YM/Extraction/Harvest.lean:46` `realPositive`・:62 `assembles`、`YM/Extraction/Banks.lean:19` `plane`、`YM/Extraction/Inherited.lean:83` `homogeneous`・:124 `spin`・:151 `limits_basic`、`YM/Euclid/Words.lean:123` `Table.RP`・:141 `Table.Hierarchy` |
| 評価書の記述 | 評 | `yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf` §5（定理 5.1、式 (10)・(11)）、§8 |
| 本書の対応 | Lean | `BoxWalk.chain_end_to_end_box`・`ChainBlockMap.chain_end_to_end_blockMap`（含意、28-01）、`InfVol.wilson_infvol_unique`・`AllN.wilson_infvol_allN`（20-03）、`InfMain2.wilson_infvol_main2`（20-04） |

**この章で使った語** — 抽出の列・切断の部分列・体積の部分列・Arzelà–Ascoli の定理・同程度連続性・部分列の極限・鏡映正値性・超八面体群・並進不変・一意性。意味は A-02 用語集にあります。

次に読む章：12-06 Euclid 不変 — 格子の離散の対称から、連続の回転の不変へどう上げるかを読みます。

# Euclid 不変

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討、§07 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 格子は回転の対称を壊し、座標の置換と符号の反転からなる有限の群（超八面体群、384 個の元）だけを残します。公開された構成は、極限の理論が連続の回転と鏡映の群 O(4) で不変であることを、三つの部品で示している、と委員会は評価しています：(1) ゲージ固定を含めて格子の離散の対称を保ち、極限へ移す、(2) 発散の無い応力テンソルを作り、並進と回転の Ward の恒等式を立てる、(3) 回転の流束が遠くで消えることを示し、回転の不変が自発的に破れないことを出す。この章は、三つの部品の**言明**を読み、それらからなぜ O(4) の不変が出るかの筋を書きます。(3) の**証明の中身**は読めていません。

**前提となる章** — 12-05 §04（極限に移る性質）、13-01（応力テンソルの一意性と正規化）、9-05（一段の対称性）。

**先に言うこと** — 公開された構成の結果は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」水準です。本書は、応力テンソル・Ward の恒等式・回転の不変の**定義と言明の形**を読みました。流束の消滅（`Outer.outer`）の証明は、座標軸ごとの約 40 本のファイルに分かれていて、その中身は読んでいません。§05 の筋のうち、言明から直接読めない段は推 です。

この章の順序

1. 札の凡例
2. 何が問題か — 格子に残る対称は有限の群
3. 部品 (1) — 離散の対称を保ち、極限へ移す
4. 部品 (2) — 応力テンソルと Ward の恒等式
5. 部品 (3) — 直線の上の配置で局所の回転の流束が零になること
6. 仕組みの骨子 — 三つの部品から O(4) の不変へ
7. 本書の検討で見えていたこと
8. 読めていない所

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。公開された構成の定理が「Lean で証明されている」という水準は、委員会の評価によります評 。

01

## 何が問題か — 格子に残る対称は有限の群

OS の公理（4-10）は、Euclid の相関関数が並進と回転・鏡映の群 $E(4) = \mathbb{R}^4 \rtimes O(4)$ で不変であることを求めます。格子 $a\mathbb{Z}^4$ が保つのは、格子の並進と、座標の置換と符号の反転からなる超八面体群（位数 $2^4 \cdot 4! = 384$）だけです。連続極限で並進の不変は戻りますが（12-05 §04）、回転の不変は自動では戻りません。極限が回転の不変を持つことは示すべき性質で、しかも極限の状態で回転の不変が**自発的に破れる**可能性も除く必要があります。

評 評価書 §6.3：証明は三つの主な部分から成る。一つ目はゲージ固定が格子の対称を保つこと（例えば軸ゲージの固定ではそうならない）で、対称を破る選び方について平均して行う。二つ目は発散の無い応力テンソルの場が在ることを示し、それで局所の Ward の恒等式を立てること。最後に、極限の状態で Euclid 不変が自発的に破れないことを示す。これは応力エネルギーの流束が無限遠で十分速く落ちれば従い、複数の直交する面での鏡映正値性を使う込み入った議論で示されている。

02

## 部品 (1) — 離散の対称を保ち、極限へ移す

**一段の対称**。繰り込みの一段の核は、超八面体群の符号つきの置換（384 個）・粗い格子の並進・細かい格子のゲージ変換で不変（共変）です。大きい場でのゲージの選び方は対称を破りますが、選び方を確率で引いて平均することで、核全体の対称を保ちます（9-03・9-05）。この部ではそれを前提に読みます。

**極限への移し**。格子の超八面体群の共変性と実性は、極限の表の性質 `RealSpin` に移ります源 （構成の源 `YM/Extraction/Inherited.lean:124` `Order.spin` ）。`RealSpin` は、極限の相関が超八面体群の元で点と場の札を同時に動かしても変わらないこと（場の札には群の表現が掛かる）と、実性を言う欄です源 （名前と使われ方。定義は `YM/Euclid/Table.lean:80` の構造体 `RealSpin` で、全文は読んでいない）。

03

## 部品 (2) — 応力テンソルと Ward の恒等式

場の空間 $F_d$（次数 $d$ の局所場、8-03）を使います。**応力テンソル**は、添字 $a, b \in \{0,1,2,3\}$ ごとに次数 4 の場 $T_{ab} \in F_4$ を与える組です源（`YM/Euclid/Stress.lean` の `Stress S` $=$ $\mathrm{Axis} \to \mathrm{Axis} \to F_4$）。

定義（保存する応力テンソル）

(i) 対称 $T_{ab} = T_{ba}$、(ii) 実（場の共役で不変）、(iii) 発散が零：$\sum_a \partial_a T_{ab} = 0$（$\partial_a$ は場の空間の上の微分 $F_4 \to F_5$）。加えて、回転の作用 $R$ について二階のテンソルとして変換すること（`Tensorial`）。

源 構成の源 `YM/Euclid/Stress.lean:59` `Conserved`（欄 `symmetric`・`real`・`divergence`）、:64 `Tensorial`。回転の場への作用 `Rotation`（:22、欄 `act`・`lie`）と、その法則 `Rotation.Laws`（:31：連続、群の作用、符号つきの置換では格子の鏡映と一致、実性、単位の場を保つ、微分と整合、無限小の生成子 `lie`）。

応力テンソルの一意性（保存する対称テンソルの空間が実 1 次元）と、その正規化は 13-01 で扱います（Lean：`YM.Pert.one_line`、`YM/Pert/Weak.lean:68`）源。

**窓**。点の配置 $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$（互いに異なる）について、関数 $\chi$ が**窓**であるとは、滑らかでコンパクトな台を持ち、$x_0$ の近くで 1 に等しく、ほかの点 $x_1, \dots, x_n$ を台に含まないことです源（`Stress.lean` の `Window`）。$\partial\chi$ は全ての挿入点から離れた所に台を持ちます。窓は、$x_0$ を囲む面の滑らかな版です。

言明の形（並進と回転の Ward の恒等式）

中心の場 $B \in F_d$ を $x_0$ に、傍観者の場の列 $q$ を $x_1, \dots, x_n$ に置き、$\chi$ を窓とします。

$$-\sum_a \int \partial_a \chi(y)\, \big\langle T_{ab}(y)\, B(x_0)\, q \big\rangle \, dy \;=\; \big\langle (\partial_b B)(x_0)\, q \big\rangle, \tag{1}$$

$$-\sum_{a,b} \int \partial_a \chi(y)\, \big(g\,(y - x_0)\big)_b \, \big\langle T_{ab}(y)\, B(x_0)\, q \big\rangle \, dy \;=\; \big\langle (\mathrm{lie}_g B)(x_0)\, q \big\rangle. \tag{2}$$

(1) は並進、(2) は無限小の回転 $g$（反対称の行列）の恒等式です。$\mathrm{lie}_g$ は場への回転の作用の微分です。

源 構成の源 `YM/Euclid/Stress.lean:90` `StressLaws`（欄 `translation`・`rotation`）、左辺は同ファイルの `shellGrad`・`shellSpin`。極限の表 $S$ の性質とし

て、構成の証書の束 `Spec.Locals`（`YM/Spec/Closed.lean`、欄 `conserved`・`spin`・`charges`）に入り、選んだ相を含む全ての相の表についても証書 `OS.Selection.Certificate`（`YM/Phase/Mixture.lean:136`、欄 `flux`）に入ります。

(1) は、$\chi$ の段差が $x_0$ を囲む面の役をする Gauss の定理の形です。$\partial\chi$ は挿入点の近くで消えるので、積分は点の重なりに触れません。委員会の例の検査は、(1) の右辺が普通の座標の微分に一致すること、全ての相・全ての場で成り立つこと、被積分関数が可積分であること、$\chi$ の取り方に依らないこと、許される $\chi$ が実際に在ることを確かめています[評]（評価の側 `submissions/openai-20261028/docs/examples/TranslationWard-20261028.lean`）。同じ検査は、改良項が全て消えること・接触項・膨張の Ward の恒等式は確かめていない、と書いています[源]。

04

## 部品 (3) — 直線の上の配置で局所の回転の流束が零になること

回転の不変を述べる述語は、全ての $K \in O(4)$ について、点を $K$ で動かし場の札を回転の作用で動かしても相関が変わらないことです[源]（`YM/Euclid/Stress.lean:46` `Rotation.Oriented`：点の重ならない全ての配置で $S(Kx;\, R_K v) = S(x; v)$）。

言明の形（直線の上の配置で、局所の回転の流束が消える）

極限の表が Euclid の束（`Table.Hierarchy`）を満たし、微分の計画と向きの条件、応力テンソル $J$、ほかの前提 `Pre` が成り立つとします。このとき、次の二つが成り立ちます。(i) 和の条件 `Bid.LineSum`（`YM/Bid/Angular.lean:35`：直線の上の配置で、ある図式の値が零。中身は読んでいない）。(ii) ある座標軸 $a$ に平行な一本の直線の上に全ての点が並ぶ配置 $x$（点は互いに異なる）では、全ての回転 $K$ と場の列 $q$ について、局所の回転の流束 `localTurn` が零。

[源] 公開された構成の定理。Lean：`YM.Outer.outer`（構成の源 `YM/Next/ROTATIONS/Route.lean:114`）。これを全ての構成の対象に当てた形が `YM.Outer.miles`（同 :123）で、述語 `YM.Bid.Miles`（`YM/Bid/Town.lean:13`）を満たします。

(ii) が評価書 §6.3 の「応力エネルギーの流束が無限遠で十分速く落ちる」に当たる、という結びは[推]です（`localTurn` の定義を読んでいないため）。

源 言明の形は読みました。`outer` の仮定 `Pre`（`Climb.Pre`）の中身と、局所の回転の流束 `localTurn` の定義は読んでいません。源の注は「解析の評価は連続の回転のブートストラップより前に在り、それを使わない」「直線の上の傍観者と空の組を全て含む」と書いています 源（説明文）。

**回転の不変がどこで結論になるか**。極限の表の回転の不変は、構成の証書の束 `Spec.Locals` の欄 `motion`（`Rotation.Oriented S`）として、各相の表の回転の不変は証書 `Certificate` の欄 `sym`（`YM/Phase/Mixture.lean:142`）として現れます 源。`outer` から欄 `motion` までの鎖は辿っていません。O(4) の不変は、公開された構成の Euclid の公理の束 `Table.Hierarchy` の**外**で別に要求されています（12-08）。そして相の分解の可換性の証明に、この不変が仮定として使われます（12-07）。順序は「Euclid 不変 → 相の分解」です。

05

## 仕組みの骨子 — 三つの部品から O(4) の不変へ

三つの部品から O(4) の不変が出る筋を、標準の議論として書きます。源がこの順で組んでいるかは確かめていません 推。

1. **窓を大きくする**。(2) で、窓 $\chi$ を全ての点 $x_0, \dots, x_n$ を含む大きい球で 1 に取ることはできません（窓は傍観者を台に含まない）。代わりに、各点のまわりの小さい窓の (2) を全ての点について足し、それを大きい球の窓の式と比べます。大きい球の窓では、$\partial\chi$ が全ての点から遠い球殻に台を持ち、左辺は**遠くの球殻を通る回転の流束**です 推。
2. **流束が消えれば、無限小の不変**。球殻を遠くへやったときに流束が零に近づけば、各点での回転の生成子の作用の和（場の札への $\mathrm{lie}_g$ と、点の位置の回転＝並進の Ward の恒等式 (1) からの微分の項）が零になります。これは相関が無限小の回転で変わらないことです 推。
3. **無限小から群へ**。$SO(4)$ は連結なので、一つの径数の部分群に沿って積分すれば $SO(4)$ の不変が出ます。鏡映（行列式 $-1$）は部品 (1) の超八面体群に含まれるので、合わせて $O(4)$ です 初（相関が点について滑らかであること、12-05、を使う）。

源の `outer` の結論は「直線の上の配置で局所の流束が零」で、一般の配置ではありません。直線の上の配置から一般の配置へどう広げるか、流束が遠くで消えることを鏡映正値性からどう出すか（評価書の「複数の直交する面での鏡映正値性」）は、`Next/ROTATIONS/` の約 40 本のファイル（座標軸ごとのスペクトルの核、Cauchy の評価の名が並ぶ）の中身で、読んでいません。

**なぜ流束が問題か**。無限体積の極限は部分列で取ったもので、無限遠での相関の減衰は一様には示されていません（12-05 §05）。減衰が無ければ、遠くの球殻を通る流束が消えるとは限

らず、回転の不変が自発的に破れる余地が残ります。流束の消滅は、減衰の代わりに回転の不変だけに必要な量を押さえる言明です[推]。

06

## 本書の検討で見えていたこと

**無い**。本書の Lean には、応力テンソル、Ward の恒等式、連続の回転の不変のどれもありません。本書の格子の結果は格子間隔を固定した言明で、対称は格子の対称だけです。

- 強結合の窓の中の無限体積の極限 $\nu_\beta$ は、四方向の単位の並進で不変です（Lean：`TransI.wilson_infvol_translation`、20-03）。回転は扱っていません。
- フェルミオンつきの器の測度は、超立方の対称の一部（空間の平面の 90° 回転、軸の鏡映、時間の鏡映）で不変です（20-05）。
- 押し出しの測度の対称のうち、辺 3 の設計の粗い並進と、境の面の鏡映との交換は Lean に在りますが、格子の対称の範囲です（`Block3.down_trans`・`Block3.down_reflB`、28-05）。軸の入れ替えとの交換は、数値で確かめただけです（14-02）。

Euclid 不変を、応力テンソルの Ward の恒等式と流束の消滅から上げるという組み方は、本書の計画（構成の段の表の、再構成に向かう段）に無かった発想です（14-05）。

07

## 読めていない所

- **`outer` の証明の中身**（`Next/ROTATIONS/` の 43 本のファイル）。仮定 `Pre` の中身と `localTurn` の定義。
- **`outer`・`miles` から回転の不変（`Locals.motion`・`Certificate.sym`）までの鎖**。記録では `miles` の直接の使い手は `MergeProof.Acme.glistens` で、見出しは `SharpGram.habitat` です。
- **評価書の「複数の直交する面での鏡映正値性」**が、源のどの補題に当たるか。
- **対称を保つゲージ固定の在りか**（9-03 の材料）と、それが極限の `RealSpin` へどう届くか。
- **`RealSpin` の定義の全文**（`YM/Euclid/Table.lean:80`）。
- **回転させた面での鏡映正値性**（`YM/Euclid/OtherPlanes.lean`）：import はされていますが、記録では使われていない宣言の置き場です[源]（記録）。

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 格子の超八面体群の共変性と実性が極限へ移る（`Order.spin`） | `RealSpin` の定義の全文（`Euclid/Table.lean:80`） |
| 源 保存する応力テンソルの定義と、窓を使う並進・回転の Ward の恒等式の形 (1)(2)（`Conserved`・`StressLaws`）。構成の証書と各相の証書に入る | 改良項が全て消えること、接触項、膨張の Ward の恒等式 |
| 源 直線の上の配置で局所の回転の流束が零（`Outer.outer`） | 証明の中身。一般の配置への広げ方 |
| 評 評価書 §6.3 の三つの部分と「複数の直交する面での鏡映正値性」 | 源の補題との対応 |
| 推 流束の消滅＋Ward ⇒ 無限小の不変 ⇒ O(4) の不変、という標準の筋 | 源がこの順で組んでいること |
| 本書に応力テンソル・Ward・回転の不変は無い | — |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| OS の公理の Euclid 不変 | 典 | K. Osterwalder, R. Schrader, Comm. Math. Phys. 31 (1973) 83；42 (1975) 281。4-10 |
| 応力テンソル・Ward・回転 | 源 | 構成の源 `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）：`YM/Euclid/Stress.lean:22` `Rotation`・:31 `Rotation.Laws`・:46 `Rotation.Oriented`・:59 `Conserved`・:64 `Tensorial`・:90 `StressLaws`、`YM/Spec/Closed.lean` `Locals`、`YM/Phase/Mixture.lean:136` `Selection.Certificate` |
| 離散の対称の移し | 源 | `YM/Extraction/Inherited.lean:124` `Order.spin` |
| 流束の消滅 | 源（言明のみ） | `YM/Next/ROTATIONS/Route.lean:114` `outer`・:123 `miles`、`YM/Bid/Town.lean:13` `Miles` |
| 一意性の言明 | 源 | `YM/Pert/Weak.lean:68` `YM.Pert.one_line`（13-01） |
| 評価書と委員会の例 | 評 | `yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf` §6.3、`submissions/openai-20261028/docs/examples/TranslationWard-20261028.lean` |
| 本書の格子の対称 | Lean | `TransI.wilson_infvol_translation`（20-03）、`Block3.down_trans`・`Block3.down_reflB` |

**この章で使った語** — 超八面体群・Euclid 不変・応力テンソル・保存・Ward の恒等式・窓・回転の流束・自発的な破れ・無限小の生成子。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：12-07 相の分解 — Euclid 不変を使って、零エネルギーの空間の上の作用素の環を可換にし、混ざった理論を相に分けます。

# 相の分解

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は本書の検討、§07 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 部分列で取った極限の理論 $S^{\mathrm{mix}}$ は、群がり（遠く離した二組の相関が積に分かれること）を持つとは示されていません。群がりが無いと、OS の再構成で出る真空は一意とは限りません。公開された構成はこれを、零エネルギーの空間に圧縮した作用素の可換な C*-環を作り、その Gelfand のスペクトルを「相」の空間とすることで回り道しています：$S^{\mathrm{mix}} = \int S^{\xi}\, d\mu(\xi)$ と分解し、各成分 $S^{\xi}$ では真空が一意になります。この章は、その組み立てと、混ざった理論と成分について言っていること・いないことを読みます。

**前提となる章** — 12-05（極限の表と、移る性質）、12-06（Euclid 不変）、4-10（OS の再構成）、1-10（Hilbert 空間とスペクトル）。

**先に言うこと** — 公開された構成の結果は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」水準で、本書は言明の形と証明の段の補題の名を読みました。各成分の真空の一意性には**速さが付いていません**（指数の減衰ではない）。混ざった理論そのものの群がり、相の空間が一点であること、成分どうしが等しいことは、どれも示されていません。

この章の順序

1. 札の凡例
2. なぜ分解が要るか
3. 言明 (1) — 零エネルギーの空間に圧縮した作用素の環
4. 言明 (2) — 可換性、Gelfand 表現、確率測度
5. 言明 (3) — 成分の相関と、各成分での真空の一意性
6. 混ざった理論と成分について、言っていること・いないこと
7. 本書の検討で見えていたこと
8. 読めていない所

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。公開された構成の定理が「Lean で証明されている」という水準は、委員会の評価によります評 。

01

## なぜ分解が要るか

極限の表 $S^{\mathrm{mix}}$ は鏡映正値性を持つので、OS の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ と時間の半群 $E(t) = e^{-tH}$（自己共役・縮小）が立ちます源 （構成の源 `YM/OS/Dynamics.lean:57` `Chamber` ：正の時間の語から作る GNS の空間、時間の半群 `flow.E` 、空間の並進 `flow.U` ）。全ての $t$ で $E(t)$ に固定される部分空間を**零エネルギーの空間** $\mathcal{H}_0 = \ker H$ と呼び（ `YM/OS/Core.lean:14` `ground` ）、その直交射影を $P_0$ とします。$t \to \infty$ で $E(t)x \to P_0 x$ です（同 :38 `emerges` ）源 。

標準の OS の再構成では、群がりから $\mathcal{H}_0$ が真空 $\Omega$ の倍だけになり、真空が一意になります（4-10）。部分列で取った極限は群がりを示されていないので、$\mathcal{H}_0$ は一次元とは限りません。物理の言葉では、極限が二つ以上の「純粋な相」の混ざりである可能性が残ります。

評 評価書 §6：OS の再構成をこの Euclid の理論に直接当てるのではなく、群がりを満たす成分に分解し、成分ごとに再構成を当てる、という回り道をとる。§6.2：混ざった極限の理論にも OS の再構成は当てられるが、出る Wightman の理論の真空が一意とは示されていない。

02

## 言明 (1) — 零エネルギーの空間に圧縮した作用素の環

時間の帯 $0 < t < s$ に点を持つ語（有限個の場の札と挿入点の列）$A$ について、作用素 $B_{s,A}$ を、正の時間の語で表されたベクトルの挿入を $s$ だけ未来へずらし、空いた帯に $A$ の挿入を前置するもの、とします評 （評価書の用語集 `YangMills.Hierarchy.Character` ）源 （ `Spread` の `place` ）。これを零エネルギーの空間に圧縮した

$$M_A \;=\; P_0\, B_{s,A}\big|_{\mathcal{H}_0} \colon\; \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0 \tag{1}$$

たちが生成する、ノルムで閉じた単位つきの *-環を $\mathcal{A}$ とします。

源 構成の源 `YM/Phase/Mixture.lean` の `Spread.atom`（$P_0 \circ \mathrm{place}\, d\, w$ を $\mathcal{H}_0$ に制限）、`generators`、:54 `Spread.algebra`（生成した *-部分環の閉包）。

**意味**。$\langle \Omega_0, M_A \Omega_0 \rangle = \langle \Omega_0, B_{s,A} \Omega_0 \rangle = S^{\mathrm{mix}}(A)$ です（$\Omega_0$ は混ざった理論の真空ベクトル）源（`insertValue`）。$M_A$ は「語 $A$ を挿入して、無限に長い時間のあとに残る部分」を零エネルギーの空間の上で見る作用素です。混ざった理論が純粋な相の混ざりなら、各相で $M_A$ はスカラー（その相での $A$ の期待値）として働くはずで、$\mathcal{A}$ は相の空間の上の関数の環になるはずです推（動機）。

03

## 言明 (2) — 可換性、Gelfand 表現、確率測度

言明（零エネルギーの環の可換性）

極限の表が Euclid の束（`Table.Hierarchy`）を満たし、回転の作用 $R$ について O(4) で不変（`R.Oriented S`、12-06 §04）で、$\mathcal{H}_0$ が空間の並進で不変（`Steady`）なら、$\mathcal{A}$ は可換：全ての $x, y \in \mathcal{A}$ で $xy = yx$。

源 公開された構成の定理。Lean：`YM.OS.Ground.adjunction`（`YM/Ground/Permute.lean:149`。節の変数 `Steady V`・`S.Hierarchy`・`Rotation S`・`R.Oriented S` を使う：同 :12-13）。

**なぜ回転の不変が要るか**。二つの生成元 $M_A$・$M_{A'}$ の積の順序を入れ替えるには、時間の帯に並べた二つの語の時間の順序を入れ替える必要があります。O(4) の回転（例えば時間の軸と空間の軸を入れ替える回転と、空間の並進）を使えば、時間に並んだ二つの語を空間に並べ直し、また時間に戻すことで順序を入れ替えられる、という筋と推し量ります推（補題の名 `orbit`・`gens` からの読み）。どちらにしても、源の言明は O(4) の不変を**仮定**として取ります。だから順序は「Euclid 不変（12-06）→ 相の分解」です。

言明（Gelfand 表現と相の測度）

上の仮定と、$\mathcal{A}$ の稠密な列のもとで、コンパクトな距離空間 $X$、その上のボレル測度 $\mu$、各点 $\xi \in X$ の指標（*-準同型）$\xi \colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ が在って：$\mathcal{A}$ は可換、$\mu$ は確率測度で全台（空でない開集合の測度は正）、$X$ から指標の全体への写像は全単射、$\xi \mapsto \xi(a)$ は連続、そして

$$\int_X \xi(a)\, d\mu(\xi) \;=\; \langle \Omega_0,\, a\, \Omega_0 \rangle \qquad (a \in \mathcal{A}). \tag{2}$$

源 公開された構成の定理（可換 C*-環の Gelfand 表現と Riesz–Markov の表現定理の当てはめ。相の測度の記号は、評価書では $\nu$、この部では $\mu$ です）。Lean：`YM.OS.Ground.resolution`（`YM/Ground/Spectrum.lean:127`）、結論の型 `Spread.Resolution.Out`（`YM/Phase/Mixture.lean:78`：欄 `abelian`・`normalized`・`support`・`onto`・`values`・`weak`・`ground`）。

道具は Mathlib の可換 C*-環の Gelfand 変換と Riesz–Markov–Kakutani の表現定理です 源（評価書の用語集と源の import）。$\mathcal{A} \cong C(X)$ で、真空の状態 $a \mapsto \langle \Omega_0, a\Omega_0 \rangle$ が $X$ の上の確率測度 $\mu$ として表されます。全台であることは、$\mathcal{A}$ の零でない元が $\Omega_0$ を消さないことから出ます 評（評価書の用語集 `fullSupport`）。

04

## 言明 (3) — 成分の相関と、各成分での真空の一意性

**成分の相関**。点 $\xi \in X$ の**相**の相関を、語 $A$ を正の時間の帯へ平行移動したうえで

$$S^{\xi}(A) \;=\; \xi(M_A) \tag{3}$$

と定めます。値は平行移動と帯の幅に依りません 評（評価書の用語集 `Character`） 源（`Spread.Resolution.receives`、`Mixture.lean:89`）。(2) を $a = M_A$ に当てると、混ざった理論は相の平均です：

$$\int_X S^{\xi}(A)\, d\mu(\xi) \;=\; S^{\mathrm{mix}}(A). \tag{4}$$

源 Lean：`YM.OS.Spread.Resolution.barycenter`（`Mixture.lean:113`。仮定に並進不変 `S.Homogeneous`）。公開の言明の欄 `Reconstructed.mixture`（`ChallengeSpec.lean:133`）に当たります。

**各成分は OS の束を満たす**。相の選びの証書 `OS.Selection.Certificate`（`Mixture.lean:136`）の欄は、各相の表が Euclid の束を満たすこと（`states`）、O(4) で不変なこと（`sym`）、場の零空間が混ざった理論と同じこと（`retains`）、応力テンソルの法則（`flux`）、選んだ相で真空が一意なこと（`heat`）を含みます 源。

言明（各成分での真空の一意性）

相 $\xi$ の OS の空間の零エネルギーの空間 $\mathcal{H}_0^{\xi}$ が一次元（真空 $\Omega^{\xi}$ の倍だけ）であることを `UniqueHeat` と書きます（`Mixture.lean:35`）。(i) $\mu$ について殆ど全ての $\xi$ で `UniqueHeat`。(ii) 構成の相の束では、全ての $\xi$ で `UniqueHeat`。

源 Lean：(i) `YM.OS.Cluster.lifts`（`YM/Phase/Unique.lean:91`）、(ii) `YM.EveryPhase.every`（`YM/EveryPhase/Vacuum.lean:146`）。(ii) は構成の結論 `EveryPhase.Completed` の欄 `euclid`（`YM/EveryPhase/Extension.lean:51` の構造体の欄）に入ります。

**(i) の筋**源（補題の名と言明）。正の時間の語 $b$ について、$\|P_0^\xi b\|^2$ の $\xi$ での積分と $\int |\xi(M_b)|^2\,d\mu$ は、どちらも $\|P_0 b\|^2$ に等しい（`trail`・`at_M`・`almost`）。$\|P_0^\xi b\|^2 \geq |S^\xi(b)|^2 = |\xi(M_b)|^2$ なので（真空成分は $P_0^\xi b$ の一部）、非負の差 $\|P_0^\xi b - S^\xi(b)\Omega^\xi\|^2$ の積分が 0 になり、殆ど全ての $\xi$ でこの差は 0 です（`exp_real`）。全空間を張る可算個の語の族について合わせると、殆ど全ての $\xi$ で $\mathcal{H}_0^\xi$ は $\Omega^\xi$ の倍だけです推（不等式の向きと可算の族の取り方の細部）。(ii) の「殆ど全て」から「全て」への広げ方は読んでいません推。

**速さは付いていない。**真空の一意性は、時間の発展で $E^\xi(t)x \to \langle\Omega^\xi, x\rangle\Omega^\xi$ となる（委員会の検査は、時間の向きに離した語の群がりを、速さの前提なしで出している：評価の側 `submissions/openai-20261028/checks/ClusterCore.lean` `chamber_word_cluster`）こととつながりますが、近づく速さは言われていません源。指数の速さがあれば質量ギャップですが、それは言明に無く、在るのは多項式の評価です（12-08 §05）。

**選んだ相。**構成は $\mu(E) = 1$ となる集合 $E$（零エネルギーの空間が一次元で、跡の二点関数の短距離の極限が成り立つ相の集合）から一つの相 $\xi^*$ を選び、Wightman の理論をその相から作ります評（評価書の用語集 `selected`）。

05

## 混ざった理論と成分について、言っていること・いないこと

| 言っていること（評価の水準） | 言っていないこと |
|---|---|
| $S^{\mathrm{mix}} = \int S^\xi\,d\mu$（点の重ならない所で） | $S^{\mathrm{mix}}$ 自身の群がり |
| $\mu$ は確率測度で全台 | $X$ が一点であること（相が一つ） |
| 各 $x$ で $\xi \mapsto S^\xi(x)$ は連続 | 成分どうしが等しいこと |
| 全ての $\xi$ で真空が一意（速さなし） | 群がりの速さ（減衰の率） |
| 各成分が OS の束と O(4) 不変を満たす | 異なる部分列の極限の比べ |
| — | 成分を格子の測度から直接近似すること |

源 左の列は公開の言明の欄（`ChallengeSpec.lean:117-135` の `Reconstructed`：`normalized`・`fullSupport`・`characterContinuity`・`mixture`）と構成の結論 `Completed` の欄に在ります。

**もし混ざった理論が群がりを持てば。**評価書 §6.2 は、$S^{\mathrm{mix}}$ が群がりを満たすなら短い計算で $\int |S^{\xi}(A) - S^{\mathrm{mix}}(A)|^2 \, d\mu = 0$ となり、連続性と全台から全ての成分が一致する、と書いています。そして、群がりがあっても無限体積の極限の一意性を出すだけの赤外の制御にはならない、とも書いています[評]。成分が全て等しいことは「一つの部分列の極限の中で相が一つ」であり、異なる部分列の極限が等しいこととは別の問いです[初]。

06

## 本書の検討で見えていたこと

**相の分解は、本書の検討の計画にだけ在りました。**本書の構成の段の表（16-09）は、再構成と真空の一意性を後の段の計画として置いていて、Lean の言明は在りません。零エネルギーの空間に圧縮した可換な環で相を分けるという組み方は、本書の検討に無かった発想です（14-05）。

**強結合の窓の中では、分解が要らない形で持っていました。**窓の中の極限 $\nu_\beta$ は部分列なしの一つの測度で、再構成の器の転送の作用素 $T$ について $\|T - P_\Omega\| \le (18 \tanh \beta)^{1/2}$ と、四方向の指数の速さの群がりを持ちます。

Lean `InfMain2.wilson_infvol_main2`（質量ギャップの形と非退化、20-04）、`WilsonLimit.cluster_limit`（極限点での四方向の群がり）。Osterwalder–Seiler の強結合・Dobrushin の型の形式化で、格子間隔は 1 に固定、強結合の窓の中だけ、連続極限は無し。

群がりに速さが付いていれば真空は一意で、分解は一点になります[初]。本書の窓の中の結果はその形ですが、領域が違います（格子間隔は固定、強結合）。公開された構成の相の分解は、群がりが示せない弱結合の連続極限のための道具です。

公開された構成の「相」を、本書の捩れた境界条件や渦の自由エネルギーで区別できるか、という問いは立てられます（第 21 部）。それは第三巻の問いです（16-03）。

07

## 読めていない所

- **可換性の証明で O(4) をどう使うか。**`adjunction` の中の `orbit`・`gens` までしか読んでいません。
- **`EveryPhase.every` の証明。**殆ど全ての相から全ての相への広げ方。

- **$\mathcal{H}_0$ が空間の並進で不変であること**（`Steady`）は、`resolution` の中で `inert` から出していますが、その中身は読んでいません。
- **選んだ相の集合 $E$ の構成**（評価書の用語集が挙げる `YM.Trace.submits` ほか）。
- **公開の定理への鎖。** `EveryPhase.all_characters` は、構成の鎖の `R2IGoals.fromFunded`（`YM/R2I/Campaign/Accepted.lean:150`）の中、:158 で直接呼ばれているのを読みました 源 。`resolution`・`adjunction` から `all_characters` までの鎖は宣言ごとには辿っていません（記録の見出しは `SharpGram.habitat`）。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 零エネルギーの空間に圧縮した作用素 $M_A$ の環 $\mathcal{A}$ の定義（`Spread.algebra`） | — |
| 源 O(4) の不変などを仮定に、$\mathcal{A}$ は可換（`Ground.adjunction`） | 可換性の証明の中の O(4) の使い方 |
| 源 Gelfand 表現と全台の確率測度、$S^{\mathrm{mix}} = \int S^{\xi} d\mu$（`Ground.resolution`・`barycenter`） | $X$ が一点であること。成分の一致 |
| 源 殆ど全ての相で、さらに全ての相で真空が一意（`Cluster.lifts`・`EveryPhase.every`） | 群がりの速さ。`every` の証明 |
| 評 混ざった理論が群がれば成分は全て一致するが、それでも無限体積の極限の一意性は出ない（評価書 §6.2） | 混ざった理論の群がり |
| Lean 本書の窓の中の極限は部分列なしで、指数の速さの群がりを持つ（`wilson_infvol_main2`・`cluster_limit`） | 格子間隔を動かすこと。弱結合 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| Gelfand 表現、Riesz–Markov の表現定理 | 典 | 可換 C*-環と測度論の標準の定理（1-10）。Lean では Mathlib |
| OS の空間と零エネルギー | 源 | 構成の源 `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）：`YM/OS/Dynamics.lean:57` `Chamber`、`YM/OS/Core.lean:14` `ground`・:38 `emerges` |
| 環・可換性・分解 | 源 | `YM/Phase/Mixture.lean:35` `UniqueHeat`・:54 `algebra`・:78 `Resolution.Out`・:89 `receives`・:113 `barycenter`・:127 `Selection`・:136 `Selection.Certificate`、`YM/Ground/Permute.lean:149` `adjunction`、`YM/Ground/Spectrum.lean:127` `resolution` |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
| --- | --- | --- |
| 真空の一意性 | 源 | `YM/Phase/Unique.lean:91` `lifts`、`YM/EveryPhase/Vacuum.lean:146` `every`、`YM/EveryPhase/Extension.lean:51` `Completed`・:75 `all_characters`、`ChallengeSpec.lean:117-135` `Reconstructed` |
| 委員会の検査 | 源 | `yang-mills-group/YM` `submissions/openai-20261028/checks/ClusterCore.lean` `chamber_word_cluster` |
| 評価書の記述 | 評 | `docs/assessment-1.pdf` §6・§6.1・§6.2、用語集 `Character`・`phaseMeasure`・`selected`・`fullSupport` |
| 本書の窓の中の群がり | Lean | `InfMain2.wilson_infvol_main2`・`WilsonLimit.cluster_limit`（20-03・20-04） |

**この章で使った語** — 群がり（クラスター性）・零エネルギーの空間・圧縮・可換 C*-環・Gelfand 表現・指標・相・相の測度・全台・真空の一意性。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：12-08 再構成と Wightman の公理 — 選んだ相から Wightman の理論を作り、出る公理と言っていないこと（質量ギャップ）を読みます。

# 再構成と Wightman の公理

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§05 は未解決の地図（第三巻への橋）、§06 は本書の検討、§07 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 公開された構成は、極限の表が満たす Euclid の公理を自前の束として定め（増大の条件は「点の間隔 $r \le 1$ で $r^{-A}$」の形）、全ての相について Wightman の公理（並進のスペクトルと真空の一意、共通の定義域と巡回性、Poincaré の共変、局所可換）を満たす相対論的な場の理論を作り、解析接続・純虚の時間での一致・境界値・忠実性という付帯の性質は、選んだ相について言っています。委員会は、選んだ相の、中心化した応力テンソルの跡という**一つのスカラーの場**の相関について、独立に定式化された標準の OS の公理と増大の条件を確かめました。この章は、公理の束、出る公理の一覧、検査の範囲を読み、最後に、質量ギャップの言明が無く、在るのは相に一様な多項式の評価であることを確かめます。

**前提となる章** — 4-09（Wightman の公理）、4-10（OS の公理と再構成）、12-07（相の分解）。

**先に言うこと** — 公開された構成の結果は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」水準です。委員会の独立の検査が標準の OS の公理に照らして確かめたのは、**選んだ相の、中心化した跡のスカラー**の相関についてで、全てのテンソルの場を別に訳して確かめたものではありません。構成は質量ギャップについて何も言っていません（評価書 §2 の 4）。

この章の順序

1. 札の凡例
2. 言明 (1) — 公開された構成の版の Euclid の公理の束
3. 言明 (2) — 相からの再構成 — 全ての相と、選んだ相
4. 出る Wightman の公理と付帯の性質の一覧
5. 委員会の独立の検査が確かめた範囲
6. 質量ギャップの言明は無い — 相に一様な多項式の評価（第三巻への橋）
7. 本書の検討で見えていたこと

8. 読めていない所

---

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。公開された構成の定理が「Lean で証明されている」という水準は、委員会の評価によります評 。

01

## 言明 (1) — 公開された構成の版の Euclid の公理の束

導入は 4-10 です。構成は、極限の相関の表 $S$（点の重ならない配置の上の関数）が満たす性質を、次の七つの欄の束として定めています源 （構成の源 `YM/Euclid/Words.lean:141` `Table.Hierarchy`）。

| 欄 | 中身 | 標準の OS の公理との対応 |
|---|---|---|
| `laws`（`Basic`） | 点と札の同時の置換で対称、0 点の相関は 1、単位の場は外せる | 対称（E3）と正規化 |
| `spin`（`RealSpin`） | 超八面体群（座標の置換と符号）の共変と実性 | Euclid の共変（E1）の離散の部分と実性 |
| `translations` | 連続の並進で不変 | E1 の並進 |
| `positive`・`onTests` | 座標の軸ごとの鏡映正値性（語の形と、試験関数で均した形） | 鏡映正値性（E2） |
| `smooth` | 点の重ならない所で $C^\infty$ | （正則性） |
| `order`（`Capped`） | 増大の条件（下の (1)） | （増大の条件の一つの形） |

**増大の条件の形**。点の配置 $x$ が「間隔 $r$」（全ての二点の距離が $r$ 以上、立方体のノルムで）で $0 < r \le 1$ のとき、相関の $j$ 階の微分について

$$\left\| \nabla^j S(v;x) \right\| \;\le\; C\, r^{-A} \tag{1}$$

となる $A$ と $C \ge 0$ が（札と次数ごとに）在ること源 （`YM/Euclid/Table.lean:97` `Capped`）。$r$ を 1 で頭打ちにするので、点が遠く離れた所でも右辺は $C$ のままで、**無限遠での増大を許しません**。点が近づくときの特異性だけを冪で許す形です。

**束の外の性質**。連続の回転の不変（O(4)）は束に入っておらず、相の証書の欄 `sym` で別に要求されます（12-06 §04）。群がり（真空の一意）も束の外で、各相の `UniqueHeat` として別に要求されます（12-07 §04）源 。極限の表が束を満たすことは、極限に移る性質（12-05 §04）に滑らかさと増大の条件を足して組まれます（`Order.assembles`、`YM/Extraction/Harvest.lean:62`）。

02

## 言明 (2) — 相からの再構成 — 全ての相と、選んだ相

相 $\xi$（12-07）の相関 $S^\xi$ を複素の時間へ解析接続し、虚部を 0 に近づけた境界値（Schwartz の試験関数で均したあと）として、実時間の Wightman の分布 $W^\xi$ を作ります。場の札 $v_i$ と Schwartz の試験関数 $f_i$ の形式的な積の一次結合の空間 $\mathcal{P}$ に $\langle u, w\rangle_\xi = W^\xi(u^* w)$ を入れ、零ノルムの部分で割って完備化したものが Hilbert 空間 $\mathcal{H}^\xi$、空の語が真空 $\Omega^\xi$、語の前に $(v, f)$ を付ける操作が均した場の作用素 $\Phi^\xi_v(f)$ です評 （評価書 §6.1）。

言明（成分の理論の再構成、評価書の定理 6.1）

評価書の言い方では、全ての指標 $\xi \in X$ について、成分の相関 $S^\xi$ は $\mathcal{H}^\xi$ の上の Wightman の理論（真空 $\Omega^\xi$、定義域 $\mathcal{D}^\xi$ の上の場 $\Phi^\xi$）を再構成し、次を満たす：1. 並進のスペクトル、正のエネルギー、真空の一意。2. 共通の定義域、正則性、随伴、巡回性。3. Poincaré の共変。4. 局所可換。5. 解析接続と相関の回復。6. 場の忠実性。

評 評価書 §6.1 の定理 6.1（1〜6 を全ての $\xi$ に付ける言い方は評価書のもの）。

源 Lean の言明で分けると次のとおりです。**全ての相**で Wightman の公理（構成の結論 `Headline.Reconstruction`、`YM/Nonperturbative/HeadlineSpec.lean:75` の欄 `characters`。中身の構造体 `WightmanAxioms`、同 :52-71 は、真空の正規化・定義域の稠密と巡回・試験関数についての連続・随伴・相関の一致・正値・局所可換・対称性・強連続・スペクトル・前向きの光円錐・真空の一意で、忠実性と解析接続の欄は持たない）。**付帯の性質**（忠実 `faithful`・解析接続 `analytic`・純虚の時間での一致 `root`・境界値 `boundary`）は、公開の言明の欄 `Hierarchy.Reconstructed`（`ChallengeSpec.lean:117-143`）の中で**選んだ相**についてだけ言われ、構成の側の `YangMills.publicReconstruction`（`HierarchyBridge.lean:79`）がそれを満たします。

**どの目標に入っているか**。公開の定理 `JointExistence` の結論の欄 `reconstruction : T.Reconstructed` は、**選んだ相** $\xi^*$ の Wightman の理論についての言明です（欄 `axioms`・

`analytic`・`root`・`boundary` は選んだ相の連続の $T.\mathrm{continuation}$ と $T.\mathrm{theory}$ について）。全ての相についての Wightman の公理は、構成の定理 `constructed` の結論（`Headline.Reconstruction.characters`）に在ります源 。`publicReconstruction` は記録で `used`（見出しの定理 `su2Theory` から届く）で、直接の使い手は `constructed` です源 。

03

## 出る Wightman の公理と付帯の性質の一覧

公開の言明の欄 `Reconstructed`（Wightman の公理の欄 `axioms` と付帯の欄は選んだ相についての言明。全ての相の Wightman の公理は §02 のとおり別の結論）の中身を、評価書の用語集に従って並べます源 （欄の名と型）評 （意味の説明）。

| 欄 | 中身 |
|---|---|
| `axioms`：並進のスペクトルと真空の一意 | 並進の強連続なユニタリ表現と射影値のエネルギー運動量測度、測度の台は閉じた前向きの光円錐、全ての並進で不変なベクトルは真空の倍 |
| `axioms`：共通の定義域・正則性・随伴・巡回性 | 定義域は稠密で真空を含み場で保たれる、$f \mapsto \Phi_v(f)\psi$ は Schwartz の位相で連続、随伴は札の共役で、定義域は真空に場の語を当てたものの張る空間 |
| `axioms`：Poincaré の共変 | 固有直交 Poincaré 群の強連続なユニタリ表現（並進は上と同じ）、札への作用 $\rho(g)$、場の変換則 $U(g)\Phi_v(f)\psi = \Phi_{\rho(g)v}(f_g)U(g)\psi$ |
| `axioms`：局所可換 | 台が空間的に離れた二つの場は交換する |
| `faithful`・`acts`・`injective`・`covers`・`represents` | 零でない札には零でない場、少なくとも一つの場が零でない（忠実が空でないこと）、札への写像が単射で全射、どの場も格子の札の像 |
| `normalized`・`fullSupport`・`characterContinuity`・`mixture` | 相の測度は確率で全台、相関は相について連続、相の平均が混ざった相関（12-07 §05） |
| `permutation`・`smooth` | 混ざった相と各相の相関の置換の対称と滑らかさ |
| `analytic`・`root`・`boundary` | 選んだ相の解析接続が $\mathrm{Im}\, z_1 < \cdots < \mathrm{Im}\, z_n$ で正則、純虚の時間で Euclid の相関に一致、実時間への境界値が真空期待値（Wightman の分布）に一致 |

評価書の用語集によれば、真空の一意は次の筋です：Wightman の側の Hilbert 空間から選んだ相の OS の空間への等長な写像が真空を真空へ写し並進と可換、OS の空間の非負のエネルギーと Lorentz の共変で前向きの光円錐のスペクトル条件、並進で不変なベクトルは等長な写像で OS の側の零エネルギーの空間へ写り、そこは一次元（`UniqueHeat`）なので真空の倍評 。

04

### 委員会の独立の検査が確かめた範囲

委員会は、構成の定義とは独立に定式化された OS の公理（評価書の文献 [DMY]、リポジトリ `xiyin137/OSreconstruction`）に照らして、構成の出力を確かめています[評]（評価書 §10）。

- **対象**。選んだ相 $\xi^*$ の、中心化した応力テンソルの跡 $\Theta$ という**一つのスカラーの場**の $n$ 点関数の階層。全てのテンソルの場を別に上流の定式化へ訳したものではない[評]（§10.1）。
- **試験関数**。`ZeroDiagonalSchwartz`：全ての対角（$x_i = x_j$）の上で全ての階の微分が消える Schwartz の関数。対角の近くで 0 である必要も、コンパクトな台も要らない。格子からの収束の言明に使う、点の重ならない所に台を持つコンパクトな台の試験関数を含む[評]（§10、式 (21)）。
- **確かめた公理**。E0（緩増加・線形）、E1（並進と回転の不変）、E2（鏡映正値性）、E3（対称）、E4（空間の向きの群がり、選んだ相で）と、OS-II の型の線形の増大条件 E0′[源]（評価の側 `submissions/openai-20261028/checks/CompleteOS.lean` の `verifiedOS`・`verifiedOS_growth`・`constructed_OS_family`、`checks/RemainingObligations.lean` の `completeOS`・`E0_prime`、`checks/ReflectionPositivity.lean` の `E2_reflection_positive`）。
- **言っていないこと**。対角で平らな試験関数は対角の上の接触項を見ないので、接触項の延長の一意性や、制限の無い試験関数の空間での OS の正値性は確かめていない[評]（§10）。E4 は選んだ相についての言明で、混ざった表が群がるという主張ではない[源]（評価の側 `submissions/openai-20261028/docs/examples/OSAxioms-20261028.lean` の説明文）。

[源] 評価の側の `constructed_OS_family` は、構成の走り（罰の係数 $b > 0$）と任意の抽出の列 $p$ について、細分 $q$・表 $S$・最終の証書 $F$ が在って、「切断は列の全体、体積は $(p \circ q)$ の体積の部分列」の抽出で極限が読め、E4 の群がりと E0′ が成り立つ、という形です。

05

### 質量ギャップの言明は無い — 相に一様な多項式の評価（第三巻への橋）

質量ギャップは、ハミルトニアン $H \geq 0$ のスペクトルが $\{0\} \cup [\Delta, \infty)$（$\Delta > 0$）に入ることです（4-11）。評価書は「構成は質量ギャップについて、在るとも無いとも証拠を与えない」と書き（§2 の 4）、開いた問い 3 に「一様な質量ギャップ（対応する相関の指数の減衰と、OS のハミルトニアンのスペクトルのギャップ）」を挙げています[評]。

構成が持っているのは、**全ての相に一様な多項式の評価**です[源]。

言明（相に一様な低エネルギーと熱の評価）

有限個の語の和 $w$ について、(i)・(ii) のそれぞれに定数 $M \geq 0$ が在って（大きい方を取れば一つにできる初）、全ての相 $i$ で：(i) $0 < u \leq 1$ なら、$w$ の状態のエネルギーが $(0, u]$ に在るスペクトルの重み $\leq M u^2$。(ii) $\tau \geq 1$ なら

$$0 \;\leq\; \big\langle A,\; (e^{-\tau H} - P_0)\, A \big\rangle \;\leq\; M\, \tau^{-2} \tag{2}$$

（$A$ は $w$ の状態、$P_0$ はエネルギー 0 の射影）。

源 公開された構成の定理。Lean：`YM.EveryPhase.light_bound`（`YM/EveryPhase/Light.lean:221`）、`YM.EveryPhase.inverse_square`（`YM/EveryPhase/Decay.lean:173`）。構成の結論 `EveryPhase.Completed` の欄 `light`・`heat` に入ります。

**読み方。** (i) から (ii) は初等に出ます初：$\langle A, (e^{-\tau H} - P_0)A\rangle = \int_{(0,\infty)} e^{-\tau E}\, d\sigma_A(E)$ で、$(0,1]$ の部分は二進の区間に分けて $\sigma_A((0,u]) \leq M u^2$ から $O(\tau^{-2})$、$(1,\infty)$ の部分は $e^{-\tau}$ で押さえられます。ここで $\sigma_A$ は状態 $A$ のスペクトルの測度です（相の測度 $\mu$ とは別）。源で読めるのは、`light_bound` の証明が `late`（空間の遠くで交換子の平均が 0、`Light.lean:208`）と二進の分割 `dyadic` を使うことまでです源。これが局所可換と光円錐の台の一般の帰結だ、という読みは推です。この形は、質量の無い理論とも両立します推。指数の速さ $e^{-\Delta\tau}$ とは別物です。

**第三巻への橋。** 質量ギャップの問いは、この言葉で言い直せます：「低エネルギーの重みの評価 $\sigma_A((0,u]) \leq M u^2$ を、ある $\Delta > 0$ 以下で $\sigma_A((0,\Delta)) = 0$ に強める」。熱の評価 (2) の右辺を $M\tau^{-2}$ から $M e^{-\Delta\tau}$ に強めることと同じです初。これは評価書の開いた問いの 3 で、第三巻の 16-02（五つの開いた問い）と 16-03（公開された構成の赤外の端）で扱います。

06

## 本書の検討で見えていたこと

**Wightman の理論への再構成は、本書の検討に在りませんでした。** 本書の Lean の再構成は、Euclid の側の器（19-03 の再構成の器：鏡映の対の半正値の双一次形式、時間の並進、真空、転送の作用素 $T$）までで、解析接続も Wightman の分布も扱っていません。

**強結合の窓の中では、質量ギャップの形を持っていました。** 窓の中の極限の器で $\|T - P_\Omega\| \leq e^{-m}$、$m = -\log(18 \tanh \beta)/2$、真空の補空間が零でないこと、$T \geq 0$ です。

Lean `InfMain2.wilson_infvol_main2`（20-04）。Osterwalder–Seiler の強結合の型の形式化。格子間隔は 1 に固定、$|\beta| < 0.0556$ ほどの窓の中だけ、質量の数は下界だけ、連続極限は無し。

公開された構成は弱結合の連続極限で Wightman の理論までを持ち、質量ギャップの言明を持ちません。本書は格子間隔を固定した強結合の窓で質量ギャップの形を持ち、連続極限を持ちません。二つの結果は別の領域に在り、つながっていません（14-06）。

07

## 読めていない所

- **公開された構成の版の OS の再構成の証明**（`YM/Boundary/*`・`YM/EveryPhase/*`）。解析接続の組み方と境界値の取り方は、評価書の用語集の説明までです。
- **増大の条件 (1) がどこから来るか**。`assembles` の仮定 `Capped` を誰が払うかは辿っていません。
- **委員会の検査の中の、構成の評価からの入力**。評価書 §10.1 は「解析の入力は提出された証明から」と書いています。どの評価が使われたかは読んでいません。
- `light_bound` **の証明**。`late`・`annulus`・`dyadic`・`fee` の名までです。
- **連続の Wilson ループ**。連続の Wilson ループの観測量と面積則は、読んだ範囲（名前の検索の範囲）の言明に在りません源。格子の道に沿う平行移動 `travel`（`YM/Lattice/Path.lean:105`）は在ります。評価書 §8 は、Wilson ループを作り局所の観測量と関係づけ、面積則を示すことを開いた問い 4 に挙げています評。
- **混ざった理論の再構成**。評価書 §6.2 は、混ざった極限の理論にも OS の再構成を当てられると書いています（真空の一意は示されない）。源のどの宣言かは確かめていません。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 公開された構成の版の Euclid の公理の束（七つの欄）と、増大の条件 (1) の形（間隔 $r \le 1$ で $r^{-A}$、無限遠での増大なし） | (1) の出所。O(4) と群がりは束の外 |
| 源 全ての相で Wightman の公理（`Headline.Reconstruction.characters`）、付帯の性質（忠実・解析接続・純虚の時間での一致・境界値）は選んだ相について（`publicReconstruction`）。委員会の評価の水準 | 付帯の性質を全ての相で言うこと |
| 評 委員会の検査：選んだ相の中心化した跡のスカラーについて、標準の OS の公理 E0〜E4 と E0′（対角で平らな Schwartz の試験関数） | 全てのテンソルの場の検査。接触項の延長の一意性 |

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 相に一様な多項式の評価：低エネルギーの重み $\le Mu^2$、熱 $\le M\tau^{-2}$（`light_bound`・`inverse_square`） | 質量ギャップ。指数の減衰。一粒子の状態 |
| 初 低エネルギーの評価から熱の評価が出ること。質量ギャップの言い直し | — |
| 源 （名前の検索の範囲）格子の道に沿う平行移動 `travel`（`YM/Lattice/Path.lean:105`）は在る | 連続の Wilson ループの観測量と面積則（言明に無い。評価書 §8 の開いた問い 4） |
| Lean 本書の窓の中の質量ギャップの形（`wilson_infvol_main2`） | 連続極限。Wightman の理論 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| Wightman の公理と OS の再構成 | 典 | K. Osterwalder, R. Schrader, Comm. Math. Phys. 31 (1973) 83；42 (1975) 281。4-09・4-10、文献は A-03 |
| 公理の束と増大の条件 | 源 | 構成の源 `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）：`YM/Euclid/Words.lean:123` `Table.RP`・:141 `Table.Hierarchy`、`YM/Euclid/Table.lean:97` `Capped`、`YM/Extraction/Harvest.lean:62` `assembles` |
| 再構成の言明 | 源 | `ChallengeSpec.lean:117-143` `Hierarchy.Reconstructed`・:186 `JointExistence`、`HierarchyBridge.lean:79` `publicReconstruction`、`PublicView.lean:102` `view_axioms`、`YM/Nonperturbative/HeadlineSpec.lean:75` `Headline.Reconstruction` |
| 多項式の評価 | 源 | `YM/EveryPhase/Light.lean:208` `late`・:221 `light_bound`、`YM/EveryPhase/Decay.lean:173` `inverse_square`、`YM/EveryPhase/Extension.lean:51` `Completed` |
| 委員会の検査 | 源・評 | `yang-mills-group/YM` `submissions/openai-20261028/checks/CompleteOS.lean`・`RemainingObligations.lean`・`ReflectionPositivity.lean`・`ClusterCore.lean`、`submissions/openai-20261028/docs/examples/OSAxioms-20261028.lean`。評価書 §6.1・§10・§10.1、用語集 `Reconstructed.*` |
| 評価書の開いた問い | 評 | `docs/assessment-1.pdf` §2・§8 |
| 本書の器と質量ギャップの形 | Lean | `InfMain2.wilson_infvol_main2`（20-04） |

**この章で使った語** — OS の公理・Wightman の公理・増大の条件・解析接続・境界値・スペクトル条件・局所可換・相・中心化した跡・対角で平らな試験関数・質量ギャップ・多項式の評価。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：13-01 応力テンソルは一本の直線の上に在る — 再構成された理論が Yang–Mills であることの証拠を、応力テンソルの一意性から読み始めます。

# 応力テンソルは一本の直線の上に在る

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§07 は本書の検討、§08 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 公開された構成が、場の空間 $F_4$ に値を持つ応力テンソル $T_{ab}$ を持つこと、そうしたテンソルの候補が実一次元の直線をなし、並進の Ward の恒等式がその上の一点を選ぶことです。Ward の恒等式は「点を囲む面を通る応力の流束が、座標の並進を生む」ことを、点の重なりに触れない形で言います。

**前提となる章** — 8-03（場の空間 $F_d$）、8-05（相関と相）。古典の作用と保存則は 2-01・3-03。

**先に言うこと** — 応力テンソルは**公開の言明には出てきません**。在るのは構成の定理の側と、委員会の結合の目標の側です。Euclid 不変性を出すための使い方は 12-06 に置きます。この章で読むのは定義と言明の形までです。

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

この章の順序

1. 言明 — 応力テンソルの条件と一次元の直線
2. 並進の Ward の恒等式：窓の関数と、点を囲む面
3. 回転の Ward の恒等式：腕の長さを掛けた流束
4. 仕組みの骨子 — なぜ直線で、何が一点を選ぶか
5. 委員会の検査が確かめたこと・言っていないこと
6. どの目標に入っている言明か
7. 本書の検討で見えていたこと
8. 読めていない所

01

## 言明 — 応力テンソルの条件と一次元の直線

古典の Yang–Mills では、応力テンソル（エネルギー運動量テンソル）は作用を計量で変分して得ます（3-03）。量子論では、点ごとの場の積は意味を持たないので、そのまま定義できません。評価書 §7.1 は、構成の応力テンソルを次の性質で**一意に特定する**と書きます 評 。

> 場の空間 $F_4$ に成分を持つ対称なテンソル $J_{ab}$ で、場の共役で変わらず、$S^{\mathrm{mix}}$ について中心化され（一点関数が 0）、座標の置換と符号の反転の下で二階のテンソルとして変換し、発散が $F_5$ の中で 0 であるものは、実一次元のベクトル空間をなす。応力テンソルは、この一次元の空間の中のベクトルで、正規化は Ward の恒等式で決まる。

構成の側の定義は次のとおりです 源 （`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028` の `YM/Euclid/Stress.lean`）。

- 応力の型：$J : \{0,1,2,3\}^2 \to F_4$（`Stress`、57 行）。
- 保存（`Conserved`、59〜62 行）：対称 $J_{ab} = J_{ba}$、実（共役で不変）、発散が零 $\sum_a \partial_a J_{ab} = 0$。ここで $\partial_a : F_d \to F_{d+1}$ は場の微分の写像で、発散は $F_5$ の元です。
- テンソルとしての変換：超立方の群（符号つきの置換）で二階のテンソル（`RawTensor`、68 行）。構成の応力は、四次元の直交群の作用でも二階のテンソル（`Tensorial`、64〜66 行）。

構成の応力テンソルは証人の欄 `energy`（`YM/Spec/Closed.lean` 31 行）で、局所の法則の束 `Locals` の中で `conserved`・`spin`・`charges`（41〜43 行）として三つの性質を持ちます 源 。

**一次元であること**。無条件の形は、構成の定理の結論に入る構造 `Pert.FirstExtension` の欄 `ranks` です 源 （`YM/Pert/FirstTarget.lean` 35〜36 行、`Construction.lean` 31 行）：証人の微分と回転のデータについて、発散の写像の核の実の次元が 1。同じ事実は、仮定 `Supplier`（紫外のデータ・Maxwell 場のデータ・尺度の列などの束。`YM/Pert/Weak.lean` 22〜32 行）の下の定理 `YM.Pert.one_line`（68 行）としても在ります 源 。核の空間（`KernelSpace`、`YM/Next/UV_STRESS/Tensor.lean` 75〜82 行）は、対称・実・テンソルの条件の空間に「期待値 0（中心化）」を足したものです。同じ仮定の下の `centered_line`（82 行）は、保存し、テンソルとして変換し、Ward の法則を満たす任意の $J$ を中心化すると、`Supplier` の欄の応力 `I.J` の**零でない実数倍**になることを言います 源 。`I.J` が証人の応力 `energy` と同じものであることは読んでいません。

$$\Big\{ J :\ \text{対称・実・中心化・テンソル・}\ \textstyle\sum_a \partial_a J_{ab} = 0 \Big\} = \mathbb{R}\cdot T \tag{1}$$

02

## 並進の Ward の恒等式

(1) の直線の上で一点を選ぶのが、並進の Ward の恒等式です。互いに異なる点 $x_0, x_1, \dots, x_n$、中心の場 $B \in F_d$、傍観者の場 $q_1, \dots, q_n$ をとり、**窓の関数** $\chi$ を次のように選びます 源（`Window`、`Stress.lean` 72〜73 行）：滑らかでコンパクトな台、$x_0$ の近くで 1、他の点 $x_1, \dots, x_n$ を台に含まない。このとき

$$-\sum_{a=0}^{3} \int_{\mathbb{R}^4} \partial_a \chi(y)\, \big\langle T_{ab}(y)\, B(x_0)\, q_1(x_1) \cdots q_n(x_n) \big\rangle \, d^4y = \frac{\partial}{\partial x_0^b} \big\langle B(x_0)\, q_1(x_1) \cdots q_n(x_n) \big\rangle \tag{2}$$

です 評（評価書 §7.1 の式 (13)） 源（`StressLaws.translation`、92〜94 行。右辺はまず「微分した場 $\partial_b B \in F_{d+1}$ の相関」として書かれ、それが座標の微分に等しいことは別の法則）。

**読み方**。$\partial_a \chi$ は $x_0$ の近くでは 0（$\chi \equiv 1$）、他の点の近くでも 0（$\chi \equiv 0$）なので、(2) の左辺の被積分関数は点の重なりに触れません。$\chi$ の「段差」は $x_0$ を囲む厚みのある殻で、$-\int \partial_a \chi\, T_{ab}$ は、その殻を通る応力の流束です。古典の言葉では、Gauss の定理で

$$-\int \partial_a \chi\, T_{ab}\, d^4y = \int \chi\, \partial_a T_{ab}\, d^4y \tag{3}$$

で、$\partial_a T_{ab} = 0$ が挿入点の外で成り立つので、右辺は $x_0$ での「接触の寄与」だけを拾います 推。量子論では右辺は点の重なりに触れるので書けません。(2) はその寄与を、点の離れた相関だけで、並進の生成子 $\partial_b$ として定めた形です。評価書の言い方では「点のまわりの応力の流束が座標の並進を生む」評。

(2) は線形なので、$T$ を $cT$ に替えると左辺が $c$ 倍になります。(2) の右辺は恒等的に 0 ではない（ある配置で相関の微分が 0 でない）ので、(1) の直線の上で (2) を満たすのは $c = 1$ の一点だけで、これが正規化です 初。

03

## 回転の Ward の恒等式

回転についても同じ形の恒等式が、構成の法則の束に入っています 源（`StressLaws.rotation`、95〜97 行。殻の積分 `shellSpin`、84〜86 行）。四次元の反対称行列 $g$（回転の生成子）について

$$-\sum_{a,b}\int \partial_a\chi(y)\,(g\,(y-x_0))_b\,\langle T_{ab}(y)\,B(x_0)\cdots\rangle\,d^4y=\langle (A_gB)(x_0)\cdots\rangle \tag{4}$$

で、$A_g$ は場の空間の上の回転の作用の微分です（`Rotation.lie`、24 行）。流束に $x_0$ からの腕の長さを掛けたものが、角運動量の流束として場の回転を生みます。評価書の本文は回転の恒等式に触れていませんが、構成の言明 `Locals` の `charges` の欄には入っています 源 。

定義の説明文は、この法則が「$B$ の点での接触項を試さない」と書いています（88〜89 行）源 。

04

## 仕組みの骨子 — なぜ直線で、何が一点を選ぶか

なぜ候補が一次元になるかの直観を書きます 推 。重み 4 で対称な二階のテンソルを曲率から作ると、主なものは $\sum_c \mathrm{Tr}(F_{ac}F_{bc})$ と $\delta_{ab}\sum_{c,e}\mathrm{Tr}(F_{ce}F_{ce})$ と $\delta_{ab}\mathbf{1}$ です。中心化で $\mathbf{1}$ の部分が決まり、保存の条件が残りの組合せを縛ります。古典の Maxwell 場では、保存するのはエネルギー運動量テンソル（の定数倍）だけです。

Lean の証明は、この直観を相互作用する理論で直接示す形ではありません。`one_line` の証明は `differential_rank` を呼び、その引数は Maxwell 場のデータ・尺度の列・その極限と当てはめ（`limit_`・`fit`）です 源 。短距離の尺度の列に沿う自由な Maxwell 場との比べ（13-03 §05）を通して核の次元を数える形と見えます 推 。中身は読んでいません。

流れをまとめます。

1. 場の空間 $F_4$・$F_5$ と微分の写像 $\partial_a$ を、相関で定義する（8-03）。
2. 対称・実・テンソル・保存の条件を満たす $J$ の空間が実一次元であることを示す（`ranks`。仮定つきの形は `one_line`）。
3. 構成の応力テンソル $T$ を、その直線の上で並進の Ward の恒等式 (2) を満たす点として持つ（`energy` と `charges`）。
4. $T$ を使って Euclid 不変性を連続の極限で上げる（12-06）。跡を取って跡の異常を調べる（13-02）。

05

## 委員会の検査が確かめたこと・言っていないこと

委員会の注釈つきの例 `TranslationWard-20261028.lean`（評価の側 `yang-mills-group/YM`・版 55ba9fc の `submissions/openai-20261028/docs/examples/`）は、並進の

Ward の恒等式について四つを Lean で示しています 評 。

| 確かめたこと | 在りか |
|---|---|
| 許される窓 $\chi$ が実際に在る（言明が空でない）。窓の大きさは配置に依ってよい | `admissible_shell_exists`、40 行 |
| (2) の右辺が普通の座標の微分に等しい。全ての相 $\xi$・全ての次数の中心の場 $B$・全ての傍観者の並びで | `tensor_generates_translations`、64 行 |
| (2) の被積分関数は実際に可積分（積分が Lean の約束の値に頼っていない） | `shell_integrand_is_integrable`、85 行 |
| (2) の左辺は窓の選び方に依らない | `shell_charge_is_window_independent`、102 行 |

同じ例は、同じテンソルが全ての中心の場・傍観者・相に使われ、相関ごとに係数を合わせ直していないことを強調しています（12〜14 行）。評価書 §11 も、Ward の恒等式の変換器が全ての局所場と全ての成分を覆い、正規化を確かめるものだと書きます 評 。

**言っていないこと** 評 （同じ例の 111〜122 行）：

- 応力テンソルの**改良項**（並進の電荷を変えない足し算）が全て消えること。
- 点の重なりまで延ばした接触項の構成。
- 膨張（dilatation）の Ward の恒等式。
- 独立に選んだ Minkowski の符号の規約との比べ。

また、(2) は Euclid の座標と微分の規約に対する正規化で、それ以上の物理の正規化を独立に確かめたものではありません。

06

## どの目標に入っている言明か

| 目標 | 応力テンソルについて在るもの |
|---|---|
| 公開の定理 `JointExistence` | **無い**。公開の階層には跡の場 `centeredTrace`（$F_4$ の元）だけが在り、それが応力の跡であることも書かれていない（13-02 §01） 源 |
| 構成の定理 `constructed` | 結論に `Pert.FirstExtension F X` が入り（`Construction.lean` 31 行）、その欄 `ranks`（`YM/Pert/FirstTarget.lean` 35〜36 行）が (1) の次元 1 を述べる。応力テンソルと Ward の法則は証人 $F$ の欄に在る 源 |
| 委員会の結合の目標 | 並進の Ward の検査（評価書の [A6]）が入る。Ward の恒等式・スカラーの OS の検査・跡の法則が同じ応力テンソルと同じ相についてであることも確かめられている 評 （評価書 §9.3・§9.4） |

| 目標 | 応力テンソルについて在るもの |
| --- | --- |
| 検証の記録の見出しの定理 | 宣言 `YM.Pert.one_line` の記録は used で、最初に見つかった見出しは `YM.Pert.Parity.parityEndpoint`。存在の定理までの鎖は確かめていない 源（`verification/declaration-usage.tsv`） |

検証の記録の used は「十七の見出しの定理のどれかから届く」という意味で、存在の定理が使うという意味ではありません。

07

## 本書の検討で見えていたこと

本書の研究と Lean には、応力テンソルも Ward の恒等式も**ありません**。本書の対象は格子の上の Wilson の測度と粗い段の観測量で、局所場の空間（8-03）を持たないので、応力テンソルを置く場所がありませんでした。

Euclid 不変性について、本書は格子の超立方の群の対称を押し出しの測度に運ぶこと（ブロック写像の対称な平均）までを扱い、連続の回転の不変性は示すべき言明の側に置いていました（19-07）。公開された構成が、回転の不変性を「応力テンソルの Ward の恒等式と、無限遠での流束の消滅」から上げる、という発想は本書に無かったものです（14-05）。

08

## 読めていない所

- `one_line` の核の空間（`KernelSpace`）と発散の写像 `currentDiv` の定義、証明の `differential_rank`（`YM/Pert/Weak.lean` 68〜88 行の先）。
- Ward の右辺を座標の微分に結ぶ「微分の法則」（委員会の例の `F.phase.phase.calculus`）の源。
- 回転の Ward の恒等式が、Euclid 不変性の証明のどこで使われるか（12-06 の範囲）。
- 構成の応力テンソル `energy` が、格子の側のどの観測量から作られるか（応力テンソルの構成そのもの）。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
| --- | --- |
| 源 対称・実・テンソル・保存の条件を満たす $F_4$ 値のテンソルの空間は実一次元（構成の定理の結論の `ranks`。`Supplier` の仮定の下で `one_line`） | 公開の言明の中の応力テンソル（無い） |

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 評 並進の Ward の恒等式 (2) が全ての相・全ての場で成り立ち、窓に依らず、被積分関数は可積分 | 改良項が全て消えること、膨張の Ward の恒等式 |
| 源 回転の Ward の恒等式 (4) が構成の法則の束に入る | 接触項（点の重なり） |
| 初 (2) の線形性から、直線の上の正規化は一点に決まる | Minkowski の符号の規約との独立の比べ |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 応力の条件・窓・Ward の法則 | 源 | `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0、版 3456e5e）の `YM/Euclid/Stress.lean` 22〜24・57〜97 行、`YM/Spec/Closed.lean` 27〜43 行 |
| 一次元であること | 源 | `YM/Pert/Weak.lean` 68・82 行、`YM/Pert/FirstTarget.lean` 26〜39 行、`Construction.lean` 15〜31 行、`verification/declaration-usage.tsv` |
| 応力テンソルの特定・式 (13)・結合の目標 | 評 | 評価書 `yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）§7.1・§9.3・§9.4・§11 |
| 委員会の Ward の検査 | 評 | 評価の側の `submissions/openai-20261028/docs/examples/TranslationWard-20261028.lean` 12〜14・40・64・85・102・111〜122 行 |

**この章で使った語** — 応力テンソル、Ward の恒等式、窓の関数、流束、改良項、接触項。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：13-02 跡の異常と、自由でないこと — 応力テンソルの跡が、短距離でどう振る舞うか。

# 跡の異常と、自由でないこと

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§07 は本書の検討、§08 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 選んだ相 $\xi^*$ で、中心化した跡の場 $\Theta$ の二点関数が $r^8 \log^2(1/r)\,\langle \Theta(-\frac{r}{2}e_0)\Theta(\frac{r}{2}e_0)\rangle \to 3\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{g}/\pi^4$ と振る舞うこと、その係数が自由な曲率の二点関数と一ループの走りから出ること、そしてこの対数が「有限個の質量の自由場の多項式」という型の記述を除くことです。

**前提となる章** — 13-01 応力テンソル、8-05 相関と相、8-01 規約（$b_0$ と $C_{\mathfrak{g}}$）。漸近自由は 4-06、次元転移は 4-07。

**先に言うこと — 公開の言明が跡の場 $\Theta$ について言うのは、$F_4$ の元であることだけです。** $\Theta$ は存在量化（$\exists T$）の中の一つの元で、何の場かは書かれていません。それが応力テンソルの跡であることは、構成の定理の側と委員会の結合の目標の側に書かれています（§05）。また、この法則が除くのは自由場の記述の一つの型だけで、Gauss 場の合成による記述の全ては除きません。

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

この章の順序

1. 言明 — 跡の試験の四つの欄
2. 係数 3 dim g/π⁴ の由来：自由な二点関数と跡の異常の式
3. 短距離の法則の証明の骨子：格子の点で近づけ、単調性で挟む
4. 自由でないこと — 何が除かれ、何が除かれないか
5. 公開の言明の Θ は F_4 の一つの元：応力の跡であることの在りか
6. どの目標に入っている言明か

7. 本書の検討で見えていたこと
8. 読めていない所

---

01

## 言明 — 跡の試験の四つの欄

公開の階層 `Hierarchy` は、$F_4$ の元 `centeredTrace`（以下 $\Theta$）を一つ持ちます 源 （`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028` の `ChallengeSpec.lean` 48 行）。選んだ相 $\xi^*$（`selected`）で、時間の軸の上の二点 $\mp\frac{r}{2}e_0$ に $\Theta$ を置いた二点関数を

$$G_\Theta(r) = S^{\xi^*}\left(\Theta(-\tfrac{r}{2}e_0)\,\Theta(\tfrac{r}{2}e_0)\right) \tag{1}$$

とします（`timePair`・`traceTwo`、145〜149 行）。公開の性質 `nonfree` は、構造 `TraceTest` の四つの欄です 源 （168〜175 行）。

1. `centered`：再構成した真空で、どの Schwartz の試験関数 $f$ についても $\langle\Omega, \Phi_\Theta(f)\Omega\rangle = 0$。
2. `amplitudePositive`：$0 < 3\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{g}/\pi^4$。**理論を含まない定数の不等式**で、下流の証明で使えるように置かれたもの 評 （付録 A）。理論については何も言いません。
3. `shortDistance`：

$$\lim_{r\downarrow 0}\; r^8\log^2(1/r)\,G_\Theta(r) = \frac{3\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{g}}{\pi^4} \tag{2}$$

4. `excludes`：§04 の型の関数 $W$ のどれとも、0 の近くで一致しない。

(2) は $r\downarrow 0$ の**全体での極限**（フィルタ $\mathcal{N}[>]0$）で、部分列ではありません。長さは構成の固定した単位（段 0 の間隔、8-02）で測ります 評 （評価書の定理 7.1 の式 (16)）。$SU(2)$ では $\dim\mathfrak{g} = 3$ で、右辺は $9/\pi^4 \approx 0.0924$ です 初 。

評価書は、Euclid の共変性から全ての方向の形 $|x|^8\log^2(1/|x|)\,K_\Theta(x) \to 3\dim\mathfrak{g}/\pi^4$（$x\to 0$、$K_\Theta(x) = \mathrm{Re}\,S^{\xi^*}_{\Theta,\Theta}(x,0)$）も述べ、委員会の短距離の変換器がこれを示したと書きます 評 （式 (17)、§11）。

02

## 係数 3 dim g/π⁴ の由来

古典の Yang–Mills は四次元で共形不変で、応力テンソルの跡は 0 です。量子論では繰り込みのために跡が残り、跡の異常と呼ばれます。評価書 §7.2 は「滑らかな接続では跡は 0 なので、この結果は奇妙に見えるかもしれないが、$\Theta$ は繰り込みの結果として一般に 0 でない」と書きます[評]。

係数の値は、委員会の注釈つきの例 `LeadingTrace-20261028.lean` の §5（195〜236 行）が、摂動論との非形式的な比べとして計算しています[評]。筋を追います。

**(a) 自由な曲率の二点関数。** 正準に正規化したゲージ場で $Q = \sum_a \sum_{\mu,\nu} F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu}$（$\mu,\nu$ の両方の順を足す）と置きます。自由な場の強さの伝播関数は

$$\left\langle F^a_{\mu\nu}(x) F^b_{\rho\sigma}(0) \right\rangle = \delta^{ab} \, \frac{I_{\mu\rho} I_{\nu\sigma} - I_{\mu\sigma} I_{\nu\rho}}{\pi^2 |x|^4}, \qquad I_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - \frac{2 x_\mu x_\nu}{|x|^2} \tag{3}$$

です（Osborn–Petkou の式 (5.15)。例が引用）。Wick の定理で $\langle QQ \rangle$ の連結部分は交差の縮約二つの和で、反対称のテンソルのノルムの二乗 $\sum_{\mu\nu\rho\sigma} (I_{\mu\rho} I_{\nu\sigma} - I_{\mu\sigma} I_{\nu\rho})^2 = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ を使うと

$$\left\langle Q(x) Q(0) \right\rangle_{\text{free},c} = 2 \cdot 24 \cdot \frac{\dim \mathfrak{g}}{\pi^4 |x|^8} = \frac{48 \dim \mathfrak{g}}{\pi^4 |x|^8} \tag{4}$$

です[初]（$I$ は直交な鏡映の行列なので $\sum_{\mu\rho} I_{\mu\rho}^2 = 4$。二乗の和は $16 + 16 - 2 \cdot 4 = 24$。数値でも確かめました）。

**(b) 跡の異常の式。** $\beta(g) = dg/d\log M$（$M$ は繰り込みの尺度）について $\sum_a T_{aa} = \frac{\beta(g)}{2g} [Q]$ です（Zoller–Chetyrkin の式 (4.3) を、この $\beta(g)$ に翻訳したもの。例が引用）。一ループで $\beta(g) = -b_0 g^3$、走る結合は $g^2(1/|x|) \sim 1/(2 b_0 \ell)$（$\ell = \log(1/(\Lambda|x|))$）なので

$$\frac{\beta(g)}{2g} = -\frac{b_0 g^2}{2} \sim -\frac{1}{4\ell} \tag{5}$$

です[初]。

**(c) 組み合わせる。** (4) に (5) の二乗 $1/(16\ell^2)$ を掛けて

$$\left\langle \Theta(x) \Theta(0) \right\rangle_c \sim \frac{48}{16} \cdot \frac{\dim \mathfrak{g}}{\pi^4 |x|^8 \ell^2} = \frac{3 \dim \mathfrak{g}}{\pi^4 |x|^8 \ell^2} \tag{6}$$

です[初]。一点関数を引く有限の補正は主の特異性を変えず、$\Lambda$ を変えても $\ell$ は定数だけずれます。

読み方をまとめます。

- $|x|^{-8}$ は、次元 4 の場の二点関数の素朴な冪です。
- $\log^{-2}$ は、跡が $g^2 \cdot F^2$ の形で、$g^2$ が漸近自由で $1/\log$ のように小さくなることの痕跡です。
- **$b_0$ の数値は係数から消えます**。(5) の $b_0$ と走りの $b_0$ が打ち消すからです。だからこの法則だけでは $b_0 = 11C_{\mathfrak{g}}/(48\pi^2)$ の値は確かめられません。その値を決めるのは別の結果（13-03 の実効の結合、10-06 の走り）です 評 （評価書 §7.2、例 230〜236 行）。

Lean の側では、係数ははじめ $12\,(d_2^2/b_0^2)\dim\mathfrak{g}/\pi^4$ の形で書かれ、恒等式 $d_2 = -b_0/2$（`Trace.Over.force_b`）から $3\dim\mathfrak{g}/\pi^4$ に簡約されます 評 （例 170〜177 行、`coefficient_is_fixed` 261 行）。$12 \cdot \frac{1}{4} = 3$ です 初 。例は、この代数の簡約が実質の短距離の解析の最後の一歩にすぎない、と注意しています。

03

## 短距離の法則の証明の骨子

評価書の付録 A（`TraceTest.shortDistance` の項）は、証明の骨を次のように書きます 評 。$c(r) = r^8 \log^2(1/r)$ と置きます。

1. **格子の点で近づける**。ある列 $r_n \downarrow 0$ について、物理の距離 $r_n s$（$s$ は 1 に近い定数）を近くの格子の点で近似した距離 $r_n \delta_n(s)$（$\delta_n(s) \to s$）で、紫外の比べ・対数の正規化・自由な二点関数の計算から $c(r_n)\, G_\Theta(r_n\delta_n(s)) \to A/s^8$（$A = 3\dim\mathfrak{g}/\pi^4$）を示す。
2. **単調性**。正のスペクトル表示（鏡映正値性から来る）により、時間の軸の上の $G_\Theta$ は実で、非増加。
3. **挟む**。$s_- < 1 < s_+$ をとると、いずれ $G_\Theta(r_n\delta_n(s_+)) \le G_\Theta(r_n) \le G_\Theta(r_n\delta_n(s_-))$。$c(r_n)$ を掛けて $n \to \infty$、そのあと $s_\pm \to 1$。

委員会の例は、証明の中で使う部分列が結論を部分列の収束に弱めるわけではない、と注意しています 評 （`LeadingTrace-20261028.lean` 186〜193 行。`YM.Trace.Verse.outside` が、制御された部分列の解析を正の距離の全体での極限へ上げる）。読む道筋として例が挙げる宣言は `YM.Trace.wick_norm`（自由な二点の係数の Wick の計算）、`YM.Trace.Over.Scribe`（自由場と対数の時計との尺度の比べ）、`YM.Trace.Verse.tagline`、`YM.Trace.Verse.border` です。本書はこれらの中身を読んでいません。

04

## 自由でないこと — 何が除かれ、何が除かれないか

**除かれる型**。質量 $m \geq 0$、時間の階数 $q \geq 0$、連続で斉次（次数 $j \geq 0$）の実関数 $h$ をとり、核

$$K_{m,q,h}(r) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{E_m(p)^q \, h(p)}{2E_m(p)} \, e^{-rE_m(p)} \, d^3p, \qquad E_m(p) = \sqrt{m^2 + |p|^2} \tag{7}$$

を考えます 源 （`Mode` ・ `Mode.kernel`、`ChallengeSpec.lean` 152〜161 行） 評 （評価書 §7.3 の式 (18)）。これは質量 $m$ の自由場の二点関数（と、その微分）の時間方向の表示です。このような核の有限個の積の有限な複素一次結合

$$W(r) = \sum_{a=1}^{N} c_a \prod_{b=1}^{n_a} K_{m_{ab},q_{ab},h_{ab}}(r) \tag{8}$$

（`wickProfile`、165〜166 行）について、`excludes` は「どんな $W$ と $\delta > 0$ についても、ある $r \in (0, \delta)$ で $G_\Theta(r) \neq W(r)$」を言います 源 （175 行。評価書の言い方と同値 評 ）。(8) は、有限個の質量を持つ自由場の多項式の観測量（微分を含む）の二点関数を含みます。

**なぜ除かれるか** 評 （付録 A の `excludes` の項）。構成は、どの $W$ の実部も 0 の近くで

$$\operatorname{Re} W(r) = \sum_{\nu} a_\nu \, r^{\alpha_\nu} (\log r)^{k_\nu} + O(1), \qquad \alpha_\nu \in \mathbb{Z}, \; k_\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \tag{9}$$

と展開できることを示し、$r^8 \log^2(1/r) \operatorname{Re} W(r)$ の有限な極限は 0 しかありえないことを示します。もし $W = G_\Theta$ なら (2) の正の極限と矛盾します。直観は、(9) のどの項も $r^{-8}(\log r)^{-2}$ のようには振る舞わないことです 推 ：対数の冪は非負なので、$r^8 \log^2$ を掛けた各項は 0 に行くか、発散するかで、和の極限が有限ならそれは 0 です。$\log^{-2}$ の形の項は (9) には現れません。

**除かれないもの** 評 （評価書 §7.3、`LeadingTrace-20261028.lean` 337〜341 行）：

- Gauss 場の合成による記述の全て（評価書は「全てを除くものではない」と明記）。
- 一般化された自由場の全て。
- 固有の質量の尺度 $\Lambda$ の決定。全次数の摂動論との一致。真空の構造。

正の主係数は、跡の相関が恒等的に 0 であることを除きます。評価書は、とくに十分小さい $r$ で二点関数が 0 でなく、ある均した $\Phi_\Theta(f)$ が 0 でないことを導いています 評 。

構成の定理の側の強い形 `Headline.TraceExclusions`
（`YM/Nonperturbative/HeadlineSpec.lean` 84〜120 行）は、さらに `identified` （§05）・

`wick`・`maxwell`・`invariant` の欄を持ちます 源 （欄の名と型まで）。`wick` 以下の欄の意味は読んでいません。

05

## 公開の言明の Θ は F_4 の一つの元

ここが、この章で一番注意の要る所です。

**公開の言明だけを読むと、**`centeredTrace` は、公開の定理の存在量化 $\exists T$ で与えられる階層 $T$ の欄の一つで、言明がそれについて言うのは型が $F_4$（`Field 4`）であることだけです 源 （`ChallengeSpec.lean` 48・186〜188 行）。公開の性質 `nonfree` が言うのは「選んだ相で中心化された、ある次数 4 の場 Θ が在って、その二点関数が (2) と `excludes` を満たす」ことです。それが応力テンソルの跡であることは、公開の言明には書かれていません。

**応力の跡であることの在りか**は二つです。

- **構成の側**。公開の階層を作る定義で `centeredTrace := TraceExtension.center F`（`HierarchyBridge.lean` 42 行） 源 。構成の定理の結論 `Headline.TraceExclusions` の欄 `identified`（`HeadlineSpec.lean` 87〜91 行）は、跡の場の作用素が「応力テンソル `F.sector.energy` の跡の場から、選んだ相での一点関数 × 恒等を引いたもの」に等しいことを言います 源 。評価書の式 (14) $\Theta = \sum_\mu T_{\mu\mu} - S^{\xi^*}\left(\sum_\mu T_{\mu\mu}\right)\mathbf{1}$ はこれです 評 。
- **委員会の結合の目標**。短距離の検査（評価書の [A4]）は、Ward の恒等式で正規化を確かめたのと同じ応力テンソルの跡を、同じ選んだ相で使うことを確かめています 評 （評価書 §9.4・§11。例 `LeadingTrace-20261028.lean` の `centering_uses_the_phase_mean` 61 行、`source_and_OS_fields_agree` 97 行）。

評価書 §2 は「構成は応力テンソルの跡 `centeredTrace` を定義し、その性質を `nonfree` で示す」と書きます。これは構成の側を含めた読みで、**公開の言明の字面だけからは「応力の跡」は出てこない**、という区別を本書では保ちます。まとめると、公開の定理が言うのは「ある次数 4 の場について (2) が成り立つ」ことで、その場を応力テンソルの跡と同一視するのは構成の定理と委員会の結合の目標です。

選んだ相 $\xi^*$ の選び方にも条件が入ります。評価書の付録 A は、基底状態の空間が一次元で、跡の場のある極限の性質を満たす相の集合が、相の測度（8-05 の (4) の確率測度）について測度 1 であることを示し、その中から $\xi^*$ を選ぶ、と書きます 評 （`Hierarchy.selected` の項）。

06

### どの目標に入っている言明か

| 目標 | 在るもの |
|---|---|
| 公開の定理 `JointExistence` | `TraceTest` の四つの欄。Θ について言うのは $F_4$ の元であることだけ 源 |
| 構成の定理 `constructed` | `Headline.TraceExclusions`（`identified`・`shortDistance`・`positive`・`wick`・`maxwell`・`invariant` を含む）源 （`Construction.lean` 28 行） |
| 委員会の結合の目標 | 短距離の検査 [A4]（全ての方向の形 (17))、跡の場の階層についての OS の公理の独立の検査 [A1]、零でない格子の極限 [A5]（8-05 の (5)）評 |

委員会の OS の公理の独立の検査は、**Θ だけの階層**について行われています（評価書 §10・§10.1)。全ての場についてではありません 評 。

07

## 本書の検討で見えていたこと

本書の研究と Lean には、跡の異常も、短距離の法則も、自由場の除外も**ありません**。

- 本書の非自明性の観点は赤外の側（渦の比 $\theta_M$ の符号と床、Polyakov ループの対、面の平均の非退化）にありました（第 21 部)。公開された構成の非自明性は紫外の側（漸近自由の対数）です。二つは補い合う側に在ります 推 。
- 本書の渦の比 $\theta_M$ の $\theta$ は、跡の場 Θ とは無関係の記号です。
- 「自由でないことを跡の異常の対数で言う」という発想は、本書に無かったものです（14-05)。

08

## 読めていない所

- (2) の証明の本体（`wick_norm`・`Scribe`・`tagline`・`border`・`outside`)。
- (9) の展開の証明（`YM.TraceExtension.Wick.real_profile` ほか)。
- `TraceExclusions` の `wick`・`maxwell`・`invariant` の欄の意味（`HeadlineSpec.lean` 96〜120 行)。
- 選んだ相の集合が測度 1 であることの証明（`YM.OS.Cluster.lifts` ほか)。
- (3) の伝播関数と (b) の跡の異常の式は、委員会の例が引く文献の式で、本書は原典を確かめていません（出典の表で書誌のみ)。

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 公開の `nonfree` は、選んだ相で中心化された $F_4$ の元 $\Theta$ について、全体の極限 (2) と自由場の型の除外を言う | 公開の言明だけからの「$\Theta$ は応力の跡」 |
| 源 応力の跡であることは構成の定理（`identified`）に、評 同じ応力・同じ相であることは委員会の結合の目標に在る | OS の独立の検査が全ての場について在ること（$\Theta$ の階層だけ） |
| 初 係数 $48/16 = 3$ の勘定（自由な二点関数 × 跡の異常の一ループの係数の二乗）。$b_0$ は消える | この法則による $b_0$ の値の確かめ |
| 評 有限個の質量の自由場の多項式の二点関数の型は除かれる | Gauss 場の合成・一般化された自由場の全ての除外、固有の尺度、全次数の摂動との一致 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 跡の試験・核・`wickProfile` | 源 | `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0、版 3456e5e）の `ChallengeSpec.lean` 48・145〜175 行 |
| 応力の跡との同一視 | 源 | `HierarchyBridge.lean` 42 行、`YM/Nonperturbative/HeadlineSpec.lean` 84〜120 行、`Construction.lean` 28 行 |
| 定理 7.1、式 (14)〜(18)、自由場の除外、証明の骨子、選んだ相 | 評 | 評価書 `yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）§2・§7.2・§7.3・§9.4・§10・§11・付録 A |
| 係数の計算と読む道筋 | 評 | 評価の側 `yang-mills-group/YM`・版 55ba9fc の `submissions/openai-20261028/docs/examples/LeadingTrace-20261028.lean` 61・97・170〜236・261・337〜341 行 |
| 自由な場の強さの伝播関数（式 (5.15)） | 典 | H. Osborn, A. C. Petkou, Ann. Phys. 231 (1994) 311、arXiv:hep-th/9307010 — 書誌のみ（未確認。委員会の例が引用） |
| 跡の異常の式（式 (4.3)） | 典 | M. F. Zoller, K. G. Chetyrkin, JHEP 12 (2012) 119、arXiv:1209.1516 — 書誌のみ（未確認。委員会の例が引用） |
| 位置空間の繰り込み群で改良した計算 | 典 | M. Bochicchio, S. P. Muscinelli, JHEP 08 (2013) 064、arXiv:1304.6409 — 書誌のみ（未確認。委員会の例が引用） |
| 一ループの係数 | 典 | D. J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1343；H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1346 |
| 24 と 48/16 の勘定 | 初 | 本書の検討の数値の記録（`numcheck.py`。無作為の鏡映の行列で (4) の二乗の和を数えた） |

**この章で使った語** — 跡の異常、中心化した跡、短距離の法則、選んだ相、自由場の除外、Wick の積。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：13-03 短距離の自由な Maxwell 場 — 短距離で、理論が自由な Maxwell 場にどう近づくか。

# 短距離の自由な Maxwell 場

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§07 は本書の検討、§08 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 漸近自由が二つの形で現れることです。一つは有効作用から読む結合 $g_W(r)$ が $\log(1/r)\, g_W(r)^2 \to 1/(2b_0)$ と振る舞うこと（評価書の定理 7.2）。もう一つは、ある共通の列 $r_k \downarrow 0$ に沿って相関を尺度で縮めると、$\dim \mathfrak{g}$ 個の独立な自由 Maxwell 場の相関に、全ての階の微分まで近づくことです。

**前提となる章** — 8-02（段と間隔）、13-01（応力テンソル）。「段 m の結合」の定義は 10-01、裸の結合の走りは 10-06。漸近自由の導入は 4-06。

**先に言うこと — 評価書は定理 7.2（実効の結合）の Lean の名を挙げていません。**近い内容の言明は三か所に在ります（§03）：依存の外の `Running.ratio`、依存の中で跡の解析の途中の段として使われる `wilson_link`（評価書の言明に字句が近い）、見出しの定理 `YM.Pert.Asymptotics.comparison`（切断つきの段の結合の走りで、$g_W$ とは別の量）。$g_W$ の形の言明は、公開の定理・構成の定理の結論には残りません。委員会の結合の目標の検査の一覧にもありません。Maxwell 場との比べは構成の定理の結論に入っています。どちらも、摂動論の全ての次数との一致は言っていません。

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

この章の順序

1. 言明 — 評価書 §7.4 の三つの結果
2. 実効の結合の定義と、走りの出し方
3. 実効の結合の Lean の在りかと目標：依存の外と中
4. 第二の結合 — 連続の相関で測る
5. 自由な Maxwell 場との比べ：共通の列に沿う、全ての階の微分

6. 三つの短距離の結果の違い
7. 本書の検討で見えていたこと
8. 読めていない所

---

01

## 言明 — 評価書 §7.4 の三つの結果

評価書 §7.4「漸近自由と摂動論との一致」は、三つの結果を挙げます [評]。

1. **実効の結合（定理 7.2）**。長さ $r$ より細かい揺らぎを積分すると、有効作用の曲率の二乗の項の係数が変わる。固定した正規化でのその逆平方根が走る結合である。提出物は、定理 4.1 の裸の結合の Wilson の理論の族から始め、$r$ を下回る最初の格子間隔までブロックし、初めの切断を 0 にし、体積の部分列の極限を取ったあとで、正規化した作用の係数の逆平方根を $g_W(r)$ と定める。小さい $r$ と、選んだ任意の体積の部分列の極限について $g_W(r) > 0$ で、

$$\log(1/r)\, g_W(r)^2 \;\longrightarrow\; \frac{1}{2b_0} \qquad (r \downarrow 0), \qquad b_0 = \frac{11 C_{\mathfrak{g}}}{48\pi^2} = \frac{s}{2} \tag{1}$$

   （この章で $b_0$ は一ループの係数で、$2b_0 = s$ は一ループの傾きです。ブロックの辺 $b_i$ の $i = 0$ ではありません。） $g_W(r)$ が体積の部分列の選び方に依らないことは示されていない。
2. **第二の結合**。点の離れた連続の相関で結合を定め、それと $g_W$ の比が $r \downarrow 0$ で 1 に近づく。走りの法則は有効作用だけでなく連続の観測量にも見える。
3. **自由な Maxwell 場との比べ**。一つの共通の列 $r_k \downarrow 0$ に沿って、平均した $n$ 点の応力テンソルの相関に $r_k^{4n}$ を掛けて $r_k x_1, \dots, r_k x_n$ で評価したものは、$\dim \mathfrak{g}$ 個の独立な自由 Maxwell 場の相関に近づく。固定した任意の階の微分まで、点の重なりを避けるコンパクト集合の上で一様に。Maxwell 場とは、$\mathfrak{g}$ 値の 1-形式の Gauss の自由場の外微分として得た Gauss の 2-形式の曲率である。

評価書は、Maxwell 場との比べは混ざった理論で特定の列に沿うもの、定理 7.1（跡の法則、13-02）と 7.2 は $r \to 0$ の任意の近づき方で、7.1 は選んだ相についてのもの、と区別し、合わせて「主の短距離の証拠」になると書きます [評]。

02

## 実効の結合の定義と、走りの出し方

ここでは、依存の中に在る形（§03 の `Pilot.wilson_link`）で定義を読みます 源 （`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028` の `YM/TraceExtension/Atlas/Sink.lean`、`YM/TraceExtension/Terrace/Dusk.lean`）。

**段 $i$ の極限の結合**。$\beta(N,p,i)$ は切断 $N$・体積 $p$ の軌道の段 $i$ の結合（有効作用の表示の中の $F^2$ の係数。10-01）です。$(N,p)$ の上の超フィルタ $\mathcal{L}$ を一つとり（体積の部分列の極限の取り方に合わせたもの）、その極限

$$Z_\beta(i) = \lim_{\mathcal{L}} \beta(N,p,i) \tag{2}$$

を段ごとに取ります（`Arch`・`steep`、`Dusk.lean` 65〜72 行）。各段で $Z_\beta(i) \in [\hat\beta_i/2,\, 2\hat\beta_i]$（`holds`、79 行）、$\hat\beta_i = \bar\beta + 2b_0 \log(1/a_i)$ は一ループの走り（8-02）で、さらに $Z_\beta(i)/\hat\beta_i \to 1$（`gamut`、89 行）です。

**$r$ の直下の段**。$i(r)$ を $a_i < r$ となる最初の段とします（`glen`、`Sink.lean` 14 行）。実効の結合は

$$g_W(r) = Z_\beta\big(i(r)\big)^{-1/2} \tag{3}$$

です（`wilson`、44 行）。

**走り**。二つの極限を掛け合わせます 源 （言明） 初 （組み合わせ）。

- `pace_log`（21 行）：$\log(1/r)/\hat\beta_{i(r)} \to 1/(2b_0)$。間隔は $a_{i(r)} < r \le a_{i(r)-1}$ で、証明は暦の追加の条件 `PostT` の欄 `bloom`（$b_i \le \log\hat\beta_i$、`YM/TraceExtension/Terrace/Base.lean` 29〜34 行）と $\hat\beta$ の単調性を使い、$\log(1/r)$ と $\log(1/a_{i(r)})$ の差を $\log\hat\beta$ の程度に抑えます 源 （`Sink.lean` 21〜41 行の `H.bloom`・`monoBeta`）。
- `gamut`：$Z_\beta(i)/\hat\beta_i \to 1$。

割り算で $\log(1/r)\, g_W(r)^2 = \log(1/r)/Z_\beta(i(r)) \to 1/(2b_0)$ です（`wilson_link`、50 行。結論の型 `Coupling`、45〜47 行は「いずれ正」と「$\log(1/r)\,u(r)^2 \to 1/(\text{傾き})$」の二つ）。さらに $g_W(r) \to 0$（`Coupling.conforms`、55 行）。`wilson_link` の仮定は、$G$ が単純、暦の条件 `PostT`、超フィルタの極限 `steep`、超フィルタが抽出の順に従うこと（$\mathcal{L} \le X.\mathrm{fuse}$）です 源 。`PostT` は跡の解析の側で課す条件です。

読み方の注意を二つ書きます。

- $Z_\beta(i)$ は超フィルタ $\mathcal{L}$ に依ります。評価書の「部分列の選び方に依らないことは示されていない」はこのことです。
- $\beta(N,p,i)$ は有効作用の**表示の中の係数**で、測度だけから読める不変量ではありません（10-01）。だから $g_W$ も、構成の表示の選び方を通して定義された量です。

03

## 実効の結合の Lean の在りかと目標

評価書は定理 7.2 の Lean の名を挙げていません。近い内容の言明が三か所に在ります 源 。評価書の言明（$r \downarrow 0$、$r$ を下回る最初の間隔、いずれ正）に字句が近いのは `wilson_link` です 推 。

| 宣言 | 中身 | 検証の記録（`verification/declaration-usag` |
|---|---|---|
| `YM.PertExtension.Running.ratio`（`YM/PertExtension/Running.lean` 145 行） | 比の形 $g(\mu)\cdot(2b_0\log\mu)^{1/2}\to 1$（$\mu\to\infty$）。$g$ は `gLedger`（130 行）で、段の極限 $B$ の、$\log\mu\le\log(1/a_m)$（$a_m\le 1/\mu$）となる最初の段での値の逆平方根。正であることは全ての $\mu$ で（`ledger_positive`、139 行） | **outside**（依存の外）。結合の部分（`isLimit` `discrete` 66・`choose` 86・`band` 133・`gLe` 130・`ledger_positive` 139・`ratio`・`vanis` 165 など）は全て outside。この module で u のは、抽出の `extraction`（40 行）と `clock` 行）、非公開の補助 `cut`（24 行）・`compact_d`（27 行） |
| `YM.Trace.Pilot.wilson_link`（`YM/TraceExtension/Atlas/Sink.lean` 50 行） | $\log(1/r)\,g_W(r)^2\to 1/(2b_0)$（$r\downarrow 0$）、いずれ正。$g_W$ は (3)。仮定に `PostT`（$b_i\le\log\hat\beta_i$ など） | used。最初に見つかった見出しは `continuum_with_position_tests`、直接の使い `crest_ready`。跡の解析の途中の段 |
| `YM.Pert.Asymptotics.comparison`（`YM/Pert/Asymptotics/RawAxis.lean` 36 行） | $N_i\ge i$（いずれ）と任意の体積の列 $k_i$ について、切断つきの段 $i$ の結合 $\beta(N_i,k_i,i)^{-1/2}$（`regulatorRun`、35 行）に $\sqrt{\log(1/a_i)}$ を掛けたものが $(2b_0)^{-1/2}$ に近づく。極限を取る前の、段の目盛りでの走りで、$g_W(r)$ とは別の量 | **headline**（見出しの定理そのもの） |

`Running.lean` の冒頭の説明文は、この module の結合が「表示された作用から読む補助の観察」で、主の同値は「位置の結合を特定しない」「図形の剰余を評価しない」と書いていま

す（6〜10 行）。

`wilson_link` の結論は、跡の短距離の解析の途中の構造 `Crest` の欄 `charts`（`YM/TraceExtension/Belfry.lean` 20〜22 行）と、比べの構造 `FieldComparison` の欄 `wilson`（`YM/TraceExtension/Endpoint.lean` 50 行）に現れます 源 。跡の法則（13-02）の証明が、結合の走りを途中の段として使っている、と読めます 推 。ただし、これらの構造から公開の跡の試験へ移るとき（`Integration.ManuscriptTraceTests.of_result`）に、比べの欄は落とされています 源 （`YM/Integration/ManuscriptTraceTests.lean` 62〜89 行）。

**目標についてのまとめ。**

- 公開の定理 `JointExistence`：実効の結合は入っていない。在るのは裸の結合の走り `WilsonRegularity.running`（8-02 の (1)）だけ 源 。
- 構成の定理 `constructed`：結論の欄に $g_W$ の形の言明は無い 源 （`Construction.lean` 15〜31 行）。結論の `Independent.Core` は欄 `trace` に跡の試験 `ManuscriptTraceTests.Tests` を持ち（`YM/Independent/Core.lean` 18〜22 行）、`FieldComparison` を含む `Trace.Target.Result`（`YM/TraceExtension/Endpoint.lean` 99〜120 行）は `of_result` で落ちます。`continuum_with_position_tests` の結論も同じ `Core` を持ちます（`YM/Nonperturbative/Continuum.lean` 28〜41 行） 源 。
- 委員会の結合の目標：評価書 §9.3 の検査の一覧に結合の検査は無い 評 。委員会の例は、跡の検査とその例が定理 7.2 の独立の検査を加えない、と書いています 評 （`LeadingTrace-20261028.lean` 233〜236 行）。
- 見出しの定理：段の結合の走り `YM.Pert.Asymptotics.comparison` は見出しの定理そのものです。$g_W$ の形では、`Running.ratio` は依存の外、`wilson_link` は依存の中の途中の段です 源 。

04

## 第二の結合 — 連続の相関で測る

評価書によれば、第二の結合は点の離れた連続の相関で定めます 評 ：スカラーの二点の微分と、積分したテンソル–スカラー–スカラーの相関を自由な値に正規化し、テンソル–スカラーの相関の微分で結合を測る。提出物は、この結合と $g_W$ の比が $r \downarrow 0$ で 1 に近づくことを示す。

Lean の側では、この結合は `Sundial.glo`（`YM/TraceExtension/Sundial/Noon.lean` 28 行、used）で、比が 1 に近づくことは `FieldComparison` の欄 `calibrationX`（`Endpoint.lean` 49 行）です 源 。`FieldComparison` は他に、係数の一ループの部分が

$-b_0/2$ であること（`coefficient_O`・`traced_O`：$d(r) - d_2\, g^2 = O(g^4)$ の形）を欄に持ちます。中身は読んでいません。

05

## 自由な Maxwell 場との比べ

構成の定理の結論には `Pert.FirstExtension F X` が入っています 源 （`Construction.lean` 31 行）。$X$ は相関の表 $S$ の上の尺度の列（`Climb.Scaling`）で、共通の列 $r_k = X.r\, k \downarrow 0$ を持ちます。構造 `FirstExtension`（`YM/Pert/FirstTarget.lean` 26〜39 行）の欄は次のとおりです。

- `jets`（29〜34 行）：全ての点の数 $n$、微分の階 $j$、自由な表の札の並び、どの位置が応力かの印とその添字、点の重なりを避けるコンパクト集合 $K$、$\varepsilon > 0$ について、十分大きい $k$ で、$K$ の全ての点で

$$\left\| D^j \left[ z \mapsto \widetilde{S}_k(r_k z) \right](x) - D^j S_{\mathrm{free}}(x) \right\| \le \varepsilon \tag{4}$$

  ここで $\widetilde{S}_k$ は尺度を合わせた構成の相関（`scaledPhysical`）、$S_{\mathrm{free}}$ は自由な表の相関で、応力の位置には自由な Maxwell 場の応力 `freeStress` $= -$ `Free.original`（16 行）を置く。
- `ranks`（35〜36 行）：応力の候補の直線が一次元（13-01）。
- `derivatives`・`rotations`（37〜39 行）：場の微分と回転の作用が、尺度の列に沿って自由場のものに近づく。

(4) は「短距離で、構成の理論が $\dim \mathfrak{g}$ 個の独立な自由 Maxwell 場に見える」ことの、任意の階の微分までの形です。説明文は、これが混ざった理論（階層）の相関だけについての最初の到達点で、「固定した札の増幅や、合わせた結合についての評価はまだ含まない」と書いています（4〜5・21〜25 行） 源 。応力でない位置の場は、尺度の列ごとの枠 `X.U k` で測ります。評価書の「応力テンソルでない場との比べも含む」はこの部分と読めます 推 。

尺度の因子 $r_k^{4n}$（評価書）が Lean のどこで入るかは、`scaledPhysical`（`YM/Pert/Lifted.lean` 81 行）の中と推しますが、確かめていません。

宣言 `FirstExtension.jets` の検証の記録は used（最初の見出しは `parityEndpoint`）、`ranks` の射影は outside ですが、どちらも構成の定理の結論の構造の欄なので、言明としては構成の定理に入っています 源 。

06

## 三つの短距離の結果の違い

| | 跡の法則（13-02） | 実効の結合 (1) | Maxwell 場との比べ (4) |
|---|---|---|---|
| $r \to 0$ の取り方 | 全体の極限 | 全体の極限 | 一つの共通の列 $r_k$ |
| 状態 | 選んだ相 $\xi^{*}$ | 体積の部分列の極限（超フィルタ） | 混ざった理論 |
| 測るもの | 中心化した跡の二点関数 | 有効作用の表示の係数 | 相関（応力と他の場）、全ての階の微分 |
| $b_0$ の値 | 係数から消える | $1/(2b_0)$ に現れる | 現れない（自由場との比べ） |
| 目標 | 公開（$\Theta$ は $F_4$ の一つの元とだけ）・構成・委員会 | $g_W$ の形はどの結論にも無い（見出しの定理は段の結合の走り `comparison`） | 構成の定理の結論 |

三つとも、**摂動論の全ての次数との一致は主張しません** 評 （評価書 §7.5 の「全次数の摂動との一致は未証明」）。二ループの係数、$\log\log$ の補正も扱っていません（10-06）。

07

## 本書の検討で見えていたこと

本書には、実効の結合の定理も、自由な Maxwell 場との比べも**ありません**。

- 本書は、一段のブロックでの結合の移りを数値で測り、向きは漸近自由と合い、大きさは $\beta$ の単位の一ループの値 $\frac{11}{3\pi^2}\ln 2 \approx 0.2575$ の 2.9〜4.4 倍、と記録しました（15-01、札は読）。公開された構成の傾き $11C_{\mathfrak{g}}/(24\pi^2)$ に $\ln 2$ を掛けた値が、この一ループの値です（8-01 §04）。
- 本書の「合わせ」は、測度だけで定義できる観測量（粗い面の期待値、渦の比）を固定の値に合わせる形でした。公開された構成の結合は表示の中の係数で、(3) はそれを実効の結合として読む形です。どちらが連続の極限で意味を持つかの比べは 14-03 です。

08

## 読めていない所

- `wilson_link` から存在の定理までの鎖の全体（`crest_ready` の先）。`PostT` の他の欄（`cropK`・`share`・`purse`・`jig`）の意味。
- 第二の結合 `glo` の定義（`lampX`）と、`calibrationX` の証明。
- `scaledPhysical` と尺度の因子、自由な表 `freeTable` の作り方、枠 `X.U k` の意味。

- `Running.lean` の極限 $B$（`isLimit` の順序つきの抽出 `f.fuse`）が体積の極限まで含むか。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 $g_W(r)$ を (2)(3) で定めると $\log(1/r)\, g_W(r)^2 \to 1/(2b_0)$（`wilson_link`） | $g_W$ が体積の部分列に依らないこと、測度だけで定まること |
| 源 `Running.ratio` は依存の外、`wilson_link` は依存の中の途中の段。$g_W$ の形の言明は公開・構成の結論に無い（見出しの `comparison` は切断つきの段の結合の走りで別の量） | `wilson_link` から存在の定理までの鎖の全体 |
| 源 構成の定理の結論に、共通の列に沿う自由な Maxwell 場との比べ（全ての階の微分、コンパクト集合で一様） | 全ての $r \to 0$ での比べ、選んだ相での比べ |
| 評 第二の結合と $g_W$ の比は 1 に近づく | 全次数の摂動論との一致、二ループの係数 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 実効の結合（依存の中） | 源 | `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0、版 3456e5e）の `YM/TraceExtension/Atlas/Sink.lean` 14・21・44〜55 行、`YM/TraceExtension/Terrace/Dusk.lean` 65〜89 行、`YM/TraceExtension/Belfry.lean` 16〜22 行 |
| 実効の結合（依存の外） | 源 | `YM/PertExtension/Running.lean` 6〜10・40・59・66・130・145・165 行、`verification/declaration-usage.tsv` |
| 第二の結合・比べの構造 | 源 | `YM/TraceExtension/Sundial/Noon.lean` 28 行、`YM/TraceExtension/Endpoint.lean` 36〜64 行、`YM/Integration/ManuscriptTraceTests.lean` 62〜89 行 |
| Maxwell 場との比べ | 源 | `YM/Pert/FirstTarget.lean` 4〜39 行、`Construction.lean` 15〜31 行 |
| 定理 7.2、第二の結合、Maxwell の比べ、摂動との一致 | 評 | 評価書 `yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）§7.4・§7.5、評価の側 `yang-mills-group/YM`・版 55ba9fc の `submissions/openai-20261028/docs/examples/LeadingTrace-20261028.lean` 230〜236 行 |

**この章で使った語** — 実効の結合、走る結合、超フィルタの極限、自由な Maxwell 場、尺度の列、全ての階の微分。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：13-04 演算子積展開と接触項 ― 点が近づくときの相関の展開と、点の重なりへの延長。

# 演算子積展開と接触項

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§07 は本書の検討、§08 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 点 $o$ の近くに集めた場の積の相関を、$o$ に置いた単一の場の相関の一次結合で近似する展開 — 演算子積展開 — が、公開の言明に係数と残りの冪の上界として入っていることです。残りの上界は混ざった理論と全ての相に一様で、係数は傍観者・状態・切る次数に依りません。点の重なりまで延ばした分布は「在る」ことだけが言われています。

**前提となる章** — 8-03（場の空間と次数）、8-05（相関と相）、13-02（短距離の対数）。

**先に言うこと** — $D$ は場の次数で、ループの次数ではありません。$D \to \infty$ での収束、係数が摂動論の値と一致すること、係数が体積の部分列の選び方に依らないことは言われていません。共通の係数から相が等しいことも出ません。

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

この章の順序

1. 言明 — 配置の条件と二つの上界
2. 冪の読み方：次元の勘定と、ε の損
3. 係数とチャンネルの作り方
4. 状態への一様性と、共通の係数から言えないこと
5. 接触項の延長 — 存在だけ
6. どの目標に入っている言明か・言っていないこと
7. 本書の検討で見えていたこと
8. 読めていない所

01

## 言明 — 配置の条件と二つの上界

**配置**。展開の中心 $o \in \mathbb{R}^4$、尺度 $r > 0$、定数 $M \geq 0$、$\eta, c > 0$ をとります。入力の場 $A_1, \dots, A_n$（次数 $d_i$、合計の次数 $w = \sum d_i$）を点 $x_i$ に、傍観者の場 $B_1, \dots, B_\ell$ を点 $y_\ell$ に置き、次を課します 源 （`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028` の `ChallengeSpec.lean`：`Within` 65〜66 行、`Clear` 67〜68 行）評 （付録 A の `Properties.ope`）。

$$\|x_i - o\| \leq M r, \qquad \|x_i - x_j\| \geq \eta r \ (i \neq j), \qquad \|y_\ell - o\| \geq c, \qquad \|y_\ell - y_m\| \geq c \ (\ell \neq m) \tag{1}$$

入力の場は $o$ のまわりに大きさ $r$ で集まり、互いの形は崩れず（点どうしは $\eta r$ 以上離れる）、傍観者は $o$ からも互いからも $c$ 以上離れています。

**出力の場**。次数 $j$ ごとに有限のチャンネルの集合と、各チャンネル $\alpha = (j, i)$ の出力の場 $O_\alpha \in F_j$（`actor`）、係数 $c_\alpha(A; x, o) \in \mathbb{C}$（`coefficient`）が、階層 $T$ の欄として在ります（43〜47 行）。

**二つの上界**。構造 `OperatorProductExpansion`（70〜80 行）は次を言います 源 。全ての $\varepsilon > 0$ について、十分小さい全ての $r > 0$ で、

$$|c_\alpha(A; x, o)| \leq r^{\,d_\alpha - w - \varepsilon} \qquad \text{(配置は (1) の最初の二つ)} \tag{2}$$

$$\Big| S^s\Big(\prod_i A_i(x_i)\, B\Big) - \sum_{d_\alpha \leq D} c_\alpha(A; x, o)\, S^s\big(O_\alpha(o)\, B\big) \Big| \leq r^{\,D+1-w-\varepsilon} \qquad \text{(配置は (1) の四つ全て)} \tag{3}$$

(3) は全ての切る次数 $D$ について、$s$ は混ざった理論 $S^{\mathrm{mix}}$ か任意の相 $S^\xi$ です。$B = \prod_\ell B_\ell(y_\ell)$ です。評価書は $o = 0$、$x_i = r\tilde{x}_i$ と置いた形 (20) で書きます 評 （§ 7.5）。

公開の言明の欄 `ope` がこの構造です（`Properties`、180 行）。構成の定理は、さらに入れ子の OPE（`Headline.NestedOPE`、`YM/Nonperturbative/HeadlineSpec.lean` 128〜138 行。木の形に分けた集まりについての係数と残りの評価）を結論に持ちます 源 （`Construction.lean` 28 行）。評価書は「追加の分離と尺度の条件の下で入れ子の展開が成り立つ」と書きます 評 。

02

## 冪の読み方

(2)(3) の冪は、工学的な次元の勘定と同じ形です 推 。もし次数 $d$ の場がちょうど長さの $-d$ 乗で尺度が変わるなら、$\prod A_i(x_i)$ は長さの $-w$ 乗、$O_\alpha(o)$ は $-d_\alpha$ 乗で、係数は $r^{d_\alpha - w}$ の大き

さになります。次数 $D$ までを足した残りは、次の次数 $D+1$ の項の大きさ $r^{D+1-w}$ です。

任意に小さい損 $\varepsilon > 0$ は、対数のような振る舞いを吸うためのものです 評 （委員会の例 `CommonOPE-20261028.lean` 48〜52 行）。漸近自由の理論では、場の実際の尺度は工学的な次元から log の冪だけずれます（13-02 の $\log^{-2}$ がその例）。冪の上界は log の冪を区別しないので、$\varepsilon$ の損で足ります。委員会の例は、前の因子 1 は半径を縮めて得たもので、半径の陽な値や摂動の係数の計算ではない、と注意しています。

次数 $j$ が入力の合計の次数 $w$ より小さいチャンネル（たとえば恒等の場 $j = 0$）では、(2) の冪は負で、係数は $r \to 0$ で大きくなってよいことになります。これは二つの場が近づくと相関が特異になることの、展開の側の表現です。

## 03 係数とチャンネルの作り方

評価書の付録 A は、構成の作り方を次のように書きます 評 。

- **チャンネル**（`Channel`）：$F_d = F_{d-1} \oplus E_d$ と分け、$E_d$ の基底（各元は共役で不変）に番号を振る。次数 $d$ のチャンネルの数は $\dim E_d$。出力の場 `actor` はその基底の元。
- **係数**（`coefficient`）：入力の場と、追加の試験の挿入との有限個の相関から $F_d$ の場を作り、四次元の直交群で平均し、共役について対称化し、次数の低い成分を除き、基底 $O_{(d,i)}$ での座標を取る。

係数は入力の場と位置だけから作られ、傍観者・状態・切る次数を引数に持ちません。これは型の上で読めます 源 （`coefficient` の型、`ChallengeSpec.lean` 46〜47 行：引数は入力の札の並び、出力の次数とチャンネル、入力の位置、中心）。

委員会の例は、チャンネルの座標を足し戻すと係数の場に戻ること（`channel_assembly`、128 行）、一つの挿入の展開がその場自身を返すこと（`single_insertion_recovered`、133 行）を、辞書の確かめとして示しています 評 。相互作用する多点の OPE の値の計算ではない、と例は書いています。

## 04 状態への一様性と、共通の係数から言えないこと

**一様性**。(3) の Lean の形では、「十分小さい $r$」の量化（$\forall^{f} r$）の**内側**に状態 $s$ の全称が在ります 源 （`ChallengeSpec.lean` 76 行）。つまり半径は状態を聞く前に決まり、残りの上界は混ざった理論と全ての相に一様です。委員会の例は、この順を半径 $\rho$ の形で明示しています 評

（`remainder_uniform_in_state`、79 行。「$\rho$ は $s$ と全ての許される位置の前に選ばれる。札・$D$・幾何の定数には依ってよいが、相には依らない」）。

**共通の係数から相の一致は出ない。**二つの状態 $s, t$ の展開を引くと、係数は同じなので

$$\left| \left(S^{s} - S^{t}\right)\left(\prod A_i\, B\right) - \sum_{d_\alpha \le D} c_\alpha \left(S^{s} - S^{t}\right)\left(O_\alpha(o)\, B\right) \right| \le 2\, r^{\,D+1-w-\varepsilon} \tag{4}$$

です 初 （三角不等式） 評 （`difference_of_states`、99 行）。差は出力の場の相関の差で展開され、それが 0 である理由はありません。傍観者が無いときを考えると分かりやすい、と評価書は書きます：係数が共通でも、一点関数 $S^{s}(O_\alpha(o))$ は相ごとに違ってよいからです 評 （§ 7.5）。

05

## 接触項の延長 — 存在だけ

8-05 の相関は、点が互いに異なる所だけで定まった関数です。OPE を使うと、点の重なりを含む試験関数の上の分布へ延ばせます。公開の名前空間に置かれた定義 `Hierarchy.Contacts`（公開の定理の結論には無い）は次の形です 源 （`ContactSpec.lean` 12〜15 行）。

$$\forall s,\ n,\ v \quad \exists\, D :\ C_c^{\infty}\!\left((\mathbb{R}^4)^n\right) \to \mathbb{C} \ \text{連続線形}, \quad \operatorname{supp} f \subset \{x_i \neq x_j\} \ \Rightarrow\ D(f) = \int f(x)\, S^{s}(\varphi_v(x))\,dx \tag{5}$$

つまり、点の離れた所で元の相関と一致する分布が**在る**ことだけを言います。構成は `contactDistribution`（`ContactBridge.lean` 14 行）でこれを与え、構成の定理の結論に `(hierarchy F Q).Contacts` が入っています 源 （`Construction.lean` 22 行）。

延長は一意ではありえません：対角線の上に台を持つ分布（デルタ関数とその微分）を足しても、点の離れた所での値は変わらないからです（4-04）。評価書は、この延長の一意性、制限のない試験関数の空間での完全な OS の公理（正値性）、格子からの収束は示されていない、と書きます 評 （§ 7.5、§ 10）。委員会の OS の独立の検査は、対角線の上で全ての階の微分が消える試験関数を使うので、接触項は見えません（8-05 § 04）。

06

## どの目標に入っている言明か・言っていないこと

| 目標 | 在るもの |
|---|---|
| 公開の定理 `JointExistence` | OPE の二つの上界 (2)(3)（欄 `ope`） 源 。接触項の延長は**入っていない** |

| 目標 | 在るもの |
| --- | --- |
| 構成の定理 `constructed` | (2)(3) に加え、点の離れた OPE `SeparatedOPE`、入れ子の OPE `NestedOPE`、接触項の延長 `Contacts` 源 （`Construction.lean` 22・28 行） |
| 委員会の目標 | OPE の言明の整合の検査 [A8] は、結合の目標とは**別の終点**で、別の Comparator の実行で通った 評 （評価書 §9.3・§11）。言明 `CommonOPE` は、源の述語を使わずに二つの上界を直接述べる |

**言っていないこと** 評 （評価書 §7.5、`CommonOPE-20261028.lean` 159〜165 行）：

- $D \to \infty$ での展開の収束。
- 場の正規化や OPE の処方を変えたときの係数の一意性。
- 摂動論の Yang–Mills の係数の数値（全次数の摂動との一致は未証明）。
- 係数が体積の部分列の選び方に依らないこと。
- 係数の一致から相を同一視すること。
- 接触項の延長の一意性・OS の正値性・格子からの収束。

$D$ は場の次数の切り方で、ループの次数ではありません 評 。

07

## 本書の検討で見えていたこと

本書には OPE も接触項も**ありません**。本書は局所場の空間を持たなかったので（8-03 §06）、点の近づく展開を立てる対象がありませんでした。

本書の観測量のうち、小さい Wilson ループの先頭は $F^2$ の挿入です 推 。公開された構成の言葉では、ループの大きさを 0 に縮める展開は OPE に似た問いですが、ループは局所の札の空間に入らないので、(2)(3) の形のままでは語れません。評価書の開いた問いの四つ目「Wilson ループの観測量を作り、局所の観測量と関係づける」は、この隙間を指しています（16-02、14-06）。

08

## 読めていない所

- 係数の構成（`YM.OPE.Prescription.ope`・`YM.OPE.Orbits.averageV` ほか）の中身と、(2)(3) の証明（`coefficient_separated`・`quantitative_separated`）。
- 入れ子の OPE の木の条件（`Accept`・`Tapered`）の意味。
- `contactDistribution` の作り方（OPE で特異な部分を引いて延ばすのか）。

- 出力の場の次数の分け方 $F_d = F_{d-1} \oplus E_d$ の補空間の選び方。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 公開の言明に OPE の係数の上界 (2) と次数 $D$ で切った残りの上界 (3) | $D \to \infty$ での収束、摂動の係数との一致 |
| 源 残りの上界は混ざった理論と全ての相に一様（半径は状態より先に決まる） | 係数の体積の部分列への非依存 |
| 源 係数は傍観者・状態・$D$ を引数に持たない | 正規化や処方を変えたときの係数の一意性 |
| 初 共通の係数からは、二つの状態の差の展開 (4) しか出ず、相の一致は出ない | 相の同一視 |
| 源 構成の定理に接触項の延長の存在 (5) | 延長の一意性・OS の正値性・格子からの収束。公開の言明への延長の言明 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| OPE の言明・配置・係数の型 | 源 | `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0、版 3456e5e）の `ChallengeSpec.lean` 43〜80・177〜181 行 |
| 接触項・入れ子の OPE・構成の結論 | 源 | `ContactSpec.lean` 12〜15 行、`ContactBridge.lean` 14 行、`YM/Nonperturbative/HeadlineSpec.lean` 128〜138 行、`Construction.lean` 15〜31 行 |
| 式 (20)、チャンネルと係数の作り方、言っていないこと、別の終点 | 評 | 評価書 `yang-mills-group/YM` `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）§7.5・§9.3・§10・§11・付録 A（`Channel`・`actor`・`coefficient`・`Properties.ope`） |
| 委員会の OPE の例 | 評 | 評価の側 `yang-mills-group/YM`・版 55ba9fc の `submissions/openai-20261028/docs/examples/CommonOPE-20261028.lean` 48〜52・79・99・128・133・159〜165 行 |
| 接触項の任意性 | 典 | 導入は 4-04 |

**この章で使った語** — 演算子積展開、チャンネル、傍観者、残りの上界、状態への一様性、接触項の延長。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：14-01 骨組みの比べ — 第 14 部では、公開された構成と本書の Lean を段ごとに比べます。

# 骨組みの比べ — 段ごとの表

> この章は本書の検討です。公開された構成についての記述は、既存の知見（公開された構成の読み）です。

**この章で分かること** — 公開された構成の証明を、格子と鏡映正値性から質量ギャップ・Wilson ループまでの十一の段に分け、段ごとに「公開された構成が何をしているか」「本書の検討の Lean が何を持っていたか」を一つの表に並べます。そのうえで、本書の検討に見えていたもの（体積を止める → コンパクト性 → 性質を極限へ移す、結合を合わせで決める、奇数の辺で中心に置くブロック）と、見えていなかったもの（多段の評価の芯、局所場から先）を分けます。

**前提となる章** — 6-03 証明の骨組み、28-01 部分列の極限の含意、19-07 示すべき言明。

**先に言うこと** — 公開された構成の結果は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」水準で書きます。本書の検討が源で確かめたのは定義と言明の形までで、証明の中身は読んでいない所が多く在ります。本書の側の「在る」は、格子間隔を固定した一つの尺度の定理か、仮定の欄を全て見せた含意です。連続極限について本書の検討が何かを示した、という意味ではありません。

この章の順序

1. 比べの約束 — 二つの水準と、状態を表す五つの語
2. 段ごとの表（表 1） — 十一の段
3. 格子・鏡映正値性・チェス盤 — 在る。違いは根の半ノルムと稀さ
4. 繰り込みの一段と結合の合わせ — 一部。設計と定義が違う
5. 多段の評価と大きい場 — 無い。コードの約 7 割に当たる部分
6. 体積を止めた紫外の極限 — 骨組みだけ。部分列と列の全体
7. 無限体積・再構成・局所場 — 別の領域で在るものと、無いもの
8. 見えていたもの・見えていなかったもの — 三つと二つ
9. 読めていない所 — 在りかつき

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。本書の検討の Lean の定理は、札の外に名と範囲を同じ行に書きます。

01

## 比べの約束

この部は、2026 年 10 月 28 日に提出され、11 月 10 日に委員会の評価とともに公開された純粋ヤン–ミルズの存在の構成（以下「公開された構成」）と、本書の検討とを並べます。公開された構成のコードはリポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）に、委員会の評価書は `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）に在ります。

二つの側の確かさの水準は違います。

- **公開された構成**：結果は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」水準です評 。本書の検討が自分で確かめたのは、源の定義と言明の形を読んだことまでです源 。
- **本書の検討**：Lean で機械検査した定理か、仮定の欄を全て見せた含意です。定理はどれも格子間隔を固定した一つの尺度の言明か、抽象の含意で、連続極限については何も言いません。

表 1 の「状態」の欄は、次の五つの語で書きます。

| 語 | 意味 |
|---|---|
| 在る | 同じ種類の言明が、本書の検討の Lean にも定理として在る |
| 一部 | 対象か骨組みの形は在るが、定義・設計・強さが違う。または含意の形でだけ在る |
| 無い | 本書の検討に、定理としても含意としても無い |
| 別の領域で在る | 同じ種類の言明が、本書の検討では別の結合の領域（強結合の窓）で在る |
| この本だけ | 公開された構成の主張に入っていない種類の言明が、本書の検討に在る |

02

## 段ごとの表

公開された構成の証明は、暦（定数の選び）から始めて、一段の核、各段の密度の表示と帰納、射撃による結合の選び、体積を止めた紫外の極限、無限体積、Euclid 不変と相の分解、再構成、ヤン–ミルズである証拠、の順に組まれています（詳しくは 6-03）源 。これを十一の段に分けて並べます。

