ヤン–ミルズと質量ギャップ

第三巻　質量ギャップへ — 残る問いと本書の結果

Kiichi, Shiori and Rin · 2026-11-14 の版 · https://computoergosum.com/principia/yang-mills/

> この PDF は Web 版の各章をそのまま刷ったものです。動かせる図は刷った時点の姿で止まっています。章の間のリンクは Web 版へ飛びます。最新の内容は Web 版に在ります。

章		頁
第 16 部 現在地と残る問い		
16-01	世界はどこまで来ているか	8
16-02	五つの開いた問い	22
16-03	公開された構成の赤外の端	29
16-04	この本の位置	37
16-05	二つの掘り方の切れ目	43
16-06	新しい概念の候補	55
16-07	課題の一覧	68
16-08	よくある誤解	84
16-09	証明が含むべき段 — 七段の表	98
16-10	道具の地図 — 本書の検討が使う既知の道具の在りか	109
16-11	帯を越える発想の地図 — 生きている発想・壊れた発想・要りそうな数学	120
第 17 部 物理の側から		
17-01	物理はどう見ているか	133

章		頁
17-02	閉じ込めの機構	145
17-03	弦の絵	157
17-04	大 N	169
17-05	ひも理論と余剰次元	180
17-06	余剰次元が見えなくなる仕組み	191
17-07	ゲージ場はどこから来るか	201
17-08	ホログラフィー	212
17-09	質量ギャップが幾何になる	223
17-10	四次元に戻す	235
17-11	超対称と Seiberg–Witten	247
17-12	等価原理に当たる一文	257
17-13	物理の掘り方が数学と離れる場所	268
第 18 部 二つの言葉の辞書		
18-01	辞書の読み方	279
18-02	理論そのものの辞書	291
18-03	質量と長さの辞書	306
18-04	尺度と極限の辞書	320
18-05	本書の仮定の物理側の対応	334
第 19 部 対象と、示すべき言明		
19-00	入口 — 対象・確かな定理・前提の読み方	345
19-01	格子・リンクの変数・Wilson の測度	350
19-02	捩れた境界条件・渦の比 θ・Polyakov ループ	361
19-03	鏡映・転送の作用素・再構成の器	369

章		頁
19-04	ブロック写像と繰り込みの一段	378
19-05	フェルミオンの重み	388
19-06	対象と Lean の定義の対応表	396
19-07	示すべき言明 — 定義された対象だけで書く	403
第 20 部 確かな定理 — 器と強結合		
20-00	入口 — 一つの格子間隔で言えること	409
20-01	鏡映正値性 — 三つの形	413
20-02	強結合の相関の減衰	422
20-03	無限体積の極限 — 部分列なし・並進不変・クラスター性	431
20-04	再構成と質量ギャップ — 強結合の窓の中で	439
20-05	フェルミオンつきの器	447
20-06	強結合の面積則と、渦の自由エネルギーの上界	454
20-07	この部が言えていること・言えていないこと	468
第 21 部 確かな定理 — 渦の床と Polyakov ループ		
21-00	入口 — 捩れた箱の中の渦	474
21-01	符号の系の三本 — 被覆の不等式・単調性・比べ	478
21-02	薄い渦の床	489
21-03	太い渦の床 — 言明と道筋	498
21-04	太い渦の床 — 証明の部品	507
21-05	渦の最小作用 — 正であること・上界の証明書	516
21-06	θ の符号と Polyakov ループの対	525
21-07	渦の比の連続・極限・合わせ	535
21-08	この部が言えていること・言えていないこと	545

章		頁
第 22 部 確かな定理 — 大きい面の稀さ		
22-00	入口 — 大きい面の稀さ	550
22-01	大きい面の稀さ — チェス盤の評価	555
22-02	この部が言えていること・言えていないこと	563
第 23 部 一本目の道（前半）— 時間の方向から		
23-00	入口 — 階段と、酔歩・物差し・時計	569
23-01	構成の筋と拡散型緩和時間の仮定	580
23-02	四次元格子で試した道と壁	608
23-03	階段の四段 — なぜ 0+1 次元から始めるか	629
23-04	二重井戸の経路の測度とキンク	638
23-05	一段目の言明 — 二重井戸の四条件と上界の命題	650
23-06	相内の局所 Poincaré の条件	667
23-07	鞍点の管の条件の地図 — 七つの道筋と環の継ぎ目	682
23-08	計算機援用とは何か — 窓の中の鎖の条件	694
23-09	区画の枠組みと、窓の対数 Sobolev の道筋の三本の筋	706
23-10	迂回策の一覧 — 壊れ方の型	722
23-11	箱への帰着と箱の中の隙間 — 芯の定数	737
23-12	統合表と依存グラフ	759
23-13	Lean の言明と機械検査の限界	778
23-14	突き合わせ — 記録の数と既知の数	787
23-15	残件と費用 — 定理までの距離	797
23-16	主張しないこと	817
23-17	ひらめきと小さな問い	826

章		頁
第 24 部 一本目の道（後半）		
24-00	入口 — 第 23 部から受け取るもの	838
24-01	拡散型緩和時間の仮定を妨げる一つの形 — ほぼ保存される大域の量	845
24-02	物差しと座標を選び直す — 保存が壊れる長さ	858
24-03	緩和時間の仮定を直す二つの形 — 区画ごとの仮定と局所の仮定	867
24-04	片側の橋は緩和時間の仮定のどの形を要るか	884
24-05	時間を連続にする — Hamiltonian 格子と真空の測度	903
24-06	凸性の代わりに稀さで払う — 群の上の繰り込みと対数 Sobolev	916
24-07	四次元だからこそ — 無次元の結合と位相	936
24-08	問いと、主張しないこと	955
24-09	一本目の道（後半）の記号の対応表	964
第 25 部 二本目の道 — 空間の方向から		
25-00	入口 — 時間でなく空間を	968
25-01	捩れた T^2 と 't Hooft の流束	978
25-02	渦と分数インスタントン	990
25-03	容器 — 枠を条件づけると独立になる	1002
25-04	板の閉じ込め	1015
25-05	渦の挿入の恒等式	1025
25-06	力学で駆動した挿入と流れの補題	1038
25-07	なぜ決まった写像は失敗するか	1053
25-08	測った記録	1066
25-09	この道が止まる場所 — T^2 を広げることが帯である	1077

章		頁
第 26 部 移り変わりの帯		
26-00	入口 — 合流	1081
26-01	帯の正しい形	1092
26-02	一つの不等式への還元	1100
26-03	非可換が効く唯一の場所	1111
26-04	構造だけでは渡れない	1122
26-05	チェス盤と同時の反転	1134
26-06	繰り込みの比較 — 群を区別する比較	1145
26-07	時間の側から見た帯	1163
26-08	試して止まった道の地図	1170
26-09	測った記録	1185
26-10	新しい見方の候補	1196
26-11	紫外の制御 — 無限個の段で閉じるとは何か	1210
26-12	帯の議論の篩 — 七つの試験の相手	1213
第 27 部 閉じる — 条件つきの言明		
27-00	入口 — この部の約束	1225
27-01	条件つきの言明 — 質量ギャップと閉じ込めを矢印ごとに	1228
27-02	条件の台帳	1240
27-03	問いの表（横断の索引）	1257
27-04	主張しないこと（横断の索引）	1270
第 28 部 前提の木		
28-00	入口 — 示すべき言明と、表現を通した十分条件	1279
28-01	部分列の極限と、極限に移る性質	1283

章		頁
28-02	全列の収束	1293
28-03	減衰から質量ギャップへ、帯の還元	1302
28-04	前提の一覧 — 木と札	1310
28-05	設計の選びに依るもの	1327
28-06	開いている所と、対象がまだ無い所	1334
付録		
A-01	記号表	1341
A-02	用語集	1354
A-03	文献案内	1404
A-04	Lean と機械検査	1422
A-05	この本の作り方	1461
A-06	名前の索引	1473
A-07	この本から出た論文	1538
A-08	質量ギャップまでの地図	1549

世界はどこまで来ているか — 年表と、次元ごとの表で現在地を読む

この章の §01〜§06 は既存の知見、§07 は未解決の地図、§08 は案内です。

この章で分かること — 1954〜2026 年の主な結果の年表（37 行。2026 年に公開された四次元の構成を含む）。次元ごとに六つの段のどこまで定理があるかの盤面と、その塗られ方。可換群・スカラー場との比較。格子の定理が β の数直線のどこにあるか。

前提となる章 — 7-10 四次元で止まる場所。六つの段は 7-01、次元ごとの中身は 7-02・7-06・7-07。

先に言うこと — 既知の文献を並べ直した章で、示す定理はありません。四次元のヤン–ミルズの存在（Wilson の格子ゲージ理論の極限として Wightman の公理を満たす理論）は、2026 年に公開された構成が Lean による形式化として示し、委員会が「証明している」と評価しました[評]（第 6 部）。無限体積の極限の一意性と質量ギャップは示されていません（16-02）。年表は本文か要旨（一部は総説の文献表）で確かめた範囲で、網羅ではありません。このサイトの記事は、盤面のどの升目も動かしていません（札[評]は委員会の評価書による、の意味です。くわしくは 6-00 の「札」）。

この章の順序

1. 一つの結果を六つの軸で読む
2. 年表 I（1954–1999）
3. 年表 II（2000–2026）
4. 盤面：年を動かして見る — 動く図・計算
5. 次元ごとの表
6. 隣の理論との比較：「二・三次元ではできている」の範囲
7. 格子の定理は β の数直線のどこにあるか — 動く図・計算（β のつまみ）
8. 寄り道：年表に載せないもの

01

一つの結果を六つの軸で読む

ヤン–ミルズの定理は、どれも「どこで成り立つか」の条件を持ちます。条件を落とすと、二次元の定理が四次元の話に、格子の定理が連続の話に見えます。この章は条件を六つの軸にまとめ、**住所**と呼びます。

$$\text{住所} = \big(d,\ \text{格子か連続か},\ \text{体積},\ \text{結合の側},\ G,\ \text{物質場}\big) \tag{1}$$

d はユークリッド化した時空の次元、結合の側は格子の逆結合 $\beta = 2N/g^2$（記号表）が小さい強結合か大きい弱結合かです。問題文の住所は「4・連続・$\mathbb{R}^4$・任意のコンパクト単純群・なし」で、そこで六つの段を全部通すことが求められます。既知 四次元の格子の連続極限は $\beta \to \infty$ の側にあると信じられています（Chatterjee 2018 §5）。物理

例：Driver 1989 は（2・連続・$\mathbb{R}^2$・—・連結コンパクト・なし）で紫外極限の段と無限体積の段まで、Shen–Zhu–Zhu 2022 は（任意・格子で間隔を固定・無限・強・$SU(N)$・なし）で格子の上の指数減衰です。年表の「範囲」はこの住所の略で、年は最初の公開年（arXiv があればその年）、括弧は出版年です。複数の論文をまとめた行は年の幅で書きます。

02

年表 I（1954–1999）：言葉と道具と、最初の構成

最初の半世紀の流れは三つです。物理では理論が書かれ（1954）、漸近自由が摂動論で分かりました（1973）。枠組みでは公理（1973・1975）と格子（1974）がそろいました。構成では、格子の強結合（1978）、三・四次元の紫外の評価（1985・1987–89）、二次元の連続の測度（1989）、四次元で紫外の切断を外し赤外の切断を残した構成の概略（1993）が出ました。既知 1974 年と 1973 年の式は次の二つです（5-01・4-06）。

$$S_W = \beta \sum_{P} \Big(1 - \tfrac{1}{N}\operatorname{Re}\operatorname{tr} U_P\Big), \qquad \mu \frac{dg}{d\mu} = -b_0\, g^3 + \cdots, \qquad b_0 = \frac{11N}{3}\cdot\frac{1}{16\pi^2} \tag{2}$$

例：$SU(2)$ で $\beta = 2.5$ は $g^2 = 2N/\beta = 1.6$。$b_0 > 0$ の符号が漸近自由です。「比較」の行は可換群・スカラー場という隣の理論で、升目は動かしません。物理の行は第 17 部に続きます（17-04・17-11・17-09、格子数値は 5-08）。

既知 表 1　年表 I（物理の札の行を除く）。行を押すと図 1 がその年になります。

年	出来事	範囲
1954	Yang–Mills：非可換のゲージ場の古典論	古典

年	出来事	範囲
1973	Gross–Wilczek・Politzer：漸近自由	摂動論の係数
1973・1975	Osterwalder–Schrader：ユークリッドの公理と Wightman の理論の再構成（1975 年に条件を改めた）	公理
1974	Wilson：格子ゲージ理論（ゲージ不変な格子の作用）	全次元・格子
1974	't Hooft：大 N の展開	物理
1976	Feldman–Osterwalder：弱結合の ϕ^4_3 で Wightman の公理と質量ギャップ	比較・3D
1978	Osterwalder–Seiler：格子の反射正値性と転送行列。強結合で無限体積極限と面積則（クラスター展開の収束は概略）	格子・強結合
1978	Singer：大域的で連続なゲージ固定は一般には取れない	幾何
1979–81	Brydges–Fröhlich–Seiler：二次元の可換 Higgs 模型を OS の公理まで	比較・2D
1980・1982	Guth・Fröhlich–Spencer：四次元 U(1) の格子に、大きい β で閉じ込めない相	比較・格子
1981–82	Aizenman・Fröhlich：ϕ^4 は $d \geq 5$ で自明	比較
1983–87	Gross・King・Driver：U(1)（3D・4D、Higgs つきを含む）の連続極限	比較
1985	Bałaban：三次元の格子で紫外安定性（トーラス、分配関数の一様な上下界）	3D・格子・有限体積
1987–89	Bałaban：四次元の格子で紫外安定性。最終論文の定理 1 は有効結合が小さいという仮定つき	4D・格子・有限体積
1989	Driver・Gross–King–Sengupta：平面 $\mathbb{R}^2$ の連続の測度（Driver は格子近似の収束も）	2D・連続・無限体積
1992–93	Sengupta：閉曲面の上の測度	2D・連続・有限体積
1993	Magnen–Rivasseau–Sénéor：四次元 SU(2) の Schwinger 関数を、赤外の切断を固定したまま紫外の切断なしで（正則化した軸ゲージで）構成する「基礎」（詳細な証明は無い）	4D・連続
1994	Seiberg–Witten：超対称の理論でギャップと閉じ込め	物理
1997–98	Maldacena・Witten：ホログラフィーと、ギャップを幾何で見る模型	物理
1999	Morningstar–Peardon：SU(3) のグルーボールの格子数値	物理 数値

03

年表 II（2000–2026）：問題文のあと

2000 年 5 月 24 日、Clay 数学研究所はパリでミレニアム懸賞問題を発表しました。問題文（Jaffe–Witten）は四次元の現状をこう書きます。 既知

> 'at present we do not know any non-trivial relativistic field theory that satisfies the Wightman (or any other reasonable) axioms in four dimensions.'（JW §6）

その後、二次元の新しい構成、三次元の状態空間と力学、格子の新しい定理が加わりましたが、2004 年の報告は 'The state of the art remains the works of Balaban and of Magnen, Rivasseau and Sénéor' と書きます。[既知] 2018 年の総説は格子の上の問いを式にしました（格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）。5-09）。$f_\beta(x)$ は原点と点 x に最も近いプラケットの Wilson ループの相関です。

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{\log f_\beta(x)}{|x|} = -\frac{1}{\xi(\beta)}, \quad \xi(\beta) \in (0,\infty)\ (\text{すべての } \beta > 0), \qquad \lim_{\beta\to\infty} \xi(\beta) = \infty \tag{3}$$

例：2000 年以後の行は 17 本（うち 2020 年代が 11 本）で、盤面の色を変えたのは 2022 年の 2 本（Shen–Zhu–Zhu と Adhikari–Cao）と、2026 年の公開された構成の 1 本（三つの升）です。[計算] 格子の相関長の問題は格子の問いで、問題文の要件（連続・$\mathbb{R}^4$・公理・非自明性）とは別物です（0-03）。

[既知] 表 2　年表 II。

年	出来事	範囲
2000	Clay の懸賞問題（Jaffe–Witten の問題文）	問題
2001（2003）–10	Lévy：閉曲面の上のランダムなホロノミー場（2006 年に自明でない束）	2D・連続
2004	Douglas の報告：到達点は今も Bałaban と MRS	評価
2013（2014）	Hairer：正則性構造（確率偏微分方程式の繰り込み）	道具
2018	Chatterjee の総説：格子の相関長の問題（Problem 5.1）と Wilson ループの連続極限の問題（5.2）	格子の定式化
2019（2021）	Aizenman–Duminil-Copin：四次元の ϕ^4 の極限はガウス	比較
2020（2022）	Chandra–Chevyrev–Hairer–Shen（CCHS）：二次元の確率ヤン–ミルズ熱流とゲージ軌道の空間	2D・T^2
2021（2024）	Cao–Chatterjee：三次元の状態空間（理論がガウス自由場〔GFF。1-09〕のように振る舞うという仮定の下で）	3D・条件つき
2022（2024）	CCHS：三次元ヤン–ミルズ–Higgs の確率量子化（局所解と Markov 過程。測度には未到達）	3D・T^3
2022	Chevyrev の総説：三次元の測度は T^3 の上でも未構成	評価
2022（2023）	Shen–Zhu–Zhu：強結合の格子で、N によらない明示的な範囲で一意性と正の質量ギャップ	格子・強結合

年	出来事	範囲
2022（2025）	Adhikari–Cao：有限群（非可換を含む）の四次元格子で、弱結合の相関の指数減衰	格子・弱結合
2023（2026）	Chevyrev–Shen：T^2 の測度は Langevin 力学の一意な不変測度。格子の作用によらない	2D・T^2
2024（2026）	Chatterjee：SU(2) ヤン–ミルズ–Higgs の特殊なスケーリング極限はガウス場	比較・Higgs
2025	Cao–Nissim–Sheffield：'t Hooft 領域（作用に βN を掛ける 't Hooft の規約で、β を N によらず小さく取る側。7-10 §05）の面積則（未査読）	格子・強結合
2026	Chevyrev–Klose–Mohamed・Chhaibi ほか：二次元の測度の表示と、格子を経ない構成（未査読）	2D
2026	公開された構成（Lean による形式化。2026-10-28 提出、2026-11-10 に委員会の評価書とともに公開。委員会の声明は 2026-11-09）：任意のコンパクト単純群で、四次元の Wilson の格子ゲージ理論の極限として Wightman の公理を満たす理論を作る。周期の箱では切断の列の全体で収束し、無限体積へは部分列で移る。無限体積の極限の一意性と質量ギャップは示されていない 評 （6-00・16-02）	4D・連続（委員会の評価）

表 2 の言葉：**確率量子化**＝測度を、ある確率的な時間発展の不変測度（時間がたっても分布が変わらない測度）として作る方法。**Langevin 力学**＝測度を不変にする、雑音つきの勾配流。**確率ヤン–ミルズ熱流**＝ヤン–ミルズの作用を減らす向きの流れ（熱流）に雑音を加えたもの。**正則性構造**＝特異な確率偏微分方程式に意味を与え、繰り込む枠組み。いずれも 7-09。**Markov 過程**＝未来の分布が現在の状態だけで決まる確率過程（7-02）。

04

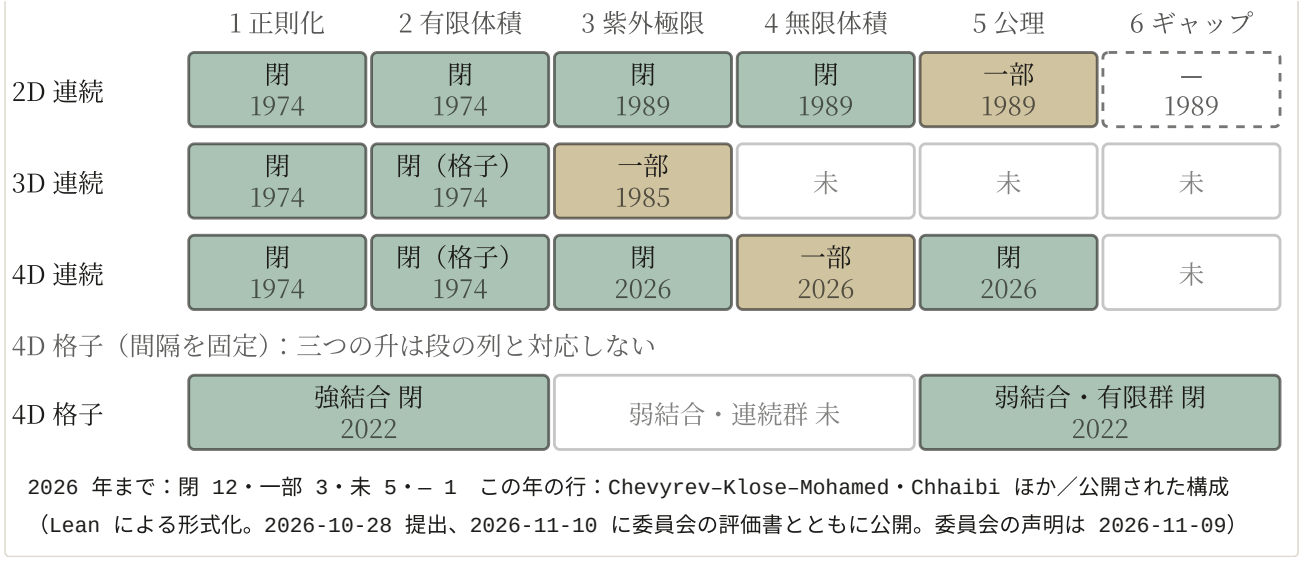
盤面：年を動かして見る

年表を升目に写します。行は連続の非可換ヤン–ミルズ（物質場なし）の $d = 2, 3, 4$ と四次元の格子、列は六つの段（7-01）です。正則化の段と有限体積の段は格子の上の測度 $\mu_{a,L}$ を作る段で、格子の上で閉じます（7-10 §03）。三次元・四次元では連続のまま有限体積の測度を作ることがまだできていないので、その有限体積の段を「閉（格子）」と書きます。2026 年の公開された構成も、連続の確率測度は作っていないので（16-02 §03）、四次元の有限体積の升は「閉（格子）」のままです。

状態の名前は 7-01 の表 2 と同じです。**閉**（定理がある）、**一部**（仮定つき・概略・分配関数の評価まで、または要件の一部だけ。7-10 の表 2 の「仮定つき」もここに入る）、**未**、—（問いがその形では立ちにくい。7-02）の四つです。年 y の状態は、y 以前の最後の変化の記録 (y_k, c_k, v_k) で決まります。

$$s_c(y) = v_k, \qquad k = \max\{\, k :\ y_k \le y,\ c_k = c \,\} \tag{4}$$

図 1　つまみで年を動かすと、その年までの定理で升目が塗られる（表 1・表 2 の行を押すか、行を選んで Enter でその年へ）



計算 この図の数値はこの端末で計算しました（式 (4)）。升目の分け方と状態の決め方はこの章の選択です。

計算 表 3　2026 年の盤面（状態と、その状態になった年）。四次元の 2026 年の三つの升は、委員会の評価の水準です。格子の行の三つの升は、段の列と対応しません。

	1 正則化	2 有限体積	3 紫外極限	4 無限体積	5 公理	6 ギャップ
2D 連続	閉 1974	閉 1974	閉 1989	閉 1989	一部 1989	— 1989
3D 連続	閉 1974	閉（格子） 1974	一部 1985	未	未	未
4D 連続	閉 1974	閉（格子） 1974	閉 2026（1989 年から一部）	一部 2026	閉 2026	未
格子の升	**強結合**		**弱結合・連続群**		**弱結合・有限群**	
4D 格子（間隔固定）	閉 2022（1978 年から一部）		未		閉 2022	

例：盤面が動いた年は 1974・1978・1985・1989・2022・2026 の六つで、連続の升目は 1989 年から 2025 年まで動いていませんでした。21 升のうち閉 12・一部 3・未 5・— 1 です。計算 2026 年の三つの升（四次元の紫外極限・無限体積・公理）は、公開された構成を、委員会が「Lean で証明されている」と評価した水準で塗っています評。無限体積の升を「一部」にしたのは、極限が部分列で取られ、一意性が示されていないからです（16-02 §02）。 7-10 の表 2 は格子の無限体積の段を強結合で OS 1978 により「閉」とします。この章の格子の升は無限体積の段と一様なギャップの段（ギャップ）を一つに数えるので、1978 年は「一部」です。二次元の公理の段は、ゲージ不変な期待値のユークリッド不変性（Driver 1989 の系 6.7）までで、OS の公理の形の主張は無いので「一部」です。二次元の一様なギャップの段は伝播する自由度が無く、問いが立ちにくいので「—」です（どちらも 7-01 の表 2 と同じ）。既知

格子の強結合の升は、1978 年に「一部」、2022 年に「閉」になります。Osterwalder–Seiler 1978 はクラスター展開の収束を概略で与え、ギャップ（指数的なクラスター性）はその収束

から従います。明示的な範囲での一意性と正の質量ギャップの証明は Shen–Zhu–Zhu 2022 です（どちらも SZZ の序論による。OS 1978 の要旨は強結合での無限体積の極限の存在と解析性・Wilson の閉じ込めの評価を述べる。5-02 §08）。既知 1989 年から 2025 年まで連続の升目が動かなかったのは、進歩が無かったからではありません。二次元の測度の Langevin 力学による特徴づけや三次元の力学のような升目の*中*の進歩が、粗い盤面に映らなかったのです（この章の読み。段ごとの文献の言葉は 7-10）。

05

次元ごとの表

盤面の行を、住所の言葉で書き直します。列は格子（間隔を固定）、二重の極限（7-01）の内側と外側、公理とギャップです。$\mu_{a,L}$ は格子間隔 a・一辺 L の箱の測度です。

$$\mu = \lim_{L\to\infty} \underbrace{\lim_{a\to 0} \mu_{a,L}}_{\text{連続・有限体積}} \tag{5}$$

既知 表 4　次元ごとの現在地（非可換・物質場なし）。

d	格子（a 固定）	連続・有限体積	連続・無限体積	公理・ギャップ
2	正確に解ける（7-02）	閉曲面・T^2：Sengupta・Lévy・CCHS・Chevyrev–Shen	$\mathbb{R}^2$：Driver・Gross–King–Sengupta	文献は主張しない（観測量はループ）
3	強結合で無限体積と指数減衰	紫外安定性（分配関数の評価）。測度は未構成で、状態空間と力学まで	未	未
4	強結合で無限体積と指数減衰。弱結合は有限群だけ	周期の箱での連続極限（公開された構成、2026。相関関数が切断の列の全体で収束。連続の確率測度は作っていない）評 。それ以前は仮定つきの紫外安定性（Bałaban）と、赤外の切断つきの概略（MRS）	部分列の極限と相の分解（公開された構成）。極限の収束と一意性は示されていない評	相ごとに Wightman の公理（公開された構成）評 。ギャップは未

二次元が連続・無限体積まで閉じているのは、正確に解ける構造（プラケットの独立性と群の熱核。7-02）によります。**三次元**は易しいとされますが、連続の測度は 'open, even in finite volume' です（7-06）。**四次元**は、2025 年までは紫外極限の段が有限体積で仮定つき・概略で、無限体積の段から一様なギャップの段までに定理がありませんでした（7-07）既知 。2026 年に公開された構成が、紫外極限の段・無限体積の段（部分列）・公理の段を埋めました評 （6-01）。一様なギャップの段は開いたままです（16-02 §04）。

例：表 4 の四次元の「連続・有限体積」は表 3 の紫外極限の段（2026 年から閉）に、「格子」の列は表 3 の格子の行に当たります。MRS の概略は紫外の切断を外していますが、赤外の切断は残したままです。公開された構成は周期の箱で紫外の極限を取り、そのあと無限体積へ部分列で移ります（8-05）。

06

隣の理論との比較：「二・三次元ではできている」の範囲

「二・三次元ではできている」という言い方は、非可換のヤン–ミルズについては二次元でだけ正しい言い方です。三次元まで当てはまるのは、可換群とスカラー場です（16-08）。年表の「比較」の行を並べます。どの行も盤面の升目は動かしません。既知

既知 表 5　隣の理論の到達点（年表の「比較」の行）。

理論	d	到達点
U(1) Higgs（可換のゲージ場と荷電スカラー場）	2・3	二次元は OS の公理まで（Brydges–Fröhlich–Seiler）。問題文は「公理を満たす相互作用するゲージ理論の唯一の完全な例」と呼ぶ。三次元は連続・無限体積の極限（King）
ϕ^4_3（弱結合）	3	Wightman の公理（JW §6.2）と質量ギャップ（Feldman–Osterwalder）
U(1) の純ゲージ	4	格子から連続への極限（Driver 1987）。極限は自由な電磁場と見込まれる（7-10 の説明）。格子には大きい β で閉じ込めない相がある（Guth・Fröhlich–Spencer）
ϕ^4_4	4	格子で紫外を切った $\lambda\phi^4$ の、無限体積・格子間隔 0 の極限はガウス（Aizenman–Duminil-Copin）。$d \geq 5$ の自明性は Aizenman・Fröhlich
二次元 O(3)・O(4) シグマ模型（漸近自由・非可換の大域対称性）	2	2026-10-06 公開の `github.com/openai/math`（結果群 215）に主張つきの原稿がある。格子の全温度の相関の指数減衰（n ≥ 3・有限の部分グラフに一様）は **Lean の形式化つき**。O(3) の連続極限（OS 公理・一意な真空・正の質量ギャップ・非ガウス）と O(4) の格子の質量の漸近 m ∼ 32e^(π/4−1/2)√β e^(−πβ)（Hasenfratz–Maggiore–Niedermayer 1990 の予言と同じ定数）は**紙の原稿のみで未検証**

二次元のシグマ模型は、二次元 YM（7-02）と違って漸近自由と次元転移を持つので、四次元 YM と「同じ形の問題」としてはこちらが近い例です。ゲージ対称性と閉じ込めは持ちません。この行は、盤面（表 3）の四次元の升目を動かしません。

四次元の二つの行は、どちらも極限が自由場（ガウス）になる例です。漸近自由（4-06）なヤン–ミルズでは非自明な極限が期待されていますが、証明はありません（7-08）。物理 同じ四次元でも、ϕ^4 は短距離で結合が強くなり、ヤン–ミルズは弱くなります。向きが逆なので、ϕ^4 の自明性の定理はヤン–ミルズには当てはまりません。例：三次元で比べると、ϕ^4_3 は六つの段を全部通っています（7-01 の表 2）。非可換のヤン–ミルズは紫外極限の段が一部で、無限体積の段から先は未です（表 3）。

07

格子の定理は β の数直線のどこにあるか

強結合では高温展開（小さい β の冪で展開する方法。強結合展開とも呼ぶ。5-02）が定型的に効き、連続なリー群でも指数減衰が出ます（Adhikari–Cao と Shen–Zhu–Zhu の序論によ

る。Osterwalder–Seiler 1978 は要旨のみ）。弱結合では、格子ゲージ理論の無限体積極限の一意性は、$d > 2$ で β が大きいとき一般には分かっていません（Chatterjee 2018 §3）。連続極限に要るのはこの側です（5-05）。既知

二つの定理の条件を一つの β に直す

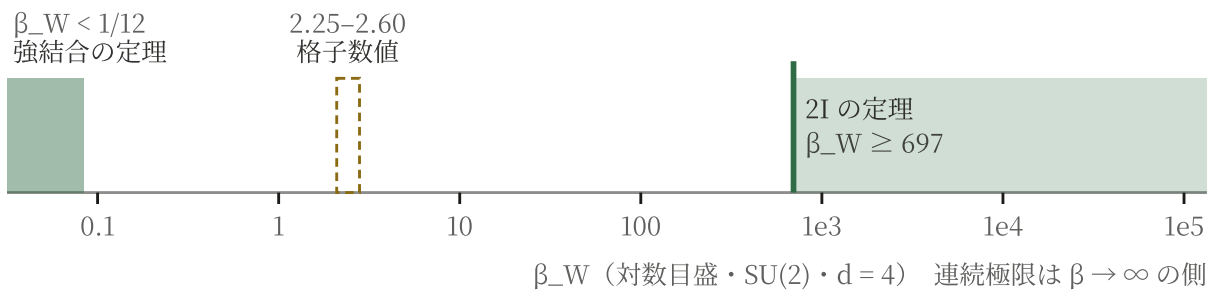
Shen–Zhu–Zhu の重み $\exp(N\beta \operatorname{Re}\sum_P \operatorname{Tr} U_P)$ と Adhikari–Cao の重み $\exp(-\beta\sum_P \operatorname{Re}(\chi(1)-\chi(U_P)))$（$\chi$ は表現の指標）の条件を式 (2) の β_W に直すと

$$\beta_W = N^2\beta_{\mathrm{SZZ}} < \frac{N^2}{16(d-1)}, \qquad \beta_W = 2\beta_{\mathrm{AC}} \geq \frac{2\,(114+4\log|G|)}{\Delta_G}, \qquad \Delta_G = \min_{g\neq 1}\operatorname{Re}\bigl(\chi(1)-\chi(g)\bigr) \tag{6}$$

です（Δ_G は Adhikari–Cao の記号で、16-05・16-08 の質量ギャップ Δ_G とは別）。7-10 §05 の β（Chatterjee の規約 $e^{-\beta\sum_p \operatorname{Re}\operatorname{tr}(I-U_p)}$）とは $\beta_W = N\beta_{\mathrm{Ch}}$ の関係にあり、7-10 の $|\beta| < N/48$ はこの章の $\beta_W < N^2/48$（$d=4$）と同じ条件です。Adhikari–Cao は G の任意のユニタリ表現 ρ を許し、$\chi = \operatorname{tr}\rho$ です。ここでは ρ を包含 $G \subset SU(2)$ に取った場合で、Wilson の模型のリンク変数を G に制限したものになります（$\chi(1)=2$ なので $\beta_W = 2\beta_{\mathrm{AC}}$）。log は自然対数です。

前者は $SU(2)$ なら $d = 2, 3, 4$ で $\beta_W < 0.25,\ 0.125,\ 0.083$、$SU(3)$ ならその 9/4 倍です。計算 例：$d=4$ の $\beta_W < 1/12$ は、格子数値が連続へ外挿するのに使う $\beta_W = 2.25\text{〜}2.60$（$SU(2)$、Lucini–Teper 2001）物理 の 27 分の 1、二項正二十面体群の条件 $\beta_W \geq 697$ はその上端の 268 倍です。計算

図 2　つまみで有限群 $G \subset SU(2)$ を選ぶと、Adhikari–Cao の定理が効き始める位置（右の緑の左端）が動く。左の緑は強結合の定理、破線は格子数値



2I（位数 120）：Δ_G = 0.38197、β_W ≥ 697.2（β_AC はその半分。格子数値の上端の 268 倍）

計算 この図の数値はこの端末で計算しました（群を生成元から閉包で作って位数を確かめ、式 (6) を計算）。格子数値の範囲は文献の値です。

計算 表 6　$SU(2)$ の有限部分群（定義表現）と式 (6) の条件。定義表現は行列そのもので、指標はトレースです（1-02）。最小角は単位元に最も近い元の固有値 $e^{\pm i\theta}$ の θ。

群	位数	最小角	Δ_G	$\beta_W \geq$
$\{\pm 1\}$	2	180°	4	58.4
四元数群 Q_8	8	90°	2	122.3
2T（二項正四面体群）	24	60°	1	253.4
2O（二項正八面体群）	48	45°	0.5858	442.1
2I（二項正二十面体群）	120	36°	0.3820	697.2
$2D_{50}$（二項二面体群）	200	3.6°	0.00395	68512

表 6 の読み方

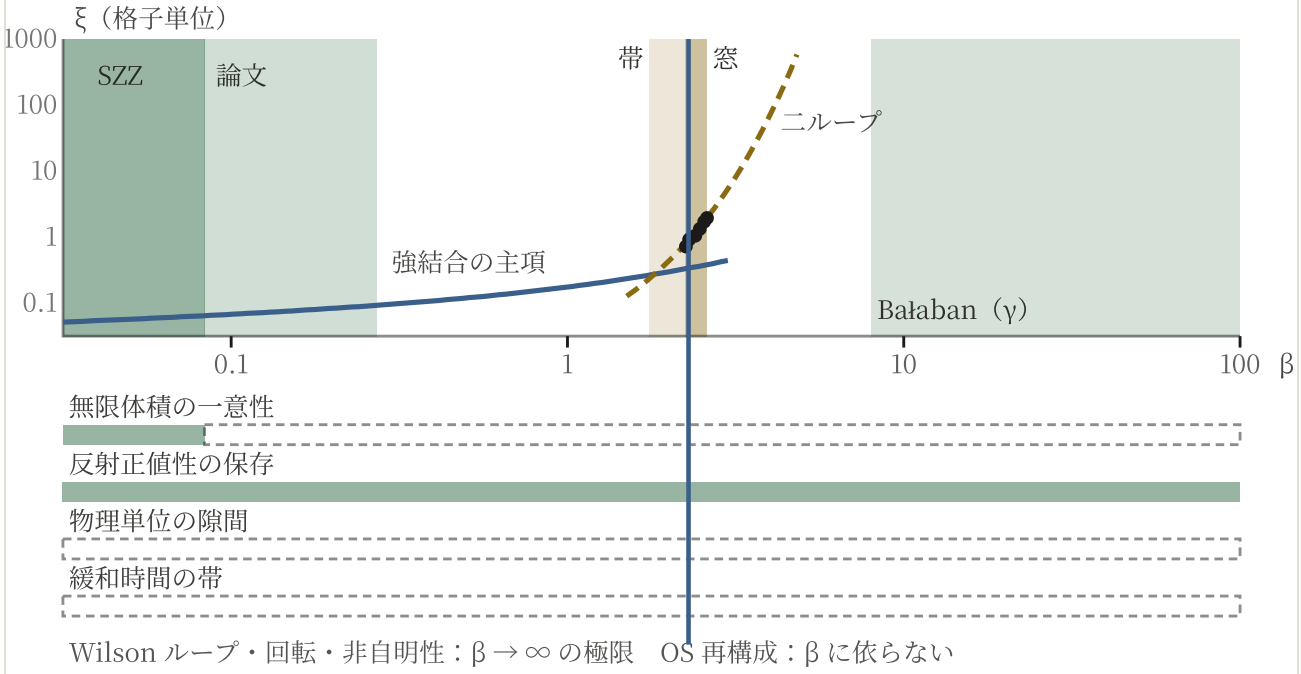
(a) 閾値は証明に出てくる定数で、相転移の位置ではありません。(b) $SU(2)$ の有限部分群は巡回群・二項二面体群と、位数 24・48・120 の三つの例外だけです。既知 名前に「二項」が付く群は、$SO(3)$ の中の回転群を二重被覆 $SU(2) \to SO(3)$（1-02）で引き戻した群です。二項正四面体群・正八面体群・正二十面体群は正多面体の回転群の、二項二面体群 $2D_n$ は正 n 角形の回転群（位数 $2n$ の二面体群）の逆像で、位数はそれぞれ元の 2 倍です。$2D_n$（位数 $4n$）では $\Delta_G = 2 - 2\cos(\pi/n) \approx \pi^2/n^2$ なので、条件はおよそ n^2 に比例して遠のきます。計算 (c) 一ループの $\xi \propto e^{3\pi^2 \beta_W/11}$（$SU(2)$）では、格子間隔を 1/10 にするごとに β_W が約 0.86 増えます（一ループの目安。二ループの補正と、この β の範囲で漸近スケーリングがまだ成り立たないことは 5-05）。物理 有限群の結果が連続な群へ移らない理由は 5-10、強結合の展開は 5-02。

β のつまみ — 二つの岸と帯を一本の軸に

図 2 の数直線に、格子単位の相関長 ξ を重ねます。左の岸は強結合の定理（SZZ の条件 (9)・このサイトの論文 紙 。23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定）と強結合の主項 $\xi = -1/(4\ln u)$、右の岸は二ループの式（16-05 (10)、$C = 185$）と Bałaban の仮定です。仮定は有効結合が十分小さいことで、値は書かれていないので（7-07 §04）、$g^2 \leq \gamma$ を $\beta \geq 4/\gamma$ と読む目安を γ のつまみで動かします。真ん中は数値の窓 2.25〜2.60（Lucini–Teper 2001）と、プラケットでどちらの主項も 5% に入らない帯 1.75〜2.6（16-05 図 1）です。物理

下段は 23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定 の言明が要る β の範囲です（この本の整理）。帯を渡る役は、各 β で要る無限体積の一意性の言明・物理単位の隙間の言明・記帳の長さでの緩和時間の帯です。反射正値性の保存の言明はどの β でも成り立ち、Wilson ループの極限の言明・回転の回復の言明・非自明性の言明は $\beta \to \infty$ の極限の言明、OS 再構成の言明は β に依らない定理です。既知 定理が在るのは左の端で、γ を小さくするほど右の岸の目安は遠のきます。

図 3　β のつまみで縦線を動かすと、その β の ξ（強結合の主項・二ループ・数値）と在るものが下に出る。γ のつまみで Bałaban の仮定の側（β ≥ 4/γ の目安）が動く。横軸・縦軸は対数



β = 2.29　ξ：強結合の主項 0.339・二ループ 0.893・数値 0.92（Δ/√σ ≈ 3.507）　在るもの：帯・数値の窓　帯を渡る役：無限体積の一意性・物理単位の隙間・緩和時間の帯

計算 曲線は 16-05 の (9)(10) をその場で計算（ベッセル関数は級数。表 7 は scipy で同じ値）。点と窓の値は Lucini–Teper 2001 物理 。

計算 表 7　図 3 の β の目印と ξ（格子単位。ξ 数値の列は 16-05 表 3 の $1/(am)$）。

β	ξ 強結合の主項	ξ 二ループ（C=185）	ξ 数値	この β にあるもの
0.08333	0.065	—	—	SZZ の条件 (9) の端（β < 1/12）
0.2722	0.093	—	—	このサイトの論文の条件の端（β < 0.2722）
1.5	0.234	0.127	—	強結合の主項がブラケットで 5% 以内に入る右端
1.75	0.266	0.233	—	帯の左端（どちらの主項も 5% に入らない）
2.25	0.333	0.806	0.72	数値の窓の左端
2.3	0.340	0.914	0.92	
2.4	0.354	1.17	1.05	
2.475	0.365	1.42	1.33	
2.55	0.375	1.72	1.71	
2.6	0.383	1.95	1.95	数値の窓と帯の右端
2.75	0.405	2.85	—	弱結合の主項がブラケットで 5% 以内に入る左端
3.243	—	10	—	二ループで ξ = 10（外挿の目安）
4.136	—	100	—	二ループで ξ = 100（外挿の目安）
5.022	—	1000	—	二ループで ξ = 1000（外挿の目安）

β	ξ 強結合の主項	ξ ニループ（C=185）	ξ 数値	この β にあるもの
8	—	2.49×10^6	—	γ = 0.5 なら Bałaban の仮定の側（β ≥ 4/γ の目安）
20	—	1.8×10^20	—	γ = 0.2 なら Bałaban の仮定の側（β ≥ 4/γ の目安）

08

寄り道：年表に載せないもの

飛ばしてよい節です。

ヤン–ミルズ問題を証明したとする投稿を見かけます。この章が年表に行を載せる条件は二つです。

$$\text{載せる} \iff (\text{本文か要旨を確かめた}) \wedge (\text{住所 (1) が書ける}) \tag{7}$$

未査読のプレプリントは印を付けて載せます。懸賞問題そのものを証明したとする投稿は、専門家の検証を経た記録が無い限り載せません（arXiv の管理者が内容の水準を理由に取り下げた例もあります）。物理の数値やホログラフィーの模型は「理論が在る」と置いてから測るもので（17-13）、升目を動かしません。例：1999 年の格子数値の行は、どの升目の色も変えません。この本の第 23 部（23-01）の検討も盤面の外です。2026 年の公開された構成は、委員会の評価書と声明が在るので載せています。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	年表 37 行の中身（確かめ方の種別は出典表）既知 。2026 年の公開された構成の行と、盤面の 2026 年の三つの升は、委員会の評価の水準評
言えている	この章の升目の決め方の下での盤面と行の数。式 (6) の換算、有限部分群の位数・Δ_G・条件の値計算 。図 3・表 7 の ξ は本文の式と数値の再掲で、構成の八つの言明の β の範囲の割り当てはこの本の整理
言えていない	年表の網羅。升目の別の分け方。強結合の升の 1978 年の判定の根拠は Shen–Zhu–Zhu と Adhikari–Cao の序論の記述で、Osterwalder–Seiler 1978 の本文は読んでいない。Driver 1987 の極限が自由な電磁場であること（本文は書誌のみ）。表 6 の閾値から有限群の模型と $SU(2)$ の弱結合の関係を結論すること。四次元の紫外極限の段から一様なギャップの段までのどれについても、このサイトは何も示していない（2026 年に升を動かしたのは公開された構成）。公開された構成の証明の当否（委員会の評価のまま引く）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§03 の問題文の引用、表 5 の ϕ^4_3 と「唯一の完全な例」	本文	A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*, Clay Math. Inst. (2000) §6・§6.2・§6.4。発表の日と場所は claymath.org
2004 年の文	本文	M. R. Douglas, Clay Math. Inst. の報告 (2004)
§01 の連続極限の側、§03 の格子の相関長の問題、§07 の一意性の文、表 5 の可換群の行	本文 §3・§4・§5・§6	S. Chatterjee, arXiv:1803.01950
三次元の現状	本文 §1	I. Chevyrev, arXiv:2202.13359／Chevyrev–Shen, arXiv:2302.12160
式 (6) の重みと条件。強結合の升の判定（OS 1978 のクラスター展開の収束は概略で、ギャップはその収束から従う）	本文 §1	Shen–Zhu–Zhu, arXiv:2204.12737, CMP 400 (2023) 805–851（式 (1.2)(1.3)・序論）／Adhikari–Cao, arXiv:2202.10375v3, Ann. Probab. 53 (2025) 140–174（式 (1.2)(1.3)・Theorem 1.1・序論）
Driver・Bałaban・MRS	本文の冒頭（材料の検査）	Driver, CMP 123 (1989) 575–616（系 6.7。本文に公理の主張は無い）／Bałaban, CMP 102 (1985) 255–275・122 (1989) 355–392／Magnen–Rivasseau–Sénéor, CMP 155 (1993) 325–383（要旨と §I）
四次元の Bałaban の年の幅 1987–89	書誌のみ（1987・1988 の論文）	四次元の論文 CMP 109 (1987) 249–301 から CMP 122 (1989) 355–392 までを数えた（7-07・7-01 と同じ数え方。三次元と共通の土台 1983–85 は数えない）
2000 年以後の他の行	要旨（材料の検査）	arXiv:2006.04987・2201.03487・2111.12813・math/0101239（Lévy。2001 年 1 月の投稿、Mem. AMS 166 no.790 (2003)。自明でない束は PTRF 136, 2006）・1303.5113・1912.07973・2401.10507・2509.04688・2607.22236・2607.24640
2026 年の公開された構成の行と、盤面の 2026 年の升	評	公開された構成のコード `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0、2026-10-28 提出）。評価書 `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）冒頭と §8。委員会の声明（Kavli Institute for Theoretical Physics の頁の第三の声明、2026-11-09。署名は Michael R. Douglas、David J. Gross（委員長）、Arthur Jaffe、Igor R. Klebanov、Nikita Nekrasov）。読み方は 6-00
格子数値の範囲	本文 表 1（材料の検査）	Lucini–Teper, JHEP 0106 (2001) 050

もの	種別	出典・道具
2000 年以前の原論文：Yang–Mills 1954・Gross–Wilczek／Politzer 1973・Osterwalder–Schrader 1973／1975・Wilson 1974・'t Hooft 1974・Feldman–Osterwalder 1976・Osterwalder–Seiler 1978・Singer 1978・Brydges–Fröhlich–Seiler 1979–81・Guth 1980・Fröhlich–Spencer 1982・Aizenman 1981–82・Fröhlich 1982・Gross 1983・King 1986・Driver 1987・Gross–King–Sengupta 1989・Sengupta 1992–93・Seiberg–Witten 1994・Maldacena 1997・Witten 1998・Morningstar–Peardon 1999	書誌のみ	中身は Jaffe–Witten の本文と文献表、Chatterjee §4・§6、Adhikari–Cao と Shen–Zhu–Zhu の序論の記述による。書誌の例：Osterwalder–Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471／Aizenman, PRL 47 (1981) 1・CMP 86 (1982)／Fröhlich, NPB 200 (1982)／Driver, CMP 110 (1987) 479–501／Maldacena, hep-th/9711200／Witten, ATMP 2, 505／Sengupta, JFA 108・Ann. Phys. 221／Singer, CMP 60／Fröhlich–Spencer, CMP 83／Morningstar–Peardon, PRD 60
表 7・図 3	計算	Python と SciPy（beta_axis.py。16-05 (9)(10)、$C = 185$）。数値の窓は Lucini–Teper 表 1（16-05 表 3・23-01 表 2）
$SU(2)$ の有限部分群の分類	既知（書誌は未確認）	標準的な分類。位数は閉包の計算で確かめた
表 3・図 1・行の数（2026 年の三つの升を足して数え直した）／表 6・図 2・§07 の数	計算	この端末の Python（式 (4) で年ごとに数えた）／Python と NumPy（四元数の生成元から閉包で群を作り、位数・行列式・ユニタリ性を検査。$\ln 10 \cdot 11/(3\pi^2) = 0.855$）

次に読む章：16-02 五つの開いた問い。公開された構成が残した問いを、評価書の五つに沿って読みます。物理と数学の掘り方が切れる場所は 16-05。

五つの開いた問い

この章は未解決の地図です。§01 は既存の知見（評価書の引用）です。

この章で分かること — 2026 年に公開された四次元ヤン–ミルズの存在の構成について、委員会の評価書が「この仕事が扱っていない主な点」として挙げる五つの問いを、一つずつ読みます。各問いについて、(1) 答えるには数学として何が要るか、(2) 構成の Lean のコードの側に、その準備として何が在るか、(3) 何が無いか、を並べます。在るもの：相に一様な多項式の評価、成分ごとの真空の一意性、格子の道に沿う平行移動。無いもの：指数の減衰、連続の Wilson ループ、周期のほかの境界条件。

前提となる章 — 6-04 示されていないこと、12-05 Arzelà–Ascoli と極限に移る性質、12-07 相の分解、4-11 質量ギャップの定義。

先に言うこと — 公開された構成の結果は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」水準で引きます。この本の検討が確かめたのは、源の定義と言明の形を読んだことまでです。「無い」は、名前と説明文を検索した範囲で見つからない、という意味で、別の名で同じ中身が在る可能性は除けません。この章は問いの地図で、どの問いにも答えていません。

この章の順序

1. 評価書の五つの問い — 評価書 §8 の要旨
2. 収束と一意性 — 紫外は列の全体、無限体積は部分列
3. 連続の確率測度 — 相関関数の表と再構成の空間
4. 一様な質量ギャップ — 多項式の評価と、成分ごとの真空の一意性
5. Wilson ループと面積則 — 格子の道の平行移動まで
6. 一粒子の状態 — 一点の挿入の状態の道具
7. 一覧（表 1） — 要るもの・在るもの・無いもの
8. 読み方の注意 — 「無い」の意味、問いどうしの関係

札 — 源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による（くわしくは 6-00 の「札」）。初・典・機・読・仮・Lean は本全体の札で、読 は本書の数値の読み、Lean は本書の Lean の定理です。

出典の名：公開された構成のコードは `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0、2026-10-28 提出）、評価書は `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）です。コードの在りかは、このリポジトリの中の相対パスと宣言の名と行で書きます。

01

評価書の五つの問い

評価書は冒頭で、提出が、任意の単純コンパクト群について、四次元 Wilson 格子ゲージ理論のスケーリング極限として Wightman の公理を満たす相対論的な場の量子論が構成できることを証明している、と判断し、無限体積の極限が一意であることと質量ギャップは証明していない、と書きます評（評価書 冒頭の要約）。相関関数はまず有限の物理的な体積で極限を取り、無限体積へはコンパクト性による部分列で移る、という構成の仕方も、同じ所で説明されています評。§8 は、構成が扱っていない主な点を五つに並べます評。要旨は次のとおりです。

1. **収束と一意性**。収束する部分列を見つけるのでなく、無限体積の極限の収束と一意性を示すこと。
2. **連続の確率測度**。適切な空間の上に連続の理論の確率測度を定義し、構成の Schwinger 関数がそこから出ること。
3. **一様な質量ギャップ**。一様な質量ギャップを示すこと。対応する相関の指数的な減衰と、Osterwalder–Schrader のハミルトニアンのスペクトルのギャップ。
4. **Wilson ループと面積則**。Wilson ループの観測量を作り、構成の局所の観測量と結ぶこと。Wilson ループの面積則を示すこと。
5. **一粒子の状態**。一粒子の状態を作り、エネルギー運動量のスペクトルを解析すること。二次元・三次元の多くの構成的な模型では、この解析が行われている、と評価書は添えます。

Jaffe–Witten の問題文（0-03）が求めるのは存在と質量ギャップです。五つのうち 3 がその後半に当たり、1・2・4・5 は、構成を「ヤン–ミルズ理論の完全な記述」に近づけるための問いです。以下、各問いを、数学として要るもの・コードの側に在るもの・無いもの、の順に読みます。

02

収束と一意性

要るもの。体積を大きくする列の全体（部分列を取らずに）で相関関数が収束し、その極限が列の取り方に依らないこと。言い換えると、無限体積の極限が一つに決まることです[初]。

在るもの。

- 紫外の極限（格子間隔を 0 にする極限）は、体積を止めれば切断の列の全体で取られています。構成の定理 `constructed`（`Construction.lean:15`）の結論に、列の全体（`Extraction.Sequence.full`）での位置の言明 `FullVolume.PositionsUV` が入っています[源]。公開の定理 `JointExistence`（`ChallengeSpec.lean:186`）でも、収束の欄 `Converges`（`PublicWilson.lean:85-90`）は、各体積で切断について列の全体の収束を求め、部分列になるのは体積の側だけです[源]。核と差分つきの強い形（`PositionsUV … Sequence.full`）は構成の定理 `constructed` にだけ在ります[源]。
- 無限体積の極限は、有界性と同程度連続性からの Arzelà–Ascoli で、部分列として取られています（`Extraction.first_surface`、`YM/Extraction/Lipschitz.lean:166`、`crops`、`YM/Extraction/Held.lean:136`）[源]。読み方は 12-05。
- 極限の一意性の補題 `Extraction.Order.unique`（`YM/Extraction/Orders.lean:70`）は、同じ部分列に沿う二つの極限が等しい、という Hausdorff 空間の一般の事実です[源]。体積の列の取り方に依らないことは言いません。宣言の使われ方の記録では、どの見出しの定理からも届きません（outside）[源]。

無いもの。体積を変えたときの差の評価、相関の減衰、極限の一意性の材料は、無限体積の極限を取る所に入っていません[源]。入力は有界性と同程度連続性の上界だけです。

体積の一意性と、相の分解（§04）の「成分ごとの真空の一意性」は別の問いです。前者は極限の測度の一意性、後者は一つの極限の中の成分ごとの真空の一意性です。

03

連続の確率測度

要るもの。超関数の空間（あるいは接続の空間の適切な商）の上の確率測度で、そのモーメントが構成の Schwinger 関数になるもの[初]。Wilson ループのような非局所の観測量を扱う土台にもなります。

在るもの。構成の対象は、局所場の札で添字づけた相関関数の表（`Table`）と、そこから作る Osterwalder–Schrader の空間です[推]（読み方は 12-08）。格子の側では、各格子間隔・各体

積の Wilson の測度は確率測度として定義されています（`YM/Wilson/Law.lean:87` の `law`）源。

無いもの。連続の理論の確率測度の定義は見つかっていません推（名前の検索の範囲）。格子の測度の列の極限を測度として取る言明も、極限の測度に名前を付ける定義もありません。固定した粗い段の有効な密度については、その列の収束までは在ります（16-03）。

04

一様な質量ギャップ

要るもの。ある $m > 0$ があって、再構成したハミルトニアン H のスペクトルが真空の外で $[m, \infty)$ に入ること。同じことを相関の言葉で言えば、二点の相関が距離について率 m 以上で指数的に減ること（4-11）。極限が成分（相）に分かれるなら、その m が成分に一様であることも要ります初。

在るもの。

- **相に一様な多項式の評価**。有限の語 w について、全ての相 i と $u \in (0, 1]$ で、エネルギー $(0, u]$ のスペクトルの重みが $\le M\,u^2$（`EveryPhase.light_bound`、`YM/EveryPhase/Light.lean:221`）。熱の半群について、全ての相と $s \ge 1$ で $0 \le \langle A, (e^{-sH} - P_0)A\rangle \le M\,s^{-2}$（`EveryPhase.inverse_square`、`YM/EveryPhase/Decay.lean:173`。$P_0$ は零エネルギーの空間への射影）源。定数 M は相に依りません。
- **成分ごとの真空の一意性**。相の分解の各成分で、零エネルギーの空間が真空の倍数だけからなること（`UniqueHeat`、`YM/Phase/Mixture.lean:35`）が、全ての成分で言われています（`EveryPhase.every`、`YM/EveryPhase/Vacuum.lean:146`）源。速さ（率）は付いていません。

多項式の評価の出どころは、局所可換性から来る遠方の評価（`EveryPhase.late`、`YM/EveryPhase/Light.lean:208`）です源。u^2 の重みの評価は、スペクトルが 0 まで続く理論とも両立する形で、質量ギャップを含みません推。言い換えると、質量ギャップの問いは「この u^2 の重みを、ある m 以下で 0 にする」ことです推。

無いもの。指数の減衰の言明（率つきのクラスター性、スペクトルのギャップ）は見つかっていません源（名前の検索の範囲）。

05

Wilson ループと面積則

要るもの。(a) 連続の理論で Wilson ループの観測量（閉じた曲線に沿う平行移動の跡）を定義すること。格子では道に沿うリンクの積で書けますが、連続では接続そのものが超関数なので、正則化と極限の議論が要ります。(b) それを局所場（構成の基本の観測量）と結ぶこと。(c) 大きいループで期待値が囲む面積について指数的に小さくなること（面積則）[初]。

在るもの。格子の道に沿う平行移動 `Lattice.travel`（`YM/Lattice/Path.lean:105`）と、その連結・逆向き・ゲージ変換の補題が在ります[源]。格子の上で Wilson ループを書く材料はこれです。繰り込みの一段の確率核の予測子も、枠つきの平行移動から作られています（9-04）[源]。

無いもの。連続のループの観測量、面積則、ループと局所場の関係は見つかっていません[推]（名前の検索の範囲）。格子の Wilson の測度は周期のトーラスの上だけで定義されていて[源]、't Hooft の捩れのような別の境界条件や、渦の自由エネルギーに当たる量は見つかっていません[推]（名前の検索の範囲）。

この本の検討には、格子の上の強結合の窓での面積則（20-06）と、捩れた境界条件の渦の比の評価（第 21 部）があります。どちらも格子間隔を止めた言明で、この問いの (a)〜(c) に答えるものではありません。位置づけは 16-04 で述べます。

06

一粒子の状態

要るもの。質量 m の孤立したスペクトルの殻（エネルギー運動量の $p^2 = m^2$）を持つ部分空間と、そこから散乱の状態を作る道具（Haag–Ruelle の型）[初]。普通は質量ギャップ（§04）を前提にします。

在るもの。一点の挿入の状態とスペクトル表示を扱うモジュール（`YM/TraceExtension/Damping.lean`、題は「Single insertion point states and spectral representation」）が在ります[源]。説明文は「質量ギャップや錐の台の結果は仮定しない」と書いています[源]。これが一粒子の解析の準備に当たるかは確かめていません[推]。

無いもの。一粒子の状態の定義、孤立した殻、散乱の状態は見つかっていません[推]（名前の検索の範囲）。

07

一覧（表 1）

問い	要るもの	コードの側に在るもの	無いもの
収束と一意性	体積の列の全体での収束、極限の一意性	紫外（切断）は公開の定理でも列の全体、無限体積は Arzelà–Ascoli の部分列 源 。核と差分つきの強い形は `constructed` にだけ 源 。同じ部分列の上の一意性 `Order.unique` 源	体積を変えた差の評価、減衰、一意性の材料 源
連続の確率測度	Schwinger 関数をモーメントに持つ測度	相関関数の表と再構成の空間 推 。格子の Wilson の測度 源	連続の測度の定義 推 （名前の検索の範囲）
一様な質量ギャップ	指数の減衰、スペクトルのギャップ、成分に一様な率	相に一様な多項式の評価 $u^2 \cdot s^{-2}$ 源 。成分ごとの真空の一意性（率なし） 源	指数の減衰の言明 源 （名前の検索の範囲）
Wilson ループと面積則	連続のループの観測量、局所場との関係、面積則	格子の道の平行移動 `travel` 源	連続のループ、面積則 推 （名前の検索の範囲）。周期のほかの境界条件 推 （名前の検索の範囲）
一粒子の状態	孤立した殻、散乱の状態	一点の挿入の状態とスペクトル表示の道具 源	一粒子の状態の定義 推

表 1　五つの開いた問いと、コードの側の準備。問いの文は評価書 §8 評 。

08

読み方の注意

- **「無い」の意味**。名前・説明文（moddoc）・宣言の使われ方の記録を検索して見つからなかった、という意味です。別の名で同じ中身が在る可能性は除けません。
- **「在る」の水準**。在るものは「委員会が Lean で証明されていると評価した」ものの一部で、この本の検討は言明の形を読んだだけです。どの宣言が公開の定理の依存の鎖に入っているかは、鎖を辿って確かめたものだけをそう書きます（6-02）。この章で挙げた宣言の多くは、鎖を確かめていません。
- **問いどうしの関係**。3（質量ギャップ）は 1（一意性）と結びつきます。率つきのクラスター性は、普通は極限の一意性を導く道具になります 推 。5（一粒子）は普通 3 を前提にします。4（面積則）と 3 は別の言明で、一方から他方を導く一般の議論は知られていません 推 （16-09）。
- **この章は答えていない**。どの問いについても、この本は答えを示していません。この本の検討の持ち札と、問いとの距離は 16-03・16-04 で述べます。帯について本書の検討が試した発想の地図は 16-11 に在ります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
評 評価書は存在の構成を認め、無限体積の一意性と質量ギャップは証明されていないと書く。§8 の五つの問い	評価書の判断の当否
源 公開の定理でも、紫外（切断）は列の全体、無限体積は部分列（`Converges`、`first_surface`・`crops`）。核と差分つきの強い形は構成の定理 `constructed` にだけ在る	体積の一意性への道
源 相に一様な多項式の評価（`light_bound`・`inverse_square`）、成分ごとの真空の一意性（`UniqueHeat`・`every`）、格子の平行移動（`travel`）、一点の挿入の状態の道具（`TraceExtension/Damping.lean`）が在る	これらが公開の定理の依存の鎖に入っているか（確かめていない）
推 連続の確率測度・連続の Wilson ループ・面積則・周期のほかの境界条件・一粒子の状態は見つからない。u^2 の評価は質量ギャップを含まない	別の名で在る可能性の除外

出典と再現

もの	種別	出典・道具
五つの開いた問い、冒頭の判断	評	評価書（`yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`、2026-11-10）冒頭と §8
公開の定理・構成の定理	源	`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）：`ChallengeSpec.lean:186` `JointExistence`、`Construction.lean:15` `constructed`
無限体積の部分列と一意性の補題	源	`YM/Extraction/Lipschitz.lean:166` `first_surface`、`YM/Extraction/Held.lean:136` `crops`、`YM/Extraction/Orders.lean:70` `unique`
多項式の評価・真空の一意性	源	`YM/EveryPhase/Light.lean:208` `late`・`:221` `light_bound`、`YM/EveryPhase/Decay.lean:173` `inverse_square`、`YM/Phase/Mixture.lean:35` `UniqueHeat`、`YM/EveryPhase/Vacuum.lean:146` `every`
格子の平行移動・Wilson の測度・一点の挿入	源	`YM/Lattice/Path.lean:105` `travel`、`YM/Wilson/Law.lean:87` `law`、`YM/TraceExtension/Damping.lean`（説明文）
問題文	典	A. Jaffe, E. Witten（Clay 数学研究所の公式の問題文）。0-03

この章で使った語 — 開いた問い・無限体積の極限・一意性・部分列・確率測度・Schwinger 関数・質量ギャップ・スペクトルのギャップ・相の分解・真空の一意性・Wilson ループ・面積則・一粒子の状態。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：16-03 公開された構成の赤外の端 — 構成が止まる所（格子間隔 1 の段）で、何が言われ何が言われていないかを読みます。

公開された構成の赤外の端

この章は既存の知見（公開された構成の読み）です。§05・§06 は未解決の地図です。

この章で分かること — 公開された構成の繰り込みの段の列がどこで終わるか、そこで何が言われているかを読みます。全ての段は弱結合の帯の中で運ばれ、最も粗い段は格子間隔 1 で、そこでの結合は大きい基準値 $\bar{\beta}$ に合わせてあります。その段の有効な密度は、体積を止めれば切断の列の全体で一様に収束します。一方、その極限の測度は対象として定義されておらず、鏡映正値性・粗い Wilson ループとの関係・体積に一様な評価・より粗い尺度への繰り込みは言われていません。残る問いを「格子間隔 1 の段の有効な理論の、長い距離の問い」と言い直すことは方向としては正しい見込みであること、ただしそう断定するには足りない言明が在ることを、正確に並べます。

前提となる章 — 16-02 五つの開いた問い、8-02 間隔の列・体積の列、9-01 ブロックの核、11-10 固定した段の収束と、段を外す一段。

先に言うこと — 公開された構成の結果は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」水準で引き、この本の検討が確かめたのは源の定義と言明の形を読んだことまでです。「言われていない」は検索した範囲で見つからない、という意味です。この章は、残る問いの形を述べるもので、その問いに答える道を示すものではありません。

この章の順序

1. 段の地図 — 全ての段は弱結合、段 0 は間隔 1 — 結合の帯と基準値
2. 段 0 の有効な密度と、その収束 — 切断について一様、列の全体
3. 相関は細かい段から読む — 段 0 は単位を決める所
4. 段 0 の対象について言われていないこと — 五つ
5. 残る問いの言い直し — 正しい所と足りない所 — 方向、正確でない点、足りない言明
6. 弱結合から強結合へ — この本の「移り変わりの帯」との対応
7. この章が言っていないこと

札 — 源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による（くわしくは 6-00 の「札」）。初・典・機・読・仮・Lean は本全体の札で、読 は本書の数値の読み、Lean は本書の Lean の定理です。 出典：`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）の相対パス・宣言の名・行、評価書は `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）。

01

段の地図 — 全ての段は弱結合、段 0 は間隔 1

構成は、切断 N（最も細かい段）の Wilson 測度から始めて、確率核による繰り込みの一段（9-01）を N 回かけ、段 $N, N-1, \dots, 0$ と粗くしていきます。

- **格子**。段 m の格子は一辺 $L_p \cdot D_m$ の周期の格子で、格子間隔は $a_m = 1/D_m$ です（`Schedule.side`、`YM/Lattice/Scale.lean:67`）源 。段 0 は一辺 L_p、格子間隔 1 で、最も粗い段です。体積 L_p は段 0 の単位で測ります源 。
- **結合**。全ての段 $m \le N$ で、段 m の結合 $\beta(N, p, m)$ は帯 $[\hat{\beta}_m/2,\, 2\hat{\beta}_m]$ に入ります（帰納の仮定の欄 `Conv.band`、`YM/RG/History.lean:218`）源 。$\hat{\beta}_m$ は基準値 $\bar{\beta}$ に一ループの走り $s \log(1/a_m)$ を足した値で（`Calendar.hatBeta`、`YM/RG/History.lean:79`、`scale`、`YM/Lattice/Scale.lean:115`）、段 0 では $a_0 = 1$ なので $\hat{\beta}_0 = \bar{\beta}$ です源 。s は一ループの傾きで、値は $11C_g/(24\pi^2)$ です（`slopeConstant`、`YM/Gauge/Colors.lean:184`）源 。
- **段 0 の合わせ**。全ての N, p で $\beta(N, p, 0) = \bar{\beta}$ です（`Selected.reaches`、`YM/RG/History.lean:239`）源 。各切断の裸の結合は、射撃法でこの条件を満たすように選ばれます（10-04）。

基準値の大きさ。基準値 $\bar{\beta}$ は、構成の記録（`Paid.bar`、`YM/Price/Intent.lean:148`）で障壁の値 `Bar.value` に等しいと置かれ、障壁には「全ての $x \ge \bar{\beta}$ で $x^{-1/2} e^{(\log\log x)^2} \le 1$」という条件が課されています（`Bar.threshold`、`YM/Price/Intent.lean:127`）源 。この条件だけから、$\bar{\beta}$ はおよそ 9×10^5 以上（境目は 8.97×10^5）と出ます読 （不等式が以後の全ての x で成り立つ境目 $x \approx 8.97 \times 10^5$ の浮動小数の計算）。もう一つの条件は、入口の値 `betaEntry`（同 `:116`）が $\bar{\beta}$ 以下であること（同 `:126`）ですが、入口の値は源に式も数も無く、存在だけです源 。どの段の結合も $\hat{\beta}_m/2 \ge \bar{\beta}/2$ 以上なので源 、**どの段も弱結合の帯の中にあり、強結合の領域は通らない**と読めます推 。これは構成の設計の選びで、強結合の側の困難（どの帯でも同じ定数で効く評価が無いこと）を避ける形になっています推 。

02

段 0 の有効な密度と、その収束

密度。切断 N・体積 p の段 m の有効な密度 $\mathrm{eval}_{N,p,m}$ は、段 m の粗い格子の配位の上の関数で、0 以上、基準の測度（リンクごとの Haar の確率測度の積）での積分は分配関数 Z_N に等しい（`History.partition_eq`、`YM/RG/History.lean:242`）源。段の間は、段 $m+1$ の結合 $\beta(N,p,m+1)$ を使う確率核での押し出しの等式で結ばれます（`Transfer`、`YM/RG/History.lean:223`）源。測度の言葉で言えば、正規化した $\mathrm{eval}_{N,p,m}/Z_N$ は、裸の Wilson 測度を核で $N-m$ 回押し出した確率測度の密度です推（三つの等式を組んだもの。測度の等式という形の言明はありません）。

核は $\beta(N,p,m+1)$ に依るので、この押し出しは「固定した写像で Wilson 測度を送ったもの」ではなく、写像そのものが N とともに動きます源。

切断についての一様な収束。段 m と体積 p を止め、真空の定数 $e^{-v|\Lambda|}$ を外した密度 coals_N を N の列と見ると、

- 配位の空間の上の sup ノルムで一様に有界かつ一様に Cauchy（`FullVolume.Retreat.Flux.fanned`、`YM/FullVolume/Fields/Cement.lean:50`）源。
- その積分（規格化の定数）も Cauchy（`Flux.lacks`、同 `:56`）源。
- 構成の中では、これが全ての段 $m \geq 0$（段 0 を含む）・全ての p で、切断の列の全体について（部分列なしで）出ています（`sees`、`YM/FullVolume/Fields/Filled.lean:30`）源。

正規化した密度 eval/Z_N の一様な収束は名前のついた言明としてはありませんが、分子の一様な Cauchy、分母の Cauchy、分母の N に依らない正の下界（`lingers`、`YM/FullVolume/Fields/Till.lean:20`）から一行で出ます推。配位の空間はコンパクトで基準の測度は確率測度なので、sup ノルムの収束は全変動の収束を含み、弱収束より強い収束です推。

03

相関は細かい段から読む

連続の相関は、段 0 からではなく、細かい段 j から読まれています。段 j の表示の上で観測量の段 j の像を使って計算した値と、真の格子の相関の差は、N に依らない量で押さえられ（`Sever.echoes`、`YM/FullVolume/Fields/Peat.lean:42`）、点の隔たりの条件のもとで $j \to \infty$ で小さくなります源。これと固定した段 j での Cauchy（`latter`、`YM/FullVolume/Fields/Timber.lean:58`）を組んで、真の格子の相関が N について Cauchy になります（`arrives`、同 `:74`）源。

この筋の中で、段 0 は「$\bar{\beta}$ で単位を決める所」で、相関の評価には使われていません[推]。段 0 より長い距離は、体積 L_p を段 0 の単位で置き、無限体積の極限を部分列のコンパクト性で取るだけです（12-05）[源]。

04

段 0 の対象について言われていないこと

1. **極限の測度**。段 0（あるいは任意の段）の測度の $N \to \infty$ の極限は、対象として定義されていません。極限の密度や極限の表示に名前を付けた定義は見つかっていません[源]（名前の検索の範囲）。在るのは、表示の材料（結合・活動・道のデータ）が N について Cauchy、あるいはある極限へ収束する、までです[源]。極限が同じ形の表示を持つこと、段の間で整合することも言われていません。

2. **鏡映正値性**。鏡映正値性の言明（`Slice.reflected_positive`、`YM/Slice/Reflection.lean:98`）は、裸の Wilson 測度についてだけです[源]。段 0 の押し出しの測度の鏡映正値性は言われていません[源]（名前の検索の範囲）。核の支えは鏡の面をまたぐ大きさを持ちうる（`fitsPatch`、`YM/RG/History.lean:110`）ので、押し出しが鏡映正値性を自動では継がない、と推します[推]。

3. **粗い Wilson ループとの関係**。段 0 の配位の Wilson ループと、細かい場（あるいは連続）の Wilson ループの関係は言われていません[源]（名前の検索の範囲）。粗いボンドは、枠つきの平行移動からの予測に揺らぎを掛けたものなので（`connector`、`YM/RG/Block.lean:39`）、粗いループは「太い道の平行移動と揺らぎ」に近い、と推します[推]。

4. **体積に一様な評価**。段 0 の対象の評価は、規格化の定数の下界（`till`、`YM/FullVolume/Fields/Till.lean:9`）や差の評価の定数（`refreeze`、`YM/FullVolume/Fields/Flight.lean:28`）のように、格子の点の数 $|\Lambda|$ の指数を含み、体積 p に一様ではありません[源]。体積に一様な評価として読めたのは、Wilson の測度の側のチェス盤の根で測った観測量の大きさ（`Extraction.Wcmain`、`YM/Extraction/Center.lean:38`。読み方は 12-02）などで、段 0 の測度の評価ではありません[源]。一段の帳簿そのもの（活動のノルムと縮小の定数）は点ごとの和で、体積に依りません[源]。

5. **より粗い尺度への繰り込み**。段の番号は自然数で、段 0 が最も粗い段です。段 0 より粗い尺度へ繰り込みを続ける定理は見つかっていません[源]（名前の検索の範囲）。名前に紫外の拡張を持つモジュール群（`YM/Extension/UV/`）は紫外の側の別の道で、粗い側への継続ではありません[源]（説明文）。

05

残る問いの言い直し — 正しい所と足りない所

評価書の開いた問いのうち、無限体積の一意性・質量ギャップ・面積則（16-02 の 1・3・4）は、どれも長い距離の振る舞いの問いです。それらを「段 0 の有効な格子の理論（結合は大きい $\bar{\beta}$、格子間隔 1）の、$L_p \to \infty$ での長距離の問い」と言い直すことを考えます。

源から読める事実源 。

- 全ての段が弱結合の帯のまま運ばれ、段 0 で $\beta = \bar{\beta}$ です。
- 体積 L_p は段 0 の単位で測られます。
- 格子間隔 1 より長い距離の振る舞い（指数の減衰、面積則、体積の極限の一意性）は、どの定理でも扱われていません源 （名前の検索の範囲）。

これらの事実を根に、残る問いを「段 0 の理論（$\bar{\beta}$ は大きく、$L_p \to \infty$）の、長い距離での問い」と言い直すのは、方向として正しい見込みです推 。その段の結合は弱結合の側にあるので、さらに「間隔 1 の有効な格子の理論を、弱結合から強結合まで追う問い」と言い直せる、というのは本書の推し量りです推 。

どちらも断定はできません。段 0 の理論は Wilson の作用の理論ではなく、切った作用・活動・道のデータからなる表示つきの有効な作用の理論で、$\bar{\beta}$ はその表示の中の係数です。表示は一意ではありません源 。その測度の鏡映正値性も言われていません（§04）。書けるのは「残る問いの主な部分は、段 0 の有効な理論の、長い距離での指数の減衰に寄せられる見込み」までです推 。

ただし正確でない所。

- (a) 連続の相関は、段 0 の測度だけの関数ではありません。真の相関は、観測量を差し込んだ密度の押し出しとしては段 0 に送れますが、段 0 の測度の期待値として書くには、観測量の段 0 での像が要ります源 。
- (b) 観測量の段 m への像の収束（`Rising.hail`、`YM/FullVolume/Fields/Capital.lean:57`）は、観測量ごとの基準の段以上の m でだけ言われています。基準の段が 0 より上の観測量は、段 0 での像が扱われていません源 （仮定の欄）。
- (c) 細かい段と真の相関の差の評価（§03）は $j \to \infty$ の向きでだけ使われ、段 0 での読み出しの誤差は小さくありません源 。

言い直すのに足りない言明（§04 と同じ根）。

1. 段 0 の測度の $N \to \infty$ の極限の存在と名前。§02 の収束から出る見込みですが推、言明はありません。
2. 段 0（あるいは任意の段）の押し出しの測度の鏡映正値性。核の支えのため自明ではありません推。
3. 粗い配位の Wilson ループと、細かい場（あるいは連続）の Wilson ループの関係。
4. 体積 p に一様な、段 0 の対象についての評価。
5. 段 0 での観測量の像の極限（全ての次数）と、段 0 の期待値と連続の相関を結ぶ等式。

とくに 1（極限の対象）・4（体積に一様な局所の評価）・5（段 0 での観測量の像）の三つが無いと、「残る問いは段 0 の有効な理論の長距離の問いである」とは言明できません。五つが揃えば、残る問いを「名前のついた一つの格子の測度の族についての問い」として言明できます。揃わないうちは、言い直しは方向の目安です。

06

弱結合から強結合へ

段 0 の結合 $\bar{\beta}$ は大きく（弱結合）、閉じ込めや質量ギャップが見える長さは、その段の単位でもさらにずっと先にあると見込まれます推。一ループの走りを段 0 より粗い側へ形式的に延ばすと、結合が 1 の程度になる長さは段 0 の単位で $e^{\bar{\beta}/s}$ の程度です推（外挿で、構成の言明ではありません）。そこへ行くには、段 0 からさらに粗い側へ、強結合の領域に入るまで流す新しい段が要ります推。その入口に要るのが、§05 の 1〜3（極限の測度、鏡映正値性、粗い Wilson ループとの関係）です推。言い直しを言明にするのに要る三つ（§05 の 1・4・5）とは別の組です。

この本は、弱結合と強結合をつなぐ途中の領域を「移り変わりの帯」と呼んできました（26-00）。残る問いを上のように言い直してよいなら、それはこの帯を越える問いに当たります推。この本の検討の持ち札は帯の両端に在り、間は開いたままです（16-04）。

注意を一つ。この本の検討の繰り込み（決定的なブロック写像の押し出し、19-04）と、公開された構成の押し出し（結合に依る確率核）は、対象が似ていても同じではありません。片方の収束から他方の収束は出ません推。

07

この章が言っていないこと

- 段 0 の理論の長距離の振る舞いについて、何も示していません。

- §05 の五つの言明が成り立つとも、成り立たないとも言いません。2 については自明でない、と推すだけです。
- 「言われていない」は検索した範囲の結果です。別の名で同じ中身が在る可能性は除けません。
- 公開された構成の証明の当否は、委員会の評価の水準のままです。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
源 全ての段の結合は帯 $[\hat{\beta}_m/2, 2\hat{\beta}_m]$、段 0 は格子間隔 1 で $\beta = \bar{\beta}$（`Conv.band`・`Selected.reaches`・`Schedule.side`）	$\bar{\beta}$ の陽な値（条件から、およそ 9×10^5 以上 読、入口の値は存在だけ）
源 段 0 を含む各段の有効な密度が、体積を止めて切断の列の全体で sup ノルムで一様に Cauchy、規格化の定数も Cauchy（`Flux.fanned`・`lacks`・`sees`）	体積に一様な収束
推 正規化した密度の全変動の収束は一行で出る	名前のついた言明としての形
源 極限の測度・その鏡映正値性・粗い Wilson ループとの関係・段 0 の対象の体積に一様な評価・段 0 より粗い繰り込みは、検索の範囲で言われていない	別の名で在る可能性の除外
源 全ての段が弱結合の帯の中、段 0 で基準の値、体積は段 0 の単位、間隔 1 より長い距離はどの定理でも扱われない（名前の検索の範囲）。推 それを根に、残る問いを「段 0 の理論の長距離の問い」と言い直すのが方向として正しい見込み。さらに「弱結合から強結合まで追う問い」と言い直せる。言明にするには五つの言明が足りない	その問いへの答え

出典と再現

もの	種別	出典・道具
段の格子・結合の帯・段 0 の合わせ・密度の質量・押し出し	源	`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`：`YM/Lattice/Scale.lean:67` `side`、`YM/RG/History.lean:218` `Conv.band`・`:223` `Transfer`・`:239` `Selected.reaches`・`:242` `partition_eq`・`:110` `fitsPatch`
密度の一様な収束	源	`YM/FullVolume/Fields/Cement.lean:50` `Flux.fanned`・`:56` `lacks`、`Filled.lean:30` `sees`、`Till.lean:9` `till`・`:20` `lingers`
細かい段からの読み出し	源	`YM/FullVolume/Fields/Peat.lean:42` `Sever.echoes`、`Timber.lean:58` `latter`・`:74` `arrives`、`Flight.lean:28` `refreeze`、`Capital.lean:57` `Rising.hail`
鏡映正値性・チェス盤の根・粗いボンドの予測	源	`YM/Slice/Reflection.lean:98` `reflected_positive`、`YM/Extraction/Center.lean:38` `Wcmain`、`YM/RG/Block.lean:39` `connector`

もの	種別	出典・道具
開いた問い	評	評価書（`yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`、2026-11-10）§8

この章で使った語 — 繰り込みの段・格子間隔・結合の帯・基準値・確率核・押し出し・有効な密度・一様な Cauchy・全変動・鏡映正値性・チェス盤の根・移り変わりの帯。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：16-04 この本の位置 — この本の検討の持ち札が、弱結合と強結合のどちらの端に在るかを並べ、第三巻の読み方を案内します。

この本の位置

この章は案内です。§02 は未解決の地図です。

この章で分かること — この本の検討が Lean で機械検査した定理を、結合の軸の上に並べます。持ち札は両端に在ります。強結合の端には、無限体積の極限・（格子の単位の）質量ギャップ・面積則・渦の自由エネルギーの上界が、どの結合でも成り立つものとして渦の床・渦の比の性質が、弱結合の側には大きい面の稀さが在ります。間（移り変わりの帯）は開いたままです。最後に、第三巻の各部が何を扱うかを案内します。

前提となる章 — 16-02 五つの開いた問い、16-03 公開された構成の赤外の端。

先に言うこと — ここに並べる定理はどれも格子間隔を固定した言明で、既知の型の結果の形式化です。連続極限も、問題文の意味の質量ギャップも示していません。公開された構成が扱っていない種類の言明が含まれますが、そのことは開いた問いに答えたことを意味しません。

この章の順序

1. 結合の軸の上の持ち札 — 表 1
2. 間は開いたまま — 移り変わりの帯で足りないもの
3. 公開された構成との重なりと違い — 同じ向き、違う種類
4. 第三巻の読み方 — 部ごとの一行と、三つの読む順
5. この章が言っていないこと

札 — 源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による（くわしくは 6-00 の「札」）。初・典・機・読・仮・Lean は本全体の札で、読 は本書の数値の読み、Lean は本書の Lean の定理です。

01

結合の軸の上の持ち札

格子ゲージ理論の結合 β を一本の軸と見ます。β が小さい側が強結合で、閉じ込めと質量ギャップが既知の型の展開で示せる領域です（5-02）。$\beta \to \infty$ が弱結合で、連続極限はこちらの端で取ります（5-05）。この本の検討の定理を、この軸の上に置くと表 1 になります。

場所	定理	範囲	章
強結合の端	相関の指数的な減衰（定数に体積なし）	$18 \tanh \lvert\beta\rvert < 1$ など	20-02
	無限体積の極限（部分列なし）・並進不変・クラスター性	$\beta \neq 0$、$18 \tanh \lvert\beta\rvert < 1$	20-03
	再構成の器の質量ギャップ（格子の単位、下界）	同じ窓	20-04
	Wilson ループの面積則（有限体積・無限体積）	有限の箱で $\beta < 1.135 \cdot 10^{-3}$（定数 441 の版）、無限体積で $\beta < 1.22 \cdot 10^{-4}$（定数 4096 の版。ほかに $\beta > 0$ と $18 \tanh \beta < 1$）	20-06
	渦の自由エネルギーの上界（面積あたりの率が横の大きさに依らない。前の因子 N^2（横の面積）は残る）	基本の版（定数 4096）で $\beta < 1.22 \cdot 10^{-4}$、鋭い版（定数 441）で $\beta < 1.135 \cdot 10^{-3}$	20-06
どの結合でも	鏡映正値性（三つの形）	全ての実の β（形による）	20-01
	薄い渦の床（率は横の大きさ N に依る）	全ての β	21-02
	太い渦の床・渦の最小作用	十分大きい β ごとに（閾は存在だけ）	21-03・21-05
	θ の符号、Polyakov ループの対	縦 M が偶数	21-06
	渦の比の連続・$\beta \to \infty$ の極限・合わせの最大の解・捩れた箱の欠けの下界	格子を止めて	21-07
弱結合の側	大きい面の稀さ（体積に一様）	$\beta \geq 81$（陽な閾）	22-01

表 1　この本の検討の確かな定理の置き場所。どれも格子間隔を固定した、既知の型の結果の、本書の Lean での形式化です[Lean]。窓の値は浮動小数の読みです[読]。

読み方を二つ添えます。

- **強結合の端は「示しやすい側」です。**ここでの質量ギャップと面積則は、問題文が求める連続の理論の質量ギャップとは別の言明で、連続極限が要る弱結合の端とは反対側にあります。
- **どの結合でも成り立つものは、横の大きさに一様でありません。**渦の床の率は横の大きさ N を大きくすると 0 に近づきます（薄い床）か、閾が N に依ります（太い床）。強結合の

窓の中に限れば、率が N に依らない形が在ります。前の因子 N^2（横の面積）は残り、窓の外では一様な形はありません（20-06）。

02

間は開いたまま

無限体積の極限と質量ギャップの強結合の窓は $|\beta| < 1/19$（≈ 0.053。18 $\tanh|\beta| < 1$ の陽な十分条件で、窓そのものは $\operatorname{artanh}(1/18) \approx 0.0556$。20-03）、稀さの閾は $\beta \geq 81$ で、物理で興味のある帯（β が 2〜3 ほど）はどちらにも入りません。この間を「移り変わりの帯」と呼んできました（26-00）。帯を渡るのに足りないものを、定義された対象だけで書いた言明として 19-07 に置いてあります（合わせ・全列の収束・非退化・同程度連続・一様な減衰・帯）。どれも、格子間隔と箱の大きさに**一様な**評価を求めるもので、この本の確かな定理（どれも一つの格子間隔の言明）からは出ません。帯について本書の検討が試した発想の地図は 16-11、帯の議論を試す相手の一覧は 26-12 に在ります。

公開された構成の側から見ても、残る問いは同じ場所に在ります。構成は全ての段を弱結合のまま運び、格子間隔 1 の段で止まります（16-03）。残る問い（質量ギャップ・面積則・一意性）の主な部分は、その段の有効な理論の、長い距離での指数の減衰に寄せられる見込みです[推]。ただし段 0 の理論は Wilson の作用ではなく表示つきの有効な作用の理論で（基準の結合 $\bar{\beta}$ はその係数、表示は一意でない）、その鏡映正値性も言われていません[源]。そう言明するには、極限の対象・体積に一様な局所の評価・段 0 での観測量の像の三つが要ります。この見込みのもとでは、両方の側から問いは帯の辺りに集まります[推]。

帯について、この本の検討が持っているのは条件つきの含意と前提の一覧です（27-01・28-04）。前提を満たすことは示していません。

03

公開された構成との重なりと違い

同じ向きのもの。格子の Wilson の測度の鏡映正値性とチェス盤の評価は、どちらにも在ります[源]。公開された構成は、元の Wilson の測度について、格子点を通る面と辺の中点を通る面の鏡映正値性を四つの軸の全てで（$\beta \geq 0$）持ち、チェス盤の根の三角不等式も持ちます[源]（12-01・12-02）。部分列の極限を取って性質を移す筋も同じ型です。

公開された構成に見当たらない種類のもの（検索の範囲で）。

- **大きい面の稀さ**。公開された構成はチェス盤の評価を観測量の大きさを測るのに使い、大きい面の集合の確率の評価には使っていません[推]（22-00）。

- **捩れた境界条件と渦の自由エネルギー**。公開された構成の Wilson の測度は周期のトーラスの上だけで定義され、捩れの言明は見つかっていません[推]（名前の検索の範囲）。
- **強結合の窓の中の質量ギャップと面積則**。公開された構成は強結合の領域を通らない（16-03 §01）ので、この種類の言明は無いと見られます[推]（名前の検索の範囲）。

この違いは、どちらが先に進んでいるかの比べではありません。公開された構成は四次元の連続の理論の存在を、委員会の評価として与えています[評]。この本の検討はそれを持ちません。逆に、上の三つは格子を止めた言明で、評価書の開いた問い（16-02）のどれにも答えていません。本書の強結合の結果（無限体積の極限・質量ギャップ・面積則・渦の床）は、残る問い（連続の理論の、一様な質量ギャップなど）とは**反対の端**（強結合、格子間隔は固定）の言明です。同じ種類の量を別の領域で扱うもので、開いた問いへの道を与えるとは言いません。

04

第三巻の読み方

部	題	扱うこと
第 16 部	現在地と残る問い	年表、開いた問い、公開された構成の赤外の端、この本の位置、切れ目・課題・誤解・七段の表・道具の地図
第 17 部	物理の側から	閉じ込めの機構、弦の絵、大きい N、幾何としての質量ギャップ。数学の定理ではない見方の整理
第 18 部	二つの言葉の辞書	物理の語と数学の語の対応、この本の仮定を物理の言葉で
第 19 部	対象と、示すべき言明	格子・Wilson の測度・捩れ・鏡映・ブロック写像の定義（Lean の定義つき）と、示すべき言明
第 20 部	確かな定理 — 器と強結合	鏡映正値性、強結合の減衰、無限体積の極限、再構成と質量ギャップ、フェルミオンつきの器、面積則
第 21 部	確かな定理 — 渦の床と Polyakov ループ	符号の系、薄い・太い渦の床、渦の最小作用、θ の符号、渦の比の連続・極限・合わせ
第 22 部	確かな定理 — 大きい面の稀さ	チェス盤の評価と、弱結合での体積に一様な稀さ
第 23・24 部	一本目の道 — 時間の方向から	緩和の時間と相関の長さから帯へ向かう検討の記録
第 25 部	二本目の道 — 空間の方向から	捩れた小さなトーラスと閉じ込めから帯へ向かう検討の記録
第 26 部	移り変わりの帯	帯の正しい形、還元、構造だけでは越えられないこと、繰り込みとの比べ
第 27 部	閉じる — 条件つきの言明	条件つきの言明と条件の台帳、問いと言わないことの索引

部	題	扱うこと
第 28 部	前提の木	含意三つ、前提の一覧、設計の選びに依るもの、開いている所

表 2　第三巻の部。

読む順の案。

- **確かなことだけを知りたいとき。**第 19 部（対象）→ 第 20〜22 部（確かな定理）。各部の最後の章に「言えていること・言えていないこと」の表が在ります。
- **残る問いの形を知りたいとき。**この部（16-02〜16-04）→ 19-07（示すべき言明）→ 第 26 部（帯）→ 第 28 部（前提の木）。
- **動機から入りたいとき。**第 17・18 部（物理の見方と辞書）→ この部 → 第 20〜22 部。

第 23〜25 部は、帯へ向かう二本の道の検討の記録で、書き直していません。結論の多くは第 26〜28 部に集めてあります。

05

この章が言っていないこと

- 質量ギャップの本体（連続の理論の、格子間隔に一様な質量ギャップ）について、何かを示したとは言いません。
- 表 1 の定理はどれも既知の型の結果の形式化で、新しさを主張しません。
- 公開された構成に「見当たらない」ものは検索の範囲の結果で、別の名で在る可能性は除けません。
- 帯の言明が正しいとも、どの道で示せるとも言いません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
Lean 表 1 の定理（強結合の端・どの結合でも・弱結合の側）が Lean で機械検査されている。詳細は各章	格子間隔に一様な評価、連続極限、帯
源 鏡映正値性とチェス盤は両方に在る。推 公開された構成は強結合の領域を通らない（β の大きさに依る）	—
推 大きい面の稀さ・捩れた境界条件は公開された構成に見当たらない（名前の検索の範囲）。本書の強結合の結果は、残る問いとは反対の端の言明	残る問いへの答え・道

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1 の定理	Lean	各章の出典の表（Osterwalder–Seiler、Dobrushin、't Hooft、Fröhlich–Israel–Lieb–Simon の型）と Lean の宣言
公開された構成の赤外と鏡映正値性	源	`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）。在りかは 16-03 と 12-01
存在の構成の評価、開いた問い	評	評価書（`yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`、2026-11-10）冒頭と §8

この章で使った語 — 強結合・弱結合・移り変わりの帯・面積則・渦の床・渦の自由エネルギー・大きい面の稀さ・示すべき言明・前提の木。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：16-05 二つの掘り方の切れ目 — 本書の検討の二つの道がどこで切れているかを地図にします。確かな定理から読むなら 19-00 へ。

二つの掘り方の切れ目 — 七つの seam で、二本のトンネルの食い違いを見る

この章は未解決の問いの地図です。§05 は本書の検討です。

この章で分かること — 七つの切れ目それぞれの物理の一文・数学の言明・部分的な橋と、三つの型。二つの岸が数値からどれだけ離れているかを、局所的な量と質量で比べること（この端末の計算）。

前提となる章 — 7-11 発散以外の障害と17-13 物理の掘り方が数学と離れる場所。道具は 4-10（反射正値性）・5-01（格子）・4-07（次元転移）。

先に言うこと — 切れ目を名指しする章で、どれも埋めていません。七つの数え方と型はこの本の整理です。本書の検討の記録が手を付けたのは「尺度は一つ」の切れ目の周りだけで、定理には届いていません。質量ギャップの存在も連続極限の構成も、この章は示しません。存在の切れ目には、2026 年に公開された構成が橋を架けました（委員会の評価[評]。第 6 部）。札[評]は委員会の評価書による、の意味です（6-00 の「札」）。

この章の順序

1. 二つの掘り方 — 存在からか、値からか。壁の対訳表（六つの障害と七つの手つき）
2. 切れ目の地図 — 七つと三つの型（表 1）
3. 前提が目標になる型 — 存在・尺度は一つ
4. 極限と一様性の型 — 岸・有限と無限・余剰次元
5. 岸のあいだを測る — プラケットと質量（図 1・計算）
6. 同じ語が別のものを指す型 — 時空と空間・粒子
7. 二つの一覧を重ねる — 部分的な橋

01

二つの掘り方

この問題には掘る向きが二つあります（0-02）。数学は「理論はまだ無い」から出発して六つの段（7-01）を順に通し、物理は「理論は在る」から出発してその中の量を計算します。比喩で言えば同じ山を両側から掘る二本のトンネルで、正確には、片方の文をもう片方へそのまま渡せない場所がある、ということです。数学の目標は次の形です（0-03）既知 。

$$\forall G \;\; \exists \mathcal{T}_G : \;\; \text{公理} \;\wedge\; \text{非自明} \;\wedge\; \text{短距離で漸近自由と一致} \;\wedge\; \operatorname{spec}(H) \subset \{0\} \cup [\Delta_G, \infty), \;\; \Delta_G > 0 \tag{0-1}$$

G はコンパクト単純群、$\mathcal{T}_G$ は $\mathbb{R}^4$ 上の量子ヤン–ミルズ理論、H はそのハミルトニアンです。物理の文「$\mathcal{T}_G$ で量 Q を計算すると q」は $\exists \mathcal{T}_G$ を前提に含みます。物理の一文 P を数学の言明 M に訳して、訳が定理にならない場所を**切れ目**（seam）と呼びます。

$$\text{切れ目} = (P, M) : \quad P \text{ は物理で使われている}, \quad M \text{ は定理でない、または } P \text{ と別のものを} \tag{0-2}$$

例：$SU(2)$ の $m_{0^{++}}/\sqrt{\sigma} = 3.844(61)$（Lucini–Teper 2001）物理 は、物理では予言、数学では構成した理論が合わせるべき的です（17-13 §01）。

壁の対訳表 — 数学の六つの障害と、物理の七つの手つき

表 1 の切れ目は、両側の一覧の行を対にして作りました。その前に、行どうしを名前で対訳しておきます。左は 7-11 表 4 の六つの障害、右は 17-13 表 5 の七つの手つきです。決まり文句は、それぞれの側がその壁を指して言う言い回しです。片側にしか無い行があります。

対訳表　壁の名前（対応の付け方はこの本の整理）

数学の名前（7-11）	物理の名前（17-13）	決まり文句（数学／物理）	片側にしか無いか
障害 1 赤外に小さな径数が無い	隣の理論へ移り、つまみで戻る・小さい径数の側から見る	「結合が $O(1)$ の尺度を渡る一様な評価が無い」／「Λ より下は非摂動的」	両側
障害 2 摂動論に映らない	小さい径数の側から見る・一つと見なす	「$e^{-c/\alpha}$ のテイラー係数はすべて 0」／「$\Delta = c\Lambda$」	両側
障害 3 自由場に潰れないこと	在ると置いてから測る	「極限が自由場でないことを示す」／「理論は在る」	両側
障害 4 状態空間が曲がっている	ゲージを選んでから見る	「大域的なゲージ固定は無い」／「ゲージを固定して計算する」	両側（表 4 の「表の外：ゲージ」）
障害 5 反射正値性を保つ正則化が乏しい	—	「正値性を保つ正則化」／—	**数学の側だけ**。物理の数値計算は、正値性を失う改善作用も使う（18-04 の「改善作用」の項）

数学の名前（7-11）	物理の名前（17-13）	決まり文句（数学／物理）	片側にしか無いか
障害 6 無限自由度の構造	—	「表現が同値でない（Haag の定理）」／—	**数学の側だけ**。物理の摂動計算は相互作用表示を使って進む
—	弦の絵で σ を取る（§03・§04）	—／「弦が張る・面積則」	**物理の側だけ**。閉じ込め（面積則）は問題文の要求の外で、拡張問題（17-02）
—（六つの外：紫外の側）	有限の β から外挿する	「連続極限の構成」／「a^2 で外挿する」	7-11 の六つには無い。数学では紫外の側の問題（7-07・7-10）

両側にある四行は、同じ壁を別の言葉で呼んでいます。片側にしか無い行は、その側の言葉では壁として見えない場所です。正値性と表現の同値性は、物理の手順では問われずに通り過ぎ、面積則は、数学の問題文では問われずに通り過ぎます。この対訳を切れ目に組み直したものが表 1、部分的な橋まで並べたものが §07 の表 4 です。

02

切れ目の地図 — 七つと三つの型

表 1 に七つの切れ目を並べます。数学の順（存在→公理→ギャップ）と物理の順（値→機構）は向きが逆なので、同じ位置の段どうしは対応しません。比喩で言えばトンネルの食い違いで、正確には、一方の側の前提が他方の側では最後の段の目標になる、ということです。

表 1　七つの切れ目（分け方と型はこの本の整理）

切れ目	物理の一文	数学の言明	型
1 存在の前提	理論は在ると置き、その中の量を計算する	公理を満たす極限を、部分列でなく作る	前提が目標になる型
2 尺度は一つ	質量も弦張力も一つの Λ の定数倍	式 (5) が β に一様に成り立つ	前提が目標になる型
3 岸が違う	g→0・β 小・N→∞ の側で計算する	有限の N で、すべての尺度を制御する	極限と一様性の型
4 有限と無限	有限の箱で測り、a^2 で外挿する	体積に一様な隙間（Chatterjee の格子の相関長の問題、Problem 5.1）	極限と一様性の型
5 時空と空間	粒子が飛び、因果がある時空で考える	ユークリッドの測度から反射正値性で戻る	同じ語が別のものを指す型
6 「粒子」という語	ギャップは最も軽いグルーボールの質量	スペクトルの隙間（孤立した一粒子状態は拡張問題）	同じ語が別のものを指す型
7 余剰次元	葉巻の幾何でギャップを出す	R→0（λ→0）の極限と、極限の入れ替え	極限と一様性の型

前提が目標になる型は物理の前提が数学の目標になる切れ目、**極限と一様性の型**は物理が径数 p の特定の値（岸）で計算し、数学は p を問題文の値 p_* へ動かす極限を要る切れ目、**同じ語が別のものを指す型**は同じ語が別の対象を指す切れ目です。極限と一様性の型は次の形です。

$$\text{物理：}\ F(p_{\text{岸}})\ \text{を計算},\qquad \text{数学：}\ \lim_{p\to p_*} F(p)\ \text{の存在と、}\ \inf_{p}\Delta(p)>0\ \text{のような一様な評価} \tag{3}$$

例：有限と無限の切れ目では $p=L$（箱の一辺）で $p_*=\infty$、余剰次元の切れ目では $p=R$（余剰次元の大きさ）で $p_*=0$ です。

以下の節は型ごとに並べます（前提が目標になる型が 1・2、極限と一様性の型が 3・4・7、同じ語が別のものを指す型が 5・6）。

03

前提が目標になる型

存在の前提の切れ目

物理の計算は理論（測度とヒルベルト空間）が在ることの上に立ち、数学はその存在を作らなければなりません。作る途中では質量も弦張力も定義されていません。問題文は 'one does not yet have a mathematically complete example of a quantum gauge theory in four-dimensional space-time, nor even a precise definition' と書きます 既知 。数学は $\exists\mathcal{T}$ を、格子間隔 a・一辺 L の近似 $\mu_{a,L}$ の極限として示します。

$$\mu=\lim_{L\to\infty}\lim_{a\to 0}\mu_{a,L}\qquad\text{(部分列でなく、極限そのものが在って一つに決まる)} \tag{4}$$

コンパクト性による部分列の極限（弱い存在）だけでは解と認めない、と問題文は §6.5 の脚注 2 に書きます（別の手法で極限の性質を確立するなら別） 既知 。例：二次元は $\mathbb{R}^2$ の測度まで作られ（7-02）、三次元は 'a construction of the 3D YM measure and a description of its gauge-invariant observables, even on T^3, remains open'（Chevyrev 2022） 既知 、四次元は、2025 年までは有限体積の紫外安定性が仮定つきで得られた段階でした（7-07）。

2026 年に公開された構成は、四次元の Wilson の格子ゲージ理論の極限として、任意のコンパクト単純群で Wightman の公理を満たす理論を作りました。委員会はこれを「Lean で証明されている」と評価しています 評 （6-00）。式 (4) の内側の極限 $a\to 0$ は、周期の箱を止めて切断の列の全体で取られ、外側の極限 $L\to\infty$ はコンパクト性による部分列です（8-05・12-05）。無限体積の極限の収束と一意性は示されていない、と評価書は書きます 評 （16-02 §02）。この構成が脚注 2 の意味で何に当たるかを、この章は判定しません。物理の側から見れば、この切れ目の「理論が在る」の半分が、数学の言明になりました。残るのは、その理論

の中の量（質量ギャップ・弦張力）が数学として定まることで、それは「尺度は一つ」の切れ目と、有限と無限の切れ目の側の問いです。

尺度は一つの切れ目

物理では、次元を持つ量はすべて一つの尺度 Λ の定数倍だと考えます（4-07）物理。数学に訳すと、例えば格子単位の質量 $m(\beta)$ と弦張力 $\sigma(\beta)$（$\beta = 2N/g^2$ は格子の逆結合で、逆温度ではありません）について次が成り立つことです。

$$0 < c \le m(\beta)^2/\sigma(\beta) \le C < \infty \qquad (\beta \ge \beta_0 \text{ で一様}) \tag{5}$$

これが四次元に特有なのは $[g^2] = (\text{質量})^{4-d}$ のためです 既知。$d < 4$ では理論が在れば次元解析で尺度は一つ、$d = 4$ では $\Lambda = \mu\, e^{-1/(2b_0 g^2(\mu))}$ が結合の走りから量子効果として生まれます物理。ただし次元解析が決めるのは形だけです。例えば $d = 3$ では g^2 が質量の次元を持つので $m = c_1 g^2$、$\sigma = c_2 g^4$ と書けますが、定数 c_1, c_2 が極限で 0 や ∞ に行くことまでは禁じません。例：一尺度が破れる例は、三次元の compact $U(1)$（質量を物理の単位で固定した連続極限で $\sigma/m^2 \to \infty$ とされる。Göpfert–Mack の要旨は m_D を固定した連続極限で物理単位の弦張力が無限大と書く。本文は未読）と超重力の領域（$m^2/\sigma \sim 1/\lambda$）です物理（17-12 §08）。本書の検討の記録は (5) に近い一文を拡散型緩和時間の仮定として切り出し、三つの鎖に分けましたが（17-12・23-01）、定理にはなっていません。

04 極限と一様性の型

岸の違いの切れ目

定理や計算が効くのは三つの岸です。摂動論は $g \to 0$、強結合展開は小さい β、ホログラフィーは $N \to \infty$ かつ $\lambda = g^2 N \to \infty$ の岸で、問題文の理論はどの岸にもありません。格子の結合を 't Hooft の結合に直すと次のとおりです。

$$\lambda = g^2 N = 2N^2/\beta \tag{6}$$

強結合の側では、十分に小さい β での無限体積極限と指数的なクラスター性（ギャップ）が Osterwalder–Seiler 1978 にさかのぼります（範囲は明示されない。Shen–Zhu–Zhu の序論による）既知。範囲を明示した定理（Shen–Zhu–Zhu。arXiv 2022、CMP 2023）の条件は、Wilson の規格化で $\beta < N^2/(16(d-1))$ です（16-01）既知。(6) で直すと $\lambda > 32(d-1)$、四次元で $\lambda > 96$ となり、N によりません計算。連続極限は $\lambda \to 0$ の向きで、格子の数値は $SU(2)$ の $\beta = 2.25$〜2.60 で $\lambda = 3.6$〜3.1 です計算（規約が違うので目安）。例：二つの強

い岸はどちらも、切断と物理の尺度が分かれていない場所です（強結合の格子では相関長が格子間隔より短く、超重力では KK の塔がグルーボールと同じ高さに残る。17-10）。

有限と無限の切れ目

有限の箱・有限の β では転送行列の成分が正なので、隙間はいつも正です（17-13）既知。問われるのは、箱を広げても潰れないことです。

$$\text{各 } L \text{ で } \Delta_L > 0 \qquad \text{と} \qquad \inf_L \Delta_L > 0 \qquad \text{は別の主張} \tag{7}$$

問題文は後者について 'no present ideas point the direction to establish the existence of a mass gap that is uniform in the volume' と書き既知、格子の上の形は Chatterjee 2018 の格子の相関長の問題です（16-08 §08）。物理は有限の箱で測り、$L\sqrt{\sigma} \geq 3$（L は箱の一辺の物理の長さ）のような経験則で体積の影響を確かめ、格子間隔については a^2 で外挿します（17-13 §05）物理。例：二次元イジング模型の帯は臨界点で隙間が $1/L$ で閉じますが、どの L でも隙間は正です（2-09）。有限の箱の数値から $\inf_L$ は読めません。

余剰次元の切れ目

ホログラフィーでは、ギャップは余剰次元の幾何（円が潰れる葉巻）から出ます（17-09）物理。四次元に戻すには余剰次元の大きさ $R = 1/M_{\mathrm{KK}}$ を 0 にして Λ を固定しますが、一ループの見積もり

$$\Lambda / M_{\mathrm{KK}} \approx \exp\!\left(-24\pi^2/(11\lambda)\right) \qquad (\lambda \text{ は } M_{\mathrm{KK}} \text{ での値}) \tag{8}$$

から、$R \to 0$ は $\lambda \to 0$ と同じ向きです（17-10）物理。超重力が使えるのは $\lambda \gg 1$ で、Csáki らは 'This is the opposite of the limit that is required for the supergravity description to be valid' と書きます物理。例：Sakai–Sugimoto の当てはめから換算した $\lambda \approx 16.6$（クォークを含む模型の当てはめ値で、純ヤン–ミルズの値ではない。$N = 3$。規約で 2 倍程度ずれうる）では (8) は 0.27 で、尺度は分かれていません計算。極限の入れ替えの正当化は、探した範囲で見当たりません。

05 岸のあいだを測る — プラケットと質量

岸の遠さは量によって違います。四次元 $SU(2)$ の Wilson 作用 $S = \sum_P \left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{tr} U_P\right)$、重み $e^{-\beta S}$（$\beta = 4/g^2$。5-01）で、局所的な量（プラケット）と長い距離の量（質量）について、二つの岸の主項を数値と比べます。主項はどちらも標準の最低次の展開です（強結合展開は 5-02 で扱います）。

$$\left\langle \tfrac{1}{2}\operatorname{tr} U_P \right\rangle \approx u(\beta) = \frac{I_2(\beta)}{I_1(\beta)} \quad (\beta \text{ 小}), \qquad \left\langle \tfrac{1}{2}\operatorname{tr} U_P \right\rangle \approx 1 - \frac{3}{4\beta} \quad (\beta \text{ 大}) \tag{9}$$

二つの主項の中身

I_n は変形ベッセル関数で、次の積分で定義します。

$$I_n(\beta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\beta\cos\theta}\cos n\theta \, d\theta$$

強結合の主項 u は、プラケット一枚を周りと無関係な $SU(2)$ の変数とみなし、$\frac{1}{2}\operatorname{tr} U$ を重み $e^{\beta\cdot\frac{1}{2}\operatorname{tr}U}$ で平均した値です。群の上の Haar 測度（5-01 §06）では $\frac{1}{2}\operatorname{tr}U = \cos\theta$ の密度が $\sin^2\theta$ に比例し（$0 \le \theta \le \pi$）、この平均がちょうど I_2/I_1 になります 既知 （数値積分で 10 桁一致 計算 ）。β が小さいと周りのプラケットとの結び付きが弱く、この一枚の平均が主項です 既知 。

弱結合の主項は**等分配**の勘定です。等分配とは、重み $e^{-\beta S}$ の下で、S に二次の形で入る自由度一つが $\langle \beta S\rangle$ に $\frac{1}{2}$ ずつ寄与する、ということです（$\int x^2 e^{-\beta x^2}dx \big/ \int e^{-\beta x^2}dx = 1/(2\beta)$ から）。β が大きいとプラケットは 1 の近くに押し込められ、S はリンクの小さな揺れの二次式で近似できます。一格子点あたりリンクは 4 本、$SU(2)$ の向きは 3 つで 12 個です。そのうちゲージ変換の 3 つの向きは作用を変えないので数えず、9 個が残ります。一格子点あたりのプラケットは 6 枚なので、一枚あたり $\langle 1 - \frac{1}{2}\operatorname{tr}U_P\rangle \approx \frac{9/2}{6\beta} = \frac{3}{4\beta}$ です 既知 。

質量は相関の減り方の率です。強結合では、離れた二枚のプラケットを結ぶにはあいだを管の形のプラケットで埋める必要があり、管が一格子伸びるごとに側面の 4 枚ぶん u^4 を拾います。相関は距離 t で $u^{4t} = e^{-(-4\ln u)t}$ のように減るので $am \approx -4\ln u$ です 既知 。弱結合の側では、am を g^2 の冪級数に展開するとどの次数の係数も 0 で（e^{-1/g^2} の形のため）、形だけが漸近自由から来ます 物理 。

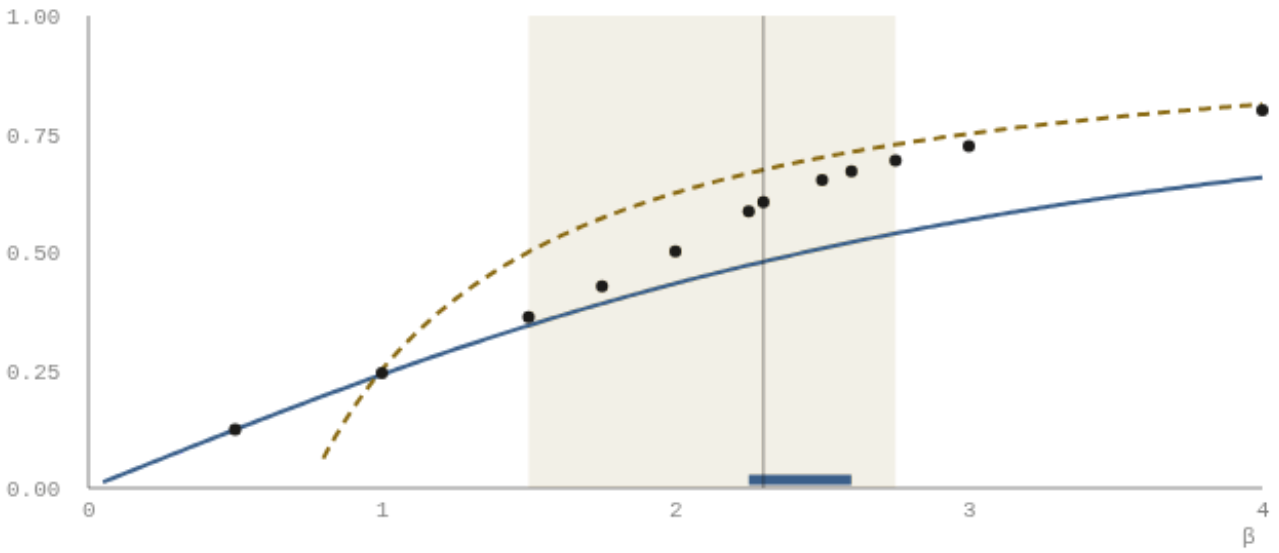
$$am \approx C\,(b_0 g^2)^{-51/121}\, e^{-3\pi^2\beta/11}, \qquad b_0 = \frac{22}{48\pi^2} \tag{10}$$

二ループの漸近スケーリングです（4-06）。定数 C は漸近自由からは決まらず、それがギャップの情報そのものです。

数値と並べる

数値は、プラケットがこの端末の 6^4 の格子での熱浴法 計算 、質量が Lucini–Teper 2001 の表 1 物理 です。熱浴法は、リンクを一本ずつ、周りのリンクを固定したときの条件つき分布から直接引き直す更新を繰り返すモンテカルロ法です（5-07）。

図 1　ボタンで量を選び、つまみで β を動かすと、縦線の位置の読みが変わる。実線は強結合の主項、破線は弱結合の主項（質量では (10) を β = 2.6 に合わせた形）、点は数値。プラケットの図だけに、網の帯（どちらの主項も 5% 以内に入らない測定点 β = 1.75〜2.6 を含む区間。両端の 1.5 と 2.75 では一方が 5% 以内に入る）と、下端の太線（質量の数値がある β = 2.25〜2.60）を描く



β = 2.30　強結合の主項 0.4793　弱結合の主項 0.6739　数値 0.6051（ずれ −20.8%・+11.4%）

計算 プラケットの点（表 2）と曲線（(9)・(10) をその場で計算）はこの端末で計算した。

物理 質量の点は Lucini–Teper 2001 の表 1。

計算 表 2　$\langle \frac{1}{2} \operatorname{tr} U_P \rangle$：$6^4$ の熱浴法（括弧は統計誤差の目安。測った 15 点から抜粋）と二つの主項。ずれは数値に対する百分率。

β	数値	強結合 u	ずれ	弱結合	ずれ
0.50	0.1234(2)	0.1237	+0.3%	—	—
1.00	0.2438(3)	0.2402	−1.5%	0.2500	+2.5%
1.50	0.3616(4)	0.3441	−4.8%	0.5000	+38.3%
1.75	0.4271(4)	0.3906	−8.6%	0.5714	+33.8%
2.00	0.5010(7)	0.4331	−13.6%	0.6250	+24.7%
2.25	0.5856(7)	0.4720	−19.4%	0.6667	+13.8%
2.30	0.6051(9)	0.4793	−20.8%	0.6739	+11.4%
2.50	0.6526(5)	0.5072	−22.3%	0.7000	+7.3%
2.60	0.6705(4)	0.5203	−22.4%	0.7115	+6.1%
2.75	0.6935(4)	0.5391	−22.3%	0.7273	+4.9%
3.00	0.7235(2)	0.5679	−21.5%	0.7500	+3.7%
4.00	0.7997(1)	0.6580	−17.7%	0.8125	+1.6%

表 3　質量 am（格子単位）。物理 数値 am の列は Lucini–Teper の表 1（この本で SU(2) の六点を引くときの正本。$a\sqrt{\sigma}$ と格子の大きさは 5-09 表 1）。計算 $\xi = 1/(am)$・強結合・(10) の列はこの端末の計算で、(10) は $\beta = 2.6$ の点に合わせた（$C = 185$）。

β	数値 am	ξ	強結合 $-4\ln u$	強結合／数値	(10)	ずれ
2.25	1.390(30)	0.72	3.004	2.16	1.241	−10.7%
2.30	1.090(33)	0.92	2.942	2.70	1.095	+0.4%
2.40	0.953(19)	1.05	2.825	2.96	0.851	−10.7%
2.475	0.754(10)	1.33	2.742	3.64	0.705	−6.5%
2.55	0.586(10)	1.71	2.663	4.55	0.583	−0.5%
2.60	0.514(8)	1.95	2.613	5.08	0.514	合わせた点

例：プラケットで数値の 5% 以内に入るのは、強結合の主項が $\beta \le 1.5$、弱結合の主項が $\beta \ge 2.75$ で（$\beta = 1$ の一致は曲線が交わるだけ）、$1.75 \le \beta \le 2.6$ の点ではどちらも入りません 計算。質量の連続値の外挿に使う $\beta = 2.25$〜2.60 はこの帯の中です。質量では強結合の主項が数値の 2.2〜5.1 倍で、(10) は他の五点を 11% 以内で再現しますが C は合わせた数です 計算。局所的な量では二つの主項のあいだを数値が埋め、長い距離の量では弱結合の岸に値が無く（7-11 §03）、強結合の岸は届きません。

物理の連続値 3.844(61) は、この帯の中の六点（$\xi \le 2$）の比 $m/\sqrt{\sigma}$ を $a^2\sigma \to 0$ へ延ばした値です（Lucini–Teper 表 5。延ばし方は 17-13 §05）物理。これは連続極限（$a \to 0$）への外挿で、体積の影響は有限の箱の経験則で別に確かめています（有限と無限の切れ目）。

06

同じ語が別のものを指す型

時空と空間の切れ目

物理の直感は時空（ミンコフスキー）の上にあり、粒子が飛び、因果があります。数学の構成はユークリッドの $\mathbb{R}^4$ の上の確率測度で、光円錐も因果もありません（0-04）。戻り道は反射正値性です（4-10）。Θ を時間の反射、F, G を正の時刻の側の関数、τ_t を時間の平行移動として

$$\langle F, G\rangle_{\mathcal{H}} := \big\langle \overline{\Theta F}\, G \big\rangle, \qquad \langle F, F\rangle_{\mathcal{H}} \ge 0, \qquad \langle F, e^{-tH} G\rangle_{\mathcal{H}} = \big\langle \overline{\Theta F}\, \tau_t G \big\rangle \tag{11}$$

の真ん中の不等式が反射正値性で、これがあってこそ $\mathcal{H}$ と $H \ge 0$ が作れます（Osterwalder–Schrader の再構成）既知。「時間」「エネルギー」「粒子」は (11) を通って意味を持つ語です。Wilson の作用が反射正値性を保つことは Osterwalder–Seiler 1978 によります 既知。一方で格子そのものは回転の対称性を壊します。問題文は、正則化で反射正値性が失われた場

合について、取り戻す方法は少ないと書きます（引用は 0-03 §03） 既知 。例：Pauli–Villars の二点関数では $\langle F, F\rangle_{\mathcal{H}} < 0$ となる F が作れます（7-11 §06）。

「粒子」という語の切れ目

物理はグルーボールの質量を数えます 物理 。問題文が求めるのはスペクトルの隙間で、下端に孤立した一粒子状態が在ることは 'natural extensions' に分けられています（0-03 §09） 既知 。

$$\text{問題文：}\ \operatorname{spec}(H) \cap (0, \Delta) = \varnothing, \qquad \text{物理：}\ m_{0^{++}} \text{ は } \sqrt{H^2 - \mathbf{P}^2} \text{ の孤立した固有値} \tag{12}$$

（$\mathbf{P}$ は運動量）。例：格子で測る相関の減り方は、下端の位置を教えても、孤立した点か連続スペクトルの端かは教えません（16-08 §05）。GeV の単位も純ヤン–ミルズからは出ず、Athenodorou–Teper は 'Strictly speaking this is of course not possible: the pure gauge theory and QCD … are two different theories' と断っています 物理 。

07

二つの一覧を重ねる — 障害・手つき・部分的な橋

7-11 は数学の側の障害を、17-13 は物理の手つきを挙げました。切れ目はその行を対にしたものです。すでに在る部分的な橋は、どれも次の形です。

$$A \implies (M \text{ の一部}), \qquad A \text{ が四次元・弱結合・連続・無限体積・有限の } N \text{ で成り立つ} \tag{13}$$

例：Shen–Zhu–Zhu では A が $\lambda > 96$（明示された範囲。Wilson の β では $N^2/48$ 未満、換算は 5-01 の表 4）、結論が無限体積でのギャップで、A は連続極限の向き $\lambda \to 0$ では成り立ちません。

既知 表 4　切れ目と 7-11 の障害・17-13 の手つき・部分的な橋（対応の付け方はこの本の整理）

切れ目	障害	手つき	部分的な橋
1 存在	3・6	在ると置く	$\mathbb{R}^2$ の測度（7-02）。四次元は公開された構成（周期の箱での連続極限・部分列の無限体積・Wightman の公理。委員会の評価 評 、第 6 部）。無限体積の極限の一意性は無い
2 一尺度	2	一つと見なす（尺度）	探した範囲で見当たらない（17-12 は仮定として切り出す段階）
3 岸	1	展開・隣の理論	強結合の無限体積極限・面積則・指数的クラスター性（Osterwalder–Seiler 1978。範囲は明示されない）。明示された範囲 $\lambda > 96$ でのギャップと log-Sobolev 不等式（Shen–Zhu–Zhu）

切れ目	障害	手つき	部分的な橋
4 有限と無限	1・6	外挿・弦の絵	有限群で弱結合の指数減衰（Adhikari–Cao）。連続な非可換群の格子の相関長の問題は開いたまま。公開された構成は無限体積へ部分列で移るが、体積に一様な隙間は無い（16-02）
5 時空と空間	5	すべての前提	有限の格子では Wilson 作用の反射正値性と正の転送行列（弱い極限でも保たれる）。回転の対称性の回復が残る
6 粒子	—	一つと見なす（隙間を粒子の質量と見る。17-13 §09）	探した範囲で、四次元には見当たらない
7 余剰次元	1	隣の理論	背景を固定した後の固有値問題（17-09）。極限の入れ替えは見当たらない
表の外：ゲージ	4	ゲージを選ぶ	両側に共通の壁。ゲージを選ばず、ゲージ不変な量（Wilson ループ）で閉じ込めを言う条件つきの定理（Chatterjee 2021：中心対称性が破れなければ閉じ込める。17-13 §08・16-08 §06）

存在の切れ目の橋を除くと、部分的な橋はどれも岸の側（強結合・低次元・有限の格子）にあり、問題文の側へ延びるものは探した範囲で見当たりません。存在の切れ目の橋（公開された構成）も、繰り込みの段を全て弱結合のまま運び、格子間隔 1 の段で止まります。長い距離の振る舞い（一様な隙間・面積則）には入っていません（16-03）。ゲージを七つに入れないのは、局所的なゲージの固定が数学（7-05）にも物理にも要る共通の壁だからです。Chatterjee 2021 の定理は、この壁の前でゲージを選ばずに進む道の一つです。位相のセクターと θ（7-11）も、問題文が θ に触れない点で切れ目に数ええます。何が分かればどの行が動くかは 16-07 に、公開された構成のあとに残る問いの一覧は 16-02 に並べます。

この章が言えている範囲

	言えている	言えていない
既知	各切れ目の物理の一文・数学の言明と、一次資料が述べる現状・部分的な橋	七つで尽きること（数え方・型・表 4 の対応はこの本の整理）
計算	6^4 のプラケットと、二つの主項が 5% 以内に入る β。強結合の主項と一次資料の質量の比。u が一枚の平均 I_2/I_1 に等しいこと（数値積分）。(6)・(8) の換算	無限体積の値（有限体積の影響は見積もっていない）。5% の線はこの章の選び方
物理	(8)・(10) の見積もりと、一尺度が破れる例の読み	漸近スケーリングや極限の入れ替えが正しいこと
全体	—	どの切れ目もこのサイトは埋めていない（存在の切れ目の橋は公開された構成のもの）。質量ギャップの存在は示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
問題文の引用・格子の相関長の問題・三次元	本文	Jaffe–Witten, Quantum Yang–Mills Theory, Clay Math. Inst. (2000)／Chatterjee, arXiv:1803.01950 (2018)／Chevyrev, arXiv:2202.13359 (2022)
§03 の公開された構成	評	評価書 `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）冒頭・§5・§8。コードは `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（2026-10-28 提出）
格子の数値・§06 の引用	本文	Lucini–Teper, JHEP 0106 (2001) 050, hep-lat/0103027（表 1・表 5）／Athenodorou–Teper, arXiv:2007.06422 (2020)
強結合の側の定理	要旨・本文の一部	Osterwalder–Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471（要旨。ギャップ（指数的クラスター性）がクラスター展開の収束から従うことは、Shen–Zhu–Zhu の序論 'as explained in [OS78], the existence of a mass gap (exponential clustering) follows from convergence of the cluster expansion' による）／Adhikari–Cao, arXiv:2202.10375（要旨）／Shen–Zhu–Zhu, arXiv:2204.12737, CMP 400 (2023) 805–851（要旨・序論と式 (1.2)（作用の規格化）を確認。Wilson の β への換算 $\beta = N^2\beta_{\mathrm{SZZ}}$ はこの端末の算術）
§04 の引用・KK の非分離・$m^2/\sigma \sim 1/\lambda$・$\lambda \approx 16.6$	本文	Csáki–Ooguri–Oz–Terning, hep-th/9806021／Klebanov–Strassler, hep-th/0007191／KMMW, hep-th/0311270（式 (2.7)）／Sakai–Sugimoto, hep-th/0412141・hep-th/0507073（λ への換算と (8) への代入はこの端末の算術）
中心対称性・三次元 compact $U(1)$	本文・要旨	Chatterjee, arXiv:2006.16229（本文）／Göpfert–Mack, CMP 82 (1982) 545–606（要旨（INSPIRE）：Villain 作用・全結合で弦張力が正・m_D を固定した連続極限は自由スカラー場。本文は未読。年は Crossref の発行年で、INSPIRE は 1981）
(9)・$-4\ln u$・(10) の係数・(11)	既知・書誌のみ	(9) と $-4\ln u$ は標準の最低次の強結合展開と等分配（強結合展開は 5-02 で扱う）。総説 Drouffe–Zuber, Phys. Rep. 102 (1983) 1–119（書誌のみ）／二ループの係数（4-06）／再構成定理（4-10）
表 2・表 3・図 1・(6)・(8)	計算	この端末の Python：plaquette_mc.py（numpy。6^4、Kennedy–Pendleton の熱浴法、熱化 100・測定 300 掃引、種を固定、ビン平均）・shores.py（scipy）・one_plaquette.py（scipy。$u = I_2/I_1$ の数値積分）。質量の入力は Lucini–Teper の表 1 だけ

次に読む章：16-06 新しい概念の候補。切れ目を越えるのに何が要りそうかを、概念の側から見ます。課題としての並べ直しは 16-07。

新しい概念の候補 — 何が「Ricci 流」に当たるか

この章は未解決の問いの地図です。§02・§03・§04 は既存の知見です。

この章で分かること — Ricci 流の三つの部品（流れ・単調量・手術）。二次元の σ 模型では繰り込み群が一ループで Ricci 流そのものになり、球が縮みきる尺度が Λ になること。四次元で各部品の候補がどこで止まるか。

前提となる章 — 7-09。7-05・4-07・7-11 も使います。Ricci 曲率・スカラー曲率などの幾何の道具は、球面の例でその場で定義します。

先に言うこと — 候補を並べる章で、どれが当たるかは言えません。「Ricci 流に当たるのは繰り込み群」「$R = T$ に当たるのは双対変換」は類推です（σ 模型の一ループだけは類推でなく一致します）。このサイトは質量ギャップも連続極限の構成も示していません。札[評]は委員会の評価書による、の意味です（6-00 の「札」）。

この章の順序

1. 出題者が「新しい考え」を求めた場所
2. Ricci 流：計量を曲率で動かす
3. Perelman の部品：流れ・単調量・手術
4. 繰り込み群が Ricci 流になる場所：二次元の σ 模型 — 縮みきる尺度が Λ。図 1・表 1。寄り道：平らな円は縮まない
5. 四次元で流れるもの — 結合の流れと場の勾配流
6. 単調量：二次元の c と四次元の a — 単調性は反射正値性から。図 2・表 2
7. 手術に当たるもの
8. もう一つの型：同一視
9. 候補を一枚に並べる

01

出題者が「新しい考え」を求めた場所

Clay の問題文（Jaffe–Witten 2000）§6 は T^4 上の構成は既知の方法の延長で見込めるとしたうえで、"no present ideas point the direction to establish the existence of a mass gap that is uniform in the volume. Nor do present methods suggest how to obtain the existence of the infinite volume limit $T^4 \to \mathbb{R}^4$" と書きます。§6.5 は "New ideas are needed" です。ただし同じ §6 は T^4 上の構成も未完としています。言えるのは「出題者が新しい考えを求めたのは赤外の側」までです（7-10 §01）。[既知]

その後、2026 年に公開された構成が、周期の箱での連続極限と、部分列による無限体積の理論（Wightman の公理を満たす）を与えました。委員会はこれを「Lean で証明されている」と評価しています[評]（第 6 部）。体積に一様な質量ギャップと無限体積の極限の一意性は、評価書が挙げる開いた問いに残っています（16-02）。出題者が新しい考えを求めた赤外の側は、今も開いたままです。

「体積に一様」を式にします。一辺 L の箱の隙間 Δ_L について

$$\Delta_L > 0 \ (\text{どの } L \text{ でも}) \qquad \text{と} \qquad \inf_L \Delta_L > 0 \tag{1}$$

は別の主張です。例：質量 m の自由場ならどの L でも隙間は m 以上で、右も成り立ちます。仮に $\Delta_L = 1/L$ なら左だけが成り立ちます。

他の大問題で働いた新しい概念には、流れと単調量（Perelman、ポアンカレ予想）と、二つの対象の同一視（Wiles、フェルマーの最終定理）の二つの型が見えます（この本の整理）。

02

Ricci 流：計量を曲率で動かす

Riemann 計量 g は各点の接空間（1-05）の内積で、成分を g_{ij} と書きます。Ricci 曲率 Ric（成分 R_{ij}）は、長さ 1 の方向 v について、v を含む互いに直交する $n-1$ 枚の面の曲がり方（断面曲率）を足したものです（n は多様体の次元）。平均の $n-1$ 倍と言っても同じです。正確には曲率テンソルの縮約です。使うのは次の例だけです。

$$\text{半径 } r \text{ の } n \text{ 次元球面：} \qquad \mathrm{Ric} = \frac{n-1}{r^2}\, g \tag{2}$$

半径 r の球面では、どの面の曲がり方も $1/r^2$ です。それを $n-1$ 枚足すので係数が $n-1$ になります。Ric の跡（正規直交な基底で対角成分を足したもの）をスカラー曲率 R と呼びます。この球面では $R = n(n-1)/r^2$ です。

Ricci 流は計量を Ricci 曲率で動かす方程式で、Perelman の論文は Hamilton（1982）が導入したこの式から始まります。既知

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2\,\mathrm{Ric}(g) \tag{3}$$

正に曲がった方向は縮みます。スカラー曲率は流れに沿って $\partial_t R = \Delta R + 2|\mathrm{Ric}|^2$ に従います。Δ は多様体の上のラプラシアン（質量ギャップの Δ とは別）で、平らな座標では $\sum_i \partial^2/\partial x_i^2$ です（§01 の隙間 Δ_L とは別の記号）。$|\mathrm{Ric}|^2$ は正規直交な基底での Ric の成分の二乗和です。

右辺が ΔR だけなら熱方程式で、熱が温度をならすように R の山を削り谷を埋めます。正確には、非負の項 $2|\mathrm{Ric}|^2$ がどこでも上向きに足されています。熱方程式の型の式では、解が内部に新しい最小値を作れません（最大値原理）。このため R の最小値は流れに沿って減りません。Perelman の序文は Hamilton の仕事の紹介として、この式と結論をこの形で書いています。既知

例：初めの半径が $r(0)$ の球面は、丸いまま半径だけが変わります。$g = r^2 \hat{g}$（$\hat{g}$ は単位球面の計量）と (2) から

$$\frac{d(r^2)}{dt} = -2(n-1), \qquad r(t)^2 = r(0)^2 - 2(n-1)\,t, \qquad t_* = \frac{r(0)^2}{2(n-1)} \tag{4}$$

で、時刻 t_*（消滅時刻）に点に縮みます。単位の二次元球面なら $t_* = 1/2$ です。一般の形では曲率がどこかで無限大になります。Perelman は "The most natural way of forming a singularity in finite time is by pinching an (almost) round cylindrical neck" と書き、細い首を切って小さな蓋をかぶせる手術で流れを続けます。

03

Perelman の部品：流れ・単調量・手術

Perelman の証明を三つの部品に分けて見ます。一つ目の流れは §02 の式 (3) です。二つ目は、流れに沿って単調に増える量です。道具を先に定義します。M は閉多様体（境界の無いコンパクトな多様体）、f は M の上の補助の関数、dV は計量から決まる体積要素（$\int_M dV$ が M の体積）です。∇f は f の勾配で、$|\nabla f|^2$ はその長さの二乗です。$\nabla_i \nabla_j f$ は f の二階微分で、平らな座標では $\partial_i \partial_j f$ です。

$$\mathcal{F}(g, f) = \int_M \left(R + |\nabla f|^2\right) e^{-f}\, dV$$

計量を (3) で動かすとき、f も同時に $\partial_t f = -\Delta f + |\nabla f|^2 - R$ で動かします。これは座標の取り替えを除いて測度 $e^{-f}dV$ を保つ動かし方で、全体の積分 $\int_M e^{-f}dV$ は変わりません。このとき

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = 2\int_M \left|R_{ij} + \nabla_i\nabla_j f\right|^2 e^{-f}\,dV \;\geq 0 \tag{5}$$

が成り立ちます（Perelman §1.2）。右は二乗の積分なので負になりません。既知

流れは $\mathcal{F}$ の坂を上るように振る舞います。正確には、測度 $e^{-f}dV$ を止めたままの流れ $\partial_t g_{ij} = -2(R_{ij} + \nabla_i\nabla_j f)$ が $\mathcal{F}$ を増やす向きの勾配流で、座標の取り替えをすると (3) と上の f の式の組に移ります（Perelman §1.1–1.2）。止めておく測度の選び方について Perelman は "the choice of m is analogous to the choice of gauge" と書きます。原文の m はこの測度のことで、§06 の質量とは別です。どう選んでも、座標の取り替えを除いて同じ流れになります。既知

さらに、座標と尺度の取り替えを除いて見ると、流れは自明でない周期軌道を持ちません（Perelman §2・§3）。自明なものはソリトン（座標と尺度の取り替えだけで形を保つ解）と呼ばれ、この見方では固定点に当たります。既知 例：平らなトーラスでは $R_{ij} = 0$ で、f を定数に取ると (5) の右辺は 0、流れは止まっています（固定点）。

三つ目の部品は、曲率の大きい領域の形を先に分類し、分類したものだけを手術で取り除くことです。ヤン–ミルズで同じ役をしうるのは、流れには繰り込み群と勾配流（§05）、単調量には c と a（§06）、分類と手術には大きい場・インスタントン・位相のセクター（§07）です。別の型として同一視があります（§08）。どの対応も類推です。

04

繰り込み群が Ricci 流になる場所：二次元の σ 模型

一ループの摂動の範囲で、対応が類推でなくなる場所が、二次元の非線形 σ 模型です。場 ϕ は平面から多様体 M への写像です。M の計量をこの節では h（成分 h_{ij}）と書きます。

$$S[\phi] = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} h_{ij}(\phi)\,\partial_\mu\phi^i\,\partial_\mu\phi^j\,d^2x \tag{6}$$

結合定数は数ではなく計量 h そのものです。Friedan（1980）の要旨は "the renormalization group acting on the infinite-dimensional space of Riemannian metrics" と書きます。一ループでは、尺度 $\ell = \ln(\mu_0/\mu)$（大きいほど粗く見る）について

$$\frac{dh_{ij}}{d\ell} = -\frac{1}{2\pi}\,R_{ij}(h) + \cdots \tag{7}$$

で、$t=\ell/4\pi$ と置けば (3) そのものです。物理 「$\cdots$」は二ループ以上の補正です。二ループからは曲率の二次の項（$R_{iklm}R_{j}{}^{klm}$ の形。R_{iklm} は曲率テンソルの成分）が加わり、流れは Ricci 流から外れます。Friedan（1985）の要旨は、繰り込み群の係数を二ループの近似で計算したと書きます。物理

例：M を半径 r の球面 S^{N-1} にすると $O(N)$ 模型で、$r^2=1/g^2$ です。(2) で $n=N-1$ として

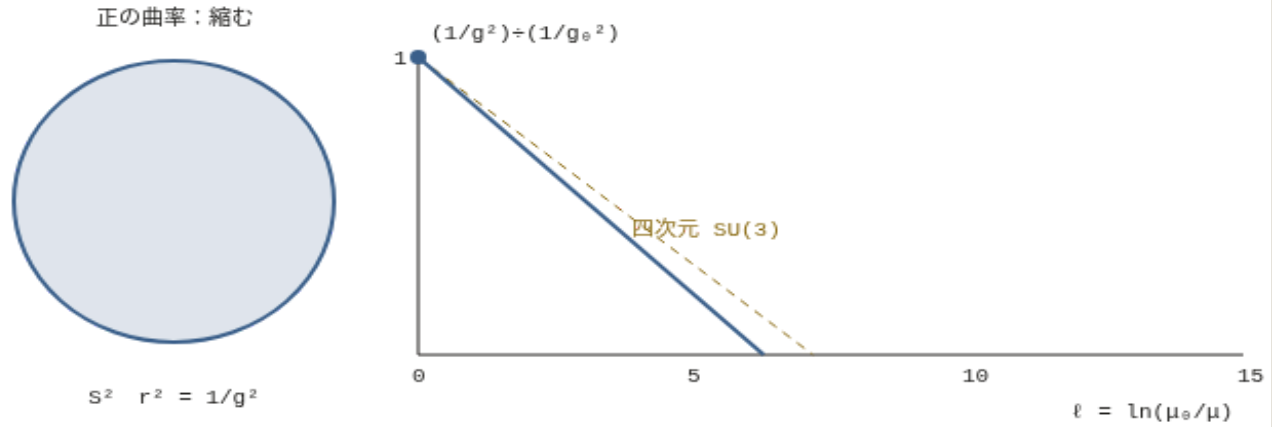
$$\frac{d}{d\ell}\Big(\frac{1}{g^2}\Big)=-\frac{N-2}{2\pi},\qquad \ell_*=\frac{2\pi}{(N-2)\,g_0^2},\qquad \Lambda=\mu_0\,e^{-\ell_*}\tag{8}$$

粗く見るほど球が縮み結合が強くなる。Polyakov（1975）の要旨の言う "asymptotic freedom" です。縮みきる尺度 ℓ_* は (4) の消滅時刻 t_* の 4π 倍で、一ループの Λ を決めます（4-07）。四次元の $SU(N)$ でも $1/g^2$ は直線 $1/g_0^2-2b_0\ell$ で減ります。

Perelman は序文の 2 でこの関係に触れ、"this connection between the Ricci flow and the RG flow suggests that Ricci flow must be gradient-like; the present work confirms this expectation" と書きます。流れが勾配的である（ある量の坂に沿って動く）ことは繰り込み群の直観から予想されており、(5) がそれを確かめた、というのが Perelman の言い方です。

既知

図 1　つまみで N と g_0^2 を変え、「動かす」で ℓ を進める。左は半径の二乗が $1/g^2$ の球の断面、右は $1/g^2$ の比。点線は四次元 $SU(3)$



N = 3　g₀² = 1.0　ℓ = 0.00　1/g² = 1.000　ℓ* = 6.28　Λ/μ₀ = 1.87×10⁻³　SU(3)：ℓ* = 7.18

計算 図の直線は式 (8) と $b_0=11N/(48\pi^2)$ をその場で描いたもの。表 1 はこの端末で計算した。

模型	g_0^2	ℓ_*	Λ/μ_0	注
$O(2)$	任意	∞	—	円は平らで流れない
$O(3)$	1	6.283	1.87×10⁻³	Ricci 流の $t_*=0.5$
四次元 $SU(2)$	1 ／ 2	10.77 ／ 5.38	2.11×10⁻⁵ ／ 4.59×10⁻³	$b_0=0.04644$

模型	g_0^2	ℓ_*	Λ/μ_0	注
四次元 $SU(3)$	$1\,/\,2$	7.178 ／ 3.589	7.63×10⁻⁴ ／ 2.76×10⁻²	$b_0 = 0.06966$

表 1　一ループの $1/g^2$ が 0 に届く尺度。$\ell_* = 4\pi t_*$ を式 (4) と照合した。計算

直線が 0 に届く手前で結合は大きくなり、一ループの式は使えなくなります。Ricci 流の特異点の近くと同じく、肝心なのは結合が $O(1)$ になった後です。二次元 $O(N)$ 模型（$N \geq 3$）のギャップは物理の水準の結論です。物理 Douglas（2004）の報告は、正則化した版の $O(N)$ 模型でギャップが示された例（Kopper 1999）を挙げるにとどまります。その後の定理としての状態は、この章では確かめていません。

寄り道：平らな円は縮まない

飛ばしてよい小節です。

$N = 2$ では標的が円で曲率は 0、係数 $N - 2$ が消えます。二次元の $O(2)$ 模型は低温で質量ゼロの相を持ちます。高温では相関が距離とともに指数で減り（質量がある）、低温では距離のべきでしか減りません（質量ゼロ）。この二つの相の間の転移を Kosterlitz–Thouless（KT）転移と呼びます。Fröhlich–Spencer（1981）は、二次元の格子の回転子模型（$O(2)$）やクーロン格子気体などで、この転移の存在を証明しました。既知 四次元の $U(1)$（5-06）と並べると「曲がっている（非可換）から縮む」という絵が浮かびますが、類推です。

05

四次元で流れるもの：結合の流れと場の勾配流

四次元の「流れ」には別物が二つあります。**理論の空間の流れ**（繰り込み群、7-05）には球の絵はありませんが、一ループの $1/g^2$ は同じ形の直線です（表 1）。Bałaban の T^4 の紫外安定性は仮定つきで、極限は部分列までです（7-07）。2026 年に公開された構成は、結合に依る確率核の一段を多段に重ねて、周期の箱での連続極限まで運びました評（第 9 部〜第 11 部）。ただし全ての段を弱結合の帯のまま運び、格子間隔 1 の段（結合は大きい基準の値）で止まります（16-03）。Bauerschmidt–Brydges–Slade の方法が $d = 4$ で届いたのは結合が赤外で 0 に流れる側（$|\phi|^4$ 模型と弱自己回避歩行）で、ヤン–ミルズの赤外とは正反対です。欠けているのは「結合が $O(1)$ に達した後の、制御された一段」です（この本の整理）。

場の空間の流れ（勾配流）は一つの配位を作用の坂に沿って滑らかにします。可換な場で、作用 $S = \frac{1}{4}\int F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\,d^4x$ の勾配を逆向きにたどると

$$\partial_t A_\mu = -\frac{\delta S}{\delta A_\mu} = \Delta A_\mu - \partial_\mu(\partial_\nu A_\nu), \qquad \frac{dS}{dt} = -\int \left|\frac{\delta S}{\delta A}\right|^2 \leq 0 \tag{9}$$

です（非可換なら ∂ を共変微分に）。勾配流なので作用は必ず減ります。例：フーリエ変換すると、波数 k に垂直な成分は $e^{-k^2 t}$ で減り、$|k| \gg 1/\sqrt{t}$ の揺らぎが消えます。k に平行な成分（ゲージの方向）は動きません。Ricci 流でも座標の取り替えの不変性で同じことが起き、DeTurck（1983）が項を足して直しました。同じ工夫はヤン–ミルズの確率量子化にもあります（7-09 §07）。

Lüscher（2010）の要旨は、流れた場が "a smooth renormalized field" であることを理論と数値が "suggest" すると書き、Carosso–Hasenfratz–Neil（2018）はこれを連続的な実空間の繰り込み群として数値に使いました。Waldron（2019）は、閉じた四次元多様体の上の滑らかな初期値について、ヤン–ミルズ流に有限時間の特異点が無いことを示しています。既知 二つの流れの関係は示唆と数値の水準です。

06

単調量：二次元の c と四次元の a

道具を二つ用意します。応力テンソル（エネルギー運動量テンソル）$T_{\mu\nu}$ は、エネルギーと運動量の流れを表す場です。その跡 $\Theta = T^{\mu}{}_{\mu}$（二次元なら $T_{11}+T_{22}$）は、尺度を少し変えたときに作用がどれだけ変わるかを測ります。尺度を変えても変わらない理論（固定点）では $\Theta = 0$ です。中心電荷 c は固定点の理論が持つ数で、おおまかには質量ゼロの自由度を数えます（自由なスカラー場一つで 1）。この章では名前だけを使い、値は下の和則 (10) を通して見ます。

二次元には Zamolodchikov（1986）の c 定理があり、流れに沿って減り、固定点では中心電荷に一致する関数が作られます。物理 計算できる形として、Θ の相関の和則を距離 r_0 で切ったものを見ます。

$$c(r_0) = 3\pi \int_{|x|>r_0} |x|^2 \, \langle \Theta(x)\Theta(0)\rangle \, d^2x \tag{10}$$

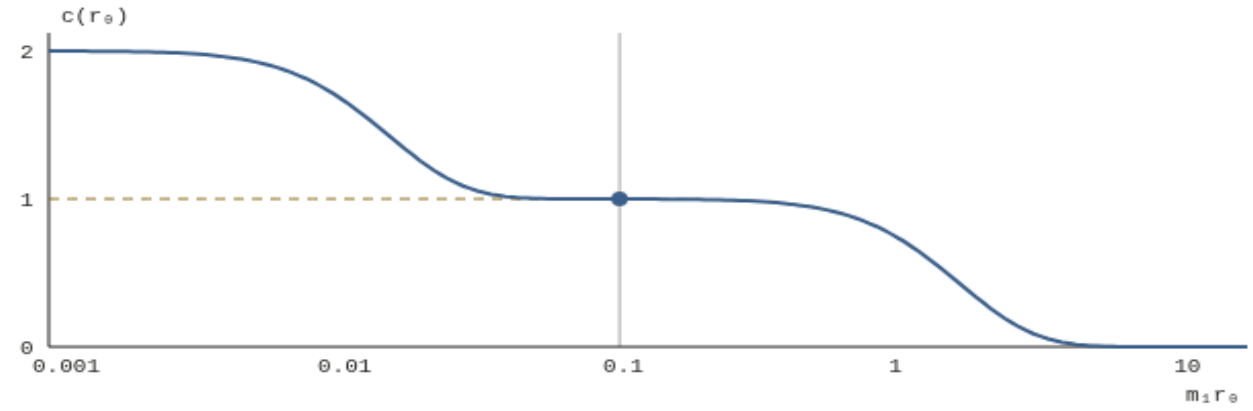
ここで Θ は作用からそのまま作った応力テンソルの跡です（$\Theta = 2\pi T^{\mu}{}_{\mu}$ と置く規格化では、前の係数は $3/4\pi$ になります）。$r_0 \to 0$ の値が紫外と赤外の中心電荷の差になる、というのが和則の内容です。この和則は Cardy（1988）によるとされます。物理

質量 m の自由なスカラー場では $\Theta = -m^2\phi^2$、$\langle\Theta(x)\Theta(0)\rangle = 2m^4 G(x)^2$ です。$G(x) = K_0(m|x|)/2\pi$ は伝播関数（1-11）で、K_0 は変形 Bessel 関数（遠くで $e^{-m|x|}$ のように減る）です。したがって

$$c(r_0) = 3\int_{m r_0}^{\infty} u^3 K_0(u)^2 \, du, \qquad c(0) = 1, \quad c(\infty) = 0 \tag{11}$$

です。$c(0)=1$ は数値積分で $1-8\times10^{-12}$ と確かめました。計算 被積分関数が負にならないので $c(r_0)$ は減ります。一般に $x\neq0$ で $\langle\Theta(x)\Theta(0)\rangle\geq0$ は、並進・回転不変性と反射正値性（4-10）から従います。正則化で失われやすい性質（7-11 正値な正則化の障害）が単調性の出どころです。既知

図 2　つまみで質量の比 m_2/m_1 と尺度 r_0 を変え、「動かす」で r_0 を伸ばす。実線は自由場二つの $c(r_0)$、点線は一つのとき



m₂/m₁ = 100 m₁r₀ = 0.10 c(r₀) = 0.999（場が一つなら 0.999）

計算 曲線は式 (11) をこの端末で数値積分した 85 点の表（末尾の 0 を省いて埋め込み）の補間。

mr_0	0.1	0.5	1	2	3	5
$c(r_0)$	0.99946	0.93639	0.70823	0.25841	0.06861	0.00313

表 2　場が一つのときの $c(r_0)$。質量の比が 100 の二つの場では $m_1r_0=10^{-3},10^{-2},0.1,1$ で 1.999・1.708・0.999・0.708 と、途中で 1 の段に留まる。計算

段は、流れが途中の固定点（軽い場だけが質量ゼロに見える尺度）の近くを通ることを表し、ギャップのある赤外では $c=0$ です。

四次元の固定点を曲がった背景に置くと、Θ の期待値に Euler 密度（曲率の二次式で、積分すると多様体の Euler 数に比例する量）が係数つきで現れます。その係数が Euler アノマリー a です（格子間隔の a とは別。この章では名前だけ）。Komargodski–Schwimmer（2011）の要旨は、紫外と赤外の a を結ぶ単調減少関数を導き "establishing the a-theorem" と書きます。物理 自由な場の a は正で、実スカラー・Weyl フェルミオン・ゲージ場の寄与の比は $1:\frac{11}{2}:62$ です（同論文の付録 A）。既知

純ヤン–ミルズの紫外は自由なグルーオンに近づくので $a>0$ です。赤外にギャップがあれば、質量ゼロの自由度が残らないので $a=0$ です。物理 二つは矛盾しませんが、$a_{\text{紫外}}>a_{\text{赤外}}$ はギャップを強制しません。赤外にギャップがあること自体が、この本の主題の未証明の部分です。特異点の分類に当たる「赤外の終点の分類」が別に要ります（類推）。

```
07
```

手術に当たるもの：大きい場と位相のセクター

四次元のヤン–ミルズでは、作用が尺度の取り替えで変わらないことが、曲率が一点に集まる特異点と同じ種類の困難を生みます。$A_\lambda(x)=\lambda A(\lambda x)$ なら $F_\lambda(x)=\lambda^2 F(\lambda x)$ で

$$\int_{\mathbb{R}^d} |F_\lambda|^2\, d^dx = \lambda^{4-d}\int_{\mathbb{R}^d} |F|^2\, d^dx \tag{12}$$

です。$d=4$ では λ に依りません。例：大きさ ρ のインスタントンは ρ によらず作用 $8\pi^2/g^2$ を持ち（3-05）、$\rho\to 0$ で曲率が一点に集まっても作用は減りません。

曲率の大きさを測る物差しに $\|F\|_{L^p}=\left(\int |F|^p\, d^dx\right)^{1/p}$ を使います（$p=2$ が 1-10 の L^2 で、二乗すると作用）。Uhlenbeck（1982）のコンパクト性（曲率の L^p が抑えられた接続の列から、ゲージを取り替えれば弱い意味で収束する部分列が取れること）は $p>d/2$ の L^p 評価で働き、$d=4$ の L^2（作用そのもの）はちょうど境目です。境目では、曲率が有限個の点に集まり、小さなインスタントンが泡のように抜け出すことがあります（泡立ち。この章では名前だけ）。既知

量子の側で手術に当たりうるのは、Bałaban の方法で別扱いにする大きい場の領域（7-05 §04）、小さいインスタントン、位相のセクター（7-11 寄り道）です。どれも「分類してから取り除く」段には届いていません。

08

もう一つの型：ギャップが見える対象との同一視

Wiles 型は、二つの対象を同じだと示し、片方で見えない性質をもう片方から持ち込む型です（$R=T$。通説の水準の要約）。Jaffe–Witten §6.6 は、ギャップが古典的に見えないので "a nonclassical change of variables or “duality transformation”" が要るかもしれないと書きます。既知

この型でギャップが示された例は、ガウス積分の恒等式から始まります。共分散 V のガウス場 φ について

$$\mathbb{E}\Big[e^{i\sum_j q_j\varphi(x_j)}\Big]=\exp\Big(-\tfrac12\sum_{j,k} q_j q_k\, V(x_j-x_k)\Big) \tag{13}$$

右辺は電荷 q_j の粒子がポテンシャル V で相互作用する重み、左辺は場の期待値です。電荷の気体を足し合わせると、左辺は $\cos\varphi$ を含む場の理論になります。これを sine-Gordon 模型と呼びます（作用に $\cos\varphi$ の項を持つ場の理論。この章では名前だけ）。Brydges–Federbush

（1980）はこの変換で、低密度または高温のクーロン気体の相関の指数減衰（Debye 遮蔽）を証明しました。[既知] 可換な統計力学の模型です。

ヤン–ミルズ自身の断片は、Chatterjee（2019）の強結合・大 N の $SO(N)$ でのゲージと弦の双対、Cao–Park–Sheffield の Wilson ループの曲面の和の表示（17-04 §09。絵は §05）、Chatterjee（2021）の「中心対称性が破れない ⇒ 閉じ込め」（含意であって同値ではない）です。物理の水準では Seiberg–Witten（17-11）とホログラフィー（17-09）があります。問題は固定した N で求めるので、大 N だけでは足りません。

09

候補を一枚に並べる

1/0 に記号を与える案は、運ぶ情報が少ないので入れていません（7-12 §10）。

表の読み方を先に言います。「部品」の列は、その候補が §03 の三つの部品のどれに当たるかです。流れ（i〜iii）・同一視（v・vi）・手術（vii）に分かれ、(iv) はどれにも当たりません。「どこまで」は定理として届いた範囲、「どこで止まるか」は届かない最初の場所です。

止まる場所を並べると、おおむね二つに集まります。一つは、結合が $O(1)$ になる赤外で小さい数が無くなることです。(i) はそこでの一段を持たず（公開された構成も、その手前の格子間隔 1 の段で止まります）、(iii) で得られた連続極限は結合を 0 へ連動させた設計のもので、(iv) は冪級数なので e^{-1/g^2} に届きません。もう一つは、$N \to \infty$ や強結合という別の極限でしか働かないことで、(v) と (vi) がこれに当たります。(i) は紫外の側から赤外へ進もうとして止まり、(vi) は赤外の絵を持ちながら有限の N へ戻れずに止まります。止まる向きが逆です（この本の整理）。

	候補	何を新しくするか	どこまで	どこで止まるか	部品
i	構成的な繰り込み群（Bałaban・MRS・BBS、2026 年に公開された構成）	一段を理論空間の写像として扱う	公開された構成：周期の箱での連続極限と部分列の無限体積、Wightman の公理[評]。Bałaban：T^4 の紫外安定性（仮定つき）	結合が $O(1)$ に達した後の一段。公開された構成は格子間隔 1 の段（結合は大きい）で止まる（16-03）	流れ
ii	確率量子化と正則性構造（Hairer・CCHS）	測度を力学の不変測度に、軌道の空間を状態空間に	T^2 の測度は力学の一意な不変測度（Chevyrev–Shen）。三次元 YMH は局所解	劣臨界 $d < 4$（7-09）	流れ
iii	新しい極限の取り方（Chatterjee ほか）	極限の住む空間を先に決める	強結合の格子のギャップ（格子単位）。YMH のガウス極限（結合を 0 へ連動させた設計）	非ガウスの極限	流れ

	候補	何を新しくするか	どこまで	どこで止まるか	部品
iv	代数的な定式化（Connes–Kreimer・Costello）	繰り込みを代数の構造で書く	摂動論の範囲での定式化（形式的冪級数の水準）	e^{-1/g^2} のような摂動で見えない量に届かない	—
v	双対・変数変換（JW §6.6）	ギャップが見える対象と同一視	Debye 遮蔽（可換）。ゲージと弦の断片	純ヤン–ミルズで働く双対変換は、調べた範囲で見当たらない	同一視
vi	大 N とホログラフィー	余剰次元の幾何でギャップを見る	物理の水準 物理	$N \to \infty$・強結合	同一視
vii	幾何解析の古典 YM（Uhlenbeck・Waldron）	臨界次元の解析（泡立ち、§07）	古典は既存の方法の射程（JW §2）	量子の配位は滑らかでないと期待される	手術

第 23 部で扱う本書の検討（拡散型緩和時間の仮定、23-01）は (i) の型に最も近く、「尺度は一つ」という物理の前提を格子の上の不等式に切り出したものです（近さの判定はこの本の整理）。

この章が言えている範囲

	内容
言えている	出題者が新しい考えを求めたのは一様なギャップと無限体積極限。Perelman の単調式 (5)（f も同時に動かすときの式）と、流れの勾配性が繰り込み群の直観から予想されていたという記述（いずれも原文） 既知
言えている	$O(N)$ 模型の一ループの流れ (8) は球面の Ricci 流 (4) と $t = \ell/4\pi$ で一致し、縮みきる尺度が一ループの Λ（表 1）。二ループからは Ricci 流から外れる 計算 物理
言えている	自由な質量 m のスカラー場で $c(r_0)$ は 1 から 0 へ単調に減り、単調性は反射正値性から来る 計算 既知
言えていない	どの候補が当たるか（対応は類推）。二次元 $O(N)$ 模型のギャップの、2004 年より後の定理としての状態。純ヤン–ミルズの赤外にギャップがあるか（$a = 0$ はその条件の下）。四次元の、定理としての単調量の有無。2025 年以降の網羅

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§01・§08 の引用	本文で確認（検査済みの調査の逐語照合）	A. Jaffe, E. Witten, Quantum Yang–Mills Theory, Clay Math. Inst. (2000)

もの	種別	出典・道具
式 (3)・(5)、f の発展式、R の発展式と最小値、序文の 2、§1.1・§1.2、§2・§3 の周期軌道とソリトン、首の切断	本文で確認	G. Perelman, arXiv:math/0211159 (2002)
Ricci 流の導入・DeTurck・Uhlenbeck・Wiles 型	書誌のみ	R. S. Hamilton, J. Differential Geom. 17 (1982) 255–306。D. DeTurck, 同 18 (1983)。K. Uhlenbeck, CMP 83 (1982) 11–29, 31–42。A. Wiles, Ann. of Math. 141 (1995) 443–551。Taylor–Wiles, 同 553–572
σ 模型の繰り込み群・漸近自由	要旨で確認（係数 $(N-2)/2\pi$ は標準の一ループの勘定）	D. Friedan, PRL 45 (1980) 1057。A. M. Polyakov, Phys. Lett. B 59 (1975) 79
二ループの係数（Ricci 流からのずれ）	要旨で確認（二ループの計算まで。項の形 $R_{iklm}R_j{}^{klm}$ は標準の二ループの勘定）	D. Friedan, Ann. Phys. 163 (1985) 318
二次元 $O(N)$ 模型のギャップの状態	検査済みの調査（Douglas は本文の逐語、Kopper は書誌のみ）	M. R. Douglas, Report on the Status of the Yang–Mills Millenium Prize Problem, Clay Math. Inst. (2004)。C. Kopper, CMP 202 (1999) 89
KT 転移・Debye 遮蔽・a 定理・勾配流	要旨で確認	Fröhlich–Spencer, CMP 81 (1981) 527。Brydges–Federbush, CMP 73 (1980) 197。Komargodski–Schwimmer, JHEP 12 (2011) 099, arXiv:1107.3987。Lüscher, JHEP 08 (2010) 071。Carosso–Hasenfratz–Neil, arXiv:1806.01385。Waldron, Invent. Math. 217 (2019) 1069
自由な場の a の値（$1:\frac{11}{2}:62$ と正であること）	本文で確認（付録 A）	Z. Komargodski, A. Schwimmer, arXiv:1107.3987
c 定理・和則 (10)	書誌のみ（和則 (10) は Cardy 1988 によるとされる。要旨は二次モーメントの普遍量までで、和則の形は未確認。係数 3π と $3/4\pi$ の規格化と、自由場の $c=1$ は計算で照合）	A. B. Zamolodchikov, JETP Lett. 43 (1986) 730。J. L. Cardy, PRL 60 (1988) 2709
§05 の Bauerschmidt–Brydges–Slade	要旨で確認	R. Bauerschmidt, D. C. Brydges, G. Slade, CMP 338 (2015) 169–193, arXiv:1403.7268（四次元の弱自己回避歩行）。同, arXiv:1403.7424（四次元の n 成分 $\lvert\phi\rvert^4$）。同, Introduction to a Renormalisation Group Method, Lecture Notes in Math. 2242 (2019), arXiv:1907.05474。D. C. Brydges, G. Slade, J. Stat. Phys. 159 (2015) 530, arXiv:1403.7255（方法の第 IV 部）

もの	種別	出典・道具
§09 表 (ii)・(iii)	検査済みの調査（Chevyrev–Shen は本文、Chatterjee は要旨）	I. Chevyrev, H. Shen, Comm. Pure Appl. Math. (2026), arXiv:2302.12160。S. Chatterjee, A scaling limit of SU(2) lattice Yang–Mills–Higgs theory, Prob. Math. Phys. 7 (2026) 339–381, arXiv:2401.10507
§01・§05・表の (i) の公開された構成	評	評価書 `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）冒頭と §8。コードは `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（2026-10-28 提出）。読み方は第 6 部と 16-03
§05・§08・§09 の候補	検査済みの調査（要旨、Chevyrev は本文）	Bałaban, CMP 122 (1989)。Magnen–Rivasseau–Sénéor, CMP 155 (1993)。Hairer, arXiv:1303.5113。CCHS, arXiv:2006.04987・2201.03487。Chevyrev, arXiv:2202.13359。Connes–Kreimer, CMP 210 (2000)。Costello, arXiv:0706.1533。Shen–Zhu–Zhu, CMP 400 (2023)。Chatterjee, CMP 366 (2019)・CMP 385 (2021)。Cao–Park–Sheffield, arXiv:2307.06790
表 1・図 1	計算	この端末の Python：`sigma_rg.py`（式 (8) と四次元の一ループ、$\ell_* = 4\pi t_*$ の照合）
表 2・図 2・式 (11)	計算	この端末の Python：`c_function.py`（scipy の quad。$\int_0^\infty u^3 K_0^2 du = 1/3$ を 10^{-11} の桁で確認）

次に読む章：16-07 課題の一覧（何が分かれば何が動くか）。

課題の一覧 — 開いた問いを「分かれば何が動くか」の矢印でつなぐ

この章の §01〜§08 は未解決の地図、§09 は案内です。

この章で分かること — 十二の開いた課題と、いまある最も近い結果。課題をつなぐ矢印の三つの強さ（定理・道筋・物理の期待）。課題を仮に分かったことにして問題文のどの要件が動くかを、図と数えで確かめること。

前提となる章 — 16-05 二つの掘り方の切れ目。7-10（四次元の段ごとの到達点）・7-11（六つの障害）・16-01（盤面）の言葉を使います。

先に言うこと — 課題を並べてつなぐ章で、どの課題も片づけていません。矢印の選び方と数え方はこの本の整理で、一次資料で確かめた矢印だけを使っています。このサイトは質量ギャップの存在も連続極限の構成も示していません。2026 年に公開された構成が触れた課題は、表 1 の「最も近い結果」の欄と §02 の終わりに書きます（委員会の評価[評]。札[評]の意味は 6-00 の「札」）。公開された構成のあとに残る問いの一覧は 16-02 です。

この章の順序

1. 課題を「ならば」で書く — 要件と矢印
2. 十二の課題 — 連続と格子（表 1）
3. 定理でつながる矢印 — 反射正値性・一様な隙間・中心
4. 道筋の矢印 — 出題者と総説が書く順
5. 仮に分かったとする — 課題の地図（図 1・表 2）
6. 地図を数える — どの道にも要る課題（表 3・計算）
7. すべての群で — 群を替えると消える矢印
8. 問題文の外の課題 — 一粒子状態・一般の多様体
9. 本の座標系 — 辞書・切れ目・課題・壁を九つの枡に（図 2・表 4）

01

課題を「ならば」で書く

この章の**課題**は、まだ定理になっていない言明です。課題が分かったとき何が動くかは「A が分かれば B が言える」という矢印で書け、強さを三つに分けます。**定理**（証明された含意か定義）、**道筋**（問題文や総説が「これが分かれば次へ進めるはず」と書く見込み）、**期待**（物理の水準の含意）です。比喩で言えば鍵と扉の対応表で、正確には、前提がすべてそろえば結論が出る形の規則の一覧です。

$$X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_k \overset{\ell}{\Longrightarrow} Y, \qquad \ell \in \{0\ (\text{定理}),\ 1\ (\text{道筋}),\ 2\ (\text{期待})\} \tag{1}$$

行き先は問題文（Jaffe–Witten 2000、以下 JW。0-03）です。群 G を一つ固定し、要求を四つの**要件**に分けます[既知]（JW §4 の要約。四つへの分け方はこの本の整理）。

$$\mathsf{P} = \bigwedge_{G} \mathsf{P}_G, \qquad \mathsf{P}_G = \mathsf{E} \wedge \mathsf{A} \wedge \mathsf{N} \wedge \mathsf{M} \tag{2}$$

存在の要件（E）は $\mathbb{R}^4$ の上の理論の存在、公理の要件（A）は公理（JW が挙げる Streater–Wightman の本 [45] と Osterwalder–Schrader の論文 [35] の公理と同等以上）、非自明性の要件（N）は非自明性・局所場・短距離で漸近自由と一致すること（JW §4）、隙間の要件（M）は隙間 $\Delta > 0$ と $m < \infty$ です。

もう一つ、問題文の外の要件として弦張力の要件（C）を置きます。弦張力の要件は、連続の理論の弦張力 d が 0 でないことです。d は Chatterjee 2018 の連続の弦張力の問題（Chatterjee の Problem 5.2）の定数で、7-10 §04 では σ と書きました。物理の期待では d は正です。

例：Chatterjee（2021）の一様な減衰から面積則への定理（Chatterjee 2021 の定理 2.4）は定理の矢印です。格子ゲージ理論が任意の境界条件の下で一様に指数減衰するなら（強い減衰の定義（Chatterjee 2021 の定義 2.3）。定数は群・β（格子の作用の結合の係数。逆温度ではない）・格子の次元だけにより、箱と境界条件によらない）、中心対称性は破れません。さらに、中心に自明でなく作用する既約表現の、長方形の Wilson ループは、どの Gibbs 測度（無限の格子の上で、どの箱の中も外を固定すれば格子の重みに従う分布）でも面積則に従います[既知]（16-08 §06）。道筋の例は JW §6.5 の 'Such a result presumably would enable the study of the limit as T4 → R4'（一様なギャップから無限体積極限へ）です。

02

十二の課題 — 連続の六つと格子の六つ

表 1 の上の六つ（T^4 の構成の課題から局所場と短距離の課題まで）は連続の理論の課題で、構成の六つの段（7-01）のうち紫外極限の段から一様なギャップの段までと、問題文の追加の条件に当たります。下の六つ（格子の相関長の問題から三次元の測度の課題まで）は格子の課題と、低い次元・物理の前提を数学にした課題です。この章では極限を列全体で求めることにします（この本の整理）。JW の弱い存在の脚注（Jaffe–Witten の脚注 2。0-03 §08）は、コンパクト性だけによる弱い存在は、極限の性質（ギャップや公理）を別の方法で示さない限り、存在の部分の解と認めない、と書きます[既知]。最初の三つ（順に T^4 の構成の課題・無限体積への課題・一様なギャップの課題）は次の形です（記号は 7-10）。

$$\lim_{a\to 0}\langle W_{\gamma_a}\rangle^{\mathrm{ren}}_{a,L} \text{ が列全体で在る}, \qquad \lim_{L\to\infty}\mu_L \text{ が在る}, \qquad \inf_{L}\Delta_L>0 \tag{3}$$

W_{γ_a} は格子の道の Wilson ループ、$\langle\cdot\rangle^{\mathrm{ren}}$ は対数から周の長さに比例する項を取り除いたもの（Chatterjee 2018 の式 (5.2)。7-10 §04）、μ_L は一辺 L の箱 T^4 の測度、Δ_L はその隙間です。T^4 の構成の課題と無限体積への課題で極限を列全体で求めるのは、この本の整理です。

[既知] 表 1　十二の課題

	課題	言明	最も近い結果	分かれば動くもの
1	T^4 の構成の課題	ゲージ不変な量の期待値が $a\to 0$ で列全体として収束（列全体はこの本の整理）	局所場の相関関数については、2026 年に公開された構成が、周期の箱で切断の列の全体での収束を示した[評]（8-05）。この行の言明の形（繰り込んだ Wilson ループ）では無い（16-02 §05）。それ以前は仮定つきの紫外安定性と部分列（Bałaban）、概略（MRS）	紫外極限の段・存在の要件の半分
2	無限体積への課題	$L\to\infty$ の極限が列全体で在る（同じくこの本の整理）	公開された構成に在るのは、部分列の極限と相の分解まで[評]。列全体の収束と一意性は評価書の開いた問い（16-02 §02）。問題文の時点では 'Nor do present methods suggest how to obtain the existence of the infinite volume limit'（JW §6）で、一様なギャップの課題が道を開くだろう、と §6.5 が書く段階。格子では強結合で示されている	無限体積の段・存在の要件の残り
3	一様なギャップの課題	$\inf_L \Delta_L>0$	'New ideas are needed'（JW §6.5）。公開された構成に在るのは相に一様な多項式の評価までで、指数の減衰は無い（16-02 §04）	一様なギャップの段・道筋で無限体積への課題

	課題	言明	最も近い結果	分かれば動くもの
4	残りの公理の課題	回転の対称性の回復と、再構成に要る正則性	公開された構成で、相ごとに Wightman の公理（Euclid 不変を含む）評 （12-06・12-08）。反射正値性は格子から残る。回転は二次元で Driver の系 6.7	公理の段・時空と空間の切れ目
5	非自明性の課題	極限がガウスでない	格子で切った四次元の ϕ^4（Ising 型を含む）のスケーリング極限はガウス（Aizenman–Duminil-Copin 2021。非自明性とは逆向きの結果）。公開された構成では、跡の場の二点関数の短距離の法則が「有限個の質量の自由場の多項式」という型の記述を除く評 （13-02）。Gauss 場の合成による記述の全てを除くものではない	非自明性の要件の半分
6	局所場と短距離の課題	$\mathrm{Tr}\, F_{ij}F_{kl}(x)$ などの局所場。短距離で漸近自由と一致	摂動論の水準。自然な一対一対応は無い（JW の局所場の脚注）。公開された構成は局所場の札（8-03）を持ち、短距離では一ループの走りと跡の係数を確かめている。全ての次数での摂動論との一致は示されていない評 （6-04 §06）	非自明性の要件の残り
7	格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）	$\xi(\beta) \in (0,\infty)$（全 β）、$\xi \to \infty$	強結合では指数減衰（ξ の上界）が示されている。有限群では弱結合でも指数減衰（Adhikari–Cao。格子の相関長の問題の対象外で、$\xi \to \infty$ も無い）	格子の升目だけ
8	連続の弦張力の問題（Chatterjee の Problem 5.2）	Wilson ループの連続極限で弦張力 $d \neq 0$	未。周の項が要るかも開いている。公開された構成にも連続の Wilson ループは無い（16-02 §05）	弦張力の要件
9	強い減衰の課題	任意の境界条件で一様な指数減衰（全 β）	小さい β では Dobrushin–Shlosman の方法で示せる、と Chatterjee 2021 が注する。大きい β で強い版が期待されるかは明らかでない（同）	格子の面積則の問題
10	格子の面積則の問題（Chatterjee の Problem 4.1）	全 β で面積則	小さい β はどの群でも（Osterwalder–Seiler 1978）。三次元 $U(1)$ は全 β（Göpfert–Mack 1982）	格子の閉じ込めだけ
11	一尺度の課題	$\beta \geq \beta_0$ で $c\,\sigma(\beta) \leq m(\beta)^2 \leq C\,\sigma(\beta)$（定数 $c, C > 0$ は β によらない。m, σ は格子単位の質量と弦張力で、$m > 0$ も $\sigma > 0$ も仮定しない）	定理なし。本書の検討の記録は 17-12 式 (3) の形で仮定として置いた段階（拡散型緩和時間の仮定は別の式 (6)、17-12 §05）	期待の水準で弦張力の要件と隙間の要件を結ぶ
12	三次元の測度の課題	T^3 の上の測度の構成	'remains open'（Chevyrev 2022）	3D の紫外極限の段だけ

詳細は T^4 の構成の課題が 7-07（公開された構成は 6-01）、非自明性の課題が 7-08、格子の相関長の問題・格子の面積則の問題が 16-01 §07、三次元の測度の課題が 7-06。例：盤面（16-01 表 3）の四次元の升目を動かすのは表 1 の上の四つ（T^4 の構成の課題から残りの公理の課題まで）と格子の相関長の問題、三次元の行は三次元の測度の課題です。連続の弦張力の問題・強い減衰の課題・格子の面積則の問題・一尺度の課題は升目を持たない、切れ目の側の課題です。条件の台帳（27-02）では、一様なギャップの課題の格子の側はブロック観測量の一様な減衰の行（ブロック観測量の相関が L と格子間隔に一様な率で減ること。前提は紫外の制御・小さな T^2 のギャップ・帯の比較（ギャップの言葉））に当たります[紙]。台帳の紫外の制御の行は、周期の立方の箱の連続極限としては公開された構成が示し、本書の道の形は開いたままです（27-02 表 1）。本書の道で残るのは、紫外の結果を赤外の議論が使える形にする継ぎ目です（16-03・16-04）[推]。面積則（格子の面積則の問題）から一様なギャップの課題への矢印は一般には立ちません。面積則は荷電セクター（電束 $e \neq 0$）の隙間、一様なギャップの課題は中性セクター（$e = 0$）の隙間で、転送行列はこの分解を保ちます[紙]。既知の定理は逆向き（一様な指数減衰 ⇒ 面積則、§01 の Chatterjee 2021 の一様な減衰から面積則への定理）です[既知]。

公開された構成のあと。2026 年に公開された構成は、表 1 の上の六つのうち、T^4 の構成の課題を局所場の相関関数について、残りの公理の課題を相ごとに満たし、無限体積への課題には部分列の形で、非自明性の課題と局所場と短距離の課題には短距離の確かめの形で触れています[評]。この章の言葉では、存在の要件は極限を列全体で求める形では満たされず（体積の側が部分列）、隙間の要件（質量ギャップ）には何も与えていません[推]。§05 の図と §06 の数えは課題の間の論理の地図で、公開された構成によって規則は変わりません。どの課題が残っているかの一覧は、評価書の五つの開いた問いに沿って 16-02 に、構成が止まる所は 16-03 に置きます。

03

定理でつながる矢印

証明のある矢印は多くありません。三つを順に見ます。

反射正値性が極限に残る

一つ目は反射正値性です。Wilson の格子で成り立ち（Osterwalder–Seiler 1978）、不等式なので、測度の列 μ_n が**弱く収束**すれば極限にも残ります[既知]（4-10）。弱く収束するとは、有界で連続な量の期待値がすべて収束することです（0-03 §08）。

$$\left\langle \overline{\Theta F}\, F \right\rangle_{\mu} = \lim_{n\to\infty} \left\langle \overline{\Theta F}\, F \right\rangle_{\mu_n} \geq 0 \tag{4}$$

Θ は時間の反射、F は正の時刻の側だけで決まる、有界で連続な量です。残りの公理の課題と合わせれば、Osterwalder–Schrader の再構成でヒルベルト空間と $H \geq 0$ が立ちます（公理の規則。JW も 'Establishing a quantum mechanical Hilbert space is part of the solution to this Millennium problem' と書く）。

一様な隙間が極限に残る

二つ目は、一様な隙間が極限に残ることです（隙間の規則）。τ_t を時間の向きに t ずらす操作とし、F が作るベクトルから真空の成分を引いたもののスペクトル測度を ν_F と書きます。ν_F は 4-11 §02 の μ_F と同じものです。この章では μ を測度の列に使うので、記号を替えます。

$$\left\langle \overline{\Theta F}\, \tau_t F \right\rangle - \left|\langle F \rangle\right|^2 = \int_{[0,\infty)} e^{-tE}\, \mathrm{d}\nu_F(E) \tag{5}$$

左辺がすべての有界な F で $e^{-\Delta t}$ の定数倍以下になることと、真空に直交する向きで $H \geq \Delta$ であることは同じです[既知]（4-11 §02）。積分に $E = 0$ の点も入っているので、真空が一つであることも一緒に出ます。

箱ごとの評価（7-10 式 (7)）で、減る速さ $\Delta_L \geq \Delta_*$ が L によらなければ、評価は極限に残って隙間になります（標準の議論）。(7) の前の因子 $\|A^* \Omega_L\|\, \|B\, \Omega_L\|$ は、$|F| \leq 1$ なら 1 以下です。この議論には三つの前提が要ります。(i) 使う F の期待値が $L \to \infty$ の列に沿って収束すること（存在の要件の一部）。(ii) その F のベクトルが、再構成したヒルベルト空間で稠密であること。(iii) T^4 は時間の向きにも周期的なので箱の相関に加わる $e^{-\Delta_L (L-t)}$ の項が、$L \to \infty$ で消えること（$\Delta_L \geq \Delta_*$ なら消えます）。隙間の規則が出すのは $\Delta > 0$ だけで、$m < \infty$ は理論が真空だけではないこと（7-10 §06）から別に出ます。

例：一つの F の減り方が教えるのは ν_F の台の下端だけです。格子の相関長の問題の $\xi(\beta)$ はプラケットの相関の減り方です。Chatterjee は $|x| \to \infty$ をすべての向きで取る極限で ξ を定義しますが、転送行列（5-03）のスペクトルに結びつくのは時間の向きの減り方です。時間の向きの減り方で読むと、分かるのはプラケットが作る部分空間での H の下端です（この章の読み）。

中心対称性から面積則へ

三つ目は §01 の Chatterjee（2021）の一様な減衰から面積則への定理です（減衰から面積則への規則）。その序論は、次元が一つ低い非線形 σ 模型の指数減衰からゲージ理論の閉じ込めを導く Durhuus–Fröhlich（1980）と、$\mathbb{Z}_n$ の理論から $SU(n)$ の理論へ閉じ込めを運ぶ Fröhlich（1979）も挙げます[既知]（書誌のみ）。Fröhlich の論文の題名では行き先は $SU(n)$ の格子 Higgs 理論で、Chatterjee 2021 の序論は「$SU(n)$ の理論」と紹介しています。

04

道筋の矢印 — 出題者と総説が書く順

JW は課題の順序に見込みを書いています。T^4 の構成の課題は既知の方法を延ばせば届く兆候が十分にあるとし、'One presumably needs to revisit known results at a deep level, simplify the methods, and extend them' と書きます。一様なギャップの課題には 'New ideas are needed' と書き、それが無限体積への課題を可能にするだろうと続けます。§5 も、一様なギャップが無限体積極限の証明で 'may play a fundamental role' と書きます既知。これが出題者の道筋の規則です。

$$\text{一様なギャップの課題} \overset{1}{\Longrightarrow} \text{無限体積への課題：} \qquad \inf_{L} \Delta_L \geq \Delta_* > 0 \quad \rightsquigarrow \quad \text{離れた量の相関} \tag{6}$$

正確には、(6) の右は極限の存在ではなく、極限を取るための一様な評価の材料で、組み立て方は書かれていません（'presumably'）。

例：出題者の道筋の規則が結ぶ二つ（一様な減衰と無限体積極限）は、小さい径数のある模型ではクラスター展開から同時に得られました。弱結合の ϕ^4_2・ϕ^4_3 がその例です既知（7-04 §08）。一様な隙間から無限体積極限を導く順に通ったのではありません。四次元のヤン–ミルズの長い距離にはその径数がありません（7-11 赤外の径数の障害）。格子の側では Chatterjee（2018）が連続の弦張力の問題を、Wilson ループによる道筋の 'the most basic question that needs to be solved before making any further progress' と位置づけます既知。これは「先に要る」という必要の向きの文で、連続の弦張力の問題から要件への十分の矢印ではありません。

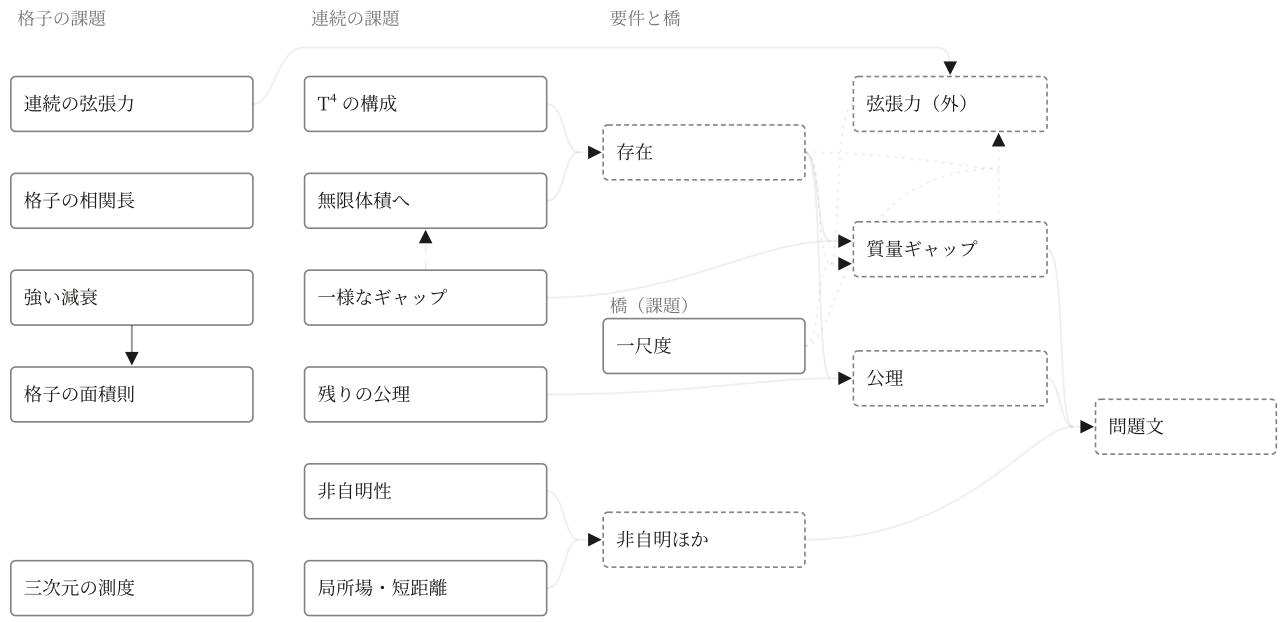
05

仮に分かったとする — 課題の地図

表 2 の規則を一枚の図にします。課題の箱を押すとその課題が「仮に分かった」ことになり、前提がそろった規則から結論が点きます。点く範囲は、前提がすべて入れば結論も入る集合のうち最小のもの（閉包）です。

$$\mathrm{cl}_{\ell}(S) = \bigcap \big\{ X \supseteq S : \text{水準} \leq \ell \text{ のどの規則でも、前提} \subseteq X \ \Rightarrow \ \text{結論} \in X \big\} \tag{7}$$

図 1　課題の箱を押すと「仮に分かった」になり、動く要件と盤面の升目が点く。つまみで矢印の強さ（定理だけ／＋道筋／＋期待）を、ボタンで中心が自明な群を選ぶ。実線は定理、破線は道筋、点線は期待。G は固定



仮に分かった：なし。問題文まで：あと T⁴ の構成・一様なギャップ・残りの公理・非自明性・局所場・短距離。盤面で動く升目：なし（矢印：定理・道筋・物理の期待）

計算 この図の点き方は、表 2 の規則の閉包 (7) をその場で計算したもの（矢印の選び方はこの本の整理）。

既知 表 2　規則（前提がすべてそろえば結論）。上の七つ（存在の規則から弦張力の規則まで）は定理か定義、出題者の道筋の規則は道筋、弦張力から隙間への規則・隙間から弦張力への規則は物理の期待 物理 。規則の選び方はこの本の整理。弦張力の要件は §01 の、連続の弦張力 d が 0 でないこと（問題文の外）

規則	前提 ⇒ 結論	強さ	根拠
存在の規則	T^4 の構成の課題 ∧ 無限体積への課題 ⇒ 存在の要件	定義	JW §6.5
公理の規則	存在の要件 ∧ 残りの公理の課題 ⇒ 公理の要件	定理	式 (4) と OS の再構成
隙間の規則	存在の要件 ∧ 一様なギャップの課題 ⇒ 隙間の要件	定理	式 (5) と 7-10 式 (7)（標準の議論。前提は §03）
非自明性の規則	非自明性の課題 ∧ 局所場と短距離の課題 ⇒ 非自明性の要件	定義	JW §4
問題文の規則	公理の要件 ∧ 非自明性の要件 ∧ 隙間の要件 ⇒ 問題文の要件（P_G）	定義	式 (2)
減衰から面積則への規則	強い減衰の課題 ⇒ 格子の面積則の問題	定理	Chatterjee 2021 一様な減衰から面積則への定理
弦張力の規則	連続の弦張力の問題 ⇒ 弦張力の要件	定義	Chatterjee 2018 §5（弦張力の要件は連続の弦張力の問題の $d \neq 0$ そのもの）
出題者の道筋の規則	一様なギャップの課題 ⇒ 無限体積への課題	道筋	JW §5・§6.5

規則	前提 ⇒ 結論	強さ	根拠
弦張力から隙間への規則	存在の要件 ∧ 弦張力の要件 ∧ 一尺度の課題 ⇒ 隙間の要件	期待	尺度は一つ（17-12）
隙間から弦張力への規則	存在の要件 ∧ 隙間の要件 ∧ 一尺度の課題 ⇒ 弦張力の要件	期待	同じ一文の逆向き

例：「格子の課題」のボタンで格子の相関長の問題・連続の弦張力の問題・強い減衰の課題・格子の面積則の問題と三次元の測度の課題を仮に分かったことにしても、点くのは弦張力の要件だけで、要件は一つも点きません。16-08 §08 の「格子で示せば足りる」を矢印の言葉で言い直したものです。

06

地図を数える — どの道にも要る課題

問題文の要件に届く課題の組のうち、一つでも抜くと届かなくなるものを**極小の組**と呼びます。部分集合 4096 個を三つの水準で調べ、極小の組をすべて数えました[計算]。

$$\mathcal{S}_\ell = \left\{ S :\ \mathrm{P}_G \in \mathrm{cl}_\ell(S),\ \ S \text{ から一つ抜くと } \mathrm{P}_G \notin \mathrm{cl}_\ell \right\} \tag{8}$$

定理だけなら表 1 の上の六つ（T^4 の構成の課題から局所場と短距離の課題まで）の一組、道筋を足すと {T^4 の構成の課題・一様なギャップの課題・残りの公理の課題・非自明性の課題・局所場と短距離の課題} の一組、物理の期待まで足すと {T^4 の構成の課題・無限体積への課題・残りの公理の課題・非自明性の課題・局所場と短距離の課題・連続の弦張力の問題・一尺度の課題} が加わって二組です。中心が自明な群でも同じでした。

[計算] 表 3　課題ごとに、問題文の要件への極小の組のすべてに入るか（必須）、どれかに入るか、どれにも入らないか

課題	定理だけ	＋道筋	＋物理の期待	単独で動くもの（物理の期待まで・中心が自明でない群）
T^4 の構成の課題・残りの公理の課題・非自明性の課題・局所場と短距離の課題	必須	必須	必須	なし
無限体積への課題	必須	—	入る	なし
一様なギャップの課題	必須	必須	入る	無限体積への課題（道筋）
連続の弦張力の問題	—	—	入る	弦張力の要件

課題	定理だけ	＋道筋	＋物理の期待	単独で動くもの（物理の期待まで・中心が自明でない群）
一尺度の課題	—	—	入る	なし
格子の相関長の問題・強い減衰の課題・格子の面積則の問題・三次元の測度の課題	—	—	—	強い減衰の課題だけで格子の面積則の問題（中心が自明でない群）

例：(a) T^4 の構成の課題・残りの公理の課題・非自明性の課題・局所場と短距離の課題はどの道にも要ります。(b) 物理の期待の水準では、一様なギャップの課題の代わりに「連続の弦張力の問題と一尺度の課題」で質量ギャップに届きます。質量と弦張力を一つの尺度の二つの顔と見る物理の一文（17-12 の式 (3)）が一様なギャップの課題の役を肩代わりする形です。(c) 格子の相関長の問題・強い減衰の課題・格子の面積則の問題・三次元の測度の課題はどの極小の組にも入りません。一次資料で確かめた矢印だけの数えなので、格子から連続の要件へ延びる矢印が定理になれば数え直しです。

07

すべての群で — 群を替えると消える矢印

問題文はすべてのコンパクト単純群 G で問題文の要件を求めます（式 (2)）。リー環の候補は四つの系列と五つの例外で、同じリー環に中心で割った形の群も並びます[既知]（1-04 表 6）。一つの群の結果を別の群へ運ぶ一般の定理は、この章が読んだ範囲に見当たりません。群によって消える矢印もあります。減衰から面積則への規則は、有限次元の既約ユニタリ表現 π が中心に自明でなく作用すること、つまり $\pi(z) \neq I$ となる中心の元 z があることを使います。中心の元はすべての $\pi(g)$ と可換なので、既約な π では Schur の補題（1-04 §06）によりスカラーとして働きます。

$$\exists z \in Z(G): \qquad \pi(z) = \omega I, \quad \omega \neq 1 \qquad (\pi \text{ は既約}) \tag{9}$$

例：$SU(N)$ の基本表現では $z = e^{2\pi i/N} I$ で $\omega = e^{2\pi i/N}$ です（1-04 §07）。中心が自明な群では (9) を満たす表現がありません。単連結な G_2・F_4・E_8 のほか、中心で割った形の $SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}_2$ や $PSU(N) = SU(N)/\mathbb{Z}_N$ もそうで、中心で割った群はどれも中心が自明です[既知]。理由を一行で書きます。連結なリー群では、中心は随伴表現の核です（1-04 §06）。$G/Z(G)$ は随伴表現の像 $\mathrm{Ad}(G) \subset GL(\mathfrak{g})$ と同じ群で、その随伴表現は $\mathfrak{g}$ の上の $\mathrm{Ad}(g)$ そのものです（単純なリー環では ad が単射）。核は $\mathrm{Ad}(g) = I$ の元、つまり単位元だけです。図 1 の「中心が自明な群」はこの場合で、強い減衰の課題から格子の面積則の問題への矢印が消えます。Chatterjee は、中心が自明な群（例に $SO(3)$）では弱結合で閉じ込めないかもしれな

いと信じられている、と注します[物理]。問題文はそうした群にも隙間を求めるので、閉じ込めを経る道はすべての群には使えません。一方、一ループの係数 $16\pi^2 b_0 = \frac{11}{3} C_A$ はどの群でも正で（4-06 §02）、摂動論の漸近自由は群によりません[既知]（0-03）。

SU(N) への置き換え。 本書の条件の台帳（27-02）の行を一つずつ $SU(N)$ に移すと、三種に分かれます[紙]。(i) 群に依らない行：二重井戸の一様なギャップ（二重井戸）、't Hooft の張力の正値性と z の鏡映正値性（代数）、挿入の一様な受理（恒等式）、R^4 への極限。(ii) 中心 $\mathbb{Z}_N$ の言葉にそのまま移る行：小さな T^2 のギャップの捩れの部分では、25-01 の反可換の対の剛性の補題（反可換な対）が時計と移動の対の一意性に替わり（捩れが原始的なら共役を除いて一意で、中心化群は $\mathbb{Z}_N$。González-Arroyo の総説 hep-th/9807108 §4.2–4.3[既知]）、捩れた T^2 の随伴のギャップは $4\sin^2(\pi/(NL))$ になります（$SU(3)$、$L = 3$〜6 で固有値の計算と一致し、値は NL だけで決まる[計算]）。小さな T^2 の基点の原典は $SU(N)$、z の鏡映正値性と枠の減相関は Osterwalder–Seiler の一般の群の形です。一ループの $\beta - \beta'$ は $11N^2 \ln 2/(12\pi^2)$（$N = 2$ で 0.2575、$N = 3$ で 0.5794）[紙]。色の平均の補題は $\mathfrak{su}(N)$ の $n = N^2 - 1$ 色で通り、定数 5 は $n(n+2)/3$ になります（重みつきの四次の球面 design の存在を含めて Lean：ColorAverageN（colorAverage・design_identity）。$\mathfrak{su}(N) \cong \mathbb{R}^n$ への当てはめは[紙]）。Tomboulis–Yaffe の不等式の $SU(N)$ 版は Kanazawa arXiv:0808.3442（未公刊）の Theorem 2 にあります[既知]（本書の板への当てはめは未）。(iii) やり直しの要る行：$SU(2) = S^3$ の性質と $-1 \in$ Weyl 群（類関数の偶性）を使った紫外の部品——一リンクの条件つき法則が一母数になること（15-07 (5)）、熱核の像の和の負の項を落とす上界（15-08 の熱核の揺らぎの稀さの補題）、偶性の段（階層模型の $SU(3)$ では三次の不変式 $\mathrm{tr}\, X^3$ で壊れる）——と、帯の数値（26-09 は $SU(2)$ と $U(1)$ だけ）です。したがって本書の道を $SU(N)$ へ移すには、$SU(2)$ で開いている行（繰り込みの比較など）に、この三つの群版の補題と数値のやり直しを加える必要があります。紫外の側の存在は、公開された構成が任意のコンパクト単純群で与えています[評]。本書の紫外の部品は、存在のためではなく、本書の道の継ぎ目のための部品として読みます[推]（16-04）。中心が自明な群（G_2・F_4・E_8 と中心で割った群）では捩れの道具が無く、$Sp(n)$（$n \geq 2$）では捩れを食う対の中心化群が連続で、T^2 の捩れ一つでは零モードが消えません[紙]（一例）。全てのコンパクト単純群への道は、本書の範囲では開いています。

08 問題文の外の課題

JW §5 は 'natural extensions' を挙げます。孤立した一粒子状態（ギャップに加えて上の隙間）、閉じ込め、漸近自由を保つ場を足した他の四次元ゲージ理論とその力学、$\mathbb{R}^4$ から一般の四次元多様体への拡張です[既知]。どれも要件ではなく、図 1 では弦張力の要件だけを外側に

置きました。孤立した一粒子状態は、質量の作用素 $\sqrt{H^2-\mathbf{P}^2}$（$\mathbf{P}$ は運動量）のスペクトルで書けます（16-05 粒子の語の切れ目）。

$$\operatorname{spec}\sqrt{H^2-\mathbf{P}^2}\ \cap\ (0,\,m+\delta)=\{m\}\qquad(\text{ある }\delta>0)\tag{10}$$

例：質量 m の自由場では、Fock 空間（2-06）の一粒子状態が m、二粒子以上が $[2m,\infty)$ を埋め、スペクトルは $\{0\}\cup\{m\}\cup[2m,\infty)$、上の隙間は m です既知。JW §5 は、ギャップから出るクラスター性（7-10 §08）が $\mathbb{R}^4$ の結果を一般の四次元多様体へ運ぶかもしれない（'may make it possible'）とも書きます。

09

本の座標系 — 辞書・切れ目・課題・壁を一つの枡に

辞書の二列の格（18-01 §05）を共通の座標にし、九つの枡に四つの一覧を打ちます。(a) は「両方が在るとしたら同じか」、(b) は「四次元で在るか」です。辞書の行の格は 18-01 のままで、切れ目・課題・壁の格はこの本の整理です。根拠は次のとおりです。

切れ目：16-05 表 1 の一文の対に当たる辞書の行の格を引き継ぐ（1→1・2→13・3→9・4→8・5→2・6→5・7→14）。課題：(a) は表 2 で課題から出る規則の強さ（定理か定義＝確定、群の条件つき＝条件つき、期待＝未確定。規則の無い格子の相関長の問題・格子の面積則の問題・三次元の測度の課題は未格付け）、(b) は表 1 の「最も近い結果」（範囲を限った版があれば条件つき）。壁：23-02 四次元格子で試した道と壁 の列が名指す辞書の行の格（緩和時間の上界の仮定・緩和時間の下界の仮定・η・鎖→13、物理単位の隙間の言明→8、極限→7。一段と取りこぼしの総和可能性の仮定は辞書に行が無く未格付け）。

例。拡散型緩和時間の仮定に掛かる十三の壁は、辞書の 13（Λ・「尺度は一つ」）・尺度は一つの切れ目・一尺度の課題と同じ「未確定・無い」の枡に集まります。壁の型（23-02 四次元格子で試した道と壁）は原理・構造・道具・仮定・測定と分かれても、辞書の上では同じ一つの対に掛かっています。「確定・条件つき」に入るのは課題だけで、範囲を限った版が在り、要件への矢印が定理か定義のもの（T^4 の構成の課題・無限体積への課題・残りの公理の課題）です。

図 2　ボタンで一覧を選ぶと、その行が (a)×(b) の九つの枡に打たれる。「重ねる」で四つを同時に打つ。枠の下は未格付け

(a)	構成済み	(b) 四次元での実在 条件つき	無い
確定	#3 #10		#1 #2
条件つき	#12	#11	#4 #5 #6 #7 #8
未確定		#9	#13 #14
未格付け			

辞書：確定・構成済み 2・確定・無い 2・条件つき・構成済み 1・条件つき・条件つき 1・条件つき・無い 5・未確定・条件つき 1・未確定・無い 2

計算 格の割り当ては、18-01 表 2・16-05 表 1・この章の表 1 と表 2・23-02 表 3 から上の規則でこの端末で作り、数（14・7・12・21）を照合しました。

表 4　九つの枡と未格付けに入る行（番号は各表の行。壁は 23-02 表 3 の番号。図では辞書に #、切れ目に「切」を付ける）。

(a)・(b)	辞書（18-01 表 2）	切れ目（16-05 表 1）	課題（表 1）	壁（23-02 表 3）
確定・構成済み	3・10			
確定・条件つき			T^4 の構成の課題・無限体積への課題・残りの公理の課題	
確定・無い	1・2	1・5	一様なギャップの課題・非自明性の課題・局所場と短距離の課題・連続の弦張力の問題	
条件つき・構成済み	12			
条件つき・条件つき	11		強い減衰の課題	

(a)・(b)	辞書（18-01 表 2）	切れ目（16-05 表 1）	課題（表 1）	壁（23-02 表 3）
条件つき・無い	4・5・6・7・8	4・6		2・9・21
未確定・構成済み				
未確定・条件つき	9	3		
未確定・無い	13・14	2・7	一尺度の課題	1・3・4・5・7・10・11・12・14・16・17・18・20
未格付け			格子の相関長の問題・格子の面積則の問題・三次元の測度の課題	6・8・13・15・19

この章が言えている範囲

	言えている	言えていない
既知	課題の言明と現状（一次資料の範囲）。公理の規則・隙間の規則・減衰から面積則への規則の含意（隙間の規則は標準の議論で、§03 の前提 (i)〜(iii) つき）と JW の道筋の文	十二で尽きること。矢印の選び方と、極限を列全体で求めること（この本の整理）。確かめていない矢印は数えていない
計算	表 2 の規則の下での極小の組と表 3	別の規則の下での数え。隙間の規則を四次元のヤン–ミルズの観測量で細部まで書くこと
物理	弦張力から隙間への規則・隙間から弦張力への規則を認めれば、連続の弦張力の問題と一尺度の課題が一様なギャップの課題の役を肩代わりすること	弦張力から隙間への規則・隙間から弦張力への規則が定理であること
整理	図 2・表 4 の打点は §09 の規則の下で各表から機械的に出る	規則の選び方そのもの（切れ目・課題・壁の格は定理ではない）
全体	—	どの課題もこのサイトは片づけていない。質量ギャップの存在は示していない。表 1 に書いた公開された構成の到達点は委員会の評価の水準 評 で、その証明の当否はこの章の外

出典と再現

もの	種別	出典・道具
問題文の引用（§4・§5・§6・§6.5・脚注 1・2）、無限体積への課題・一様なギャップの課題・局所場と短距離の課題の現状	本文	A. Jaffe, E. Witten, Quantum Yang–Mills Theory, Clay Math. Inst. (2000)
公理の文献 [45]（式 (2) の公理の要件）	書誌のみ	R. Streater, A. Wightman, PCT, Spin and Statistics and All That, W. A. Benjamin (1964)（書誌は JW の文献表による）
Problem 4.1・5.1・5.2（格子の面積則の問題・格子の相関長の問題・連続の弦張力の問題）と §4・§5・§6 の文、弦張力の要件の定義	本文	S. Chatterjee, Yang–Mills for probabilists, arXiv:1803.01950 (2018)
定理 2.2・2.4、強い減衰の定義とその注（強い減衰の課題）、$SO(3)$ の注、序論の紹介	本文	S. Chatterjee, A probabilistic mechanism for quark confinement, arXiv:2006.16229, Comm. Math. Phys. 385 (2021) 1007–1039
$SO(3)$ の注の出典／強い減衰の課題の小さい β	書誌のみ	J. Greensite, B. Lautrup, Phys. Rev. Lett. 47 (1981) 9–11／R. L. Dobrushin, S. B. Shlosman, Constructive criterion for the uniqueness of Gibbs field, in Statistical Physics and Dynamical Systems, Birkhäuser (1985) 347–370（どちらも書誌は Chatterjee 2021 の文献表による）
σ 模型から閉じ込め／$\mathbb{Z}_n$ から $SU(n)$ Higgs	書誌のみ	B. Durhuus, J. Fröhlich, CMP 75 (1980) 103–151／J. Fröhlich, Phys. Lett. B 83 (1979) 195–198（題名と Chatterjee 2021 の紹介）
反射正値性・再構成、格子の面積則の問題の小さい β	要旨・書誌のみ	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471（要旨：強結合での無限体積の極限の存在と解析性・Wilson の閉じ込めの評価）／K. Osterwalder, R. Schrader, CMP 31 (1973) 83–112; 42 (1975) 281–305
表 1 の公開された構成の到達点	評	評価書 `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）冒頭・§5・§7・§8。コードは `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（2026-10-28 提出）。読み方は第 6・8・12・13 部
T^4 の構成の課題の現状	要旨と序文／本文 pp.325–328（7-07）	T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 122 (1989) 355–392／J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, Comm. Math. Phys. 155 (1993) 325–383
無限体積への課題・格子の相関長の問題の強結合、格子の相関長の問題の有限群	本文 §1（16-01）	H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, arXiv:2204.12737, Comm. Math. Phys. 400 (2023) 805–851／A. Adhikari, S. Cao, arXiv:2202.10375, Ann. Probab. 53 (2025) 140–174
残りの公理の課題の Driver の系 6.7	本文の序論	B. K. Driver, CMP 123 (1989) 575–616

もの	種別	出典・道具
非自明性の課題の現状	本文（7-08）	M. Aizenman, H. Duminil-Copin, Marginal triviality of the scaling limits of critical 4D Ising and ϕ^4_4 models, Ann. of Math. 194 (2021) 163, arXiv:1912.07973
格子の面積則の問題の三次元 $U(1)$	要旨	M. Göpfert, G. Mack, Proof of confinement of static quarks in 3-dimensional U(1) lattice gauge theory for all values of the coupling constant, CMP 82 (1982) 545–606（要旨（INSPIRE）：Villain 作用・全結合で弦張力が正・m_D を固定した連続極限は自由スカラー場。本文は未読。年は Crossref の発行年で、INSPIRE は 1981）
一尺度の課題の言明と現状	本書の検討の記録	17-12 の式 (3)・(6) と出典表
三次元の測度の課題の現状	本文 §1.1（7-06）	I. Chevyrev, Stochastic quantisation of Yang–Mills, J. Math. Phys. 63 (2022) 091101, arXiv:2202.13359
本文で引いた本書の章	既知	0-03 §08（局所場の脚注・弱い存在の脚注・弱収束）、1-04 §06・§07（Schur の補題・中心）、4-06 §02（b_0）、4-10・4-11 §02（再構成と μ_F）、7-04 §08（クラスター展開）、7-10 §04・§06・§07（ren・$m<\infty$・式 (7)）
式 (5)・(10)	既知	スペクトル定理と再構成（4-10・4-11）、Fock 空間（2-06）
表 3・図 1	計算	この端末の Python：graph.py（部分集合 4096 個 × 三水準 × 中心の有無で閉包と極小の組）。図は同じ規則
表 4・図 2	計算	Python（coord.py。18-01 表 2・16-05 表 1・表 1・表 2・23-02 表 3 を読んで割り当て、行の数を照合）

次に読む章：16-08 よくある誤解。課題を取り違えた言い方を問題文の言葉に戻します。本書の検討の記録の側の課題は 23-15。

よくある誤解 — 半分正しい言い方を、問題文の言葉に戻す

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — よく見る九つの言い方の、正しい核とずれ。群と次元で証明の状況がどう変わるか（図 1）。相関の減り方が粒子の有無までは言わないこと（図 2）。

前提となる章 — 0-03（4-11・5-02・7-11・17-01 があると速い。使う言葉は §01 の末尾で一行ずつ定義します）。

先に言うこと — 直すのは言い方の水準までです。質量ギャップの存在も連続極限の構成も、この章は示しません。2026 年に公開された四次元の構成（委員会の評価評 。札の意味は 6-00 の「札」）で変わった言い方は、§02・§03・§08 に書きます。

この章の順序

1. 誤解の読み方 — 問題文の一文に戻す・この章で使う言葉
2. 「難しさの中心は無限大」 — 無限大を消しても残る
3. 「二次元・三次元ではもうできている」 — 非可換では二次元だけ
4. 「非可換だからギャップが出る」 — 定理は群と次元で分かれる（図 1）
5. 「質量ギャップはいちばん軽い粒子の質量」 — 減り方は粒子を言わない（図 2）
6. 「閉じ込めを示せばギャップも出る」 — 別の主張
7. 「格子の数値計算で確かめられている」 — 在ると置いた予言
8. 「格子で示せば足りる」「有限の箱で作れば残りは技術」 — 格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）と T^4
9. 「質量ギャップは不確定性原理から出る」 — 定理は長さを質量に換えるだけ
10. 寄り道：ほかに見かける言い方 — 1/0・ホログラフィー・自明性・QCD

01

誤解の読み方

よく見る言い方の多くは半分正しく、そのぶんずれが見えにくくなります。この章は各項を**言い方・正しい核・ずれ・正確な言い方**に分けます。基準は問題文の一文で（0-03）、条件を並べると

$$\forall G \ \exists \mathcal{T}_G : \quad \text{公理} \ \wedge \ \text{非自明} \ \wedge \ \text{短距離で漸近自由と一致} \ \wedge \ \Delta_G > 0 \tag{1}$$

です。各語を一行ずつ読みます 既知 。

- G：コンパクト単純群。$SU(2)$・$SU(3)$ から例外群 G_2 まで全部です（0-03）。
- $\mathcal{T}_G$：$\mathbb{R}^4$ 上の量子ヤン–ミルズ理論。格子でも有限の箱でもなく、無限に広い連続の四次元の上の理論です（0-03）。
- 公理：量子場の理論が満たすべき条件の一覧（Wightman の公理や Osterwalder–Schrader の公理）です（0-03）。
- 非自明：相互作用の無いガウスの理論（自由場）に潰れていないことです（0-03）。
- 短距離で漸近自由と一致：短い距離での振る舞いが、摂動論の予言（漸近自由。§04 の (4)）と合うことです（0-03）。
- $\Delta_G > 0$：ハミルトニアン H のスペクトルが、真空のエネルギー 0 の上の区間 $(0, \Delta_G)$ に点を持たないことです（0-03）。

ずれの多くは (1) の一語を近い語に取り替えて起きます。例。「Δ」→「粒子の質量」（§05）、「存在」→「数値が収束して見える」（§07）、「$\mathbb{R}^4$」→「格子」（§08）。

この章で使う言葉

第 4 部・第 5 部の言葉を先に借ります。ここでは一行ずつの定義にとどめ、詳しくは右の章に譲ります 既知 。

言葉	この章での意味	詳しくは
β（格子の結合）	格子の作用 (2) に掛かる数で、$\beta \propto 1/g^2$。小さい β が強結合、大きい β が弱結合で、連続極限は大きい β の側にある	5-01
指数減衰・相関長	二つの観測量の相関が、距離 r とともに $e^{-r/\xi}$ のように減ること。ξ を相関長と呼ぶ。格子間隔で測った隙間は $1/\xi$ に当たる	2-08・4-11
Wilson ループ	閉じた道 γ に沿ってリンクの群の元を掛け、表現の行列のトレースを取った量 W_γ	5-01
面積則	大きい長方形のループで $\langle W_\gamma \rangle$ が $e^{-\sigma \times \text{面積}}$ のように減ること。σ を弦張力と呼ぶ。閉じ込めの格子での目印	5-02

言葉	この章での意味	詳しくは
周長則	$\langle W_\gamma \rangle$ が $e^{-c\times\text{周長}}$ の程度にしか減らないこと。面積則より遅い	5-02
群の中心	群のすべての元と可換な元の集まり。$SU(N)$ では $e^{2\pi ik/N}I$ の N 個、$SO(3)$ や G_2 では単位元だけ	1-04
Casimir 数 C_A	群ごとに決まる数で、(4) の係数に入る。$SU(N)$ で N、$U(1)$ で 0	1-04
スペクトル測度	(5) の ρ。状態 $O\Omega$ がエネルギー E の成分をどれだけ持つかの重み	1-10
転送行列	格子の時間の向きに一段進める作用素 T。$T = e^{-H}$ として格子の上のハミルトニアン H を与える	5-03
反射正値性	時間を裏返す鏡についての正値性。これがあると転送行列が正の作用素になり、ヒルベルト空間とハミルトニアンが戻る	5-03
境界条件	有限の箱の縁のリンクに、あらかじめ固定しておく群の元の置き方	§06 の (7)
無限体積極限	箱を $\mathbb{Z}^d$ の全体へ広げたときの測度の極限（部分列の極限でもよい）。極限の測度を Gibbs 測度と呼ぶ	5-04
相転移	β を動かしたとき、無限の系の性質が折れ曲がるように変わる点	2-08

02

「難しさの中心は無限大」

言い方：物理は途中の無限大をうまく処理して進むが、数学はそれを許さない。だから難しい。

正しい核：連続の理論には、格子間隔 $a \to 0$ で発散する量を抑える繰り込み（4-04）が要ります。Bałaban の仕事は主にこの紫外の制御に向けられています（7-07）既知 。

ずれ：出題者は T^4 上の構成には既知の方法の延長の見込みを認めたうえで、'no present ideas point the direction to establish the existence of a mass gap that is uniform in the volume' と書きます（問題文 §6）既知 。格子間隔を固定した有限の周期格子では、理論は有限次元の積分で、無限大はありません（7-11）。

$$\langle F \rangle = \frac{1}{Z}\int F(U)\, e^{-\beta S_W(U)} \prod_{\ell} dU_\ell, \qquad 0 < Z \le 1 \tag{2}$$

dU_ℓ は重さ 1 の Haar 測度、$S_W \ge 0$ は Wilson の作用です（5-01）。例。一辺 32 の格子の $SU(3)$ では、リンクが $4\cdot 32^4$ 本、各リンクの変数が 8 個（$SU(3)$ の次元）で、積分の変数は $4\cdot 32^4 \times 8 = 33{,}554{,}432$ 個です 計算 。多くても有限です。

難しいのは、箱を $\mathbb{Z}^4$ へ広げた理論です。講義資料（Chatterjee 2020）は 'In 3D and 4D, mass gap has not been established at large β for any theory.' と書きました 既知 。その後、有限群では Adhikari–Cao が大きい β での指数減衰を示しました（§04）既知 。連続な非可換群では、三・四次元の大きい β の隙間は今も示されていません 既知 。欠けているのは無限大の値ではなく、箱と β に一様な評価です。ギャップ自体も摂動に映らない $e^{-1/(2b_0 g^2)}$ の形と考えられています（0-02）物理 。

紫外の側の今：2025 年までは「紫外はもう片づいた」も言い過ぎでした。Bałaban の四次元の定理（1989）は仮定つきで、仮定を外す定理は 'has not been published yet' でした。ゲージ不変な観測量の極限も、コンパクト性で部分列を取る水準でした（Magnen–Rivasseau–Sénéor 1993 の序文。7-07 §05）既知 。2026 年に公開された構成は、周期の箱で切断の列の全体に沿う連続極限を取り、無限体積へは部分列で移って、Wightman の公理を満たす理論を作りました。委員会はこれを「Lean で証明されている」と評価しています評 （第 6 部）。それでも「紫外が片づいたから残りは赤外だけ」とまでは言えません。無限体積の極限の一意性は示されておらず、構成は全ての段を弱結合のまま運んで格子間隔 1 の段で止まります。その段の結果を赤外の議論が使える形にする継ぎ目（極限の対象・体積に一様な局所の評価・観測量の像）は、まだ言明になっていません（16-03）推 。

正確な言い方

紫外の側は、2026 年に公開された構成が、周期の箱での連続極限として与えた（委員会の評価）。出題者が新しい考えを求めたのは、体積に一様なギャップと $T^4 \to \mathbb{R}^4$ の極限、つまり赤外の側で、そこは今も開いている。二つをつなぐ継ぎ目も残っている。

03

「二次元・三次元ではもうできている」

言い方：次元を下げればできていて、残るのは四次元だけ。

正しい核：φ^4 は二・三次元で構成済みで（問題文 §6.2）、二次元の可換 Higgs 模型は公理まで示されています。問題文はこれを 'the only complete example of an interacting gauge theory satisfying the axioms' と呼びます 既知 。

ずれ：非可換ヤン–ミルズでは話が違います。二次元の構成（7-02）は、ゲージを固定するとプラケットが独立になる、正確に解ける構造に負い、伝播する自由度もありません。三次元は 'a construction of the 3D YM measure … even on T3, remains open'（Chevyrev 2022）で、Bałaban（1985）は有限の格子の分配関数の一様な評価までです（7-06）既知 。違いの芯は結合定数の次元です。

$$[g^2] = (\text{質量})^{4-d} \tag{3}$$

例。$d = 3$ では $g^2\ell$（ℓ は長さ）が次元の無い結合で、短い距離ほど小さくなります。短い距離で相互作用が弱まることが、構成の足場になります。$d = 4$ ではこの足場が対数のゆっくりした変化にしか残りません。正確には、$d = 4$ では g^2 が無次元になり、尺度への依存は一ループの走り（§04 の (4)）による対数だけになります 既知 （次元ごとの表は 16-01）。

正確な言い方

非可換では、二次元は構成されている（正確に解ける構造に負う）。三次元は有限体積でも連続の測度が構成されていない。四次元は結合定数が無次元になる臨界の次元で、2026 年に公開された構成が、Wilson の格子の極限として Wightman の公理を満たす理論を作った（委員会の評価）。その四次元でも、質量ギャップと無限体積の極限の一意性は示されていない。

二次元でも、漸近自由なシグマ模型の連続極限と質量ギャップには、2026 年 10 月まで主張のある証明がありませんでした（2026-10-06 公開の主張つきの原稿は未検証。16-01 表 5）。

04

「非可換だからギャップが出る」

言い方：光子（$U(1)$）は質量ゼロだが、グルーオンは非可換で自己相互作用するからギャップが出る。

正しい核：四次元の $U(1)$ 格子理論では、大きい β で面積則が破れ（Guth 1980。完全な証明は Fröhlich–Spencer 1982）、質量ゼロの相になります（Fröhlich–Spencer 1982） 既知 。いずれも主に Villain 型の作用（(2) の Wilson 作用とは形の違う作用）での結果とされます。一ループの係数も群で決まります。

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = -b_0\, g^3 + \cdots, \qquad b_0 = \frac{11}{3} \cdot \frac{C_A}{16\pi^2} \tag{4}$$