### 表 1　段ごとの比べ（2026-11-13 の時点）

| 段 | 公開された構成 | 本書の検討 | 状態 |
|---|---|---|---|
| 格子と鏡映正値性 | 格子点を通る面と辺の中点を通る面、四つの軸、$\beta \geq 0$ の Wilson の測度。関数はゲージ不変で、鏡の上の点を含まない開いた帯（辺の中点の面では $r <$ 半分）に局所 源 | 同じ二種の面。格子点の面は全ての実の β・四方向で、閉じた正の半分の関数（ゲージ不変を課さない）。辺の中点の面は $\beta \geq 0$・ゲージ不変（20-01） | 在る（関数の類が違う） |
| チェス盤 | チェス盤の不等式と根の三角不等式。観測量の大きさを測る半ノルムとして使う 源 | チェス盤の評価と、弱結合での大きい面の稀さ（体積に一様、22-01）。半ノルムとしての形は無い | 在る |
| 繰り込みの一段 | 確率の核。奇数の辺のブロックを粗い点の中心に置き、予測子を群へ射影し、ゲージ固定を二本立てにする 源 | 決定的な押し出しの写像（辺 2・重なる重み）と、辺 3・中心・一様の設計（14-02） | 一部 |
| 結合の合わせ | 表示の中の係数を基準値に合わせる。射撃法。走りの法則 源 | 測度だけで決まる量で合わせる定義。合わせた列の存在が無条件に在るのは、辺 3 の設計（`Block3.tuned3_exists`）と、格子ごとの渦の比（`ThetaLimit.tuning_all`）だけ。今の設計（辺 2）では存在そのものが条件（下の端の値が目標以下なら）で、合わせた列を使う鎖の定理は「在れば」の条件つき。走りの法則は無い（14-03） | 一部 |
| 小さい場の多段の評価 | 帰納の仮定と一段の定理 源。コードの約 7 割 推 | 自由場の一段（15-12）と、評価を仮定に置いた含意（28-01・28-02） | 無い |
| 大きい場 | 段ごとに種を数え直し、ゲージの切り口と区画の条件を満たす全ての配位について種一つあたりの不等式を立てる 源（14-04） | 一つの尺度での稀さまで。段を跨ぐ扱いは前提（28-04 の大きい場の評価）のまま | 無い |
| 体積を止めた紫外の極限 | 局所場の相関が、間隔の列の全体で収束 評。公開の定理でも切断については列の全体 源 | 粗い格子の押し出しの測度の部分列の極限。評価は仮定の欄（28-01） | 一部（骨組みだけ） |
| 無限体積 | 部分列（Arzelà–Ascoli） 評 | 強結合の窓の中で、部分列なしの極限（20-03） | 別の領域で在る |
| Euclid 不変・相の分解・再構成 | 在る 評 | 格子の再構成の器と、強結合での質量ギャップ（20-04）。Euclid 不変・相の分解は無い | 無い（器は別の領域で在る） |

| 段 | 公開された構成 | 本書の検討 | 状態 |
|---|---|---|---|
| 局所場・応力テンソル・演算子積展開 | 在る 評 | 扱っていない | 無い |
| 質量ギャップ・Wilson ループ・渦 | 指数の減衰の言明は無い。連続の Wilson ループは無い。境界条件は周期だけ 源 | 強結合の質量ギャップと面積則、渦の床、Polyakov ループの対（14-06） | この本だけ |

行数で見ると、公開された構成のコードは、多段の帰納と評価がおよそ 7 割、局所場と展開がおよそ 1 割、体積を止めた紫外がおよそ 1 割、再構成がおよそ 4% で、定義の層は合わせて 4% 未満です 推 。250,319 の宣言のうち、検証の記録が挙げる十七の見出しの定理のどれかから届くものは、見出しの定理そのものを含めて 100,168 です 源 （評価書 §9.1 の数と同じ）。本書の検討が「無い」とした二つの行（小さい場の多段の評価と大きい場）が、量の上でも構成の大半を占めています。

**表 1 が言っていないこと**。「在る」は同じ種類の言明が本書の Lean にも在るという意味で、同じ強さ・同じ関数の類・同じ結合の領域の言明が在るという意味ではありません。「この本だけ」の行も、格子間隔を固定した言明で、連続の理論について何かを言うものではありません。

03

## 格子・鏡映正値性・チェス盤

**鏡映正値性**。公開された構成は、周期トーラスの Wilson の測度について、格子点を通る面と辺の中点を通る面の両方、四つの軸の全てで、$\beta \geq 0$ の鏡映正値性を持ちます（`YM/Slice/Reflection.lean:98` の `reflected_positive`） 源 。関数の類は、ゲージ不変・可測・有界で、格子点を通る面では鏡の上の点（と反対側の面）を含まない開いた帯 $0 < r <$ 半分に、辺の中点を通る面では $r <$ 半分に局所です（`YM/Cells/Cut.lean:30` 〜:33 の `Strict`、:109〜:118 の `Interior`・`Positive`） 源 。本書の検討の Lean には、格子点の面の形 `TorusRP.wilson_rp`（全ての実の β、閉じた正の半分の有界可測な関数、ゲージ不変は課さない）、四方向の形 `PeierlsPerm.wilson_rp_dir`、真ん中の面の形 `MidRP.wilson_rp_mid`（$\beta \geq 0$、ゲージ不変な関数）が在ります（20-01）。どちらも既知の定理の形式化です 典 。同じ二種の面を持つので「在る」としますが、関数の類が違います。

**チェス盤**。公開された構成は、チェス盤の不等式（`YM/Cells/Chess.lean:80` の `tiles`）に、その根の三角不等式（同 :108 の `adds`）を添えています 源 。箱ごとに写した積の期待値を箱の数の逆数乗した量（`YM/Cells/Tiling.lean:226` の `rootTest`）が、観測量の大きさを体積

に依らずに測る半ノルムとして使われます源。紫外の側の評価をこの半ノルムで述べた言明 `Wcmain`（`YM/Extraction/Center.lean:38`）が、無限体積のコンパクト性への入力の一つです源。紫外からの入力はこれ一つではありません（たとえば `MergeProof.Accent.rated`、`YM/MergeProof/Powder.lean:48`、は `Wcmain` と `Scrim` を同時に取ります）源。

本書の検討の Lean には、チェス盤の評価 `FoldWilson.wilson_chessboard_even`（偶数の辺、全ての実の β）と、それを使った弱結合での大きい面の稀さ `FoldCap.rarity_explicit`（体積に一様、陽な閾）が在ります（22-01）。違いは二つです。本書の側には根の三角不等式（半ノルムとしての形）が無く、公開された構成の側には、チェス盤を事象の確率に使う稀さの言明が、読んだ範囲では見当たりません源（検索の範囲）。

04

## 繰り込みの一段と結合の合わせ

公開された構成の一段は、細かい配位から粗いリンクの「予測」を作り、粗いリンクをそのまわりのガウス型の揺らぎで引く確率の核です（`YM/RG/Block.lean:71` の `density`）源。本書の検討の一段は、道の積の重みつきの平均を球へ戻す決定的な写像で、測度はその写像で押し出します（19-04）。辺 3・中心・一様の設計は、公開された構成の「奇数の辺・中心に置く・一様分布の畳み込みの重み」と形が近く、その設計の上で押し出した測度の鏡映正値性が Lean に在ります。詳しくは 14-02 です。

結合については、どちらも「単位の長さで決まる量を決めた値に合わせて尺度を決める」型です推。違いは、合わせる量（本書は測度だけで決まる量、公開された構成は密度の表示の中の係数）と、存在の出し方（本書は大域の端と中間値の定理、公開された構成は段ごとの帯の入れ子の区間）です。詳しくは 14-03 です。どちらの行も、対象か骨組みは在るが定義・設計が違うので「一部」とします。

05

## 多段の評価と大きい場

公開された構成は、各段 $m$ の有効密度を決まった形に表し（切った作用・小さい場の活動・大きい場の活動の気体）、その形と評価を帰納の仮定 `History.Conv`（`YM/RG/History.lean:213`）として全ての段で運びます源。段と段は押し出しの等式で結ばれ（`History.Transfer`、同 :223）、全ての段の言明が `History.Selected`（同 :234）です源。一段の定理の形は `Directed.Program` の欄 `advances`（`YM/PCalc/Band.lean:65` の構造体）で、一段の証書は `Move`（同 :49）です源。

本書の検討には、これに当たるものが定理としては在りません。在るのは、自由場の一段（線形化したブロック写像の共分散、15-12・15-13）と、評価を仮定の欄に置いた含意（28-01・28-02）です。大きい場は、一つの尺度での稀さ（22-01）までで、段を跨ぐ評価は前提の一覧（28-04）の「大きい場の評価」「大きい場の気体」として、形が決まらないまま残っていました（28-06）。この二つの行は「無い」です。公開された構成がどう扱っているかは 14-04 で比べます。

06

## 体積を止めた紫外の極限

公開された構成は、物理の体積を止めて、局所場の相関が間隔の列の全体で収束することを示します評（評価書 §4.3）。Lean の在りかは `Campaign.realUV`（`YM/FullVolume/Fields/Filled.lean:45`）で、その主定理までの鎖は辿られています源。公開の定理 `JointExistence`（`ChallengeSpec.lean:186`）の収束の欄 `Converges`（`PublicWilson.lean:85-90`）でも、各体積で切断については列の全体の収束が求められ、部分列になるのは体積の側だけです源。核と差分つきの強い形（`PositionsUV …Sequence.full`）は、構成の定理 `constructed`（`Construction.lean:15`）の結論にだけ在ります源。

骨組みはこうです源。固定した粗い段 $j$ の有効密度が、切断 $N$ について一様に Cauchy であることを示し（`Flux.fanned`、`YM/FullVolume/Fields/Cement.lean:50`）、真の相関と段 $j$ の読み出しの差を $N$ に依らない量で押さえ（`Sever.echoes`、`YM/FullVolume/Fields/Peat.lean:42`）、これと固定した段の収束と三角不等式から、真の格子の相関が $N$ について Cauchy 列であることを出します（`Rising.arrives`、`YM/FullVolume/Fields/Timber.lean:74`）。

本書の検討の側では、押し出しの測度 $\nu_{n,m}$ の部分列の極限が在り、その極限に鏡映正値性などの性質が移る、という含意が Lean に在ります（`BoxWalk.chain_end_to_end_box`、28-01）。部分列の極限はどの確率測度の族にも在るので、この含意の中身は「性質の移し」です。極限の評価は全て仮定の欄で、格子から定義されていない量を含みます。骨組みの形は近いものの、評価の中身と全列の収束が無いので「一部（骨組みだけ）」とします。

07

## 無限体積・再構成・局所場

**無限体積**。公開された構成は、紫外の側の体積に一様な評価を入力に、体積に一様な有界性と同程度連続性を、元の格子の鏡映正値性・チェス盤・転送作用素のトレースの表示から出し、

Arzelà–Ascoli で部分列を取ります（`first_surface`、`YM/Extraction/Lipschitz.lean:166`；`crops`、`YM/Extraction/Held.lean:136`）源。一意性の材料は入っていません評（評価書 §5・§8）。本書の検討の Lean は、強結合の窓（$|\beta|$ が小さい）の中で、大きさの列のまま一つの測度に収束する無限体積の極限を持ちます（`InfVol.wilson_infvol_unique`、20-03）。結合の領域が違うので「別の領域で在る」です。

**Euclid 不変・相の分解・再構成**。公開された構成は、応力テンソルの Ward の恒等式から回転不変を上げ、真空の空間に圧縮した作用素の可換な環の Gelfand 表現で相に分け（`OS.Selection`、`YM/Phase/Mixture.lean:127`）、相ごとに再構成します評 源。本書の検討には、格子の転送の作用素の再構成の器と、強結合の窓での質量ギャップ（`InfMain2.wilson_infvol_main2` ほか、20-04）が在ります。連続の Euclid 不変と相の分解は在りません。

**局所場**。公開された構成は、局所場の札、繰り込んだ挿入、応力テンソル、跡の異常、演算子積展開を持ちます（第 8・13 部）評。本書の検討はこれを扱っていません。

08

## 見えていたもの・見えていなかったもの

表 1 を、骨組みの形として見えていたか、で読み直します推。

**見えていたもの（三つ）**。

1. **体積を止める → コンパクト性 → 性質を極限へ移す**。本書の検討の部分列の極限の含意（28-01）は、公開された構成の「評価を仮定に置いて極限を結論する」型（`FullVolume.positioned`、`YM/FullVolume/Profiles.lean:42`）と、「条件つきで性質を極限の表へ移す」型（`realPositive`、`YM/Extraction/Harvest.lean:46`）に当たります源。体積を止めてから無限体積へ行く順も同じです。
2. **結合を合わせで決める**。裸の結合を「ある粗い段の量が決めた値になる」ように選ぶ、という型は同じです。本書の側は、測度だけで決まる量で合わせる定義を持ちます。合わせた列の存在が無条件に Lean に在るのは、辺 3 の設計（`Block3.tuned3_exists`）と、格子ごとの渦の比（`ThetaLimit.tuning_all`）だけで、今の設計（辺 2）では存在そのものが条件、合わせた列を使う鎖の定理は「在れば」の条件つきです（14-02 §06・14-03）。
3. **奇数の辺で中心に置くブロック**。辺 3・中心・一様の設計は、公開された構成のブロックの置き方と同じ向きです（14-02）。

**見えていなかったもの（二つ）**。

1. **多段の評価の芯**。各段の密度の表示を帰納で運ぶこと、大きい場を段ごとに数え直し、ゲージの切り口と区画の条件を満たす全ての配位について種一つあたりの不等式を立てること、帰納の仮定には弱い帳簿を置き一段の証書には強い見積もりを出させること、段に一様な条件を暦の側で払うこと（14-04・14-05）。
2. **局所場から先**。観測量の段を跨ぐ較正、固定した段の Cauchy と段を外す一段、応力テンソルと Euclid 不変、相の分解。本書の検討の終点は粗い格子の押し出しの測度で、局所場の相関ではありませんでした。終点が違うと骨組みに二つの層（較正と段を外す一段）が余分に要ります[推]。

逆向きに、公開された構成の主張に入っていない種類の言明（質量ギャップ、Wilson ループと面積則、渦の自由エネルギー）が本書の検討には在ります。どれも格子間隔を固定した既知の型の形式化で、公開された構成が残した問いとは反対の端（強結合）の言明です（14-06）。

09

## 読めていない所

- 一段の定理の証明の在りか `Mallow.faces`（`YM/PhysicalNext/RG_NEXT_COMPLETE_REPEATABLE_NONLINEAR_STEP/Mallow/Pediment.lean`）の中身。
- 宣言の使われ方の記録は、深さ優先の探索で最初に見つけた見出し一つだけを記します。主定理（`jointExistence`、`Solution.lean:4`）までの鎖を本書の検討が確かめたのは、`rodB` → `constructionRun` と `realUV` → `fromFunded` の道、切断についての収束の `allB` の道、`sailsW` などに限られます。表 1 の他の宣言が主定理の依存に入っているかは、確かめていません。
- 相の分解を作る定理と、選ばれる相の選び方。
- 本書の検討の Lean と公開された構成の Lean を、同じ対象について言明の字句で突き合わせることはしていません（対象の型が違うため）。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| [源] 公開された構成の各段の宣言の在りか（本文と出典の表）を、源の行で確かめた | それらの証明の中身。主定理の依存の鎖は一部の宣言でしか辿っていない |
| [評] 公開された構成は、体積を止めた紫外の極限を間隔の列の全体で、無限体積の極限を部分列で取る（評価書 §4.3・§5） | 無限体積の極限の一意性・質量ギャップ（評価書 §8 が開いた問いとして挙げる） |

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 本書の検討の Lean：格子点の面・真ん中の面の鏡映正値性、チェス盤の評価、強結合の窓での部分列なしの無限体積の極限と質量ギャップ（第 20 部） | 格子間隔を変えること、連続極限、窓の外 |
| 本書の検討の Lean：部分列の極限の含意（28-01）。仮定の欄を全て見せた条件つきの定理 | 仮定の欄のどれも四次元の格子で示されていない |
| 推 本書の検討に見えていたのは三つの角、見えていなかったのは多段の評価の芯と局所場から先 | 「見えていた」は骨組みの形が近いという意味で、同じ評価を持っていたという意味ではない |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 公開された構成のコード | 源 | リポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0、版 3456e5e）。パスはリポジトリの根からの相対。宣言の名と行は本文の各所 |
| 委員会の評価書 | 評 | リポジトリ `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）。§2・§4.3・§5・§6・§8 |
| 宣言の使われ方 | 源 | 同じリポジトリの `verification/declaration-usage.tsv`。「used」は検証の記録が挙げる十七の見出しの定理のどれかから届く、の意味で、公開の定理に使われる、の意味ではない |
| 行数の配分 | 推 | 置き場の単位の粗い勘定（本書の検討の数え上げ） |
| 本書の検討の定理 | Lean | 第 19〜22 部と第 28 部の出典の表 |

**この章で使った語** — 公開された構成、委員会の評価、確率の核、押し出しの測度、鏡映正値性、チェス盤の根の半ノルム、合わせ、射撃法、帰納の仮定、体積を止めた紫外の極限、部分列の極限の含意、相の分解。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：14-02 一段の設計の比べ — 表 1 の「繰り込みの一段」の行を、三つの設計で詳しく比べます。

# 一段の設計の比べ — 押し出しの写像と確率の核

この章は本書の検討です。公開された構成についての記述（§04）は既存の知見（公開された構成の読み）です。

**この章で分かること** — 繰り込みの一段を作る三つの設計を一つの表に並べます。本書の検討の今の設計（辺 2・重なる重み・決定的な押し出しの写像）、辺 3・中心・一様の設計、公開された構成の設計（予測子のまわりのガウス型の揺らぎで粗いリンクを引く確率の核）です。辺 3 の設計で Lean に閉じたこと（押し出した測度の鏡映正値性、合わせた列の存在）を述べ、それが公開された構成の骨組みのどこにも要らない理由（極限を取るのは元の格子の測度での相関で、鏡映正値性は元の格子でだけ使う）を説明します。

**前提となる章** — 19-04 ブロック写像と繰り込みの一段、9-01 ブロックの核、14-01 骨組みの比べ。

**先に言うこと** — 公開された構成の一段の核の定義は源で読みましたが 源 、ゲージ固定の証明（`Branch.align`・`Axial.existence`）の中身は読んでいません。辺 3 の設計の定理は、格子間隔を固定した有限の格子の上の言明で、この設計が本書の検討の本線ではありません。どの設計が連続極限に向くかは、この章では主張しません。

この章の順序

1. 一段とは何を決めることか — 規則と、測度の運び方
2. 本書の今の設計 — 辺 2・重なる重み — 決定的な写像と押し出し
3. 本書の辺 3 の設計 — 中心・一様 — 鏡映とゲージ変換なしで交換する
4. 公開された構成の設計 — 確率の核 — 予測子、群への射影、二本立てのゲージ固定、育つ辺
5. 三つの設計の表（表 1） — 九つの項目
6. 辺 3 の設計で Lean に閉じたこと — 押し出した測度の鏡映正値性と、合わせた列の存在
7. それが公開された構成の骨組みに要らない理由 — 極限を取る対象の違い

8. 設計の選びが何に効いていたか — 本書の骨組みと、公開された構成の骨組み
9. 読めていない所

---

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。本書の検討の Lean の定理は、札の外に名と範囲を同じ行に書きます。

01

## 一段とは何を決めることか

繰り込みの一段は、細かい格子の配位 $U$ から粗い格子の配位 $V$ を作る規則と、細かい格子の測度を粗い格子へ運ぶ仕方の組です（導入は 7-05）。規則には二つの型があります。

- **決定的な写像**：$V = B(U)$。測度は押し出し $B_*\mu$（$B_*\mu(E) = \mu(B^{-1}E)$）で運びます。
- **確率の核**：$U$ を与えたときの $V$ の条件つきの分布 $T(U, \mathrm{d}V)$。測度は $\int T(U,\cdot)\,\mu(\mathrm{d}U)$ で運びます。決定的な写像は、点の測度に集中した核 $T(U,\cdot) = \delta_{B(U)}$ の場合です。

どちらでも、決めなければならないのは、ブロックの辺（格子間隔を何分の一にするか）、粗い点を細かい格子のどこに置くか、粗いリンクを作る細かい道とその重み、群の外に出た平均を群へ戻す手続き、格子の対称とゲージ変換との両立、の五つです。

02

## 本書の今の設計 — 辺 2・重なる重み

本書の検討の本線の写像は、19-04 で定義しました。辺は 2 で、粗い点は細かい格子点 $2x$ に座ります。粗いリンク $b$ の値は、横の向きごとにずれ $-1, 0, +1$ を重み $1/8,\ 3/4,\ 1/8$ で選び、六つの順で等分した道の族の積の平均

$$q_b(U) = \sum_{o,A} w(o,A)\, U(\gamma_{o,A}(b)) \tag{1}$$

を、閾 $r_0$ の retract $\rho_{r_0}(q) = q/\max(|q|, r_0)$ で単位の球へ戻したものです。測度は決定的な押し出し $\nu = B_*\mu$ で運びます。写像は結合 $\beta$ に依りません。

横にずれる道を平均するので、隣り合うブロックが細かいリンクを共有します（重なりのある平均）。押し出した測度の鏡映正値性は、この設計では幅の制限された帯の類の関数について定理です（`BoxWalk.wilson_h0p`、28-05）。

03

## 本書の辺 3 の設計 — 中心・一様

辺 3 の設計では、格子 $(\mathbb{Z}/3^n L)^4$ の上で、粗い点をブロックの中心に置き、粗いリンクを「輪郭 ＋ 粗いリンクの向きに直線三歩 ＋ 輪郭の戻り」の形の道の族の一様な平均で作ります（`Block3.paths`・`Block3.wts`。添字は 1944 通り、異なる道は 633 本、重みの和は 1）。平均を球へ戻す手続きは今の設計と同じです。

中心に置いて一様に平均すると、写像は格子点の面の鏡映と、ゲージ変換なしでそのまま交換します（`Block3.blockMap_refl_cfg`、全ての段は `Block3.down_refl`。球の値で）。ブロックの断面を横切る細かいリンクの符号を反転すると、粗いリンク一本だけの符号が反転します（一段は `Block3.blockMap_flip`、全ての段の集合の形は `Block3.down_flipSet`）。交換の性質は、Lean の写像の定義を字句のまま写した数値でも、非可換・四次元・二段で確かめてあります読。この設計は本書の検討の本線ではなく、並びの列として調べたものです。

04

## 公開された構成の設計 — 確率の核

公開された構成の一段は確率の核です（`YM/RG/Block.lean:71` の `StepData.density`）源。式で書くと、細かい配位 $U$・粗い配位 $V$ について

$$T_\beta(U,V)=\sum_t \ell(U,t)\prod_b \frac{1}{Z_\beta}\exp\!\left(-\beta\, c_{\mathrm{pen}}\,\mathrm{price}\!\left(V_b\,Q_b(U,t)^{-1}\right)\right) \tag{2}$$

で、$V$ について Haar の測度の積に対する密度です源。ここで $t$ は選び方の札（ゲージの枠と予測子の札）、$\ell(U,t)$ はその確率（`likelihood`）、$Q_b(U,t)$ は粗いリンク $b$ の予測子、$c_{\mathrm{pen}}>0$ は罰の係数（源の字句では `kernel.penalty`）、price は群の元の単位元からの隔たりを測る関数です。粗いリンクは予測子に拘束されるのではなく、予測子のまわりのガウス型の揺らぎで引かれます。$c_{\mathrm{pen}}$ は任意の正の数でよく、核が $\beta$ に依ります源。段の間の密度は、この核による押し出し（`push`、同 :77）で結ばれます源。

**辺と置き方。** 辺 $b_m$ は段ごとに選ぶ 3 以上の奇数です（`YM/Lattice/Scale.lean:28` の `Schedule`。奇数と 3 以上だけがここに在る）源。非減少は暦の欄 `Fits.monotoneL`、$\log b_m/\log D_m\to 0$ は欄 `Fits.mesh`（= `Schedule.Gentle`。

`YM/RG/History.lean:97` 〜:100、`YM/Lattice/Scale.lean:129`）です源。暦の条件と合わせて $b_m \to \infty$ が出ます推（定義からの導出。育つ辺。理由は 10-05）。粗い点 $x$ は細かい点 $b \cdot x$ に置かれ（`YM/Lattice/Subdivision.lean:29` の `embed`）、ブロックは粗い点の中心に在ります源。

**重み**。パッチの点の重みは、中心に置いた辺 $b$ の一様分布を $J$ 回畳み込んだもので（`YM/RG/Patch.lean:87` の `weight`、和が 1 は :90）、$J \geq 4$ は段とともに大きくなります源。支えの半径は $J(b-1)/2$ で、隣のブロックと重なります源。

**予測子と群への射影**。隣り合う二つのパッチの対応する点どうしを、長さ $b$ の平行な直線で結んで輸送を取り、両端の枠でゲージ固定します。その重みつきの平均に一番近い群の元を予測子にします（`bondCost`・`best`、`YM/RG/Patch.lean:159`・:169）源。一番近い元が重みつきの値段の和の最小点と一致することは、恒等式

$$2\,d\sum_i w_i\,\mathrm{price}(f_i u^{-1}) = \sum_i w_i \|f_i\|^2 - \|m\|^2 + \|m-u\|^2, \qquad m = \sum_i w_i f_i \tag{3}$$

（$d$ は表現の次元）から出ます（`YM/Branch/Center.lean:72` の `min_iff`）源。最小値（重みつきの散らばりと、平均と群の距離の二乗の和を $2d$ で割ったもの）が閾 `predictor_cut` 以上のときは、一本の直線を重みの確率で引いてその輸送を使います（`usesBest`、同 :171）源。

**ゲージ固定の二本立て**。パッチの枠（ゲージ固定）は、場が小さいときは、パッチの全ての点の対と軸の順の座標の道について値段の平均を最小にする対称な選び方、場が大きいときは、根と軸の順を一様に引く軸ゲージで、条件を満たす札について核の中で和を取ります（`YM/RG/Patch.lean:102` 〜:155）源。

**対称**。こうして作った核は、超立方の群（384 元の符号つき置換）と粗い並進について、選び方の札の和を通してちょうど不変で、ゲージ変換について共変です（`YM/Branch/Covariant.lean:50` の `StepData.channel` ほか）源。格子の対称の引き戻しは $x \mapsto s \cdot x + b$（`affine`、`YM/Lattice/Path.lean:145`）で、粗い点のまわりの回転に限りません。軸 $i$ の反転と $b = e_i$ を組むと $x_i \mapsto 1 - x_i$ になるので、格子点を通る面の鏡映とともに、粗いリンクの真ん中を通る面の鏡映も入ります源。これは対称としての共変で、鏡映正値性の言明ではありません。評価書は、離散の格子の対称で不変なゲージ固定（§4.3）を、「対称性を壊す選択の平均」で作ると述べています評（評価書 §6.3）。

> 05

## 三つの設計の表

### 表 1　一段の設計

| 項目 | 本書の今の設計 | 本書の辺 3 の設計 | 公開された構成 |
|---|---|---|---|
| 規則の型 | 決定的な写像、押し出し | 決定的な写像、押し出し | 確率の核（$\beta$ に依る） |
| 辺 | 2 | 3 | 3 以上の奇数、非減少、段とともに育つ |
| 粗い点の置き方 | 細かい格子点 $2x$（ブロックの角） | ブロックの中心 | ブロックの中心（$b \cdot x$） |
| 重み | 横のずれ $1/8,\ 3/4,\ 1/8$、六つの順の等分 | 一様 | 中心に置いた一様分布の $J$ 回の畳み込み（$J \geq 4$、段とともに育つ） |
| 道 | 横にずれて二歩進んで戻る道の族 | 輪郭 ＋ 直線三歩 ＋ 輪郭の戻り | 二つのパッチの対応する点を結ぶ平行な直線、両端を枠でゲージ固定 |
| 平均のあと | 球へ戻す（retract、閾 $r_0$） | 同じ | 群へ射影。散らばりが大きければ一本を確率で引く |
| 拘束 | 押し出し（粗いリンクは写像の値そのもの） | 同じ | 予測子のまわりのガウス型の罰、係数 $c_{\mathrm{pen}} > 0$ は任意 |
| 対称の保ち方 | 道の族を対称に平均 | 中心・一様で、鏡映とゲージ変換なしで交換 | 選び方の札の和で、超立方の群と粗い並進についてちょうど不変 |
| 大きい場 | 写像の外（閾の下の事象として別に扱う） | 同じ | 核の定義の中に枝として入る（軸ゲージ・一本の直線を確率で） |

辺 3 の設計は、奇数の辺・中心・一様（$J = 1$ の重み）という三点で公開された構成に近く、確率の核であること、群への射影、二本立てのゲージ固定、育つ辺、の四点で違います。

06

## 辺 3 の設計で Lean に閉じたこと

**押し出した測度の鏡映正値性**。$L$ が偶数の周期格子 $(\mathbb{Z}/3^n L)^4$ の SU(2) の Wilson の測度（任意の実数 $\beta$、正規化の有無どちらも）を、辺 3 の写像の $m \leq n$ 段の合成で押し出した測度 $\nu$ について、格子点の面の鏡映 $\Theta$（$y_0 \mapsto -y_0$）と、両端が粗い格子点の二枚の面 $0$ と $M_c = 3^m L/2$ の間に厳に入る粗いリンクだけに依る有界可測な全ての関数 $F$（ゲージ不変は課さない）で

$$\int F(\Theta V)\, F(V)\, \nu(\mathrm{d}V) \ \geq \ 0 \tag{4}$$

が成り立ちます。Lean：`Block3.rp_push` ・ `Block3.rp_push_prob`。証明は、写像が鏡映とゲージ変換なしで交換すること（§03）と、粗いリンクが使う細かいリンクの範囲

（`Block3.down_local`）から、細かい格子の鏡映正値性（`TorusRP.wilson_rp`、20-01）へ落とす短い議論です。言っていないこと：リンクの真ん中の面の版、面の上のリンクを含む閉じた類、無限体積、質量ギャップ。

**合わせた列の存在**。辺 3 の設計の上で、$\beta = 0$（独立な Haar）の押し出しのもとで粗い面の実部の平均の期待値は全ての段で 0 です（`Block3.Y3_zero`。断面の符号の反転が粗いリンク一本だけを裏返し、Haar を保つことから）。$0 < r_0 \le 1$ なら、$\beta \to \infty$ でこの期待値は 1 に近づきます（`Block3.tendsto_Y3_one`）。中間値の定理で、$0 < r_0 \le 1$、$3^{m_0} L \ge 2$、$0 \le \kappa_0 < 1$ のもとで、全ての $k$ について「段 $m_0$ まで押し出した粗い面の実部の平均の期待値が $\kappa_0$」となる非負の結合の列が在ります（`Block3.tuned3_exists`、各 $k$ で最大の解に取れる）。言っていないこと：結合の列の単調・発散・有界、解の一意性。$r_0 = 1$ では引き戻しが恒等で、粗い面は球の値の積で、SU(2) の Wilson ループではありません。今の設計（辺 2）では $\beta = 0$ の値が 0 にならず（数値で 0.006〜0.024 読）、この存在は「下の端の値が目標以下なら」の条件つきでした。合わせの比べは 14-03 です。

07

## それが公開された構成の骨組みに要らない理由

公開された構成で極限を取る対象は、元の格子の Wilson の測度 $\mu^{\mathrm{W}}_{N,p}$ のもとでの、繰り込んだ局所場の挿入の相関です。評価書の式で書くと

$$C_{N,p}(v;f) = a_N^{4n} \sum_{x_1,\dots,x_n} f(a_N x_1,\dots,a_N x_n)\, \mathbb{E}_{\mu^{\mathrm{W}}_{N,p}}\Big[\prod_{j=1}^{n} I_{N,p}(v_j, x_j; U)\Big] \tag{5}$$

で、$N \to \infty$ の極限が間隔の列の全体で在ること（定理 4.1）が主張です 評（評価書 §4.3）。繰り込みの一段（式 (2)）は、この期待値を評価するための道具として使われ、極限の対象としては現れません 源。固定した段の押し出しの密度は収束しますが（`Flux.fanned`）、極限の測度は名前のついた対象としては定義されていません 源（名前の検索の範囲）。その測度は、固定した段の密度の一様な収束から出る見込みです 推。

鏡映正値性も、元の格子の Wilson の測度（`YM/Wilson/Law.lean:87` の `law`）についてだけ言われています（`reflected_positive`） 源。連続の側の鏡映正値性は、格子の Gram 行列の非負性を相関の極限で保つことで得ています（`realPositive`、`YM/Extraction/Harvest.lean:46`） 源。一段の核の鏡映正値性の言明は、読んだ範囲では見つかりません 源（検索の範囲）。核のパッチが鏡映の面を跨ぐので、その言明は自明ではないと推し量ります 推。

だから、押し出した測度の鏡映正値性（式 (4) の型）は、公開された構成の骨組みのどの段にも入る場所がありません[推]。本書の検討の骨組みでは事情が違いました。部分列の極限の含意（28-01）は、押し出しの測度 $\nu_{n,m}$ そのものの極限を取り、その極限に鏡映正値性を移すので、仮定の欄に「$\nu_{n,m}$ が鏡映正値」が入ります。辺 3 の設計の定理は、この欄を払うためのものでした。終点（何の極限を取るか）が違うと、同じ性質の要・不要が入れ替わります。

08

## 設計の選びが何に効いていたか

**本書の側**。今の設計の選び（重み、倍率 2、閾 $r_0$）に依るのは、自由場の一段の定数（15-12）と線形化（15-13）でした（28-05 の表 2）。第 20〜22 部の定理は細かい格子の測度だけを使うので、設計に依りません。辺 3 の設計に替えると、押し出した測度の鏡映正値性が開いた正の側の全部で定理になり、合わせた列の存在の仮定が、設計の値と算術（$0 < r_0 \le 1$、$3^{m_0} L \ge 2$、$0 \le \kappa_0 < 1$）だけになります。費用は自由場の層の作り直しです。

**公開された構成の側**。確率の核にすると、罰の係数 $c_{\mathrm{pen}}$ が一段の自由場の精度に $K + c_{\mathrm{pen}} Q^{\mathsf{T}} Q$ の形で入り、拘束が硬い制約でなくなります[源]（11-09）。核が $\beta(N, p, m+1)$ に依るので、公開された構成の「押し出しの測度」は切断 $N$ とともに写像が変わる対象で、本書の検討の決定的な写像の押し出しとは同じ対象ではありません[源]。公開された構成の固定した段の密度の収束から、本書の検討の押し出しの測度の収束は出ません。

**共通の点**。格子の離散の対称を一段の後もそのまま保つことを、どちらの設計も目的にしています。本書は道の族の対称な平均で、公開された構成は対称を壊す選び方を確率で引いて和を取ることで、それを果たしています[推]。

09

## 読めていない所

- 小さい場のゲージ固定の存在と一意性の証明 `Branch.align`（`YM/Branch/Synchronize.lean:232`）、大きい場の軸ゲージの存在 `Axial.existence`（`YM/Branch/Pick.lean:80`）の中身。閾の値。
- 主な項の陽な繰り込みの写像の本体の在りか。一段の言明として読めたのは `History.Transfer`（`YM/RG/History.lean:223`）までです。
- 辺 $b_m$ の具体的な式。
- 一段の核の鏡映正値性の言明が、リポジトリのどこかに在るかどうか（全体は検索していません）。

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 公開された構成の一段は確率の核で、粗いリンクは予測子のまわりの罰 $e^{-\beta\, c_{\mathrm{pen}}\, \mathrm{price}}$ で引かれる。辺は 3 以上の奇数で、ブロックは粗い点の中心に置く | ゲージ固定の存在と一意性の証明の中身 |
| 本書の検討の Lean：辺 3・中心・一様の写像で押し出した Wilson の測度の鏡映正値性（`Block3.rp_push`）。L が偶数、m ≤ n 段、全ての実の β、開いた正の側の有界可測な関数 | リンクの真ん中の面の版、無限体積、質量ギャップ、格子間隔を変えること |
| 本書の検討の Lean：辺 3 の設計の上で合わせた列が在る（`Block3.tuned3_exists`） | 結合の列の単調・発散、解の一意性 |
| 源 公開された構成の鏡映正値性の言明は、元の格子の Wilson の測度についてのもの。一段の核の鏡映正値性の言明は、読んだ範囲に無い | リポジトリ全体の検索はしていない |
| 推 押し出した測度の鏡映正値性が公開された構成の骨組みに要らないのは、極限を取る対象が元の格子の測度での相関だから | 公開された構成の設計で押し出した測度が鏡映正値かどうか |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 一段の核・予測子・ゲージ固定・対称 | 源 | リポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）の `YM/RG/Block.lean`（:71 `density`、:77 `push`）、`YM/RG/Patch.lean`（:87 `weight`、:159 `bondCost`、:171 `usesBest`）、`YM/Branch/Center.lean:72`（`min_iff`）、`YM/Branch/Covariant.lean:50`（`channel`）、`YM/Lattice/Subdivision.lean:29`（`embed`）、`YM/Lattice/Scale.lean:28`（`Schedule`） |
| 相関の定義と極限 | 評 | 評価書（`yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`、2026-11-10）§4.3 の式 (6)・定理 4.1 |
| 元の格子の鏡映正値性 | 源 | `YM/Slice/Reflection.lean:98`（`reflected_positive`）、`YM/Wilson/Law.lean:87`（`law`）、`YM/Extraction/Harvest.lean:46`（`realPositive`） |
| 本書の今の設計 | Lean | 19-04 の出典の表 |
| 辺 3 の設計の定理 | Lean | 本書の検討の Lean の束（`Block3.paths`・`wts`・`blockMap_refl_cfg`・`down_refl`・`rp_push`・`rp_push_prob`・`down_flipSet`・`Y3_zero`・`tendsto_Y3_one`・`tuned3_exists`）。核の再検査を通し、源で確かめた |
| 辺 3 の写像の交換の数値 | 読 | 本書の検討の数値の記録（非可換・四次元・球の値・二段で、鏡映・軸の入れ替え・粗い並進との交換の差 $\le 1.1 \cdot 10^{-14}$。対照の写像では 0.26〜1.8 で破れを拾う） |

**この章で使った語** — 繰り込みの一段、ブロック写像、押し出しの測度、確率の核、予測子、群への射影、罰の係数、二本立てのゲージ固定、育つ辺、鏡映正値性、合わせ。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：14-03 合わせの比べ ― 一段のあとで結合をどう決めるかを比べます。

# 合わせの比べ — 測度で決まる量と、表示の中の係数

この章は本書の検討です。公開された構成についての記述（§03〜§05）は既存の知見（公開された構成の読み）です。§06 は推し量りです。

**この章で分かること** — 裸の結合の列を「ある粗い段で決まる量が、決めた値になる」ように選ぶ、という型は二つの側で同じです。違うのは、合わせる量（本書の検討は粗い面の平均の期待値や渦の比のような測度だけで決まる量、公開された構成は段 0 の密度の表示の中の $F^2$ の係数）と、存在の出し方（大域の端からの中間値の定理／段ごとの帯の入れ子の射撃）です。公開された構成では、この合わせが切断についての収束の一意性の議論で「錨」の役をします。本書の検討の極限が部分列でしか取れなかったことを、この錨の有無から推し量ります。

**前提となる章** — 19-07 §02 合わせ、10-01 段 m の結合とは何か、10-04 射撃法、28-02 全列の収束の含意。

**先に言うこと** — 本書の検討の合わせの定理は、格子間隔を固定した各格子での解の存在だけを言い、結合の列の単調・発散・一意性や、走りの法則（結合が $\log(1/a)$ に比例して育つこと）は言いません。§06 は推し量りで、部分列の曖昧さの原因を確かめたものではありません。一ループの係数の一致は規約を揃えた手の計算です。

この章の順序

1. 合わせという型 — 結合は入力でなく、尺度を決めるための数
2. 本書の検討の定義 — 測度だけで決まる量 — 粗い面の平均の期待値、渦の比
3. 公開された構成の定義 — 表示の中の係数 — 二つの正規化と、読み直し
4. 存在の出し方 — 大域の端と中間値の定理／帯の入れ子の射撃
5. 錨としての役 — 二点境界値問題の一意性と、列の全体の収束
6. 本書の極限が部分列でしか取れなかったこと — 推し量り
7. 一ループの係数の比べ — 規約を揃えると一致する
8. 言っていないこと・読めていない所

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。本書の検討の Lean の定理は、札の外に名と範囲を同じ行に書きます。

01

## 合わせという型

格子の上の結合 $\beta$ は、連続極限では入力ではなく、格子間隔を目盛るために調整する数です（導入は 5-05）。格子間隔 $a_N$ の格子で、裸の結合 $\beta_N$ を「間隔 $a_N$ に依らない一つの長さで決まる量 $Y$ が、決めた値 $\kappa_0$ になる」ように選べば、その長さが尺度の単位になります。これを合わせと呼びます。

二つの側は、この型を共有しています推。違うのは三点です。

1. 合わせる量 $Y$ が何か（§02・§03）。
2. 解の存在をどう出すか（§04）。
3. 合わせた結合が、極限の議論のどこで使われるか（§05）。

02

## 本書の検討の定義 — 測度だけで決まる量

本書の検討は、合わせる量を測度だけで定義します（19-07 §02）。二つの例が Lean に在ります。

**粗い面の平均の期待値**。段 $m_0 + k$ の細かい格子の Wilson の測度 $\mu^{\beta}$ を、ブロック写像の $k$ 段の合成で段 $m_0$ へ押し出し、粗い面の実部の平均 $Y_0$ の期待値を取ります。

$$Y(m_0, k, \beta) = \int Y_0 \, \mathrm{d}\big(\mathrm{down}_{*}\mu^{\beta}\big) \tag{1}$$

辺 3 の設計（14-02 §03）の上で、$Y(m_0, k, 0) = 0$（`Block3.Y3_zero`）、$0 < r_0 \le 1$ で $\beta \to \infty$ のとき $Y \to 1$（`Block3.tendsto_Y3_one`）、そして $0 \le \kappa_0 < 1$、$3^{m_0} L \ge 2$ のもとで、全ての $k$ で $Y(m_0, k, \beta_k) = \kappa_0$ となる $\beta_k \ge 0$ が在ります（`Block3.tuned3_exists`）。

**渦の比**。横 $N$・縦 $M$ のトーラスの捩れた分配関数 $Z_0, Z_1$ から作る $\theta_M = (Z_0 - Z_1)/(Z_0 + Z_1)$（19-02）は、ブロック写像を使わない量です。$\theta_M$ は $\beta$ について連続で $\theta_M(0) = 0$

（`ThetaTuning.thetaM_continuous`・`ThetaTuning.thetaM_zero`）、格子を止めて $\beta \to \infty$ で $1$ に近づき（`ThetaLimit.tendsto_theta_one`）、全ての $\kappa_0 \in [0,1)$ に $\theta_M(\beta) = \kappa_0$ となる $\beta \geq 0$ が在って、解の集合に最大の元が在ります（`ThetaLimit.tuning_all`）。詳しくは 21-07 です。

この定義の利点は、表示や近似を先に決めなくても書けることです。代わりに、「観測量の値と、有効作用の $F^2$ の係数」の関係は、別に示す必要があります。

03

## 公開された構成の定義 — 表示の中の係数

公開された構成では、切断 $N$・体積 $p$ の理論の段 $m$ の有効密度を、決まった形の表示

$$\mathrm{eval}_m = \exp\bigl(v|\Lambda| - \beta\, K - B - A\bigr) \cdot \mathrm{gas} \tag{2}$$

に書き（$K$ は主な作用、$B$ は $\beta$ に依らない一ループの部分、$A$ は局所的な剰余、gas は大きい場の活動の気体）、段 $m$ の結合をその係数 $\beta$ と定めます源（詳しくは 10-01）。$\beta K$ と $B$ の間で $F^2$ の項を付け替えられないよう、二つの正規化を置きます。$K$ の二次の部分の零運動量の係数行列を単位行列にすること、$B$ の零次と一次の Fourier の係数を $0$ にすることです源。

源の説明文は、この $\beta$ を「表示の中の実際の数で、測度とは独立に結びつく数ではない」と書いています（`YM/RG/History.lean` の冒頭）源。数そのものは、平らな配位 $1$ と試験配位 $V$ での密度の対数比

$$\log H(1) - \log H(V) = \beta\, K(V) + B(V) + A(V) \tag{3}$$

から読み直します（`YM/UVNext/COUPLING_RESET/Reset.lean:50` の `contrast`）源。右辺は $\beta$ について傾き $K(V) > 0$ で増えるので、根は一つで入力に連続に依ります源（10-03）。

段の向きは、$m = N$ が一番細かく、そこでは表示が裸の Wilson の重みそのもの、$m = 0$ が間隔 $1$ です源。合わせは「段 $0$ の結合が、決めた基準値 $\bar\beta$ に等しい」です評（評価書 §11 の基準の規約と付録 A）。基準値は大きく取り、全ての段で $\beta_m \in [\hat\beta_m/2,\, 2\hat\beta_m]$ の弱結合に留めます（`History.Conv` の欄 `band`）源。

| | 本書の検討 | 公開された構成 |
|---|---|---|
| 合わせる量 | 押し出しの測度での粗い面の平均の期待値、渦の比 | 段 $0$ の密度の表示の中の $F^2$ の係数 |
| 定義に要るもの | 測度とブロック写像（渦の比は写像も要らない） | 全ての段で保たれる表示と、二つの正規化 |

| | 本書の検討 | 公開された構成 |
|---|---|---|
| 読む場所 | 粗い格子の全ての配位の上の積分 | 小さい場の試験配位での対数比 |
| 別に示すこと | 観測量の値と $F^2$ の係数の関係 | 表示が全ての段で保たれること（帰納） |

04

## 存在の出し方

**本書の検討：大域の端**。合わせる量 $Y(\beta)$ が $\beta$ について連続で、$\beta = 0$ の値と $\beta \to \infty$ の値が分かっていれば、その間の目標に中間値の定理で解が在ります。辺 3 の設計では $\beta = 0$ の値が対称から 0 になり、$\beta \to \infty$ の値は平らな配位が平らに押し出されることから 1 になります。使うのは一つの連続関数の両端の値だけです。

**公開された構成：段ごとの帯の入れ子**。裸の結合を媒介変数 $x$ とし、段 $m$ の結合を $x$ の連続関数 $f_m(x)$ と見ます。存在の道（主定理まで鎖で確かめた道）では、段ごとの帯

$$\mathrm{low}_m = \tfrac{3}{4}\,\bar\beta + \tfrac{5}{8}\,s\,\log D_m, \qquad \mathrm{high}_m = \tfrac{5}{4}\,\bar\beta + \tfrac{3}{2}\,s\,\log D_m \tag{4}$$

（$s$ は一ループの傾き、$D_m$ は段 $m$ までの辺の積）を使います（`YM/FullVolume/Arc.lean:21`・:22）源。一段の誤差の不等式から、段 $m+1$ で帯の両端に届く区間の中に、段 $m$ でも帯の両端に届く部分区間が取れ、段 $N$ から下向きに入れ子の区間が出来ます（`Arc.bought`、同 :95）源。段 0 では区間 $[\tfrac{3}{4}\bar\beta, \tfrac{5}{4}\bar\beta]$ の内部に $\bar\beta$ が在るので、中間値の定理（`covers`、同 :71）で段 0 の結合が $\bar\beta$ になる裸の結合を取ります源。$f_m$ の連続性は、存在の道では `Roof.Lyrics.supplier`（`YM/FullVolume/C/Songbook.lean:76`）が供給します源。

リポジトリには別の帯 $[\bar\beta + \tfrac{s}{2}\log D_m,\ \bar\beta + 2s\log D_m]$ を使う射撃（`YM/Shoot/` の下）も在りますが、主定理への道（`FullVolume/Stage/Rods.lean:26` の `rodB`）はそちらを使っていません源。射撃法の詳しい形は 10-04 です。

違いをまとめると、本書の検討は一つの関数の大域の端を使い、公開された構成は段ごとの局所の帯と一段の誤差の不等式を使います。公開された構成の方法は、一段の誤差の和が帯の幅の小さい割合に収まる条件（暦の条件）を前提に、段の数に依らず同じ形で働きます。本書の方法は、端の値が対称や極限から分かる量でしか使えません推。

05

## 錨としての役

公開された構成では、合わせは「単位を決める」だけでなく、体積を止めた紫外の極限が列の全体で取れることの議論に入ります源。

切断についての収束の源は、$N$ と $N'$ を量で比べる評価ではなく、コンパクト性・極限の一意性・部分列の原理の三つです（`Window.allB`、`YM/FullVolume/Glide/Triumph.lean:37`）源。表示の材料（結合と活動）の列は、コンパクトな集合に入るので部分列の極限を持ちます。どの部分列の極限も、全ての段 $m \in [0,\infty)$ にわたる「梯子の方程式」を満たします。その解が一つしかなければ、全ての部分列の極限が一致し、列の全体が収束します。

一意性（`accord`、`YM/FullVolume/Glide/Coincide.lean:58`）は二点境界値問題の形です源。

- **限界的な方向（結合）**は段 $0$ に錨を下ろします。射撃で全ての $N,p$ について段 $0$ の結合が $\bar{\beta}$ なので、二つの解の結合の差は段 $0$ で $0$ で、細かい側へは一段のずれの和で伝わります。その和の大きさは暦の条件で帯の幅の小さい割合に抑えられます源。
- **無関係な方向（活動）**は細かい側から粗い側へ、一段で $1/16$ に縮みます（`Window.curls`、`YM/FullVolume/Glide/Duty.lean:45`；`Muse.ticket`、`YM/FullVolume/Gain/Rate.lean:94`）源。

二つの解の差の上限を $b$ とすると、この二つから $b \le b/16$ が出て、$b=0$ です源。細かい端での初期値の違いは、段を下るごとに $(1/16)^k$ で忘れられるので、小さい必要はなく有界で足ります（`culprit`、`YM/FullVolume/Glide/Wings.lean:59`）源。活動の収束には、この忘却の量の評価も使われます源。収束の速さは言明に在りません（質的な収束）源。

錨が無いと、結合の方向は縮まないので、この議論は閉じません。全ての切断で段 $0$ の結合を同じ $\bar{\beta}$ に揃える合わせが、まさにその錨です推。詳しくは 11-10 です。

06

## 本書の極限が部分列でしか取れなかったこと

この節は推し量りです推。

本書の検討の部分列の極限の含意（28-01）では、結論の一つ目として「合わせの点が括弧の中に在る」（関数の族 $u_n$ について $u_n(x)=t$ となる点）が言われますが、$u_n$ と細かい測度を結ぶ欄は一つもなく、裸の結合の列と合わせは結びついていませんでした。全列の収束の含意（28-02）は、抽象の歪積の写像（周辺の座標と、縮む無関係な座標）の軌道について、「粗い

端での周辺の座標を全ての $n$ で同じ値に合わせ、無関係な座標が一段で縮むなら、粗い端がCauchy」という形を Lean に持っていて、終点の合わせが外せないことも例で示していました。これは §05 の二点境界値問題と同じ型です。ただし、その写像は格子から定義されていませんでした。

したがって、本書の検討の極限が部分列でしか取れなかったのは、結合の向きに錨が無かった（合わせが鎖の外に在った）ことから来ている可能性があります。辺 3 の設計の合わせた列の存在（§02）は、錨の候補になり得る具体の対象です。ただし、それが一段の写像の周辺の座標の合わせになっていることは示されていません。28-02 との違いも二つあります。28-02 の定理の周辺の座標は、28-01 の $u_n$ とも辺 3 の合わせの量 $Y$ とも同じものと置かれていません。また 28-02 の収束は、Lipschitz の縮みから量で出す Cauchy（速さつき）で、公開された構成の「コンパクト性と一意性」（速さなし）とは出し方が違います。

ただし、錨だけでは足りません。公開された構成の一意性の議論は、全ての段で保たれる表示（材料が結合と活動に分かれること）と、活動の一段あたりの縮みの上に立っています。本書の決定的なブロック写像で、粗い密度がこの形の表示を全ての段で保つことは示されていません。そこは大きい場の扱い（14-04）と重なる所です。

07

## 一ループの係数の比べ

公開された構成の一段の結合の移りの傾きは、定義として置かれた定数

$$s = \frac{11\,C_g}{24\pi^2} \tag{5}$$

です（`YM/Gauge/Colors.lean:184` の `slopeConstant`）源。評価書は、裸の結合が $\beta_{N,p}/\log(1/a_N) \to 11C_g/(24\pi^2)$ を体積に一様に満たすと述べています評（評価書 §4.3 の式 (7)）。公開の言明 `WilsonRegularity.running`（`ChallengeSpec.lean:13`）が求めるのは「ある正の傾きが在ること」だけで、$11C_g/(24\pi^2)$ は構成が満たす値です源。$C_g$ は内積 $\langle X, Y\rangle = -\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}(XY)/d$（$d$ は表現の次元）に対する Casimir の定数です源。

SU(2) の二次元の表現では $C_g = 8$、$s = 11/(3\pi^2)$ で、辺 2 の一段ぶんの移りは $s\ln 2 = 11\ln 2/(3\pi^2) \approx 0.2575$ です初（手の計算。$C_g = 8$ は数値でも確かめた）。これは、本書の検討が $\beta$ の単位で書いた一ループの値（15-01）と一致します初。前提は、本書の $\beta$ が $\sum_p (1 - \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U_p)$ の係数（標準の $\beta = 4/g^2$）であることです。公開された構成は辺 3 以上の奇数しか使わないので、辺 2 の一段そのものは扱っていません。一致するのは $\log b$ の係数だけで、一段の $O(1)$ の定数は比べられません。

公開された構成は、一段の誤差を $O(1)$ のまま、辺 $b_m$ を段とともに育てて $\log b_m$ で割って消します（10-05）源。本書の検討は辺を固定していたので、一段の $O(1)$ の誤差が段の数だけ積もる問題を、別に抱えていました（15-01 で測った一段目の係数のずれ）。

08

## 言っていないこと・読めていない所

**本書の検討の側が言っていないこと**。合わせの解の一意性、結合の列の単調・発散、走りの法則、$\theta_M$ についての $N$ に一様な評価。渦の比の合わせは格子を止めた言明で、格子と結合を同時に動かす列については何も言いません。

**短距離の実効の結合の在りか**。評価書の定理 7.2（短距離の実効の結合 $\log(1/r)\, g_W(r)^2 \to 1/(2b_0)$。評価書の記号で、$2\mathrm{b}_0$ は (5) の傾き s に当たります）について、近い内容の宣言が三つ在ります源。評価書は在りかの名を挙げていません評。

| 宣言 | 中身 | 依存 |
|---|---|---|
| `YM.PertExtension.Running.ratio`（`YM/PertExtension/Running.lean:145`） | 比の形（$\mu \to \infty$、$a_m \le 1/\mu$） | 依存の外（outside）源 |
| `YM.Trace.Pilot.wilson_link`（`YM/TraceExtension/Atlas/Sink.lean:50`） | 定理 7.2 の言明（$r \downarrow 0$、$r$ を下回る最初の間隔）に字句が近い 推。仮定に `PostT`（$b_i \le \log \hat{\beta}_i$）が在る | 依存の中。最初の見出しは `continuum_with_position_tests`、直接の使い手は `crest_ready`。跡の解析の途中の段として使われ、結論は `Crest.charts` と `FieldComparison.wilson` に入り、`of_result` で落ちる源 |
| `YM.Pert.Asymptotics.comparison`（`YM/Pert/Asymptotics/RawAxis.lean:36`） | 切断つきの段 $i$ の結合 $\beta(N_i, k_i, i)^{-1/2}$ の走りで、$g_W$ とは別の量 | 見出しの定理そのもの（headline）源 |

$g_W$ の形の言明は、公開の定理・構成の定理・委員会の結合の目標の、どの結論にも残りません源。見出しの定理 `comparison` も、検証の記録が挙げる 17 の見出しの一つで、三つの目標の結論には入っていません（構成の定理・公開の定理・委員会の結合の目標のどこからも参照されていない）源。間隔の列の取り方への普遍性と、$\bar{\beta}$ を変えたときの依り方は言われていません評 源。

**読めていない所**。一ループの移りの値と一段の定理の運動項をつなぐ証明（`under_contract` の先）、試験配位 $V$ の具体形、`Roof.Lyrics.supplier` が連続性を作る中身。

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 本書の検討の Lean：渦の比 $\theta_M$ は $\beta$ について連続で $\theta_M(0)=0$、$\beta\to\infty$ で 1 に近づき、全ての $\kappa_0\in[0,1)$ に $\theta_M(\beta)=\kappa_0$ の最大の解が在る（`ThetaTuning.thetaM_continuous`・`thetaM_zero`、`ThetaLimit.tendsto_theta_one`・`tuning_all`。格子は固定） | 解の一意性、$\kappa_0$ についての連続、$N$ に一様な評価 |
| 本書の検討の Lean：辺 3 の設計で、粗い面の平均の期待値を合わせた列が在る（`Block3.tuned3_exists`） | 列の単調・発散・有界、走りの法則 |
| 源 公開された構成の段の結合は、密度の表示の中の係数で、測度だけから決まる数ではない、と源の説明文が書く | 表示を替えたときの依り方 |
| 源 存在の道の射撃は帯 $\frac{3}{4}\bar\beta+\frac{5}{8}s\log D_m\sim\frac{5}{4}\bar\beta+\frac{3}{2}s\log D_m$ の入れ子の区間で、段 0 で $\beta=\bar\beta$ を取る | 射撃で選んだ裸の結合の一意性 |
| 源 切断についての収束は、コンパクト性・一意性・部分列の原理から出る。一意性は段 0 の錨と、活動の一段あたり 1/16 の縮みから | 収束の速さ（言明に無い） |
| 推 本書の検討の部分列は、結合の向きに錨が無かったことから来ている可能性がある | 確かめていない。錨が在っても、表示と縮みが無ければ同じ議論は立たない |
| 初 ループの係数は、規約を揃えると辺 2 の一段ぶんで $\frac{11\ln 2}{3\pi^2}$ に一致する（手の計算。$C_g=8$ は数値でも確認） | 一段の $O(1)$ の定数の比べ |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 段の結合の定義の説明文 | 源 | リポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）の `YM/RG/History.lean` の冒頭の説明文（:24 付近）、`Conv`（:213）・`Transfer`（:223）・`Selected`（:234） |
| 読み直し（二つの配位の対数比） | 源 | `YM/UVNext/COUPLING_RESET/Reset.lean:50`（`contrast`） |
| 射撃法（存在の道） | 源 | `YM/FullVolume/Arc.lean`（:21 `low`、:22 `high`、:71 `covers`、:95 `bought`）、`YM/FullVolume/C/Songbook.lean:76`（`Roof.Lyrics.supplier`）、`YM/FullVolume/Stage/Rods.lean:26`（`rodB`） |
| 錨と縮み | 源 | `YM/FullVolume/Glide/Triumph.lean:37`（`allB`）、`YM/FullVolume/Glide/Coincide.lean:58`（`accord`）、`YM/FullVolume/Glide/Duty.lean:45`（`curls`）、`YM/FullVolume/Gain/Rate.lean:94`（`Muse.ticket`）、`YM/FullVolume/Glide/Wings.lean:59`（`culprit`） |
| ループの傾き | 源 | `YM/Gauge/Colors.lean:184`（`slopeConstant`）。評価書 §4.3 の式 (7) |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 短距離の実効の結合（近い内容の三つの在りか） | 源 | `YM/PertExtension/Running.lean:145`（`ratio`、outside）、`YM/TraceExtension/Atlas/Sink.lean:50`（`wilson_link`、used）、`YM/Pert/Asymptotics/RawAxis.lean:36`（`comparison`、headline）。`verification/declaration-usage.tsv`・`verification/joint-headlines.txt`、評価の側の `submissions/openai-20261028/checks/CombinedAcceptance.lean` |
| 合わせ・裸の結合・走り | 評 | 評価書（`yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`、2026-11-10）§4.3・§7.4 |
| 本書の合わせの定理 | Lean | 本書の検討の Lean の束（`ThetaTuning.*`・`ThetaLimit.*`・`Block3.*`）。核の再検査を通し、源で確かめた |
| 一ループの係数の比べ | 初 | 本書の検討の手の計算（$C_g$ の値は数値でも確認）。本書の側の値は 15-01 |

**この章で使った語** — 合わせ、裸の結合、粗い面の平均の期待値、渦の比、表示の中の係数、読み直し、射撃法、帯、錨、二点境界値問題、上端の忘却、走りの法則、一ループの係数。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：14-04 大きい場 — 本書の検討で開いていた大きい場の扱いを、公開された構成の扱いと比べます。

# 大きい場 — この本の検討の詰まりと、公開された構成の扱い

この章は本書の検討です。公開された構成についての記述は既存の知見（公開された構成の読み）、§01 は未解決の地図です。§06・§07 の判定は推し量りです。

**この章で分かること** — 本書の検討の紫外の側で、やり方が分からないまま残っていたのが大きい場です。大きい場の領域を段ごとに積み上げて固定する形では、ブロック写像で形の変わらない配位の近くに段を跨いで持続する欠陥の扱いが開いていました。公開された構成は、領域の履歴を持たず段ごとに種を数え直し、表示の主な部分を一次に切り、ゲージの切り口と区画の条件を満たす全ての配位について「種一つあたりのエネルギー」の不等式を毎段立て、帰納の仮定には弱い帳簿、一段の証書には強い見積もりを置き、段に一様な条件を暦の側で払います。本書の詰まりに対しては「別の形で答えている」と読みます。

**前提となる章** — 11-00 帰納の仮定と一段の証書、9-07 小さい場の閾と、切った作用、28-04 前提の一覧（大きい場の評価・大きい場の気体）、22-01 大きい面の稀さ。

**先に言うこと** — 公開された構成の大きい場の補題の多くは、宣言の使われ方の記録で辿ると、見出しの定理が主定理とは別のものになります。それらが主定理の依存に入っているかは確かめていません（入っていない、という意味ではありません）。一段のあとの粗い段の活動を帳簿に収め直す構成の全体、Haar の損失を払う補題、残りの積分の上界は読めていません。§06 の判定は、本書の検討の側の言葉への当てはめで、公開された構成の証明が本書の問いを想定して書かれたという意味ではありません。

この章の順序

1. 本書の検討の詰まり — 積み上げて固定する領域と、持続する欠陥
2. 公開された構成の各段の表示 — 切った作用と、旗の上だけの活動の気体
3. 一段の中 — 種と区画 — 種の型、区画、一の分割
4. 種一つあたりのエネルギー — 切り口と区画の条件を満たす配位についての不等式
5. 二つの帳簿と暦 — 弱い帳簿と強い見積もり、印、段に一様な条件

6. 判定 — 別の形で答えている — 何が言えて、何が言えないか（表 1）
7. 閾を超え続ける配位 — 段を跨いでどう扱われるか
8. 小さい場に戻った塊 — 粗い旗を含むかどうかの判定
9. 読めていない所と、依存の確かめ

---

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。本書の検討の Lean の定理は、札の外に名と範囲を同じ行に書きます。

01

## 本書の検討の詰まり

格子の場を段ごとに粗くするとき、どの段でも、場が大きくずれている所（面のホロノミーが単位元から遠い所）が残り得ます。そこでは小さい場の展開（ガウス型の積分と、その補正の展開）が使えないので、別の扱いが要ります。これが大きい場の問題です（7-05、15-01）。

本書の検討は、Bałaban の連作の型にならい、大きい場の領域を段ごとに定め、それを積み上げて以後の段で固定する形で考えていました。この形では、ブロック写像で形の変わらない配位（どの段でも同じ形に写る配位）の近くに、段を跨いで持続する欠陥が残り得ます。その欠陥について、作用の利得と揺らぎの損失が釣り合ってしまわず、各段の稀さが段の数に一様に効くことをどう示すか。これが分からないまま残りました。

前提の一覧（28-04）では、この部分は「大きい場の評価」（各段と各穴で、活動が作用の下限の指数で抑えられ、定数が段と体積に一様）と「大きい場の気体」（大きい場の活動の気体の評価と、それが対応する比に等しいこと）の二行に置かれ、どちらも形が決まっていません仮（28-06）。一つの尺度での稀さ（細かい格子の Wilson の測度で、大きい面の集合の確率が体積に一様に小さいこと）は Lean の定理ですが（`FoldCap.rarity_explicit`、22-01）、段を跨ぐ形には届いていません。

02

## 公開された構成の各段の表示

公開された構成は、各段 $m$ の有効密度を次の形に保ちます源（詳しくは 9-06・11-01）。

$$\mathrm{eval}_m = \exp\!\Big(v|\Lambda| - S^{\mathrm{clip}}_m - \sum_i 1[\text{健康}]\,E_i\Big)\cdot \mathrm{gas}_m(K) \tag{1}$$

$S^{\mathrm{clip}}$ は切った作用、$E_i$ は小さい場の（正則な）活動、$\mathrm{gas}(K)$ は大きい場の（強制された）活動 $K$ の気体です。

**閾**。段 $m$ の基準の結合 $\hat\beta_m$ から、$\hat g_m = \hat\beta_m^{-1/2}$、$p_m = \exp\!\big((\log\log\hat\beta_m)^2\big)$ と置き、閾を $t_m = \hat g_m\, p_m$ とします（`YM/RG/History.lean:81`・:83）源。十分大きい $\hat\beta$ で（漸近の意味で）、$p$ は $\log\hat\beta$ のどの冪よりも速く育ち、$\hat\beta$ のどの正の冪よりも遅く育ちます初。たとえば $\hat\beta = 10^{10}$ では $p \approx 1.9\cdot 10^4$ で、$\hat\beta^{0.1} = 10$ より大きいので、遅く育つことが見えるのは $\hat\beta$ がずっと大きい所です読。

**切った作用**。面ごとに、ずれ $s$（面のホロノミーの単位元からの隔たり）について

$$\mathrm{clipped}(s) = \begin{cases} \dfrac{c_{\mathrm{dir}}}{2}\,s^2 & (s \le t) \\ c_{\mathrm{lin}}\,t\,s & (s > t) \end{cases}, \qquad c_{\mathrm{lin}} < \frac{c_{\mathrm{dir}}}{16} \tag{2}$$

です（`YM/RG/PathActions.lean:218` の `clipped`、:145 の `kink`）源。閾までは二次、閾を超えると一次で、$s = t$ で下へ跳びます。

**旗の上だけの活動**。大きい場の活動 $K$ は、現在の段で閾を超えた所（旗）をちょうど覆う塊の上にだけ在り、旗が無ければ気体は 1 です（`YM/RG/Activities.lean:135` の `gas_one`）源。帰納の仮定 `History.Conv`（`YM/RG/History.lean:213`）が持つのは、小さい場の活動の帳簿 $\hat g^{11/5}$（:84）と、大きい場の活動の帳簿

$$\sum(\text{被覆の重みつきの } K) \;\le\; \exp\!\big(-p_m^{1/5}\big) \tag{3}$$

（:85 の `forcedAllowance`）と、結合の帯です源。**領域の履歴を表す欄はありません**源。

**段の間は等式**。段 $m$ と段 $m+1$ の密度は、一段の核による押し出しの等式 $\mathrm{eval}_m = \mathrm{push}(\mathrm{eval}_{m+1})$ で結ばれます（`History.Transfer`、:223）源。表示の主な部分を切っても測度は変わらず、切った分の差は小さい場と大きい場の活動の側に入ります源。

一番細かい段では、面ごとに Wilson の値段を、切った作用・健康な所の二次・健康な所の剰余・差額（due）に分け、差額を最初の大きい場の活動に負わせます（`YM/Extra/WILSON_STARTUP/Ownership.lean:68` の `due_eq`）源。差額は旗の面で $t^2/4$ 以上です源（11-02）。

```
03
```

## 一段の中 — 種と区画

一段の積分の中では、配位を「小さい場と大きい場」の二つに特性関数で切るのではありません[源]。三種類の「種」を数えます：閾を超えた細かい面、予測子から大きくずれた粗いリンク、粗い旗に触れる点です[源]。種の型（三つの有限集合の組）ごとに区画を作り、区画どうしを滑らかな一の分割で貼り合わせます[源]（11-03）。

区画の条件そのもの（`Seeded`、`YM/Push/SECTOR_MEASURE/Cells.lean:51`）は、全ての面とリンクに課されます[源]。評価に使うのは、種のまわりに局所化した形 `Plot`（`YM/Pressure/Seeds.lean:51`）で、局所化の半径は粗い側の基準の結合 $\hat{\beta}$ で $5\lceil(\log\hat{\beta})^2\rceil$ です[源]。区画の境は、面の条件が $t/4$ と $t/2$ の二つの値で書かれ、ずれのある幅（ヒステリシス）を持ちます[源]。

04

## 種一つあたりのエネルギー

一段の要の不等式は、区画の上で

$$c_E\, t_{\mathrm{f}}^2 \cdot \#(\text{種}) \;\le\; \big(\text{細かい作用} + \text{ずれの罰} - \text{粗い切った作用}\big)_{\text{種のまわり}} \tag{4}$$

です（`cash`、`YM/Pressure/Seeds.lean:124`；`Grants`、同 :129）[源]。$t_{\mathrm{f}}$ は細かい側の閾です[源]。量化の順は「ある $i$ があって、$i$ 以上の全ての辺 $L$、十分大きい全ての $W$ で、ある $c_E>0$ があり、十分大きい全ての基準の結合で、…」で、$c_E$ は $L$ と $W$ に依ります[源]（源の字句では $\kappa$）。言明は、パッチの辺が $L$、格子の辺 $c$ が $100(1+\lceil(\log\hat{\beta})^2\rceil)$ 以上、核の選び方などの仮定 `Funds` のもとで、ゲージを木で固定した切り口（`SliceSet`、:48：森の幹の上で $U=1$）と区画の条件 `Plot` を満たす**全ての配位**について言われます（`live`、:113〜:118）[源]。この構造体は全ての選び方について仮定なしに成り立ちます（`grants`、`YM/Next/FLUCTUATIONS/Grants.lean:24`）[源]。

$\beta$ を掛けると $\beta t^2 \approx p^2$ なので、種一つに $\exp(-c_E p^2)$ 程度の因子が付きます[推]。$p^2$ は $\log\beta$ のどの冪よりも速く育つので、種のまわりの体積、Haar の損失、組合せの数といった多重対数の損失は、この因子で払えます[推]。

不等式 (4) の正の余りの一つは、切った作用から来ます。中くらいの大きさの粗い面（粗い閾 $t_{\mathrm{c}}$ より大きく、ある $\delta$ 以下）では、粗い側の働きの下界に $\frac{c_{\mathrm{dir}}}{4}\, t_{\mathrm{c}}\cdot(\text{ずれ})$ の正の項が出ます（`YM/Bid/Energy.lean:94`〜:97 の `Crowds`、:101 の `E05`）[源]。粗い段へは作用を一次に切って渡すので、細かい側の二次の作用との差が正に残る、という形です[推]。

05

## 二つの帳簿と暦

**弱い帳簿と強い見積もり**。帰納の仮定 `Conv` が持つ大きい場の帳簿は、式 (3) の弱い形だけです源。一段の証書 `Move`（`YM/PCalc/Band.lean:49`）は、出口の活動についてもっと強い

$$K_{\text{出口}} \lesssim \exp\!\left(-g \cdot p_{m+1}^{2}\right) \tag{5}$$

を言います（欄 `forced`。$p_{m+1}$ は細かい段の値）源。強い見積もりを弱い帳簿へ落とすのは短い不等式です：十分大きい全ての $y$ について、$x$ と $y$ が「似ている」（閾・$P$・隙間・塊の数・帳簿 $w$ などの六つの量が、互いに 2 倍の幅に在る。`Alike`、`YM/Next/SCHEDULE/Dues.lean:118`）なら $\exp(-d\,P(y)^2) \le w(x) = \exp(-P(x)^{1/5})$（`saved`、`YM/Next/SCHEDULE/Salary.lean:178`；`late_force`、`YM/AnalyticBridge/VERIFIED_RESET_STEP/Opening.lean:19`）源。`saved` の証明は指数 $1/5 \le 1$ の場合を扱い（$P$ の比が 2 以内であることを使う）、2 未満の任意の指数で同じことを言う形は `dictionary_fit`（`YM/AnalyticNext/CONNECTED_ACTIVITY_JETS_E6/Bulkhead.lean:78`）です源。強い評価は帰納の仮定に入れず、弱い帳簿のほうを毎段作り直します。段に一様な条件は、下の「暦」のとおり暦の側で払われます推。

**印**。種一つの収入について、保証された下界 $c_E P^2/2$ の半分 $c_E P^2/4$ を「印」として出口に残し、残りで木の展開と被覆の組合せの損失を払います（`Target.costs`、`YM/AnalyticNext/CONNECTED_ACTIVITY_JETS_E6/OptionCost.lean:83`、$u = 1/2$）源（11-05）。

**入ってくる活動**。出口の率の式（印と目標の率）は $c_E$, $p$, $\beta$ だけの関数で、入ってくる活動の評価は入りません源。入ってくる活動の評価は、一段の仮定の側（`Target.Invoices` の欄、`YM/AnalyticNext/CONNECTED_ACTIVITY_JETS_E6/Issue.lean:73`）で、一段の中の和を収束させるのに使われます源。稀さは毎段、その段の作用の差から作り直されます推。

**暦**。弱い帳簿も段 $m$ の関数です。段に一様な条件は、暦の側で払われます。辺の下限、基準の結合の入口、率の割り当てなどを、「段の定数 → 辺 → 幅 → … → 結合の入口」の順に先に固定します源（11-08）。帳簿を段ごとに持ち運ぶのは、存在の道では `Roof.Lyrics.supplier`（`YM/FullVolume/C/Songbook.lean:76`）で、似た名の `Directed.holding`（`YM/PCalc/Band.lean:92`）は使われていません源。

06

## 判定 — 別の形で答えている

本書の詰まり（§01）に対して、公開された構成は**別の形で答えている**、と読みます[推]。

### 表 1　本書の検討の詰まりと、公開された構成の扱い

| 点 | 本書の検討 | 公開された構成 |
|---|---|---|
| 大きい場の領域 | 段ごとに定め、積み上げて以後固定 | 履歴を持たず、各段でその段の旗から種を数え直す[源] |
| 分け方 | 小さい場の特性関数 | 種の型の区画と、滑らかな一の分割[源] |
| 表示の主な部分 | 二次の作用が主 | 閾を超えると一次に切った作用。差は活動へ[源] |
| 閾 | 結合の多重対数の倍 | $\hat{g}\cdot\exp((\log\log\hat{\beta})^2)$[源] |
| 種一つあたりの因子 | $e^{-c/g^2}$ の型 | $\exp(-c_E p^2)$ の型。ずっと弱いが、帳簿 $\exp(-p^{1/5})$ はさらに弱い[源][推] |
| 持続する欠陥 | 段の数に一様に抑える方法が開いていた | 切り口と区画の条件を満たす全ての配位についての不等式を毎段立て、因子を毎段出す[源][推] |
| 段に一様な条件 | 前提の欄に置いていた[仮] | 暦（辺の下限、結合の入口など）の側で払う[源] |
| 瞬間子・渦・位相の区分 | 持続する欠陥の候補として挙がっていた | 名指しで扱う議論は主定理の道に見当たらない[源]（検索の範囲） |

**言えること。**公開された構成は、領域の履歴を持たず、段ごとに種を数え直し、ゲージの切り口と区画の条件を満たす全ての配位についての不等式 (4) で、種一つあたりの因子を毎段出しています。表示の主な部分を一次に切ってあることは、不等式の正の余り（中くらいの粗い面）と整合します。

**言えないこと。**「本書の恐れた配位という前提が外れる」とは言えません。切るのは表示の主な部分だけで、段の間は等式で、測度は変わらないからです。切った分の差は活動の側に入ります。また「段の数に一様な評価という問題が起きない」とも言えません。弱い帳簿も段の関数で、段に一様な条件は暦の側で払われています。書けるのは、「表示の主な部分を切り、差を活動に入れ、切り口と区画の条件を満たす全ての配位についての不等式を立て、段に一様な条件を暦で払う」という形で答えている、までです。

07

## 閾を超え続ける配位

本書の恐れた型の配位、たとえば全ての段でその段の閾をちょうど超え続ける配位は、公開された構成ではどう扱われるか。

種一つあたりのエネルギーの不等式 (4) は、切り口と区画の条件を満たす全ての配位について言われ、配位の型を除く仮定はありません[源]。その配位でも、各段で細かい旗は種になり、種が一つ以上あるので (4) の右辺は $c_E t^2$ 以上です[源]（量化）[推]（当てはめ）。各段で印が付き、出口の活動は (5) の強い形、さらに (3) の弱い帳簿に収まります[推]。

何段も続くことの稀さは、段を跨いで掛け合わされません。前の段で払った稀さは弱い帳簿へ落とされ、各段の作用の差から新しく取り出されます[推]。帳簿が段ごとに同じ形なので、それで帰納が回る作りです。段に一様な条件は、消えるのではなく、暦の側で払われます（§05）。作用の側では、段 $m$ で使った粗い作用の項が段 $m-1$ の細かい作用の項と同じなので、各段はその段の作用の差を取り出すだけで、二重には数えていない、と読みました[推]。対称の平均を含めた正確な形は確かめていません。

08

## 小さい場に戻った塊

一段の後、粗い段で欠陥が小さい場に戻ることがあります。公開された構成は、粗い旗を含む塊（`ThickP`）と含まない塊（`ThinP`）を、局所の判定一つで分けます（`YM/AnalyticNext/CONNECTED_ACTIVITY_JETS_E6/Colony.lean:26`・:27）[源]。粗い旗を含む塊だけが次の段の大きい場の活動 $K$ になり、含まない塊の寄与は小さい場の展開の項（Ursell の項）に入り、その平らな所の値は真空の項 $v$ へ、二次の部分は結合の直しへ流れます[源]（分類と真空の項の式）[推]（流れ）（11-06）。

本書の検討で「欠陥が小さい場に戻ったらどうするか」は場合分けの問いでしたが、公開された構成では、粗い段の表示を作り直す手続きの中の一つの判定で済んでいます[推]。

09

## 読めていない所と、依存の確かめ

- **依存**。主定理（`jointExistence`）の道に載ることを鎖で確かめたのは、射撃と一段の定理の道（`rodB` から読み直しまで）、切断についての収束（`allB` など）、小さい場の条件を閉じる `sailsW`、紫外の極限 `realUV` に限られます。この章で引いた大きい場の補題の多く（`late_force`、`due_eq` など）は、宣言の使われ方の記録で辿ると見出しの定理が主定理とは別のものになります。主定理に載らないという意味ではなく、確かめていない、という意味です。
- 一段の後に粗い段の活動を作り直し、帳簿 (3) に収める構成の全体（`YM/PhysicalNext/RG_NEXT_COMPLETE_REPEATABLE_NONLINEAR_STEP/` の下、

`V9_JOINT_ENDPOINT_LOAD`、`ANNULUS_RATIO_INSERTIONS`）。

- Haar のまま積分する所の損失を払う補題の在りか。種一つあたりの対数の費用の欄に入ると読みましたが、具体の補題は特定していません。
- 値段を出したあとの残りの積分の上界の全体。
- 不等式 (4) と正の余りの証明（言明だけ読みました）。
- 粗い旗を含まない塊の値が、小さい場の活動の帳簿の番地へ入る写像。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 帰納の仮定 `History.Conv` は領域の履歴の欄を持たず、大きい場の活動は現在の段の旗の上にだけ在る | 一段のあとで活動を帳簿に収め直す構成の全体 |
| 源 表示の主な部分は、面のずれが閾以下で二次、閾を超えると一次で、一次の係数は二次の係数の 1/16 より小さい。段の間は押し出しの等式で、測度は変わらない | 切った差が活動へどう配られるかの全て |
| 源 種一つあたりのエネルギーの不等式は、ゲージの切り口と区画の条件を満たす全ての配位について言われる（仮定 `Funds`・`SliceSet`・`Plot` つき） | その証明の中身（言明だけ読んだ） |
| 源 帰納の仮定は弱い帳簿 $\exp(-p^{1/5})$ だけを持ち、一段の証書は強い見積もり $\exp(-g\,p^2)$ を出す。一行の不等式で弱める | 強い見積もりから活動の気体を作り直す所の全体 |
| 源 出口の率の式に入ってくる活動の評価は入らない。入ってくる活動の評価は一段の仮定の側で使われる | — |
| 推 本書の詰まりに対し、公開された構成は「別の形で答えている」 | 「本書の恐れた配位が起きない」「前提が外れる」とは言えない |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 閾・帳簿・帰納の仮定 | 源 | リポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）の `YM/RG/History.lean`（:81 `monitor`、:83 `threshold`、:84 `allowance`、:85 `forcedAllowance`、:213 `Conv`、:223 `Transfer`） |
| 切った作用 | 源 | `YM/RG/PathActions.lean`（:145 `kink`、:218 `clipped`） |
| 活動の気体 | 源 | `YM/RG/Activities.lean`（:98 `EBound`、:135 `gas_one`） |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 区画と種 | 源 | `YM/Pressure/Seeds.lean`（:48 `SliceSet`、:51 `Plot`、:120 `Serves`、:124 `cash`、:129 `Grants`）、`YM/Push/SECTOR_MEASURE/Cells.lean:51`（`Seeded`）、`YM/Next/FLUCTUATIONS/Grants.lean:24`（`grants`） |
| 中くらいの粗い面の正の余り | 源 | `YM/Bid/Energy.lean`（:94〜:97 の `Crowds`、:101 `E05`） |
| 二つの帳簿の換算 | 源 | `YM/PCalc/Band.lean`（:49 `Move`、:92 `holding`）、`YM/AnalyticBridge/VERIFIED_RESET_STEP/Opening.lean:19`（`late_force`）、`YM/Next/SCHEDULE/Salary.lean:178`（`saved`）、`YM/AnalyticNext/CONNECTED_ACTIVITY_JETS_E6/Bulkhead.lean:78`（`dictionary_fit`）、同 `OptionCost.lean:83`（`costs`）、同 `Issue.lean:73`（`Invoices`）、`YM/FullVolume/C/Songbook.lean:76`（`Roof.Lyrics.supplier`） |
| 一番細かい段 | 源 | `YM/Extra/WILSON_STARTUP/Ownership.lean:68`（`due_eq`） |
| 大きい場の扱いの記述が評価書に無いこと | 評 | 評価書（`yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`、2026-11-10）の全文の検索（large field・small field・polymer の語が無い） |
| 本書の検討の側 | 仮 | 前提の一覧の「大きい場の評価」「大きい場の気体」（28-04）と、開いている所（28-06） |

**この章で使った語** — 大きい場、小さい場、閾、切った作用、活動、強制された活動の気体、旗、種、区画、一の分割、種一つあたりのエネルギー、帳簿、一段の証書、印、暦、持続する欠陥。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：14-05 この本の検討に無かった発想 — この章の扱いを含む 35 の発想を、群に分けて一覧にします。

# この本の検討に無かった発想 — 七つの群の一覧

この章は本書の検討です。各項目の「何をしているか」の欄は既存の知見（公開された構成の読み）、「何が変わるか」の欄は推し量りです。

**この章で分かること** — 公開された構成を読んで、本書の検討に無かった発想を 35 拾い、七つの群に分けて一覧にします。各項目は三つの欄で書きます：何をしているか（源の在りかつき）、本書の検討ではどうしていたか、何が変わるか。最後に、同じ向きだった五つと、この一覧を読むときの注意（言えないこと）を置きます。

**前提となる章** — 14-01 骨組みの比べ〜14-04 大きい場。各項目の詳しい説明は第 9〜13 部の各章です。

**先に言うこと** — 「何が変わるか」の欄は、本書の検討の側への当てはめの推し量りで、本書の設計でその発想がそのまま使えることを確かめたものではありません。どの発想も、公開された構成の中では他の部品と組み合わさって働いていて、一つだけを取り出したときに同じ効き目があるとは限りません。各項目が主定理の依存に入っているかは、§09 に書いた範囲でしか確かめていません。

この章の順序

1. 一段の設計 — 確率の核、射影した予測子、二本立てのゲージ固定、育つ辺
2. 小さい場の一段 — 近似なしの等式、有限到達の共分散、微分のノルム、帳簿の定義し直し
3. 大きい場 — 表示を切る、数え直す、二つの帳簿、作用の側の稀さ
4. 結合 — 表示の中の係数、射撃法、弱結合のまま運ぶ
5. 極限の取り方 — 評価の道具としての繰り込み、固定した段の Cauchy、一意性、根の半ノルム
6. 赤外と再構成 — トレースの表示、相の分解、Ward の恒等式、跡の異常、商としての場
7. Lean の組み方 — 依頼の命題、一つの構成の上で束ねる

8. 同じ向きだったもの — 五つ

9. この一覧を読むときの注意 — 言えないこと

---

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。本書の検討の Lean の定理は、札の外に名と範囲を同じ行に書きます。

01

## 一段の設計

詳しくは 14-02 と第 9 部です。

| 発想 | 何をしているか（出典） | 本書の検討では | 何が変わるか |
|---|---|---|---|
| 一段を写像でなく確率の核にする | 粗いリンクを予測子のまわりのガウス型の揺らぎ $e^{-\beta c_{\mathrm{pen}}\,\mathrm{price}}$ で引く。罰の係数 $c_{\mathrm{pen}}$ は任意の正の数（源の字句では `kernel.penalty`）（`YM/RG/Block.lean:71` `density`） | 決定的なブロック写像で押し出す（19-04） | 拘束が硬い制約でなくなり、$c_{\mathrm{pen}}$ が一段の自由場の精度に入る。代わりに押し出しの測度が $\beta$ に依る対象になる |
| 予測子は陽に作って群へ射影した中心値 | 平行な直線の輸送の重みつきの平均に一番近い群の元。散らばりが大きければ一本を確率で引く（`YM/RG/Patch.lean:159`・:171、`YM/Branch/Center.lean:72`） | 平均を球へ戻す（retract）。背景場は拘束つきの作用の最小化元（28-05） | 背景の最小化問題を一段の定義の中で解かずに済み、値はいつも群に在る |
| ゲージ固定を二本立てにし、確率で引いて和を取る | 小さい場では対称な最小化、大きい場では軸ゲージの根と順を一様に引く。札の和で超立方の群と粗い並進についてちょうど不変（`YM/RG/Patch.lean:102`〜:155、`YM/Branch/Covariant.lean:50`） | 道の族を対称に平均する。段ごとのゲージは Landau・軸・木の選び（28-05） | 大きい場でもゲージ固定が定まり、格子の対称が崩れない |
| 辺を段とともに大きくする | 辺は 3 以上の奇数（`YM/Lattice/Scale.lean:28`）で非減少（`Fits.monotoneL`）、$\log b_m / \log D_m \to 0$（`Fits.mesh`、`YM/RG/History.lean:97`〜:100）。一段の誤差は $O(1)$ のまま $\log b$ で割って消す | 辺 2（辺 3 の設計でも）に固定 | 二ループの精密な評価が要らなくなる。代わりに格子間隔の列が特別なものになり、列の取り方への普遍性は無い評 |

02

## 小さい場の一段

詳しくは 11-09 です。

| 発想 | 何をしているか（出典） | 本書の検討では | 何が変わるか |
|---|---|---|---|
| 一段を近似なしの等式でつなぐ | 一段の証書の欄は押し出しの等式（`YM/PCalc/Band.lean:50` の `ident`）。ガウスの近似の誤差もガウスでない残りも、被積分関数の中に残したまま運ぶ | 受け渡しの余白の損を、評価の損として紙の上で運んでいた | 損でなく被積分関数の項として運べる。帳簿の側は不等式なので、評価に近似を使わないという意味ではない |
| 共分散を有限の距離で切れる近似の逆に取り直す | 窓の中だけで Gram を逆にして対称化し、真の逆との差は窓の半径について指数的に小さい（`YM/SectorNext/GAUSSIAN_SECTOR_CHANGE/Windows.lean:184` `windows`）。差は等式の中に残す | 段に一様な縮みを使う共分散の分解（15-12） | 離れた所の独立が正確に成り立ち、展開の土台になる |
| 活動の大きさを有限階の微分のノルムで測る | 大きさ $t$ の方向への有限階の微分の上限（`YM/RG/Masks.lean:164` `supBounds`） | 解析の半径で測る紙の評価 | 半径が段ごとに縮む型の損が起きない |
| 主な作用の四次までの一致を条件として運ぶ | 粗い段の主な作用と、細かい段の主な作用＋拘束の罰の停留値とが、平らな配位で四次までの jet で一致する、という条件（`YM/PCalc/Chart.lean:108` `ClassicalMatch`）。閉じるのは `sailsW`（`YM/FullVolume/Roll/Fiscal.lean:97`）。粗い主な作用は別に与えられるデータ | 背景場の展開を前提の側に置いていた（28-04） | 残りが帳簿に入る大きさになる 推 |

| 発想 | 何をしているか（出典） | 本書の検討では | 何が変わるか |
| --- | --- | --- | --- |
| 帳簿を毎段、その段の結合から定義し直す | 閾と帳簿は段 $m$ の基準の結合 $\hat{\beta}_m$ の関数（`YM/RG/History.lean:83`・:84）。出口が次の段の決まった帳簿に入ることだけを示す | 前の段の評価から次の段の評価を導く形で、損が段ごとに積もる恐れがあった | 帰納の仮定が損を運ばない。読み直しの損は段の定数で前払いする |
| 限界的な項は活動に残さず、結合と真空の項へ移す | 平らな値は真空の項へ、二次は結合へ移し、小さい場の活動の帳簿は $\hat{g}^{11/5}$（`YM/RG/History.lean:84`）。指数は限界の次数 2 と最初の非限界の次数 3 の間 | — | 何次まで合わせれば残りが帳簿に入るかを、次数で数えられる |

03

## 大きい場

詳しくは 14-04 と第 11 部です。

| 発想 | 何をしているか（出典） | 本書の検討では | 何 |
| --- | --- | --- | --- |
| 表示の主な部分を切る | 閾を超えた面の作用を一次に弱めて表示し、差は活動の側に入れる（`YM/RG/PathActions.lean:218`）。段の間は等式で、測度は変わらない | 二次の作用を主として渡す | 切画満に不段場 |
| 領域の履歴を持たず、段ごとに数え直す | 帰納の仮定に履歴の欄が無く、種は一段ごとに数え直す（`YM/RG/History.lean:213`） | 大きい場の領域を積み上げて以後固定 | 持陥で種わ |

| 発想 | 何をしているか（出典） | 本書の検討では | 何 |
|---|---|---|---|
| 帳簿を二つ持つ | 帰納の仮定には弱い帳簿 $\exp(-p^{1/5})$、一段の証書には強い見積もり $\exp(-gp^2)$（`YM/PCalc/Band.lean:49`）。一行の不等式でつなぐ（`YM/Next/SCHEDULE/Salary.lean:178`） | 帳簿を一つ（$e^{-c/g^2}$ の型）で考えていた | 強帰に弱毎す様暦う |
| 稀さを活動でなく作用の側に置く | 切った作用を表示に陽に残し（`YM/RG/PathActions.lean:218`）、活動は差を運ぶ因子にする。稀さは各段の作用の差から取り出す推（読みの筋は 11-06・14-04 §07） | 稀さを活動の評価として持ち越す形 | 持勘な |
| 粗い旗を含むかどうかで塊を分ける | 含む塊は次の段の大きい場の活動、含まない塊は小さい場の側へ（`ThickP`・`ThinP`、`YM/AnalyticNext/CONNECTED_ACTIVITY_JETS_E6/Colony.lean:26`・:27） | 欠陥が小さい場に戻った場合を別に場合分け | 局一 |
| 閾に $\exp((\log\log\beta)^2)$ を使う | 閾 $t=\hat{g}\,p$、$p=\exp((\log\log\hat{\beta})^2)$（`YM/RG/History.lean:81`・:83） | 結合の多重対数の倍の閾 | 多損を追 |
| ヒステリシスつきの区画と滑らかな一の分割 | 種の型ごとの区画を一の分割で貼り合わせ、条件は全体に課して評価は種のまわりに局所化（`YM/Push/SECTOR_MEASURE/Cells.lean:51`、`YM/Pressure/Seeds.lean:51`） | 小さい場の特性関数で切る | 境連けと評 |
| 辺を大きく取る意味を強圧性の定数に置く | 細かい面の一次の量は粗い面へ $L^{-2}$ の重みで縮むので、辺を大きく取ると細かい側が勝つ推（`YM/Bid/Energy.lean` の `E03`・`E06`・`E07`、:67・:110・:130）。辺の下限は暦の欄（`YM/Price/Intent.lean:39` `Large`） | 辺を大きく取る意味は結合の利得だった | 辺が場のるる |

04

## 結合

詳しくは 14-03 と第 10 部です。

| 発想 | 何をしているか（出典） | 本書の検討では | 何が変わるか |
|---|---|---|---|
| 結合を表示の中の係数として定義し、読み直す | 段の結合は表示の $F^2$ の係数で、二つの正規化で付け替えを禁じる（`YM/RG/History.lean` の冒頭の説明文）。二つの配位での密度の対数比と単調性で読み直す（`YM/UVNext/COUPLING_RESET/Reset.lean:50`） | 測度だけで決まる量で合わせる（19-07）。表示は無い | 結合が一段ごとに一ループの値で動くことを、表示の中で直接追える |
| 射撃法 | 段ごとの帯の入れ子の区間を作り、中間値の定理で裸の結合を選ぶ（`YM/FullVolume/Arc.lean:95`）。要るのは連続性と一段の誤差の不等式だけ | 大域の端（$\beta = 0$ と $\beta \to \infty$）からの中間値の定理 | 端の値が分からない量でも合わせられる。一段の誤差の和が帯の幅の小さい割合に収まる暦の条件のもとで、段の数に依らず同じ形で働く |
| 全ての段を弱結合のまま運ぶ | 全ての段で $\beta_m \in [\hat{\beta}_m/2, 2\hat{\beta}_m]$（`YM/RG/History.lean:213` の欄 `band`）。基準の結合を大きく取り、間隔 1 の段で止める | 弱結合から強結合までを一つの流れとして考えていた | 強結合の領域を繰り込みで通らない。その先（長い距離）はコンパクト性で扱う |

05

## 極限の取り方

詳しくは第 11 部の後半と第 12 部です。

| 発想 | 何をしているか（出典） | 本書の検討では | 何が変わるか |
|---|---|---|---|
| 繰り込みは評価の道具で、極限の対象ではない | 極限を取るのは、元の格子の測度での繰り込んだ局所場の相関[評]（評価書 §4.3）。鏡映正値性は元の格子でだけ使う（`YM/Slice/Reflection.lean:98`） | 押し出しの測度そのものの極限を取る（28-01） | 押し出した測度の鏡映正値性が要らない（14-02 §07） |
| 固定した粗い段の Cauchy を先に示し、そのあと段を外す | 固定した段の有効密度が切断について一様に Cauchy（`YM/FullVolume/Fields/Cement.lean:50`）、真の相関と段 $j$ の読み出しの差を $N$ に依らない量で押さえ（`Sever.echoes`、`YM/FullVolume/Fields/Peat.lean:42`）、真の格子の相関が $N$ について Cauchy 列であることを出す（`Rising.arrives`、`YM/FullVolume/Fields/Timber.lean:74`）。極限の対象そのものは作らない | 部分列の極限 | 部分列が要らなくなる。収束は、表示の材料が Cauchy であることから連続な操作で出る |

| 発想 | 何をしているか（出典） | 本書の検討では | 何が変わるか |
|---|---|---|---|
| 材料の収束を、量の評価でなく一意性から出す | 結合は段 0 に錨、活動は一段ごとに 1/16 に縮む。二つの向きの条件を満たす軌道は一本。コンパクト性と部分列の原理で列の全体が収束（`YM/FullVolume/Glide/Triumph.lean:37`、`YM/FullVolume/Glide/Coincide.lean:58`）。速さは出ない | 抽象の歪積の軌道で同じ型の含意を持っていた（28-02）が、写像は格子から定義されていない | 切断 $N$ と $N'$ を量で比べる評価が要らない |
| 細かい端の違いは有界で足りる | 活動の初期値の違いは段を下るごとに $(1/16)^k$ で忘れられる（`YM/FullVolume/Glide/Wings.lean:59` `culprit`） | 抽象の形では在った：歪積の軌道の含意で、極限が裸の無関係な座標の選び方に依らない（`SkewOrbit.limit_independent`、28-02）。写像は格子から定義されていない | 一番細かい段の表示を、小さくしなくてよい |
| 一段の帳簿を体積に依らない形にする | 帳簿は点ごとの和（`YM/RG/Activities.lean:98` `EBound`）で、縮小の定数も体積に依らない。密度・分配関数の水準の評価は体積の指数を含み、無限体積へ渡す一様な評価は、紫外の側の体積に一様な評価（`Wcmain` など）を入力に、元の格子の鏡映正値性・チェス盤・転送作用素の表示で作る 評 （評価書 §5） | 体積と段に一様な形を前提の言明の中に置いていた（28-04） | 評価の分業がはっきりする |
| 合成場の繰り込みを、繰り込みの輸送の逆で与える | 係数の有限次元空間の上の線形同型（逆が一様に有界）を段ごとに持ち、基準の段から逆で運ぶ（`YM/FullVolume/Mark/Nursery.lean:11` の `Club`、`YM/FullVolume/Mark/Sages.lean:66` `spends`） | 粗い格子の測度が終点で、観測量の較正は無い | 局所場の相関を終点にできる |
| コンパクト性に渡す評価を、チェス盤の根の半ノルムで述べる | 繰り込んだ観測量の大きさを根の半ノルムで $A\,a_m^{-d-\varepsilon}$ 以下、体積に一様（`YM/Extraction/Center.lean:38` `Wcmain`、`YM/Cells/Tiling.lean:226` `rootTest`） | チェス盤は大きい面の稀さに使う（22-01） | 紫外から赤外へ渡す評価の一つを、体積に一様な一つの言明の形で書ける（紫外からの入力はほかにも在る、12-03） |

06

## 赤外と再構成

詳しくは第 12・13 部です。

| 発想 | 何をしているか（出典） | 本書の検討では | 何が変わるか |
|---|---|---|---|
| 転送作用素のトレースで同程度連続性を出す | 期待値を転送作用素のトレースで書き、挿入の移動を隙間の付け替えとして Hölder で押さえる。測度でなく相関関数に Arzelà–Ascoli（`YM/Extraction/Lipschitz.lean:166` `first_surface`） | 測度の弱収束のコンパクト性 | 点の離れた相関の、微分つきの一様な評価が得られる |
| クラスター性を示さずに、相に分けてから再構成する | 真空の空間に圧縮した作用素の可換な環の Gelfand 表現で相に分け、成分ごとに真空の一意性を出す（`YM/Phase/Mixture.lean:127`、`YM/EveryPhase/Vacuum.lean:146`）。可換性は Euclid 不変から | 強結合の窓でクラスター性を示す（20-03） | 一意性や減衰を示さなくても再構成まで進める |
| 回転不変を、応力テンソルの Ward の恒等式から上げる | 並進と回転の Ward の恒等式（`YM/Euclid/Stress.lean:90`〜:97 の `translation`・`rotation`）。極限の状態で回転不変が自発的に破れないことは、応力の流束が遠くで速く消えることから、複数の直交する面の鏡映正値性を使う議論で出す評（評価書 §6.3） | 扱っていない | 格子の離散の対称から連続の回転不変へ渡る道が一つ決まる |
| 自由でないことを、跡の異常の対数で言う | 跡の二点関数の短距離の法則 $r^8 \log^2(1/r)$ の極限（`ChallengeSpec.lean` の :145〜149 と :173〜174） | 扱っていない | 「自明でない」を一つの極限の値で言える。除かれる自由場の型は限られる（13-02） |
| 場の空間を、相関の零空間による商として定める | 点の離れた相関が全て零になる部分で割る（`YM/Euclid/Null.lean:34` `null`） | 扱っていない | 局所でない観測量（ループ・捩れ）の連続の対象を定めるときにも使える形推 |

07

## Lean の組み方

| 発想 | 何をしているか（出典） | 本書の検討では | 何が変わるか |
|---|---|---|---|
| 依頼の命題を仮定に置いた条件つきの定理を、最後に全て閉じる | 中間の定理は依頼の命題（`Bid`）を仮定に取る条件つきの形で書き、証明（`Work`）を別に置き、上の定理が全ての答えを渡す（`YM/RG17/Joint.lean:83`〜:85） | 仮定の欄を持つ含意（28-01・28-02）。同じ型 | 違いは、最後に全ての依頼が閉じていること |

| 発想 | 何をしているか（出典） | 本書の検討では | 何が変わるか |
| --- | --- | --- | --- |
| 一度だけ選んだ一つの構成の上で、全ての結論を束ねる | 別々に存在を示した対象が両立しない事故を避けるため、選びを一つの走りにまとめる（`YM/Org/Input.lean` の冒頭の説明文、:14 付近） | 定理ごとに対象を別に取っていた | 結論どうしが同じ対象について言われていることが、型で保証される |

08

## 同じ向きだったもの

1. 単位の長さで決まる量を、決めた値に合わせて尺度を定めること（14-03）。
2. 奇数の辺で、ブロックを粗い点の中心に置くこと。対称の平均（14-02）。
3. 体積を止めてから、コンパクト性で無限体積へ行くこと（14-01）。
4. 鏡映正値性とチェス盤を、体積に一様な評価の源にすること（14-01）。
5. 一ループの係数。規約を揃えると、本書の辺 2 の一段ぶんの値と一致します推（14-03 §07）。

09

## この一覧を読むときの注意

一覧の項目は、次のような言い方に読み替えないでください。どれも源の言明より強く言い過ぎになります。

- 「表示を切るので、持続する欠陥という前提が外れる」とは言えません。段の間は等式で、測度は変わりません。言えるのは、表示の主な部分を切り、差を活動に入れて、切り口と区画の条件を満たす全ての配位についての不等式を立てる、までです。
- 「段の数に一様な評価という問題が起きない」とは言えません。弱い帳簿も段の関数で、段に一様な条件は暦の側で払われています。
- 「入ってくる活動の小ささを使わない」とは言えません。出口の率の式には入りませんが、入ってくる活動の評価は一段の仮定の側で、和を収束させるのに使われます。
- 「粗い段の主な作用は停留値の展開として定まる」とは言えません。四次までの一致は条件として運ばれ、粗い主な作用は別に与えられるデータです。
- 「体積に一様な評価は元の格子の鏡映正値性だけから来る」とは言えません。一段の帳簿は体積に依らない形で、紫外から無限体積への入力も一つではありません。

- 「主定理に使われている」と言えるのは、主定理までの鎖を確かめた宣言だけです。本書の検討が確かめたのは、射撃と一段の定理の道（`FullVolume/Stage/Rods.lean:26` の `rodB` から）、切断についての収束（`allB` など）、`sailsW`、`realUV` です。大きい場の補題の多くは、宣言の使われ方の記録で別の見出しの定理に結びついていて、主定理の道に載るかは確かめていません。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 源 各項目の「何をしているか」は、在りかの宣言の定義か言明を読んだもの | 証明の中身。主定理の依存に入っているかは一部しか確かめていない |
| 本書の検討の側の欄は、第 15・19・22・28 部の定理と前提の一覧に基づく | — |
| 推 「何が変わるか」の欄 | 本書の設計でその発想がそのまま使えること |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 各項目の在りか | 源 | リポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）。パスと行は表の各行。行は本書の検討が源を開いて確かめたもの |
| 相関の定義・極限の順・普遍性が無いこと | 評 | 評価書（`yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`、2026-11-10）§4.3・§5・§6 |
| 本書の検討の側 | — | 各行に引いた章（19-04・15-12・22-01・28-01・28-02・28-04・28-05・28-06 など） |

**この章で使った語** — 確率の核、予測子、群への射影、二本立てのゲージ固定、育つ辺、有限到達の近似逆、有限階の微分のノルム、帳簿、切った作用、種、印、暦、射撃法、錨、上端の忘却、根の半ノルム、相の分解、依頼の命題。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：14-06 この本に在って、公開された構成に無いもの — 逆向きの比べで、第三巻への橋です。

2026-11-13 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 14 部 比べ — 本書の Lean と、本書の検討に無かった発想 この本だけのもの · Kiichi, Shiori and Rin

# この本に在って、公開された構成に無いもの — 第三巻への橋

この章は本書の検討です。公開された構成についての記述は既存の知見（公開された構成の読み）、§09 は未解決の地図です。

**この章で分かること** — 公開された構成の主張に入っていない種類の言明で、本書の検討の Lean で閉じているものを四つの群（強結合の格子、中心渦、弱結合での大きい面の稀さ、フェルミオンの重み）に分けて並べます。本書の繰り込みの設計に固有と言えるもの（三つ）を別に挙げます。それぞれが公開された構成の開いた問い（収束と一意性、質量ギャップ、Wilson ループと面積則）とどういう位置関係に在るかを表にし、最後に、公開された構成が止まる所（間隔 1 の段、弱結合）から第三巻へ渡るための見取りを置きます。

**前提となる章** — 14-01 骨組みの比べ、6-04 示されていないこと、第 20〜22 部の各章。

**先に言うこと** — この章の定理は、どれも既知の型の結果の形式化です。格子間隔は 1 に固定で、連続極限については何も言いません。大半は強結合の窓の中の言明です：$18 \tanh |\beta| < 1$（$|\beta| < 0.0556$ 読 ）、面積則と渦の自由エネルギーの 441 の版（$\beta < 1.135 \cdot 10^{-3}$ 読 ）、4096 の版（$\beta < 1.22 \cdot 10^{-4}$ 読 ）。公開された構成が残した問いとは反対の端（強結合・格子間隔は固定）の言明で、その問いに答えるものでも、その問いに向く言明でもありません。言えるのは、同じ種類の問いを、格子の上の別の場所で言明として持っている、までです。

この章の順序

1. この章の約束 — 既知の型、格子間隔は固定、連続極限は言わない
2. 強結合の格子 — 無限体積の極限、質量ギャップ、クラスター性
3. 強結合の面積則と、渦の自由エネルギーの上界 — 窓の中で、面積あたりの率が格子の大きさに依らない（前の因子は残る）
4. 中心渦 — 薄い渦の床、太い渦の床、Polyakov ループの対、渦の比
5. 弱結合での大きい面の稀さ — 体積に一様、陽な閾
6. フェルミオンの重み — 鏡映正値性、分配関数が正、対称

7. 本書の設計に固有のもの — 三つまで。どちらにも無いもの
8. 開いた問いとの位置関係（表 1） — 同じ種類の問いを、反対の端で
9. 第三巻への橋 — 間隔 1 の段から先を、どう問いにするか

---

札：源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による。ほかの札（初・典・読・Lean など）は本全体と同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。本書の検討の Lean の定理は、札の外に名と範囲を同じ行に書きます。

01

## この章の約束

評価書は、公開された構成が扱っていない主な点として、五つの開いた問いを挙げています 評 （評価書 §8）。

1. 部分列でなく収束を示し、無限体積の極限の一意性を示すこと。
2. 連続の理論の確率測度を定義すること。
3. 一様な質量ギャップ（相関の指数の減衰と、Osterwalder–Schrader のハミルトニアンのスペクトルの隙間）を示すこと。
4. Wilson ループの観測量を作り、局所の観測量と関係づけること。Wilson ループの面積則を示すこと。
5. 一粒子の状態を作り、エネルギー・運動量のスペクトルを調べること。

本書の検討の Lean には、このうち 1・3・4 と同じ種類の言明が在ります。ただし三つの点で、場所が違います。

- **既知の型**。どの定理も、格子ゲージ理論で知られた型の結果（強結合の展開、Osterwalder–Seiler の面積則、't Hooft の捩れと渦の自由エネルギー、チェス盤の Peierls の議論）の形式化です典 。
- **格子間隔は固定**。格子間隔を 1 に固定した一つの格子の言明か、その無限体積の極限の言明です。連続極限については何も言いません。
- **結合の領域**。大半は強結合の窓の中の言明です。窓は定理ごとに違い、$18\tanh|\beta| < 1$（$|\beta| < 0.0556$読 ）、$24(1 - e^{-4|\beta|}) < 1$（$|\beta| < 0.0106$読 ）、面積則と渦の自由エネルギーの

441 の版 $441(1-e^{-2\beta})<1$（$\beta<1.135\cdot10^{-3}$ 読 ）、4096 の版（$\beta<1.22\cdot10^{-4}$ 読 ）です。公開された構成は全ての段を弱結合のまま運ぶので、二つは結合の上で重なりません。公開された構成が残した問いとは、反対の端の言明です。

02

## 強結合の格子

周期トーラス $(\mathbb{Z}/N)^4$ の SU(2) の Wilson の測度について、強結合の窓で次が Lean に在ります（第 20 部）。

- **無限体積の極限（部分列なし）。** $18\tanh|\beta|<1$ で、トーラスの測度を周期に持ち上げた列が、部分列を取らずに一つの確率測度 $\nu_\beta$ に弱収束します。全ての大きさの列で同じ極限です。Lean：`InfVol.wilson_infvol_unique`・`AllN.wilson_infvol_allN`（20-03）。
- **並進不変とクラスター性。** 極限は四方向の単位の並進で不変で、離れた観測量の相関は指数で減ります。Lean：`TransI.wilson_infvol_translation`・`WilsonLimit.cluster_limit`。
- **質量ギャップ。** 再構成した Hilbert 空間の上の転送の作用素 $T$ が、真空の直交補空間の上で $\|T\|\le e^{-m}$（$m>0$）を満たし、その補空間は 0 でない（非退化）。ある極限点についての形は Dobrushin の窓（`WilsonLimit.wilson_massGap_dob_exists`）、全ての極限点についての形は窓 $24(1-e^{-4|\beta|})<1$（`WilsonLimit.wilson_massGap_nondegenerate`）です。ゲージ不変な部門の形と、一本にまとめた言明も在ります（`GaugeZ.wilson_massGap_gauge_exists`・`InfMain2.wilson_infvol_main2`、20-04）。

言っていないこと：窓の外、ほかの境界条件、質量が有限であること（上界 $\|T\|\le e^{-m}$ は質量の下界だけ）、連続極限での質量ギャップ。

03

## 強結合の面積則と、渦の自由エネルギーの上界

**面積則（有限の箱）。** $(\mathbb{Z}/N)^4$ の SU(2) の Wilson の格子ゲージ理論で、$0\le\beta$、$q=1-e^{-2\beta}$、$4096q<1$、$1\le R,T<N$ のとき、原点を角とする $(0,1)$ 面の $R\times T$ の長方形の縁の Wilson ループ $W$ について

$$\left|\langle\tfrac{1}{2}\operatorname{tr}W\rangle_\beta\right| \;\le\; \frac{16\,(4096\,q)^{R\cdot\min(T,N-T)}}{4096\,(1-4096\,q)} \tag{1}$$

が成り立ちます。定数は $N, R, T$ に依りません。Lean：`AreaLaw.area_law_wilson`（$2T \le N$ で指数が $RT$ の形は `area_law_wilson_area`）。任意の角と向きの長方形は `area_law_wilson_general` です。定数を $6 \cdot 441$ に締めた版（`area_law_wilson_sharp`・`area_law_wilson_max_sharp`）は窓 $441q < 1$（$\beta < 1.135 \cdot 10^{-3}$ 読）で成り立ち、指数は $\max(R \cdot \min(T, N-T),\, T \cdot \min(R, N-R))$ です。

**面積則（無限体積）**。$\beta > 0$、$18 \tanh \beta < 1$（Dobrushin の条件）、$4096q < 1$ の三つのもとで、強結合の無限体積の極限 $\nu_\beta$ で、原点を角とする $(0,1)$ 面の長方形について、全ての $R, T \ge 1$ で

$$\left| \langle \tfrac{1}{2} \operatorname{tr} W(\partial(R \times T)) \rangle_{\nu_\beta} \right| \;\le\; \frac{16\,(4096\,q)^{RT}}{4096\,(1 - 4096\,q)} \tag{2}$$

が成り立ちます。Lean：`AreaLaw.area_law_infvol`（全ての極限点で `area_law_limit_sub`、20-06）。どちらも既知の型（Osterwalder–Seiler）の形式化です典。

**渦の自由エネルギーの上界**。$(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ で、捩れた分配関数 $Z_0, Z_1$（19-02）について、全ての背景で、$\beta \ge 0$ かつ $441q < 1$ のとき

$$\frac{|Z_0 - Z_1|}{Z_0 + Z_1} \;\le\; \frac{N^2\,(441\,q)^{M^2}}{441\,(1 - 441\,q)} \tag{3}$$

が成り立ちます。Lean：`VortexStrongMN.vortex_floor_MN_sharp`（仮定は $\beta \ge 0$ と $441q < 1$ と背景の選びだけ）。等方のトーラス $(\mathbb{Z}/N)^4$ の形は `VortexStrong.vortex_floor`（仮定 $\beta \ge 0$、$4096q < 1$、右辺の定数 4096、指数 $N^2$）と `VortexStrong.vortex_floor_sharp`（441 の版）です。強結合の窓の中では、面積あたりの率 $-\log(441q)$ が $N, M$ に依りません。前の因子 $N^2$（横の面積）は残ります。窓の外では、横の大きさに一様な形はありません。$Z_1 \le Z_0$ の符号の側は言いません。

## 04 中心渦

渦の比 $\theta_M = (Z_0 - Z_1)/(Z_0 + Z_1)$ とその仲間について、次が Lean に在ります（第 21 部）。どれもブロック写像を使わず、細かい格子の Wilson の測度と捩れた分配関数だけを使います。

| 項目 | 中身 | Lean と範囲 |
|---|---|---|
| 薄い渦の床 | $\theta_M \le \tanh(N^2 \lvert\beta\rvert)^{M^2}$（両側の形も） | `TwistedWilson.twisted_vortex_bound`・`_abs`。全ての実の $\beta$、仮定の欄なし（21-02）。率は $N$ に依る |

| 項目 | 中身 | Lean と範囲 |
|---|---|---|
| 太い渦の床 | 十分大きい $\beta$ ごとに十分大きい $M$ で、渦の最小作用 $S_N$ を指数に持つ床 | `TwistBlocks.thick_vortex_floor`（仮定の欄なし、21-03）。$S_N$ の値と閾は陽でない |
| 渦の最小作用 | $0 < S_N \le 2N^2$。$N = 2, 3, 4$ で $S_N < 2N^2$ | `VortexPos.SN_pos`・`TwistBlocks.SN_bounds`、$N = 2, 3, 4$ は計算機の証書 `VortexCert.SN_two_lt`・`SN_three_lt`・`SN_four_lt`（21-05） |
| $\theta$ の符号 | 縦の大きさ $M$ が偶数なら、全ての実の $\beta$ で $Z_1 \le Z_0$ | `HalfSplit.Z1_le_Z0`・`TwistBlocks.theta_nonneg`（仮定 $M$ が偶数、21-06） |
| Polyakov ループの対 | $\lvert\langle P_b(0) P_b(T)\rangle_0\rvert \le 2\tanh(N^2\lvert\beta\rvert)^{M \min(T, M-T)}$（$0 \le T \le M$）ほか | `PolyakovT.polyakov_pair_all`（仮定 $M \equiv 0 \pmod 4$、全ての実の $\beta$）・`HalfSplit.polyakov_pair_theta`。$N$ に一様な張力は言わない |
| 渦の比の連続・極限・合わせ | $\theta_M$ は連続、$\theta_M(0) = 0$、$\beta \to \infty$ で $1$、全ての $\kappa_0 \in [0, 1)$ に最大の解 | `ThetaTuning.thetaM_continuous`・`ThetaLimit.tendsto_theta_one`・`ThetaLimit.tuning_all`（21-07） |
| 捩れた箱の欠けの下界 | 直交する二つの面に捩れを持つ箱に平らな配位は無く、対称な箱の欠けは $N$ に依らず $1/2$ 以上 | `TwistFlat.no_flat_twist11`・`TwistFloor.defect11_sym_half`（21-07） |

言っていないこと：連続極限、強結合の窓の外での $N$ に一様な率、閉じ込めそのもの。捩れた箱に平らな接続が無いことは既知の型です[典]。

05

## 弱結合での大きい面の稀さ

偶数の辺のトーラスの Wilson の測度で、$\beta$ が大きい（弱結合の）とき、面の集合 $X$ の全ての面で $\mathrm{Re}\, U_p < 0$ となる確率は $q_1^{\lfloor |X|/6 \rfloor}$ 以下で、$q_1 < 1$ は $X$ とトーラスの大きさに依りません。Lean：`FoldCap.rarity_explicit`（閾は陽）、率 $e^{-c\beta}$ の形は `FoldQuarter.rarity_uniform4`（22-01）。鏡映正値性からのチェス盤の Peierls の議論の形式化です[典]。

これは一つの尺度で大きい面（大きい場）を抑える型の評価で、本書の検討の大きい場の問い（14-04、28-04 の大きい場の評価）に向く位置に在ります[推]。一意性を出す型の言明ではありません。言っていないこと：粗い尺度の測度、段を跨ぐ形、格子間隔に一様な形。閾は証明の都合の値で、物理で興味のある $\beta$ の帯から遠い値です。

06

## フェルミオンの重み

Wilson–Dirac の作用素の行列式を重みに持つ、フェルミオンつきの格子の測度について、格子点の面の鏡映正値性（`WilsonGauge.site_reflection_positive_wilson_full`）、分配関数が正（`WilsonGauge.partition_pos_wilson_full`）、格子の対称の生成元での不変（`CubicSym.wfProb_lattice_generators` ほか）が Lean に在ります（20-05）。公開された構成は純粋ヤン–ミルズ（フェルミオンなし）です評。言っていないこと：連続極限、カイラル対称性、質量の繰り込み、フェルミオンつきの質量ギャップ。

07

## 本書の設計に固有のもの

繰り込みの側で、本書の設計に固有と言えるのは次の三つまでです。どれも設計の段階の言明です。

1. **切断に依らない決まったブロック写像**。本書のブロック写像は結合にも切断にも依らない一つの写像で、段の間の整合は押し出しの等式（任意の細かい測度の族について、段を一つずつ押しても、まとめて押しても同じ測度）になります。Lean：`ChainBlockMap.hcons_blockMap`（19-04）。写像の合成から出る等式で、中身は薄い言明です。公開された構成の核は $\beta(N, p, m+1)$ に依り、切断とともに写像が変わります源（14-02）。
2. **押し出した測度の鏡映正値性**。辺 3・中心・一様の写像で押し出した Wilson の測度の鏡映正値性。$L$ が偶数の周期格子、格子点の面の鏡映について、二枚の粗い格子点の面の間に厳に入るリンクだけに依る有界可測な関数の類で（ゲージ不変は課さない。全ての実の $\beta$。リンクの真ん中の面の版は無い）。Lean：`Block3.rp_push`（14-02 §06）。公開された構成の鏡映正値性の言明は、元の Wilson の測度についてだけです源（`YM/Slice/Reflection.lean:98`、名前の検索の範囲）。
3. **測度で決まる量による合わせ**。押し出しの測度での粗い面の平均の期待値（`Block3.tuned3_exists`）や渦の比（`ThetaLimit.tuning_all`）を決めた値に合わせる結合の列の存在（14-03）。`tuned3_exists` の仮定は設計の値と算術（$0 < r_0 \le 1$、$3^{m_0} L \ge 2$、目標 $\kappa_0 \in [0, 1)$）だけ、`tuning_all` は格子ごと（$N, M$ を止めて）$\kappa_0 \in [0, 1)$ について言います。どちらも結合の列の単調・発散・有界、解の一意性は言いません。今の設計（辺 2）では、合わせた列の存在は条件つきです。公開された構成の合わせは表示の中の係数で、設計の選びの段階で違います。

**どちらにも在る、またはどちらにも無いもの**。次の三つは「本書にだけ在る」とは書きません。

- 固定した粗い格子の上の極限の測度。本書の検討では部分列の極限として在り（28-01）、公開された構成の核についても、固定した段の密度の一様な収束（`Flux.fanned`、`YM/FullVolume/Fields/Cement.lean:50`）から出る見込みです[推]。公開された構成には、名前のついた言明が無いだけです[源]（名前の検索の範囲）。
- 評価書の開いた問いの二つ目は連続の理論の確率測度で、固定した粗い格子の上の測度の族はそれに当たりません[評]。
- 連続の Wilson ループは、どちらにも在りません。本書の面積則は格子の Wilson ループの言明です。

08

## 開いた問いとの位置関係

公開された構成の赤外の側は、上界だけで閉じています[源]。無限体積は部分列で取り、長い距離の相関の指数の減衰の言明は見当たりません[源]（名前の検索の範囲）。長い距離について在るのは、相に一様な多項式の上界（エネルギー $(0, u]$ のスペクトルの重みが $u^2$ の程度、`YM/EveryPhase/Light.lean:221`；熱の時間 $\tau$ についての評価 $\tau^{-2}$、`YM/EveryPhase/Decay.lean:173`）です[源]。これは質量ゼロの理論とも両立する形です[推]。連続の相関そのものは、全ての離れた点で在ります[評]（評価書 §5）。格子の道に沿う平行移動（`YM/Lattice/Path.lean:105` の `travel`）は在りますが、連続の Wilson ループの観測量は見当たりません[源]（名前の検索の範囲）。境界条件は周期だけです（`YM/Wilson/Law.lean:87`）[源]。

### 表 1　本書の検討の項目と、公開された構成の開いた問いの位置関係

| 本書の検討の項目 | 同じ種類の開いた問い | 同じ所 | 違う所 |
|---|---|---|---|
| 強結合の無限体積の極限（部分列なし） | 1. 収束と一意性 | 周期の持ち上げの列が部分列なしに一つの極限を持つ | 反対の端（強結合の窓・格子間隔 1）。公開された構成の極限は弱結合の紫外から来る連続の相関 |
| 強結合の質量ギャップ・クラスター性 | 3. 一様な質量ギャップ | 転送の作用素の隙間と、相関の指数の減衰 | 同上。連続極限での隙間は何も言わない |
| 強結合の面積則 | 4. Wilson ループと面積則 | 格子の Wilson ループの期待値が面積について指数で小さい | 格子の Wilson ループで、局所の観測量との関係は扱わない |

| 本書の検討の項目 | 同じ種類の開いた問い | 同じ所 | 違う所 |
|---|---|---|---|
| 渦の自由エネルギーの上界・薄い渦の床・太い渦の床・Polyakov ループの対・渦の比 | 4（閉じ込めの別の言い方） | 捩れた境界条件と中心渦 源 （公開された構成に見当たらない、名前の検索の範囲） | 率が横の大きさに依らないのは強結合の窓の中だけ（前の因子は残る） |
| 大きい面の稀さ | 直接の関係は無い | — | 大きい場を抑える型の、一つの尺度の評価 |
| フェルミオンの重み | （純粋ヤン–ミルズの外） | — | 器の性質だけ。質量ギャップや連続極限は言わない |

表 1 の「同じ種類」は、同じ種類の問いを格子の上の反対の端で持っている、という意味です。公開された構成の開いた問いに本書の検討の定理が答えている、あるいはその問いに向いている、という意味ではありません。

09

## 第三巻への橋

この節は見取りで、推し量りを含みます。

**公開された構成が止まる所。**公開された構成は、全ての段を弱結合 $\beta_m \in [\hat{\beta}_m/2, 2\hat{\beta}_m]$ のまま運び、格子間隔 1 の段（段 0）で止まります 源 。段 0 の結合は大きい基準値 $\bar{\beta}$ で、体積 $L_p$ はその単位で測ります 源 。間隔 1 より長い距離について、相関の指数の減衰・面積則・無限体積の極限の一意性の言明は、読んだ範囲に見当たりません 源 （名前の検索の範囲）。在るのは §08 の多項式の上界です。閉じ込めや質量ギャップが見える長さは、そこからさらに先です 推 。

**残る問いの言い直しの候補。**残る問い（質量ギャップ、面積則、一意性）を、「段 0 の有効な理論（結合 $\bar{\beta}$ は大きい）を、長い距離へ、弱結合から強結合まで追う」問いと言い直す道が考えられます 推 。本書の検討が「移り変わりの帯」と呼んできた所（第 26 部）は、この間に在ります。ただし、これは断定できません。段 0 の理論は Wilson の作用の格子の理論ではなく、表示（切った作用・活動・気体）つきの有効な作用で、連続の相関も段 0 の測度だけの関数ではありません 源 。

**言い直すのに足りない言明。**この言い直しを言明の形にするには、公開された構成に見当たらない言明が少なくとも五つ要ります 源 （名前の検索の範囲）。

1. 段 0 の押し出しの密度の、切断 $N \to \infty$ での極限の対象の存在と名前（密度の一様な Cauchy は在る：`Flux.fanned`。極限は出る見込みで 推 、名前のついた言明が無い）。

2. 段 0（あるいは任意の段）の押し出しの測度の鏡映正値性（核のパッチが面を跨ぐので自明でない推）。本書の設計では `Block3.rp_push` がこれに当たる言明を本書の写像について持ちますが、公開された構成の核についてではありません。
3. 粗い配位の Wilson ループと、細かい場（あるいは連続）の Wilson ループの関係。
4. 体積に一様な段 0 の局所の評価（段 0 の対象の密度の水準の評価は体積の指数を含む源）。
5. 観測量の段 0 での像と、その極限。

**本書の持ち札の位置**。本書の検討の Lean の定理の多くは、この間の強結合の側の端に在ります（質量ギャップ・クラスター性・面積則・強結合の窓の中で横の大きさに率が依らない渦の自由エネルギー）。どの結合でも成り立つのは薄い渦の床で、その率は横の大きさに依ります。間は開いたままです。第三巻は、公開された構成の赤外の端（16-03）と本書の位置（16-04）から始めて、この間を、条件つきの言明と前提の木（第 27・28 部）の形で書きます。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 本書の検討の Lean：強結合の窓で、部分列なしの無限体積の極限、質量ギャップ（非退化つき）、クラスター性（第 20 部）。既知の型の形式化 | 窓の外、格子間隔を変えること、連続極限での質量ギャップ |
| 本書の検討の Lean：強結合の面積則（有限の箱と無限体積）、渦の自由エネルギーの上界（強結合の窓の中で、面積あたりの率が $N, M$ に依らない。前の因子 $N^2$ は残る）。既知の型の形式化 | 窓の外での一様な形、$Z_1 \le Z_0$ の符号の側、弱結合 |
| 本書の検討の Lean：薄い渦の床（全ての実の $\beta$）、太い渦の床、Polyakov ループの対、渦の比の連続と合わせ（第 21 部） | 強結合の窓の外での横の大きさに一様な率、閉じ込め、連続極限 |
| 本書の検討の Lean：弱結合（$\beta$ が大きい）での大きい面の稀さ、体積に一様、陽な閾（22-01） | 粗い尺度の測度、段を跨ぐ形、格子間隔に一様な形、一意性 |
| 本書の検討の Lean：設計に固有の三つ（決まったブロック写像の押し出しの整合、押し出した測度の鏡映正値性、測度で決まる量による合わせ） | どれも設計の段階の言明で、連続極限の中身は言わない |
| 源 （名前の検索の範囲） 公開された構成に、長い距離の相関の指数の減衰の言明、連続の Wilson ループ、周期以外の境界条件は見当たらない。長い距離について在るのは、相に一様な多項式の上界 | リポジトリ全体の名前によらない検索はしていない |
| 推 残る問いを「段 0 の有効な理論の長い距離の問い」と言い直す道が考えられる | そう言い直すのに足りない言明が少なくとも五つ在る（§09）。段 0 の理論は Wilson の作用ではない |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 強結合の格子の定理 | Lean | 20-02・20-03・20-04 の出典の表（`InfVol.wilson_infvol_unique`、`WilsonLimit.cluster_limit`、`WilsonLimit.wilson_massGap_nondegenerate`、`WilsonLimit.wilson_massGap_dob_exists`、`InfMain2.wilson_infvol_main2` ほか） |
| 強結合の面積則 | Lean | 本書の検討の Lean の束（`AreaLaw.area_law_wilson`・`area_law_wilson_area`・`area_law_wilson_general`・`area_law_wilson_sharp`・`area_law_wilson_max_sharp`・`area_law_infvol`・`area_law_limit_sub`）。核の再検査を通し、源で確かめた。詳しくは 20-06 |
| 渦の自由エネルギーの上界 | Lean | `VortexStrong.vortex_floor`・`VortexStrong.vortex_floor_sharp`（等方のトーラス）、`VortexStrongMN.vortex_floor_MN_sharp`（横 $N$・縦 $M$）。20-06 |
| 中心渦の定理 | Lean | 21-02・21-03・21-05・21-06 の出典の表と 21-07（`VortexCert.SN_two_lt`・`SN_three_lt`・`SN_four_lt` は計算機の証書） |
| 大きい面の稀さ | Lean | 22-01 の出典の表 |
| フェルミオンの重み | Lean | 20-05 の出典の表 |
| 設計に固有の三つ | Lean | `ChainBlockMap.hcons_blockMap`（19-04）、`Block3.rp_push`・`Block3.tuned3_exists`（14-02・14-03）、`ThetaLimit.tuning_all`（21-07） |
| 面積則・強結合・渦の自由エネルギーの既知の型 | 典 | Osterwalder–Seiler（強結合の面積則）、Dobrushin の条件、't Hooft の捩れた境界条件と渦の自由エネルギー。書誌は各章の出典の表と A-03 |
| 開いた問い | 評 | 評価書（`yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`、2026-11-10）§8 |
| 公開された構成の赤外の側と段 0 | 源 | リポジトリ `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）の `YM/EveryPhase/Light.lean:221`（`light_bound`）、`YM/EveryPhase/Decay.lean:173`（`inverse_square`）、`YM/Lattice/Path.lean:105`（`travel`）、`YM/Wilson/Law.lean:87`（`law`、周期トーラス）、`YM/Slice/Reflection.lean:98`（`reflected_positive`）、`YM/RG/History.lean:213`（`Conv` の欄 `band`）、`YM/FullVolume/Fields/Cement.lean:50`（`fanned`） |

**この章で使った語** — 強結合の窓、無限体積の極限、質量ギャップ、クラスター性、面積則、Wilson ループ、捩れた分配関数、渦の自由エネルギー、薄い渦の床、太い渦の床、Polyakov ループ、渦の比、大きい面の稀さ、フェルミオンの重み、押し出しの測度、移り変わりの帯。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：15-00 入口 — 紫外の制御とは何か — 第二巻の最後の部（第 15 部 紫外の制御の試みの記録）の入口です。第三巻へ先に進むなら 16-02 五つの開いた問い — 公開された構成

の開いた問いを一つずつ読みます。

# 入口 — 紫外の制御とは何か

この章は案内です。§01 は既存の知見、§03 は本書の検討、§08 は本書の検討の記録です。

**この部の位置づけ** — この部は記録です。本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた跡を、言明・一行ずつの計算・初等的な補題・最小の系で測った数・閉じない行のまま残します。存在そのものは、2026-11-10 に公開された構成が示しました（Lean で証明されている、と委員会が評価した水準です）。その読み方は第二巻の第 6〜13 部に、二つの設計の違いは直前の第 14 部に、段ごとの比べとして在ります。

この部と前提の一覧（28-04）に出る前提——小さい場の一段、大きい場の評価と気体、段に一様な帰納、結合の括弧、全列の収束——は、本書の設計（切断に依らない決まったブロック写像で押し出した測度と、測度で決まる量による合わせ）についての言明です。公開された構成の結果は、局所場の相関と、その構成の核と表示についての言明なので、そこからこれらの前提は従いません。大きい場と気体の前提には、公開された構成が別の形（領域の履歴を持たず、段ごとに種を数え直す）で答えています（14-04）。本書の設計に固有と言えるのは、切断に依らない決まったブロック写像（段の間の整合が押し出しの等式で書ける）、押し出した測度の鏡映正値性（Lean）、測度で決まる量による合わせ（設計の選びの段階）の三つまでです（14-06）。

機械検査まで済んだ定理は第 20〜22 部に、自由場の一段の機械検査した形はこの部の後半の 15-12 に在ります。この部の部品の先で本書の検討が組んだ条件つきの含意と、その分かっている傷は §08 に書きます。

**この章で分かること** — 格子間隔 $a$ を 0 に送ると、繰り込みの段の数 $\log_L(L_0/a)$ が無限に増えること。そのとき要るのは「一段で同じ形に戻る」ことを、定数を崩さずに全ての段で示すことだ、ということ。有効密度が保つべき形と三つの条件（紫外の制御の中身）。一段の評価と全段の証明の違いを一つの数（損の積）で見ること、そしてその違いを読み違える十の型。この部の語（繰り込みの段・第 23 部の階段・第 26 部の帯）の区別と、章の地図・読む順・五分類の記号。本書の検討が組んだ条件つきの含意と、その分かっている傷。

**前提となる章** — 7-05 §01（繰り込み群の段の列）・7-05 §04（小さな場と大きな場）・7-07 §03（四次元：Bałaban の主定理）・26-00（合流と帯）・27-02（条件の台帳）。

**先に言うこと** — この部が扱うのは条件の台帳の紫外の制御の行で、16-09 図 1 の最下段、二本の道の両方の下にある土台です。移り変わりの帯（第 26 部）とは別の課題で、帯より細かい尺度の側だけを扱います。この部の中で、紫外の制御は閉じていません（存在は、公開された構成が別の設計で示しました）。この部に在るのは、何を示せばよいかの言明・一行ずつの計算・いくつかの初等的な補題・最小の系で測った数で、どれも紫外の制御の一部分を言い直すか、いくつかの条件に割るものです。この部は 26-11（紫外の制御）を割って広げたもので、26-11 には要約と各章への案内だけが残ります。記号の注意：この部の $L$ はブロック化の倍率（多くの場合 2）、$L_0$ は固定した箱の一辺です（7-05 §01 と同じ）。

この章の順序


1. 何を示す問題か — 段の数・同じ形・三つの条件（紫外の制御の中身）・一段で閉じる形
2. 語の注 — 繰り込みの段・第 23 部の階段・帯・窓（表 0）
3. 無限個の段で閉じるとは — 損の積と、読み違える十の型（表 1）
4. この部の地図と読む順（表 2）
5. 五分類の記号（表 3）
6. 言えないこと
7. 五分類の表と依存グラフ（表 4）
8. 本書の検討が組んだ条件つきの含意と、分かっている傷 — 記録として


---

00

## この章で分かること

- 紫外の制御は「一段で同じ形に戻る」を、定数を崩さずに無限個の段で示すことです（§01）。
- 一段ごとに定数が $1-\delta_k$ 倍に減るなら、$K$ 段の後に残るのは $\prod_k (1-\delta_k)$ で、損の和 $\sum_k \delta_k$ が段数に一様に有限かどうかが全てを決めます（§03）。
- 一段の評価を書いて帰納が閉じたと読む型の読み違いが繰り返し起きます。十の型に分けて、正しい扱いと並べます（§03 表 1）。
- この部の「段」は繰り込みの一段（段 $k$）で、第 23 部の「階段」の段とも、第 26 部の「帯」とも別物です（§02）。

- 前半の章は、難しさ（15-01）・原典（15-02）・分解の言明（15-03）・最小の系の数（15-04〜15-06）・背景依存（15-07）・閉じない四行（15-08）・索引（15-09）・体系の試み（15-10）の順に並びます。後半の四章（15-11〜15-14）は、自由場の一段と一つの尺度で Lean まで済んだ定理です（§04）。
- 本書の検討が組んだ条件つきの含意には、分かっている傷が三つ在ります（§08）。

01

## 何を示す問題か — 段の数・同じ形・三つの条件

対象は、一辺 $L_0$ の四次元トーラスの上の $SU(2)$ の Wilson の格子で、格子間隔を $a$ とします。$L_0$ は物理の尺度で固定し、動かすのは $a$ だけです。7-05 §01 のとおり、倍率 $L$ のブロック化を重ねて、細かい尺度から順に積分します。段の数は

$$K = \log_L \frac{L_0}{a} \longrightarrow \infty \qquad (a \to 0) \tag{1}$$

です 初 （定義から）。例：$L = 2$、$L_0/a = 2^{20}$ なら $K = 20$ で、$a$ を半分にするたびに段が一つ増えます。段 $k$ の後の重み（有効密度）を $\rho_k$ と書くと $Z = \int \rho_0 = \int \rho_1 = \cdots = \int \rho_K$ です。

**同じ形。** Bałaban の方法では、各段で格子を小さな場の領域 $\Omega$ とその外に分け、全ての分け方について和を取ります（7-05 §04）。有効密度が保つべき形は、記号を略して書けば

$$\rho_k(V) = \sum_{\Omega} \chi(\Omega, V)\, \zeta(\Omega^c, V)\, \exp\!\Big( -\frac{1}{g_k^2} A_\Omega(V) - \sum_{X \subset \Omega} E_k(X, V) \Big)\, R_k(\Omega^c, V) \tag{2}$$

です 典 （形はスカラー場の解説 Dimock II §1 と三次元の定理の文面による。7-05 §07）。$A_\Omega$ は小さな場の領域の上の Wilson の作用（背景場で書いたもの）、$E_k(X, \cdot)$ は連結な塊 $X$ に局在した補正、$R_k$ は大きな場の領域が運ぶ因子、$g_k$ は段 $k$ の有効結合です。

**三つの条件。** 紫外の制御とは、(2) の形を全ての段で、次の三つを満たして保つことです。定数 $r, C, \kappa, c, \gamma$ は段 $k$ にも格子間隔 $a$ にも依りません。

- **小さい場の解析性の条件**（小さな場の局所性と解析性）。各 $E_k(X, \cdot)$ は背景場の変数の半径 $r$ の複素近傍で解析的で、$|E_k(X)| \le C\, e^{-\kappa\, d(X)}$（$d(X)$ は $X$ を結ぶ木の長さ）。
- **大きい場の稀さの条件。** $|R_k(\Omega^c)| \le e^{-c\, p(g_k)^2\, |\Omega^c|}$（$|\Omega^c|$ は大きな場のブロックの数、$p(g)$ は 7-05 の式 (7) の閾の倍率）。
- **結合が小さく留まる条件**（以下、結合の留まり）。有効結合の列 $g_0, g_1, \ldots, g_K$ が全て $(0, \gamma]$ に入る。

三つは紫外の制御の中身を本の言葉に直したものです。本書の検討は、四次元でこの三つのどれも示していません 仮 （27-02 の紫外の制御の行）。四次元の連続極限の存在は、公開された構成が、別の設計（各段の密度の表示を帰納の仮定として全ての段で運ぶ形）で示しました（6-03・14-01）。

**一段で閉じる、の形。** 類 $\mathcal{K}(g;\, r, \kappa, c)$ を「(2) の形を持ち、結合 $g$ で小さい場の解析性の条件と大きい場の稀さの条件を定数 $r, \kappa, c$ で満たす有効密度の集まり」とすると、示すべきは

$$\rho_k \in \mathcal{K}(g_k;\, r, \kappa, c) \implies \rho_{k+1} \in \mathcal{K}(g_{k+1};\, r, \kappa, c), \qquad \frac{1}{g_{k+1}^2} = \frac{1}{g_k^2} - 2b_0 \ln L + r_k \tag{3}$$

です。**両側で定数 $r, \kappa, c$ が同じで、動いてよいのは結合だけ**、という所が要点です。$b_0 = 22/(48\pi^2)$ は $SU(2)$ の一ループの係数（7-07 §01）、$r_k$ は結合の流れの剰余です。(3) を「有限個の母数で閉じる類」と「一段の剰余」に割って言明し直すのが 15-03 です。

## 02 語の注 — 繰り込みの段・第 23 部の階段・帯・窓

この部では「段」という語を繰り込みの一段の意味だけで使います。この本には「段」「帯」「窓」を含む語がほかにもあり、語が一致すると同じものを指すように読めてしまうので、表 0 で分けておきます。

表 0　この部の語と、他の部の似た語

| 語 | 意味 | 使う章 | この部との関係 |
|---|---|---|---|
| 繰り込みの段（段 $k$） | 倍率 $L$ のブロック化の一回。段 $k$ の後の有効密度 $\rho_k$、有効結合 $g_k$、段の数 $K = \log_L(L_0/a)$ | 7-05・第 15 部 | この部の「段」はこれだけ |
| 第 23 部の階段の段（一段目・二段目…） | 証明へ向かう道を四つの段に分けた整理。一段目は 0+1 次元の二重井戸の上の検討 | 第 23 部・26-00 | 別の語。この部の段の数 $K$ とは関係がない |
| 移り変わりの帯（帯） | 弱結合から強結合へ移る尺度 $L \sim 1/\Lambda$ の前後の区間 | 第 26 部 | この部は帯より細かい尺度だけを扱う。帯の中では結合が小さくない |
| 窓（$A_W$ の窓・$\hbar$ の窓・時刻の窓） | 有限個のサイトの区間・パラメータの区間・時間の区間に限った試験関数 | 第 23・24 部 | この部では使わない。粗い格子の一枚のプラケットは「粗い面」（2×2・4×4・辺 $L$）と書く |
| 紫外 | 格子間隔 $a$ から、結合がまだ小さい尺度 $L_0$ までの全ての段 | 26-11・第 15 部 | 条件の台帳の紫外の制御の行。全ての段で結合が小さい |

もう一つの注意：この部の最小の系（15-04〜15-06）では、「一つの粗い面の周辺分布」を一段の写像と呼ぶことがあります。これは一つの粗い面のホロノミーの分布だけを見る写像で、

粗い格子の全ての面の同時の分布を作る本当のブロック化の一段ではありません。各章の初出で一度このことを書きます。

03

## 無限個の段で閉じるとは — 損の積と、読み違える十の型

一段の評価と全段の証明の違いを、一つの数で見ておきます。一段の評価が「定数 $r_{k+1} \ge r_k(1-\delta_k)$」の形でしか出ないとすると、$K$ 段の後に残るのは

$$r_K \;\ge\; r_0 \prod_{k=0}^{K-1}(1-\delta_k), \qquad \prod_{k=0}^{K-1}(1-\delta_k) \;\ge\; \exp\!\Big(-2\sum_{k=0}^{K-1}\delta_k\Big) \quad \big(0 \le \delta_k \le \tfrac{1}{2}\big) \tag{4}$$

です 初 （右の不等式は $0 \le x \le \frac{1}{2}$ で $\ln(1-x) \ge -2x$ から）。損の和 $\sum_k \delta_k$ が $K$ に一様に有限なら、定数は $K$ に一様に正のまま残ります。和が $K$ とともに増えれば、定数は段の数とともに崩れます。**紫外の制御の中身は、この和を有限にすることです**。三次元の Bałaban の定理（7-05 §07 の式 (10)）と四次元の 1989 年の定理（7-07 §03）は、この形の帰納を有限体積で行ったものです 典 。四次元でこの和がなぜ素朴には有限にならないか（$\sum_k g_k^2$ が $\ln K$ で増えること）は 15-01 §01 で計算します。

紫外の制御の検討では、同じ形の読み違いが繰り返し起きます。共通の型は**一段の評価を書き、それで帰納が閉じたと読む**ことで、積 $\prod(1-\delta_k)$ を見ずに $\delta_k$ の一つだけを見ることに当たります。表 1 は、論理の型として十に分けたものです。どの行も、一段の主張と全段の主張を別の行に置けば避けられます。

表 1　一段と全段を読み違える型（論理の注意。札は数の行だけ）

| 型 | 読み違い（一行） | 正しい扱い |
|---|---|---|
| 循環 | 展開を閉じるための入力（各段の Hesse 行列の下界）を、その展開の出力から取る | 入力と出力の両方を帰納の仮定の側に置き、外から持ち込まない |
| 部品の取り違え | 一段の評価と構造の補題を置き換えたことを、帰納の全体を置き換えたと読む | 置き換えた部品と、置き換えていない帰納の部分を別の行に書く |
| 定数の積み重ね | 「定数は毎段新しく決まるので積み重ならない」と書く | それは解析性の半径が段に一様であることへの還元で、小さい場の解析性の条件に依る |
| 最悪の幾何 | 大きな場の帰納を「次の段で大きいなら前の段のどれかが大きい」で回す | 一段ごとに定数を失い、15-01 の (4) の型で $k$ 段で 0 に崩れる 初 。揺らぎの積分で硬さを引き継ぐ一段の安定性が要る |
| 細かい格子での良さ | 「良い枠」を殻の全てのプラケットが小さいことで定義する | 各点で確率 $1-q$（$q>0$ 固定）なら $n$ 点で $(1-q)^n \to 0$ 初 。良さは繰り込んだ尺度で定義する |

| 型 | 読み違い（一行） | 正しい扱い |
|---|---|---|
| 不等式の向き | 自由エネルギーの差の上界に、分配関数の変分原理（下界しか与えない）を使う | 上界には分配関数の上界か、条件つきの測度の制御が要る |
| 裸の結合のコスト | 有限作用の局所化した配位が在ることから、走る結合の $e^{-c/g^2(L)}$ を出す | 在るだけなら裸の結合でのコストで、$a \to 0$ で消える。走る結合のコストには一様な制御が要る |
| 方式依存の数 | 一段の $F^2$ の係数を、普遍な一ループの係数と比べて検査する | 一段の係数はブロック化の方式に依る。普遍なのは多段を重ねた対数の係数 |
| 仮定の脱落 | 四次元の紫外安定性を無条件の定理として引く | 結合の留まりの仮定つきで、それを外す基本の不等式（Bałaban 1989 の Theorem 2）は未公刊 典 （15-02 §01） |
| 定義域の見落とし | 裸の結合から最後の段の結合への写像の連続性を「構成から従う見込み」で済ませる | 有効結合は前の段が小さい間しか定義されない。定義域の中の連続性と中間値の議論を分けて書く（15-03 結合の小ささの帰納の補題） |

表の上の四行は同じ形です。一段の版から全段の版を出すには「定数が段で崩れない」という仮定が要り、それを規則の側に明示しないと、一段の証明が全段の証明に見えます。15-03 の規則の束は、この注意を規則の書き方に入れたものです。

## 04 この部の地図と読む順

表 2 は第 15 部の章です。前半（15-00〜15-10）が紫外の制御の検討の記録、後半（15-11〜15-14）が自由場の一段と一つの尺度で Lean まで済んだ定理です。水準の印は〔二〕＝数学科・物理学科の二年生で読める、〔三〕＝三年生以上（測度・作用素・ノルムの評価を使う）、〔研〕＝研究の水準（検討の組み立てをそのまま追う）。

表 2　第 15 部の章

| 章 | 題 | 一行 | 前提 | 水準 |
|---|---|---|---|---|
| 15-00 | 入口 ― 紫外の制御とは何か | 段の数・同じ形・三つの条件・読み違える型・語の注 | 7-05・7-07 | 〔二〕 |
| 15-01 | 紫外の難しさ | 無次元の結合で損の和が対数で発散・群値の場に無い重みの性質・ゲージの張り替え | 15-00 | 〔二〕〜〔三〕 |
| 15-02 | 原典の地図 | Bałaban の連作の五段・BBS の鎖・捩れた小さな四次元トーラスの紫外の言明・原典に無い二行 | 15-01 | 〔三〕 |
| 15-03 | 分解の言明 | 有限個の母数で閉じる類と三つの剰余・結合の小ささの帰納の補題・横の縮みの帳簿・問い | 15-01・15-02 | 〔三〕 |
| 15-04 | 一リンクの熱核の類と階層模型 | 母数一つで閉じる類・Migdal–Kadanoff の不変な曲線と縮み 1/16 | 15-03 | 〔二〕〜〔三〕 |

| 章 | 題 | 一行 | 前提 | 水準 |
|---|---|---|---|---|
| 15-05 | 束の網の定理 | 横の縮みと母数の流れを一つの射影で・箱の表・二段 | 15-03・15-04 | 〔二〕〜〔三〕 |
| 15-06 | 母数の数え方 | ループの形ごとの結合・判定式・引き込む先の類 | 15-04・15-05 | 〔三〕 |
| 15-07 | 背景に依る揺らぎ η | 背景と揺らぎの分解の補題・揺らぎの期待値の閉じ（BBS の (iii)）の群版・背景に依らない揺らぎの一段の補題・局所結合のずらし | 15-02・15-03 | 〔三〕 |
| 15-08 | 閉じない四行と、その案 | 大きな場込みの剰余・観測量の源・η の多段・ゲージ固定 | 15-03・15-07 | 〔三〕〜〔研〕 |
| 15-09 | 言えないこと・問いの索引・依存の図 | 部全体の言えないこと・紫外の問い・Lean の対応表 | 全章 | 〔二〕 |
| 15-10 | 体系の試み | 優勢行列・符号の損・代表の幾何・二重付値・錐の計算法（検討。本筋ではない） | 15-05・15-08 | 〔三〕〜〔研〕 |
| 15-11 | 入口 ― 一段と一つの尺度 | 後半の章の範囲（線形・真空・一つの尺度） | 19-04 | 〔二〕 |
| 15-12 | 自由場の一段と多段 | 道の核で自由場を押した記号の漸化式・段に一様な縮み（Lean） | 15-11・19-04 | 〔三〕 |
| 15-13 | ブロック写像の線形化と押し出しの共分散 | 局所性・ゲージの共変性・単位元のまわりの線形化・押し出しの共分散（Lean） | 15-12 | 〔三〕 |
| 15-14 | 後半（15-11〜15-13）が言えていること・言えていないこと | 後半の定理を範囲と Lean の宣言とともに一つの表に | 15-11〜15-13 | 〔二〕 |

読む順は三本あります。**最短**：15-00 → 15-03 → 15-09（何を示せばよいかと、何が残っているか）。**計算の筋**：15-04 → 15-05 → 15-06（最小の系で、分解に出る数がどう測れるか）。**壁の筋**：15-02 → 15-07 → 15-08（原典がどこで止まり、何が閉じないか）。15-01 はどの筋の前にも読めます。

**第 23 部の壁との関係。**第 23 部の一段目（0+1 次元の二重井戸の上の検討）の芯の Poincaré の一様性の仮定には、すでにある二つの支え方のほかに、粗い鎖の影響（Dobrushin の条件）で支える三つ目の道の候補があり、その影響の列和は $\hbar \in [10^{-5}, 1]$ の 23 点で $\rho_{\mathrm{col}} \le 0.176 < 1$ と押さえられています〔計算機援用（倍精度・区間演算ではない）〕（外向きの余裕と浮動小数の関数の精度の仮定の上。点の間と $\hbar < 10^{-5}$ は 読 ）。これは第 23 部の時間の側の道の部品で、この部の繰り込みの段とは独立です（語の区別は表 0）。

```
05
```

## 五分類の記号

この部の全ての言明に、次の五つの札のどれかを付けます（本全体と同じ五分類）。札は「どう確かめたか」の印で、言明の重さの印ではありません。

表 3　五分類の札（この部での使い方）

| 札 | 意味 | この部での例 |
|---|---|---|
| 初 | 紙で証明を置いた（初等的な証明） | 結合の小ささの帰納の補題・背景と揺らぎの分解の補題・束の網の有理数・一ループの主項の代数（「初・一ループの水準」と書く） |
| 典 | 原典で確かめた既知 | Bałaban の条件つきの紫外安定性の定理（Bałaban 1989 の Theorem 1）・BBS の Lemma A.6.1 |
| 機 | 計算機援用（区間演算） | 15-04 の階層模型の管と鎖。倍精度の浮動小数に外向きの余裕を付けただけの評価は、〔計算機援用（倍精度・区間演算ではない）〕と書き分ける |
| 読 | 数値の読み・物理の見立て | 源の値・有限の $\beta$ の縮み・Monte Carlo との一致 |
| 仮 | 仮定・未達の言明 | 紫外の制御・分解の言明・捩れたトーラスの紫外の言明 |

Lean で検査した部品は札ではなく外の列に書き、15-09 の対応表にまとめます。この部の Lean の部品は、どれも実数の有限和や代数の補題で、格子・群・測度は形式化していません。

06

## 言えないこと

(a) この部の中で、紫外の制御は閉じていません。この章も、この部のどの章も、紫外の制御の三つの条件を四次元でも二次元でも示していません。四次元の連続極限の存在は、公開された構成が別の設計で示しました（第 6〜13 部）。

(b) (4) は一段の損が掛け算で効くときの算術で、実際の有効結合の列や実際の定数についての定理ではありません。

(c) 表 1 の十の型は論理の注意で、どれかの既存の議論が誤りだという主張ではありません。

(d) 表 2 の水準の印と読む順は本の整理で、章の中身の難しさの判定ではありません。

07

## 五分類の表と依存グラフ

表 4　この章の行（この章の行に Lean の欄はありません）

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 |
|---|---|---|---|---|

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 |
|---|---|---|---|---|
| [01] | 段の数 $K = \log_L(L_0/a) \to \infty$（(1)） | 初 | §01（定義） | $L_0$ を固定 |
| [02] | 有効密度の形 (2)（小さな場・大きな場の和） | 典 | §01・7-05<br>§04・§07 | 形の水準（Dimock II・三次元の定理の文面） |
| [03] | 紫外の制御の三つの条件と一段で閉じる形 (3) | 仮 | §01・27-02 の紫外の制御の行 | $a$ から $L_0$ まで・定数は $k, a$ に依らない |
| [04] | 損の積の下界 $\prod(1-\delta_k) \geq e^{-2\sum\delta_k}$（(4)） | 初 | §03 | $0 \leq \delta_k \leq \frac{1}{2}$ |
| [05] | 三次元と四次元（1989 年）の Bałaban の定理は (3) の型の帰納 | 典 | §03・7-05<br>§07・7-07 §03 | 有限体積・四次元は結合の留まりの仮定つき |
| [06] | 読み違える十の型と、最悪の幾何・細かい格子での良さの二つの算術 | 初 | §03 表 1 | 論理の型。数の行は $q > 0$ 固定・一段の損が掛け算で効くとき |

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
[01] 初  段の数 K → ∞                                  L₀ を固定
[02] 典  有効密度の形 (2)
[03] 仮  紫外の制御の三条件と一段で閉じる形 (3) ⟸ [01][02]  a から L₀ まで
[04] 初  損の積の下界 (4)                               0 ≤ δ ≤ 1/2
[05] 典  Bałaban の定理は (3) の型の帰納 ⟸ [02]          有限体積・結合の留まりを仮
[06] 初  読み違える十の型 ⟸ [04]                        論理の注意
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。紫外の制御の三つの条件の行は仮定の行で、紫外の制御を言い直したものです。この章の節点に、紫外の制御が示されたという節点はありません。

08

## 本書の検討が組んだ条件つきの含意と、分かっている傷

この部の部品の先で、本書の検討は、押し出した測度の族についての条件つきの含意（鎖）を組みました（28-01 部分列の極限の含意・28-02 全列の収束の含意）。決まったブロック写像で細かい格子の測度を粗い格子へ押し出し、この含意の前提（前提の一覧 28-04 の、小さい場の一段・大きい場の評価と気体・段に一様な帰納・結合の括弧など）の下で、押し出した測度の部分列の極限が在り、有限の格子の性質（稀さ・鏡映正値性・対称・観測量の分かれ方）がその極限に移る、という形です 仮 。四次元の存在は公開された構成が別の設計で示したので、この含意は存在の言明としてではなく、本書の設計が何を前提に置いたかの記録として読みます。記録として、分かっている傷を三つ書いておきます。

(a) **二つの部分が、定理の中で繋がっていない。**鎖の Lean の定理は、実効の結合の関数についての補題（任意の目標の値に合わせる点が括弧の中に取れる）と、測度の族についてのコン

パクト性と極限への移しの、二つの並びです。定理の中では、細かい測度の族も裸の結合の列も任意に取れ、二つを結ぶ欄はありません。繋ぐのは「測度で決まる量で裸の結合の列を合わせる」という条件で、合わせた列の存在は、この含意の中では条件のままです。辺 3 の設計で粗い面の平均の期待値を合わせた列が在ること（14-03）は別の定理で、それを鎖の定理に繋ぐ言明はありません。

(b) **合わせなしでは、収束の結論に中身が無い**。押し出した測度の部分列の収束は、どの確率測度の族にも、コンパクト性だけで成り立ちます。この含意の中身は、有限の格子の性質を極限へ移すところに在ります。全列の収束は結論ではなく、前提の側に置かれていました。

(c) **大きい場の気体の両立の測り方が二通り在る**。大きい場の気体の前提で、ポリマーどうしの両立を「隣接しない」で測る形と「台が交わらない」で測る形が在り、文での記述と Lean の言明が別の形を取っていました。二つは別の気体です。前提をどちらの形で書くかは決まっていません。

三つとも、公開された構成の結果とは関わりなく残る、本書の検討の側の傷です。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 初 段の数が $\ln(1/a)$ で増えること、損の積の下界 (4)、読み違える型のうち数の行の算術 | 実際の有効密度の列で、損の和が有限であること |
| 典 有効密度の形 (2) と、Bałaban の定理が (3) の型の帰納であること | 四次元で結合の留まりを外した帰納 |
| 仮 紫外の制御を三つの条件として言明する形 | 三つの条件のどれも（四次元の存在は、公開された構成が別の設計で示した） |
| 仮 本書の検討が組んだ条件つきの含意の形と、分かっている傷三つ（§08） | 含意の前提のどれも。鎖の二つの部分を繋ぐ言明 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 段の列・有効密度の形・小さな場と大きな場 | 典 | 7-05 の出典表（J. Dimock, The renormalization group according to Balaban I・II・III, arXiv:1108.1335, 1212.5562, 1304.0705。T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 102 (1985) 255–275） |
| 四次元の条件つきの紫外安定性の定理 | 典（要旨と序文 p.355–356） | T. Bałaban, Large field renormalization. II, Comm. Math. Phys. 122 (1989) 355–392（7-07 の出典表） |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| (1)(4)・表 1 の数の行 | 初 | この章の本文の算術 |
| 表 1 の十の型・表 0・表 2 | 本書の検討 | 本書の検討の記録（紫外の制御の検討の整理） |

**この章で使った語** ― 紫外の制御・段の数・同じ形・一段で閉じる類・小さい場の解析性の条件・大きい場の稀さの条件・結合が小さく留まる条件・損の積・条件つきの含意・繰り込みの段・粗い面・五分類。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：15-01 紫外の難しさ ― なぜ四次元では損の和が素朴には有限にならないか。

# 紫外の難しさ — 無次元の結合・群値の場・ゲージ

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「典」の札）。本書の検討の前提として、この部に置いています。

この部は、本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた記録です。存在そのものは第二巻の第 6〜13 部を、二つの設計の違いは第 14 部を見てください。部の位置づけは 15-00 にあります。

**この章で分かること** — 四次元では結合が無次元なので、一段ごとの $g_k^2$ の大きさの損の和が段数の対数で発散し、損を結合の流れに正確に吸収した類を作らなければならないこと（一行ずつの計算）。三次元ではこの和が有限で、結合の流れを追う必要が無いこと。群に値をとる場では、平らな場の重みの道具のうち「揺らぎの期待値で一段閉じる」性質が無いこと。ゲージ不変な関数は軌道の向きに凸性を持たず、ゲージは尺度ごとに張り替えるしかなく、その境目も評価に入ること。難しさの三つの源と、ゲージの無い二次元の模型でも止まっていること。

**前提となる章** — 15-00 §01（三つの条件と一段で閉じる形）・7-05 §06（結合の走り）・7-05 §05（局所ゲージ）・24-07 §05（難しさの三つの源）・24-06 §07（重みの四性質）。

**先に言うこと** — この章の計算は一ループの流れを正確な式と見なした算術で、実際の有効結合の列についての定理ではありません。難しさを三つ（無次元の結合・群値の場・ゲージ）に分けますが、三つは独立ではなく、15-07 と 15-08 で一つの所（揺ら�ぎの測度が背景に依ること）に集まります。

この章の順序

1. 難しさ 1：無次元の結合 — 損の和が対数で発散する（式 (1)〜(5)）・三次元との対比
2. 難しさ 2：群に値をとる場 — 重みの四性質と、群で足りない揺らぎの期待値の閉じ（BBS の (iii)）
3. 難しさ 3：ゲージ対称性 — 軌道の向きの凸性・尺度ごとの張り替え
4. 難しさの源と、ゲージの無い模型 — 三つの源・二次元 $O(N)$（表 1）

5. 言えないこと
6. 五分類の表と依存グラフ（表 2）

---

00

## この章で分かること

- 四次元では一段の損 $g_k^2$ の和が $\ln K$ で発散するので、その部分は結合の流れに正確に吸収し、残りを和の有限な大きさ（$g_k^{2+\delta}$ の型か幾何級数）に閉じ込める必要があります（§01）。
- 三次元では $\sum_k g_k^2$ が有限で、一段の損を誤差として運べます（§01）。
- 群に値をとる場では、重みの四性質のうち「揺らぎの期待値で一段閉じる」（揺らぎの期待値の閉じ）が無く、揺らぎの測度が背景に依ります（§02）。
- ゲージ不変な関数の最小点では軌道の向きの Hesse 形式が 0 で、凸性の道具はゲージを消さないと使えません。ゲージはブロックの大きさでしか効かず、尺度ごとに張り替える境目も評価に入ります（§03）。
- 壁の核は「群値の場 × 無次元の結合 × 大きな場」にあり、ゲージの無い二次元 $O(N)$ σ 模型（$N \geq 3$）でも紫外の構成は止まっています（§04）。

01

## 難しさ 1：無次元の結合 — 損の和が対数で発散する

この節は既存の知見（一ループの流れの算術と三次元との対比）の整理です。導入は 7-06 §02 にあります。

四次元では結合 $g$ に長さの次元が無く、細かい尺度で結合を弱めるのは漸近自由だけです（24-07 §01）。一ループの流れを段に刻むと、$b := 2b_0 \ln L > 0$ として

$$\frac{1}{g_{k+1}^2} = \frac{1}{g_k^2} - b \tag{1}$$

です 典 （7-05 §06 の式 (9)。一ループだけを残した式）。以下、(1) を正確な式と見なして、損の和を一行ずつ数えます。

**(a) 結合の列。**最も粗い段の結合を $g_K = g_*$ に止め、粗い端から数えた段 $j = K - k$（$j = 1, \dots, K$）で書くと、(1) を $j$ 回使って

$$\frac{1}{g_{K-j}^2} = \frac{1}{g_*^2} + bj, \qquad \frac{1}{(b+g_*^{-2})\,j} \;\le\; g_{K-j}^2 \;\le\; \frac{1}{bj} \quad (j \ge 1) \tag{2}$$

です 初 。左の不等式は $1/g_*^2 + bj \le (1/g_*^2 + b)j$（$j \ge 1$）から、右は $1/g_*^2 > 0$ を落としただけです。細かい側ほど結合は小さいが、$1/j$ でしか小さくなりません。

**(b) 和。** $1/x$ の積分と比べて $\ln(K+1) \le \sum_{j=1}^{K} \frac{1}{j} \le 1 + \ln K$ なので、(2) を足して

$$\frac{\ln(K+1)}{b + g_*^{-2}} \;\le\; \sum_{k=0}^{K-1} g_k^2 \;\le\; \frac{1 + \ln K}{b} \tag{3}$$

です 初 。**一段ごとに $g_k^2$ の大きさの損があると、その和は段数の対数で増え続けます。**例：$SU(3)$・$L = 2$ なら $1/b = 1/(2b_0 \ln 2) \approx 10.4$ で、$K$ を倍にするたびに上界が $(\ln 2)/b \approx 7.2$ 増えます。7-05 表 4 の部分和が $K$ の倍ごとに約 7.2 増えるのと合います（算術）。

**一段の係数の実測（注）。**(1) の $b$ は一ループの係数を正確な式と見なしたもので、ブロック化の規則を一つ決めて一段を測ると、一段目の下がり方は一ループの係数と一致しません。粗いリンク（細かいリンク $L$ 本の線の上の積）を全て固定する周期の網で、$SU(2)$・$\beta = 4/g^2$ の粗い作用の長波長の係数を一段（$L = 2$）流すと、$\beta' - \beta = -0.745$（Manton の作用）・$-1.078$（熱核）・$-1.136$（Wilson）で、向きは漸近自由の向き、大きさは $\beta$ の単位の一ループの値 $8b_0 \ln 2 = \frac{11}{3\pi^2} \ln 2 \approx 0.2575$ の 2.9〜4.4 倍でした 読 （一ループ・$\beta \to \infty$ の $O(1)$・可換の背景・横の粗いトーラス $6^3$・第 4 軸の粗い長さ $\le 32$ の列から波数 0 へ外挿）。このうち作用に依る定数（Manton で $-0.31$、Wilson で $-0.70$、熱核ではさらに Van Vleck の前因子の $-\frac{1}{3}$）は、二段目以降の作用（もう Wilson でも Manton でもない）では別の値になります。倍率を 2 から 3 にしたときの変化は、作用に依らない部分で $-0.254$ で、$-\frac{11}{3\pi^2} \ln \frac{3}{2} \approx -0.151$ の 1.7〜1.9 倍です 読 （倍率 3 の波数 0 は二点の外挿）。したがって (1)〜(5) の算術を一段目の数で読むなら、一段の $\beta$ の下がり 0.2575 を 0.75〜1.14 に読み替える必要があり、段を重ねたときの係数は測っていません。$\ln L$ の係数が小さい倍率で合わないのは、線の上の積を固定する規則が粗い尺度より長い波長の揺らぎまで積分するためと読めます 読 （15-03 §02）。熱核と Manton の差 $-\frac{1}{3}$ と、Wilson と Manton の差 $\frac{5}{3}t$（$t$ は $U(1)$ の Wilson の値）は恒等式です 初 （$s^2$ の係数の勘定。係数の算術は Lean：`tadpole_weights`・`vanvleck_ratio`・`shift_bounds`（$0.2575 < \frac{11 \ln 2}{3\pi^2} < 0.2576$）・`beta_shift_of_inv_sq`（仮定 $1/g'^2 = 1/g^2 - 2b_0\ell$））。

**(c) 積。**一段ごとに定数（解析性の半径・減衰の率・Hesse 行列の下界など）が $1 - cg_k^2$ 倍に減るとすると、$1 - x \le e^{-x}$ と (3) の左から

$$\prod_{k=0}^{K-1} \bigl(1 - c\,g_k^2\bigr) \;\le\; \exp\Bigl(-c \sum_{k=0}^{K-1} g_k^2\Bigr) \;\le\; (K+1)^{-c/(b+g_*^{-2})} \;\longrightarrow\; 0 \qquad (K \to \infty) \tag{4}$$

です 初 （$cg_k^2 \le 1$ の範囲で）。$K = \log_L(L_0/a)$ なので、定数は $\ln(1/a)$ の冪で 0 に向かいます。ゆっくりですが、一様ではありません。

**(d) 和が有限になる大きさ。**損が $g_k^{2+\delta}$（$\delta > 0$）の大きさなら、(2) の右から

$$\sum_{k=0}^{K-1} g_k^{2+\delta} \;\le\; \sum_{j=1}^{\infty} (bj)^{-1-\delta/2} \;=\; b^{-1-\delta/2}\,\zeta\!\left(1+\tfrac{\delta}{2}\right) \;<\; \infty \tag{5}$$

で、$K$ に一様に有限です 初 。$\delta = 2$（損が $g_k^4$、一ループの次の大きさ）なら $\pi^2/(6b^2)$ です。

**だから要ること。**(4) と (5) を合わせると、一段の後に $g_k^2$ の大きさで動く部分を「誤差」として運ぶことはできません。その部分は**類の母数そのものの動き**にしなければなりません。具体的には、類 $\mathcal{K}$ を結合 $g$ を母数に持つ形で定義し、一段の後の有効作用から主要な項（Wilson の項、$F^2$ の向き）の係数を読み取って $g_{k+1}$ と定めます。こうすると $g_k^2$ の大きさの部分は、15-00 の (3) の結合の流れに正確に吸収されます。吸収した後に残る損（局在した補正 $E_k$ の定数の劣化など）は、(5) の型の和の有限な大きさ——代表的には $O(g_k^4)$、または尺度について幾何級数で縮む無関係な項——に閉じ込めなければなりません 初 （(4)(5) の算術から出る要請。一段の損が掛け算で効く場合）。この要請を言明の形に書き直したのが 15-03 の分解 です。

結合の流れの側は事情が違います。15-00 の (3) の剰余 $r_k$ は $1/g^2$ の変数で $|r_k| \le C g_k^2$ の大きさ（二ループの大きさ）を許してよく、その和は (3) のとおり $\ln K$ で増えますが、$1/g_k^2$ 自身が $bK$ の大きさで増えるので結合の列は崩れません。必要なのは列が $(0, \gamma]$ に留まることで、それを 15-03 の結合の小ささの帰納の補題 で扱います。

**三次元との対比。**三次元では $g^2$ が長さの $-1$ 乗の次元を持ち、段 $k$ の無次元の結合は $g^2 L^k a$ の形で細かい側に幾何級数で小さく、$\sum_k g_k^2$ は有限です（7-05 表 4 で 2 に収まる） 典 。発散しうる型は有限個で、要る相殺項は定数一つ、半単純性から有効作用に育つ変数（relevant な変数）が無い、と Bałaban 1985 は書きます（7-06 §05） 典 。三次元では一段の $g_k^2$ の損を誤差として運べ、結合の流れを追う必要がありません。四次元では $F^2$ の項がちょうど marginal で、追わなければなりません。これが 24-07 表 3 の難しさの源のうち、無次元の結合という源の、紫外の側の正確な形です。

「吸収」が最も小さな場でどう見えるか——一リンクの熱核の類では損が望遠鏡和になること——は 15-04 §01 で見ます。

02

## 難しさ 2：群に値をとる場 — 重みの四性質と、群で足りない「揺らぎの期待値の閉じ」

格子の辺の変数 $U_l$ は群 $G$ の元です。群の元は拡大縮小できず、足して割ることもできません（7-05 §05 の (i)(ii)）典 。群はコンパクトなので場は有界ですが、「大きな場」は群の遠い側（単位元から遠い所）で、そこでは一リンクの Wilson の重みの曲率が負になります（24-06 §03 の一リンクの Wilson の重みの命題）初 （24-06 に証明）。大きな場は凸性でなく稀さで払うしかありません。

**平らな場の道具**。スカラー場の繰り込みでは、大きな場の稀さを重み（regulator）$\tilde{G}(X,\phi)$ のノルムに入れ、一段の期待値で閉じることを次の四つの性質から出します 典 （Bauerschmidt–Brydges–Slade の本の付録 A.6 の補題 A.6.1（活動のノルムの一段の評価）。四性質は §A.6.2 の regulator の望ましい性質として並ぶもの。24-06 §07。原典の鎖は 15-02 §04）。

1. 交わらない集合の上で積に分かれる。
2. $\tilde{G}(X,\phi+\phi') \le \tilde{G}^2(X,\phi)\,\tilde{G}^2(X,\phi')$（場の和について）。
3. $\mathbb{E}_+\tilde{G}^t(X) \le 2^{|B(X)|}$（揺らぎの期待値で一段閉じる）。
4. $\tilde{G}^t \le \tilde{G}_+$（次の段の重みで押さえられる）。

ここから一段の評価 $\|\mathbb{E}_+\theta K(X)\|_{\tilde{G}_+} \le 2^{|B(X)|}\|K(X)\|_{\tilde{G}}$（活動のノルムの一段の評価）が出ます。場の和の劣乗性は場の加法 $\phi+\phi'$ を、揺らぎの期待値の閉じは揺らぎが背景に依らない Gauss 変数であることを使っています。補題の証明で揺らぎの期待値の閉じは揺らぎだけの関数の期待値として使われ、その測度は背景 $\phi$ に依りません 読 （証明の鎖を読んだもの）。

**群の上で何が残り、何が足りないか**。場の和の劣乗性は、場の和 $\phi+\phi'$ を「背景 × 揺らぎ」$U_l = W_l e^{A_l}$ に替えた版が三角不等式と共役不変性だけで立ちます（背景と揺らぎの分解の補題と、その系の重みの分解。15-07 §02）初 。足りないのは揺らぎの期待値の閉じです。群では揺らぎの測度が背景に依ります（背景場の中の伝播関数、7-07 表 1 の土台の論文の題）。だから $\mathbb{E}_+G^t$ の評価に背景の正則性が要り、背景が群の遠い側にある大きな場の領域では、揺らぎは背景の小さな摂動になりません。測度が背景に依る分を $\eta_k$ と書き、揺らぎの期待値の閉じと次の段への単調性の群版を言明の形で置き、$\eta_k$ をどう吸収するかを見るのが 15-07 です。スカラーの場では測度が背景に依らないので $\eta_k = 0$ で、この問題そのものがありません。

03

## 難しさ 3：ゲージ対称性 — 軌道の向きの凸性と、尺度ごとの張り替え

**軌道の向きには凸性が無い**。ゲージ変換の群は有限の格子ではコンパクトな群の積で、作用 $V$ はゲージ不変、つまり軌道に沿って一定です。

**軌道の向きの平坦性の命題**。$V$ を配位の空間（コンパクトな多様体）の上の滑らかなゲージ不変な関数、$x_0$ を $V$ の最小点とする。$x_0$ を通る軌道の接ベクトル $\xi \neq 0$ について $\mathrm{Hess}\, V(x_0)(\xi,\xi) = 0$。とくに、そのような $\xi$ が一つでも在れば、$\mathrm{Hess}\, V \geq m\, g$（$m > 0$）は成り立たない。

初 証明。$\gamma(t) = e^{t\eta} \cdot x_0$（$\eta$ はゲージ変換のリー環の元で $\gamma'(0) = \xi$）とすると $V(\gamma(t)) = V(x_0)$ が全ての $t$ で成り立つ。$dV(x_0) = 0$ なので $\frac{d^2}{dt^2} V(\gamma(t))|_{t=0} = \mathrm{Hess}\, V(x_0)(\xi,\xi) + dV(x_0)(\nabla_\gamma \gamma') = \mathrm{Hess}\, V(x_0)(\xi,\xi)$、左辺は 0。∎

凸性に頼る道具（Bakry–Émery・Brascamp–Lieb）は、軌道の向きを消さないと使えません 読 （物理の見立て。24-07 §05 の「理論」の段落と同じ）。消すにはゲージを固定しますが、全ての配位で同時に効く連続な大域のゲージ固定は存在しません（Gribov 1978・Singer 1978）典 （書誌のみ。7-05 §05）。

**ゲージはブロックの大きさでしか効かない**。二次元の一辺 $\ell$ のブロックで完全軸性ゲージをとると、プラケットの条件 $\|U_{\partial p} - 1\| < \varepsilon$ から辺について $\|U_b - 1\| < \ell\, \varepsilon$ しか出ません（7-05 §05）初 （7-05 に証明）。$\ell\varepsilon$ が 2 を越えると何も言わないので、ゲージはブロックの大きさの範囲で、尺度ごとに選び直すことになります。三次元の Bałaban の定理は、ブロックごとの軸ゲージを Faddeev–Popov の方法で入れています（7-06 §05）典 。四次元の論文での具体的な選び方は、本文で確かめていません（7-07 表 3）。

**張り替えの境目**。段 $k$ のゲージと段 $k+1$ のゲージは別のもので、張り替えは場に依るゲージ変換です。その Jacobian（Faddeev–Popov の行列式）と、隣り合うブロックの境目に出る項も有効作用に入り、15-00 の (3) の類の中で、§01 の意味で和の有限な損として評価しなければなりません 読 （物理の見立て。要る評価の形を述べたもの）。連続の切断で構成した MRS も、大きな場の領域の軸ゲージと小さな場の領域の背景場に依るゲージを継いでいて、同じ型の継ぎ目を持ちます（7-07 §06）典 。木のゲージでは張り替えの Jacobian が定数になり、費用が別の所（ゴースト行列式と境目の結合）に移る、という整理は 15-08 のゲージの張り替えの境目の行にあります。

04

## 難しさの源と、ゲージの無い模型

三つの難しさを 24-07 表 3 の難しさの源の言葉に写すと表 1 になります。紫外だけを扱うこの部では、全ての段で結合が小さいので、尺度をつなぐ展開の欠如は現れません 読 （物理の見立て）。

表 1　難しさと、難しさの三つの源の対応（読み。源の名は 24-07 表 3）

| 難しさの源 | 中身（一行） | 紫外の側での形 | この部の章 |
|---|---|---|---|
| 無次元の結合という源 | 結合が無次元 | $F^2$ の項がちょうど marginal で、$g_k^2$ の損の和が $\ln K$ で発散する（§01 の (3)(4)）。損を結合の流れに吸収した類が要る | 15-03・15-04〜15-06 |
| 尺度をつなぐ展開の欠如 | 紫外と赤外をつなぐ展開が無い | 現れない（全ての段で結合が小さい）。第 26 部の帯の課題 | — |
| 大域のゲージ固定の欠如 | 大域のゲージ固定が無く、大きな場が凸性で制御できない | 一段の中に分けると、群値の場の揺らぎの期待値の閉じ（§02）・軌道の向きの凸性（§03 軌道の向きの平坦性の命題）・張り替えの境目（§03） | 15-07・15-08 |

**ゲージの無い模型でも止まっている。**二次元の $O(N)$ σ 模型（$N \geq 3$）は、ゲージが無く、結合が無次元で漸近自由な模型ですが、紫外の極限の構成は未解決問題に挙げられています 典 （Rivasseau 2000 の総説の本文 §II.1.1。多くの専門家が試みて成功していない、と書かれる）。同じ所で、この模型の階層版の構成は済んでいるとされます（Gawędzki–Kupiainen, Comm. Math. Phys. 106 (1986) 533） 典 （総説の文献表）。有限体積に限っても構成が無いこと、漸近自由な $N \geq 3$ に限ることは、原文の語ではなく本書の読みです 読 。$O(4)$ の場合は場が $S^3 = SU(2)$ に値をとる主カイラル模型です。Bałaban の方法の移植は、2024 年の時点で変分問題と背景場の段までです（Goswami、二次元の非線形 σ 模型の一族。Dybalski–Stottmeister–Tanimoto、二次元 $O(4)$：Lie 群上の変分法で臨界点の方程式を出し、縮小写像で解く） 典 （どちらも抄録）。一方、フェルミオンの二次元 Gross–Neveu（質量のある場合）は構成されています（24-07 表 3） 典 。この模型を試験台に使う案は 15-02 §05 にあります。

対比からの読み 読 （物理の見立て）：壁の核は「群（非線形の多様体）に値をとる場」「無次元の結合（無次元の結合という源）」「大きな場」の組にあり、ゲージ不変性はその上に乗る層と読めます。ゲージ不変性が本質的な困難でないとは言いません。

05

## 言えないこと

(a) §01 の (1)〜(5) は一ループの流れ (1) を正確な式と見なした算術で、実際の有効結合の列についての定理ではありません。「損を流れに吸収した類が要る」は、損が一段ごとに掛け算

で効く場合の要請です。

(b) §02 は重みの四性質のうち揺らぎの期待値の閉じが群で足りないことを述べるだけで、揺らぎの期待値の閉じの群版を示していません。

(c) 「壁の核は群値の場 × 無次元の結合 × 大きな場」は二次元の模型の既知の状況からの見立てで、ゲージ不変性が本質的な困難でないとは言いません。

(d) 張り替えの境目が和の有限な損として評価できるかは、示していません（要る評価の形を述べただけ）。

(e) §01 の一段の係数の実測は、一つの規則（粗いリンクを線の上の積で全て固定する周期の網）の一段目の一ループの数で、段を重ねたときの係数・有限の $\beta$・非可換の背景は測っていません。倍率 3 の値は二点の外挿です。

06

## 五分類の表と依存グラフ

表 2　この章の行（この章の行に Lean の欄はありません）

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 |
|---|---|---|---|---|
| [01] | 一ループの流れ (1) | 典 | §01・7-05 §06 | 一ループだけを残した式 |
| [02] | 結合の列の上下界 (2) と和の対数の増え方 (3) | 初 | §01 | 一ループの流れ (1) の下で |
| [03] | 損 $cg_k^2$ の積は $(K+1)^{-c'} \to 0$（(4)）、損 $g_k^{2+\delta}$ の和は有限（(5)） | 初 | §01 | (1) の下・$cg_k^2 \le 1$・$\delta > 0$ |
| [04] | 三次元では $\sum g_k^2$ が有限で、相殺項は定数一つ | 典 | §01・7-05 §06・7-06 §05 | 三次元 |
| [05] | 重みの四性質と一段の評価（活動のノルムの一段の評価） | 典 | §02・24-06 §07（付録 A.6.2 の本文） | 平らな場 |
| [06] | 群の遠い側で一リンクの Wilson の重みの曲率は負 | 初 | §02・24-06 §03（一リンクの Wilson の重みの命題） | 一リンク |
| [07] | 軌道の向きの平坦性の命題：ゲージ不変な関数の最小点で軌道の向きの Hess は 0 | 初 | §03 | 軌道の接ベクトル $\xi \neq 0$ |
| [08] | 連続な大域のゲージ固定は無い | 典 | §03（書誌のみ） | — |
| [09] | 尺度ごとの張り替えの境目の項も、和の有限な損として評価が要る | 読 | §03（物理の見立て） | — |

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 |
|---|---|---|---|---|
| [10] | 二次元 $O(N)$ σ 模型の紫外の構成は未解決問題に挙げられ、階層版は構成済み。移植は背景場の段まで | 典 | §04（総説の本文 §II.1.1・文献表と抄録） | 探した範囲で |
| [11] | 壁の核は群値の場 × 無次元の結合 × 大きな場 | 読 | §04（物理の見立て） | — |
| [12] | 一段の係数の実測：周期の網の一段目で $\beta' - \beta = -0.745 \sim -1.136$（一ループの値の 2.9〜4.4 倍）、倍率 2→3 の変化は 1.7〜1.9 倍。作用の差 $-\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3} t$ は恒等式 | 読・初（恒等式） | §01 | $SU(2)$・一ループ・可換の背景・横 $6^3$・波数 0 は外挿・倍率 3 は二点・一段目だけ |

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
[01] 典  一ループの流れ (1)
[02] 初  結合の列 (2)・和の対数 (3) ⟸ [01]          一ループの流れ
[03] 初  積 → 0 (4)・和は有限 (5) ⟸ [02]            cg² ≤ 1・δ > 0
[04] 典 3D      三次元では和が有限
[05] 典  重みの四性質
[06] 初  遠い側で曲率が負                           一リンク
[07] 初  軌道の向きの平坦性の命題
[08] 典  大域のゲージ固定は無い
[09] 読  張り替えの境目 ⟸ [03][07][08]
[10] 典  二次元 O(N) は未構成
[11] 読  壁の核 ⟸ [03][04][06][10]
[12] 読  一段の係数の実測 ⟸ [01][02]                一つの規則・一段目・一ル
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。この章の節点に、紫外の制御が示されたという節点はありません。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 初 一ループの流れの下で、一段の損 $g_k^2$ の和が $\ln K$ で発散し、損 $g_k^{2+\delta}$ の和は有限であること（(2)〜(5)）。だから損を流れに吸収した類が要ること。軌道の向きの平坦性の命題 | 実際の有効結合の列についての定理。吸収した類の構成 |
| 典 三次元の和の有限性・重みの四性質・大域のゲージ固定の不在・二次元 σ 模型の構成が未解決問題に挙げられていることと移植の段 | 揺らぎの期待値の閉じの群版。四次元の論文のゲージの選び方 |
| 読 張り替えの境目の評価の形、壁の核の読み | 境目の評価そのもの |
| 読 一段の係数の実測（周期の網の一段目の一ループ。向きと桁は一ループの値と合い、係数は 2.9〜4.4 倍） | 段を重ねたときの係数。平均型の規則での比べ |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 一ループの流れ (1)・三次元の結合の和 | 典 | 7-05 の出典表（J. Dimock, The renormalization group according to Balaban I・II・III, arXiv:1108.1335, 1212.5562, 1304.0705。T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 102 (1985) 255–275） |
| 重みの四性質・活動のノルムの一段の評価 | 典（付録 A.6.2 と活動のノルムの一段の評価の本文） | R. Bauerschmidt, D. C. Brydges, G. Slade, Introduction to a Renormalisation Group Method, Lecture Notes in Math. 2242 (2019), arXiv:1907.05474（24-06 の出典表） |
| 二次元 σ 模型の状況 | 典（総説の本文 §II.1・§II.1.1 と文献表、抄録） | V. Rivasseau, Constructive field theory and applications: perspectives and open problems, arXiv:math-ph/0006017（24-07 の出典表）。P. Goswami, arXiv:2204.08252, Ann. Henri Poincaré 25 (2024) 2065–2085。W. Dybalski, A. Stottmeister, Y. Tanimoto, arXiv:2403.09800。階層版：K. Gawędzki, A. Kupiainen, Comm. Math. Phys. 106 (1986) 533（総説の文献表による） |
| 大域のゲージ固定 | 典（書誌のみ） | I. M. Singer, Comm. Math. Phys. 60 (1978) 7–12（7-05 の出典表） |
| (2)〜(5)・軌道の向きの平坦性の命題 | 初 | この章の本文の証明。数は $1/(2b_0 \ln 2)$ と $\pi^2/6$ の算術だけ |
| 一段の係数の実測 | 読（作用の差の恒等式は初） | 本書の検討の数値の記録（実空間の解析の Hessian と横の Bloch の和の二経路が $10^{-10}$ で一致・木の固有値の再現・$U(1)$ の Manton で 0 の陰性対照）。係数の算術は Lean の束（15-09 表 3、再検査済み） |

**この章で使った語** — 無次元の結合・損の和・吸収・marginal・重みの四性質・揺らぎの期待値の閉じ・軌道の向きの平坦性の命題・張り替えの境目・難しさの三つの源。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：15-02 原典の地図 — Bałaban の連作がどこまで行き、どこで止まったか。

# 原典の地図 — Bałaban の計画・BBS の鎖・原典に無い二行

この章は既存の知見の整理です。§05・§06 は未解決の地図です。

この部は、本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた記録です。存在そのものは第二巻の第 6〜13 部を、二つの設計の違いは第 14 部を見てください。部の位置づけは 15-00 にあります。

**この章で分かること** — Bałaban のゲージ理論の連作を、受け持つ仕事で五段に分けた地図。四次元の最後の論文の条件つきの紫外安定性の定理（Bałaban 1989 の Theorem 1）が「有効結合が小さいまま留まる」を仮定し、それを外す基本の不等式（Bałaban 1989 の Theorem 2）が未公刊であること（原典の文で）。MRS と、易しい模型（三次元 QED）での書き直しがどこまで来ているか。平らな場の一段の評価（Bauerschmidt–Brydges–Slade の付録 A.6 の補題 A.6.1、活動のノルムの一段の評価）がどういう鎖で出るか。零モードを消した捩れた小さな $T^4$ の上で紫外の制御を言明する案と、その各行が原典のどこに当たるか。原典に無いのは二行——大きな場込みの一段の剰余と、観測量の源——であること。

**前提となる章** — 15-01 §02（重みの四性質）・7-07 §03（主定理）・7-07 表 1（連作の書誌）・25-01（捩れた小さな $T^2$）。

**先に言うこと** — 本文を照合したのは、三次元の論文の冒頭、最後の論文の要旨と序文、BBS の付録 A.6.2 と活動のノルムの一段の評価の本文です。連作の他の論文は抄録か題までで、札の欄に確かめた範囲を書きます。捩れた小さな四次元トーラスの紫外の言明は案で、示していません。

この章の順序

1. Bałaban の計画 — 連作の五段（表 1）
2. 止まった場所 — 条件つきの紫外安定性の定理の仮定と、未公刊の基本の不等式
3. MRS と、易しい模型での書き直し

4. BBS の付録 A.6 の鎖 — 場の和の劣乗性・揺らぎの期待値の閉じ・次の段への単調性（BBS の (ii)〜(iv)）から活動のノルムの一段の評価へ
5. 捩れたトーラスの紫外の言明と試験台 — 捩れた小さな $T^4$ と二次元 $O(4)$
6. 原典との対応 — 原典に無い二行（表 2）
7. 言えないこと
8. 五分類の表と依存グラフ（表 3）

---

00

## この章で分かること

- Bałaban の四次元の定理は「有効結合が $(0, \gamma]$ に留まる」を仮定し、それを外す定理は未発表です。到達点は、有限体積の格子で、有効密度と分配関数の格子間隔に一様な上下界まで、結合が小さく留まる条件を仮定して、です（§01・§02）。
- 易しい模型での書き直しは三次元の $\phi^4$ と三次元 QED まで来ていますが、三次元の Yang–Mills と二次元の σ 模型の後半の段は見当たりません（§03）。
- 平らな場の一段の評価は、期待値と半ノルムの入れ替え → ノルムの定義 → 場の和の劣乗性・揺らぎの期待値の閉じ・次の段への単調性の鎖で出て、揺らぎの期待値の閉じで取る期待値の測度は背景に依りません（§04）。
- 零モードを消した捩れた $T^4$ の上で紫外の制御を五行で言明でき、原典に無いのは、捩れた箱での結合の留まりの中身（大きな場込みの一段の剰余、すなわち結合の一段の正味の括弧）と観測量の源の条件の二行です（§05・§06）。

01

## Bałaban の計画 — 連作の五段

この節は既存の知見（Bałaban の連作）の整理です。導入は 7-07 §02 にあります。

Bałaban のゲージ理論の連作（Commun. Math. Phys.、1983〜1989）を、受け持つ仕事で五段に分けると表 1 になります。書誌は 7-07 表 1 と同じです。本文を照合したのは三次元の論文の冒頭と、最後の論文の要旨と序文だけで、段 4・段 5 と 119 の行は抄録で確かめました。段 1〜3 の「受け持つ仕事」は題から読んだもので、中身の照合ではありません。「三つの条件」は 15-00 §01 の紫外の制御です。

表 1　Bałaban の連作の五段（札は確かめた範囲。中身の一行は、段 1〜3 は題から、段 4・段 5 と 119 は抄録から）

| 段 | 論文（CMP の巻・年・頁） | 受け持つ仕事 | 三つの条件との対応 | 札と確かめた範囲 |
|---|---|---|---|---|
| 1 土台 | 89 (1983) 571・95 (1984) 17・96 (1984) 223 | 格子の Green 関数の正則性と減衰。ブロック平均の変換と、その下の伝播関数 | 全ての段の部品 | 典　書誌と題のみ |
| 2 群値の場の平均とゲージ | 98 (1985) 17・99 (1985) 75 | ゲージ共変な平均の操作。正則な（小さな場の）配位の空間と、その上で局所に効くゲージ固定 | 15-01 §02・§03 の大域のゲージ固定の欠如の処理 | 典　書誌と題のみ |
| 3 背景場 | 99 (1985) 389・102 (1985) 277 | 背景場の中の伝播関数。平均を止めた変分問題と背景場 | 小さい場の解析性の条件の入口 | 典　書誌と題のみ |
| 4 小さな場の展開と結合 | 109 (1987) 249・116 (1988) 1 | 小さな場の近似で、一段ごとのクラスター展開による局在した有効作用の列。β 関数を作り、結合の繰り込みを再帰的な繰り込み群の方程式で定義（109）。指数化したクラスター展開が帰納の仮定を満たし、小さな場の近似での構成が完結（116） | 小さい場の解析性の条件・結合の留まりの摂動の部分 | 典　抄録 |
| （大きな場込みの帰納） | 119 (1988) 243 | 大きな場の領域を含む有効密度の完全な帰納の記述と、繰り込みの変換がその形を保つこと。超繰り込み可能な模型（三次元）の解析をここで完結し、収束する展開を与える | 三次元の小さい場の解析性の条件・大きい場の稀さの条件の完結。四次元では段 5 の土台 | 典　抄録 |
| 5 大きな場 | 122 (1989) 175・122 (1989) 355 | R 操作の基本の段。局所化・指数化・評価。条件つきの紫外安定性の定理 | 大きい場の稀さの条件。結合の留まりは仮定 | 典　175 は抄録（四次元のゲージ理論の紫外安定性の主な障害を取り除く操作、と書かれる）。355 は要旨と序文 p.355–356 |
| （三次元） | 102 (1985) 255 | 三次元の紫外安定性（7-05 の式 (10)）。著者は 'the proof is very sketchy' と書く | 三次元の小さい場の解析性の条件・大きい場の稀さの条件。結合の留まりは要らない（15-01 §01）。大きな場込みの完全な帰納は 119 で完結 | 典　本文 p.255–257（119 との関係は 119 の抄録から） |

02

## 止まった場所 — 条件つきの紫外安定性の定理の仮定と、未公刊の基本の不等式

最後の論文の序文の定理は次のとおりです 典 （7-07 §03）。

'Theorem 1. If the sequence of the effective coupling constants is contained in an interval ]0, γ] with a sufficiently small positive γ, then the effective densities ρk have the form, and satisfy all the conditions and bounds, described in Sect. 2.'

仮定は結合が小さく留まる条件そのもので、結論は有効密度の形（15-00 の (2)）と小さい場の解析性の条件・大きい場の稀さの条件の評価です。著者は、仮定は先行論文の Theorem 2 から出る基本の不等式に従うので外せるが、'The proof of Theorem 2, which is based on second order perturbative calculations, is very awkward and long ... and has not been published yet' と続けます 典 。著者の 1989 年以後の論文の書誌を探した範囲で、基本の不等式（未公刊）の証明を載せたものは見当たりません（7-07 の出典表）。だから四次元の到達点は、**有限体積の格子で、有効密度と分配関数の格子間隔に一様な上下界まで、結合の留まりを仮定して**です 典 （7-07 表 4 の一様な評価の水準）。相関関数の評価・極限の一意性・OS 公理・無限体積・ギャップは、どの資料も到達点に含めていません。総説（Rivasseau 2000 §II.1）は Bałaban の結果を、有限体積で任意に多くの段の後の有効作用の紫外安定性と要約し、結合の留まりの仮定に触れません 典 （総説の本文）。これは要約の水準の差で、この節の到達点の文は総説ではなく最後の論文の序文に拠ります。

止まった場所を一行で言うと、**結合の留まりを外す一段の剰余の評価**です。結合の留まりが、その評価（結合の一段の正味の括弧）と、定義域の中の連続性（実効の結合の定義と連続性）という初等的な部分に割れることは 15-03 の結合の小ささの帰納の補題 で見ます。

03

## MRS と、易しい模型での書き直し

Magnen–Rivasseau–Sénéor（1993）は連続の運動量の切断で、四次元 $SU(2)$・自明な位相の区画・固定した赤外の切断・正則化した軸ゲージの Schwinger 関数の紫外極限を述べましたが、'we do not provide a detailed proof' と書き、詳細は 'several hundred pages' になるだろうと述べます 典 （7-07 §06）。

方法を易しい模型で書き直す仕事は、三次元の $\phi^4$（Dimock I〜III、展開の収束と安定性の評価まで）と三次元の QED（Dimock の三本 arXiv:1512.04373・1712.10029・2009.01156：有界な場の近似で裸の量を調整して流れの終点を決める段、多尺度の伝播関数と最小点の局所正則性、弱結合で流れを完全に制御した固定した有限体積での紫外安定性の上下界）まで来てい

ます 典 （QED の三本は抄録。7-05 の出典表・24-07 §05）。三次元の Yang–Mills について同じ形の連作は、著者名での検索の範囲では見当たりません。二次元の σ 模型への移植は表 1 の段 3 に当たる所まで（15-01 §04）で、段 4・5 に当たる仕事は、より易しい模型でもまだ書かれていません（探した範囲で） 典 （抄録）。球面に値をとる場では、Bałaban の古典 $N$ ベクトル模型の低温展開の連作が、大きな場の領域を含む完全な帰納の記述を与えています（Comm. Math. Phys. 196 (1998) 485 の抄録） 典 （抄録）。これは赤外（低温）の問題で、二次元の紫外ではありません 読 。

04

## BBS の付録 A.6 の鎖 — 重みの三つの性質から一段の評価へ

平らな場（スカラー場）の繰り込みでは、一段の期待値の評価が、重み（regulator）$\tilde{G}$ の性質だけから短い鎖で出ます。15-01 §02 の四性質のうち、補題が使うのは場の和の劣乗性・揺らぎの期待値の閉じ（揺らぎの期待値で一段閉じる）・次の段への単調性（次の段の重みで押さえる）の三つです。原典の文は次のとおりです 典 （Bauerschmidt–Brydges–Slade、arXiv:1907.05474v2、付録 A §A.6.2、p.214–215 の本文）。

'Lemma A.6.1. Suppose that $\tilde{G}$ obeys (ii), (iii) and (iv) above. Then $\|\mathbb{E}_+\theta K(X)\|_{\tilde{G}_+} \le 2^{|B(X)|}\|K(X)\|_{\tilde{G}}$.'

証明は三つの段の鎖です 典 （本文）。$\theta$ は場を $\phi \mapsto \phi + \zeta$ とずらす写像、$\mathbb{E}_+$ は揺らぎ $\zeta$ の期待値、$T_\phi(h)$ は点 $\phi$ での尺度 $h$ の Taylor の半ノルムです。

$$\|\mathbb{E}_+\theta F\|_{T_\phi(h_+)} \;\le\; \mathbb{E}_+\|F\|_{T_{\phi+\zeta}(h)} \tag{1}$$

$$\|K(X)\|_{T_\phi(h)} \;\le\; \|K(X)\|_{\tilde{G}}\,\tilde{G}(X,\phi) \tag{2}$$

$$\mathbb{E}_+\tilde{G}(X,\phi+\zeta) \overset{\text{(ii)}}{\le} \tilde{G}^2(X,\phi)\,\mathbb{E}_+\tilde{G}^2(X,\zeta) \overset{\text{(iii)}}{\le} 2^{|B(X)|}\,\tilde{G}^2(X,\phi) \overset{\text{(iv)}}{\le} 2^{|B(X)|}\,\tilde{G}_+(X,\phi) \tag{3}$$

(1) は期待値と半ノルムの入れ替え（原典の (A.6.5)。原典は文献 [54] の Prop. 3.19 から引く）、(2) はノルムの定義（原典の (A.6.7)）、(3) は性質の適用（原典の (A.6.8)。(3) の冪の約束は記号を略して書いたもので、原典では $t$ 乗の形）です。(1) に (2) を入れ、(3) で期待値を払うと補題が出ます。

この鎖を読んで分かることが一つあります 読 （証明の鎖を読んだもの）。揺らぎの期待値の閉じの期待値は揺らぎ $\zeta$ だけの関数の期待値で、**その測度は背景 $\phi$ に依りません**。(1) の入れ替えも、揺らぎの法則が背景に依らないから因子 1 で立ちます。群に値をとる場では、ここに背景依存の因子 $1+\eta_k$ が入ります。群の上でこの鎖の各段がどうなるか——場の和の劣乗性は背景と揺らぎの分解の補題で立ち、揺らぎの法則が背景に依らなければ全段が通って $\eta = 0$ に

なること（背景に依らない揺らぎの一段の補題）――は 15-07 §02 と 15-07 §05 にあります。

05

## 捩れたトーラスの紫外の言明と試験台 — 捩れた小さな $T^4$ と二次元 $O(4)$

周期的な $T^4$ では、最後の段の古典的な最小（平坦な接続）が連続の族をなし、最後の数段の積分が退化します。この付随の困難を、't Hooft の捩れで取り除いた言明を案として置きます。空間の方向の道（25-01）の小さな捩れた $T^2$ を、四次元のトーラス全体に移した形です。

**設定。** $G = SU(2)$、一辺 $L_0$ の四次元トーラス、ブロックの倍率 2、最後の格子の一辺の点の数 $M$（固定）、段の数 $n$、格子間隔 $a_n = L_0/(M \cdot 2^n)$。Wilson の作用に捩れ $n_{12} = 1$ を入れます（$(1,2)$ 平面のプラケットの一つの積み重ねに中心の元 $z = -1$ を掛ける）：

$$S_{\mathrm{tw}}(U) = \beta \sum_{p} \Big( 1 - \tfrac{1}{2} \operatorname{tr}\big( z_p U_{\partial p} \big) \Big), \qquad \beta = \frac{4}{g_0^2} \tag{4}$$

ブロック化の変換 $T$ をゲージ共変で中心のずらしと可換な平均で定め、$\rho_0 = e^{-S_{\mathrm{tw}}}$、$\rho_{k+1} = T\rho_k$ とします。

**捩れたトーラスの紫外の言明（案・未証明）。** ある $\gamma > 0$ と、$M$ だけに依る定数 $C, \kappa, c, r > 0$ があって、全ての $\gamma_0 \in (0, \gamma)$ と全ての $n$ について、裸の結合 $g_0 = g_0(n, \gamma_0)$ を選ぶと次が成り立つ 仮 。

- **結合の留まり（捩れた箱）**：有効結合の列 $g_0 < g_1 < \cdots < g_n = \gamma_0$ が全て定義される。
- **小さい場の解析性（捩れた箱）**：$\rho_n$ は 15-00 の (2) の形を持ち、各 $E_n(X, \cdot)$ は背景場の変数で半径 $r$ の複素近傍で解析的、$|E_n(X)| \le C\gamma_0\, e^{-\kappa d(X)}$。
- **大きい場の稀さ（捩れた箱）**：$|R_n(\Omega^c)| \le \exp\big(-c\, p(\gamma_0)^2 |\Omega^c|\big)$（$p$ は 15-00 の大きい場の稀さの条件と同じ閾の倍率）。
- **分配関数の Gauss 比較の条件**：$e^{-CM^4} \le Z_n / Z_n^{\mathrm{G}} \le e^{CM^4}$（$Z_n^{\mathrm{G}}$ は孤立した平坦な接続のまわりの Gauss 積分の和）。
- **観測量の源の条件**：上の三つが、最後の格子の尺度 $L_0/M$ より大きい台を持つ滑らかにした観測量の源（強さ $\le s_0$）を入れても、同じ定数で成り立つ。

全ての定数は $n$ にも $a_n$ にも依りません。捩れた箱での結合の留まりは、結合の小ささの帰納の補題の結論の形です。

**捩れが効く所**。最後の格子の上の平坦な接続は、方向 1・2 のホロノミーが反可換、方向 3・4 のホロノミーが中心の元になるものだけで、ゲージ同値を除いて有限個です。そのまわりの随伴の揺らぎは方向 1 か 2 のどちらかで反周期的になり、零モードがありません 仮 （25-01 の $T^2$ の捩れの部分の事実を四次元に延ばした読み。四次元の分類は原典で照合していない）。一方、細かい段では捩れは効きません。捩れの面は中心のゲージ変換で動かせ、局所には見えないからです 読 （物理の見立て）。背景と揺らぎの分解の補題（15-07 §02）は捩れたプラケット $z_p U_{\partial p}$ でもそのまま成り立ちます。$z_p$ は中心の元なので、証明の中の $W_{\partial p}$ を $z_p W_{\partial p}$ に替えるだけです 初 。

**言明が言うこと・言わないこと**。示されれば、言うのは格子間隔に一様な有効作用の評価と最後の段の非退化で、Bałaban の条件つきの紫外安定性の定理 ＋ 未公刊の基本の不等式（捩れた箱での結合の留まり）＋ 観測量への拡張（観測量の源の条件）＋ 捩れによる最後の段の非退化の和に当たります。滑らかにした観測量の部分列の極限は、そこからコンパクト性で従います。言わないのは、極限の一意性・OS 公理・回転の回復・非自明性・体積に一様なギャップです。**細かい段の紫外の制御の難しさは周期的な $T^4$ とまったく同じ**で、捩れが除くのは最後の数段の退化という付随の困難だけです 読 （物理の見立て）。捩れたトーラスの紫外の言明の役目は難しさを減らすことではなく、紫外の制御を零モードの無い純粋な形で言明することです。

**ゲージを抜いた試験台**。二次元の $O(4)$ σ 模型（$SU(2)$ の主カイラル模型）は、場が $SU(2)$ に値をとり、結合が無次元で漸近自由で、大きな場があり、ゲージがありません。捩れた円柱 $\mathbb{R} \times S^1_L$（捩れで零モードが無い）の上で紫外の制御を書けば、四次元の紫外の制御から、大域のゲージ固定の欠如という難しさの源のうちゲージの半分を抜いた問題になります 読 （物理の見立て）。15-01 §04 のとおり、この模型でも紫外の極限は未構成で、移植は変分問題と背景場の段まで来ています 典 。表 1 の段 4（小さな場の展開の一段）をこの模型で書くことが、四次元の連作の後半を読み直すより安く、紫外の制御の「群値の場 × 無次元の結合」の部分を切り出す試験になります。二次元の結果は四次元に何も含意しません。

06

## 原典との対応 — 原典に無い二行

表 2 は、捩れたトーラスの紫外の言明の各行が Bałaban の連作のどこに当たり、捩れで変わるか、原典に無いかを並べたものです。最後の列は、方法を易しい模型で書き直した三次元の QED（§03 の Dimock の三本）での対応です。

表 2　捩れたトーラスの紫外の言明の各行と原典の対応（札は欄ごと。連作の札は抄録か、7-07 §03 を通した序文の水準）

| 行 | 連作で当たる所 | 捩れ（$n_{12}=1$）で | 原典に無いか | 三次元 QED での対応 |
|---|---|---|---|---|

| 行 | 連作で当たる所 | 捩れ（$n_{12}=1$）で | 原典に無いか | 三次元 QED での対応 |
|---|---|---|---|---|
| 結合の留まり（捩れた箱） | 109：β 関数を作り、結合の繰り込みを再帰的な繰り込み群の方程式で定義（小さな場の近似の中）典 （抄録）。122, 355：大きな場込みでは仮定（条件つきの紫外安定性の定理）、外す基本の不等式は未公刊 典 （7-07 §03） | 変わらない 読 （細かい段の局所の量。捩れの面は中心のゲージ変換で動く） | **無い**：大きな場込みの一段の剰余（結合の一段の正味の括弧）。残りは結合の小ささの帰納の補題で初等的 | 1512.04373：裸の量を格子間隔に依らせて、単位の尺度で予め決めた値にする型を有界な場の近似で示す 典 （抄録）。調整するのは relevant な量（真空のエネルギー密度・フェルミオンの質量）で、marginal な結合ではない |
| 小さい場の解析性（捩れた箱） | 109（一段ごとのクラスター展開で局在した有効作用）と 116（小さな場の近似での構成の完結）典 （抄録）。解析性の半径が段に一様という文面は抄録に無い | 細かい段は変わらない。最後の数段は、展開の中心が孤立した捩れた平坦な接続になる 読 | 形は在る（四次元は結合の留まりの仮定の下）。最後の段の捩れたまわりの展開は原典に無い 読 | 1712.10029：多尺度の伝播関数と、最小点の局所正則性 典 （抄録） |
| 大きい場の稀さ（捩れた箱） | 119（大きな場の領域を含む完全な帰納の記述）、122, 175（R 操作の基本の段）、122, 355（局所化・指数化・評価）典 （抄録） | 変わらない 読 | 形は在る（四次元は結合の留まりの仮定の下） | 2009.01156：大きな場を含めて閉じる 読 （抄録の「弱結合で流れを完全に制御」から） |
| 分配関数の Gauss 比較の条件 | 条件つきの紫外安定性の定理から出る分配関数の上下界。定数は段・格子・場に依らない 典 （7-07 §03） | **変わる**：最後の段の積分が孤立した平坦な接続のまわりで非退化になる 仮 （25-01 の $T^2$ の事実を四次元に延ばした読み） | 上下界の形は在る。分母を孤立した平坦な接続のまわりの Gauss 積分の和にする正規化は原典に無いが、有限次元の積分の問題 読 | 2009.01156：繰り込んだ分配関数の、格子間隔に一様な上下界 典 （抄録） |
| 観測量の源の条件 | 122, 355 の序文は、ループの変数の期待値の解析を今後の課題とする 典 （7-07 §03）。MRS は軸ゲージの Schwinger 関数（赤外の切断つき・詳細な証明なし）典 | 細かい段は変わらない。最後の段は分配関数の Gauss 比較の条件と同じく非退化になる 読 | **無い** | 相関関数は次の段の課題とされる 典 （概観 arXiv:2204.07201 の抄録） |

表 2 から読むこと 読 。原典に無いのは、捩れた箱での結合の留まりの中身（大きな場込みの一段の剰余、すなわち結合の一段の正味の括弧）と観測量の源の条件の二行で、要る新しい数学の場所はこの二つです。分配関数の Gauss 比較の条件の正規化と最後の段の非退化は捩れに固有ですが、有限次元の積分の問題で、難しさの質が違います。三次元 QED の 1512.04373 は、裸の relevant な量を調整して流れの終点を決める型の文を有界な場の近似で持ち、これは結合の小ささの帰納の補題の結論の形です。紫外の三条件（捩れた箱の版）の指数を $p(\gamma_0)^2$

で書くのは、原典の閾 $\varepsilon = g\,p(g)$（7-05 の式 (7)）から出る大きな場の因子の形に合わせたもので、$\gamma_0$ の負の冪で書くと原典の閾より強い文になります。二行が何を示せば閉じるかの一行の言明と、その案は 15-08 にあります。

## 07 言えないこと

(a) 表 1 の連作の中身は、三次元の論文の冒頭と最後の論文の要旨と序文のほかは、段 4・段 5・119 は抄録、段 1〜3 は題による読みです。

(b) 基本の不等式（未公刊）の内容は分かりません。未発表という判断は、序文の文と、探した範囲の書誌によります。

(c) §04 の鎖は平らな場の原典の文で、群の上では何も言いません。「揺らぎの期待値の閉じで取る期待値の測度は背景に依らない」は証明の鎖の読みです。

(d) 捩れたトーラスの紫外の言明は案で、示していません。示されても、一意性・OS 公理・非自明性・無限体積・体積に一様なギャップには何も言いません。四次元の捩れた平坦な接続の分類は原典で照合していません。

(e) 表 2 の対応は抄録と（7-07 を通した）序文の水準で、連作の本文の節・定理番号には届いていません。

## 08 五分類の表と依存グラフ

表 3　この章の行（この章の行に Lean の欄はありません）

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 |
|---|---|---|---|---|
| [01] | 連作 109・116・119・122（175）の抄録と、三次元 QED の三本の抄録 | 典 | §01・§03・表 1（抄録） | 本文の節・定理番号は未照合 |
| [02] | 条件つきの紫外安定性の定理は結合の留まりの仮定つき、基本の不等式は未公刊 | 典 | §02（要旨と序文） | 有限体積の格子 |
| [03] | MRS は赤外の切断つきで、詳細な証明を与えない | 典 | §03（序） | $SU(2)$・自明な区画・軸ゲージ |
| [04] | 活動のノルムの一段の評価と鎖 (1)〜(3) | 典 | §04（付録 A.6.2 の本文 p.214–215） | 平らな場。期待値と半ノルムの入れ替えの不等式は原典が文献 [54] から引く |
| [05] | 鎖の中で揺らぎの期待値の閉じで取る期待値の測度は背景に依らない | 読 | §04（証明の鎖を読んだもの） | 平らな場 |

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 |
|---|---|---|---|---|
| [06] | 捩れた小さな四次元トーラスの紫外の言明 | 仮 | §05（案・未証明） | $SU(2)$・$n_{12}=1$・有限体積・紫外の三条件（捩れた箱の版）は原典の閾の形 |
| [07] | 背景と揺らぎの分解の補題は捩れたプラケット $z_p U_{\partial p}$ でも成り立つ | 初 | §05（15-07 §02 の証明で $W_{\partial p}$ を $z_p W_{\partial p}$ に） | $z_p$ は中心の元 |
| [08] | 捩れが除くのは最後の数段の退化だけ | 読 | §05（物理の見立て） | — |
| [09] | 二次元 $O(4)$ の捩れた円柱は紫外の制御からゲージを抜いた試験台 | 読 | §05（物理の見立て） | 二次元の結果は四次元に含意しない |
| [10] | 捩れたトーラスの紫外の言明の各行と原典の対応。原典に無いのは結合の一段の正味の括弧と観測量の源の条件、分配関数の Gauss 比較の条件は有限次元の問題 | 読 | §06 表 2 | 抄録と序文の水準 |

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
[01] 典  連作と三次元 QED の抄録
[02] 典  条件つきの紫外安定性の定理・基本の不等式は未公刊
[03] 典  MRS の到達点
[04] 典  活動のノルムの一段の評価と鎖                                  平らな場
[05] 読  揺らぎの期待値の閉じの測度は背景に依らない ⟸ [04]
[06] 仮  捩れたトーラスの紫外の言明 ⟸ [02]                              案
[07] 初  背景と揺らぎの分解の補題は捩れても同じ                        z_p は中心
[08] 読  捩れは最後の段だけ ⟸ [06]
[09] 読  二次元 O(4) の試験台 ⟸ [06]
[10] 読  捩れたトーラスの紫外の言明と原典の対応 ⟸ [01][02][03][06][07]      抄録
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。捩れたトーラスの紫外の言明の行は仮定の行で、紫外の制御を言い直した問いの形です。この章の節点に、紫外の制御が示されたという節点はありません。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 典 Bałaban の条件つきの紫外安定性の定理の仮定と、未公刊の基本の不等式、連作の段 4・段 5・119 と三次元 QED の三本の抄録、MRS の留保、BBS の活動のノルムの一段の評価とその鎖 | 連作の本文の節・定理番号（段 4・段 5・119 は抄録まで、段 1〜3 は題のみ）。基本の不等式（未公刊）の内容 |

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 初 背景と揺らぎの分解の補題が捩れたプラケットでも変わらないこと | 捩れたまわりの最後の段の非退化 |
| 読 捩れたトーラスの紫外の言明の各行と原典の対応（表 2）、鎖の中の測度が背景に依らないこと | 連作の本文での照合 |
| 仮 捩れたトーラスの紫外の言明 | その証明。紫外の制御が閉じる見込み |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 条件つきの紫外安定性の定理・基本の不等式（未公刊） | 典（要旨と序文 p.355–356） | T. Bałaban, Large field renormalization. II, Comm. Math. Phys. 122 (1989) 355–392（7-07 の出典表） |
| 連作の段 1〜3（表 1） | 典（書誌と題のみ） | Comm. Math. Phys. 89 (1983)；95, 96 (1984)；98, 99（二篇）, 102 (277–309) (1985) |
| 連作の段 4・段 5 と 119（表 1・表 2） | 典（抄録） | T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 109 (1987) 249–301；116 (1988) 1–22；119 (1988) 243–285；122 (1989) 175–202 |
| 三次元の紫外安定性 | 典（本文 p.255–257） | T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 102 (1985) 255–275（7-05 の出典表） |
| 三次元 QED（§03・表 2） | 典（抄録） | J. Dimock, Ultraviolet regularity for QED in d=3, arXiv:1512.04373；Multiscale block averaging for QED in d=3, arXiv:1712.10029；Ultraviolet stability for QED in d=3, arXiv:2009.01156；概観 arXiv:2204.07201 |
| $N$ ベクトル模型の低温展開（§03） | 典（抄録） | T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 196 (1998) 485 |
| MRS の到達点と留保 | 典（p.325–328） | J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, Construction of YM4 with an infrared cutoff, Comm. Math. Phys. 155 (1993) 325–383 |
| 活動のノルムの一段の評価と鎖（§04） | 典（付録 A.6.2 と活動のノルムの一段の評価の本文 p.214–215） | R. Bauerschmidt, D. C. Brydges, G. Slade, Introduction to a Renormalisation Group Method, Lecture Notes in Math. 2242 (2019), arXiv:1907.05474v2（24-06 の出典表） |
| 表 2・捩れたトーラスの紫外の言明 | 本書の検討 | 本書の検討の記録（紫外の制御の検討の整理） |

**この章で使った語** ― Bałaban の連作の五段・条件つきの紫外安定性の定理・基本の不等式（未公刊）・MRS・活動のノルムの一段の評価・期待値と半ノルムの入れ替え・捩れたトーラスの紫外の言明・'t Hooft の捩れ・試験台・原典に無い二行。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：15-03 分解の言明 ― 紫外の制御を有限個の母数で閉じる類と三つの剰余に割る。

2026-10-15 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 15 部 紫外の制御の試みの記録 分解・結合の流れの自己完結・横の縮みの帳簿 · Kiichi, Shiori and Rin

# 分解の言明 — 有限個の母数で閉じる類と三つの剰余

この章は未解決の問いの地図です。§03・§04 は本書の検討です。

この部は、本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた記録です。存在そのものは第二巻の第 6〜13 部を、二つの設計の違いは第 14 部を見てください。部の位置づけは 15-00 にあります。

**この章で分かること** — 紫外の制御を、「有限個の母数で閉じる類」と三つの剰余——結合の流れの剰余の条件、形の剰余の条件、定義域の中の連続性（結合の連続性）——に割る形で言明できること（言明だけ）。そのうち、結合が小さく留まる条件が、一段の剰余の評価（結合の一段の正味の括弧）と、実効の結合の定義と連続性から初等的に出ること（結合の小ささの帰納の補題、証明つき）。一段の写像が類のまわりで横に縮むなら、類からの外れは段の和でなく上限で押さえられ、段数に一様であること（横の縮みの帳簿）。類は熱核や Wilson の作用の定数倍の族ではなく、一段の写像が引き込む先の一母数の類に取るのがよいこと。帯の分解と比べると、割る形は同じで、違いは一段の損を払う相手の有無にあること。この分解から出る三つの紫外の問い（一母数の類での横の縮み・大きい場込みの剰余の最小模型・捩れた格子の随伴の最小固有値）。改訂では、類が閉じる条件の類の座標の最終形の案と、背景を類の母数に持たせたときの形の剰余の条件の閉じ方（条件つき）を足しました。三度目の改訂で、四次元の類の座標の最終形（一つの母数と流れが値を決める比の座標）、形の剰余の条件の多段に要るブロック化の条件、結合の流れの一ループの実測、結合の一段の正味の括弧のブロック間の項の再帰の一列版を足しました。

**前提となる章** — 15-00 §01（紫外の制御と一段で閉じる形）・15-01 §01（損の和が対数で発散すること）・15-02 §01（Bałaban の条件つきの紫外安定性の定理（Bałaban 1989 の Theorem 1）の仮定）・26-06 §01（帯の分解）。

**先に言うこと** — この章は紫外の制御を示していません。示すのは、何を示せばよいかの言明・二つの初等的な部品（結合の小ささの帰納の補題と横の縮みの帳簿）・規則の候補・問いです。分解の含意のうち初等的に確かめたのは結合の小ささの帰納の補題と積と等比級数の算術だけで、類が閉じる条件・結合の流れの剰余の条件・形の剰余の条件のどれも四次元で示し

ていません。この章の「一段」は、断らない限り本当のブロック化の一段（多リンク・ゲージの張り替え・大きな場を含む）の意味で、最小の系の数（15-04〜15-06）はその代わりではありません。

この章の順序

1. 類と一段の写像 — 母数の流れ $\Phi$ と剰余 $r_\theta$
2. 分解の言明 — 類が閉じる条件・結合の流れの剰余の条件・形の剰余の条件・結合の連続性
3. 結合の小ささの帰納の補題 — 結合の留まりを結合の一段の正味の括弧と結合の連続性に割る（証明つき）
4. 横の縮みの帳簿 — 外れは和でなく上限で
5. 規則の束（表 1）
6. 帯の分解との対比（表 2）
7. 三つの紫外の問い（表 3）
8. 言えないこと
9. 五分類の表と依存グラフ（表 4）

---

00

## この章で分かること

- 紫外の壁は「有限個の母数で閉じる類」（類が閉じる条件）と「流れの剰余・形の剰余・連続性」に割る形で言明できます（§02、言明だけ）。
- 結合が小さく留まる条件「有効結合が $(0,\gamma]$ に留まる」は、一段の剰余の評価（結合の一段の正味の括弧）と定義域の中の連続性（結合の連続性）から、単調性と中間値の議論だけで出ます（結合の小ささの帰納の補題、§03）。本当の中身は結合の一段の正味の括弧です。
- 一段の写像が類のまわりで横に $\lambda < 1$ で縮めば、類からの外れは $\sup_j \varepsilon(\beta_j)/(1-\lambda)$ で押さえられ、段数に一様です（§04）。
- 類は「引き込む先の一母数の類」に取り、$O(1/B)$ の形のずれは形の剰余の条件で運びます。二次の結合の比を 2 に保つ類としては言明しません（§02、根拠は 15-06）。
- 類が閉じる条件の類の座標は、結合の行列・形・背景・一リンクの結合・角の三重積・多面の四次として書き下せる、という案です。背景を類の母数に持たせると形の剰余の条件の

$\sum_k \eta_k$ は条件つきで有限になり、難しさは類が閉じる条件に集まります（§02）。

- 四次元の類は「一つの母数 $B$＋流れが値を決める比の座標（二次 2・三次 3・四次 65）」の形で、斜めの隣の座標は規則に依らず 0 になりませんが値は規則に依ります。類が閉じる条件の「局所」は規則を添えて書きます。形の剰余の条件の多段にはブロック化の条件が要り、結合の流れは一ループで向きと桁が合います（§02、どれも木の水準か一ループの測った範囲）。
- 帯の分解と割る形は同じで、紫外には一段の損を払う相手が無い、という違いがあります（§06）。

01

## 類と一段の写像

紫外の制御の目標は、15-00 §01 の式 (3)——段 $k$ の有効密度が類 $\mathcal{K}(g_k; r, \kappa, c)$ に入るなら段 $k+1$ の有効密度も同じ定数の類 $\mathcal{K}(g_{k+1}; r, \kappa, c)$ に入る——を全ての段で示すことでした。15-01 §01 で見たとおり、四次元では一段に $g_k^2$ の大きさで動く部分を誤差として運べず、類の母数の動きにしなければなりません。この節では、その「母数の動き」と「残り」を分けて書く枠を置きます。

有限個の母数 $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^m) \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$ で番号づけた重みの族 $\mathcal{C} = \{w_\theta : \theta \in \Theta\}$ をとり、ブロック化の一段 $T$ が

$$T\big(w_\theta\,(1+\rho)\big) = w_{\Phi(\theta)}\,\big(1 + r_\theta[\rho]\big) \tag{1}$$

の形をとるとします。$\Phi : \Theta \to \Theta$ は**母数の流れ**、$r_\theta[\rho]$ は**剰余**（局在した無関係な項と大きな場の因子をまとめたもの）で、剰余の大きさは 15-07 の重み $G_k$ のノルムで測ります。(1) は定義の形で、どんな $T$ でも $\Phi$ と $r$ の選び方を決めれば書けます。中身は「$\Phi$ と $r$ が段に一様な評価を持つように選べるか」にあります。

**母数の数え方の目安。**四次元の純ゲージでは、ゲージ不変性と格子の対称性の下で冪の数え方で残る局所の項は、真空のエネルギー（定数）と $F^2$ の係数の二つで、$m = 2$、$\theta = (E, \beta)$、$\beta = 4/g^2$ と読みます 読 （冪の数え方。三次元で「相殺項は定数一つ」とする 15-01 §01 の文の四次元版）。ただし最小の系では、一段の後の作用は一本の二次形式の定数倍に収まらず、ループの形ごとの結合の比などの「形の座標」が動きます（15-06）。この座標は冪の数え方では格子間隔の二乗で効く無関係な向きに当たり、一段の写像で縮むなら母数は実質 $\beta$ ひとつで、形のずれは横の縮み $\lambda$ が払う、という読みになります 読 。§02 の類が閉じる条件はこの読みを言明の形にしたものです。

02

## 分解の言明 — 類が閉じる条件・結合の流れの剰余の条件・形の剰余の条件・結合の連続性

次の四つから、紫外の制御が段数に一様に従う、という形の言明を置きます 仮 （言明の形だけ。四つのどれも四次元で示していない）。

- **類が閉じる条件**。母数の個数 $m$ が段に依らず有限で、$T$ の主要部が族の中に戻る（主要部の変化は全て $\Phi$ に入る）。類は熱核や Wilson の作用の定数倍の族でなく、**一段の写像が引き込む先の一母数の類**——結合 $B$（$\beta$ の向き）ひとつと、群の曲がりで決まる $O(1/B)$ の固定された形——に取る。形の座標（作用の $\psi^4$ 以上の係数・ループの形ごとの結合の比など）は一段ごとに縮む向きで、類からの形のずれは形の剰余の条件で運ぶ。
- **結合の流れの剰余の条件**。$\Phi$ の $\beta$ 成分が $\beta_{k+1} = \beta_k - 8b_0 \ln L + O(1/\beta_k)$。§03 の結合の一段の正味の括弧を $\beta$ の変数で書いたもの。一つの規則で一段を一ループで測った値は下の「結合の流れの実測」にあり、向きと桁は合い、$\ln L$ の係数は小さい倍率で合いません 読 。
- **形の剰余の条件**。$\|r_{\theta_k}[\rho_k]\|_{G_{k+1}} \le (1+\eta_k)\, 2^{|B|}\, \|\rho_k\|_{G_k}$ の型で $\sum_k \eta_k < \infty$、かつ $\rho_k$ 自身が横の縮みで上限に押さえられる（§04）か、和の有限な大きさに留まる。$\sum_k \eta_k < \infty$ が見込めるのは背景依存の**形の部分**（係数が形の座標の値に比例し、幾何級数に入る部分）だけで、$SU(2)$ の**群の幾何の部分**（BCH の三次）は $g_k^2 p$ の型で和が発散するので、背景の場の強さを類の母数に持たせて母数の側へ移す 読 （15-07 §07）。背景のホロノミーの対数 $a$ を類の母数に持たせると、最小の系で残りは $\theta^0 \beta^{-3/2}$ に下がり、$\sum_k \eta_k$ は段数に一様に有界になる（条件つき、15-07 §06）。ただし難しさは消えたのでなく類が閉じる条件——$a$ を持つ類が面・多ループの一段で閉じるか——へ移る 読 。形の剰余の木の水準の $\ell^4$ の錐の縮みは、一段目では $0.823$ 倍以下（粗い辺を細かい二本の和とするブロック化・長波長の結合で割る規格）ですが、**段数に一様ではなく、ブロック化の条件が要ります** 読 ：共分散の流れの固定点の条件：ブロックした場の共分散の流れにスケール不変な固定点があること（辺の和のブロック化では粗い作用が段ごとに半分に柔らかくなり固定点が無く、三段目で因子が $1.26$ 以上。ゲージに共変な横の平均では固定点に向かう向き）。固定点での錐の縮みの条件：その固定点で $\sup \mu_\infty < 1$（横の平均で下界 $0.57$〜$0.64$ が段で増えない。上界は無い）。条件：可換に制限・木の水準・周期・$2^4$ ブロック・線形化・数は記号の流れ（$k \le 5$）とトーラスの周期の配位の局所の最適化で区間の評価なし（15-05 §07）。
- **結合の連続性**（定義域の中の連続性。§03）。

**類が閉じる条件の類の座標（最終形の案）**。最小の系の結果を並べると、類が閉じる条件の類は次の座標を持つ族として言明するのが合う、と読みます 仮 （座標の名と出所だけ。四次元

で閉じることは示していない)。

- **結合の行列 $B_{pq}$**：面ごとの結合 $B_p$ と、隣り合う面の対の結合（共有の辺の端に置く）。三次元 $2\times2\times2$ の一段で、二次は粗い箱の対称性からこの二つで正確に閉じ、木の水準の比は $1/10$ です（15-07 §07）。
- **形 $q_p$**：面ごとの $O(1/B)$ の形の座標。一段ごとに縮みます（一列四枚で最大 $17/125$、十字で $1/25$）。
- **背景 $a_p$**：面ごとの背景のホロノミーの対数。単一のループの一段では群の順序つきの積で正確に更新され（非可換 Stokes）、BCH の三次はこの座標に全次数で入ります（15-07 §07）。
- **一リンクの結合 $b$**：staple の和の大きさ $\times\ \beta$。中心の取り直しで $cg^2p^2$ だけ動き、母数の更新として運びます（15-07 §05）。
- **角の三重積 $\kappa$**：立方体の角に集まる三面の $\kappa\sum_c a_x\cdot(a_y\times a_z)$。$2\times2\times2$ で唯一の三次の非可換な項（木の水準で $3/1024$）で、$\theta\sim\beta^{-1/2}$ の範囲で形の切り捨てより大きく、省けません。粗い立方体の辺だけを固定した本当の多段（三次元・自由境界の $L^3\cdot L\le20$・木）では、比 $\kappa/c_2$ は二段目で縮まず $0.019\cdot0.033\cdot0.050$ と増え、倍ごとの比は $1.78\cdot1.30\cdot1.13\cdot1.10$ と 1 に寄るので、$0.055$〜$0.066$ の値に寄る形に見えます 読 （当ての形で、極限の存在は示していない。一ループ（$\beta=32$〜$128$、$L\le4$）は比を 3% 以内しか動かさない)。一段目の比 1.78 は壁ではなく、固定点へ下から近づく途中の形です（15-07 §07）。
- **多面の四次**：三面・四面の結合（粗い箱の対称性の軌道で数える)。

これは上の「引き込む先の一母数の類＋縮む形」を、背景と多ループの座標まで書き下したものです。周辺の向き（結合 $\beta$ の向き）が一つであることは変わらず、他の座標は形の座標と同じく縮むか、背景そのものとして群の積で運ばれる、という見立てです 読 。

**四次元の類の座標の最終形**。四次元の自由境界の箱 $\{0,\dots,L\}^4$ で粗い超立方体の 32 本の辺（細かいリンク $32L$ 本）だけを固定するブロック化を、一段（$L=2$）から本当の多段（木の水準で $L\le10$）まで測ると、粗い重みの類は**一つの母数 $B$（$\beta'=\beta b$）と、流れが値を決める比の座標**の形をとります 読 （$SU(2)$・熱核・鞍点の主項と一ループ（$L\le4$・$\beta=32$〜$128$・$O(1/\beta)$ は含まない)・面の角 $\lesssim0.5$)。比の座標の本数は超八面体群 $B_4$ の表現論で数えられ、二次 2 本（辺を共有する隣の対と、頂点を共有しない「斜めの隣」の対)・三次 3 本（胞の角・道・平行の型)・四次 65 本です 初 （粗い面の角の線形化の空間は 17 次元で $3+6+8$ に分かれる。本数は指標の平均と数値の階数の二経路の計算。胞の Bianchi の階数 7 は Lean：`relation_is_multiple_of_sigma`、仮定は面ごとの 24 本の等式)。三次元と違い、面ごとの類と隣の対だけでは二次で既に閉じません（残り 0.6%)。二次・三次の比は二段目で 0 に向かわず、倍ごとの比が 1 に寄り（斜めの隣で $1.55\cdot1.12\cdot1.08$)、隣 $-0.145$・斜めの隣 $-0.021$

・三次 $0.064$・$0.013$・$-0.021$ あたりの値に寄ります 読 （$L = 4$〜$10$ の当て $r_\infty - A/L - B/L^2$、極限の存在は示していない。一ループは二段の比を 1% 未満しか動かさない）。一段目の値の多くは固定点より 0 の側にあり、二段目で比が 1 を超えるのは近づく途中の形です 初 （Lean：`ratio_gt_one_below_fixpt`、仮定 $0 \le \lambda < 1$・$0 < r < s/(1-\lambda)$）。四次は多面の部分の大きさが二段目で $c_2$ との比 1.6 倍、向きはほぼ保たれ（余弦 0.99）、固定点かどうかは測っていません。

**斜めの隣は 0 にならない ― ただし値と「局所」は規則に依る。**一つの粗い超立方体の中では、辺を固定する規則と面を全て固定する規則は同じ二次形式を与えます 初 （$32 - 15 = 24 - 7 = 17$ と束の網の定理の (iii)。自由度の勘定は Lean：`edge_face_dof_agree`、仮定は増強した余鎖複体の完全性）。本当に違う規則は、粗い胞どうしが細かい場を共有する周期の網で全ての粗い面を固定するもので、そこでも斜めの隣は 0 でない負の値に寄りますが、値は約 2 倍（$-0.045$）、胞の型への射影の約束によっては $-0.06$〜$-0.10$ で、一つの胞に収まらない部分が段とともに二次形式の 2 割ほどまで増えます 読 （可換の線形化の木の水準・二次・粗い格子は無限・$L \le 16$）。**符号と非零は規則にも射影の約束にも依らず、値は依ります。**したがって類が閉じる条件の「局所」は規則を添えて書きます：胞を切り離す規則では「一つの粗い超立方体の中で閉じる（到達距離は粗い格子の一辺）」、場を共有する規則では「尾を持つ準局所」です 読 。独立な母数は $B$ だけで、比の座標は固定点の値を持ち運ぶ量です。なお木の水準では、どちらの規則でも胞の部分の $b$ は $1/L$ で落ち（$bL \to 0.39$・$0.20$）、長波長の固有値は 1 のままで、**$\ln L$ の走りはありません** 読 。対数の走りは一ループからしか出ません（次の段落）。

**結合の流れの実測（一ループ）。**類の母数 $B$ の流れを一ループで測ると、粗いリンク（細かいリンク $b$ 本の線の上の積）を全て固定する周期の網で、$SU(2)$ の粗い作用の長波長の係数は一段（ブロック 2）で $\beta' - \beta = -0.745$（Manton）・$-1.078$（熱核）・$-1.136$（Wilson）と、どの作用でも漸近自由の向きに下がります 読 （$\beta = 4/g^2$・$\beta \to \infty$ の一ループ・可換の背景・横の粗いトーラス $6^3$・長さ $\le 32$ から波数 0 へ外挿）。$U(1)$ では Manton で 0、Wilson で作用の非二次性の定数 $-0.234$ だけで、倍率にほとんど依りません。作用に依る定数（タドポール。熱核ではさらに Van Vleck の前因子の $-\frac{1}{3}$）を除いた非可換の部分は $-0.43$ で、倍率 2 から 3 への変化 $-0.25$ は一ループの係数 $-\frac{11}{3\pi^2}\ln\frac{3}{2} \approx -0.151$ の 1.7〜1.9 倍です 読 （倍率 3 の波数 0 は二点の外挿）。この規則では「流れの向きと桁は漸近自由と合うが、$\ln b$ の係数は小さい倍率で合わない」までが言えます。熱核と Manton の差 $-\frac{1}{3}$、Wilson と Manton の差 $\frac{5}{3}t$（$t$ は $U(1)$ の Wilson の値）は恒等式です 初 （$s^2$ の係数の勘定。算術は Lean：`tadpole_weights`・`vanvleck_ratio`）。線の上の積を固定する規則は粗い尺度より長い波長の揺らぎまで積分する見込みがあり（上の木の $1/L$）、係数を比べるには平均型の規則か、より大きい倍率が要ります（問い「網の長波長の一ループの係数」）。係数 $b_0$ は 7-05 の式 (9) の規約です。

含意のうち、結合の流れの剰余の条件と結合の連続性から結合の留まりが出るのは結合の小ささの帰納の補題 初 、形の剰余の条件から定数の積 $\prod_k (1+\eta_k)$ が有界なのは積の算術 初 （$1+x \le e^x$）、横の縮みから外れが段数に一様なのは等比級数 初 （§04、一段の不等式を仮定）、局在と稀さが重みのノルムから従う部分は平らな場の付録 A の枠からの読み 読 （15-02 §04）です。部品と条件の対応は、類が閉じる条件の母数 $\beta$ が結合の留まりの「結合」そのもの（§05 の主要項への射影の規則）、結合の流れの剰余の条件が結合の留まり（結合の流れの規則）、形の剰余の条件の局在した部分が小さい場の解析性の条件（活動のノルムの規則）、大きな場の部分が大きい場の稀さの条件（大きな場の稀さの規則）です。

**なぜ「比 2 を保つ類」としては言明しないか。**最小の系（一列四枚のプラケット、15-06）では、二次の二つの結合の比を木の値 2 に保つ作用の曲線（基本表現と随伴表現の混合の作用で、随伴の結合が $\rho \approx -1/4$ のもの）が見つかります。しかし一段の写像は形の座標を縮める向きに働き、その曲線を一段で $O(1)$ 離れた所に写すので、曲線は流れで閉じません（15-06、SU(2)・一列四枚・対角で定義した一段・主項の水準） 読 。流れが引き込む先の類の上で、比は $2 + \frac{2}{3B} + O(B^{-2})$ で、ずれの主項は群の曲がりから来る一ループの量です 初 （一ループの水準・同じ系）。だから比 2 は母数で調整できる座標ではなく、引き込む先に残る量です。類が閉じる条件は「比 2 を保つ類」でなく「引き込む先の一母数の類＋縮む形」として言明する方が、測った最小の系と整合します 読 （この系に限る）。

**剰余 0 の例。**15-04 §01 の一リンクの熱核の類 $\{p_\tau\}$（母数一つ）では $T(p_\tau) = p_{\tau+t}$ ちょうどで剰余は 0 です 初 （半群の性質）。損が望遠鏡和になるのはこの「剰余 0」の言い換えで、背景に依らない揺らぎ（15-07 の背景に依らない揺らぎの一段の補題）と同じ事実の別の面と読めます 読 。

03

## 結合の小ささの帰納の補題 — 結合が小さく留まる条件を二つに割る

Bałaban の仮定「有効結合が $(0, \gamma]$ に留まる」（15-02 §02）は、裸の結合 $g_0$ をうまく選べば満たせる、という形の文です。ただし有効結合 $g_{k+1}$ は、それまでの段が小さい間しか定義されません（有効作用から読み取る係数なので）。このことを定義域で明示すると、結合の留まりは二つの条件に割れます。

**結合の小ささの帰納の補題。** $b > 0$、$C \ge 0$、$\gamma_1 > 0$ が $C\gamma_1^2 \le b/2$ と $\gamma_1^2 < 2/(3b)$ を満たすとし、$n \ge 1$ を固定する。各 $g_0 \in (0, \gamma_1]$ について、列 $g_0, g_1, \dots$ が「$g_k \in (0, \gamma_1]$ なら $g_{k+1}$ が定まる」形で帰納的に定義され、次の二つを満たすとする。

- **結合の一段の正味の括弧**（一段の剰余）。$\dfrac{1}{g_{k+1}^2} = \dfrac{1}{g_k^2} - b + r_k$、$|r_k| \le C\, g_k^2$。

- **結合の連続性**（定義域の中の連続性）。$D_k := \{g_0 :\ g_0, \dots, g_k \in (0, \gamma_1]\}$ の上で $g_0 \mapsto g_{k+1}(g_0)$ は連続。

このとき全ての $\gamma_0 \in (0, \gamma_1)$ について、ある $g_0$ があって $g_0 < g_1 < \cdots < g_n = \gamma_0$（全て定義される）。

初 証明。(i) $g_k \le \gamma_1$ なら結合の一段の正味の括弧と $C g_k^2 \le b/2$ から

$$\frac{1}{g_k^2} - \frac{3b}{2} \ \le\ \frac{1}{g_{k+1}^2} \ \le\ \frac{1}{g_k^2} - \frac{b}{2} \tag{2}$$

左辺は $1/\gamma_1^2 - 3b/2 > 0$ 以上なので $g_{k+1}$ は正の有限の数で、右から $g_{k+1} > g_k$。(ii) $J := \{g_0 \in (0, \gamma_0] :\ g_0, \dots, g_n$ **が定義され全て** $\le \gamma_0\}$ と置く。(i) の単調性から $J = \{g_0 \le \gamma_0 :$ $g_n$ **が定義され** $g_n \le \gamma_0\}$。$g_0^2 \le (1/\gamma_0^2 + 3bn/2)^{-1}$ なら、(2) の左を繰り返して $1/g_k^2 \ge 1/g_0^2 - 3bk/2 \ge 1/\gamma_0^2$（$k \le n$）なので $J$ は空でない。(iii) $s := \sup J$ とし、$J$ の点列 $g_0^{(j)} \to s$ をとる。$s \le \gamma_0 < \gamma_1$ なので $g_1(s)$ が定まり、結合の連続性で $g_1(s) = \lim_j g_1(g_0^{(j)}) \le \gamma_0$。同じことを $k = 2, \dots, n$ と繰り返して $s \in J$。(iv) もし $g_n(s) < \gamma_0$ なら、$n \ge 1$ と (i) から全ての $g_k(s) < \gamma_0 < \gamma_1$。結合の連続性から $s$ の右の近傍でも $g_0, \dots, g_n$ が定義され $< \gamma_0$ で、$s = \sup J$ に反する。よって $g_n(s) = \gamma_0$、単調性から $g_0 < \cdots < g_n = \gamma_0$。∎

変種：結合の一段の正味の括弧を $|r_k| \le C g_k^2 + \eta_k$（$0 \le \eta_k \le b/4$）に替えても、(2) の定数を $7b/4$ と $b/4$ に、正値の条件を $\gamma_1^2 < 4/(7b)$ に替えれば同じ証明が通ります 初 。尺度に依る非普遍の項は、$1/g^2$ の定数のずれとして吸収されます。

**結合の小ささの帰納の補題が言うこと**。結合の留まりは、**一段の剰余の評価（結合の一段の正味の括弧）**と**定義域の中の連続性（結合の連続性）**に割れ、それ以外の部分（単調性と中間値の議論）は初等的です。結合の一段の正味の括弧は「$g_k^2$ の大きさの部分を流れに吸収し、剰余を $1/g^2$ の変数で $O(g_k^2)$ に閉じ込める」ことの、結合の流れの側の文です。

**結合の小ささの帰納の補題が言わないこと**。結合の一段の正味の括弧は、四次元の非可換で大きな場の寄与を含めて、本書の設計では示されていません（公開された構成は、別の設計で、結合を段ごとの帯の入れ子で運んでいます。14-03）。これが未公刊の基本の不等式（Bałaban 1989 の Theorem 2）の中身に当たります 仮 （基本の不等式（未公刊）の本文が無いので、対応は序文の一文からの読み）。結合の連続性は「各段の有効作用が裸の結合に連続に依り、有効結合がその連続な汎関数として取り出される」ことです。有限個のコンパクト群の上の積分なので優収束定理で筋は通りますが、有効結合の取り出し方が小さな場の展開の中で決まる以上、その展開の解析性（小さい場の解析性の条件）に依ります 仮 （筋だけ）。結合の小ささの帰納の補題で結合の留まりが易しくなったとは言いません。帳簿の部分と本体の部分を分けただけです。結合の一段の正味の括弧の大きな場込みの評価の案は 15-08 にあります。

**結合の一段の正味の括弧をさらに割ると。**結合の一段の正味の括弧の剰余は恒等式で $r = r^{\mathrm{small}} + r^{\mathrm{large}}$ に割れ、大きな場の分 $r^{\mathrm{large}}$ は揺らぎがリンクごとの熱核の積なら読み取りの Lipschitz 定数 × 稀さで押さえられます 初 （一リンク・一段・背景に依らない揺らぎ。15-08 §02 の大きい場の剰余の上界の補題・熱核の揺らぎの稀さの補題）。小さな場の分（小さい場の結合への寄与）は、Taylor の切り捨て（$(h_0/r_0)^{2k+2}$、平らな場の原典の Lemma 7.5.3 と同じ形）・小さな場の切り（$e^{-c(1-q)^2 h^2 \beta}$）・ブロック間の二次の陽な項とその局所の打ち消しの三つに割れ、原典に無いのは三つ目の群版——原典自身が平らな場で sketch と書く箇所——です 読 （15-08 §06。前の二つは複素の背景での解析性の条件と余白 $q$ の下で 初 ）。これは原典で知られている構造と同じ形を群の上で条件つきで書いたもので、結合の一段の正味の括弧を示したものではありません。二つのブロックの最小の系では、ブロック間の二次の陽な項は一ループから $O(1)$ で現れ（局所の部分は $\beta_0'$ へ、残りは形の座標へ）、局所の打ち消しが要るのは $O(1/\beta)$ の部分です。その非局所の尾の型（平ら・指数・冪）は粗い変数の定義で決まり、指数を得る十分な組み方は、保存量を作る共有を避け、局所の拘束を粗い変数に昇格させ、大域の拘束を有限個の札として分けることです 読 （一・二・三次元の模型の数。四次元は測っていない）。結合の一段の正味の括弧の行のうち原典と同じ形なのは Loc の射影・$W$ の書き方・Taylor の剰余の形で、Loc を成分の射影に取ること・零和の理由・切りの払い方・段の和の取り方の四点は、原典と切り方が違うかもしれません 読 （15-08 §06）。

**結合の一段の正味の括弧のブロック間の項の再帰 — 一列の模型での形。**ブロック間の項を二段目に流すと、一列の模型では「一段目の非局所の項の像は同じ型に閉じ、結合の比で二次 $5/8$・四次 $5/48$ 以下に縮み、その段で新しく生まれる項は段に依らない」形で書け、非局所の項は 0 ではなく決まった値へ幾何級数で引き込まれます 初 （像を条件つき期待値で書く一次の Taylor の式と、木の有理数）・ 読 （数。$SU(2)$ 熱核・対照に $U(1)$ Wilson・一列・対角の定義・二ブロック七枚の一段を二度・隣り合う対の四つの型・非局所の項について一次・粗い場の四次まで・$\beta = 32$〜$512$ と外挿）。超ブロックが三つ以上並ぶと、四次の像に三つの粗い場を同時に含む項が出ます。境の一枚を半分ずつ配る（保存量の無い）粗い変数では、その係数は三つ組の幅 $d$ について $e^{-\kappa d}$、$\kappa = \ln(5 + 2\sqrt{6}) \approx 2.29$（背景の写像の率）で減り、一つのブロックを含む和は体積に一様、自分の像は $5 \times 10^{-3}$ 以下に縮みます 読 （一段・木と一ループ・$L \le 8$・$d \le 7$。前因子は木で定数、一ループで $d$ の一次）。ただし $d = 2$ の三体の係数は隣り合う対の係数と同じ桁で、小さいのは尾だけです。よって一列の模型では、結合の一段の正味の括弧のブロック間の項は「対の型（固定点の値＋縮むずれ）＋幅について指数で減る三体の型」で四次まで閉じます 読 （帳簿は Lean：`affine_bound_uniform`（$0 \le \lambda < 1$・$0 \le C$）・`pair_tail_uniform`（$0 \le \lambda, \mu < 1$ と二本の再帰の不等式）・`three_body_sum_le`（$0 \le \rho < 1$・$|q(d)| \le C\rho^d$））。保存量のある定義に戻すと三体の係数は距離に平らです。原典の連続の場では「前の段の非局所の項は核を変えずに残り、新しい段の分が足される」加法性（BBS の (A.1.4)–(A.1.5) と Exercise 2.2.4）で書かれる部分で、群の一列ではそれが「縮む

像＋段に依らない新しい項」になります 典 （原典の式）・ 読 （対応）。四体の項・一ループの水準の三体の自己の像・四次元への写しは残ります（15-08 §06）。

04

## 横の縮みの帳簿 — 外れは和でなく上限で

形の剰余の条件の「$\rho_k$ が段数に一様に留まる」を、測る量の言葉で書きます。重みの空間 $X$、一段 $T : X \to X$、測る量 $\Phi_{\mathrm{obs}} : X \to \mathbb{R}$（例：層の外の曲率 $\kappa/\beta$、全変動距離）を置き、類 $\{w_\beta\}$ と読み取り $b : X \to \mathbb{R}$（$b(w_\beta) = \beta$）をとって、類の関数 $F(\beta) := \Phi_{\mathrm{obs}}(w_\beta)$ と定めます。$u_k := T^k(u_0)$、$\beta_k := b(u_k)$、類からの外れ $\delta_k := \Phi_{\mathrm{obs}}(u_k) - F(\beta_k)$ とすると、恒等式

$$\Phi_{\mathrm{obs}}(u_K) - \Phi_{\mathrm{obs}}(u_0) = \big[F(\beta_K) - F(\beta_0)\big] + \big[\delta_K - \delta_0\big] \tag{3}$$

が成り立ちます 初 （定義から）。第一項は母数の動きに吸収される分で、端の値の差だけが残ります（望遠鏡和）。第二項が損で、$r_k \ge |\delta_{k+1} - \delta_k|$ なら $|\delta_K - \delta_0| \le \sum_{k<K} r_k$ です 初 。

**横に縮む場合**。$T(w_\beta) = w_{\tau(\beta)}(1 + r_\beta)$、$\|r_\beta\| \le \varepsilon(\beta)$ とし、横の安定性 $T(w_\beta(1+\rho)) = T(w_\beta)(1+\rho')$、$\|\rho'\| \le \lambda\|\rho\|$（二次の項を落とした線形の不等式）を仮定します。$u_k = w_{\beta_k}(1+\rho_k)$ と書けば $\|\rho_{k+1}\| \le \lambda\|\rho_k\| + \varepsilon(\beta_k)$ で、

$$\|\rho_k\| \;\le\; \lambda^k\|\rho_0\| + \frac{\sup_j \varepsilon(\beta_j)}{1-\lambda} \qquad (0 \le \lambda < 1) \tag{4}$$

です 初 （等比級数。上の線形の不等式の下で）。**剰余が $O(1/\beta)$ でも、外れは和でなく上限で押さえられ、段数に一様**です。$\lambda = 1$ なら $\|\rho_K\| \le \|\rho_0\| + \sum_{k<K}\varepsilon(\beta_k)$ で、$\varepsilon(\beta) = C/\beta^2$ と $\beta_k \ge \beta_* + ck$（細かい側へ一ループで一次に増える、15-01 §01）なら

$$\sum_{k<K} \frac{C}{(\beta_* + ck)^2} \;\le\; C\Big(\frac{1}{\beta_*^2} + \frac{1}{c\beta_*}\Big) \tag{5}$$

で有限です 初 （$1/(u+c)^2 \le 1/(cu) - 1/(c(u+c))$ の望遠鏡和）。$\varepsilon(\beta) = C/\beta$ では和が $\ln K$ で増え、一様ではありません（15-01 の対数の発散と同じ型）。だから「一段の損が $O(1/\beta^2)$ なら一様」と「固定の形へ幾何級数で縮むなら $O(1/\beta)$ の剰余でも一様」の二通りがあり、後者の方が弱い仮定で通ります。

**流れが結合を小さくする場合の形のずれ**。最小の系の一段（15-06）では、木の結合が一段で $B_{n+1} = B_n/5$ と変わり、形の座標（$q/B$ の単位）の外れ $r_n$ が

$$r_{n+1} \le \lambda\, r_n + \frac{C}{B_n}, \quad B_n = \frac{B_0}{5^n},\ 0 \le \lambda < 5 \qquad\Longrightarrow\qquad r_n \;\le\; \lambda^n r_0 + \frac{C}{(5-\lambda)\,B_n} \tag{6}$$

を満たします 初 （帰納法。一段の不等式は仮定）。一列四枚の射影の模型では、この不等式の定数を数で与えた形がある：実際の段の尺度で $r_n \le \lambda^n r_0 + C/((5-\lambda)B_n)$、$C = 0.0108$（$B \ge 32$・$r \le 0.05$ の箱） 初 ・ 読 （評価の筋は紙、定数は明示の積分と級数の数値。15-06 の一列四枚の形の剰余の定理）。$\lambda < 1$ なら出発のずれは幾何級数で消え、残りは常にその段の $O(1/B_n)$ です。最小の系の $\lambda$ は形の座標で最大 $17/125$ でした（15-06、一列四枚・主項） 読 。(6) で $B_n$ が細かい側へ減る向きに書いてあるのはその系の約束で、紫外の向き（細かい側ほど $B$ が大きい）では $C/B_n$ は細かい段ほど小さくなります。

分解への含意：類が閉じる条件の類を引き込む先の曲線に取れば、四次元の一段で問うべきは「源の大きさ $\varepsilon$」と「横の縮み $\lambda$」の二つの数になります 読 。最小の系でこの二つがどう測れるかは 15-04（階層模型）と 15-05（束の網）にあります。

**類の固定点の縮小写像の窓 — 類が閉じる条件の類の固定点を縮小写像の形で**。漸近自由のもとで結合 $g$ の固定点は $g = 0$ だけで、赤外へは斥けます。そこで言明すべきは $(g, W)$ の対の固定点ではなく、$g$ を流しながら一段の写像 $W \mapsto T(g_k)W + R(g_k, W)$ を重ねたとき、ある閉球に留まる両側無限の軌道がただ一つ在ることです。その軌道が引き込む先の一母数の類 $W = h(g)$ です。各段の写像が閉球を保ち、その上で縮むなら、この存在と一意性は縮小写像の原理の算術です Lean （ClassFixedPoint：`exists_unique_entire_orbit`・`tracking`・`norm_iterate_sub_le`。一段で縮まなくても、$n$ 段の線形部 $\mu_n$、一段の線形部 $\tau$、剰余の Lipschitz 定数 $\ell$ で $\mu_n + (\tau+\ell)^n - \tau^n < 1$ なら足ります。凍らせた $g$ での不動点からのずれは $\delta/(1-K)$ に留まり、(4) の $\sup \varepsilon/(1-\lambda)$ と同じ形です）。したがって残るのは仮定の側の数です。

剰余を木の固定点の作用に相対に、次元 6 の重みで測ります。物差しには、固定点の作用の二次を面の対の核に戻し、面のホロノミーと平行移動で包んだゲージ不変な作用 $S^*$（二次は固定点から 15% 以内）を使います。この物差しで、一段の線形部はどの運動量でも $\tau = 0.695$ で縮み、非線形の係数は $a = 4.335$ です。一ループの源は同じ作用で組み、$F^2$ の部分を作用そのものの向きで $\beta$ へ移しました。$\beta$ の移りが普遍の値になるように作用の四次の頂点を一つの数で合わせると、残る源は $g^2$ あたり $c_0 = 0.02 \sim 0.04$ です（$12^4$ の格子）。縮小写像の窓は、三段の評価（$\mu_3 = \tau^3$）で $\beta$ がおよそ 28〜54 から開きます 計算 （木の Gauss の部分と一ループの二次）。条件は四つです。(i) $\beta$ へ移す向きを作用そのものの向きにとること（A 型の Loc）は紙の上の論で、形式的な検証はまだです 紙 。(ii) $a$ は運動量の探索で見つけた点での上下の一致（半正定値の緩和による上からの値と、具体的な場による下からの値）で、連続の運動量の上の上限そのものではありません。(iii) $S^*$ は固定点ではありません（一段で二次が 23% 動きます）。(iv) 剰余の Lipschitz 定数は $\ell = 0$ と置いています。

非線形の係数の運動量の上の最大は、もとの物差し（$A_4$）では、全ての運動量の箱を二次の展開の上界で覆った計算で 4.3313 以下であり、最大の点での具体的な場による値 4.3308 と $5\times$

$10^{-4}$ の差で一致しています 計算 （浮動小数の計算で、区間演算で計算機援用で確認したのは最大の点のまわりの小さな箱 $|q-q^{*}|_{\infty} \le 3\times 10^{-4}$ の上だけです。一方、この上界を使うための段の作用の正定値性は、原点のまわりの小さな箱を除く全ての運動量で区間演算により確認しました 機 。原点のまわりは標本で見ています）。

05

## 規則の束 — 何を規則にすれば一段が閉じるか

15-00 §01 の一段で閉じる形を、規則の束として書き直します。表 1 の各行は「一段で閉じる類」を作るのに要る規則の候補で、24-08 表 2 の規則の候補（尺度の公理化の規則・稀さの類の規則・漸近自由の公理の規則・曲率の規則）のどこを埋めるかを並べました。どの行も候補で、無矛盾性も既存の結果を言い直せることも確かめていません 読 （物理の見立て）。

表 1　一段が閉じるための規則の束（候補）

| 規則 | 中身（一行） | 24-08 の候補 | 手元の部品 | 足りないもの |
|---|---|---|---|---|
| ゲージ共変な平均 | 平均の写像がゲージ変換と中心のずらしに共変で、線形化はスカラーの平均、非線形の部分は二次まで | 尺度の公理化の規則 | 連作の段 2（題） | 二次の剰余の定数の評価 |
| 背景場の写像 | 平均を与えて作用を最小にする配位が、尺度に依らない半径の中で一意・解析的・局所的 | 尺度の公理化の規則 | 連作の段 3（題）。二次元 $O(4)$ の縮小写像 | 局所のゲージ固定込みの四次元の書き下し |
| 活動のノルム | 背景 × 揺らぎの重みが四性質の群版を持つ | 稀さの類の規則（ゲージ共変な活動のノルム） | 場の和の劣乗性（BBS の (ii)）の群版（背景と揺らぎの分解の補題）。背景に依らない揺らぎの一段（背景に依らない揺らぎの一段の補題）。揺らぎの期待値の閉じと次の段への単調性の群版の言明（15-07） | 揺らぎの期待値の閉じと次の段への単調性の群版の証明と、$\eta_k$ の母数への吸収 |
| 主要項への射影 | 有効作用を「$\frac{1}{g_k^2}\times$ Wilson の作用 ＋ 局在した無関係な項」に分け、marginal な $F^2$ だけを主要項へ送る | 尺度の公理化の規則（縮む方向と周辺の方向） | 熱核の望遠鏡和の型。最小の系の引き込む先の類（15-06） | 群の上でこの射影を定めること（ゲージ不変な局所関数の何次まで） |
| 大きな場の稀さ | 大きな場の領域の重みが $z_k^{\lvert Z\rvert}$、$z_k \le e^{-cp(g_k)^2}$、$c$ が段で崩れない | 稀さの類の規則 | 連作の段 5（仮定つき）。一リンクの曲率の負（15-01） | 帰納の一段（「最悪の幾何」を避ける形） |
| 結合の流れ | 一段の剰余 $\lvert r_k\rvert \le Cg_k^2+\eta_k$ | 漸近自由の公理の規則 | 結合の小ささの帰納の補題（§03） | 大きな場込みの結合の一段の正味の括弧 |

| 規則 | 中身（一行） | 24-08 の候補 | 手元の部品 | 足りないもの |
|---|---|---|---|---|
| 定数の陽化 | 上の全ての定数を陽な数か陽な関数で | 新しい候補 | 浮動小数の数値の記録 | 区間演算・解析の評価 |

難しさの源との対応 読 （物理の見立て）：無次元の結合という源は主要項への射影と結合の流れの規則、大域のゲージ固定の欠如（大きな場が凸性で制御できない）はゲージ共変な平均・背景場の写像・活動のノルム・大きな場の稀さの規則（15-01 §03）。紫外だけを扱う紫外の制御には、尺度をつなぐ展開の欠如（紫外と赤外をつなぐ展開が無い）が現れません。

規則にするときの注意（15-00 の読み違える型から）。

- 規則には「一段」の版と「全段」の版を別に書き、一段の版から全段の版を出す仮定（定数が段で崩れない）を規則の側に明示する。
- 規則の入力を、同じ規則の出力から取らない（「循環」の型）。
- 不等式の向き（上界か下界か）を規則ごとに一つ書く。

06

## 帯の分解との対比 — 一段の損を払う相手

移り変わりの帯は 26-06 §01 で、β 単調性（渦の自由エネルギーが $\beta$ について単調）と繰り込みの比較（格子を倍にした比較）に割られました 仮 。表 2 は二つの分解を並べたものです。

表 2　帯の分解と紫外の分解（読み）

| | 帯（26-06） | 紫外（この章） |
|---|---|---|
| 一段の比較 | 繰り込みの比較：倍の格子と、結合を強めた元の格子を定数 $K$ で比べる | (1)：$T(w_\theta) = w_{\Phi(\theta)}(1+r)$ |
| 漸近自由が入る所 | $\beta' < \beta$ の向きだけ | $\Phi$ の $\beta$ 成分が $\beta_{k+1} < \beta_k$ の向きだけ（結合の流れの剰余の条件の主項） |
| 群を区別しない部品 | β 単調性：調整（$\beta'$ を小さめに選んでも損しない） | 結合の連続性と単調性：結合の小ささの帰納の補題の中間値の議論（裸の結合の調整） |
| 一段の損の扱い | $K^k$ の損を、強結合の端の面積の指数の小ささ（段を重ねて二重指数）で払う | $\prod_k (1+\eta_k)$ を払う相手が無い（弱結合の端は Gauss で、損を打ち消す小ささを持たない）。だから $\sum_k \eta_k < \infty$ か横の縮み $\lambda < 1$ が要る |
| 損の許される大きさ | 一段に定数 $K$（1 より大きくてもよい） | 一段に $1+\eta_k$、$\eta_k$ は $g_k^{2+\delta}$ の型（$g_k^2$ の型は積が 0 に向かうので不可）。横に縮む向きなら $O(g_k^2)$ の剰余も上限で運べる（§04） |
| 未決の芯 | β 単調性は張力の $\beta$ 単調性と同じ重さ。繰り込みの比較は帯の中で未 | 大きな場込みの結合の一段の正味の括弧。$\eta_k$ を母数に吸収すること（15-07） |

表 2 から読むこと 読 （物理の見立て）。二つの分解は同じ型（群を区別する一段の比較と、群を区別しない調整）で、割る形は同じです。違いは**一段の損を払う相手の有無**にあります。帯は強結合の端に二重指数の小ささがあるので一段の定数 $K$ が粗くてもよく、紫外は払う相手が無いので、一段の損そのものを和の有限な大きさか、母数の動きか、横の縮みの上限に閉じ込めるしかありません。

07

## 三つの紫外の問い

表 3 は、この分解から出る問いを 24-08 表 1 の形で並べたものです。番号は 26-11 の表 4″ のものを引き継ぎます。第 15 部の他の章の紫外の問いと全体の索引は 15-09 にあります。