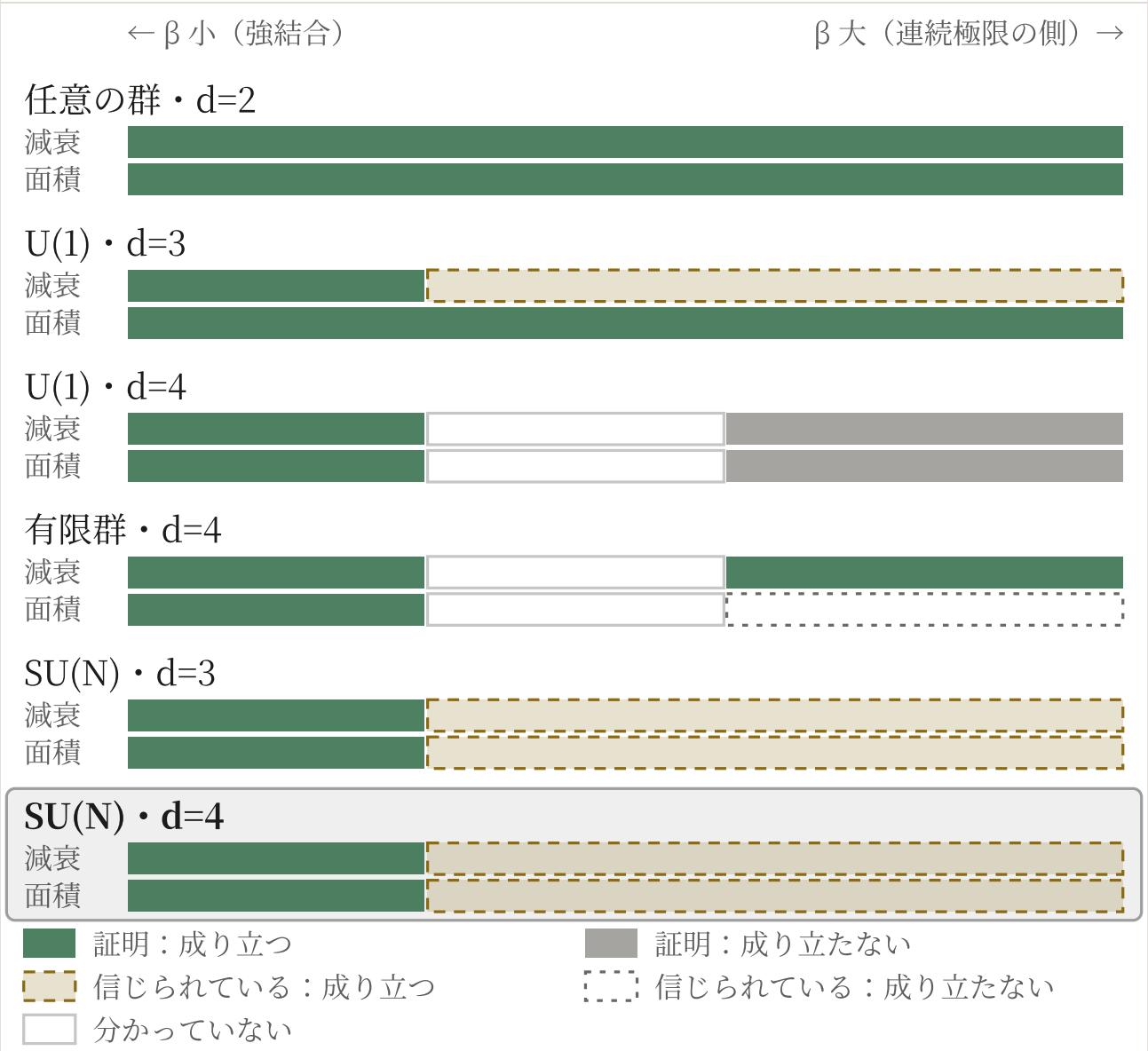
随伴表現の Casimir 数 C_A は $SU(N)$ で N、$U(1)$ で 0 で、物質場の無い理論が漸近自由なのは非可換のときだけです（4-06） 既知 。

ずれ：格子の定理は群と次元で分かれます（図 1・表 1）。強結合（小さい β）では、どの群でも指数減衰が成り立ち、中心に自明でなく作用する表現のループでは面積則も成り立ちます（Osterwalder–Seiler 1978） 既知 。中心が自明な群（G_2・$SO(3)$・中心が自明な有限群）では、グルーオンによる遮蔽で、大きいループは強結合でも周長則になるとされます 物理 。

強結合の面積則は、閉じ込めの証拠になりません。閉じ込めない四次元の $U(1)$ でも、小さい β では成り立つからです（Chatterjee 2018）。例。三次元の $U(1)$ は可換なのに、すべての β で面積則が成り立ちます（Göpfert–Mack 1982。Villain 型の作用とされる）既知。四次元の有限群（非可換を含む）は大きい β でも指数減衰しますが（Adhikari–Cao）既知、閉じ込めないと信じられています物理。

効いているのは次の点です。連続な非可換群では、有限の β に相転移が無く、$\beta \to \infty$ で相関長が発散すると信じられています物理。その極限で、格子間隔で測った隙間 $1/\xi$ は 0 に近づきますが、物理の単位の隙間（例えば $m/\sqrt{\sigma}$）は正のまま残る、と物理では考えます物理。これを示すことが要ります（5-06・5-10）。群を区別しない議論は、四次元の $U(1)$ にも隙間があると誤って結論してしまいます。

図 1　ボタンか表 1 の行で群と次元を選ぶと、その行が強調され、中身と出典が下に出る。各行の上の帯は指数減衰、下の帯は面積則。横は β（区切りは模式）



SU(N)・d=4：定理は強結合の側だけ（Osterwalder–Seiler、Shen–Zhu–Zhu）。

既知 表1　図1の中身（一次資料の定理と「信じられている」見込み。表の欄は大きい β の側）。小さい β では、指数減衰はどの行も定理で、面積則は中心に自明でなく作用する表現のループで定理です（有限群の行では中心が自明でない群・表現のとき）。中間の β の振る舞いは群によって違い、四次元の $\mathbb{Z}_N$（N が大きいとき）には質量ゼロの相があるとされます（出典表の注）。

群・次元	指数減衰（ギャップ）	面積則（閉じ込め）
任意の群・$d=2$	あり	あり（すべての β）
$U(1)$・$d=3$	講義資料（2020）の時点では示されていないとされる（物理では在る）	あり（Göpfert–Mack。Villain 型の作用とされる）
$U(1)$・$d=4$	なし（質量ゼロの相。Fröhlich–Spencer）	なし（面積則が破れる。Guth、Fröhlich–Spencer）
有限群・$d=4$	あり（Adhikari–Cao）	無いと信じられている
$SU(N)$・$d=3$	未証明（在ると信じられている）	同
$SU(N)$・$d=4$	未証明（在ると信じられている）	同

正確な言い方

四次元では $U(1)$ は弱結合で質量ゼロ、非可換な群は漸近自由で、その意味で群は効く。しかし「非可換だから隙間がある」は証明の筋にならない。有限群は弱結合でも指数減衰が示されており、連続な非可換群の弱結合の側は三・四次元で未証明である。

05

「質量ギャップはいちばん軽い粒子の質量」

言い方：質量ギャップとは最も軽いグルーボール（グルーオンの束縛状態）の質量で、約 1.7 GeV。

正しい核：物理では隙間の下端に孤立した一粒子状態（0^{++} のグルーボール）が在ると考え、格子で測ります。純 $SU(3)$ で $r_0 m = 4.21(11)(4)$（Morningstar–Peardon 1999）です（5-08）物理 。

ずれは三つです。一つ目。問題文が求めるのはスペクトルの隙間で、孤立した一粒子状態は 'natural extensions' の一つです（0-03）既知 。二つ目。格子が測るのは相関の減り方です。ゲージ不変な演算子 O を真空 Ω に作用させた状態 $O\Omega$ を考えます。ρ は、この状態がエネル

ギー E の成分をどれだけ持つかの重み（スペクトル測度）です。虚時間 τ だけ離れた O どうしの連結相関は、ρ で次のように書けます（0-04 §07・4-11）既知 。

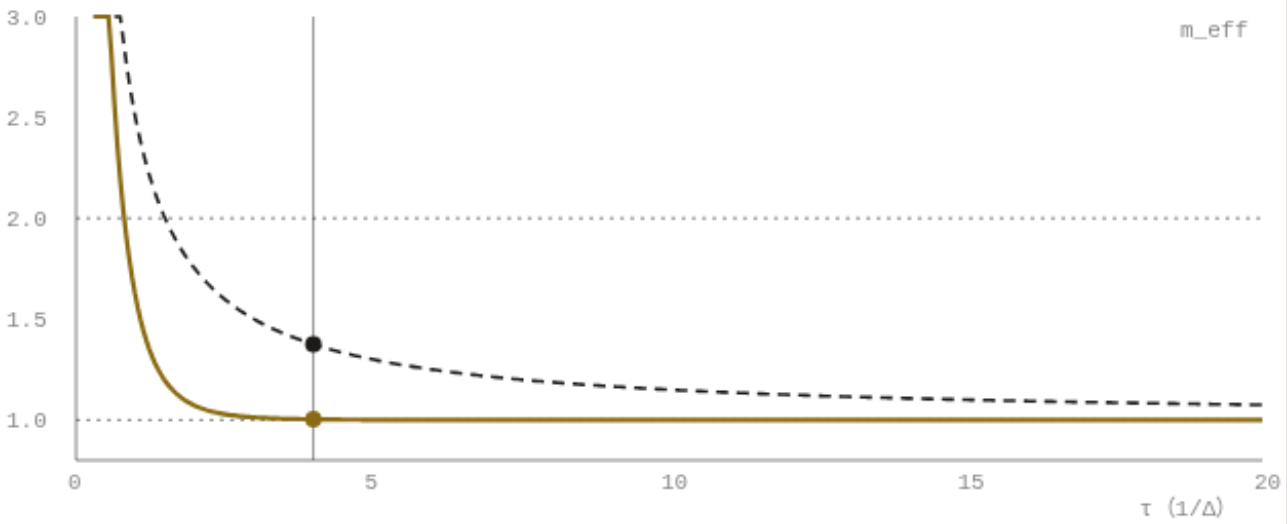
$$C(\tau) = \int_{[\Delta,\infty)} e^{-E\tau}\, d\rho(E), \qquad m_{\mathrm{eff}}(\tau) = -\frac{d}{d\tau}\log C(\tau) \tag{5}$$

m_{eff} は $\tau \to \infty$ で ρ の台の下端に近づきますが、下端が孤立した点か連続スペクトルの端かは教えません。二つの模型で比べます（$\Delta = 1$）。

A（粒子あり）：$d\rho = Z\,\delta(E-1)\,dE + c\,(E-2)_+^{1/2}\,dE$,　　B（粒子なし）：$d\rho = (E-1)_+^{1/2}\,dE$. (6)

$(x)_+^{1/2}$ は $x>0$ で $\sqrt{x}$、他で 0。$\int_{E_0}^{\infty}(E-E_0)^{1/2}e^{-E\tau}dE = \Gamma(\tfrac{3}{2})e^{-E_0\tau}\tau^{-3/2}$ から、B は $m_{\mathrm{eff}} = 1 + \frac{3}{2\tau}$ です。例。A は $\tau \approx 3.2$（$c=1$）〜4.2（$c=5$）で 1% 以内に入り、B は $\tau = 150$ でようやく入ります（表 2）。途中の窓に指数関数を一つ当てはめると、B には Δ より重い「粒子」が見えます 計算 。平らな部分を一粒子の質量と読むのは物理の水準の解釈です 物理 。

図 2　A の連続部分の重み c（Z = 1）と時刻 τ を変えると、有効質量（実線 A：粒子あり、破線 B：粒子なし）の曲線と読み値が変わる。点線は 1 と 2



c = 1.0、τ = 4.0：A 1.0028、B 1.3750（Δ = 1）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（(6) の閉じた形をその場で計算）。

計算 表 2　$m_{\mathrm{eff}}(\tau)$（$\Delta=1$、$Z=1$）。最後の行は 1% 以内に入る最初の τ。閉じた形と数値積分の差は $\tau \le 16$ で 4×10^{-5} 未満。

τ	A（$c=1$）	A（$c=5$）	B
1	1.6147	2.5495	2.5000
2	1.0712	1.3061	1.7500
4	1.0028	1.0138	1.3750
8	1.0000	1.0001	1.1875

τ	A $(c=1)$	A $(c=5)$	B
16	1.0000	1.0000	1.0938
1% 以内	3.15	4.23	150

三つ目。GeV の単位は純ヤン–ミルズの中からは出ず、クォークを含む格子 QCD の尺度 r_0 を借ります。格子の論文も、純ゲージ理論と QCD は別の理論だと断っています（Athenodorou–Teper）物理。「グルーオンに質量が付く」も別の話で、質量項 $m^2 \operatorname{tr} A_\mu A_\mu$ はゲージ不変ではありません 既知。

正確な言い方

質量ギャップはスペクトルの隙間である。物理はその下端に孤立した粒子（グルーボール）が在ると考えて質量を測る。相関の減り方が教えるのは下端の位置までである。

06

「閉じ込めを示せばギャップも出る」

言い方：閉じ込め（クォークを単独で取り出せないこと）とギャップは同じことで、片方を示せばもう片方も出る。

正しい核：物理では弦張力 σ と隙間 m を一つの尺度の二つの顔と見ます（17-01）。正確には、比 $m/\sqrt{\sigma}$ が β や格子間隔に依らない有限の正の数に近づく、と物理では考えます 物理。格子には条件つきの定理もあります。Chatterjee（2021）は、G が $U(n)$ の閉じた連結部分群のとき、次の強い形の減衰を仮定しました 既知。

$$\exists\, K_1, K_2 > 0 \;\; \forall B, \delta, f, g: \quad \left| \langle fg \rangle_{B,\delta} - \langle f \rangle_{B,\delta} \langle g \rangle_{B,\delta} \right| \le K_1 e^{-K_2 \operatorname{dist}(f,g)} \tag{7}$$

B は立方体の箱、δ は箱の境界条件、f, g は $[-1,1]$ に値を取る局所的な関数（一本のリンクの近くの変数だけで決まる関数）、$\operatorname{dist}(f,g)$ はその間の距離です。定数 K_1, K_2 は B・δ・f・g に依らず、G・β・d だけで決まります。この順序が要で、定数が箱や境界条件ごとに違ってよいなら、仮定はほとんど何も言いません。

一様な減衰から面積則への定理（Chatterjee 2021 の定理 2.4）は、(7) が成り立てば中心対称性は破れず、中心に自明でなく作用する表現の長方形のループで面積則が成り立つ、というものです 既知。著者は、小さい β ではほぼどの格子ゲージ理論でも (7) が示せると書く一方、四次元で信じられている減衰がこの強い形を含むかは明らかでないと書きます。

ずれ：(a) 問題文は閉じ込めを求めず、'natural extensions' に挙げるだけです 既知。(b)「任意のコンパクト単純群」には中心が自明な G_2 なども入り 既知、そうした群は弱結合で閉

じ込めないかもしれないと信じられています（同論文の $SO(3)$ の注）物理。問題文はそこにも隙間を求めます。(c) 例。三次元の $U(1)$ は面積則が示されました（Göpfert–Mack。Villain 型の作用とされる）。一方で大きい β の隙間は、講義資料（2020）の時点では示されていないとされます。有限群では、大きい β の指数減衰が定理で（Adhikari–Cao）既知、閉じ込めないと信じられています物理（図 1）。

ただし、有限群などの理論で言われる「減衰」は、特定の境界条件での二点相関の減衰を指し、(7) の強い形（任意の境界条件で一様）とは違う、と著者は注意しています（Chatterjee 2021 の定理 2.4 の後の注）既知。だから、減衰しても閉じ込めない理論があることは、一様な減衰から面積則への定理と矛盾しません。

正確な言い方

閉じ込めとギャップは別の主張で（17-02 §02）、四次元の連続の理論ではどちら向きの含意も定理ではない。格子では、$U(n)$ の閉じた連結部分群について、強い形の減衰 (7) から、中心に自明でなく作用する表現のループの面積則が出る。問題文が求めるのはギャップだけである。

07

「格子の数値計算で確かめられている」

言い方：大規模な計算でグルーボールの質量が精密に出ているから、ギャップの存在は分かっている。

正しい核：例。$SU(2)$ の $m_{0^{++}}/\sqrt{\sigma}$ は 3.844(61)（Lucini–Teper 2001）と 3.781(23)（Athenodorou–Teper 2021）で、よく合います物理。

ずれ：確かめているのは、在ると仮定したうえでの整合性です（17-13）。有限の箱・有限の β では隙間は必ず正で（17-13）既知、正の数が出ても主張は試されていません。連続での値は

$$\frac{m(a)}{\sqrt{\sigma(a)}} = \frac{m(0)}{\sqrt{\sigma(0)}} + c\,a^2\sigma \tag{8}$$

の形を仮定した外挿で物理、分母の σ は電束の管を Nambu–Goto の弦とみなす補正を通ります（17-13）。

正確な言い方

格子の数値は、在ると仮定したうえでの精密な予言で、ギャップの強い物理的な証拠である。数学の証明の一部ではないが、構成された理論が合わせるべき的になる。

08

「格子で示せば足りる」「有限の箱で作れば残りは技術」

言い方（格子）：格子の上で、すべての β で相関長が有限だと示せば懸賞の解になる。

正しい核：Chatterjee（2018）の格子の相関長の問題は、四次元の非可換なコンパクト Lie 群 $G \subseteq U(N)$（$N \geq 2$）の任意の無限体積極限で、プラケットの相関の減る長さ $\xi(\beta)$ について次を示せという、一様な隙間の格子版です 既知 。

$$0 < \xi(\beta) < \infty \quad (\text{すべての } \beta > 0), \qquad \lim_{\beta \to \infty} \xi(\beta) = \infty \tag{9}$$

ずれ：連続極限、$\mathbb{R}^4$ の上の公理、非自明性、短距離での一致は (9) に入らず、(9) だけでは懸賞の解になりません。逆の含意も自明ではありません（5-09） 既知 。

言い方（有限の箱）：有限の箱 T^4（連続の四次元トーラス）の上で作れれば、あとは箱を広げるだけ。

ずれ：問題文はコンパクトな空間の上の構成だけでも 'would represent a major breakthrough' と書き、その先に一様なギャップの壁を置きます 既知 。例。格子の周期箱（格子の T^4）でも、反射正値性から転送行列が得られ、有限の箱の隙間は正になります 既知 。有限の箱の隙間は、あって当然の量です。要るのは $T^4 \to \mathbb{R}^4$ と、そこで潰れない隙間です（7-10）。2026 年に公開された構成は、周期の箱での構成と部分列の無限体積の理論を与えましたが 評 、相関について在るのは相に一様な多項式の評価までで、指数の減衰はありません（16-02 §04）。この項の言い方の「残りは技術」が当たらない、今の例です。

正確な言い方

(9) は一様な隙間の格子版だが、懸賞の要件（連続・$\mathbb{R}^4$・公理・非自明）には届かない。T^4 の上の構成も大きな一歩で、その先に一様な隙間と無限体積の極限が残る。

09

「質量ギャップは不確定性原理から出る」

言い方：粒子を小さい領域に押し込めば、不確定性原理で運動量がばらつき、エネルギーは下がらない。質量ギャップはその最低のエネルギーで、起源は不確定性原理だ。

正しい核：不確定性関係は定理です 既知 。ヒルベルト空間の状態 ψ と自己共役作用素 A, B について

$$\Delta_\psi A \, \Delta_\psi B \;\geq\; \tfrac{1}{2} \left| \langle \psi, [A, B] \psi \rangle \right| \tag{10}$$

が成り立ち（Robertson 1929、Schrödinger 1930）、証明は Cauchy–Schwarz の不等式一つです。$A = x,\ B = p$ に当てると $\Delta x\,\Delta p \geq \hbar/2$（Kennard 1927）で、等号はガウス関数、調和振動子の基底状態がその例です（2-06 §03）。フーリエ解析の言葉では、関数とその変換を同時に狭くできないという定理です（1-11。Hardy・Beurling の強い形もあります）。大きさ R の領域に局在した状態の運動エネルギーは $\hbar^2/(2mR^2)$ 程度、相対論的には $\hbar c/R$ 程度より下がりません。物理 物理の絵では、グルーボールは大きさ $1/\Lambda$ 程度の色の電束の塊で、その質量が Λ 程度になるのはこの勘定です（17-01〜17-03）。

ずれ：(a) 定理が言うのは「長さ R を与えればエネルギー $\hbar c/R$ を保証する」ことで、R そのものは与えません。自由な質量ゼロの場（光子、U(1)）も (10) に従いますが隙間は 0 です。質量 m の自由場の隙間は手で入れた m そのものです（2-06 §08）。ヤン–ミルズの作用には質量項も長さの物差しもありません（3-02）。長さ $1/\Lambda$ は無次元の結合から対数の流れで一つの尺度が生まれること（次元転移、4-07）から、局在は色の電束が閉じた管に押し込められること（17-02・26-03）から来ます。どちらも四次元の連続の理論では定理ではありません。(b) ユークリッドの測度の言葉では、不確定性は原理ではなく双対性です。相関の指数減衰と軽いモードの不在は同じことの二つの顔で（4-11）、(10) の内容は隙間の定義そのものに入っています。原因ではなく言い換えです。本書の道では隙間は真空の測度の Poincaré 定数で（24-05）、不確定性はその不等式の中に溶けています。(c) $\hbar = c = 1$ の単位で (10) が与えるのは $E \gtrsim 1/R$ で、隙間が正であるためには R が有界であること、つまり尺度が一つしか無いこと（17-12）が要ります。

正確な言い方

不確定性関係は定理で、長さ R を与えればエネルギー $1/R$ を保証する。質量ギャップに要るのは R の側である。尺度が一つ生まれ、励起がその尺度に局在することは、四次元の連続な非可換群では示されていない。

10

寄り道：ほかに見かける言い方

飛ばしてよい節です。

ほかによく見る言い方を四つ、短く直します。

- 「無限大に記号（1/0）を与えれば片づく」。発散に値を与える仕事は摂動論の内側ですでに数学として整っていて、それでも問題は残っています（7-12）。
- 「ホログラフィーでギャップは示された」。計算できるのは $N \to \infty$・強結合の側の模型で、対応自体が物理の予想です（17-10）物理 。

- 「φ^4_4 が自明だから潰れる」／「漸近自由だから非自明は自動」。どちらも違い、非自明性は別に示す条件です（7-08）。
- 「QCD の問題だ」。対象は純ヤン–ミルズです（0-03）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 九つの言い方の正しい核とずれを、問題文と一次資料の定理に照らして分けたこと	質量ギャップの存在。未解決で、この章は何も示していない（連続極限の存在は公開された構成が示し、委員会が評価した評 。その証明の当否はこの章の外）
既知 格子の定理が群と次元で分かれること（図 1・表 1。表の時点は出典表のとおり）	物理 四次元の連続な非可換群の、大きい β の隙間と閉じ込め。未証明
計算 相関の減り方だけでは粒子の有無が決まらないこと（模型 (6)・表 2）	物理 格子の数値の連続値（(8) の外挿を通った値）が、構成された理論の値であること
既知 (7) の強い形の減衰から面積則が出ること（$U(n)$ の閉じた連結部分群・中心に自明でなく作用する表現）	三次元の $U(1)$ の大きい β の隙間の現状（講義資料（2020）による）と、中間の β の $\mathbb{Z}_N$ の相（未確認）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
変数の数（§02）・表 2・図 2	計算	python3（表 2 は数値積分で検算）。図 2 はブラウザで (6) を計算
問題文・講義資料・(7)・(9)	既知	Jaffe–Witten, Clay の問題解説（2000）。Chatterjee のスライド “Yang–Mills on the lattice”（2020。§02 の引用は 2020 年時点の記述）。Chatterjee, arXiv:1803.01950（§4・格子の相関長の問題）。Chatterjee, arXiv:2006.16229, Comm. Math. Phys. 385 (2021) 1007–1039（定義 2.3・定理 2.2・2.4 と注）。本文を確認
紫外・三次元・(4)	既知	Bałaban, CMP 122 (1989) 355–392；CMP 102 (1985) 255–275。Magnen–Rivasseau–Sénéor, CMP 155 (1993) 325–383（序文の引用は 7-07 による）。Chevyrev, arXiv:2202.13359（冒頭を確認）。(4) は PDG 2024 の QCD の総説
$U(1)$	既知	Guth, Phys. Rev. D 21 (1980) 2291–2307。Guth は書誌のみで、内容は Chatterjee 2018 §4 による。Göpfert–Mack, CMP 82 (1982) 545–606（要旨（INSPIRE）：Villain 作用・全結合で弦張力が正・m_D を固定した連続極限は自由スカラー場。本文は未読。年は Crossref の発行年で、INSPIRE は 1981）。Fröhlich–Spencer, CMP 83 (1982) 411–454（書誌を確認。内容は Chatterjee 2018 §4 による）。Guth・Fröhlich–Spencer の作用の型（Villain 型）と、中間の β の $\mathbb{Z}_N$ の質量ゼロの相は未確認

もの	種別	出典・道具
強結合・有限群	既知	Osterwalder–Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471（要旨：強結合での無限体積の極限の存在と解析性・Wilson の閉じ込めの評価。強結合の面積則に付けた条件〈中心に自明でなく作用する表現〉と、中心が自明な群の周長則は、本文では未確認）。Shen–Zhu–Zhu, CMP 400 (2023)（要旨を確認）。Adhikari–Cao, arXiv:2202.10375, Ann. Probab. 53(1) (2025)（定理 1.1 を確認）
格子の数値	物理	Morningstar–Peardon, PRD 60 (1999)。Lucini–Teper, JHEP 06 (2001)。Athenodorou–Teper, JHEP 11 (2020)；12 (2021)（表を確認）

次に読む章：16-09 証明が含むべき段。本書の検討の側から読むなら 23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定。

証明が含むべき段 — 七段の表

この章は未解決の問いの地図です。§02・§05・§06 は案内です。

この章で分かること — 四次元のヤン–ミルズの質量ギャップの証明が、どこから出発する道であっても含まなければならない七つの段（器・紫外・小さな T^2 のギャップ・小さな T^2 の閉じ込め・移り変わりの帯・R^4・一般の群）。段ごとに、世界に既知のこと・この本で示したこと・まだ示されていないこと（調べた範囲で）を、札つきで一つの表に並べます。質量ギャップと閉じ込め（面積則）が別の言明であること。二本の道が帯で合流する図。第 23 部以降の各章が表のどの欄を埋めるかの索引と、16-07 の連続の六つの課題との対応。2026 年に公開された構成が受け持つ段（器の一部・紫外の存在・R^4 の存在と公理・全ての群での存在）と、残る段。

前提となる章 — 16-07 課題の一覧（十二の課題と矢印の三つの強さ）と 16-08 §06（閉じ込めとギャップは別の主張）。段の言葉は 7-10（四次元の段ごとの到達点）に合わせます。公開された構成のあとに残る問いは 16-02、本書の持ち札の位置は 16-04 です。

先に言うこと — この章は段を並べる章で、どの段も片づけていません。証明が含むべき七つの段への分け方は構成的場の理論でよく使われる整理を、この本の第 25・26 部の検討に合わせて切り直したものです。表の ■◐□ は記録の状態の印で、証明の程度の目盛りではありません（§02）。このサイトは質量ギャップの存在も連続極限の構成も示していません。札[評]は委員会の評価書による、の意味です（6-00 の「札」）。

この章の順序

1. 証明が含むべき七つの段の表 — 段ごとの既知・この本・未知（表 1）
2. ■◐□ の読み方 — 記録の状態の印であって、目盛りではない
3. 質量ギャップと閉じ込めは別の言明 — それぞれへの道と、二つを結ぶ矢印の欠け
4. 二本の道が帯で合流する — 論理の流れ（図 1）
5. どの章がどの欄を埋めるか — 第 23〜27 部の索引（表 2）
6. 16-07 の課題との対応 — 連続の六つの課題と証明が含むべき七つの段（表 3）

01

証明が含むべき七つの段の表 — 段ごとの既知・この本・未知

格子から出発して $\mathbb{R}^4$ の上の理論と質量ギャップに着くまでを、七つの段に割ります。順に、(1) 器（格子の上の測度と、そこから量子論を組み立てる仕組み）、(2) 紫外（格子間隔 a を 0 に送っても崩れない、全ての尺度での一様な制御。存在としては公開された構成が示し、本書の道に残るのは継ぎ目）、(3) 小さな T^2 のギャップ、(4) 小さな T^2 の閉じ込め、(5) 移り変わりの帯（略して帯）、(6) R^4 の理論、(7) 一般の群、です。

小さな T^2 の二つの段（表 1 の 3・4）の「小さな T^2」は、四次元を $\mathbb{R}^2 \times T^2$ と書いて、T^2 の一辺 L を物理の長さ $1/\Lambda$ よりずっと小さく取った場合です（Λ は理論が自分で生む質量の尺度、4-07）。T^2 に 't Hooft の捩れ（向かい合う辺を、群の中心の元だけずらして貼る境界条件）を入れると、零モード（作用を上げずに動ける方向）が消え、L までの尺度で結合が弱いままに保てる見込みがあります。そこまでの段（小さな T^2 の二つの段）と、T^2 を広げていく段（帯の段）とに、問題を分けるための経由地です。中身は第 25 部（25-00）で扱います。

帯の段の帯は、結合が弱い尺度から強い尺度へ移る中間の尺度 $L \sim 1/\Lambda$ のことです。四次元では、この尺度をどの道具も非摂動的に渡れていません（26-00）。帯を渡る言明は、空間の道の言葉では次の形を取ります。

$$\ln \frac{1}{\theta(L, L)} \;\geq\; c\, L^2 \qquad (\text{全ての } L \text{ で同じ } c > 0) \tag{1}$$

$\theta(L, L)$ は、一辺 L の容器の中で T^2 を巻く渦を一つ入れたときの、区画の偏り（渦が「安い」ほど 1 から離れる量）です。(1) は 't Hooft の判定の形の面積則で、「θ が 1 から離れる」だけでは足りないことは 26-01 で扱います。

2026 年に公開された構成のあと。公開された構成は、器の段の一部（元の Wilson の測度の鏡映正値性・チェス盤の評価・再構成。12-01・12-02・12-08）、紫外の段の存在（周期の箱での連続極限。第 8〜11 部）、R^4 の段の存在と公理（部分列の無限体積・相の分解・相ごとの Wightman の公理。12-05・12-07）、一般の群の段の存在（任意のコンパクト単純群）を受け持ちます。委員会はこれを「Lean で証明されている」と評価しています[評]。表 1 の「世界で既知」の欄に、この受け持ちを書き込みました。受け持たないのは、小さな T^2 の二つの段（捩れた境界条件は扱われていない）、帯の段、一様な質量ギャップ、無限体積の極限の一意性です（16-02）。紫外の段については、存在が示されたあとも、紫外の結果を赤外の議論が使える形にする継ぎ目が残ります（16-03）[推]。

表 1　証明が含むべき七つの段（段の名の右は印：■ 記録では閉じている／◐ 部分的／□ 開いている。札は行の中の主

張ごと。「章」は表 2 の索引と同じ）

段と中身	世界で既知	この本で示したこと（札つき）	未知・埋める章
1 器 ◐ 格子・鏡映正値性・ブロックの観測量・コンパクト性。稠密な集合での減衰から転送行列のギャップ	典 鏡映正値性と転送行列（Osterwalder–Seiler 1978、5-03）・再構成（4-10）。評 公開された構成が示した：元の Wilson の測度の、格子点を通る面と辺の中点を通る面の鏡映正値性、チェス盤の評価、再構成（第 12 部）	初 z の鏡映正値性（捩れの和を取った集団の、格子点を通る鏡映での正値性。核の代数は Lean：ReflPos（`ReflPos.refl_pos`・`ReflPos.refl_cs`）、非負の重みの有限和）。Lean：GapFromDecay（`GapFromDecay.gap_of_decay_dense`）（有界な自己共役作用素で、稠密な集合の上の一様な減衰を仮定に置いた抽象の補題）	器の組み立て全体の書き下し（いまは筋） 章：5-03・26-04・26-05
2 紫外 ◐ 格子間隔 a から尺度 L まで、a に一様な多重尺度の解析（有効作用の局所性・大きな場の稀さ・結合の流れ）。存在は公開された構成、残るのは継ぎ目	評 公開された構成が示した：周期の箱で、切断の列の全体に沿う連続極限（第 8〜11 部）。全ての段を弱結合のまま運び、格子間隔 1 の段で止まる（16-03）。典 それ以前は Bałaban の連作（CMP、1980 年代。中心の段に原典が「未発表」とする部分が残る、7-07）	初 一ループの水準の部品だけ（摂動の水準）。これまでの記録は紫外の制御の全体を 仮 として仮定に置いていた	継ぎ目：間隔 1 の段の理論を対象として定めること、体積に一様な局所の評価、観測量の橋（連続の相関を間隔 1 の段の期待値として書くこと）。本書の道ではさらに、測度で決まる量との読み替え、捩れた境界条件と細長い箱での構成、鏡映正値性の持ち方 推 章：16-03・7-07・25-00・26-11・27-02 紫外の制御
3 小さな T^2 のギャップ ◐ 捩れで零モードが消え、T^2 の大きさ L まで弱結合のまま。転送行列の隙間 $\geq c/L$ が a に一様	典 't Hooft の捩れた境界条件と流束（1979・1981）	初 捩れの部分：捩れを食う真空の一意性・格子の二次元 Laplacian のギャップ $4\sin^2(\pi/2N)$・(1,1) の区画で $S_{\min} > 0$（SU(2)・格子・N 固定）。a に一様な形は、捩れた境界条件の箱での紫外の構成を仮定に置いた下でだけ	その仮定を外した、a に一様な隙間の下界。公開された構成は周期の立方の箱だけを扱うので、捩れた箱での構成は、本書の道の最初の問いになる 推 章：25-00・25-01・27-02 小さな T^2 のギャップ

段と中身	世界で既知	この本で示したこと（札つき）	未知・埋める章
4 小さな T^2 の閉じ込め ◐ 容器の評価と挿入の評価で、閉じ込めを「一つの渦の挿入」と「領域の間の独立性」に帰着	典 容器の恒等式（Mack–Petkova 1980）	初 帰着（有限の配位空間・正の重み・区画を反転する全単射の上で。Lean：Containers（`Containers.container_bound`）・InsertionIdentity（`Insertion.mean_one`・`Insertion.mean_rho_sigma`）、有限和の代数）。初 板の閉じ込め（格子間隔と T^2 を固定すれば全ての β で面積則。連続極限では張力が 0）	二つの入力：挿入の一様な受理・枠の減相関 仮 章：25-03・25-04・25-05・25-06
5 帯 □ T^2 を広げても (1) が同じ c で成り立つこと。中間の尺度 $L \sim 1/\Lambda$ を非摂動的に渡る	典 'New ideas are needed'（Jaffe–Witten §6.5、一様なギャップの課題）。公開された構成は帯の中に手がかりを与えない（全ての段を弱結合のまま運ぶ） 推 。Tomboulis–Yaffe（1985）の不等式（'t Hooft の判定から面積則へ）	初 正しい形（$\theta \le \theta_0$ では足りない）。初 横広げの不等式への条件つきの還元（基点・枠の減相関・横広げの三つを仮定。反復の代数は Lean：Doubling（`Doubling.iterate`））。初 構造の入力だけでは渡れないという否定の補題。初 繰り込みの比較の一ループの水準（$\beta - \beta' = 0.258$）。読 数値の兆候（26-09）	繰り込みの比較を非摂動で。帯そのもの。帯の両端を同じ量・同じ作用の類で言うこと（強い側は本書の Lean の窓で Wilson の作用の β、弱い側は公開された構成の一段の評価の入口で有効な作用の係数） 推 章：26-01〜26-07・26-09
6 R^4 ◐ 無限体積の極限・OS 公理・回転不変性の回復・非自明性	典 反射正値性は弱い極限に残る・OS の再構成（16-07 §03）。評 公開された構成が示した：部分列の無限体積の極限・相の分解・相ごとの Wightman の公理（第 12 部）。短距離の確かめ（第 13 部）	仮 帯の段の下で大部分は標準の議論、という筋だけ	無限体積の極限の一意性（一つの理論の質量ギャップには要らない見込み 推 ）。減衰を捩れた境界条件や純粋な相で出すなら、その状態から作る理論の同定 推 章：16-07・27-01・27-02 別枠
7 一般の群 □ SU(N) と、中心の無い群（G_2 など）	典 中心が自明な群では、中心を使う矢印が消える（16-07 §07）。評 存在は、公開された構成が任意のコンパクト単純群で示した	なし（この本の第 25・26 部は SU(2) で書く）	質量ギャップの側の全て。中心の無い群には渦の道具が使えない 章：16-07 §07・27-02 別枠

表 1 から読むこと。(a) 「□」の段は帯と、群を替える一般の群の段です。紫外の段の「◐」は、周期の立方の箱での連続極限は公開された構成が示したが、捩れた箱・細長い箱での構成と、継ぎ目の言明は無い、という意味です（27-02 表 1 と同じ印）。紫外の段で今開いているのは存在ではなく継ぎ目で、帯はこの分野の長年の未解決問題のままです。(b) 小さな T^2 の二つの段の「◐」は、どちらも捩れた境界条件の箱での紫外の構成を仮定に置いた下での「◐」です。その構成が無い限り、この二つの段の印は上がりません。(c) この本で「初」と書いた

主張のうち、紙の証明を本に置く章の多くはこれから書く章です（第 25・26 部）。置くまでは、台帳（27-02）の行は消えません。

02

■◐□ の読み方 — 記録の状態の印であって、目盛りではない

表 1 の印は、この本の検討の記録がその段をどう扱っているかの印です。■ は記録の上で閉じている（紙の証明があり、Lean の欄があればその算術も閉じている）、◐ は一部が閉じていて残りが筋か数値の兆候にとどまる、□ は開いている、という意味です。

この印は証明の程度の目盛りではありません。理由は三つです。第一に、■ はその段の全体ではなく、行に書いた条件の範囲の中で閉じていることしか言いません。第二に、◐ の段が □ の段より「残りが少ない」とは限りません。小さな T^2 のギャップの段の ◐ は捩れの部分が閉じていることを言いますが、残りは紫外の段の継ぎ目（捩れた箱での構成。開いている）に依存します。第三に、本の札（初・典・機・読・仮）は主張ごとに付き、印は段ごとに付きます。同じ段に「初」と「仮」が並ぶことは普通です。印を足し合わせて「証明が含むべき七つの段のうちいくつ」と読むことはしません。

例。器の段の z の鏡映正値性は、記録では閉じています（■ に当たる主張）。それでも器の段の印は ◐ です。器の組み立て全体（ブロックの観測量から転送行列のギャップまで）の書き下しが筋のままだからです。

03

質量ギャップと閉じ込めは別の言明 — それぞれへの道と、結ぶ矢印の欠け

問題文が求めるのは質量ギャップ（量子論のハミルトニアン H のスペクトルが、真空の上で $\Delta > 0$ だけ離れていること、4-11）で、閉じ込め（Wilson ループの面積則）は求めていません。16-08 §06 のとおり、閉じ込めとギャップは別の主張で、四次元の連続の理論ではどちら向きの含意も定理ではありません 典 。物理ではこの二つを一つの尺度の二つの顔と見ます（比 $m/\sqrt{\sigma}$ が有限の正の数に近づく）が、それは期待の水準の文です 読 （物理）。面積則から質量ギャップへの含意は、一般の含意としては成り立ちません。面積則は荷電セクターの隙間、質量ギャップは中性セクターの隙間の言明だからです（16-07 §02）。

この本の二つの道は、着く言明が違います。

- **ギャップへの道**（小さな T^2 のギャップの段＋転送行列）：小さな T^2 の転送行列の隙間（小さな T^2 のギャップの段）を、帯を通して $\mathbb{R}^4$ まで同じ定数で運ぶ。運べれば、隙間は極限

に残ります（16-07 §03 の隙間の規則。前提 (i)〜(iii) つき）。第 23 部の道（時間の方向から）も、同じギャップの言明に、拡散型緩和時間の仮定と片側の橋を通して向かいます。

- **閉じ込めへの道**（小さな T^2 の閉じ込めの段・帯の段・R^4 の段）：小さな T^2 の閉じ込めを、帯で T^2 の大きさに一様にし、$\mathbb{R}^4$ の理論（R^4 の段）で面積則にする。

二つの道を結ぶ矢印、つまり「面積則から質量ギャップへ」の既知の道はありません。何を足せば面積則からギャップが出るかの言明そのものが、まだ決まっていません（27-01 の最後の矢印、27-02 の別枠）。だから、閉じ込めへの道が全て閉じても、それだけでは問題文の要件に届きません。この章は二本の道を並べますが、閉じ込めからギャップへの矢印を「結ぶ道」としては数えません。

正確な言い方

質量ギャップと閉じ込め（面積則）は別の言明である。この本の空間の道は、小さな T^2 のギャップの段から転送行列を通してギャップへ、小さな T^2 の閉じ込めの段・帯の段・R^4 の段を通して閉じ込めへ、と二つの言明へ別々に向かう。面積則からギャップを出す一般の定理は無く、この本もそれを示していない。本書の強結合の面積則（20-06）は格子間隔を固定した強結合の窓の中の言明で、残る問いとは反対の端に在る。

04

二本の道が帯で合流する — 論理の流れ

図 1 は、第 16 部から第 27 部までの論理の流れです。一本目の道は時間の方向から（第 23・24 部）、二本目の道は空間の方向から（第 25 部）、どちらも四次元の目標の水準では「全ての尺度で同じ定数」という一つの型の言明に着きます。その言明が帯を渡る言明で、第 26 部が扱います。

図 1　二本の道が帯で合流する。一本目の道の欄は二行に割ってあり、帯へ流れ込む矢印は「四次元の目標」の行からだけ出る（一段目の残件は帯の縮図で、帯そのものではない）。最下段の紫外の側（存在は公開された構成、本書の道に残るのは継ぎ目）は二本の道の両方の下にある

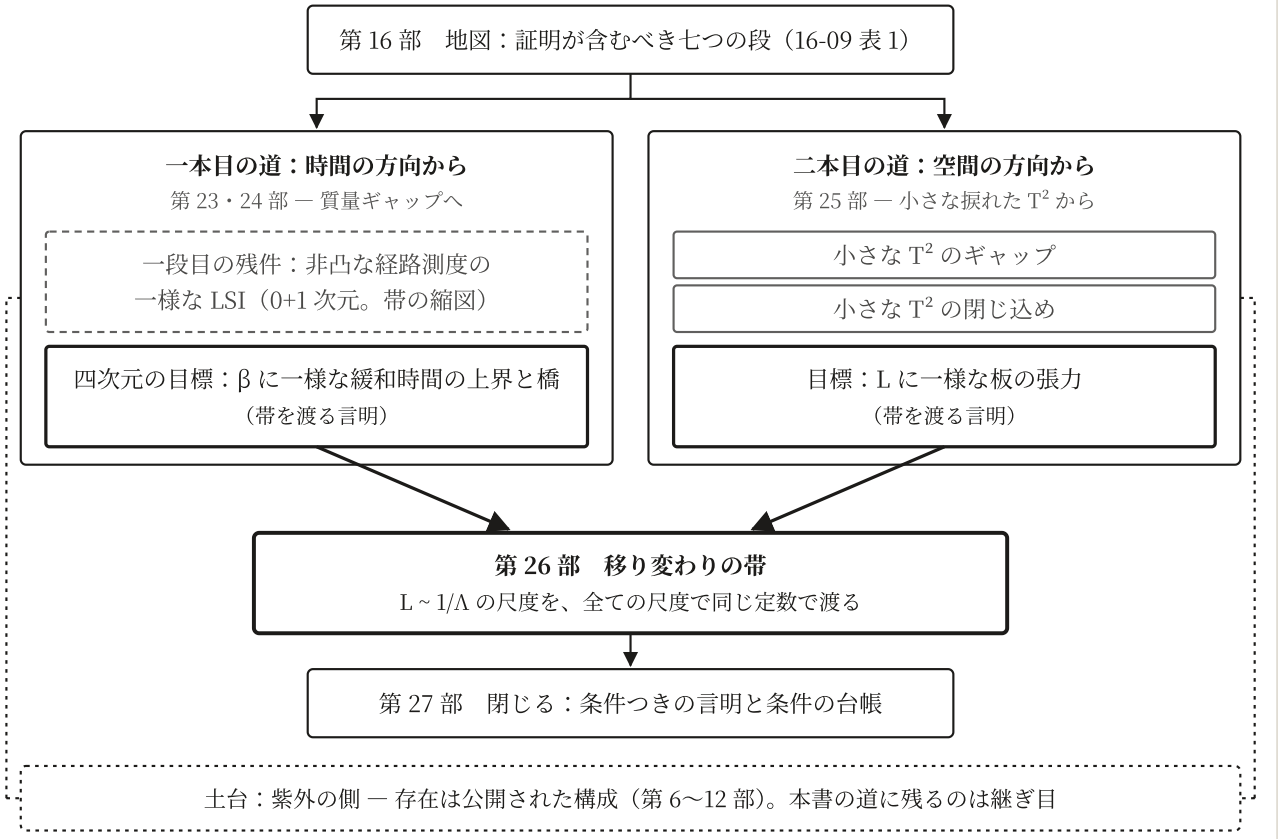


図 1 から読むこと。(a) 一本目の道の「一段目の残件」（0+1 次元の二重井戸の経路の測度で、非凸な所を含む測度の一様な対数 Sobolev 不等式、23-15 表 1）は、帯と同じ型の壁（両端に別の道具があり、真ん中で最悪の配位の評価が止まる）ですが、帯ではありません。一段目で移り変わる長さは、頂上での Jacobi の方程式の最初の共役点という古典的な量で決まり、$\hbar$ に依らず、格子の単位で有限です。四次元で移り変わる長さ $1/\Lambda$ は量子的に生まれ（4-07）、格子の単位で発散します。この違いは、一段目の側の共役点の計算の証明とともに 26-07 で扱います（証明を置くまでは 仮 ）。(b) 帯へ流れ込むのは、二本の道のどちらでも「四次元の目標」の行です。一本目では $\beta \to \infty$ に一様な拡散型緩和時間の仮定の上側（緩和時間の上界の仮定）と片側の橋（23-15 §07 の物理単位の目標の水準）、二本目では L に一様な板の張力です。(c) 紫外の側は帯の外にあります。存在は公開された構成が与えました 評 。本書の二本の道は、紫外の結果を自分の対象（捩れた箱・板の張力・経路の測度）に使える形にする継ぎ目を、仮定に置いて進みます 推 。

図 1 の合流は「目標の水準で同じ型の言明に着く」という意味で、二本の道の今の壁が同じ場所にあるという意味ではありません。帯の部の「帯」と、第 23・24 部の「窓」（サイトの窓・$\hbar$ の窓・時刻の窓）は別のものです（26-00 の語の注）。

```
05
```

どの章がどの欄を埋めるか — 第 23〜27 部の索引

表 2 は、第 23 部以降の章が表 1 のどの段のどの欄に材料を入れるかの索引です。公開された構成が受け持つ段は第二巻の第 6〜13 部で読み、本書の確かな定理は第 19〜22 部に在ります（16-04 §04）。「欄」は表 1 の列（既知・この本・未知）です。第 25〜27 部には執筆中の章があり、リンクは章の番号で張ってあります。

表 2　第 23〜27 部の章と、表 1 の段・欄（この本の整理）

章	段	欄	一言
23-00〜23-17	5（時間の側）	この本・未知	一本目の道。四次元の目標（物理単位の目標の水準）の言明と、一段目（0+1 次元、帯の縮図）の行の一覧
24-00〜24-08	5（時間の側）・6	この本・未知	一本目の道（後半）。仮定の形の直しと時間を連続にする話。24-07 は帯の部から引く
25-00	2・3	既知・未知	なぜ小さな捩れた T^2 を経由するか
25-01	3	既知・この本	捩れと流束、捩れの部分の三つの事実
25-02	4・5	既知・この本	渦と分数インスタントン、弦の張力の形
25-03・25-04	4	既知・この本	容器の恒等式と板の閉じ込め
25-05・25-06	4	この本	挿入の恒等式・駆動した挿入と流れの補題
25-07	5	この本	決まった写像が失敗する理由（一ループの水準）
25-08	4	この本（読）	空間の道の測った記録
25-09	5	未知	この道が止まる場所＝T^2 を広げること
26-00〜26-02	5	この本・未知	合流・帯の正しい形・一つの不等式への還元
26-03・26-04・26-05	1・5	この本	非可換が効く場所・構造だけでは渡れない・チェス盤
26-06・26-07	5	この本・未知	繰り込みの比較・時間の側から見た帯
26-08・26-09・26-10	5	既知・この本（読）・未知	試して止まった道・測った記録・見方の候補
26-11	2	既知・この本・未知	紫外の制御：一段で閉じるとは何か・連作の五段と止まった場所・言明の案
27-00〜27-04	全て	未知（条件の欄）	条件つきの言明・条件の台帳・問いと主張しないことの索引
A-06・A-07	全て	—	名前の索引・この本から出た論文の草稿

```
06
```

16-07 の課題との対応 — 連続の六つの課題と証明が含むべき七つの段

16-07 表 1 の連続の六つの課題は、連続の理論に要る課題を問題文の要件から割ったものです。表 1 の証明が含むべき七つの段は、格子から出発する一つの道の段を割ったものです。割り方の軸が違うので、一対一には対応しません。表 3 はその対応で、この本の整理です。

表 3　証明が含むべき七つの段と 16-07 の課題（この本の整理。矢印の強さは 16-07 のまま）

段	16-07 の課題	注
1 器	残りの公理の課題の一部	鏡映正値性と転送行列。残りの公理の課題の残り（回転の回復）は R^4 の段。公開された構成が相ごとに満たした[評]
2 紫外	T^4 の構成の課題・非自明性の課題・局所場と短距離の課題	連続極限の存在・非自明性・短距離での漸近自由との一致は、どれも紫外の側の課題。存在は局所場について公開された構成が示し、非自明性と短距離は確かめの水準（第 13 部）[評]
3・4 小さな T^2	T^4 の構成の課題の部分の問題	小さな体積の上の構成と評価。T^4 の構成の課題は T^4 の上の課題で、小さな T^2 の二つの段は $\mathbb{R}^2 \times T^2$ の小さな T^2 の上の課題なので、同じ課題ではない
5 帯	一様なギャップの課題	一様なギャップ $\inf_L \Delta_L > 0$。出題者が 'New ideas are needed' と書く課題
6 R^4	無限体積への課題・残りの公理の課題	無限体積の極限と、残りの公理
7 一般の群	16-07 §07	中心が自明な群では、中心を使う矢印が消える
（閉じ込めの側）	連続の弦張力の問題・格子の面積則の問題	連続の弦張力と格子の面積則。問題文の要件の外（16-07 の C）で、小さな T^2 の閉じ込めの段と帯の段の着く先に当たる

表 3 から読むこと。16-07 の数え（16-07 §06）では、道筋の矢印まで認めると要る極小の組は {T^4 の構成の課題・一様なギャップの課題・残りの公理の課題・非自明性の課題・局所場と短距離の課題} の一つでした。証明が含むべき七つの段の言葉では、紫外の段（T^4 の構成の課題・非自明性の課題・局所場と短距離の課題）と帯の段（一様なギャップの課題）と、器の段と R^4 の段の公理（残りの公理の課題）です。公開された構成のあとでは、紫外の側は存在として埋まり（局所場について）、残りの公理の課題も相ごとに満たされました[評]。二つの割り方のどちらでも、残るのは帯（一様なギャップの課題）と、紫外の結果を赤外の議論へ渡す継ぎ目です[推]（16-02・16-03）。

前提の一覧は 28-04 に在ります（公開の前に書いた一覧で、紫外の側の前提は、存在としては公開された構成に入りました）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
典 各段の「世界で既知」の欄（原典の範囲は各章の出典表）。閉じ込めとギャップが別の主張であること	証明が含むべき七つの段で尽きること。段の分け方はこの本の整理
初 表 1 の「この本」の欄の主張（行に書いた条件の範囲で。紙の証明を置く章は表 2）	紫外の段の継ぎ目・帯の段・一般の群の段の質量ギャップのどれも。小さな T^2 の二つの段の a に一様な形（捩れた箱での紫外の構成の仮定の外）
Lean の欄の定理名の算術（有限和と抽象の作用素の補題。物理の測度は形式化されていない）	Lean の欄が段の主張そのものを検査したこと
図 1 の合流は、四次元の目標の水準で同じ型の言明に着くという意味での合流	二本の道の今の壁が同じであること。面積則からギャップへの矢印
評 表 1 の「公開された構成が示した」の欄は委員会の評価の水準	公開された構成の証明の当否（この章の外）
全体	このサイトは質量ギャップの存在も連続極限の構成も示していない（連続極限の存在は公開された構成のもの）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
段の分け方	本書	構成的場の理論の段（7-01・7-10）を、第 25・26 部の材料（段の表・証明までの課題の一覧・仮定の一覧）に合わせて切り直した
器の段の既知	典	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471（要旨。16-07 の出典表）
紫外の制御の段の既知	典	T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 122 (1989) 355–392 ほかの連作（7-07 の出典表）
小さな T^2 のギャップの段の捩れ・小さな T^2 の閉じ込めの段の容器の恒等式	典	't Hooft の捩れた境界条件と流束（1979・1981）、Mack–Petkova の容器の恒等式（1980）。書誌は 25-01・25-03 の出典表に置く
帯の段の既知	典	A. Jaffe, E. Witten, Quantum Yang–Mills Theory, Clay Mathematics Institute (2000) §6.5。E. T. Tomboulis, L. G. Yaffe, Comm. Math. Phys. 100 (1985)（書誌は 26-01 の出典表）
表 1 の「公開された構成が示した」	評	評価書 `yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`（2026-11-10）冒頭・§5・§6・§8。コードは `yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（2026-10-28 提出）。紫外の継ぎ目は 16-03

もの	種別	出典・道具
R^4 の段と一般の群の段の既知、表 3 の課題	本書	16-07 表 1・表 2・§07
閉じ込めとギャップ	本書	16-08 §06・17-02
表 1 の「この本」の欄	初	第 25・26 部の各章（表 2）と、論文の草稿 'Exact centre-vortex insertion identities in the twist-summed ensemble, and bounded, averaged and driven confinement bounds'・'Where the twisted-slab route to confinement stops: a corrected window target, a reduction to transverse widening, and SU(2) versus U(1) numerics'・'Fractional instantons confine on the lattice: a rigorous semiclassical bound for SU(2) gauge theory on a twisted small torus'（どれも 2026-10 の草稿、A-07）
Lean	Lean	GapFromDecay（`GapFromDecay.gap_of_decay_dense`）・ReflPos（`ReflPos.refl_pos`・`ReflPos.refl_cs`）・Containers（`Containers.container_bound`）・InsertionIdentity（`Insertion.mean_one`・`Insertion.mean_rho_sigma`）・Doubling（`Doubling.iterate`）。束が保証するのは有限和の代数と抽象の作用素の不等式だけ（A-04）
図 1	本書	手で描いた図（数値の計算は無い）

この章で使った語 — 証明が含むべき七つの段（器・紫外・小さな T^2 のギャップ・小さな T^2 の閉じ込め・帯・R^4・一般の群）・移り変わりの帯（帯）・'t Hooft の捩れ・区画の偏り θ・記録の状態の印（■◐□）・ギャップへの道と閉じ込めへの道・四次元の目標・帯の縮図。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：16-10 道具の地図。本書の検討の側から読むなら 23-00 入口 — 一本目の道（時間の方向から）。条件の一覧から読むなら 27-02 条件の台帳。

道具の地図 — 本書の検討が使う既知の道具の在りか

この章は案内です（道具の地図）。本書の検討が使う既知の道具の家と、止まった所を一覧にします。

この章で分かること — 第 23 部以降の検討が使う二十二の道具（Poincaré 不等式・Bakry–Émery・対数 Sobolev・鏡映正値性・強結合展開・繰り込みの一段・Migdal–Kadanoff・一ループの摂動・区間演算・Lean など）を一つの表にし、道具ごとに、(1) 家＝最初に定義と既知の結果を置いた章（第 1〜5 部と第 7・17・18 部）と原典、(2) 本書での使い方＝第 23 部以降のどの章で何に使うか、(3) 群に写して止まった所・注意、を札つきで並べます。同じ話が二つ以上の部にあるときにどちらを先に読むか、読む順の三本、道具どうしの依存、道具の限界の一覧も置きます。

前提となる章 — 16-09 証明が含むべき段 — 七段の表（段と札）と 0-01 §03 札の凡例。

先に言うこと — この章は案内の章で、新しい主張を置きません。表の各欄の主張は、そこに挙げた章のものをその章の札のまま写しています（条件は各章の本文にあります）。「止まった所」の欄は、その道具が使えないという主張ではなく、本書の検討の範囲でその使い方が届かなかった所の記録です。このサイトは質量ギャップの存在も連続極限の構成も示していません。2026 年に公開された構成が使う道具の在りかは (6) に書きます（札 評 は委員会の評価書による、の意味。6-00 の「札」）。

この章の順序

1. この章の役割 — 五行で
2. 道具の表 — 家・使い方・止まった所（表 1）と、二か所にある話の割り振り（表 2）
3. 読む順の三本 — 道具から・結果から・地図から
4. 道具どうしの依存 — 先に要る道具と、後で使う道具（表 3）
5. 言えないこと — 道具の限界の一覧

00

この章の役割

(1) 第 23 部以降の章は、第 1〜5 部と第 7・17・18 部の道具を「群の上の格子ゲージ理論」に持ち込んで使います。道具の定義と既知の結果がどこにあるかを、一つの表で引けるようにします。

(2) 同じ道具が二つ以上の部に出てくるとき（例：Bakry–Émery は 5-11 と 24-06 と第 23 部、Migdal–Kadanoff は 18-04 と 26-08 と 15-04）、「家」と「使い方」に割り振って、先に読む章を一つに決めます。

(3) 道具を群に写したときに止まった所を、道具の側から並べます。どの部の章で止まったかは、表の第三列から引けます。

(4) 札は 16-09 と同じ五分類です。初 ＝本書が紙で証明を置いた、典 ＝原典で確かめた既知、機 ＝計算機援用（区間演算）、読 ＝数値の読み・物理の見立て、仮 ＝仮定。第 1〜5 部と第 7・17・18 部の章の札（Lean・紙・計算・既知・物理）との対応は 0-01 §03 にあります。

(5) 読み方は三通りあります（§02）。道具から入る、結果から入る、地図から入る、のどれでも、この表に戻れば家の章へ行けます。

(6) 2026 年に公開された構成は、表 1 のうち鏡映正値性（行 5）・繰り込み群の一段（行 10）・ループの係数（行 12）・Lean（行 21）と、表に無い道具（結合に依る確率核・射撃法による結合の合わせ・多段の帳簿・Arzelà–Ascoli のコンパクト性・相の分解・再構成）を組んで、周期の箱での連続極限と部分列の無限体積の理論を作りました。委員会はこれを「Lean で証明されている」と評価しています評。その道具の在りかは第二巻です：一段の核は 第 9 部、結合の合わせは 10-04、多段の評価は 第 11 部、鏡映正値性・チェス盤・コンパクト性・相の分解・再構成は 第 12 部。本書の道具との比べは 第 14 部です。

01

道具の表 — 家・使い方・止まった所

表 1 は一行一道具です。第一列の「家」は、その道具の定義と既知の結果を最初に置いた章で、二年生が最初に読む場所です。第二列は第 23 部以降でその道具を使う章と、使う目的です。第三列は、その道具を群 $SU(2)$ の上の格子に写したときに止まった所と、読むときの注意です。数と条件は同じ行に書き、詳しい条件は挙げた章にあります。

表 1　本書の検討が使う道具（家・使い方・止まった所。札は欄の中の主張ごと）

道具	家（第 1〜5 部と第 7・17・18 部・原典）	本書での使い方（第 23 部以降）	群に写して止まった所・注意

道具	家（第 1〜5 部と第 7・17・18 部・原典）	本書での使い方（第 23 部以降）	群に写して止まった所・注意
1 Poincaré 不等式と隙間 分散を勾配の二乗で押さえる定数 C_P。隙間は $1/C_P$	1-10 §08（直線上で $V'' \geq \kappa > 0$ なら $C_P \leq 1/\kappa$）典 。緩和の時間としての読みは 2-10	23-06（相の中の局所 Poincaré の条件）。24-05（時間を連続にした格子で隙間 $\Delta = \hbar^2/(2C_P(\nu))$、$\nu$ は真空の測度）初	Langevin の時間の隙間と転送行列の隙間は別の量（18-03）。24-05 の恒等式は言い換えで、真空の測度の C_P を結合に一様に押さえる道具はありません
2 Bakry–Émery の判定法 曲率＋ポテンシャルの二階微分 $\geq K > 0$ なら隙間 $\geq K$	5-11 §02（判定法と証明の筋）典 。5-04 §08 は結論だけを使う	5-11 §05〜§07（完全な族を先に積分し、曲率の下界 $2 - 27\beta^2$）初 。23-02（四次元格子の族）。24-06 §02	一本のリンクでは判定法が言えるのは $\kappa < 2$ だけで、本当の隙間は κ とともに増えます 読 。格子全体で $\beta < 1/12$ 典 、先に積分して $\beta < \sqrt{2/27} \approx 0.272$（格子間隔を固定した強結合側）。群の曲率は β で動かないので閾は $O(1)$ を超えません。弱結合の尺度では群の上の凸性そのものが立ちません（24-06 §03 の群の上の凸性の天井の補題）初
3 対数 Sobolev 不等式 エントロピーを勾配で押さえる。Poincaré より強い	5-11 §02（判定法から対数 Sobolev も出る）典 。測度の言葉は 1-08	24-06 §06（凸性の代わりに稀さで払う道具。エントロピーの通貨）。23-10 通貨の取り違えの型	Poincaré は出口の速さの通貨で、稀さを払えるのはエントロピーの通貨、という整理は見立てです 読 。「稀さで払う測度の類」は候補の規則で、三段目を閉じる見込みを約束しません 仮
4 Brascamp–Lieb と階層模型の帰納 各尺度で条件つきの測度が一様に凸、を入口にする帰納	第 1〜5 部と第 7・17・18 部に家はありません。定義と原典の条件は 24-06 §02（Bauerschmidt–Bodineau）典	24-06 §05（帰納を群に写すと、当たる・変わる・当たらない）	凸性の仮定は群の上で弱結合の尺度に原理的に立ちません 初 。凸でない場所が平らな ϕ^4 と逆（群では単位元から遠い半球）で、壁は確率 $e^{-c\beta}$ の所へ押し込まれるだけです 初 。階層模型の結果は四次元のヤン–ミルズに何も含意しません
5 鏡映正値性と転送行列	5-03（Osterwalder–Seiler）・4-10（再構成）典 。公開された構成の側は 12-01（二種類の面）・12-02（チェス盤）評	26-04（捩れの和の集団 z の、格子点を通る鏡映での正値性）初 。26-05（チェス盤の評価の入力）。16-09 器の段	横向きの鏡映は捩れで崩れます（26-04 横向きの鏡映の非正値の補題）初 。構造の入力（鏡映正値性・双対・転送行列・中心の恒等式）は $\mathbb{Z}_2$ と $U(1)$ でもそのまま成り立ち、この組だけでは横広げの不等式は出ません（否定の補題。最後の一段は 26-03 の 読 を引き継ぐ）

道具	家（第 1〜5 部と第 7・17・18 部・原典）	本書での使い方（第 23 部以降）	群に写して止まった所・注意
6 Kogut–Susskind のハミルトニアン格子 空間だけを格子にし、時間は連続	5-03・4-01 典	24-05 §04（隙間を直接扱う道）。色の一重項で真空の測度の Poincaré 定数が主項で半分 初	局所から大域への隙間の定理は、この格子ではそのまま当たりません（理由は 24-05 §04）。24-05 の Kogut–Susskind の形の定義は 5-03 を先に読みます
7 強結合展開とクラスター展開 弱い結びつきを補正として足し込み、収束を判定条件で保証する	5-02・5-04・7-04（Kotecký–Preiss・Dobrushin・Fernández–Procacci の条件） 典	26-06（強結合の端）。15-04 §05（階層模型の鎖の出口＝強結合の判定領域） 機	届くのは格子間隔を固定した強結合の岸だけです。帯（中程度の結合）には届きません。強結合の範囲の比べ方は 5-11 §07。本書の Lean の強結合の定理（無限体積の極限・質量ギャップ・面積則）は 20-02〜20-06 で、格子間隔を固定した強結合の窓の中の言明です。残る問いとは反対の端に在ります
8 指標展開と類関数 群の上の重みを既約表現の指標で展開する。共役で不変な関数＝類関数	5-02（指標展開）・7-02（二次元の熱核）・1-04 典	15-04 §01（一リンクの熱核の類は半群で、母数一つで閉じる） 初 。15-06（ループの形ごとの結合と引き込む先の類）	閉じるのは一枚の重みが一段で一枚の重みに戻る模型だからです。多リンクの結合・ゲージの張り替え・大きな場の剰余が構造的に無く、四次元の超立方格子の一段について何も含意しません（15-04 の先に言うこと）
9 Dobrushin の影響係数 一サイトへの隣の影響の和が 1 未満なら相関が減衰する型の判定	7-04（Dobrushin の条件、気体の例で 4/27） 典	26-07 §03（一段目の頂上の一サイト）。26-05 §04。26-10 箱の磁束の混合	一段目の頂上では、条件つきの一サイトの測度が $\frac{15}{4}$-凸で隣への結合が 2 なので、影響は二つの隣で $\frac{16}{15} > 1$ になり、$\frac{15}{4}$ 対 4 の不足に戻ります 初 。枠を固定すると連続な場が境界に追随し、影響係数がほぼ 1 になります 読 （物理・原論文は照合未了）

道具	家（第 1〜5 部と第 7・17・18 部・原典）	本書での使い方（第 23 部以降）	群に写して止まった所・注意
10 繰り込み群の一段（ブロック化） 細かい変数を積分して、粗い尺度の作用を作る	7-05（段の列・ブロック化・小さい場と大きい場）典 。到達点は 7-07。公開された構成の一段（結合に依る確率核）は 9-01〜9-07、多段は第 11 部評	15-03（分解の言明・横の縮みの帳簿）。15-05。15-07（背景に依る揺らぎ η）	15-05 の数は一つの粗い面の周辺で見た一段で、本当のブロック化の一段ではありません。本当の二段は反復した二段と合いません（縮み λ が 3.4〜3.7 倍）読 。全ての粗い面を同時に固定すると縮みは行列になり、粗い向きで $1/16$ を超えます（束の網の定理。可換な配位・木の水準）初 。η の多段の帰納は書けていません 仮
11 Migdal–Kadanoff と階層模型 ブロック化を一枚の重みの写像に近似した再帰	18-04 図 1（近似の再帰・近似の性格）典	15-04 §02〜§05（不変な曲線に一段ごと $1/16$ で引き寄せられ、位置は源と縮みの釣り合い $1/3600$：鞍点の主項初 。管の不変性 $\beta \in [2.46, 64]$ 機 ）。26-08 道 30	MK の流れは群がアーベルか非可換かに依らず強結合へ向かい、$U(1)$ と $SU(2)$ を区別しません（Kanazawa）典 。Tomboulis の補間は、捩れの無い区画と捩れた区画で共通の t^* が取れることに頼り、それは補間母数の共通性の不等式（Ito–Seiler の (3.5)）に帰着して強結合の外で示されていません典 。階層模型は $U(1)$ でも閉じ込める模型で、非可換性の検査になりません
12 一ループの摂動と係数 11/3 背景の場のまわりのガウスの揺らぎ。$\frac{11}{3} = 4 - \frac{1}{3}$	4-03・4-06（漸近自由と係数の内訳）典	25-07（等長的な写像は $\beta' \geq \beta + 0.023$ しか出せず、揺らぎを整形する写像は $\beta - \beta' = 0.258$ を再現）初 。26-03・26-06・15-06	全て一ループ（ガウス）の水準の文です。中程度の結合と大きな場で、整形した写像の誤差を押さえることは開いています。表の頭の $\frac{11}{3}$ は 4-06 の再掲で、内訳の説明は 4-06 を先に読みます
13 次元転移と Λ 無次元の結合から質量の尺度 Λ が生まれる	4-07 典	24-07（四次元だからこそ）。26-00・26-07（帯の位置 $L \sim 1/\Lambda$）	帯の位置を $L \sim 1/\Lambda$ に置くのは物理の尺度の読みです 読 。24-07 の大部分は既知の整理で、第 4・7 部だけで読めます

道具	家（第 1〜5 部と第 7・17・18 部・原典）	本書での使い方（第 23 部以降）	群に写して止まった所・注意
14 Gibbs の変分原理と相対エントロピー 写像で測度を運ぶと、自由エネルギーの差の評価の余りが相対エントロピーになる。Crooks・Jarzynski もこの型	2-08（自由エネルギー・相対エントロピー）典	25-06（力学で駆動した挿入）。25-07 輸送の恒等式（向きの原理）初	決まった写像の挟み撃ちでは、余りの相対エントロピーが渦の面の面積とともに増え、$e^{-\sigma A}$ の形は出ません 読 （物理。26-08 の止まった道「決定論的な挟み撃ち」）。使えるのは定性的な目標 $\Delta F(L,L)\to 0$ です
15 捩れた境界条件・中心・'t Hooft の流束	3-05（位相）・5-01（格子）・1-04（中心）典 。捩れの定義そのものは 25-01 典	25-01（捩れを食う真空の一意性など三つの事実）初 。25-04・26-01・26-04	中心が自明な群（G_2 など）では、中心を使う矢印が消えます（16-09 一般の群の段）典 。第 25・26 部は $SU(2)$ で書きます
16 中心渦と分数インスタントン	17-02（閉じ込めの絵）・3-05（インスタントン）典	25-02（定義と作用・格子の最小作用の上界）。26-03（非可換が効く場所の見立て）	希薄な気体の勘定は物理の読みです 読 。26-03 の渦は 25-02 の定義を先に読みます
17 容器の恒等式と Tomboulis–Yaffe の不等式 枠を止めると容器どうしが独立になる。't Hooft の判定から面積則へ	土台は 5-02・5-04（面の和）。恒等式は 25-03 §03（Mack–Petkova）、不等式は 26-01 典	25-03〜25-05（区画の和のアンサンブルでの書き直し・入れ子）初 。26-02（一つの不等式への還元）	長さの決まった容器を独立に並べると、四次元では $V(R)\gtrsim R/\ln R$ までしか出ません（Kovács–Tomboulis）典 。面積則にはループの大きさの容器が一つ要り、それは帯を渡ることと同じ条件です。区画の偏り θ が 1 から離れるだけでは足りません（26-01）初
18 束の網 — Thomson の原理・Kirchhoff の法則・直交射影	1-01（線形写像と射影）典 。電気回路の標準の事実は 15-05 の出典表	15-05 単位の束の定理（最小点は射影で決まり、縮み $\lambda\le \max f^2$、$1/(16d-8)\le\lambda\le 1/16$）初	可換な配位に制限した木の水準（$\beta\to\infty$ の主項）の文です。非可換な配位・一ループの源・大きな場・ゲージの張り替えを含みません
19 BCH の公式と四元数 $\log(e^Xe^Y)$ の交換子の級数。$SU(2)$ は長さ 1 の四元数	1-03（BCH の三次まで）・1-02・1-04 典	5-11（四元数の内積と一リンク積分）。15-06（交換子は BCH の像）。15-07（群の幾何の部分＝BCH の三次の係数 $1/9$、Gauss の主項・二リンク）初	$SU(2)$ の群の幾何の部分は背景そのものに乗って縮まず、その予算は闘をどう選んでも発散します（一ループの流れを正確な式と見なした算術）初 。$U(1)$ では BCH の三次は恒等的に 0 です

道具	家（第 1〜5 部と第 7・17・18 部・原典）	本書での使い方（第 23 部以降）	群に写して止まった所・注意
20 計算機援用 ― 区間演算・証明書・倍精度の規律 全ての数を真の値を含む区間で持ち、丸めを外向きに取る	第 1〜5 部と第 7・17・18 部に家はありません。一般論は 23-08 §01〜§03（丸めの規約・区間で持つ・陽性と陰性の対照）典	23-07・23-08（$\hbar$ の窓の全ての点で鎖の条件 $q<1$）機 。15-04 §05（階層模型の管）機 。23-15	区間演算で不等式を囲えたのは、一段目の窓と、一枚の重みの写像である階層模型です（ほかに 25-02 の具体的な配位の作用の上界 機 。上界の向きだけ）。階層模型でも $\beta>64$（格子間隔 0 の極限）は閉じていません。有限個の L を区間演算で確かめる道は、四次元では計算の規模が届きません（26-08 道 3）読 。計算機援用は窓の外について何も言いません（23-08 §10）
21 Lean による形式化 言明を型、証明を項として、小さな核が検査する	A-04（核の検査・標準の三つの公理の基準）典 。公開された構成の Lean の読み方は 6-00	5-11（曲がりの下界と族の組合せ）。23-13（一段目の束）。16-09 表 1 の Lean の欄	保証されるのは、書いてある仮定から書いてある結論への矢印だけです。物理の測度は形式化されていません。区間演算の層は Lean の外にあります（23-13 §04）。一般論は A-04、束の一覧と例は 23-13
22 Monte Carlo の読み 格子の配位を確率的に作って平均を測る	5-07・5-08 典	25-08・26-09（測った記録）読 。15-05・15-07 の数 読	測った数は全て「読」の札で、定理の根拠にしません。格子の大きさ・β・種・誤差は各章の同じ行にあります。測り方を変えると数が動く例があります（15-05 の本当の二段と反復の二段）

表 1 から読むこと。(a) 第 1〜5 部と第 7・17・18 部に家の無い道具が二つあります（階層模型の帰納と計算機援用）。どちらも第 23 部以降の章（24-06 §02・23-08 §01〜§03）が家を兼ねています。(b) 第三列の止まり方には型があります。曲率と凸性の道具（行 2〜4・9）は群の閉じた形と頂上の一サイトで止まり、繰り込みの道具（行 10・11・19）は一段を多段に重ねる所で止まり、構造の道具（行 5・17）は $U(1)$ と区別できない所で止まります。(c) 計算機援用と Lean（行 20・21）は、どちらも書いた範囲の外について何も言いません。

二か所以上にある話の割り振り

同じ道具が複数の部に出てくるとき、表 2 の「家」を先に読み、「使い方」は家を読んだ後で読みます。家の章だけで定義と既知の結果は揃います。

表 2　同じ話が二か所以上にあるもの（家＝先に読む章、使い方＝後で読む章）

話	家	使い方	表 1 の行

話	家	使い方	表 1 の行
Bakry–Émery の判定法	5-11（判定法と一リンクの例）	24-06 §02〜§03（群の上で弱結合で立たない理由）・23-02・23-06	2
Migdal–Kadanoff	18-04 図 1（近似の性格）	15-04（不変な曲線と区間演算）・26-08 道 30（Tomboulis の主張と批判）	11
Kogut–Susskind の格子	5-03	24-05（隙間と真空の測度）	6
鏡映正値性と転送行列	5-03	26-04・26-05（$\mathbb{Z}_2$・$U(1)$ で確かめる）	5
一ループの係数 $\frac{11}{3}$	4-06	25-07・26-03・26-06	12
次元転移	4-07	24-07・26-00・26-07	13
渦（中心渦・分数インスタントン）	絵は 17-02、定義と作用は 25-02	26-03（見立て）	16
繰り込みの段と Bałaban の連作	7-05・7-07（到達点）	15-02（連作の内部と BBS の鎖）・15-03	10
区間演算	23-08 §01〜§03	23-07・23-15・15-04	20
Lean	A-04（一般論）	23-13（一段目の束と二つの型の例）	21

02

読む順の三本 — 道具から・結果から・地図から

三本とも、途中で表 1 に戻って家の章を引けば、前提が欠けずに読めます。0-01 §07 の読む順と並べて使えます。

読む順の三本（矢印の順に読む。〔〕は表 1 の行）

入り方	読む順	読み終えたときに分かっていること
道具から入る 数学の側の読者	1-10 → 5-03 → 5-11 → 7-04 → 7-05 → 18-04 → 23-08 §01〜§03 → A-04 → 24-06 → 15-04 → 15-05 〔1・2・5・7・10・11・20・21・3・4・18〕	各道具が何を要り、群の上の格子のどこで止まったか。止まり方の三つの型（表 1 の後の (b)）
結果から入る 本書の条件つきの言明から	16-09 → 27-01 → 27-02 → 25-04 → 26-02 → 15-03、読みながら表 1 の「本書での使い方」の列から家の章へ戻る	条件つきの言明の各矢印がどの道具に頼っているか。条件の台帳の行と道具の対応
地図から入る 未解決の全体を先に見る	0-02 → 16-05 → 16-07 → 16-09 → この章 → 26-08 → 15-08 → 27-04	証明が含むべき七つの段のどこが開いていて、どの道具がどこで止まり、本書が何を主張しないか

03

道具どうしの依存 — 先に要る道具と、後で使う道具

表 3 は、表 1 の道具を「先に要る道具」でつないだものです。番号は表 1 の行です。先に要る道具の番号が後の行に来ることがありますが、輪はありません。家の章を読む順は、この列を左から辿れば決まります。

表 3　道具の依存（この本の整理。「後で使う」は第 23 部以降で組み合わせて使う所）

道具（表 1 の行）	先に要る道具	組み合わせて使う所
1 Poincaré 不等式	—（1-10 の線形代数とスペクトル）	2・3 の結論の形。24-05 の恒等式
2 Bakry–Émery	1、19（群の曲率は $SU(2)$ が三次元の球面であることから）	3 を出す。4 の入口。5-11 で 21 と組む
3 対数 Sobolev	2	24-06 の稀さで払う道具
4 階層模型の帰納	2・10	24-06 §05 で 11 と比べる
5 鏡映正値性	—（4-10 の公理）	26-05 のチェス盤。15・17 と組んで 26-04 の否定の補題
6 Kogut–Susskind の格子	5	24-05 で 1 と組む
7 強結合展開	8	15-04 の鎖の出口。9 と同じ型の判定
8 指標展開と類関数	19	15-04・15-06 で 10・11 と組む
9 Dobrushin の影響係数	7	26-07 で 2 と並べる（同じ不足に戻る）
10 繰り込みの一段	12	11・18 の枠。15-03 の分解
11 Migdal–Kadanoff	10・8	15-04 で 20 と組む。26-08 道 30
12 一ループ	—（4-03 の摂動論）	25-07 で 14 と組む。26-06・15-06
13 次元転移	12	帯の位置の読み（26-07）
14 Gibbs の変分原理	—（2-08）	25-06・25-07 で 12 と組む
15 捩れ・中心・流束	—（3-05・5-01）	16・17 の舞台。26-04
16 渦	15	25-02・26-03
17 容器と Tomboulis–Yaffe	15・7	25-03〜25-05・26-02
18 束の網	10・11（$1/16$ との比べ）	15-05 の単位の束の定理・束の網の定理
19 BCH と四元数	—（1-03・1-04）	15-07 の群の幾何の部分
20 区間演算	—（23-08 §01〜§03）	23-07・23-08・15-04 で、11 などの写像の不等式を囲う
21 Lean	—（A-04）	2・5・17・19 などの代数の段を確かめる。20 の出力は仮定に置く
22 Monte Carlo	—（5-07）	25-08・26-09・15-05・15-07 の数（読）

表 3 から読むこと。先に要る道具の無い行（1・5・12・14・15・19・20・21・22）が、二年生が最初に読める家です。そのうち 20 と 21 は家が第 23 部と付録にあるので、表 2 の割り振りで先に読みます。

04

言えないこと — 道具の限界の一覧

道具ごとの限界を、表 1 の第三列から一行ずつ抜き出します。部ごとの「主張しないこと」は 27-04 主張しないこと（横断の索引）に、第 15 部の紫外の道具の限界は 15-09 言えないことにあります。

1. 曲率の道具（Bakry–Émery・Brascamp–Lieb・Dobrushin）は、格子間隔を固定した強結合の側と一段目の窓でだけ効きます。弱結合の尺度では群の上の凸性そのものが立たず（24-06 §03）、一段目の頂上では同じ $\frac{15}{4}$ 対 4 の不足に戻ります（26-07 §03）。
2. 強結合展開とクラスター展開は強結合の岸の道具で、帯（中程度の結合）を渡りません。
3. 繰り込みの一段の文（15-04・15-05・15-06）は、一枚の重みの写像・一つの粗い面の周辺・可換な配位の木の水準のどれかに限られ、四次元の超立方格子の本当の一段を多段に重ねる文ではありません（15-09）。
4. Migdal–Kadanoff の流れと階層模型は $U(1)$ と $SU(2)$ を区別しません。そこで閉じることは非可換性の検査になりません。
5. 構造の入力（鏡映正値性・双対・転送行列・中心の恒等式）だけでは横広げの不等式は出ません（26-04 の否定の補題、「この入力の組だけでは」の形）。
6. 一ループの道具と Gibbs の変分原理の比べは一ループ（ガウス）の水準の文で、非摂動の評価ではありません。
7. 区間演算は書いた区間の外について何も言いません。Lean は書いた仮定から書いた結論への矢印だけを保証し、物理の測度は形式化されていません（23-13・A-04）。
8. Monte Carlo の数は読みで、定理の根拠にしません。
9. この表のどの道具を組み合わせても、本書の検討は質量ギャップの存在も連続極限の構成も示していません（27-04）。連続極限の存在は、公開された構成が (6) の道具の組で示しました[評]。質量ギャップの存在は、どちらにもありません（16-02）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
[典] 表 1 の「家」の列の既知の結果（原典の範囲は各章の出典表）	表 1 の二十二で本書の道具が尽きること。道具の分け方はこの本の整理

言えている	言えていない
初 機 読 仮 表 1 の第二・第三列の主張（挙げた章の札と条件のまま）	第三列の「止まった所」が、その道具の原理的な限界であること（本書の使い方の範囲の記録）
表 2 の割り振りと表 3 の依存（この本の整理）	依存の表が論理の含意の全てを尽くすこと
全体	このサイトは質量ギャップの存在も連続極限の構成も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1 の各行の主張と数	各章の札のまま	行に挙げた章の本文と出典表（この章は写しで、新しい計算はしていない）
Bakry–Émery の判定法	典	D. Bakry, M. Émery, Diffusions hypercontractives, Séminaire de Probabilités XIX (1985) 177–206（書誌は 5-11 の出典表）
格子全体の閾 $1/12$	典	H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, Commun. Math. Phys. 400 (2023) 805–851（5-11 の出典表）
階層模型の帰納の仮定	典	Bauerschmidt–Bodineau（24-06 の出典表）
Tomboulis の補間とその批判	典	E. T. Tomboulis, arXiv:0707.2179。K. R. Ito, E. Seiler, arXiv:0711.4930（(3.5)）。T. Kanazawa, arXiv:0805.2742（26-08 の出典表）
容器の恒等式と $R/\ln R$	典	Mack–Petkova（1980）、Kovács–Tomboulis hep-lat/0108017（25-03 の出典表）
Thomson の原理・Kirchhoff の法則	典	電気回路の標準の事実（15-05 の出典表）
Dobrushin の条件	典	7-04 の出典表。26-05 の判定の原論文は照合未了
表 2・表 3・読む順の三本	本書	章の前提の段落と本文の参照から整理した（数値の計算は無い）

この章で使った語 — 家（道具の定義と既知の結果を最初に置いた章）・使い方・止まった所・Bakry–Émery の判定法・対数 Sobolev 不等式・階層模型・鏡映正値性・類関数・影響係数・ブロック化・Migdal–Kadanoff・束の網・BCH・区間演算・証明書。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：16-11 帯を越える発想の地図 — 生きている発想・壊れた発想・要りそうな数学。あわせて読むなら 23-00 入口 — 一本目の道（時間の方向から）。道具から読むなら 5-11 寄り道：Bakry–Émery と一リンク積分。

帯を越える発想の地図 — 生きている発想・壊れた発想・要りそうな数学

この章は未解決の地図です。§02・§03 の導出は本書の検討です。

この章で分かること — 移り変わりの帯（26-00）を越えるために本書の検討が試した発想を、一枚の地図にします。まず帯の両端と、その間の距離の桁の目安を置き、芯を二つの仕事に分けます（公開された構成の制御を、結合が数の程度になる所まで誤差の和を有限に保って延ばす仕事と、そこから強結合への最後の区間の言明）。次に、損失のある不等式の鎖が切断に一様な結論を出せない理由を導きます。続いて、本書の Lean に在る SU(2) に固有の事実がどれも配位の作用についての事実（エネルギーの側の事実）であること、帯に要るのは揺らぎと配置の数を尺度に一様に下から数える評価であること（エントロピーの側の不足）、変分の型で書ける評価の向きを見ます。そのうえで発想を、生きている・壊れた・判定できない、の三つの表に分け、いちばん小さい次の一歩を問いの形で、要りそうな数学を名前で並べます。試験の相手を七つに増やす話と、小さい格子の計算は 26-12 に在ります。

前提となる章 — 16-03 公開された構成の赤外の端、16-04 この本の位置、26-00 入口 — 合流、26-06 繰り込みの比較、A-08 §05 赤外の側。

先に言うこと — この章は、帯を越える道を与えません。証明は在りません。在るのは、発想の地図と、手の勘定と小さい格子の計算で確かめた事実と、「この型の議論では越えられない」という見取り図です。ここに書く観察（芯の二分け、損失のある鎖、エントロピーの側の不足）は、専門家には知られていることかもしれません。本書はこれを新しい結果としてではなく、本書の検討が使う見取り図として書きます。距離の数（倍化の回数・尺度の比）は桁の目安で、定量の主張ではありません。

この章の順序

1. 帯の両端と、二つに分けた芯 — 距離の桁の目安、紫外の延長と強結合への最後の区間の言明
2. 損失のある鎖は、切断に一様な結論を出さない — 率は一様、前の因子が育つ

3. エネルギーの側の事実と、エントロピーの側の不足 — 変分の向き — 本書の SU(2) に固有の事実、渦の床が数えるもの、足りないもの
4. 発想の一覧 — 生きている（表 1）・壊れた（表 2）・判定できない（表 3）
5. いちばん小さい次の一歩 — 問いの形で
6. 要りそうな数学 — 七つ
7. この章が言っていないこと

札 — 初 ＝この章に導出を置いた手の勘定／典 ＝原典か総説の当の箇所を確かめた文献の事実／読 ＝本書の小さい格子の数値の読み（格子・掃引・種を添える）／仮 ＝推し量り・見込み／Lean ＝本書の Lean の定理（強結合の窓の中だけ、格子間隔は固定）。くわしくは 6-00 の「札」。確かめていない文献の記述は「文献の記述（本書は未確認）」と書き、主張の根拠にしません。

記号は本書の決めに合わせます。一ループの傾きは $s = 11C_g/(24\pi^2)$、SU(2) で $s = 11/(3\pi^2) \approx 0.3715$（第 25・26 部では同じ量を $8b_0$ と書く。26-06 の $s(N)$ は別の量）。公開された構成の基準の結合（有効な作用の係数）を $\bar{\beta}$、SU(2) の Wilson の作用の結合を $\beta = 4/g^2$ と書きます。

01

帯の両端と、二つに分けた芯

両端。強い側の端は、本書の Lean の窓です：無限体積の極限と質量ギャップは $|\beta| < 1/19$（$18 \tanh|\beta| < 1$ の陽な十分条件。窓そのものは $|\beta| < 0.0556$。20-03）、面積則は有限の箱で $\beta < 1.1 \times 10^{-3}$、無限体積で $\beta < 1.2 \times 10^{-4}$ Lean （20-06。格子間隔は固定、Wilson の作用だけ）。弱い側の端は、公開された構成の一段の評価が求める閾で、これは有効な作用の係数についての下限であって、Wilson の β ではありません。閾そのものの値は源に数として書かれておらず、閾に課される条件の一つだけから、閾は少なくとも 9×10^5（$e^{13.7065}$）と出ます（16-03 §01）。両端は別の量・別の作用の類で言われています。

距離の桁の目安。一ループの式では、格子間隔を二倍にするごとに結合は $s \ln 2 \approx 0.2575$ だけ減ります。この一段の歩みを、信頼できない所（結合が 1 の程度）まで真っ直ぐ延ばし、しかも有効な作用の係数と Wilson の β を同じ軸に置くと、9×10^5 から $1/19$ までの倍化の回数は

$$k \;\approx\; \frac{9\times 10^{5}-1/19}{0.2575} \;\approx\; 3.5\times 10^{6}, \qquad 2^{k} \;\approx\; 10^{1.05\times 10^{6}} \tag{1}$$

です[初]（割り算と $k\log_{10}2$ の計算）。これは**桁の目安**です。一ループの式は結合が 1 の程度では使えず、二つの軸は別の作用の係数なので、(1) は定量の主張ではありません。言えるのは、弱い側の端と強い側の端の間が、段 0 の単位で天文学的な尺度の比を隔てている見込み、ということまでです[仮]。

芯の二分け。帯の芯を、次の二つの仕事に分けて見ます[仮]。

1. **紫外の延長**。公開された構成の制御を、いまの閾（少なくとも 9×10^{5}）から、結合が数の程度になる値 β_{*} まで、段ごとの誤差の和を有限に保ったまま延ばす仕事。公開された構成と同じ種類の仕事ですが、量は丸ごと残っています（(1) の桁）。
2. **強結合への最後の区間の言明**。β_{*} から強結合の窓までの、少ない段数の言明。結合が 1 の程度の所の、非摂動の言明です（26-06 の「有限の段数で帯を渡る系」とは別のものです）。

境 β_{*} をどこに置くかで、難しさの配分が変わります。閾をいまの値のまま止めると、二つ目の言明が扱う「物理の大きさが $1/\Lambda$ の程度の箱」は、段 0 の単位で (1) の桁の辺を持ち、小さい箱の言明ではなくなります。二つ目が小さい箱の言明になるのは、一つ目の仕事で閾を数の程度まで下げたときだけです[仮]。なお、周期の箱では、体積を止めれば段 0 の有効な密度が切断の列の全体で収束することが公開された構成に在ります（16-03 §02。極限の測度そのものは対象として定義されていない）。$1/\Lambda$ の大きさでの量の情報はありません。

この見方には、もう一つの読み方が付きます。物理の大きさを止めた線（箱の辺と相関長の比が一定）の上では、繰り込みの比較（26-06）の一段は「同じ物理の大きさの箱を、格子間隔を半分にして比べる」言明です。だから倍化の段の列は、赤外へ走る段であると同時に、紫外の一様性（連続極限の制御）の言明の列でもあります[仮]。§02 の結論は、この読み方と合っています。

02

損失のある鎖は、切断に一様な結論を出さない

繰り込みの比較（26-06）を、毎段 $K\ge 1$ 倍の損失を許す形で考えます。$\Delta F(N,M,\beta)$ を横 N・縦 M の板の渦の自由エネルギー（19-02）、$f(\beta)=\beta-c$（$c>0$）として

$$\Delta F(2N,2M,\beta) \;\le\; K\,\Delta F\big(N,M,f(\beta)\big) \qquad (N\ge N_{1},\; M\ge M_{0},\; \beta_{s}\le\beta\le\beta_{0}) \tag{2}$$

が、鎖が通る全ての β（強結合の窓の端 β_s から、始めの β_0 まで）で成り立つとします（仮定。示されていません）。ここで β_s は、前の因子が横の面積の、面積の指数の評価が使える窓（20-06 の有限の箱の窓、$\beta < 1.1 \times 10^{-3}$）の端です。§01 の $1/19$（無限体積の極限と質量ギャップの窓）とは別の窓です。

導出 初 。(2) を k_0 回つなぎます。k_0 は、β から始めて結合が強結合の窓の端 β_s に着くまでの段数で、$k_0 \approx (\beta - \beta_s)/c$ です。任意の $N' \geq N_1$・$M' \geq M_0$ で

$$\Delta F(2^{k_0} N',\, 2^{k_0} M',\, \beta) \;\leq\; K^{k_0}\, \Delta F(N', M', \beta_s).$$

窓の端での面積の指数の評価 $\Delta F(N', M', \beta_s) \leq C\, N'^2 e^{-\sigma_s M'^2}$（20-06 の型。前の因子は横の面積、$\sigma_s$ は窓の端での率）を入れ、$L := 2^{k_0} M'$、$\xi := 2^{k_0}$ と置くと

$$\Delta F(\xi N',\, L,\, \beta) \;\leq\; C\, N'^2\, K^{k_0}\, \exp\!\Big(-\sigma_s\, \frac{L^2}{\xi^2}\Big) \tag{3}$$

です。ここから三つのことが読めます。

- **率は一様**。面積あたりの率は σ_s/ξ^2 で、K に依りません。ξ を「β の格子と窓の端の格子の、尺度の比」（相関長の程度）と読めば、物理の単位での率は σ_s で、切断に依りません。
- **前の因子が育つ**。$K^{k_0} = \xi^{\log_2 K}$（等号）で、前の因子は相関長（格子の単位で見た切断）の冪で発散します。(3) の右辺が 1 より小さくなるのは $\sigma_s (L/\xi)^2 \gtrsim k_0 \ln K + \ln(C N'^2)$ からで、物理の単位の長さ L/ξ で $\sqrt{k_0 \ln K / \sigma_s}$ の程度、k_0 は β に比例するので $\sqrt{\beta}$（$= \sqrt{\ln \xi}$ の程度）に延びます。
- **一様に言うための条件**。前の因子が切断に依らないためには、段ごとの損失 K_i の積が有界、すなわち $\sum_i \ln K_i < \infty$（$K_i = 1 + \varepsilon_i$、$\sum_i \varepsilon_i < \infty$）が要ります。

読み。損失が段に一様な定数 $K > 1$ の鎖は、**各 β での閉じ込め**（固定した格子間隔での面積の指数）までは運べますが、**切断に一様な定数**は運べません 初 。一様に言うには損失の和が有限でなければならず、これは不等式の工夫ではなく、連続極限の制御の種類の仕事です（§01 の一つ目） 仮 。

加法で見ると、区別は主項に在る。弱結合の側では、渦の自由エネルギーは準古典に $\Delta F \approx \pi^2 \beta_{\text{eff}}(L)$（$\pi^2$ は連続の理論の区画の作用の下限。25-02）の型です。一ループで β_{eff} が倍化ごとに $s \ln 2$ 減るなら、倍化あたりの変化は

$$\Delta F(2L) - \Delta F(L) \;\approx\; -\pi^2 s \ln 2 \;=\; -\tfrac{11}{3} \ln 2 \;\approx\; -2.54 \tag{4}$$

です 初 （$\pi^2 \cdot 11/(3\pi^2) = 11/3$。一ループの水準）。U(1) の Coulomb の相では同じ型の量は走りません。だから「弱い側の差は $O(1/\beta)$ で小さい」は相対の言い方で、加法の物差しでは

区別は一段ごとに $O(1)$ です。本書の測定の記録（26-09 の表 8・10、種 1〜3 本）の引き算では、SU(2) の $4^4 \to 8^4$ は $\beta = 2.7, 2.9, 3.0$ で $1.61, 1.88, 1.80$ です 読 （各値に ± 0.3〜0.7 の散らばり）。記録の値は $\Delta F(L) - \Delta F(2L)$（減り方）で、(4) の大きさ 2.54 と比べると同じ桁です。

ただし (2) の K 倍の損失は $\Delta F \approx \pi^2 \beta$ に掛かるので、$(K-1)\pi^2\beta$ が (4) の 2.54 を一段で食います。近似の式の上で見ると、損失の無い加法の比べ $\Delta F(2L, \beta) \le \Delta F(L, \beta - c')$ は、小さい箱では格子の人工物のため偽になります：冷却で見た区画の最小作用 $S(L)$ は L とともに増え（2×2 で 7.84、4×4 で 9.80、連続の $\pi^2 \approx 9.87$ へ下から。25-02 表 1） 読 、$\Delta F(2L) - \Delta F(L) \approx \beta\,(S(2L) - S(L)) - 2.54$ の第一項が正なので、損失の無い形は箱の辺に $\sqrt{\beta}$ の程度の下限を付けた形でしか書けません 初 。記録の $2^4 \to 4^4$ の減り方が $\beta = 2.5, 2.75, 3.0$ で $1.83, 0.85, 0.55$ と 2.54 から離れていく向きは、この人工物の向きと合います 読 。

03

エネルギーの側の事実と、エントロピーの側の不足 — 変分の向き

1. 本書の SU(2) に固有の事実 仮 （本書の Lean の定理（A-04 表 4g と、21-05・21-07・20-06 の頁）を読んだ範囲。各定理の証明を U(1) へ移して確かめてはいません）。SU(2) の非可換性に依り、U(1) へそのまま移らないとはっきり読めるのは、次の四つです。

- 片方の向きだけの捩れの背景には、作用 0 の配位（捩れた真空）が在る Lean （`ThetaLimit.flat_exists_10`、21-07）。四元数の $\mathbf{i}$ と $\mathbf{j}$ が反可換だからです。可換な群では、一つの捩れを作用 0 では満たせません 初 （面の積を閉じた面の上で掛けると捩れの符号だけが残るため）。
- 捩れた真空を止めるゲージ変換は ± 1 だけ Lean （`TwistBlocks.stab_vacT`・`TwistBlocks.rigidT_all`、21-05 の寄り道）。
- 二つの向きの捩れを同時に入れた箱には作用 0 の配位が無く（`TwistFlat.no_flat_twist11`、21-07）、渦の最小作用は正 $S_N > 0$（`VortexPos.SN_pos`、21-05） Lean 。
- $N = 2, 3, 4$ で、太い渦は薄い渦より安い：$S_N < 2N^2$ Lean （計算機の証明書。`VortexCert.SN_two_lt` ほか、21-05）。

どれも**配位の作用についての事実（エネルギーの側の事実）**です。向きは両方在ります：一つ目と四つ目は「捩れは只で入る」「渦は安くできる」と言い、三つ目は「渦は只ではない」と言います。

2. 本書の渦の床が数えているもの。薄い渦の床・太い渦の床（21-02・21-03）は、渦の比 θ の上界、すなわち閉じ込めの向きの評価で、率は、薄い渦で $-\ln\tanh(N^2\beta)$、太い渦で $e^{-\beta(S_N+\varepsilon)}$ です Lean （太い渦の床は、十分大きい β と、β ごとに十分大きい M での言明で、閾は陽でない）。この率は、渦一本の作用（古典の値）と、渦が縦の面を貫く位置の数（M^2 の因子）から来る、と読めます 仮 。横の大きさ N を止めた上の値で、N に一様ではなく、β が大きい所での減り方も古典の作用の指数のままです。上界の証明書 $S_N < 2N^2$ は、この率を良くする向きに使われています（`TwistBlocks.thick_vortex_floor_two` ほか、21-05）。

3. 足りないもの 仮 。帯に要るのは、横の大きさを物理の長さを越えて広げても率が保たれることです（26-01・26-02）。物理の見立てでは、そこで効くのは、渦の揺らぎと配置の数（エントロピー）が尺度とともに走ることです（26-00 図 2 の余裕 $5/3 = 11/3 - 2$ の読み）。U(1) では、この走りがありません。渦の床も位置の数を数えていますが、それは横の大きさを止めた上の数えです。配位の作用についての事実をいくら積んでも、この走りは出ない見込みです。必要なのは、揺らぎと配置の数を、尺度に一様に、下から数える評価です。本書はこれを**エントロピーの側の不足**と呼びます。

4. 変分の向き 初 。電場の流束 $e \in \{0,1\}$ の分配関数 Y_0, Y_1 で書くと、捩れの無い・在る分配関数は $Z_{n_{34}=0} = Y_0 + Y_1$、$Z_{n_{34}=1} = Y_0 - Y_1$、渦の比は $\theta = Y_1/Y_0$ です（26-06 §02・26-04）。閉じ込めに要るのは θ の上界、すなわち流束の部門のエネルギーの**下界**です。試しの状態（変分）が与えるのはエネルギーの**上界**、すなわち Y_1 の下界と θ の下界で、閉じ込めに要る向きと逆です。磁気の側では、捩れた分配関数 $Z_{n_{34}=1}$ の下界（試しの配位の集団と Jensen の不等式）が θ の上界を与え、閉じ込めの向きになります。変分の型で閉じ込めの向きを書けるのは磁気の側だけです。ただし、帯の証明がこの型だけに限られる、とは言いません。

04

発想の一覧

各行に、理由と確かめた範囲を書きます。七つの試験の相手と、それぞれが落とす議論の型は 26-12 にまとめ、ここでは名前と結論だけを置きます。言葉を三つ先に置きます：**混合作用**は、Wilson の作用（基本表現の項）に随伴表現の項を足した SU(2) の作用、**一次の転移**は、面の平均などが結合について跳ぶ転移、**臨界の端点**は、一次の転移の線が終わる点です。**平坦な接続**（平らな配位。21-07 の言い方）は全ての面のホロノミーが単位元（捩れが在るときは捩れの符号）に一致する配位、**凍った相**は、有限群のゲージ理論で大きい β の側の、平坦な接続の近くに張り付いた相です。

表 1　生きている発想（どれも帯を越えていません。「生きている」は、壊す理由がまだ無いという意味です）

名前	中身	理由と確かめた範囲
七つの試験の相手	帯の議論を、U(1) の弱結合だけでなく七つの相手で試す	U(1) だけでは、落とせる議論の型が粗い。有限の非可換群・随伴 Higgs の極限・SU(2) 自身の混合作用が、別の型の議論を落とす。数え・一次の線の痕跡は 26-12 §05 読 、相手の性質のうち文献で確かめた所は 26-12 の出典の表 典
芯の二分け	紫外の延長（誤差の和を有限に保って閾を β_* まで）と、強結合への最後の区間の言明	§01・§02。前の因子の勘定 初 。境の置き方は 仮
物理の大きさの箱の混合の言明	箱の辺を物理の長さ C/Λ に取ると、枠（箱の境界のリンク）を替えたときの、内側のゲージ不変な観測量の法則の全変動が閾より小さい。β に一様に	群・中心・作用の類に依らずに書け、U(1) の Coulomb の相でも、混合作用の端点の型の点でも（端点でギャップが閉じるなら。SU(2) では本書は未確認）成り立たないはずの形 仮 。ただし質量ギャップ（強い形）の言い換えで、道ではない。強い側の入力の向き（有限の箱の混合 ⇒ 一様な指数の減衰）は既知の型の定理の組 仮 （ゲージ理論の形では書き下していない）
エネルギーの側とエントロピーの側を分けて見る	本書の SU(2) に固有の事実は配位の作用についての事実（エネルギーの側）で、向きは両方在る。帯に要るのは、揺らぎと配置の数を尺度に一様に下から数える評価（§03 の見立ての名で、エントロピーの側の不足）	§03。一覧を読んだ範囲 仮 、変分の向き 初
値の水準の三分類	対称な箱・捩れ一つの量が、弱結合で U(1) は β に比例、有限の非可換群の凍った相は定数、SU(2) は $\frac{3}{2}\ln\beta$ の型	有限群の数え 読 、1^4 の SU(2) の冪 初 読 （26-12 §05）。値の水準の区別で、帯は越えない
量化を明記する	繰り込みの比較で、縦横比を止めるか、横を止めて縦を延ばすかで、U(1) が落ちる場所が変わる	縦横比を止めた形は弱い側で U(1) でも一様な定数で立つ 初 読 、縦横比を延ばすと定数が育つ（26-12 §02）

表 2　壊れた発想（「この型の議論は、〇〇の理由で通らない」）

発想	通らない理由
捩れた分配関数と捩れない分配関数の比で、測度で決まる結合を置く	捩れの無い周期の箱には平坦な接続の連続族が在り、中心の近くでその寄与が対数で効くので、比の分母が汚れる（26-12 §05 の 1^4 の冪） 初 読 。二つの捩れた部門の比である本書の ΔF で足りる
開かつ閉の二分法で帯を渡る（「或る箱で渦の比が閾より小さければ以後は面積の指数で減る」と、減衰の在る β の集合の連結性）	「閉の側が空」を示すことに走りの全部（(1) の桁の段）が入り、開かつ閉にする形では「転移が無い」ことの言い換えに戻る 初 （論理）
損失 $K>1$ が段に一様な鎖で、切断に一様な結論を出す	前の因子が $\xi^{\log_2 K}$ で育つ（§02） 初 。各 β での閉じ込めまでなら害は無い

発想	通らない理由
「β の軸に転移が無い／段の写像に不動点が無い」を、有効な作用の類で使う	SU(2) の基本＋随伴の混合作用の類の中に、一次の転移の線と臨界の端点が在る（26-12 §02）[典] [読] 。線の両側が閉じ込めの相であることは、線が端点で終わり Wilson の軸の閉じ込めの相と滑らかにつながることからの推論 [仮] 。Wilson の軸に固有の事実で、公開された構成の段 0 の有効な作用の類へ延びない
「代数としての非可換」だけ、または「群が連続で非可換・中心の対称性・重みの正値性」だけを入力にする議論	前者は有限の非可換群で落ちる。後者は随伴 Higgs の族で落ちる：族の全ての J でこれらは同じで、$J=\infty$ は U(1) の Wilson の作用になり [初] 、その閉じ込めない相 [典] （Fröhlich–Spencer。主に Villain の近似で示し、全ての結果を Wilson の作用へ延ばせると本文で述べる。延長は別の論文の技法による）を持つ（26-12 §03）
一つの尺度での凸性（Bakry–Émery の型）を弱結合で使う	Haar の測度の曲率は $O(1)$、作用の Hessian は $O(\beta)$ なので、一つの尺度の入力は相対 $O(1/\beta)$ で弱結合では消える [初] （次数の勘定）。段ごとに積もる形は表 3
電場の側の変分（試しの状態）で閉じ込めの向きを出す	試しの状態が出すのは流束の部門のエネルギーの上界で、向きが逆（§03） [初]
トーラスの上の大域の対数 Sobolev 不等式を、どの群でも通るギャップの量とする	Z_2 の弱結合の相にギャップが在る、という文献の記述（本書は未確認）が正しければ、そこでホロノミーの部門の間の混合が遅く大域の形は成り立たない見込みなので、ギャップの量として通らないことになる [仮] 。境界条件つきの局所の混合（空間の混合）に直して表 1 に残した
押し出した測度の鏡映正値性と決まったブロック写像を、帯に生かせる非可換に固有の部品とする	押し出しの等式は、U(1) の Wilson の測度を同じ写像で押し出しても同じに成り立つ。器であって、群を区別する入力ではない [初]
板の張力の、尺度の対数についての凸性	捩れた板では、準古典の希薄な領域で $N^2\sigma_N$ の対数の傾きが $11/3$、大きい N で 2 と見込まれ、傾きは減る側 [仮] （26-00 図 2 の見立てに基づく）
連続の側の a 定理・跡の異常の和則で、赤外が自由な光子でないことを言う	a の値は紫外（三つのグルーオン）から赤外（光子一つ）へ減る向きと矛盾しないので、自由な光子を排除しない [仮]

表 3　判定できない発想

発想	いまの状態
捩れた部門での、項ごとの符号の不等式（面ごとの結合 β_p について $\partial\Delta F/\partial\beta_p \geq 0$）	SU(2) の 1^4 で 48 個とも正 [読] （26-12 §05）。有限群 Q_8 では似た単調性が破れる点が在る（21-01：三次元・背景なしの β についての単調性） [読] 。格子が一点なので「立つ」とは言えない
枠を替えたときの全変動についての、有限の箱の判定（ゲージ不変な観測量の上で）	本書の Lean の強結合の窓の証明は、ゲージを固定せずに全てのリンクの上で Dobrushin の条件を使っている（20-02・20-03 の証明の読み）。窓の外で、ゲージ不変な部分にだけ在る減衰を捉える判定は、本書に先例が無い。枠に触れない内側の領域ではこの区別が要らない見込みもある（§05 の 5、未検算）
物理の強結合（$\beta \lesssim 2.2$）と証明の窓（$1/19$）の差を、有限の箱の判定とループ方程式の証明書で埋める	ループ方程式と正値性から格子の面の平均に上下の評価を出す方法は在る（大きい N の極限で） [典] 。SU(2) の小さい箱で必要な規模は分からない

発想	いまの状態
熱浴の生成子を射影の和と見て、量子スピン系の「有限の鎖の隙間が閾を越えれば無限でも隙間」の判定を借りる	判定そのものは一次元の並進不変な系（と二次元の正方格子）で在る 典 。四次元のリンクの射影で閾の形が合うかは確かめていない
二項正二十面体群を、帯の有限版に使う	平坦な接続の数えは在る 読 。凍る β の値と、SU(2) の振る舞いを真似るかは文献の記述（本書は未確認）
段ごとに積もる曲率	階層の模型では一段の歩み $(1-b^{-2})/3$（$b=2$ で 0.25）が群の曲率の因子から出る 初 （下の注）。四次元の $11/3$ の大半は曲率から来ない見込みで、芯にはならない見込み 仮
張力からギャップへ、作用の類の中の柔らかい議論で	混合作用の一次の線の端点に近づくとスカラーの質量が格子の単位で下がる、という報告が SU(3) に在る 典 。SU(2) では本書は未確認で、端点の位置も文献で揺れている（小さい格子での見かけの端点と、大きい格子での見直し。26-12 §02）。格子間隔を止めた上の話で、連続の理論のギャップについては何も言わない
「率が一様に正」を、有効な作用の類で使う	一次の線をまたいでも張力は跳ぶだけで正のままでありうるので、混合作用の一次の線はこれを破らない。破るのは端点でギャップが閉じる場合で、SU(2) では本書は未確認
純ゲージ・局所の作用では 't Hooft ループは面積則を持てない（だから SU(2) ではギャップと閉じ込めが離れにくい）	推し量り 仮
繰り込まれた作用の軌道は、混合作用の端点から離れた所を通る	文献の記述（本書は未確認）
相対エントロピーが 0 へ向かう、配位に合わせた渦の挿入（エントロピーの側の下界）	形の案だけ。最初の関門は一ループの $11/3$ を再現すること 仮
跡の異常を欠損とする単調性公式	形の案だけ 仮

注（段ごとに積もる曲率の一段） 初 。SU(2) の面の重みを熱核 $K_t(\theta)$（θ は面のホロノミーの角）で近似すると、小さい t で $K_t(\theta) \propto \frac{\theta}{\sin\theta}\, e^{-\theta^2/(4t)}$ です。n 枚を束ねる（重みの n 乗）と $K_t^{\,n} \propto (\theta/\sin\theta)^{n-1} K_{t/n}$ で、$\ln(\theta/\sin\theta) \approx \theta^2/6$ を指数に入れると、Wilson の β（$1-\cos\theta \approx \theta^2/2$ から $\beta = 1/(2t)$）は $n\beta - (n-1)/3$ になります。四次元で $b=2$ の階層（$n = b^2 = 4$ 枚を束ね、面の中で b^2 枚を畳み込んで $t \to b^2 t$）では、一段で $\beta \mapsto \beta - (1-b^{-2})/3 = \beta - 0.25$ です。一ループの一段 $s\ln 2 \approx 0.2575$ との近さは偶然と読みます 仮 。

05

いちばん小さい次の一歩

問いの形で書きます。どれも答えは出ていません。

1. **篩の表を埋める**。26-12 表 2 の「—」の欄の各々について、その相手の模型で、言明は真か・偽か・定義されないか。芯の候補として残すのは、U(1) の弱結合で偽になり、かつ混合作用の端点の型の点で偽になる（端点でギャップが閉じるなら。SU(2) では本書は未確認）言明だけ、という基準で選び直せるか。
2. **紫外の延長の最小形**。背景の捩れ $n_{12} = 1$ の箱で、箱の辺と相関長の比を止めた $\Delta F(N, M, \beta)$ は、$\beta \to \infty$ で収束するか。最初の一歩は読むこと：公開された構成の、周期の箱での列の全体の収束の証明のうち、境界条件に依る所はどこか。
3. **符号の不等式の試験**。SU(2)・背景 $n_{12} = 1$・非負の面の結合で $\partial \Delta F / \partial \beta_p \geq 0$ か。1^4 の次は細長い箱（有限群の破れが横の長い幾何で出ているため）、そのあと二次元の閉じた式と 2^4。Q_8 で破れる最小の例を SU(2) へ持ち上げ、どこで破れが消えるかを見る。
4. **弱い側の加法の比べ**。$\beta \geq \beta_0$、$L \geq N_1(\beta)$（N_1 は $\sqrt{\beta}$ の程度）で $\Delta F(2L, \beta) \leq \Delta F(L, \beta - c')$（$0 < c' < 0.2575$）を、一ループの水準の命題として書けるか。倍化あたりの余裕は (4) の 2.54。
5. **強い側の有限の箱の判定の見本** 仮 （未検算）。二次元の SU(2) の箱で、枠を替えたときの、枠に触れない内側の領域の法則の全変動は、全ての β で、間に挟まる面の数 n について $C(\beta)\,(I_2(\beta)/I_1(\beta))^n$ 以下か（I_ν は変形 Bessel 関数）。また、内側のリンクの法則が内側の点のゲージ変換で不変なとき、その全変動は全てのリンクの上で測ってもゲージ不変な部分の上で測っても同じか。どちらも本書の検討の中で確かめられていない案で、確かめれば「一本のリンクの判定が失敗する β でも箱の判定は働く」いちばん小さい見本になる見込みです。
6. **一枚の面の物差し** 仮 （未検算）。一枚の面の基本表現の係数の比で乱れを測ると、SU(2) の $I_2(\beta)/I_1(\beta)$ が U(1) の転移点の $I_1(1.01)/I_0(1.01) \approx 0.450$ に並ぶのは $\beta \approx 2.105$ です（Bessel 関数の比の数値。本書の台本で計算し直した）。この物差しで二つの群を並べることに意味があるか、SU(2) の移り変わりの場所との近さが偶然でないかは、確かめていません。

06

要りそうな数学

どれも本書の推し量りです 仮 。名前は内容を表すように付けました。

- **捩れた箱の連続極限の制御**。測度で決まる量・捩れた（枠つきの）箱での、誤差の和が有限な尺度の比べ。公開された構成の型の延長で、§01 の一つ目の仕事の道具。
- **ゲージ不変な観測量の法則の結合**。リンクごとではなく、ゲージ不変な関数の条件つきの法則を結ぶ作り方と、その上の Dobrushin–Shlosman の型の有限の箱の判定。

- **エントロピーの側の下界の計算法**。相対エントロピーが 0 へ向かう、配位に合わせた挿入。最初の関門は一ループの $11/3$ の再現。§03 のエントロピーの側の不足を埋める道具。
- **捩れた部門での作用の順序**。面の結合について ΔF が増えることを言う、非可換の Ginibre の型の不等式か、その代わりになる作用の間の順序。
- **結合が 1 の程度の所の、展開に依らない道具**。有限の箱の判定と、計算の証明書の組。
- **跡の異常を欠損とする単調性公式**。四次元でちょうど自明になる古典の単調性の、量子の版。
- **中心の無い群のための渦の自由エネルギーの代役**。境界の場への応答など。G_2 では渦の道具が使えない（26-12 §02）。

07

この章が言っていないこと

- 帯を越える道を与えていません。どの発想も帯を越えていません。証明は在りません。
- (1) の倍化の回数と尺度の比は桁の目安で、定量の主張ではありません。閾は少なくとも 9×10^5 という下限から計算した値です。
- 「残る問いは格子間隔 1 の格子の理論の問いである」とは言いません（16-03 §05）。
- 混合作用の端点の話は格子間隔を止めた上の話で、連続の SU(2) の理論に質量ギャップが無い、という意味ではありません。
- 本書の SU(2) に固有の事実の数え上げ（§03）は、Lean の定理の一覧を読んだ範囲のもので、証明を U(1) へ移して確かめたものではありません。
- 「壊れた」は、その型の議論が通らないことで、目標そのものが偽だという意味ではありません。
- ここに書いた観察が新しいとは言いません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
Lean 強い側の端：強結合の窓での無限体積の極限・質量ギャップ・面積則（20-06）。SU(2) に固有の事実：片方の捩れの真空、その固定群 ± 1、二つの捩れの箱に作用 0 の配位が無いこと、$S_N > 0$、$S_N < 2N^2$（$N = 2, 3, 4$）（21-05・21-07）	窓の外。有効な作用の類での同じ言明。横の大きさに一様な率

言えている	言えていない
初 (1) の割り算（桁の目安として）。(3)：前の因子がちょうど $K^{k_0} = \xi^{\log_2 K}$ で、率 σ_s/ξ^2 は K に依らず、一様には $\sum \ln K_i < \infty$ が要ること。(4) の一ループの倍化あたり 2.54。変分の向き。階層の一段 0.25	(1) の定量の意味。(2) が成り立つこと。損失の和が有限な比べの存在
読 記録の減り方 $4^4 \to 8^4$：1.61・1.88・1.80。区画の最小作用 7.84・9.80。 典 表 2・表 3 の文献の行（26-12 の出典の表）	小さい格子の値から大きい格子の結論
仮 芯の二分け、エントロピーの側の不足、表 1〜3 の分け方、§05・§06	帯を越える道

出典と再現

もの	種別	出典・道具
強い側の端の定理、SU(2) に固有の事実（§03）	Lean	20-03・20-04・20-06・21-05・21-07 の宣言（`InfMain2.wilson_infvol_main2`・`AreaLaw.area_law_wilson`・`AreaLaw.area_law_infvol`・`ThetaLimit.flat_exists_10`・`TwistFlat.no_flat_twist11`・`TwistBlocks.stab_vacT`・`TwistBlocks.rigidT_all`・`VortexPos.SN_pos`・`VortexCert.SN_two_lt`・`TwistBlocks.thick_vortex_floor_two` ほか）。A-04 表 4g と 21-05・21-07・20-06 の頁で言明を確かめた
公開された構成の閾の下限	初	16-03 §01（閾に課される条件の一つから。浮動小数の計算）
(1) の割り算	初	本書の検討の台本（浮動小数。この章のために走らせ直した）
記録の ΔF の差、区画の最小作用	読	26-09 表 8・10、25-02 表 1
U(1) の Wilson の作用の閉じ込めない相	典	J. Fröhlich, T. Spencer, “Massless phases and symmetry restoration in abelian gauge theories and spin systems”, Commun. Math. Phys. 83 (1982) 411（前刷り IHES/P/81/40 の要旨と §1 で確かめた。主に Villain の近似で示し、全ての結果を Wilson の作用の模型へ延ばせると述べる。延長は別の論文の技法による）
ループ方程式と正値性による面の平均の評価	典	V. Kazakov, Z. Zheng, arXiv:2203.11360（大きい N の極限、$D = 2, 3, 4$。要旨で確かめた）
有限の鎖の隙間の閾	典	D. Gosset, E. Mozgunov, “Local gap threshold for frustration-free spin systems”, J. Math. Phys. 57 (2016) 091901, arXiv:1512.00088（要旨で確かめた。一次元と二次元の正方格子。先行の閾は Knabe による、と同所）
混合作用の一次の線と端点、端点の位置の見直し、端点に近づくスカラーの質量（SU(3)）	典	G. Bhanot, M. Creutz, Phys. Rev. D 24 (1981) 3212。R. V. Gavai, Nucl. Phys. B 474 (1996) 446。U. M. Heller, Phys. Lett. B 362 (1995) 123（くわしくは 26-12 の出典）

もの	種別	出典・道具
表 1〜3 の文献の記述のうち確かめていないもの（Z_2 の弱結合の相のギャップ、二項正二十面体群の凍る β、繰り込まれた軌道の位置、SU(2) の端点のスカラーの質量、Stroock–Zegarlinski の型の同値）	—	文献の記述（本書は未確認）。本文の主張の根拠にしていない

この章で使った語 — 移り変わりの帯・芯の二分け・紫外の延長・強結合への最後の区間の言明・損失のある鎖・前の因子・エネルギーの側の事実・エントロピーの側の不足・物理の大きさの箱の混合の言明・七つの試験の相手・値の水準の三分類・混合作用・一次の転移・臨界の端点・平坦な接続・凍った相・捩れた箱の連続極限の制御・ゲージ不変な観測量の法則の結合。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：17-01 物理はどう見ているか。帯の議論を試す相手の表は 26-12 に在ります（第 26 部を読んだあとに）。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 17 部 物理の側から 漸近自由・次元転移・閉じ込め

物理はどう見ているか — 短い距離の自由・一つの尺度・閉じ込めの管、そして「理論は在る」という前提

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 物理が純ヤン–ミルズ理論に描く絵を、漸近自由・次元転移・閉じ込めの三つの部品に分けて式と数値で見ます。格子のグルーボールの質量の比が「尺度は一つ」とどう結びつくかを読みます。絵のすべてが「理論は在る」という前提に立つこと、閉じ込めと質量ギャップが数学では別の主張であることを確かめます。

前提となる章 — 4-07 次元転移と Λ（とその前の 4-06）。あると読みやすい：3-02（ゲージ場）・5-01（格子と β）・4-11（隙間の定義）。Wilson ループと格子の言葉は、要る分をその場で定義します。第三巻の中では、第 16 部（現在地と残る問い）の次に読みます。

先に言うこと — 物理の水準の絵の章です。「閉じ込め」「尺度は一つ」「グルーボールの質量」は、四次元の連続理論の定理ではありません（札 物理 ）。この本は質量ギャップも連続極限の構成も自分では示していません。連続極限の構成は、2026-11-10 に公開されたもの（Wightman の公理を満たす理論。質量ギャップは示していない）を第二巻で読みます。格子の数値は一次資料の値で、比と換算だけをこの端末で計算し直しました。

この章の順序

1. 物理の問いと数学の問い — 在るかより、どうなっているか
2. 短い距離：結合は弱くなる — β 関数の負号
3. 尺度が一つ生まれる：次元転移 — 質量はすべて Λ の定数倍
4. 長い距離：Wilson ループと面積則 — 閉じ込めの定義と、その線形の場合
5. 電束の管と Lüscher 項 — 管の絵と、長い距離の補正
6. ギャップの物理の顔：グルーボール — 格子の比 $m/\sqrt{\sigma}$
7. 寄り道：MeV という単位はどこから来るか — 単位を借りる
8. 「理論は在る」という前提 — 数値のどの段で入るか

9. 閉じ込めとギャップは別の主張 — 片方だけの例と格子での含意
10. 物理の道具と、それぞれの岸 — 第 17 部の地図
11. 寄り道：隙間はなぜ最小値を持つか — 挟み撃ちの絵 — 大きい側は反遮蔽、小さい側は不確定性

01

物理の問いと数学の問い

懸賞問題は「理論が存在するか、スペクトルに隙間があるか」を問います（0-03）。物理の問いは「いちばん軽い粒子の質量はいくらか」「クォークの対を引き離すと力はどう変わるか」です。理論はもう在ると置いて、中身を問います。

Jaffe と Witten は、QCD（クォークを含むヤン–ミルズ理論）が量子論の水準で持たねばならない性質を三つ挙げています 既知 。(1) 質量ギャップ：'every excitation of the vacuum has energy at least Δ'。核力が強いのに短い距離にしか届かない理由です。(2) クォークの閉じ込め：物理的な粒子状態は SU(3) の変換で不変で、単独のクォークは見えません。(3) カイラル対称性の破れ。

純ヤン–ミルズにはクォークがないので (3) は出てきません。(1) が懸賞問題の本体で、(2) は問題文の §5 で「自然な拡張」に分けられています。物理の絵は (1)(2) を一枚で説明しようとし、三つの部品でできています。短い距離で結合が弱まること（§02）、尺度が一つ生まれること（§03）、長い距離で電束が管に閉じ込められること（§04・§05）です。

02

短い距離：結合は弱くなる

繰り込みでは、結合 g は見る尺度 μ（エネルギー。距離ならおよそ $1/\mu$）で値が変わります（4-04）。変わり方を決める β 関数は、純 SU(N) の一ループの計算で次の形です 既知 。

$$\beta(g) = \mu \frac{dg}{d\mu} = -b_0\, g^3 + O(g^5), \qquad b_0 = \frac{11N}{48\pi^2} \tag{1}$$

負号のために、μ を上げる（短い距離を見る）と g が小さくなります。これが**漸近自由**です（4-06）。PDG の総説は $\alpha = g^2/4\pi$ で $\mu^2 d\alpha/d\mu^2 = -b_0'\alpha^2 - \cdots$、$b_0' = 11N/(12\pi)$ と書き（同じもの 計算 ）、'The minus sign in Eq. (9.3) is the origin of "asymptotic freedom"' と述べます。最初の項だけなら $d(1/g^2)/d\ln\mu = 2b_0$ で一定なので、

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g^2(\mu_0)} + 2b_0 \ln \frac{\mu}{\mu_0} \tag{2}$$

です。SU(3) で $g^2(\mu_0) = 1$ なら、$\mu = 10\mu_0$ で $g^2 = 0.757$、$10^6\mu_0$ でも 0.342 です 計算 。弱まり方は対数的です。問題文の言い方では 'at short distances the field displays quantum behavior very similar to its classical behavior'。ただし (1) は摂動論の計算です。連続理論が短い距離で本当にこう振る舞うことは、問題文が解に要求する性質の一つです。

03

尺度が一つ生まれる：次元転移

(2) を μ を下げる向きに読むと、$1/g^2$ はある尺度 Λ で 0 になります。

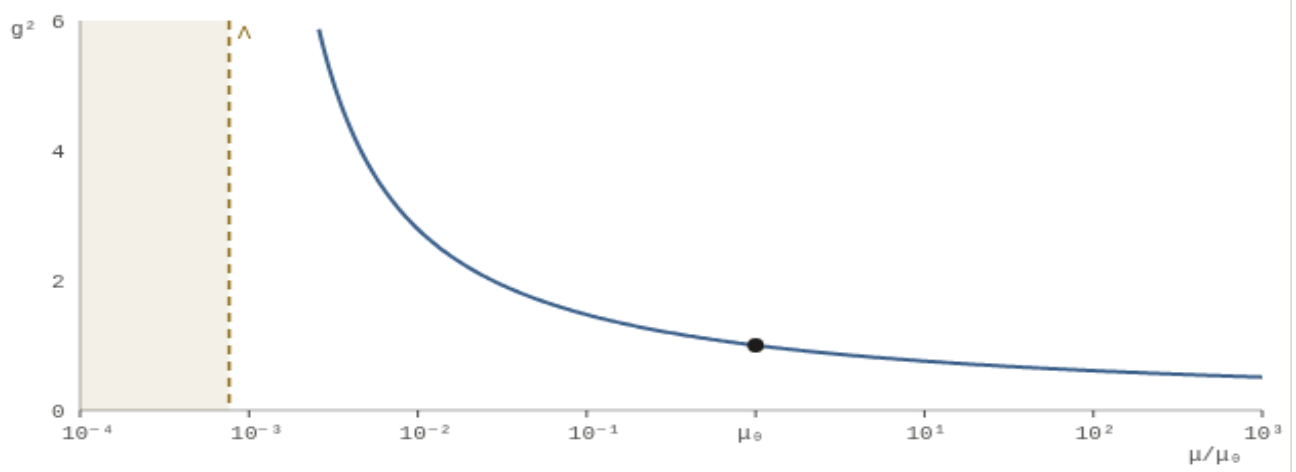
$$\Lambda = \mu \, \exp\!\Big(-\frac{1}{2b_0\, g^2(\mu)} \Big) \tag{3}$$

(2) を代入すると $\ln(\mu/\mu_0)$ が打ち消し合い、Λ は μ に依りません（流れに沿った三点で、倍精度の丸めまで一致 計算 ）。古典の四次元ヤン–ミルズには質量の次元をもつ定数がありません（g は無次元、1-12）。それでも量子論では尺度 Λ が現れます。**次元転移**です（4-07）。PDG は Λ を 'a constant of integration, which corresponds to the scale where the perturbatively-defined coupling would diverge' と説明します。$\mu = \Lambda$ で壊れるのは一ループの式で、理論ではありません。物理はここから、次元をもつ量はすべて Λ の定数倍だと結論します 物理 。

$$m_{0^{++}} = c_1 \Lambda, \qquad \sqrt{\sigma} = c_2 \Lambda, \qquad \Delta = c_3 \Lambda \tag{4}$$

$m_{0^{++}}$ は最も軽いグルーボールの質量（§06）、σ は弦張力（§04）、c_i は N で決まる純数です。この「尺度は一つ」は、物理では次元解析として当然に見え、数学では証明されていません（本書の検討の記録の「拡散型緩和時間の仮定」。17-12・23-01）。また $\exp(-1/(2b_0 g^2))$ は $g = 0$ でテイラー係数がすべて 0 です。(4) を認めれば、Δ も摂動級数のどの次数にも現れません。問題文の 'the mass gap is not classically visible' と同じ向きの事情です（4-12）。

図1　つまみで基準の尺度 μ_0 での結合 $g^2(\mu_0)$ と N を変えると、走る結合 $g^2(\mu)$（実線）と、それが発散する尺度 Λ（破線）が動く。SU(3) で $g^2(\mu_0)$ を 0.5 から 1 に変えると、Λ/μ_0 は約 1300 倍（三桁）動く



SU(3)　g²(μ₀) = 1.00　→　Λ/μ₀ = 7.63×10⁻⁴　／　g² を 1% 増やすと Λ は 1.074 倍

表1　一ループの Λ/μ_0 と、g^2 を 1% 増やしたときの Λ の倍率

群	g²(μ₀)	Λ/μ₀	倍率
SU(2)	0.5	4.45×10⁻¹⁰	1.238
SU(2)	1.5	7.63×10⁻⁴	1.074
SU(3)	1.0	7.63×10⁻⁴	1.074
SU(3)	3.0	9.14×10⁻²	1.024

計算　この図の数値はこの端末で計算した。曲線はその場で式 (2)(3) から描き、表1 は同じ式を Python 3 で評価した（SU(3) の $g^2 = 0.5$ では $\Lambda/\mu_0 = 5.83 \times 10^{-7}$）。

結合が小さいほど Λ は指数的に小さく、変化に敏感です。SU(2) の $g^2 = 1.5$ と SU(3) の $g^2 = 1.0$ が同じ値なのは、一ループでは Ng^2（'t Hooft 結合、17-04）だけが効くからです。Λ の数値は g の定義の仕方で決まった倍率だけ変わりますが、(4) の形は保たれます。

04

長い距離：Wilson ループと面積則

クォークのない理論で力を測るには、動かない色の電荷の対を外から置きます（色の電荷はゲージ場の源になる荷です。3-02）。ユークリッド時空（4-02・符号が一つ違う）に幅 R・長さ T の長方形をとり、ゲージ場に沿って一周平行移動した行列（ホロノミー、1-07）のトレースを **Wilson ループ** $W_{R,T}$ と呼びます。長方形は「対を作り、時間 T 置いて消す」過程で、期待値はおよそ $e^{-V(R)T}$ で減るので、ポテンシャルを次で定めます（Wilson 1974。書き方は Chatterjee 2018 §4）既知 。

$$V(R) = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log \langle W_{R,T} \rangle \tag{5}$$

$R \to \infty$ で $V(R) \to \infty$ なら、対は決まった距離より先に離れられません。これが**閉じ込め**です（Chatterjee 2018 §4 の定義）。とくに $\langle W_{R,T} \rangle$ が面積 RT について $e^{-\sigma RT}$ で減る（**面積**

則）なら、$V(R) \approx \sigma R$ と線形に増えます。この線形の場合の係数 σ が**弦張力**です。四次元の非可換ヤン–ミルズで線形に増えることは 'it is believed that V(R) grows like a multiple of R' の水準です（同 §4）物理。

時空を点の網に置き換えた格子（5-01）では、結合の強さを**格子の逆結合** β で表します（標準的な Wilson 作用では $\beta = 2N/g^2$。大きい β が弱結合。§02 の β 関数とは別物）。β が小さい側（強結合）では面積則が証明されていますが、`U(1)` を含む全群で成り立つので、非可換の閉じ込めの証拠になりません。四次元の非可換群の弱結合側は 'remains elusive' です（Chatterjee 2018。5-02・5-06）既知。

05

電束の管と Lüscher 項

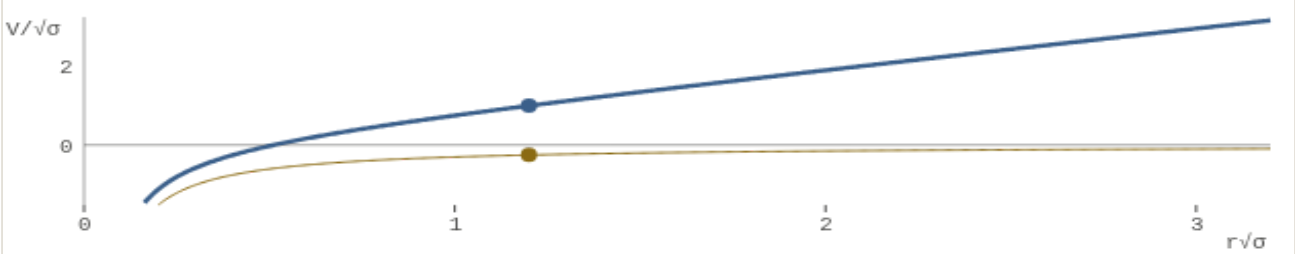
物理の絵は**電束の管**です。電磁気の力線は広がり、離してもエネルギーは一定値に近づきます（$V \sim -c/R$）。閉じ込めでは力線が太さの決まった管に絞られ、エネルギーは長さに比例します。比喩で言えば、伸ばしても張力が変わらないひもです。正確には、管は理論から導かれた事実ではなく格子の数値と合う絵で、管の揺らぎの有効理論（17-03）は管の存在を出発点に置き、長い距離の補正を次のように与えます物理。

$$V(r) = \sigma r + c_0 - \frac{\pi}{12\, r} + \cdots \tag{6}$$

$-\pi/(12r)$ は Lüscher 項で、係数は理論の詳細に依らないとされます（d 次元で $-\pi(d-2)/24$）。c_0 は普遍でない定数です。格子の長さの基準 r_0（$F = dV/dr$ について $r_0^2 F(r_0) = 1.65$、Sommer 1994）に (6) を入れると $r_0\sqrt{\sigma} = \sqrt{1.65 - \pi/12} = 1.178$ で、格子の連続値 $1.160(6)$（Athenodorou–Teper 2020）との差は 1.6% です計算。r_0 は管がまだ短い距離なので、これは式 (6) をその距離まで延ばした目安です。大筋は合いますが、差は格子の誤差の約 3 倍あり、細部までは合いません。

図2　つまみで電荷の距離 r を変えると、上の力線と下のエネルギー V(r) の点が動く。ボタンで「電磁気（広がる）」と「閉じ込め（管）」を切り替える





r√σ = 1.20（約 0.49 fm） 閉じ込め：V/√σ = 0.98　電磁気の見本：−0.25

r√σ	r（fm）	閉じ込め V/√σ	電磁気の見本 V/√σ
0.3	0.12	−0.57	−1.00
0.51	0.21	0.00	−0.59
3.0	1.22	2.91	−0.10

計算 この図の数値はこの端末で計算した。閉じ込めは (6) の $\sigma r - \pi/(12r)$（c_0 を除く）、電磁気は見本 $-0.3/r$、fm は $\sqrt{\sigma} = 485$ MeV（§07）で換算。0.51 は二つの項が釣り合う $\sqrt{\pi/12}$。

クォークを含む QCD では、長い管が切れる兆候が格子で報告されています（SESAM 2005）物理。純ヤン–ミルズには、途中で対を作って管を切るクォークがありません。

06

ギャップの物理の顔：グルーボール

純ヤン–ミルズの粒子は、グルーオンだけでできた色のない束縛状態**グルーボール**と考えられます。状態は J^{PC}（スピン・パリティ・荷電共役）で分類します。0^{++} はスピン 0 で、空間反転（パリティ）でも、粒子と反粒子の入れ替え（荷電共役）でも符号を変えない状態です。最も軽い 0^{++} の質量を、物理ではしばしば「質量ギャップ」と呼びます物理。Chatterjee 2018 は相関長（2-08）を 'the reciprocal of the mass of the lightest glueball' と説明し、存在は 'has not yet been experimentally verified' と書きます。

問題文の隙間はハミルトニアンのスペクトルの隙間として定義され（その上限を問題文は 'the mass' と呼びます）、粒子の存在を前提にしていません。最低の励起が孤立した一粒子状態であれば、隙間は最も軽いグルーボールの質量に一致します（4-11）。孤立した一粒子状態が在ることの証明は、問題文では「自然な拡張」の側に数えられています。

格子の計算は、時空を格子間隔 a（格子点の間の距離）の網で置き換えて行い、次元のない比 $m/\sqrt{\sigma}$ を出します。

表2　グルーボールの質量（連続極限）と、この端末で計算した比

J^{PC}	SU(2) m/√σ	SU(3) m/√σ	SU(∞) m/√σ	$m/m_{0^{++}}$：SU(2)・SU(3)・SU(∞)
0^{++}	3.781(23)	3.405(21)	3.072(14)	1・1・1

J^{PC}	SU(2) m/√σ	SU(3) m/√σ	SU(∞) m/√σ	$m/m_{0^{++}}$：SU(2)・SU(3)・SU(∞)
2^{++}	5.349(20)	4.894(22)	4.582(14)	1.415(10)・1.437(11)・1.492(8)
0^{-+}	6.017(61)	5.276(45)	4.711(25)	1.591(19)・1.549(16)・1.534(11)
0^{++*}	6.126(38)	5.855(41)	–	1.620(14)・1.720(16)・–

計算 比の誤差は独立とみなした素朴な伝播で、相関を無視した目安。SU(∞) は 1/N² で外挿した値。格子では回転の対称性が立方体の回転に減り、スピン 2 は二組（E・T_2）に分かれて測られる。SU(∞) の 2^{++} は E の値（T_2 では 4.578(11)。5-08）。0^{++*} は励起状態。

どの N でも 0^{++} が最も軽く、比は N でゆっくりしか変わりません（17-04）。一方、SU(3) の $m_{0^{++}}/\sqrt{\sigma}$ は 3.347(68)（Meyer 2005）、3.405(21)（Athenodorou–Teper 2020）、3.607(87)（Lucini–Teper 2001）と、表示の誤差より広く散っています。σ は閉じた管の質量から揺らぎの補正を引いて求めます。Lucini–Teper の式 (4) は $am_l = a^2\sigma L - \pi/(3L)$ で、m_l は周期的な箱を一周して閉じた電束の管の質量、L は箱の一辺を格子の点の数で数えたものです。著者は 'in using eqn(4) we are assuming that we have linear confinement' と断っています。連続極限は $m(a)/\sqrt{\sigma(a)} = m(0)/\sqrt{\sigma(0)} + c\,a^2\sigma$ を仮定した外挿です（5-08）。

07

寄り道：MeV という単位はどこから来るか

飛ばしてよい節です。

「最も軽いグルーボールは約 1.7 GeV」と言うとき、MeV はどこから来るのでしょう。純ヤン–ミルズには尺度が Λ 一つしかなく、単位は外から借ります。Athenodorou–Teper 2020 は、純ヤン–ミルズの $r_0\sqrt{\sigma} = 1.160(6)$ と、クォークを含む格子 QCD の $r_0 = 0.472(5)$ fm から $\sqrt{\sigma} = 485(6)$ MeV とし、0^{++} を 1653(26) MeV とします。この端末の再計算では $\sqrt{\sigma} = 484.96 \pm 5.7$ MeV、$0^{++} = 3.405 \times 485 = 1651 \pm 22$ MeV です 計算 。論文の表 18 の誤差は統計のみと断ってあり、こちらの ±22 は $\sqrt{\sigma}$ の誤差を含めた目安で、意味が違います。著者たちは 'Strictly speaking this is of course not possible: the pure gauge theory and QCD ... are two different theories' と添えています。純ヤン–ミルズの中で意味をもつのは 3.405 という比のほうです。

08

「理論は在る」という前提

ここまでの部品と数値は、四次元の純ヤン–ミルズ理論が確かに一つ存在する、という前提に立っています。格子の計算で前提が入る段を並べます。

段	していること	前提
有限の格子	有限次元の積分をモンテカルロ法で評価（5-07）	ない（定義の確かな確率測度）
σ の取り出し	管の揺らぎの補正を差し引く	線形の閉じ込めと揺らぎの普遍性
無限体積	一辺が $3/\sqrt{\sigma}$ 以上の箱だけを使う（Lucini–Teper）	そこから先で値が変わらないこと
連続極限	$c a^2 \sigma$ の形で $a \to 0$ に外挿	極限が在って一意で、近づき方がこの形

物理にとってこの前提は自然で、問題文も実験と計算機が 'have given strong encouragement' と書きます。しかし同じ段落は 'there does not exist a convincing, whether or not mathematically complete, theoretical computation demonstrating any of the three properties in QCD' と続け、数学の側は 'nor even a precise definition' の段階です 既知 。

比喩で言えば、物理は在ると確信している土地の詳しい地図を描き、数学はその土地が在ることを示すよう求められています。正確には、任意のコンパクト単純群について、非自明な量子ヤン–ミルズ理論を $\mathbb{R}^4$ 上に作り（公理は Wightman あるいは Osterwalder–Schrader と少なくとも同じ強さのもの。4-09・4-10）、$\Delta > 0$ を示すことです。よく取られる道は、ユークリッドの確率測度を正則化つきで作って極限をとる道です。部分列が収束するだけの弱い存在は、極限の性質を別に示さない限り認めない、と問題文の脚注にあります。物理の数値は、どれほど精密でも「存在を仮定したうえでの予言」です（5-09・7-10）。

2026-11-10 に公開された構成は、Wilson の格子ゲージ理論の極限として Wightman の公理を満たす理論が作れることを、Lean で証明されている、と委員会が評価しました（第二巻、6-01）。ただし無限体積の極限は部分列で、その一意性と質量ギャップは示されていません（6-04）。上の表の「連続極限」の行の前提（極限が在って一意）は、今も全部は満たされていません。

09

閉じ込めとギャップは別の主張

物理の絵では σ と m は同じ Λ の二つの顔で（式 (4)）、閉じ込めとギャップは一緒に語られます。数学では別々の主張です。

片方だけが成り立つ例があります。有限群の格子ゲージ理論では弱結合で相関の指数減衰が証明され、閉じ込めないことは 'believed' の水準です（5-10）。三次元の compact `U(1)` ではすべての結合で面積則が証明され、連続極限は自由なスカラー場になります（Göpfert–Mack 1982 の要旨）。逆向きには、格子の上の任意の境界条件での指数減衰から、群の中心に非自明に作用する表現の Wilson ループに面積則が出ます（Chatterjee 2021）既知 。表と正確な言明は 17-02 §02（この本の正本）にあります。

この逆向きの含意は「ギャップ ⇒ 閉じ込め」に近い形ですが、仮定は格子の上の強い形の減衰です。問題文の意味のギャップ（連続・無限体積の $\Delta > 0$）から閉じ込めを導く定理はありません。物理が主に見る変数（管と σ）と問題文の標的（Δ）は少しずれています。

10

物理の道具と、それぞれの岸

物理の道具には、それぞれ計算が制御できる「岸」があります。正確には、岸とはある極限（$g \to 0$、格子の $\beta \to 0$、$N \to \infty$ など）の近くで、計算の誤差が制御できる領域のことです。第 17 部の残りの章は表の行を掘ります。

道具	計算が効く岸	水準	章
摂動論	$g \to 0$。ギャップは映らない（(4) を認めれば）	既知	4-03〜4-07
強結合展開	格子の逆結合 β が小さい（強結合）。U(1) を含む全群で面積則	既知	5-02
格子の数値	有限の a・箱と、その外挿	物理	5-08
閉じ込めの機構・弦	ゲージを固定した変数／長い管（閉じ込めを仮定）	物理	17-02・17-03
大 N・ホログラフィー	$N \to \infty$（ホログラフィーは $g^2N \to \infty$ も）	物理	17-04・17-08〜17-10
超対称	物質場を伴う超対称な理論	物理	17-11

問題文の理論——任意のコンパクト単純群・有限の N・物質なし・連続の $\mathbb{R}^4$——は、どの岸にもありません。物理の絵は、岸と岸のあいだを「一つの理論がつないでいる」という前提（§08）で埋めています。その前提が数学から離れる場所は 17-13・16-05 にまとめます。

11

寄り道：隙間はなぜ最小値を持つか — 挟み撃ちの絵

飛ばしてよい節です。この章の三つの部品（§02 漸近自由・§03 次元転移・§04 閉じ込め）を、「なぜいちばん軽い励起がゼロでない重さを持つのか」という一つの問いに向けて組み直します。物理 絵であって証明ではありません。どの段も四次元の連続の理論では定理になっていません（27-02）。

一文で。場が自分の電荷で自分を縛るせいで、長い波になれず、短い塊にしかなれない。最小値は、励起の大きさが両側から挟まれる場所に出ます。

大きい側が塞がる。質量ゼロの自由場（光）に隙間が無いのは、波長をいくら長くしても波が作れ、そのエネルギー $E = |p|$ がゼロへ向かうからです。長い波には、場が長い距離にわたって向きを揃えてい

ることが要ります。ヤン–ミルズでは媒介する場そのものが色電荷を持つので、真空の揺らぎは場を遮蔽せず反遮蔽し、距離が伸びるほど結合が強くなります（§02、4-06）。結合が一の程度になる距離 $1/\Lambda$ を超えると、場は向きを保てず、ばらばらになります。だから波長が $1/\Lambda$ より長い波は状態として残れません。色の電束は広がれず、閉じた管に束ねられます（§05）。

小さい側も塞がる。$1/\Lambda$ より小さい領域では結合は弱く、場はほとんど自由ですが、大きさ R に局在した励起は不確定性関係で $\hbar c/R$ 程度より下のエネルギーを持てません（2-05、16-08 §09）。$R < 1/\Lambda$ なら $E > \Lambda$ です。

挟み撃ち。大きくなれない理由は反遮蔽、小さくなれない理由は不確定性で、いちばん軽い励起は大きさ $1/\Lambda$ 程度の閉じた電束の輪になります。その重さが Λ の程度で、これが隙間です（§06 のグルーボール）。起源を一語で言えば自己相互作用、最小値の理由を一語で言えば挟み撃ちです。

U(1) との違い。光子は電荷を持たないので真空は遮蔽しかせず、長い距離で結合は弱いままです。電束は広がり、長い波が許され、隙間はゼロです（5-06）。非可換性が効く場所は「場が自分に効くか」の一点で、一ループの $11/3 = -1/3 + 4$ がその顔です（26-03）。

格子の強結合の言葉で。Hamiltonian 格子（Kogut–Susskind）では、ハミルトニアンは電場の項 $\frac{g^2}{2}\sum E^2$ と磁場の項 $\frac{1}{g^2}\sum(1 - \operatorname{tr} U_{\square})$ の和で、結合が強いと電場の項が勝ちます。電束は一本のリンクに乗り、リンク一本ごとに g^2 の程度の費用がかかります。ゲージ不変な最小の励起は一枚の面を回る電束の輪で、その費用は有限の正の数です。これが強結合の隙間で、格子間隔を固定した強結合では定理です（5-02、5-04）。漸近自由が言うのは「距離 $1/\Lambda$ では有効結合が強い」ことなので、この絵がそのまま長い距離の絵になります。残る問いは、格子間隔をゼロにしてもこの絵が崩れないことで、それが台帳の紫外の制御の行（存在としては公開された構成が示し、本書の道の形は開いている）と、繰り込みの比較の行です（27-02、A-08）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 一ループの b_0、解 (2)、その中で Λ が μ に依らないこと（摂動論の計算として）。問題文の隙間の定義と、孤立した一粒子状態があれば隙間がその質量に一致すること。物理 尺度は一つ、面積則と管、Lüscher 項、表2 の値。	どれも四次元の連続理論の定理ではない（2026-11-10 に公開された構成は理論の存在を与えるが、閉じ込めと質量ギャップは示していない。6-04）。表2 は極限の存在を前提にした外挿で、σ は管の補正を通っている。
既知 強結合の面積則（全群）、有限群の弱結合での相関の減衰、中心対称性と閉じ込めの格子での含意、三次元 U(1) の全結合での面積則。	四次元の非可換群の弱結合側の面積則。問題文の意味のギャップから閉じ込めを導くこと。有限群が閉じ込めないこと（Chatterjee 2021 が 'believed' と書く水準）。
計算 表1・表2 の比、図1・2、$r_0\sqrt{\sigma}$ の見積もり 1.178、MeV の再計算。	一次資料の値の比・換算と一ループの式の評価で、測定ではない。比の誤差は相関を無視した目安。1.178 は長い距離の式を短い距離へ延ばした目安。

言えている	言えていない
物理 §11 の挟み撃ちの絵（大きい側は反遮蔽、小さい側は不確定性、最小は $1/\Lambda$ の輪）。強結合の格子では一枚の面の輪の費用が正であること。	絵のどの段も四次元の連続では定理でない。反遮蔽が長い波を消すこと、輪が最小の励起であること、格子間隔をゼロにしても絵が保たれること。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
三つの性質、短距離の要求、隙間の定義と 'the mass'、問題の要求（群・非自明・$\mathbb{R}^4$・公理）、拡張問題の区分、本文の引用、弱い存在を除く脚注	既知	A. Jaffe, E. Witten, "Quantum Yang–Mills Theory"（Clay Mathematics Institute の問題文）§1・§2・§4・§5・§6.6・脚注 2。本文を確認。
α の走り方、b_0'、負号、Λ の説明	既知	J. Huston, K. Rabbertz, G. Zanderighi, "Quantum Chromodynamics", Particle Data Group, Phys. Rev. D 110 (2024) 030001, §9.1.1。本文を確認。
漸近自由の原論文	既知	D. J. Gross, F. Wilczek, PRL 30 (1973) 1343。H. D. Politzer, PRL 30 (1973) 1346。書誌のみ（問題文の文献表）。
式 (5)、閉じ込めの定義、面積則・強結合・相関長・グルーボールについての記述と引用	既知	S. Chatterjee, "Yang–Mills for probabilists", arXiv:1803.01950 §4・§5。本文を確認。K. G. Wilson, PRD 10 (1974) 2445 は書誌のみ。Osterwalder–Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440 と Göpfert–Mack, CMP 82 (1982) 545 は要旨（INSPIRE。前者は強結合の無限体積の極限と Wilson の閉じ込めの評価、後者は Villain 作用と連続極限の記述。本文は未読。Göpfert–Mack の年は Crossref の発行年で、INSPIRE は 1981）。
中心と中心対称性の定義、中心対称性と閉じ込め、有限群の 'believed'	既知	S. Chatterjee, CMP (2021), arXiv:2006.16229。定義 2.1・定理 2.2・2.4 と 'believed' の引用は本文で確認。
有限群の弱結合での相関の減衰（四次元）	既知	A. Adhikari, S. Cao, arXiv:2202.10375, Ann. Probab. 53 (2025) 140–174（書誌は検索による）。要旨と本文の冒頭（四次元に限ること）を確認。
表2、$r_0\sqrt{\sigma}$、r_0、485(6) MeV、1653(26) MeV と誤差の断り、換算の断り	物理	A. Athenodorou, M. Teper, JHEP 11 (2020) 172, arXiv:2007.06422／JHEP 12 (2021) 082, arXiv:2106.00364。数値と引用は本文（表 17・18・23・31・34、式 (8)(9)）で確認。
3.607(87)、σ の取り出し（式 (4)）と外挿の形、Wilson ループの係数 π/12	物理	B. Lucini, M. Teper, JHEP 0106 (2001) 050, hep-lat/0103027 表 5・§4。本文を確認。
Lüscher 項、r_0 の定義、3.347(68)	物理	M. Lüscher, NPB 180 (1981) 317、R. Sommer, NPB 411 (1994) 839、H. B. Meyer, hep-lat/0508002 は書誌のみ（Meyer の値は Gürsoy–Kiritsis–Nitti, arXiv:0707.1349 の表を経由）。
QCD での管の切断の兆候	物理	G. S. Bali ほか（SESAM）, PRD 71 (2005) 114513, hep-lat/0505012。要旨を確認。

もの	種別	出典・道具
表1・図1、表2 の比、$r_0\sqrt{\sigma}$ の見積もり、図2 の表、MeV の再計算	計算	この端末の Python 3（標準ライブラリ・倍精度）。誤差は独立とみなした伝播。$\hbar c = 197.3269804$ MeV·fm。
§11 の絵（挟み撃ち）	物理	この本の書き手の一人（栞）が 2026-10-29 の問答で言葉にしたもの。部品の一次資料は Gross–Wilczek・Politzer（1973、上の行）、J. Kogut, L. Susskind, PRD 11 (1975) 395（Hamiltonian 格子と強結合の電束。書誌のみ）、K. G. Wilson, PRD 10 (1974) 2445。

次に読む章：17-02 閉じ込めの機構 ― §05 の管がなぜできるのかについての物理の説明（双対超伝導・単極子・中心渦・Gribov–Zwanziger）へ。

閉じ込めの機構 — 四つの絵を、何を主役に選び、どこで数学から切れるかで読む

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 閉じ込めの四つの絵（双対超伝導・アーベル射影・中心渦・Gribov–Zwanziger）の主役と支え、数学の言明として切れる場所。閉じ込めとギャップが別の文であること。

前提となる章 — 17-01。ほかに 5-02（Wilson ループ）、4-08（Gribov のコピー）、1-04（群の中心）。

先に言うこと — 四つの絵はどれも物理の描像で、四次元の非可換理論で閉じ込めを導いた定理はありません。この章は閉じ込めもギャップも示しません。図 2 の模型は玩具です。

この章の順序

1. 何を説明したいのか — 面積則
2. 閉じ込めとギャップは別の文 — 面積則と指数減衰、条件つきの含意
3. 双対超伝導 — 磁束の管を裏返す（図 1）
4. アーベル射影と単極子 — 対角化の特異点／寄り道：Elitzur の定理
5. 中心渦 — 中心元を掛ける膜
6. 渦の気体の模型 — 面積則と周長則（図 2）
7. Gribov の領域と地平 — ゲージを固定した側から
8. 伝播関数と正値性 — 粒子なら負にならない相関（図 3）
9. 四つの絵を並べる — 主役・支え・欠けているもの

01

何を説明したいのか

「閉じ込め」は、クォークを単独で取り出せないという観測から来た言葉です。純ヤン–ミルズ理論にはクォークが無いので、無限に重い試験電荷を二つ置き、引き離すエネルギーを問います（17-01）。格子では、閉じた道 C に沿ってリンク変数を掛けた行列の跡の期待値が Wilson ループで（5-01）、$R \times T$ の長方形では $W \approx e^{-V(R)T}$、$V(R)$ が電荷対のエネルギーです。

$$W(C) = \left\langle \frac{1}{N} \operatorname{tr} \prod_{\ell \in C} U_\ell \right\rangle, \qquad V(R) = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln W(R,T) \tag{1}$$

大きいループの減り方は二通りです。

$$W(R,T) \approx e^{-\sigma R T} \ \text{(面積則)}, \qquad W(R,T) \approx e^{-c\,(2R+2T)} \ \text{(周長則)} \tag{2}$$

面積則なら $V(R) \approx \sigma R$ で、エネルギーが距離に比例して増えます。σ が**弦張力**です。周長則なら V は有界です。例：$\sigma = c = 0.05$、$R = T = 10$ で $-\ln W$ は 5 と 2、辺を 20 にすると 20 と 4 です。見分けには Creutz 比を使い、純粋な面積則で σ、周長則で 0 になります既知 。

$$\chi(R) = -\ln \frac{W(R,R)\,W(R-1,R-1)}{W(R,R-1)\,W(R-1,R)} \tag{3}$$

「機構」を問うとは、面積則を**真空の中の何が**生むかを問うことです。小さい β（格子の逆結合。$SU(N)$ では $\beta = 2N/g^2$、小さいほど強結合）の面積則は定理ですが（5-02）、`U(1)` を含む全ての群で成り立つので非可換の説明になりません既知 。問いは連続極限へ向かう大きい β の側に残ります。

02

閉じ込めとギャップは別の文

質量ギャップは相関の指数的な減衰（4-11）、閉じ込めは面積則で、論理としては別の主張です。Clay の問題文が要求するのは $\Delta > 0$ で、閉じ込めは「自然な拡張」に分けられています既知 。

表 1　閉じ込め（面積則）とギャップ（指数減衰）の有無と水準

模型	面積則	指数減衰	水準
任意の群・小さい β	あり	あり	定理（5-02）
4 次元 `U(1)`・大きい β	なし	なし（光子）	定理（5-06）

模型	面積則	指数減衰	水準
有限群・大きい β	ないと信じられている	あり（弱い意味）	減衰は定理（5-10）
3 次元コンパクト `U(1)`	あり	物理では光子が質量を得る	面積則は定理（§03）
4 次元 `SU(N)`・連続極限	期待	期待	未証明

格子には一方向の含意があります。Chatterjee（2021）は次を示しました既知。Wilson ループを作る表現が群の中心（§05）に非自明に作用し（`SU(N)` の基本表現はそうです）、中心対称性が破れない（有限の厚みの板状の領域で、どの境界条件をとっても測度が中心の変換で不変であること。同論文の定義 2.1）なら、無限体積の格子 $\mathbb{Z}^d$ 上のどの測度でも、$R \to \infty$ で $V(R) \to \infty$ となるある関数 V について次が成り立ちます。

$$|\langle W(R \times T) \rangle| \le e^{-V(R)\,T} \tag{4}$$

これは V が非有界という意味で、$\sigma > 0$ ではありません。任意の境界条件での指数減衰という強い形のギャップを仮定すると面積則まで出ます（一様な減衰から面積則への定理。同論文の定理 2.4）。有限群で示された減衰は、特定の境界条件での二点相関の減衰で、この定理が仮定する「任意の境界条件での減衰」より弱いものです。このため表 1 の有限群の行と矛盾しません（同論文 §2.4）。Clay の意味のギャップから閉じ込めを導く定理はありません。

03

双対超伝導：磁束の管を裏返す

超伝導体は磁場を押し出し（Meissner 効果）、表面から入った磁場は侵入長 λ_L で減ります。無理に通すと細い管（Abrikosov の渦）に束ねられ、一本の磁束は $h/2e$ の整数倍です既知。

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mathbf{B}/\lambda_L^2, \qquad B(x) = B_0\, e^{-x/\lambda_L} \tag{5}$$

密度 $B^2/2$、断面積 S、磁束 $\Phi = BS$ の管は長さあたり $E/\ell = \Phi^2/(2S)$ を持ちます。真空では S を広げて 0 に近づけられますが、超伝導体では広げる損があり、E/ℓ は正の定数に留まります。単極子の対を埋めればエネルギーは距離に比例するはずです（模式的な見積もり）。

磁荷の流れ j^m を加えた Maxwell 方程式は、電と磁の入れ替えで対称です（$\tilde F$ は双対。ここだけ実時間の記法です）既知。

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = j^e_\nu, \quad \partial^\mu \tilde F_{\mu\nu} = j^m_\nu; \qquad \mathbf{E} \to \mathbf{B},\ \mathbf{B} \to -\mathbf{E},\ j^e \to j^m,\ j^m \to -j^e \tag{6}$$

真空が**色磁気単極子の凝縮**なら、押し出されるのは色電場で、色電束が管になり、クォークが閉じ込められる。これが双対超伝導の絵で、't Hooft（1975 年の講演）と Mandelstam（1976）が独立に提案したとされます物理。Nambu（1974）がその先駆とされます。正確に

は、単極子は作用に現れる場ではなく、ゲージを選んだときにだけ定義される対象で（§04）、「凝縮」を測度の言明として書く方法はまだありません。

図 1　左：真空では力線が広がる。右：単極子が凝縮した真空では電束が管になる（模式図）。



Di Giacomo ほか（2000、`SU(2)`）は単極子凝縮の秩序変数を格子で測り、「閉じ込めは双対超伝導体への転移として現れる」と報告しました物理。文脈は有限温度の脱閉じ込め転移で、機構が示されたわけではありません。「凝縮 ⇒ 面積則 ⇒ ギャップ」はどちらの段も四次元の非可換では未証明です。

可換な模型で機構が計算できる例

三次元のコンパクト `U(1)` では単極子がインスタントンとして働き、Polyakov（1977）が半古典で面積則を出し、Göpfert–Mack が（Villain 作用の格子で）全結合で $\sigma > 0$ を証明しました既知。ただし同じ仕事の要旨は、連続極限が自由スカラー場で物理の単位の弦張力が ∞ に行くとも述べます（本文は未読）。この機構からは「質量と弦張力は一つの尺度で決まる」（17-12）が出てきません。四次元では、$\mathcal{N}=2$ 超対称な理論を質量項で $\mathcal{N}=1$ に破った場合に、Seiberg–Witten（1994）が単極子の凝縮による閉じ込めを記述しました（17-11）物理。

04
アーベル射影と単極子

't Hooft（1981）は、作用に無い単極子を**ゲージの選び方の特異点**として見つけました。$X \mapsto gXg^{-1}$ と変わる量 $X(x)$（たとえば F_{12}）を選び、各点で対角にします。

$$g(x)\,X(x)\,g(x)^{-1} = \operatorname{diag}\big(\varepsilon_1(x),\dots,\varepsilon_N(x)\big) \tag{7}$$

ε_i は固有値です。残る対称性は $U(1)^{N-1}$ で、対角のグルーオンが「光子」です。固有値が重なる点では対角化が決まらず、そこが単極子です物理。例：`SU(2)` で $X = \sum_a X^a \sigma^a/2$ なら固有値は $\pm|X|/2$、重なるのは $X=0$ で、実の条件 3 本です。三次元では点、四次元では線（世界線）になります（一般の N も同じ、1-01 の寄り道）。零点の近くで $X \approx x$ なら $X/|X|$ は零点を囲む球面を一回覆い、その回数が磁荷です既知。

格子では最大アーベルゲージ（MAG、Kronfeld ほか 1987）でリンクを対角に近づけます。

$$R[U] = \sum_{x,\mu} \mathrm{tr}\left[\, U_\mu(x)\, \sigma^3\, U_\mu(x)^\dagger\, \sigma^3 \,\right] \;\to\; \text{最大} \tag{8}$$

大域的な最大を確実に見つける方法は知られておらず、実際には局所的な最大（Gribov のコピー）を使います。射影したリンクの弦張力が元の大部分を占めること（アーベル優勢）を Suzuki–Yotsuyanagi（1990）が報告し、Greensite の総説（2003）は `SU(2)` で $(92 \pm 4)\%$（Bali ほか 1996）を引きつつ「アーベル優勢はまだ単極子による閉じ込めの証明ではない」と書きます物理。

寄り道：Elitzur の定理

飛ばしてよい小節です。

リンク U_ℓ の始点だけでゲージ変換 g をすると $U_\ell \to g U_\ell$ です（その点に触れる他のリンクも変わりますが、作用と測度は不変です）。よって $\langle U_\ell \rangle = g \langle U_\ell \rangle$ が全ての g で成り立ち、Haar 測度（5-01）で平均すると

$$\langle U_\ell \rangle = \Big(\int_{SU(N)} g \, dg \Big) \langle U_\ell \rangle = 0 \tag{9}$$

です。Elitzur（1975）の定理は、無限体積でもゲージ不変でない局所量の期待値は 0 のままだと述べます既知。大域的な対称性（2-09）と違い、一点のゲージ変換には障壁がないからです。ゲージを固定して定義した単極子は、ゲージ固定の手続きを込めれば配位の関数にはなります。ただ、最大が一意でない（Gribov のコピー）ので関数として一つに定まらず、局所量でもありません。

05

中心渦：ループに中心元を掛ける膜

`SU(N)` の**中心**は全ての元と可換な $Z_N = \{ e^{2\pi i k/N} I \}$ です。中心元 z は表現ごとに z^k として働き、この $k \pmod N$ が **N-ality** です。基本表現は 1、随伴表現は 0 です既知。

出発点は、大きいループの弦張力が N-ality だけで決まり、随伴（グルーオン自身に遮蔽される）では 0 になる、という格子の観測です（Greensite の総説 §4.3）物理。中心渦は三次元で線、四次元で面で、絡んだループに中心元を一つ掛けます（`SU(2)` なら -1）。随伴のループは渦に気づきません。正確には、格子の上の最も細い渦は、ある領域を貫くリンクにまとめて中心元を掛けた配位で、変わるのは領域の縁に当たるプラケットだけです（内部では中心元が打ち消し合う）。この縁が渦で、縁と絡むループだけに中心元が掛かります。平面を面積

$\Sigma_{\min}$ の正方形に区切り、各正方形のループが拾う $Z(C_i)$ がほぼ独立なら、大きいループは積に分かれて面積則になります（同じ総説の式 (94)–(96)）。

$$\langle W_k(C)\rangle \approx e^{-\sigma(k)\,\Sigma}, \qquad \sigma(k) = -\ln\langle Z(C_i)^k\rangle / \Sigma_{\min} \tag{10}$$

閉じ込めは、渦の面が体積を貫いて広がる（パーコレートする）かどうかの問題になります。数値では、Del Debbio–Faber–Greensite–Olejník（1997）が射影した渦が弦張力の大部分を運ぶこと（中心優勢）を、de Forcrand–D'Elia（1999）が渦を取り除くと閉じ込めが失われることを報告しました物理。定理では、Tomboulis–Yaffe（1985、`SU(2)`）が Wilson ループを渦の自由エネルギーの関数で上から押さえました既知。渦の自由エネルギーは、一方向の境界条件に中心元のねじれを入れた分配関数 $\mathcal{Z}_{\mathrm{tw}}$ と、入れない分配関数 $\mathcal{Z}$ の比の $-\ln$、つまり $F_v = -\ln(\mathcal{Z}_{\mathrm{tw}}/\mathcal{Z})$ で、ゲージ不変です。同じ系統のゲージ不変な量に 't Hooft ループ（ループに沿って中心の渦を差し込む演算子）があります。式 (4) も中心対称性から Wilson ループを押さえる定理です。Tomboulis（2007）は `SU(2)` について全結合での証明を主張し、Ito–Seiler が論証の欠けを指摘しています。

射影で定義する渦はゲージに依存します。条件つきの定理の仮定は、四次元の弱結合で渦が凝縮すること（ゲージ不変には渦の自由エネルギーの減衰）の一点に集まり、これは証明されていません。

本書での使い方は 26-08 §03（渦の容器の平均と Migdal–Kadanoff の補間が、文献の中でどこで止まったか）。

06

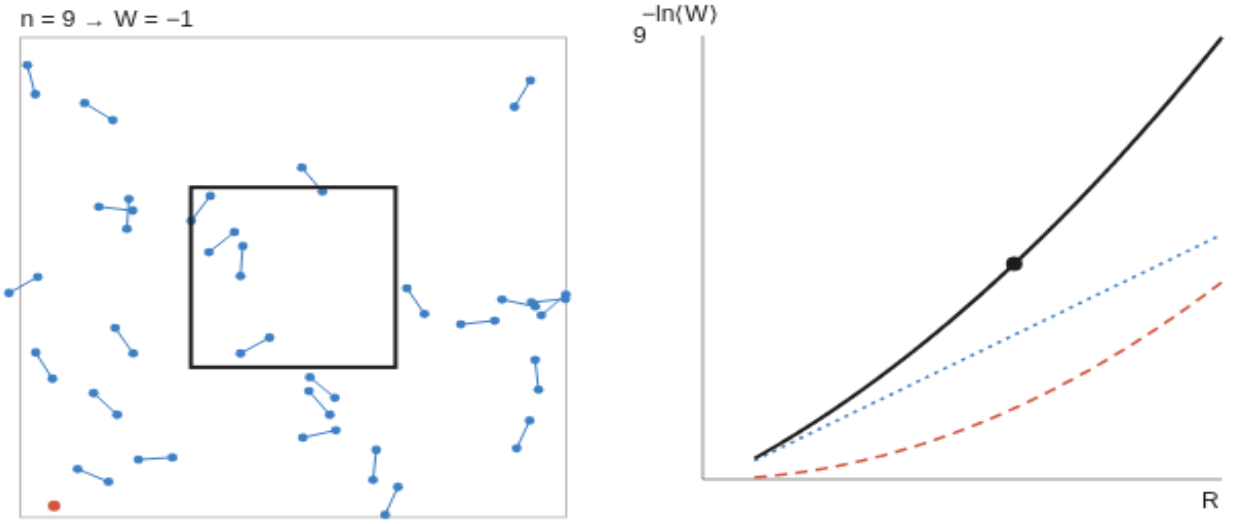
渦の気体の模型：面積則と周長則を数える

平面を `SU(2)` の渦が貫く点をばらまき、ループ内の点の数を n として $W = (-1)^n$ とします。点は二種類です。(a) 密度 ρ_f の独立な点（広がった渦の断面）。(b) 距離 d の二点の対、点の密度 ρ_p（平面を二回貫く小さな渦）。対が符号を変えるのは縁をまたぐときだけです。$I \times J$ の長方形で次が正確に成り立ちます（平行移動した二つの長方形の対称差の面積を向きで平均する）計算。

$$-\ln\langle W(I,J)\rangle = 2\rho_f\, IJ + 2\rho_p\Big[\frac{2d}{\pi}(I+J) - \frac{d^2}{\pi}\Big] \qquad (I,J \geq d) \tag{11}$$

第一項は、独立な点の数 n が平均 $\mu = \rho_f IJ$ の Poisson 分布に従い $\mathbb{E}[(-1)^n] = \sum_n e^{-\mu}\mu^n(-1)^n/n! = e^{-2\mu}$ となることから出ます（1-08）。第一項が面積則、第二項が周長則で、Creutz 比は $2\rho_f$ です。小さい渦がいくら多くても弦張力に寄与しません。

図 2　R・ρ_f・ρ_p を変えると、左の一枚の例（赤＝独立、青＝対）と、右の −ln⟨W⟩（実線、式 (11)）・面積項（赤破線）・周長項（青点線）が変わる。



R = 6、ρf = 0.020、ρp = 0.20：−ln⟨W⟩ = 1.44（面積）+ 2.93（周長）= 4.37。Creutz 比 = 0.040。この一枚は n = 9

計算 曲線は式 (11) をその場で計算し、左の点は乱数の一例です。式 (11) はこの端末で 100 万標本のモンテカルロ（MC）と突き合わせました（表 2）。

表 2　−ln⟨W(R,R)⟩：式 (11) と MC（格子間隔 1、d = 1。括弧内は MC の標準誤差を最後の桁で書いたもの。「—」は測れない）

R	独立 0.05	MC	対 0.2	MC	混合	MC
2	0.400	0.399(1)	0.891	0.890(2)	1.051	1.052(3)
4	1.600	1.596(5)	1.910	1.920(7)	2.550	2.546(13)
6	3.600	3.574(36)	2.929	2.929(19)	4.369	4.255(70)
8	6.400	—	3.947	3.921(50)	6.507	—
Creutz 比	0.100		0.000		0.040	

混合は $\rho_f = 0.02$・$\rho_p = 0.2$。MC の標準誤差は $-\ln W$ が大きいほど増え、$-\ln W \le 3$ では 0.02 以下です。$R = 6$ の混合は誤差 0.070 で、正確な式との差 0.11 は標準誤差の約 1.6 倍です。$e^{-6.4} \approx 0.0017$ は ± 1 の平均の雑音 10^{-3} と同程度で測れません。この困難は実際の格子計算と同じです（5-07）。SU(3) で貫通ごとに $e^{\pm 2\pi i/3}$ を掛けると、弦張力は $k = 1, 2$ で $1.5\rho_f$、随伴で 0 です計算 。

本書での使い方は 25-03 §03（枠を止めると容器の符号が独立になる恒等式）。

07

Gribov の領域と地平：ゲージを固定した側から

四つ目の絵は、ゲージを固定した伝播関数の形から閉じ込めを読みます。Landau ゲージの面 $\partial_\mu A_\mu = 0$ は一つの軌道と複数回交わりうる（4-08）ので、Gribov（1978）は積分を Faddeev–Popov 作用素 $\mathcal{M}$ が正の領域 Ω に制限しました。境界が Gribov の地平です。

$$\mathcal{M}^{ab} = -\partial_\mu\big(\partial_\mu \delta^{ab} + g f^{acb} A^c_\mu\big), \qquad \Omega = \{A:\ \partial_\mu A^a_\mu = 0,\ \mathcal{M} > 0\} \tag{12}$$

「$\mathcal{M} > 0$」は、$\mathcal{M}$ の固有値（自己共役作用素のスペクトル、1-10）がすべて正という意味です。$A = 0$ では $\mathcal{M} = -\partial^2$ で、定数を除けば正です。A を大きくすると最小の固有値が下がり、0 に達したところが地平です。地平の上では、固有値 0 の向きへの無限小のゲージ変換がゲージの条件を保つので、限りなく近いコピーが現れます。

数学として確かなのは Dell'Antonio–Zwanziger（1991）の「どの軌道も地平の内側を通る」までです[既知]。Ω の中にもコピーは残り、コピーの無い領域を解析的に扱う方法は知られていません（内側のコピーは期待値に影響しない、と Zwanziger は主張しています[物理]）。

08

伝播関数と正値性

Zwanziger（1989）は、Ω への制限を局所的な作用として書きました。その木の近似（ループの寄与を入れない最低次、4-03）の伝播関数が下の左、凝縮を加えた版（RGZ、Dudal ほか 2008）が右です[物理]。

$$D_{\mathrm{GZ}}(p^2) = \frac{p^2}{p^4 + \lambda^4}, \qquad D_{\mathrm{RGZ}}(p^2) = \frac{p^2 + M^2}{p^4 + (M^2 + m^2)\,p^2 + \lambda^4 + M^2 m^2} \tag{13}$$

$\lambda^4 = 2g^2 N \gamma^4$ で、γ は地平の条件で決まります。ここでの λ は質量の尺度で、§03 の侵入長 λ_L とも、大 N の $\lambda = g^2 N$ とも別です。M^2 と m^2 は RGZ で加わる質量の母数です。GZ の形は $p = 0$ で 0、極は $p^2 = \pm i\lambda^2$ と複素で、質量 m_0 の自由な粒子の $1/(p^2 + m_0^2)$ とまるで違います。

グルーオンが物理的な粒子なら、伝播関数は正の密度 ρ の重ね合わせ（Källén–Lehmann 表示）で書け、時間方向の相関 $C(t)$ は負になりえません（Dudal ほか 2008 の式 (159)(160)、4-10）。ω は重ね合わせる質量です。

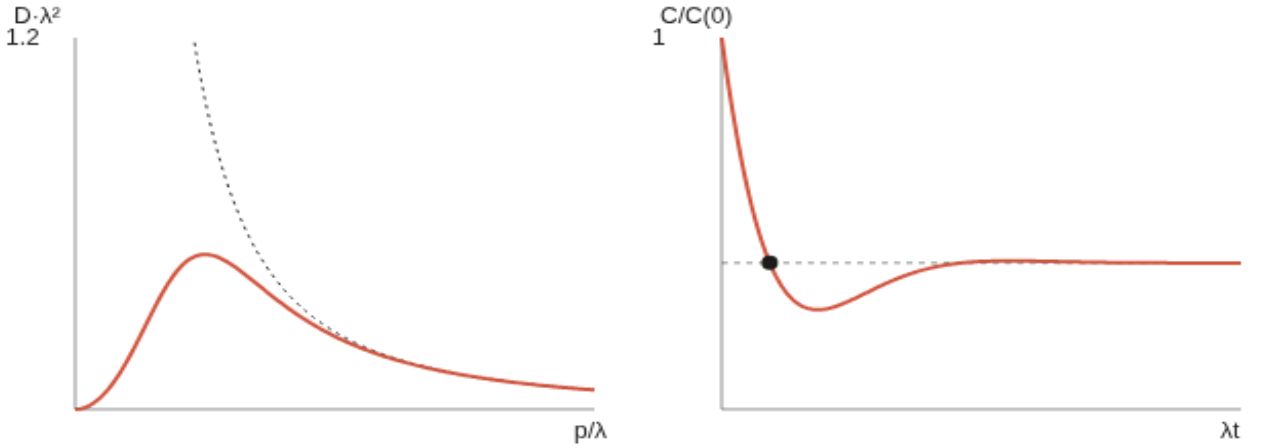
$$D(p^2) = \int_0^\infty d\omega^2\, \frac{\rho(\omega^2)}{p^2 + \omega^2}, \qquad C(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipt} D(p^2)\, dp = \int_0^\infty d\omega\, \rho(\omega^2)\, e^{-\omega t} \tag{14}$$

$m=0$ では、複素関数の積分（留数）で計算すると閉じた形が出ます（数値積分でも確かめられます。図 3 の下）。$M^2<2\lambda^2$ で $\cos\varphi=M^2/(2\lambda^2)$ とおくと計算

$$C(t)=\frac{e^{-\lambda t\cos(\varphi/2)}}{2\lambda\sin\varphi}\,\sin\!\Big(\frac{3\varphi}{2}+\lambda t\sin\frac{\varphi}{2}\Big) \tag{15}$$

で、$t_*=(\pi-3\varphi/2)/(\lambda\sin\frac{\varphi}{2})$ で最初に負になります。GZ では $t_*=\pi/(2\sqrt{2}\,\lambda)\approx 1.111/\lambda$。$M^2>2\lambda^2$ では $D=A/(p^2+r_1)+B/(p^2+r_2)$（$0<r_1<r_2$）と実の極に分かれ、$B$ が負（ρ は正でない）なのに $C(t)\ge e^{-\sqrt{r_2}\,t}C(0)>0$ で負になりません。この判定は一方向にしか働きません。

図 3　M^2/λ^2（m = 0）を変えると、左の D(p²)（点線は 1/p²）と右の C(t)/C(0) が変わる。0 が GZ、黒丸が最初の零点。



M²/λ² = 0.0（GZ）：D(0)·λ² = 0.0。極は複素共役。t* = 1.111/λ で負になる。

計算 曲線は式 (13)(15) と実根の部分分数をその場で計算したものです。閉じた式はこの端末で数値積分と突き合わせ、差は 2×10^{-11} 以下でした。

表 3　m = 0 の RGZ の木の近似（λ = 1）

M²	D(0)	極	C(0)	零点 t*
0（GZ）	0	複素共役	0.354	1.111
1.0	1.0	複素共役	0.577	3.142
1.9	1.9	複素共役	0.734	16.86
2.5	2.5	実（B = −0.333）	0.825	なし
4.0	4.0	実（B = −0.077）	1.021	なし

格子は当初の予言 $D(0)=0$ と合いませんでした。Cucchieri–Mendes（SU(2)、128^4、約 $(27\ \mathrm{fm})^4$。1 fm = 10^{-15} m）は要旨で、運動量 0 で「有限で非零の値を示すように見える」と報告し、Bogolubsky ほか（SU(3)）も同じ向きです物理。RGZ はこれを再現するように作られています物理。BRST 対称性（ゲージを固定した後にも残る対称性、4-08）は GZ では柔

らかく破れます。柔らかな破れとは、破れの項の次元が低く、短距離では効かないことです。この破れは RGZ の代償ではなく、GZ の地平の項そのものの性質です物理。

切れ目

伝播関数はゲージに依存します。問題文の標的は $\mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$ のようなゲージ不変な局所場の相関で、伝播関数の赤外の形からそのギャップを導く定理はありません。連続な大域的ゲージ固定もできません（Singer、3-04）。

09

四つの絵を並べる

表 4　四つの絵の主役・支え・欠けているもの

絵	主役	ゲージ依存	支え	数学で言えること	欠けていること
双対超伝導	単極子の凝縮	単極子の定義で	秩序変数の数値	3 次元コンパクト `U(1)` の面積則	凝縮 ⇒ 面積則 ⇒ ギャップ
アーベル射影	MAG の単極子	強い	アーベル優勢	—（Elitzur の定理が制約になる）	一意に定まるゲージ不変な量として定義すること
中心渦	渦／その自由エネルギー	前者のみ	中心優勢・渦の除去	Tomboulis–Yaffe、式 (4)	4 次元弱結合での渦の凝縮
GZ	伝播関数	定義から	格子の伝播関数	軌道は地平の内側を通る	ゲージ不変な相関への橋

主役の変数はどれもゲージを選んだときにだけ見え、ゲージ不変な核は渦の自由エネルギーとその周りの不等式だけです。どの絵も説明するのは σ で、Δ は帰結として期待されているにすぎません（§ 02）。どの絵からも「尺度は一つ」は出ません。切れ目の整理は 16-05、発散以外の障害は 7-11。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 小さい β の面積則。格子で強い形のギャップ ⇒ 面積則	四次元の非可換理論の連続極限での面積則。Clay のギャップと閉じ込めの間の含意
計算 渦の気体の正確な式 (11) と MC の一致、Creutz 比 $= 2\rho_f$	この模型がヤン–ミルズの真空を記述すること（渦の分布は仮定）
計算 RGZ（$m = 0$）の木の近似の $C(t)$ の閉じた形 (15)	伝播関数から、ゲージ不変な相関のギャップを導くこと

言えている	言えていない
物理 単極子凝縮・アーベル優勢・中心優勢・渦の除去・$D(0) \neq 0$ の格子数値	どの機構が正しいかの判定（数値はゲージに依存）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
式 (1)(3)(6)(8)(10)、N-ality、(92 ± 4)%、双対超伝導の帰属	総説	Greensite, Prog. Part. Nucl. Phys. 51 (2003) 1, hep-lat/0301023（本文）
Wilson ループ	一次	Wilson, PRD 10 (1974) 2445（要旨）
閉じ込めは「自然な拡張」（§02）	一次	Jaffe–Witten, Clay の問題文（本文）
双対超伝導	一次	't Hooft, EPS 1975 講演（1976 刊）（書誌のみ）。Mandelstam, Phys. Rep. 23 (1976) 245（書誌のみ）。Nambu, PRD 10 (1974) 4262（書誌のみ）
3 次元コンパクト `U(1)`	一次	Polyakov, NPB 120 (1977) 429（書誌のみ）。Göpfert–Mack, CMP 82 (1982) 545（要旨。連続極限の記述は INSPIRE の要旨で確認、本文は未読。年は Crossref の発行年で、INSPIRE は 1981）
単極子凝縮の格子数値・SW	一次	Di Giacomo ほか, PRD 61 (2000) 034503（要旨）。Seiberg–Witten, NPB 426 (1994) 19（要旨）
アーベル射影・MAG・アーベル優勢	一次	't Hooft, NPB 190 (1981) 455（要旨）。Kronfeld–Schierholz–Wiese, NPB 293 (1987) 461（書誌のみ）。Kronfeld ほか, PLB 198 (1987) 516（書誌のみ）。Suzuki–Yotsuyanagi, PRD 42 (1990) 4257（書誌のみ）。Bali ほか, PRD 54 (1996) 2863（書誌のみ）
Elitzur の定理	一次	Elitzur, PRD 12 (1975) 3978（書誌のみ）
中心渦	一次	Del Debbio ほか, PRD 55 (1997) 2298（要旨）。de Forcrand–D'Elia, PRL 82 (1999) 4582（要旨）。Tomboulis, arXiv:0707.2179（要旨）。Ito–Seiler, arXiv:0711.4930（要旨）。Tomboulis–Yaffe, CMP 100 (1985) 313（書誌のみ）
式 (4)・表 1	一次	Chatterjee, arXiv:2006.16229（本文。定義 2.1、定理 2.2・2.4、§2.4）。Chatterjee, arXiv:1803.01950（本文）。Fröhlich–Spencer, CMP 83 (1982) 411（書誌のみ）。Adhikari–Cao, arXiv:2202.10375（要旨）。Osterwalder–Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（書誌のみ）。Shen–Zhu–Zhu, arXiv:2204.12737（要旨）
式 (12)–(14)	一次	Dudal ほか, PRD 78 (2008) 065047, arXiv:0806.4348（本文。式 (2)(3)(58)(59)(159)(160)(207)）。Gribov, NPB 139 (1978) 1（書誌のみ）。Zwanziger, NPB 323 (1989) 513（書誌のみ）
地平・内側のコピー・格子の伝播関数	一次	Dell'Antonio–Zwanziger, CMP 138 (1991) 291（書誌のみ）。Zwanziger, PRD 69 (2004) 016002（要旨）。Cucchieri–Mendes, arXiv:0710.0412, PoS LAT2007:297（要旨）。Bogolubsky ほか, arXiv:0901.0736（要旨）

もの	種別	出典・道具
式 (11)(15)・表 2・表 3	計算	python3（numpy・scipy）：対称差の面積の向き平均と 100 万標本の MC（標準誤差つき）／閉じた形と数値積分の突き合わせ、$C(t)/C(0)$ の最小値

次に読む章：17-03 弦の絵 ― 押し込められた管を一本の弦として扱い、その揺らぎを見ます。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 17 部 物理の側から 有効弦理論

弦の絵 — 閉じ込めの管を一本の弦とみなすと、揺らぎから普遍な補正と形が出てくる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 管の横揺れの零点エネルギーから Lüscher 項 $-\pi(d-2)/(24R)$ が出る筋道と、係数が理論の細部に依らない理由を追います。管の太さ、Nambu–Goto の準位、格子の弦の「硬い側」と「荒れた側」、向きに依る張力が選ぶ形（Wulff 形）を、式と動く図と計算で見ます。

前提となる章 — 17-01 物理はどう見ているか（Wilson ループ・面積則・弦張力 σ）。零点エネルギー（2-06）と強結合展開（5-02）は要る分をその場で書きます。

先に言うこと — 物理の水準の章です 物理 。弦の絵は長い管が在ること（閉じ込め）を出発点に置き、四次元の非可換ヤン–ミルズでそれは定理ではありません。この本は閉じ込めも質量ギャップも連続極限の構成も自分では示していません（公開された連続極限の構成は第二巻で読みます）。

この章の順序

1. 管を一本の弦とみなす — 面積の重み
2. Nambu–Goto 作用 — 揺らぎの展開
3. 零点エネルギーと Lüscher 項 — 開いた弦と閉じた弦
4. 寄り道：1+2+3+⋯ と −1/12 — 切り方に依らない部分
5. 管は対数で太る — 揺れる弦
6. Nambu–Goto の準位と短い管 — 普遍な範囲
7. 格子の弦は硬く、どこかで荒れる — 定理のある側
8. Wulff 形 — 向きに依る張力と形
9. 二次元イジング模型の滴 — 正確に分かる張力と、正方形から円へ
10. 弦の絵が数学に渡すもの・渡さないもの — 仮定の下で決まるものと、仮定そのもの

01

管を一本の弦とみなす

17-01 §05 の電束の管は、太さが対の距離 R よりずっと小さければ、遠目には一本の線です。ユークリッド時間の方向に伸ばすと、線は面（**世界面**）を掃きます。弦の絵は、この面の揺らぎで長い距離を書く有効理論です 物理 。Wilson ループの長方形 $R \times T$ を縁とする面 S に、面積 $A(S)$ で決まる重みを与えます。

$$\langle W_{R,T} \rangle \approx \sum_{S:\,\partial S = \text{長方形}} e^{-\sigma A(S)} \tag{1}$$

最小の面だけなら $e^{-\sigma RT}$、面積則です。問題は揺らぎで何が加わるかです。比喩で言えば張った膜の震えです。正確には、(1) はヤン–ミルズから導いた式ではなく、「長い管が在り、低い励起は横揺れだけ」という仮定の下での出発点です（Athenodorou–Bringoltz–Teper 2011 §2。以下 ABT）。

格子の強結合（5-02）では (1) に近い式が成り立ち、プラケット一枚の重み u が $e^{-\sigma_0}$ の役をします 既知 。ただし `U(1)` でも面積則が出るので、非可換の閉じ込めの証拠にはなりません（Chatterjee 2018 §4、5-06）。

02

Nambu–Goto 作用

面積に比例する作用を **Nambu–Goto 作用**と呼びます（名は Nambu と Goto にちなむとされます）。面を座標 t, x と、垂直な変位 $h(t,x) \in \mathbb{R}^{d-2}$ で表します（静的ゲージ。d は時空の次元）。曲面 $X(t,x)$ の面積は、多変数の微積分で学ぶ曲面積の公式 $\iint \sqrt{|X_t|^2 |X_x|^2 - (X_t \cdot X_x)^2}\, dt\, dx$（$X_t = \partial_t X$、$X_x = \partial_x X$）で与えられます。$X = (t, x, h)$ を入れると次の式です。

$$A = \int_0^T dt \int_0^R dx \, \sqrt{1 + |\partial_t h|^2 + |\partial_x h|^2 + |\partial_t h|^2 |\partial_x h|^2 - (\partial_t h \cdot \partial_x h)^2} \tag{2}$$

揺らぎが緩やかなら $\sqrt{1+z} \approx 1 + z/2$ で展開して

$$\sigma A = \sigma R T + \frac{\sigma}{2} \iint \left(|\partial_t h|^2 + |\partial_x h|^2 \right) dt\, dx + O\big((\partial h)^4\big) \tag{3}$$

第二項は $d-2$ 成分の質量のない自由場で、2-02 の弦の振動と同じ形です（端では $h = 0$）。高次の項は長い弦では $1/(\sigma R^2)$ の冪で抑えられます（ABT §2.1）。

例：波打ち $h = A_0 \sin(\pi x/R)$ の長さの増分は、二次の近似で $\pi^2 A_0^2/(4R)$ です。$R = 1$ fm、$A_0 = 0.2$ fm で 0.099 fm（正確には 0.092 fm）。$\sigma = 1192$ MeV/fm（$\sqrt{\sigma} = 485$ MeV、17-01 §07）を掛けて約 110 MeV です 計算 。

03

零点エネルギーと Lüscher 項

(3) の第二項は、ユークリッド化した自由場の作用です。T が長いとき $\langle W_{R,T} \rangle \approx e^{-V(R)T}$ なので、同じ場のハミルトニアンの基底エネルギーが $V(R)$ を与えます（4-02）。この場のモードは $k_n = n\pi/R$（$n = 1, 2, \ldots$）です。各モードは振動数 k_n の調和振動子で、最低の状態でも零点エネルギー $k_n/2$ を持ちます（2-06。$\hbar = c = 1$）。$d-2$ 成分を足すと次の式です。

$$E_0(R) = \sigma R + \frac{d-2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{R} \tag{4}$$

和は発散します。長さ a より細かい揺れは有効理論の外なので、$e^{-k_n a}$ で切ります。

$$\sum_{n \geq 1} n\, e^{-\varepsilon n} = \frac{e^{-\varepsilon}}{(1-e^{-\varepsilon})^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{12} + \frac{\varepsilon^2}{240} - \cdots, \qquad \varepsilon = \frac{\pi a}{R} \tag{5}$$

(5) を (4) に入れると、第一項は $(d-2)R/(2\pi a^2)$ で R に比例し、張力に吸収されます。残りが静的ポテンシャルです。

$$V(R) = \sigma R + c_0 - \frac{\pi (d-2)}{24 R} + \cdots \tag{6}$$

c_0 は普遍でない定数です。$d = 4$ で $-\pi/(12R)$、17-01 式 (6) の **Lüscher 項**です（Lüscher–Symanzik–Weisz 1980、Lüscher 1981）。長い管の有効理論の中で導かれる係数で、数学の定理ではありません 物理 。$1/R$ の項は発散しない有限の部分なので、係数は a に依りません。$R = 1$、$a = 0.2, 0.1, 0.05$ で残りは -0.2567, -0.2605, -0.2615 と $-\pi/12$ に近づきます 計算 。

閉じた弦と円筒の Casimir エネルギー

周期 L の方向に巻きついた管（周期境界を回る電束）では $k_n = 2\pi n/L$ が正負両向きにあり、同じ計算で次を得ます（ABT 式 (9)）。

$$E_0(L) = \sigma L - \frac{\pi (d-2)}{6 L} + \cdots \tag{7}$$

これは円筒の上の自由場の Casimir エネルギーです。Lucini–Teper 2001 は格子の σ を同論文の式 (4) $am_l = a^2\sigma L - \pi/(3L)$ で取り出し、'in using eqn(4) we are assuming that we have linear confinement' と断っています（5-08）。目安：$R = 1$ fm で $\pi/(12R) \approx 52$ MeV は σR の 4.3%、$L\sqrt{\sigma} = 3$（Lucini–Teper の下限。$\sqrt{\sigma} = 485$ MeV での換算で約 1.22 fm、Lucini–Teper 自身は $\simeq$1.3 fm と書く）で (7) の補正は主項の 11.6% です 計算 。

04

寄り道：1+2+3+⋯ と −1/12

飛ばしてよい節です。

標語「$1+2+3+\cdots = -1/12$」の和は発散します。正確な中身は次の式です。滑らかな切り方 f（$f(0)=1$、速く減る）について、$\varepsilon \to 0$ で

$$\sum_{n\ge 1} n\, f(\varepsilon n) = \frac{C_f}{\varepsilon^2} - \frac{1}{12} + O(\varepsilon^2), \qquad C_f = \int_0^\infty x f(x)\, dx \tag{8}$$

発散項の係数 C_f は切り方で変わり、$-1/12$ は変わりません。理由は **Euler–Maclaurin の公式**です。和と積分の差を端の点での微分で書く式で、g とその微分が無限遠で速く減るときは次の形です（$B_2 = 1/6$ は Bernoulli 数）。

$$\sum_{n\ge 0} g(n) = \int_0^\infty g(x)\, dx + \tfrac{1}{2} g(0) - \tfrac{B_2}{2!}\, g'(0) - \cdots$$

$g(x) = x f(\varepsilon x)$ では $g(0)=0$、$g'(0) = f(0) = 1$、積分は C_f/ε^2 なので、定数項は $-B_2/2 = -1/12$ です。残りの項は ε^2 以上の冪です。ゼータ関数の解析接続 $\zeta(-1) = -1/12$ も同じ数です 既知 。

計算 表1　和から C_f/ε^2 を引いた残り（指数型 $f = e^{-x}$、$C_f = 1$。ガウス型 $f = e^{-x^2}$、$C_f = 1/2$）

ε	指数型	ガウス型
0.1	−0.0832917	−0.0834169
0.01	−0.0833329	−0.0833342
→ 0	−0.0833333	−0.0833333

切り方で変わる部分は張力に吸収され、$-1/12$ だけが $1/R$ の係数に残ります（発散級数は 4-12・7-12 も）。

05

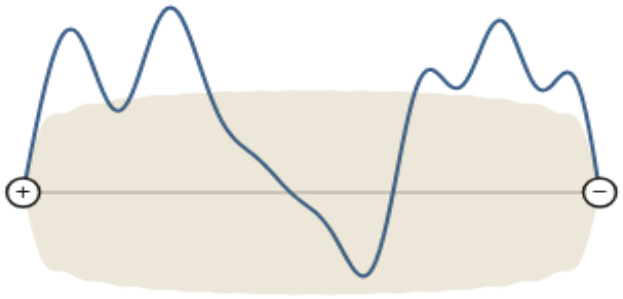
管は対数で太る

(3) のモード q_n は質量 σ・振動数 k_n の振動子で、基底状態の分散は $1/(2\sigma k_n)$ です。$h=\sum_n \sqrt{2/R}\, q_n \sin k_n x$ の中点では奇数の n だけが残り、$\langle h^2\rangle = \sum_{n\,\text{奇数}} 1/(\sigma\pi n)$ です。$n \lesssim R/a$ まで足すと対数になります（Lüscher–Münster–Weisz 1981。Gliozzi–Pepe–Wiese 2010 式 (3)）。長い管の有効理論の中で導かれる式です 物理 。

$$w^2\left(\tfrac{R}{2}\right) = \left\langle |h(R/2)|^2 \right\rangle \approx \frac{d-2}{2\pi\sigma}\ln\frac{R}{R_0} \tag{9}$$

普遍なのは $\ln R$ の係数で、R_0 は普遍ではありません。太さは際限なく増えますが $w/R \to 0$ で、遠目には細い線のままです。

図1　つまみで距離 R を変えると、弦に載るモードの数と揺れの幅（帯）が変わる。「動かす」で各モードを零点の大きさで振動させる



R√σ = 4.00 (1.63 fm)　モード 16 個　中点の w²σ = 0.644　(ln N+γ+ln2)/(2π) = 0.643

計算 この図の数値はこの端末で計算した。切断 $a = 0.25/\sqrt{\sigma}$、帯は $\pm w$、横方向 1 成分。振動は古典的な絵で、量子の揺らぎそのものではない。

表2　格子の帯（幅 R、両端で h=0、時間は無限）の中点での自由場の分散（1 成分、単位 1/σ）

R（格子間隔）	σ⟨h²⟩	R を倍にしたときの増分
8	0.516070	0.111626
1024	1.288650	0.110318
(9) の予言	—	ln2/(2π) = 0.110318

計算 モードごとの閉じた形 $1/\sqrt{m^2(m^2+4)}$ で正確に足した。増分は (9) と 6 桁で一致する。

$d=4$ の係数 $1/(\pi\sigma)$ は 0.053 fm^2 で、R を倍にしても w^2 は 0.037 fm^2 増えるだけです 計算 。対数の増え方は (2+1) 次元の `SU(2)` の格子で確かめられています（Gliozzi–Pepe–Wiese 2010） 物理 。

06

Nambu–Goto の準位と短い管

縦の運動量のない閉じた弦の準位は、Nambu–Goto では閉じた形で書けます（左右に回る励起の和がともに n。ABT 式 (21))。素朴な光円錐量子化から来る式です（Aharony–Komargodski はこの方法の出典として、端を固定した弦を扱った Arvis 1983 を挙げます)。

$$E_n(L) = \sqrt{\sigma^2 L^2 + 8\pi\sigma\left(n - \frac{d-2}{24}\right)} \tag{10}$$

展開すると $\sigma L + \frac{4\pi}{L}\left(n - \frac{d-2}{24}\right) + \cdots$ で、$n=0$ は (7) に戻ります。基底は $\sigma L^2 < \pi(d-2)/3$ で虚になり、$d=4$ では $L_H\sqrt{\sigma} = \sqrt{2\pi/3} = 1.447$ です。周期方向を時間とみれば $1/L$ は温度です（4-02)。弦の状態の数はエネルギーとともに指数的に増えるので、ある温度より上では分配関数の和が収束しなくなります。この点を **Hagedorn 転移**と呼びます（状態の増え方は 17-05 の寄り道）物理。ABT は L_H を 'the Hagedorn/deconfining transition in the Nambu-Goto model' とみなせると書き、続けて、大 N の純ゲージ理論ではこの長さに届かないと述べます。縮めていくと、その手前の $l_c\sqrt{\sigma} = \sqrt{\sigma}/T_c \simeq 1.65$ で一次の脱閉じ込め転移が起きるからです（表3 の下の l_c)。

表3　閉じた弦のエネルギー（$d=4$、単位 $\sqrt{\sigma}$）

L√σ	σL−π/(3L)	(10) の基底	近似のずれ	(10) の n=1	E₁−E₀
1.6	0.9455	0.6824	+38.6%	5.0595	4.377
3.0	2.6509	2.6279	+0.88%	5.6602	3.032
6.0	5.8255	5.8229	+0.04%	7.6836	1.861

計算 式 (10) による。格子で管が消える長さ $l_c\sqrt{\sigma}$ は ABT 表 3 の $a\sqrt{\sigma}$ と l_c/a の積で、SU(3) 1.544・1.559、SU(5) 1.636、SU(6) 1.676。いずれも L_H より少し長く、大きい N の二つは ABT の 1.65 の前後にある。

どこまで普遍か。Aharony–Komargodski 2013 によれば 'all the terms up to (and including) order 1/L^5 are universal' で、基底は $1/L^5$ まで (10) と一致し、$d>3$ の励起は $1/L^5$ で普遍にずれ、$1/L^7$ から理論ごとの項が入ります。長い管の有効理論の中で導かれる結果です物理。(10) の量子化には 'There is no rigorous derivation' とも書いています。ABT は四次元 SU(N) の格子で閉じた管の約 20 準位を測り、多くが $1/L$ 展開の収束しない短い長さまで (10) でよく記述されると報告しました。$J^P = 0^-$（J は管の軸のまわりの角運動量、P は鏡映に対する符号）の一部の状態は大きくずれます物理。

表3 の最後の列で、$L\sqrt{\sigma}=3$ の弦の最初の励起 $3.03\sqrt{\sigma}$ は、SU(3) の 0^{++} グルーボール $3.405\sqrt{\sigma}$（17-01 表2）と同じ桁に来ます計算（対応を意味するものではありません)。尺度が一つであることを数学の文にする話は 17-12 です。

07

格子の弦は硬く、どこかで荒れる

格子の強結合側では、面の一部を一格子ずらすとプラケットが増え、一枚ごとに小さな重み u が掛かります。横揺れは指数的に抑えられ、面は**硬い**（平ら）ままです。(9) の世界では分散が対数で発散し、面は**荒れて**います。

結晶の表面では、二つのあいだに**荒れの転移**（roughening）があります。Itzykson–Peskin–Zuber 1980 は、四次元の格子ゲージ理論でも、真空に相転移がないまま有限の結合で荒れが起き、$\sigma(\beta)$ がそこで真性特異点を持つと論じました。ここで真性特異点とは、関数もすべての階の微分も有限のまま、テイラー展開がその点で関数を表さなくなる型の特異点です。例は $x>0$ で e^{-1/x^2}、$x\le 0$ で 0 とおいた関数で、$x=0$ でのテイラー級数は係数がすべて 0 です。級数を何次まで延ばしても、この点は見えません。IPZ は 'The roughening transition is a natural barrier to the extrapolation of strong-coupling series for the string tension' と書いています。`SU(2)` の β_r はおよそ 2（誤差大）で、著者は 4 次元の議論を 'for the most part, intuitive' と断っています 物理 。

三次元の `Z(2)` ゲージ理論は、三次元のイジング模型と**双対**です。双対とは、変数の取り替えで二つの模型の分配関数が（簡単な因子を除いて）一致することです（2-09 の寄り道。IPZ は Wegner 1971 を引く）。この対応で Wilson ループの面はイジング模型の界面になります（IPZ 式 (8)） 既知 。ゲージ結合を $t=\tanh\beta$ で測ると（双対なイジング模型の温度では $t=e^{-2J/T}$。IPZ 式 (7)）、相転移は $t_c=0.6418$ です。荒れの点は、IPZ が引く級数の見積もりで $t_r\approx 0.46$、相転移の手前です 物理 。有効弦理論が当てはまるのは荒れた側だけです（Gliozzi–Pepe–Wiese 2010） 物理 。

> 要点
>
> 物理 強結合の面積則の定理（Osterwalder–Seiler 1978、5-04）は硬い側、Lüscher 項と対数の太さは荒れた側の話です。間には、強結合級数を延ばせない $\sigma(\beta)$ の特異点があると物理は考えます。

08

Wulff 形

§07 の硬い側では、張力は向きにも依ります。格子の軸と角 θ をなす Wilson ループの縁は階段になり、最小の面は $RT(|\cos\theta|+|\sin\theta|)$ 枚です。強結合の主項では次の式です。

$$\sigma(\theta)=\sigma_0\big(|\cos\theta|+|\sin\theta|\big) \tag{11}$$

45° で $\sqrt{2}$ 倍です 計算 。連続極限では回転対称が戻り、一定になると期待されます 物理 。

張力が向きに依る線で囲まれた、面積一定の領域（二次元の滴）はどんな形をとるか。法線 $\mathbf{n}$ ごとの張力 $\tau(\mathbf{n})$ で、囲む面積を固定して $\oint \tau\, ds$ を最小にします。答えは Wulff 1901 の作図で与えられます（作図が最小を与えることの証明の書誌は出典表） 既知 。

$$\mathcal{W}_\tau = \bigcap_{|\mathbf{n}|=1} \{\mathbf{x} :\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{n} \le \tau(\mathbf{n})\}, \qquad \min_{\text{面積}=A} \oint \tau\, ds = 2\sqrt{|\mathcal{W}_\tau|\, A} \tag{12}$$

張力が一定なら円、(11) の $\tau = |n_1| + |n_2|$ なら $\{\max(|x|,|y|) \le 1\}$ の正方形です。面積 1 での総和は正方形で 4、円形なら $8/\sqrt{\pi} = 4.51$ です 計算 。

09

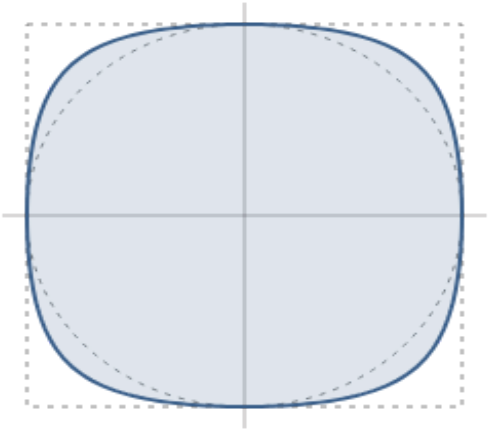
二次元イジング模型の滴

向きに依る張力が正確に分かっている例が、正方格子のイジング模型（結合 J、2-09）です。この節の $\beta = 1/T$ は逆温度です（$k_B = 1$。格子ゲージの β とは別物）。低温相の少数派の島（滴）の平衡形は次の曲線です（最初の正確な解析は Rottman–Wortis 1981 とされる） 既知 。

$$\cosh(\beta x) + \cosh(\beta y) = \sinh(2\beta J) + \frac{1}{\sinh(2\beta J)} \tag{13}$$

(13) は (12) の $\mathcal{W}_\tau$ の縁そのものです。大きさも (12) のとおりで、向き $\mathbf{n}$ への張り出し $\max \mathbf{x}\cdot\mathbf{n}$ が張力 $\tau(\mathbf{n})$（J の単位）に等しくなります。したがって x, y は位置ではなく、エネルギーの単位で測った座標です。x 軸との交点（軸方向の張力）は、Onsager の正確な解の $2J + \beta^{-1}\ln\tanh\beta J$ と 5 桁で一致します 計算 。$T \to 0$ で (13) は正方形になり、張力は (11) と同じ階段の数え上げです。$T \to T_c$ では右辺が 2 に近づき、$u = \beta x$、$v = \beta y$ について $\cosh u + \cosh v \approx 2 + (u^2+v^2)/2$ なので円になります。

図2　つまみで温度 T/T_c を変えると、二次元イジングの滴の平衡形（塗り）が正方形から円へ変わる。軸方向の張力を 1 にそろえ、点線は正方形と円



T/T_c = 0.30　τ(0°) = 1.9278 J（Onsager の式 1.9278）　τ(45°)/τ(0°) = 1.1196（正方形 1.4142、円 1）

表4　二次元イジングの平衡形。等周比は 4π 面積/周長^2、最後の列は同じ面積の円形の滴に対する張力の総和の比

T/T_c	τ(45°)/τ(0°)	等周比	Wulff/円
→ 0	1.4142	0.7854	0.8862
0.2	1.1984	0.9406	0.9698
0.4	1.0690	0.9917	0.9958
0.8	1.0035	1.0000	1.0000

計算　この図と表の数値はこの端末で計算した（(13) を角度ごとに二分法で求めた）。

低温では対角の張力が先に下がります。階段の縁には並べ方の数（エントロピー）があり、角はそこから丸くなります。T_c に近づくと相関長が格子間隔よりずっと長くなり、格子の向きが忘れられて円になります。連続極限で回転対称が戻るという期待（5-05）の、正確に扱える模型での姿です。

低温の二次元イジングで滴が Wulff 形をとることは、微視的な模型から示されています（Dobrushin–Kotecký–Shlosman 1992・1993）既知。

Wulff の問題が直接に当てはまるのは、このように面積の決まった二次元の相の滴です。ヤン–ミルズの閉じた電束の輪には面積を固定する拘束が無く、放っておけば縮みます。それでも格子の上の閉じた管は必ず角を曲がるので、そのエネルギーは $\sigma(\theta)$ を通して形に依ります物理。本書の検討の記録での使い方は 23-02 にあります。

10

弦の絵が数学に渡すもの・渡さないもの

渡すもの

物理 長い管が在ると仮定すれば、Lüscher の係数、太さの $\ln R$ の係数、準位の $1/L^5$ までの形が、細部に依らずに決まります。

既知 低温の二次元イジングでは、向きに依る張力と滴の形の関係が定理です。

渡さないもの

管が在ること（大きい β の面積則）は、四次元の非可換理論で 'remains elusive' です（Chatterjee 2018）。格子の σ は弦の補正を引いて取り出され、Lucini–Teper は二点だけの当てはめで 'we cannot claim to have evidence for both the 1/L functional form and for its coefficient' と断っています。

弦の絵は質量のない横揺れの話で、グルーボールの質量は直接には出てきません。ABT は (10) からずれる $J^P = 0^-$ の準位が 'the massive modes associated with the internal structure of the flux tube' を表す可能性を調べています 物理 。長さの尺度が $1/\sqrt{\sigma}$ だけなので $m \sim \sqrt{\sigma}$ は自然に見えますが、導かれてはいません（17-01 §09・17-12）。面の和としての見方は、次の 17-04 で $1/N$ の展開として出てきます。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
物理 長い管が在ると仮定した有効理論の中で導かれる、Lüscher の係数・太さの $\ln R$ の係数・$1/L^5$ までの準位の普遍性	四次元の非可換ヤン–ミルズに長い管が在ること（大きい β の面積則）
計算 正則化の違いが R に比例する項だけに入ること（表1）。格子の自由場の太さの増分（表2）	ヤン–ミルズの管の太さの定理
計算 (10) と Lüscher 近似の差、L_H、l_c（表3）	(10) がヤン–ミルズで正確であること
既知 Wulff の作図と低温の二次元イジングでの正当化。 計算 表4	四次元の連続極限で $\sigma(\theta)$ が一定になること
既知 強結合の面積則（Osterwalder–Seiler）。三次元の Z(2) ゲージ理論とイジング模型の双対性。Euler–Maclaurin による $-1/12$	強結合級数を荒れの点より先へ延ばすこと
物理 四次元の格子ゲージ理論の荒れの転移（IPZ の議論）と、三次元 Z(2) の t_r の級数による見積もり	荒れの転移の存在と位置の証明

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§01・(7)(10)・l_c・Hagedorn の文と $l_c\sqrt{\sigma}\simeq 1.65$・$J^P=0^-$	一次	Athenodorou–Bringoltz–Teper, JHEP 1102 (2011) 030, arXiv:1007.4720（本文）
普遍性の次数・(10) の注意・(10) が素朴な光円錐量子化から来ること	一次	Aharony–Komargodski, JHEP 05 (2013) 118, arXiv:1302.6257（本文）
Lüscher 項・(10) の原典	一次	Lüscher–Symanzik–Weisz, NPB 173 (1980) 365（書誌のみ）。Lüscher, NPB 180 (1981) 317（書誌のみ）。Arvis, PLB 127 (1983) 106「The Exact q Anti-q Potential In Nambu String Theory」（書誌のみ。書誌は Aharony–Komargodski の文献表 [19] による）。Nambu–Goto の名の原典は未確認
式 (9)・有効弦理論が荒れた側で当てはまること	一次	Lüscher–Münster–Weisz, NPB 180 (1981) 1（書誌のみ）。Gliozzi–Pepe–Wiese, PRL 104 (2010) 232001, arXiv:1002.4888（本文）
格子の σ の取り出し・$L\sqrt{\sigma}\geq 3$	一次	Lucini–Teper, JHEP 0106 (2001) 050, hep-lat/0103027 §4.1（本文）。原文は 'r ≥ 3/√σ ≃ 1.3 fm'。本文の 1.22 fm は $\sqrt{\sigma}=485$ MeV（17-01 と同じ）での換算
荒れの転移・$t=\tanh\beta$・t_c・t_r・双対性	一次	Itzykson–Peskin–Zuber, PLB 95 (1980) 259（本文）。$t=\tanh\beta=e^{-2/T}$ は同論文の式 (7)、$t_c=0.6418$ は同論文の本文。$t_r\approx 0.46$ は、IPZ が式 (13) で引く Weeks らの級数解析の値 $t_r\approx 0.4593$（1980 年当時の見積もり。Weeks らの原典は IPZ の文献 [7][9] で、一つは未公刊の書簡。未確認）。IPZ 自身の量では式 (19) で $t_r\approx 0.47$。双対性は Wegner, J. Math. Phys. 12 (1971) 2259（書誌のみ。IPZ の文献表による）
面積則の現状	一次	Chatterjee arXiv:1803.01950 §4（本文）。Osterwalder–Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（書誌のみ）
式 (12)・Wulff 形の微視的な正当化	一次	Wulff, Z. Kristallogr. 34 (1901) 449–530（書誌のみ。書誌は Fujimoto–Otsuka の文献表による）。作図が最小を与えることの証明の原典は未確認。作図の説明は Günther–Rikvold–Novotny, Physica A 212 (1994) 194, cond-mat/9406114（本文）と、そこに挙げられた総説 Rottman–Wortis, Phys. Rep. 103 (1984) 59（書誌のみ）。Dobrushin–Kotecký–Shlosman, Wulff Construction: A Global Shape from Local Interaction, AMS Transl. Math. Monographs 104 (1992)。同じ著者の短報 A microscopic justification of the Wulff construction, J. Stat. Phys. 72 (1993) 1–14（いずれも書誌のみ。書誌は Crossref で確認）
式 (13)	一次	Rottman–Wortis, PRB 24 (1981) 6274（書誌のみ。「最初の正確な解析」という帰属は Fujimoto–Otsuka arXiv:1906.01925 の序文）。あわせて Avron–van Beijeren–Schulman–Zia, J. Phys. A 15 (1982) L81、Zia–Avron, PRB 25 (1982) 2042（書誌のみ。同じ序文が 'see also' として挙げる）。形は Onsager の張力と照合
表1〜表4・図1・図2・本文の 計算	計算	python3（標準ライブラリ）：正則化した和／格子の自由場／(10) と ABT 表 3／(13) の二分法

次に読む章：17-04 大 N ― 面の和を $1/N$ で整理する見方です。

大 N — 色の数を無限大に送ると、ファインマン図は曲面に仕分けられる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — N を大きくすると図は種数ごとに N の冪で仕分けられ、平面図だけが残ること（'t Hooft 1974）。図の和がランダム曲面の和になり、揺らぎが消えること。二次元の格子で N=∞ にだけ現れる相転移と、四次元の格子の N 依存。

前提となる章 — 4-03 摂動論と Feynman ダイアグラム。3-02・7-02・17-01 は要る分をその場で書きます。

先に言うこと — 大 N は物理の水準の展開です。懸賞問題は有限の N を要求し、N→∞ から戻る道は知られていません。数学的に確かな結果は強結合の格子か二次元に限られます。この本は質量ギャップも連続極限の構成も自分では示していません（公開された連続極限の構成は第二巻で読みます）。

この章の順序

1. N を動かす発想 — 小さい数の代わりに 1/N
2. 二重線の記法 — 線は二本の添字
3. 't Hooft の勘定 — N の冪は種数で決まる
4. ガウス行列の種数展開 — 実際に数える（寄り道：カタラン数と半円）
5. ランダム曲面 — 弦の絵へ
6. マスター場 — 揺らぎは 1/N で消える
7. Gross–Witten の転移 — N=∞ だけの折れ目
8. 四次元の格子 — 比は N でゆっくり動く
9. 言えること・言えないこと — 強結合と二次元の岸

01

N を動かすという発想

四次元の純ヤン–ミルズには展開に使える小さい数がありません。質量の尺度 Λ は $e^{-1/(2b_0 g^2)}$ の形で（$b_0 = 11N/(48\pi^2)$、17-01 の式 (1)）、g のどの冪にも映りません（17-01 §03）。't Hooft（1974）は群の大きさ N をつまみとみなし、次の極限を考えました（原論文の群は U(N)）既知 。

$$N \to \infty, \qquad \lambda = g^2 N \ \text{を固定} \tag{1}$$

要旨によれば 'only planar diagrams with the quarks at the edges dominate' で、1/N が当時の弦の模型の結合に当たります。比喩で言えば $N = 3$ を「$N = \infty$ に $1/9$ 程度の補正」と見る発想で、正確には補正の小ささは格子の数値で確かめるものです（§08）。問題文は、1/N 展開を通じてゲージ理論が $1/N$ を結合とする弦理論と同値かもしれないという双対性の予想を 'A prominent speculation' と呼び、そうした記述が 'perhaps a good starting point for a rigorous proof (for sufficiently large N)' になりうると書きます既知 。ただし要求は有限の N です（0-03）。

02

ゲージ場は行列：二重線の記法

ゲージ場 A_μ は各点で $N \times N$ のエルミート行列で（3-02）、成分 $A_\mu{}^i{}_j$ の二つの添字を色の線の両端とみなします。作用は（ユークリッド）

$$S = \frac{1}{2g^2}\int \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\, d^4x = \frac{N}{2\lambda}\int \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\, d^4x, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]. \tag{2}$$

積のトレースは $\mathrm{tr}(ABC) = A^i{}_j B^j{}_k C^k{}_i$ のように添字を輪につなぎ、(2) の三点・四点の頂点はどれもこの形です。伝播関数（4-03）の色の部分は U(N) で

$$\left\langle A^i{}_j\, A^k{}_l \right\rangle \ \propto\ \frac{\lambda}{N}\,\delta^i{}_l\,\delta^k{}_j. \tag{3}$$

デルタ一つが添字の線一本なので、グルーオンの線は向きが逆の二本の線、細い帯になります。これが**二重線の記法**です。連続の作用では（リー代数の水準で）、単位行列の方向は交換子から落ち、トレース 0 の部分との交差項も消えるので、純ゲージ理論の U(N) は SU(N) に**相互作用しない自由な U(1) 場**を一つ足したものです既知 。群としては U(N) は SU(N)×U(1) に分かれず（$e^{2\pi i k/N}$ 倍の単位行列が両方に入る）、格子の U(N)（§07）ではこの分離は成り立ちません。

03

't Hooft の勘定：N の冪は曲面の種数で決まる

(2)(3) から、頂点一つに N/λ、伝播関数一本に λ/N、閉じた添字の輪一つに $\sum_i \delta^i{}_i = N$ が掛かります。頂点 V・伝播関数 E・添字の輪 F の真空の図は

$$\left(\frac{N}{\lambda}\right)^{V}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^{E} N^{F} = N^{\,V-E+F}\,\lambda^{\,E-V} \tag{4}$$

に比例します。添字の輪それぞれに円板を貼ると向きの付いた閉曲面ができ、$V-E+F$ は曲面だけで決まる**オイラー標数** $\chi = 2-2h$ になります（h は取っ手の数＝**種数**。球面上の四面体なら $4-6+4=2$）。したがって

$$\ln Z = \sum_{h\ge 0} N^{\,2-2h}\, f_h(\lambda) \tag{5}$$

で、f_0 は平面に描ける図（**平面図**）の和、補正は $1/N^2$ ずつです 既知 。クォークの線は一本の添字の線で、曲面に縁を開けて $1/N$ を掛けます。(5) は摂動級数の並べ替えで、収束は別の問題です（4-12）。λ を固定する理由は β 関数（結合定数が、見る尺度 μ とともにどう変わるかを表す式。17-01 §02）にあります。§01 の b_0 を使って λ で書くと N が消えます 計算 。

$$\mu\frac{d\lambda}{d\mu} = -\frac{11}{24\pi^2}\,\lambda^2, \qquad \Lambda = \mu\,\exp\!\Big(-\frac{24\pi^2}{11\,\lambda(\mu)}\Big) \tag{6}$$