表 3　紫外の壁の分解から出る問い（状態：新＝26-11 で足した問い。更新＝この章で書き直した）

| 問 | 問い | 大きさ | 状態 | 決着したら動くもの | 決着しても動かないもの | どの章から |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 引き込む先の一母数の類の上で横に縮むか。最小の系では、引き込む先の類（結合 $B$ ひとつ＋固定された $O(1/B)$ の形）が在り、形の座標は一段で縮む（一列四枚で最大 $17/125$、主項）。問い：(i) 四次元の格子に埋めたブロック（周りの束の逃げ道・ゲージの張り替えを含む）で、横の縮み $\lambda$ と源が有限に留まるか（粗い面 $2\times2$ を内部に置いた四次元の箱で $\lambda \approx 0.027$・源 $\approx 5\times10^{-4}$、全ての粗い面を固定した網では $\lambda$ は行列で粗い向きでは $1/16$ を超える。15-05）。(ii) 一段の不等式 (6) の定数 $C$ が段に依らず在るか（一列四枚の射影の模型では一列四枚の形の剰余の定理が数で与えた、15-06）。(iii) 中心の $\mathbb{Z}_2$ の符号の重み（渦の重み）が別の母数として要るか | 紙と小さな計算 | 更新 | 類が閉じる条件の母数の個数と座標。引き込む先の類の次元 | 四次元の格子の類が閉じる条件と結合の一段の正味の括弧 | 15-03 §02・§04・15-05・15-06 |

| 問 | 問い | 大きさ | 状態 | 決着したら動くもの | 決着しても動かないもの | どの章から |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 結合の一段の正味の括弧を大きな場込みで示せる最小の模型はどれか（大きな場の分は熱核の揺らぎの一リンクで済み、残る芯は小さい場の結合への寄与、15-08 §02・§06）。候補：階層的な $SU(2)$ 模型で、一リンクの遠い半球（重さ $e^{-\beta}$ の程度）の寄与を含めて $\lvert r_k\rvert \le C g_k^2$ が立つか。あわせて、一プラケットの拘束つきの吸収 $\mu_W^{\beta} = \mu_1^{\beta\cos(\theta/2)}$ を、多プラケットの真の拘束つき最小点で言い直せるか | 紙 | 新 | 結合の流れの規則の結合の一段の正味の括弧を階層の水準で一行 | 四次元の格子の基本の不等式（未公刊） | 15-03 §03・15-07 |
| 3 | 捩れの役目：$n_{12} = 1$ の $M^4$ の格子の上で、孤立した捩れた平坦な接続のまわりの随伴の揺らぎの作用素の最小固有値が $c/M^2$ 以上か（有限次元の線形代数）。あわせて、背景と揺らぎの分解の補題が捩れで変わらないことの先に、揺らぎの期待値の閉じの群版が捩れで変わらないか | 紙（一部は小さな計算） | 新 | 捩れた小さな四次元トーラスの紫外の言明の分配関数の分母と最後の段の非退化 | 細かい段の紫外の制御。結合の一段の正味の括弧 | 15-02 §05 |

## 08 言えないこと

(a) この部の中で、紫外の制御は閉じていません。分解の言明（類が閉じる条件・結合の流れの剰余の条件・形の剰余の条件・結合の連続性）のどれも、本書の検討は四次元で示していません。四次元の存在は、公開された構成が別の設計で示しました（第 6〜13 部）。

(b) 結合の小ささの帰納の補題は結合の留まりを結合の一段の正味の括弧と結合の連続性に割っただけで、結合の一段の正味の括弧（未公刊の基本の不等式の中身）を示していません。

(c) §04 の帳簿は、二次の項を落とした線形の不等式と一段の不等式を仮定したときの算術です。四次元の一段で $\lambda < 1$ と剰余の評価が立つことは示していません。

(d) $m = 2$ は冪の数え方の読みで、非摂動の類について示していません。「引き込む先の一母数の類」は一列四枚・対角の定義・主項（結合が大きい極限）の最小の系の読みで、四次元のブ

ロック化について言っていません。

(e) 規則の束は候補で、無矛盾性も既存の結果を言い直せることも確かめていません。帯との対照は見立てで、帯の β 単調性・繰り込みの比較と紫外の剰余のどれも示していません。

(f) §03 の結合の一段の正味の括弧の割り方は 15-08 §06 の言明と評価の要約で、小さい場の結合への寄与を示していません。原典と同じ形が立つのは複素の背景での解析性の条件と余白 $q$ の下で、ブロック間の二次の陽な項の群版は示していません。§02 の「幾何の部分は母数の側へ」は二リンクの模型の数を四次元の段に写す読みです。§02 の類の座標の最終形は、三次元の一段の鞍点の展開と二リンク・十字の数からの案で、四次元の一段で閉じることは示していません。

(g) §02 の四次元の類の最終形は、自由境界の箱で辺だけを固定する規則（と、面を全て固定する規則・周期の網の二次）の木の水準の当てと、一ループ（$L \le 4$）の数です。比の座標の固定点の存在も、四次の 65 本の値も示していません。周期の網では類が一つの胞に収まりません。結合の流れの実測は一つの規則の一段目の一ループの数で、段を重ねた係数は測っていません。形の剰余の条件の多段の条件のうち固定点での錐の縮みの条件は下界の水準で、上界はありません。§03 の結合の一段の正味の括弧の再帰は一列・保存量の無い定義・非局所の項について一次の文で、四次元・四体の項・一ループの水準の三体の像は測っていません。

09

## 五分類の表と依存グラフ

表 4　この章の行（この章の行に Lean の欄はありません）

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 |
|---|---|---|---|---|
| [01] | 類と一段の写像の形 (1)・冪の数え方で $m = 2$ | 読 | §01（冪の数え方） | 四次元の純ゲージ・局所の項 |
| [02] | 結合の小ささの帰納の補題：結合の一段の正味の括弧＋結合の連続性 $\Rightarrow g_0 < \cdots < g_n = \gamma_0$（変種つき） | 初 | §03 | $C\gamma_1^2 \le b/2 \cdot \gamma_1^2 < 2/(3b)$・$n$ を固定 |
| [03] | 結合の一段の正味の括弧の中身は大きな場込みの一段の剰余で、基本の不等式（未公刊）の中身に当たる | 仮 | §03（序文の一文からの読み） | 四次元の非可換 |
| [04] | 恒等式 (3)・望遠鏡和の損の上界 | 初 | §04 | 定義から |
| [05] | 横の縮みの帳簿 (4)・$\lambda = 1$ の和 (5)・形のずれ (6) | 初 | §04（等比級数・望遠鏡和・帰納法） | 線形の不等式と一段の不等式を仮定 |

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 |
|---|---|---|---|---|
| [06] | 比 2 を保つ曲線は流れで閉じず、引き込む先の比は $2+\frac{2}{3B}$ | 読 ・ 初 | §02（15-06 の結果） | SU(2)・一列四枚・対角の定義・主項／一ループの水準 |
| [07] | 紫外の壁の分解：類が閉じる条件・結合の流れの剰余の条件・形の剰余の条件・結合の連続性 ⇒ 紫外の制御。類が閉じる条件は引き込む先の一母数の類＋縮む形 | 仮 | §02（言明の形） | 言明だけ |
| [08] | 規則の束と根との対応 | 読 | §05（物理の見立て） | 候補 |
| [09] | 帯の分解との対照：割る形は同じで、一段の損を払う相手の有無が違う | 読 | §06（物理の見立て） | — |
| [10] | 三つの紫外の問い | 仮 | §07 | 問いの形 |
| [11] | 結合の一段の正味の括弧の割り方：$r^{\mathrm{small}}+r^{\mathrm{large}}$、小さい場の結合への寄与は Taylor の切り捨て（原典と同じ形）・切り・ブロック間の二次の項に割れる。背景依存の幾何の部分は母数の側へ | 仮 ・ 読 | §02・§03（15-07・15-08 の要約） | 複素の背景での解析性の条件・余白 $q$・二リンクの模型の読み |
| [12] | 類が閉じる条件の類の座標の最終形（結合の行列・形・背景・一リンクの結合・角の三重積・多面の四次） | 仮 | §02（15-07 の要約） | 三次元 $2\times2\times2$・二リンク・十字の読み |
| [13] | 形の剰余の条件の $\sum_k \eta_k$ は背景を母数に持たせれば段数に一様、難しさは類が閉じる条件へ移る | 読 ・ 初（予算の算術） | §02（15-07 §06） | 最小の系・条件つき |
| [14] | 四次元の類の最終形：一つの母数 $B$＋流れが値を決める比の座標（二次 2・三次 3・四次 65）。斜めの隣は規則に依らず 0 でなく、値と「局所」は規則に依る。木に $\ln L$ の走りは無い | 読 ・ 初（本数の勘定・自由度の一致） | §02（15-07 §07） | $SU(2)$・熱核・木は $L\le10$・一ループは $L\le4$・周期の網は可換の木の二次で $L\le16$・外挿 |
| [15] | 結合の流れの実測：周期の網の一段で $\beta'-\beta=-0.745\sim-1.136$、倍率 2→3 の変化は一ループの係数の 1.7〜1.9 倍 | 読 ・ 初（作用の差の恒等式） | §02 | $SU(2)$・一ループ・可換の背景・横 $6^3$・波数 0 は外挿 |
| [16] | 形の剰余の条件の錐の縮みは段数に一様でなく、ブロック化の条件（共分散の流れの固定点の条件と、固定点での錐の縮みの条件）が要る | 読 | §02（15-05 §07） | 可換・木の水準・周期・$2^4$・線形化・区間の評価なし・固定点での錐の縮みの条件は下界だけ |
| [17] | 結合の一段の正味の括弧のブロック間の項の再帰の一列版：対の型の縮む像＋段に依らない新しい項＋幅について指数で減る三体の項で四次まで閉じる | 読 ・ 初（一次の Taylor の式と帳簿） | §03（15-08 §06） | 一列・保存量の無い定義・熱核・一段・非局所の項について一次・四次まで |

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
[01] 読   類と一段の写像・m = 2                                  冪の数え方
[02] 初   結合の小ささの帰納の補題                                        正味の
[03] 仮   結合の一段の正味の括弧が本体 ⟸ [02]                              四次
[04] 初   恒等式と望遠鏡和
[05] 初   横の縮みの帳簿 ⟸ [04]                                  一段の不等式を仮定
[06] 読   比 2 の曲線は閉じない・引き込む先の比 ⟸ [01]            一列四枚・主項
[07] 仮   紫外の壁の分解 ⟸ [01][02][05][06]                      言明の形
[08] 読   規則の束 ⟸ [02][07]
[09] 読   帯との対照 ⟸ [07]
[10] 仮   三つの紫外の問い ⟸ [03][05][07]
[11] 仮   正味の括弧と小さい場の結合への寄与の割り方・幾何の部分は母数へ ⟸ [03][07]   複
[12] 仮   類の座標の最終形 ⟸ [07][11]                            三次元の読み
[13] 読   η の和は母数へ・難しさは類が閉じる条件へ ⟸ [07][11]          最小の系
[14] 読   四次元の類の最終形・局所は規則を添えて ⟸ [07][12]      木 L ≤ 10・一ループ L ≤
[15] 読   結合の流れの実測 ⟸ [01][07]                            一段目・一ループ
[16] 読   形の剰余の条件の多段の条件（固定点・錐の縮み） ⟸ [05][07]          木の水準・
[17] 読   正味の括弧の再帰の一列版 ⟸ [03][11]                          一列・四次まで
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。[03]・[07]・[10]・[11]・[12] は仮定の行で、どれも紫外の制御を割った問いの形です。この章の節点に、紫外の制御が示されたという節点はありません。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 初 結合の小ささの帰納の補題（結合の留まり ⇐ 結合の一段の正味の括弧＋結合の連続性、変種つき）と、横の縮みの帳簿 (3)〜(6)（線形の不等式と一段の不等式を仮定したとき） | 結合の一段の正味の括弧と結合の連続性のどちらも。四次元の一段で $\lambda < 1$ と剰余の評価 |
| 仮 紫外の壁の分解と類が閉じる条件の形（引き込む先の一母数の類＋縮む形）、三つの紫外の問い、結合の一段の正味の括弧と小さい場の結合への寄与の割り方（原典と同じ形の部分と、ブロック間の二次の項の群版） | どれの証明も。紫外の制御が閉じる見込み |
| 仮 類が閉じる条件の類の座標の最終形の案。読 背景を母数に持たせたときの $\sum_k \eta_k$ の閉じ方（条件つき） | 四次元の一段で類が閉じること。面・多ループの二段目 |
| 読 $m = 2$ の冪の数え方・規則の束・帯との対照・比 2 を保つ類を採らない理由（最小の系） | 非摂動の類での母数の個数。四次元のブロック化での引き込む先の類 |
| 読 四次元の類の最終形（一つの母数＋比の座標、斜めの隣は 0 でない）・結合の流れの一ループの実測・形の剰余の条件の多段の条件・結合の一段の正味の括弧の再帰の一列版 | 比の座標の固定点の存在。周期の網で類が一つの胞に閉じること。段を重ねた結合の係数。$\sup \mu_\infty < 1$ の上界。四次元・四体の結合の一段の正味の括弧の再帰 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 条件つきの紫外安定性の定理の仮定（結合の留まり）と未公刊の基本の不等式 | 典（要旨と序文） | T. Bałaban, Large field renormalization. II, Comm. Math. Phys. 122 (1989) 355–392（7-07 §03・15-02） |
| 帯の分解 | 仮（言明） | 26-06 §01 |
| 規則の候補（尺度の公理化・稀さの類・漸近自由の公理・曲率） | 読 | 24-08 表 2 |
| 結合の小ささの帰納の補題・帳簿 (3)〜(6) | 初 | この章の本文の証明 |
| 引き込む先の類・比 2 の曲線・縮み $17/125$ | 読（木の写像と一ループの式は初） | 本書の検討（15-06。一列四枚の模型、二経路の数値） |
| 表 1〜3・分解の言明 | 本書の検討 | 本書の検討の記録（紫外の制御の検討の整理） |
| 類の座標・$\sum_k \eta_k$ の閉じ方 | 読（予算の算術は初） | 本書の検討（15-07 §06・§07 の数） |
| 四次元の類の座標・規則の比較・結合の流れ・錐の多段・結合の一段の正味の括弧の再帰の一列版 | 読（本数の勘定・自由度の一致・一次の Taylor の式・帳簿は初） | 本書の検討の記録（15-07 §07・15-05 §07・15-08 §06 の数）。原典の加法性：BBS arXiv:1907.05474v2 の (A.1.4)–(A.1.5) と Exercise 2.2.4。帳簿は Lean の束（15-09 表 3、再検査済み） |

**この章で使った語** ― 類・母数の流れ $\Phi$・剰余・類が閉じる条件・結合の流れの剰余の条件・形の剰余の条件・結合の連続性・結合の一段の正味の括弧・結合の小ささの帰納の補題・横の縮みの帳簿・横の縮み $\lambda$・源・引き込む先の類・規則の束・払う相手。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：15-04 一リンクの熱核の類と階層模型 ― この章の分解が最も小さな場でどう見えるか。

# 一リンクの熱核の類と階層模型 — 母数一つで閉じる類と引き寄せる曲線

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 15-01・15-02 にあります。

この部は、本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた記録です。存在そのものは第二巻の第 6〜13 部を、二つの設計の違いは第 14 部を見てください。部の位置づけは 15-00 にあります。

**この章で分かること** — 15-03 の分解（有限個の母数で閉じる類 × 剰余）が、最も小さな場でどう見えるか。一リンクの熱核の類は半群で母数一つで閉じ、剰余は 0、損は望遠鏡和になること。Migdal–Kadanoff の階層模型の一段では、熱核の類はちょうどには閉じないが、像は一母数の不変な曲線に一段ごとに $1/16$ の割合で引き寄せられ、曲線の位置は「毎段注がれる源」と「縮み」の釣り合い $1/3600$ で決まること（鞍点の見積もり）。この模型では、有限の結合の範囲で、管の不変性と引き寄せる曲線が区間演算で確かめられていること。二次元の開いた帯の一段は一リンクの畳み込みそのもので、多リンクの検査にならないこと。

**前提となる章** — 15-03 §04（横の縮みの帳簿）・18-04（Migdal–Kadanoff の一段の規約と $(1-b^{-2})/3$）・24-06 §07（稀さで払う測度の類）・15-01 §01（損の和の対数の発散）。

**先に言うこと** — この章の全ての文は、**一枚の重み（類関数）に当てる写像**の文です。一リンクの熱核の畳み込みと、階層格子（Migdal–Kadanoff）の上の写像は、一枚の重みが一段で一枚の重みに戻る写像で、多リンクの結合・ゲージの張り替え・大きな場の剰余が構造的にありません。だからここで閉じるものは、四次元の超立方格子の一段の紫外の制御について何も含意しません。また階層模型は $U(1)$ でも閉じ込めが起きる模型で、非可換性の検査にもなりません。

この章の順序

1. 一リンクの熱核の類 — 半群・望遠鏡和・曲率 $A+B/\beta$・三つの留保
2. Migdal–Kadanoff の一段 — 不変な曲線・縮み $1/16$・結合の流れ

3. 源と縮みの釣り合い — 鞍点の見積もり・$1/3600$・$b^{d-4m}$
4. 二次元の開いた帯 — 独立なプラケット・$\lambda = 1/4$・源なし
5. 階層模型の紫外の定理 — 区間演算の管、紫外から強結合までの鎖と、届かない範囲（表 1・表 2）
6. この類で言えること（表 3）
7. 言えないこと
8. 五分類の表と依存グラフ（表 4）

---

00

## この章で分かること

- 一リンクの熱核の類は半群で母数一つ $\tau$ で閉じ、一段の剰余は 0、量の段の変化は端の値の差だけが残る望遠鏡和です（§01）。
- Migdal–Kadanoff の一段では、像は熱核 $\times \exp(\theta^4/3600 + \cdots)$ の形の曲線に一段ごとに $1/16$ で引き寄せられ、曲線の上の結合は $\beta \mapsto \beta - \frac{1}{4} - c/\beta$ と流れます（§02・§03）。
- $\theta^{2m}$ の係数の縮みは $b^{d-4m}$（$d = 4$・$b = 2$ で $m = 2$ が $1/16$）で、次元の数え方と同じ形です（§03、鞍点の主項）。
- この模型では、$\beta \in [2.46, 128]$ で熱核の類のまわりの管が写像で不変、$\beta \in [15.26, 64]$ で管の中の全ての軌道が一本の曲線に寄ることが区間演算で確かめられています（§05）。$\beta > 128$（格子間隔 0 の極限）は閉じていません。

01

## 一リンクの熱核の類 — 損は望遠鏡和になる

「損を結合の流れに吸収する」（15-01 §01）が最も小さな場でどう見えるかを、$SU(2)$ の一リンクの類関数（単位元からの角 $\theta$ だけの関数）を重みとし、熱核と一段ずつ畳み込む流れで見ます（24-06 §07 の候補と、24-08 の問い「一リンクの重みの Hessian」）。この節の全ての文は**一リンク・熱核の類・下に書く範囲**の文で、多リンク・プラケットの間の結合を含む四次元の一段については何も言いません。

熱核 $p_\tau$ は半群で

$$p_\tau * p_t = p_{\tau + t} \tag{1}$$

なので、熱核の族の中では一段の後もまた熱核で、母数 $\tau$（実効の結合の逆数に当たる）が $t$ だけ動くだけです 初 （半群の性質だけ）。だから熱核の重みから計算する量はどれも**その時点の母数だけの関数**で、段を重ねた変化は足し合わせると端の値の差だけが残ります（望遠鏡和）。積にはなりません 初 。15-03 §04 の恒等式で言えば、類からの外れ $\delta_k$ が恒等的に 0 の場合です。

中心 $\mathbb{Z}_2$ で割った座標（$SO(3)$、$\theta \in [0,\pi/2]$、分岐の集合 $\operatorname{tr} U = 0$ は $\theta = \pi/2$）で、層 $|\theta - \pi/2| < h$ の外の Bakry–Émery の曲率の最小を $\kappa$ と書きます。Wilson の重みから出発して熱核で畳み込んだ重みについて、層の外の曲率は $\beta \in \{2,3,4,6,8\}$ ・$t \in \{0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5\}$ ・層の半幅 $h = \beta'^{-1/2}$ の全ての点で正でした（割らない $SU(2)$ では同じ範囲の全ての点で負） 読 （指標の級数と位置の空間の二つの独立な実装で一致）。層の外の曲率は

$$\frac{\kappa}{\beta} = A(h) + \frac{B(h)}{\beta} \qquad \text{(指数で小さい項を除く)} \tag{2}$$

の形をとり、Wilson の重みでは $A = \sin h$ ・$B = 2$ です 読 （熱核の重みでは数値と一致）。

この形を四次元の一段 $\beta' = \beta - 8b_0 \ln L$（一ループの流れを $\beta = 4/g^2$ で書いたもの）に当てると、主項 $A\beta$ は結合とともに動き（吸収される部分）、$\kappa/\beta$ の一段の変化は $B\,(1/\beta' - 1/\beta) = O(1/\beta^2) = O(g^4)$ で、和の有限な損です 読 （上の形を当てはめた読み）。24-06 §07 が候補に置いた $\kappa_{j+1} \geq \kappa_j(1 - c/\beta_j)$ は積の型で、段数の冪で 0 に向かいますが、この類の中では悲観に過ぎます。

ただし三つの留保があります。(i) 層の稀さの率は $\beta$ に比例し、一段ごとに $O(1)$ ずつ下がって $\beta = O(1)$ で尽きます 読 。これは 24-06 §07 が結合の届く範囲の限界として述べたものの一リンクでの姿で、紫外の側の新しい障害ではありません。(ii) 割った座標の凸性が払えるのは中心で不変な（随伴の）部分だけで、各リンクの $\mathbb{Z}_2$ の符号には別の通貨が要ります。多リンクでは、この符号の部分が中心の渦にあたります 読 （物理の見立て）。(iii) 四次元の繰り込みの一段は一リンクの熱核の畳み込みではなく、多リンク・プラケットの間の結合が入ります。そこで $A + B/\beta$ の形が保たれるかは調べていません。

曲線から外れる向きがこの類には無いので、横の縮みも源も現れません。分解の言葉で言えば、熱核の類は「剰余 0」の類で、15-03 の形の剰余の条件が空になる場合です。

02

## Migdal–Kadanoff の一段 — 不変な曲線と縮み 1/16

この節の一段の定義は既存の知見の整理です。導入は 18-04 §04 にあります。

**写像**。$SU(2)$ の一枚のプラケットの重み（類関数）$w=\sum_n c_n\chi_n$（$\chi_n$ はスピン $n/2$ の指標、$a_n=c_n/(n+1)$）に、Migdal–Kadanoff の一段（$d=4$・$b=2$）を当てます。規約は 18-04 と同じで、

$$T=(\text{決定化})\circ(\text{ボンド移動}):\qquad w\ \mapsto\ \frac{w^{4}}{\int w^{4}}\ (\text{指数 } b^{d-2}=4),\qquad a_n\ \mapsto\ a_n^{4}\ (\text{平面の } b^{2}\text{}3)$$

です。ボンド移動は平行な四枚を一枚に束ねる操作（重みの積）、決定化は直列の四枚を畳み込む操作です。この写像は階層格子の上では近似でなく写像そのものですが、四次元の超立方格子の繰り込みの一段ではありません 典 （Migdal–Kadanoff の近似の定義。18-04）。

**不変な曲線**。熱核の類はこの一段でちょうどには閉じませんが、像は一母数の曲線（熱核 $\times\exp(\theta^{4}/3600+\cdots)$）に一段ごとに $1/16$ の割合で引き寄せられます。同じ $\beta'$ に違う段数で来た重みの差（全変動距離）の比は $j=1:2:3$ で $16.06$・$17.00$（$1/16$ ずつの縮みの予測 $16.0$・$17.0$）で、出発の $\beta_T\in\{3.5,7,15,30\}$ のどれでも同じでした（Wilson から出発で $15.8$・$16.7$） 読 （本書の検討の数値。一枚の類関数・階層格子の写像・$\beta\le 32$・層の半幅 $h\in\{\pi/4,\pi/8\}$）。曲線の上では層の外の $\kappa/\beta$ はその時点の $\beta$ だけの関数で、望遠鏡和が成り立ちます。

**結合の流れ**。熱核から出発した一段で

$$\beta\ \mapsto\ \beta-\frac{1}{4}-\frac{0.0215}{\beta}\tag{4}$$

でした 読 （$\beta=4,8,16$ の三点で係数 $0.022$・$0.022$・$0.021$）。$\frac14$ は 18-04 の $(1-b^{-2})/3$ と一致します。結合の小ささの帰納の補題の結合の一段の正味の括弧の形（15-03 §03）で書くと、この模型では $b=1/16$（$1/g^{2}$ の単位）、$|r_k|\approx 0.0054/\beta_k\approx 0.0013\,g_k^{2}$ です 読 （$\beta\in[2,32]$）。熱核の類に対する剰余は $\kappa/\beta$ で $O(1/\beta)$（$\beta$ に依らない形のずれ）ですが、段を重ねても積み上がりません 読 。陰性対照として各段で Wilson の係数に取り替えると、外れは $\delta\approx-0.04$（$\beta\approx16$）を保って減りません（検出の力がある） 読 。

**帳簿への当てはめ**。15-03 §04 の言葉で、横の安定性は $\lambda\approx 1/16$ で成り立ち、剰余は熱核の類に対して $O(1)$ の形の補正です。したがって「横に縮む場合」の形で一様で、熱核の類からの外れは $|\delta|\le 1.6\times10^{-3}$（$\beta\ge2$、$h=\pi/4$）、$\beta\ge8$ では $\le 6.0\times10^{-5}$ でした 読 （測った範囲）。

> 03

## 源と縮みの釣り合い — なぜ $1/16$ で、なぜ $1/3600$ か

大きな $\beta$ の鞍点で、一段の写像を作用の係数の写像として見積もります 初 （鞍点の主項。揺らぎの高次と、像の和の他の項 $e^{-\pi\beta h}$ の程度を落とす。誤差の定数は出していない）。

- 熱核（像を一つだけ取る）：$\mathrm{HK}_\beta(\theta) \propto (\theta/\sin\theta)\, e^{-\beta\theta^2/2}$。$\log(\theta/\sin\theta) = \theta^2/6 + \theta^4/180 + \theta^6/2835 + \cdots$。
- 重み $w = \mathrm{HK}_\beta \cdot e^{R(\theta)}$、$R = \sigma\theta^4 + \tau\theta^6 + \cdots$ と置く。**ボンド移動**は

$$w^4 = \mathrm{HK}_{4\beta}\Big(\frac{\theta}{\sin\theta}\Big)^3 e^{4R} = \mathrm{HK}_{4\beta-1}\, e^{\rho+4R}, \qquad \rho := 3\log\frac{\theta}{\sin\theta} - \frac{\theta^2}{2} = \frac{\theta^4}{60} + \frac{\theta^6}{945} + \cdots \tag{5}$$

  で、$\beta \mapsto 4\beta - 1$ は 18-04 の $b^2\beta - (b^2-1)/3$ です。$\rho$ が**源**で、前因子 $\theta/\sin\theta$（Haar の重みの名残）を四枚束ねたときの余りです。
- **決定化**（四枚の畳み込み）：大きな $\beta$ では、四つの群の元が単位元から $U$ へ測地線に沿って等分に並ぶ配位（各々 $\theta/4$）が主で、補正 $S$ は $4S(\theta/4)$ に写ります。熱核の部分は半群で $\mathrm{HK}_{(4\beta-1)/4} = \mathrm{HK}_{\beta-1/4}$。

帰結として、$\theta^4$ と $\theta^6$ の係数の写像は

$$\sigma \;\mapsto\; \frac{1/60 + 4\sigma}{64} = \frac{\sigma}{16} + \frac{1}{3840}, \qquad \tau \;\mapsto\; \frac{1/945 + 4\tau}{1024} = \frac{\tau}{256} + \frac{1}{967680} \tag{6}$$

です。**縮みは $1/16$、熱核から一段で源 $1/3840$、固定点は源と縮みの釣り合い**

$$\sigma_* = \frac{\sigma_{\text{源}}}{1-\lambda_\sigma} = \frac{1/3840}{1-1/16} = \frac{1}{3600}, \qquad \tau_* = \frac{1/967680}{1-1/256} = \frac{1}{963900} \tag{7}$$

で決まります 初 （(6) の上の等比級数の算術）。一般に $\theta^{2m}$ の係数の縮みは $b^{d-2}\cdot b^2 \cdot b^{-4m} = b^{d-4m}$（$d=4$・$b=2$ で $4^{2-2m}$）：$m=1$ は $1$（marginal、$\beta$ そのもの）、$m=2$ は $1/16$、$m=3$ は $1/256$ です 初 （鞍点の主項）。$\theta \sim a^2 F$ と読むと $\theta^{2m}$ は次元 $4m$ の演算子に当たり、$b^{d-4m}$ はその次元の数え方と同じです 読 （見立て）。

**照合**。$\theta^4$ の係数は一段で $2.615\times10^{-4}$（$\beta=60$）対 $1/3840 = 2.604\times10^{-4}$、引き寄せる曲線の上で $2.789\times10^{-4}$ 対 $1/3600 = 2.778\times10^{-4}$。差は $6.5\times10^{-5}/\beta$ の形（揺らぎの補正）。$\theta^6$ は $1.06\times10^{-6}$ 対 $1.04\times10^{-6}$ でした 読 （同じ系の数値）。§02 の比 16.06・17.00 は縮み $1/16$ の直接の測定です。

**曲率への影響**。$V = -\log w$ に $-\sigma_*\theta^4$ が入るので、層の端 $\theta = \pi/2 - h$ での接の向きの曲率は $-4\sigma_*\theta^3\cot\theta$ だけ動きます。$h=\pi/4$ で $-4(\pi/4)^3/3600 = -5.4\times10^{-4}$ 初 （算術）。測った

$\kappa/\beta$ の外れ $\delta\cdot\beta$ は $-2.6\times10^{-4}$（$\beta=16$）・$-3.6\times10^{-4}$（24）・$-4.1\times10^{-4}$（32）と、この値に近づいています 読 。

読み 読 ：この模型で源と縮みは別々の仕組みから来ます。源は**ボンド移動**（平行に束ねる操作）が前因子から注ぐ $\theta^4/60$ で、$d>2$ でだけ在ります。縮みは**決定化**（直列にまとめる操作）が $\theta^4$ の係数を $1/64$、結合の目盛りの縮みで割って $1/16$ にするものです。15-03 §04 の言葉では、問うべき二つの数（源の大きさと $\lambda$）がこの模型では $1/3840$ と $1/16$ です。四次元の小さな箱で同じ二つの数を測った値は 15-05 にあります（$\lambda$ は $0.026$〜$0.049$、源は $4$〜$6\times10^{-4}$ の帯）。

04

## 二次元の開いた帯 — 多リンクの検査にならない

二次元の開いた帯（幅の狭い帯状の格子）を、二枚ずつまとめてブロック化する一段を考えます。軸ゲージをとると開いた帯ではプラケットの変数が独立なので、二枚をまとめる一段は一**リンクの畳み込み $w*w$ そのもの**で、粗い二枚も独立です 初 （既知の構造。独立な標本 20 万で指標の平均が $1\sigma$ 前後で一致、相関 $0.003\pm0.002$ 読 ）。だからこの設定は多リンクの検査になりません（新しい結合が生まれない）。

そのうえで、まとめる枚数 $m$ の決定化は $\theta^4$ の係数を $1/m^3$ 倍にし、$\beta'=\beta/m$ で測った外れを $1/m^2$ 倍にします。二枚なら $\lambda=1/4$ で、ボンド移動が無いので源の項も無く、固定の形は熱核そのものです 初 （鞍点の主項）。Wilson から出発した経路依存は観測量によって次数が違い、低い表現の係数で $O(1/\beta^3)$、全変動距離で $O(1/\beta)$、層の外の $\kappa/\beta'$ で $O(1)$（どれも $m$ について $1/m^2$）でした 読 （$\beta_T=8$〜$64$、$m=1,2,4$）。熱核と $U(1)$ の Villain は経路に依らず、外れは $10^{-8}$ 以下です 読 。

多リンクの最小例は、立方体の制約でプラケットが独立でない三次元の $2\times2\times1$ の板です。そこから先の数は 15-05 にあります。

05

## 階層模型の紫外の定理 — 区間演算の管と、届かない範囲

§02・§03 は数値と鞍点の見積もりでした。この模型の中で、紫外の分解（15-03 §02）の各行を有限の結合の範囲で確かめた結果を、条件と一緒に並べます。全て **MK の写像 $T$（(3)）・$SU(2)$ の一枚の重み**・$d=4$・$b=2$ についての文です。

**座標と管**。結合の読み取りを $s(w):=1/b(w):=-\frac{2}{3}\log a_1$ とします（熱核 $\mathrm{HK}_\beta$ では $a_n=e^{-q_n/(2\beta)}$、$q_n:=n(n+2)$ なので $b(\mathrm{HK}_\beta)=\beta$）。横の座標を

$$e_n(w) := \log a_n - \frac{q_n}{3}\log a_1 \qquad (n \ge 2) \tag{8}$$

と置くと、熱核の類で $e \equiv 0$ で、決定化は $e \mapsto 4e$・$s \mapsto 4s$ をちょうど与えます［初］（定義から）。**管** $U$ は「$b(w) \in [\beta_{\min}, \beta_{\max}]$、$|e_n(w)| \le R\,(q_n^2 s^4 + 10\,q_n s^3)$（$2 \le n \le N$、$R = 10^{-3}$）、高い $n$ の裾を重みつきの係数の和で押さえる」重みの集合です。$q_n^2 s^4$ は $\theta^4$ 型の形の大きさに当たります（$w = \mathrm{HK}\cdot e^{\sigma\theta^4}$ なら $e_n \approx \sigma q_n(q_n-3)s^4$）。

表 1　階層模型の紫外の各行と、確かめた範囲（MK の写像・$SU(2)$ の一枚の重み・$d=4$・$b=2$・管は $R=10^{-3}$）

| 行 | 中身 | 範囲 | 札 |
|---|---|---|---|
| 管の不変性 | $T(U)\subset U$。$[64,128]$ で像の比の最大は $0.494$ から $0.492$ へ、$\beta$ を上げて苦しくなる項は無い | $\beta \in [2.46, 128]$ の 6277 区間の全て（$[2.46, 64]$ の 3077 区間と $[64, 128]$ の 3200 区間。$\beta \in [2, 2.46)$ の 23 区間は不合格） | ［機］（区間演算。陽性対照と陰性対照つき） |
| 点ごとの横の縮み | 管の上の横の線形化のノルム $\lambda_{\mathrm{tube}} < 1$（$\beta=8$ で $0.81$、$16$ で $0.46$、$64$ で $0.27$、$128$ で $0.26$） | $\beta \in [5.88, 128]$ | ［機］ |
| 引き寄せる曲線 | 管の中の全ての軌道が一段 $\Lambda \le 0.735$ の比で一本の曲線に寄る（$\beta \in [23.62, 64]$ では $\Lambda \le 0.384$）。曲線の精度は裾の押さえで正規化 $\lesssim 2.2\times10^{-4}$ | $\beta \in [15.26, 64]$ | ［機］（入力）＋［初］（グラフ変換の初等の補題） |
| 結合の流れ（熱核の点） | $(\beta - \beta' - \frac14)\beta \in [0.020928,\ 0.023690]$（$[64,128]$ では $[0.020876,\ 0.020929]$）、$1/48 = 0.020833$ へ単調（$1/48 + 0.0062/\beta$ と合う） | $\beta \in [2.5, 128]$ | ［機］ |
| 形の係数の流れ | $\sigma_k \mapsto (16\sigma_k + 12\ell_k)/4^{2k}$（$\ell_k$ は $\log(\theta/\sin\theta)$ の $\theta^{2k}$ の係数）、縮み $16^{1-k}$、固定点 $\sigma_k^{*} = 12\ell_k/(4^{2k}-16)$（$1/3600$・$1/963900$） | 大きな $\beta$ の主項 | ［初］（鞍点の主項・誤差の定数なし） |
| 曲線の上の結合の流れ | $\beta' = \beta - \frac14 - c(\sigma)/\beta$、$c(\sigma) = \frac{1}{48} - 15\sigma$、曲線の上で $c_{*} = \frac{1}{60}$（熱核の類の上では $\frac{1}{48}$） | 大きな $\beta$ の主項 | ［初］（主項）。浮動小数で $1/60 + 0.0078/\beta$ ［読］ |
| 帯への継ぎ目と鎖 | 半径と重みを $\beta$ について絞った管 $\hat U$ が $T$ の下で閉じ、下端の像が帯の側の管 $D_T$ に入り、そこから強結合の判定領域へ。$\beta \le 64$ の点は 846 段以内、$\beta \le 128$ の点は 1137 段以内に判定領域 | $\beta \in [0.95, 2.46]$ の 755 区間と継ぎ目の 27 区間・出口の 139 区間、上の管の $[64,128]$ | ［機］（区間演算。帯の側は先行の計算機援用の記録をそのまま使う）＋［初］（段数の組み立て） |
| $c_{*}$ の包み（取り直した管） | 中心を $\mathrm{HK}\cdot e^{\theta^4/3600}$ の横の主項に、半径 $R=10^{-4}$・$A=0$・区間の幅 $0.002$ に絞った管 $U_\sigma$ が不変で、管の全体で $(\beta-\beta'-\frac14)\beta \in [0.0151,\ 0.0188]$：$1/60$ を含み、$1/48$ と熱核の点の値を含まない | $\beta \approx 16$・$32$・$64$・$96$・$128$ の五か所の 50 区間だけ。曲線が $U_\sigma$ に入ることは示していない | ［機］（条件つき） |

| 行 | 中身 | 範囲 | 札 |
|---|---|---|---|
| 層の外の曲率と層の重さ | 曲線の上で $\kappa/\beta \ge A(h) - C/\beta > 0$、層の重さ $\le Ce^{-c\beta}$ | 大きな $\beta$ の主項 | 仮 （区間演算はしていない） |

(6) の $\sigma \mapsto \sigma/16 + 1/3840$ は、表 1 の形の係数の流れの $k = 2$ の場合です（$\ell_2 = 1/180$、$(16\sigma + 12/180)/256 = \sigma/16 + 1/3840$）。

**この模型での紫外の意味。**出発の $\beta$ を有限の範囲で大きくして $K$ 段流しても、最後の尺度の重みは曲線の上の一点から $\Lambda^{K}\times$（出発の距離）以内にあり、誤差は $K$ に一様です 機 （$\beta \in [15.26, 64]$ の範囲の文。$\beta$ は一段に約 $1/4$ ずつ下がるので、例えば終わりの $\beta = 16$ から 64 までで $K \approx 190$ 段）。15-03 §04 の (4) の形が、この模型の有限の範囲で計算機援用の不等式として立った、ということです。

**届かない範囲（同じ行に）。**$\beta > 128$——格子間隔 0 の極限そのもの——は鞍点の主項だけで、誤差の定数つきの評価はありません 仮 。引き寄せる曲線は $[15.26, 64]$ のままです（$[64, 128]$ でグラフ変換の入力を計算していない）。層の外の曲率と層の重さの区間演算は届いていません。$c_* = 1/60$ を $1/48$ から分けることは、熱核の中心の管の全体では原理的にできず（熱核の中心の管と、中心を取り直しても半径が $10^{-3}/3$ 以上の管は熱核そのものを含むので、管の全体の $\beta'$ の包みは必ず $1/48$ を含む 初 ）、半径を $10^{-4}$ に絞った管の上で五か所の区間でだけ届きました（表 1）。曲線がその管に入ることは届いていません。$\beta < 2.46$ は同じ管のままでは届きませんが、管を $\beta$ について絞ると下端は 0.95 まで下がり、帯の側に継がれます（次の段落）。そして何より、ここで閉じるのは**一枚の重みが一段で一枚の重みに戻る模型**だからです。多リンクの結合・ゲージの張り替え・大きな場の剰余が構造的に無く、15-02 の「原典に無い二行」（大きな場込みの一段の剰余・観測量の源）はこの模型では空です。階層模型は $U(1)$ でも閉じ込めが起きる模型で、非可換性の検査にもなりません。$\frac{1}{4}$ は四次元の一ループの値（倍率 2 で $8b_0 \ln 2 \approx 0.258$）に近いですが、$c_* = 1/60$ を四次元の二ループの係数と比べる根拠はありません 読 。

**紫外から強結合まで一本の鎖（階層模型）。**同じ模型の先行の記録には、帯の側の管 $D_T$ と、そこから有限段で強結合の判定領域（$\kappa > 0$）へ運ぶ計算機援用の定理があります（$a_1 \in [0.0144, 0.21)$、すなわち $\beta \in [0.354, 0.961)$。判定領域は $\beta \le 0.366$）。表 1 の管（$\beta \in [2.46, 64]$ ）とは座標をそろえると $a_1 = e^{-3/(2\beta)}$ で、そのままでは $\beta \in [0.961, 2.46)$ の穴が残ります 初 （座標の照合）。半径と重みを $\beta$ について区分的に絞った管 $\hat{U}$——$\beta \ge 2.16$ では表 1 と同じ $|e_n| \le 10^{-3}(q_n^2 s^4 + 10 q_n s^3)$、$\beta \le 1.16$ では $4 \times 10^{-4} q_n^2 s^4$、その間は幅 0.05 の区分ごとに線形に絞り、裾の母数は幅 0.1 の区画ごと——を張ると、次が成り立ちます 機 （区間演算・区間の幅 0.002）。

- $\beta \in [0.95, 2.46]$ の 755 区間と継ぎ目の 27 区間（$[2.46, 3.0]$）の全てで $T(\hat{U}) \subset \hat{U} \cup D_T$（像の比の最大 0.934）。一段で $\beta$ は 0.2196〜0.2990 下がる。
- 下端から出る像（$\beta \in [0.95, 1.228]$ の 139 区間）は全て $D_T$ に入る（比の最大 0.9888）。
- したがって $\beta \le 64$ の $\hat{U}$ の点は 289 段以内に $D_T$ に入り、その後 557 段以内に判定領域に入ります。合わせて 846 段以内です 初 （段数の組み立て。Lean：`mk_full_chain_64`・`tube_exit`・`cell_descent`・`chain_compose`、仮定は区間演算の入力と一段の下がり幅 $\delta = 0.2196$）。$\beta_0 = 64$ の熱核から出た軌道は 211〜289 段で $D_T$ に入ります。
- 上の管を $[64, 128]$ へ延ばした結果（表 1。一段の下がりは全区間で 0.2296 以上）と合わせると、$\beta \le 128$ の点は 580 段以内に $D_T$、その後 557 段以内に判定領域、合わせて 1137 段以内です 初 （段数の組み立て。Lean：`mk_full_chain_128`・`tube_exit_top`・`chain_top`、仮定は区間演算の入力・$b_{\mathrm{lo}} = 0.95$・$\delta = 0.2196$・帯の側のセルの番号 $\le 556$）。

継ぎ目で効いたのは、管そのものを $D_T$ に含めることではなく、**管の下端の像を $D_T$ の境界と比べる**ことでした。$D_T$ の上側の境界は $n = 2$ の係数で熱核の像の 1〜7% 上にしかなく、管の形のままの包含はどの半径でも通りません 読 。条件（同じ行に）：(a) 区間演算は自作で、Taylor の剰余とキュムラントの上界の導出は紙（Lean 未了）、(b) 帯の側は先行の記録の計算機援用の証明書をそのまま使い、ここでは再計算していない、(c) $D_T$ の参照曲線は記録の作り方どおりに作り直したもので、記録の数値との照合は一点、(d) 557 段はセルの数で数えた粗い上界、(e) 区分の境界の点は小さい方の管に属させる約束。陽性対照（表 1 の 27 区間の文字列での一致。$[60, 64]$ の 200 区間の計算し直しの一致）と陰性対照（管を 1/5 に細くする・像の係数を壊す・$D_T$ を 3% 狭める）を通しています。$\beta > 128$**（格子間隔 0 の極限）は閉じていません**。ここで鎖が閉じるのは一枚の重みが一段で一枚の重みに戻る模型だからで、四次元の格子の閉じ方について何も含意しません。$U(1)$ でも同じ形で強結合へ流れるので、非可換性の検査にもなりません。

**この鎖は四次元へ継がれない — 挟み込みとの関係**。四次元の Wilson の作用から出発し、Migdal–Kadanoff の像を一律に縮めた代表の列（Tomboulis の挟み込み）を経て上の鎖に乗せる筋は、二か所で切れます 読 。(i) 挟み込みで証明があるのは、分配関数という一つの数の上下の不等式です（上界は Migdal–Kadanoff の間引きで、並進不変性と凸性による。群の性質は使わない。下界は鏡映正値性による） 典 。捩れのある分配関数と無い分配関数を同じ代表（共通の補間母数）で表す段は証明されていません（K. R. Ito と E. Seiler の指摘） 典 。この段は $U(1)$ で偽にならなければならず、非可換の入力が要ります（27-02 の繰り込みの比較の真ん中と同じ場所）。(ii) 代表は像を一律に縮めたもので、縮めると横の座標が $(5/3)(1 - \alpha)$ 以上押し上がり 初 （Lean：`shrink_shift_lower`、仮定 $0 < \alpha$・$q \ge 3$）、上の管に残るには $1 - \alpha$ が帯の側の管で $10^{-2}$ の桁、紫外の管で $10^{-7}$ の桁以下でなければなりません 読 。

挟み込みの議論が要る「$\alpha$ を 1 から離す」工夫と両立しません。小さな箱（$4^4 \to 2^4$・$8^4 \to 4^4$、$\beta \in \{2, 4, 8\}$、Metropolis）で同じ観測量の一段の挟み込みを測ると、$SU(2)$ と $U(1)$ の 12 行全てで成り立ち、群を区別しません 読 。したがってこの鎖は階層模型の中の定理で、四次元の格子への継ぎ目にはなりません。

**比べる相手を固定した一段の不等式の案の注。**帯の繰り込みの比較の真ん中の候補の一つに、Migdal–Kadanoff の一段の像の弦の張力が本当の粗い理論の弦の張力を超えない $\sigma[T_{\mathrm{MK}} w] \le 4\sigma[w]$ があります 仮 （どの $\beta$ でも示していない）。軌道 $w_k = T_{\mathrm{MK}}^{k} w$ の各段で使えば、写像の単調性なしに $\sigma[w] \ge 4^{-k}\sigma[w_k]$ が出ます 初 （有限の帰納。Lean：`orbit_lower`・`lower_bound_four`、一段の不等式は仮定）。有限の箱で試すには注が二つ要ります。(i) 捩れの自由エネルギー $\Delta F = -\ln(Z^{-}/Z^{+})$ は弦の張力の双対で、閉じ込めで 0 に向かいます。$\sigma \cdot A$ に当たるのは $-\ln\tanh(\Delta F/2)$ で、本当の一段は箱の上で $\Delta F$ を保つ（捩れの偶奇はブロック化で保たれる）ので、張力の比 4 と面積の比 $1/4$ が打ち消し、一段の不等式の閾は 4 でなく 1、すなわち $R := \Delta F(2^4; T_{\mathrm{MK}} w)/\Delta F(4^4; w) \ge 1$ です 初 （定義からの恒等式）・ 典 （双対の読み）。(ii) $4^4$ と $2^4$ の周期の箱では、$SU(2)$ の Wilson 出発の一段（$\beta = 1.5$・$2.0$・$2.3$）でも、Migdal–Kadanoff の形に乗った軌道の一段（実効の $\beta$ で 2.47 から 2.19）でも $R \ge 1$ で、最も近い行で $R = 1.34(7)$（保守的な下限 1.19、独立な種二本）でした 読 （Metropolis・多段の BAR・捩れ $n_{01} = 1$）。ただし何もしない写像も同じ箱で通る（$\beta = 2.3$ で $R = 2.46$）弱い検査です。同じ軌道の一段を $6^4$ と $3^4$ に上げると $R = 1.17(20)$、Wilson の $\beta$ に換算した余裕は $4^4/2^4$ の $0.15$ から $0.02(2)$ に縮み（実効の $\beta = 2.8$ の点で $R = 0.97(10)$）、**測り方の分解能の内で、判定しません** 読 （統計誤差で。$\Delta F$ の測り方に符号の揃わない 0.1〜0.25 の系統の床があり、原因は特定していない）。不等式が破れている証拠も、帯の中で成り立つ側の数の裏付けもありません。$2^4$ の箱の 7% の離散化が最初の余裕の大部分を作っていた可能性があります。$U(1)$ でも一段では同じ向きで（$\beta = 1.3$ で $1.265(19)$）、群を区別する破れは一段の小さな箱には現れません 読 （Wilson から一段の Migdal–Kadanoff の像は実効の $\beta$ を上げるので、転移を跨ぐ段がそもそも無い。Bessel の勘定）。この注は上の「四次元へ継がれない」を変えません。

**問い。**この章から出る問いを三つ置きます（番号は第 15 部の通し。索引は 15-09）。

表 2　階層模型から出る問い

| 問 | 問い | 大きさ | 決着したら動くもの | 決着しても動かないもの |
|---|---|---|---|---|

| 問 | 問い | 大きさ | 決着したら動くもの | 決着しても動かないもの |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 階層模型の管の不変性と引き寄せる曲線を $\beta > 64$ へ延ばす（$\beta \le 64$ から下は帯の側まで鎖が継がれた。残る穴は上端だけ）。**答え（一部）：**管は $\beta \le 128$ まで（6277 区間）、鎖は $\beta \le 128$ から 1137 段。残る穴は $\beta > 128$ と、$[64, 128]$ の曲線：大きな $\beta$ の漸近の評価（誤差の定数つき）と区間演算の範囲を継ぎ目なくつなぎ、$\beta \to \infty$ までの一様な文にする（管の中心を熱核でなく $\mathrm{HK} \cdot e^{\theta^4/3600}$ に取り直す案がある） | 紙と計算機援用 | 階層模型の紫外の制御が格子間隔 0 まで閉じる | 四次元の格子の紫外の制御（多リンク・張り替え・大きな場が無い模型なので） |
| 5 | 階層模型の曲線の上で、層の外の曲率の下界 $\kappa/\beta \ge A(h) - C/\beta$ と層の重さ $\le Ce^{-c\beta}$ を区間演算で確かめ、あわせて $c_* = 1/60$ を $1/48$ から分ける。**答え（一部）：**半径を $10^{-4}$ に絞った管 $U_\sigma$ の上で $(\beta - \beta' - \frac{1}{4})\beta \in [0.0151, 0.0188]$（五か所の 50 区間）。曲線が $U_\sigma$ に入ることと曲率・層の重さは未 | 計算機援用 | 表 1 の「仮」の行と、結合の流れの二項目の係数 | 同上 |
| 31 | 取り直した管 $U_\sigma$（$R = 10^{-4}$・$A = 0$）を区間の幅 0.02 のまま $[15.26, 128]$ の全体で通し（判定に $\delta s$ の三次の項を足して剰余を横の部分だけにする）、$[64, 128]$ でグラフ変換の入力を取って、曲線が $U_\sigma$ に入ることと曲線の上の $c_*$ の包みを条件なしの計算機援用の文にする。あわせて $\beta \ge 128$ を一つの漸近の区間で覆う | 計算機援用と紙 | 表 1 の $c_*$ の行の条件と $\beta > 128$ の穴 | 同上 |

06

## この類で言えること

表 3 は、三つの最小の系で分解の各部品がどう見えるかを並べたものです。

表 3　三つの最小の系と分解の部品（どれも一枚の重みに当てる写像。四次元の超立方格子の一段ではない）

| 系 | 類 | 結合の流れ | 横の縮み $\lambda$ | 源 | 剰余の扱い |
|---|---|---|---|---|---|
| 一リンクの熱核の畳み込み | 熱核 $\{p_\tau\}$（母数一つ） | $\tau \mapsto \tau + t$ 初 | —（外れる向きが無い） | 0 初 | 剰余 0・望遠鏡和 |
| 二次元の開いた帯（二枚をまとめる） | 熱核の類（固定の形は熱核） | $\beta \mapsto \beta/2$ | $1/4$ 初（鞍点の主項） | 0 初 | Wilson 出発の外れは縮むだけ |
| Migdal–Kadanoff（$d = 4$・$b = 2$） | 不変な曲線 $\mathrm{HK} \cdot e^{\theta^4/3600 + \theta^6/963900 + \cdots}$ | $\beta \mapsto \beta - \frac{1}{4} - c/\beta$、曲線の上で $c_* = \frac{1}{60}$ 初（主項） | $1/16$（$\theta^4$）・$1/256$（$\theta^6$）初（主項）、管の上で $< 1$（$\beta \in [5.88, 64]$）機 | $1/3840$（$\theta^4$）初（主項） | 曲線に $\Lambda \le 0.735$ で寄る（$\beta \in [15.26, 64]$）機。管は $\beta \in [2.46, 128]$ で不変 機 |

表 3 から読むこと 読 。15-03 の類が閉じる条件の類は、熱核の類そのもの（剰余 0）か、熱核から $O(1)$ の形だけずれた不変な曲線（剰余は横の縮みで上限に押さえられる）で、どちらも母数は結合ひとつです。源は平行に束ねる操作から、縮みは直列にまとめる操作から来ます。二次元の開いた帯には平行に束ねる操作が無いので源がなく、Migdal–Kadanoff にはあります。四次元の格子の一段にはどちらの操作も入り、しかも多リンクの結合が生まれます。その最小の系が 15-05 の束の網です。

07

## 言えないこと

(a) この章の結果は全て一枚の重みに当てる写像（一リンクの熱核の畳み込み・二次元の開いた帯・階層格子の写像）の文で、多リンク・プラケットの間の結合・ゲージの張り替え・大きな場を含む四次元の一段には何も含意しません。

(b) 一リンクの熱核の類の曲率の形 (2) は、登録した $\beta$ と $t$ の範囲の数値の読みです。

(c) (5)〜(7) と $b^{d-4m}$ は鞍点の主項の見積もりで、揺らぎの高次と像の和の他の項を落としています。誤差の定数は出していません。

(d) 階層模型の管と帯への鎖は $\beta \le 128$、引き寄せる曲線は $\beta \le 64$ の有限の範囲の計算機援用の文で（鎖の帯の側は先行の記録の証明書をそのまま使う）、格子間隔 0 の極限（$\beta \to \infty$）は閉じていません。層の外の曲率と層の重さは区間演算で確かめていません。$c_{*}$ の包みは取り直した管の上の五か所の区間だけの文で、曲線がその管に入ることは示していません。

(e) 階層模型は $U(1)$ でも閉じ込めが起きるので、ここで閉じたことは非可換性の検査になりません。$c_{*} = 1/60$ を四次元の二ループの係数と比べることはしていません。

(f) §05 の鎖が四次元へ継がれないことは、挟み込みの原典の照合（未証明の段の位置）と小さな箱の観測量の数からの読みです。挟み込みの代表の $1-\alpha$ の大きさは測っていません。

(g) §05 の比べる相手を固定した一段の不等式の案の注は、$4^4/2^4$ と $6^4/3^4$ の周期の箱の Monte Carlo の数（後者は余裕が分解能の内で判定しない。$\Delta F$ の方法の系統の床は原因未特定）と、閾の訂正（定義からの恒等式と双対の読み）です。どの $\beta$ でも一段の不等式を示していません。同じ箱で何もしない写像も通るので、数は「破れが見えなかった」以上のことを言いません。$2^4$ の離散化だけで 7% ほどの系統があります。

08

## 五分類の表と依存グラフ

表 4　この章の行（この章の行に Lean の欄はありません）

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 |
|---|---|---|---|---|
| [01] | 熱核の類は半群で閉じ、量はその時点の母数の関数で、段の変化は望遠鏡和 | 初 | §01（半群の性質） | 一リンク・熱核の族の中 |
| [02] | 割った座標の層の外の曲率は正で $\kappa/\beta = A + B/\beta$。四次元の一段で $O(1/\beta^2)$ | 読 | §01（二つの独立な実装） | 一リンク・$SU(2)/\mathbb{Z}_2$・層の外・$\beta \in \{2,\dots,8\}$・$t \le 0.5$ |
| [03] | MK の一段で像は不変な曲線に一段 $1/16$ で寄り、$\beta \mapsto \beta - \frac{1}{4} - 0.0215/\beta$ | 読 | §02（同じ系の数値・陰性対照つき） | 一枚の類関数・階層格子・$\beta \le 32$ |
| [04] | 鞍点の見積もり (5)〜(7)：源 $1/3840$・縮み $1/16$・固定点 $1/3600$・$\theta^{2m}$ の縮み $b^{d-4m}$ | 初 | §03（鞍点の主項） | 大きな $\beta$・揺らぎの高次を落とす |
| [05] | 二次元の開いた帯の一段は一リンクの畳み込みで、$\lambda = 1/4$・源なし | 初 ・ 読 | §04 | 軸ゲージ・開いた帯 |
| [06] | 階層模型：管の不変性・点ごとの縮み・熱核の点の結合の流れ | 機 | §05 表 1（区間演算・対照つき） | $\beta \in [2.46, 128]$・$[5.88, 128]$・$[2.5, 128]$、$R = 10^{-3}$ |
| [07] | 階層模型：引き寄せる曲線（比 $\Lambda \le 0.735$） | 機 ・ 初 | §05 表 1（入力は区間演算、グラフ変換の初等の補題） | $\beta \in [15.26, 64]$ |
| [08] | 形の係数の流れ・$c(\sigma) = \frac{1}{48} - 15\sigma$・$c_* = \frac{1}{60}$ | 初 | §05 表 1（主項） | 大きな $\beta$・誤差の定数なし |
| [09] | 曲線の上の層の外の曲率の下界と層の重さ。$\beta > 128$ への延長と $[64, 128]$ の曲線 | 仮 | §05（問い「階層模型の管の延長」・問い「層の外の曲率の区間演算」） | — |
| [10] | 階層模型の鎖：絞った管 $\hat{U}$ が $\beta \in [0.95, 2.46]$ で閉じ、下端の像が帯の管 $D_T$ に入り、$\beta \le 64$ の点は 846 段以内、$\beta \le 128$ の点は 1137 段以内に判定領域 | 機 ・ 初（段数の組み立て） | §05（区間演算・対照つき） | MK の写像・$SU(2)$ の一枚・帯の側は先行の記録・$\beta > 128$ は含まない |
| [11] | この鎖は四次元へ継がれない：挟み込みの未証明の段（共通の補間母数）と、代表が管に残らないこと | 読（縮みの押し上げは 初） | §05 | 挟み込みの原典の照合・$4^4 \to 2^4 \cdot 8^4 \to 4^4$ の観測量・$\beta \in \{2, 4, 8\}$ |

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 |
|---|---|---|---|---|
| [12] | 取り直した管 $U_\sigma$ の上の $c_*$ の包み $[0.0151, 0.0188]$（$1/60$ を含み $1/48$ を含まない） | 機 | §05 表 1（区間演算・独立な位置の空間の求積の照合） | $R = 10^{-4}$・$A = 0$・幅 0.002・五か所の 50 区間・曲線が $U_\sigma$ に入ることは未 |
| [13] | 比べる相手を固定した一段の不等式の案の注：有限の箱の一段の閾は 1（$R \geq 1$）、軌道の一段で $R = 1.34(7)$（$4^4/2^4$）・$1.17(20)$（$6^4/3^4$、分解能の内）、弱い検査で群の区別は一段の箱に現れない | 初（閾の恒等式・有限の帰納）・読（数） | §05 | $4^4/2^4$ と $6^4/3^4$ 周期・Metropolis・BAR・$SU(2)$ と $U(1)$・$6^4/3^4$ では分解能の内で判定しない・一段の不等式はどの $\beta$ でも未 |

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
[01] 初  熱核の類で望遠鏡和                                          ー リンク
[02] 読  層の外の曲率 A + B/β ⟸ [01]                                 ー リンク・登録範囲
[03] 読  不変な曲線・1/16・β の流れ ⟸ [01]                           階層格子・β ≤ 32
[04] 初  源 1/3840・縮み 1/16・1/3600 ⟸ [01]                         鞍点の主項
[05] 初  開いた帯は一リンクの畳み込み ⟸ [01][04]
[06] 機  管の不変性・縮み・β の流れ ⟸ [03][04]                       β ∈ [2.46, 128]
[07] 機  引き寄せる曲線 ⟸ [06]                                       β ∈ [15.26, 64]
[08] 初  形の係数の流れ・c* = 1/60 ⟸ [04]                            主項
[09] 仮  β > 128 と曲率・層の重さ ⟸ [02][07][08]                     問い
[10] 機  絞った管・帯への継ぎ目・846 段・1137 段 ⟸ [06]               β ∈ [0.95, 128]
[11] 読  四次元へ継がれない ⟸ [10]                                   挟み込みの照合・小さ
[12] 機  取り直した管の上の c* の包み ⟸ [06][08]                     五か所・曲線は未
[13] 読  比べる相手を固定した一段の不等式の案の注（閾 1・弱い検査） ⟸ [10][11]
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。[09] は仮定の行で、問いの形です。この章の節点に、四次元の紫外の制御が示されたという節点はありません。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 初 熱核の類の半群と望遠鏡和、MK の一段の鞍点の見積もり（源・縮み・固定点・$b^{d-4m}$・$c_*$）、開いた帯の一段が畳み込みであること | 鞍点の見積もりの誤差の定数 |
| 機 階層模型の管の不変性（$\beta \in [2.46, 128]$）・点ごとの縮み（$[5.88, 128]$）・引き寄せる曲線（$[15.26, 64]$）・熱核の点の結合の流れ・絞った管から帯の側を経て強結合の判定領域までの鎖（$\beta \in [0.95, 128]$、帯の側は先行の記録）・取り直した管の上の $c_*$ の包み（五か所） | $\beta > 128$（格子間隔 0 の極限）。$[64, 128]$ の曲線。層の外の曲率と層の重さの区間演算。曲線の上の $c_*$ の分離 |
| 読 一リンクの曲率の形 $A + B/\beta$、MK の数値（比 16.06・17.00、$\beta$ の流れ）、開いた帯の経路依存の次数 | 多リンク・プラケットの間の結合を含む一段。四次元の格子の一段の源と縮み（15-05） |

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 読 この鎖が四次元へ継がれないこと（挟み込みの未証明の段・管の余白） | 共通の補間母数の非可換の証明。代表の $1-\alpha$ の大きさ |
| 初 比べる相手を固定した一段の不等式の案の閾が有限の箱で 1 であること・一段の不等式からの有限の帰納。読 小さな箱の数 | どの $\beta$ でも一段の不等式。群を区別する段 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| Migdal–Kadanoff の一段の規約と $(1-b^{-2})/3$ | 典 | 18-04 |
| 熱核の半群・望遠鏡和・鞍点の見積もり (5)〜(7) | 初 | この章の本文 |
| 一リンクの熱核の類の曲率 | 読 | 本書の検討の数値の記録（一リンクの類関数を熱核で一段畳み込む計算。指標の級数と位置の空間の二つの実装、陰性対照として割らない $SU(2)$ と $U(1)$） |
| Migdal–Kadanoff の一段の不変な曲線と縮み・開いた帯 | 読 | 本書の検討の数値の記録（一枚のプラケットの類関数に MK の一段を当てる計算。陰性対照として各段で Wilson の係数に取り替えたもの。開いた帯は独立な標本の照合つき） |
| 階層模型の管・引き寄せる曲線・結合の流れの包み | 機 | 本書の検討の計算機援用の記録（区間演算の管・3077 区間・陽性と陰性の対照つき。曲線はグラフ変換の初等の補題） |
| 絞った管・帯への継ぎ目・鎖の段数 | 機・初 | 本書の検討の計算機援用の記録（区間演算・区間の幅 0.002 と 0.001 の重ねた確認・出口の小区間の判定・独立な位置の空間の求積による照合）と、帯の側の先行の記録。段数の組み立ては Lean の束（15-09 表 3、再検査済み） |
| Tomboulis の挟み込みと未証明の段 | 典 | E. T. Tomboulis, arXiv:0707.2179。K. R. Ito, E. Seiler, arXiv:0711.4930・arXiv:0803.3019。T. Kanazawa, Phys. Lett. B 670 (2009) 421, arXiv:0805.2742 |
| 縮みによる横の座標の押し上げ | 初 | この章の本文。代数は Lean の束（15-09 表 3） |
| 管の $[64,128]$ の延長・取り直した管と $c_*$ の包み・鎖の 1137 段 | 機・初 | 本書の検討の計算機援用の記録（同じ判定の本体と自作の区間演算・$[64,128]$ の 3200 区間・$[60,64]$ の 200 区間の一致と二台の照合・陰性対照・取り直した管は五か所の区間だけ・位置の空間の台形則の独立な照合）。段数の組み立ては Lean の束（15-09 表 3、再検査済み） |
| 比べる相手を固定した一段の不等式の案の閾と小さな箱の数 | 初・読 | 本書の検討の記録（自作の Metropolis・捩れの補間の多段の BAR と熱力学積分・独立な種の再走・陽性対照（$U(1)$ の $\beta=4$ の古典の流束・二重の捩れで 0）・陰性対照（速すぎる写像））。帰納は Lean の束（15-09 表 3） |
| 一段の観測量の挟み込みの数 | 読 | 本書の検討の数値の記録（Metropolis・周期・$4^4 \to 2^4$ と $8^4 \to 4^4$・$\beta \in \{2,4,8\}$・$SU(2)$ と $U(1)$・20 区画の誤差） |

**この章で使った語** — 熱核の類・半群・望遠鏡和・Migdal–Kadanoff の一段（ボンド移動・決定化）・不変な曲線・横の縮み $\lambda$・源・釣り合い・管・引き寄せる曲線。意味は A-02 用語集

にあります。

次に読む章：15-05 束の網の定理 — 多リンクの最小の系で、源と縮みの二つの数がどう決まるか。

# 束の網の定理 — 横の縮みと母数の流れを一つの射影で

この章は本書の検討です。§08 は未解決の地図です。

この部は、本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた記録です。存在そのものは第二巻の第 6〜13 部を、二つの設計の違いは第 14 部を見てください。部の位置づけは 15-00 にあります。

**この章で分かること** — 粗い一枚のループ $W$ の角 $\theta$ を固定し、可換な配位に制限して木の水準の作用 $\sum_p \phi_p^2/2$ を最小にすると、最小点はただ一つで $\phi = \theta f$、$f = Ps/\|Ps\|^2$（$s$ は $W$ を縁にもつ面、$P$ はリンクから来るプラケットの角の空間への直交射影）であること（単位の束の定理）。そこから、粗い結合の比 $\beta'/\beta = \sum f^2$、細かい四次の項が粗い四次の項に写る倍率 $\sum f^4$、熱核の類からの外れの一段の倍率（横の縮み）$\lambda = \sum f^4 / \sum f^2$ が全て決まり、$\lambda \le \max f^2$ が一行で出ること。三次元の自由境界の箱では $\sum f^2$ は抵抗網の実効抵抗です。箱の大きさ・境界・粗い面の大きさを変えた数の表、粗い面を大きくすると作用が周に沿って払われること、本当の二段と反復の二段が合わないこと、全ての粗い面を同時に固定した網（束の網の定理）では縮みが行列になり粗い向きで $1/16$ を超えること、を条件つきで並べます。

**前提となる章** — 15-00 §01（段・同じ形）・15-03 §02（分解の言明）・15-03 §04（横の縮みの帳簿）・15-04 §02（Migdal–Kadanoff の一段と $1/16$）。線形代数（直交射影・Cauchy–Schwarz）と、電気回路の Kirchhoff の法則を使います。

**先に言うこと** — この章の数は全て**一つの粗い面の周辺分布で見る一段（本当のブロック化の一段ではない）**の数で、§07 だけが「全ての粗い面を同時に固定した一段」です。単位の束の定理・束の網の定理は**可換な配位に制限した木の水準（$\beta \to \infty$ の主項）**の文で、非可換な配位を含めた最小・一ループの補正（源）・大きな場・ゲージの張り替えは含みません。源の数は熱核出発・単一の像・$\beta \to \infty$ の一ループの数値です。この章は紫外の制御を示しません。

この章の順序

1. 設定 — 可換な配位・射影 $P$・単位の束
2. 単位の束の定理 — 最小点・$\beta'/\beta = \sum f^2$・四次の写り・$\lambda$（式 (2)〜(6)）
3. 三次元の自由境界は抵抗網 — 手で解く $2 \times 2 \times 1$
4. 不等式 — 包含の単調性・$1/(16d-8) \le \lambda \le 1/16$
5. 箱の表（表 1）
6. 粗い面を大きくする — 周の型・本当の二段と反復の二段（表 2・表 3）
7. 全ての粗い面を固定した網 — 束の網の定理・その局所の形と $\ell^4$ の錐の一段の縮み・尾の型（表 4・表 5）
8. 分解への含意と問い（表 6）
9. 言えないこと
10. 五分類の表と依存グラフ（表 7）

00

## この章で分かること

- 可換に制限した木の水準では、粗い一枚の角を固定した最小の配位は射影 $P$ と単位の束 $f$ だけで決まり、$\beta'/\beta$・四次の写り・横の縮み $\lambda$ がそこから全て出ます（単位の束の定理、§02）。
- $\lambda \le \max f^2$ で、粗い面の 4 枚が対称に $\frac{1}{4}$ を運ぶ箱では $1/(16d-8) \le \lambda \le 1/16$。Migdal–Kadanoff の $1/16$ はこの上端です（§04）。
- 箱を広げる・周期にする・格子に埋めるほど $\sum f^2$ は上がり $\lambda$ は下がります。四次元の格子に埋めた粗い面 $2\times2$ で $\sum f^2 \approx 0.73$・$\lambda \approx 0.026$・源 $\approx 5\times10^{-4}$ です（§05）。
- 粗い面を $4\times4$ にすると $\sum f^2$ は $0.29$〜$0.31$ に下がり、反復の $(0.72)^2$ より小さい。作用は周に沿って払われ、源は $\approx 8\times10^{-3}/L^4$ で薄まります（§06）。
- 全ての粗い面を同時に固定すると、粗い作用はプラケットの作用に留まらず、四次の写りは行列になり、粗い向きでは $1/16$ を超えます（束の網の定理、§07）。
- 局所の代表を使うと体積に一様な上界が得られ（束の網の定理（局所の形））、四次元では行をその $\ell^1$ ノルムで重みづけた補間で、$\beta_0' = 1$ の規格の倍率が $0.823$ 以下になります（数は計算で、区間の評価ではない）。向きごとの規格の倍率は縮みの量ではなく、規格は長波長の結合で割る形に固定します。$\ell^4$ の錐の一段の縮みは一段目に限り、多段にはブロック化の条件が要ります（§07）。

01

## 設定 — 可換な配位・射影・単位の束

**格子**。$d$ 次元の箱 $[0,n_1]\times\cdots\times[0,n_d]$ の立方複体（**自由境界**）か、$d$ 次元のトーラス（**周期**）をとります。$C_k$ を $k$ 次元の胞体（$C_1$ はリンク、$C_2$ はプラケット、$C_3$ は立方体）の上の実数値の関数の空間とし、内積は各胞体の値の積の和、$d : C_1 \to C_2$ をリンクの角からプラケットの角を作る写像（余境界）とします。

**可換な配位**。$SU(2)$ の全てのリンクを一つの向き（$\sigma_3$）の回転に制限し、リンクの角 $A \in C_1$ で書くと、プラケットの角は $\phi = dA$ です。熱核の単一の像の作用は $\beta\sum_p \phi_p^2/2$、Wilson の作用は $\beta\sum_p(\phi_p^2/2 - \phi_p^4/24 + \cdots)$ です（15-04 §01 と同じ規約）。

**粗い一枚**。粗いループ $W$（例：$2\times2$ の正方形の外周の 8 本）と、$W$ を縁にもつ面 $s \in C_2$（その正方形の 4 枚、係数 $\pm1$、台を $S$ と書く）をとります。$W$ のホロノミーの角が $\theta$ という拘束は $\langle s,\phi\rangle = \theta$ です。

**許される場と射影**。$\mathcal{A} := \operatorname{im} d \subset C_2$ をリンクから来るプラケットの角の空間とし、$P$ を $\mathcal{A}$ への直交射影、$u := Ps \neq 0$ とします。自由境界の箱は可縮なので $\mathcal{A}$ は「各立方体の上の向きつきの和が 0」の空間に一致し、周期では座標の 2-トーラスを貫く束が 0 という条件が加わります 初 。

$$f := \frac{Ps}{\|Ps\|^2}, \qquad \mathcal{A}_0 := \{\psi \in \mathcal{A} : \langle s,\psi\rangle = 0\} \tag{1}$$

と置き、$f$ を**束**と呼びます。$f \in \mathcal{A}$、$\langle s,f\rangle = 1$（単位の束）、$f \perp \mathcal{A}_0$ です。

この章の「一段」は、粗い一枚の角 $\theta$ を与えて残りの全ての自由度を積分した $\theta$ の分布（周辺分布）を、次の段の一枚の重みと読むことです。一つの粗い面の周辺分布で見る一段で、本当のブロック化の一段ではありません（粗い格子の全ての面の結合分布は §07 で一部だけ扱います）。

02

### 単位の束の定理 — 最小点と、三つの比

**単位の束の定理（可換に線形化した格子ゲージ作用の、木の段のブロック化を流れの網として書いた論文の Theorem F）**。上の設定で、条件 (a) 可換な配位に制限、(b) $\beta \to \infty$ の主項（木の水準。一ループの補正と $O(1/\beta)$ は含まない）、(c) 自由境界か周期かは固定、の下で次が成り立つ 初 。

- (i) 各 $\theta$ について $\min\{\tfrac12\|\phi\|^2 :\ \phi \in \mathcal{A},\ \langle s,\phi\rangle = \theta\}$ の最小点はちょうど一つで $\phi^{*} = \theta f$、最小値は $\theta^2/(2\|u\|^2)$。
- (ii) 作用 $\beta\sum\phi^2/2$ の粗い作用は $\beta'\theta^2/2$ で

$$\frac{\beta'}{\beta} = \sum_{p} f_p^2 = \frac{1}{\|Ps\|^2}. \tag{2}$$

  下界 $\sum f^2 \ge 1/|S|$ が成り立つ。上界「$\sum f^2 \le 1$」は無条件ではない（$|S|=1$ で、そのプラケットが立方体の面なら $\sum f^2 > 1$）。
- (iii) 細かい作用を $V(\phi) = \sum_p(\beta\phi_p^2/2 - \sigma\phi_p^4)$（$\sigma \ge 0$、Wilson なら $\sigma = \beta/24$）とし、局所の粗い作用 $S'_r(\theta) := \inf\{V(\theta f + \psi) :\ \psi \in \mathcal{A}_0,\ \|\psi\| \le r\}$ を置く。$m := \max_p |f_p|$、$\|f^3\| := (\sum_p f_p^6)^{1/2}$ とし、$\sigma(6\theta^2 m^2 + 4|\theta| m r + r^2) \le \beta/4$ なら

$$\frac{\beta\sum f^2}{2}\theta^2 - \sigma\sum f^4\,\theta^4 - \frac{16\sigma^2\|f^3\|^2}{\beta}\theta^6 \ \le\ S'_r(\theta) \ \le\ \frac{\beta\sum f^2}{2}\theta^2 - \sigma\sum f^4\,\theta^4. \tag{3}$$

  すなわち粗い作用の $\theta^4$ の係数は**ちょうど** $\sigma' = \sigma\sum f^4$（$\theta^6$ 以上を除く）。
- (iv) 規格化した四次の外れ $\kappa := \sigma/\beta$ は一段で

$$\kappa' = \kappa \cdot \lambda, \qquad \lambda := \frac{\sum_p f_p^4}{\sum_p f_p^2} \tag{4}$$

  に写り、

$$\frac{1}{|S|^3\sum_p f_p^2} \ \le\ \lambda \ \le\ \max_p f_p^2. \tag{5}$$

**証明**。(i) $\phi \in \mathcal{A}$ なら $P\phi = \phi$ と $P$ の自己共役から $\langle s,\phi\rangle = \langle Ps,\phi\rangle = \langle u,\phi\rangle$。Cauchy–Schwarz で $\theta^2 \le \|u\|^2\|\phi\|^2$、よって $\|\phi\|^2 \ge \theta^2/\|u\|^2$。$\phi = \theta u/\|u\|^2 = \theta f$ は $\mathcal{A}$ に入り拘束を満たして等号を与える。拘束の集合は中点で閉じ、その上の $\|\phi\|^2$ は平行四辺形の恒等式で狭義凸なので最小点は一つ。$\psi \in \mathcal{A}_0$ なら $\langle f,\psi\rangle = \langle u,\psi\rangle/\|u\|^2 = \langle s,\psi\rangle/\|u\|^2 = 0$。

(ii) 最小値 $\beta\theta^2/(2\|u\|^2)$ と $\sum f^2 = \|u\|^2/\|u\|^4$ から (2)。下界は $\langle s,f\rangle = \sum_{p\in S} s_p f_p = 1$ に Cauchy–Schwarz。$|S|=1$ なら $s$ 自身は閉じていない（立方体の境界の和が 0 でない）ので $u \ne s$、$\|u\| < \|s\| = 1$、$\sum f^2 > 1$。

(iii) 拘束を満たす $\phi$ は全て $\theta f + \psi$（$\psi \in \mathcal{A}_0$）と一意に書ける。上界は $\psi = 0$。下界：$f \perp \psi$ から $\sum(\theta f+\psi)^2 = \theta^2\sum f^2 + \|\psi\|^2$。四次を展開して $|\sum f^3\psi| \le \|f^3\|\|\psi\|$、$\sum f^2\psi^2 \le m^2\|\psi\|^2$、$|\sum f\psi^3| \le mr\|\psi\|^2$、$\sum\psi^4 \le r^2\|\psi\|^2$ で押さえると、$x = \|\psi\|$、$a = 4\sigma|\theta|^3\|f^3\|$ として $V(\theta f+\psi) \ge$ (右辺) $+ \tfrac{\beta}{4}x^2 - ax \ge$ (右辺) $- a^2/\beta$。

(iv) 粗い作用は $\beta'\theta^2/2 - \sigma'\theta^4 + O(\theta^6)$ の同じ形なので $\sigma'/\beta' = (\sigma/\beta)\sum f^4/\sum f^2$。右の不等式は $f_p^4 \le (\max f^2) f_p^2$ を足したもの。左は冪平均 $(\sum_S g)^4 \le |S|^3\sum_S g^4$（$g_p = s_p f_p$、Cauchy–Schwarz を二度）と $\sum_S g = 1$ から。∎

単位の束の定理の (iv) の意味。同じ $\beta'$ に来た二つの重み（Wilson 出発の $\kappa = 1/24$ と熱核出発の $\kappa = 0$）の $\theta^4$ の係数の差は、$\beta'$ で規格化して一段で $\lambda$ 倍になります。これが 15-03 §04 の帳簿の横の縮みの主項です。有限の $\beta$ で測った全変動距離の比（$2\times2\times1$ で $\beta_T = 1,2,3,4$ に 0.0443・0.0451・0.0463・0.0469）が $7/144 = 0.0486$ に下から近づくことと合いますが、全変動距離の比が $\lambda$ に収束することは示していません 読 。

03

## 三次元の自由境界は抵抗網

自由境界の箱では $\mathcal{A}$ の直交補空間は 2-輪体で、箱が可縮なので立方体の境界の和に一致します。よって $\|Ps\|^2 = \min_c \|s - \partial c\|^2$（$c$ は立方体の上の関数、Dirichlet の原理）です [初]。三次元では立方体を節点、内部の面を抵抗 1 の辺、$S$ の面を電源 S への辺、それ以外の外面を流し口 T への辺とする**双対の抵抗網**を考えると、$\phi \in \mathcal{A}$ は各立方体で向きつきの和 0（Kirchhoff の電流則）、拘束は S から T への電流の量が $\theta$ であることで、$\sum f^2$ は S と T の間の実効抵抗、$f$ は単位の電流です（Thomson の原理）[典]（電気回路の標準の事実の言い換え）。

**例：$2 \times 2 \times 1$ の板**。各立方体が下面から電流 $\frac{1}{4}$ を受け、外周の側面 2 枚（並列で抵抗 $\frac{1}{2}$）と上面（抵抗 1）へ流します。柱の抵抗は $1 + (\frac{1}{2} \parallel 1) = \frac{4}{3}$、四本並列で

$$\sum f^2 = \frac{1}{3}, \qquad \sum f^4 = 4 \cdot \frac{1}{4^4} + 12 \cdot \frac{1}{12^4} = \frac{7}{432}, \qquad \lambda = \frac{7}{144} \tag{6}$$

[初]。束は下面 $\frac{1}{4}$、上面と外周の側面 $\frac{1}{12}$、内壁 0 です。四次元では網は立方体でなく 3-胞体の上の電位になり、絵は描きにくくなりますが、射影の式 (1) は次元に依らずそのまま使えます。

04

## 不等式 — 包含の単調性と、縮みの両側

**(a) 包含の単調性**。$W$ を含む複体 $K \subset K'$ について $\sum f^2(K) \le \sum f^2(K')$ [初]。証明：$K'$ の上の配位を $K$ に制限しても $W$ のホロノミーは変わらず、作用（非負の項の和）は減るので、最小は大きい複体の方が大きい。∎ 三次元では Rayleigh の単調性（自由境界の箱は、周りの立方体を流し口に短絡したもので、短絡は実効抵抗を下げる）と同じ内容です。だから**自由境界の小さな箱は $\beta'/\beta$ を小さく見せる**。

**(b) 縮みの両側**。粗い面の 4 枚が対称に $f = \frac{1}{4}$ を運ぶとき（粗い面のまわりの 90° 回転で箱が不変なとき。表 1 の全ての箱でそうなる）、$\sum f^4 \ge 4 \cdot 4^{-4} = \frac{1}{64}$。さらに試しの配位「$W$ の 8 本に $\theta/8$ ずつ、他は 0」は粗い面の各面に $\theta/4$、$W$ の各リンクを含む他の $2d-3$ 枚に $\theta/8$ を与えるので、Thomson の不等式（単位の束の定理の (i)）から、**どの箱でも（無限の格子でも）** $\sum f^2 \le \frac{1}{4} + \frac{2d-3}{8}$。合わせて

$$\frac{1}{16d-8} \;\le\; \frac{1}{64 \sum f^2} \;\le\; \lambda \;\le\; \max f^2 = \frac{1}{16} \tag{7}$$

[初]（右の等号 $\max f^2 = \frac{1}{16}$ は最大の束が粗い面にあるときで、計算した全ての箱で確かめたが一般の証明は無い [読]）。四次元で $1/56 \le \lambda \le 1/16$、三次元で $1/40 \le \lambda$。等号 $\lambda = 1/16$ は束が $\frac{1}{4}$ の面だけに乗るときで、Migdal–Kadanoff の 16 枚（15-04 §02）がちょうどこれです。**粗い面が細かい面 4 枚でできる型の一段では、Migdal–Kadanoff の $1/16$ が横の縮みの上端**で、並列の道があるほど束は薄く分かれ $\lambda$ は小さくなります。

計算した箱では $\lambda \cdot \sum f^2 = \sum f^4$ は $1/64$ の 1.04〜1.22 倍に留まり、$\lambda$ の動きはほぼ分母 $\sum f^2$（不変な曲線の傾き）の逆数で決まります [読]（観察）。

05

## 箱の表

表 1 は、粗い面 2×2 の一段の三つの数を箱ごとに並べたものです。$\sum f^2$ と $\lambda$ は束の網の主項（三次元の自由境界と外周だけ自由の箱は有理数で二つの定式化が一致 [初]、四次元と周期は浮動小数で二つの定式化が $10^{-12}$ 程度で一致 [読]）、源は熱核出発・単一の像・$\beta \to \infty$ の一ループの $\theta^4$ の係数の数値です [読]。「外周だけ自由」は板の外周の外面

だけを自由境界にし、粗い面のまわりに立方体を残したもの、「内部」は粗い面を箱の内部に埋めたもの、「周期」は粗い面を一枚だけ固定し他の面は自由にしたトーラスです。

表 1　粗い面 2×2 の一段の三つの数（$SU(2)$・可換に制限した木の水準＝$\beta\to\infty$ の主項・一つの粗い面の周辺分布。源は熱核出発・単一の像・$\beta\to\infty$・一ループ）

| 系 | $\sum f^2=\beta'/\beta$ | $\lambda=\sum f^4/\sum f^2$ | 源 $\sigma$ | 照合と注 |
|---|---|---|---|---|
| 二次元の開いた帯（二枚を直列にまとめる） | $1/2$ | $1/4$ | $0$ 初 | 直列（畳み込み）だけなので熱核の類に閉じる |
| Migdal–Kadanoff（$d=4$・$b=2$） | $1$ | $1/16$ | $1/3840\approx 2.60\times10^{-4}$ | 階層格子の写像。束 $\frac14$ の面 16 枚（15-04） |
| 三次元 $2\times2\times1$・自由境界 | $1/3$ | $7/144\approx0.0486$ | $4.11\times10^{-4}\approx1/2433$ | 源は指標の有限和の外挿と一ループが 4 桁で一致。全リンクの熱浴 Monte Carlo と指標の有限和が $\beta=4$〜$32$ で $\le 1.7\sigma$ |
| 三次元 $2\times2\times2$・自由境界 | $15/44$ | $5079/106480\approx0.0477$ | $4.65\times10^{-4}\approx1/2149$ | 一ループは二実装（有限差分と解析の Hessian）。Monte Carlo と $\beta=16,32$ で $\le 0.96\sigma$ |
| 三次元 $2\times2\times3$・自由境界 | $14/41$ | $\approx0.04765$ | $4.71\times10^{-4}$ | 一ループは一実装 |
| 三次元 $2\times2\times\infty$ | $(1+\sqrt3)/8\approx0.3415$ | $\approx0.04764$ | $\approx4.72\times10^{-4}$ | $\sum f^2$ は梯子の式 $R=\frac12\parallel(1+R)$ から 初 。源は三点からの見立て |
| 三次元 $4\times4\times2$ の中央・外周だけ自由 | $1023/2815\approx0.3634$ | $\approx0.04466$ | $6.13\times10^{-4}\approx1/1630$ | 束は三つの実装で一致。一ループは二実装が相対 $1.4\times10^{-5}$ |
| 三次元 厚さ 2 の板を広げる（$6\times6\times2$・$8\times8\times2$・…） | $0.3664\to0.36680$ | $0.04430\to0.04425$ | $6.41\to6.45\times10^{-4}$ | $4\times4\times2$ で極限の 1%（束）・5%（源）以内。源の極限は見立て |
| 三次元 $4^3$・$6^3$ の内部（粗い面を箱の中の平面に） | $0.4669$・$0.4760$ | $0.0361$・$0.0355$ | $1.04\times10^{-3}$・$9.92\times10^{-4}$ | 一ループは一実装。源は箱の大きさについて単調でない |
| 三次元 周期 $4^3$・$8^3$・$16^3$（一枚だけ固定） | $8/15$・$0.4859$・$0.4814$ | $0.0332$・$0.0349$・$0.0352$ | — | 束は二つの定式化。$4^3$ の $8/15$ は 15 桁で一致 |
| 四次元 $2\times2\times1\times1$・自由境界 | $3/7$ | $\approx0.0393$ | $4.68\times10^{-4}$ | 一ループは二実装 |
| 四次元 $2\times2\times2\times1$・自由境界 | $105/241$ | $\approx0.0390$ | $4.80\times10^{-4}$ | 一ループは一実装 |
| 四次元 $2^4$・自由境界 | $180/407\approx0.4423$ | $\approx0.0386$ | $4.86\times10^{-4}\approx1/2058$ | 一ループは二実装が相対 $4.9\times10^{-5}$ |
| 四次元 $4\times4\times2\times2$ の中央・外周だけ自由 | $\approx0.4867$ | $\approx0.0350$ | $5.46\times10^{-4}\approx1/1833$ | 一ループは一実装 |
| 四次元 $4^4$ の内部（開いた箱） | $0.7180$ | $0.0266$ | $4.96\times10^{-4}\approx1/2017$ | 一ループは疎と密の二実装が $\log\det$ で $1.5\times10^{-11}$。$12^4$ の内部で $\sum f^2=0.7301$・$\lambda=0.02645$（束だけ） |
| 四次元 周期 $4^4$・$8^4$・$12^4$（一枚だけ固定） | $16/21$・$0.7315$・$0.7305$ | $0.0264$・$0.02645$・$0.02645$ | — | 束は二つの定式化。$16/21$ は 13 桁で一致 |
| $U(1)$ の Villain（どの箱でも） | 同じ $\sum f^2$ | — | $0$ 初 | $\beta'=\beta\sum f^2$ で閉じ、外れは $e^{-c\beta}$ だけ（Poisson の和） |

表 1 から読むこと 読 。

- **向き**。粗い面のまわりに格子を足すほど（自由境界 → 外周だけ自由 → 内部 → 周期）、$\sum f^2$ は上がり（§04 (a) のとおり）、$\lambda$ は下がります。四次元で $\sum f^2$ は $0.44$（$2^4$）から $0.73$（格子に埋めた極限）へ、$\lambda$ は $0.039$ から $0.026$ へ。自由境界は「束の流し口」を作って $\beta'$ を小さく、$\lambda$ を大きく見せていました。
- **母数の流れ**。$\beta'$ の主項は $\beta\sum f^2$ で、ずれは一ループで $\beta$ に依らない $O(1)$ です（熱核出発）：$2\times2\times1$ で $\beta/3-0.146$、$2^4$ で $180\beta/407-0.258$、$4\times4\times2$ の中央で $1023\beta/2815-0.220$（いずれも $+O(1/\beta)$）。Migdal–

Kadanoff の $-\frac{1}{4}$ と同じ型です。

- **源**。正で $\beta$ に依らない値に収束し、四次元の箱で $4.7\text{〜}5.5\times10^{-4}$（Migdal–Kadanoff の 1.8〜2.1 倍）、三次元の板で $4.1\text{〜}6.5\times10^{-4}$ です。$U(1)$ の Villain では 0：源には、閉じた面の上で二つの円板の重みを掛ける「並列」と、非可換な群の Haar の重み $\theta/\sin\theta$ の両方が要る、と読めます。二次元の開いた領域は直列だけなので源がありません。

06

## 粗い面を大きくする — 周の型と、本当の二段

粗い面を $L\times L$（外周 $W$ は $4L$ 本）に広げます。$L=2$ が一段、$L=4$ は平面の方向の倍率 4 を一度に取る「本当の二段」です。これと比べる「反復の二段」は、一段の写像を粗い格子にもう一度当てる近似（一つの粗い面の周辺分布を次の段の作用として入れ直す）で、$\beta''/\beta=(\sum f_1^2)^2$、$\lambda$ は $\lambda_1^2$、源は $\sigma_1(1+\sum f_1^4)$ と数えます。

**(a) 上界**。試しの配位「$W$ の $4L$ 本に $\theta/(4L)$ ずつ、他は 0」は粗い面の角の 4 枚に $2\theta/(4L)$、辺の $4(L-2)$ 枚に $\theta/(4L)$、中の面に 0 を与え（粗い面の和は 1 で $W$ のホロノミーと合う）、$W$ の各リンクを含む外の面は $2d-3$ 枚以下です。よって $L\ge2$、**どの箱でも（無限の格子でも）**

$$\sum f^2(L)\;\le\;\frac{d-1}{2L}+\frac{1}{2L^2},\qquad \lambda(L)\;\ge\;\frac{L^{-6}}{\sum f^2(L)}\;\ge\;\frac{2}{L^4\big((d-1)L+1\big)} \tag{8}$$

初（右は Stokes で粗い面の $L^2$ 枚の $f$ の和が 1 なことと冪平均から）。四次元で $L=2$ は $7/8$ と $1/56$（§04 と同じ）、$L=4$ は $13/32$ と $1/1664$ です。

**(b) 本当の二段は反復より $\beta$ を大きく下げる**。包含の単調性で四次元の格子に埋めた一段は $\sum f_1^2\ge0.717961$（$4^4$ の内部の値、二つの定式化が一致 読）、よって $(\sum f_1^2)^2\ge0.5155>13/32\ge\sum f_2^2$ 初（入力の 0.717961 は計算の数）。反復は $L=2^k$ について $L^{-0.48}$ 程度でしか落ちず、本当の $L\times L$ は (8) で $O(1/L)$ なので、比は段数とともに 0 に向かいます。**一つの粗い面の周辺分布の $\beta'/\beta$ は四次元で周の型（$O(1/L)$）で落ち、一段の二乗の繰り返しでは表せません**。二次元の平面だけなら両者は一致します（粗い面 4×4 で $\sum f^2=1/16=(1/4)^2$、$\lambda=1/256=(1/16)^2$）。

**(c) 周の型**。計算した四次元の箱では $\sum f^2$ の 44〜51% が「$W$ に接する横の方向の面」（$W$ の 1 本あたり $2(d-2)=4$ 枚）に乗り、この割合は粗い面を 2×2 から 4×4 にしてもほぼ変わりません 読。作用は粗い面の面積でなく $W$ の周に沿って払われる、と読めます。

表 2　一段・反復の二段・本当の二段（四次元・開いた箱で粗い面は内部・可換に制限した木の水準。源は熱核出発・単一の像・$\beta\to\infty$・一ループで、粗い面 4×4 は疎な解析の Hessian の一実装、その経路は小さな系 $4\times4\times1\times1$ で有限差分と相対 $9\times10^{-4}$） 読

| 箱 | 量 | 一段（粗い面 2×2） | 反復の二段 | 本当の二段（粗い面 4×4） | 本当／反復 |
|---|---|---|---|---|---|
| $4^4$（粗い面 4×4 は平面方向で箱の縁） | $\sum f^2$ | 0.7180 | 0.5155 | 0.2564 | 0.50 |
| | $\lambda$ | $2.66\times10^{-2}$ | $7.06\times10^{-4}$ | $2.62\times10^{-3}$ | 3.7 |
| | 源 | $4.96\times10^{-4}$ | $5.05\times10^{-4}$ | $3.70\times10^{-5}$ | 0.073 |
| $6\times6\times4\times4$（平面方向に余白 1） | $\sum f^2$ | 0.7218 | 0.5210 | 0.2895 | 0.56 |
| | $\lambda$ | $2.65\times10^{-2}$ | $7.02\times10^{-4}$ | $2.37\times10^{-3}$ | 3.4 |
| | 源 | $4.89\times10^{-4}$ | $4.98\times10^{-4}$ | $3.30\times10^{-5}$ | 0.066 |
| $12^4$（束だけ） | $\sum f^2$ | 0.7301 | 0.5330 | 0.3060 | 0.57 |
| | $\lambda$ | $2.65\times10^{-2}$ | $7.00\times10^{-4}$ | $2.57\times10^{-3}$ | 3.7 |

表 3　粗い面の辺 $L$ の列（四次元・$(L+2)\times(L+2)\times4\times4$ の開いた箱で粗い面は内部・横の厚さ 4。束は浮動小数、源は一ループの一実装） 読

| $L$ | $\sum f^2$ | (8) の上界 | $\lambda$ | 一ループの $\theta^2$ の係数 $c_2$ | 源 | 源 $\cdot L^4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1（一枚の面） | 1.989 | 2（$L=1$ の試し） | 0.521 | 0.499 | $7.66\times10^{-3}$ | $7.66\times10^{-3}$ |

| $L$ | $\sum f^2$ | (8) の上界 | $\lambda$ | 一ループの $\theta^2$ の係数 $c_2$ | 源 | 源 $\cdot L^4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.7180 | 7/8 | 0.0266 | 0.238 | $4.96\times10^{-4}$ | $7.93\times10^{-3}$ |
| 3 | 0.4190 | 5/9 | 0.00598 | 0.156 | $9.85\times10^{-5}$ | $7.98\times10^{-3}$ |
| 4 | 0.2895 | 13/32 | 0.00237 | 0.116 | $3.30\times10^{-5}$ | $8.46\times10^{-3}$ |

表 2・表 3 から読むこと 読 （四点の観察・横の厚さ 4・一実装）。源は $\approx 8\times10^{-3}/L^4$、$c_2$ は $\approx 0.46$〜$0.50/L$ です。$\theta\sim L^2F$ と読めば $\theta^4$ は次元 8 の演算子で、係数が $L^4$ で落ちるのは Migdal–Kadanoff の $b^{d-8}=1/16$ と同じ数え方に合います。だから本当のブロック化の源は「段ごとに一定の帯で生まれ直す数」ではなく、「最も細かい尺度で生まれた $\theta^4$ のずれが段ごとに約 $1/16$ で薄まる」型に見え、反復の帳簿の固定点 $\sigma/(1-\sum f^4)\approx 5\times10^{-4}$ は、この測り方では上界の側にあります。$\lambda$ は逆に、本当の二段が反復 $\lambda_1^2$ の 3.4〜3.7 倍で、反復は縮みを速く見せます。ただし $2.4$〜$2.6\times10^{-3}\ll 1$ で、帳簿の分母 $1-\lambda$ はほぼ 1 のままです。

07

## 全ての粗い面を同時に固定した網 — 束の網の定理

表 1 の周期の行は「粗い面を一枚だけ固定し、周りの粗い面は自由にした」網でした。本当のブロック化の一段の主項は、格子を $2^d$ のブロックに割り、**粗い格子の全てのプラケットの角を同時に固定した**網で、これは別の網です。この節の条件：可換な配位に制限・木の水準（$\beta\to\infty$ の主項）・周期の格子 $(\mathbb{Z}/L)^d$（$L$ は偶数）・$2^d$ のブロック・粗い角 $\theta_P:=\langle s_P,\phi\rangle$ は粗い面 $P$ を張る $2\times2$ の外周の角の線形化。

**記号**。$S$ を $s_P$ を並べた行列、$D_c$ を粗い格子の余境界、$C$ を粗いリンクの写像（$(CA)_\ell$ は粗いリンク $\ell$ をなす細かい 2 本の角の和）とすると $SD=D_cC$ です。$u_P:=Ps_P$、$G:=SPS^{\mathsf T}$（$G_{PQ}=\langle u_P,u_Q\rangle$）、$B:=G^{+}$（Moore–Penrose の擬逆）、$U$ を $u_P$ を列に並べた行列とします。

**束の網の定理（同じ論文の Theorem G）**。上の条件の下で 初 ：

- (i) 拘束 $S\phi=\theta$（$\phi\in\mathcal{A}$）が空でないのは $\theta\in\operatorname{im}D_c$ のとき、かつそのときだけ（粗い立方体ごとの Bianchi の和 0 と、座標の 2-トーラスを貫く粗い束 0）。とくに**粗い面を一枚だけ捻り他を 0 に保つ $\theta$ は許されない**。
- (ii) $\theta\in\operatorname{im}D_c$ について最小点はただ一つで $\phi^*=F\theta$、$F:=UB$、最小値は $\tfrac12\theta^{\mathsf T}B\theta$。粗い作用は

$$S'(\theta)=\frac{\beta}{2}\,\theta^{\mathsf T}B\,\theta,\qquad \beta'_{PQ}=\beta B_{PQ}\quad(\operatorname{im}D_c\text{ の上の二次形式として}).\tag{9}$$

- (iii) 粗いリンクの変数 $a$ で書くと $\min\{\frac12\|dA\|^2:CA=a\}=\frac12 a^{\mathsf T}Qa$、$Q=D_c^{\mathsf T}BD_c$。Lagrange の未定乗数がそのまま粗い作用の勾配（各粗いリンクの電流の湧き出し）になる。
- (iv) $\theta$ は独立な座標でないので、$B$ の非対角や四次形式の「対角／交差」の成分は表し方に依る。表し方に依らない量は：$\operatorname{im}D_c$ の上の $B$ のスペクトル、向きごとの比 $\beta'(\theta):=\theta^{\mathsf T}B\theta/\sum_P\theta_P^2$、$\mu(\theta):=\sum_q(F\theta)_q^4/\sum_P\theta_P^4$、$\lambda(\theta):=\mu(\theta)/\beta'(\theta)$（単位の束の定理の $\lambda$ の向きつきの版）。
- (v) 全ての $\theta\in\operatorname{im}D_c$ で $\beta'(\theta)\ge\frac14$。

**証明**。(i) $\theta=SDA=D_c(CA)\in\operatorname{im}D_c$。逆に各粗いリンクの一本目の細かいリンクに $a_\ell$、他に 0 を置けば $CA=a$。(ii) 最小ノルムの解は $\operatorname{im}U$ に入り、$\phi=Uc$ で $Gc=\theta$。$\operatorname{im}G=S(\operatorname{im}d)=\operatorname{im}(D_cC)=\operatorname{im}D_c$ なので解があり、$c=B\theta+\ker G$、$U\ker G=0$、$\|\phi^*\|^2=\theta^{\mathsf T}BGB\theta=\theta^{\mathsf T}B\theta$。一意性は単位の束の定理と同じ狭義凸性。(iii) 内側の最小は粗いゲージの向きに不変なので $\theta=D_ca$ を代入し、KKT の条件を読む。(v) 粗い面の 4 枚の組は互いに重ならないので $\sum_q\phi_q^2\ge\sum_P\sum_{q\in s_P}\phi_q^2\ge\sum_P\theta_P^2/4$（各粗い面で Cauchy–Schwarz）。∎

**滑らかな試し**。細かい場が粗い面ごとに $2^d$ 枚のプラケットで同じ値 $\theta/4$ を持つ配位では、エネルギーの比は $2^{d-4}$、$\lambda=1/16$（$d$ に依らない）です 初 （算術）。この配位はトーラスの上で一様にはなれず、波長が長い極限の試しとし

てだけ意味を持ちます。Migdal–Kadanoff（全ての粗い面が独立、$P$ を恒等にしたもの）では $\beta'/\beta = 2^{d-4}$、$\lambda = 1/16$ です。

表 4　全ての粗い面を固定した網の数（$SU(2)$・可換に制限した木の水準・周期・$2^d$ のブロック。二実装（射影と擬逆／粗いリンクの KKT）が $10^{-12}$ 程度で一致。sup は局所の最適化の多点出発で見つけた値＝真の sup の下界）読

| 箱 | $B$ の固有値（$\operatorname{im} D_c$ の上） | 最も長い波長の $\beta'$ | プラケットの作用からの外れ | 一本の粗いリンクの $\lambda$ | 滑らかな向きの $\lambda$ | 見つけた sup $\lambda$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 三次元 $4^3$〜$16^3$ | $[0.25,\ 0.375\text{〜}0.474]$ | $k=\pi/4$ で 0.4744 | 15〜17% | 0.066〜0.068 | $k=\pi/4$ で 0.055 | 0.11〜0.12 |
| 三次元 $48^3$ | $[0.25,\ 0.497]$ | $k=\pi/12$ で 0.4968 | 16% | 0.068 | $k=\pi/12$ で 0.0615 | （最適化なし） |
| 四次元 $4^4$〜$12^4$ | $[0.25,\ 0.536\text{〜}0.811]$ | $k=\pi/3$ で 0.8108 | 24〜27% | 0.085〜0.091 | 0.037〜0.046 | 0.22〜0.27 |
| 四次元 $16^4$ | $[0.25,\ 0.879]$ | $k=\pi/4$ で 0.8786 | 24% | 0.091 | $k=\pi/4$ で 0.047 | （最適化なし） |

表 5　判定：四次元の一段の「本当の数」（条件は表 4 と同じ。一枚固定の行は表 1）

| 網 | $\beta'/\beta$ | $\lambda$（$\theta^4$ の倍率） | 札 |
|---|---|---|---|
| 自由境界の $2^4$ に一枚 | 0.442 | 0.0386 | 初（有理数） |
| 周期の $8^4$ に一枚（他は自由） | 0.731 | 0.0264 | 読 |
| 全ての粗い面を固定・長波長 | $\to 1 = 2^{d-4}$（$k=\pi/4$ で 0.879） | 滑らかな試しで $1/16$。測った $k \ge \pi/4$ では 0.037〜0.047 | 読（試しの値は 初） |
| 全ての粗い面を固定・一本の粗いリンク | 0.354 | 0.091 | 読 |
| 全ての粗い面を固定・最も粗い向き | 0.25（最小の固有値） | 見つけた sup $\ge 0.27$ | 初（$\ge \frac{1}{4}$）・読（sup） |
| Migdal–Kadanoff | 1 | $1/16$ | 初 |

表 4・表 5 から読むこと 読。(1) 粗い作用はプラケットの作用に留まりません。固有値は四次元で $\frac{1}{4}$ から長波長の 1 近くまで広がり、二次の段で既に長さ 2 以上のループの項が生まれます（古典の固定点の作用の二次の部分に当たると思われるが、原典は照合していない）。(2) 長波長の $\beta'/\beta$ は一枚固定の 0.731 より大きく、Migdal–Kadanoff の 1 の側に寄ります。(3) 四次の写りは行列で隣と混ざり、**粗い向きでは $1/16$ を超えます**（一本の粗いリンクで 0.091、見つけた sup で 0.27）。滑らかな向きでは三次元で $1/16$ に向かい（$k=\pi/12$ で 0.0615）、四次元は $k=\pi/4$ まで 0.047 で収束はまだ見えていません。Migdal–Kadanoff の $\lambda = 1/16$ は、本当の一段では長波長の向きの値として残るだけです。(4) 見つけた値は全て 0.3 未満ですが、擬逆の代表 $F$ は非局所で、Riesz–Thorin の上界は箱とともに増え（四次元 $16^4$ で 4.2）、**体積に一様な上界は得ていません**（擬逆の代表で。局所の代表を取ると体積に一様な上界が得られる：下の束の網の定理（局所の形））。だから「横の縮みが 1 より小さい」とは言いません。

行列で書くときの座標の候補。四次の偏差の類を「$|Q(\theta)| \le c \sum_P \theta_P^4$」（$\ell^4$ で押さえられる四次形式）に取ると、木の水準の一段は $c \mapsto c \cdot \sup \mu$ でこの類を保ちます 初（$|Q(F\theta)| \le c \sum (F\theta)^4 \le c \sup\mu \sum \theta^4$）。プラケットの対角の類（Migdal–Kadanoff の類）は保たれませんが、$\ell^4$ の錐は保たれます。

**局所の代表と、体積に一様な上界 — 束の網の定理（局所の形。同じ論文の Theorem G′）**。条件は束の網の定理と同じ（可換に制限・木の水準・周期 $(\mathbb{Z}/L)^d \cdot 2^d$ のブロック・粗い角の線形化）。$F$ は $\operatorname{im} D_c$ の上でしか決まらないので、その外での作用の選び方が「代表」です。擬逆の代表は Hodge の分解そのもので局所でなく、基点を一点に固定した軸ゲージも体積とともに増えます。そこで粗いリンクの変数で書いた核 $R := F D_c$ に目を移します。

- (a) $R$ は局所で（指数的に減衰、測った率は一歩あたり約 2.2〜2.5）、$\operatorname{im} D_c$ の上で $F$ と一致する代表は、$R$ の各行（輪体）の「埋め」$\partial k = r$ と同じものです。各行に、**基点が行とともに動く軸の錐（木）**を当てると、並進に共変で指数的に減衰する代表 $K_\infty$ が得られ、その周期化 $K_L$ は全ての $L$ で $\operatorname{im} D_c$ の上で $F_L$ と一致し、$\|K_L\|_{p\to p} \le \|K_\infty\|_{p\to p}$（$p = 1, \infty$）です 初 （$R$ の指数減衰は Bloch の階数が一定であることからの概略と数値）。
- (b) よって全ての $L$ と $\theta \in \operatorname{im} D_c$ で

$$\sum_q (F_L\theta)_q^4 \;\le\; \Lambda_d \sum_P \theta_P^4, \qquad \Lambda_d := \|K_\infty\|_{2\to 2}^2 \, \|K_\infty\|_{\infty\to\infty}^2 \tag{10}$$

すなわち $\sup \mu$ は体積に一様に有界です 初 （Riesz–Thorin は既知。行と列の $\ell^1$ 和から四次の和へ移す Schur の形は Lean：`schur_quartic`・`representative_bound`、仮定：行と列の $\ell^1$ 和の上界・$\operatorname{im} D_c$ の上での代表の一致）。(c) 四次の偏差の $\ell^4$ の錐は一段で定数を $\Lambda_d$ 倍以下にして写ります 初 （Lean：`cone_step`、仮定 $c \ge 0$・$|Q(\phi)| \le c \sum \phi^4$・$\operatorname{im} D_c$ の上で (10)）。

(d) 数 読 （二実装で行が $3 \times 10^{-15}$ 以内で一致。三次元 $4^3$〜$48^3$・四次元 $4^4$〜$20^4$）：局所の代表の $\|K\|_{\infty\to\infty}$ は体積に一様（三次元 対称化 0.685・木 0.748、四次元 対称化 1.341・木 1.541 に収束）、擬逆の代表は 0.62→1.94（三次元）・0.95→2.39（四次元）と増え、基点を固定した軸ゲージは一歩ごとに 1.12（三次元）・3.08（四次元）ずつ増えます。**三次元では $\Lambda_3 = 0.245$**（対称化）で、長波長の規格 $\beta_0' = \frac{1}{2}$ で $\sup \mu / \beta_0' \le 0.49$、$\beta' \ge \frac{1}{4}$ を使えば $\sup \lambda \le 0.98$ と 1 より小さくなります。**四次元では $\Lambda_4 \approx 1.83$**（$24^4$ の埋めと線の走査からの見積もり）で 1 を超え、$\sup \mu$ の下界は 0.148 です。しかも $\operatorname{im} D_c$ に制限した $\infty \to \infty$ ノルム $\nu_4 \ge 1.18$（$16^4$ の線形計画、表し方に依らない量）から、**どの代表の Riesz–Thorin も 1.39 を下回れません**。四次元で $\sup \mu < 1$ かは未決で、$\ell^4$ を直接に押さえる別の評価が要ります（問い「四次元の $\ell^4$ の直接の上界」）。真の値（$\ge 0.148$）と上界（1.83）の約 12 倍の隔たりは、$\ell^2$ と $\ell^\infty$ の補間の損失です。

**$\ell^4$ の錐の一段の縮み — 四次元の $\ell^4$ の錐は一段で 0.823 倍以下に縮む（$\beta_0' = 1$ の規格）**。Riesz–Thorin の損は、$\infty \to \infty$ を決める行（粗い面に乗る細かいプラケット、96 型のうち 24 型）と、$\ell^2$ を決める向き（長波長に近い）が別であることから来ます。そこで行をその $\ell^1$ ノルム $A_q$ で重みづけて補間すると（Stein の解析族による重みつきの Riesz–Thorin。有限次元のトーラスで使う）、全ての $L$ で

$$\sup \mu \;\le\; \|K\|_{4\to 4}^4 \;\le\; \Lambda_w := \sup_P \lambda_{\max}\big(K(P)^{\mathrm{H}} \operatorname{diag}(A_q^2)\, K(P)\big) \tag{11}$$

が成り立ちます 初 （補間の定理は既知の道具 典 。重み $A_q^2$ はこの族の中で最良）。$\Lambda_w$ を $20^4$ の局所の代表の核で、運動量の格子 $N = 64$ と片側の二次の剰余で上から押さえると $\Lambda_w \le 0.823$ です 読 （計算で、区間の評価ではない。$20^4$ の格子の値 0.763、実空間のべき乗法で下から 0.758、小行列 60 個の判定で上界は破れない）。`cone_step` と合わせると、条件（可換に制限・木の水準・周期・$2^4$ ブロック・線形化した粗い角・$K_\infty$ を $20^4$ の核で置き換える）の下で、**四次の偏差の $\ell^4$ の錐は一段で 0.823 倍以下に縮みます**（$\beta_0' = 1$ の規格のまま）。真の値の下界 0.148 との隔たりは約 12 倍から 5.6 倍に縮みました。距離で近い部分と尾に分ける評価（Minkowski の形は Lean：`quartic_triangle`、仮定 $a, b > 0$・各部分の四乗和の上界）や、符号を見ない評価（Schur・Hölder の族。$|K|$ のノルムの四乗 10.76）は 1 を大きく越え、効いたのは距離でなく行の型の重みでした 読 。**向きごとの規格で測った倍率は縮みの量ではありません**（次の段落）。

**規格の注 — 長波長の結合で割る形に固定する**。錐の定数を段ごとのスカラーの結合（長波長の $\beta_0'$）で割った形の座標 (a) では一段の因子は $\sup \mu / \beta_0' = \sup \mu$、自分の向きの二次形式 $\beta'(\theta)$ で測り直した錐 (b) では因子は $\sup \lambda$、$\lambda :=$

$\mu/\beta'$ です。$\frac{1}{4} \le \beta' \le \beta'_{\max} \le 1$ から $\frac{1}{4}\lambda \le \mu \le \lambda$ で、二つの錐は定数 4 以内で同値です 初 （有限の帳簿。Lean：`ledger`（仮定 $b_{\min}\sum\theta^2 \le \sum\phi^2 \le b_{\max}\sum\theta^2$、$0 < b_{\min}$）・`transfer`・`cone_b_to_a`。上の $\beta'_{\max} \le 1$ は測った値）。**規格を全ての段で一つに固定すれば定数 4 は一度だけ**で、結論は規格に依りません。段ごとに (a) と (b) を取り替えると因子 4 が段ごとに掛かります。実際、体積の極限で $\sup\lambda = 4\sup\mu_{\mathrm{loc}}$ です 初 （混合の極限の補題。粗い $L$ は偶数・$L \to \infty$。有限の台の向き $\theta_{\mathrm{loc}}$ に、$\beta' = \frac{1}{4}$ を達する最も粗い向き $\theta_\pi$ を $\varepsilon = V^{-1/3}$ で混ぜると、$\ell^4$ は局在した向きが、$\ell^2$ は広がった向きが担い、$\lambda \to 4\mu(\theta_{\mathrm{loc}})$。交差項の評価は代表の行の指数減衰による概略）。数でも、$\lambda$ の最適化は $12^4 \cdot 16^4 \cdot 20^4$ で 0.269・0.308・0.338 と体積とともに増え、混合の外挿は 0.395、$4\mu_{\mathrm{loc}}$ は 0.3955 です 読 。したがって **$\lambda$ は向きの縮みの量でなく**、$\lambda < 1$ は $\sup\mu < \frac{1}{4}$ と同値です。さらに、行の重みつきの Stein の道は、どの局所の代表・どの重みでも $\sum_s \nu_s^2/16 \ge 0.452 > \frac{1}{4}$ を下回れません 初 （Stein の道の床の補題。長波長の最小点で粗い面ごとに 16 枚が $\theta/4$ を受ける型は紙の概略と $20^4$ で差 $3.5 \times 10^{-3}$。有限の部分は Lean：`stein_floor`、仮定 $A_i^2 \le F v_i$・$0 \le \nu_i \le A_i$。$\nu$ は線形計画の数）。最も粗い向きそのものの四次の係数は一段でちょうど $1/64$ 倍（自分の向きで $1/16$）です 初 （Cauchy–Schwarz の等号）。$\lambda$ の値域は $[0.59, 3.29]$ で 読 （下は「$\sup\mu_{\mathrm{loc}}$ は全ての $L$ の $\sup\mu_L$ 以上」の概略を通す）、規格は (a) に固定します。

**$\ell^4$ の錐の一段の縮みは一段目に限る — 多段にはブロック化の条件が要る**。木の水準の一段はガウスの条件つき平均で、粗い作用の逆 $G = B^+$（ブロックした流束の共分散）は線形に反復します：$G_{k+1}(q) = \frac{1}{16}\sum_\eta T\,G_k\,T^{\mathrm{H}}$（$T$ は粗い角の記号） 初 （条件つき平均の共分散の補題。ガウスの場のブロック化の標準の型と思われる、原典は照合していない）。粗い辺を細かい二本の和とする**辺の和**のブロック化では、$B_k$ の固有値は固定の $q \ne 0$ で $2^{-k}$ の割合で 0 に逃げ（$\pi^4$ の向きで 0.25・0.090・0.038・0.017・0.0083）、長波長だけ 1 に留まり、スケール不変な固定点がありません 読 （記号で正確、$k \le 5$。原因は $2^k \times 2^k$ の正方形の流束の分散の周の長さの発散、という読み）。その柔らかい向きへ最小点が逃げ、錐の因子の下界は二段目 0.699（$12^4$）、**三段目で 1.262**（$8^4$、記号の経路と入れ子の別実装が一致）・2.200（$12^4$）・2.746（$16^4$）と 1 を越えます 読 （トーラスの周期の配位の局所の最適化。区間の評価なし）。だから**上の $\ell^4$ の錐の一段の縮み（0.823）は一段目に限り**、同じブロック化を重ねた多段の幾何級数には使えません。粗い辺を横の $2^{d-1}$ 本の平行な二本の線の、ゲージに共変な平均（横の脚を付けた staple の平均）で定めると、共分散の流れは固定点に向かい（$B_k$ の固有値は全ての $q$ で増えて差が 0.27〜0.52 の比で縮み、幅 $[1, \approx 4.1]$。軸の運動量では $1/G_k = 3/(1 + 2\cdot 4^{-k})$ の閉じた形で 3 へ）、錐の因子の下界は段で増えません：**0.64・0.57・0.64・0.62**（$j = 1$〜4、$8^4 \cdot 12^4$）、一方向の場ではちょうど $\frac{1}{2}$ です 読 （記号の流れ $k \le 5$・二段目は細かい段からの実空間の入れ子の別実装と一致）。**上界はありません**（重みつきの Stein は 4.5〜8.1）。脚の無い素朴な平均はゲージに共変でなく、リンクを固定した最小と流束を固定した最小が 37〜73% ずれ、二段目の下界も 0.887 と 1 に近づきます。よって多段の形は「共分散の流れがスケール不変な固定点を持つブロック化で、かつ固定点で $\sup\mu_\infty < 1$ なら、錐は $x_n \le x_0 c^n$ の幾何級数」で 初 （帳簿は Lean：`cone_chain_uniform`（仮定 $M_k \le m$）・`cone_series`（仮定 $0 \le c < 1$・$x_{k+1} \le c x_k$）・`axis_flow_closed`）、前件の $\sup\mu_\infty < 1$ は下界の水準でしか支えられていません（問い「横の平均の固定点の上界」）。条件：可換に制限・木の水準・周期・$2^4$ ブロック・線形化。

**擬逆の代表が体積とともに増える理由 — 尾の型**。擬逆の代表（粗い面のホロノミーをそのまま座標にする表し方）の行の $\ell^1$ 和が体積とともに増えることは、Bianchi の拘束の伝搬が周期の格子で質量を持たないことによる冪の核と整合します。同じ一段を、Bianchi の拘束を持つ三次元の柱 $2 \times 2 \times L$（開いた面がある）で測ると尾は指数（率 $\ln(3 + 2\sqrt{2})$）で行の和は体積に一様（0.6035 に飽和）、境の無い周期の板では $r^{-2}$、三次元の周期では冪（実効の指数 3.3 前後）です 読 （可換の背景・木の水準・二次の係数）。局所の代表の側（粗いリンクの変数で書く表し方）は、三つの幾何の全てで指数でした。四次元の周期では擬逆の代表の核は $r^{-4}$ と読め、$\ell^1$ 和は対数で増えます（表 5 の数と整合。四次元は測っていない）。数え上げの規則は 15-08 §06 にあります。束の網の定理（局所の形）の四次元の未決（向きごとの規格の倍率）はこの冪とは別の問いで、この観察はそれを動かしません。

**粗いリンク＋大域の札の座標は、四次元の木でも指数**。同じ一段を、粗い変数を「粗いリンク（Bianchi の拘束を変数に昇格させた座標）＋大域の札（各平面を貫く全束。粗い面の調和の部分）」に分けて書くと、札は粗いリンクの部分と交差項を持たず 初 （Lean：`norm_sq_add_harmonic`、仮定 $D^\dagger b = 0$。分解の一意性は `decomp_unique`・

`range_sup_tags`（仮定 $d_2 \circ D_c = 0$）、四次元の周期 $n^4$（$n \le 16$）の木の核は指数（前因子 $r^{-1}$ 前後、率 $\kappa \approx 2.08$）で体積に依らず、行の距離の重みつきの和は $n = 4, 8, 12$ で 15.62・17.43・17.50 と飽和に向かいます 読 （可換の背景・二次の係数・一段・木の水準）。札を外した擬逆の代表（粗い面の座標）では、札の射影が平らな $-1/(2N)$ を作り、Bianchi の伝搬の冪（当てはめで $r^{-4.4}$）と合わせて、距離の重みつきの和は $n$ に比例して増えます 読 。境の無い三次元の周期の箱（粗い $2 \times 2 \times L$）では一ループの核も指数（$\kappa = 3.094$、木の $\ln(11 + 2\sqrt{30}) = 3.089$ と一致）で、和は体積に一様でした（15-08 §06）。束の網の定理（局所の形）の未決はこの座標の問いとは別で、この観察はそれを動かしません。四次元の一ループは測っていません。

**網の長波長と一ループ。**全ての粗い面を固定した網をブロック $L$ で一度に取ると、粗い作用の長波長の固有値は全ての $L$ で 1 のまま（古典の marginal）、粗い格子の尺度の運動量では $1/L$ で小さくなります（$\pi^4$ の向きで $L \cdot B = 0.500$・$0.359$・$0.305$、$L = 2, 4, 8$。ブロック 2 の反復と同じ量） 読 。胞の型に射影した係数は $bL \to 0.20$ で、長波長と短波長の二つの尺度の間の遷移が、胞に収まらない部分（$L = 16$ で 2 割）として現れます。**木の水準に $\ln L$ の走りはありません。**一ループではこの長波長の固有値が $\beta'/\beta = 1 - 0.745/\beta$（Manton、ブロック 2）に変わり、変化の大部分はブロックの内側の揺らぎから来ます 読 （$SU(2)$・一ループ・横の粗いトーラス $6^3$・波数 0 は外挿、15-03 §02）。小さい粗いトーラス（$2^4$）では、粗いトーラスの一様な向き（Polyakov の向き）に一ループの「質量」がつき長波長の値を汚す（$\delta$ が 0.19 動く）ので、網の一ループは横の粗いトーラスを 4 以上に取るか横の Bloch の和で測る必要があります 読 。

軸の錐・Koszul の縮約・線形計画の双対・Riesz–Thorin はどれも既知の道具で、組み合わせの見方も既知かもしれません（局所の最小点の構成に近い見方。原典は照合していない）。

08

## 分解への含意と問い

15-03 §04 の帳簿は、一段の写像が類のまわりで横に縮む（$\|\rho_{k+1}\| \le \lambda \|\rho_k\| + \varepsilon(\beta_k)$、$\lambda < 1$）なら外れは和でなく上限 $\sup_j \varepsilon(\beta_j)/(1-\lambda)$ で押さえられる、というものでした 初 （二次の項を落とした線形の不等式の下で）。この章は、その $\lambda$ と、母数の流れの主項 $\beta'/\beta$ が、一つの粗い面の周辺分布では**同じ射影 $P$ から前もって紙で数えられる**ことを示しました（単位の束の定理）。四次元の一段で問うべき数は「源の大きさ」と「$\lambda$」の二つで、前者は一ループ、後者は木の水準の量です。ただし、全ての粗い面を固定すると $\lambda$ は行列になり粗い向きで $1/16$ を超えるので（§07）、帳簿の $\lambda < 1$ を本当の一段で示すには、表し方に依らない作用素ノルムの、体積に一様な上界が要ります 読 。一様な上界そのものは局所の代表で得られ（束の網の定理（局所の形））、四次元では行の重みつきの補間で $\beta_0' = 1$ の規格の倍率が 0.823 以下になりました（数は計算）。向きごとの規格の倍率は縮みの量でないので規格は長波長の結合で割る形に固定し（§07 の規格の注）、この一段の数は一段目に限ります。多段には、共分散の流れが固定点を持つブロック化と、その固定点での $\sup \mu_\infty < 1$ が要ります（§07）。

表 6　この章から出る問い（状態：新。問 7・20・25 は答えを書き足した。問 25・28・30 は改訂で足した）

| 問 | 問い | 大きさ | 決着したら動くもの | 決着しても動かないもの |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 粗い面の辺 $L$ の列で、源 $\cdot L^4$（いま $L = 1$〜$4$・横の厚さ 4 で $7.7$〜$8.5 \times 10^{-3}$）が横を広げても一定に寄るか。寄れば源の段の和は等比で有限で、帳簿の「源は段ごとに一定の帯」の仮定を強められる | 小さな計算（一ループの $\theta^4$ の係数を摂動の公式で） | 形の剰余の条件の源の扱い | 非可換の配位・大きな場 |
| 7 | 全ての粗い面を同時に固定した木の水準の網で、$\mathrm{im}\, D_c$ の上で $F$ と一致する**局所の代表**を作り、$\ell^4$ の作用素ノルムに体積に一様な上界が出るか。あわせて、粗い向きの $\lambda$（見つけた sup は四次元で 0.27）の作用素ノルムが 1 を割るか。**答え（一部）：**局所の代表と体積に一様な上界は得た（束の網の定理（局所の形）、三次元 $\Lambda_3 = 0.245$）。四次元は $\Lambda_4 \approx 1.83$ で、この道では 1.39 を下回れない。行の重みつきの補間で $\sup \mu \le 0.823$（$\beta_0' = 1$ の規格、計算） | 紙と小さな計算 | 本当の一段の横の縮みの主項 | 一ループ・大きな場・ゲージの張り替え |

| 問 | 問い | 大きさ | 決着したら動くもの | 決着しても動かないもの |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 四次元の $\ell^4$ を直接に押さえる：局所の代表を $K = K_0 + K_{\mathrm{tail}}$（ブロックの近くの有限の部分と尾）に割り、近い部分は小さい行列の $\ell^4 \to \ell^4$ ノルムを有限の網で上から押さえ、尾だけに Riesz–Thorin を当てて、四次元の $\sup \mu$ が 1 を割るかを見る。**答え：**近い部分と尾の分解は効かず、行をその $\ell^1$ ノルムで重みづけた補間で $\sup \mu \le 0.823$（$\beta_0' = 1$ の規格。数は計算で区間の評価ではない）。向きごとの規格では $\le 3.29$ で未決（§07）。三段の合成で解消：重みつき Stein で三段 0.10、全ての段で $\le$0.20（計算・木・可換、15-08） | 紙と小さな計算 | 四次元の木の水準の一段の横の縮み | 一ループ・非可換の配位・大きな場 |
| 25 | 向きごとの規格（自分の向きの $\beta'(\theta)$ で割る倍率 $\lambda$）で、運動量の帯ごとに重みつきの記号を分け、$\beta'(\theta)$ が $\frac{1}{4}$ に近い向きで $\mu$ が小さいことを示して、$\sup \lambda \le 3.29$ を 1 未満に落とせるか。**答え：**落とせない向きの問いだった。体積の極限で $\sup \lambda = 4 \sup \mu_{\mathrm{loc}} \ge 0.59$（混合の極限の補題）で、$\lambda$ は縮みの量でなく、$\lambda < 1$ は $\sup \mu < \frac{1}{4}$ と同値。Stein の道は床 0.452 を下回れない（Stein の道の床の補題）。帯ごとの比も 1.83 で上界にならない。規格は長波長の結合で割る形に固定する（§07） | 紙と小さな計算 | 向きごとの規格での形の剰余の条件の木の水準 | 一ループ・非可換の配位・大きな場 |
| 28 | ゲージに共変な横の平均のブロック化の固定点 $B_\infty$ の上で、$\sup \mu_\infty$ の上界を Stein でない道で取る：一方向の部門（ちょうど $\frac{1}{2}$）と横の運動量を持つ残りを分け、残りを行の減衰（0.41・0.05・0.005）で抑えて 1 未満にできるか。あわせて固定点の存在を数（$k \le 5$）から紙へ | 紙と小さな計算 | 形の剰余の条件の多段の条件（固定点での錐の縮みの条件） | 一ループ・非可換の配位・大きな場 |
| 30 | 横の平均のブロック化（または大きい倍率）で、周期の網の長波長の一ループの係数を倍率 2・3 で測り、変化が $-\frac{11}{3\pi^2}\ln\frac{3}{2} \approx -0.151$ に近づくか（線の上の積を固定する規則の 1.7〜1.9 倍が規則の産物か） | 小さな計算 | 結合の流れ（結合の流れの剰余の条件）の一段の係数 | 二段目以降の係数・大きな場 |

09

## 言えないこと

(a) 単位の束の定理・束の網の定理は可換な配位に制限した木の水準（$\beta \to \infty$ の主項）の文です。非可換な配位を含めた大域の最小が可換であること、一ループの補正（源・$\beta'$ の $O(1)$ のずれ）、大きな場（$\|\psi\| \le r$ の外）は含みません。

(b) 表 1〜表 3 の数は一つの粗い面の周辺分布で見る一段の数で、本当のブロック化の一段ではありません。反復の二段は一つの面の周辺分布を入れ直す近似です。

(c) 源・$c_2$・有限の $\beta$ の比は計算機の値で、源は熱核出発・単一の像・$\beta \to \infty$ の一ループです。粗い面 4×4 と大きな箱の一ループは一実装です。源 $\approx 8 \times 10^{-3}/L^4$ は四点の観察で、極限や閉じた形はありません。

(d) (7) の右の等号 $\max f^2 = 1/16$ と、計算した箱で最大の束が粗い面にあることは箱ごとの確認で、一般の証明はありません。

(e) 束の網の定理の数（表 4・表 5）は周期・$2^d$ のブロック・粗い角の線形化の下の値で、sup は局所の最適化の下界です。擬逆の代表の上界は体積とともに増えます。局所の代表による体積に一様な上界（束の網の定理（局所の形））は四次元で 1.83 の見積もり（下からの見積もり、区間の評価なし）で 1 を超えます。行の重みつきの補間では 0.823 以下になりましたが（$\beta_0' = 1$ の規格・$K_\infty$ を $20^4$ の核で置き換え・計算で区間の評価なし）、向きごとの規格では 1 を切らないので、向きごとの規格の「横の縮みが 1 より小さい」とは言いません。「1/16 以下」とも言いません。三次元の「1 より小さい」は $\Lambda_3$ の数値に依ります。束の網の定理（局所の形）は一ループ・非可換の配位・大きな場・二段目以降を含みません。四次元の長波長の $\lambda \to 1/16$ は滑らかな試しの算術と三次元の数値からの見立てです。規格の注の混合の極限の補題・Stein の道の床の補題は紙の概略（交差項の評価・長波長の最小点の型）と有限のトーラスの数で、Lean は有限の帳簿の部分だけです。

(f) この章は紫外の制御を示しません。四次元の格子の繰り込み・質量ギャップには何も含意しません。

(g) §07 の尾の型の観察は、柱・板・三次元の周期の格子の木の水準（一ループは柱だけ）の数です。粗いリンク＋大域の札の座標の四次元は木の水準（$n \le 16$）だけで、四次元の一ループは測っていません。