左辺は尺度 μ を少し変えたときの λ の変わり方で、右辺が負なので短い距離（大きい μ）ほど λ は小さくなります。λ を固定すれば Λ も固定され、格子でもこの取り方でなめらかな極限が得られています（Lucini–Teper） 物理 。

04

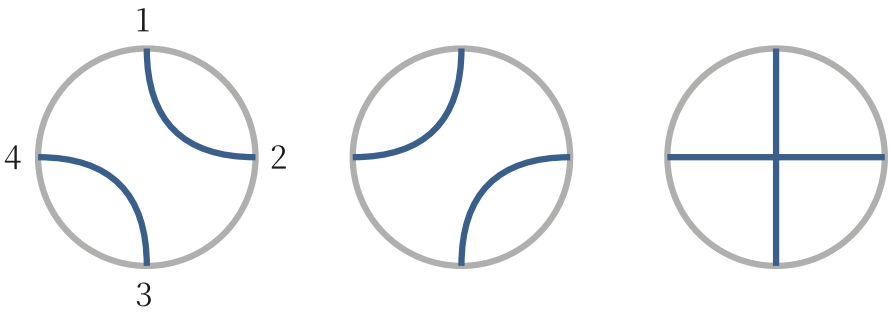
数えてみる：ガウス行列の種数展開

勘定 (4) は時空を一点に縮めた模型で確かめられます。エルミート行列 M を一つ、ガウス分布（1-08）に従わせます（dM は実成分のルベーグ測度）。

$$d\mu(M) \;\propto\; e^{-\frac{N}{2}\operatorname{tr} M^2}\,dM, \qquad \langle M_{ij}M_{kl}\rangle = \frac{1}{N}\,\delta_{il}\,\delta_{jk} \tag{7}$$

ガウス変数の積の期待値は、二つずつ組にする仕方の和です（Wick の定理、2-07）。$\frac{1}{N}\operatorname{tr} M^4$ の組み方は図0 の三通りで、(a)(b) が $\frac{1}{N}\cdot N^3\cdot N^{-2}=1$、(c) が N^{-2} です。

図0　$\operatorname{tr} M^4$ の足 1〜4 を二本ずつ結ぶ三通り。弦が交わらない (a)(b) は添字の輪が 3 つ、交わる (c) は 1 つ（球面に描けずトーラスが要る）



(a) 輪 3：1　　(b) 輪 3：1　　(c) 輪 1：1/N²

一般に

$$\left\langle \tfrac{1}{N}\operatorname{tr} M^{4} \right\rangle = 2 + \frac{1}{N^{2}}, \qquad \left\langle \tfrac{1}{N}\operatorname{tr} M^{2k} \right\rangle = \sum_{g \ge 0} \varepsilon_{g}(k)\, N^{-2g} \tag{8}$$

で、$\varepsilon_g(k)$ は $(2k-1)!!$ 通りの組み方のうち種数 g（添字の輪が $k+1-2g$ 個）のものの数です。係数は Harer–Zagier（1986）の漸化式で出せます。

$$(k+1)\,\varepsilon_{g}(k) = (4k-2)\,\varepsilon_{g}(k-1) + (k-1)(2k-1)(2k-3)\,\varepsilon_{g-1}(k-2) \tag{9}$$

表1　$\varepsilon_g(k)$（組み方の全列挙。漸化式 (9) と一致）

k	g=0	g=1	g=2	g=3	合計
4	14	70	21		105
5	42	420	483		945
6	132	2310	6468	1485	10395
7	429	12012	66066	56628	135135

図1　N と k を動かすと、$\langle \frac{1}{N}\operatorname{tr} M^{2k} \rangle$ に占める種数 g の図の割合が変わる。N を上げると平面図（g=0）だけが残る



k = 4　N = 2.00　⟨(1/N)tr M^8⟩ = 32.81　平面の分 14（42.7%）

計算 表1 と図1 の数値はこの端末で計算した（$k \le 7$ は全列挙と漸化式の突き合わせ）。JavaScript が無効なら表1 で読める。

合計 $(2k-1)!!$ は平面図の数よりずっと速く増え、$k=9$、$N=1$ では平面図は 0.02% 未満です。大 N 極限は、数の少ない図だけを残す極限です。

寄り道：カタラン数と半円

飛ばしてよい小節です。

表1 の $g=0$ の列はカタラン数 $\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$ です。$N\to\infty$ で M の固有値の分布は半円 $\rho(x)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}$（$|x|\le 2$）に近づきます（Wigner の半円則）既知 。この密度の $2k$ 次の積率 $\int x^{2k}\rho(x)\,dx$ を数値積分すると、$k\le 6$ で 10 桁までカタラン数と一致します 計算 。平面図を数えることは大 N の極限を求めることと同じで、Brézin–Itzykson–Parisi–Zuber（1978）はこれを数え方に使いました 既知 。

05
図の和はランダム曲面の和になる

帯の図を裏返して読みます。四点の頂点を正方形、三点の頂点を三角形、伝播関数を二辺の貼り合わせに置き換えると、図一つが多角形を貼った閉曲面一つになります。(5) は

$$\ln Z=\sum_{\Sigma} N^{\chi(\Sigma)}\,w_{\lambda}(\Sigma) \tag{10}$$

という**ランダム曲面**の和で、N が位相を、λ が多角形の数を数えます（w_λ は運動量の積分を含む重み）。比喩で言えば膜の形の和ですが、正確には (10) は級数の並べ替えで、曲面の和としての収束は別に示す必要があります。

物理はこの膜を、閉じ込めの管（17-03）が掃く弦の世界面と読みます。N^{2-2h} は弦の結合を $1/N$ とした弦の摂動展開の形で、問題文では 'may be equivalent to a string theory with 1/N as the string coupling constant' です 物理 。二次元 QCD では、$1/N$ 展開の係数が曲面の写像の和で決まり、閉じた弦の理論と読めます（Gross–Taylor 1993）既知 。

06
揺らぎが消える：因数分解とマスター場

勘定 (4) からもう一つ、$\frac{1}{N}\operatorname{tr}$ で規格化した量どうしの共分散が $1/N^2$ だけ小さいことが出ます 既知 。

$$\left\langle \tfrac{1}{N}\operatorname{tr}A\cdot\tfrac{1}{N}\operatorname{tr}B\right\rangle=\left\langle \tfrac{1}{N}\operatorname{tr}A\right\rangle\left\langle \tfrac{1}{N}\operatorname{tr}B\right\rangle+O\!\left(N^{-2}\right) \tag{11}$$

これが**因数分解**で、$A=B$ なら標準偏差が $1/N$ で縮みます。

表2　行列 (7) の乱数による $\frac{1}{N}\operatorname{tr}M^4$ 計算

N	平均	$2+1/N^2$	N×標準偏差

N	平均	$2+1/N^2$	N×標準偏差
2	2.2541(80)	2.2500	7.19
8	2.0152(38)	2.0156	6.09
128	2.0003(15)	2.0001	6.06

$N=\infty$ では、トレースで作った量（行列模型 (7) なら共役 $M\to UMU^\dagger$ で変わらない量、ゲージ理論ならゲージ不変な量）が乱数でなくなり、測度が一つの配位に集まるかのように振る舞います。その集まる先を**マスター場**と呼ぶ習わしがあります。比喩で言えば揺れる海が凍る絵ですが、正確には凍るのはトレースで作った量の分布で、行列の成分は揺らぎ続けます。

ゲージ理論で因数分解が効く代表は **Wilson ループ**です。閉じた道 C に沿ってゲージ場で平行移動した行列（$N\times N$ のユニタリ行列）の $\frac{1}{N}\operatorname{tr}$ のことで、17-01 §04 で定義します。**Schwinger–Dyson 方程式**は、積分変数をずらしても積分が変わらないことから出る、期待値どうしの関係式です。Wilson ループについてのこの方程式に因数分解を入れると、ループの期待値だけで閉じた方程式になります（Makeenko–Migdal 1979）物理。平面 $\mathbb{R}^2$ では Lévy がヤン–ミルズ測度（7-02）の大 N 極限を構成し、各 Wilson ループが確率収束で決定的な極限に近づくこと、この方程式が有限の N でも極限でも成り立つことを示しました 既知 。

07

二次元の格子で見る大 N：Gross–Witten の転移

格子の言葉を要る分だけ書きます（詳しくは 5-01）。時空を格子点の網に置き換え、隣り合う二点を結ぶ辺 ℓ ごとに群の元 $U_\ell\in U(N)$ を置きます。格子の最小の正方形（**プラケット**）p の四辺の元を一周の順に掛けた積を U_p と書き、作用は $\operatorname{tr}U_p$ で作ります。閉じた道に沿って辺の元を掛けた積の $\frac{1}{N}\operatorname{tr}$ が格子の **Wilson ループ**です。各 U_ℓ は **Haar 測度**（群の上の一様な確率測度、1-08 §03）に作用の重みを掛けた分布に従います。

二次元の格子では、辺の元の一部を 1 にそろえる**木ゲージ**でプラケットが独立になり、n 枚の面を囲む Wilson ループは正確に w^n です（7-02 §02・§03）。大 N は一枚の積分で調べられます。U(N) の Haar 測度に重みを付けて

$$d\mu(U)\;\propto\;\exp\Big(\frac{N}{\lambda}\operatorname{tr}(U+U^\dagger)\Big)dU,\qquad w_N(\lambda)=\Big\langle\tfrac{1}{N}\operatorname{Re}\operatorname{tr}U\Big\rangle \tag{12}$$

とします（7-02 の β なら $\beta=2N/\lambda$）。有限の N では、Weyl の積分公式（トレースだけで決まる関数の Haar 積分を、固有値 $e^{i\theta_1},\dots,e^{i\theta_N}$ の積分に直す式）と Heine の恒等式（その固有値の積分を行列式に直す式）から、修正 Bessel 関数

$$I_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{x\cos\theta}\cos n\theta\,d\theta$$

を成分とする行列式が出ます 既知 。

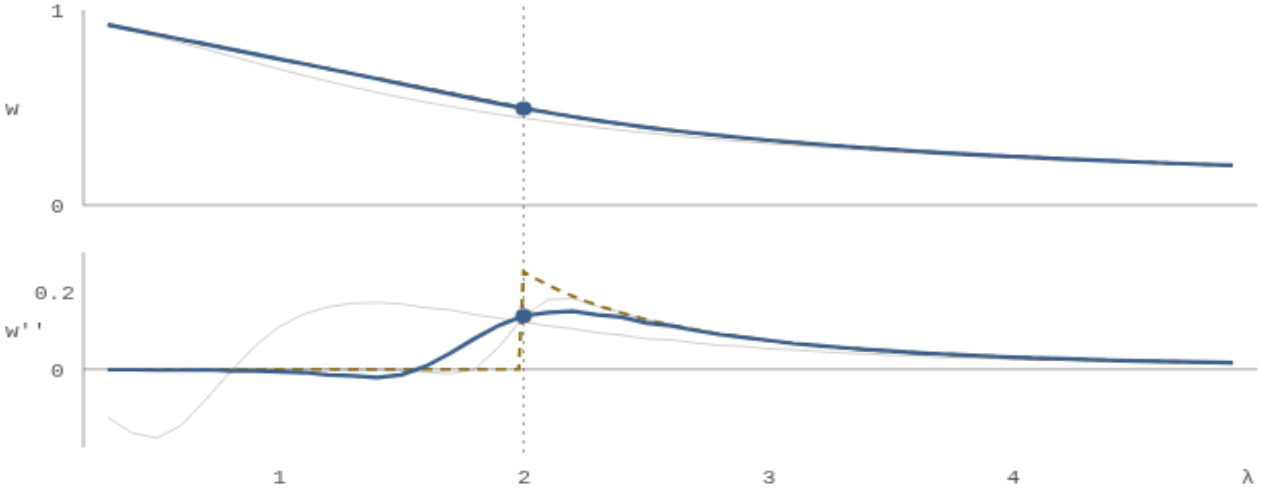
$$Z_N = \det\left[I_{j-k}(2N/\lambda)\right]_{j,k=1}^{N}, \qquad w_N = \frac{1}{2N}\,\frac{d\ln Z_N}{d(N/\lambda)} \tag{13}$$

Gross–Witten（1980）は $N\to\infty$ を**鞍点法**（大きいパラメータ N を含む $\int e^{Nf(x)}dx$ を、f が最大になる点のまわりで近似する方法）で評価し、$\lambda=2$ に三次の相転移を見つけました。同じ転移は Wadia の 1979 年の preprint にも現れます 既知 。この正規化での極限は次の形で、有限 N の値は表3 のようにここへ近づきます 計算 。

$$w_\infty(\lambda) = \begin{cases} 1-\lambda/4 & (\lambda \le 2) \\ 1/\lambda & (\lambda \ge 2) \end{cases} \tag{14}$$

$\lambda=2$ で値 1/2 も傾き −1/4 もつながり、二階微分が 0 から 1/4 へ跳びます（自由エネルギーでは三階微分）。弦張力は $\sigma = -\ln w$。

図2　N を選ぶと上段の $w_N(\lambda)$ と下段の w_N'' が太線になる（破線は N=∞）。N を上げると下段が λ=2 の段差に近づく



N = 10　λ = 2.0　w = 0.49634（N=∞：0.50000）　σ = 0.700　w" ≈ 0.14（N=∞：0→0.25 の段差）

表3　$w_N(\lambda)$。最後の列は式 (14)

λ	N=1	N=10	N=40	N=∞
1	0.69777	0.74937	0.74996	0.75000
2	0.44639	0.49634	0.49939	0.50000
4	0.24250	0.25000	0.25000	0.25000

計算 この図と表の数値はこの端末で計算した（(13) を 300 桁で評価、N=1,2 は直接積分と 10 桁一致。図の二階微分は刻み 0.1 の差分）。JavaScript が無効なら表3 で読める。

読み取れることは三つです 計算 。(i) 有限の N では Z_N は N/λ の整関数で正なので w_N はなめらかで、折れ目は $N=\infty$ でだけ現れます。(ii) 近づき方が相で違います。ずれは $\lambda=1$ でほぼ $-1/(16N^2)$、$\lambda=4$ では $N=20$ で 2×10^{-12} と指数的に小さく、$\lambda=2$ では N を倍にし

ても約 1/2.5 にしかなりません。(iii) 強結合側の式 $1/\lambda$ を $\lambda = 1$ に延ばすと 1 で、正しい 0.75 から外れます。強結合の展開が転移の向こうへ届かない例です（5-02）。

Wadia の preprint（arXiv に再録）はこの転移について 'seems to be a pathology of the infinite N limit' と書き、この模型では物理的な連続極限（$\lambda \to 0$ の側）とは関係しないとします。それでも $N \to \infty$ は有限の N に無い特異性を作りうるので、$N \to \infty$ と $a \to 0$ の入れ替えには理由が要ります。

08

四次元の格子：比は N でゆっくり動く

四次元では格子の数値に頼ります。Lucini–Teper（2001）は SU(2)〜SU(5) の $m_{0^{++}}/\sqrt{\sigma}$（最も軽いグルーボールと弦張力、17-01）の連続極限を $1/N^2$ の一次式で当てはめ、'all SU(N) gauge theories are close to SU(∞), at least as far as the low-lying mass spectrum is concerned' とまとめました 物理 。

$$\left.\frac{m_{0^{++}}}{\sqrt{\sigma}}\right|_{N} = a + \frac{b}{N^2} \tag{15}$$

論文の四点に (15) を誤差の重みで当てはめ直すと $a = 3.366 \pm 0.106$、$b = 1.93 \pm 0.54$、$\chi^2 = 0.26$（自由度 2）で、中心値は論文の $3.37(15) + 1.93(85)/N^2$ と同じです。定数だけでは $\chi^2 = 12.9$（自由度 3）で合いません 計算 。

表4　$m_{0^{++}}/\sqrt{\sigma}$ の連続極限の値と (15) の線（Athenodorou–Teper の列は、SU(3) が 2020 年、SU(2) と SU(∞) が 2021 年の論文）

N	Lucini–Teper	(15) の線	Athenodorou–Teper
2	3.844(61)	3.848	3.781(23)
3	3.607(87)	3.580	3.405(21)
4	3.49(14)	3.487	
5	3.38(16)	3.443	
∞	3.37(15)	3.366	3.072(14)

物理 一次資料の外挿値。 計算 「(15) の線」はこの端末の当てはめ（相関と系統誤差は無視）。

比の変化は SU(2) から SU(∞) まで、(15) の線では約 12.5%、Athenodorou–Teper の値では約 19% です 計算 。二つの一次資料の SU(∞) の値の差は約 2.0σ です 計算 。どれも連続極限の存在を前提にした外挿で、σ は弦の絵を通して取り出されています。「N=3 は N=∞ に近い」はその前提の中での観察です。

09

数学として言えること・言えないこと

定理になった大 N の結果は次の岸にあります 既知 。

- **平面図の理論**：'t Hooft（1983）は四次元のユークリッド空間で平面図だけの理論を扱い、'if all particles involved have non-vanishing masses' かつ結合が十分小さければ、絶対収束する手続きで Green 関数（場の積の期待値。伝播関数はその一つ）が得られ、それが Dyson–Schwinger 方程式（§06 の Schwinger–Dyson 方程式と同じもの）を一意に解く、としました（要旨：'an absolutely convergent procedure exists to obtain Green functions that uniquely solve the Dyson-Schwinger equations'）。ギャップは仮定です。
- **強結合の格子**：Chatterjee（2015）は強結合の SO(N) で大 N の Wilson ループの期待値を格子上の弦の軌跡の絶対収束する和として計算し、Chatterjee–Jafarov は同じ強結合の SO(N) で、Wilson ループの $1/N$ 展開を漸近展開として証明しました（初項は種数 0、高次ほど高い種数の曲面）。
- **すべての N と β**：Cao–Park–Sheffield は任意の行列の大きさ $N \geq 1$・$\beta > 0$・次元 $d \geq 2$ で、Wilson ループの期待値を**埋め込まれた地図**（曲面に描いたグラフを格子へ写したもの）の和で表しました。U(N) では、地図一つの重みは N^{χ} と格子の各辺の重み（Weingarten 関数。これ自体も N による）の積に比例します。
- **二次元**：平面のマスター場（§06）と全結合での面積則（7-02）。

切れ目

(1) 曲面の和は全 β で成り立つが、連続極限の側（大きい β）で面積則やギャップを出す評価は無い。(2) $N \to \infty$ と $a \to 0$ の入れ替えは正当化されていない。(3) $N = \infty$ で何かが示せても、懸賞問題は有限の N を要求し、$1/N$ 展開に収束の保証は無い。問題文も四次元について 'there might some day be an asymptotic solution in a large N limit' と書くにとどめる。

大 N は弦（17-05）と、$\lambda \to \infty$ も取るホログラフィー（17-08）で再び使われます。有限の N への距離は 17-10 で。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 (4)(5)（級数の並べ替えとして）、U(N) と SU(N) の差。	f_h の収束。四次元で $1/N$ 展開が理論を近似すること。
計算 (6)、表1〜表3、図1・図2、半円の密度の積率、(13) の N=1,2 での突き合わせ、表4 の当てはめ。	表4 は一次資料の外挿値の再当てはめ。
既知 強結合 SO(N) の大 N と $1/N$ 展開、曲面和、平面のマスター場、質量正を仮定した平面図の理論。	弱結合側の面積則・ギャップ。$N \to \infty$ と $a \to 0$ の交換。有限の N への帰還。
物理 平面図の支配、弦の結合 $1/N$、ループ方程式、比の N 依存の小ささ。	四次元の連続理論の定理ではない。この本は質量ギャップも連続極限の構成も自分では示していない（公開された連続極限の構成は第二巻）。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
(1)、平面図	既知	G. 't Hooft, Nucl. Phys. B72 (1974) 461。要旨を確認。
問題文の引用	既知	A. Jaffe, E. Witten, "Quantum Yang–Mills Theory"（Clay）§6.1・§6.6。本文を確認。
行列の積分で数える	既知	E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi, J.-B. Zuber, CMP 59 (1978) 35。要旨を確認。
(9)／半円則	既知	J. Harer, D. Zagier, Invent. Math. 85 (1986) 457／E. P. Wigner, Ann. of Math. 62 (1955) 548。書誌のみ。
(11) の因数分解、U(N) と SU(N) の差	既知	大 N の標準的な事実として扱った（'t Hooft 1974・Brézin–Itzykson–Parisi–Zuber 1978 の枠内）。この二点について両論文の本文は書誌のみ。(11) は表2 の数値でも確かめた。
(13) の行列式	既知・計算	Weyl の積分公式と Heine の恒等式による標準的な書き換え（原典は書誌のみ・未確認）。この端末で N=1,2 の直接積分と突き合わせた。
2 次元 QCD と弦	既知	D. J. Gross, W. Taylor, NPB 400 (1993) 181, hep-th/9301068。要旨を確認。
ループ方程式	物理	Yu. M. Makeenko, A. A. Migdal, PLB 88 (1979) 135。要旨を確認。
平面のマスター場	既知	T. Lévy, arXiv:1112.2452。要旨を確認。
転移、Wadia の引用	既知	D. J. Gross, E. Witten, PRD 21 (1980) 446。要旨を確認。S. R. Wadia, arXiv:1212.2906（1979 年の preprint の再録）。要旨を確認。(14) は両論文の本文では未確認で、有限 N の値の極限として確認した。

もの	種別	出典・道具
表4、引用	物理	B. Lucini, M. Teper, JHEP 0106 (2001) 050, hep-lat/0103027（本文を確認）。A. Athenodorou, M. Teper, arXiv:2007.06422 表 17（SU(3)）／arXiv:2106.00364 表 23（SU(2)）・表 31（SU(∞)）。本文の表を確認。
§09 の定理	既知	G. 't Hooft, "Rigorous construction of planar diagram field theories in four-dimensional Euclidean space", CMP 88 (1983) 1。S. Chatterjee, arXiv:1502.07719。S. Chatterjee, J. Jafarov, arXiv:1604.04777。S. Cao, M. Park, S. Sheffield, arXiv:2307.06790。要旨を確認。
表・図・(6)・(13)	計算	この端末の Python 3（numpy、decimal 300 桁）。

次に読む章：17-05 ひも理論と余剰次元 — 曲面の和を弦の理論として読むと何が要るか。

ひも理論と余剰次元 — 26・10・11 は整合性の条件から出る数

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 弦を基本の対象として量子化すると、時空の次元が自由に選べなくなること。ボゾン弦の 26 を二通り（第一励起／中心電荷）で、超弦の 10 を同じ帳尻で導く筋道。11 が超重力から来る数であること。

前提となる章 — 17-04 大 N。17-03 の零点エネルギーと $-1/12$ を使います。群の表現（1-02）、ローレンツ変換（2-04）、調和振動子（2-06）は要る分をその場で書きます。

先に言うこと — 導出は物理の水準です。世界面の二次元の計算は正確ですが、弦の理論に非摂動的な定義は無く、M 理論は存在が仮説です。余剰次元の話は四次元のヤン–ミルズの構成にも質量ギャップにも何も示していません。この本は質量ギャップも連続極限の構成も自分では示していません（公開された連続極限の構成は第二巻で読みます）。

この章の順序

1. 弦を基本の対象にする — 管の弦との違い
2. 横の振動を数える — 質量の公式
3. なぜ 26 か（一） — 第一励起は質量ゼロ
4. 準位を数える — タキオンと増え方（寄り道：分割数と Hardy–Ramanujan・寄り道：状態の増え方と Hagedorn 温度）
5. なぜ 26 か（二） — 中心電荷の帳尻
6. なぜ 10 か — 世界面の超対称性（寄り道：$26 - 10 = 16$ とヘテロ弦）
7. なぜ 11 か — 超重力の数
8. 「臨界次元」は臨界中心電荷 — 幾何でなくてよい
9. ヤン–ミルズに戻る — 管の弦とホログラフィー

01

弦を基本の対象にする

17-03 は閉じ込めの管を一本の弦とみなし、17-04 §05 では $1/N$ が弦の結合の役をしました。弦の理論も中間子の模型（**双対共鳴模型**）から始まったとされます。出発点としてよく挙げられるのは Veneziano（1968）の散乱振幅で、たとえば Neveu–Schwarz（1971）の要旨は 'A new dual-resonance model of mesons is constructed …' と書き出します 既知 。中間子ではスピン J と質量の二乗が直線に並びます（Regge 軌跡）。張力 T、長さ $2R$ の弦が角速度 $1/R$ で回ると両端は光速で、エネルギーと角運動量（2-04）を積分すると $E = \pi T R$、$J = \pi T R^2/2$、つまり

$$J = \alpha' E^2, \qquad \alpha' = \frac{1}{2\pi T}. \tag{1}$$

量子化した開いた弦では準位 N の最大のスピンが $J_{\max} = \alpha' M^2 + 1$ です（Tong §3.1.3）。17-01 の $\sqrt{\sigma} = 485$ MeV を T に入れると $\alpha' = 0.677\ \text{GeV}^{-2}$、$\sqrt{\alpha'} \approx 0.16$ fm です 計算 。この章の**基本の弦**は管の有効理論ではなく、どんなに短い距離でも矛盾なく量子化できることを要求されます。すると時空の次元 D が自由な入力でなくなります。この章では弦の文献に合わせて、時空の次元を D と書きます。17-03 や付録の記号表の d と同じもので、空間だけの次元ではありません。

02

横の振動を数える：質量の公式

弦は時空 $\mathbb{R}^{1,D-1}$ の中で面（**世界面**）を掃きます。**光円錐ゲージ**では、時間 X^0 と縦の一方向 X^{D-1} を組み替えた光円錐の座標 $X^{\pm} = (X^0 \pm X^{D-1})/\sqrt{2}$ を使い、X^+ を世界面の時間 τ に比例させます（$X^+ = x^+ + \alpha' p^+ \tau$。$x^+$・$p^+$ は弦の重心の位置と運動量の $+$ 成分。Tong (2.13)）。X^- の振動は消えませんが、制約の式によって横の振動から決まります。独立に振動するのは $D-2$ 本の横の方向だけです（Goddard–Goldstone–Rebbi–Thorn 1973） 既知 。17-03 の横の変位 $h \in \mathbb{R}^{d-2}$ と同じ数え方です（$d = D$）。方向 i の n 番目の振動は調和振動子で（2-06）、生成演算子 α^i_{-n} を一つ掛けるごとに**準位** N が n 増えます。開いた弦の質量は

$$\alpha' M^2 = N - a \tag{2}$$

で、$-a$ は零点エネルギー（全振動子の $\frac{1}{2}n$ の和）です。有限部分は 17-03 の $-1/12$（17-03 §04）なので

$$a = -\frac{D-2}{2}\sum_{n\geq 1} n \;\longrightarrow\; -\frac{D-2}{2}\cdot\Big(-\frac{1}{12}\Big) = \frac{D-2}{24}. \tag{3}$$

17-03 の Lüscher 項 $-\pi(D-2)/(24R)$ と Nambu–Goto の準位の $(D-2)/24$（17-03 §06）は、この同じ数です 既知 。Tong はこの和の扱いを 'famously unconvincing' と認め、この章の §05 と同じ中心電荷の方法で導き直します（Tong §4.4.1）。閉じた弦は右向きの振動 α と左向きの振動 $\tilde{\alpha}$ を持ち、準位は $N = \tilde{N}$ です（Tong (2.26)）。

03

なぜ 26 か（一）：第一励起は質量ゼロでなければならない

粒子の内部の状態は、運動量を変えない回転（**小群**）の表現になります（1-02。Wigner 1939）。質量 $M > 0$ なら静止系に移れて小群は $SO(D-1)$、質量ゼロなら運動量 $(p, 0, \ldots, 0, p)$ を保つ $SO(D-2)$ です（正確には $D-2$ 次元の回転と平行移動からなる群 $ISO(D-2)$ ですが、有限個の状態に効くのは回転の部分 $SO(D-2)$ です）。四次元の光子の偏りは 2 つ、重いスピン 1 の粒子は 3 つです 既知 。開いた弦の準位 1 の $\alpha^i_{-1}|0\rangle$ は $D-2$ 状態の横のベクトルで、重いベクトルに要る $D-1$ 成分に一つ足りません。ローレンツ対称性を保つには質量ゼロでなければならず、

$$\alpha' M^2 = 1 - a = 0 \implies a = 1 \overset{(3)}{\implies} \frac{D-2}{24} = 1 \implies D = 26. \tag{4}$$

Tong は閉じた弦の第一励起（$(D-2)^2$ 状態）について同じ議論をし、'these states will have to be massless. And this is only the case if the dimension of spacetime is D = 26' と書きます 物理 。

ローレンツ代数で確かめる

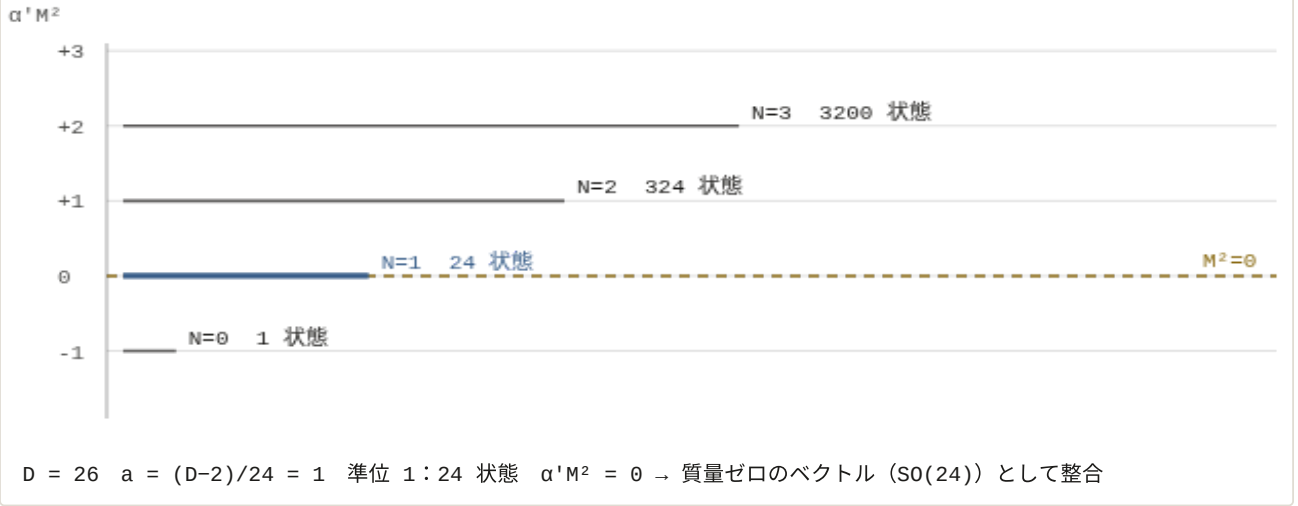
丁寧には、ローレンツ変換（回転とブースト）を生む保存量 $M^{\mu\nu}$ が、光円錐ゲージでもローレンツ代数の関係を満たすかを確かめます。$M^{\mu\nu}$ は弦の振動が持つ角運動量を含みます。要になるのは $[M^{i-}, M^{j-}] = 0$ で、i, j は横の方向、$-$ は光円錐の方向 X^- です（Tong §2.4）。X^- の振動が横の振動で決まるので、この交換子は横の振動子で書けます。

$$[M^{i-}, M^{j-}] \;\propto\; \sum_{n>0}\Big[\Big(\frac{D-2}{24}-1\Big)n + \frac{1}{n}\Big(a - \frac{D-2}{24}\Big)\Big]\big(\alpha^i_{-n}\alpha^j_n - \alpha^j_{-n}\alpha^i_n\big) + (\alpha \leftrightarrow \tilde{\alpha}) \tag{5}$$

比例係数 $2/(p^+)^2$ は省きました。これは閉じた弦の式で、$(\alpha \leftrightarrow \tilde{\alpha})$ は左向きの振動の同じ形の項です。すべての n で消えるのは $D = 26$ かつ $a = 1$ のときだけです 既知 。原典は Goddard–Goldstone–Rebbi–Thorn（1973）で、その要旨も、角運動量の演算子がローレンツ群 $O(D-1,1)$ を生成するのは 'only when the first excited state is a photon, i.e., a

spin-one massless state, and when D = 26' と述べています。閉じた弦の第一励起は $24^2 = 576 = 299 + 276 + 1$ 状態で 計算 、Tong はこれを $SO(24)$ の対称トレースなし・反対称・トレースの場 $G_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \Phi$ に当て、最初を質量ゼロのスピン 2、すなわち重力子と読みます 物理 。

図1　D を動かすと準位 $\alpha' M^2 = N - a$ が上下する（線の長さは状態数の対数）。太線の準位 1（超弦は 1/2）が $M^2 = 0$ に乗るのは、ボゾン弦で D=26、超弦で D=10 のときだけ



D = 26　a = (D−2)/24 = 1　準位 1：24 状態　α'M² = 0 → 質量ゼロのベクトル（SO(24)）として整合

計算 この図の数値はこの端末で計算した。JavaScript が無効なら (4) と表2 で読める。

04

準位を数える：タキオンと状態数の増え方

$D = 26$ の開いた弦の $N = 0$ は $\alpha' M^2 = -1$、質量の二乗が負の**タキオン**です（Tong §3.1.1）。質量の項の符号が逆の場（2-02）で、ポテンシャルの極大の周りで展開していることを意味します 物理 。準位 N の状態数 d_N は、N を「24 色の正の整数」の和に分ける仕方の数です。

$$\sum_{N \geq 0} d_N \, q^N = \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{-24} \tag{6}$$

準位 2 の 324 は $SO(25)$ の対称トレースなし 2 階の次元、準位 3 の 3200 は $2900 + 300$（対称トレースなし 3 階と反対称 2 階）です 計算 。Tong によれば全ての励起が $SO(D-1)$ の表現に収まり、条件は準位 1 だけです。準位 2・3 の数が $SO(D-1)$ の表現の次元の和に合うことは、$D = 4$〜39 で確かめました 計算 。どちらも D の三次以下の多項式なので、これで任意の D で成り立つ恒等式になります。

表2　開いたボゾン弦（$D = 26$）の準位。比は寄り道の Bessel 形との比（$n = N - 1$）

N	$\alpha' M^2$	d_N	比
0	−1	1	

N	$\alpha' M^2$	d_N	比
1	0	24	
2	1	324	1.000009
3	2	3200	0.999998
10	9	6.392×10^{8}	1.00000000
400	399	1.446×10^{91}	1.00000000

計算 この表の数値はこの端末で計算した。

寄り道：分割数と Hardy–Ramanujan

飛ばしてよい小節です。

1 色なら (6) の係数は分割数 $p(N)$ で（$4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1$ の $p(4)=5$）、Hardy と Ramanujan（1918）は $p(N)\sim\frac{1}{4\sqrt{3}\,N}e^{\pi\sqrt{2N/3}}$ を与えました 既知 。24 色の (6) では、$n=N-1$ と置くと $d_N\approx\frac{1}{\sqrt{2}}n^{-27/4}e^{4\pi\sqrt{n}}$ ですが、近づき方は遅く、比は $N=400$ でも 0.71 です。よく合うのは修正 Bessel 関数 I_{13} を使った形 $2\pi n^{-13/2}I_{13}(4\pi\sqrt{n})$ で、$N=2$ で既に 5 桁一致します（表2） 計算 。$I_\nu(x)$ は、x が大きいと $e^x/\sqrt{2\pi x}$ のように振る舞う関数です。これを入れると $2\pi n^{-13/2}\,e^{4\pi\sqrt{n}}/\sqrt{8\pi^2\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}n^{-27/4}e^{4\pi\sqrt{n}}$ となり、二つの式は大きな n で一致します。比 0.71 は、I_{13} をこの近似で置き換えたときのずれです。

寄り道：状態の増え方と Hagedorn 温度

飛ばしてよい小節です。

準位 N の開いた弦は $\alpha' M^2=N-1$ なので、上の寄り道と同じく $n=N-1$ と置くと $\alpha' M^2=n$、つまり $M=\sqrt{n/\alpha'}$ です。上の寄り道の漸近形から、状態の数は $e^{4\pi\sqrt{n}}=e^{4\pi\sqrt{\alpha' M}}$ の割で増えます（前に付く n のべきは、指数に比べてゆっくり変わります）。温度を Θ と書きます（張力の T と区別するため。ボルツマン定数を 1 とする単位）。質量 M の状態の重みはボルツマン因子 $e^{-M/\Theta}$（2-08）なので、数と重みの積は $e^{(4\pi\sqrt{\alpha'}-1/\Theta)M}$ の形になり、$\Theta>\Theta_H=1/(4\pi\sqrt{\alpha'})$ では M とともに増えて和が発散します。この Θ_H が **Hagedorn 温度**です 物理 。17-03 §06 の Hagedorn 長さ L_H（$\sigma L_H^2=\pi(d-2)/3$、σ は張力でこの章の T）に $d=D=26$、$\sigma=1/(2\pi\alpha')$ を入れると $L_H=4\pi\sqrt{\alpha'}$ で、その逆数 $1/L_H$ は Θ_H と一致します 計算 。17-03 で周期の方向を時間とみたとき $1/L$ が温度になったのと同じ読み方です。

05

なぜ 26 か（二）：中心電荷の帳尻

二つ目の導出は、世界面の上の D 個の場 X^μ を二次元の自由なスカラー場（2-02）として見ます。尺度を変えても形の変わらない二次元の理論（**共形場理論**）は**中心電荷** c を持ち、自由なスカラー 1 本で $c=1$ です。正確には、共形場理論は角度を保つ写像（**共形変換**）で不変な理論で、尺度の変更はその一部です。二次元ではこの写像が無限に多く、それが理論を強く縛ります。c は周 L の円筒の上の基底エネルギーに現れます（左右の c が等しい場合）。

$$E_0(L) = -\frac{\pi c}{6L} \tag{7}$$

（Blöte–Cardy–Nightingale 1986、Affleck 1986。Tong §4.4.1）既知。17-03 の閉じた管の $-\pi(D-2)/(6L)$ は $c=D-2$ の場合で、端のある管の $-\pi c/(24R)$ について Tong は 'c counts the number of degrees of freedom of the QCD flux tube' と書きます。Lüscher の係数は管の中心電荷を測っています。

Polyakov の定式化では世界面の計量も積分する場で、座標の取り替えと計量の尺度の変更（Weyl 変換）がゲージ対称性です。ゲージを固定すると補助の場（ゴースト。4-08 の Faddeev–Popov と同じ仕組み）が入り、中心電荷 -26 を持ちます。ゲージ対称性に量子的な破れ（アノマリー）は許されないので、合計は 0 でなければなりません（Tong §5.3）物理。

$$c_{\text{物質}} + c_{\text{ゴースト}} = D\cdot 1 + (-26) = 0 \;\Longrightarrow\; D = 26 \tag{8}$$

光円錐の $D-2$ 本と $-1/12$、共変な形の D 本とゴーストの -26 が、同じ 26 を選びます。正確には、(8) は計量の尺度（Weyl）をゲージ対称性として保つ限りの条件です。$D\neq 26$ では尺度の自由度が消えずに残り、Liouville 場と呼ばれる新しい場として振る舞います（Tong §5.3.2 の非臨界弦）。Polyakov（1981）の要旨も 'At D = 26 the string dynamics is that of harmonic oscillators …, otherwise it is described by the nonlinear integrable theory' と、$D\neq 26$ の側を別の理論として書いています。

06

なぜ 10 か：世界面の超対称性

ボゾン弦にはフェルミオン（電子やクォークの仲間）が無く、タキオンがあります。世界面に X^μ の相棒のフェルミオン ψ^μ（1 本で $c=1/2$）を加え、両者を入れ替える**世界面の超対称性**をゲージ対称性にすると、ゴーストが中心電荷 $+11$ を足します。

$$D\left(1+\frac{1}{2}\right) + (-26+11) = 0 \;\Longrightarrow\; D = 10 \tag{9}$$

Tong §5.3.1 では 'c = 26 − 11 = 15'、'D(1 + 1/2) = 15' です 物理 。光円錐でも確かめます。フェルミオンの振動は境界条件により半整数 $r = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$（Neveu–Schwarz、NS）か整数（Ramond、R）の番号を取り、零点エネルギーは符号が逆の $-\frac{1}{2}\sum r$ です。有限部分は表1です。

表1　和から $1/\varepsilon^2$ を引いた残り（切り方 $e^{-\varepsilon r}$）

ε	整数 $\sum n e^{-\varepsilon n}$	半整数 $\sum r e^{-\varepsilon r}$
0.1	-0.0832917	0.0416302
0.001	-0.0833333	0.0416667
→ 0	-1/12	+1/24

計算 この表の数値はこの端末で計算した（閉じた形と直接の和を突き合わせ）。

横一方向あたりの零点エネルギーは NS で $-\frac{1}{24} - \frac{1}{48} = -\frac{1}{16}$、R で $-\frac{1}{24} + \frac{1}{24} = 0$ です 計算 。NS の準位は $\alpha' M^2 = N - \frac{D-2}{16}$（$N$ は半整数も取る）で、第一励起 $\psi^i_{-1/2}|0\rangle$ はまた $D-2$ 成分のベクトルです。質量ゼロの条件 $\frac{1}{2} - \frac{D-2}{16} = 0$ は $D = 10$ で、(9) と一致します（図1 の「超弦」）。NS の基底 $\alpha' M^2 = -\frac{1}{2}$ のタキオンは、状態の一部を捨てる規則（Gliozzi–Scherk–Olive 1977 に帰される）で除かれるとされます 物理 。

寄り道：26 − 10 = 16 とヘテロ弦

飛ばしてよい小節です。

Green–Schwarz（1984）は 10 次元のゲージ場と重力のアノマリーが相殺される群として $SO(32)$ と $E_8 \times E_8$ を挙げ、Gross–Harvey–Martinec–Rohm（1985）はヘテロ弦を 'a chiral combination of the closed D=26 bosonic and D=10 fermionic strings' として作りました 既知 。26 と 10 の差は 16 で、$SO(32)$ と $E_8 \times E_8$ はともに階数 16、次元 496 です（E_8 は根 240 本と階数 8 で 248。1-04） 計算 。この 16 がゲージ群になる仕組みは 17-07 です。

07

なぜ 11 か：弦ではなく超重力の数

11 は弦の臨界次元ではありません。Cremmer–Julia–Scherk（1978）の要旨は 'We present the action and transformation laws of supergravity in 11 dimensions' です 既知 。**超重力**は重力子とその超対称な相棒（グラビティーノ）を含む場の理論で、11 がその上限であることは Nahm（1978）の分類の帰結とされます。

骨組みはこうです 物理 。**超電荷**は、ボソンとフェルミオンを入れ替える対称性（超対称性）の生成子で、Q はその実成分の数です。超電荷が Q 個あると、質量ゼロの多重項のヘリシティ

（進む向きの周りの回転量）の幅は $Q/8$ で、スピン 2 以下（幅 4 以下）なら $Q \le 32$。11 次元がこれに収まる最後の次元とされます。

11 次元の超重力の場は、重力子と **3-形式**とグラビティーノです。3-形式は添字を三つ持つ反対称な場で、電磁ポテンシャル A_μ（2-03）の添字を三つにしたものです。自由度を小群 $SO(9)$（$D=11$ の $SO(D-2)$）で数えると、重力子 $45-1=44$ と 3-形式 $\binom{9}{3}=84$ のボソン 128 が、グラビティーノ $9\cdot 16-16=128$ と釣り合います 計算 。グラビティーノの勘定では、$SO(9)$ の**スピノル**（フェルミオンの内部の自由度を運ぶ量）が 16 成分であることを、数としてだけ使いました。

Witten（1995）は要旨で 'It is argued … that eleven-dimensional supergravity arises as a low energy limit of the ten-dimensional Type IIA superstring' と論じました。**IIA 弦**は 10 次元の閉じた超弦の一種で、右向きと左向きの振動が持つ超対称性の向き（カイラリティ）が逆のものです。IIA 弦の結合を λ とすると、11 番目の円の半径は 11 次元の単位で

$$r(\lambda)=\lambda^{2/3} \tag{10}$$

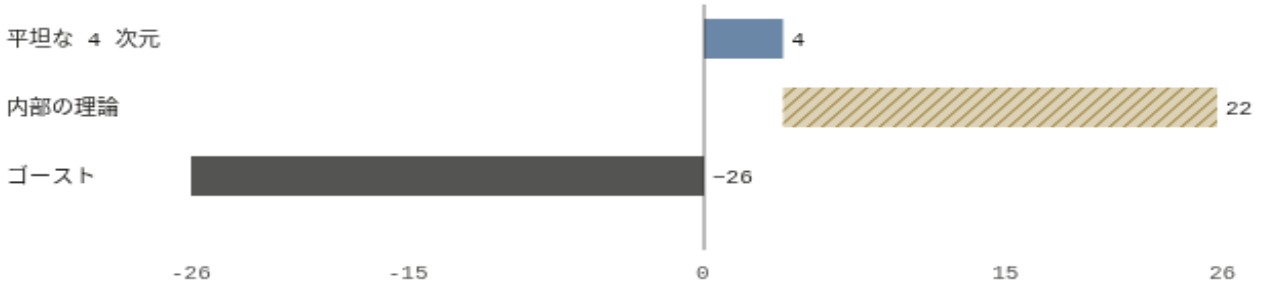
です（同論文 式 (2.13)） 物理 。弱結合では円が縮み、円を回る運動量 n の状態は弦の計量で質量 $\sim |n|/\lambda$（式 (2.14)）と重くて見えません。比喩で言えば、弦の 10 次元は細い 11 次元の筒を遠くから見た姿です。正確には、低エネルギーの議論による予想で、強結合の IIA 弦に独立な定義はありません。Hořava–Witten（原稿 1995、掲載 1996）はヘテロ弦と 11 次元の結びつきを 'We propose' の形で**提案**しました。続く論文（1996）は、境界ごとにゲージ群が E_8 一つずつに決まることを論じ、それが 'the hypothesis that there is a consistent quantum M-theory' を新たに試す材料になると書いて、M 理論の存在を仮説として扱っています。この 11 次元の理論（M 理論）に完全な定義はありません。

08

「臨界次元」は臨界中心電荷：余剰次元は幾何でなくてもよい

(8)(9) が要求しているのは次元ではなく中心電荷です。Tong は 'the "critical dimension" of string theory is something of a misnomer: it is really a "critical central charge"' と書きます 既知 。四次元の平坦な時空なら、ボゾン弦では $X^0,\dots,X^3$ の $c=4$ に $c=22$ **の任意の共形場理論**を足せばよく、Tong は 'It is what we really mean when we talk about the "extra hidden dimensions of string theory"' と続けます。超弦では平坦な四次元が $c=6$ で、残りは $c=9$ です 計算 。比喩で言えば、帳簿の総額だけが決まっていて品目は自由です。正確には、内部の理論は他の条件（世界面の超対称性など）も満たす必要があり、多様体として幾何に読めるのは特別な場合です。そのとき余剰次元がどう見えなくなるかは 17-06、ゲージ場が出る仕組みは 17-07 です。

図2　平坦な次元の数 $d_{\text{平坦}}$ を動かすと中心電荷の帳簿の内訳が変わる。減らした分を内部の理論（斜線）が引き受け、合計は 0 のまま



ボゾン弦　平坦な 4 次元 c = 4　内部 c = 22　ゴースト c = −26　合計 0

計算 この図の算術はこの端末で確かめた。JavaScript が無効なら $d_{\text{平坦}} + c_{\text{内部}} = 26$（超弦は $\frac{3}{2}d_{\text{平坦}} + c_{\text{内部}} = 15$）で読める。

09

ヤン–ミルズに戻る：四次元の管と、ホログラフィーの次元

では 17-03 の四次元の管の弦は、26 次元でないので矛盾するのでしょうか。Polchinski–Strominger（1991）の要旨は、'QCD strings' などの四次元の弦の長い距離の有効理論が 'an interacting Poincaré-invariant conformal field theory with four bosons and c=26' だと述べ、両立を摂動の二次まで示しました 物理。自由なら $c = 4$ の 4 本のボソンが、相互作用で $c = 26$ を持つ形です。臨界次元が縛るのは基本の弦で、長い管の有効理論は四次元のまま整合します。ただし有効理論は短い距離で壊れ、数学的な導出もありません（17-03 §06）。

基本の弦の余剰次元がヤン–ミルズに戻るのはホログラフィー（17-08）を通してで、内訳は模型ごとに違います。Maldacena の $AdS_5 \times S^5$（AdS_5 は負の定曲率の五次元時空で、四次元の方向と動径の方向を持つ。S^5 は五次元球面）は 10 = 4 + 動径 + S^5、Witten 1998 §4 は 11 = 4 + 円 2 つ + 動径 + S^4（IIA に下ろすと円が一つ減って 10）、Gürsoy–Kiritsis の改良ホログラフィック QCD は 5 = 4 + 動径です。ギャップを作る次元も模型で違い、Witten の型では動径と潰れる円が作る二次元の葉巻、ボトムアップ型では動径一本と赤外の特異点です（17-09）物理。これらの余剰次元は双対な記述の道具で、実在の次元だとは主張されておらず、実験の下限（17-06）とは別の話です。

切れ目

(1) 弦の理論には非摂動的な定義が無く、M 理論は存在そのものが仮説です。(2) ホログラフィーの計算が効くのは $N \to \infty$、't Hooft 結合 $\to \infty$ の側で、四次元の純ヤン–ミルズへ戻す極限とは向きが逆です（17-10）。(3) 問題文（Jaffe–Witten、2000）は、四次元で Wightman などの公理（4-09）を満たす非自明な相対論的場の理論を 'at present we do not know' と書きます。四次元の理論は、2026 年に公開された構成が Wilson の格子の

極限として作りました（委員会の評価。第二巻）。余剰次元の道は、四次元の理論をこの意味で構成していません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 (3)(5) の数え上げ（光円錐での世界面の二次元の計算として）。	弦の理論の非摂動的な定義。M 理論の存在。
物理 (4) の読み（第一励起を質量ゼロと読む）と (8)(9) の帳尻（ゴーストの中心電荷とアノマリーの議論）。	$D \neq 26$ の非臨界弦（Liouville 場）の扱い。
計算 表1・表2、図1・図2、576・496・128、Hagedorn 温度（17-03 の $1/L_H$）、α'。	表2 の Bessel 形がよく合う理由。
物理 重力子とタキオンの読み、11 次元と IIA の関係、Hořava–Witten（提案）。	「11 が上限」の原典での確認。
物理 四次元の管の有効理論が $c = 26$ で整合すること（摂動の二次まで）。模型の次元の内訳。	有効な弦の全次数での整合性。四次元のヤン–ミルズに管が在ること。余剰次元から四次元の理論を構成すること。この本は質量ギャップも連続極限の構成も自分では示していない（公開された連続極限の構成は第二巻）。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
$J_{\max}$、(2)〜(9)、各引用	既知・物理	D. Tong, "String Theory", arXiv:0908.0333 §2.2–2.4・§3.1・§4.4.1・§5.3（§5.3.2 の非臨界弦を含む）。本文を確認。
光円錐量子化と $D = 26$（(4)(5) の原典）／'At D = 26 …'	既知・物理	P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebbi, C. B. Thorn, Nucl. Phys. B56 (1973) 109／A. M. Polyakov, Phys. Lett. B103 (1981) 207。要旨を確認。
中間子の模型、NS と R／タキオンを除く規則	既知・物理	G. Veneziano, Nuovo Cim. A57 (1968) 190（書誌のみ。双対共鳴模型の出発点という位置づけは未確認）／A. Neveu, J. H. Schwarz, Nucl. Phys. B31 (1971) 86／P. Ramond, Phys. Rev. D3 (1971) 2415（要旨を確認）／F. Gliozzi, J. Scherk, D. Olive, Nucl. Phys. B122 (1977) 253（要旨のみ。射影の帰属は未確認）。
小群／式 (7)	既知	E. P. Wigner, Ann. of Math. 40 (1939) 149／H. W. J. Blöte, J. L. Cardy, M. P. Nightingale, PRL 56 (1986) 742／I. Affleck, PRL 56 (1986) 746。書誌のみ（内容は Tong で確認）。

もの	種別	出典・道具
アノマリー相殺／ヘテロ弦	既知	M. B. Green, J. H. Schwarz, Phys. Lett. B149 (1984) 117／D. J. Gross, J. A. Harvey, E. J. Martinec, R. Rohm, PRL 54 (1985) 502。要旨を確認。
11 次元超重力／上限	既知	E. Cremmer, B. Julia, J. Scherk, Phys. Lett. B76 (1978) 409（要旨を確認）／W. Nahm, Nucl. Phys. B135 (1978) 149（要旨のみ。「11 が上限」は未確認）。
(10)、KK 質量、Hořava–Witten	物理	E. Witten, Nucl. Phys. B443 (1995) 85, hep-th/9503124（本文を確認。式 (2.13) (2.14)）／P. Hořava, E. Witten, Nucl. Phys. B460 (1996) 506, hep-th/9510209（原稿 1995-10）と Nucl. Phys. B475 (1996) 94, hep-th/9603142（要旨を確認）。
四次元の管と $c = 26$	物理	J. Polchinski, A. Strominger, PRL 67 (1991) 1681。要旨を確認。
分割数の漸近形	既知	G. H. Hardy, S. Ramanujan, Proc. London Math. Soc. (2) 17 (1918) 75。書誌のみ。
模型の内訳／問題文	物理・既知	J. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 231, hep-th/9711200／E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 505, hep-th/9803131 §4／U. Gürsoy, E. Kiritsis, JHEP 02 (2008) 032, arXiv:0707.1324（要旨）／A. Jaffe, E. Witten, "Quantum Yang–Mills Theory"（Clay の問題文、2000）。Witten 1998 §4 と問題文は本文を確認。
表・図・算術	計算	この端末の Python 3。zero_point.py（表1）、levels.py（表2・$SO(D-1)$・Hagedorn・α'）、counts.py（576・128・496・帳尻）。

次に読む章：17-06 余剰次元が見えなくなる仕組み ― 幾何として読める余剰次元が、なぜ四次元の実験に映らないか。

余剰次元が見えなくなる仕組み — 小さな円の上の波は、重い粒子の塔として見える

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 余剰次元が見えないとは、その方向の揺れが重い粒子の列（KK 塔）になり、低いエネルギーでは作れないことです。塔の最低段はラプラシアンの第一固有値で、曲率が非負なら直径で押さえられること（Zhong–Yang）。Calabi–Yau と膜という二つの隠し方と、実験の下限。

前提となる章 — 17-05 ひも理論と余剰次元。2-02 §06・2-05 §08・1-10 §07 を使います。フーリエ級数とレイリー商はその場で書き、計量・ラプラシアン・Ricci 曲率・Einstein 方程式は使う分だけその場で定義します。

先に言うこと — 現実の世界に余剰次元があるかは分かっておらず、実験の数値は下限です。KK 塔の隙間は内部空間が小さいことから来るもので、ヤン–ミルズの質量ギャップ（$\mathbb{R}^4$ の上で相互作用から生じるもの）とは別物です。この本は質量ギャップも連続極限の構成も自分では示していません（公開された連続極限の構成は第二巻で読みます）。

この章の順序

1. 「見える」とは — 分解能は ħc/E
2. 円の上の場 — 一つの場が塔になる
3. 塔の最低段 — 第一固有値と直径（計量・ラプラシアン・Ricci 曲率の最小限）
4. Kaluza と Klein — 電荷は運動量
5. 弦の六次元 — Calabi–Yau
6. 膜に閉じ込める — ADD と RS（寄り道：隙間の無い余剰次元）
7. 実験の下限 — ニュートン則と加速器
8. ヤン–ミルズに戻る — KK の隙間は質量ギャップではない

01

「見える」とは — 分解能は ħc/E

物理で見るとは、粒子をぶつけて跳ね返りを調べることです。大きさ ℓ の構造を見分けるには波長が ℓ より短い探り針、つまり高いエネルギーが要ります（2-05）。

$$\ell \approx \frac{\hbar c}{E}, \qquad \hbar c = 197.327\ \mathrm{MeV}\cdot\mathrm{fm} \tag{1}$$

1 TeV なら 2.0×10^{-19} m、LHC の衝突エネルギー 13.6 TeV なら 1.5×10^{-20} m、プランク質量 1.22×10^{19} GeV なら 1.6×10^{-35} m です 計算 。以下 $\hbar = c = 1$ とします（2-04 §08）。比喩で言えば、遠くから見た庭のホースは線ですが、近づくと一周する方向が見えます。正確には、この章で言うのは「小さな円に沿った揺れには高いエネルギーが要る」ということです。

02

円の上の場 — 一つの場が塔になる

空間の各点に半径 R の円が付いた五次元の時空 $\mathbb{R}^{1,3}\times S^1$ を考えます（円の座標 y は $y+2\pi R$ と同一視）。質量ゼロのスカラー場 $\Phi(x,y)$ は波動方程式に従い（2-02）、y について周期的なのでフーリエ級数に展開できます（1-11）。

$$\left(\partial_t^2 - \nabla^2 - \partial_y^2\right)\Phi = 0, \qquad \Phi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_n(x)\, e^{iny/R} \tag{2}$$

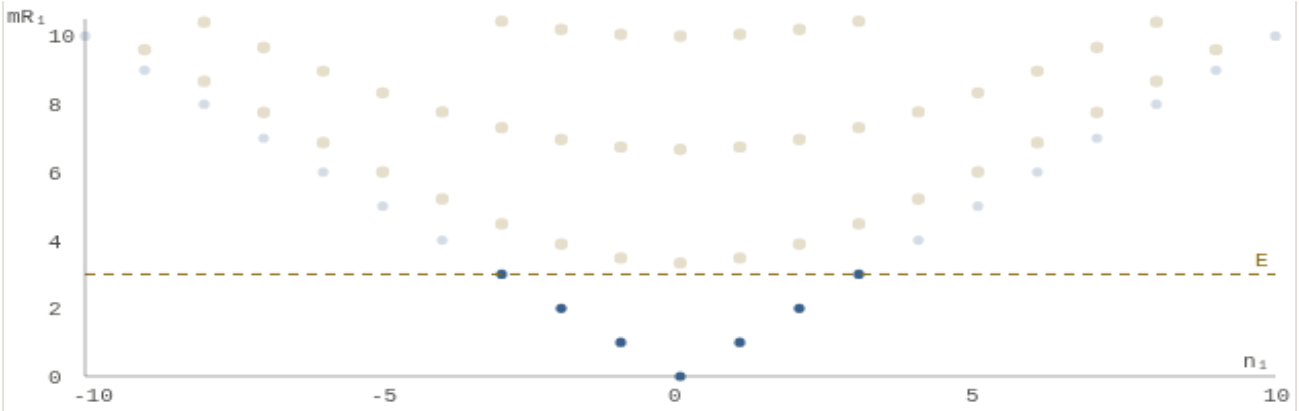
代入すると ∂_y^2 が $-n^2/R^2$ に置き換わり、係数ごとに方程式が分かれます。

$$\left(\partial_t^2 - \nabla^2 + \frac{n^2}{R^2}\right)\phi_n = 0, \qquad m_n = \frac{|n|}{R} \tag{3}$$

質量 m_n の Klein–Gordon 方程式です（2-02 §06）。五次元の場一つが、四次元では質量ゼロの**ゼロモード** ϕ_0 と、質量 $1/R, 2/R, \dots$ の場の無限の列に見えます。これが **Kaluza–Klein 塔**（KK 塔）です 既知 。PDG は 'At energies smaller than 1/R, the KK modes can be neglected, leaving the zero-mode action' と書きます。ゼロモードの結合は薄まり、四次の相互作用なら $\lambda_4 = \lambda_5/(2\pi R M_5)$（PDG 式 84.6）で、円が大きいほど弱くなります。M_5 は五次元の理論の基本の質量尺度で、λ_5 を無次元にするために入ります。

δ 個の円の積（トーラス T^δ、半径 R_i）なら、整数の組 n ごとに $m^2 = \sum_i n_i^2/R_i^2$ の場が出ます。図1 は円二つの場合です。

図1　円二つ（$R_1 \ge R_2$）の KK 塔。点は四次元の場（横 n_1、縦は質量）。E（破線）と半径の比を動かすと E より下の場が変わる



E·R₁ = 3.00　R₂/R₁ = 0.30　E 以下の場 7 個（Weyl の見積もり 8.5）　細い方向はまだ見えない

表1　質量 E 以下の四次元の場の個数（ゼロモードを含む）。括弧は Weyl の見積もり $\pi R_1 R_2 E^2$（面積 $4\pi^2 R_1 R_2$ に $E^2/4\pi$ を掛けたもの。1-10 の寄り道）

R_2/R_1	$ER_1 = 2$	**5**	**10**	**30**
1	13 (12.6)	81 (78.5)	317 (314.2)	2821 (2827.4)
0.1	5 (1.3)	11 (7.9)	23 (31.4)	267 (282.7)
円一つ	5	11	21	61

計算　表1 と図1 の数値はこの端末で計算した（図は (3) の式からその場で描く）。JavaScript が無効なら表1 を。

$R_2/R_1 = 0.1$ の行は $ER_1 \le 5$ で円一つと同じで、細い方向は $E \gtrsim 1/R_2$ になってから現れます。個数は E の（見えている余剰次元の数）乗で増えます。

03

塔の最低段 — 第一固有値と直径

最低段 $1/R$ は不等式として言い直せます。平均 0 の周期関数 $f = \sum_{n\neq 0} c_n e^{iny/R}$ では、Parseval の等式から（Wirtinger の不等式）既知

$$\int_0^{2\pi R} |f'|^2\, dy = 2\pi R \sum_{n\neq 0} \frac{n^2}{R^2}|c_n|^2 \;\ge\; \frac{1}{R^2}\int_0^{2\pi R} |f|^2\, dy \tag{4}$$

2-05 §08・1-10 §07 の Poincaré 不等式の最も簡単な例で、最良の定数 R^2 は隙間 $1/R^2$（塔の最低段の二乗）の逆数です。

長さを測る — 計量・直径・ラプラシアン

円を一般のコンパクトな多様体 K（1-05）に替えるには、長さの測り方が要ります。各点の接空間（1-05 §06）に内積を一つずつ、点について滑らかに与えたものを**計量**と言います。長さと角の測り方です。計量があれば曲線の長さが測れ、二点を結ぶ最短の道の長さが二点の距離になります。その距離の、全ての二点についての最大が**直径** d です（周の長さ $2\pi R$ の円なら

$d = \pi R$。この章の d は直径で、他の章の時空の次元 d とは別)。関数の勾配の大きさ $|\nabla f|$ も計量で決まり、$\int_K |\nabla f|^2 = \int_K \bar{f}\,(-\Delta_K f)$ となる作用素 $-\Delta_K$ を**ラプラシアン**（Laplace–Beltrami 作用素）と言います。平坦なトーラスでは、長さで測った座標 y_i で $-\Delta_K = -\sum_i \partial^2/\partial y_i^2$ です。

時空が歪みの無い直積 $\mathbb{R}^{1,3} \times K$、場がスカラーなら、$-\Delta_K$ の固有関数（固有値 $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \cdots$）で展開して $m_j^2 = \lambda_j$。最初の KK 質量はレイリー商の最小値です（1-10 §06）。

$$m_1^2 = \lambda_1(K) = \inf\left\{ \frac{\int_K |\nabla f|^2}{\int_K |f|^2} \;:\; \int_K f = 0,\ f \neq 0 \right\} \tag{5}$$

形式・スピノルの場や歪みのある背景では、別の作用素（Hodge ラプラシアン、Dirac 作用素など）の固有値になります。この章では「余剰次元が見えない」を、ゼロモードを除いた部分の Poincaré 不等式 $\int |\nabla f|^2 \ge \lambda_1 \int |f|^2$ と言い直します。

直径で足りる条件 — Ricci 曲率

計量を s^2 倍する（長さを全部 s 倍する）と λ_1 は s^{-2} 倍なので、縮めれば塔は持ち上がります。「小さい」を直径 d だけで測ってよいことは、Ricci 曲率が非負なら定理です。

Ricci 曲率は、比喩で言えば、一点から一つの向きのまわりに出た測地線（局所的に最短の道）の束が、進むにつれてどれだけ寄り集まるかの平均です。球面では正（経線は極で集まる）、平坦なトーラスでは 0、鞍の形の面では負（広がる）です。正確には、長さ 1 の向き v について、v と、v に直交する向き e_i とで張る $n-1$ 個の断面の曲がり（断面曲率）の和 $\mathrm{Ric}(v,v) = \sum_i K(v, e_i)$ で、平均の $n-1$ 倍です。二次元では断面が一つなので Gauss 曲率と同じです。曲がりそのものは、接空間の束に計量から決まる接続を入れたときの、1-07 §05 の意味の曲率（小さな輪を回ったときのずれ）です。$\mathrm{Ric}_K \ge 0$ は、どの点のどの向きでもこの和が 0 以上だという条件です 既知 。

$$\mathrm{Ric}_K \ge 0 \implies \lambda_1(K) \;\ge\; \frac{\pi^2}{d^2} \qquad \text{(Zhong–Yang。等号は円だけ：Hang–Wang)} \tag{6}$$

表2　比 $\lambda_1 d^2/\pi^2$。(6) はこれが 1 以上だと言う 計算

K	比	K	比
円	1	正方形のトーラス	2
長方形のトーラス 1×0.2	1.04	六角形のトーラス	1.7778
長方形のトーラス 1×0.05	1.0025	球面 $S^2 \cdot S^3 \cdot S^6$	2・3・6

トーラスは数値で求め、閉じた式（長方形 $1+\rho^2$、六角形 $16/9$）と 5 桁で一致。球面は既知の値。

細いトーラスの比は 1 に近づきますが 1 にはなりません。曲率の条件は外せません。二つの球を細い首でつなぎ、片方で $+1$、他方で -1 の関数を (5) に入れると、分子は首からしか来ない

ので、首を細くすれば直径はほぼそのままでレイリー商はいくらでも小さくなります。首の付け根では曲率が大きく負になり、$\mathrm{Ric} \geq 0$ が破れます。よく知られた例です 既知 。

04

Kaluza と Klein — 電荷は円を回る運動量

余剰次元の考えは 1920 年代の Kaluza と Klein にさかのぼります（PDG の序文）。五次元の時空にも §03 の意味の計量があります（時空では、各点の内積に当たるものの符号が 2-04 の $\eta = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ のように一つだけ負で、それが点ごとに変わってよいもの）。その成分 15 個は、四次元の計量 $g_{\mu\nu}$ の 10・ベクトル A_μ の 4・スカラー ϕ の 1 に分かれます。Overduin–Wesson の総説の式 5・8 を符号 $(-,+,+,+,+)$ で書き直すと[注1]

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \phi^2\big(dy + \kappa A_\mu dx^\mu\big)^2, \qquad \kappa = \sqrt{16\pi G} \tag{7}$$

Einstein 方程式は、計量の曲がり（曲率）を物質のエネルギーに結ぶ重力の方程式です。ここでは中身に立ち入らず、成分の数え方だけを使います。どの成分も y によらないとすると、五次元の Einstein 方程式は四次元の $10+4+1=15$ 本の方程式に分かれます（同 式 6）。ϕ を定数とおくと、15 本のうち計量とベクトルの成分の方程式が四次元の Einstein 方程式と Maxwell 方程式になります（同 式 7） 既知 。ただし残るスカラーの方程式は $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0$ のときしか $\phi =$ 定数と両立しません（Jordan・Thiry の指摘、同 §3.4）。座標の付け替え $y \mapsto y + \kappa\lambda(x)$ は $A_\mu \mapsto A_\mu - \partial_\mu\lambda$ を引き起こし、ゲージ変換（2-03）が円の方向の座標の取り直しとして現れます。

Klein（1926）は Kaluza の理論を波動力学と結びつけ（要旨）、円を小さくしました。(2) の n 番目の成分の運動量 n/R が、(7) の下で電荷になります（同 式 25、$\phi = 1$）。

$$q_n = \frac{n\sqrt{16\pi G}}{R}, \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{8}$$

電荷は q_1 の整数倍に限られます（Klein の同年の短信の題は 'The Atomicity of Electricity as a Quantum Theory Law'）。比喩で言えば電荷は見えない円を回る運動量で、正確には運動量 n/R に規約で決まる定数 κ を掛けたものです。

$q_1 = e$（$e^2/4\pi = \alpha \approx 1/137.036$）と置くと $R = 2\ell_P/\sqrt{\alpha} \approx 3.8 \times 10^{-34}$ m（プランク長の約 23 倍）で、塔の一段目は $1/R \approx 5.2 \times 10^{17}$ GeV、電子の質量の約 10^{21} 倍です 計算 。Overduin–Wesson は半径をプランク長とおいて食い違いを約 22 桁と見積もり、それが 'played a large role in the abandonment of five-dimensional Kaluza-Klein theory' と書きます。内部空間に非可換な対称性があれば非可換なゲージ場が出てきえます（17-07） 物理 。

05

弦の六次元 — Calabi–Yau に丸める

超弦理論の時空は十次元なので（17-05 §06）、四次元に見せるには六次元の内部空間 K が要ります。Candelas–Horowitz–Strominger–Witten（1985）は四次元に超対称性を一つ残す真空を調べ、要旨で 'This condition permits only a few possibilities' と書きました。条件を満たす K は Ricci 曲率が 0 の Kähler 多様体（計量と複素構造がかみ合った複素多様体）で、ホロノミー（1-07）が SU(3) に収まるもの、**Calabi–Yau 多様体**だとされます 物理 。

そうした計量が在ることは数学の定理です。Yau は 1977 年に 'We announce a proof of Calabi's conjectures on the Ricci curvature of a compact Kähler manifold' と告知しました（論文は 1978 年）。帰結として、第一 Chern 類が 0 のコンパクトな Kähler 多様体は Ricci 平坦な Kähler 計量を持ちます 既知 。Ricci 平坦なら (6) が使えるので、直径 d の Calabi–Yau の上のスカラーの KK 塔は π/d より上から始まります。

大きさについて PDG の序文は 'The extra dimensions were supposed to be compactified at a scale close to the Planck scale, and thus not testable experimentally in the near future' と書きます。形は粒子の中身を左右します（CHSW の模型は 'an E6 gauge group with four standard generations of fermions'）。

06

膜に閉じ込める — ADD と RS

1998 年、Arkani-Hamed–Dimopoulos–Dvali（ADD）は、標準模型の場を三次元の膜（3 ブレーン）に閉じ込め、重力だけを $4+\delta$ 次元に広げる隠し方を提案しました。重力でしか探れないので、余剰次元は大きくてもかまいません。要旨は 'The observed weakness of gravity on distances $\gtrsim 1$ mm is due to the existence of n ≥ 2 new compact spatial dimensions large compared to the weak scale' です 物理 。重力の弱さは §02 の λ_4 と同じ薄まり方で、基本の尺度 M_D と換算プランク質量 $M_P \approx 2.4 \times 10^{18}$ GeV は（PDG 式 84.10）

$$M_P^2 = R^{\delta} M_D^{2+\delta} \tag{9}$$

表3　(9) から決まる R（PDG 式 84.11 の「10^9 km, 0.5 mm, ⋯, 0.1 MeV^{-1}」を再現） 計算

δ	$M_D = 1$ TeV	$M_D = 4$ TeV
1	1.2×10^{12} m	1.8×10^{10} m
2	4.8×10^{-4} m	3.0×10^{-5} m
6	2.6×10^{-14} m	4.2×10^{-15} m

$\delta = 1$ は太陽系の大きさで 'clearly ruled out'（PDG）、$\delta = 2$ で 0.5 mm です。翌 1999 年、Randall–Sundrum（RS）は五次元の反 de Sitter 空間の一片を使いました（PDG 式 84.16）。

$$ds^2 = e^{-2ky}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2, \qquad 0 \le y \le \pi R \tag{10}$$

反 de Sitter 空間は、負の一定の曲率を持つ時空です（17-08）。(10) の計量は、曲率の半径が $1/k$ のその時空の、$0 \le y \le \pi R$ の一片です。$y = \pi R$ の端の尺度は $e^{-k\pi R}$ 倍に赤方偏移します。PDG は $k \sim M_P$、$R \simeq 11/k$ で TeV が出ると書き、$kR = 11$ で $ke^{-k\pi R} \approx 2.4$ TeV、kR を 10 から 12 に変えると 55 TeV から 0.1 TeV まで動きます 計算 。大きな比を指数で作る点は次元転移（17-01）に似ています。正確には、RS では指数が幾何（kR）から、次元転移では結合の走り（$1/g^2$）から来ます。歪んだ余剰次元と四次元の強結合の理論を結ぶ見方は AdS/CFT（17-08）で、予想の水準です 物理 。

寄り道：隙間の無い余剰次元

飛ばしてよい小節です。

RS の同年の論文は、余剰次元が無限に長くても四次元の重力が再現されうると論じました：'even without a gap in the Kaluza-Klein spectrum, four-dimensional Newtonian and general relativistic gravity is reproduced to more than adequate precision' 物理 。見えないことに塔の隙間は必須ではありません。

07

実験の下限 — ニュートン則と加速器

ニュートン則からのずれは湯川型で表す習わしです（PDG 式 84.12）。

$$V(r) = -G_N \frac{m_1 m_2}{r}\left(1 + \alpha\, e^{-r/\lambda}\right) \tag{11}$$

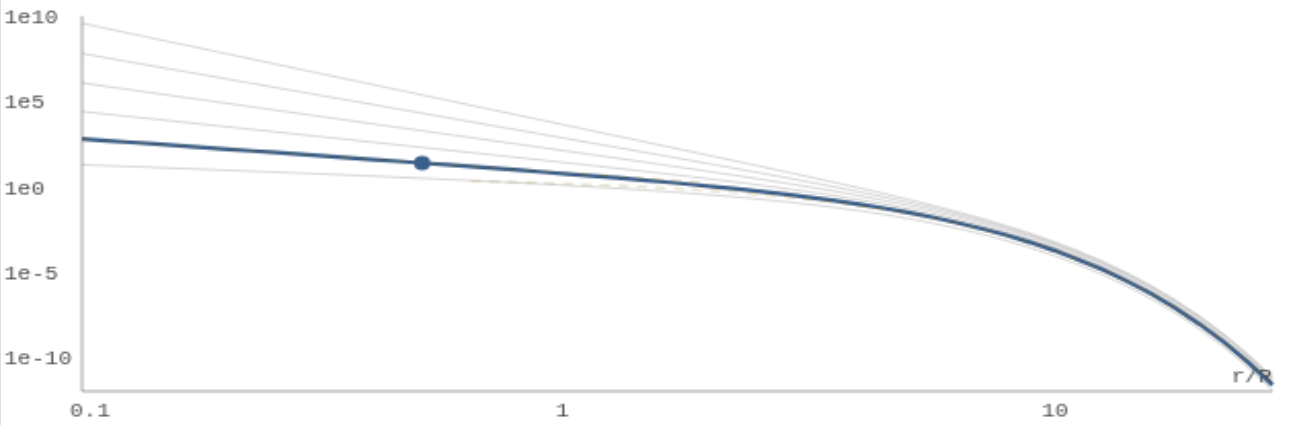
質量 m の場のやり取りは湯川ポテンシャル e^{-mr}/r を与え、KK モード一つにつき一項が足されます。スカラー（ニュートン型）の模型で T^δ（半径 R）の塔を全部足すと

$$\frac{V(r)}{V_{\mathrm{N}}(r)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^\delta} e^{-|k|\,r/R} \xrightarrow{\;r \gg R\;} 1 + 2\delta\, e^{-r/R} \tag{12}$$

2δ は一段目の場の個数、$\delta = 1$ では和は $\coth(r/2R)$ です。$r \ll R$ では $V \propto r^{-1-\delta}$、$3+\delta$ 次元の空間の法則になります。重力子では係数が変わります。重力子の KK モードは質量を持つスピン 2 の場で、偏極の寄与により一段目の係数が 4/3 倍になるとされ、PDG は二次元トーラ

スで $\alpha = 16/3$（(12) の 4 の 4/3 倍）、$\lambda = R$ とします 物理 。(12) は重力の式そのものではなく、塔を足すと湯川型のずれが出る仕組みを見るための模型です。

図2　(12) の $V/V_{\mathrm{N}} - 1$（対数目盛）。δ と r/R を動かすと、ずれと読める空間の次元が変わる。破線は二つの近似



δ = 2 r/R = 0.501 V/V_N = 25.13 読める空間の次元 ≈ 5.0（遠くで 3、近くで 5）

表4　(12) の比 V/V_{N}

δ	$r/R = 0.1$	**1**	**10**
1	20.02	2.164	1.000091
2	628.3	6.507	1.000184
6	3.72×10^{9}	3721	1.000593

計算 図2 と表4 の数値はこの端末で計算した（$|k| \le 420$ の和。$\delta = 1$ は coth と 12 桁、$r \to 0$ は積分の近似と 5 桁で一致）。JavaScript が無効なら表4 を。

$r \gg R$ でずれが $e^{-r/R}$ で消えることが、「見えない」の定量的な中身です。

表5　PDG 2025 の下限（長さは (1) で換算 計算 ）

何を探したか	下限
逆二乗則（ねじれ秤）	$\delta = 2$ で $R < 30$ μm、$M_D > 4.0$ TeV
超新星 SN1987A／中性子星	$\delta = 2$ で $M_D > 27$／1700 TeV
LHC の重力子放出（ATLAS／CMS）	$M_D > 5.9$–11.2／5.5–10.7 TeV（$\delta = 2$–6）
RS の最も軽い KK 重力子	ATLAS 4.5 TeV（$k/M_P = 0.1$）、CMS 2.2–5.6 TeV
ゲージ場が平坦な余剰次元を走る	$1/R > 4.16$ TeV（ATLAS の読み替え。4.7×10^{-20} m）、LEP2 から $\gtrsim 6$ TeV
全部の場が走る（UED）	$1/R > 1.4$–1.5 TeV。最小の模型は暗黒物質と合わせて排除

逆二乗則の実験の一つ（Tan ほか 2016）は $|\alpha| \le 1$ を $\lambda = 59$ μm まで確かめています（要旨）。観測されているゲージ場は 5×10^{-20} m 程度まで四次元的で、重力は数十 μm まで逆二乗則に従っています。余剰次元は見つかっていませんが、無いと示されたわけでもありません。

08

ヤン–ミルズに戻る — KK の隙間は質量ギャップではない

KK の隙間は質量ギャップではありません。塔の最低段は内部空間がコンパクトなことだけから出る隙間で、自由な場にもあり、ゼロモードには隙間がありません。箱の中の自由な場の隙間（2-02 §06・2-05 §06）と同じ計算です。懸賞問題が求めるのは、コンパクトな方向の無い $\mathbb{R}^4$ の上で相互作用から生じる隙間で（4-11）、Jaffe–Witten は 'no present ideas point the direction to establish the existence of a mass gap that is uniform in the volume' と書いています。

二種類の余剰次元を混ぜないこと。§07 の下限は現実の余剰次元についてです。ホログラフィーの模型（17-08・17-09）の余剰次元（反 de Sitter 空間の動径、S^5、Witten の模型の補助の円）は双対な記述や正則化の道具で、実在の次元だとは主張されていません。

模型の中では塔が見えています。ギャップを幾何から読む模型では、余剰次元の KK 塔がグルーボールと同じ高さに来ます（$\mathcal{N}=1$ 超対称ヤン–ミルズの Maldacena–Núñez の模型では、重力近似が有効なら 'comparable to the masses of Kaluza Klein states'。著者は、この背景の上で弦を量子化できれば KK 状態を分離できそうだとも書いています）物理。塔を消すには余剰次元を縮めねばならず、そのとき結合は弱くなるので（四次元では漸近自由のため）、それは計算の効く領域の反対側です（Csáki らは Witten の三次元の模型について：'This is the opposite of the limit that is required for the supergravity description to be valid'）。極限の順序は 17-10 で扱います。

切れ目

「見えない」が定理として言えるのは、固定した内部空間の上の線形の揺らぎ（(4)〜(6)）だけです。相互作用する理論で塔が分離すること、とくに四次元に戻す極限でそうなることを正当化した結果は、探した範囲で見当たりません。

注1　Overduin–Wesson は四次元の符号を $(+,-,-,-)$ にとり、$\kappa \equiv 4\sqrt{\pi G}$（式 8）と置きます。(7) は符号を本書の $(-,+,+,+)$ に揃えたもので、$\kappa = \sqrt{16\pi G}$ は同じ値です。本文へ

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 (2)〜(8)、Yau の定理。	歪みのある背景や形式・スピノルの塔の一般の下界。ϕ を定数に保つことの整合性（スカラーの方程式が $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=0$ を要求する）。
計算 表1〜表5、図1・図2、Klein の半径、(9) による PDG の数値の再現。	(12) はスカラー模型。重力子の 16/3 は PDG の引用で、4/3 倍の由来はこの章では導いていない。
物理 Calabi–Yau の条件、ADD・RS、非可換なゲージ場、模型の塔の高さ。	現実の余剰次元の有無。模型の塔が四次元に戻す極限で分離すること。この本は質量ギャップも連続極限の構成も自分では示していない（公開された連続極限の構成は第二巻）。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
(2)(3)・(9)〜(11)・16/3・表5・引用	既知・物理	Z. Demiragli, A. Pomarol, "84. Extra Dimensions"（PDG, PRD 110 (2024) 030001 の 2025 年 8 月改訂）。本文を確認。
(7)(8)、Kaluza・Klein	既知	J. M. Overduin, P. S. Wesson, Phys. Rep. 283 (1997) 303, gr-qc/9805018 §3・§4（本文を確認。式 5〜8・25、§3.4 の ϕ 定数の条件）。Th. Kaluza, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. (1921) 966（書誌のみ）。O. Klein, Z. Phys. 37 (1926) 895（要旨を確認）；Nature 118 (1926) 516（書誌のみ）。
(6)	既知	J. Q. Zhong, H. C. Yang, Sci. Sinica Ser. A 27 (1984) 1265（書誌のみ。主張は Ling–Lu の概説による。概説の書誌は未確認）。F. Hang, X. Wang, IMRN 2007, rnm064, doi:10.1093/imrn/rnm064（書誌のみ）。
Calabi–Yau の条件	物理	P. Candelas, G. T. Horowitz, A. Strominger, E. Witten, NPB 258 (1985) 46。要旨を確認（Calabi–Yau の語と SU(3) ホロノミーは本文未確認）。
Yau の定理	既知	S.-T. Yau, PNAS 74 (1977) 1798（要旨を確認）；CPAM 31 (1978) 339（書誌のみ）。
ADD・RS・逆二乗則	物理	N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, PLB 429 (1998) 263。L. Randall, R. Sundrum, PRL 83 (1999) 3370；同 4690。W.-H. Tan ほか, PRL 116 (2016) 131101。要旨を確認。
§08 の引用	既知・物理	A. Jaffe, E. Witten, "Quantum Yang–Mills Theory"（Clay の問題記述。Clay 公開の PDF。本文を確認）。J. Maldacena, C. Núñez, PRL 86 (2001) 588, arXiv:hep-th/0008001（要旨を確認）。C. Csáki, H. Ooguri, Y. Oz, J. Terning, JHEP 9901 (1999) 017, arXiv:hep-th/9806021（本文を確認）。
表・図・数値	計算	この端末の Python 3（numpy）：kk_count.py、zhong_yang.py、units_klein.py、add_rs.py、newton_kk.py（図2 に埋めた値は同じ計算を小数 4 桁で出したもの）。

次に読む章：17-07 ゲージ場はどこから来るか — 膜と幾何からゲージ群を取り出す。

ゲージ場はどこから来るか — 群は膜の枚数・格子・特異点の形から読み取られる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 余剰次元の側でゲージ群が出力になる四つの仕組み（内部空間の対称性・重なった膜・弦の内部の格子・潰れる球）。膜の位置が行列の固有値になり、ADE が「負定値」という線形代数から出ること。純ヤン–ミルズへ下りる道と、それが頼る期待。

前提となる章 — 17-06 余剰次元が見えなくなる仕組み。根（1-04）、ホロノミー（1-07）、中心電荷（17-05）を使います。交差数と格子はその場で定義します。

先に言うこと — 仕組みはすべて物理の水準で、弦の理論にも M 理論にも数学的な定義はありません。群が幾何から出ることと、四次元の量子ヤン–ミルズ理論が存在して質量ギャップを持つことは別の問題です。この本は質量ギャップも連続極限の構成も自分では示していません（公開された連続極限の構成は第二巻で読みます）。

この章の順序

1. 群は入力か出力か — 四つの出どころ
2. 内部空間の対称性 — 非可換な Kaluza–Klein
3. 膜の上の弦 — N 枚で U(N)
4. 位置が行列になる — 固有値が膜の位置
5. ヘテロ弦 — 16 次元の格子（寄り道：同じ塔、違う群）
6. Calabi–Yau に巻く — 可換な部分
7. 潰れる球と ADE — 負定値
8. 折りたたみと幾何工学
9. 十一次元から純ヤン–ミルズへ — 二つの円と期待
10. ヤン–ミルズに戻る — 群は難しさの在りかではない

01

群は入力か出力か — 四つの出どころ

四次元のヤン–ミルズ理論では、ゲージ群 G は手で選ぶ入力です。懸賞問題の文（Jaffe–Witten）も 'for any compact simple gauge group G' と書き、1-04 の一覧のどれでもよいとします（0-03）。余剰次元を持つ理論では、群が別のものから読み取られる出力になります 物理 。

対称性	膜の枚数	格子	特異点
内部空間の等長変換	D ブレーン N 枚で U(N)	ヘテロ弦の余った 16 次元	潰れる球の並びで ADE
§02	§03–04	§05–06	§07–08

どの道でも決まるのは低いエネルギーで見える場の組と群で、四次元の量子論の存在ではありません。四つのうち膜・格子・特異点の三つは超対称な設定（ボソンとフェルミオンを入れ替える対称性を持つ理論）の中の話で、そのことが純ヤン–ミルズにとって何を意味するかは §10 で振り返ります。

02

内部空間の対称性 — 非可換な Kaluza–Klein

17-06 §04 では円の回転が U(1) になりました。内部空間 K の距離を変えない変換（等長変換）の群 $\mathrm{Isom}(K)$ が大きければ、その無限小の生成元（キリングベクトル場）一本ごとにゲージ場が一本出て、生成元の交換子が構造定数（1-03）になります 物理 。球面の回転の生成元 $L_a = \varepsilon_{abc} x_b \partial_c$ では

$$[L_a, L_b] = -\varepsilon_{abc}\, L_c, \qquad \dim SO(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

で（左の式は数値で確かめた 計算 ）、S^n からは $n(n+1)/2$ 本、$\mathbb{CP}^2$（$\mathbb{C}^3$ の原点を通る複素直線全体。実 4 次元）からは SU(3) の 8 本のゲージ場が出ます 既知 。等長変換の群が局所的に（リー環として）SU(3)×SU(2)×U(1)（3-07）になる七次元の空間の一例が $\mathbb{CP}^2 \times S^2 \times S^1$（$4+2+1=7$ 次元）で、四次元と合わせて全体は $4+7=11$ 次元になります。

Witten（1981）は十一次元の超重力を七次元の空間に丸める道を調べ、要旨で 'It is possible to obtain an SU(3) × SU(2) × U(1) gauge group, but the proper fermion quantum

numbers are difficult to achieve' と書きました。Witten が調べた七次元の空間が上の例と同じとは限りません。

03

膜の上の弦 — N 枚重ねると U(N)

開いた弦の端を部分空間に張り付ける境界条件を課すと、その部分空間が **D ブレーン**です（Polchinski 1995：'extended objects defined by mixed Dirichlet-Neumann boundary conditions in string theory'）物理。空間 p 次元のものを Dp ブレーンと呼びます。弦の両端に膜の番号 $1, \dots, N$ を付けると、状態は $N \times N$ 行列を係数に持ち、質量ゼロのベクトルは U(N) の随伴表現（1-04）になります（Polchinski の講義 1996：'this global symmetry of the world-sheet theory is elevated to a gauge symmetry in spacetime'）。弦は N^2 種類、$\dim U(N) = N^2$ です。

膜を離すと間の弦は重くなります（Witten 1995b §3。T は弦の張力、a_i は膜の位置）。

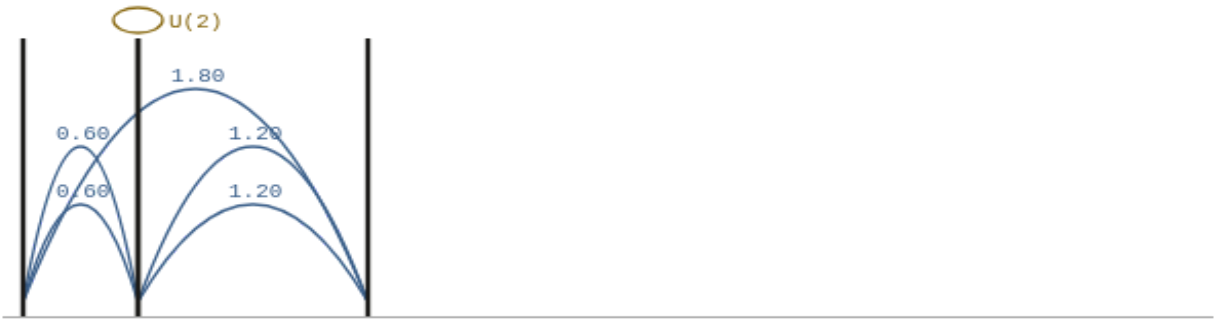
$$m_{ij} = T\,|a_i - a_j| \tag{2}$$

$n_1, n_2, \dots$ 枚ずつ重なれば、残る群は $U(n_1) \times U(n_2) \times \cdots$ で

$$\#\{\text{質量ゼロのベクトル}\} = \sum_k n_k^2, \qquad \#\{\text{重い W}\} = N^2 - \sum_k n_k^2 \tag{3}$$

です（Polchinski の講義にも同じ勘定）。膜を離すことは、ヒッグス機構を幾何の側から見たものです。正確には、§04 の随伴スカラー X^i が対角の値 $\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_N)$ を取ると、非対角のゲージ場が (2) の質量を得ます。スカラーの値でゲージ場が重くなるこの仕組みをヒッグス機構と呼びます（3-07）物理。

図1　四枚の膜（縦線）の間隔 d_1, d_2, d_3 を動かすと、残る群と W の質量が変わる。弧は重い弦（数字は質量/T）、上の輪は重なった膜の間の弦。重い弦は向きが二通り（$i \to j$ と $j \to i$）あるので、弧一本・質量一つにつき 2 本と数える



群 U(2)×U(1)²　質量ゼロ 6・重い 10　W の質量/T（各 2 本）：0.60, 0.60, 1.20, 1.20, 1.80

表1　四枚の膜の重なり方と (3) の数（重い弦は向きが二通りあるので、W の質量一つにつき 2 本）

重なり方	4	3+1	2+2	2+1+1	1+1+1+1
残る群	U(4)	U(3)×U(1)	U(2)×U(2)	U(2)×U(1)^2	U(1)^4
質量ゼロ／重い	16／0	10／6	8／8	6／10	4／12

計算 表1 はこの端末で数え、図1 は (2)(3) からその場で描く。JavaScript が無効なら表1 を。

離れた四枚の W の質量は d_1, d_2, d_3 とその連続した和の 6 通りで、SU(4)（A_3）の単純根 3 本と正の根 6 本の関係です。§07 では同じ構造が球の面積として現れます。

04

位置が行列になる — 膜の上の理論

重なった膜の上の理論は 'the dimensional reduction of ten-dimensional supersymmetric Yang-Mills theory with gauge group U(n) from ten to p+1 dimensions' です（Witten 1995b §3）物理。十次元のゲージ場の成分を膜に沿う方向と垂直な方向に分けると

$$A_M = \big(A_0, \dots, A_p;\, X^{p+1}, \dots, X^{9}\big), \qquad V = -\frac{T^2}{2}\sum_{i,j} \operatorname{tr}\big([X^i, X^j]^2\big) \;\geq 0 \tag{4}$$

で、X^i は随伴表現の $9-p$ 本のスカラー（$N \times N$ エルミート行列）、V はそのポテンシャルです。X はエルミートなので $[X^i, X^j]$ は反エルミートで、$\operatorname{tr}[X^i, X^j]^2 \leq 0$。したがって $V \geq 0$ です。$V = 0$ なら行列は同時に対角化でき、Witten は対角成分を膜の位置と読みます。非対角成分が膜の間の弦で、写像 $\delta \mapsto \sum_k [X^k, [X^k, \delta]]$ の固有値は $|a_\lambda - a_\mu|^2$（T^2 を掛ければ (2) の二乗）です。ユニタリ行列で共役にした二方向の例で 4×10^{-15} 以内の一致を確かめました 計算。

D3 ブレーンの上は、6 本のスカラーとフェルミオンを伴う四次元 $\mathcal{N} = 4$ の U(N) 超対称ヤン–ミルズで（17-08 の出発点）、純ヤン–ミルズではありません。行列の添字は 17-04 の二重線と同じ構造です。

05

ヘテロ弦 — 16 次元の格子が群になる

ヘテロ弦は、閉じた弦の右向きを超弦（中心電荷 15）、左向きをボゾン弦（26）の帳簿に従わせたものです（17-05 §06、Gross–Harvey–Martinec–Rohm 1985）。左向きは平坦な十次元の 10 に対して 16 足りず、Polchinski の講義（1994）は超対称なヘテロ弦について 'an additional (0, 16) is needed from another unitary CFT' と書き、解は $E_8 \times E_8$ か SO(32) だけだと続けます 物理。

16 次元の格子

格子の描像では、この 16 を左向きの 16 本のボソンを巻いたトーラス $\mathbb{R}^{16}/\Gamma$ と見ます 物理 。運動量 P は格子 Γ に乗り、$P\cdot P=2$ の状態が質量ゼロのベクトルになります。トーラスに巻いたヘテロ弦について、Witten（1995 §4.6）は 'The gauge symmetry is extended precisely when $V^{\perp}$ contains some P of $d_P=1$' と書きます。Witten の $V^{\perp}$ は左向きの電荷の空間です。Witten は内積の符号を本章と逆に取って $d_P=-(P,P)/2$ と書くので、$d_P=1$ は本章の符号で $P\cdot P=2$ に当たります。Γ は**偶**（$P\cdot P$ がすべて偶数）で**自己双対**（全点と整数の内積を持つ点がちょうど Γ）でなければなりません。この条件は、世界面がトーラスになる一ループの振幅が、トーラスの形の取り方に依らないという要請（モジュラー不変性）から来るとされ、Polchinski の講義も 'The constraints of modular invariance are strong' と書きます。

$$\dim G = 16 + \#\{P\in\Gamma:\ P\cdot P=2\} \tag{5}$$

16 次元の偶で自己双対な格子は二つだけです 既知 。どちらも「$x\in\mathbb{Z}^n\cup(\mathbb{Z}+\tfrac12)^n$、$\sum x_i$ が偶数」で書け、$n=8$ を二つ並べたのが $E_8\oplus E_8$、$n=16$ が D_{16}^{+} です。根はどちらも 480 本で (5) は 496 ですが、内積が 0 でない根を結ぶと、前者は 240 本ずつ二つに分かれ（$E_8\times E_8$）、後者は一つにつながります（$\mathfrak{so}(32)$） 計算 。十次元の群は正確には $\mathrm{Spin}(32)/\mathbb{Z}_2$ と書かれます。$\mathrm{Spin}(32)$ は SO(32) の二重被覆で、1-02 の SU(2)→SO(3) と同じ関係です（割る $\mathbb{Z}_2$ は、SO(32) に戻すものとは別の元です）。D_{16}^{+} の根が張る格子は D_{16}^{+} の中で指数 2 の部分格子で、この $/\mathbb{Z}_2$ はその差に対応するとされます。

十一次元から見ると、Hořava–Witten は二つの E_8 が線分 $S^1/\mathbb{Z}_2$ の両端の壁に一つずつ載ると**提案**しました（1995 年の要旨は 'We propose'、1996 年の要旨は群が 'a copy of E8 for each boundary component' に決まると書き、'the hypothesis that there is a consistent quantum M-theory' を前提と明示） 物理 。

寄り道：同じ塔、違う群

飛ばしてよい小節です。

平らなトーラス $\mathbb{R}^n/\Gamma$ のラプラシアンの固有値は双対格子の点 v ごとに $4\pi^2\,v\cdot v$ で（17-06 §02 の n 次元版） 既知 、自己双対なら KK 塔の各段の個数は長さの二乗が $2k$ の点の数です。数えると、$E_8\oplus E_8$ と D_{16}^{+} でともに $k=1,2,3$ で 480・61920・1050240 個、$k\le 6$ のすべての段で一致し、$480\,\sigma_7(k)$（σ_7 は約数の 7 乗の和）とも一致しました 計算 。

全段で一致することが知られ、Milnor（1964）はこの二つのトーラスを、固有値が重複度まで同じなのに等長でない例として挙げたとされます 既知 。塔は同じでも、ヘテロ弦に載せた群は違います。

06

Calabi–Yau に巻く — ホロノミーと可換な部分

$E_8 \times E_8$ を四次元に下ろすには六次元の Calabi–Yau 多様体 K に丸めます（17-06 §05）。K のホロノミー（1-07）は SU(3) に収まり、標準的な構成ではゲージ場のホロノミーも E_8 の中の SU(3) にそろえるとされます 物理 。四次元で見えるゲージ変換は K 全体で一定の g で、どの閉じた道の平行移動でも変わらない、つまりホロノミーのすべての元と可換でなければなりません 既知 。

$$G_4 = \{\, g \in E_8 :\ gh = hg \ \text{ for all } h \in SU(3) \,\} \tag{6}$$

E_8 の根 240 本のうち SU(3) の根と直交するものは 72 本で、E_6（次元 78）になります 計算 。Candelas–Horowitz–Strominger–Witten（1985）の要旨は 'a model that in four dimensions has an E6 gauge group with four standard generations of fermions' と書きます。

表3　E_8 の中で SU(n) と可換な部分（248 = 残る群 + SU(n) + 余り）

ホロノミー	SU(2)（K3）	SU(3)（Calabi–Yau）	SU(4)	SU(5)
残る群	E_7	E_6	SO(10)	SU(5)
内訳	133+3+112	78+8+162	45+15+188	24+24+200

計算 表3 は E_8 の根 240 本を座標で作って数え、型は階数・根の数・Cartan 行列の行列式で決めた。

余りの 162 本は $\mathbf{2} \times \mathbf{27} \times \mathbf{3}$（$E_6$ の 27 次元と SU(3) の 3 次元の組とその共役）で、四次元のフェルミオンはここから来るとされます。

07

潰れる球と ADE — 負定値の線形代数

K3 曲面は複素二次元（実四次元）の Calabi–Yau 多様体で、ホロノミーは SU(2) です（表3 の左端） 既知 。Witten（1995 §4.6）は、トーラスに巻いたヘテロ弦と K3 曲面に巻いた IIA 弦の対応で 'Whenever the heterotic string on a four-torus gets an enhanced gauge group G, the corresponding K3 gets an orbifold singularity of type G' と書きます 物理 。そのとき 'a configuration of r two-spheres S_i (with an intersection matrix given by the Dynkin diagram of G) collapses to a point' で（Dynkin 図はこの節の後半で定義します）、球一つにつき U(1) が一つ出ます。W ボソンは潰れる球に巻きついた二次元の膜です（Bershadsky–Sadov–Vafa 1996 §1 の記述による）。質量は膜の張力×球の面積とされ、§03 の $T|a|$ と同じ形です。

交差数と負定値

なぜ ADE だけか。球の**交差数** $M_{ij} = S_i \cdot S_j$ を見ます。二つの球については、交わる点を向きの符号 ± 1 付きで数えた和です。自分自身との交差数（自己交差数）は、球を少しずらした写しとの交点を同じように数えたもので、K3 の中の球では -2 になります 既知 。球の類どうしの「内積」をこの交差数で定めると、K3 ではこの内積は三方向で正・十九方向で負です（符号 $(3, 19)$）既知 。Witten によれば、潰れる極限で球の類はこの内積が負定値になる部分空間 $V^{\perp}$ に入るので、M は負定値（すべての $x \neq 0$ で $x^{\mathsf{T}} M x < 0$）です。潰れる球 S_i は**正則な曲線**（局所的に複素座標の正則関数の零点として書ける、複素一次元の曲線）にとれ、異なる正則な曲線どうしの交点は複素構造のためにどれも正の数として数えられるので $M_{ij} \geq 0$ です 既知 。$x = e_i + e_j$ で $-4 + 2M_{ij} < 0$ から $M_{ij} \leq 1$。よって $M = -(2I - A)$ で、A は球を頂点、交わりを辺とするグラフの隣接行列です。このグラフを **Dynkin 図**と呼びます（ここに出るのは辺がすべて一重の「単純レース型」）。次が要ります。

$$x^{\mathsf{T}}(2I - A)\,x = 2\sum_{i} x_i^2 - 2\sum_{\text{辺}\,ij} x_i x_j \;>\; 0 \qquad (x \neq 0) \tag{7}$$

グラフが連結でなければ成分ごとに考えます（成分ごとに群の積になります）。連結なグラフに輪があれば、輪の上で 1 のベクトルで左辺が 0 以下なので、木に限られます。頂点 10 個以下の木 201 個を調べると、残るのは A 型（一直線）・D 型（端が二股）・E_6, E_7, E_8 だけでした（表4）計算 。一般の頂点数でもこれだけであることは、単純リー環の分類（1-04）の一部として知られます 既知 。

図2　型を選ぶと、潰れる球の並び（丸が球、線が交わり）と (7) の最小固有値・群の次元が変わる。「折りたたむ」は §08 の入れ替えの軌道を色で示す



E₈：球 8 個　根 240 本　群の次元 248　最小固有値 0.010956（正定値）

表4　頂点 n 個の木の数と、(7) を満たす型（$n \leq 3$ は一直線だけ）

n	4	5	6	7	8	9	10
木の数	2	3	6	11	23	47	106
満たす型	A D	A D	A D E	A D E	A D E	A D	A D

計算 表4 と図2 の数はこの端末で計算した。最小固有値は $2 - 2\cos(\pi/h)$（h は根の数÷階数）と 6 桁で一致し、図はこの式で描く。E_8 の一つ先には (7) を 0 にする整数ベクトル（中心 6、腕 3／4・2／5・4・3・2・1）がある。JavaScript が無効なら表4・表5 を。

08

折りたたみと幾何工学 — A〜G がそろう

ADE は根の長さがそろった型だけです。B・C・F・G は、特異点をさらに別の方向に束ねると出ます。Bershadsky ほか（1996 §3）は、別のパラメータの上を一周すると潰れる球が Dynkin 図の自己同型（辺を保つ頂点の入れ替え）で入れ替わることがあり、そのとき 'the actual gauge group will be smaller' と書いて次を挙げます（最後は三本の足の巡回）物理 。

$$A_{2n-1} \to C_n, \qquad D_n \to B_{n-1}, \qquad E_6 \to F_4, \qquad D_4 \to G_2 \tag{8}$$

これで A から G までのすべての型が幾何から出ます。入れ替えで正の根を束ねた軌道の数は、折りたたんだ代数の正の根の数と一致します（表5）計算 。

表5　折りたたみ：正の根の軌道の数 = 後の代数の正の根の数

前 → 後	$A_5 \to C_3$	$D_5 \to B_4$	$E_6 \to F_4$	$D_4 \to G_2$
次元	35 → 21	45 → 36	78 → 52	28 → 14
正の根（動かない）→ 軌道	15 (3) → 9	20 (12) → 16	36 (12) → 24	12 (3) → 6

計算 表5 は Cartan 行列から根を生成して数えた（$A_3 \to C_2$・$A_7 \to C_4$・$D_6 \to B_5$ も一致）。

ただし同じ論文は 'a given A-D-E singularity may *not* correspond to an enhanced gauge symmetry' と断っています。この仕組みで場の理論を計算するのが**幾何工学**で、Katz–Klemm–Vafa（1997）は四次元 $\mathcal{N}=2$ の数学的に確かな結果（17-11）を弦の T 双対性（半径 R の円と半径 α'/R の円に巻いた弦が同じ理論を与えること。α' は 17-05 の (1)）に帰着させ、'This construction is not based on any duality conjecture' と書きます物理 。扱えるのは超電荷（17-05 §07）8 個以上（四次元の $\mathcal{N}=2$ 以上に当たる）の超対称な理論で、非超対称の純ヤン–ミルズの質量ギャップを幾何工学で扱った例は、探した範囲で見当たりません。

09

十一次元から純ヤン–ミルズへ — 二つの円

十一次元から四次元の**純**ヤン–ミルズに下りる道を Witten（1998 §4）が述べています物理 。出発点は M5 ブレーン（M 理論の、空間五次元に広がった膜）の上の六次元 (2,0) 理論（(2,0) は六次元の超対称性の型の名前。Witten は 'exotic' と呼ぶ）で、$AdS_7 \times S^4$（AdS_7 は負の一定の曲率を持つ七次元の時空。17-08 で扱う）の M 理論として 'can apparently be interpreted' とされます（Maldacena の予想による）。ラグランジアンによる記述は知られていないとされ、数学的な定義もありません。これを二つの円に巻きます。

$$(2{,}0)\ \xrightarrow{C_1(R_1)}\ 5\text{ 次元 }SU(N),\ g_5^2=R_1\ \xrightarrow{C_2(R_2)}\ 4\text{ 次元 }SU(N),\ g_4^2=\frac{R_1}{R_2}\tag{9}$$

C_2 でフェルミオンを反周期（一周で符号が反転）にすると、フェルミオンは質量 $1/R_2$ 程度を得て、スカラーも 'very plausibly' 一ループで重くなり、'If this is so, the low energy theory will be the pure SU(N) theory without supersymmetry' です。IIA 弦で言えば $\mathbb{R}^4\times S^1$ に巻いた N 枚の D4 ブレーンで、§03–04 の膜の上の理論が四次元に降りてきます。

Witten は $\eta=g_4^2N$ を小さく保ち、円の尺度では弱結合、ずっと長い距離で強結合になるようにしたいと書きます。一ループの目安は、17-01 の (3) で $b_0=11N/(48\pi^2)$（17-01 の (1)）、$\mu=1/R_2$、$g^2(\mu)=g_4^2=\eta/N$ と置くと

$$\Lambda R_2\ \sim\ \exp\!\Big(-\frac{24\pi^2}{11\,\eta}\Big)\tag{10}$$

で、$\eta=1$ なら 4×10^{-10}、$\eta=10$ なら 0.12 です 計算 。係数は結合の規約と $\mu=1/R_2$ の取り方で変わるので、これは桁の目安です。しかし超重力で計算できるのは 'at least if η is large' のときで、小さい η への接続を Witten は 'This looks like a tall order' と書きます。極限の順序は 17-10、ギャップが幾何に見える仕組みは 17-09 へ。

10

ヤン–ミルズに戻る — 群は難しさの在りかではない

どの道でも群には余分な場や超対称性が付いてきます（膜の上の $9-p$ 本のスカラー、二つの円の質量 $1/R_2$ の場など）物理 。そして懸賞問題にとって、群は難しさの在りかではありません。問題文はどのコンパクト単純群でもよく、問われるのはその量子ヤン–ミルズ理論が $\mathbb{R}^4$ で公理（4-10）を満たして存在し、質量ギャップを持つこと（4-11）です。幾何は A〜G の名前をすべて作れますが超対称な設定の中でのことで、純ヤン–ミルズへの道（§09）は期待と極限の順序に頼っています。

切れ目

(1) どの構成も弦の理論か M 理論の上に立ち、どちらにも非摂動的な数学的定義はありません。(2) 余剰次元の側から四次元の理論を定義しようとすると、出発点（(2,0) 理論など）の定義のほうが難しくなります。(3) 群が幾何から出ることと、四次元の量子論が存在して隙間を持つことを結ぶ結果は、探した範囲で見当たりません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 (1)、(6) の可換性、(7) を満たす図が ADE に限ること、K3 の交差数の符号と正値性、16 次元の格子の分類と Milnor の例（後の二つは書誌のみ）。	分類と交差数の性質の証明は書いていない。
計算 表1〜表5、図1・図2、(4) まわりの固有値、(10) の数値。	格子の点の数は $k \le 6$ まで。(10) は一ループの目安で、規約で係数が変わりうる。
物理 D ブレーンの U(N)、ヘテロ弦の群、E_6、Hořava–Witten の提案、ADE と折りたたみ、幾何工学、(9) の純 SU(N)。	どれも数学の定理ではない。弦の理論・M 理論・(2,0) 理論の存在。スカラーが一ループで重くなること。この本は質量ギャップも連続極限の構成も自分では示していない（公開された連続極限の構成は第二巻）。

出典と再現

もの	種別	出典・道具（本文＝原稿の本文を確認、要旨＝要旨を確認）
§01・§10	既知	A. Jaffe, E. Witten, "Quantum Yang–Mills Theory", Clay Mathematics Institute の公式の問題記述（本文）。
§02	物理	E. Witten, NPB 186 (1981) 412（要旨。七次元の空間の選び方は未確認）。
§03・§04	物理	J. Polchinski, PRL 75 (1995) 4724, hep-th/9510017（要旨）；TASI Lectures on D-Branes, hep-th/9611050（本文）。E. Witten, NPB 460 (1996) 335, hep-th/9510135 §3（本文）。
§05	物理	D. J. Gross ほか 3 名, PRL 54 (1985) 502；NPB 256 (1985) 253（要旨）。J. Polchinski, "What is String Theory?"（1994 年の講義）, hep-th/9411028 §2.6（本文）。P. Hořava, E. Witten, NPB 460 (1996) 506；NPB 475 (1996) 94（要旨）。
§05・§07	物理	E. Witten, NPB 443 (1995) 85, hep-th/9503124 §4.6（本文）。M. Bershadsky, V. Sadov, C. Vafa, NPB 463 (1996) 420, hep-th/9511222 §1（本文。膜の質量＝張力×面積の式は未確認）。
§07 の交差数	既知	E. Witten, hep-th/9503124 §4.6（本文。球の類の長さの二乗が -2、潰れる球が正則）。K3 の交差形式の符号と、正則な曲線の交点の正値性の一般論は W. Barth ほか 3 名, *Compact Complex Surfaces*, Springer（書誌のみ）。
格子・寄り道	既知	J. H. Conway, N. J. A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*。J. Milnor, PNAS 51 (1964) 542。いずれも書誌のみ。
§06	物理	P. Candelas ほか 3 名, NPB 258 (1985) 46（要旨。ホロノミーをそろえる構成は未確認）。
§08	物理	M. Bershadsky ほか 5 名, NPB 481 (1996) 215, hep-th/9605200 §3（本文）。S. Katz, A. Klemm, C. Vafa, NPB 497 (1997) 173, hep-th/9609239（要旨）。
§09	物理	E. Witten, ATMP 2 (1998) 505, hep-th/9803131 §4（本文）。(10) は 17-01 の (1)(3)（$b_0 = 11N/(48\pi^2)$）に $g^2 = \eta/N$ を入れた算術。

もの	種別	出典・道具（本文＝原稿の本文を確認、要旨＝要旨を確認）
表・図・数値	計算	この端末の Python 3（numpy）：branes.py、ade.py、e8_commutant.py、lattice16.py、scales.py。

次に読む章：17-08 ホログラフィー — 膜の上の $\mathcal{N}=4$ の理論と、動径が尺度になる対応。

ホログラフィー — 四次元の場の理論を、一次元多い重力の幾何で読む

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — AdS/CFT は、四次元の場の理論と五次元（に球を掛けた）重力の理論が同じだとする予想です。境界からの深さが尺度を測ること、質量と次元を結ぶ辞書、垂らした弦で計算する Wilson ループ、正確に書ける対応の線引き。

前提となる章 — 17-05。17-04 の 't Hooft 結合 λ、17-03 の Nambu–Goto 作用も使います。D ブレーンは 17-07 を参照してください。計量・測地線・源など、前提の章に無い道具はその場で一行ずつ定義します。

先に言うこと — AdS/CFT は予想で、定理ではありません。代表例の $\mathcal{N}=4$ 超対称ヤン–ミルズ理論は共形で質量ギャップを持たず、純ヤン–ミルズ理論ではありません。ホログラフィーで質量ギャップが数学の定理として示された例は無く（物理の水準でギャップを持つ模型は 17-09）、この本も質量ギャップや連続極限の構成について自分では何も示していません（公開された連続極限の構成は第二巻で読みます）。

この章の順序

1. 何が主張されているか（寄り道：なぜ「ホログラム」か）
2. D3 ブレーンの二つの顔
3. 反ド・ジッター空間
4. 動径＝尺度 — 深さは大きさを測る（図1）
5. 辞書 — 質量と次元
6. 弦を垂らす — Wilson ループ（図2）
7. 尺度を一つ入れる — 面積則の模型
8. 正確に書ける対応 — 定理と提案
9. ヤン–ミルズまでの距離

01

何が主張されているか — 境界の理論と内部の重力

ホログラフィーの主張はこうです。**d 次元の重力を含まない場の理論が、$d+1$ 次元の重力を含む理論と同じ物理を別の言葉で書いている**。増えた一次元は境界からの「深さ」で、前者を境界の理論、後者を内部（バルク）の理論と呼びます。代表例は Maldacena（1997、ATMP 1998。前の年は arXiv に出た年、後ろは掲載誌の年）です。

$$\mathcal{N}=4\ \text{SYM}\ \big(U(N),\, g_{\text{YM}}\big) \quad \overset{\text{予想}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{IIB 型弦理論 on } AdS_5\times S^5\ \big(N,\, g_s\big) \tag{1}$$

左は四次元の $\mathcal{N}=4$ 超対称ヤン–ミルズ理論（以下 SYM）、右は十次元の弦理論です。**IIB 型**は十次元の超弦理論の一つで、17-05 の IIA 型とは超対称性の向き（カイラリティ）の組み合わせが違います。次元は $10=4$（境界）$+1$（深さ）$+5$（S^5）です（17-05 §09）。原論文は 'We are led to the conjecture' と書き、(1) は今も予想です 物理 。この章は入口を扱い、質量ギャップが幾何に化ける模型は 17-09 に回します。

寄り道：なぜ「ホログラム」か — 面積で数える

飛ばしてよい小節です。

ブラックホールのエントロピーは、体積ではなく地平面の面積 A に比例します（Bekenstein 1973・Hawking 1975） 既知 。

$$S/k_B = A/(4\ell_P^2), \qquad \ell_P^2 = G\hbar/c^3 \tag{2}$$

太陽質量なら半径 2953 m、$S/k_B=1.05\times10^{77}$で、体積をプランク長さの三乗で割った 2.6×10^{115} よりはるかに少ない 計算 。't Hooft（1993）と Susskind（1994、J. Math. Phys. 1995）はここから自由度を面積で数える考えを立て、Susskind は 'much like a holographic image' と書きました 物理 。比喩で言えば立体像を平らな乾板に記録するホログラムです。正確には、(1) は二つの量子論が同値だという主張で、「乾板」は時空の無限遠にあります。

02

D3 ブレーンの二つの顔 — 予想はどこから来たか

N 枚重ねた D3 ブレーン（開いた弦の端が乗る、空間三次元の膜）に端を持つ開いた弦は、低いエネルギーで $U(N)$ のゲージ場になります（17-07）。同じ膜は重力から見ると時空を曲げます。Maldacena は低エネルギーの極限で、膜の上の理論と膜のすぐ近くの時空が同じものを

記述すると読みました 物理 。**計量**（線素）ds^2 は、座標が少しずれたときの距離の二乗を与える式で、曲線の長さは $\int ds$ です（平らな空間なら $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots$）。膜が作る計量は

$$ds^2 = f^{-1/2} dx_{\parallel}^2 + f^{1/2}\left(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2\right), \qquad f = 1 + \frac{4\pi g_s N \alpha'^2}{r^4} \tag{3}$$

です。$x_{\parallel}$ は膜に沿う四つの座標（$dx_{\parallel}^2$ は時間の方向だけ符号が逆。2-04）、r は膜からの距離、$\alpha' = \ell_s^2$ は弦の長さの二乗、g_s は弦の結合です。$r \to 0$ では $f \approx R^4/r^4$（$R^4 = 4\pi g_s N \alpha'^2$）で、$z = R^2/r$ と置くと

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}\left(dx_{\parallel}^2 + dz^2\right) + R^2 d\Omega_5^2 \tag{4}$$

となり、半径 R の AdS_5 と S^5 の積です 既知 。結合の対応には二つの書き方があります。今日広く使われる規約では $g_{\mathrm{YM}}^2 = 4\pi g_s$ で $R^4/\alpha'^2 = 4\pi g_s N = \lambda$（$\lambda = g_{\mathrm{YM}}^2 N$）、原論文の規約 $g_{\mathrm{YM}}^2 = 2\pi g_s$ では $R^4/\alpha'^2 = 2\lambda$ です 既知 。違いは作用の規格化だけで、今日の規約はインスタントンの作用が $8\pi^2/g_{\mathrm{YM}}^2$ になる規格化です（Aharony–Gubser–Maldacena–Ooguri–Oz の総説 (3.8)・§4.2）。17-04 の (2)（行列のトレースで $\frac{1}{2g^2}\int \mathrm{tr}\, F^2$、$\lambda = g^2 N$）も同じ規格化なので、17-04 の λ で $R^4/\alpha'^2 = \lambda$ です。この章では λ を直接使わず、$R^2/\alpha' = \sqrt{4\pi g_s N}$ で書きます。

超重力（弦理論の低いエネルギーで残る、重力を含む場の理論）が信頼できるのは $R \gg \ell_s$、つまり $g_s N \gg 1$ のときで、内部の量子効果はゲージ理論の $1/N$ の補正に当たります（原論文） 物理 。$g_s \ll 1$ と両立させるには $N \gg g_s N \gg 1$ が要ります。

表1　半径 R に要る弦の結合 $g_s = (R/\ell_s)^4/(4\pi N)$

R/ℓ_s	$N = 3$	$N = 100$
2	0.424	0.0127
3	2.15	0.0645
5	16.6	0.497
10	265	7.96

例：曲率半径を弦の長さの 5 倍にとると、$N = 3$ では $g_s = 16.6$ で弦の結合が強く、$N = 100$ でやっと 0.5 です 計算 。

03 反ド・ジッター空間 — 境界は無限の彼方にある

反ド・ジッター空間 AdS_{d+1} は、計量（§02）の符号が $(-,-,+,\ldots,+)$ の平らな空間の中の双曲面

$$-X_{-1}^2 - X_0^2 + X_1^2 + \cdots + X_d^2 = -R^2 \tag{5}$$

で、(5) を保つ群 $SO(2,d)$ がそのまま対称性です（Maldacena の付録）。座標を選び直すと (4) の前半の形になります（Poincaré 座標）。以下は虚時間（2-04）に移したユークリッド版で考えます。境界の座標を $x = (x_1, \ldots, x_d)$ と書くと

$$ds^2 = R^2 \, \frac{\sum_{i=1}^{d} dx_i^2 + dz^2}{z^2} \qquad (z > 0) \tag{6}$$

$d = 1$ のときは上半平面で、図1 はこの場合を描きます。例：$x = 0$ に沿って $z = 1$ から $z = \varepsilon$ まで上がる長さは $\int_\varepsilon^1 R\, dz/z = R \ln(1/\varepsilon)$ で、$\varepsilon \to 0$ で無限大です。境界 $z = 0$ は無限の彼方にあります 既知 。対称性の次元は $SO(2,4)$ が $6 \cdot 5/2 = 15$（ユークリッド版では $SO(1,5)$ で、次元は同じ 15。1-03）、四次元の共形変換が並進 4・ローレンツ 6・拡大 1・特殊共形 4 の 15 で、Witten（1998a）の言葉で 'SO(2, d) … acts on $\mathrm{M_d}$ as the conformal group' です 既知 。

04

動径＝尺度 — 深さは大きさを測る

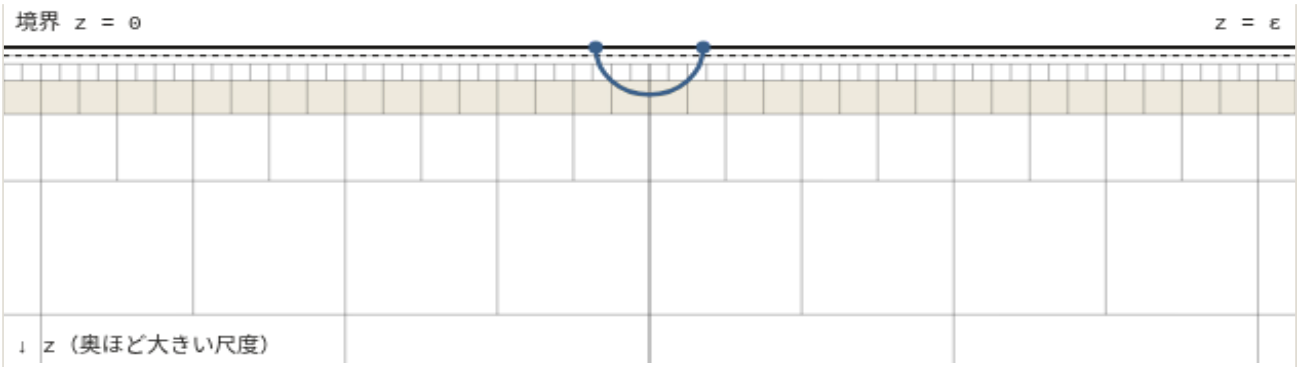
(6) で $(x, z) \mapsto (sx, sz)$ とすると分子も分母も s^2 倍で、ds^2 は変わりません。この内部の**等長変換**（長さを保つ変換）は境界では拡大 $x \mapsto sx$ で、「境界で s 倍大きいものを見る」と「s 倍深い所を見る」が同じ操作になります。Susskind–Witten（1998）の言葉では 'scale size gets transmuted into a spatial dimension' です 既知 。

(6) の**測地線**（二点を結ぶ最短の曲線）は境界に直交する半円で、境界の区間 $[-\ell/2, \ell/2]$ から垂れる半円は深さ $\ell/2$ まで潜ります。深さ ε で切った長さは ℓ の対数です。

$$L(\ell) = 2R \ln \frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - 4\varepsilon^2}}{2\varepsilon} \approx 2R \ln \frac{\ell}{\varepsilon}, \qquad e^{-mL} \approx \left(\frac{\varepsilon}{\ell}\right)^{2mR} \tag{7}$$

質量 m の粒子が内部を伝わる振幅はおよそ e^{-mL} なので、指数関数の減衰が境界ではべき乗則に化けます。Susskind–Witten (2.5) も同じ考え方で、球の模型の上で係数を落とした形 $\delta^m / |X_1 - X_2|^m$ で書いています。指数 $2mR$ は mR が大きいときの近似で、正確には (9) です 物理 。

図1　上半平面 (6) と二進の敷き詰め（タイルの面積はどれも $R^2/2$）。つまみで区間 ℓ を変えると半円の深さと (7) の L が変わる。色の帯は底のある段



計算 この図の数値はこの端末で計算した。

表2　(7) の L（$R=1$、半円に沿った数値積分と一致）。ℓ を 2 倍にするごとに L は $2\ln 2 = 1.386$ 増える

ℓ/ε	L	$2\ln(\ell/\varepsilon)$
10	4.584863	4.605170
100	9.210140	9.210340
1000	13.815509	13.815511

境界の近く $z=\varepsilon$ で切ることは、境界の理論の紫外の切断です。Susskind–Witten は 'the infrared regulator δ in the bulk theory also plays the role of an ultraviolet regulator in the boundary super Yang Mills theory' と書きます（δ はこの章の ε に当たる）。そのうえで、切った球面を大きさ δ の格子に区切り、格子一つに場一つにつき一自由度と仮定して、自由度を N^2/δ^3 と数えました（同論文 (3.1)）物理。図1 で一段潜るごとにタイルの幅は 2 倍になり、ブロックを二つずつまとめる繰り込み群の一段（7-05）を思わせます。正確には、de Boer–Verlinde–Verlinde（1999、JHEP 2000）が古典超重力の動径方向の発展を表す Hamilton–Jacobi 方程式（作用を端の値の関数とみて立てる方程式）から、Callan–Symanzik 方程式（尺度を変えたときに相関関数がどう変わるかを表す式。4-04）の形を導き、'We propose a direct correspondence' と提案した水準です 物理。

05

辞書 — 内部の場と境界の演算子

Gubser–Klebanov–Polyakov（1998）と Witten（1998a）の処方では、内部の場 ϕ の境界値 ϕ_0 を境界の演算子 $\mathcal{O}$ の**源**（$\int \phi_0 \mathcal{O}\, d^dx$ の形で作用に足す外場）と読み、次を等しいとおきます。右端は超重力が使える極限（$N,\lambda\to\infty$）での古典解の作用 I です。GKP の要旨は 'We suggest' で始まり、提案です 物理。

$$\left\langle \exp\int \phi_0\,\mathcal{O}\,d^dx \right\rangle_{\text{境界}} = Z_{\text{内部}}\big[\phi\to\phi_0\big] \approx e^{-I[\phi_0]} \tag{8}$$

帰結の一つが質量と次元の関係です。x に依らない解では、質量 m の場の方程式は $z^{d+1}(z^{1-d}\phi')' = m^2R^2\phi$ で（Witten 1998a (2.37)）、$\phi = z^\alpha$ を入れると $\alpha(\alpha-d) = m^2R^2$ です。大きい根を Δ と書きます（文献の慣習の字で、質量ギャップの Δ とは別）。

$$\Delta(\Delta - d) = m^2R^2, \qquad \Delta = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2R^2} \tag{9}$$

境界の近くで $\phi \approx \phi_0 z^{d-\Delta}$ の解が内部で滑らかに延びます。拡大 $(x,z)\mapsto(sx,sz)$ で ϕ_0 は $s^{\Delta-d}$ 倍されるので、$\int \phi_0\mathcal{O}$ が不変であるには $\mathcal{O}$ の**スケーリング次元**（拡大 $x\mapsto sx$ で演算子が $s^{-\Delta}$ 倍になるときの Δ）が Δ でなければならず、二点関数は $|x|^{-2\Delta}$ に比例します 物理 。実根の条件 $m^2R^2 \geq -d^2/4$ は、負の質量の二乗もここまでは許すという Breitenlohner–Freedman の下限です 既知 。

表3　(9) の Δ（$d=4$）。右端は方程式を $z=1$ から e^{-25} まで数値で解いて読んだ冪（$d-\Delta$ に一致）

m^2R^2	**−3**	**0**	**5**	**12**
Δ	3	4	5	6
数値の冪	1.000000	0.000000	−1.000000	−2.000000

例：質量ゼロなら $\Delta = 4 = d$ で、$\int \phi_0\mathcal{O}\,d^4x$ の ϕ_0 が無次元の数、つまり結合の役をします。ディラトン（期待値が弦の結合を決めるスカラー）は $\mathrm{tr}\,F^2$ に対応します。$\mathcal{N}=4$ の理論では Witten（1998a §2.6）が、ラグランジアン密度を結合で微分した演算子（$\mathrm{tr}\,F^2$ を含む）が $m^2=0$ のディラトンに当たると述べ、Csáki–Ooguri–Oz–Terning は先行文献を引いて 'the operator tr F^2 in four dimensions corresponds to the dilaton field ⋯' と書きます 物理 。$\mathrm{tr}\,F^2$ は 0^{++} グルーボール（17-01）を作るので、17-09 ではディラトンの方程式からグルーボールの質量を読みます。

06

弦を垂らす — Wilson ループの計算

距離 L の重いクォーク対のエネルギー $E(L)$ は Wilson ループ（5-01）から読みます。Maldacena（1998）と Rey–Yee（1998、EPJC 2001）が同じ時期に出した処方では、クォークは境界に端を持つ弦の端点で、内部に垂れた弦の面積（Nambu–Goto）が E を与えます 物理 。(4) では張力 $1/(2\pi\alpha')$ に R^2/z^2 が掛かります。

$$E = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{R^2}{z^2}\sqrt{1+z'^2}\,dx, \qquad L = 2z_0\int_0^1 \frac{y^2dy}{\sqrt{1-y^4}} = \frac{2\sqrt{2}\,\pi^{3/2}}{\Gamma(1/4)^2}z_0 = 1.19814\,z_0 \tag{10}$$

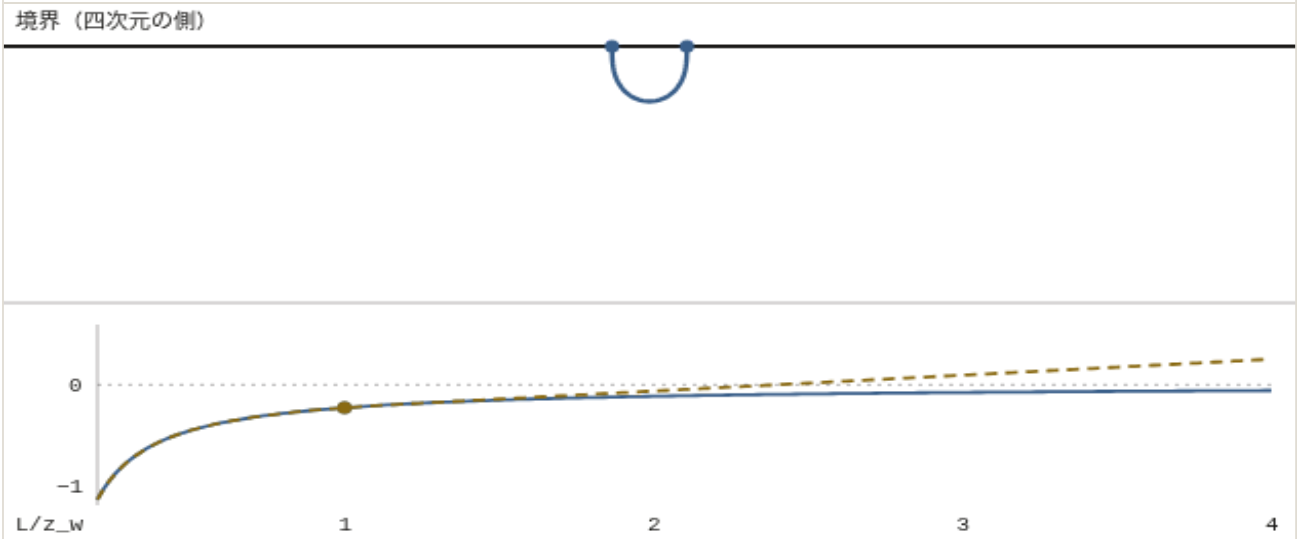
被積分関数が x を含まないので $z^2\sqrt{1+z'^2} = z_0^2$（z_0 は底の深さ）が保存され、右の式が出ます。弦は L に比例する深さ $z_0 = 0.8346L$ まで潜ります。境界での発散（点電荷の自己エネル

ギー）をまっすぐな二本の弦の分で引くと

$$E(L) = -\frac{4\pi^2}{\Gamma(1/4)^4}\,\frac{R^2}{\alpha'}\,\frac{1}{L} = -0.22847\,\frac{\sqrt{4\pi g_s N}}{L} \tag{11}$$

で、定数は数値積分と閉じた形が 8 桁一致し、原論文の (4.6)(4.8) と同じです 計算 。原論文は 'the energy goes as 1/L, a fact which is determined by conformal invariance. Notice that the energy goes as $(\mathrm{gN})^{1/2}$ as opposed to gN which is the perturbative result' と書きます 物理 。

図2　上：境界に両端を持つ弦。下：$E(L)$（実線 (11)、破線は壁のある (12)）。L を変えると深さと E が変わり、「壁を置く」で弦が壁に沿って寝る



L = 1.00 z_w　深さ 0.83 z_w　E（単位 R²/(α'z_w)）：共形 −0.228　壁あり −0.228

計算 この図の数値はこの端末で計算した（弦の形は (10) の積分の表、E は (11)(12)）。

表4　E（単位 $R^2/(\alpha' z_w)$）と壁の無いときの深さ。$L_c = 1.19814\,z_w$

L/z_w	共形 (11)	壁あり (12)	z_0/z_w
0.5	−0.45695	−0.45695	0.4173
1.19814	−0.19069	−0.19069	1.0000
2	−0.11424	−0.06307	1.6693
4	−0.05712	0.25524	3.3385
8	−0.02856	0.89186	6.6770

```
07
```

尺度を一つ入れる — 幾何を切ると面積則が出る

(11) の $1/L$ は共形性の帰結なので、閉じ込め（$E \approx \sigma L$、17-01）には尺度が一つ要ります。最も粗い模型は内部を深さ z_w で切ることです。Polchinski–Strassler（2001、PRL 2002）は、ギャップがあれば 'the gravitational redshift has a nonzero lower bound' と述べて幾何を切る近似を使いました 物理 。この模型で (10) を最小にすると、$L \le L_c = 1.19814 z_w$ では共形の解（底の深さ $0.8346 L \le z_w$）がそのまま使えます。$L > L_c$ では弦の底が壁に届きます。壁に触れる点で弦は壁に接する（傾き 0）ので、保存量 $z^2\sqrt{1+z'^2}$ は z_w^2 になり、下りの部分は $z_0 = z_w$ の共形解の半分です。両側の半分で幅 L_c を使い、残りの $L - L_c$ を壁に沿う直線でつなぎます。

$$E(L) = -0.19069\,\frac{R^2}{\alpha' z_w} + \sigma (L - L_c), \qquad \sigma = \frac{\sqrt{4\pi g_s N}}{2\pi z_w^2} \qquad (L > L_c) \tag{12}$$

L に比例する部分（面積則）が現れ、$L = L_c$ で (11) と値も傾きもつながります 計算 。例：表 4 の $L = 8 z_w$ では共形の -0.029 に対し $+0.892$ です。(12) のとおり $\sigma(L - L_c)$ に一定の数を足した形で、L が大きいと傾き σ の直線に乗ります。弦張力には $\sqrt{4\pi g_s N}$ が掛かり、壁までの箱で決まるグルーボールの質量（$\sim 1/z_w$）には掛からないので、結合が大きいほど二つの尺度は離れます（比の λ 依存と出典は 17-09 §08）。模型の中の算術で、実際の幾何は 17-09・17-10 で扱います。

08

正確に書ける対応 — 何が定理で、何が提案か

「正確」には二つの意味があります。片側だけで閉じた数学（双曲幾何・リー群・常微分方程式）として正しいことと、模型の中で両辺の定義が一致することです。どちらも四次元のヤン–ミルズ理論の定理ではなく、(1) も証明されていません。

表5　対応と水準

境界の側	内部の側	水準
共形群・拡大	$SO(2,4)$・$(x,z) \mapsto (sx, sz)$	既知
$\ln(\ell/\varepsilon)$	測地線の長さ (7)	長さの式は 既知 （数値は 計算 ）、境界の対数との同一視は 物理
次元 Δ	(9) の冪	冪は 既知 、同一視は 物理
Callan–Symanzik の形	動径の Hamilton–Jacobi	物理 （提案）
$E(L)$	弦の最小面積	処方は 物理 、(10)(11) は 計算

境界の側	内部の側	水準
—	境界の連結性	既知 数学の定理

最後の行は Witten–Yau（1999）の定理です。言葉を三つ用意します。**Einstein 多様体**は、Ricci 曲率（曲率を方向ごとに平均したもの）が計量の定数倍になる多様体で、ここではその定数が負です（(6) の空間が例）。**共形境界**（Penrose の意味）は、無限の彼方にある境界のことで、計量に境界で零になる関数の二乗を掛けると境界までなめらかに延びるときに付けられます（(6) なら $z^2 ds^2$ が $z=0$ まで延びる）。$H_n(M;\mathbb{Z})=0$ は、大まかに言えば M に n 次元の「穴」が無いことです。M を $n+1$ 次元、N をその n 次元の共形境界とし、M が完備（どの方向にも途中で切れない）で、N のスカラー曲率（曲率をさらに一つの数にまとめたもの）が正なら

$$H_n(M;\mathbb{Z})=0, \qquad \text{特に } N \text{ は連結} \tag{13}$$

です（要旨 'Let M be a complete Einstein manifold of negative curvature … N must be connected'）既知 。この章で使うのは結論の「境界 N は一続き（連結）」だけです。AdS/CFT が動機ですが、双対そのものの定理ではありません。例：表5 の物理の行は、どれも (1) を前提に使います。

09

ヤン–ミルズまでの距離 — 共形・極限・現在地

(1) の境界の理論は純ヤン–ミルズ理論ではありません。六本のスカラー場とフェルミオンを持ち、共形で結合が走らず（4-06 と対照的）、尺度 Λ が生まれません（4-07）。重力の計算が効く $N,\lambda\to\infty$ は、問題文（0-03）が求める任意のコンパクト単純群と、短い距離で漸近自由（$\lambda\to 0$）に一致する理論とは逆の側です。共形ならギャップはありません。質量 $m>0$ の状態があれば、拡大で質量 sm（任意の $s>0$）の状態もあるからです。

$$m^2\in\operatorname{spec}(P^2)\ \Rightarrow\ s^2m^2\in\operatorname{spec}(P^2)\ (s>0)\ \Rightarrow\ \inf\big(\operatorname{spec}(P^2)\setminus\{0\}\big)=0 \tag{14}$$

P^2 は四元運動量の二乗（2-04）で、(11) の $1/L$ はこの事情の別の顔です 既知 。例：Clay の問題の頁は今も質量ギャップについて 'no proof of this property is known' と書きます。ホログラフィーで質量ギャップが数学の定理として示された例は無く（物理の水準でギャップを持つ模型は 17-09）、弦理論に非摂動的な定義が無いこと、(1) が予想であること、極限が問題文の外にあることが重なっています（16-05）。四次元に戻す道は 17-10、超対称性のもとで双対からギャップが見える例は 17-11 です。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 (4)〜(6) の幾何、$SO(2,4)$ と共形群、(9) の冪と下限、(13) (14)。	(1) の証明。(8) の数学的な定義（内部の量子論が未定義）。
計算 表1〜表4、図1・図2、(10) (11) の定数、(2) の数値。	(12) の壁は模型で、実際の閉じ込めの幾何ではない。
物理 (1)(8)、Wilson ループの処方、動径と繰り込み群、壁の模型。	SYM にギャップは無い。純ヤン–ミルズ・有限の N・漸近自由への橋。この本は質量ギャップも連続極限の構成も自分では示していない（公開された連続極限の構成は第二巻）。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
(1)(3)〜(5)・§02 の引用・原論文の規約	物理・既知	J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 231, hep-th/9711200。本文を確認。
§02 の今日の規約 $g_{\mathrm{YM}}^2 = 4\pi g_s$	既知	O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri, Y. Oz, Phys. Rept. 323 (2000) 183, hep-th/9905111。(3.8) と §4.2 の本文を確認。
§03 の引用・(2.37)・下限 $m^2R^2 \geq -d^2/4$・§05 のディラトンと結合の演算子	既知・物理	E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 253, hep-th/9802150。(2.35)〜(2.37)、下限と実根の条件（(2.35) の直後と §2.6）、ディラトンの記述（§2.6）の本文を確認。
(8)	物理	S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov, Phys. Lett. B 428 (1998) 105, hep-th/9802109。要旨を確認。
下限の名前	既知	P. Breitenlohner, D. Z. Freedman, Phys. Lett. B 115 (1982) 197；Ann. Phys. 144 (1982) 249。書誌のみ。
(7) の考え方・§04 の引用	物理	L. Susskind, E. Witten, hep-th/9805114。(2.5)・(3.1) と §2〜§3 の本文を確認。J. de Boer, E. Verlinde, H. Verlinde, JHEP 0008 (2000) 003, hep-th/9912012。本文を確認。
$\mathrm{tr}\, F^2$ とディラトン	物理	C. Csáki, H. Ooguri, Y. Oz, J. Terning, JHEP 9901 (1999) 017, hep-th/9806021。本文を確認（この対応は同論文が先行文献に帰している）。
(10)(11)・§06 の引用	物理・計算	J. M. Maldacena, Phys. Rev. Lett. 80 (1998) 4859, hep-th/9803002。本文を確認。
§06 の処方（同時期のもう一つ）	物理	S.-J. Rey, J.-T. Yee, Eur. Phys. J. C 22 (2001) 379, hep-th/9803001。要旨を確認。
§07 の引用	物理	J. Polchinski, M. J. Strassler, Phys. Rev. Lett. 88 (2002) 031601, hep-th/0109174。本文を確認。

もの	種別	出典・道具
(13)	既知	E. Witten, S.-T. Yau, Adv. Theor. Math. Phys. 3 (1999) 1635, hep-th/9910245。要旨と本文の冒頭（M が $n+1$ 次元、N が n 次元）を確認。
寄り道	既知・物理	J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D 7 (1973) 2333；S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. 43 (1975) 199（書誌のみ）。G. 't Hooft, gr-qc/9310026；L. Susskind, J. Math. Phys. 36 (1995) 6377, hep-th/9409089（要旨を確認）。
§09 の引用	既知	Clay Mathematics Institute, “Yang–Mills & the Mass Gap”（Web ページ）。本文を確認。
§09 の問題文の要件	既知	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”（Clay の公式の問題記述、PDF）。本文の照合は 0-03 の出典表。
表・図・数値	計算	この端末の Python 3（scipy）：params.py、geodesic.py、delta.py、wilson.py、bh_entropy.py。

次に読む章：17-09 質量ギャップが幾何になる ― 潰れる円の幾何で、グルーボールの質量を固有値として読む。

質量ギャップが幾何になる — 円が潰れて時空が終わると、スペクトルに隙間が開く

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 円が潰れる「葉巻」で時空が終わると、面積則と、正で離散的なグルーボールの質量（動径の固有値）が出る論法。この端末で追い直した数値と、格子との成績。比べる相手のスカラーをどれに取るかで、比が大きく動くこと。

前提となる章 — 17-08（AdS・辞書・弦の計算）。変分原理は 2-05 §08・1-10、グルーボールは 17-01 §06。

先に言うこと — ここのギャップは $N \to \infty$・$\lambda \to \infty$ の超重力の近似で、固定した背景の上の線形の固有値問題です。AdS/CFT は予想で、模型は純ヤン–ミルズ理論ではありません。この章は質量ギャップ問題を解いておらず、この本も自分では何も示していません。

この章の順序

1. 何を幾何に翻訳するか
2. 温度で尺度を入れる
3. 円が潰れる（図1・寄り道：ブラックホールの温度）
4. 弦は底で寝る
5. グルーボールは固有値（図2）
6. なぜ正で、なぜ離散か
7. 格子と比べる（後の解析：どのスカラーが最も軽いか）
8. 二つの尺度
9. 別の閉じ方

01

何を幾何に翻訳するか — 隙間と面積則

AdS の境界の理論は共形でギャップを持たず（17-08 (14)）、17-08 §07 では手で置いた壁で尺度を入れました。この章では**幾何そのものが有限の深さで終わる**模型を見ます。Witten（1998）はそこから二つを読みました 物理 。面積則は、境界の方向 dx_i^2 の係数が内部で正の定数以上であることから。ギャップは、内部の波動方程式が正で離散的な固有値 $m_1^2 < m_2^2 < \cdots$ だけを持つことから。後者を境界で言えば、$\mathrm{tr}\, F^2$ などの二点関数が自由な伝播関数の和になります。

$$\langle \mathcal{O}(x)\, \mathcal{O}(0) \rangle = \sum_{n \geq 1} |c_n|^2 \, \frac{e^{-m_n |x|}}{4\pi |x|} \qquad \text{(境界は三次元)} \tag{1}$$

右の分数は三次元の質量 m の伝播関数で 既知 、遠方は最初の項が支配し、相関長は $1/m_1$ です（2-05 §05・4-11）。例：§05 の模型で $\mathrm{tr}\, F^2$ の二点関数を見ると（ディラトンの最低モード）、温度が $T = 1/\pi$ となる §03 の規格化で $m_1 = 3.404$、相関長 0.294 です 計算 。ただし超重力の場全体では、計量のゆらぎから来る別のスカラーのほうが軽く、$m^2 = 5.457$（ディラトンは 11.588）です（Brower–Mathur–Tan 2000。§07）物理 。(1) は $1/N$ の主項で、相互作用で離散性は失われるがギャップは残る、と Witten は書いています。

02

温度で尺度を入れる — 虚時間の円と反周期

温度 T の熱平衡は、虚時間を周期 $\beta = 1/T$（逆温度。この章の β は格子の逆結合ではない）の円に巻いた経路積分です（2-07 §06）。ボソンは一周で元に戻り、フェルミオンは符号が変わる（反周期）ので、円の方向の運動量は

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta} \ \text{(ボソン)}, \qquad \omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta} \ \text{(フェルミオン)}, \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

です 既知 。フェルミオンには $\omega = 0$ が無く、長い距離から外れます。Witten は $\mathcal{N} = 4$ 理論を $\mathbb{R}^3 \times S^1$ に置いて超対称性を壊し、スカラーも一ループで重くなるので、長い距離では三次元のゲージ場が残るとしました 物理 。Csáki–Ooguri–Oz–Terning（1998、以下 COOT）はこれを QCD_3 と呼びます。比喩で言えば円は型枠です。正確には、円の半径 R は三次元の理論の紫外の切断です（17-06 §08）。例：フェルミオンの最低の運動量は πT、ボソンの 0 でない最低は $2\pi T$ です。

03

円が潰れる — 葉巻の幾何

境界に円があると、内部は AdS のブラックホールになります。Witten はその解を拡大して次の計量を得ました（全体の R^2 は省く）物理。

$$ds^2 = g\,d\tau^2 + \frac{d\rho^2}{g} + \rho^2 \sum_{i=1}^{3} dx_i^2, \qquad g = \frac{\rho^2}{b^2} - \frac{b^2}{\rho^2}, \qquad \rho \geq b \tag{3}$$

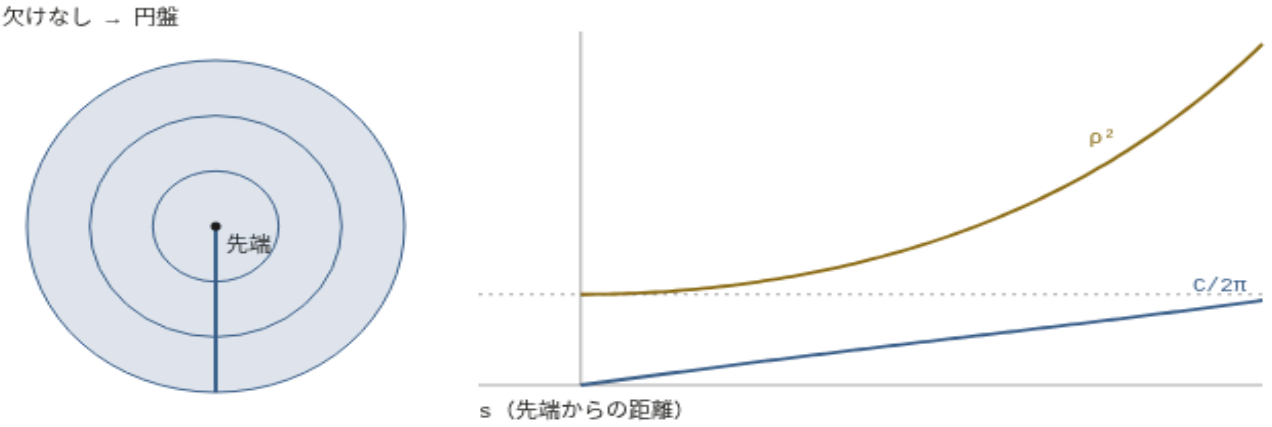
b は曲率半径、$\rho \to \infty$ が境界で AdS（17-08 §03）に戻ります。$\rho = b$ で $g = 0$ となり円が潰れます。先端からの距離 r（$\rho \approx b + r^2/b$）で書くと

$$g\,d\tau^2 + \frac{d\rho^2}{g} \;\approx\; dr^2 + r^2\,d\theta^2, \qquad \theta = \frac{2\tau}{b} \tag{4}$$

で平面の極座標です。ただし τ の周期が πb からずれると先端は円錐の頂点（特異点）です。滑らかさが周期を πb に固定します。境界の近くで計量を ρ^2 で割ると $d\tau^2/b^2 + \sum dx_i^2$ なので、境界で測った円周は $\pi b / b = \pi$ で、温度は b に依らず $T = 1/\pi$ に決まります 既知。この章の数値はこの規格化（円周 π、$T = 1/\pi$）で書きます。表の「$b = 1$」は b を 1 と置いたという意味で、(7) の固有値は $\rho = bu$ と置くと b が消えるので b に依りません。

(ρ, τ) は葉巻（cigar）形の円盤です。比喩で言えば時空が「そこで終わる」。正確には先端は円盤の中心です。$b = 1$ では $\rho^2 = \cosh 2r$ と書け、数値積分と 8 桁で一致します 計算。

図1　左：先端の近く（角 $2\pi\beta/\beta_1$ の扇形の縁を同一視）。右：円の半径 $C/2\pi$（青）と dx^2 の係数 ρ^2（黄）。周期を動かすと、1 以外で先端が円錐になる



β/β₁ = 1.00　円周/(2π×距離) → 1.00　滑らか（円盤の中心）　dx² の係数の最小値 b² = 1

図1 の曲線の値（$\beta/\beta_1 = 1$、$b = 1$。s は先端からの距離）

ρ	s	$C/(2\pi s)$	ρ^2
1.001	0.0316	0.9997	1.002
1.1	0.3186	0.9719	1.210

ρ	s	$C/(2\pi s)$	ρ^2
2	1.0317	0.9385	4.000
4	1.7324	1.1522	16.00

計算 この図の数値はこの端末で計算した（曲線は $\rho^2=\cosh 2s$。表は数値積分の値で、先端に近いほど $C/(2\pi s)$ は 1 に近づく）。

寄り道：ブラックホールの温度も同じ計算

飛ばしてよい小節です。

虚時間の Schwarzschild 計量 $f\,d\tau^2+dr^2/f+\cdots$（$f=1-r_s/r$）が $r=r_s$ で滑らかなら周期は $4\pi r_s$。これを $\hbar c/(k_BT)$ と読むと

$$T=\frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B} \tag{5}$$

で、太陽質量なら $T=6.17\times10^{-8}$ K 計算。この導き方は Gibbons–Hawking（1977）の方法とされます 既知。

04

弦は底で寝る — 面積則

Wilson ループは内部の面の正則化した面積 $\alpha(D)$ で $e^{-\alpha(D)}$ と決まります（17-08 §06） 物理。(3) では面は $\rho\ge b$ にしか入れず、dx_i^2 の係数 ρ^2 は b^2 以上なので、囲む面積を A として

$$\alpha(D)\ \ge\ b^2A-(\text{縁と正則化の項}),\qquad \sigma=b^2\times(\text{弦の張力}) \tag{6}$$

で面積則（17-01 §04）が出ます（Witten）。距離 L の二点を結ぶ弦の単位長さあたりの面積 $E(L)$ を、17-08 (10) と同じ方法で求めました。

表1　葉巻の中の弦（単位 $R^2/(2\pi\alpha')$、$b=1$）。共形は 17-08 (11)

L	$E(L)$	**共形** $-1.4355/L$	$E-L$
0.1	−14.355	−14.355	—
1	−1.307	−1.436	−2.307
2	−0.032	−0.718	−2.032
6	4.000	−0.239	−2.000

短い距離では共形の $1/L$、長い距離では $E\approx L-2.000$ で、傾き 1 が $\sigma=b^2$ です 計算。弦は底 $\rho=b$ まで下りて水平に寝ます。壁（17-08 §07）は要りません。例：境界の尺度を s 倍に

取り直すと温度は T/s、張力は $1/s^2$ 倍で、$\sigma \propto T^2$ です（Witten）。

05

グルーボールは固有値 — ディラトンの動径方程式

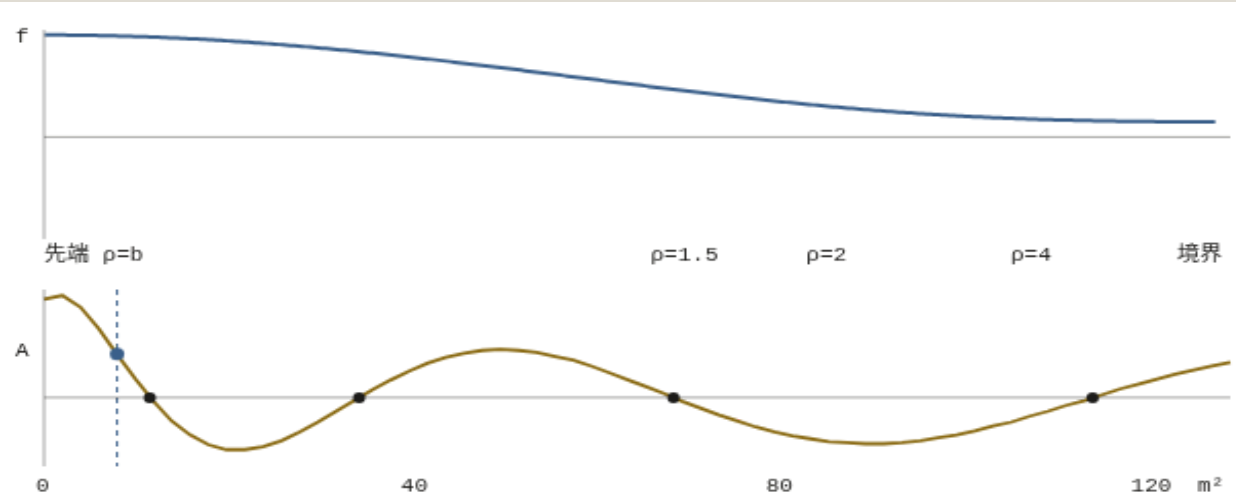
$\mathrm{tr}\,F^2$ にはディラトンが対応します（17-08 §05）。Witten は (3) の上で τ に依らない波 $\phi = f(\rho)e^{ik\cdot x}$ を調べました（τ 方向の運動量を持つ波はより重い。同じ場の中の比較。§08）。方程式は

$$-\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^3 g\,\frac{df}{d\rho}\right) = m^2 f, \qquad m^2 = -k^2 \tag{7}$$

で（$b=1$ なら $\rho^3 g = \rho^5 - \rho$）物理、m は三次元の粒子の質量です。条件は二つ。**先端で滑らか**：片方の解は $\log(\rho-b)$ で発散し、滑らかな解は定数倍を除いて一つ。**無限遠で規格化できる**：解 $f\sim 1$ と $f\sim\rho^{-4}$ のうち後者。定数の成分は境界の源（17-08 (8)）です。

先端での滑らかさは、平面の極座標の動径 r（(4)）で測った傾きが 0 という条件です。$\rho - b \propto r^2$ なので、ρ で測ると傾きは 0 にならず、(7) から $f'(1) = -m^2 f(1)/4$（$b=1$）、第一固有関数で $-2.90 f(1)$ です 計算 。de Mello Koch ら（1998）の要旨も、地平面で ρ の傾きが 0 になる滑らかな解は無い、とこの条件を述べています。求め方は撃ち込みで、先端の滑らかな解が無限遠に残す定数成分 $A(m^2)$ の零点が固有値です。

図2　上：先端（左）から撃ち出した解 f（横軸 θ、$\rho=\sec\theta$）。下：境界に残る定数成分 A（$1+m^2/4$ 倍）。m^2 を動かすと $A=0$ で解が境界に 0 で着地する



m² = 8.0　境界に残る定数成分 A = +0.148（先端で f=1）　節 0 個

計算 この図の数値はこの端末で計算した（下は精密な積分の表。上は同じ式のページ内の Runge–Kutta 積分で、表と 4 桁で一致）。

表2　(7) の固有値 m_n^2（$b=1$）。節は $n-1$ 個。T_L は (9)

n	この端末	COOT	$6n(n+1)$	$(\pi/T_L)^2(n+\frac{1}{2})^2$
1	11.5877	11.59	12	12.92
2	34.5270	34.53	36	35.89
3	68.9750	68.98	72	70.34
6	241.237	241.2	252	242.61

撃ち込みと Chebyshev 選点法（$u=1/\rho^2$ に移す）が 7 桁一致し、COOT の表 1 の 6 行を再現します 計算 。温度との比は $m_1/T=10.69$ です。

06

なぜ正で、なぜ離散か — 変分と箱の長さ

正であること。(7) に ρf を掛けて部分積分すると、先端（$\rho^3 g=0$）と無限遠の境界項が消えて

$$m^2=\frac{\int_b^\infty \rho^3 g\,(f')^2\,d\rho}{\int_b^\infty \rho\,f^2\,d\rho} \tag{8}$$

です。分子が 0 なら f は定数ですが、定数は規格化できない（$\int^\infty \rho\,d\rho=\infty$）ので $m^2>0$ 既知 。右辺の最小値が m_1^2 で、ギャップは Poincaré 不等式の最良定数です（1-10・2-05 §08）。

離散であること。変数を $t=\int_1^\rho d\rho'/\sqrt{\rho'^4-1}$ に、未知関数を $\psi=(\rho^6-\rho^2)^{1/4}f$ に取り替えると（Liouville 変換。$b=1$）、(7) は区間 $[0,T_L]$ の Schrödinger 方程式

$$-\frac{d^2\psi}{dt^2}+V(t)\,\psi=m^2\psi,\qquad T_L=\int_1^\infty\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^4-1}}=\int_0^1\frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}=1.31103 \tag{9}$$

になります 既知 。$V=(\rho^6-\rho^2)^{-1/4}\,\frac{d^2}{dt^2}(\rho^6-\rho^2)^{1/4}$ は両端で発散し、先端で $V\approx -1/(4t^2)$、無限遠の端で $V\approx(15/4)/(T_L-t)^2$ です 計算 。それでも箱の長さ T_L が有限なので、箱の中の粒子と同じく固有値は飛び飛びです。

端の型は近似の位相も決めます。ポテンシャルが $(\nu^2-\frac{1}{4})/u^2$（u は端からの距離）の端では、許される解は $\sqrt{u}\,J_\nu(mu)$（J_ν は次数 ν の Bessel 関数）で、端から離れると $\cos(mu-\nu\pi/2-\pi/4)$ のように振動します。先端は $\nu=0$ で位相 $\pi/4$、無限遠の端は $\nu=2$ で $5\pi/4$ を持ち込むので、n 番目の固有値は $m_nT_L\approx\pi(n-1)+\pi/4+5\pi/4=\pi(n+\frac{1}{2})$、つまり $m_n\approx(\pi/T_L)(n+\frac{1}{2})$ です。$n=6$ で差は m^2 で 0.6%（m で 0.3%）まで縮みます 計算 。表2 の $6n(n+1)$ は、COOT が Takei–Koike の私信として引く、完全 WKB 解析による近似式です。完全 WKB 解析は、大きなパラメータで展開した発散級数に Borel の方法で和を与えて数学的

に扱う理論で（4-12）、この式はその総和可能性を仮定しています（COOT は、この場合の証明は無いと断っています）。

AdS では下端 $\rho = 0$ までの長さ $\int_0 d\rho/\rho^2$ が無限で、解は奥で振動し、スペクトルは 0 から連続します（Witten）。「時空が終わる」は、ここでは「Liouville の長さが有限」です。Gürsoy–Kiritsis–Nitti（2007）の五次元の模型でも、奥のポテンシャルの増え方の指数 α について、閉じ込めとギャップは $\alpha \geq 1$、スペクトルが純粋に離散なのは $\alpha > 1$（$\alpha = 1$ ではギャップの上に連続スペクトル）と、模型の中の解析で述べられています。同じ論文には 'confinement and discrete spectra imply each other' という一文もあります 物理 。

07

格子と比べる — 三次元と四次元

超重力が出すのは一つの尺度を単位にした数なので、COOT はディラトンの最低状態を格子（5-08）の 0^{++} に合わせ（三次元では格子の $N \to \infty$ の値 4.065。COOT の表では 4.07 と印字）、残りを比べました。0^{--} は二形式の場の方程式から出ます。

表3　三次元（単位 $\sqrt{\sigma}$）。格子は Teper（COOT が引く値）

状態	格子 $N = 3$	格子 $N \to \infty$	COOT	この端末
0^{++*}	6.52(9)	6.18(13)	7.02	7.02
0^{++**}	8.23(17)	7.99(22)	9.92	9.92
0^{--}	6.48(9)	5.91(25)	6.10	6.10

ディラトンを基準にすると、比 $0^{--}/0^{++} = 1.50$ は格子の 1.45 ± 0.03 と 3% で合い、励起は $N \to \infty$ の格子より 14%・24% 高く出ます 計算 。基準をどのスカラーに取るかは、下の「後の解析」で扱います。

四次元は 17-07 §09 の D4 ブレーンの背景（反周期の円の半径 R_2）です。COOT のディラトン型スカラーの方程式は、$y^2 = \rho$（原論文の λ）とし、先端を $y = 1$ に置く単位（このとき $M_{\mathrm{KK}} = 1/R_2 = 3$）で次です（無限遠の解は 1 と y^{-9}）物理 。

$$(y^7 - y)\, f'' + (10y^6 - 4)\, f' + m^2 y^3 f = 0 \tag{10}$$

表4　四次元（GeV、0^{++} を 1.61 に合わせる）。右端は $M_{\mathrm{KK}} = 1/R_2$ 単位で、0^{++} と 0^{++*} は COOT の式 (10) による値、0^{-+} は COOT の三形式の式による値

状態	格子（COOT が引く値）	COOT	この端末	m/M_{KK}
0^{++}	1.61(15)	入力	入力	2.03
0^{++*}	2.8（誤差なし）	2.38	2.38	3.01
0^{-+}	2.19(32)	1.83	1.93	2.44

$0^{-+}/0^{++}$ は COOT で 1.14、当時の格子で 1.36 ± 0.32 です。COOT は 0^{-+} を 11 次元の三形式の場の成分から出します。この端末でその式から求めると最低値は $m^2 = 53.376$（(10) の 0^{++} を 1.61 GeV とすると 1.93 GeV、比 1.20）で、Brower–Mathur–Tan（2000、以下 BMT）の表2 にある同じ方程式（N4）の値と一致します 計算 。COOT の表の 1.83 GeV は、この式からは再現できません。格子の 0^{++*} は二グルーボールの束縛状態の可能性が注記されています。

後の解析 — どのスカラーが最も軽いか

BMT は超重力の場をすべて（計量・三形式・球面の大きさ）動径の固有値問題にしました。四次元のスカラー型のモードを並べます。「割り当て」は、そのモードが結合する演算子から読んだ量子数 J^{PC} です。

表5　四次元の最低モード（先端を 1 に置く単位の m^2。右端は M_{KK} 単位）

方程式	由来の場	割り当て	この端末	BMT 表2	m/M_{KK}
S4	計量の $\tau\tau$ 成分	0^{++}（最も軽い）	7.3083	7.308	0.901
T4	計量・ディラトン	2^{++}・0^{++} など（0^{++} は $\mathrm{tr}\,F^2$ に結合）	22.0966	22.097	1.567
V4	計量の τi 成分など	1^{-+}・0^{-+}	31.9853	31.985	1.885
COOT の (10)	ディラトン	0^{++}（COOT）	37.1699	–	2.032
N4	三形式	1^{+-}・0^{+-}（BMT）、0^{-+}（COOT）	53.3758	53.376	2.435

T4 の方程式は (10) と一階の項だけが違います。

$$(y^7 - y)\,f'' + (7y^6 - 1)\,f' + m^2 y^3 f = 0 \tag{10'}$$

後の解析では、$\mathrm{tr}\,F^2$ に結合するディラトン型の 0^{++} は 2^{++} と縮退して $1.567\,M_{\mathrm{KK}}$、最も軽い 0^{++} は別のモード S4 の $0.901\,M_{\mathrm{KK}}$ です 物理 。表4 の 2.03 は COOT の式 (10) による値です。三次元でも、ディラトン（11.588）より軽いスカラー（BMT の S3、5.457）があります 計算 。BMT は 'the lowest mass scalar comes from the gravitational multiplet, not the dilaton' と書き、数 % の比の一致を 'a misconception' と評しています。同時に、スピンと質量の並び全体は格子の結果とよく対応するとも書いています 物理 。

そのため比は、分子と分母にどのモードを取るかで動きます。三次元の $0^{--}/0^{++}$ は S3 を基準にすると 2.19 です。四次元では、COOT の三形式の値を T4 で割ると 1.55、BMT の割り当て（0^{-+} は V4）では V4/T4 が 1.20、V4/S4 が 2.09 です 計算 。今日の格子の $SU(3)$ では $0^{-+}/0^{++} = 1.549(16)$、$0^{++*}/0^{++} = 1.720(16)$ です（17-01 の表）。COOT の基準のホログラフィーの比（1.14、1.20、1.48）は、それぞれ 26%・23%・14% 小さくなります 計算 。

> 08

二つの尺度 — 張力は予言されず、円の尺度も消えない

グルーボールの質量は固有値問題で決まり、結合 $\lambda = g_{\mathrm{YM}}^2 N$ に依りませんが、弦張力は λ に比例します。D4 の模型では Kruczenski–Mateos–Myers–Winters（2003）の式 (2.7) から 物理

$$\sigma = \frac{2}{27\pi}\,\lambda\, M_{\mathrm{KK}}^2, \qquad \frac{m_{0^{++}}}{\sqrt{\sigma}} = \frac{m_{0^{++}}}{M_{\mathrm{KK}}}\sqrt{\frac{27\pi}{2\lambda}} \tag{11}$$

です（λ の規約で 2 倍ずれうる）。右辺の $m_{0^{++}}/M_{\mathrm{KK}}$ には、COOT の式 (10) による 2.03、BMT の T4（ディラトン型）の 1.567、S4（最も軽い）の 0.901 のどれを入れるかで値が変わります。

表6　(11) の $m_{0^{++}}/\sqrt{\sigma}$。格子の $SU(\infty)$ は 3.072(14)

$m_{0^{++}}/M_{\mathrm{KK}}$	$\lambda = 1$	$\lambda = 10$	$\lambda = 30$	$\lambda = 100$	$\lambda = 1000$	3.072 に合う λ
2.03（COOT の式 (10)）	13.2	4.19	2.42	1.32	0.42	19
1.567（BMT の T4）	10.2	3.23	1.86	1.02	0.32	11
0.901（BMT の S4）	5.87	1.86	1.07	0.59	0.19	3.7

超重力が信頼できる $\lambda \gg 1$ で比は $\lambda^{-1/2}$ で 0 に向かいます 計算。3.072 に合う λ は 3.7〜19 と、どのモードを取るかで 5 倍ほど動き、いずれも当てはめで予言ではありません。Klebanov–Strassler も張力とグルーボールの 'large separation of scales' を認めています。格子では 3〜4 です（17-03）。

壁で切る模型では、比の λ 依存は $\lambda^{-1/4}$ です。硬い壁（17-08 の (12)）では張力が $\sigma = \sqrt{\lambda}/(2\pi z_w^2)$、グルーボールの質量が $\sim 1/z_w$ です（壁で Dirichlet 条件を課す Boschi-Filho–Braga 2003）。柔らかい壁では、張力が Andreev–Zakharov（2006）の (19) と $g = R^2/\alpha'$ から $\frac{R^2}{\alpha'}\frac{e}{4\pi}c$、質量の二乗が c に比例します（Karch–Katz–Son–Stephanov 2006 の (15)。中間子の場合）。どちらも張力が $\sqrt{\lambda}$ に比例するので比は $\lambda^{-1/4}$ で、D4 の模型の $\lambda^{-1/2}$ との違いは (11) の張力が λ に比例することから来ます 物理。

もう一つは円の尺度です。三次元では、§03 の規格化で境界の円周は π なので $R = 1/2$、$m_1 = 3.404 = 1.70/R$ です（COOT は地平面の位置を $b = 1/(2R)$ と置く別の規格化を使います）。四次元では 0^{++} が $0.90/R_2$〜$2.03/R_2$ で、どのモードを取ってもグルーボールは円と同じ桁です 計算。球面の上の KK モード（17-06 §02）も 'of the same order' で（COOT）、グルーボールとみなす状態は手で選ばれています。消すには $\lambda \to 0$ が要り、それは超重力が効く向きの 'opposite' です。Witten 自身、小さい $\eta = g_4^2 N$ での計算を 'a tall order' としました 物理。極限の順序は 17-10 へ。

09

別の閉じ方 — Klebanov–Strassler と成績表

Klebanov–Strassler（2000）は D3 ブレーン（17-08 §02）を六次元の錐（コニフォールド）の上に置き、先端の特異点が IR で変形されて有限の球面が残る背景を作りました。

$$\sum_{i=1}^{4} z_i^2 = 0 \ \text{（コニフォールド）} \longrightarrow \sum_{i=1}^{4} z_i^2 = \epsilon^2 \ \text{（変形）}, \qquad z_i \in \mathbb{C} \tag{12}$$

例：z_i を実数に限ると右は半径 ϵ の S^3 で、先端に残る球です 既知 。錐の断面を貫く五形式の場の流束（D3 ブレーンの枚数に当たる量）は $\mathcal{K}(r) = N + a\, g_s M^2 \ln(r/r_0)$ と動径 r で対数的に変わります。g_s は弦の結合（17-08 (3)）、M は錐の中の球に巻いた「分数ブレーン」の枚数、a は 1 の程度の定数です（原論文）。著者たちはこの減少を、ゲージ群 $SU(N+M) \times SU(N)$ が $N \to N - M$ と段々に小さくなる列（カスケード）と読みます 物理 。先端の変形は、IR に残る $\mathcal{N} = 1$ 超対称ヤン–ミルズの R 対称性（この理論のカイラル対称性）$\mathbb{Z}_{2M} \to \mathbb{Z}_2$ の破れが幾何として見えたもの、とされます 物理 。先端で dx^2 の係数が有限なので §04 と同じく面積則が出ます。ただし理論は $\mathcal{N} = 1$ 超対称、UV のカスケードは 'goes on forever'、S^3 の KK モードとグルーボールは 'both scale as $m/(g_s M)$' です。

表7　成績表（年は arXiv）

模型	合うもの	入力	外れる・予言しない
Witten・QCD_3	$0^{--}/0^{++}$ 1.50 対 1.45(3)（ディラトンを基準にした場合。S3 を基準にすると 2.19）	0^{++}	励起 14〜24%・張力・円
Witten・QCD_4	$0^{-+}/0^{++}$ 1.14 対 1.36(32)（1998 年。COOT の式 (10) のディラトンを基準にした場合）	0^{++}	今日の格子と 14〜26%・モードの選び方で比が 1.14〜2.09・$m/\sqrt{\sigma}$
Klebanov–Strassler（2000）・Maldacena–Núñez（2000）	面積則・R 対称性（カイラル対称性）の破れ（幾何）	—	$\mathcal{N} = 1$・KK と同じ尺度
Gürsoy–Kiritsis–Nitti（2007）	$2^{++}/0^{++}$ 1.40 対 1.46(5)	$0^{++*}/0^{++}$	ポテンシャルは当てはめ・$N = \infty$

どの模型でもギャップは「固定した背景の上の線形の固有値問題」として示され、背景が $\mathbb{R}^4$ の純ヤン–ミルズ理論を記述する部分は予想のままです。Clay の頁も 'no proof of this property is known' と書いています。問題文（0-03）との距離は 17-10、切れ目は 16-05 です。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 (4)(8)(9)(12)。固定した背景の上の数学。	背景が純ヤン–ミルズ理論を記述すること。
計算 表1〜表6、図1・図2、(5)、(9) の V の両端の振る舞い。COOT の QCD_3 と QCD_4 の 0^{++} の表の再現。BMT の表2 の S4・T4・V4・N4 と、三次元の S3 の最低値の再現。	QCD_4 の 0^{-+}（1.83 GeV）の再現。(11) の λ の規約。どのモードをどの状態とみなすかの決着。
物理 (1)(3)(6)(7)(10)(10′)(11) の読み、グルーボール＝固有値、量子数の割り当て、表3・4・5・7 の比較。	$N, \lambda \to \infty$ の外。この本は質量ギャップも連続極限の構成も自分では示していない（公開された連続極限の構成は第二巻）。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
Witten の式と引用	物理・既知	E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 505, hep-th/9803131。本文を確認。
(10)・表2〜4・COOT の引用・$6n(n+1)$	物理	C. Csáki, H. Ooguri, Y. Oz, J. Terning, JHEP 9901 (1999) 017, hep-th/9806021。本文を確認（$6n(n+1)$ は同論文が Y. Takei, T. Koike の私信として引くもの）。
表5・(10′)・§07 の後の解析	物理	R. C. Brower, S. D. Mathur, C.-I. Tan, Nucl. Phys. B 587 (2000) 249, hep-th/0003115。本文を確認（表1・表2・QCD_3 の表・§4 の量子数・§5.1）。
格子	物理	M. J. Teper, hep-lat/9804008, hep-lat/9711011；C. Morningstar, M. Peardon, PRD 56 (1997) 4043（COOT 経由。書誌のみ）。A. Athenodorou, M. Teper, JHEP 11 (2020) 172；JHEP 12 (2021) 082（照合済みの調査記録から）。
先端の条件・(11)	物理	R. de Mello Koch ほか, PRD 58 (1998) 105009, hep-th/9806125（要旨、照合済みの調査記録から）；M. Kruczenski, D. Mateos, R. C. Myers, D. J. Winters, JHEP 0405 (2004) 041, hep-th/0311270 の式 (2.7)（本文を確認：$\sigma = \frac{2}{27\pi} g_{\mathrm{YM}}^2 N_c M_{\mathrm{KK}}^2$）。
§08 の壁の模型の $\lambda^{-1/4}$	物理	H. Boschi-Filho, N. R. F. Braga, JHEP 0305 (2003) 009, hep-th/0212207（要旨を確認）；O. Andreev, V. I. Zakharov, Phys. Rev. D 74 (2006) 025023, hep-ph/0604204 の (19) と $g = R^2/\alpha'$（本文を確認）；A. Karch, E. Katz, D. T. Son, M. A. Stephanov, Phys. Rev. D 74 (2006) 015005, hep-ph/0602229 の (15)（本文を確認）。硬い壁の張力は 17-08 の (12)（この端末の計算。壁で線形の項が出ることは H. Boschi-Filho, N. R. F. Braga, C. N. Ferreira, Phys. Rev. D 73 (2006) 106006, hep-th/0512295 の (12)〜(16) でも確認）。指数 $-1/4$ はこれらを組み合わせたこの端末の算術。
(12)・§09・表7	物理・既知	I. R. Klebanov, M. J. Strassler, JHEP 0008 (2000) 052, hep-th/0007191（本文を確認）；J. M. Maldacena, C. Núñez, PRL 86 (2001) 588（要旨）。
§06 の指数 α・表7	物理	U. Gürsoy, E. Kiritsis, F. Nitti, JHEP 0802 (2008) 019, arXiv:0707.1349（本文を確認）。

もの	種別	出典・道具
寄り道・Clay	既知	G. W. Gibbons, S. W. Hawking, 'Action integrals and partition functions in quantum gravity', Phys. Rev. D 15 (1977) 2752（書誌のみ）。Clay の問題の頁（照合済みの調査記録から）。
表・図・数値	計算	この端末の Python 3（scipy）：glueball.py・cigar_wilson.py・fig_shoot.py・rev_bmt.py（表5・表6）・rev_liouville.py（(9) の V）ほか 5 本。

次に読む章：17-10 四次元に戻す ― 極限の順序と問題文との距離。

四次元に戻す — 余剰次元を消す向きと、幾何で計算できる向きは反対にある

この章は既存の知見の整理です。§03 は本書の検討です。

この章で分かること — 余剰次元を消す $R \to 0$ が、次元転移のため $\lambda \to 0$ と同じ向きであること。幾何で計算できるのは反対の $\lambda \to \infty$ で、KK の塔がグルーボールと同じ高さに残ること。極限の入れ替えに要る一様性が欠けていること。

前提となる章 — 17-09。17-01 の次元転移、17-04 の 't Hooft の勘定、2-08 の Curie–Weiss 模型も使います。

先に言うこと — (2)(3) と表の算術は物理の見積もりで、定理ではありません。模型から四次元の理論へ移る極限を正当化した結果は探した範囲で見当たらず、この本も質量ギャップや連続極限の構成について自分では何も示していません（公開された連続極限の構成は第二巻で読みます）。

この章の順序

1. 三つのつまみ — N・λ・R と問題文
2. 次元転移が向きを決める — $R \to 0$ は $\lambda \to 0$
3. 超重力が効くのは反対の向き — 窓と床（図1）
4. 余分なものが残る — KK の塔と超対称性
5. $N \to \infty$ — 群を一つに固定すると
6. 極限の順序 — 入れ替えには一様性が要る
7. 寄り道：一様でない収束を目で見る（図2）
8. 問題文との距離 — 五つの要求
9. 何が残るか — 問題は場所を移す

01

三つのつまみ — N・λ・R と問題文

17-09 の模型を**懸賞問題の四次元の理論に戻せるか**が、この章の問いです。つまみは $SU(N)$ の N、尺度 M_{KK} での 't Hooft 結合 $\lambda = g^2 N$（17-04）、余剰次元の円の半径 $R = 1/M_{KK}$（KK の塔の間隔、17-06）の三つです。グルーボールの質量を Λ とすると、比 ΛR が余剰次元の見え方を測ります。問題文（Jaffe–Witten §4、0-03）の要求は

$$G \text{ は一つずつ固定 (例: } SU(3)), \qquad \text{空間は } \mathbb{R}^4 \ (R = 0), \qquad \text{短い距離で漸近自由に一致} \tag{1}$$

で、三つ目は相関関数が短い距離で漸近自由と摂動的な繰り込み理論の予言に合うことです（§4。引用は 0-03 §07）既知。模型が計算できるのは逆に $N = \infty$、$\lambda \gg 1$、ΛR が 1 の程度の場所です（§03・§05）。

例：Sakai–Sugimoto の模型は $M_{KK} \simeq 949$ MeV と $\kappa = \lambda N_c/(216\pi^3) \simeq 7.45 \times 10^{-3}$ を実験値から決めます。$N_c = 3$ なら $\lambda \approx 16.6$ 計算。これは Sakai–Sugimoto の結合の規約での値で、次の節の (2) の λ とは規約の違いで 2 倍程度ずれえます。以下で (2) に入れる数は目安です。ρ 中間子の 776 MeV は M_{KK} の 0.82 倍で、塔と同じ高さです。

02

次元転移が向きを決める — $R \to 0$ は $\lambda \to 0$

余剰次元を消すとは、Λ を固定して $R \to 0$ とすることです。Λ は結合の走りから生まれます（17-01・4-07）。17-01 の (1) の一ループの式 $\mu\, dg/d\mu = -b_0 g^3$（$b_0 = 11N/(48\pi^2)$）を $\lambda = g^2 N$ で書き直すと

$$\mu \frac{d\lambda}{d\mu} = 2gN\, \mu \frac{dg}{d\mu} = -2b_0 N\, g^4 = -\frac{2b_0}{N}\, \lambda^2 = -\frac{11}{24\pi^2}\, \lambda^2$$

です。両辺を λ^2 で割ると $d(1/\lambda)/d\ln\mu = 11/(24\pi^2)$ なので、$1/\lambda$ は $\ln\mu$ の一次式です。以下、引数の無い λ は $\mu = M_{KK}$ での値です。

$$\frac{1}{\lambda(\mu)} = \frac{1}{\lambda} + \frac{11}{24\pi^2} \ln \frac{\mu}{M_{KK}}$$

μ を下げると右辺は減り、$\mu = M_{KK} \exp\big(-24\pi^2/(11\lambda)\big)$ で 0 になります（一ループの結合がここで発散します）。結合が強くなるこの尺度が Λ の目安で

$$\Lambda R \ \sim\ \exp\!\Big(-\frac{24\pi^2}{11\,\lambda}\Big) \tag{2}$$

です 物理 。$\sim$ は「定数倍を除いて等しい」の意味で、定数は Λ の定義（Λ パラメータか、グルーボールの質量か）と規約で変わります。逆に解くと

$$\lambda(M_{KK}) \simeq \frac{24\pi^2/11}{\ln\big(1/(\Lambda R)\big)} \xrightarrow[R\to 0]{} 0 \tag{3}$$

で（定数倍は分母に定数を足すだけなので、$R\to 0$ の向きには効きません）、**余剰次元を消すことは $\lambda\to 0$ と同じ向き**です。Witten（1998 §4）は 'Asymptotic freedom should say that as η→0, the particle masses become exponentially small'（η はこの章の λ）と書き、Csáki–Ooguri–Oz–Terning は質量を $M^2 = f(\lambda)\Lambda_{UV}^2$ と置いて 'To take the continuum limit $\Lambda_{\rm UV}\to\infty$, we have to simultaneously take $\lambda\to 0$' と述べます 物理 （(2) は 17-07 の (10)）。比喩で言えば R は格子の刻み幅の役で、正確には、刻み幅 $a\to 0$ で裸の結合を 0 に送る（5-05）のと同じ論理です。

表1　ΛR の見積もり（(2) の定数倍を 1 と置いた値）と弦の補正の目安 $\lambda^{-3/2}$

λ	一ループ (2)	二ループ	$\lambda^{-3/2}$
1	4.45×10⁻¹⁰	2.17×10⁻⁹	1
5	0.0135	0.0334	0.0894
10	0.116	0.215	0.0316
16.6	0.274	0.409	0.0147
100	0.806	0.565	0.0010

計算 二ループは、17-01 の式に次の項を足した $\mu\,dg/d\mu = -b_0 g^3 - b_1 g^5$（$b_1 = \frac{34N^2}{3(16\pi^2)^2}$）から、(2) の右辺に $(11\lambda/48\pi^2)^{-51/121}$（$51/121 = b_1/(2b_0^2)$）を掛けたもの。規約で係数は変わりえ、大きな λ の行は (2) の使える範囲の外の目安です（$\lambda=100$ で二ループの列が一ループより小さいのもそのためです。§03）。例：$\Lambda R = 10^{-3}$ には $\lambda \le 3.12$（二ループ 2.66）、10^{-6} には $\lambda \le 1.56$（1.41）が要ります。

03 超重力が効くのは反対の向き — 窓と床

重力の幾何で計算できるのは $\lambda \gg 1$ のときです（17-08）。Csáki らは §02 の $M^2 = f(\lambda)\Lambda_{UV}^2$ の f について先頭の弦の補正を評価し、**三次元**の純ヤン–ミルズ（QCD_3）の 0^{++} グルーボールで

$$f(\lambda) = c_0 + c_1\lambda^{-3/2} + \cdots, \qquad c_1 < 0 \tag{4}$$

を得ました（0^{++} の最低状態と、最初の五つの励起準位）物理 。$c_1<0$ は、紫外の切断 Λ_{UV} を固定して λ を減らすと質量が下がる、という意味で、連続極限への期待と合う向きです。四

次元での冪はこの論文にはありません。以下では $p = 3/2$ を四次元の目安として借ります。

同じ論文は三次元の場合について、$R \to 0$ で $g_4^2 N \to 0$ とする（QCD_3 の結合 $g_3^2 N = g_4^2 N / R$ を一定に保つため）ことを 'This is the opposite of the limit that is required for the supergravity description to be valid' と書きます。四次元についての根拠は、§02 の Witten の文と、Csáki らの序論の 'To take the continuum limit …' の文です。Witten も、小さい η で漸近自由を示し質量を計算することを 'This looks like a tall order, given our limited knowledge of worldsheet field theory with Ramond-Ramond fields in the Lagrangian' と書いています（世界面の場の理論は §09 で説明します）。

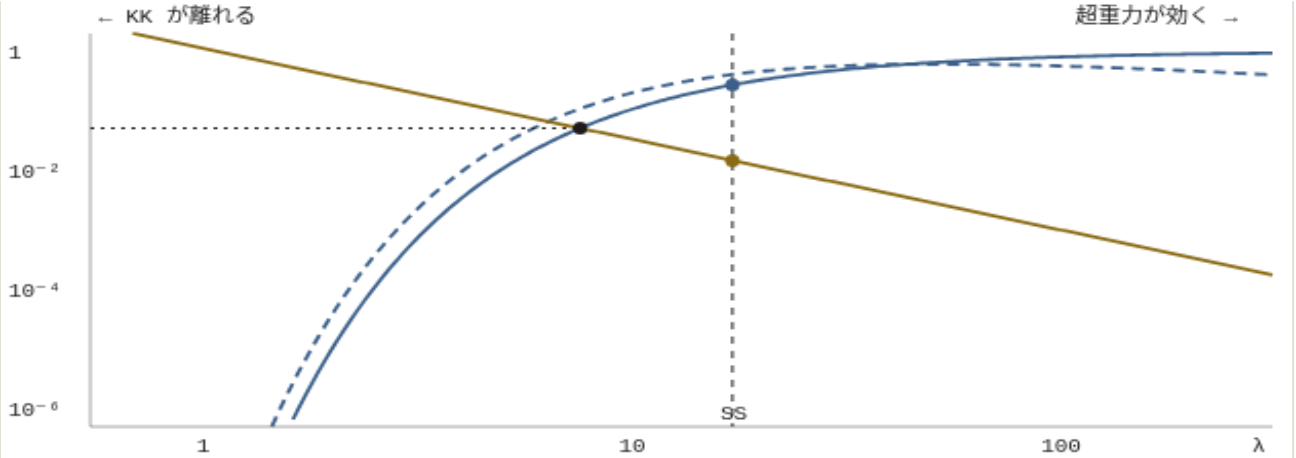
塔の見え方を $e_{KK} = \Lambda R$（(2) の定数倍を 1 と置く）、弦の補正の目安を係数 1 の $e_{\mathrm{str}} = \lambda^{-p}$（(4) を借りれば $p = 3/2$）として綱引きを数で見ます。二つの曲線の交点 λ^* での値を**床**と呼びます。

$$F_p = e_{KK}(\lambda^*) = e_{\mathrm{str}}(\lambda^*) \tag{5}$$

$\log e_{KK} + p \log \lambda$ は λ について増加する（一ループでも二ループでも、$p \geq 1$ なら）ので、交点はただ一つです。一ループの e_{KK} は増加して 1 に近づき、e_{str} は減少するので、交点の左では e_{str}、右では e_{KK} が F_p を上回ります。つまり一ループの見積もりでは $F_p = \min_\lambda \max(e_{KK}, e_{\mathrm{str}})$ で、**どの λ でも二つの目安のうち大きいほうは F_p を下回りません** 計算 。

二ループの式では事情が違います。e_{KK} は $\lambda \approx 51$ で最大 0.61 になり、その先では減って $\lambda \to \infty$ で 0 に向かいます。そのため λ の上限を外すと、max の最小値は 0 に近づきます（$p = 3/2$ で、$\lambda \leq 10^4$ までなら 0.067、$\lambda \leq 10^5$ で 0.038、$\lambda \leq 10^6$ で 0.014）計算 。これは結合の走りの摂動の式を λ の大きい側へ延ばした振る舞いで、(2) の使える範囲の外です。表2の二ループの行は交点の値で、$\lambda \leq 316$（図1 の範囲）に限った max の最小値とも一致します。

図1　λ を動かすと、その点での ΛR（青。実線は一ループ、破線は二ループ）と λ^{-p}（黄）の値が読める。水平の点線は一ループの床 F_p。SS は Sakai–Sugimoto の λ（規約で 2 倍程度ずれうる）。破線が $\lambda \approx 51$ より右で下がるのは (2) の使える範囲の外



λ = 16.63　ΛR：一ループ 0.274・二ループ 0.409　λ^−3/2 = 0.015　床 F = 0.051（二ループの交点 0.067）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（曲線は式をその場で計算。床は表2 と一致）。

表2　床 F_p（交点の値）と交点 λ^*

ΛR の式	p	λ^*	F_p
一ループ	1	9.55	0.105
一ループ	3/2	7.25	0.051
二ループ	1	7.77	0.129
二ループ	3/2	6.09	0.067

両方が 5〜13% 程度になる**窓**はあり、比が格子と数 % で合うこと（三次元の $0^{--}/0^{++}$ をディラトン基準で比べた場合。基準のモードや状態を替えると 14〜26% ずれる：17-09）と矛盾しません。しかし定理に要るのは誤差を 0 に送る**極限**で、一ループの見積もりでは床がそれを阻みます。どちらの目安も係数 1 の粗いもので、床の値そのものではなく、二つを同時に小さくする向きが無いことが要点です。例：Sakai–Sugimoto の $\lambda \approx 16.6$ を (2) にそのまま入れると $e_{KK} = 0.27$（二ループ 0.41）、$e_{\mathrm{str}} = 0.015$ です。規約の違いを見込んで λ を半分（8.3）や 2 倍（33）にしても、e_{KK} は 0.075〜0.52、e_{str} は 0.042〜0.005 で、大小は入れ替わりません 計算 。塔の側が大きく残ることを示唆する目安です。

04

余分なものが残る — KK の塔と超対称性

$\lambda \gg 1$ では KK の塔がグルーボールと同じ高さに来ます。固定した背景の上の揺らぎの質量の二乗はラプラス型の作用素の固有値で、計量を $g \mapsto s^2 g$ とすると固有値はすべて s^{-2} 倍になります。

$$m_n^2 = \frac{c_n}{R^2} \qquad (c_n \text{ は背景の形だけで決まる数}) \tag{6}$$

背景の長さが R 一つなら、グルーボールも KK モードも $1/R$ の何倍かです（冪の勘定は 既知 、背景がヤン–ミルズを記述するという部分は 物理 ）。ただし弦張力には λ が入り、Klebanov–Strassler は $T_s \sim g_s M\, m_{\text{glueball}}^2$ と書いています（17-08 §07 と同じ事情）。塔が離れないことは、表3 の著者たちが認めています（Witten の背景については Csáki らと Klebanov–Strassler による）物理 。

表3　残るものと、著者の文

模型	残るもの	著者の文
Csáki ら（Witten の背景）	$SO(6)$ 非一重項	'their masses are of the same order as the SO(6) singlet states … Presumably λ^{-1} corrections make them heavy'。一部の場は手で除く
Maldacena–Núñez	五ブレーン上の KK	'the masses of glueballs are comparable to the masses of Kaluza Klein states on the fivebrane'
Klebanov–Strassler	S^3 上の KK	'in the SUGRA limit both scale as m/(g_sM)'。Witten の背景にも余分なモードがあると明記
Polchinski–Strassler	$\mathcal{N}=4$ の物質	'the N=4 matter cannot be decoupled within the supergravity regime'
Sakai–Sugimoto	質量 M_{KK} の塔・$SO(5)$	'the same energy scale of the mass of the vector mesons'。脚注に 'believed somewhat optimistically' と（後者は hep-th/0507073 の脚注）

超対称性の残り方

Witten 型（1998 §4。円でフェルミオンを反周期にする）では、フェルミオンは木の水準で質量 $1/R$ 程度を得て、スカラーは 'very plausibly get masses … at one-loop level' とされ、'If this is so, the low energy theory will be the pure SU(N) theory without supersymmetry' と続きます（三次元の場合を述べた §2.2 にも、弱結合では長い距離の振る舞いが 'very plausibly' 三次元のゲージ場だけになる、という同じ趣旨の文があります）。Klebanov–Strassler と Maldacena–Núñez は $\mathcal{N}=1$ 超対称性を保つので、さらにグルーイノ（グルーオンの超対称性の相棒のフェルミオン）を重くする極限が要ります。Gürsoy–Kiritsis の五次元の模型は、弦理論の背景から導くのではなく五次元の重力の模型を直接置く（ボトムアップ型の）もので、β 関数を入力します（'using input … as well as QCD'）物理 。例：調べた範囲で、弦理論の背景から組む（トップダウン型の）模型のうち超対称性の無い純ヤン–ミルズが出るのは Witten 型だけで、それも塔と同じ尺度です。

> 05

$N \to \infty$ — 群を一つに固定すると

重力の幾何が古典的になるのは $N \to \infty$ のときです。ゲージ理論の量は 't Hooft の勘定（17-04）で種数 h の和に並びます。

$$\log Z = \sum_{h \geq 0} N^{2-2h} F_h(\lambda) \tag{7}$$

重力の計算が与えるのは F_0 の λ が大きい側の先頭で、$SU(3)$（$1/N^2 = 1/9$）には残りの項すべてが効きます。格子で比が N でゆっくり動くこと（17-04）物理 も、固定した N の理論の存在は与えません。群の種類にも隔たりがあり、D ブレーンから出るのは $U(N)$・$SU(N)$、オリエンティフォールド（弦の向きを反転する操作で割った背景）で SO・Sp です（17-07）。例外群 $G_2, F_4, E_{6,7,8}$ の四次元純ヤン–ミルズのホログラフィー双対は探した範囲で見当たらず、幾何工学は ADE 型と、外部自己同型（Dynkin 図の自己同型）による折りたたみで B・C・F・G 型を作れますが、超対称な理論の中でのことです（17-07）。例：問題文では $SU(2)$ も G_2 も、それぞれ一つの理論です。

06

極限の順序 — 入れ替えには一様性が要る

重力の計算は、弦を古典的にする $N \to \infty$ の後で超重力の $\lambda \to \infty$ を取り、R を単位にしています。

$$N \to \infty \ \longrightarrow\ \lambda \to \infty, \qquad R \text{ は固定} \tag{8}$$

問題文の側は N を固定し、$R \to 0$、つまり (3) により $\lambda \to 0$ を取ります。二つの極限を入れ替えてよい条件は、解析学の標準的な定理が与えます 既知 。二重の添字の数列 $a_{m,n}$ が $n \to \infty$ で b_m に m **について一様に**収束するとは

$$\sup_{m} \left| a_{m,n} - b_m \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

のこと、つまり一つの n でどの m の誤差も同時に小さくなることです。このとき次が成り立ちます。

$$a_{m,n} \xrightarrow[n\to\infty]{} b_m \ (m \text{ について一様}), \quad a_{m,n} \xrightarrow[m\to\infty]{} c_n \ \Longrightarrow\ \lim_{m\to\infty} b_m = \lim_{n\to\infty} c_n \tag{9}$$

一様でなければ入れ替えは一般に許されません。例：$a_{m,n} = m/(m+n)$ では $\lim_m \lim_n a_{m,n} = 0$、$\lim_n \lim_m a_{m,n} = 1$ です（$\sup_m m/(m+n) = 1$ なので、$n \to \infty$ での 0 への収束は一様ではありません）。

要るのは、$1/N$ の補正が λ について一様に小さいこと、弦の補正が N について一様に小さいこと、そして $\lambda \to 0$ まで途切れない道です。(4) は三次元での補正の先頭の一項で、一様性でも極限でもありません。**この入れ替えを正当化した結果は、探した範囲で見当たりません**。比喩で言えば、超重力の領域（'fixed ultraviolet cutoff … in the strong ultraviolet coupling regime'）は強結合の粗い格子の位置です。正確には、強結合の格子では無限体積極限の存在が証明されています（Osterwalder–Seiler 1978、5-04）が、この対応は比喩にとどまります。

07

寄り道：一様でない収束を目で見る

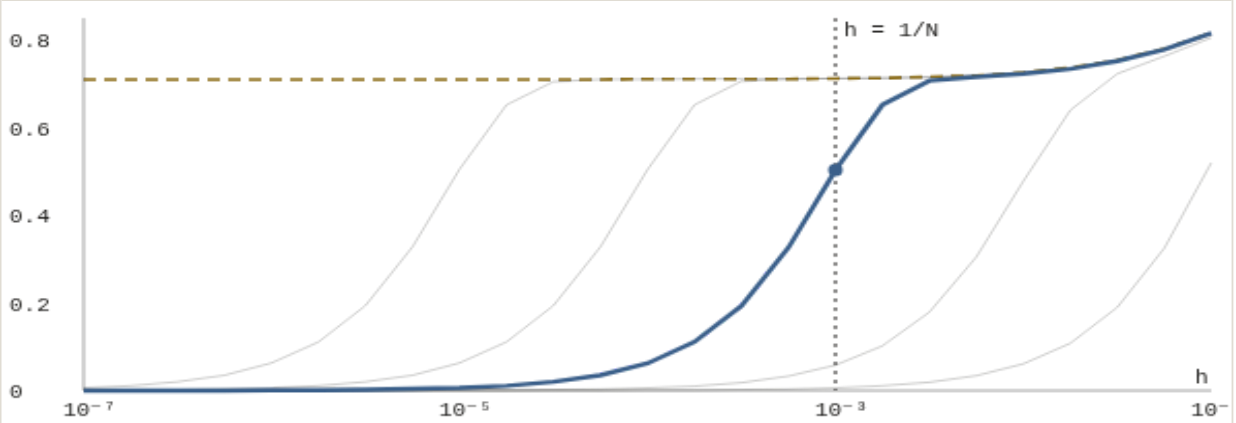
飛ばしてよい節です。

自発磁化は $h \to 0$ と $N \to \infty$ の順序で値が変わります（2-08 の (10)）。Curie–Weiss 模型（$J = 1$、逆温度 $\beta = 1.25$）で一様でない場所を数えます。一スピンあたりの磁化は、2-08 と同じく質量と区別して $\bar{m}$ と書きます。有限の N では二項係数の和で正確に書けます。

$$\langle \bar{m} \rangle_{N,h} = \frac{\sum_{k} \binom{N}{k} \bar{m}_k \, e^{\beta N (\bar{m}_k^2/2 + h\bar{m}_k)}}{\sum_{k} \binom{N}{k} \, e^{\beta N (\bar{m}_k^2/2 + h\bar{m}_k)}}, \qquad \bar{m}_k = \frac{2k - N}{N} \tag{10}$$

全反転の対称性で $\langle \bar{m} \rangle_{N,0} = 0$ なので $\lim_N \lim_{h \to 0} = 0$、一方 $\lim_{h \downarrow 0} \lim_N = \bar{m}^* = 0.71041$ です。

図2　N を大きくすると、$\langle \bar{m} \rangle_{N,h}$（青）が $N = \infty$ の曲線（黄の破線）に張り付く範囲が左へ延びる。縦の点線は $h = 1/N$



N = 10³　h = 1/N での ⟨m̄⟩ = 0.503（(11) の x = 1：0.505）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（(10) を正確に評価し、$\log_{10} h$ の刻み 0.25 で埋め込んだ）。

表4　$\langle \bar{m} \rangle_{N,h}$（$\beta = 1.25$）。太字は $h = 1/N$ の欄

N	$h = 10^{-2}$	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	$h = 0$
10^2	**0.4780**	0.0579	0.0058	0.0006	0
10^3	0.7231	**0.5028**	0.0625	0.0063	0

N	$h=10^{-2}$	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	$h=0$
10^4	0.7255	0.7117	**0.5045**	0.0629	0
10^5	0.7257	0.7120	0.7105	**0.5047**	0
∞	0.7257	0.7120	0.7106	0.7104	$\bar{m}^*$（$h\downarrow 0$）

行を右へたどると 0 に、列を下へたどると $\bar{m}^*$ の近くに行き、対角線は約 0.5 です。大きな N では分布が $\pm\bar{m}^*$ の二つの山に割れ、重みの比が $e^{2\beta h N \bar{m}^*}$ なので

$$\langle \bar{m} \rangle_{N,\,x/N} \;\longrightarrow\; \bar{m}^* \tanh(\beta \bar{m}^* x) \qquad (N\to\infty) \tag{11}$$

です。$x=1$ の値 0.50468 に対し $N=10^5$ の正確な値は 0.50467 でした 計算 。**一様でない場所は $h\sim 1/N$ の帯で、N を大きくすると左へ逃げていきます**。ここでは (10) が正確に書けるので帯の位置が分かりますが、(8) の二つのつまみについては確かめる手段がまだありません。

08

問題文との距離 — 五つの要求

問題文は 'Prove that for any compact simple gauge group G, a non-trivial quantum Yang–Mills theory exists on R^4 and has a mass gap $\Delta > 0$' で、存在には公理的な性質を満たすことが含まれます（Jaffe–Witten §4） 既知 。

表5　要求と、余剰次元の模型の現在地（どの行も 物理 の水準）

要求	現在地
群 G を固定	$SU(N)$ で $N\to\infty$。例外群の双対は見当たらない（§05）
$\mathbb{R}^4$ の上	$\mathbb{R}^4\times$（余剰次元）で ΛR が 1 の程度（§03）
短い距離で漸近自由	紫外は五次元の理論や (2,0) 理論（17-07）。Klebanov–Strassler のカスケードは 'goes on forever as the scale is increased'
公理（4-10）を満たして存在	AdS/CFT は予想（17-08 §08）。弦理論の側に非摂動的な定義が無い
質量ギャップ	超重力の固有値問題（半古典）。Witten：'A mass gap likewise can be demonstrated … by using the large λ behavior of the metric'（この λ は計量の動径座標）

表5 のどの行も、まだ満たされていません。Jaffe–Witten §6 は 'at present we do not know any non-trivial relativistic field theory that satisfies the Wightman (or any other reasonable) axioms in four dimensions' と書きました（2000 年の文。四次元の理論の存在は、2026 年に公開された構成が Wilson の格子の極限として与え、委員会が評価しています。第二巻）。質量ギャップについては、Clay 数学研究所の問題の頁は今も 'no proof of this property is known' と書いています 既知 （ギャップの定義は 4-11）。例：模型が数 % で当て

る比（17-09。ディラトン基準の三次元の比に限る）も、表5 のどの行も満たさないまま得られた数です。

09

何が残るか — 問題は場所を移す

問題は消えずに場所を移します。Witten は $\eta \to 0$ で幾何に特異点が現れることを述べて 'Apparently, in this approach, the mysteries of four-dimensional quantum gauge theory are encoded in the behavior of string theory near this singularity' と書き、Csáki らは予想のもとで大きな N の QCD の問題が 'that of controlling the α′ corrections to the two-dimensional sigma-model with the Ramond-Ramond background' に帰着すると書きます 物理 。語の意味を短く書きます。α' は弦の長さの二乗です（弦の張力は $1/(2\pi\alpha')$、17-05 の (1)）。二次元のシグマ模型は、弦が掃く二次元の面（**世界面**）の上の場の理論で、場は世界面から時空への写像です。Ramond–Ramond 場は D ブレーンが源になる場です。α' の補正は、時空の曲率半径が弦の長さに比べて有限であることから来る補正で、(4) はこの展開の先頭を評価したものです。§03 で Witten が挙げた 'worldsheet field theory with Ramond-Ramond fields'（世界面の場の理論で、ラグランジアンに Ramond–Ramond 場を含むもの）もこの二次元の理論です。

$$\text{四次元の純 YM} \xleftarrow{\text{極限 (3)}} \text{余剰次元の模型} \xleftarrow{\text{予想}} \text{弦・M 理論} \tag{12}$$

例：(12) の矢印はどちらも数学の定理ではなく（左は未正当化、右は予想）、右端の対象にも非摂動的な定義がありません（17-13・16-05）。

本書の検討の着想（検証前）

超重力場の線形揺らぎに限れば、(6) の「長さが一つ」は塔が離れない理由で、固定した背景の上で「尺度は一つ」（17-12・23-01）を自明にする理由でもある、と見ています。ただし弦張力には λ が入り（§04 の Klebanov–Strassler の式）、弦まで含めると長さは一つに尽きません。四次元に戻すことは R から Λ への乗り換えで、問いはそのあとに残ります。定理でも文献の主張でもありません（23-17）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 (6) の冪、(9)、問題文の引用。	背景が四次元の純ヤン–ミルズ理論を記述すること（予想）。
計算 表1・表2・表4、図1・図2、(5) の床（交点の値）と、一ループの式でそれが max の最小値であること、二ループの式の最大（$\lambda \approx 51$）、$\lambda \approx 16.6$ とその 2 倍の幅、(11) の照合。	規約に依らない係数。e_{str} は目安で、実際の弦の補正ではない。(4) の冪は三次元の 0^{++} のもので、四次元の冪は与えられていない。二ループの式の $\lambda \gtrsim 51$ の振る舞いは (2) の範囲外。
物理 $R \to 0$ と $\lambda \to 0$ が同じ向きであること、塔が離れないこと（著者たちの文）、(8) の順序。	極限の入れ替えの正当化（探した範囲で見当たらない）。この本は質量ギャップも連続極限の構成も自分では示していない（公開された連続極限の構成は第二巻）。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
(1)・§08 の問題文と §6 の文	既知	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory” §4・§6（Clay の問題記述）。PDF 本文を確認。
§08 の Clay の頁の文	既知	Clay Mathematics Institute, “Yang-Mills & the Mass Gap”（Millennium Prize Problems の頁）。https://www.claymath.org/millennium/yang-mills-the-maths-gap/。該当の文を読んで確認。
(2) の b_0／二ループの b_1	既知	4-06 の出典／W. E. Caswell, Phys. Rev. Lett. 33 (1974) 244（書誌のみ）。
Witten の文・Witten 型	物理	E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 505, hep-th/9803131 §2.2・§4。arXiv の原稿を確認。
(4)・Csáki らの文	物理	C. Csáki, H. Ooguri, Y. Oz, J. Terning, JHEP 9901 (1999) 017, hep-th/9806021（要旨・序論の (1.1)(1.2)・§2 の QCD_3 の文・結びの文）。arXiv の原稿を確認。
表3・表5 の Klebanov–Strassler	物理	I. R. Klebanov, M. J. Strassler, JHEP 0008 (2000) 052, hep-th/0007191。TeX 原稿を確認。
表3・§04 の他の模型	物理	J. M. Maldacena, C. Núñez, Phys. Rev. Lett. 86 (2001) 588, hep-th/0008001；J. Polchinski, M. J. Strassler, hep-th/0003136；U. Gürsoy, E. Kiritsis, JHEP 0802 (2008) 032, arXiv:0707.1324。いずれも要旨を確認。
§01・表3 の Sakai–Sugimoto	物理	T. Sakai, S. Sugimoto, Prog. Theor. Phys. 113 (2005) 843, hep-th/0412141；同 Prog. Theor. Phys. 114 (2005) 1083, hep-th/0507073。TeX 原稿を確認。
§06 の強結合の格子	既知	K. Osterwalder, E. Seiler, “Gauge Field Theories on the Lattice”, Ann. Phys. 110 (1978) 440。要旨を確認。
(9)	既知	一様収束と極限の交換（例えば W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis 第 7 章）。書誌のみ。

もの	種別	出典・道具
表・図・数値	計算	この端末の Python 3（numpy・scipy）：scale_window.py（表1・表2）、floor_crossing.py（(5) の交点の一意性、二ループの式の最大、$\lambda \le 316$ での max の最小値、$\lambda \approx 16.6$ の 2 倍の幅）、floor_twoloop_check.py（二ループの式で λ の上限を外したときの max の最小値）、curie_weiss_order.py（表4・図2・(11)）。

次に読む章：17-11 超対称と Seiberg–Witten ― 超対称性のもとで、双対からギャップが見える例。

超対称と Seiberg–Witten — 双対に持ち替えると、強結合の真空が弱結合の単極子の理論になる

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — N=2 超対称な `SU(2)` 理論の低エネルギーが、一本の正則関数とその特異点・モノドロミーで決まること。
強結合の点で単極子の質量が 0 になり、N=1 へ崩すと単極子の凝縮で閉じ込めとギャップが弱結合の計算として見えること。
どこまでが物理の議論で、どこからが数学の定理か。

前提となる章 — 17-08。道具は 17-02 の双対超伝導・17-01 の次元転移・1-04 の SU(2)。正則関数・調和関数・トーラスの周期はその場で定義します。

先に言うこと — この章の理論は純ヤン–ミルズではありません（スカラー場とフェルミオンを含む）。中心の結果は物理の水準で、N=2 の理論そのものは数学的に構成されていません。問題文の質量ギャップについては何も示しません。

この章の順序

1. 隣の理論で何が見えるか — 一ループの係数
2. 超対称性の最小限 — 場の組・平らな方向・座標 u
3. 一本の正則関数 — 一ループとインスタントン
4. 正値性の矛盾 — 調和関数は内側で最小にならない
5. 電気と磁気の入れ替え — $\tau \to -1/\tau$ と BPS 質量
6. 特異点とモノドロミー — 単極子が軽くなる点（図1）
7. 曲線の周期で書く — トーラスの周期と $\mathrm{Im}\,\tau > 0$（図2・寄り道：$u = 3$ で $\tau = i$ になる）
8. 正確な解からインスタントンの係数を読む — 有理数の級数と一ループの照合
9. N=1 への摂動 — 単極子の凝縮と質量ギャップ

10. 純ヤン–ミルズとの距離 — 物理と数学の境目

01

隣の理論で何が見えるか — 三つの理論とループの係数

純ヤン–ミルズが難しいのは、ギャップの決まる低いエネルギーで結合が強くなり、摂動論が効かないからでした（17-01）。超対称性を二組持つ（N=2）ゲージ理論は、強結合の側まで計算できる**隣の理論**の代表で、Seiberg と Witten（1994、以下 SW）は `SU(2)` の場合に低エネルギーの有効理論を正確に決める提案をしました。要旨は 'The "strongly coupled" vacuum turns out to be a weakly coupled theory of monopoles, and with a suitable perturbation confinement is described by monopole condensation' と書きます 物理 。

三つの理論は場の組と、一ループの走りの係数 b（純ヤン–ミルズで $11N/3$ の規約）が違います。随伴表現の Weyl フェルミオン（二成分のフェルミオン。電子の Dirac フェルミオンは四成分）一つが $-2N/3$、複素スカラー一つが $-N/3$ を足します 既知 。

$$b_{\mathrm{YM}} = \tfrac{11}{3}N, \qquad b_{\mathcal{N}=1} = \tfrac{11}{3}N - \tfrac{2}{3}N = 3N, \qquad b_{\mathcal{N}=2} = \tfrac{11}{3}N - 2\cdot\tfrac{2}{3}N - \tfrac{1}{3}N = 2N \tag{1}$$

例：`SU(2)` では順に $22/3,\ 6,\ 4$ です。N=2 の理論は質量 0 の光子が残るのでギャップを持たず、ギャップが現れるのは §09 で N=1 へ崩したときです。問題文 §6.6 も、物質を伴う理論でギャップを理解する道の例として Seiberg–Witten を挙げます（'for example, see [41]'） 既知 。

02

超対称性の最小限 — 場の組・平らな方向・座標 u

超対称性はボソンとフェルミオンを入れ替える対称性で、N はその生成子（超電荷）が何組あるかを数えます。超対称で互いに移り合う場の組を**多重項**と呼びます。N=2 のゲージ理論の最小の組は、ゲージ場 A_μ、二つの Weyl フェルミオン λ, ψ、複素スカラー ϕ で、どれも随伴表現に属します（1-04）。スカラーのポテンシャルは

$$V(\phi) = \frac{1}{g^2}\,\mathrm{tr}\,[\phi, \phi^\dagger]^2 \tag{2}$$

で、ϕ と $\phi^\dagger$ が可換なら 0 です。`SU(2)` ではゲージ変換で $\phi = \tfrac{1}{2}a\sigma^3$（$a \in \mathbb{C}$）にでき、$a$ と $-a$ は移り合うので、ゲージ不変な座標は $u = \mathrm{tr}\,\phi^2 = \tfrac{1}{2}a^2$ です 既知 。$V = 0$ の真空は複素数

u で番号付けられる族（モジュライ空間）を成し、量子論でもこの族は持ち上がらない、と SW は論じます 物理 。

$a \neq 0$ では ϕ と可換な元は対角の `U(1)` だけで、残る二つのゲージ場（W ボソン）は **Higgs 機構**（値を持ったスカラー場がゲージ場に質量を与える仕組み。3-07）で質量を得ます。`U(1)` の光子は質量 0 のまま残るので、ギャップはありません。例：$\phi = \sigma^{+} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ なら $[\phi, \phi^{\dagger}] = \sigma^{3}$ で $V = 2/g^{2} > 0$、$\phi = \frac{1}{2} a \sigma^{3}$ なら $V = 0$ です。

03

一本の正則関数 — プレポテンシャル・ループ・インスタントン

複素数の関数が**正則**とは、複素数として微分できることです。N=2 超対称性のもとで、低いエネルギーの有効理論は一本の正則関数 $\mathcal{F}(a)$（**プレポテンシャル**）で書けます（Seiberg 1988、SW §2）物理 。結合 g と θ 角をまとめた複素数

$$\tau(a) = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g^{2}} = \mathcal{F}''(a), \qquad ds^{2} = \operatorname{Im} \tau(a)\, |da|^{2} \tag{3}$$

が、光子の結合と真空の族の上の距離（計量）を与えます。$|a|$ が大きい所は漸近自由で弱結合です（4-06）。原文は

$$\mathcal{F}(a) = \frac{i}{2\pi}\, a^{2} \ln \frac{a^{2}}{\Lambda^{2}} + \sum_{k \geq 1} \mathcal{F}_{k} \Big(\frac{\Lambda}{a} \Big)^{4k} a^{2} \tag{4}$$

と書き、'Higher order perturbative corrections are absent. Instantons lead to new terms.' と続けます。第一項が一ループ、第 k 項が k 個のインスタントン（3-05）の寄与です 物理 。

冪 $4k$ は (1) の $b = 4$ から来ます。17-01 の (3) の規約で $b_{0} = b/16\pi^{2} = 1/4\pi^{2}$ とすると

$$\Lambda^{4} = \mu^{4} \exp\Big(- \frac{8\pi^{2}}{g^{2}(\mu)} \Big) \tag{5}$$

で、指数はインスタントン一個の重みです。$(\Lambda/a)^{4}$ は摂動のどの次数にも現れません（4-12） 既知 。例：特異点を $u = \pm 1$ に置く単位では、一ループは $\operatorname{Im} \tau \approx (2/\pi) \ln(2|a|)$ です（§07 の数値から）。係数 $2/\pi = 8\pi b_{0}$ は (5) の走りと一致します 計算 。

04

正値性の矛盾 — 調和関数は内側で最小にならない

(3) の計量は正でなければなりません。ところが正則関数の虚部は**調和関数**です。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\operatorname{Im}\tau = 0 \qquad (a = x+iy) \tag{6}$$

調和関数は円の中心の値が円周上の平均に等しく、定数でなければ領域の内側で最小になれません（最小値原理）既知。

τ が a 平面全体で一つの関数なら、$\operatorname{Im}\tau$ は $|a|\to\infty$ で $+\infty$ に行くのでどこかで最小になり、原理と矛盾します。原文は 'if Im τ(a) is globally defined it cannot be positive definite as the harmonic function Im τ cannot have a minimum' と書き、a による記述は局所的にしか正しくないと結論します物理。例：一ループの $(2/\pi)\ln(2|a|)$ は $|a|<1/2$ で負で、$|a|=1/4$ では -0.44、つまり「$4\pi/g^2$ が負」です計算。強結合の側では別の変数が要ります。

05

電気と磁気の入れ替え — $\tau\to-1/\tau$ と BPS 質量

磁荷を加えた Maxwell 方程式は電と磁の入れ替えで対称でした（17-02 の (6)）。θ 角を含めると入れ替えは $\tau\to-1/\tau$、θ を 2π ずらすと $\tau\to\tau+1$ で、二つで群 $SL(2,\mathbb{Z})$（整数成分・行列式 1）を生みます既知。SW は $a_D=\partial\mathcal{F}/\partial a$ を置き、計量を a と a_D について対称に書きました。

$$ds^2=\operatorname{Im}\left(da_D\,d\bar{a}\right),\qquad \tau_D=-\frac{1}{\tau} \tag{7}$$

a_D を座標にしても同じ形で、結合が $-1/\tau$ に変わります。原文は同じ理論の別の記述だと強調します物理。電荷 n_e・磁荷 n_m の粒子の質量には下限があり、下限に等しい粒子（BPS 状態）の質量 m_{BPS} は

$$m_{\mathrm{BPS}}=\sqrt{2}\,|n_e\,a+n_m\,a_D| \tag{8}$$

です（Witten–Olive 1978、SW §4）物理。W ボソンは $(n_m,n_e)=(0,1)$、単極子は $(1,0)$、ダイオンは $(1,n)$ です。例：古典では $a_D=\tau_{\mathrm{cl}}a$ で、単極子は W の $|\tau_{\mathrm{cl}}|\approx 4\pi/g^2$ 倍、$g=1$ なら約 12.6 倍重い。強結合の側では比が逆転します（図2）。

06

特異点とモノドロミー — 単極子が軽くなる点

(4) の一ループの項を微分すると $a_D \approx \frac{i}{\pi} a\left(\ln \frac{a^2}{\Lambda^2} + 1\right)$ です。大きな u では $a \approx \sqrt{2u}$ なので、u が大きな円を一周すると $a \to -a$、$\ln a^2 \to \ln a^2 + 2\pi i$ となり、$a_D \to -a_D + 2a$ です。列ベクトル $(a_D, a)^{\mathsf{T}}$ に掛かる行列（**モノドロミー**）で書くと

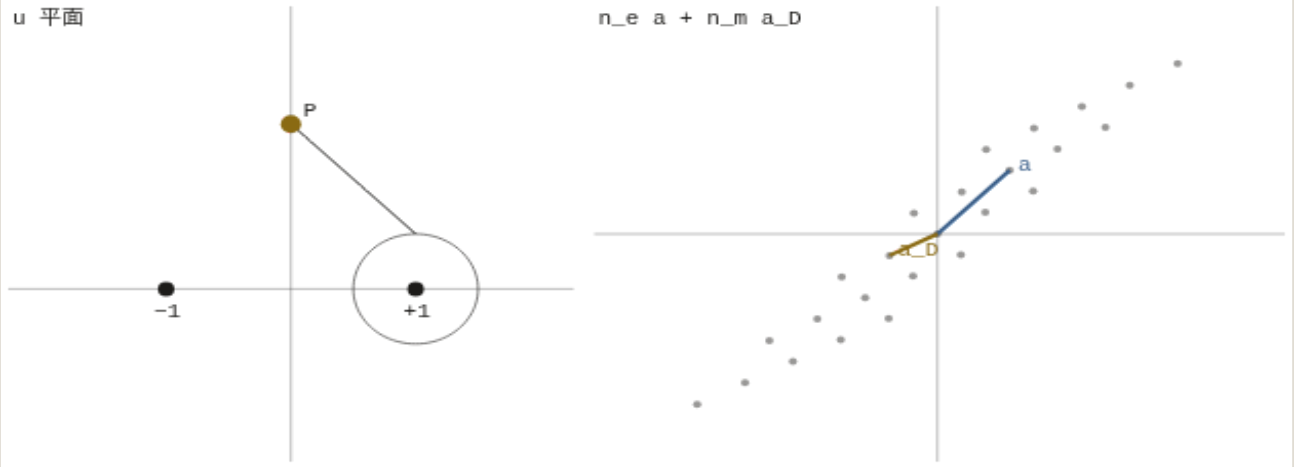
$$\mathsf{M}_\infty = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