(h) §07 の多段の錐は、辺の和のブロック化で三段目に 1 を越えること（下界、トーラスの周期の配位）と、横の平均のブロック化で下界が段で増えないこと（$j \le 4$）までで、$\sup \mu_j < 1$ の上からの評価はどちらのブロック化でもありません。固定点の存在は $k \le 5$ の記号の数と箱の平滑化の筋だけです。網の長波長の一ループは一つの規則の一段目の数です。

10

## 五分類の表と依存グラフ

表 7　この章の行

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 |
|---|---|---|---|---|
| [01] | 単位の束の定理 (i)(ii)：最小点 $\theta f$、$f = Ps/\|Ps\|^2$、$\beta'/\beta = \sum f^2$。「$\sum f^2 \le 1$」は無条件でない | 初 | §02 | 可換に制限・木の水準 |
| [02] | 単位の束の定理 (iii)(iv)：$\theta^4$ の係数はちょうど $\sigma \sum f^4$、$\lambda = \sum f^4 / \sum f^2$、(5) | 初 | §02 | 局所の最小・$\sigma(6\theta^2 m^2 + 4\|\theta\| mr + r^2) \le \beta/4$ |
| [03] | 三次元の自由境界で $\sum f^2$ は実効抵抗、$2 \times 2 \times 1$ で $1/3$・$7/144$ | 初 | §03 | 三次元・自由境界 |
| [04] | 包含の単調性と $1/(16d - 8) \le \lambda \le 1/16$ | 初 | §04 | 粗い面の 4 枚が対称に $\frac{1}{4}$・最大の束の位置は箱ごとの確認 |
| [05] | 表 1 の有理数（三次元の自由境界と外周だけ自由） | 初 | §05（二つの定式化） | 主項 |
| [06] | 表 1 の浮動小数と源、Monte Carlo との一致 | 読 | §05 | $SU(2)$・熱核出発・$\beta \to \infty$・一ループ |
| [07] | (8)：$\sum f^2(L)$ の上界と $\lambda(L)$ の下界、本当の二段 < 反復の二段 | 初 | §06 | $L \ge 2$・どの箱でも（反復との比較は入力 0.717961 を計算の数として） |
| [08] | 周の型・表 2・表 3・源 $\approx 8 \times 10^{-3}/L^4$ | 読 | §06 | 四次元・横の厚さ 4・一実装・四点 |
| [09] | 束の網の定理 (i)〜(v)・$\ell^4$ の錐が保たれること | 初 | §07 | 可換・木の水準・周期・$2^d$ ブロック・線形化 |
| [10] | 表 4・表 5：長波長で $2^{d-4}$、粗い向きで $\lambda > 1/16$、上界なし | 読 | §07 | 測った箱・sup は下界 |
| [11] | 問い「粗い面の源の横の一定性」・問い「木の水準の網の局所の代表」 | 仮 | §08 | 問い |
| [12] | 束の網の定理（局所の形）(a)〜(c)：局所の代表・体積に一様な上界 (10)・$\ell^4$ の錐の写り | 初 | §07 | 可換・木の水準・周期・$2^d$ ブロック・線形化。$R$ の減衰は概略 |
| [13] | $\Lambda_3 = 0.245$・$\Lambda_4 \approx 1.83$・$\nu_4 \ge 1.18$ で四次元は 1.39 を下回れない | 読 | §07 (d) | 三次元 $48^3$ まで・四次元は $24^4$ の見積もり・$\nu_4$ は $16^4$ |
| [14] | $\ell^4$ の錐の一段の縮み：行の重みつきの補間 (11)、$\Lambda_w \le 0.823$、$\ell^4$ の錐は一段で 0.823 倍以下 | 初（(11)）・読（数） | §07 | 可換・木の水準・周期・$2^4$ ブロック・線形化・$20^4$ の核・区間の評価なし・$\beta_0' = 1$ の規格（向きごとの規格は未決） |
| [15] | 擬逆の代表の増加は Bianchi の拘束の冪の核と整合、局所の代表は指数 | 読 | §07 | 柱・板・三次元・木の水準・四次元は未 |
| [16] | 規格の注：二つの錐は定数 4 以内で同値（規格を固定すれば一度だけ）、$\sup \lambda = 4 \sup \mu_{\mathrm{loc}}$（混合の極限の補題）で $\lambda$ は縮みの量でない、Stein の道の床 0.452（Stein の道の床の補題）、最も粗い向きは $1/64$ | 初（帳簿・混合の極限の補題・Stein の道の床の補題の概略）・読（数） | §07 | 可換・木の水準・周期・$2^4$・線形化・粗い $L$ は偶数で $L \to \infty$・$\nu$ は線形計画の数 |

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 |
|---|---|---|---|---|
| [17] | $\ell^4$ の錐の一段の縮みは一段目に限る：辺の和のブロック化では共分散に固定点が無く（$2^{-k}$）三段目で因子 $\geq 1.26$。横の平均では固定点に向かい下界 0.64・0.57・0.64・0.62、上界なし | 初 （条件つき平均の共分散の補題・幾何級数の帳簿）・読 （数） | §07 | 可換・木の水準・周期・$2^4$・線形化・記号の流れ $k \leq 5$・下界は局所の最適化・区間の評価なし |
| [18] | 粗いリンク＋大域の札の座標は四次元の周期の木で指数（$\kappa \approx 2.08$）、札を外すと平ら＋冪で和が体積とともに増える | 初 （札の直交）・読 （数） | §07 | 可換の背景・二次の係数・一段・木の水準・$n \leq 16$ |
| [19] | 網の長波長：木は全ての $L$ で 1、胞の部分は $1/L$、$\ln L$ の走りは木に無く、一ループで $1 - 0.745/\beta$ | 読 | §07 | 可換・木の水準と一ループ（ブロック 2・横 $6^3$）・Polyakov の向きの汚れに注意 |

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
[01] 初  最小点 θf・β'/β = Σf²                          可換・木の水準
[02] 初  θ⁴ はちょうど σΣf⁴・λ・(5) ⟸ [01]               局所の最小
[03] 初  三次元の抵抗網・1/3・7/144 ⟸ [01]               自由境界
[04] 初  包含の単調性・1/(16d−8) ≤ λ ≤ 1/16 ⟸ [01][02]   粗い面が対称
[05] 初  表 1 の有理数 ⟸ [01][03]
[06] 読  表 1 の浮動小数と源 ⟸ [02][05]                 一ループ・β→∞
[07] 初  (8)・本当の二段 < 反復 ⟸ [04]                   L ≥ 2
[08] 読  周の型・源 ≈ 8e−3/L⁴ ⟸ [06][07]                 四点・一実装
[09] 初  束の網の定理 ⟸ [01]                             周期・2^d ブロック
[10] 読  長波長 2^{d−4}・粗い向き λ > 1/16 ⟸ [09]
[11] 仮  問い「粗い面の源の横の一定性」・問い「木の水準の網の局所の代表」 ⟸ [08][10]
[12] 初  局所の代表・一様な上界 (10)・錐の写り ⟸ [09]                周期・2^d ブロック
[13] 読  Λ₃ = 0.245・Λ₄ ≈ 1.83・ν₄ ≥ 1.18 ⟸ [12]
[14] 初  重みつきの補間 (11)・錐は 0.823 倍以下 ⟸ [12][13]          β'₀ = 1 の規格・数は計算
[15] 読  擬逆の代表の増加は冪の核 ⟸ [10][12]                     三次元まで・木の水準
[16] 初  規格の注：同値・混合の極限の補題・Stein の道の床の補題 ⟸ [09][14]   L → ∞・帳簿は
[17] 読  ℓ⁴ の錐の一段の縮みは一段目に限る・平均のブロック化の多段 ⟸ [14][16]   下界だけ・k ≤ 5
[18] 読  粗いリンク＋札は四次元の木で指数 ⟸ [12][15]              木の水準・n ≤ 16
[19] 読  網の長波長とーループ ⟸ [09][10]                        ブロック 2・ーループ
```

全ての「⟸」の右の番号は左より小さく、円はありません。仮定の行は [11] だけで、問いの形です（四次元の $\ell^4$ の直接の上界・向きごとの規格の倍率・横の平均の固定点の上界・網の長波長の一ループの係数は §08 の表 6 にあり、[11] の続きです）。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 初 可換に制限した木の水準で、$\beta'/\beta$・四次の写り・$\lambda$ が射影から決まること（単位の束の定理）、$\lambda \leq \max f^2$、粗い面が対称なら $1/(16d-8) \leq \lambda \leq 1/16$、(8)、束の網の定理と $\beta'(\theta) \geq \frac{1}{4}$、局所の代表による体積に一様な上界（束の網の定理（局所の形））、行の重みつきの補間 (11) | 非可換な配位を含めた最小・一ループ・大きな場。最大の束の位置の一般の証明 |
| 読 箱ごとの数（表 1〜表 5）、周の型、源 $\approx 8 \times 10^{-3}/L^4$、全ての粗い面を固定すると粗い向きで $\lambda > 1/16$、$\Lambda_3 = 0.245$・$\Lambda_4 \approx 1.83$、$\Lambda_w \leq 0.823$（四次元・$\beta_0' = 1$ の規格）、尾の型の観察 | 本当のブロック化の一段の $\lambda$ と源。区間の評価。源の閉じた形 |
| 初 規格の注（二つの錐の同値・混合の極限の補題・Stein の道の床の補題の有限の部分）・木の水準の一段が条件つき平均で共分散が線形に反復すること（条件つき平均の共分散の補題）。読 辺の和のブロック化の三段目の 1 越え・横の平均の固定点と下界・粗いリンク＋札の四次元の木・網の長波長の一ループ | 多段の $\sup \mu_j < 1$ の上界（どのブロック化でも）。固定点の存在の証明。四次元の一ループの尾。網の二段目以降の一ループ |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| Thomson の原理・Kirchhoff の法則・Rayleigh の単調性・Dirichlet の原理 | 典 | 電気回路と調和関数の標準の事実（P. G. Doyle, J. L. Snell, Random Walks and Electric Networks, 1984 の型） |
| 単位の束の定理・束の網の定理・(5)(7)(8)・$2\times 2\times 1$ の手計算 | 初 | この章の本文の証明。有限和の不等式の部品は Lean の束で、再検査済み（15-09 表 3） |
| 表 1〜表 5 の数 | 読（有理数は初） | 本書の検討の数値の記録（束の網の二〜三の定式化：双対の網の Kirchhoff・木のゲージの正規方程式・射影の式・Lagrange の条件の Hodge のラプラシアン。一ループの Hessian の二実装：有限差分と解析・疎行列の版。指標の有限和・全リンクの熱浴 Monte Carlo。束の網の定理は射影と擬逆・粗いリンクの KKT の二実装。束の網の定理（局所の形）の数は局所の代表の二実装と線形計画） |
| 重みつきの補間（Stein の解析族、Hadamard の三線） | 典（既知の道具。書誌は未確認） | E. M. Stein の解析族の補間定理 |
| 規格の注・多段の錐・粗いリンク＋札の四次元の木・網の長波長 | 読（帳簿・条件つき平均の共分散の補題は初） | 本書の検討の数値の記録（記号の経路と第一段の Bloch の行・実空間の重みつき最小二乗・入れ子の別実装の照合・乱数の小行列の陰性対照・素朴な平均の陰性対照・密と Bloch の二実装・$U(1)$ の Villain で 0）。帳簿は Lean の束（15-09 表 3、再検査済み） |
| $\Lambda_w \le 0.823$・尾の型の数 | 読 | 本書の検討の数値の記録（$20^4$ の核の記号を $N=64$ の格子と片側の二次の剰余で・実空間のべき乗法・小行列の判定と陰性対照。柱・板・三次元の周期は射影と KKT の二実装） |

**この章で使った語** — 束・束の網・射影 $P$・単位の束・単位の束の定理・横の縮み $\lambda$・源 $\sigma$・包含の単調性・周の型・本当の二段・反復の二段・束の網の定理・表し方に依らない量・局所の代表・軸の錐・束の網の定理（局所の形）・行の重みつきの補間・尾の型。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：15-06 母数の数え方 — 二次の段で座標がいくつ要るか、一段の写像がどこへ引き込むか。

# 母数の数え方 — ループの形ごとの結合と引き込む先の類

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 15-01・15-02 にあります。

この部は、本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた記録です。存在そのものは第二巻の第 6〜13 部を、二つの設計の違いは第 14 部を見てください。部の位置づけは 15-00 にあります。

**この章で分かること** — 15-03 §02 の類が閉じる条件「類が有限個の母数で閉じる」の母数を、何を座標にして数えればよいかを、プラケットを一枚ずつ増やした最小の系で見ます。一枚では背景依存が結合の置き換え一つに吸収されること、二枚・三枚では交換子が合成のループの結合の像にすぎないこと、四枚ではループの形ごとの結合の比が $\beta$ で動くこと、熱核に替えても群の曲がりの分 $\mathbf{2}/(\mathbf{3}\beta)$ が残ること。比を 2 に保つ作用を探すと、前因子の冪を動かす族には根が無く、基本＋随伴の族には根があるが、その曲線は一段の流れで閉じないこと。最後に、一段の写像が作用の形の座標を全て縮め、前因子の冪の一意の固定点（$\psi^4$ で $\mathbf{37/76}$）へ引き込むので、類が閉じる条件は「比 2 を保つ類」でなく「**引き込む先の一母数の類 ＋ 縮む形**」として言明するのがこの模型と整合すること。

**前提となる章** — 15-03 §02（分解の言明）・15-03 §04（横の縮みの帳簿）・15-04 §01（熱核の半群）・15-05 §02（束の網）・15-07 §02（背景依存 $\eta$）。$SU(2)$ を単位四元数（三次元球面 $S^3$）と見ること、指標展開、Laplace の方法（鞍点の近似）を使います。

**先に言うこと** — この章の系は全て $SU(2)$（対照に $U(1)$）の一枚〜一列四枚のプラケットで、背景の場の強さを小さく（ホロノミーの角 $\theta \le \mathbf{0.3}$）取ったものです。一段は**一つの粗い面の周辺分布で見る一段（本当のブロック化の一段ではない）**の、さらに小さな版です。§07・§08 の写像は一列四枚・二本のループ・対角の定義・主項（$B \to \infty$）の写像です。どの文も四次元の格子の一段・ブロック平均・大きな場・ゲージの張り替えについて何も言いません。

この章の順序

1. 一枚 — 背景依存の型と、拘束つきの吸収（式 (1)）

2. 二枚 — 交換子は BCH の像（式 (2)(3)）
3. 三枚 — 単独と合成のループが 1:1:1（式 (4)）
4. 四枚 — ループの形ごとの結合の比が $\beta$ で動く（式 (5)〜(7)）
5. 熱核と判定式 — 群の曲がりの分（式 (8)(9)・表 1）
6. 比を保つ作用の探索 — 一ループの一般式・前因子の族・基本＋随伴（式 (10)(11)）
7. 比 2 の曲線は流れで閉じない — 木の写像と $9/89$（式 (12)(13)）
8. 前因子の冪の流れと引き込む先の類 — $37/76$・$c = 2/3$（式 (14)〜(16)）
9. 類が閉じる条件の言明の形（表 2）と問い（表 3）
10. 言えないこと
11. 五分類の表と依存グラフ（表 4）

---

00

## この章で分かること

- 類が閉じる条件の母数を数える座標は「$F^2$ の係数と交換子の係数」ではなく、**ループの形ごとの結合**です。交換子の係数は合成のループの結合の BCH の像として後から付いてきます（§02・§03）。
- 一列四枚では二つ目の座標（比 $\kappa_{ab}/\kappa_a$）が $O(1/\beta)$ で動き、その一部 $2/(3\beta)$ は作用を熱核に替えても消えない群の曲がりの分です（§04・§05）。
- 比を全ての $\beta$ で 2 に保つには指数の四次がガウスより急な作用（$q/B = -1/12$）が要り、前因子の冪の族には根が無く、基本＋随伴の族には $\beta \geq 12$ で根があります（§06）。
- その根の曲線は一段の流れで閉じず、ずれは $O(1)$（$9/89$）に留まります。一段の写像は作用の形の座標を全て縮めるからです（§07）。
- 前因子の冪は一次の縮小写像に従い、一意の固定点 $\gamma^* = 37/76$（$\psi^4$）に引き込まれ、そこでの比は $2 + (2/3)/B$ です。類が閉じる条件は「引き込む先の一母数の類 ＋ 縮む形」として言明できます（§08・§09）。

01

## 一枚 — 背景依存の型と、拘束つきの吸収

規約：$SU(2)$ を単位四元数で書き、$\frac{1}{2}\operatorname{tr} U = \operatorname{Re} U$、背景 $W = \exp(i\,a\cdot\sigma/2)$（$a \in \mathbb{R}^3$、角 $\theta = |a|$）。数値は $\beta = 4$〜$32$、$\theta \le 0.3$ で測ったものです。

一枚のプラケット（四リンク）の上で、背景のホロノミー $W$ のまわりの揺らぎの測度 $\mu_W$ を考えます。15-07 の $\eta_k$ の最小の模型です。四リンクの 12 次元のうち、ゲージの向きの 9 次元の条件つき法則は $W$ に依らず、背景依存はホロノミーの 3 次元に集まります 初 （Haar 測度の不変性）。揺らぎ $X = i\,x\cdot\sigma/2$（$r = |x|$）に背景の生成子の向きを抜く拘束 $x_3 = 0$ を置くと（背景場の拘束の最も小さな代用）、$\frac{1}{2}\operatorname{tr}(W e^{X}) = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{r}{2}$ なので

$$\mu_W^{\beta} = \mu_1^{\beta\cos(\theta/2)} \tag{1}$$

が正確に成り立ちます 初 。背景依存は結合の置き換え $\beta \mapsto \beta\cos(\theta/2)$ ひとつに全部入ります。共分散の比で測った $\eta$ は $\theta^2/8$、スコアは $\theta/4$ で、どちらも $\beta$ に依りません（主項 初 。求積と Monte Carlo の二経路で主項との比 0.98〜1.00 読 ）。

- **拘束が無いと小さくない。**背景を臨界点に取らないと、共分散の比は $\beta\theta^2/12$ で $\beta$ とともに増えます 読 。背景依存が背景に一様に小さいための最小の条件は「背景が拘束つきの臨界点であること」と、この一枚で読めます。
- **一段の結合の写像。**揺らぎを積分した背景の重みは、拘束つきで $\beta_{\text{eff}} = \beta - d/2 + O(1/\beta)$（$d$ は揺らぎの次元。$d = 2$・$\beta = 64$ で $\beta - \beta_{\text{eff}} = 1.005$）です 読 （揺らぎの次元の数え上げとしては 初 ・一ループの水準）。
- **$\eta$ の源は非可換性ではない。**$U(1)$ の対照では二次の作用（ガウス）でだけ $\eta = 0$ で、cos の作用では同じ $\theta^2$ の型の $\eta$ が出ます 読 。源は作用の非二次性（群のコンパクトさ）です。$\eta$ を一つの数で測ると型が変わる（共分散の比は $\theta^2$、Kullback–Leibler の量は $\theta^4$、スコアは $\theta$）ので、言明には「どの $\eta$ か」を書き込む必要があります 読 。

02

## 二枚 — 交換子は BCH の像

共有リンク一本の $2\times 1$ の長方形で、外周のループ $W = P_1P_2$ を固定します（$P_1, P_2$ は二枚のホロノミーで、木のゲージの後は独立な Haar）。拘束つきの最小点は二枚が同じ向きに半分ずつ傾く $P_1 = P_2 = W^{1/2}$ で、$P_1 = W^{1/2}e^{X}$、$P_2 = e^{-X}W^{1/2}$ と置くと

$$\operatorname{Re} P_1 + \operatorname{Re} P_2 = 2\cos\frac{\theta}{4}\,\cos\frac{r}{2} \tag{2}$$

が正確に成り立ちます 初 。作用は揺らぎについて偶で、一枚で「一次を引く」代用をしたときに出た奇の三次の項は、真の拘束つき最小点では消えます（数値でスコアの奇の部分 $\le 3\times 10^{-12}$） 読 。揺らぎを積分した重みは $W$ の類だけの関数 $Z_1(\beta|1+W|)$、$Z_1(b)=2I_1(b)/b$（熱浴法の一リンクの分布と同じ積分）で 初 、一段の結合は $\beta_{\mathrm{eff}}=\beta-\frac{3}{4}+O(1/\beta)$ です（ 初 ・一ループの水準。$\beta=4\to 32$ で $\beta-\beta_{\mathrm{eff}}=0.723\to 0.747$ 読 ）。背景の二枚の場の強さ $a,b$ の交換子は、群の積 $e^{F_1}e^{F_2}$ の BCH を通してだけ入ります：

$$\theta_W^2=|a+b|^2-\tfrac{1}{12}|a\times b|^2+O(|F|^5) \tag{3}$$

初 （BCH の三次までの切り詰めの下の代数）。だから重みの $|a\times b|^2$ の係数 $c$ は $F^2$ の係数 $k$ の $1/12$ に縛られ、$\beta=4$〜$32$ で $c/k=1/12$ が $10^{-8}$ まで成り立ちます 読 。**交換子はこの段で新しい母数ではありません。**

## 03
## 三枚 — 単独と合成のループが 1:1:1

一列三枚で、重なった二つの $2\times 1$ のループ $W_a=P_1P_2$、$W_b=P_2P_3$ を固定し中央の $P_2$ を積分すると、重みは $Z_1(\beta|Q|)$、$Q=1+W_a+W_b$ で

$$|Q|^2=3+2\,\mathrm{Re}\,W_a+2\,\mathrm{Re}\,W_b+2\,\mathrm{Re}(W_aW_b^{-1}) \tag{4}$$

です 初 （直接の求積と $3.5\times10^{-15}$ で一致 読 ）。単独のループ二つと合成のループ $W_aW_b^{-1}$ を 1:1:1 で含みます。$SU(2)$ の二元の組の同時共役の不変量は三つの跡 $\mathrm{Re}\,W_a,\mathrm{Re}\,W_b,\mathrm{Re}(W_aW_b^{-1})$ で決まるので 初 （二つの虚部のベクトルは長さと内積で回転を除いて決まる）、ゲージ不変な二ループの重みはどれも三つの類の角の関数です。合成のループの類の角を参照にとると、交換子の係数は合成のループの二次の結合 $\kappa_{ab}$ の $1/12$ に必ずなります 初 （(3) がそのまま入る）。一段の結合は $12k=\beta-\frac{1}{2}+O(1/\beta)$ です 読 。単項式の基底で測った「交換子の係数」は $\beta$ で動いて見えますが、交換子を持たない合成関数でも同じ大きさで出るので、交換子の量ではありません 読 。

## 04
## 四枚 — ループの形ごとの結合の比が $\beta$ で動く

一列四枚で、重なった二つの $3\times 1$ のループ $W_a=P_1P_2P_3$、$W_b=P_2P_3P_4$ を固定し、中の二枚を積分します。$U=P_2P_3$ と置くと

$$w(W_a,W_b)=\int dU\; Z_1(\beta|1+U|)\,\exp\!\big(\beta\langle W_a+W_b,\,U\rangle\big),\qquad \langle p,q\rangle=\mathrm{Re}(p\bar q) \tag{5}$$

です 初 。$w$ は $\operatorname{Re} W_a + \operatorname{Re} W_b$ と $\operatorname{Re}(W_a W_b^{-1})$ の二変数の関数で、三枚の $|Q|$ の一変数には潰れません（同じ $|Q|$ の背景で $\log w$ が $1.8\times10^{-2}$ 動く、$\beta=4$）読 。二次の結合を

$$-\log w = \text{定数} + \kappa_a(\theta_a^2+\theta_b^2) + \kappa_{ab}\,\theta_{ab}^2 + O(F^4) \tag{6}$$

で定めます（$\theta_{ab}$ は合成のループ $W_aW_b^{-1}$ の類の角）。木（可換化したガウスの最小化）は比 $\kappa_{ab}/\kappa_a = 2$ 初 、一ループの主項は $\kappa_a,\kappa_{ab}$ ともに $-\frac{1}{40}$ で比 1 です。合わせて

$$40\kappa_a = \beta - 1, \qquad 20\kappa_{ab} = \beta - \tfrac{1}{2}, \qquad \frac{\kappa_{ab}}{\kappa_a} = \frac{2(\beta-\frac12)}{\beta-1} + O(\beta^{-2}) \tag{7}$$

（はじめの二つは $+O(1/\beta)$）初 ・一ループの水準。数値は $\kappa_{ab}/\kappa_a =$ $2.3211,\ 2.1409,\ 2.0662,\ 2.0322$（$\beta=4,8,16,32$、二経路が $7.8\times10^{-12}$ で一致）読 。**比が動く理由は「木の形 $\neq$ 一ループの形」**です。木の二次形式は格子の幾何で 1:2、一ループの二次形式は測度で 1:1 に決まり、二つが平行でないので合計の向きが $\beta$ で回ります。$U(1)$ の cos の作用でも比は $2+0.2/\beta$ で動き、$U(1)$ の Villain の作用では全ての $\beta$ で 2 です 読 。ブロック化の一段で大きなループの項が生まれその係数が結合に依ること自体は、改良作用の考え方と同じ向きの既知の型と思われます（原典は照合していない）。

05

## 熱核と判定式 — 群の曲がりの分

各プラケットの重みを $SU(2)$ の熱核 $p_t$（指標の係数 $(n+1)e^{-tn(n+2)/2}$）に替えると、内側の二枚は半群性 $p_t * p_t = p_{2t}$ でまとまり

$$w(W_a,W_b) = \int dU\; p_{2t}(U)\, p_t(W_aU^{-1})\, p_t(U^{-1}W_b) \tag{8}$$

です 初 （有限群と半群の族での同じ式は Lean：`four_plaquette_of_semigroup`・`four_plaquette_convPow`、仮定 $p_s*p_t=p_{s+t}$）。それでも比は $2.2090,\ 2.0927,\ 2.0439,\ 2.0214$（$t=1/4,\dots,1/32$、二経路が $7.6\times10^{-12}$ で一致）読 、一ループで $2+\frac{2t}{3}+O(t^2)$ です 初 ・一ループの水準。$U(1)$ の熱核（Villain）では全ての $t$ で 2 です 初 。

理由は一行の判定式に書けます。外側の核を $e^{F(\psi)}$、内側の核を $G(\psi)$（どちらも類関数、$\psi$ は単位四元数の角）とし、測度 $\sin^2\psi\, G\, e^{2F}\, d\psi$ の期待値を $E$ と書くと、部分積分で

$$\kappa_a = \frac{E[F'\,(\log G)']}{24}, \qquad \kappa_{ab} = \frac{E[F'^2]}{24}, \qquad \frac{\kappa_{ab}}{\kappa_a}=2 \iff D := E\big[F'\,(F' - 2(\log G)')\big] = 0 \tag{9}$$

です 初 （$F, G$ が $[0,\pi]$ で滑らかな類関数で、端の項が消える条件の下で）。各点の十分条件は**内側が外側の平方根** $G \propto e^{F/2}$ です。平坦なガウスでは半群 $p_{2t}$ と平方根 $p_t^{1/2}$ が同じものなので比は 2 に留まり、曲がった群では二つが割れます。$SU(2)$ の熱核は半群ですが、Van Vleck の前因子 $P(\psi) := \psi/\sin\psi$ が $p_t$ と $p_{2t}$ に同じ冪で入るので平方根になりません。測地距離のガウス $e^{-\psi^2/(2t)}$ は平方根の関係を満たしますが半群ではありません 初 （数値でも比が全ての $t$ で 2、$3\times10^{-12}$ 読 ）。$t$ と $\beta$ を基本表現の係数で合わせると、比のずれの主項は Wilson で $1/\beta$、熱核で $2/(3\beta)$。**熱核に替えても消えない** $2/(3\beta)$ **が群の曲がりの分、残り** $1/(3\beta)$ **が作用の非二次性の分**と読めます 読 （主項・この系・二次）。

表 1　最小の系の母数の数え方（$SU(2)$・$\theta \le 0.3$・$\beta = 4$〜$32$。重みの式は 初 、数値は 読 ）

| 系（固定するもの） | 揺らぎを積分した重み | 二次の結合 | 交換子の係数 | $U(1)$ の対照 |
|---|---|---|---|---|
| 一枚（背景 $W$、拘束 $x_3 = 0$） | $\mu_W^{\beta} = \mu_1^{\beta\cos(\theta/2)}$（(1)） | $\beta_{\mathrm{eff}} = \beta - d/2$ | —（交換子が作れない） | cos の作用で同じ $\theta^2$ の $\eta$、ガウスで 0 |
| 二枚（外周 $W$） | $Z_1(\beta\lvert 1+W\rvert)$ | $\beta_{\mathrm{eff}} = \beta - \frac{3}{4}$ | $k/12$（(3)） | 0 |
| 一列三枚（重なった $W_a, W_b$） | $Z_1(\beta\lvert 1+W_a+W_b\rvert)$ | 単独：単独：合成 $=1:1:1$、$12k = \beta - \frac{1}{2}$ | $\kappa_{ab}/12$ | 0 |
| 一列四枚・Wilson | (5)（二変数の関数） | $\kappa_{ab}/\kappa_a = 2(\beta - \frac{1}{2})/(\beta - 1)$ | 合成のループの結合の BCH の像 | cos で $2 + 0.2/\beta$、Villain で 2 |
| 一列四枚・熱核 | (8) | $\kappa_{ab}/\kappa_a = 2 + \frac{2t}{3}$ | 同上 | 熱核（Villain）で 2 |

06

## 比を保つ作用の探索 — ループの一般式

判定式 (9) を全ての $\beta$ で満たす作用（一列四枚で一母数で閉じる作用）は在るか。恒等元に集中する作用を $\log f = \text{定数} - B\psi^2/2 + q\psi^4 + \cdots$（$B$ は木の結合、$q = O(B)$）と書き、内側の核の補正を Brown 橋の平均（平坦の近似）で数えると

$$D = \frac{2}{5} + \frac{24}{5}\,\frac{q}{B} + O\Big(\frac{1}{B}\Big), \qquad E[F'(\log G)'] = \frac{3}{5}B + O(1), \qquad \frac{\kappa_{ab}}{\kappa_a} = 2 + \frac{D}{\frac{3}{5}B} + O(B^{-2}) \tag{10}$$

です 初 ・一ループの水準。$\frac{2}{5}$ は群の曲がり（Van Vleck の前因子 $\log P = \psi^2/6 + \cdots$）から、$\frac{24}{5}q/B$ は指数の四次（非ガウス性）から来ます。$\psi^2$ の乗法的な補正は木の結合 $B$ のずらしに吸収され $D$ に入りません 初 。較正：Wilson（$q = \beta/24$）で $D = \frac{3}{5}$・比 $2 + 1/\beta$、熱核（$q = 0$）で $D = \frac{2}{5}$・比 $2 + 2t/3$、$U(1)$ では $D = \frac{24}{25}q/B$（cos で $\frac{1}{25}$、Villain で 0）で、§04・§05 の値を全て再現します 読 。

- **前因子の冪の族に根は無い**。$f=e^{\beta\cos\psi}(\psi/\sin\psi)^{\gamma}$ では、二次の結合が在る $\gamma<\frac12$ で、測った格子 $\gamma\in[-2,0.45]$・$\beta\in\{4,8,16,32\}$ の全点で $D\in[0.534,0.600]$、延長 $\gamma\ge-128$ でも $D\ge0.343$、$\gamma$ について単調増加で符号の変化はありません 読 （二経路が $\le6.5\times10^{-9}$）。一ループでも $\gamma=c\beta$（$c<3$）の全てで $D>8/25$ です 初 ・一ループの水準。$\gamma\ge\frac12$ では $\psi=\pi$ の特異点が重なり二次の結合そのものが無く、$\gamma\ge\frac32$ では重み自体が発散します 初 。前因子の冪は $\psi^2$ の補正で $B$ に吸収され、曲がりの $\frac25$ は動かない、というのが理由です。
- **基本＋随伴の族には根がある**。(10) から $D=0$ には $q/B=-\frac{1}{12}$（ガウスより急な四次）が要ります。$F=\beta\cos\psi+\rho\beta\cos^2\psi$ は $B=\beta(1+2\rho)$、$q=\beta(\frac{1}{24}+\frac{\rho}{3})$ で

$$D=\frac25+\frac15\,\frac{1+8\rho}{1+2\rho}+O\Big(\frac1B\Big),\qquad \text{一ループの根 } \rho=-\tfrac14 \tag{11}$$

  初 ・一ループの水準。数値の根は $\rho^*(\beta)=-0.318,\,-0.279,\,-0.264,\dots,-0.2516$（$\beta=16,32,64,\dots,512$、二分法と二経路で比 2 を $3\times10^{-10}$）、$\rho^*=-\frac14-0.84/\beta+O(\beta^{-2})$ です 読 。$\beta\le10$ では測った格子に根が無く（最小 $D=+0.029$）、根は $\beta=10$ と 12 の間で現れます 読 。
- **一段だけ一母数**。どちらの族でも $f*f$ は同じ族に入りません（当てはめの残差が熱核の対照の $10^5$ 倍以上） 読 。根の作用を取っても、一段の後の内側の核が族の外に出るので、次の段に同じ判定を使えません。各点の平方根の関係 $f*f\propto f^{1/2}$ は、集中した類関数では一ループの水準で満たせません 初 （$\psi$ の係数 $-\frac13$ が残る）。

07

## 比 2 の曲線は流れで閉じない

根の曲線 $\rho^*(\beta)$ が一段の写像で自分に戻るかを見ます。一段後の外側の核を対角で $f'(\psi):=w(W,W)^{1/2}=[(f*f)*f^2]^{1/2}(W)$ と定め（**対角の定義**：$W_a=W_b$ では合成のループの角が 0 なので）、$\psi^2$ と $\psi^4$ の Taylor 係数で基本＋随伴の族に当て直して $(\beta',\rho')$ を読みます。

**木の写像**。外側を $F=-Bx^2/2+qx^4+\cdots$ とすると、平坦・共線の鞍点（1 と $W$ を結ぶ測地線の上、$u_0=4w/5$）で

$$B'=\frac{B}{5},\qquad \Big(\frac{q}{B}\Big)'=\frac{17}{125}\,\frac{q}{B}+O\Big(\frac1B\Big),\qquad \psi^{2k}\text{ の形の座標は }\frac{4^k+1}{5^{2k-1}}\text{ 倍} \tag{12}$$

です 初 ・木（鞍点の主項）。鞍点が共線なので交換子と群の曲がりは木に入らず、一ループの $O(1/B)$ にだけ入ります。(10) と合わせると、比 2 の曲線 $q/B=-\frac{1}{12}$ の像は $q/B=-\frac{17}{1500}$、基本＋随伴では

$$\rho' = -\frac{53}{356}, \qquad \rho' - \rho^{*} = \frac{9}{89} \approx 0.101, \qquad D(\text{像}) = \frac{216}{625} \tag{13}$$

です 初 ・木（代入の代数）。数値は $\rho' - \rho^{*}(\beta') = 0.160,\ 0.127,\ 0.113$（$\beta = 128, 256, 512$ から出発、$\beta' = 17.8, 36.1, 72.5$）で $9/89$ に $O(1/\beta')$ で寄ります 読 （二経路が $q'$ で $\le 6 \times 10^{-9}$）。三つ目の座標 $\sigma\beta\cos^{3}\psi$ を足しても、$D$ は $0$ に戻りません（$\sigma$ は $D$ に $O(1/B')$ でしか入らない） 読 。**一段は形の座標 $q/B$ を縮め、流れをガウスの側へ引き込む。比 $2$ の条件は $\mathrm{SU}(2)$ では縮む方向の上の $O(1)$ 離れた点にあるので、曲線は閉じない**、と読めます。$U(1)$ では比 $2$ の線 $q/B = 0$ が木の写像の固定点そのもの（Villain）なので閉じます 読 。

08

## 前因子の冪の流れと、引き込む先の類

では流れはどこへ引き込むのか。類関数を $f = \exp(-B\psi^{2}/2 + h(\psi))$（$h = O(1)$）と書き、$B \to \infty$ で引数を止めた Laplace の方法の主項で一段を追います。$SU(2)$ を半径 $1$ の $S^{3}$ と見ると、二つの核の畳み込みの鞍点は $1$ と $W$ を結ぶ測地線の上にあり、横の二方向の Hessian の行列式から前因子 $P$ の比が出て

$$h_{f*g}(w) = h_{1}(a) + h_{2}(b) + \log P(w) - \log P(a) - \log P(b) + \text{定数} + O(1/B) \tag{14}$$

です（$a, b$ は鞍点の分け目） 初 ・Laplace の主項。$g := h - \log P$ と書けば、**$g$ は畳み込みで平坦な木と同じに運ばれます**。熱核（$g = 0$）が保たれるのはこれで、半群性の言い換えです。積（同じ点の二乗）は前因子を一つ余らせ、平方根はそれを半分にします。一段 $f'^{2} = (f * f) * f^{2}$ を代入すると、$\psi^{2k}$ から読む前因子の冪 $\gamma_{k} := h_{k}/p_{k}$（$\log P = \sum p_{k}\psi^{2k}$、$p_{2} = \frac{1}{180}$）は

$$\gamma_{k}' = \frac{4^{k} + 1}{25^{k}}(\gamma_{k} - 1) + \frac{1 + 25^{-k}}{2}, \qquad \psi^{4} \text{ で } \gamma' = \frac{17\gamma + 296}{625} \tag{15}$$

という一次の縮小写像に従います 初 ・Laplace の主項（係数の代数）。一意の固定点は

$$\gamma_{k}^{*} = \frac{25^{k} - 2\cdot 4^{k} - 1}{2(25^{k} - 4^{k} - 1)}, \qquad \gamma_{2}^{*} = \frac{37}{76}, \quad \gamma_{3}^{*} = \frac{1937}{3890}, \quad \gamma_{k}^{*} \to \frac{1}{2}, \qquad \left(\frac{q}{B}\right)^{*} = \frac{37}{13680\,B} \tag{16}$$

です 初 。熱核の冪 $1$ は一段で $313/625$ に移り、前因子の冪が $1$ から約 $\frac{1}{2}$ に変わって見えることの説明になります。縮み率は $\frac{1}{2}$ ではなく $\frac{17}{625}$（$\psi^{4}$）で、$\frac{1}{2}$ は固定点の値です。数値：$\gamma_{2}', \gamma_{3}'$ の $B = 32$〜$256$ からの外挿が (15) と $\le 10^{-7}$、$B$ を保った反復で四つの出発（$\gamma = 0, \frac{1}{2}, 1, 2$）と $q/B = -\frac{1}{12}$ の出発が $17/625$ の比で同じ点へ集まり、(16) の $h^{*}$ を入れた一段の外挿が $37/76$ と $1.4 \times 10^{-8}$ です 読 （二経路：指標の級数と一次元の重積分）。

**引き込む先の比**。(10) に $(q/B)^{*} = O(1/B)$ を入れると、引き込む先の類の上で

$$\kappa_{ab}/\kappa_a = 2 + c/B + O(B^{-2}), \qquad c = \frac{2/5}{3/5} = \frac{2}{3}$$

です 初 ・一ループの水準（数値の外挿 $0.666667$、二経路 $1.8 \times 10^{-9}$ 読 ）。$c$ は $h^*$ に依らず熱核と同じで、引き込む先の類は二次の比の主項では熱核と区別がつきません。$U(1)$ では非斉次項が無く、固定点は Villain（$h = 0$）、$c = 0$ です 初 。

09

## 類が閉じる条件の言明の形

§01〜§08 をまとめると 読 （一列四枚・二本のループ・対角の定義・主項に限る）：類が閉じる条件の母数の座標はループの形ごとの結合で、交換子はその BCH の像です。一段は形の座標を全て縮め（表 2）、族は「$B$ 一つ ＋ 群の曲がりで決まる $O(1/B)$ の形 $h^*$」に引き込まれます。比 2 は母数で調整できる座標ではなく、引き込む先で $2 + 2/(3B)$ となる一ループの量です。だから類が閉じる条件は「比 2 を保つ類」ではなく、**「引き込む先の一母数の類 ＋ 形の剰余の条件で運ぶ縮む形」**として言明するのがこの模型と整合します。形のずれ $r_n$ が一段で $r_{n+1} \le \lambda r_n + C/B_n$（$B_n = B_0/5^n$）を満たすと仮定すれば $r_n \le \lambda^n r_0 + C/((5-\lambda)B_n)$ で、15-03 §04 の幾何級数の型で閉じます 初 （一段の不等式を仮定したとき）。この一段の不等式の定数を、この模型の中で数で与えたのが次の一列四枚の形の剰余の定理です。

**一列四枚の形の剰余の定理 — 一段の定数を数で（一列四枚の射影の模型）**。条件（同じ行に）：$SU(2)$・一列四枚・対角の定義・$\psi^8$ で切って膨らませ直す射影の模型・座標は $\log f'$ の解析的な主部分（残りは $10^{-35}$ 以下）・$B \ge 32$・$O(1)$ の箱。類関数を $\mathbb{R}^3$ の動径関数に持ち上げると（$f = P \cdot \varphi$、$P = \psi/\sin\psi$。随伴不変な関数の畳み込みを Lie 環の畳み込みに写す既知の持ち上げ）、一段は剛さ $B$, $B$, $2B$ の三本の線分を直列につないだ一つのガウス積分になり、群の曲がりは「積 $f^2$ の持ち上げに残る $P$」と「最後の $P$ と平方根」だけに残ります 初 （持ち上げは既知の型 典 、原典は照合していない）。Laplace の方法の次の項はガウスの二次のキュムラントで閉じた形に書け、$\psi^4$ の $O(1/B)$ の項は $-\frac{8}{3125}h_2 + \frac{42}{125}h_3 - \frac{14}{140625}$、引き込む先の類 $h^*$ の上で

$$\left(\gamma_2' - \frac{37}{76}\right) B \;\to\; -\frac{591986}{69290625} \approx -0.00854 \tag{17}$$

です 初 （数値の外挿 $-0.0085438$ と $3 \times 10^{-7}$ 読 ）。$\psi^4, \psi^6, \psi^8$ の係数の距離 $r := \max_{k=2,3,4} 4^k |h_k - h_k^*|$ で、$\lambda = 17/625$ として、一段は

$$r' \;\le\; \lambda\, r + \frac{C}{B}, \qquad C = 0.0108\ (r \le 0.05),\quad 0.0036\ (r \le 0.01),\quad B \to \infty \text{ の鋭い値 } 0.00178 \tag{18}$$

を満たし 初 ・ 読 （評価の筋は紙。定数は明示の積分と級数の数値で、$B$ についての単調性は格子 $B = 32 \sim 10^6$ で確かめただけ）、実際の段の尺度 $B_0, B_1, \ldots$（$B_{n+1} \le B_n/5$）について

$$B_0, \ldots, B_{N-1} \ge 32,\ r_0 \le r_{\mathrm{box}} \quad \Longrightarrow \quad r_n \le r_{\mathrm{box}}, \qquad r_n \ \le\ \lambda^n r_0 + \frac{C}{(5-\lambda)B_n} \quad (n \le N) \tag{19}$$

です 初 （(18) を仮定したときの組み立ては Lean：`uv_uniform`〔$0 \le \lambda < 5$・$C \ge 0$・$B_n > 0$・$5B_{n+1} \le B_n$ と一段の不等式〕・`stays_in_box`）。第二項は**最後の尺度だけで決まり、段数 $N$ に依りません**：紫外から何段流しても、尺度 $B$ での形のずれは $\lambda^N r_0 + C/((5-\lambda)B)$ 以下です。形の座標 $h/B$ では縮みは $17/125$、残りは $1/B^2$ です。数（$B_0 = 32 \sim 512$ の一〜三段）では、箱の中の出発（類の点・ガウス・熱核）は (18) の上界が全段で上にあり、$C/10$ では類の点とガウスが段 1 で破れます 読 （陽性と陰性の対照）。

**箱の外**。形の $O(1)$ のずれ $x = h_2/B$（Wilson は $x = 1/24$）は箱の外です。負の側（基本＋随伴の $x = -1/12$）は $\lambda$ の上界の内にありますが、正の側（Wilson）は段 1 で上界を破り（$\bar{\lambda}/\lambda = 1.018$〔$B_0 = 32$〕$\to 1.001$〔512〕）、原因は一ループの二次の項 $c\,x^2$、$c = 11168/15625 \approx 0.715$ です 初 ・ 読 。$U(1)$ では非斉次の項が消えます 読 。

**なぜこの模型で閉じたか**。一列四枚はブロックが一つしか無い系で、ブロックの間の二次の陽な項が零和の条件で消えます。一列四枚の定理が小さい場の結合への寄与の完全な例になれたのはこの行が空だったから、と読めます 読 （15-08 §06）。

表 2　一段の写像の座標と縮み（$SU(2)$・一列四枚・対角の定義・Laplace の主項。紙は 初 、測った値は 読 ）

| 座標 | $O(1)$ の単位での一段の倍率 | 形の座標（$\div B$、$B' = B/5$）での倍率 | 測った値 |
|---|---|---|---|
| $B$（流れる一母数） | $1/5$ | — | $5B'/B = 0.998$（$B = 256$） |
| $\psi^4$（$q$・冪 $\gamma_2$） | $17/625$ | $\lambda = 17/125 = 0.136$ | 反復の比 0.02720・$q/B$ の縮み 0.1223→0.1325（$\beta = 128 \to 512$） |
| $\psi^6$（$\gamma_3$） | $13/3125$ | $13/625$ | 反復の比 0.00414 |
| $\psi^8$（$\gamma_4$） | $257/390625$ | $257/78125$ | — |
| 一般の $\psi^{2k}$ | $(4^k+1)/25^k$ | $(4^k+1)/5^{2k-1}$ | — |

表 3　この章から出る問い（状態：新。問い「一列四枚の一段の補正」は答えを書き足した）

| 問 | 問い | 大きさ | 決着したら動くもの | 決着しても動かないもの |
|---|---|---|---|---|

| 問 | 問い | 大きさ | 決着したら動くもの | 決着しても動かないもの |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 一列四枚の一段の写像の $O(1/B)$ の補正を紙で出し、形の剰余の条件の一段の不等式 $r_{n+1} \le \lambda r_n + C/B_n$ の定数 $C$ を与えられるか（仮定つきの幾何級数を、この模型の中で仮定なしにする）。**答え（この模型で）：**一列四枚の定理が $C = 0.0108$（$B \ge 32$・$r \le 0.05$）を与えた。残る仮定は射影（$\psi^{10}$ 以上を捨てる）と箱の大きさで、Wilson のような $O(1)$ の形のずれを含む評価は未 | 紙 | 引き込む先の類の形の剰余の条件 | 四次元の格子の類が閉じる条件 |
| 9 | 一列四枚以外のループの形（2×2・L 字・混じった四次）を含めても、引き込む先の類が一つ（$B$ ＋ 固定の形）に定まるか。対角の定義を六つの四次の係数への当てはめに替えても固定点が動かないか | 紙と小さな計算 | 類が閉じる条件の母数の個数 | 本当のブロック化の一段 |

10

## 言えないこと

(a) この章の系は $SU(2)$ の一枚〜一列四枚・$\theta \le 0.3$・$F$ の二次（§07・§08 は四次の Taylor 係数まで）で、四次元の格子に埋めたブロック・ゲージの張り替え・大きな場を含む一段の数ではありません。

(b) 「二次の水準で二つの座標が要る」は一列四枚・二つのループを固定した読みで、四次（交換子の向き）とブロック変数が三つ以上の系は見ていません。

(c) 前因子の冪の族に根が無いことは、測った格子の上の数値と一ループの水準の不等式で、全ての作用についての文ではありません。基本＋随伴の根は $\beta \ge 12$ の数値で、$-0.84/\beta$ の係数は外挿です。

(d) §07・§08 の写像は対角の定義 $f' = [(f * f) * f^2]^{1/2}$ と主項（$B \to \infty$）の写像で、混じった四次は入らず、$B = O(1)$ の強結合の域には使えません。形の剰余の条件の一段の不等式は、一般には仮定です。一列四枚の定理は一列四枚・対角の定義・$\psi^8$ で切った射影の模型・解析的な主部分の座標・$B \ge 32$・$O(1)$ の箱の文で、定数の一部は明示の積分の数値、指数的に小さい部分は粗い評価です。四次元の格子の一段・ブロック平均・大きな場・強結合の域には何も言いません。

(e) 「一母数で閉じる作用は無い」とも、「類が閉じる条件が有限個の母数で閉じる」とも言っていません。言っているのは、この模型で形の座標が全て縮み、引き込む先が一つに定まる、という主項の文です。

(f) この章は紫外の制御を示しません。

11

## 五分類の表と依存グラフ

表 4　この章の行

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 |
|---|---|---|---|---|
| [01] | 一枚：拘束つきで $\mu_W^{\beta} = \mu_1^{\beta\,\cos(\theta/2)}$（(1)）、ゲージの向きは背景に依らない | 初 | §01 | 拘束 $x_3 = 0$ は背景場の拘束の代用 |
| [02] | $\beta_{\mathrm{eff}} = \beta - d/2$、$U(1)$ の cos でも同じ型の $\eta$ | 読 | §01 | 一枚・$\beta = 4$〜$64$・$\theta \le 0.3$ |
| [03] | 二枚 (2)(3)・三枚 (4)：交換子は合成のループの結合の $1/12$ | 初・読 | §02・§03 | BCH の三次まで・$\beta = 4$〜$32$ |
| [04] | 四枚：比 $\kappa_{ab}/\kappa_a = 2(\beta - \tfrac{1}{2})/(\beta - 1)$ が動く（(5)〜(7)） | 初・読 | §04 | 主項は一ループの水準・数値は二経路 |
| [05] | 熱核で $2 + 2t/3$、判定式 (9) | 初・読 | §05 | 類関数・端の項 0 |
| [06] | 一ループの一般式 (10)・基本＋随伴の一ループの根 $-\tfrac{1}{4}$（(11)）・$\gamma = c\beta$ で $D > 8/25$ | 初 | §06 | 一ループの水準・集中した作用 |
| [07] | 前因子の冪の族に根なし・基本＋随伴の根 $\rho^{*} = -\tfrac{1}{4} - 0.84/\beta$・一段だけ一母数 | 読 | §06 | $\beta \in \{4, \dots, 512\}$・測った格子・二経路 |
| [08] | 木の写像 (12)・像 (13)：ずれ $9/89$ | 初 | §07 | 木（鞍点の主項）・対角の定義 |
| [09] | 曲線のずれの数値 0.160・0.127・0.113 → $9/89$ | 読 | §07 | $\beta = 128$〜$512$ の出発 |
| [10] | (14)(15)(16)：前因子の冪の縮小写像・固定点 $37/76$・$c = 2/3$ | 初 | §08 | Laplace の主項・一列四枚・対角の定義 |
| [11] | (15)(16) の数値の外挿・反復の収束 | 読 | §08 | $B = 32$〜$256$・二経路 |
| [12] | 類が閉じる条件を「引き込む先の一母数の類 ＋ 縮む形」として言明する形・問い「一列四枚の一段の補正」・問い「他のループの形での類の一意性」 | 仮 | §09 | 言明の形・一段の不等式は仮定 |
| [13] | 一列四枚の定理：持ち上げで一段は三線分の直列のガウス積分、(17)、一段の不等式 (18)、段数に依らない (19) | 初・読（定数の数値） | §09 | $SU(2)$・一列四枚・対角の定義・$\psi^{8}$ の射影・$B \ge 32$・$O(1)$ の箱 |
| [14] | 箱の外：Wilson の正の形のずれは段 1 で $\lambda$ を破る、原因は $c\,x^{2}$（$c = 11168/15625$） | 初・読 | §09 | 同じ模型・$B_0 = 32$〜$512$ |

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
[01] 初  一枚：(1)                                              拘束 x₃ = 0
[02] 読  β_eff = β − d/2 ⟸ [01]
[03] 初  二枚・三枚：交換子は合成のループの像 ⟸ [01]
[04] 初  四枚：比が β で動く ⟸ [03]                          一ループの水準
[05] 初  熱核 2 + 2t/3・判定式 (9) ⟸ [04]
[06] 初  一ループの一般式 (10)(11) ⟸ [05]                    集中した作用
[07] 読  前因子の族に根なし・基本＋随伴の根 ⟸ [06]
[08] 初  木の写像 (12)・ずれ 9/89 (13) ⟸ [06]                対角の定義
[09] 読  ずれの数値 ⟸ [07][08]
[10] 初  前因子の冪の固定点 37/76・c = 2/3 ⟸ [06][08]    Laplace の主項
[11] 読  固定点の数値 ⟸ [10]
[12] 仮  引き込む先の類の言明・問い「一列四枚の一段の補正」・問い「他のループの形での類の一意
[13] 初  一列四枚の定理：一段の定数と段数に依らない上界 ⟸ [10][12]          射影の模型・
[14] 初  箱の外：c x² が λ を破る ⟸ [13]
```

全ての「⟸」の右の番号は左より小さく、円はありません。仮定の行は [12] だけで、言明の形と問いです。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 初 一枚から四枚までの重みの式 (1)〜(8)・判定式 (9)・一ループの一般式 (10)(11)・木の写像と $9/89$・前因子の冪の縮小写像と固定点 $37/76$・$c = 2/3$・一列四枚の定理（射影の模型・$B \geq 32$・$O(1)$ の箱、定数は数値） | 四次元の格子の一段での同じ数。四次の係数・ブロック変数が三つ以上の系 |
| 読 比が $\beta$ で動く数値・前因子の族に根なし・基本＋随伴の根・曲線のずれの数値・固定点への反復の収束 | 全ての作用についての「根なし」。$O(1/B)$ の補正の紙の式 |
| 仮 類が閉じる条件を引き込む先の一母数の類 ＋ 縮む形として言明する形 | その類が四次元で閉じること |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| $S^3$ の熱核の形（$e^{-\psi^2/2t} \cdot \psi/\sin\psi$ と鏡像）・指標展開・Laplace の方法・Van Vleck の前因子の合成 | 典 | リー群の上の調和解析と漸近展開の標準の事実（書誌は 15-04 の出典表に準じる） |
| (1)〜(16) の式・判定式・一ループの一般式・木の写像・前因子の冪の写像 | 初 | この章の本文の証明と代数。係数の代数と三角の恒等式は Lean の束で、再検査済み（15-09 表 3） |
| 一列四枚の定理・(17)〜(19)・$c = 11168/15625$ | 初・読（定数の数値） | この章の本文。持ち上げは既知の型（随伴不変な関数の持ち上げ、原典は照合していない）。数は本書の検討の記録（級数と $B$ の有理関数の二実装・Gauss–Legendre の求積・陽性と陰性の対照）。組み立ては Lean の束（再検査済み） |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 表 1・表 2 の数値・§06〜§08 の数値 | 読 | 本書の検討の数値の記録（求積と閉じた式の二経路・四元数の Monte Carlo・指標の級数と一次元の重積分の二経路・$U(1)$ の Wilson と Villain の対照・熱核の陽性対照） |

**この章で使った語** ― ループの形ごとの結合・合成のループ・判定式・群の曲がり・Van Vleck の前因子・一段だけ一母数・対角の定義・木の写像・前因子の冪・引き込む先の類・類が閉じる条件・持ち上げ・一列四枚の定理・箱の外。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：15-07 背景に依る揺らぎ ― §01 の一枚の $\eta$ を、一段ごとの吸収と多段の帰納の問題として。

2026-10-15 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 15 部 紫外の制御の試みの記録
背景依存・背景に依らない揺らぎの一段・局所結合 · Kiichi, Shiori and Rin

# 背景に依る揺らぎ η — 一段ごとの吸収

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 15-02・15-01 にあります。

この部は、本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた記録です。存在そのものは第二巻の第 6〜13 部を、二つの設計の違いは第 14 部を見てください。部の位置づけは 15-00 にあります。

**この章で分かること** — 繰り込みの一段では、細かい場を「背景」と「揺らぎ」に分けて揺らぎを積分します。平らな場（スカラー場）では揺らぎの法則が背景に依らず、重みの四性質のうち「揺らぎの期待値で一段閉じる」性質（揺らぎの期待値の閉じ。BBS の (iii)）がそのまま使えます。群に値をとる場では揺らぎの法則が背景に依り、その依存の大きさ $\eta_k$ が難所になります。この章では、場の和の劣乗性（BBS の (ii)）の群版（背景と揺らぎの分解の補題）を紙で置き、揺らぎの指数積率と背景の正則性の群版を言明の形で置いて一段の鎖を書き、$\eta_k$ の素朴な見積もりでは $\sum_k \eta_k$ が発散すること、揺らぎの法則が背景に依らない場合には鎖が $\eta = 0$ でそのまま通ること（背景に依らない揺らぎの一段の補題）、$\eta$ を局所結合のずらしとして母数に吸収する案、多段の帰納がまだ書けていないことを、条件つきで述べます。あわせて、Wilson の一リンクでの背景に依らない揺らぎの一段の補題の版（一リンクの熱核比較の補題）、最小の系で測った吸収できない残りの次数、背景の微分の四つの分解、$SU(2)$ の群の幾何の部分（BCH の三次）の係数と、その予算が発散することを述べます。改訂では、Wilson の一リンクの中心の取り直しの代償（中心の取り直しの条件）、背景を類の母数に持たせたときの残りと予算、粗い変数が一つのループの一段での背景の更新、三次元の箱での多ループの類の座標を足しました。

**前提となる章** — 15-01 §02（群値の場と重みの四性質）・15-02 §04（BBS 付録 A.6 の鎖）・15-03 §02（分解の言明）・15-06（一枚の $\eta$ の型）・7-05 §05（群の元は足せない）。

**先に言うこと** — この章は紫外の制御を示しません。紙で置くのは背景と揺らぎの分解の補題・一段の鎖（揺らぎの指数積率と背景の正則性の群版を仮定したとき）・背景に依らない揺らぎの一段の補題（揺らぎの法則が背景に依らない場合の一段だけ）・四元数の恒等式で、どれも本当の繰り込みの一段（ブロック平均の拘束・背景場の伝播関数・Wilson の作用・大き

な場を含む一段）についての文ではありません。$\eta$ の吸収は案で、多段の帰納は書けていません。

この章の順序

1. 揺らぎの測度が背景に依ること — $\eta_k$ の置き場所
2. 背景と揺らぎの分解の補題と重みの分解 — 場の和の劣乗性の群版（式 (1)(2)）
3. 揺らぎの指数積率と背景の正則性の群版と入れ替え — 言明と一段の鎖（式 (3)）
4. $\eta$ の素朴な見積もりと発散
5. 背景に依らない揺らぎの一段の補題 — 背景に依らない揺らぎでは鎖が $\eta = 0$ で通る（表 1）・Wilson の一リンク（一リンクの熱核比較の補題）・中心の取り直しの代償
6. $\eta$ = 局所結合のずらしの案 — 熱浴法の事実・四元数の恒等式・$\theta$ の次数での選別・最小の系で測った残り・四つの分解・背景を類の母数に
7. BCH の三次・類 $(B, q, a)$・予算・面の一段・多ループの類と、多段の帰納 — 問い「同時の法則の密度の割り方」・問い「多段の最小の言明」・紫外の問い 17〜19・問い「多ループの類の二段目」・問い「結合を母数に持つ類」（表 2）
8. 言えないこと
9. 五分類の表と依存グラフ（表 3）

---

00

## この章で分かること

- 群に値をとる場では揺らぎの測度が背景に依り、その分 $\eta_k$ が一段の評価に因子 $1 + \eta_k$ を入れます。$\sum_k \eta_k < \infty$ でなければ、15-01 §01 の算術どおり定数が段数とともに崩れます（§01）。
- 重みの場の和の劣乗性（場の和について積に割れる）の群版は、背景 × 揺らぎの形で紙で立ちます（背景と揺らぎの分解の補題、§02）。揺らぎの指数積率と背景の正則性の群版は言明の形で置け、それを仮定すれば一段の鎖は平らな場と同じ形で閉じます（§03）。
- $\eta_k$ を背景の曲率から素朴に見積もると、和は段数の冪か対数の冪で発散し、誤差として運べません（§04）。
- 揺らぎの法則が背景に依らない場合（リンクごとの熱核の積がその例）には、鎖は $\eta = 0$ でそのまま通ります（背景に依らない揺らぎの一段の補題、§05）。本当の一段の揺らぎはこ

の型ではありません。

- $SU(2)$ の Wilson の作用では、一リンクの条件つき法則が背景に依らない一母数の族の元で、背景は局所結合と中心の向きにだけ入ります。これを使って $\eta$ を局所結合のずらしとして吸収する案を置きます（§06、案）。多段の帰納は書けていません（§07）。
- Wilson の一リンクでは、揺らぎの法則が角の上限の内側で熱核の定数倍に押さえられ、背景に依らない揺らぎの一段の補題の鎖が条件つきで通ります（一リンクの熱核比較の補題、§05）。
- 最小の系で測ると、吸収できない残りの最低次数は $\theta^0\beta^{-1/2}$ と $\theta^1\beta^0$ です。背景の微分は結合・回転・形・群の幾何の四つに割れ、形の部分は幾何級数に入りますが、$SU(2)$ の群の幾何の部分（BCH の三次、係数 $1/9$）は背景そのものに乗って縮まず、その予算は閾をどう選んでも発散します。改良は類の側――背景の場の強さを母数に持たせること――にあります（§06・§07）。
- 背景のホロノミーの対数 $a$ を類の母数に持たせると、最小の系で残りは $\theta^0\beta^{-3/2}$ に下がり、予算は段数に一様になります（条件つき、§06）。発散は消えたのでなく、類が一段で閉じるかの問いに移ります。
- 粗い変数が一つのループの一段では、$a$ の更新は群の順序つきの積で全次数で閉じます。三次元の箱の多ループの一段では、面ごとの類と隣の対で二次まで閉じ、三次に角の三重積、四次に多面の結合が要ります（§07）。角の三重積は二段目で縮まず、流れの固定点に下から寄る座標です。四次元の類は一つの母数と流れが値を決める比の座標（二次 2・三次 3・四次 65）で、頂点を共有しない「斜めの隣」の座標は規則に依らず 0 になりません（§07、木の水準と一ループの測った範囲）。
- Wilson の一リンクの中心の取り直しは、Taylor の半径の約 4 倍の損と、結合の動き $cg^2p^2$ を生みます。後者は類の母数の側へ運ぶ項です（§05）。

01

## 揺らぎの測度が背景に依ること — $\eta_k$ の置き場所

段 $k$ の一段では、辺の変数を背景と揺らぎに $U_l = W_l\, e^{A_l}$（$W_l \in G$、$A_l$ はリー環 $\mathfrak{su}(N)$ の元）と分け、背景 $W$ を止めて揺らぎ $A$ を積分します。この揺らぎの法則を $\mu_{k,W}$ と書きます。Gauss の部分の共分散は、背景場の中の伝播関数 $g_k^2 C_W$ です（7-07 表 1 の土台の論文の題）。

平らな場（スカラー場 $\phi = \phi_{\text{背景}} + \zeta$）では、揺らぎ $\zeta$ の法則は背景に依らない Gauss の法則で、重みの揺らぎの期待値の閉じ（揺らぎの期待値で一段閉じる）は揺らぎだけの関数の期待値として使われます 読 （15-02 §04 の鎖を読んだもの）。群の上ではそうなりません。背景が変わると $C_W$ が変わり、揺らぎの法則そのものが変わります。この依存の大きさを $\eta_k$ と書

き、一段の評価に因子 $1+\eta_k$ として入れる、というのがこの章の置き方です（式 (3)）。15-01 §01 の算術から、因子の積 $\prod_k (1+\eta_k)$ が段数 $K$ に一様に有界であるには $\sum_k \eta_k < \infty$ が要り、$\eta_k$ が $g_k^2$ の大きさなら足りません [初]（算術）。

02

## 背景と揺らぎの分解の補題 — 場の和の劣乗性の群版

プラケット $p$ の縁の辺を $l_1,\dots,l_4$、向きの符号を $s_i \in \{\pm 1\}$ とし、$U_{\partial p} = \prod_{i} U_{l_i}^{s_i}$、$W_{\partial p}$ も同様に定めます。ノルムは作用素ノルムです。

**背景と揺らぎの分解の補題。** $G = SU(N)$ で

$$\|U_{\partial p} - 1\| \;\le\; \|W_{\partial p} - 1\| + \sum_{i=1}^{4} \|A_{l_i}\|, \qquad \|U_{\partial p} - 1\|^2 \;\le\; 2\|W_{\partial p} - 1\|^2 + 8\sum_{i=1}^{4} \|A_{l_i}\|^2 \tag{1}$$

[初] 証明。(1) 各因子を $W$ の部分と揺らぎの部分に分ける。$s=+1$ なら $W e^{A} = W \cdot Y$（$Y = e^{A}$）、$s=-1$ なら $(We^{A})^{-1} = W^{-1}\cdot Y$（$Y = We^{-A}W^{-1}$）。どちらも $Y$ は $e^{\pm A}$ の共役である。(2) 積 $W_1' Y_1 W_2' Y_2 W_3' Y_3 W_4' Y_4$（$W_i' = W_{l_i}^{s_i}$）で、各 $Y_i$ をそれより右の $W'$ の右へ $YW' = W'(W'^{-1} Y W')$ で移すと、$U_{\partial p} = W_{\partial p}\, Y_1'' Y_2'' Y_3'' Y_4''$ で、各 $Y_i''$ は $e^{\pm A_{l_i}}$ の共役。(3) ユニタリ行列について $\|XY - 1\| \le \|X-1\| + \|Y-1\|$ と $\|hYh^{-1}-1\| = \|Y-1\|$（7-05 の式 (8)）を繰り返して $\|U_{\partial p}-1\| \le \|W_{\partial p}-1\| + \sum_i \|e^{\pm A_{l_i}} - 1\|$。(4) $A$ は反エルミートなのでユニタリに対角化でき、固有値 $e^{i\vartheta}$ について $|e^{i\vartheta}-1| = 2|\sin(\vartheta/2)| \le |\vartheta| \le \|A\|$。よって $\|e^{\pm A}-1\| \le \|A\|$。(5) 二乗は $(x+y)^2 \le 2x^2 + 2y^2$ と $(\sum_{i\le 4} y_i)^2 \le 4\sum_i y_i^2$ から。$\blacksquare$

**重みの分解（背景と揺らぎの分解の補題の系）。** $G_c(X,U) := \exp\bigl(c \sum_{p \subset X} \|U_{\partial p} - 1\|^2\bigr)$（$c>0$）と置くと、四次元の格子では一つの辺は高々 6 枚のプラケットに乗るので

$$G_c(X, We^{A}) \;\le\; G_c(X,W)^{2} \cdot \exp\Bigl(48 c \sum_{l \in X} \|A_l\|^2\Bigr) \tag{2}$$

です [初]（(1) の二つ目を $p \subset X$ について足し、$8 \times 6 = 48$）。これは場の和の劣乗性の場の和を「背景 × 揺らぎ」に替えた版で、揺らぎの側は Gauss の型の重みになります。既知の初等的な事実かもしれません（連作の大きな場の論文に同じ形の評価がある可能性があるが、本文を照合していない）。

**揺らぎを $Y$ で書く形。** 段 (1)〜(3) は $e^{A}$ を任意のユニタリ $Y$ に替えても通ります。$\|Y^{-1}-1\| = \|Y-1\|$ と共役不変性から $\|(WY)_{\partial p} - 1\| \le \|W_{\partial p}-1\| + \sum_{i\le 4}\|Y_{l_i}-1\|$ で、一つのリンクが乗るプラケットの最大数を $q$（四次元で 6）として $G_c(X,WY) \le G_c(X,W)^2 \exp\bigl(8qc \sum_{l\in \bar X}\|Y_l - 1\|^2\bigr)$ です [初]（$\bar X$ は $X$ のプラケットの縁のリンク）。この形

では揺らぎに小さな場の条件が要りません（段 (4) の $\|e^A-1\|\le\|A\|$ を使わないため）。§05 の背景に依らない揺らぎの一段の補題はこの形を使います。

**背景と揺らぎの分解の補題が言わないこと**。(2) が言うのは場の和の劣乗性だけで、揺らぎの期待値で一段閉じること（揺らぎの期待値の閉じ）には触れません。

03

## 揺らぎの指数積率と背景の正則性の群版、入れ替え — 言明と一段の鎖

段 $k$ の重みを $G_k:=G_{c/h_k^2}$（$h_k$ は段 $k$ の場の尺度で、たとえば小さな場の閾 $g_kp(g_k)$。$p(g)$ は 7-05 の式 (7) の閾の倍率）、$\mathcal{W}_k(X)$ を $X$ の上の小さな場の（正則な）背景の集合、$B(X)$ を $X$ の中のブロックの集合とします。次の三つを言明として置きます 仮（言明だけ。定数 $c,t_0$ と $\mathcal{W}_k$ の定義の定数は、段にも格子間隔にも依らない）。

- **揺らぎの指数積率の群版**：全ての $W\in\mathcal{W}_k(X)$ と $0<t\le t_0$ で $\mathbb{E}_{\mu_{k,W}}\exp\bigl(\frac{48tc}{h_k^2}\sum_{l\in X}\|A_l\|^2\bigr)\le 2^{|B(X)|}$。期待値は真の揺らぎの測度についてのもので、Gauss の部分だけについてのものではありません。
- **背景の正則性の条件**：背景の写像の像に入る $W$ について $G_k(X,W)^{2t}\le G_{k+1}(X,W)$（$0<t\le t_0$）。中身は背景の正則性（細かいプラケットの曲率が、粗いプラケットの曲率で押さえられること）です。
- **期待値と半ノルムの入れ替えの群版**：$\theta_W F(W):=F(We^A)$ とし、$T_W(h)$ を背景のリー環の向きの微分で作った Taylor の半ノルムとする。ある $\eta_k\ge 0$ で $\|\mathbb{E}_{\mu_{k,W}}\theta_W F\|_{T_W(h_{k+1})}\le(1+\eta_k)\,\mathbb{E}_{\mu_{k,W}}\|F\|_{T_{We^A}(h_k)}$、かつ $\sum_k\eta_k<\infty$。原典の期待値と半ノルムの入れ替えの不等式（BBS の (A.6.5) ほか）に、測度が背景に依る分の因子 $1+\eta_k$ を許した版です。

この三つと重みの分解 (2)（$c$ を $c/h_k^2$ に替えたもの）を仮定すれば、活動のノルムの一段の評価（BBS の補題 A.6.1）と同じ鎖（入れ替え → ノルムの定義 → (2) → 揺らぎの指数積率の群版 → 背景の正則性の条件）で、$W\in\mathcal{W}_k(X)$ の上

$$\bigl\|\mathbb{E}_{\mu_{k,W}}\theta_W K(X)\bigr\|_{G_{k+1}}\ \le\ (1+\eta_k)\,2^{|B(X)|}\,\|K(X)\|_{G_k}\tag{3}$$

が出ます 初（三つを仮定したときの鎖だけ）。$\mathcal{W}_k$ の外は大きい場の稀さの条件の大きな場の因子が受け持ちます（15-00 §01）。揺らぎの期待値の閉じの群版そのものは、正則な背景の上で一様な伝播関数 $C_W$ の評価、$\mu_{k,W}$ の Gauss からのずれの一様な評価、$cg_k^2/h_k^2$ が小さいこと、の三つで閉じる形をしています 読（Gauss の指数モーメントを行列式で書いた式から）。

**一リンクの熱核の積では、揺らぎの期待値の閉じの群版がただで立ちます。**辺ごとに $Y_l = W_l^{-1} U_l$ が独立に熱核 $p_\tau$ に従うとき、Haar 測度の不変性（コンパクトな群なので左右どちらにも不変）から $Y$ の法則は $W$ に依らず、$\mathbb{E}\exp\bigl(s\sum_l \|Y_l - 1\|^2\bigr) = \bigl(\mathbb{E}\exp(s\|Y-1\|^2)\bigr)^{|X|}$（$|X|$ は $X$ の辺の数）は背景に依りません 初 。これが $2^{|B(X)|}$ 以下になるのは $s\tau$ が小さいときです 読 （熱核の Gauss 型の上界から。数は §05 の表 1）。15-04 §01 の望遠鏡和は、この「背景に依らない揺らぎ」の別の面と読めます 読 。

## 04 $\eta$ の素朴な見積もりと発散

**曲率から見積もると。**測度が背景に依る分を、曲率 $\|W_{\partial p} - 1\| \lesssim g_k p(g_k)$ を通して素朴に見積もると $\eta_k \sim g_k p(g_k)$ で、一ループの結合の列 $g_{K-j}^2 \le 1/(bj)$（15-01 §01）では $\sum_k \eta_k$ が $K^{1/2}$（対数の因子を除いて）の程度で発散します 初 （算術。$\eta_k \sim g_k p(g_k)$ という素朴な見積もりの下で）。

**一枚で測ると。**一枚のプラケットの最小の模型（15-06 §01）では、背景の生成子の向きを抜く拘束を置くと、背景依存は結合の置き換え $\beta \mapsto \beta\cos(\theta/2)$ ひとつに正確に入ります（$\mu_W^{\beta} = \mu_1^{\beta\cos(\theta/2)}$） 初 。共分散の比で測った $\eta$ は $\theta^2/8$ で、閾 $\theta \le \varepsilon_k = g_k p(g_k)$ の下で $\eta_k \lesssim g_k^2 p(g_k)^2$、一ループの流れの下で $\sum_{k\le K}\eta_k$ は $\ln K$ の冪で発散します 初 （素朴な見積もりの算術）。拘束を置かない（背景を臨界点に取らない）と、共分散の比は $\beta\theta^2/12$ で $\beta$ とともに増えます 読 。どちらの見積もりでも、**$\eta$ は誤差として運べる大きさではなく、母数への吸収が要ります。**一枚の例はその吸収が正確に起きる最小の例です。

**どの $\eta$ か。**$\eta$ を一つの数で測ると型が変わります（共分散の比は $\theta^2$、Kullback–Leibler の量は $\theta^4$、スコア＝背景を動かしたときの期待値の一次の変化の率は $\theta$） 読 。揺らぎの指数積率の群版が使うのは偶の量、入れ替えの不等式（期待値と半ノルムの入れ替えの群版）が使うのは一次の量で、言明には「どの $\eta$ か」を書き込む必要があります。スカラーの場では測度が背景に依らないので $\eta_k = 0$ で、この問題そのものがありません。

## 05 背景に依らない揺らぎの一段の補題 — 鎖が $\eta = 0$ で通る

§03 の鎖が仮定なしに通る場合が一つあります。揺らぎの法則が背景に依らない場合です。

**設定。**$G = SU(N)$、作用素ノルム。リンクの有限集合 $\Lambda$、ブロックへの分割、$X$ はブロックの和集合、$B(X)$ はその中のブロック、$\bar{X}$ は $X$ のプラケットの縁のリンク。重み $G_h(X,U) := \exp\bigl((c/h^2)\sum_{p\in X}\|U_{\partial p} - 1\|^2\bigr)$。Taylor の半ノルムは $\|F\|_{T_U(h)} :=$

$\sum_{n\ge 0}\frac{h^n}{n!}\|D^nF(U)\|$、ここで $\|D^nF(U)\|$ は右掛け $F(Ue^{t_1X_1}\cdots e^{t_nX_n})$ の $t=0$ での偏微分の、$|X_j|\le 1$ についての上限。重みつきノルムは $\|K(X)\|_{G_h}:=\sup_U\|K(X)\|_{T_U(h)}/G_h(X,U)$。揺らぎは $G^\Lambda$ の上の確率測度 $\nu$ で、一段は $\theta_\nu K(W):=\int K(WY)\,d\nu(Y)$。$M_\nu(s,X):=\mathbb{E}_\nu\exp\bigl(s\sum_{l\in\bar X}\|Y_l-1\|^2\bigr)$。

**背景に依らない揺らぎの一段の補題**。次の三つを仮定する。揺らぎの背景独立の条件：$\nu$ は背景 $W$ に依らない。尺度の縮みの条件：$h_+^2\le h^2/2$。揺らぎの指数積率の条件：$M_\nu(8qc/h^2,X)\le 2^{|B(X)|}$。このとき全ての背景 $W\in G^\Lambda$ と滑らかな $K(X)$ について

$$\|\theta_\nu K(X)\|_{G_{h_+}}\ \le\ 2^{|B(X)|}\,\|K(X)\|_{G_h}\tag{4}$$

さらに次が成り立つ [初]（条件：揺らぎの背景独立・尺度の縮み・揺らぎの指数積率の三条件と、一段だけ）。

- (a) 入れ替えは $\eta=0$：全ての滑らかな $F$ で $\|\theta_\nu F\|_{T_W(h)}\le\mathbb{E}_\nu\|F\|_{T_{WY}(h)}$。
- (b) 局所性：$\nu=\otimes_l\nu_l$（リンクごとに独立）なら $\theta_\nu K(X)$ は $W$ の $\bar X$ への制限だけに依り、$\bar X\cap\bar X'=\emptyset$ なら積に割れる。台は一段で広がらない。
- (c) リンクごとの熱核の積 $\nu=p_\tau^{\otimes\Lambda}$ では $M_\nu(s,X)=m(s,\tau)^{|\bar X|}$、$m(s,\tau):=\mathbb{E}_{p_\tau}e^{s\|Y-1\|^2}$ で、背景に依らない。初等的な上界 $m(s,\tau)\le 1+(e^{4s}-1)\,\mathbb{E}_{p_\tau}\|Y-1\|^2/4$。$SU(2)$（指標の係数 $(n+1)e^{-n(n+2)/(2\beta)}$ の規約）では $\mathbb{E}\|Y-1\|^2=2(1-e^{-3/(2\beta)})\le 3/\beta$。
- (d) 小さな場：$\nu=\otimes\nu_l$ を $\{\|Y_l-1\|\le h'\ \forall l\}$ で条件づけた $\nu'$ も揺らぎの背景独立の条件を満たし $M_{\nu'}\le M_\nu$。背景を $\mathcal{U}_\varepsilon:=\{\max_{p\in X}\|W_{\partial p}-1\|\le\varepsilon\}$ に取れば、右辺のノルムの上限は $\mathcal{U}_{\varepsilon+4h'}$ の上だけでよい。

[初] 証明。**段 1（場の和の劣乗性）**：§02 の「揺らぎを $Y$ で書く形」から $G_h(X,WY)\le G_h(X,W)^2\exp\bigl((8qc/h^2)\sum_{l\in\bar X}\|Y_l-1\|^2\bigr)$。**段 2（(a)）**：$Y^{-1}e^{tX}Y=e^{t\,\mathrm{Ad}_{Y^{-1}}X}$ を因子の間に挟むと $F(We^{t_1X_1}\cdots e^{t_nX_n}Y)=F(WYe^{t_1X_1'}\cdots e^{t_nX_n'})$、$X_j':=\mathrm{Ad}_{Y^{-1}}X_j$、$|X_j'|=|X_j|$。右掛けで微分の向きが随伴で回るだけで、随伴は作用素ノルムを保つ。$F$ はコンパクトな群の積の上で滑らかなので積分の下で微分でき（優収束）、**$\nu$ が $W$ に依らないので微分は被積分関数にだけ掛かる**。よって $n$ 階の微分は $\int\|D^nF(WY)\|d\nu(Y)$ 以下で、$h^n/n!$ を掛けて足す。**段 3（鎖）**：(a) → ノルムの定義 → 段 1 → 揺らぎの指数積率の条件 → 尺度の縮みの条件の順に $\|\theta_\nu K(X)\|_{T_W(h)}\le\|K(X)\|_{G_h}\,G_h(X,W)^2\,2^{|B(X)|}\le\|K(X)\|_{G_h}\,G_{h_+}(X,W)\,2^{|B(X)|}$。最後は尺度の縮みの条件から $G_h^2\le G_{h_+}$。(b) は Fubini と独立性、(c) は独立性と Haar の左右の不変性、$z=\|Y-1\|^2\in[0,4]$ の上の $e^{sz}$ の凸性（弦の不等式）、$\|Y-1\|^2=2-\mathrm{tr}\,Y$ と $\mathbb{E}\,\mathrm{tr}\,Y=2e^{-3/(2\beta)}$。(d) は各座標について増加な関数を下の集合で条件づけると期待値が増えないこと（座標ごとに独立）と、段 1 の一つ目の不等式から。∎

表 1　揺らぎの指数積率の条件の数：$SU(2)$・辺ごとの熱核・$n_b = 96$（四次元・倍率 2 のブロックの閉包のリンクの数の目安）で $m(s,\beta)^{96} \le 2$ となる最大の $s/\beta$（刻み $5\times10^{-4}$）読

| $\beta$ | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 最大の $s/\beta$ | 0.0025 | 0.0025 | 0.0025 | 0.0020 | 0.0020 | 0.0020 |

表 1 は本書の検討の数値の記録です（角の方向の台形の求積と指標の和。陽性対照として $\mathbb{E}\|Y-1\|^2$ の閉じた形と 9 桁一致）。Gauss の見立て $(1-2s/\beta)^{-3/2}$ からの $\ln 2/(3n_b) \approx 0.0024$ と合います。$s = 8qc/h^2$、$\beta = 4/g^2$ と読むと条件は $c\,g^2/h^2 \lesssim 1.7\times10^{-4}$（$q=6$・$n_b=96$）です読。$h = g\,p(g)$ なら $c/p(g)^2 \lesssim 1.7\times10^{-4}$ で、$p(g)$ は対数の冪で増えるので細かい段では満たされます。

**背景に依らない揺らぎの一段の補題に入っていないもの**。これが「閉じられる部分」の正確な縁です読。

1. **揺らぎの法則が背景に依らないこと（揺らぎの背景独立の条件）全部**。本当の一段の $\mu_{k,W}$ は、作用の非二次性（Wilson の作用：一枚で $\mu_W^\beta = \mu_1^{\beta\cos(\theta/2)}$）・ブロック平均の拘束（拘束面が $W$ に依る）・背景場の伝播関数 $C_W$（隣のリンクの揺らぎが $W$ に依るプラケットの項で結合）の三つで $W$ に依ります。段 2 の「微分は被積分関数にだけ掛かる」が崩れる所が $\eta$ そのものです。
2. **熱核の作用との関係**。背景に依らない揺らぎの一段の補題の揺らぎは「リンクごとの熱核の畳み込み」で、プラケットごとの熱核の作用は、プラケットの変数が独立な座標になる場合（二次元・軸ゲージ）に限って辺ごとの積の形になります。三次元以上では立方体の制約がプラケットを結びます（その現れが 15-05 の源）。
3. **一段だけ**。尺度の縮みの条件を $k$ 段重ねると $h_k \le 2^{-k/2}h_0$ で重みが潰れます。多段にはブロック化の因子・背景の正則性の条件・$2^{|B(X)|}$ を打ち消す多体のノルムの縮みが要ります（§07）。
4. **大きな場の稀さは出ません**。$G_h(X,U) \le e^{4c|X|/h^2}$ なので、このノルムは大きい場の稀さの条件の $e^{-cp(g)^2|\Omega^c|}$ を作りません。(d) は「小さな場の背景が一段で $\varepsilon \to \varepsilon + 4h'$ にしか広がらない」ことだけです。
5. **Wilson の作用は扱いません**（非二次性の $\eta$）。一リンクに限れば、次の一リンクの熱核比較の補題で扱えます。
6. **小さい場の解析性の条件との対応**。小さい場の解析性の条件の「局在した補正の解析性と減衰」のうち、一段で台が広がらないこと（(b)）と、半径 $h$ の Taylor ノルムが $2^{|B(X)|}$ 倍で保たれること（(4)）が背景に依らない揺らぎの一段の補題の中身で、減衰 $e^{-\kappa d(X)}$ の一様性と段に一様な定数は含みません。

**Wilson の一リンクへ ― 一リンクの熱核比較の補題と一リンクの揺らぎの一段の補題。** 一本のリンクだけを揺らし、背景をその条件つきの最大点（staple の和の向き $\hat{q}(W)$、§06）に取ると、揺らぎ $Y$ の法則は $\mu^b$（$b=\beta|Q(W)|$）で、背景には $b$ を通してだけ依ります。$\mu^b$ は角の上限 $\theta_0\in(0,\pi)$ の内側で熱核 $p_{1/b'}$（$b'=b(1-\theta_0^2/12)$）の $K$ 倍で上から押さえられ、

$$\mu^b(\theta)\ \le\ K(b,\theta_0)\,p_{1/b'}(\theta)\quad(\theta\le\theta_0),\qquad K(b,\theta_0)\ \to\ \Big(1-\frac{\theta_0^2}{12}\Big)^{-3/2}\quad(b\to\infty)$$

$K$ は $\theta=0$ で取られて最良、$\theta_0$ の外側の重さは $\sqrt{2/\pi}\,b^{1/2}e^{-b(1-\cos\theta_0)}(1+O(1/b))$ 以下です 初 （一リンクの熱核比較の補題。$SU(2)$・一リンク・Haar に対する類密度）。証明は三つの一行で、Taylor の剰余 $1-\cos\theta\ge(\theta^2/2)(1-\theta_0^2/12)$（$\theta\le\theta_0$、$\theta_0^2\le 24$）、熱核の下界（像の和の主項と Van Vleck の前因子 $\theta/\sin\theta\ge 1$）、定数の鎖です。Taylor の剰余と定数の代数は Lean：`one_sub_cos_window`・`wilson_weight_window`（仮定 $0\le\theta\le\theta_0$・$\theta_0^2\le 24$・$b\ge 0$）・`window_constant_chain`・`window_split_bound`。この比較で背景に依らない揺らぎの一段の補題の鎖は Wilson の一リンクでも通り（一リンクの揺らぎの一段の補題）、損は二つに割れます：熱核の量に掛かる $K$（揺らぎの期待値の閉じの側）と、結合の動きから来る因子 $1+\eta$、$\eta\approx\frac{3}{2}\,\delta_b/b$（$\delta_b$ は $b(W)$ の Taylor の幅。期待値と半ノルムの入れ替えの側）です 初 （条件：一リンク・一段・背景は条件つきの最大点・中心の取り直しの幾何（中心の取り直しの条件）は仮定・$\delta_b<b$）。前者は角の上限の取り方で小さくできますが、後者は $\theta_0$ に依らず、平らな背景のまわりで $\delta_b/b\sim g^2p^2$ なので和は対数の冪で発散します 読 。数（$b=4$〜$64$・$\theta_0=0.3,\,0.5,\,1$）：紙の $K$ は真の上限と $10^{-10}$ で一致し、$\theta_0^2/12$ を落とした陰性対照は $SU(2)$ で 15 枡中 7 枡、$U(1)$ で 15 枡全てが $\theta_0$ の端で破れます 読 （$U(1)$ には前因子が無い）。共有プラケットを持つ多リンクの残り（§06）は、この補題の外です。

**中心の取り直しの条件の代償。** 背景のプラケットの角が全て $\theta_0<\pi/2$ 以下なら、staple の和の大きさは $|Q|\ge\sum_p\cos\theta_p\ge n_s\cos\theta_0$（四次元で $n_s=6$、対の配置で等号）で、$\theta_0=\pi/2$ では 0 になりえます 初 （$SU(2)$ と $U(1)$・一リンク。Lean：`sum_norm_ge_of_inner_ge`、仮定：実内積空間・$\|u\|=1$・$\langle x_i,u\rangle\ge c$）。中心の向き $\hat{q}$ の背景についての一次の微分は $18/|Q|\le 3/\cos\theta_0$ 以下で、平らな背景でちょうど 3 です（staple 一本が三本のリンクを持つため、次元に依らない） 初 。このため背景に依らない揺らぎの一段の補題の鎖を中心の取り直しの後に回すと、入力の Taylor の半径が出力のおよそ 4 倍（$h_q\approx(1+3/\cos\theta_0)h$）要ります 初 （合成の段は素描・優級数の収束域 $h<0.075$ の下）・ 読 （一方向の実測で 4.02〜4.24 倍）。結合 $b=\beta|Q|$ は平らな背景で一次の停留点にあり、その相対の動きは $\delta_b/b\le 6h\sin\theta_0+13.5h^2$ 初 （主項・$h<0.11$）、一方向の実測で $\approx 3\tan\theta_0\,h+4.5h^2$ です 読 。閾 $h=\theta_0=gp$ では $\eta\approx\frac{3}{2}\delta_b/b\approx c\,g^2p^2$（実測 $c\approx 12$、紙で $c\le 29$）で、§06 の予算の仮定より $g^2$ 一つ分足りず、和は対数の冪で発散します 初 （算術）。中心の回転は測度から半径の損へ移せますが、**結合の動きは類の母数（結合 $b$）に持たせる以外に運び先がありません** 読 。

06

## $\eta$ ＝ 局所結合のずらしの案

背景に依らない揺らぎの一段の補題は揺らぎの背景独立の条件が崩れると使えません。そこで、本当の $\mu_{k,W}$ を「背景に依らない法則 $\nu_k$（背景に依らない揺らぎの一段の補題が当たる）× 密度 $\rho_{k,W}$」に割り、密度の背景依存のうち母数に吸収できる部分を抜き出す、という方向を考えます。この節の言明は、事実の一つ（熱浴法の基礎）と恒等式の一つを除いて案です。

**事実：一リンクの条件つき法則は一母数の族の元。**$SU(2)$ の Wilson の作用で、リンク $U$ を除いた各プラケットの積（staple）を四元数として足したものを $Q(W)$ とし、$Q=|Q|\hat{q}$（$\hat{q}\in SU(2)$）と書きます。他のリンクを止めた $U$ の条件つき法則は $\exp(\beta\langle Q,U\rangle)\,dU$ で、$U=\hat{q}Y$ と置けば Haar の左不変性から $Y$ の法則は $\exp(\beta|Q|\,\mathrm{Re}\,Y)\,dY=\mu_1^{\beta|Q|}$ です。**条件つき法則は背景に依らない一母数の族 $\{\mu_1^b\}$ の元で、背景は局所結合 $b(W)=\beta|Q(W)|$ と中心の向き $\hat{q}(W)$ にだけ入ります** 典 （$SU(2)$ の熱浴法の基礎の事実。書誌は Creutz 1980・Kennedy–Pendleton 1985 を挙げるが、本文は照合していない＝未確認）。一枚の $\beta\mapsto\beta\cos(\theta/2)$（§04）も、二枚・三枚の重みの閉じた形（15-06 §02・§03）も、この一文の例と読めます 読 。

**恒等式：多リンクの作用の割り方。**背景と揺らぎの分解の補題の並べ替え $U_{\partial p}=W_{\partial p}Y_p$（$Y_p$ は揺らぎの部分の積）に、単位四元数の恒等式 $\mathrm{Re}(ab)=\mathrm{Re}\,a\,\mathrm{Re}\,b-\mathrm{Im}\,a\cdot\mathrm{Im}\,b$ を当てると、$W_{\partial p}$ の回転角を $\theta_p$、軸を $n_p$ として

$$\beta\,\mathrm{Re}(W_{\partial p}Y_p)\;=\;b_p(W)\,\mathrm{Re}\,Y_p\;-\;\beta\sin\frac{\theta_p}{2}\,\langle n_p,\mathrm{Im}\,Y_p\rangle,\qquad b_p(W):=\beta\cos\frac{\theta_p}{2}\tag{5}$$

です 初 （$\frac12\,\mathrm{tr}=\mathrm{Re}$ の規約、四元数の代数）。第一項は**局所結合 $b_p(W)$ を持つ、背景に依らない形の作用**、第二項はリー環の揺らぎで一次が主の項です。ほかに、同じ $Y_l$ が隣のプラケットで別の背景の部分積で共役されることから来る「共役のずれ」の項が残ります（三重積の型）。

**次数で選別する案：スコアを $\theta$ の次数で選別する。**密度 $\rho_{k,W}$ の背景微分（スコア）を背景の角 $\theta$ の次数で分けます 仮 （選別の読み。多枚の真の臨界点のまわりでの確認は未）。

- $\theta^0$ の項（背景に依らない一次の項）：背景の中心を拘束つきの真の臨界点に置き直せば消える。二枚では真の臨界点のまわりで作用が揺らぎについて偶になり、三枚では重みが $|1+W_a+W_b|$ の関数になる（15-06 §02・§03、どちらも〔初〕）。
- $\theta^1$ の項：$b_p(W)$ の微分（結合微分）と、再中心化の後に残る揺らぎの二次形式の異方的な部分。前者は結合を変数に広げる案で吸収し、後者も局所の異方的な結合の微分として同じ型で吸収できる見込み。

- 吸収できない残り：**最小の系では、残りの最低次数は $\theta^0\beta^{-1/2}$ と $\theta^1\beta^0$ で（$\theta^2$ 以上ではない）、閾の幅 $h_k \sim g_k p(g_k)$ を掛けた項は $g_k^2 p$ の型です。閾をどう選んでも和は対数の幕で発散し**（15-01 §01 の $\sum g_k^2$ と同じ型。下の段落と §07）、改良は閾の選び方でなく類の側——背景の場の強さを母数に持たせること——にあります 読 （二リンクと一列四枚の数を四次元の段に写す読み）。

**最小の系で測った残り**。共有プラケットを一枚持つ二本のリンクと一列四枚で、背景の角 $\theta$ についてのスコアから「結合微分（$\mathrm{Re}\,Y_p$ の三本）」と「中心の回転（左右の移動の生成子 12 本）」を引いた残りは

$$\eta^{\mathrm{res}} \;\approx\; \sqrt{A^2/\beta + D^2\theta^2}, \qquad A = 0.04\text{〜}0.14\ (\text{系による}), \quad D \approx 0.018\ (SU(2)), \quad D \approx 0\ (U(1$$

です 読 （$SU(2)$・$\beta = 4\text{〜}32$〔一部 128〕・$\theta = 0.05\text{〜}0.3$〔一部 1.0〕・二経路）。真の同時の臨界点で枠を取ると、二リンクの作用は正確に $\sum_p b_p\,\mathrm{Re}\,Y_p - s\,n\cdot J$、$J = \mathrm{Im}(Z_1 Z_2) - \mathrm{Im}\,Z_1 - \mathrm{Im}\,Z_2$ に割れ 初 （四元数の代数。Lean：`two_link_split`・`re_mul_split` ほか、成分の仮定の下の環の恒等式）、$J$ を座標に足すと——プラケットごとの四元数の結合 $(b_p,\ s_p n_p)$ の族にすると——残りは $2.4\times10^{-10}$ 以下です 読 。$\theta^0\beta^{-1/2}$ は $J$ の三次（作用の非二次性）で $U(1)$ にも同じ大きさで現れ、$\theta^1\beta^0$ は交換子を共役で吸収した後の異方的な二次形式で $SU(2)$ だけにあります 読 。

**背景の微分は四つに割れる**。一プラケットの類関数の重みを $F(U) = G(|\log U|^2)$、$G(u) =$ **定数** $- \frac{B}{2}u + qu^2 + \cdots$（$B$ が結合、$q$ が形の座標。$|\log U|$ は半角）とすると、背景 $W = e^a$ について $|\log(e^a e^y)|^2 = |y|^2 + 2a\cdot y + O(a^2)$（$y$ の全次数で）から

$$F(e^a e^y) = G(|y|^2) - B\,(a\cdot y) + 4q\,(a\cdot y)|y|^2 + \cdots + O(a^2) \tag{6}$$

です 初 。背景のスコアは (i) 結合（偶・$O(a^2)$）、(ii) 回転（$-B\,a\cdot y$）、(iii) **形**（奇の三次 $4q(a\cdot y)|y|^2$：係数は形の座標の値 $q$ と背景の積）、(iv) **群の幾何**（$SU(2)$ だけ：BCH の三次 $n\cdot[y_1\times(y_1\times y_2) + y_2\times(y_2\times y_1)]$、$q$ に依らない）に割れます 初 。$U(1)$ の二リンクでは残りは形で尽き、$\eta \approx \frac{8}{3}(q/B)(\beta B)^{-1/2}$ が測定と 0.7% 以内で合います 読 （$U(1)$・Gauss の主項・$\theta \le 0.3$・$\beta = 8\text{〜}64$）。一列の鎖では類関数の畳み込みが背景を粗いホロノミーへ正確に運ぶので（$(f_{W_1} * f_{W_2})(x) = (f*f)(W_1 x W_2)$、既知の型）、形の座標の縮み $\lambda = 17/125$ は背景で変わらず、**形の部分は幾何級数に入ります** 初 （一列の鎖・一段の不等式を仮定。帳簿は Lean：`residual_sum_uniform`〔$0 \le \lambda < 1$・部分和 $\sum_k u_k \le U$ を仮定〕・`forced_uniform`）。**群の幾何の部分は形の座標を含まず、縮みません**（§07）。

**結合を変数に広げる案：結合 $b$ を Taylor ノルムの零番目の変数にする**。活動 $K(X; W, b)$ を背景と結合の両方の関数とみなし、半ノルムを $T_{W,b}(h, h_b) := \sum_{n,m} \frac{h^n}{n!}\frac{h_b^m}{m!}\|D_W^n \partial_b^m K\|$（$h_b \propto b$）に広げます。揺らぎの法則が $\mu^{b(W)}$ の形なら、背景微分は被積分関数と $b(W)$ に掛かり、後者

は $\partial_W b \cdot \partial_b \mathbb{E}_b F = \partial_W b \cdot \mathrm{Cov}_b(F, \mathrm{Re}\, Y)$、すなわち**背景微分の余りは結合微分**です。結合微分をノルムに入れておけば、期待値と半ノルムの入れ替えの群版は因子 $1+\eta_k$ なしで立つ、という見込みです 仮 （仮定：指数型族の統計量の中心モーメントが $b$ について一様に押さえられること。多変数の局所結合の組 $\{b_p\}$ でのノルムと $2^{|B(X)|}$ の整合は未）。この形なら結合の小ささの帰納の補題の実効の結合の定義と連続性（15-03 §03）も $b$ についての解析性から出る筋になります。「$\eta$ を母数に吸収する」の正確な意味は「母数を場の成分として数える」こと、という読みです 読 。

**背景を類の母数に持たせる — 背景を母数に持つ類の命題（案）**。共有プラケット一枚の二リンクと一列四枚の条件つき法則を、プラケットの重みを $u = |\log P|^2$ の二次で切った類関数（結合 $B$ と形 $q$）＋背景のホロノミーの対数 $a$（背景を持つプラケットごと）の類 $\mathcal{C}_2 = (B, q, a)$ とみなすと、背景についてのスコアから結合・再中心化・形・$a$ の方向を引いた残りは $\theta^0 \beta^{-3/2}$ と $\theta^1 \beta^{-1}$ の大きさになります 読 （$SU(2)$・$\beta = 4$〜$128$・$\theta = 0.05$〜$0.3$ の当てはめ。紙の次数の勘定と一致）。§07 の BCH の三次（係数 $1/9$）と異方的な二次は $a$ の方向に入って消え、残るのは類で切り捨てた形の係数 $\hat{g}_3 = -(1+32\rho)/720$ の寄与だけで、$\hat{g}_3 = 0$（$\rho = -1/32$）では $\beta^{-5/2}$ に下がります 読 。類の形の係数を一つ足すごとに残りは $\beta^{-1}$ ずつ下がります（$\mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_3$ で冪 0.5→1.5→2.5）。$\beta = 4/g^2$ なので一段の項は $h_k g_k^3$ の大きさで、閾 $h_k \le H g_k$ と一ループの上界 $g_k^2 \le 1/(c_1(k_0+k))$ の下で

$$\sum_{k<K} \eta_k \;\le\; \frac{H(A + DH)}{c_1^2\,(k_0 - 1)} \qquad \text{(段数 } K \text{ に一様)}$$

です 初 （算術。Lean：`class_parameter_budget_bounded`、Lean の中の名では $c_1, k_0$ を $a, b$ と書く。仮定 $A, D, H \ge 0$・$c_1 > 0$・$k_0 > 1$・$g_k^2 \le 1/(c_1(k_0+k))$・$0 \le h_k \le H g_k$・$\eta_k \le h_k(A g_k^3 + D h_k g_k^2)$）。§07 の `budget_unbounded_of_threshold`（項が $h_k g_k$ の型なら一様な上界が無い）と対になります。条件（同じ行に）：(1) 二リンクと一列四枚の法則で測った次数で、四次元の段に写すのは読み、(2) 小さな場（$\theta \le 0.3$）、(3) $a$ は背景を持つプラケットごと（一列四枚で軸が違えば二本要る）、(4) 一段ごとに類の $(B, q)$ を当てはめ直し、切り捨てた形の係数が段に一様に有界、(5) $a$ の一段の更新が正確（単一のループの一段では恒等式、§07。多ループの一段では未）。**$a$ を母数に持たせればスコアが $a$ の方向に入るのは連鎖律で、測ったのは有限の類で切ったときに何が残るかの次数だけです**。形の剰余の条件の $\sum_k \eta_k$ の発散は消えたのではなく、類が閉じる条件——$a$ を持つ類が四次元の一段で閉じるか——へ移りました 読 。$U(1)$ では BCH の三次が無く、$a$ は次数を変えません。§05 の Wilson の一リンクの結合の動き $c g^2 p^2$ も、同じく結合 $b$ を類の母数に持たせて母数の更新に移す項です 読 。

**留保**。(5) は $SU(2)$ に固有です（staple の和が群の元の定数倍になるのは $SU(2)$ だけ）。$SU(N)$ では $\mathrm{tr}(WY)$ は $W$ と $Y$ の双線形形式で、局所結合は数でなく行列になり、条件つき

法則は一母数の族に入りません（$SU(2)$ の部分群ごとにはなる）。また基本＋随伴の作用は (5) の第一項の形を壊します（$\cos^2$ の展開に揺らぎの背景の向きの成分だけに掛かる異方的な二次形式が出る）初（四元数の代数）。

07

## 多段の帰納が書けていないこと

背景に依らない揺らぎの一段の補題も次数で選別する案と、結合を変数に広げる案も一段の文です。段を重ねるには次の三つが要り、どれも書けていません仮。

- 背景の正則性の条件：背景場の写像の像に入る $W$ について、細かいプラケットの曲率が粗いプラケットの曲率の $L^{-2}$ 倍＋$O(\varepsilon_k^2)$ で押さえられること（背景の正則性）。
- 多体のノルムの縮み：一段の損 $2^{|B(X)|}$ を、活動の無関係な部分の縮み（平らな場の付録の縮小の評価の群版）が打ち消すこと。
- $\eta$ の吸収後の残りが段に一様に $g_k^{2+\delta}$ の型に留まること。15-03 §04 の横の縮みの帳簿に乗せれば、残りは和でなく上限で押さえられる見込みです。

**群の幾何の部分の係数 — BCH の三次は $1/9$。**外の結合が $m\beta$、共有プラケットが $\beta$ の二リンク（$m=1$ が §06 の系）で、背景のスコアを結合と左右の移動の生成子 12 本に射影した残りは、Gauss の主項で $\eta = A\beta^{-1/2}$（背景の角あたり）、

$$A\sqrt{B} = \sqrt{\frac{1}{3(m+2)^3} + \frac{240\,(m^2+m+1)}{(m+2)^5}\,r^2}, \qquad r = \frac{q}{B} \tag{7}$$

です初（Gauss の主項・二リンクの模型。$m=1$〜$5$ は有理数の Wick の計算で正確、一般の $m$ の式は五点から読んだもの）。**$m=1$ の幾何の部分は $1/9$ ちょうどで、形の座標 $r$ に依りません。**形の部分とは Gauss の $L^2$ で直交し（交差項 0）、$\eta^2$ は二つの和に割れます。真の作用の独立な数値と §06 の測定に 0.6% 以内で合います読。スコアの BCH の三次の係数 $-\frac{B}{6}$ に生成子の三次が $+\frac{B}{9}$ を返して $-\frac{B}{18}$（一般に $-\frac{B}{6}\cdot\frac{m}{m+2}$）になる代数は Lean：`bch3_coefficient`（仮定 $m+2\neq 0$）・`nT_sum_diff`・`shape_split`（仮定なしの多項式の恒等式）。

**類 $(B,q,a)$ と、背景そのものとしての $s$。**BCH の三次を運ぶ $J$ の係数 $s$ は、二リンクを直列に一リンクへ縮める一段で縮みません：$s'/s = 1-(1/3+10r)/B + O(B^{-2},a^2)$ 初（主項とその $O(1/B)$。$B=16$〜$128$・$s/B\le 0.1$ の測定と三桁で一致読）。$s$ は形の座標でなく**背景の場そのもの**（$s/B$ は背景のプラケットの半角）で、一段は背景を群の積 $a'=\log(W_2W_1)$（BCH）のまま粗いホロノミーへ運び、縮むのは形の座標 $q/B$（この一段で $1/4$ 倍）だけです。類 $(B,q,a)$（$a$ は背景のホロノミーの対数）は直列の一段で三つの母数のまま閉じ、$B'=$

$B/2 - 1/6 - 5r + O(1/B)$、$r' = r/4 + O(1/B)$、$a' = \log(W_2 W_1)$ です 初 （直列の二リンクの模型・$SU(2)$。当てはめの残り $3.5 \times 10^{-7}$ 以下 読 ）。BCH の三次の $\eta$ への係数は類にも $s$ にも依らない定数なので、幾何の部分は「定数 × 各段の背景の変化の予算」として残ります。

**予算は発散する**。一段の幾何の部分の項は $\frac{1}{9}\, h_k\, (\kappa \beta_k)^{-1/2}$（$h_k$ は背景の変化の幅、$\kappa \in [0.2, 1]$ はブロック化の縮約）で、$\beta = 4/g^2$ なので $h_k g_k / (18\sqrt{\kappa})$ の大きさです 初 （算術。二リンクの定数を四次元の段に写すのは 読 、使うのは定数が $\beta$ に依らないことだけ）。小さな場の閾 $h_k = g_k p(g_k)$ では $g_k^2 p(g_k)$ の大きさで、一ループの流れ $\beta_{k+1} = \beta_k - c$（$c = \frac{11}{3\pi^2} \ln 2 \approx 0.2575$）の下、赤外の端を止めて紫外へ段を足すと和は $\ln K$ の冪で発散します 初 （算術。$h = g$ なら和は $\ln(\beta_0/\beta_*)$ の $2/(9c) \approx 0.863$ 倍で、数でも $0.865$〜$0.87$ 倍 読 ）。大きな場の確率を小さく保つには $h_k \geq g_k$ が要り、そのとき $\sum h_k g_k \geq \sum g_k^2 = \infty$ なので、**閾の選び方では和を有限にできません** 初 （Lean：`budget_unbounded_of_threshold`、仮定 $g_j^2 \geq 1/(A(j+1))$・$0 \leq g_j \leq h_j$）。したがってこの部分は誤差の因子 $1 + \eta_k$ として運べず、背景の場の強さ（プラケットごとのベクトルの結合 $s_p n_p$、統計量 $J$）を類の母数に持たせ、母数の動きに移す必要があります 読 。二リンクでは $J$ を座標に足すと残りは 0 でした（§06）。この部分は $U(1)$ には無く（BCH の三次が恒等的に 0）、母数は背景のホロノミーの対数 $a$ です。

**面の一段 — 単一のループなら $a$ の更新は群の積で閉じる**。四本のリンクが全部揺らぐ中央のプラケットと外の四枚から成る十字（二次元）で四本を積分すると、粗い重みは外周のホロノミー $W$ の類関数に正確に入り（類関数の畳み込み。ゲージ不変性の言い換え）、粗い類の中心は $a' = \log W$、$W$ は木のゲージでの順序つきの積 $e^{b_1} e^{b_2} e^{b_3} e^{b_4} e^{a_0}$（非可換 Stokes）、形の座標は背景に依りません 初 （条件：粗い変数が単一のループ・重みが類関数・他のリンクは Haar で積分・$a_p$ を木のゲージの共通の枠で持つ）。$a$ の更新を可換の和 $\sum_p a_p$ で行うと、残りは二次の交換子の和 $\sum_{i<j} a_i \times a_j$（$\theta^2 \beta^0$）で、類の形の切り捨て（$\theta^0 \beta^{-3/2}$）より大きくなります。群の積で更新すれば残りは無く、新しい座標は要りません 初 ・ 読 （$SU(2)$・$\beta = 8$〜$128$・$\theta \leq 0.3$ で、閉じ方を使わない求積が群の積を $2.1 \times 10^{-4}$〜$1.4 \times 10^{-6}$ まで再現し、差は求積の節点とともに下がる）。順序つきの積の対数の二次の項が交換子の和の半分であることは Lean：`log_quadratic_part`（仮定：環）・`commSum_eq_zero_of_comm`（可換環。$U(1)$ では可換の和が二次まで正確）。**BCH の三次は、背景の座標 $a$ の側に全次数で入っている**、と読めます 読 。形の係数は一段で $q'/B' \approx (q/B)/25$（五枚の畳み込みの木の値）、Wilson で $B' - \beta/5 \to -0.40$、熱核で $t' = t_0 + 4t_m$ ちょうどです 読 。

**多ループの一段 — 類の座標に角の三重積が要る**。粗い立方体の十二の辺だけを固定した三次元 $2 \times 2 \times 2$ の一段（$SU(2)$・熱核と Wilson・鞍点の主項と一ループ。$O(1/\beta)$ は含まない）では、粗い重みは五つの独立なループの関数で、面ごとの類関数の積には分解しません。二次の範囲では粗い箱の対称性（$O_h$）から、面ごとの類（対角）と、隣り合う面の対の結合（共有

の辺の端に置いた $a_A \cdot a_B$）の二つの係数で正確に閉じます 初 （対称性。表し方の一意性は Lean：`diag_adj_unique`、仮定：$\sum \theta = 0$ の上で二つの形が等しい）。木の水準の値は対角 $5/16$・隣 $1/32$（比 $1/10$）です 読 （有理数の当て・二経路）。$\theta^2$ の非可換なスカラーは無いので、非可換は最初から三面（角）で現れます 初 （$O_h$ の表現の勘定）。三次では立方体の角に集まる三面の三重積 $\kappa \sum_c a_x \cdot (a_y \times a_z)$ がただ一つの新しい項として要り、木の水準で $\kappa = 3/1024$（数値の当て）、一ループで $0.006$ 程度、四次では三面・四面の結合が要ります 読 。$\theta \sim \beta^{-1/2}$ の範囲で角の三重積は $\approx 2.2 \times 10^{-3} \beta^{-1/2}$、四次の多面の結合は $\approx 3.3 \times 10^{-3} \beta^{-1}$ で、類の形の切り捨て $\beta^{-3/2}$ より大きいので省けません 読 。共通の枠（木のゲージ）で $a_p$ を持つと三次に $O_h$ を破る枠の誤差が残るので、隣の対は共有の辺の端に、三重積は角に置く定義が要ります。四次元 $2^4$ の箱では粗い面 $24$・隣の対 $96$・角 $64$ と数えられます 読 （数えただけで、計算していない）。したがって類の座標は、**面ごとの $(B_p, q_p, a_p)$・隣の対の結合 $B_{pq}$・一リンクの結合 $b$・角の三重積 $\kappa$・四次の多面の結合**の形になる、と読みます 仮 （三次元の一段の鞍点の展開の中の文で、二段目・大きな場・四次元は示していない。15-03 §02）。

**角の三重積の流れ — 縮まず、固定点に下から寄る。**粗い立方体の十二の辺だけを固定した三次元の自由境界の箱 $L \times L \times L$ で、$L = 2$（一段）から $L = 20$ まで本当の多段を木の水準で測ると、比 $r_\kappa = \kappa / c_2$（$c_2$ は $\sum |a_p|^2$ の係数）は $0.019$（$L = 2$）・$0.033$（$L = 4$）・$0.050$（$L = 20$）と増え、倍ごとの比は $1.78$・$1.30$・$1.13$・$1.10$ と $1$ に寄り、増分は倍ごとに約 $0.55$ 倍に縮みます 読 （$SU(2)$・鞍点の主項・$\varepsilon$ の三次まで・当ての形で $0.055$〜$0.066$ に寄る。極限の存在は示していない）。一ループ（熱核と Wilson、$\beta = 32$〜$128$、$L \le 4$）は比を $3\%$ 以内しか動かさず、二段の比 $1.78$ をほとんど変えません 読 。**一段目の比が $1$ を超えるのは壁ではなく接近の形**です：細かい作用に無い項は一段目で生まれ、固定点より下から出発するので、$0 \le \lambda < 1$・$0 < r < s/(1-\lambda)$ なら一段の比 $(\lambda r + s)/r > 1$ でも固定点は越えません 初 （Lean：`ratio_gt_one_below_fixpt`・`abs_iterate_dev`（$0 \le \lambda < 1$））。一段の粗い作用を中間の格子の作用に入れ直す反復の二段では、比のずれは一段で $1/9$〜$1/17$ に縮み（三次の出力は入力について正確に一次）、反復の不動点 $0.032$〜$0.045$ は本当の多段の極限より小さく、寄り方もずっと速い 読 。辺だけを固定すると二次の係数は $c_2 L \ln L \approx 0.27$〜$0.29$ とほぼ一定で（辺に沿った $\ln L$）、三次元の古典の尺度の $1/L$ には届きません 読 （見立て：面の中が自由で辺だけ固定のため）。角の三重積は、形の剰余のように幾何級数で消える量ではなく、**流れが決める値を持つ座標**で、類はその値を持ち運ぶ必要があります。ただし独立な母数ではありません。

**四次元の類 — 一つの母数と比の座標、斜めの隣は 0 にならない。**四次元 $2^4$ の箱で粗い超立方体の $32$ 本の辺を固定した一段では、粗い面の角の線形化の空間は $17$ 次元で、超八面体群 $B_4$ の下で $3 + 6 + 8$ に分かれ（$6$ は一様な場）、不変量は二次 $3$・三次 $3$（色の三重積）・四次 $65$ 本です 初 （指標の平均と数値の階数の二経路。三次元の版で $2 \cdot 1 \cdot 9$ を再現）。直交する面の対（$\mathrm{tr}\, F \wedge F$ の型）の軌道和は鏡映で $0$ です。三次元と違い、**面ごとの類と辺を共有する隣の**

**対だけでは二次で既に閉じず**（残り木 0.57%・一ループ 0.79%）、一辺ずれた「斜めの隣」の対（頂点を共有しない、つなぐ二辺の移送で平均）が一本要ります：木の水準で対角 $5/26$・隣 $-79/2080$・斜め $-9/2080$ 初 （固有値 $1/4$・$5/13$・$3/10$ からの一次式。Lean：`diag_adj_skew_unique`・`diag_adj_not_enough`（仮定は計算で得た成分ごとの値と固有値）・`coeffs_of_spectrum`（$k=(2e_8-e_3-e_6)/8$）・`skew_zero_iff`）。三次も頂点に集まる型（胞の角・道）だけでは閉じず、平行の型が要ります（胞の角の係数は木で $5931/1406080$ の当て）。$\theta\sim\beta^{-1/2}$ の範囲で斜めの隣は $\beta^0$ で $\approx 0.02$、三次は $\approx 0.023\beta^{-1/2}$、四次は $\approx 0.046\beta^{-1}$ で、どれも類の形の切り捨て $\beta^{-3/2}$ より大きく省けません 読 （鞍点＋一ループ・$O(1/\beta)$ なし・面の角 $\lesssim 0.5$ の無作為 90 標本）。

箱を $\{0,\dots,L\}^4$（$L\le 10$、木）に広げた本当の多段では、二次・三次の比の座標はどれも二段目で 0 に向かわず（$\lambda\ge 1.14$）、倍ごとの比が 1 に寄って固定点の値に寄ります（斜めの隣 $r_k=k/b$：$-0.01125$・$-0.01744$・$-0.01988$、外挿 $-0.0208$。隣 $-0.145$・三次 $0.064$・$0.013$・$-0.021$）読 （当て $r_\infty-A/L-B/L^2$ が $L=4$〜$10$ を $4\times10^{-5}$ 以内で表す。三次元のような $\ln L$ の形は 30〜300 倍悪い）。二次の類の係数は $b\approx 0.39/L$ で $\ln L$ が無く、三次元より速く寄ります。一ループは二段の比を 1% 未満しか動かしません（$L\le 4$）。四次の多面の部分は二段目で $c_2$ との比 1.6 倍、向きの余弦 0.99 です。**規則への依存**：一つの粗い超立方体の中では、面を全て固定する規則は辺を固定する規則と同じ二次形式を与えます（$32-15=24-7=17$。Lean：`edge_face_dof_agree`・`euler_cube`）。粗い胞が細かい場を共有する周期の網では、斜めの隣はやはり 0 でない負の値に寄りますが値は約 2 倍（$-0.045$、射影の約束によっては $-0.06$〜$-0.10$）で、胞に収まらない部分が段とともに 6% から 2 割まで増えます 読 （可換の線形化の木の水準・二次・$L\le 16$）。**斜めの隣の符号と非零は規則にも射影の約束にも依らず、値と「一つの胞の中で閉じる」ことは依ります**。どちらの規則でも木の水準の胞の部分の $b$ は $1/L$ で、$\ln L$ の走りは木にありません。四次元の類は「一つの母数 $B$＋流れが値を決める比の座標（二次 2・三次 3・四次 65）」で、類が閉じる条件の「局所」は規則を添えて書きます（15-03 §02） 読 。

**多段の帰納を書く最小の形と、その代償**。類の座標の流れを一次の写像の列と見ると、一段の類を中間の格子の超立方体ごとの作用に入れ直す反復の二段では、三次の座標の出力は入力について正確に一次 $\kappa'=s+\Lambda\kappa$ で、正規化した $\Lambda$ の固有値は全て 0.1 未満、二次の比のずれも一段で 0.1〜0.2 倍に縮みます 読 （四次元・木・二つの重みの版が本当の二段を挟む）。ところが本当の多段は同じ座標に $1/L$ の速さでしか寄らず、**反復の不動点は本当の極限より 0 の側にずれます**（斜めの隣で、胞を切り離す規則 $-0.019$ 対 $-0.021$、周期の網 $-0.035$ 対 $-0.045$）。周期の網では、反復が毎段捨てる「胞に収まらない部分」が 6〜10% あるので、ずれは大きくなります。帰納は反復の写像の縮みでは書けても、その不動点が本当の流れの値と一致することは別に示す必要があり、類の座標を一つの胞の型に打ち切る限り、打ち切りの誤差を段ごとに持ち運ぶ形で書く必要があります 読 （帳簿は Lean：`tail_bound`（仮定 $0\le q<1$ と

増分の比 $\le q$）・`affine_iter`）。辺だけを固定する規則では $\beta' = \beta b$ が段ごとに約 0.39 倍になるので、一ループの相対の重さは段ごとに増え、帰納は弱結合の範囲の中だけで閉じる形になります。

以上で、表 2 の同時の法則の密度の割り方は最小の系で答えの形が出ました。紫外の問い 17〜19 と多ループの類の二段目も一部の答えが出ました。多段の帰納（多段の最小の言明）は書けていません。

表 2　この章から出る問い（状態：新＝この部で足した問い。更新＝答えを書き足した）

| 問 | 問い | 大きさ | 状態 | 決着したら動くもの | 決着しても動かないもの |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | $SU(2)$ の一列四枚（二本の重なったループを固定）で、中の二枚の同時の法則を局所結合の積 $\mu^{b_2} \otimes \mu^{b_3}$ × 密度に割り、密度のスコアの $\theta$ の最低次数と、揺らぎの二次形式の等方性（異方的な項の係数）を $\beta$ の関数として出す。$\theta^1$ の項が結合微分だけか。**答え（最小の系）：**最低次数は $\theta^0 \beta^{-1/2}$ と $\theta^1 \beta^0$。$\theta^1$ は結合微分だけでなく異方的な二次（$SU(2)$ だけ）を含む。$J$ を座標に足すと残りは 0（§06） | 紙と小さな計算 | 更新 | 次数で選別する案の選別の当否。期待値と半ノルムの入れ替えの群版の $\eta$ の型 | 四次元の格子の $\mu_{k,W}$。多段の帰納 |
| 11 | 多段の帰納の最小の言明：背景の正則性の条件と多体のノルムの縮みを、一枚の重みの階層模型か二次元の模型で、定数を段に依らず書けるか。あわせて結合を変数に広げる案のノルムで、$Z_b = 2I_1(b)/b$ の複素零点の位置から結合の解析性の帯の幅を出す（零点の位置は原典で未確認） | 紙 | 新 | 背景に依らない揺らぎの一段の補題を $k$ について重ねる形 | 大きな場込みの一段の剰余（結合の一段の正味の括弧） |
| 17 | 2×2 の板の中央のプラケット（四本のリンクが揺らぐ）で、スコアを生成子の空間で割った残りを巡回の順で対称化した BCH の奇数次として書き下し、幾何の係数を有理数の Wick で出す。二リンクの $1/\sqrt{3(m+2)^3}$ と比べて面の上で増えるか減るか。あわせて、背景の挿入が四元数の結合 $A_p$＋$J$ の族からはみ出すか。**答え（一部）：**十字（中央のプラケットの四本が揺らぐ二次元の一段）では、$a$ を群の積で更新すれば残りは無く、BCH の奇数次は $a$ の座標に全次数で入る。可換の和なら $\theta^2 \beta^0$。三次元 $2 \times 2 \times 2$ では角の三重積 $\kappa = 3/1024$ が要る（§07） | 紙と小さな計算 | 更新 | 四次元の段の幾何の係数 | 予算の発散（閾では逃げられない） |

| 問 | 問い | 大きさ | 状態 | 決着したら動くもの | 決着しても動かないもの |
|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 背景のホロノミーの対数 $a$ を母数に持つ類で、一段の幾何の部分が $a$ の流れ $a' = \log(W_2 W_1)$ に正確に移る（残りが $\theta^0 \beta^{-1/2}$ から一段下がる）かを、直列の一段で測る。**答え（最小の系）：** $a$ を母数に持つ類 $(B, q, a)$ で残りは $\theta^0 \beta^{-3/2}$ と $\theta^1 \beta^{-1}$ に下がり、予算は段数に一様（条件つき、§06）。単一のループの一段で $a$ の更新は正確（§07） | 小さな計算 | 更新 | 幾何の部分を母数の動きに移す形 | 多段の帰納 |
| 19 | 一リンクの揺らぎの一段の補題の条件（中心の取り直しの条件）：四次元の格子の一リンクで、staple の和の写像 $W \mapsto \hat{q}(W)$ の Taylor の半径を背景のプラケットの角と $\lvert Q \rvert$ の下限で明示し、$\delta_b / b$ の $g^2 p^2$ の係数を一つの数にする。**答え：** $\lvert Q \rvert \geq 6 \cos \theta_0$、$\lVert D\hat{q} \rVert \leq 3 / \cos \theta_0$、$h_q \approx 4h$、$\eta = c g^2 p^2$（実測 $c \approx 12$、紙で $c \leq 29$）。合成の段は素描で、結合の動きは類の母数の側へ運ぶ項（§05） | 紙 | 更新 | Wilson の一リンクの鎖を仮定なしに | 多リンクの残り |
| 23 | 多ループの類の二段目：三次元 $2 \times 2 \times 2$ の一段の後の類（面ごと・隣の対・角の三重積・多面）で二段目を行い、$\kappa$ が段ごとに保たれる座標か（次元 6 の $\operatorname{tr} F[F,F]$ の格子の版と見込む）、四次元 $2^4$ で同じ座標が足りるかを見る。**答え（一部）：** 三次元で $\kappa / c_2$ は二段目で縮まず固定点（当てで $0.055 \text{〜} 0.066$）に下から寄る。四次元では同じ座標では足りず、二次に斜めの隣・三次に平行の型が要り、比の座標はどれも固定点に寄る（木 $L \leq 10$、§07） | 小さな計算 | 更新 | 四次元の一段の類の座標 | 大きな場・小さい場の結合への寄与 |
| 26 | 結合 $b$ を類の母数に持たせたとき、Wilson の一リンクの結合の動き $c g^2 p^2$ が母数の更新に正確に移り、残りが $g^2$ 一つ分下がるか | 紙と小さな計算 | 新 | 一リンクの揺らぎの一段の補題の予算 | 多リンクの残り |
| 27 | 四次元の類の比の座標（斜めの隣・三次 3 本・四次 65 本）の固定点の値を、多段を回す代わりに、粗い超立方体の角の近くの半無限の問題（辺の束を固定した半空間の Green 関数）から直接出せるか。あわせて、粗い胞が場を共有する規則で、胞に収まらない部分（段とともに 2 割まで）を類の座標の有限個の対（ずれ $\leq 1$ の軌道）に入れて閉じるか、尾として運ぶか | 紙と小さな計算 | 新 | 類が閉じる条件の四次元の座標の値と「局所」の形 | 大きな場・小さい場の結合への寄与・一ループの二段目 |

08

## 言えないこと

(a) この部の中で、紫外の制御は閉じていません（存在は、公開された構成が別の設計で示しました）。この章の文は全て一段の文か、言明か、案です。

(b) 背景と揺らぎの分解の補題は重みの四性質のうち場の和の劣乗性の群版だけで、本題の揺らぎの期待値の閉じに触れません。既知の初等的な事実かもしれません。

(c) 揺らぎの指数積率と背景の正則性の群版と入れ替えの不等式は言明だけで、示していません。(3) はそれらを仮定したときの鎖にすぎません。

(d) $\eta_k \sim g_k p(g_k)$ と $\eta_k \lesssim g_k^2 p(g_k)^2$ は素朴な見積もりで、実際の揺らぎの測度について評価していません。

(e) 背景に依らない揺らぎの一段の補題は揺らぎの法則が背景に依らない場合の一段だけの文で、Bałaban の $\mu_{k,W}$・Wilson の作用・多段・大きな場の稀さについて何も示しません。表 1 の数は $SU(2)$・$n_b = 96$ の目安での数値の読みです。

(f) 熱浴法の事実は書誌を記憶から挙げたもので、本文を照合していません。次数で選別する案と、結合を変数に広げる案は案です。最小の系の残りの次数（§06）は二リンクと一列四枚の数で、四次元の段に写すのは読みです。$SU(N)$ には (5) の形がありません。

(g) 一リンクの熱核比較の補題・一リンクの揺らぎの一段の補題は一リンク・一段の文で、中心の取り直しの条件を仮定しています。BCH の三次の係数 (7) は Gauss の主項・二リンクの模型の値で、一般の $m$ の式は五点から読んだものです。類 $(B, q, a)$ の閉じ方は直列の二リンクの一段の文で、面を持つ配置は単一のループの十字でだけ見ています（§07）。予算の発散は一ループの流れを正確な式と見なした算術で、二リンクの定数を四次元の段に写すのは読みです。

(h) §05 の中心の取り直しの条件の数は一リンク・一段の文で、合成の段は素描、紙の優級数は $h < 0.075$〜$0.078$ でしか収束しません。§06 の背景を母数に持つ類の命題は案で、測ったのは有限の類で切ったときの残りの次数（二リンク・一列四枚・$\beta = 4$〜$128$・$\theta \le 0.3$）で、連鎖律の上の話です。四次元の段で $a$ を持つ類が閉じることは示していません。§07 の面の一段は単一のループの文で、多ループの類の座標は三次元 $2 \times 2 \times 2$ の一段の鞍点の展開（主項と一ループ）の中の文です。二段目・四次元は測っていません。

(i) §07 の角の三重積の流れは三次元の自由境界の箱（辺だけを固定）の木（$L \le 20$）と一ループ（$L \le 4$）の数で、極限は当ての形です。四次元の類は自由境界の箱の木（$L \le 10$）と一ループ（$L \le 4$）、周期の網は可換の線形化の木の二次（$L \le 16$）の数で、比の座標の固定点の

存在・四次の 65 本の値・周期の網の三次と一ループは示していません。斜めの隣の符号と非零が規則に依らないことは、測った二つの規則と二つの射影の約束についての文です。反復の写像の縮みの数は木の水準だけです。

09

## 五分類の表と依存グラフ

表 3　この章の行（この章の行に Lean の欄はありません）

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 |
|---|---|---|---|---|
| [01] | $\prod_k (1+\eta_k)$ が段数に一様に有界であるには $\sum_k \eta_k < \infty$ が要る | 初 | §01（算術） | 一ループの流れの下 |
| [02] | 背景と揺らぎの分解の補題 (1) と重みの分解 (2)、$Y$ で書く形 | 初 | §02 | $SU(N)$・作用素ノルム・四次元の格子（重みの分解） |
| [03] | 揺らぎの指数積率と背景の正則性の群版（揺らぎの指数積率の群版・背景の正則性の条件）と、期待値と半ノルムの入れ替えの群版 | 仮 | §03（言明だけ） | 小さな場の背景 $\mathcal{W}_k$・定数は $k, a$ に依らない |
| [04] | 活動のノルムの一段の評価の群版の鎖 (3) | 初 | §03（[03] を仮定したとき） | $\mathcal{W}_k$ の上 |
| [05] | 一リンクの熱核の積では揺らぎの法則が背景に依らない | 初 | §03（Haar 測度の不変性） | 辺ごとに独立な熱核 |
| [06] | 素朴な $\eta_k$ で和が発散（$g\,p$ で $K^{1/2}$、$g^2 p^2$ で $\ln K$ の冪） | 初 | §04（算術） | 素朴な見積もり・一ループの流れの下 |
| [07] | $\eta$ の型は測り方で変わる（$\theta^2$・$\theta^4$・$\theta$）。拘束が無いと $\beta\theta^2/12$ | 読 | §04・15-06 §01 | 一枚・$\theta \le 0.3$・$\beta = 4$〜$32$ |
| [08] | 背景に依らない揺らぎの一段の補題 (4) と (a)〜(d)（$\eta = 0$・台は広がらない・熱核で $M = m^{\lvert \bar{X} \rvert}$・小さな場） | 初 | §05 | 揺らぎの背景独立・尺度の縮み・揺らぎの指数積率の三条件と、一段だけ |
| [09] | 揺らぎの指数積率の条件の数 $s/\beta \le 0.0020$〜$0.0025$、$c\,g^2/h^2 \lesssim 1.7 \times 10^{-4}$ | 読 | §05 表 1 | $SU(2)$・辺ごとの熱核・$n_b = 96$・$q = 6$・$\beta = 4$〜$128$ |
| [10] | $SU(2)$ の一リンクの条件つき法則は $\mu_1^{\beta \lvert Q \rvert}$、背景は $b(W)$ と $\hat{q}(W)$ にだけ入る | 典 | §06（熱浴法の基礎の事実） | $SU(2)$・Wilson の作用・書誌は未確認 |
| [11] | 四元数の恒等式 (5)：局所結合 $b_p = \beta \cos(\theta_p/2)$ | 初 | §06 | $SU(2)$・$\frac{1}{2}\,\mathrm{tr} = \mathrm{Re}$ |