です。モノドロミーがすべて M_∞ と可換なら a^2 が大域的な座標になり、§04 の矛盾に戻ります。そこで SW は、有限の所に特異点が二つ（単位を選んで $u = \pm 1$）あり、そこで単極子やダイオンの質量が 0 になると提案しました 物理。$u = 1$ の近くでは軽い単極子の効果で $a \approx a_0 + (i/\pi) a_D \ln a_D$ となり、一周で $a \to a - 2a_D$ です。

$$\mathsf{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{M}_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{M}_1 \mathsf{M}_{-1} = \mathsf{M}_\infty \tag{10}$$

（SW の式。SW は同じ図 1 で、先に回る輪の行列を右に置く順で積を書く。）質量 0 になる粒子の電荷 $q = (n_m, n_e)$ は $q\mathsf{M} = q$ を満たし、M_1 では $q = (1, 0)$、つまり単極子です。

図1 「動かす」で u が $P = 1.5i$ から特異点を一周し（左）、a（青）と a_D（黄）が動く（右。点は $n_e a + n_m a_D$）。一周後の組は行列で書き換わる



u = 0.000+1.500i a = 1.256+1.256i a_D = −0.832−0.424i

計算 この図の数値はこの端末で計算した（§07 の方程式 (PF) を P から道に沿って Runge–Kutta 法で解く。行列は表1 と一致）。

表1　基点 $P = 1.5i$ から反時計回りに一周したときの行列（整数からのずれ 10^{-12} 以下）

回る点	行列	$q\mathsf{M} = q$ の $q = (n_m, n_e)$
$u = 1$：$\mathsf{M}(1)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	$(1, 0)$ 単極子

回る点	行列	$q\mathsf{M}=q$ の $q=(n_m,n_e)$
$u=-1$：$\mathsf{M}(-1)$	$\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$	$(1,1)$ ダイオン
両方：$\mathsf{M}(\infty)$	$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	なし

表1 では、道 A のあと道 B を回った行列を $\mathsf{M}_A\mathsf{M}_B$ と書きます（解析接続の順）。P から見ると大きな輪は「-1 のあと $+1$」なので $\mathsf{M}(-1)\mathsf{M}(1)=\mathsf{M}(\infty)$ で、$\mathsf{M}(-1)=\mathsf{M}_\infty\mathsf{M}_1^{-1}=\mathsf{M}_\infty\mathsf{M}_{-1}\mathsf{M}_\infty^{-1}$ です 計算 。SW の M_{-1} とは共役で、質量 0 のダイオンの電荷は $(1,-1)$ から $(1,1)$ に変わります。原文の 'complete democracy among dyons'（M_∞ で共役を取ると電荷が 2 ずつずれる）の一例です。

07

曲線の周期で書く — トーラスの周期と $\mathrm{Im}\,\tau>0$

SW §6 は各 u に曲線

$$E_u:\ y^2=(x-1)(x+1)(x-u) \tag{11}$$

を対応させます。$y=\pm\sqrt{\cdots}$ の二枚の平面を、分岐点 $-1,1,u,\infty$ を結ぶ二本の切れ目で貼ると、穴一つの曲面（**トーラス**）になります。トーラスは平面を格子 $\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2$ で割ったもので、$\tau=\omega_2/\omega_1$ の向きをそろえると $\mathrm{Im}\,\tau>0$ です 既知 。分岐点が重なるのは $u=\pm1,\infty$ だけで、特異点と一致します。周期を

$$a=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}}\,dx,\qquad a_D=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{1}^{u}\frac{\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}}\,dx,\qquad \tau=\frac{da_D/du}{da/du} \tag{12}$$

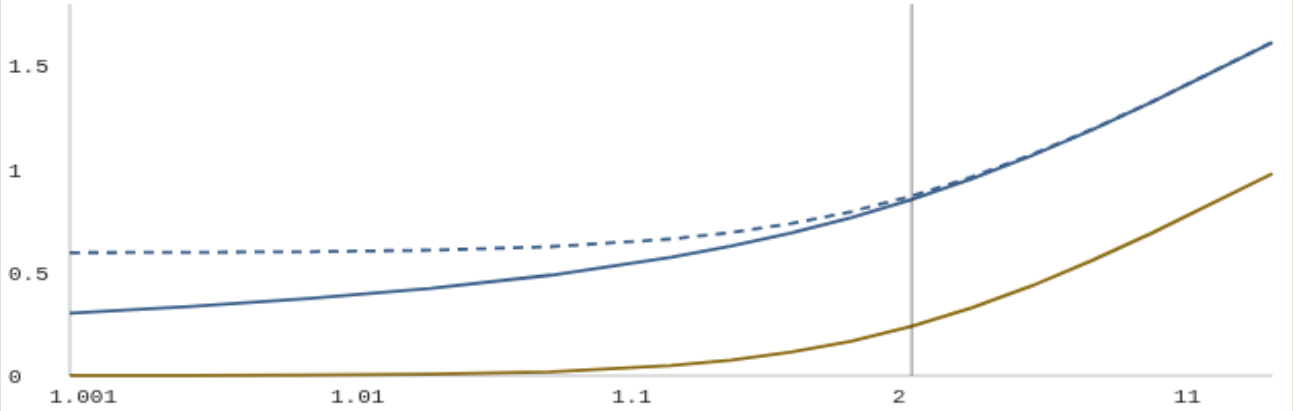
と置きます。u で微分すると被積分関数は dx/y の定数倍になり、da/du・da_D/du はトーラスの二本の輪に沿った積分、つまり格子の周期（の同じ定数倍）です。τ はその比なので $\mathrm{Im}\,\tau>0$ が自動的に成り立ちます（曲線の性質は 既知 、理論との対応は 物理 ）。二つの周期は同じ方程式 $4(u^2-1)\Pi''+\Pi=0$（Picard–Fuchs 方程式、以下 (PF)）を満たします（実軸 $u>1$ で相対残差 10^{-15} 以下 計算 ）。図1 はこの方程式を道に沿って数値で積分したものです。$u=1$ の近くでは

$$a_D\approx\frac{i(u-1)}{2},\qquad a\approx\frac{4}{\pi}-\frac{(u-1)\ln(u-1)}{2\pi} \tag{13}$$

で、(10) の $a\to a-2a_D$ が出ます。例：(12) の数値積分は超幾何関数の閉じた式と 10^{-8} 以内で一致し、$a(1)=4/\pi$ でした 計算 。

図2　つまみで実軸上の $u\,(>1)$ を選ぶと、単極子と W の質量比 $|a_D|/a$（黄）と結合 $\mathrm{Im}\,\tau=4\pi/g^2$（青。破線は一ループ

$(2/\pi)\ln 2a$）が読める



u = 1.989　W：√2a = 2.773　単極子：√2|a_D| = 0.662　比 0.239　Im τ = 0.853（一ループ 0.870）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（(12) の数値積分を 15 点埋め込み）。

表2　実軸 $u>1$ の周期と結合（特異点を $u=\pm1$ に置く単位）

u	a	$\lvert a_D\rvert/a$	$\operatorname{Im}\tau$	一ループ
1.001	1.2750	0.0004	0.303	0.596
1.5	1.6776	0.1448	0.735	0.771
3	2.4320	0.3727	1.000	1.007
100	14.1421	1.4912	2.128	2.128

一ループの列は $(2/\pi)\ln 2a$ です。$u\to 1$ で $\operatorname{Im}\tau$ は 0 に向かい、電気の結合が発散します。

寄り道：$u=3$ で $\tau=i$ になる

飛ばしてよい小節です。

$x\mapsto(x+1)/2$ で分岐点は $0,1,2,\infty$ に移り、曲線は $y^2=x(x-1)(x-2)$ になります。$x\mapsto 2-x$ で右辺は符号を変えるので、$(x,y)\mapsto(2-x,\,iy)$ は曲線を自分に移し、4 回で元に戻ります。これは格子を 90° 回して格子に重ねる対称で、そういう格子は正方形です 既知 。正方形なら τ は $SL(2,\mathbb{Z})$ で i に移る値で、(12) の規格化ではちょうど $\tau(3)=i$ でした 計算 。$-1/\tau=\tau$ なので、電気と磁気の結合が等しい点です。

08

正確な解からインスタントンの係数を読む — 有理数の級数と一ループの照合

(12) を大きい u で展開して a について逆に解くと、有理数の係数 c_k を持つ級数になります 計算 。

$$u=\frac{a^2}{2}+\sum_{k\ge 1} c_k\, a^{2-4k}, \qquad c_1=\tfrac{1}{4},\quad c_2=\tfrac{5}{64},\quad c_3=\tfrac{9}{128},\quad c_4=\tfrac{1469}{16384} \tag{14}$$

Matone（1995）は $\mathcal{G}=\pi i\big(\mathcal{F}-\tfrac{1}{2}a\,a_D\big)$ を導入し、要旨はそれがモジュラー不変だと書きます。$\mathcal{G}=u$ として (4) に入れると、一ループの項は $a^2/2$ を、第 k 項は $2\pi i k$ 倍の a^{2-4k} の項を与えるので、(4) の a^{2-4k} の係数は $c_k/(2\pi i k)$ と読めます。要旨の方程式 $(1-\mathcal{G}^2)\mathcal{G}''+\tfrac{1}{4}a\,\mathcal{G}'^3=0$ も、$\mathcal{G}=u$ と置くと (PF) と同じ式です 計算 。

この読みを a_D で照合します。例：$u=2$ で a_D/i の数値積分は 0.473434 です。一ループだけでは 0.462621、$k=1$ までで 0.473083、$k=3$ までで 0.473432 と、項を一つ足すごとに差が一桁以上縮みます 計算 。Dorey–Khoze–Mattis（1996）は一個と二個のインスタントンを直接計算し、'precise agreement' を報告しました 物理 。

09

N=1 への摂動 — 単極子の凝縮と質量ギャップ

N=1 の言葉では、N=2 の組は (A_μ,λ) の組（ベクトル多重項）と、ϕ,ψ の組 Φ に分かれます。Φ に質量を与える項 $m\,\mathrm{tr}\,\Phi^2$ を足すと、低いエネルギーには N=1 の理論が残ります。原文はこの理論を 'strongly believed to generate a mass gap' と書き、閉じ込めと $\mathbb{Z}_4\to\mathbb{Z}_2$ の破れ、真空がちょうど二つであることを挙げます（Witten 1982 を引く） 物理 。$\mathbb{Z}_4$ は λ の位相を i 倍する変換が生む対称で、残る $\mathbb{Z}_2$ は -1 倍です。

$u=1$ の近くでは、双対の光子の組 A_D と単極子の場 $M,\tilde M$（質量ではなく場の名前）を使います。相互作用を決める正則関数（超ポテンシャル）と真空の条件は

$$\widehat{W}=\sqrt{2}\,A_D M\tilde M+m\,U(A_D); \qquad \sqrt{2}\,M\tilde M+m\,\frac{du}{da_D}=0,\quad a_D M=a_D\tilde M=0 \tag{15}$$

で、$U(A_D)$ は座標 u を A_D の関数として組ごと書いたものです。$m\neq 0$ かつ $du/da_D\neq 0$ なら $M,\tilde M\neq 0$ が要り、$a_D M=0$ から $a_D=0$、つまり $u=1$ です。(13) から $du/da_D=-2i$ なので、$|M|=|\tilde M|$ の解で $|M|^2=\sqrt{2}\,|m|$（§06 の単位）です 計算 。

単極子が凝縮します。双対の光子は Higgs 機構で質量を得て、原文は 'Expanding around this vacuum, it is easy to see that there is a mass gap' と書きます。凝縮しているのは磁荷なので電場が管に押し込められ、電荷は閉じ込められます（17-02 の絵そのもの） 物理 。$u=-1$ ではダイオンが凝縮し、真空は二つです。例：$m=0.01$ なら $|M|=0.119$ 計算 。尺度は Λ と m の二つで、純ヤン–ミルズの「尺度は一つ」（17-12）とは事情が違います。

10

純ヤン–ミルズとの距離 — 物理の議論と数学の定理の境目

純ヤン–ミルズへ行くには、$m \to \infty$ で Φ を切り離し、フェルミオン λ の質量も無限大に送る、二つの極限が要ります。§09 の弱結合の記述は m が小さい所のもので、極限に沿ってギャップと閉じ込めが途切れないことは期待にとどまり、制御する手段はありません（17-10）物理。議論全体も、N=2 の理論が存在することを前提にしています。SW の例は四次元で双対から閉じ込めが物理の水準で導かれた代表例ですが（半古典の計算は三次元の Polyakov などにもある。17-02）、数学の側に残ったものは別の形をとりました。

表3　主張と水準

主張	水準
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$（四次元の回転の二つのパラメータ）を入れたインスタントンの空間上の積分の、$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ の極限が SW のプレポテンシャルに一致する（Nekrasov の予想）	既知 定理：Nakajima–Yoshioka・Nekrasov–Okounkov（$SU(N)$）、Braverman–Etingof（一般の単純群）
Seiberg–Witten 方程式の解を数えて作る、四次元多様体の不変量（数学の定義）	既知 （3-06・四次元の記事）
その不変量が Donaldson 不変量と同等であること（Witten 1994 の要旨：'Recent developments … suggest a new point of view'、'one can define equivalent four-manifold invariants'）	物理 （数学の側での証明の現状はこの章では調べていない）
(11)・(12) が N=2 の理論の低エネルギーを記述し、$m \neq 0$ で凝縮・閉じ込め・ギャップが出る	物理
純ヤン–ミルズのギャップ	この章は何も言わない

表3 の数学は、インスタントンの空間上の積分や方程式の解についての定理と定義で、スペクトル（4-11）についての主張ではありません。例：(14) の係数は、規約をそろえれば、インスタントンの空間上の積分として定理で保証される数です。同じ数が「N=2 の場の量子論の性質」であることは、理論の構成（7-01）が無いため言えません。問題文 §6.6 の「双対変換」の、物理の水準での実例として読むのが正確です（17-13・16-05）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 (1)、曲線 (11) とトーラスの性質、Nekrasov の予想の証明、SW 不変量の定義、問題文 §6.6。	N=2・N=1 の理論が場の量子論として存在すること（構成されていない）。
計算 表1・表2、図1・図2、(PF)、(14)、一ループの定数、$\tau(3) = i$、単極子の場の $\lvert M\rvert^2 = \sqrt{2}\lvert m\rvert$。どれも (12) が出発点。	(11)・(12) が N=2 の理論から導かれること（正則性と双対による決定は物理の議論）。SW 不変量と Donaldson 不変量の同等性が数学としてどこまで示されているか（この章では調べていない）。

言えている	言えていない
物理 単極子の質量が 0 になる点、$m \neq 0$ での凝縮・閉じ込め・ギャップ、インスタントンの直接計算との一致。	純ヤン–ミルズへ戻す二つの極限の制御と、そのギャップへの含意。この本は質量ギャップも連続極限の構成も自分では示していない（公開された連続極限の構成は第二巻）。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
SW の式と引用（(2)〜(4)・(7)〜(13)・(15)）	物理	N. Seiberg, E. Witten, Nucl. Phys. B426 (1994) 19–52（Erratum B430 (1994) 485）, hep-th/9407087。TeX 原稿の本文を確認。同論文の文献表から（書誌のみ）：Seiberg, Phys. Lett. 206B (1988) 75；Witten–Olive, Phys. Lett. 78B (1978) 97；Witten, Nucl. Phys. B202 (1982) 253。
問題文 §6.6	既知	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”（Clay の問題記述）§6.6。PDF 本文を確認。
(1)・(5)	既知	17-01 の出典。$b = 4$ は SW の $(\Lambda/a)^{4k}$・$\mathbb{Z}_{4N_c}$ と照合。
§08 の Matone	物理	M. Matone, Phys. Lett. B357 (1995) 342–348, hep-th/9506102。要旨のみ（$\mathcal{G}$ の定義・モジュラー不変性・$\mathcal{G}$ の方程式・'we find u=u(a)'）。$\mathcal{G} = u$ は本文未読で、§08 の照合による。
§08 の Dorey–Khoze–Mattis	物理	N. Dorey, V. V. Khoze, M. P. Mattis, Phys. Rev. D 54 (1996) 2921, hep-th/9603136。要旨を確認。
表3 の Nekrasov の予想と証明	既知	N. Nekrasov, Adv. Theor. Math. Phys. 7 (2004) 831, hep-th/0206161；H. Nakajima, K. Yoshioka, Invent. Math. 162 (2005) 313–355, doi:10.1007/s00222-005-0444-1, math/0306198；N. Nekrasov, A. Okounkov, in *The Unity of Mathematics*（Progress in Mathematics, Birkhäuser）525–596, hep-th/0306238；A. Braverman, P. Etingof, math/0409441。要旨を確認。
表3 の Seiberg–Witten 不変量	既知・物理	E. Witten, “Monopoles and Four-Manifolds”, Math. Res. Lett. 1 (1994) 769–796, hep-th/9411102。要旨を確認。数学の教科書：J. W. Morgan, *The Seiberg–Witten Equations and Applications to the Topology of Smooth Four-Manifolds*, Princeton University Press, doi:10.1515/9781400865161（書誌のみ・刊行年は未確認）。
表1・表2・図1・図2・(PF)・(14)・§07〜§08 の数値	計算	この端末の Python 3（numpy・scipy）：`sw_periods.py`（(12) の照合・一ループの定数・表2・図2）、`sw_monodromy.py`（表1・図1 の出発値・$\tau(3) = i$）、`sw_pf_check.py`（(PF) の残差・Matone の方程式との一致）、`sw_instanton.py`（(14) と a_D の照合）。

次に読む章：17-12 等価原理に当たる一文 — 「尺度は一つ」を一文の仮定として切り出す。

等価原理に当たる一文 — 「尺度は一つ」を一つの仮定として切り出す

この章は本書の検討です。§01・§02・§08・§09 は既存の知見、§10 は未解決の地図です。

この章で分かること — 一般相対論の出発点の等価原理と同じ位置にある一文「閉じ込めの管には、弦張力のほかに長さの径数が無い」を、純ヤン–ミルズの道筋から取り出します。四つの長さを三つの鎖でつなぐと「拡散型緩和時間の仮定」になることを式で追い、格子の数表と、一尺度が破れる例・保たれる例で確かめます。

前提となる章 — 17-01 物理はどう見ているかと 4-07 次元転移と Λ。Poincaré 定数（1-10）と相関長（2-08）は要る分をその場で定義します。

先に言うこと — 等価原理との対応は類比で、数学の同値ではありません。「尺度は一つ」は四次元の連続理論の定理ではなく、緩和時間の仮定と三本の鎖はどれも証明されていません。この章は質量ギャップを示さず、証明されずに残る一文を名指しします。格子の数値は一次資料の値です。

この章の順序

1. 一般相対論は一文から始まった — 第二種の質量は無い
2. 寄り道：第二種の質量を測る — MICROSCOPE の 10^{-15}
3. 尺度は一つ — 二種類の長さ — 球と弦の長さが揃う
4. 格子の数表で見る — 外挿の形は外から入る
5. 四つの長さと三つの鎖 — 緩和時間の仮定を比の積に割る
6. どの鎖が等価原理に当たるか — 対応表（類比）
7. 候補を落とす — ほかの三つの候補
8. 一尺度が破れる例 — U(1)・超重力・強結合の主項
9. 一尺度が保たれる例と、要る入力 — 三次元 $\mathbb{Z}_2$ と I・R
10. 等価原理と違うところ — 仮定として置けない

01

一般相対論は一文から始まった

一般相対論は、**等価原理・光速度不変・一般共変性**（どの座標でも法則の形が同じ）**・リーマン幾何学**の組み合わせとして説明されることがあります。リーマン幾何学は数学の道具、光速度不変は特殊相対論から引き継ぐ前提（$c=1$ と置くのは単位の約束）、一般共変性は法則の書き方への要請です。そのうえで、重力について新しく足された物理の一文が等価原理です。ニュートンの力学で落下を書きます。

$$m_{\mathrm{i}}\, a = m_{\mathrm{g}}\, g \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{m_{\mathrm{g}}}{m_{\mathrm{i}}}\, g \tag{1}$$

m_{i} は**慣性質量**（動かしにくさ）、m_{g} は**重力質量**（重力に引かれる強さ）で、別々の実験で定義され、等しい理由は理論にありません。等価原理は、比 $m_{\mathrm{g}}/m_{\mathrm{i}}$ がどの物体でも同じ、つまり**第二種の質量は無い**と言います。すると自由落下する箱の中で重力が局所的に消え、重力を時空の幾何として書けます（Einstein 1907 に始まるとされる。時空の記事）物理。例：比が物質で η だけ違えば、加速度の差は約 ηg です（§02）。

問いは、**質量ギャップへの道筋にも「物理的には当然で、数学では証明されていない一文」が在るか**です。在ります。「閉じ込めの管には、弦張力のほかに長さの径数が無い」です。ただし役目は等価原理と違います（§10）。

02

寄り道：第二種の質量を測る

飛ばしてよい節です。

二つの物体の落ち方の違いを、符号つきの量 $\eta = 2(a_1 - a_2)/(a_1 + a_2)$（$a_1, a_2$ は二つの物体の加速度）で測ります。古くは Eötvös たちのねじれ秤（1922 年の論文とされる）があり、人工衛星 MICROSCOPE はチタンと白金で最終結果をこう報告しました 既知。

$$\eta(\mathrm{Ti},\mathrm{Pt}) = \left[-1.5 \pm 2.3\,(\mathrm{stat}) \pm 1.5\,(\mathrm{syst}) \right] \times 10^{-15} \tag{2}$$

誤差を二乗和で合わせると $\pm 2.75 \times 10^{-15}$ で、0 と両立します 計算。正確には、実験は幅を狭めるだけで $\eta = 0$ は示せません。物理はこの一文を公理として置き、確かめ続けます。

03

尺度は一つ — 二種類の長さ

古典の四次元ヤン–ミルズには質量の次元の定数がなく、量子論で尺度 Λ が一つ現れます（4-07）。物理は、質量の次元が k の量を Λ^k の定数倍と考えます（例：最も軽いグルーボールの質量 $m = c_1\Lambda$、弦張力 $\sigma = c_2\Lambda^2$。17-01 §03）物理。すると比 $m/\sqrt{\sigma} = c_1/\sqrt{c_2}$ は群だけで決まる純数です。格子（5-01）で測るのは格子単位の am と $a\sqrt{\sigma}$ で、$\beta \to \infty$ でどちらも 0 に向かい、比では a が消えます。以下 m, σ は格子単位の数です。「尺度は一つ」を β に一様な不等式にすると次の一文です（本書の検討の記録の書き方）。

$$c\,\sigma(\beta) \;\le\; m(\beta)^2 \;\le\; C\,\sigma(\beta) \qquad (\beta \ge \beta_0) \tag{3}$$

定数 $c, C > 0$ は β に依りません。$m > 0$ も $\sigma > 0$ も仮定せず、0 に向かうなら同じ速さで、とだけ言います。長さで言えば、最も軽いグルーボール（グルー＝糊、ボール＝球）の長さ $\xi = 1/m$ を、以下**球の長さ**と呼びます（相関長。相関が $e^{-|x|/\xi}$ で減る距離、2-08 §03）。$\xi_\sigma = 1/\sqrt{\sigma}$ は**弦の長さ**です。$A \asymp B$ は、比 A/B が β に依らない正の定数で上下から押さえられることを表します。(3) は $\xi \asymp \xi_\sigma$ と同じです。「二種類の質量」と同じ形の主張で、物理の言葉では**第二の無次元の径数が現れない**という言明です。第二の径数 z があれば比は $F(z)$ となり、0 にも無限大にも行けます。

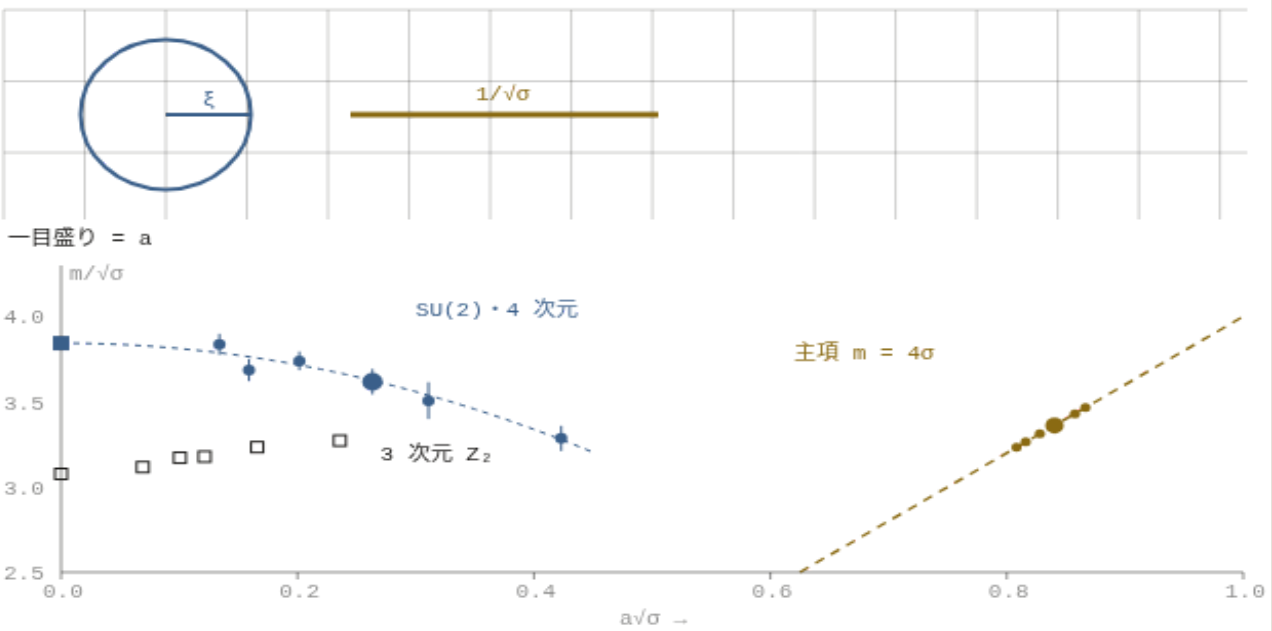
例：SU(2)・$\beta = 2.60$（24^4）では $a\sqrt{\sigma} = 0.13395$、$am = 0.514$（Lucini–Teper）で、格子単位の $\xi_\sigma = 7.47$、$\xi = 1.95$、比は 3.837 です計算。この比が有界にとどまることが (3) の中身です。

04

格子の数表で見る — 外挿の形は外から入る

Lucini–Teper（2001）の SU(2) の六点です。σ は、周期方向に一周巻きついた糊の管の質量 am_l に、弦の揺らぎの補正 $\pi/(3L)$ を足して長さ L（格子の歩数）で割った値です（原論文の式 (4)：$am_l = a^2\sigma L - \pi/(3L)$）。この式を使うにあたり、著者は 'we are assuming that we have linear confinement' と断っています（17-01 §06）。

図1　上は物理の単位（弦の長さ $1/\sqrt{\sigma}$ を棒の長さに固定）で描く。つまみで β を上げると格子の目（間隔 a）だけが細かくなり、球の長さ ξ（円の半径）はほぼ変わらない。下は比 $m/\sqrt{\sigma}$（四角は三次元 $\mathbb{Z}_2$）。ボタンで強結合の主項（破線）を重ねる



β = 2.4（12^4） a√σ = 0.2634　am = 0.953　格子単位で 1/√σ = 3.80、ξ = 1.05　m/√σ = 3.618　主項 3.361

表A　SU(2) の $m/\sqrt{\sigma}$（Lucini–Teper 表 1 から。六点の am の正本は 16-05 表 3、$a\sqrt{\sigma}$ は 5-09 表 1）

β	格子	$a\sqrt{\sigma}$	am	$m/\sqrt{\sigma}$
2.25	8^4	0.4231(25)	1.390(30)	3.285(74)
2.30	10^4	0.3108(17)	1.090(33)	3.507(108)
2.40	12^4	0.2634(14)	0.953(19)	3.618(75)
2.475	16^4	0.2016(13)	0.754(10)	3.740(55)
2.55	20^4	0.15896(63)	0.586(10)	3.686(65)
2.60	24^4	0.13395(62)	0.514(8)	3.837(62)

計算　この図と表の数値はこの端末で計算した（一次資料の値の比。誤差は独立とみなした目安）。

格子単位の弦の長さ $1/(a\sqrt{\sigma})$ は 2.36 から 7.47 へ伸びますが、比は 3.29〜3.84 にとどまり、おおむね増えて下から近づきます（2.475→2.55 で一度下がる。誤差の内）。a に依らない定数での当てはめは $\chi^2 = 38.6$（自由度 5）で退けられ、比は a に依ります 計算 。連続値は依り方の形を決めて外挿します。

$$\frac{m}{\sqrt{\sigma}}(a) = r_0 + c\,(a\sqrt{\sigma})^{p} \tag{4}$$

表B　(4) の当てはめ（誤差で重みを付けた最小二乗、全 6 点）

p	連続値 r_0	χ^2／自由度
2	3.844(43)	2.39 / 4
1	4.053(73)	2.73 / 4
一次資料（表 5）	3.844(61)	—

$p=2$ は一次資料と中心値が一致しますが、$p=1$ でも χ^2 は同じくらい良く、連続値は 4.05 になります 計算 。**データだけでは外挿の形を選べません**。著者は 'the functional form of such corrections is known' と書き、$O(a^2)$、つまり $p=2$ を使います（5-05）。3.844 は、極限が在り近づき方がこの形だという前提の上の数です（17-01 §08） 物理 。

05

四つの長さと三つの鎖 — 拡散型緩和時間の仮定

長さは四つで、どれも格子の何歩分かで数えます。**記帳の長さ** ξ_{RG}、弦の長さ ξ_σ、球の長さ ξ、**揺らぎが均される長さ** $\sqrt{C_P}$ です。

記帳の長さは、格子を b 倍に粗くする一段（繰り込み群の一段、7-05）ごとに結合 β がどれだけ下がるかを書き留め、段を重ねて決める長さです。k 段で長さは b^k 倍になるので、決まった強さの結合まで下がるのに要る段数から「格子の何歩が物理の一単位か」が決まります。それを記帳の長さとし、この単位で格子間隔を $a:=1/\xi_{\mathrm{RG}}$ と置きます（本書の検討の記録の定義。23-02）。一ループの走り（4-06）だけで数えれば、SU(2) では定数倍を除いて $\xi_{\mathrm{RG}}\approx e^{3\pi^2\beta/11}$ です（$\beta=4/g^2$＝記号表の $2N/g^2$。指数の係数は一ループの係数 b_0 の書き直し） 既知 。

C_P は、格子のゲージ場の確率分布 μ（SU(2)・Wilson 作用・無限体積・ゲージ固定なし）について

$$\mathrm{Var}_\mu(f)\ \le\ C_P\,\mathcal{E}(f),\qquad \mathcal{E}(f)=\mathbb{E}_\mu\Big[\sum_{\ell}|\nabla_\ell f|^2\Big] \tag{5}$$

がすべての f で成り立つ最良の定数（Poincaré 定数）です。Var_μ は μ での分散、∇_ℓ はリンク ℓ の SU(2) の向きの微分です。微分をリンクの角度 ϑ（$U=e^{i\vartheta\cdot\sigma}$）で取るか、場 $A=\sqrt{\beta}\,\vartheta$ で取るかで $\mathcal{E}$ は $\mathcal{E}_A=\mathcal{E}/\beta$ と変わり、C_P は β 倍違います。自由近似では前者で $C_P=(g^2/4)\xi^2$、後者で $C_P=\xi^2$ です。下の (6) の帯が成り立つかはこの選び方に依ります（角度の正規化では自由近似でも下側が対数で破れる：18-05 §03）。最良の定数は隙間の逆数です（1-10 §07）。効いている力学は **Langevin 力学**で、各リンクに小さなランダムな揺さぶりを加えながら作用が下がる向きに少しずつ動かす確率的な時間発展です。長く走らせると分布は μ に落ち着きます。$\lambda_1=1/C_P$ はこの力学の隙間、C_P は最も遅い戻りの時間です。正確には、C_P が戻りの時間に等しいのは連続時間の可逆な力学（Langevin）でだけで、離散時間の更新や HMC では別の量です（18-03 §06）。本書の検討の記録が置く仮定は、揺らぎの長さが記帳の長さと同じ尺度にあることで、帯の形では次の (6) です。名前は A-06 名前の索引に従います。**緩和時間の仮定**は冪の水準の文 $\lim \ln C_P/\ln\xi=2$ で、(6) は帯の文 H_{band}（正規化を名指して $H_{\mathrm{band}}[\mathcal{E}_\vartheta]$ か $H_{\mathrm{band}}[\mathcal{E}_A]$）と鎖 (ii)(iii) を合わせた文です。

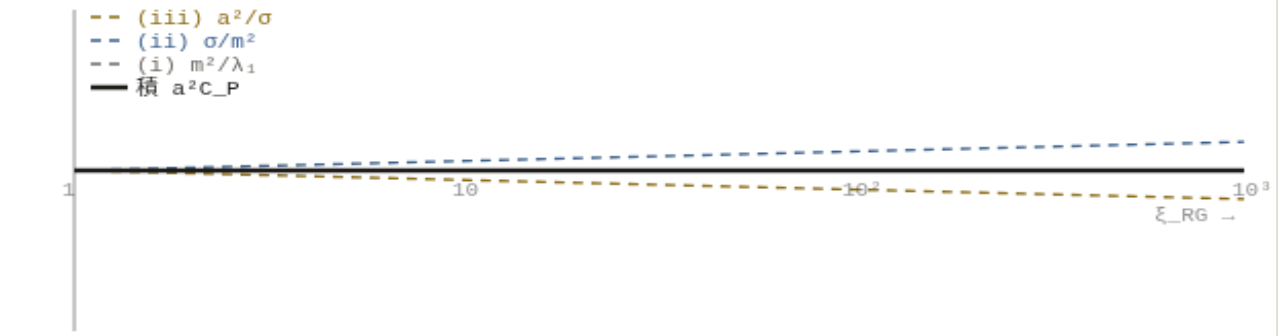
$$a^2 C_P \asymp 1 \qquad (\text{つまり } \sqrt{C_P} \asymp \xi_{\mathrm{RG}}) \tag{6}$$

これを三つの比の積に割ります。

$$a^2 C_P \;=\; \underbrace{\frac{a^2}{\sigma}}_{\text{(iii)}} \cdot \underbrace{\frac{\sigma}{m^2}}_{\text{(ii)}} \cdot \underbrace{\frac{m^2}{\lambda_1}}_{\text{(i)}} \tag{7}$$

各因子が $\asymp 1$ であることを、一本の**鎖**と呼びます。(i) $\lambda_1 \asymp m^2$：揺らぎと球の長さが揃う（緩和の鎖）。Langevin 力学は拡散的なので、長さ ξ の揺らぎを均すのに ξ^2 程度の時間がかかります（動的指数 $z = 2$）物理。だから λ_1 を m ではなく m^2 と比べます。(ii) $m^2 \asymp \sigma$：球と弦の長さが揃う（一尺度 (3)）。(iii) $\sigma \asymp a^2$：弦と記帳の長さが揃う（閉じ込めが記帳の尺度で起きる）。三本とも成り立てば (6) が出ます。(ii)(iii) の下で (6) は帯の文 $C_P \asymp \xi^2$ と同じで、二重井戸の緩和時間の冪の言明はそこから出ます（A-06）。逆は出ず、因子が打ち消し合えば鎖が切れていても積は一定です（図2）。(7) から (6) が出る向きの代数は機械検査済みですが Lean （`chain_band`・`sq_times_poincare_band`、`LatticeGaugeOneScale.lean`。仮定は三つの帯の不等式、結論は $a^2 C_P$ が正の帯に入ること。一覧は 23-13）、三本の鎖そのものはどれも証明されていません。

図2　つまみで三つの因子の冪 p（因子 $\propto \xi_{\mathrm{RG}}^{p}$）を変えると、点線の三本と実線の積 $a^2 C_P$ が傾く。積が水平なら (6) が成り立つ。初めの位置（(iii) −0.3・(ii) +0.3）では、鎖が二本切れているのに積は水平



積 a²C_P ∝ ξ_RG^(+0.00)　(6)：成り立つ　鎖：(i) ○　(ii) ×　(iii) ×

計算 (7) の対数の和をその場で描く模式図（実測ではない）。

06

どの鎖が等価原理に当たるか

(i) は道具として選んだ力学と理論の隙間（転送行列の隙間、5-03）の関係で、力学を替えれば言明も替わります。(iii) は段の記帳の仕方に依ります。粗くする一段ごとに数え落とす小さな誤差を**取りこぼし**と呼ぶと、(iii) には一ループの係数と、取りこぼしを段ごとに足し上げた和が効きます（23-02）。記録の整理では、(ii) だけが、道具にも記帳にも依らない理論の一文です。

この道筋の上の一文

閉じ込めの管には、弦張力のほかに長さの径数が無い（$m^2 \asymp \sigma$、式 (3)）。

「第二種の質量は無い」と同じ型で、記録は次の対応表を作りました。

一般相対論	この道筋（類比）
リーマン幾何学（舞台）	格子ゲージ理論（有限次元の確率測度）
一般共変性（法則の書き方への要請）	繰り込み群の一段（格子を粗くしても中身は同じ）
光速度不変から来る単位の約束（$c=1$）	尺度設定の規約（$\sqrt{\sigma}=1$ と置く単位の約束。17-01 §07）
等価原理（物理の一文）	(ii) 一尺度（第二の長さの径数は無い）

比喩で言えば、一般相対論が「重さ」を一種類にしたように、この一文は「長さ」を一種類にします。正確には、表は類比で左右を結ぶ定理はなく、等価原理は各点の等式、(3) は一様な不等式です。

07

候補を落とす — 双対超伝導・中心渦・漸近スケーリング

(a) 双対超伝導と**(b) 中心渦**（17-02）は、ゲージを固定して射影した配位の言明です。生の形では固定の仕方（Gribov のコピー、17-02 §04）に依り、確率測度の一文になりません。ゲージ不変に書ける核（'t Hooft の渦の自由エネルギー）は σ の言明で、鎖 (iii) に合流します。**(c) 非摂動的な漸近スケーリング**は、格子単位の長さが摂動論の予言どおりに伸びるという一文です。二ループの予言は次の f_2 です（SU(N)、$g^2 = 2N/\beta$）既知 。

$$f_2(\beta) = (b_0 g^2)^{-b_1/(2b_0^2)} \exp\!\Big(-\frac{1}{2b_0 g^2}\Big), \qquad b_0 = \frac{11N}{48\pi^2}, \quad b_1 = \frac{34N^2}{3(16\pi^2)^2} \tag{8}$$

係数は PDG の総説の値（クォークなし）と一致します（$N=3$ で照合 計算 ）。(c) は「格子単位のあらゆる長さの逆数、たとえば am/f_2 や $a\sqrt{\sigma}/f_2$ が正の定数に収束する」と言います。f_2 を物理の単位の目盛りと読めば、am/f_2 の収束はそのまま物理単位の質量ギャップが正で有限であることです。示したい結論を含むので、記録は循環として外しました。

数値でも違います。SU(2)・裸の結合 $g^2 = 4/\beta$ で $\beta = 2.40 \to 2.60$ のとき、$a\sqrt{\sigma}/f_2$ は 57.26→48.23（−15.8 %）、比は 3.618→3.837（+6.1 %）です 計算 。比は動きが小さく、摂動論も使いません。

裸の結合 β には格子に特有の大きな補正が混じります。Lucini–Teper は平均場で改良した結合 $\beta_I = \beta \cdot \frac{1}{N}\langle \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,U_p \rangle$（$U_p$ はプラケットの行列）を使い、'Transforming this to β_I is known to remove a large part of the lattice corrections at small a.' と書いています（原論

文 §5、式 (11) の後の文。この結合の出所として原論文は先行文献を挙げる）物理 。その結合で二ループの Λ を求めて連続極限へ外挿した値が原論文の表 6 ですが、SU(2) の外挿については 'the best continuum fit is very poor' とあります。

08

一尺度が破れる例

(3) が当然でないことは、破れる例で分かります。**三次元のコンパクト U(1)**：Göpfert–Mack は全結合で $\sigma > 0$ を証明し 既知 、連続極限では、質量を物理の単位で固定したとき弦張力が無限大に行く（$\sigma/m^2 \to \infty$）とも述べます（同論文の要旨。Villain 作用。本文は未読）。その記述どおりなら、閉じ込めはあるのに比 $m/\sqrt{\sigma}$ は 0 に向かいます（17-02 §03）。**ホログラフィーの超重力の領域**：比は $\lambda^{-1/2}$ で 0 に向かい、$\lambda = g^2 N$ が第二の径数です（17-09 §08） 物理 。

強結合展開の主項は反例ではなく、傾きが逆の近似です。作用を $S = \beta \sum_p \left(1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{Tr} U_p\right)$（和はすべてのプラケット、5-01）とすると、SU(2) の主項では $u = I_2(\beta)/I_1(\beta)$（変形ベッセル関数の比）として $\sigma = -\ln u$、最も軽い状態は $m = -4 \ln u = 4\sigma$ なので（5-02） 既知 、

$$\frac{m}{\sqrt{\sigma}} = 4\, a\sqrt{\sigma} \tag{9}$$

で、図1 の破線（延ばせば原点を通る直線）です。$a\sqrt{\sigma} \to 0$ に延ばすと比は 0 に落ち、格子の数値と逆向きです。$\beta = 2.40$ の主項は $a\sqrt{\sigma} = 0.840$（実測 0.2634）で 計算 、展開の収束域の外です。

09

一尺度が保たれる例と、要る入力

保たれる例：三次元の $\mathbb{Z}_2$ ゲージ模型。群は可換ですが、双対変換で三次元イジング模型に写り、グルーボールの質量は相関長の逆数に、弦張力は界面張力になります。Agostini–Carlino–Caselle–Hasenbusch（1997）は、スケーリング極限では $\sigma\xi^2$ が定数になるはずだとして連続値 $0.1056(19)$ を求め、ϕ^4 理論の予言 $0.1024(88)$ と合うことを確かめたうえで、$m/\sqrt{\sigma} = 3.08(3)$ を得ました 物理 。

比 $1/\sqrt{\sigma\xi^2}$ は $a\sqrt{\sigma} = 0.236$ で 3.272(11)、0.069 で 3.117(52)、連続値で 3.077(28) と、上から近づきます（原論文の表 6 から 計算 ）。物理の説明はこうです。**関連する方向**とは、格子を粗くするほど効きが大きくなる結合の向きのことです。$\mathbb{Z}_2$ 対称を保つ（イジング模型で言えば磁

場の無い）範囲では、臨界点の近くに関連する方向が一本しかないので、m と $\sqrt{\sigma}$ が同じ一つの ξ で決まります（2-08 §07）物理。定理ではありません。

三次元 U(1) の連続極限の記述が正しければ、可換な U(1) で破れ、可換な $\mathbb{Z}_2$ で保たれるので、**非可換かどうかでは決まりません**。要るのは「第二の小さな径数を禁じる入力」です。記録は、四次元 SU(2) でのこの入力を一ループの係数が正であること（漸近自由、4-06）と見ていて、それを二つの形に書き直しました。I：関連する方向が一本で、m と $\sqrt{\sigma}$ が同じ ξ で決まる。R：格子で壊れた回転の対称性が長い距離で戻る（管の形が効く。17-03 §08）。この二つで足りるかは分かっていません。

10

等価原理と違うところ — 仮定として置けない一文

一般相対論では等価原理は公理です。懸賞問題は定義から存在と隙間を*証明*せよと言うので、(ii) を公理として足せず、定理にするか迂回するかです。

問題文は、$(0, \Delta)$ にスペクトルが無いことを隙間 Δ と定義し、'The supremum of such Δ is the mass m, and we require m < ∞.' と続けます 既知。(ii)(iii) の下での (6) の形 $C_P \asymp \xi^2$（帯の文 H_{band}）を上下に割ると、記録の読み替えでは $C_P \lesssim \xi^2$（緩和時間の上界の仮定）が $\Delta > 0$ の側、$C_P \gtrsim \xi^2$（緩和時間の下界の仮定）が質量が無限大に潰れない側（$m < \infty$ の形）に当たります。緩和時間の仮定そのものの形で上下に割る正確な扱いは 23-01 で行います。下界の仮定は Clay の意味の「非自明」（相互作用があること）とは別物です。

(ii) の下の半分 $m^2 \gtrsim \sigma$ は、管の欠損が周長 ℓ に対して c/ℓ 以上だという作用素の不等式（記録の呼び名で管の転送作用素の不等式）に還元されます Lean （`mass_sq_ge_of_tube`、`LatticeGaugeTubeEntropy.lean`。仮定：転送作用素のノルムが $e^{-2\sqrt{c\sigma}}$ 以下、つまり管の不等式の帰結。結論：$m^2 \geq 4c\sigma$。一覧は 23-13）。管の不等式そのものの証明の型はありません（23-02）。有限個の測定からは m の上界しか出ません（既知の関係の言い換え。23-02）。一文は名指しできても、定理にする道具はまだありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
物理 「尺度は一つ」を (3) に書けること、(ii) が道具にも記帳にも依らない唯一の鎖であること（記録の整理）。	対応表が数学の同値であること（類比）。(ii) が緩和時間の仮定に十分な入力であること。

言えている	言えていない
計算 表A・表B、図1・図2、§02・§07・§08・§09 の数値。	一次資料の値の比と当てはめで、測定ではない。外挿の形はデータだけでは選べない。
Lean (7) から (6) が出る向きの積の代数（`chain_band`・`sq_times_poincare_band`）。(ii) の下の半分の管の不等式への還元（`mass_sq_ge_of_tube`）。	鎖 (i)(ii)(iii)・緩和時間の仮定・(3)・管の不等式の証明。四次元の連続理論の一尺度・質量ギャップ・構成について、この章は何も示さない。
既知 三次元 U(1) の全結合での面積則、主項の形。	三次元 U(1) の連続極限（本文未確認）。$\mathbb{Z}_2$ と SU(2) の一尺度は数値と物理の水準。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
隙間と $m < \infty$ の定義	既知	A. Jaffe, E. Witten, "Quantum Yang–Mills Theory"（Clay の問題文）§4。本文を確認。
等価原理の出発点、ねじれ秤	物理	A. Einstein, Jahrb. Radioakt. Elektron. 4 (1907) 411–462。R. v. Eötvös, D. Pekár, E. Fekete, Ann. Phys. (Leipzig) 68 (1922) 11。どちらも書誌のみ（二次資料）。
式 (2)	既知	P. Touboul ほか（MICROSCOPE）, PRL 129 (2022) 121102, arXiv:2209.15487。要旨を確認。
表A・表B・§07 の入力、引用、平均場で改良した結合	物理	B. Lucini, M. Teper, JHEP 0106 (2001) 050, hep-lat/0103027 表 1・5・6、原論文の式 (4)(5)、§5 の式 (11) の後の文。本文を確認。
§09 の $\mathbb{Z}_2$ の入力、双対変換、ϕ^4 の予言 0.1024(88)、3.08(3)	物理	V. Agostini, G. Carlino, M. Caselle, M. Hasenbusch, NPB 484 (1997) 331, hep-lat/9607029 原論文の式 (4)(15)(16)・表 6。本文を確認。
強結合展開の主項（$u = I_2/I_1$、$m = 4\sigma$）	既知	J.-M. Drouffe, J.-B. Zuber, Phys. Rep. 102 (1983) 1–119。書誌のみ。導き方は 5-02。
't Hooft の渦の自由エネルギー（§07）	既知	G. 't Hooft, NPB 138 (1978) 1–25。Tomboulis–Yaffe, CMP 100 (1985) 313。どちらも書誌のみ。17-02。
一ループ係数	既知	D. J. Gross, F. Wilczek, PRL 30 (1973) 1343。H. D. Politzer, PRL 30 (1973) 1346。書誌のみ。
(8) の係数の照合	既知	J. Huston, K. Rabbertz, G. Zanderighi, "Quantum Chromodynamics", PDG, PRD 110 (2024) 030001, 式 (9.3)。本文を確認。
三次元コンパクト U(1)	既知	M. Göpfert, G. Mack, CMP 82 (1982) 545–606。要旨（INSPIRE）。本文は未読。年は Crossref の発行年で、INSPIRE は 1981。
超重力の領域	物理	17-09 の出典表。

もの	種別	出典・道具
(3)・緩和時間の仮定・三つの鎖・対応表・候補の判定・I と R	類比・仮定	本書の検討の記録の整理。鎖と緩和時間の仮定は仮定、対応表は類比。Lean は (7) の代数（`chain_band`・`sq_times_poincare_band`、`LatticeGaugeOneScale.lean`）と (ii) の下の半分の還元（`mass_sq_ge_of_tube`、`LatticeGaugeTubeEntropy.lean`）だけ。定理の一覧は 23-13。
表A・表B、図1・図2、§07・§08・§09 の数値、照合	計算	この端末の Python 3（numpy・scipy）：`onescale.py`（誤差の伝播、(4) の最小二乗、(8)、I_2/I_1、$\mathbb{Z}_2$ の比）。

次に読む章：17-13 物理の掘り方が数学と離れる場所 — 物理と数学が離れる場所を、第 17 部全体から拾います。緩和時間の仮定の詳しい形は 23-01 へ。

2026-10-01 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 17 部 物理の側から 物理と数学の切れ目

物理の掘り方が数学と離れる場所 — 物理の一文を数学の一文に訳すと、仮定が表に出る

> この章は既存の知見の整理です。§04 は本書の検討です。

この章で分かること — 物理の一文を数学の言明に訳すと付く前提。前提が入る七つの手つきと、それぞれで定理が途切れる場所。格子の比 $m/\sqrt{\sigma}$ の分母に弦の絵がどれだけ入っているか（一次資料の表からの再計算）。

前提となる章 — 17-10（あわせて 17-01〜17-03・5-01・4-10）。

先に言うこと — 物理の結果の水準を定理と取り違えないための整理で、物理の方法の良し悪しは論じません。質量ギャップの存在も連続極限の構成も、この章は示しません。数値は一次資料の表の再計算です。

この章の順序

1. 物理の一文を数学の一文に訳す
2. 在ると置いてから測る
    - 寄り道：有限の箱の隙間はなぜ易しいか
3. 分母に弦の絵が入る
4. 弦の絵を外すと比はどれだけ動くか（図1）
5. 有限の β から外挿する
6. 小さい径数の側から見る
7. 隣の理論へ移り、つまみで戻る（図2）
8. ゲージを選んでから見る
9. 物理が一つと見なすもの
10. 離れる場所の一覧

01

物理の一文を数学の一文に訳す

Lucini–Teper 2001 の表5 は $SU(2)$ の最も軽いグルーボールの質量 $m_{0^{++}}$ と弦張力 σ の比の連続値を 3.844(61) と与えます 物理 。この一文を数学の言明に訳すと

$$\lim_{\beta \to \infty} \frac{m(\beta)}{\sqrt{\sigma(\beta)}} = 3.844\ldots \tag{1}$$

です（$\beta = 2N/g^2$、m・σ は格子間隔 a を単位にした量、5-01）。(1) は四つの前提を持ち込みます。

a. 各 β で無限体積の極限が在り、一つに決まる。部分列の極限はコンパクト性から常に在るので、問題は一意性です。

b. 各 β で $m(\beta) > 0$、$\sigma(\beta) > 0$。

c. $\beta \to \infty$ の極限が在る。

d. 極限が、公理（4-10）を満たす連続の理論の量の比になる。

四次元の $SU(2)$ で大きい β について、(a)〜(d) のどれも定理ではありません（§05） 既知 。「(61)」は数値の推定誤差で、不等式による誤差限界ではありません。この章で「離れる」と呼ぶのは、物理の手順のある段に対応する定理が無く、仮定として置くしかない場所です。

02

在ると置いてから測る

物理の計算は、四次元の純ヤン–ミルズ理論が一つ在ることを前提にしています。有限の箱 B（格子点の有限な立方体）と有限の β では、リンク変数 $U_\ell \in G$ の上の確率測度

$$d\mu_{B,\beta}(U) = \frac{1}{Z_{B,\beta}} \exp\Big(\frac{\beta}{N} \sum_{P \subset B} \operatorname{Re}\operatorname{tr} U_P\Big) \prod_{\ell \subset B} dU_\ell \tag{2}$$

がきちんと定義されます（U_P はプラケット P を一周するリンク変数の積、dU_ℓ は Haar 測度） 既知 。前提が入るのは極限です。問題文は、コンパクト性（部分列の収束）による弱い存在だけでは、極限の性質（ギャップや公理）を別の方法で示さない限り解と認めません（問題文 §6.5 の脚注 2、17-01）。さらに問題文は §5 で 'the existence of a uniform gap for finite-volume approximations may play a fundamental role in the proof of existence of the infinite-volume limit' と**一様な**隙間を名指しします 既知 。物理の数値は「在ると仮定したうえでの予言」です。2026-11-10 に公開された構成は、Wilson の格子ゲージ理論の極限として Wightman の公理を満たす理論が作れることを、Lean で証明されてい

る、と委員会が評価しました。ただし体積の極限は部分列で、その一意性と、物理の数値が載る質量ギャップは示されていません（上の (a) は格子の各 β での言明で、この構成の外です）（6-04）。

寄り道：有限の箱の隙間はなぜ易しいか

飛ばしてよい小節です。

この寄り道の β はイジング鎖の逆温度です（格子ゲージの β とは別）。一次元のイジング鎖（重み $e^{\beta s_i s_{i+1}}$、$s_i = \pm 1$）の転送行列は

$$T = \begin{pmatrix} e^{\beta} & e^{-\beta} \\ e^{-\beta} & e^{\beta} \end{pmatrix}, \qquad \lambda_0 = 2\cosh\beta,\ \ \lambda_1 = 2\sinh\beta,\ \ \ln\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \ln\coth\beta \tag{3}$$

で、相関は $(\tanh\beta)^{|i-j|}$ と減衰します。成分がすべて正の行列の最大固有値は単純で他より真に大きい（Perron–Frobenius）既知。例：$\beta = 1, 2, 3$ で隙間は 0.272・0.0366・0.00496 計算。どの有限の β でも正です。

格子ゲージ理論でも、有限の箱の隙間は正です。正確には、リンク変数は連続な群に値をとるので、転送行列は行列ではなく、正の連続な核をもつ積分作用素です。有限の箱では、核が連続で群がコンパクトなので、この作用素はコンパクトです。そこで Perron–Frobenius の無限次元版（Jentzsch の定理の一般化。出典は 5-03）から、最大固有値は単純で孤立します（転送行列の構成は Lüscher 1977・Osterwalder–Seiler 1978。5-03）既知。問われるのは $a \to 0$ で (隙間)$/a$ が体積に一様に正のまま残るかです（二次元は 2-09）。

03

分母に弦の絵が入る

(1) の分母の σ は直接には測れません。測るのは、周期的な箱（一辺 L 格子点）を一周して閉じた電束管の質量 m_l で、Lucini–Teper は管を弦とみなし Lüscher 項（17-03 §03）を差し引きます 物理。

$$a m_l = a^2 \sigma L - \frac{\pi}{3L} \tag{4}$$

著者は 'in using eqn(4) we are assuming that we have linear confinement …, that the effective string theory … is in the Nambu-Gotto universality class, and that our string is in fact long enough' と書き、'with only two values of L … we cannot claim to have evidence for both the 1/L functional form and for its coefficient' とも断ります。Nambu–Goto の基底状態の全形（Athenodorou–Bringoltz–Teper の式 (23)）は

$$E_0(l)^2 = (\sigma l)^2 - \frac{\pi\sigma(d-2)}{3}, \qquad d = 4 \tag{5}$$

です（$l = aL$ は管の長さ、d は時空の次元。一次資料は D と書きます）。平方根をとって $1/l$ で展開した最初の二項が (4) です 既知 。つまり (4) は長い弦の近似で、管が短いほど後ろの項が効きます。一次資料の格子では管の長さは $L\sqrt{\sigma} \approx 3.1\text{〜}3.4$（$1/\sqrt{\sigma}$ を単位とした長さ） 計算 で、この長さで (4) が足りることは、上の引用のとおり著者も仮定として置いています。

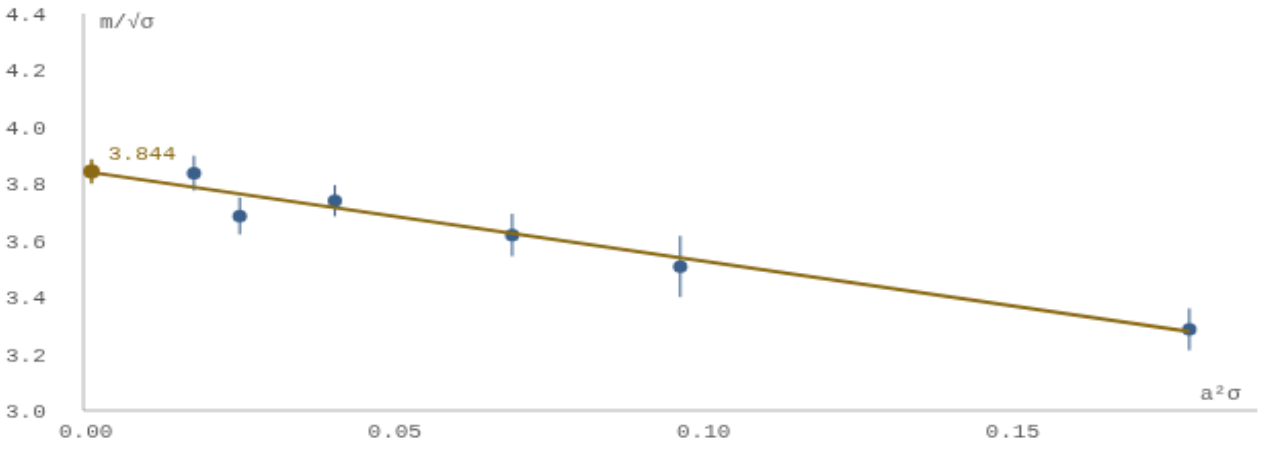
04

弦の絵を外すと比はどれだけ動くか

一次資料の表1 の管の質量から σ を三通り（補正なし $a^2\sigma = am_l/L$・(4)・(5)）に取り出し、比を計算し直しました 計算 。補正なしは、弦の絵の寄与を測る物差しです。

当てはめの読み方 — 各 β の比を横軸 $a^2\sigma$（格子の粗さ）に並べ、各点を誤差の二乗の逆数で重み付けして直線を引きます（重み付き最小二乗。直線の形は §05 の (6)）。左端 $a^2\sigma = 0$ の値が連続値です。χ^2 は、点と直線のずれを各点の誤差で割って二乗した和で、自由度（点の数 − 2）と同じ程度なら、直線は誤差の範囲で点に合っています。表1 の比の誤差は、$am_{0^{++}}$ と $a\sqrt{\sigma}$ の誤差を互いに独立とみなし、相対誤差を二乗して足した平方根です。

図1　σ の取り方と除く粗い点の数を変えると、当てはめの直線と連続値（左端）が変わる。破線は式 (4)・全点



式 (4)・除く点 0 個 → 連続値 3.844(43)、χ²/自由度 2.38/4、式 (4)・全点との差 0.0 %

計算 この図の数値はこの端末で計算した（表1 と同じ計算の結果を埋め込んだ）。

表1　$SU(2)$ の $m_{0^{++}}/\sqrt{\sigma}$：σ の取り方ごと（Lucini–Teper 表1 から。六点の am の正本は 16-05 表 3。誤差の出し方は上の「当てはめの読み方」）

β	$L\sqrt{\sigma}$	補正なし	(4)	(5)
2.25	3.38	3.447(78)	3.286(74)	3.278(73)
2.30	3.11	3.715(115)	3.508(108)	3.496(108)

β	$L\sqrt{\sigma}$	補正なし	(4)	(5)
2.40	3.16	3.825(80)	3.619(75)	3.608(74)
2.475	3.23	3.943(59)	3.740(55)	3.729(54)
2.55	3.18	3.894(69)	3.686(65)	3.676(64)
2.60	3.21	4.048(66)	3.837(62)	3.826(62)
連続値（全点）		4.059(45)	3.844(43)	3.833(42)

(4)・全点の中心値 3.844 は一次資料の表5 と一致します。Lüscher 項の有無で連続値は 5.6%（一次資料の誤差 0.061 の約 3.5 倍）動き、(4) と (5) の差は 0.3% です 計算 。表1 の格子で補正は主項 σL の 9〜11% です。比の精度は弦の絵の**先頭の補正が正しい**ことの上に立ちます（Athenodorou–Bringoltz–Teper は低い状態の多くが Nambu–Goto でよく記述されると報告） 物理 。

数学に訳すと、弦の絵の出発点は長い閉じ込めの管、つまり閉じ込めです。四次元の非可換群で大きい β の面積則は 'remains elusive'、小さい β の面積則は $U(1)$ を含む全群で成り立つので証拠にならない、と Chatterjee 2018 は書きます 既知 。

05

有限の β から外挿する

一次資料は、プラケット作用の格子の補正が a^2 から始まると見込み、

$$\frac{m(a)}{\sqrt{\sigma(a)}} = \frac{m(0)}{\sqrt{\sigma(0)}} + c\,a^2\sigma \tag{6}$$

を当てはめ（c は定数とみなす）、当てはめが悪ければ最も粗い点を除きます 物理 。図1 のつまみはこの手順の再現で、(4) なら連続値は 3.84〜3.86 に留まります 計算 （当てはめの形による動きは 17-12）。

数学の側では、Chatterjee 2018 の格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）が次を示せと求めます。$W_P = \operatorname{tr} U_P$ と置き、原点のプラケット P_0 と、点 $x \in \mathbb{R}^4$ に最も近いプラケット P_x の相関（共分散）を $f_\beta(x) = \langle W_{P_0} W_{P_x}\rangle - \langle W_{P_0}\rangle\langle W_{P_x}\rangle$ とします。四次元の非可換格子ゲージ理論の任意の無限体積極限で、どの $\beta > 0$ でも

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{\log f_\beta(x)}{|x|} = -\frac{1}{\xi(\beta)}, \quad \xi(\beta) \in (0,\infty), \qquad \lim_{\beta\to\infty} \xi(\beta) = \infty \tag{7}$$

となること（ξ は格子単位の相関長。連続の弦張力の問題（Chatterjee の Problem 5.2）は Wilson ループの連続極限）。言葉にすると、相関は遠くで $e^{-|x|/\xi}$ のように減り、その長さ ξ はどの β でも有限で正、しかも連続極限に近づくと格子間隔に比べて限りなく長くなる、という

ことです。著者は 'Since none of the above has been proved' と書き、2 次元より高い次元の大きい β では無限体積極限の一意性も分からず、四次元で $\beta_c = \infty$ は 'It is believed' の水準だと述べます 既知 。例：最も細かい点（$\beta = 2.6$、24^4）でも $\xi = 1/(am_{0^{++}}) = 1.95$ 格子間隔で、六点の ξ は 0.72〜1.95 です 計算 。外挿は、この範囲の傾きを $\xi \to \infty$ まで延ばす仮定です。

06

小さい径数の側から見る

摂動論も半古典も $g \to 0$ のまわりの展開ですが、次元転移（4-07）の尺度は一ループで

$$\Lambda = \mu \, \exp\Big(-\frac{1}{2 b_0 g^2(\mu)} \Big), \qquad b_0 = \frac{11 N}{48 \pi^2} \tag{8}$$

です。$e^{-1/x}$ は $x \to 0^+$ でどの冪より速く 0 に近づき、テイラー係数はすべて 0 です 既知 。$\Delta = c\Lambda$ なら、ギャップは g^2 の級数のどの次数にも現れません（期待） 物理 （7-12・4-12）。例：$SU(3)$、$g^2 = 0.5$ で $\Lambda/\mu = 5.8 \times 10^{-7}$、$g^{20}$ はまだ 9.8×10^{-4} です 計算 。

半古典がギャップまで届く例は、どれも問題文の理論ではありません。三次元の compact $U(1)$ では単極子が閉じ込めを起こし（Polyakov 1977、半古典）、Göpfert–Mack が Villain 作用の格子で全結合の面積則を証明しました 既知 （連続極限では物理の単位の弦張力が無限大に行く、と同論文の要旨。本文は未読）。$\mathbb{R}^3 \times S^1$ では、Ünsal–Yaffe 2008 が変形した $SU(N)$ 理論について、小さい N で円周 L が十分小さい領域の半古典の解析から、ギャップと線形の閉じ込めを導きました（物理の水準） 物理 。$L \to \infty$ の途中に相転移が無いことは、小さい L と大きい L を区別する秩序変数が無いという議論に基づく予想です。数学に要るのは g について非摂動的な評価で、構成的な方法も強結合へ渡る所で止まっています（7-10）。

07

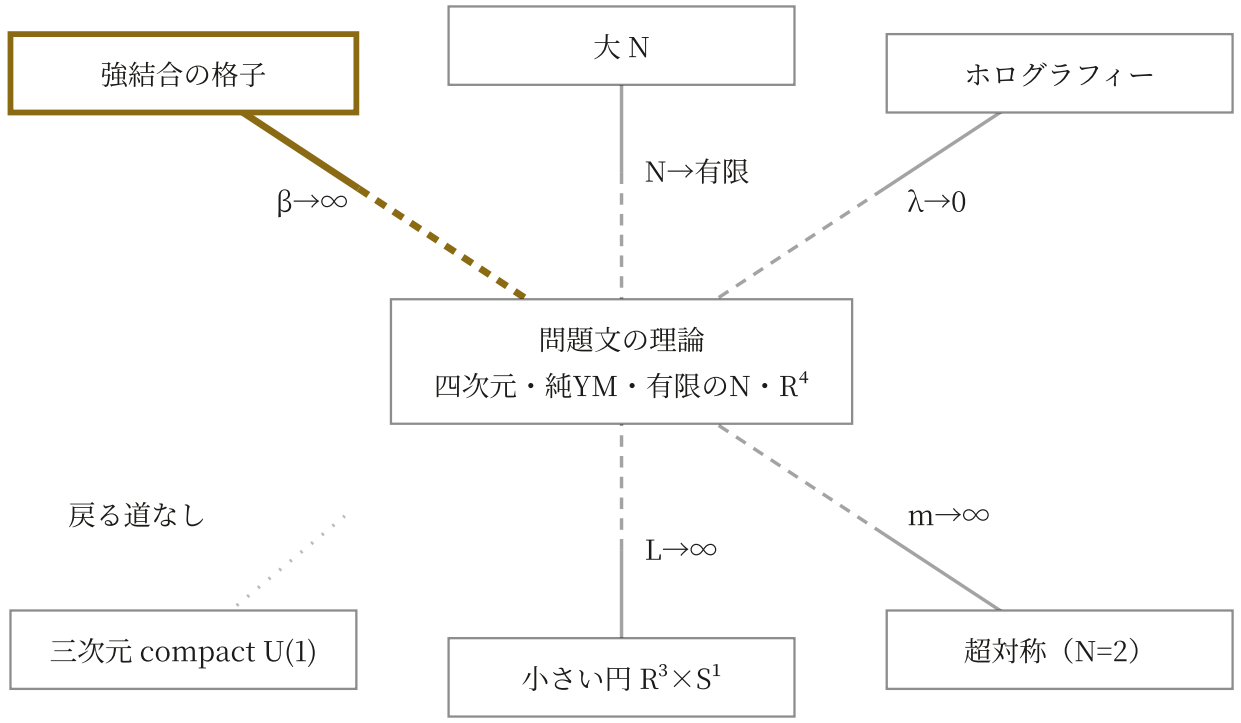
隣の理論へ移り、つまみで戻る

計算できる**隣の理論**へ移り、つまみを回して戻る手つきで、途中で何も起きないと置くのが仮定です。数学に訳すと極限の入れ替えで、一様性が要ります（17-10 §06）。大 N なら無次元の比 F について

$$\lim_{a \to 0} \lim_{N \to \infty} F(N, a) \overset{?}{=} \lim_{N \to \infty} \lim_{a \to 0} F(N, a) \tag{9}$$

で、問題文が要るのは N 固定の極限です。

図2　岸（ボタン・箱・表3 の行）を選ぶと戻る道が強調される。実線は計算が制御できる部分、破線は戻る道、点線は戻る道の無い岸



強結合の格子　小さい β で無限体積極限と面積則（Osterwalder–Seiler）。U(1) も含む 既知　戻るつまみ：β→∞　途中で要ること：収束域が弱結合に届かない

図2 は表3 の内容を絵にしたもので、数値はない。

表3　隣の理論と戻るつまみ

岸	数学として言えていること	戻るつまみ	途中で要ること
強結合の格子	小さい β で無限体積極限と面積則（Osterwalder–Seiler）。U(1) も含む 既知	β→∞	収束域が弱結合に届かない
大 N	強結合の SO(N) で弦の和（Chatterjee）。全 β で曲面和の表示（Cao–Park–Sheffield） 既知	N を有限へ	1/N の補正の一様性
ホログラフィー	背景を固定した後の固有値問題 既知 。対応は予想（17-08）	λ→0	超重力の外。弦理論の定義
超対称（N=2）	インスタントンの積分がプレポテンシャルを与える（17-11） 既知	質量→∞	ギャップが途切れないこと
小さい円 $R^3\times S^1$	小さい N・小さい L の半古典（Ünsal–Yaffe） 物理	L→∞	相転移が無いこと
三次元 compact U(1)	全結合で面積則（Göpfert–Mack、Villain 作用） 既知	無い	尺度が一つにならない（同論文の要旨）

大 N では、't Hooft 1983 が平面図の場の理論を「粒子の質量がすべて非零で結合が十分小さい」条件で構成したとされ（書誌と検索要約のみ）、ギャップは入力です。問題文は §6.6 で 1/N を 'perhaps a good starting point for a rigorous proof (for sufficiently large N)' と書きます 既知 。例：格子の比は $SU(3)$ で 3.405(21)（Athenodorou–Teper 2020・2021）、

$SU(\infty)$ で 3.072(14)（同 2021）です 物理 。物理はこれを「大 N は近い」と読みますが、数学に要るのは (9) の一様性の証明です。

08

ゲージを選んでから見る

閉じ込めの機構の多くは、ゲージを選んでから定義される変数（単極子・中心渦・Landau ゲージの伝播関数）で語られます（17-02） 物理 。数学の側では、大域的に連続なゲージ固定は一般に無く（Singer、3-04）、局所的な条件にも複数の解が残ります（Gribov、4-08） 既知 。格子では、局所的な量の期待値は、その量をゲージ変換について平均したもの（ゲージ不変な部分）の期待値に等しく、ゲージ変換で変わる成分の期待値は 0 です（Elitzur。例：$\langle U_\ell \rangle = 0$） 既知 。

問題文の標的はゲージ不変な局所場です。例えば $O = \operatorname{tr} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$（$\mu,\nu$ について和をとる）について

$$\left| \langle O(x)\, O(0) \rangle - \langle O \rangle^2 \right| \le C\, e^{-\Delta |x|} \tag{10}$$

がギャップ Δ の現れ方の一つです（4-11）。伝播関数は大きな格子で $D(0)$ が有限で非零に見える（'seems to'）と報告され（Cucchieri–Mendes）、Zwanziger は領域内のコピーは期待値に効かないと主張します 物理 。$D(p)$ から (10) を導く定理はありません。

ゲージ不変な橋もあります。群 G の**中心**は、すべての元と可換な元の集まりで、$SU(N)$ では 1 の N 乗根倍の単位行列 $e^{2\pi i k/N} I$ です。**中心対称性**は、一つの層のリンクすべてに同じ中心の元を掛ける変換（プラケットの値を変えない）についての対称性で、測度がどれもこの変換で変わらないとき「破れない」と言います（正確には厚さ有限の板の上で、どの境界条件でも。17-02）。Tomboulis–Yaffe 1985 は $SU(2)$ で Wilson ループを中心渦の自由エネルギーで上から押さえたとされます（検索要約のみ）。Chatterjee 2021 は格子で、中心に非自明に作用する表現（中心のある元が単位行列以外に写る表現。例：$SU(N)$ の基本表現）の Wilson ループについて二つを証明しました 既知 。中心対称性が破れなければ閉じ込めること（$V(R) \to \infty$ の意味で、面積則より弱い）と、任意の境界条件での相関の指数減衰を仮定すれば中心対称性は破れず面積則が出ることです。欠けているのは四次元の弱結合でその仮定が成り立つことです（Tomboulis 2007 の主張には 'missing links' の指摘、Ito–Seiler）。

09

物理が一つと見なすもの

物理は、次元転移の後の尺度は一つと見て、別々の量を一つの尺度の顔として扱います（17-01 §03）。数学に訳すと一文が割れます。

表4　物理の一文と、訳した言明

物理の一文	数学の言明と現状
質量と弦張力は同じ Λ の定数倍	m^2/σ が β に一様に上下から押さえられること（17-12 の拡散型緩和時間の仮定）。破れる例：三次元 compact $U(1)$・超重力の領域（17-09） 物理
閉じ込めとギャップは一つの現象	別の主張。問題文は $\Delta > 0$ だけを求め、閉じ込めは拡張問題（問題文 §5 の 'natural extensions'）。問題文の意味のギャップから閉じ込めを導く定理は無い（17-02 §02）。格子では、任意の境界条件での指数減衰という強い形から、中心が非自明な群で面積則が出る（Chatterjee 2021 Thm 2.4） 既知 。有限群では、ゲージ不変な量の相関の指数減衰が弱結合で証明されている（Adhikari–Cao。境界に条件を課さない箱の上での形で、強い形とは別物） 既知 。閉じ込めないことは信じられている段階（Chatterjee 2021 が 'believed' と書く。5-10） 物理
ギャップは最も軽いグルーボールの質量	隙間と、その上の孤立した一粒子状態は別。後者は拡張問題（4-11） 既知

10

離れる場所の一覧

どの行でも、欠けているのは物理の筋ではなく対応する定理です。

表5　七つの手つきと、訳した言明の現在地

手つき（節）	数学の言明に訳すと	現状
在ると置く（§02）	公理を満たす極限の構成	2026-11-10 に公開された構成（Lean で証明されている、と委員会が評価。体積の極限は部分列、一意性と質量ギャップは無し。6-01）
弦の絵で σ を取る（§03・§04）	大きい β での面積則	'remains elusive' 既知
外挿する（§05）	(7) と Wilson ループの連続極限	問題として立てられた段階（格子の相関長の問題・連続の弦張力の問題） 既知
小さい径数で展開する（§06）	g について非摂動的な評価	$e^{-1/x}$ のテイラー係数はすべて 0 既知 。$\Delta = c\Lambda$ は物理の期待 物理
隣の理論から戻る（§07）	(9) の一様性	正当化は探した範囲で見当たらない
ゲージを選ぶ（§08）	ゲージ不変な相関 (10)	条件つきの格子の定理まで 既知
一つと見なす（§09）	別々の言明と一様な比較	仮定として切り出す段階 物理

離れる場所の大半は発散ではなく**極限と一様性**にあり（7-11）、物理の数値は数学にとって証明の段ではなく**標的と検査**です。訳がうまくいった場所は格子の上の**条件つきの定理**です。数学の側と並べた全体図は 16-05、名前の対訳は 16-05 の対訳表です。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
計算 表1 から、Lüscher 項の有無で連続値が 5.6% 動き、(4) と (5) の差は 0.3% であること。(4)・全点の中心値が 3.844 と一致すること。	弦の絵が正しいか。閉じ込めそのもの。一次資料の誤差 0.061 の内訳（この端末の当てはめでは 0.043）。
既知 七つの手つきの、訳した言明と一次資料が述べる現状。	七つで尽きること（分け方はこの章の整理）。条件つきの定理の仮定が成り立つこと。
物理 §06・§07 の半古典・大 N・ホログラフィー・超対称の読み。	つまみを回す極限の存在。質量ギャップと連続極限の構成（この本は示していない）。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
(1)(4)(6)・表1 の入力	物理	Lucini–Teper, JHEP 0106 (2001) 050, hep-lat/0103027。本文（表1・表5・§4）を確認。
(5)・§03・§04 の報告	物理	Athenodorou–Bringoltz–Teper, JHEP 1102 (2011) 030, arXiv:1007.4720。本文（式 (23)・要旨）を確認。
§02・§07・表4 の問題文	既知	Jaffe–Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”（Clay の問題記述）§5（'uniform gap'・'natural extensions'）・§6.5（脚注 2）・§6.6（1/N）。本文を確認。
(7)・面積則・一意性	既知	Chatterjee, arXiv:1803.01950 §4・§5（Problem 5.1・5.2）。本文を確認。
寄り道の転送行列・表3 の強結合	既知	Lüscher, CMP 54 (1977) 283（自己共役で正の転送行列の構成）；Osterwalder–Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（いずれも書誌のみ）。Perron–Frobenius と Jentzsch の定理：O. Perron, Math. Ann. 64 (1907) 248–263／R. Jentzsch, J. reine angew. Math. 141 (1912) 235–244（書誌のみ）。一般化は H. H. Schaefer, *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer (1974) p. 337（書誌のみ、主張は二次資料で確認。詳しくは 5-03 の出典表）。
§08・表4 の中心対称性と有限群	既知	Chatterjee, CMP 385 (2021) 1007–1039, arXiv:2006.16229。本文（Thm 2.2・2.4、有限群についての 'believed' の段落）を確認。Adhikari–Cao, Ann. Probab. 53 (2025) 140–174, arXiv:2202.10375。本文（Theorem 1.1）を確認。

もの	種別	出典・道具
§06 の半古典	既知／物理	Göpfert–Mack, CMP 82 (1982) 545–606（Villain 作用。要旨（INSPIRE）。本文は未読。年は Crossref の発行年で、INSPIRE は 1981）。Polyakov, NPB 120 (1977) 429（書誌のみ）。Ünsal–Yaffe, PRD 78 (2008) 065035, arXiv:0803.0344（要旨）。
§07 の大 N	既知／物理	't Hooft, CMP 88 (1983) 1（書誌と検索要約のみ）。Chatterjee, arXiv:1502.07719・Cao–Park–Sheffield, arXiv:2307.06790（要旨）。Athenodorou–Teper, arXiv:2007.06422（$SU(3)$。本文の表 14・17 を確認）・arXiv:2106.00364（本文の表 24・34〔$SU(3)$〕と表 31・38〔$SU(\infty)$〕を確認）。
§08 のゲージ	既知／物理	Singer, CMP 60 (1978) 7；Gribov, NPB 139 (1978) 1；Elitzur, PRD 12 (1975) 3978（いずれも書誌のみ）；Tomboulis–Yaffe, CMP 100 (1985) 313（書誌と検索要約のみ）。Cucchieri–Mendes, arXiv:0710.0412；Zwanziger, hep-ph/0303028；Tomboulis, arXiv:0707.2179；Ito–Seiler, arXiv:0711.4930（要旨）。
表1・図1・(3)・§03〜§06 の数値	計算	この端末の Python 3（標準ライブラリ）：string_sigma.py・extra.py。入力は一次資料の表の値だけ。(3) と Perron–Frobenius は標準的な事実。

次に読む章：18-01 辞書の読み方（物理の語と数学の語を、定義と実在の二列の格で並べる第 18 部の入口）。

辞書の読み方 — 格を二列で付け、「同じ」の判定者を名指す

この章は案内です（辞書の読み方）。

この章で分かること — 辞書の各行の二つの格、(a) 定義としての対応と (b) 四次元ヤン–ミルズでの実在。
一列の格の食い違いが二列で解けること（図 1）。
「同じ」の判定者（定理・定義・慣習・予想・類比）と、条件の欄の読み方（図 2）。

前提となる章 — 0-03 問題文を一語ずつ読む。§03・§08 は 4-10・4-11 を読んでいると読みやすくなります。0-03 に無い語には初出で一句の説明を付け、詳しくはリンク先の章に譲ります。第三巻の中では、第 17 部（物理の側から）の次に読みます。

先に言うこと — この章は読み方を決めるだけです。表 2 の格はこの本の読みで、根拠は 18-02〜18-04 にあります。この本は質量ギャップの存在も連続極限の構成も自分では示していません（公開された連続極限の構成は第二巻で読みます）。

この章の順序

1. 二つの言葉で同じものを指す
2. 一行の欄 — 九つの欄（測定の列を含む）
3. 定義としての対応の列 — 確定・条件つき・未確定
4. 四次元での実在の列 — 構成済み・条件つき・無い（未構成）
5. 二列にすると食い違いが解ける — 図 1・表 2
6. どちらの言葉を主にするか
    - 寄り道：偽の友
7. 「同じ」を誰が判定しているか — 五つの判定者
8. 条件の欄の読み方 — 図 2・表 3
9. 実在の列が動いたら何がついてくるか

01

二つの言葉で同じものを指す — なぜ辞書が要るか

物理の「経路積分」「真空」「グルーボール」は、数学ではそれぞれ「確率測度」「再構成した Hilbert 空間（1-10）の単位ベクトル」「質量作用素 $M = \sqrt{H^2 - P^2}$（エネルギー H と運動量 P から静止質量を読む作用素）の孤立固有値」に当てられます。出所の違う語が同じものを指すかどうか、その対応がどこまで確かかは行ごとに違い、行ごとに確かめるしかありません。それがこの章の主題です。

答えは三通りです。定理で同じと言える、仮定の下でだけ言える、言えない。しかも四次元では、数学の側の対象がまだ作られていないことが多い（0-03 §04）。そこで一行を次の形にします。

$$\underbrace{\text{物理の語}}_{\text{出所}} \longleftrightarrow \underbrace{\text{数学の語}}_{\text{出所}} \qquad \big[\,(a)\ \text{定義としての対応}\ ;\ (b)\ \text{四次元 YM での実在}\,\big] \tag{1}$$

$\longleftrightarrow$ は対として並べるだけで、同じかどうかは二つの格で言います。例：「インスタントン $\longleftrightarrow$ 反自己双対接続」は (a) 確定・(b) 構成済み（古典）。古典の場には Wu–Yang（1975）の先例があります（要旨 'identification with the mathematical concept of connections'、1-07）。この本の記録の仮定を物理の言葉で読む試みは 18-05 です。

02

一行の欄 — 九つの欄と見本

欄は九つです：概念、物理の語と出所、数学の語と出所、定義の列、実在の列、測定の列、判定者、条件（同一視に要る仮定と残る隙間）、章。

見本は Feynman–Kac 公式です。$H = -\frac{1}{2}\Delta + V$（$\Delta$ はラプラシアンで、質量ギャップの Δ とは別）の虚時間の発展は、x から出る Brown 運動 B_s（独立なガウスの小さな変位を積み重ねた、でたらめな道。1-08）の期待値で書けます 既知 。

$$\big(e^{-tH} f\big)(x) = \mathbb{E}_x\Big[\exp\Big(-\int_0^t V(B_s)\,ds\Big) f(B_t)\Big] \tag{2}$$

欄を埋めると：概念は「e^{-tH} を道の上の積分で書く」、物理の語は経路積分（Feynman 1948）、数学の語は Feynman–Kac 公式（Kac 1949）、(a) 確定、(b) 対象外（有限自由度の量子力学の行なので問わない。§04）、判定者は定理、条件は「V が下に有界など。実時間の e^{iS} は測度にならない」、章 2-07。条件の欄には二種類のものが入ります。「V が下に有界など」

は定理の仮定で、「実時間の e^{iS} は測度にならない」は同一視しても残る隙間です。矢印は $\Longleftrightarrow$ が両向きの定理、$\Longrightarrow$ が片向きの定理で、$\longleftrightarrow$ は (1) と同じく対として並べるだけです。

測定の列：有限の測定で届く向き。(a)・(b) のほかに、もう一つ格を付けます。数学の側の量について、有限個の観測量・有限の時間 t・有限個の格子で測った数から、確かな不等式としてどちら向きが出るか、です。値は四つで、**上界まで・下界まで・両方・届かない**（極限・一様性・すべての観測量についての言明で、有限の測定ではどちら向きにも決着しない）です。量を名指さない行（定義や定理の対応だけの行）は「—」とします。判定の根拠は §08 の (8)・(9) です。重み $w_n \geq 0$ の指数関数の和は対数凸なので、有効質量 $m_{\mathrm{eff}}(t)$ は t について減りながら μ_O に上から近づき、どの有限の t でも $m \leq \mu_O \leq m_{\mathrm{eff}}(t)$ です 既知 （4-11 の (3)）。だから隙間とその仲間（固有値の位置・減衰率）は「上界まで」、その逆数にあたる長さと時間（相関長 ξ・Poincaré 定数 C_P）は「下界まで」に落ちます。1-10 の囲み「上界と下界の非対称」を辞書の欄にしたものです。見本の Feynman–Kac 公式の行は「—」です。

03

定義としての対応の列 — 確定・条件つき・未確定

定義の列は「**もし両方の対象が在るとしたら**、同じか」を問います。在るかどうかは実在の列の仕事です。

確定	条件つき	未確定
同じ対象を与える定理があるか、数学の側がそう定めている。	どちらの定義にも無い仮定の下でだけ同じ（仮定は条件の欄へ）。	同じものを指していそうだが、言う定理が無い。

確定でも矢印には向きがあります。見本は Osterwalder–Schrader（OS）の再構成定理です（4-10）。実時間の場の量子論の公理を Wightman の公理（4-09）、虚時間の相関（Schwinger 関数）に課す五つの条件を Osterwalder–Schrader の公理と呼びます。正則性（E0）・ユークリッド共変性（E1）・反射正値性（E2。時間の鏡に写した量との相関が負にならないこと）・置換対称性（E3）・クラスター性（E4）です。**線形増大**の条件（E0′）は正則性を強めた条件で、n 点関数の評価が n について階乗程度に収まることを求めます（4-10 §03） 既知 。

$$\text{行き：}\ \text{Wightman の理論} \Longrightarrow (\mathrm{E0}) \wedge \cdots \wedge (\mathrm{E4}), \qquad \text{帰り：}\ (\mathrm{E0}') \wedge (\mathrm{E1}) \wedge \cdots \wedge (\mathrm{E4}) \not\Longrightarrow (\mathrm{E3})$$

行きでは、Wightman の理論の相関をエネルギーが正であることを使って虚時間へ解析接続すると、五つの公理を満たします。帰りには線形増大の条件が要り、Wightman の理論から

この条件が出るかは知られていません（Summers §3、4-10 §03）。行きと帰りで条件が違うので、(a) は確定でも矢印は $\Longrightarrow$ の二本で書き、$\Longleftrightarrow$ にはしません。2026-11-10 に公開された構成が、この帰りの向きをどう使って Wightman の理論を再構成したかは 12-08 再構成と Wightman の公理 で読みます。

条件つきの見本は質量ギャップと相関の減衰です。問題文 §5 は 'An important consequence of the existence of a mass gap is clustering' と片向きに書きます。逆向きには、稠密な観測量の族が一様な率で減ることが要ります（§08）。

未確定には三つの型があります。(i) 数学の側に定義が無い：四次元の Λ。(ii) 定義は両側にあるが、同じとする定理が探した範囲で見当たらない：中心対称性（Chatterjee は、数理物理の文献に数学的な定義が無いと書いたうえで、格子での定義を Polyakov ループによる物理の定義から着想したと書く）。(iii) 予想や類比の中の対応：ホログラフィーの動径と繰り込みの尺度（17-08）。

二つに分けて読むなら、「確定」が**指していると確定している**対、「条件つき」と「未確定」が**数学の確かさからは言い切れていない**対です。質量と長さの辞書（18-03 §01）は、別の量だと分かっている対に四つ目の段「対応しない」を足します。表 2 の 9 行目（偽の友、§06 の寄り道）は、18-03 の「物理単位のギャップ」の項ではこの段で付けています。

04

四次元での実在の列 — 構成済み・条件つき・無い

実在の列は、数学の語が指す対象が四次元で作られているかを**水準**つきで書きます。水準は古典（滑らかな接続）、形式的冪級数（摂動の各次数）、格子（間隔 a を固定）、連続の量子論（$\mathbb{R}^4$ の上の測度と Hilbert 空間）の四つで、問題文は最後を求めます（0-03 §03）。

構成済み	条件つき	無い
行が名指す水準で作られている（水準を添える）。	範囲を限った版だけ（強結合・許容条件を満たす格子場など）。	名指す水準ではまだ作られていない。無いことが示されたのではない（低い水準の版は条件の欄へ）。

格はこの三つです。四次元ヤン–ミルズの対象でない行（有限自由度の量子力学、余剰次元など）では (b) を問わず、「対象外」と書きます（§02 の見本）。

最後の規則が要です。格の名の「無い」は「未構成」の意味で、存在しないことが示されたのではありません。問題はまさにその存在を問うています。有限の格子の測度はどの β（格子の作用の結合の係数）でも在りますが（5-01）、連続の測度はその極限で、四次元の非可換群ではまだ構成されていません 既知 。

$$d\mu_a(U) = \frac{1}{Z}\, e^{-S_W(U)} \prod_{\ell} dU_\ell \ \text{(在る)}, \qquad \mu = \lim_{a\to 0} \mu_a \ \text{(未構成)} \tag{4}$$

U_ℓ はリンク変数、S_W は Wilson の作用です。例：インスタントンは古典で構成済み（ADHM 1978）、転送行列（格子で虚時間を一刻み進める作用素、§08）は格子で構成済み（Lüscher 1977）。表 2 の 10 と 11 は同じ幾何を指しますが、10 は古典の水準、11 は格子の水準を名指します。滑らかな接続の第二 Chern 数は古典で在るので、11 の (b) が条件つきなのは、格子の場に整数を割り当てるのに許容条件（各プラケットで U_p が 1 に近いこと）が要るためです。強結合の格子では孤立した一粒子状態も示されていますが（Schor 1984）、格子の水準で、しかも連続極限の反対側です（5-09）。

05

二列にすると食い違いが解ける — 十四の見本

一列で格を付けると、「定義として同じか」と「四次元で在るか」が一つの格に混ざり、どちらで付けたかが行ごとに変わります。

$$\text{一列の格} = f\big((a),(b)\big), \qquad f \text{ が行ごとに暗に選ばれる} \tag{5}$$

例：表 2 の 4 と 5 は同じ対なのに、定義を問えば条件つき、四次元の実例を問えば未確定。6 と 7 も同じで、1（経路積分）は定義として確定なのに一列では条件つき。二列ではこれらが同じ枡に落ちます。「弱い方を取る」一列にすると、連続の量子論の行がほぼ「無い」に揃い、定義の対応が見えなくなります。

図 1　つまみ（左）で一列の格、（右）で二列（縦 (a)・横 (b)）。番号は表 2 の行で、点か行を押すと格が出る。破線は同じ対



位置は表 2 の格（この本の読み）。JavaScript が無効でも静止図と表で読めます。

表 2　十四の見本（詳細は 18-02〜18-04）。「一列」は二つの問いを分けずに付けた格。(c) は §02 の測定の列（有限の測定で届く向き）。

#	物理の語 ⟷ 数学の語	一列	(a)	(b)	(c)	判定者	章
1	経路積分 ⟷ ユークリッド確率測度	条件つき	確定	無い	—	定義	4-02・18-02
2	ウィック回転 ⟷ OS 再構成定理	確定	確定（⇒）	無い	—	定理	4-10
3	格子のハミルトニアンの存在（$T = e^{-aH}$ が正の自己共役） ⟷ Wilson 作用の反射正値性	確定	確定	構成済み（格子）	—	定理	5-03
4	一粒子状態 ⟷ 質量作用素の孤立固有値	条件つき	条件つき	無い	上界まで	定理＋条件	4-11・18-02
5	グルーボール ⟷ 質量作用素の孤立固有値	未確定	条件つき	無い	上界まで	定理＋条件・慣習	18-03
6	時空と格子 ⟷ $a\mathbb{Z}^4$ の $a \to 0$ 極限	未確定	条件つき	無い	届かない	定義＋条件	18-02
7	連続極限 ⟷ スケーリング極限	条件つき	条件つき	無い	届かない	定義＋条件	18-04・7-08

#	物理の語 ⟷ 数学の語	一列	(a)	(b)	(c)	判定者	章
8	質量ギャップ ⟷ スペクトルの隙間・相関の指数減衰	条件つき	条件つき	無い	上界まで	定理＋条件	4-11・18-03
9	物理単位のギャップ ⟷ 格子単位の一様なギャップ	未確定	未確定（偽の友）	条件つき（強結合など）	届かない	慣習	18-03
10	インスタントン ⟷ 反自己双対接続	確定	確定	構成済み（古典）	—	定理	3-05
11	位相電荷（格子） ⟷ 格子場の第二 Chern 数	条件つき	条件つき	条件つき（格子：各プラケットで U_p が 1 に近い場）	—	定理＋条件	3-05・18-04
12	繰り込み可能性 ⟷ BPHZ・Epstein–Glaser（YM では BRS・流れの方程式）	条件つき	条件つき	構成済み（形式的冪級数）	—	定理（YM は下の注）	4-04・4-05
13	Λ・「尺度は一つ」 ⟷ 拡散型緩和時間の仮定：$C_P \asymp \xi^2$	未確定	未確定	無い	下界まで（C_P。緩和時間の上界の仮定は届かない）	類比	23-01・18-05
14	ホログラフィーの動径 ⟷ Fefferman–Graham 展開	未確定	未確定	無い	—	予想	17-08・18-04

注：表 2 の (b) の列は、公開された構成（2026-11-10）より前の読みです。行 2・6・7 は、公開された構成で動きました（6-01・§09）。

表 2 の語の注。11 は格子の水準を名指す行です（§04）。12 の判定者の「定理」は、スカラー場では Hepp 1966、ゲージ理論では Becchi–Rouet–Stora 1976（半単純な群で、すべての場に質量が入るゲージの取り方のとき、ゲージ対称性の恒等式を摂動の全次数で示す）、質量の無い $SU(2)$ の純ヤン–ミルズでは Efremov–Guida–Kopper 2017（繰り込み群の流れの方程式による）です。一般のコンパクト群の純ヤン–ミルズの出典は未確認です。13 の Λ は理論が自分で生む質量の尺度（4-07）、C_P は Poincaré 定数（確率的な勾配の流れ＝Langevin 力学で配位が平衡に戻る遅さ。1-10・18-03）、ξ は相関長（相関が $e^{-r/\xi}$ で減る長さで、格子単位のギャップの逆数）、拡散型緩和時間の仮定は本書の検討の記録が置いた仮定 $C_P \asymp \xi^2$（両者が定数倍の範囲で比例すること。23-01）です。14 の Fefferman–Graham 展開は、境界からの深さの冪で内部の計量を展開する式です（18-04）。

06

どちらの言葉を主にするか — 引くのは物理の語、判定は数学の言明

辞書は、多くの読み手が先に知る物理の語から引けるように並べ、格は数学の言明に訳してから判定します（17-13 §01）。物理の語が二つの意味を持つときは行を割ります。割るかどうか

の基準は、二つの意味で定義の列の格が違うかどうかです。同じなら一行にまとめ、違えば割ります。見本は「ユニタリ性」です 既知 。

$$\begin{aligned} &\text{正ノルム性} \iff \text{反射正値性} && \text{(確定。OS と Wightman の対応の中} \\ &\text{正ノルム性} \wedge \text{漸近完全性} \implies \text{S 行列のユニタリ性} && \text{(条件つき。Haag–Ruelle の散乱理論} \end{aligned} \tag{6}$$

正ノルム性は、状態の内積が正定値であること（負のノルムの状態が無いこと）です。漸近完全性は、遠い過去と遠い未来の自由な粒子の状態（漸近状態）で Hilbert 空間が尽きることです（18-02 §05）。上の行は OS と Wightman の対応の中での言明で、反射正値性から正定値の Hilbert 空間と $H \geq 0$ が出ます（再構成）。逆は (3) の行きの向きで、Wightman の理論の正値性が Schwinger 関数の反射正値性になります（4-10）。下の行は、孤立した一粒子の質量殻を仮定して漸近状態を作る Haag–Ruelle の散乱理論の下での言明です。

一行にまとめると、確定の格が S 行列まで及ぶように読めてしまいます。「閉じ込め」も行を割る例です。三つの基準は、$V(R) \to \infty$（$V(R)$ は重いクォーク対を距離 R に置いたエネルギーで、Wilson ループの減り方から読む）、面積則 $\sigma > 0$（$\sigma = \lim_{R\to\infty} V(R)/R$ が弦張力）、中心対称性が破れない（群の中心による変換で不変なこと。物理では有限温度の Polyakov ループの期待値が 0）です。物理ではほぼ同じ意味ですが、数学の定理は格子の上の片向きのものです。Chatterjee の中心対称性から閉じ込めへの定理（Chatterjee 2021 の定理 2.2）は、格子 $\mathbb{Z}^d$ の上で結合を固定して「中心対称性が破れない $\Rightarrow V(R) \to \infty$」を示します（中心に非自明に作用する表現の Wilson ループで。18-03 §03）。

寄り道：偽の友

飛ばしてよい小節です。

見た目が似て意味の違う語を、外国語の学習では「偽の友」と呼びます。典型は「ギャップ」です。格子単位の一様なギャップは、物理単位では質量が無限大に向かう側、連続極限の反対側の性質なので、定義の列を未確定にし条件の欄に「偽の友」と書きます（表 2 の 9）。正確には、同じ語が二つの言葉（物理と数学）で違う条件の対象を指し、一方の成立が他方の成立を意味しない（むしろ反対側にある）という関係です。「連続極限」は偽の友とまでは言えませんが、含む条件が違う例です。物理の語が暗に含む「極限がガウス的でない」ことを、確率論のスケーリング極限は含みません（四次元の Ising 型と ϕ^4 ではガウス的：Aizenman–Duminil-Copin 2021、7-08）。この差は表 2 の 7 の条件の欄に入ります。「粒子の質量」とギャップの違いは 16-08・16-05。

07

「同じ」を誰が判定しているか — 五つの判定者

定理：両向きか片向きの定理がある（(2)・(3)・(6)）。**定義**：数学の側が物理の語の意味として対象を定めた。経路積分を可算加法的な確率測度とする定め方がそうです。Jaffe の総説 §4 は、経路積分に 'a true integral, given by a countably-additive Borel measure' としての定義が無かったことを、当時の「問題」として挙げています。この定め方は、別の計算との一致までは含みません。**慣習**：同じ名で呼ぶ習慣。格子で通路ごとに測る最低状態を「グルーボール」と呼ぶこと、格子単位の一様な指数減衰を 'strictly positive mass gap' と呼ぶこと（Shen–Zhu–Zhu）。**予想**：動径と尺度の対応では、物理の側も 'what cutoff on the field theory corresponds to a radial cutoff in the bulk?' は 'left unanswered' と書きます（Heemskerk–Polchinski）。**類比**：形の類似の指摘。「尺度は一つ」と緩和時間の仮定（17-12）。

$(a)=$ 確定 $\Rightarrow$ 判定者に定理か定義が在る，　　判定者が慣習・予想・類比だけ $\Rightarrow$ $(a)(\not{\mp})$

例：表 2 の 5 は「定理＋条件・慣習」。孤立固有値との対応は条件つきの定理（1-10）、最低状態を「粒子」と呼ぶのは慣習です。同居するときは両方を書き、定義の列は強い方で付けます。

08

条件の欄の読み方 — 一つの相関からはギャップの上界しか出ない

条件の欄は定理の仮定の置き場所です。表 2 の 8 を小さな模型で読みます。転送行列は、格子で虚時間を一刻み進める作用素 $T=e^{-H}$ です（刻みを 1 とする。4-10・5-03）。その準位を $0=E_0<E_1<E_2<\cdots$ とし、$E_0=0$ の状態 Ω が真空です。虚時間 t 離れた相関は、準位と、観測量 O の各準位への重なり $w_n\ge 0$ で書けます（準位が離散なら）既知 。

$$C_O(t)=\langle O(t)O(0)\rangle-\langle O\rangle^2=\sum_{n\ge 1} w_n e^{-E_n t},\qquad w_n=\left|\langle n|O|\Omega\rangle\right|^2 \tag{8}$$

ギャップは $m=E_1$。相関の減る速さは $w_n>0$ となる最初の準位で決まります。

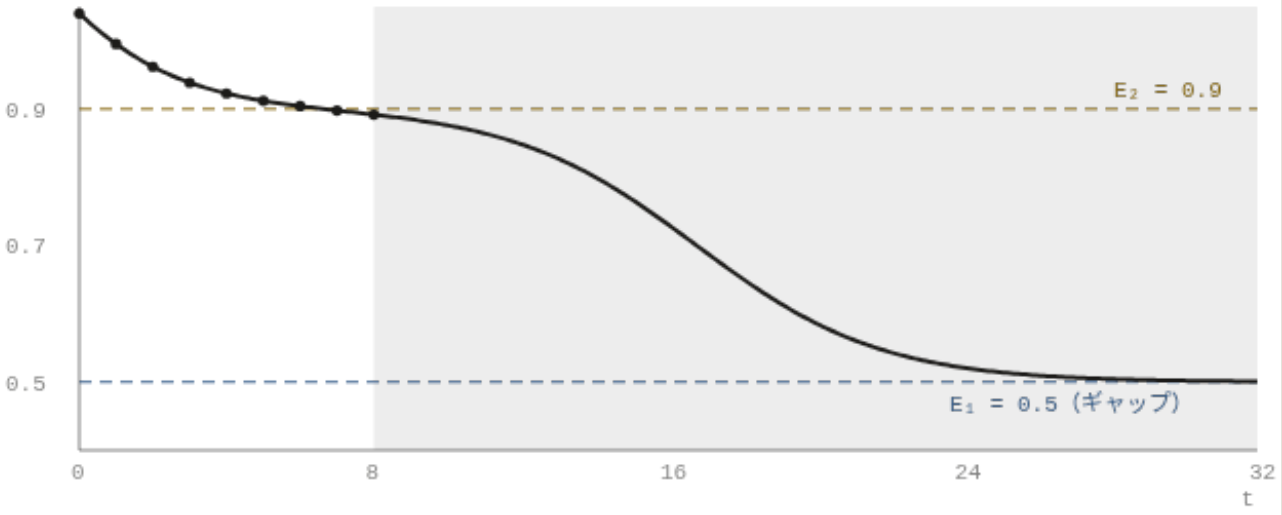
$$\mu_O=\min\{E_n : w_n>0\}\ \ge\ m,\qquad m_{\text{eff}}(t)=\log\frac{C_O(t)}{C_O(t+1)}\ \xrightarrow[t\to\infty]{}\ \mu_O \tag{9}$$

一つの相関から言えるのは上界 $m\le\mu_O$ だけです。上界には一つの観測量で足り、等号には $w_1>0$ が要ります。下界 $m\ge c$ には、真空と直交する部分で稠密な観測量の族のすべてが率 c 以上で減ること（一様性）が要ります。どの観測量が E_1 に重なるかは前もって分からないので、族が要ります。これが 8 の条件の中身です（4-11 §02・18-03。上からは易しく下から

は難しいのは変分原理と同じ形：1-10 の囲み「上界と下界の非対称」)。辞書の測定の列（§02）はこの非対称を各行に付けたものです。

例：$E = (0.5, 0.9, 1.4)$、$w_2 = 1$、$w_3 = 0.5$、$w_1 = 10^{-3}$ なら $m_{\text{eff}}(8) = 0.892$ でギャップの 1.78 倍、5% 以内に入るのは $t = 24$ からです 計算 。$t \le 8$ では $w_1 = 10^{-3}$ と $w_1 = 0$ の差が 1.3% 以下で 計算 、有限の t では重なりが小さいことと無いことを区別できません。

図 2　重なり w_1 と測る範囲 t_max を変えると、有効質量（線）と読める値（点）が変わる。破線は E_1（ギャップ）と E_2、網は未測定の範囲



w₁ = 1.0e-3　m_eff(8) = 0.892（ギャップの 1.78 倍）　5% 以内は t = 24 から

計算 この図の数値はこの端末で計算した（(8)・(9) をその場で計算）。

計算 **表 3**　$m_{\text{eff}}(t)$（上と同じ E・w_2・w_3）。右端は $m_{\text{eff}} \le 1.05 E_1$ となる最初の整数 t。

w_1	$t = 1$	8	16	32	5% 以内
1	0.7013	0.5132	0.5005	0.5000	7
0.1	0.9322	0.6018	0.5054	0.5000	13
0.01	0.9888	0.8108	0.5481	0.5001	18
0.001	0.9953	0.8918	0.7305	0.5009	24
0	0.9960	0.9036	0.9001	0.9000	–

09

実在の列が動いたら何がついてくるか — 辞書から問題を読む

問題が求めるのは、連続の量子論の水準で実在の列を「無い」から「構成済み」に動かすことです。ここでの「無い」は §04 の定義どおり、無いと示されたのではなく、まだ作られていないという意味です。そのとき何がついてくるかは定義の列が示します。

$$(b):\ \text{無い} \to \text{構成済み}\ \ \text{かつ}\ \ (a) = \text{確定} \implies \text{その行はそのまま使える} \qquad (10)$$

表 2 で実在の列が「無い」のは 9 行、「構成済み」の 3・10・12 も連続の量子論より低い水準です。(3) の帰りの条件 (E0′)〜(E4) を満たす四次元の測度が仮に作られれば、確定の 1・2 はそのまま使え、再構成定理が Hilbert 空間とハミルトニアンと真空を与えます。条件つきの 4・5 には上の隙間（問題文 §5 は 'an upper gap, in addition to the mass gap' を拡張に数える）、8 には一様な減衰率、つまりギャップそのものを別に確かめます。未確定の 13・14 と偽の友の 9 は、測度ができても決着しません。この本の読みでは、存在とギャップが問題文で一文に並ぶ理由もここにあります（0-03 §01）。

2026-11-10 に公開された構成は、このうちの一部を連続の量子論の水準で動かしました（Lean で証明されている、と委員会が評価した）。相の各成分ごとの Wightman の理論と、その Hilbert 空間・ハミルトニアン・真空、曲率の多項式に当たる局所作用素がそれです（6-01）。確率測度（表 2 の 1）、一粒子状態（4・5）、一様な減衰（8）は無いままです（6-04）。表 2 と 18-02〜18-04 の実在の列は、公開より前の読みのまま置いています。

この章が言えている範囲

	言えている	言えていない
既知	(2)・(3) の行きと帰り・(6)（添えた前提の下で）・(8)・(9)。ADHM・Lüscher 1977・Schor 1984 の構成	これらが四次元の連続のヤン–ミルズ理論で成り立つこと
この本の読み	二列の格・水準・判定者の定め方、測定の列の定め方、(7)・(10)、表 2 の格	格が唯一であること（根拠は 18-02〜18-04）
計算	三準位の模型の $m_{\mathrm{eff}}(t)$（表 3・図 2）	ヤン–ミルズの実際のスペクトル
全体	—	この本は質量ギャップの存在も連続極限の構成も自分では示していない（公開された連続極限の構成は第二巻）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
問題文・§07 の定義	本文	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”（Clay 数学研究所の公式の問題文。問題の発表は 2000 年）。所収：J. Carlson, A. Jaffe, A. Wiles (eds.), *The Millennium Prize Problems*, CMI／AMS, pp. 129–152（刊行年は未確認）／A. Jaffe, “Constructive Quantum Field Theory”, in *Mathematical Physics 2000*（Imperial College Press, 2000）111–127 の §4 “Quantum Theory as Statistical Physics”（掲載先は Crossref で確認）

もの	種別	出典・道具
(2)・表 2 の 12	書誌のみ	Feynman, RMP 20 (1948) 367／Kac, Trans. AMS 65 (1949) 1／'t Hooft, NPB 33 (1971) 173／Hepp, CMP 2 (1966) 301
表 2 の 12（YM の証明）	要旨	C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, “Renormalization of gauge theories”, Ann. Phys. 98 (1976) 287–321／A. N. Efremov, R. Guida, C. Kopper, “Renormalization of SU(2) Yang–Mills theory with flow equations”, J. Math. Phys. 58 (2017) 093503, arXiv:1704.06799
(3)	要旨・本文	Osterwalder–Schrader, CMP 31 (1973) 83・CMP 42 (1975) 281（要旨。第二論文の要旨は '(necessary and) sufficient' と必要性を括弧に入れる）／Glaser, CMP 37 (1974) 257（要旨：第一論文の誤りを指摘して直し、Minkowski 点の近くでの緩増加性には追加の仮定が要ると示唆）／S. J. Summers, “A Perspective on Constructive Quantum Field Theory”, arXiv:1203.3991 の §3・脚注 15（本文）／A. Jaffe, “Reflection Positivity Then and Now”, arXiv:1802.07880（本文）
(6)	本文・書誌のみ	Osterwalder–Schrader 1973/75（上）／Jaffe の総説（上）§4・§7.1（本文：反射正値性が Hilbert 空間と正のハミルトニアンを与えること、Haag–Ruelle の理論が孤立した一粒子の質量殻を仮定すること）／R. Haag, Phys. Rev. 112 (1958) 669・D. Ruelle, Helv. Phys. Acta 35 (1962)（書誌のみ）
表 2 の 3・4・5	要旨	Lüscher, CMP 54 (1977) 283／Osterwalder–Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440／Schor, NPB 231 (1984) 321
6・7・中心対称性の定義・中心対称性から閉じ込めへの定理（定理 2.2）	本文	Chatterjee, arXiv:1803.01950 §5／arXiv:2006.16229（CMP 385 (2021) 1007）
9・10・11・14・§07	要旨	Shen–Zhu–Zhu, arXiv:2204.12737／ADHM, Phys. Lett. A 65 (1978) 185／Lüscher, CMP 85 (1982) 39／Heemskerk–Polchinski, arXiv:1010.1264
§01・寄り道	要旨	Wu–Yang, PRD 12 (1975) 3845／Aizenman–Duminil-Copin, Ann. Math. 194 (2021) 163
表 2・図 1	この本の読み	一次資料は 18-02〜18-04。配置は `fig1_layout.py`
表 3・図 2	計算	この端末の Python（`meff.py`）

次に読む章：18-02 理論そのものの辞書。

理論そのものの辞書 — 確定の対は、一つの測度の手前に並ぶ

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 理論が載る空間・測度・状態の語を十九の対に並べた、二列の格付けとその根拠。
確定の対の多くが「条件を満たす測度が在れば」という一つの前提の内側にあること。
局所対称性が破れないこと（Elitzur の定理）を、外場を外す順序で見る計算。

前提となる章 — 4-02・4-10。格付けの二列は 18-01。ほかに 4-11（粒子・スペクトル）・5-03（転送行列）・3-04（軌道空間・Singer の定理）・2-08（外場を外す順序）・5-01（Haar 測度）の道具を引きます。前提の章に無い語は初出で定義します。

先に言うこと — 対を並べて格付けするだけで、四次元のヤン–ミルズ理論の測度も Hilbert 空間も作りません。実在の列の「無い」は 18-01 §04 のとおり「まだ作られていない」の意味で、存在しないことが示されたのではありません。例外は「ゲージ固定」の項で、大域的な連続なゲージ固定が（四次元の球面の上で）無いことは Singer の定理です（表 0 では「否定」）。

この章の順序

1. 見取り図 — 十九の対と一つの前提（表 0）
2. 器 — 経路積分・測度・状態の空間
3. 実時間と虚時間 — 相関の三つの顔
4. 中身 — 真空・ハミルトニアン・粒子
5. 散乱と正値性 — 二つの「ユニタリ性」
6. 近似 — 時空・正則化・繰り込み
7. 場は点の値を持たない — 作用素値超関数
8. ゲージ — 切り口と物理的状態

9. 局所対称性は破れない — Elitzur の定理（「局所対称性は破れない」の項）
    - 寄り道：$\beta = \infty$ のゲージ理論はイジング模型

01

見取り図 — 十九の対と一つの前提

格付けは 18-01 の二列です。(a) は「両方が在るとしたら同じか」、(b) は数学の対象が四次元のヤン–ミルズ理論で在るか（括弧に水準）です。判定者は「同じ」を支えているもの（定理・定義・慣習など。18-01 §07）、章は詳しく扱う章です。

表 0　理論そのものの辞書

#	物理の語	数学の語	(a) 定義	(b) 四次元 YM	(c) 有限の測定	判定者	章
1	経路積分（量子力学）	Feynman–Kac 公式	確定	対象外*	—	定理	2-07
2	汎関数積分	ユークリッドの確率測度	確定	無い（格子の水準では構成済み）	—	定義	4-02
3	状態の空間	再構成の Hilbert 空間	条件つき	無い（格子の水準では構成済み）	—	定理＋条件	4-10
4	ウィック回転	OS の再構成定理	確定（⇒）	無い	—	定理	4-02
5	Green 関数	Wightman・Schwinger 関数	確定（向き）	無い	—	定理	4-10
6	Källén–Lehmann 表示	スペクトル測度	確定	無い（格子の水準では構成済み）	上界まで	定理	4-11
7	真空と一意性	Ω・クラスター性	確定	無い（格子の水準では構成済み）	届かない	定理	4-11
8	ハミルトニアン	転送行列の対数	条件つき	構成済み（格子）	—	定理＋条件	5-03
9	一粒子状態	質量作用素の孤立固有値	条件つき	無い	上界まで	定理＋条件	4-11
10	S 行列	Haag–Ruelle 散乱理論	条件つき	無い	—	定理＋条件	4-09
11	正ノルム性	反射正値性	確定	構成済み（格子）	—	定理	4-10

#	物理の語	数学の語	(a) 定義	(b) 四次元 YM	(c) 有限の測定	判定者	章
12	S 行列のユニタリ性	正ノルム性＋漸近完全性	条件つき	無い	—	定理＋条件	18-01
13	時空と格子	$a\mathbb{Z}^4 \to \mathbb{R}^4$	条件つき	無い	届かない	定義＋条件	4-02
14	正則化	格子間隔 a の測度の族	条件つき	構成済み（格子）	—	定義＋条件	5-01
15	繰り込み可能性	BPHZ・Epstein–Glaser	条件つき	構成済み（形式的冪級数）	—	定理	4-05
16	場 $\phi(x)$	作用素値超関数	条件つき	無い	—	定義＋条件	1-11
17	ゲージ固定	軌道空間への切断	確定	無い（Singer の定理で否定）	—	定義	3-04
18	物理的状態	ゲージ不変量からの再構成	未確定	構成済み（格子）	—	慣習（格子では定理）	4-01
19	局所対称性は破れない	Elitzur の定理	確定	構成済み（格子）	—	定理	17-02

注：表 0 の (b) の列は、公開された構成（2026-11-10）より前の読みです。§01 の末のとおり、行 3・4・5・8 は公開された構成の水準で付け直す余地があります。

表 0 の語の注。(c) は 18-01 §02 の測定の列（有限の測定で届く向き）で、量を名指す行にだけ付けます。「Källén–Lehmann 表示」の項・「一粒子状態」の項は一つの相関から最低の点の上界が出る行（18-01 §08）、「真空と一意性」の項・「時空と格子」の項は極限の言明です。(b) の「無い」は連続の水準で未構成、「無い（格子の水準では構成済み）」は格子の水準でだけ作られている行です。「ゲージ固定」の項の「否定」だけは意味が逆で、大域的な切断が存在しないことの定理です。* 「経路積分（量子力学）」の項の「対象外」は、有限自由度の量子力学の対なので四次元の欄が立たないという意味です（18-01 §04）。

確定の対の多くは一つの前提の内側にあります。$\mathbb{R}^4$ の上に Osterwalder–Schrader（OS）の条件を満たす測度 μ が在れば、再構成定理が残りを与えます（4-10 §05） 既知 。

$$\mu \text{ が (E0′)〜(E4) を満たす} \implies (\mathcal{H},\ H \geq 0,\ \Omega), \quad \{S_n\} \to \{W_n\}, \quad d\rho_O \geq 0 \qquad (1)$$

左は OS の条件（増え方・ユークリッド共変性・反射正値性・対称性・クラスター性。4-10 §03）、右は Hilbert 空間・ハミルトニアン・真空、Schwinger 関数 S_n から Wightman 関数 W_n への移行、スペクトル測度の正値です。2026 年の公開より前は、四次元のヤン–ミルズ理論では左が無く、連続の水準では実在の列がほぼ「無い」に揃っていました（表 0 はその読みです）。例外は、前提があっても足りない行（「一粒子状態」の項・「S 行列」の項・「S 行列のユニタリ性」の項）と、前提の外で決まる行（「ゲージ固定」の項の Singer の定理、「局所対

称性は破れない」の項の Elitzur の定理）です。例：四次元の自由場では (1) の左が在り、ゲージ以外の全行の対象が揃います。

2026-11-10 に公開された構成は、測度ではなく相関（Schwinger 関数）の側から、相の各成分ごとに OS の公理の変種を示し、右の Hilbert 空間・ハミルトニアン・真空を再構成した、と委員会は評価しています（6-01・12-08）。「状態の空間」「ウィック回転」「Green 関数」「ハミルトニアン」の項の実在の列は、その水準で付け直す余地があります（18-01 §09）。測度・一粒子状態・S 行列は無いままです（6-04）。

02

器 — 経路積分・測度・状態の空間

「器」は比喩です。正確には、理論が載る空間（場の配位の全体）、その上の測度、そこから作る Hilbert 空間のことです。

経路積分（量子力学） ⟷ Feynman–Kac 公式

物理の語は「粒子のとりうる道すべてにわたる重みつきの和」、数学の語は Brown 運動の期待値です。同じと言えるのは、虚時間に移し、ポテンシャルが下に有界などの条件を置いたときです。

量子力学の e^{-tH} をこの形で書くのが Feynman–Kac 公式です（Kac 1949。18-01 の式 (2)・2-07 §05） 既知 。Feynman（1948）の和は実時間の重み $e^{iS/\hbar}$ で、それを虚時間に移したのがこの公式です。実時間の重みは測度になりません。

汎関数積分 ⟷ ユークリッドの確率測度

物理の語は場の配位すべてにわたる重み e^{-S} の和、数学の語は配位の空間の上の確率測度です。同じと言えるのは、数学の側が $\int \mathcal{D}A\, e^{-S}$ を可算加法的な確率測度として定義したからです（判定者は定義。Jaffe の総説 §4）。

$$\frac{1}{Z}\int \mathcal{D}\phi\; e^{-S(\phi)} F(\phi) \;\rightsquigarrow\; \int F\, d\mu, \qquad \mu:\ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4) \text{ などの上の確率測度} \tag{2}$$

例：自由場は共分散 $(-\Delta + m^2)^{-1}$（Δ はラプラシアンで、質量ギャップの Δ とは別）のガウス測度です（4-10 §02）。二次元のヤン–ミルズ理論でも構成済みです（Driver 1989、7-02）。格子では 4-02 の式 (9) が本物の測度です。四次元のヤン–ミルズの測度は未構成で（2026-11-10 に公開された構成も測度は作らない。6-04）、それが載る空間（接続をゲージで割った空間の完備化）もまだ決まっていません（3-04）。

状態の空間 ⟷ 再構成の Hilbert 空間

物理の語は Fock 空間（粒子の数ごとに状態を並べた空間、2-06）、数学の語は測度から作る Hilbert 空間 (3) です。同じと言えるのは、自由場のときと、相互作用があれば漸近完全性（§05）が成り立つときです。

$\mathcal{E}_+$ を正の時刻の場だけで決まる関数の全体、Θ を時間の反転とします（4-10 §05）。

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{E}_+ / \mathcal{N}}, \qquad \mathcal{N} = \{ F : \ \mathbb{E}[\overline{\Theta F}\, F] = 0 \} \tag{3}$$

$\mathcal{N}$ はノルムが 0 になる関数の全体で、割ってから完備化したものが $\mathcal{H}$ です。(i) 自由場では Fock 空間と一致します（4-10 §07）。(ii) 相互作用があると、時刻 0 の正準交換関係の表現が Fock 表現と非同値になります（ϕ^4_3、Jaffe §6）。物理の Fock 空間は漸近粒子の空間なので、一致には漸近完全性が要ります。

03

実時間と虚時間 — 相関の三つの顔

「三つの顔」は比喩です。正確には、同じ相関を一つの解析関数の違う場所（実時間・虚時間・時間順序つき）で読んだ値のことです（「Green 関数」の項）。

ウィック回転 ⟷ OS の再構成定理

物理の語は $t = -i\tau$ と置いて積分路を回す計算の手続き、数学の語は Schwinger 関数から Wightman の理論を作る定理です。同じと言えるのは、条件 (E0′)〜(E4) の下で、虚時間から実時間へ向かう向きです。

ウィック回転は Wick（1954）の手続きで（4-02 §02）、数学の対は向きのある再構成定理です 既知 。

$$\{S_n\} \text{ が (E0′)〜(E4) を満たす} \implies \text{Wightman の理論}, \qquad W_n\big(\dots, (-i\tau_j, x_j), \dots\big) = S_n\big(\dots\big) \tag{4}$$

時刻の順序の条件が要るのは、S_n は引数を入れ替えても変わらないのに、W_n は演算子の並ぶ順で変わるからです（「Green 関数」の項の例）。逆向きには注意が要ります。Wightman の理論から得た Schwinger 関数が (E0′) まで満たすとは限りません。OS の最初の論文（1973）は同値を主張しましたが、証明に誤りがあり、Glaser（1974）が直しました。二本目（1975）は (E0′) を足した十分条件の形で述べています（要旨は '(necessary and) sufficient' と括弧つき）。

Green 関数 ⟷ Wightman 関数・Schwinger 関数

物理の語「Green 関数」は時間順序積 G_T・Wightman 関数 W・Schwinger 関数 S のどれをも指し、数学はこの三つを別の関数として定義します。同じと言えるのは、三つが一つの解析関数の値だという定理の意味においてです。例：角振動数 ω の振動子（$\hbar = m = 1$）で

$$F(z) = \frac{e^{-\omega z}}{2\omega}\ (\mathrm{Re}\, z \geq 0): \qquad S(\tau) = F(|\tau|), \qquad W(t) = F(it), \qquad G_T(t) = F(i|t|) \tag{5}$$

W は虚軸での境界値、S は実軸への制限を $|\tau|$ で折り返したもの、G_T は符号で貼り合わせたものです（Wightman 1956・Symanzik 1966）。$\tau > 0$ では $W(-i\tau) = F(\tau) = S(\tau)$ で、これが (4) の二点の場合です。$\tau < 0$ では W の式をそのまま延ばすと $e^{\omega|\tau|}$ で増え、$S(\tau)$ と食い違います。$W \to S$ は正エネルギーだけから出ますが、$S \to W$ には (E0′) が要ります。

Källén–Lehmann 表示 ⟷ スペクトル測度

物理の語は二点の相関をエネルギー（質量）の重ね合わせで書く式、数学の語はハミルトニアンのスペクトル測度です。同じと言えるのは、再構成で H が在るとき（(1) の前提の下）です。Källén（1952）・Lehmann（1954）の表示は、4-11 の式 (6) の形で

$$\langle O\Omega,\ e^{-\tau H} O\Omega\rangle = \int_{[0,\infty)} e^{-E\tau}\, d\rho_O(E), \qquad d\rho_O(E) = d\langle O\Omega,\ P_H(E)\, O\Omega\rangle \geq 0 \tag{6}$$

と書けます。$P_H(E)$ は H のエネルギー E 以下の部分への射影です（1-10 §05 のスペクトル定理）。重みの正は反射正値性から来ます（4-10 の表 2）。例：(5) は ρ が $E = \omega$ の一点に重みを持つ場合で、格子では $\rho_O = \sum_n |\langle n|O|\Omega\rangle|^2 \delta_{E_n}$（18-01 の式 (8)）。ゲージを固定したグルーオンの伝播関数の正値性の破れは 17-02 で扱います。

04

中身 — 真空・ハミルトニアン・粒子

「中身」も比喩です。正確には、§02 の Hilbert 空間の上で決まる特定のベクトル（真空）と作用素（ハミルトニアン・質量作用素）のことです。

真空と一意性 ⟷ Ω とクラスター性

物理の語は「何も無い状態」、数学の語は再構成で定数 1 の類として得る $\Omega = [1]$ です。同じと言えるのは、物理の真空を「最低エネルギーの状態」と読む場合です（(1) の前提の下で定理）。

一意性は H の固有値 0 が単純であること（Jaffe §2）で、ユークリッドの側ではクラスター性と対です 既知 。

$$\Omega \text{ が一意} \iff \lim_{|a|\to\infty} S_{n+m}\big(x_1,\dots,x_n,\, y_1+a,\dots,y_m+a\big) = S_n(x)\,S_m(y), \qquad a=(0,a) \tag{7}$$

無限体積の極限の非一意性・基底状態の縮退・相転移は同じ現象です（Jaffe §7.2）。例：二次元イジングの低温側では、最低の二準位の差が幅とともに閉じます（2-09 §08）。相互作用の無い真空から相互作用をゆっくり入れて真空を作る物理の手続き（Gell-Mann–Low の方法とされる）との同一視は、Haag の定理（Haag 1955 とされる）が相互作用表示（自由な場の空間の上で相互作用だけで時間発展させる書き方）の存在を一般には否定するので、数学的には正当化されていません。

ハミルトニアン ⟷ 転送行列の対数

物理の語は時間の進みを生む作用素（エネルギー）、数学の語は格子で虚時間を一刻み進める転送行列 T の対数です。同じと言えるのは格子の水準で、連続の H との一致は連続極限が条件です。

$$H_a = -\frac{1}{a}\log T, \qquad T = T^{*} > 0 \tag{8}$$

a は時間方向の格子間隔です。正の自己共役な T は Lüscher（1977）が作り（5-03 §05）、Kogut–Susskind（1975）の H へは時間の刻みを 0 にしてつながります（Creutz 1977、5-03 §07） 既知 。確率量子化の生成作用素 L とは別物です（18-03 §05）。

一粒子状態 ⟷ 質量作用素の孤立固有値

物理の語は Poincaré 群の既約表現として分類される粒子（Wigner 1939）、数学の語は質量作用素 M の孤立固有値です。同じと言えるのは、再構成された理論で、その固有値がスペクトルの中で孤立しているときです（4-11 §05）。

$$M = \sqrt{H^2 - P^2}, \qquad m \text{ は } M \text{ の固有値で } (m-\delta, m+\delta)\cap \sigma\big(M|_{\Omega^{\perp}}\big) = \{m\}\ \ (\delta>0) \tag{9}$$

P は運動量、$\sigma(\cdot)$ はスペクトル、$\Omega^{\perp}$ は真空に直交する部分です。Jaffe は散乱理論がこれを仮定とし 'It entails both a lower gap and an upper gap' と書きます（§7.1。問題文 §5 も上の隙間を拡張に数える） 既知 。弱結合の $P(\phi)_2$ で示され（Glimm–Jaffe–Spencer 1974）、格子の強結合にも一粒子状態があります（Schor 1984）。例：自由場では m の上の連続スペクトルは $2m$ から始まります。グルーボールの行は 18-03 §04 です。

> 05

散乱と正値性 — 二つの「ユニタリ性」

物理の「ユニタリ性」は二つの意味で使われるので、「正ノルム性」の項（負のノルムの状態が無いこと）と「S 行列のユニタリ性」の項（散乱で確率が保存すること）に割ります（18-01 §06）。先に散乱の道具（「S 行列」の項）を置きます。

S 行列 ⟷ Haag–Ruelle の散乱理論

物理の語は遠い過去の粒子の組から遠い未来の粒子の組への振幅、数学の語は二つの等長写像から作る作用素です。同じと言えるのは、孤立した一粒子の質量（「一粒子状態」の項）が在るときです。

質量双曲面は運動量空間の面 $p^2 = m^2$（$p^0 = \sqrt{p^2 + m^2}$ の側）で、質量 m の一粒子状態はこの上に載ります。等長写像は内積を保つ写像、Ran は像（写像の値の全体）です。$\mathcal{F}$ は漸近粒子の Fock 空間で、遠い過去（または未来）に自由に飛ぶ粒子の状態を、粒子の数ごとに並べた空間です。Haag（1958）と Ruelle（1962 とされる）の散乱理論は、孤立した質量双曲面から等長写像 $W^{\mathrm{in}}, W^{\mathrm{out}} : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ を作ります。

$$S = (W^{\mathrm{out}})^* W^{\mathrm{in}}, \qquad \operatorname{Ran} W^{\mathrm{in}} = \operatorname{Ran} W^{\mathrm{out}} \implies S^*S = SS^* = 1 \tag{10}$$

(10) の右向きは初等的です。等長な W では $W^*W = 1$、WW^* は像への射影で、像が同じなら $W^{\mathrm{out}}(W^{\mathrm{out}})^*$ は W^{in} の値を変えないので、$S^*S = (W^{\mathrm{in}})^* W^{\mathrm{out}} (W^{\mathrm{out}})^* W^{\mathrm{in}} = (W^{\mathrm{in}})^* W^{\mathrm{in}} = 1$ で、$SS^* = 1$ も同じです [紙]。例：自由場では $W^{\mathrm{in}} = W^{\mathrm{out}}$、$S = 1$ です。漸近完全性は、二つの像が $\mathcal{H}$ 全体だという主張です。通常の意味の漸近完全性を一般に導く定理は、探した範囲では見当たりません。Dybalski–Gérard（2014）は上下の質量ギャップの下で「一般化した」形を示しました [既知]。個々の模型には部分的な結果があります（弱結合の $P(\phi)_2$ の、エネルギーが約 $4m$ 未満の偶の状態での S 行列のユニタリ性：Spencer–Zirilli 1976）。

正ノルム性 ⟷ 反射正値性

物理の語は負のノルムの状態が無いこと（Wightman の正値性）、数学の語は Schwinger 関数の反射正値性です。同じと言えるのは OS と Wightman の対応の中で、これは定理です。

反射正値性は Hilbert 空間と $H \geq 0$ を与え、極限でも保たれるので（Jaffe §4）、極限が在れば格子から持ち越せます。Wilson の格子で成り立ちます（Osterwalder–Seiler 1978・Lüscher 1977） [既知]。例：Pauli–Villars 型の負の重みはこれを壊します（4-10 §08）。

S 行列のユニタリ性 ⟷ 正ノルム性＋漸近完全性

物理の語は散乱で確率が保存すること（$S^{*}S=1$）、数学の側は「正ノルム性」の項に (10) の像の一致を足したものです。同じと言えるのは、漸近完全性が成り立つときです。

ゲージ理論では、Kugo–Ojima（1979）の要旨が、BRS 電荷（§08 の Q_B）の代数の表現にもとづき「物理的 S 行列のユニタリ性」が一般に（'quite generally'）示されると書きます。これは代数の表現と漸近場を仮定した一般論で、舞台は不定計量（負のノルムを許す内積）の空間です。その仮定が確かめられているのは摂動論の範囲です。

06

近似 — 時空・正則化・繰り込み

時空と格子 ⟷ $a\mathbb{Z}^4$ の $a\to 0$ 極限

物理の語は Minkowski 符号の四次元の時空（ユークリッド化すると $\mathbb{R}^4$）、数学の側は間隔 a の格子 $a\mathbb{Z}^4$ の上の測度の $a\to 0$ の極限です。同じと言えるのは、極限が在り、回転の対称性 $O(4)$ が戻るときです。

ユークリッド化した時空の回転不変性はユークリッド共変性（Osterwalder–Schrader の公理 E1）の $O(4)$ 不変性です（符号は既存の記事 時空）。格子に残るのは 90° の回転と鏡映で、Wilson（1974）の要旨は強結合の極限に 'no Lorentz (or Euclidean) invariance' と書きます 既知 。

$$\text{超立方体の対称性（位数 } 2^4\cdot 4!=384\text{）}\ \subset O(4),\qquad \mu_a \xrightarrow[a\to 0]{?} \mu\ \ (O(4)\text{ で不変}) \tag{11}$$

例：格子の自由場では、軸と対角の相関の差が a^2 で消えます（4-02 の表 2）。純粋ゲージ理論で格子の連続極限が示されているのは、二次元の非可換群と三次元・四次元の U(1) です（Driver 1989・Gross 1983・Driver 1987 など）。三次元の要旨は、Villain の作用で自由な電磁場に収束すると書きます。自由な電磁場は回転で不変なので、回転の対称性も戻っています。

正則化 ⟷ 格子間隔 a の測度の族

物理の語は無限大を一時的に止める仕掛け全般、数学の側で測度の族として扱えるのは主に格子です。同じと言えるのは、仕掛けを外した極限が仕掛けの選び方に依らないとき（普遍性）です。

問題文 §6.5 は、次元正則化や Pauli–Villars などで失った反射正値性を回復する方法は少ないと書きます。Reisz（1989）が示すのは、格子の連続極限が摂動の各次数で有限になること

です。

$$\lim_{a\to 0}\mu_a^{\text{Wilson}} \overset{?}{=} \lim_{a\to 0}\mu_a^{\text{Villain}} \overset{?}{=} \cdots \tag{12}$$

非摂動の (12) は二次元で示されています。Chevyrev–Shen（2023, arXiv:2302.12160）は二次元のトーラスの上で、連結なコンパクト群について、Wilson・Villain・Manton の作用の格子ゲージ理論が同じ極限を与えることを示しました。二次元の格子近似の収束は Driver（1989）にもあります。

繰り込み可能性 ⟷ BPHZ・Epstein–Glaser

物理の語は、有限個の定数を調整すれば摂動の各次数で無限大が消えること、数学の語は引き算の規則（BPHZ）と因果律からの帰納的な構成（Epstein–Glaser）の有限性の定理です。同じと言えるのは形式的冪級数の水準です（4-05）。

物理は Dyson（1949）、ヤン–ミルズは 't Hooft（1971）・Becchi–Rouet–Stora（1976）。数学は Bogoliubov–Parasiuk（1957）・Hepp（1966）・Zimmermann（1969）と Epstein–Glaser（1973）です。

$$S_n^{\text{ren}}(x;g) = \sum_{k\ge 0} c_{n,k}(x)\, g^k \in \mathbb{C}[[g]] \qquad (\text{各 } c_{n,k} \text{ は有限}) \tag{13}$$

Epstein–Glaser の要旨は、帰納的な構成が 'at each order, finite terms' を与え BPHZ と同値だと書きます 既知 。和の収束は含みません（級数は発散すると考えられています、4-12）。

07
場は点の値を持たない — 作用素値超関数

場 $\phi(x)$ ⟷ 作用素値超関数

物理の語は各点 x の演算子 $\phi(x)$、数学の語は試験関数 f でならした $\phi(f)$ だけを演算子とする作用素値超関数です。同じと言えるのは、$\phi(x)$ を「ならした値の、ならす幅を 0 にする手前の記号」と読む場合です。

超関数は 1-11 §04 です（場の読みは Jaffe §3） 既知 。質量 m の自由場（$\omega_p=\sqrt{p^2+m^2}$）で

$$\phi(f)=\int \phi(x) f(x)\, d^4x, \qquad \big\|\phi(f)\Omega\big\|^2 = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{|\hat f(\omega_p,p)|^2}{2\omega_p} < \infty \tag{14}$$

です。例：f を積分 1、幅 ε の山 $f_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-4}g(x/\varepsilon)$ にすると、$\hat f_\varepsilon(p)=\hat g(\varepsilon p)$ なので、四次元では右辺が ε^{-2} で発散します（1-09）。点の値 $\phi(x)$ は f を δ に近づけた極限なので、演算子としては無いのです。ヤン–ミルズの点の場は $\mathrm{Tr}\,F_{ij}F_{kl}(x)$ で、問題文 §4 はその演算子を要求します。問題文の局所場の脚注（Jaffe–Witten の脚注 1）は、古典の微分多項式と演算子の自然な 1 対 1 対応は 'does not exist' とし、次元 $\le d$ の空間どうしの対応は期待します（0-03 §08）。ここで次元は、長さの尺度を変えたときの冪です（F は 2、$\mathrm{Tr}\,F^2$ は 4。1-11 §06）。Wilson ループは曲線の上の量で、点の場の公理の外です（4-10 §09）。

08

ゲージ — 切り口と物理的状態

ゲージ固定 ⟷ 軌道空間への切断

物理の語は各ゲージ軌道から条件 $F(A)=0$ で代表を一つ選ぶこと、数学の語は軌道空間 $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ への射影の切断（各軌道に一点を連続に対応させる写像）で、定義として同じです。ただし四次元の球面の上では、大域的な切断が無いことが定理です。

切り口の幾何は 3-04 §05 です。Faddeev–Popov（1967）の規則の元は

$$1=\Delta_{\mathrm{FP}}(A)\int_{\mathcal{G}} dg\;\delta\big(F(A^g)\big),\qquad \Delta_{\mathrm{FP}}(A)=\Big|\det\frac{\delta F(A^g)}{\delta g}\Big|_{g=1} \tag{15}$$

です。(15) が成り立つのは、条件の面 $F=0$ が各軌道とちょうど一回交わるときです。(15) は行列式を $g=1$ の一点で評価して積分の外に出しているので、何回も交わると右辺は交点ごとの行列式の比の和になり、1 にも交点の数にもなりません。行列式を積分の中に入れると、交点の数 $N(A)$ になります。

$$N(A)=\int_{\mathcal{G}} dg\;\delta\big(F(A^g)\big)\,\Big|\det\frac{\delta F(A^g)}{\delta g}\Big| \tag{15a}$$

実際の Faddeev–Popov の規則は絶対値の付かない det を使うので、交点を符号つきで数えます（4-08 §05 の寄り道）。Gribov（1978）は非可換な理論で「ちょうど一回」が崩れることを指摘し、Singer（1978）の要旨は S^4 上で 'no continuous choice of exactly one connection on each orbit can be made' と書きます 既知 。格子は Haar 測度（群の上の、掛け算で変わらない一様な確率測度）で積分するのでゲージ固定が要らず、この行を避けます（5-01・4-08）。

物理的状態 ⟷ ゲージ不変量からの再構成

物理の語は Gauss 拘束を満たす状態、または BRST のコホモロジー、数学の語はゲージ不変な量だけで (3) を行って作る空間です。同じと言えるのは格子の水準までで、連続では未確定です。

Gauss 拘束は Gauss の法則 $\nabla \cdot E = 0$ の非可換版で、状態の側では「時刻を固定したゲージ変換で状態が変わらない」という条件です（Kogut–Susskind 1975、4-01）。格子では、時刻を固定したゲージ変換 g について $\psi(U^g) = \psi(U)$ です。BRST の Q_B は $Q_B^2 = 0$ を満たす演算子（BRST 電荷）で、$\mathrm{Ker}\, Q_B / \mathrm{Im}\, Q_B$ は「Q_B で消える状態を、Q_B の像の分だけ同一視したもの」です。不定計量は負のノルムを許す内積です。

$$\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}^{\mathrm{BRST}} = \mathrm{Ker}\, Q_B / \mathrm{Im}\, Q_B \ \text{(不定計量)}, \qquad \mathcal{H}_{\mathrm{inv}}^{\mathrm{OS}} = \overline{\mathcal{E}_+^{\mathrm{inv}} / \mathcal{N}} \ \text{(正定値)} \tag{16}$$

格子では、ゲージ不変な状態の間の遷移確率が負でなく（Lüscher 1977）、ゲージ固定はゲージ一重項（ゲージ変換で変わらない演算子）の Green 関数を変えません（Creutz 1977） 既知 。連続で (16) の左右が同じとは示されておらず、非摂動の BRST は Gribov のコピーのため定義しにくいままです。

09

局所対称性は破れない — Elitzur の定理

局所対称性は破れない ⟷ Elitzur の定理

物理の語は「ゲージ対称性（局所対称性）は自発的に破れない」という主張、数学の語はそれを外場の極限で述べた定理です。同じと言えるのは、「外場を入れ、体積を無限にしてから外す」順序で比べるときです。

Elitzur（1975）の要旨は、ゲージ固定の無い対称なゲージ理論で局所対称性が自発的に破れることは不可能だと 'It is argued that' の形で論じ、格子の上の可換なゲージ場の簡単な系で示すと書きます 既知 。数学的な後続には、可換な Higgs 模型の格子で、外場を外すと磁化が 0 になることの証明があります（De Angelis–de Falco–Guerra 1978） 既知 。外場が 0 なら、Haar 平均で期待値は 0 です（17-02 の式 (9)）。自発的な破れは外場を外す順序の問題です（2-08）。

外場を外す順序で比べる

Elitzur の論法を、d 次元の $\mathbb{Z}_2$ 格子ゲージ理論（リンク変数 $U_\ell = \pm 1$、U_p はプラケットを囲む四本の積）の重み $\exp(\beta \sum_p U_p + h \sum_\ell U_\ell)$ で書き下します。一点 x のゲージ変換は x に触れる $2d$ 本のリンクを反転し、$\sum_p U_p$ を変えません。そこで x に触れる ℓ について

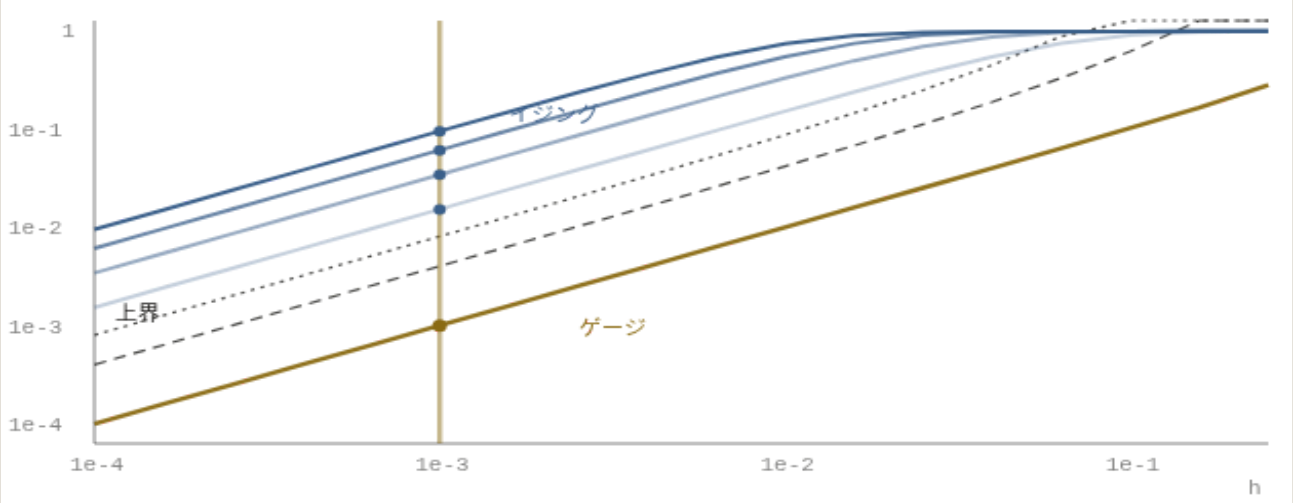
$$\langle U_\ell\rangle_h = -\big\langle U_\ell\, e^{-2hQ_x}\big\rangle_h, \quad Q_x=\sum_{\ell'\ni x} U_{\ell'} \quad\Longrightarrow\quad |\langle U_\ell\rangle_h| = \tfrac12\big|\langle U_\ell(1-e^{-2hQ_x})\rangle_h\big| \le \tfrac12\big(e^{4dh}-1\big) \tag{17}$$

です[紙]。右辺は体積にも β にも依りません。イジング模型（大域的な $\mathbb{Z}_2$）では全スピンの反転が要り、同じ論法の上界は $\frac12(e^{2h|\Lambda|}-1)$ で、体積とともに意味を失います。違いは、一回の対称変換が触れる変数が有限個か全部かだけです。$h=0$ での傾きは

$$\left.\frac{d\langle U_\ell\rangle_h}{dh}\right|_0 = \sum_{\ell'}\langle U_\ell U_{\ell'}\rangle_0 = 1, \qquad \left.\frac{d\langle \sigma_0\rangle_h}{dh}\right|_0 = \sum_{y}\langle \sigma_0\sigma_y\rangle_0 \approx M_0^2\,|\Lambda| \tag{18}$$

です。左では $\ell'=\ell$ の項が 1 です。$\ell'\neq\ell$ の項が 0 なのは、ℓ の端点のうち ℓ' に触れない方でゲージ変換すると、二つのうち U_ℓ だけが符号を変え、$U_{\ell'}$ は変わらないからです（一辺が 3 以上の箱なら、そういう端点が必ずあります）。右は低温側で、遠いスピンどうしも相関 M_0^2 を保つので体積に比例します。

図 1　外場 h（対数目盛）を選ぶと、二次元の L×L の周期的な箱の ⟨σ⟩（イジング、青、L = 4〜10 の順に濃く）と ⟨U⟩（$\mathbb{Z}_2$ ゲージ、黄土）が下の欄に出る。「動かす」で h を 0 へ下げる（外場を外す向き）。破線・点線は (17) の上界（d = 2・4）



h = 1.0e-3　⟨σ⟩：L=4 0.0152・L=6 0.0342・L=8 0.0607・L=10 0.0946　⟨U⟩ 0.00100　上界 0.00402

[計算] この図の数値はこの端末で計算した（転送行列の対角化による正確な値）。

[計算] 表 1　二次元の $L\times L$ の周期的な箱。イジング $\beta=0.6$（低温側）、ゲージ $\beta=2$

h	$\langle\sigma\rangle$ $L=4$	**6**	**8**	**10**	$\langle U\rangle$ $L=4$**〜10**	**(17)** $d=2$
10^{-4}	0.0015	0.0034	0.0061	0.0095	0.000100	0.00040
10^{-3}	0.0152	0.0342	0.0607	0.0946	0.001000	0.00402
10^{-2}	0.1512	0.3288	0.5396	0.7314	0.010002	0.04164
10^{-1}	0.8979	0.9792	0.9810	0.9810	0.1017〜0.1016	0.61277

イジングの列は L とともに持ち上がり、$h=10^{-4}$ での $\langle\sigma\rangle/(hL^2)$ は 0.9529・0.9505・0.9494・0.9489 と、自発磁化として引かれる式 $M_0=(1-\sinh^{-4}2\beta)^{1/8}$（Yang 1952 とされる）の二乗 0.9479 に近づきます[計算]。ゲージの列は $h\le10^{-2}$ で $L=4$〜10 が小数 6 位まで

一致し、傾きは (18) の 1 です。物理の「ゲージ対称性の破れ」はゲージ固定の後の大域的な対称性の破れなどとして読み直すものとされ 物理 、字面のまま引くと偽の友です（18-01）。

寄り道：β = ∞ のゲージ理論はイジング模型

飛ばしてよい小節です。

$\beta \to \infty$ では全プラケットが $U_p = +1$ に揃います（平坦な場）。単連結な領域では $U_{xy} = g_x g_y$（$g_x = \pm 1$）と書けるので、外場の項は

$$h \sum_{\langle xy \rangle} U_{xy} = h \sum_{\langle xy \rangle} g_x g_y \tag{19}$$

となり、結合 $K = h$ のイジング模型です。リンクの期待値はその近接相関（小さい h では約 $\tanh h$）で、磁化にはなりません。表 1 の周期的な箱（トーラス）は単連結ではありません。箱を一周するリンクの積（ホロノミー、1-07）には横・縦それぞれ ± 1 の四つの類があり、$\beta \to \infty$ の極限は、周期・反周期の境界条件のイジング模型四つの和になります。計算した $h = 0.1$・0.3（イジングの高温側）では、周期的なイジングだけとの差が L とともに指数的に小さくなります。

計算 表 2　$L \times L$ の周期的な箱での $\langle U \rangle$ とイジング（$K = h$）の近接相関。「差」は周期的なイジングだけと四つの類の和の差

h	ゲージ $\beta = 4$・8	四つの類の和	周期的なイジング	差 $L = 4$	6	8	10
0.1	0.101689	0.101689	0.101689	1.2e−3	1.4e−5	1.8e−7	2.3e−9
0.3	0.352256・0.352257	0.352257	0.356234	6.9e−2	1.7e−2	4.0e−3	9.8e−4

最初の三列は $L = 8$。$h = 0.1$ では小数 6 位まで一致し、$h = 0.3$ ではゲージ 0.35226 と周期的なイジング 0.35623 に差が見え、四つの類の和で一致します 計算 。

この章が言えている範囲

	言えている	言えていない
既知	(4)(6)(7)(8)(15)(15a)。引用した一次資料の主張	これらが四次元の連続のヤン–ミルズ理論で成り立つこと（対象がまだ無い）
紙 この章の導出（初等的。(17)(18) は Elitzur 1975 の論法による）	(10) の右向き（像が等しければ S はユニタリ）、(17) の上界、(18) の左	非可換群や連続の理論での同じ形の評価
この本の読み	表 0 の格付けと判定者、(1) の読み	格付けが唯一であること

	言えている	言えていない
計算	表 1・表 2・図 1（二次元、$L \le 10$）	四次元・非可換群・$L \to \infty$
全体	—	この本は質量ギャップの存在も連続極限の構成も自分では示していない（公開された連続極限の構成は第二巻）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
Jaffe・問題文の引用	本文	Jaffe, *Constructive Quantum Field Theory*（2000、公開 PDF）§2–§7／Jaffe–Witten, *Quantum Yang–Mills Theory*（Clay Mathematics Institute, 2000）§3–§6.5・局所場の脚注・弱い存在の脚注
要旨を確認	既知	Wick, PR 96 (1954) 1124／Wightman, PR 101 (1956) 860／Symanzik, JMP 7 (1966) 510／Osterwalder–Schrader, CMP 31 (1973) 83・42 (1975) 281／Glaser, CMP 37 (1974) 257／Lüscher, CMP 54 (1977) 283／Osterwalder–Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440／Creutz, PRD 15 (1977) 1128／Kogut–Susskind, PRD 11 (1975) 395／Schor, NPB 231 (1984) 321／Dybalski–Gérard, CMP 332 (2014) 1167／Spencer–Zirilli, CMP 49 (1976) 1／Kugo–Ojima, PTPS 66 (1979) 1／Wilson, PRD 10 (1974) 2445／Gross, CMP 92 (1983) 137／Driver, CMP 123 (1989) 575／Reisz, NPB 318 (1989) 417／Chevyrev–Shen, arXiv:2302.12160（2023）／Epstein–Glaser, AIHP A 19 (1973) 211／Faddeev–Popov, PLB 25 (1967) 29／Gribov, NPB 139 (1978) 1／Singer, CMP 60 (1978) 7／Neuberger, PLB 183 (1987) 337／Elitzur, PRD 12 (1975) 3978／De Angelis–de Falco–Guerra, PRD 17 (1978) 1624／Yang, PR 85 (1952) 808（M_0 の式は本文未確認）
書誌のみ	既知	Feynman, RMP 20 (1948) 367／Kac, Trans. AMS 65 (1949) 1／Driver, CMP 110 (1987) 479／Gell-Mann–Low, PR 84 (1951) 350（帰属は二次資料による）／Haag, Kong. Dan. Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd. 29 (12) (1955)・PR 112 (1958) 669／Ruelle, Helv. Phys. Acta 35 (1962) 147 とされる（書誌未確認）／Källén, Helv. Phys. Acta 25 (1952) 417／Lehmann, Nuovo Cim. 11 (1954) 342／Wigner, Ann. Math. 40 (1939) 149／Glimm–Jaffe–Spencer, Ann. Math. 100 (1974) 585／Dyson, PR 75 (1949) 486・1736／'t Hooft, NPB 33 (1971) 173／Becchi–Rouet–Stora, Ann. Phys. 98 (1976) 287／Bogoliubov–Parasiuk, Acta Math. 97 (1957) 227／Hepp, CMP 2 (1966) 301／Zimmermann, CMP 15 (1969) 208
表 0	この本の読み	一次資料は上の行と 18-01
表 1・表 2・図 1・(18) の傾き	計算	この端末の Python 3（numpy）：`elitzur.py`・`table.py`・`detour_beta_inf.py`・`holonomy_check.py`（四つの類）・`holonomy_brute.py`（3×3 の箱の全数え上げ）

次に読む章：18-03 質量と長さの辞書。

質量と長さの辞書 — 格子の上では重なり、極限の側でほどける対

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 「質量」と「長さ」の物理の語 20 項目を数学の語と対にし、格子を固定すれば重なる内側と、格子間隔を 0 に送る側で条件が集まる外側の二層を見ます。「二つの時間」と二つの η の区別もここで固定します。

前提となる章 — 4-11・5-08・2-08。Poincaré 定数は 1-10、格付けの二列は 18-01。前提の章に無い語（漸近自由・確率微分方程式・log-Sobolev・混合時間・Polyakov ループ・中心電荷など）は、使う場所で一行ずつ定義します。

先に言うこと — 対応を並べるだけで、質量ギャップも閉じ込めも連続極限も示しません。本書の検討の記録の仮定（拡散型緩和時間の仮定など）は仮定のままです。

この章の順序

1. 見取り図 — 二層と二列の格付け・表 0 の読み方
2. 質量ギャップと相関長 — 格子単位と物理単位
3. ポテンシャル・弦張力・閉じ込め — 片向きだけが定理
4. Λ・一尺度・グルーボール — 隙間と粒子の区別
5. 二つの時間 — H_T と L・時間の単位
6. 自己相関時間と Poincaré 定数 — 三つに割れる時間
7. 臨界減速 — z・従来理論・変分の下界・二つの η。寄り道：自由場では緩和時間と感受率が一致する
8. 管の揺らぎと位相の凍結 — 有効弦・Wulff・ボトルネック。寄り道：位相電荷の区画と細い通路

01

見取り図 — 二層と二列の格付け

物理では質量と長さは表と裏の関係にあります。正確には、$\hbar = c = 1$ の単位では質量の逆数が長さの次元をもち、質量 m の粒子が運ぶ力は距離 $1/m$ ほどで届かなくなり（湯川型、3-01）、相関は $e^{-r/\xi}$、$\xi = 1/m$ で薄れます。数学ではこの一つの数が、スペクトルの隙間・相関の減衰率・確率的な力学の緩和の速さ、という別々の量に割れます。

表 0 の対は二層に分かれます。内側は、格子間隔 a と力学を固定すれば、スペクトル定理（1-10）一本で同じものになる対です（転送行列の隙間と相関の減衰率など）。外側は、$\xi \to \infty$ と $a \to 0$ を結ぶところに現れる対で、条件と未確定はここに集まります。

表の二列は 18-01 の格付けです。(a) は「両方の対象が在るとしたら同じか」で、確定・条件つき・未確定の三段に、別の量だと分かっている対の「対応しない」（18-01 の「偽の友」）を加えます。(b) は 18-01 の実在の列を水準「格子（a 固定）」で付けたもので、構成済み＝有限体積ならどの β でも在る、条件つき＝強結合など範囲を限った版だけ、無い＝この水準で示されたものが無い（数値だけのものを含む）、と読みます。連続の四次元の水準では全行が「無い」です（2026-11-10 に公開された構成も、質量ギャップ・Wilson ループ・一粒子の状態は作っていません。6-04）。記号：$\beta = 2N/g^2$、長さは格子単位、$m_{\mathrm{lat}} = 1/\xi$、$\Delta = m_{\mathrm{lat}}/a$。$A \asymp B$ は比 A/B が上下とも正の定数で挟まれること（A-01）。

表 0　質量と長さの辞書の一覧（上から §02〜§08 の順）

#	物理の語	数学の語	(a) 定義	(b) 格子（a 固定）	(c) 有限の測定
1	質量ギャップ	スペクトルの隙間・一様な減衰	条件つき	条件つき（強結合）	上界まで
2	相関長 ξ	転送行列の隙間の逆数	条件つき	条件つき（強結合）	下界まで
3	物理単位のギャップ	格子単位の一様な下界	対応しない（偽の友。別の量と確定）	条件つき（強結合）	届かない
4	$V(R)$	Wilson ループの減衰率	条件つき	条件つき	上界まで
5	弦張力 σ	面積則の係数・連続の弦張力の問題（Chatterjee の Problem 5.2）の d	条件つき	条件つき（$\sigma > 0$ は強結合）	—
6	閉じ込め	片向きの定理	条件つき	条件つき	—
7	中心対称性	スラブでの中心不変性	未確定	無い（成否は未証明）	—
8	Λ・一尺度	対応語なし	未確定	無い	—
9	$m/\sqrt{\sigma}$	格子の相関長の問題と連続の弦張力の問題の組の極限	未確定	無い（数値のみ）	届かない

#	物理の語	数学の語	(a) 定義	(b) 格子（a 固定）	(c) 有限の測定
10	グルーボール	質量作用素の孤立固有値	条件つき	条件つき（強結合。注）	上界まで
11	Langevin の緩和	生成作用素 L	確定	構成済み（有限体積）	上界まで（$\mathrm{gap}(L)$）
12	$z = 2$	$\mathrm{gap}(L) \asymp \mathrm{gap}(H_T)^2$	未確定	無い（族の言明。注）	届かない
13	指数自己相関時間	Poincaré 定数 C_P	連続時間で確定	構成済み（有限体積）	下界まで
14	熱化時間	混合時間	条件つき	構成済み（有限体積）	下界まで
15	動的指数 z	$C_P \asymp \xi^z$	未確定	無い（族の言明。注）	届かない
16	$z = 2 - \eta_s$	変分の下界 $C_P \geq \chi$	条件つき	構成済み（下界だけ）	下界まで
17	非臨界では減速しない	一様な混合 $\Longleftrightarrow$ 一様な log-Sobolev	条件つき	条件つき（強結合）	届かない
18	Lüscher 項	帯の Casimir エネルギー	未確定	無い（数値のみ）	—
19	粗面化・管の形	Wulff 構成	未確定	無い（物理の描像）	—
20	位相電荷の凍結	状態空間のボトルネック	条件つき	無い（凍結は数値のみ）	下界まで

注：(c) は 18-01 §02 の測定の列（有限の測定で届く向き）。隙間の仲間（「質量ギャップ」の項・「V(R)」の項・「グルーボール」の項・「Langevin の緩和」の項）は一つの相関か試験関数で上界まで、その逆数の長さと時間（「相関長 ξ」の項・「指数自己相関時間」の項・「熱化時間」の項・「z=2-η_s」の項・「位相電荷の凍結」の項）は向きが入れ替わって下界までです。一様性・族・極限の言明（「物理単位のギャップ」の項・「m/√σ」の項・「z=2」の項・「動的指数 z」の項・「非臨界では減速しない」の項）は届きません。「位相電荷の凍結」の項の根拠は (14)（集合を一つ選べば C_P の下界が出る。§08）、「熱化時間」の項は混合時間の定義（§06。一つの事象で全変動距離が ε を超えれば、その時刻は混合時間より前）です。「弦張力 σ」の項（弦張力）は、有限の測定から片側を押さえる形をこの本の本文で扱っていないので「—」にしました。「グルーボール」の項の (b) は、格子には Lorentz 対称性が無く質量作用素 M がそのままでは定義されないので、運動量ごとにエネルギーのスペクトルから孤立した分散曲線がある、という形です（Schor 1984。§04）。「z=2」の項・「動的指数 z」の項の両辺は固定した格子で定義されますが、$\asymp$ は格子間隔を 0 に送る族についての言明なので、一つの格子では中身を持ちません。(b) の「無い」は、その族について示されたものが無いという意味です。

02

質量ギャップと相関長 — 格子単位と物理単位

問題文（Jaffe–Witten）は質量ギャップを、ハミルトニアン H が $(0, \Delta)$ にスペクトルを持たないことと定義し（§4）、帰結に同時刻のクラスター性を挙げます（§5） 既知 。OS 再構成（4-10）の後、真空 Ω が一意ならスペクトル定理から

$$\langle O\Omega, e^{-tH} O\Omega\rangle - |\langle \Omega, O\Omega\rangle|^2 = \int_{[\Delta,\infty)} e^{-tE}\, d\rho_O(E) \;\le\; e^{-t\Delta}\, \|O\Omega\|^2 \tag{1}$$

です（ρ_O は $O\Omega$ のスペクトル測度から 0 を除いたもの）。(1) の逆向きは、稠密な観測量の族が*一様な*率で減るときに限ります（「質量ギャップ」の項）。格子では反射正値性から正の自己共役な転送行列 $T = e^{-H_T}$ が作れ（Lüscher 1977、5-03）、固有値 $\lambda_0 > \lambda_1 \ge \cdots$ から

$$m_{\mathrm{lat}} = -\log \frac{\lambda_1}{\lambda_0}, \qquad \xi = \frac{1}{m_{\mathrm{lat}}} \tag{2}$$

です。Chatterjee（2018）のプラケット相関の相関長は一般に $\xi_{\mathrm{plaq}} \le 1/m_{\mathrm{lat}}$ です（等号には最低の状態への重なりが要る）。例：自由場では $\xi = 1/(2\,\mathrm{arsinh}(m/2))$（表 1）。

同じ語の二つの量

数学で「質量ギャップが正」と呼ばれる結果の多くは、格子単位の一様な下界 $m_{\mathrm{lat}} \ge c > 0$ です。確かめられる例は Shen–Zhu–Zhu（2023）で、要旨は強結合の格子ヤン–ミルズについて 'strictly positive mass gap' を述べます [既知]。このとき $\Delta = m_{\mathrm{lat}}/a \ge c/a \to \infty$ で、物理単位では質量が無限大に向かう側、連続極限の反対側の性質です。物理単位のギャップには $\xi \to \infty$ が $a \to 0$ を打ち消すことが要り、格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）も $\beta \to \infty$ で $\xi(\beta) \to \infty$ を求めます（5-09・16-08）。表 0 の「物理単位のギャップ」の項を「対応しない」とするのはこのためです。

03
ポテンシャル・弦張力・閉じ込め — 片向きの矢印だけが定理

静的ポテンシャル $V(R)$ は無限に重いクォーク対を距離 R に置いたエネルギーで、Wilson（1974）に従い $R \times T$ の Wilson ループ（5-01）から

$$V(R) = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log \langle W_{R,T}\rangle, \qquad \sigma = \lim_{R\to\infty} \frac{V(R)}{R} \tag{3}$$

と読みます。左を定義とすれば確定ですが、静的荷電の基底エネルギーと同一視するには $T \to \infty$ の極限と基底状態への重なりが要ります（「V(R)」の項）。Bachas（1986）の示した V の単調性と凹性から $\sigma \in [0,\infty)$ は在ります [既知]。面積則は強結合ならどの群でも成り立ちます（Osterwalder–Seiler 1978、5-02）。連続の弦張力は Chatterjee の連続の弦張力の問題の d として定義する提案です。

$$\log \langle W_{R/\varepsilon, T/\varepsilon}\rangle = -c\,(R+T) - d\,RT + o(1), \qquad \varepsilon(\beta)\to 0,\ c(\beta)\to\infty,\ d \neq 0 \tag{4}$$

周長の項が必要かは明らかでない、と本人が書いています。物理の目安は $\sqrt{\sigma} \approx 485(6)$ MeV です。これは SU(3) の純ゲージ理論の $r_0\sqrt{\sigma} = 1.160(6)$ に、QCD の格子計算で決めた長さの目盛り $r_0 = 0.472$ fm を仮に当てた換算で、著者自身が、純ゲージ理論と QCD は別の理論なので正確にはできない換算だと断っています（Athenodorou–Teper 2020） 物理 。

閉じ込めの三つの言い方

(a) $V(R) \to \infty$、(b) $\sigma > 0$、(c) 中心対称性が破れない、の三つです。(c) の物理の定義は有限温度のものです。時間方向を長さ $1/T$（T は温度）の輪にした格子で、一点から時間方向に一周するリンクの積のトレースを Polyakov ループと呼び、その期待値が 0 であることを閉じ込めの印とします（Polyakov 1978・Susskind 1979。中心の下で変換する秩序変数による普遍性の議論は Svetitsky–Yaffe 1982） 物理 。中心変換は、ゲージ群の中心の元（$SU(N)$ では単位行列の $e^{2\pi ik/N}$ 倍）を、ある時刻の面を横切る時間方向のリンクすべてに掛ける操作です。作用は変わらず Polyakov ループだけが $e^{2\pi ik/N}$ 倍されるので、この対称性が破れていなければ期待値は 0 です。

数学で示されているのは表 A の片向きだけです（Chatterjee 2021） 既知 。中心対称性の非破れの定義（Chatterjee 2021 の定義 2.1）は、ある $N \geq 1$ についてスラブ $\{0, \dots, N\} \times \mathbb{Z}^{d-1}$ に制限した理論がどの境界条件でも中心変換で不変なこと、強い減衰の定義（Chatterjee 2021 の定義 2.3）はどの立方体・境界条件でも一様な指数減衰（強い減衰）です。中心対称性から閉じ込めへの定理（Chatterjee 2021 の定理 2.2）の Wilson ループは中心に非自明に作用する表現のものです。

表 A　閉じ込めの言い方の間の含意（格子）

向き・例	状態
強い指数減衰（Chatterjee 2021 の定義 2.3）$\Longrightarrow$ 非破れ $\wedge$ 面積則	定理（一様な減衰から面積則への定理）
中心対称性の非破れ（Chatterjee 2021 の定義 2.1）$\Longrightarrow V(R) \to \infty$	定理（中心対称性から閉じ込めへの定理）
面積則 $\Longrightarrow V(R) \to \infty$	自明
$V \to \infty \Longrightarrow \sigma > 0$	示されていない
（特定の境界条件だけの）弱い減衰 $\Longrightarrow$ 閉じ込め	示されていない
有限群・弱結合：特定の境界条件の二点相関の減衰／閉じ込めない	定理（Adhikari–Cao 2025）／信念

ギャップと閉じ込めは別の主張です（17-02・16-08・5-10）。中心対称性について Chatterjee は、数学的な定義は「私の知る限り」無いとして中心対称性の非破れの定義を提案し、有限温度の類似に Borgs–Seiler（1983）を引いています。二つの定義が同じ相を分けるかは未証明です（「中心対称性」の項）。

04

Λ・一尺度・グルーボール — 隙間と粒子の区別

無次元の結合 g は、測る尺度 μ とともに値が変わります。漸近自由とは、μ が大きい（距離が短い）ほど g が小さくなることで（4-06）、その速さを決める一ループの係数が b_0 です。一ループの式を解くと

$$\Lambda = \mu \exp\!\left(-\frac{1}{2 b_0\, g^2(\mu)}\right), \qquad b_0 = \frac{11N}{3}\cdot\frac{1}{16\pi^2} \tag{5}$$

が μ に依らない質量の尺度になります（次元転移、4-07）。物理では質量はすべて Λ の定数倍で、$m/\sqrt{\sigma}$ は純数と読みます 物理 。数学の側に四次元の Λ の定義はありません（格子の Λ_L は 18-04）。本書の検討の記録は「尺度は一つ」を鎖 (ii) $m^2 \asymp \sigma$ と書き、等価原理に当たる一文と*類比*で呼びます（17-12）。証明はありません。連続の弦張力の問題が $\varepsilon(\beta)$ で成り立ち $\varepsilon\xi \to \ell \in (0,\infty)$ なら

$$\frac{m}{\sqrt{\sigma}} = \lim_{\beta\to\infty} \frac{1/(\varepsilon\,\xi)}{\sqrt{d}} = \frac{1}{\ell\sqrt{d}} \tag{6}$$

で、この組は Chatterjee の文面に無い読みです。数値は SU(2) 3.781(23)、SU(3) 3.405(21)、SU(∞) 3.072(14)（0^{++}、Athenodorou–Teper 2020・2021） 物理 。反対の例もあります。三次元のコンパクト U(1)（Villain 作用）では、どの結合でも弦張力が正で、連続極限は質量 m_D の自由場になり、物理単位の σ/m_D^2 は無限大に発散します（Göpfert–Mack、要旨） 既知 。閉じ込めても尺度が一つにならない例です（17-12）。

グルーボールは J^{PC}（スピン・パリティ・荷電共役）の通路ごとの最低の減衰率として測ります（5-08。SU(3) の 0^{++} は $r_0 m = 4.21(11)(4)$、Morningstar–Peardon 1999） 物理 。格子の回転の対称性は立方体を自身に重ねる 48 個の回転と反転（群 O_h）だけなので、通路は O_h の既約表現で分けます。連続のスピンへの対応は回転対称性の回復が前提です。数学の一粒子状態は質量作用素

$$M = \sqrt{H^2 - P^2} \;\geq 0 \tag{7}$$

の孤立固有値で（P は運動量。問題文 §6）、問題文は §5 で「孤立した一粒子状態（上のギャップ）」を拡張に数えます 既知 。隙間と粒子は別の主張です。格子には Lorentz 対称性が無く M はそのままでは定義されないので、格子の強結合で示されているのは、運動量ごとにエネルギーのスペクトルから孤立した分散曲線がある、という形です（Schor 1983・1984） 既知 。

05

二つの時間 — 転送行列の H_T と Langevin の L

時間は二つあります。一つは経路積分の虚時間で、相関は $T = e^{-H_T}$ で運ばれ、隙間は $1/\xi$ です。もう一つは確率量子化（Parisi–Wu 1981、7-09）の「人工的な第五の時間」s（Zwanziger 1981 の要旨）で、配位全体が次の確率微分方程式で動いて e^{-S}/Z に落ち着きます（モンテカルロ法の時間も同じ種類）。

$$d\phi_x = -\frac{\partial S}{\partial \phi_x}\, ds + \sqrt{2}\, dW_x(s) \tag{8}$$

$W_x(s)$ は点 x ごとに独立な Brown 運動（1-09）で、dW_x は時間 ds の間の平均 0・分散 ds のガウスの増分です。第一項は作用を下げる向きに動かし、第二項が揺らぎを足します。計算機では刻み h で $\phi_x \leftarrow \phi_x - h\,\partial S/\partial\phi_x + \sqrt{2h}\,Z_x$（$Z_x$ は独立な標準正規）と進め、これを Euler–Maruyama 法と呼びます。関数 f の期待値の時間変化を生む作用素（生成作用素）は

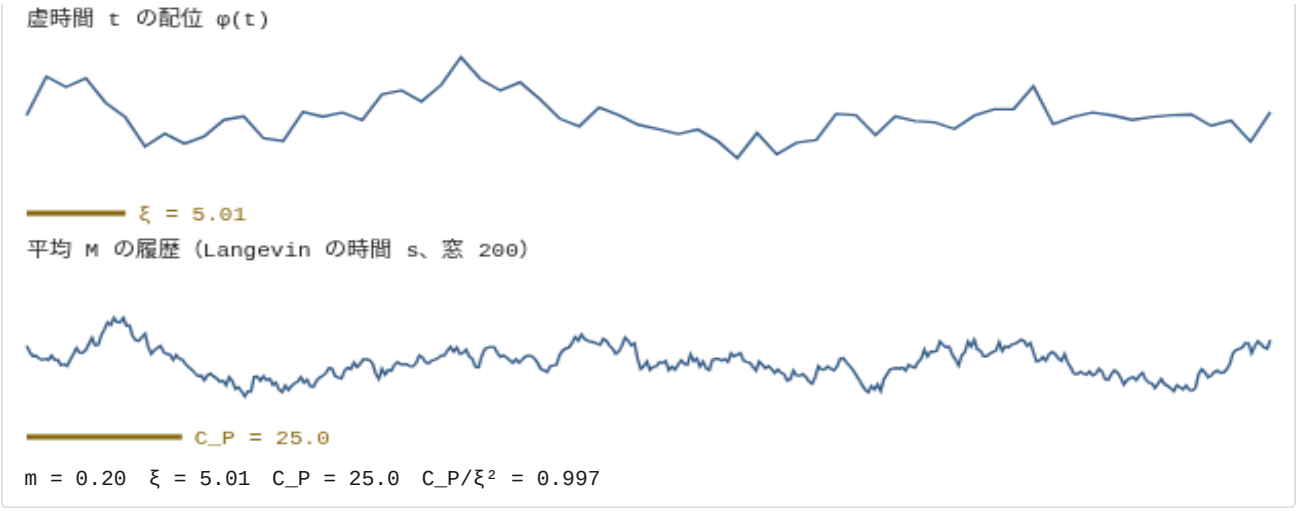
$$Lf = -\Delta f + \nabla S \cdot \nabla f, \qquad \langle f, Lf\rangle_\mu = \mathcal{E}(f) = \int |\nabla f|^2\, d\mu \tag{9}$$

で（$\mu = e^{-S}/Z$、$\mathcal{E}$ は Dirichlet 形。(9) の Δ はラプラシアンで、質量ギャップの Δ とは別）、0 の次の隙間の逆数が Poincaré 定数 C_P です（1-10）。有限の格子ならどちらも定義されますが（「Langevin の緩和」の項）、H_T は一時刻の切り口の Hilbert 空間に、L は配位全体の関数の空間 $L^2(\mu)$（μ について二乗可積分な関数）に作用し、両者を一般に結ぶ定理はありません。自由場では $\mathrm{gap}(H_T) = 2\,\mathrm{arsinh}(m/2) \approx m$、$\mathrm{gap}(L) = m^2$ で $C_P \approx \xi^2$ です（1-10）。

拡散型緩和時間の仮定と時間の単位

本書の検討の記録の緩和時間の仮定は、$\mathrm{gap}(L) \asymp \mathrm{gap}(H_T)^2$ が格子間隔に一様に成り立つという仮定です（23-01・18-05）。ただし L の時間の単位は、S と雑音の規格化で決まります。S を βS に替えると、ガウスの場合 L の隙間はちょうど β 倍になります。ゲージ理論で $S = \beta\times$（Wilson 作用）とすると、自由近似で $C_P \approx \xi^2/\beta$、すなわち C_P は $g^2(a)\,\xi^2$ に比例し、この因子は格子間隔とともに動きます。緩和時間の仮定を帯（定数倍）の水準で書くなら、この規格化を一つに固定したうえでの言明です（23-01）。記録の約束では緩和時間の仮定を冪の水準で置き、帯の水準は規格化を名指しした別の仮定に分けます（18-05 §03）。

図 1　つまみで m を変えると、上（虚時間の配位 φ(t)）の棒 ξ は約 1/m、下（平均 M の Langevin 時間 s に沿った履歴）の棒 C_P は $1/m^2$ で伸びる。「動かす」で式 (8) を走らせる



計算 この図の数値はこの端末で計算した。揺らぎは刻み $h = 0.05$ の Euler–Maruyama。この刻みでは平均 M が毎刻み $1 - hm^2$ 倍されて雑音が足される一次の漸化式になり、その積分自己相関時間 $1/m^2 - h/2$ はつまみの全段（$0.1 \le m \le 1$）で $1/m^2$ と 2.5% 以内で合う。走らせた履歴の測定では $m = 0.3,\ 0.5,\ 1$ で確かめ、1 割以内で合う。JavaScript が無いときは表 1 で読める。

計算 表 1　格子の自由場の二つの隙間（零運動量の通路）

m	$\mathrm{gap}(H_T)$	ξ	$C_P = 1/m^2$	C_P/ξ^2
1.00	0.962424	1.039	1.00	0.9263
0.10	0.099958	10.004	100	0.9992
0.02	0.020000	50.001	2500	1.0000

隙間は長さ 8192 の輪での相関の傾きと 6 桁、C_P は 256 点の輪の $-\Delta_{\mathrm{lat}} + m^2$ の最小固有値と一致します 計算 。$C_P/\xi^2 \to 1$ が自由場の $z = 2$ です。

06

自己相関時間と Poincaré 定数 — 等号は連続時間でだけ

力学を平衡から走らせたとき、観測量 f の値が時間 t 離れて持つ相関を分散で割ったものを自己相関 $\rho_f(t)$ と呼びます。その最も遅い減衰の時間が $\tau_{\exp}$、$\tau_{\mathrm{int},f} = \frac{1}{2} + \sum_{t \ge 1} \rho_f(t)$ が積分自己相関時間で、標本平均の分散は約 $2\tau_{\mathrm{int},f}\mathrm{Var}(f)/n$ です（Wolff 2004） 既知 。連続時間では和を積分に替え、$\tau_{\mathrm{int},f} = \int_0^\infty \rho_f(s)\,ds$ とします。連続時間の可逆な力学では $\rho_f(s) = \int e^{-s\lambda} d\nu_f(\lambda)$、$\nu_f$ は $[\mathrm{gap}, \infty)$ に載るので

$$\tau_{\exp} = \frac{1}{\mathrm{gap}(L)} = C_P, \qquad \tau_{\mathrm{int},f} = \int \frac{d\nu_f(\lambda)}{\lambda} \;\le\; C_P \tag{10}$$

です。離散時間の可逆な連鎖（固有値 $1 > \lambda_2 \ge \cdots > -1$）では三つに割れます（Levin–Peres–Wilmer §12.2） 既知 。

$$C_P = \frac{1}{1 - \lambda_2}, \qquad t_{\mathrm{rel}} = \frac{1}{1 - \lambda_\star}, \qquad \tau_{\exp} = \frac{-1}{\log \lambda_\star}, \qquad \lambda_\star = \max_{\lambda \ne 1} |\lambda| \tag{11}$$

例：AR(1) 連鎖 $X_{n+1} = \rho X_n + \sqrt{1-\rho^2}\, Z$（固有値 ρ^k）で $\rho = -0.9$ なら $C_P = 5.263$、$t_{\mathrm{rel}} = 10$、$\tau_{\exp} = 9.491$ と三つとも違い、τ_{int} は x で 0.026、x^2 で 4.763 です。連続時間（Ornstein–Uhlenbeck）では三つとも 1 に揃います 計算 。怠惰な連鎖（毎回確率 1/2 でその場に留まる連鎖。固有値がすべて 0 以上になる）なら $\lambda_\star = \lambda_2$ で $C_P = t_{\mathrm{rel}}$ です（LPW §12.2・Exercise 12.3） 既知 。

力学の違いと混合時間

熱浴法（変数を一つずつ条件つき分布から引き直す方法）・Langevin・HMC（ハイブリッド・モンテカルロ、Duane ほか 1987。人工の運動量を足して古典力学で一定時間動かし、受理か棄却で補正する方法）は生成作用素が別で、HMC の時間を Langevin の C_P とみなすのは仮定です（5-07）。熱化時間と混合時間も条件つきの対です。混合時間 $t_{\mathrm{mix}}(\varepsilon)$ は、どの初期状態から始めても、分布と平衡分布 π の全変動距離（二つの分布が同じ事象に与える確率の差の最大）が ε 以下になるまでの歩数です。上界 $t_{\mathrm{mix}}(\varepsilon) \le t_{\mathrm{rel}} \log(1/(\varepsilon \pi_{\min}))$（LPW 定理 12.4。$\pi_{\min}$ は π の最小の確率）の $\log(1/\pi_{\min})$ は体積とともに増えます。これは有限状態の可逆な連鎖の定理で、連続な群に値をとるゲージ場では $\pi_{\min}$ が意味を持たず、log-Sobolev 定数（§07）など別の道具が要ります。

07

臨界減速 — z・従来理論・二つの η

ξ が伸びると力学の緩和も遅くなります（臨界減速）。物理は動的スケーリングの仮説 $\tau \propto \xi^z$ で書き、z を動的指数と呼びます（Halperin–Hohenberg 1969・Hohenberg–Halperin 1977）。z は力学と観測量で変わります。(8) は Hohenberg–Halperin の分類で model A と呼ばれる、保存量の無い緩和型の力学です。数学では $C_P \asymp \xi^z$ ですが、冪の存在そのものが仮説で、ヤン–ミルズで C_P の ξ 依存を冪として決めた定理はありません（「動的指数 z」の項）。

従来理論と RG

静的な指数は 2-08 のもので、$\xi \sim |t|^{-\nu}$、$\chi \sim |t|^{-\gamma}$（t は臨界点からの温度の隔たり）、η_s は臨界点の相関 $G(x) \sim |x|^{-(d-2+\eta_s)}$ が自由場の冪からずれる分（異常次元）です。スケーリングの関係 $\gamma = \nu(2-\eta_s)$ から $\chi \propto \xi^{\gamma/\nu} = \xi^{2-\eta_s}$ です 物理 。従来理論（van Hove の名で呼ばれる）は緩和時間を χ に比例させて $z = 2 - \eta_s$ とする、と整理されています 物理 。Wilson の展開法を運動論的 Ising 模型の連続版に使った Halperin–Hohenberg–Ma（1972）の要旨は、結果が 'disagree with the mode-mode coupling approach and the conventional (Van Hove) theory' と書きます。RG（ε 展開）と数値はどちらも $z > 2 - \eta_s$ を示唆します（表 2） 物理 。

表 2　動的指数 z と $2-\eta_s$（η_s は静的な異常次元）

模型・方法	$2-\eta_s$	z	$\eta_{\mathrm{dyn}}=2-z$
二次元 Ising・Glauber の数値	1.75	2.1665(12)	-0.1665
二次元 Ising・5 ループ（ε 展開）	1.75	2.14(2)	-0.14
三次元 Ising・Glauber の数値	1.9637	2.032(3)	-0.032
三次元 Ising・5 ループ（ε 展開）	1.9637	2.0235(8)	-0.0235
自由場・Langevin	2	2	0

計算 $2-\eta_s$（二次元は $\eta_s=1/4$、三次元は $\eta_s=2\Delta_\sigma-1$、スピンの尺度次元 $\Delta_\sigma=0.5181489(10)$）と η_{dyn} はこの端末で計算。z と Δ_σ は一次資料の値 物理 。Glauber はスピンを一つずつ確率的に更新する力学。

変分の下界

数学の側の対応は変分の下界です。(9) に $f=M=\sum_x \phi_x$ を入れると $|\nabla M|^2=|\Lambda|$（点の数）、$\mathrm{Var}(M)=|\Lambda|\chi_\Lambda$ なので

$$C_P \;\geq\; \frac{\mathrm{Var}(M)}{\mathcal{E}(M)} = \chi_\Lambda \tag{12}$$

で、有限体積のどの格子でも成り立つ定理です 既知 。自由場では $\chi=1/m^2=C_P$ で等号です（表 1）。ここから指数の下界に移るには二つの仮説が要ります。動的スケーリング $C_P \asymp \xi^{z}$ と静的スケーリング $\chi \asymp \xi^{\gamma/\nu}$ で、その下で $z \geq \gamma/\nu = 2-\eta_s$ です 物理 （モンテカルロ法の文献で標準とされる下界）。同じ型の不等式から確かな下界を出した例に、Swendsen–Wang 法の $z_{\mathrm{sw}} \geq \alpha/\nu$（$\alpha$ は比熱の指数。Li–Sokal 1989 の要旨）があります 既知 。従来理論の値はちょうどこの下界にあたり、表 2 の z はどれも下界より大きい側にあります。

ゲージ理論では、この形では ξ^2 に届きません 物理 。演算子の次元 Δ を、相関が短い距離で $|x|^{-2\Delta}$ のように振る舞うときの冪で測ると、ゲージ不変な局所演算子の最低の次元は 4 です。次元 4 の演算子の二点相関は $|x|^{-8}$ で減るので、四次元でのその和 χ は短い距離で決まり、ξ とともに増えません（23-01）。

二つの η

η は二つに分けます。静的な η_s は上の異常次元、動的なのは $\eta_{\mathrm{dyn}} := 2-z$ で、等しいのは従来理論の中だけです（表 2 では符号まで違う）。この本では添字を必ず付け、記録の η がどちらかは 18-05 で固定します。

非臨界では減速しない

逆に ξ が有限なら減速しない、というのが物理の前提です（「非臨界では減速しない」の項）。数学の形には二つの道具を使います。log-Sobolev 不等式は、分散の代わりにエントロピーを

$\mathcal{E}$ で抑える不等式

$$\int f^2 \log \frac{f^2}{\int f^2 \, d\mu} \, d\mu \;\le\; 2C_{LS}\,\mathcal{E}(f)$$

で、Poincaré 不等式より強く $C_P \le C_{LS}$ を導きます 既知 。Dobrushin–Shlosman の混合条件は、有限の箱にどんな境界条件を課しても、箱の中の相関が距離とともに一様な率で指数的に減ることです。非臨界で減速しないことの数学の形は、離散スピン系（有限のスピン空間・有限の到達距離）では「境界条件によらない一様な混合（Dobrushin–Shlosman）$\Longleftrightarrow$ 一様な log-Sobolev」という同値の定理です（Stroock–Zegarlinski 1992。書誌のみ） 既知 。相関長が有限なだけでは仮定が足りません。連続な群に値をとるゲージ場での同値は、この章の材料の範囲では見当たりません。格子ヤン–ミルズでは Shen–Zhu–Zhu（2023）が強結合で Poincaré・log-Sobolev・指数減衰を示しています。どちらの結果も $\xi \to \infty$ の側の冪は決めません。

寄り道：自由場では緩和時間と感受率が一致する

飛ばしてよい小節です。

自由場 $S = \frac{1}{2}\sum_x [(\phi_{x+1}-\phi_x)^2 + m^2\phi_x^2]$ で (8) を点について足し合わせると、隣との結合の項が打ち消し合い、平均 M は

$$dM = -m^2 M\, ds + \sqrt{2/N}\, dW(s)$$

に従います（N は点の数、W は一つの Brown 運動）。M は一つの Ornstein–Uhlenbeck 過程で、緩和時間は $1/m^2$、感受率 $\chi = \sum_x \langle \phi_x \phi_0 \rangle = 1/m^2$ と同じ値です（この端末の計算でも、表 1 のどの m でも χ と C_P が一致） 計算 。従来理論の「緩和時間 $\propto \chi$」は、自由場で正確なこの関係と同じ形です。相互作用があると両者はずれるとされ、表 2 の $z > 2 - \eta_s$ がそのずれにあたります 物理 。

08

管の揺らぎと位相の凍結 — 有効弦・Wulff・ボトルネック

有効弦と Lüscher 項

長い電束の管は横の並進を自発的に破り、Goldstone ボソンが 1+1 次元に住みます（Lüscher 1981）。Goldstone ボソンは、連続な対称性が自発的に破れたときに現れる質量ゼロの揺らぎで、ここでは管の横の位置の揺らぎです。その揺らぎは $V(R)$ に普遍な $1/R$ の項を足します（Lüscher–Symanzik–Weisz 1980、17-03）。

$$V(R) = \sigma R + \mu + \frac{\gamma}{R} + O(R^{-2}), \qquad \gamma = -\frac{\pi (d-2)}{24} \tag{13}$$

二次元の共形場理論（距離の拡大縮小を含む対称性をもつ二次元の場の理論）は中心電荷 c という数をもち、自由なボソン一つが $c = 1$ です。幅 R の帯に閉じ込めた揺らぎの基底エネルギーのうち幅に依る部分（Casimir エネルギー）は c に比例し（Blöte–Cardy–Nightingale 1986・Affleck 1986）、開いた帯で $-\pi c/(24R)$、周の長さ L の周期の帯で $-\pi c/(6L)$ です。$c = d-2$ とおくと前者は γ、後者は $d=4$ で $-\pi/(3L)$ で、格子で弦張力を取り出すときに差し引く補正と一致します（Lucini–Teper 2001）[計算]。格子の σ には「管の中心電荷は $d-2$」という物理の仮定が入っています（「Lüscher 項」の項）。

硬い管と粗面化

面積則が示されている強結合では、管は硬いとされます。正確には、面を一格子ずらすごとに小さな重みが掛かり、横の揺らぎが指数的に抑えられるという意味です（17-03）。強結合の管の形は、向きに依る張力から作る Wulff 構成との類比で読めます。Wulff 構成は、向きごとの張力 $\tau(\mathbf{n})$ の下で、囲む面積を固定して周の張力の総和を最小にする形を与える作図です（17-03）。揺らぐ管の領域とは粗面化転移（荒れの転移、roughening）で隔てられているとされます。これは Lüscher 1981 の題（要旨）にある物理の描像で、格子ゲージ理論でその存在を示した定理は、この章の材料には見当たりません[物理]（「粗面化・管の形」の項）。

位相電荷の凍結とボトルネック

純ゲージの HMC では、位相電荷の二乗の有効な動的指数が約 5 で、Wilson ループはこの遅いモードから切り離されます（Schaefer–Sommer–Virotta 2011 の要旨）[物理]。数学の言葉はボトルネックで、配位の集合 A（位相電荷が 1 に近い配位など）の指示関数をなめらかにした f を変分原理に入れると

$$C_P \;\geq\; \frac{\mathrm{Var}(f)}{\mathcal{E}(f)} \;\approx\; \frac{\mu(A)\bigl(1-\mu(A)\bigr)}{\mathcal{E}(f)} \tag{14}$$

で、A と外をつなぐ通路が細いほど C_P は大きくなります[既知]（二つの谷の模型、1-10）。正確には、A の境界付近の配位の測度が小さく、そのため $\mathcal{E}(f)$ が小さくなることです。(14) は定理ですが、それが凍結の原因であることと、HMC の現象を Langevin の C_P に移すことは確かめられていません（「位相電荷の凍結」の項、23-02）。

寄り道：位相電荷の区画と細い通路

飛ばしてよい小節です。

連続の場では位相電荷（第二 Chern 数、3-05・18-04）は整数で、値の違う配位の区画はなめらかな変形ではつながりません。格子では位相電荷は近似的にしか整数でなく、区画は格子間隔の大きさの粗い配位を通ってつながります。その通路が $a \to 0$ で細くなると見込まれています 物理 。(14) の A を「位相電荷が 1 に近い配位」に取ると、この見込みは C_P の下界が大きくなることに翻訳されます。通路がどの速さで細くなるかを示した定理はありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 (1) の片向き、(2)、σ の存在、中心対称性から閉じ込めへの定理と一様な減衰から面積則への定理（Chatterjee 2021）、(10)(11)、怠惰な連鎖で $C_P = t_{\mathrm{rel}}$、変分の下界 (12)(14)、離散スピン系での「一様な混合 $\Longleftrightarrow$ 一様な log-Sobolev」、三次元のコンパクト U(1) の結果（要旨）。	どの対も逆向きの定理。四次元の連続理論でこれらの量が在ること。「未確定」の対がどちらに動くか。連続な群に値をとるゲージ場での混合と log-Sobolev の同値。
計算 表 1、表 2 の差、図 1 と平均 M の自己相関時間、§06 の例、自由場で緩和時間と χ が一致すること、$\pi/(3L)$。	表 2 の z はこの端末の測定ではない。
物理 $m/\sqrt{\sigma}$・$\sqrt{\sigma}$・グルーボール・z の数値、二つのスケーリング仮説の下の $z \geq \gamma/\nu$、管の硬さと粗面化、位相の区画の通路。	定理ではない。外挿の形と $c = d - 2$ は仮定。$\sqrt{\sigma}$ の MeV への換算は別の理論からの借用。
緩和時間の仮定・鎖 (ii) がどの対に当たるか（「Λ・一尺度」の項・「z=2」の項）と、緩和時間の仮定が時間の規格化を固定した言明であること。	それらの証明。質量ギャップ・閉じ込め・連続極限については何も示さない。

出典と再現

もの	種別	出典・道具（確認の水準）
ギャップ・クラスター性・一粒子状態・転送行列	既知	Jaffe–Witten（Clay の問題文）§4–§6（本文）。Lüscher, CMP 54 (1977) 283（要旨のみ）；Osterwalder–Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（要旨：転送行列・強結合での無限体積極限と解析性・Wilson の閉じ込め評価。指数クラスター性は本文未確認）；Schor, NPB 222 (1983) 71・231 (1984) 321（要旨のみ）；Shen–Zhu–Zhu, CMP 400 (2023) 805（要旨のみ。'strictly positive mass gap'）。
ξ・V・σ・閉じ込め・中心対称性	既知	Chatterjee, arXiv:1803.01950；CMP 385 (2021) 1007, arXiv:2006.16229（本文）。Bachas, PRD 33 (1986) 2723；Wilson, PRD 10 (1974) 2445；Polyakov, PLB 72 (1978) 477；Susskind, PRD 20 (1979) 2610；Svetitsky–Yaffe, NPB 210 (1982) 423；Adhikari–Cao, Ann. Probab. 53 (2025)（要旨のみ）。Borgs–Seiler, CMP 91 (1983) 329（書誌のみ）。Göpfert–Mack, CMP 82 (1982) 545–606, doi:10.1007/BF01961240（要旨で確認。INSPIRE。本文は未読。年は Crossref の発行年で、INSPIRE は 1981）。
$m/\sqrt{\sigma}$・$\sqrt{\sigma}$・0^{++}・$\pi/(3L)$	物理	Athenodorou–Teper, JHEP 11 (2020) 172（$\sqrt{\sigma}$ の換算と断りは §5.2）・JHEP 12 (2021) 082；Lucini–Teper, JHEP 06 (2001) 050；Morningstar–Peardon, PRD 60 (1999) 034509（本文）。

もの	種別	出典・道具（確認の水準）
二つの時間・自己相関・混合時間・HMC	既知・物理	Levin–Peres–Wilmer, *Markov Chains and Mixing Times* 2nd ed. §12.2・Exercise 12.3・定理 12.4（本文）。Zwanziger, NPB 192 (1981) 259；Wolff, CPC 156 (2004) 143；Duane ほか, PLB 195 (1987) 216（要旨のみ）。Parisi–Wu, Sci. Sin. 24 (1981) 483（書誌のみ）。
臨界減速・表 2・変分の下界・非臨界の同値	物理・既知	Halperin–Hohenberg–Ma, PRL 29 (1972) 1548（要旨）。Nightingale–Blöte, PRB 62 (2000) 1089（書誌のみ。二次元の 2.1665(12) の出所）；Liu ほか, PRE 108 (2023) 034118（要旨：2.1665(12) の再確認と三次元の値）；Adzhemyan ほか, PLA 425 (2022) 127870, arXiv:2111.04719（要旨：5 ループの値）；Kos ほか, JHEP 08 (2016) 036（要旨）；Li–Sokal, PRL 63 (1989) 827（要旨）。Halperin–Hohenberg, Phys. Rev. 177 (1969) 952・RMP 49 (1977) 435（要旨のみ）。Stroock–Zegarlinski, CMP 144 (1992) 303（題：log-Sobolev 不等式と Dobrushin–Shlosman の混合条件の同値）・CMP 149 (1992) 175（題：離散スピン系の log-Sobolev 不等式）（書誌のみ）。van Hove の $z = 2 - \eta_s$ の形と下界 $z \geq \gamma/\nu$ の典拠は未確認。
有効弦・中心電荷・位相の凍結	物理	Lüscher–Symanzik–Weisz, NPB 173 (1980) 365；Lüscher, NPB 180 (1981) 317（題に roughening）；Blöte–Cardy–Nightingale・Affleck, PRL 56 (1986) 742・746；Schaefer–Sommer–Virotta, NPB 845 (2011) 93（要旨のみ）。
Wulff 構成・粗面化	物理	この章では出典未確認（Dobrushin–Kotecký–Shlosman は書誌未確認）。作図と例は 17-03 とその出典表。
緩和時間の仮定・鎖 (ii)	仮定・類比	本書の検討の記録の整理（23-01・17-12）。
表 1・表 2 の差・図 1・§06・§07 の寄り道・§08 の数値	計算	この端末の Python 3（numpy）：`two_times.py`・`zero_mode.py`・`ar1.py`・`exponents.py`。

次に読む章：18-04 尺度と極限の辞書。記録の仮定との対応は 18-05。

尺度と極限の辞書 — 流れの語は写像に、極限の語は存在の問いに訳される

この章は既存の知見の整理です（原典は本文の「既知」の札）。本書の検討は主に第 15 部と第三巻（第 16〜28 部と付録）にあります。

この章で分かること — 尺度と極限の物理の語 23 項目を数学の語と対にし、18-01 の二列で格付けします。スキーム変換が一度きりのずれであること（表 1）と、Migdal–Kadanoff の近似再帰の流れ（図 1）も見ます。

前提となる章 — 4-06・7-05・17-08。二列は 18-01、質量と長さは 18-03。§04 の指標と Bessel 関数は 7-02 にあり、§04 で最小限を補います。

先に言うこと — 対応を並べるだけで、流れも連続極限も構成しません。図 1 は近似の再帰の計算で、四次元の格子の理論の主張ではありません。

この章の順序

1. 見取り図 — 表 0
2. 繰り込み群と β 関数 — 段の列と Polchinski の方程式
3. 格子の上の流れ — 表 1
4. Migdal–Kadanoff と階層格子 — 図 1／寄り道：一段の減りが $(1-b^{-2})/3$ になる理由
5. 連続極限と a(β) — 二つのスケーリング
6. 普遍性・Symanzik・周辺性 — 改善の代償
7. 大 N・マスター場・ホログラフィー・KK 塔
8. 位相・インスタントン・Wilson 流・Gribov 領域
9. 数学の側に語の無かったもの — トレース異常

01

見取り図 — 流れ・極限・幾何の尺度

語は三群に分かれます。**流れ**の語（繰り込み群・β 関数・Λ）は、段の写像の性質に訳されます。例：「β 関数が負」は「格子間隔を 2 倍にする一段が、弱結合の側で β をほぼ一定量ずつ下げる」になります（§02・§03）。

極限の語（連続極限・$a(\beta)$・普遍性）は、「極限が在るか、一つか」という問いに訳されます。例：「普遍性」は「作用の細部を変えても同じ極限の測度に行く」という一意性の主張です（§05・§06）。

幾何の尺度の語（N・余分な一方向・流れの時間・位相）は、別の尺度を足して理論を見る語です。古典なら定理で一致するものが多い群です。例：「インスタントン」は反自己双対接続そのものです（§07・§08）。

記号：$\beta = 2N/g^2$ は格子の結合の係数（統計力学の逆温度ではありません）、b は一段の倍率（格子間隔 a を b 倍にする）、$\kappa = 4Nb_0$（SU(2) で 0.3715、A-01）です。漸近自由（4-06）を格子の結合で書くと一段の走りになります。SU(2) で a を 2 倍にすると β は約 0.2575 下がり、a を半分にするには同じだけ上げます。

$$\beta(ba) = \beta(a) - \kappa \ln b + O(1/\beta) \qquad \text{(一ループ。} O(1/\beta) \text{ は二ループ以降)} \tag{1}$$

表 0　尺度と極限の辞書の一覧（(a) 定義としての対応・(b) 四次元での実在・(c) 有限の測定で届く向き。水準と条件は本文）

#	物理の語	数学の語	(a)	(b)	(c)
1	繰り込み群	段の列・UV 安定性	条件つき	条件つき	—
2	β 関数	有効結合の再帰式	条件つき	条件つき	—
3	Polchinski の方程式	測度の分解の Polchinski 方程式（熱流）	確定	無い	—
4	MCRG の Δβ	一段の写像	条件つき	無い	—
5	Λ のスキーム変換	結合の再径数化	確定	構成済み（形式的冪級数）	—
6	Migdal–Kadanoff	階層格子の正確な再帰	条件つき	構成済み（階層格子）	—
7	連続極限	スケーリング極限	条件つき	無い	届かない
8	a(β)・尺度の設定	ε(β)（連続の弦張力の問題）	未確定	無い	—
9	スケーリング	無次元比の極限	未確定	無い	届かない

#	物理の語	数学の語	(a)	(b)	(c)
10	漸近スケーリング	ε(β) の漸近形	未確定	無い	届かない
11	普遍性	極限の一意性	条件つき	無い	届かない
12	Symanzik の $O(a^2)$	段の取りこぼし δ(b)	未確定	無い	—
13	改善作用	反射正値性の喪失（負の重みの寄与）	確定（次元 6 の演算子を足した作用）	構成済み（格子）	—
14	周辺的な結合	Sobolev の臨界指数	確定	構成済み（古典）	—
15	大 N・平面図	平面地図・弦の和	条件つき	条件つき	—
16	マスター場	非可換分布の極限	条件つき	無い	—
17	ホログラフィーの動径	Fefferman–Graham 展開	未確定	無い	—
18	KK 塔	内部ラプラシアンの λ_1	条件つき	対象外	上界まで
19	位相電荷	第二 Chern 数	条件つき	条件つき（格子）	—
20	インスタントン	反自己双対接続	確定	構成済み（古典）	—
21	Wilson 流	ヤン–ミルズ熱流	確定	構成済み（古典）	—
22	Gribov 領域	FP 作用素の正値域	確定	構成済み（古典）	—
23	トレース異常	対応語なし	未確定	無い	—

注：表 0 の (b) の列は、公開された構成（2026-11-10）より前の読みです。§02・§09 のとおり、連続極限（行 7）とトレース異常（行 23）の行は、公開された構成で動く候補です。

(c) は 18-01 §02 の測定の列（有限の測定で届く向き）。極限と一意性の行（「連続極限」「スケーリング」「漸近スケーリング」「普遍性」の項）は届かず、「KK 塔」の項の λ_1 は試験関数一つで上界が出ます（1-10）。(b) の「無い」は 18-01 §04 のとおり「まだ作られていない」の意味です。「MCRG の Δβ」の項・「スケーリング」の項・「漸近スケーリング」の項には格子の数値（物理の水準）があり、§03・§05 で扱います。

02

繰り込み群と β 関数 — 写像の列に訳す

繰り込み群は、短い尺度の揺らぎを積分して、長い尺度の有効な作用に移る操作です。Wilson（1971）は Kadanoff のスケーリングの理論を微分方程式の形に書き直しました（要旨 'The Kadanoff theory of scaling … is cast in differential form'）既知 。写像の存在と不動点への収束は、物理では前提です。数学では、一段の写像 R_b の合成を一様に評価する**段の列**になります（7-05）。

$$\mu_a \xrightarrow{R_b} \mu_{ba} \xrightarrow{R_b} \mu_{b^2 a} \to \cdots, \qquad \text{有効作用 } S_k \text{ を } k \text{ に一様に制御する} \tag{2}$$

四次元の純ゲージで Bałaban（1987・1989）は有効作用の列を作り、有限体積の UV 安定性を示しました。Chatterjee（2018）§6 は収束する部分列の存在を UV 安定性と呼びます[既知]。Bałaban の方法では、軌道の収束と観測量の極限は未証明です（7-07）。2026-11-10 に公開された構成は、別の設計の繰り込みの段の列で、局所の観測量の相関の極限を取っています（第 9〜11 部）。β 関数（「β 関数」の項）の符号と正確な流れの一致は、二次元の Gross–Neveu で定理です（Gawędzki–Kupiainen 1985）。四次元では Bałaban の小場近似の再帰までです。

Polchinski の方程式

Polchinski（1984）は、四次元の $\lambda\phi^4$ で運動量の切断を連続に動かしたときの有効作用の変化を、正確な繰り込み群の方程式に書きました。そのうえで、摂動の繰り込み可能性を示しました[既知]。数学の側にも同じ方程式があります。ガウス測度の共分散を尺度ごとの和に分け、細かい尺度から一枚ずつ積分すると、残りの有効な作用 V_t がこの方程式に従います。e^{-V_t} に直すと、ガウスの核による畳み込み、つまり熱方程式の流れです[既知]。対は方程式どうしなので、「Polchinski の方程式」の項の (a) は確定です。

この方程式の上に立つ判定法もあります。log-Sobolev 不等式は $\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \le 2C \int |\nabla f|^2 d\mu$ の形の不等式です。Poincaré 不等式 $\mathrm{Var}_\mu(f) \le C \int |\nabla f|^2 d\mu$（1-10）の分散をエントロピー $\mathrm{Ent}_\mu(g) = \int g \ln g \, d\mu - \int g \, d\mu \, \ln \int g \, d\mu$ に替えた、より強いもので、確率的な力学が平衡に戻る速さを保証します。Bauerschmidt–Bodineau（2021）は Polchinski の方程式の制御によって Bakry–Émery の判定法（1-10）を多重スケールに広げました。そして、質量つきの連続 sine-Gordon 模型（二次元の模型、その結合 $\beta_{\mathrm{sG}} < 6\pi$）で漸近的に最適な log-Sobolev 不等式を示しました[既知]。判定法は対の上に立つ道具なので、条件の側に置きます。四次元への適用は無いので、(b) は「無い」です。

03 格子の上の流れ — MCRG と一度きりのずれ

MCRG（Swendsen 1979）は、$b = 2$ でブロック化した観測量が結合 $\beta - \Delta\beta$ の格子と合うよう $\Delta\beta$ を決めます。SU(3) の最初の結果（Gupta ほか 1984）は、基本表現の結合 $K_F < 6.1$ で漸近スケーリングが無いと報告しました[既知]。$\Delta\beta$ は a を 2 倍にしたときの β の下げ幅で、4-06 の表 4 の「a を半分にする上げ幅」と同じ量を、別の方法で測るものです。数学の対は一段の写像 $\beta \mapsto \beta - \Delta(b)$（$\Delta(b)$ は一段の減りで、質量ギャップの Δ とは別）で、同じ射影（Wilson 形への合わせ方）を選べば同じ量です（「MCRG の Δβ」の項）。

同じ定め方（スキーム）の中の一段を考えます。弱結合（$\beta \to \infty$）の主項で Δ が β に依らないとすると、二段続けても一度に $b_1 b_2$ 倍しても同じなので

$$\Delta(b_1 b_2) = \Delta(b_1) + \Delta(b_2) \quad \Longrightarrow \quad \Delta(b) = C \ln b \tag{3}$$

です（単調性の下の Cauchy の関数方程式）。定数 C は加法性だけでは決まらず、(1)（一ループ）と比べて $C = \kappa$ です。二ループ以降では Δ に $O(1/\beta)$ の β 依存が残り、(3) はそれを無視した主項の式です。

(1) を積分した一ループの式は $\beta = -\kappa \ln(a\Lambda)$ です（4-06 の式 (8) の一ループの部分）。定め方の取り替え $\tilde{\beta} = \beta - c + O(1/\beta)$ は、写像を共役で移すだけで Δ の主項を変えません。変わるのは Λ の読みで、$\tilde{\beta} = -\kappa \ln(a \Lambda e^{c/\kappa})$ から $\tilde{\Lambda} = \Lambda e^{c/\kappa}$、つまり Λ が一度だけ $e^{c/\kappa}$ 倍になります（「Λ のスキーム変換」の項）。Dashen–Gross（1981）はこの比を $\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}/\Lambda_{\mathrm{L}} = 38.852704\, e^{-3\pi^2/(11N^2)}$（N = 2 では 19.823）（Wilson 作用）と求めました既知 。

計算 表 1　Dashen–Gross の比と、それに当たる β のずれ $c_N = \kappa_N \ln(\text{比})$（$\kappa_N = 11N^2/12\pi^2$）。$c_N$ は β を下げる量で、$\beta_{\overline{\mathrm{MS}}} = \beta_{\mathrm{L}} - c_N$（$\mu = 1/a$ で比べた一ループの関係）。段数は $c_N/(\kappa_N \ln 2)$

N	比	c_N	段数
2	19.823	1.1096	4.309
3	28.809	2.8092	4.848
∞	38.853	–	5.280

SU(2) では $c_2 = 1.1096$ が、$b = 2$ の一段の走り $\kappa \ln 2 = 0.2575$ の約 4.3 段ぶんです。Wilson 作用から $\overline{\mathrm{MS}}$ へ移ることは、β を一度だけ約 4.3 段ぶん下げること、つまり a を 2 倍にする段を一度だけ約 4.3 回余計に進めるのと同じです。段ごとに定数がずれる写像 $\Delta(b) = \kappa(\ln b - \delta(b))$ は (3) を破り、Λ の読みを段ごとに動かします。本書の検討の記録はこの形で $\delta(b)$ を「取りこぼし」と呼びます（23-02・18-05）。

04

Migdal–Kadanoff と階層格子 — 近似を別の格子の正確な再帰と読む

Kadanoff（1976）は Migdal（1975）の再帰式を決定化（decimation）の近似として導き直し、ポテンシャル（ボンド）移動の方式を提案しました（要旨）既知 。ここでは一段を二つの操作の組として書きます。**ボンド移動**は b^{d-2} 枚のプラケットを一か所に集め、重み f を $f^{\,b^{d-2}}$ にします。**決定化**は平面の $b \times b$ 枚を一枚にまとめます。決定化は二次元で正確です（7-02）。

記号を一行ずつ置きます。SU(2) の元 U の固有値を $e^{\pm i\theta}$ とし、Wilson 作用の一枚の重みを $e^{\beta \cos\theta}$（$\beta = 4/g^2$）と書きます。χ_n は n 次元の既約表現（スピン $(n-1)/2$）の指標で、$\chi_n(U) = \sin n\theta / \sin\theta$、次元は $d_n = n$ です。I_n は修正 Bessel 関数 $I_n(x) =$

$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\theta}\cos n\theta\,d\theta$ です。重みを指標で $f=a_1\sum_n d_n c_n \chi_n$ と展開した係数 c_n（$c_1=1$）を規格化した係数と呼び、決定化は $c_n \mapsto c_n^{b^2}$ です。7-02 は重みを $e^{\beta\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U}$ と書くので、7-02 の β はこの章の $\beta/2$ です。

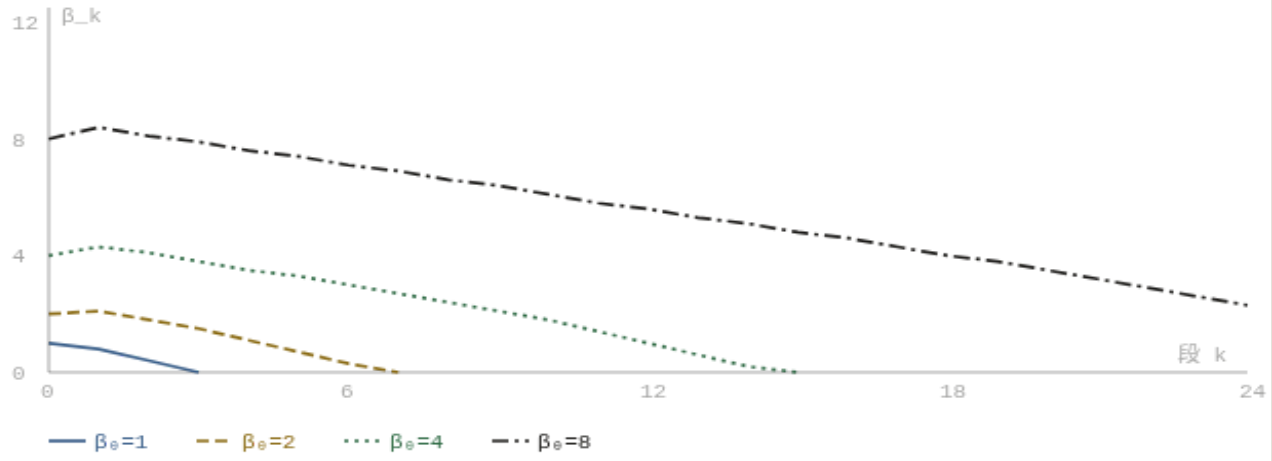
$$c_n \longmapsto \left[c_n\left(f^{\,b^{d-2}}\right)\right]^{b^2}, \qquad \text{SU(2) の Wilson 作用では } c_2=\frac{I_2(\beta)}{I_1(\beta)} \tag{4}$$

近似はボンド移動にだけあります。二つの操作を入れ子に繰り返して作った格子（階層格子）の上では、(4) は構成から正確になります。スピン系の階層格子には Griffiths–Kaufman（1982）があります。ゲージ理論では Ito（1985）が、MK の再帰が正確に成り立つ四次元の階層格子のゲージ理論で、SU(N) などの群について永久閉じ込めを示しました（要旨 'hierarchical lattice gauge theories in which the Migdal-Kadanoff approximate renormalization recursion formulas hold exactly'）既知。物理の「近似」は、数学では「別の格子の上の正確な写像」です（「Migdal–Kadanoff」の項。(b) はこの階層格子の水準）。

例：強結合では $c_2\approx\beta/4$ なので、$d=4$・$b=2$ の一段は $\beta'\approx 4\beta^4$、決定化だけなら $\beta^4/64$ です（$\beta=0.1$ で 3.895×10^{-4}・1.560×10^{-6}）計算。後者は記録の一段の記帳（23-02）の強結合の式で、因子 b^{d-2} の不足は記録でも既知です。

流れの行き先と一段の減り

図 1　Migdal–Kadanoff の流れ（$b=2$）。つまみで d、ボタンで群を変えると、四つの出発点からの β_k の行き先が変わる。「動かす」で段を進める。線の色と破線の型は、下端の凡例の出発点 β_0 に対応する



d = 4・SU(2)：1 → 強結合へ　2 → 強結合へ　4 → 強結合へ　8 → 24 段で 2.3 まで下がる

計算 この図の数値はこの端末で計算した（重み関数を 8000 点・指標 400 個で反復し、β は (4) の c_2、U(1) は I_1/I_0 で読む）。JavaScript が無ければ次の二段落で読める。

$d<4$ では強結合へ、$d>4$ では弱結合へ流れ、$d=4$ が境目です。$d=4$ の SU(2) は、調べた出発点（$\beta_0\le 20$）ではすべて強結合へ向かいます（$\beta_0=8$ は 31 段、20 は 79 段で $\beta<0.05$

）計算。U(1) は、出発点が $\beta_0 \geq 1$ なら $\beta \approx 1.4$ 以上の値で止まり、固定点の線に乗ります（5-06）。一段目は Wilson 形から再帰の決まった形へ移るので上がり、これも一度きりのずれです。

弱結合で形が落ち着いた後の一段の減り（$d=4$・SU(2)、$\beta_0 = 60$ から 10 段目）は、$b = 2, 3, 4$ で 0.2503・0.2965・0.3126 です計算。一ループが与える一段 $\kappa \ln b$ は 0.2575・0.4081・0.5150 です。MK の値は、下の寄り道の式 $(1 - b^{-2})/3$（0.2500・0.2963・0.3125）に合います計算。$b = 2$ では一ループの値の 97% ですが、$b = 2$ の二段（0.5006）と $b = 4$ の一段（0.3126）が違い、(3) を満たしません。MK の $a(\beta)$ は b に依ります。

寄り道：一段の減りが (1−b⁻²)/3 になる理由

飛ばしてよい小節です。

決定化 $c_n \mapsto c_n^{b^2}$ で形を保つ重みがあります。係数が $c_n = e^{-(n^2-1)/(2\beta)}$ の重みで、SU(2) の**熱核**と呼ばれます（7-02 §04 の Q_t で $t = 4/\beta$ としたもの）。決定化はこれを $\beta \mapsto \beta/b^2$ と動かすだけです。θ が小さいとき、この重みは

$$f_\beta(\theta) \propto \frac{\theta}{\sin\theta}\, e^{-\beta\theta^2/2}, \qquad \frac{\theta}{\sin\theta} = 1 + \frac{\theta^2}{6} + \cdots \approx e^{\theta^2/6}$$

と書けます既知。Wilson の重み $e^{\beta\cos\theta} \approx e^{\beta} e^{-\beta\theta^2/2}$ とは、前因子 $\theta/\sin\theta$ だけが違います。ボンド移動で b^2 乗すると（$d=4$）、前因子も b^2 個掛かります。熱核の形に要るのは一個なので、余分な $b^2 - 1$ 個が $e^{(b^2-1)\theta^2/6}$ として指数に入ります。

$$f_\beta^{b^2} \propto \frac{\theta}{\sin\theta}\, e^{-\left(b^2\beta - \frac{b^2-1}{3}\right)\theta^2/2}: \qquad \beta \;\mapsto\; b^2\beta - \frac{b^2-1}{3} \xrightarrow{\text{決定化}} \beta - \frac{1-b^{-2}}{3}$$

一段の減りは $(1-b^{-2})/3$ で、β に依りません。$\kappa \ln b$ と違って b について加法的でないのは、減りが対数からでなく、$\theta/\sin\theta$ の θ^2 の係数 $1/6$ から来ているからです。この計算は小さい θ の主項だけなので、本文の数値との一致（0.2500 と 0.2503 など）は計算で確かめた範囲です計算。

本書での使い方は 15-04 §02（同じ一段の写像の不変な曲線と縮み）。

05

連続極限と a(β) — 二つのスケーリング

連続極限（「連続極限」の項）について、Chatterjee（2018）§5 は物理の用法をまとめます。臨界点 β_c で相関長が発散すれば 'the model has a continuum limit' と言う、という用法です既知。スケーリング極限は、格子を $\varepsilon\mathbb{Z}^d$ に縮め、場を規格化して分布として弱収束させる操作で（2-08）、何を固定するかと規格化を指定すれば同じ操作です。物理の語が含む非自

明性は定義に入らず、四次元の Ising 型と ϕ^4 の極限はガウス的です（Aizenman–Duminil-Copin 2021、7-08）。

$a(\beta)$（「a(β)・尺度の設定」の項）の選び方は二通りあります。§5 の説明は相関長を固定し、連続の弦張力の問題は Wilson ループで存在量化します（18-03 の式 (4) と同じ式）。

$$\log\langle W_{R/\varepsilon,\,T/\varepsilon}\rangle = -c\,(R+T) - d\,RT + o(1), \qquad \varepsilon(\beta)\to 0,\ c(\beta)\to\infty,\ d\neq 0 \tag{5}$$

ここの d は面積則の係数（連続の弦張力に当たる数）で、(8) の次元 d とは別の記号です。連続の弦張力の問題は格子の相関長の問題（Problem 5.1）を前提にせず、どちらの $\varepsilon(\beta)$ も存在は未証明です。物理は弦張力（Creutz 1980）や r_0（Sommer 1994）で尺度を決めます物理。

スケーリング（「スケーリング」の項）は無次元の比が a に依らなくなること、**漸近スケーリング**（「漸近スケーリング」の項）は $a(\beta)$ が二ループの式に従うことです。

$$\frac{m_{\mathrm{lat}}(\beta)}{\sqrt{\sigma_{\mathrm{lat}}(\beta)}} \to \text{定数} \qquad \text{と} \qquad a\Lambda_{\mathrm{L}} = (b_0 g^2)^{-b_1/(2b_0^2)} e^{-1/(2b_0 g^2)}\bigl(1+O(g^2)\bigr) \tag{6}$$