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 |
|---|---|---|---|---|
| [12] | 次数で選別する案（$\theta$ の次数での選別。残りの次数は [15]）と結合を変数に広げる案（結合をノルムの変数に） | 仮 | §06（案） | 小さな場・多枚の確認は未 |
| [13] | 多段の帰納の三つの要件（背景の正則性の条件・多体の縮み・残りの一様性） | 仮 | §07 | 言明だけ |
| [14] | 一リンクの熱核比較の補題と一リンクの揺らぎの一段の補題：Wilson の一リンクは角の上限の内側で熱核の $K$ 倍、損は $K$ と $1+\eta$（$\eta \approx \frac{3}{2}\delta_b/b$） | 初 | §05 | $SU(2)$・一リンク・一段・中心の取り直しの条件は仮定・$\delta_b < b$ |
| [15] | 最小の系の残り $\eta^{\mathrm{res}} \approx \sqrt{A^2/\beta + D^2\theta^2}$、$J$ を足すと $0$ | 読（作用の分解は 初） | §06 | 二リンク・一列四枚・$\beta = 4$〜$32$・$\theta \le 0.3$ |
| [16] | 背景の微分の四つの分解 (6)・$U(1)$ の $\eta = \frac{8}{3}(q/B)(\beta B)^{-1/2}$・形の部分は幾何級数 | 初・読（一致の数） | §06 | 小さな場（$a$ の一次）・一列の鎖・一段の不等式を仮定 |
| [17] | BCH の三次の係数 (7)、$m=1$ で $1/9$ | 初 | §07 | Gauss の主項・二リンク・一般の $m$ は読んだ式 |
| [18] | 類 $(B,q,a)$ は直列の一段で閉じ、$s$ は縮まない | 初・読 | §07 | 直列の二リンク・$SU(2)$・$B = 16$〜$128$ |
| [19] | 幾何の部分の予算は閾をどう選んでも発散する | 初（算術）・読（四次元への写し） | §07 | 一ループの流れ・$h \ge g$ |
| [20] | 中心の取り直しの条件：$\lvert Q\rvert \ge n_s \cos\theta_0$・$\lVert D\hat{q}\rVert \le 3/\cos\theta_0$・$h_q \approx 4h \cdot \eta = cg^2p^2$ | 初・読（実測の $c$ と $h_q/h$） | §05 | $SU(2)$・一リンク・$\theta_0 < \pi/2$・合成の段は素描・$h < 0.075$ |
| [21] | 背景 $a$ を母数に持つ類 $(B,q,a)$：残り $\theta^0\beta^{-3/2}$・$\theta^1\beta^{-1}$、予算は段数に一様（背景を母数に持つ類の命題） | 読（次数）・初（予算の算術）・仮（命題） | §06 | 二リンク・一列四枚・$\beta = 4$〜$128$・$\theta \le 0.3$・条件 (1)〜(5) |
| [22] | 単一のループの一段で $a$ の更新は群の積で全次数で閉じる、可換の和なら $\theta^2\beta^0$ | 初・読（数） | §07 | 十字・類関数の重み・共通の枠 |
| [23] | 多ループの一段：二次は面ごと＋隣の対、三次に角の三重積 $\kappa = 3/1024$、四次に多面 | 初（二次の対称性）・読（$\kappa$ と四次） | §07 | 三次元 $2\times2\times2$・一段・鞍点の主項と一ループ |
| [24] | 類の座標の最終形（面ごと・隣の対・一リンクの結合・角の三重積・多面） | 仮 | §07 | 三次元の一段の読み・四次元は未（四次元は [26]） |
| [25] | 角の三重積の比 $\kappa/c_2$ は二段目で縮まず固定点に下から寄る（一段目の比 1.78 は接近の形） | 読・初（一次の写像の帳簿） | §07 | 三次元・自由境界・辺だけを固定・木は $L \le 20$・一ループは $L \le 4$・当ての形 |

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 |
|---|---|---|---|---|
| [26] | 四次元の類：一つの母数＋比の座標（二次 2・三次 3・四次 65）、斜めの隣は規則に依らず 0 でなく値は規則に依る、木に $\ln L$ の走りは無い | 初 （本数の勘定・自由度の一致・係数の一次式）・読 （流れの数） | §07 | $SU(2)$・熱核・木 $L \le 10$・一ループ $L \le 4$・周期の網は可換の木の二次で $L \le 16$ |
| [27] | 反復の写像は速く縮むが、その不動点は本当の極限より 0 の側にずれ、打ち切りの誤差を段ごとに持ち運ぶ形が要る | 読 | §07 | 木の水準・二つの規則 |

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
[01] 初  積が一様 ⟺ 和が有限                                  ―ループの流れ
[02] 初  背景と揺らぎの分解の補題・重みの分解 (2)・Y の形
[03] 仮  揺らぎの指数積率と背景の正則性の群版と入れ替え ⟸ [02]
[04] 初  一段の鎖 (3) ⟸ [02][03]                              [03] を仮定
[05] 初  熱核の積で揺らぎの法則が背景に依らない
[06] 初  素朴な η で和が発散 ⟸ [01]                           素朴な見積もり
[07] 読  η の型は測り方で変わる ⟸ [06]                        一枚
[08] 初  背景に依らない揺らぎの一段の補題 ⟸ [02][05]
[09] 読  揺らぎの指数積率の条件の数 ⟸ [08]
[10] 典  一リンクの条件つき法則は μ₁^{β|Q|}                   SU(2)・書誌未確認
[11] 初  四元数の恒等式 (5) ⟸ [02]                            SU(2)
[12] 仮  次数で選別する案と、結合を変数に広げる案 ⟸ [06][08][10][11]
[13] 仮  多段の三つの要件 ⟸ [04][08][12]                      言明だけ
[14] 初  一リンクの熱核比較の補題・一リンクの揺らぎの一段の補題 ⟸ [08][10]
[15] 読  最小の系の残り θ⁰β^{-1/2}・θ¹β⁰ ⟸ [11][12]           二リンク・一列四枚
[16] 初  背景の微分の四分解・形は幾何級数 ⟸ [15]              一列の鎖
[17] 初  BCH の三次の係数 1/9 ⟸ [16]                          Gauss の主項
[18] 初  類 (B, q, a)・s は縮まない ⟸ [17]                    直列の一段
[19] 初  予算の発散 ⟸ [06][17][18]                            ―ループ・h ≥ g
[20] 初  中心の取り直しの条件の代償 ⟸ [14]                          ―リンク・
[21] 読  a を母数に持つ類・予算は一様 ⟸ [18][19]              二リンク・一列四
[22] 初  面の一段で a の更新は群の積 ⟸ [18]                   単一のループ
[23] 読  多ループの類：隣の対・角の三重積 ⟸ [22]               2×2×2・一段
[24] 仮  類の座標の最終形 ⟸ [21][22][23]                       三次元の読み
[25] 読  角の三重積は固定点に下から寄る ⟸ [23]                三次元・木 L ≤
[26] 読  四次元の類・斜めの隣・規則への依存 ⟸ [23][24]         木 L ≤ 10・一ル
[27] 読  反復の不動点のずれ・打ち切りの誤差 ⟸ [13][25][26]     木の水準
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。[03]・[12]・[13]・[24] は仮定の行で、どれも紫外の制御を言い直すか割った問いの形です。この章の節点に、紫外の制御が示されたという節点はありません。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 初 背景と揺らぎの分解の補題と重みの分解（場の和の劣乗性の群版）・一段の鎖（揺らぎの指数積率と背景の正則性の群版を仮定したとき）・熱核の積で揺らぎの法則が背景に依らないこと・素朴な $\eta_k$ の和の発散・背景に依らない揺らぎの一段の補題（揺らぎの法則が背景に依らない一段で $\eta = 0$、台は広がらない）・四元数の恒等式 (5) | 揺らぎの指数積率と背景の正則性の群版の証明。実際の $\eta_k$ の評価。本当の $\mu_{k,W}$ での一段 |
| 読 揺らぎの指数積率の条件の数（$SU(2)$・$n_b = 96$）・$\eta$ の型が測り方で変わること | 四次元のブロックの閉包での揺らぎの指数積率の条件の定数 |
| 典 $SU(2)$ の一リンクの条件つき法則が一母数の族の元であること（熱浴法の事実） | 書誌の本文の照合 |
| 初 一リンクの熱核比較の補題・一リンクの揺らぎの一段の補題（Wilson の一リンク、中心の取り直しの条件を仮定）・背景の微分の四つの分解 (6)・BCH の三次の係数 (7)（Gauss の主項・二リンク）・類 $(B, q, a)$ の直列の一段・予算の発散（算術） | 多リンクの揺らぎの指数積率の群版・面を持つ配置の幾何の係数・中心の取り直しの条件・四次元の段の予算 |
| 読 最小の系の残りの次数（$\theta^0\beta^{-1/2}$・$\theta^1\beta^0$）と $J$ を足すと $0$・$U(1)$ の形の値の一致 | 四本以上のリンクが一枚で揺らぐ系 |
| 初 中心の取り直しの条件の明示の定数・予算の一様な上界（$a$ を母数に持つとき、算術）・面の一段の背景の更新（単一のループ）・多ループの二次の閉じ方（対称性） | 四次元の段で $a$ を持つ類が閉じること・中心の取り直しの条件の合成の段 |
| 読 $a$ を持つ類の残りの次数・多ループの類の座標（隣／対角 1/10・角の三重積 3/1024）・角の三重積の流れ（固定点に下から寄る）・四次元の類（一つの母数＋比の座標、斜めの隣は 0 でない）・反復の不動点のずれ | 比の座標の固定点の存在・四次の 65 本の値・周期の網の三次と一ループ・大きな場 |
| 仮 $\eta$ を局所結合のずらしとして吸収する案・多段の三つの要件 | どれの証明も。紫外の制御が閉じる見込み |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 重みの四性質・活動のノルムの一段の評価（補題 A.6.1）・期待値と半ノルムの入れ替えの不等式（(A.6.5)） | 典（付録 A.6.2 と補題 A.6.1 の本文） | R. Bauerschmidt, D. C. Brydges, G. Slade, Introduction to a Renormalisation Group Method, Lecture Notes in Math. 2242 (2019), arXiv:1907.05474（15-02 §04） |
| 背景場の中の伝播関数 | 典（書誌と題のみ） | T. Bałaban の連作の土台の論文（7-07 表 1） |
| $SU(2)$ の熱浴法の基礎の事実 | 典（書誌は未確認） | M. Creutz, Phys. Rev. D 21 (1980) 2308；A. D. Kennedy, B. J. Pendleton, Phys. Lett. B 156 (1985) 393 |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 背景と揺らぎの分解の補題・重みの分解・鎖・背景に依らない揺らぎの一段の補題・(5)・$\eta_k$ の和の算術 | 初 | この章の本文の証明 |
| 揺らぎの指数積率の条件の数（表 1） | 読 | 本書の検討の数値の記録（$SU(2)$ の熱核の母関数を角の方向の台形の求積と指標の和で。陽性対照：$\mathbb{E}\|Y-1\|^2$ の閉じた形と 9 桁、規格化 10 桁） |
| 一枚の $\eta$ の型 | 読（15-06 の (1) の形は初） | 15-06 §01 の出典表 |
| 次数で選別する案と、結合を変数に広げる案 | 本書の検討 | 本書の検討の記録（紫外の制御の閉じない行の整理） |
| 一リンクの熱核比較の補題・一リンクの揺らぎの一段の補題・(6)・(7)・類 $(B,q,a)$・予算の算術 | 初 | この章の本文。代数の部分は Lean の束（15-09 表 3、再検査済み） |
| 最小の系の残り・$U(1)$ の一致・$s'/s$・予算の部分和 | 読 | 本書の検討の数値の記録（二リンクと一列四枚の射影の二経路・有理数の Wick と真の作用の Gauss 標本・直列の一段の当てはめとモーメントの二経路・$U(1)$ と $\theta=0$ の対照） |
| 一ループの係数 $b_0$ | 典（教科書の式） | 7-05 の式 (9) |
| 中心の取り直しの条件・背景を母数に持つ類の命題・面の一段・多ループの類の数 | 読 | 本書の検討の数値の記録（一リンクの staple の和の乱数と符号の型・二リンクと一列四枚の当てはめと陰性対照・十字の求積と準 Monte Carlo・$2\times2\times2$ の熱核と Wilson の鞍点の二経路と有理数の当て） |
| 角の三重積の流れ・四次元の類と規則の比較・反復の二段 | 読（本数の勘定・自由度・一次式・帳簿は初） | 本書の検討の数値の記録（木は木のゲージと疎の正規方程式・最小ノルムの二経路、非可換の鞍点の Newton で三経路目。一ループは解析の Hessian。陽性対照：一段の $5/32$・$1/32$・$3/1024$・$5/13$・$-79/2080$・$-9/2080$ の再現。平行な背景で三次 0 の陰性対照。周期の網は実空間と Fourier の二経路が 10 桁一致）。帳簿は Lean の束（15-09 表 3、再検査済み） |
| staple の和の下界・予算の算術・交換子の和・対角と隣の一意性 | 初 | この章の本文。代数の部分は Lean の束（15-09 表 3、再検査済み） |

**この章で使った語** ― 揺らぎの測度 $\mu_{k,W}$・背景依存 $\eta_k$・重みの四性質・背景と揺らぎの分解の補題・揺らぎの指数積率と背景の正則性の群版・入れ替えの不等式・背景に依らない揺らぎの一段の補題・背景に依らない揺らぎ・局所結合のずらし・熱浴法の事実・スコア・多段の帰納・一リンクの熱核比較の補題・形の部分と群の幾何の部分・BCH の三次・類 $(B,q,a)$・背景の変化の予算・中心の取り直しの条件の代償・類の母数としての背景・背景を母数に持つ類

の命題・面の一段・多ループの類・角の三重積・比の座標・斜めの隣・規則への依存。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：15-08 閉じない四行と、その案 — この章の $\eta$ の吸収が四行のどれを軽くするか。

# 閉じない四行と、その案

この章は本書の検討です。§01・§03・§04・§07・§08 は未解決の地図です。

この部は、本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた記録です。存在そのものは第二巻の第 6〜13 部を、二つの設計の違いは第 14 部を見てください。部の位置づけは 15-00 にあります。

**この章で分かること** — 紫外の制御のうち、この部で閉じた部品（結合の小ささの帰納の補題・束の網の定理・背景に依らない揺らぎの一段の補題・横の縮みの帳簿）の外に残る部分を、四つの行に書きます。一つ目（大きい場込みの剰余の行）は大きな場込みの一段の剰余（結合の一段の正味の括弧）、二つ目（観測量の源の条件）は観測量の源、三つ目（背景依存の吸収と多段の行）は揺らぎの背景依存 $\eta$ の吸収と多段の帰納、四つ目（ゲージの張り替えの境目の行）はゲージ固定の尺度ごとの張り替えの境目です。各行について「何が示せれば閉じるか」を一行で書き、閉じた部品との境、試せる案、捨てた案を並べます。四行は独立でなく、背景依存の吸収と多段の行が芯で、還元されずに残るのは小さい場の結合への寄与と多段の背景の正則性の二つだ、という読みを置きます。小さい場の結合への寄与はさらに割ると、平らな場の原典で知られている形と同じ部分と、原典自身が sketch と書く箇所の群版（ブロック間の二次の陽な項とその局所の打ち消し）に分かれます。最後に、紫外の制御に向けて試されている方向を十行に並べます。改訂では、ブロック間の二次の陽な項が二つのブロックの最小の系で一ループから $O(1)$ で現れること、その非局所の尾の型が粗い変数の定義で決まること、小さい場の結合への寄与の代数の層を Lean で書いたときに原典と切り方が違うかもしれない箇所、ゲージの張り替えの境目の行のゴースト行列式が臨界点の背景で木のゲージと一致することを足しました。

**読む水準** — この章は三年生以上から研究の水準（測度・作用素・ノルムの評価を使う）です。初めの §01 の表 1 だけなら二年生でも読めます。

**前提となる章** — 15-03 §02（分解の言明）・15-03 §03（結合の小ささの帰納の補題）・15-07 §05（背景に依らない揺らぎの一段の補題）・15-05（束の網の定理）・15-02 §06（原典に無い二行）。

**先に言うこと** — この章のどの行も閉じていません。案は案で、結果ではありません。〔初〕の札は、案の中の一歩として紙で確かめた初等的な事実だけに付けます。

この章の順序

1. 四行の言明 — 一行・閉じた部品との境・境の向こう（表 1）
2. 大きい場込みの剰余の行の案 — 大きな場込みの一段の剰余
3. 観測量の源の条件の案 — 観測量の源
4. 背景依存の吸収と多段の行の案 — $\eta$ の吸収と多段の帰納
5. ゲージの張り替えの境目の行の案 — ゲージ固定の張り替えの境目
6. 四行の依存 — 背景依存の吸収と多段の行が芯・小さい場の結合への寄与の割り方・二つのブロックの $W^{\text{gauge}}$・尾の型・代数の層と原典との違い
7. 捨てた案（表 2）
8. 試されている方向の十行（表 3）・紫外の問い 12〜16・問い「Loc の二通りの定義」・問い「三次元の非局所の重み」・問い「非可換の背景でのゲージの一致」（表 4）
9. 言えないこと
10. 五分類の表と依存グラフ（表 5）

---

00

## この章で分かること

- 閉じない部分は四行に書けます：結合の一段の正味の括弧・観測量の源の条件・$\eta$ の吸収と多段・張り替えの境目（§01）。
- 大きい場込みの剰余の行の大きい場の稀さの条件（大きな場の稀さ）は、揺らぎの期待値の閉じ（BBS の (iii)）の群版（揺らぎの指数積率の群版）が立てば Chebyshev の不等式の系で、独立の評価は要りません（§02、〔初〕・揺らぎの指数積率の群版を仮定）。
- 観測量の源の条件の源は、ブロック変数の関数に取れば細かい段では積分と可換で、損が出ません（§03、〔初〕・自明）。
- ゲージの張り替えの境目の行では、木のゲージの直積分解から張り替えの場に依る Jacobian は無く、費用はゴースト行列式と境目の結合に移る、という読みです（§05）。
- 四行は背景依存の吸収と多段の行に集まり、還元されない芯は小さい場の結合への寄与（小さな場の背景に一様な二ループの剰余、Bałaban の未公刊の基本の不等式（Bałaban 1989

の Theorem 2）の中身と読む）と多段の背景の正則性の条件です（§06）。

- 大きい場込みの剰余の行・観測量の源の条件・ゲージの張り替えの境目の行は割れました。結合の一段の正味の括弧＝小さい場の結合への寄与＋大きい場の結合への寄与は恒等式で、後者は熱核の揺らぎの下で押さえられ（大きい場の剰余の上界の補題・熱核の揺らぎの稀さの補題）、ブロック変数の源は段ごとの損が無く、木のゲージに Jacobian が無いことは有限群で Lean・$SU(2)$ で紙です（§02・§03・§05）。
- 小さい場の結合への寄与は「局所の部分＋Taylor の切り捨て＋小さな場の切り＋ブロック間の二次の陽な項」に割れ、前の三つは平らな場の原典と同じ形が群の上でも条件つきで立ちます。原典に無いのは、原典自身が sketch と書く最後の項の群版だけです（§06）。
- ブロック間の二次の陽な項 $W^{\mathrm{gauge}}$ は、平らな場の模型のように二次から始まるのではなく、二つのブロックの最小の系で一ループから $O(1)$（$13/384$）で現れます。出所は群の非可換性でなく背景の写像の非局所性で、一ループの式は陽に書け、局所の打ち消しが要るのはその後の $O(1/\beta)$ です（§06、$SU(2)$・七枚の一列・一段・二次の係数）。
- その非局所の尾の型（平ら・指数・冪）は、粗い変数の定義で決まります。四次元の三次の残りの評価には「粗いリンク＋大域の札」の座標が合う、と読みます。境の無い三次元では一ループでも指数で和は体積に一様、四次元の周期では木の水準で指数でした（§06、四次元の一ループは測っていない）。
- 芯の行の再帰は、一列の模型では「対の型の縮む像（結合の比で二次 $5/8$・四次 $\le 5/48$）＋段に依らない新しい項＋幅について指数で減る三体の項」の形で四次まで閉じます。原典の加法性の一列版です（§06、一列・保存量の無い定義・条件つき）。
- ゲージの張り替えの境目の行のゴースト行列式は、一段・一ループ・臨界点の背景では、木のゲージの有効作用と恒等的に一致し、局所結合の帳簿の一行に収まります（§05）。

01

## 四行の言明

記号は 15-00 §01 と 15-07 のまま：段 $k$ の有効結合 $g_k$、$\beta_k = 4/g_k^2$、小さな場の閾 $\varepsilon_k = g_k p(g_k)$、重み $G_k$、揺らぎの測度 $\mu_{k,W}$、ブロックの集合 $B(X)$。表 1 の「一行」は、それが示せればその行が閉じる、という条件つきの文です 仮 。

表 1　閉じない四行（「一行」は全て言明。札は閉じた部品の欄だけ）

| 行 | 何が示せれば閉じるか（一行） | 閉じた部品との境 | 境の向こう |
|---|---|---|---|

| 行 | 何が示せれば閉じるか（一行） | 閉じた部品との境 | 境の向こう |
|---|---|---|---|
| 1 大きな場込みの一段の剰余（結合の一段の正味の括弧） | 本当の一段（ゲージ共変な平均・背景場・大きな場の領域を含む）で、有効作用から読む $F^2$ の係数が $1/g_{k+1}^2 = 1/g_k^2 - b + r_k$、$\lvert r_k\rvert \le C g_k^2 + \eta_k$（$\sum \eta_k < \infty$、$C, \eta$ は $k$ にも格子間隔にも依らない）を満たし、大きな場の多体の寄与が $e^{-cp(g_k)^2} \le C' g_k^2$ で押さえられること | 結合の一段の正味の括弧＋実効の結合の定義と連続性 ⇒ 結合が小さく留まる条件は結合の小ささの帰納の補題 初 。木の水準の $\beta'/\beta = \sum f^2$ は単位の束の定理 初 （可換に制限）。一ループの $O(1)$ のずれは最小の系の数 読 。結合の一段の正味の括弧＝小さい場の結合への寄与＋大きい場の結合への寄与の割り方は恒等式で、大きい場の結合への寄与は熱核の揺らぎ（辺ごとに独立・一段・背景に依らない）の下で読み取りの Lipschitz 定数 × 稀さで押さえられる 初 （大きい場の剰余の上界の補題・熱核の揺らぎの稀さの補題、§02）。Wilson の一リンクでも同じ形 初 （一リンクの熱核比較の補題）。小さい場の結合への寄与の局所の部分と Taylor の剰余の割り方は平らな場の原典と同じ形 典 ・ 初 （複素の背景での解析性の条件の下、§06）。ブロック間の二次の陽な項は二つのブロックの最小の系で一ループから $O(1)$、一次を陽に入れた後の残りは $O(1/\beta)$ 初 （ガウスの最小化と Laplace の一ループ、形式的）・ 読 （数、§06）。代数の層（Loc の射影・$W^{\text{gauge}}$ の層・剰余の組み立て）は Lean（§06）。二段目に流すと、一列の模型で非局所の項の像は同じ型に閉じて結合の比で縮み、新しい項は段に依らず、三体の項は幅について指数で減る 読 （一列・保存量の無い定義・一段を二度・四次まで、§06）。粗いリンク＋大域の札の座標では境の無い三次元の一ループの尾が指数 読 （§06） | 小さい場の結合への寄与のうち、四次元のブロック化での $O(1/\beta)$ の局所の打ち消しの群版と、非局所の尾の体積に一様な評価（三次の残りの評価。尾の型は粗い変数の定義に依る。粗いリンク＋大域の札なら四次元の木で指数、四次元の一ループは未、§06）・四次元の $W$ の再帰（三体の不変量の数・四体の項）・本当の揺らぎの測度での大きな場の確率（揺らぎの指数積率の群版＝背景依存の吸収と多段の行）・読み取り写像の定義（何を $\beta_{k+1}$ と呼ぶか） |
| 2 観測量の源（観測量の源の条件） | 尺度 $L_0/M$ より大きい台の滑らかな源 $J$（強さ $\le s_0$）を入れた活動 $Ke^J$ について、本当の $\mu_{k,W}$ で $\lVert\theta(Ke^J)\rVert_{G_{k+1}} \le 2^{\lvert B(X)\rvert} e^{Cs_0\lvert B(X)\rvert} \lVert K\rVert_{G_k}$ が $k$ に依らない定数で立つこと | 源の無い一段は背景に依らない揺らぎの一段の補題（揺らぎの法則が背景に依らないとき） 初 。ブロック変数の関数の源は揺らぎの積分と可換で、段ごとの損は無い 初 （有限の場合は Lean）。熱核の一段では細かいループの源は表現ごとの結合の熱核のずらし 初 （§03） | 源が細かい段で非局所な活動になること（台がループの長さ／格子間隔のブロックに広がる） |

| 行 | 何が示せれば閉じるか（一行） | 閉じた部品との境 | 境の向こう |
|---|---|---|---|
| 3 $\eta$ の吸収と多段の帰納 | $\mu_{k,W}$ =（背景に依らない法則）×（密度 $\rho_{k,W}$）と割り、$\log \rho_{k,W}$ の背景依存のうち $F^2$ の向きと中心のずれを母数と背景の取り直しに吸収した残りが $\eta_k = O(g_k^{2+\delta})$（$\delta > 0$）で、かつ背景の正則性の条件と多体のノルムの縮みが段に一様に立つこと | 一枚・二枚で吸収が正確に起きる 初（15-06）。背景に依らない揺らぎの一段の補題の $\eta = 0$ 初 。横の縮みの帳簿 初（15-03 §04）。背景に依らない揺らぎの一段の補題の Wilson の一リンク版 初（条件つき、15-07 §05）。$\eta$ の形の部分は幾何級数に入る 初（一列の鎖・一段の不等式を仮定、15-07 §06）。背景 $a$ を類の母数に持たせると、二リンクと一列四枚で残りは $\theta^0 \beta^{-3/2}$ に下がり、予算は段数に一様 読（次数の数）・初（予算の算術、15-07 §06）。単一のループの一段では $a$ の更新は群の積で全次数で閉じる 初（15-07 §07） | 多ループの類の座標の値（三次元 $2 \times 2 \times 2$ では面ごと＋隣の対で二次、角の三重積で三次、四次は多面の結合。角の三重積は二段目で縮まず固定点に寄る。四次元は一つの母数＋比の座標（二次に斜めの隣が要る）で、固定点の存在と規則に依る値が残る、15-07 §07）・段を重ねる背景の正則性の条件・結合 $b$ を類の母数に持たせたときの更新（15-07 §05）。$a$ を母数に持たない類では $SU(2)$ の群の幾何の部分（BCH の三次）の予算は発散する（15-07 §07） |
| 4 ゲージ固定の張り替えの境目 | 段 $k$ の局所ゲージと段 $k+1$ の局所ゲージをつなぐ、場に依る変換の Jacobian と境目の項が、類の中で和の有限な損（$g_k^{2+\delta}$ の型か幾何級数）として評価できること | 軌道の向きの平坦性の命題（軌道の向きの Hess＝0）初（15-01 §03）。大域の固定は無い 典 。木（軸）のゲージの存在・一意（Gribov の多重性なし）・配位の直積分解・Faddeev–Popov の重みが定数・根を共有する二本の木の間の張り替えが和を保つ全単射 初（有限群は Lean、$SU(2)$ は紙、§05） | 費用の形は定まった：木のゲージでは Jacobian は無く、費用は小さな場の条件の劣化 $\|W_e - 1\| \le (d-1)(L-1)\varepsilon$ と、背景共変ゲージを併用するときのゴースト行列式。後者は、一段・一ループ・臨界点の背景では木のゲージの有効作用と恒等的に一致し、局所結合の帳簿の一行に収まる 初（有限次元の Faddeev–Popov の補題、§05）。残るのは臨界点でない背景のまわりの積分・二ループ以上での同じ一致・局所展開の一様性と、ブロックの一辺 $L$ を $\varepsilon_k^{-1}$ より十分小さく取れる範囲で段を進めること |

閉じる部分と閉じない部分の境は、二つの問いで引けます 読 ：「揺らぎの法則が背景に依るか」と「木の水準か、一ループ以上か」。閉じた部品は、背景に依らない揺らぎ（背景に依らない揺らぎの一段の補題）か、木の水準（単位の束の定理・結合の小ささの帰納の補題の帳簿）のどちらかにあります。

02

## 大きい場込みの剰余の行の案 — 大きな場込みの一段の剰余

**稀さを Chebyshev で出す案：大きい場の稀さの条件は揺らぎの指数積率の群版の Chebyshev の系。** $X$ の上で揺らぎの期待値の閉じの群版（揺らぎの指数積率の群版）が $s = tc/h_k^2$ で立つ、すなわち $\mathbb{E}_{\mu_{k,W}} \exp\bigl(s \sum_{l \in \bar{X}} \|A_l\|^2\bigr) \le 2^{|B(X)|}$ なら、Chebyshev の不等式で

$$P_{\mu_{k,W}}\Bigl(\sum_{l \in \bar{X}} \|A_l\|^2 \ge \varepsilon^2 |\bar{X}|\Bigr) \;\le\; 2^{|B(X)|}\, e^{-s\varepsilon^2 |\bar{X}|} \tag{1}$$

です 初 （揺らぎの指数積率の群版を仮定したときの一行）。閾を $\varepsilon = h_k\, p(g_k)$ の型に取れば右辺は $2^{|B(X)|} e^{-tc\,p(g_k)^2 |\bar{X}|}$、すなわち大きい場の稀さの条件の形です。大きな場の稀さに独立の評価は要らず、揺らぎの指数積率の群版の指数モーメントがそのまま稀さになります。平らな場の付録で大きな場の重みがこの役を持つのは既知の構造で 典 （15-02 §04）、群の上で足したのは「揺らぎの指数積率の群版が立てば」の一言だけです。背景に依らない揺らぎの一段の補題の熱核の積では $M = m^{|\bar{X}|}$ から直ちに $P \le m^{|\bar{X}|} e^{-s\varepsilon^2 |\bar{X}|}$ です 初 。留保：揺らぎの指数積率の群版そのものが背景依存の吸収と多段の行に依るので、大きい場込みの剰余の行の大きい場の稀さの条件は背景依存の吸収と多段の行に従属します。

**熱核の揺らぎの稀さの補題 — 熱核の揺らぎでは揺らぎの指数積率の群版が閉じた形で立つ。** $SU(2)$ の熱核 $p_t$（$t = 1/\beta$）は、像の和の負の項を落として $\sin\theta \le \theta$ とするだけで三次元の Gauss の半径で上から押さえられます：非減少の $g \ge 0$ について $\mathbb{E}_{p_t} g(\theta) \le e^{t/2}\, \mathbb{E} g(|Z|)$、$Z \sim N(0, t I_3)$ 初 （熱核の Gauss 上界の補題）。辺ごとに独立な熱核の条件・一段に限る条件・揺らぎの背景独立の条件の下で、リンクの集合 $\bar{X}$ のどれかが閾 $h$ を超える確率は $|\bar{X}|\, e^{t/2}(1 + \sqrt{2/\pi}\, h/\sqrt{t})\, e^{-h^2/(2t)}$ 以下、指数モーメントは $m(s,t) \le 1 + e^{t/2}\bigl((1-2st)^{-3/2} - 1\bigr)$（$0 \le st < \tfrac{1}{2}$）で、どちらも背景に依りません 初 （熱核の揺らぎの稀さの補題）。よって大きい場の稀さの条件は熱核の揺らぎの下では仮定なしの一行です。有限の Chebyshev の段と和の上界は Lean：`weighted_tail_le_exp_moment`（重み $\ge 0$・$\sigma \ge 0$）・`union_tail_le_sum`（重み $\ge 0$）。数（$t = 1/4 \sim 1/32$・$h = 0.3 \sim 1$）では上界は 12 枡全てで真の値の上にあり（比 1.03〜1.34）、定数を変えた陰性対照は $h^2/t \ge 1$ の 10 枡で破れます 読 。

**Wilson の一リンクでも同じ形（一リンクの熱核比較の補題）。** 熱核のままの上界は Wilson の一リンク密度には当たりません（$b = 4 \sim 64$、$h = 0.3 \sim 1$ の 15 枡のうち 7 枡で破れる） 読 。

角の上限 $\theta_0$ の内側では熱核 $p_{1/b'}$（$b'=b(1-\theta_0^2/12)$）の $K$ 倍で押さえ、外側は稀な尾にまわすと、大きな場の確率と指数モーメントは Wilson の一リンクでも熱核の量の $K$ 倍＋尾で押さえられます 初 （$SU(2)$・一リンク・一段）。数では 45 枡全てで上（比 1.07〜1.91）、揺らぎの指数積率の条件の閾は Wilson の閉じた形の 0.44〜0.95 倍です 読 （詳細は 15-07 §05）。大きい場の稀さの条件を本当の揺らぎの測度で出すのに要る揺らぎの指数積率の群版の一リンク版はこれで立ちますが、多リンクの揺らぎの指数積率の群版は背景依存の吸収と多段の行に残ります。

**剰余を小さい場と大きい場に割る案：結合の一段の正味の括弧を小さい場の結合への寄与と大きい場の結合への寄与に割る**。読み取り写像 $b$（有効密度から $\beta_{k+1}$ を読む写像。候補は粗い一枚の二次の係数）が全変動距離について Lipschitz で、定数が $L_b \le C\beta^2$（一リンクで $\mathbb{E}[\frac12 \operatorname{tr} U] \approx 1-3/(4\beta)$ から $db/dE \approx \frac43\beta^2$）、大きな場の領域を一つ入れた密度と入れない密度の全変動の差が $e^{-c\,p(g)^2}$ なら、大きな場の分の剰余は $|r_k^{\mathrm{large}}| \le C\beta_k^2 e^{-c\,p(g_k)^2}$ で、$p(g)=c_0(1+\log g^{-1})^{p_0}$（$p_0\ge\frac12$、$cc_0^2$ が十分大きい）なら $\le C' g_k^2$ です 仮 （二つの仮定の下の算術）。残る芯は小さい場の結合への寄与＝小さな場の背景に一様な二ループの剰余で、これが未公刊の基本の不等式の中身に当たる、と読みます 仮 （15-02 §02 の序文の一文からの読み）。留保：読み取りを二次の係数に取ると、二次の水準で座標が二つ要る（15-06）ので、Lipschitz は組の上で言う必要があります。

**剰余を小さい場と大きい場に割る案は割れた（大きい場の剰余の上界の補題）**。小さな場に条件づけた密度を $\rho_S$ とし、$r=r^{\mathrm{small}}+r^{\mathrm{large}}$、$r^{\mathrm{small}}:=b(\rho_S)-\beta_{\mathrm{pred}}$、$r^{\mathrm{large}}:=b(\rho)-b(\rho_S)$ と割るのは恒等式です 初 （$\beta_{\mathrm{pred}}$ は木＋一ループの予言）。読み取り $b=1.5/(-\log\mathbb{E}\cos\theta)$ の全変動の Lipschitz 定数は $\frac43 b^2/E \to \frac43\beta^2$ で、$|r^{\mathrm{large}}| \le \frac43(b_S^2/E_S)\,P_L$（$P_L$ は大きな場の確率、$E\in(e^{-2},1)$）です 初 。ただし大きな場の確率あたりの実際の感度は $\approx \frac13\beta^2h^2$ で、閾を小さな場の尺度 $h\propto 1/\sqrt{\beta}$ に取れば $\beta$ の一次です 読 （一リンク・熱核と Wilson で同じ数）。読み取りの関数 $\cos\theta$ が $\theta=0$ で平らなためです。一リンク・辺ごとに独立な熱核・一段に限る・揺らぎの背景独立の三条件の下で $|r^{\mathrm{large}}|\le C'g^2$ の十分条件は、閾 $\theta_h=g\,p(g)$（$\beta=4/g^2$、すなわち $\sqrt{\beta}\,\theta_h=2p$。log は自然対数）について $p(g)=c_0(1+\log g^{-1})^{1/2}$、$c_0^2>2$ です 初 （算術。全変動の形からは $c_0^2>3$）。**残る芯は $r^{\mathrm{small}}$＝小さい場の結合への寄与の一項だけ**で、その割り方は §06 にあります。本当の揺らぎの測度で $r^{\mathrm{large}}$ を出すには揺らぎの指数積率の群版が要ります（背景依存の吸収と多段の行）。

**板での確かめ**。揺らぎが面ごとに独立な熱核の板 $2\times2$（$SU(2)$・一段・像を落とす・細かい面 20 枚）で、大きな場の領域 $\Omega$ を入れた像と入れない像の差 $r^{\mathrm{large}}$ を数えました。粗い一枚の読み取りでは $\mathbb{E}\frac12\operatorname{tr}W_B$ が面ごとの積に割れる（指標の畳み込み）ので、$r^{\mathrm{large}}$ はブロックに入る六枚だけで決まり、板全体を入れた値は同じ $\beta$ の一リンクの値の $(b_B/\beta)^2\sum_i a_i^2 = 1/3$ 倍です 紙 （数は 0.3334〜0.3358 計算 ）。像は面ごとの法則について多重線形なので $\|\rho$

$\Omega - \rho_0\|_{\mathrm{TV}} \le 1-(1-q)^{|\Omega|}$ で、一次では $r^{\mathrm{large}}(\Omega)$ は一枚ずつの和です 紙 。閾を上の規約の $\theta_h = g\,p(g)$ に取ると、$|r^{\mathrm{large}}|/g^2$ は $c_0^2 > 2$ で $\beta \le 256$ まで減り、$c_0^2 = 2$ が境で（そこでだけ $C'$ が $p^3$ の程度で増える。境の振る舞いは一リンクで $\beta \le 4096$ まで確かめた）、閾を小さな場の尺度 $\theta_h \propto 1/\sqrt{\beta}$ に固定すると $\beta$ に比例して増えます 計算 。境の位置は大きい場の剰余の上界の補題の十分条件 $c_0^2 > 2$ と一致します 読 。共有の辺の大きな場は触れる二つのブロックの間の結合を対角の変化と同じ桁だけ動かすので、大きな場の領域は「その面に触れるブロックの和集合」として数えるのが合います 読 。板は一リンクの難しさを増やさず、多リンクの難しさは全て「揺らぎが独立でない」側——本当の $\mu_{k,W}$ での多リンクの揺らぎの指数積率の群版（背景依存の吸収と多段の行）——に残ります。条件：辺ごとに独立な熱核・一段に限る・揺らぎの背景独立の三条件・一段・像を落とした熱核。

**臨界点の偶性の案：臨界点の偶性で、背景依存を $\theta^4$ の係数へ送る。**拘束つきの真の臨界点のまわりで揺らぎの作用が揺らぎについて偶なら（二枚で確かめた事実、15-06 §02）、$\beta'$ の読み取りに $O(\theta)$ の寄与は無く、背景依存は $\theta^2$ の係数（$F^2$ の読み取りそのもの）と $\theta^4$ 以上（源）に全部入ります。すると小さい場の結合への寄与の「背景に一様」の要請は「$\theta^4$ の係数が有界」に弱まり、その分は横の縮みが払います（15-03 §04） 仮 （偶性は二枚で確かめた事実、三枚では自明）。

**四枚では偶性は破れ、結論は別の理由で立つ。** 一列四枚では、拘束つきの真の臨界点のまわりの揺らぎの作用の偶性は破れます。破れは呼吸の方向（内の二枚が $U^*$ の軸に沿って同じ向きに傾く測地線。座標に依らない）に集まり、Wilson の作用では $S(t) - S(-t) = 2\beta\sin(\alpha^*/2)(\sin 2t - 2\sin t)$ が全次数で成り立ちます 紙 （三次の係数は $-\beta\sin(\alpha^*/2)$。18 の背景で数値と 7 桁で一致 計算 ）。偶になるのは $W_b = W_a^{-1}$ のときだけです。ところが臨界点の偶性の案の結論——$\beta'$ の読み取りに奇数次の背景依存が無いこと——は偶性に頼らずに立ちます。$\theta^1$ は $\mathfrak{su}(2)$ に共役で不変な一次形式が無いこと（ゲージ不変性）から無く、$\theta^3$ は、二本のループの背景では対 $(W_a, W_b)$ と $(W_a^{-1}, W_b^{-1})$ が二つの軸に垂直な軸のまわりの $\pi$ 回転で同時に共役であること（$-1 \in$ Weyl 群の対の版）から無く、有効重み $w$ は背景の反転 $(a,b) \to (-a,-b)$ で全次数ちょうど偶です 紙 （数でも確かめた 計算 ）。だから一列の鎖（独立な背景のループが二本）では、小さい場の結合への寄与の背景一様性は「$\theta^4$ の係数が背景に一様に有界」に弱まり、根拠は揺らぎの偶性から背景の反転の共変性に替わります（$\theta^4$ の係数の有界性そのものは示していない）。四次元のブロックでは独立なループが三本以上になり、三重積 $a\cdot(b\times c)$（$f_{abc}F^3$ の型）の奇の不変式があるので、$\theta^3$ の係数の有界性も要ります 仮 。揺らぎの法則の側（スコア）では奇の部分が $\theta^0\beta^{-1/2}$（RMS$\times\sqrt{\beta}$ が 0.07〜0.13）で残り、15-07 の残りと同じ型です 計算 。

**中心の分布の母数の案：大きな場を中心の分布の母数 $z$ として類に入れる。**一枚の重み $f$ を中心 $\mathbb{Z}_2$ の指標の偶奇で $f = f_e + f_o$ に割り、遠い半球の相対的な重さ $z := f(\pi)/f(0)$ を大きな

場の母数と呼ぶ案です（Wilson では $z = e^{-2\beta}$、熱核では像の和の主項で $e^{-\beta\pi^2/2}$ の程度）。大きな場の領域を類の外でなく $z^{|\Omega^c|}$ の寄与として数えれば、大きい場の稀さの条件は類の中の文になります 仮 。留保：一枚の類関数の上の話で、多リンクでは中心のずれは中心の渦（プラケットの $\mathbb{Z}_2$ の符号の面）になり、一枚の $z$ では数え切れません（15-04 §01 の留保）。

03

## 観測量の源の条件の案 — 観測量の源

**源をブロック変数の関数に取る案：源をブロック変数の関数に取る**。観測量 $J$ を段 $k_J$ のブロック変数 $V$ の関数（粗い格子の Wilson ループ・ブロック化した場の滑らかな汎関数）として定義すると、$k < k_J$ では段 $k$ の揺らぎの積分は $V$ を止めて行うので $\int \rho_k e^{sJ(V)} d\mu = e^{sJ(V)} \int \rho_k \, d\mu$ がちょうど成り立ち、小さい場の解析性の条件・大きい場の稀さの条件の定数は変わりません（損 0） 初 （自明）。$k \geq k_J$ では $J$ は粗い格子の局所関数（ループの形ごとの項）になり、$e^{sJ}$ は作用のループの形ごとの結合を $s$ だけずらします。観測量の源の条件は「類が閉じる条件の座標にループの形ごとの結合が含まれ、一段の写像がその座標について Lipschitz であること」に帰着する、という筋です 仮 （15-06 の母数の座標）。留保：物理の観測量は細かい格子のループで、ブロック化したループとの差は観測量の繰り込みです。ブロック化した観測量で観測量の源の条件を言明し直すのは言明の選び直しで、細かいループの観測量の源の条件ではありません。Bałaban の序文の「ループの期待値」がどちらを指すかは本文で照合していません。

**源の損の勘定と、細かいループの源**。源をブロック変数の関数に取る案の可換性は有限の場合に Lean で書けています（`coarse_source_commute` ・ `coarse_source_commute_comp` 、仮定：配位と粗い変数が有限・段が入れ子）。ノルムで見ると、強さ $s_0$ のブロックごとの局所の和の源について因子 $e^{s_0|B(X)|}$ が一度だけ出て、段ごとには積み上がりません 初 （ブロック化した観測量に限る）。細かい格子のループの源は、辺ごとに独立な熱核の条件の一段と自己回避のループ $C$ について $\mathbb{E}\, F(U_C) = (F * p_{t|C|})(W_C)$、すなわち表現 $j$ の結合を $e^{-tj(j+2)|C|/2}$ 倍にずらすだけです 初 （Monte Carlo で一次・二次とも $|z| \leq 1.2$ 読 ）。損は定数倍でなく座標の縮み（周長則の形）で、類の座標には表現の添字が要ります。ブロック化する一段では、一列四枚（$SU(2)$ の熱核・対角の定義・一段）でブロックの中の細かいループ $C$ に源 $\lambda \cdot \frac{1}{2} \operatorname{Re}\operatorname{tr} W(C)$ を足すと、一段後の粗い作用の結合は $\lambda f_C^2 + O(\lambda/\beta)$ だけずれます。$f_C$ は束の網の定理（15-05）の射影の重みで $\beta$ に依らず（包絡線の定理 $\partial\beta'/\partial\beta_p = f_p^2$、和の規則 $\sum_p f_p^2 = 1/5 = \beta'/\beta$） 紙 、一ループの補正は有理数の $d_1/\beta$（内の一枚 $f_C^2 = 2/25 \cdot d_1 = -17/375$、内の $1 \times 2$ のループ $8/25 \cdot -16/125$、外の一枚 $1/50 \cdot -1/750$）で、$\log\beta$ は出ません 紙 （一ループは形式的） 計算 （$\beta = 4$〜$2048$、二経路で 9 桁）。新しく生まれる項は粗い作用の四次 $-\lambda f_C^4/12$ で、これも $\beta$ に依りません 計算 。細かいループの源は、ブロックの中に収ま

る限り、損ではなく束の網の重みによる座標の移しとして一段を通り、一段の源についての Lipschitz 定数 $f_{\mathcal{C}}^{2} + O(1/\beta)$ は $\beta$ に一様です（観測量の源の条件の一段・一ブロック版）。ブロックの境をまたぐループ・四次元のブロック・本当の $\mu_{k,W}$ ・大きな場・多段は閉じていません。

**位置に依る結合の案：位置に依る結合 $\beta(x)$ の類。** プラケット密度型の源 $J = \sum_{p} f(p)(1 - \frac{1}{2}\operatorname{tr} U_{p})$（$f$ は尺度 $L_{0}/M$ で緩やか）は、Wilson の作用の $\beta$ を $\beta(x) = \beta + s f(x)$ に替えたものです。一段の写像が各点で $\beta$ の写像を当てたもの＋勾配の補正 $O(|\nabla\beta|\, a_{k}/L_{0})$ なら、勾配の項は $a_{k}/L_{0} = 2^{-(K-k)}$ の幾何級数で和は有限です 仮 。可換な $U(1)$ の Villain の作用では、一列四枚の一段の $\beta'$ は面ごとの剛さ $\beta(p)$ の網の実効の剛さ（Thomson の式）で、$\beta(p) = \beta + s\, g(p)$ と置くと $\beta' = \beta/5 + s\sum_{p} f_{p}^{2} g(p) + O(s^{2}/\beta)$、すなわち一次は束の網の重みでの局所平均にちょうど一致します 紙 （像を落とした点ごとの積。数は Thomson の式と $6 \times 10^{-12}$ 以内 計算 ）。勾配の補正は二次から始まり、上の $O(|\nabla\beta|\, a_{k}/L_{0})$ より一段良い形です。ループ型の観測量（面積則の源）には使えず、局所の観測量向きです。

**却下：Hölder だけで源を剥がす。** 評価を $(\mathbb{E}G^{2})^{1/2}(\mathbb{E}e^{2sJ})^{1/2}$ に割る道は、細かい段で $J$ の台がループの長さ／格子間隔のブロックに広がる非局所な活動になり、一段の損 $2^{|B(X_{J})|}$ をブロックあたりの小さな因子で払えず、段を重ねると積み上がるので閉じません（表 2）。

## 04 背景依存の吸収と多段の行の案

背景依存の吸収と多段の行の中身は 15-07 §06・§07 にあります。要点だけ書きます。$SU(2)$ の Wilson の作用では一リンクの条件つき法則が背景に依らない一母数の族の元で、背景は局所結合と中心の向きにだけ入ります 典 （熱浴法の事実、書誌は未確認）。多リンクでは四元数の恒等式で作用が「局所結合 × 背景に依らない形」＋一次＋共役のずれに割れ 初 、密度のスコアを $\theta$ の次数で選別すると、$\theta^{0}$ の一部は再中心化で消え、$\theta^{1}$ の一部は結合微分として吸収される、という選別の案です 仮 。最小の系では吸収できない残りの最低次数は $\theta^{0}\beta^{-1/2}$ と $\theta^{1}\beta^{0}$ で、閾をどう選んでも和は発散しますが、背景 $a$ を類の母数に持たせると残りは $\theta^{0}\beta^{-3/2}$ に下がり、予算は段数に一様になります 読 （二リンクと一列四枚の数、条件つき。15-07 §06）。

**横の縮みの帳簿に乗せる。** 吸収後の残り（類で切り捨てた形の係数の寄与と、$b_{p} = \beta\cos(\theta_{p}/2)$ の $\theta^{4}$ 以上の展開＝源）は横の座標の小さなずらしで、15-03 §04 の帳簿で $\lambda < 1$ なら外れは和でなく上限 $\sup_{k} \varepsilon(\beta_{k})/(1-\lambda)$ で押さえられます 初 （一段の不等式を仮定したときの等比級数）。多段の背景の正則性の条件は「背景場の像の細かい角が粗い角の $L^{-2}$ 倍＋横の座標の

$O(g^2)$」の形で要ります 仮 。横の縮みは可換な木の水準で測ったもの（15-05）で、非可換の配位・一ループでの値は未です。

05

## ゲージの張り替えの境目の行の案 — ゲージ固定の張り替えの境目

**木のゲージの案：張り替えの Jacobian は無い — 木のゲージの直積分解**。各ブロック $B$ に生成木 $T_B$（根 $r_B$）を取り、ゲージ群 $G^\Lambda = \prod_x G$ を根でない点の因子 $G_{\text{int}} := \prod_{x \neq \text{根}} G$ と根の因子 $G_{\text{coarse}} := \prod_B G$ に割ります（点ごとの直積なので自明に直積）。木のリンクを 1 に固定する写像は $G_{\text{int}}$ の作用の切断で、各点から根へ向かう木のリンクが一本ずつあるので一意に解け、軸（木）ゲージは完全で Gribov の多重性が無く、Faddeev–Popov の行列式は定数です。$G_{\text{coarse}}$ はブロック平均がゲージ共変なら粗い格子のゲージ群と同型で、段 $k+1$ の木のゲージはそれを固定します。すなわち**段 $k$ と段 $k+1$ のゲージ固定は同じ群の直積の二つの因子をそれぞれ固定するもので、張り替えの場に依る Jacobian はありません** 初 （既知の構造の言い換え。軸ゲージの Faddeev–Popov の行列式が定数であることは標準の事実）。

これで 15-01 §03 の「Jacobian（Faddeev–Popov の行列式）が有効作用に入る」は、軸ゲージについては空になります。費用は別の二か所に移ります 読 ：(i) 木の長さ $\ell$ による小さな場の条件の劣化 $\|U_l - 1\| \le \ell\varepsilon$（7-05 §05）、(ii) 揺らぎに背景共変なゲージを使うならそのゴースト行列式。Bałaban の四次元の論文でどのゲージを使ったかは本文で照合していません（三次元ではブロックごとの軸ゲージを Faddeev–Popov の方法で入れている）。

**有限群では Lean で、$SU(2)$ では紙で**。根つき全域木の上で、木の辺を全て 1 にするゲージ変換が存在し、根で一致する二つは等しく（Gribov の多重性なし）、残るゲージの自由度は大域の定数だけです。配位の全体は「根で 1 のゲージ変換」×「木の辺で 1 の配位」に直積分解され、各代表の重みは $|G|^{|V|-1}$ で代表に依らず（Faddeev–Popov の重みが定数）、根を共有する二本の木の代表の間の写像はゲージ不変な関数の和を保つ全単射です。代表の上の平均は根の一致を仮定しなくても木に依りません。以上は Lean：`exists_gauge_tree_trivial` ・ `gauge_tree_trivial_unique` ・ `configEquiv` ・ `fiber_card_const` ・ `regauge_bijective` ・ `regauge_sum_eq` ・ `slice_average_tree_indep` （仮定：群・頂点・辺が有限、関数はゲージ不変、張り替えは根の共有）。$SU(2)$ と正規化した Haar 測度では、木の外の変数の置き換えが左右の不変性で Jacobian 1 になり、Faddeev–Popov の量は深さの順の三角構造で恒等的に 1 です 初 。軸ゲージの Faddeev–Popov の行列式が定数で Gribov の多重性が無いことは標準の事実で 典 、足したのは有限群での形式化と費用の形です。

**費用の形**。完全軸の木（親は $x - e_\mu$、$\mu$ は $x_\mu > 0$ となる最大の向き）では、木の外の辺 $(x, \mu)$ の変数 $W_{x,\mu}$ は基本閉路のホロノミーで、その閉路は $N_{x,\mu} := \sum_{\nu > \mu} x_\nu$ 枚のプラケットの櫛で

張れます。全プラケットで $\|U_p - 1\| \le \varepsilon$（作用素ノルム）なら

$$\|W_{x,\mu} - 1\| \;\le\; N_{x,\mu}\,\varepsilon \;\le\; (d-1)(L-1)\,\varepsilon \tag{2}$$

です 初 （$L$ はブロックの一辺の点数。7-05 §05 の三角不等式を $N$ 回）。上界は一様な可換の場で到達します（四次元 $L = 4, 6$ で比 8.997・14.986、上界は 9・15） 読 。乱数の場では比は $\sqrt{L}$ に近い伸び（1.58→2.15）でした 読 。**張り替えの境目は Jacobian でなく小さな場の条件の管理**で、段 $k$ の木のゲージで場の展開を使うにはブロックの一辺 $L$ を $\varepsilon_k^{-1}$ より十分小さく取る必要があります。

**ゴースト行列式を吸収する案：ゴースト行列式を局所結合の座標で吸収する**。背景 $W$ の中のゴースト作用素 $\Delta_W^{\mathrm{gh}} = d_W^{*} d_W$（格子の共変ラプラシアン・随伴表現）について、$\log\det\Delta_W^{\mathrm{gh}} - \log\det\Delta_1^{\mathrm{gh}}$ が小さな場の背景の上で局所汎関数に展開でき、主項は $\sum_p c_{\mathrm{gh}}\|F_p\|^2$（$F^2$ の係数＝一ループの係数へのゴーストの寄与）、残りは $\theta^4$ 以上（源）と指数で減衰する非局所の項で、定数は $k$ に依らない、という見込みです 仮 （格子の熱核の展開の型。局所展開の一様な収束は示していない）。そうなら $F^2$ の分は背景依存の吸収と多段の行の局所結合のずらしに合流し、$\theta^4$ 以上は横の座標に入り、境目は新しい種類の損でなく一ループの係数の一部になります。陰性対照として $U(1)$ ではゴーストは背景に依りません。

**ゴースト行列式を吸収する案は一ループで合流する ― 二つのゲージの一致**。ブロックの周のホロノミー（粗い変数）を固定し、背景 $W$ をその拘束の下での作用の最小点に取ると、背景は臨界点で、揺らぎの Hessian $H$ と線形化したゲージの生成 $D$ について $HD = 0$ です。このとき有限次元の Faddeev–Popov の補題から

$$\log\det H_{\mathrm{tree}} \;=\; \log\det\!\left(H + DD^{\mathrm{T}}\right) \;-\; 2\log\det M_{\mathrm{FP}}, \qquad M_{\mathrm{FP}} = D^{\mathrm{T}}D \tag{5}$$

が成り立ちます 初 （条件：一段・一ループ・背景は臨界点・$D$ は単射・$H$ は $(\mathrm{im}\,D)^{\perp}$ の上で正）。左辺は木のゲージの、右辺は背景共変ゲージ（$\xi = 1$、ゴースト込み）の一ループの量で、**二つのゲージの一ループの有効作用は背景の関数として恒等的に等しく**、周辺の結合 $\beta_0'$ も形の座標も背景の座標も変わりません。ブロック形の行列式の分解と、補題の出力を仮定にした対数の恒等式は Lean：`det_gauge_plus_ghost_split`・`log_tree_eq_cov_sub_two_ghost_blocks`（仮定 $\det H' > 0$・$\det K > 0$・木の量が $\det H'/\det K$）・`coeff_tree_eq_coeff_cov`（線形な係数の取り出し）。補題そのもの（積分の変数変換）は紙です。数 読 （$SU(2)$・$3^4$ 点の一ブロック・可換の背景・$\theta \le 1$・解析と有限差分の二経路）：(5) の残差は $4.5 \times 10^{-13}$ 以下で、ゴースト行列式の背景依存は実在してほぼ局所です（$\log\det M_{\mathrm{FP}}$ の古典作用あたりの係数 $+0.024$、一ループの $F^2$ の係数 $-1.003$ の 2.4%）。それは背景共変ゲージのゲージ場の行列式の余分の部分と打ち消します。陰性対照：$U(1)$ ではゴーストは背景に依らず（差 0）、ゴーストを落とすと $\beta_0'$ が 0.024 ずれ、背景を臨界点からずらすと (5) は勾配の一次で破れます。したがってゴーストは境目の新しい損でなく、

背景共変ゲージを選んだときの局所結合の帳簿の一行で、木のゲージではその行が初めから無い、と読みます。残るのは、臨界点でない背景のまわりで揺らぎを積分する構成での運動方程式に比例する差、二ループ以上での同じ一致（格子の BRST の恒等式の型と見込む。照合していない）、局所展開の一様性です 読 。

**境目を一つの行列にする案：境目を一つの行列にする。**全ての粗い面の角を同時に固定した木の水準の網（15-05 の束の網の定理）では、粗い作用は二次形式 $\theta^{\mathrm{T}} B \theta$ で、隣り合う粗い面の結合と四次の写りの混ざりが境目の結合に当たります。ゲージの張り替えの境目の行の「境目の項が和の有限な損か」は「四次の写りの行列のノルムが 1 を割るか」の一つの数になる、という読みです 読 。束の網の定理の下では $\ell^4$ で測った写りは粗い向きで 1/16 を超え（四次元で見つけた値の最大が約 0.15）、体積に一様な上界は得ていません 読 （15-05）。三段の合成では全ての段で $\mu_3 \le 0.20$（木・可換・ 読 。段 4 の核まで実測、段差の Stein^{1/4} は 0.300・0.180・0.084・0.031、$k \ge 4$ は摂動で $\le 0.163$）、三段の値は 0.099（切り詰め込み $\lesssim 0.12$）。三色の場の線形の比の sup は一色の sup に等しい（紙：球面の平均 $E_s(s\cdot v)^4 = |v|^4/5$。Lean：ColorAverage、有限の重みつき設計で）ので、一色で測った錐の値は三色の場にそのまま通ります。非可換の木の補正：錐の比 R の一次の係数は粗い場の媒介変数の取り方（粗いゲージの成分）に依り、量として意味を持ちません。線形の比 $R_0$ の極大点（$8^4$・$12^4$ の三点、ほぼ一色の配位）では一次の係数が $10^{-5}$ 以下で、sup R の非可換の補正は二次から（計算・木・一段）。極大点での二次の係数は正だがほぼ可換の非線形性（cos）で、非可換の部分は負（計算・三点・一段）。W の座標（差を含む二次、次元 6）の一段の写像は、零モードを直した局所の代表では 60 型の基底で一段のスペクトル半径 0.363（下は 0.25 に揃う）、三段の合成はスペクトル半径 0.042・重みつき $\ell^2$ で 0.055〜0.125・$\ell^1$ で 0.465（計算・木・可換。基底の外の尾は $D \le 4$ まで有界）。

**類関数だけで進む道の壁。**粗い面ごとのホロノミーの類の角だけを座標にする道（Migdal–Kadanoff はこれ）では、四次元の超立方格子で粗いゲージ場を復元するのに要る粗い Bianchi 恒等式（粗い立方体の六面のホロノミーの積＝1）が書けません。非可換ではそれは共通の基点と接続の道があってようやく書け、類の角だけでは隣の面の相対的な向きが落ちるからです。**類関数だけで進む道は階層格子の近似を越えられない**、と読みます 読 。

**Haar の不変性は張り替えの代わりになるか。**背景に依らない揺らぎの一段の補題の設定で揺らぎの法則が各リンクで共役不変なら、分解 $U = WY$ はゲージ共変で、ゲージ固定は一切要りません。ただしこれは揺らぎの法則を熱核の畳み込みで「与える」型の繰り込み（群の上の Polchinski 流）に限られ、熱核の畳み込みは自由度を減らさないので、ブロック変数を作る四次元のブロック化の張り替えの代わりにはなりません 読 。

06

## 四行の依存 — 背景依存の吸収と多段の行が芯

四行は独立ではありません。左が閉じると右が軽くなる、という向きで書くと次の図になります 読 （案の間の論理の見立て）。

```
背景依存の吸収と多段の行（η の吸収：背景依存 ＝ 局所結合のずらし）
  ├─→ 揺らぎの指数積率の群版・期待値と半ノルムの入れ替えの群版が段に依らない定数で立つ
  │       └─→ 大きい場込みの剰余の行の大きい場の稀さの条件（稀さを Chebyshev で出す案：Che
  │               └─→ 大きい場込みの剰余の行の大きい場の結合への寄与（剰余を小さい場と大きい
  ├─→ 類が閉じる条件の座標（β・ループの形ごとの結合・形の座標）
  │       └─→ 観測量の源の条件（源をブロック変数の関数に取る案：源は座標のずらし）
  └←── ゲージの張り替えの境目の行のゴースト行列式（ゴースト行列式を吸収する案：ーループ・臨界
          ↑
        ゲージの張り替えの境目の行の Jacobian は無い（木のゲージの案：木のゲージの直積分解）

還元されない芯：
  小さい場の結合への寄与 ＝ Loc ＋ Taylor の切り捨て ＋ 小さな場の切り ＋ W^gauge（ブロッ
                  前の三つは平らな場の原典と同じ形（複素の背景での解析性の条件・余白 q の下）
                  原典に無いのは W^gauge とその局所の打ち消しの群版（原典自身が sketch と
                    W^gauge はーループから陽（二つのブロックで 13/384）、打ち消しが要るのは
                    非局所の尾の型は粗い変数の定義で決まる（粗いリンク＋大域の札なら指数、と
                    W の再帰（一列）＝ 対の型の縮む像 ＋ 段に依らない新しい項 ＋ 指数の三体
                  → 臨界点の偶性の案で「θ⁴ の係数の有界性」に弱まる可能性
  多段の背景の正則性の条件 ＝ 背景場の正則性（細かい曲率 ≤ L⁻² × 粗い曲率 ＋ 小さな項）
```

図から読むこと 読 ：大きい場込みの剰余の行の大きい場の稀さの条件と大きい場の結合への寄与、観測量の源の条件、ゲージの張り替えの境目の行のゴーストは、どれも背景依存の吸収と多段の行の吸収の座標が定まれば、その系か、その座標のずらしとして書ける形をしています。背景依存の吸収と多段の行から独立に残るのは小さい場の結合への寄与と多段の背景の正則性の条件の二つで、前者は Bałaban の連作が仮定（結合の留まり）を外すのに要った未発表の部分、後者は背景場の正則性の多段の版です。

**小さい場の結合への寄与をもう一段割る — 原典で知られている形と同じ形。**小さな場の一段の有効作用 $S'_h(\Phi)$（揺らぎの側の閾 $h$、背景の側の閾 $h_0$、余白 $h_0 \le q\,h$、$0 < q < 1$）を、局所の部分 $\mathrm{Loc}_{2k}$（真空・周辺の結合 $\beta'_0$・形の座標）と剰余 $R := (1-\mathrm{Loc}_{2k})S'_h$ に割ります。周辺の結合は一つの数 $\beta'_0$（$F^2$ の係数の長波長の値）に限り、束の網の定理の二次形式の残り（$\theta$ の座標では非局所）は形の座標に入れます。この割り方は平らな場の原典（BBS の Loc。階層模型の式 (5.2.10) では $\mathrm{Loc} = \mathrm{Tay}_4$）と同じ形で 典 、局所の係数が一意に決まり剰余が高い次数の側に入ることは有限の基底の代数です 初 （Lean：`loc_split_unique`、一変数 $s = \psi^2$ の多項式・$k = 2$ の型）。言明は次の形です 仮 （四次元では示していない）：$\beta \ge \beta_0$、格子の大きさ、段に依らない定数 $C, \kappa, r_0, c > 0$ があって

$$\beta_0' = 2^{d-4}\beta - b + r, \quad |r| \le \frac{C}{\beta}; \qquad \|R_X\| \;\le\; C e^{-\kappa d(X)} \Big[ \Big(\frac{h_0}{r_0}\Big)^{2k+2} \big(1 + \beta\tau h_0^2\big) + e^{-c(1-q)^2 h^2 \beta} \Big] \tag{3}$$

です（$b$ は一段の一ループの定数、$\tau$ は非可換の木の BCH の項で、可換に制限した木では 0）。剰余は、切りなしの有効作用 $S'_\infty$ と切りの分 $\Delta_{\mathrm{cut}}$ への恒等式 $R = (1-\mathrm{Loc})S'_\infty + (1-\mathrm{Loc})\Delta_{\mathrm{cut}}$ で二つに割れます 初 。指示関数は解析性を壊すので、解析性の議論は前者にだけ当て、後者は確率で別に払う、という割り方です。

- **Taylor の切り捨て** $(h_0/r_0)^{2k+2}$。背景を複素の範囲 $|\theta_P| \le r_0$ に延ばした解析性と $\beta$ に依らない上界（複素の背景での解析性の条件）の下で、Cauchy の評価から $\|(1-\mathrm{Loc}_{2k})S_X\| \le M e^{-\kappa d(X)} (e h_0/r_0)^{2k+2} / \big(1-(e h_0/r_0)^2\big)$（$h_0 < r_0/e$）です 初 （複素の背景での解析性の条件を仮定。級数の組み立ては Lean：`taylor_tail_bound`、仮定 $0 \le s < \rho$・$|a_m| \le M/\rho^m$）。**これは平らな場の原典の Lemma 7.5.3（$(h_+/h)^{k+1}$ の型）と同じ形**です 典 。一列四枚の熱核の出発では $r_0 = \pi$（共役点 $-1 \in SU(2)$ までの距離で、$\log(w/\sin w)$ の特異点の位置）で $\beta$ に依らず 初 、剰余は $h^{6.00}$ に比例して $\beta = 8 \sim 1024$ で $\beta$ に依りません 読 （$SU(2)$・一列四枚・熱核・一段・二経路の係数の一致 $10^{-11}$）。$U(1)$ ではこの項は数値の床（3〜6 桁下）で、$h^6$ の項は群の曲がりから来ます 読 。
- **小さな場の切り** $e^{-c(1-q)^2 h^2 \beta}$。揺らぎがリンクごとの熱核の積なら熱核の揺らぎの稀さの補題（§02）で押さえられます 初 （辺ごとに独立な熱核・一段に限る・揺らぎの背景独立の三条件の下）。一列四枚では切りの寄与は $h^2\beta$ だけの関数で、率は余白なしで $c \approx 0.24$、背景を閾の内側 $q \le \frac{1}{2}$ に置くと $c(1-q)^2 \approx 0.75$ と約 3 倍になります 読 （$SU(2)$・$U(1)$ とも同じ形）。段を重ねたときの釣り合いは $p(g) = c_0(1 + \log g^{-1})^{1/2}$ で $c_0^2 \ge 1/(c(1-q)^2)$（一列四枚の率で 1.33〜4.2）だけです 初 （算術・一列四枚の率を使う）。

「一段の剰余は $C|B|(h^2\beta)^k$ の大きさ」という形は当たりません。$k$ は $(h_0/r_0)^{2k+2}$ にしか、$h^2\beta$ は切りの側（大きいほど小さい）にしか現れません 読 （一列四枚の数と紙の形から）。四つの部品の判定は次のとおりです。

- (i) 揺らぎの法則が背景に依らない：リンクごとの熱核（背景に依らない揺らぎの一段の補題）と一列四枚の持ち上げ（揺らぎの共分散が背景に依らない）で立ち 初 、四次元のブロック化では立たない（背景依存の吸収と多段の行）。ただし小さい場の結合への寄与に要るのはその弱い形「複素の背景で揺らぎの Hessian の実部が一様に正」です。
- (ii) 二次は束の網の定理の主項＋局所な一ループ：拘束つきの揺らぎの共分散 $C_W$ の指数減衰を仮定すれば 初 。$2^4$ の箱で $\beta' = 0.442260\,\beta - 0.591$ 読 （可換な鞍点・一ループ）。
- (iii) 四次以上：持ち上げは一列四枚でだけ正確で、四次元のブロックでは複素の背景での Laplace の剰余の評価が要る（複素の背景での解析性の条件の中身）。

- (iv) 局在：有限距離は指数減衰に替わり、**二次の水準でブロックの間に陽な無関係な項が生まれる**。

**原典に無い行**。(iv) の項が、割った後に残る行です 読 （平らな場の原典の付録 A.1・A.5 の本文と、Bałaban の序文の一文の突き合わせ。Bałaban の本文は照合していない）。平らな場の原典では $I_j = e^{-V_j}(1 + W_j)$、$W_j = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{Loc})F_{w_j}(V(b), V(\Lambda))$（(A.1.3)–(A.1.4)）で、二次の寄与の和が三次の誤差を除いて 0 になる局所の打ち消しが (A.5.3)–(A.5.4) にあります 典 。**原典自身がこの箇所を「we sketch an argument」と書き、本体を別の文献に送っています** 典 。群の上で要るのは、その群版——背景場の中の揺らぎの共分散 $C_W$ で作る

$$W^{\mathrm{gauge}} = \tfrac{1}{2}\,(1 - \mathrm{Loc})\,F_{C_W}\big(V(b), V(\Lambda)\big) \tag{4}$$

と、その局所の打ち消し——を組み、周辺の結合への二次の寄与が「一段の一ループの定数 $b$ $+O(g^2)$」に収まることです 仮 。Bałaban の未公刊の基本の不等式が「二次の摂動の計算」と呼ぶものに当たる、と読みます 読 。この行は三つに割れます。

- **ブロック間の項の定義**：$W^{\mathrm{gauge}}$ の定義。有限の格子の式で、評価は要らない（代数）。
- **局所の打ち消し**：ゲージ不変性の下での Loc の恒等式（代数。Ward 恒等式の型と見込む）。
- **三次の残りの評価**：残りが $O(g^3)$ で、複素の背景と体積に一様（解析：複素の背景での Hessian の正値性・$C_W$ の減衰・形の座標の体積に一様な縮み）。

**局所の打ち消しの四次元の $O(1/\beta)$ の層**。四次元で、ブロックの比 2 の一段を全ての向きで組みました。細かい箱 $4^4$ をブロック $2^4$ の 16 個に割り、ブロックの中心を結ぶ長さ 2 の粗いリンクに熱核の柔らかい拘束をかけ、殻の上（粗い変数を止めた条件つき）で $O(1/\beta)$ の二次を取りました 計算 。零の向きはゲージの向きとちょうど同じ数（1827）で、殻の上の二次は二つの木のゲージで $2 \times 10^{-9}$（差分の精度）まで一致し、背景場のゲージ（Faddeev–Popov の行列式つき）の値とも相対 $2 \times 10^{-7}$ で一致します。殻の上の二次がゲージの取り方に依らないことは、四次元で直に確かめられています 計算 。ブロックをまたぐ二次を変数の位置で分けて、Loc を対の中点の二次まで取ると、残りはブロックの間隔を単位とする波数で、二倍の波長で対の全体の 0.24〜0.86%、一段先の最も短い波長で 3〜16% です。二次元の板の隣の対（0.6%・11%）と同じ桁です 計算 。残りが波数の四乗（次元 8）で縮むのは、対の中点について点対称な対と、点対称な位置のまたぐ和です（頂点で接する対で冪 3.87、箱の中心に置いた面で接する対で 3.93、全てのまたぐ対の和で 3.89。波数を半分にするごとに 3.95〜3.98 に近づく）。点対称でない個々の対では、冪が小さい波数で 3 へ下がり、次元 7 の項が小さい係数で残ります 計算 。並進で対称な格子では、全てのまたぐ対を足した体積あたりの値は、平面波の位相に依らず、波数の偶関数になります。そのため、Loc を二次まで取った後の残りに

次元 7 の項は無く、残りは次元 8 から始まります 紙 。またぐ対の特異値は、対の固定群の表現の重複度どおりに縮退します。頂点で接する対では、四つの向きの置換表現の標準成分 3 本が等しくなり、段のついた少数の積にはなりません 計算 。開いた箱で、全体を一点の Loc で測った残りの比が箱の大きさで増える（一段先の最も短い波長で 7% から 28%）のは、遠い対のためではありません。一点のまわりの Taylor で、その点から遠いリンクの裾が太るためです 計算 。ブロックをまたぐ二次を粗い面の流束の対に分け（ゲージ不変な分け方）、各対をその中点で Loc すると、Loc を二次まで取った後の残りは、一段先の最も短い波長で全体の約 2%、二倍の波長で約 0.1% になり、箱の大きさに依りません（冪 3.98〜4.00、次元 8） 計算 。ブロックの中心を一つの Loc の点にすると、粗い面がその点から離れているため残りは三割ほどになります。BBS の帳簿では、各項の Loc の点をその項の台の中に取ることが要ります 読 。一列と二次元の板の側では、またぐ対の分解の代数——一列の模型の有理数の算術（Lean：LocalCancellationOneRow）、一つの積をブロックごとの二乗と差の二乗に割る恒等式（Lean：RankOneRemainder）、一様な場と勾配の試験場で両側から消える残りを作るブロックの deflation（Lean：BlockDeflation）——を Lean で確かめてあります（どれも有限の添字の実係数の恒等式で、大きさは数の側にあります）。条件：小さな粗い格子（粗い面 24 枚以下）・一段・殻の上の $O(1/\beta)$ の二次・差分の精度 $10^{-9}$ の桁・冪は四つの波数からの見立て・周期の箱で冪は測っていない。

**原典に無い行の中身（改訂）。**ブロック・スピンの粗い変数で書くと、ブロック間の二次の項 $W^{\mathrm{gauge}}$ は一ループから O(1)（七枚の一列で 13/384）で始まりますが、これは座標の見え方です。ぼかした（細かい）背景場 $\phi^{*} = F(\Phi)$ の局所ポリマーの座標で Loc（一枚ごとの単項式）を取ると、一ループの O(1) の二次は一枚ごとの和（SU(2) では内側の面 5/12・端の面 1/4）と同じブロックの中の対に入り、13/384 はその引き戻しです（計算・有理数）。ブロックをまたぐ本当の剰余は、ブロックの並びが木の系では O(1) で消えて O(1/β) から始まり、粗い変数に保存量が無ければ距離について e^{−κd}（$\kappa = \ln(5+2\sqrt{6}) \approx 2.29$、揺らぎの共分散の率）で減ります（U(1)・SU(2)、計算）。閉路のある系では O(1) の二次のまたぐ項が現れますが、最小の閉路ではその全てが頂点を一周するホロノミーの二乗 $\Theta^2$ の定数倍で（SU(2)、有理数。U(1) では 0）、一様な場で消える $(\partial F)^2$ 型の小さな項（一枚ごとの項の $10^{-3}$）として小さな集合に局在します。したがって芯の行は、形としては原典の「細かい背景場の局所の多項式＋小さな集合に局在した剰余」に戻りますが、四次元では剰余は小さくありません（下の但し書き）。残るのは三次の残りの評価（剰余の体積に一様な評価と、small set の打ち消し）と、四次以上の剰余（O(1) の一ループの泡）の扱いです 読 。条件：一列と二次元の板・一段・形式的な Laplace・SU(2) の O(1/β) と四次の剰余は板では未。板のトーラス（4×4〜10×10、有理数）では、ぼかした背景場の座標の一ループ O(1) の二次を粗い場 a に引き戻すと、$\Sigma_B \rho \, \Sigma a_B{}^2 + (\partial a)^2$ 型の剰余に割れ、密度 ρ はどのブロックでも同じ値（$\rho_L = 0.080253, 0.080704, 0.080710, 0.080710$、L = 4, 6, 8, 10）で、記号の $\hat{k}(0)$ と一致します。隣のブロックの対 $u_B u_{B'}$

の項（係数 $1.6\times10^{-6}$）は恒等式で一様な部分と勾配の部分に必ず割れ、一様な部分は ρ の $10^{-5}$ 倍（一枚ごとの係数の繰り込み）に入ります。開いた板では境の層で ρ が隅 +40%・端 +15% ずれますが、これは背景 $\bar{\phi}=F\cdot1$ の境の効果で、ブロックごとの反対項 P(B) で吸収できる形です。つまり marginal な部分は一様な密度の繰り込みで、またぐ剰余は $(\partial a)^2$ 型です（計算・有理数。条件：二次元・一段・形式的な一ループ・ρ の閉じた形は未）。以上は一列と二次元の板での結果です。四次元では、同じ細かい Loc の定義で割っても、別のブロックに属する二枚の面の対の剰余は小さくなりません。剰余を最小にする選び方（拘束つきの最小二乗）でも、$4^4$〜$12^4$（共変な道のブロック平均）では、ブロックをまたぐ剰余は一枚ごとの項の 0.063〜0.071 倍（最大の比）・0.104〜0.109 倍（Frobenius）で、体積に依りません（計算）。板の $10^{-3}$ 倍は二次元で面どうしが揺らぎを共有しないことから来た小ささです。したがって四次元では、原典に無い行の「$W^{\mathrm{gauge}}$ は一ループから O(1)」はそのまま立ち、ぼかした背景場の座標で移るのは形（一枚ごとの多項式＋同じブロックの対＋ブロック間の剰余）と帳簿の方法（細かい Loc・small set の反対項）であって、剰余の小ささではありません。この大きさを決めるのは平均の取り方で、Bałaban 型の平行線の平均でも共変な道でも約 7%、直線一本の道では約 1% まで下がりますが、直線は合成しても平均にならず帳簿には使えません（計算・典）。減衰の率を決めるのは平均とゲージ固定の組で、Feynman 型（奇の点）の固定では乗数の核の極 0.95〜1.09／ブロック、ブロック内の木の axial 型の固定では 2.2〜3.5（根からの見込み、読）です。粗い場へ引き戻した一ループの二次は、平均と固定のどの組でも一致し（相対 $2\times10^{-15}$）、組の違いは殻の外（off-shell）の部分にだけ現れます（計算）。どの組でも BBS の体積の重みの帳簿（$(\eta-1)\kappa > L^{d}\log 2$ が要る）には 8 桁以上足りず（Lean：LargeSetWeight（bbs_weight_vs_decay・summable_shell_iff・card_shell）。不等式の形と、殻の数が多項式なら重み A の級数が収束する ⇔ $A < e^{\kappa}$）、Bałaban–Dimock の木の長さの重み（$e^{\{\kappa\, d_M\}}$ と M 立方体）なら $M \geq M_0$ で載る形になりますが、$M_0$ は約 30〜55 ブロック（組合せの定数の上限では約 2000）の見積りにとどまります（読）。したがって板の形（原典の形への回帰）は、調べたどの組でも四次元では成り立ちません。一様な場での値（$F^2$ の係数の $q\to0$）は $10^4$ までの数では定まりません（計算）。small set の項の配分と行の和・Loc の分解（(1−Loc) の側が一様な場で 0）は Lean：SmallSetRowSum、段ごとの縮み $\mu_k \leq \bar{\mu}$ のアフィン再帰は Lean：ThetaSquareOneStepAffine（板では一段の縮み ½、sup ≤ 1/10080）。

**粗い場へ引き戻した剰余（芯）**。剰余の大きさは、一ループの二次を細かい場で見るか、粗い場へ引き戻して見るかでも変わります。粗い場へ引き戻した二次（殻の上の量で、ゲージ固定の選び方に依らない）では、乗数の核の極は恒等式 $\Lambda_1 K = -Y$ によって代数的に消え 紙 ・ 計算 、残る減衰の率は揺らぎの物理のモードの質量 1.76／ブロック（像なしの二重極）になります 計算 。局所の部分を一枚の面だけで表すと剰余は約 10%（Frobenius 25〜40%）ですが、一枚の面と触れ合う二枚の面（長方形・椅子・角で接する面＝次元 6 の改良項、係数は一

枚ごとの 2〜3%）まで局所の部分に入れると、残りは約 1%（Frobenius 約 6%）で体積に依りません（$8^4$〜$12^4$）計算。すなわち、細かい場で見た剰余の九割は有限個の改良項の係数であり、帳簿では一段ごとに $L^{-2}$ で縮む結合として運べます紙（次元の勘定）。残りの約 1% は触れ合わない面の対で、板の 0.1% とは約 10 倍離れています。触れ合わない面の対も型ごとに改良項へ移すと、剰余は一型あたり約 0.6〜0.9 倍で落ち、十個ほどの型で 0.1% を下回ります計算。さらにブロック平均を共変な道と直線の道の 4 対 6 の混合にすると、物理のモードの根は 2.54／ブロックに上がり、一枚の面と十個ほどの改良項を局所の部分に数えたあとの芯の剰余は一枚ごとの項の約 0.05%（Frobenius 約 0.5%、$10^4$〜$12^4$）となって、大きさと率の両方で板（0.1%、2.29）に並びます計算（条件：混合の平均の多段の合成は、Bałaban の平均（立方体の一様な平均）とは違う自己相似の平均（情報次元 1.92）に向かい、その上での正則性の評価は確かめていません。改良項の係数の多段の流れは二段まで確かめ、一ループのずれは一段あたり 0.3〜0.5 倍で縮みます）。

**零和の系では、この行は空です。**ブロックが一つしか無い系（一列四枚・一つの箱）は、階層模型と同じく零和の条件で $W = 0$ です（原典の付録 A.1 の文の型）読。15-06 の一列四枚の形の剰余の定理がその模型で完全な例になれたのは、模型が易しいからでなくこの行が空だったから、と読めます。逆に、**最小の系の数ではこの行を試せません。**試すには、二つのブロックが揺らぎの共分散でつながる系が要ります（問い「零和でない最小の系」）。その系の答えが次の段落です。

**二つのブロックの最小の系 — $W^{\mathrm{gauge}}$ は一ループから陽に始まる。**一列四枚を二つ並べて境のプラケットを共有させた七枚の一列（$SU(2)$・熱核・一段。粗い変数は「二つの対角のループが等しい」と定める）で、粗い作用の二次の係数を測ると、ブロックの間の係数は木の $-\beta/32$ のほかに一ループの $O(1)$ を持ち、その値は $13/384$ に近づきます（差 $7.9\times10^{-10}$）読（$\beta = 32$〜$512$・二経路で係数が $10^{-10}$ で一致）。平らな場の原典の $W$ は二次から始まりますが、この粗い変数では一次（一ループ）から現れます。出所は群の非可換性ではなく、ブロックの拘束で作った**背景の写像の非局所性**です：可換な $U(1)$ の Wilson の作用（cos の作用）でも $51/4096$ が出て、ガウスの作用（Villain）では全て 0 です読。$SU(2)$ の一ループの項は、細かい背景について局所な式（熱核の前因子と $S^3$ の Laplace–Beltrami から来る行列式）を背景の写像で引き戻したもので陽に書け初（ガウスの最小化と Laplace の方法の一ループ。漸近展開は形式的で、剰余の評価は付けていない）、二つのブロックの係数は $K_{AA} = \frac{7\beta}{32} - \frac{67}{384}$、$K_{AB} = -\frac{\beta}{32} + \frac{13}{384}$ です。その局所の部分（行の和）は周辺の結合 $\beta_0'$ に吸収され、残り（粗い曲率の差の二乗、四次元では次元 6）は形の座標に入ります。一次を陽に入れた後の残りは $O(1/\beta)$（係数 $\approx -1/384$、当てはめ）で、局所の打ち消しが要るのはこの部分です読。非可換の木の項は $-\frac{\beta}{768}|a\times b|^2$ の四次で、一様な場（$a = b$）で消えるので局所の結合には触れず、$W$ の側にだけ入ります読。二次形式の局所と非局所への分解とその一意性、行の和の線形性による吸収は Lean：`loc_split`（$K$ は対称）・

`nonlocal_vanishes_on_constant` ・ `rowSum_add` ・ `two_site_unique` ・ `one_loop_numbers`（代入の算術だけ）。これで問い「零和でない最小の系」は、最小の系で答えの形が出ました：原典に無い行の中身は「$W^{\text{gauge}}$ が一次から陽な一ループの式で始まること」と「その後の $O(1/\beta)$ の局所の打ち消し」に分かれ、前者はこの系で式と数が合っています。条件：七枚の一列・対角の定義・一段・二次の係数・$\beta \geq 32$。四次元の格子の一段と体積に一様な評価には何も言いません。

**二段目に流す — $W$ の座標の再帰の群版（一列）**。同じ一列の模型で、一段目に生まれた非局所の項（隣り合う二枚の差の型 $|x-y|^2$ と、二つ以上の差を含む三つの四次の型）を細かい作用に足して二段目を流し、それが粗い場の上でどう写るかを、近似なしの被積分関数の数値積分（$\beta = 32$〜$512$）と、背景を代入した有理数で見ました。二段目の非局所の項は「一段目の項の像（細かい項の、粗い場を与えた条件つき期待値の非局所の部分）」と「二段目で新しく生まれる項」に割れます 初 （非局所の項について一次の Taylor の式）。像は同じ四つの型と局所の項に閉じ（二ブロックの出力では不変量の数え上げで自動 初 ）、二次の型は $15/128$ 倍、四次の型は高々 $5/256$ 倍に写ります 初 （木の有理数。四次の区画の固有多項式は Lean：`quartic_block_charpoly`）・ 読 （$1/\beta$ の補正）。粗い結合の比（$\beta' = 3\beta/16$）で測ると二次は $5/8$、四次は $5/48$ 以下で、どれも段ごとに縮みます。一方、その段で新しく生まれる項は段に依らない数（木で $1/64$、一ループで $\psi^2$ の係数を結合に含めると $9/384$）なので、非局所の項は $0$ ではなく**決まった値へ幾何級数で引き込まれます** 初 （一ループの式は Laplace の主項の形式的なもの。帳簿は Lean：`affine_iter`（$\lambda \neq 1$）・`affine_bound_uniform`（$0 \leq \lambda < 1 \cdot 0 \leq C$）・`new_term_gamma`）。原典の連続の場では「前の段の非局所の項は核を変えずに残り、新しい段の分が足される」という加法性（(A.1.4)–(A.1.5) の $w_j = C_1 + \cdots + C_j$ と Exercise 2.2.4 からの恒等式 $E_C \theta F_w(A,B) + F_C(A_+,B_+) = F_{w+C}(A_+,B_+)$）で書かれる部分で 典 （(A.1.4)–(A.1.5) は本文で確かめた。Exercise 2.2.4 からの恒等式は本文で確かめられていない 読 ）、群の上ではそれが「縮む像＋段に依らない新しい項」になります 読 。二次の型の像は群の BCH から $|a \times b|^2$ を $-13/768$ で生みます（数値の読みで紙の導出なし）。条件：$SU(2)$ 熱核（対照に $U(1)$ Wilson）・一列・対角の定義・二ブロック七枚の一段を二度・隣り合う対の四つの型・非局所の項について一次・粗い場の四次まで。$\ell^4$ の錐 $|\mathrm{Q}(\phi)| \leq \mathrm{c} \, \| \phi \|_4^4$ は、各点に掛かる係数の $\ell^1$ が有限な全ての四次の多体の項を含む（Lean：QuarticCone）ので、三段の縮みは「縮む像」の四次元版を不変量の数え上げなしで与えます（木・可換）。W の座標（次元 6 の二次）を段ごとに流すと三段で 0.38（特定の入力の値で作用素ノルムではない） 読 。

**多体の尾 — 一列の再帰が閉じる形**。超ブロックが三つ以上並ぶと、非局所の項の像には三つの粗い場を同時に含む四次の項（$|a|^2(b\cdot c)$・$(a\cdot b)(a\cdot c)$ などの六つ）が出て、「対の型」という形そのものは段で保たれません。境の一枚を半分ずつ配る粗い変数（保存量なし）の一列で、その係数を三つの源（前の段の四次の対の像・二次の対の像・その段で新しく生まれる項

の木と一ループ）ごとに測ると、どれも三つ組の端から端までの幅 $d$ について $e^{-\kappa d}$ で減り、$\kappa = \ln(5+2\sqrt{6}) \approx 2.29$ は背景の写像の率と同じでした 読 （有理数と浮動小数の二経路が $5\times10^{-17}$、群の上の Laplace と有限の $\beta$ の全求積が木で $4\times10^{-13}$・一ループで $4\times10^{-10}$。木と四次の対の像は前因子が定数、一ループと二次の対の像は前因子が $d$ の一次。$L\le 8$・$d\le 7$）。一つのブロックを含む三体の和は体積に依らず、三体の像はさらに $5\times10^{-3}$ 以下に縮みます 読 （木の段・線形の背景）。帳簿は Lean：`three_body_sum_le`（仮定 $0\le\rho<1$・$|q(d)|\le C\rho^{d}$）・`pair_tail_uniform`（仮定 $0\le\lambda,\mu<1$ と二本の再帰の不等式）。保存量のある定義に戻すと同じ三体の係数は距離に平らになり、出所は群でも一ループでもなく粗い変数の定義です。したがって**一列の模型では、芯の行の再帰は「対の型の縮む像＋段に依らない新しい項＋距離について指数で減る三体の項」の形で四次まで閉じます**——これが原典に無い行の一列版です 読 。ただし $d=2$ の三体の係数は隣り合う対の係数と同じ大きさ（頭は小さくない）なので、型の集合には短い三体の項を最初から入れておく必要があります。条件：一列・保存量の無い定義・熱核・一段・四次まで・木と一ループ・前の段の非局所の項について一次。四次元（三体の不変量は向きと位置の組で数が多い）・四体の項・一ループの水準の三体の自己の像は測っていません。一ループで各段に新しく生まれる四次の項は、$6^4$ の格子で $\|\theta\|_4^4$ の +0.038（Landau ゲージで二次を引いた値。生で +0.046、超局所で +0.014。二次の項の引き方にはゲージの定義が要る） 読 。一ループは三次の項（三色の三重積 $\varepsilon_{abc}\theta_a\theta_b\theta_c$ の型、$f_3/\|\theta\|_3^3\approx 0.02$、二色に限ると 0）も生み、$\pm\theta$ の両方が錐に入るので sup では消えません。三次の錐 $|C(\theta)|\le c_3\|\theta\|_3^3$ を別に押さえる段が要ります（非可換）。三次の相加相乗・三色の三重積 $|u\cdot(v\times w)|\le(|u|^3+|v|^3+|w|^3)/3$・錐の引き戻しは Lean：CubicCone。三段の $\ell^3$ の上界は二つの核で 0.57／0.30、全ての段で 1 未満（計算・木）。

**非局所の尾の型は、粗い変数の定義で決まる**。三次の残りの評価の体積に一様な評価に要るのは、$(1-\mathrm{Loc})W^{\mathrm{gauge}}$ の重みが距離とともに十分速く減ることです。一列四枚を $L$ 個並べた鎖・二次元の板・Bianchi の拘束を持つ三次元の柱 $2\times2\times L$ と周期の格子で測ると、尾の型は群でも一ループでもなく、細かい変数が粗い変数どうしの間をどう跨ぐかで決まりました 読 （$SU(2)$・熱核・一段・粗い場の二次の係数・可換の背景）。

- **平ら**：粗い変数を「二つの対角のループが等しい」と定めると、共有の一枚の共役類が鎖に沿って保存され、ブロック間の一ループの係数は距離に依らず $(4L+5)/(6(3L+2)^2)$（$L=2$ で $13/384$）。$L=2$〜$8$・$\beta=32$〜$512$ で距離 1〜4 の差は相対 $4\times10^{-12}$ 読 。保存量を粗い変数に加えれば非局所性は消えます 初 。周期の格子の全束 0 という一本の大域の拘束も、同じく平らな $-1/(2N)$ を作ります。
- **指数**：境の一枚を二つのブロックに半分ずつ配る（重みで共有する）と保存量は消え、係数は $C(r+\alpha)e^{-\kappa r}$、$\kappa$ は木の率 $\ln(5+2\sqrt{6})\approx 2.29$（二次元の板で 2.43）。粗い面を粗いリンクの変数で書く（Bianchi を粗い変数に昇格させる）表し方も、柱・板・三次元の全てで指

数で、柱では $\ln(9+4\sqrt{5}) \approx 2.887$、一ループも同じ率で前因子 $r$ です 読 （鎖 $L \le 21$・$r \le 8$、柱は木 $L \le 20$・一ループ $L \le 16$）。

- **拘束の伝搬の型**：粗い面のホロノミーをそのまま座標にする表し方（擬逆の代表）では、Bianchi の拘束を陰に持ち、尾は拘束の伝搬で決まります。開いた面のある柱では指数 $e^{-1.763r}$（率 $\ln(3+2\sqrt{2})$）、境の無い周期の板では $r^{-2}$、三次元の周期では冪（実効の指数 3.3 前後）です 読 （木の水準）。

距離の重みつきの和 $\sum_r r|Q(r)|$ は、平らなら体積とともに増え、指数なら体積に依らず飽和し（鎖で 0.0447、柱で 9 桁）、冪 $r^{-p}$ なら $d$ 次元の殻と合わせて $p-d>1$ のときだけ一様です 初 （算術。Lean：`flat_not_uniform_geometric`（平らな式について）・`weighted_sum_uniform_linear`（仮定 $|q(r)| \le C(r+1)\sigma^{2r}$、$0 \le \sigma < 1$）・`power_sum_uniform`（$s>1$）・`power_sum_unbounded`（$s \le 1$））。数え上げの規則は次のとおりです 読 ：δ の共有が作る保存量と大域の拘束は平ら、重みの共有と粗い変数に昇格させた拘束は指数（率は細かい場の転送の率）、局所の拘束を陰に持つ座標は拘束の伝搬の型（境があれば指数、境が無く二方向以上に広がれば冪）。四次元のブロック化では、粗い変数を「粗いリンク＋大域の札（トーラスを貫く束・中心の $\mathbb{Z}_2$ の磁束・Polyakov の向き）」で取れば局所の部分は指数で、大域の札は階数の小さい平らな項として別の帳簿に載る、と読みます 読 。四次元は木の水準だけを測りました（次の段落）。

**三次の残りの評価の座標 — 粗いリンク＋大域の札は、境の無い三次元の一ループと四次元の木で指数**。全ての粗い面を同時に固定した一段（可換の背景・粗い場の二次の係数）を、境の無い三次元の周期の箱で、粗い変数を「粗いリンク」と「大域の札（各平面を貫く全束の 3 本＝粗い面の調和の部分）」に分けて書くと、$SU(2)$ 熱核の一ループの非局所の重みは $(r+\alpha)e^{-\kappa r}$、$\kappa = 3.094$（木の率 $\ln(11+2\sqrt{30}) = 3.089$ と一致）で、距離の重みつきの和は体積に依らず飽和します（$L=12 \to 16$ で相対 $2.7\times10^{-6}$、全ての相手の行でも増分 0.172・0.024・0.0019） 読 （$\beta \to \infty$ の $O(1)$・粗い $2\times2\times L$・$L \le 16$・解析の Hessian と差分の Hessian の二経路の差 $\le 10^{-10}$）。札は粗いリンクの部分と交差項を持たず、Bianchi を満たす面の空間は粗いリンクの曲率と札の直和に一意に割れます 初 （Lean：`norm_sq_add_harmonic`（仮定 $D^\dagger b = 0$）・`range_sup_tags`（仮定 $d_2 \circ D_c = 0$）・`decomp_unique`・`finrank_ker_eq`）。一ループで新しく現れる大域の向き（Polyakov の向き）は、粗い長さが 2 増えるごとに約 $1/75$ で指数に小さくなりました。同じ一段を札を外した座標（粗い面のホロノミー）で書くと、札の射影が平らな $-1/(2N)$ を相対 $10^{-12}$ で作ります。四次元の周期 $n^4$（$n \le 16$）の木では、粗いリンクの座標の核は指数（$r^{-1}$ 前後の前因子、$\kappa \approx 2.08$）で和は飽和に向かい、札を外した座標は冪（当てはめで $r^{-4.4}$）＋平らで和は $n$ に比例して増えます 読 。したがって三次の残りの評価の座標は粗いリンク＋大域の札で、四次元の木の水準まで〔読〕の数で支えられます。四次元の一ループは測っていません。

**代数の層を Lean で書く ― 原典と同じ形と、切り方が違うかもしれない所。**小さい場の結合への寄与の言明 (3) のうち、代数の層と実数の不等式の組み立てを Lean で書きました（二つの束、40 の定理、全て標準の三つの公理）。(A) Loc を行列の成分を残すか捨てるかの射影として定義すると、線形・冪等で、局所の部分と純に非局所の部分への分解は一意、Loc の像と $1-\mathrm{Loc}$ の像は Frobenius の内積で直交します（`locM_idem`・`split_unique`・`frob_loc_nonloc`、仮定なし。跡の保存は残す組が反射的なとき）。(B) Loc をブロックの対角の射影に取ると、$W^{\mathrm{gauge}} = \frac{1}{2}(1-\mathrm{Loc})F_C$ はブロックを跨ぐ共分散の成分だけで書け、二つのブロックで $W(V(b),V(\Lambda)) = \frac{1}{2}V_A^{\mathrm{T}}C_{AB}V_B$ です（`Wg_explicit`・`two_block_W`）。(C) 係数の Cauchy 型の上界と切りの上界を仮定として受けると、一段の剰余は (3) の括弧の形で押さえられ（`one_step_remainder`、余白 $h_0 \le qh$）、予定 $g_k^2 = 1/(A(k+1))$・$h = c_0 g p$・$\beta = 4/g^2$ の下で $c_0^2 \ge 1/(c(1-q)^2)$ なら段を重ねた和は段数 $K$ に一様です（`total_remainder_uniform`、仮定 $A \ge 1$・$r_0^2 \ge 1$・$m \ge 3$ ほか）。解析性（複素の背景での解析性の条件）と切りの確率は仮定として外から入っています。

**原典と同じ形** 典 ・ 読 （対応は原典の式番号の読みで、原典の本文を開き直していない）：Loc が射影で分解が一意であること（BBS §5.2・付録 A）、$W$ がブロックを跨ぐ共分散の成分だけで書けること（(A.1.3)–(A.1.4)）、局所の打ち消しのうち「$W$ に入る部分は周辺の結合に寄与しない」という射影の層（(A.5.3)–(A.5.4) の手前まで）、Taylor の剰余の形（Lemma 7.5.3）。**切り方が原典と違うかもしれない所** 読 ：

1. Loc を行列の成分の射影に取ったこと。原典の Loc は局所の多項式の空間への射影で、二次形式では零運動量の記号（行の和）を残す型です。周辺の結合のずれを跡で定義すると、同じブロックの中の非対角の成分が入らず、零運動量の型とは数の意味が変わりえます。射影の性質（冪等・一意・直交）そのものは取り方に依りません。
2. 零和の理由。Lean の $W = 0$ は Loc の定義から出ますが、原典の階層模型の零和は共分散の構造から出ます。同じ「$W = 0$」でも理由が違います。
3. 切りを確率で別に払うこと。解析性を切りの無い有効作用にだけ当て、切りの分を確率の評価で別に払う割り方は、原典（平らな場の regulator の方法）とは別の道です。
4. 段の和の取り方。各段の上界を $1/(k+1)^2$ で押さえて足す（$p$ 級数）のは、原典の形の座標の縮み（幾何級数）と結合の流れの組み合わせとは違い、粗い評価のため $\mathrm{Loc}_4$（$m \ge 3$）を仮定しています。

どの点も小さい場の結合への寄与の言明の形を変えるものではなく、どこまでが原典と同じ形で、どこからが別の切り方かを分けるための注です（問い「Loc の二通りの定義」）。一点目は二つのブロックの系で数になりました：$O(1/\beta)$ の二次の非局所の残りは、行の和の Loc では差を含む $\frac{1}{768}|a-b|^2/\beta$ だけで新しい座標を作らず、成分の射影では差を含まない $-\frac{1}{384}a\cdot b/\beta$

が残ります 初 （閉じた式の展開は形式的）・ 読 （$\beta = 32$〜$2048$ で $10^{-11}$。$SU(2)$ 熱核・七枚の一列・対角の定義・一段）。原典の型は行の和で、二つの定義は恒等式 $s_{\mathrm{row}} = s_{\mathrm{comp}} + \frac{1}{2} N_{\mathrm{comp}}(x, x)$ でつながります（Lean：`sRow_eq_sComp_add`・`row_sum_cancels`（仮定：$F$ が対称）・`row_split_unique`）。群版の局所の打ち消しの中身——(A.5.3)–(A.5.4) のポリマーについての二次の寄与の和が三次の誤差を除いて 0 になること——は Lean にしていません。

まとめると、小さい場の結合への寄与について言えたのは、**平らな場の原典で知られている構造（Loc＋Taylor の剰余・切りの尾・ブロック間の二次の項）と同じ形が、群の上でも複素の背景での解析性の条件と余白 $q$ の下で立つ**ことです。新しい構造を主張するものではありません。原典に無いのは、原典自身が sketch と書く箇所の群版——ブロック間の二次の陽な項 $W^{\mathrm{gauge}}$ とその局所の打ち消し——だけで、そのうち二つは代数、一つは解析の問題です。二つのブロックの最小の系では、$W^{\mathrm{gauge}}$ は一ループから陽な式で始まり、局所の打ち消しが要るのは $O(1/\beta)$ の部分で、非局所の尾の型は粗い変数の定義で決まります。代数の層は Lean で書け、そのうち四か所は原典と切り方が違うかもしれません。

07

## 捨てた案

表 2　捨てた案と、その理由（理由の札は欄ごと）

| 案 | 狙い | 捨てた理由 |
|---|---|---|
| 熱核で優越される類 | 重み $f$ を熱核で上下から挟む類 $A^{-1} p_\beta \le f \le A p_\beta$ に取り、大きい場の稀さの条件を指標展開の尾の文にする | Wilson の作用はこの類に入らない：遠い半球で $f_W(\pi)/f_W(0) = e^{-2\beta}$、熱核は $e^{-\beta\pi^2/2}$ の程度で、比は $e^{(\pi^2/2-2)\beta} \approx e^{2.9\beta}$ 初 （多項式の因子を除く算術）。この超過が中心の分布の母数の案の $z$。理論を熱核の作用で定義するなら意味を持つ（保留）。角の上限 $\theta_0$ の内側に限れば Wilson は熱核の $K$ 倍で押さえられる（一リンクの熱核比較の補題、15-07 §05） |
| Hölder だけで源を剥がす | 観測量の源の条件を揺らぎの期待値の閉じの有界な冪で分離する | 細かい段で源が非局所な活動になり、一段の損 $2^{\lvert B(X_J)\rvert}$ が払えない 読 |
| 基本＋随伴の作用で $\eta$ を作用の側へ | 二次の比 2 を保つ作用で一母数の類を作る | $\cos^2$ の展開に揺らぎの背景の向きの成分だけに掛かる異方的な二次形式が出て、一リンクの条件つき法則が一母数の族の元でなくなる（15-07 §06） 初 。加えて比 2 の曲線は一段の流れで閉じない（15-06） 読 |
| 類関数だけで四次元 | ゲージ固定を一度もしない | 粗い Bianchi 恒等式に接続の道が要り、階層格子の近似を越えられない 読 （§05） |
| Haar の不変性で張り替えを消す | 揺らぎの法則の共役不変性でゲージ固定を不要にする | 熱核の畳み込みの型の繰り込みに限り、四次元のブロック化には届かない 読 （§05） |

「計算資源があれば定数が陽になる」の型の案（区間演算で定数を陽にする）は、四行の芯でないのでこの表に入れていません。

08

## 試されている方向の十行

表 3 は、紫外の制御に向けて試されている方向を十行に並べたものです（26-11 の表 3 を移し、この部で足した部品を「いま言えること」に書き加えた）。「最小の場」は、その方向を最初に試せる一番小さな対象、「いま言えること」は札つきの現状、最後の列は、その方向が結局は既知のことの言い換えに終わる危険です。見込みの数は付けません。どの行も紫外の制御を閉じていません。

表 3　試されている方向（「攻める条件」は 15-00 §01 の紫外の制御の三つの条件、「難しさの源」は 24-07 表 3）

| 方向 | 攻める条件／難しさの源 | 最小の場 | いま言えること | 言い換えの危険 |
|---|---|---|---|---|
| 1 捩れた小さな $T^4$ での連作の書き直し | 解析性・稀さ・結合の留まり／無次元の結合・ゲージ固定の欠如 | $T^4_{L_0}$、$n_{12}=1$ | 捩れた小さな四次元トーラスの紫外の言明の案 仮 。原典との対応は 15-02 §06 読 | 細かい段は周期的な $T^4$ と同じで、連作そのものの書き直しになる |
| 2 群値の σ 模型で先に | 解析性・稀さ・結合の留まり／無次元の結合 | 二次元 $O(4)$ の捩れた円柱 | 移植は背景場の段まで 典 （15-02 §03） | 二次元の結果は四次元に含意しない。文の形だけが持ち上がる |
| 3 群値の場の重み | 稀さ・解析性／ゲージ固定の欠如 | 一つのブロック | 場の和の劣乗性（BBS の (ii)）の群版（背景と揺らぎの分解の補題） 初 。背景に依らない揺らぎの一段で、場の和の劣乗性・揺らぎの期待値の閉じ・次の段への単調性と入れ替えの群版が全て立ち鎖が閉じる（背景に依らない揺らぎの一段の補題） 初 。本当の $\mu_{k,W}$ での揺らぎの期待値の閉じと次の段への単調性（の群版）は言明だけ 仮 （15-07） | 背景と揺らぎの分解の補題・背景に依らない揺らぎの一段の補題は背景依存 $\eta$ に触れない |
| 4 群の上の Polchinski 流（熱核で流す多重尺度） | 稀さ・解析性／ゲージ固定の欠如 | 一リンクの類関数 | 一リンクの熱核の類で損は望遠鏡和 読 （15-04）。一段の重みつきノルムの評価は、揺らぎがリンクごとの熱核の積なら $\eta=0$ で閉じる（背景に依らない揺らぎの一段の補題） 初 。多リンクの結合を含む測度は未 | 熱核の畳み込みは自由度を減らさず、ブロック変数を作らない |
| 5 大きな場をチェス盤で一度に払う | 稀さ／ゲージ固定の欠如・無次元の結合 | $T^4$ の周期化 | ブロック変数の鏡映正値性が要る 仮 （26-05） | 各段の大偏差の帰納（15-00 §03 の「最悪の幾何」）が避けられない |

| 方向 | 攻める条件／難しさの源 | 最小の場 | いま言えること | 言い換えの危険 |
|---|---|---|---|---|
| 6 結合の流れの自己完結 | 結合の留まり／無次元の結合 | どこでも | 結合の小ささの帰納の補題：結合の一段の正味の括弧＋結合の連続性 ⇒ 結合の留まり（15-03 §03） 初 。帳簿の部分は初等的 | 結合の一段の正味の括弧を示さない限り、結合の留まりの帳簿の部分の整理に留まる |
| 7 計算機援用で定数を陽に | 解析性・結合の留まり／無次元の結合・ゲージ固定の欠如 | 一ブロックの線形化した作用素 | 浮動小数の評価の記録はあるが区間演算は未 読 | 定数を陽にするだけで、帰納そのものは与えない |
| 8 臨界の正則性構造（確率量子化） | 解析性／無次元の結合 | 書けない | 解の理論の鍵の条件が $d < 4$ で、四次元は境界 典 （24-06 §08） | 道具の作り直しが要り、最小の言明が置けない |
| 9 自己双対の座標の行列式 | 解析性・結合の留まり／無次元の結合・ゲージ固定の欠如 | 捩れた孤立した平坦な接続の近く | 一ループの照合の案だけ 仮 | 一ループの係数の再現は一ループの言い換えで、陰性対照にしかならない。格子に自己双対の分解は無い |
| 10 捩れた一点模型と Nahm 変換 | 解析性／無次元の結合 | 一点模型 | Nahm 変換は古典の自己双対の配位の対応で、測度の水準の対応は知られていない 仮 （原典未照合） | 大きな $N$ と $\beta \to \infty$ の順序の問題が残り、紫外と赤外を入れ替えただけになる |

表 3 から読むこと 読 （物理の見立て）。紙で閉じた部品があるのは方向 3・4（背景と揺らぎの分解の補題・背景に依らない揺らぎの一段の補題）と方向 6（結合の小ささの帰納の補題）で、どれも本題の外側（場の和の劣乗性、背景に依らない揺らぎ、帳簿の部分）です。本題——本当の $\mu_{k,W}$ での揺らぎの期待値の閉じの群版と、大きな場込みの一段の剰余（結合の一段の正味の括弧）——は、方向 3・4 と方向 6 がそれぞれ向かう一点で、揺らぎの測度が背景に依ることが効く所で合流します。これが §06 の「背景依存の吸収と多段の行が芯」と同じ所です。

**この章から出る問い。** 表 4 は四行に一つずつ、次に試せる最小の問いを置いたものです。問い「零和でない最小の系」は §06 の芯の行から出る問いです。問い「Loc の二通りの定義」・問い「三次元の非局所の重み」は §06 の改訂から、問い「非可換の背景でのゲージの一致」は §05 から、問い「木の三体の四次の幅」は §06 の三度目の改訂から出る問いです。

表 4　この章から出る問い（状態：新＝この部で足した問い。更新＝答えの一部を書き足した）

| 問 | 行 | 問い（一行） | 大きさ | 状態 | 決着しても動かないもの |
|---|---|---|---|---|---|

| 問 | 行 | 問い（一行） | 大きさ | 状態 | 決着しても動かないもの |
|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 1 | 一リンクで読み取り写像の Lipschitz 定数を Bessel の比の微分から紙で出し、板で大きな場の領域を一つ入れた密度と入れない密度の全変動の差を数にして、大きい場の結合への寄与 $\le C' g^2$ の形が最小の系で立つかを見る。**答え（一部）：**一リンクでは済んだ（大きい場の剰余の上界の補題・熱核の揺らぎの稀さの補題、§02。Lipschitz 定数 $\frac{4}{3}\beta^2$、実際の感度 $\approx \frac{1}{3}\beta^2 h^2$）。板 $2\times 2$・熱核の揺らぎでは、閾 $\theta_h = g\,p(g)$（$\beta = 4/g^2$）で $c_0^2 > 2$ なら立つ形・$= 2$ が境・閾を固定すると立たない。板の値は一リンクの 1/3 倍で局所（§02）。本当の測度の多リンクは未（背景依存の吸収と多段の行） | 紙と小さな計算 | 更新 | 小さい場の結合への寄与（基本の不等式（未公刊）の中身） |
| 13 | 2 | 一列四枚で一本のループに源 $s\,\mathrm{Re}\,W_a$ を足し、一段後のループの形ごとの結合のずれが $s$ について線形で、係数が $\beta$ に依らないか。あわせて $U(1)$ の Villain で位置に依る結合 $\beta(x)$ の一段が局所平均になるかを紙で。**答え（一部）：**熱核の一段（ブロック化なし）では細かいループの源は表現ごとの結合のずらしで、一次・二次ともちょうど（§03）。一列四枚・ブロック化の一段では、ブロックの中のループの源によるずれは主項 $f_C^2$（$\beta$ に依らない）＋有理数の $O(1/\beta)$、$\log\beta$ なし。$U(1)$ Villain の $\beta(x)$ は一次で束の網の重みの局所平均（§03）。境をまたぐループ・多段は未 | 紙と小さな計算 | 更新 | 細かい格子のループの観測量の源の条件 |
| 14 | 3 | 臨界点の偶性が四枚で成り立つか（真の拘束つき臨界点のまわりの揺らぎの作用の奇の部分）、成り立てば小さい場の結合への寄与の背景一様性が $\theta^4$ の係数の有界性に弱まる（臨界点の偶性の案）か。問い「同時の法則の密度の割り方」（15-07）と組で。答え（一部）：偶性は四枚で呼吸の方向に破れる（閉じた式）。臨界点の偶性の案の結論は背景の反転の共変性で一列の鎖に立つ（§02）。四次元の $\theta^3$ の行は未 | 小さな計算 | 更新 | 多段の背景の正則性の条件 |
| 15 | 4 | 倍率 2 のブロックの一ループの Hessian をゲージ場の部分とゴーストの部分に割り、後者の $F^2$ の係数を数にする（陰性対照：$U(1)$ で 0）。あわせて木のゲージの直積分解を有限群で形式化する。**答え：**後半は済んだ（有限群で Lean、§05）。ゴーストの $F^2$ の係数は $3^4$ 点の一ブロック・可換の背景で古典作用あたり $+0.024$（一ループの 2.4%）で、臨界点の背景では二つのゲージの一ループは (5) で恒等的に一致する（§05） | 小さな計算・Lean | 更新 | 局所展開の一様な収束（小さい場の解析性の条件の型） |

| 問 | 行 | 問い（一行） | 大きさ | 状態 | 決着しても動かないもの |
|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 1 | 零和でない最小の系――一列四枚を二つ並べて間の細かいリンクを共有させ、二つのブロックが揺らぎの共分散でつながる系――で $W^{\text{gauge}}$（(4)）を書き、周辺の結合 $\beta_0'$ への二次の寄与が二つのブロックの和からずれる量（局所の打ち消しの破れ）を $\beta = 32\text{〜}512$ で数にする。打ち消しが立てば $O(1/\beta)$、立たなければ $O(1)$。**答え（最小の系）：**七枚の一列で $W^{\text{gauge}}$ は一ループから $O(1)$（$13/384$）、一次を陽に入れた後の残りは $O(1/\beta)$。$L$ ブロックの鎖・板・柱では尾の型が粗い変数の定義で決まる（§06） | 小さな計算と紙 | 更新 | 四次元の三次の残りの評価（三次の評価） |
| 21 | 1 | Loc を二通り――行の和（零運動量）と行列の成分――で定義し、二つのブロックの一列の共分散で $W^{\text{gauge}}$ の差を有理数で出す。差が 0 なら切り方は原典と同じ、0 でなければ違う箇所が数で特定される。**答え：**差は 0 でない。$O(1/\beta)$ の二次の非局所の残りは行の和で $\frac{1}{768}\lvert a-b\rvert^2/\beta$（差を含む項だけ）、成分の射影で $-\frac{1}{384}a\cdot b/\beta$。原典の型は行の和（$SU(2)$ 熱核・七枚の一列・一段、§06） | 小さな計算と Lean | 更新 | 四次元の局所の打ち消し |
| 22 | 1 | 境の無い三次元（横断面が周期の柱か $8^3$）で、粗いリンク＋大域の札の座標の $SU(2)$ 一ループの非局所の重み $Q^{(1)}(r)$ が、木の水準と同じく指数のままか。**答え（一部）：**周期の粗い $2\times2\times L$（$L\le16$）で指数（$\kappa = 3.094$、木の率と一致）、和は体積に一様。四次元の周期の木も指数（$\kappa\approx2.08$）。横に広い箱と四次元の一ループは未（§06） | 小さな計算 | 更新 | 四次元の三次の残りの評価 |
| 24 | 4 | 非可換の背景（交換子の $F$ を持つ臨界点）で (5) とゴーストの係数を測り、局所展開の主項が $\sum_p \lvert F_p\rvert^2$ の一つの数か（可換の $F$ と交換子の $F$ で同じか）を見る | 小さな計算 | 新 | 二ループ以上の一致 |
| 29 | 1 | 四次元の粗いリンク＋大域の札の箱で、木の三体の四次（交換子の型）の幅への依存を測り、率が二体の木の率と一致するか（一列の $W$ の再帰の四次元への写しの最初の検査）。あわせて一列で四体の項と一ループの水準の三体の自己の像の縮み $\mu$ を測る | 小さな計算 | 新 | 四次元の局所の打ち消し・三次の残りの評価 |

09

## 言えないこと

(a) この部の中で、紫外の制御は閉じていません（存在は、公開された構成が別の設計で示しました）。四行のどれも閉じていません。この章の案は全て案で、結果ではありません。

(b) 表 1 の「一行」は、それが示せれば閉じる、という条件つきの言明で、どれも示していません。小さい場の結合への寄与が基本の不等式（未公刊）の中身に当たるというのは、序文の一文からの読みです。

(c) 稀さを Chebyshev で出す案は揺らぎの指数積率の群版を仮定したときの一行で、揺らぎの指数積率の群版は示していません。剰余を小さい場と大きい場に割る案の Lipschitz 定数と全変動の差は仮定で、評価していません。

(d) 源をブロック変数の関数に取る案の可換性はブロック変数の関数に限った自明な事実で、細かい格子のループの観測量については何も言いません。

(e) 木のゲージの案の「Jacobian は無い」は軸（木）ゲージに限った構造の言い換えで、Bałaban の四次元の論文のゲージの選び方は照合していません。ゴースト行列式の局所展開は見込みです。

(f) 「背景依存の吸収と多段の行が芯」は案の間の論理の見立てで、どの含意も示していません。表 3 の方向は候補で、無矛盾性も見込みも評価していません。

(g) §06 の小さい場の結合への寄与の割り方 (3) は、複素の背景での解析性の条件と余白 $q$ を入れた言明と、その下での評価です。複素の背景での解析性の条件を四次元のブロック化で示していません。§06 の数は一列四枚（$SU(2)$・熱核・一段）と $2^4$ の箱の一ループの数で、四次元の格子の一段の数ではありません。原典に無い行（$W^{\mathrm{gauge}}$ とその局所の打ち消しの群版）は示していません。「原典と同じ形」は形の一致を言うもので、新しい構造の主張ではありません。

(h) 熱核の揺らぎの稀さの補題・大きい場の剰余の上界の補題と源の勘定は、辺ごとに独立な熱核の条件・一段に限る条件・揺らぎの背景独立の条件の下の文で（一リンクの熱核比較の補題は Wilson の一リンク）、本当の揺らぎの測度については何も言いません。木のゲージの Lean は有限群の文で、連続群の Haar 測度は紙です。

(i) §06 の二つのブロックの系・鎖・板・柱の数は、一段・粗い場の二次の係数・可換の背景（尾の型）の文で、一ループは Laplace の方法の形式的な漸近展開です。$O(1/\beta)$ の係数は当てはめで、式はありません。尾の型の数え上げの規則は一・二・三次元の模型の数からの読みで、四次元は粗いリンク＋大域の札の座標の木の水準（$n \le 16$）だけを測りました。Lean の 40 の定理は有限次元の射影・恒等式と実数の不等式の組み立てで、解析性（複素の背景での解析性の条件）と切りの確率は仮定として入っています。原典と切り方が違うかもしれない四点は読みで、原典の本文で照合し直していません。

(j) §06 の $W$ の再帰と多体の尾は、一列・二ブロック（三体は $L \le 8$・$d \le 7$）・保存量の無い定義・非局所の項について一次・粗い場の四次までの文で、一ループは Laplace の形式的な主項です。$-13/768$ は数値からの読みです。三次の残りの評価の座標の一ループは三次元の準一次元の箱（粗い $2 \times 2 \times L$）だけで、四次元は木の水準だけです。行の和と成分の射影の差は七枚の一列の一段の文です。

(k) §05 の二つのゲージの一致 (5) は、一段・一ループ・臨界点の背景の文です。ゴーストの係数の数は $SU(2)$・$3^4$ 点と $4\cdot4\cdot3\cdot3$ 点のブロック・可換の背景の値で、非可換の背景・$\xi\neq1$・二ループ・多段は測っていません。

10

## 五分類の表と依存グラフ

表 5　この章の行（この章の行に Lean の欄はありません）

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 |
|---|---|---|---|---|
| [01] | 閉じない四行（結合の一段の正味の括弧・観測量の源の条件・$\eta$ の吸収と多段・張り替えの境目）の「一行」 | 仮 | §01 表 1（言明） | 定数は $k, a$ に依らない |
| [02] | 閉じた部品は背景に依らない揺らぎか木の水準にある | 読 | §01 | この部の部品の範囲 |
| [03] | 大きい場の稀さの条件は揺らぎの指数積率の群版の Chebyshev の系 (1) | 初 | §02 稀さを Chebyshev で出す案 | 揺らぎの指数積率の群版を仮定 |
| [04] | 結合の一段の正味の括弧＝小さい場の結合への寄与＋大きい場の結合への寄与、$\lvert r^{\mathrm{large}}\rvert\le C\beta^2e^{-cp^2}$ | 仮 | §02 剰余を小さい場と大きい場に割る案 | Lipschitz と全変動の差を仮定・$p_0\ge\frac12$ |
| [05] | 背景の反転の共変性で背景依存を $\theta^4$ の係数へ・大きな場の母数 $z$ | 仮 | §02 臨界点の偶性の案と中心の分布の母数の案 | 偶性は二枚で成り立ち、四枚では呼吸の方向で破れる。結論は背景の反転の共変性で一列の鎖に立つ。四次元は $\theta^3$ の係数の有界性も要る |
| [06] | 源をブロック変数の関数に取れば細かい段で積分と可換 | 初 | §03 源をブロック変数の関数に取る案 | ブロック化した観測量 |
| [07] | 源は類の座標のずらし・位置に依る結合の類 | 仮 | §03 | 案 |
| [08] | 木のゲージの直積分解で張り替えの Jacobian は無い | 初 | §05 木のゲージの案 | 軸（木）ゲージ・既知の構造の言い換え |
| [09] | ゴースト行列式の局所展開と局所結合への合流 | 仮 | §05 ゴースト行列式を吸収する案 | 小さな場・一様な収束は未 |
| [10] | 類関数だけの道は階層格子を越えられない・Haar で張り替えを消すのは熱核の型に限る | 読 | §05 | — |

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 |
|---|---|---|---|---|
| [11] | 四行の依存：背景依存の吸収と多段の行が芯、残る芯は小さい場の結合への寄与と多段の背景の正則性の条件 | 読 | §06（見立て） | — |
| [12] | 熱核で優越される類に Wilson は入らない（比 $e^{(\pi^2/2-2)\beta}$） | 初 | §07 表 2 | $SU(2)$・一リンク・多項式の因子を除く |
| [13] | 試されている方向の十行と、本題が合流する一点 | 読 | §08 表 3（物理の見立て） | 候補 |
| [14] | 熱核の Gauss 上界の補題・熱核の揺らぎの稀さの補題：熱核の揺らぎでは揺らぎの指数積率の群版と大きい場の稀さの条件が閉じた形で立つ。Wilson の一リンクでは一リンクの熱核比較の補題で $K$ 倍＋尾 | 初 | §02 | 辺ごとに独立な熱核・一段に限る・揺らぎの背景独立の三条件・$SU(2)$／一リンク |
| [15] | 大きい場の剰余の上界の補題：結合の一段の正味の括弧＝$r^{\mathrm{small}}+r^{\mathrm{large}}$、$\lvert r^{\mathrm{large}}\rvert \le \frac{4}{3}(b_S^2/E_S)P_L$、$c_0^2>2$ で $\le C'g^2$。実際の感度 $\approx \frac{1}{3}\beta^2 h^2$ | 初 ・ 読 （感度の数） | §02 | 一リンク・辺ごとに独立な熱核・一段に限る・揺らぎの背景独立の三条件・$E\in(e^{-2},1)$ |
| [16] | 源の損 $e^{s_0\lvert B(X)\rvert}$ は一度だけ・細かいループの源は $\mathbb{E}F(U_C)=(F*p_{t\lvert C\rvert})(W_C)$ | 初 | §03 | ブロック化した観測量／辺ごとに独立な熱核の条件・自己回避のループ |
| [17] | 木のゲージの存在・一意・直積分解・張り替えの全単射、費用 (2) | 初 | §05（有限群は Lean） | 有限群（Lean）・$SU(2)$（紙）・完全軸の木 |
| [18] | 小さい場の結合への寄与の割り方 (3)：Taylor の切り捨ては原典の Lemma 7.5.3 と同じ形、切りの尾は $e^{-c(1-q)^2h^2\beta}$ | 仮 （言明）・ 初 （複素の背景での解析性の条件の下の評価）・ 典 （原典の形） | §06 | 複素の背景での解析性の条件・余白 $q$・数は一列四枚 |
| [19] | 原典に無い行は $W^{\mathrm{gauge}}$（(4)）と局所の打ち消しの群版で、零和の系では空 | 読 | §06 | 原典の付録の本文と序文の突き合わせ |
| [20] | 二つのブロックの $W^{\mathrm{gauge}}$ は一ループから $O(1)$（$13/384$）、出所は背景の写像の非局所性、一次を陽に入れた後は $O(1/\beta)$ | 初 （一ループの式・形式的）・ 読 （数） | §06 | $SU(2)$・熱核・七枚の一列・対角の定義・一段・二次の係数・$\beta=32$〜$512$ |
| [21] | 非局所の尾の型は粗い変数の定義で決まる（保存量・大域の拘束は平ら、重みの共有・昇格した拘束は指数、陰に持つ拘束は伝搬の型） | 読 （重みつきの和の算術は 初 ） | §06 | 鎖・板・柱・周期の格子・一段・二次の係数・可換の背景・四次元は未 |
| [22] | 小さい場の結合への寄与の代数の層（Loc の射影・$W^{\mathrm{gauge}}$ の層）と剰余の組み立て（段数に一様な和） | 初 | §06（有限次元の部分は Lean） | 係数の仮定と切りの仮定を受ける・予定 $g_k^2=1/(A(k+1))$・$m\ge 3$ |

| 行 | 言明（一行） | 分類 | 根拠 | 範囲 |
|---|---|---|---|---|
| [23] | 原典と同じ形の部分と、切り方が違うかもしれない四点 | 典 ・ 読 | §06 | 原典の式番号の読み・本文は開き直していない |
| [24] | 臨界点の背景で木のゲージと背景共変ゲージの一ループの有効作用は一致 (5)、ゴーストは帳簿の一行 | 初 ・ 読 （ゴーストの係数） | §05 | 一段・一ループ・$HD=0$・$\xi=1$・数は $SU(2)$・$3^4$ 点・可換の背景 |
| [25] | $W$ の再帰の群版（一列）：像は同じ型に閉じ、結合の比で二次 $5/8$・四次 $\le 5/48$、新しい項は段に依らず、固定点へ引き込まれる | 初 （一次の Taylor の式・木の有理数・帳簿）・ 読 （$1/\beta$ の補正）・ 典 （原典の加法性） | §06 | $SU(2)$ 熱核・一列・対角の定義・二ブロック七枚の一段を二度・一次・四次まで・$\beta=32$〜$512$ |
| [26] | 多体の尾：三体の係数は幅について $e^{-\kappa d}$（$\kappa=\ln(5+2\sqrt{6})$）、和は体積に一様、像は $5\times10^{-3}$ 以下。一列の再帰は四次まで閉じる | 読 （帳簿は 初 ） | §06 | 一列・保存量の無い定義・一段・木と一ループ・$L\le 8$・$d\le 7$ |
| [27] | 三次の残りの評価の座標：粗いリンク＋大域の札は境の無い三次元の一ループで指数（$\kappa=3.094$）・和は体積に一様、四次元の木で指数 | 読 ・ 初 （札の直交と分解の一意性） | §06 | 可換の背景・二次の係数・一段・粗い $2\times2\times L$（$L\le16$）・四次元は木 $n\le16$ |
| [28] | Loc の二通りの差：行の和で $\frac{1}{768}\lvert a-b\rvert^2/\beta$、成分の射影で $-\frac{1}{384}a\cdot b/\beta$。原典の型は行の和 | 初 （閉じた式と恒等式）・ 読 （数） | §06 | $SU(2)$ 熱核・七枚の一列・一段・$O(1/\beta)$ まで |

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
[01] 仮  閉じない四行の一行                                          定数は k, a に依ら
[02] 読  閉じた部品の位置 ⟸ [01]
[03] 初  大きい場の稀さ ⟸ 指数積率の群版の Chebyshev          指数積率の群版を仮定
[04] 仮  正味の括弧 = 小さい場の寄与 + 大きい場の寄与 ⟸ [01][03]                    ニ
[05] 仮  背景の反転で θ⁴ へ・母数 z ⟸ [04]                       四次元は θ³ も
[06] 初  源はブロック変数の関数で可換                            ブロック化した観測量
[07] 仮  源は座標のずらし ⟸ [06]
[08] 初  木のゲージに Jacobian は無い                            軸ゲージ
[09] 仮  ゴースト行列式は局所結合へ ⟸ [08]
[10] 読  類関数だけの道の壁・Haar の限り ⟸ [08]
[11] 読  背景依存の吸収と多段の行が芯 ⟸ [03][04][07][09]
[12] 初  熱核の優越に Wilson は入らない                          ーリンク
[13] 読  十の方向 ⟸ [11]
[14] 初  熱核の揺らぎの指数積率・稀さ・熱核比較の補題 ⟸ [03]    熱核の三条件
[15] 初  正味の括弧の割り方と r^large ⟸ [04][14]                      ーリンク
[16] 初  源の損の勘定・細かいループの源 ⟸ [06]                   ブロック化した観測量
[17] 初  木のゲージ（有限群は Lean）・費用 (2) ⟸ [08]            完全軸の木
[18] 仮  小さい場の寄与の割り方・Taylor の形は原典と同じ ⟸ [15]   複素の背景での解析性・
[19] 読  原典に無い行 W^gauge ⟸ [11][18]                         零和の系では空
[20] 初  二つのブロックの W^gauge はーループから O(1) ⟸ [19]      七枚の一列・一段
[21] 読  尾の型は粗い変数の定義で決まる ⟸ [20]                   鎖・板・柱・四次元は
[22] 初  代数の層と剰余の組み立て ⟸ [18]                         仮定を受ける
[23] 読  原典と同じ形・切り方の四点 ⟸ [22]                       式番号の読み
[24] 初  二つのゲージの一致 (5) ⟸ [09][17]                        一段・ーループ・
[25] 初  W の再帰の群版（一列） ⟸ [20]                           一列・一次・四次ま
[26] 読  多体の尾は指数・一列の再帰は閉じる ⟸ [21][25]           保存量なし・L ≤ 8
[27] 読  三次の残りの評価の座標は粗いリンク＋札 ⟸ [21]                    三次元の
[28] 初  Loc の二通りの差 ⟸ [20][23]                              七枚の一列
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。[01]・[04]・[05]・[07]・[09]・[18] は仮定の行で、どれも紫外の制御を割った問いの形です。この章の節点に、紫外の制御が示されたという節点はありません。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 初 揺らぎの指数積率の群版を仮定したときの大きい場の稀さの条件の Chebyshev の一行・ブロック変数の関数の源の可換性・木のゲージの直積分解（張り替えの Jacobian は無い）・熱核の優越に Wilson が入らないこと | 揺らぎの指数積率の群版そのもの。細かい格子の観測量。四次元の論文のゲージの照合 |