格子の数値では、二つは別々に振る舞います。右のずれは、SU(3) の MCRG が $K_F<6.1$ で漸近スケーリングを見ないという報告（Gupta ほか 1984）に現れます。4-06 の表 4 でも、a を半分にする上げ幅のデータ（0.35〜0.52）が二ループの値（約 0.61）に届きません物理。左は、a^2 の補正を仮定した外挿で無次元比が一つの値に揃うことで支持されています（Lucini–Teper 2001 の $m/\sqrt{\sigma}$、Lüscher 2010 の $\sqrt{8t_0}/r_0$）物理。SU(N)・$N>4$ の当てはめは、$a(\beta)$ を $\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}$ 単位で決め切りません（Allton–Teper–Trivini 2008）物理。数学の対は、左が格子の相関長の問題と連続の弦張力の問題の組の極限（18-03 の「m/√σ」の項）、右が $\varepsilon(\beta)$ の漸近形で、どちらも定理はありません（5-05・5-09）。

06

普遍性・Symanzik・周辺性 — 変数の違う二つの誤差

普遍性（「普遍性」の項）は、作用の細部に依らず同じ極限が出ることです。Griffiths（1970）らが仮説として述べ、Wilson（1971）が無関係変数で説明しました。数学では極限の一意性で、定理は二次元にあります。等径グラフ上の Ising（Chelkak–Smirnov）と、二次元トーラス上の自明束の YM 測度で Wilson・Villain・Manton の作用が同じ測度に行くこと（Chevyrev–Shen）です既知。四次元では、Wilson 作用と改善作用が同じ理論を与えるのは前提です。

Symanzik（1983）の改善（「Symanzik の O(a²)」の項）は、無関係な項を足して有限の a の誤差を系統的に減らす考えです。一つの作用のもとで、無次元の比の誤差を a で展開します。

$$R(a) = R(0)\big(1 + s\,a^2 + \cdots\big)\ \ (a \to 0 \text{ で消える}) \qquad \text{対} \qquad \sum_{j<k} \kappa\,\delta(b_j)\ \ (\text{段ごとに溜まる}) \tag{7}$$

ヤン–ミルズでは a^2 の対数補正も弱いとされます（Husung–Marquard–Sommer 2020）既知。記録の $\delta(b) = c_2/b^2 + c_3/b^3 + O(b^{-4}\ln b)$ は倍率 b の展開で変数が違い、Symanzik との対は類比にとどまります（未確定）。例：20 段で、左は $4^{-20}s \approx 9\times10^{-13}s$、右は b 固定なら $20\kappa\delta(2)$ です。倍率を段ごとに一つずつ大きくした例 $b_j = j+2$ では、主項だけで $2.39\kappa\delta(2)$（段を限りなく続けた極限は $4(\pi^2/6-1) \approx 2.58$ 倍）です計算。

改善の代償（「改善作用」の項）

Lüscher–Weisz（1984）は、次元 6 の演算子を Wilson 作用に足すと 'physical positivity is lost in general' と書き、それでも転送行列は定義できることを示しました。その性質は二つです。複素固有値は現れうる（'may occur'）。二点関数のスペクトル分解には、負の重みの寄与が必ずある（'there are always contributions … that come with a negative weight'）既知。反射正値性（5-03）の言葉で言えば、「改善作用」の項の数学の語は「反射正値性の喪失（負の重みの寄与）」で、根拠は 'always' の側です。(a) は、次元 6 の演算子を足した作用について確定です（判定者は定理）。記録で $\delta(2)=0$ にする核も負の重みを持ち、同じ型かは 18-05 で扱います。

周辺性（「周辺的な結合」の項）

$A_\lambda(x) = \lambda A(\lambda x)$ と縮めると

$$\int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{tr} F_\lambda^2\, d^d x = \lambda^{4-d} \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{tr} F^2\, d^d x, \qquad g^2 \sim (\text{長さ})^{d-4} \tag{8}$$

で、$d=4$ で作用が尺度不変です（図 1 の境目）。数学では Sobolev の臨界指数です。L^p ノルム $\|F\|_{L^p} = (\int |F|^p\, d^dx)^{1/p}$ は p が大きいほど強い制御で、縮めると $\|F_\lambda\|_{L^p}^p = \lambda^{2p-d}\|F\|_{L^p}^p$ です。尺度を変えても変わらない指数 $p = d/2$ が臨界指数です（1-11・1-12）。Uhlenbeck（1982）の弱コンパクト性（接続の列から収束する部分列を取り出す定理）は、曲率の L^p の有界性で $p > d/2$ を要します。四次元の作用は $p = 2 = d/2$ で、ちょうど閾値です既知。問題文は、Sobolev 不等式が境界にある場合を漸近自由が救うという見通しを書きます（0-03）。一致は古典の次元勘定までです（7-09・四次元の記事）。

07

大 N・マスター場・ホログラフィー・KK 塔 — 別の尺度を足す語

この節の四つの語は、四次元の時空の外に尺度を一つ足して理論を見ます。足すのは、群の大きさ N、境界から内部への深さ、丸めた余剰次元の大きさです。

大 N と平面図（「大 N・平面図」の項）

't Hooft（1974）は、$\lambda = g^2 N$ を固定して $N \to \infty$ とすると平面図が支配すると示しました（摂動論、17-04）。定理として一致するのは二つです。行列模型の平面地図（Guionnet–Maurel-Segala）と、強結合の SO(N) 格子の Wilson ループを弦の軌跡の和で書いたもの（Chatterjee・Basu–Ganguly）です[既知]。

マスター場

$N \to \infty$ で揺らぎが消え、ゲージ不変量が一つの配位で決まる、という考えです。数学では非可換分布の決定的な極限に当たります。非可換分布は、$N \times N$ の確率的な行列の組 $X_1, X_2, \dots$ について、積のトレースの期待値 $\frac{1}{N}\mathbb{E}\,\mathrm{tr}(X_{i_1}\cdots X_{i_k})$ の全体を、行列の「分布」とみなしたものです（自由確率論の言葉）。平面の二次元ヤン–ミルズでは、Wilson ループがこの意味で決定的な極限に近づくことを Lévy が示しました（17-04）[既知]。

ホログラフィーの動径

内部の赤外が境界の紫外に映る（Susskind–Witten 1998）ことから、動径は境界の尺度と読まれます（17-08）。数学で確かなのは、境界近くの計量の展開（Fefferman–Graham）だけです。これは境界からの深さ z の冪で内部の計量を展開する式で、$ds^2 = (dz^2 + g_z)/z^2$、$g_z = g_{(0)} + z^2 g_{(2)} + \cdots$（$g_{(0)}$ が境界の計量）の形をとります[既知]。物理の側も、切断との対応を 'left unanswered' とします（Heemskerk–Polchinski 2010）[物理]。

KK 塔

余剰次元を内部空間 K に丸めると、質量の列が現れます。歪みの無い直積上の質量ゼロのスカラーなら

$$m_1^2 = \lambda_1(\Delta_K) \qquad (\text{半径 } R \text{ の円なら } 1/R^2) \tag{9}$$

です（17-06）[既知]。$\lambda_1(\Delta_K)$ は K の上のラプラシアンの 0 でない最小の固有値です。KK 塔を Λ から離しつつ幾何の計算を保つ構成は知られていません（17-10）。純ヤン–ミルズには余剰次元が無いので、(b) は対象外です。

08

位相・インスタントン・Wilson 流・Gribov 領域 — 古典では確定する語

この節の四つの語は、古典の場について定理で数学の語と一致します。量子の場に持ち込むところで、条件か物理の水準になります。

インスタントン

この節の規約は A-01 と同じで、g を作用の前に出し、F には含めません：$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]$（$A_\mu = A_\mu^a T^a$）。エルミートな生成子は $\operatorname{tr} T^a T^b = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ と規格化するので、作用は $S = \frac{1}{2g^2}\int \operatorname{tr} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{4g^2}\int F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}$ です。双対を $\tilde F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$（$\varepsilon$ は完全反対称で $\varepsilon_{1234} = 1$）と置くと、$\int (F^a \mp \tilde F^a)^2 \geq 0$ から作用は位相電荷で下から抑えられます。

$$S \geq \frac{8\pi^2}{g^2}|Q|, \qquad Q = \frac{1}{32\pi^2}\int F^a_{\mu\nu}\tilde F^a_{\mu\nu}\, d^4x \in \mathbb{Z} \tag{10}$$

等号は（反）自己双対のときに限ります（3-03）。3-03 の (12) は $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$ の正準規格化で書かれていて、$A = gA_{\text{3-03}}$（したがって $F = gF_{\text{3-03}}$）と書き換えると (10) と一致します。BPST（1975）の解、ADHM（1978）の全解の構成、Uhlenbeck（1982）の「$\mathbb{R}^4$ 上の有限作用の場は S^4 から来る」で、古典の対象として確定です[既知]。インスタントンの和で経路積分を近似するのは別の、量子の主張です。

位相電荷

位相電荷は第二 Chern 数です。第二 Chern 数は、閉じた四次元多様体（例：S^4）の上の接続について $\frac{1}{8\pi^2}\int \operatorname{tr} F\wedge F$ で決まる整数で（A を反エルミートに取る書き方、A-01）、接続を連続に変えても変わりません（1-07 の第一 Chern 数の四次元版）。(10) の Q とは符号の約束だけが違います（3-05 の寄り道）。格子では、各プラケット U_p が単位元に十分近い（作用密度が閾値より小さい、admissible な）場から束を作れて、整数になります（Lüscher 1982、3-05）[既知]。それ以外ではセクターは 'a dynamical property of the theory' です（Lüscher 2010、SU(3)）[物理]。

Wilson 流

Wilson 流は、流れの時間 t を足して場をならす方程式 $\dot B_\mu = D_\nu G_{\nu\mu}$、$B_\mu|_{t=0} = A_\mu$ です。$G_{\mu\nu}$ は B の場の強さ、D_ν は B による共変微分です。作用の最急降下で、方程式はヤン–ミルズ熱流そのものです。半径 $\sqrt{8t}$ は、熱核 $e^{t\Delta}$ の広がり $\langle |x|^2\rangle = 2dt$ の $d = 4$ の値です。量子の場への作用は、三次元の GFF 仮定の下（Cao–Chatterjee）と、確率量子化による二次元の YM・三次元の YMH（Higgs 場を含む模型、CCHS）までです[既知]。四次元は Lüscher の 'suggest' の段です[物理]。

Gribov 領域

Gribov（1978）は Landau ゲージ $\partial_\mu A_\mu = 0$ の曖昧さに対し、FP 行列式が正の場に積分を制限しました（3-04・4-08）。FP 作用素 $M(A) = -\partial_\mu D_\mu(A)$ は、ゲージ変換で場を少し動かしたときのゲージ条件の変化を表す作用素で、その行列式が経路積分に掛かる Faddeev–Popov の行列式です。$D_\mu(A)X = \partial_\mu X - i[A_\mu, X]$ は A について一次なので

$$\Omega = \{A:\ \partial_\mu A_\mu = 0,\ M(A) \geq 0\}, \qquad M\big(tA_1 + (1-t)A_2\big) = tM(A_1) + (1-t)M(A_2) \tag{11}$$

から Ω は凸です（$M \geq 0$ は作用素として半正定値の意味）。Zwanziger（1982）は 'bounded in every direction' を示し、Dell'Antonio–Zwanziger（1991）はどの軌道もこの領域に入ることを示しました[既知]。その上の測度が閉じ込めを生むという絵は物理の水準です（17-02）。

09

数学の側に語の無かったもの — トレース異常

古典の四次元ヤン–ミルズでは、(8) の尺度不変性から、エネルギー運動量テンソルの跡 $T^\mu{}_\mu$ が消えます（3-03）。跡は、場を $x \mapsto \lambda x$ で縮めたときの作用の変化を局所的に測る量で、尺度を変えても作用が変わらなければ 0 になります。量子論では、揺らぎを積分するのに切断（格子間隔など）が要り、そこで一つの長さが入ります。結合 $g(\mu)$ はその長さに対して走るので、尺度不変性は壊れます。壊れ方を局所的に書いたのがトレース異常です。

ここでは F を正準規格化（$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$、3-03 の規約）で書きます。(10) の規約の場とは $F_{(10)} = gF$ の関係で、(12) を (10) の規約で書くと係数は $\frac{\mu\, dg/d\mu}{2g^3}$ になります。

$$T^\mu{}_\mu = \frac{\mu\, dg/d\mu}{2g}\, F^a_{\mu\nu} F^{a\,\mu\nu}, \qquad \mu\frac{dg}{d\mu} = -b_0 g^3 + O(g^5) \tag{12}$$

これは標準形として引く式で（規格化は文献で異なる。Collins–Duncan–Joglekar 1977）[物理]、係数は β 関数そのものです。漸近自由（$\mu\, dg/d\mu < 0$）のもとで跡は 0 になりません。これが次元転移（4-07）の局所的な機構です。2026 年の公開より前は、数学の側に対応語がありませんでした。四次元の連続理論が無く、この演算子を置く場所が無かったからです（18-03 の Λ と同じ）。2026-11-10 に公開された構成は、繰り込んだ局所作用素として応力テンソルとその跡を定義し、その性質を示した、と委員会は評価しています（13-02 跡の異常と、自由でないこと）。摂動論との全ての次数での一致は示されていません（6-04）。表 0 の (a) が確定の 7 行は方程式・定義・古典の一致で、(b) が四次元の連続の量子論で「在る」行は、公開より前の読みでは一つもありません（付け直すなら「トレース異常」の項が動く候補です。18-01 §09）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 (3) の主項（$O(1/\beta)$ を除く）と共役によるスキーム変換、Dashen–Gross の比、(8)(10)(11)、階層格子の上で MK が正確なこと（Ito 1985）、(a) が確定の行。	(b) が「無い」行の対象の存在。条件つき・未確定の対の行方。
計算 表 1・図 1、§ 04・§ 06 の数値。物理 (12)・漸近スケーリングとスケーリングの数値・動径。	MK と物理の札は定理ではない。
記録の $\delta(b)$ と Symanzik は展開の変数が違うこと。	δ の総和可能性（18-05）。流れ・連続極限・質量ギャップは何も示さない。

出典と再現

もの	種別	出典・道具（確認の水準）
流れ（§ 02・§ 03）	既知	要旨で確認：Wilson, PRB 4 (1971) 3174；Bałaban, CMP 109 (1987) 249・122 (1989) 355；Gawędzki–Kupiainen, PRL 54 (1985) 2191；Polchinski, NPB 231 (1984) 269；Bauerschmidt–Bodineau, CPAM 74 (2021) 2064；Swendsen, PRL 42 (1979) 859；Gupta ほか, PRL 53 (1984) 1721；Dashen–Gross, PRD 23 (1981) 2340。本文：Chatterjee, arXiv:1803.01950。
MK・階層格子（§ 04）	既知	要旨で確認：Kadanoff, Ann. Phys. 100 (1976) 359；Ito, PRL 55 (1985) 558。書誌のみ：Migdal, JETP 42 (1975) 413；Griffiths–Kaufman, PRB 26 (1982) 5022（スピン系の階層格子）。
極限・普遍性・改善（§ 05・§ 06）	既知・物理	要旨で確認：Aizenman–Duminil-Copin, Ann. Math. 194 (2021) 163；Creutz, PRD 21 (1980) 2308；Sommer, NPB 411 (1994) 839；Allton–Teper–Trivini, JHEP 07 (2008) 021；Griffiths, PRL 24 (1970) 1479；Chelkak–Smirnov, arXiv:0910.2045；Chevyrev–Shen, arXiv:2302.12160；Symanzik, NPB 226 (1983) 187；Lüscher–Weisz, NPB 240 (1984) 349；Husung–Marquard–Sommer, EPJC 80 (2020) 200；Uhlenbeck, CMP 83 (1982) 11・31。本文：Lucini–Teper, JHEP 06 (2001) 050；Lüscher, JHEP 08 (2010) 071；Jaffe–Witten（Clay の問題文）。
§ 07	既知・物理	要旨で確認：'t Hooft, NPB 72 (1974) 461；Guionnet–Maurel-Segala, arXiv:math/0503064；Chatterjee, arXiv:1502.07719；Basu–Ganguly, arXiv:1608.04379；Lévy, arXiv:1112.2452；Susskind–Witten, hep-th/9805114；Heemskerk–Polchinski, arXiv:1010.1264；Fefferman–Graham, arXiv:0710.0919。Fefferman–Graham の原典は 1985 年とされる（書誌のみ・未照合）。
§ 08・§ 09	既知・物理	要旨で確認：Lüscher, CMP 85 (1982) 39；BPST, PLB 59 (1975) 85；ADHM, Phys. Lett. A 65 (1978) 185；Cao–Chatterjee, arXiv:2111.12813；CCHS, arXiv:2006.04987・2201.03487；Gribov, NPB 139 (1978) 1；Zwanziger, NPB 209 (1982) 336；Dell'Antonio–Zwanziger, CMP 138 (1991) 291；Collins–Duncan–Joglekar, PRD 16 (1977) 438（要旨に式は無く、(12) の規格化は未照合。(12) は標準形として物理の札）。本文：Lüscher, JHEP 08 (2010) 071。
$\delta(b)$・一段の記帳	記録	本書の検討の記録の整理（23-02・18-05）。

もの	種別	出典・道具（確認の水準）
表 1・図 1・数値	計算	この端末の Python 3：`mk_flow.py`・`mk_steady.py`・`mk_long.py`・`dg_shift.py`・`sym_delta.py`（§06 の 2.39・2.58・9×10^{-13}）。

次に読む章：18-05 本書の仮定の物理側の対応。

本書の仮定の物理側の対応 — 記録の仮定は物理の仮説より強いか

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 18-03・18-04 にあります。

この章で分かること — 本書の検討の記録が数学の言葉で置いた仮定を物理の仮説と一行ずつ突き合わせ、「同じ」「条件つきの言い換え」「類比」を問いの形で付けます。記録の η は $\eta_{\mathrm{dyn}} = 2 - z$ に固定します。

前提となる章 — 18-03（二つの時間・臨界減速）・18-04（スキーム変換）・17-12（尺度は一つ・拡散型緩和時間の仮定・三つの鎖）。二列の格は 18-01。緩和時間の仮定の詳しい扱いは後の部の 23-01 にあります。

先に言うこと — 対応は問いと類比として置くもので、仮定はどれも証明されていません。どの行も質量ギャップや連続極限について何も示しません。

この章の順序

1. 見取り図 — 仮定を物理の仮説に当て、同じ・条件つき・類比に分ける（表 0）
2. 記録の η を一つに固定する — 冪の形の η は動的な η_dyn = 2 − z
3. 拡散型緩和時間の仮定と z = 2 — 冪は同じでも、定数倍の一様性は正規化しだいで対数で破れる（表 1）。寄り道：拡散はなぜ ξ^2 か
4. 緩和時間の上界の仮定と z ≤ 2 — 言い換えが成り立つための三つの条件（図 1）
5. 緩和時間の下界の仮定と臨界減速の下界 — 不等式は同じで、次元 4 の演算子は ξ^2 に届かない（表 2）
6. 取りこぼしの総和可能性 — 段ごとのずれとスキーム変換・MCRG・負の重みの核
7. 物理単位の隙間の言明の同値 — 質量の不変性と z = 2 の積として読め、前提を外すと打ち消しが起きる（図 2・表 3）
8. 尺度が一つと余剰次元 — 模型の中の次元解析で、類比にとどまる
9. 既知と確定したもの — 成果に数えない五つの行

01

見取り図 — 仮定を一行ずつ物理の仮説に当てる

本書の検討の記録は、連続極限へ向かう筋を「段の記帳」の列として書き（23-01）、途中で数学の言葉の仮定を置きました。物理の古い仮説に当てた答えは三通りで、**同じ**（同じ不等式か定義に帰着する）、**条件つきの言い換え**（冪の形や力学の選び方を足せば同じ）、**類比**（形は似ているが結ぶ定理が無い）です。18-01 の定義の列の確定・条件つき・未確定に当たります（実在の列はどの行も「無い」）。中心の緩和時間の仮定は上下の二つに割れます。

$$(\xi^2)\ (C_P \asymp \xi^2)\ =\ (\xi^2)\uparrow\,(C_P \lesssim \xi^2)\ \wedge\ (\xi^2)\downarrow\,(C_P \gtrsim \xi^2)$$

式の中の (ξ²) は拡散型緩和時間の仮定、(ξ²)↑ は上界の仮定、(ξ²)↓ は下界の仮定です。

表 0　記録の仮定と物理の側の候補（「強い」は記録の仮定のほうが強いこと。γ・ν は感受率・相関長の指数で 18-03 §07）

記録の仮定	物理の側の候補	(a)・強さ
緩和時間の仮定：$C_P \asymp \xi^2$	動的指数 $z=2$（model A）	未確定・強い
上界の仮定：$C_P \lesssim \xi^2$	冪の形の下での $z \le 2$	条件つき・同じ
下界の仮定：$C_P \gtrsim \xi^2$	下界 $z \ge \gamma/\nu$	条件つき・強い
$\sum_k \delta(b_k) < \infty$	スキーム変換・MCRG・射影の誤差	未確定
物理単位の隙間の言明 $\Longleftrightarrow \sum\delta<\infty \wedge \eta_{\mathrm{dyn}}=0$	質量の繰り込み群不変性＋$z=2$	未確定
尺度が一つ $\Longleftrightarrow$ 余剰次元が見える	KK の非分離	未確定

02

記録の η を一つに固定する — $\eta_{\mathrm{dyn}} = 2 - z$

記録の η は二つの量を指していました（18-03 §07）。**静的な** η_s は演算子 O の尺度次元 Δ（質量ギャップの Δ とは別）から $\eta_s(O) = 2\Delta - (d-2)$ と決まる相関の冪で、記録の Lean の定理のうち静的な指数を扱うもの（定理名と仮定は 23-13）はこちらです。C_P と相関長 ξ の冪の形に入っているのは**動的な**指数です。

$$C_P \asymp \xi^{\,2-\eta} \quad \text{と} \quad C_P \asymp \xi^{\,z} \quad \Longrightarrow \quad \eta = 2 - z =: \eta_{\mathrm{dyn}} \tag{1}$$

この本は冪の形と物理単位の隙間の言明の同値（§07）の η を η_{dyn} に固定し、η_s は試験関数の下界（§05）にだけ使います。二つが等しいのは従来理論 $z = 2 - \eta_s$ の中だけです。

代償が一つあります。記録は同値の前提 $\eta \geq 0$ を、Källén–Lehmann の正値性（18-02）を根拠に仮定として置いていました。その正値性から出るのは $\eta_s \geq 0$ です（ユニタリ性の限界）物理。二次元 Ising の Glauber 力学では $\eta_s = 1/4$ でも $\eta_{\mathrm{dyn}} = -0.1665$ です（18-03 表 2）。前提 $\eta_{\mathrm{dyn}} \geq 0$ は $z \leq 2$、つまり冪の形の上界の仮定（§04）を前提に含めることです。

03

緩和時間の仮定と $z = 2$ — 冪は同じでも、定数倍の一様性が違う

緩和時間の仮定は、Langevin 力学の最も遅い緩和の時間 C_P が、相関長の二乗と格子間隔に依らない定数倍で並ぶという仮定です（18-03 §05・23-01）。

$$c\,\xi^2 \;\leq\; C_P \;\leq\; C\,\xi^2 \qquad (0 < c \leq C \text{ は格子間隔に依らない}) \tag{2}$$

(2) は帯の水準の書き方で、$\mathcal{E}$ の正規化に依ります（下の (3)）。記録の約束では緩和時間の仮定を冪の水準 $\lim \ln C_P / \ln \xi = 2$ で置き、帯の水準は正規化を名指しした別の仮定として分けます（§03 の末尾・23-01）。

物理で一番近いのは、動的スケーリングの仮説 $\tau \propto \xi^z$（Halperin–Hohenberg 1969・Hohenberg–Halperin 1977）で、Langevin 力学（その分類で model A）の z を 2 と置くことです物理。場 A の正規化（下の $s^2 = 1$）の自由場では (2) がちょうど成り立ちます（18-03 表 1）。

問い：緩和時間の仮定は「$z = 2$」と同じか。答え：緩和時間の仮定のほうが強い。仮説は冪だけを言い、定数倍の一様性を言いません。そのうえ (2) は Dirichlet 形 $\mathcal{E}$ の正規化を含みます。ガウス測度 $N(0, s^2(K + m^2)^{-1})$（K は格子のラプラス作用素 $-\Delta$〈ここの Δ はラプラシアン〉、s^2 は振幅、m は質量）に $\mathcal{E}(f) = \mathbb{E}|\nabla f|^2$ を取ると C_P は共分散の最大固有値 s^2/m^2 で、相関長は s に依りません（1-10）既知。リンクの角度 ϑ（$U = e^{i\vartheta \cdot \sigma}$）で書くと $s^2 \propto g^2$、場 $A = \sqrt{\beta}\,\vartheta$（この章の $\beta = 4/g^2$ の規約で $A = 2\vartheta/g$）で書くと $s^2 = 1$ です。この章の β は SU(2) の格子の逆結合 $\beta = 4/g^2$（記号表の $2N/g^2$）で、逆温度ではありません。

ここでの自由近似は、質量 $1/\xi_{\mathrm{RG}}$ を手で入れたガウスの場で代用した模型で、ゲージの向き（零モード）は入れていません。記帳の長さは一ループの走りから決まる格子単位の相関長です（記録は格子間隔を $a := 1/\xi_{\mathrm{RG}}$ と置く、§07）。

$$C_P^{(\vartheta)} = \frac{g^2}{4}\, C_P^{(A)}, \qquad C_P^{(A)} = \xi^2 \quad \text{(自由近似)} \tag{3}$$

記録の $\mathcal{E}$ はリンクの角度で書かれています。一ループの $\ln \xi_{\mathrm{RG}} = 3\pi^2\beta/11 + \text{定数}$（SU(2)、4-06）を入れると、$C_P/\xi^2 \propto 4/\beta$ は $1/\ln \xi$ のように 0 へ落ち、実効指数は $z_{\mathrm{eff}} = 2 - \kappa/\beta$（$\kappa = 4Nb_0 = 11/(3\pi^2)$）です。

計算 表 1　自由近似・SU(2)・リンクの角度の正規化

β	C_P/ξ^2（$\beta=2.5$ で 1）	z_{eff}
2.5	1.000	1.8514
4	0.625	1.9071
100	0.025	1.9963

冪では $z=2$ ですが、リンクの角度の正規化では (2) の下側が対数で破れます。緩和時間の仮定を立てるには、$\mathcal{E}$ を場 A の正規化で書く（$\mathcal{E}_A=\mathcal{E}/\beta$、つまり角度の $\mathcal{E}$ に $g^2/4$ を掛ける。C_P は逆に β 倍になる）か、緩和時間の仮定を冪の水準（$\lim \ln C_P/\ln\xi=2$）で置いて帯の水準の言明は正規化を名指しした別の仮定として分けるか、を先に決める必要があります。相互作用のある理論では確率時間の尺度も繰り込まれるので 既知 （摂動論の水準。23-00 入口 — 階段と、酔歩・物差し・時計・23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定。超対称ヤン–ミルズの一ループで確認された例もあります 物理 ）、どちらの正規化でも対数が消える保証はありません。

辞書の測定の列（有限の測定で届く向き。18-01 §02）で言うと、下界の仮定は「下界まで」の側で、試験関数を一つ示せば C_P の下界が出ます（§05）。**上界の仮定は「届かない」側**です。C_P の上界はすべての f についての不等式なので、試験関数をいくつ足しても、自己相関の測定を有限の時間まで重ねても届きません（1-10 の囲み「上界と下界の非対称」）。上界の仮定と質量ギャップは同じ言明ではありませんが、どちらも下界の側に立つ点で同じ型です。

寄り道：拡散はなぜ ξ^2 か

飛ばしてよい小節です。

酔歩で距離 ξ を均すには ξ^2 歩かかります。自由場の Langevin 力学はフーリエ成分ごとに独立です。

$$d\hat{\phi}_k=-\big(\hat{k}^2+m^2\big)\hat{\phi}_k\,ds+\sqrt{2}\,d\hat{W}_k(s) \tag{4}$$

s は Langevin の時間で、上の振幅 s^2 とは別です。$\hat{k}^2=\sum_\mu 4\sin^2(k_\mu/2)$ は格子の上の $|k|^2$ です。最も遅いのは $k=0$ の速さ m^2、時間にして ξ^2 です。比喩で言えば、長い波ほど遅く均されます。正確には自由場の等式で、相互作用があると揃う保証はなく、揃うと置くのが緩和時間の仮定です。

04

緩和時間の上界の仮定と $z\le 2$ — 言い換えに要る三つの条件

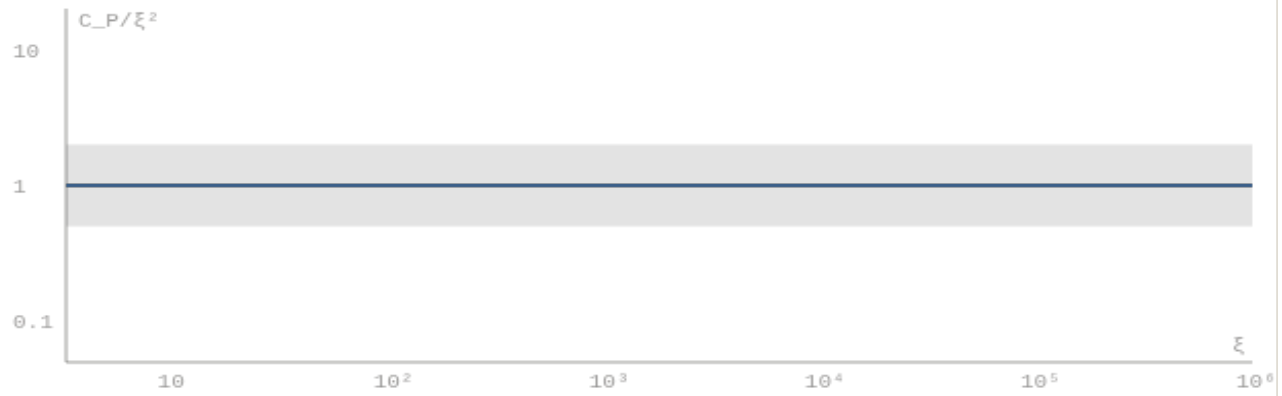
上界の仮定（$C_P\lesssim\xi^2$）は、記録の読み替えで「質量ギャップが正」の側です（17-12 §10）。記録はこれを $z\le 2$ と言い換えます。問い：動的スケーリング仮説の下での言い換えか。答

え：三つの条件の下でなら。(i) 冪の形 $C_P \asymp \xi^{z}$ が在る。(ii) 力学が連続時間の可逆な Langevin である（$C_P = \tau_{\mathrm{exp}}$ はそこでだけ等号、18-03 §06）。(iii) $\mathcal{E}$ の正規化を決めている（§03）。対数の因子の冪を q と書くと、判定は次のとおりです。

$$C_P = \xi^{\,z} (\ln \xi)^{q} \implies \Big((\xi^2)\uparrow \iff z < 2 \ \text{または}\ (z = 2,\ q \le 0) \Big) \quad (5)$$

Hohenberg–Halperin の仮説は z の存在を仮定するだけで、$z \le 2$ を主張しません。18-03 表 2 の Ising の Glauber 力学は二次元・三次元とも $z > 2$ です物理。上界の仮定を物理の予想として読むには「関係する不動点で $\eta_s = 0$」の条件が要り、四次元ヤン–ミルズでそれを述べた一次資料は確かめていません。

図 1　$C_P = \xi^{z} (\ln \xi)^{q}$ のときの C_P / ξ^2（$\xi = 10$ で 1 とした比）。つまみで z と q を変えると、曲線と上界の仮定・下界の仮定の判定が変わる。帯は定数倍 $[1/2, 2]$



z = 2.0000・q = 0.00：ξ = 10⁶ で C_P/ξ²（ξ = 10 で 1）= 1.00　冪の形 はい・z ≤ 2 はい・上界の仮定 成り立つ・下界の仮定 成り立つ・緩和時間の仮定 成り立つ

計算 式 (5) をその場で描く模式図。JavaScript が無いときは次の段落で読める。

例（$\xi \to \infty$）：ξ^2 は両方成り立ち、$\xi^2 / \ln \xi$（角度の正規化）と $\xi^{1.9}$ は上界の仮定だけ、$\xi^2 \ln \xi$ と $\xi^{2.1665}$ は下界の仮定だけです。$\xi^2 \ln \xi$ では冪は 2 なのに上界の仮定が破れ、(i) を外すと「上界の仮定 $\Longrightarrow z \le 2$」の片向きしか残りません。

05

緩和時間の下界の仮定と臨界減速の下界 — 同じ不等式、届かない演算子

下界の仮定（$C_P \gtrsim \xi^2$）は試験関数で示せる側で、どの f でも $C_P \ge \mathrm{Var}(f) / \mathcal{E}(f)$ です（1-10）。物理では「局所的な力学は感受率より速く緩和できない」と言います。磁化を f にすると $C_P \ge \chi$ です（18-03 の式 (12)）既知。動的スケーリングと静的スケーリングの二つの仮説の下では $z \ge \gamma / \nu = 2 - \eta_s$ です（γ は感受率の指数、ν は相関長の指数。18-03）物理。モンテカルロ法の文献で標準とされる下界で、典拠は確かめていません。

問い：下界の仮定はこの下界と同じか。答え：不等式は同じで、届く先が違います。尺度次元 Δ の局所演算子の和を f にすると、下界は感受率 χ_O で決まります。

$$\frac{\mathrm{Var}(\sum_x O_x)}{\mathcal{E}(\sum_x O_x)} \asymp \chi_O \sim \begin{cases} \xi^{\,2-\eta_s(O)} & 2\Delta < d \\ \ln \xi & 2\Delta = d \\ \text{有界} & 2\Delta > d \end{cases} \tag{6}$$

ξ^2 に届くのは $\eta_s(O) = 0$、つまり正準次元 $\Delta = (d-2)/2$ の演算子があるときだけです。四次元の自由場で確かめます。

計算 表 2　四次元格子の自由場で試験関数が与える C_P の下界

m	ξ	次元 1：$\sum \phi$（$= C_P$）	次元 2：$\sum \phi^2$	次元 4：$\sum (\nabla\phi)^2$
1.0	1.04	1	0.0783	0.0537
0.1	10.0	100	0.1719	0.0624
0.01	100.0	10000	0.2657	0.0625

次元 2 は $\ln \xi$ の傾き 0.0408 で伸び（連続の見積もり $1/(16\pi^2 G(0)) = 0.0409$）、次元 4 は $1/16$ で止まります計算。無限体積の積分を一次元に直して計算し、$m = 0.5$ で 24^4 の格子の和と有効数字 5 桁で合わせました。

ヤン–ミルズのゲージ不変な局所演算子は $\mathrm{tr}\, F^2$ の類で次元 4 なので、(6) の三段目に落ちます（23-01）。リンクの角度は次元 1 ですが、ゲージ固定の無い測度では、端点を共有しないリンクの角度どうしの相関は、ゲージ変換で平均すると正確に 0 です（Elitzur の定理と同じ機構、18-02）。下界の仮定は同じ不等式を局所の秩序変数の無い理論で ξ^2 まで押し上げる要求で、その分だけ強いものです。記録は三つの試験関数の族（一部は U(1) の計算）で届かないと確かめましたが、下界の仮定が偽とは言っていません（23-02）。

下界の仮定は記録の読み替えで「物理単位の質量が有限」の側で、Clay の問題文の「非自明」（相互作用がある）とは別の条件です。自由な質量つきの場でも満たされます。

06

取りこぼしの総和可能性 — 段ごとのずれは一回のスキーム変換に収まるか

記録は b 倍に粗くする一段を $\beta \mapsto \beta - \kappa(\ln b - \delta(b))$ と書き、$\delta(b)$ を取りこぼしと呼びます（23-02・18-04 §03）。δ は一ループ核の模型で測った数で、記録の測定では四次元で $c_2/b^2 + c_3/b^3 + \cdots$ の形です計算（$\ln b/b^2$ の項が無いことは検出限界の範囲での話）。倍率 $b_1, b_2, \ldots$ で k 段進むと

$$\beta_k = \beta_0 - \kappa \ln\Big(\prod_{j=1}^{k} b_j\Big) + \kappa \sum_{j=1}^{k} \delta(b_j) \tag{7}$$

です。同じスキームの正確な一段なら第三項は無く（18-04 の式 (3)）、スキームの取り替えは β を一度だけ c ずらします（Dashen–Gross、18-04 表 1）。第三項が収束すれば、段ごとのずれは合わせて $c=\kappa\sum\delta$ の一度きりのずれで、取り替え一回と区別できません。

$$\sum_{j}\delta(b_j)<\infty \iff \text{段ごとのずれが一回のスキーム変換に収まる}\quad(\text{記録の模型の中で}) \tag{8}$$

目安：SU(2) の $\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}/\Lambda_{\mathrm{L}}=19.82$ は $\sum\delta$ で $\ln 19.82=2.987$ に当たります計算 。b を固定すると、有界なのは $\delta(b)=0$ のときだけですLean （`fixed_step_bounded_iff`。仮定：段の誤差が毎段一定）。

問い：(8) は物理のどれか。候補は三つで、どれも類比です。(i) Symanzik の $O(a^2)$ ではありません。展開の変数が a と b で違い、前者は段ごとに溜まりません（18-04 §06）。(ii) MCRG（モンテカルロ繰り込み群。Swendsen 1979 がスピン系で導入）の方法でゲージ理論の $\Delta\beta$ を測った最初の SU(3) の結果は、$K_F<6.1$（K_F は Wilson 作用の結合）で 'no asymptotic scaling' でした（Gupta ほか 1984）既知 。この $\Delta\beta$ と記録の一段の減りは、同じ射影なら定義の上で対応する量です（同定はこの辞書の読み）。(iii) Wilson 形への切り詰めの誤差：切り詰めない完全作用について Hasenfratz–Niedermayer（1994）は 'There exist lattice actions which give cut-off independent physical predictions even on coarse grained lattices' と書きます。δ はこの誤差に近い、というのが一つの読みです。

負の重みの核と反射正値性

記録の計算で $\delta(2)=0$ になったブロック化の核は、隣への重みが負でした計算 。重みが非負なら $c_2>0$ ですLean （`c2_ge_of_nonneg_weights`。仮定：c_2 が重みの量の増加するアフィン関数で重み 0 で正、という測定）。Lüscher–Weisz（1984）の要旨は 'When operators of dimension 6 are added to the standard Wilson action in lattice gauge theories, physical positivity is lost in general.' と書きます既知 。主項を消す負の係数が正値性を奪う、という型は同じです。違いは対象で、向こうは作用（5-03）、記録はブロック化の核です。負の重みの核が反射正値性を壊すかは確かめていません。

07

物理単位の隙間の言明の同値 — 「質量は繰り込み群で不変」と「$z=2$」の積か

記録は物理単位の隙間の言明（物理単位の質量ギャップ）を「a^2C_P が格子間隔 $a=1/\xi_{\mathrm{RG}}$ に依らない正の帯に入る」形で扱い、二つの冪を置きます。

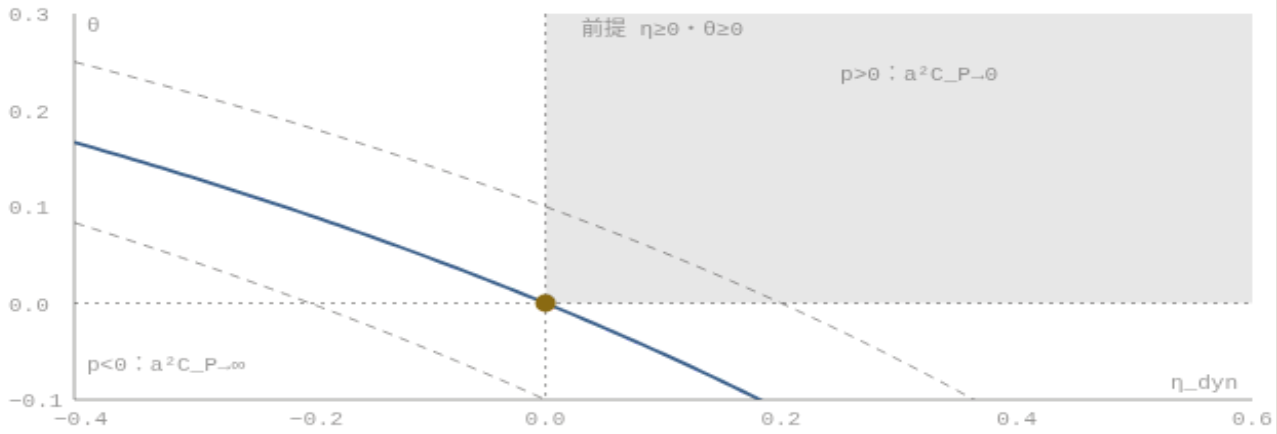
$$C_P\asymp\xi^{\,2-\eta_{\mathrm{dyn}}},\quad \xi_{\mathrm{phys}}=a\,\xi\propto a^{\theta}\ \Longrightarrow\ a^2C_P\propto a^{p},\quad p=\eta_{\mathrm{dyn}}+(2-\eta_{\mathrm{dyn}})\,\theta \tag{9}$$

θ は取りこぼしの溜まりの指数で、b を固定した模型では $\theta = \delta(b)/\ln b$、$\sum \delta < \infty$ なら $\theta = 0$ です。$\eta_{\mathrm{dyn}} \geq 0$・$\theta \geq 0$ なら $p = 0$ は両方 0 と同値で、これが記録の「物理単位の隙間の言明 $\Longleftrightarrow \sum \delta < \infty \wedge \eta = 0$」（記録の η は η_{dyn}、§02）の中身です Lean （`drain_exponent`・`drainExp_eq_zero_iff`。仮定：(9) の冪の形と符号の条件）。段の誤差が加法的で有界なことと、δ が一ループ核の模型の値であることも前提です。

問い：物理の二つの言明の積か。答え：模型の代数の中では、そう読めます。$\theta = 0$ は「物理の質量は繰り込み群で不変で $m_{\mathrm{lat}}(\beta) \propto a(\beta)\Lambda$」という言明です。連続理論が在ると前提すれば、異常次元を持たない量についての Callan–Symanzik 方程式（4-04）から $\theta = 0$ が従う、と物理では扱います（次元転移は 4-07） 物理 。物理はこれを名前の付いた仮説にしていません。数学では Chatterjee（2018）の格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1。$\xi(\beta) \in (0, \infty)$、$\beta \to \infty$ で $\xi \to \infty$）が同じ向きを求めます 既知 。$\eta_{\mathrm{dyn}} = 0$ は $z = 2$ で、§03・§04 の見込みです。

$\eta_{\mathrm{dyn}} \geq 0$ を外すと、$\theta^* = -\eta_{\mathrm{dyn}}/(2 - \eta_{\mathrm{dyn}})$ で $p = 0$ になり、$a^2 C_P$ は一定の帯に入るのに緩和時間の仮定も $\theta = 0$ も成り立ちません（17-12 の図 2 と同じ型）。

図 2　$(\eta_{\mathrm{dyn}}, \theta)$ の平面。つまみで点を動かすと $a^2 C_P$ の行き先と判定が変わる。「動かす」で点が実線 $p = 0$ の上を左へ進み、薄い塗りの外で打ち消しが起きる



`η_dyn = 0.000（z = 2.0000）・θ = 0.000：p = 0.000　a²C_P は 一定の帯　緩和時間の仮定 成り立つ・θ = 0 成り立つ`

計算 式 (9) をその場で描く模式図。薄い塗りは前提の領域、破線は $p = \pm 0.2$。JavaScript が無いときは表 3 で読める。

計算 表 3　打ち消しの例（z は 18-03 表 2）

例	z	η_{dyn}	打ち消す θ^*
二次元 Ising・Glauber	2.1665	−0.1665	0.0769
自由場・Langevin	2	0	0

a を半分にする段を 20 回重ねると、$a^2 C_P$ は $p = -0.1665$ で約 10 倍、打ち消しの点では 1 倍のままです 計算 。数表だけでは緩和時間の仮定の破れと取りこぼしの溜まりの指数を見分け

られません。

08

尺度が一つと余剰次元 — KK の非分離の類比か

この節は 17-09・17-10（葉巻・M_{KK}・超重力）を読んでいると追いやすくなります。記録には「尺度が一つ $\Longleftrightarrow$ 余剰次元が見えている（半径 $R \sim 1/\Lambda$）」という一文があります。問い：KK の非分離と同じものか。ホログラフィーの模型（Witten 1998 の葉巻、17-09）では背景の長さは $R = 1/M_{\mathrm{KK}}$ 一つで、計量を s^2 倍すると揺らぎの固有値はすべて s^{-2} 倍です。だから $m_n = c_n M_{\mathrm{KK}}$ です。長さの尺度が R 一つしか無いので、長さの二乗の次元を持つ量（ξ^2 も、Langevin の時間で測る C_P も）はすべて R^2 に比例し、緩和時間の仮定は模型の中の次元解析で恒等式になります[物理]。正確には、模型に C_P を定義したうえでの次元の勘定です。同じ理由で KK モードはグルーボールから離れません。クォークを含む QCD の模型の Sakai–Sugimoto（2005）も、中間子について 'our D4/D8 model deviates from QCD at the energy scale of M_KK, which is, unfortunately, the same energy scale of the mass of the vector mesons' と書きます。

$$\Lambda \approx M_{\mathrm{KK}}\, e^{-24\pi^2/(11\lambda)} \qquad (\lambda \text{ は } M_{\mathrm{KK}} \text{ での 't Hooft 結合。係数は規約に依る}) \qquad (10)$$

$\lambda = 30,\ 16.6,\ 10,\ 5$ で $\Lambda/M_{\mathrm{KK}} = 0.49,\ 0.27,\ 0.12,\ 0.013$ です[計算]（16.6 は Sakai–Sugimoto の当てはめを $N_c = 3$ で直した値で、その規約での λ です。一ループの式 (10) に入れるのは目安で、規約で 2 倍ずれえます）。超重力が使えるのは λ の大きい側で、Witten は小さい側を 'This looks like a tall order' と書きます（17-10）。

答え：類比です。「長さが一つ $\Longrightarrow$ 尺度が一つ」は模型の中で自明ですが、逆向きと $R \to 0$ への移行はありません。純ヤン–ミルズの一尺度の物理名は次元転移（4-07）で、$\Longleftrightarrow$ は本書の検討の記録の定式化です。

09

既知と確定したもの — 成果に数えない行

次の行は既知として扱い、後の部（本書の検討）で成果として並べません。(1) 格子単位の一様なギャップは $m_{\mathrm{phys}} \to \infty$ の自明な側、という向きの訂正は、相関長が発散する所で連続極限を取る定義と格子の相関長の問題の向きそのものです（確定、5-09）。(2) $\kappa = 11/(3\pi^2)$ は $4Nb_0$（Gross–Wilczek・Politzer 1973）で、実測との 5 桁一致は一ループ模型の中の一致です（確定、4-06）。(3) 記録の一段の記帳のうち、強結合の $\beta' = \beta^4/64$ は Migdal–Kadanoff の決定化の段だけに当たり（ボンド移動の因子 b^{d-2} を含む MK の一段は $\beta' \approx 4\beta^4$、18-04

§04)、弱結合の $\beta' = \beta\, b^{d-4}$ は次元勘定です（条件つき）。(4) 反射正値性の保存の言明（23-01 の構成の八つの言明の一つ）の反射正値性・転送作用素と強結合の面積則は Osterwalder–Seiler 1978・Lüscher 1977・Wilson 1974 です（確定、5-03）。(5) 無限体積の一意性の言明は真空の一意性の格子版、$R \le \tau_{\mathrm{int}} \le C_P$ は同じ可逆な力学の中での誤差解析です（条件つき、18-02・18-03）。

同じと言い切れなかったのは、緩和時間の仮定の定数倍の一様性（§03）と、段ごとの溜まりが一回のスキーム変換に収まること（§06）で、どちらも類比までです。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
既知 変分の下界 (6) の型、(3)(7)(9) の代数、§09 の行が既知であること。	記録の仮定が物理の仮説と同じだという定理。どの仮定も証明されていない。
計算 表 1〜3・図 1・図 2、§06・§08 の数値（自由場と模型の中）。	四次元ヤン–ミルズで $z = 2$ か、対数の因子があるか。負の重みの核が反射正値性を壊すか。
物理 z の数値（18-03 表 2）、(10) の見積もり、KK の非分離の証言。	質量ギャップ・連続極限・一尺度について、この章は何も示さない。

出典と再現

もの	種別	出典・道具（確認の水準）
動的スケーリング・臨界減速・下界	物理・既知	Halperin–Hohenberg, Phys. Rev. 177 (1969) 952；Hohenberg–Halperin, RMP 49 (1977) 435（どちらも要旨のみ）。Sokal, "Monte Carlo Methods in Statistical Mechanics: Foundations and New Algorithms", DeWitt-Morette・Cartier・Folacci 編 *Functional Integration: Basics and Applications*（NATO ASI Series, 1997）131–192, doi:10.1007/978-1-4899-0319-8_6（書誌のみ。下界 $z \ge \gamma/\nu$ の典拠は未確認）。z の数値は 18-03 表 2 の出典（18-03 の照合による）。ユニタリ性の限界 $\eta_s \ge 0$（§02）は原典未照合。
スキーム変換・MCRG・完全作用・改善作用	既知	Dashen–Gross, PRD 23 (1981) 2340（要旨）；Swendsen, PRL 42 (1979) 859（要旨）；Gupta ほか, PRL 53 (1984) 1721（要旨。引用の逐語は INSPIRE で確認）；Hasenfratz–Niedermayer, NPB 414 (1994) 785（要旨。引用の逐語を確認）；Lüscher–Weisz, NPB 240 (1984) 349（要旨。引用の逐語を確認）。
質量の繰り込み群不変性・格子の相関長の問題	既知・物理	Callan, PRD 2 (1970) 1541；Symanzik, CMP 18 (1970) 227（どちらも要旨。4-04 の照合による）。Chatterjee, arXiv:1803.01950（§5 の本文。18-04 の照合による）。
KK・ホログラフィー	物理	Witten, ATMP 2 (1998) 505；Sakai–Sugimoto, PTP 113 (2005) 843（逐語は 17-09・17-10 の照合による）。

もの	種別	出典・道具（確認の水準）
§09 の行・Elitzur の定理	既知	Gross–Wilczek, PRL 30 (1973) 1343；Politzer, PRL 30 (1973) 1346（どちらも書誌のみ）。Osterwalder–Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440；Lüscher, CMP 54 (1977) 283；Wilson, PRD 10 (1974) 2445（いずれも要旨。他章の照合による）。Kadanoff, Ann. Phys. 100 (1976) 359（要旨は 18-04 の照合による。本文は未入手で、式の水準の照合は未了）；Migdal, Sov. Phys. JETP 42 (1975) 413（書誌のみ。式の水準の照合は未了）。Elitzur, PRD 12 (1975) 3978（要旨。18-02 の照合による）。
記録の仮定	仮定・類比	本書の検討の記録の整理（23-01・23-02・23-13・17-12）。
表 1〜3・§06・§08 の数値	計算	この端末の Python 3（numpy・scipy）：`free_log.py`・`testfn_dim.py`・`cancel.py`。

次に読む章：19-00 入口 — 対象・確かな定理・前提の読み方（第三巻の中で、ここから対象と確かな定理に入ります）。年表と次元ごとの表で現在地を読むのは 16-01 世界はどこまで来ているか。η_s と η_{dyn} の約束は A-01 記号表。

入口 — 対象・確かな定理・前提の読み方

この章は案内です。

この章で分かること — 第 19〜22 部と第 28 部が何を載せ、何を載せないか。対象の定義、示すべき言明、機械検査した定理、前提の一覧が、それぞれどの部に在るか。読む順の三つの取り方。

前提となる章 — 0-03（問題文を一語ずつ読む）・16-09（証明が含むべき段）。格子の言葉は 第 5 部 に在ります。

先に言うこと — この五つの部は、質量ギャップを示していません。四次元のヤン–ミルズ理論の存在（Wilson の格子ゲージ理論の極限として Wightman の公理を満たす理論が作れること）は、2026-11-10 に公開された構成が Lean で証明している、と委員会が評価しました。それを読むのは第二巻の第 6〜13 部です。第 20〜22 部の定理は、どれも格子間隔を固定した一つの尺度についての言明で、知られている型の結果を、定義から機械検査したものです。大半は強結合の窓の中の言明で、公開された構成が残した問いとは反対の端に在ります。尺度を跨いで一様に成り立つことは、第 28 部の前提の側に在ります。横の大きさに率が依らない形は、強結合の窓の中の渦の自由エネルギーの上界（20-06）だけで、そこでも前の因子（横の面積）は残ります。

この章の順序

1. 三つに分ける — 対象・定理・前提
2. 部の地図（表 1）
3. 読む順 — 三つの取り方
4. 札の読み方
5. 第 23〜27 部と第 15 部との関係（表 2）
6. この五つの部が言わないこと

01

三つに分ける

第 23〜27 部と第 15 部は、検討を進めた順に書いてあります。そこでは、機械検査まで済んだ言明と、仮定として置いた言明と、数値で見ただけの見立てが、一つの章の中に並んでいます。第 19〜22 部と第 28 部は、同じ材料を三つに分けて置き直したものです。

分け	中身	在りか
対象	格子の上に定義するもの。測度、捩れ、渦の比、鏡映、ブロック写像、押し出した測度。定義だけで、主張はありません	第 19 部
定理	定義した対象についての等式と不等式。仮定は陽な範囲（結合の範囲、大きさの偶奇など）だけで、Lean 4 で機械検査してあります	第 20〜22 部
前提	「これが言えれば足りる」という側の言明。形が確定しているものと、まだ確定していないものを、札を付けて一覧にします	第 19 部の末尾の章と、第 28 部

定理と前提を分ける線は、対象が格子から定義されているかどうかです。定理の章に載せたのは、対象の定義を章に書けて、仮定が陽な範囲だけで、機械検査と別の目での照合が済んだものに限りました。

前提の側は、二つに分かれます。紫外の側の示すべき言明（合わせ・全列の収束・非退化・同程度連続）と、それを支える前提の木は、本書の設計（決まったブロック写像で押し出した測度）についての言明で、本書の設計での示すべき言明と十分条件の記録として残します。存在そのものは、公開された構成が別の設計で示しました（二つの設計の比べは 第 14 部、本書の紫外の試みの記録は 第 15 部）。赤外の側の示すべき言明（帯の言明と質量ギャップ）は開いたままで、こちらが第三巻の本題です。

02

部の地図

表 1　第 19〜22 部と第 28 部

部	題	載せるもの
第 19 部	対象と、示すべき言明	19-01 格子と Wilson の測度、19-02 捩れ・渦の比・Polyakov ループ、19-03 鏡映と再構成の器、19-04 ブロック写像と押し出した測度、19-05 フェルミオンの重み（寄り道）、19-06 対象と Lean の定義の対応表、19-07 示すべき言明
第 20 部	確かな定理 — 器と強結合	鏡映正値性、強結合の相関の減衰、無限体積の極限、再構成と質量ギャップ（強結合の窓の中で）、フェルミオンつきの器（寄り道）、20-06 強結合の面積則と、渦の自由エネルギーの上界
第 21 部	確かな定理 — 渦の床と Polyakov ループ	符号の系の三本、薄い渦の床、太い渦の床、渦の最小作用、渦の比の符号、Polyakov ループの対、21-07 渦の比の連続・極限・合わせ

部	題	載せるもの
第22部	確かな定理 ― 大きい面の稀さ	22-00 入口、22-01 チェス盤の評価による大きい面の稀さ、22-02 この部が言えていること・言えていないこと
第28部	前提の木	含意の三章、前提の一覧、設計の選びに依るもの、開いている所

自由場の一段と多段、ブロック写像の線形化（紫外の側の一つの尺度の定理）は、本書の紫外の試みの記録として第 15 部（15-12・15-13）に在ります。

03

読む順

- **何を示すのかを先に知る**：19-01〜19-04 の定義を拾い読みして、19-07 示すべき言明へ。そこから 第 28 部の木へ進みます。
- **確かな所から読む**：第 20 部 → 第 21 部 → 第 22 部。各章は、対象（第 19 部への参照）、定理、証明の道筋、言っていないこと、の順です。
- **検討の経緯を追う**：第 23〜27 部と第 15 部。同じ主題の章の対応は表 2 に在ります。

04

札の読み方

この五つの部の札は、第 23〜27 部と第 15 部と同じ五つです：初 典 機 読 仮 。意味は 15-00 の記号の表と同じです。公開された構成を引く所では、第二巻の札（源・推・評。6-00 の「札」）も使います。Lean で機械検査した言明は、札の外に、宣言の名と範囲を同じ行に書きます。

第 20〜22 部の定理には、ほとんどの行に典 が付きます。知られている型の結果を、この本の定義の上で機械検査した、という意味です。機械検査が保証するのは「書かれた定義と仮定から、書かれた結論が出る」ことで、定義が意図した対象を表していることは、別の目での照合に依ります。

前提には、もう一組の札（定理・紙・形は確定で未証明・形が未定・設計に依る・文献）を付けます。凡例は 28-00 に在ります。

05

第 23〜27 部と第 15 部との関係

第 23〜27 部と第 15 部は、検討の記録として残してあります。止まった道と、その理由が読めます。同じ主題の、今の整理の在りかは次のとおりです。

表 2　主題の対応

主題	検討の記録	今の整理
捩れた境界条件と渦	第 25 部	定義は 19-02、定理は第 21 部と 20-06
鏡映正値性とチェス盤	26-04・26-05	20-01、第 22 部
移り変わりの帯	第 26 部	言明は 19-07、前提は 28-04
条件つきの言明と台帳	第 27 部	第 28 部
紫外の制御	第 15 部	存在は第二巻（公開された構成を読む）、二つの設計の比べは第 14 部。本書の設計の自由場の一段は 15-12、本書の設計での前提は 28-04

06

この五つの部が言わないこと

- 質量ギャップについて、何も示していません。四次元のヤン–ミルズ理論の存在は、本書の定理ではなく、公開された構成の結果です（第二巻）。
- 定理は、格子間隔を固定した話です。格子間隔を 0 に送る極限についての定理は在りません。
- 強結合の定理は、結合の小さい窓の中だけの話です。窓の外については何も言いません。
- 強結合の窓の中では、渦の自由エネルギーの上界の率が横の大きさに依らない形が在ります（前の因子＝横の面積は残る。20-06）。窓の外では、渦の床の定理はどれも横の大きさを止めた話で、横の大きさに一様な評価は在りません。
- 前提の一覧は、日付つきの今の整理です。形が確定していない前提が在り、一覧は変わります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
この章は案内で、言明は在りません。第 19〜22 部と第 28 部の中身の在りかを示します	各部の言明の範囲は、部ごとの「言えていること・言えていないこと」の章（第 20 部・第 21 部・第 22 部）と 28-06 に在ります。自由場の一段の範囲は 15-14 です

出典と再現

もの	種別	出典・道具
部の地図・主題の対応	案内	この本の第 15 部と第 19〜28 部
機械検査した定理の一覧	案内	A-04

この章で使った語 — 対象、押し出した測度、前提の木。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：19-01 格子・リンクの変数・Wilson の測度 — 定義の一つ目。

格子・リンクの変数・Wilson の測度

この章は本書の検討です。§01〜§06 は既存の知見の整理で、§07 が本書の検討（Lean の側の約束と橋）です。

この章で分かること — 第 20〜22 部の定理が語る最も基本の対象 — 周期格子 $(\mathbb{Z}/N)^4$、リンクの変数 $U_\ell \in SU(2)$、Haar の測度の積、面のホロノミー U_p とその実部、Wilson の測度、分配関数 — の定義です。分配関数が正で有限であることも、ここで一度だけ示します。最後に、Lean の側で同じ対象が四通りの約束（強結合・渦・フェルミオン・紫外）で書かれていること、その間の橋を一つの表にまとめます。

前提となる章 — 5-01 Wilson の格子（導入）。確率測度の語は 1-08。

先に言うこと — この章は定義の章で、定理は書きません。格子間隔は 1 に固定し、体積は有限です。連続極限・無限体積の極限はこの章の外です（無限体積の配位の空間は 19-03）。

この章の順序

1. 格子とリンク — 周期の格子 $(\mathbb{Z}/N)^4$ と向きのついた辺
2. SU(2) を単位の四元数で — 行列の代わりに長さ 1 の四元数
3. Haar の測度とその積 — 群の上の一様な確率
4. 面とホロノミー — 四本のリンクの積と、その実部
5. Wilson の測度 — 重み $e^{\beta \sum_p \mathrm{Re}\, U_p}$ と期待値
6. 分配関数 — 正で有限であること
7. Lean の側の四つの約束と橋 — 同じ対象の四通りの書き方

01

格子とリンク — 周期の格子 $(\mathbb{Z}/N)^4$ と向きのついた辺

導入は 5-01 §02 にあります。ここでは以後の部が使う形に固定します。

正の整数 N をとり、四次元の周期格子（トーラス）を

$$\Lambda_N = (\mathbb{Z}/N)^4 \tag{1}$$

とします。格子間隔は 1 に固定します。向き μ の単位のずれを e_μ と書きます。**リンク**は組 $\ell = (x, \mu)$ で、点 x から点 $x + e_\mu$ へ向かう辺を表します。点 x をリンクの**基点**と呼び、時間の向きのリンクでは基点の時刻をそのリンクの時刻とします（第 28 部の前提の木の「根」〔示すべき言明〕とは別の語です）。リンクは全部で $4N^4$ 本です。

向きの番号は部によって二通りです。

- **第 20 部の 20-01〜20-05**（四方向が同じ大きさのトーラス $(\mathbb{Z}/N)^4$）：向きを $\mu \in \{0,1,2,3\}$ と番号づけ、0 を時間とします。座標は $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ です（Lean の `TorusRP.Lk` の添字と同じ）。19-03 の式もこの番号で書きます。
- **第 21 部・第 22 部と 20-06**（第 21 部の格子は $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$、19-02）：向きを $\mu \in \{1,2,3,4\}$ と番号づけ、$1,2$ が横、$3,4$ が縦です。座標は $x = (x_1, x_2; x_3, x_4)$ です（Lean の `TwistedWilson.Link` の添字 0〜3 が向き 1〜4）。20-06 と第 22 部は、四方向が同じ大きさのトーラスでも向きを 1〜4 で番号づけます（Lean の添字 0〜3 が向き 1〜4）。

この章の式は、どちらの番号にも当てはまるよう向きの組 $\mu < \nu$ で書きます。

逆向きの辺は別のリンクとして数えません。逆向きに辿るときは、そのリンクの変数の逆元を使います（§02）。周期なので、$x_i = N - 1$ の点から e_i へ進むと $x_i = 0$ に戻ります。

第 21 部では、向き 1・2 と向き 3・4 で大きさの違うトーラス $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ を使います。その定義は 19-02 に置きます。リンクと面の作り方はこの章と同じです。

もの	記号	数
格子点	$x \in (\mathbb{Z}/N)^4$	N^4
リンク（向きつきの辺）	$\ell = (x, \mu)$	$4N^4$
面（向きの組 $\mu < \nu$）	$p = (x; \mu, \nu)$	$6N^4$

$N = 1$ では一つの面の中に同じリンクが二度現れます。$N = 2$ では同じ二点を結ぶリンクが二本あります。どちらも別の添字のまま数えます（Lean の定義も同じです）。

リンクの変数と配位

各リンク ℓ に群 $SU(2)$ の元 U_ℓ を一つずつ置きます。これを**リンクの変数**と呼び、全てのリンクへの割り当て

$$U = (U_\ell)_\ell \ \in \ SU(2)^{\{\text{リンク}\}} \tag{2}$$

を**配位**と呼びます。配位の空間はコンパクトな群 $SU(2)$ の $4N^4$ 個の積で、それ自身コンパクトです。点 x から $x+e_\mu$ へ進むときに $U_{x,\mu}$ を、逆向きに進むときに $U_{x,\mu}^{-1}$ を掛けます。

02

SU(2) を単位の四元数で — 行列の代わりに長さ 1 の四元数

本書の Lean の定義は、$SU(2)$ を 2×2 の行列ではなく**単位の四元数**で書きます。四元数 $q = a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k}$（$a,b,c,d \in \mathbb{R}$、$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1$）のノルムを $\|q\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ とし、

$$SU(2) \ \cong \ S^3 = \{q \in \mathbb{H} : \|q\| = 1\} \tag{3}$$

と同一視します。対応は次の行列で与えられます [典]。

$$q = a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k} \ \longmapsto \ \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{4}$$

この行列の行列式は $\|q\|^2$、跡は $2a$ です。そこで次の三つが成り立ちます [初]。

- 四元数の積は行列の積に対応します。単位の四元数の積は単位の四元数です（$\|pq\| = \|p\|\|q\|$）。
- 逆元は共役です：$q^{-1} = \bar{q} = a - b\,\mathrm{i} - c\,\mathrm{j} - d\,\mathrm{k}$（行列ではエルミート共役）。
- 四元数の実部は跡の半分です：$\mathrm{Re}\,q = a = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,q$。単位の四元数では $|\mathrm{Re}\,q| \le 1$ です。

中心は $\{+1, -1\}$ です。第 21 部の捩れ（19-02）は、この中心の符号を面の重みに入れる操作です。

本書で $\mathrm{Re}\,U$ と書けば、四元数の実部 $= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,U$ のことです。5-01 の $SU(N)$ の $\frac{1}{N}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U$ で、群の N を 2 としたものと同じ量です（5-01 の N は群の大きさで、この章の格子の大きさ N とは別の量です）。

03

Haar の測度とその積 — 群の上の一様な確率

導入は 5-01 §06 にあります。コンパクトな群 G の上には、左からの掛け算で不変な確率測度がちょうど一つあります。これを正規化した **Haar の測度**と呼び、dU と書きます [典]。コンパクトな群ではこの測度は右からの掛け算と逆元をとる写像でも不変です [典]。

$SU(2) \cong S^3$ では、Haar の測度は $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ の上の一様な面積の測度を全体で 1 に正規化したものです [初]。理由：単位の四元数を左から掛ける写像は $\mathbb{R}^4$ の直交変換なので、一様な面積の測度を保ちます。左不変な確率測度は一つしかないので、両者は一致します。

配位の空間の上の参照の測度は、リンクごとの Haar の測度の積です。

$$dU = \prod_{\ell} dU_\ell \qquad (\text{リンクは } 4N^4 \text{ 本}) \tag{5}$$

これも確率測度で、各リンクの変数を独立に一様に選ぶことに当たります。各リンクで逆元をとる写像や、各リンクの値を他のリンクへ並べ替える写像もこの積の測度を保ちます。鏡映（19-03）はこの性質を使います。

Lean では、正規化した Haar の測度を `Measure.haarMeasure ⊤`（全体の集合で 1 をとる Haar の測度）として定義しています。名は `OSGap.haarProb`・`TwistedWilson.haarProb`（同じ定義）、確率測度であることは `OSGap.haarProb_isProbabilityMeasure`、左不変は `OSGap.haarProb_isMulLeftInvariant` です。

04

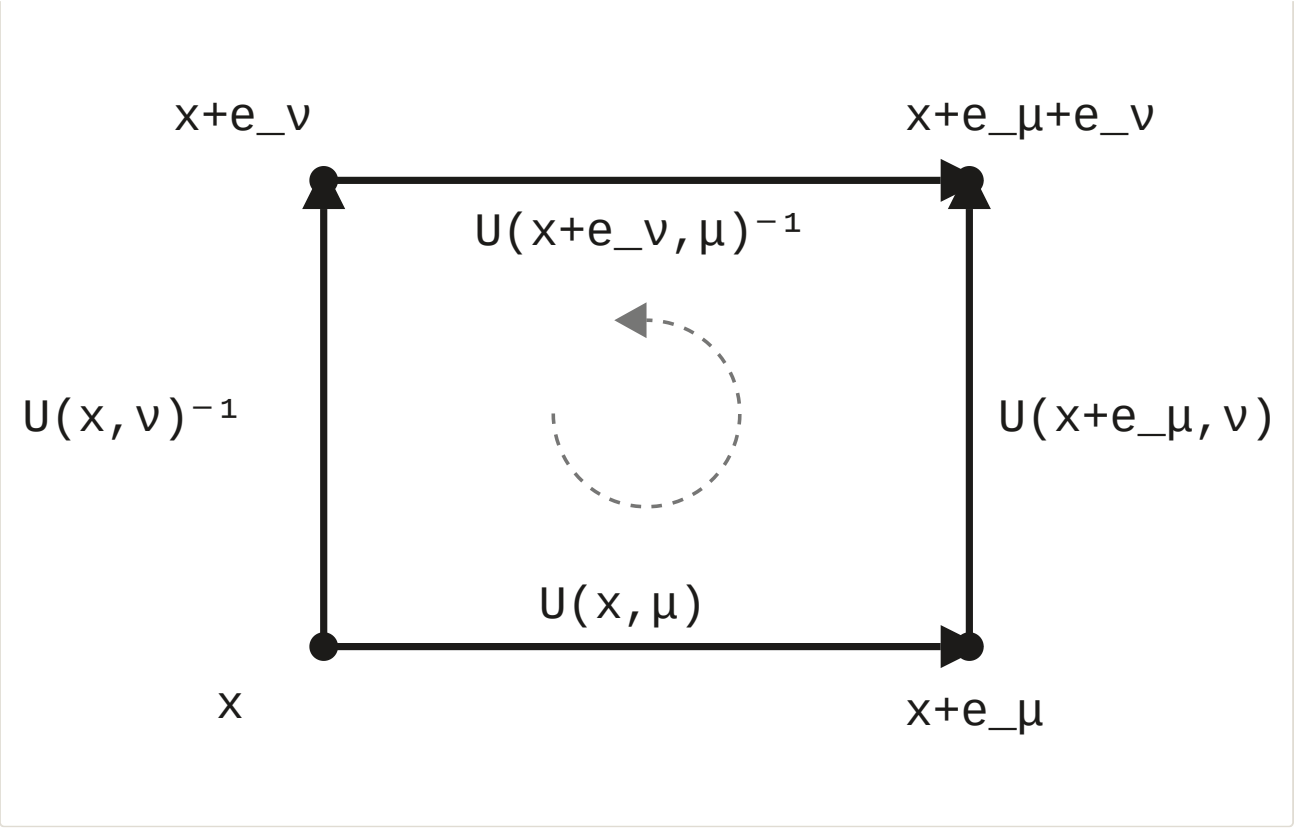
面とホロノミー — 四本のリンクの積と、その実部

導入は 5-01 §03 にあります。**面**（プラケット）は組 $p = (x;\mu,\nu)$（$\mu < \nu$）で、x、$x+e_\mu$、$x+e_\mu+e_\nu$、$x+e_\nu$ を角とする単位の正方形です。向きの組は六つ（第 21 部の番号で (1,2)・(1,3)・(1,4)・(2,3)・(2,4)・(3,4)、第 20 部の番号で (0,1)・(0,2)・(0,3)・(1,2)・(1,3)・(2,3)）なので、面は $6N^4$ 枚です。面の向きは μ から ν へ回る向きに固定し、逆向きの面は数えません。

面の**ホロノミー**は、縁を一周する四本のリンクの変数の積です。

$$U_p = U_{x,\mu}\, U_{x+e_\mu,\nu}\, U_{x+e_\nu,\mu}^{-1}\, U_{x,\nu}^{-1} \tag{6}$$

図 1　面 $p=(x;\mu,\nu)$ のホロノミー。矢印はリンクの向き。一周の向きと逆のリンクは逆元で掛ける



初 図の点線は一周の向き（$x \to x+e_\mu \to x+e_\mu+e_\nu \to x+e_\nu \to x$）です。上と左の辺はリンクの向きと逆に辿るので逆元が入ります。

U_p は単位の四元数で、その実部は $\mathrm{Re}\,U_p = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,U_p \in [-1,1]$ です 初 。$\mathrm{Re}\,U_p = 1$ は $U_p = 1$（面を一周しても何も変わらない）のときに限ります。

ゲージ変換と、実部の不変性

格子点ごとの $g_x \in SU(2)$ による**ゲージ変換**は、x から $y = x + e_\mu$ へのリンクを

$$U_{x,\mu} \;\longmapsto\; g_x\, U_{x,\mu}\, g_y^{-1} \tag{7}$$

に移します。このときホロノミーは $U_p \mapsto g_x U_p g_x^{-1}$ と共役で変わり、実部 $\mathrm{Re}\,U_p$ は変わりません 初 （$\mathrm{Re}(gqg^{-1}) = \mathrm{Re}\,q$、跡の巡回性）。Haar の測度の積もゲージ変換で不変です 初 （リンクごとに左右から掛けるだけなので）。Lean では、ゲージ変換を `act`（値 g(始点)$\,U\,g$(終点)*）として書いています。ゲージ不変な関数は第 20 部の真ん中の面の鏡映正値性（19-03）で使います。

05

Wilson の測度 — 重み $e^{\beta\sum_p \mathrm{Re}\,U_p}$ と期待値

導入は 5-01 §04 にあります。実数 β をとります。本書の第 19〜22 部と第 28 部では、配位 U の**重み**を

$$w_\beta(U) = \exp\Bigl(\beta \sum_p \operatorname{Re} U_p\Bigr) \tag{8}$$

とします。和は $6N^4$ 枚の面全てにわたります。5-01 の Wilson 作用 $S_W(U) = \beta \sum_p \bigl(1 - \frac{1}{2}\operatorname{tr} U_p\bigr)$ とは

$$e^{-S_W(U)} = e^{-6N^4\beta}\, w_\beta(U) \tag{9}$$

の関係にあります[初]。定数 $e^{-6N^4\beta}$ は正規化で消えるので、二つの書き方は同じ確率測度を与えます。β は 5-01 と同じ量で、$SU(2)$ では $\beta = 4/g^2$ です[典]。

Wilson の測度は、Haar の測度の積に重み w_β を掛け、全体を 1 に正規化した確率測度です。

$$d\mu_{N,\beta}(U) = \frac{1}{Z_N(\beta)} \exp\Bigl(\beta \sum_p \operatorname{Re} U_p\Bigr) \prod_\ell dU_\ell \tag{10}$$

記号を揃えます。正規化しない測度 $w_\beta(U)\prod_\ell dU_\ell$ を $\tilde{\mu}_{N,\beta}$（Lean の `TorusRP.wilsonMeasure N β`）、正規化した (10) を $\mu_{N,\beta}$（Lean の `TorusRP.wilsonProb N β`）と書きます。$\tilde{\mu}_{N,\beta} = Z_N(\beta)\,\mu_{N,\beta}$ です。

有界で可測な関数 F の**期待値**は

$$\langle F \rangle_{N,\beta} = \int F \, d\mu_{N,\beta} = \frac{1}{Z_N(\beta)} \int F(U)\, w_\beta(U) \prod_\ell dU_\ell \tag{11}$$

です。β の符号は定義の上では自由です。物理で普通に使うのは $\beta > 0$（面が 1 に揃うほど重い）ですが、第 20・21 部の定理の中には $\beta < 0$ も含めて成り立つものがあります。範囲は定理ごとに書きます。

重み (8) はゲージ不変です（§04）。そこで Wilson の測度もゲージ変換で不変です[初]。ゲージを固定しなくても積分は有限次元の、コンパクトな空間の上の積分です。

> 飛ばしてよい。正規化していない測度 $w_\beta \prod dU$ を本書では「正規化しない Wilson の測度」と呼びます。鏡映正値性のように「ある積分が 0 以上」を言う定理では、正の定数倍は結論を変えないので、Lean の多くの言明は正規化しない測度で書かれています（§07）。期待値や分散のように比をとる量では、正規化した測度 (10) を使います。

06

分配関数 — 正で有限であること

分配関数は正規化の定数です。

$$Z_N(\beta) = \int \exp\Big(\beta \sum_{p} \operatorname{Re} U_p\Big) \prod_{\ell} dU_\ell \tag{12}$$

定義 (10) が意味を持つには $0 < Z_N(\beta) < \infty$ が要ります。これは次の評価から出ます 初 。

$$e^{-6N^4|\beta|} \;\le\; Z_N(\beta) \;\le\; e^{6N^4|\beta|} \tag{13}$$

証明：各面で $|\operatorname{Re} U_p| \le 1$ なので、指数の中身の絶対値は $6N^4|\beta|$ 以下です。そこで被積分関数は $e^{-6N^4|\beta|}$ と $e^{6N^4|\beta|}$ の間にあり、参照の測度は全体で 1 です。（終）

この評価は体積とともに急に悪くなります。体積に一様なことは何も言っていません。無限体積の極限（第 20 部）では、Z そのものではなく期待値の比を扱います。

Lean では、被積分関数の両側の評価を `TorusRP.wilsonWeight_le` ・ `TorusRP.wilsonWeight_ge` （指数は面の数 × $|\beta|$。面の数が $6N^4$ であることは手で数えた）、それを積分した、正規化しない Wilson の測度の全体の質量 $\tilde{\mu}_{N,\beta}(\text{全体}) = Z_N(\beta)$ が正で有限であることを `TorusRP.wilsonMeasure_univ_pos` ・ `TorusRP.wilsonMeasure_univ_lt_top` 、捩れた格子の分配関数が正であることを `TwistedWilson.ZW_pos` （全ての実の β、捩れの全ての組）が述べます。

07

Lean の側の四つの約束と橋 — 同じ対象の四通りの書き方

本書の Lean の定理は、四つの系統（強結合・渦・フェルミオン・紫外）で別々に書かれました。対象は同じ $SU(2)$ の格子の配位とその測度ですが、格子の添字・リンクの値の空間・重みの符号の書き方が少しずつ違います。どの部の定理を読むときも、この表で約束を確かめてください。

	強結合の側（第 20 部）	渦の側（第 21 部）	フェルミオンの側（19-05）	紫外の側（19-04。
格子	$(\mathbb{Z}/N)^4$。リンク `Lk N` ＝（格子点）×（向き）。向きの添字 0 が時間（第 20 部の番号 0〜3 と同じ。鏡映 $x_0 \mapsto -x_0$）	$(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ 。 `Site N M` ・ `Link` ・ `Plaq` 。添字 0〜3 が向き 1〜4（第 21 部の番号）。**時間は添字 3**（x_4）（鏡映 $x_4 \mapsto -x_4$ は 19-03）	時間の輪 $\mathbb{Z}/2h$ × 空間 $(\mathbb{Z}/N)^3$。 `PhysLink N h` 。向きの添字 3 が時間。橋は $N = 2h$ のとき	段 m の箱 $(\mathbb{Z}/2^m I$ `BoxWalk.Site L` `BoxWalk.BoxLk L` `Fin 4` ）

	強結合の側（第 20 部）	渦の側（第 21 部）	フェルミオンの側（19-05）	紫外の側（19-04。
リンクの値	四元数の閉じた単位球 `QBall`（$\|q\| \le 1$）	単位球面 `SU2`（$\|q\| = 1$）	単位球面 `SU2`。作用の中では行列 (4) に移す	四元数の閉じた単 `ChainBlockMap.B` `ChainBlockMap.C` 像の値が球の内側 め、定義域と値域 04）
参照の測度	`haarBall`：球面の Haar の測度を球へ押し出したもの。積は `Measure.pi`	`haarCfg`：Haar の測度の積	Haar の測度の積	器の側で固定しな 測度 `ChainBlockM` の箱の型の配位の 測度の族を受け取
重み	$e^{\beta\,\mathrm{action}}$、`action` $= \sum_{\mu<\nu} \mathrm{Re}\,U_p$	$\exp\bigl(\beta \sum_p z_p \,\mathrm{Re}\,U_p\bigr)$、$z_p = \pm 1$ は捩れの符号（19-02）	$e^{-\beta S_W}$、$S_W = \sum_p \bigl(1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U_p\bigr)$	定義に重みは入ら 測度などを箱の型 す
正規化	しない（`TorusRP.wilsonMeasure`）。正規化した形は `wilsonProb`	測度の名は置かず、分配関数 `TwistedWilson.ZW` と、その比で書く	しない（`WilsonGauge.gaugeMeasure`）	受け取る測度は確 したもの）
この本の記号	正規化しない $\tilde{\mu}_{N,\beta}$、正規化した $\mu_{N,\beta}$（(10)）、$Z_N(\beta)$（(12)）	Z_0, Z_1、θ_M（19-02）	19-05 の記号	19-04 の記号

約束の違いの意味を順に述べます。

閉じた球と球面。強結合の側は、リンクの値を閉じた単位球 $\{\|q\| \le 1\}$ に置き、参照の測度を「球面の Haar の測度を球に押し出したもの」（`haarBall`）にしています。球にしたのは Lean の構成の上の選びです。参照の測度は球面に載っているので、ほとんど全ての配位は $SU(2)$ に値をとり、積分の値は球面の約束と変わりません 初 。逆元の代わりに共役（`star`）を書いていますが、球面の上で両者は一致します。

重みの符号。フェルミオンの側の重みは $e^{-\beta S_W}$ で、(9) により $e^{\beta \sum \mathrm{Re}\,U_p}$ の正の定数倍です。

橋 — Lean で示された同一視

橋	言っていること	Lean
作用の和	$N = 2h$ の四方向が同じ大きさのトーラスで、全ての配位について $\sum_{\mu<\nu} \mathrm{Re}\,U_p + S_W = 6(2h)^4$（向きの添字の付け替えと、球面から球への埋め込みを通して）	`WilsonGauge.action_add_wilsonAction`
参照の測度の一致	フェルミオンの側の Haar の測度の積を `pull` で押し出すと、強結合の側の `haarBall` の積になる	`WilsonGauge.map_pull`

橋	言っていること	Lean
測度の一致	強結合の側の `TorusRP.wilsonMeasure (2h) β` は、フェルミオンの側の `gaugeMeasure h β` を添字の付け替え `pull` で押し出したものの $e^{6(2h)^4\beta}$ 倍に等しい（全ての実の β、$2h>1$）	`WilsonGauge.wilsonMeasure_eq_map`
鏡映の一致	同じ付け替えで、二つの側の格子点の面の鏡映が対応する	`WilsonGauge.refl_pull`（19-03）
測度の一致（強結合↔渦）	$M=N$、捩れなし（$z_p\equiv 1$）のとき、全ての $N\geq 1$ と全ての実の β で、強結合の側の `TorusRP.wilsonMeasure N β` は、渦の側の Haar の測度の積 `haarCfg N N` に密度 $\exp(\beta\sum_p \mathrm{Re}\,U_p)$ を掛けたものを、リンクの付け替え（格子点 $x\mapsto((x_0,x_1),(x_2,x_3))$、向きの添字はそのまま）と球面から球への包含 `toBall` で押し出したものに等しい。定数の因子は無い（面の和はどちらも $\mu<\nu$ の $6N^4$ 枚）。`toBall` は一対一（`WilsonBridge.toBall_injective`）	`WilsonBridge.wilsonMeasure_eq_map`
期待値・全質量（強結合↔渦）	可測な F について $\int F\,d(\mathrm{wilsonMeasure}) = \int F(\mathrm{toBall}\,U)\,e^{\beta\sum_p \mathrm{Re}\,U_p}\,d(\mathrm{haarCfg})$。$F=1$ で、全質量は `ZW N N β false false`（を $[0,\infty]$ の値に直したもの）	`WilsonBridge.integral_wilsonMeasure`・`WilsonBridge.wilsonMeasure_univ`
時間を揃えた対応と鏡映（強結合↔渦）	強結合の側の時間（添字 0）を渦の側の時間（添字 3、x_4）へ、添字 k を $k-1$ へ移す付け替え（格子点 $x\mapsto((x_1,x_2),(x_3,x_0))$）でも同じ測度の等式が成り立つ。このとき二つの側の格子点の面の鏡映は同じ写像になる（強結合の側の $x_0\mapsto -x_0$ と渦の側の $x_4\mapsto -x_4$）。時間と空間の面は逆向きの面に移る（実部は同じ、ホロノミーは共役）	`WilsonBridgeT.wilsonMeasure_eq_mapT`・`WilsonBridgeT.refl_toBallT`・`WilsonBridgeT.action_toBallT`
渦の比（背景なし）	背景 $n_{12}=0$、$M=N$ で、$Z_{N,N}(\beta;0,1)/Z_{N,N}(\beta;0,0)$ は、正規化した強結合の側の測度での $\exp\bigl(-2\beta\sum \mathrm{Re}\,U_p\bigr)$（$\Pi_{(0,0)}$ に当たる N^2 枚の時間と空間の面）の期待値に等しい	`WilsonBridgeV.vortex_ratio_eq`
Haar の測度の定義	強結合の側と渦の側の `haarProb` は同じ式 `Measure.haarMeasure ⊤` で定義される（別の名前空間の二つの定義。上の測度の一致の証明の中で、展開して一致が確かめられている）	`OSGap.haarProb`・`TwistedWilson.haarProb`

強結合の側と渦の側は、$M=N$ で捩れが無いとき、Lean の中で一つの測度として結ばれています。リンクの付け替えと球面から球への包含で、渦の側の Haar の測度の積に重み $\exp(\beta\sum_p \mathrm{Re}\,U_p)$ を掛けたものを押し出すと、強結合の側の Wilson の測度にちょうどなります（定数の因子は無く、面の和はどちらも $6N^4$ 枚）。付け替えは二通りあります。向きの添字をそのまま重ねるものは、測度・期待値・全質量の等式に使います。強結合の側の時間（添字 0）を渦の側の時間（添字 3、x_4）に重ねるものは、鏡映を使う章で使います。後者では二つの

側の格子点の面の鏡映が同じ写像になり、時間と空間の面は逆向きの面に移ります。実部だけで書いた重みや作用は変わりませんが、ホロノミーそのものを移すときは共役が入ります。向きの添字をそのまま重ねてよいのは測度の等式についてだけで、鏡映を使う所では時間を揃えた付け替えを使います。

この橋が言っていないこと：捩れた測度（背景 $n_{12} = 1$、または $n_{34} = 1$）を測度として強結合の側に移す等式はありません。第 21 部の θ_M と Polyakov ループの期待値 $\langle\cdot\rangle_0$ は背景 $n_{12} = 1$ の重みの量で、この橋の上の量ではありません（橋が移すのは、背景なしの比 $Z(0,1)/Z(0,0)$ を期待値として書く形だけです）。$M \neq N$ の格子は強結合の側に対応物がありません。有限の体積の等式で、無限体積の極限や質量ギャップの定理を言い直すものではありません。

紫外の側の Lean の定義は、箱の格子と球に値をとる配位の上の写像と押し出しだけで、Wilson の重みを含みません。紫外の側と他の三つの側の対応は 19-04 で扱い、この章の橋の表には挙げません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 $SU(2)$ は単位の四元数の群で、$\mathrm{Re}\, q = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\, q \in [-1,1]$	—（定義と初等の事実）
典 正規化した Haar の測度はただ一つで、左右と逆元で不変	Lean で名を挙げたのは確率測度であることと左不変だけ
初 $e^{-6N^4\lvert\beta\rvert} \le Z_N(\beta) \le e^{6N^4\lvert\beta\rvert}$。Lean：`TorusRP.wilsonWeight_le`・`wilsonWeight_ge`（被積分関数）、`TorusRP.wilsonMeasure_univ_pos`・`TorusRP.wilsonMeasure_univ_lt_top`・`TwistedWilson.ZW_pos`	体積に一様な評価ではない。無限体積の極限はこの章の外
初 Wilson の測度と $\mathrm{Re}\, U_p$ はゲージ不変	ゲージの固定の議論（第 20 部の真ん中の面の鏡映で使う）はこの章に無い
Lean：`WilsonGauge.wilsonMeasure_eq_map`（$N = 2h$、全ての実の β）で、強結合の側とフェルミオンの側の Wilson の測度は定数倍を除いて一致	—
Lean：`WilsonBridge.wilsonMeasure_eq_map`（$M = N$、捩れなし、全ての $N \ge 1$ と実の β）で、強結合の側と渦の側の Wilson の測度は付け替えのもとで等しい（定数の因子なし）。時間を揃えた付け替えで鏡映も一致（`WilsonBridgeT.refl_toBallT`）	捩れた測度（$n_{12} = 1$ や $n_{34} = 1$）の測度としての橋、$M \neq N$。第 21 部の θ_M（$n_{12} = 1$）を強結合の側の期待値として書く式は無い

出典と再現

もの	種別	出典・道具
格子の上のゲージ理論、Wilson の作用	典	K. G. Wilson, Phys. Rev. D 10 (1974) 2445。導入は 5-01
Haar の測度の存在と一意性、$SU(2) \cong S^3$	典	標準の事実。導入は 5-01 §06
正規化しない測度で鏡映正値性を書く形	典	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（要旨のみ）
四つの約束の定義と橋	Lean	本書の Lean の束（強結合 ↔ 渦の橋：`WilsonBridge.wilsonMeasure_eq_map`・`integral_wilsonMeasure`・`wilsonMeasure_univ`・`toBall_injective`、`WilsonBridgeT.wilsonMeasure_eq_mapT`・`refl_toBallT`・`action_toBallT`、`WilsonBridgeV.vortex_ratio_eq`。強結合の側：`TorusRP.QBall`・`haarBall`・`Lk`・`action`・`wilsonMeasure`・`wilsonProb`。渦の側：`TwistedWilson.SU2`・`haarCfg`・`hol`・`zt`・`ZW`。紫外の側：`BoxWalk.Site`・`BoxWalk.BoxLk`・`ChainBlockMap.Ball`・`ChainBlockMap.Cfg`・`ChainBlockMap.vP`。フェルミオンの側：`WilsonGauge.wilsonAction`・`gaugeMeasure`・`action_add_wilsonAction`・`wilsonMeasure_eq_map`）。定義の式は源を読んで写した

この章で使った語 — 格子、リンク、リンクの変数、配位、単位の四元数、Haar の測度、面（プラケット）、ホロノミー、ゲージ変換、Wilson の測度、正規化しない Wilson の測度、分配関数。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：19-02 捩れた境界条件・渦の比 θ・Polyakov ループ — 同じ格子の上で、面の符号を一枚ずつ反転した分配関数と、その比を定義します。

捩れた境界条件・渦の比 θ・Polyakov ループ

この章は本書の検討です。§01〜§04 は既存の知見の整理で、§05〜§07 が本書の検討（渦の最小作用の定義と Lean の約束）です。

この章で分かること — 第 21 部の定理が語る対象 — 横 N・縦 M のトーラス、捩れの符号 n_{12}, n_{34}、分配関数 Z_0, Z_1、渦の比 θ_M、Polyakov ループ $P_b(t)$、捩れた真空 V、渦の最小作用 $S_{\mathrm{v}}(N,m)$ と S_N — の定義です。定義がきちんとしていること（$|\theta_M| < 1$、$0 \le S_N \le 2N^2$）もここで述べます。

前提となる章 — 19-01（格子・面・Wilson の測度）。捩れの導入は 25-01 §01。

先に言うこと — この章は定義の章で、θ_M や Polyakov ループについての評価は書きません（評価は第 21 部と、強結合の窓の中の 20-06）。横の大きさ N は固定した有限の数で、N に一様なことは何も言いません。格子間隔は 1 です。

この章の順序

1. 横 N・縦 M のトーラス — 小さな横断面と大きな平面
2. 捩れの符号 — 面の重みの符号を反転する
3. 分配関数 Z_0・Z_1 と渦の比 θ_M — 捩れを一つ入れる値段
4. Polyakov ループ — 縦の向きを一周する積
5. 捩れた真空 — 作用 0 の配位
6. 渦の最小作用 — 塊の中に渦を一本通す値段
7. Lean の名との対応 — 添字と真偽の値の約束

01

横 N・縦 M のトーラス — 小さな横断面と大きな平面

導入は 25-01 §01 にあります。正の整数 N, M をとり、格子を

$$\Lambda_{N,M} = (\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2, \qquad x = (x_1, x_2;\, x_3, x_4) \tag{1}$$

とします。向き 1・2 を**横**（大きさ N）、向き 3・4 を**縦**（大きさ M）と呼びます。横は小さな二次元のトーラス T^2_N、縦は大きな平面 $(\mathbb{Z}/M)^2$ で、第 21 部では N を止めて M を大きくします。

リンク (x,μ)、面 $p=(x;\mu,\nu)$（$\mu<\nu$）、ホロノミー U_p、Haar の測度の積は 19-01 と同じ作り方です。リンクは $4N^2M^2$ 本、面は $6N^2M^2$ 枚です。

縦の平面の点 $q=(x_3,x_4)$ を一つ決めると、その上には横の N^2 個の格子点が並びます。この N^2 個の点を基点とする $(3,4)$ の面の束を Π_q と書きます。Π_q は平面の中では一点に見え、横には T^2_N を覆う面の集まりです（25-01 §01 の式 (3)）。

02

捩れの符号 — 面の重みの符号を反転する

't Hooft の捩れた境界条件は、格子では面の重みの符号 $z_p \in \{+1,-1\}$ で入れます 典 。二つの捩れ $n_{12}, n_{34} \in \{0,1\}$ に対して

$$z_p = \begin{cases} (-1)^{n_{12}} & p \text{ が } (1,2) \text{ の面で、基点の } (x_1,x_2)=(0,0) \\ (-1)^{n_{34}} & p \text{ が } (3,4) \text{ の面で、基点の } (x_3,x_4)=(0,0) \\ 1 & \text{それ以外} \end{cases} \tag{2}$$

と置きます。つまり、横の $(1,2)$ の平面（縦の点を止めた一枚の T^2_N）のそれぞれで、基点が原点の面の一枚の符号を反転するのが $n_{12}=1$ です。反転する面は全部で M^2 枚です。縦の $(3,4)$ の平面（横の点を止めた一枚の平面）のそれぞれで、基点が原点の面の一枚を反転するのが $n_{34}=1$ で、反転する面は $\Pi_{(0,0)}$ の N^2 枚です。

捩れた重みと分配関数を

$$Z_{N,M}(\beta; n_{12}, n_{34}) = \int \exp\Bigl(\beta \sum_p z_p \operatorname{Re} U_p\Bigr) \prod_\ell dU_\ell \tag{3}$$

とします。これは $0 < Z < \infty$ を満たします 初 （19-01 §06 と同じ評価。$|z_p \operatorname{Re} U_p| \le 1$）。

$N, M \ge 2$ のとき、反転する面の置き場所は分配関数に効きません。リンクの変数を $U_\ell \mapsto -U_\ell$ と取り替えると、そのリンクを含む面の符号が全て反転し、Haar の測度は保たれるから

です[初]。分配関数が見るのは、各平面を貫く反転の個数の偶奇（流束）だけです。証明は 25-01 §02 の面を動かす補題 にあります（$N, M \geq 2$ の文。証明は一つの面が同じリンクを高々一度含むことに依ります）。25-01 は $(1,2)$ の反転を $(x_1, x_2) = (N-1, N-1)$ に置きますが、この補題により同じ分配関数を与えます。

25-01 の分配関数 $Z[z] = \int e^{-\beta S^z} \prod dU$（$S^z = \sum_p (1 - \frac{1}{2} z_p \operatorname{tr} U_p)$）とは $Z[z] = e^{-6N^2M^2\beta} Z_{N,M}(\beta; n_{12}, n_{34})$ の関係です[初]。この定数は次の節の比では消えます。

03

分配関数 Z_0・Z_1 と渦の比 θ_M — 捩れを一つ入れる値段

第 21 部では横の捩れを背景として $n_{12} = 1$ に止め、縦の捩れ n_{34} の有無で二つの分配関数を比べます。

$$Z_0 = Z_{N,M}(\beta; 1, 0), \qquad Z_1 = Z_{N,M}(\beta; 1, 1) \tag{4}$$

渦の比を

$$\theta_M = \theta_{N,M}(\beta) = \frac{Z_0 - Z_1}{Z_0 + Z_1} \tag{5}$$

と定義します。横 N は止めて書き、要るときは $\theta_{N,M}$ と書きます。$Z_0, Z_1 > 0$ なので θ_M は定まり、$|\theta_M| < 1$ です[初]。**流束の自由エネルギー** $\Delta F = \ln(Z_0/Z_1)$（25-01 の「区画と流束の自由エネルギーの定義」の語。26-03 の渦の自由エネルギー F_v と同じ量）を使えば $\theta_M = \tanh(\Delta F/2)$ です[初]。

意味：$\Pi_{(0,0)}$ の N^2 枚を反転することは、縦の平面を一本の中心の渦（-1 の流束）が貫く条件を課すことです。θ_M が 0 に近いことは、渦を一本入れても分配関数がほとんど変わらない、つまり渦が平面の中で安く湧いていることを表します。θ_M が M について e^{-cM^2} の速さで減ることが、Tomboulis–Yaffe の不等式を通して閉じ込めの議論の入口になります[典]（25-01 §02、26-01）。

$\theta_M \geq 0$（$Z_1 \leq Z_0$）は定義からは出ません。これは第 21 部の定理（M が偶数のとき）で、ここでは仮定しません。渦の比の、結合についての連続と極限、決めた値への合わせは 21-07 にあります。

> 飛ばしてよい。薄い渦の床（第 21 部）は背景 n_{12} を 0 と 1 のどちらに置いても成り立つ形で Lean に書かれています。そのときの比 $(Z_{N,M}(\beta; n_{12}, 0) - Z_{N,M}(\beta; n_{12}, 1))/(Z_{N,M}(\beta; n_{12}, 0) + Z_{N,M}(\beta; n_{12}, 1))$ を $\theta_M^{(n_{12})}$ と書きます。θ_M は $\theta_M^{(1)}$ のことです。

04

Polyakov ループ — 縦の向きを一周する積

横の位置 $b \in (\mathbb{Z}/N)^2$ と向き 4 の位置 $t \in \mathbb{Z}/M$ を決め、向き 3 を一周する M 本のリンクの変数を順に掛けます。

$$P_b(t) = \mathrm{Re}\Big(U_{(b;0,t),3}\, U_{(b;1,t),3} \cdots U_{(b;M-1,t),3} \Big) \tag{6}$$

これを **Polyakov ループ**と呼びます。実部は跡の半分なので $P_b(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\cdots) \in [-1,1]$ です 初 。閉じた道の積の跡なので、ゲージ変換で変わりません 初 。

捩れの背景 $n_{12}=1$、$n_{34}=0$ の重みで正規化した期待値を $\langle \cdot \rangle_0$ と書きます。

$$\langle F \rangle_0 = \frac{1}{Z_0} \int F(U) \exp\Big(\beta \sum_p z_p \,\mathrm{Re}\, U_p \Big) \prod_\ell dU_\ell \qquad (n_{12}=1,\ n_{34}=0) \tag{7}$$

第 21 部が評価するのは、向き 4 に T だけ離れた二本の Polyakov ループの対 $\langle P_b(0)\, P_{b'}(T) \rangle_0$ です。

一本の期待値は 0 です 初 ：$x_3 = 0$ の向き 3 のリンクを全て -1 倍すると、どの面もそのようなリンクを（重なりも数えて）0 本か 2 本含むので重みは変わらず、Haar の測度も保たれ、$P_b(t)$ だけが符号を変えます。そこで意味を持つのは対の相関です。

05

捩れた真空 — 作用 0 の配位

単位の四元数 i, j を使って、配位 V を次で定めます。

$$V_{x,1} = \begin{cases} \mathrm{i} & x_1 = 0 \\ 1 & x_1 \neq 0 \end{cases}, \qquad V_{x,2} = \begin{cases} \mathrm{j} & x_2 = 0 \\ 1 & x_2 \neq 0 \end{cases}, \qquad V_{x,3} = V_{x,4} = 1 \tag{8}$$

これを**捩れた真空**と呼びます。背景 $n_{12}=1$、$n_{34}=0$ の符号 (2) について、全ての面で

$$z_p \,\mathrm{Re}\, V_p = 1 \tag{9}$$

が成り立ちます 初 。たとえば基点が $(x_1,x_2)=(0,0)$ の $(1,2)$ の面では $V_p = \mathrm{i}\,\mathrm{j}\,\mathrm{i}^{-1}\mathrm{j}^{-1} = -1$ で、$z_p = -1$ と打ち消し合います。他の面ではホロノミーが 1 です。各面の作用 $1 - z_p \,\mathrm{Re}\, U_p$ は 0 以上なので、V は捩れた作用の最小（0）を与えます。Lean：`TwistBlocks.vac`、(9) は `TwistBlocks.vac_term`。

i と j が反交換する（$\mathrm{ij} = -\mathrm{ji}$）ことが、横の捩れを作用 0 で吸収する仕組みです。捩れた真空がゲージ変換と大域の変換を除いて一つであることは 25-01 §05 にあります。

06

渦の最小作用 — 塊の中に渦を一本通す値段

太い渦の床（第 21 部）の指数に現れる数 S_N を定義します。正の整数 m をとり、縦の大きさを $M = 2m$ とします。縦の平面 $(\mathbb{Z}/2m)^2$ を、線 $x_3 \in \{0, m\}$ と $x_4 \in \{0, m\}$ で一辺 m の四つの**塊**に分け、原点の塊 $b_0 = \{0, \dots, m-1\}^2$ を使います。

- **枠**：境の線の上に載るリンク。向き 3 のリンクは x_4 が線の上にあるもの、向き 4 のリンクは x_3 が線の上にあるもの、横の向き 1・2 のリンクは縦の点 (x_3, x_4) が線の上にあるもの。
- **内部**：枠でなく、縦の点が b_0 に入るリンク。
- **塊の面**：基点の縦の点が b_0 に入る全ての面（六つの向き、横の全ての位置）。

枠を捩れた真空 V に止め、内部を自由に動かし、角の点 $(x_3, x_4) = (0, 0)$ の上の $(3, 4)$ の面（$\Pi_{(0,0)}$ の N^2 枚）だけ符号を反転した作用の下限を

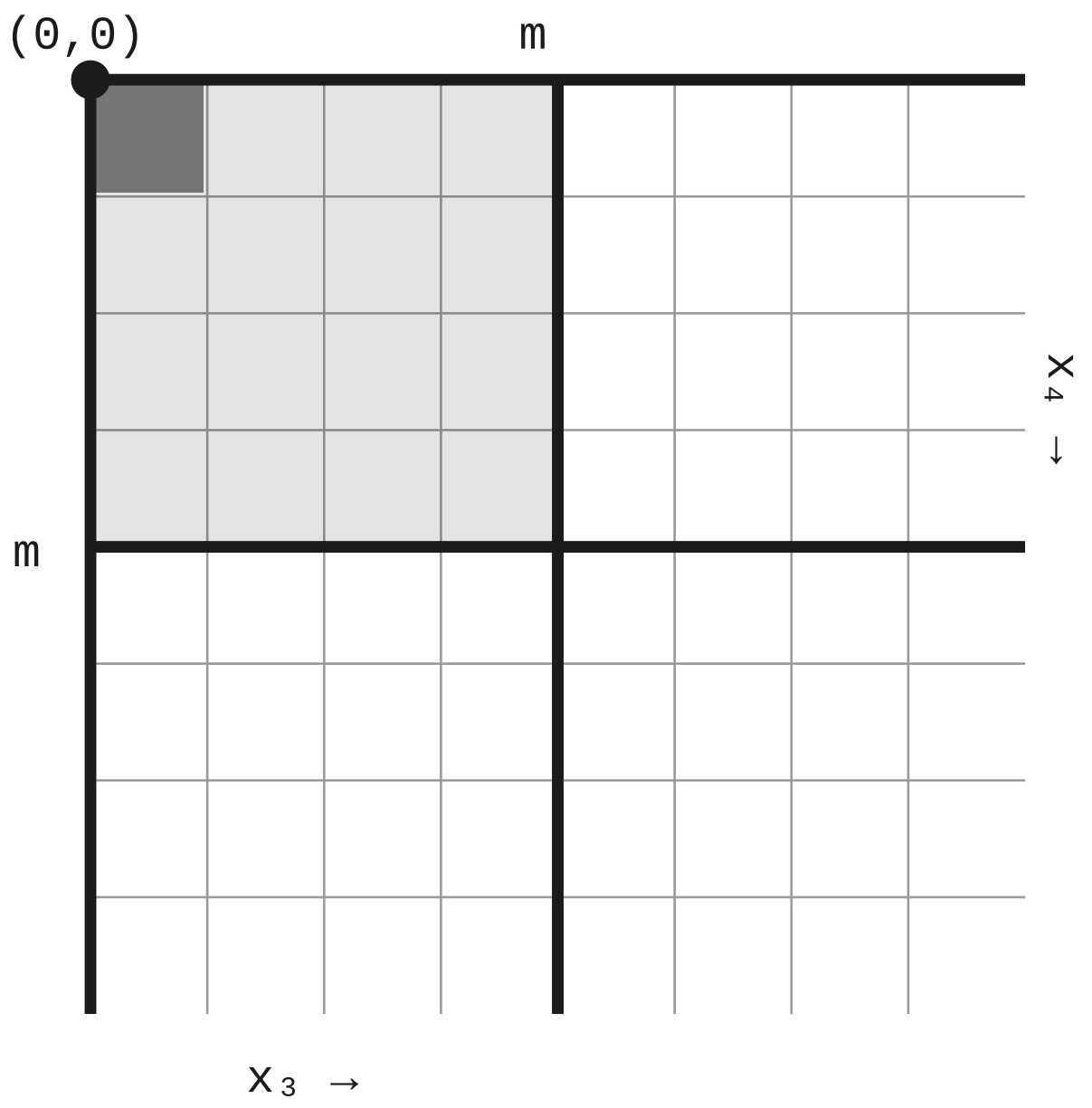
$$S_{\mathrm{v}}(N, m) = \inf_{\text{内部}} \sum_{p \in b_0} \bigl(1 - z_p\, \eta_p \operatorname{Re} U_p\bigr), \qquad \eta_p = \begin{cases} -1 & p \in \Pi_{(0,0)} \\ 1 & \text{それ以外} \end{cases} \tag{10}$$

とします。z_p は背景 $n_{12} = 1$、$n_{34} = 0$ の符号です。反転した $\Pi_{(0,0)}$ は縦の捩れ $n_{34} = 1$ と同じ面なので、$S_{\mathrm{v}}(N, m)$ は「縁を捩れた真空に止めた一辺 m の塊に、渦を一本通す最小の作用」です。m について下限をとった

$$S_N = \inf_{m \geq 1} S_{\mathrm{v}}(N, m) \tag{11}$$

を**渦の最小作用**と呼びます。

図 1　縦の平面 $(\mathbb{Z}/2m)^2$（$m = 4$）。太線が枠（捩れた真空に止める）、灰色が原点の塊 b_0、黒い点が符号を反転する角 $(0, 0)$。各点の上には横の T^2_N が載る



初 図は周期の平面の一周期分です（右と下の端は左と上の端に重なります）。濃い升は角の点 $(0,0)$ を基点とする升で、その上に $\Pi_{(0,0)}$ が載ります（図の黒い点と同じものを指します）。

定義がきちんとしていることを確かめます。各項 $1 - z_p \eta_p \operatorname{Re} U_p$ は 0 以上 2 以下なので下限は有限で、$S_{\mathrm{v}}(N,m) \geq 0$ です。内部も V にとると、反転しない面は全て 0（(9)）、反転した N^2 枚は各 2 なので $S_{\mathrm{v}}(N,m) \leq 2N^2$ です。したがって

$$0 \leq S_N \leq 2N^2 \tag{12}$$

です 初 。Lean：`TwistBlocks.Svortex_le` ・ `TwistBlocks.SN_bounds` 。(10) の下限は内部の配位で達成されます（内部の配位の空間がコンパクトなので。Lean：`TwistBlocks.Svortex_attained` ）。上界 $2N^2$ は薄い渦の床の指数と同じ数で、S_N がそれよ

り真に小さいかどうか、$S_N > 0$ かどうかは定義からは出ません。後者は 21-05 の定理、$N = 2, 3, 4$ の前者は同じ章の計算機の証明書です。

07

Lean の名との対応 — 添字と真偽の値の約束

渦の側の Lean の定義は、この章の記号と次のように対応します。向きの添字は 0 始まりで、0・1・2・3 がこの章の向き 1・2・3・4 です。捩れは真偽の値で、`true` が $n = 1$ です。

この章	Lean	注
$\Lambda_{N,M}$、リンク、面	`TwistedWilson.Site N M`・`Link`・`Plaq`	`Site N M = (ZMod N × ZMod N) × (ZMod M × ZMod M)`。面は向きの組 $\mu < \nu$
U_p	`TwistedWilson.hol`	四元数の積 $U_{x,\mu}U_{x+e_\mu,\nu}U^*_{x+e_\nu,\mu}U^*_{x,\nu}$
z_p（式 (2)）	`TwistedWilson.zt n12 n34`	反転の場所は基点の $(x_1, x_2) = (0,0)$・$(x_3, x_4) = (0,0)$
$Z_{N,M}(\beta; n_{12}, n_{34})$	`TwistedWilson.ZW N M β n12 n34`	正規化しない。参照の測度は `haarCfg`
Z_0、Z_1	`ZW N M β true false`、`ZW N M β true true`	
θ_M	`TwistBlocks.thetaM N M β`	式 (5) と同じ式
$P_b(t)$	`HalfSplit.polyLoop N M b t`	向き 3 は添字 2。積は $k = 0, 1, \ldots, M-1$ の順
$\langle P_b(s) P_{b'}(t) \rangle_0$	`PolyakovT.polyExp N M β b b' s t`	`PolyakovT.corr / ZW N M β true false`。`corr` の重み `HalfSplit.wE N M β (fun _ => 1)` は Z_0 の重みと同じ式（`PolyakovT.wE_one`）
V	`TwistBlocks.vac`	
$S_{\mathrm{v}}(N, m)$、S_N	`TwistBlocks.Svortex N m`、`TwistBlocks.SN N`	`Svortex N m = Smin N (2m) m 2 true (0,0)`（V を枠に）`true`。`SN N` は正の整数 m についての下限

Lean の `Smin` の塊の作用は、枠だけに載る面も含めて和をとります。その差は枠だけの関数で、内部についての下限には効きません。式 (10) の「塊の面」はこの約束に合わせてあります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 $0 < Z_{N,M}(\beta; n_{12}, n_{34}) < \infty$、したがって $\lvert\theta_M\rvert < 1$。Lean：`TwistedWilson.ZW_pos`	θ_M の大きさ・符号の評価（第 21 部）

言えている	言えていない
初 $N, M \geq 2$ で、反転の置き場所は分配関数に効かず、流束の偶奇だけが効く（25-01 §02 の面を動かす補題に証明）	この章の Lean の定義は置き場所を原点に固定している。置き場所を動かす補題は Lean の定理としては挙げていない
初 捩れた真空 V は全ての面で $z_p \operatorname{Re} V_p = 1$。Lean：`TwistBlocks.vac_term`	真空の一意性（25-01 §05）はこの章では扱わない
初 $\langle P_b(t) \rangle_0 = 0$（中心の変換）	Lean の定理としては挙げていない。対の相関の評価は第 21 部
初 $0 \leq S_N \leq 2N^2$、(10) の下限は達成される。Lean：`TwistBlocks.SN_bounds` ・ `Svortex_attained`	$S_N > 0$、$S_N < 2N^2$ は定義からは出ない（21-05）。N に一様なことは何も言わない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
捩れた境界条件	典	G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141。導入は 25-01
面の符号の場による格子の形	典	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 123 (1979) 442; 125 (1980) 117
Tomboulis–Yaffe の不等式	典	E. T. Tomboulis, L. G. Yaffe, Commun. Math. Phys. 100 (1985) 313。26-01
Polyakov ループ	典	標準の量。有限温度の秩序の変数としての扱いは Svetitsky–Yaffe, NPB 210 (1982) 423（書誌はこの本の引き方による）
定義（格子・捩れ・Z・θ_M・Polyakov ループ・捩れた真空・S_{v}・S_N）と (9)・(12)	Lean	本書の Lean の束（`TwistedWilson.ZW` ・ `zt` ・ `hol` ・ `haarCfg`、`TwistBlocks.thetaM` ・ `vac` ・ `vac_term` ・ `Svortex` ・ `SN` ・ `Svortex_le` ・ `SN_bounds` ・ `Svortex_attained`、`HalfSplit.polyLoop` ・ `PolyakovT.polyExp` ・ `PolyakovT.corr`）。定義の式は源を読んで写した

この章で使った語 — 捩れた境界条件、捩れの符号、流束、分配関数、渦の比、流束の自由エネルギー、Polyakov ループ、捩れた真空、塊、枠、渦の最小作用。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：19-03 鏡映・転送の作用素・再構成の器 — 鏡映と、それから Hilbert 空間と転送の作用素を作る器を定義します。

鏡映・転送の作用素・再構成の器

この章は本書の検討です。§01〜§04 と §06 は既存の知見の整理で、§05・§07・§08 が本書の検討（器と無限体積の空間の Lean の約束）です。

この章で分かること — 第 20 部の定理が語る対象 — 鏡映 Θ（格子点の面・真ん中の面）、正の側の関数、鏡映の対 $\langle F, G\rangle = \int F(\Theta\omega)G(\omega)\,d\mu$、時間の並進、再構成の器（対・並進・定数の三つ組）とそこから作る Hilbert 空間・真空 Ω・転送の作用素 T、質量ギャップの定義 $\|T - P_\Omega\| \le e^{-m}$、無限体積の配位の空間と周期の持ち上げ — の定義です。

前提となる章 — 19-01（格子と Wilson の測度）。導入は 4-10（反射正値性と再構成）、5-03（格子の上の鏡映と転送行列）、4-11（質量ギャップの定義）。

先に言うこと — この章は定義の章です。鏡映正値性（対が半正値であること）・無限体積の極限の存在・質量ギャップの評価はどれも第 20 部の定理で、ここでは仮定もしません。質量ギャップの定義は格子の一目盛りを単位にした、固定した格子間隔の量です。連続極限の質量ギャップの定義ではありません。

この章の順序

1. 鏡映 — 格子点の面と、リンクの真ん中の面
2. 正の側 — 鏡の片側だけに依る関数
3. 鏡映の対 — 鏡に映した関数との積の積分
4. 時間の並進 — 正の側を一目盛り奥へ
5. 再構成の器 — 対・並進・定数から Hilbert 空間と転送の作用素へ
6. 質量ギャップの定義 — 真空の外で T が e^{−m} 以下に縮む
7. 無限体積の配位の空間 — $\mathbb{Z}^4$ の上の配位と周期の持ち上げ
8. Lean の名との対応 — 三つの鏡と器の名

01

鏡映 — 格子点の面と、リンクの真ん中の面

導入は 5-03 §02 にあります。この章の式は 19-01 §01 の**第 20 部の番号**（向き $0,1,2,3$、0 が時間）で書き、時間の座標 x_0 を t と書きます。格子は時間の向きの大きさが偶数 $2M$ の周期格子です。Lean の鏡映（`TorusRP.thL`・`MidRP.thM`）は四方向が同じ大きさ $N=2M$ の $(\mathbb{Z}/2M)^4$ の上だけで定義されています。

鏡は二通りあります。

- **格子点の面の鏡映**：$t \mapsto -t$。鏡は格子点を通る二枚の面 $t=0$ と $t=M$ です（周期なので $-M \equiv M$）。
- **真ん中の面の鏡映**：$t \mapsto 1-t$。鏡は時間の向きのリンクの真ん中を横切る二枚の面 $t=\frac{1}{2}$ と $t=M+\frac{1}{2}$ です。

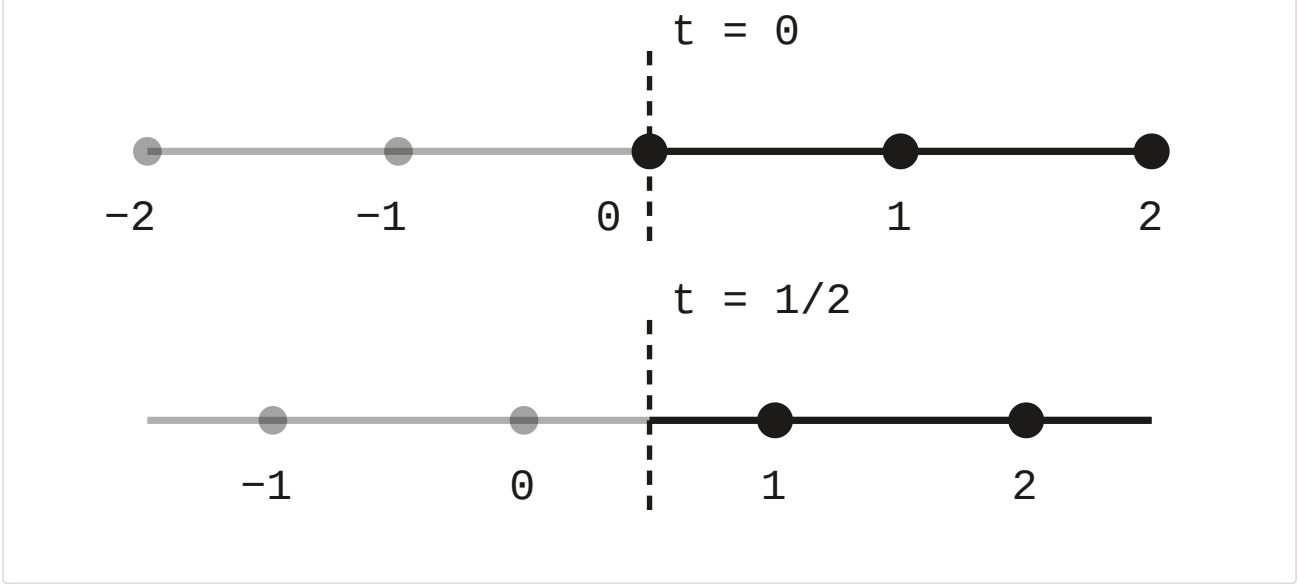
格子点の写し方 $x \mapsto \vartheta x$ から、リンクの変数の写し方を次で定めます。空間の向きのリンク (x,ν) は $(\vartheta x,\nu)$ へ移り、値はそのままです。時間の向きのリンクは向きが逆になるので、映した先のリンクの**逆元**をとります。

$$(\Theta U)_{x,\nu} = U_{\vartheta x,\nu} \quad (\nu \text{ は空間}), \qquad (\Theta U)_{x,0} = \big(U_{\vartheta(x+e_0),0}\big)^{-1} \tag{1}$$

格子点の面の鏡映では $\vartheta(x+e_0)=\vartheta x - e_0$、つまり t から $t+1$ へのリンクは $-t-1$ から $-t$ へのリンクに移ります。真ん中の面の鏡映では t から $t+1$ へのリンクが $-t$ から $1-t$ へのリンクに移り、$t=0$ と $t=M$ の時間のリンク（鏡を横切るリンク）は自分自身の逆元に移ります。

どちらの Θ も配位の空間の上の写像で、二度施すと元に戻り、Haar の測度の積を保ちます 初（リンクの並べ替えと、リンクごとの逆元。19-01 §03）。面は面に移り、$\mathrm{Re}\,U_p$ の値は映した面の値に等しいので、Wilson の重みも保たれます 初（格子点の面の鏡について Lean：`TorusRP.holQ_refl`。真ん中の面の鏡はそれに一目盛りの並進を合わせたもので、並進の不変性から同じことが出ます）。

図 1　時間の向きの一列で見た二つの鏡。点は格子点（その上に空間のリンクが載る）、線分は時間のリンク。上：格子点の面 $t=0$。下：真ん中の面 $t=\frac{1}{2}$。濃い部分が正の側



初 上の段では鏡の上の点 $t = 0$ の空間のリンクは動かず、正の側にも負の側にも数えます。下の段では鏡の上に格子点は無く、0 から 1 への時間のリンクが鏡を横切ります。

渦の側（第 21 部）の格子 $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ では、向き 4 の格子点の面の鏡映 $x_4 \mapsto -x_4$（M が偶数、鏡は $x_4 = 0$ と $x_4 = M/2$）を同じ規則 (1) で使います（第 21 部の番号で、時間の役を向き 4 が担います）。$M = N$ のとき、強結合の側の時間を渦の側の向き 4 に重ねる付け替えで、二つの側の格子点の面の鏡映は同じ写像になります（Lean：`WilsonBridgeT.refl_toBallT`、19-01 §07）。

02

正の側 — 鏡の片側だけに依る関数

鏡の片側を**正の側**と呼び、正の側のリンクだけに依る関数を考えます。正確には、正の側のリンクの集合 L_+ を決め、二つの配位が L_+ の上で一致すれば値が一致する関数 F を「L_+ だけに依る」と言います。

鏡	正の側のリンク L_+
格子点の面（$t = 0, M$）	時刻 $0 \le t \le M$ の空間のリンクと、基点の時刻が $0 \le t \le M-1$ の時間のリンク（閉じた正の半分）
真ん中の面（$t = \frac{1}{2}, M+\frac{1}{2}$）	時刻 $1 \le t \le M$ の空間のリンクと、基点の時刻が $0 \le t \le M$ の時間のリンク（鏡を横切る $t=0$・$t=M$ のリンクを含む）

Θ は正の側を負の側へ移します。そこで F が正の側だけに依れば、$F \circ \Theta$ は負の側（と鏡の上）だけに依ります 初 。

第 20 部の定理が使う関数の類は、正の側だけに依り、**有界で可測**な実数値の関数です。真ん中の面の鏡では、これに**ゲージ不変**（19-01 §04）を加えた類を使う定理があります。どの類

を使うかは定理ごとに書きます。

03

鏡映の対 — 鏡に映した関数との積の積分

導入は 4-10 §04 にあります。配位の空間の上の有限な測度 μ（第 20 部では Wilson の測度）と鏡映 Θ について、正の側の有界な関数 F, G の**鏡映の対**を

$$\langle F, G \rangle_\mu = \int F(\Theta\omega)\, G(\omega)\, d\mu(\omega) \tag{2}$$

と定義します。F, G について双一次です。μ が Θ で不変なら対称です 初 （$\omega \mapsto \Theta\omega$ と変数を取り替え、$\Theta^2 = \mathrm{id}$ を使う。Wilson の測度では Lean：`TorusRP.wilson_refl_symm`）。

鏡映正値性は、全ての正の側の F で $\langle F, F \rangle_\mu \geq 0$ となる性質です。これは定義ではなく測度の性質で、Wilson の測度について成り立つことは第 20 部の定理です（20-01）。この章では仮定しません。

正の定数 c を掛けた測度 $c\mu$ では対も c 倍になるので、半正値かどうかは正規化に依りません。Lean の鏡映正値性が正規化しない Wilson の測度で書かれているのはこのためです（19-01 §05）。

04

時間の並進 — 正の側を一目盛り奥へ

配位を時間の向きに一目盛りずらす写像を S とし、関数に $(\tau F)(\omega) = F(S\omega)$ で働かせます。向きは、F が時刻 $[0, R]$ のリンクに依れば τF は時刻 $[1, R+1]$ のリンクに依るように選びます。こうすると τ は正の側の関数を正の側の関数に移します。

測度が並進で不変で、$\Theta S = S^{-1}\Theta$ が成り立つとき、τ は対について対称です 初 。

$$\langle \tau F, G \rangle_\mu = \langle F, \tau G \rangle_\mu \tag{3}$$

格子の上でこの τ が引き起こす作用素が**転送の作用素**（転送行列）です。5-03 はこれを時間ゲージで直接書きます（5-03 §05）。この本の第 20 部は、次の節の器を通して、対と τ だけから作ります。

05

再構成の器 — 対・並進・定数から Hilbert 空間と転送の作用素へ

導入は 4-10 §05 にあります。Osterwalder–Schrader の再構成から、測度に依らない部分だけを取り出したものを**再構成の器**と呼びます。器は実ベクトル空間 V の上の次の組です。

欄	条件	測度から作るとき
対 B（双一次形式）	半正値 $B(x,x)\geq 0$、対称 $B(x,y)=B(y,x)$	鏡映の対 (2)
並進 τ（線形写像）	B について対称 $B(\tau x,y)=B(x,\tau y)$	時間の並進（§04）
定数 $\mathbf{1}\in V$	$B(\mathbf{1},\mathbf{1})=1$、$\tau\mathbf{1}=\mathbf{1}$	定数関数 1（確率測度）
軌道の有界	各 x に C が在り、全ての k で $B(\tau^k x,\tau^k x)\leq C$	有界な関数なら $C=\|F\|_\infty^2$

器から次のものを作ります。

1. **Hilbert 空間 $\mathcal{H}$**：V に半内積 B を入れて完備化したもの。$B(x,x)=0$ のベクトルは完備化の中で 0 に潰れます。V の元 x の像を $[x]$ と書きます。
2. **真空 $\Omega=[\mathbf{1}]$**。$\|\Omega\|=1$ です。
3. **転送の作用素 T**：$T[x]=[\tau x]$ を連続に延ばしたもの。延ばせるのは $B(\tau x,\tau x)\leq B(x,x)$（$\tau$ は縮む）だからです。これは対称性・半正値・軌道の有界から出ます 初 。道筋：$a_k=B(\tau^k x,\tau^k x)$ は Cauchy–Schwarz により対数凸（$a_{k+1}^2\leq a_k a_{k+2}$）なので比 a_{k+1}/a_k は増えます。$a_1>a_0$ なら a_k は指数的に増えて有界に反します（Lean：`OrbitGrowth.contraction_of_bounded`）。

こうして作った T は自己共役で、$\|T\|\leq 1$、$T\Omega=\Omega$ です 初 。Lean では、器を構造 `OSGap.Datum`、Hilbert 空間を `Datum.Hilb`、T を `Datum.T`、Ω を `Datum.Ω` と書き、性質を `Datum.contraction`・`Datum.T_symm`・`Datum.T_Ω`・`Datum.norm_Ω` が述べます。

測度から器を作る組み立ては `OSGap.measureDatum` です。確率測度 ν、鏡映、並進について、三つの欄 — 対が半正値（鏡映正値性）、対が対称、並進が対称 — を仮定として受け取り、残りの欄（定数・軌道の有界）を自分で満たします。第 20 部の定理は、Wilson の測度の極限についてこの三つの仮定を払います。

> 飛ばしてよい。器の欄を全て満たす例は小さなものでも作れます。Lean の `OSGap.exampleDatum` は二次元の $V=\mathbb{R}^2$ の上で、$|r|\leq 1$ に対して T が真空の補空間で r 倍になる器です（`example_opNorm_eq`）。器の欄が矛盾しない（空でない）ことの確かめです。

06

質量ギャップの定義 — 真空の外で T が e^{−m} 以下に縮む

導入は 4-11 §01 にあります。真空への射影を $P_\Omega v = \langle \Omega, v \rangle\, \Omega$ とします。実数 m について、器 D が**質量ギャップ m を持つ**とは

$$\|T - P_\Omega\| \le e^{-m} \tag{4}$$

のこととします（作用素ノルム）。Lean：`OSGap.Datum.HasMassGap D m`。単位は格子の一目盛りで、格子間隔は固定です。T は自己共役の縮小で $T\Omega = \Omega$ なので $\|T - P_\Omega\| \le 1$ が常に成り立ち、$m \le 0$ では (4) は自動的に成り立ちます 初 。意味を持つのは $m > 0$ のときです。

意味：T は Ω を動かさず自己共役なので、真空の直交補空間を保ちます。(4) はその補空間の上で $\|T\| \le e^{-m}$ と同じです 初 。$T > 0$（$T \ge 0$ で核が無い）なら $T = e^{-H}$ と書け、(4) は H の真空の補空間の上のスペクトルが $[m, \infty)$ に入ること、つまり 4-11 の意味の隙間が m 以上であることになります。第 20 部の T は核を持ちます（20-04）。その場合は $T = e^{-H}$ とは書けず、(4) は真空の補空間の上で $\|T\| \le e^{-m}$ という形で読みます。

(4) は、正の側の全ての x について切断した相関が一様な速さで減ることと同値です。

$$\|T - P_\Omega\| \le e^{-m} \iff \forall x \in V\ \exists C_x\ \forall k:\ B(\tau^k x, \tau^k x) - B(\mathbf{1}, x)^2 \le C_x\, e^{-2mk} \tag{5}$$

Lean：右から左は `OSGap.Datum.hasMassGap_of_decay`、左から右は `OSGap.Datum.decay_of_hasMassGap`（定数は $C_x = B(x,x) - B(\mathbf{1},x)^2$）。4-11 §02 の「隙間は全ての相関が一様に減ることと同値」の、器の上の形です。

この定義だけでは言えないことが二つあります。

- **非退化**：$\mathcal{H}$ が Ω の張る一次元だけなら $T - P_\Omega = 0$ で、(4) は全ての m で成り立ちます 初 。そこで第 20 部の定理は、真空に直交する長さ 1 のベクトルが在ること（真空の補空間が 0 でないこと）を別に結論に書きます。
- $T \ge 0$：定義は T の負のスペクトルを禁じません。$T \ge 0$ も第 20 部の別の結論です。

07

無限体積の配位の空間 — $\mathbb{Z}^4$ の上の配位と周期の持ち上げ

導入は 5-04 §01 にあります。大きさの違うトーラスの測度を比べるため、全てを一つの空間に載せます。$\mathbb{Z}^4$ のリンク (x, μ)（$x \in \mathbb{Z}^4$）全体の上の配位の空間を

$$\mathcal{C} = \prod_{\ell \in \mathbb{Z}^4\ \text{のリンク}} \{q \in \mathbb{H} : \|q\| \le 1\} \tag{6}$$

とし、積の位相を入れます。閉じた単位球はコンパクトなので $\mathcal{C}$ もコンパクトです 典（Tychonoff の定理）。ここで値を閉じた球にとるのは 19-01 §07 の約束です。

周期の持ち上げ：トーラス $(\mathbb{Z}/L)^4$ の配位 ω を、$\mathbb{Z}^4$ のリンクの座標を L で割った余りで読んで $\mathcal{C}$ の点にします。正規化した Wilson の測度 $\mu_{L,\beta}$（19-01 (10)）をこの写像で押し出した $\mathcal{C}$ の上の確率測度を、$L = 2(n+1)$ について

$$\mu^{\mathrm{lift}}_{n,\beta} = \big(\text{周期の持ち上げ}\big)_{*}\,\mu_{2(n+1),\beta} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{7}$$

と書きます。Lean：`WilsonLimit.liftProb β n`。全ての大きさ L の列は `AllN.liftS` です。

$\mathcal{C}$ の上の確率測度の収束は**弱収束**（有界で連続な全ての F について $\int F$ が収束）で測ります 典。強結合の窓で列 (7) が一つの確率測度 ν_β に収束することは第 20 部の定理（20-03）で、ここでは極限の存在を仮定しません。

$\mathcal{C}$ の上でも、鏡映（格子点の面 $t \mapsto -t$、規則 (1)）と時間の並進が同じ式で定まります。正の側の関数の空間は

$$W = \{F : \mathcal{C} \to \mathbb{R} \text{ 有界で連続 } :\ F \text{ は基点の時刻が } [0, R] \text{ の有限個のリンクだけに依る}\} \tag{8}$$

です。W は定数 1 を含み、並進で閉じます。ゲージ不変なものに限った部分空間 W_{gi} も使います。第 20 部の器は $V = W$（または W_{gi}）、対は ν_β についての (2)、並進は §04、定数は 1 です。

08 Lean の名との対応 — 三つの鏡と器の名

この章	Lean	注
鏡映した配位 $\Theta\omega$	`LinkReflection.linkRefl θ σ ω`	$(\Theta\omega)_\ell = \sigma_\ell(\omega_{\theta\ell})$。$\theta$ はリンクの並べ替え、σ は値の写像
格子点の面の鏡（$(\mathbb{Z}/2M)^4$）	`TorusRP.thL` ・ `TorusRP.sig`	時間のリンクに共役（`star`）。正の側は `TorusRP.fixP`（鏡の上の空間のリンク）と `TorusRP.posP`
真ん中の面の鏡	`MidRP.thM` ・ `MidRP.sigT`	`thM` は格子点の面の鏡に一目盛りの並進を合わせたもの。正の側は `TorusGauge.cr`（横切るリンク）と `MidRP.posM`
渦の側の鏡（第 21 部の向き 4）	`HalfSplit.Th`（`HalfSplit.thL` ・ `HalfSplit.sgL`）	M が偶数。鏡の上のリンクは `HalfSplit.fixL`。`HalfSplit.thL` は `TorusRP.thL` と同じ名の別の定義

この章	Lean	注
フェルミオンの側の鏡	`WilsonGauge.thetaPhys`	強結合の側の鏡と `WilsonGauge.refl_pull` で対応（19-05）
器、Hilbert 空間、T、Ω	`OSGap.Datum`、`Datum.Hilb`、`Datum.T`、`Datum.Ω`	器の欄は `B`・`τ`・`one` と六つの条件（`nonneg`・`symm`・`τ_symm`・`one_one`・`τ_one`・`bounded`）
測度から作る器	`OSGap.measureDatum`	仮定の欄：鏡映正値性・対の対称・並進の対称
質量ギャップ	`OSGap.Datum.HasMassGap D m`	`‖D.T - vacProj D.Ω‖ ≤ Real.exp (-m)`
$\mathcal{C}$、鏡、並進	`WilsonLimit.Cfg`、`zRefl`、`zShift`	`Cfg` は $\mathbb{Z}^4$ のリンクから `QBall` への写像
周期の持ち上げ、(7)	`WilsonLimit.perLift`、`WilsonLimit.liftProb`	トーラスの大きさは `WilsonLimit.Nn n = 2(n+1)`
W、W_{gi}	`WilsonLimit.Wsub`、`GaugeZ.Wgi`	`Wgi = Wsub ⊓ Winv`（ゲージ不変）

第 20 部の定理は、器の欄 `B`・`τ`・`one` を結論の中で式 (2)・§04・定数 1 に縛った形で述べます。器があることだけを言う形では、欄を自明に選んで質量ギャップを満たせてしまうからです（§06 の非退化の注意と同じ理由）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 二つの鏡映は対合で、Haar の測度の積と Wilson の重みを保つ。Lean：`TorusRP.holQ_refl`（格子点の面）	鏡映正値性（20-01 の定理）はこの章では仮定もしない
初 測度が Θ で不変なら対は対称。Wilson の測度では Lean：`TorusRP.wilson_refl_symm`	—
Lean：器から T が作れ、自己共役・縮小・$T\Omega = \Omega$（`Datum.contraction`・`T_symm`・`T_Ω`）	具体の測度で器の仮定が満たされること（第 20 部）
Lean：質量ギャップ (4) と相関の一様な減衰 (5) は同値（`hasMassGap_of_decay`・`decay_of_hasMassGap`）	(4) は非退化も $T \geq 0$ も含まず、$m \leq 0$ では自動的に成り立つ。格子間隔は固定で、連続極限の質量ギャップの定義ではない
典 $\mathcal{C}$ はコンパクト	列 (7) の収束（20-03 の定理）は仮定しない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
反射正値性と再構成	典	K. Osterwalder, R. Schrader, CMP 31 (1973) 83–112; 42 (1975) 281–305。導入は 4-10

もの	種別	出典・道具
格子ゲージ理論の鏡映（格子点の面・リンクの面）と転送行列	典	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（要旨のみ）。導入は 5-03
質量ギャップの定義	典	4-11 と同じ定義を、格子の一目盛りを単位に器の上で書いたもの
Tychonoff の定理、確率測度の弱収束	典	標準の事実
器・鏡・無限体積の空間の定義と、§05・§06 の性質	Lean	本書の Lean の束（`OSGap.Datum`・`measureDatum`・`exampleDatum`・`HasMassGap`・`hasMassGap_of_decay`・`decay_of_hasMassGap`、`LinkReflection.linkRefl`、`TorusRP.thL`・`sig`・`fixP`・`posP`、`WilsonLimit.Cfg`・`liftProb`・`Wsub`、`MidRP.thM`・`posM`、`HalfSplit.Th`）。定義の式は源を読んで写した

この章で使った語 — 鏡映、格子点の面、真ん中の面、正の側、鏡映の対、鏡映正値性、時間の並進、転送の作用素、再構成の器、真空、質量ギャップ、非退化、周期の持ち上げ、弱収束。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：19-04 ブロック写像と繰り込みの一段 — 同じ格子の上で、粗い格子へ移す写像と押し出しの測度を定義します。

ブロック写像と繰り込みの一段 — 道の族・平均・押し出し

この章は本書の検討です。§01 は既存の知見です。

この章で分かること — 細かい格子 $(\mathbb{Z}/2^{m+1}L)^4$ から粗い格子 $(\mathbb{Z}/2^{m}L)^4$ への写像 B を、道の族・重み・平均・群へ戻す操作で定義し、その一次の部分 C、押し出し $B_*\mu$、自由場の多段の族 $\mathcal{M}$・G_k を置きます。第 15 部の後半（15-12・15-13）の定理はこれらについて語ります。

前提となる章 — 19-01 リンクの変数・SU(2) を単位の四元数で、7-05 §02 一段の変換。

先に言うこと — 定義の章で、定理は書きません（最小限の事実だけを Lean の名とともに添えます）。B は数ある作り方の一つで、重みと閾 r_0 は設計の選びです（§08）。格子間隔の 0 への極限は扱いません。このブロック写像は本書の設計です。公開された構成の繰り込みの一段は別の設計で、存在はそちらが示しました（二つの設計の比べは 14-02）。

この章の順序

1. 繰り込みの一段の考え方
2. 二つの格子と粗いリンク
3. 道の族 — 重み $(1/8, 3/4, 1/8)$ と六通りの順
4. 非線形のブロック写像 B — 平均を retract で球へ戻す
5. 道の核 C — 一次の部分
6. 測度の押し出し
7. 自由場の側の多段の族
8. 重みは設計の選び

01

繰り込みの一段の考え方

導入は 7-05 §02・§05 です。繰り込みの一段は、細かい変数から粗い変数を一つの規則で作り、測度をその規則で粗い格子へ運ぶ操作です[典]。ゲージ場では、粗いリンクの変数を細かいリンクの「道に沿った積」で作ります（ゲージ変換で両端だけが動く）。ただし群の元は足して割れず、道の積の平均は一般に $SU(2)$ から外れるので、平均を群へ戻す手続きが要ります[典]。

この章の B は、道の族を一つ固定し、道ごとの積を重みつきで平均し、その値を半径方向に縮めて単位の球に戻すものです。抽象の一段 T（15-03）の具体の一つの形です。

以下、四元数を $\mathbb{H}$、その閉じた単位の球を $\mathbb{B} = \{q \in \mathbb{H} : |q| \le 1\}$ と書きます。$SU(2)$ は球面 $|q| = 1$ です（19-01）。共役 q^* は $SU(2)$ の上では逆元です。

02

二つの格子と粗いリンク

正の整数 L と段の番号 $m \ge 0$ をとり、

$$\Lambda_m = (\mathbb{Z}/2^m L)^4, \qquad \Lambda_{m+1} = (\mathbb{Z}/2^{m+1} L)^4 \tag{1}$$

とおきます。Λ_{m+1} が細かい格子、Λ_m が粗い格子です。番号の大きい方が細かいことに注意してください。粗いリンクは組 $b = (y, \mu)$（$y \in \Lambda_m$、向き $\mu \in \{1,2,3,4\}$）で、y から $y + e_\mu$ へ向かいます。この章の向きは 1〜4 で書き、Lean の添字 0〜3 に順に対応させます（二つの番号の約束は 19-01 §01）。四つの向きを同じに扱うので、どの向きを時間と呼ぶかは定めません。細かいリンクも同じ形 (x, ν)、$x \in \Lambda_{m+1}$ です。

粗い点 y は細かい点 $2y$ に座ります。写像 $y \mapsto 2y$ は $\mathbb{Z}/2^m L \to \mathbb{Z}/2^{m+1} L$ として矛盾なく定まります（$2^m L \equiv 0$ が $2 \cdot 2^m L \equiv 0$ に移るため）[初]。粗いリンク $b = (y, \mu)$ は、細かい格子の上では長さ 2 の区間 $2y \to 2y + 2e_\mu$ に対応し、その終点 $2y + 2e_\mu$ は次の粗い点 $y + e_\mu$ の像 $2(y + e_\mu)$ です[初]。

配位は、リンクごとに球の値をとる関数 $U : \{\text{リンク}\} \to \mathbb{B}$ とします。Wilson の測度が載るのは $SU(2)$ に値をとる配位ですが、平均の結果が球の内側に入りうるので、写像の定義域と値域は球に値をとる配位の空間にしておきます。

Lean：粗いリンク `BoxWalk.BoxLk L m`、球 `ChainBlockMap.Ball`（ほかの名は 19-06）。配位は正の向きのリンクにだけ値をとり、逆向きのリンクの値は共役 U^* で読む約束です。

03

道の族

粗いリンク $b=(y,\mu)$ ごとに、$2y$ から $2y+2e_\mu$ へ行く細かい道の有限の族を一つ決めます。μ と異なる三つの向きを番号の小さい順に n_1,n_2,n_3 とし、これを**横の向き**と呼びます。

- **ずれ** $A=(A_1,A_2,A_3)$：横の向き n_t ごとに、ずれ $d_t\in\{-1,0,+1\}$ を一つ選びます（27 通り）。
- **順** o：三つの横の向きを動く順を、三文字の置換で選びます（6 通り）。

道 $\gamma_{o,A}(b)$ は次の三つの区間をつないだものです。

1. $2y$ から、順 o に従って横の向き n_t に d_t だけ一歩ずつ進む（$d_t=0$ の向きでは動かない）。着いた点を $z=2y+\sum_t d_t e_{n_t}$ とします。
2. z から向き μ に二歩進み、$z+2e_\mu$ に着く。
3. 出たときと逆の順で横のずれを一歩ずつ戻し、$2y+2e_\mu$ に着く。

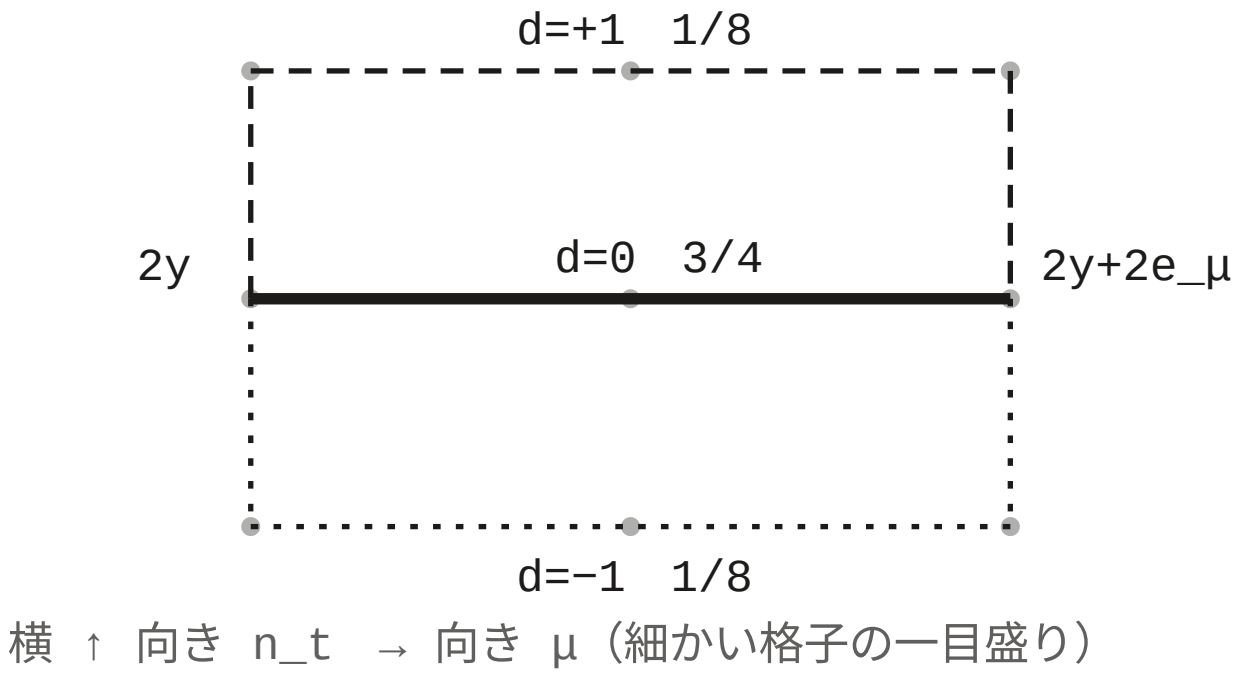
横のずれが全て 0 なら、道は μ に二歩進むだけの**真っ直ぐな道**です。長さは $2+2\#\{t:d_t\neq 0\}$ で、8 以下です。道の一歩はリンクとその向き（順向き・逆向き）の組で、逆向きの一歩はそのリンクを終点から始点へたどります。

道の重みは、横の向きごとの重み $\mathrm{wt}(-1)=\frac18$, $\mathrm{wt}(0)=\frac34$, $\mathrm{wt}(+1)=\frac18$ の積を六つの順で等分したものです。

$$w(o,A)=\frac{1}{6}\prod_{t=1}^{3}\mathrm{wt}(d_t),\qquad \sum_{o}\sum_{A}w(o,A)=1. \tag{2}$$

初 重みは非負で、総和は 1 です（$\sum_d \mathrm{wt}(d)=1$ の三乗を六つの順で等分）。Lean：`ChainBlockMap.sixWeight_total`。

図 1　粗いリンク一本（$2y\to 2y+2e_\mu$）と、横の向き一つに限って描いた三本の道。横の向きは三つあり、向きごとに独立にずれを選んで重みを掛けます



四次元では三つの横の向きで独立にこの選びをするので、真っ直ぐな道の重みは $(3/4)^3 = 27/64$ です[初]。

寄り道：同じ道が二度数えられること

飛ばしてよい。添字 (o, A) は $6 \times 27 = 162$ 通りですが、ずれが 0 の向きは順を変えても道が変わらないので、同じ道が複数の添字から出ます。Lean ではこれを道の有限集合と、合流した重み（同じ道を与える添字の重みの和）に直して扱います（`BoxWalk.boxPaths`・`BoxWalk.boxW`）。合流させても平均の値は変わりません。$\mathbb{Z}^4$ の上で数えると、0 でないずれの数が k の道は $\binom{3}{k}2^k k!$ 本で、合わせて $1 + 6 + 24 + 48 = 79$ 本です（長さ 2・4・6・8 の道がそれぞれ 1・6・24・48 本）[初]。小さいトーラスでは、$\mathbb{Z}^4$ で異なる道が同じ道に落ちることがあります。

六通りの順で平均すると、族は横の三つの向きの入れ替えについて対称になります。ずれの重みが $d \mapsto -d$ で対称なので、族は横の向きの反転についても対称です[初]。逆向きの粗いリンク（$y + e_\mu$ から y へ）の値は、§02 の約束どおり共役で読みます。同じ横の一歩・$-\mu$ への二歩・同じ戻りの族で平均を作り retract しても、値はその共役に一致し、約束と道の族は両立します（Lean：`BoxWalk.boxMap_rev`）。

Lean：道 `WalkCast.walk`（$\mathbb{Z}^4$ の上）、重み `ChainBlockMap.sixWeight`。

> 04

非線形のブロック写像 B

道に沿った積。道 $\gamma=(s_1,\dots,s_\ell)$ と配位 U について、順向きの一歩 s には U_s、逆向きの一歩には U_s^{*} を割り当て、道の順に掛けます。

$$U(\gamma)=\prod_{i=1}^{\ell} U_{s_i}^{\pm}\quad\text{(左から順に)},\qquad U_s^{+}=U_s,\ \ U_s^{-}=U_s^{*}. \tag{3}$$

重みつきの平均。粗いリンク b の値の素は、道の積の重みつきの平均です。

$$q_b(U)=\sum_{o}\sum_{A} w(o,A)\,U\big(\gamma_{o,A}(b)\big)\ \in\mathbb{H}. \tag{4}$$

初 全ての $|U_\ell|\le 1$ なら $|q_b(U)|\le 1$ です（四元数のノルムは積で掛け算になり、重みは非負で総和 1）。Lean：`ChainBlockMap.norm_sixAvg_le`。

球へ戻す操作（retract）。閾 $r_0>0$ を固定し、

$$\rho_{r_0}(q)=\frac{q}{\max(|q|,\,r_0)} \tag{5}$$

とおきます。$|q|\ge r_0$ なら $\rho_{r_0}(q)=q/|q|$ は単位の四元数（$SU(2)$ の元）、$|q|<r_0$ なら $\rho_{r_0}(q)=q/r_0$ で、ノルムは $|q|/r_0<1$ です。どちらでも $|\rho_{r_0}(q)|\le 1$ で、ρ_{r_0} は連続です初。$r_0=1$ では、球の上で ρ_1 は恒等写像です。Lean の定義は全ての $r_0>0$ で意味を持ちますが、本書は $0<r_0\le 1$ をとります（$r_0>1$ では $|q_b|\le 1<r_0$ なので値はいつも球の内側に入り、$SU(2)$ に落ちません初）。

定義（ブロック写像）。細かい格子の球に値をとる配位 U に、粗い格子の配位

$$B(U)_b=\rho_{r_0}\big(q_b(U)\big)\qquad (b\text{ は }\Lambda_m\text{ の粗いリンク}) \tag{6}$$

を対応させる写像 $B=B_m:\ \mathbb{B}^{\{\Lambda_{m+1}\text{のリンク}\}}\to\mathbb{B}^{\{\Lambda_m\text{のリンク}\}}$ を、段 m の**非線形のブロック写像**と呼びます。

初 B は連続です。平均 $q_b(U)$ が閾以上の「小さい場」の事象 $|q_b(U)|\ge r_0$ の上では $B(U)_b=q_b(U)/|q_b(U)|\in SU(2)$ で、閾の下では値は球の内側に入ります。Lean：`ChainBlockMap.continuous_blockMap`・`ChainBlockMap.blockMap_of_small_field`。

Lean の定義は `ChainBlockMap.blockMap r₀ hr (BoxWalk.boxPaths L) (BoxWalk.boxW L) m` です（`hr : 0 < r₀`）。段を重ねた写像 $B_m\circ B_{m+1}\circ\cdots\circ B_{n-1}$（段 n から段 m へ）は `ChainBlockMap.down` です。

閾の下の事象は場の大きな事象で、別に扱います（7-05 §04、第 22 部と第 28 部）。

05

道の核 C — 一次の部分

U が単位元 1 に近いときの B の形を見ます。細かいリンクの上の虚の四元数の場 a（$\mathrm{Re}\, a_\ell = 0$。リー環 $\mathfrak{su}(2)$ の元）と実数 ε をとり、$U_\ell = \exp(\varepsilon a_\ell) \in SU(2)$ とおきます（Lean：`BlockLinearKernel.expCfg`）。道の積を ε で展開すると、一次の項は道に沿った場の符号つきの和です。それを重みで平均したものを

$$(Ca)_b = \sum_{o} \sum_{A} w(o,A) \sum_{s \in \gamma_{o,A}(b)} \pm\, a_s \qquad \text{(順向きの一歩は}+\text{, 逆向きは}-\text{)} \tag{7}$$

と書き、C を**道の核**と呼びます。Lean の名は `BlockLinear.sixSgn` です。$0 < r_0 \le 1$、$\varepsilon \ge 0$、$|a_\ell| \le M$、$\varepsilon M \le 1/32$ のとき $B(e^{\varepsilon a})_b$ と $\exp(\varepsilon (Ca)_b)$ の差が $257(\varepsilon M)^2$ 以下であることは、第 15 部の定理です（15-13、Lean：`BlockLinearKernel.blockMap_exp_linear_le_one`）。retract は一次の部分を変えません。

係数の形。C は色（i, j, k の成分）ごとに働く実線形写像で、係数の表で書けます。細かい格子 $\Lambda_{m+1} = (\mathbb{Z}/2^{m+1}L)^4$ の上で

$$(Ca)_\mu(X) = \sum_{r \in \Lambda_{m+1}} \sum_{\nu=1}^{4} c(r)_{\mu\nu}\, a_\nu(2X + r), \tag{8}$$

$$c(r)_{\mu\nu} = \sum_{o} \sum_{A} w(o,A) \sum_{\substack{s \in \gamma_{o,A} \text{ の一歩で} \\ \text{向き } \nu,\ \text{底の点} \equiv r}} \pm 1. \tag{9}$$

ここで $\gamma_{o,A}$ は原点から向き μ に出る $\mathbb{Z}^4$ の上の道です。Lean：係数 `LatticeTorus.pathKernel`（一辺 $2^{m+1}L$ の形）、(8) の形の作用素 `TorusFourier.Cop`（$X \mapsto 2X$ の写像と係数の表から作る）。一つの色だけをとった実線形写像は `PushCov.blockLin` で、これが `Cop` と一致することは `PushCov.lattice_pushCov` の前半です。

例（定数の場）。場 a が全ての点で同じ値 a_ν をとるとき、横の一歩とその戻りは同じ向きの二つのリンクを逆の符号でたどるので打ち消し、μ の二歩だけが残ります。よって $(Ca)_\mu = 2a_\mu$ です。粗いリンクは細かいリンク二本分の長さなので、これは「長さに比例する」という期待どおりの形です。初 係数で言えば $\sum_r c(r)_{\mu\nu} = 2\delta_{\mu\nu}$ です。この和の形は、道の核の記号を運動量 0 でとったもの（`LatticePath.pathSym_closed` の $k = 0$）でもあります。真っ直ぐな道からの寄与は $c(0)_{\mu\mu}$ と $c(e_\mu)_{\mu\mu}$ の $27/64$ ずつです。

C は単位元のまわりの一次だけで（可換な配位の見方は 15-05）、背景の場 $U \neq 1$ のまわりの線形化は定義しません。

06

測度の押し出し

細かい格子の配位の上の確率の測度 μ について、**押し出し** $B_*\mu$ を

$$(B_*\mu)(E) = \mu\big(B^{-1}(E)\big) \qquad (E \text{ は粗い配位の可測な集合}) \tag{10}$$

で定めます。B は連続なので可測で、$B_*\mu$ は粗い配位の上の確率の測度です[初]。言い換えると、U が μ に従うときの粗い場 $B(U)$ の分布です。Lean では `Measure.map`（確率の測度の形は `ProbabilityMeasure.map`）です。

多段の押し出し。段 n の細かい格子の測度 μ_n を、段を重ねた写像で段 $m \le n$ まで押したものを $\nu_{n,m}$ と書きます。段を一つずつ押しても、まとめて押しても同じ測度です：$m < n$ で $(B_m)_*\nu_{n,m+1} = \nu_{n,m}$、$\nu_{n,n} = \mu_n$[初]。Lean：`ChainBlockMap.vP`、一致は `ChainBlockMap.hcons_blockMap`・`ChainBlockMap.vP_self`。

押し出す元の μ_n は、箱 Λ_n の球に値をとる配位の上の確率の測度です（Lean の型が箱の形）。Wilson の測度（19-01）やフェルミオンつきの測度（19-05）は格子の型が違うので、正規化して箱の格子の配位へ添字を付け替えたものを入れます（フェルミオンの側は Lean で `BoxFermion.fermProbBox`）。

この押し出しの測度だけで書いた示すべき言明は 19-07 にあります。

共分散。線形の場については、押し出しの共分散を次の形で扱います。実の内積空間 E の上の測度 μ の**共分散の形**を

$$\mathrm{cov}_\mu(u,v) = \int \langle u,x\rangle\langle v,x\rangle \, d\mu(x) - \int \langle u,x\rangle \, d\mu(x) \int \langle v,x\rangle \, d\mu(x) \tag{11}$$

とします（Lean：`PushCov.covForm`。意味を持つのは二次の積率があるとき）。$\mathrm{cov}_\mu(u,v) = \langle u, Tv\rangle$ の T を共分散の作用素と呼びます。線形の C で押すと $CTC^\dagger$ になることは 15-13 の定理で、非線形の B ではこの形になりません。

07

自由場の側の多段の族

第 15 部の「自由場の一段」（15-12）は、自由場の共分散の作用素に一段の写像 $T \mapsto CTC^\dagger$ を繰り返した作用素について語ります。これが Gauss の自由場を C で押した場の共分散であることは、一段・一色の形では Lean（`PushCov.lattice_pushCov`）にあり、段を重ねた形は線

形写像の押し出しを繰り返す一行の議論で、紙の上にあります。対象を、格子の側と運動量の側の二つの形で置きます。

格子の側。粗い側の一辺を N とし、トーラス $(\mathbb{Z}/N)^4$ の上の四成分の場 $\phi_\nu(X)$ を考えます（この節の N は粗い側の一辺です）。

- **自由場の共分散**（Feynman ゲージ）$\mathrm{freeCov}_N$：格子の Laplacian $-\Delta$ の逆を成分ごとにとったもの（定数の成分では 0）。Lean：`LatticePush.freeCov`。
- **一段**：$T \mapsto CTC^{\dagger}$（$(\mathbb{Z}/2L)^4$ の作用素から $(\mathbb{Z}/L)^4$ の作用素へ）。Lean：`LatticePush.stepOp`。
- **段 k の共分散**：$(\mathbb{Z}/2^kN)^4$ の自由場の共分散を k 回の一段で $(\mathbb{Z}/N)^4$ まで押したもの $\mathrm{stageCov}_{k,N}$。Lean：`LatticePush.stageCov`。
- **面の共分散**：面の場 $(\mathrm{curl}\,\phi)_{(a,b)}(X) = \big(\phi_a(X+e_b)-\phi_a(X)\big) - \big(\phi_b(X+e_a)-\phi_b(X)\big)$ の共分散 $\mathrm{curl}\circ\mathrm{stageCov}_{k,N}\circ\mathrm{curl}^{\dagger}$。Lean：`LatticeFace.faceCov`。

運動量の側。格子の運動量を $q=(q_1,\dots,q_4)$、$q_\nu = 2\pi n_\nu/N$ とします。

$$\omega(q) = \sum_{\nu} 4\sin^2\frac{q_\nu}{2}, \qquad s_\nu(q) = \sin\frac{q_\nu}{2}, \qquad P(q) = 1 - \frac{s(q)s(q)^{\mathsf{T}}}{|s(q)|^2}. \tag{12}$$

$\omega(q)$ は $-\Delta$ の固有値、$P(q)$ は $s(q)$ に直交する向きへの射影です。微分の記号は $1-e^{iq_\nu} = -2ie^{iq_\nu/2}\sin(q_\nu/2)$ なので、P は勾配（ゲージ）の向きを落とした「物理の部分」への射影です[初]。

細かいトーラス（一辺 $2N$）の運動量のうち、$y \mapsto 2y$ で粗い運動量 q に落ちるものは $r_\zeta(q) = q/2 + \pi\zeta$（$\zeta \in \{0,1\}^4$、16 個）で、これを**別名**と呼びます。**一段の写像** $\mathcal{M}$ は、運動量ごとの 4×4 の行列の族 G に

$$(\mathcal{M}G)(q) = \frac{1}{16}\sum_{\zeta\in\{0,1\}^4} A_\zeta(q)\, G\big(r_\zeta(q)\big)\, A_\zeta(q)^{\mathsf{T}} \tag{13}$$

を対応させます。$A_\zeta(q)$ は q と ζ から陽に作る 4×4 の実行列です。段 k の族は

$$G_0 = P/\omega, \qquad G_k = \mathcal{M}^k(P/\omega). \tag{14}$$

定義域は $\omega(q)>0$ の運動量です（$\omega=0$ は定数の成分）。

Lean は運動量を $\theta = q/4$ で持ちます（$\sin 2\theta_\nu = \sin(q_\nu/2)$）。芯の名は $\mathcal{M}$ の `OneStepBridge.Mfam` と G_k の `TauSplit.Gs` で、他の名は 19-06 にあります。

二つの側の関係：格子の側の $\mathrm{stageCov}_{k,N}$ が運動量ごとに位相の形の記号をもつこと（`LatticePush.stageCov_phase`）、その記号の物理の部分 PXP が G_k に等しいこと（`LatticePush.projFam_stage`）、面の共分散が運動量の側から作った作用素に等しいこと（`LatticeFace.faceCov_eq_posC`）は Lean で確かめてあり、第 15 部（15-12）で使います。ここで押しているのは線形の C で、非線形の B ではありません。

08

重みは設計の選び

この章の B は、次の選びを固定して定義しました。

選び	この章の値	他に取れるもの（例）
横の向きごとの重み $(\alpha, 1-2\alpha, \alpha)$	$\alpha = 1/8$	他の $\alpha \in [0, 1/2]$。$\alpha = 0$ は真っ直ぐな道だけ
横に動く順	六通りの等しい平均	一つの順に固定（対称性は弱くなる）
球へ戻す操作	retract ρ_{r_0}、$0 < r_0 \le 1$	他の閾、他の射影の仕方

重みが非負で総和 1 の道の族と、球を球に移す連続な戻し方を選ぶ限り、§03〜§06 の最小限の事実（値が球に留まる、連続、押し出しが確率の測度）は同じ形で立ちます[初]。閾なしの $q \mapsto q/|q|$ は $q = 0$ で定まらず連続でないので、この条件を満たしません。横のずれの幅やブロックの倍率の選びは 28-05 で扱います。

選びに依るのは、道の核 C の係数 (9) と、それから作る $A_\zeta \cdot \mathcal{M} \cdot G_k$ です。第 15 部の後半の定理に出る具体の定数（一段の縮みの率や面の共分散の比の上界など）は、この章の選び（$\alpha = 1/8$、倍率 2）で計算したもので、別の選びではそのまま使えません。重みを変えると何が変わるか、どの選びが前提を満たしやすいかの論点は、28-05 設計の選びに依るものに回します。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
[初] 重みは非負で総和 1。Lean：`ChainBlockMap.sixWeight_total`	この重みが他より良いこと（28-05）
[初] B は球の配位の間の連続写像で、閾以上の事象では $SU(2)$ に値をとる。Lean：`ChainBlockMap.continuous_blockMap`・`ChainBlockMap.blockMap_of_small_field`	B が $SU(2)$ の配位を $SU(2)$ の配位に移すこと。閾の下の事象の確率の評価
[初] 逆向きのリンクを共役で読む約束は道の族と両立。Lean：`BoxWalk.boxMap_rev`	局所のゲージ変換との両立の全ての形

言えている	言えていない
初 多段の押し出しは段ごとの押し出しと一致（$m < n$）。Lean：`ChainBlockMap.hcons_blockMap`	押し出した測度の減衰・一様性（19-07・第 28 部）
初 定数の場で $(Ca)_\mu = 2a_\mu$	背景の場 $U \neq 1$ のまわりの線形化

出典と再現

もの	種別	出典・道具
一段の変換・ゲージ場で平均が群から外れること	典	7-05 §05 の出典（T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 98 (1985) 17–51 は書誌のみ。J. Dimock, arXiv:1108.1335）
§02〜§07 の対象	Lean	本書の検討の Lean の定義（名は本文と 19-06）。定理は 15-12・15-13
道の数 79・27/64・係数の和	初	手の数え上げ（式は本文の寄り道）。定義から $\mathbb{Z}^4$ の上で道を列挙する台本でも同じ数

この章で使った語 — ブロック写像・道の族・横の向き・retract・閾・小さい場の事象・道の核・押し出し・共分散の形・別名・一段の写像・段の共分散・面の共分散。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：19-05 フェルミオンの重み — 押し出す元の測度の一つ、Wilson–Dirac の作用素の行列式を重みにした測度を定義します。

フェルミオンの重み — Wilson–Dirac の作用素と行列式つきの測度

この章は本書の検討です。§01 は既存の知見です。

この章で分かること — 時間の輪 $\mathbb{Z}/2h$ と空間のトーラス $(\mathbb{Z}/N)^3$ の格子の上で、Wilson–Dirac の作用素 $D_m(U)$ を定義し、ゲージの重み $e^{-\beta S_W}$ に $\mathrm{Re}\det D_m(U)^{2j}$ を掛けた測度 $\mu^{\mathrm{wf}}_{\beta,m,j}$ を置きます。第 20 部のフェルミオンつきの器（20-05）の定理は、この測度について語ります。

前提となる章 — 19-01 面とホロノミー・Wilson の測度・Lean の約束、5-01 §Wilson 作用。

先に言うこと — この章は定義の章です。フェルミオンは Grassmann の変数として積分した後の行列式の形でだけ現れ、Grassmann の積分そのものは定義しません。質量 m と結合 β は格子の上の裸の母数で、連続極限での意味（質量の繰り込み、カイラル対称性）は扱いません。

この章の順序

1. なぜ行列式の重みか — フェルミオンを積分すると、ゲージの配位ごとの行列式が残る
2. 格子と物理のリンク — 時間の輪 $2h$ と空間 N^3。この章の格子の形
3. ゲージの作用の約束 — $S_W=\sum_p(1-\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U_p)$ と、19-01 の重みとの関係
4. Wilson–Dirac の作用素 — $r=1$、四方向に反周期、γ の表現
5. 行列式の重み — $\mathrm{Re}\det D^{2j}$ は非負
6. フェルミオンつきの測度 — 正規化しない測度と、確率の測度 μ^{wf}
7. 質量の範囲 — 定義は全ての m、鏡映正値性の定理は $m>-1$
8. ゲージ場の測度の約束との関係 — 五つの違いと、$j=0$ で Wilson の測度に戻ること

01

なぜ行列式の重みか

格子の上のクォークの場は、点ごとにスピン（4 成分）と色（$SU(2)$ では 2 成分）を持つ Grassmann の変数 $\psi, \bar\psi$ で表します[典]。作用が $\bar\psi D(U)\psi$ の形の二次式なら、Grassmann の変数の積分は配位 U ごとに行列式 $\det D(U)$ を与えます。種類（香り）が n_f 個あれば $\det D(U)^{n_f}$ です[典]。

こうしてフェルミオンを積分した後の測度は、ゲージの配位の上の測度で、重みは $e^{-\beta S_W(U)} \det D(U)^{n_f}$ です。行列式は複素数になりうるので、確率の測度にするには重みが非負の実数であることが要ります。この章では香りの数を偶数 $n_f = 2j$ にとり、重みの実部 $\mathrm{Re}\det D^{2j}$ を使います（§05 で非負であることを見ます）。

格子の上の Dirac の作用素の素朴な差分には、余分な粒子（ダブラー）が現れます。Wilson の名で呼ばれる二階の差分の項を足すと、これが重くなります[典]。その作用素が D です。格子ゲージ理論にフェルミオンを入れた場合の鏡映正値性は Osterwalder–Seiler が扱っています[典]（5-03 §Wilson 作用の反射正値性）。

02

格子と物理のリンク

この章の格子は、時間の輪の長さ $2h$（$h \geq 1$）と空間の一辺 $N \geq 1$ の

$$\Lambda_{N,h}^{\mathrm{wf}} = (\mathbb{Z}/2h) \times (\mathbb{Z}/N)^3 \tag{1}$$

です。点を (t, x)、$t \in \mathbb{Z}/2h$、$x \in (\mathbb{Z}/N)^3$ と書きます。リンクは (t, x, μ) で、$\mu = 1, 2, 3$ は時刻 t の切り口の中の空間のリンク $x \to x + e_\mu$、$\mu = 4$ は時間のリンク $(t, x) \to (t+1, x)$（$t+1$ は $2h$ を法として）です。これを**物理のリンク**と呼び、その全体を $\mathcal{L}_{N,h}$ と書きます。

配位は $U : \mathcal{L}_{N,h} \to SU(2)$ で、$SU(2)$ は単位の四元数です（19-01）。配位の空間の上の基準の測度は、リンクごとの Haar の確率の測度の積 $\prod_\ell dU_\ell$ です（19-01）。

時間の向きを長さ $2h$ の偶数にしておくのは、鏡映 $t \mapsto -t$ の面が $t = 0$ と $t = h$ の二枚になるようにするためです（19-03）。$2h = N$ にとれば四方向が同じ大きさのトーラスです。

Lean：物理のリンクの型 `FermionSU2Config.PhysLink N hT`（`Fin (2 * hT) × (Fin 3 → Fin N) × Fin 4`。Lean の向きの番号 0・1・2 が空間、3 が時間）、$SU(2)$ は `FermionSU2Config.SU2`（四元数の単位球面）、基準の測度は `Measure.pi fun _ => Measure.haarMeasure ⊤`、時間の次の時刻 $t \mapsto t+1 \bmod 2h$ は `FermionSliceBlock.sc`。

03

ゲージの作用の約束

この章の Wilson の作用は、向きを区別しない各面を一度ずつ数えた

$$S_W(U)=\sum_{p}\Big(1-\tfrac{1}{2}\operatorname{Re}\operatorname{tr}U_p\Big),\qquad U_p=U_\mu(z)\,U_\nu(z+e_\mu)\,U_\mu(z+e_\nu)^{\dagger}\,U_\nu(z)^{\dagger} \tag{2}$$

で、ゲージの重みは $e^{-\beta S_W(U)}$（$\beta\in\mathbb{R}$）です。面は、各時刻の切り口の中の空間の面 (μ,ν)（$\mu<\nu\le 3$）と、時刻 t と $t+1$ の切り口を結ぶ時間の面 $(\mu,4)$ です。トレースは四元数を 2×2 の行列 $q=a+bi+cj+dk\mapsto\begin{pmatrix}a+ib & c+id\\ -c+id & a-ib\end{pmatrix}$ で表してとります。

初 この表現は積を保ち、$\frac{1}{2}\operatorname{tr}$ は四元数の実部です。よって $\frac{1}{2}\operatorname{Re}\operatorname{tr}U_p=\operatorname{Re}U_p$ で、面の数を $|\mathcal{P}|$ とすると

$$e^{-\beta S_W(U)}=e^{-\beta|\mathcal{P}|}\,e^{\beta\sum_p\operatorname{Re}U_p}. \tag{3}$$

定数 $e^{-\beta|\mathcal{P}|}$ は正規化で消えるので、正規化した測度は 19-01 の Wilson の測度の約束 $e^{\beta\sum_p\operatorname{Re}U_p}$ と同じです。

Lean：作用 `WilsonGauge.wilsonAction N hT`、面ごとの量 `WilsonGauge.plaqE`（$1-\frac{1}{2}\operatorname{Re}\operatorname{tr}(ABC^{\dagger}D^{\dagger})$）、四元数の行列 `FermionSU2Config.quatMat`、配位の空間の行列としてのリンク `WilsonGauge.physSp`（空間）・`WilsonGauge.physT`（時間）。

04

Wilson–Dirac の作用素

フェルミオンの場 $\psi(t,x)$ は、点ごとにスピンの 4 成分と色の 2 成分を持つ複素ベクトルです。作用素 $D_m(U)$ は $\mathbb{C}^{2h\cdot N^3\cdot 4\cdot 2}$ の上の正方行列で、Wilson の $r=1$ の形

$$(D_m(U)\psi)(z)=(m+4)\,\psi(z)-\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{4}\Big[(1-\gamma_\mu)\,U_\mu(z)\,\psi(z+e_\mu)+(1+\gamma_\mu)\,U_\mu(z-e_\mu)^{\dagger}\,\psi(z-e_\mu)\Big], \tag{4}$$

をとります。$U_\mu(z)$ は色の添字に 2×2 の行列として、γ_μ はスピンの添字に働きます。$m\in\mathbb{R}$ は裸の質量です。

γ の行列。 スピンの添字を $(s,r)\in\{0,1\}^2$ の対で書きます。s を γ_4 の固有値 $+1$（$s=1$）、-1（$s=0$）の順に並べ、Pauli の行列 $\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$、$\sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\ i&0\end{pmatrix}$、$\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ を使って

$$\gamma_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\qquad \gamma_i=\begin{pmatrix}0&-i\sigma_i\\ i\sigma_i&0\end{pmatrix}\quad(i=1,2,3) \tag{5}$$

（塊は $s=1,0$ の順、各塊は r の 2×2）です。これは Lean の定義のとおりの並びです。$\gamma_\mu^2=1$、$\gamma_\mu\gamma_\nu=-\gamma_\nu\gamma_\mu$ $(\mu\neq\nu)$ を満たします[初]。

境界の条件。四方向とも反周期です。空間の向き i では $x_i=N-1$ から出るリンク、時間の向きでは $t=2h-1$ から 0 へのリンクで、跳びの項に符号 -1 を掛けます。ゲージのリンクの変数そのものは周期で、符号は作用素の跳びの側に付きます。

Lean：作用素 `WilsonGauge.physDirac N hT m ω`。中身は時間の切り口ごとの形 `FermionSliceBlock.std4`（(4) の $r=1$ の作用素。切り口の中は `FermionSliceBlock.stdSlice`）に、空間の跳び `FermionSliceBlock.torusX`（境界の符号は `FermionSliceBlock.torusLink`）と、時間の跳び（境界の符号 `FermionSliceBlock.eps`）を入れたものです。γ は `FermionSliceBlock.gammaT`（γ_4）・`FermionSliceBlock.gammaSp`（γ_i）。

成分の式は Lean にあります：`WilsonGauge.physDirac_apply` は physDirac の各成分が (4) の形であることを言います。

[読] $2^3\times2$ では $m\in\{0.3,-0.7,-4.0\}$、$2^3\times4$ では $m\in\{0.3,-0.7\}$ の乱数の配位で、`physDirac` の字句どおりの写しと、(4) を別の γ の表現で独立に書いた作用素（表現の取り替えの行列で写して）を比べ、成分の差は 3.6×10^{-15} 以下でした（本書の検討の数値の記録。時間の境界の符号を外すと差は 2.0 で、照合が効いていることの確かめになります）。

05

行列式の重み

香りの数を $2j$（$j=0,1,2,\ldots$）として、フェルミオンの重みを

$$F_{m,j}(U)=\mathrm{Re}\big(\det D_m(U)\big)^{2j} \tag{6}$$

とします。$j=0$ では $F\equiv1$ です[初]。

[初] 全ての $m\in\mathbb{R}$、全ての j と配位で、$(\det D_m(U))^{2j}$ の虚部は 0、実部は 0 以上です。Lean：`FermionSliceReflection.wilson_weight_nonneg_std4`（トーラスの形 `FermionSliceReflection.wilson_weight_nonneg_torus`）、配位の上の形は `WilsonGauge.fermWeight_nonneg`。よって (6) は実部をとる前から非負の実数で、Re は書き方の上の約束です。

$F_{m,j}$ は配位の連続関数です（行列の成分が U の成分の多項式なので）[初]。Lean の `WilsonGauge.continuous_fermWeight` は分けた座標（下の段落）の上の連続性で、配位の上

の連続性は分ける写像の連続性と合わせて読みます。重みの大域のゲージ変換での不変性と格子の対称性での不変性は、第 20 部の定理です（20-05）。

Lean の `WilsonGauge.fermWeight` は、鏡映の面で配位を「面・正の側・負の側」に分けた座標の上で (6) を書いたもので、分けない配位の上の作用素で書いた形と同じです（`WilsonGauge.physDirac_eq_split`）。分け方は 19-03 の正の側の定義に合わせてあります。

06

フェルミオンつきの測度

ゲージの重みとフェルミオンの重みの積

$$W_{\beta,m,j}(U) = e^{-\beta S_W(U)}\, F_{m,j}(U) \;\geq 0 \tag{7}$$

を密度にした、配位の空間の上の測度を

$$\mu^{\mathrm{wf},0}_{\beta,m,j}(dU) = W_{\beta,m,j}(U) \prod_{\ell \in \mathcal{L}_{N,h}} dU_\ell, \qquad Z^{\mathrm{wf}}_{\beta,m,j} = \int W_{\beta,m,j}(U) \prod_{\ell} dU_\ell \tag{8}$$

とおきます（正規化しない）。分配関数 Z^{wf} は全ての β, m, j で正です。これは第 20 部の定理です（20-05、Lean：`WilsonGauge.partition_pos_wilson_full`、密度 W の形は `WilsonGauge.wf_partition_pos`）。そこで

$$\mu^{\mathrm{wf}}_{\beta,m,j} = \left(Z^{\mathrm{wf}}_{\beta,m,j}\right)^{-1} \mu^{\mathrm{wf},0}_{\beta,m,j} \tag{9}$$

を**Wilson–フェルミオンの測度**と呼びます。確率の測度です[初]。

Lean：密度 `WilsonGauge.wfWeight N hT j m β`、正規化しない測度 `WilsonGauge.wfMeasure`（密度は非負の実数への切り詰め `toNNReal` で入れる。(7) が非負なので値は変わらない：`WilsonGauge.wfWeight_nonneg`）、正規化した測度 `WilsonGauge.wfProb N hT j m β`、確率の測度であることは `WilsonGauge.wfProb_isProbability`（$h \geq 1$）。

この測度は、ブロック写像で押し出す元の測度の一つにもなります（19-04 §06）。

07

質量の範囲

定義 (4)〜(9) は全ての実数 m で意味を持ちます。重みの非負と $Z^{\mathrm{wf}} > 0$ も全ての m で立ちます。範囲が狭くなるのは、定理の側です。

対象・性質	質量 m の範囲	どこで
作用素 D_m、重み $F_{m,j} \geq 0$、測度 μ^{wf}	全ての $m \in \mathbb{R}$	この章
$Z^{\mathrm{wf}} > 0$、格子の対称性での不変	全ての m	20-05
格子点の時間の面についての鏡映正値性	$m > -1$	20-05

$m > -1$ は $m = 0$ と小さい負の質量を含みます。$m \leq -1$ の鏡映正値性は、この本の Lean の言明の外です。m は裸の母数で、物理の質量との関係（臨界の質量への調整）はこの章では定義しません。

08

ゲージ場の測度の約束との関係

第 19 部の他の章の測度（19-01）と、この章の測度の違いをまとめます。

項目	19-01 の Wilson の測度	この章の測度
格子	$(\mathbb{Z}/N)^4$ または横 N・縦 M のトーラス	$(\mathbb{Z}/2h) \times (\mathbb{Z}/N)^3$
ゲージの重み	$e^{\beta \sum_p \mathrm{Re}\, U_p}$	$e^{-\beta S_W}$。定数倍だけ違う（式 (3)）
Haar の測度	強結合の側は球面の Haar の測度を閉じた球へ押し出したものの積（19-01 §Lean の約束）	$SU(2)$ の単位球面の上の Haar の確率の測度の積
正規化	正規化しない $\tilde{\mu}_{N,\beta}$（`TorusRP.wilsonMeasure`）と、正規化した $\mu_{N,\beta}$（`TorusRP.wilsonProb`）。渦の側は分配関数の比で書く	正規化しないもの (8) と、正規化したもの (9) の両方を置く
境界	ゲージのリンクは周期（捩れは 19-02）	ゲージのリンクは周期、フェルミオンは四方向に反周期

初 $j = 0$ では $F \equiv 1$ なので、$\mu^{\mathrm{wf}}_{\beta,m,0}$ は格子 $\Lambda^{\mathrm{wf}}_{N,h}$ の上の正規化した Wilson の測度で、m に依りません。

この章の宣言は `WilsonGauge`・`FermionSliceBlock`・`FermionSU2Config` の名前空間にあり、19-01 の `TorusRP.wilsonMeasure`・`TwistedWilson.ZW` とは別の定義です。四方向が同じ大きさ（空間の一辺 $N = 2h$、$2h > 1$）のとき、純ゲージの測度 `WilsonGauge.gaugeMeasure`（j を持たない定義で、密度は $j = 0$ の $\mu^{\mathrm{wf},0}$ と同じ初）を添字の付け替えで押し出すと、強結合の側の Wilson の測度の定数倍になることが Lean で示され

ています（`WilsonGauge.wilsonMeasure_eq_map`、19-01 §橋）。捩れのある渦の側と、この章の測度を結ぶ定理はありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 $\frac{1}{2}\operatorname{Re}\operatorname{tr} U_p = \operatorname{Re} U_p$ で、ゲージの重みは 19-01 の約束と定数倍だけ違う（$N = 2h$ の Lean の橋は 19-01）	$N \neq 2h$ の格子や捩れのある測度と Lean の定理で結ぶこと
初 全ての m・j で $(\det D_m)^{2j}$ は非負の実数。Lean：`FermionSliceReflection.wilson_weight_nonneg_std4`	$\det D_m$ そのもの（$2j$ 乗する前）の符号
初 正規化した μ^{wf} は確率の測度（$Z > 0$ は 20-05）。Lean：`WilsonGauge.wfProb_isProbability`	奇数個の香り、Grassmann の積分そのもの
読 `physDirac` と (4) の独立な写しの差 $\leq 3.6 \times 10^{-15}$（小さい格子）	数値の比べは小さい格子だけ。一般の N, h の成分の式は Lean（`WilsonGauge.physDirac_apply`）
初 $j = 0$ で Wilson の測度に戻る	質量の繰り込み・カイラル対称性・連続極限

出典と再現

もの	種別	出典・道具
Wilson の作用	典	K. G. Wilson, Phys. Rev. D 10 (1974) 2445（この本の書誌）。5-01
Wilson の項（ダブラーを重くする二階の差分）	典	書誌のみ（未確認）
フェルミオンつきの格子ゲージ理論の鏡映正値性	典	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（書誌のみ）。5-03
Grassmann の積分が行列式を与えること・ダブラー	典	格子の場の理論の標準の事実。教科書の書誌は未確認
格子・作用・作用素・重み・測度（§02〜§06）	Lean	本書の検討の Lean の定義（`WilsonGauge`・`FermionSliceBlock`・`FermionSU2Config`・`FermionSliceReflection` の宣言。名は本文）。対応表は 19-06
作用素の数値の照合（§04）	読	本書の検討の数値の記録：Lean の字句から書き写した作用素と、(4) を独立に書いた作用素の比べ（時間の境界の符号を外すと差 2.0 で、照合が効いていることの確かめ）

この章で使った語 — Wilson–Dirac の作用素・Wilson の項・反周期・物理のリンク・裸の質量・香り・フェルミオンの重み・Wilson–フェルミオンの測度。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：19-06 対象と Lean の定義の対応表 — 第 19 部の全ての対象を、記号・意味・Lean の名・使う部の表で引けるようにします。

対象と Lean の定義の対応表

この章は索引です。

この章で分かること — 第 19 部の対象を、本の記号から Lean の宣言の名へ、また Lean の名から本の記号へ引けます。各行に、定義を置いた章の錨と、その対象について定理を述べる部を添えます。

前提となる章 — なし。各行の錨から定義の章へ進んでください。

先に言うこと — この表は定義の対応だけを載せます。定理の名は各部の章にあります。Lean の名は宣言の名で、置き場（ファイル）は載せません。同じ対象が複数の系統（強結合・渦・フェルミオン・紫外の四つ）で別々に定義されている所は、系統ごとに行を分けました（約束の違いは 19-01 §07）。

この章の順序

1. この表の読み方 — 列の意味と、名前空間
2. 格子・リンク・測度（19-01）
3. 捩れ・渦の比・Polyakov ループ（19-02）
4. 鏡映・器・無限体積（19-03）
5. ブロック写像と多段の族（19-04）
6. フェルミオンの重み（19-05）
7. 系統どうしの対応（橋） — Lean で閉じた同一視
8. 名前空間の一覧 — Lean の名の頭から系統を引く

01

この表の読み方

各表の列は「記号」「意味」「Lean の宣言」「定義の章」「使う部」です。記号は本文の記号、Lean の宣言は `名前空間.名` の形で書きます。引数（`N`・`M`・`β` など）は省いた所があります。「使う部」は、その対象についての定理や前提を述べる部です。

Lean の束は、19-01 §Lean の約束の四つの系統（強結合の側・渦の側・フェルミオンの側・紫外の側）で書かれています。向きの番号の約束は 19-01 §01（20-01〜20-05 は 0〜3 で 0 が時間、第 21・22 部と 20-06 は 1〜4）です。紫外の側の格子は一辺 $2^m L$ の箱で、リンクの値は閉じた単位球です（19-04 §02）。同じ数学の対象でも、系統が違えば別の宣言です。系統の間を Lean で結んだ橋は 19-01 §橋 にまとめてあります。

字 m は章ごとに意味が違います：19-02 では渦の塊の一辺、19-04 では段の番号（Lean の `stageCov m L` の m も段）、19-05 では裸の質量です。

02

格子・リンク・測度（19-01）

記号	意味	Lean の宣言	定義の章	使う部
$(\mathbb{Z}/N)^4$ のリンク	四方向が同じ大きさのトーラスのリンク（点×向き）	`TorusRP.Lk`	19-01 #lattice	20
$(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$	横 N・縦 M のトーラスの点	`TwistedWilson.Site`	19-01 #lattice・19-02	20・21
$U_\ell \in SU(2)$	リンクの変数。単位の四元数	`OSGap.SU2`・`TwistedWilson.SU2`・`FermionSU2Config.SU2`	19-01 #su2	15・20・21・22
$\{\lvert q\rvert \le 1\}$	四元数の閉じた単位球（強結合の側と紫外の側のリンクの値）	`TorusRP.QBall`・`ChainBlockMap.Ball`	19-01 #conventions	15・20
dU	正規化した Haar の測度とその積	`OSGap.haarProb`・`TwistedWilson.haarProb`・`TorusRP.haarBall`・`TwistedWilson.haarCfg`	19-01 #haar	15・20・21・22
U_p、$\mathrm{Re}\,U_p$	面のホロノミーと実部	`TorusRP.hol`・`TwistedWilson.hol`	19-01 #plaquette	15・20・21・22
$\sum_p \mathrm{Re}\,U_p$	強結合の側の作用（符号は正）	`TorusRP.action`	19-01 #wilson-measure	20・22

記号	意味	Lean の宣言	定義の章	使う部
$\tilde{\mu}_{N,\beta}$、$\mu_{N,\beta}$	Wilson の測度（正規化しない $\tilde{\mu}$）と正規化した $\mu_{\circ}$ $\tilde{\mu}_{N,\beta} = Z_N(\beta)\mu_{N,\beta}$	`TorusRP.wilsonMeasure`・`TorusRP.wilsonProb`	19-01 #wilson-measure	20・22
$Z_N(\beta)$	分配関数（$\tilde{\mu}_{N,\beta}$ の全体の質量）	`TorusRP.wilsonMeasure` の全体の値	19-01 #partition	20・22

03

捩れ・渦の比・Polyakov ループ（19-02）

記号	意味	Lean の宣言	定義の章	使う部
n_{12}, n_{34}、z_p	捩れの有無と、面ごとの符号	`TwistedWilson.zt`	19-02 #twist	20・21
Z_0, Z_1	背景 $n_{12} = 1$ のもとの分配関数（$n_{34} = 0, 1$）	`TwistedWilson.ZW`	19-02 #twist	20・21
θ_M	渦の比 $(Z_0 - Z_1)/(Z_0 + Z_1)$	`TwistBlocks.thetaM`	19-02 #theta	20・21
$P_b(t)$	向き 3 を一周する Polyakov ループと、その対の期待値	`HalfSplit.polyLoop`・`PolyakovT.polyExp`	19-02 #polyakov	21
$S_{\mathrm{v}}(N, m)$、S_N	渦の作用の下限と、その m についての下限（渦の最小作用）	`TwistBlocks.Svortex`・`TwistBlocks.SN`	19-02 #vortex-action	21

04

鏡映・器・無限体積（19-03）

記号	意味	Lean の宣言	定義の章	使う部
Θ	鏡映（格子点の面・真ん中の面）。リンクの添字の写像と値の写像の組で書く一般の形	`LinkReflection.linkRefl`、具体の鏡映 `TorusRP.thL`・`TorusRP.sig`（格子点の面）・`MidRP.thM`（真ん中の面）・`HalfSplit.Th`（渦の側）	19-03 #reflection	20・22
正の側	鏡映の正の側のリンク（格子点の面・真ん中の面）と、鏡の面の中のリンク	`TorusRP.posP`・`TorusRP.fixP`・`MidRP.posM`	19-03 #positive-side	20
対	$\int F(\Theta\omega)G(\omega)\,d\mu$ の形の双一次形式	`OrbitGrowth.pairingForm`（器の欄 `OSGap.Datum.B`、測度から作る器 `OSGap.measureDatum`）	19-03 #pairing	20

記号	意味	Lean の宣言	定義の章	使う部
T, Ω, P_Ω	再構成の器（対の形・時間の並進・定数）と、転送の作用素・真空・真空への射影	`OSGap.Datum`（欄 `B`・`τ`・`one`）、作る対象 `OSGap.Datum.Hilb`・`OSGap.Datum.T`・`OSGap.Datum.Ω`、射影 `OSGap.vacProj`	19-03 #datum	20
質量ギャップ m	$\lVert T - P_\Omega \rVert \le e^{-m}$	`OSGap.Datum.HasMassGap`	19-03 #mass-gap-def	20・28
ν_β	$(\mathbb{Z}/2(n+1))^4$ の正規化した測度の $\mathbb{Z}^4$ への周期の持ち上げと、その極限	`WilsonLimit.liftProb`	19-03 #infinite-volume-space	20

05

ブロック写像と多段の族（19-04）

記号	意味	Lean の宣言	定義の章	使う部
Λ_m の粗いリンク $b = (y, \mu)$	一辺 $2^m L$ のトーラスのリンク。$y \mapsto 2y$ で細かい格子へ	`BoxWalk.BoxLk`・`BoxWalk.double`・`BoxWalk.base`	19-04 §02	15
$\gamma_{o,A}(b)$	道の族（順 o、横のずれ A）	`WalkCast.walk`・`BoxWalk.boxPathsIdx`・`BoxWalk.boxPaths`	19-04 #paths	15
$w(o, A)$	道の重み $\frac{1}{6}\prod_t \mathrm{wt}(d_t)$、$\mathrm{wt} = (1/8, 3/4, 1/8)$	`ChainBlockMap.wt`・`ChainBlockMap.sixWeight`・`BoxWalk.boxW`	19-04 #paths・#weights	15・28
$U(\gamma)$、$q_b(U)$	道に沿った積と、その重みつきの平均	`ChainBlockMap.pathProd`・`ChainBlockMap.sixAvg`・`ChainBlockMap.coarseAvg`	19-04 #block-map	15
ρ_{r_0}	閾 r_0 の retract $q/\max(\lvert q\rvert, r_0)$	`ChainBlockMap.retract`	19-04 #block-map	15
B	非線形のブロック写像と、段を重ねた写像	`ChainBlockMap.blockMap`・`ChainBlockMap.down`	19-04 #block-map	15・28
C	道の核（B の単位元のまわりの一次の部分）と、その係数・作用素	`BlockLinear.sixSgn`・`LatticeTorus.pathKernel`・`TorusFourier.Cop`・`PushCov.blockLin`	19-04 #path-kernel	15
$e^{\varepsilon a}$	虚の四元数の場の指数の配位	`BlockLinearKernel.expCfg`	19-04 #path-kernel	15
$B_*\mu$、$\nu_{n,m}$	押し出しの測度と、多段の押し出し	`Measure.map`・`ChainBlockMap.vP`	19-04 #pushforward	15・28

記号	意味	Lean の宣言	定義の章	使う部
cov_{μ}	共分散の形	`PushCov.covForm`	19-04 #pushforward	15
$\mathrm{freeCov}_{N}$、$\mathrm{stageCov}_{k,N}$	自由場（Feynman ゲージ）の共分散と、C で k 回押した段の共分散	`LatticePush.freeCov`・`LatticePush.stepOp`・`LatticePush.pushOp`・`LatticePush.stageCov`	19-04 #family	15
curl、面の共分散	面の場と、その共分散	`LatticeFace.curl`・`LatticeFace.faceCov`	19-04 #family	15
$\omega(q)$、$P(q)$	$\sum_{\nu} 4\sin^2(q_\nu/2)$ と、物理の部分への射影	`OneStepET.omF`・`OneStepBridge.Pfam`	19-04 #family	15
$\omega > 0$ の運動量、$r_\zeta(q)$	定義域（座標 $\theta = q/4$）と 16 個の別名	`OneStepFinal.Qpos`・`OneStepBridge.thR`・`OneStepFinal.rqPos`	19-04 #family	15
$\mathcal{M}$、A_ζ	運動量ごとの一段の写像と、その行列	`OneStepBridge.Mfam`・`OneStepBridge.AM`	19-04 #family	15
G_k	$\mathcal{M}^k(P/\omega)$	`TauSplit.Gs`・`TorusLam.Gst`	19-04 #family	15

06

フェルミオンの重み（19-05）

記号	意味	Lean の宣言	定義の章	使う部
$\mathcal{L}_{N,h}$	時間の輪 $2h$ × 空間 $(\mathbb{Z}/N)^3$ の物理のリンク	`FermionSU2Config.PhysLink`	19-05 §02	20
S_W	$\sum_p (1 - \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U_p)$（符号は負の約束）	`WilsonGauge.wilsonAction`・`WilsonGauge.plaqE`	19-05 §03	20
$D_m(U)$	Wilson–Dirac の作用素（$r = 1$、四方向に反周期）	`WilsonGauge.physDirac`・`FermionSliceBlock.std4`	19-05 #wilson-dirac	20
γ_μ	γ_4 と γ_i	`FermionSliceBlock.gammaT`・`FermionSliceBlock.gammaSp`	19-05 #wilson-dirac	20
$F_{m,j}$	$\mathrm{Re}(\det D_m)^{2j}$	`WilsonGauge.fermWeight`	19-05 §05	20
$W_{\beta,m,j}$、μ^{wf}	密度と、Wilson–フェルミオンの測度（正規化しない・した）	`WilsonGauge.wfWeight`・`WilsonGauge.wfMeasure`・`WilsonGauge.wfProb`	19-05 #fermion-measure	15・20
純ゲージの測度	$e^{-\beta S_W}$ を密度にした測度（j を持たない定義、$N = 2h$）	`WilsonGauge.gaugeMeasure`	19-01 #橋・19-05 §08	20

記号	意味	Lean の宣言	定義の章	使う部
Θ（フェルミオンの側）	時間の鏡映 $t \mapsto -t$ の配位への作用	`WilsonGauge.thetaPhys`	19-03 #reflection	20・22

07

系統どうしの対応（橋）

系統の違う二つの定義が同じ対象であることを Lean で示した宣言です。説明は 19-01 §橋 にあります。

結ぶもの	言っていること	Lean の宣言	範囲
強結合の側 ↔ 渦の側（測度）	$\tilde{\mu}_{N,\beta}$（`TorusRP.wilsonMeasure N β`）は、渦の側の Haar の積に重みを掛けた測度を、定義で与えた一対一の対応で写したものに等しい。定数の因子なし	`WilsonBridge.wilsonMeasure_eq_map`	$M = N$、捩れなしのときだけ。捩れた測度（背景 $n_{12} = 1$）の橋は無い
同（期待値・全質量）	可測な観測量の期待値と、全質量 $Z_N(\beta)$ が二つの側で一致	`WilsonBridge.integral_wilsonMeasure`・`WilsonBridge.wilsonMeasure_univ`	
同（時間を揃えた対応）	強結合の側の時間（添字 0）を渦の側の添字 3 に重ねる対応でも測度が一致し、二つの側の格子点の面の鏡映が同じ写像になる	`WilsonBridgeT.wilsonMeasure_eq_mapT`・`WilsonBridgeT.refl_toBallT`	
同（渦の比）	背景の捩れなし（$n_{12} = 0$）の渦の比を、強結合の側の確率測度の期待値として書く。本の θ_M（$n_{12} = 1$）ではない	`WilsonBridgeV.vortex_ratio_eq`	
強結合の側 ↔ フェルミオンの側	$\tilde{\mu}_{2h,\beta}$ は純ゲージの測度 `WilsonGauge.gaugeMeasure` を添字の付け替えで写したものの $e^{6(2h)^4\beta}$ 倍	`WilsonGauge.wilsonMeasure_eq_map`	空間の一辺 $N = 2h$、$2h > 1$

紫外の側と他の系統を一つの定理で結ぶ宣言は、この表には入れていません（測度の型の付け替えは 19-04 §06）。

08

名前空間の一覧

Lean の名の頭（名前空間）から、どの系統の宣言かを引けます。

名前空間	系統	主な対象
`TorusRP` ・ `OSGap` ・ `LinkReflection` ・ `MidRP` ・ `OrbitGrowth` ・ `WilsonLimit`	強結合の側	$(\mathbb{Z}/N)^4$ の Wilson の測度、器、無限体積
`TwistedWilson` ・ `TwistBlocks` ・ `HalfSplit` ・ `PolyakovT`	渦の側	捩れたトーラス、θ_M、渦の作用、Polyakov ループ
`WilsonBridge` ・ `WilsonBridgeT` ・ `WilsonBridgeV`	強結合の側と渦の側の橋	$M = N$・捩れなしの測度の一致
`WalkCast` ・ `ChainBlockMap` ・ `BoxWalk`	紫外の側（非線形）	道の族、ブロック写像、押し出し
`BlockLinear` ・ `BlockLinearKernel` ・ `LatticeTorus` ・ `TorusFourier` ・ `PushCov`	紫外の側（一次の部分）	道の核、共分散の形
`LatticePush` ・ `LatticeFace` ・ `OneStepBridge` ・ `OneStepET` ・ `OneStepFinal` ・ `TauSplit` ・ `TorusLam`	紫外の側（自由場）	段の共分散、運動量ごとの族
`WilsonGauge` ・ `FermionSliceBlock` ・ `FermionSU2Config` ・ `FermionSliceReflection`	フェルミオンの側	物理のリンク、Wilson–Dirac の作用素、Wilson–フェルミオンの測度

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 第 19 部の対象と Lean の宣言の名の対応（定義の章の錨つき）	系統の間の同一視は §07 の橋の範囲だけ（捩れた測度の橋は無い）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
Lean の宣言の名と名前空間	Lean	本書の検討の Lean の束の源を読んで写した。各対象の定義と説明は 19-01〜19-05

この章で使った語 — 対象・宣言・名前空間・系統・橋。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：19-07 示すべき言明 — ここで定義した対象だけで書いた、示すべき言明の一覧です。

示すべき言明 — 定義された対象だけで書く

この章は本書の検討です。§01 と §08 の問題文の読みは既存の知見の整理です。

この章で分かること — 連続極限と質量ギャップに向けて「何を示せばよいか」を、第 19 部で定義した対象だけで書いた言明です。まず裸の結合の列 β_n の決め方（合わせ）を定め、その列について五つの言明 — 全列の収束、非退化、同程度連続、質量ギャップ（一様な減衰）、帯 — を書きます。どれも一行の式で書け、未定義の量（実効の結合や活性など）を使いません。最後に、問題文との差と、すでに定理になっている近い形を表にします。

前提となる章 — 対象の定義は 19-01 Wilson の測度・19-02 渦の比・19-03 質量ギャップの定義・19-04 押し出しの測度。問題文は 0-03、質量ギャップの定義は 4-11。

先に言うこと — この章の言明は、どれも証明を持たずに置く言明です仮。本書はこのどれも示していません。前半の四つ（合わせ・全列の収束・非退化・同程度連続）は紫外の側の言明で、本書の設計（決まったブロック写像で押し出した測度）について書いたものです。四次元のヤン–ミルズ理論の存在は、2026-11-10 に公開された構成が別の設計で示し、Lean で証明されている、と委員会が評価しました（第二巻。二つの設計の比べは 第 14 部、本書の紫外の試みの記録は 第 15 部）。そこで前半の四つは、本書の設計での示すべき言明の記録として残します。後半の二つ（一様な減衰とその帰結の質量ギャップ、帯）は赤外の側の言明で、開いたままです。こちらが第三巻の本題です。五つの言明は、合わせで決めた列 β_n について読むときだけ中身を持ちます。列を自由に選べる形で読むと、結合を 0 に置くだけで質量ギャップと帯の言明が立ってしまいます（§01）。合わせ方には選びが残ります。問題文の要求のうち、細かい観測量と回転不変は、言明を書くための対象がまだ定義されていません（§08）。

この章の順序

1. 設定 — 一つの箱と、細かくなる格子の列
2. 合わせ — 裸の結合の列の決め方
3. 全列の収束 — 合わせた列で、部分列を取らずに
4. 非退化 — 粗い場が小さい場に留まる
5. 同程度連続 — 物理の位置について一様に
6. 一様な減衰 — 格子間隔と箱について一様に（帰結は質量ギャップ）
7. 帯 — 渦の比が面積の指数で小さくなること
8. 問題文との差 — 別の段と、対象がまだ無い段
9. すでに定理になっている近い形（表 2）

01

設定 — 一つの箱と、細かくなる格子の列

問題文が求めるのは、無限に広い連続の四次元の上の理論です（0-03 §03）。この章では、その手前の一段として、**大きさを止めた一つの箱**の上で格子間隔を 0 に近づけることを考えます。言明に使う対象は、第 19 部で定義したものだけです。

箱の大きさを正の整数 L とします。§02 の合わせだけは、一つ固定した**基準の大きさ** L_{ref} の箱で行います。§03〜§05 の言明は一つ止めた大きさ L の箱について（$L = L_{\mathrm{ref}}$ に限らない）、§06・§07 では大きさ $L \cdot L_0$ を走らせます。段 $n \geq 0$ の格子を

$$\Lambda_n = (\mathbb{Z}/2^n L)^4 \tag{1}$$

とし、段 n の格子間隔を $a_n = 2^{-n}$ と読みます。こう読むと、どの段の格子も一辺 L の同じ箱を刻んだものになります。段の番号が大きいほど細かい格子です（19-04 §02 と同じ向き）。時間の役をする向きは、19-01 の第 20 部の番号の向き 0 とします（19-04 の向きの番号 1〜4 では向き 1。19-04 自身は時間の向きを定めていません）。

使う対象は四つです。

記号	中身	定義
μ_n^{β}	Λ_n の上の正規化した Wilson の測度（結合 β）。結合の列 (β_n) を決めたとき $\mu_n := \mu_n^{\beta_n}$	19-01。Lean：`TorusRP.wilsonProb`
$\nu_{n,m}$	μ_n をブロック写像で段 $m \le n$ まで押し出した測度。粗い格子 Λ_m の配位の上の確率の測度	19-04。Lean：`ChainBlockMap.vP`
$\theta_{N,M}(\beta)$	背景の捩れ $n_{12} = 1$ を止めた、横 N・縦 M のトーラスの、(3,4) の捩れなし・ありの分配関数の比 $(Z_0 - Z_1)/(Z_0 + Z_1)$	19-02。Lean：`TwistBlocks.thetaM`
器と質量ギャップ	測度から作る Hilbert 空間・転送の作用素 T・真空 Ω。$\|T - P_\Omega\| \le e^{-m}$ を質量 m のギャップと呼ぶ	19-03。Lean：`OSGap.Datum.HasMassGap`

$\nu_{n,m}$ は、段 n の細かい格子の理論を、段 m の決まった解像度で眺めたものです。段 m を止めて $n \to \infty$ とすると、格子間隔 a_n が 0 に近づく極限を、同じ粗い格子の上で見ることになります。押し出しは粗い場を作る規則であって、実効の作用への分解（表現）は使っていません。

配位の空間はコンパクトです（球の有限個の積）。そこで、各段 m で $\nu_{n,m}$ は部分列に沿って弱収束し、対角線の論法で全ての段に共通の部分列が取れます[初]。**部分列の極限は前提なしに在る**ので、示すべき言明はそれより強い形でなければ意味を持ちません。以下の六つは、どれもその形です。

合わせと組にして読むこと。 §03〜§07 の五つの言明は、どれも結合の列 (β_n) を含みます。列を自由に選べる形で読むと、言明は中身を失います。

- $\beta_n \equiv 0$ と置くと、細かい測度は Haar の測度の直積です。ブロック写像は局所なので、時間に離れた粗い変数は独立で、共分散は 0 です。だから質量ギャップの言明（§06）はこの列で立ちます[初]。また $\beta = 0$ では捩れの有無で分配関数が変わらず $Z_0 = Z_1$ なので $\theta = 0$ で、帯の言明（§07）も立ちます[初]。
- β_n を大きく取ると、細かい測度は平らな配位に寄り、非退化の言明（§04）は立ちやすくなる見込みです。

逆に「全ての列について」と読めば、偽になる列がある見込みです（たとえば強結合の端と弱結合の端を交互に行き来する列では、全列の収束は期待できません）。だからこの章では、まず §02 で列 (β_n) を**合わせ**で一つに決め、§03〜§07 の五つは**その列について**書きます。強結合の窓での定理（§09）は、質量ギャップの言明の自明に立つ側の向きに在ることにも注意してください。

02

合わせ — 裸の結合の列の決め方

格子の上の結合 β は、連続極限では「入力」ではなく、格子間隔を目盛るために調整する数です（導入は 5-05 §02）。ここでは、その調整を定義された対象だけで書きます。

合わせの規則。 段 m_0 と、段 m_0 の粗い配位の有界連続な関数 Y_0（たとえば粗い面の $\mathrm{Re}\,U_p$ の平均）と、目標の値 κ_0 を選びます。段 $n \ge m_0$ ごとに

$$f_n(\beta) = \int Y_0 \, d\nu_{n,m_0}^{\beta}, \qquad \beta_n \text{ は } f_n(\beta_n) = \kappa_0 \text{ の解} \tag{2}$$

と定めます。ν_{n,m_0}^{β} は、基準の大きさ L_{ref} の箱の結合 β の Wilson の測度を押し出したものです。

解の存在。 f_n は β について連続です[初]。理由：$f_n(\beta)$ は、Haar の測度の積についての二つの積分 $\int (Y_0 \circ B)\, e^{\beta S}$ と $\int e^{\beta S}$ の比です（$S = \sum_p \mathrm{Re}\,U_p$、$B$ は段 n から段 m_0 への合成の写像）。被積分関数は有界で β について連続、配位の空間はコンパクトなので、どちらの積分も優収束の定理で連続になり、分母は正です。だから κ_0 が二つの値 $f_n(\beta'), f_n(\beta'')$ の間に在れば、中間値の定理で解が $[\beta', \beta'']$ の中に在ります[初]。全ての n で κ_0 がこの範囲に入るかは、Y_0 と m_0 の選びに依ります。

選びが残る所。 (i) Y_0・m_0・κ_0 の取り方。(ii) 解が一つとは限らないので、どの解を取るか（たとえば決めた区間の中の最大の解）。この二つは設計の選びで、28-05 の表に載せます。

示すべき言明。 合わせの規則は、全ての n で解が在れば列を一つ定めます。解の存在は端の値の確かめに掛かっていて、まだ確かめていません。その上で示すべきは、こうして決めた列が**結合の走り方の括弧**に入ることです。

> [仮] 合わせ：ある β_* と $0 < b_- \le b_+$ があって、全ての n で $\beta_* + b_- n \le \beta_n \le \beta_* + b_+ n$

格子間隔を半分にするごとに β がほぼ一定の幅で増える、という形です。一ループの漸近自由が予言する対数の走り方 $\beta \sim$ **定数** $\times \log(1/a)$ を、$n = \log_2(1/a_n)$ で書いたものにあたります（導入は 5-05 §03）。本書の検討が組んだ条件つきの含意（小さな箱の弱い紫外の存在）では、$b_\pm$ を一ループの係数の定数倍に取った括弧（裸の結合の合わせの括弧）が、実効の結合についての仮定（結合の一段の括弧の仮定）から出る形で置かれていました（28-01）。

結合の列の扱いは、その含意と Lean で違います。その含意は、細かい測度を「裸の結合の合わせの括弧で選んだ β_n の Wilson の測度」と定義して使います（その含意の β_n は実効の結合を目標の値に合わせて選んだもので、この節の規則 (2) とは別の合わせ方です）。Lean の定理は裸の結合の列を任意に取り、その選びと結びつけていません。

以下の約束。合わせは基準の大きさ L_{ref} の箱で一度だけ行い、得た列 β_n（段 n の格子間隔 $a_n = 2^{-n}$ での結合）を、全ての大きさの箱に使います。§03〜§07 では、β_n はこの列、$\mu_n = \mu_n^{\beta_n}$ は考えている大きさの箱の Wilson の測度、$\nu_{n,m}$ はその押し出しです。§06 と §07 で大きさを動かすときも、列は同じです。

03

全列の収束 — 部分列を取らずに

仮 全列の収束：合わせで決めた列 β_n について、全ての段 m と、Λ_m の配位の全ての有界連続な関数 F について、数列 $n \mapsto \int F \, d\nu_{n,m}$（$n \geq m$）が収束す

言い換えると、各段 m で $\nu_{n,m}$ が部分列を取らずにある測度 ν_m へ弱収束することです。このとき、ブロック写像が連続なので押し出しと極限は入れ替わり、ν_m は整合の関係 $(B_m)_* \nu_{m+1} = \nu_m$ を満たします初。整合な族 (ν_m) が、大きさ L の箱の上の「連続極限の理論」を、全ての解像度で同時に与えます。

§01 のとおり、部分列の極限は前提なしに在ります。この言明の中身は「どの部分列でも同じ極限になる」ことです。極限が部分列に依ると、理論が一つに決まりません。

この言明は結合の列を縛らないので、§02 の合わせで決めた列について読みます。合わせが決まっていないと、極限が何の理論の極限なのかが決まりません。

本書の検討が組んだ条件つきの含意の結論は、部分列に沿った収束までです（28-01）。その含意には全列の収束に関わる仮定（増分の総和可能性の仮定）が在りますが、これは**この言明と同じものではありません**。増分の総和可能性の仮定は、ゲージ不変な関数の可算で稠密な族について、観測量の値の段ごとの増分が総和可能、という仮定です。総和可能なぶんこの言明より強く、関数の族も違います。ゲージ不変な関数から全ての有界連続な関数へ移る一段は紙の議論で、極限の測度がゲージ変換で不変であることを介します（28-02）。

04

非退化 — 粗い場が小さい場に留まる

段 m の粗い格子の決まった有限の領域 R_m（箱の全体ではなく、物理の大きさを止めた領域）を選びます。R_m の中の粗いリンクが単位の長さに近く、粗い面がほぼ平らな配位の集まりを、**小さい場の集合** C_m と呼びます。たとえば閾 $y_m > 0$ を選んで

$$C_m = \{U :\ R_m \text{ の全ての粗いリンク } b \text{ で } |U_b| \geq 1 - \epsilon_m,\ \ R_m \text{ の全ての粗い面 } p \text{ で } \beta_m (1 - \mathrm{Re}\, U_p) \leq y_m\} \tag{3}$$

とします（閉集合です）。β_m は合わせで決めた列の第 m 項です（$m \geq m_0$）。$\epsilon_m < 1$ と y_m は、**言明より先に**、後の段（摂動の展開）が使える小ささに固定します（たとえば、小さい場の閾を決める決まった角 φ_c について、面の値の角が φ_c 以下になる床 $y_m \leq \beta_m(1 - \cos\varphi_c)$ の下）。粗いリンクの値は単位の閉球に在り $1 - \mathrm{Re}\, U_p \leq 2$ なので、$\epsilon_m \geq 1$、$y_m \geq 2\beta_m$ と取れば C_m は配位の全体になり、言明は自明に立ちます初。R_m の取り方も選びです。箱の全体で書くと、体積とともに η_m が 1 に近づきうるので、領域の形で書きます。

仮 非退化：合わせで決めた列 β_n と、先に固定した (R_m, ϵ_m, y_m) について、全ての段 m に $\eta_m < 1$ があって、十分大きい全ての n で $\nu_{n,m}(C_m) \geq 1 - \eta_m$

意味：どれだけ細かい格子から押し出しても、段 m の粗い場は、決まった確率以上で小さい場の領域に居ます。極限 ν_m でも同じ下界が残るので（C_m は閉集合）、極限の測度は小さい場の領域に正の重みを持ちます初。後の段（摂動の展開の使える範囲）に入るための入口の条件です。

$\eta_m < 1$ が言明の中身です。$\eta_m = 1$ を許すと、どの測度でも立ちます。また、この言明は結合を大きく取るほど立ちやすくなる向きのものと見込まれます（§01）。合わせで決めた列について読むのはそのためです。

05

同程度連続 — 物理の位置について一様に

連続極限の理論は、格子点だけでなく、箱の中の任意の位置で観測量を持つべきです。そのための言明です。

観測量の族を一つ選びます。箱 $(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})^4$ の中の位置 x のうち、ある段 $\mathrm{lev}(x)$ の格子点になっているもの（二進の有理点）を集めた可算で稠密な集合を D とし、各 $x \in D$ に段 $\mathrm{lev}(x)$ の粗い配位の有界連続な関数 G_x（決まった、定数でない局所の観測量 G を位置 x に置いたもの）を対

応させます。言明は、局所の観測量 G の全てについて要ります。G を定数に取ると言明は自明に立つので、一つの G だけでは中身がありません。

$$s_n(x) = \int G_x \, d\nu_{n,\mathrm{lev}(x)} \qquad (n \geq \mathrm{lev}(x)) \tag{4}$$

仮 同程度連続：合わせで決めた列 β_n について、$\tau_n \to 0$ と、$r \to 0$ で 0 に行く関数 $\Omega(r)$ があって、全ての $x, x' \in D$ と $n \geq \mathrm{lev}(x), \mathrm{lev}(x')$ で $|s_n(x) - s$

意味：観測量の期待値が、位置について n に一様な連続度を持ちます（格子の刻みから来る誤差 τ_n を除いて）。全列の収束と組になると、極限 $s(x) = \lim_n s_n(x)$ が D の上で一様連続になり、箱の全ての位置へ連続に延びます初。

観測量の族 (D, G) の選び方は、本書の検討が組んだ条件つきの含意の形に従ったもので、定義と言明を別の目で照合する点検はまだです（28-04 の観測量の族と小さい場の集合）。

06

一様な減衰 — 格子間隔と箱について一様に（帰結は質量ギャップ）

段 m の格子の時間の向き（§01 の約束：19-01 の第 20 部の番号で向き 0）に t 目盛りずらす並進を τ_t と書きます。箱は周期なので、τ_t は粗い配位の上の写像として定まります。物理の時間では $a_m t$ のずれです。

仮 一様な減衰：合わせで決めた列 β_n について、ある $m_* > 0$ があって、全ての大きさ L、全ての段 m、時刻 $[-r, r]$ の有限個の粗いリンクだけに依る（r

時間差 t は周期の半分までに限ります。周期の箱では τ_t が周期 $2^m L$ で元に戻り、t が周期に等しいと共分散は $\mathrm{Var}(F)$ に戻るからです初。定数は $C_F = c_F \|F\|_\infty$ の形に取り、c_F は F が依るリンクの数だけで決まり、n・L に依りません。m_* は物理の単位の質量で、格子間隔にも箱の大きさにも依りません。これが言明の芯です。

言明の形には選びが在ります。定数を観測量ごとに取るか（この章の形）、一つの定数 C で $C\|F\|_\infty\|G\|_\infty$ と一様に取るか。観測量を時刻 0 の近くのリンクに依るものにするか、時刻がちょうど 0 のリンク（体積とともに数が増える）に依るものにするか。器の質量ギャップを出すには、どちらの形でも足ります初。

この減衰から、極限の測度の再構成の器で質量ギャップ（19-03 の $\|T - P_\Omega\| \leq e^{-m}$）が出る、という含意は 28-03 に書きます。器を作るには、極限の測度の鏡映正値性と対称性も要ります。細かい格子の鏡映正値性は第 20 部の定理ですが、押し出しの測度への移しは前提の側に在ります（28-04 の粗い水準の鏡映正値性・測度の対称）。

問題文の質量ギャップ（4-11 §01）は無限体積の理論のハミルトニアンのスペクトルの隙間です。この言明は、そこへ向かう段のうち「大きさを止めた箱で、格子間隔に一様」の部分を、箱の大きさについても一様にした形です。無限体積へ移る段は §08 の表の別の行です。

この言明はこの章では本書の押し出しの測度で書いてありますが、問いの芯（繰り込んだ格子の観測量の相関が、物理の単位で、切断と体積に一様に、指数の速さで減ること）は設計に依らず開いています。これが出れば、極限の理論の質量ギャップと真空の一意性は既知の一般論で従います。公開された構成に在るのは、長い距離について多項式の速さの評価までです（16-03）。

07

帯 — 渦の比が面積の指数で小さくなること

渦の比 $\theta_{N,M}(\beta)$（19-02）は、捩れを一枚入れたときの分配関数の相対の差です。$Z_1 > 0$ なので $\theta_{N,M} \leq 1$ です初。M が偶数なら $0 \leq \theta_{N,M}$ も成り立ちます（21-06 の定理）。19-02 の約束では、渦（流束）の自由エネルギーは $\Delta F = \ln(Z_0/Z_1)$ で、$\theta = \tanh(\Delta F/2)$ です。だから θ が小さいとき、$-\ln\theta$ は ΔF の対数の符号を変えたもの $-\ln(\Delta F/2)$ にほぼ等しくなります（導入は 25-01）。

物理の大きさ L_0 の正方の箱を、段 n の格子間隔で刻むと、一辺の格子点の数は $2^n L_0$ です（$n \geq 1$ で偶数）。結合は §02 で基準の箱で合わせた列 β_n を、全ての L_0 に同じく使います。

仮 帯：合わせで決めた列 β_n について、ある $c > 0$ があって、全ての L_0 で、十分大きい全ての n で $\theta_{2^n L_0, 2^n L_0}(\beta_n) \leq \exp(-c\, L_0^2)$

対数 $-\ln\theta$ を使わずに書くのは、$\theta = 0$（いちばん良い場合）を言明が壊さないためです。c を少し下げれば、$\liminf_n(-\ln\theta) \geq c\, L_0^2$ の形と同じことです。

意味：連続極限で、渦の自由エネルギー ΔF が箱の面積の指数で小さくなります（$-\ln\theta$ が面積に比例して増える）。これは渦の言葉での閉じ込めの形（面積の指数）で、帯を「θ が 1 から一様に離れる」という素朴な形で書くと足りないことは 26-01 §04 にあります。弱結合の側（小さい箱）と強結合の側（大きい箱）の移り変わりを一つの c で跨ぐことが、この言明の中身です。

帯の言明は θ と Z だけで書け、押し出しの測度を使いません。この言明から質量ギャップへ移る矢印は、この本には在りません（28-03・28-06）。

08

問題文との差 — 別の段と、対象がまだ無い段

問題文（0-03）が求めるものと、§02〜§07 の六つの言明の間には、まだ段があります。

表 1　問題文の要求と、この章の言明の関係（2026-11-13 の時点）

問題文の要求	この章の言明との関係	言明を書くための対象
$\mathbb{R}^4$ の上（0-03 §03）	この章は大きさ L の箱。箱を大きくする段は別	定義を一つ足せば書ける（箱の中の窓への制限か周期の延長）。強結合の窓では周期の持ち上げで書けて定理（20-03）
局所の場・Schwinger 関数（4-10 §02）	この章の観測量は段 m の粗い配位の関数で、点の場ではない	**まだ無い**。格子の勾配流と流した観測量の定義が要る
回転不変（Euclid の群）	格子の対称は超立方の群だけ	**まだ無い**。超立方より細かい回転が作用する観測量か、回した格子から標準の格子へのブロック写像が要る
非自明（0-03 §05）	この章に無い	書けるが、どの量で言うかが未定（例：段 m_0 で合わせたとき、別の段 m_1 の同じ観測量の極限値）
質量ギャップ（0-03 §06）	§06 の一様な減衰が、箱の上で格子間隔と箱に一様な形	在る（器は 19-03）
短距離での一致（0-03 §07）	§02 の括弧は結合の走り方だけで、相関の短距離の形は言っていない	—
任意のコンパクト単純群（0-03 §02）	この章は $SU(2)$ だけ	—

細かい観測量と回転の二つは、言明の形を議論する前に、対象の定義が要ります。その一覧は 28-06 にあります。

09

すでに定理になっている近い形

第 20〜22 部の定理は、六つの言明のどれかに近い形（別の尺度・別の対象での形）です。文字どおりの特別な場合になっているものはありません。どれも**格子間隔を止めた一つの尺度**（または線形化した一段）の定理で、六つの言明そのものには届いていません。各行の右の欄が、届いていない所です。

表 2　六つの言明と、すでに定理になっている形（2026-11-13 の時点）

言明	定理になっている形	章・Lean	言明に届いていない所
一様な減衰	典 強結合の窓 $0<\beta$、$18\tanh\beta<1$ で、無限体積の極限の測度の再構成の器に質量 $-\frac{1}{2}\log(18\tanh\beta)$ のギャップ、四方向のクラスター性。既知の型の結果の形式化	20-04。`InfMain2.wilson_infvol_main2`	β は小さい窓の中に止まり、合わせた列 $\beta_n\to\infty$ ではない。格子間隔は 1 に固定。質量は格子の単位で、下界だけ。強結合は §01 の自明に立つ側の向きで、言明が満たせる例ではあるが中身の確かめではない
全列の収束	典 同じ窓で、周期の箱の Wilson の測度の持ち上げが、箱の大きさの全ての列について部分列なしに同じ測度へ弱収束する。既知の型の結果の形式化	20-03。`AllN.wilson_infvol_allN`・`InfVol.wilson_infvol_unique`	動かすのは箱の大きさで、格子間隔ではない（この章の n の向きでない）。窓の中だけ
帯	典 薄い渦の床：全ての実の β、$N,M\geq 1$ で $\theta_{N,M}(\beta)\leq \tanh(N^2\lvert\beta\rvert)^{M^2}$。既知の描像の片側の形式化	21-02。`TwistedWilson.twisted_vortex_bound`	格子間隔と横の大きさ N を止めて M を大きくする形。指数 $-\ln\tanh(N^2\lvert\beta\rvert)$ は $N\to\infty$ で 0 に行き、$N=M=2^nL_0$ の形には届かない
帯	典 太い渦の床：任意の $\varepsilon>0$ に、十分大きい β ごとに十分大きい M で $\lvert\theta_{N,M+1}(\beta)\rvert\leq\exp\bigl(-(M+1)^2e^{-\beta(S_N+\varepsilon)}\bigr)$（$S_N$ は渦の最小作用、19-02）。既知の描像の片側の形式化	21-03。`TwistBlocks.thick_vortex_floor`	同じく N と格子間隔を止めた形。β と M の閾は陽でない。指数は $\beta\to\infty$ で 0 に行く
帯	典 強結合の渦の床（渦の自由エネルギーの上界）：強結合の窓の中で、横 N・縦 M のトーラスの捩れた分配関数の差が縦の平面の面積について指数で小さく、面積あたりの率は横の大きさにも縦の大きさにも依らない。前の因子（横の面積）は残る。既知の型の形式化	20-06。`VortexStrongMN.vortex_floor_MN_sharp`	結合は強結合の窓の中に止まり、合わせた列は窓の外へ出る。格子間隔は 1 に固定。強結合は §01 の自明に立つ側の向きで、言明が満たせる例ではあるが中身の確かめではない

言明	定理になっている形	章・Lean	言明に届いていない所
非退化（近い形）	典 一つの尺度の稀さ：$\beta \geq 81$ で、偶数の辺 ≥ 4 の全てのトーラスと面の全ての集合 X について、X の面が全て $\mathrm{Re}\,U_p < 0$ となる確率 $\leq q_1^{\lvert X\rvert/6}$、$q_1 < 1$ は体積に依らない。チェス盤の評価の形式化	22-01。`FoldCap.rarity_explicit`	細かい格子の測度そのもの（押し出しなし、$m = n$）の、閾を $\mathrm{Re}\,U_p < 0$ に止めた評価。$\nu_{n,m}$（$m < n$）の粗い面についての評価ではなく、非退化の特別な場合にもなっていない
（どの言明でもない）	自由場の一段：Gauss の自由場を線形化したブロック化で m 回押した場の、面の強さの共分散の評価（比 $\leq 640/9$）と、17 段の縮み $< 1/170$ が段に一様。Lean で機械検査	15-12。`LatticeFace.lattice_face_T1h`・`TorusLam.stage_tau_17`	Wilson の測度でなく自由場、非線形のブロック写像でなく一次の部分。重み $(1/8, 3/4, 1/8)$ に依る。六つの言明の十分条件（28-04 の紫外の安定性の前提）の、自由場での材料

表 2 の右の欄は、どれも同じ一つのことを言っています。**定理は格子間隔を止めた形か、自由場・線形化の形で、合わせた結合の列 β_n のもとで $n \to \infty$ とする形の定理は一つもありません**。六つの言明から定理までの距離は、前提の一覧（28-04）で、どの前提が何の札にあるかとして見えます。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
仮 合わせの括弧と、合わせで決めた列についての五つの言明（全列の収束・非退化・同程度連続・一様な減衰・帯）を、第 19 部の対象だけで書いた	どの言明も示していない
初 列を自由に選ぶと、$\beta_n \equiv 0$ で一様な減衰と帯の言明が立つ	合わせで決めた列でこれらが立つかどうか
初 部分列に沿った極限は、配位の空間のコンパクト性だけで在る	極限が部分列に依らないこと（全列の収束）
初 合わせの関数 $f_n(\beta)$ は β について連続で、目標の値が端の値の間に在れば解が在る	全ての n で目標の値が範囲に入るか。解の一意性。合わせた列が括弧に入ること
初 全列の収束のもとで、極限の族は押し出しについて整合する	極限の非自明性。極限が合わせの選びにどう依るか
表 2：強結合の窓、格子間隔と横の大きさを止めた渦の床、一つの尺度の稀さ、自由場の一段は Lean で機械検査した定理	どれも六つの言明そのものではない（格子間隔を止めた形か、自由場・線形化の形）
問題文との差（表 1）	細かい観測量と回転不変は、言明を書く対象がまだ無い。無限体積・非自明性の段の言明はこの章に無い

出典と再現

もの	種別	出典・道具
問題文	典	A. Jaffe, E. Witten（Clay 数学研究所の公式の問題文, 2000）。読みは 0-03
Osterwalder–Schrader の再構成	典	K. Osterwalder, R. Schrader, Comm. Math. Phys. 31 (1973) 83；42 (1975) 281。導入は 4-10
漸近スケーリングと格子の β 関数	典	導入と出典は 5-05
六つの言明の形	仮	本書の検討（前提の棚卸し、2026-11-13）。本書の検討が組んだ条件つきの含意（小さな箱の弱い紫外の存在）の仮定と結論を、定義された対象の言葉に書き直したもの
使った対象の定義	Lean	本書の Lean の束：`TorusRP.wilsonProb`・`ChainBlockMap.vP`・`TwistBlocks.thetaM`・`OSGap.Datum.HasMassGap`。各定義は第 19 部の各章
表 2 の定理	Lean	各章の出典の表（20-03・20-04・21-02・21-03・15-12・22-01）

この章で使った語 — 示すべき言明、合わせ、裸の結合、結合の走り方の括弧、押し出しの測度、全列の収束、部分列の極限、非退化、小さい場の集合、同程度連続、一様な減衰、渦の比、面積の指数、帯。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：20-00 入口 — 一つの格子間隔で言えること — 表 2 の定理を、定義から順に読みます。前提の一覧へ先に進むなら 28-00。

入口 — 一つの格子間隔で言えること

この章は案内です（この部の入口）。

この章で分かること — 第 20 部の定理の一覧（章ごとに一行）と、部の全体に掛かる範囲。この部の定理は、格子間隔を固定した有限の格子、またはその無限体積の極限の上の言明で、再構成の器（Hilbert 空間・転送の作用素・真空）を立てる部品と、強結合の窓の中での質量ギャップです。

前提となる章 — 19-00（対象・確かな定理・前提の読み方）と、19-01・19-03（格子・Wilson の測度・鏡映・再構成の器）。

先に言うこと — 格子間隔は固定です。強結合の定理は窓 $18\tanh|\beta| < 1$ か $24(1-e^{-4|\beta|}) < 1$ の中だけで、連続極限と弱結合については何も言いません。どの定理も既知の型の結果の Lean による形式化です。

この章の順序

1. この部の定理 — 章ごとに一行（表 1）
2. 部の全体に掛かる範囲
3. 読む順

01

この部の定理 — 章ごとに一行（表 1）

章	言えていること（一行）	Lean の主な名
20-01 鏡映正値性	$(\mathbb{Z}/2M)^4$ の Wilson 測度の鏡映正値性。格子点の面は全ての実の β、リンクの真ん中の面はゲージ不変な関数で $\beta \geq 0$・$M \geq 2$、四方向の格子点の面も全ての β。鏡映の対は対称	`TorusRP.wilson_rp` ・ `MidRP.wilson_rp_mid` ・ `PeierlsPerm.wilson_rp_dir` ・ `TorusRP.wilson_refl_symm`

章	言えていること（一行）	Lean の主な名
20-02 強結合の相関の減衰	$(\mathbb{Z}/N)^4$ で、時間の向きに離れた関数の共分散が指数的に小さい。窓 $18\tanh\lvert\beta\rvert<1$（一本ごとの変化で測る形）と $24(1-e^{-4\lvert\beta\rvert})<1$（台の離れた形）。定数に N なし	`LinkSpec.wilson_cov_dist`・`TorusRP.wilson_strong_coupling`
20-03 無限体積の極限	窓 $18\tanh\lvert\beta\rvert<1$（$\beta\neq0$）で、$(\mathbb{Z}/2(n+1))^4$ の正規化した Wilson 測度の周期の持ち上げは部分列を取らずに $\mathbb{Z}^4$ の一つの確率測度 ν_β に弱収束し（$(\mathbb{Z}/(m+1))^4$ の全ての大きさの列でも同じ極限）、ν_β は四方向の単位の並進で不変。極限点で、$e^{\lambda}\cdot 18\tanh\lvert\beta\rvert<1$ のとき四方向のクラスター性	`InfVol.wilson_infvol_unique`・`AllN.wilson_infvol_allN`・`TransI.wilson_infvol_translation`・`WilsonLimit.cluster_limit`
20-04 再構成と質量ギャップ	窓 $18\tanh\lvert\beta\rvert<1$ の極限の測度の再構成で、$\lVert T-P_\Omega\rVert\le(18\tanh\lvert\beta\rvert)^{1/2}$（質量の下界）と真空の補空間が 0 でないこと（$\beta\neq0$、ゲージ不変な部門でも同じ形）、$T\ge0$（$\beta\ge0$）。$0<\beta$ でこれらを一本にまとめた言明。T の像がゲージ不変な部門に入ることは別の定理	`InfMain2.wilson_infvol_main2`・`WilsonLimit.wilson_massGap_dob_exists`・`GaugeZ.wilson_massGap_gauge_exists`・`FullT.wilson_Tpos_full`・`Bind.T_range_gauge_all`
20-05 フェルミオンつきの器	空間 $(\mathbb{Z}/N)^3$・時間の輪 $\mathbb{Z}/2h$ の上で、Wilson のゲージの重みと Wilson–Dirac の行列式 $\mathrm{Re}[(\det D)^{2j}]$ の重みの積の測度は、格子点の時間の面の鏡映で正値（全ての β、質量 $m>-1$）、分配関数は正（全ての β・m・j）、行列式は大域のゲージ変換で不変、正規化した測度は格子の対称性の生成元で不変	`WilsonGauge.site_reflection_positive_wilson_full`・`WilsonGauge.partition_pos_wilson_full`・`GaugeDet.physDirac_det_conj`・`CubicSym.wfProb_lattice_generators`
20-06 強結合の面積則と、渦の自由エネルギーの上界	四方向が同じ大きさのトーラスで、強結合の窓の中、長方形の縁の Wilson ループの期待値が面積について指数で小さい（有限の箱と、無限体積の極限の測度で）。横 N・縦 M のトーラスで、捩れた分配関数の差が縦の平面の面積について指数で小さく、面積あたりの率は横の大きさに依らない（前の因子の横の面積は残る）	`AreaLaw.area_law_wilson`・`AreaLaw.area_law_infvol`・`VortexStrong.vortex_floor`・`VortexStrongMN.vortex_floor_MN_sharp`
20-07 言えていること・言えていないこと	この部の定理の範囲と、言っていないことの表	—

表 1　第 20 部の定理。各行の言明の仮定の全ては各章にあります。どの行も既知の型の結果の形式化です[典]（鏡映正値性と強結合の減衰・質量ギャップは Osterwalder–Seiler、無限体積の極限（部分列なしの収束）は Dobrushin の比較の型、面積則は Osterwalder–Seiler、渦の自由エネルギーの上界は 't Hooft・Münster の型）。

02

部の全体に掛かる範囲

- **格子間隔は固定。**どの定理も一つの格子間隔（1 に取る）の上の言明です。格子間隔を 0 に送る極限（連続極限）については、この部は何も言いません。
- **強結合の窓の中だけ。**減衰・無限体積の極限・質量ギャップの定理は、窓 $18\tanh|\beta|<1$（$|\beta|<0.0556$[読]）か $24(1-e^{-4|\beta|})<1$（$|\beta|<0.0106$[読]）の中だけです（面積則と渦の自由エネルギーの上界の窓は、定数の版ごとに 20-06 にあります）。定理によって $\beta\neq 0$ か $0<\beta$ を足し、$T\geq 0$ は $\beta\geq 0$ です。窓の外について、成り立つとも成り立たないとも言いません。
- **面積則は格子の Wilson ループの言明です。**連続の Wilson ループは、この部にも公開された構成にも在りません（14-06）。この部の強結合の定理は、公開された構成が残した問いとは反対の端（強結合・格子間隔は固定）の言明です。
- **弱結合については何も言いません。**連続極限で要るのは $\beta\to\infty$（弱結合）の側で、窓とは反対の端です。この部の質量ギャップは、強結合の窓の中の格子の転送の作用素の隙間で、四次元 Yang–Mills の質量ギャップの主張ではありません。
- **鏡映正値性とフェルミオンつきの器は窓に依りません。**20-01 と 20-05 の正値は全ての実の β（真ん中の面は $\beta\geq 0$、20-05 は質量 $m>-1$）で、有限のトーラスごとの言明です。
- **質量は下界だけ。**$\|T-P_\Omega\|$ の上界は質量の下界で、真の質量の値や上界は言いません。
- **既知の型の結果の形式化。**どの定理も、文献で知られた型の結果を、この本の対象（19-01）の上で Lean 4 で機械検査した形です。新しい数学の結果としては書きません。

03

読む順

器の柱は三本で、この順に読みます。鏡映正値性（20-01）で対が内積になり（真ん中の面の形はゲージの平均を挟んで $T\geq 0$ にも使われます）、強結合の減衰（20-02）で離れた相関が小さくなり、無限体積の極限（20-03）で体積に依らない一つの測度ができます。20-04 はこの三本を再構成の器に組み立て、質量ギャップを窓の中で出します。20-05 は同じ器をフェルミ

オンの重みつきの測度で立てる部品で、20-01 だけを前提に読めます。20-06 は強結合の窓の中の面積則と渦の自由エネルギーの上界で、20-03 の後に読めます。20-07 は表だけの章です。

この部の後、第 21 部は捩れた境界条件の格子の上の定理、第 22 部は弱結合での大きい面の稀さの定理で、どちらも同じく一つの格子間隔の言明です。何が言えれば連続極限の質量ギャップに届くかは第 28 部（28-00）にあります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
典 表 1 の各行（各章の言明、Lean で機械検査）	連続極限、弱結合、窓の外、真の質量の値
読 窓の値 $\lvert\beta\rvert < 0.0556$・$\lvert\beta\rvert < 0.0106$	浮動小数の値で、定理の一部ではない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
格子ゲージ理論の鏡映正値性・強結合のクラスター展開	典	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440。5-03・5-02
Osterwalder–Schrader の再構成	典	K. Osterwalder, R. Schrader, Comm. Math. Phys. 31 (1973) 83；42 (1975) 281。4-10
表 1 の Lean の宣言	Lean	各章の出典の表と 19-06。sorry 0、公理は標準の三つ

この章で使った語 — 再構成の器・鏡映正値性・強結合の窓・無限体積の極限・転送の作用素・質量ギャップ・格子間隔。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：20-01 鏡映正値性 — 三つの形 — 器の一つ目の柱です。

鏡映正値性 — 三つの形

この章は本書の検討です。§01 は既存の知見の要約です。

この章で分かること — 有限のトーラス $(\mathbb{Z}/2M)^4$ の SU(2) Wilson 測度について、鏡に映した関数との積の積分が負にならないこと（鏡映正値性）が、三つの形で Lean で機械検査されています。格子点の面では全ての実の β で、リンクの真ん中の面ではゲージ不変な関数について $\beta \geq 0$ で、四方向の格子点の面では全ての β で成り立ちます。加えて、鏡映の対は対称です。この章は四つの言明と、証明の道筋（作用を三つに分け、面の上の変数を止めると積分が平方になる）と、使い分けを示します。

前提となる章 — 19-01（格子・Wilson の測度）と 19-03（鏡映・正の側・対）。導入は 5-03（反射正値性と転送行列）と 4-10。

先に言うこと — どれも一つの有限のトーラスの上の言明で、格子間隔は固定です。連続極限については何も言いません。無限体積の極限の測度での正値性と、器の転送の作用素の正値 $T \geq 0$ は 20-04 にあり、真ん中の面の言明はゲージ変換の平均を挟んで $T \geq 0$ の元になります。どれも既知の型の結果（鏡映正値性は Osterwalder–Seiler）の形式化です。

この章の順序

1. なぜ鏡映正値性が要るか — 対から Hilbert 空間へ
2. 二つの鏡と閉じた正の半分（図 1）
3. 格子点の面の鏡映正値性 — 言明
4. 証明の道筋 — 作用を分け、面の上を止めると平方になる
5. リンクの真ん中の面 — ゲージ不変性と β ≥ 0 の役
6. 四方向の鏡映正値性と、対の対称性
7. 三つの形の使い分け
8. 言っていないこと

01

なぜ鏡映正値性が要るか — 対から Hilbert 空間へ

導入は 5-03 §01 と 4-10 です。格子の上の理論は確率測度だけで書かれ、Hilbert 空間も時間を進める作用素もありません。鏡の正の側だけに依る関数の対 $\langle F, G\rangle := \int F(\Theta U)\, G(U)\, d\mu$ が対称で $\langle F, F\rangle \geq 0$ なら、零の関数で割って完備化した Hilbert 空間と、時間の並進から来る転送の作用素 T と、真空 Ω が立ちます。格子ゲージ理論でこの正値が成り立つことは Osterwalder–Seiler によります[典]。対・器・質量ギャップの本書での定義は 19-03 の対・再構成の器 にあります。

鏡映正値性は器の一つ目の柱で、この章の四つの言明はそれを有限のトーラスの Wilson 測度について Lean で立てたものです。残りの柱と組み立ては 20-02〜20-04 にあります。

02

二つの鏡と閉じた正の半分（図 1）

格子は $(\mathbb{Z}/N)^4$、$N = 2M$ です。この部では向きを $\mu = 0, 1, 2, 3$ とし、0 を時間とします。強結合の側の Lean の添字の約束で、19-01 の本文の向き 1〜4 とは添字をずらした書き方です（19-01 の約束）。リンク $\ell = (x, \mu)$ は x から $x + e_\mu$ へ向かい、$U_\ell \in SU(2)$ は単位の四元数です（19-01）。重みは $w_\beta(U) = \exp\bigl(\beta \sum_p \mathrm{Re}\, U_p\bigr)$ で、この章の言明は正規化しない Wilson の測度 $w_\beta \prod_\ell dU_\ell$（19-01 の $\tilde{\mu}_{N,\beta}$）で書きます。正規化した測度 $\mu_{N,\beta}$ とは正の定数 $Z_N(\beta)$ 倍の違いだけで、不等式の符号は同じです（19-01）。

格子点の面の鏡映 Θ は $x_0 \mapsto -x_0$ です。$\vartheta x := (-x_0, x_1, x_2, x_3)$ とおくと

$$(\Theta U)_{(x,\mu)} = \begin{cases} U^{*}_{(\vartheta x - e_0,\, 0)} & (\mu = 0) \\ U_{(\vartheta x,\, \mu)} & (\mu \neq 0) \end{cases} \tag{1}$$

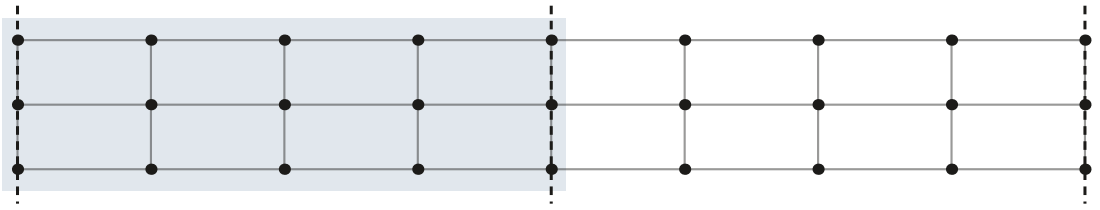
です。時間のリンクは向きが逆になるので逆元（四元数の共役 $*$）が付きます。$-M \equiv M$ なので面 $x_0 = 0$ と $x_0 = M$ が動きません。**閉じた正の半分** Λ_+ は、時刻 $0, \dots, M$ の空間のリンクと、基点の時刻が $0, \dots, M-1$ の時間のリンクです。

リンクの真ん中の面の鏡映 Θ' は $x_0 \mapsto 1 - x_0$ で、面は $x_0 = \frac{1}{2}$ と $x_0 = M + \frac{1}{2}$ です。基点の時刻が 0 か M の時間のリンクは面を**横切り**ます。閉じた正の半分 Λ'_+ は、横切るリンク、時刻 $1, \dots, M$ の空間のリンク、基点の時刻が $1, \dots, M-1$ の時間のリンクです（19-03 の正の側）。

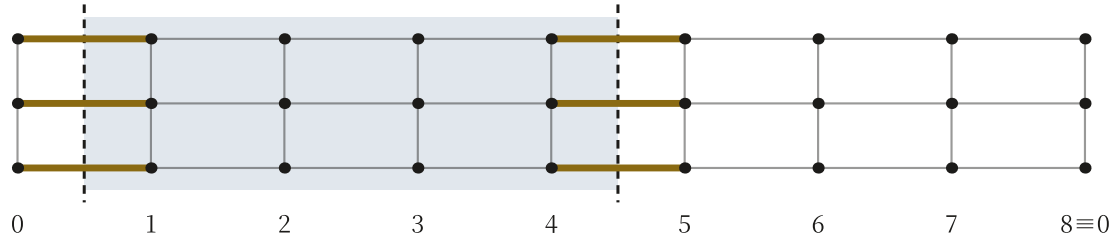
図 1　時間の向きに $N = 8$（$M = 4$）のトーラスを、時間（横）と空間の一つの向き（縦、3 点だけ）で切った絵。網をかけた所が閉じた正の半分です。(a) 面の上の空間のリンクは正の半分に入ります。(b) 太線の横切るリンクは面にまたがり、

時刻 0 と 5 の空間のリンクは負の側です。

(a) 格子点の面 $x_0 = 0$・$x_0 = M$（破線）。網は閉じた正の半分



(b) 真ん中の面 $x_0 = ½$・$x_0 = M + ½$（破線）。太線は面を横切る時間のリンク



初 図は (1) と本文の定義をそのまま描いたものです。時刻 8 は周期で 0 と同じ点です。

03

格子点の面の鏡映正値性 — 言明

言明（格子点の面の鏡映正値性）

$N = 2M$、β は任意の実数とします。有界で可測な実数値の関数 f が Λ_+ のリンクの変数だけに依るなら、

$$0 \;\le\; \int f(\Theta U)\, f(U)\, w_\beta(U) \prod_\ell dU_\ell . \tag{2}$$

典 Osterwalder–Seiler の格子点の面の鏡映正値性の形式化。Lean：`TorusRP.wilson_rp`（仮定は $N = 2M$、f の可測・有界・Λ_+ だけに依ること。β は全ての実数）。

意味。β の符号を問いません。証明のどこにも符号を使わないからです（§ 04）。

例。C を Λ_+ の中の閉じた道とし、Wilson ループの実部 $f(U) = \mathrm{Re} \prod_{\ell \in C} U_\ell^{\pm 1}$（$= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}$）を取ります。$f$ は Λ_+ のリンクだけに依り、$|f| \le 1$ で連続なので仮定を満たします。$f(\Theta U)$ は鏡に映した道 ϑC の Wilson ループの実部です。だから

$$\left\langle \mathrm{Re}\, W_{\vartheta C} \cdot \mathrm{Re}\, W_C \right\rangle_{N,\beta} \;\ge\; 0 \qquad \text{(全ての実の } \beta) \tag{3}$$

です 初 （(2) の当てはめ。$\langle\cdot\rangle_{N,\beta}$ は 19-01 の期待値）。

04

証明の道筋 — 作用を分け、面の上を止めると平方になる

考え方は 5-03 §04 の「サイト反射」と同じで、Lean ではそれを抽象の補題と具体の勘定に分けています。

段 1：作用を正の側・負の側・面の上に分ける

面 p に重み $w(p)$ を付けます。基点の時刻が $0,\dots,M-1$ の時間の面（向き 0 を含む面）と、時刻 $1,\dots,M-1$ の空間の面は 1、時刻 0 か M の空間の面（鏡の面の上の面）は $\frac{1}{2}$、残りは 0 です。$S_+(U) := \sum_p w(p)\,\mathrm{Re}\,U_p$ とおくと

$$\sum_p \mathrm{Re}\,U_p \;=\; S_+(U) + S_+(\Theta U). \tag{4}$$

鏡は面を面に写し、写した面のホロノミーは共役の巡回なので実部は変わりません。正の側の面は一度、負の側の面は写しとして一度、面の上の面は半分ずつ二度数えられます。Lean：`TorusRP.weight_factor`（$w_\beta = a(U)\,a(\Theta U)$、$a = e^{\beta S_+}$）。

段 2：被積分関数を一つの関数の対にする

$g := a\cdot f$ は Λ_+ だけに依り有界です。(4) から $f(\Theta U)\,f(U)\,w_\beta(U) = g(\Theta U)\,g(U)$ で、重みが消えて Haar の積の測度だけが残ります。β の符号はここまで使っていません。

段 3：面の上の変数を止めると完全平方になる

変数を、面の上のリンク U_0、正の側の内側 $U_>$、負の側 $U_<$ に分けます。$g(U) = G(U_0, U_>)$ と書けば $g(\Theta U) = G(U_0, V)$ で、V は負の側の変数を (1) で正の側へ運んだものです。Haar 測度は逆元で不変なので V は $U_>$ と同じ分布で、$U_>$ と独立です。よって

$$\int g(\Theta U)\,g(U)\prod_\ell dU_\ell \;=\; \int dU_0 \left(\int G(U_0,U_>)\,dU_>\right)^2 \;\geq\; 0. \tag{5}$$

Lean：`LinkReflection.rp_core`（抽象の形）と `LinkReflection.rp_weighted`（重みを因数分解した形）。

寄り道：抽象の補題の六つの条件

飛ばしてよい。`rp_core` は、添字の集合の上の対合 θ、値の写像 σ_ℓ、二つの述語「面の上」「正」について次を仮定します。(i) θ は対合。(ii) 面の上のリンクは θ で動かず σ は恒等。(iii) 正のリンクは面の上にない。(iv) 正のリンクの写しは正でない。(v) 面の上でも正でもないリンクの写しは正。(vi) σ_ℓ は値

の測度を保つ。この六つから、変数の空間が「面の上 × 正 × 正（写し）」に測度を保って同型になり、(5) が出ます。トーラスでは (ii)・(iv)・(v) が $N = 2M$ を使う所で、(vi) は SU(2) の Haar 測度が逆元で不変なことです。

05

リンクの真ん中の面 — ゲージ不変性と β ≥ 0 の役

ゲージ変換 g とゲージ不変な関数は 19-01 のゲージ変換 のとおりです（格子点ごとの $g(x) \in SU(2)$、$(gU)_{(x,\mu)} = g(x)\, U_{(x,\mu)}\, g(x+e_\mu)^*$）。

言明（リンクの真ん中の面の鏡映正値性）

$N = 2M$、$M \geq 2$、$\beta \geq 0$ とします。有界で可測な実数値の関数 F が Λ'_+ のリンクの変数だけに依り、ゲージ不変なら、

$$0 \;\leq\; \int F(U)\, F(\Theta' U)\, w_\beta(U) \prod_\ell dU_\ell . \tag{6}$$

典 Osterwalder–Seiler のリンクの面の鏡映正値性の、ゲージ不変な関数の形の形式化。Lean：`MidRP.wilson_rp_mid`（仮定は $N = 2M$、$M \geq 2$、$\beta \geq 0$、F の可測・有界・Λ'_+ だけに依ること・単位の値の全ての g で不変）。

証明は四段です。

段 1：横切るリンクをゲージで 1 にする。横切るリンクは時刻 1 と $M+1$ の互いに違う点に入り、それらの点から出る横切るリンクはありません。$g(x)$ をその点に入る横切るリンクの値に取ると、横切るリンクは全て 1 になります。ゲージ不変な H について $\int H(U) \prod dU = \int H(U^\circ) \prod dU$（$U^\circ$ は横切るリンクを 1 にした配位）です。変数の取り替えは歪積で、各リンクの $V \mapsto aVb^*$（a, b は単位）が Haar を保つことから測度を保ちます。$M \geq 2$ は横切るリンクの始点（時刻 $0, M$）と受ける点（時刻 $1, M+1$）が重ならないために要ります。Lean：`GaugeFix.integral_gaugeFix`・`TorusGauge.wilson_gaugeFix`。これを $H = F \cdot (F \circ \Theta') \cdot w_\beta$ に使います（Θ' はゲージ変換を形を変えて写し、w_β はゲージ不変）。

段 2：作用を三つに分ける。$\sum_p \mathrm{Re}\, U_p = A(U) + A(\Theta' U) + C(U)$ で、A は正の側の面、C は横切る面（横切るリンクを辺に持つ時間の面）の和です。

段 3：横切る面を核の形にする。横切るリンクが 1 なら、基点の時刻 0 の横切る面のホロノミーは時刻 1 の空間のリンク V（正の側）と時刻 0 の空間のリンク W（V の写しの位置）だけで VW^* になります。基点の時刻 M の横切る面では、時刻 M のリンク（正の側）と時刻

$M+1$ のリンクで同じ形です。単位の四元数を $\mathbb{R}^4$ の点と見ると $\mathrm{Re}(VW^*)=\sum_{c=0}^{3} V_c W_c$ なので、

$$C(U^{\circ}) \;=\; \sum_{j} \psi_j(U)\,\psi_j(\Theta' U) \tag{7}$$

と、正の側の座標 ψ_j（時刻 1 と M の空間のリンクの四元数の成分）の対の和に書けます。

段 4：正定値の核。$\beta \ge 0$ なら

$$e^{\beta \sum_j \psi_j(U)\psi_j(\Theta' U)} \;=\; \sum_{n\ge 0} \frac{\beta^n}{n!} \Big(\sum_j \psi_j(U)\psi_j(\Theta' U) \Big)^n \tag{8}$$

は係数が 0 以上の $h(U)\,h(\Theta' U)$ の形の項の和で、各項は §04 の (5) と同じく平方の積分になります。Lean：`LinkReflection.rp_kernel`（核つきの抽象の鏡映正値性、$\beta \ge 0$）。

ゲージ不変性の役。段 1 のためです。横切るリンクは鏡で自分自身に写るので、§04 のように止めて平方にはできず、ゲージで 1 に消します。横切るリンクに依らない関数（正の側の内側だけに依る関数）なら、二つの独立なゲージ変換で平均してから (6) を使うことで、ゲージ不変を課さない形にもなります（Lean `FullT.full_rp_torus`：正規化した測度、$\beta \ge 0$、$M \ge 2$）。

$\beta \ge 0$ の役。段 4 で係数 $\beta^n/n!$ が 0 以上であることを使います。$\beta < 0$ では核 $e^{\beta\langle V,W\rangle}$ は S^3 の上で正定値でありません。二点 V、$-V$ で作る行列 $\begin{pmatrix} e^{\beta} & e^{-\beta} \\ e^{-\beta} & e^{\beta} \end{pmatrix}$ の行列式 $e^{2\beta}-e^{-2\beta}$ が負だからです[初]。これは証明の道具が使えないということで、(6) は $\beta<0$ について成り立つとも成り立たないとも言いません。

06

四方向の鏡映正値性と、対の対称性

四方向。向き 0 と ρ の入れ替えを τ とし、配位の付け替え $(P_\tau U)_{(x,\mu)} := U_{(x\circ\tau,\,\tau\mu)}$ を考えます。重み w_β は P_τ で不変です（向きが逆になる面はホロノミーが共役で、実部は同じ）。$\Theta_\rho := P_\tau\,\Theta\,P_\tau$ は向き ρ の格子点の面の鏡映 $x_\rho \mapsto -x_\rho$ です。

言明（四方向の格子点の面の鏡映正値性）

$N=2M$、$\rho \in \{0,1,2,3\}$、β は任意の実数とします。有界で可測な実数値の f が、向き ρ の閉じた正の半分（向き ρ のリンクは基点の x_ρ が $0,\dots,M-1$、他の向きのリンクは x_ρ が $0,\dots,M$）だけに依るなら、

$$0 \;\le\; \int f(\Theta_\rho U)\, f(U)\, w_\beta(U) \prod_\ell dU_\ell. \tag{9}$$

典 格子点の面の鏡映正値性（Osterwalder–Seiler の型）の四方向への形式化。Lean：`PeierlsPerm.wilson_rp_dir`（全ての ρ、全ての実の β。測度の不変は `PeierlsPerm.wilson_perm_invariant`）。

証明は (2) を $f \circ P_\tau$ に当て、測度の不変で戻すだけです。四方向が要るのはチェス盤の評価で、一つの塊の関数を四つの向きの鏡で全ての塊に運び、向きごとの Cauchy–Schwarz を重ねます（22-01）。

言明（鏡映の対の対称性）

$N = 2M$、β は任意の実数、f, g は可測な実数値の関数とします。

$$\int f(\Theta U)\, g(U)\, w_\beta(U) \prod_\ell dU_\ell \;=\; \int g(\Theta U)\, f(U)\, w_\beta(U) \prod_\ell dU_\ell. \tag{10}$$

典 鏡映の不変性からの既知の恒等式の形式化。Lean：`TorusRP.wilson_refl_symm`（有界も台の条件も要らない。可積分でないときは Lean の約束で両辺とも 0）。

部品は三つです：Θ は対合、Θ は Haar の積を保つ、w_β は Θ で不変（(4) を二度使う）。(10) は対の対称で、再構成の器の欄に当たります（19-03）。

07

三つの形の使い分け

形	範囲	関数の類	何に使うか
格子点の面（時間）	全ての実の β、$N = 2M$	Λ_+ の有界可測な関数	対の半正定値 → Hilbert 空間。無限体積の極限の測度の正値と器の組み立て（20-04）の元
リンクの真ん中の面	$\beta \ge 0$、$M \ge 2$	Λ'_+ のゲージ不変な有界可測な関数	転送の作用素の正値 $T \ge 0$ の元（20-04。ゲージの平均を挟む）
四方向の格子点の面	全ての実の β、全ての向き	向き ρ の閉じた正の半分の関数	チェス盤の評価（22-01）
対の対称性	全ての実の β	可測な関数	対の対称（器の欄）

格子点の面の形は条件が最も軽く、β の符号もゲージ不変性も問いません。代わりに、それだけでは転送の作用素は $T^2 \ge 0$ の型までで、T そのものの正値は言えません（5-03 §03 の二種類の「正」）。真ん中の面の形は $\beta \ge 0$ とゲージ不変を払って $T \ge 0$ の型の正値を与えます。

器の中の $T \geq 0$（20-04、Lean `FullT.wilson_Tpos_full`）は、(6) にトーラスの全てのゲージ変換の Haar 平均を挟んでゲージ不変を課さない、横切るリンクに依らない正の側の関数に広げ（`FullT.full_rp_torus`）、極限に移したものです。

捩れた境界条件の格子でも、格子点の面で同じ型の割れ（面の上を止めて平方）を使います（21-06）。第 21 部では時間の役は向き 4 で、そちらは第 21 部の格子の上の別の言明です。

08

言っていないこと

- **格子間隔は固定、体積は有限**。どの言明も一つの $(\mathbb{Z}/2M)^4$ の上の等式・不等式です。正値は各体積でちょうど成り立つ性質で、体積に一様な形は要りません。連続極限については何も言いません。
- **正規化しない測度**。正の定数倍なので符号は同じです。無限体積の極限の測度の正値は 20-04 の一本にまとめた言明と器の公理にあります（20-04）。
- **実数値の関数だけ**。複素数値の関数は言明の外です。
- **真ん中の面：$\beta < 0$、$M = 1$、横切るリンクに依りゲージ不変でない F** については何も言いません。
- **Lean の値の約束**。Lean ではリンクの値を四元数の閉じた単位球に取り、基準の測度は SU(2)（単位球面）の Haar 測度の像です。有界可測な関数の言明としては SU(2) の上の言明と同じです（19-01 の約束）。
- **新しい結果ではありません**。格子ゲージ理論の鏡映正値性は Osterwalder–Seiler の結果で、この章はその有限のトーラスの Wilson 測度での形式化です。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
典 格子点の面の鏡映正値性 (2)：$N = 2M$、全ての実の β、Λ_+ の有界可測な f。Lean `TorusRP.wilson_rp`	連続極限・格子間隔の変化、複素数値の f
典 リンクの真ん中の面の鏡映正値性 (6)：$M \geq 2$、$\beta \geq 0$、ゲージ不変な有界可測な F。Lean `MidRP.wilson_rp_mid`	$\beta < 0$、$M = 1$、横切るリンクに依りゲージ不変でない F
典 四方向の格子点の面の鏡映正値性 (9)：全ての向き ρ、全ての実の β。Lean `PeierlsPerm.wilson_rp_dir`	真ん中の面の四方向の形
典 鏡映の対の対称性 (10)：全ての実の β、可測な f, g。Lean `TorusRP.wilson_refl_symm`	—

言えている	言えていない
初 Wilson ループの対の正値 (3)：(2) の当てはめ	ループの大きさについての評価

出典と再現

もの	種別	出典・道具
格子ゲージ理論の鏡映正値性（格子点の面・リンクの面）と転送行列	典	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440。導入は 5-03、文献は A-03
Osterwalder–Schrader の再構成	典	K. Osterwalder, R. Schrader, Comm. Math. Phys. 31 (1973) 83；42 (1975) 281。4-10
(2)・(10) と部品（作用の分割、抽象の鏡映正値性）	Lean	`TorusRP.wilson_rp`・`TorusRP.wilson_refl_symm`・`TorusRP.weight_factor`・`LinkReflection.rp_core`・`LinkReflection.rp_weighted`。sorry 0、公理は標準の三つ。宣言の一覧は 19-06
(6) と部品（ゲージの固定、核つきの鏡映正値性）、$T \geq 0$ への道	Lean	`MidRP.wilson_rp_mid`・`TorusGauge.wilson_gaugeFix`・`GaugeFix.integral_gaugeFix`・`LinkReflection.rp_kernel`、`FullT.full_rp_torus`・`FullT.wilson_Tpos_full`
(9)	Lean	`PeierlsPerm.wilson_rp_dir`・`PeierlsPerm.wilson_perm_invariant`
Gram 行列の確かめ（Z_2・Z_4 の二次元・三次元、全ての配位の和：半正定値。陽性対照として Z_4 で時間のリンクの共役を外すと相対の最小固有値 −0.39〜−0.50）、真ん中の面の Metropolis（$(\mathbb{Z}/4)^4$、SU(2)、ゲージ不変な面の平均の対の共分散に負の兆しなし）	読	本書の検討の数値の記録（Lean の定義を写した計算。証明の代わりではない）

この章で使った語 — 鏡映正値性・格子点の面・リンクの真ん中の面・閉じた正の半分・横切るリンク・ゲージ不変・ゲージの固定・正定値の核・対・転送の作用素・チェス盤の評価。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：20-02 強結合の相関の減衰 — 器の二つ目の柱、離れた関数の共分散が小さいことを、強結合の窓の中で示します。

強結合の相関の減衰

この章は本書の検討です。

この章で分かること — $|\beta|$ が十分小さい（強結合の）とき、トーラス $(\mathbb{Z}/N)^4$ の SU(2) Wilson 測度で、時間の向きに離れた二つの関数の共分散が距離とともに指数的に小さくなること。その評価が Lean で二通りに機械検査されていて、どちらも定数に体積 N が入りません。一つは Dobrushin の窓 $18\tanh|\beta| < 1$ で、一本のリンクの条件つきの分布が周りのリンクにどれだけ依るか（係数 $\tanh|\beta|$、行の和が $18\tanh|\beta|$ 以下）から出ます。もう一つは窓 $24(1-e^{-4|\beta|}) < 1$ で、面を繋いだ鎖を数えて出ます。

前提となる章 — 19-01（Wilson の測度）、20-01（記号）。導入は 5-02（強結合）と 5-04（無限体積とクラスター性）。

先に言うこと — 格子間隔は固定で、強結合の窓の中だけの言明です。窓は $|\beta| < 0.0556$読 と $|\beta| < 0.0106$読 で、連続極限が要る弱結合（$\beta \to \infty$）とは反対の端です。窓の外については何も言いません（減衰しないとも言いません）。距離は時間の向きの距離だけで、各 N の有限体積の言明です。どれも Osterwalder–Seiler・Dobrushin の型の既知の結果の形式化です。

この章の順序

1. 二つの窓、二つの言明 — 概観
2. 期待値と時間の距離 — 設定
3. 一本のリンクが周りから受ける影響 — 係数 tanh|β| と数え 18
4. Dobrushin の窓での距離による減衰 — 言明
5. 証明の道筋 — 熱浴の掃引で G の振動を流し去る
6. もう一つの窓 — 二つの写しの入れ替えと面の鎖
7. 二つの窓の比べ（表 1）
8. 言っていないこと

01

二つの窓、二つの言明 — 概観

導入は 5-02 §01 と 5-04 です。$\beta = 0$ では Wilson の測度は Haar の積で、違うリンクは独立です。$|\beta|$ が小さいとき、リンクどうしの結合は弱く、離れたリンクの相関は「結合を一つずつ渡る」ごとに小さな因子を払うので、距離とともに指数的に減ります。これが強結合の相関の減衰で、格子ゲージ理論では Osterwalder–Seiler のクラスター展開による結果です[典]。

この章の二つの言明は、この描像を二つの違う勘定で形にしたものです。

- **距離による減衰**（§04）：一本のリンクの条件つきの分布が、周りのリンクを一本変えたときにどれだけ動くか（Dobrushin の影響の係数）を数えます。窓は $18 \tanh |\beta| < 1$ です。
- **有限体積の減衰**（§06）：二つの独立な写しを用意し、面の重みを展開して、二つの台を繋ぐ面の鎖を数えます。窓は $24(1 - e^{-4|\beta|}) < 1$ です。

どちらも各 N の有限体積の言明で、右辺の定数に N が入りません。体積に一様なこの形が、無限体積の極限（20-03）と再構成の器の質量ギャップ（20-04）の元になります。

02

期待値と時間の距離 — 設定

格子はトーラス $(\mathbb{Z}/N)^4$（$N \geq 1$）、リンクの変数 $U_\ell \in SU(2)$、重み w_β と正規化した測度 $\mu_{N,\beta}$ は 19-01 のとおりです。この章では 19-01 の期待値

$$\langle H \rangle_{N,\beta} := \int H \, d\mu_{N,\beta} = \frac{\int H \, w_\beta \prod_\ell dU_\ell}{\int w_\beta \prod_\ell dU_\ell} \tag{1}$$

を使い、共分散を $\mathrm{Cov}(F,G) := \langle FG \rangle_{N,\beta} - \langle F \rangle_{N,\beta} \langle G \rangle_{N,\beta}$ と書きます。β は実数で、符号は問いません（窓は $|\beta|$ で書かれます）。

時間の距離。時刻 $t_0 \in \mathbb{Z}/N$ を一つ決め、リンク $\ell = (x, \mu)$ の基点の時刻 x_0 と t_0 の巡回距離

$$d(\ell) := \min_{k \in \mathbb{Z}} \bigl| \, x_0 - t_0 + kN \, \bigr| \qquad (0 \leq d(\ell) \leq N/2) \tag{2}$$

を使います。空間の向きにどれだけ離れていても d には入りません。面を共有する二本のリンクは d が高々 1 しか違いません（面の四本の基点の時刻は二つの続いた時刻に収まるため）。この「隣の距離は 1 しか変わらない」ことが、両方の証明で距離を指数に変える所です。

関数の台。関数 F が有限集合 A のリンクだけに依るとは、A の上で一致する二つの配位で F の値が等しいことです。

03

一本のリンクが周りから受ける影響 — 係数 tanh|β| と数え 18

リンク x 以外を配位 ω に止めたときの、x の条件つきの分布（一本のリンクの熱浴の核）は

$$\gamma_x(dU \mid \omega) = \frac{\exp\bigl(\beta \sum_{p \ni x} \operatorname{Re} U_p(\omega[x \mapsto U])\bigr)\, dU}{\int \exp\bigl(\beta \sum_{p \ni x} \operatorname{Re} U_p(\omega[x \mapsto U'])\bigr)\, dU'} \tag{3}$$

です。和は x を含む面だけを走ります。四次元では一本のリンクは 6 枚の面に含まれます（残りの三つの向きそれぞれに、両側の二枚）。

影響の係数。別のリンク y だけが違う二つの配位 ω, ω' について、x の条件つきの分布の差を測ります。n_{xy} を x と y を両方含む面の数とすると、局所の作用の差 $h(U)$ は $|h| \le 2|\beta|\, n_{xy}$ で、密度を e^h だけ傾けた二つの確率測度の差は

$$\sup_S \bigl|\gamma_x(S \mid \omega') - \gamma_x(S \mid \omega)\bigr| \;\le\; \tanh\bigl(|\beta|\, n_{xy}\bigr) \tag{4}$$

で抑えられます。Lean：`LinkSpec.spec_coeff`（tanh は $(e^{2a}-1)/(e^{2a}+1)$ の形）。

数え 18。$\tanh(na) \le n \tanh a$（$a \ge 0$、Lean `LinkSpec.tanhForm_le`）と、x を含む 6 枚の面にそれぞれ x 以外のリンクが 3 本ずつあることから $\sum_{y \ne x} n_{xy} \le 18$ です。よって行の和は

$$\alpha_0 := \sum_{y \ne x} \sup \bigl|\gamma_x(\cdot \mid \omega') - \gamma_x(\cdot \mid \omega)\bigr| \;\le\; 18 \tanh |\beta| \tag{5}$$

で、全ての x・全ての N で成り立ちます。Lean：`LinkSpec.dobrushin_row`。$N \ge 3$ では隣は 18 本でどれも $n_{xy} = 1$、$N = 2$ では隣は 15 本で $\sum n_{xy} = 18$ です読 （数えの確かめ）。

意味。$\alpha_0 < 1$ は「一本のリンクの分布は、周りの全てのリンクを合わせても、変動の総量 1 未満しか動かされない」ことです。これが Dobrushin の一意性の条件の形で、窓 $18 \tanh |\beta| < 1$ は $|\beta| < \operatorname{artanh}(1/18) \approx 0.0556$ です読 。明示の十分条件として $|\beta| < 1/19$ が Lean にあります（`WilsonLimit.dob_window_strict`）。

04

Dobrushin の窓での距離による減衰 — 言明

言明（Dobrushin の距離による共分散の減衰）

$N \ge 1$、β は実数、$\lambda \ge 0$ で $e^{\lambda} \cdot 18 \tanh |\beta| < 1$ とします。$t_0 \in \mathbb{Z}/N$、$r \in \mathbb{N}$、リンクの有限集合 A は全てのリンクで $d(\ell) \le r$ を満たすとします。F は有界（$|F| \le c_F$）・可測で A だけに依り、G は有界・可測とします。$\delta_y \ge 0$ は「リンク y だけを変えたときの G の変

化」の上界、つまり y の外で一致する全ての ω, ω' で $|G(\omega) - G(\omega')| \le \delta_y$ とします。このとき

$$\bigl|\mathrm{Cov}(F, G)\bigr| \;\le\; 2\, c_F\, e^{\lambda r} \sum_{y} e^{-\lambda\, d(y)}\, \delta_y . \tag{6}$$

典 Dobrushin の比較の型の、掃引の形による形式化。Lean：`LinkSpec.wilson_cov_dist`（仮定は上のとおり。右辺の定数に N は入らない）。

台の離れた二つの関数。 G が有限集合 A' のリンクだけに依り、$|G| \le c_G$、A' の全てのリンクで $d \ge r + 2 + k$ なら、$\delta_y = 2c_G$（$y \in A'$）、$\delta_y = 0$（他）と取れて

$$\bigl|\mathrm{Cov}(F, G)\bigr| \;\le\; 4\, c_F\, c_G\, |A'|\, e^{-\lambda(k+2)} \tag{7}$$

です初（(6) の当てはめ。同じ型の当てはめが Lean の `TorusRP.wilson_hdec_torus_dob` の中にあります）。λ は $-\ln(18 \tanh|\beta|)$ 未満なら何でもよく、たとえば $\beta = 0.001,\ 0.005,\ 0.01$ でその上限は $4.02,\ 2.41,\ 1.71$ です読。

言明で注意すること。 δ は仮定で G の真の変化以上に縛られるので、小さく取って偽の主張にはできません。G が定数なら $\delta \equiv 0$ で両辺 0 です。右辺の N は和の範囲と巡回距離の中にしか現れず、δ の台が N に依らなければ評価は N に一様です。

05

証明の道筋 — 熱浴の掃引で G の振動を流し去る

考え方は「F に触れずに G を平らにする」です。五段に分けます。

段 1：熱浴は測度を保つ。 熱浴の作用素 $P_x H(\omega) := \int H(\omega[x \mapsto U])\, \gamma_x(dU \mid \omega)$ について $\langle P_x H\rangle_{N,\beta} = \langle H\rangle_{N,\beta}$ です（一本のリンクの条件つきの分布が (3) であること。Lean `LinkSpec.hbSweep_invariant` とその繰り返しの `LinkSpec.iter_invariant`）。

段 2：A を避けて掃く。 L を A の外の全てのリンクを一度ずつ並べた列とし、$Q := \prod_{x \in L} P_x$（掃引）とします。F は A だけに依るので、P_x（$x \notin A$）は F を掛けたまま通り抜け、全ての K で

$$\langle F \cdot Q^K G\rangle_{N,\beta} = \langle F G\rangle_{N,\beta}, \qquad \langle Q^K G\rangle_{N,\beta} = \langle G\rangle_{N,\beta}. \tag{8}$$

Lean：`LinkSpec.iter_mul_invariant` ・ `iter_invariant`。

段 3：振動の流れ。H の一本ごとの変化の上界 δ は、P_x を一度当てると $\delta_x \mapsto 0$、$\delta_y \mapsto \delta_y + \delta_x C_{xy}$（$C_{xy}$ は (4) の係数）と動きます。重み $\rho_y := e^{-\lambda d(y)}$ を付けると、隣の d は 1 しか違わないので

$$\sum_{y \neq x} \rho_y \, C_{xy} \;\le\; \big(e^{\lambda} \cdot 18 \tanh|\beta|\big)\, \rho_x =: \alpha \, \rho_x \tag{9}$$

です（Lean `LinkSpec.row_weighted`）。$a := \sum_{y \in A} \rho_y \delta_y$、$b := \sum_{y \notin A} \rho_y \delta_y$ とすると、一回の掃引で b は α 倍以下に縮み、A の上の δ は減りません。K 回で $b_K \le \alpha^K b_0$ です（Lean `Sweep.iter_bound`）。要点は掃引を A を「処理済み」とした所から始めることで、そうすると A に流れ込んだ分 a が増えても b が確かに縮みます。

段 4：振動から共分散へ。$|H - c| \le S$、$|F| \le c_F$ なら $|\operatorname{Cov}(F, H)| \le 2 c_F S$ です（Lean `LinkSpec.cov_le`）。$H = Q^K G$ の全体の振れは $\sum_y \delta_y^{(K)}$ で抑えられ、A の上で $\rho \ge e^{-\lambda r}$ なので

$$\sum_y \delta_y^{(K)} \;\le\; e^{\lambda r} \sum_y \rho_y \delta_y \;+\; \Big(\sum_y \rho_y^{-1}\Big) \alpha^K b_0 . \tag{10}$$

段 5：$K \to \infty$。$\alpha < 1$ で N は固定なので第二項は 0 に行き、(8) と合わせて (6) が出ます。$\sum_y \rho_y^{-1}$ は N に依りますが、極限で消えるので右辺に残りません。

Dobrushin の一意性の定理そのものは道具として使っていません。熱浴の掃引でその比較の論法を有限のトーラスの上でたどっています。

数の確かめ 読 Z_2 のゲージ理論の二次元のトーラス（時間 6 × 空間 2、全ての配位の和）で、空間の Polyakov ループの対の共分散と (6) の形の評価の比は $\beta = 0.03$ で 6.2×10^{-4}（隔たり 1）〜3.1×10^{-8}（隔たり 3）、$\beta = 0.15$ で 3.1×10^{-3}〜3.8×10^{-6} で、全て評価の内でした（本書の検討の数値の記録）。SU(2) の四次元そのものでの確かめではなく、評価が鋭いかも見ていません。

06

もう一つの窓 — 二つの写しの入れ替えと面の鎖

言明（強結合の有限体積の相関の減衰）

$N \ge 1$、$c := 1 - e^{-4|\beta|}$ で $24c < 1$ とします。$t_0 \in \mathbb{Z}/N$、$r, k \in \mathbb{N}$、リンクの有限集合 A, A' は、A の全てのリンクで $d \le r$、A' の全てのリンクで $d \ge r + 2 + k$ とします。F（$|F| \le c_F$）は A だけに、G（$|G| \le c_G$）は A' だけに依る可測な関数とします。このとき

$$\bigl|\mathrm{Cov}(F,G)\bigr| \;\le\; 2\,c_F\,c_G\cdot 6|A|\cdot\frac{c\,(24c)^{k}}{1-24c}. \tag{11}$$

典 Osterwalder–Seiler の強結合のクラスター展開の型の形式化。Lean：`TorusRP.wilson_strong_coupling`（窓は字のまま $24(1-(e^{2|\beta|})^{-2})<1$。定数 $2c_Fc_G$、$6|A|$、$c/(1-24c)$、率 $24c$ に N は入らない）。

窓は $|\beta|<\frac14\ln\frac{24}{23}\approx 0.0106$ です読。証明は四段です。

段 1：面の重みを 1 以上にずらす。 $w_p:=e^{\beta\,\mathrm{Re}\,U_p+|\beta|}\in[1,e^{2|\beta|}]$ とすると $\prod_p w_p$ は Wilson の重みの正の定数倍で、期待値 (1) は変わりません。

段 2：二つの写し。 独立な二つの配位 U,V を取ると $2Z^2\,\mathrm{Cov}(F,G)=\iint (F(U)-F(V))(G(U)-G(V))\,W(U)W(V)$ です。$W(U)W(V)=\prod_p(1+\sigma_p)$、$\sigma_p:=w_p(U)w_p(V)-1\ge 0$ と展開し、面の集合 Γ についての和にします。

段 3：分けられる集合は消える。 A を含み A' と交わらないリンクの集合 T で、Γ のどの面も T の中か T の外に収まる（T の縁をまたがない）ものが在るとき、Γ は分けられると言います。そのとき T の上で二つの写しを入れ替えるとその項の符号が逆になり、和で消えます。残るのは A と A' を繋ぐ極小の面の集合 π を含む項で、$\sigma_p/(1+\sigma_p)\le 1-e^{-4|\beta|}=c$ から

$$\bigl|\mathrm{Cov}(F,G)\bigr| \;\le\; 2c_Fc_G\sum_{\pi} c^{|\pi|} \tag{12}$$

です。この段は全ての β・全ての N で成り立ちます（Lean `SwapDecay.covBound_minimal`、当てはめ `TorusRP.wilson_covariance`）。右辺の和はこの段だけでは体積に一様でなく、一様にするのが次の段の数えです。

段 4：鎖を数える。 極小の π は、A に触れる面から A' に触れる面まで、リンクを共有して続く面の列を含みます（数えの補題は、この列の長さと面の次数から上界を出します）。一本のリンクを含む面は 6 枚なので、一枚の面と台を共有する面は（自分を含めて）高々 24 枚、A に触れる面は高々 $6|A|$ 枚です。隣の面の時間の距離は 1 しか違わないので、鎖は少なくとも $k+1$ 枚の面を持ちます。長さ $m+1$ の鎖は高々 $6|A|\cdot 24^m$ 本なので、$\sum_\pi c^{|\pi|}\le 6|A|\sum_{m\ge k}c^{m+1}24^m=6|A|\,c(24c)^k/(1-24c)$ で (11) です（Lean `TorusRP.card_link_plaqs`・`plaq_degree`・`card_touch_le`・`height_lip`・`SwapDecay.minimalNonsep_sum_le`）。

数 4 は $\beta\,\mathrm{Re}\,U_p$ の振れ幅 $2|\beta|$ の二倍（二つの写し）から、24 は 4×6 から来ます。24 は上界で、一枚の面と台を共有する面の真の最大は $N\ge 3$ で 21、$N=2$ で 19 です読。

07

二つの窓の比べ（表 1）

	距離による減衰 (6)	有限体積の減衰 (11)
窓	$e^{\lambda}\cdot 18\tanh\lvert\beta\rvert<1$（$\lambda\to 0$ で $\lvert\beta\rvert<0.0556$ 読）	$24(1-e^{-4\lvert\beta\rvert})<1$（$\lvert\beta\rvert<0.0106$ 読）
勘定の元	一本のリンクの影響の行の和 $18\tanh\lvert\beta\rvert$	面の鎖の数 24^m と重み c^{m+1}
G への仮定	一本ごとの変化 δ_y（台は要らない）	台 A' が時間の距離 $r+2+k$ 以上
率（隔たり 1 あたり）	$-\ln(18\tanh\lvert\beta\rvert)$ 未満の任意の λ	$-\ln(24c)$
$\beta=0.001$ の率 読	上限 4.02	2.35
$\beta=0.005$ の率 読	上限 2.41	0.74
$\beta=0.01$ の率 読	上限 1.71	0.061
Lean	`LinkSpec.wilson_cov_dist`	`TorusRP.wilson_strong_coupling`

表 1　二つの言明の比べ。率は浮動小数の計算です。

窓の幅は Dobrushin の側が約 5.2 倍広く 読 、同じ β での率の上限も大きくなります。有限体積の減衰の側の利点は、G の一本ごとの変化を測らずに、台の離れた二つの関数をそのまま扱えることです。

強さの目安 読 ：(11) が自明な上界 $c_F c_G$（Cauchy–Schwarz）より小さくなるのは、$\lvert A\rvert=1$ で $\beta=0.008$ なら $k\ge 2$、$\beta=0.01$ なら $k\ge 35$ です。窓の端では評価はほとんど中身を持ちません。Z_2 の小さい格子では、真の共分散は (11) より 10^{8}〜10^{22} 倍小さい値でした（本書の検討の数値の記録）。

この部の後の章で、無限体積の極限（20-03）と質量ギャップ（20-04）は主に Dobrushin の窓の側を使います。

08

言っていないこと

- **窓の外については何も言いません。** 減衰が止まるとも言いません。窓は $\lvert\beta\rvert$ の小さい端だけで、連続極限に要る弱結合（$\beta\to\infty$）とは反対です。格子間隔は固定です。
- **時間の向きの距離だけ。** (6)・(11) の d は時間の座標の巡回距離です。四方向のクラスター性は無限体積の極限の測度についての別の言明です（20-03）。
- **各 N の有限体積。** 定数に N が入らないことは言いますが、無限体積の測度そのものはこの章にありません。

- **評価は鋭くありません**。(11) には $|A|$ が入り、窓の端ではほとんど自明です。(6) では δ を自分で与えます。
- **質量ギャップそのものではありません**。共分散の減衰から再構成の器の質量ギャップへ移るには、鏡映正値性（20-01）と極限の組み立てが要ります（20-04）。
- **新しい結果ではありません**。強結合の相関の減衰は Osterwalder–Seiler のクラスター展開と Dobrushin の一意性の型の既知の結果で、この章はその有限のトーラスの SU(2) Wilson 測度での形式化です。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
典 Dobrushin の距離による減衰 (6)：$e^{\lambda} \cdot 18 \tanh|\beta| < 1$、定数に N なし。Lean `LinkSpec.wilson_cov_dist`	窓の外、空間の向きの距離、無限体積の測度そのもの
初 台の離れた関数の形 (7)：(6) の当てはめ	—
典 有限体積の減衰 (11)：$24(1-e^{-4|\beta|}) < 1$、時間の距離 $r+2+k$、定数に N なし。Lean `TorusRP.wilson_strong_coupling`	窓の外、空間の向きの距離、$|A|$ に依らない形
読 窓の値 0.0556・0.0106、率の表 1、自明な上界を下回る隔たり、Z_2 での比べ	上界・下界の証明ではない。SU(2) の四次元での真の減衰の値

出典と再現

もの	種別	出典・道具
強結合のクラスター展開、相関の指数減衰	典	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440。導入は 5-02・5-04・7-04
Dobrushin の一意性・比較の条件	典	R. L. Dobrushin, Theory Probab. Appl. 13 (1968) 197（書誌のみ、未確認）。道具の位置づけは 16-10
(4)・(5)・(6) と部品（掃引、振動の流れ、共分散の上界）	Lean	`LinkSpec.spec_coeff`・`tanhForm_le`・`dobrushin_row`・`row_weighted`・`cov_le`・`iter_mul_invariant`・`iter_invariant`・`wilson_cov_dist`、`Sweep.iter_bound`、`WilsonLimit.dob_window_strict`。sorry 0、公理は標準の三つ。宣言の一覧は 19-06
(11)・(12) と部品（二つの写し、面の数え）	Lean	`SwapDecay.covBound_minimal`・`minimalNonsep_sum_le`、`TorusRP.wilson_covariance`・`card_link_plaqs`・`plaq_degree`・`card_touch_le`・`height_lip`・`wilson_strong_coupling`
窓・率の値、面の数え（19・21）、自明な上界を下回る隔たり	読	本書の検討の数値の記録（浮動小数。面の数えは Lean の定義を写した総当たり）

もの	種別	出典・道具
Z_2 の小さいトーラスでの真の共分散との比べ	読	本書の検討の数値の記録（全ての配位の和。二次元・三次元、破れなし）

この章で使った語 — 強結合・共分散・時間の距離・熱浴・影響の係数・Dobrushin の条件・掃引・二つの写し・面の鎖・クラスター展開。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：20-03 無限体積の極限 — この章の N に一様な減衰から、部分列なしの極限の測度を作ります。

無限体積の極限 — 部分列なし・並進不変・クラスター性

この章は本書の検討です。§03 の Dobrushin の条件の説明は既存の知見の紹介です。

この章で分かること — 強結合の窓 $18\tanh|\beta| < 1$、$\beta \neq 0$ で、トーラス $(\mathbb{Z}/2(n+1))^4$ の Wilson 測度を $\mathbb{Z}^4$ へ周期に持ち上げた列が、部分列を取らずに一つの確率測度 ν_β に弱収束すること。全ての大きさ $(\mathbb{Z}/(m+1))^4$ の列でも同じ極限になること。ν_β が四方向の単位の並進で不変なこと。極限の測度が四方向にクラスター性（離れた観測量の相関が指数で減ること）を持つこと。どれも Lean で機械検査した、既知の型の結果の形式化です。

前提となる章 — 19-01 Wilson の測度、19-03 無限体積の配位の空間と持ち上げ、20-02 強結合の相関の減衰。既存の知見としての無限体積の極限とクラスター展開は 5-04 にあります。

先に言うこと — 格子間隔は 1 に固定です。窓は $|\beta| < 0.0556$ 読 だけで、連続極限と弱結合については何も言いません。極限は「周期の持ち上げの列」についての言明で、ほかの境界条件や、DLR の意味での Gibbs 測度の一意性は言っていません。言明の「ただ一つ」の部分は位相から自明で、中身は部分列を取らない収束の方です。

この章の順序

1. 設定 — 配位の空間・周期の持ち上げ・弱収束：何の列が、どの意味で収束するか。
2. 四つの定理：部分列なしの極限の定理、大きさに依らない極限の定理、極限の並進不変、極限点のクラスター性。
3. Dobrushin の条件 — 一本のリンクが隣に与える影響：数 18 と tanh の出どころ。
4. 二つの大きさの比べ — 差は境までの距離で指数的に小さい：証明の芯。
5. Cauchy 列から極限へ：筒の関数が測度を決めることと、コンパクト性。
6. 並進不変とクラスター性：有限の箱の性質を極限に移す。
7. 寄り道：「ただ一つ」は何を言っているか：∃! の一意性と、収束の中身。
8. 言っていないこと：窓・境界条件・連続極限。

01

設定 — 配位の空間・周期の持ち上げ・弱収束

対象は 19-03 で定義したものです。ここでは要点だけを繰り返します。

配位の空間。$\mathbb{Z}^4$ のリンクの全体を $\Lambda = \mathbb{Z}^4 \times \{0,1,2,3\}$ とし、各リンクに SU(2) の元（単位の四元数）を一つ置いたものを配位と呼びます。配位の空間 $\mathcal{C}$ には積位相を入れます。各成分はコンパクトなので、$\mathcal{C}$ はコンパクトで距離づけ可能です。Lean の側では値を閉じた球 $\{q : |q| \le 1\}$ に取りますが、測度は単位球面（SU(2)）の上に載ります（19-01 の約束）。

周期の持ち上げ。トーラス $(\mathbb{Z}/N)^4$ の配位 ω から、$\mathbb{Z}^4$ の配位 $x_\ell = \omega_{\ell \bmod N}$ を作ります。正規化した Wilson 測度（19-01）をこの写像で押し出した確率測度を

$$\mu_n = \mathrm{lift}_*\, P_{N_n,\beta}, \qquad N_n = 2(n+1) \qquad (n = 0,1,2,\dots) \tag{1}$$

と書きます。Lean の名は `liftProb β n` です。全ての大きさ $m+1$ のトーラスの持ち上げ `liftS β m` も使います。

弱収束。確率測度の列 μ_n が ν に弱収束するとは、$\mathcal{C}$ の上の全ての有界連続関数 F について $\int F\,d\mu_n \to \int F\,d\nu$ となることです。Lean では Mathlib の確率測度の空間の位相での `Tendsto … atTop (𝓝 ν)` がこれに当たります。

筒の関数と台。有限個のリンクの集合 S の値だけで決まる関数を、台 S の筒の関数と呼びます。証明はまず筒の関数について行い、最後に測度へ移します。

窓と定数。本章を通じて

$$q(\beta) = 18\tanh|\beta| \qquad (\text{Lean の } \texttt{dobConst}\ \beta) \tag{2}$$

と置きます。窓 $q(\beta) < 1$ は $|\beta| < \operatorname{artanh}(1/18) = 0.055613$読 と同じです。陽な十分条件 $|\beta| < 1/19 \Rightarrow q(\beta) < 1$ は `WilsonLimit.dob_window_strict` として Lean にあります。

02

四つの定理

部分列なしの極限の定理

典 Dobrushin の一意性の型の結果の形式化。Lean：`InfVol.wilson_infvol_unique`（$\beta \neq 0$、$q(\beta) < 1$）。

$\beta \neq 0$ かつ $18 \tanh |\beta| < 1$ とします。このとき確率測度 ν_β がただ一つあって、列 μ_n（全ての n、部分列を取らない）は ν_β に弱収束します。

大きさに依らない極限の定理

典 同じ型の結果の形式化。Lean：`AllN.wilson_infvol_allN`（$\beta \neq 0$、$q(\beta) < 1$）。

同じ仮定のもとで、偶数の大きさの列 μ_n の極限 ν は、全ての大きさの列 `liftS β m`（トーラス $(\mathbb{Z}/(m+1))^4$）の極限でもあります。さらに $s(k) \to \infty$ となる任意の自然数の列 s について、`liftS β (s k)` も同じ ν に弱収束します。

極限の並進不変

典 形式化。Lean：`TransI.wilson_infvol_translation`（$\beta \neq 0$、$q(\beta) < 1$）。

上の ν_β は、四つの向き $i = 0, 1, 2, 3$ の単位の並進 $x \mapsto x(\cdot + e_i)$ で不変です：全ての有界連続な F について

$$\int F(x(\cdot + e_i))\, d\nu_\beta(x) = \int F \, d\nu_\beta. \tag{3}$$

極限点のクラスター性

典 Dobrushin の条件のもとの指数的な混合の型の結果の形式化。Lean：`WilsonLimit.cluster_limit`（$\lambda \geq 0$、$e^{\lambda} q(\beta) < 1$、ν は μ_n のどれかの部分列の弱い極限）。

向き i を一つ決めます。F, G は有界連続な筒の関数で、台 S_F, S_G の各リンクの基点の第 i 座標が $[0, R]$ に入るとします（ほかの座標は任意）。G_k を G を向き i に k だけずらしたもの $G_k(x) = G(x(\cdot + k e_i))$ とすると、$k \geq R$ で

$$\left| \int F\, G_k \, d\nu - \int F \, d\nu \int G_k \, d\nu \right| \;\leq\; 4 \|F\|_\infty \|G\|_\infty |S_G|\, e^{-\lambda(k-R)}. \tag{4}$$

定数は k、ν、ほかの座標に依りません。ν_β について $\lambda = -\frac{1}{2} \log q(\beta)$ と取った形が、一本にまとめた言明（20-04）に入っています。

03

Dobrushin の条件 — 一本のリンクが隣に与える影響

導入は 5-04 です。コンパクトな配位の空間では、測度の列は必ず収束する部分列を持ちます。けれども極限が一つとは限りません。一つに決めるには、遠くの影響が弱いことを言う必要があります。Dobrushin の条件はそれを「一本ずつ」測ります。

影響の係数。リンク x の条件つきの分布（ほかの全てのリンクを止めたときの x の分布）は、x を含む面の重み $e^{\beta \operatorname{Re} U_p}$ だけで決まります。別のリンク y の値を変えたとき、x の条件つきの分布が全変動でどれだけ動くかの上限を C_{xy} とします。x と y が n_{xy} 枚の面を共有するとき、Lean では

$$C_{xy} = \tanh\bigl(|\beta|\, n_{xy}\bigr) \tag{5}$$

と取ります（`coef`）。y を変えたときの x の局所の作用の差は、共有する面一枚あたり $[-2|\beta|, 2|\beta|]$ に入り（幅 $4|\beta|$）、指数の重みを幅 w だけ傾けたときの全変動の動きは $\tanh(w/4)$ 以下だからです[初]。

行の和。四次元では一本のリンクは 6 枚の面に入り、各面にほかのリンクが 3 本あります。だから $\sum_y n_{xy} = 18$ で、$\tanh(|\beta| n) \le n \tanh|\beta|$ から

$$\sum_{y \neq x} C_{xy} \;\le\; 18 \tanh|\beta| = q(\beta) \tag{6}$$

が全てのトーラスの大きさで成り立ちます[初]。Dobrushin の条件はこの行の和が 1 より小さいことで、窓 $q(\beta) < 1$ はそのまま「一本のリンクが隣の全体に与える影響の和が 1 未満」と読めます。

重みつきの形。証明では距離 d の重み $\rho_y = e^{\lambda d(y)}$ を付けた行の和 $\sum_{y \neq x} \rho_y C_{xy} \le \alpha \rho_x$、$\alpha = e^{\lambda} q(\beta)$ を使います。面を共有する二本のリンクで d が 1 しか違わないので、重みは高々 e^{λ} 倍しか変わらないからです[初]。$\alpha < 1$ を保てる $\lambda > 0$ が取れることが、窓の役目です。

04 二つの大きさの比べ — 差は境までの距離で指数的に小さい

証明の芯は「大きさの違う二つのトーラスの期待値が、どちらも N に依らない一つの数に近い」ことです。段に分けます。

段 1：熱浴の掃引。トーラスの上で、リンク x の値を条件つきの分布で引き直す操作を熱浴 P_x といいます。Wilson 測度は各 P_x で不変です。原点のまわりの箱 A（基点の各座標が $|\cdot| \le L$ のリンク）を一本ずつ順に引き直す操作を Q とし、Q を K 回繰り返します。関数 f の振動のベクトル δ_y（y 一本だけ変えたときの f の差の上限）は、掃引のたびに影響の係数 C で運ばれます。重み $e^{\lambda d(y)}$（d は原点からの巡回距離の最大）で測ると、箱の中の部分は毎回 α 倍以下に縮み、箱の外へ漏れた部分は重み $e^{\lambda(L+1)}$ で割られます。結論は、全ての配位 ω で

$$\bigl|E_N f - (Q^K f)(\omega)\bigr| \;\le\; \bigl(\alpha^K + e^{-\lambda(L+1)}\bigr) \sum_y e^{\lambda d(y)} \delta_y \tag{7}$$

です（`LinkSpec.torus_box`）。右辺に N は入りません。

段 2：箱の中は $\mathbb{Z}^4$ と同じ。 $2(L+1) < N$ なら、箱 $L+1$ の中のリンクはトーラスへの射影で一対一に写り、箱の中のリンクを含む面は巻き付きません。だから、箱 $L+1$ のリンクだけに依る F について、トーラスの掃引を持ち上げたものは $\mathbb{Z}^4$ の上で同じ掃引をしたものと一致します：$Q_N^K(F \circ \mathrm{lift}) = (Q_{\mathbb{Z}}^K F) \circ \mathrm{lift}$（`ZHeat.iter_lift`）。右辺の $Q_{\mathbb{Z}}^K F$ は N に依らない関数です。

段 3：N に依らない数との比べ。 段 1 と段 2 を、台 S が箱 R_0 に入る有界連続な筒の関数 F に当てます。$L \geq R_0$、$n \geq L+1$ なら

$$\left| \int F \, d\mu_n - c_{K,L}(F) \right| \;\leq\; \left(\alpha^K + e^{-\lambda(L+1)}\right) \cdot 2\|F\|_\infty \, |S| \, e^{\lambda R_0} \tag{8}$$

が成り立ちます（`InfVol.lift_close`、$\lambda \geq 0$、$\alpha \leq 1$、$\beta \neq 0$）。比べる数 $c_{K,L}(F) = (Q_{\mathbb{Z}}^K F)(\mathbf{0})$ は n に依りません。$\mathbf{0}$ は全てのリンクの値が 0（閉じた球の中心）の配位です。比べの点は何でもよく、n に依らないことだけが要ります。SU(2) の配位である必要もありません。

段 4：二つの大きさの差。 (8) を二つの $n, n' \geq L+1$ に当てて引き、$K \to \infty$ とすると（$\alpha < 1$）

$$\left| \int F \, d\mu_n - \int F \, d\mu_{n'} \right| \;\leq\; 4\|F\|_\infty \, |S| \, e^{\lambda R_0} \, e^{-\lambda(L+1)} \qquad (L \geq R_0,\; L+1 \leq \min(n, n')) \tag{9}$$

が出ます[初]。L は「台から、二つのトーラスが違って見え始める所までの距離」です。差はこの距離について指数的に小さい。これが見出しの意味です。この段は読みのための系で、Lean の鎖には入っていません。収束の証明（段 5）は (8) から直接に行きます。

05 Cauchy 列から極限へ

段 5：Cauchy 列。 $\lambda = -\frac{1}{2}\log q(\beta)$ と取ると $\alpha = q(\beta)^{1/2} < 1$ です。与えられた ε について α^K と $e^{-\lambda j}$ を小さくし、$L = \max(R_0, j)$ と置けば、(8) から筒の関数の期待値の列 $\int F \, d\mu_n$ は Cauchy 列です（`InfVol.cauchy_cyl`）。実数は完備なので、各筒の関数について極限があります。

段 6：筒の関数は測度を決める。 $\mathcal{C}$ の上の二つの有限測度が、全ての有界連続な筒の関数で同じ積分を与えれば、二つは等しい（`CylDet.ext_of_cyl`）。有限個のリンクの周辺分布が一致し、射影極限の一意性（Mathlib）から全体が一致します。

段 7：部分列のない収束。 $\mathcal{C}$ はコンパクトで距離づけ可能なので、確率測度の空間もコンパクトです。どの部分列にも収束する部分列があり、その極限は筒の関数の上で段 5 の極限と一致し、段 6 で同じ測度です。全ての部分列が同じ極限への部分列を持つので、列そのものが収束します（`CylDet.tendsto_of_cyl_cauchy`）。

全ての大きさ。 (8) の評価は大きさの偶奇を使わず、全ての大きさ $m+1$ の持ち上げにも同じ数 $c_{K,L}(F)$ を挟んで成り立ちます（`AllN.lift_closeS`）。だから全ての大きさの列も、任意の部分的な大きさの列も、同じ極限を持ちます初 。

段	何を言うか	Lean の名
1	箱の掃引の評価 (7)、定数に N なし	`LinkSpec.torus_box`
2	$2(L+1)<N$ で箱の中の掃引が $\mathbb{Z}^4$ と一致	`ZHeat.iter_lift`
3	N に依らない数との比べ (8)	`InfVol.lift_close`
5	筒の関数の期待値が Cauchy	`InfVol.cauchy_cyl`
6	筒の関数が測度を決める	`CylDet.ext_of_cyl`
7	Cauchy から列の収束	`CylDet.tendsto_of_cyl_cauchy`

仮定が満たせることの例として、$\beta = 1/20$ の場合が `InfVol.infvol_example` として Lean にあります（$18\tanh(1/20) = 0.8993$読 ）。

06

並進不変とクラスター性

並進不変。 各トーラスの Wilson 測度は、トーラスの単位の並進で不変です。持ち上げは並進と交換するので、各 μ_n は $\mathbb{Z}^4$ の単位の並進で不変です（`TransI.lift_shiftI_invariant`）。F が有界連続なら $F(x(\cdot + e_i))$ も有界連続なので、弱収束で両辺の極限を取れば (3) が出ます（`TransI.limit_shiftI_invariant`）。逆向きの並進も全単射なので、ν_β は $\mathbb{Z}^4$ の全ての並進で不変です初 。

クラスター性。 トーラスの上の共分散の評価（20-02 の Dobrushin の距離の形）は、距離 d について「面を共有する二本で 1 しか変わらない」ことしか使いません。そこで d を基点の第 i 座標の巡回距離に替えます（`LinkSpec.coordLip`）。F の台は $d \le R$、ずらした G_k の台は $d \ge k$ にあり、トーラスが十分大きければ（$n \ge k + R$）

$$\left|\mathrm{Cov}_{P_N}(F, G_k)\right| \;\le\; 2\|F\|\, e^{\lambda R}\, |S_G|\, e^{-\lambda k} \cdot 2\|G\|$$

です。$F \cdot G_k$、F、G_k はどれも有界連続なので、評価は弱い極限に移り、(4) になります初 。極限点が一つかどうかは使いません。

例。$\beta = 1/20$ では $q = 0.8993$、$\lambda = -\frac{1}{2}\log q = 0.0531$読 です。(4) の右辺の指数の因子 $e^{-\lambda(k-R)}$ が 0.1 になるのは $k - R \approx 43$ のときです読 。窓の端に近いほど減り方は遅くなります。真の相関の減り方との比は記録がありません。

寄り道：「ただ一つ」は何を言っているか

飛ばしてよい。Lean の言明は $\exists!\,\nu,\ \mu_n \to \nu$ の形です。確率測度の空間の弱収束の位相は Hausdorff なので、一つの列の極限は、在れば必ず一つです。だから「ただ一つ」の部分は位相から自明で、何の情報も足しません。言明の中身は「部分列を取らずに列そのものが収束する」ことです。
コンパクト性だけなら「収束する部分列がある」までしか言えません。その場合、部分列ごとに違う極限があり得ます。部分列なしの極限の定理は、その可能性をこの列について閉じます（列が収束すれば、どの部分列の極限も同じ ν_β です。Lean の `CylDet.subseq_limit_eq`）。
列は定数ではありません。$n = 0$（2^4 のトーラス）の持ち上げは周期 2 で、全ての配位で $x_{\ell+2e_1} = x_\ell$ です。$n = 1$（4^4）ではこの二本は別のリンクで、一致する確率は 0 です初 。だから $\mu_0 \neq \mu_1$ です。
「ただ一つ」を、ほかの境界条件から来る極限も含めた Gibbs 測度の一意性と読まないでください。それはこの定理の外です（§07）。

07

言っていないこと

- **格子間隔は 1 に固定**。連続極限、格子間隔を 0 に送る操作については何も言いません。
- **窓は狭い**。$|\beta| < 0.0556$読 だけです。弱結合については何も言いません。
- **$\beta = 0$ は言明の外**。仮定は $\beta \neq 0$ です（$\beta = 0$ は Haar の積で、極限は自明です）。
- **境界条件は周期だけ**。周期の持ち上げの列の収束であって、自由境界・固定境界の列や、DLR の方程式を満たす測度の一意性は言っていません。
- **並進は単位の並進の生成元**。回転などの格子の対称性での不変は、この章の定理には入っていません。20-05 の生成元での不変は、別の測度（有限の格子のフェルミオンつきの測度）についての定理です。
- **クラスター性の評価は上界だけ**。(4) は相関の上界（減り方の率の下界）で、真の相関の減り方がどれだけ速いかは言いません。λ は $e^{\lambda} q(\beta) < 1$ の範囲で選ぶもので、$-\frac{1}{2}\log q$ の $\frac{1}{2}$ は選び方です。
- **新しい結果ではない**。Dobrushin の一意性の型、Osterwalder–Seiler の強結合の型の既知の結果を、具体の SU(2) Wilson 測度の上で Lean に書いたものです。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
典 部分列なしの極限の定理：$\beta \neq 0$、$18\tanh\lvert\beta\rvert < 1$ で、μ_n（大きさ $2(n+1)$）は列のまま一つの ν_β に弱収束（`InfVol.wilson_infvol_unique`）	窓の外、$\beta = 0$、ほかの境界条件、Gibbs 測度の一意性。「ただ一つ」は位相から自明
典 大きさに依らない極限の定理：全ての大きさ $m+1$、任意の $s(k) \to \infty$ で同じ極限（`AllN.wilson_infvol_allN`）	収束の速さの陽な形（(9) の形の評価はあるが、言明には入っていない）
典 極限の並進不変：四方向の単位の並進で不変（`TransI.wilson_infvol_translation`）	回転・鏡映での不変
典 極限点のクラスター性：(4)、四方向、どの極限点でも（`WilsonLimit.cluster_limit`、$\lambda \geq 0$、$e^{\lambda} q(\beta) < 1$）	真の減衰の速さ、窓の外
初 二つの大きさの差の評価 (9)（Lean の (8) からの一行の帰結）	(9) そのものは Lean の宣言ではない
読 窓 $\lvert\beta\rvert < 0.055613$、$\beta = 1/20$ で $q = 0.8993$、$\lambda = 0.0531$	浮動小数の値（区間の評価ではない）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
強結合の格子ゲージ理論の反射正値性・転送行列・強結合の型	典	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（要旨）。5-04
Dobrushin の一意性の条件（影響の係数の行の和が 1 未満）	典	R. L. Dobrushin の一意性の条件の原典（書誌のみ・未確認。年と誌は本書で照合していない）
格子ヤン–ミルズの確率論の言葉での定義と強結合の結果の概観	典	S. Chatterjee, arXiv:1803.01950（本文）
四つの定理と証明の段	Lean	Lean 4 で機械検査（核の再検査で全て通過、公理は標準の三つ）。宣言は本文の表と 20-07 の表、A-04
窓の端・率・$18\tanh(1/20)$	読	本書の検討の数値の記録（倍精度の浮動小数）

この章で使った語 — 周期の持ち上げ、弱収束、筒の関数、Dobrushin の条件、影響の係数、熱浴、掃引、クラスター性、強結合の窓。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：20-04 再構成と質量ギャップ — 強結合の窓の中で — この章の ν_β から Hilbert 空間と転送の作用素を組み立て、真空の外の状態が在ることと、ギャップの下界を読みます。

再構成と質量ギャップ — 強結合の窓の中で

この章は本書の検討です。

この章で分かること — 強結合の窓で、無限体積の測度 ν_β から再構成した Hilbert 空間の上の転送の作用素 T が、真空の直交補空間の上で $\|T\| \le (18 \tanh|\beta|)^{1/2}$ を満たすこと。その補空間が 0 でないこと（非退化）。同じことがゲージ不変な観測量の部門でも成り立つこと。$\beta \ge 0$ で $T \ge 0$ であること。T の像がゲージ不変な部門に入ること。そして、これらを一本にまとめた言明。どれも Lean で機械検査した、既知の型の結果の形式化です。

前提となる章 — 19-03 再構成の器・質量ギャップの定義、20-03 無限体積の極限、20-01 鏡映正値性。既存の知見としての再構成と質量ギャップの定義は 4-10・4-11 にあります。

先に言うこと — ここでの「質量ギャップ」は $\|T - P_\Omega\| \le e^{-m}$ という上界、つまり質量の**下界**だけです。質量が有限であること（$T \ne P_\Omega$）は言いません。格子間隔は 1 に固定、窓は $|\beta| < 0.0556$ 読 だけで、連続極限での質量ギャップについては何も示していません。

この章の順序

1. 器 — 対・並進・定数から Hilbert 空間と T を作る：言明が縛る三つのデータ。
2. 非退化つきの質量ギャップ：二つの窓の二つの定理。
3. なぜ非退化を言明に入れるか：一点の模型でも立つ形を避ける。
4. 証明の道筋：相関の減衰から作用素のノルムへ。
5. ゲージ不変な部門と T の像：面の観測量と、核に入る F_0。
6. T ≥ 0：真ん中の面の鏡映とゲージの平均。
7. 一本にまとめた言明：$0 < \beta$、窓の中の全て。
8. 言っていないこと：下界だけ、窓、格子間隔。

```
01
```

器 — 対・並進・定数から Hilbert 空間と T を作る

器の定義は 19-03 にあります。導入は 4-10 です。ここでは使う形だけを書きます。

観測量の空間 W。有界連続な関数で、時間の座標が 0 から R の基点を持つ有限個のリンクだけに依るもの（R は関数ごとに有限）の全体です。閉じた正の半分の筒の関数と言っても同じです。Lean の名は `Wsub` です。

三つのデータ。ν を確率測度とし、

$$B(F,G)=\int F(\Theta x)\,G(x)\,d\nu(x),\qquad (\tau F)(x)=F(x(\cdot+e_0)),\qquad \mathbf{1}=\text{定数 }1 \tag{1}$$

と置きます。Θ は時間の鏡映 $x_0\mapsto -x_0$（時間のリンクは一つずらして向きを逆にする。19-03）です。B が半正値・対称で、τ が B について対称、$\tau\mathbf{1}=\mathbf{1}$、$B(\mathbf{1},\mathbf{1})=1$、並進の軌道が有界であるとき、組 $(B,\tau,\mathbf{1})$ を**再構成の器**と呼びます（Lean の `OSGap.Datum`）。

作るもの。W に半内積 B を載せ、零の元で割って完備化したものを $\mathcal{H}$、W の元の像を $[F]$、真空を $\Omega=[\mathbf{1}]$、τ の連続な延長を T、真空への射影を $P_\Omega v=\langle\Omega,v\rangle\Omega$ とします。

質量ギャップの定義。定義は 19-03 にあります。

$$\mathtt{HasMassGap}\ m\quad:\Longleftrightarrow\quad \|T-P_\Omega\|\le e^{-m}. \tag{2}$$

$T\Omega=\Omega$ で T は対称なので、これは「Ω の直交補空間の上で $\|T\|\le e^{-m}$」と同じです[初]。時間の一歩で、真空以外の成分が少なくとも e^{-m} 倍に縮む。m は質量（エネルギーの隙間）の下界です。

言明はデータを縛る。以下の定理は全て「器 D が在って、D の B は (1) の積分、τ は時間の一歩の並進、$\mathbf{1}$ は定数 1 で、かつ …」という形です。データの欄は三つとも結論の中で決まっているので、D は ν から決まります[初]。T を勝手な作用素に取り替えて結論を満たすことはできません。

02

非退化つきの質量ギャップ

$F_0(x)=\operatorname{Re}x_{\ell_0}$ と置きます。ℓ_0 は原点を基点とする向き 1（空間）のリンクで、$F_0\in W$ です。$q(\beta)=18\tanh|\beta|$ と書きます（20-03）。

非退化つきの質量ギャップ — Dobrushin の窓

典 Dobrushin と Osterwalder–Seiler の強結合の型の結果の形式化。Lean：`WilsonLimit.wilson_massGap_dob_exists`（$\beta \neq 0$、$q(\beta) < 1$）。

$\beta \neq 0$、$18 \tanh|\beta| < 1$ とします。このとき μ_n のある部分列の弱い極限 ν と、ν から (1) で作った器 D が在って、

$$\|T - P_\Omega\| \le \big(18 \tanh|\beta|\big)^{1/2}, \qquad B(F_0, F_0) - B(\mathbf{1}, F_0)^2 \;\ge\; \tfrac{1}{4} e^{-12|\beta|}, \qquad \exists\, v \perp \Omega,\ \|v\| = 1 \tag{3}$$

一つ目が $m = -\frac{1}{2}\log q(\beta)$ の **HasMassGap**、二つ目と三つ目が非退化です。

非退化つきの質量ギャップ — 全ての極限点で

典 同じ型の結果の形式化。Lean：`WilsonLimit.wilson_massGap_nondegenerate`（$\beta \neq 0$、$24(1 - e^{-4|\beta|}) < 1$、$\nu$ は μ_n の任意の部分列の弱い極限）。

窓 $24(1 - e^{-4|\beta|}) < 1$（$|\beta| < 0.0106$ 読）では、**どの**極限点 ν についても、器 D が **HasMassGap**$\big(-\log 24(1 - e^{-4|\beta|})\big)$ と、(3) の二つの非退化を満たします。この窓の評価は 20-02 の有限体積の減衰から来ます。

二つの定理は窓と率が違います。Dobrushin の窓の形は、言明では極限点を一つ選んでいますが、同じ評価は全ての極限点で成り立ちます（`WilsonLimit.wilson_massGap_dob`、§04 段 4）。しかも窓の中では極限点は ν_β ただ一つです（20-03）。狭い窓の形は、有限体積の減衰（20-02）から別の道で同じ型の結論を出したもので、率は $-\log 24(1 - e^{-4|\beta|})$ です。部分列なしの極限 ν_β について Dobrushin の窓の形をまとめたものが §07 です。狭い窓の率は §07 には入っていません。

一つの例。$\beta = 1/20$ では $q = 0.8993$、$\|T - P_\Omega\| \le 0.948$、質量の下界は $m = 0.053$ です読。非退化の下界は $\frac{1}{4}e^{-0.6} = 0.137$ です読。窓の端に近いほど、ギャップの下界は 0 に近づきます。

03

なぜ非退化を言明に入れるか

(2) だけでは中身が薄くなる場合があります。$\mathcal{H}$ が Ω の張る一次元の空間なら、$T = P_\Omega$ で、$\|T - P_\Omega\| = 0$ です。このとき全ての m で (2) が立ちます。たとえば ν が一点の測度なら、そうなります。だから「ギャップが在る」は、「真空の外に状態が在る」と組にしないと、一点の模型でも立つ言明になります。非退化の無い形の定理は、この理由で本書には載せません。

非退化の二つの形。(3) の二つ目は「鏡映の対で測った F_0 の分散が正」、三つ目は「Ω に直交する単位ベクトルが在る」です。三つ目は二つ目から出ます：$y = F_0 - B(\mathbf{1}, F_0)\mathbf{1}$ は $B(\mathbf{1}, y) = 0$、$B(y, y) > 0$ なので、$v = [y]/\|[y]\|$ が単位ベクトルです（`OSGap.Datum.exists_unit_orth`）。三つ目は一次元の $\mathcal{H}$ を型の上で排除します。

分散の下界の出どころ。段に分けます。

1. ℓ_0 は時間 0 の空間のリンクなので Θ で動かず、$F_0 \circ \Theta = F_0$。だから $B(F_0, F_0) - B(\mathbf{1}, F_0)^2 = \mathrm{Var}_\nu(F_0)$初 。
2. SU(2) の Haar 測度では、左の不変性 $q \mapsto -q,\ iq,\ jq,\ kq$ から $E\,\mathrm{Re}\,U = 0$、$E(\mathrm{Re}\,U)^2 = \tfrac{1}{4}$ 。よって全ての c で $E(\mathrm{Re}\,U - c)^2 \geq \tfrac{1}{4}$（`HaarRe.integral_sq_sub_ge`）。
3. 一本のリンクの条件つきの分布の密度は、そのリンクを含む 6 枚の面の重みで、$e^{\pm 6|\beta|}$ の間に挟まれます。だから条件つきの分散は $\tfrac{1}{4}e^{-12|\beta|}$ 以上で、積分して全てのトーラスで $\mathrm{Var}(F_0) \geq \tfrac{1}{4}e^{-12|\beta|}$（`LinkSpec.wilsonProb_sq_sub_ge`）。
4. F_0 と F_0^2 は有界連続なので、下界は弱い極限に移ります（`WilsonLimit.var_limit_ge`）。

04 証明の道筋

質量ギャップの部分は、相関の減衰を作用素のノルムに直す一般の補題と、Wilson 測度の減衰の評価を組み合わせます。

段 1：器の公理。B の半正値は、各トーラスの格子点の面の鏡映正値性（20-01）を弱い極限に移して出ます。τ の対称性は並進不変と Θ の関係から、軌道の有界は $|F| \leq \|F\|_\infty$ から出ます。

段 2：減衰から作用素のノルムへ。器の上で、全ての $F \in W$ について定数 C_F が在って

$$B(\tau^k F, \tau^k F) - B(\mathbf{1}, F)^2 \;\leq\; C_F\, r^{2k} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots) \tag{4}$$

なら $\|T - P_\Omega\| \leq r$ です（`OSGap.Datum.opNorm_gap`）。左辺は $\|T^k[F] - P_\Omega[F]\|^2$ なので初 、稠密な集合の上の評価を対称な作用素のスペクトルの評価に直す議論です。

段 3：Wilson 測度の減衰。$B(\tau^k F, \tau^k F) = \int F(\Theta\tau^k x) F(\tau^k x)\, d\nu$ は、時間に約 $2k$ 離れた二つの観測量の相関です。トーラスの上の Dobrushin の距離の共分散の評価（20-02、`LinkSpec.wilson_cov_dist`）を当てると、N に依らない定数で $C_F e^{-2\lambda k}$ が出ます（`TorusRP.wilson_hdec_torus_dob`）。λ は $\lambda \geq 0$、$e^{\lambda} q(\beta) < 1$ を満たす任意の数です（段 4

では $\lambda > 0$）。この形の減衰が `WilsonLimit.dec_eventually_dob` です。評価は極限点に移ります。

段 4：率の選び方。段 2 を $r = e^{-\lambda}$ で当てると `HasMassGap` λ です（`WilsonLimit.wilson_massGap_dob`）。(3) の $\lambda = -\frac{1}{2}\log q(\beta)$ は $e^{\lambda} q = q^{1/2} < 1$ を満たす一つの選び方で、$\frac{1}{2}$ に物理の意味はありません。同じ定理から $-\log q(\beta)$ に任意に近い率が取れます。

段 5：非退化。§03 の四段です。

05

ゲージ不変な部門と T の像

導入は 4-11 です。ゲージ変換 $g : \mathbb{Z}^4 \to SU(2)$ は $(g \cdot x)_\ell = g(b)\, x_\ell\, g(b + e_\mu)^*$（$\ell$ の基点 b、向き μ）と働きます。全ての g で不変な W の元の全体を W_{gi} とします。$F_p = \mathrm{Re}\, U_p$（原点の $(1,2)$ 面のホロノミーの実部）は W_{gi} に入ります。

ゲージ不変な部門の質量ギャップ

典 形式化。Lean：`GaugeZ.wilson_massGap_gauge_exists`（$\beta \neq 0$、$q(\beta) < 1$）。

(3) と同じ形が、W を W_{gi} に、F_0 を F_p に替えて成り立ちます。ある極限点 ν について、W_{gi} の上の器で $\|T - P_\Omega\| \le q(\beta)^{1/2}$、$\mathrm{Var}_\nu(F_p) \ge \frac{1}{4} e^{-12|\beta|}$、真空に直交する単位ベクトルが在る。分散の下界は、面の一本のリンク U を動かすと $U_p = UV$（V は残りの三本の積で単位）となり、$\mathrm{Re}(UV)$ の Haar の分散が $\mathrm{Re}\, U$ と同じことから出ます。

なぜ部門を分けるか。全体の W の非退化の証人 F_0 は、ゲージ不変ではありません。一本にまとめた言明（§07）には $T[F_0] = 0$ が入っています。つまり $[F_0]$ は真空に直交する 0 でないベクトルですが、T に消されます。格子点 e_0 に中心の元 -1 を置くゲージ変換で、$\int G(\Theta x) F_0(\tau x)\, d\nu = 0$ が全ての $G \in W$ で出るからです初。これは Elitzur の定理（局所ゲージ対称性は破れない）と同じ仕組みです典。ゲージ不変な部門の非退化（証人 F_p）の方が、中身のある非退化です。F_p は T に消されると分かっているベクトルではありません。ただし $T[F_p] \neq 0$（この部門で T が補空間の上で 0 でないこと）も、Lean の言明には入っていません。

T の像はゲージ不変な部門に入る

典 形式化。Lean：`Bind.T_range_gauge_all`（$\lambda > 0$、$e^{\lambda} q(\beta) < 1$、ν は任意の極限点）。

W の器 D と W_{gi} の器 D'（どちらもデータを (1) で縛ったもの）について、両方が **HasMassGap** λ を満たし、等長な線形写像 $\iota : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ が在って

$$\iota \Omega' = \Omega, \qquad \iota T' = T \iota, \qquad \text{全ての } u \in \mathcal{H} \text{ について } Tu \in \iota(\mathcal{H}'). \tag{5}$$

ゲージ不変な部門は全体の Hilbert 空間に等長に埋め込まれ、T と交換し、T の像は全てその中に入ります。証明は、τF の台の端点の上でゲージ変換の Haar 平均を取ったものが W_{gi} に入り、対の値を変えないことからです。ι の像は閉じていて T は連続なので、稠密な集合から全ての u に延びます。

06

T ≥ 0

典 形式化。Lean：`FullT.wilson_Tpos_full`（$\beta \ge 0$、$\lambda > 0$、$e^{\lambda} q(\beta) < 1$、ν は任意の極限点）。

$\beta \ge 0$ とします。W の上の器 D（データを (1) で縛ったもの）が在って、**HasMassGap** λ、(3) の二つの非退化、そして

$$\langle v, T v \rangle \;\ge\; 0 \qquad (\text{全ての } v \in \mathcal{H}) \tag{6}$$

を満たします。

道筋。$\langle [F], T[F] \rangle = B(F, \tau F) = \int F(\Theta x) F(\tau x)\, d\nu$ です。$\tau \circ \Theta' = \Theta$（$\Theta'$ はリンクの真ん中の面 $x_0 \mapsto 1 - x_0$ での鏡映）なので、これは真ん中の面の鏡映の対です。真ん中の面の鏡映正値性（20-01）はゲージ不変な関数についてで、$\beta \ge 0$ を使います。そこでトーラスの全ての格子点の上のゲージ変換の Haar 平均 A を挟みます（G は正の側だけに依る有界可測な関数）。測度はゲージ変換で不変なので $\int G(\Theta' \omega) G(\omega) = \int (AG)(\Theta' \omega)(AG)(\omega)$ となり、AG はゲージ不変です。こうして各トーラスで正、極限で正、稠密な集合から全ての v へ延びます。

読み。$T \ge 0$、$T\Omega = \Omega$、$\| T - P_{\Omega} \| \le e^{-m}$ を合わせると、Ω の補空間の上で T のスペクトルは $[0, e^{-m}]$ に入ります初 。$-\log T$ と書けば補空間で $-\log T \ge m$ です（T の核の上では $+\infty$ と読む）。$\beta < 0$ については何も言いません。

07

一本にまとめた言明

典 Dobrushin の一意性の型と Osterwalder–Seiler の強結合の型の結果の形式化。Lean：`InfMain2.wilson_infvol_main2`（$0 < \beta$、$18 \tanh \beta < 1$）。

$0 < \beta$、$18 \tanh \beta < 1$ とし、$m = -\frac{1}{2} \log(18 \tanh \beta)$ と置きます。確率測度 ν_β がただ一つあって、次の全てが成り立ちます。

1. $\mu_n \to \nu_\beta$（部分列なしの弱収束。20-03）。
2. ν_β は四方向の単位の並進で不変。
3. 全ての $F \in W$ で $\int F(\Theta x) F(x)\, d\nu_\beta \geq 0$（鏡映正値）。
4. W の上の器（データを (1) で縛る）で、$\mathtt{HasMassGap}\ m$、$\mathrm{Var}(F_0) \geq \frac{1}{4} e^{-12\beta}$、$\Omega$ に直交する単位ベクトルの存在、$T[F_0] = 0$、$T \geq 0$。
5. W_{gi} の上の器（同じく縛る）で、$\mathtt{HasMassGap}\ m$、$\mathrm{Var}(F_p) \geq \frac{1}{4} e^{-12\beta}$、$\Omega$ に直交する単位ベクトルの存在、$T \geq 0$。
6. 四方向のクラスター性：20-03 の (4) を率 m で。

「ただ一つ」の部分は位相から自明で、中身は 1 の収束です（20-03 の寄り道）。T の像がゲージ不変な部門に入ること（§05 の (5)）は、この言明には入っていません。別の定理 `Bind.T_range_gauge_all` です。

08

言っていないこと

- **質量は下界だけ。** $\|T - P_\Omega\| \leq e^{-m}$ は、T が補空間で 0（「質量が無限大」）でも成り立ちます。質量が有限であること、$T \neq P_\Omega$ は言っていません。数 $-\frac{1}{2} \log(18 \tanh \beta)$ は下界で、$\frac{1}{2}$ は選び方です。真の質量との比の記録はありません。
- **窓は狭い。** $|\beta| < 0.0556$読 （全ての極限点の形は $|\beta| < 0.0106$読 ）。弱結合、物理の結合の範囲については何も言いません。
- **格子間隔は 1 に固定。** 格子の単位で測った質量の下界です。連続極限で質量ギャップが残るかどうかは、この部の定理の外です。
- **符号。** 一本にまとめた言明は $0 < \beta$、$T \geq 0$ は $\beta \geq 0$ です。ギャップと非退化だけなら $\beta \neq 0$ の両符号です。
- **部門の読み。** W_{gi} は「筒の関数で、かつゲージ不変」なものの全体です。その閉包が物理のゲージ不変な状態の空間と一致するかは言っていません。
- **新しい結果ではない。** Osterwalder–Seiler の強結合の型の既知の結果を、具体の SU(2) Wilson 測度の上で Lean に書いたものです。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
典 非退化つきの質量ギャップ（Dobrushin の窓、ある極限点）：(3)（`WilsonLimit.wilson_massGap_dob_exists`、$\beta \neq 0$）	質量が有限であること、窓の外
典 非退化つきの質量ギャップ（全ての極限点、窓 $24(1-e^{-4\lvert\beta\rvert}) < 1$）（`WilsonLimit.wilson_massGap_nondegenerate`）	同上。窓はさらに狭い
典 ゲージ不変な部門の質量ギャップと非退化（証人 F_p）（`GaugeZ.wilson_massGap_gauge_exists`）	W_{gi} の閉包と物理の状態の空間の一致
典 $T \geq 0$（全体の W の上）（`FullT.wilson_Tpos_full`、$\beta \geq 0$）	$\beta < 0$
典 T の像はゲージ不変な部門に入る、(5)（`Bind.T_range_gauge_all`）	一本にまとめた言明には入っていない
典 一本にまとめた言明（`InfMain2.wilson_infvol_main2`、$0 < \beta$、$18 \tanh \beta < 1$）	連続極限、格子間隔を変えること、質量の上界
初 $T \geq 0$ とギャップから、補空間の上のスペクトルが $[0, e^{-m}]$ に入るという読み	読みそのものは Lean の宣言ではない
読 $\beta = 1/20$ で $\lVert T - P_\Omega \rVert \leq 0.948$、$m = 0.053$、非退化の下界 0.137	浮動小数の値

出典と再現

もの	種別	出典・道具
格子ゲージ理論の反射正値性・転送行列・強結合の質量ギャップの型	典	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（要旨）。5-03・5-04
ユークリッドの公理と再構成	典	K. Osterwalder, R. Schrader, Comm. Math. Phys. 31 (1973) 83；42 (1975) 281（要旨）。4-10
局所ゲージ対称性は自発的に破れない（$T[F_0] = 0$ の読み）	典	S. Elitzur, Phys. Rev. D 12 (1975) 3978（要旨）
Dobrushin の一意性の条件	典	原典は書誌のみ・未確認（年と誌は本書で照合していない）
本章の定理と部品	Lean	Lean 4 で機械検査（核の再検査で全て通過、公理は標準の三つ）。宣言の一覧は 20-07、A-04
$\beta = 1/20$ の数、窓の端	読	本書の検討の数値の記録（倍精度の浮動小数）

この章で使った語 — 再構成の器、転送の作用素、真空、質量ギャップ（下界）、非退化、ゲージ不変な部門、Elitzur の定理、鏡映正値性、強結合の窓。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：20-05 フェルミオンつきの器 — Wilson–Dirac の行列式を重みに足した有限の格子で、鏡映正値性・Z > 0・対称性を読みます。

フェルミオンつきの器

この章は本書の検討です。

この章で分かること — 有限の格子 $(\mathbb{Z}/N)^3 \times \mathbb{Z}/2h$ の上で、Wilson のゲージの重み $e^{-\beta S_W}$ に Wilson–Dirac の作用素の行列式 $\mathrm{Re}\big[(\det D)^{2j}\big]$ を掛けた測度が、格子点の時間の面の鏡映について正値であること（質量 $m > -1$、全ての β）。分配関数が正であること（全ての β・m・j）。$\det D$ が大域のゲージ変換で不変なこと。正規化した測度が格子の対称性の生成元で不変なこと。どれも Lean で機械検査した、既知の型の結果の形式化です。

前提となる章 — 19-05 Wilson–Dirac の作用素・フェルミオンつきの測度、20-01 鏡映正値性。既存の知見としての格子の鏡映正値性と転送行列は 5-03 にあります。

先に言うこと — 全て一つの有限の格子の上の言明です。無限体積の極限、連続極限、カイラル対称性、質量の繰り込みについては何も言いません。対称性は生成元ごとの不変で、群としての閉包は言明の外です。フェルミオンつきの質量ギャップもこの章にはありません。

この章の順序

1. 対象 — 格子・作用・行列式の重み：何の測度か。
2. 格子点の面の鏡映正値性：$m > -1$、全ての β。
3. 鏡映正値性の証明の道筋：作用の割れ方と、面の行列の正値。
4. 分配関数が正であること：正規化が定義できる。
5. 行列式の大域ゲージ不変：定数の g で共役。
6. 格子の対称性の生成元での不変：並進・回転・鏡映・時間の鏡映。
7. 言っていないこと：有限の格子、連続極限、カイラル対称性。

01

対象 — 格子・作用・行列式の重み

定義は 19-05 にあります。ここでは定理を読むのに要る所だけを書きます。

格子とリンク。空間は三次元のトーラス $(\mathbb{Z}/N)^3$、時間は輪 $\mathbb{Z}/2h$（$h \geq 1$）です。リンクは時刻 t の空間のリンク $x \to x + e_i$（$i = 1, 2, 3$）と、時間のリンク $t \to t + 1$ です。各リンクに SU(2) の元を置いたものを配位 ω とし、配位の空間にはリンクごとの Haar 測度の積を入れます。

ゲージの作用。向きを忘れた面を一枚ずつ数えて

$$S_W(\omega) = \sum_p \Big(1 - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U_p\Big) \tag{1}$$

と置き、重みを $e^{-\beta S_W}$ とします。$\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,U$ は四元数の実部と同じなので、これは 19-01 の重み $e^{\beta \sum_p \mathrm{Re}\,U_p}$ の定数倍です[初]。β の向きも同じです。

Wilson–Dirac の作用素。$D = D(\omega)$ は Wilson の項の係数 $r = 1$、質量 m の作用素で、四方向に反周期の境界条件を持ちます（Lean の `WilsonGauge.physDirac`）。

$$D = (4 + m)\,\delta - \tfrac{1}{2} \sum_\mu \Big[(1 - \gamma_\mu)\, U_\mu(x)\, \delta_{x+\hat{\mu}} + (1 + \gamma_\mu)\, U_\mu(x - \hat{\mu})^\dagger\, \delta_{x-\hat{\mu}} \Big] \tag{2}$$

フェルミオンつきの重み。自然数 j を一つ決め、

$$w(\omega) = e^{-\beta S_W(\omega)} \cdot \mathrm{Re}\big[(\det D(\omega))^{2j}\big] \tag{3}$$

と置きます（`wfWeight`）。19-05 のとおり $(\det D)^{2j}$ は非負の実数で、Re は書き方の上の約束です。$\det D^{2j}$ は、同じ質量の $2j$ 個の種類のフェルミオンを Grassmann 変数で積分したものに当たります。Lean では Grassmann 変数は置かず、行列式そのものを重みとして定義します。正規化した測度 $P = w\,d\omega / Z$、$Z = \int w\,d\omega$ が `wfProb` です（19-05）。

02

格子点の面の鏡映正値性

導入は 5-03 です。時間の鏡映 $\Theta : t \mapsto -t \pmod{2h}$ は、時刻 $t = 0$ と $t = h$ の二枚の格子点の面を動かしません。配位を三つに分けます：二枚の面の上の空間のリンク c、正の側 a_+（$0 < t < h$ の空間のリンクと、$0 \leq t < h$ から出る時間のリンク）、負の側 a_-（残りを Θ で正の側の形に写し、時間のリンクは逆元にしたもの）。

Wilson–フェルミオンの重みの鏡映正値性

典 Osterwalder–Seiler の型の結果の形式化。Lean：`WilsonGauge.site_reflection_positive_wilson_full`（$h > 0$、$m > -1$、全ての $\beta \in \mathbb{R}$、全ての j）。

φ を (c, a_+) の有界可測な実数値関数とすると

$$\int \varphi(c,a_+)\,\varphi(c,a_-)\,e^{-\beta S_W(\omega)}\,\mathrm{Re}\big[(\det D(\omega))^{2j}\big]\,d\omega \;\geq\; 0. \tag{4}$$

$\varphi(c, a_-)$ は φ を鏡映した配位で読んだもの、つまり $(\Theta\varphi)$ です。(4) は「$\langle \Theta\varphi \cdot \varphi \rangle \geq 0$」の形の鏡映正値性で、正規化しない測度の言明です。Lean では積分を分けた座標 (c, a_+, a_-) で書き、その座標で組み立てた作用素が物理の配位の D と同じであることを `WilsonGauge.physDirac_eq_split` が言います。$Z > 0$（§04）なので正規化しても符号は同じです初 。

なぜ β の符号を問わないか。格子点の面の鏡映では、面をまたぐ面（プラケット）がありません。どの面も、二枚の固定された面の上か、正の側か、負の側のどれかに入ります。だから $e^{-\beta S_W}$ は「面だけの因子 × 正の側の因子 × 負の側の因子」に割れ、因子の符号の条件が要りません初 。リンクの真ん中の面の鏡映では、またぐ面の因子を正の核として展開するのに $\beta \geq 0$ が要ります。この章の定理はそちらを扱いません。

なぜ $m > -1$ か。フェルミオンの側では、固定された面の上の作用素のブロック（面の行列）が正定値であることを使います（`FermionSliceBlock.wilsonPlane_posDef`）。面の行列は $(m+1) + \sum_i \big(1 - \tfrac{1}{2}(T_i + T_i^\dagger)\big)$（$T_i$ はユニタリな跳び）の形で、各項 $1 - \tfrac{1}{2}(T_i + T_i^\dagger)$ が半正定値なので $m + 1$ 以上です初 。$m > -1$ はこのための十分条件です。必要かどうかはこの定理からは分かりません。

03 鏡映正値性の証明の道筋

段 1：作用の割れ方。$S_W(\omega) = K(c) + H(c, a_+) + H(c, a_-)$ で、H は正の側と負の側で**同じ関数**です（`WilsonGauge.wilsonAction_split`）。負の側の時間の面は、時間のリンクを逆元にして二つの時刻を入れ替えると正の側の形になり、$\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}$ は tr の巡回性と $\mathrm{tr}\,M^\dagger = \overline{\mathrm{tr}\,M}$ で変わりません（`WilsonGauge.plaqE_reflect`）。

段 2：抽象の鏡映正値性。重みが $k(c)\,w_+(c, a_+)\,w_+(c, a_-)$（$k \geq 0$、$w_+$ は実で有界）の形で、フェルミオンの行列式の側が面の行列の正値などの作用素の条件を満たせば、(4) の形の積分

は非負です（`FermionSliceReflection.site_reflection_positive_phys`）。ゲージの重みは段 1 で $k = e^{-\beta K}$、$w_+ = e^{-\beta H}$ の形に入ります。

段 3：作用素の一致。物理の配位で書いた D（式 (2)）と、割った配位で組み立てた作用素が一致します（`WilsonGauge.physDirac_eq_split`）。これで段 2 の作用素の条件を具体の D で払えます。

仮定が満たせることの例：$h = 1$、$m = 0$、$\varphi = 1$ で全ての仮定が立ちます。言明は空ではありません。

04

分配関数が正であること

典 形式化。Lean：`WilsonGauge.partition_pos_wilson_full`（$h > 0$、全ての β・m・j）。

$$Z = \int e^{-\beta S_W(\omega)}\, \mathrm{Re}\big[(\det D(\omega))^{2j}\big]\, d\omega \;>\; 0. \tag{5}$$

質量 m に条件はありません。$Z > 0$ なので、正規化した確率測度 `wfProb` が定義できます。$Z > 0$ は自明ではありません。$\mathrm{Re}\big[(\det D)^{2j}\big]$ が全ての配位で 0 になることはない、という中身を含みます。

05

行列式の大域ゲージ不変

初 既知の事実の Lean による形式化（証明は下の一文）。Lean：`GaugeDet.physDirac_det_conj`（全ての N・h・m・g・ω、仮定なし）。

定数の $g \in SU(2)$ で全てのリンクを共役した配位 $(g \cdot \omega)_\ell = g\,\omega_\ell\,g^{-1}$ について

$$\det D(g \cdot \omega) = \det D(\omega). \tag{6}$$

$D(g \cdot \omega)$ は $D(\omega)$ を色の添字に定数の g を掛ける行列で挟んだ相似で、行列式が変わらないことです。g は格子点に依らない定数です。格子点ごとに違う $g(x)$ を取る局所のゲージ変換は、この宣言の外です。

06

格子の対称性の生成元での不変

初 既知の事実の Lean による形式化（証明の道筋は下）。Lean：`CubicSym.wfProb_lattice_generators`（$h > 0$、全ての N・j・m・β）。

正規化した測度 P（`wfProb`）は、次の各生成元 R について押し出しで不変です：$R_* P = P$。

生成元	配位への働き	Lean の名
大域のゲージ変換	全てのリンクを定数の g で共役	`conjPhys g`
空間の単位の並進（三方向）	$x \mapsto x + e_k$	`transPhys k`
時間の単位の並進	$t \mapsto t + 1$	`tshiftPhys`
空間の平面の 90° の回転	$e_a \mapsto e_b \mapsto -e_a$（$a \neq b$、向きつき六通り）	`rotPhys a b`
空間の軸の鏡映	$x_k \mapsto N - 1 - x_k$	`reflPhys k`
時間の鏡映	$t \mapsto 2h - 1 - t$、時間のリンクは逆元（リンクの真ん中の面 $t = h - \frac{1}{2}$ についての反転で、§02 の格子点の面の Θ とは別。Lean に在るのはこの反転での測度の不変で、鏡映正値性ではない）	`treflPhys`

初 同じく形式化。Lean：`CubicSym.wfProb_hypercubic_generators`（等方の格子 $N = 2h$、$h > 0$）。空間と時間の大きさが等しい格子では、上の全てに加えて、(空間, 時間) の平面の 90° の回転（`trotPhys a`）でも不変です。

道筋。どの生成元についても、測度の不変は三つに分かれます。(i) リンクごとの Haar の積が、リンクの付け替えと一部のリンクの逆元 $g \mapsto g^{-1}$ で保たれる。(ii) S_W が不変。(iii) $\det D$ が不変。(iii) は Clifford の形で示します。D を $1 \otimes M + \sum_\mu \gamma_\mu \otimes A_\mu$ と書き、格子の置換 W とスピンの行列 S（回転では $S = 1 + \gamma_b \gamma_a$、軸 k の鏡映ではほかの三つの γ の積）で $(S \otimes W)\, D(\omega)\, (S \otimes W)^{-1} = D(R\omega)$ となることから出ます（`CubicSym.cliffOp_conj`・`CubicSym.det_cliffOp_perm`）。

時間の鏡映と行列式。時間の鏡映についても、行列式そのものが不変です：$\det D(\Theta_t \omega) = \det D(\omega)$（`CubicSym.physDirac_det_trefl`、全ての N・h・m・ω、等方は要らない）。スピンの行列は $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ です初。

反周期の切れ目。座標の反転を $z \mapsto N - 1 - z$ に取ると、反周期の符号が付くリンク（$N - 1 \to 0$）は自分自身に（向きを逆にして）移ります。だから格子の側の置換 W に符号の補正が要りません初。$z \mapsto -z$ に取ると切れ目が動き、符号つきの置換が要ります。

07

言っていないこと

- **一つの有限の格子**。全ての定理は固定した N・h の上の言明です。無限体積の極限も、そこでの鏡映正値性も、この章にはありません。
- **連続極限なし**。格子間隔は固定です。連続極限、質量の繰り込み（m をどう調整するか）については何も言いません。
- **カイラル対称性なし**。Wilson の項はカイラル対称性を陽に破ります。その回復や、フェルミオンの倍化の扱いについては何も言いません。
- **対称性は生成元ごと**。立方群・超立方群としての閉包（生成元の積で群の全ての元が出ること）は言明の外です。時間を含む回転は等方の格子 $N = 2h$ だけです。ゲージ不変は大域の定数の g についてで、局所のゲージ変換での $\det D$ の不変は宣言に入っていません。
- **鏡映は格子点の面だけ**。リンクの真ん中の面の鏡映正値性（フェルミオンつき）は Lean にありません。$m \leq -1$ は範囲の外です。
- **ギャップなし**。フェルミオンつきの測度の転送の作用素の質量ギャップは、この章の定理に入っていません。
- **新しい結果ではない**。Osterwalder–Seiler の型の鏡映正値性と、格子の対称性の既知の事実を、具体の作用素の上で Lean に書いたものです。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
典 Wilson–フェルミオンの重みの鏡映正値性 (4)（`WilsonGauge.site_reflection_positive_wilson_full`、$m > -1$、全ての β）	$m \leq -1$、リンクの真ん中の面の鏡映、無限体積
典 分配関数が正 (5)（`WilsonGauge.partition_pos_wilson_full`、全ての β・m・j）	Z の大きさの評価
初 行列式の大域ゲージ不変 (6)（`GaugeDet.physDirac_det_conj`、無条件）	局所のゲージ変換
初 格子の対称性の生成元での測度の不変（`CubicSym.wfProb_lattice_generators`）	群としての閉包、時間を含む回転（非等方の格子）、ブロックの水準への持ち上げ
初 等方の格子での超立方の生成元での不変（`CubicSym.wfProb_hypercubic_generators`、$N = 2h$）	群としての閉包、ブロックの水準への持ち上げ
初 時間の鏡映での行列式の不変（`CubicSym.physDirac_det_trefl`）	この反転についての鏡映正値性

言えている	言えていない
—	連続極限、カイラル対称性、質量の繰り込み、フェルミオンつきの質量ギャップ

出典と再現

もの	種別	出典・道具
格子ゲージ理論（フェルミオンを含む）の反射正値性と転送行列	典	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（要旨）。5-03
Wilson の格子の定式化	典	K. G. Wilson, Phys. Rev. D 10 (1974) 2445（要旨）。Wilson の項を持つ Dirac の作用素の原典は書誌のみ・未確認
本章の定理と部品	Lean	Lean 4 で機械検査（核の再検査で全て通過、公理は標準の三つ）。宣言の一覧は 20-07、A-04
作用素の式 (2) と Lean の定義の一致、生成元の働きの幾何	読	本書の検討の数値の記録（小さな格子で、Lean の定義を写した作用素と教科書の式の差を倍精度で比べた。差は丸めの大きさ）

この章で使った語 — Wilson–Dirac の作用素、Wilson の項、反周期の境界条件、格子点の面の鏡映、鏡映正値性、分配関数、大域のゲージ変換、超立方群、生成元、カイラル対称性。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：20-06 強結合の面積則と、渦の自由エネルギーの上界 — 強結合の窓の中の、Wilson ループと捩れた分配関数の評価です。

強結合の面積則と、渦の自由エネルギーの上界

この章は本書の検討です。

この章で分かること — 結合 $\beta \geq 0$ が小さい（強結合の）窓で、四次元のトーラス $(\mathbb{Z}/N)^4$ の SU(2) Wilson 測度について、二つの評価が Lean で機械検査されていることを読みます。(i) **面積則**：辺 $R \cdot T$ の長方形の縁に沿う Wilson ループの期待値が $\leq C\,(Kq)^{\text{面積}}$（$Kq < 1$、K は 441 か 4096、$q = 1 - e^{-2\beta}$）で、定数に $N \cdot R \cdot T$ が入りません。任意の角と向きの長方形で成り立ち、標準の長方形については無限体積の極限の測度でも成り立ちます。(ii) **渦の自由エネルギーの上界**：中心 -1 の 't Hooft の捩れを入れた分配関数 Z_1 と捩れ無しの Z_0 の差が、面積あたり N に依らない率で小さいこと。前の因子 N^2 は残ります。証明は、正の混合・中心の符号の反転で消える項・支配の補題・極小の面の連結性と面積の下界と数え上げ、の四つの部品でできています。

前提となる章 — 19-01 Wilson の測度・面とホロノミー・Haar の積、19-02 捩れの符号・渦の比、20-03 無限体積の極限。導入は 5-02（強結合と面積則）と 25-01（捩れたトーラスと流束）。

先に言うこと — 格子間隔は 1 に固定で、強結合の窓の中だけの言明です。窓は定数の版によって $\beta < 1.22 \cdot 10^{-4}$ または $\beta < 1.135 \cdot 10^{-3}$ です[読]。連続極限・弱結合（$\beta \to \infty$）・帯については何も言いません。公開された構成の評価書が開いた問いに挙げる「連続の Wilson ループと面積則」[評]とは別の、格子の上の言明です。定数は粗く、率は真の値よりずっと小さい側です。どれも Osterwalder–Seiler（面積則）と 't Hooft・Münster（渦の自由エネルギー）の型の既知の結果の形式化です[典]。

この章の順序

1. 設定 — Wilson ループと捩れた分配関数 — 長方形の縁の閉じた道、q と窓
2. 言明 (i) — 有限体積の面積則 — 五つの版（表 1）
3. 言明 (ii) — 無限体積の極限の測度で — 列全体の極限と、全ての極限点
4. 言明 (iii) — 渦の自由エネルギーの上界 — 面積あたりの率が横の大きさに依らない
5. 証明の道筋 — 四つの部品と一本の和 — 全体の流れ

6. 証明の部品 (1) — 正の混合と支配の補題 — 正値の要らない一段の不等式
7. 証明の部品 (2) — 中心の符号の反転で消える項 — 張る集合、よい集合と悪い集合
8. 証明の部品 (3) — 極小の面の連結性・面積の下界・数え上げ — 根・$R\min(T,N-T)$・N^2・$\Delta^{2(n-1)}$
9. 寄り道：行の余鎖の偶奇から面積の下界へ — 列ごとの差分の式
10. 数で見る — 窓、自明でない範囲、薄い渦の床との比べ
11. 言えていること・言えていないこと

札 — 源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による（くわしくは 6-00 の「札」）。初・典・機・読・仮・Lean は本全体の札で、読 は本書の数値の読み、Lean は本書の Lean の定理です。Lean の宣言の名は札の外に、範囲と同じ行に書きます。

01

設定 — Wilson ループと捩れた分配関数

導入は 5-02 です。強結合（β が小さい）では、Wilson ループの期待値は、ループを縁とする面を面一枚ずつ敷き詰める項から始まり、面積について指数的に小さくなります。これが強結合の面積則で、格子ゲージ理論の閉じ込めの描像の出発点です典。この章は、その評価を有限のトーラスの SU(2) Wilson 測度の定理として読みます。

測度。格子は $(\mathbb{Z}/N)^4$、リンクの変数 $U_\ell \in SU(2)$（単位の四元数）、面のホロノミー U_p、その実部 $s_p := \operatorname{Re} U_p = \frac{1}{2}\operatorname{tr} U_p \in [-1,1]$ は 19-01 のとおりです。面は向きを区別しない $i<j$ の $6N^4$ 枚です。Wilson 測度は Haar の確率測度の積に密度 $e^{\beta\sum_p s_p}$ を掛けたもので、期待値は

$$\langle F\rangle_{N,\beta} := \frac{\int F\, d\mu^{\mathrm{W}}}{\int 1\, d\mu^{\mathrm{W}}}, \qquad d\mu^{\mathrm{W}} = e^{\beta\sum_p s_p}\prod_{\ell} dU_\ell \tag{1}$$

です（Lean の `wilsonMeasure N β` とその全質量の比）。β は標準の SU(2) の $\beta = 4/g^2$ と同じ規約です。

長方形の縁。二つの向き $i\neq j$、角 a、辺 R,T（$1\le R,T<N$）を決め、a から i 向きに R 歩、j 向きに T 歩進み、i 向きに R 歩、j 向きに T 歩戻る閉じた道を C とします。$W(C)$ はこの道に沿うリンクの順序つきの積（逆にたどるリンクは共役）で、$\operatorname{Re} W(C) = \frac{1}{2}\operatorname{tr} W(C)$

はゲージ不変です。標準の長方形は角が原点で、向き 1・2 の張る面の中にあります（Lean の添字では 0・1）。この章は第 21・22 部と同じく向きを 1〜4 で番号づけます。20-01〜20-05 は Lean の添字のまま向きを 0〜3 で書いていて、そこでの向き 0・1 がこの章の向き 1・2 です。Lean：`AreaLaw.rectWord`（標準）・`AreaLaw.rectWordG`（一般）、積は `wordHol`。$R = T = 1$ では一枚の面の縁に字のまま一致します（`AreaLaw.rectWord_one_one`）。$R, T < N$ なので道はトーラスを巻きません。

捩れた分配関数。面の集合 D の上で s_p の符号を反転した重み $e^{\beta \sum_p \eta_p s_p}$（$\eta_p = -1$（$p \in D$）、$\eta_p = 1$（他））の全質量を Z_D と書きます。$(\mathbb{Z}/N)^4$ では D を「向き 1・2 の面で $x_1 = x_2 = 0$ のもの」（x_3, x_4 は任意、N^2 枚）に取り、$Z_0 := Z_\varnothing$（通常の分配関数）、$Z_1 := Z_D$ とします。これは中心 -1 の 't Hooft の捩れを一つ入れた分配関数です（19-02 の捩れと同じ面の置き方）。Lean：`VortexStrong.Ztw`、`VortexStrong.twist`。

窓。この章を通して

$$q := 1 - e^{-2\beta} \qquad (\beta \geq 0) \tag{2}$$

と置きます。$q \approx 2\beta$ です。窓は $Kq < 1$ の形で、$K = 4096$ では $\beta < 1.22085 \cdot 10^{-4}$、$K = 441$ では $\beta < 1.13507 \cdot 10^{-3}$ です読 。

02

言明 (i) — 有限体積の面積則

言明（強結合の面積則、有限体積）

$N \geq 2$、$\beta \geq 0$ で $4096q < 1$ とします。$1 \leq R, T < N$ の標準の長方形の縁 C について

$$\left| \langle \operatorname{Re} W(C) \rangle_{N,\beta} \right| \;\leq\; 16 \, \frac{(4096\, q)^{R \cdot \min(T,\, N-T)}}{4096\, (1 - 4096\, q)}. \tag{3}$$

Lean Osterwalder–Seiler の強結合の面積則の型の形式化。Lean：`AreaLaw.area_law_wilson`（仮定は $\beta \geq 0$、$1 \leq R, T < N$、$4096q < 1$ だけ。定数 16・4096 は N・R・T に依らない）。

$2T \leq N$ なら $\min(T, N-T) = T$ で、指数は面積 RT です（`AreaLaw.area_law_wilson_area`）。同じ形の版が四つあります（表 1）。

版	長方形	窓	右辺	Lean
基本	標準	$4096q < 1$	$16\,(4096q)^{R\min(T,N-T)}/(4096(1-4096q))$	`AreaLaw.area_law_wilson`
位置と向き	任意の角 a、任意の $i \neq j$	$4096q < 1$	同じ	`AreaLaw.area_law_wilson_general`
定数を締めた	標準	$441q < 1$	$6\,(441q)^{R\min(T,N-T)}/(441(1-441q))$	`AreaLaw.area_law_wilson_sharp`
締めた・位置と向き	任意の角・向き	$441q < 1$	同じ	`AreaLaw.area_law_wilson_general_s`
指数の最大	標準	$441q < 1$	$6\,(441q)^{\max(R\min(T,N-T),\,T\min(R,N-R))}/(441(1-441q))$	`AreaLaw.area_law_wilson_max_sharp`

表 1　面積則の五つの版。$\langle\cdot\rangle$ は (1) の正規化した期待値。全て $\beta \geq 0$、$1 \leq R, T < N$。

意味。Wilson ループの期待値は、ループが囲む面積について、少なくとも率 $-\ln(441q)$ で指数的に小さい。率と前の因子は格子の大きさ N にも、長方形の大きさにも依りません。位置と向きの版は、Wilson 測度が並進と向きの入れ替えで変わらないことからの系です（`AreaLaw.wilson_cfgShift_invariant`・`expect_perm`）。

指数について。$R \leq N/2$ か $T \leq N/2$ なら、最大の版の指数は面積 RT です。R と T がともに $N/2$ を越えるときは、指数は $\max(R(N-T), T(N-R))$ で RT より小さくなります。このとき向き 1・2 の平面の全体から長方形を除いた $N^2 - RT$ 枚の面も、mod 2 で同じ縁を持つので、真に必要な面の枚数も RT より小さいことがあります（二次元と三次元の $N = 4$、$R = T = 3$ の格子で 7 枚読 。整数計画の記録。四次元の 4^4 では確かめていません）。定理の指数はその枚数を越えず、差は残ります。$\min(T, N-T)$ の $N - T$ は証明の道具（§ 08 の寄り道）から来る弱さで、$R \times (N-T)$ の面が縁 C を張るという意味ではありません。

03

言明 (ii) — 無限体積の極限の測度で

無限体積の配位の空間、周期の持ち上げの列 μ_n（トーラス $(\mathbb{Z}/2(n+1))^4$ の Wilson 測度を $\mathbb{Z}^4$ へ持ち上げたもの、Lean の `liftProb β n`）と弱収束は 20-03 のとおりです。$\mathbb{Z}^4$ の標準の長方形の縁を $C_{R,T}$ と書きます（Lean の `zRectWord`）。

言明（強結合の面積則、無限体積）

$\beta > 0$、$18\tanh\beta < 1$、$4096q < 1$ とします。このとき確率測度 ν_β が在って、列 μ_n の全体が ν_β に弱収束し、全ての $R, T \geq 1$ で

$$\left| \int \operatorname{Re} W(C_{R,T}) \, d\nu_\beta \right| \;\leq\; 16 \, \frac{(4096\,q)^{RT}}{4096\,(1 - 4096\,q)}. \tag{4}$$

Lean 強結合の面積則の型の形式化。Lean：`AreaLaw.area_law_infvol`（ν_β の存在は 20-03・20-04 の強結合の無限体積の定理 `InfMain2.wilson_infvol_main2` から取る）。

二つの窓の交わりは $0 < \beta < 1.22085 \cdot 10^{-4}$ で、面積則の窓が Dobrushin の窓（$\beta < 0.0556$）にすっかり入ります読。

全ての極限点で。極限の存在を使わない形もあります。$\beta \geq 0$、$4096q < 1$ で、狭義に増える φ について $\mu_{\varphi(n)} \to \nu$（弱収束）なら、ν について (4) が成り立ちます（`AreaLaw.area_law_limit_sub`。$\varphi = \mathrm{id}$ が列全体の場合 `AreaLaw.area_law_limit`）。証明は、$n \geq R + T$ で有限体積の (3) の $2T \leq N$ の版を使い、有界連続な関数 $\operatorname{Re} W(C_{R,T})$ の積分の極限で不等式を保つだけです。

無限体積の版は、定数 16・4096 と標準の長方形（原点、向き 1・2）だけで言われています。締めた定数・任意の角と向きの版は有限体積だけです。

04

言明 (iii) — 渦の自由エネルギーの上界

言明（強結合の渦の床、等方のトーラス）

$N \geq 1$、$\beta \geq 0$、$4096q < 1$ とします。$(\mathbb{Z}/N)^4$ の Z_0、Z_1（§01）について

$$|Z_0 - Z_1| \;\leq\; N^2 \, \frac{(4096\,q)^{N^2}}{4096\,(1 - 4096\,q)} \, (Z_0 + Z_1). \tag{5}$$

Lean 't Hooft の渦の自由エネルギーの強結合の評価（Münster ほか）の型の形式化。Lean：`VortexStrong.vortex_floor`（仮定は $\beta \geq 0$、$4096q < 1$ だけ）。定数を締めた版 `VortexStrong.vortex_floor_sharp`（$441q < 1$ で 4096 を 441 に）、分母を Wilson 測度の全質量で書いた 441 の版 `VortexStrong.vortex_floor_wilson`（$441q < 1$）。

右辺の係数を ε とし $\varepsilon < 1$ なら $|Z_0 - Z_1| \le \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} Z_0$ です（`VortexStrong.vortex_floor_rel`。算術の書き換え）。

第 21 部の格子（横 N、縦 M のトーラス、19-02）でも同じ形があり、渦の比 θ_M（19-02）と同じ量を扱います。

言明（強結合の渦の床、横 N・縦 M のトーラス）

$N, M \ge 1$、$\beta \ge 0$、$441q < 1$、背景の捩れ $n_{12} \in \{0,1\}$ は任意とします。$Z_k := Z_{N,M}(\beta; n_{12}, k)$（$k = 0, 1$）について

$$|Z_0 - Z_1| \;\le\; N^2 \,\frac{(441\,q)^{M^2}}{441\,(1 - 441\,q)}\,(Z_0 + Z_1). \tag{6}$$

Lean 同じ型の形式化。Lean：`VortexStrongMN.vortex_floor_MN_sharp`（定数 9216 の版は `VortexStrongMN.vortex_floor_MN`）。

$|Z_0 - Z_1|/(Z_0 + Z_1) = |\theta_M^{(n_{12})}|$ なので、(6) は

$$\left|\theta_M^{(n_{12})}\right| \;\le\; N^2 \,\frac{(441\,q)^{M^2}}{441\,(1 - 441\,q)} \tag{7}$$

と同じです初。

意味。渦を一本入れても分配関数はほとんど変わらず、その差は縦の平面の面積 M^2 について指数的に小さい。**面積あたりの率 $-\ln(441q)$ は横の大きさ N にも縦の大きさ M にも依りません**。前の因子 N^2（捩れの面の数）は残ります。薄い渦の床（21-02）$|\theta_M| \le \tanh(N^2|\beta|)^{M^2}$ は全ての β で成り立ちますが、面積あたりの率 $-\ln\tanh(N^2|\beta|)$ は $N \to \infty$ で 0 に近づきます。(7) は強結合の窓の中だけですが、率が N に依らない点が違います（§09 の比べ）。

この節の言明は差 $|Z_0 - Z_1|$ の上界で、$Z_1 \le Z_0$ の向き（$\theta_M \ge 0$）は言いません。その向きは縦 M が偶数のときの別の定理です（21-06）。

05

証明の道筋 — 四つの部品と一本の和

面積則 (3) と渦の床 (5)・(6) は同じ筋で示されています。面積則で書きます。

1. **正の混合（§06）**。面の重みを $e^{\beta s_p} = e^{-\beta}(1 + \sigma_p)$、$0 \le \sigma_p \le t := e^{2\beta} - 1$ と書き、$\prod_p (1 + \sigma_p)$ を面の集合 X についての和 $\sum_X \prod_{p \in X} \sigma_p$ に展開します。分子と分母が、全ての X にわ

たる和 $\sum_X \int W \prod_X \sigma$、$\sum_X Z_X$（$Z_X := \int \prod_{p\in X} \sigma_p \, dU \ge 0$）になります。

2. **消える項（§07）**。リンクの集合の上で $U_\ell \mapsto -U_\ell$ と符号を反転する変換は Haar の積を保ちます。X の面の縁が $\bmod 2$ で C を張らない項は、この変換で符号が逆になり、0 です。
3. **支配（§06）**。$Z_{X\cup\{p\}} \le t\, Z_X$ から、面の集合 Y を含む X の重みの和は $q^{|Y|}\sum_X Z_X$ 以下です。
4. **一本の和**。$|W| \le 1$ なので、残る項は「C を張る極小の面の集合 Y」ごとに $q^{|Y|}$ で押さえられ、

$$\bigl|\langle \operatorname{Re} W(C)\rangle\bigr| \;\le\; \sum_{Y:\,C\text{ を張る極小の集合}} q^{|Y|} \tag{8}$$

です。全ての $\beta \ge 0$・全ての N で成り立ちます（Lean `AreaLaw.abs_wordExpect_le`。極小の集合の族 `minSpanC` は定義の中に具体に置かれ、仮定ではありません）。

5. **極小の面の幾何（§08）**。極小の Y はリンクを共有する意味で連結で、決めた一本のリンクに触れる面を含み、$|Y| \ge R\min(T, N-T)$ です。根に触れる大きさ n の連結な集合は $16\cdot 64^{2(n-1)}$ 個以下なので、(8) の右辺は $16\sum_{n\ge A} 4096^{n-1} q^n$（$A = R\min(T,N-T)$）以下になり、等比級数の和で (3) です。

渦の床では、段 2 を「よい集合では捩れた重みと捩れ無しの重みが一致する」に、段 4 を「悪い集合の和」に、段 5 の面積の下界を「悪い集合は N^2 枚以上」に置き換えます（§07・§08）。

この筋はクラスター展開の多体の和を使いません。使う不等式は、各点の $0 \le \sigma_p \le t$ と、有限集合の上の帰納だけです。強結合の相関の減衰の「二つの写しと面の鎖」（20-02 §06）と同じ系統の勘定です。

06

証明の部品 (1) — 正の混合と支配の補題

正の混合。$s \in [-1,1]$ について

$$e^{\beta s} = e^{-\beta}\bigl(1+\sigma\bigr), \qquad \sigma := e^{\beta(s+1)} - 1 \in [0,\, e^{2\beta}-1] \tag{9}$$

です（$\beta \ge 0$）。Lean：`AreaLaw.exp_eq_mix`・`mixVar_mem`。有限集合の上の積は $\prod_p (1+a_p) = \sum_X \prod_{p\in X} a_p$（`AreaLaw.prod_one_add_univ`）で、積分の中で展開する形は `AreaLaw.integral_mul_prod_one_add` です。展開した各項の σ が 0 以上であることが、後の支配の補題で重みを「足すほど増える」量として扱う所の元です。

一段の不等式。$Z_X := \int \prod_{p\in X}\sigma_p \prod_\ell dU_\ell$ について、$\sigma_p \le t$ を各点で使えば

$$Z_{X\cup\{p\}} \;\le\; t\, Z_X \qquad (p \notin X) \tag{10}$$

です（`AreaLaw.ZX_insert_le`）。

支配の補題（Lean：`AreaLaw.sum_superset_le`）。有限集合 P の部分集合の上の実数値の関数 Z と $t \ge 0$ が、全ての S と $p \notin S$ で $Z(S\cup\{p\}) \le t\, Z(S)$ を満たすなら、全ての Y で

$$\sum_{X\supseteq Y} Z_X \;\le\; \Big(\frac{t}{1+t}\Big)^{|Y|} \sum_X Z_X \tag{11}$$

です。$t/(1+t) = 1 - e^{-2\beta} = q$ です（`AreaLaw.q_eq`）。

証明の芯は一行です。$a_Y := \sum_{X\supseteq Y} Z_X$ とし、$p \notin Y$ について a_Y を「p を含む X」と「含まない X」に分けると $a_Y = a_{Y\cup\{p\}} + b$（b は含まない側）で、(10) を項ごとに使うと $a_{Y\cup\{p\}} \le t\, b$ です。合わせて $(1+t)\, a_{Y\cup\{p\}} \le t\, a_Y$、つまり $a_{Y\cup\{p\}} \le q\, a_Y$。$Y$ の大きさについての帰納で (11) です。$Z \ge 0$ **は使いません**。分割と一段の不等式だけで出ます。

07

証明の部品 (2) — 中心の符号の反転で消える項

反転。リンクの上の $\mathbb{F}_2$ の値の関数（余鎖）T について、$T_\ell = 1$ のリンクで $U_\ell \mapsto -U_\ell$ とする変換を flip_T とします。-1 は SU(2) の中心で、$-U$ の分布は U の分布と同じなので、flip_T は Haar の積を保つ可測な対合です（`AreaLaw.flipZ_preserving`）。道 w に沿う積は

$$W(\mathrm{flip}_T\, U) = (-1)^{\langle T,\, \partial w\rangle}\, W(U) \tag{12}$$

と変わります。∂w は道 w が各リンクを通る回数の mod 2 で、$\langle T, \partial w\rangle$ はその和です（`AreaLaw.wordHol_flip`。格子の大きさの条件は要りません）。面のホロノミーは面の縁を一周する道の積なので（`hol_eq_wordHol`）、s_p も $(-1)^{\langle T,\partial p\rangle}$ 倍になります。

消える項（Lean：`AreaLaw.integral_word_mul_prod_eq_zero_of_not_mem_span`）。∂C が $\{\partial p : p \in X\}$ の $\mathbb{F}_2$ の上の張る空間に入らなければ、任意の関数 g について

$$\int \mathrm{Re}\, W(C) \prod_{p\in X} g(s_p) \prod_\ell dU_\ell \;=\; 0. \tag{13}$$

$\mathbb{F}_2$ の線形代数の双対（`AreaLaw.not_mem_span_iff_exists_sep`）から、張る空間に入らないことは「X の全ての面で $\langle T, \partial p\rangle = 0$、$C$ で $\langle T, \partial C\rangle = 1$ となる T が在る」ことと同値です。

その T で反転すると、被積分関数の $\prod g(s_p)$ は変わらず W だけが符号を変えるので、積分は自分の符号を逆にしたものに等しく、0 です。g は任意で、可測性も要りません。

「X が C の面を含む」ではなく「張る空間に入る」が正しい判定です。たとえば周期のトーラスでは、一枚の面の縁は、その面を除いた残りの面全体の縁の和に $\bmod 2$ で等しくなります。四元数の群 Q_8、二次元の 2×2 のトーラスの全ての配位の和では、張らない 7 通りの X の項はちょうど 0、張る 9 通りは 0 でなく、面 0 を含まない $\{1,2,3\}$ も 0 でありませんでした読。

渦の床の側：よい集合と悪い集合。捩れた重みは、面ごとの符号のマスク $m : \text{面} \to \mathbb{F}_2$（$D$ の上で 1）を使って $e^{\beta\sum_p (-1)^{m_p} s_p}$ と書けます。反転 flip_T はマスクを $m \mapsto m + \delta T$（δT は T の余境界、$(\delta T)_p = \langle T, \partial p\rangle$）に変えます（`VortexStrong.ZM_gauge`）。面の集合 X の上でマスクが余境界に等しい、つまり $m_p = \langle T, \partial p\rangle$（$p \in X$）となる T が在るとき、X を**よい**集合と呼びます（Lean `VortexStrong.Good`）。よい集合では反転一つで捩れた項と捩れ無しの項が一致し（`VortexStrong.ZM_good`）、$Z_0 - Z_1$ には**悪い**集合の項だけが残ります。両方の重みに支配の補題を使って

$$|Z_0 - Z_1| \;\le\; \Bigg(\sum_{Y:\ \text{極小の悪い集合}} q^{|Y|}\Bigg)(Z_0 + Z_1) \tag{14}$$

です（`VortexStrong.abs_Z_sub_le`）。渦の床では双対は使いません。よい・悪いの定義そのものが余境界の存在で書かれているからです。

08
証明の部品 (3) — 極小の面の連結性・面積の下界・数え上げ

連結性（面積則）。二枚の面がリンクを共有するとき隣と呼びます。C を張る極小の集合 Y を二つに分け、その間に隣の対が無いとすると、片方の縁の和は閉じていて（$\partial\partial = 0$、`AreaLaw.div_plaqBd`）、台が長方形の縁に入ります。長方形の縁は単純な閉路なので、そういう閉じた鎖は 0 か ∂C 自身だけです（`AreaLaw.rect_closed_cases`、$1 \le R, T < N$）。どちらでも Y の極小性に反するので、極小の Y は連結です（`AreaLaw.minSpan_rect_conn`）。また Y は長方形の決めた一本のリンクに触れる面を含みます（根）。

連結性（渦の床）。極小の悪い集合が隣を共有しない二つの部分に分かれるなら、両側の余鎖を「一方の台の上」と「その外」で貼り合わせて全体の余鎖が作れ、全体がよくなって矛盾します（`VortexStrong.minBad_conn`）。

面積の下界（面積則）。C を張る面の集合は $R\min(T, N-T)$ 枚以上です（`AreaLaw.card_ge_of_spans_rect`）。証明は寄り道に置きます。向き 1 と 2 を入れ替えた同

じ議論で $T\min(R, N-R)$ も下界で（`AreaLaw.wordBd_swap_rect`）、その最大が表 1 の最後の版です。

面積の下界（渦の床）。D を平行移動した $D_{a,b}$（向き 1・2 の面で $x_1 = a$、$x_2 = b$）のマスクと D のマスクは、行と列の余鎖の余境界の分だけしか違いません（`VortexStrong.good_twist_iff`）。だから悪い集合は N^2 個の互いに素な $D_{a,b}$ の全てと交わり、N^2 枚以上です（`VortexStrong.card_bad_ge`）。下界は達せられます：向き 1・2 の平面 $x_3 = x_4 = 0$（N^2 枚）は悪い集合です（`VortexStrong.plane_bad`）。悪い集合は D の面を含むので、根は D の N^2 枚です。これが (5) の前の因子 N^2 です。

数え上げ。対称な隣の関係で各点の隣が Δ 個以下なら、決めた根を含む大きさ n の連結な集合は $\Delta^{2(n-1)}$ 個以下です（`AreaLaw.card_conn_le`）。閉じた歩道に「隣へ行って戻る」迂回を差し込む帰納で、全域木を作らずに出ます。粗い数えでは隣は 64 個以下、根は 16 個以下で、$64^2 = 4096$ です。締めた数えでは、一本のリンクを含む面は 6 枚、一枚の面とリンクを共有する面は自分を含めて 21 枚以下（$1 + 4 \cdot 5$）で、$21^2 = 441$、根は 6 です（`AreaLaw.card_rootP_le`・`card_nbQ_le`）。等比級数

$$\sum_{n \ge A} c_0\, \Delta^{2(n-1)} q^n = \frac{c_0}{\Delta^2} \cdot \frac{(\Delta^2 q)^A}{1 - \Delta^2 q} \qquad (\Delta^2 q < 1) \tag{15}$$

で (3)・(5)・(6) の右辺になります（c_0 は根の数）。

寄り道：行の余鎖の偶奇から面積の下界へ

飛ばしてよい。標準の長方形（向き 1・2 の面）で、列 $0 \le a < R$ と行 $y \in \mathbb{Z}/N$ について、「向き 1 のリンクのうち、向き 1・2 の座標が (a, y) のもの」で 1 をとる余鎖 $\rho_{a,y}$ を考えます（他の座標は全て）。面の縁との対は $\langle \rho_{a,y}, \partial p \rangle = [p \in Q(a,y)] + [p \in Q(a,y-1)]$（$Q(a,y)$ は座標 (a,y) の向き 1・2 の面の類。向き 1・3 や 1・4 の面は二回当たって消えます）、長方形の縁との対は $\langle \rho_{a,y}, \partial C \rangle = [y = 0] + [y = T]$ です。X が C を張るなら、$n(y)$ を $Q(a,y)$ に入る X の面の数として、$\bmod 2$ で $n(y) + n(y-1) = [y = 0] + [y = T]$ が全ての y で成り立ちます。この差分の式を解くと、n は $[0,T)$ の全てで奇数か、$[T,N)$ の全てで奇数です。どちらでも列 a に $\min(T, N-T)$ 枚以上の面が要り、R 列で $R\min(T, N-T)$ 枚以上です[初]。$[T,N)$ の側の解は偶奇の式の解であって、その側の面が縁 C を張ることは意味しません。

09

数で見る

量	値	札
窓 $4096q < 1$	$\beta < 1.22085 \cdot 10^{-4}$	読

量	値	札
窓 $441q < 1$	$\beta < 1.13507 \cdot 10^{-3}$	読
無限体積の版の窓（$18 \tanh \beta < 1$ との交わり）	$0 < \beta < 1.22085 \cdot 10^{-4}$	読
(3) が全ての面積 ≥ 1 で自明でない（右辺 < 1）範囲	$\beta < 1.2161 \cdot 10^{-4}$	読
(5) の係数が全ての N で < 1 の範囲（4096 の版／441 の版）	$\beta < 1.2093 \cdot 10^{-4}$／$\beta < 1.1025 \cdot 10^{-3}$	読
面積あたりの率 $-\ln(441q)$：$\beta = 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}$	`4.73`、`2.43`、`0.127`	読
小さい β の主要項の率 $-\ln(\beta/4)$：同じ β	`12.9`、`10.6`、`8.29`	読

表 2　窓と率。浮動小数の計算です。主要項の率は、一枚の面の平均 $I_2(\beta)/I_1(\beta) = \beta/4 + O(\beta^3)$ から読んだ目安で、評価ではありません。

上界の率は、主要項の率よりずっと小さい側です。定数 441（あるいは 4096）は連結な集合の数えの粗さから来ていて、窓の幅もそれで決まります。

薄い渦の床との比べ読。$N = M$ で、(7) と薄い渦の床 $\tanh(N^2\beta)^{N^2}$ の上界の常用対数を比べると、$\beta = 10^{-5}$ と 10^{-4} では $N \geq 30$、$\beta = 10^{-3}$ では $N \geq 38$ で (7) のほうが小さく（強く）なります。たとえば $\beta = 10^{-5}$、$N = 100$ で薄い床 $-1.00 \cdot 10^4$ 対 (7) $-2.05 \cdot 10^4$、$N = 10$ では薄い床 -300 対 (7) -206 です。薄い床は全ての β で言えるのに対し、(7) は窓の中だけです。

小さい格子の確かめ読。悪い集合の最小の大きさを、Lean の定義を写した別の台本の総当たりと整数計画で見ました。三次元 2^3 で 4、四次元 2^4 で 4、3^4 で 9（いずれも N^2）、横 N・縦 M の格子 $(N, M) = (2, 3)$・$(3, 2)$・$(2, 4)$ で 9・4・16（$= M^2$）で、Lean の下界と同じ値でした。

10 言えていること・言えていないこと

- **格子間隔は 1 に固定**。有限のトーラスと、その無限体積の極限の測度の言明です。連続極限・格子間隔を 0 にする列については何も言いません。
- **強結合の窓だけ**。$\beta < 1.135 \cdot 10^{-3}$（締めた定数）、無限体積と渦の床の基本の版では $\beta < 1.22 \cdot 10^{-4}$ です。窓の外については何も言いません（面積則が破れるとも言いません）。物理で興味のある β（2〜3 の帯）からは遠い端です。
- **長方形だけ**。一般の閉じた道のループは扱いません。無限体積の版は標準の長方形と粗い定数だけです。
- **指数の差**。$R \cdot T$ がともに $N/2$ を越えるとき、指数は真に必要な面の枚数より小さいままです。

- **率は粗い**。面積あたりの率は小さい β の主要項の率よりずっと小さく、張力の値の評価ではありません。下からの評価（Wilson ループの下界、張力の上界）は言いません。
- **渦の床の前の因子**。(5)・(6) の率は N・M に依りませんが、前の因子 N^2 は残ります。$Z_1 \le Z_0$ の向きは言いません。
- **帯にも質量ギャップにも届かない**。強結合の窓の中の質量ギャップは 20-04 の別の定理です。弱結合へ続く帯の言明（19-07）は、この章の定理からは出ません。
- **評価書の開いた問いとは別**。公開された構成の評価書が挙げる問い「Wilson ループの観測量を作り、局所の観測量と結び、面積則を示す」評 は連続の理論の問いです。この章は格子の上の強結合の言明で、その問いに答えるものではありません。
- **新しい結果ではありません**。強結合の面積則（Osterwalder–Seiler）と渦の自由エネルギーの強結合の評価（'t Hooft、Münster ほか）の型の、SU(2) Wilson 測度での形式化です。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
Lean 有限体積の面積則 (3)：$\beta \ge 0$、$4096q < 1$、$1 \le R, T < N$、定数に N・R・T なし。任意の角と向き、定数 6・441 の版、指数 $\max(R\min(T, N-T), T\min(R, N-R))$ の版。Lean `AreaLaw.area_law_wilson`・`area_law_wilson_general`・`area_law_wilson_sharp`・`area_law_wilson_general_sharp`・`area_law_wilson_max_sharp`	窓の外。一般のループ。$R, T > N/2$ の両方での真の指数。Wilson ループの下界
Lean 無限体積の面積則 (4)：$\beta > 0$、$18\tanh\beta < 1$、$4096q < 1$、列全体の極限 ν_β。全ての極限点でも（$\beta \ge 0$、$4096q < 1$）。Lean `AreaLaw.area_law_infvol`・`area_law_limit`・`area_law_limit_sub`	締めた定数・任意の角と向きの無限体積の版
Lean 渦の自由エネルギーの上界 (5)：$(\mathbb{Z}/N)^4$、$\beta \ge 0$、$4096q < 1$（締めた版 $441q < 1$）、面積あたりの率が N に依らない。Lean `VortexStrong.vortex_floor`・`vortex_floor_sharp`・`vortex_floor_rel`・`vortex_floor_wilson`（441 の版）	前の因子 N^2 の除去。$Z_1 \le Z_0$ の向き。窓の外
Lean 横 N・縦 M の版 (6)：全ての背景 n_{12}。締めた版 `vortex_floor_MN_sharp` は $441q < 1$（441 の窓）、締めない版 `vortex_floor_MN` は 9216q < 1（9216 の窓）。Lean `VortexStrongMN.vortex_floor_MN_sharp`・`vortex_floor_MN`	帯の言明。連続極限
初 (7)：(6) を渦の比で書いた形。寄り道の偶奇の議論	—
読 窓・自明でない範囲・率（表 2）、薄い渦の床との比べ（境目 $N = 30$・38）、小さい格子の最小の集合	上界・下界の証明ではない。SU(2) 四次元の真の率

出典と再現

もの	種別	出典・道具
強結合の面積則と格子ゲージ理論の土台	典	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440。K. G. Wilson, Phys. Rev. D 10 (1974) 2445。導入は 5-02
捩れた境界条件と渦の自由エネルギー	典	G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141。G. Münster, Nucl. Phys. B 180 (1981) 23–60（書誌のみ、本文は未確認）。導入は 25-01
公開された構成の開いた問い（Wilson ループと面積則）	評	評価書（`yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`、2026-11-10）§8 の 4。読み方は 16-02
(3) と表 1 の版、部品（混合・支配・反転・双対・連結・下界・数え上げ・並進と向き）	Lean	`AreaLaw.area_law_wilson`・`area_law_wilson_area`・`area_law_wilson_general`・`area_law_wilson_sharp`・`area_law_wilson_general_sharp`・`area_law_wilson_max_sharp`・`abs_wordExpect_le`・`exp_eq_mix`・`mixVar_mem`・`prod_one_add_univ`・`ZX_insert_le`・`sum_superset_le`・`q_eq`・`flipZ_preserving`・`wordHol_flip`・`not_mem_span_iff_exists_sep`・`integral_word_mul_prod_eq_zero_of_not_mem_span`・`rect_closed_cases`・`minSpan_rect_conn`・`card_ge_of_spans_rect`・`wordBd_swap_rect`・`card_conn_le`・`card_rootP_le`・`card_nbQ_le`・`wilson_cfgShift_invariant`・`rectWord_one_one`。sorry 0、公理は標準の三つ、核の再検査で確認、言明は源の字句で確かめた
(4)	Lean	`AreaLaw.area_law_infvol`・`area_law_limit`・`area_law_limit_sub`、極限の存在は `InfMain2.wilson_infvol_main2`（20-03）
(5)・(6) と部品（よい集合・悪い集合・貼り合わせ・平行移動）	Lean	`VortexStrong.vortex_floor`・`vortex_floor_sharp`・`vortex_floor_rel`・`vortex_floor_wilson`・`ZM_gauge`・`Good`・`ZM_good`・`abs_Z_sub_le`・`good_twist_iff`・`card_bad_ge`・`minBad_conn`・`plane_bad`、`VortexStrongMN.vortex_floor_MN_sharp`・`vortex_floor_MN`
窓・率・自明でない範囲・薄い渦の床との比べ	読	本書の検討の数値の記録（浮動小数。別の台本でも計算し直した）
張る集合の判定（Q_8、2×2）、悪い集合と張る集合の最小の大きさ	読	本書の検討の数値の記録（全ての配位の和、総当たり、整数計画。四次元 4^4 は最適の証明なし）

この章で使った語 — 強結合・Wilson ループ・面積則・正の混合・支配の補題・中心の符号の反転・張る集合・余鎖・余境界・よい集合・悪い集合・根・連結な集合の数え上げ・'t Hooft の捩れ・渦の自由エネルギー。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：20-07 この部が言えていること・言えていないこと ― 第 20 部の定理を一つの表に並べます。渦の床の他の形は 21-02 と 21-07 にあります。

この部が言えていること・言えていないこと

この章は本書の検討です。一覧の章です。

この章で分かること — 第 20 部の定理を、範囲（β の範囲・格子の大きさ・窓）と、言っていないことと、Lean の宣言の名で一つの表にまとめます。

前提となる章 — 20-00 入口。各行の中身は 20-01〜20-06 にあります。

先に言うこと — この部の定理は全て、格子間隔を 1 に固定した格子の上の言明で、既知の型の結果の形式化です。連続極限、弱結合、質量の上界については、どの行も何も言いません。

この章の順序

1. 表の読み方：記号と欄。
2. 鏡映正値性（20-01）：三つの形と対の対称性。
3. 強結合の減衰（20-02）：有限体積の二つの評価。
4. 無限体積の極限と再構成（20-03・20-04）：極限・並進・クラスター性・ギャップ・非退化・$T \geq 0$。
5. フェルミオンつきの器（20-05）：有限の格子の四つの定理。
6. 強結合の面積則と、渦の自由エネルギーの上界（20-06）：面積則の有限体積と無限体積、渦の自由エネルギーの上界。
7. 部全体で言っていないこと：全ての行に共通の限界。

01

表の読み方

各行は一つの定理です。「範囲」は Lean の言明の仮定と、結論の主な形を写したもの、「言っていないこと」はその行に固有の限界です。全ての行は Lean 4 で機械検査されています。20-01〜20-05 の行（§02〜§05）の札は典（文献の既知の型の結果の形式化）です。ただし

§05 の行列式と格子の対称性の行は初（本文に証明を置いた既知の事実の形式化）です。20-06 の行（§06）の札は Lean（本書の Lean の定理。20-06 の凡例のとおり）です。記号は第 19 部に従います。

- $q(\beta) = 18 \tanh |\beta|$。窓 $q(\beta) < 1$ は $|\beta| < 0.0556$ 読。
- 狭い窓 $24(1 - e^{-4|\beta|}) < 1$ は $|\beta| < 0.0106$ 読。
- μ_n：トーラス $(\mathbb{Z}/2(n+1))^4$ の Wilson 測度の $\mathbb{Z}^4$ への周期の持ち上げ。ν_β：その部分列なしの極限（20-03）。
- 「極限点」：μ_n のある部分列の弱い極限。
- W：閉じた正の半分の筒の関数。W_{gi}：その中のゲージ不変なもの（20-04）。

02

鏡映正値性（20-01）

定理	範囲	言っていないこと	Lean の宣言
格子点の面の鏡映正値性	$(\mathbb{Z}/2M)^4$、全ての β、閉じた正の半分だけに依る有界可測な f	リンクの真ん中の面、時間の向きだけ	`TorusRP.wilson_rp`
真ん中の面の鏡映正値性	$(\mathbb{Z}/2M)^4$、$M \geq 2$、$\beta \geq 0$、ゲージ不変な有界可測な F	ゲージ不変でない F、$\beta < 0$。この定理だけでは器に入らない（器の $T \geq 0$ は 20-04 の別の定理）	`MidRP.wilson_rp_mid`
四方向の格子点の面の鏡映正値性	$(\mathbb{Z}/2M)^4$、全ての β、向き ρ ごと	リンクの真ん中の面の四方向の形	`PeierlsPerm.wilson_rp_dir`
鏡映の対の対称性	$(\mathbb{Z}/2M)^4$、全ての β、可測な f, g	—	`TorusRP.wilson_refl_symm`

03

強結合の減衰（20-02）

定理	範囲	言っていないこと	Lean の宣言
有限体積の強結合の相関の減衰	狭い窓、有限の N ごと、定数に N なし、時間の距離	空間の向きの距離、窓の外	`TorusRP.wilson_strong_coupling`
Dobrushin の距離による共分散の減衰	$\lambda \geq 0$、$e^{\lambda} q(\beta) < 1$、有限の N、定数に N なし	窓の外、真の減衰の速さ	`LinkSpec.wilson_cov_dist`

04

無限体積の極限と再構成（20-03・20-04）

定理	範囲	言っていないこと	Lean の宣言
部分列なしの極限の定理	$\beta \neq 0$、$q(\beta) < 1$	ほかの境界条件、Gibbs 測度の一意性。「ただ一つ」は位相から自明で、中身は列の収束	`InfVol.wilson_infvol_unique`
大きさに依らない極限の定理	$\beta \neq 0$、$q(\beta) < 1$、全ての大きさ $m+1$、任意の $s(k) \to \infty$	収束の速さ（言明の外）	`AllN.wilson_infvol_allN`
極限の並進不変	$\beta \neq 0$、$q(\beta) < 1$、四方向の単位の並進	回転・鏡映	`TransI.wilson_infvol_translation`
極限点のクラスター性	$\lambda \geq 0$、$e^{\lambda} q(\beta) < 1$、どの極限点でも、四方向	真の減衰の速さ	`WilsonLimit.cluster_limit`
非退化つきの質量ギャップ（Dobrushin の窓）	$\beta \neq 0$、$q(\beta) < 1$、言明は極限点を一つ選ぶ（同じ評価は全ての極限点で：`WilsonLimit.wilson_massGap_dob`）、$\lVert T - P_{\Omega} \rVert \leq q(\beta)^{1/2}$、$\mathrm{Var}(F_0) \geq \frac{1}{4} e^{-12\lvert\beta\rvert}$	質量が有限であること（下界だけ）、$\frac{1}{2}$ は選び方	`WilsonLimit.wilson_massGap_dob_e`
非退化つきの質量ギャップ（全ての極限点）	$\beta \neq 0$、狭い窓、全ての極限点、率 $-\log 24(1 - e^{-4\lvert\beta\rvert})$（一本にまとめた言明には入っていない）	同上	`WilsonLimit.wilson_massGap_nonde`
ゲージ不変な部門の質量ギャップ	$\beta \neq 0$、$q(\beta) < 1$、言明は極限点を一つ選ぶ、証人 $F_p = \mathrm{Re}\, U_p$	W_{gi} の閉包と物理の状態の空間の一致	`GaugeZ.wilson_massGap_gauge_exis`
$T \geq 0$（全体の W の上）	$\beta \geq 0$、$\lambda > 0$、$e^{\lambda} q(\beta) < 1$、全ての極限点	$\beta < 0$	`FullT.wilson_Tpos_full`
T の像はゲージ不変な部門に入る	$\lambda > 0$、$e^{\lambda} q(\beta) < 1$、全ての極限点	一本にまとめた言明には入っていない	`Bind.T_range_gauge_all`
一本にまとめた言明	$0 < \beta$、$18 \tanh \beta < 1$。収束・並進・鏡映正値・二つの部門のギャップと非退化・$T[F_0] = 0$・$T \geq 0$・クラスター性	連続極限、質量の上界、窓の外	`InfMain2.wilson_infvol_main2`

```
05
```

フェルミオンつきの器（20-05）

格子は $(\mathbb{Z}/N)^3 \times \mathbb{Z}/2h$（$h > 0$）、重みは $e^{-\beta S_W}\,\mathrm{Re}\big[(\det D)^{2j}\big]$、$D$ は Wilson–Dirac の作用素（$r = 1$、四方向に反周期）です。

定理	範囲	言っていないこと	Lean の宣言
Wilson–フェルミオンの重みの鏡映正値性	$m > -1$、全ての β・j、格子点の時間の面	$m \le -1$、真ん中の面、無限体積	`WilsonGauge.site_reflection_positive_wilson_full`
分配関数が正	全ての β・m・j	Z の大きさ	`WilsonGauge.partition_pos_wilson_full`
行列式の大域ゲージ不変	無条件、定数の g	局所のゲージ変換	`GaugeDet.physDirac_det_conj`
格子の対称性の生成元での不変	全ての N・j・m・β：大域のゲージ、四方向の並進、空間の $90°$ の回転、空間の軸の鏡映、時間の鏡映	群としての閉包、ブロックの水準への持ち上げ	`CubicSym.wfProb_lattice_generators`
超立方の生成元での不変	等方の格子 $N = 2h$、上に (空間, 時間) の $90°$ の回転を足したもの	非等方の格子での時間を含む回転	`CubicSym.wfProb_hypercubic_generators`
時間の鏡映での行列式の不変	無条件（全ての N・h・m・ω）、反転 $t \mapsto 2h - 1 - t$	この反転についての鏡映正値性	`CubicSym.physDirac_det_trefl`

06

強結合の面積則と、渦の自由エネルギーの上界（20-06）

$q = 1 - e^{-2\beta}$ と置きます。窓は定数の版ごとに違います（くわしくは 20-06）。

定理	範囲	言っていないこと	Lean の宣言
有限体積の面積則	$\beta \geq 0$、$4096q < 1$（締めた版は $441q < 1$）、長方形の縁の Wilson ループ、率と前の因子は格子の大きさにも長方形の大きさにも依らない	窓の外、一般のループ、Wilson ループの下界、連続の Wilson ループ	`AreaLaw.area_law_wilson`・`AreaLaw.area_law_wilson_sharp`・`AreaLaw.area_law_wilson_max_sharp`
無限体積の面積則	$\beta > 0$、$18 \tanh \beta < 1$ と $4096q < 1$ の交わり、極限の測度（全ての極限点でも）	締めた定数・任意の角と向きの無限体積の版	`AreaLaw.area_law_infvol`・`AreaLaw.area_law_limit_sub`
渦の自由エネルギーの上界	$\beta \geq 0$。横 N・縦 M のトーラス・全ての背景で $441q < 1$（`VortexStrongMN.vortex_floor_MN_sharp`）。等方のトーラスでは $4096q < 1$（`VortexStrong.vortex_floor`）、締めた版は $441q < 1$（`VortexStrong.vortex_floor_sharp`）。差は縦の平面の面積 M^2 について指数で小さく、面積あたりの率は横の大きさにも縦の大きさにも依らない	前の因子 N^2（横の面積）の除去、差の符号の向き、窓の外、帯の言明	`VortexStrongMN.vortex_floor_MN_sharp`・`VortexStrong.vortex_floor`・`VortexStrong.vortex_floor_sharp`

どれも Osterwalder–Seiler（面積則）と 't Hooft・Münster（渦の自由エネルギー）の型の既知の結果の形式化です[典]。面積則は格子の Wilson ループの言明で、連続の Wilson ループは、この部にも公開された構成にも在りません。

07

部全体で言っていないこと

- **格子間隔は 1 に固定**。どの行も、連続極限や、格子間隔を変えたときの一様性について何も言いません。
- **強結合の窓だけ**。面積則と渦の自由エネルギーの上界の行（§06）も強結合の窓の中だけです。無限体積の行は $|\beta| < 0.0556$[読]（狭い窓は $|\beta| < 0.0106$[読]）だけで、弱結合については何も言いません。
- **質量は下界だけ**。質量ギャップの行は $\|T - P_\Omega\|$ の上界です。質量が有限であること、真の質量との比は言っていません。

- **既知の型の形式化**。Osterwalder–Seiler の強結合の型、Dobrushin の一意性の型、強結合の面積則と渦の自由エネルギーの型の既知の結果を、具体の SU(2) Wilson 測度の上で Lean に書いたものです。四次元の Yang–Mills の質量ギャップの問題について、何かを示したものではありません。公開された構成が残した問い（収束と一意性、一様な質量ギャップ、連続の Wilson ループと面積則）とは反対の端（強結合・格子間隔は固定）の言明です（14-06）。

次の部では、捩れのある格子の上の渦の床と Polyakov ループを、同じ「一つの格子間隔」の水準で扱います。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
典 §02〜§05 の表の各行、Lean §06 の表の各行（どれも Lean で機械検査、範囲は各行のとおり）	格子間隔を変えること、連続極限、窓の外、質量の上界
読 窓の端 $\lvert\beta\rvert < 0.055613$・$\lvert\beta\rvert < 0.010640$	浮動小数の値（区間の評価ではない）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
各行の型の原典	典	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（要旨）。Dobrushin の一意性の条件の原典は書誌のみ・未確認。各章の出典の表
各行の宣言	Lean	Lean 4 で機械検査（核の再検査で全て通過、公理は標準の三つ）。A-04
窓の端の数	読	本書の検討の数値の記録（倍精度）

この章で使った語 — 強結合の窓、極限点、質量ギャップ（下界）、非退化、ゲージ不変な部門、鏡映正値性、生成元。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：21-00 入口 — 捩れた箱の中の渦 — 第 21 部へ。捩れのある格子の上の渦の床と Polyakov ループを扱います。

入口 — 捩れた箱の中の渦

> この章は案内です。

この章で分かること — 第 21 部の各章に在る定理の一覧と、部の全体に掛かる範囲（何を言っていないか）、「床」という語の向きが分かります。

前提となる章 — 19-02 横 N・縦 M のトーラス・渦の比・Polyakov ループ。

先に言うこと — この部の定理はどれも、格子間隔を固定した有限のトーラスの上の言明です。強結合の窓の中では、率が横の大きさに依らない形が在ります（前の因子＝横の面積は残ります。20-06）。窓の外では、この部の床（θ の上界）の率はどれも横の大きさ N に一様ではありません。21-07 の欠けの下界（対称な箱で、横の大きさに依らず 1/2）は、床とは逆向き（θ の下界の側）の言明です。帯にも質量ギャップにも届きません（示すべき言明は 19-07）。どれも既知の描像の片側の形式化です。

この章の順序

1. この部の定理の一覧
2. 部の全体に掛かる範囲
3. 「床」とは何か
4. 検討の記録への案内

01

この部の定理の一覧

対象は全て、横 N（向き 1・2）・縦 M（向き 3・4）のトーラス $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ の上の $SU(2)$ の Wilson 測度と、その捩れた分配関数 Z_0, Z_1、渦の比 $\theta_M = (Z_0 - Z_1)/(Z_0 + Z_1)$ です（定義は 19-02）。

章	定理（一行）
21-01 符号の系の三本	被覆の不等式・$\mathbb{Z}_2$ の単調性・$\mathbb{Z}_2$ との比べ（抽象の含意、仮定を全て見せる）と、その $SU(2)$ の Wilson 測度への当てはめ。θ_M を (3,4) の面の符号 η の平均で書く表示
21-02 薄い渦の床	全ての実の β、$N, M \geq 1$ で $\lvert\theta_M\rvert \leq \tanh(N^2\lvert\beta\rvert)^{M^2}$。$\beta \neq 0$ なら $\lvert\theta_M\rvert \leq e^{-\sigma_0 M^2}$、$\sigma_0 = -\ln\tanh(N^2\lvert\beta\rvert) > 0$
21-03 太い渦の床 — 言明と道筋	全ての $N \geq 1$ で、任意の $\varepsilon > 0$ に、十分大きい β ごとに十分大きい M で $\lvert\theta_{M+1}\rvert \leq \exp\bigl(-(M+1)^2 e^{-\beta(S_N+\varepsilon)}\bigr)$（$S_N$ は渦の最小作用。閾は陽でない）
21-04 太い渦の床 — 証明の部品	縦を一辺 m の塊に分けた評価 $\lvert\theta_M\rvert \leq \tanh(K_{\mathrm{eff}})^{k^2}$（$mk \leq M$）と、太い渦の床を組み立てる部品
21-05 渦の最小作用	全ての $N \geq 1$ で $S_N > 0$（塊の大きさ m に一様な下界。値は陽でない）。$N = 2, 3, 4$ で $S_N < 2N^2$（計算機の証明書）
21-06 θ の符号と Polyakov ループの対	M が偶数なら全ての実の β で $\theta_M \geq 0$（$Z_1 \leq Z_0$）。Polyakov ループの対の上界、たとえば $M \equiv 0 \pmod 4$ で $\lvert\langle P_b(0) P_{b'}(T)\rangle_0\rvert \leq 2\tanh(N^2\lvert\beta\rvert)^{M\min(T, M-T)}$
21-07 渦の比の連続・極限・合わせ	格子の大きさを止めて、渦の比は結合について連続で、結合 0 で 0、結合を大きくすると 1 に近づく。決めた目標の値（0 以上 1 未満）に合わせる結合が在る（最大の解）。二つの捩れを持つ箱に平らな配位は無く、対称な箱の欠けは横の大きさに依らず 1/2 以上
21-08 この部が言えていること・言えていないこと	定理ごとの範囲の表

どの定理も Lean で機械検査し、それに加えて定義と言明を別の目で照合しています（$N = 2, 3, 4$ の計算機の証明書は、それを使う系の側で照合）。宣言の名と範囲は各章にあります。

02

部の全体に掛かる範囲

- **格子間隔は固定。** 有限のトーラスの上の、正規化しない分配関数についての等式・不等式です。連続極限は扱いません。
- **窓の外では、床の率は横の大きさ N に一様でない。** 率（$\sigma_0 \approx 2e^{-2N^2\lvert\beta\rvert}$ や $e^{-\beta(S_N+\varepsilon)}$）は N を大きくすると 0 に近づきます。横を止めた、実質二次元の板の評価です。強結合の窓の中では、率が横の大きさに依らない形が在ります（前の因子＝横の面積は残ります。20-06）。21-07 の欠けの下界（対称な箱で、横の大きさに依らず 1/2）は、床とは逆向き（θ の下界の側）の言明で、床の率ではありません。
- **閾が陽でないものが在る。** 太い渦の床とそれに依る系では、β と M の閾は存在だけで、値は出ません。渦の最小作用の正の下界も値は陽でありません。
- **帯にも質量ギャップにも届かない。** 帯の言明も、四次元の面積則も、質量ギャップも、この部の定理からは出ません。帯と質量ギャップについて示すべき言明は 19-07 にあります。

- **既知の描像の片側の形式化**。 捩れた細い板の上の渦の気体という既知の描像（Mack–Petkova、Fröhlich らの線と言われるもの。書誌は章末の表、本文はこの本では未確認）のうち、上からの評価の側を、具体の $SU(2)$ の Wilson 測度の定理として Lean に載せたものです。この部の床の定理は上からの評価の側で、逆の側は、21-07 が格子を止めた $\beta \to \infty$ の極限での値を一つ与えるだけです。この本は新しさを主張しません。

03

「床」とは何か

渦の比は 't Hooft の流束の自由エネルギー $\Delta F = \ln(Z_0/Z_1)$（25-01・26-03 と同じ量。26-03 は渦の自由エネルギーとも呼びます）と $\theta_M = \tanh(\Delta F/2)$ で結ばれています。閉じ込めの描像では、ΔF は (3,4) の面積 M^2 について指数で 0 に近づき、その速さ（率）が張力に当たります。この部の定理は、θ_M を、したがって ΔF を、**上から**抑えます。それは率を**下から**抑えることで、この下からの評価を「床」と呼びます。率が少なくともこれだけある、という向きの言明で、床の定理は率の上限（ΔF の下界）を言いません。逆の側は、21-07 が格子を止めた $\beta \to \infty$ の極限での値（流束の自由エネルギーの傾きが最小の欠けに収束すること）を一つ与えるだけです。「薄い」「太い」は、床の率を、渦を一枚の面に集めた配位の費用 $2N^2$ で取るか、より安い太い渦の費用 S_N で取るかの違いです。

04

検討の記録への案内

捩れたトーラス・渦・帯について、この部の定理に至るまでの検討の記録は、この本の 第 25 部（空間の方向から — 小さな捩れた T^2 と閉じ込め）と 第 26 部（移り変わりの帯）にあります。構造だけの道具が出すのは床まで、という見方は 26-04 にあります。この部では書き直さず、必要な所で章を指します。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 この部の定理（一覧は §01。言明・仮定・証明の道筋は各章）	格子間隔を動かす話・N に一様な床の率・陽な閾・帯・質量ギャップ
機 $N = 2, 3, 4$ の $S_N < 2N^2$（計算機の証明書。解析の証明の支え、21-05）	一般の N での $S_N < 2N^2$

出典と再現

もの	種別	出典・道具
捩れた板の上の渦の描像と、$SU(2)$ と $\mathbb{Z}_2$ の比べ	典	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 123 (1979) 442・125 (1980) 117（26-01 と同じ書誌。本文はこの本では未確認）。J. Fröhlich, Phys. Lett. B 83 (1979) 195 は書誌のみ（未確認）。捩れた境界条件は G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141（25-01）
各章の定理	初	各章の本文の証明の道筋。Lean 4 で機械検査（各章の出典の表）

この章で使った語 — 渦の比・流束の自由エネルギー・床・薄い渦・太い渦・渦の最小作用・Polyakov ループ。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：21-01 符号の系の三本 — 床を出すための比べの道具から始めます。

符号の系の三本 — 被覆の不等式・単調性・比べ

この章は本書の検討です。§02〜§05 の抽象の定理は条件つきの含意として書きます。

この章で分かること — SU(2) の渦の比を Z_2 の符号の系の渦の比で上から抑えるための、三本の抽象の不等式（被覆の不等式・Z_2 の単調性・Z_2 との比べ）と、その SU(2) の Wilson 測度への当てはめが分かります。渦の比 θ_M を、(3,4) の面の符号 η の平均として書く表示も置きます。

前提となる章 — 19-01 Haar の積・面とホロノミー、19-02 捩れ・渦の比。群の指標の言葉（準同型、±1 の値）を使います。

先に言うこと — §02〜§05 は抽象の定理で、仮定の欄を全て見せた「もし〜ならば」の形です。仮定を満たす具体の対象として、この章が結果に数えるのは SU(2) の Wilson 測度への当てはめ（§06）と η の表示（§07）だけです。三本とも「Z_2 の側から上へ」の片側の比べで、SU(2) の渦の比の下界（流束の自由エネルギーの下界）は出ません。非可換の群について単調性や被覆の不等式を示したものではありません。格子間隔は固定です。

この章の順序

1. 何のための三本か — 床の向き
2. 符号の系 — 指標・分配関数・捩れ・底の系
3. 被覆の不等式
4. Z_2 の単調性
5. Z_2 との比べ — 符号の定まらない結合と不変な測度
6. SU(2) の Wilson 測度への当てはめ
7. 渦の比を符号の平均で書く — η の表示
8. 言っていないこと
9. 寄り道：被覆の不等式を格子で読む

01

何のための三本か — 床の向き

第 21 部の対象は、横 N・縦 M のトーラス $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ の上の $SU(2)$ の Wilson 測度です（19-02）。(3,4) の面の一つの列に捩れを入れた分配関数 Z_1 と、入れない Z_0 の比から、渦の比

$$\theta_M = \frac{Z_0 - Z_1}{Z_0 + Z_1} = \tanh \frac{\Delta F}{2}, \qquad \Delta F := -\ln \frac{Z_1}{Z_0} \tag{1}$$

を作ります（定義は 19-02）。ΔF は 't Hooft の流束の自由エネルギーです（25-01・26-03 と同じ量。26-03 は渦の自由エネルギーとも呼びます）。閉じ込めの描像では ΔF は (3,4) の面積 M^2 について指数で 0 に近づき、その速さが張力です[典]（G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141 の捩れた境界条件の枠組み）。

この章の三本は、$SU(2)$ の系の比 Z_1/Z_0 を、面の符号だけを変数に持つ $\mathbb{Z}_2$ の系の比で**下から**抑えるための道具です。式 (1) で言い換えると、θ_M と ΔF を**上から**抑え、ΔF が M^2 について減る速さ（率）を**下から**抑えます。この下からの評価を、この部では「床」と呼びます。比べの相手の $\mathbb{Z}_2$ の系は、最後には二次元の閉じた式で計算できる系にまで落とします（21-02）。

三本の役目は次のとおりです。

名	比べるもの	この部での使い道
被覆の不等式	大きい $\mathbb{Z}_2$ の系と、それを写した小さい（底の）$\mathbb{Z}_2$ の系	四次元の符号の系を二次元の系へ落とす型
$\mathbb{Z}_2$ の単調性	同じ $\mathbb{Z}_2$ の系の、結合の大きさの違う二つ	結合を増やすと渦の比が減らないこと（比べの型の確認）
$\mathbb{Z}_2$ との比べ	中心 $\{\pm 1\}$ の作用で不変な測度の上の系（$SU(2)$ など）と、底の $\mathbb{Z}_2$ の系	$SU(2)$ の渦の比を $\mathbb{Z}_2$ の系の渦の比で抑える（§05）

どれも相関不等式の型の、周りに知られた道具の組み合わせです。$SU(2)$ と $\mathbb{Z}_2$ の比べの型は Mack–Petkova の線と言われます[典]（書誌は出典の表。本文はこの本では未確認）。この本は新しさを主張しません。

02

符号の系 — 指標・分配関数・捩れ・底の系

三本は、格子を忘れた抽象の形で書かれています。登場するものは四つです。

配位の群と面の添字。 G は有限群（格子では「リンクごとの符号の場」で、積は点ごとの積）、ι は有限集合（格子では面）です。

符号の指標。 関数 $\psi : G \to \mathbb{R}$ が符号の指標であるとは、乗法的 $\psi(gh) = \psi(g)\psi(h)$ で、値が ± 1 であることです（Lean：`CoveringInequality.IsSignChar`）。面ごとに一つ、指標の族 $\chi = (\chi_B)_{B \in \iota}$ を取ります。格子では $\chi_B(g)$ は面 B の四本のリンクの符号の積です。

分配関数と捩れ。 結合 $c : \iota \to \mathbb{R}$ について

$$Z_\chi(c) = \sum_{g \in G} \exp\Bigl(\sum_{B \in \iota} c_B \, \chi_B(g)\Bigr) \tag{2}$$

と置きます（Lean：`CoveringInequality.Z`）。捩れは $\zeta : \iota \to \{\pm 1\}$ で、結合 c を $\zeta c = (\zeta_B c_B)_B$ に替えます。捩れた比 $Z_\chi(\zeta K)/Z_\chi(K)$ の $-\ln$ が、この抽象の系の流束の自由エネルギーに当たります。

底の系と引き戻し。 もう一つの有限群 G_0 と指標の族 $\chi^0 = (\chi^0_B)_{B \in \iota}$（添字は**同じ** ι）、写像 $p : G_0 \to G$ で

$$\chi_B\bigl(p(t)\bigr) = \chi^0_B(t) \qquad (\text{全ての } B \in \iota,\ t \in G_0) \tag{3}$$

を満たすものを「底の系」と呼びます。p は準同型でなくてかまいません（証明は χ_B の乗法性しか使いません）。格子では、p は小さいトーラスの符号の場を大きいトーラスへ周期的に写す写像です。

出発点の補題は、Griffiths 型の第一の不等式です。非負の結合 $J \geq 0$ と捩れ ζ について $Z_\chi(\zeta J) \leq Z_\chi(J)$ 初 （Lean：`CoveringInequality.Z_flip_le`、仮定の欄は「各 χ_B が符号の指標」「$J_B \geq 0$」「$\zeta_B = \pm 1$」）。証明は $e^{c\chi} = \cosh c + \chi \sinh c$（$\chi = \pm 1$）で積を展開し、面の集合についての帰納法で「捩れた和の絶対値は捩れない和を越えない」を示します。底にあるのは、符号の指標の和 $\sum_g \psi(g)$ が 0 か $|G|$ で、負にならないことです。

03

被覆の不等式

被覆の不等式（Lean：`CoveringInequality.covering_ineq`）。次の五つを仮定します。

- (hχ) 各 χ_B は G の上の符号の指標。
- (hχ₀) 各 χ^0_B は G_0 の上の符号の指標。
- (hp) $p : G_0 \to G$ は式 (3) を満たす。
- (hK) 結合は非負：$K_B \geq 0$。

- (hζ) $\zeta_B = \pm 1$。

このとき

$$Z_\chi(K)\,Z_{\chi^0}(\zeta K) \;\le\; Z_\chi(\zeta K)\,Z_{\chi^0}(K) \tag{4}$$

です。比の形（`covering_ratio`）と $-\ln$ の形（`vfe_cover_le`）は

$$\frac{Z_{\chi^0}(\zeta K)}{Z_{\chi^0}(K)} \le \frac{Z_\chi(\zeta K)}{Z_\chi(K)}, \qquad -\ln\frac{Z_\chi(\zeta K)}{Z_\chi(K)} \le -\ln\frac{Z_{\chi^0}(\zeta K)}{Z_{\chi^0}(K)} \tag{5}$$

で、仮定は同じ五つです。初 証明は下の二段で、三つとも Lean で機械検査し、定義と言明を別の目で照合しています。道具は Griffiths 型の相関不等式と配位の置き換えという周りに知られた型で、この形の比べが文献のどこに在るかは、この本は確かめていません。

証明の道筋。 二段です。

1. **鍵の恒等式**（Lean：`Z_mul_Z`）。二つの和 $\sum_s \sum_t$ で、被覆の側の配位を $s = u \cdot p(t)$ と置き換えます。$\chi_B(u\,p(t)) = \chi_B(u)\chi_B^0(t)$ なので、任意の結合 J, J' で

   $$Z_\chi(J)\,Z_{\chi^0}(J') = \sum_{u \in G} Z_{\chi^0}\big(J\chi(u) + J'\big) \tag{6}$$

   となります。積の二つの系が、u ごとの底の系一つの和に変わります初 。
2. **u ごとの比べ**。 式 (4) の左辺は $(J, J') = (K, \zeta K)$、右辺は $(\zeta K, K)$ です。底の結合はそれぞれ $K\chi(u) + \zeta K = \zeta\,a(u)$ と $a(u)$、ただし $a_B(u) = \zeta_B K_B \chi_B(u) + K_B \ge 0$ です。Griffiths 型の第一の不等式 $Z_{\chi^0}(\zeta a) \le Z_{\chi^0}(a)$ を u ごとに使って足せば (4) です初 。

極限も大きさの条件も使いません。全ての有限の系、全ての非負の結合で立ちます。

格子の実例（Lean：`TwistedWilson.z2_four_covers_two`・比の形 `z2_four_ratio`、仮定は $K \ge 0$ だけ）。横 N・縦 M のトーラスの四次元の $\mathbb{Z}_2$ のゲージ理論（一様な結合 K）を被覆の側に、縦の二次元のトーラスの $\mathbb{Z}_2$ のゲージ理論を底に取ると（底の指標は (3,4) の面で二次元の面の符号で、恒等的に 1 ではありません）、ζ を (3,4) の捩れとして

$$\frac{1 - \tanh(N^2K)^{M^2}}{1 + \tanh(N^2K)^{M^2}} \;\le\; \frac{Z_\chi(\zeta K)}{Z_\chi(K)}$$

です初 。四次元の符号の系を、縦の二次元の系へ落とす形で、寄り道の「横を n 倍に伸ばす被覆」そのものではありません。Lean の鎖の中で読まれていますが、$SU(2)$ の薄い渦の床の主定理の証明はこれを使わず、§06 の当てはめから直接、二次元の式へ進みます。

04

$\mathbb{Z}_2$ の単調性

$\mathbb{Z}_2$ の単調性（Lean：`CoveringInequality.mon_ineq`）。仮定は四つです。

- (hχ) 各 χ_B は符号の指標。
- (hK) $K_B \geq 0$。
- (hKK′) $K_B \leq K'_B$（項ごとに大きい結合）。
- (hζ) $\zeta_B = \pm 1$。

このとき

$$Z_\chi(\zeta K')\, Z_\chi(K) \;\leq\; Z_\chi(K')\, Z_\chi(\zeta K), \qquad \text{すなわち} \quad \frac{Z_\chi(\zeta K')}{Z_\chi(K')} \leq \frac{Z_\chi(\zeta K)}{Z_\chi(K)} \tag{7}$$

です（比の形は `mon_ratio`、仮定は同じ）。結合を項ごとに増やすと、捩れた比は増えず、流束の自由エネルギーは減りません。初 証明は下の道筋で、Lean で機械検査し、定義と言明を別の目で照合しています。型は強磁性の符号の系の相関不等式です。

証明の道筋。 式 (6) を底＝被覆（$G_0 = G$、p は恒等写像）で使います。現れる結合を $\chi(u)\cdot\big(K' + \zeta\chi(u)K\big)$ の形に揃え、指標のずらし $Z_\chi(\chi(u)c) = Z_\chi(c)$（配位の置き換え $g \mapsto gu$。Lean：`Z_char_shift`）で $\chi(u)$ を外し、$K'_B + \zeta_B\chi_B(u)K_B \geq 0$ に Griffiths 型の第一の不等式を当てます初 。

この単調性は $\mathbb{Z}_2$ の符号の系（非負の結合、捩れの背景なし）の言明です。$SU(2)$ の Wilson 測度で結合 β について同じ単調性が立つかは、この章は示していません（§08）。

05

$\mathbb{Z}_2$ との比べ — 符号の定まらない結合と不変な測度

被覆の不等式の仮定 (hK) を緩めると、符号の定まらない結合でも同じ形が出ます。

抑えられた結合の形（Lean：`CoveringInequality.dominated_covering_ineq`）。仮定は (hχ)(hχ₀)(hp)(hζ) と、

- (hJ) $|J_B| \leq K_B$（J の符号は任意）。

このとき

$$Z_\chi(J)\, Z_{\chi^0}(\zeta K) \;\leq\; Z_\chi(\zeta J)\, Z_{\chi^0}(K) \tag{8}$$

です。証明は §03 と同じで、底の結合 $K_B + \zeta_B J_B \chi_B(u)$ が (hJ) から非負になることだけが変わります[初]。$J = K$ が被覆の不等式、底＝被覆で $J = K \le K'$ が $\mathbb{Z}_2$ の単調性です。

不変な測度の上の形（$\mathbb{Z}_2$ との比べ）（Lean：`CoveringInequality.invariant_dominated`）。配位の空間 Ω と測度 μ、符号の群 G の Ω への作用 $g \cdot \omega$、面ごとの関数 $J_B : \Omega \to \mathbb{R}$ について、次を仮定します。

- (hinv) 積分が作用で不変：全ての $g \in G$ と全ての $f : \Omega \to \mathbb{R}$ で $\int f(g \cdot \omega)\, d\mu = \int f(\omega)\, d\mu$。
- (hχ)(hχ₀)(hp) は §03 と同じ。
- (hJ) 結合は指標で符号を変える：$J_B(g \cdot \omega) = \chi_B(g)\, J_B(\omega)$。
- (hK) $|J_B(\omega)| \le K_B$（全ての ω）。
- (hζ) $\zeta_B = \pm 1$。
- (hint) 全ての $c : \iota \to \mathbb{R}$ で $\omega \mapsto \exp\bigl(\sum_B c_B J_B(\omega)\bigr)$ が μ で可積分。

このとき

$$\Bigl(\int e^{\sum_B J_B(\omega)}\, d\mu\Bigr)\, Z_{\chi^0}(\zeta K) \;\le\; \Bigl(\int e^{\sum_B \zeta_B J_B(\omega)}\, d\mu\Bigr)\, Z_{\chi^0}(K) \tag{9}$$

です。[典] 型は中心を持つ群の系と中心の群の系の比べで、Mack–Petkova の線と言われるものです（書誌は出典の表、本文はこの本では未確認）。Lean で機械検査し、別の目の照合では含意として成り立つと判定されています。

証明の道筋。鍵は中心の平均です（Lean：`card_mul_integral_exp`）。(hinv) と (hJ) から、各 g で $\int e^{\sum J(\omega)} d\mu = \int e^{\sum \chi(g) J(\omega)} d\mu$ なので、g について平均すると

$$|G| \int e^{\sum_B J_B(\omega)}\, d\mu = \int Z_\chi\bigl(J(\omega)\bigr)\, d\mu \tag{10}$$

です[初]。右辺の被積分関数は、配位 ω を止めたときの**符号の系**の分配関数で、結合 $J(\omega)$ は (hK) で抑えられています。そこで ω ごとに (8) を使い、積分すれば (9) です（可積分性は (hint) から）。つまり、測度の上の系は「符号の定まらない結合を持つ $\mathbb{Z}_2$ の系の重ね合わせ」で、重ね合わせの一つ一つが底の $\mathbb{Z}_2$ の系と比べられます。

```
06
```

SU(2) の Wilson 測度への当てはめ

$SU(2)$ の格子ゲージ理論は §05 の仮定を満たします。対応は次のとおりです（記号は 19-01・19-02）。

抽象の欄	$SU(2)$ の Wilson 測度	払う Lean の補題
$\Omega,\ \mu$	リンクの配位 U：リンク $\to SU(2)$、正規化した Haar 測度の直積	—
G とその作用	リンクごとの符号 $g_\ell \in \{\pm 1\}$、$(g\cdot U)_\ell = g_\ell U_\ell$（中心 ± 1 を掛ける）	`TwistedWilson.signAction`
(hinv)	Haar 測度は中心の元を左から掛けても不変	`TwistedWilson.haarCfg_inv`
χ_B、(hχ)	面 B の四本のリンクの符号の積（重なりは重なりのまま）	`TwistedWilson.chiB_isSignChar`
J_B、(hJ)	$J_B(U) = \beta_B \operatorname{Re} U_B$。符号を掛けると $\operatorname{Re} U_B$ は $\chi_B(g)$ 倍	`TwistedWilson.hol_smul`
(hK)	$\lvert\operatorname{Re} U_B\rvert \le 1$ なので $\lvert J_B\rvert \le \lvert\beta_B\rvert$	`TwistedWilson.abs_re_le_one`
(hint)	被積分関数は連続で有界	`TwistedWilson.integrable_exp`

残る仮定は底の系の側だけです。

$\mathbb{Z}_2$ との比べ（$SU(2)$、面ごとの結合、任意の底の系）（Lean：`TwistedWilson.su2_dominated_general`）。$N, M \ge 1$、面ごとの実の結合 β_B（符号は任意）、$\zeta_B = \pm 1$、底の系 (G_0, χ^0, p) が

- 各 χ^0_B は G_0 の上の符号の指標、
- $p : G_0 \to \{\pm 1\}^{\text{リンク}}$ は $\chi_B(p(t)) = \chi^0_B(t)$ を満たす、

なら

$$\left(\int e^{\sum_B \beta_B \operatorname{Re} U_B}\, dU\right) Z_{\chi^0}\big(\zeta\lvert\beta\rvert\big) \ \le\ \left(\int e^{\sum_B \zeta_B \beta_B \operatorname{Re} U_B}\, dU\right) Z_{\chi^0}\big(\lvert\beta\rvert\big) \tag{11}$$

です（dU は Haar の積、$\lvert\beta\rvert = (\lvert\beta_B\rvert)_B$）。[典] Mack–Petkova の線と言われる比べの形式化です（本文はこの本では未確認）。Lean で機械検査し、別の目の照合では底の系の三つの欄（指標であること・引き戻しの式・$\zeta = \pm 1$）に条件つきで成り立ち、満たす実例がある、と判定されています。

実例（Lean：`TwistedWilson.su2_dominated_general_instance`、仮定の欄なし）。底を縦の二次元のトーラス $(\mathbb{Z}/M)^2$ の $\mathbb{Z}_2$ のゲージ理論に取ります。p は、二次元のリンクの符号 t を、向き 3・4 のリンクへ (x_3, x_4) で写し（横の位置 (x_1, x_2) に依らない）、向き 1・2 のリンクには $+1$ を置く写像です（`TwistedWilson.pull`）。結合を $\beta_B = \beta\, z_B$（z は背景 n_{12} の捩れの符

号)、ζ を (3,4) の捩れの符号に取ると、(11) の二つの積分はちょうど 19-02 の分配関数 $Z_{N,M}(\beta; n_{12}, 0)$ と $Z_{N,M}(\beta; n_{12}, 1)$ になり（$n_{12} = 1$ のときがこの部の $Z_0,\ Z_1$）、

$$Z_{N,M}(\beta; n_{12}, 0) \cdot Z_{\text{底}}\big(\zeta|\beta|\big) \ \le\ Z_{N,M}(\beta; n_{12}, 1) \cdot Z_{\text{底}}\big(|\beta|\big) \qquad (\text{全ての実の } \beta,\ N, M \ge 1,\ n_{12} \in \{0,1\}) \tag{12}$$

が出ます（同じ式の Lean の名は `TwistedWilson.su2_dominated`）。底の側の比は二次元の閉じた式で計算でき、そこから薄い渦の床が出ます（21-02）。背景の捩れ n_{12} は J の符号に吸収されるので、(hK) の $|J_B| \le |\beta|$ は背景があっても変わりません。$\mathbb{Z}_2$ の系そのものでは背景の捩れは負の結合になり、被覆の不等式の (hK) が立たないのと対照的です。

07

渦の比を符号の平均で書く — η の表示

捩れ n_{34} は「(3,4) の面のどれか一つの列の符号を反転する」ものでした。反転する列の位置にも、反転の仕方にも、実は意味がありません。意味があるのは符号の積だけです。これを式にしたのが η の表示です。

$\eta : (\mathbb{Z}/M)^2 \to \mathbb{R}$ に対し、(3,4) の面 $((x_1, x_2), (x_3, x_4))$ の結合を $\eta(x_3, x_4)$ 倍した分配関数を $Z[\eta]$ と書きます（横の N^2 枚に同じ倍率。背景 n_{12} はそのまま。Lean：`TwistedWilson.ZEta`）。

η の偶奇（Lean：`TwistedWilson.ZEta_parity`）。仮定は $\eta_y = \pm 1$（全ての y）だけです。このとき

$$Z[\eta] = \begin{cases} Z_0 & \prod_y \eta_y = 1 \\ Z_1 & \prod_y \eta_y = -1 \end{cases} \tag{13}$$

です（全ての実の β、$N, M \ge 1$。ここではこの部の約束 $n_{12} = 1$ の記号で書きました。$n_{12} = 0$ でも、Z_0, Z_1 を $Z_{N,M}(\beta; 0, 0),\ Z_{N,M}(\beta; 0, 1)$ に替えた同じ式が立ちます。(14) も同じで、左辺は 19-02 の $\theta_M^{(n_{12})}$ です）。

θ は η の平均（Lean：`TwistedWilson.theta_eq_eta_average`、仮定の欄なし）。

$$\theta_M = \frac{Z_0 - Z_1}{Z_0 + Z_1} = \frac{\sum_\eta \big(\prod_y \eta_y\big) Z[\eta]}{\sum_\eta Z[\eta]} \tag{14}$$

和は $\eta : (\mathbb{Z}/M)^2 \to \{\pm 1\}$ の全て（2^{M^2} 個）を走り、正規化しない和の比です。右辺は、配位 (U, η) の同時の重み $\exp\big(\beta \sum_B z_B\, \eta_B\, \mathrm{Re}\, U_B\big)$ の下での $\prod \eta$ の期待値です。初 証明は下の道筋で、二つとも Lean で機械検査し、定義と言明を別の目で照合しています。捩れが中心の類だ

けで決まることは、捩れた境界条件の標準の事実です典（G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141）。

証明の道筋。 三つの部品です初。

1. 中心のゲージ不変性（Lean：`ZEta_gauge`）。二次元の符号の場 t で向き 3・4 のリンクを反転すると Haar 測度は変わらず、$Z[\eta] = Z[\eta \cdot \chi^{2D}(t)]$ です（$\chi^{2D}_y(t)$ は二次元の面 y の符号）。
2. 面の符号の実現（Lean：`TwistedPlane.exists_chi2_eq`）。$\eta = \pm 1$ で $\prod \eta = 1$ なら、$\chi^{2D}_y(t) = \eta_y$ となる t が在ります。数え上げで示します。
3. 対合 $\eta \mapsto \eta \cdot e_0$（面 0 だけ反転）で $\prod \eta = 1$ と -1 の個数が等しいこと。

1 と 2 から (13)、(13) と 3 から (14) が出ます。反転の位置に依らないこと（全ての位置 P で「面 P だけ反転」が Z_1 を与える：`ZEta_flip_any`）も同じ部品から出ます。この表示は太い渦の床（21-03）の出発点です。

08

言っていないこと

- **片側だけ。** 三本とも $\mathbb{Z}_2$ の側から $SU(2)$ の比 Z_1/Z_0 を下から抑える向きです。ΔF の下界（θ_M の下界）は、この型の比べからは出ません。
- **非可換の群の単調性・被覆の不等式ではない。** §03・§04 は $\mathbb{Z}_2$ の符号の系の定理です。$SU(2)$ について、結合 β についての単調性も、トーラスの大きさをまたぐ被覆の不等式も示していません。有限の非可換群 Q_8 では、捩れの背景が無いと被覆の不等式も単調性も弱結合で破れる点があります読（三次元の小さな格子の転送行列の浮動小数の値。例：被覆の数 3、$\beta = 1.25$ で $\Delta F_3(1.25) = 1.29498 > \Delta F_1(3.75) = 1.28758$。独立の二つの実装で一致）。$Q_8$ は $SU(2)$ の有限の部分群で、$SU(2)$ について同じことが起きるかは分かりません。
- **格子の辞書は紙。** §03・§04 の Lean の言明は抽象の形です。横の向きを n 倍に伸ばした四次元の $\mathbb{Z}_2$ のトーラスを大きいトーラスと底のトーラスの対に読む辞書（寄り道）は紙です。Lean の中の底が自明でない格子の実例は、§03 の末の「四次元の $\mathbb{Z}_2$ を縦の二次元の $\mathbb{Z}_2$ に落とす」形だけです。抽象の例で底の指標が恒等的に 1 のものは、この章の結果に数えません。
- **底の系の比は別に要る。** (11)(12) は底の $\mathbb{Z}_2$ の系との比べまでで、底の比の値は別の計算です（21-02 で二次元の閉じた式を使います）。

- **格子間隔は固定。** どれも有限のトーラスの上の有限の系の不等式で、連続極限・無限体積・質量ギャップについては何も言いません。

この型の道具が出せるのが床までである、という見方は 26-04 と 26-06 の検討の記録にあります。

寄り道：被覆の不等式を格子で読む

飛ばしてよい。四次元の $\mathbb{Z}_2$ のゲージ理論で、トーラス Λ が小さいトーラス Λ_0 を n 重に覆うとします（横の向きを周期的に伸ばす）。G を Λ のリンクの符号、G_0 を Λ_0 のリンクの符号、p を周期的な写し、ι を Λ の面とすると、式 (3) は「写した場の面の符号は、底の面の符号と同じ」という当たり前の事実です。底の側の結合は被覆の面の添字で数えるので、底の一つの面の上に n 枚の面が乗れば、その結合は足されて nK になります。被覆の不等式 (5) は

$$\Delta F_{\Lambda}(\beta) \;\le\; \Delta F_{\Lambda_0}(n\beta)$$

と読めます。横の二つの向きを n 倍にすると枚数は n^2 です。この読みは紙で、小さな格子の総当たりで確かめてあります 読 （浮動小数。枚数を取り違えた版は破れる、という陰性の対照つき）。$SU(2)$ の当てはめ（§06）は、この辞書を経ずに、同じ格子の底の系（縦の二次元のトーラス）を直接 Lean で組んでいます。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 被覆の不等式 (4)(5)：五つの仮定（符号の指標二つ・引き戻しの式・$K \ge 0$・$\zeta = \pm 1$）のもとで。Lean：`covering_ineq`・`covering_ratio`・`vfe_cover_le`	格子への読み（辞書）は紙。非可換の群の版はない
初 格子の実例：四次元の $\mathbb{Z}_2$ を縦の二次元の $\mathbb{Z}_2$ に落とす形（$K \ge 0$）。Lean：`z2_four_covers_two`・`z2_four_ratio`	横を n 倍に伸ばす被覆の Lean の実例
初 $\mathbb{Z}_2$ の単調性 (7)：$0 \le K \le K'$、$\zeta = \pm 1$。Lean：`mon_ineq`・`mon_ratio`	$SU(2)$ の β についての単調性。捩れの背景つきの $\mathbb{Z}_2$ の系
初 $\mathbb{Z}_2$ との比べ (8)(9)：$\lvert J\rvert \le K$、不変な測度、可積分性。Lean：`dominated_covering_ineq`・`invariant_dominated`	逆向き（ΔF の下界）
初 $SU(2)$ の当てはめ (11)：底の系の三つの欄のもとで。Lean：`su2_dominated_general`。実例 (12)（欄なし）：`su2_dominated_general_instance`・`su2_dominated`	底の比の値（21-02）。格子間隔は固定、連続極限なし
初 η の偶奇 (13)（欄 $\eta = \pm 1$）と θ は η の平均 (14)（欄なし）。Lean：`ZEta_parity`・`theta_eq_eta_average`	η の平均の評価そのもの（太い渦の床は 21-03）

言えている	言えていない
読 Q_8 で被覆の不等式・単調性が破れる点がある（背景なし、三次元の小さな格子）	破れの一般の形。浮動小数の値で、定理ではない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
$SU(2)$ と $\mathbb{Z}_2$ の比べの型	典	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 123 (1979) 442・125 (1980) 117（26-01 と同じ書誌。本文はこの本では未確認）。J. Fröhlich, Phys. Lett. B 83 (1979) 195 は書誌のみ（未確認）
捩れた境界条件・捩れが類だけで決まること	典	G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141（25-01 と同じ書誌）
三本と当てはめ・η の表示	初	Lean 4 で機械検査（宣言は各節に。標準の三つの公理だけ、sorry なし）。定義と言明を別の目で照合し、抽象の三本は「含意として成り立つ」、当てはめは「底の系の欄に条件つき、満たす実例あり」、η の表示は「成り立つ」と判定
Q_8 の破れ	読	本書の検討の数値の記録（三次元の格子の転送行列と総当たりの照合、二つの独立な実装で 4〜7 桁一致。D_4 も同じ値）
格子の辞書の確かめ	読	本書の検討の数値の記録（四次元の $\mathbb{Z}_2$ の小さな格子の全配位の和。枚数を取り違えた陰性の対照で破れる）

この章で使った語 — 符号の系・符号の指標・底の系・引き戻し・被覆の不等式・$\mathbb{Z}_2$ の単調性・$\mathbb{Z}_2$ との比べ・中心の平均・渦の比・流束の自由エネルギー・床・η の表示。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：21-02 薄い渦の床 — §06 の比べに二次元の閉じた式を入れて、$|\theta_M| \le \tanh(N^2|\beta|)^{M^2}$ を出します。

薄い渦の床

この章は本書の検討です。

この章で分かること — $SU(2)$ の Wilson 測度の渦の比が、全ての実の β と全ての $N, M \geq 1$ で $|\theta_M| \leq \tanh(N^2|\beta|)^{M^2}$ を満たすこと、その指数の形 $|\theta_M| \leq e^{-\sigma_0 M^2}$（$\sigma_0 = -\ln\tanh(N^2|\beta|)$）、「薄い」の意味、証明の五つの段が分かります。

前提となる章 — 19-02 横 N・縦 M のトーラス・捩れ・渦の比、21-01 符号の系の三本（§06 の当てはめ）。

先に言うこと — 格子間隔は固定です。率 $\sigma_0 \approx 2e^{-2N^2|\beta|}$ は横の大きさ N とともに 0 に近づき、N に一様ではありません。θ_M の符号（$Z_1 \leq Z_0$）はこの章では言いません（21-06）。$M \to \infty$ の率（極限）の定義はしていません。帯にも質量ギャップにも届きません（示すべき言明は 19-07）。既知の描像の片側の形式化です。

この章の順序

1. 言明 — 比の形・両側の形・指数の形
2. 数で見る — 右辺の大きさと、実際の比との差
3. 「薄い」とは何か — 一枚に集めた渦の費用
4. 証明の道筋 — 五つの段
5. 部品：二次元の Z_2 の閉じた式
6. 部品：底の分配関数を二次元へ移す
7. 算術の書き換え — 比の下界と流束の自由エネルギーの上界
8. 言っていないこと

01

言明 — 比の形・両側の形・指数の形

対象は横 N（向き 1・2）、縦 M（向き 3・4）のトーラス $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ の上の $SU(2)$ の Wilson 測度です。重みは $e^{\beta \sum_p z_p \operatorname{Re} U_p}$（$z_p = \pm 1$ は捩れの符号）、測度は正規化した Haar 測度の直積で、分配関数は正規化しません（19-01）。背景の捩れ n_{12}、(3,4) の捩れ n_{34} の分配関数を $Z_{N,M}(\beta; n_{12}, n_{34})$ と書き、背景 n_{12} の渦の比を $\theta_M^{(n_{12})} = \big(Z_{N,M}(\beta; n_{12}, 0) - Z_{N,M}(\beta; n_{12}, 1)\big) / \big(Z_{N,M}(\beta; n_{12}, 0) + Z_{N,M}(\beta; n_{12}, 1)\big)$ とします（19-02 の寄り道の記号）。この部の約束 $n_{12} = 1$ では Z_0, Z_1、$\theta_M = \theta_M^{(1)}$ です。下の定理は $n_{12} = 0$ でも立ちます。

薄い渦の床（比の形）（Lean：`TwistedWilson.twisted_vortex_bound`）。全ての実数 β、全ての $N, M \geq 1$、$n_{12} \in \{0, 1\}$ で

$$\theta_M^{(n_{12})} \;\leq\; \tanh\big(N^2 |\beta|\big)^{M^2} \tag{1}$$

です。仮定の欄は $N, M \geq 1$ だけです。

薄い渦の床（両側の形）（Lean：`TwistedWilson.twisted_vortex_bound_abs`）。同じ範囲で

$$\big|\theta_M^{(n_{12})}\big| \;\leq\; \tanh\big(N^2 |\beta|\big)^{M^2} \tag{2}$$

です。$\beta < 0$ では $\theta_M^{(n_{12})} < 0$ となる場合があり（§02 の表の $N = M = 1$、$\beta = -1.5$）、そこで中身があるのは (2) の方です。

薄い渦の床（指数の形）（Lean：`TwistedWilson.thin_vortex_floor`）。$\beta \neq 0$ なら

$$\sigma_0 := -\ln \tanh\big(N^2 |\beta|\big) > 0, \qquad \big|\theta_M^{(n_{12})}\big| \;\leq\; e^{-\sigma_0 M^2} \quad (\text{全ての } M \geq 1) \tag{3}$$

です。仮定は $\beta \neq 0$ だけです（$\beta = 0$ では $\tanh 0 = 0$ で σ_0 が意味を失い、実際 $\theta_M^{(n_{12})} = 0$ です）。

初 三つとも、証明の道筋は §04〜§06 にあり、具体の $SU(2)$ の Wilson 測度の定理として Lean で機械検査し、定義と言明を別の目で照合しています。型は、$SU(2)$ の系を $\mathbb{Z}_2$ の系で抑える Mack–Petkova の線と言われるものです典（書誌は出典の表、本文はこの本では未確認）。照合の際に独立に書いた有限群の総当たりの和と $SU(2)$ の Metropolis では、違反は見つかっていません読。

この部の言葉で言うと、(3) は「θ_M が M^2 について少なくとも率 σ_0 で減る」という、率の下からの評価、すなわち**床**です（向きは 21-01 §01）。

02

数で見る — 右辺の大きさと、実際の比との差

右辺の $t = \tanh(N^2|\beta|)$ と率 $\sigma_0 = -\ln t$ を、いくつかの N, β で並べます 読 （浮動小数の値）。

N	$\lvert\beta\rvert$	$t = \tanh(N^2\lvert\beta\rvert)$	$\sigma_0 = -\ln t$	$2e^{-2N^2\lvert\beta\rvert}$
1	0.25	0.2449	1.407	1.213
1	0.5	0.4621	0.7719	0.7358
1	1	0.7616	0.2723	0.2707
2	0.25	0.7616	0.2723	0.2707
2	0.5	0.9640	0.03664	0.03663
2	1	0.99933	6.709×10^{-4}	6.709×10^{-4}
3	0.25	0.97803	0.02222	0.02222
3	0.5	0.999753	2.468×10^{-4}	2.468×10^{-4}
3	1	$1 - 3.05 \times 10^{-8}$	3.05×10^{-8}	3.05×10^{-8}

$N^2|\beta|$ が 1 を越えると、率は $2e^{-2N^2|\beta|}$ とほとんど同じになり、N が一つ増えるごとに桁で小さくなります。右辺は $N^2|\beta|$ だけで決まるので、$(N,\beta) = (1,1)$ と $(2, 0.25)$ は同じ行です。

実際の比との差は、小さな格子で次のとおりです 読 （$SU(2)$ は Metropolis の推定、照合の際に独立に書いた実装）。

(N, M)	n_{12}	β	$\theta_M^{(n_{12})}$ **（推定）**	**右辺** t^{M^2}
(1,1)	1	1.5	0.7033 ± 0.0018	0.9051
(1,1)	0	-1.5	-0.0785 ± 0.0026	0.9051
(2,1)	0	0.5	0.4856 ± 0.0012	0.9640
(1,2)	0	1.0	0.0061 ± 0.0013	0.3364

$\mathbb{Z}_2$ の系（同じ格子で $SU(2)$ を $\{\pm 1\}$ に替えたもの）では、試した $N = 1$ か $M = 1$ の組で $|\theta_M|$ は右辺に一致します 読 （変数消去による有限和の浮動小数の値）。比べの相手が $\mathbb{Z}_2$ の系なので、$\mathbb{Z}_2$ に近い配位が効く所でほぼ等号になり、$SU(2)$ の連続な揺らぎが効く所で緩くなります。

03

「薄い」とは何か — 一枚に集めた渦の費用

率 σ_0 は、閉じた形で

$$\sigma_0 = -\ln\tanh x = \ln\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = 2\,\mathrm{artanh}\big(e^{-2x}\big), \qquad x = N^2|\beta| \tag{4}$$

です。したがって $2e^{-2x} \le \sigma_0 \le 2e^{-2x}/(1-e^{-4x})$ で、x が大きいと $\sigma_0 \approx 2e^{-2N^2|\beta|}$ です[初]（artanh の冪級数の係数が正であることから）。

指数の $2N^2|\beta|$ には次の意味があります。(3,4) の面のうち、縦の位置 (x_3, x_4) を一つに固定し、横の N^2 枚の全ての符号を一度に反転した配位を考えます。横の向きに広がった一枚の面に渦を集めた配位で、これを**薄い渦**と呼びます。$\mathrm{Re}\,U_p$ が 1 から -1 に変わる面が N^2 枚なので、作用の費用は $2\beta\cdot N^2$ です。

証明の中では、この描像がそのまま式になっています。底の系（§04）は縦の二次元のトーラスの $\mathbb{Z}_2$ のゲージ理論で、その一つの面の結合は、上に乗る横の N^2 枚の結合の和 $N^2|\beta|$ です。二次元の $\mathbb{Z}_2$ のゲージ理論では、トーラスの上の面の符号は「全ての積が 1」という一つの拘束を除いて独立です。式 (7)（§05）を渦の比に直すと $\theta^{2D} = t^{M^2}$、$t = \tanh(N^2|\beta|)$ で、これは各面の符号を独立に平均 t の ±1 としたときの、全ての面の符号の積の平均です。面が反転している確率 $q = (1-t)/2 \approx e^{-2N^2|\beta|}$ から $t^{M^2} = (1-2q)^{M^2} \approx e^{-2qM^2}$ です[初]。