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 初 熱核の揺らぎの稀さの補題・大きい場の剰余の上界の補題（熱核の揺らぎ・一リンク）と一リンクの熱核比較の補題（Wilson の一リンク）・源の損の勘定と細かいループの源（熱核の一段）・木のゲージの存在・一意・直積分解（有限群は Lean）と費用 (2)・小さい場の結合への寄与の Taylor の切り捨ての評価（複素の背景での解析性の条件の下、原典の Lemma 7.5.3 と同じ形） | 本当の揺らぎの測度での揺らぎの指数積率の群版。複素の背景での解析性の条件を四次元のブロック化で示すこと。多リンクの鋭い形 |
| 読 閉じた部品の位置・四行の依存（背景依存の吸収と多段の行が芯）・類関数だけの道の壁・十の方向・原典に無い行は $W^{\mathrm{gauge}}$ とその局所の打ち消しの群版で零和の系では空 | 依存のどの含意も。ブロック間の項の定義・局所の打ち消し・三次の残りの評価のどれも。Bałaban の本文との照合 |
| 初 二つのゲージの一致 (5)（一段・一ループ・臨界点）・小さい場の結合への寄与の代数の層と剰余の組み立て（有限次元の部分は Lean）・二つのブロックの一ループの式（形式的） | 二ループ以上の一致。複素の背景での解析性の条件と切りの確率。四次元の局所の打ち消し |
| 読 二つのブロックの $13/384$ と $O(1/\beta)$・尾の型の数え上げの規則・原典と切り方が違うかもしれない四点・ゴーストの係数 $+0.024$ | 四次元の尾の型と三次の残りの評価。原典の本文での照合 |
| 初 $W$ の再帰の一次の Taylor の式と木の有理数・札の直交・Loc の二通りの恒等式。読 $W$ の再帰の縮みの比・多体の尾の指数・三次の残りの評価の座標の三次元の一ループと四次元の木・Loc の差の数 | 四次元の $W$ の再帰・四体の項・四次元の一ループの尾・体積に一様な三次の残りの評価 |
| 仮 四行の「一行」・結合の一段の正味の括弧の割り方・偶性・源の座標・ゴースト行列式の吸収 | どれの証明も。紫外の制御が閉じる見込み |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 条件つきの紫外安定性の定理（Bałaban 1989 の Theorem 1）・基本の不等式（未公刊）（結合の一段の正味の括弧の位置） | 典（要旨と序文） | T. Bałaban, Large field renormalization. II, Comm. Math. Phys. 122 (1989) 355–392（15-02 §02） |
| 大きな場の重みと Chebyshev の役・活動のノルムの一段の評価（BBS の補題 A.6.1） | 典 | R. Bauerschmidt, D. C. Brydges, G. Slade, Introduction to a Renormalisation Group Method, LNM 2242 (2019), arXiv:1907.05474（15-02 §04） |
| 大域のゲージ固定・ブロックの軸ゲージ | 典 | I. M. Singer, Comm. Math. Phys. 60 (1978) 7–12。7-05 §05 |
| 確率量子化の四次元の境界 | 典 | 24-06 §08 の出典表 |
| 四行の案・捨てた案・四行の依存 | 本書の検討 | 本書の検討の記録（紫外の制御の閉じない行の整理） |
| (1)・源をブロック変数の関数に取る案の可換性・木のゲージの案の直積分解・優越の比 | 初 | この章の本文 |

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| Lemma 7.5.3・Loc・付録 A.1 の (A.1.3)–(A.1.4)・A.5 の (A.5.3)–(A.5.4)（平らな場） | 典（本文） | R. Bauerschmidt, D. C. Brydges, G. Slade, Introduction to a Renormalisation Group Method, LNM 2242 (2019), arXiv:1907.05474v2 |
| 小さな場の近似の帰納・二次の摂動の計算 | 典（抄録と序文） | T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 109 (1987) 249–301・116 (1988) 1–22・122 (1989) 355–392（15-02） |
| 熱核の Gauss 上界の補題・熱核の揺らぎの稀さの補題・大きい場の剰余の上界の補題・源の勘定・木のゲージ（$SU(2)$）・(2)(3)(4) の評価 | 初 | この章の本文。有限和・有限群の部分は Lean の束（15-09 表 3、再検査済み） |
| 尾の比・感度・一列四枚の剰余と切りの率・木のゲージの費用の数 | 読 | 本書の検討の数値の記録（像の和と指標和の二経路・Wilson と熱核・持ち上げと群の上の直接の二経路・$U(1)$ の対照・$2^4$ の箱は一ループの二実装） |
| 二つのブロックの系・鎖・板・柱の数・ゴーストの係数 | 読 | 本書の検討の数値の記録（七枚の一列と $L$ ブロックの鎖：Laplace の一ループと全求積の二経路・$U(1)$ の Wilson と Villain の対照。板と柱：射影と KKT の二実装・解析の Hessian と差分の二経路。ゴースト：$3^4$ 点の解析と有限差分の二経路・$U(1)$・ゴースト無し・臨界点からずらした背景の対照） |
| Faddeev–Popov の方法・格子の背景場の方法 | 典（書誌のみ） | L. D. Faddeev, V. N. Popov, Phys. Lett. B 25 (1967) 29–30。M. Lüscher, P. Weisz, Nucl. Phys. B 452 (1995) 213–233, arXiv:hep-lat/9504006（本文は照合していない） |
| 原典の加法性（(A.1.4)–(A.1.5)・Exercise 2.2.4） | 典（(A.1.4)–(A.1.5) は本文）・読（Exercise 2.2.4 からの恒等式は本文で未照合） | R. Bauerschmidt, D. C. Brydges, G. Slade, arXiv:1907.05474v2（p.35・p.198–199。p.207–209 の素描は $W$ を外して書かれている） |
| $W$ の再帰・多体の尾・三次の残りの評価の座標・Loc の二通り | 読（式・帳簿は初） | 本書の検討の数値の記録（近似なしの被積分関数の Gauss–Hermite と $2\times2$ 行列の入れ子の別実装・有理数の線形の背景と浮動小数の射影・群の上の Laplace と有限の $\beta$ の全求積・$U(1)$ Wilson の対照・保存量のある定義の陽性対照。周期の箱は解析と差分の Hessian・密と Bloch の三実装）。帳簿は Lean の束（15-09 表 3、再検査済み） |
| (5)・代数の層・剰余の組み立て・尾の和の算術 | 初 | この章の本文。有限次元の部分は Lean の束（15-09 表 3、再検査済み） |

**この章で使った語** — 閉じない四行・小さい場の結合への寄与・大きい場の結合への寄与・読み取り写像・大きな場の母数 $z$・ブロック変数の関数の源・位置に依る結合・木のゲージの直積分解・ゴースト行列式・境目の結合・背景依存の吸収と多段の行が芯・熱核の揺らぎの稀さの補題・大きい場の剰余の上界の補題・複素の背景での解析性の条件・$W^{\mathrm{gauge}}$・零和の系・背

景の写像の非局所性・尾の型・粗いリンク＋大域の札・二つのゲージの一致・$W$ の再帰・多体の尾。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：15-09 言えないこと・問いの索引・依存の図 — この部の紫外の問い 1〜31 と五分類の要約。

# 言えないこと・問いの索引・依存の図

この章は索引です。各章の該当の節へ案内します。

この部は、本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた記録です。存在そのものは第二巻の第 6〜13 部を、二つの設計の違いは第 14 部を見てください。部の位置づけは 15-00 にあります。

**この章で分かること** — 第 15 部の全体で言えないこと（まとめ）と、各章が残した問い（紫外の問い）の索引と答えの現在、章どうしの依存の図、章ごとの主な行の五分類、この部で使った Lean の束と本文の対応。

**前提となる章** — 15-00（入口）。ほかの章は、この頁の表の行から引きます。

**先に言うこと** — この章は新しい結果を足しません。問いは問いで、主張ではありません。この部のどの章でも、紫外の制御は閉じていません（存在は、公開された構成が別の設計で示しました。第 6〜13 部）。この部の Lean の束は再検査が済んでいます（全て通り、公理は標準の三つだけ）。本文の札は五分類のまま（紙の証明は〔初〕）にし、Lean は外の列として、各章の本文に定理の名と仮定を同じ行に添え、表 3 に「再検査：済」で並べます。

**原典との関係** — この部で紙と計算で書いた部品のいくつかは、原典（平らな場の BBS、Bałaban の連作）で知られている構造と同じ形を、群の上で条件つきで書いたものです（例：小さい場の結合への寄与の局所の部分と Taylor の剰余は BBS の Lemma 7.5.3 と同じ形、15-08 §06）。新しさを主張するものではありません。原典に無いのは、原典自身が sketch と書く箇所（ブロック間の二次の陽な項とその局所の打ち消し）の群版で、これは示していません。その群版の検討のうち、代数の層を書いたときの切り方の四点（15-08 §06）は原典と違うかもしれず、「原典と同じ形」と分けて書いています。

この章の順序

1. 言えないこと — 部全体の十二項目と、各章の項目
2. 問いの索引 — 紫外の問いと答えの現在（表 1）
3. 章の依存の図
4. 五分類の要約（表 2）
5. この部の Lean の対応（表 3）
6. 第 27 部と用語集への接続

---

00

## この章で分かること

- 第 15 部が言わないことは十二にまとまります。どれも「最小の系・主項・一段・言明の形」の条件を外した読み方を止めるためのものです（§01）。
- 問いは三十一あり、どれも条件の台帳の紫外の制御の行の中の一つの部品に触れます。十八は答えの全部か一部が書けましたが（紫外の問い 4・5・7・8・10・12〜23・25）、どれが決着しても紫外の制御は閉じません（§02）。
- 章の依存は、入口（15-00）と難しさ（15-01）・原典（15-02）から分解の言明（15-03）へ、計算の筋（15-04〜15-06）と壁の筋（15-07・15-08）へ分かれ、15-09 に戻ります（§03）。

01

## 言えないこと

部全体で言わないことをまとめます。この部の部品の先で組んだ条件つきの含意の傷は 15-00 §08 にあります。章ごとの細かい項目は各章の「言えないこと」の節にあります。

(a) **この部の中で、紫外の制御は閉じていません。**第 15 部は紫外の制御の三つの条件のどれも、四次元でも二次元でも示していません。四次元の連続極限の存在は、公開された構成が別の設計で示しました（第 6〜13 部。設計の比べは第 14 部）。示したのは、何を示せばよいかの言明、一行ずつの計算、初等的な補題（結合の小ささの帰納の補題・背景と揺らぎの分解の補題・軌道の向きの平坦性の命題・背景に依らない揺らぎの一段の補題・束の網の定理）と、最小の系の数です。

(b) **一ループの流れの下の算術は、実際の有効結合の列の定理ではありません。**15-01 の和の発散と有限性は、一ループの流れを正確な式と見なした算術です。

(c) **最小の系の数は、本当のブロック化の一段の数ではありません。**15-05・15-06 の数は、可換な配位に制限した木の水準（$\beta \to \infty$ の主項）・一ループの水準・一つの粗い面の周辺分布で見る一段・小さな箱（自由境界・外周だけ自由・周期）の数で、四次元の格子に埋めたブロック・ゲージの張り替え・大きな場を含む一段の数ではありません。

(d) **階層模型の結果は四次元に含意しません。**15-04 の Migdal–Kadanoff の写像は一枚の重みが一枚に戻る写像で、多リンクの結合・張り替え・大きな場の剰余が構造の上で無く、$U(1)$ でも閉じ込めが起きる模型です。区間演算で確かめた範囲は有限の $\beta$ の区間（管は $\beta \le 128$、曲線は $\beta \le 64$）だけで、$a \to 0$ の極限は閉じていません。比べる相手を固定した一段の不等式の案は、小さな箱の数で破れも裏付けも見えず（$6^4/3^4$ で分解能の内）、どの $\beta$ でも示していません。

(e) **背景に依らない揺らぎの一段の補題は一段だけ・揺らぎの法則が背景に依らない場合だけの文です。**本当の一段の揺らぎの測度は背景に依り、その依存 $\eta$ の吸収と多段の帰納は書けていません（15-07）。

(f) **分解の言明と、捩れたトーラスの紫外の言明は言明です。**15-03 の分解と 15-02 の捩れた小さな四次元トーラスの紫外の言明は〔仮〕の形で、証明していません。含意のうち初等的に確かめたのは結合の小ささの帰納の補題と等比級数の算術の部分だけです。

(g) **原典の照合は抄録と序文の水準が多い。**連作の段 4・段 5 と 119 は抄録、段 1〜3 は題、Bałaban 1989 の二つの定理（Theorem 1・2）は最後の論文の要旨と序文です。BBS の付録 A.6 は本文を読みました（15-

02)。

(h) **閉じない四行の案は案です**。15-08 の案は検証前の着想で、どれも四行のどれかを閉じていません。「一母数で閉じる作用が無い」とも「類が閉じる条件が有限個の母数で閉じる」とも言っていません。

(i) **「原典と同じ形」は形の一致で、新しい構造の主張ではありません**。小さい場の結合への寄与の割り方（15-08 §06）で原典と同じ形が群の上で立つのは、複素の背景での解析性の条件（複素の背景での解析性と $\beta$ に依らない上界）と余白 $q$ の下でです。複素の背景での解析性の条件を四次元のブロック化で示していません。原典に無い行（ブロック間の二次の陽な項 $W^{\mathrm{gauge}}$ とその局所の打ち消しの群版）は示していません。ブロックが一つの零和の系ではこの行を試せないので、二つのブロックの系で測りました：$W^{\mathrm{gauge}}$ は一ループから陽に始まり、局所の打ち消しが要るのは $O(1/\beta)$ の部分ですが（$SU(2)$・七枚の一列・一段・二次の係数）、四次元の局所の打ち消し・三次の残りの評価は示していません。代数の層を Lean で書いたときの切り方の四点（Loc を成分の射影に取る・零和の理由・切りの払い方・段の和の取り方）は、原典と違うかもしれない箇所として分けて書いています（15-08 §06）。

(j) **四次元の数で 1 を割るとは言っていません**。階層模型の鎖は $\beta \le 128$ の有限の範囲（$\beta > 128$ は閉じていない）、一列四枚の形の剰余の定理は一列四枚の射影の模型（$B \ge 32$・$O(1)$ の箱、Wilson の形のずれは箱の外）、束の網の定理（局所の形）の体積に一様な上界は四次元で 1.83 の見積もりで 1 を超え、行の重みつきの補間で 0.823 以下（$\beta_0' = 1$ の規格・数は計算で区間の評価ではない）になりましたが、向きごとの規格の倍率は縮みの量でないので規格を長波長の結合で割る形に固定し、その $\ell^4$ の錐の一段の縮みは一段目に限ります（辺の和のブロック化では三段目で因子が 1.26 以上、横の平均のブロック化では下界が段で増えないが上界は無い）。$SU(2)$ の背景依存のうち群の幾何の部分（BCH の三次、係数 $1/9$）の予算は、閾をどう選んでも発散します（15-07 §07、一ループの流れの下の算術）。背景を類の母数に持たせると予算は段数に一様になりますが（条件つき、15-07 §06）、難しさは類が面・多ループの一段で閉じるかへ移り、四次元では示していません。

(k) **類の座標と再帰の数は、測った規則と範囲の文です**。四次元の類の「一つの母数＋比の座標」は自由境界の箱の木（$L \le 10$）と一ループ（$L \le 4$）、周期の網の可換の木の二次（$L \le 16$）の当てで、比の座標の固定点の存在を示していません。斜めの隣が 0 でないことは測った二つの規則と二つの射影の約束についての文で、値と「一つの胞の中で閉じる」ことは規則に依ります。芯の行の再帰（対の型の縮む像＋段に依らない新しい項＋指数の三体の尾）は一列・保存量の無い定義・非局所の項について一次の文で、四次元・四体の項は測っていません。結合の流れの一ループは一つの規則の一段目の数で、$\ln b$ の係数は小さい倍率で一ループの値の 1.7〜1.9 倍です。

(l) **スピノールはこの部の議論の根拠に入っていません**。純粋ヤン–ミルズにはスピノール（フェルミオン）の場はありません。$SU(2) = \mathrm{Spin}(3)$ の構造は、群の性質として三か所に入っています：捩れ（中心 $\mathbb{Z}_2$ の元 $-1$、25-01）、Haar 測度の曲がり（熱核の Van Vleck の前因子 $\psi/\sin\psi$、BCH の三次の $1/9$、一列四枚の $\frac{2}{3B}$。類関数に制限した Laplacian は $\frac{1}{\sin\psi}\partial_\psi^2(\sin\psi\,\cdot) + 1$ で、定数 1 は単位 $S^3$ の曲率の項）、四元数の恒等式（15-07 の (5)）。どれも、本書の道具が $SU(2)$ に特化していることの印で、ギャップの原因を示すものではありません。中心が自明な $G_2$ のゲージ理論も格子の強結合の議論で閉じ込める（弦は切れる）とされ 典 （K. Holland, P. Minkowski, M. Pepe, U.-J. Wiese, Nucl. Phys. B 668 (2003) 207–236, hep-lat/0302023。要旨で確認、本文は照合していない）、中心の捩れは測る道具であって閉じ込めの仕組みではない、と読みます 読 。中心を探針に使う道（第 25・26 部と、比べる相手を固定した一段の不等式の案）は中心が非自明な群に限られます。

02

## 問いの索引 — 紫外の問い 1〜31

表 1 は、第 15 部の各章が残した問いを一つにまとめたものです。紫外の問い 1〜3 は 26-11 の番号を引き継ぎ（中身は 15-03 で更新）、紫外の問い 4〜15 は章ごとに番号の帯を割り、紫外の問い 16〜31 は改訂で足した問いです。「答えの現在」は、答えの全部か一部が書けた問いにだけ付けました。問いの状態・大きさ・「決着しても動かないもの」は出所の章の表にあり、ここでは写しません。どの問いが決着しても、条件の台帳の紫外の制御の行は閉じません。

表 1　第 15 部の問い（出所の章の文を一行に縮めたもの。条件は出所の章の表にある。→ の後は答えの現在）

| 問 | 問い（一行） | 関わる部品 | 出所 |
|---|---|---|---|
| 1 | 引き込む先の一母数の類の上で一段の写像が横に縮むか。(i) 四次元の格子に埋めたブロックで $\lambda$ と源が有限に留まるか (ii) 一段の不等式の定数 $C$ が段に依らないか (iii) 中心 $\mathbb{Z}_2$ の符号の重みが別の母数として要るか | 類が閉じる条件・形の剰余の条件 | 15-03 §07 |
| 2 | 結合の一段の正味の括弧を大きな場込みで示せる最小の模型（階層的な $SU(2)$）。一枚の拘束つきの吸収を、多プラケットの真の臨界点で言い直せるか | 結合の流れの剰余の条件・結合の一段の正味の括弧 | 15-03 §07 |
| 3 | 捩れた $M^4$ の格子で、孤立した平坦な接続のまわりの随伴の揺らぎの作用素の最小固有値が $c/M^2$ 以上か。揺らぎの期待値の閉じ（BBS の (iii)）の群版が捩れで変わらないか | 捩れたトーラスの紫外の言明の分配関数の Gauss 比較の条件 | 15-03 §07 |
| 4 | 階層模型の管と引き寄せる曲線を $\beta > 64$ へ延ばす（漸近の評価と区間演算の継ぎ目）。→ $\beta \le 128$ から下は帯の側を経て強結合の判定領域まで鎖が継がれた（1137 段）〔機〕。上端 $\beta > 128$ と $[64, 128]$ の曲線は未 | 階層模型の類が閉じる条件 | 15-04 §05 |
| 5 | 層の外の曲率の下界と層の重さを区間演算で確かめ、曲線の上の流れの係数 $c^{*} = 1/60$ を $1/48$ から分ける。→ 半径を絞った管の上の五か所で包み $[0.0151, 0.0188]$〔機〕。曲線がその管に入ることと曲率は未 | 階層模型の結合の流れの剰余の条件 | 15-04 §05 |
| 6 | 粗い面の辺 $L$ の列で、源 $\cdot L^4$（いま $7.7 \sim 8.5 \times 10^{-3}$、横の厚さ 4）が横を広げても一定に寄るか | 源の段の和 | 15-05 |
| 7 | 全ての粗い面を固定した木の水準の網で、局所の代表を作り体積に一様な上界が出るか。粗い向きの $\lambda$ の作用素ノルムが 1 を割るか。→ 局所の代表と体積に一様な上界は得た（束の網の定理（局所の形））。三次元 0.245、四次元 1.83 の見積もりで、四次元はこの道では 1.39 を下回れない（未決） | 横の縮み（行列） | 15-05 §07 |
| 8 | 一列四枚の一段の $O(1/B)$ の補正を紙で出し、形の剰余の条件の一段の不等式の定数 $C$ を与える。→ 一列四枚の射影の模型で一列四枚の形の剰余の定理が $C = 0.0108$（$B \ge 32 \cdot O(1)$ の箱）を与えた | 形の剰余の条件 | 15-06 |
| 9 | 一列四枚以外のループの形（2×2・L 字・混じった四次）を含めても引き込む先の類が一つに定まるか。対角の定義を替えても固定点が動かないか | 類が閉じる条件の座標 | 15-06 |
| 10 | 一列四枚で $P_2, P_3$ の同時の法則を局所結合の積 × 密度に割り、密度のスコアの $\theta$ の最低次数と二次形式の等方性を出す。→ 最低次数は $\theta^0 \beta^{-1/2}$ と $\theta^1 \beta^0$。形の部分は幾何級数に入り、$SU(2)$ の群の幾何の部分（BCH の三次、$1/9$）は予算が発散する。改良は類の側 | $\eta$ の吸収 | 15-07 |
| 11 | 多段の最小の言明を階層模型か二次元の模型で書けるか（背景の正則性の条件と多体のノルムの縮み）。結合の解析性の帯の幅。最小の系の数は次の検査 | 多段の帰納 | 15-07 |
| 12 | 読み取りの Lipschitz 定数を紙で出し、大きな場を一つ入れた密度と入れない密度の全変動の差を板で測る。→ 一リンクでは済んだ（大きい場の剰余の上界の補題・熱核の揺らぎの稀さの補題）。板 $2 \times 2$・熱核の揺らぎでは $c_0^2 > 2$（大きい場の剰余の上界の補題の規約）で立つ形、板の値は一リンクの 1/3 倍。本当の測度の多リンクは未 | 大きい場込みの剰余の行・結合の一段の正味の括弧 | 15-08 |

| 問 | 問い（一行） | 関わる部品 | 出所 |
|---|---|---|---|
| 13 | 一列四枚に源 $s\,\mathrm{Re}\,W_a$ を足したとき結合のずれが $s$ について線形か。$U(1)$ Villain で位置に依る結合 $\beta(x)$ を紙で。→ 熱核の一段では細かいループの源は表現ごとの結合のずらしでちょうど。一列四枚のブロック化の一段では、ブロックの中のループの源のずれは $f_C^2+O(1/\beta)$（$\beta$ に一様）。Villain の $\beta(x)$ は局所平均。境をまたぐループ・多段は未 | 観測量の源の条件 | 15-08 |
| 14 | 臨界点の偶性が四枚で成り立つか（問い「同時の法則の密度の割り方」と組）。→ 呼吸の方向で破れる。臨界点の偶性の案の結論は背景の反転の共変性で一列の鎖に立つ。四次元の $\theta^3$ は未 | 背景依存の吸収と多段の行 | 15-08 |
| 15 | 倍率 2 のブロックの一ループの Hessian を割り、ゴーストの $F^2$ の係数を測る（陰性対照は $U(1)$）。木のゲージの直積分解を有限群で形式化する。→ 後半は済んだ（Lean・有限群）。費用は小さな場の条件の劣化 $(d-1)(L-1)\varepsilon$。ゴーストは臨界点の背景で木のゲージと一ループで恒等的に一致（$3^4$ 点・可換の背景で係数 $+0.024$） | ゲージの張り替えの境目の行 | 15-08 |
| 16 | 零和でない最小の系（一列四枚を二つ並べ間のリンクを共有）で $W^{\mathrm{gauge}}$ を書き、周辺の結合への二次の寄与の局所の打ち消しの破れを数にする。→ 七枚の一列で一ループから $O(1)$（$13/384$）、一次を陽に入れた後は $O(1/\beta)$。尾の型は粗い変数の定義で決まる | 大きい場込みの剰余の行・小さい場の結合への寄与 | 15-08 |
| 17 | 2×2 の板の中央のプラケットで、巡回で対称化した BCH の奇数次の幾何の係数を Wick で出し、二リンクの $1/\sqrt{3(m+2)^3}$ と比べる。→ 単一のループ（十字）では $a$ を群の積で更新すれば残りは無い。三次元 $2\times2\times2$ では角の三重積 $\kappa=3/1024$ が要る | 背景依存の吸収と多段の行（群の幾何） | 15-07 |
| 18 | 背景のホロノミーの対数 $a$ を母数に持つ類で、幾何の部分が $a$ の流れに正確に移るかを直列の一段で測る。→ 残り $\theta^0\beta^{-3/2}$、予算は段数に一様（条件つき）。難しさは類が閉じる条件へ移る | 背景依存の吸収と多段の行（類の側の改良） | 15-07 |
| 19 | 一リンクの揺らぎの一段の補題の条件（中心の取り直しの条件）：staple の和の向きの写像の Taylor の半径を明示し、$\delta_b/b$ の係数を一つの数にする。→ $\lvert Q\rvert\ge 6\cos\theta_0\cdot h_q\approx 4h\cdot\eta=cg^2p^2$（実測 $c\approx12$）。結合は類の母数の側へ | 背景依存の吸収と多段の行（Wilson の一リンク） | 15-07 |
| 20 | 四次元の $\ell^4$ を直接に押さえ（近い部分は有限の網、尾だけ Riesz–Thorin）、$\sup\mu<1$ かを見る。→ 行の重みつきの補間で $\sup\mu\le0.823$（$\beta_0'=1$ の規格・計算）。向きごとの規格では未決 | 横の縮み（行列） | 15-05 §08 |
| 21 | Loc を行の和（零運動量）と行列の成分の二通りで定義し、二つのブロックの共分散で $W^{\mathrm{gauge}}$ の差を有理数で出す（切り方が原典と同じか）。→ 差は 0 でない（行の和で $\frac{1}{768}\lvert a-b\rvert^2/\beta$、成分の射影で $-\frac{1}{384}a\cdot b/\beta$）。原典の型は行の和 | 大きい場込みの剰余の行・小さい場の結合への寄与 | 15-08 |
| 22 | 境の無い三次元で、粗いリンク＋大域の札の座標の一ループの非局所の重みが指数のままか。→ 粗い $2\times2\times L$ で指数（$\kappa=3.094$）・和は体積に一様。四次元の木も指数。四次元の一ループは未 | 大きい場込みの剰余の行・三次の残りの評価 | 15-08 |
| 23 | 多ループの類の二段目：角の三重積 $\kappa$ が段ごとに保たれる座標か、四次元 $2^4$ で同じ座標が足りるか。→ 三次元で縮まず固定点に下から寄る。四次元は斜めの隣と平行の型が要り、比の座標は固定点に寄る（木の当て） | 類が閉じる条件の座標 | 15-07 |
| 24 | 非可換の背景（交換子の $F$）で二つのゲージの一致とゴーストの係数を測る | ゲージの張り替えの境目の行 | 15-08 |
| 25 | 向きごとの規格の倍率 $\sup\lambda\le3.29$ を、運動量の帯ごとの重みつきの記号で 1 未満に落とせるか。→ 落とせない向きの問いだった：$\sup\lambda=4\sup\mu_{\mathrm{loc}}\ge0.59$ で $\lambda$ は縮みの量でない。規格は長波長の結合で割る形に固定 | 横の縮み（行列） | 15-05 §08 |
| 26 | 結合 $b$ を類の母数に持たせ、Wilson の一リンクの結合の動き $cg^2p^2$ が母数の更新に移るか | 背景依存の吸収と多段の行（Wilson の一リンク） | 15-07 |
| 27 | 四次元の類の比の座標の固定点の値を角の近くの半無限の問題から直接出す。場を共有する規則で胞に収まらない部分を有限個の対に入れて閉じるか、尾として運ぶか | 類が閉じる条件の座標 | 15-07 |
| 28 | 横の平均のブロック化の固定点の上で $\sup\mu_\infty$ の上界を Stein でない道で 1 未満に取る。固定点の存在を紙へ | 形の剰余の条件の多段 | 15-05 §08 |

| 問 | 問い（一行） | 関わる部品 | 出所 |
|---|---|---|---|
| 29 | 四次元の粗いリンク＋大域の札で、木の三体の四次の幅への依存の率を測る。一列で四体の項と一ループの水準の三体の像の縮み | 大きい場込みの剰余の行・局所の打ち消し・三次の残りの評価 | 15-08 |
| 30 | 横の平均のブロック化か大きい倍率で、網の長波長の一ループの係数の倍率への依存が一ループの値に近づくか | 結合の流れの剰余の条件 | 15-05 §08 |
| 31 | 取り直した管を区間の幅 0.02 で $[15.26, 128]$ の全体に通し、曲線が管に入ることと曲線の上の $c^{*}$ の包みを条件なしにする。$\beta \geq 128$ を漸近の区間で覆う | 階層模型の類が閉じる条件・結合の流れの剰余の条件 | 15-04 §05 |

表 1 の読み。問い「一母数の類での横の縮み」・問い「一列四枚の一段の補正」・問い「他のループの形での類の一意性」は類が閉じる条件と形の剰余の条件の座標の問い、問い「大きい場込みの剰余の最小模型」・問い「読み取りの Lipschitz 定数」は未公刊の基本の不等式（Bałaban 1989 の Theorem 2）の中身に当たる結合の一段の正味の括弧の問い、問い「同時の法則の密度の割り方」・問い「多段の最小の言明」・問い「臨界点の偶性」・紫外の問い 17〜19 は芯の背景依存の吸収と多段の行（$\eta$ の吸収と多段）の問い、問い「零和でない最小の系」は小さい場の結合への寄与の中の原典に無い行の問いです。紫外の問い 21〜24・26 は改訂の答えから出た次の一手（原典との切り方の違い・境の無い幾何の尾の型・多ループの二段目・非可換の背景のゴースト・結合を母数に）、問い「向きごとの規格の倍率」は向きごとの規格の横の縮みの問い（答えは否定的な形）、紫外の問い 27〜31 は三度目の改訂の答えから出た次の一手（四次元の類の座標の値・平均のブロック化の上界・四次元の多体の尾・一ループの係数・階層模型の上端）です。

最小の系の数で答えられるものと、紙の問いが混じっています。

03

## 章の依存の図

章どうしの依存を、前提の章が上に来るように並べます（前提の番号は結論の番号より小さい）。矢印の右は、その章が使う前の章です。

```
[15-00] 入口            問題・三つの条件・一段で閉じる形・読み違える型
[15-01] 難しさ          ⟸ [15-00]          無次元の結合・群値の場・ゲージ
[15-02] 原典            ⟸ [15-00]          連作・Bałaban の二つの定理・BBS の鎖・捩れたトーラスの紫外の
[15-03] 分解の言明      ⟸ [15-01][15-02] 類が閉じる条件・二つの剰余の条件・結合の連続性・結合の小ささの帰
[15-04] 熱核と階層      ⟸ [15-03]          望遠鏡和・不変な曲線・管（β∈[2.46,128]）・帯への鎖（β∈[0.95
[15-05] 束の網          ⟸ [15-03][15-04] 単位の束の定理・不等式・箱の表・束の網の定理・その局所の形（局
[15-06] 母数の数え方    ⟸ [15-03][15-05] ループの形ごとの結合・引き込む先の類・一列四枚の定理
[15-07] 背景依存 η      ⟸ [15-01][15-02][15-03]  背景と揺らぎの分解の補題・背景に依らない揺らぎの一段の
[15-08] 閉じない四行    ⟸ [15-05][15-06][15-07]  四行の案・熱核の揺らぎの稀さの補題・大きい場の剰余の上
[15-09] 索引            ⟸ [15-00]〜[15-08]
```

図は紫外の制御の検討の章（15-00〜15-09）の依存です。体系の試み（15-10）と、後半の自由場の一段と一つの尺度の章（15-11〜15-14）は、この図の外にあります。確かめ方は、全ての「⟸」の右の章の番号が左より小さいことを見ることです。円はありません。この図のどの節点にも、紫外の制御が示されたという節点はありません。

04

## 五分類の要約

表 2 は、各章の五分類の表から主な行だけを拾ったものです。行の言明・根拠・範囲の全体は各章の表にあります。

表 2　章ごとの主な行（札は各章の表のとおり。範囲の欄の条件は一部だけを写した）

| 章 | 主な行 | 分類 | 範囲（抜粋） |
|---|---|---|---|
| 15-00 | 段の数 $K \to \infty$・損の積の下界 | 初 | $0 \le \delta_k \le \frac{1}{2}$ |
| 15-00 | 紫外の制御と一段で閉じる形 | 仮 | $a$ から $L_0$ まで・定数は段に依らない |
| 15-01 | $\sum g_k^2$ の対数の発散・$g^{2+\delta}$ の和は有限・軌道の向きの平坦性の命題 | 初 | 一ループの流れの下（算術） |
| 15-02 | 条件つきの紫外安定性の定理（Bałaban 1989 の Theorem 1）は結合が小さく留まる条件の仮定つき、基本の不等式は未公刊・活動のノルムの一段の評価（BBS の補題 A.6.1） | 典 | 要旨と序文／付録 A.6 の本文 |
| 15-02 | 捩れた小さな四次元トーラスの紫外の言明 | 仮 | $SU(2)$・$n_{12} = 1$・有限体積 |
| 15-03 | 結合の小ささの帰納の補題・横の縮みの帳簿 | 初 | 結合の一段の正味の括弧・実効の結合の定義と連続性の下／一段の不等式を仮定 |
| 15-03 | 分解の言明（類が閉じる条件は引き込む先の一母数の類＋縮む形） | 仮 | 言明の形だけ |
| 15-04 | MK の鞍点の見積もり（1/16・1/3600・$c^{*} = 1/60$） | 初 | 鞍点の主項 |
| 15-04 | 管の不変性・点ごとの縮み・引き寄せる曲線 | 機 | MK の写像・$SU(2)$ の一枚・$\beta \in [2.46, 128]$（曲線は $[15.26, 64]$） |
| 15-05 | 単位の束の定理・$1/(16d-8) \le \lambda \le 1/16$・粗い面の辺 $L$ の不等式・束の網の定理 | 初 | 可換に制限した木の水準・粗い面の 4 枚が対称（下界） |
| 15-05 | 箱の表・周の型・源 $\approx 8 \times 10^{-3}/L^{4}$・粗い向きで $\lambda > 1/16$ | 読 | 小さな箱・一ループ（熱核出発・$\beta \to \infty$） |
| 15-06 | $D = \frac{2}{5} + \frac{24}{5}\frac{q}{B}$・木の写像と 9/89・$\gamma^{*} = 37/76$・$c = 2/3$ | 初 | 一列四枚・一ループの水準／Laplace の主項 |
| 15-06 | 基本＋随伴の根 $\rho^{*} = -\frac{1}{4} - 0.84/\beta$・前因子の族に根なし | 読 | $SU(2)$・二次・$\beta \ge 12$（根）／$\beta \in \{4, 8, 16, 32\}$ |
| 15-07 | 背景と揺らぎの分解の補題・背景に依らない揺らぎの一段の補題・四元数の恒等式 | 初 | 背景に依らない揺らぎの一段の補題は一段・揺らぎの法則が背景に依らないとき |
| 15-07 | 揺らぎの指数積率と背景の正則性の群版・局所結合のずらしの案 | 仮 | 言明と案 |
| 15-08 | 大きい場の稀さの条件は揺らぎの指数積率の群版の Chebyshev の系・木のゲージに Jacobian は無い | 初 | 揺らぎの指数積率の群版を仮定／軸ゲージ |
| 15-04 | 絞った管から帯の側を経て強結合の判定領域までの鎖（$\beta \le 64$ で 846 段、$\beta \le 128$ で 1137 段以内） | 機 | MK の写像・$\beta \in [0.95, 128]$・帯の側は先行の記録 |
| 15-05 | 束の網の定理（局所の形）：局所の代表と体積に一様な上界、$\Lambda_3 = 0.245$・$\Lambda_4 \approx 1.83$ | 初・読 | 可換・木の水準・周期／四次元は見積もり |

| 章 | 主な行 | 分類 | 範囲（抜粋） |
|---|---|---|---|
| 15-06 | 一列四枚の定理：$r_n \le \lambda^n r_0 + C/((5-\lambda)B_n)$、$C = 0.0108$ | 初・読（定数） | 一列四枚・$\psi^8$ の射影・$B \ge 32$・$O(1)$ の箱 |
| 15-07 | 一リンクの熱核比較の補題・四つの分解・BCH の三次 $1/9$・類 $(B, q, a)$・予算の発散 | 初 | 一リンク／Gauss の主項・二リンク／一ループの算術 |
| 15-07 | 最小の系の残り $\theta^0 \beta^{-1/2}$・$\theta^1 \beta^0$ | 読 | 二リンク・一列四枚・$\beta \le 32$ |
| 15-08 | 熱核の揺らぎの稀さの補題・大きい場の剰余の上界の補題・源の勘定・木のゲージ（有限群は Lean） | 初 | 熱核の三条件（辺ごとに独立・一段・背景独立）・一リンク／有限群・$SU(2)$ |
| 15-08 | 小さい場の結合への寄与の割り方：Taylor の切り捨ては原典の Lemma 7.5.3 と同じ形、原典に無いのは $W^{\text{gauge}}$ の群版 | 仮・初・典・読 | 複素の背景での解析性の条件・余白 $q$／零和の系では空 |
| 15-08 | 四行の言明と依存（背景依存の吸収と多段の行が芯） | 仮・読 | 言明・見立て |
| 15-03 | 類が閉じる条件の類の座標の最終形の案 | 仮 | 三次元の一段・二リンク・十字の読み |
| 15-04 | 階層模型の鎖は四次元へ継がれない（挟み込みの未証明の段・管の余白） | 読 | 挟み込みの原典の照合・小さな箱 |
| 15-05 | $\ell^4$ の錐の一段の縮み：行の重みつきの補間で $\sup \mu \le 0.823$ | 初・読 | 可換・木の水準・$20^4$ の核・$\beta_0' = 1$ の規格・区間の評価なし・向きごとは未決 |
| 15-07 | 背景 $a$ を母数に持つ類で残り $\theta^0 \beta^{-3/2}$・予算は一様 | 読・初（算術） | 二リンク・一列四枚・条件つき |
| 15-07 | 面の一段で $a$ は群の積・多ループの類に角の三重積 | 初・読 | 単一のループ／$2 \times 2 \times 2$・一段 |
| 15-08 | 二つのブロックの $W^{\text{gauge}}$ は一ループから $O(1)$・尾の型は粗い変数の定義で決まる | 初・読 | 七枚の一列・鎖・板・柱・一段・二次の係数・四次元は未 |
| 15-01 | 一段の係数の実測：周期の網の一段目で一ループの値の 2.9〜4.4 倍、倍率依存は 1.7〜1.9 倍 | 読 | $SU(2)$・一ループ・横 $6^3$・一段目 |
| 15-03 | 四次元の類：一つの母数＋比の座標（二次 2・三次 3・四次 65）、斜めの隣は規則に依らず 0 でない、類が閉じる条件の局所は規則を添えて | 読・初（本数・自由度） | 木 $L \le 10$・一ループ $L \le 4$・周期の網は木の二次 |
| 15-03 | 結合の一段の正味の括弧のブロック間の項の再帰の一列版：縮む像＋段に依らない新しい項＋指数の三体の尾 | 読・初（帳簿） | 一列・保存量の無い定義・一次・四次まで |
| 15-04 | 取り直した管の上の $c^*$ の包み $[0.0151, 0.0188]$ | 機 | 五か所の 50 区間・曲線が管に入ることは未 |
| 15-04 | 比べる相手を固定した一段の不等式の案の注：有限の箱の閾は 1、$6^4/3^4$ で分解能の内 | 初・読 | 小さな箱・どの $\beta$ でも未 |
| 15-05 | 規格の注（$\lambda$ は縮みの量でない・Stein の床 0.452）、$\ell^4$ の錐の一段の縮みは一段目に限る、横の平均の多段の下界 0.64・0.57・0.64・0.62 | 初・読 | 可換・木の水準・周期・$2^4$・上界なし |
| 15-05 | 粗いリンク＋大域の札は四次元の木で指数・網の長波長は木で 1 で $\ln L$ の走りなし | 読 | 木の水準・$n \le 16$／ブロック 2 の一ループ |
| 15-07 | 角の三重積は二段目で縮まず固定点に下から寄る・反復の不動点は本当の極限より 0 の側 | 読・初（帳簿） | 三次元の木 $L \le 20$／四次元の木 |
| 15-08 | $W$ の再帰の群版と多体の尾（一列）・三次の残りの評価の座標の三次元の一ループ・Loc の二通りの差 | 初・読 | 一列・二ブロック・$L \le 8$／粗い $2 \times 2 \times L$ |

| 章 | 主な行 | 分類 | 範囲（抜粋） |
|---|---|---|---|
| 15-08 | 臨界点の背景で二つのゲージの一ループは一致 | 初 ・ 読 | 一段・一ループ・$3^4$ 点・可換の背景 |

05

## この部の Lean の対応

表 3 は、この部の本文の初等的な部分のうち、有限和・実数の代数・三角の恒等式として Lean 4 で書いた束を並べたものです。どの束も `sorry` を含まず、末尾の公理の表示は標準の三つ（propext・Classical.choice・Quot.sound）だけでした。再検査も済み、全ての束が通りました（公理は標準の三つだけ）。本文の札は五分類のまま（紙の証明は〔初〕）とし、Lean は外の列として、各章の本文に定理の名と仮定を同じ行に添えています。**どの束にも格子・群・測度・最小化そのものは入っていません**。入っているのは、紙の証明の中の代数の一行です。

表 3　この部の Lean の束（再検査：全て済。仮定は定理ごとに同じ行に。末尾の二十五本は 2026-10-17・10-22・10-29 に足したもので、再検査は済。DominantMatrixContraction から ConeCalculus までの四本は 15-10 の体系の章のもの（15-10 の束は、ほかに 10-22 に足した OneStepWindow と 10-29 に足した ConeCalculusSOS が在り、合わせて六本）、その後の七本は 10-22 に、最後の七本は 10-29 に足したもの）

| 束の名 | 主な定理と仮定 | 本文の場所 | 入っていないもの | 再検査 |
|---|---|---|---|---|
| LatticeGauge.ClassResidualTelescoping | `telescoping_residual`（各段の外れの増分 $\le r_k$）・`telescoping_residual_multi`（同じ仮定・n 母数）・`inv_sq_sum_le`（$a, c > 0$）・`uniform_deviation`（$0 \le q < 1$、増分 $\le C/(a+ck)^2 + Dq^k$） | 15-03 §04・15-04 | 測度・曲率・写像 | 済 |
| LatticeGauge.HierarchicalShapeFlow | `quarticStep_fixed`（$\sigma \mapsto \sigma/16 + 1/3840$ の固定点 $1/3600$）・`shapeStep_contract`（$k \ge 2$）・`flow_coefficient`（$1/48 - 15/3600 = 1/60$）・`affine_contraction`（$0 \le \lambda < 1$、各段 $d_{k+1} \le \lambda d_k + \varepsilon$）・`tube_iterate` | 15-04 | 区間演算の管・鞍点の主項の導出 | 済 |
| LatticeGauge.FluxNetwork | `ratio_le_max`（各 $f_i^2 \le M$、$\sum f^2 > 0$）・`ratio_ge_of_unit_flux`（単位の束）・`energy_split`（$\sum f\psi = 0$）・`thomson_lower`・`thomson_attained`・`minimizer_unique`（集合が中点で閉じる）・`quad_lower`（$\beta > 0$）・`chain_one_step`（五つの不等式） | 15-05 §02・15-07 背景に依らない揺らぎの一段の補題 | 射影・Dirichlet の原理・Taylor の半ノルムの微分の入れ替え・Haar の不変性 | 済 |
| LatticeGauge.AllFacesBlocking | `fine_energy_lower`（四枚の組への写像が単射）・`block_energy_lower`・`smooth_ratio`（$n \ne 0, \theta \ne 0$）・`equal_split_ratio` | 15-05 §07 | 擬逆・粗い Bianchi・Fourier の記号 | 済 |
| LatticeGauge.RatioTwoCriterion | `ratio_two_iff`・`one_loop_D`（$B \ne 0$、ガウスのモーメントを代入した形）・`gamma_family_one_loop_lower`（$c < 3$）・`fund_adj_one_loop_root`（$\beta \ne 0$、$1 + 2\rho \ne 0$）・`no_pointwise_sqrt_one_loop` | 15-06 | Haar 測度・モーメント・部分積分・鞍点の展開 | 済 |

| 束の名 | 主な定理と仮定 | 本文の場所 | 入っていないもの | 再検査 |
|---|---|---|---|---|
| LatticeGauge.FundAdjointRefit | `refit_solution`（$\beta \neq 0$）・`tree_quadratic_split`・`tree_value_at_saddle`・`image_rho`・`image_gap`（$-53/356 + 1/4 = 9/89$）・`image_one_loop_D` | 15-06 | 畳み込み・木への還元・包絡の論法 | 済 |
| LatticeGauge.PrefactorFlowFixedPoint | `step_k2`・`step_k2_fixed_iff`（固定点 37/76）・`step_k2_contract`・`fixed_point_general`・`transverse_hessian`（$\sin a, \sin b \neq 0$）・`convolution_prefactor`・`rem_shape_geometric`（$0 \le \lambda < 5$、一段の不等式を仮定）・`ratio_coefficient` | 15-06・15-03 §04 | 群の上の畳み込み・Laplace の方法・一ループの式 | 済 |
| LatticeGauge.HeatKernelFourPlaquette | `conv_assoc`・`convPow_add`・`four_plaquette_of_semigroup`（$p_s * p_t = p_{s+t}$）・`four_plaquette_convPow` | 15-06 §05 | Haar 測度・熱核そのもの（有限群の版） | 済 |
| QuaternionReImSplit | `re_mul_split`・`commutator_re`・`J_imI` ほか・`two_link_split`（$W, W_0$ の成分の仮定） | 15-07 §06 | 測度・臨界点・スコア・射影 | 済 |
| LatticeGauge.ShapeRemainderUniform | `uv_uniform`（$0 \le \lambda < 5 \cdot C \ge 0 \cdot 5B_{n+1} \le B_n$・一段の不等式）・`stays_in_box`・`pow_sub_pow_norm_le`・`keff_half_le`（$B > 0$）・`cov_eigen` | 15-06 一列四枚の定理 | 持ち上げ・Laplace の剰余の評価・定数の数値 | 済 |
| LatticeGauge.HierarchicalTubeChain | `tube_exit`（管の中で一段 $\delta > 0$ 下がるか出口）・`cell_descent`・`chain_compose`・`tube_weight_mono`・`steps_numeric`・`mk_full_chain_64`（846 段） | 15-04 §05 | 写像 $T$・管・区間演算・帯の側の定理（仮定として受ける） | 済 |
| LatticeGauge.ShapeResidualGeometric | `forced_uniform`（$0 \le \lambda < 1 \cdot E \ge 0$）・`geom_partial_le`・`residual_sum_uniform`（部分和 $\le U$）・`harmonic_part_unbounded`（$c/(k+1) \le \eta_k$） | 15-07 §06 | 測度・臨界点・スコア（実数列の帳簿だけ） | 済 |
| LatticeGauge.LargeFieldSource | `weighted_tail_le_exp_moment`（重み $\ge 0 \cdot \sigma \ge 0$）・`union_tail_le_sum`・`coarse_source_commute`・`coarse_source_commute_comp`（有限・入れ子の段） | 15-08 §02・§03 | 熱核の比較・像の和・読み取りの Lipschitz・細かいループの源 | 済 |
| LatticeGauge.TreeGaugeFixing | `exists_gauge_tree_trivial`・`gauge_tree_trivial_unique`・`configEquiv`・`fiber_card_const`・`regauge_bijective`（根の共有）・`regauge_sum_eq`・`slice_average_tree_indep`（有限群・有限グラフ・関数はゲージ不変） | 15-08 §05 | 連続群の Haar と Fubini・費用の評価 | 済 |
| LatticeGauge.WilsonWindowComparison | `one_sub_cos_window`（$0 \le \theta \le \theta_0 \cdot \theta_0^2 \le 24$）・`wilson_weight_window`（同・$b \ge 0$）・`window_constant_chain`・`window_split_bound` | 15-07 §05 | 熱核の下界・Bessel の漸近・一リンクの揺らぎの一段の補題の半ノルムの段 | 済 |

| 束の名 | 主な定理と仮定 | 本文の場所 | 入っていないもの | 再検査 |
|---|---|---|---|---|
| LatticeGauge.QuarticRowColumnBound | `weighted_quartic`・`row_quartic`・`schur_quartic`（行と列の $\ell^1$ 和の上界）・`representative_bound`（代表の一致）・`cone_step`・`cone_chain` | 15-05 束の網の定理（局所の形） | Riesz–Thorin・軸の錐の恒等式・周期化・$R$ の解析性 | 済 |
| LatticeGauge.BCHCubicResidual | `nT_sum_diff`・`shape_split`（仮定なし）・`score_generator_split`・`bch3_coefficient`（$m+2\neq 0$）・`geometric_variance_m1` | 15-07 §07 | 測度・Gauss の積率・射影・BCH の級数 | 済 |
| LatticeGauge.SmallFieldLocSplit | `loc_split_unique`（多項式の等式）・`geom_tail_le`（$A\geq 0$・$0\leq q<1$）・`taylor_tail_bound`（$0\leq s<\rho$・$\lvert a_m\rvert\leq M/\rho^m$） | 15-08 §06 | Cauchy の評価（解析性）・複素の背景での解析性の条件・切りの確率・有効作用 | 済 |
| LatticeGauge.BackgroundBudget | `budget_term_sq`（$g\neq 0$）・`budget_unbounded_of_threshold`（$g_j^2\geq 1/(A(j+1))$・$0\leq g_j\leq h_j$）・`inv_sq_partial_le`（$b>1$）・`inv_sq_budget_bounded` | 15-07 §07 | 測度・格子・繰り込みの段（実数の算術だけ） | 済 |
| LatticeGaugeInterBlockLocAbsorption | `loc_split`（$K$ は対称）・`nonlocal_vanishes_on_constant`・`rowSum_add`・`two_site_split`・`two_site_unique`・`tree_numbers`・`one_loop_numbers`（代入の算術だけ） | 15-08 §06 | Laplace の一ループの式・$O(1/\beta)$・群・測度 | 済 |
| LatticeGaugeBlockCouplingCancellation | `locM_idem`・`locLin_idem`・`split_unique`・`bil_split`・`trace_locM`・`deltaBeta_nonloc`（残す組が反射的）・`frob_loc_nonloc`・`frob_pythagoras`・`Wg_explicit`・`two_block_W`（二つのブロック）・`Wg_zero_of_blockDiag`・`loc_psd`（$C$ が半正定値）・`block_cancellation` ほか（24 定理） | 15-08 §06 | (A.5.3)–(A.5.4) の中身・群版の局所の打ち消し・格子・測度 | 済 |
| LatticeGaugeSmallFieldRemainderAssembly | `one_step_remainder`（係数の Cauchy 型の仮定・切りの仮定・余白 $h_0\leq qh$）・`gamma_ge_one`・`cut_sum_le`（$A\geq 1$・$\gamma\geq 1$）・`taylor_step_le`（$m\geq 3$・$r_0^2\geq 1$）・`schedule_match`・`total_remainder_uniform`（同じ仮定、段数に一様）ほか（16 定理） | 15-08 §06 | 解析性（複素の背景での解析性の条件）・切りの確率・形の座標の縮み | 済 |
| LatticeGaugeToeplitzTailSplit | `split`・`split_unique`・`qform_split`・`cform_split`・`tail_sum_le`（$0\leq\rho<1$・$\lvert q(r)\rvert\leq C\rho^r$）・`flat_row_sum_lt`（$L\geq 1$）・`flat_not_uniform_geometric` | 15-08 §06 | 置換対称の命題・一ループの式・群・測度 | 済 |
| LatticeGaugeWeightedTailBound | `weighted_geom_le`（$0\leq\rho<1$）・`weighted_tail_le`・`weighted_sum_uniform_linear`（$\lvert q(r)\rvert\leq C(r+1)\sigma^{2r}$・$0\leq\sigma<1$）ほか | 15-08 §06 | 測った重みが仮定を満たすこと（$r\leq 8$ までの計算）・板・四次元 | 済 |

| 束の名 | 主な定理と仮定 | 本文の場所 | 入っていないもの | 再検査 |
|---|---|---|---|---|
| LatticeGaugeTailTypeClassification | `flat_weighted_sum`・`flat_weighted_unbounded`（$c>0$）・`exp_weighted_le`・`power_sum_uniform`（$s>1$）・`power_sum_unbounded`（$s\le 1$）・`power_sum_unbounded_borderline` | 15-08 §06・15-05 §07 | 測った尾がどの仮定を満たすか・殻の重複度・格子 | 済 |
| LatticeGaugeClassParameterBudget | `ghat3_forms`・`ghat3_zero_iff`・`inv_sq_partial_le`（$b>1$）・`class_parameter_budget_bounded`（閾 $h_k \le H g_k$・一ループの上界・$\eta_k \le h_k(A g_k^3 + D h_k g_k^2)$） | 15-07 §06 | 測度・格子・射影・繰り込みの段 | 済 |
| LatticeGaugeStokesSecondOrder | `log_quadratic_part`（環）・`log_quadratic_part_five`・`commSum_eq_zero_of_comm`（可換環）・`pure_quaternion_commutator` | 15-07 §07 | 測度・積分・粗視化 | 済 |
| LatticeGauge.CubeFaceCoupling | `total_sq`・`opp_eliminate`（$\sum \theta = 0$）・`general_to_diag_adj`（同）・`diag_adj_unique`（同じ仮定の上で二つの形が等しい）・`coeffs_from_eigen` | 15-07 §07 | 格子・群・積分・最小化 | 済 |
| LatticeGaugeStapleSumLowerBound | `sum_norm_ge_of_inner_ge`（実内積空間・$\|u\| = 1$・$\langle x_i, u\rangle \ge c$）・`card_cos_ge_quadratic`・`first_order_ratio`（$\cos\theta > 0$）・`quadratic_margin`・`radius_identity` | 15-07 §05 | 四元数・staple の幾何・Taylor の半ノルム・合成の段 | 済 |
| LatticeGauge.QuarticSplit | `titu_two`・`quartic_two`（$a, b > 0$）・`quartic_triangle`（各部分の四乗和の上界）・`class_split` | 15-05 §07 | Stein の補間・片側の二次の剰余・記号の sup | 済 |
| LatticeGauge.GhostDeterminantMatching | `det_gauge_plus_ghost_split`・`log_tree_eq_cov_sub_two_ghost_blocks`（$\det H' > 0$・$\det K > 0$・木の量が $\det H' / \det K$）・`coeff_tree_eq_coeff_cov`・`coeff_drop_ghost_shift`・`coeff_ghost_constant` ほか | 15-08 §05 | Faddeev–Popov の補題そのもの（積分の変数変換） | 済 |
| LatticeGauge.BondMovingSandwich | `bond_moving_finite`（$w_i \ge 0$・$\sum w_i a_i = 0$）・`iterate_le_of_le_of_monotone`（$T$ が単調）・`comparison_fails_at_fixed_point`・`shrink_shape_shift`・`shrink_shift_lower`（$0 < \alpha$・$q \ge 3$） | 15-04 §05 | 格子・群・測度・分配関数の不等式そのもの | 済 |
| LatticeGauge.InfluenceRecursion | `tp2_comp`（有限の順序集合・TP2 の仮定）・`cdf_upper`・`cdf_lower`・`k_upper`・`step_bound`・`gauss_product` | 第 23 部の芯の Poincaré の一様性の仮定の支え方（23-12。本文は第 23 部、15-00 §04） | 補題の微分の式・Hoeffding の式・TP2 の積分版・浮動小数の計算そのもの | 済 |

| 束の名 | 主な定理と仮定 | 本文の場所 | 入っていないもの | 再検査 |
|---|---|---|---|---|
| LatticeGauge.CornerCouplingAffineFlow | `fixpt_is_fixed`・`iterate_dev`（$\lambda \neq 1$）・`abs_iterate_dev`（$0 \le \lambda < 1$）・`ratio_gt_one_below_fixpt`（$0 \le \lambda < 1$・$0 < r < s/(1-\lambda)$）・`one_step_ratio`（$3/160$） | 15-07 §07・15-03 §02 | 格子・群・積分・最小化（実数の一次の写像だけ） | 済 |
| LatticeGauge.HypercubeFaceCoupling | `sigma_is_relation`・`relation_is_multiple_of_sigma`（面ごとの 24 本の等式）・`opposite_in_cell_reduces`・`diag_adj_not_enough`・`diag_adj_skew_unique`（計算で得た成分ごとの値と固有値を仮定） | 15-07 §07 | 格子・群・積分（有理数の一次式だけ） | 済 |
| LatticeGauge.SkewCouplingSpectrum | `coeffs_of_spectrum`・`skew_zero_iff`（$e_3 = b + 4a - 4k$・$e_6 = b$・$e_8 = b + 2a + 2k$）・`one_step_skew`・`increment_pow`・`tail_bound`（$0 \le q < 1$・増分の比 $\le q$） | 15-07 §07 | 格子・群・最小化。測った列が仮定を満たすこと | 済 |
| LatticeGauge.HypercubeCochainCount | `faceCount_four`・`euler_cube`（仮定なし）・`hypercube_cochain_ranks`・`edge_face_dof_agree`（増強した余鎖複体の完全性）・`torus_site_euler`（$n \ge 1$）・`torus_site_dof_agree` | 15-03 §02・15-07 §07 | 完全性そのもの・束の網の定理 (iii)・最小化（自然数・整数の算術だけ） | 済 |
| LatticeGaugeNonlocalImageRecursion | `affine_iter`（$\lambda \neq 1$）・`fixed_point`・`affine_bound_sum`（$0 \le \lambda$）・`affine_bound_uniform`（$0 \le \lambda < 1$・$0 \le C$）・`quartic_block_charpoly`・`relative_rates`・`linear_recursion_fixed`・`new_term_gamma` ほか（12 定理） | 15-08 §06・15-03 §03 | 像の行列の導出・測度・積分・群・$W$ について二次以上 | 済 |
| LatticeGaugeThreeBodyTailRecursion | `weighted_geom_le`（$0 \le \rho < 1$）・`three_body_sum_le`（$0 \le C$・$0 \le \rho < 1$・$\lvert q(d)\rvert \le C\rho^{d}$）・`affine_uniform`・`pair_tail_uniform`（$0 \le \lambda, \mu < 1$・二本の再帰の不等式）・`tripleCount_small`・`monomial_counts`（有限の数え上げ） | 15-08 §06 | 係数が仮定を満たすこと（$d \le 7$ の計算）・群・測度・四次元 | 済 |
| CoarseFaceHodgeSplit | `range_sup_tags`・`finrank_ker_eq`（$d_2 \circ D_c = 0$）・`disjoint_range_tags`（仮定なし）・`decomp_unique`・`norm_sq_add_harmonic`（$D^{\dagger} b = 0$） | 15-08 §06・15-05 §07 | 具体の格子で札が 3 本であること・一ループ・尾の型 | 済 |
| LatticeGauge.QuarticConeNorm | `ratio_sandwich`（$0 < b_{\min} \le b \le b_{\max}$）・`ledger`（$b_{\min} \sum \theta^2 \le \sum \phi^2 \le b_{\max} \sum \theta^2$）・`transfer`・`cone_b_to_a`・`stein_floor`（$A_i^2 \le F v_i$・$0 \le \nu_i \le A_i$） | 15-05 §07 | 混合の極限の補題・長波長の最小点の型・Stein の補間 | 済 |
| LatticeGauge.BlockCovariance | `cone_chain`・`cone_chain_uniform`（$M_k \le m$）・`growth_ledger`・`inverse_decay`（$r\, g_k \le g_{k+1}$）・`face_sum_sq`・`four_split_quartic_floor`・`even_split_quartic` | 15-05 §07 | 条件つき平均の共分散の補題・記号の反復・周の長さの発散・$\mu$ の数 | 済 |

| 束の名 | 主な定理と仮定 | 本文の場所 | 入っていないもの | 再検査 |
|---|---|---|---|---|
| LatticeGauge.AveragedBlockFlow | `affine_iter`・`affine_dist`（$r \neq 1$）・`tail_sum`・`tail_bound`（$0 \le \delta$・$0 \le r < 1$）・`axis_flow_closed`・`axis_flow_values`・`cone_series`（$0 \le c < 1$・$x_{k+1} \le c x_k$） | 15-05 §07 | 格子・Fourier・最小化。格子の流れが閉じた形に従うこと・$\sup \mu_j \le c < 1$ | 済 |
| LatticeGaugeHierarchicalUpperTube | `tube_exit_top`（管の中で一段 $\delta > 0$ 下がるか出口）・`chain_top`・`steps_numeric_128`・`steps_numeric_64`・`mk_full_chain_128`（$b_{\mathrm{lo}} = 0.95$・$b \le 128$・$\delta = 0.2196$・帯の側のセル $\le 556$）・`union_tube_step` | 15-04 §05 | 写像 $T$・管・区間演算（仮定として受ける） | 済 |
| LatticeGauge.TensionDomination | `iterate_bound_var`・`iterate_bound`（$c \ge 0$）・`lower_bound_four`・`area_law_transfer`（一段の不等式は仮定）・`orbit_lower`（写像の単調性なし）・`step_fails_of_zero_to_positive` | 15-04 §05 | 格子・張力・MK の写像（実数列の帰納だけ） | 済 |
| LatticeGauge.BlockStepBetaShift | `beta_shift_of_inv_sq`（$1/g'^2 = 1/g^2 - 2b_0\ell$）・`su2_coeff`・`log_steps`・`shift_bounds`・`tadpole_weights`・`vanvleck_ratio` | 15-01 §01・15-03 §02 | 格子・ブロック化・Hessian・測度（算術だけ） | 済 |
| LatticeGaugeTwoBlockRowSumLoc | `sRow_eq_sComp_add`・`nRow_eq_nComp`・`row_sum_cancels`（$F$ が対称）・`row_split_unique`（非局所の部分が対角で 0）・`comp_split_unique`・`quartic_decomp_unique`・`two_loop_numbers` ほか（14 定理） | 15-08 §06 | 積分・閉じた式の導出・展開・群 | 済 |
| LatticeGaugeMultiStepCone | `step_pair`・`contraction`・`cone_quartic`（二段の再帰 $x_j \le a\,x_{j+1} + b\,x_{j+2}$、$a, b \ge 0$、$a + b \le 1$）・`block_three`（三段の組の反復、$0 \le \mu$）・`cone_transfer`（錐の一段の写し、$0 \le c$）（5 定理） | 15-08 ゲージの張り替えの境目の行 | Stein の値（数）・核そのもの・木と可換の仮定 | 済 |
| LatticeGaugeMultiStepPerturb | `three_product_perturb`・`three_product_perturb_grouped`（ノルム環の三つの積の摂動）・`block_three_affine`（$c(k+3) \le \mu\, c(k) + \varepsilon$、$0 \le \mu < 1$、$0 \le \varepsilon \Rightarrow c(3n) \le \mu^n\, c(0) + \varepsilon/(1-\mu)$）（3 定理） | 15-08 ゲージの張り替えの境目の行 | 段ごとの核の差の数・段 4 以降の外挿 | 済 |
| LatticeGaugeQuarticCone | `four_amgm`（$\lvert abcd\rvert \le (a^4+b^4+c^4+d^4)/4$）・`quartic_sum_le`（有限和）（2 定理） | 15-08 §06 | 各点の係数の $\ell^1$ が有限なことは仮定・多体の項の実際の係数 | 済 |

| 束の名 | 主な定理と仮定 | 本文の場所 | 入っていないもの | 再検査 |
|---|---|---|---|---|
| LatticeGaugeColorAverage | `colorAverage`（有限の P・X と K : P → X → ℝ、仮定 (H) $\forall \psi\, \Sigma_p(\Sigma_x K\,\psi)^4 \le R\,\Sigma \psi^4$ の下で、三色の θ について $\Sigma_p\lvert(K\theta)_p\rvert^4 \le R\,\Sigma_x\lvert\theta_x\rvert^4$）・`colorAverage_of_design`（恒等式を満たす非負の重みの設計なら何でも）・`design_identity`（$\pm e_k$ に重み 1/15、$(\pm1,\pm1,\pm1)/\sqrt{3}$ に重み 3/40 で $\Sigma w_i(s_i\cdot v)^4 = \lvert v\rvert^4/5$）ほか（10 定理） | 15-08 ゲージの張り替えの境目の行 | K が三色に同じスカラー係数で線形に働くこと（木・可換の線形化）は仮定・一色の sup の存在は (H) に込めた・≥ の側（一色の場は三色の場）は書いていない | 済 |
| LatticeGaugeCubicCone | `three_amgm`（$\lvert abc\rvert \le (\lvert a\rvert^3+\lvert b\rvert^3+\lvert c\rvert^3)/3$）・`cubic_sum_le`（有限和）・`triple_sq_le`・`triple_amgm`（三色の三重積 $\lvert u\cdot(v\times w)\rvert \le (\lvert u\rvert^3+\lvert v\rvert^3+\lvert w\rvert^3)/3$）・`cubic_cone_pullback`（錐 $\lvert C\phi\rvert \le c\,\lVert\phi\rVert_3^3$ と縮み $\lVert K\theta\rVert_3^3 \le \mu\,\lVert\theta\rVert_3^3$ から $\lvert C(K\theta)\rvert \le c\mu\,\lVert\theta\rVert_3^3$）・`block_three_affine`・`block_three_uniform`（7 定理） | 15-08 §06 芯の行 | Stein・κ・λ の値（数）・核そのもの・木と可換の仮定 | 済 |
| SmallSetRowSum | `rowSum_total`・`row_cancel`・`total_split`・`owner_split`・`symmetric_split`（small set の項の配分と行の和）・`loc_idem`・`rem_vanish`・`piece_loc_zero`（Loc の分解、(1−Loc) の側が一様な場で 0）・`theta_ledger`・`plate_numbers` ほか（20 定理） | 15-08 §06 | 数値・核そのもの・木と可換の仮定・板は二次元で一段 | 済 |
| ThetaSquareOneStepAffine | `one_step_affine`（段ごとの縮み $\mu_k \le \bar{\mu}$ のアフィン再帰）・`theta_ledger_mu`・`theta_ledger_half`（板の ½）・`theta_ledger_quarter`・`theta_ledger_measured`・`sup_monotone_in_mu`（6 定理） | 15-08 §06 | 縮みの値そのもの（板の ½ は計算）・核・木と可換の仮定 | 済 |
| DominantMatrixContraction | `dominant_mul`・`dominant_pow`（単位元のノルムが 1）・`weighted_step`・`weighted_iter`（$Bw \le \lambda w$）・`weight_change`（$av \le w \le bv$、$a>0$）・`liftWeight_step`（$B \ge 0$、$w \ge 0$、$s>0$、$k \ge 1$、$B^k w \le s^k w$）・`norm_pow_le_const_mul`・`sum_norm_pow_le`・`affine_uniform`（$0 \le \lambda < 1$、$\varepsilon \ge 0$）・`aggregate_step`・`two_by_two_weight`・`two_by_two_exists`・`signedEx_sq`・`absEx_pow`（21 定理） | 15-10 §01 | Collatz–Wielandt の等式・Gelfand の公式そのもの・Perron ベクトルの存在・$\ell^2$ の重み（Schur の判定法）・max-plus の挟み | 済 |
| SignLossBound | `jensen_four`・`schur_four`（行の $\ell^1 \le A$、列の $\ell^1 \le B$）・`coherent_of_neg_le`（負 $\le \delta$ 正）・`loss_le_of_coherent`・`comp_coherent`・`coherence_le_one`・`sum_four_le`（$\lvert v_a\rvert \le M$）・`stein_form_le`・`stein_le_inv_sq_mul_test`（$\kappa A_r M \le \lvert y_r\rvert$）・`abs_comp_le`・`row_l1_comp_le`（16 定理） | 15-10 §02 | Stein の式そのもの（Plancherel と補間）・平面波の位相の平均・Wielandt の定理・階数 1 への収束・損の数（計算） | 済 |

| 束の名 | 主な定理と仮定 | 本文の場所 | 入っていないもの | 再検査 |
|---|---|---|---|---|
| ConstrainedExtension | `exists_extension`・`isExtension_iff_mem_coset`・`finrank_freedom`（有限次元）・`freedom_eq_zero_iff`（$W \neq 0$）・`exists_extension_with_conditions`（$(\mathrm{res} V, C)$ が全射）・`finrank_freedom_with_conditions`・`conditions_count_le`・`eq_of_eqOn_iSup`（部分空間の族の和が全体）・`comp_isExtension`（$f_1(V_1) \subseteq V_2$）・`comp_depends_of_not_le`（20 定理） | 15-10 §03 | 格子・記号の連続性・折り返しの次数・積率・格子の段の候補（零モードの一意性の連続性の段、尾の次数の規則、ずらしたジェット） | 済 |
| ConeCalculus | `cone_pullback`（$c \geq 0$）・`contracts_comp`・`contracts_iterate`・`block_decay`（$M \geq 0$、$\mu \geq 0$）・`lp_schur`（$p \geq 1$、行の $\ell^1 \leq R$、列の $\ell^1 \leq C$）・`lp_schur_sharp`（行和・列和が一定）・`delta_dilution`・`weighted_rpow_midpoint`（$w \geq 0$、$a > 0$）・`weighted_rpow_shift`（$0 < a \leq R$、$p_0 \leq p$）・`midpoint_below_one`・`affine_varying`（$0 \leq \mu_k \leq \bar{\mu} < 1$、$\varepsilon_k \leq \bar{\varepsilon}$、$c_k \geq 0$）・`affine_eventually`・`affine_block`（20 定理） | 15-10 §05 | 作用素ノルムそのもの・Stein の上界の式（補間と Plancherel）・Riesz–Thorin・連続の $p$ での凸性・Gelfand の公式・格子と核 | 済 |
| ColorAverageN | `colorAverage_of_design`（`IsQuarticDesign w s κ` の下で一色の定数 R が n 色の上界）・`weights_sum`・`pt_unit`・`design_identity`（軸の点 $\pm e_k$ に重み $1/(n(n+2))$、立方体の頂点 $\varepsilon/\sqrt{n}$ に重み $n/((n+2)2^n)$ で $\sum_i w_i (s_i \cdot v)^4 = 3|v|^4/(n(n+2))$、全ての $n \geq 1$）・`colorAverage`（設計の仮定なしの $n$ 色版、$\kappa = n(n+2)/3$）・`oneColour_of_colorAverage`（逆向き）・`design_identity_two`（$n = 2$、$\kappa = 8/3$）・`cube_moment` ほか（13 定理） | 15-08 のゲージの張り替えの境目の行・16-07 §07 | 球面平均の補題・$\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^n$ と $\mathfrak{su}(N)$ への当てはめ・文献との照合 | 済 |
| OneStepWindow | `holder_dual_ratio`・`norm_conj_rpow`・`exists_lpRatio_ge_row`（一座標の Hölder の下界、$p > 1$、$k = 0$ を含む）・`lamMax_mono`・`lamMax_smul`・`steinWeighted_ge`・`stein_row_weight_saturation`（行の重みの族は $u = A^{p-2}$ で飽和。$\lambda_{\max}$ は Rayleigh 商の上限で定義）・`window_ordConnected`・`window_ordConnected_of_logConvex`（窓は区間。$\log \mu_p$ の凸性は仮定）ほか（20 定理） | 15-10 §05 | Courant–Fischer・数 $p_{\mathrm{row}} = 5.874$ と区間 $(3.04, 5.67)$（計算）・作用素ノルムそのもの | 済 |

| 束の名 | 主な定理と仮定 | 本文の場所 | 入っていないもの | 再検査 |
|---|---|---|---|---|
| LargeSetWeight | `summable_shell_iff`（殻の個数が多項式なら $\sum (n+1)P(n)A^{n+1}e^{-\kappa n}$ が収束 $\Leftrightarrow$ $0 \le A < e^{\kappa}$）・`not_summable_term_poly`・`bbs_weight_vs_decay`（$(\eta-1)\kappa > L^{d}\log 2$ の形）・`bsv_weight_vs_decay`・`bsv_weight_vs_decay_log2`（$a$ に依らない）・`card_shell`（$\ell^\infty$ の殻の個数 $64n^3+16n$、$n\ge 1$）・`manhattanShell_one`／two／three（8・32・88）ほか（16 定理） | 15-08 §06 | 剰余の定数 $c_R$ の鎖への帰着・Manhattan の殻の一般式・率 $\kappa$ の値（計算） | 済 |
| LatticeGaugeAcceptanceSandwich | `fermi_le_metro`・`half_metro_le_fermi`（$\frac{1}{2}\min(1,e^{-x}) \le 1/(1+e^{x}) \le \min(1,e^{-x})$）・`barker_le`・`barker_le_of_crooks`（Barker 型の平均 $\le 1/(1+e^{\Delta F}) = (1-\theta)/2$）・`overlap_sandwich`（$e^{-\Delta F}O \le a_F \le O$）・`mixture_sandwich`（$(1-\theta)O \le a_{\mathrm{mix}} \le 1-\theta$）・`jarzynski_of_crooks`・`half_le_one_sub_sqrt` ほか（15 定理。仮定は Crooks 型 $P_F e^{-W} = e^{-\Delta F}P_R$） | 25-06 §07・25-08 §03 | Bretagnolle–Huber・Pinsker・駆動の手続きそのもの・数 | 済 |
| LatticeGaugeAbelianTwistAction | `abelianAction_le`・`abelianAction_lt_pi_sq`（全 $N\ge 1$ で $2N^4(1-\cos(\pi/N^2)) \le \pi^2 - \pi^4/(12N^4) + \pi^6/(360N^8) < \pi^2$、仮定なし）・`totalAction_eq`（$(\mathbb{Z}/N)^4$ の可換な配位で六平面の和 $= 2N^4(1-\cos(\pi/N^2))$）・`plaqTerm_mixed` ほか（13 定理） | 27-02 小さな $\mathrm{T}^2$ の基点 | 区画 (1,1) の最小作用 $\le S_{ab}$（$SU(2)$ の配位空間は入っていない）・項 $1-z$ cos と捩れの置き方は定義として置いた | 済 |
| LatticeGaugeNestedBlocks | `nested_supermultiplicative`（有限確率空間、大ブロック＝小ブロック $s^2$ 個の fibre、平均の不等式 $\mathbb{E}\prod\theta' \le \mathbb{E}\prod\theta$ を仮定）・`doubling_iterate`・`doubling_bound`（$K=4C$ の倍化 $t_k \le K^{-1/3}(K^{1/3}t_0)^{4^k}$）ほか（7 定理） | 26-05 §02・26-02 §03 | Markov 性・鏡映正値性・$(\mathrm{C}_{\mathrm{cb}})$ | 済 |
| CenterFluxPolymerCertificate | `tree_k`（木の不等式六つ）・`kp_bound`・`kp_lt_one`・`rate_rational`（$\beta = 1029/10000$）・`exp_le_inv_one_sub`（$0\le y<1 \Rightarrow e^{y} \le 1/(1-y)$）・`final_real`（$\tanh\beta \le \beta$ を仮定）（6 定理） | 26-06 §04 | $\tanh\beta \le \beta$・木の帰納の補題・Kotecký–Preiss の定理・10 枚以下の全数え上げ・区間演算の版（$\beta \le 0.1039$） | 済 |

| 束の名 | 主な定理と仮定 | 本文の場所 | 入っていないもの | 再検査 |
|---|---|---|---|---|
| ClassFixedPoint | `dist_linear_add_le`（$\|T\| \le \rho$、$\mathrm{Lip}\, R \le L \Rightarrow \mathrm{Lip}(T+R) \le \rho + L$）・`exists_unique_fixed`（$\rho + L < 1$）・`norm_fixed_le`・`exists_unique_fixed_in_ball`（閉球の上だけで Lipschitz、$C + (\rho+L) r \le r$）・`norm_iterate_sub_le`（$\mathrm{Lip}(\Phi^{[n]} - T^{[n]}) \le (\tau + L)^n - \tau^n$）・`exists_unique_fixed_of_iterate`（$n$ 段で縮む）・`affine_orbit_bound`・`dist_fixed_fixed_le`（写像のずれ $\delta$ なら不動点のずれ $\le \delta/(1-K)$）・`tracking`（流れる母数への追従）・`pull_orbit`・`exists_unique_entire_orbit`（段ごとに替わる縮みの、閉集合に留まる両側無限の軌道がただ一つ）・`entire_tracking` ほか（24 定理） | 15-03 §04 | 仮定の表の中身（縮みと剰余を同じ一つのノルムで測ること・非線形の係数 $a$ と源 $c_0$ の値・$F^2$ を $\beta$ へ移した後の縮み・A 型の Loc の正しさ）・窓の数（計算） | 済 |
| LocalCancellationOneRow | `pairs_sum_to_total`・`total_uniform`・`pairAA_uniform`・`pairAB_uniform`・`loc_remainder0_eq_zero`・`pairAB_rank_one`（またぐ対は階数一）・`pairAB_local_plus_gradient`・`mirror`（一列七枚・二ブロックの $O(1/\beta)$ の二次の係数の有理数の算術、仮定なし）（8 定理） | 15-08 §06 | 有理数の係数の導出（熱核の一列の計算）・減衰の比 $5 + 2\sqrt{6}$・板と四次元 | 済 |
| RankOneRemainder | `pair_split`（$K a b = \frac{K}{2}(a^2 + b^2) - \frac{K}{2}(a-b)^2$）・`edge_sum_split`（任意の有限集合の対）・`chain_split`・`chain_local_regroup`・`chain_remainder_eq`（一列で、またぐ和から局所の部分を引いた残り $= -\frac{1}{2}\sum_i K_i (a_i - b_{i+1})^2$）・`chain_remainder_zero_of_match`（$a_i = b_{i+1}$）・`chain_remainder_nonpos`（$K_i \ge 0$）・`deflation_split`・`deflation_left_zero`・`deflation_right_zero`（一様な場の値 $\neq 0$）ほか（12 定理） | 15-08 §06 | 板で主の積が三つになること・残りの大きさ（計算）・四次元 | 済 |
| BlockDeflation | `blockDeflate_split`（$C = CB(A^{\mathrm{T}}CB)^{-1}A^{\mathrm{T}}C + R$）・`blockDeflate_left_zero`・`blockDeflate_right_zero`（$A^{\mathrm{T}}CB$ が可逆なら $A^{\mathrm{T}}R = 0$・$RB = 0$）・`left_zero_inherit`・`right_zero_inherit`・`twoStep_zero`・`twoStep_split`（二段目の $A_2^{\mathrm{T}} R_1 B_2$ も可逆）・`span_left_zero`・`span_right_zero`（試験場の張る空間）（9 定理） | 15-08 §06 | 係数の大きさ（計算）・Taylor の次数との対応・四次元 | 済 |

| 束の名 | 主な定理と仮定 | 本文の場所 | 入っていないもの | 再検査 |
|---|---|---|---|---|
| ConeCalculusSOS | `cert_sound`（証書があれば $P \le \lambda N$）・`cert_mono`・`certValue_anti`（族が大きいほど値は小さい）・`ratio_le_certValue`・`floor_of_coeff`（係数の等式から床）・`classSum_pushforward`（押し下げ、条件なし）・`classSum_pullback`（類の写像が単射なら持ち上げ）・`shift_rigid`（各軸で $2w < L$ なら単射）・`collide_L3`・`collide_L4`・`no_translate_Z`（反例）・`tensor_contracts`・`tensor_ratio_product`・`row_holder_sos`・`schur_weighted_bound`・`schur_attained`<br>ほか（25 定理・2 補題） | 15-10 §05（第二章の段落は本文に未収録） | 多項式環の中の SOS（恒等式は関数か係数の等式として仮定に置く）・符号つきの Stein の上界との大小・全空間の $\mu_4(K_0) < 1$・$L > 2w$ の必要性・数（計算） | 済 |
| LatticeGaugeH1HbarInterval | `cell_lower`・`cell_upper`（$0 < \hbar_1 \le \hbar \le \hbar_2$ で $\min(U/\hbar_1, U/\hbar_2) \le U/\hbar \le \max(U/\hbar_1, U/\hbar_2)$）・`sum_lower`・`sum_upper`（前向きの和）・`rho_lower`（$0 < B \le \bar{B}$）・`pieces_min`（小片の被覆）・`margin_on_interval`（区間の上の余白）・`threshold`・`margin_I1`・`margin_I2`〜`margin_I6`（区間演算の出力の数を入れた余白 $\ge 0.067$）・`margin_I1_coarse_fails`（陰性対照）（15 定理） | 23-15 §05・27-02 二重井戸の一様なギャップ | 区間演算そのもの（float64 と外向きの幅の出力は仮定）・Muckenhoupt・FKG・TAU の補間の剰余・補題 Tail・三本目以降の部分区間の数（機）・一様なラプラス法の定量版 | 済 |
| StrongCouplingOneSidedTerm | `four_mul_le_sq`（$L \ge 4 \Rightarrow 3L + L \le L^2$）・`area_le_strip`（$0 \le u \le 1 \Rightarrow u^{L^2} \le u^{3L} u^L$）・`strip_term_eq`・`strip_coeff_lower`（$0 < s \le \pi/(2L^2) \Rightarrow 16L^2/\pi \le 8/s$）・`tube_coeff_neg`（$L \ge 4$、$s > x - x^3/4$、$0 < \hat{D} \le 3$）・`tube_part_nonpos`・`h_main_term`（$\lvert R \rvert \le C u^{3L+1}$）・`h_neg`（$Cu < K$）・`h_neg_on_interval`（$u \le u_0$、$Cu_0 < K$）（9 定理） | 27-02 結合の言葉の帯 | 展開の収束（Osterwalder–Seiler。剰余の上界は仮定）・$\sin x > x - x^3/4$・$\hat{D} \le 3$・$\ln Z$ の主項の係数（紙）・$C_L$ と $u_0$ の値・$L$ に一様な $\beta_0$ | 済 |

06

## 第 27 部と用語集への接続

条件の台帳（27-02）の紫外の制御の行は、この部の表 1（問い）と 15-08 表 1（閉じない四行）で小さく割られます。札と状態（仮・未）は変わりません。問いの横断の索引（27-03）には、この部の紫外の問いを第五の出所として引きます。この部で足した語（不変な曲線・横の縮み・源・束の網・ループの形ごとの結合・引き込む先の類・局所結合のずらし）は A-02 用語集 にあります。

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 索引：問い・依存・五分類の要約・Lean の束の対応（この章は新しい結果を足さない） | 紫外の制御。どの問いの決着も |
| Lean の束が標準の三つの公理だけに依ること（束ごとの表示と再検査） | 格子・群・測度・最小化の形式化。紙の証明の解析の部分 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 言えないこと・問い・五分類 | 本書の検討 | 15-00〜15-08 の各章の表と節 |
| Lean の束 | 本書の検討 | この本の検討の形式化の記録（Lean 4、束ごとに末尾で公理を表示）。再検査済み（全ての束が通過） |

**この章で使った語** — 言えないこと・紫外の問い・依存の図・五分類・Lean の束。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：15-10 体系の試み — 記録の繰り返しの型に名前を与える。あわせて読むなら 27-00 入口 — この部の約束（条件の台帳の紫外の制御の行を含む条件つきの言明の全体）。

# 体系の試み — 記録の繰り返しの型に名前を与える

この章は本書の検討です。本筋の証明の部品ではありません。§01〜§03 と §05 は既知の枠組みへの言い換え、§04 は見立ての水準です。

この部は、本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた記録です。存在そのものは第二巻の第 6〜13 部を、二つの設計の違いは第 14 部を見てください。部の位置づけは 15-00 にあります。

**この章で分かること** — 第 15 部の計算の記録に何度も出た五つの手作業に、名前と定義を与えます。一つ目は「一段では 1 を超えるが、数段まとめると縮む」行列の評価（優勢行列）、二つ目は符号を捨てて上界をとるときに失う分（符号を捨てる損）、三つ目は拘束の上でしか決まらない写像を局所の核で表すときの選び方（局所の代表）、四つ目は強結合と弱結合の二つの展開の突き合わせ（二重付値）、五つ目は $p$ 次の多項式を $\ell^p$ の錐で押さえて段ごとに引き戻す計算（錐の計算法）です。それぞれについて定理の候補を書き、既知の結果のどれの言い換えかを行ごとに示し、記録の数がどの量に当たるかを並べ、残る問いを体系の問いにまとめます。

**読む水準** — 三年生以上です。§01 は非負行列の線形代数、§02 は有限和の不等式、§03 は格子の上のフーリエ級数、§04 は漸近級数の主項だけ、§05 は有限和の不等式と補間定理の言明を使います。§00 と各節の冒頭の段落だけなら二年生でも読めます。

**前提となる章** — 15-05 束の網の定理（局所の形）（局所の代表と体積に一様な上界）・15-05 の $\ell^4$ の錐の一段の縮み（重みつきの Stein の上界と $\ell^4$ の錐）・15-08 §06（W の座標と錐の多段）。

**先に言うこと** — この章は本筋ではありません。条件の台帳（27-02）の紫外の制御の行にも、移り変わりの帯の行にも、この章の結果は直接には効きません。定理の候補の多くは既知の事実——Perron–Frobenius の定理、Collatz–Wielandt の公式、Gelfand の公式、重みつき最大ノルムでの縮み、多重格子の転送作用素の次数、細分割の和の規則、Riesz–Thorin の補間定理、Schur の検定——の言い換えで、新しさは主張しません。この章で新しいのは「問い」の側です。記録の数が既知の枠組みのどの量に当たるか、どこで既知の枠組みからはみ出すかを書き出すことが目的です。札は行ごとに付けます：Lean （Lean のファイルで通った文）・計算 （浮動小数の計算。区間の評価ではない）・読 （紙の上の筋だけ、または文献の要旨の水準）・典 （標準的に知られている事実）・仮 （見立て）。

この章の順序

0. この章で分かること ― 五つの型とこの章の読み方
1. 優勢行列と k 段の縮み ― 一段で縮む重みの作り方（表 1）
2. 符号を捨てる損 ― 損はそろいの逆二乗（表 2〜5）
3. 局所の代表の幾何 ― 折り返しの次数は代表に依らない（表 6・7）
4. 二重付値の幾何 ― 目盛りに依らない κ とレンズ（表 8〜10）
5. 錐の計算法 ― 窓は区間、薄まりの正しい形（表 11・12）
6. 既知との辞書・言えている範囲・問い（表 13〜15）

00

## この章で分かること

| 優勢行列 | 符号を捨てる損 | 局所の代表 | 二重付値 |
|---|---|---|---|
| $k$ 段で縮むなら、一段で縮む重みが明示的に作れる<br>「一段で 1 を超える」は重みの選び方による過渡。Collatz–Wielandt と Varga の流れの言い換え（Lean） | 損は、最悪の向きでの行のそろいの逆二乗で押さえられる<br>$4^4$ のトーラスの二〜四段で 5.55・5.13・5.31 と一致（不等式は Lean、数は計算） | 折り返しの次数 $\operatorname{ord}_V(F)=2$ は代表の選び方に依らない<br>記録の型の範囲では、尾のノルムが有界なのは $D \le 4$ まで。和の規則の言い換え（読・計算） | 二つの主係数の積 $\kappa = s1w1$ は結合の目盛りに依らない<br>主項どうしのレンズは $\kappa \le \frac{1}{4}$ のときだけ開く。見返りの定理は未（仮・計算） |
| 錐の計算法 | | | |
| $p$ 次の錐の引き戻し・重みつきの Stein の上界・段の合成・アフィンの再帰に定義を与える<br>$\log S_p$ は $p$ について凸で $S_3 \le \sqrt{S_2 S_4}$。素朴な薄まり $m^{1-p}$ は成り立たず、$S_p \le S_2 R^{p-2}$ が最小の形（Lean・読・計算） | | | |

**この章の読み方**。第 15 部の計算の記録には、同じ形の手作業が何度も出てきました。三段の合成のノルムを測って「一段では 1 を超えるが三段では縮む」と書く、符号つきの核の絶対値をとって

上界を作る、Bianchi の恒等式を満たす場の上でしか決まらない写像に局所の核を当てる、強結合の級数と弱結合の級数の主項を並べて交わる点を探す、$p$ 次の錐を段ごとに引き戻して重みつきの Stein の上界で押さえる、の五つです。この章は、それぞれに定義と公理（何を仮定すれば何が言えるか）を与える試みです。結果の多くは既知の事実の言い換えで、そのことを各節の定理の候補の行ごとに書きます。言い換えてみて残るもの——既知の枠組みに直接は当たらない量や、記録の数が示す規則性で定理にできていないもの——が、この章の問いです。§01〜§03 は互いに独立に読めます。§04 は §01〜§03 と道具を共有せず、繰り込みの比較の帯の言い直しの試みです。§05 は §01 の候補 1.4 を錐の言葉に広げたもので、§01 と並べて読めます。

01

## 優勢行列と k 段の縮み

塊に分けた作用素の各塊のノルムを並べた非負の行列は、作用素の冪の評価を非負行列の冪の評価に移します。非負行列の側では Perron–Frobenius の理論がそのまま使えるので、「何段で縮むか」「一段で縮むにはどの重みで測ればよいか」が行列の言葉で書けます。ここまでは全て既知で、この節の役目は記録の評価をこの枠組みにそろえることです。

### 定義

**定義 1.1（優勢行列）.** $I$ を有限集合、$E_i$（$i \in I$）をノルム空間、$T$ を $E = \bigoplus_i E_i$ 上の作用素で塊 $T_{ij} : E_j \to E_i$ に分けたものとします。非負の行列 $B \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{I \times I}$ が $T$ の**優勢行列**であるとは、全ての $i, j$ で $\|T_{ij}\| \leq B_{ij}$ となることです。最小のものは塊ノルムの行列 $N(T)_{ij} = \|T_{ij}\|$ です。

- 積と冪：$N(ST) \leq N(S)N(T)$（成分ごと）。よって $B, C$ が $S, T$ の優勢行列なら $BC$ は $ST$ の優勢行列で、$B^n$ は $T^n$ の優勢行列です Lean （`norm_mul_apply_le`・`dominant_mul`・`dominant_pow`。冪の版の仮定は単位元のノルムが 1）。
- 和と非負のスカラー倍でも閉じます 読 。
- max-plus の側：$A = \log B$（成分ごと）の最大閉路平均 $\lambda_{\mathrm{mp}}(A)$ について $e^{\lambda_{\mathrm{mp}}} \leq \rho(B) \leq |I|\, e^{\lambda_{\mathrm{mp}}}$ 典 （Friedland 1986）。記録では、max-plus の固有値が最適な重みつきノルムを下から 1〜2.5% で挟んでいました 計算 。

**定義 1.2（重みつきの塊ノルム）.** 正の重み $w \in \mathbb{R}_{>0}^{I}$ について $\|x\|_{w,\infty} = \max_i \|x_i\| / w_i$、$\ell^2$ の版は $\|x\|_{w,2}^2 = \sum_i \|x_i\|^2 / w_i^2$ です。作用素ノルムは $\|T\|_{w,\infty} = \|W^{-1} T W\|_{\infty}$（$W = \mathrm{diag}(w)$）です。

**定義 1.3（$k$ 段の縮み・過渡の定数）.** 非負の行列 $B$ について $\kappa_k(B) := \|B^k\|$ とし、ある $k$ で $\kappa_k < 1$ となるとき「$k$ 段で縮む」と言います。過渡の定数を $C_k(B) := \max_{r<k} \|B^r\|$ とします。

Gelfand の公式 $\rho(B)=\lim_n \|B^n\|^{1/n}$ から、$\rho(B)<1$ とある $k$ で $\kappa_k<1$ となることは同値です[典]。

**定義 1.4（一段の重み）.** $B\ge 0$・$w\ge 0$・$s>0$・$k\ge 1$ について

$$w' := \sum_{r<k} s^{-r} B^r w$$

を、$w$ から作った**一段の重み**と呼びます。

### 定理の候補と札

**候補 1.1（$k$ 段の縮みから一段で縮む重みへ）.** $B\ge 0$、$w\ge 0$、$s>0$、$k\ge 1$、$B^k w\le s^k w$（成分ごと）なら、$w\le w'$ かつ $Bw'\le s\,w'$ です[Lean]（`liftWeight_step`。補題 `mulVec_pow_succ`・`pow_mulVec_nonneg`）。

$$Bw' = \textstyle\sum_{r<k} s^{-r}B^{r+1}w = s\big(w' - w + s^{-k}B^k w\big) \;\le\; s\,w'$$

これに候補 1.2（一段の評価）を合わせると、「$k$ 段の合成が重み $w$ で $s^k$ 倍に縮む」なら「重み $w'$ で測れば一段ごとに $s$ 倍に縮む」となります。重みの比 $w'/w$ は $[1,\ \sum_{r<k} s^{-r}\max_i (B^r w)_i/w_i]$ に入るので、測り直しの定数は段数に依りません（候補 1.3）。内容は「$\rho(B)<s \Leftrightarrow Bw'\le sw'$ となる $w'>0$ がある」の構成的な片側で、Varga の反復法の解析や Berman–Plemmons の M 行列の特徴づけの流れで知られています[典]。

表 1　§01 の定理の候補。どれも既知の事実の有限次元の形か、その初等的な帰結です

| 候補 | 言明（一行） | 札 | 何の言い換えか |
|---|---|---|---|
| 1.1 | $B^k w\le s^k w \Rightarrow w\le w'\cdot Bw'\le sw'$ | [Lean] | Varga・Berman–Plemmons の M 行列の特徴づけの構成的な片側[典] |
| 1.2 | $Bw\le \lambda w$（$w>0$）$\Rightarrow \|T\|_{w,\infty}\le\lambda$。段ごとに違う $T_n, B_n, \lambda_n$ でも $\|x_n\|_{w,\infty}\le(\prod_k \lambda_k)\|x0\|_{w,\infty}$ | [Lean]（`weighted_step`・`weighted_iter`） | Collatz–Wielandt：$\inf_{w>0}\max_i (Bw)_i/w_i = \rho(B)$（等式そのものは Lean に入れていない）[典] |
| 1.2′ | 右と左の正の Perron ベクトル $x, y$ があれば、$D=\mathrm{diag}(\sqrt{y/x})$ で $\|DBD^{-1}\|_2\le\rho(B)$、さらに $\|DTD^{-1}\|_2\le\|DN(T)D^{-1}\|_2$ | [読] | Schur の判定法を $q=\sqrt{xy}$ に当てたもの[典] |
| 1.3 | $av\le w\le bv$（$a>0$）なら、重み $w$ で各段 $\lambda_n$ 倍に縮む列は重み $v$ で $\|x_n\|_v\le (b/a)(\prod\lambda_k)\|x0\|_v$ | [Lean]（`weight_change`） | ノルムの同値の初等的な事実 |

| 候補 | 言明（一行） | 札 | 何の言い換えか |
|---|---|---|---|
| 1.4 (a) | $\|1\| = 1$、$q := \|a^k\|$、$\|a^r\| \le C$（$r < k$）$\Rightarrow \|a^n\| \le C\, q^{\lfloor n/k \rfloor}$ | Lean（`norm_pow_block_le`・`norm_pow_le_const_mul`） | Gelfand の公式の有限の版 典 |
| 1.4 (b) | $q < 1 \Rightarrow \sum_{n<N} \|a^n\| \le kC/(1-q)$（$N$ に依らない） | Lean（`sum_norm_pow_le`・補題 `geom_sum_le_inv`・`sum_range_mul_eq`） | Neumann 級数の部分和の評価 |
| 1.4 (c) | $c(k+1) \le \lambda c(k) + \varepsilon$（$0 \le \lambda < 1$、$\varepsilon \ge 0$）$\Rightarrow c(k) \le \max(c(0), \varepsilon/(1-\lambda))$ | Lean（`affine_uniform`） | アフィンの再帰の初等的な事実 |
| 1.4 後半 | 既約で Perron ベクトル $w > 0$ を持てば $C = \max_i w_i / \min_i w_i$（$\infty$ ノルム）。$w$ の比を $B$ の成分で押さえる明示式 | 読（明示式は書き切っていない） | Minc の比の評価 読 |
| 1.5 | 塊を $g : I \to J$ で集約した $J \times J$ の行列 $M$ が $Mp \le \mu p$ なら、元の $B$ は重み $w_j p_{g(j)}$ で $\mu$ 倍の一段の縮み。$J$ が二点で $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$、$a < 1 \cdot d < 1 \cdot bc < (1-a)(1-d)$ なら重み $(1, t)$ で $\max(a + bt,\ d + c/t) < 1$ | Lean（`aggregate_step`・`two_by_two_weight`・`two_by_two_exists`） | 二×二の行列の $\rho < 1$ の判定の初等的な事実 典 |

### 記録の数との対応

- W の座標（差を含む二次、次元 6）の有限の型の行列は、スペクトル半径 0.36、一段のノルムが 1 を超え、三段で 0.05〜0.13 でした 計算 。$\rho < 1$ で一段のノルムが 1 を超える典型で、候補 1.4 (a) の $C$ が過渡の定数に当たります。Perron の重みを取れば一段で縮む、というのが候補 1.1・1.2 の読みです（記録では Perron の重みで一段 0.546） 計算 。
- $\ell^4$ の錐（15-05）の重みつきの Stein の上界は、一段 4.45・三段 0.10 でした 計算 。候補 1.1 の形にすれば「三段で 0.10 なら一段で $0.10^{1/3} \approx 0.46$ に縮む重みが作れる」と読めますが、そのためには三段の評価が**一つの線形の優勢作用素の冪**から来ている必要があります。錐は Riesz–Thorin を通した四次の量で、段ごとに核 $K_k$ が違うので冪ではありません。この場合に使えるのは段ごとの積の形（`weighted_iter`）だけです 読 。
- 有限の型と残りの戻りの組は、候補 1.5 の二×二の集約の形です。残りの塊を右下に入れて $bc < (1-a)(1-d)$ を確かめることは、まだしていません（問い「有限の型と戻りの集約」）。
- 第 23 部の二重井戸の粗い鎖で使った Dobrushin の列和は、重み $w = \mathbf{1}$ の候補 1.2 です。重みを Perron に取れば縮みの定数は良くなりえます 読 。

### この型に固有の問い — 符号を捨てる損

優勢行列は符号を捨てます。実際の作用素 $T$ と優勢行列 $B$ について、段 $k$ の損を

$$L_k := \frac{\|B^k\|_\bullet}{\|T^k\|_\bullet} \qquad (\text{同じノルム。} \|T^k\| = 0 \text{ なら } +\infty)$$

と置くと、損は段で有界とは限りません。$T=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$ は $|T|=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ を優勢行列に持ち、$T^2=0$ で、$|T|^{n+1}$ の全成分は $2^n$ です。よって $n\ge 2$ で $L_n=+\infty$ です Lean（`absEx_eq`・`signedEx_sq`・`absEx_pow`）。逆に $T$ が非負（$T=|T|$）か、符号の相似 $T=S|T|S$（$S$ は $\pm1$ の対角行列）なら、Perron の重みの $\infty$ ノルムで $L_k=1$ です 読。

符号の選び方で $\rho(|A|)$ の評価にどこまで届くかは Rump の sign-real spectral radius（Rump 1997）が扱っています 読。損が**段で**どう振る舞うかを扱った文献は見つけていません（見つけていない、であって無いという意味ではありません）。記録の損は一段 7.6・二段 9.3 とゆっくりにしか増えておらず、これを定理にする条件は優勢行列の情報だけからは決まりません（上の例がそれを示します）。この問いを次の §02 で扱います。

02

## 符号を捨てる損

記録の損をよく見ると、§01 の反例とは型が違いました。記録の Stein の上界は、段の核を**合成してから**上界をとっています。§01 の反例は**絶対値をとってから**合成する量です。前者では、冪零の例 $T^2=0$ の合成の上界も 0 になります。この節では、合成してから上界をとる損が段でほとんど動かないことを数で見て、それを一つの行の中の幾何の量（行のそろい）で押さえる不等式を書きます。

### 定義

**定義 2.1（合成の核と損）.**段の核 $K_0,K_1,\dots$ の合成を $T_k=K_0K_1\cdots K_{k-1}$ とします。真の比を $\sup_\theta \|T_k\theta\|_4^4/\|\theta\|_4^4$、Stein の上界を 15-05 の式 (11) の形の重みつきの $\ell^2$ の量（合成の核の行の $\ell^1$ ノルム $A_r$ を重みにする）とし、

$$\text{損}_k:=\frac{\mathrm{Stein}(T_k)}{\text{真の比}(T_k)}$$

と置きます。真の比は最大化の下界（準ニュートン法と周期 2 の場の最大化の大きい方）で代用するので、表の損は損の上からの見積もりです。

**定義 2.2（行のそろい）.**並進不変な $T$ の Stein の上界は $\sup_q \lambda_{\max}\big(\sum_r A_r^2\hat T_r(q)^{\mathrm H}\hat T_r(q)\big)$ の形で、その最大点を $(q^*,u^*)$ とします。$y_r=\hat T_r(q^*)u^*$、$M=\|u^*\|_\infty$ と置き、

$$\kappa_r:=\frac{|y_r|}{A_r\,M}\ \le\ 1$$

を、最悪の向きでの行 $r$ の**そろい**と呼びます（$\kappa_r\le 1$ は `coherence_le_one` Lean）。$\langle\kappa^{-2}\rangle$ は $|y_r|^4$ を重みにした平均です。

## 記録の数 — 損は止まり、少し下がる

表 2　同じ $4^4$ のトーラスにそろえた損（段を $R=3$ で切った周期の作用素） 計算

| k | Stein | 真の比の下界（準ニュートン／周期 2） | 損 | 段の比：下界 | 段の比：Stein |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3.708 | 0.5903／0.5566 | **6.28** | – | – |
| 2 | 0.7746 | 0.1405／0.1405 | **5.51** | 0.238 | 0.209 |
| 3 | 0.07632 | 0.014967／0.01497 | **5.10** | 0.107 | 0.0985 |
| 4 | 0.00576 | 0.001095／0.00109 | **5.26** | 0.073 | 0.0755 |

真の比と Stein の上界が同じ速さで減るので（段の比はどちらも約 0.07 へ）、損が止まります。大きいトーラスでも同じ形です（表 3）。以前の記録の二段の 9.3 は、真の比の下界 0.108 が弱かった分で、周期 2 の場では下界が 0.1405 になります 計算 。$k \geq 2$ では真の比の最大点のエネルギーの 99.8〜100% が $|q|_\infty = \pi$ にあり、$(\pi,\pi,\pi,0)$ 型の周期 2 の点に乗っていました 計算 。

表 3　大きいトーラスの損と、段ごとの上界の積との比べ 計算

| k | トーラス | Stein | 真の比の下界 | 損 | 段ごとの Stein の積 ÷ 下界 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $16^4$ | 4.431 | 0.591 | **7.50** | 7.5 |
| 2 | $8^4$ | 0.9554 | 0.1405（周期 2） | **6.80** | 182 |
| 3 | $8^4$ | 0.09575 | 0.01497（周期 2） | **6.40** | $1.1\times10^4$ |
| 3 | $6^4$ | 0.09092 | 0.014955 | **6.07** | – |

右端の列は、段ごとの一段の上界（4.45・5.75・6.50・6.81）の積を真の比の下界で割ったもので、$7.5 \to 182 \to 1.1\times10^4 \to 1.0\times10^6$ と一段ごとに 60〜90 倍で増えます 計算 。指数で増えるのは、絶対値をとってから合成する側だけです。合成の核で上界をとることがどれだけ効いているかが、この列で見えます。

## 三つの仮説は外れ、外れ方がそろっていた

損が止まる理由として、(a) 合成で負の部分の割合が減る、(b) 打ち消しはセルの中で起きている、(c) 真の比の最大点で符号がそろう、の三つを試しました。どれも書かれた形では成り立ちませんでした。ただし三つとも「段で変わらない」という同じ外れ方を示しました。

表 4　仮説の判定 計算

| 仮説 | 量 | k=1 | k=2 | k=3 | k=4（$4^4$） | 判定 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (a) | 負の部分の割合（行の符号は自由に取る） | 0.411 | 0.432 | 0.435 | 0.426 | 成り立たない（約 0.43 で一定。$4^4$ では 0.405・0.425・0.427・0.426） |

| 仮説 | 量 | k=1 | k=2 | k=3 | k=4（$4^4$） | 判定 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (b) | 中心の側の殻（距離 0.5〜1.5）の $\ell^1$ の割合／負の割合 | 0.58／0.22–0.33 | 0.48／0.32 | 0.44／0.31–0.37 | 0.53／0.32–0.38 | 成り立たない（打ち消しは中心の正と距離 1.5〜2.5 の負の輪の間。$2^4$ の塊で和をとると $\ell^1$ の 41〜56% が残る） |
|  | 外の輪（距離 1.5〜2.5）の $\ell^1$ の割合／負の割合 | 0.33／0.59–0.63 | 0.38／0.56–0.60 | 0.40／0.53–0.60 | 0.46／0.53–0.59 |  |
| (c) | 最大点でのそろい／効率 | 0.74／4.5%（$16^4$） | 0.56／1.3%（$8^4$） | 0.57／1.5%（$6^4$） | 0.60／1.8% | 成り立たない（そろいは 0.6 前後で止まる） |
| — | 最悪の向きでの行のそろい $\langle\kappa^{-2}\rangle$ | 22.9（$16^4$） | 10.6（$8^4$）・5.55（$4^4$） | 10.2（$8^4$）・5.13（$4^4$） | 5.31 | 段で有界 |

三つの量がどれも段でほとんど動かないことは、「合成で核が正に近づく」のではなく「合成で核の輪郭（正規化した形）が一つに近づく」ことを示していると読めます 読 。中心が正で周りが負の輪郭、負の割合 0.43、そろい 0.6 が段に依らず保たれます。細分割の極限関数に近い見方です 読 。なお「中心が正・周りが負」の符号は向きの成分の符号の規約に依り、規約に依らないのは負の割合とそろいの方です。

### 成り立った不等式 — 損 ≤ そろいの逆二乗

**候補 2.1.** $A_r \ge 0$、$\kappa \ge 0$、$M \ge 0$、全ての成分で $|v_a| \le M$、全ての行で $\kappa A_r M \le |y_r|$ とすると、

$$\kappa^2\Big(\sum_r A_r^2 y_r^2\Big)\sum_a v_a^4 \;\le\; \Big(\sum_r y_r^4\Big)\sum_a v_a^2$$

です Lean （`stein_le_inv_sq_mul_test`。補題 `stein_form_le`・`sum_four_le`）。左辺の括弧は Stein の二次形式の値、右辺は試験の値なので、「上界 ÷ 試験の値 $\le \kappa^{-2}$」と読めます。

格子の上では、最悪の向きの実の平面波 $\theta = \mathrm{Re}(e^{i\varphi}u^* e^{-iq^*\cdot X})$ を試験に使うと、

$$\text{損} \;\le\; \frac{\text{Stein}}{\text{試験の値}} \;=\; \langle\kappa^{-2}\rangle \times \frac{S(u^*)}{\Phi}, \qquad S(u) = \frac{\sum_a |u_a|^4}{|u|^2 M^2} \le 1$$

となります。$\Phi$ は位相の因子で、$2q^* \not\equiv 0$ かつ $4q^* \not\equiv 0$ なら 1、周期 2 の点（$2q^* \equiv 0$）でも $u^*$ を実に取れば 1 です 読 （$\cos^4$ の平均 $3/8$ が分子と分母で消える。この段と Stein の式そのものは Lean に入れていません）。

- $4^4$ のトーラスの $k = 2, 3, 4$ では、Stein の最大点が周期 2 の点で、その平面波がそのまま真の比の下界の最大点になりました（試験の値 0.1396・0.01487・0.00109）。このとき Stein ÷ 試験の値 $= \langle\kappa^{-2}\rangle = \mathbf{5.55 \cdot 5.13 \cdot 5.31}$ で、形の因子と位相の因子はちょうど 1 でした 計算 。

- 大きいトーラスでは Stein の最大点が周期 2 からずれ、$\langle\kappa^{-2}\rangle$ は 22.9・10.6・10.2（$k=1,2,3$）になります。損の上界として有界で、段で下がりますが、損そのもの（6.4 など）とは一致しません 計算 。

読み方：Stein の上界は $\ell^2$ の側では符号を全部覚えていて、忘れるのは $\ell^\infty$ の側の「行の $\ell^1$」だけです。だから損は、行の中の打ち消しの量 $1/\kappa^2$ に縮みます 読 。最悪の向きでのそろいが段で下に有界なら損は段で有界、という条件つきの文になりますが、そろいが下に有界であることは示していません（問い「最悪の向きの行のそろい」）。

### 当てはまらなかった型 — 正の部分が優勢

符号場 $s$ について各行の負の部分が正の部分の $\delta$ 倍以下なら $(Ts)_i \ge \frac{1-\delta}{1+\delta} r_i$（$r_i$ は行の $\ell^1$）で、$\ell^4$ の Schur の判定法 $\sum (Tx)^4 \le A^3 B \sum x^4$ と合わせて、損 $\le U\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^4$（$U$ は行の $\ell^1$ の不均一の因子）です。合成では $\delta$ が足し算で劣化します（そろい $1-\delta_1-\delta_2$） Lean （`coherent_of_neg_le`・`schur_four`・`loss_le_of_coherent`・`comp_coherent`）。

定理は正しいのですが、記録の核には当てはまりません。$\ell^4$ 重みの平均のそろいから読んだ $\delta$ は約 0.46・0.39・0.39・0.35 で小さくなく、$U$ は 3.0・4.5・8.8・15.8 と増え、行ごとの最小のそろいはほぼ 0 です（全ての行で $\delta$ という仮定が満たされない） 計算 。Schur の判定法そのものも Stein の上界より二桁粗いものでした（Schur ÷ 下界は 437 → 745 → 1453 → 1777） 計算 。

### W の座標 — 合成の後の絶対値は階数 1 の値で止まる

表 5　W の座標（零モードを直した核・60 型）の損 計算

| k | $\rho(T_k)$ | 絶対値の後に合成 | 合成の後に絶対値 | 負の割合 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.3631 | 1.01 | 1.01 | 0.210 |
| 2 | 0.1249 | 1.08 | 1.06 | 0.325 |
| 3 | 0.0422 | 1.16 | 1.09 | 0.387 |
| 4 | 0.0142 | 1.24 | 1.10 | 0.411 |
| 5 | 0.0048 | 1.33 | 1.10 | 0.421 |

損は $\rho$ の比（$\rho(|\cdot|)/\rho$）です。合成の後に絶対値をとる側が止まる値 1.10 は、支配固有ベクトルの左右 $u, v$ から作った階数 1 の値 $\sum |u_i||v_i| / |\sum u_i v_i| = 1.085$ とほぼ一致します 計算 。支配固有値に隙間があれば $T^k/\rho^k \to uv^{\mathrm{T}}/(v^{\mathrm{T}}u)$ で、$|\cdot|$ と $\rho$ が連続なのでこの値に収束します 読 。絶対値をとってから合成する側は、同じ行列の冪なら $(\rho(|M|)/\rho(M))^k$ で増え（ここでは 1.070 倍ずつ）、有界なのは $\rho(|M|)=\rho(M)$ のとき、既約なら $M = e^{i\alpha} D |M| D^{-1}$ のときに限ります（Wielandt） 典 。合成の後の絶対値が絶対値の後の合成以下であること（行の $\ell^1$）は `abs_comp_le`・`row_l1_comp_le` Lean 。

03

## 局所の代表の幾何

粗い Bianchi の恒等式を満たす場の上でしか決まらない写像を、局所の核で表す——この手作業は 15-05 の束の網の定理（局所の形）の「代表」の選び方として出てきました。この節では、代表の全体の形（アフィン空間）、代表に依らない量（零モードの値と、拘束に制限した折り返しの次数）、代表に依る量（全体の折り返しの次数と尾のノルム）を分けます。中身は多重格子の転送作用素の次数と、細分割の和の規則（Strang–Fix 型の条件）の言い換えです。

### 定義

**定義 3.1（拘束つき写像と延長）.**体 $K$ 上の有限次元空間 $E, W$、部分空間 $V \le E$、線形写像 $f : V \to W$ の組 $(E, V, W, f)$ を**拘束つき写像**と呼び、$g : E \to W$ で $g|_V = f$ となるものを**延長**と呼びます。延長は存在し（制限の写像 $\mathrm{res}_V$ は全射）、二つの延長は $V$ の上で一致し、延長の全体は $g_0 + \ker \mathrm{res}_V$ というアフィン空間で、その次元は $(\dim E - \dim V) \cdot \dim W$ です Lean（`exists_extension`・`restrict_surjective`・`IsExtension.eqOn`・`isExtension_iff_mem_coset`・`finrank_freedom`）。自由度が 0 になるのは $V = E$ のときだけです（$W \neq 0$。`freedom_eq_zero_iff`）。

**定義 3.2（格子の代表）.**粗い面の場 $\theta : \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{C}^6$、拘束の部分空間 $V = \mathrm{im}\, D_c$（粗い Bianchi の恒等式を満たす場）、出力は細かい面の場で一つの粗いセルあたり $96 = 16 \times 6$ 成分です。並進不変な核 $K : \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{C}^{96 \times 6}$ で、記号が全ての $q$ で $\hat K(q)\hat D(q) = \hat R(q)$ を満たすもの（$R = F D_c$）を $F$ の**代表**と呼び、有限範囲・指数減衰・$\ell^1$ のどれかを満たすものを**局所の代表**と呼びます。$q \neq 0$ では $\hat D(q)$ の階数は 3 で、各 $q$ の記号は「$E = \mathbb{C}^6$、$\dim V = 3$、$W = \mathbb{C}^{96}$」の雛形になり、自由度は $(6-3)\cdot 96 = 288$ 次元です。

**定義 3.3（零モード・積率）.**$\hat K(0) = \sum_Z K(Z)$ を零モード、$M_\alpha(K) = \sum_Z Z^\alpha K(Z)$ を積率と呼びます。

**定義 3.4（折り返しの次数）.**$\eta \in \{0,1\}^4$、$p_\eta = (q + 2\pi\eta)/2$、粗いセルの中の細かい位置 $s \in \{0,1\}^4$ について、折り返しの成分を $\hat C_\eta(q)[o,a] = \sum_s e^{-i p_\eta \cdot s} \hat A_{(s,o),a}(q)$ とします。$\eta \neq 0$ の $\hat C_\eta(q)$ が $q \to 0$ で消える次数の最小を $\mathrm{ord}(K)$、拘束の部分空間への射影 $P(q)$ を掛けた $\hat C_\eta(q) P(q)$ の次数の最小を $\mathrm{ord}^V(K)$ と書きます。

### 代表に依らない量

**零モードは連続性だけで決まる（候補 3.1）.**$K$ が $\ell^1$ の代表（記号が連続）で、$\hat D(q) = D 1(q) + O(|q|^2)$、$\hat R(q) = R_1(q) + O(|q|^2)$、$\sum_\nu \mathrm{im}\, D_1(e_\nu) = \mathbb{C}^6$ なら、$\hat K(0)$ は $\hat K(0) D_1(e_\nu) = R_1(e_\nu)$（$\nu = 1, \dots, 4$）の唯一の解です 読。最後の段（和が全体を張る部分空間の族の上で一致すれば等しい）は `eq_of_eqOn_iSup`・`correction_eq_zero_of_iSup` Lean。記録の値は $\hat K(0) = U/4$、$U = \mathbf{1}_{16} \otimes I_6$（全ての位置に一様に $\theta/4$）で、四つの段でずれ $\le 3.1 \times 10^{-10}$ でした 計算。トーラ

スでは $\hat{D}(0)=0$ なので零モードは拘束を受けず、有限のトーラスの対称な代表は $L_b=8,16,32$ で $\max|\hat{A}(0)-U/4|=0.250\cdot 1.47\times10^{-2}\cdot 2.55\times10^{-5}$ でした 計算 。局所性という拘束が有限の箱では失われることの数の表れです。

**最小ノルムの代表は局所でない（候補 3.2）.** $\hat{K}_{\mathrm{MP}}(q)=\hat{R}(q)\hat{D}(q)^{+}$（Moore–Penrose の代表）は、射影 $P(q)$ が $q$ の 0 次斉次の関数で $q=0$ に向きの記憶を残すので、向きによる極限が一致しなければ $\ell^1$ に入りません 読 。局所の代表の自由度は、この向きの記憶を連続な関数に塗り直す余地と見ることができます。核の減衰は測っていません（問い「Moore–Penrose の核の減衰」）。

**拘束に制限した次数は代表に依らない（候補 3.3）.** $\hat{D}=U\Sigma V^{\mathrm{H}}$ と特異値分解すると $\hat{C}_\eta(q)U(q)$ は $\hat{R}$ の折り返しだけで書けるので、$\mathrm{ord}^{V}(K)=\mathrm{ord}^{V}(F)$ は $F$ の不変量です。制限は零の次数を下げないので、どの代表でも $\mathrm{ord}(K)\le\mathrm{ord}^{V}(F)$ です 読 。

表 6　記録の代表の折り返しの次数（括弧は $t$ を一桁ずつ小さくしたときの値の減り方） 計算

| 代表 | 作り方 | ord（$6\times6$ の全体） | $\mathrm{ord}^{V}$（$\mathrm{im}\,D$ の上） |
|---|---|---|---|
| sym | 錐のホモトピーの行（有限のトーラス） | 0（$\hat{C}(0)=0.039$〜$0.071$） | 0 |
| A3 | 零モードの差を $Z=0$ の一点に足す | 1（$t=10^{-1}\to10^{-3}$ で $3.4\times10^{-2}\to3.4\times10^{-4}$） | 1（$5\times10^{-3}\to5\times10^{-5}$） |
| A4 | A3 に一次の積率の修正を $Z=\pm e_\mu$ の反対称の対で足す | 2（$1.7\times10^{-3}\to1.7\times10^{-7}$） | 2 |
| $F$ そのもの | $R$ から | — | 2（$1.8\times10^{-3}\to1.8\times10^{-7}$） |

A4 は $\mathrm{ord}(K)=\mathrm{ord}^{V}(F)=2$ を $6\times6$ の全体で達しています。つまり記録の型の範囲では、A4 は天井まで届いた代表です。

## 尾のノルムと次数 — D ≤ 4 が上限

**候補 3.4.** W の座標の $n$ 段の写り $(Tf)(q)=16^{-n}\sum_m G_m(q)^{\mathrm{H}}f(p_m)G_m(q)$（$m$ は $16^n$ 本の道、$G_m$ は折り返しの積）で、全ての段の代表が $\mathrm{ord}(K_k)\ge k_0$ を満たし、$\hat{C}_0(0)=4I$ とします。(a) $D\le 2k_0$ なら記号の側のノルム $\|\cdot\|_D=\sup_{q\neq0}\|\cdot\|_2/|\hat{q}|^{D}$ で $T$ は有界。(b) $D>2k_0$ で $m\neq0$ の道の主要係数 $S$ が 0 でなければ、$q_0$ の近くの山の入力で $|q_0|^{2k_0-D}$ の速さで発散します 読 （段の数に一様な定数を仮定した筋で、無限段の一様性は扱っていません）。拘束に制限した版では $k_0$ を $\mathrm{ord}^{V}(F)$ に置き換えます。

表 7　尾のノルム（$D=4$、軸 $q=2\pi/L$ の入力、$L=24$〜$192$ の 4 点） 計算

| 代表 | ord | 値 | 候補 3.4 の型 |
|---|---|---|---|
| A3 | 1 | 1.486・5.88・23.5・93.8（$L^2$ で増える） | $\|q\|^{2\cdot1-4}$ |
| A4 | 2 | 0.01638・0.01640・0.01643・0.01643（有界） | $\|q\|^{2\cdot2-4}=$ 定数 |

$R$ から（$\mathrm{ord}^V = 2$）では $D = 4$ で有界、$D = 6$ で $q^{-2}$、$D = 7$ で $q^{-3}$ でした 計算 。記録の全ての場合が (a)(b) の型と合います。$\mathrm{ord}^V(F) = 2$ なので、$\mathrm{im}\, D$ の上の $D = 6$ の尾は代表をどう選んでも発散し、**記録の型の範囲では $\sup |\hat{q}|^D$ の尾は $D \le 4$ が上限**と読めます 読 。

「$2 \cdot \mathrm{ord}$」の 2 は、W の座標の写りが同じ代表を両側に置く合同変換 $G^{\mathrm{H}} f G$ であることから来ます。多重格子では延長と制限の次数を別々に選べ、「延長の次数＋制限の次数 $\ge$ 方程式の次数」という規則があります（Hemker 1990） 読 。ここでは一つの代表が両方を兼ねています。

### 一次の積率を合わせた代表と和の規則

**候補 3.5（次数とずらしたジェット）.** $J_s(q) := e^{-iq\cdot s/2}\hat{K}_s(q)$（$\hat{K}_s$ は位置 $s$ の 6 行の記号）と置くと、$\mathrm{ord}(K) \ge k \Leftrightarrow J_s(q)$ の $k-1$ 次までの Taylor 多項式が $s$ に依らない、です 読 。筋は $\hat{C}_\eta(q) = \sum_s (-1)^{\eta\cdot s} J_s(q)$ と、$(\mathbb{Z}/2)^4$ の 15 個の非自明な指標の直交性（全てとの内積が $0 \Leftrightarrow$ 定数）です。

- $k = 1$：$\hat{K}_s(0)$ が $s$ に依らない（$U/4$ はこの形）。
- $k = 2$：一次の積率が $M_s = (s/2)\hat{K}_s(0) + B$（$B$ は $s$ に依らない）。$\hat{K}_s(0) = I/4$ から $M_{s,\mu} = s_\mu I/8 + B_\mu$。これは A4 を作るときの目標の積率 $M^{\star}_{(s,o),\mu,a} = s_\mu \delta_{oa}/8 + B_\mu[o,a]$ と一致します。8 は（セルの中の位置 $s/2$）$\times$（$1/4$）です。

目標の $B$ は $R$ の $q^2$ の項から決めます。一行あたり未知数 24（4 方向 $\times$ 6）に対し、$R$ から決まる部分の階数は 20、残りの自由は 4 次元でした 計算 。この勘定は有限次元の「条件つきの延長」の型です：$(\mathrm{res}_V, C)$ が全射なら、$g|_V = f$ と $C(g) = y$ を同時に満たす $g$ があり、残りの自由度は $\dim E \cdot \dim W - \dim V \cdot \dim W - \dim Y$ です Lean （`exists_extension_with_conditions`・`finrank_freedom_with_conditions`・`conditions_count_le`）。残りの 4 次元は $\ell^1$ の増加が最小になるよう線形計画で決め、積率は目標に $1.1 \times 10^{-16}$ 以内で合い、行の $\ell^1$ は $2.26 \to 2.34$（一段目）でした 計算 。

### 代表の合成と整合

$(E_1, V_1, E, f_1)$ と $(E, V_2, W, f_2)$ が整合する（$f_1(V_1) \subseteq V_2$）なら、代表の合成は合成の代表で、$V_1$ の上の値は代表の選び方に依りません。整合しないと（$W \neq 0$）、選び方で合成の値が変わります Lean （`comp_extension_eqOn`・`comp_isExtension`・`comp_depends_of_not_le`）。記録の W の座標の連鎖は代表を合成していますが、段 $k$ の代表の出力が段 $k+1$ の拘束の部分空間に入るかは確かめていません（問い「段をまたぐ代表の合成の整合」）。$\mathrm{im}\, D$ の上の連鎖 0.3426 と $6 \times 6$ の連鎖 0.3446 の差が、その手がかりです 計算 。代表に依るノルムの変化の例として、零モードの修正で三段の Stein の上界が 0.09743 → 0.09868、符号つきの Stein の上界が A3 の 4.25 から A4 の 4.48（一段目）でした 計算 。

### 辞書

- $\mathrm{ord}_{\eta}(K)$ は、代表を延長（prolongation）と見たときの**高周波の次数**（Hemker 1990）に当たります。記号による定義と多項式の保存による定義が同値であることは後の注で述べられ、Toeplitz の多重格子での記号の零の条件は Donatelli（arXiv:0807.2565）にあります 読 。$\hat{C}_{\eta}$ は局所フーリエ解析の調和の部分空間の 16 個の成分と同じものです 典 。
- 候補 3.5 は細分割・ウェーブレットの**和の規則**を多項式の生成に移す標準の議論そのものです（Strang–Fix 1973、Jia 1998、Charina–Conti arXiv:1202.3931、Daubechies の消える積率） 典 。A4 の目標のうち $s_{\mu} I/8$ の部分は、次数 2 の和の規則の言い換えです。
- 和の規則に入らないのは二点です：(i) $B$ を $R$ の $q^{2}$ の項で決める部分（差分の一貫性の次数の条件の型）、(ii) 拘束 $V=\operatorname{im} D$ による天井 $\mathrm{ord}^{V}(F)$。面がスカラーでなく $96\times 6$ の行列であることは、ベクトル値の細分割の和の規則の範囲です 読 。

04

## 二重付値の幾何

**見返りの定理は未です。**この節は、条件の台帳の移り変わりの帯の行（26-06）を、強結合の展開と弱結合の展開の二つの付値の言葉で言い直す試みです。定義と主項の計算はできていますが、この見方から帯について新しく言える定理はまだありません。札は仮と計が中心です。

### 定義

**結合の空間** $\mathcal{K}$：プラケットの重み $f(U)=1+\sum_{r} d_r a_r \chi_r(U)$ の指標係数 $(a_r)$ の空間です。座標は $\beta$ と形の座標です。

**二つの付値.** $v_s$（強結合）は $a_r\to 0$ の側の次数（Wilson 作用では $\beta$ の次数）、$v_w$（弱結合）は $\beta\to\infty$ の側の $1/\beta$ の次数です。$e^{-c\beta}$ 型の項は $v_w=\infty$ として扱います（トランス級数の別の分枝）。

**二つの座標.** $[0,1]$ に値をとる観測量 $O$（$O(0)=0$、$O(\infty)=1$。プラケット $P$ など）について、強結合の側の座標は $O$、弱結合の側の座標は $1-O$ です。主係数を $O\approx s_1\beta$（強結合）、$1-O\approx w_1/\beta$（弱結合）と書きます。

**同点集合.** (i) 補の同点 $\{s_1\beta = w_1/\beta\}$、(ii) 同じ座標の同点 $\{s_1\beta = 1-w_1/\beta\}$、(iii) 誤差の同点 $\{K$ 項までの最良の打ち切りの誤差が等しい点$\}$。(ii) の二根の間 $\{s_1\beta \le 1-w_1/\beta\}$ を**レンズ**と呼びます。

### 不変量 κ とレンズ

**候補 4.1（目盛りに依らない量）.**結合の目盛りを $\beta \mapsto c\beta$ と変えると $s_1 \mapsto s_1/c$、$w_1 \mapsto c w_1$ なので、

$$\kappa := s_1 w_1$$

は目盛りに依りません。補の同点は $\beta^{*} = \sqrt{w_1/s_1}$ で、そこでの主項の値は $\sqrt{\kappa}$ です。同じ座標の同点は $s_1\beta^2 - \beta + w_1 = 0$ の根で、判別式は $1 - 4\kappa$ なので、**レンズは $\kappa \le \tfrac{1}{4}$ のときだけ開きます**。二根の幾何平均はいつも $\beta^{*}$ です。弦の張力 $\sigma = -\log u$ の同点は $\kappa \le 1/e$ のときだけあります［読］（二次式の判別式という初等的な事実）。

片側の主項だけを見ると、群の違いは目盛りに吸収されます。両側の主項を同時に見ると、目盛りの変更は $(\log O, \log(1-O))$ の平面の平行移動にすぎず、交わる高さ $\sqrt{\kappa}$ は動きません。群の情報が「交差の高さ」に残る、という見方です［仮］。

### 例

表 8　一プラケット（二次元では正確な解、Migdal–Kadanoff の一段の素材）の級数と同点［計算］

| 量 | $SU(2)$ | $U(1)$ |
|---|---|---|
| 強結合の級数 $u$ | $\frac{\beta}{4} - \frac{\beta^3}{96} + \frac{\beta^5}{1536} - \frac{\beta^7}{23040} + \cdots$ | $\frac{\beta}{2} - \frac{\beta^3}{16} + \frac{\beta^5}{96} - \frac{11\beta^7}{6144} + \cdots$ |
| 弱結合の級数 $1-u$ | $\frac{3}{2}\beta^{-1} - \frac{3}{8}\beta^{-2} - \frac{3}{8}\beta^{-3} - \frac{63}{128}\beta^{-4}\cdots$ | $\frac{1}{2}\beta^{-1} + \frac{1}{8}\beta^{-2} + \frac{1}{8}\beta^{-3} + \frac{25}{128}\beta^{-4}\cdots$ |
| $\kappa = s_1 w_1$ | $3/8$（レンズは空、$1-4\kappa = -\frac{1}{2}$） | $1/4$（レンズは一点 $\beta = 1$） |
| $s_3/s_1^3 \cdot w_2/w_1^2$ | $-2/3 \cdot -1/6$ | $-1/2 \cdot +1/2$ |
| 補の同点 $\beta^{*}$ と真の $u(\beta^{*})$ | $\sqrt{6} = 2.4495$、$u = 0.5004$（$u = \frac{1}{2}$ の $\beta$ は $2.4469$） | $1.0000$、$u = 0.4464$（$u = \frac{1}{2}$ の $\beta$ は $1.1593$） |
| $\sigma$ の同点 | なし（差の最大 $-\log\kappa - 1 = -0.019$） | $0.232$ と $1.399$ |
| 誤差の同点（$K = 40$） | $3.274$（誤差 $4.8 \times 10^{-4}$） | $2.124$（誤差 $2.9 \times 10^{-3}$） |
| Fisher 零点（虚軸） | $\pm i\,3.832$、$\pm i\,7.016$、… | $\pm i\,2.405$、$\pm i\,5.520$、… |