つまり (1) の右辺は、$SU(2)$ の渦が「横いっぱいの一枚に集まった薄い渦の希薄な気体」と同じ速さで M^2 について減ることまでを言っています。$SU(2)$ の渦は連続の群の中で広がって、より安い費用で縦の向きの捩れを運べます。そうした太い渦の費用 S_N が $2N^2$ より小さいとき、率はもっと大きく取れます。それが太い渦の床です（21-03、S_N は 19-02）。

04

証明の道筋 — 五つの段

証明は五つの段です。段 1・2 が 21-01 §06 の当てはめ、段 3・4 が底の計算、段 5 が算術です。この節と §06 はこの部の約束 $n_{12} = 1$ の記号 Z_0, Z_1 で書きますが、$n_{12} = 0$ でも同じ段で進みます。

1. **中心の平均。** Haar 測度はリンクごとの符号 ±1 の掛け算で不変で、$\mathrm{Re}\,U_p$ は面の四本の符号の積の倍だけ変わります（`haarCfg_inv`・`hol_smul`）。そこで $SU(2)$ の分配関数は「結合 $J_p(U) = \beta z_p\,\mathrm{Re}\,U_p$ を持つ $\mathbb{Z}_2$ の符号の系の、U についての積分」に書けます。$|J_p| \le |\beta|$ です。
2. **$\mathbb{Z}_2$ との比べ。** 底の系を縦の二次元のトーラス $(\mathbb{Z}/M)^2$ の $\mathbb{Z}_2$ のゲージ理論に取り、二次元のリンクの符号を向き 3・4 のリンクへ横の位置に依らず写す写像で結びます（`pull`）。21-01 §05 の $\mathbb{Z}_2$ との比べから

$$Z_0\cdot Z_{\text{底}}\big(\zeta|\beta|\big) \le Z_1\cdot Z_{\text{底}}\big(|\beta|\big) \tag{5}$$

（`su2_dominated`）。ζ は (3,4) の捩れの符号です。

3. **底を二次元へ。** 底の系の分配関数は、定数の因子を除いて、結合 $N^2|\beta|$ の二次元の $\mathbb{Z}_2$ のゲージ理論の分配関数です。捩れた方は、面 0 だけ符号を変えた結合のものです（`Z_base_const`・`Z_base_flip`。§06）。
4. **二次元の閉じた式。** 二次元の $\mathbb{Z}_2$ のゲージ理論の分配関数は $|\text{配位}| \cdot \left(\prod \cosh + \prod \sinh\right)$ と閉じた形で書けます（`Z_plane`。§05）。
5. **算術。** $L = N^2|\beta|$、$C = \cosh(L)^{M^2}$、$S = \sinh(L)^{M^2}$ と置くと、段 3・4 で (5) は $Z_0(C - S) \le Z_1(C + S)$ となり、整理すると $(Z_0 - Z_1)C \le (Z_0 + Z_1)S$、すなわち (1) です（`bound_of_base`）。

両側の形 (2) は、段 2 を役を入れ替えて使います。捩れた側 $n_{34} = 1$ を「元」の系とし、結合 $\beta_p = \beta\, z_p^{(n_{12},1)}$ で `su2_dominated_general` を使うと、$\zeta^2 = 1$ から $Z_1 \cdot Z_{\text{底}}(\zeta|\beta|) \le Z_0 \cdot Z_{\text{底}}(|\beta|)$ が出ます（`su2_dominated_swap`）。段 5 を両方に当てれば $|Z_0 - Z_1|/(Z_0 + Z_1) \le t^{M^2}$ です[初]。指数の形 (3) は $t^{M^2} = e^{M^2 \ln t}$ と、$\beta \neq 0$ で $0 < t < 1$ であることからの書き換えです[初]。

05

部品：二次元の $\mathbb{Z}_2$ の閉じた式

縦の二次元のトーラス $(\mathbb{Z}/M)^2$ の上の $\mathbb{Z}_2$ のゲージ理論を考えます。点 y、リンク (y, d)（$d = 1, 2$）、リンクの符号の場 t、面 y の符号 $\chi_y^{2D}(t)$（四本の符号の積、重なりは重なりのまま）です（Lean：`TwistedPlane.chi2`）。

閉じた式（Lean：`TwistedPlane.Z_plane`、仮定の欄は $M \ge 1$ だけ）。任意の面ごとの結合 c_y で

$$Z_{\chi^{2D}}(c) = \sum_t \exp\Big(\sum_y c_y \chi_y^{2D}(t)\Big) = |\text{配位}| \cdot \Big(\prod_y \cosh c_y + \prod_y \sinh c_y\Big) \tag{6}$$

です。一様な結合 L と、面 0 だけ符号を変えた結合では（`Z_plane_const`・`Z_plane_flip`）

$$\frac{Z_{\chi^{2D}}(\text{面 } 0 \text{ を反転した } L)}{Z_{\chi^{2D}}(L)} = \frac{\cosh^{M^2} L - \sinh^{M^2} L}{\cosh^{M^2} L + \sinh^{M^2} L} = \frac{1 - \tanh(L)^{M^2}}{1 + \tanh(L)^{M^2}} \tag{7}$$

です（`TwistedPlane.plane_flip_ratio`）。[初] 二次元の格子ゲージ理論が解けることは古くから知られた事実で、その $\mathbb{Z}_2$ の場合の機械検査です。

証明。 $e^{c\chi}=\cosh c+\chi\sinh c$ で積を展開すると

$$Z_{\chi^{2D}}(c)=\sum_{A\subseteq\text{面}}\Big(\prod_{y\in A}\sinh c_y\Big)\Big(\prod_{y\notin A}\cosh c_y\Big)\sum_{t}\prod_{y\in A}\chi_y^{2D}(t)$$

です。どのリンクもちょうど二枚の面の辺なので、A が空でも全体でもなければ、A の縁に「片側だけが A に入るリンク」が在り、そのリンクの符号を反転する置き換えで内側の和は自分の符号を変えて 0 になります（`sum_FA_eq_zero`）。$A=\emptyset$ では積は 1、$A=$全体でも各リンクが二回現れて積は 1 です（`prod_chi2_univ`）。残る二項が (6) です初 。

06

部品：底の分配関数を二次元へ移す

段 2 の底の系は、四次元の面の添字のまま、二次元の符号の場 t を変数に持つ系です。その面の指標 $\chi_B^0(t)$ は、四次元の面 B の四本のリンクに引き戻した符号の積で、次のとおりです（Lean：`TwistedWilson.chi0_eq`）。

$$\chi_B^0(t)=\begin{cases}\chi^{2D}_{(x_3,x_4)}(t) & B\text{ が }(3,4)\text{ の面で、縦の位置が }(x_3,x_4)\\ 1 & \text{それ以外の面}\end{cases}\tag{8}$$

向き 1・2 のリンクには $+1$ を置き、向き 3・4 のリンクの符号は横の位置に依らないので、(3,4) 以外の面ではリンクの符号が二回ずつ現れて消えます。そこで、(3,4) 以外の面の結合が一様な K なら

$$Z_{\chi^0}(c)=e^{A}\cdot Z_{\chi^{2D}}\Big(y\mapsto\sum_{(x_1,x_2)}c_{((x_1,x_2),y),(3,4)}\Big),\qquad A=\sum_{B\notin(3,4)}K\tag{9}$$

です（`Z_base`）。縦の位置 y の上に乗る横の N^2 枚の結合が足されて、二次元の面 y の結合になります。一様な $K=|\beta|$ なら二次元の結合は $N^2|\beta|$ で（`Z_base_const`）、(3,4) の捩れ ζ を掛けたものは、面 0 だけ符号を変えた結合 $N^2|\beta|$ です（`Z_base_flip`）。どちらにも同じ定数 e^A が掛かるので、比では消えます初 。

ここで、捩れ n_{34} の面の集合（縦の位置 $(0,0)$ の (3,4) の面、横の N^2 枚）が、ちょうど二次元の面 0 の上に乗る N^2 枚であることが効いています（19-02 の捩れの定義）。§03 の薄い渦は、この N^2 枚の束です。

07

算術の書き換え — 比の下界と流束の自由エネルギーの上界

(1) は、$s = \tanh(N^2|\beta|)^{M^2}$ と置いて、次の二つの形にも書けます。どちらも仮定の欄は $N, M \geq 1$ だけで、全ての実の β で立ちます。この部の約束 $n_{12} = 1$ の記号で書きますが、$n_{12} = 0$ でも Z_0, Z_1 を $Z_{N,M}(\beta; 0, 0)$, $Z_{N,M}(\beta; 0, 1)$ に替えた同じ式が立ちます。

比の下界（Lean：`TwistedWilson.twisted_ratio_lower`）。

$$\frac{Z_1}{Z_0} \;\geq\; \frac{1 - s}{1 + s} \tag{10}$$

(1) と同値です初 。

流束の自由エネルギーの上界（Lean：`TwistedWilson.vortex_free_energy_bound`）。

$$\Delta F = -\ln \frac{Z_1}{Z_0} \;\leq\; \ln \frac{1 + s}{1 - s} \;\leq\; \frac{2s}{1 - s} \tag{11}$$

ΔF は 't Hooft の流束の自由エネルギーです（25-01・26-03 と同じ量）。$0 \leq s < 1$ と $\ln x \leq x - 1$ からの算術で、(10)(11) とも Lean で機械検査しています初 。

(11) は、ΔF を上から $2s/(1 - s) \approx 2e^{-\sigma_0 M^2}$ で抑える、有限の M ごとの形です。ΔF の上界であって下界ではありません（$\Delta F \geq 0$ は M が偶数のとき 21-06 の符号から出ます）。床という語は、ΔF の減る速さ（率）を下から抑える、という向きで使っています。

08

言っていないこと

- **符号。** $Z_1 \leq Z_0$（$\theta_M \geq 0$）はこの章の定理には入っていません。M が偶数なら全ての実の β で $\theta_M \geq 0$ です（21-06）。$\beta < 0$ で $\theta_M < 0$ となる例があるので（§02 の表）、$\beta < 0$ で中身があるのは両側の形 (2) です。
- **N に一様な率は無い。** $\sigma_0 \approx 2e^{-2N^2|\beta|}$ は $N \to \infty$ で 0 です。横の大きさを止めた、実質二次元の板の評価で、四次元の張力の正の下界ではありません。
- **$M \to \infty$ の率は定義していない。** (3) は有限の M ごとの不等式です。lim や lim inf で定めた張力 $\sigma_N(\beta)$ について「$\sigma_N(\beta) \geq \sigma_0$」を Lean の言明として持ってはいません（(3) から読み取れるのは M ごとの評価までです）。
- **大きい $N^2|\beta|$ では弱い。** 率は $2N^2|\beta|$ の費用の薄い渦の値で、太い渦の床（21-03）の方が大きい β でよい場合があります（$N = 2, 3, 4$ で $S_N < 2N^2$：21-05）。

- **格子間隔は固定。** 連続極限、無限体積、四次元の面積則、帯、質量ギャップについては何も言いません（帯と質量ギャップの示すべき言明は 19-07）。

この不等式を「構造だけの道具が出すのは床まで」という見方の中に置いた議論は、検討の記録の 26-04 にあります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 薄い渦の床 (1)：$\theta_M^{(n_{12})} \le \tanh(N^2\lvert\beta\rvert)^{M^2}$、全ての実の β、$N, M \ge 1$、$n_{12} \in \{0,1\}$、仮定の欄なし。Lean：`TwistedWilson.twisted_vortex_bound`	$Z_1 \le Z_0$（21-06）。$\beta < 0$ では片側の形は中身が無い場合がある
初 両側の形 (2)：$\lvert\theta_M^{(n_{12})}\rvert \le \tanh(N^2\lvert\beta\rvert)^{M^2}$、同じ範囲。Lean：`TwistedWilson.twisted_vortex_bound_abs`	θ_M の下界
初 指数の形 (3)：$\beta \neq 0$ で $\sigma_0 > 0$、$\lvert\theta_M^{(n_{12})}\rvert \le e^{-\sigma_0 M^2}$。Lean：`TwistedWilson.thin_vortex_floor`	N に一様な率。$M \to \infty$ の率の定義と、その下界の言明
初 比の下界 (10)・流束の自由エネルギーの上界 (11)。Lean：`twisted_ratio_lower`・`vortex_free_energy_bound`	ΔF の下界
初 二次元の $\mathbb{Z}_2$ の閉じた式 (6)(7)。Lean：`TwistedPlane.Z_plane`・`plane_flip_ratio`	非可換の群の二次元の比（この章では使わない）
初 $\sigma_0 = 2\,\mathrm{artanh}(e^{-2N^2\lvert\beta\rvert}) \approx 2e^{-2N^2\lvert\beta\rvert}$	—
読 小さな格子での θ_M と右辺の差（§02）	大きい格子での強さ

出典と再現

もの	種別	出典・道具
$SU(2)$ と $\mathbb{Z}_2$ の比べの型	典	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 123 (1979) 442・125 (1980) 117（26-01 と同じ書誌。本文はこの本では未確認）。J. Fröhlich, Phys. Lett. B 83 (1979) 195 は書誌のみ（未確認）
捩れた境界条件と流束の自由エネルギー	典	G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141（25-01 と同じ書誌）
(1)(2)(3)(10)(11) と部品	初	本文の証明の道筋。Lean 4 で機械検査（宣言は各節。標準の三つの公理だけ、sorry なし）。定義と言明を別の目で照合し「成り立つ」と判定（定義の一行ずつの読み）
照合の際の数値の確かめ	読	独立に書いた有限群の総当たりの和と $SU(2)$ の Metropolis で違反 0

もの	種別	出典・道具
§02 の表	読	本書の検討の数値の記録（tanh の浮動小数の値。$SU(2)$・Q_8 の Metropolis：鎖 2000 本 × 250 掃引、Z_0 の測度で Z_1/Z_0 を推定。$\mathbb{Z}_2$・Q_8・二元の正四面体群の変数消去の和）

この章で使った語 — 薄い渦の床・薄い渦・渦の比・流束の自由エネルギー・床・率・底の系・二次元の Z_2 の閉じた式・中心の平均。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：21-03 太い渦の床 — 言明と道筋 — 渦を一枚に集めず、より安い太い渦の費用 S_N で率を取り直します。

太い渦の床 — 言明と道筋

この章は本書の検討です。

この章で分かること — 横 N・縦 M の捩れたトーラスの上の SU(2) の Wilson 測度で、渦の比 θ_M について「どの $\varepsilon > 0$ にも、十分大きい β ごとに、十分大きい M で $|\theta_{M+1}(\beta)| \le \exp(-(M+1)^2 e^{-\beta(S_N+\varepsilon)})$」という上界（太い渦の床）が、全ての $N \ge 1$ で仮定の欄なしに Lean で機械検査されていること。量化の順の読み方、薄い渦の床（指数 $2N^2$）との違い、証明の七つの段の道筋。

前提となる章 — 19-02（捩れたトーラス・渦の比 θ・渦の最小作用 S_N）、19-01（Wilson の測度）、21-02 薄い渦の床。極限の言葉（「十分大きい」）と、コンパクト集合の上の連続関数の最小を使います。

先に言うこと — これは**格子間隔を固定し、横の大きさ N を止めた**上界です。β の閾も、β ごとの M の閾も陽ではありません。S_N の値は一般の N では Lean にありません。逆向き（率の下界）は示していません。帯（19-07 の言明）・四次元の面積則・質量ギャップ・連続極限には届きません。形は、捩れた細い板の上の渦の描像（Mack–Petkova の線、枠を止めた塊の条件つきの独立）の、既知の型の結果の形式化です。

この章の順序

1. 対象の再掲 — 捩れたトーラス、θ_M、作用の数え方、S_v(N,m) と S_N
2. 言明 — 太い渦の床と、量化の順の読み方
3. 意味 — 薄い渦と太い渦 — 指数 $2N^2$ が S_N に下がること。図 1
4. 道筋の地図 — 七つの段と、どの段がどの章にあるか
5. 前半 — 塊に割り、作用の差に直す — 塊ごとの評価と Laplace の段
6. 後半 — 安い窓に渦を入れ替える — 鳩の巣、コンパクト性、局所の模型、剛性、移し替え
7. 組み立て — 量化の順はどこから来るか — ε から m、β、M へ。寄り道：なぜ捩れの背景が要るか

8. 言っていないこと — 閾・S_N の値・逆向き・N = 1・帯

01

対象の再掲

定義は第 19 部にあります。ここでは言明に要る分だけを一行ずつ再掲します。

- 格子は $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ です。向き 1・2 が横（一辺 N）、向き 3・4 が縦（一辺 M）です（19-02）。
- 背景の捩れ $n_{12} = 1$ を常に入れます。Z_0・Z_1 は、(3,4) の面の捩れ $n_{34} = 0$・1 の分配関数です（捩れの符号）。測度は正規化しない Wilson の重み $e^{\beta \sum_p z_p \operatorname{Re} U_p}$ と Haar の積です。
- 渦の比は $\theta_M(\beta) = (Z_0 - Z_1)/(Z_0 + Z_1)$ です（19-02）。分母は正です。
- 作用は β を掛ける前の形 $S(U;\eta) = \sum_p \bigl(1 - z_p \eta_p \operatorname{Re} U_p\bigr) \geq 0$ で数えます。$\eta_p = \pm 1$ は (3,4) の面にだけ掛かる符号です。
- 捩れた真空 V は、$x_1 = 0$ の向き 1 のリンクを i、$x_2 = 0$ の向き 2 のリンクを j、他を 1 とした配位です。$ij\,i^{-1}j^{-1} = -1$ なので、捩れた (1,2) の面でも $z_p \operatorname{Re} U_p = 1$ で、作用は 0 です。
- $S_{\mathrm{v}}(N,m)$ は、格子 $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/2m)^2$ の上で一辺 m の塊の枠を V に止め、塊の角の (3,4) の面（横の N^2 枚）の符号を反転したときの、塊の作用の下限です。$S_N = \inf_{m \geq 1} S_{\mathrm{v}}(N,m)$ です（19-02）。

内部を V のままにして角の面を反転すると、横の N^2 枚の面の作用がそれぞれ 0 から 2 に上がります。だから $S_{\mathrm{v}}(N,m) \leq 2N^2$、$S_N \leq 2N^2$ です。初 Lean：`TwistBlocks.SN_bounds`（$0 \leq S_N \leq 2N^2$、全ての $N \geq 1$）。

02

言明

太い渦の床。 $N \geq 1$ を止めます。任意の $\varepsilon > 0$ に対し、十分大きい全ての β について、十分大きい全ての M で

$$\bigl|\theta_{M+1}(\beta)\bigr| \;\leq\; \exp\Bigl(-(M+1)^2\, e^{-\beta(S_N+\varepsilon)}\Bigr). \tag{1}$$

Lean：`TwistBlocks.thick_vortex_floor`（全ての $N \geq 1$、仮定の欄なし。言明は `ThickVortexFloorAbs N`）。定義を開いた形は `TwistBlocks.thick_vortex_floor_unfolded` です。既知の型の結果の形式化で、型は Mack–Petkova の線と言われます[典]（書誌は章末の表。本文はこの本では未確認）。

Lean の言明は、フィルタの言葉で $\forall \varepsilon > 0,\ \forall^{\mathrm{f}} \beta \in \mathrm{atTop},\ \forall^{\mathrm{f}} M \in \mathrm{atTop}$ の順です。これを量化子に開くと次の順になります。

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \beta_0\ \ \forall \beta \geq \beta_0\ \ \exists M_0(\beta)\ \ \forall M \geq M_0(\beta) : \quad (1). \tag{2}$$

読むときの注意を四つ挙げます。

1. β_0 **は** ε **に、** M_0 **は** ε **と** β **に依ってよい**形です。どちらの閾も値は言明に現れません（§07）。
2. **絶対値つき**です。θ の符号を使わずに、$|\theta|$ を上から抑えます。符号（M が偶数で $\theta \geq 0$）は別の定理です（21-06）。
3. $M + 1$ と書くのは $M = 0$ を避けるためだけです。「十分大きい全ての M」と読んで同じです。
4. β は大きい側だけです。$\beta < 0$ や有限の β については何も言いません。

(1) を率の形に直すと、$\theta_M \neq 0$ の M について $-\frac{1}{M^2} \ln |\theta_M| \geq e^{-\beta(S_N + \varepsilon)}$ です。板の張力を $\sigma_N(\beta) = \liminf_M -\frac{1}{M^2} \ln |\theta_M|$ と置けば、$\limsup_{\beta \to \infty} \frac{1}{\beta} \ln \frac{1}{\sigma_N(\beta)} \leq S_N$ が出ます。[初] この言い換えは Lean の外の一行の算術です。

03 意味 — 薄い渦と太い渦

薄い渦の床（21-02）は、全ての実の β と全ての $N, M \geq 1$ で $|\theta_M| \leq \tanh(N^2 |\beta|)^{M^2}$ を言います。β が大きいとき $-\ln \tanh(N^2 \beta) \approx 2 e^{-2N^2 \beta}$ なので、指数の中の率は $e^{-2N^2 \beta}$ の程度です。**率の指数は** $2N^2$ です。

太い渦の床 (1) では、率は $e^{-\beta(S_N + \varepsilon)}$ です。**率の指数が** $2N^2$ **から** S_N **に下がります**。$S_N < 2N^2$ なら、β が大きい所で太い渦の床の方が強い上界です。

絵で言います。渦は (3,4) の面の符号 η の反転一枚を、横の T^2_N の全体に通したものです。

- **薄い渦**：一枚の (3,4) の面の位置だけで反転を受け止めます。横の N^2 枚がそれぞれ 2 の作用を払うので、費用は $2N^2$ です。

- **太い渦**：反転を一辺 m の塊の中で (3,4) の面の方向に広げ、横の T^2_N にも広げます。リンクを少しずつ回して面ごとの負担を薄くします。最小の費用が $S_{\mathrm{v}}(N,m)$、$m\to\infty$ の下限が S_N です。

正確には、S_N は「捩れた真空を縁に止めた塊に、渦を一本通す最小作用」の下限です。トーラス全体の最小作用ではありません。

図 1 縦の (3,4) の面 T^2_M を一辺 m の塊に割る（左）。一つの塊の拡大（右）：枠（太線）は止め、角の面（濃い升）で符号を反転する。渦の費用は、この一枚を塊の中に広げて払う。各点の上には横の T^2_N が載る。

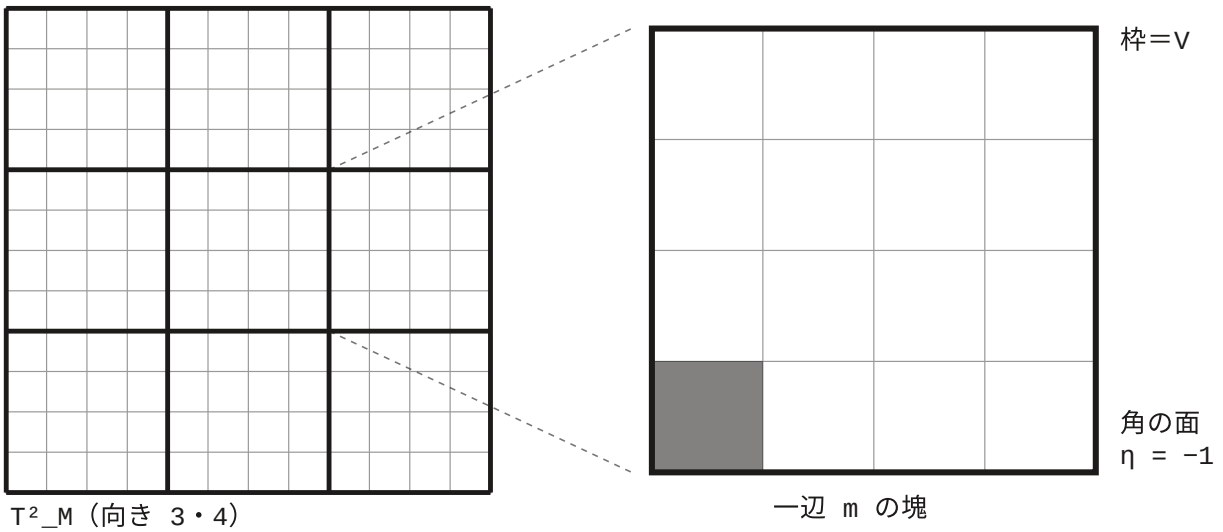


図 1 は模式図です。数は描いていません。

S_N の数は次のとおりです。

N	薄い渦の指数 $2N^2$	S_N について言えること	札・Lean
1	2	$S_1=2$（数値の冷却）。差は無い	読 Lean の中は $S_1\le 2$ だけ
2	8	$S_2\le 6.67401$、$S_2<8$	機 21-05（`VortexCert.SN_two_le`・`SN_two_lt`）
3	18	$S_3<18$（上界 9.09321）	機 21-05（`VortexCert.SN_three_lt`）
4	32	$S_4<32$（上界 12.02057）	機 21-05（`VortexCert.SN_four_lt`）
一般	$2N^2$	$0<S_N\le 2N^2$	Lean：`VortexPos.SN_pos`、`TwistBlocks.SN_bounds`（21-05）

$N=2$ の $S_2\le 6.67401$ は、Lean の核で検査した有理数の配位による計算機の証明書です。解析の証明の支えとして使います。$N=2$ で、太い渦の床の率 $e^{-6.675\beta}$ が薄い渦の床の率 $-\ln\tanh(4\beta)$ を上回る（上界が小さくなる）のは、係数まで比べて $\beta>0.523$ の程度からで

す読。ただし太い渦の床の閾は陽でないので、具体の (β, M) で太い方の上界が小さいとは言えません。比べられるのは $\beta \to \infty$ の率だけです。

04

道筋の地図

証明は「$|\theta|$ を塊ごとの量で抑え、その量の $\beta \to \infty$ の率を渦の最小作用で抑える」二つの半分に分かれます。段に分けると次のとおりです。

```
段 1 塊ごとの評価          |θ| ≤ tanh(K_eff)^{k²}                  （前半、§05）
  │                          K_eff ＝ 枠を止めた塊の (+)/(−) の比の対数の上限
段 2 Laplace の段          K_eff ≤ ½(β(κ_c + 2δ) + D)              （前半、§05）
  │                          κ_c ＝ 塊の最小作用の (+)/(−) の差の上限
  │
段 3 符号の標準形          塊の符号の場は作用を変えずに標準の形へ      （後半、§06）
段 4 鳩の巣                塊の中に作用の小さい窓が在る
段 5 コンパクト性          「作用が小さい」を「作用が 0」の主張へ
段 6 局所の模型と剛性      作用 0 の配位は捩れた真空のゲージ変換
段 7 移し替え              窓に S_v(N, m₀) の最小の配位を入れる
  │                          ⇒ 十分大きい m で κ_c ≤ S_N + ε
  ▼
組み立て                   ε → m → β₀ → M₀ の順に閾を取る            （§07）
```

段 3〜7 の出力は「十分大きい塊の一辺 m で、全ての枠について $\kappa_c \le S_N + \varepsilon$」です。Lean の中ではこれに名を付けた中間の形があり、そこから (1) までは算術です（21-04）。部品の言明と範囲は 21-04 に置きます。この章は流れだけを書きます。

05

前半 — 塊に割り、作用の差に直す

段 1：塊ごとの評価

縦の面 T^2_M を一辺 m の塊に $k \times k$ 個割ります（$mk \le M$。最後の行と列だけ幅を広げます）。塊の境の線に載るリンクを**枠**と呼びます。どの面も、枠のリンクと高々一つの塊の内部のリンクしか含みません。だから枠を止めると、重みは塊ごとの積に割れます。

各塊で、(3,4) の面の符号の積が $+1$ の類と -1 の類の分配関数 $Z^F_B(\pm)$ を比べます。その比の対数の、塊と枠についての上限の半分を K_{eff} と置くと

$$|\theta_M| \le \tanh(K_{\mathrm{eff}})^{k^2}. \tag{3}$$

Lean：`TwistBlocks.block_bound_abs`（全ての実の β、$mk \le M$、背景 n_{12} は任意）。比は $e^{\pm 2N^2|\beta|}$ の中に在るので $K_{\mathrm{eff}} \le N^2|\beta|$ です（`TwistBlocks.Keff_le`）。$m = 1$ ではこれで薄い渦の床の形に戻ります。

段 2：Laplace の段

β が大きいとき、$Z_B^F(\pm)$ は塊の作用の最小値 $S_{\min}^F(\pm)$ でほぼ決まります。上からは自明に $e^{-\beta S_{\min}}$ で抑えます。下からは、最小点のまわりの小さい球の Haar 測度で抑えます。こうして、$\beta \ge 0 \cdot \delta > 0$ で

$$K_{\mathrm{eff}} \le \tfrac{1}{2}\big(\beta(\kappa_c + 2\delta) + D(\delta)\big), \qquad \kappa_c = \sup_{b,F} \big| S_{\min}^F(+) - S_{\min}^F(-) \big|. \tag{4}$$

Lean：`TwistBlocks.Keff_le_laplace`（$\beta \ge 0$、$\delta > 0$）。$D(\delta)$ は β に依らず、塊の大きさだけで決まる量で上から抑えられます（M に一様）。$-\ln\tanh K \ge e^{-2K}$ と合わせると、(3)(4) から $|\theta_M| \le \exp(-k^2 e^{-\beta(\kappa_c+2\delta)-D})$ です。あとは κ_c を S_N に近づければ済みます。

06

後半 — 安い窓に渦を入れ替える

示したいのは、十分大きい m で、**どの枠 F についても** $S_{\min}^F(-) \le S_{\min}^F(+) + S_N + \varepsilon$（と逆向き）が立つことです。つまり「(+) の最小に近い配位から、費用 $S_N + \varepsilon$ 以下で類を反転できる」ことです。五つの段で示します。

段 3：符号の標準形

塊の中の符号の場 η は多数あります。しかし中心の $\mathbb{Z}_2$ によるリンクの反転を内部に施すと、作用を変えずに η を標準の形（全て $+1$、または角の一枚だけ -1）に移せます。類は積 $\prod \eta$ だけで決まります。Lean：`TwistBlocks.canon_holds`（全ての $N, M \ge 1$、$mk \le M$）。

段 4：鳩の巣で安い窓を選ぶ

どちらの類でも、最小に近い配位の塊の作用は、枠に触れる面だけが寄与するので $144N^2m$ 以下です。塊の中に一辺 $m_0 + 2$ の窓を T^2 個、面を共有しないように並べます。窓の作用の和は塊の作用以下なので、どれかの窓の作用は $144N^2m/T^2$ 以下です。T を大きく取ると、この窓の作用は好きなだけ小さくなります。

段 5：コンパクト性

窓の周りの配位の空間はコンパクトで、作用は連続です。だから「作用が 0 の配位について、費用 c 以下で類を反転できる」ことが言えれば、「作用が十分小さい配位について、費用 $c+\varepsilon$ 未満で反転できる」ことが出ます。距離を使わず、費用の形で言います。小ささ γ は値が陽でありません（段 2 の δ とは別の量です）。Lean：`ThickFloor.small_action_cost`。

段 6：局所の模型と、捩れたトーラスの剛性

窓の周りを、M に依らない一つの有限の模型（横の T^2_N × 一辺 m_0+2 の正方形）に持ち上げます。この模型で作用が 0 の配位は、**面に現れるリンクの上で**、局所の捩れた真空のゲージ変換です。芯は横の T^2_N の問題です。捩れの一枚つきで平坦な T^2_N の配位は、二つの生成元 a, b で決まり、捩れから $ab=-ba$ が出ます。反交換する単位四元数の組は、共役で (i,j) に写ります。だから配位は真空のゲージ変換です。Lean：`TwistBlocks.rigidT_all`（全ての $N\geq 1$）、`ThickFloor.anticomm_conj`。

段 7：最小の配位を移し替える

$S_{\mathrm{v}}(N,m_0)$ の最小の配位を、ゲージで合わせて窓に入れます。窓の外の面は変わりません。窓の中で類が一回反転し、費用は $S_{\mathrm{v}}(N,m_0)$ 以下です。m_0 を $S_{\mathrm{v}}(N,m_0)<S_N+\varepsilon/4$ となるように選べば、費用は S_N に近づきます。Lean：`TwistBlocks.thick_vortex_floor_zero_of_rigid`（剛性から零作用の主張へ。21-04）。

07 組み立て — 量化の順はどこから来るか

閾は次の順に決まります。

1. ε を与えます。
2. $S_{\mathrm{v}}(N,m_0)<S_N+\varepsilon/4$ となる m_0 を選びます（下限の定義から存在だけ）。
3. 段 5 のコンパクト性から $\gamma>0$ を得ます。**値は陽ではありません**。
4. $\gamma T>144N^2(m_0+3)+\varepsilon/4$ となる自然数 T を取り、塊の一辺を $m=(m_0+2)T+1$ とします。段 4 の窓の作用が γ を下回り、$M\geq m$ の全てで κ_c が S_N に ε の程度まで近づきます。
5. β_0 を、D と $\ln(4m^2)$ を $\beta\varepsilon/2$ で吸える大きさに取ります。D は小さい球の Haar 測度を含むので、**これも陽ではありません**。

6. M_0 を取ります。この証明の中では $M \geq m$ で足ります。ただし言明 (2) は M_0 が β に依ってよい形で、それ以上は言いません。

だから言明は「$\forall \varepsilon\ \exists \beta_0\ \forall \beta \geq \beta_0\ \exists M_0\ \forall M \geq M_0$」の形になり、どの闕も数で書けません。

寄り道：なぜ捩れの背景が要るか

飛ばしてよい。背景の捩れ $n_{12} = 1$ が効くのは段 6 の一か所です。捩れの面がちょうど一枚あるので、二つの生成元が反交換します。反交換する単位四元数の組は、どれも共役で (i, j) に写り、零作用の配位はゲージを除いて一つになります。捩れが無いと、平坦な配位の生成元は可換で構いません。たとえば全てのリンクを 1 にした配位と、向き 1 の輪のホロノミーを i にした平坦な配位は、ホロノミーの共役類が違うのでゲージで移り合いません。初 このとき段 6 の剛性は立たず、この道筋はそのままでは通りません。

08

言っていないこと

- **闕は陽でない**。$\beta_0(\varepsilon)$ も $M_0(\varepsilon, \beta)$ も数で書けません。有限の β・M の数値とは比べられません。
- **S_N の値は一般の N では Lean に無い**。Lean に在るのは $0 < S_N \leq 2N^2$ です。$S_N < 2N^2$ は $N = 2, 3, 4$ の証明書だけです（21-05）。N に一様な上界も下界も示していません。
- **$N = 1$ では薄い渦の床より良くならない**。$S_1 = 2 = 2N^2$ 読 で、薄い渦の床と同じ指数です。
- **逆向きは無い**。$|\theta_M|$ の下界（率の上界 $\sigma_N \leq e^{-\beta(S_N - \varepsilon)}$）は示していません。
- **$\beta \to \infty$ の率だけ**。前因子は塊の自由度の数の程度の次数で β に効きます。帯（19-07 の言明）には使えません。
- **格子間隔は固定**。連続極限、四次元の Wilson ループの面積則、質量ギャップには届きません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 太い渦の床 (1)：全ての $N \geq 1$、量化は (2) の順。Lean：`TwistBlocks.thick_vortex_floor`（仮定の欄なし）	β_0・M_0 の値。有限の β での比べ。率の下界

言えている	言えていない
初 $S_N \le 2N^2$。Lean：`TwistBlocks.SN_bounds`	一般の N での $S_N < 2N^2$。N に一様な評価
機 $N = 2, 3, 4$ で $S_N < 2N^2$（21-05）	具体の (β, M) で太い方が小さいこと
初 道筋の七つの段（§05・§06）。各段の部品は 21-04 で Lean の名と範囲つき	段 2 の前因子の鋭い形（β の冪の次数）
読 $S_1 = 2$、$N = 2$ で太い方の率が薄い方の率を上回るのは $\beta > 0.523$ の程度	これらの数の証明

出典と再現

もの	種別	出典・道具
捩れた境界条件と流束	典	G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141（書誌は 25-01 と同じ）
枠を止めた塊の条件つきの独立、渦の容器	典	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 123 (1979) 442・125 (1980) 117（本文はこの本では未確認。型は 25-03 の容器と同じ）。T. G. Kovács, E. T. Tomboulis, arXiv:hep-lat/0108017
太い渦の床と道筋の段（Lean 4 で機械検査）	初	上の型の形式化。Lean：`TwistBlocks.thick_vortex_floor` とその鎖（部品は 21-04）。標準の三つの公理、sorry なし
$S_1 = 2$、$\beta > 0.523$ の閾	読	本書の検討の数値の記録（冷却による S_v の数値、薄い渦の床との係数の比べ、浮動小数）
$N = 2, 3, 4$ の S_N の上界	機	21-05（Lean の核で検査した有理数の配位の証明書）

この章で使った語 — 太い渦の床・薄い渦の床・渦の比 θ・捩れた真空・渦の最小作用 S_N・塊・枠・窓・実効の結合 K_eff・剛性・量化の順。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：21-04 太い渦の床 — 証明の部品 — 段ごとの Lean の言明と範囲、方法の限界を示す定理。

太い渦の床 — 証明の部品

この章は本書の検討です。

この章で分かること — 太い渦の床（21-03）の証明に使う部品の言明と範囲です。塊の評価と実効の結合 K_{eff}、Laplace の段、符号の標準形の補題、コンパクト性の段、反交換する組の共役と捩れたトーラスの剛性。部品をつなぐ途中の含意の形と、最後の定理でその仮定が全て払われたこと。そして、この方法の率は S_N より良くならないことを示す定理です。

前提となる章 — 21-03 §04（道筋の地図）、19-02（渦の最小作用）、19-01（Haar の積）。四元数の積と、コンパクト集合の上の連続関数の最小を使います。

先に言うこと — 部品は全て、格子間隔と横の大きさ N を止めた有限の格子の上の言明です。途中の含意は「もし〜ならば」の形で、仮定を全て見せます。それらの仮定は最後の定理で払われていますが、途中の含意そのものが中身を示すわけではありません。方法の限界を示す定理は、この証明の中間の言明が $S < S_N$ で偽になることを言うだけです。床そのものを否定せず、真の率が S_N であることも言いません。

この章の順序

1. 塊・枠・類の分配関数 — 塊に割る約束と、$Z_B^F(\pm)$・K_{eff} の定義
2. 塊の評価 — $|\theta| \le \tanh(K_{\text{eff}})^{k^2}$ と $K_{\text{eff}} \le N^2|\beta|$
3. Laplace の段 — 小さい球の Haar 測度と、K_{eff} の κ_c による上界
4. 符号の標準形の補題 — 塊の符号の場を作用を変えずに標準の形へ
5. コンパクト性の段 — 「作用 0 なら」から「作用が小さいなら」へ
6. 剛性 — 反交換する組の共役と、捩れたトーラスの零作用の配位
7. 途中の含意の形と、仮定が払われるまで — 鎖の六つの環
8. 方法の限界を示す定理 — $S < S_N$ では中間の言明は偽

01

塊・枠・類の分配関数

格子は横 N・縦 M の捩れたトーラスです（19-02）。縦の面 T^2_M を $k\times k$ 個の塊に割ります。条件は $mk\le M$ だけです。塊の辺は m で、最後の行と列の塊だけ幅を $M-(k-1)m$ にします。

- **枠**：塊の境の線に載るリンクです。向き 3 のリンクは x_4 が線の上、向き 4 のリンクは x_3 が線の上、向き 1・2 のリンクはどちらかが線の上のものです。
- **内部**：枠でないリンクのうち、その塊に属するものです。
- **類**：塊の中の (3,4) の面の符号 η の積 $\prod\eta$ が $+1$ か -1 かです。

どの面も、枠のリンクと高々一つの塊の内部のリンクしか含みません。だから枠 F を止めると、重みは塊ごとの積に割れます。塊 b で枠 F を止め、類 $s=\pm1$ について和を取った分配関数を $Z_B^F(s)$ と書きます（内部のリンクについて Haar の積で積分します）。

$$K_{\mathrm{eff}}=\tfrac12\sup_{b,\,F}\Bigl|\ln\frac{Z_B^F(+)}{Z_B^F(-)}\Bigr|. \tag{1}$$

上限は全ての塊 b と全ての枠の値 F について取ります。Lean：`TwistBlocks.Keff`・`TwistBlocks.ZB`。Lean の $Z_B^F(s)$ は、面ごとの符号の和を先に取った被積分関数 C_b+sS_b の積分です。類の中の和と同じものです。

02

塊の評価

塊の評価。 $mk\le M$、全ての実の β、背景 n_{12} の両方で

$$\Bigl|\frac{Z_0-Z_1}{Z_0+Z_1}\Bigr|\le\tanh(K_{\mathrm{eff}})^{k^2},\qquad 0\le K_{\mathrm{eff}}\le N^2|\beta|. \tag{2}$$

初 Lean：`TwistBlocks.block_bound_abs`（$mk\le M$ のほか仮定なし）、`TwistBlocks.Keff_le`（$mk\le M$）、`TwistBlocks.Keff_nonneg`。枠を止めた塊の条件つきの独立と、塊ごとの上限の積の形です。

典 型は、枠を止めた塊の条件つきの独立（Mack–Petkova の線。出典は章末の表）の形式化です。

証明の流れは三行です。(i) 枠を止めると、η の類の和の重みは塊ごとの積になります。(ii) 各塊で、類 $\pm$ の重みの比は $e^{\pm2K_{\mathrm{eff}}}$ の中に在ります。比が $e^{\pm2K}$ の中に在る二つの正の数 $Z_\pm$ は

$|Z_+ - Z_-| \le \tanh K\,(Z_+ + Z_-)$ を満たします。(iii) 積分の三角不等式で、塊の数 k^2 だけ $\tanh$ が掛かります。$K_{\mathrm{eff}} \le N^2|\beta|$ は、一つの類の反転で変わるのが横の N^2 枚の面の符号だけだからです。

(2) と $-\ln\tanh K \ge e^{-2K}$（$K>0$）から $|\theta_M| \le \exp(-k^2 e^{-2K_{\mathrm{eff}}})$ です。Lean：`TwistBlocks.abs_block_bound_exp`。

言っていないこと。 K_{eff} は塊についても上限を取るので、塊の形が混ざると塊ごとの積 $\prod_b \tanh K_b$ より弱くなります。たとえば $\mathbb{Z}_2$ の小さい模型で、右辺 $\tanh(1)^4 = 0.3364$ に対し塊ごとの積は 0.0862 です読。率には効きません。

03 Laplace の段

粗い Laplace の下界。 ι を有限集合、ν を $SU(2)^\iota$ の上の Haar の確率測度の積とします。距離は成分ごとの距離の最大です。f が連続で L-Lipschitz（$L>0$）なら、全ての x_0、$\beta \ge 0$、$\delta > 0$ で

$$e^{-\beta(f(x_0)+\delta)}\,\mu_1\!\big(\delta/L\big)^{|\iota|} \le \int e^{-\beta f}\,d\nu, \qquad \mu_1(r) = \mathrm{Haar}\big(\{g:\ |g-1|<r\}\big) > 0. \tag{3}$$

初 Lean：`CoarseLaplace.laplace_lower`（$\beta \ge 0$、$\delta > 0$、$L > 0$）。証明は x_0 の周りの半径 δ/L の球の上で $f \le f(x_0)+\delta$ とするだけです。球の測度が中心に依らないのは、左の積が等長で、Haar 測度が左不変だからです。前因子は β に依りません。Laplace の方法の、定数を陽にしない弱い形です。

これを塊の作用に当てはめます。作用 S_B は内部のリンクについて Lipschitz で、定数は塊の面の数 n_b から $L_b = 4n_b + 1$ と取れます。$S^F_{\min}(\pm)$ を類 $\pm$ と内部についての作用の下限とし、

$$\kappa_c = \sup_{b,F} \big|S^F_{\min}(+) - S^F_{\min}(-)\big|, \qquad D(\delta) = \max_b \Big(\ln \#\{\text{塊 } b \text{ の符号の場}\} - \#\{\text{内部のリンク}\}\cdot$$

と置くと、$\beta \ge 0$・$\delta > 0$ で

$$K_{\mathrm{eff}} \le \tfrac{1}{2}\big(\beta(\kappa_c + 2\delta) + D(\delta)\big). \tag{4}$$

初 Lean：`TwistBlocks.Keff_le_laplace`（$mk \le M$、$\beta \ge 0$、$\delta > 0$）。$D(\delta)$ は $M < (k+1)m$ のとき、N, m, δ だけで決まる量 $D^*(N,m,\delta)$ で抑えられます（`TwistBlocks.Dmax_le`）。つまり M に一様です。κ_c の自明な上界として $\kappa_c \le 2N^2$（`TwistBlocks.kappaC_le_two`、全ての m）も在ります。

言っていないこと。$\mu_1(r)$ の値（r^3 の程度であること）は使っておらず、D は陽ではありません。前因子の鋭い形（β の冪の次数）は扱いません。$\beta<0$ は扱いません。

04

符号の標準形の補題

類の下限 $S^{F}_{\min}(\pm)$ は、類の中の全ての符号の場 σ と内部の全ての値についての下限です。これを「η を一つに止めた下限」と同じにするのが次の補題です。

符号の標準形の補題。 $mk\le M$ とします。塊 b、枠 F、内部の値 y、塊の符号の場 σ（$\prod\sigma=+1$ なら $t=0$、-1 なら $t=1$）について、内部の値 y' が在って、標準の場（$t=0$ なら全て $+1$、$t=1$ なら塊の角の一枚だけ -1）での塊の作用が、σ での作用に等しくなります。

初 Lean：`TwistBlocks.canon_holds`（言明は `TwistBlocks.Canon N`、全ての $N,M\ge1$ と $mk\le M$。塊の形の条件なし）。構成は櫛の形の反転です。$\rho=\sigma\cdot(\text{標準の場})$ とします。列ごとに下から上へ ρ の積を積んで向き 3 のリンクの符号 κ_3 を決め、角の行だけで右から左へ列の総積を積んで向き 4 の符号 κ_4 を決めます。このとき面ごとに κ の積が ρ になり、塊の中の ρ の積が 1 なので枠では $\kappa=1$ です。向き 1・2 と向き 3・4 にまたがる面では、同じ κ が二回現れて消えます。

この補題で、Lean の κ_c は η を止めた版の κ と等しくなります（`TwistBlocks.kappaC_eq_kappa`、$mk\le M$）。

05

コンパクト性の段

費用の形のコンパクト性。 X をコンパクト空間、$S,\Phi:X\to\mathbb{R}$ を連続とします。$S(x)\le0$ の点で $\Phi(x)\le c$ なら、全ての $\varepsilon>0$ に $\gamma>0$ が在って、$S(x)<\gamma$ の点で $\Phi(x)<c+\varepsilon$ です。

初 Lean：`ThickFloor.small_action_cost`（Mathlib だけで閉じる）。証明：$K=\{\Phi\ge c+\varepsilon\}$ は閉じていてコンパクトです。空なら $\gamma=1$ で済みます。空でなければ S は K の上で最小値 $S(x_0)$ を取り、仮定から $S(x_0)>0$ です。$\gamma=S(x_0)$ と取ります。

使い方：X を窓の周りの局所の模型の配位の空間、S を局所の作用、Φ を「内部を取り替え、一枚を反転した作用」の下限とします。反転の位置は有限個なので Φ は連続です。これで「作用が十分小さい窓では費用 $S_{\mathrm{v}}+\varepsilon$ で類を反転できる」ことが、「作用 0 の局所の配位では費用 S_{v} で反転できる」ことに帰着します（`TwistBlocks.localVortexL_of_zero`）。

言っていないこと。γ の値（§03 の δ とは別の量です）。γ は N・m_0・ε だけに依りますが、陽ではありません。太い渦の床の閾が陽でない主な理由はここです。

06

剛性

反交換する組の共役

反交換する単位四元数の組。 単位四元数 A, B が $AB = -BA$ を満たすなら、$g \neq 0$ の四元数が在って $gAg^{-1} = i$、$gBg^{-1} = j$ です。

初 Lean：`ThickFloor.anticomm_conj`。まず $\mathrm{Re}\, A = \mathrm{Re}\, B = 0$ で虚部は直交します（`ThickFloor.anticomm_unit`）。次に $L(h) = h - ihA - jhB - kh(AB)$ と置くと、$A^2 = B^2 = -1$ と $AB = -BA$ だけから $L(h)A = iL(h)$、$L(h)B = jL(h)$ です。$e \in \{1, i, j, k\}$ について $\sum_e \mathrm{Re}(\bar{e}\, L(e)) = 4$ なので、どれかの e で $L(e) \neq 0$ です。$g = L(e)$ と取ります。g を $g/|g|$ に替えれば単位四元数の共役です。

捩れたトーラスの剛性

横の $T^2_N = (\mathbb{Z}/N)^2$ の上の配位 (A, B)（A は向き 1、B は向き 2）で、面の積が捩れの符号（原点で -1、他で $+1$）に等しいものを考えます。

捩れたトーラスの剛性。 全ての $N \geq 1$ で、そのような (A, B) は、T^2_N の真空（$a_1 = 0$ で $A = i$、$a_2 = 0$ で $B = j$、他は 1）のゲージ変換です。すなわち $R : T^2_N \to SU(2)$ が在って、全ての a で $R(a)A(a)R(a + e_1)^{-1}$ と $R(a)B(a)R(a + e_2)^{-1}$ が真空の値に等しくなります。

初 Lean：`TwistBlocks.rigidT_all`（言明は `TwistBlocks.RigidT N`、全ての $N \geq 1$）。捩れた平坦な接続がゲージを除いて一つであるという形です。証明：前からの積の木でゲージを取ると、木のリンクは 1 になります。面の平坦さの帰納で、残りのリンクは二つの生成元 $a = A(N-1, 0)$、$b = B(0, N-1)$ で決まります（`TwistBlocks.cfA`・`cfB`）。捩れの面がちょうど一枚なので $ab = -ba$ です（`TwistBlocks.cf_comm`）。反交換する組の共役で (a, b) を (i, j) に写す定数 u を取り、真空を同じ木でゲージを取った形と比べます（`TwistBlocks.uniqT`）。$N = 1$ は一点なので直接です（`TwistBlocks.rigidT_one`）。

局所の模型への持ち上げ

窓の周りの局所の模型は、横の T^2_N と一辺 $V + 1$ の正方形の積です。この模型には、**どの面にも現れないリンク**が在ります（正方形の端の向き 3・4 のリンクと、角の向き 1・2 のリン

ク)。これらは作用に効かないので、作用 0 の配位でも任意の値を取れます。だから局所の剛性は次の範囲で言います。

局所の剛性。 局所の作用が 0 の配位は、**面に現れる全てのリンクの上で**、局所の捩れた真空のゲージ変換に等しい。

初 Lean：`TwistBlocks.rigidL_of_rigidT`（RigidT $N \Rightarrow$ RigidL N $(V+1)$、全ての V）。向き 3・4 の極大の木でゲージを取ると、向き 3・4 のリンクは全て 1 になり、向き 1・2 のリンクは縦の位置に依らなくなります。残りが T^2_N の問題で、上の剛性で閉じます。リンク全体の関数の等式としては偽なので、範囲を「面に現れるリンク」に限るのが正しい形です。

07

途中の含意の形と、仮定が払われるまで

Lean の証明は、仮定を一つずつ弱い主張に置き換えていく含意の鎖で組まれています。各環は「もし〜ならば太い渦の床」の形です。ここでは仮定を全て見せて並べます。$\mathrm{Floor}(S)$ は 21-03 の (1) で S_N を S に替えた言明です。

環	Lean	仮定（もし〜ならば）	結論
1	`thick_vortex_floor_abs_of_H4`	反転の費用の上界：ある S で：全ての $\varepsilon > 0$ に m が在り、全ての $M \geq m$ で $\kappa_c(N, M, m, \lfloor M/m \rfloor) \leq S + \varepsilon$	$\mathrm{Floor}(S)$
2	`H4_of_local`	符号の標準形の補題（`Canon N`）と、全ての m_0 で「窓の作用が小さければ費用 $S_{\mathrm{v}}(N, m_0) + \varepsilon$ で類を反転できる」（`LocalVortex`）	$S = S_N$ の反転の費用の上界
1+2	`thick_vortex_floor_abs_of_local`	環 2 の仮定のうち、全ての m_0 での `LocalVortex`（`Canon N` は中で `canon_holds` により払う）	$\mathrm{Floor}(S_N)$
3	`thick_vortex_floor_abs_of_localL`	同じ主張を、M に依らない局所の模型の上で（`LocalVortexL`）	$\mathrm{Floor}(S_N)$
4	`thick_vortex_floor_abs_of_zero`	全ての m_0 で、局所の作用が 0 の配位について費用 $S_{\mathrm{v}}(N, m_0)$ 以下で反転できる（`ZeroVortexL`）	$\mathrm{Floor}(S_N)$
5	`thick_vortex_floor_abs_of_rigid`	全ての m_0 で局所の剛性（`RigidL N (m₀+2)`）	$\mathrm{Floor}(S_N)$
6	`thick_vortex_floor_abs_of_rigidT`	捩れたトーラスの剛性（`RigidT N`）	$\mathrm{Floor}(S_N)$

(名は全て `TwistBlocks.` の下です。Lean の名に残る `H4` は源の名のままで、本文ではこの中間の言明を「反転の費用の上界」と呼びます。) 環と環をつなぐ定理は次のとおりです。

- 2 の `Canon N` は `canon_holds` で払われます（§04）。鳩の巣（`exists_win_le`）は 2 の証明の中で閉じています。

- 3 → 1+2：局所の模型の答えを塊の内部に書き戻します（`localVortex_of_local`）。
- 4 → 3：コンパクト性の段です（`localVortexL_of_zero`、§05）。
- 5 → 4：$S_{\mathrm{v}}(N, m_0)$ の最小の配位を局所の模型に引き戻し、剛性のゲージで窓に移し替えます（`thick_vortex_floor_zero_of_rigid`）。最小の配位が在ることは `Svortex_attained` です。
- 6 → 5：局所の模型への持ち上げです（`rigidL_of_rigidT`、§06）。

最後の定理 `TwistBlocks.thick_vortex_floor` は、環 6 に `rigidT_all` を入れたものです。これで鎖の仮定は全て払われ、仮定の欄は残っていません。機械の健全さの確かめとして、仮定が偽で空になる中間の定理が鎖に無いことも見てあります。環 4・5 の内側の欄「局所の作用 ≤ 0」は局所の真空で満たされ（`SL_vacL`）、環 6 の内側の欄「平坦な T^2_N の配位」は T^2_N の真空で満たされます（`flatT_nonempty`）。これは欄が空でないことの確かめで、中身の無い充足の例です。

> 途中の環 1〜6 は、それだけでは中身を示しません。たとえば環 1 は S が大きければ容易に満たせます。中身があるのは、仮定を払った最後の定理と、S_N の値の評価（21-05）の組です。

08

方法の限界を示す定理

環 1 の仮定（反転の費用の上界）の S を、S_N より小さく取れないかを考えます。取れないことが Lean で示されています。

枠を真空にした塊の比べ。 全ての $m \geq 1$ で $S_{\mathrm{v}}(N, m) \leq \kappa_c(N, 2m, m, 2)$。初 Lean：`TwistBlocks.kappaC_ge_Svortex`。$M = 2m$、塊 $(0, 0)$、枠を捩れた真空にすると、(+) の下限は 0、(−) の下限は $S_{\mathrm{v}}(N, m)$ だからです。

中間の言明の否定。 $S < S_N$ なら反転の費用の上界は偽です。初 Lean：`TwistBlocks.H4_fails_below`（仮定 $S < S_N$）。反転の費用の上界を $\varepsilon = (S_N - S)/2$ と $M = 2m$ に当てはめると、上の比べと $S_N \leq S_{\mathrm{v}}(N, m)$ に矛盾します。

読み方を三つ挙げます。

1. これは**この証明の方法の限界**です。中間の言明である反転の費用の上界（κ_c の上界）を通る限り、得られる率の指数は S_N より良くなりません。

2. これは**太い渦の床の否定ではありません**。床 (1) 自体は $S < S_N$ の S でも成り立つかもしれず、この定理はそれについて何も言いません。
3. これは**真の率が S_N であることも言いません**。率の下界（逆向き）は無いままです。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 塊の評価 (2)：全ての実の β、$mk \le M$。Lean：`TwistBlocks.block_bound_abs`・`Keff_le`	塊の形が混ざるときの塊ごとの積の形
初 粗い Laplace の下界 (3) と K_{eff} の上界 (4)：$\beta \ge 0$、$\delta > 0$。Lean：`CoarseLaplace.laplace_lower`・`TwistBlocks.Keff_le_laplace`	D の値。前因子の鋭い形。$\beta < 0$
初 符号の標準形の補題：$mk \le M$。Lean：`TwistBlocks.canon_holds`	—
初 費用の形のコンパクト性。Lean：`ThickFloor.small_action_cost`	γ の値
初 捩れたトーラスの剛性：全ての $N \ge 1$。Lean：`TwistBlocks.rigidT_all`、`ThickFloor.anticomm_conj`	局所の模型のリンク全体での等式（面に現れるリンクの上だけ）
初 途中の含意の環 1〜6（と 1+2）と、最後の定理で仮定が払われたこと（§07）	途中の環だけで中身が出ること
初 方法の限界：$S < S_N$ で反転の費用の上界は偽。Lean：`TwistBlocks.H4_fails_below`	床そのものの否定。真の率が S_N であること
読 塊の形が混ざる例の数（0.0862 対 0.3364）	—

出典と再現

もの	種別	出典・道具
枠を止めた塊の条件つきの独立	典	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 123 (1979) 442・125 (1980) 117（本文はこの本では未確認。型は 25-03 の容器と同じ）。T. G. Kovács, E. T. Tomboulis, arXiv:hep-lat/0108017
捩れた平坦な接続	典	G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141（書誌は 25-01 と同じ）
Laplace の方法の下界	初	Laplace の方法の、定数を陽にしない弱い形。証明は本文 §03
各部品の言明（Lean 4 で機械検査）	初	Lean の束（塊の評価、Laplace、標準形、コンパクト性、四元数、剛性、移し替え、方法の限界）。標準の三つの公理、sorry なし
塊の形が混ざる例	読	本書の検討の数値の記録（$\mathbb{Z}_2$ の小さい模型の総当たり）

この章で使った語 — 塊・枠・内部・類・実効の結合 K_eff・粗い Laplace の下界・符号の標準形の補題・費用の形のコンパクト性・反交換する組・捩れたトーラスの剛性・局所の剛性・

途中の含意・方法の限界。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：21-05 渦の最小作用 — 正であること・上界の証明書 — 床の指数 S_N の値について言えること。

渦の最小作用 — 正であること・上界の証明書

この章は本書の検討です。§05 の上界は計算機援用の証明書で、解析の証明の支えとして置きます。

この章で分かること — 太い渦の床の指数に現れる量 S_N（渦の最小作用）について、Lean で機械検査した二つの事実を読みます。一つは、全ての $N \geq 1$ で $S_N > 0$ であり、しかも塊の大きさ m に一様な正の下界があること。もう一つは、$N = 2, 3, 4$ で S_N が薄い渦の値 $2N^2$ より小さいことを示す上界の証明書です。

前提となる章 — 19-02 渦の最小作用の定義・渦の比 θ_M、21-02 薄い渦の床、21-03 太い渦の床

先に言うこと — 言えたのは「正であること」と「上界」だけです。S_N の値は分かっていません。下界 δ はコンパクト性から来るので陽な数ではなく、横の大きさ N に一様でもありません。上界は $m = 8$（$N = 4$ は $m = 4$）の一つの配位の作用で、m についての下限の値ではありません。格子間隔は固定で、連続極限・質量ギャップについては何も言いません。

この章の順序

1. 渦の最小作用 — 定義の要点と自明な上下
2. S_N は正 — 言明と意味
3. 正であることの道筋 — ラベルと望遠鏡の積
4. 寄り道：背景の捩れが効く場所
5. N = 2・3・4 の上界 — 言明
6. 証明書の作り — 有理数の単位四元数と上への丸め
7. 薄い渦の床との比べ — 率の比べとその限り
8. 言っていないこと

01

渦の最小作用 — 定義の要点と自明な上下

定義は 19-02 にあります。ここでは要点だけを繰り返します。

格子は横 $(\mathbb{Z}/N)^2$、縦 $(\mathbb{Z}/2m)^2$ のトーラスです。縦の $(3,4)$ の平面の中に原点の塊 $b_0 = \{0,\dots,m-1\}^2$（面の根もとの縦の点の集合）を取り、横のトーラス T^2_N との積を考えます（記号は 19-02 と同じ）。塊の枠（線 $x_3 \in \{0,m\}$ と $x_4 \in \{0,m\}$ の上のリンク）は**捩れた真空** V に止めます。V は、向き 1 のリンクが $x_1 = 0$ で四元数の i、向き 2 のリンクが $x_2 = 0$ で j、他は全て 1 の配位です。背景の捩れ $n_{12} = 1$ のもとで、V の作用は 0 です。

塊の角 $(x_3,x_4) = (0,0)$ の $(3,4)$ の面を横の N^2 個の位置の全てで集めたものを $\Pi_{(0,0)}$ とし、その符号を反転します（$p \in \Pi_{(0,0)}$ で $\eta_p = -1$、他は $\eta_p = +1$）。根が b_0 に入る全ての面の作用の和を

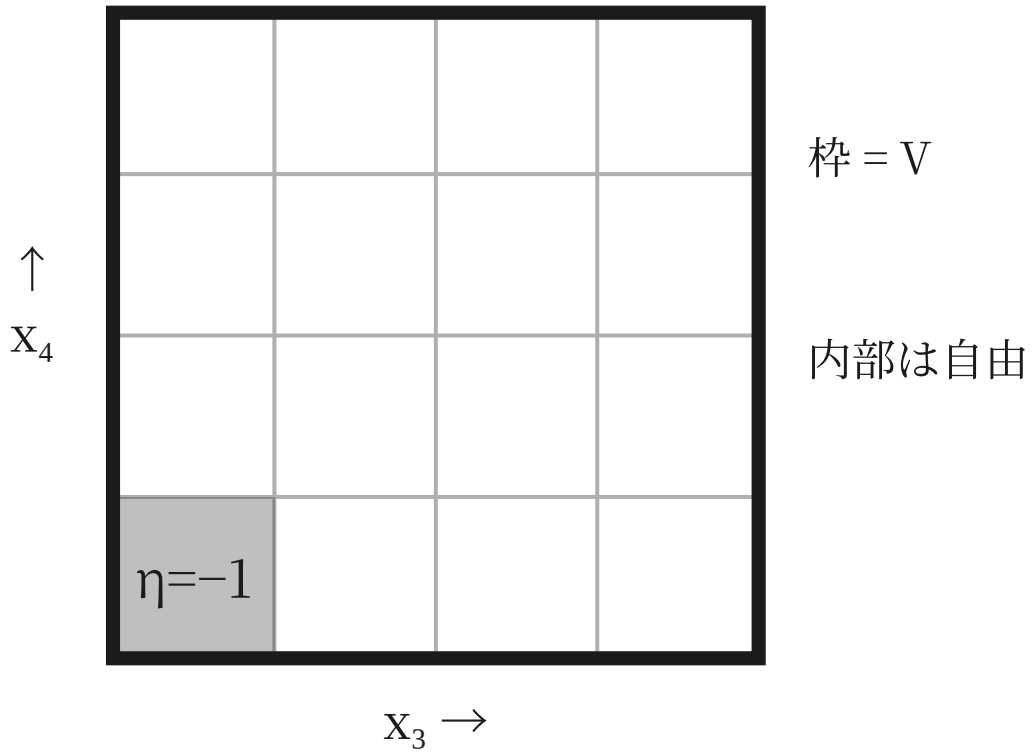
$$S(U;\eta) = \sum_{p:\ \mathrm{root}\in b_0} \bigl(1 - z_p\,\eta_p\,\mathrm{Re}\,U_p\bigr) \tag{1}$$

とします（作用の記号は 21-03 と同じ）。z_p は背景の捩れの符号です。β は掛けていません。内部のリンクの全ての配位についての下限と、塊の大きさについての下限を

$$S_{\mathrm{v}}(N,m) = \inf_{\text{interior}} S(U;\eta), \qquad S_N = \inf_{m\ge 1} S_{\mathrm{v}}(N,m) \tag{2}$$

と書きます。Lean の定義は `TwistBlocks.Svortex` と `TwistBlocks.SN` です。枠が真空なのに角の符号が一つ反転しているので、塊の中のどこかで渦の面が横のトーラスを一周して通らなければなりません。$S_{\mathrm{v}}(N,m)$ は、その渦を一本通す最小の作用です。

図 1　$(3,4)$ の平面の塊（$m=4$ の例）。塊 b_0 の升に、枠の線 $x_3,x_4\in\{0,m\}$ を太線で描く（捩れた真空に固定）。影の升が角の反転 $\Pi_{(0,0)}$ の位置。各点の上に横のトーラス T^2_N が載る



自明な上下が二つあります。初 $|\mathrm{Re}\,U_p| \le 1$ なので (1) の各項は 0 以上で、$S_{\mathrm{v}}(N,m) \ge 0$ です。初 内部も V にした配位では、反転した N^2 枚の面だけが $1-(-1)\cdot 1 = 2$ ずつを出し、他は 0 なので、作用はちょうど $2N^2$ です。よって $0 \le S_N \le 2N^2$ です（Lean：`TwistBlocks.Svortex_le`・`TwistBlocks.SN_bounds`）。この $2N^2$ は、反転を一層の面に集めた「薄い渦」の値で、薄い渦の床の指数に当たります。読 $N=1$ では $S_1 = 2 = 2N^2$ で、太い渦は得をしません（本書の検討の数値の記録）。

S_N は 太い渦の床 の指数に $e^{-\beta(S_N+\varepsilon)}$ の形で現れます。この章の二つの事実は、その指数の数について、下から（正であること）と上から（$N=2,3,4$ の証明書）言えることです。太い渦の床の Lean の証明は、この章の二つの事実を使っていません。

02

S_N は正 — 言明と意味

渦の最小作用の正値性。 全ての $N \ge 1$ について、N だけに依る $\delta > 0$ が在り、

$$\delta \le S_{\mathrm{v}}(N,m) \quad (\text{all } m \ge 1), \qquad \text{hence} \qquad S_N > 0. \tag{3}$$

Lean：`VortexPos.Svortex_ge_unif`（$\exists\,\delta>0,\ \forall m \ge 1,\ \delta \le S_{\mathrm{v}}(N,m)$。全ての $N \ge 1$、仮定の欄なし）と `VortexPos.SN_pos`（$0 < S_N$）。

量化の順が要点です。δ は先に決まり、m に依りません。塊をどれほど大きくして渦を広げても、作用は δ より小さくなりません。もし m ごとに正なだけなら、$m \to \infty$ で 0 に近づく可能性が残り、下限 S_N は 0 になりえます。

δ の値は分かりません。証明は「作用が小さければ配位は真空のゲージ軌道に近い」という事実を、距離の陽な評価ではなく**コンパクト性**で使います。だから δ は在ることだけが言え、数は出ません。読 数値では $S_{\mathrm{v}}(2,m)$ は $m=3$ から 8 で 7.0 から 6.67 ほどで（本書の検討の数値の記録）、δ はそれよりずっと小さいかもしれません。

典 この定理は、捩れた箱の中で渦（分数インスタントン）の作用が正である、という既知の描像（'t Hooft の捩れた境界条件、25-02）の、格子の上での形式化です（Lean：`VortexPos.SN_pos`）。道具はコンパクト性と剛性だけです。

03

正であることの道筋 — ラベルと望遠鏡の積

背理法で進みます。作用がとても小さい配位を一つ取り、それが角の反転と両立しないことを示します。

段 1　部品に分ける。 塊の (3,4) の平面の点 $s=(i,j)$（$0 \le i,j \le m$）ごとに、その上の横のトーラス T^2_N（向き 1・2 のリンク）を**繊維**と呼びます。作用 (1) を三種の部品に分けます。

- 繊維の作用 a_s：繊維の (1,2) の面の項の和。
- リンクの欠け b_λ：隣り合う二点を結ぶ向き 3・4 のリンク（N^2 本）が、二つの繊維をどれだけうまく結んでいないか。単位四元数では $\|X-Y\| = \sqrt{2(1-\mathrm{Re}\,XY^*)}$ なので、$b_\lambda \le 2N^2\sqrt{2S}$（$S$ は塊の作用）です 初 。Lean の証明の中でもこの評価を使います（`VortexPos.linkH_le`・`linkV_le`）。
- 升の部分 p_P：(3,4) の平面の升 P の上の N^2 枚の面の項の和。

繊維の作用と升の部分は (1) の部分和なので S 以下です。

段 2　繊維は真空に近い。 捩れた T^2_N の上で作用 0 の配位は、捩れた真空のゲージ軌道にあります（Lean：`TwistBlocks.rigidT_all`）。コンパクト性から、繊維の作用が小さければ繊維は真空のゲージ軌道に近い、が出ます。真空を止めるゲージ変換は定数 ± 1 だけで、これもコンパクト性で「ほぼ止めるなら ± 1 に近い」に延ばします。

段 3　ラベルを付ける。 各点 s で繊維を真空に合わせるゲージ g_s を取ります。枠の上では繊維がちょうど真空なので $g_s = 1$ に取ります。各リンク λ で $g_s^{-1}U_\lambda g_{s'}$ は定数 $+1$ か -1 に近

く、その符号をラベル $c(\lambda) \in \{\pm 1\}$ とします。枠の線の上のリンクは真空で 1 なので $c = +1$ です。

段 4　升ごとの両立。 升 P の上の面の積は、ゲージで挟むと $h_1 h_2 h_3^{*} h_4^{*}$ の形で、それは $\prod_{\lambda \in \partial P} c(\lambda)$ に近い値です。もし $\eta(P) \neq \prod_{\partial P} c$ なら、面の項は $2 - 4\varepsilon$ 以上になります（$\varepsilon = 1/8$ で $3/2$）。部品が全て小さいなら、全ての升で $\eta(P) = \prod_{\partial P} c$ です。

段 5　望遠鏡の積。 全ての升について $\prod_{\partial P} c$ を掛けると、内部のリンクは二回ずつ現れ、枠のリンクは 1 なので、積は 1 です[初]。ところが η は角の一つの升だけ -1 なので $\prod_P \eta(P) = -1$ です。矛盾します。

段 6　結論。 よってどれかの部品が閾 δ_0 以上です。繊維・升なら $S \geq \delta_0$、リンクなら $2N^2\sqrt{2S} \geq \delta_0$ です。合わせて

$$S_{\mathrm{v}}(N, m) \;\geq\; \delta := \min\!\left(\delta_0,\; \frac{\delta_0^2}{32N^4 + 1}\right) \tag{4}$$

が全ての $m \geq 1$ で成り立ちます。δ_0 は段 2 のコンパクト性から来るので陽ではありません。Lean の芯は `TwistBlocks.grid_vortex_floor` の形の補題で、部品の欄を `VortexPos.Svortex_ge_unif` の中で全て払っています。

寄り道：背景の振れが効く場所

飛ばしてよい。段 3 でラベルが $\{\pm 1\}$ に落ちるのは、捩れた真空を止めるゲージ変換が定数 ± 1 だけだからです（Lean：`TwistBlocks.stab_vacT`）。捩れた真空のリンクには i と j が現れ、i と j の両方と可換な単位四元数は ± 1 だけです[初]。だから各リンクの「ずれ」は中心 $\{\pm 1\}$ の元に近くなり、升ごとの両立と望遠鏡の積という $\mathbb{Z}_2$ の勘定に乗ります。角の反転は $\mathbb{Z}_2$ の勘定では消せない、というのが証明の芯です。

04

N = 2・3・4 の上界 — 言明

上からの側は、具体の配位を一つ示せば言えます。$S_{\mathrm{v}}(N, m)$ は下限なので、どの配位の作用もその上界です。Lean で機械検査した上界は次の三つです[機]。

N	塊の一辺 m	上界	系	Lean の宣言
2	8	$S_{\mathrm{v}}(2, 8) \leq 667401/100000$	$S_2 < 8 = 2 \cdot 2^2$	`VortexCert.Svortex_two_eight_le` ・ `SN_two_le` ・ `SN_two_lt`
3	8	$S_{\mathrm{v}}(3, 8) \leq 909321/100000$	$S_3 < 18 = 2 \cdot 3^2$	`VortexCert.Svortex_three_eight_le` ・ `SN_three_le` ・ `SN_three_lt`

N	塊の一辺 m	上界	系	Lean の宣言
4	4	$S_{\mathrm{v}}(4,4) \le 1202057/100000$	$S_4 < 32 = 2\cdot 4^2$	`VortexCert.Svortex_four_four_le` ・ `SN_four_le` ・ `SN_four_lt`

どれも仮定の欄はありません。$S_N \le S_{\mathrm{v}}(N,m)$ は下限の定義から出ます（Lean：`VortexCert.SN_le_Svortex`）。

太い渦の床に入れると、指数が陽な数になります。Lean：`TwistBlocks.thick_vortex_floor_two`（仮定の欄なし）は、十分大きい β ごとに十分大きい M で

$$|\theta_{M+1}(\beta)| \;\le\; \exp\!\big(-(M+1)^2\, e^{-6.675\,\beta}\big) \tag{5}$$

を言います。`TwistBlocks.thick_vortex_floor_three` は指数の数 9.094、`TwistBlocks.thick_vortex_floor_four` は 12.021 です。証明は、太い渦の床（21-03、`TwistBlocks.thick_vortex_floor`）の ε を「指数の数 $-\,S_N$」に取るだけです。上界の証明書から $\varepsilon > 0$ が出ます。

読み方の注意を一つ。言えたのは**上界だけ**です。「$S_2 = 6.674$」とは書けません。$m=8$（$N=4$ は $m=4$）の一点の配位なので、m についての下限の値でもありません。読 $N=4$ の配位は $m=4$ の、収束しきっていない数値の最小化から来ていて、S_4 の本当の値はもっと小さいかもしれません。

05

証明書の作り — 有理数の単位四元数と上への丸め

証明書は計算機援用です機。解析の証明の柱ではなく、「上界を与える配位を一つ示す」ための支えとして置きます。作りは四段です。

(a) 配位を有理数にする。 数値の最小化（冷却）で得た内部のリンクの値 $q=(q_0,\mathbf{q})$ を、$\tau = \mathbf{q}/(1+q_0)$ にしてから $t/2^{16}$（$t\in\mathbb{Z}^3$）に丸めます。そこから Cayley の形

$$q = \frac{\big(s^2-|t|^2,\; 2s\,t\big)}{s^2+|t|^2}, \qquad s = 2^{16} \tag{6}$$

で四元数を作ります。初 $(s^2-|t|^2)^2 + 4s^2|t|^2 = (s^2+|t|^2)^2$ なので、ノルムは**ちょうど** 1 です。平方根は要りません（Lean：`VortexCert.normSq_cay`）。

(b) 面ごとに上へ丸める。 面の項 $1 - z_p\eta_p\,\mathrm{Re}(ABC^*D^*)$ は、四本のリンクが有理数なので有理数です。これを 2^{-32} の単位で**上へ**丸めた整数を足します。上への丸めなので、整数の和 $/2^{32}$ は塊の作用の上界です。

(c) 核で数える。 整数の不等式、たとえば $N=2$ では「和 $\times 100000 \le 667401 \cdot 2^{32}$」を、Lean の核での有限の計算（`decide +kernel`）で確かめます（Lean：`VortexCert.certN2`・`certN3`・`certN4`）。面の数は $N=2$ で 1536 枚、$N=3$ で 3456 枚、$N=4$ で 1536 枚です。

(d) 実の上界に写す。 健全性の定理 `VortexCert.Svortex_le_of_cert` は、整数の不等式から $S_{\mathrm{v}}(N,m) \le b_n/b_d$ を出します。仮定は整数の不等式（と分母が正であること）だけです。表の値がどうであれ、(6) の形なので各リンクは単位四元数で、枠の値は定義の側で V に固定され、背景と角の符号は定義と一致することが Lean の中で示されています。だから証明書の配位は、(2) の下限を取る集合に**構成の上で**入っています。

読 有理数の配位の作用は $N=2$ で 6.6740076、$N=3$ で 9.0932068、$N=4$ で 12.0205673 で、丸めで増えた分は 4×10^{-7} 未満です（本書の検討の数値の記録、分数で丸めなしに計算）。Lean の上界は、それぞれ 10^{-5} 刻みで通る最小の数です。

Lean が確かめているのは整数の多項式の評価だけです。配位がどこから来たか（冷却が最小に近いかどうか）は、上界の正しさに関係しません。

06

薄い渦の床との比べ — 率の比べとその限り

薄い渦の床は $|\theta_M| \le \tanh(N^2|\beta|)^{M^2} = \exp(-M^2\sigma_0)$、$\sigma_0 = -\ln\tanh(N^2|\beta|)$ です。初 $\beta \to \infty$ で $\sigma_0 = 2e^{-2N^2\beta}(1+o(1))$ なので、薄い方の係数の減り方の率は $2N^2$ です。太い渦の床 (5) の率は $S_N + \varepsilon$ です。$N=2$ では $6.675 < 8$ で、$\beta \to \infty$ の率として、太い方の係数が指数的に大きくなります。

この比べには三つの限りがあります。

- **Lean の定理ではありません。** Lean に在るのは数の不等式 $6675/1000 < 2 \cdot 2^2$（`TwistBlocks.thick_vortex_floor_two_rate_lt`）と、二つの床のそれぞれだけです。「太い渦の床が薄い渦の床より強い」こと自体は、手で並べた数の比べです。
- **β が小さいと逆です。** 読 $e^{-6.675\beta}$ が $-\ln\tanh 4\beta$ を上回るのは $\beta > 0.523$ からです。$\beta=1$ で 1.26×10^{-3} 対 6.71×10^{-4}、$\beta=2$ で 1.59×10^{-6} 対 2.25×10^{-7} です。
- **閾が陽でありません。** 太い渦の床の β_0 と $M_0(\beta)$ は陽でないので、「$\beta > 0.523$ の具体の (β, M) で太い方が小さい」とは言えません。言えるのは $\beta \to \infty$ での率の比べです。

N	薄い渦の率 $2N^2$	S_N の上界（Lean）	太い渦の床の指数の数（Lean）
1	2	—（読 $S_1 = 2$）	—

N	薄い渦の率 $2N^2$	S_N の上界（Lean）	太い渦の床の指数の数（Lean）
2	8	6.67401	6.675
3	18	9.09321	9.094
4	32	12.02057	12.021

一般の N で $S_N < 2N^2$ は Lean にありません。$N = 1$ では得がありません。

07

言っていないこと

- S_N の値。言えたのは $0 < S_N$（陽でない δ で）と、$N = 2, 3, 4$ の上界だけです。
- δ の数。剛性の定量の評価（作用と真空からの距離の陽な関係）が要ります。
- N に一様な下界・上界。N を変えると繊維の配位の空間が変わり、この議論は N ごとです。
- 太い渦の床の逆向き（θ の下界、率の上界）。逆向きの定理はありません。
- 帯（渦の比 θ が箱の面積の指数で小さくなること、すなわち $-\ln\theta$（板の張力に面積を掛けた量に当たる）が面積に比例して増えることを、横と縦の大きさと結合を一緒に動かして一つの定数で言う言明。19-07）。この章の量は格子間隔と横の大きさ N を止めた形です。21-08 で距離を見ます。
- 格子間隔は固定で、連続極限・四次元の面積則・質量ギャップのどれも言っていません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
Lean `TwistBlocks.Svortex_le`・`TwistBlocks.SN_bounds`：$0 \le S_{\mathrm{v}}(N,m) \le 2N^2$、$0 \le S_N \le 2N^2$（真空に反転を入れた配位）	S_N の値
Lean `VortexPos.Svortex_ge_unif`・`SN_pos`：全ての $N \ge 1$ で、m に一様な $\delta > 0$ があり $S_N \ge \delta > 0$	δ の数（コンパクト性から）。N に一様な下界
機 $S_{\mathrm{v}}(2,8) \le 6.67401$、$S_{\mathrm{v}}(3,8) \le 9.09321$、$S_{\mathrm{v}}(4,4) \le 12.02057$、よって $S_N < 2N^2$（$N = 2, 3, 4$）	m についての下限の値。一般の N で $S_N < 2N^2$
Lean `TwistBlocks.thick_vortex_floor_two`・`_three`・`_four`：十分大きい β ごとに十分大きい M で、指数の数 6.675・9.094・12.021 の床	β_0・$M_0(\beta)$ の値
読 $N = 2$ の太い渦の床の係数が薄い方を上回るのは $\beta > 0.523$ から	「太い渦の床が強い」こと自体は Lean の定理ではない（率の比べ）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
捩れた境界条件と流束の自由エネルギー	典	G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141（書誌は 25-01 と同じ）
分数インスタントンの作用と希薄な気体の描像	典	Y. Tanizaki, M. Ünsal, arXiv:2201.06166（25-02 で確認した範囲）
正であることの道筋（段 1〜6）	初	本文 §03。Lean：`VortexPos.Svortex_ge_unif`・`VortexPos.SN_pos`、芯の補題 `TwistBlocks.grid_vortex_floor`、繊維の剛性 `TwistBlocks.rigidT_all`
上界の証明書	機	Cayley の形の有理数の配位（$s = 2^{16}$）、面ごとに 2^{-32} で上へ丸めた整数の和、Lean の核での評価（`decide +kernel`）。健全性 `VortexCert.Svortex_le_of_cert`。`VortexCert.certN2`・`certN3`・`certN4`
作用の値・$S_1 = 2$・$\beta > 0.523$	読	本書の検討の数値の記録（Lean の定義から書き起こした台本で、分数で丸めなしに作用を計算。上界の最後の桁を一つ下げると通らないことも確かめた。交わりの β は浮動小数の根の探索）
太い渦の床の系	—	Lean：`TwistBlocks.thick_vortex_floor_two`・`_three`・`_four`、数の不等式 `TwistBlocks.thick_vortex_floor_two_rate_lt`。本体は 21-03

この章で使った語 — 渦の最小作用 $S_{\mathrm{v}}(N, m)$・S_N・捩れた真空・繊維・リンクの欠け・ラベル・望遠鏡の積・Cayley の形・上への丸め・証明書・率の比べ。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：21-06 θ の符号と Polyakov ループの対 — 渦の比 θ が負にならないことと、θ が Polyakov ループの相関を抑えること。

θ の符号と Polyakov ループの対

この章は本書の検討です。

この章で分かること — 横 N・縦 M のトーラスで、M が偶数なら全ての実の β で $Z_1 \le Z_0$、すなわち $\theta_M \ge 0$ であること。同じ鏡映の道具で、向き 3 を一周する二本の Polyakov ループの相関が、距離 $M/2$ では $2\sqrt{\theta}/(1+\theta)$ で、一般の時間差 T では $2\tanh(N^2|\beta|)^{M\min(T,M-T)}$ で抑えられること。どれも Lean で機械検査した、既知の型の評価の形式化です。

前提となる章 — 19-02 捩れ・渦の比・Polyakov ループ、19-03 鏡映、21-02 薄い渦の床、21-03 太い渦の床

先に言うこと — 期待値 $\langle\cdot\rangle_0$ は、背景の捩れ $n_{12}=1$ つき・(3,4) の捩れなしの、有限の格子の Wilson 測度についてのものです。言えるのは横 $N\times N$ の管の中の、エネルギーの線形の**下界**で、N に一様ではありません。格子間隔は固定です。四次元の閉じ込め・面積則・質量ギャップのどれも言っていません。M が奇数の場合は入っていません。

この章の順序

1. 期待値 $\langle\cdot\rangle_0$ と Polyakov ループ
2. 時間の向きの鏡映で格子を二つの半分に割る
3. θ ≥ 0 — 言明と証明
4. 距離 M/2 の Polyakov ループの対と θ
5. 一般の時間差 — 鏡映を繰り返す
6. 寄り道：M・N の偶奇と β の符号の範囲
7. 読み方 — 管の中のエネルギーの線形の下界
8. 言っていないこと

01

期待値 $\langle\cdot\rangle_0$ と Polyakov ループ

格子は横 $(\mathbb{Z}/N)^2$（向き 1・2）、縦 $(\mathbb{Z}/M)^2$（向き 3・4）のトーラスです。定義は 19-02 にあります。背景の捩れ $n_{12}=1$ のもとで、(3,4) の捩れなし・ありの分配関数を Z_0・Z_1 とし、渦の比を $\theta_M=(Z_0-Z_1)/(Z_0+Z_1)$ と書きます（19-02）。

この章の期待値は

$$\langle F\rangle_0=\frac{1}{Z_0}\int F(U)\,w_0(U)\,dU,\qquad w_0(U)=\exp\Big(\beta\sum_p z_p^{(0)}\,\mathrm{Re}\,U_p\Big) \tag{1}$$

です。dU は Haar の積、$z_p^{(0)}$ は背景の捩れ $n_{12}=1$ だけの符号です。**(3,4) の捩れは入っていません**。Lean では重み `wE N M β (fun _ => 1)`、割る数 `ZW N M β true false` です。

Polyakov ループは、横の位置 $b=(x_1,x_2)$・向き 4 の位置 t で、向き 3 を一周するリンクの積の実部です（19-02）。

$$P_b(t)=\mathrm{Re}\prod_{k=0}^{M-1}U_3\big((b),(k,t)\big) \tag{2}$$

四元数の実部は基本表現の $\frac12\,\mathrm{tr}$ で、$|P_b(t)|\le 1$ です。Lean では `HalfSplit.polyLoop`、対の期待値は `PolyakovT.polyExp` です。

初 一本の期待値 $\langle P_b(t)\rangle_0$ は 0 です。$x_3=0$ の向き 3 のリンクを全て -1 倍すると、どの面も反転するリンクを 0 本か 2 本含むので w_0 は変わらず、$P_b(t)$ だけが符号を変えるからです。意味のある量は対の相関 $\langle P_b(0)P_{b'}(T)\rangle_0$ です。

02

時間の向きの鏡映で格子を二つの半分に割る

M が偶数のとき、鏡映 $\Theta:\ x_4\mapsto -x_4$ は二枚の格子点の面 $x_4=0$ と $x_4=M/2$ を止めます。向き 1・2・3 のリンクは位置だけを写し、向き 4 のリンクは向きを逆にして値を逆元にします（鏡映の一般の形は 19-03）。

面が格子点を通るので、面を横切る升はありません。二枚の面の上の升（向き 4 を含まない升）は、上と下の半分に半分ずつ配ります。そうして作った**半分の重み**

$$a_\eta(U)=\exp\Big(\beta\sum_p c_p\,z_p\,\eta_p\,\mathrm{Re}\,U_p\Big),\qquad c_p\in\{1,\tfrac12,0\} \tag{3}$$

（上の半分で 1、面の上で $\frac{1}{2}$、下で 0）は、閉じた上の半分のリンクだけに依ります。そして重み全体が

$$w_\eta(U) = a_{\eta_1}(U)\, a_{\eta_2}(\Theta U) \tag{4}$$

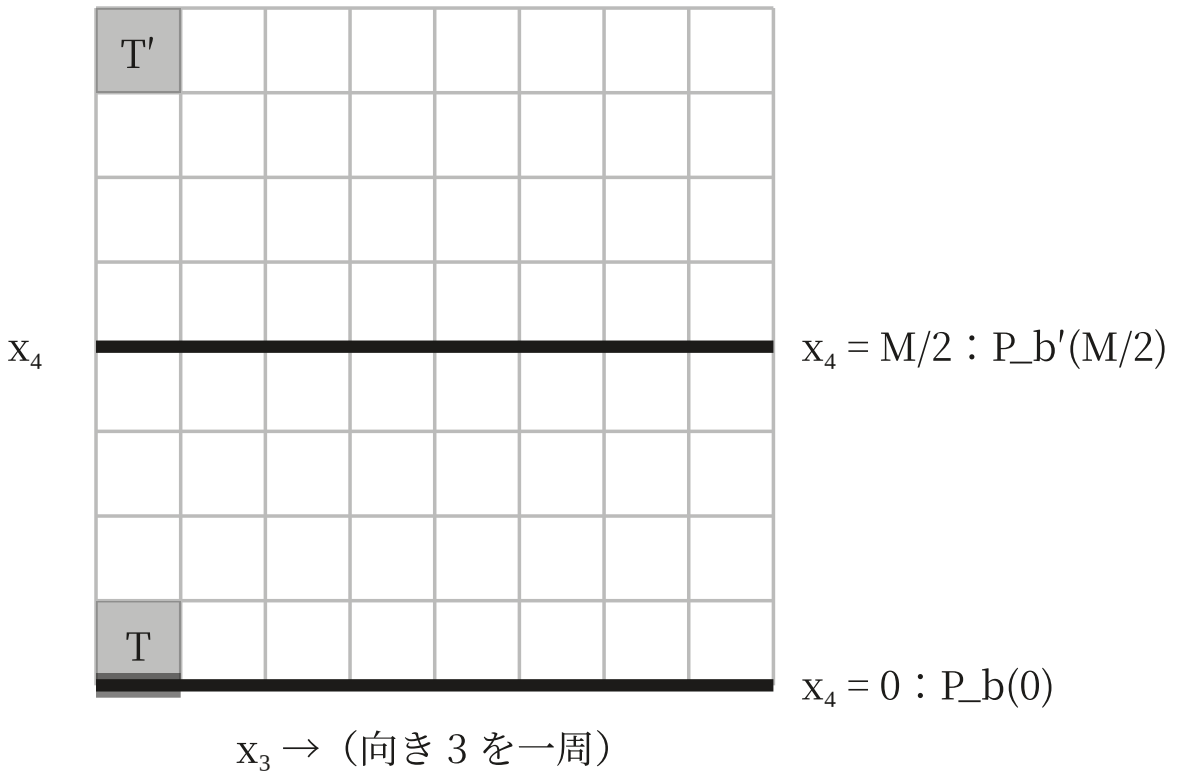
と割れます。ここで η は、上の半分の (3,4) の面の符号を η_1、下の半分を η_2 の鏡像で与えたものです（Lean：`HalfSplit.half_split`）。

Haar の積は鏡映で不変で、閉じた上の半分だけに依る有界可測な g について

$$\int g(\Theta U)\, g(U)\, dU \;\geq\; 0 \tag{5}$$

が成り立ちます（鏡映正値性。Lean：`HalfSplit.half_pairing_nonneg`）。重みは (4) で g の側に吸い込まれるので、β の符号の条件は要りません。[典] この形は Osterwalder–Seiler の鏡映正値性の型で、`HalfSplit.half_pairing_nonneg` はその捩れつきの格子での形式化です（19-03）。

図 1　縦の (3,4) の平面（$M = 8$ の例、横の T_N^2 は省略）。太い横線が鏡映の面 $x_4 = 0$ と $x_4 = M/2$。その上に二本の Polyakov ループが載る。影の升が反転 T（$(0,0)$）と、その鏡像 T'（$(0,-1) = (0, M-1)$）。印のリンクが §04 の符号の反転 c



図は二枚の面と、§03・§04 で使う反転の位置を示すだけで、数値はありません。

03

θ ≥ 0 — 言明と証明

渦の比の符号。 M が偶数なら、全ての実の β と全ての $N \geq 1$ で

$$Z_1 \leq Z_0, \qquad \text{equivalently} \qquad 0 \leq \theta_M(\beta). \tag{6}$$

Lean：`HalfSplit.Z1_le_Z0`（M が偶数、全ての実の β）、`TwistBlocks.theta_nonneg`（同じ範囲で $0 \leq \theta_M$）。

証明。 角の (3,4) の面 $(x_3, x_4) = (0, 0)$ の符号を横の全ての位置で反転したものを T とし、$g = a_1 - a_T$ を (5) に入れます。(4) で展開すると

$$0 \leq \int g(\Theta U) g(U)\, dU = Z[1] - Z[T] - Z[T'] + Z[TT'] \tag{7}$$

です。T' は T の鏡像の位置 $(0, -1)$ の反転、TT' は二枚の反転です。初 分配関数は反転の位置に依らず、反転の積 $\prod \eta$ だけで決まります（反転の位置は、切り口のリンクの符号を変える変数変換で動かせます。Lean：`TwistedWilson.ZEta_flip_any`・`TwistedWilson.ZEta_parity`）。よって $Z[T] = Z[T'] = Z_1$、$Z[TT'] = Z_0$ で、(7) は $0 \leq 2Z_0 - 2Z_1$ です。□

この評価は 太い渦の床 の絶対値を外します。Lean：`TwistBlocks.thick_vortex_floor_signed`（全ての $N \geq 1$）は、任意の $\varepsilon > 0$ について、十分大きい β ごとに十分大きい M で、$M + 1$ が偶数なら

$$0 \leq \theta_{M+1}(\beta) \leq \exp\!\left(-(M+1)^2 e^{-\beta(S_N + \varepsilon)}\right) \tag{8}$$

を言います。β と M の閾は陽でありません。

M が奇数は入っていません。二枚目の面 $x_4 = M/2$ が格子点に来ないからです。しかも M が奇数・$\beta < 0$ では $\theta \geq 0$ は破れえます。読 $N = 1$・$M = 1$・$\beta = -1.5$ で $\theta = -0.055 \pm 0.005$ でした（SU(2) の Monte Carlo、本書の検討の数値の記録）。$\beta \geq 0$ なら転送行列の正値性から偶奇に依らず成り立つ見込みですが、この本では確かめていません。初 なお $\theta_M < 1$ は全ての M で $Z_1 > 0$ から出ます（Lean：`TwistBlocks.theta_lt_one`）。

04

距離 M/2 の Polyakov ループの対と θ

θ による Polyakov ループの対の評価。 M が偶数なら、全ての実の β と全ての横の位置 b, b' で

$$\left|\langle P_b(0)\,P_{b'}(M/2)\rangle_0\right| \;\le\; \frac{2\sqrt{\theta_M}}{1+\theta_M}. \tag{9}$$

Lean：`HalfSplit.polyakov_pair_theta`（M が偶数、全ての実の β）。左辺は (1) の期待値で、割る数は Z_0 です。

θ は流束の自由エネルギー $\Delta F = \ln(Z_0/Z_1)$ から $\theta = \tanh(\Delta F/2)$ で決まる量で（19-02。この本の 26-03 は ΔF を「渦の自由エネルギー」とも呼びます）、(9) はそれが**長い距離のループの相関を上から抑える量**であることを言います。典 捩れた分配関数の比で長いループを抑える評価は、Tomboulis–Yaffe の流束の自由エネルギーの議論の系統に属し、`HalfSplit.polyakov_pair_theta` はその系統の、Polyakov ループの対の $T = M/2$ の形の形式化です（原論文の不等式は Wilson ループについてのもので、本文は未確認）。

道筋。

1. **中心の符号の反転 c。** $(x_3, x_4) = (0,0)$ の向き 3 のリンク（横の N^2 本）を -1 倍します。Haar の積は変わりません。(1,3)・(2,3) の面は反転するリンクを二本含むので変わらず、(3,4) の面では T と T' の二枚だけが符号を変えます（図 1 の印のリンク）。よって $w_0(cU) = w_{TT'}(U)$ です。
2. **ループの偶奇。** $P_b(0)$ は一周の最初のリンクだけが反転して符号を変え、$P_{b'}(M/2)$ は変わりません。積 $\psi = P_b(0)P_{b'}(M/2)$ は $\psi(cU) = -\psi(U)$ なので、$\int \psi w_0 = \frac{1}{2}\int \psi\,(w_0 - w_{TT'})$ です。
3. **和と差に書く。** $a_\pm = a_1 \pm a_T$ とすると、(4) から $w_0 - w_{TT'} = \frac{1}{2}\big[(a_+ \circ \Theta)a_- + (a_- \circ \Theta)a_+\big]$ です。
4. **Cauchy–Schwarz。** ψ は二枚の面の上のリンクだけに依り（図 1）、Θ で変わらず、$|\psi| \le 1$ です。ψ を挟んだ鏡映の対で Cauchy–Schwarz を使い、$\langle a_\pm, a_\pm\rangle = 2(Z_0 \pm Z_1)$ を入れると $|\int \psi w_0| \le \sqrt{Z_0^2 - Z_1^2}$ です（Lean：`HalfSplit.odd_fix_bound`）。
5. **割る。** $\sqrt{Z_0^2 - Z_1^2}/Z_0 = 2\sqrt{\theta}/(1+\theta)$ です初。□

読 強さの目安：$\mathbb{Z}_2$ の部分群・$N = 1$・$M = 2$ の全ての配位の和では (9) は等号です。SU(2) の標本では右辺は左辺の 3〜6 倍でした（本書の検討の数値の記録）。

(9) に床を入れると、ループの相関の床になります。$2\sqrt{\theta}/(1+\theta) \le 2\sqrt{\theta}$ と 薄い渦の床 $\theta \le \tanh(N^2|\beta|)^{M^2}$ から $|\langle P_b(0)P_{b'}(M/2)\rangle_0| \le 2\tanh(N^2|\beta|)^{M^2/2}$（$M$ が偶数、全ての実の β。Lean：`PolyakovT.half_pair_tanh`）。符号つきの床 (8) からは、Lean：`HalfSplit.polyakov_pair_floor`（全ての $N \ge 1$）で、任意の $\varepsilon > 0$ について十分大きい β ごとに十分大きい M で、$M+1$ が偶数なら

$$\left|\langle P_b(0)\,P_{b'}\big(\tfrac{M+1}{2}\big)\rangle_0\right| \;\le\; 2\exp\!\Big(-\tfrac{1}{2}(M+1)^2 e^{-\beta(S_N+\varepsilon)}\Big) \tag{10}$$

（格子は縦 $M+1$）。閾は陽でなく、係数 $e^{-\beta(S_N+\varepsilon)}$ は $\beta\to\infty$ で指数的に小さくなります。

05

一般の時間差 — 鏡映を繰り返す

一般の時間差の Polyakov ループの対。 $M\equiv 0 \pmod 4$ なら、全ての実の β、全ての $0\le T\le M$、全ての b,b' で

$$\left|\langle P_b(0)\,P_{b'}(T)\rangle_0\right| \;\le\; 2\,\tanh(N^2|\beta|)^{\,M\cdot\min(T,\,M-T)}. \tag{11}$$

Lean：`PolyakovT.polyakov_pair_all`（$M\equiv 0 \bmod 4$、全ての実の β）。

典 有限の横断面の管の中での相関の減衰は、Mack–Petkova・Tomboulis–Yaffe の線の既知の型の評価で、`PolyakovT.polyakov_pair_all` はその形式化です。

$T=M/2$ の場合は §04 から出ます。一般の T は、鏡映の面を動かして Cauchy–Schwarz を繰り返し、相関の対数の凸性に持ち込みます。$G_{bb'}(T)=\int P_b(0)P_{b'}(T)\,w_0\,dU$（正規化しない）と書きます。

段 1　並進。 向き 4 の並進 $x_4\mapsto x_4+1$ は Haar の積と w_0 を保つので、$\int P_b(s)P_{b'}(t)\,w_0$ は $t-s$ だけに依ります（Lean：`PolyakovT.corr_shiftZ`）。だから鏡映の面を好きな時刻に置けます。また $G_{bb'}(T)=G_{b'b}(M-T)$ です（`PolyakovT.Gc_swap`）。

段 2　重みつきの鏡映の対。 閉じた上の半分だけに依る有界な F,G について $\langle F,G\rangle_w=\int F(\Theta U)G(U)\,w_0\,dU$ は、(4) で $w_0=a_1\cdot(a_1\circ\Theta)$ と割れるので半正定値で、Cauchy–Schwarz が成り立ちます（全ての実の β。Lean：`PolyakovT.wpair_nonneg`・`PolyakovT.wpair_cs`）。

段 3　偶数の隔たりの中点の凸性。 $F=P_b(u)$、$G=P_{b'}(v)$ と取り、$P_b(u)\circ\Theta=P_b(-u)$ と並進を使うと、$2u,2v\le M$ で

$$G_{bb'}(u+v)^2 \;\le\; G_{bb}(2u)\,G_{b'b'}(2v), \qquad G_{bb}(2u)\ge 0 \tag{12}$$

です（Lean：`PolyakovT.cs_even`、非負の側は `PolyakovT.Gc_even_nonneg`）。

段 4　弦の不等式。 初 $g\ge 0$ が $g(k)^2\le g(k-1)g(k+1)$（$1\le k\le m-1$）を満たせば $g(k)^m\le g(0)^{m-k}g(m)^k$ です（Lean：`LogChord.chord`）。これを $g(k)=G_{bb}(2k)$、$m=M/4$ に使うと、$T=2k\le M/2$ で $G(T)$ が $G(0)\le Z_0$ と $G(M/2)$ の間の重みつきの幾何平均で抑えられます。

段 5　端を入れる。 $G(M/2)$ は §04 と薄い渦の床で $2\,t^{M\cdot M/2}Z_0$（$t=\tanh(N^2|\beta|)$）以下です（`PolyakovT.half_pair_tanh`）。偶数の $T\le M/2$ で $b=b'$ の場合はこれで (11) になります。$b\neq b'$ は (12) を $u=v=T/2$ で使い、$G_{bb'}(T)^2\le G_{bb}(T)G_{b'b'}(T)$ に戻します。奇数の $T<M/2$ は、$M/2$ が偶数なので $T+1\le M/2$ で、(12) を $u=(T-1)/2$、$v=(T+1)/2$ で使います。$T>M/2$ は段 1 の対称で戻します。

定数 2 は $\beta\cdot N\cdot M\cdot T$ に依りません。転送行列の跡と Hölder の不等式を使えば θ の形 $(\theta^{T/M}+\theta^{1-T/M})/(1+\theta)$ が見込まれますが、Lean にはありません。(11) はそれより、定数 2 の分と、θ を薄い渦の床の t^{M^2} で置き換えた分の二つだけ弱い形です。

寄り道：M・N の偶奇と β の符号の範囲

飛ばしてよい。格子点の面の鏡映だけでは、$M\equiv 2\pmod 4$ で奇数の隔たりが入りません。リンクの真ん中を通る面の鏡映を足すと入りますが、その面は升を横切るので $\beta\ge 0$ が要ります（Lean：`PolyakovT.link_rp`、M が偶数 ≥ 4、$\beta\ge 0$）。N と M がともに偶数なら、千鳥の符号の変数変換で $\beta\mapsto-\beta$ としても対の期待値は変わりません（`PolyakovT.polyExp_neg`）。

Lean の宣言	M	N	β
`PolyakovT.polyakov_pair_all`	$M\equiv 0 \bmod 4$	任意	全ての実数
`PolyakovT.polyakov_pair_evenM`	偶数、$M\ge 4$	任意	$\beta\ge 0$
`PolyakovT.polyakov_pair_evenNM`	偶数、$M\ge 4$	偶数	全ての実数

結論はどれも (11) と同じ形です。入っていないのは、M が奇数の場合と、$M\equiv 2\pmod 4$ かつ N が奇数かつ $\beta<0$ の場合です。

06

読み方 — 管の中のエネルギーの線形の下界

$V(T)=-\frac{1}{M}\ln|\langle P(0)P(T)\rangle_0|$ と置くと、(11) は

$$V(T)\ \ge\ \sigma_0\cdot\min(T,M-T)-\frac{\ln 2}{M},\qquad \sigma_0=-\ln\tanh(N^2|\beta|)\tag{13}$$

です。Polyakov ループの対は、向き 3 を時間と見たときの静的な電荷の対で、$V(T)$ は対を距離 T に離すエネルギーに当たります。(13) は、**横 $N\times N$ の管の中での、エネルギーの線形の下界**です。

- **下界だけです。** V が線形であることも、上界も言っていません。
- **N に一様ではありません。** $\sigma_0\approx 2e^{-2N^2|\beta|}$ は $N\to\infty$ で 0 に行きます。管が太くなるほど下界は弱くなります。

- **格子間隔は固定です。** N を止めた系は実質二次元で、典 二次元の格子ゲージ理論では全ての β で面積則が出るのが普通です。四次元の閉じ込め・面積則・質量ギャップの主張ではありません。

自明でない範囲の目安。 $|\langle P(0)P(T)\rangle_0| \le \langle P^2\rangle_0$ は自明です。読 $\langle P^2\rangle_0$ は 0.25〜0.3 ほどです（$\beta=0$ で $1/4$）。(11) の右辺が $1/4$ を下回るのに要る指数 $X = M\min(T, M-T)$ の最小値は次のとおりです読 。

N	β = 0.1	0.3	0.5	1	2
1	1	2	3	8	57
2	3	12	57	3100	$9.2\cdot10^{6}$
3	7	231	8425	$6.8\cdot10^{7}$	$4.48\cdot10^{15}$

読 $X \le M^2/2$（等号は $T = M/2$）なので、たとえば $N=2$・$\beta=1$ では $X \ge 3100$ から $M \ge 78.74$ が要り、$M \equiv 0 \pmod 4$ では実際は $M \ge 80$、しかも T が $M/2$ の近くでだけ右辺が $1/4$ を下回ります。大きい β と大きい N では (11) は緩く、その側は (10) のような太い渦の床の形が受け持ちます。

07

言っていないこと

- M が奇数の $\theta \ge 0$、M が奇数の Polyakov ループの対。
- Hölder の形そのもの（(11) は定数 2 と、θ を t^{M^2} に替えた分だけ弱い）。
- $V(T)$ の上界、V が線形であること、張力の値。
- 横の大きさ N に一様な評価。帯（渦の比 θ が箱の面積の指数で小さくなること、すなわち $-\ln\theta$（板の張力に面積を掛けた量に当たる）が面積に比例して増えることを、横と縦の大きさと結合を一緒に動かして一つの定数で言う言明。19-07）には届きません。この章の評価は格子間隔と横の大きさを止めた形です（21-08）。
- (8)・(10) の β・M の閾の値。
- 連続極限、四次元の閉じ込め・面積則・質量ギャップ。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
Lean `HalfSplit.Z1_le_Z0`・`TwistBlocks.theta_nonneg`：M が偶数、全ての実の β で $0 \le \theta_M$	M が奇数（読 $\beta<0$ で破れる例がある）
Lean `TwistBlocks.thick_vortex_floor_signed`：大きい β・大きい M（$M+1$ が偶数）で $0 \le \theta_{M+1} \le \exp(-(M+1)^2 e^{-\beta(S_N+\varepsilon)})$	閾の値
Lean `HalfSplit.polyakov_pair_theta`：M が偶数、全ての実の β で $\lvert\langle P_b(0)P_{b'}(M/2)\rangle_0\rvert \le 2\sqrt{\theta}/(1+\theta)$	距離 $M/2$ 以外（それは次の行）
Lean `PolyakovT.polyakov_pair_all`：$M \equiv 0 \bmod 4$、全ての実の β、$0 \le T \le M$ で $\lvert\langle P_b(0)P_{b'}(T)\rangle_0\rvert \le 2\tanh(N^2\lvert\beta\rvert)^{M\min(T,M-T)}$。`_evenM`（$M$ 偶数 ≥ 4、$\beta \ge 0$）・`_evenNM`（N, M 偶数、全ての β）	Hölder の形（定数 2 と $\theta \to t^{M^2}$ の分だけ弱い）。M が奇数。N に一様な張力
Lean `HalfSplit.polyakov_pair_floor`：太い渦の床と合わせた距離 $(M+1)/2$ の床	閾の値。四次元の閉じ込め
Lean `PolyakovT.half_pair_tanh`：M が偶数（$M=2$ を含む）、全ての実の β で $\lvert\langle P_b(0)P_{b'}(M/2)\rangle_0\rvert \le 2t^{M\cdot M/2}$	$M \equiv 2 \bmod 4$ の他の T（$M \ge 4$ なら `_evenM`）
読 自明でない範囲（$N=2$・$\beta=1$ で $M \ge 80$、T が $M/2$ の近く）	—

出典と再現

もの	種別	出典・道具
鏡映正値性（格子点の面）	典	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471（書誌は 19-03）。Lean：`HalfSplit.half_split`・`HalfSplit.half_pairing_nonneg`
流束の自由エネルギーで長いループを抑える議論の系統	典	E. T. Tomboulis, L. G. Yaffe, Commun. Math. Phys. 100 (1985) 313（本文は未確認。書誌は 25-04 と同じ）
有限の横断面での渦と閉じ込めの議論の系統	典	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 125 (1980) 117（本文は未確認。書誌は 25-01 と同じ）
二次元の格子ゲージ理論の面積則	典	A. A. Migdal, Sov. Phys. JETP 42 (1975) 413（書誌のみ）
捩れた境界条件と流束の自由エネルギー	典	G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141（25-01）
$\theta \ge 0$、距離 M/2 の対（§03・§04 の道筋）	初	本文。Lean：`PolyakovT.half_pair_tanh`・`TwistBlocks.theta_lt_one`・`HalfSplit.Z1_le_Z0`・`TwistBlocks.theta_nonneg`・`HalfSplit.odd_fix_bound`・`HalfSplit.polyakov_pair_theta`・`TwistBlocks.thick_vortex_floor_signed`・`HalfSplit.polyakov_pair_floor`

もの	種別	出典・道具
一般の時間差（§05 の段 1〜5）	初	本文。Lean：`PolyakovT.cs_even`・`PolyakovT.Gc_even_nonneg`・`LogChord.chord`・`PolyakovT.polyakov_pair_all`・`PolyakovT.link_rp`・`PolyakovT.polyakov_pair_evenM`・`PolyakovT.polyExp_neg`・`PolyakovT.polyakov_pair_evenNM`
M が奇数で $\theta < 0$ の例、強さの比、自明でない範囲の表	読	本書の検討の数値の記録（SU(2) の Monte Carlo と一様な標本の重みつき平均、$\mathbb{Z}_2$ の全ての配位の和、$2t^X < 1/4$ の浮動小数の計算）

この章で使った語 — 期待値 $\langle\cdot\rangle_0$・Polyakov ループ・渦の比 θ_M・鏡映正値性・半分の重み・中心の符号の反転・偶数の隔たりの中点の凸性・弦の不等式・千鳥の符号・管の中のエネルギーの線形の下界。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：21-07 渦の比の連続・極限・合わせ — 格子を止めたときの渦の比の、結合についての連続と極限、決めた値への合わせです。

渦の比の連続・極限・合わせ

この章は本書の検討です。

この章で分かること — 横 N・縦 M のトーラスの SU(2) Wilson 測度の渦の比 $\theta_{N,M}(\beta) = (Z_0 - Z_1)/(Z_0 + Z_1)$ について、格子を止めたときに Lean で機械検査されている五つのことを読みます。(1) $\beta \mapsto \theta$ は連続で $\theta(0) = 0$。(2) 二つの捩れを持つ箱には、全ての面のホロノミーが捩れの符号に等しい配位（平らな配位）が無い。(3) その箱の欠け（作用の損）には正の下界があり、対称な箱では N に依らず $1/2$ 以上。(4) $\beta \to \infty$ で $\theta \to 1$、流束の自由エネルギーの傾きは最小の欠けに収束する。(5) $0 \le \kappa_0 < 1$ の全ての κ_0 に、$\theta(\beta) = \kappa_0$ となる $\beta \ge 0$ が在り、解の中に最大のものが在る（合わせ）。

前提となる章 — 19-02 横 N・縦 M のトーラス・捩れの符号・渦の比・捩れた真空、21-02 薄い渦の床。導入は 25-01。

先に言うこと — 格子間隔は 1 に固定で、連続極限については何も言いません。どの定理も**格子の大きさ N, M を止めた**言明です。$\theta \to 1$ の速さ、欠けの下界から来る評価の定数、合わせの解 β^* は N, M に依り、N と β を同時に動かす列（合わせた列）については何も言いません。θ の単調性、合わせの解の一意性、β^* の κ_0 についての連続性、$\kappa_0 = 0$ の最大の解が 0 であることも言いません。最小の欠けの真の値と、連続の理論の値との比べも言いません。どれも、't Hooft の捩れた箱の既知の描像の格子の形の形式化です[典]。

この章の順序

1. 設定 — 渦の比・流束の自由エネルギー・欠け — 二つの捩れの背景と、その最小の欠け
2. 言明 — 連続と β = 0 の値 — θ(0) = 0
3. 言明 — 捩れた箱に平らな配位は無い — 片方の捩れでは在る
4. 言明 — 欠けの下界 — $2N^2M^2/(N^2+M^2)^2$、対称な箱で 1/2
5. 言明 — β → ∞ で θ → 1 — 下界の形と、自由エネルギーの傾き
6. 言明 — 合わせの最大の解 — 全ての $\kappa_0 \in [0, 1)$、右からの下の包絡

7. 証明の道筋 — 離散の Stokes、四元数の反可換、開集合の Haar の正値、中間値

8. 問いとして — 格子を倍にしたときの写り方 — 定理ではないこと

9. 言えていること・言えていないこと

札 — 初・典・機・読・仮・Lean は本全体の札です（読 は数値の読み、Lean は本書の Lean の定理）。

01

設定 — 渦の比・流束の自由エネルギー・欠け

格子は横 N（向き 1・2）、縦 M（向き 3・4）のトーラス $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$（$N, M \geq 1$）、重みは $e^{\beta \sum_p z_p \operatorname{Re} U_p}$、基準の測度は正規化した Haar の積です（19-02）。背景の捩れ $n_{12} = 1$ のもとで、縦の捩れ n_{34} の無い分配関数と在る分配関数を

$$Z_0 = Z_{N,M}(\beta; 1, 0), \qquad Z_1 = Z_{N,M}(\beta; 1, 1) \tag{1}$$

とし、渦の比と流束の自由エネルギーを

$$\theta = \theta_{N,M}(\beta) = \frac{Z_0 - Z_1}{Z_0 + Z_1}, \qquad \Delta F = \ln \frac{Z_0}{Z_1} = \ln \frac{1+\theta}{1-\theta} \tag{2}$$

と書きます（19-02。右の等式は Lean `ThetaLimit.phi_theta_eq`）。Lean：`TwistBlocks.thetaM N M β`、Z_0・Z_1 は `ZW N M β true false`・`ZW N M β true true`。この章では $\beta \geq 0$ を主に扱います。

欠け。二つの捩れ $(n_{12}, n_{34}) = (1, 1)$ の背景で、配位 ω の欠けを

$$D(\omega) := \sum_p \big(1 - z_p \operatorname{Re} U_p(\omega)\big) \;\geq 0 \tag{3}$$

とします（z_p はこの背景の捩れの符号）。作用の最大値（面の数）から実際の作用までの損です。$D(\omega) = 0$ は全ての面で $U_p = z_p$、つまり捩れに合った平らな配位です。最小の欠けを

$$D_{\min}(N, M) := \inf_{\omega} D(\omega) \tag{4}$$

と書きます。Lean：`TwistFlat.defect11`・`ThetaLimit.Smin`。

注意。$D_{\min}$ は、捩れた箱の全体での最小の欠けです。渦の最小作用 S_N（19-02・21-05。一辺 m の塊の縁を捩れた真空に止めた量）とは別の量です。

02

言明 — 連続と β = 0 の値

言明（渦の比の連続）

$N, M \geq 1$ とします。$\beta \mapsto Z_{N,M}(\beta; n_{12}, n_{34})$ は実数の全体で連続で、$\beta \mapsto \theta_{N,M}(\beta)$ も連続です。$\beta = 0$ では $Z = 1$、$\theta = 0$ です。

Lean 有界な指数の積分の連続性。Lean：`ThetaTuning.ZW_continuous`・`thetaM_continuous`・`ZW_zero`・`thetaM_zero`（仮定は $N, M \geq 1$ だけ）。

証明は優収束です。$|\beta| \leq |\beta_0| + 1$ の範囲で、被積分関数は $\exp((|\beta_0| + 1) \cdot \text{面の数})$ で押さえられます。分母 $Z_0 + Z_1$ は正なので θ も連続です。$\beta = 0$ では基準の測度が確率測度なので $Z = 1$ です。

値の範囲は $-1 < \theta \leq 1$ で（`ThetaLimit.theta_gt_neg_one`・`theta_le_one`）、縦 M が偶数なら $\theta \geq 0$ です（21-06、`TwistBlocks.theta_nonneg`）。$\beta > 0$ で $\theta > 0$ は Lean にありません。

03

言明 — 捩れた箱に平らな配位は無い

言明（二つの捩れを持つ箱に平らな配位は無い）

$N, M \geq 1$（$N = 1$・$M = 1$ の退化した格子を含む）とします。背景 $(n_{12}, n_{34}) = (1, 1)$ では、全ての面で $z_p \operatorname{Re} U_p = 1$ となる SU(2) の配位は在りません。

Lean 「向き 1・2 と 3・4 に捩れを一つずつ持つ箱に平らな接続は無い」という既知の型（'t Hooft）の格子の形。Lean：`TwistFlat.no_flat_twist11`（仮定なし）。

片方の捩れだけの背景 $(1, 0)$ では、同じ形の言明は偽です。捩れた真空（19-02：$x_1 = 0$ の向き 1 のリンクに単位の四元数 $\mathbf{i}$、$x_2 = 0$ の向き 2 のリンクに $\mathbf{j}$、他は 1）が欠け 0 の配位です（`ThetaLimit.flat_exists_10`）。この対照があるので、言明は捩れの符号の置き方のせいで自明に立つものではありません。

意味。二つの捩れを持つ箱では、捩れた分配関数 Z_1 に寄与する配位は全て正の作用の損を払います。一方 Z_0（片方の捩れ）には損 0 の配位があります。この差が、$\beta \to \infty$ で $Z_1/Z_0 \to 0$、すなわち $\theta \to 1$ の元です（§05）。

04

言明 — 欠けの下界

言明（最小の欠けは正で、達せられる）

$N, M \geq 1$ とします。ある配位 $\omega^\star$ があって $0 < D(\omega^\star) \leq D(\omega)$（全ての ω）。したがって $D_{\min}(N, M) > 0$。

Lean コンパクト性と §03 から。Lean：`TwistFlat.defect11_floor`・`minDefect11_pos`（仮定なし）。

言明（欠けの一様な下界）

$N, M \geq 1$ の全てと全ての配位 ω で

$$D(\omega) \;\geq\; \frac{2N^2M^2}{(N^2+M^2)^2}. \tag{5}$$

とくに対称な箱 $N = M$ では $D(\omega) \geq 1/2$ で、$D_{\min}(N, N) \geq 1/2$ が N に依らず成り立ちます。

Lean 捩れた箱の作用の下界という既知の型の、格子の上の粗い一様な版。Lean：`TwistFloor.defect11_ge_two`・`defect11_sym_half`・`defect11_uniform_half`・`Smin_sym_half`（仮定なし）。

片方の捩れの背景では、同じ形の正の下界は在りません（`TwistFloor.no_floor_10`）。

(5) の芯は四元数の不等式です。単位の四元数 a, b, c, d について

$$\|ab + ba\| + \|cd + dc\| + \|ac - ca\| + \|bc - cb\| \;\geq\; 2 \tag{6}$$

（Lean `QuadFloor.quad_floor_two`）。左辺は「a, b が反可換、c, d が反可換、c が a とも b とも可換」という四つの関係の崩れの和で、SU(2) ではこの四つは両立しません。定数 2 は $(a, b, c, d) = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, 1, \mathbf{k})$ などで達せられ、これ以上は上がりません。

数で見る読。$N=M=1$ の欠けの最小は数値で 2.000、$N=M=2$・4 では冷却で見つけた配位の欠けが 7.84・9.80 で、これらは最小の上界です。下界 $1/2$ とはまだ 16〜20 倍の開きがあります。連続の理論で対応する区画の作用の下限は、自己双対の評価と分数の位相数 $1/2$ から $\beta = 4/g^2$ の単位で $\pi^2 \approx 9.87$ です典。$D_{\min}(N,N)$ が N とともにどう変わるかは分かっていません。

05

言明 — β → ∞ で θ → 1

言明（渦の比の極限）

$N, M \geq 1$ を止めると、$\beta \to \infty$ で $\theta_{N,M}(\beta) \to 1$。さらに $\beta \geq 0$ の全てで

$$\theta_{N,M}(\beta) \;\geq\; 1 - \frac{2}{v}\, e^{-D_{\min}\beta/2} \tag{7}$$

で、$v > 0$ は片方の捩れの背景で捩れた真空を含むある開集合の Haar の体積です（β に依らず、N, M に依り、陽な値は無い）。

Lean 欠けの下界と開集合の Haar の正値から。Lean：`ThetaLimit.tendsto_theta_one`・`theta_lower`・`Z11_le`・`Z10_ge`・`volV_pos`・`ratio_tendsto_zero`。

言明（流束の自由エネルギーの傾き）

$N, M \geq 1$ を止めると

$$\frac{\Delta F}{\beta} = \frac{1}{\beta} \ln \frac{Z_0}{Z_1} \;\longrightarrow\; D_{\min}(N,M) \qquad (\beta \to \infty). \tag{8}$$

対称な箱では、この極限は N に依らず $1/2$ 以上です。

Lean 同じ部品の両側の評価。Lean：`ThetaLimit.tendsto_logratio_div`、`TwistFloor.logratio_limit_half`。

意味。格子を止めて結合を弱くしていくと、二つの捩れの区画は欠けの分だけ指数的に重みを失い、渦の比は 1 に近づきます。その指数の傾きがちょうど最小の欠けです。これは格子を止めた $\beta \to \infty$ で、連続極限（κ_0 を止めて格子を細かくする向き）ではありません。

06

言明 — 合わせの最大の解

言明（渦の比の合わせ）

$N, M \geq 1$ を止めます。$0 \leq \kappa_0 < 1$ の全ての κ_0 について、$\theta_{N,M}(\beta) = \kappa_0$ となる $\beta \geq 0$ が在り、その解の集合は $\beta \geq 0$ の中に最大の元 $\beta^*(\kappa_0; N, M)$ を持ちます。$\kappa_0 > 0$ なら $\beta^* > 0$ です。

Lean 連続と中間値の定理とコンパクト性。Lean：`ThetaLimit.tuning_all`・`tuning_all_pos`（仮定は $0 \leq \kappa_0 < 1$ だけ）。仮定が満たせる例：$N = M = 2$、$\kappa_0 = 1/2$ に正の解（`ThetaLimit.sanity_half`）。

弱い形として、$0 \leq \kappa_0 \leq \theta(\beta_1)$ なら $[0, \beta_1]$ に解と最大の解が在る、という言明もあります（`ThetaTuning.tuning_exists`・`tuning_max_exists`）。§05 で全ての $\kappa_0 < 1$ にその β_1 が取れるので、上の全体の形になります（`ThetaLimit.exists_theta_gt`）。

右からの下の包絡。 θ が β について単調かどうかは分かっていません。そこで $\underline{\theta}(\beta) := \inf_{\beta' \geq \beta} \theta(\beta')$ を使います。$\underline{\theta}$ は単調に増え、最大の解 β^* で $\underline{\theta}(\beta^*) = \kappa_0$、$\beta > \beta^*$ では $\underline{\theta}(\beta) > \kappa_0$ で、β^* は $\underline{\theta} = \kappa_0$ の解の中でも最大です（`ThetaLimit.thetaLow`・`thetaLow_mono`・`envelope_max_sol`）。単調でない θ でも、最大の解はこの単調な関数で特徴づけられます。$\underline{\theta}$ の連続性は言いません。

何のための合わせか。 示すべき言明（19-07）の合わせは、細かくなる格子の列で裸の結合をどう決めるかの言明です。この章の合わせは、その候補の一つ「各格子で渦の比を決めた値 κ_0 に合わせる」の、各格子での存在の部分です。列として何が成り立つか（β^* の N への依り方）は言いません。

07

証明の道筋

平らな配位が無いこと（§03）。 二段です。

1. **離散の Stokes。** 加法群 G の上の四元数の場 A, B が、各点で交換の関係 $A(x)B(x+e) = s(x)\,B(x)A(x+f)$（$s(x)$ は符号）を満たし、$Le = 0$、$L'f = 0$ とします。e の向きに一周する線の積と f の向きに一周する線の積は、切り口の全ての s の積を掛けて交換します（Lean `FlatStokes.torus_commutator`）。一列ずつ、次に一枚ずつの二段の帰納で示されます。欠け 0 の配位では、面ごとに $U_p = z_p$ がこの交換の関係そのものです。

2. **四元数の矛盾**。原点を通る四本の周回 W_1, W_2（横）、W_3, W_4（縦）について、切り口の符号の積は、向き 1・2 の切り口と 3・4 の切り口で -1、向き 1・3 と 2・3 の切り口で $+1$ です。よって $W_1 W_2 = -W_2 W_1$、$W_3 W_4 = -W_4 W_3$、W_3 は W_1 とも W_2 とも可換です。反可換な単位の四元数の対 (W_1, W_2) と可換なのは実数だけなので $W_3 = \pm 1$、すると $W_3 W_4 = -W_4 W_3$ と矛盾します（`FlatStokes.no_twisted_quadruple`）。使う向きの対は四つだけです。

欠けの下界（§04）。(6) を量の形に広げます。場が単位なら、交換の関係の崩れが各点で $d(x)$ 以下のとき、周回の交換の崩れは切り口の d の和以下です（`FlatStokes.approx_torus_commutator`。一枚剥がすごとに誤差が一つ増える）。面の崩れは $\|U_p - z_p\| = \sqrt{2(1 - z_p \operatorname{Re} U_p)}$ です。各基点の四つの周回に (6) を使い、基点で和を取り、並進で数え直して Cauchy–Schwarz を二度使うと (5) です。$N \neq M$ では向き 1・2 の切り口（N^2 枚）と 3・4 の切り口（M^2 枚）の重みが揃わず、比 $\rho = N/M$ について $2/(\rho + 1/\rho)^2$ になります。$\rho \to 0$ や $\rho \to \infty$ で 0 に近づくのは方法の弱さだと見ています[仮]。根拠は、$N = 1$ の退化した格子で $M = 1, 2, 3$ の欠けの最小が数値で 2.000 のまま下がらない、という小さい例だけです[読]。

$\theta \to 1$（§05）。$\beta \geq 0$ で、作用 = 面の数 $-D$ なので $Z_1 \leq e^{\beta(|P| - D_{\min})}$（$|P|$ は面の数）。一方、片方の捩れの背景の作用は連続で、捩れた真空で最大値 $|P|$ をとるので、作用が $|P| - D_{\min}/2$ を越える配位の集合は捩れた真空を含む開集合です。Haar の積は空でない開集合に正の重みを置くので、その体積 v は正で、$Z_0 \geq v\, e^{\beta(|P| - D_{\min}/2)}$ です。比をとって $Z_1/Z_0 \leq v^{-1} e^{-D_{\min}\beta/2}$、$\theta = 1 - 2Z_1/(Z_0 + Z_1) \geq 1 - 2Z_1/Z_0$ で (7) です。(8) は同じ部品を、最小点のまわりの開集合で上下から使います。Laplace の型の精密な評価は要りません。

合わせ（§06）。$\theta(0) = 0$、θ は連続、$\theta \to 1$ なので、中間値の定理で解が在ります。解の集合は閉で、ある b_0 より先には解が無い（$\theta > \kappa_0$）ので、有界な閉集合として最大の元を持ちます。

08

問いとして — 格子を倍にしたときの写り方

以下は定理ではなく、この章の定理の先に在る問いです。

- **倍化の写り方**。辺 N の対称な箱で $\theta = \kappa_0$ に合わせた結合（最大の解 $\beta^*(\kappa_0; N)$）で、辺 $2N$ の箱の渦の比を測ると、値 $\Sigma(\kappa_0; N) := \theta_{2N}(\beta^*(\kappa_0; N))$ が決まります。$N \to \infty$ で $\Sigma(\cdot; N)$ が一つの関数に近づくか、近づくならその関数が 0 と 1 の間でどう振る舞うかは、問いのままです。二次元の SU(2) では、連続の側の式で対応する関数が書け、小さい κ_0 で

κ_0^4 のように振る舞います読 （Bessel の係数を使った式と数値。証明は置きません）。四次元の小さい格子のモンテカルロの数は誤差が大きく、何かを言える段にありません。

- **格子を止めた向きの限り**。§05 から言えるのは、格子を止めた $\beta \to \infty$ での ΔF の傾きが $D_{\min}(N,N)$ で、それが $1/2$ 以上であることまでです。$D_{\min}(N,N)$ と $D_{\min}(2N,2N)$ が違えば、格子を止めた形で $\Delta F_N - \Delta F_{2N}$ を一様に押さえる言明は立ちません。等しくても、β について一次より遅い項の比べが残ります。冷却の数はどれも上界なので、違うかどうかは分かっていません。
- **帯との関係**。帯の言明（19-07、正しい形は 26-01）は、渦の比が縦の面積の指数で小さくなることを、格子間隔と箱の大きさに一様に言うものです。この章の定理はどれも格子を止めた言明で、帯の言明には届きません。

09

言えていること・言えていないこと

- **格子を止めた言明**。v・$D_{\min}$・β^*・(7) の収束の速さは N, M に依ります。N と β を同時に動かす列で θ がどうなるかは言いません。
- **θ の形**。単調性、$\beta > 0$ での $\theta > 0$、合わせの解の一意性、β^* の κ_0 についての連続性、$\kappa_0 = 0$ の最大の解が 0 であること、は言いません。
- **欠けの値**。$D_{\min}$ の真の値、π^2 との比べ、N への依り方は言いません。下界 $1/2$ は粗い一様な版です。$N \neq M$ の下界は縦横の比が偏ると 0 に近づきます。
- **帯にも質量ギャップにも届かない**。格子間隔は固定で、連続極限は扱いません。
- **新しい結果ではありません**。捩れた箱に平らな接続が無いこと、その作用の下界、渦の自由エネルギーの弱結合での振る舞いは既知の描像で、この章はその格子の上の形式化です。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
Lean 連続と $\theta(0) = 0$、$-1 < \theta \leq 1$。Lean `ThetaTuning.ZW_continuous`・`thetaM_continuous`・`ZW_zero`・`thetaM_zero`、`ThetaLimit.theta_gt_neg_one`・`theta_le_one`	単調性、$\beta > 0$ で $\theta > 0$
Lean 背景 $(1,1)$ に平らな配位は無い（全ての $N, M \geq 1$、仮定なし）。Lean `TwistFlat.no_flat_twist11`。対照 `ThetaLimit.flat_exists_10`	—

言えている	言えていない
Lean 欠けの下界 $2N^2M^2/(N^2+M^2)^2$、対称な箱で $1/2$。最小は正で達せられる。Lean `TwistFloor.defect11_ge_two`・`defect11_sym_half`・`defect11_uniform_half`・`Smin_sym_half`、`TwistFlat.defect11_floor`・`minDefect11_pos`、部品 `QuadFloor.quad_floor_two`・`FlatStokes.approx_torus_commutator`	$D_{\min}$ の真の値と N への依り方、π^2 との比べ
Lean $\theta \to 1$、下界 (7)、$\Delta F/\beta \to D_{\min}$（対称な箱で極限 $\geq 1/2$）。Lean `ThetaLimit.tendsto_theta_one`・`theta_lower`・`tendsto_logratio_div`、`TwistFloor.logratio_limit_half`	速さが N に一様なこと、有限の β での一様な評価
Lean 全ての $\kappa_0 \in [0,1)$ に最大の解 β^*、$\kappa_0 > 0$ で $\beta^* > 0$、右からの下の包絡による特徴づけ。Lean `ThetaLimit.tuning_all`・`tuning_all_pos`・`envelope_max_sol`	一意性、κ_0 についての連続、β^* の N への依り方、合わせた列の性質
読 欠けの最小の数値（2.000、上界 7.84・9.80）、二次元の倍化の関数の振る舞い	上界・下界の証明ではない。四次元の倍化の関数

出典と再現

もの	種別	出典・道具
捩れた境界条件、捩れた箱の平らな接続と作用の下界	典	G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141。G. 't Hooft, Commun. Math. Phys. 81 (1981) 267（書誌のみ、本文は未確認）。導入は 25-01
§02 の連続と合わせの弱い形	Lean	`ThetaTuning.ZW_continuous`・`thetaM_continuous`・`ZW_zero`・`thetaM_zero`・`tuning_exists`・`tuning_max_exists`
§03〜§06 の言明と部品	Lean	`TwistFlat.no_flat_twist11`・`defect11`・`defect11_floor`・`minDefect11_pos`、`FlatStokes.torus_commutator`・`no_twisted_quadruple`・`approx_torus_commutator`、`QuadFloor.quad_floor_two`、`TwistFloor.defect11_ge_two`・`defect11_sym_half`・`defect11_uniform_half`・`Smin_sym_half`・`logratio_limit_half`・`no_floor_10`、`ThetaLimit.Smin`・`Z11_le`・`Z10_ge`・`volV_pos`・`theta_lower`・`tendsto_theta_one`・`exists_theta_gt`・`tuning_all`・`tuning_all_pos`・`sanity_half`・`ratio_tendsto_zero`・`flat_exists_10`・`phi_theta_eq`・`tendsto_logratio_div`・`thetaLow`・`thetaLow_mono`・`envelope_max_sol`。sorry 0、公理は標準の三つ、核の再検査で確認、言明は源の字句で確かめた
$\theta \geq 0$（M 偶数）	Lean	`TwistBlocks.theta_nonneg`（21-06）

もの	種別	出典・道具
欠けの最小の数値・冷却の上界・二次元の倍化の関数	読	本書の検討の数値の記録（四元数の最小化、冷却、Bessel の係数の式の数値。冷却の値は上界）

この章で使った語 — 渦の比・流束の自由エネルギー・'t Hooft の捩れ・欠け・平らな配位・捩れた真空・離散の Stokes・反可換・開集合の Haar の正値・合わせ・最大の解・右からの下の包絡。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：21-08 この部が言えていること・言えていないこと — 第 21 部の定理を一つの表に並べます。強結合の窓で横の大きさに依らない率の渦の床（前の因子 N^2 は残る）は 20-06 にあります。

この部が言えていること・言えていないこと

この章は本書の検討です。§01 の表は第 21 部の定理の一覧です。

この章で分かること — 第 21 部の定理を、範囲・言っていないこと・Lean の宣言とともに一つの表で見ます。そのあと、この部の床が帯からどれだけ離れているかを短く見ます。

前提となる章 — 21-00 入口 と第 21 部の各章。対象の定義は 19-02

先に言うこと — この部の定理は、一つ目の抽象の含意を除いて全て、横 N・縦 M の有限の格子の上の、格子間隔を固定した等式・不等式です。強結合の窓の中では、率が横の大きさに依らない形が在ります（前の因子＝横の面積は残ります。20-06）。窓の外では、この部の床（θ の上界）の率はどれも横の大きさ N に一様ではありません。21-07 の欠けの下界（対称な箱で、横の大きさに依らず 1/2）は、床とは逆向き（θ の下界の側）の言明です。連続極限・四次元の閉じ込め・質量ギャップについては何も言いません。

この章の順序

1. 定理の一覧 — 範囲と言っていないこと
2. 何が横の大きさ N に依るか
3. 床から帯までの距離

01

定理の一覧 — 範囲と言っていないこと

対象は全て横 $(\mathbb{Z}/N)^2$・縦 $(\mathbb{Z}/M)^2$ のトーラスの SU(2) の Wilson 測度で、背景の捩れ $n_{12} = 1$ です（19-02）。$\theta_M = (Z_0 - Z_1)/(Z_0 + Z_1)$、$t = \tanh(N^2|\beta|)$ と書きます。どれも既知の型の結果・描像の形式化です（各章の典 の行）。

最初の行だけは抽象の含意で、仮定の欄があります。他の行は具体の対象の定理で、仮定の欄は表に書いた範囲だけです。

定理	範囲	言っていないこと	Lean の宣言	章
符号の系の三本（被覆の不等式・$\mathbb{Z}_2$ の単調性・$\mathbb{Z}_2$ との比べ）	抽象の群と符号の指標。仮定の欄つきの含意	それだけでは具体の測度の評価ではない（当てはめは次の行の中）	`CoveringInequality.covering_ineq`・`mon_ineq`・`dominated_covering_ineq`・`invariant_dominated`	21-01
薄い渦の床（比の形）	全ての実の β、$N, M \geq 1$、背景の捩れは任意：`twisted_vortex_bound` は符号つきの形 $(Z_0 - Z_1)/(Z_0 + Z_1) \leq t^{M^2}$、`_abs` は絶対値の形 $\lvert Z_0 - Z_1\rvert/(Z_0 + Z_1) \leq t^{M^2}$	符号（$Z_1 \leq Z_0$ は別の行）。N に一様な率	`TwistedWilson.twisted_vortex_bound`・`twisted_vortex_bound_abs`	21-02
薄い渦の床（指数の形）	$\beta \neq 0$：$\sigma_0 = -\ln t > 0$、$\lvert\theta_M\rvert \leq e^{-\sigma_0 M^2}$	$\sigma_0 \to 0$（$N \to \infty$）	`TwistedWilson.thin_vortex_floor`	21-02
塊の評価	$mk \leq M$、全ての実の β：$\lvert\theta_M\rvert \leq \tanh(K_{\text{eff}})^{k^2}$	形の違う塊が混ざると塊ごとの積より弱い	`TwistBlocks.block_bound_abs`	21-04
太い渦の床	全ての $N \geq 1$、任意の $\varepsilon > 0$、十分大きい β ごとに十分大きい M：$\lvert\theta_{M+1}\rvert \leq \exp(-(M+1)^2 e^{-\beta(S_N+\varepsilon)})$	β・M の閾の値。S_N の値。逆向き（率の下界）	`TwistBlocks.thick_vortex_floor`	21-03
渦の最小作用の正値性	全ての $N \geq 1$：m に一様な $\delta > 0$ で $\delta \leq S_{\text{v}}(N, m)$、$S_N > 0$	δ の数（陽でない）。N に一様な下界	`VortexPos.Svortex_ge_unif`・`VortexPos.SN_pos`	21-05
上界の証明書 機	$S_{\text{v}}(2,8) \leq 6.67401$、$S_{\text{v}}(3,8) \leq 9.09321$、$S_{\text{v}}(4,4) \leq 12.02057$、よって $S_N < 2N^2$（$N = 2,3,4$）	S_N の値（上界だけ、一点の配位）。一般の N	`VortexCert.Svortex_two_eight_le`・`Svortex_three_eight_le`・`Svortex_four_four_le`・`SN_two_lt`・`SN_three_lt`・`SN_four_lt`（健全性 `VortexCert.Svortex_le_of_cert`）	21-05
陽な指数の太い渦の床	$N = 2,3,4$、十分大きい β ごとに十分大きい M：指数の数 6.675・9.094・12.021	閾の値。「薄い渦の床より強い」は率の比べで Lean の定理ではない（読 $N = 2$ で $\beta > 0.523$ から）	`TwistBlocks.thick_vortex_floor_two`・`_three`・`_four`	21-05
渦の比の符号	M が偶数、全ての実の β：$Z_1 \leq Z_0$、$\theta_M \geq 0$	M が奇数（読 $\beta < 0$ で破れる例）	`HalfSplit.Z1_le_Z0`・`TwistBlocks.theta_nonneg`	21-06

定理	範囲	言っていないこと	Lean の宣言	章
符号つきの太い渦の床	太い渦の床の範囲で $M+1$ が偶数：$0 \le \theta_{M+1} \le \exp(-(M+1)^2 e^{-\beta(S_N+\varepsilon)})$	閾の値	`TwistBlocks.thick_vortex_floor_signed`	21-06
渦の比の連続と合わせ	格子の大きさを止めて、全ての実の結合：渦の比は結合について連続、結合 0 で 0、結合を大きくすると 1 に近づく。0 以上 1 未満の全ての目標の値に、合わせる結合が在る（最大の解）	単調性、解の一意性、横の大きさと結合を同時に動かす列	`ThetaTuning.thetaM_continuous`・`ThetaLimit.tendsto_theta_one`・`ThetaLimit.tuning_all`	21-07
捩れた箱の欠けの下界	直交する二つの面に捩れを持つ箱に平らな配位は無い。対称な箱の欠けは横の大きさに依らず 1/2 以上	最小の欠けの真の値	`TwistFlat.no_flat_twist11`・`TwistFloor.defect11_sym_half`	21-07
θ による Polyakov ループの対の評価	M が偶数、全ての実の β、全ての b, b'：$\lvert\langle P_b(0) P_{b'}(M/2)\rangle_0\rvert \le 2\sqrt{\theta}/(1+\theta)$	距離 $M/2$ だけ	`HalfSplit.polyakov_pair_theta`	21-06
一般の時間差の Polyakov ループの対	$M \equiv 0 \bmod 4$、全ての実の β、$0 \le T \le M$：$\lvert\langle P_b(0) P_{b'}(T)\rangle_0\rvert \le 2t^{M \min(T, M-T)}$	Hölder の形（定数 2 と、θ を t^{M^2} に替えた分だけ弱い）。M が奇数。線形であること・上界	`PolyakovT.polyakov_pair_all`	21-06
同（他の偶奇）	M が偶数 ≥ 4 で $\beta \ge 0$／N, M が偶数（$M \ge 4$）で全ての β	M が奇数。$M = 2$（次の行の $T = M/2$ だけ）。$M \equiv 2 \bmod 4$ かつ N 奇数かつ $\beta < 0$	`PolyakovT.polyakov_pair_evenM`・`polyakov_pair_evenNM`	21-06
距離 $M/2$ の対と薄い渦の床	M が偶数（$M = 2$ を含む）、全ての実の β：$\lvert\langle P_b(0) P_{b'}(M/2)\rangle_0\rvert \le 2t^{M \cdot M/2}$	他の時間差（上の二行）	`PolyakovT.half_pair_tanh`	21-06
太い渦の床と合わせた Polyakov ループの対	十分大きい β ごとに十分大きい M、$M+1$ が偶数：距離 $(M+1)/2$ の対 $\le 2\exp(-\frac{1}{2}(M+1)^2 e^{-\beta(S_N+\varepsilon)})$	閾の値。四次元の閉じ込め	`HalfSplit.polyakov_pair_floor`	21-06

全ての行に共通して、格子間隔は固定で、連続極限・四次元の面積則・質量ギャップのどれも言っていません。Polyakov ループの評価は、横 $N \times N$ の管の中の、エネルギーの線形の**下界**

です。

02

何が横の大きさ N に依るか

この部の定理は、どれも N を止めて M と β を動かす形です。N への依り方を並べます。

量	N への依り方	分かっていること
薄い渦の床の率 $\sigma_0 = -\ln\tanh(N^2\lvert\beta\rvert)$	初 $\approx 2e^{-2N^2\lvert\beta\rvert}$、$N\to\infty$ で 0	陽
太い渦の床の指数 S_N	$0 < S_N \le 2N^2$（`VortexPos.SN_pos`・`TwistBlocks.SN_bounds`）	値は不明。$N=2,3,4$ の上界だけ
太い渦の床の閾 $\beta_0(N)$・$M_0(\beta,N)$	不明	陽でない
正値性の下界 $\delta(N)$	不明	陽でない
強結合の渦の床の率（20-06。第 20 部の定理）	依らない（強結合の窓の中だけ。前の因子の横の面積は残る）	陽。窓の外では言わない
管の中の張力の下界（21-06 の (13)）	σ_0 と同じ、$N\to\infty$ で 0	陽
捩れた箱の最小の欠け $D_{\min}(N,N)$（21-07。床ではなく θ の下界の側）	下界 $1/2$ は N に依らない。v・β^* は N に依る	下界は陽。真の値は不明

強結合の窓の外では、床の陽な量は N とともに 0 に行きます。S_N から来る率は N への依り方が分からず、閾も陽でありません。

03

床から帯までの距離

この部の床は、横の大きさ N ごとの、θ の**上界**です。板の張力 $\sigma_N(\beta) = \liminf_M -\frac{1}{M^2}\ln\lvert\theta_M\rvert$（21-03）を、$N$ ごとに下から抑えます。

帯の言明は 19-07 にあります。仮 合わせで決めた裸の結合の列 β_n について、ある $c>0$ があって、全ての L_0 で、十分大きい全ての n で $\theta_{2^nL_0,\,2^nL_0}(\beta_n) \le \exp(-c\,L_0^2)$。横と縦の大きさを一緒に細かく刻み、結合も動かして、渦の比を面積の指数で一つの定数 c で抑える形です。

この部の床は、格子間隔と横の大きさ N を止め、縦の M を動かす話で、この形には届きません。帯を言うには、横と縦の大きさと結合に一様な評価が要ります。§02 の表のとおり、この部の床の定理はどれも N ごとで、その一様性を含みません（21-07 の欠けの下界は横の大きさに依りませんが、θ の下界の側の言明で、床ではありません）。強結合の窓の中の 20-06 の形は、率が横の大きさに依りませんが、結合が窓の中に止まるので、結合が大きくなる側の合わせた列には届きません。

この一様な評価は、本書では前提の側に置いています。前提の一覧と含意の形は 第 28 部 で見ます。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
§01 の表の各行（Lean で機械検査。最初の行は抽象の含意）	各行の「言っていないこと」の欄
初 薄い渦の床の率と管の中の張力の下界は $N \to \infty$ で 0 に行く	N と結合に一様な評価（帯の言明、19-07）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
各行の定理	—	各章の「出典と再現」の表（21-01〜21-07）。Lean の宣言は §01 の表
$\sigma_0 \approx 2e^{-2N^2\lvert\beta\rvert}$	初	$\tanh x = 1 - 2e^{-2x} + O(e^{-4x})$ と $-\ln(1-y) = y + O(y^2)$

この章で使った語 — 渦の床・渦の比 θ_M・渦の最小作用 S_N・Polyakov ループ・帯・横の大きさに一様な評価。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：22-00 入口 — 大きい面の稀さ — 弱結合の側の、一つの尺度の稀さの定理へ。

入口 — 大きい面の稀さ

この章は案内です。

この章で分かること — 第 22 部の定理の一覧と、部の全体に掛かる範囲、道具であるチェス盤の評価の考え方が分かります。あわせて、公開された構成が同じチェス盤の評価をどう使っているか（観測量の大きさを測る半ノルムとして）と、この部の使い方（稀な事象の確率の評価として）の違いを並べます。

前提となる章 — 19-01 Wilson の測度、20-01 鏡映正値性、26-05 チェス盤の評価と同時の反転。

先に言うこと — この部の定理は、格子間隔を固定した細かい格子の Wilson の測度そのものについての、一つの尺度の言明です。体積（トーラスの大きさ）には一様ですが、繰り込んだあとの粗い尺度の測度については何も言いません。閾 $\beta \geq 81$ は証明の都合の値で、物理で興味のある帯から遠い値です。どれも鏡映正値性からのチェス盤の Peierls の議論という既知の型の形式化です[典]。

この章の順序

1. この部の定理の一覧 — 表 1
2. チェス盤の評価という道具 — 一様な模様と幾何平均
3. 二つの使い方 — 大きさを測るか、稀さを測るか — 公開された構成との違い
4. 部の全体に掛かる範囲
5. 読む順

札 — [源] ＝公開された構成の源を読んだ／[推] ＝本書の推し量り／[評] ＝委員会の評価書による（くわしくは 6-00 の「札」）。初・典・機・読・仮・Lean は本全体の札で、[読] は本書の数値の読み、[Lean] は本書の Lean の定理です。

01

この部の定理の一覧

面 p の「ずれ」を $1-\mathrm{Re}\,U_p \in [0,2]$ で測り、閾 y を越える面を**大きい面**と呼びます（$y=1$ では $\mathrm{Re}\,U_p<0$）。この部の言明は、大きい面がたくさん同時に現れる配位の確率が、面の枚数について指数的に小さく、その率がトーラスの大きさに依らない、というものです。

定理	範囲	言明の要点	Lean
チェス盤の評価	辺 $N=2m$（$m\ge 1$）、全ての実の β	ブロックごとに置いた関数の積の期待値は、一様な模様の期待値の幾何平均以下	`FoldWilson.wilson_chessboard_even`
体積に一様な稀さ	$\beta \ge 81$、$m\ge 2$	面の集合 X の全てで $\mathrm{Re}\,U_p<0$ の確率 $\le q_1^{\lfloor \lvert X\rvert/6\rfloor}$、$q_1<1$ は N と X に依らない	`FoldCap.rarity_explicit`
率 $1/4$ の形	$0<y\le 2$、存在する β_0 以上、$m\ge 1$	確率 $\le q_4^{\lfloor \lvert X\rvert/24\rfloor}$	`FoldQuarter.rarity_uniform4`

表 1　第 22 部の定理。言明・証明・数は 22-01、範囲と言っていないことは 22-02。

02

チェス盤の評価という道具

導入は 26-05 と 20-01 です。鏡映正値な測度では、鏡で映した関数との積の期待値が 0 以上になり、そこから Cauchy–Schwarz の形の不等式「折りの不等式」が出ます。これを全ての鏡について繰り返すと、トーラスをブロックに分け、各ブロックに関数 f_w を置いた積の期待値について

$$\left|\left\langle \prod_{w} f_w \right\rangle\right| \;\le\; \prod_{w} \left\langle \prod_{w'} f_w^{(w')} \right\rangle^{1/|\text{ブロック}|} \tag{1}$$

が成り立ちます（Fröhlich–Israel–Lieb–Simon のチェス盤の評価 典 ）。右辺の $\prod_{w'} f_w^{(w')}$ は、同じ関数 f_w を鏡映で全てのブロックに写した「一様な模様」です。左辺のどんな置き方も、一様な模様の期待値の幾何平均で押さえられる、というのが要点です。

右辺の各因子は、一つの関数 f ごとに決まる量

$$\|f\|_{\mathrm{cb}} := \left\langle \prod_{w'} f^{(w')} \right\rangle^{1/|\text{ブロック}|} \tag{2}$$

で、これを**チェス盤の根**と呼びます。体積を大きくしても、ブロック一つあたりの量なので体積に依らない形をとります。

03

二つの使い方 — 大きさを測るか、稀さを測るか

公開された構成の使い方。公開された構成は、Wilson の測度の鏡映正値性から、チェス盤の不等式（`Cells.Tiling.tiles`、`YM/Cells/Chess.lean:80`）と、チェス盤の根の三角不等式 $\|F+P\|_{\mathrm{cb}} \le \|F\|_{\mathrm{cb}} + \|P\|_{\mathrm{cb}}$（`Cells.Tiling.adds`、同 `:108`）を出しています源。根 `rootTest`（`YM/Cells/Tiling.lean:226`）は (2) の形の量です源。三角不等式があるので、根は観測量の空間の上の半ノルムのように使えます推。

この半ノルムで、紫外の側と赤外の側の接面に置かれる評価の一つが書かれています。繰り込んだ局所の観測量をチェス盤の根で測ると、全ての体積で一様に $A \cdot a_m^{-d-\varepsilon}$ 以下、という形です（`Extraction.Wcmain`、`YM/Extraction/Center.lean:38`）源。これが、無限体積の部分列を取るための局所の有界性と同程度連続性の入力になります（12-02・12-03）源。紫外の側から受け取る入力はこれだけではありません源。

この部の使い方。この部は、同じチェス盤の評価を、**稀な事象の確率**の評価に使います。関数として面の指示関数「この面が大きい」を置くと、一様な模様は「全ての場所でその面が大きい」事象になります。その重みは作用が大きく損をするので分配関数に比べて指数的に小さく（エネルギー）、分配関数は全てのリンクを単位元の近くに置く配位の重みで下から押さえられます（エントロピー）。比の 1/|**ブロック**| 乗が、面一枚あたりの率になります。これがチェス盤の Peierls の議論です典。

	公開された構成	**この部**
置く関数	繰り込んだ局所の観測量	面が大きいことの指示関数
根で測るもの	観測量の大きさ（$a_m^{-d-\varepsilon}$ の程度）	事象の稀さ（面一枚あたりの率 < 1）
使う所	局所の有界性と同程度連続性 → 部分列の極限	大きい面が多い配位が稀であること
鏡	元の Wilson の測度について、格子点を通る面と辺の中点を通る面、四つの軸、$\beta \ge 0$ 源	同じ二種類（真ん中の面はゲージ不変な関数、$\beta \ge 0$、$m \ge 2$）
三角不等式	在る源	使わない

表 2　チェス盤の評価の二つの使い方。

根の言葉で言えば、この部の定理は「一つの向きの面が大きいことの指示関数の根は $q < 1$ 以下」という形に言い直せる見込みです推（22-01 の証明の段 2〜5 が、この量を押さえています）。公開された構成は、大きい面の集合の確率の評価にはチェス盤を使っていません推（名前の検索の範囲）。大きい場は、繰り込みの各段の中で別の仕組みで扱われています（22-02）。

04

部の全体に掛かる範囲

- **一つの尺度**。格子間隔を固定した細かい格子の Wilson の測度そのものの言明です。ブロック写像で押し出した粗い尺度の測度（19-04）については何も言いません。
- **体積に一様、格子間隔には一様でない**。率は N に依りませんが、β は一つの格子の結合で、格子間隔を 0 にする列とは関係しません。
- **弱結合の側、陽な閾**。$\beta \geq 81$（$m \geq 2$）。率 $1/4$ の形の閾は存在だけです。物理で興味のある帯（β が 2〜3 ほど）については何も言いません。
- **偶数の辺、捩れ無し**。辺は偶数で、背景の捩れの無い測度だけです。
- **既知の型の形式化**。チェス盤の Peierls の議論（Fröhlich–Israel–Lieb–Simon の型）の SU(2) の Wilson の測度での形式化です。新しさは主張しません。

05

読む順

22-01（言明・証明の道筋・数）→ 22-02（言えていること・言えていないこと、公開された構成の大きい場の扱いとの関係）。この稀さを前提の側でどう使う計画だったかは 28-04 にあります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
Lean 表 1 の三つの定理（詳細は 22-01）	粗い尺度、$\beta < 81$、奇数の辺、捩れのある測度
源 公開された構成はチェス盤の不等式と根の三角不等式を持ち、根で測った観測量の大きさの評価を無限体積の極限の入力に使う	その評価が公開の定理の依存の鎖のどこに入るか（12-03 で読む）
推 公開された構成は大きい面の確率の評価にチェス盤を使っていない。この部の定理は根の言葉に言い直せる見込み	言い直しの Lean の形

出典と再現

もの	種別	出典・道具
チェス盤の評価とチェス盤のPeierls の議論	典	J. Fröhlich, R. Israel, E. H. Lieb, B. Simon（1978）の標準の議論。M. Biskup, arXiv:math-ph/0610025 の要旨で確認（原論文の本文は未入手）。22-01 と同じ
公開された構成のチェス盤と根	源	`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）：`YM/Cells/Chess.lean:80` `tiles`・`:108` `adds`、`YM/Cells/Tiling.lean:226` `rootTest`、`YM/Extraction/Center.lean:38` `Wcmain`
表 1 の定理	Lean	本書の検討の Lean の宣言（名は表 1。出典の詳細は 22-01）

この章で使った語 — 大きい面・チェス盤の評価・一様な模様・チェス盤の根・半ノルム・Peierls の議論・鏡映正値性・体積に一様。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：22-01 大きい面の稀さ — チェス盤の評価 — この部の三つの定理の言明と証明の道筋です。

大きい面の稀さ — チェス盤の評価

この章は本書の検討です。§01 は既存の知見です。

範囲 — この章の定理は、一つの尺度（格子間隔を固定した細かい格子）の SU(2) の Wilson の測度そのものについての言明です。ブロック化した粗い尺度の測度、背景つきの場（捩れなど）、段を跨ぐ一様な評価については何も言いません。体積（トーラスの大きさ）には一様ですが、格子間隔には一様ではありません。部の全体の範囲と言っていないことのまとめは 22-02 にあります。

この章で分かること — 偶数の辺 $N = 2m$ のトーラス $(\mathbb{Z}/N)^4$ の Wilson の測度で、(1) 単位の立方体のリンクの関数をブロックごとに並べた積の期待値についてのチェス盤の評価（全ての β、全ての $m \geq 1$）、(2) $\beta \geq 81$、$m \geq 2$ で、面の集合 X の全ての面が $\mathrm{Re}\, U_p < 0$ である確率 $\leq q_1^{\lfloor |X|/6 \rfloor}$、$q_1 < 1$ は N と X に依らない、(3) $m = 1$ を含む率 $1/4$ の形、の三つを読みます。

前提となる章 — 22-00 入口（この部の定理の一覧と、部の全体に掛かる範囲）、19-01 Wilson の測度・面とホロノミー・Haar の積、20-01 鏡映正値性、26-05 §チェス盤の評価。

先に言うこと — 範囲は題の直下に書いたとおりです。加えて三つあります。(1) (4) の q_1 は冠の真の体積 $h(1/20)$ で書かれていますが、Lean が数として押さえているのは $h(1/20) \geq 83^{-4}$ までで、q_1 の上界 $e^{-0.88\beta} 83^{16}$ は真の q_1 の約 $2.5 \cdot 10^{12}$ 倍です読 。閾 81 はこの上界から決まり、真の h なら約 48 です読 。(2) 閾 $\beta \geq 81$ は証明の都合の値で、物理で興味のある β（2〜3 の帯）から遠い値です。(3) 確率は分配関数 Z に対する比で、ほかの量（捩れた分配関数や小さい場に制限した分配関数）に対する比ではありません。どの定理も、鏡映正値性からのチェス盤の Peierls の議論という既知の型の形式化です典 。

この章の順序

1. チェス盤と Peierls の議論 — 鏡映で事象を一様な模様に広げ、エネルギーとエントロピーを比べる
2. 設定 — 大きい面と冠 — $\mathrm{Re}\, U_p < 1 - y$ の事象、冠の体積 $h(r)$
3. チェス盤の評価 — 全ての偶数の辺、全ての β

4. 体積に一様な稀さ — $\beta \geq 81$ — $q_1^{\lfloor |X|/6 \rfloor}$、$q_1 < 1$
5. 稀さの証明の道筋 — 鏡映正値性 → 一様な模様 → 作用の上界と分配関数の下界 → 鳩の巣
6. 寄り道：$48r^2$ と $h(r)^4$ の勘定 — 一つの格子点あたりの面とリンクの数
7. 率 $1/4$ の形 — $m = 1$ を含む — 閾は存在だけ
8. 強さ — 数で見る — 冠の体積の下界と真の値、閾の値
9. 言っていないこと — 粗い尺度、背景、$\beta < 81$、ほかの比

01

チェス盤と Peierls の議論

導入は 26-05 §チェス盤の評価 と 20-01 です。鏡映正値な測度では、ブロックごとに置いた関数の積の期待値を、全てのブロックに同じ関数を鏡映で写した「一様な模様」の期待値の幾何平均で押さえられます（チェス盤の評価、Fröhlich–Israel–Lieb–Simon）典。

これを稀な事象の評価に使うのが、チェス盤の Peierls の議論です典。評価したい事象（ある場所の面が大きい）を鏡映で全てのブロックに写すと、全ての場所で面が大きい「一様な模様」の事象になります。一様な模様の事象の重みは、作用が大きく損をするので、分配関数 Z に比べて指数的に小さい。その比の $1/|\textbf{ブロックの数}|$ 乗が、一枚あたりの率になります。率が体積に依らないことが、この議論の要点です。

この章の定理は、この議論を SU(2) の Wilson の測度で形式化したものです。新しい型の結果ではありません。

02

設定 — 大きい面と冠

格子は $(\mathbb{Z}/N)^4$、$N = 2m$。測度は 19-01 の Wilson の測度（正規化しない）

$$d\mu_W(U) = \prod_{\ell} dh(U_\ell)\ \exp\Big(\beta \sum_{p} \operatorname{Re} U_p\Big), \qquad Z = \mu_W(\textsf{全体}), \tag{1}$$

h は $SU(2)$ の Haar の確率測度、面の和は無向の面 $(x;\mu<\nu)$ の $6N^4$ 枚です。Lean：`TorusRP.wilsonMeasure`、Z は `FoldPeierls.Zw`（全質量）。この章は向きを 1〜4 で番号づけます（Lean の添字 0〜3 が向き 1〜4。19-01 §向きの番号）。

大きい面。閾 $y \in (0,2]$ について、面 p が $1 - \operatorname{Re} U_p > y$ のとき「大きい」と呼びます。$y = 1$ では $\operatorname{Re} U_p < 0$ です。Lean：`FoldEntropy.bigP N y ω p`（指示関数、狭義の不等号）。$\operatorname{Re} U$ は $\frac{1}{2}\operatorname{tr} U$ で、$1 - \operatorname{Re} U = |U - 1|^2/2$ です（U を単位の四元数として）。

冠。単位元のまわりの開いた冠 $\{U \in SU(2) : |U - 1| < r\}$ の Haar の体積を $h(r)$ と書きます（$|\cdot|$ は四元数のノルム）。Lean：`FoldEntropy.ballQ r`、$h(r)$ は `haarBall.real (ballQ r)`。

面の集合 X について、$\int \prod_{p \in X} \mathbf{1}[p \text{ は大きい}]\, d\mu_W / Z$ は「X の面が全て大きい」事象の確率です。X の外の面には条件を付けません。

03

チェス盤の評価

ブロックは単位の立方体で、$(\mathbb{Z}/N)^4$ の点 w ごとに一つ、N^4 個あります。原点の立方体の中のリンク（始点の座標が全て 0 か 1、向きの座標が 0）だけに依る有界可測な関数を「原点のブロックの関数」と呼びます。Ψ_w は配位の写像で、各向きの座標について、w の座標が偶数なら並進、奇数なら鏡映を合成したものです。原点のブロックの関数 f に対し $f \circ \Psi_w$ はブロック w に運んだ関数です。

チェス盤の評価　Lean：`FoldWilson.wilson_chessboard_even`。$N = 2m$（$m \geq 1$）、全ての実の β、原点のブロックの関数の族 (f_i) と割り当て $F : (\mathbb{Z}/N)^4 \to I$ について、

$$V(F) = \int \prod_{w} f_{F(w)}\big(\Psi_w U\big)\, d\mu_W(U), \qquad |V(F)|^{N^4} \;\leq\; \prod_{w} V\big(\text{定数の割り当て } F(w)\big). \tag{2}$$

意味。どのブロックにどの関数を置いても、その積の期待値は、各関数を全てのブロックに置いた一様な模様の期待値の幾何平均で押さえられます。辺が 2 の冪である必要はありません。$f \equiv 1$ では両辺 Z^{N^4} で等号です。

証明の道筋は三段です。(i) 一方向の輪 $\mathbb{Z}/2m$ の上で、全ての面の鏡映について「折りの不等式」$V(F)^2 \leq V(F^+)V(F^-)$ と $V(\text{定数}) \geq 0$ から $|V(F)|^{2m} \leq \prod_t V(\text{定数 } F(t))$ を出す（`FoldChess.chess_one`）。2 の冪に限らないために、値域の有限の族の上で比の最大をとり、折りで最大が保たれることを使う Fröhlich–Israel–Lieb–Simon の議論を使います。一次元の転送の核の模型では、鏡映正値な核で結論の破れは無く、正値でない核では破れます読。(ii) 四方向に一回ずつ当てる（`FoldChess.chess_four`）。(iii) 折りの不等式を、格子点の面の鏡映正値性と Cauchy–Schwarz の形（20-01、全ての実の β）と、鏡映と並進で測度が変わらないことから出す（`FoldChess.chess_data`、具体の払いは `FoldWilson.data`）。

04

体積に一様な稀さ — $\beta \geq 81$

体積に一様な稀さの定理　Lean：`FoldCap.rarity_explicit`。

$$q_1 = \frac{e^{\beta(48\cdot(1/20)^2-1)}}{h(1/20)^4} = \frac{e^{-0.88\,\beta}}{h(1/20)^4} \tag{3}$$

とおくと、全ての $\beta \geq 81$ で $q_1 < 1$。かつ全ての $m \geq 2$（$N = 2m$）と、$(\mathbb{Z}/N)^4$ の無向の面の任意の集合 X について

$$\int \prod_{p \in X} \mathbf{1}\big[\operatorname{Re} U_p < 0\big]\, d\mu_W \;\leq\; Z \cdot q_1^{\lfloor |X|/6 \rfloor}. \tag{4}$$

量化の順は「β ごとに、β だけで決まる q_1 があり、全ての N と全ての X で」です。q_1 は N にも X にも依りません。

意味。結合が弱い（β が大きい）とき、多くの面が同時に大きく捩れている配位は、捩れた面の数について指数的に起こりにくく、その率は格子の大きさに依りません。中身があるのは $|X| \geq 6$ からです（$|X| < 6$ では右辺は Z）。事象は空ではありません。全ての面で $\operatorname{Re} U_p = -1$ となる配位（$\mathbb{Z}_2$ の完全にフラストレートした配位）があり、その近くの開集合に正の重みが載るので、左辺は全ての X で正です初 。

途中の形（同じく Lean）：$0 < y \leq 2$ の一般の閾で、$r > 0$ と β_0 が在って（証明の中では $r = y/20$）、$\beta \geq \beta_0$ なら $q_1 = e^{\beta(48r^2-y)}/h(r)^4 < 1$ と (4) の形（`FoldMix.rarity_uniform_all_mix`、$m \geq 2$）。一つの向きの面だけなら一枚あたり率 1（`FoldMix.rarity_orient`）。

05

稀さの証明の道筋

1. **四方向の鏡映正値性**。向き 1・2 では格子点の面の鏡映（全ての実の β）、向き 3・4 ではリンクの真ん中の面の鏡映（ゲージ不変な関数、$\beta \geq 0$、$m \geq 2$）を使います（20-01）。真ん中の面を混ぜるとブロックは格子点になり、N^4 個のブロックの全てで運んだ面が相異なります。面の指示関数はゲージ不変です（$\operatorname{Re} U_p$ が不変）。これで §03 の器が作れます（`FoldMix.dataMix`）。$m \geq 2$ はこの段の条件です。
2. **一様な模様へ**。ブロック関数「原点の向き $(1,2)$ の面が大きい」を、一つの格子点の集合 S のブロックに置き、ほかに 1 を置いて (2) を使うと、確率は「全ての N^4 個の向き $(1,2)$ の面が大きい」事象の重みの $|S|/N^4$ 乗で押さえられます。

3. **一様な模様の重み（エネルギー）**。その事象の上では N^4 枚の面で $\mathrm{Re}\,U_p < 1-y$、ほかの面は $\mathrm{Re}\,U_p \le 1$ なので、作用 $\le 6N^4 - yN^4$、重み $\le e^{\beta(6N^4 - yN^4)}$ です（`FoldMix.action_le_mix` の形）。
4. **分配関数の下界（エントロピー）**。全てのリンクを冠 $|U-1| < r$ に置くと、面は四本の積で $|U_p - 1| \le 4r$、よって $\mathrm{Re}\,U_p \ge 1 - 8r^2$。この配位の集合の Haar の重みは $h(r)^{4N^4}$ なので $Z \ge e^{6N^4\beta(1-8r^2)} h(r)^{4N^4}$ です（`FoldEntropy.Zw_ge`）。
5. **比をとる**。3 を 4 で割って $1/N^4$ 乗すると一枚あたり $q = e^{\beta(48r^2 - y)}/h(r)^4$ です。
6. **向きを揃える**。六つの向きを $(1,2)$ に写す対合で測度は変わりません。一般の X には六つの向きのどれかの面が $\lfloor |X|/6 \rfloor$ 枚以上あり（鳩の巣）、指示関数は $[0,1]$ の値なので、その部分集合に落とせます（`FoldMix.rarity_all_mix`）。
7. **陽な閾**。$y = 1$、$r = 1/20$ では $48r^2 - 1 = -0.88$。冠の体積を格子 $(1/41)\mathbb{Z}^4$ の被覆で $h(1/20) \ge 83^{-4}$ と押さえ（`FoldCap.ballQ_ge`）、$e^{71} > 2.718^{71} > 83^{16}$ から $\beta \ge 81$ で $q_1 < 1$ です（`FoldCap.q_lt_one_explicit`）。

寄り道：$48r^2$ と $h(r)^4$ の勘定

飛ばしてよい。一つの格子点あたり、面は 6（向きの対 $\mu < \nu$ の数）枚、リンクは 4 本です。分配関数の下界では、一枚の面が最大で $1 - \mathrm{Re}\,U_p \le 8r^2$ だけ損をするので、格子点あたりの作用の損は $6 \cdot 8r^2 = 48r^2$、Haar の重みは $h(r)^4$ です。一様な模様の事象の側では、格子点あたり一枚の面が y 以上損をします。比をとると、格子点あたり $e^{\beta(48r^2-y)}/h(r)^4$ が残ります[初]。r を小さくすると $48r^2$ は小さくなりますが $h(r)$ も r^3 の速さで小さくなるので、$q < 1$ にするには β を $\log(1/h(r))$ の数倍に取る必要があります。閾が大きくなる理由はここにあります。

06

率 $1/4$ の形 — $m = 1$ を含む

率 $1/4$ の稀さの定理　Lean：`FoldQuarter.rarity_uniform4`。$0 < y \le 2$ について、$r > 0$ と β_0 が在って、全ての $\beta \ge \beta_0$ で $q_4 = e^{\beta(48r^2 - y/4)}/h(r)^4 < 1$、かつ全ての $N = 2m$（$m \ge 1$、とくに $N = 2$ を含む）と面の任意の集合 X について

$$\int \prod_{p \in X} \mathbf{1}\big[1 - \mathrm{Re}\,U_p > y\big]\, d\mu_W \;\le\; Z \cdot q_4^{\lfloor |X|/24 \rfloor}. \tag{5}$$

違いは二つです。真ん中の面の鏡映を使わず格子点の面の鏡映だけで組むので $m \ge 2$ の条件が要らない代わりに、一様な模様で相異なる面は $N^4/4$ 枚になり、率が $1/4$ になります。一般の X は 24 の類（向き 6 × 外の向きの偶奇 4）に分けて鳩の巣を使います。

Lean の言明は r と β_0 の存在だけです。証明の中では $r = y/1000$、β_0 は $h(r)$ を含む式に取っていて、その数値は Lean にありません。冠の体積の公式で数値を入れると $y = 1$ で $\beta_0 \approx 357$ 読 です。陽な閾を Lean の中の数で持つのは §04 の $\beta \geq 81$（$m \geq 2$）だけです。

07

強さ — 数で見る

量	値	札
冠の体積 $h(1/20)$ の真の値（公式 $(\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta)/\pi$、$\vartheta = 2\arcsin(1/40)$）	$2.652 \cdot 10^{-5}$	読
Lean の下界 83^{-4}	$2.107 \cdot 10^{-8}$	読
比（真の値／下界）	1259	読
q_1 の上界の損（1259^4）	$\approx 2.5 \cdot 10^{12}$	読
$\beta = 81$ の q_1：Lean の上界／真の h で	$0.56 / 2.2 \cdot 10^{-13}$	読
$q_1 < 1$ の閾：Lean の下界で／真の h で	80.34／47.9	読
率 $1/4$ の形の閾（$y = 1$、証明の中の $r = y/1000$）	357	読

上界は真の確率から遠いはずですが、閾より上の β で真の確率を数値で比べた記録はありません。言えるのは率と閾の形までです。チェス盤を使わない直接の評価は、固定した X で $N \to \infty$ にすると発散するので体積に一様ではありません。小さい体積では直接の評価のほうが強いこともあります。この章の評価の値打ちは体積に一様なことで、その代わりに定数は弱くなっています。

08

言っていないこと

- **粗い尺度**。一つの尺度（細かい格子の Wilson の測度そのもの）の定理です。ブロック写像で押し出した粗い尺度の測度（19-04）の大きい場の評価には届きません。段を跨ぐ大きい場の評価は前提の側に在ります（28-04）。
- **格子間隔**。体積に一様ですが、β は固定の格子の結合で、格子間隔を 0 に送る極限とは関係しません。
- **β の範囲**。§04 は $\beta \geq 81$ だけ、§06 は存在だけの β_0 以上だけです。物理の帯（β が 2〜3）については何も言いません。81 は証明の都合の値です。
- **辺の偶奇**。偶数の辺だけです。§04 は $m \geq 2$、$m = 1$（$N = 2$）は §06 の率 $1/4$ の形だけが覆います。

- **比の相手**。確率は Z に対する比です。小さい場の事象に制限した分配関数や捩れた分配関数に対する比ではありません。
- **背景**。捩れ（19-02）のない Wilson の測度だけです。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
チェス盤の評価：$N = 2m$（$m \geq 1$）、全ての実の β、単位の立方体のリンクの関数の族で $\lvert V(F)\rvert^{N^4} \leq \prod_w V(\text{定数})$。Lean：`FoldWilson.wilson_chessboard_even`	奇数の辺。捩れのある測度
$\beta \geq 81$、$m \geq 2$：$P(X$ の面が全て $\operatorname{Re} U_p < 0) \leq q_1^{\lfloor \lvert X\rvert/6 \rfloor}$、$q_1 < 1$ は N・X に依らない。Lean：`FoldCap.rarity_explicit`	$\beta < 81$、$m = 1$。粗い尺度の測度。閾 81 は冠の体積の粗い下界から決まる値（真の h なら約 48 読 ）
$0 < y \leq 2$、存在する β_0 以上、全ての $m \geq 1$：率 $1/4$ の形 $\leq q_4^{\lfloor \lvert X\rvert/24 \rfloor}$。Lean：`FoldQuarter.rarity_uniform4`	β_0 の値（$y = 1$ で約 357 は 読 ）
$Z \geq e^{6N^4\beta(1-8r^2)} h(r)^{4N^4}$（$\beta \geq 0$）。Lean：`FoldEntropy.Zw_ge`	—
$h(1/20) \geq 83^{-4}$。Lean：`FoldCap.ballQ_ge`	冠の体積の真の値の Lean の形

出典と再現

もの	種別	出典・道具
チェス盤の評価とチェス盤の Peierls の議論	典	J. Fröhlich, R. Israel, E. H. Lieb, B. Simon（1978）の標準の議論。M. Biskup, Reflection positivity and phase transitions in lattice spin models, arXiv:math-ph/0610025 の要旨で確認（原論文の本文は未入手）。26-05 と同じ
鏡映正値性（格子点の面・真ん中の面）	典	20-01 の出典（K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471）
§03〜§06 の定理	—	本書の検討の Lean の宣言（名は本文と範囲の表。sorry なし・標準の三つの公理、核の再検査で確かめた）。一覧は 22-02
冠の体積の真の値・下界の浮動小数・比 1259・q_1 の値・閾 80.34・47.9・357	読	本書の検討の数値の記録（冠の体積の公式を Monte Carlo $2 \cdot 10^6$ 点で $r = 0.3, 0.5, 1$ に照合、閾は公式から）
チェス盤の一方向の芯が鏡映正値でない核で破れること（対照）	読	本書の検討の数値の記録（一次元の転送の核の模型、$n = 4, 6, 10$、正定値の核で破れ 0、正定値でない核で破れる）

この章で使った語 — 大きい面・冠・チェス盤の評価・一様な模様・鏡映正値性・格子点の面・真ん中の面・Peierls の議論・分配関数・鳩の巣。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：22-02 この部が言えていること・言えていないこと ― 第 22 部の定理を一つの表に並べ、範囲と言っていないことを確かめます。

この部が言えていること・言えていないこと

この章は案内です。§03・§04 は未解決の地図です。

この章で分かること — 第 22 部の定理を一つの表に並べ、範囲と言っていないことを確かめます。そのうえで、この稀さが「一つの尺度の言明」であることの意味、公開された構成が大きい場を繰り込みの各段の中で数え直して扱うこととの関係、この型の言明と残る問いとの距離（推し量りとして）を述べます。

前提となる章 — 22-00 入口、22-01 大きい面の稀さ — チェス盤の評価。公開された構成の大きい場の扱いは 11-03・11-04。

先に言うこと — この章は新しい定理を足しません。§03・§04 の比べと見立ては、公開された構成の源の言明を読んだこと 源 と、そこからの推し量り 推 です。この部の稀さが、無限体積の極限の一意性や質量ギャップを導くとは言いません。

この章の順序

1. 定理の一覧 — 範囲と言っていないこと — 表 1
2. 一つの尺度の言明 — 繰り込んだあとの尺度については何も言わない
3. 公開された構成の大きい場 — 段ごとの数え直し — 作用の側の不等式と、測度の側の稀さ
4. 残る問いとの距離 — 大きい場を抑える型の評価（推し量り）
5. 部の全体で言っていないこと

札 — 源 ＝公開された構成の源を読んだ／推 ＝本書の推し量り／評 ＝委員会の評価書による（くわしくは 6-00 の「札」）。初・典・機・読・仮・Lean は本全体の札で、読 は本書の数値の読み、Lean は本書の Lean の定理です。出典：`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`（Apache-2.0）。

01

定理の一覧 — 範囲と言っていないこと

定理	範囲	言っていないこと	Lean
チェス盤の評価	$N = 2m$（$m \geq 1$）、全ての実の β、単位の立方体のリンクの関数の族	奇数の辺、捩れのある測度、粗い尺度の測度	`FoldWilson.wilson_chessboard_even`
体積に一様な稀さ	$\beta \geq 81$、$m \geq 2$、面の任意の集合 X：確率 $\leq q_1^{\lfloor \lvert X\rvert /6\rfloor}$、$q_1 < 1$ は $N \cdot X$ に依らない	$\beta < 81$、$m = 1$、粗い尺度。81 は冠の体積の粗い下界から決まる値（真の体積なら約 48 読 ）	`FoldCap.rarity_explicit`
率 $1/4$ の形	$0 < y \leq 2$、存在する β_0 以上、全ての $m \geq 1$：確率 $\leq q_4^{\lfloor \lvert X\rvert /24\rfloor}$	β_0 の値（$y = 1$ で約 357 は 読 ）	`FoldQuarter.rarity_uniform4`
分配関数の下界	$\beta \geq 0$：$Z \geq e^{6N^4\beta(1-8r^2)}h(r)^{4N^4}$	—	`FoldEntropy.Zw_ge`
冠の体積の下界	$K \geq 2$、$2/K < r$ で $h(r) \geq 1/(2K+1)^4$。$K = 41$、$r = 1/20$ を入れて $h(1/20) \geq 83^{-4}$	冠の体積の真の値の Lean の形	`FoldCap.ballQ_ge`

表 1　第 22 部の定理。どれも鏡映正値性からのチェス盤の Peierls の議論の型の、本書の Lean での形式化です Lean 。記号は 22-01。

確率は分配関数 Z に対する比です。小さい場の事象に制限した分配関数や、捩れた分配関数に対する比ではありません。上界は真の確率から遠いはずですが、閾より上の β で真の確率と数値で比べた記録はありません。言えるのは率と閾の形までです（22-01 §07）。

02

一つの尺度の言明

この部の定理は、格子間隔を固定した細かい格子の Wilson の測度そのものについての言明です。β はその格子の結合で、格子間隔を変える操作は入っていません。

- **繰り込んだあとの尺度については何も言いません**。ブロック写像で粗い格子へ押し出した測度（19-04）で、粗い面の大きいものが稀かどうかは、この部の定理からは出ません。押し出しは面のずれを平均したり合成したりするので、細かい面の稀さがそのまま粗い面の稀さになる保証はありません 初 。

- **段を跨ぐ一様な稀さは前提の側に在ります。**繰り込みの全ての段で同じ形の稀さ（定数が段と格子間隔に依らないもの）は、この本の検討では前提として置かれ、示されていません（28-04、大きい場の稀さの条件）。
- **体積に一様、格子間隔には一様でない。**連続極限では β を格子間隔とともに動かすので、固定した β の言明は、そのままでは連続極限の列のどの段の評価にもなりません[初]。

03

公開された構成の大きい場 — 段ごとの数え直し

公開された構成も、大きい場（面のずれが閾を越える所）を扱わなければなりません。その扱いは、この部の稀さとは種類が違います。

- **密度の形。**各段の有効な密度は、閾までは二次で閾を越えると一次に切った作用の指数と、大きい場の活動の気体（強制された活動）の積の形で持ち運ばれます[源]（11-01）。
- **段ごとの数え直し。**大きい場の「種」は、各段で、その段の場から数え直されます。一度大きい場になった領域を以後固定する型ではありません[源]。持続する欠陥は、各段で値段を払い直すことになります[推]。
- **種一つあたりのエネルギー。**一段の要は、ハロの中の作用の差が種の数に比例して下から押さえられる、という配位ごとの不等式です（`Next.Fluctuations.grants`、`YM/Next/FLUCTUATIONS/Grants.lean:24`。ゲージの切り口（`SliceSet`）・区画（`Plot`）・`Funds` などの仮定つき）[源]。宣言の使われ方の記録では、この不等式は見出しの定理の一つ（`SharpGram.habitat`）から届きます[源]。読み方は 11-04。この不等式が公開の定理の依存の鎖のどこに入るかは確かめていません。

この部の稀さとの違いは、表 2 のとおりです[推]。

	公開された構成の大きい場	この部の稀さ
言明の種類	配位ごとの作用の不等式（全ての配位で、条件つき）	測度の言明（事象の確率）
尺度	繰り込みの各段、段ごとに数え直す	細かい格子の一つの尺度
結合	全ての段で弱結合の帯の中	$\beta \geq 81$（一つの格子の結合）
体積	一段の帳簿は点ごとの和で体積に依らない。密度の水準の評価は体積の指数を含む[源]	率は体積に一様
道具	作用の分解・区画・一の分割・塊の和	鏡映正値性・チェス盤・Peierls

表 2　大きい場の二つの扱い。

どちらからも、他方は出ません[推]。公開された構成の不等式は段の中の作用の言明で、測度の稀さを言いません。この部の稀さは一つの尺度の測度の言明で、段を跨ぐ評価を言いません。公開された構成が体積に一様な評価として使うのは Wilson の測度の側のチェス盤の根の評価などで（22-00 §03）、そこでもチェス盤は大きい面の確率には使われていません[推]（名前の検索の範囲）。

04

残る問いとの距離

この節は推し量りです[推]。

評価書の開いた問いの一つは、無限体積の極限の収束と一意性です（16-02）。公開された構成は無限体積の極限をコンパクト性の部分列で取り、体積を変えたときの差の評価や一意性の材料を入れていません[源]。

一意性を示す議論は、普通、体積に一様な何らかの「乱れの少なさ」を部品にします。強結合の窓での一意性（20-03）では、それが Dobrushin の条件（一本のリンクが周りから受ける影響の小ささ）でした。この部の稀さは、弱結合の側で「大きい面が多い配位は、体積に依らない率で稀」という形の乱れの少なさを、測度の言明として与えます。これは、大きい場を抑える型の評価で、強結合の窓の Dobrushin の条件と同じく、体積に一様な乱れの少なさの形です。ただし対象は一つの格子間隔の測度で、評価書の問い（連続の理論の無限体積の極限）の対象とは別です。

次の三つの理由で、この部の稀さは一意性を導きません。

1. 稀さだけでは、小さい場（大きくない面）の側の長距離の相関について何も言いません。一意性には、その側の減衰か、それに代わる議論が要ります。
2. $\beta \geq 81$ の一つの格子の言明で、公開された構成が無限体積を取る対象（連続極限を先に取った相関関数）とは別の対象です。
3. 繰り込んだ尺度での稀さ（§02）が無いので、連続極限の列に沿って使える形になっていません。

同じ型の言明が質量ギャップ（一様な減衰）の議論の部品になるか、も同じく開いたままです。

05

部の全体で言っていないこと

- **粗い尺度**。押し出した測度の稀さ、段を跨ぐ一様な稀さは言いません。
- **β の範囲**。$\beta \geq 81$（陽）と存在だけの β_0 以上。物理の帯（β が 2〜3 ほど）については何も言いません。
- **辺と背景**。偶数の辺、捩れの無い測度だけです。
- **比の相手**。確率は Z に対する比です。
- **一意性・質量ギャップ・連続極限**。どれもこの部の定理からは出ません。
- **新しい結果ではありません**。チェス盤の Peierls の議論の、SU(2) の Wilson の測度での形式化です。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
Lean 表 1 の五つ（チェス盤の評価、体積に一様な稀さ、率 1/4 の形、分配関数の下界、冠の体積の下界）。詳細は 22-01	粗い尺度、$\beta < 81$、奇数の辺、捩れのある測度
源 公開された構成は大きい場を各段で数え直し、種一つあたりのエネルギーの配位ごとの不等式で扱う	その不等式が公開の定理の鎖に入る経路（確かめていない）
推 二つの扱いはどちらも他方を導かない。この部の稀さは大きい場を抑える型の評価（体積に一様な乱れの少なさの形）	一意性・質量ギャップへの道

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1 の定理	Lean	本書の検討の Lean の宣言（名は表 1）。チェス盤の評価は Fröhlich–Israel–Lieb–Simon（1978）の標準の議論。出典の詳細は 22-01
閾 48・357 の値	読	本書の検討の数値の記録（冠の体積の公式から。22-01 §07）
公開された構成の大きい場の扱い	源	`yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028`：`YM/Next/FLUCTUATIONS/Grants.lean:24 grants`。密度の形と数え直しの読みは 11-01・11-03・11-04
開いた問い（収束と一意性）	評	評価書（`yang-mills-group/YM` の `docs/assessment-1.pdf`、2026-11-10）§8 の 1

この章で使った語 — 大きい面・稀さ・一つの尺度・押し出し・切った作用・強制された活動・種・数え直し・体積に一様・一意性。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-00 入口 ― 階段と、酔歩・物差し・時計 ― ここからは、帯へ向かう検討の記録です。確かな定理の部をまとめて見るなら 16-04 の表 1 へ。

第 23 部の入口 — 階段と、酔歩・物差し・時計

> この章は案内です（この部の入口）。

この部は検討の記録です。機械検査まで済んだ定理は第 20〜22 部、前提の今の一覧は 28-04 に在ります。

この章で分かること — 第 23 部は、拡散型緩和時間の仮定（揺らぎが均される時間は、相関長の二乗の冪で伸びる）を軸に置いて、質量ギャップへの道を検討する部です。拡散型緩和時間の仮定は、問題文の量（ユークリッドの時間の隙間）を、格子で計算でき機械検査の届く量（Langevin 力学の緩和の時間）に言い換えた一つの文です。この部では、その文を四段の階段に分けたときの一段目（0+1 次元の二重井戸の経路の測度）で、主張がどこまで組めているかを並べます。この章では、階段の絵と部の地図を見たあと、相関長 ξ・Poincaré 定数 C_P などの量を、酔歩・物差し・時計の比喩で一つずつ立てます。

前提となる章 — 2-10（緩和の時間と動的指数）・4-11（質量ギャップの定義と相関長）・2-07（経路積分と虚時間）。

先に言うこと — この章は比喩で量を並べる入口で、何も証明しません。緩和時間の仮定は証明されていない仮定です。正確な定義は 23-01（四次元格子の側）と 23-04（二重井戸の側）に置きます。

この章の順序

1. 部の地図 — 十八章の一覧と、札の読み方
2. 階段の四段 — 二重井戸から極限の質量ギャップまで（図 1）
3. 物差し — 相関長 ξ — 相関が何歩で消えるか
4. にじむ時間 — Poincaré 定数 C_P — 長さ L を均すのに L^2 歩（表 3）。寄り道：酔歩はなぜ二乗か
5. 縮尺と時計 — 残りの三つの量 — 縮尺の回数・時計の目盛り・遅れる時計
6. 緩和時間の仮定を一文で — にじむ時間 $\asymp$ 物差し^2。「ある f」と「すべての f」

7. 第 23 部の歩き方 — 比喩がどの章で正確な文になるか

01

部の地図 — 十八章の一覧と、札の読み方

この部は、緩和時間の仮定（揺らぎが均される時間は相関長の二乗の冪で伸びる）を軸に置いた検討です。緩和時間の仮定は質量ギャップそのものではなく、それを格子で測れる力学の量に言い換えた文で（23-01 §05）、この部はその文を、四段の階段の一段目——0+1 次元の二重井戸の経路の測度——で組み立てます。一段目の主張を四つの条件に割り、条件ごとに、証明を置いた行・原典を引く行・計算機援用の行・数値の読みの行・仮定の行を一つの表に並べます。

第 23 部の十八章

0. **23-00 入口 — 階段と、酔歩・物差し・時計** 〔二〕（この章）
1. 23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定 〔二〕〜〔三〕
2. 23-02 四次元格子で試した道と壁 〔三〕
3. 23-03 階段の四段 — なぜ 0+1 次元から始めるか 〔二〕
4. 23-04 二重井戸の経路の測度とキンク 〔二〕〜〔三〕
5. 23-05 一段目の言明 — 二重井戸の四条件と上界の命題 〔三〕
6. 23-06 相内の局所 Poincaré の条件 〔研〕
7. 23-07 鞍点の管の条件の地図 — 七つの道筋と環の継ぎ目 〔三〕
8. 23-08 計算機援用とは何か — 窓の中の鎖の条件 〔二〕〜〔三〕
9. 23-09 区画の枠組みと、窓の対数 Sobolev の道筋の三本の筋 〔研〕
10. 23-10 迂回策の一覧 — 壊れ方の型 〔三〕〜〔研〕
11. 23-11 箱への帰着と箱の中の隙間 — 芯の定数 〔研〕
12. 23-12 統合表と依存グラフ 〔三〕
13. 23-13 Lean の言明と機械検査の限界 〔二〕〜〔三〕
14. 23-14 突き合わせ — 記録の数と既知の数 〔三〕
15. 23-15 残件と費用 — 定理までの距離 〔三〕
16. 23-16 主張しないこと 〔二〕

17. 23-17 ひらめきと小さな問い 〔二〕〜〔三〕

章の順は、なぜこの仮定か（23-00〜23-02）、一段目の言明（23-03〜23-05）、四つの条件（23-06〜23-11）、全体の表（23-12・23-13）、突き合わせと残り（23-14〜23-17）です。印〔二〕〔三〕〔研〕は読者の水準で、〔二〕は 2 年生、〔三〕は 3 年生以上（測度・作用素・Poincaré 不等式を使う）、〔研〕は研究の水準です。この章は〔二〕です。緩和時間の仮定とは別の視点や、緩和時間の仮定を前提にした新しい見方は 第 24 部 一本目の道（後半） に置きます。

この部の札

この部では、主張の強さを五つの札で分けます（0-01 §03 の札を、この部の材料に合わせて細かくしたものです）。札は一つの文に一つで、二つ要る文は分けて書きます。

表 1　この部の五つの札（Lean は札の外の欄）

札	意味	保証しないこと
初	初等。証明を本文か章末に置く	誤りが無いこと（読者が確かめられる形で置く）
典	既知の定理を原典（または言明を確かめた二次資料）から引く	この本の成果であること
機	計算機援用。区間演算で、不等式として確かめた（丸めの規約などの前提を同じ行に書く）	計算した範囲の外で成り立つこと
読	読み。浮動小数の数値・Monte Carlo・当てはめ。種類（点の値・族の下界など）を添える	上界や下界の証明であること
仮	仮定。証明を持たずに置く行。名前を付ける	成り立つこと

Lean は五つの札とは別の欄です。Lean の定理は「仮定から結論への代数」を機械で検査したもので、定理名と、その定理の仮定を同じ行に書きます。仮定が正しいかどうかは検査の外です（23-13）。

02

階段の四段 — 二重井戸から極限の質量ギャップまで

緩和時間の仮定は「ある測度の族で、揺らぎの均される時間が相関長の二乗の冪で伸びる」という文で、次元によらずに述べられます。そこで、同じ形の文を易しい場所から難しい場所へ四段に並べます。

図 1　階段の四段。この部が扱うのは一段目の中で、二段目から上への矢印は「同じ形の文」を表し、含意の定理ではない

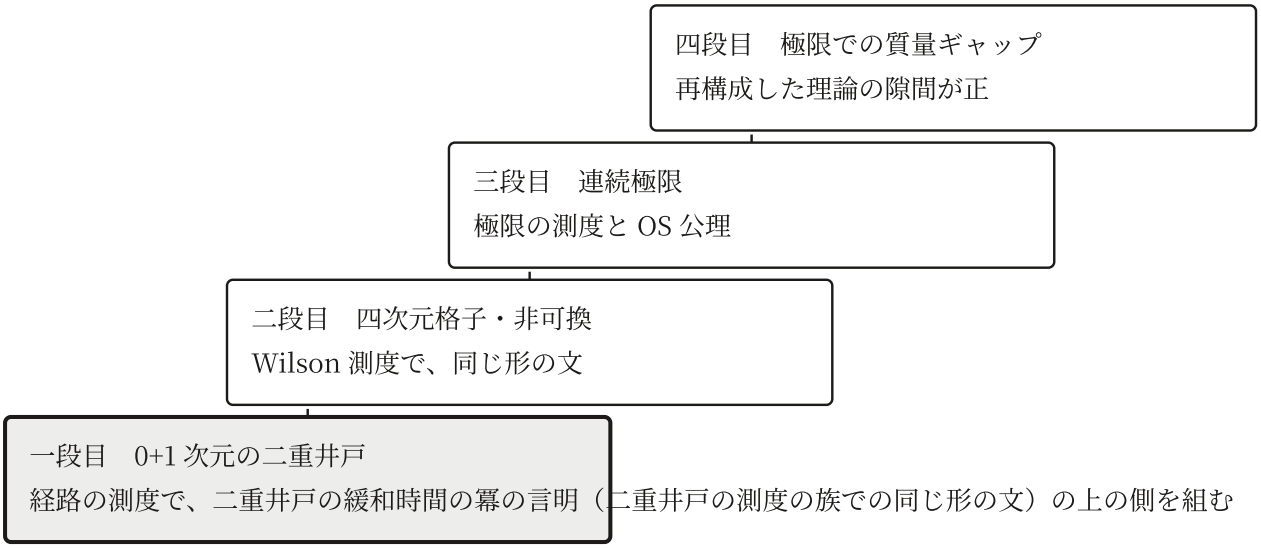


図 1 を文字で書くと次のとおりです。下から順に、一段目＝0+1 次元の二重井戸（量子力学の模型の虚時間の経路の測度）、二段目＝四次元格子の非可換ゲージ理論（Wilson 測度）、三段目＝格子間隔を 0 にした連続極限と、その極限が Osterwalder–Schrader の公理を満たすこと、四段目＝極限の理論の質量ギャップです。

表 2　四段の対象と、各段で「閉じた」と言えること

段	対象	閉じたと言える形	この本の状態
一段目	0+1 次元の二重井戸の経路の測度（径数 $\hbar$）	二重井戸の冪の言明の上の側（C_P の上界）を、有限個の仮定の行の表つきで示す	二重井戸の四条件に割り、その上の代数（二重井戸の緩和時間の上界の命題）まで。条件はどれも 仮 の行を残す
二段目	四次元格子の Wilson 測度（径数 β）	同じ形の文を $\beta \to \infty$ で	緩和時間の仮定は仮定のまま。下からの評価だけ（23-02）
三段目	格子間隔 $a \to 0$ の極限の測度	極限が在り、OS 公理を満たす	扱わない。四次元の Wilson の格子ゲージ理論の極限として Wightman の公理を満たす理論が作れることは、2026-11-10 に公開された構成が Lean で証明している、と委員会が評価した（第 6 部）。連続の理論の確率測度と、無限体積の極限の一意性は示されていない（6-04）
四段目	再構成した場の量子論	ハミルトニアンの隙間が正（4-11）	扱わない。公開された構成も示していない（6-04）

一段目を閉じても、二段目以後に持ち上がる保証はありません。持ち上がる見込みがあるのは「文の形」と「道具の形」で、定数や径数の範囲は持ち上がりません。理由は 23-03 §06 で両側から述べます。

```
03
```

物差し — 相関長 ξ

揺らぎは、近い場所どうしで似ていて、離れると無関係になります。どれだけ離れると無関係になるかの長さが相関長 ξ です。比喩で言えば、測度が持っている一本の物差しです。

式では、二点の相関（平均を引いた積の期待値）が距離 r とともに指数で減り、その減り方の長さが ξ です。

$$\langle O(0)\,O(r)\rangle - \langle O\rangle^2 \;\approx\; C\,e^{-r/\xi}, \qquad \xi = \frac{1}{m} \tag{1}$$

m は転送行列（または転送作用素）の隙間、つまり最も低い固有値と次の固有値の差で、r は虚時間の向きの距離です。相関の減り方と隙間が同じ量であることは 4-11 §02、相関長としての言い直しは 4-11 §07 にあります 典 。

例 1（自由場）。一次元の格子の自由場（隣どうしをばねで結んだガウスの鎖、質量 m_0）では、相関がちょうど $e^{-r/\xi}$ で減り、$m_0^2 = 2(\cosh(1/\xi) - 1)$ で ξ が決まります。$m_0 = 1$ で $\xi \approx 1.04$、$m_0 = 0.1$ で $\xi \approx 10.0$ です（18-03 §05）。

例 2（二重井戸）。量子力学の二重井戸（2-05 §07）では、隙間は二つの谷の間のすり抜けで決まるトンネル分裂 Δ で、山が高いほど指数で小さくなります。虚時間の経路で見ると、相関長は $\xi = \hbar/\Delta$ で、$\hbar$ を小さくすると $e^{S_0/\hbar}$ の速さで伸びます（S_0 は谷から谷へ移る道の作用）。物差しが指数で伸びる、というこの性質が、一段目の模型を選ぶ理由の一つです（23-03 §04・23-04 §03）。

格子の上で測れる ξ は、格子の一目盛りを単位にした数です（5-09 §01）。物理の長さは ξ に格子間隔 a を掛けた $a\xi$ で、連続極限では $a \to 0$ のまま $a\xi$ が有限に残らなければなりません。つまり格子単位の ξ は無限大へ伸びる必要があります（5-09 §05）。二重井戸の $\hbar \to 0$ は、この「物差しが目盛りに比べて無限に長くなる」体制の最小の見本です。

04

にじむ時間 — Poincaré 定数 C_P

紙の上に一滴のインクを落とすと、インクは少しずつにじんで広がり、最後は一様に薄くなります。にじみの正体は、インクの粒の酔歩です。各粒は毎刻み左右どちらかにでたらめに一歩動きます。t 歩のあとの粒の広がり（二乗平均の距離）は $\sqrt{t}$ で、長さ L の帯を一様にするには L^2 程度の歩数がかかります。

この「均し終わるまでの最も長い時間」を、揺らぎについて一般に定めたものが Poincaré 定数 C_P です。比喩で言えば、測度が持っている一個の時計の読み、にじむ時間です。

式で書きます。確率の測度 μ と、関数 f の「場所による変化の大きさ」$\mathcal{E}(f)$（Dirichlet 形）があるとき、

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \;\le\; C_P\,\mathcal{E}(f) \quad (\text{すべての } f), \qquad C_P = \sup_{f} \frac{\mathrm{Var}_\mu(f)}{\mathcal{E}(f)} \tag{2}$$

の最良の定数が C_P です（1-10 §07）。分散が大きいのに変化が小さい関数、つまり「大きくゆっくり変わる揺らぎ」があると C_P は大きくなります。μ を平衡に持つ拡散の力学（Langevin 力学）では、$1/C_P$ がその力学の隙間で、最も遅い揺らぎは時間 C_P ごとに $1/e$ に減ります[典]。

例：一本道の酔歩

升が L 個並んだ一本道（両端で跳ね返る）を考えます。μ は一様分布、$\mathcal{E}(f) = \frac{1}{L}\sum_{i}(f_{i+1}-f_i)^2$ です。このとき (2) の C_P は道のラプラス行列の 0 の次の固有値の逆数で、閉じた形に書けます。

$$C_P(L) = \frac{1}{2\,(1-\cos(\pi/L))} \;\approx\; \frac{L^2}{\pi^2} \qquad (L \to \infty) \tag{3}$$

[初] 証明：$f_i = \cos(\pi(i-\tfrac12)/L)$（$i = 1,\dots,L$）は、両端で跳ね返る道のラプラス行列の固有ベクトルで、固有値は $2(1-\cos(\pi/L))$ です（隣の二項の和に $\cos(A+B)+\cos(A-B) = 2\cos A\cos B$ を使い、両端では $f_0 = f_1$・$f_{L+1} = f_L$ となる鏡の条件が成り立つことを確かめる）。他の固有ベクトルは $\cos(\pi k(i-\tfrac12)/L)$（$k = 0,\dots,L-1$）で、固有値は k とともに増えます。μ が一様なので Var と $\mathcal{E}$ は同じ $1/L$ で割られ、比の上限は 0 の次の固有値の逆数です。∎

[初] 表 3　一本道の酔歩の C_P（閉じた式 (3) の値）。C_P/L^2 は $1/\pi^2 \approx 0.10132$ に寄っていく

L	**隙間** $2(1-\cos(\pi/L))$	C_P	C_P/L^2
16	0.0384294	26.02	0.10165
32	0.00963055	103.8	0.10140
64	0.00240909	415.1	0.10134
256	0.000150596	6640	0.10132

L を倍にすると、均し終わるまでの時間は 4 倍になります。

この部で使う C_P は、この一本道を「経路全体の配位の空間」に置き換えたものです。二重井戸では、虚時間の経路 $x(\tau)$ の全体の上の測度 $e^{-S/\hbar}$ が μ、$\mathcal{E}$ は経路を少し動かしたときの変化の二乗の期待値で、Langevin 力学は「人工的な時間」s に沿って経路全体を拡散させます（23-04 §01）。四次元格子では μ が Wilson 測度、動かすのはリンクの角度です（23-01・7-09）。

自由場では、いちばん遅い揺らぎは経路全体を一様にずらす向きで、その速さが質量の二乗 m_0^2 です。だから $C_P = 1/m_0^2$ で、例 1 の $m_0^2 = 2(\cosh(1/\xi) - 1)$ から C_P/ξ^2 は $\xi = 1, 4, 16, 256$ で 0.921・0.995・0.9997・0.999999 と 1 に寄ります 初 （閉じた式の値）。にじむ時間が物差しの二乗、というのが自由場の答えです。

正確には、ここで言う C_P は「時空（0+1 次元なら虚時間）の全体の配位の分布（経路の測度）」の Poincaré 定数です。一つの時刻の分布（基底状態の $|\psi_0|^2$）の Poincaré 定数は別の量で、そちらはハミルトニアンの隙間と結び付きます。三つの C_P の区別は 23-01 に置きます。C_P が ξ の何乗で伸びるかの冪 z（動的指数）が 2 からずれる既知の例は 2-10 にあります。

寄り道：酔歩はなぜ二乗か

飛ばしてよい小節です。一歩 ± 1 を独立に t 回足した位置 X_t は、平均 0 で、分散は一歩の分散 1 の t 倍です。独立なものの和では分散が足し算になるからです（1-08）。

$$\mathbb{E}[X_t^2] = \sum_{i=1}^{t} \mathbb{E}[\varepsilon_i^2] + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[\varepsilon_i]\,\mathbb{E}[\varepsilon_j] = t \tag{4}$$

広がりは $\sqrt{t}$ なので、距離 L に届くには $t \approx L^2$ です。波は一刻みで一歩進みますが、酔歩は行きつ戻りつするので、遠くへ届くのが二乗で遅れます。緩和時間の仮定の「二乗」は、この酔歩の二乗です。

05

縮尺と時計 — 残りの三つの量

物差し ξ とにじむ時間 C_P のほかに、四次元格子の記録で使ってきた量が三つあります。一段目（二重井戸）では主役になりませんが、緩和時間の仮定を「冪の文」に置く理由がここにあるので、比喩だけを並べます。

物差し	にじむ時間	縮尺の回数	時計の目盛り
相関長 ξ 隙間 m の逆数（§03）	Poincaré 定数 C_P 長さ L を均すのに L^2 歩（§04）	記帳の長さ ξ_{RG} 地図を粗くする段の数	$\mathcal{E}$ の正規化 同じ揺らぎを何の単位で測るか
遅れる時計 確率時間の繰り込み			

縮尺の回数。四次元の格子ヤン–ミルズで ξ を結合 β の関数として式で求める手はありません。そこで地図の縮尺を一段ずつ粗くし、何回で決まった粗さの絵に着くかを数える長さ、記帳の長さ ξ_{RG} を別に作ります。一ループの勘定では β を少し上げるだけで記帳の長さは指数で伸びます（4-07）。記帳の長さと ξ が定数倍で揃うことは仮定です。定義と表は 23-01 と 23-02 に移しました。

時計の目盛り。(2) の C_P は、$\mathcal{E}$ をどの単位で測るかで値が変わります。$\mathcal{E}$ を c 倍すると C_P は $1/c$ 倍です。二重井戸でも同じことが起きます。経路を正準の場 $x/\sqrt{\hbar}$ で測る $\mathcal{E}$ と、位置 x のまま測る $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}/\hbar$ では、$C_P^{(x)} = \hbar\, C_P$ です 初 Lean `ratioR_x_normalisation`（仮定なし。$C_P^{(x)} = \hbar C_P$ なら比も $\hbar$ 倍）。目盛りの違いは「定数倍の幅」には映りますが、$\hbar$ の冪の因子は $\ln\xi$ に比べて小さいので「冪」には映りません。

遅れる時計。Langevin の時間そのものが、尺度を変えると伸び縮みします。確率量子化の摂動論では、確率時間の目盛りも繰り込む必要があります（7-09）典（摂動論の水準）。四次元格子での影響は β の端数の冪の因子で、これも冪には映りません。四つの時計の比べ方は 23-01 の寄り道に置きます。

正確には、縮尺の回数・時計の目盛り・遅れる時計の三つは「定数倍の幅」で言う文（帯の文）を動かし、「冪」で言う文を動かしません。だからこの部の緩和時間の仮定は冪の文です。

06

拡散型緩和時間の仮定を一文で — にじむ時間 ≃ 物差し²

量がそろったので、緩和時間の仮定を比喩で一文にします。「にじむ時間は、物差しの二乗と同じ冪で伸びる」。測度の族が一つの径数で並び、径数を動かすと物差しが無限に伸びるとき、

$$(\xi^2):\quad \frac{\ln C_P}{\ln \xi} \longrightarrow 2 \qquad (\xi \to \infty) \ (5)$$

です。四次元格子では径数は β で $\beta \to \infty$、二重井戸では径数は $\hbar$ で $\hbar \to 0$ です。自由場では §04 のとおり $C_P/\xi^2 \to 1$ で成り立ちます。相互作用のある四次元格子で成り立つかが問いで、それより易しい二重井戸で上の側を組むのが一段目です。

二重井戸では、(5) より強い「定数倍の幅」の文（$C_P \le K\xi^2$）は破れる側にあると読まれています。経路の C_P の下界が ξ^2 の 1 倍から 6.5 倍へ、$\hbar$ を下げるとともに伸びるからです 読（族の下界・刻み $\varepsilon = 0.25 \cdot \hbar \in [0.07, 0.4]$、23-04 §04）。伸び方は、キンクを数える物理の水準の勘定では $S_0/\hbar \approx \ln \xi$ の一次です（この範囲の数値だけでは、指数の伸びと区別できません）。一次なら冪の文 (5) は保たれます。だから一段目の目標は帯の文でなく、冪の文の上の側 $C_P \le K\xi^2 S_0/\hbar$ です（23-03 §05）。

「ある f」と「すべての f」

(2) の C_P は上限なので、下から押さえるのと上から押さえるのとでは難しさが違います。下から押さえる（C_P が大きい）には、$\mathrm{Var}(f)/\mathcal{E}(f)$ が大きい試験関数を一つ見せれば足ります。上から押さえる（C_P が大きすぎない）には、すべての f について不等式を示す必要があります。

$$C_P \ge c\,\xi^2 \iff \exists f:\ \frac{\mathrm{Var}(f)}{\mathcal{E}(f)} \ge c\,\xi^2, \qquad C_P \le C\,\xi^2 \iff \forall f:\ \frac{\mathrm{Var}(f)}{\mathcal{E}(f)} \le C\,\xi^2 \tag{6}$$

比喩で言えば、にじみが遅いことは一つのしみを見せれば言えますが、遅すぎないことはあらゆるしみについて言わなければなりません。質量ギャップの側にあるのは上の側（C_P が大きすぎない）で、試験関数や数値で届くのは下の側だけです。上の側を質量の下界に読み替える代数と、上下の半分（緩和時間の上界の仮定と緩和時間の下界の仮定）の定義は 23-01 に置きます。

正確には、二重井戸の下界 $C_P \ge \xi^2$ は、時刻に局所な試験関数（一つの時刻の関数を時間で足したもの）の族で等号まで届く、という形の命題です（23-04 §04 の一次元の片側の橋の命題）。上の側には、一段目でも条件つきの命題しかありません。

07

第 23 部の歩き方 — 比喩がどの章で正確な文になるか

この章の比喩は、第 23 部のどこかで一度ずつ正確な文に置き換わります。表 4 は比喩・記号・正確にする章の対応です。

表 4　比喩と正確な文の対応

比喩	記号	正確な定義・文	状態
階段	四段	23-03	この部の組み立て方の約束
物差し	$\xi = 1/m$（二重井戸は $\xi = \hbar/\Delta$）	4-11 §07・23-04 §02	典 定義

比喩	記号	正確な定義・文	状態
にじむ時間	C_P（経路の測度）	23-01・23-04 §01	典 定義。四次元格子での値は不明
縮尺の回数	ξ_{RG}	23-01・23-02	約束（ξ と揃うことは 仮 ）
時計の目盛り・遅れる時計	$\mathcal{E}$ の正規化・確率時間	23-01	約束・摂動論の水準
にじむ時間 $\asymp$ 物差し^2	緩和時間の仮定（冪の文）	23-01・23-03 §05	仮
一段目の上の側	$C_P \le K\xi^2 S_0/\hbar$（一段目の上界の命題）	23-05	四条件の上の代数。条件は 仮 の行を残す

筋を先に追うなら 23-03 → 23-04 → 23-05 → 23-12（統合表）→ 23-15（定理までの距離）、四次元格子との関係を先に見るなら 23-01 → 23-02、主張しないことを先に見るなら 23-16 が近道です。Lean の言明と仮定は 23-13、Lean の読み方は Lean の案内 にあります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
典 相関長と隙間が同じ量であること（(1)）、Poincaré 定数の定義と、拡散の力学の隙間がその逆数であること（(2)）	四次元の格子ヤン–ミルズで ξ が $\beta \to \infty$ で発散すること、C_P の値
初 一本道の酔歩の C_P の閉じた形 (3)、一次元の自由場で $C_P/\xi^2 \to 1$、酔歩の二乗平均の距離 $= t$（(4)）	相互作用のある模型で同じ比が冪で揃うこと（緩和時間の仮定）
初 正規化を $\hbar$ 倍すると C_P も $\hbar$ 倍になること（§05 の時計の目盛り） Lean `ratioR_x_normalisation`	四次元格子の記帳の長さ ξ_{RG} と相関長 ξ が定数倍で揃うこと
読 二重井戸の経路の C_P の下界が ξ^2 の 1 倍から 6.5 倍へ伸びること（族の下界・$\varepsilon = 0.25$・$\hbar \in [0.07, 0.4]$）	二重井戸の C_P の上界。一段目の上の側は四条件の上の条件つき（23-05）
階段の四段という組み立て方（約束）	一段目から二段目以後への含意。四段目（極限での質量ギャップ）について、この章は何も示さない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
相関長と隙間・虚時間の相関	典	4-11 の出典表。
Poincaré 定数・拡散の隙間	典	1-10 の出典表。
一本道の酔歩の C_P（(3)・表 3）	初	本文 §04 の証明。表の値は (3) の閉じた式の値。
二重井戸のトンネル分裂と S_0	典	2-05 §07 の (9)(10) と出典表。

もの	種別	出典・道具
経路の C_P の下界の読み（§06）	読	23-04 §04 と、その出典表。
正規化の読み替え（§05 の時計の目盛り）	初・Lean	定理 `ratioR_x_normalisation`（仮定なし）。言明は 23-13。
記帳の長さ・確率時間の繰り込み	約束・典（摂動論）	4-06・4-07・7-09 の出典表。詳しい式は 23-01。
図 1（階段）	約束	この部の組み立て方を描いた模式図。

この章で使った語 — 相関長・Poincaré 定数・Dirichlet 形・経路の測度・階段（四段）・緩和時間の仮定（冪の文）・五つの札（初・典・機・読・仮）・トンネル分裂。意味は A-02 用語集にあります。

次に読む章：23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定 — 問題を八つの言明に割り、拡散型緩和時間の仮定と上下の半分を定義する。一段目へ直接進むなら 23-03 階段の四段。

2026-10-09 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 23 部 一本目の道（前半）— 時間の方向から 構成の筋・緩和時間の仮定・片側の橋 · Kiichi, Shiori and Rin

構成の筋と拡散型緩和時間の仮定 — 八つの言明、格子版の質量ギャップの向き、緩和時間の仮定の六つの段

この章は本書の検討です。§02・§08 は未解決の地図、§03 は既存の知見です。

この章で分かること — クレイの問題を「格子 → 無限体積 → 連続極限 → OS 公理 → 質量ギャップ」の一本の筋に並べ、構成の八つの言明に割ります。格子の上の質量ギャップは「格子単位の隙間が一様に正」ではなく「物理単位の隙間が正に残る」ことです。この部の軸である拡散型緩和時間の仮定（揺らぎが均される時間 C_P は相関長の二乗と同じ冪で伸びる）を、何を測りたいか・なぜ力学の量に言い換えるか・言明（帯の文 → 冪の文 → 上下の半分〔緩和時間の上界の仮定と緩和時間の下界の仮定〕）・緩和時間の仮定が与えるもの・与えないもの・類例の六段で、各段に手で確かめられる例を添えて説明します。時間を連続に取った格子では片側の橋 $C_P \geq \kappa \xi^2$ が示せ、上界の仮定と合わせると格子の物理単位の隙間の下界が出ます。逆向きは一般には成り立たず、橋の仮定のもとで、上界の仮定は格子の物理単位の質量ギャップより強い文です。

前提となる章 — 0-03（問題文）・5-09（何を固定して極限を取るか）・4-11（隙間と相関長）・1-10（Poincaré 定数）・23-00（五つの量と五分類の札）。

先に言うこと — この章は問題を解きません。この章の筋（各 β で体積を先に無限にし、次に β→∞）で四次元で手にあるのは、反射正値性の保存の言明・OS 再構成の言明の定理と、小さい β の無限体積の一意性の言明だけです（公開された構成との関係は §02 の注）。緩和時間の仮定・上界の仮定・下界の仮定・三つの鎖はどれも仮定です。片側の橋は時間を連続に取った有限の空間格子での命題で、時間を刻む Wilson 測度と無限体積へは仮定の行が残ります。Lean で検査したのは、仮定から結論への代数だけです。

この章の順序

1. この章の約束 — 記号と、物差しの単位
2. 問題から構成の筋へ — 八つの言明（表 1）とそのつながり
3. 格子版の質量ギャップの向き — 一様な格子の隙間は反対側（表 2）
4. Poincaré 定数で言い直す — 三つの C_P（表 3）と自由場（表 4）
5. 緩和時間の仮定 — (1) 何を測りたいか・(2) なぜ言い換えるか・(3) 帯の文、冪の文、上下の半分（表 5）

6. 緩和時間の仮定が与えるもの・与えないもの — (4) 片側の橋（表 6）・(5) 逆向きの反例（円の上の自由な粒子の反例）と強結合の側（表 7）・(6) 類例・分類と依存グラフ（表 8）
7. 寄り道：縮尺の回数と四つの時計 — 冪に映らない対数（表 9・表 10）
8. 筋のうち手にあるもの — 23-02・23-03 へ

01

この章の約束 — 記号と、物差しの単位

この章は四次元の格子の側の話です。群は $SU(2)$、Wilson 作用は $S_W = \beta \sum_P (1 - \frac{1}{2}\operatorname{tr} U_P)$（5-01）、$\beta = 4/g^2$ は結合の逆数で、逆温度ではありません。量はすべて格子単位（格子間隔が 1）で数えます。

$m_{\mathrm{lat}}(\beta)$ は転送行列のゲージ不変な状態の上の隙間（格子単位の質量）、$\xi = 1/m_{\mathrm{lat}}$ は相関長、$a(\beta)$ は格子間隔を物理の単位で測った値です。物理単位の質量は

$$\xi = \frac{1}{m_{\mathrm{lat}}}, \qquad \Delta(\beta) = \frac{m_{\mathrm{lat}}(\beta)}{a(\beta)} \tag{1}$$

です。$a(\beta)$ の決め方は一つではありません。弦張力 σ を物理の単位に取れば $a\sqrt{\sigma}$ が格子間隔で、この部の四次元の記録では、格子を粗くする段を数えて決めた長さ、記帳の長さ ξ_{RG} の逆数を a に置きます（§07）。どちらを取るかは、§05 の三つの鎖のうち一尺度の鎖と記帳の長さの鎖の仮定の中に入ります。

例。$\beta = 2.60$ で $m_{\mathrm{lat}} = 0.514$（Lucini–Teper の Monte Carlo の値）なら $\xi = 1.95$ 格子間隔です 読 。Δ はこれを a で割ったときにだけ決まる量で、格子の上の数だけでは決まりません（5-09）。

02

問題から構成の筋へ — 八つの言明

問題文（0-03）は、$\mathbb{R}^4$ の上の非自明な量子ヤン–ミルズ理論が在ること、そしてその理論に質量ギャップ $\Delta > 0$ があることを求めます。格子から入る道では、これを一本の筋に並べます。

格子	無限体積	連続極限	OS 公理
有限の箱の Wilson 測度 各 β・各体積で確率測度	箱を無限に 無限体積の一意性の言明・反射正値性の保存の言明	$\beta \to \infty$（$a \to 0$） Wilson ループの極限の言明・回転の回復の言明	Hilbert 空間とハミルトニアン

			OS 再構成の言明・非自明性の言明
質量ギャップ 物理単位の隙間が正 物理単位の隙間の言明			

各 β の測度で先に体積を無限にし、次に $\beta \to \infty$ とする順です（Chatterjee 2018 の順。有限の箱で先に $a \to 0$ とする順もある、16-07）。筋の各段を言明にしたのが表 1 で、問題文の要求は次の見取り図になります。

$$\text{問題文の要求} \;\Longleftarrow\; (\mathrm{S1}) \wedge (\mathrm{S2}) \wedge (\mathrm{S3}) \wedge (\mathrm{S4}) \wedge (\mathrm{S6}) \wedge (\mathrm{S7}) \wedge (\mathrm{S8}) \tag{2}$$