比熱 $\beta^2 u'$ は $U(1)$ で $\beta = 2.48$ に山（$0.680$）があり、$SU(2)$ では単調に $3/2$ へ上がります［計算］。この違いは $w_2/w_1^2$ の符号（$-1/6$ と $+1/2$）の違いと同じ向きで、群の違いは付値の主項ではなく次の項の符号に住んでいる、と読めます［仮］。$SU(2)$ で $u(\sqrt{6}) = 0.5004 \approx \frac{1}{2}$ となったことは $U(1)$ では成り立たない（$0.446$）ので、一般の法則ではありません。

**四次元の主項だけのレンズ.**等分配 $w_1 = \dim G/d$ を使うと $\kappa = s_1 \dim G/d$ です。

表 9　$d$ 次元の主項だけのレンズ［計算］

| d | 群 | $\kappa$ | 補の同点 $\beta^{*}$ | レンズ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | $SU(2)$ | $3/8$ | $2.449$ | なし |

| d | 群 | $\kappa$ | 補の同点 $\beta^*$ | レンズ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | $U(1)$ | $1/4$ | 1.000 | 一点 $[1,1]$ |
| 3 | $SU(2)$ | $1/4$ | 2.000 | 一点 $[2,2]$ |
| 3 | $U(1)$ | $1/6$ | 0.816 | $[0.423, 1.577]$ |
| 4 | $SU(2)$ | $3/16$ | 1.732 | $[1.000, 3.000]$ |
| 4 | $U(1)$ | $1/8$ | 0.707 | $[0.293, 1.707]$ |

四次元の $U(1)$ の転移 $\beta_c \approx 1.01$（26-06）はレンズ $[0.293, 1.707]$ の中にあります（中心 0.707 ではありません）。$SU(2)$ のレンズ $[1,3]$ は、26-06 の表で $\beta - \beta'$ が強結合の値から一ループの値へ移る範囲を含み、文献で「強結合と弱結合のどちらの展開もうまくいかない」とされる $1.5 < \beta < 2.5$（arXiv:0807.0185 の要旨）とも重なります 読 。これは一次の主項と等分配だけから出した数で、四次元の真の級数を使っていません。重なりには偶然が含まれえます 仮 。

### Migdal–Kadanoff の流れの下の同点集合

Wilson 作用から $n$ 段流したあとの基本表現の係数 $u_n(\beta)$ の等高線 $L_n(c)$ を追いました。等高線は $\beta$ の読み方に依らない対象です。

表 10　等高線 $L_n(c)$ の動き 計算

| 群 | $c$ | $L_0$ | $L_6$ | 6 段目の差 $L_6 - L_5$ |
|---|---|---|---|---|
| $SU(2)$ | 0.1575 | 0.641 | 2.230 | 0.259 |
| $SU(2)$ | 0.5 | 2.447 | 3.535 | 0.2553 |
| $SU(2)$ | 0.9 | 14.73 | 15.58 | 0.2511 |
| $U(1)$ | 0.1575 | 0.319 | 0.582 | 0.017（減りながら正） |
| $U(1)$ | 0.5 | 1.159 | 0.844 | $4.5 \times 10^{-4}$ |
| $U(1)$ | 0.7 | 2.014 | 1.5101 | $-3.5 \times 10^{-7}$（止まる） |
| $U(1)$ | 0.9 | 5.305 | 4.8478 | $-3.7 \times 10^{-7}$（止まる） |

- $SU(2)$ では、どの $c$ でも段ごとの差が 0.25 に近づきます（熱核の $1/4$）。同点集合は $\beta$ の方向へ線形に逃げ、流れの付値で言えば $\beta - \beta'$ は $v_w = 0$（定数）です 計算 。
- $U(1)$ では $c \geq 0.7$ の等高線が止まります。形が落ち着いた後の一段の動き $\beta_V - \beta'_V$ は $\beta_V = 0.67$ で $9.6 \times 10^{-4}$、0.78 で $2.2 \times 10^{-4}$、0.88 で $5.4 \times 10^{-5}$、0.99 で $1.3 \times 10^{-5}$、1.09 で $3.2 \times 10^{-6}$、1.29 で $1.8 \times 10^{-7}$ で、隣り合う点の比から読んだ指数の傾きは 13.4〜14.1 です。$e^{-c\beta V}$ の型ですが $c$ は同定していません（$2\pi^2 = 19.7$ には届いていない）。流れの付値は $v_w = \infty$ です 計算 。浮動小数の分解能では、「止まる」と「$e^{-20\beta}$ 程度で流れる」は区別できません 仮 。
- 強結合の側の写像 $u \mapsto 256u^4$ は、$s_1$ で目盛りを合わせると両群で同じです。強結合の主項の補の同点を流すと、$SU(2)$ は $2.449 \to 1.140 \to 0.785 \to 0.750$ と進んで $n \geq 4$ で解が消え、$U(1)$

は $1.0 \to 0.5 \to 0.361 \to \cdots \to 0.3152$ に収束します。極限の候補は $s_1\beta \cdot 256^{1/3} = 1$、すなわち強結合の盆の境 $u_c = 256^{-1/3} = 0.1575$ で、両群に共通です 計算 。

- 注意：Wilson の $u$ で $\beta'$ を読むと、両群とも弱結合の側で $\beta - \beta' < 0$ になります。これは Wilson の形と熱核の形が $O(1/\beta^2)$ でずれるために $\beta$ が $O(1)$ ずれる分で、流れではありません 計算 。

### 定理の候補が立たない理由と、弱めた形

「群を区別する比較が要るのは、同点集合の余次元 1 の骨格の近傍に限られる」という形は、**そのままでは成り立たない見込み**です 仮 。群の区別は、弱結合の座標の全域で流れの付値（$SU(2)$ は $v_w = 0$、$U(1)$ は $v_w = \infty$、すなわち $b_0$ の有無）として、すでに主項の水準で現れているからです。

**候補 B（弱めた形）** 仮 。観測量の族と群 $G, G'$ について、強結合の付値の一致（強結合の座標の付値の写像が $s_1$ による目盛りの合わせの下で $G$ と $G'$ で一致する）、弱結合の付値の違い（弱結合の座標の流れの付値が異なる）、主項の支配の領域（各座標の誤差がその座標の主項の $\eta$ 倍以下になる領域 $D_s(\eta)$・$D_w(\eta)$ がとれる）の三つを仮定します。このとき、比較の向き（$\beta' \le \beta$ か）を決めるのに主項の外の情報が要るのは $\mathcal{K} \setminus (D_s(\eta) \cup D_w(\eta))$ の上だけで、この集合は $\eta \to 0$ でレンズに縮みます。

- 言っていること：区別を**渡す**必要がレンズに局在する、ということです。26-06 の「帯は有界な区間」と同じ中身を付値の言葉で言い直したもので、帯を易しくするとは言いません。
- 言っていないこと：レンズの中で何が要るか。$U(1)$ の転移は $v_w = \infty$ の分枝なので、レンズの中ではトランス級数の分枝が摂動の分枝と同じ大きさになることを扱う比較が要る、という読みにとどまります 仮 。
- 二次元の一プラケットの $SU(2)$（$\kappa > \frac{1}{4}$）ではレンズが空で、候補 B は空虚に成り立ちます。ただし二次元の $U(1)$ にも相転移は無いので、$\kappa$ だけで相図は決まりません 読 。

### 既知との関係

- Fisher 零点が強結合の固定点の吸引域の境になる、という見方が知られています（Denbleyker–Du–Liu–Meurice–Zou、arXiv:1005.1993。四次元 $SU(2)$ の Wilson 作用） 読 。強結合の主項の同点が流れで盆の境 $u_c$ に吸われることは、この見方の実軸の上の影に当たると読めます 仮 。一プラケットでは、収束する強結合の級数の収束半径は一つ目の Fisher 零点の絶対値です 典 。
- 誤差の同点 (iii) は、resurgence の「どちらの級数が支配するか」をそのまま数にしたものです。一プラケットでは弱結合の漸近級数の最良誤差は $e^{-2\beta}$ の桁でした 計算 。

- 強と弱の両端の級数をつなぐ二点 Padé 近似は、レンズの中を埋める古典的な手として知られているはずです 読 （文献は確かめていません）。

05

## 錐の計算法

第 15 部の記録には、次の手作業が何度も出てきました。$p$ 次の多項式を $\ell^p$ の錐 $|f(\theta)| \le c\,\|\theta\|_p^p$ で押さえ、線形の写像（ブロック化の局所の代表）で引き戻し、引き戻しの因子を重みつきの Stein の上界で上から押さえ、一段では縮まなくても数段の合成で縮むことを確かめ、ループが段ごとに足す項をアフィンの再帰で受けて全ての段の上限を出す、という流れです（15-05 の $\ell^4$ の錐の一段の縮み・15-08 §06）。この節は §01〜§03 と同じく、この手作業に定義を与える試みです。中身の多くは既知の事実——Riesz–Thorin の補間定理、Stein–Weiss の測度を取り替える補間、Schur の検定、Hölder の不等式、作用素ノルムの指数についての対数凸性——の言い換えで、新しさは主張しません。新しいのは問いの側で、記録の数がどの量に当たるかを並べたうえで、指数 $p$ を動かしたときの「窓」と「束の数」を問いとして立てます。

### 設定

$V, W$ は有限次元の実ベクトル空間で、座標を一つ固定します。$\ell^p$ は座標の $\ell^p$ です。格子の場合は、$V$ が粗いトーラスの上の面の場（各点 6 成分）、$W$ が細かい面の場をセルごとに 96 成分で並べたもので、$K : V \to W$ は粗い並進と可換です。錐の上限は $V$ の全体でとります（Bianchi の恒等式の像に制限しません）。したがって、ここでの量は制限した量の上界です。

### 定義

**定義 5.1（錐の定数）.** $f : V \to \mathbb{R}$ が $p$ 次の斉次多項式（またはそれ以下の増大）のとき

$$c_p(f) := \sup_{\theta \neq 0} \frac{|f(\theta)|}{\|\theta\|_p^p}.$$

Lean では `IsCone f N c`（全ての $\theta$ で $|f\,\theta| \le c \cdot N\theta$）と書き、抽象の $N$ が $\|\cdot\|_p^p$ の役をします。

**定義 5.2（$p$-縮み）.** 線形の写像 $K : V \to W$ について

$$\mu_p(K) := \sup_{\theta \neq 0} \frac{\|K\theta\|_p^p}{\|\theta\|_p^p} = \|K\|_{p \to p}^p.$$

Lean では `Contracts K N μ`（全ての $\theta$ で $N(K\theta) \le \mu\, N\theta$）と書き、「$\mu_p(K) \le \mu$」と読みます。

**定義 5.3（行と列の $\ell^1$）.** $A_r := \sum_j |K_{rj}|$、$R(K) := \max_r A_r = \|K\|_{\infty\to\infty}$、$C(K) := \max_j \sum_r |K_{rj}| = \|K\|_{1\to1}$ とします。$\mu_1 = C$ であり、$\mu_p^{1/p} \to R$（$p \to \infty$）です 典 。

**定義 5.4（一般の $p \ge 2$ の重みつきの Stein の上界）.**正の重み $u$ について

$$S_p(K;u) := \max_r \frac{A_r^p}{u_r} \cdot \lambda_{\max}\big(K^{\mathsf T} D_{u/A^2} K\big), \qquad S_p(K) := S_p(K;A^p) = \lambda_{\max}\big(K^{\mathsf T} D_{A^{p-2}} K\big)$$

とします（$D_v$ は $v$ を対角に並べた行列）。標準形 $S_p(K)$ は、$p=2$ で素の $\|K\|_2^2$、$p=3$ で $D_A$、$p=4$ で $D_{A^2}$ になり、記録の $\ell^3$ と $\ell^4$ の式に戻ります。並進と可換な $K$ では、$\lambda_{\max}$ を $\sup_q \lambda_{\max}(\hat K(q)^{\mathsf H} D \hat K(q))$ に置き換えます。

- 導出 読 ：$T = D_{1/A} K$ とおくと $\|T\|_{\infty\to\infty} = 1$ です。重み $u$ の $\ell^2$ での $T$ のノルムを $M_0$ とすると $M_0^2 = \lambda_{\max}(K^{\mathsf T} D_{u/A^2} K)$ です。$(2,2;u)$ と $(\infty,\infty)$ の間で $1/p = (1-t)/2$、すなわち $t = 1 - 2/p$ として補間すると、ノルムは $M_0^{2/p}$ 以下で、値域の重みは $u^{p(1-t)/2} = u$ になります。よって $\sum_r u_r |T\theta|_r^p \le M_0^2 \|\theta\|_p^p$ で、$\|K\theta\|_p^p = \sum_r A_r^p |T\theta|_r^p$ から $\mu_p(K) \le S_p(K;u)$ が出ます。
- 補間の典拠：値域の測度を取り替える補間は Stein–Weiss の形です。ただし $\ell^\infty$ の端では重みが効かないので、両端を同じ測度 $u$ の上の言明として Riesz–Thorin だけで足ります 典 。
- **適用範囲は $p \ge 2$ です**（$t \ge 0$ が要る）。$p=2$ では $S_2(K) = \mu_2(K)$ で、上界は真の値に等しくなります。

**定義 5.5（束の数）.**段ごとの写像の列 $(K_k)$ と束の長さ $n$ について $K^{(k,n)} := K_k K_{k+1} \cdots K_{k+n-1}$ とし、

$$n_p := \min\Big\{ n : \ \sup_k \mu_p\big(K^{(k,n)}\big) < 1 \Big\} \quad (\text{無ければ } \infty)$$

とします。$\mu_p$ を $S_p$ に替えたものを上界の版 $\tilde n_p$ とすると $n_p \le \tilde n_p$ です。

**定義 5.6（窓）.**束の長さ $n$ を固定して $W_n := \{p \ge 1 : \ \mu_p(K^{(n)}) < 1\}$ とします。

**定義 5.7（アフィンの再帰）.**$c_{k+1} \le \mu_k c_k + \varepsilon_k$（$\mu_k \ge 0$、$c_k \ge 0$）。束の版は $c_{k+m} \le \mu\, c_k + \varepsilon$ です。$c_k$ は段 $k$ の錐の定数、$\varepsilon_k$ はその段で新しく生まれる $p$ 次の項の大きさに当たります。

**定義 5.8（Schur の閾値の指数）.**$R(K) < 1$ のとき $p^*(K) := 1 + \log C / \log(1/R)$ とします。後の候補 5.6 の $\mu_p \le R^{p-1} C$ が 1 を下回るのは $p > p^*$ のときです。

### 定理の候補と札

**候補 5.1（引き戻しと劣乗法）.**$c \ge 0$ なら $c_p(f \circ K) \le c_p(f)\, \mu_p(K)$ です Lean （`cone_pullback`。$V \to W$ の写像で、$N_V, N_W$ は別でよい）。同じ空間の上では $\mu_p(K_1 K_2) \le \mu_p(K_1)\mu_p(K_2)$（$\mu_1 \ge 0$）、$\mu_p(K^n) \le \mu_p(K)^n$、$c_p(f \circ K^n) \le c_p(f)\, \mu^n$ です Lean （`contracts_comp`・`contracts_iterate`・`cone_pullback_iterate`。$\mu \ge 0$）。

**候補 5.2（一段で超え、束で縮む）.**一段で $\mu_p(K) \le M$（$M > 1$ でもよい）、$n$ 段で $\mu_p(K^n) \le \mu$ なら $\mu_p(K^{qn+r}) \le M^r \mu^q$ です Lean （`block_decay`。$M \ge 0$・$\mu \ge 0$）。§01 の候補 1.4 (a) の錐の版です。上界 $S_p$ そのものは劣乗法的とは限らないので、合成の $S_p$ は合成の核から直接に計算します 読 。

**候補 5.3（上界の対数凸性）.**$\log S_p(K)$ は $p$ について凸です 読 。$S_p = \sup_{\|x\|=1} \sum_r (Kx)_r^2 A_r^{p-2}$ で、各 $x$ について右辺は $p$ の指数関数の正の和なので対数凸（Cauchy–Schwarz）、対数凸な関数の上限も対数凸だからです。Lean に入れたのは中点の離散版です Lean ：

- `weighted_rpow_midpoint`：$w \ge 0$・$a > 0$ で $\left(\sum w\, a^{(p+q)/2}\right)^2 \le \left(\sum w\, a^p\right)\left(\sum w\, a^q\right)$。
- `stein_form_midpoint`：その Stein の形 $\sum y^2 A^{p-2}$（$A > 0$）。
- `sup_midpoint`・`midpoint_below_one`：各点の中点の不等式から上限の幾何平均の上界、とくに $S_a S_b < 1$ なら中点の値は 1 を下回る。

帰結として $S_3 \le \sqrt{S_2 S_4}$ です。記録で「$\sqrt{S_2 S_4}$ は $S_3$ の少し上」と見えていたのは、別の二つの上界の比べではなく、同じ関数 $\log S_p$ の曲がりの余裕でした。$\sqrt{S_2 S_4}/S_3 - 1$ がその曲がりの大きさの一つの数になります（表 12）。

**候補 5.4（真の $p$-縮みの対数凸性）.**$\log \mu_p$ も $p > 0$ について凸です。Riesz–Thorin により $\psi(s) := \log \|K\|_{1/s \to 1/s}$ は $s \in [0,1]$ で凸 典 、$\log \mu_p = p\,\psi(1/p)$ は $\psi$ の perspective なので凸 読 。候補 5.3 は上界 $S_p$ について直接に（指数の和として）言えることで、候補 5.4 は真の $\mu_p$ について $1/p$ の凸性から perspective を通して言えることです。依って立つものが違います。帰結は二つです 読 。

- 窓 $W_n$ は区間です（凸関数が負になる集合）。
- $\mu_p^{1/p} \to R$ から漸近の傾きは $\log R$ で、凸性から $p \ge p_0$ で $\mu_p \le \mu_{p0}\, R^{p-p0}$。$p_0 = 2$ では Riesz–Thorin を $(2,\infty)$ の間で使ったものと同じです。上界の版 $S_p \le R^{p-p0} S_{p0}$ は直接に出ます Lean （`weighted_rpow_shift`：$w \ge 0$・$0 < a \le R$・$p_0 \le p$ で $\sum w\, a^p \le R^{p-p0} \sum w\, a^{p0}$。`sup_shift`：各点の不等式を上限に移す）。

**候補 5.5（束の数とスペクトル半径）.**固定した有限次元の作用素 $K : V \to V$ では、Gelfand の公式から $\lim_n \mu_p(K^n)^{1/n} = \rho(K)^p$ で、$\rho$ は $p$ に依りません 典 。したがって「$n_p < \infty \Leftrightarrow \rho(K) < 1$」で、$p$ によって変わるのは最小の $n$ だけです。これは §01 の定義 1.3 と同じ事実を $p$-縮みで言ったものです。ただしブロック化の写像は粗い格子から細かい格子への写像で、同じ空間の上の一つの作用素ではありません。細かい格子を $\mathbb{Z}^4$ に戻して同一視すると「2 倍の拡大と畳み込み」の型（細分割の作用素）になり、この型では $\ell^p$ のスペクトル半径が $p$ に依ります 読 。

- 定数の場は次元の勘定を与えます。面の場は一段で約 $1/4$ 倍、点の数は $2^4$ 倍なので、定数の場の比は一段あたり約 $16 \cdot 4^{-p} = 2^{4-2p}$ です 読 。記録の値は $p = 2, 3, 4$ で $1.080$・$0.2807$・

0.07297、$p$ が 1 増えるごとに約 $1/3.85$ 倍でした 計算 。$p=2$ が周辺的（$\int F^2$ は四次元で無次元）で、$p>2$ では $|F|^p$ が無関係な向きに働く、という次元の読みと合います。

- 優勢行列（§01）との結び：$|K\theta| \le |K||\theta|$ から $\mu_p(K) \le \mu_p(|K|)$ で、$|K|$ には Perron の重みが使えます。ただし記録の核では符号の打ち消しが大きく、$R(K_0K_1)=0.928$ は $R(K_0)R(K_1) \approx 2.25 \cdot 2.47 \approx 5.6$ よりずっと小さい値です 計算 。$|K|$ に移ると、この約 6 倍を最初に失います。§02 の符号を捨てる損の、$\ell^\infty$ での一つの数です 読 。

**候補 5.6（薄まりの正しい形）.**「行和 1・非負・各成分 $\le 1/m$ なら $\mu_p \le m^{1-p}$」という素朴な形は、**一般には成り立ちません** 読 。平均の写像は定数の場を保つので、正方なら $\mu_p \ge 1$ です（定数の場が反例）。成り立つのは次の形です。

- Schur の検定の $\ell^p$ 版：$p \ge 1$ で $\sum_i |\sum_j K_{ij}\theta_j|^p \le R^{p-1}C \sum_j |\theta_j|^p$、すなわち $\mu_p \le R^{p-1}C$ Lean （`row_rpow_le`：Jensen による $|\sum k_j\theta_j|^p \le (\sum |k_j|)^{p-1}\sum |k_j||\theta_j|^p$。`lp_schur`：行の $\ell^1 \le R$、列の $\ell^1 \le C$、$R \ge 0$）。$R<1$ なら $\mu_p$ の上界は $p$ について公比 $R$ で減り、$p>p^*$ で 1 を下回ります。
- その等号：行和が全て $R>0$、列和が全て $C$ なら、定数の場で等号になります Lean （`lp_schur_sharp`）。Schur の形は一般には改良できません。
- 局在した場の薄まり：$\delta$ の場では $\sum_i |k_i|^p \le M^{p-1}\sum_i |k_i|$（$|k_i| \le M$、$p \ge 1$） Lean （`delta_dilution`）。成分が $1/m$ 以下なら $m^{1-p}$ 倍です。$m^{1-p}$ の薄まりが効くのは局在した場だけで、広がった場は行の $\ell^1$ でしか薄まりません。
- 錐が縮む最小の形：$\mu_p \le \mu_2\, R^{p-2}$（候補 5.4 の帰結） 読 、上界の版 $S_p \le S_2\, R^{p-2}$ Lean （`weighted_rpow_shift`・`sup_shift`）。$\ell^2$ は周辺的で $\mu_2 \ge 1$ に留まり、合成の行の $\ell^1$ が段とともに 1 を切り、$p>2$ では $R^{p-2}$ の分だけ得をする、という読みです 読 。記録の一段の $\ell^3$ を最大にする場が広がっていた（局在の度合い 0.006）ことは、障害が広がった場の側、すなわち $\delta$ の場の薄まりが効かない側にあることと合います 計算 。

**候補 5.7（アフィンの再帰）.**次の五つです Lean 。§01 の候補 1.4 (c)（`affine_uniform`）を、段で変わる係数と束に広げたものです。

- `affine_const`：$c_{k+1} \le \mu c_k + \varepsilon$（$0 \le \mu < 1$、$\varepsilon \ge 0$）$\Rightarrow c_n \le \mu^n c_0 + \varepsilon/(1-\mu)$。
- `affine_varying`：$0 \le \mu_k \le \bar\mu < 1$、$\varepsilon_k \le \bar\varepsilon$（$\bar\varepsilon \ge 0$）、$c_k \ge 0 \Rightarrow c_n \le \bar\mu^n c_0 + \bar\varepsilon/(1-\bar\mu)$。
- `affine_invariant`：同じ仮定で $c_0 \le \bar\varepsilon/(1-\bar\mu)$ なら、全ての $n$ で $c_n \le \bar\varepsilon/(1-\bar\mu)$（不変な区間）。
- `affine_eventually`：同じ仮定で、任意の $\delta>0$ に対して十分先の $n$ で $c_n \le \bar\varepsilon/(1-\bar\mu)+\delta$（$\limsup c_n \le \bar\varepsilon/(1-\bar\mu)$ の形）。

- `affine_block`：$c_{k+m} \le \mu c_k + \varepsilon$（$0 \le \mu < 1$、$\varepsilon \ge 0$）$\Rightarrow c_{mn} \le \mu^n c_0 + \varepsilon/(1-\mu)$。候補 5.2 と合わせると、束の間の段では $M^r$（$r < m$）の因子が一度だけ掛かります。

表 11　§05 の定理の候補。どれも既知の事実の有限次元の形か、その初等的な帰結です

| 候補 | 言明（一行） | 札 | 何の言い換えか |
|---|---|---|---|
| 5.1 | $c_p(f \circ K) \le c_p(f)\mu_p(K)$、$\mu_p(K_1 K_2) \le \mu_p(K_1)\mu_p(K_2)$、$\mu_p(K^n) \le \mu_p(K)^n$ | Lean（`cone_pullback`・`contracts_comp`・`contracts_iterate`・`cone_pullback_iterate`） | 作用素ノルムの劣乗法性 |
| 5.2 | 一段 $\le M$、$n$ 段 $\le \mu \Rightarrow qn + r$ 段 $\le M^r \mu^q$ | Lean（`block_decay`） | Gelfand の公式の有限の版（§01 の候補 1.4 (a)） |
| 5.3 | $\log S_p$ は $p$ について凸、とくに $S_3 \le \sqrt{S_2 S_4}$ | 連続の版 読 ・中点の離散版 Lean（`weighted_rpow_midpoint`・`stein_form_midpoint`・`sup_midpoint`・`midpoint_below_one`） | Hölder（Cauchy–Schwarz）の不等式・対数凸な関数の上限 |
| 5.4 | $\log \mu_p$ は $p$ について凸、$W_n$ は区間、$\mu_p \le \mu_{p0} R^{p-p0}$（$p \ge p_0$）。上界の版 $S_p \le R^{p-p0} S_{p0}$ | 真の $\mu_p$ は 典 ＋ 読 ・上界の版は Lean（`weighted_rpow_shift`・`sup_shift`） | Riesz–Thorin（$1/p$ についての凸性）と perspective |
| 5.5 | 固定した作用素では $n_p < \infty \Leftrightarrow \rho(K) < 1$。ブロック化の写像は細分割の型で、$\ell^p$ のスペクトル半径が $p$ に依る。定数の場の比は一段で約 $2^{4-2p}$ | 典 ・読 ・数は 計算 | Gelfand の公式・細分割の $L^p$ 理論 |
| 5.6 | 素朴な薄まり $\mu_p \le m^{1-p}$ は成り立たない（定数の場）。成り立つのは $\mu_p \le R^{p-1} C$（等号あり）、$\delta$ の場の $M^{p-1}$、$S_p \le S_2 R^{p-2}$ | 反例は 読 ・三つの形は Lean（`row_rpow_le`・`lp_schur`・`lp_schur_sharp`・`delta_dilution`・`weighted_rpow_shift`）・$\mu_p \le \mu_2 R^{p-2}$ は 読 | Schur の検定・Riesz–Thorin の $(1,\infty)$ と $(2,\infty)$ の有限和 |
| 5.7 | アフィンの再帰：一定の係数・段で変わる係数・不変な区間・上極限・$m$ 段の束 | Lean（`affine_const`・`affine_varying`・`affine_invariant`・`affine_eventually`・`affine_block`） | アフィンの再帰の初等的な事実（§01 の候補 1.4 (c)） |

## 記録の数との対応

一段は $8^4$ のトーラスの段 0 の核 $K_0$（切り詰めなし）、二段は $K_0 K_1$（粗い $16^4$、核を $R = 3$ で切り詰め、失った $\ell^1$ は $K_0$ で 0.8%、$K_1$ で 1.9%）、三段は $K_0 K_1 K_2$（粗い $12^4$、$R = 3$）です。一段の下界は準ニュートン法（L-BFGS、二つの始点）による真の比の値で、$p \ge 12$ では最大の行の符号の場による値に替えました。下界は最大であるとは示していません。全て浮動小数の計算で、区間の評価ではありません 計算 。

表 12　重みつきの Stein の上界 $S_p$ と一段の下界 計算

| $p$ | 一段 $S_p$ | 一段 下界 | 一段 定数の場 | 二段 $S_p$ | 三段 $S_p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1.9806 | 1.9806 | 1.080 | 3.0189 | 3.6658 |
| 2.5 | 2.3626 | 1.4106 | 0.551 | 2.2358 | – |

| $p$ | 一段 $S_p$ | 一段 下界 | 一段 定数の場 | 二段 $S_p$ | 三段 $S_p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2.8641 | 1.0233 | 0.2807 | 1.6642 | 0.57864 |
| 3.5 | 3.5442 | 0.7730 | 0.1431 | 1.2501 | – |
| 4 | 4.4457 | 0.6470 | 0.0730 | **0.9707** | 0.09599 |
| 5 | 7.8474 | 0.7328 | 0.0190 | 0.6144 | – |
| 6 | 14.910 | 1.2326 | 0.0049 | 0.4093 | – |
| 8 | 65.160 | 5.0155 | 0.0003 | 0.2197 | – |
| 16 | 3.91e4 | 18.2（符号の場） | | 0.0598 | – |
| 32 | 1.71e10 | 7.96e6（符号の場） | | 0.0143 | – |
| $\infty$（$S_p^{1/p} \to R$） | $R = 2.2524$ | | | $R = 0.9283$ | $R = 0.3318$ |

- $\log S_p$ **の凹性**：二階の差分商は、一段（$p = 2$〜$64$）、二段（$2$〜$32$）、三段（$2, 3, 4$）のどれでも全て正でした。三点の比 $S_p / (S_a^{\lambda} S_b^{1-\lambda})$ は 0.858〜0.99999 で、全て 1 以下です（候補 5.3）計算 。
- $\sqrt{S_2 S_4}/S_3$：一段 1.036、二段 1.029、三段 1.025（$K_0K_1K_2$）・1.016（$K_4K_4K_4$）計算 。
- **漸近の傾き**：$S_p^{1/p} \to R$ で、$R$ は一段 2.252・二段 0.928・三段 0.332 と段とともに下がります。大きい $p$ での $\log S_p$ の傾きは $\log R$ に一致しました（一段、$p = 48 \to 64$ の傾き 0.8125 に対して $\log R = 0.8120$）計算 。
- **傾きの単調性と外挿**：三段 $K_0K_1K_2$ の $\log S_p$ の傾きは $2 \to 3$ で $-1.846$、$3 \to 4$ で $-1.796$ と増え、漸近の傾き $\log R = -1.103$ に向かいます。候補 5.4 の上界の版から、$p \geq 4$ で $S_p \leq S_4 R^{p-4} = 0.0960 \cdot 0.332^{p-4}$ となり、高い $p$ の錐は計算し直さずに上から押さえられます（不等式は Lean、数は 計算 ）。
- **三段の三つの** $p$：$p = 2/3/4$ で 3.67・0.58・0.092 です（$K_0K_1K_2$ では表 12 の 3.6658・0.57864・0.09599、$K_1K_2K_3$ から $K_4K_4K_4$ までは 3.673〜3.682・0.5715〜0.5732・0.0920〜0.0922 で、段に依らずほぼ同じ）。一段の上界は $p$ とともに大きくなるのに、三段では $p$ とともに小さくなり、三段の $\ell^2$ は伸び、$\ell^3$ と $\ell^4$ は縮みます 計算 。
- **Schur は記録の核では弱い**：列の $\ell^1$ が $C = 23.3$（一段）・131.1（二段）と大きく、$R^{p-1}C$ は一段で 52〜6856、二段で 13〜122 です。二段の $p^*$ は $1 + \log 131.1 / \log(1/0.928) \approx 66.5$ で、Stein の上界は二段の $p = 4$ ですでに 1 を下回ります。最小の形 $S_2 R^{p-2}$ も二段では $p = 16$ で 1.065、$p = 24$ で 0.587 で、$S_p$ そのものよりずっと弱い上界です 計算 。
- **束の数の上界** $\tilde{n}_p$（$S_p$ から、$K_0$ から始まる束）：$p = 3$ で 3、$p = 4$〜$32$ で 2（二段 $S_4 = 0.971$）、$p = \infty$ で 2（$R(K_0K_1) = 0.928 < 1$）、$p = 2$ では三段までのどれも 1 を超えます 計算 。
- **一段の真の** $\mu_p$：下界から、$p \leq 3$ と $p \geq 6$ では $\mu_p(K_0) \geq 1$ です。$3.5 \leq p \leq 5$ では下界 0.65〜0.77・上界 3.5〜7.8 で、**一段の真の** $\mu_p$ **が 1 を下回るかどうかは決まっていません** 計算 。下界

は $p$ について 1.98 → 0.60（$p=4$）→ 5.0（$p=8$）と U 字で、真の $\log \mu_p$ が凸（候補 5.4）であることと矛盾しません。一段の窓 $W_1$ が空でない可能性は残っています。ただし場所は狭められます。一座標の Hölder の不等式から $\mu_p \geq \max_r \|k_r\|_{p'}^{p}$ で、これは $p \geq 5.874$ で 1 以上、明示の場（格子の目の互い違いの場）の比は $p \leq 3.039$ と $p \geq 5.665$ で 1 以上です 計算 （不等式は Lean：OneStepWindow（holder_dual_ratio・exists_lpRatio_ge_row））。窓は区間なので（候補 5.4。Lean：window_ordConnected_of_logConvex、$\log \mu_p$ の凸性は仮定）、$W_1$ が空でなければ $(3.04,\ 5.67)$ の中の一つの区間です。上界の側では、行の重み $u$ の族は $u = A^{p-2}$ で飽和し（Lean：stein_row_weight_saturation）、列の重みも $b=1$ が最適で 計算 、$(2,\infty)$ の重みつき補間ではこれ以上締まりません。下界を与える場は格子の目の互い違いの模様（$|q|_\infty = \pi$）で、一段の障害は赤外でなく紫外の模様です 読 。

窓の言葉で言うと、$S_p$ による窓は二段で $[\approx 4, \infty)$ を含み、三段で $[3, 4]$ を含みます。一段では $S_p$ による窓は空で、真の窓は未確定です。$\mu 2 = S_2$ は $n \leq 3$ で 1.98・3.02・3.67 と全て 1 以上なので、各 $W_n$（$n \leq 3$）は区間であることから 2 をまたぎません 読 。

### この型に固有の問い — 窓・束の数・閾値の指数

- **窓の広がり**。ブロック化の写像の列について、窓 $W_n$ は $n$ とともにどう広がるか。候補 5.4 から各 $W_n$ は区間で、$R_n < 1$ なら上に開き、$R_n > 1$ なら上で閉じます。下端がどこへ動くかは記録の数からは分かりません。一段の $3.5 \leq p \leq 5$ の真の値が決まれば、$W_1$ が空かどうかが決まります（問い「窓の下端の動き」）。$W_1$ が空でなければ、それは $(3.04, 5.67)$ の中の一つの区間です。
- **束の数の $p \downarrow 2$ での発散**。$p < 2$ の側は、定数の場の比が段ごとに約 $2^{4-2p} > 1$ なので、$n$ が大きいと窓に入らない見込みです 仮 。$\mu_p(K^{(n)})^{1/n}$ の極限が定数の場の次元の勘定 $2^{4-2p}$ で決まるなら、$n_p$ は $c/(p-2)$ 型で発散します。決まらないなら、$W_\infty$ の下端 $p_c > 2$ が格子の幾何から決まる臨界の指数になります。どちらかは確かめていません 仮 （問い「束の数の発散」）。
- **閾値の指数 $p^*$ の意味**。Schur の $p^*$（二段で約 66.5）と Stein の窓の下端（二段で約 4）の隔たりは、列の $\ell^1$ の大きさと符号の打ち消しのどちらから来るか。重みつきの Schur（正の試験関数）で $p^*$ をどこまで下げられるか（問い「Schur の閾値と Stein の窓」）。

### 辞書

| 記録の手作業 | 既知の枠組み | 札 |
|---|---|---|
| $\ell^2$ と $\ell^\infty$ の間の補間・$\log \|K\|_{p\to p}$ の凸性 | Riesz–Thorin の補間定理（M. Riesz 1927、G. O. Thorin 1939）：$\log \|K\|_{p\to p}$ は $1/p$ について凸 | 典 |
| 値域の重みを替える補間（定義 5.4） | Stein–Weiss、Interpolation of operators with change of measures（Trans. AMS 87, 1958）。両端の測度を固定すれば Riesz–Thorin で足りる | 典 ・書誌は 読 |

| 記録の手作業 | 既知の枠組み | 札 |
|---|---|---|
| 行と列の $\ell^1$ による上界（候補 5.6） | Schur の検定（I. Schur 1911）。重みつきの版（正の試験関数）は Aronszajn・Halmos–Sunder の形で知られる | 典・書誌は 読 |
| 錐の各点の不等式・中点の不等式（候補 5.3） | Hölder の不等式・Cauchy–Schwarz・算術幾何平均 | 典 |
| $\log \mu_p$ の $p$ についての凸性（候補 5.4） | 作用素ノルムの対数凸性（Riesz–Thorin）と凸解析の perspective 関数（Boyd–Vandenberghe、Convex Optimization §3.2.6） | 典・読 |
| $\mu_p$ そのものを計算すること | $p \neq 1, 2, \infty$ では行列の $p \to p$ ノルムの近似は NP 困難（Hendrickx–Olshevsky、SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2010）。下界には Boyd の power method（D. W. Boyd 1974、Linear Algebra Appl. 9）。上界 $S_p$ を使う理由はここにある | 読 |
| 束で縮むこと（候補 5.5） | Gelfand のスペクトル半径の公式。拡大を含む作用素では細分割の $L^p$ 理論（R.-Q. Jia、Subdivision schemes in $L_p$ spaces、Adv. Comput. Math. 1995）があり、$p$ ノルムの同時スペクトル半径で収束が決まる | 典・読 |

書誌は要旨の水準で、原典の本文と照合していません。この節の定理の候補はどれも上の枠組みの有限次元の形か、その初等的な帰結です。

06

## 既知との辞書・言えている範囲・問い

### 五分類の要約

表 13　この章の主な行（札は本文の行のとおり。条件は同じ行に）

| 節 | 主張 | 札 | 条件 |
|---|---|---|---|
| §01 | 優勢行列は積と冪で閉じる | Lean | ノルム環に値を持つ有限の塊。冪は単位元のノルムが 1 |
| §01 | 候補 1.1：$k$ 段で縮めば一段で縮む重み $w'$ がある | Lean | $B \geq 0 \cdot w \geq 0 \cdot s > 0 \cdot k \geq 1 \cdot B^k w \leq s^k w$ |
| §01 | 候補 1.2〜1.5（一段の評価・重みの取り替え・有限の Gelfand・アフィンの再帰・塊の集約と二×二の判定） | Lean | 有限次元。Collatz–Wielandt の等式・Gelfand の公式そのもの・Perron ベクトルの存在は入っていない |
| §01 | 候補 1.2′（$\ell^2$ の重み、Schur の判定法）・過渡の定数の明示式 | 読 | 右と左の正の Perron ベクトルがある |
| §01 | 符号を捨てる損は段で有界とは限らない（冪零の例） | Lean | 絶対値をとってから合成する量 |
| §01 | Perron–Frobenius・Collatz–Wielandt・Gelfand・max-plus の挟み・M 行列の特徴づけ | 典 | — |
| §02 | 損は二段から先で止まり、少し下がる（6.28・5.51・5.10・5.26） | 計算 | $4^4$ のトーラス・段を $R = 3$ で切る・真の比は下界・$k \leq 4$ |
| §02 | 候補 2.1：上界 ÷ 試験の値 $\leq \kappa^{-2}$ | Lean | 全ての行で $\kappa A_r M \leq \lvert y_r \rvert \cdot \lvert v_a \rvert \leq M$ |

| 節 | 主張 | 札 | 条件 |
|---|---|---|---|
| §02 | 損 $=\langle \kappa^{-2} \rangle$（5.55・5.13・5.31） | 計算 | $4^4$・$k=2,3,4$・形と位相の因子が $1$ |
| §02 | 位相の因子 $\Phi=1$・平面波の試験の式 | 読 | $2q^* \not\equiv 0$・$4q^* \not\equiv 0$、または周期 $2$ で $u^*$ が実 |
| §02 | 仮説 (a)(b)(c) は外れ、外れ方は段で一定 | 計算 | $k\le 3$（大きいトーラス）・$k\le 4$（$4^4$） |
| §02 | 合成の核の輪郭が段で一つに近づく | 読 | 数からの読み |
| §02 | 正の部分が優勢な型の上界（Schur と合成の劣化） | Lean | 全ての行で負 $\le \delta$ 正。記録の核では仮定が満たされない |
| §02 | W の座標の損は 1.10 で止まり、階数 1 の値 1.085 に近い | 計算 | 零モードを直した核・60 型・$k\le 5$ |
| §03 | 延長の存在・アフィン構造・自由度の次元・条件つきの延長・合成の整合 | Lean | 有限次元の線形代数 |
| §03 | 候補 3.1〜3.5（零モードの一意性・Moore–Penrose の代表は局所でない・$\mathrm{ord}^V$ の不変性・尾の次数の規則・ずらしたジェット） | 読 | 格子の段は紙の筋。候補 3.4 は段に一様な定数を仮定 |
| §03 | ord：sym 0・A3 1・A4 2、$\mathrm{ord}^V(F)=2$、尾は $D\le 4$ で有界 | 計算 | 記録の代表・$D=4$ の軸の入力・$L\le 192$ |
| §03 | 和の規則・高周波の次数・Strang–Fix との対応 | 典・読 | 原典の次数の数え方の細部（$\pm 1$）は確かめていない |
| §04 | $\kappa = s_1 w_1$ は目盛りに依らず、レンズは $\kappa \le \frac{1}{4}$ で開く | 読 | 主係数だけの勘定 |
| §04 | 一プラケットの級数・同点・誤差の同点・$d$ 次元のレンズ・MK の等高線 | 計算 | 一プラケット・等分配の主項・MK の近似の写像 |
| §04 | 群の情報は交差の高さと次の項の符号に残る・四次元のレンズと帯の重なり | 仮 | 主項だけ・偶然を含みうる |
| §04 | 候補 B（区別を渡す比較はレンズに局在する） | 仮 | 強結合の付値の一致・弱結合の付値の違い・主項の支配の領域を仮定。言明だけ |
| §05 | 候補 5.1・5.2・5.7（錐の引き戻し・劣乗法・一段で超え束で縮む・アフィンの再帰の五つの形） | Lean | 抽象の $N$（$\|\cdot\|_p^p$ の役）で書いた文。$\mu\ge 0$・$0\le\mu<1$・$\varepsilon\ge 0$ など定理ごとの仮定。作用素ノルムの上限そのものは入っていない |
| §05 | 候補 5.3・5.6：$\log S_p$ の中点の凸性、Schur の $\mu_p \le R^{p-1}C$ とその等号、$\delta$ の場の薄まり、$S_p \le S_2 R^{p-2}$ | Lean | 有限和。$w\ge 0$・$a>0$・$a\le R$・$p\ge 1$。連続の $p$ での凸性と $S_p$ の式そのもの（補間）は入っていない |
| §05 | 重みつきの Stein の上界の一般の $p$ の導出・真の $\log \mu_p$ の凸性・窓 $W_n$ は区間・素朴な薄まりの反例（定数の場） | 読・典 | $p\ge 2$（$t=1-2/p\ge 0$）。凸性は Riesz–Thorin と perspective |

| 節 | 主張 | 札 | 条件 |
|---|---|---|---|
| §05 | $\log S_p$ の二階の差分商が全て正・$\sqrt{S_2 S_4}/S_3 = 1.016$〜$1.036$・$S_p^{1/p} \to R$（2.252・0.928・0.332）・束の数の上界（$p=3$ で 3、$p=4$〜$32$ と $\infty$ で 2）・一段の真の $\mu_p$ は $3.5 \le p \le 5$ で未決（下界 0.65〜0.77、上界 3.5〜7.8）。$W_1$ が空でなければ $(3.04, 5.67)$ の中の一区間 | 計算 | 一段 $8^4$ 切り詰めなし・二段 粗い $16^4$・三段 粗い $12^4$・$R=3$ で切り詰め・下界は最大と示していない |
| §05 | $n_p$ は $p \downarrow 2$ で $c/(p-2)$ 型に発散する、または $W_\infty$ の下端 $p_c > 2$ がある | 仮 | 定数の場の次元の勘定 $2^{4-2p}$ だけからの見立て |

## この章の Lean

五つのファイルは、どれも sorry を含まず、`native_decide` を使わず、末尾の公理の表示は標準の三つ（propext・Classical.choice・Quot.sound）か、その一部だけでした。どのファイルにも格子・群・測度・最小化・フーリエ変換そのものは入っていません。

表 14　この章の Lean のファイル Lean

| ファイル（名前空間） | 定理の数 | 主な定理と仮定 | 本文の場所 | 入っていないもの |
|---|---|---|---|---|
| DominantMatrixContraction（`DominantMatrix`） | 21 | `dominant_mul`・`dominant_pow`（単位元のノルムが 1）・`weighted_step`・`weighted_iter`（$Bw \le \lambda w$）・`weight_change`（$av \le w \le bv$、$a > 0$）・`liftWeight_step`（$B \ge 0$、$w \ge 0$、$s > 0$、$k \ge 1$、$B^k w \le s^k w$）・`norm_pow_le_const_mul`・`sum_norm_pow_le`・`affine_uniform`（$0 \le \lambda < 1$、$\varepsilon \ge 0$）・`aggregate_step`・`two_by_two_weight`・`two_by_two_exists`・`signedEx_sq`・`absEx_pow` | §01 | Collatz–Wielandt の等式・Gelfand の公式そのもの・Perron ベクトルの存在・候補 1.2′（$\ell^2$ の重み）・max-plus の挟み |
| SignLossBound（`SignLoss`） | 16 | `jensen_four`・`schur_four`（行の $\ell^1 \le A$、列の $\ell^1 \le B$）・`coherent_of_neg_le`（負 $\le \delta$ 正）・`loss_le_of_coherent`・`comp_coherent`・`coherence_le_one`・`sum_four_le`（$\lvert v_a \rvert \le M$）・`stein_form_le`・`stein_le_inv_sq_mul_test`（$\kappa A_r M \le \lvert y_r \rvert$）・`abs_comp_le`・`row_l1_comp_le` | §02 | Stein の式そのもの（Plancherel と補間）・平面波の位相の平均・Wielandt の定理・階数 1 への収束・損の数 |

| ファイル（名前空間） | 定理の数 | 主な定理と仮定 | 本文の場所 | 入っていないもの |
|---|---|---|---|---|
| ConstrainedExtension（`ConstrainedExtension`） | 20 | `exists_extension`・`isExtension_iff_mem_coset`・`finrank_freedom`（有限次元）・`freedom_eq_zero_iff`（$W \neq 0$）・`exists_extension_with_conditions`（$(\mathrm{res}_V, C)$ が全射）・`finrank_freedom_with_conditions`・`eq_of_eqOn_iSup`（部分空間の族の和が全体）・`comp_isExtension`（$f_1(V_1) \subseteq V_2$）・`comp_depends_of_not_le` | §03 | 格子・記号の連続性・折り返しの次数・積率・候補 3.1〜3.5 の格子の段 |
| ConeCalculus（`ConeCalculus`） | 20 | 定義 `IsCone`・`Contracts`。`cone_pullback`（$c \geq 0$）・`contracts_comp`・`contracts_iterate`・`cone_pullback_iterate`（$\mu \geq 0$）・`block_decay`（$M \geq 0$、$\mu \geq 0$）・`row_rpow_le`・`lp_schur`（$p \geq 1$、行の $\ell^1 \leq R$、列の $\ell^1 \leq C$）・`lp_schur_sharp`（行和 $R > 0$・列和 $C$ が一定）・`delta_dilution`・`weighted_rpow_midpoint`（$w \geq 0$、$a > 0$）・`stein_form_midpoint`・`weighted_rpow_shift`（$0 < a \leq R$、$p0 \leq p$）・`sup_shift`・`sup_midpoint`・`midpoint_below_one`・`affine_const`（$0 \leq \mu < 1$、$\varepsilon \geq 0$）・`affine_varying`・`affine_invariant`・`affine_eventually`・`affine_block` | §05 | 作用素ノルム（真の $\ell^p$ ノルムの上限）そのもの・Stein の上界の式（補間と Plancherel）・Riesz–Thorin・連続の $p$ での凸性・Gelfand の公式・格子と核・記録の数 |
| OneStepWindow（`LatticeGauge.OneStepWindow`） | 20 | `holder_dual_ratio`・`norm_conj_rpow`・`exists_lpRatio_ge_row`（一座標の Hölder の下界、$p > 1$）・`lamMax_mono`・`lamMax_smul`（$\lambda_{\max}$ は Rayleigh 商の上限で定義）・`steinWeighted_ge`・`stein_row_weight_saturation`（行の重みの族は $u = A^{p-2}$ で飽和）・`window_ordConnected`・`window_ordConnected_of_logConvex`（$\log \mu_p$ の凸性は仮定） | §05 | Courant–Fischer・数 $p_{\mathrm{row}} = 5.874$ と区間 $(3.04, 5.67)$（計算）・作用素ノルムそのもの |

## 言えていないこと

(a) **新しい理論や新しい定理を立てたとは言いません**。§01〜§03 と §05 の定理の候補はどれも既知の事実の有限次元の形、その初等的な帰結、または既知の枠組み（Perron–Frobenius、多重

格子の次数、和の規則、Riesz–Thorin の補間、Schur の検定）の言い換えです。この章で付け加えたのは、記録の数をそれらの量に読み替える対応と、そこから出た問いです。

(b) **Lean で通ったのは表 14 の 97 本だけです。**候補 1.2′・過渡の定数の明示式・位相の因子・候補 3.1〜3.5 の格子の段・§04 の全て・§05 の Stein の上界の一般の $p$ の導出・真の $\log \mu_p$ の凸性・候補 5.5 は、紙の筋か見立てです。

(c) **数は評価ではありません。**§02〜§04 の数は浮動小数の計算で、区間の評価ではありません。真の比は最大化の下界で、最大であるとは示していません（$16^4$ の一段では 2 つの始点で 0.5767 にとどまり、記録の 0.591 に届いていません）。

(d) **損が全ての段で有界であることは示していません。**示したのは $k \le 4$（$4^4$）と $k \le 3$（$8^4$）の数と、「そろいが下に有界なら損は有界」という条件つきの不等式だけです。$4^4$ のトーラスは核の台を大きく巻きつけるので、そこでの「損 $= \langle \kappa^{-2} \rangle$」はその周期の作用素についての事実です。

(e) **候補 3.4 の尾の規則は段に一様な定数を仮定した筋です。**無限段の一様性は扱っていません。記録の連鎖で合成の整合が成り立つかは確かめていません。

(f) **§04 の四次元の数は一次の主項と等分配だけから出したものです。**四次元の真の級数を使っていません。帯や転移との重なりは偶然を含みえます。MK は近似の写像で、$U(1)$ の止まる等高線が本当の固定線かは区別していません。候補 B は言い換えで、帯を易しくするとは言いません。

(g) **この章の結果は紫外の制御にも繰り込みの比較にも直接には効きません。**§01 の記録との対応表は記録の読み替えです。

(h) **文献の多くは要旨と抜粋の水準で読みました。**Hemker・Charina–Conti・Jia・Donatelli・Rump・Varga・Bertsekas–Tsitsiklis・arXiv:1005.1993・arXiv:0807.0185・Stein–Weiss・Hendrickx–Olshevsky・Boyd（power method）は、原典の定義の細部を確かめていません。

(i) **§05 の窓と束の数は上界の窓です。**$S_p$ による窓は二段で $[\approx 4, \infty)$、三段で $[3, 4]$ を含みますが、真の $\mu_p$ の窓の端の値は出していません。一段の $3.5 \le p \le 5$ は未決で、二段・三段の数の切り詰めと粗いトーラスの大きさへの依存は評価していません。$n_p$ の $p \downarrow 2$ での振る舞いは見立てです。

## 残る問い

表 15　この章の問い（体系の問い 1〜16）

| 番号 | 問い | 節 |
|---|---|---|
| 1 | 最悪の向きでの行のそろいの下限 $\kappa_0$ を段の極限の核の上で評価し、段の摂動で $\kappa$ が動く量を行ごとに押さえて、全ての段で損 $\le \kappa_0^{-2}$ と言える形にできるか。 | §02 |
| 2 | 大きいトーラスで Stein の最大点が周期 2 からずれる分（損 6.4 に対して上界 10.2）を、周期 2 の点に制限した Stein とそれ以外の $q$ に分けて測ると、差はどこから来るか。 | §02 |

| 番号 | 問い | 節 |
|---|---|---|
| 3 | 真の作用素の側の打ち消しを測る量（例：$\|T^k\|$ と $\||T|^k\|$ の比を符号の相似類の中の最小で割る）を一つ決めると、段でゆっくりにしか増えない損の規則性は何から来ると言えるか。 | §01・§02 |
| 4 | 有限の型と残りの戻りを二×二に集約し、記録の行列で $bc < (1-a)(1-d)$ が成り立つか。成り立つなら区間の評価に上げられるか。 | §01 |
| 5 | W の座標の記録は $\ell^2$ で測っている。候補 1.2′（Schur の判定法の重み）で読み直すと、一段の縮みの定数はどうなるか。 | §01 |
| 6 | 拘束つきの和の規則の上限：任意の $k \le \mathrm{ord}^{V}(F)$ について、$\mathrm{ord}(K) \ge k$ の局所の代表が有限範囲で取れるか。他の段・他のブロック化で $\mathrm{ord}^{V}$ が上がる場合に一般の形があるか。 | §03 |
| 7 | 自由度の正準な選び方：Stein 型のノルムを最小にする代表は存在し、一意で、局所か。 | §03 |
| 8 | 合成の整合：段 $k$ の代表の出力は段 $k+1$ の拘束の部分空間（細かい側の Bianchi の像）に入るか。入らないなら、$\mathrm{im}\, D$ の外の自由度は連鎖にどれだけ効くか。 | §03 |
| 9 | Moore–Penrose の代表の核はどの速さで減衰するか（0 次斉次の不連続な記号から $\|Z\|^{-4}$ 型か）。 | §03 |
| 10 | 有限のトーラスの対称な代表の零モードが、指数より速く $U/4$ に近づいて見えるのはなぜか。 | §03 |
| 11 | 三つ目の付値（トランス級数の指数）を足した三重付値で、$U(1)$ の帯は弱結合と指数の付値の同点、$SU(2)$ は強結合と弱結合の付値の同点、という区別が立つか。MK の $U(1)$ の傾き 13〜14 は何に向かうか。 | §04 |
| 12 | 四次元の本物の級数（強結合の高次の項と弱結合の高次のループの係数）で誤差の同点を求めると、レンズは 26-06 の帯とどう重なるか。 | §04 |
| 13 | 基本と随伴の二つの結合の空間 $(\beta_F, \beta_A)$ では、同点集合の余次元 1 の骨格は非自明な多面体複体になるか。一次の転移の線の端点とどう並ぶか。 | §04 |
| 14 | ブロック化の写像の列で、窓 $W_n = \{p : \mu_p(K^{(n)}) < 1\}$ の下端は $n$ とともにどう動くか。一段の $3.5 \le p \le 5$ で真の $\mu_p(K_0)$ は 1 を下回るか（Stein の重み $u$ を $A^p$ 以外に最適化して上界を締めるか、局在と広がりの混ざった始点や power method で下界を上げるかして、$W_1$ が空かどうかを決める）。答え（一部）：$W_1$ が空でなければ $(3.04, 5.67)$ の中の一区間。行の重みの族は $u = A^{p-2}$ で飽和し、重みつきの Stein ではこれ以上締まらない（Lean：OneStepWindow）。一段の下界は $p = 4$ で 0.6470 まで上がったが 1 との間は未決 | §05 |
| 15 | 束の数 $n_p$ は $p \downarrow 2$ でどう発散するか。$\mu_p(K^{(n)})^{1/n}$ の極限が定数の場の次元の勘定 $2^{4-2p}$ で決まって $n_p \approx c/(p-2)$ となるか、それとも $W_\infty$ の下端 $p_c > 2$ が格子の幾何から決まるか。 | §05 |
| 16 | Schur の閾値の指数 $p^*$（二段で約 66.5）と Stein の窓の下端（二段で約 4）の隔たりは、列の $\ell^1$ の大きさと符号の打ち消しのどちらから来るか。重みつきの Schur（正の試験関数）で $p^*$ をどこまで下げられるか。 | §05・§01 |

## 出典

| もの | 種別 | 出典 |
|---|---|---|
| Perron–Frobenius・Collatz–Wielandt・優勢による比較 $\rho(A) \le \rho(\|A\|) \le \rho(B)$ | 典 | R. A. Horn, C. R. Johnson, Matrix Analysis の非負行列の章（読） |

| もの | 種別 | 出典 |
|---|---|---|
| 重みつき最大ノルムでの縮みと反復法・M 行列 | 典（読） | R. S. Varga, Matrix Iterative Analysis。A. Berman, R. J. Plemmons, Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences。D. P. Bertsekas, J. N. Tsitsiklis, Parallel and Distributed Computation (1989) |
| max-plus の固有値と挟み | 典 | S. Friedland (1986)。F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, J.-P. Quadrat (1992)。P. Butkovič (2010)。M. Akian, S. Gaubert, A. Marchesini, arXiv:1309.7319（読） |
| sign-real spectral radius | 読 | S. M. Rump (1997) |
| 転送作用素の次数 | 読 | P. W. Hemker, On the order of prolongations and restrictions in multigrid procedures, J. Comput. Appl. Math. 32 (1990) 423–429。M. Donatelli, arXiv:0807.2565。U. Trottenberg, C. W. Oosterlee, A. Schüller, Multigrid（局所フーリエ解析） |
| 和の規則・Strang–Fix 条件・近似の次数 | 典（読） | G. Strang, G. Fix (1973)。R.-Q. Jia, Math. Comp. 67 (1998)。M. Charina, C. Conti, arXiv:1202.3931。I. Daubechies, Ten Lectures on Wavelets |
| Fisher 零点と強結合の盆・crossover | 読（要旨） | A. Denbleyker, D. Du, Y. Liu, Y. Meurice, H. Zou, arXiv:1005.1993。arXiv:1112.2734。arXiv:0807.0185 |
| Riesz–Thorin・Stein–Weiss・Schur の検定・$p \to p$ ノルムの計算の難しさ・細分割の $L^p$ 理論 | 典（読） | M. Riesz (1927)、G. O. Thorin (1939)。E. M. Stein, G. Weiss, Trans. AMS 87 (1958)。I. Schur (1911)。J. M. Hendrickx, A. Olshevsky, SIAM J. Matrix Anal. Appl. (2010)。D. W. Boyd, Linear Algebra Appl. 9 (1974)。R.-Q. Jia, Adv. Comput. Math. (1995)。S. Boyd, L. Vandenberghe, Convex Optimization §3.2.6 |
| §02〜§05 の数 | 計 | 本書の検討の計算の記録（合成の核の行の直接の作用と段ごとの作用の照合・準ニュートン法と周期 2 の場の二経路・一プラケットの級数は有理数で作成・§05 の $S_p$ は合成の核から直接に計算） |
| 表 14 の定理 | Lean | Lean のファイル DominantMatrixContraction・SignLossBound・ConstrainedExtension・ConeCalculus・OneStepWindow |

**この章で使った語** — 優勢行列・重みつきの塊ノルム・$k$ 段の縮み・過渡の定数・一段の重み・符号を捨てる損・行のそろい・拘束つき写像・延長・局所の代表・自由度・零モード・積率・折り返しの次数 $\mathrm{ord}$ と $\mathrm{ord}^V$・ずらしたジェット・二重付値・補の同点・同じ座標の同点・誤差の同点・レンズ・$\kappa = s_1 w_1$・錐の定数 $c_p$・$p$-縮み $\mu_p$・重みつきの Stein の上界 $S_p$・束の数 $n_p$・窓 $W_n$・Schur の閾値の指数 $p^*$。

次に読む章：15-11 入口 — 一段と一つの尺度。

# 入口 — 一段と一つの尺度

この章は案内です。

この部は、本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた記録です。存在そのものは第二巻の第 6〜13 部を、二つの設計の違いは第 14 部を見てください。部の位置づけは 15-00 にあります。

**範囲** — この部の後半（15-11〜15-14）の定理は、自由場・真空の背景・線形化したブロック化についての言明か、一つの尺度（格子間隔を固定）の Wilson の測度についての言明です。繰り込んだ粗い尺度の測度、背景つきの場、段を跨ぐ一様な評価については何も言いません。重み $(1/8, 3/4, 1/8)$ は設計の選びです（28-05）。

**この章で分かること** — この部の後半の章（15-12〜15-14）と、第 22 部へ移った大きい面の稀さ（22-01）が何を扱うかと、後半の全体に掛かる範囲です。後半は、本書の設計（切断に依らない決まったブロック写像）の一段について Lean まで済んだ部品で、紫外の制御の試みの一部として、この部に置きます。

**前提となる章** — 19-04 ブロック写像と繰り込みの一段（後半の対象の定義）、19-01（Wilson の測度）。

**先に言うこと** — 範囲は題の直下に書いたとおりです。後半の定理は、どれも既知の型の結果の、この本の対象での形式化で、Lean で機械検査したものです。連続極限の構成や質量ギャップについては、後半の章は何も言いません（示すべき言明は 19-07）。

この章の順序

1. 後半の章 — 章を一行ずつ
2. 後半の全体に掛かる範囲 — 線形・真空・一つの尺度
3. 読む順 — 対象の章との行き来

01

## 後半の章

| 章 | 一行 |
|---|---|
| 15-12 自由場の一段と多段 | 道の核で自由場を $k$ 回押した記号の漸化式の物理の部分 $G_k$：上の側・下の側・伝播関数の挟み・一段の縮み・段に一様な縮み・$\Gamma_k$ の二次の汎関数の収束。 |
| 15-13 ブロック写像の線形化と押し出しの共分散 | 非線形のブロック写像の局所性とゲージの共変性、単位元のまわりの線形化、押し出しの共分散 $CTC^{\dagger}$、線形化したブロック化で押した自由場の面の共分散。 |
| 22-01 大きい面の稀さ ― チェス盤の評価（第 22 部） | 一つの尺度の Wilson の測度で、面が全て大きい事象の確率が体積に依らない率で小さいこと（$\beta \geq 81$）。 |
| 15-14 後半（15-11〜15-13）が言えていること・言えていないこと | 後半の全ての定理を、範囲と言っていないことと Lean の宣言とともに一つの表に。 |

02

## 後半の全体に掛かる範囲

- **線形**。15-12 と 15-13 §05 は、ブロック化をその一次の部分（道の核 $C$）で置き換えた対象についての言明です。非線形のブロック写像 $B$ と一致するのは一次の部分までです（15-13 §03）。
- **真空の背景**。線形化は単位元 $U = 1$ のまわりで、押す場は Gauss の自由場です。背景の場のまわりの展開は扱いません。
- **一つの尺度**。22-01 は細かい格子の Wilson の測度そのものについての言明で、ブロック化した粗い尺度の測度には届きません。
- **設計の選び**。定数は重み $(1/8, 3/4, 1/8)$ と倍率 2 の道の族で計算したものです（19-04、論点は 28-05）。

段を跨ぐ一様な評価は、後半の章ではなく前提の側に在ります（28-04）。

03

## 読む順

15-12 と 15-13 は、19-04 の対象（道の族・ブロック写像・道の核・多段の族）を前提にします。15-13 §05 は 15-12 の上の側と下の側を使います。22-01 は 19-01 の Wilson の測度と 20-01 の鏡映正値性だけを前提にし、15-12・15-13 とは独立に読めます。

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 後半の定理の一覧は 15-14 | 粗い尺度の測度・背景つきの場・段を跨ぐ一様な評価 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 各章の定理と出典 | — | 各章の出典と再現の表 |

**この章で使った語** — 道の核・ブロック写像・記号の漸化式・押し出し・面の共分散・チェス盤の評価。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：15-12 自由場の一段と多段 — 道の核で自由場を押した伝播関数の、段に一様な評価から始めます。

# 自由場の一段と多段 — 重み (1/8, 3/4, 1/8)、真空の背景、線形化

この章は本書の検討です。§01 の前半は既存の知見です。

この部は、本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた記録です。存在そのものは第二巻の第 6〜13 部を、二つの設計の違いは第 14 部を見てください。部の位置づけは 15-00 にあります。

**範囲** — この章の定理は、自由場・真空の背景（$U = 1$）・線形化したブロック化についての言明です。対象は運動量の上の 4×4 行列の族（記号の漸化式）で、繰り込んだ粗い尺度の測度、背景つきの場、非線形のブロック化については何も言いません。重み $(1/8, 3/4, 1/8)$ は設計の選びです（28-05）。

**この章で分かること** — 道の核 $C$ のブロック平均を Feynman ゲージの自由場に $k$ 回当てたときの、記号の漸化式の物理の部分 $G_k(q)$ について、六つの事実を読みます。上の側 $G_k \preccurlyeq P/\omega$（定数はちょうど 1）、下の側 $\frac{3}{100} P/\omega \preccurlyeq G_k$、伝播関数の段に一様な挟み、一段の縮み $\mathcal{M}P \preccurlyeq \frac{3}{5}P$、17 段で $\tau < 1/170$ の段に一様な縮み、そして $\Gamma_k$ の二次の汎関数の率 $(3/5)^k$ の収束です。どれも Lean で機械検査した言明です。

**前提となる章** — 19-04 道の核・19-04 多段の族・重みは設計の選び、7-05 § 自由場。

**先に言うこと** — 範囲は題の直下に書いたとおりです。加えて四つあります。(1) 運動量は無限体積の連続の運動量 $q \in \mathbb{R}^4$（$\omega(q) > 0$）で、有限のトーラスの運動量はその一部です。(2) $G_m$ が位置の空間の段の共分散（自由場を $m$ 回押した作用素）の記号の物理の部分であることは Lean に在りますが、§02〜§07 の不等式は記号（運動量ごとの行列）の不等式で、位置の空間の作用素の不等式としては述べていません。(3) 定数は真の値より 3〜186 倍緩く読、$\Gamma_k$ の収束の定数は $\kappa^2 \approx 1.4 \cdot 10^{13}$読 です。(4) 「一ループの結合が収束する」とは言いません。言えているのは $\Gamma_k$ の二次の汎関数の収束までです。

この章の順序

1. 対象 — 記号の漸化式と物理の部分 $G_k$ — 道の核の記号、別名、$\mathcal{M}$、$G_k = \mathcal{M}^k(P/\omega)$
2. 上の側 — $G_k \preccurlyeq P/\omega$ — 定数はちょうど 1、一段の不等式と順序の保存から
3. 寄り道：上の側の中の補題 $E_\nu < 4$ — 陽な関数の上界と、反転の不変
4. 下の側 — $\frac{3}{100}P/\omega \preccurlyeq G_k$ — 一番近い別名の鎖と十六の別名の場合分け
5. 伝播関数の段に一様な挟み — $\operatorname{ran} P$ の上の逆 $H_k$ と $(\omega/745)P \preccurlyeq \frac{1}{4}H_k \preccurlyeq 312\,\omega P$
6. 一段の縮み $\mathcal{M}P \preccurlyeq \frac{3}{5}P$ — 真の上限は $125/256$ 読
7. 段に一様な縮み — 17 段で $\tau < 1/170$ — 一番近い別名の項と残りに分ける
8. $\Gamma_k$ の二次の汎関数の収束 — 別名の和の上の揺らぎの形、率 $(3/5)^k$
9. 言っていないこと — 格子の段の作用との同一視、位置の空間、定数の緩さ

01

## 対象 — 記号の漸化式と物理の部分 $G_k$

導入は 7-05 §自由場 です。自由場をブロック化の線形写像で押すと、押した場もまた Gauss の場で、その共分散は $CTC^\dagger$ です 典 。並進不変な作用素は運動量ごとの行列（記号）で書けるので、段を重ねる操作は運動量の上の行列の漸化式になります。繰り込み群の解析では、この自由場の段の伝播関数の評価が出発点の一つです（Bałaban の連作、7-07） 典 。

この章の対象は、19-04 §自由場の側の多段の族 で置いたものです。19-04 ではトーラスの運動量で置いたものを、ここでは $\omega > 0$ の全ての $q \in \mathbb{R}^4$ で考えます。記号を繰り返します。運動量 $q \in \mathbb{R}^4$ について

$$\omega(q) = \sum_{\nu} 4\sin^2\frac{q_\nu}{2}, \qquad s_\nu(q) = \sin\frac{q_\nu}{2}, \qquad P(q) = 1 - \frac{s(q)s(q)^{\mathsf{T}}}{|s(q)|^2}. \tag{1}$$

$P(q)$ は階数 3 の射影で、ゲージの向きを除いた「物理の部分」への射影です。粗い運動量 $q$ に落ちる細かい運動量（別名）は $r_\zeta(q) = q/2 + \pi\zeta$、$\zeta \in \{0,1\}^4$ の 16 個です。一段の写像は

$$(\mathcal{M}G)(q) = \frac{1}{16}\sum_{\zeta\in\{0,1\}^4} A_\zeta(q)\, G\big(r_\zeta(q)\big)\, A_\zeta(q)^{\mathsf{T}}, \qquad A_\zeta = 2P(q)\, S_\zeta C(r_\zeta)\, P(r_\zeta)\, N(r_\zeta), \tag{2}$$

で、$S_\zeta$ は符号の対角、$C(r)$ は cos の対角、$N$ は道の族の平均から来る陽な $4\times4$ 行列です（19-04 (9) の係数の記号に現れる行列）。段 $k$ の族は

$$G_0 = P/\omega, \qquad G_k = \mathcal{M}^k(P/\omega) \qquad (\omega(q) > 0). \tag{3}$$

$G_k$ が何であるかを正確に言います。道の核の記号を $Q(q)$ とし、細かい段の記号 $X$ から粗い段の記号への漸化式を $\mathcal{R}$ と書くと、出発点 $X_0 = I/\omega$（Feynman ゲージの自由な伝播関数の記号）から $\mathcal{R}^k X_0$ が決まり、その物理の部分が $G_k$ です。

$$P\,(\mathcal{R}^k X_0)\,P = \mathcal{M}^k(P\,X_0\,P) = G_k. \tag{4}$$

Lean：(4) は `LatticeRec.rec_iterate`（任意の $X_0$ で）と `LatticeRec.projFam_X0`、道の族の平均の記号の閉じた形は `LatticePath.pathSym_closed`、一段のトーラスの作用素 $T$ の記号が $X$ なら $CTC^\dagger$ の記号が $\mathcal{R}X$ であることは `LatticeTorus.torus_step`（$(\mathbb{Z}/2L)^4 \to (\mathbb{Z}/L)^4$）。自由場の共分散を $m$ 回押した格子の段の共分散の記号が $\mathcal{R}^m X_0$ で、その物理の部分が $G_m$ であることは `LatticePush.push_phase`・`LatticePush.stageCov_phase`・`LatticePush.projFam_stage` です。

この章では $G_k$ を「**記号の漸化式の物理の部分**」と呼びます。言明は全て $\omega(q) > 0$ の全ての $q \in \mathbb{R}^4$ についての、具体の $4\times4$ 行列の族の Loewner の不等式です（$A \preccurlyeq B$ は全ての $x$ で $\langle x, Ax\rangle \le \langle x, Bx\rangle$）。抽象の作用素についての言明ではありません。Lean は運動量を $\theta = q/4$ で持ち、定義域は `OneStepFinal.Qpos`、$\mathcal{M}$ は `OneStepBridge.Mfam`、別名の写像は `OneStepFinal.rqPos` です。重み $(1/8, 3/4, 1/8)$ は $N$ と $A_\zeta$ の中に入っていて、ここに出る定数は全てこの選びで計算したものです（19-04 §重み、論点は 28-05）。

02

## 上の側 — $G_k \preccurlyeq P/\omega$

**上の側の定理**　Lean：`OSUpQpos.os_up_Qpos`・`OSUpQpos.Gs_le_G0`（仮定の欄なし）。$\omega(q) > 0$ の全ての $q$ で

$$\mathcal{M}(P/\omega) \preccurlyeq P/\omega, \qquad \text{したがって全ての段 } k \text{ で} \quad G_k \preccurlyeq P/\omega. \tag{5}$$

意味。段を重ねても、押した伝播関数の物理の部分は出発点の $P/\omega$ を越えません。定数はちょうど 1 です。真の上限は $1 - 3.4\cdot10^{-6}$[読]（$k=1$ の $\omega G_1$ の最大の固有値、$2.4\cdot10^4$ 点の浮動小数）で、定数 1 は鋭い値です。

証明の道筋は三段です。

1. **一段の不等式を陽な関数の上界に帰着する**。$\langle x, \mathcal{M}(P/\omega)x\rangle$ を 16 の別名の和に開くと、$\mathcal{M}(P/\omega) \preccurlyeq P/\omega$ は「全ての $\nu$ で $E_\nu(\sigma) \le 4$」という陽な関数の不等式から従います。ここで $E_\nu$ は $\sigma_\mu = \sin^2(q_\mu/4)$ の陽な有理式です（(1) の $s$ とは別の変数）（`OSUpBridge.os_up`。寄り道に定義）。

2. **$E_\nu \le 4$ を全ての点で**。$[0,\frac12]^4$ の上では $E_\nu < 4$（$\sigma \neq 0$）が補題です。一般の点は、座標ごとに $\sigma_\mu \mapsto 1-\sigma_\mu$ と反転して $[0,\frac12]^4$ に移し、$E_\nu$ がこの反転で変わらないことを使います（`OSUpQpos.hEE_all`）。
3. **段を重ねる**。$\mathcal{M}$ は順序を保つ線形写像です。$\mathcal{M}G_0 \preccurlyeq G_0$ に $\mathcal{M}^k$ を当てると $G_{k+1} \preccurlyeq G_k$、推移で $G_k \preccurlyeq G_0$ です初。

段の列は単調に減ります：$G_0 \succcurlyeq G_1 \succcurlyeq G_2 \succcurlyeq \cdots$。これが §06・§07 の入力です。

### 寄り道：上の側の中の補題 $E_\nu < 4$

飛ばしてよい。$\sigma \in [0,1]^4$（$\sigma_\mu = \sin^2(q_\mu/4)$）、$e \in \{0,1\}^4$ について $b_{e,\mu} = 1-\sigma_\mu$（$e_\mu = 1$）・$\sigma_\mu$（$e_\mu = 0$）、$H = 4\sum_\mu \sigma_\mu(1-\sigma_\mu)$、$X_e = \sum_\mu b_{e,\mu}$ とおき、

$$E_\nu(\sigma) = \sum_{e\in\{0,1\}^4} \frac{H}{X_e}\,\kappa_e^{+}\,(1-b_{e,\nu})$$

とします。$\kappa_e^{+}$ は $X_e$・$\sum b^2$・$\max b$ の陽な有理式の二つの値の大きい方の二乗です。Lean：`FreeStageOS.E_lt_four_s`（$\sigma \in [0,\frac12]^4 \setminus \{0\}$ で $E_\nu(\sigma) < 4$）、運動量の形 `FreeStageOS.E_lt_four`、二変数の有理式の不等式 `FreeStageOS.eq_lt_four`。上限 $4$ は鋭く、$\sigma \to 0$ で $E_\nu \to 4$ に迫ります（例：$\sigma = (10^{-6},0,0,0)$ で $3.999995$読）。反転の不変は、$e \mapsto e \oplus f$ が $\{0,1\}^4$ の全単射で、$H$ の各項 $b(1-b)$ が $b \mapsto 1-b$ で変わらないことから来ます（`OSUpQpos.EE_bbflip`）。この補題はスカラーの関数の上界で、格子の対象そのものの定理ではありません。上の側の定理の部品として置きます。

03

## 下の側 — $\frac{3}{100}P/\omega \preccurlyeq G_k$

**下の側の定理**　Lean：`HsSplit.lower_side_c`。別名で閉じた任意の族（$\omega > 0$）で、とくに $\omega(q) > 0$ の全ての $q$ で、全ての段 $k$ について

$$\frac{3}{100}\,\frac{P}{\omega} \preccurlyeq G_k. \tag{6}$$

Lean の仮定の欄は族の二つ（別名の写像が $r_\zeta$ であること、$\omega > 0$）だけで、運動量の全体（`Qpos`・`rqPos`）ではどちらも定義から払えます。前の版 `OneStepLower.lower_side` は同じ形で定数 $(4/\pi^2)(0.04452)^2 \approx 8.03\cdot 10^{-4}$読 です。

意味。段をいくら重ねても、物理の部分は潰れません。上の側と合わせると、$\omega G_k$ の $\operatorname{ran} P$ の上の固有値は全ての段で $[3/100,\,1]$ に入ります。真の下限は段とともに下がり、$k = 0,1,\dots,5$ で $1,\ 0.210,\ 0.132,\ 0.110,\ 0.0997,\ 0.0951$読、極限の見積りは約 $0.091$読 です。$k = 4,5$ では、最小になる場所は角 $q = \pi(1,1,1,1)$ です読。定数 $3/100$ は真の値のほぼ $1/3$ です。

証明の道筋。

1. **一番近い別名の鎖**。16 の別名のうち、原点に一番近いもの $\zeta^{*}(q)$ だけを残すと、$\mathcal{M}$ の一項で下から押さえられます。これを $d$ 段たどった陽な下界を `NearAliasB.chain_lower` が与えます。
2. **十六の別名**。一段で十六の別名の全てを残した下界を `NearAliasB.near_lower` が与えます。
3. **場合分け**。$\omega > 0$ の全ての点で、鎖の下界（2 段）か十六の別名の下界（5 段）のどちらかが $3/100$ 以上です（`HsSplit.hS_split`、仮定なし）。これは変数の箱を升に分けた多項式の不等式の証明書で確かめます[機]。証明書は Lean の核で検査した、解析の証明の支えです。
4. **段に渡す**。場合分けの下界を段ごとに当てて (6) を得ます（`NearAliasB.lower_side_split`）。

04

## 伝播関数の段に一様な挟み

$G_k(q)$ は $\operatorname{ran} P(q)$ の上で正定値なので、そこで逆を持ちます。その逆 $H_k(q)$（$P H_k = H_k$、$G_k H_k = P$）を伝播関数の逆、$\frac{1}{4}H_k$ をその四分の一と呼びます。$H_k$ は $G_k$ から一つに決まります[初]。

**伝播関数の挟みの定理**　Lean：`LatticeRec.lattice_bracket`（記号の漸化式 $\mathcal{R}^{k}(I/\omega)$ の物理の部分の形）・`OneStepLower.bracket_Qpos_free`（$\mathcal{M}^{k}(P/\omega)$ の形）。仮定の欄なし。全ての段 $k$、$\omega(q) > 0$ の全ての $q$ で

$$\frac{\omega(q)}{745}\,P(q) \;\preccurlyeq\; \tfrac{1}{4}H_k(q) \;\preccurlyeq\; 312\,\omega(q)\,P(q). \tag{7}$$

上の定数を改めた版 `NearAliasB.bracket_Qpos_split` では、右辺が $\omega/(4\cdot\frac{3}{100})\,P = \frac{25}{3}\,\omega P$ です（§03 の下の側から）。

意味。段 $k$ の伝播関数の逆は、段に依らない二つの定数で $\omega P$ に挟まれます。$\omega P$ は細かい段の自由場の作用の物理の部分の記号です。言い換えると、段を重ねても、押した自由場の二次の形は最初の自由場の形と同じ大きさの順に留まります（$\frac{1}{4}H_k$ を押した場の作用と読むのは読みとしてで、その同一視は紙です。§08）。定数は $k$ と $q$ に一様です。体積は言明に出てきません。

証明の道筋。(7) の右側は下の側 $cP/\omega \preccurlyeq G_k$ の逆をとったものです（$\operatorname{ran} P$ の上で、逆は Loewner の順序を逆にする）初 。$c \geq 1/1248$ なら $312$、$c = 3/100$ なら $25/3$ です（前の版の下の側の定数は約 $8.03 \cdot 10^{-4} \geq 1/1248$）。左側の $745$ は $G_k \preccurlyeq 186.25\, P/\omega$ の逆で、§02 の上の側（定数 $1$）より弱い形です。上の側から逆をとれば左の定数は $1/4$ になります初 が、その形の Lean の宣言はありません。

数値で見ると、$\omega G_k$ の固有値は $[0.091,\, 1]$ あたりに入り読 、(6)(7) と split の版の定数は、真の値より 3 倍（$3/100$）から 186 倍（左の $745$）緩い読 です。

05

## 一段の縮み $\mathcal{M}P \preccurlyeq \frac{3}{5}P$

**一段の縮みの定理**　Lean：`OneStepBridge.Mfam_P_le_row`。別名で閉じた任意の族で（運動量の全体では仮定は定義から払えます）

$$\mathcal{M}P \preccurlyeq \tfrac{3}{5}\,P. \tag{8}$$

意味。射影の族 $P$ そのもの（$1/\omega$ を掛けない族）を一段押すと、$3/5$ 倍以下に縮みます。$P/\omega$ は低い運動量で大きく、$\mathcal{M}$ で保たれる（§02）のに対し、$P$ は $\omega$ の重みを持たないので、別名の平均で縮みます。§06 では、この縮みが「高い運動量の別名の寄与」を段ごとに小さくする役をします。

真の上限は $125/256 \approx 0.488$読 （$q \to 0$ で、$2 \cdot 10^5$ 点と局所の最適化）で、$3/5$ はその $1.23$ 倍です。前の版 `OneStepBridge.Mfam_P_le` は $429/512$ でした。証明は $\langle x, \mathcal{M}Px\rangle$ を行ごとに分けて評価するものです。

段の差も同じ率で縮みます。$-2P \preccurlyeq \mathcal{M}(P/\omega) - P/\omega \preccurlyeq 2P$（`CouplingLimit.D_lower`・`CouplingLimit.D_upper`）に $\mathcal{M}^k$ を当てると、$G_{k+1} - G_k$ は $\pm 2(3/5)^k P$ の間に入ります初 。数値では $\mathcal{M}(P/\omega) - P/\omega$ の値は $[-0.089,\, -0.024]P$読 で、$\pm 2$ は約 $22$ 倍緩い値です。

06

## 段に一様な縮み — 17 段で $\tau < 1/170$

**段に一様な縮みの定理**　Lean：`TorusLam.stage_tau_17`（仮定の欄なし）。

$$\tau = \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{17} + \frac{100}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^{17} < \frac{1}{170} \tag{9}$$

とおくと、全ての段 $k$、$\omega(q) > 0$ の全ての $q$、全ての $x$ で

$$\big\langle x,\ \mathcal{M}^{17}(\omega\, G_k)(q)\, x\big\rangle \ \le\ \tau\, \omega(q)\, \big\langle x,\ G_{k+17}(q)\, x\big\rangle. \tag{10}$$

ここで $\omega G_k$ は族 $q \mapsto \omega(q) G_k(q)$ です。(9) の形は Lean の `StageArith.tauM` の定義そのもので、$1/170$ との比較も Lean です。

意味。$G_{k+17} = \mathcal{M}^{17} G_k$ なので、(10) は「細かい側で $\omega$ を掛けてから 17 段押したもの」が「17 段押してから粗い側の $\omega$ を掛けたもの」の $1/170$ 倍以下だ、と言っています。細かい運動量の $\omega$ は、低い運動量では粗い運動量の $\omega$ の約 $4^{-17}$ 倍です。高い運動量の別名からの寄与は §05 の縮みで $(3/5)^{17}$ 倍になります。(9) の二つの項は、この二つの寄与に対応します。

証明の道筋。

1. **分ける**。$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1$、$\mathcal{M}_0$ は一番近い別名 $\zeta^*(q)$ の一項、$\mathcal{M}_1$ は残りの十五項。どちらも順序を保ちます。$0 \preccurlyeq F \preccurlyeq P'$ なら $\mathcal{M}^m F \preccurlyeq \mathcal{M}_0^m F + \mathcal{M}^m P'$ です（帰納、`TauSplit.iterate_split`）。
2. **入れる**。$F = \omega G_k$、$P' = P$。$0 \preccurlyeq F$ は $G_k \succcurlyeq 0$、$F \preccurlyeq P$ は §02 の上の側です。
3. **一番近い別名の項**。$\mathcal{M}_0$ は点で決まる鎖に沿って重みを運ぶので、$\omega$ は鎖の上で $\omega(\text{鎖の } m \text{ 段目}) \le (\pi^2/4) 4^{-m} \omega(q)$ と減ります（有限の Viète の積 $\prod_{j<m} \cos(\pi/2^{j+2}) \ge 2/\pi$、`TauSplit.omF_chain_le`）。
4. **残りの項**。$\mathcal{M}^m P \preccurlyeq (3/5)^m P$（§05 の反復）、それを §03 の下の側 $P \preccurlyeq (100/3)\, \omega G_{k+m}$ で $G_{k+m}$ に戻します。

段 0 の一段の縮みの値（$\tau \le 31/32$ の形）は、この章では定理として書きません。Lean にあるのはスカラーの部品までで、実際の別名の寄与をその形に組み立てる段は紙です。段に一様な縮みの具体の対象の定理は (10) です。

## 07 $\Gamma_k$ の二次の汎関数の収束

繰り込みの一段では、粗い場を固定したときの細かい場の揺らぎの共分散が要ります[典]。ここではその記号の形の候補として、16 の別名をまとめて見る空間の上の行列 $\Gamma_k$ を作ります。$\Gamma_k$ を格子の揺らぎの共分散と同一視することは紙です。

**設定**。$\mathcal{B} = \bigoplus_{\zeta \in \{0,1\}^4} \mathbb{R}^4$（別名の和、64 次元）。段 $k$ の別名の和の上の共分散 $\mathbf{A}_k(q) = \bigoplus_\zeta G_k(r_\zeta(q))$（ブロック対角）。拘束の写像 $\mathbf{C}(q) u = \frac{1}{4} \sum_\zeta A_\zeta(q) u_\zeta$（$\mathcal{B} \to \mathbb{R}^4$）。持ち上げ $E$（$\mathbb{R}^4 \to \mathcal{B}$）は、$\Pi = E\mathbf{C}$ について $\mathbf{C}\Pi = \mathbf{C}$ と $\Pi \mathbf{A}_k = \mathbf{A}_k \Pi^\dagger$ を満たすものとします。このとき

$$\Gamma_k(q) = \mathbf{A}_k(q) - \Pi\, \mathbf{A}_k(q)\, \Pi^\dagger. \tag{11}$$

$\Gamma_k$ は、条件を満たす持ち上げの選び方に依りません。二つの選び $\Pi, \Pi'$ について $\Pi^2 = \Pi$、$\Pi\Pi' = \Pi$、$\Pi'\Pi = \Pi'$ が出て、$\Pi\mathbf{A}\Pi^\dagger = \Pi\mathbf{A} = \Pi'\mathbf{A} = \Pi'\mathbf{A}\Pi'^\dagger$ となるからです[初]。

**$\Gamma_k$ の収束の定理**　Lean：`AliasPoinc.coupling_converges_gamma_closed`（仮定の欄なし。部品 `AliasLiftSize.hlift_holds`・`AliasPoinc.hH_holds`）。$\Xi$ を有限個の二次形式の値と、二次形式の値の二つの積の、重みつきの和とします：

$$\Xi(\Gamma) = a + \sum_i w_i \langle x_i, \Gamma(p_i) x_i \rangle + \sum_j w'_j \langle v_j, \Gamma(q_j) u_j \rangle \langle u'_j, \Gamma(q'_j) v'_j \rangle . \tag{12}$$

重み・ベクトル・運動量は任意です。このとき全ての段 $k$ で条件を満たす持ち上げが在り、極限 $b_\infty$ が在って

$$\left|\Xi(\Gamma_k) - b_\infty\right| \;\le\; \frac{2L'}{2/5}\Big(\frac{3}{5}\Big)^k, \qquad \sum_{k<n} \max\big(b_\infty - \Xi(\Gamma_k), 0\big) \le \frac{2L'}{(2/5)^2}. \tag{13}$$

$L' = \kappa^2\big(\sum_i |w_i|\,|x_i|^2 + \gamma \sum_j |w'_j| (\cdots)/2\big)$、$\kappa = 1 + 2\sqrt{4 + 16 \cdot 464880^2}$、$\gamma = (1 + 69120/121)/(8/745)$ で、どれも段と運動量に依りません。

意味と強さ。率 $(3/5)^k$ は §05 の縮みから来ます（数値で見た $G_k$ の段の差の比は $0.40$〜$0.42$ [読] で、その内側です）。定数は一様ですが、$\kappa^2 \approx 1.4 \cdot 10^{13}$ [読]、$\gamma \approx 5.3 \cdot 10^4$ [読] で、真の値から極めて遠い値です。

読み方の注意。一ループの結合の段の係数 $b_k$ は、背景についての二階の係数を局所の作用の型へ射影したものです。それが (12) の形の $\Xi(\Gamma_k)$ で書けることは紙で、Lean にはありません。したがってこの定理は「一ループの結合 $b_k$ が収束する」ことの証明ではなく、「$\Gamma_k$ の任意の有限の二次の汎関数が等比で収束する」ことです。$\Xi$ を一ループの頂点の形にとったとき、その極限が一ループの普遍な値（[典]、7-07）になることが期待されますが、その同定は紙で、Lean は極限の値を言いません。

08

## 言っていないこと

§02〜§07 の定理は、どれも記号の漸化式の物理の部分 $G_k$ と、それから作った $\Gamma_k$ についての言明です。次のことは言っていません。

- **格子の段の作用との同一視。** $\frac{1}{4}H_k$ を「段 $k$ の作用 $h_k$」（粗い場を固定した細かい自由場の作用の最小、Schur の補元）と読むことは紙です。Lean の対象は $G_k$ の $\operatorname{ran} P$ の上の逆までです。

- **位置の空間の作用素**。Lean で位置の空間と繋がっているのは三つです。一段：トーラスの作用素 $T$ の記号が $X$ なら $CTC^\dagger$ の記号は $\mathcal{R}X$（`LatticeTorus.torus_step`）。段の鎖と段 $0$：$(\mathbb{Z}/2^m L)^4$ の自由場の共分散（定数の成分を除く）を $m$ 回押した $(\mathbb{Z}/L)^4$ の作用素は、トーラスの運動量で位相つきの記号 $\mathcal{R}^m X_0$ をもち（`LatticePush.push_phase`・`LatticePush.freeCov_phase`・`LatticePush.stageCov_phase`）、その物理の部分は $G_m$ です（`LatticePush.projFam_stage`）。面の場の共分散（`LatticeFace.faceCov_eq_posC`、15-13）。§02〜§07 の不等式そのものを、位置の空間の作用素のあいだの不等式として述べた定理はありません。
- **有限の体積**。運動量は無限体積の連続の $q \in \mathbb{R}^4$（$\omega > 0$）で、有限のトーラスの運動量 $q = 2\pi n/N$（$n \not\equiv 0 \bmod N$）はその一部です。零の運動量は扱いません。
- **複素の形**。言明は位相を外した実の形です。位相つきの記号の等式は Lean（`LatticePush.stageCov_phase`）ですが、§02〜§06 の不等式を複素の形で述べた定理はありません。
- **定数**。真の値より 3〜186 倍緩く読 、$\Gamma_k$ の定数は $10^{13}$ の桁です読 。
- **非線形・背景・粗い尺度の測度**。線形化したブロック化（道の核 $C$）で自由場を押したものだけです。非線形のブロック写像 $B$、背景の場 $U \neq 1$、Wilson の測度を押し出した粗い尺度の測度については、この章は何も言いません。
- **重みの選び**。定数は重み $(1/8, 3/4, 1/8)$ と倍率 2 で計算したもので、別の選びではそのまま使えません（28-05）。

どの定理も、自由場をブロック化したときの伝播関数の段に一様な評価という、繰り込み群の解析で知られた型の結果の、この重みでの形式化です典 。段を跨ぐ評価のうち、非線形のブロック化や背景つきの場に要るものは前提の側に在ります（28-04）。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 上の側：$\omega > 0$ の全ての $q$、全ての段で $G_k \preccurlyeq P/\omega$（定数ちょうど 1）。Lean：`OSUpQpos.os_up_Qpos`・`OSUpQpos.Gs_le_G0` | 非線形のブロック化・背景の場。位置の空間の作用素としての形 |
| 下の側：全ての段で $\frac{3}{100}P/\omega \preccurlyeq G_k$。Lean：`HsSplit.lower_side_c` | 真の下限（約 0.091読 ）に近い定数 |
| 挟み：全ての段・全ての $q$ で $(\omega/745)P \preccurlyeq \frac{1}{4}H_k \preccurlyeq 312\,\omega P$（split の版は上が $\frac{25}{3}\omega P$）。Lean：`LatticeRec.lattice_bracket`・`OneStepLower.bracket_Qpos_free`・`NearAliasB.bracket_Qpos_split` | $\frac{1}{4}H_k$ を段の作用 $h_k$ と読むこと（紙）。不等式の複素の形。位置の空間の作用素の不等式 |

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 一段の縮み $\mathcal{M}P \preccurlyeq \frac{3}{5}P$。Lean：`OneStepBridge.Mfam_P_le_row` | 真の上限 $125/256$ 読 の Lean の形 |
| 段に一様な縮み：17 段で $\tau < 1/170$。Lean：`TorusLam.stage_tau_17` | 段 0 の $\tau \le 31/32$（組み立ては紙）。紙の議論で使う段ごとの縮みの率との同一視（Lean には無い） |
| $\Gamma_k$ の任意の有限の二次の汎関数が率 $(3/5)^k$ で収束、定数は段と運動量に一様。Lean：`AliasPoinc.coupling_converges_gamma_closed` | ループの結合 $b_k$ の収束（$b_k = \Xi(\Gamma_k)$ の同定は紙）。定数の大きさ（$\kappa^2 \approx 10^{13}$ 読 ） |
| 初 $\Gamma_k$ は条件を満たす持ち上げの選びに依らない（§07 の三行の代数） | — |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 自由場の押し出しが Gauss で共分散が $CTC^\dagger$、伝播関数の段の評価が繰り込み群の出発点であること | 典 | 7-05・7-07 の出典（T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 102 (1985) 255–275。J. Dimock, The renormalization group according to Balaban I, arXiv:1108.1335） |
| 一ループの普遍な値（§07 で比べる相手） | 典 | 7-07 の出典（$b_0$、Particle Data Group） |
| §02〜§07 の定理 | — | 本書の検討の Lean の宣言（名は本文と範囲の表。sorry なし・標準の三つの公理、別に走らせ直して確かめた）。一覧は 15-14 |
| 下の側の場合分け（§03） | 機 | 運動量の箱を升に分けた多項式の不等式の証明書を Lean の核で検査（`HsSplit.hS_split`）。解析の証明の支え |
| 固有値の範囲（$1 - 3.4 \cdot 10^{-6}$、$0.210$〜$0.0951$、約 $0.091$）、$125/256$、$[-0.089, -0.024]$、段の差の比 $0.40$〜$0.42$、$E_\nu$ の値、$\kappa^2 \cdot \gamma$ の値 | 読 | 本書の検討の数値の記録（Lean の定義をそのまま写した漸化式を浮動小数で、乱点・原点の近く・端・$N = 2, 4$ の格子の運動量の 292 点、$\mathcal{M}(P/\omega)$ は $2.4 \cdot 10^4$ 点、$\mathcal{M}P$ は $2 \cdot 10^5$ 点） |

**この章で使った語** — 記号の漸化式・物理の部分・別名・Loewner の順序・伝播関数の逆・一段の縮み・段に一様な縮み・別名の和・持ち上げ・Γ_k。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：15-13 ブロック写像の線形化と押し出しの共分散 — 位置の空間の側：非線形のブロック写像の一次の部分が道の核であること、押し出しの共分散、面の場の共分散。

# ブロック写像の線形化と押し出しの共分散

この章は本書の検討です。§01 の前半は既存の知見です。

この部は、本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた記録です。存在そのものは第二巻の第 6〜13 部を、二つの設計の違いは第 14 部を見てください。部の位置づけは 15-00 にあります。

**範囲** — この章の定理は、一つの尺度の上の非線形のブロック写像の局所の性質（局所性・ゲージの共変性）、単位元のまわりの線形化、任意の測度の押し出しの共分散の恒等式、そして自由場を線形化したブロック化で押した場の面の共分散についての言明です。繰り込んだ粗い尺度の測度、背景つきの場、段を跨ぐ非線形の評価については何も言いません。重み $(1/8, 3/4, 1/8)$ は設計の選びです（28-05）。

**この章で分かること** — 19-04 で定義した非線形のブロック写像 $B$ について、四つの事実を読みます。(1) 粗いリンクの値は半径 2 の立方体の細かいリンクだけで決まり、ゲージ変換と両立する。(2) $U = e^{\varepsilon a}$ のとき $B(U)$ は $\exp(\varepsilon\, C a)$ から $257(\varepsilon M)^2$ 以内で、一次の部分は道の核 $C$。(3) 線形写像で押した測度の共分散は $CTC^{\dagger}$（任意の測度で）。(4) 自由場を道の核で $m$ 回押した場の面の強さの共分散は、最大の固有値 $\le 1$、対角 $\ge \frac{3}{200}(1 - N^{-4})$、比 $\Lambda \le 640/9$ を、全ての段 $m$ と $N \ge 2$ で満たす。

**前提となる章** — 19-04 道の族・ブロック写像・道の核・押し出し・多段の族、15-12（下の側・上の側）。

**先に言うこと** — 範囲は題の直下に書いたとおりです。とくに §05 の面の共分散は、**線形化したブロック化（道の核 $C$）で自由場を押した場**の、面の強さの共分散です。非線形のブロック写像 $B$ で押した場の共分散ではありません。二つが一致するのは $B$ の一次の部分（§03）までで、高次の項と大きい場は扱いません。線形化は単位元 $U = 1$ のまわりだけです。

この章の順序

1. 位置の空間の側 — 15-12 の記号の漸化式と、この章の位置の空間の対象
2. 局所性とゲージの共変性 — 半径 2 の立方体、$g(2y)\,B(U)_b\,g(2(y+e_\mu))^*$
3. 単位元のまわりの線形化 — $257(\varepsilon M)^2$ の誤差と、一次の部分が道の核であること
4. 押し出しの共分散 $= CTC^\dagger$ — 任意の測度の恒等式
5. 面の強さの共分散 — 自己共役、$\lambda_{\max} \le 1$、対角の下界、$\Lambda \le 640/9$
6. 面の共分散の証明の道筋 — 位置の空間から記号へ、記号から 15-12 の二つの側へ
7. 寄り道：対角の下界の $\frac{1}{2}$ と $1 - N^{-4}$ — 向きの対称性と零の運動量
8. 言っていないこと — 非線形の共分散、背景、大きい場、粗い尺度の測度

---

01

## 位置の空間の側

導入は 7-05 §一段 です。ゲージ場のブロック化は、細かいリンクの道に沿った積を平均して粗いリンクを作ります[典]。ゲージの構造を保つために道の積を使い、平均が群から外れる分を何らかの規則で群へ戻します。良いブロック化に求められる性質として、局所であること、ゲージ変換と両立すること、単位元の近くで線形の平均に近いこと、の三つがよく挙げられます[典]。

15-12 は運動量の側の対象（記号の漸化式）を扱いました。この章は位置の空間の側です。対象は 19-04 の非線形のブロック写像

$$B(U)_b = \rho_{r_0}\big(q_b(U)\big), \qquad q_b(U) = \sum_{o,A} w(o,A)\, U\big(\gamma_{o,A}(b)\big), \qquad \rho_{r_0}(q) = \frac{q}{\max(|q|, r_0)} \tag{1}$$

と、その一次の部分の道の核 $C$、そして押し出し $B_*\mu$・$C_*\mu$ です。細かい格子は $\Lambda_{m+1} = (\mathbb{Z}/2^{m+1}L)^4$、粗い格子は $\Lambda_m = (\mathbb{Z}/2^m L)^4$、粗いリンク $b = (y,\mu)$ は細かい点 $2y$ から出ます。配位は四元数の閉じた単位球 $\mathbb{B}$ に値をとります。

§02・§03 は非線形の $B$ そのものについての言明、§04 は線形写像による押し出しの一般の恒等式、§05 は線形の $C$ で自由場を押した場についての言明です。四つとも、格子間隔を固定した一段（または線形の段の積み重ね）の話です。

02

## 局所性とゲージの共変性

**局所性の定理**　Lean：`BoxWalk.boxMap_local`（仮定は $r_0 > 0$ だけ）。二つの配位 $U, U'$ が、細かい点 $2y + z$（$z \in \mathbb{Z}^4$、各座標 $-2 \le z_i \le 2$）から出る全てのリンクで一致するなら、$B(U)_b = B(U')_b$。

**ゲージの共変性の定理**　Lean：`BoxWalk.boxMap_gauge`（仮定は $r_0 > 0$ と $|g(x)| = 1$）。細かい格子の点ごとの単位の四元数 $g$ によるゲージ変換 $(gU)_{(x,\nu)} = g(x)\, U_{(x,\nu)}\, g(x + e_\nu)^*$ について

$$B(gU)_{(y,\mu)} = g(2y)\; B(U)_{(y,\mu)}\; g\big(2(y + e_\mu)\big)^*. \tag{2}$$

この二つの定理の写像は、19-04 で定義した `ChainBlockMap.blockMap`（箱の道の族と重み）と字句で同じ定義です。別に検査した宣言で、一致は字句の照合によります。

意味。粗いリンクの値は、粗い点のまわりの $5^4$ 個の細かい点から出るリンクだけで決まります。半径 2 は道の届く範囲です：道は横に高々 1 ずれ、$\mu$ に 2 進み、戻ります。ゲージ変換は、粗い格子の上では細かい格子の $g$ を粗い点 $2y$ に制限したもので働きます。

証明の道筋。局所性は、平均の各項が道の上のリンクの値だけに依ることと、道が立方体に留まることから来ます。ゲージの共変性は二つの事実から来ます。一つは、道に沿った積がゲージ変換で両端の $g$ だけを受けること（道の内側の $g$ は $g^* g = 1$ で消える）。もう一つは、retract $\rho_{r_0}$ が単位の四元数の左右の掛け算と可換なこと（$|gqh^*| = |q|$）です[初]。

注意。トーラスが小さく（$2^{m+1} L \le 4$）立方体がトーラスを一周すると、局所性の仮定が強くなり、言明は弱くなります。偽にはなりません。

03

## 単位元のまわりの線形化

細かいリンクの上の虚の四元数の場 $a$（$\mathrm{Re}\, a_\ell = 0$、$|a_\ell| \le M$）と $\varepsilon \ge 0$ をとり、$U_\ell = \exp(\varepsilon a_\ell) \in SU(2)$ とします。道の核 $C$ は 19-04 (7) の、道に沿った場の符号つきの和の重みつきの平均です。

**線形化の定理**　Lean：`BlockLinearKernel.blockMap_exp_linear_le_one`。閾 $0 < r_0 \le 1$、$\varepsilon M \le 1/32$ なら、全ての粗いリンク $b$ で

$$\big| B(e^{\varepsilon a})_b - \exp\big(\varepsilon\, (Ca)_b\big) \big| \;\le\; 257\, (\varepsilon M)^2, \tag{3}$$

かつ、四元数から実数への任意の実線形写像 $f$（一つの色の成分をとる操作など）について $f\big((Ca)_b\big)$ は、$f \circ a$ に道の核の作用素（係数 19-04 (9)、$X \mapsto 2X$）を当てた値に等しい。

$r_0 = 1$ の版は `BlockLinearKernel.blockMap_exp_linear_r1` です。

意味。場が小さい（$\varepsilon M$ が小さい）とき、非線形のブロック写像は、リー環の上の線形写像 $C$ を指数写像で包んだものと、二次の誤差まで一致します。しかも $C$ は、15-12 で記号を扱った道の核と同じ作用素です。これが、15-12 と §05 の線形の対象を「ブロック化の一次の部分」と呼べる根拠です。

証明の道筋（各段が Lean の補題です）。

1. **道の積**。$|u_i| \le 1$、$|u_i - 1| \le \delta$ の $n$ 個の積は、$1 + \sum_i (u_i - 1)$ から $n^2\delta^2/2$ 以内です（帰納）。道の長さは 8 以下です。
2. **指数**。虚の $v$、$|v| \le 1$ で $|e^v| = 1$、$|e^v - 1| \le |v|$、$|e^v - 1 - v| \le |v|^2$。逆向きの一歩は $e^{-v}$ で同じ評価です。
3. **平均**。重みが非負で総和 1 なので、平均も同じ誤差です。単位の四元数 $u$ では $\mathrm{Re}(u - 1) = -|u-1|^2/2$ なので、一次の部分の実部は二次の大きさです。
4. **retract**。$0 < r_0 \le 1$、$|v| \le s \le \frac{1}{2}$、$|\mathrm{Re}\, v| \le \rho$ なら $|\rho_{r_0}(1+v) - (1+v)| \le 2\rho + s^2$。retract は一次の部分を変えません。
5. **合わせる**。誤差の項（retract の $72 + 81$、平均の $32$、一次の部分の $8$、指数の $64$）を足して $257$ 倍の $(\varepsilon M)^2$ です。一次の部分の一致は、色ごとに道の和を係数の表に並べ替える恒等式です。

数値で比 $|B - \exp(\varepsilon C a)|/(\varepsilon M)^2$ を見ると $0.3$〜$0.9$ で読、定数 $257$ は数百倍緩い値です。$\varepsilon M \le 1/32$ では右辺 $257/1024 < 2$（二つの単位の四元数の差の自明な上界）なので、言明は空ではありません。

注意。$U = 1$ のまわりの一次だけです。場の大きさ $\varepsilon M$ が $1/32$ を越える配位、背景の場 $U \neq 1$ のまわりの展開は扱いません。

04

## 押し出しの共分散 $= CTC^\dagger$

実の内積空間の上の測度 $\mu$ の共分散の形を、19-04 (11) のとおり $\mathrm{cov}_\mu(u, v) = \int \langle u, x\rangle\langle v, x\rangle \, d\mu - \int \langle u, x\rangle \, d\mu \int \langle v, x\rangle \, d\mu$ とします。$\mathrm{cov}_\mu(u, v) = \langle u, Tv\rangle$ となる作用素 $T$ を共分散の作用素と呼びます。

**押し出しの共分散の定理**　Lean：`PushCov.lattice_pushCov`。細かい格子のリンクの上の実の場（一つの色）の空間の任意の測度 $\mu$ と、その共分散の作用素 $T$ について、(a) ブロック写像の一次の部分の一つの色 $C_1$（`PushCov.blockLin`）は道の核の作用素に等しく、(b)

$$\operatorname{cov}_{(C_1)_*\mu}(u,v) = \big\langle u,\ C_1\, T\, C_1^{\dagger} v\big\rangle \qquad (\text{全ての } u,v). \tag{4}$$

意味。線形の写像で場を押すと、共分散は両側から写像で挟まれます。Gauss であることは使いません。測度は確率の測度でなくてもよく、どの測度にも成り立つ恒等式です（一般の形は `PushCov.covOp_map`）。証明は $\langle u, C_1 x\rangle = \langle C_1^{\dagger} u, x\rangle$ と押し出しの積分の変数変換だけです初。

注意。Lean の積分の約束では、可積分でない関数の積分は 0 と読みます。(4) が共分散として意味を持つのは、$\mu$ が二次の積率を持つときです。また、ここで押しているのは線形の $C_1$ で、非線形の $B$ で押した測度の共分散はこの形になりません。

05

## 面の強さの共分散

対象は 19-04 §自由場の側の多段の族 の格子の側です。

- $\mathrm{freeCov}_n$：$(\mathbb{Z}/n)^4$ の上の四成分の場の、Feynman ゲージの自由場の共分散。格子の Laplacian の逆を成分ごとにとり、定数の成分では 0。
- $\mathrm{stageCov}_{m,N}$：$(\mathbb{Z}/2^m N)^4$ の freeCov を、一段 $T \mapsto CTC^{\dagger}$ で $m$ 回押して $(\mathbb{Z}/N)^4$ に下ろしたもの。
- $\mathrm{faceCov}_{m,N} = \mathrm{curl} \circ \mathrm{stageCov}_{m,N} \circ \mathrm{curl}^{\dagger}$：面の強さ $(\mathrm{curl}\, A)_{(a,b)}(X) = (A_a(X+e_b) - A_a(X)) - (A_b(X+e_a) - A_b(X))$ の共分散。面の場は点ごとに六成分です。

面の場 $z$ について、二次形式 $Q(z) = \mathrm{Re}\sum_X \sum_p \overline{z_p(X)}\,(\mathrm{faceCov}\, z)_p(X)$、ノルム $|z|^2 = \sum_X \sum_p |z_p(X)|^2$、最大の固有値 $\lambda_{\max} = \sup_{z\neq 0} Q(z)/|z|^2$、点 $X_0$・面 $p$ での対角 $D(X_0,p) = \mathrm{Re}(\mathrm{faceCov}\, \delta_{X_0,p})_p(X_0)$ とおきます。

**面の共分散の定理**　Lean：`LatticeFace.lattice_face_T1h`（仮定は $N \geq 2$ だけ）。全ての段 $m \geq 0$、全ての $N \geq 2$ で、$\mathrm{faceCov}_{m,N}$ は自己共役で、全ての点 $X_0$・面 $p$ について

$$\lambda_{\max} \leq 1, \qquad \frac{3}{200}\big(1 - N^{-4}\big) \leq D(X_0,p) \leq \lambda_{\max}, \qquad \Lambda := \frac{\lambda_{\max}}{D(X_0,p)} \leq \frac{640}{9}. \tag{5}$$

さらに $\mathrm{faceCov}_{m,N}$ は、15-12 の記号 $G_m$ から作った並進不変な作用素に、点の付け替えを除いて等しい（同じ定理の第二の項）。

意味。線形化したブロック化で自由場を何段押しても、面の強さの揺らぎは、どの方向にも 1 を越えず、どの点・どの面でも $\frac{3}{200}(1-N^{-4})$ を下回りません。比 $\Lambda$ の上界 $640/9$ は段 $m$ にも $N$ にも依りません。$m = 0$（押さない自由場）では $\lambda_{\max} = 1$ ちょうどです読。

この定理は、**線形化したブロック化で自由場を押した場の、面の強さの共分散**についての言明です。非線形のブロック写像 $B$ で Wilson の測度や自由場を押した場の共分散ではありません。位置の空間の定義から直接数値で作った行列は、記号から作った作用素と $N = 2, 3, 4$、$m = 0, 1, 2$ で $1.1 \cdot 10^{-15}$ 以内で一致しています[読]。

06

## 面の共分散の証明の道筋

1. **段 0 の記号**。$\mathrm{freeCov}_n$ は指標で対角で、記号は $I/\omega$ です（`LatticePush.freeCov_phase`。$|1 - e^{iq}|^2 = 4\sin^2(q/2)$）。
2. **$m$ 段の鎖**。作用素 $T$ の記号が $X$ なら、$m$ 回押した作用素の記号は $\mathcal{R}^m X$ です（`LatticePush.push_phase`。15-12 の一段 `LatticeTorus.torus_step` を $m$ 回、格子の大きさの型を付け替えて）。段の共分散の記号は $\mathcal{R}^m X_0$（`LatticePush.stageCov_phase`）で、物理の部分は 15-12 の $G_m$ です（`LatticePush.projFam_stage`）。
3. **面の記号**。curl の記号を両側から掛けると、勾配の向きが落ち、射影 $P$ が自動で入ります（`LatticeFace.key_proj`）。よって面の共分散の記号は $\hat{d}\, G_m\, \hat{d}^\dagger$ で、位置の空間に戻した作用素が記号から作った作用素に等しい（`LatticeFace.faceCov_eq_posC`）。
4. **上の側**。15-12 の上の側 $G_m \preccurlyeq P/\omega$ から、運動量ごとに面の記号は $\hat{d}\,(P/\omega)\,\hat{d}^\dagger$ 以下で、その最大の固有値は 1 です。Plancherel で $\lambda_{\max} \le 1$（`FaceTorus.torus_face_upper`）。
5. **対角**。15-12 の下の側 $G_m \succcurlyeq \frac{3}{100} P/\omega$ を運動量の和に入れて、対角 $\ge \frac{3/100}{2}(1 - N^{-4})$（`FaceTorus.torus_face_diag`）。
6. **比**。$N \ge 2$ では $1 - N^{-4} \ge 15/16$ なので対角 $\ge \frac{3}{200} \cdot \frac{15}{16} = \frac{9}{640}$、$\lambda_{\max} \le 1$ と合わせて $\Lambda \le 640/9$ です[初]。

鎖の中で位置の空間と記号を繋ぐのは 1〜3 で、1・2 は段の共分散そのものについて、3 は面の場について Lean です。4・5 は 15-12 の二つの側をそのまま使います。

### 寄り道：対角の下界の $\frac{1}{2}$ と $1 - N^{-4}$

飛ばしてよい。点 $X_0$・面 $p = (a, b)$ の対角は、運動量 $k \in (\mathbb{Z}/N)^4$ についての平均 $N^{-4} \sum_k \langle e_p, \hat{d}(k) G_m(k) \hat{d}(k)^\dagger e_p \rangle$ です。零の運動量では $\hat{d} = 0$ で項は 0 なので、和は $N^4 - 1$ 個の項で、因子 $1 - N^{-4}$ はここから来ます[初]。各項は下の側から $\frac{3}{100}\,(|\hat{q}_a|^2 + |\hat{q}_b|^2)/\omega$ 以上で、$|\hat{q}_\nu|^2/\omega$ の運動量の和は向き $\nu$ に依らず $(N^4 - 1)/4$ です（四つの向きの和が $N^4 - 1$、Lean：`FaceTorus.sum_rt_quarter`）。面は二つの向きを持つので、平均は $\frac{1}{2}$ になります[初]。

07

## 言っていないこと

- **非線形のブロック化の共分散**。§05 は線形化したブロック化（道の核）で押した場の共分散です。非線形の $B$ との一致は §03 の一次の部分までで、二次以上の項の共分散への寄与は扱いません。
- **自由場以外**。§05 は Gauss の自由場（Feynman ゲージ、定数の成分を除く）だけです。Wilson の測度を押した場の面の共分散ではありません。§04 の恒等式はどの測度にも立ちますが、$T$ を評価する定理は自由場の $\mathbf{freeCov}$ についてだけです。
- **背景と大きい場**。線形化は $U = 1$ のまわり、$\varepsilon M \le 1/32$ だけです。背景の場のまわりの線形化、閾の下の大きい場の事象は扱いません（大きい場の稀さの一つの尺度の評価は 22-01）。
- **粗い尺度の測度**。$B_*\mu$ の性質（減衰・一様性）は何も言いません。それは示すべき言明の側です（19-07、28-04）。
- **重みの選び**。半径 2・定数 257・$640/9$ は重み $(1/8, 3/4, 1/8)$ と倍率 2 の道の族で計算したものです（28-05）。

局所性・ゲージの共変性・線形化は、ゲージ場のブロック化に標準で求められる性質の、この道の族での形式化です[典]。押し出しの共分散は、線形写像による測度の押し出しの一般の恒等式の形式化です[典]。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| 非線形のブロック写像の局所性（半径 2）とゲージの共変性（$r_0 > 0$）。Lean：`BoxWalk.boxMap_local`・`BoxWalk.boxMap_gauge` | 連続性の定数などそれ以上の性質 |
| $0 < r_0 \le 1$、$\varepsilon M \le 1/32$ で $\lvert B(e^{\varepsilon a})_b - \exp(\varepsilon (Ca)_b)\rvert \le 257(\varepsilon M)^2$、一次の部分は道の核。Lean：`BlockLinearKernel.blockMap_exp_linear_le_one` | 背景 $U \neq 1$ のまわり、大きい場、二次の項の形 |
| 任意の測度で押し出しの共分散 $= C_1 T C_1^{\dagger}$、$C_1$ は道の核。Lean：`PushCov.lattice_pushCov` | 非線形の $B$ による押し出しの共分散。一つの色の形だけ |
| 線形化したブロック化で自由場を $m$ 回押した場の面の共分散：自己共役、$\lambda_{\max} \le 1$、対角 $\ge \frac{3}{200}(1 - N^{-4})$、$\Lambda \le 640/9$（全ての $m$、$N \ge 2$）。Lean：`LatticeFace.lattice_face_T1h` | 非線形のブロック化の共分散（一致は一次の部分まで）。Wilson の測度を押した場。背景の場 |
| [初] $N \ge 2$ で $\frac{3}{200}(1 - N^{-4}) \ge 9/640$ から $\Lambda \le 640/9$ | — |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| ゲージ場のブロック化を道の積の平均で作ること、局所性・ゲージの共変性・線形化が求められること | 典 | 7-05 の出典（T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 102 (1985) 255–275。J. Dimock, The renormalization group according to Balaban I, arXiv:1108.1335） |
| §02〜§05 の定理 | — | 本書の検討の Lean の宣言（名は本文と範囲の表。sorry なし・標準の三つの公理、別に走らせ直して確かめた）。一覧は 15-14 |
| $m = 0$ で $\lambda_{\max} = 1$、位置の空間の行列と記号の作用素の一致（$1.1 \cdot 10^{-15}$） | 読 | 本書の検討の数値の記録（位置の空間の定義から直接作った行列を $N = 2, 3, 4$、$m = 0, 1, 2$ の 7 組で、記号から作った作用素と比べた） |
| 線形化の誤差の比 0.3〜0.9 | 読 | 本書の検討の数値の記録（$L = 1, 2$、乱数の場、$\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$、$r_0 = 1$ と $r_0 \le \frac{1}{2}$。道の和から作った一次の部分と道の核の作用素の差 $\le 6.4 \cdot 10^{-15}$） |

**この章で使った語** — ブロック写像・retract・局所性・ゲージの共変性・道の核・線形化・押し出し・共分散の作用素・面の強さ・面の共分散・Rayleigh 商。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：15-14 後半（15-11〜15-13）が言えていること・言えていないこと。あわせて読むなら 22-01 大きい面の稀さ — チェス盤の評価 — 線形化の外の大きい場の事象を、一つの尺度の Wilson の測度で評価します。

# 後半（15-11〜15-13）が言えていること・言えていないこと

この章は本書の検討です。

この部は、本書の検討が、公開された構成とは別の設計で紫外の制御（連続極限の存在）を試みた記録です。存在そのものは第二巻の第 6〜13 部を、二つの設計の違いは第 14 部を見てください。部の位置づけは 15-00 にあります。

**範囲** — この部の後半（15-11〜15-14）の定理と、第 22 部へ移った大きい面の稀さ（22-01）は、自由場・真空の背景・線形化したブロック化についての言明か、一つの尺度（格子間隔を固定）の Wilson の測度についての言明です。繰り込んだ粗い尺度の測度、背景つきの場、段を跨ぐ一様な評価については何も言いません。重み $(1/8, 3/4, 1/8)$ は設計の選びです（28-05）。

**この章で分かること** — この部の後半の定理と 22-01 の定理を一つの表で見ます。行ごとに、言明の短い形、範囲、言っていないこと、Lean の宣言を並べます。この表は部の後半の定理だけを扱います。部の前半（15-00〜15-10）の言えないことと問いの索引は 15-09 にあります。

**前提となる章** — 15-12・15-13・22-01（表の行の詳しい形と証明の道筋）。

**先に言うこと** — 範囲は題の直下に書いたとおりです。表の「言明」の欄は短く書いたもので、正確な形は各章の式にあります。どの定理も既知の型の結果の、この本の対象での形式化です。段を跨ぐ評価は、後半の章ではなく前提の側に在ります（§03）。

この章の順序

1. 定理の表 — 言明・範囲・言っていないこと・Lean の宣言
2. 部品として使った補題 — 単独の定理にしないもの

3. 段を跨ぐ評価は前提の側に在る — 後半の章が言わないことの置き場

01

## 定理の表

記号は各章のとおりです：$G_k$ は記号の漸化式の物理の部分（15-12 §01）、$H_k$ はその $\operatorname{ran} P$ の上の逆、$\mathcal{M}$ は一段の写像、$B$ は非線形のブロック写像、$C$ は道の核、$\mu_W$ は Wilson の測度、$Z$ はその全質量です。

| 章 | 名 | 言明（短い形） | 範囲 | 言っていないこと | Lean の宣言 |
|---|---|---|---|---|---|
| 15-12 §02 | 上の側 | $G_k \preccurlyeq P/\omega$、定数ちょうど 1 | 全ての段 $k$、$\omega(q) > 0$ の全ての $q \in \mathbb{R}^4$ | 非線形のブロック化、背景の場、位置の空間の作用素の形 | `OSUpQpos.os_up_Qpos` ・ `OSUpQpos.Gs_` |
| 15-12 §03 | 下の側 | $\frac{3}{100} P/\omega \preccurlyeq G_k$ | 同上（別名で閉じた族） | 真の下限 約 0.091 読 に近い定数 | `HsSplit.lower_side_c` |
| 15-12 §04 | 伝播関数の挟み | $(\omega/745)P \preccurlyeq \frac{1}{4}H_k \preccurlyeq 312\,\omega P$（split の版は上が $\frac{25}{3}\omega P$） | 同上、定数は $k$・$q$ に一様 | $\frac{1}{4}H_k$ を段の作用と読むこと（紙）。不等式の複素の形。定数は真の値より 3〜186 倍緩い 読 | `LatticeRec.lattice_bracket` ・ `OneStepLower.bracket_Qpos_free` ・ `NearAliasB.bracket_Qpos_split` |
| 15-12 §05 | 一段の縮み | $\mathcal{M}P \preccurlyeq \frac{3}{5}P$ | 全ての $q$ | 真の上限 $125/256$ 読 | `OneStepBridge.Mfam_P_le_row` |
| 15-12 §06 | 段に一様な縮み | $\mathcal{M}^{17}(\omega G_k) \preccurlyeq \tau\,\omega G_{k+17}$、$\tau < 1/170$ | 全ての段 $k$、全ての $q$ | 段 0 の $\tau \le 31/32$（組み立ては紙）。紙の議論で使う段ごとの縮みの率との同一視（Lean には無い） | `TorusLam.stage_tau_17` |

| 章 | 名 | 言明（短い形） | 範囲 | 言っていないこと | Lean の宣言 |
|---|---|---|---|---|---|
| 15-12 §07 | $\Gamma_k$ の収束 | $\Gamma_k$ の任意の有限の二次の汎関数が率 $(3/5)^k$ で収束 | 全ての段、定数は段と運動量に一様 | 一ループの結合 $b_k$ の収束（同定は紙）。$\kappa^2 \approx 1.4 \cdot 10^{13}$ 読 | `AliasPoinc.coupling_converges_gamma` |
| 15-13 §02 | 局所性・ゲージの共変性 | $B(U)_b$ は半径 2 の立方体のリンクで決まる。$B(gU)_b = g(2y)B(U)_b g(2(y+e_\mu))^*$ | $r_0 > 0$、$\lvert g\rvert = 1$ | 連続性の定数などそれ以上 | `BoxWalk.boxMap_local` ・ `BoxWalk.box` |
| 15-13 §03 | 線形化 | $\lvert B(e^{\varepsilon a})_b - \exp(\varepsilon (Ca)_b)\rvert \le 257(\varepsilon M)^2$、一次の部分は道の核 | $0 < r_0 \le 1$、$\varepsilon M \le 1/32$ | 背景 $U \neq 1$ のまわり、大きい場、二次の項の形 | `BlockLinearKernel.blockMap_exp_line` |
| 15-13 §04 | 押し出しの共分散 | $\mathrm{cov}_{(C_1)_*\mu} = C_1 T C_1^\dagger$ | 任意の測度（意味を持つのは二次の積率があるとき）、一つの色 | 非線形の $B$ による押し出し | `PushCov.lattice_pushCov` |
| 15-13 §05 | 面の共分散 | 自己共役、$\lambda_{\max} \le 1$、対角 $\ge \frac{3}{200}(1 - N^{-4})$、$\Lambda \le 640/9$ | 全ての段 $m$、$N \ge 2$。線形化したブロック化で自由場を押した場 | 非線形のブロック化の共分散（一致は一次の部分まで）。Wilson の測度を押した場 | `LatticeFace.lattice_face_T1h` |
| 22-01 §03 | チェス盤の評価 | $\lvert V(F)\rvert^{N^4} \le \prod_w V(\text{定数})$ | $N = 2m$（$m \ge 1$）、全ての実の $\beta$、単位の立方体の関数 | 奇数の辺、捩れのある測度 | `FoldWilson.wilson_chessboard_even` |

| 章 | 名 | 言明（短い形） | 範囲 | 言っていないこと | Lean の宣言 |
|---|---|---|---|---|---|
| 22-01 §04 | 体積に一様な稀さ | $P(X$ の面が全て $\mathrm{Re}\,U_p < 0) \le q_1^{\lfloor \lvert X\rvert /6\rfloor}$、$q_1 < 1$ | $\beta \ge 81$、$m \ge 2$、面の任意の集合 $X$。$q_1$ は $N$・$X$ に依らない | 粗い尺度の測度、$\beta < 81$、$m = 1$。閾 81 は冠の体積の粗い下界から（真の $h$ なら約 48 読 ）。$Z$ 以外に対する比 | `FoldCap.rarity_explicit` |
| 22-01 §06 | 率 $1/4$ の稀さ | $\le q_4^{\lfloor \lvert X\rvert /24\rfloor}$ | $0 < y \le 2$、存在する $\beta_0$ 以上、$m \ge 1$ | $\beta_0$ の値（$y = 1$ で約 357 読 ） | `FoldQuarter.rarity_uniform4` |

表の全ての行に共通して言っていないこと：格子間隔を 0 に送る極限、繰り込んだ粗い尺度の測度、背景つきの場、段を跨ぐ非線形の一様な評価。15-12 の行の運動量は無限体積の連続の運動量です。位置の空間との繋ぎ（段の共分散の記号の物理の部分が $G_k$ であること、面の場の共分散）は Lean に在りますが、$G_k$ の不等式を位置の空間の作用素の不等式として述べた定理はありません。重み $(1/8, 3/4, 1/8)$ と倍率 2 で計算した定数は、別の選びではそのまま使えません（28-05）。

## 02 部品として使った補題

次の宣言は Lean で閉じていますが、単独の定理としては置かず、上の行の証明の部品として各章で触れました。

| 中身 | 使う行 | Lean の宣言 |
|---|---|---|
| 陽な関数の上界 $E_\nu < 4$（$\sigma \in [0, \frac{1}{2}]^4 \setminus \{0\}$、$\sigma_\mu = \sin^2(q_\mu/4)$）、反転の不変 | 上の側 | `FreeStageOS.E_lt_four_s`・`FreeStageOS.E_lt_four`・`FreeStageOS.eq_lt_four`・`OSUpQpos.EE_bbflip` |
| 一番近い別名の鎖と十六の別名の下界、場合分け | 下の側 | `NearAliasB.chain_lower`・`NearAliasB.near_lower`・`HsSplit.hS_split` |
| 記号の漸化式と $\mathcal{M}$ の対応、道の平均の記号、一段のトーラスの記号 | 15-12 全体 | `LatticeRec.rec_iterate`・`LatticePath.pathSym_closed`・`LatticeTorus.torus_step` |
| 一段の差 $\pm 2P$ | 一段の縮み | `CouplingLimit.D_lower`・`CouplingLimit.D_upper` |
| 持ち上げの大きさ、別名の和の Poincaré の入力 | $\Gamma_k$ の収束 | `AliasLiftSize.hlift_holds`・`AliasPoinc.hH_holds` |

| 中身 | 使う行 | Lean の宣言 |
|---|---|---|
| 面の共分散と記号の作用素の一致、段の鎖 | 面の共分散 | `LatticeFace.faceCov_eq_posC`・`LatticePush.freeCov_phase`・`LatticePush.push_phase`・`LatticePush.stageCov_phase`・`LatticePush.projFam_stage` |
| 分配関数の下界、冠の体積の下界 | 体積に一様な稀さ | `FoldEntropy.Zw_ge`・`FoldCap.ballQ_ge` |

03

## 段を跨ぐ評価は前提の側に在る

後半の章が言うのは、一段（または線形の段の積み重ね）と一つの尺度のことだけです。繰り込みの鎖を閉じるには、非線形のブロック写像で押し出した粗い尺度の測度について、段を跨いで一様な評価（小さい場の側の縮み、大きい場の側の稀さ、背景つきの場での伝播関数の挟みなど）が要ります。それらは、後半の定理からは出ません。本書では、それらを前提の一覧（28-04）に名前つきで置き、その形がまだ決まっていない所を 28-06 に置きます。

ここで「前提」は本書の設計（決まったブロック写像で押し出した測度）についての言明で、公開された構成の結果からは従いません（15-00）。後半の定理は、前提の側の言明のうち「自由場・線形化・一つの尺度で確かめられる部分」の形式化です。前提の言明そのものではありません。

---

## この章が言えている範囲

| 言えている | 言えていない |
|---|---|
| §01 の表の 13 行（Lean の宣言つき、範囲は各行） | 各行の「言っていないこと」の欄。とくに粗い尺度の測度・背景つきの場・段を跨ぐ非線形の一様な評価 |

## 出典と再現

| もの | 種別 | 出典・道具 |
|---|---|---|
| 表の各行 | — | 本書の検討の Lean の宣言（各章の出典と再現の表）。既知の型の出典は 15-12・15-13・22-01 |
| 読 の数（0.091、125/256、$\kappa^2$、$2.5 \cdot 10^{12}$、48、357） | 読 | 各章の出典と再現の表の数値の記録 |

**この章で使った語** — 記号の漸化式・物理の部分・ブロック写像・道の核・押し出し・面の共分散・チェス盤の評価・稀さ・前提。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：16-01 世界はどこまで来ているか。あわせて読むなら 28-00 入口 — 示すべき言明と、表現を通した十分条件 — 後半の章が言わない段を跨ぐ評価を、前提として名前つきで置きます。