(2) は見取り図で、定理ではありません。記帳の長さでの緩和時間の帯は (2) に入らない、物理単位の隙間の言明の言い直しです（§04）。

表 1　構成の八つの言明と四次元での現状（式の中では札 (S1)〜(S8) で書く）

言明	中身	四次元での現状	章
無限体積の一意性の言明（式の中の (S1)）	各 β で体積無限の極限測度が一つに決まる	典 極限点はコンパクト性から在る。小さい β で極限の存在（Osterwalder–Seiler 1978）と一意性（Shen–Zhu–Zhu 2023）。大きい β では 'in general unknown'（Chatterjee §3）	5-04
反射正値性の保存の言明（式の中の (S2)）	正の自己共役な転送作用素。弱極限で保たれる	典 Osterwalder–Seiler 1978・Lüscher 1977	5-03
Wilson ループの極限の言明（式の中の (S3)）	$a \to 0$ で繰り込んだ Wilson ループが自明でない極限を持つ	未解決（連続の弦張力の問題（Chatterjee の Problem 5.2)）	5-09・7-07
物理単位の隙間の言明（式の中の (S4)）	$\Delta(\beta) \to \Delta_\infty \in (0, \infty)$	未解決（格子の側の半分が、格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1)）	4-11・5-09
記帳の長さでの緩和時間の帯（揺らぎの遅さ）（式の中の (S5)）	$a^2 C_P \asymp 1$	仮 この部の定式化。証明は無い	§04・§05
回転の回復の言明（式の中の (S6)）	極限で $\mathbb{R}^4$ の回転と並進の不変性が戻る	この筋では未解決（二次元では示されている。公開された構成の側は下の注）	16-07
OS 再構成の言明（式の中の (S7)）	公理から Hilbert 空間とハミルトニアンを作る	典 定理（Osterwalder–Schrader）。この筋では極限が公理を満たすことが残る（公開された構成の側は下の注）	4-10

言明	中身	四次元での現状	章
非自明性の言明（式の中の (S8)）	極限がガウスでなく、短距離で漸近自由の予言と合う	未解決。格子で切った四次元の ϕ^4 は極限がガウス 典	0-03・7-08

注（公開された構成との関係）。表 1 の「四次元での現状」は、この章の筋（各 β で体積を先に無限にし、次に β→∞）での現状です。2026-11-10 に公開された構成は、別の組み立て（繰り込みの段を重ねて紫外の極限を取り、無限体積は部分列で取る）で、四次元の Wilson の格子ゲージ理論の極限として Wightman の公理を満たす場の量子論が作れることを Lean で証明している、と委員会が評価しました（第 6 部）。その構成では、Euclid 不変（回転の回復）と OS の公理・再構成は相ごとの理論について示されています（6-03）。示されていないのは、無限体積の極限の収束と一意性、連続の理論の確率測度、一様な質量ギャップ、Wilson ループと面積則、一粒子の状態です（6-04）。物理単位の隙間の言明と Wilson ループの極限の言明は、どちらの組み立てでも開いています。

八つは独立ではありません。「元が先の前提になる」矢印で書くと次のとおりです（この本の整理。帯の形の拡散型緩和時間の仮定の付いた矢印は、§05 の帯の文の下でだけ）。

$$\text{(S1)} \to \text{(S3)} \to \text{(S6), (S8)}; \qquad \text{(S1), (S2)} \to \text{(S4)} \xleftarrow{(\xi^{\prime})\text{band}} \text{(S5)}; \qquad \text{(S2), (S6)} \to \text{(S7)} \tag{3}$$

この章の筋で四次元で手にあるのは、反射正値性の保存の言明と OS 再構成の言明（再構成の定理の部分）です。「極限さえ取れれば残りは自動」と言いたくなりますが、問題文の脚注は、コンパクト性だけによる弱い存在を、極限の性質（'such as the existence of a mass gap and the axioms'）を別に示さない限り解と認めません（Jaffe–Witten）典 。

$$\underbrace{\mu_{\beta_j} \to \mu \ \text{(部分列)}}_{\text{コンパクト性だけ}} \implies \text{(S2) は残る}\,; \ \text{(S4)}\cdot\text{(S6)}\cdot\text{(S8) については何も言えない} \tag{4}$$

例。物理単位の隙間の言明に入る矢印は三本で、記帳の長さでの緩和時間の帯からの一本だけが帯の文の下の矢印です。Wilson ループの極限の言明に入るのが無限体積の一意性の言明からだけなのは、体積を先に無限にする順だからです。

03

格子版の質量ギャップの向き — 一様な格子の隙間は反対側

格子の上の「質量ギャップ」を「格子単位の隙間 $m_{\mathrm{lat}}(\beta)$ がすべての β で一定値以上」と読むと、連続極限では反対の意味になります。(1) のとおり、物理単位の質量は格子単位の質量を格子間隔で割ったものだからです。

$$\inf_{\beta} m_{\mathrm{lat}}(\beta) \geq c > 0 \implies \Delta(\beta) \geq \frac{c}{a(\beta)} \to \infty \qquad (a \to 0) \tag{5}$$

初 (1) を $a(\beta)$ で割るだけです。比喩で言えば、定規の目盛りを細かくしていっても測る物がいつも目盛り数個分なら、物の実際の長さは 0 に縮みます。正確には、(5) の下では ξ が有界で、物理単位の相関長 $a\xi$ が 0 に向かいます。物理単位の隙間の言明が求めるのは反対に、m_{lat} が a と同じ速さで 0 に向かうことです。

$$\text{(S4)}:\quad m_{\mathrm{lat}}(\beta)\sim \Delta_{\infty}\, a(\beta),\qquad \text{特に}\ \ \xi(\beta)\to\infty\quad(\beta\to\infty) \tag{6}$$

この向きは Chatterjee（2018）の格子の相関長の問題そのものです：'Show that for any β > 0, there exists some ξ(β) ∈ (0, ∞) such that ⋯ Moreover, prove that $\lim_{\beta\to\infty}\xi(\beta)=\infty$.' 典 尺度の決め方は 5-09 にあります。

例。表 2 は弦張力 σ を物理の単位にし、$a\sqrt{\sigma}$ を格子間隔とみなしたものです。$\beta=2.25\to 2.60$ で a は 3.16 分の 1、m_{lat} は 2.70 分の 1 になり、$\Delta/\sqrt{\sigma}$ は 3.3〜3.8 にとどまります。最後の列は m_{lat} が $\beta=2.25$ の値で止まった場合で、a に反比例して増えます。

読 表 2　Lucini–Teper（2001）表 1 の Monte Carlo の値（$SU(2)$・格子 8^4〜24^4）と、その比（誤差は独立として伝播）

β	$a\sqrt{\sigma}$	m_{lat}	$\Delta/\sqrt{\sigma}$	m_{lat} を止めた場合
2.25	0.4231(25)	1.390(30)	3.285(74)	3.29
2.30	0.3108(17)	1.090(33)	3.507(108)	4.47
2.40	0.2634(14)	0.953(19)	3.618(75)	5.28
2.475	0.2016(13)	0.754(10)	3.740(55)	6.89
2.55	0.15896(63)	0.586(10)	3.686(65)	8.74
2.60	0.13395(62)	0.514(8)	3.837(62)	10.38

$\Delta/\sqrt{\sigma}$ はおおむね増えて、原典の外挿値 3.844(61) に下から近づきます（$\beta=2.475\to 2.55$ で一度、誤差の内で下がる）読。窓は $\xi\lesssim 2$ 格子間隔で、極限が在ることの証拠ではありません（16-08）。

04

Poincaré 定数で言い直す — 揺らぎの遅さの言明と三つの C_P

物理単位の隙間の言明を、格子の測度 μ_β の Poincaré 定数 C_P で言い直します。観測量の分散を、リンクの動きへの敏感さ（Dirichlet 形 $\mathcal{E}$）で割った比の上限で、リンクを揺すりながら作用の低い向きへ動かす Langevin 力学の、最も遅い揺らぎが均される時間です（1-10・23-00 §04）。

$$C_P=\sup_{f}\frac{\mathrm{Var}_{\mu_\beta}(f)}{\mathcal{E}(f)},\quad \mathcal{E}(f)=\mathbb{E}_{\mu_\beta}\Big[\sum_{\ell}|\nabla_\ell f|^2\Big],\qquad \text{(S5)}:\ a(\beta)^2\,C_P(\beta)\asymp 1 \tag{7}$$

∇_ℓ はリンク ℓ の向きの微分（リンクの角度で測る）、$A \asymp B$ は比が β に依らない正の定数で上下から押さえられることです。Langevin の時間は長さの二乗の次元を持つので（拡散）、$a^2 C_P$ は最も遅い緩和を物理の単位で測った値で、記帳の長さでの緩和時間の帯はそれが 0 にも無限大にも行かないと言います。

同じ記号 C_P で三つの量が呼ばれるので区別します（表 3）。この部の C_P は経路の C_P、経路の測度（時空のすべてのリンクの分布）の Poincaré 定数です。

表 3　三つの C_P（自由場の列は質量 m・時間を連続に取った場合）

	測度	結び付く量	自由場
真空の C_P	一つの時刻の真空の分布 $\lvert\psi_0\rvert^2$	ハミルトニアンの隙間 $\Delta = 1/(2C_P^{(\alpha)})$ 典 （基底状態変換、2-05・1-10）	$1/(2m)$
経路の C_P	時空のすべての場の分布（経路）	Langevin の隙間 $\lambda_1 = 1/C_P$。m とは緩和の鎖を介してだけ	$1/m^2$
目盛りで測った経路の C_P	経路の C_P と同じ測度	$\mathcal{E}$ の目盛り。$\mathcal{E}$ を c 倍すると C_P は $1/c$ 倍	角度で $C_P^{(\vartheta)} = \frac{g^2}{4}\xi^2$、場で $C_P^{(A)} = \xi^2$

自由場では $C_P^{(\beta)} = 4\,(C_P^{(\alpha)})^2$ です 初 （表 3 の自由場の列を二乗するだけ。格子間隔 1 の時間の格子では右辺に $1 + m^2/4$ が掛かる）。緩和時間の仮定は経路の C_P についての文なので、「経路の C_P と真空の C_P の二乗が揃う」と読み替えられます。ただしゲージ理論では一つの時刻の測度はゲージ軌道の空間の上にあり、この読み替えは自由場の形からの類推です。

自由場（場の変数で測る目盛り）では、C_P は共分散 $(-\Delta_{\mathrm{lat}} + m_{\mathrm{lat}}^2)^{-1}$ の最大固有値です（1-10） 典 。

$$C_P = \frac{1}{m_{\mathrm{lat}}^2} \quad \Longrightarrow \quad a^2 C_P = \frac{1}{\Delta^2} \tag{8}$$

自由場では物理単位の隙間の言明と記帳の長さでの緩和時間の帯が同じことになり、一様な格子の隙間 $m_{\mathrm{lat}} \geq c$ は $C_P \leq 1/c^2$、つまり $a^2 C_P \to 0$ の側です。表 4 は $\Delta = 1$ を止めて a を小さくした例です。

初 表 4　四次元の格子の自由場（$C_P = 1/m_{\mathrm{lat}}^2$、$\xi$ は $m_{\mathrm{lat}}^2 = 2(\cosh(1/\xi) - 1)$ から。閉じた式の値）

a	m_{lat}	C_P	ξ	$a^2 C_P$	$a\xi$
1	1	1	1.0390	1	1.0390
1/4	0.25	16	4.0104	1	1.0026
1/16	0.0625	256	16.003	1	1.0002
2^{-k}	1（止める）	1	1.0390	4^{-k}	$1.039 \cdot 2^{-k}$

a を半分にするごとに C_P は 4 倍、ξ は 2 倍になり、$a^2 C_P = 1$、$a\xi \to 1$ です。格子単位の質量を 1 に止めると $C_P = 1$ のまま $\Delta = 2^k$ が発散します。相互作用のある理論で C_P と ξ^2 が同じ冪で大きくなるかが次の節の緩和時間の仮定です。

寄り道：二つの時間

飛ばしてよい小節です。自由場で転送行列（ユークリッドの時間）の隙間は $\approx m_{\mathrm{lat}}$、Langevin 力学（「第五の時間」）の隙間 $1/C_P$ は m_{lat}^2 です。比喩で言えば波が届く距離とインクがにじむ時間の違いで、正確には Langevin 力学が拡散で、長さ ξ を均すのに ξ^2 程度かかるからです（18-03・23-00 の寄り道）。

05

拡散型緩和時間の仮定 — 何を測りたいか、なぜ言い換えるか、何を言うか

緩和時間の仮定は、一文で言えば「揺らぎが均される時間は、相関長の二乗と同じ冪で伸びる」という文です。この節と次の節で、この一文を六つの段に分けて説明します。(1) 何を測りたいか、(2) なぜ力学の量に言い換えるか、(3) 言明を段を踏んで、(4) 緩和時間の仮定が与えるもの、(5) 緩和時間の仮定が与えないもの、(6) 類例。各段に、手で確かめられる小さな例を置きます。

この部での位置づけ。緩和時間の仮定は、質量ギャップの問題に取り掛かるために選んだ一つの言い換えです。質量ギャップへの唯一の道でも、正しいと決まった道でもありません。緩和時間の仮定と別の視点や、緩和時間の仮定を前提にした新しい考え方は 第 24 部 で扱います。

この部で緩和時間の仮定を軸に置く理由。問題文が求める量は、ユークリッドの時間の向きの隙間（転送行列の隙間を物理の単位で測ったもの）です。緩和時間の仮定はこれを、格子の測度だけで定まり、「すべての f」の不等式を局所の部品から組み立てる道具がそろい、組み立ての代数を機械で検査できる量——Langevin 力学の緩和の時間 C_P と相関長の冪——に置き換えます。§06 で見るとおり、この置き換えは片側の橋を通って質量ギャップの側へ戻ることができ、しかも片側の橋の仮定のもとで、緩和時間の仮定の上の半分である上界の仮定は、格子の上の物理単位の隙間が正に残ることより強い文です。より強い文を、道具の多い言葉で言う。この取引がこの部の立脚点で、第 23 部の章はすべて緩和時間の仮定を軸に組み立てています。緩和時間の仮定を取っ掛かりとした検討、というこの部の題はこの意味です。

(1) 何を測りたいか — 物差しと、にじむ時間

問題文の要求のうち格子で述べられる部分は、(6) の「物理単位の隙間 $\Delta = m_{\mathrm{lat}}/a$ が $\beta \to \infty$ で正に残る」ことです。格子の上で見ると、二つのことが同時に起きなければなりません。物差し $\xi = 1/m_{\mathrm{lat}}$ が格子の目盛りに比べて無限に伸びること、そしてその伸び方が格子間隔の逆数と揃うこと（$a\xi$ が 0 にも無限大にも行かない）です。23-00 §05 の五つの量で言えば、問題文は物差しと縮尺の回数の関係を問う文です。

物差し	にじむ時間	縮尺の回数	時計の目盛り
相関長 $\xi = 1/m_{\mathrm{lat}}$	Poincaré 定数 C_P		$\mathcal{E}$ の正規化

ユークリッドの時間の隙間の逆数	Langevin 力学の隙間の逆数	記帳の長さ $\xi_{\mathrm{RG}} = 1/a$ 格子間隔の逆数（§07）	表 3 の目盛りで測った経路の C_P
遅れる時計 確率時間の繰り込み §07 の寄り道			

緩和時間の仮定は、この問いに、にじむ時間を持ち込みます。測度の中で最も遅い揺らぎが均される時間 C_P は拡散の時間なので、長さ ξ を均すには ξ^2 程度かかるはずです（23-00 の寄り道）。そこで「にじむ時間は物差しの二乗と釣り合う」を一つの文にし、物差しと縮尺の回数の関係を、にじむ時間を通して述べる。これが緩和時間の仮定の発想です。

例 1（一本道の酔歩を手で数える）。23-00 §04 の一本道（升が L 個・両端で跳ね返る・一様分布・$\mathcal{E}(f) = \frac{1}{L}\sum_i (f_{i+1} - f_i)^2$）では、物差しに当たるのは道の長さ L です。$L = 2$ では $f = (1, -1)$ が最も遅い揺らぎで、$\mathrm{Var}(f) = 1$、$\mathcal{E}(f) = \frac{1}{2}\cdot 2^2 = 2$、比は $\frac{1}{2}$ です。$L = 3$ では $f = (1, 0, -1)$ で $\mathrm{Var}(f) = \frac{2}{3}$、$\mathcal{E}(f) = \frac{1}{3}(1+1) = \frac{2}{3}$、比は 1 です。どちらも 23-00 の (3) の $C_P(L) = 1/(2(1-\cos(\pi/L)))$ の値と一致し、$L = 4$ では $1/(2-\sqrt{2}) \approx 1.707$ です 初 。L を倍にすると C_P はおよそ 4 倍になり、大きな L では $C_P \approx L^2/\pi^2$ です（23-00 の表 3）。「にじむ時間は物差しの二乗」を、いちばん小さな道で確かめたことになります。

正確には、一本道の L は外から与えた長さで、測度が自分で持つ物差し（相関長）ではありません。両者が一致する最も簡単な例は自由場で、$C_P = 1/m_0^2$ と $m_0^2 = 2(\cosh(1/\xi) - 1)$ から $C_P/\xi^2 \to 1$ です（23-00 §04、本章の表 4）。相互作用のある測度で、にじむ時間と物差しがどう釣り合うかが、緩和時間の仮定の問いです。

(2) なぜ力学の量に言い換えるか — 測れる・道具がある・検査が届く

物差しの側の量 m_{lat} は転送行列の隙間で、ゲージ不変な状態の Hilbert 空間の上の作用素の量です。試しの状態を一つ置けば m_{lat} の上界（ξ の下界）は出ますが、下界にはすべての状態が要ります。C_P の上界にも「すべての f」が要るので、難しさは同じ向きに残ります。それでも言い換える理由は三つあります。

(a) 格子の測度だけで測れる。C_P は (7) のとおり、分散と Dirichlet 形という μ_β の期待値だけで定まります。Hilbert 空間や再構成を経ずに、測度から直接定義でき、試験関数一つで下界が出て、Langevin 力学やマルコフ連鎖の自己相関から下界の読みも取れます（23-02 §04）。

(b) 「すべての f」を組み立てる道具がある。Poincaré 不等式には、局所の部品から全体の上界を組み立てる道具が、次元によらない形でそろっています。測度 $\mu \propto e^{-S}$、$\mathcal{E}(f) = \mathbb{E}|\nabla f|^2$ の規約

で

$$\operatorname{Hess} S \geq \rho \;\Rightarrow\; C_P(\mu) \leq \frac{1}{\rho}; \qquad \mu' \propto e^{-W}\mu \;\Rightarrow\; C_P(\mu') \leq e^{\operatorname{osc} W} C_P(\mu); \qquad C_P(\mu_1 \otimes \mu_2) = \max\{C_P(\mu_1), C_P(\mu_2)\} \tag{9}$$

です。左の二つは 典 （Bakry–Émery の凸性の判定と Holley–Stroock の有界な摂動。$\operatorname{osc} W = \sup W - \inf W$。書誌は 23-06 の出典表）、右は 初 （Efron–Stein の不等式 $\operatorname{Var}(f) \leq \mathbb{E}\operatorname{Var}_1(f) + \mathbb{E}\operatorname{Var}_2(f)$ の各項に成分の Poincaré 不等式を使えば $\leq \max$、片方の座標だけの関数で等号）。これに分散の分解（条件つきの分散と条件つき期待値の分散の和、23-05 §01）を加えた四つが、一段目の組み立ての部品です。対数 Sobolev 不等式（LSI）にも同じ型の道具があり、尺度ごとに分けた凸性の判定もその一つです（23-02 §05）。

(c) 機械検査が届く。部品の不等式を組み合わせる段は、実数の不等式の代数です。代数は Lean で検査でき、有限の窓の中の数値の不等式は区間演算（計算機援用）で確かめられます。検査するのは仮定から結論への組み立てで、仮定そのものではありません（23-13）。

例 2（二つのサイトのガウス測度で、道具がどこで効くか）。$\mathbb{R}^2$ の上の測度 $\mu \propto e^{-S}$、$S(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(x_1-x_2)^2 + \frac{1}{2}m_0^2(x_1^2+x_2^2)$ を考えます。Hesse 行列は $\begin{pmatrix} 1+m_0^2 & -1 \\ -1 & 1+m_0^2 \end{pmatrix}$ で、固有値は m_0^2（向き $(1,1)$）と m_0^2+2（向き $(1,-1)$）です。(9) の左の判定から $C_P \leq 1/m_0^2$。一方 $f = x_1 + x_2$ では、共分散が Hesse 行列の逆なので $\operatorname{Var}(f) = 2/m_0^2$、$\mathcal{E}(f) = |\nabla f|^2 = 2$ で、比は $1/m_0^2$ です。上界と下界が一致して $C_P = 1/m_0^2$ 初 。一本道（例 1）では行列を対角化して C_P を求めましたが、この例では対角化をしなくても (9) が答えを出しています。二重井戸 $V(x) = (x^2-1)^2/8$ では頂上で $V''(0) = -\frac{1}{2} < 0$ となり、(9) の凸性の判定は全体には使えません。そこで谷ごとに割る分散の分解と、割った先での凸性と摂動を組み合わせることになります（23-04 §06・23-05 §04）。対角化できない相互作用のある測度で、上界を部品から組み立てられること——これが言い換えの第一の得です。

(3) 緩和時間の仮定の言明を段を踏んで — 帯の文、冪の文、上下の半分

一段目：帯の文。素直に書けば、「C_P は物差しの二乗の定数倍の幅に入る」という文になります。物理の単位 a と、β に依らない定数倍の幅（帯）で比べると

$$\exists \beta_0,\ \exists 0 < c \leq C: \qquad c \leq a(\beta)^2\, C_P(\beta) \leq C \qquad (\beta \geq \beta_0) \tag{10}$$

です。数で言えば、$\xi_{\mathrm{RG}} = 1/a = 10$ のとき C_P は $100c$ から $100C$ の間、$\xi_{\mathrm{RG}} = 1000$ なら $10^6 c$ から $10^6 C$ の間にある、という文です。Langevin の時間は長さの二乗の次元を持つので（拡散）、$a^2 C_P$ は最も遅い緩和を物理の単位で測った値で、(10) はそれが 0 にも無限大にも行かないと言います。

例 3（一本道は帯の文を満たす）。例 1 の一本道で L を物差しにすると、$x = \pi/L$ と置いて $C_P(L)/L^2 = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{(x/2)^2}{\sin^2(x/2)}$ です。$t/\sin t$ は $(0,\pi/2]$ で増えるので、$L \geq 2$ で

$$\frac{1}{\pi^2} \;<\; \frac{C_P(L)}{L^2} \;\le\; \frac{1}{8} \tag{11}$$

（右の等号は $L=2$ の $C_P=\frac{1}{2}$）で、帯の文が $c=1/\pi^2\approx 0.101$・$C=1/8$ で成り立ちます 初 。

相関長を挟むと、帯の文は三つの因子に割れます。

$$a^2 C_P \;=\; \underbrace{(a\xi)^2}_{\text{鎖 (ii)(iii)}} \cdot \underbrace{\frac{C_P}{\xi^2}}_{\text{鎖 (i)}}, \qquad (a\xi)^2 = \frac{1}{m_{\mathrm{phys}}^2}, \qquad \frac{C_P}{\xi^2} = \frac{m_{\mathrm{lat}}^2}{\lambda_1} \tag{12}$$

第一の因子は物理単位の質量 $m_{\mathrm{phys}}=m_{\mathrm{lat}}/a$ で決まり、第二は「Langevin の隙間 λ_1 が質量の二乗と揃う」という緩和の鎖の因子です。第一の因子をさらに「質量の二乗と弦張力が揃う」（一尺度の鎖）と「弦張力と格子間隔の二乗が揃う」（記帳の長さの鎖）に割った三つの比が三つの鎖です（17-12）。三つとも仮定です 仮 。鎖の上下の半分がそれぞれ何を要るかは 23-02 §05 で見ます。

二段目：冪の文。帯の文は、$\mathcal{E}$ の目盛り・記帳の次数・確率時間の繰り込みが持ち込む対数の因子に動かされます（§07 の寄り道）。そこで定数倍だけでなく、$\ln\xi$ の冪の因子も無視する水準に下げたものが緩和時間の仮定です。

$$(\xi^2):\quad \lim_{\beta\to\infty} \frac{\ln C_P(\beta)}{\ln \xi(\beta)} = 2 \tag{13}$$

この文は、一段目の言明 23-03 §05 の (2)、$\lim_{\hbar\to 0}\ln C_P(\hbar)/\ln\xi(\hbar)=2$ と同じ形です。違うのは測度の族だけで、ここでは Wilson 測度 μ_β と $\beta\to\infty$、一段目では二重井戸の経路の測度と $\hbar\to 0$ です。だからこの部では (13) を、次元によらない冪の文として扱い、四次元格子の段では「拡散型緩和時間の仮定」、一段目では「二重井戸の緩和時間の冪の言明」と呼びます。冪の文なので、$\mathcal{E}$ を β の冪倍しても変わりません（$\ln\beta/\ln\xi\to 0$） 初 Lean `exponent_invariant_of_slowly_varying`（仮定：$X_n,\ell_n>0$、$\ln X_n/\ln a_n\to p$、$\ln\ell_n/\ln a_n\to 0$。結論：$\ln(X_n\ell_n)/\ln a_n\to p$。極限の和の代数）。

例 4（帯と冪の違いを数で）。$C_P=\xi^2\ln\xi$ という族を考えます。比 $C_P/\xi^2=\ln\xi$ は $\xi=10,10^3,10^6$ で $2.30,\ 6.91,\ 13.8$ と増え続けるので、帯の文は破れます。一方 $\ln C_P/\ln\xi = 2+\ln\ln\xi/\ln\xi$ は $2.362,\ 2.280,\ 2.190$ とゆっくり 2 に近づき、冪の文は成り立ちます 初 （$\ln\ln\xi$ の値 $0.834,\ 1.933,\ 2.626$ を $\ln\xi=2.303,\ 6.908,\ 13.82$ で割る）。逆に例 3 の一本道は帯の文を満たしますが、$\ln C_P/\ln L = 2-(\ln\pi^2+o(1))/\ln L$ は $L=256$ で $\ln 6640/\ln 256\approx 1.587$ と、2 から遠い所にいます。冪の文は「極限で 2」とだけ言い、定数の分だけゆっくり近づくことを許します。帯の文は冪の文を含意し（$\ln c/\ln\xi\to 0$）、逆は $C_P=\xi^2\ln\xi$ が示すとおり成り立ちません 初 。

(10) は緩和時間の仮定と一尺度の鎖・記帳の長さの鎖を合わせた文で、この本では緩和時間の仮定と呼びません。名前を表 5 のように固定します。

表 5 「C_P が長さの二乗と揃う」の読みと名前（詳しい八つの読みは A-06）

水準・比べる長さ	文	この本の名前	自由近似で
冪・ξ	$\ln C_P / \ln \xi \to 2$	拡散型緩和時間の仮定	成り立つ
冪・記帳の長さ	$\ln C_P / \ln \xi_{\mathrm{RG}} \to 2$	緩和時間の仮定と一尺度の鎖・記帳の長さの鎖（冪）	成り立つ
帯・ξ	$C_P \asymp \xi^2$	$(\xi^2)_{\mathrm{band}[\mathcal{E}_\vartheta]} \cdot (\xi^2)_{\mathrm{band}[\mathcal{E}_A]}$（目盛りを名指す）	場の目盛りで等号、角度の目盛りでは比 $g^2/4$ で下の半分が破れる
帯・記帳の長さ	$a^2 C_P \asymp 1$（(10)）	帯の文と一尺度の鎖・記帳の長さの鎖＝記帳の長さでの緩和時間の帯	記帳の次数で決まる（§07）

冪の水準の二行は、目盛りの選び方にも、§07 の対数の因子にも動かされません。この部が緩和時間の仮定を冪の文に置くのはこのためです。

三段目：上下の半分。帯の文 (10) の右と左を分けたものが上界の仮定・下界の仮定です。

$$(\xi^2)\uparrow:\ a^2 C_P \le C\ \ (C_P \lesssim \xi_{\mathrm{RG}}^2), \qquad (\xi^2)\downarrow:\ a^2 C_P \ge c\ \ (C_P \gtrsim \xi_{\mathrm{RG}}^2) \tag{14}$$

C_P は (7) の上限で、$\xi_{\mathrm{RG}} = 1/a$ は測度と別に決めた長さなので、二つは試験関数 f についての量化子が逆向きです。

$$(\xi^2)\downarrow \iff \forall \beta \ge \beta_0\ \exists f:\ \mathrm{Var}(f) \ge c\,\xi_{\mathrm{RG}}^2\,\mathcal{E}(f), \qquad (\xi^2)\uparrow \iff \forall \beta \ge \beta_0\ \forall f:\ \mathrm{Var}(f) \le C\,\xi_{\mathrm{RG}}^2$$

初 上限の定義をそのまま書いたものです。下界の仮定は試験関数を一つ見せれば済み、上界の仮定はすべての関数についての本物の Poincaré 不等式です。固有値で言う「上からは易しく、下からは難しい」（1-10）が、その逆数の C_P では「下からは易しく、上からは難しい」になります。この非対称が、23-02 の道と壁の全体を決めます。

例 5（片方だけが成り立つ族）。$C_P = \xi_{\mathrm{RG}}^2 \ln \xi_{\mathrm{RG}}$ の族では、$\xi_{\mathrm{RG}} \ge e$ で $a^2 C_P \ge 1$ なので下界の仮定は $c = 1$ で成り立ち、$a^2 C_P = \ln \xi_{\mathrm{RG}} \to \infty$ なので上界の仮定は破れます（冪の文は例 4 のとおり成り立つ）。逆に C_P が β によらず有界な族（強結合の側の定理の形、§06 の表 7）では、上界の仮定は成り立ち下界の仮定は破れます 初 。帯の文は、この二つの破れ方のどちらも起きない、という文です。

注 — 「緩和時間の仮定」と「二重井戸の四条件」

この部の「緩和時間の仮定」は冪の文 (13) だけを指します。上界の仮定・下界の仮定は帯の文の半分で、緩和時間の仮定とは別の名です。一段目で二重井戸の冪の言明の上の側を割った四つの条件は「二重井戸の四条件」と書き、必ず「条件」の語を添えます（23-03 §05・23-05）。相内の局所 Poincaré の条件は「緩和時間の仮定の一つ目の半分」ではなく、一段目の模型の「相の中の局所 Poincaré」という別の言明です。Lean の定理名に入っている字（H1 など）は替えません。

注 — 位相の区画と、体積を無限にする順

(7) の上限はすべての f を動かすので、連続極限で区画の間を移れなくなる位相電荷 Q（を滑らかにしたもの）も試験関数に入ります。周期境界の四次元格子では、Q の自己相関時間が ξ^2 より明らかに速く伸びると報告されています 読 （局所の熱浴・過緩和で Del Debbio–Panagopoulos–Vicari 2002、HMC 型で Schaefer–Sommer–Virotta 2011、局所の算法で Bonanno–Bonati–D'Elia 2021。冪なら指数は約 5、あるいは $1/a$ について指数的で、三つとも冪と指数をデータでは区別できないと書いています）。三本の原典の群はどれも $SU(3)$ 以上で、この本の緩和時間の仮定が述べられる $SU(2)$ で指数が 2 を越えるかは、探した範囲の一次資料では決まっていません。$SU(2)$ で位相電荷の自己相関の格子間隔への依存を測った一次資料は、探した範囲で一本です（Abe–Morikawa–Suzuki 2025。HMC・周期境界・物理の一辺を止めた小さな箱・三つの格子間隔）。そこでは積分自己相関時間が a^{-2} に近く伸びると報告されています 読 。このため、次の読みは $SU(3)$ 以上の原典の上の読みです。可逆な力学ではどの観測量の積分自己相関時間も C_P を越えないので（$\tau_{\mathrm{int}} \le C_P$ 典 、23-02 §05）、HMC と Langevin が同じ普遍類という予想 仮 の下で、上界の仮定は周期の箱では偽と読めます。開いた境界がこの障害を外すのは、物理の一辺を止めた有限の箱の中だけです（Lüscher–Schaefer 2011 では、開いた境界の Q^2 の自己相関時間は時間方向の長さにほぼ比例して伸びる 読 ）。先に体積を無限にするこの本の順では救いにならない見込みです 仮 。緩和時間の仮定を使い続けるなら、位相の区画ごとの言明か、台を相関長の数倍に限った局所の言明に直す方向が候補で、その検討は 第 24 部（24-03・24-04）で扱います。

06

拡散型緩和時間の仮定が与えるもの・与えないもの — 片側の橋、反例、類例

六段の残りの三つ、(4) 緩和時間の仮定が与えるもの、(5) 緩和時間の仮定が与えないもの、(6) 類例です。(4) と (5) は、問題文の量（ユークリッドの時間の隙間）と緩和時間の仮定の量（Langevin の緩和の時間）が別の量であることから始まり、二つをつなぐ片側の橋と、橋の反対向きが成り立たない例で、緩和時間の仮定と質量ギャップの関係を正確に決めます。

(4) 緩和時間の仮定が与えるもの — 質量への読み替えと片側の橋

等号の版。緩和の鎖を等号 $C_P = 1/m_{\mathrm{lat}}^2$ で置くと、(14) の二つの半分は物理単位の質量 $m_{\mathrm{phys}} = m_{\mathrm{lat}}\,\xi_{\mathrm{RG}}$ の言明に読み替わります。

$$(\xi^2)\uparrow \;\Longrightarrow\; m_{\mathrm{phys}} \;\ge\; C^{-1/2}, \qquad (\xi^2)\downarrow \;\Longrightarrow\; m_{\mathrm{phys}} \;\le\; c^{-1/2} \tag{16}$$

初 証明：上界の仮定の $1/m_{\mathrm{lat}}^2 \le C\xi_{\mathrm{RG}}^2$ の両辺に m_{lat}^2/C を掛けると $1/C \le (m_{\mathrm{lat}}\xi_{\mathrm{RG}})^2$。下界の仮定は不等号を逆にして同じ。∎ 証明の水準は代数で、Lean の二つの定理がこの代数を検査して

います。

```
theorem hup_is_gap_positivity {CP xi mlat K : ℝ}
    (hmlat : 0 < mlat) (hCP : CP = 1 / mlat ^ 2) (h : CP ≤ K * xi ^ 2) :
    1 ≤ K * (mlat * xi) ^ 2

theorem hdown_is_mass_finiteness {CP xi mlat c : ℝ}
    (hmlat : 0 < mlat) (hCP : CP = 1 / mlat ^ 2) (h : c * xi ^ 2 ≤ CP) :
    c * (mlat * xi) ^ 2 ≤ 1
```

Lean `LatticeGauge.hup_is_gap_positivity`（仮定：$m_{\mathrm{lat}} > 0 \cdot C_P = 1/m_{\mathrm{lat}}^2 \cdot C_P \le K\xi^2$。結論：$1 \le K(m_{\mathrm{lat}}\xi)^2$）と `LatticeGauge.hdown_is_mass_finiteness`（仮定：$m_{\mathrm{lat}} > 0 \cdot C_P = 1/m_{\mathrm{lat}}^2 \cdot c\,\xi^2 \le C_P$。結論：$c\,(m_{\mathrm{lat}}\xi)^2 \le 1$）。四つの文字はどれも Lean の中では名前の付いた実数で、それが Wilson 測度の Poincaré 定数であること、C_P が上限であること（すべての f を動かすこと）は Lean の外にあります（23-13）。上界の仮定は「質量が 0 に潰れない」、つまり質量ギャップの側の下界で、下界の仮定は「質量が無限大に逃げない」側です。

等号 $C_P = 1/m_{\mathrm{lat}}^2$ は自由場の値で、相互作用のある理論で置くには強すぎる仮定です。ところが上界の仮定から質量の下界を出す証明は、等号のうち片側 $C_P \ge \kappa/m_{\mathrm{lat}}^2$ しか使っていません。そしてこの片側は、時間を連続に取った格子では、仮定を名指しした命題として示せます。

片側の橋（連続の時間・有限の空間格子・$T = \infty$）

空間を有限の格子にし、一つの時刻の配位の空間を Q（$\mathbb{R}^n$、またはコンパクトで連結な多様体）、運動項の計量を M、$H = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta_M + V$、$A = (H - E_0)/\hbar$ とする。次を仮定する。(A1) 基底状態の仮定：H のスペクトルは離散で、基底状態 ψ_0 は重複せず滑らかで正、$\Delta = E_1 - E_0 > 0$。(A2) 定常な経路の測度の仮定：経路の測度は $T = \infty$ の定常な測度（一つの時刻の分布が ψ_0^2、推移が $e^{-\tau A}$）。(A3) 計量の比べの仮定：Langevin の Dirichlet 形 $\mathcal{E}_G(f) = \hbar \int \mathbb{E}\langle d_{q(\tau)}f, G\, d_{q(\tau)}f\rangle d\tau$ の計量が $G \le \lambda_G M^{-1}$ を満たし、$\kappa := 1/\lambda_G$。このとき $\xi = \hbar/\Delta$、$F = \psi_1/\psi_0$、$f_T = \int_0^T F(q(\tau))\,d\tau$ について、どの $T > 0$ でも

$$\frac{\mathrm{Var}(f_T)}{\mathcal{E}_G(f_T)} \;\ge\; \kappa\xi^2\Big[1 - \frac{\xi}{T}\big(1 - e^{-T/\xi}\big)\Big], \qquad \text{したがって} \qquad C_P \;\ge\; \kappa\xi^2 = \frac{\kappa\hbar^2}{\Delta^2} \tag{17}$$

が成り立つ。正準の選び方 $G = M^{-1}$（$\kappa = 1$）では、時刻に局所な試験関数の族の $T \to \infty$ の上限がちょうど ξ^2 である。

初 証明〔三〕。$m = \Delta/\hbar = 1/\xi$、$\varphi = (F - \langle F\rangle)\psi_0$ と置きます。$\langle F\rangle = \int \psi_0\psi_1 = 0$ なので $\varphi = \psi_1$、$A\varphi = m\varphi$ です。

(i) 分散。定常な経路の測度の仮定 (A2) の下で、測度の相関は $\mathrm{Cov}(F(q(s)),F(q(t))) = \langle \varphi, e^{-|s-t|A}\varphi\rangle = \|\varphi\|^2 e^{-m|s-t|}$ です 典 （転送作用素で相関を書く式、2-07 §08・23-04 §04 の (12) の型）。正方形 $[0,T]^2$ の上で積分すると $\mathrm{Var}(f_T) = \|\varphi\|^2\big(2T/m - 2(1-e^{-mT})/m^2\big)$ です（$\iint e^{-m|s-t|} = 2\int_0^T (T-u)e^{-mu}du$ を一回の部分積分で閉じる）。

(ii) Dirichlet 形。f_T を経路 $q(\tau)$ で微分すると、$\tau\in[0,T]$ で $dF(q(\tau))$、それ以外で 0 です。定常性と計量の比べの仮定 (A3) から $\mathcal{E}_G(f_T) = \hbar T\int \psi_0^2 \langle dF, G\,dF\rangle \le \hbar T\lambda_G \int \psi_0^2 |dF|^2_{M^{-1}}$ です。

(iii) 基底状態変換の恒等式。滑らかな実関数 F について

$$\big\langle F\psi_0, (H-E_0)F\psi_0\big\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\int \psi_0^2\,|dF|^2_{M^{-1}} \tag{18}$$

です 初 。$(V-E_0)\psi_0 = \frac{\hbar^2}{2}\Delta_M\psi_0$ を使うと $(H-E_0)(F\psi_0) = -\frac{\hbar^2}{2}\big(\psi_0\Delta_M F + 2\langle dF, d\psi_0\rangle_{M^{-1}}\big) = -\frac{\hbar^2}{2\psi_0}\,\mathrm{div}_M(\psi_0^2\,\nabla_M F)$ となり、$F\psi_0$ を掛けて一回部分積分すれば右辺です（Q がコンパクトで境界が無いか、関数が無限遠で減衰するので境界の項は消える）。∎ 1-10 §08・2-05 §08 の一次元の計算と同じ形です。$F\psi_0=\psi_1$ なので左辺は $\Delta\|\varphi\|^2$ で、$\int\psi_0^2|dF|^2_{M^{-1}} = (2m/\hbar)\|\varphi\|^2$、よって $\mathcal{E}_G(f_T)\le 2\lambda_G m T\|\varphi\|^2$ です。

(iv) 比。(i) を (ii)(iii) で割ると $\mathrm{Var}\,/\mathcal{E}_G \ge \kappa\big(1/m^2 - (1-e^{-mT})/(Tm^3)\big)$、これが (17) の左です。$C_P$ は上限なので右辺以上で、$T\to\infty$ で $C_P\ge\kappa\xi^2$ です。正準のときの上限は、時刻に局所な任意の f で $\mathrm{Var}\,/T \to 2\langle\varphi, A^{-1}\varphi\rangle\cdot\mathcal{E}/T = 2\langle\varphi,A\varphi\rangle$ となり、A の固有値 $a\ge m$ について $1/a\le a/m^2$ を使えば ξ^2 以下で、等号は φ が固有値 m の固有空間にあるときです（23-04 §04 の (13) と同じ）。∎

Lean `LatticeGauge.HupBridge.cont_ratio_closed`（仮定：$0<m$・$0<T$。結論：(i) を (ii)(iii) で割った比が $1/m^2-(1-e^{-mT})/(Tm^3)$ に等しい）と `one_sided_bridge`（仮定：分散の下界・Dirichlet 形の上界・$\mathrm{Var}\,/\mathcal{E}\le C_P$、正の数。結論：$\kappa/m^2\le C_P$）は、(i)〜(iv) の数の代数だけを検査したものです。経路の測度・相関の式・(18)・C_P が上限であることは Lean の外です。

表 6　片側の橋の仮定と、どこで使うか

記号	仮定	どこで使うか
基底状態の仮定 (A1)	スペクトルが離散・$\Delta>0$・$\psi_0>0$ で滑らかで重複しない・ψ_1 が在る	$F=\psi_1/\psi_0$ が定義でき滑らか
定常な経路の測度の仮定 (A2)	$T=\infty$ の定常な経路の測度（一つの時刻の分布が ψ_0^2、推移が $e^{-\tau A}$）	(i) の相関の式
計量の比べの仮定 (A3)	$G\le\lambda_G M^{-1}$（$\kappa=1/\lambda_G$）	(ii) の比較
連続の時間	経路の運動項が $\frac12|\dot q|^2_M$ の形	(18) を経路の測度の $\mathcal{E}$ と同じ計量で使う
有限の空間格子	Q が有限次元	基底状態の仮定と (18) の部分積分

κ は時間の長さ T に依りません。T は (17) の因子 $1-(\xi/T)(1-e^{-T/\xi})\in(0,1)$ にだけ入り、$T/\xi\to\infty$ で 1 に近づきます。一次元の井戸で $G=M^{-1}=1$ と置いたものが一次元の片側の橋の命題（23-04 §04）で、片側の橋はその多次元・計量つきの版です。鎖の言葉で言えば、片側の橋は緩和の鎖の片側 $\lambda_1\le m_{\mathrm{lat}}^2/\kappa$（下界の仮定の側の半分）を、時間を連続に取った格子で示すものです。同じ形の主張が文献にあるかは確かめていません（既知かもしれません）。

冪が二次になる理由。分散は相関の時間の積分で $T\cdot(2/m)\|\varphi\|^2$、つまり $1/\Delta$ の一次で大きくなります。Dirichlet 形は、最も遅い励起の $F=\psi_1/\psi_0$ の勾配が小さい関数なので、(18) により $T\cdot 2m\|\varphi\|^2$、つまり Δ の一次で小さくなります。比が $1/\Delta^2$ です。勾配の小ささを見落として Dirichlet 形を Δ に依らない量と見積もると、c/Δ の一次の下界に落ち、次の (19) は出ません。

注（記号 Δ の二つの意味）。この章では Δ を二つの意味で使っています。(1) の $\Delta(\beta)=m_{\mathrm{lat}}/a$ は物理単位の質量です。片側の橋とこの節の例の $\Delta=E_1-E_0$ は、空間を有限の格子にしたハミルトニアンの隙間で、$\xi=\hbar/\Delta$ により格子単位の相関長に結ばれます（$\hbar=1$ で m_{lat} にあたり、(1) の $\Delta(\beta)$ はそれを格子間隔 a で割ったもの）。第 24 部では Δ を片側の橋の意味 E_1-E_0 に限り、物理単位の質量は m_{phys} と書きます（24-09 §02）。

例 6（二つのサイトの格子で、橋を手で確かめる）。例 2 と同じ二つのサイトを空間の格子にし、時間を連続に取ります（$\hbar=1$・$M=G=1$・$V=\frac12 x^{\mathsf T}Kx$、$K$ は例 2 の Hesse 行列）。基準振動は $u=(x_1+x_2)/\sqrt2$（角振動数 m_0）と $v=(x_1-x_2)/\sqrt2$（角振動数 $\sqrt{m_0^2+2}$）で、最初の励起は u の振動を一つ上げた状態なので $\Delta=m_0$、$\xi=1/m_0$、$F=\psi_1/\psi_0\propto u$ です。経路の上で $u(\tau)$ は定常なガウス過程で、$\mathbb{E}[u(s)u(t)]=e^{-m_0|s-t|}/(2m_0)$。$f_T=\int_0^T u\,d\tau$ について $\mathrm{Var}(f_T)=\frac{1}{2m_0}\big(\frac{2T}{m_0}-\frac{2(1-e^{-m_0T})}{m_0^2}\big)$、$|\nabla u|^2=\frac12+\frac12=1$ なので $\mathcal{E}(f_T)=T$、比は $1/m_0^2-(1-e^{-m_0T})/(Tm_0^3)$ で、(17) の右辺そのものです。数で、$m_0=\frac12$（$\xi=2$）・$T=20$ なら比は $4-0.99995/2.5\approx 3.600$、$T=200$ なら $4-1/25=3.96$ で、$\xi^2=4$ に下から近づきます。(18) も確かめられます：左辺は $\Delta\,\mathbb{E}[u^2]=m_0\cdot\frac{1}{2m_0}=\frac12$、右辺は $\frac12\,\mathbb{E}|\nabla u|^2=\frac12$ [初]。この例では経路の測度がガウスで、共分散 $(-\partial_\tau^2+K)^{-1}$ の最大固有値が $1/m_0^2$ なので $C_P=\xi^2$、橋は等号で成り立っています。

上界の仮定と橋を合わせる。上界の仮定の $C_P\le C\xi_{\mathrm{RG}}^2$ と片側の橋の $C_P\ge\kappa/m_{\mathrm{lat}}^2$ を並べると

$$\frac{\kappa}{m_{\mathrm{lat}}^2}\;\le\;C_P\;\le\;C\,\xi_{\mathrm{RG}}^2\qquad\Longrightarrow\qquad m_{\mathrm{phys}}^2=(m_{\mathrm{lat}}\,\xi_{\mathrm{RG}})^2\;\ge\;\frac{\kappa}{C}\tag{19}$$

です [初]。例えば $\kappa=1$・$C=4$ なら、物理単位の隙間はどの $\beta\ge\beta_0$ でも $\frac12$ 以上に留まります。(16) の等号の仮定を片側に弱めた形で、Lean では

```
theorem hup_is_gap_positivity_of_lower {CP xi mlat K κ : ℝ}
    (hmlat : 0 < mlat) (hCP : κ / mlat ^ 2 ≤ CP) (h : CP ≤ K * xi ^ 2) :
    κ ≤ K * (mlat * xi) ^ 2
```

Lean `LatticeGauge.HupBridge.hup_is_gap_positivity_of_lower`（仮定：$0 < m_{\mathrm{lat}} \cdot \kappa / m_{\mathrm{lat}}^2 \le C_P \cdot C_P \le K\xi^2$。結論：$\kappa \le K(m_{\mathrm{lat}}\xi)^2$）。$\kappa = 1$ と置くと (16) の左の定理が戻ります（`hup_is_gap_positivity_recovered`）。下界の仮定の側の (16) の右は $C_P \le 1/m_{\mathrm{lat}}^2$（難しい側）を使うので、片側の橋では弱められません。

(19) が質量ギャップの側の文になるための条件を並べます。第一に、κ が β に一様であること。場で測る目盛り $\mathcal{E}_A$ では κ は結合に依らない数で（値は群の計量の正規化の約束に依る）、条件は満たされます。リンクの角度で測る $\mathcal{E}_\vartheta$ では $\kappa \propto g^2 \to 0$ で、(19) は $m_{\mathrm{phys}}^2 \gtrsim g^2/C$、つまり対数の分だけ損をします（表 3 の目盛りで測った経路の C_P）。第二に、時間の扱いです。片側の橋は時間を連続に取った格子（空間だけを格子にした Hamiltonian の格子）の文で、時間も刻む Wilson 測度では、基底状態変換の恒等式 (18) にあたるものがありません。刻み 1 の時間の格子では、転送作用素 $\hat{T}$（最大固有値で割ったもの）の二番目の固有値を $q = e^{-\Delta}$ として、隣の時刻の増分と勾配を比べる仮定

$$\text{(D)}:\ \ \mathbb{E}_{\psi_0^2}|dF|_G^2 \le c_D \left\langle \varphi, (1-\hat{T})\varphi \right\rangle \qquad \Longrightarrow \qquad C_P \ \ge\ \frac{1+q}{c_D(1-q)^2} \ \ge\ \frac{2}{c_D\,\Delta^2} \tag{20}$$

を置けば同じ型の下界が出ます（時間を刻む片側の橋の命題）初（(D) の上で。分散は N サイトの窓で $\|\varphi\|^2 \sum_{s,t\le N} q^{|s-t|}$、Dirichlet 形は $N\,c_D(1-q)\|\varphi\|^2$ 以下で、$N \to \infty$ の比が中辺。右の不等号は $y = \Delta/2$ で $\sinh^2 y \le y^2 \cosh y\, e^y$ と同じで、$\tanh y \le y$ と $\cosh y \le e^y$ から従う）Lean `pairSum_closed`（窓の和の閉じた形）・`disc_limit_ge`（係数 1 の弱い版、仮定：$0 < \Delta \cdot 0 < c_D$）。$\hat{T} = e^{-(H-E_0)}$ がちょうど成り立つ場合は (18) から $c_D = 2\Delta/(1-e^{-\Delta}) \to 2$ で、連続の時間の片側の橋に戻ります。Wilson 測度の転送作用素はこの形ではないので、(D) は β に一様な c_D とともに仮定として残ります仮。第三に、体積です。片側の橋は有限の空間の箱の文で、無限体積の測度の C_P と箱の隙間の極限を結ぶ段は検討していません仮。

一段目で問いが片方になる理由。隙間で定めた相関長 $\xi = 1/m_{\mathrm{lat}}$（$\hbar = 1$）を使うと、橋 $\kappa\xi^2 \le C_P$ は冪の文の下の半分を自動で与えます。

$$\frac{\ln C_P}{\ln \xi} \ \ge\ 2 + \frac{\ln \kappa}{\ln \xi} \qquad (\xi > 1), \qquad \text{よって} \quad \liminf \frac{\ln C_P}{\ln \xi} \ge 2 \tag{21}$$

初（$\ln$ を取って $\ln\xi > 0$ で割る。κ が一様なら第二項は 0 へ）Lean `power_lower_half_of_bridge`（仮定：$0 < \kappa \cdot 1 < \xi \cdot \kappa\xi^2 \le C_P$。結論：(21) の左）。橋の仮定のもとでは、緩和時間の仮定の中身は上の半分 $\limsup \ln C_P / \ln \xi \le 2$ だけになります。二重井戸では一次元の片側の橋の命題がまさにこの橋（$\kappa = 1$、一次元）なので、一段目の冪の言明は「上の側を示せるか」という片方の問いになり、その目標が 23-05 の二重井戸の緩和時間の上界の命題 $C_P \le K\xi^2 S_0/\hbar$ です。

鎖の側の代数。三つの鎖の帯の不等式を六本仮定すれば、$a^2 C_P = a^2/\lambda_1$ が正の帯に入ります。

$$c_1 m^2 \le \lambda_1 \le C_1 m^2,\ \ c_2\sigma \le m^2 \le C_2\sigma,\ \ c_3 a^2 \le \sigma \le C_3 a^2 \ \Longrightarrow\ c_1c_2c_3\,a^2 \le \lambda_1 \le C_1C_2C_3\,a^2 \tag{22}$$

初 Lean `chain_band` ・ `sq_times_poincare_band`（仮定：六つの帯の不等式と係数の正。結論：(22) と、a^2/λ_1 が $[1/C, 1/c]$ に入ること）。鎖そのものは仮定で、逆向き（帯の文から鎖）は出ません。片側の橋は緩和の鎖の右の不等式 $\lambda_1 \le C_1 m^2$（$C_1 = 1/\kappa$）を、連続の時間の格子で与えます。

(5) 緩和時間の仮定が与えないもの — 別の量・逆向き・極限

別の量であること。C_P は経路の測度の Poincaré 定数、つまり人工の時間で走る Langevin 力学の隙間の逆数で、問題文の質量は転送行列（ハミルトニアン）の隙間です（表 3 の経路の C_P と真空の C_P）。二つは別の量で、(4) の橋はその間に一方向の不等式を置いただけです。緩和時間の仮定を仮定しても、二つが同じものになるわけではありません。

逆向きは一般には成り立たない。(19) は「上界の仮定 ⇒ 物理単位の隙間が正」でした。その逆「物理単位の隙間が正 ⇒ 上界の仮定」は、次の例で崩れます。

> 円の上の自由な粒子の反例
>
> $Q = S^1$（周の長さ 2π の円）、$M = 1$、$V = 0$、$H = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{d^2}{dx^2}$ とする。隙間は $\Delta = \hbar^2/2 > 0$、$\xi = \hbar/\Delta = 2/\hbar$ だが、$T = \infty$ の経路の測度の正準の C_P は $+\infty$ である。

初 証明〔三〕。固有関数は e^{ikx}、固有値は $\hbar^2 k^2/2$ なので $\Delta = \hbar^2/2$ です。経路 $x(\tau)$ を実数直線に連続に持ち上げた $\tilde{x}(\tau)$ は、定数 $2\pi k$ の分を除いて決まります。台が $[0, L]$ で端で 0 になる w を取り、

$$f = \int w(\tau)\, d\tilde{x}(\tau) = -\int w'(\tau)\, \tilde{x}(\tau)\, d\tau, \qquad \mathrm{Var}(f) = \hbar \int w^2\, d\tau, \qquad \mathcal{E}(f) = \hbar \int w'^2\, d\tau \tag{23}$$

と置きます。$\int w' = 0$ なので持ち上げの定数の不定さは消え、f は経路の関数です。分散は、$\tilde{x}$ が強さ $\hbar$ のブラウン運動であることと Itô の等長性から 典、Dirichlet 形は $\delta f/\delta x(\tau) = -w'(\tau)$ からです。$w(\tau) = w_0(\tau/L)$ と伸ばすと比は $L^2 \int w_0^2 / \int w_0'^2$ で、$L \to \infty$ で限りなく大きくなります。∎ Lean `rotor_ratio_unbounded` ・ `rotor_gap_pos`（仮定：$0 < r$／$0 < \hbar$。結論：どの B にも $B < L^2 r$ となる $L > 0$ がある／$0 < \hbar^2/2$。円の上の自由な粒子の反例の骨の算術だけ）。

例 7（巻き数の酔歩）。$w_0(\tau) = \sin(\pi\tau)$（$0 \le \tau \le 1$）では $\int w_0^2 = \frac{1}{2}$ ・ $\int w_0'^2 = \pi^2/2$ なので、比は L^2/π^2 です。例 1 の一本道の $C_P \approx L^2/\pi^2$ と同じ数で、偶然ではありません。巻き数は円の上の粒子が何周したかを数える量で、それは果てのない一本道を酔歩しています。$\hbar = 0.1$ なら $\xi = 20$ ・ $\xi^2 = 400$ ですが、$L = 100$ で比は約 1013、$L = 1000$ で約 1.01×10^5 と、ξ^2 をいくらでも越えます。$\hbar \to 0$ の族で $a := 1/\xi$ と置けば、$m_{\mathrm{phys}} = m\,\xi = 1$ はどの $\hbar$ でも正なのに、$C_P = \infty$ なので上界の仮定はどの $\hbar$ でも破れます。

型を言えば、緩和が隙間より遅くなるのは、隙間に映らない時刻に局所でない量（巻き数・位相電荷・キンクの数）が拡散で運ばれるときです。保存する力学で $C_P = \infty$ になるのと同じ仕組みで（2-10 の寄り道）、ゲージ理論では周期の箱での位相電荷の凍結がこの型の候補です（23-02 §05）。範囲に注意します。有限の周期の箱の四次元 Wilson 測度では配位の空間がコンパクトで連結な有限次元の空間なので $C_P < \infty$ で、円の上の自由な粒子の反例はその類の反例ではありません。円の上の自由な粒子の反例が示すのは論理の隙間（隙間が正であることは C_P の有限ささえ含意しない）で、Wilson 測度の類の中で逆向きが偽かどうかは決まっていません。

まとめると、橋の仮定のもとで上界の仮定は格子の物理単位の隙間の下界を含意し、逆は一般には成り立ちません。**橋の仮定のもとで、上界の仮定は格子の物理単位の質量ギャップより強い文です**。緩和時間の仮定の道は、より強い文を、(2) の道具が使える言葉で言い換えた道です。

緩和時間の仮定は非自明性ではない

自由な質量つきの場では、表 4 のとおり $a^2 C_P = 1$ で、場の目盛りでは緩和時間の仮定も帯の文も下界の仮定も等号で成り立ちます [初]。だから下界の仮定は問題文の「非自明」（相互作用があること、0-03）とは別の条件で、緩和時間の仮定全体も非自明性を含みません。緩和時間の仮定が言うのは「質量ギャップのある極限に向かう測度の族なら、揺らぎの時間がどう伸びるか」の形だけです。

強結合の側は反対側

格子ゲージ理論の定理の多くは β が小さい側（強結合）にあり、示されるのは体積に一様な格子単位の隙間や Poincaré・対数 Sobolev 不等式、つまり $C_P = O(1)$ の形です。Shen–Zhu–Zhu（2023）は Langevin 力学で両不等式を示し、'the infinite volume measure has a strictly positive mass gap' と書きます [典]。条件を Wilson の β に直すと $\beta < N^2/(16(d-1)) = 1/12$（$N = 2, d = 4$）です。

表 7　定理が在る β と極限の側の β（$SU(2)$・$d = 4$。ξ は強結合展開の主項 $m_0 = -4 \ln u$、$u = I_2(\beta)/I_1(\beta)$ の目安）

領域	β	ξ	言えていること
Shen–Zhu–Zhu の条件	< 0.0833	0.065	[典] 一意性・両不等式・指数減衰
一リンク積分のあとの曲率	< 0.2722	0.093	曲率の下界 $-27\beta^2$ は [Lean] `StaplePerturbation.hess_gauge`（仮定：周期 L が偶数で $L \geq 3$・リンクは単位四元数・摂動は純虚）。判定法は [典]（Bakry–Émery）。隙間へ進む段は [仮]（5-11）
数値の窓（表 2）	2.25〜2.60	0.72〜1.95	[読] $\Delta/\sqrt{\sigma} \approx 3.3$〜$3.8$
二ループの外挿	3.24・4.14・5.02	10・100・1000	[読] 漸近スケーリングを仮定した目安

表 7 の ξ の列は 読 （主項の目安）です。強結合の定理は無限体積の一意性の言明を小さい β で与える大事な結果ですが、定数を改善しても β の範囲が有界なら物理単位の隙間の言明・記帳の長さでの緩和時間の帯には近づきません。そのまま β に一様に延びれば上界の仮定は満たし下界の仮定は破れ、$m_{\mathrm{phys}} \to \infty$ の自明な極限に落ちます（向きは (5) と同じ、例 5 の後半）。

極限と持ち上げ。緩和時間の仮定が四次元格子で閉じ、橋の仮定がそろっても、得られるのは各 $\beta \geq \beta_0$ での格子の物理単位の隙間の下界までです。$\Delta(\beta)$ が極限を持つこと（物理単位の隙間の言明の残り）、極限の測度の存在（無限体積の一意性の言明・Wilson ループの極限の言明）、回転の回復と OS 公理・再構成（回転の回復の言明・OS 再構成の言明）、非自明性の言明は、緩和時間の仮定の外にあります。また一段目（二重井戸）で緩和時間の仮定が閉じても、四次元格子の緩和時間の仮定への含意の定理は無く、持ち上がる見込みは文の形と道具の形だけです（23-03 §06）。

(6) 類例 — 同じ型の問いが定理になった模型

「力学の緩和の遅さが、相関長の冪と同じ形で伸びるか」は、ゲージ理論の外では定理の対象になっています。

例 8（Bauerschmidt–Bodineau の定理を一文で）。四次元の n 成分 $|\varphi|^4$ 模型の階層版（格子を入れ子の箱に置き換え、繰り込みの一段が書き下せるようにした模型）の、臨界点と高温側からそこへ近づく族で、Glauber 型の力学のスペクトルギャップは自由場の力学のギャップと同じ冪で 0 に近づく（$|\varphi|^4$ では対数の補正つき） 典 （Bauerschmidt–Bodineau, arXiv:1809.02075 の要旨と §1〜§2 を確認）。自由場の力学のギャップは質量の二乗、つまり ξ^{-2} の冪で消えるので、これは「C_P は ξ^2 の冪で、対数の因子を除いて伸びる」という、拡散型緩和時間の仮定と同じ型の文です（質量と相関長の対応は模型の中の定義に依るので、ここでは型の比較にとどめます）。

この例から読めることは三つあります。第一に、緩和時間の仮定の型の問いは数学として立ち、相互作用のある四次元の模型で答えが出た例があります。第二に、答えには対数の補正が付き、帯の文ではなく冪の文の形で成り立っています。緩和時間の仮定を冪の水準に置いた理由（§07 の寄り道）と同じ事情です。第三に、方法は、共分散を尺度ごとに分け、各尺度の測度のスペクトルギャップを次の尺度のスペクトルギャップから受け渡す、離散の尺度での Brascamp–Lieb の型の帰納です。結論はスペクトルギャップ（Poincaré 不等式）の形で、各尺度でポテンシャルが一様に凸に近いことを仮定に使い、平衡の繰り込みの結果を入力にとります。場が平らな空間に値をとるスカラー場の結果で、ゲージ場ではありません。群に値をとる場へどう移すかは、この部の外の問いとして第 24 部の 24-06 §05 で扱います。

拡散型緩和時間の仮定の行の分類と依存グラフ

(3)〜(6) の言明を、五分類の書式（23-00 §01）で一表にします。行の番号は下の依存グラフの節点の番号です。範囲の欄は、その行が何について言うか（β の範囲・空間の体積・時間の扱い）で

す。

表 8　緩和時間の仮定とその周りの行（「—」はどの範囲でも示されていない仮定の行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
[01]	上界の仮定：$a^2 C_P \le C$	仮	(14)(15)	—	—
[02]	下界の仮定：$a^2 C_P \ge c$	仮	(14)(15)	—	—
[03]	緩和時間の仮定（冪の文）：$\ln C_P / \ln \xi \to 2$	仮	(13)	—	—
[04]	三つの鎖（緩和の鎖・一尺度の鎖・記帳の長さの鎖）の帯	仮	(12)・17-12	—	—
[05]	緩和の鎖の等号 $C_P = 1/m_{\mathrm{lat}}^2$	仮	(16) の仮定（自由場の値）	—	—
[06]	基底状態の仮定 (A1)：スペクトルの離散・基底状態の単純さと正値	仮	片側の橋の仮定（原典の言明はこの部では確かめていない）	有限の空間格子	—
[07]	定常な経路の測度の仮定 (A2)：相関の式	典	(i)・2-07 §08	$T = \infty$	—
[08]	計量の比べの仮定の κ が β に一様	仮	(19) の後の第一の条件（$\mathcal{E}_A$ では結合に依らない数、$\mathcal{E}_\vartheta$ では $\propto g^2$）	—	—
[09]	(D) 離散の時間の増分と勾配の比較、c_D が β に一様	仮	(20)	—	—
[10]	箱の橋から無限体積の橋へ	仮	(19) の後の第三の条件（検討していない）	—	—
[11]	基底状態変換の恒等式 (18)	初	(iii) の証明	有限の空間格子	—
[12]	片側の橋：$C_P \ge \kappa \xi^2$	初	(17)・(i)〜(iv)（条件つき：(A1)〜(A3)・連続の時間）	有限の空間格子・連続の時間・$T = \infty$	`cont_ratio_closed`・`one_sided_bridge`（仮定：正の数・分散の下界・Dirichlet 形の上界）
[13]	時間を刻む片側の橋の命題：$C_P \ge 2/(c_D \Delta^2)$	初	(20)（条件つき：時間の刻みの比べの仮定 (D)）	有限の空間格子・刻み 1 の時間	`pairSum_closed`・`disc_limit_ge`（仮定：$0 < \Delta$・$0 < c_D$）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
[14]	円の上の自由な粒子の反例：$\Delta > 0$ で $C_P = \infty$（逆向きの否定）	初	(23)・例 7	円・全ての $\hbar$	`rotor_ratio_unbounded`・`rotor_gap_pos`（骨の算術だけ）
[15]	(16) 等号の版の読み替え	初	(16) の証明	$\beta \geq \beta_0$	`hup_is_gap_positivity`・`hdown_is_mass_finiteness`（仮定：$m_{\mathrm{lat}} > 0$・$C_P = 1/m_{\mathrm{lat}}^2$・(14) の片側）
[16]	(19) 上界の仮定と橋から $m_{\mathrm{phys}}^2 \geq \kappa / C$	初	(19)	$\beta \geq \beta_0$	`hup_is_gap_positivity_of_lower`（仮定：$0 < m_{\mathrm{lat}} \cdot \kappa / m_{\mathrm{lat}}^2 \leq C_P \cdot C_P \leq K \xi^2$）
[17]	(21) 冪の下の半分が自動	初	(21)	$\xi > 1$	`power_lower_half_of_bridge`（仮定：$0 < \kappa$・$1 < \xi \cdot \kappa \xi^2 \leq C_P$）
[18]	(22) 鎖の帯の代数	初	(22)	$\beta \geq \beta_0$	`chain_band`・`sq_times_poincare_band`（仮定：六つの帯の不等式と係数の正）
—	階層的 $\lvert\varphi\rvert_4^4$ の力学のギャップが自由場と同じ冪（対数つき）	典	例 8（類例。緩和時間の仮定の行には使わない）	階層模型・臨界とその近く	—

「初」の行は、どれも仮定の行を入力にとる代数か、仮定を名指した命題です。片側の橋は証明をこの節に置いた命題ですが、四次元の Wilson 測度にそのまま当てはまる定理ではありません（時間を刻む場合は時間の刻みの比べの仮定、無限体積は箱の橋から無限体積の橋へ移る段、目盛りは κ の一様さが残る）。

```
[01] 仮  緩和時間の上界の仮定：a²C_P ≤ C                                  —
[02] 仮  緩和時間の下界の仮定：a²C_P ≥ c                                  —
[03] 仮  拡散型緩和時間の仮定：ln C_P / ln ξ → 2                          —
[04] 仮  三つの鎖の帯                                                     —
[05] 仮  緩和の鎖の等号 C_P = 1/m_lat²                                    —
[06] 仮  基底状態の仮定：スペクトルの離散・基底状態の単純さと正値     有限の空間格子
[07] 典  定常な経路の測度の相関の式                                    T=∞
[08] 仮  κ が β に一様                                                    —
[09] 仮  時間の刻みの比べの仮定（c_D が一様）                             —
[10] 仮  箱の橋から無限体積の橋へ                                         —
[11] 初  基底状態変換の恒等式 (18) ⟸ [06]                          有限の空間格子
[12] 初  片側の橋：C_P ≥ κξ² ⟸ [06][07][11]                          連続の時間・T
         Lean cont_ratio_closed・one_sided_bridge（数の代数だけ）
[13] 初  時間を刻む片側の橋の命題：C_P ≥ 2/(c_D Δ²) ⟸ [06][07][09]   刻み 1
         Lean pairSum_closed・disc_limit_ge
[14] 初  円の上の自由な粒子の反例：Δ > 0 かつ C_P = ∞          全ての ħ
         Lean rotor_ratio_unbounded・rotor_gap_pos（骨の算術だけ）
[15] 初  (16) 上界の仮定 ⇒ m_phys ≥ C^(-1/2)、下界の仮定 ⇒ m_phys ≤ c^(-1/
         Lean hup_is_gap_positivity・hdown_is_mass_finiteness
[16] 初  (19) m_phys² ≥ κ/C ⟸ [01][08][10][12]（時間を刻むなら [12] の代わ
         Lean hup_is_gap_positivity_of_lower
[17] 初  (21) liminf ln C_P / ln ξ ≥ 2 ⟸ [08][12]（または [13]）
         Lean power_lower_half_of_bridge
[18] 初  (22) a²C_P が正の帯に入る ⟸ [04]
         Lean chain_band・sq_times_poincare_band
```

確かめ方。全ての「⟸」の行で、右の番号が左の番号より小さいことを目で見ます（[11] は [06]、[12] は [06][07][11]、[13] は [06][07][09]、[15] は [01][02][05]、[16] は [01][08][10][12]（または [13]）、[17] は [08][12]（または [13]）、[18] は [04]）。どの行も規則を守っているので、円はありません。葉の「仮」は [01]〜[06]・[08]〜[10] の九つ、「典」は [07] です。緩和時間の仮定 [03] はどの行の前提にも入っていません。橋があれば緩和時間の仮定の下の半分は [17] で自動に従い、[03] の中身は上の半分だけになる、というのが (4) の内容です。円の上の自由な粒子の反例 [14] は前提を持たない反例で、[16] の逆向きが一般には成り立たないことを示します。

正確には、このグラフは緩和時間の仮定と質量の関係の組み立ての依存で、緩和時間の仮定そのものを支える行（一段目では 23-05 §07 のグラフ）は入れていません。全てを一つに繋いだものが 23-12 の統合のグラフです。

07

寄り道：縮尺の回数と四つの時計 — 冪に映らない対数

飛ばしてよい節です。緩和時間の仮定を帯でなく冪の文に置く理由を、23-00 §05 の三つの比喩（縮尺の回数・時計の目盛り・遅れる時計）の式で見ます。

縮尺の回数 — 記帳の長さ ξ_{RG}

四次元の格子ヤン–ミルズで ξ を β の関数として式で求める手はありません。そこで地図の縮尺を一段ずつ粗くし、何回で決まった粗さの絵に着くかを数える長さを別に作ります。格子を b 倍に粗くする一段（繰り込み群の一段、7-05）で、結合が次のように下がると数えます。

$$\beta \longmapsto \beta - \kappa\,\big(\ln b - \delta(b)\big), \qquad \kappa = \frac{11}{3\pi^2} \approx 0.3715 \tag{24}$$

κ は一ループの係数（漸近的自由性、4-06）を格子の β で書き直したもの 典 、$\delta(b)$ は一段の記帳で取りこぼす分です（23-02 §02）。決まった値 β_* まで下がるのにかかる段数を $k(\beta)$ として

$$\xi_{\mathrm{RG}} = b^{\,k(\beta)}, \qquad a := \frac{1}{\xi_{\mathrm{RG}}}, \qquad \xi_{\mathrm{RG}} = e^{(\beta-\beta_*)/\kappa} \quad (\delta = 0) \tag{25}$$

と置きます。$\delta = 0$ なら段数は $(\beta - \beta_*)/(\kappa \ln b)$ で、記帳の長さは b に依りません。一ループの次元転移の式（4-07）と同じ形です。

初 表 9　縮尺の回数（一ループ・$\delta = 0$・$b = 2$・例として $\beta_* = 2.0$。閉じた式 (25) の値）

β	段数 k（半分にする回数）	$\log_{10} \xi_{\mathrm{RG}}$
2.5	1.94	0.58
4	7.77	2.34
6	15.53	4.68
10	31.07	9.35
20	69.90	21.04

β を 1 上げるごとに、半分にする回数が約 3.9 回増えます。β_* の選び方は定数倍にしか効きません。記帳の長さは測度から直接決まる長さではなく記帳の約束から決まる長さで、ξ と定数倍で揃うことは一尺度の鎖・記帳の長さの鎖の仮定です 仮 。記帳を一ループで打ち切ると、二ループの走り（純 $SU(N)$ で $b_1/(2b_0^2) = 51/121$）との差が $\beta^{51/121}$ の因子として残ります 典 （摂動論の水準、4-06）。

時計の目盛りと遅れる時計

$SU(2)$ のリンクを $U = e^{i\vartheta\cdot\sigma}$ と書くと、連続理論の場との関係は $A = \sqrt{\beta}\,\vartheta$ です。$\mathcal{E}$ は微分の二乗なので

$$\mathcal{E}_A = \frac{\mathcal{E}_\vartheta}{\beta}, \qquad C_P^{(A)} = \beta\, C_P^{(\vartheta)}, \qquad \text{自由近似で } C_P^{(A)} = \xi^2,\ C_P^{(\vartheta)} = \frac{g^2}{4}\,\xi^2 \tag{26}$$

です 初 。さらに Langevin の時間そのものが尺度で伸び縮みします。確率量子化（7-09）を摂動論で繰り込むと、場と結合のほかに確率時間の目盛りも乗法的に繰り込まれます 典 （摂動論の水準）。その一ループの係数を目盛りの言葉に移すと

$$C_P^{(A)} \propto \xi^{2}\,\beta^{13/22}, \qquad C_P^{(\vartheta)} \propto \xi^{2}\,\beta^{-9/22} \tag{27}$$

と読めます 仮 （一ループの主対数であること、格子の主対数が次元正則化の主対数と一致すること、五次元の理論の乗法的な繰り込み可能性、そして緩和時間の仮定そのものを前提とした読み）。角度の目盛りの冪 $\beta^{-9/22}$ は、Lüscher–Schaefer（2011）が自己相関時間に書く因子 $g_0^{9/11}$ と同じ冪です。同じ一ループの係数から来るので、独立な確かめではありません。

表 10 は目盛り二通りと遅れの有無二通りの四つの時計で C_P/ξ^2 を並べたものです。ξ は (25) の記帳の長さ ξ_{RG} で代用し（$\beta_*=0$）、定数は $\beta=2.5$ で 1 に揃えました。冪は $d\ln C_P/d\ln\xi = 2+\varepsilon\kappa/\beta$ です。

初 表 10　四つの時計（模式。$\xi=e^{\beta/\kappa}$ と (26)(27) の閉じた式の値）

β	$\log_{10}\xi$	場 A（$\varepsilon=0$）	角度 ϑ（$\varepsilon=-1$）	場 A・遅れ（$\varepsilon=13/22$）	角度 ϑ・遅れ（$\varepsilon=-9/22$）
2.5	2.92	1	1	1	1
4	4.68	1	0.625	1.32	0.8251
10	11.69	1	0.25	2.269	0.5672
100	116.90	1	0.025	8.844	0.2211
1000	1168.99	1	0.0025	34.48	0.0862
冪（$\beta=2.5$）	–	2.0000	1.8514	2.0878	1.9392
冪（$\beta=100$）	–	2.0000	1.9963	2.0022	1.9985

どの時計でも冪は 2 に寄り、定数倍は寄りません。正確には、表 10 は相互作用を一ループの対数の因子だけで表した模式で、四次元の格子ヤン–ミルズの C_P を計算したものではありません。目盛り・記帳の次数・確率時間の三つの対数は帯の文を動かし、冪の文 (13) を動かしません。

08

筋のうち手にあるもの — 23-02・23-03 へ

この章の言明を、筋の順に一本の矢印に並べます。

$$\underbrace{\text{一段の記帳}}_{\text{23-02}} \xrightarrow{(\xi^{\prime})\wedge\sum\delta<\infty} \text{(S5)} \xrightarrow{(\xi^{\prime})\text{band}} \text{(S4)} \xrightarrow{\text{(S3)(S6)(S7)(S8)}} \text{問題文の要求}$$

最初の矢印は冪の水準の文で、記帳の取りこぼしの和 $\sum\delta$ が有限であることを足したもの（23-02 §02）、次の矢印には帯の文が要ります。(28) のうち手にあるのは最初の箱の一部（一段の記帳の代数）だけで、矢印はどれも証明されていません。紫外の側は、2026-11-10 に公開された構成が別の道（繰り込みの段を重ねる構成）で越えています。四次元の Wilson の格子ゲージ理論の極限として Wightman の公理を満たす理論が作れることを、Lean で証明している、と委員会が評価しました（第 6 部）。それでも一様な質量ギャップは示されていません（6-04）。出題者が新しい

考えを名指すのも赤外です：'New ideas are needed to prove the existence of a mass gap that is uniform in the volume of space-time.'（Jaffe–Witten §6.5）典。

緩和時間の仮定が閉じたら何が従うか。 §06 のとおり、上界の仮定が四次元格子で閉じ、片側の橋の仮定（時間を連続に取った格子、または時間を刻む格子での時間の刻みの比べの仮定（論文「片側の橋」の (D)）、κ が β に一様なこと、箱から無限体積へ移る段）がそろえば、各 $\beta \geq \beta_0$ で格子の物理単位の隙間が $(\kappa/C)^{1/2}$ 以上に留まることが従います（(19)）。緩和時間の仮定だけ（冪の文。帯の文でない）からは、物理単位の隙間は出ません。C_P は人工の時間で走る Langevin 力学の隙間の逆数で、転送行列のハミルトニアンの隙間（質量）とは別の量です（表 3 の真空の C_P と経路の C_P）。橋はその間の一方向の不等式で、逆向きは一般には成り立ちません（円の上の自由な粒子の反例）。緩和時間の仮定と橋がそろっても、$\Delta(\beta)$ が極限を持つこと、極限の存在（無限体積の一意性の言明・Wilson ループの極限の言明）、OS 公理と再構成（回転の回復の言明・OS 再構成の言明）、非自明性の言明は従いません。また一段目（二重井戸）で緩和時間の仮定が閉じても、四次元格子の緩和時間の仮定への含意の定理は無く、持ち上がる見込みは文の形と道具の形だけです（23-03 §06）。

(28) の矢印を四次元格子のまま押した道と、それぞれが止まった場所は 23-02 にまとめます。そこで見るとおり、下界の仮定の側（ある f）には届く道がいくつも在り、上界の仮定の側（すべての f）には届く道具が見つかっていません。緩和時間の仮定は次元によらない文なので、同じ文を緩和時間の仮定の成り立つことが見込まれる最小の模型に移し、上の側の組み立てを先に作るのが階段の一段目です（23-03）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
典 八つの言明の割り方と四次元の現状（表 1）、問題文の脚注と §6.5、格子の相関長の問題の向き、強結合の定理（表 7）、三つの C_P の真空の C_P と隙間の関係、(9) の凸性と摂動の判定、階層的 $\lvert\varphi\rvert_4^4$ の力学のギャップ（例 8、類例として）	大きい β の無限体積の一意性の言明、Wilson ループの極限の言明・物理単位の隙間の言明・回転の回復の言明・非自明性の言明（この章の筋で。公開された構成との関係は §02 の注）。この章は何も示していない
初 一様な格子の隙間は物理の質量の発散（(5)）、自由場で物理単位の隙間の言明と記帳の長さでの緩和時間の帯が同じこと（(8)・表 4）、帯と冪の関係（(11)・例 4）、量化子の非対称（(15)）、例 1〜7 の手の計算、目盛りの換算 (26)、表 9・表 10 の閉じた式の値	相互作用のある理論で物理単位の隙間の言明と記帳の長さでの緩和時間の帯を結ぶこと（緩和時間の仮定・帯の文）

言えている	言えていない
初 片側の橋（$C_P \geq \kappa\xi^2$。条件：(A1)〜(A3)・連続の時間・有限の空間格子・$T=\infty$）と時間を刻む片側の橋の命題（条件：(D)）、基底状態変換の恒等式 (18)、円の上の自由な粒子の反例（円の上で $\Delta>0$ かつ $C_P=\infty$）	橋を四次元の Wilson 測度に当てはめること（時間を刻む場合の (D)・κ の一様さ・無限体積の段）。Wilson 測度の類の中で「隙間が正 ⇒ 上界の仮定」が偽かどうか
初 上界の仮定・下界の仮定を質量の下界・上界に読み替える代数（(16)） Lean `hup_is_gap_positivity`・`hdown_is_mass_finiteness`（仮定：$m_{\mathrm{lat}}>0$・$C_P=1/m_{\mathrm{lat}}^2$・(14) の片側）。片側に弱めた版 (19) `hup_is_gap_positivity_of_lower`（仮定：$0<m_{\mathrm{lat}}\cdot\kappa/m_{\mathrm{lat}}^2\leq C_P\cdot C_P\leq K\xi^2$）。冪の下の半分 (21) `power_lower_half_of_bridge`（仮定：$0<\kappa\cdot 1<\xi\cdot\kappa\xi^2\leq C_P$）。鎖の帯の代数 (22) `chain_band`（仮定：六つの帯の不等式）	緩和時間の仮定・上界の仮定・下界の仮定・三つの鎖そのもの。$C_P=1/m_{\mathrm{lat}}^2$ が相互作用のある理論で成り立つこと
読 原典の Monte Carlo の値で $\Delta/\sqrt{\sigma}$ がほぼ一定（表 2）、表 7 の ξ の目安	外挿値が構成された理論の値であること
仮 確率時間の指数 $13/22$・$-9/22$（一ループ・前提つきの読み）、記帳の長さと ξ が定数倍で揃うこと、表 8 の仮の行	その指数が四次元の格子ヤン–ミルズの C_P に当てはまること。質量ギャップ・連続極限について、この章は何も示さない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
問題文・脚注・§6.5	典	A. Jaffe, E. Witten, Quantum Yang–Mills Theory, Clay Mathematics Institute (2000)。本文を確認（0-03 の出典表）。
格子の相関長の問題・連続の弦張力の問題（Chatterjee の Problem 5.1・5.2）・無限体積の一意性の言明の現状	典	S. Chatterjee, arXiv:1803.01950 §3・§5（Springer Proc. Math. Stat. 283, 2019）。本文を確認。
強結合の一様評価と条件の換算	典	H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, Commun. Math. Phys. 400 (2023) 805–851, arXiv:2204.12737（要旨・§1・式 (1.2) を確認）。K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（書誌のみ）。
転送作用素・OS 再構成・ϕ^4_4 の自明性	典	M. Lüscher, Commun. Math. Phys. 54 (1977) 283。K. Osterwalder, R. Schrader, Commun. Math. Phys. 31 (1973) 83・42 (1975) 281。M. Aizenman, H. Duminil-Copin, Ann. of Math. 194 (2021) 163。書誌のみ（各章の出典表）。
(9) の凸性の判定と有界な摂動	典	D. Bakry, M. Émery, LNM 1123 (1985)。Holley–Stroock の摂動の補題は M. Ledoux の再述で型を確認。書誌は 23-06 の出典表。
表 2 の値	読	B. Lucini, M. Teper, JHEP 0106 (2001) 050, hep-lat/0103027 表 1・表 5（本文を確認）。比は割り算と誤差の伝播。
表 4・表 9・表 10・例 1〜7・(8)(11)(26)	初	閉じた式 $C_P=1/m^2$・$m^2=2(\cosh(1/\xi)-1)$・$C_P(L)=1/(2(1-\cos(\pi/L)))$・(25)〜(27) の値と、本文の手の計算。

もの	種別	出典・道具
片側の橋・時間を刻む片側の橋の命題・円の上の自由な粒子の反例と (18)	初	本文 §06 の証明。片側の橋の相関の式は 2-07 §08、Itô の等長性は既知の事実として引く。同じ形の主張が文献にあるかは確かめていない。
階層的 $\lvert\varphi\rvert^4_4$ の力学のギャップ	典	R. Bauerschmidt, T. Bodineau, Commun. Math. Phys. 373 (2020) 1167–1206, arXiv:1809.02075（要旨と §1〜§2 を確認。方法は離散の尺度での Brascamp–Lieb の型の帰納、結論はスペクトルギャップ）。
一ループ・二ループの係数	典	D. J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1343。H. D. Politzer, 同 1346（書誌のみ。4-06 の出典表）。
確率時間の繰り込みと (27)	典・仮	L. Baulieu, D. Zwanziger, Nucl. Phys. B 581 (2000) 604, arXiv:hep-th/9909006。M. Lüscher, S. Schaefer, JHEP 04 (2011) 104, arXiv:1103.1810。J. Zinn-Justin, D. Zwanziger, Nucl. Phys. B 295 (1988) 297（要旨のみ）。(27) の読みの前提は §07 の本文。
(15)(16)(19)(21)(22) の代数と Lean の定理	初・Lean	定理 `hup_is_gap_positivity`・`hdown_is_mass_finiteness`・`chain_band`・`sq_times_poincare_band`（束 `LatticeGaugeOneScale`）、`exponent_invariant_of_slowly_varying`（束 `LatticeGaugePoincareNormalisation`）、`hup_is_gap_positivity_of_lower`・`hup_is_gap_positivity_recovered`・`power_lower_half_of_bridge`・`cont_ratio_closed`・`one_sided_bridge`・`pairSum_closed`・`disc_limit_ge`・`rotor_ratio_unbounded`・`rotor_gap_pos`（束 `LatticeGaugeHupBridge`）。言明と仮定は 23-13。
§05 の注（位相の区画と体積の順）	読・典・仮	L. Del Debbio, H. Panagopoulos, E. Vicari, arXiv:hep-th/0204125 §2。S. Schaefer, R. Sommer, F. Virotta, Nucl. Phys. B 845 (2011) 93, arXiv:1009.5228 §4.1・§5。C. Bonanno, C. Bonati, M. D'Elia, arXiv:2012.14000v2 §1・図 4。M. Abe, O. Morikawa, H. Suzuki, PTEP 2025 (2025) 063B03, arXiv:2501.00286 §3.2・図 6（$SU(2)$・HMC）。M. Lüscher, S. Schaefer, JHEP 07 (2011) 036, arXiv:1105.4749 §3・§5.3。$\tau_{\mathrm{int}} \le C_P$ は 23-02 §05 の Lean の定理。
構成の八つの言明・緩和時間の仮定・帯の文・三つの鎖・(A1)・(D)	仮・約束	この部の定式化。三つの鎖の出どころは 17-12。読みの一覧は A-06。

この章で使った語 — 構成の八つの言明・格子版の質量ギャップ・Poincaré 定数（三つの C_P）・拡散型緩和時間の仮定（冪の文）・帯の文・上界の仮定と下界の仮定・三つの鎖・片側の橋（連続の時間の版と、時間を刻む版）・基底状態変換の恒等式・円の上の自由な粒子の反例（巻き数）・記帳の長さ ξ_{RG}・目盛り（$\mathcal{E}$ の正規化）・確率時間の繰り込み・二重井戸の四条件（名前だけ）。意味は A-02 用語集 にあります。

次の章へ — 23-02 四次元格子で試した道と壁：(28) の矢印を四次元格子のまま押した十七の道と二十一の壁を一枚にし、下からは届くが上からは届かないこと、だから一段目へ降りることを見る。一段目へ直接進むなら 23-03 階段の四段。

次に読む章：23-02 四次元格子で試した道と壁。

2026-10-09 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 23 部 一本目の道（前半）— 時間の方向から 十七の道・二十一の壁（五つの型） · Kiichi, Shiori and Rin

四次元格子で試した道と壁 — 下からは届き、上からは届かない

この章は本書の検討です。§01 は案内、§03・§06・§08 は未解決の地図です。

この章で分かること — 四次元格子の上で、拡散型緩和時間の仮定と構成の筋の矢印に向けて試した十七の道と、止まった二十一の場所（壁）を一枚にします。試験関数・ゲージ固定・分光の道はどれも C_P の下界か質量の上界で終わり、上の側（すべての f についての不等式）に届く道具は、曲率の効く強結合の側と、一つの仮定に移した形にしか在りませんでした。Lean で閉じたのは仮定から結論への代数です。この章の終わりで、なぜ一段目（0+1 次元の二重井戸）へ降りるかを、道具と壁の対応で述べます。

前提となる章 — 23-01（八つの言明・拡散型緩和時間の仮定・緩和時間の上界の仮定と緩和時間の下界の仮定・三つの鎖）・1-10（変分原理・Poincaré 定数）・4-11（隙間と有限の窓）・5-02（強結合展開）・7-05（繰り込み群の段）。記号は 23-01 と同じ（$SU(2)$・$d = 4$・$\beta = 4/g^2$・格子単位）。

先に言うこと — この章は問題を解きません。道の「止まった」は「その道具・その族ではこの矢印に届かないと確かめた」という意味で、届かなかった命題が偽だとは言っていません。この章の十七の道と二十一の壁は四次元格子の側の系列で、一段目の系列（二重井戸の四条件・道筋・筋・迂回策）とは別です。数値の多くは模型の中の読みで、四次元の $SU(2)$ の計算ではありません。

この章の順序

1. 地図の読み方 — 矢印の式と、道と壁の名
2. 一段の記帳 — 完全な族・一リンク積分・記帳の欠損・取りこぼしと答えの形（表 1）
3. 試した十七の道 — 一行ずつ（表 2）
4. 下からは届く — 試験関数・ゲージ固定・分光は上界で終わる
5. 上からは届かない — 曲率・管・尺度の一次元鎖・境界
6. 二十一の壁 — 五つの型（表 3）

7. 残ったもの — Lean で閉じた代数と、数値の読み（表 4）
8. 一段目へ降りる理由 — どの道具がどの壁で止まったか（表 5）

01

地図の読み方 — 矢印の式と、道と壁の名

この章の道と壁は、23-01 §08 の構成の筋の矢印のどれかを押そうとしたものです。帯の文を上下の半分に割って書き直すと次の形です。

$$\underbrace{\text{一段の記帳}}_{\S 02} \xrightarrow{\sum_k \delta(b_k)<\infty} \text{(S5)} \xrightarrow{(\xi^{\prime})\downarrow \wedge (\xi^{\prime})\uparrow} \text{(S4)} \xrightarrow{\text{極限の性質}} \text{問題文の要求}$$

$\delta(b)$ は一段の取りこぼし（§ 02）、式の中の (S5)（記帳の長さでの緩和時間の帯）は $a^2 C_P \asymp 1$、(S4)（物理単位の隙間の言明）は物理単位の隙間が正に残ること、極限の性質は無限体積の一意性の言明・反射正値性の保存の言明・Wilson ループの極限の言明・回転の回復の言明・OS 再構成の言明・非自明性の言明です（23-01 表 1）。下界の仮定は $C_P \gtrsim \xi_{\mathrm{RG}}^2$（一つの試験関数で足りる）、上界の仮定は $C_P \lesssim \xi_{\mathrm{RG}}^2$（すべての試験関数についての不等式）です。(1) のどの矢印も証明されていません。

道は、一つの問いと、それに当てた一組の道具の組で、問いの中身で名を付けます。投稿の欠陥との比べの道・尺度の一次元鎖の道は、元の問いを持ち直したものです。壁は、ある道がある道具で、ある矢印の手前で止まった理由を一文にしたもので、五つの型（原理・構造・道具・仮定・測定と文献）に分けます（§ 06）。

例。下界の試験関数の道（下界の仮定を与える試験関数）は (1) の下界の仮定を押し、試験関数の片側の壁（試験関数は C_P を下からしか押さえない）で上界の仮定の手前に止まりました。強結合の曲率の道は (1) に乗らず、左の外側に居ます。強結合の一様評価は $C_P = O(1)$ で、記帳の長さでの緩和時間の帯の反対側だからです（23-01 § 06）。

02

一段の記帳 — 完全な族から取りこぼしの和まで

一段は、格子間隔を a から ba に粗くし、細かい変数の一部を積分して粗い格子の作用を作る写像です（7-05）。ここでの記帳は (i) 閉じた形で積分できるリンクを選び、(ii) 残る作用を指標で書き、(iii) 粗いプラケットの基本表現の係数を β' と読む、の三手で、元のリンクの一部を

残す「間引き」の型です（同じ型の近似が Migdal–Kadanoff）。面積則・次元勘定・一ループの係数は既知の書き直しで、成果に数えません。

完全な族。積分するリンクどうしが同じプラケットに乗らなければ、残りを止めたとき各リンクの重みは独立に分かれて積分できます。どのプラケットからも一本ずつ消す族を完全な族と呼びます。

$$F \subset E \text{ が完全} \iff \text{どのプラケット } P \text{ でも } |P \cap F| = 1; \qquad f_x \le 2,\ \frac{1}{|V|}\sum_x f_x = \frac{d}{2} \tag{2}$$

初 辺は $2(d-1)$ 枚のプラケットに乗るので、組 $(P, \ell \in P \cap F)$ を二通りに数えると族の密度は $|F|/|E| = 1/4$ です。同じ頂点に接する垂直な二辺は一枚のプラケットの隣り合う二辺なので、頂点 x に接する族の辺の本数 f_x は一つの軸の二本までで、平均 $d/2$ と比べて $d \le 4$ が出ます。存在まで含めた分類は表 1 で、Lean `PerfectFamily.perfectK_one_iff`（仮定：$2 \le d$。結論：周期 L の箱 $(\mathbb{Z}/L)^d$ に辺の完全な族が在る $\iff$ $d \le 4$ かつ L が偶数）と `no_perfectZ_of_five`（仮定：$d \ge 5$。$\mathbb{Z}^d$ に無い）が言明です。探した範囲で先行の記録は見当たりませんが、既知かもしれません。この 4 は格子の組合せの数で、時空の四次元とは関係のない一致です。

初 表 1　$(\mathbb{Z}/L)^d$ の辺の完全な族の存否（`perfectK_one_iff` の言明を書き並べたもの。括弧は一つの族の辺の本数＝辺の数の 1/4）

周期	$d=2$	$d=3$	$d=4$	$d=5$
$L=2$	在る（2）	在る（6）	在る（16）	無い
$L=3$	無い	無い	無い	無い
$L=4$	在る（8）	在る（48）	在る（256）	無い

一リンク積分。族の辺 ℓ の乗る 6 枚には他の族の辺が無いので、U_ℓ はステープル（プラケットから ℓ を除いた三辺の積）の和 M とだけ組になり、積分は $|M|$ だけで決まります。

$$\int_{SU(2)} e^{\frac{\beta}{2}\operatorname{tr}(UM)}\,dU = \frac{2I_1(\beta|M|)}{\beta|M|} =: F(\beta|M|), \qquad \frac{\beta^2 t}{8} - \frac{\beta^4 t^2}{64} \le \ln F(\beta\sqrt{t}) \le \frac{\beta^2 t}{8} \tag{3}$$

左は $SU(2)$ の熱浴法の標準の式 典 （5-07）、右の両側評価は Lean `log_F0_le`・`log_F0_ge`（仮定：引数が非負だけ）。残る辺の条件つき密度は六つの源の積で一リンクの型に閉じず、この技は一度きりです 仮 （紙の議論はあるが、この本には証明を置かない）。

記帳の欠損。完全な族を積分すると、4 辺が残る「無傷の」プラケットは一枚も無くなり、結合は壊れたプラケットから生まれ直すしかありません。残る辺の割合 e と無傷のプラケットの割合 q について、組を数えると

$$e - q = \frac{1}{4|\mathcal{P}|} \sum_{P \text{ は壊れている}} |P \cap E_K| \;\geq 0 \tag{4}$$

です 初 （二重の数え上げ） Lean `Incidence.intact_frac_le` （仮定：接続が正則。結論：$q \leq e$）。段を重ねても届きません：完全な段の列では残る辺が $(2^k+1)/2^{k+1} > 1/2$ で `no_blocking` （仮定：完全な段の列）、各段で消す割合が $1/4$ 以下の任意の列でも辺を $1/16$ まで減らすと残る 4-ループは $1/65536$ 以下です `blocking_shortfall` （仮定：割合 $\leq 1/4$）。記帳の壁は曲率でもパッキングでもなく、無傷のプラケットだけを数える記帳の仕方にあった、というのがこの小節の読みです。

円板と弱結合の一段。 円板の形の A 枚の内部を積分すると、指標展開のどのチャネルでも係数が A 乗されます：$u(\beta') = u(\beta)^A$、2×2 の円板で $\beta' = \beta^4/64 + O(\beta^6)$ 典 （強結合の面積則と二次元の間引きの書き直し、5-02・7-02）。面積について半群で全域で $\beta' < \beta$ Lean `discStep_semigroup` ・ `step_lowers_coupling` （仮定：円板の形の面）。弱結合のガウス近似では、円板の b^2 枚が直列、横の b^{d-2} 層が並列に効いて

$$\beta'_{\text{円板}} = \frac{\beta}{b^2}, \qquad \beta'_{\text{ツリー}} = \beta\, b^{d-4}, \qquad \kappa_{\text{disj}}(b) = \frac{1}{b^2} + \frac{2}{b^2+4b} < 1 \tag{5}$$

です。βb^{d-4} は結合の次元勘定で、$d=4$ で周辺的です 典 （4-04）。辺を共有しない面の寄与は 1 に届かず Lean `kappaDisj_lt_one` （仮定：$b \geq 2$）、面の記帳は $\beta' = \kappa(b)\beta$ の掛け算の形で、一ループの引き算の形 $\beta' = \beta - \kappa \ln b$ になりません。

一ループの傾きと取りこぼし。 ツリーの $\beta' = \beta$ の上に、速いモード（運動量が $\pi/(ba)$ と π/a の間）の一ループの補正が乗ります。これを格子の窓の積分で測ると

$$\beta' = \beta - \kappa L_{\text{eff}}(b), \qquad L_{\text{eff}}(b) = \ln b + C - \delta(b), \qquad \delta(b) = \frac{c_2}{b^2} + O(b^{-4}) \tag{6}$$

の形になります。$\kappa = 4Nb_0 = 11/(3\pi^2) = 0.3715110$ は既知の一ループの係数です 典 （4-06）。窓の差から読んだ傾きは $b = 32 \to 64$ で 1.000028、κ を掛けて 0.371521 で、$11/(3\pi^2)$ と相対 2.8×10^{-5} で合います 読 （一ループ核の模型の中の一致。非摂動の確かめではない）。取りこぼしの係数は $c_2 = 0.0197(5)$（重み w）・$0.4200(5)$（重み w^2）、$b=2$ で $\delta(2) = 0.1335$・0.2284 です 読 （同じ模型の当てはめ）。反対側で、実際の格子の $a\sqrt{\sigma}$（23-01 の表 2）から読む実効的な傾き $\Delta\beta/\ln(a_1/a_2)$ は $\beta = 2.25 \to 2.60$ で 0.304 で、一ループの 0.3715 にも二ループの 0.397 にも届いていません 読 。段ごとの形 $\xi(\beta - \kappa \ln b) = \xi(\beta)/b$ を全ての $b \geq 1$ で仮定すると $\xi(\beta) = \xi(0)e^{\beta/\kappa}$ が出ます 初 Lean `xi_eq_exp` （仮定：その関数等式。連続性も単調性も仮定しない）。物理の内容は仮定の関数等式（一ループの走りを等式として置いたもの）の側にあります。

答えの形。 b を固定して段を重ねると、取りこぼしは段ごとに同じ量ずつ溜まり、$\delta(b)\neq 0$ なら和は発散します。段の尺度を $b_k=k+2$ と大きくする列なら $\sum_k c_2/(k+2)^2<\infty$ で収まります 初 Lean `fixed_step_bounded_iff`（仮定：一定の誤差 $\varepsilon_j=d\geq 0$。結論：部分和が有界 $\iff d=0$）。例えば仮の値 $c_2=1$ で、$b=2$ 固定なら 1000 段で累計 250、$b_j=j+2$ なら累計は $\pi^2/6-1=0.645$ に収まります（閉じた式の値）。この取りこぼしを (1) の最初の矢印に結ぶのが、二つの冪の代数です。

$$C_P \asymp \xi^{\,2-\eta}, \qquad a\,\xi\propto a^{\theta} \quad\Longrightarrow\quad a^2 C_P \propto a^{p}, \qquad p=\eta+(2-\eta)\,\theta \tag{7}$$

θ は取りこぼしの溜まりの指数の指数（b 固定なら $\delta(b)/\ln b$）、η は動的な冪 η_{dyn} です。$0\leq\eta\leq 2$・$\theta\geq 0$ なら $p=0 \iff \eta=0\wedge\theta=0$ 初 Lean `drain_exponent`・`drainExp_eq_zero_iff`（仮定：(7) の冪の形と符号）。言葉で言えば「緩和時間の仮定（$\eta=0$）の下で、物理単位の隙間の言明 $\Longleftrightarrow \sum_k \delta(b_k)<\infty$」で、これが「答えの形」です。この言明は緩和時間の仮定のほかに、(7) の冪の形、段の誤差を加法的で有界とする模型、δ が一ループ核の模型の値であること、の上に立ちます 仮。段の誤差の部分和が有界なら $a_k^2 C_P^{(k)}$ が正の帯に留まる、という代数も閉じています Lean `S4_two_sided`（仮定：部分和 $|\sum_{j<k}\varepsilon_j|\leq M$・係数の正。これを $a_k^2 C_P^{(k)}$ と読むのは本文の側）。

核を替えて $\delta(2)=0$ にする道は、一径数の族 $c_1(q)=\alpha+(1-\alpha)\cos q$ の $\alpha_0=1.4400$ で在りますが、隣の重みが負です 読。正の重みの核では $c_2>0$ です Lean `c2_ge_of_nonneg_weights`（仮定：c_2 が核の量 $S\geq 0$ の増加するアフィン関数 $A+\kappa S$、$A,\kappa>0$、という測定した依り方。無条件の主張ではない）。負の重みは反射正値性とぶつかりうるので、調べた族の中では取りこぼしの消去と量子論に戻れる条件が両立しません。族の外は未決です。

03

試した十七の道 — 一行ずつ

表 2 は十七の道を一行ずつ並べたものです。「止まった所」の欄の名は §06 の壁で、「残ったもの」の欄は Lean で閉じた代数（仮定を括弧に）か、札つきの言明です。

表 2　四次元格子で試した十七の道

道	何を（押す矢印）	どの道具で	どこで止まったか	残ったもの

道	何を（押す矢印）	どの道具で	どこで止まったか	残ったもの
強結合の曲率の道	曲率の方法の効く β を広げる（(1) の外・強結合の側）	完全な族の一リンク積分のあとの Hesse 形式の下界と Bakry–Émery の判定法	$\beta < \sqrt{2/27} = 0.2722$ まで。相関長は一格子間隔の 1/10 程度で極限の反対側（上界の道具の壁）	Lean `hess_gauge`（仮定：周期 L が偶数で $L \geq 3$・単位四元数・純虚の摂動。結論：$\partial_\tau^2 \Phi \geq -27\beta^2 \sum \lvert X_e \rvert^2$）。隙間へ進む段は 仮
一段の記帳の道	連続極限を一段の列として記帳する（一段の記帳）	完全な族・指標展開・円板の段・一ループの窓	一リンク積分は一度きり（一段きりの積分の壁）。面の記帳は掛け算の形で一ループの傾きを出さない	§02 の `discStep_semigroup`・`step_lowers_coupling`・`kappaDisj_lt_one`・`intact_frac_le`・`no_blocking`・`blocking_shortfall`
取りこぼしの和の道	取りこぼし $\delta(b)$ の和は有限か（取りこぼしの総和可能性の仮定）	一ループ核の模型の窓の積分	b 固定では和が発散。$\delta(2) = 0$ の核は隣の重みが負（正の重みの核の壁）。ゲージの取り方による c_2 の違いは、二つのゲージで正と読めたところまで（取りこぼしのゲージ依存の壁）	`fixed_step_bounded_iff`・`c2_ge_of_nonneg_weights`（仮定：測定した依り方）。読 c_2
強結合の級数の道	強結合の級数から動的な冪 η が読めるか（緩和時間の仮定の η）	高次の強結合展開・Dlog-Padé	級数は極の近くで更新形 $G = A/(1-K(p))$ になり $\eta = 0$ を強制する。漸近自由の下の本質的特異点では指数が読めない（更新形の級数の壁）	Lean `renewal_chi_mul_massSq`・`renewal_residue_pos`（仮定：更新形の係数 $A, c_0 > 0$。結論：$\chi m_0^2 = A/c_0 > 0$）。更新形になることは 仮
完全な族の次元の道	辺・面の完全な族はどの次元で在るか（一段の記帳）	二重の数え上げ・完全被覆（exact cover）の総当たり	辺は $d \leq 4$ かつ偶数の周期でだけ。k 胞体では $d \leq 3k+1$ の上限があり、$k=3$ の $d=9$ は未決	`perfectK_one_iff`・`no_perfectZ_of_five`・`no_perfect_k4_d9`・`no_perfect_k5_d8`（仮定：周期 2 に限る）

道	何を（押す矢印）	どの道具で	どこで止まったか	残ったもの
次元の境目の道	なぜ四次元が境目か（取りこぼしの総和可能性の仮定）	段のずれの漸化式 $x_{k+1} = b^{d-4}x_k + \varepsilon_k$	$d<4$ で縮み $d=4$ で溜まる。標準の次元勘定と同じで、低次元の構成の再現ではない	Lean `dev_le_of_contracting`（仮定：$0 \le \lambda < 1$・$\lvert\varepsilon_j\rvert \le E$。結論：ずれ $\le E/(1-\lambda)$）・`dev_eq_of_marginal`（$\lambda = 1$・一定の E でずれ $= nE$）
反射正値性の道	反射正値性を下からの評価に使う（反射正値性の保存の言明・OS 再構成の言明）	転送行列の表示	最も軽い状態との重なり $\tilde{Z}$ に、下からほしい所で上界 $\tilde{Z} \le \chi m$ が出た。問いは下界の試験関数の道へ移った	Lean `overlap_le_susc_mul_gap`（仮定：$m>0$・$\tilde{Z}\ge 0$・$\tilde{Z}\coth(m/2) \le \chi$）
記帳の面積則の道	記帳の中に面積則の形が出るか（Wilson ループの極限の言明）	係数 $4(\beta/4)^A$	強結合の面積則の書き直しで、可換な群でも成り立つ。閉じ込めの証拠に数えない。中身は一尺度の下の半分の道へ	典（Wilson 1974・Osterwalder–Seiler 1978）
多リンク積分の道	k リンク積分の閉形は連続極限でも解析的か（一段の記帳）	一重の和の閉形	二リンクの補正は β^3 の大きさで障害ではない。解析性は示されていない	仮（強結合の展開の中の計算）
投稿の欠陥との比べの道	構成を主張する投稿の「小さな欠陥」は δ と同じ量か（取りこぼしの総和可能性の仮定）	型の比較	欠陥の和は縮む部門の量、δ は周辺部門の係数の取りこぼしで、言葉の位置は同じで量は別	投稿の正否は判定しない（16-01 の方針）

道	何を（押す矢印）	どの道具で	どこで止まったか	残ったもの
多重尺度の曲率の道	曲率の方法を尺度ごとに重ねて上界の仮定の道具にする（上界の仮定）	多重尺度の Bakry–Émery・Gribov 領域の上の曲率・一段の勾配流	二つの尺度の交差項から先が書けない（上界の道具の壁）。詳しくは §05	Lean `comp_class_eq_of_equivariant_bijection`（仮定：流れが全単射でゲージの作用と可換）・`autocov_sum_le_on_invariant`（仮定：不変な部分空間の上の Poincaré）
体積と境界の道	C_P の評価は体積と境界条件に一様か（無限体積の一意性の言明）	素のリンク角・境界条件の比較	素のリンク角で比は 1 で零モードの心配は消えた。代わりに境界条件が効き、周期の箱で上界の仮定が破れうる（周期境界の予想の壁）	仮（HMC と Langevin が同じ普遍類という予想の下の読み）
下界の試験関数の道	下界の仮定を与える試験関数は在るか（下界の仮定）	プラケット・素のリンク角・ゲージ固定した長波長モードの三つの族	局所演算子は次元 4 で $\eta \geq 2$（局所演算子の次元の壁）、リンク角は比 1、ゲージ固定は一価性（ゲージ固定の一価性の壁）	`profileQuotient_isGreatest`・`fisherEta_eq_zero_iff_canonical`・`eta_ge_two_of_bounded_susc`（仮定：感受率の一様有界）・`prop_at_gap_scale`（仮定：純冪の伝播関数）・`jump_energy_ge`
ゲージ固定の長波長の道	ゲージ固定した長波長モードを一価に作れるか（下界の仮定）	軌道の上の重み付き平均（Parrinello–Jona-Lasinio・Zwanziger の方式）	鋭ければ多価、鈍ければ長波長が消える（ゲージ固定の一価性の壁）。数値はコンパクト $U(1)$ の試験	`orbitAvg_gauge_invariant`・`orbitAvg_continuous`（仮定：有限群の軌道・正で連続な重み）
分光の道	平滑化した演算子と分光で隙間を押さえる（下界の仮定と上界）	Wilson 流・APE・変分・有効質量	上界で終わる（分光の上界の壁）。下界には重なりの下界が要る。分子の測定の費用は $\geq cL^{d+2}$（測定の費用の壁）	`meff_antitone`・`meff_ge_of_corr`・`gap_ge_of_overlap`（仮定：重なりの下界 q）・`light_admixture_invisible`・`cost_ge`・`sqQuotient_between`

道	何を（押す矢印）	どの道具で	どこで止まったか	残ったもの
一尺度の下の半分の道	一尺度の下の半分 $m^2 \gtrsim \sigma$ を作る（一尺度の鎖）	管のエントロピー・欠損 $D = m - 4\sigma$・柱の模型・Wulff 形	管の転送作用素の不等式（管の不等式）に移したが、その証明の型が無い（管の不等式の壁）	`mass_sq_ge_of_tube`（仮定：管の不等式の帰結のノルムの評価）・`mass_bound_localized`・`linear_regime_breaks_onescale`・`casimir_only_no_bound`・`linear_deficit_breaks_inv`
尺度の一次元鎖の道	上界の仮定を尺度の一次元鎖で挟む（上界の仮定）	ホログラフィーの動径の型・二重み Hardy 不等式・自己相関の挟み込み	尺度の一次元鎖への射影の仮定の下でだけ挟めた。射影の仮定は緩和時間の仮定より弱くなく、周期の箱では位相電荷で壊れる（射影の仮定の壁）	`conditional_scale_bound`（仮定：射影の仮定・非負で部分和が有界な取りこぼし・幾何級数の重み）・`const_defect_scale_unbounded`・`tau_int_le`・`rayleigh_le_tau`

押す矢印ごとに見ると偏りがあります。下界の仮定と (1) の外には、止まった道が集まっています。上界の仮定を狙った道は多重尺度の曲率の道と尺度の一次元鎖の道の二本だけで、多重尺度の曲率の道は交差項で止まり、尺度の一次元鎖の道は射影の仮定の下でだけ挟めています。回転の回復の言明と非自明性の言明には、この章のどの道も届いていません（公開された構成の側では、回転の回復は相ごとの理論で示されている、と委員会が評価した。6-03）。Wilson ループの極限の言明・回転の回復の言明は一段の写像を何回合成しても出てこない種類の主張です（極限の性質の壁）。

04

下からは届く — 試験関数・ゲージ固定・分光は上界で終わる

反射正値性の道・下界の試験関数の道・ゲージ固定の長波長の道・分光の道は、どれも下からの評価を狙い、同じ形の所で止まりました。C_P は試験関数についての上限、隙間は状態についての下限なので、一つの試験関数・一つの演算子が与えるのはどちらも片側だけです。

$$C_P = \sup_{f} \frac{\mathrm{Var}(f)}{\mathcal{E}(f)} \;\geq\; \frac{\mathrm{Var}(f_0)}{\mathcal{E}(f_0)}, \qquad E_{\mathrm{low}} = \inf_{\psi \perp \Omega} \frac{\langle \psi, H\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} \;\leq\; m_{\mathrm{eff}}(k) \tag{8}$$

典 変分原理（1-10）。Ω は真空、H は転送行列のハミルトニアン、$m_{\mathrm{eff}}(k) = \ln(C(k)/C(k+1))$ は時間 k の有効質量です。下界の仮定は「ある f」の言明なので試験関数で届きうる側、上界の仮定は「すべての f」なので届かない側です。

局所演算子（下界の試験関数の道）。一つの演算子 O_x を平行移動して重みで足した族では、重みの自由は最良の一運動量に潰れます Lean `profileQuotient_isGreatest`（仮定：運動量は有限個・分母の Fourier 変換が正）。分子は感受率で、半径 ξ までの積分で見積もると

$$\frac{\mathrm{Var}(f_O)}{\mathcal{E}(f_O)} \asymp \xi^{\,2-\eta_s}, \qquad \eta_s = \min\bigl(2\Delta_O - (d-2),\, 2\bigr), \qquad \Delta_O \geq 4 \Rightarrow \eta_s = 2 \tag{9}$$

です（相関の冪の形を仮定）。η_s は演算子ごとの静的な冪で、動的な η_{dyn} とは別の量です（18-05）。ゲージ不変な局所演算子の最低次元は $\mathrm{tr}\,F^2$ の 4 典 なので、比は ξ とともに伸びません Lean `eta_ge_two_of_bounded_susc`（仮定：感受率が一様に有界。有界性は相関の形と $\Delta = 4$ という物理の仮定から来る）。素のリンク角では、ゲージを固定しない測度で各リンク角が一様で独立になり、比は β にも体積にも依らず 1 です 初（Haar 測度の不変性からの直接の計算。Elitzur の定理と同じ機構）。

ゲージ固定（ゲージ固定の長波長の道）。ゲージ固定した長波長のモードは非局所で次元の壁を避けますが、代表の選び方が一価でなければなりません。軌道の上で温度 T の重み付き平均を取れば一価で連続です Lean `orbitAvg_gauge_invariant`・`orbitAvg_continuous`。いちばん小さい例の $U(1)$ の輪（辺 L 本）では、平均したモードの振幅が鈍い固定で $(I_1/I_0)^{L-1}$ と L とともに指数で消え、鋭い固定では一周の角 $\Phi = \pi$ で跳びます 初（Fourier 級数で閉じた式）。同じ汎関数が「コピーを選ぶ道具」と「長波長を均す道具」を兼ねるので、二つの要求が一本のつまみの両端に分かれます。四次元のコンパクト $U(1)$ で測った数値（コピー間の散らばりが標準偏差の 3.25 倍など）は 読 で、$SU(2)$ では測っていません。

分光（反射正値性の道・分光の道）。空間三方向だけの平滑化は一つの時刻の面に載り、相関は $C(k) = \sum_n w_n e^{-E_n k}$（$w_n \geq 0$）の形を保ちます 典（5-03）。この形があれば有効質量は単調に減り Lean `meff_antitone`（仮定：非負の重みの表示）、どの k でも最も低いエネルギーの上界です `meff_ge_of_corr`。下界には別の入力が要ります。

$$E_{\mathrm{low}} \;\geq\; \frac{1}{k}\Bigl[\ln q + \ln \frac{C(0)}{C(k)}\Bigr] \qquad (w_{\mathrm{low}} \geq q\,C(0) \text{ のとき}) \tag{10}$$

初 Lean `gap_ge_of_overlap`（仮定：非負の重みの表示と重なりの下界 q）。下界の値段は重なりの下界ちょうど一つで、q が無ければ重み ε の軽い状態はどの k でも相関を ε しか変えません `light_admixture_invisible`（二準位の具体例）。有限個の測定から隙間の下界が出ないことは、ギャップと指数的なクラスター性の同値という既知の枠組みの言い換えです 典（4-11）。数値の側では、平滑化した演算子の有効質量が $\beta = 2.6 \cdot 12^4$ で $\leq 0.501 \pm 0.071$ と、原典の $am(0^{++}) = 0.514(8)$ に下から接しました 読（Monte Carlo・上界の読み）。時間の向きにも均す四次元の流れは一つの面に載らず、有効質量が単調に増える形で上界の性質を壊しま

す 初 （自由場の閉じた式）。測る費用は、一辺 L の箱の最も柔らかいモードの緩和時間 $\propto L^2$ から $\geq cL^{d+2}$ です `cost_ge` （仮定：緩和時間の下界と、相対精度に要る掃引の回数）。

三つの道は同じ壁に着きました。どれも「ゲージ不変な演算子と最も軽い揺らぎの重なりが下から押さえられる」ことを要し、それは「軽い状態が他に隠れていない」ことを含む、すべての状態についての言明です。上界の仮定と同じ形です。

05

上からは届かない — 曲率・管・尺度の一次元鎖・境界

上界の仮定は C_P の上界です。上界を出す道具は型が限られ、代表は二つです。

$$\nabla^2 U \geq K > 0 \implies C_P \leq \frac{1}{K} \quad \text{(Bakry–Émery)}, \qquad B \leq C_P \leq 4B \quad \text{(一次元・Muckenhoupt)} \tag{11}$$

典 左は測度 e^{-U} の曲率の下界から（1-10）、右は一次元でだけ計算できる「その点より手前の質量 × その点から先の抵抗」の最大 B から C_P を 4 倍の幅で挟みます。

曲率を尺度ごとに（強結合の曲率の道・多重尺度の曲率の道）。上界の仮定の型の不等式が定理として立つ既知の場所は、曲率・直径・凸性・強結合と、二・三次元の連続のスカラー場の高温相で格子の正則化に一様な多重尺度の Bakry–Émery だけです 典 （Bauerschmidt–Dagallier の定理 1.1、判定は Bauerschmidt–Bodineau の定理 2.5）。四次元のゲージ場では、一リンク積分のあとの曲率は強結合でしか正になりません（強結合の曲率の道）。Gribov 領域の上の曲率を有限次元の模型で調べると、正になるのは強結合の側だけで、非凸性は零運動量のモードから来ました 読 （$L = 2, 3, 4$ の標本の上）。零モードを外したあとに残る紫外の揺らぎは、一段の勾配流では越えられません：流れは全単射でゲージの作用と可換なので関数の空間を小さくせず Lean `comp_class_eq_of_equivariant_bijection`、得は計量の取り替えにしか無く、押し出した測度の曲率は流れの時間とともに負に深くなりました 読 （開いた箱 $\ell = 3$・$\beta = 2.3, 4$ の典型点・$t \leq 0.5$ で測った範囲）。

管の欠損（一尺度の下の半分の道）。一尺度の鎖の下の半分 $m^2 \gtrsim \sigma$ を、閉じた管の転送作用素 $\mathcal{T}$ と周長の作用素 $\hat{\ell}$ の不等式に移しました。

$$T(c,1): \quad \mathcal{T} \;\leq\; \exp\!\Big(-\big(\sigma\hat{\ell} + c/\hat{\ell}\big)\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad m \;\geq\; \min_{\ell>0}\Big(\sigma\ell + \frac{c}{\ell}\Big) = 2\sqrt{c\sigma} \tag{12}$$

初 （右は相加相乗平均） Lean `mass_sq_ge_of_tube` （仮定：転送作用素のノルムが $e^{-2\sqrt{c\sigma}}$ 以下。結論：$m^2 \geq 4c\sigma$）。$1/\ell$ の冪は、係数 c が無次元になる唯一の冪です。中身は管の不等式の側にあり、それ自身の証明の型はありません。強結合の面の展開が収束する領域では一尺度の下の半分そのものが偽で `linear_regime_breaks_onescale` （仮定：収束域の挟み込み）、

柱の模型の数え上げでは欠損の符号が正にも負にもなり、Wulff 形は菱形で、管の不等式は異方性を引いたあとにだけ立ちます `linear_deficit_breaks_inv`（陰性対照）。最後の形は「短い輪での局所化した T・大きな輪での Casimir の床・その間のつなぎ目」の三つの仮定で `mass_bound_localized`、床だけでは下界は出ません `casimir_only_no_bound`。

尺度の一次元鎖（尺度の一次元鎖の道）。ホログラフィーの模型では隙間は動径の一変数の固有値問題で、その変数の上では帯の文 $C_P \asymp \xi^2$ が証明を要しない恒等式になります 初 （基底状態変換 $H = P^{\dagger}P$ と変分原理）。これを格子に持ち込むため、尺度 $s = \ln \ell$ の上に一次元の鎖を置き、(11) の右の離散版で C_P を挟みました。

$$(\mathrm{P}) \ \wedge \ \sum_{k} \delta(b_k) \le S_\delta \quad \Longrightarrow \quad e^{-2T} C_P \text{ は } T = \ln(1/a) \text{ に依らず有界} \tag{13}$$

Lean `conditional_scale_bound`（仮定：射影の仮定・非負で部分和が有界な取りこぼし・幾何級数の重み。有限鎖の Hardy の挟み込みは既知の再証明）。陰性対照として、一定の取りこぼしでは有界性が崩れます `const_defect_scale_unbounded`。中身は射影の仮定の側にあり、射影の仮定は「分散を尺度ごとに分けられる」「各段の条件つき Poincaré 定数が一様」「段をまたぐ伝導度が押さえられる」「状態空間が尺度の一本の線である」の四つに割れて、後の三つは示されていません 仮 。射影の仮定は緩和時間の仮定より弱くありません。一次元の鎖は上界の仮定を示したのではなく、上界の仮定を射影の仮定に言い換えました。

境界と位相電荷（体積と境界の道・尺度の一次元鎖の道）。周期の箱では、状態空間が位相電荷 Q ごとの枚に分かれ、紫外の端でだけつながります。可逆な力学では、どの観測量でも

$$R(f) = \frac{\operatorname{Var} f}{\mathcal{E}(f)} \ \le \ \tau_{\mathrm{int}}(f) \ \le \ C_P \tag{14}$$

が成り立ち 典 Lean `tau_int_le`・`rayleigh_le_tau`（有限の可逆な連鎖。既知の事実の再証明）、測った τ_{int} はどれも C_P の下界です。原典は HMC 型の力学で位相電荷の二乗の有効な動的指数を「約 5」と報告していて 読 （Schaefer–Sommer–Virotta 2011）、HMC と Langevin が同じ普遍類という予想 仮 と (14) を重ねると、周期の箱では $C_P \gtrsim a^{-5}$ で上界の仮定は破れます。予想の上の条件つきの読みです。「約 5」は $SU(3)$ の値で、$SU(2)$ の同じ測りは探した範囲で一本（HMC・周期境界・小さな箱・三点）、a^{-2} に近いと報告されています 読 （Abe–Morikawa–Suzuki 2025。23-01 §05 の注）。開いた境界がこの障壁を外すのは、物理の一辺を止めた有限の箱の中だけです（部分領域の電荷を試験関数にした勘定 仮 。原典でも、開いた境界の Q^2 の自己相関時間は時間方向の長さにほぼ比例して伸びる 読 ）。先に体積を無限にするこの本の順では救いにならない見込みで、緩和時間の仮定の言明そのものを、位相の区画ごとの文か、台を相関長の数倍に限った局所の文に直す方向が候補になります（23-01 §05 の注。直し方は 第 24 部 で扱います）。

こうして上の側の道は、どれも難しさの移った先を名指して止まりました。

$$m^2 \gtrsim \sigma \iff T_{\mathrm{loc}}(c) \wedge \text{床} \wedge \text{つなぎ目}, \qquad C_P \lesssim \xi^2 \iff (\mathrm{P}) \wedge \sum \delta < \infty \tag{15}$$

矢印は右から左の一方向だけで、右辺はどれも仮定です。

06

二十一の壁 — 五つの型

壁は、ある道がある道具で (1) のある矢印の手前で止まった理由を一文にしたものです。型は五つです：原理の壁は不等式の向きから出て道具の細部に依らないもの、構造の壁は選んだ族・記帳・級数の中で要求が両立しないもの（族の外は未決）、道具の壁は要る不等式の型は分かっているのに示す道具が無いもの、仮定の壁は条件つきの言明の足場、測定と文献の壁は数値・箱・一次資料で決まらなかったものです。どの壁も「越えられない」ことの証明ではありません。

表 3　二十一の壁（「動くには」は定義から出るもの）

番号	壁	一行	動くには	矢印
1	試験関数の片側の壁	試験関数は C_P を下からしか押さえない 典	試験関数でない型の不等式	上界の仮定
2	分光の上界の壁	分光は隙間の上界で終わる。重みの小さい軽い状態は有限の窓に見えない 典	最も軽い状態への重なりの下界	物理単位の隙間の言明
3	局所演算子の次元の壁	局所ゲージ不変演算子は次元 4 以上で $\eta_s = 2$（感受率の有界性の仮定の下の代数）	半径 ξ まで均す（→測定の費用の壁）	下界の仮定
4	ゲージ固定の一価性の壁	ゲージ固定：鋭ければ多価、鈍ければ長波長が消える 読 （$U(1)$）	選択と平滑化を分ける構成（案は無い）	下界の仮定
5	測定の費用の壁	均した演算子の分子は零運動量の感受率で、測る費用は $\geq cL^{d+2}$	分子を測定でなく評価で押さえる	下界の仮定
6	正の重みの核の壁	$\delta(2) = 0$ の核は隣の重みが負。正の重みの核では $c_2 > 0$（測定した依り方の下）	族の外の核	取りこぼしの総和可能性
7	更新形の級数の壁	強結合の級数は更新形で $\eta = 0$ を強制し、指数を読ませない	級数の外の情報	緩和時間の仮定の η
8	一段きりの積分の壁	完全な族の一リンク積分は一段きり	段を重ねる別の記帳	一段の記帳

番号	壁	一行	動くには	矢印
9	極限の性質の壁	Wilson ループの極限の言明・回転の回復の言明は一段の写像の合成からは出ない	極限の性質を示す別の道具	極限
10	上界の道具の壁	上界の仮定の型の道具が無い。尺度ごとに重ねる曲率の案は交差項で止まる	交差項の評価	上界の仮定
11	管の不等式の壁	$m^2 \gtrsim \sigma$ は管の不等式に移ったが、管の不等式に証明の型が無い	ループ空間の転送作用素のゲージ不変な定義	一尺度の鎖
12	射影の仮定の壁	射影の仮定は緩和時間の仮定より弱くない。下界の仮定は一次元に落ちない	射影の仮定をより弱い言明から出す	上界の仮定
13	検査の道具の壁	一リンクの議論のリーマン幾何、C_P の行列の変分の一般化固有値問題が、機械検査の道具に乏しい	ライブラリの整備	一段の記帳
14	仮定そのものの壁	緩和時間の仮定と三つの鎖（緩和の鎖・一尺度の鎖・記帳の長さの鎖）は証明されていない 仮	上界の仮定そのもの・射影の仮定・三つの鎖の下界のどれか	緩和時間の仮定の η・鎖
15	同値の足場の壁	物理単位の隙間の言明の同値の足場：冪の形・$\eta \geq 0$・加法的な段の誤差・一ループ核の δ 仮	各仮定を外す	取りこぼしの総和可能性
16	周期境界の予想の壁	周期境界での上界の仮定の破れは HMC と Langevin が同じ普遍類という予想に依る 仮	$SU(2)$・局所的な力学の動的指数	上界の仮定
17	当てはめの壁	$m/\sqrt{\sigma}$ の破れが $O(a^2)$ なのは数表への当てはめ 読	段の歪みの評価	一尺度の鎖
18	箱の大きさの壁	箱が小さい（8^4 は $\beta \gtrsim 2.45$ で小さい箱の相、12^3 は $L\sqrt{\sigma} < 3$）	物理体積を揃えた大きな箱	下界の仮定
19	取りこぼしのゲージ依存の壁	c_2 のゲージの取り方による違いは、一ループ核の模型の中で二つのゲージとも正と読めたまで 読	ゲージによらない δ の定義	取りこぼしの総和可能性
20	管の模型の符号の壁	管の模型で、有限の u の $1/P$ の係数の符号が未決	形の零モードの有効模型	一尺度の鎖
21	一次資料の壁	一次資料の欠け（$SU(2)$ の局所的な力学の動的指数、Bałaban・Magnen–Rivasseau–Sénéor・Osterwalder–Seiler の本文）	入手	物理単位の隙間の言明

原理の壁。試験関数の片側の壁と分光の上界の壁は (8) の二つの片側で、測定を何回重ねても動きません。例えば標準正規分布（$C_P = 1$、$f = x$ が等号）で、x を含まない奇数次の多項式の族の比の最大は族を大きくすると 1 に近づきますが、族の中の数だけでは 1 が最終の値か分かりません 読 （族の下界）。1 だと分かるのは族の外の入力（$V'' = 1$ の凸性から $C_P \leq 1$）があるからで、上界の仮定に要るのはこの種の入力です。

構造の壁。選んだ族の中の両立不能で、族の外については何も言いません。局所演算子の次元の壁・ゲージ固定の一価性の壁・測定の費用の壁は §04 の三つの道の止まり方、正の重みの核の壁は反射正値性と取りこぼしの消去の緊張で、問題文が連続の正則化について言う「反射正値性を失うと回復の方法が少ない」と向きの逆な同じ緊張です。更新形の級数の壁・一段きりの積分の壁・極限の性質の壁は、記帳と級数の形の限界です。

道具の壁。上界の仮定の列に集まります。上界の道具の壁・管の不等式の壁・射影の仮定の壁は §05 の三つの移り先で、検査の道具の壁だけは数学の障害ではなく検査の道具の不足です。曲率の定理が在る $\beta < 0.2722$ と分光が使う $\beta = 2.60$（相関長 1.95 格子間隔）は約 9.6 倍離れていて、そのあいだを一様に渡る評価が上界の道具の壁の中身です。

仮定の壁。帯の文 $a^2 C_P \asymp 1$ は三つの比の積 $(a^2/\sigma)(\sigma/m^2)(m^2/\lambda_1)$ に割れ、中心の同値は緩和時間の仮定のほかの足場にも立っています。各仮定は第 1〜5 部と第 7・17・18 部の概念に当たります：緩和時間の仮定と一尺度の鎖・記帳の長さの鎖は「尺度は一つ」（4-07）の Poincaré 定数での言い換えの候補、緩和の鎖は動的指数 $z = 2$（18-03）、一尺度の鎖は一尺度（17-12）、記帳の長さの鎖は漸近スケーリング（5-05）の記帳の長さでの特殊化です。類比であって数学的な同値ではありません。

測定と文献の壁。計算か入手で動きますが、動いても (1) の論理は変わりません。代表は箱の大きさで、$12 \times 0.15896 = 1.91$（$\beta = 2.55$）、$12 \times 0.13395 = 1.61$（$\beta = 2.60$）と、どちらも物理の長さ $1/\sqrt{\sigma}$ を 3 個含まない小さな箱です 読 。

上界の仮定の列の壁は試験関数の片側の壁・上界の道具の壁・射影の仮定の壁・周期境界の予想の壁で、測定と文献の壁がありません。上界の仮定の手前には、測れば動く壁が無いということです。出題者が「新しい考えが要る」と書いたのも体積に一様なギャップの側で（Jaffe–Witten §6.5）典 、測定の動かない壁が集まった所と同じ場所です。

07

残ったもの — Lean で閉じた代数と、数値の読み

十七の道から残ったものの多くは、仮定を引数に明示した有限の不等式と代数です。表 4 は本文で引いた定理を、言明が何についての文かで並べたものです。どの定理も Lean の中では実数・数列・有限集合の上の和についての文で、それが Wilson 測度の量であることは本文が付けた読みです。Wilson 測度の期待値・相関・隙間についての定理はありません（23-13）。

表 4　四次元格子の側で Lean で閉じた主な定理（性格：再証明＝既知の事実を証明し直した／整理＝定義と仮定の代数／条件つき＝未証明の仮定から結論への矢印だけ／陰性対照＝仮定を外すと崩れる例／格子の定理＝格子の形だけを仮定した、辺の族や有効作用についての定理）

定理	仮定	言明	性格

定理	仮定	言明	性格
`log_F0_le`・`log_F0_ge`	引数が非負	一リンク積分の対数の両側評価 (3)	再証明
`Incidence.intact_frac_le`	接続が正則	無傷の面の割合 $\le$ 残る辺の割合 (4)	整理
`no_blocking`・`blocking_shortfall`	完全な段の列／各段で消す割合 $\le 1/4$	段を重ねても無傷の面は戻らない	整理
`discStep_semigroup`・`step_lowers_coupling`	円板の形の面	円板の段は面積について半群で $\beta' < \beta$	再証明
`kappaDisj_lt_one`	$b \ge 2$	辺を共有しない面の寄与は 1 未満 (5)	整理
`xi_eq_exp`	全ての段で $\xi(\beta - t) = \xi(\beta) e^{-t/\kappa}$	$\xi(\beta) = \xi(0) e^{\beta/\kappa}$	整理
`fixed_step_bounded_iff`・`S4_two_sided`	一定の誤差／部分和が有界	部分和が有界 $\iff$ $d = 0$／正の帯に留まる	整理・条件つき
`drain_exponent`・`drainExp_eq_zero_iff`	(7) の冪の形・$0 \le \eta \le 2$・$\theta \ge 0$	$p = 0 \iff \eta = \theta = 0$	整理
`c2_ge_of_nonneg_weights`	$c_2 = A + \kappa S$（測定した依り方）	$c_2 > 0$	条件つき
`PerfectFamily.perfectK_one_iff`・`no_perfectZ_of_five`	$2 \le d$／$d \ge 5$	辺の完全な族の分類（表 1）	格子の定理
`StaplePerturbation.hess_gauge`	周期が偶数で ≥ 3・単位四元数・純虚の摂動	有効作用の Hesse 形式 $\ge -27\beta^2$	格子の定理
`renewal_chi_mul_massSq`	更新形の係数が正	$\chi m_0^2 = A / c_0$	整理
`dev_le_of_contracting`・`dev_eq_of_marginal`	$0 \le \lambda < 1$／$\lambda = 1$	ずれは有界／段数に比例	整理
`overlap_le_susc_mul_gap`	$m > 0$・$\tilde{Z} \coth(m/2) \le \chi$	$\tilde{Z} \le \chi m$	整理
`profileQuotient_isGreatest`	運動量は有限個・分母が正	階数 1 の族の比の上限は成分ごとの比の最大	再証明
`eta_ge_two_of_bounded_susc`	感受率が一様に有界	$\eta_s \ge 2$	条件つき

定理	仮定	言明	性格
`orbitAvg_gauge_invariant`	有限群の作用	軌道の上の重み付き平均はゲージ不変	再証明
`meff_antitone`・`meff_ge_of_corr`	非負の重みの表示	有効質量は単調に減り、最低エネルギーの上界	再証明
`gap_ge_of_overlap`・`light_admixture_invisible`	重なりの下界 q／二準位の例	(10)／軽い状態は窓に見えない	条件つき・陰性対照
`cost_ge`	緩和時間の下界・掃引の回数	費用 $\geq cL^{d+2}$	条件つき
`mass_sq_ge_of_tube`・`mass_bound_localized`	管の不等式の帰結／局所化した T・床・つなぎ目	$m^2 \geq 4c\sigma$ (12)	条件つき
`linear_regime_breaks_onescale`・`casimir_only_no_bound`・`linear_deficit_breaks_inv`	収束域／床だけ／生の周長	それぞれの仮定では一尺度の下の半分が偽	陰性対照
`conditional_scale_bound`・`const_defect_scale_unbounded`	射影の仮定・有界な取りこぼし／一定の取りこぼし	(13)／有界性が崩れる	条件つき・陰性対照
`tau_int_le`・`rayleigh_le_tau`	有限の可逆な連鎖	(14)	再証明
`comp_class_eq_of_equivariant_bijection`	全単射・作用と可換	流した場の関数の類は不変関数の類と同じ	整理

条件つきの行の中身は仮定の側にあり、定理はその仮定を一歩も示しません。格子の定理の二行（完全な族の分類と有効作用の Hesse 形式の下界）だけが、格子の形だけを仮定した格子の上の定理です。前者は格子の組合せの事実、後者は相関長が格子間隔の 1/10 程度の強結合の側で効く評価で、どちらも連続極限からは遠い所の話です。

数値の側で残ったのは読みです読：一ループ核の模型の傾きと既知の係数の一致（相対 2.8×10^{-5}、模型の中）、c_2 の値（二つの重みと二つのゲージ）、原典の格子の $a\sqrt{\sigma}$ から読む実効的な傾き 0.304、平滑化した演算子の有効質量の上界 0.501 ± 0.071（$\beta = 2.6 \cdot 12^4$）、コンパクト $U(1)$ のゲージ固定のコピーの散らばり、Gribov 領域の曲率が正になる強結合の範囲（有限次元の模型の標本）、勾配流の押し出し測度の曲率（測った典型点）。どれも上界・下界の証明には使っていません。

```
08
```

一段目へ降りる理由 — どの道具がどの壁で止まったか

§04〜§06 をまとめると、四次元格子のまま緩和時間の仮定の上の側（上界の仮定、すべての f）を攻める道具が無い、ということです。下の側の道具（試験関数・分光）は原理の壁で止まり、上の側の道具（曲率・管・一次元鎖）はどれも一つの仮定に難しさを移した所で止まりました。どこで止まったかは、道具ごとに次の表のとおりです。右の列は、同じ道具を一段目の模型（0+1 次元の二重井戸の経路の測度、23-04）に持ち込んだとき、何が替わるかの見込みです。

表 5　道具と壁の対応、一段目で替わるもの（右の列は見込みで、一段目での中身は各章）

道具	四次元格子で止まった壁	一段目で替わるもの
試験関数・分光（下の側）	試験関数の片側の壁・分光の上界の壁・局所演算子の次元の壁・ゲージ固定の一価性の壁・測定の費用の壁	下の側は時刻に局所な試験関数の族で $C_P \geq \xi^2$ の等号まで届く（一次元の片側の橋の命題、23-04 §04）。上の側には、一段目でも別の道具が要ることは変わらない
曲率（Bakry–Émery）	上界の道具の壁（強結合でしか正にならない・交差項）	測度全体は二つの谷を持ち凸でないが、キンクの無い一つの相の中では局所の Poincaré を区画の組み立てで問える（相内の局所 Poincaré の条件、23-06）
尺度の一次元鎖（射影の仮定）	射影の仮定の壁（射影の仮定は緩和時間の仮定より弱くない）	遅い自由度はキンクの位置で、一次元への射影の形が模型から見える。射影の仮定は、鞍点の族に沿う輸送（鞍点の管の条件）と箱の力学への帰着（箱への帰着の条件）に割れて名指しされる（23-07・23-11）
管の転送作用素（管の不等式）	管の不等式の壁（質量の下界に証明の型が無い）	質量の側は要らない：相関長 $\xi = \hbar/\Delta$ はトンネル分裂から独立に精度よく求まり、比べる相手がはっきりしている（23-04）
一段の記帳（取りこぼしの総和可能性の仮定）	正の重みの核の壁・一段きりの積分の壁・同値の足場の壁	記帳の長さを作らなくてよい：相関長が $\hbar$ について $e^{S_0/\hbar}$ の速さで伸び、比べる長さが測度から直接決まる
境界と位相電荷	周期境界の予想の壁（周期の箱の破れは予想の上）	経路の長さ T を先に無限大にする体制で述べるので、周期の箱の位相の枚は現れない形で問いを立てる
箱と一次資料	測定と文献の壁（箱の大きさ・取りこぼしのゲージ依存・管の模型の符号・一次資料）	転送作用素の数値・半古典の式・区間演算で、比べる量の多くが高い精度か不等式として得られる（23-08）

替わらないものもあります。上界の仮定が「すべての f」についての不等式であること、そして下の側の道具では原理的に届かないこと（試験関数の片側の壁）は一段目でも同じです。だから一段目でするのは、上の側の組み立てを、仮定の行を名指した命題の形で先に作ることです。緩和時間の仮定は次元によらない文なので（23-01 §05）、同じ文を、物差しが径数について指数で伸び、遅い動きが「相を移る」動きで、比べる量が正確に分かる最小の模型で組みます。

一段目を閉じても、四次元格子に持ち上がる保証はありません。持ち上がる見込みがあるのは文の形と道具の形で、定数や径数の範囲は持ち上がりません（23-03 §06）。この章の壁の表は、一段目の道具が二段目で再びどの壁に当たりうるかを読むための表として残します。

緩和時間の仮定は取っ掛かりとして選んだ一つの言い換えで、この章の道と壁も緩和時間の仮定を軸にした検討の範囲のものです。緩和時間の仮定と別の視点は第 24 部で扱います。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
十七の道と二十一の壁の整理（表 2・表 3）、道具と壁の対応（表 5）	(1) のどの矢印も証明されていない。「止まった」は質量ギャップや連続極限について何かを示した意味ではなく、届かなかった命題が偽だという意味でもない
典 変分原理と有限の窓、局所演算子の最低次元、反射正値性、強結合の面積則、一ループ係数、次元勘定、Bakry–Émery と Muckenhoupt の不等式、$R \le \tau_{\mathrm{int}} \le C_P$	これらを成果として数えること
初 完全な族の $d \le 4$ の数え上げ (2)、記帳の欠損の恒等式 (4)、(7) の冪の代数、(10)・(12) の代数、素のリンク角の比 1、輪のゲージ固定の閉じた式。Lean 表 4 の定理（仮定を同じ行に）	緩和時間の仮定・三つの鎖・管の不等式・射影の仮定・感受率の有界性・重なりの下界・測定した c_2 の依り方・段の誤差の模型の証明
読 一ループ核の模型の κ の一致と c_2、格子の実効的な傾き、分光の上界、$U(1)$ のゲージ固定、Gribov 領域と勾配流の曲率、位相電荷の有効指数	模型の数が四次元 $SU(2)$ の非摂動の量であること。読みを上界・下界の証明として使うこと
仮 一リンク積分が一度きりであること、更新形、周期の箱での上界の仮定の破れ（予想の上）、一段目で替わるもの（表 5 の右の列の見込み）	一段目の結果が二段目以後に持ち上がること。質量ギャップ・連続極限について、この章は何も示さない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
一リンク積分・熱浴法・強結合の面積則・二次元の間引き	典	5-07・5-02・7-02 の出典表（K. G. Wilson, Phys. Rev. D 10 (1974) 2445・K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440・A. A. Migdal, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 69 (1975) 810。書誌のみ）。
一ループ係数 b_0	典	D. J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1343。H. D. Politzer, 同 1346（書誌のみ）。
格子の $a\sqrt{\sigma}$・$am(0^{++})$	読	B. Lucini, M. Teper, JHEP 0106 (2001) 050, hep-lat/0103027 表 1（本文を確認）。

もの	種別	出典・道具
変分原理・有限の窓・Bakry–Émery	典	1-10・4-11 の出典表。D. Bakry, M. Émery, Lecture Notes in Math. 1123 (1985) 177–206（書誌のみ）。
多重尺度の Bakry–Émery の到達点	典	R. Bauerschmidt, B. Dagallier, arXiv:2202.02295 の定理 1.1（本文を確認）。R. Bauerschmidt, T. Bodineau, Comm. Pure Appl. Math. 74 (2021) の定理 2.5。
二重み Hardy 不等式	典	B. Muckenhoupt, Studia Math. 44 (1972) 31–38（書誌のみ）。
局所ゲージ対称性・Gribov・確率的ゲージ固定・軌道の上の平均	典	S. Elitzur, Phys. Rev. D 12 (1975) 3978。I. M. Singer, Commun. Math. Phys. 60 (1978) 7。C. Parrinello, G. Jona-Lasinio, Phys. Lett. B 251 (1990) 175。D. Zwanziger, Nucl. Phys. B 345 (1990) 461。D. Mehta, M. Schröck, Phys. Rev. D 89 (2014) 094512（要旨を確認、他は書誌のみ）。
Wilson 流・APE	典	M. Lüscher, JHEP 08 (2010) 071, arXiv:1006.4518（要旨を確認）。M. Albanese ほか, Phys. Lett. B 192 (1987) 163（書誌のみ）。
位相電荷の有効指数・HMC と Langevin	読・仮	S. Schaefer, R. Sommer, F. Virotta, Nucl. Phys. B 845 (2011) 93, arXiv:1009.5228。M. Lüscher, S. Schaefer, JHEP 07 (2011) 036, arXiv:1105.4749（どちらも要旨を確認）。M. Abe, O. Morikawa, H. Suzuki, PTEP 2025 (2025) 063B03, arXiv:2501.00286 §3.2・図 6（$SU(2)$ の HMC。本文を確認）。
ホログラフィーの模型	典（模型の中）	U. Gürsoy, E. Kiritsis, F. Nitti, JHEP 0802 (2008) 019, arXiv:0707.1349。C. Csáki, H. Ooguri, Y. Oz, J. Terning, JHEP 9901 (1999) 017, hep-th/9806021（要旨を確認）。17-09。
問題文 §6.5	典	A. Jaffe, E. Witten, Clay の問題文（0-03 の出典表）。
表 4 の定理と仮定	Lean	束 `LatticeGaugeCoarseGraining`・`LatticeGaugeRunning`・`LatticeGaugeMultiStep`・`LatticeGaugeSpectralHinge`・`PerfectFamilyEdges`・`LatticeGaugeOneLink`・`LatticeGaugeOverlapExponent`・`LatticeGaugeTubeEntropy`・`LatticeGaugeWulffCorrection`・`LatticeGaugeHardyLadder`・`LatticeGaugeAutocorrelationBound` ほか。各束の末尾の `#print axioms` が標準の三つの公理の部分集合。言明と限界は 23-13。
模型の数値（c_2・窓の傾き・ゲージ固定・曲率・流れ）	読	この部の四次元格子の記録の計算（一ループ核の模型・有限次元の模型・小さな箱の Monte Carlo）。値と条件は本文の各行。

この章で使った語 — 一段の記帳・完全な族・一リンク積分・取りこぼし $\delta(b)$・答えの形・四次元格子で試した十七の道・二十一の壁（五つの型）・更新形・重なりの下界・管の不等式・射影の仮定・位相電荷・陰性対照。意味は A-02 用語集 にあります。

次の章へ — 23-03 階段の四段 — なぜ 0+1 次元から始めるか：緩和時間の仮定を四段に分け、一段目に二重井戸を選ぶ条件と、一段目の言明（二重井戸の緩和時間の冪の言明と二重井戸の緩和時間の上界の命題）の形を決める。

次に読む章：23-03 階段の四段 — なぜ 0+1 次元から始めるか。

階段の四段 — なぜ 0+1 次元から始めるか

この章は本書の検討です。§03・§06 は未解決の地図、§07 は案内です。

この章で分かること — 拡散型緩和時間の仮定は「経路の測度の緩和の時間が、その測度の相関長の二乗の冪で伸びる」という、次元によらない形の文です。そこで拡散型緩和時間の仮定を四段（0+1 次元の二重井戸／四次元格子・非可換／連続極限と OS 公理／極限での質量ギャップ）に分け、一段目に二重井戸を選ぶ理由を述べます。一段目の言明は「二重井戸の緩和時間の冪の言明」（以下、二重井戸の冪の言明）$\ln C_P / \ln \xi \to 2$ で、その上の側を $C_P \le K \xi^2 S_0 / \hbar$ の形（一段目の上界の命題）にすることが一段目の組み立ての中心です。一段目の上界の命題は四つの条件の上の条件つきの命題で、証明されてはいません。一段目から二段目以後へ持ち上がる見込みと、持ち上がらない理由を両方述べます。

前提となる章 — 23-00（入口・五つの札）・2-07（経路積分と虚時間）・2-05 §07（二重井戸のトンネル分裂）。四次元格子の側の定義は 23-01。

先に言うこと — 緩和時間の仮定は四次元格子でも二重井戸でも仮定です。一段目の上界の命題は二重井戸の四条件の上の代数で、四つの条件はどれも仮定の行を残しています。この章は言明の形を決める章で、何も新しく証明しません。

この章の順序

1. 緩和時間の仮定は次元によらない形の文 — 測度の族・相関長・緩和の時間
2. 四段の定義 — 各段で「閉じた」と言える形（表 1）
3. 四次元格子のまま攻めない理由 — 上の側の道具が無い
4. 一段目に選ぶ模型の条件 — 指数で伸びる物差し・二つの相・比べられる量（表 2）
5. 冪の文と一段目の上界の命題の形 — 下界 ξ^2 と上界の目標
6. 持ち上がるもの・持ち上がらないもの（表 3）
7. 一段目の中の地図 — 23-04〜23-11 の案内

01

拡散型緩和時間の仮定は次元によらない形の文 — 測度の族・相関長・緩和の時間

緩和時間の仮定に出てくるものは三つです。一つの径数で並んだ確率の測度の族 μ_s、各 μ_s の相関長 $\xi(s)$、各 μ_s の Poincaré 定数 $C_P(s)$（その測度を平衡に持つ Langevin 力学の緩和の時間）。径数を動かすと $\xi(s) \to \infty$ となるとき、緩和時間の仮定は

$$(\xi^2): \quad \lim \frac{\ln C_P(s)}{\ln \xi(s)} = 2 \quad (1)$$

という一文です。この文は測度がどの空間の上にあるかを言いません。四次元格子では μ_s は Wilson 測度で $s = \beta \to \infty$（23-01）、0+1 次元の二重井戸では μ_s は虚時間の経路の測度 $e^{-S/\hbar}$ で $s = 1/\hbar \to \infty$ です（23-04）。同じ形の文を、対象を替えて並べられます。

例。自由場（質量 m_0 のガウスの鎖）では $C_P = 1/m_0^2$、$\xi \approx 1/m_0$ で、(1) は $m_0 \to 0$ で成り立ちます（23-00 §04）初。相互作用があると、緩和を遅らせる新しい仕組み（障壁を越える、位相の違う配位の間を移る）が入り、(1) は自明でなくなります。

正確には、この部の「緩和時間の仮定」は冪の水準の文 (1) だけを指します。定数倍の幅で言う文（帯の文）は別の名で呼び、緩和時間の仮定とは呼びません（23-01）。また、一段目の四つの条件は「二重井戸の四条件」と書き、緩和時間の仮定と取り違えないように必ず「条件」の語を添えます。Lean の定理名に入っている字（H1 など）は替えません。

02

四段の定義 — 各段で「閉じた」と言える形

易しい場所から難しい場所へ、四段を置きます。

- **一段目**：0+1 次元の二重井戸の経路の測度。径数 $\hbar \to 0$。
- **二段目**：四次元格子の非可換ゲージ理論（SU(2) または SU(3) の Wilson 測度）。径数 $\beta \to \infty$。
- **三段目**：格子間隔 $a \to 0$ の連続極限。極限の測度が在り、Osterwalder–Schrader の公理（4-10）を満たすこと。
- **四段目**：極限の理論の質量ギャップ（4-11）。

表 1　段ごとの対象・目標・道具・この本の状態

段	対象	「閉じた」と言える形	主な道具	この本の状態

段	対象	「閉じた」と言える形	主な道具	この本の状態
一段目	二重井戸の経路の測度	二重井戸の冪の言明の上の側を、有限個の名前の付いた仮定の行の表つきで述べ、各行を証明・原典・計算機援用で埋める	分散の分割・局所 Poincaré・箱への帰着・区間演算	一段目の上界の命題（二重井戸の四条件の上の代数）まで。四条件はどれも 仮 の行を残す（23-05・23-12）
二段目	四次元格子の Wilson 測度	同じ形の文 (1) を $\beta \to \infty$ で	一段目で作った型を写す見込み（§06）	緩和時間の仮定は 仮 。届いているのは下からの評価だけ（23-02）
三段目	連続極限の測度	極限の存在と OS 公理	繰り込み群の段の列・構成的場の理論（第 7 部）	扱わない。四次元の Wilson の格子ゲージ理論の極限として Wightman の公理を満たす理論が作れることは、2026-11-10 に公開された構成が Lean で証明している、と委員会が評価した（第 6 部）。無限体積の極限の一意性と連続の確率測度は示されていない（6-04）
四段目	再構成した場の量子論	ハミルトニアンの隙間が正	OS の再構成（4-10）	扱わない。公開された構成も示していない（6-04）

一段目の「閉じた」は、上の側の命題を「どの行が証明でどの行が仮定か」が一枚の表で読める形にすることを指します。全ての行が証明・原典・計算機援用で埋まり、一段目の上界の命題の段が一本の証明として通ってはじめて一段目は定理になります。いまはそうなっていません（23-12）。

二段目から上へ進むには、各段の間にもう一つずつ橋が要ります。二段目の文 (1) が成り立っても、それだけでは連続極限の存在（三段目）は出ませんし、極限の隙間（四段目）は、(1) の上の側に相関長と物理の長さを結ぶ仮定（23-01 の鎖）を足してはじめて読み替えられる形です。この部は、どの段の間の橋についても含意の定理を持ちません。

03

四次元格子のまま攻めない理由 — 上の側の道具が無い

四次元格子の記録（23-02）では、試験関数・ゲージ固定・分光のどの道も C_P の下界か質量の上界で終わり、上の側（すべての f について C_P が大きすぎない）に届く道具は見つかっていません。強結合の側の評価（C_P が有界）と、凸な測度に効く Bakry–Émery の型は在りますが、どちらも $\xi \to \infty$ の体制には届きません。体積に一様な既知の判定法を二重井戸の経路の格子に当てた例でも、出る上界は $e^{c\xi}$（$\hbar$ について二重指数）の型で、冪の文には遠いと読まれています 典 （判定法：Bauerschmidt–Dagallier の定理 2.1） 読 （$c \approx 1.4$〜1.8、$\varepsilon = 0.25 \cdot \hbar \in [0.1, 0.4]$ の数値）。そこで、緩和時間の仮定が成り立つことの見込まれる最小の試験台で、まず「上からの組み立て」を作ります。詳しい道と壁は 23-02 に置きます。

04

一段目に選ぶ模型の条件 — 指数で伸びる物差し・二つの相・比べられる量

一段目の模型に求める条件は三つです。

1. **物差しが径数について指数で伸びる**。四次元格子の相関長は、一ループの勘定では β について指数で伸びます（4-07）。冪と指数を取り違えない試験台にするには、同じ速さで伸びる物差しが要ります。
2. **遅い動きが「相を移る」動きである**。緩和を遅らせるのが、二つ（以上）の相の間を移る稀な出来事であること。二つの相の中の揺らぎは速く、相を移る動きだけが遅い、という二つの尺度があることです。
3. **比べる量が正確に分かる**。相関長が、独立な方法で高い精度で求まること。比べる相手がぼやけていると、C_P/ξ^2 の伸び方を読み違えます。

0+1 次元の二重井戸 $V(x)=(x^2-1)^2/8$ の経路の測度は、三つを満たします。物差しは $\xi = \hbar/\Delta \propto \hbar^{1/2}e^{S_0/\hbar}$ と指数で伸び（Δ はトンネル分裂、$S_0=2/3$ は谷から谷へ移る道の作用）、二つの相は「経路が右の谷にいる区間」と「左の谷にいる区間」で、相を移る出来事はキンク（作用 S_0 の短い遷移）です。Δ は半古典の式（2-05 §07 の (10)）と、転送作用素の数値の二つの道で求まります（23-04）。

キンク一本の作用 S_0 と、相関長 $\xi \propto e^{S_0/\hbar}$。この組が、四次元格子で「インスタントンの作用」と「指数で伸びる相関長」が並ぶ構造を、最も小さい次元で持っています。ただしこれは類比で、対応の定理ではありません。

表 2　二重井戸と四次元格子の並べ方（右の列は類比。対応の定理ではない）

項目	二重井戸（一段目）	四次元格子（二段目）
測度	経路の測度 $e^{-S/\hbar}$（虚時間の直線）	Wilson 測度（四次元の格子）
径数と極限	$\hbar \to 0$	$\beta \to \infty$
物差し	$\xi \propto \hbar^{1/2}e^{S_0/\hbar}$ 典 （半古典の主項）	一ループの記帳で $\propto e^{3\pi^2\beta/11}$（SU(2)。$\xi$ と揃うことは 仮 ）
遅い自由度	キンクの位置（作用 $S_0=2/3$）	インスタントンの位置・大きさ・向き、位相電荷の密度（類比）
下の側	$C_P \geq \xi^2$（一次元の片側の橋の命題、23-04 §04）	試験関数による下界（23-02）
上の側	四条件の上の条件つき（一段目の上界の命題）	無い

一段目は易しい模型ですが、易しすぎはしません。二重井戸の冪の言明の上の側を与える既知の定理は、探した範囲では見当たりません。区間の長さを止めて $\hbar \to 0$ とする Eyring–Kramers の型の定理は在りますが、経路の長さ T を先に無限大にする体制（$T \gg \xi$）は、その定理の範囲の外です 典 （Brooks–Di Gesù 2026 が、長さを無限大にする体制と平行移動の族を範囲の外と本文に明記している）。

05

冪の文と一段目の上界の命題の形 — 下界 ξ^2 と上界の目標

一段目の言明は、二重井戸の経路の測度（$T \to \infty$ を先に取る）について

$$\text{冪の仮定 } (\xi^2): \qquad \lim_{\hbar \to 0} \frac{\ln C_P(\hbar)}{\ln \xi(\hbar)} = 2 \quad (2)$$

です。$R := C_P/\xi^2$ と置くと $\ln C_P / \ln \xi = 2 + \ln R / \ln \xi$ なので、(2) は「$\ln R$ が $\ln \xi$ に比べて小さい」と同じです。

(2) の左の札「冪の仮定 (ξ^2)」は、本文で言う二重井戸の冪の言明（二重井戸の緩和時間の冪の言明）のことです。

下の側。$R \geq 1$、つまり $C_P \geq \xi^2$ は、どの 0+1 次元の井戸でも成り立ちます（一次元の片側の橋の命題。証明は 23-04 §04）。

上の側の目標。キンクの位置は拡散係数 $D = \hbar/S_0$ で動き、長さ ξ を拡散で渡る時間は $\xi^2/D = \xi^2 S_0/\hbar$ です（23-04 §03）。そこで上の側の目標を

$$C_P \;\leq\; K\,\xi^2\,\frac{S_0}{\hbar} \qquad (K \text{ は } \hbar \text{ に依らない}) \tag{3}$$

の形に置きます。物理の水準の勘定（キンクを希薄な気体として数える）では $C_P \approx \xi^2 S_0/\hbar$ と読まれ、(3) はその定数倍の余裕をとった形です 仮 （勘定は発見的で、証明ではない）。

(3) から (2) へ。(3) と $R \geq 1$ から $1 \leq R \leq K S_0/\hbar$。$\hbar$ が小さいとき $\ln \xi \geq s/\hbar$（ある $s > 0$）なので、

$$0 \;\leq\; \frac{\ln R}{\ln \xi} \;\leq\; \frac{\hbar\,\big(\ln(K S_0) + \ln(1/\hbar)\big)}{s} \;\longrightarrow\; 0 \qquad (\hbar \to 0) \tag{4}$$

となり、(2) が従います 初 Lean `power_H_of_kink_ratio` （仮定：$0 < K$・$0 < s$・$0 < \delta$、$0 < \hbar < \delta$ で $1 \leq R \leq K/\hbar$ と $s/\hbar \leq \ln \xi$。Lean の K は本文の KS_0）。$\ln \xi \geq s/\hbar$ は半古典の主項 $\ln \xi \approx S_0/\hbar$ から来る行で、格子の模型では 読 です。値は 23-04 §07 にあります。

一段目の上界の命題の形

(3) は証明されていません。一段目の組み立ては、(3) を次の四つの条件に割り、その上で (3) が従う、という条件つきの命題の形にしたものです。

一段目の上界の命題（条件つき・言明だけ）

0+1 次元の二重井戸の経路の測度で、二重井戸の四条件を仮定すると、$T \to \infty$ を先に取り $\hbar \to 0$ で $C_P \le K\xi^2 S_0/\hbar$（K は条件の定数だけに依る）。したがって二重井戸の冪の言明 (2) が従う。

- 相内の局所 Poincaré の条件（キンクの無い相の中の局所 Poincaré）
- 鞍点の管の条件（平らな鞍点の族に沿う輸送）
- 箱への帰着の条件（箱の力学への帰着）
- 箱の中の隙間の条件

四つの条件の中身、一段目の上界の命題の分散の分割の代数、示せた部分と仮定の行の分け方は 23-05 に置きます。条件ごとの現状は 23-06〜23-11、全ての行を一枚にした表は 23-12 です。

正確には、四つの条件はどれも、いまの時点で仮定の行を残しています。また、全ての条件の全ての行が同時に成り立つ $\hbar$ は、まだ一つもありません（23-12）。一段目の上界の命題は「何を示せば一段目が閉じるか」を名指した命題であって、一段目が閉じたことを言う命題ではありません。

06

持ち上がるもの・持ち上がらないもの

一段目で (3) が閉じても、二段目（四次元格子）の文が従うわけではありません。この節は、何が持ち上がる見込みがあり、何が持ち上がらないかを、理由とともに述べます。どちらも見込みの記述で、含意の定理ではありません。

表 3　一段目から二段目へ（見込み）

	持ち上がる見込み	持ち上がらない理由
形	文 (1)・(2) は次元によらない。「相の中は速い／相を移る動きは遅い」という二尺度の割り方も、遅い自由度がある測度なら同じ形で書ける	四次元格子の遅い自由度（インスタントンの集団座標・位相電荷の密度）は体積に比例して数が増える。一段目でも、経路が ξ より十分長いと、遅い変数を一つだけ取る割り方は使えない（23-04 §05 の帯）。四次元ではこの事情がさらに強まると見込まれる

	持ち上がる見込み	持ち上がらない理由
道具	分散の分割・二つの射影の補題・Efron–Stein の不等式・区画の和の段は、測度の空間の次元を使わない代数の段で、そのまま書ける	一段目の段の多くは、一次元の最近接の測度に固有の性質（転送作用素・相の境が点であること・キンクが希薄な気体として数えられること）に依る。ゲージ対称性と軌道の空間の幾何（3-04）は一段目に無い
定数	—	一段目の定数は、特定の $\hbar$ の節点や窓で計算機援用と数値の読みで決めたもので、四次元格子の β には何の情報も与えない。$\hbar$ と β の対応も類比である

それでも一段目から始めるのは、上の側の命題を「どの行が仮定か」が見える形に組む手順そのものが、二段目でも要るからです。仮定の行に名前を付け、依存の向きを確かめ（23-12）、機械検査が何を保証するかを分ける（23-13）手順は、模型によりません。一段目でその手順を通しておくと、二段目で同じ形の命題を立てたとき、どの行が新しく要るかを名指せます。

正確には、二段目に「同じ形の文」を立てることは、二段目の文が成り立つ証拠ではありません。一段目の模型では緩和時間の仮定が成り立つと読まれていても（物理の水準の勘定と下界の読み）、二段目で成り立つかは別の問いです（23-15）。

07

一段目の中の地図 — 23-04〜23-11 の案内

一段目の章

4. 23-04 二重井戸の経路の測度とキンク — 舞台の定義・キンク・下界 $C_P \geq \xi^2$〔二〕〜〔三〕
5. 23-05 一段目の言明 — 二重井戸の四条件と上界の命題 — 分散の分割と、上界の命題の組み立て〔三〕
6. 23-06 相内の局所 Poincaré の条件 — キンクの無い相の局所 Poincaré〔研〕
7. 23-07 鞍点の管の条件の地図 — 七つの道筋と環の継ぎ目〔三〕
8. 23-08 計算機援用とは何か — 窓の中の鎖の条件 — 区間演算で不等式を確かめる〔二〕〜〔三〕
9. 23-09 区画の枠組みと、窓の対数 Sobolev の道筋の三本の筋 — 頂上の台地の共通の壁〔研〕
10. 23-10 迂回策の一覧 — 壊れ方の型〔三〕〜〔研〕
11. 23-11 箱への帰着と箱の中の隙間 — 芯の定数 — 箱への帰着の条件・箱の中の隙間の条件と、芯の定数〔研〕

〔研〕の章は冒頭に〔三〕で読める要約の節を置くので、要約だけを読んで 23-12 へ進むこともできます。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
緩和時間の仮定を次元によらない形 (1) で書き、四段に分ける組み立て方（約束）	どの段の間の含意も。二段目の緩和時間の仮定・連続極限・極限の質量ギャップ
初 (3) と下界 $R \geq 1$ と $\ln \xi \geq s/\hbar$ から二重井戸の冪の言明 (2) が従う代数 (4) Lean `power_H_of_kink_ratio`（仮定は §05 の行）	(3) そのもの。一段目の上界の命題は二重井戸の四条件の上の条件つきで、条件はどれも仮定の行を残す
典 区間を止めた Eyring–Kramers の型の定理が、$T \to \infty$ を先に取る体制を範囲の外とすること	この体制で上の側を与える既知の定理が無いこと（探した範囲で見当たらない、まで）
持ち上がる見込みと持ち上がらない理由（表 3、見込み）	二段目で同じ形の命題が立つこと・成り立つこと

出典と再現

もの	種別	出典・道具
Poincaré 定数・相関長の定義	典	23-00 の出典表。
二重井戸のトンネル分裂と S_0	典	2-05 §07 の (9)(10) と出典表。
Eyring–Kramers の型の定理と、その範囲	典	G. Di Gesù, D. Le Peutrec, arXiv:1506.04434（定理 1.1）・B. Brooks, G. Di Gesù, arXiv:2606.16083（本文 p.4 の範囲の記述）。どちらも本文で確認。
体積に一様な判定法と、二重井戸の経路の格子での値	典・読	R. Bauerschmidt, B. Dagallier, arXiv:2202.02295（定理 2.1、本文で確認）。値は転送作用素の数値（刻み $\varepsilon = 0.25$・$T = \infty$）。
二重井戸の冪の言明の代数 (4)	初・Lean	本文 §05。定理 `power_H_of_kink_ratio`（仮定は §05）。言明は 23-13。
$C_P \approx \xi^2 S_0/\hbar$ の勘定	仮	キンクの希薄な気体と射影の拡散係数による物理の水準の勘定（23-04 §03）。
一段目の上界の命題の言明	仮定の表つき	中身は 23-05。

この章で使った語 — 階段（四段）・二重井戸の冪の言明・二重井戸の四条件・一段目の上界の命題・キンク・トンネル分裂・相（キンクの無い相）・局所 Poincaré・箱の力学（箱への帰着）。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-04 二重井戸の経路の測度とキンク ― 一段目の舞台を定義し、下界 $C_P \geq \xi^2$ と上界の目標の形を導く。

二重井戸の経路の測度とキンク

この章の §01〜§03 は既存の知見、§04 以降は本書の検討です。

この章で分かること — 一段目の舞台は、二重井戸 $V(x) = (x^2-1)^2/8$ の虚時間の経路の測度 $e^{-S/\hbar}$ です。相関長 $\xi = \hbar/\Delta$（Δ はトンネル分裂）は $\hbar^{1/2}e^{S_0/\hbar}$ の速さで伸び、$S_0 = 2/3$ は谷から谷へ移る道（キンク）の作用です。経路全体の Poincaré 定数 C_P は ξ^2 以上で（一次元の片側の橋の命題）、上の側の目標はキンクの拡散の時間 $\xi^2 S_0/\hbar$ の定数倍です。三つの $\hbar$ での $\ln \xi$ は 218／661／2213 です（読み）。

前提となる章 — 2-07（経路積分・虚時間・転送行列）・2-05 §07（二重井戸）・1-10 §07〜§09（Poincaré 不等式）・23-03（階段と二重井戸の緩和時間の冪の言明）。

先に言うこと — §01〜§03 と §07 は〔二〕、§04〜§06 は〔三〕で書きます。C_P の上界はここでは示しません。一次元の片側の橋の命題は下界で、上の側の目標 (15) は条件つきの二重井戸の緩和時間の上界の命題（23-05）の結論です。この章の数はすべて 0+1 次元の模型の数で、四次元のゲージ理論の数ではありません。

この章の順序

1. 設定 — 作用・経路の測度・格子 ε=½・Dirichlet 形・C_P
2. 二つの時間 — 相関長 ξ=ħ/Δ と Langevin の隙間 1/C_P
3. キンク — 作用 S_0=2/3・位置の自由度・拡散係数 D=ħ/S_0・ξ の伸び方
4. 下界 C_P ≥ ξ^2 — 一次元の片側の橋の命題と、その先の読み
5. 上の側の目標と、長い経路の帯 — 素朴な帰着が使えない理由
6. 頂上の台地 — 曲率が凸性に ¼ 足りない
7. 数の例 — 三つの ħ での ln ξ（表 2）。寄り道：トンネル分裂を Herring の式で

01

設定 — 作用・経路の測度・格子・Dirichlet 形

質量 1 の粒子が、二つの谷を持つ位置エネルギーの中にいます。

$$V(x)=\frac{(x^2-1)^2}{8},\qquad V'(x)=\frac{x(x^2-1)}{2},\qquad V''(x)=\frac{3x^2-1}{2} \tag{1}$$

谷は $x=\pm1$ で、谷の底の曲率は $V''(\pm1)=1$（谷の中の振動の角振動数が 1）、山の頂上は $x=0$ で $V''(0)=-\frac12$ です。これは 2-05 §07 の (9) で $a=1$ と置いたものです。

虚時間 τ の経路 $x(\tau)$（$0\le\tau\le T$）に、ユークリッド作用

$$S[x]=\int_0^T\Big[\frac12\dot x(\tau)^2+V\big(x(\tau)\big)\Big]\,d\tau \tag{2}$$

を付け、重み $e^{-S[x]/\hbar}$ で経路の上の確率の測度を作ります。これが 2-07 §05 の (7) の測度（質量 $m=1$）で、経路を輪にすれば 2-07 §06 の (9) の分配関数、つまり輪の長さ T が逆温度に当たる古典の鎖です。この部では $T\to\infty$（温度 0、基底状態の側）を**先に**取り、そのあとで $\hbar\to0$ とします。順序を逆にした量（T を止めて $\hbar\to0$）は別の量です。経路が短い場合（$T<2\pi\sqrt{2}$）には、谷を移る平均の時間が $e^{T/(8\hbar)}$ の速さで伸びるという既知の定理 典（Berglund–Gentz の定理 2.6、区間を止めた Eyring–Kramers の型）から、C_P/ξ^2 は指数で 0 へ落ちると読まれます 読（平均の時間から固有値への読み替えは二状態への縮約による）。

格子。この部の後の章の数は、虚時間を刻み $\varepsilon=\frac12$ で刻んだ格子の上の数です。サイト $i\in\mathbb{Z}$ の値を x_i として

$$S_{\mathrm{lat}}=\sum_i\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2\varepsilon}+\varepsilon\sum_i V(x_i),\qquad \varepsilon=\frac12 \tag{3}$$

で、$T=\infty$ の測度は一次元の最近接の Gibbs 測度です。転送作用素の積分核（2-07 §08 の (13)）が正なので、測度は一つに決まると見込まれます 仮（2-07 §08 の Perron–Frobenius の定理の積分作用素版を $\mathbb{R}$ の上で使う。この形の原典の言明はこの部では確かめていないので、仮定の行に置く）。章によっては刻み $\varepsilon=0.25$ の数も引くので、その都度断ります。

Dirichlet 形と C_P。経路の関数 f の「動かしたときの変化の大きさ」を

$$\mathcal{E}(f)=\hbar\int\mathbb{E}\Big|\frac{\delta f}{\delta x(\tau)}\Big|^2d\tau,\qquad \text{格子では}\quad \mathcal{E}(f)=\frac{\hbar}{\varepsilon}\sum_i\mathbb{E}\,|\partial_i f|^2 \tag{4}$$

と置き（正準の Dirichlet 形）、Poincaré 定数を $C_P = \sup_f \mathrm{Var}(f)/\mathcal{E}(f)$ とします（23-00 §04 の (2)）。$\mathcal{E}$ に付く $\hbar$ は、位置 x でなく正準の場 $x/\sqrt{\hbar}$ で微分した形に合わせた正規化です（23-00 §05 の時計の目盛り）。この $\mathcal{E}$ を持つ Langevin 力学は、格子では

$$dx_i = -\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial S_{\mathrm{lat}}}{\partial x_i}\,dt + \sqrt{\frac{2\hbar}{\varepsilon}}\,dW_i \tag{5}$$

（W_i は独立なブラウン運動）で、$e^{-S_{\mathrm{lat}}/\hbar}$ を平衡に持ち、その隙間が $1/C_P$ です 典 （1-10 §07）。人工的な時間 t に沿って経路全体がゆらゆらと揺れ、最も遅い揺らぎが時間 C_P ごとに $1/e$ に減ります。

例（自由場）。$V = \frac{1}{2}x^2$ にすると測度はガウスで、$C_P = 1$、相関長も $\xi = 1$、比 C_P/ξ^2 はちょうど 1 です 初 Lean `ratioR_free_eq_one` （仮定：$C_P = 1/m^2$・$m \neq 0$）。格子でも零運動量の向きで同じです。

正確には、(2)〜(5) の測度は 0+1 次元の量子力学の模型の経路の測度で、ゲージ場はどこにも入っていません。四次元のゲージ理論との関係は 23-03 §04 の類比だけです。

02

二つの時間 — 相関長 ξ=ħ/Δ と Langevin の隙間 1/C_P

この模型には、性格の違う二つの「時間」があります。

一つ目は虚時間の長さ、相関長 ξ です。量子力学のハミルトニアン $H = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V$ の最低の二つの準位の差を $\Delta = E_1 - E_0$（トンネル分裂）とすると、経路の上の二点の相関は

$$\langle x(0)\,x(\tau)\rangle - \langle x\rangle^2 \;\approx\; C\,e^{-\tau\Delta/\hbar}, \qquad m := \frac{\Delta}{\hbar}, \qquad \xi := \frac{1}{m} = \frac{\hbar}{\Delta} \tag{6}$$

で減ります（転送作用素の固有値の比、2-07 §07 と同じ筋） 典 。ξ は虚時間の向きの長さで、格子のサイトの数で数えるなら $\xi/\varepsilon = 2\xi$ です。

二つ目は人工的な時間、にじむ時間 C_P です。(5) の力学で経路全体が平衡に近づく時間で、虚時間とは別の向きの時間です。

二つを比べる量を

$$R := \frac{C_P}{\xi^2} = C_P\,m^2 \tag{7}$$

とします。自由場では $R = 1$、二重井戸の緩和時間の冪の言明（冪の文）は「$\ln R$ が $\ln \xi$ に比べて小さい」と同じです（23-03 §05）。

正確には、(6) の ξ は時間の連続な模型での定義で、格子の模型では転送作用素の上位二つの固有値 $\lambda_0 > \lambda_1$ から $\xi = \varepsilon/\ln(\lambda_0/\lambda_1)$ で定めます。$\hbar \to 0$ で格子の値と連続の値の差は作用の差 $S_0^{\mathrm{lat}} \neq S_0$ として指数に入るので、数を書くときは格子の値を使います（§03・§07）。

03

キンク — 作用 $S_0=2/3$・位置の自由度・拡散係数 $D=\hbar/S_0$

$\hbar$ が小さいとき、重み $e^{-S/\hbar}$ は作用の小さい経路に集まります。作用を 0 にするのは、ずっと右の谷にいる経路 $x \equiv 1$ と、ずっと左の谷にいる経路 $x \equiv -1$ です。その次に作用の小さい「谷から谷へ移る」経路が**キンク**です。

(2) の停留点の式は $\ddot{x} = V'(x)$（位置エネルギー $-V$ の中の運動、2-07 §05）で、$\tau \to \pm\infty$ で谷に落ち着く解はエネルギーの保存 $\frac{1}{2}\dot{x}^2 = V(x)$ を満たします。(1) から $\dot{x} = \sqrt{2V(x)} = (1-x^2)/2$ で、これを解くと

$$x_{\mathrm{cl}}(\tau) = \tanh\frac{\tau - \tau_0}{2}, \qquad S_0 = \int \dot{x}_{\mathrm{cl}}^2\, d\tau = \int_{-1}^{1} \sqrt{2V(x)}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{2}\, dx = \frac{2}{3} \tag{8}$$

です 初 （(2) に $\frac{1}{2}\dot{x}^2 = V$ を入れると被積分関数は $\dot{x}^2$ になり、$dx = \dot{x}\,d\tau$ で x の積分に直す）。キンクの幅は τ で 2 程度、作用は $\hbar$ に依らない数 $2/3$ です。これは 2-05 §07 の $S_0 = 2a^2/3$（$a=1$）、物理の言葉ではインスタントンの作用です（3-05）。

位置の自由度。(8) の τ_0 は何でもよく、キンクを虚時間の向きにずらしても作用は変わりません。作用の二階微分（ゆらぎの作用素）$-\partial_\tau^2 + V''(x_{\mathrm{cl}})$ は、$\dot{x}_{\mathrm{cl}}$ を固有値 0 の固有関数に持ちます 初 （停留点の式 $\ddot{x}_{\mathrm{cl}} = V'(x_{\mathrm{cl}})$ を τ で微分すると $\dddot{x}_{\mathrm{cl}} = V''(x_{\mathrm{cl}})\dot{x}_{\mathrm{cl}}$）。この平らな向き（零モード）が、キンクの位置という一つの遅い自由度です。次の固有値は $3/4$、その上は $[1,\infty)$ の連続の部分と知られています 仮 （Pöschl–Teller の型の作用素。原典の言明はこの部では確かめていない）。

拡散係数。(5) の雑音をキンクの位置の向きに射影すると、位置 X は拡散します。位置を一つずらす向きは $\dot{x}_{\mathrm{cl}}$ で、その長さの二乗が $\int \dot{x}_{\mathrm{cl}}^2 d\tau = S_0$ なので、雑音の強さ $\hbar$ が S_0 で割られて

$$\mathbb{E}\big[(X_t - X_0)^2\big] \approx 2Dt, \qquad D = \frac{\hbar}{S_0} \tag{9}$$

となります。典 同じ射影の勘定は、区間の上の確率的 Allen–Cahn 方程式で、単一の界面が拡散係数 $3/4$ のブラウン運動に収束するという定理（単一の界面の拡散の定理（Bertini–Brassesco–Buttà の定理 2.1））の係数を再現します。つまり (9) は「単一のキンクの動き」の水準では既知の定理の言い換えです。読 刻み $\varepsilon = 0.25$ の環で一本のキンクを追った

Langevin の数値では、$D/(\hbar/S_0)$ は 1.00 ± 0.03（$\hbar = 0.02$）・1.04（0.07）・1.14 ± 0.05（0.1）でした。

正確には、(9) は一本のキンクの位置の過程についての文で、経路全体の隙間 $1/C_P$ についての文ではありません。多くのキンクがある長い経路で、隙間がキンクの拡散で決まるかは、まさに上の側の問い（一段目の上界の命題）です。

物差しの伸び方

トンネル分裂 Δ は、虚時間の経路で言えば「キンクが一本入る重み」$e^{-S_0/\hbar}$ で決まります。半古典の主項は（2-05 §07 の (10) を $\hbar$ つきに書いたもの）

$$\frac{1}{\xi} = \frac{\Delta}{\hbar} \;\approx\; \frac{4}{\sqrt{\pi\hbar}}\, e^{-S_0/\hbar}, \qquad \xi^2 \approx \frac{\pi\hbar}{16}\, e^{2S_0/\hbar}, \qquad \ln \xi = \frac{S_0}{\hbar} + \frac{1}{2}\ln\hbar + O(1) \tag{10}$$

で 典 （主項の式は 2-05 の出典の写し。Δ を独立な二つの数値の方法で求めると、主項との比は $\hbar = 0.5$ の 0.47 から $\hbar = 0.05$ の 0.92 へと 1 に近づく 読 ）、相関長は $\xi \propto \hbar^{1/2} e^{S_0/\hbar}$ と指数で伸びます。格子の模型では S_0 の代わりに格子のキンクの作用 $S_0^{\mathrm{lat}} = 0.665266$（$\varepsilon = \frac{1}{2}$。$2/3$ との差は 0.2%）が指数に入ります 読 。$\hbar = 10^{-3}$ でこの差は $\ln\xi$ を 1.4 だけ動かすので、数を書くときは格子の値を使います。

04

下界 C_P ≥ ξ² — 一次元の片側の橋と、その先の読み

C_P は上限なので、一つの試験関数で下から押さえられます（23-00 §06）。最も素直な試験関数は、一つの時刻の関数 $h(x)$ を時間で足したもの

$$f = \int_0^T h\big(x(\tau)\big)\, d\tau \tag{11}$$

です（時刻に局所な試験関数）。この族では、下界は物差しの二乗にちょうど届きます。

一次元の片側の橋の命題（連続の時間・$T \to \infty$・どの一次元の井戸でも）

(11) の形の f の Rayleigh 商 $\mathrm{Var}(f)/\mathcal{E}(f)$ の $T \to \infty$ の極限の上限は、ちょうど $\xi^2 = 1/m^2$ で、$h = \psi_1/\psi_0$（ψ_0, ψ_1 は H の最低の二つの固有関数）で達する。したがって $C_P \geq \xi^2$、すなわち $R \geq 1$。

初 証明〔三〕。$\varphi := (h - \langle h\rangle)\psi_0$、$A := (H - E_0)/\hbar$ と置きます。A は虚時間の生成子で、ψ_0 に直交する関数の上で $A \geq m$ です。転送作用素で相関を書くと（2-07 §08）

$$\frac{\mathrm{Var}(f)}{T} \;\longrightarrow\; \int_{-\infty}^{\infty} \langle \varphi, e^{-|\tau| A} \varphi \rangle \, d\tau = 2 \, \langle \varphi, A^{-1} \varphi \rangle \tag{12}$$

です。一方 $\delta f / \delta x(\tau) = h'(x(\tau))$ なので $\mathcal{E}(f)/T = \hbar \int \psi_0^2 h'^2 \, dx$ で、基底状態変換の恒等式 $\langle \varphi, (H - E_0)\varphi \rangle = \frac{\hbar^2}{2} \int \psi_0^2 h'^2 \, dx$（2-05 §08・1-10 §08）から $\mathcal{E}(f)/T = 2\langle \varphi, A\varphi \rangle$ です。A の固有分解 $\varphi = \sum_k c_k e_k$（固有値 $a_k \ge m$）で、$1/a \le a/m^2$ から

$$\frac{\sum_k |c_k|^2 / a_k}{\sum_k |c_k|^2 a_k} \;\le\; \frac{1}{m^2} = \xi^2 \tag{13}$$

で、等号は φ が固有値 m の固有空間にあるとき、つまり $h - \langle h \rangle \propto \psi_1/\psi_0$ のときです。∎ 転送作用素の式 (12) と基底状態変換の恒等式は既知の事実として引いています 典 。Lean `local_rayleigh_ratio_le_one`（仮定：$0 < m \cdot a_k \ge m \cdot c_k \ge 0 \cdot \sum c_k a_k > 0$）は (13) の有限和の骨だけを検査したもので、固有分解・(12)・基底状態変換は Lean の外です。

一次元の片側の橋の命題は、二重井戸に限らずどの一次元の井戸でも成り立ちます。同じ形の主張が文献にあるかは確かめていません（既知かもしれません）。

その先の読み。一次元の片側の橋の命題は「時刻に局所な試験関数では $R = 1$ が天井」とも言っています。$R > 1$ を見るには、時刻をまたぐ試験関数（例えば、経路を時間でぼかしてから符号を見る、キンクの集団の位置を数える）が要ります。そうした試験関数の Rayleigh 商を、転送作用素から直接引いた標本（マルコフ連鎖を回して近づける標本ではない）で評価すると、R の下界は $\hbar = 0.4$ の 1.06 から $\hbar = 0.07$ の 6.5 へ伸びました 読 （族の下界・刻み $\varepsilon = 0.25$・$T = \infty$ の測度の窓・種による差 ±10〜15%）。Langevin 力学で最も遅い観測量の減衰を測った値とも、$\hbar = 0.3$〜0.15 で揃いました 読 （どちらも下界で、上界ではない）。

伸び方の型は、キンクを数える物理の水準の勘定（希薄なキンクの気体・(9) の拡散係数）では $R \approx S_0/\hbar \approx \ln \xi$、つまり

$$C_P \;\approx\; \xi^2 \, \frac{S_0}{\hbar} \;\approx\; \frac{\pi}{24} \, e^{4/(3\hbar)} \tag{14}$$

です 仮 （勘定は発見的で、証明ではない）。この範囲の数値だけでは、R が $1/\hbar$ で伸びるか $e^{c/\hbar}$ で伸びるかを区別できません。前者なら二重井戸の冪の言明は成り立ち、後者なら破れます。二重井戸でも、定数倍の幅で言う文 $C_P \le K\xi^2$ は破れる側にある、と読むのはこのためです。

05

上の側の目標と、長い経路の帯

(14) の形に合わせて、上の側の目標を

$$C_P \;\le\; K\,\frac{\xi^2}{D} = K\,\xi^2\,\frac{S_0}{\hbar} \qquad (K \text{ は } \hbar \text{ に依らない}) \tag{15}$$

と置きます。一次元の片側の橋の命題と合わせれば $1 \le R \le K S_0/\hbar$ で、二重井戸の冪の言明が従います（23-03 §05 の (4)）。(15) は二重井戸の四条件の上の一段目の上界の命題の結論で、証明されていません（23-05）。

(15) を示す素朴な道は、遅い変数を一つ（例えば経路の平均の位置、磁化）選び、「それに直交する関数は速く緩和する」ことを示す道です。短い経路（$T \ll \xi$、キンクが高々一対）ではこの形で正しい勘定が出ます。ところが長い経路（$T \gg \xi$）では、この道は使えません。

理由は一次元の Ising 鎖の Glauber 力学で見えます。一つのスピンの関数が張る空間は生成作用素で閉じ、波数 k のフーリエ成分 $S_k = \sum_j e^{ikj}\sigma_j$ は固有値 $\alpha(1-\gamma\cos k)$ の固有関数です（α は率、$\gamma = \tanh 2K$）。磁化は $k=0$ で、磁化に直交する最も遅い成分 $k = 2\pi/N$ との比は

$$\frac{1-\gamma\cos(2\pi/N)}{1-\gamma} = 1 + \frac{\gamma\,(1-\cos(2\pi/N))}{1-\gamma} \;\approx\; 1 + \Big(\frac{2\pi\xi}{N}\Big)^2 \tag{16}$$

で、鎖が相関長より十分長い（$N/\xi \to \infty$）と 1 に近づきます 初 （比の書き換え） Lean `glauber_band_ratio` （仮定：$\gamma \neq 1$）。固有値の式そのものは、$N = 8, 10$ の鎖の全状態の対角化で、二つの固有値がそのまま現れることを 8 桁で見ました 読 （Glauber の原典の言明はこの部では確かめていない）。最も遅い揺らぎは孤立した一つのモードではなく、連続な帯の下の端です。二重井戸の長い経路でも、キンクの密度の長い波の揺らぎが同じ帯を作り、磁化を固定した条件つきの測度の Poincaré 定数は ξ^2/D と同じ大きさのまま残ります。

だから長い経路では、遅い変数を体積に比例する数だけ取るか、長さ $C\xi$ の箱に問題を切り分ける必要があります。後者が箱への帰着の条件（箱の力学への帰着）と箱の中の隙間の条件です（23-11）。

06

頂上の台地 — 曲率が凸性に ¼ 足りない

測度 $e^{-S/\hbar}$ が凸な作用（対数凹な密度）を持てば、Bakry–Émery の判定で C_P は作用の曲率の逆数以下に押さえられ、長さにも $\hbar$ にも依りません 典 （1-10）。二重井戸の経路の測度は凸ではありません。どこで凸性が破れるかを格子 (3) で見ます。

作用 (3) の二階微分（Hessian）は、対角に $2/\varepsilon + \varepsilon V''(x_i)$、隣どうしに $-1/\varepsilon$ が並ぶ行列です。$\varepsilon = \tfrac12$ では対角は $4 + \tfrac12 V''(x_i)$、隣は -2 です。長い区間で一様に凸であるには、対角が隣の二つの和の大きさ 4 以上であれば足ります（対角優位）。谷の中（$|x_i|$ が 1 に近い）では $V'' \approx 1$ で対角は 4.5 と足りますが、山の頂上 $x_i = 0$ では $V''(0) = -\tfrac12$ なので

$$\underbrace{4+\tfrac{1}{2}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)}_{\text{頂上の一サイトの曲率}} = \frac{15}{4} = 4-\frac{1}{4} \tag{17}$$

で、$\frac{1}{4}$ 足りません 初 。全てのサイトが頂上にいる経路 $x \equiv 0$ では、Hessian の最も小さい固有値（一様な向き）がちょうど $\varepsilon V''(0) = -\frac{1}{4}$ です。

キンクの対の間、経路が頂上の近くにとどまる区間は、作用がほとんど変わらない平らな向き（台地）を作ります。逆に、谷の奥の凸な芯 $\{x_i \geq a\}$（$a > 1/\sqrt{3}$）に経路を閉じ込めれば、Bakry–Émery で $C_P \leq 2/(3a^2-1)$ が長さ・$\hbar$ に一様に出ます 初 （曲率の下界） 典 （Bakry–Émery の型） Lean `convex_core_curvature`（仮定：$1/3 < a^2$・$0 \leq a \leq x$）。ただし芯から外へ出て戻る小旅行の作用 $2/3 - a + a^3/3$ はキンクの作用 $2/3$ より小さく（$a = 1/\sqrt{3}$ で 0.1535） Lean `excursion_action_lt_kink`（仮定：$0 < a < 1$）、長さ ξ の区間には小旅行が指数で多く入ります。凸な芯だけでは、相の中の局所 Poincaré（相内の局所 Poincaré の条件）は出ません。

この $\frac{1}{4}$ の不足は、上の側を組むどの道でも、形を変えて同じ場所に戻ってきます。後の章でこれを共通の壁と呼びます（23-09）。

07

数の例 — 三つの ħ での ln ξ

この部の後の章は、三つの $\hbar$ を代表に使います。順は必ず大から小で、$\hbar = 3\cdot10^{-3}/10^{-3}/3\cdot10^{-4}$ です。選ぶ理由は、$\ln\xi$ が約 218 から約 2213 まで大きく変わり、相関長が $\hbar$ について指数で伸びる体制の代表になるからです。表 2 は格子 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ の値です。

読 表 2　三つの $\hbar$ での $\ln\xi$ と $\ln(\xi^2 S_0/\hbar)$（格子 $\varepsilon = \frac{1}{2}$・$T = \infty$。$\xi$ は虚時間の長さ。浮動小数の値）

量	$\hbar = 3\cdot10^{-3}$	$\hbar = 10^{-3}$	$\hbar = 3\cdot10^{-4}$
$\ln\xi$	218.08	661.04	2212.72
$S_0^{\mathrm{lat}}/\hbar$	221.76	665.27	2217.55
$\ln\xi - S_0^{\mathrm{lat}}/\hbar - \frac{1}{2}\ln\hbar$	−0.774	−0.777	−0.778
$\ln(\xi^2 S_0/\hbar)$（上の側の目標の尺度）	441.6	1328.6	4433.1

$\ln\xi$ は転送作用素の上位二つの固有値の差を、引き算をしない Herring の式（次の寄り道）で求めた値です。中くらいの $\hbar$（0.2・0.05・0.04）では、行列の固有値を直接求める道と Herring の式の道が六桁まで一致しました 読 。三行目の残りが $\hbar$ に依らない数に寄ることは (10) の形 $\ln\xi = S_0/\hbar + \frac{1}{2}\ln\hbar + O(1)$ と整合し、連続の半古典の値 $\frac{1}{2}\ln(\pi/16) \approx -0.814$ との差は格子の補正と読まれます。

四行目は (15) の右辺の尺度で、$2\ln\xi$ との差は $\ln(S_0/\hbar)$ です。二つの列の比は 2 に近く、$\hbar$ を下げるほど 2 に寄ります。二重井戸の冪の言明の「2」が、この差の小ささの言い換えです。

正確には、表 2 は浮動小数の値で、区間演算で包んだ値ではありません。ξ は e^{218}〜e^{2213} の大きさで、Monte Carlo で直接測れる長さではなく、転送作用素の固有値から読む量です。三つの $\hbar$ は代表の点で、後の章の「節点」や「窓」とは別の役です（区別は 23-12）。

寄り道：トンネル分裂を Herring の式で

飛ばしてよい小節です。$\hbar = 10^{-3}$ では $\Delta/\hbar$ は e^{-661} の大きさで、二つの固有値 λ_0, λ_1 を別々に求めて引くと、浮動小数の桁は全て消えます。そこで差を直接書く式を使います。

転送作用素の積分核 $K(x,y)$ は対称で、$x \to -x$, $y \to -y$ で変わりません。半直線 $x, y > 0$ の上の二つの核 $A(x,y) = K(x,y)$、$C(x,y) = K(x,-y)$ を作ると、偶の固有関数は $A+C$、奇の固有関数は $A-C$ の固有関数（固有値 λ_e・λ_o）です。A と C はどちらも対称なので、偶の固有関数 u・奇の固有関数 v について

$$v\cdot(A+C)u - u\cdot(A-C)v = (\lambda_e-\lambda_o)\,u\cdot v \quad\Longrightarrow\quad \lambda_e-\lambda_o = \frac{2\,u\cdot Cv}{u\cdot v} \tag{18}$$

です 初 （左辺で $v\cdot Au = u\cdot Av$ が消え、$v\cdot Cu = u\cdot Cv$ が二つ残る）。右辺には引き算がありません。$A-C$ の核は $x,y>0$ で正（$(x+y)^2 > (x-y)^2$ なので $K(x,y) > K(x,-y)$）なので、奇の固有関数も半直線の上で正にとれ、対数の領域で尾まで相対の精度を保って計算できます。これが量子力学の Herring の公式（波動関数の重なりで分裂を書く式）の転送作用素の版です。

この章の言明の分類

この章の言明を、この部の五分類の書式（23-00 §01 の表 1）で一表にします。後の章の命題の表と同じ列です。

表 3　この章の言明（分類は一行に一つ。機械検査の欄は分類の外）

言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
キンクの形 $\tanh(\tau/2)$ と作用 $S_0 = 2/3$	初	§03 の (8)	$\hbar$ に依らない	—
ゆらぎの作用素が $\dot{x}_{\mathrm{cl}}$ を固有値 0 に持つ（位置の自由度）	初	§03	$\hbar$ に依らない	—
ゆらぎの作用素の次の固有値 $3/4$・連続の部分 $[1,\infty)$	仮	§03（Pöschl–Teller の型。原典は未確認）	$\hbar$ に依らない	—

言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
一本のキンクの位置の拡散係数 $D=\hbar/S_0$（過程の水準）	典	§03 の (9)。Bertini–Brassesco–Buttà の単一の界面の拡散の定理の係数の写し	$\hbar\to 0$	—
$D/(\hbar/S_0)=1.00$〜1.14	読	§03（Langevin の点の値・$\varepsilon=0.25$）	0.02・0.07・0.1	—
ξ の半古典の主項 (10)	典	§03・2-05 §07	$\hbar\to 0$	—
格子の $\ln\xi$（表 2）と $S_0^{\mathrm{lat}}=0.665266$	読	§07（転送作用素・Herring の式・浮動小数）	三点	—
一次元の片側の橋の命題：時刻に局所な族の天井は ξ^2、よって $C_P\ge\xi^2$	初	§04 の証明（(12) と基底状態変換は典として引く）。連続の時間・$T\to\infty$	全ての $\hbar$	`local_rayleigh_ratio_le_one`（仮定：$0<m\cdot a_k\ge m\cdot c_k\ge 0\cdot\sum c_k a_k>0$。有限和の骨だけ）
R の下界が 1.06 から 6.5 へ伸びる	読	§04（族の下界・$\varepsilon=0.25$）	$[0.07, 0.4]$	—
$C_P\approx\xi^2 S_0/\hbar$（(14)）	仮	§04（希薄な気体の勘定・発見的）	$\hbar\to 0$	—
磁化に直交する成分との比 (16) が 1 に近づく（帯）	初	§05（比の書き換え）	$\hbar$ に依らない	`glauber_band_ratio`（仮定：$\gamma\neq 1$）
Glauber の固有値 $\alpha(1-\gamma\cos k)$ が全状態のスペクトルに現れる	読	§05（$N=8,10$ の対角化・8 桁）	—	—
頂上の一サイトの曲率 $15/4=4-\frac{1}{4}$	初	§06 の (17)	$\hbar$ に依らない	—
凸な芯 $\{x_i\ge a\}$ で $C_P\le 2/(3a^2-1)$	初	§06（曲率の下界は初、Bakry–Émery の型は典として引く）	$\hbar$ に依らない	`convex_core_curvature`（仮定：$1/3<a^2\cdot 0\le a\le x$）
上の側の目標 (15) $C_P\le K\xi^2 S_0/\hbar$	仮	一段目の上界の命題の結論（二重井戸の四条件の上）。23-05	$\hbar\to 0$	(15) から二重井戸の冪の言明へは `power_H_of_kink_ratio`（仮定は 23-03 §05）

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 キンクの作用 $S_0=2/3$ と零モード、頂上の曲率の不足 $\frac{1}{4}$、Herring の式の転送作用素の版 (18)	ゆらぎの作用素の残りのスペクトル（次の固有値）の原典での確認

言えている	言えていない
初 一次元の片側の橋の命題：$C_P \geq \xi^2$（連続の時間・$T \to \infty$。(12) と基底状態変換は典として引く）	C_P の上界。R が $1/\hbar$ で伸びるか指数で伸びるか
典 一本のキンクの拡散係数 $D = \hbar/S_0$（過程の水準）、ξ の半古典の主項	経路全体の隙間がキンクの拡散で決まること（上の側の問い）
読 R の下界の伸び（1.06→6.5）、三つの $\hbar$ での $\ln \xi$（表 2）、D の数値	表 2 の値を区間演算で包むこと。$\varepsilon = 0.25$ の読みと $\varepsilon = \frac{1}{2}$ の読みの間の換算
仮 上の側の目標 (15) は一段目の上界の命題の結論の形として置いた	(15) そのもの。二重井戸の冪の言明。四次元のゲージ理論について、この章は何も示さない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
経路積分・虚時間の測度・転送行列	典	2-07 の出典表。
二重井戸のトンネル分裂の主項・S_0	典	2-05 の出典表（Zinn-Justin–Jentschura 2004 の式 (2.8)）。$\hbar$ つきへの写しと、主項との比の数値は記録の数値（二つの独立な方法・$\hbar = 0.5 \sim 0.05$）。
Poincaré 定数・Langevin の隙間・Bakry–Émery の型	典	1-10 の出典表。
単一の界面の拡散係数	典	L. Bertini, S. Brassesco, P. Buttà, arXiv:math-ph/0611076（単一の界面の拡散の定理、本文で確認）。
区間を止めた体制の遷移の時間	典	N. Berglund, B. Gentz, arXiv:1202.0990（定理 2.6、本文で確認）。固有値への読み替えは読み。
Glauber 力学の一スピンの固有値	仮・読	R. J. Glauber, J. Math. Phys. 4 (1963) 294（書誌は記憶で、この部では確かめていない）。$N = 8, 10$ の対角化で固有値を確認。
一次元の片側の橋の命題・(13) の有限和	初・Lean	本文 §04。定理 `local_rayleigh_ratio_le_one`（仮定は表 3 の一次元の片側の橋の命題）。
自由場の $R = 1$・帯の比・凸な芯・小旅行の作用	初・Lean	定理 `ratioR_free_eq_one`・`glauber_band_ratio`・`convex_core_curvature`・`excursion_action_lt_kink`（仮定は本文の各行）。言明の一覧は 23-13。
R の下界・D の数値・表 2	読	記録の浮動小数の計算（転送作用素から直接引いた標本の Rayleigh 商・Langevin・転送作用素と Herring の式）。値は区間演算で包んでいない。

この章で使った語 — 二重井戸・経路の測度・Dirichlet 形・キンク・零モード・キンクの拡散係数・トンネル分裂・相関長（二重井戸の）・Herring の式・台地・凸な芯・相（キンクの無い相）。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-05 一段目の言明 ― 二重井戸の四条件と上界の命題 ― 分散の分割の代数で上の側を四つの条件に割り、一段目の上界の命題を示せた部分と仮定の行に分けて述べる。

一段目の言明 — 二重井戸の四条件と上界の命題

この章は本書の検討です。§05 は既存の知見です。

この章で分かること — 二重井戸の経路の測度の上の側 $C_P \le K\xi^2 S_0/\hbar$ を、二重井戸の四条件（相内の局所 Poincaré の条件・鞍点の管の条件・箱への帰着の条件・箱の中の隙間の条件）に割ります。箱への帰着の条件で無限に長い経路を長さ $C\xi$ の箱に帰着させ、箱の中の隙間の条件で箱の中の隙間を押さえ、相内の局所 Poincaré の条件・鞍点の管の条件は箱の中の速い部分として箱の中の隙間の条件の中に入ります。その上で $R = C_P/\xi^2$ が $1 \le R \le K'/\hbar$ に挟まれ、二重井戸の緩和時間の冪の言明が従うまでを、段ごとに「何を使うか・どの分類か」を添えて一本の筋で述べます。章の終わりに、一段目の上界の命題の段を五分類の表と依存グラフにまとめます。

前提となる章 — 23-03 §05（二重井戸の冪の言明と一段目の上界の命題の形）・23-04（経路の測度・キンク・一次元の片側の橋の命題）・1-10 §07〜§09（Poincaré 不等式）・23-00 §01（五分類の札）。

先に言うこと — 水準は〔三〕です。一段目の上界の命題は四つの条件の上の代数で、四つの条件はどれも仮定の行を残しています。この章は一段目が閉じたことを述べる章ではなく、何を示せば閉じるかを名指す章です。この部は拡散型緩和時間の仮定を取っ掛かりとして選んだ検討で、四条件への割り方もその中の一つの組み立て方です。別の視点は第 24 部で扱います。

この章の順序

1. 分散の分割 — 二つの谷に割る代数と、それだけでは長い経路に足りない理由
2. 示せた部分 — 分割の代数・凸な芯・縮約した台地・キンクの拡散係数
3. 四つの条件の言明 — 何の測度の・何の定数が・何に一様か
4. 一段目の上界の命題を一本の筋で — 箱への帰着 → 箱の中 → $C_P \le K\xi^2 S_0/\hbar$ → $R \le K'/\hbar$ → 二重井戸の冪の言明
5. 既知の定理との距離 — 届く所と届かない所（表 1）

6. 五分類の表 — 一段目の上界の命題の段の行（表 2）
7. 依存グラフ — 番号で円が無いことを確かめる
8. 揃う $\hbar$ と四条件の現在地 — 23-06〜23-12 への案内

01

分散の分割 — 二つの谷に割る代数

設定は 23-04 §01 のとおりです。格子 $\varepsilon = \frac{1}{2}$、作用 S_{lat}、測度 $\mu \propto e^{-S_{\mathrm{lat}}/\hbar}$、Dirichlet 形 $\mathcal{E}(f) = (\hbar/\varepsilon)\sum_i \mathbb{E}|\partial_i f|^2$、$C_P = \sup_f \mathrm{Var}(f)/\mathcal{E}(f)$、キンクの拡散係数 $D = \hbar/S_0$、$S_0 = 2/3$ です。$T \to \infty$ を先に取り、そのあとで $\hbar \to 0$ とします。

上の側を組む最初の道具は、測度を二つの部分に割る代数です。配位の空間を二つに分け（例えば経路を均した値の符号で）、$\mu = Z_+\mu_+ + Z_-\mu_-$（$Z_\pm \geq 0$・$Z_+ + Z_- = 1$、$\mu_\pm$ は各部分に制限して規格化した測度）と書くと、どの f についても

$$\mathrm{Var}_\mu f = Z_+\,\mathrm{Var}_{\mu_+} f + Z_-\,\mathrm{Var}_{\mu_-} f + Z_+Z_-\big(\mathbb{E}_{\mu_+} f - \mathbb{E}_{\mu_-} f\big)^2 \tag{1}$$

が成り立ちます 初 （混合の分散の恒等式。$m_\pm = \mathbb{E}_{\mu_\pm} f$、$m = Z_+m_+ + Z_-m_-$ と置いて $\mathbb{E}_\mu(f-m)^2$ を各部分で $f - m_\pm$ と $m_\pm - m$ に分け、$Z_+(m_+-m)^2 + Z_-(m_- - m)^2 = Z_+Z_-(m_+ - m_-)^2$ を使う）。

右辺の三つの項に、それぞれ次の不等式があるとします。

$$\mathrm{Var}_{\mu_\pm} f \leq C_{\mathrm{loc}}\,\mathcal{E}_\pm(f), \qquad \big(\mathbb{E}_{\mu_+} f - \mathbb{E}_{\mu_-} f\big)^2 \leq C_{\mathrm{md}}\,\mathcal{E}(f), \qquad Z_+\mathcal{E}_+(f) + Z_-\mathcal{E}_-(f) \leq \mathcal{E}(f) \tag{2}$$

一つ目は谷の中の局所 Poincaré、二つ目は谷と谷の平均の差を Dirichlet 形で押さえる「平均差の輸送」、三つ目は形の加法です。$Z_+Z_- \leq \frac{1}{4}$ なので

$$C_P \;\leq\; C_{\mathrm{loc}} + \frac{C_{\mathrm{md}}}{4} \tag{3}$$

です 初 Lean `split_poincare_le` （仮定：$Z_+ + Z_- = 1$・$Z_\pm \geq 0$・分割の式 (1)・二つの局所 Poincaré・平均差・形の加法・定数が非負）。分割の式 (1) は分散の分割の補題（Menz–Schlichting の補題 2.4）と同じ形です 典 （有限次元の Eyring–Kramers の Poincaré 版の骨組み）。

(3) の二つの定数のうち、C_{loc} が後で相内の局所 Poincaré の条件になり、C_{md} が鞍点の管の条件になります。ところが (3) をそのまま長い経路に当てることはできません。

長い経路では一つの粗い変数では足りない。(1) は「遅い変数を一つ（谷のどちらにいるか）取り、残りは速い」という割り方です。経路が相関長より十分長い（$T \gg \xi$）と、キンクの密度の長い波の揺らぎが連続な帯を作り、谷を一つ固定した条件つきの測度の Poincaré 定数は ξ^2/D と同じ大きさのまま残ります（23-04 §05 の Glauber の帯）。つまり C_{loc} が $O(1)$ になりません。そこで、遅い変数を体積に比例する数だけ取る代わりに、問題を長さ $C\xi$ の箱に切り分けます。これが箱への帰着の条件と箱の中の隙間の条件で、相内の局所 Poincaré の条件・鞍点の管の条件は箱の中で使われます（§04）。

02

示せた部分 — 分割の代数・凸な芯・縮約した台地・拡散係数

上の側の組み立てのうち、仮定の行を持たずに言える部分を先に並べます。

(a) 分割の代数。(1)〜(3) は §01 のとおりです 初 。

(b) 凸な芯。谷の奥の凸な領域 $\{x_i \ge a\ \forall i\}$（$a > 1/\sqrt{3}$）に制限した測度は、作用の Hessian が $\varepsilon\kappa_a$（$\kappa_a = (3a^2-1)/2$）以上なので、凸な領域の Bakry–Émery で $C_P \le 2/(3a^2-1)$ が長さ・$\hbar$・境界に一様に出ます 初 （曲率の下界） 典 （凸な領域の Bakry–Émery、Kolesnikov–Milman の定理 1.2）。証明と Lean の言明は 23-04 §06 にあります。ただし芯の外への小旅行はキンクより作用が小さく、長さ ξ の区間には指数で多く入るので、凸な芯だけでは相内の局所 Poincaré の条件は出ません。

(c) 縮約した台地の二状態の値。短い環（$T \ll \xi$）では、谷を移る道はキンクの対一組で、対の間隔 ℓ が遅い一つの座標になります。ℓ だけを残した一次元の模型（ℓ は拡散係数 $2D$ で動き、両端に谷の原子、間に台地の重み $\pi(\ell)$）では、平均差を Cauchy–Schwarz の不等式で押さえ、ℓ の両端の値の差を $\int f'(\ell)\,d\ell$ と書いて

$$\big(f(\text{右の谷}) - f(\text{左の谷})\big)^2 \;\le\; \int \frac{d\ell}{\pi(\ell)} \cdot \int \pi(\ell)\, f'(\ell)^2\, d\ell \tag{4}$$

から $C_{\mathrm{md}}/4 = J/(4D)$ の形の値が出て、等号は符号の試験関数でほぼ達します 初 （(4) は Cauchy–Schwarz の不等式） Lean `reduced_two_state_value` （仮定：$0 < T$・$0 < D$・$J = 4\xi^2 I/T$、I は台地の重みの積分）。縮約した模型そのもの（ℓ 以外を捨ててよいこと）は模型の仮定で、この値は「縮約した模型の上の値」です 仮 。

(d) キンクの拡散係数。一本のキンクの位置は拡散係数 $D = \hbar/S_0$ で動きます。これは単一の界面の過程の水準では既知の定理の係数の写しです 典 （23-04 §03 の (9)）。経路全体の隙間の文ではありません。

この四つで尽きます。残る部分、すなわち谷の中の局所 Poincaré が長さと $\hbar$ に一様なこと、平らな鞍点の族に沿う輸送が次元に一様なこと、長い経路を箱に帰着させること、箱の中の隙間は、既知の定理の仮定の外にあります（§05）。これを四つの条件として名指します。

03

四つの条件の言明 — 何の測度の・何の定数が・何に一様か

四つの条件を、測度・定数・一様性の三つを明示して書きます。どれも 0+1 次元の二重井戸 $V=(x^2-1)^2/8$、格子 $\varepsilon=\frac{1}{2}$、Dirichlet 形 $\mathcal{E}$ の上の文です。「一様」は、$\hbar\in(0,\hbar_0]$ のある $\hbar_0>0$ について、定数が $\hbar$ に依らない（$\hbar\to 0$ で増えない）ことを言います。

相内の局所 Poincaré の条件（相の中の局所 Poincaré）

測度：キンクの無い相の測度。経路が一つの谷の側にとどまる配位、例えば全てのサイトで $x_i\ge 0$ の配位に制限した測度 $\mu^{(+)}=\mu(\cdot\mid x_i\ge 0\ \forall i)$（壁 $x_i=0$ では反射）。**定数**：$\mu^{(+)}$ の Poincaré 定数 C_{loc}、すなわち $\mathrm{Var}_{\mu^{(+)}} f\le C_{\mathrm{loc}}\,\mathcal{E}(f)$。**一様性**：$C_{\mathrm{loc}}=O(1)$ が $\hbar$ と経路の長さに一様。箱の中で使うときは、端の値を持つ切れ端（長さ $\le C\xi$）の版（切れ端の局所 Poincaré の仮定）が要り、端の値にも一様であること。

鞍点の管の条件（平らな鞍点の族に沿う輸送）

測度：キンクと反キンクの対の族（対の中心 X と間隔 ℓ を径数とし、作用がほとんど平らな鞍点の族）の周りの管に入る配位の条件つきの測度。**定数**：その族に沿って谷から谷へ移る平均差の輸送の定数（(2) の C_{md} の型）と、管の中の Poincaré 定数。**一様性**：経路のサイトの数（次元）と $\hbar$ に一様。箱の中で使うときは、管の長さ $\le C\xi$ に一様な管の Poincaré（鞍点の管の Poincaré の仮定）と、管の中の芯（頂上の近くにとどまる区間）の Poincaré が芯の長さ k に一様なこと（芯の Poincaré の一様性の仮定）の二つの行になる。

箱への帰着の条件（箱の力学への帰着）

測度：$T=\infty$ の格子の直線 $\mathbb{Z}$ の上の測度 μ と、長さ L サイト（$L\varepsilon=C\xi$）の箱 B の両隣の値 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ を固定した条件つきの測度 $\mu_B^{a,b}$。**定数**：$C_{\mathrm{box}}(L):=\sup_{a,b\in\mathbb{R}} C_P(\mu_B^{a,b})$ と、箱の間の混合の定数 c_M。**言明**：$C_P(\mu)\le C_{\mathrm{box}}(L)/c_M$。**一様性**：$c_M$ は ξ を単位とした長さ（C と箱の重なりの割合）だけに依り、$\hbar$ と境界の値に依らない。

箱の中の隙間の条件

測度：長さ $C\xi$ の箱の条件つきの測度 $\mu_B^{a,b}$。箱の中のキンクの数は平均で $O(1)$（キンクの密度は $1/(2\xi)$ なので期待値は $C/2$）。**定数**：隙間 $1/C_P(\mu_B^{a,b})$。**言明**：$1/C_P(\mu_B^{a,b}) \geq c\,D/(C\xi)^2$、すなわち $C_{\mathrm{box}} \leq K_4 (C\xi)^2/D$（$K_4 = 1/c$）。**一様性**：$c$ は $\hbar$ と境界の値 (a,b) の全てに一様（C には依ってよい）。

四つは同じ重さの条件ではありません。箱への帰着の条件は「長い経路の問題を箱の問題に移す」段、箱の中の隙間の条件は「箱の中を遅い変数（キンクの配置）と速い変数に割る」段で、相内の局所 Poincaré の条件・鞍点の管の条件はその速い変数の側の文です。相内の局所 Poincaré の条件・鞍点の管の条件が箱の中の隙間の条件の中に入る場所を、次の節で一本の筋にします。

正確には、二重井戸の四条件は、緩和時間の仮定（冪の文、23-01 §05）とは別のものです。緩和時間の仮定は結論の側の文で、二重井戸の四条件はそれを一段目で導くために置いた条件です（23-03 §05）。

04

一段目の上界の命題を一本の筋で

一段目の上界の命題（条件つき）

0+1 次元の二重井戸の経路の測度（格子 $\varepsilon = \frac{1}{2}\cdot T \to \infty$ を先に取る）で、二重井戸の四条件と、下の段 0 の前提の行を仮定する。このとき $\hbar \to 0$ で

$$C_P \;\leq\; K\,\xi^2\,\frac{S_0}{\hbar} = K\,\frac{\xi^2}{D} \qquad (K \text{ は条件の定数だけに依り } \hbar \text{ に依らない}) \qquad (5)$$

が成り立ち、したがって $1 \leq R = C_P/\xi^2 \leq K S_0/\hbar$ で、二重井戸の冪の言明 $\ln C_P/\ln \xi \to 2$ が従う。

(5) は 23-04 §05 の (15)、23-03 §05 の (3) と同じ式です。以下、段ごとに「何を使うか」と分類を添えます。

段 0（仮定を揃える段） 前提の行

$T = \infty$ の測度 μ が一つに決まること（転送作用素の積分核が正であることからの主固有値の単純さ）仮（$\mathbb{R}$ の上の正の核の版の原典は確かめていない。23-04 §01 と同じ行）。有限の

環の $C_P(T)$ と $T=\infty$ の測度の C_P の関係（極限の段）と、以下の段で使う関数の正則性（条件つきの測度・キンクの座標の滑らかさ）仮。この三つは一段目の上界の命題の外に置いた前提で、統合表（23-12）でも仮定の行として数えます。

段 1（箱へ帰着する段） 箱への帰着 — 箱への帰着の条件を箱への帰着の命題の形で

直線 $\mathbb{Z}$ を長さ L サイトの箱で覆います。隣どうしの箱は l サイト重なり（$l \le L/3$）、箱を交互に偶の族 E と奇の族 O に分けます。$\mathcal{G}_E$ を偶の族の外のサイトの値が生成する σ-代数、$\mathcal{G}_O$ を同様に置き、二つの σ-代数の最大相関を

$$c_{\mathrm{alt}} := \sup\bigl\{\operatorname{corr}_\mu(F,G):\ F\in L^2(\mathcal{G}_E),\ G\in L^2(\mathcal{G}_O)\bigr\} \tag{6}$$

とします。

二つの射影の補題。$c=c(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2)<1$ なら、全ての $f\in L^2(\mu)$ で $\operatorname{Var} f \le (1-c)^{-1}\bigl(\mathbb{E}\operatorname{Var}(f\mid\mathcal{G}_1)+\mathbb{E}\operatorname{Var}(f\mid\mathcal{G}_2)\bigr)$。

初 証明。$\tilde f = f-\mathbb{E}f$、$a_i=\mathbb{E}[f\mid\mathcal{G}_i]-\mathbb{E}f$ と置きます。$s:=\|a_1\|^2+\|a_2\|^2=\langle \tilde f, a_1+a_2\rangle \le \|\tilde f\|\,\|a_1+a_2\|$、一方 $\|a_1+a_2\|^2\le s+2c\|a_1\|\|a_2\|\le (1+c)s$。よって $s\le(1+c)\|\tilde f\|^2$ で、$\mathbb{E}\operatorname{Var}(f\mid\mathcal{G}_i)=\|\tilde f\|^2-\|a_i\|^2$ を足すと $(1-c)\|\tilde f\|^2$ 以上です。∎ Lean `two_proj_var`（仮定：$A+B\le(1+c)V$。射影の幾何は Lean の外）。

箱の積。偶の箱どうしは $L-2l\ge 1$ サイト離れているので、最近接の相互作用の Markov 性により $\mathcal{G}_E$ の下で互いに独立です。独立な成分の関数の分散は成分ごとの条件つきの分散の和以下（Efron–Stein の型）なので

$$\mathbb{E}\operatorname{Var}(f\mid\mathcal{G}_E)\ \le\ C_{\mathrm{box}}(L)\sum_{B\in E}\mathcal{E}_B(f) \tag{7}$$

です 初（Markov 性と、独立な積の分散の不等式。証明は 23-11 に置く）。奇の族も同じです。各サイトは偶の族に高々一度・奇の族に高々一度入り、両方に入るのは重なりだけです。

ずらしの平均。箱の並びを l ずつ $n=\lfloor (L-l)/l\rfloor$ 通りずらすと、どのずらしも同じ c_{alt} を持ち、重なりのサイトはずらしの間で互いに素です。二つの射影の補題と (7) を各ずらしに当てて平均すると

$$C_P(\mu)\ \le\ \Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr)\frac{C_{\mathrm{box}}(L)}{1-c_{\mathrm{alt}}} \tag{8}$$

です 初 Lean `box_two_family`・`box_shift_average`（仮定：各ずらしで二族の不等式・$C_{\mathrm{box}}\ge 0$・重なりの形の和が $\mathcal{E}$ 以下）。これが箱への帰着の命題で、箱への帰着の条件の c_M

は $(1-c_{\mathrm{alt}})/(1+1/n)$ に当たります。この段は Poincaré 不等式だけを使い、対数 Sobolev 不等式を使いません。

(8) に残る仮定の行は一つ、交互の最大相関 $c_{\mathrm{alt}}<1$ が $\hbar$ に一様なことです（箱の交互の最大相関の仮定）。値は $C=2$・重なり $\theta=l/L=\frac{1}{4}$ で $c_{\mathrm{alt}}\approx 0.73$ と読まれます 読 （二状態の電信の鎖の閉じた式の値を写した族の値。上界の証明ではない）。箱の帰着の型は、離散のスピンの Glauber 力学の箱の力学の命題（Martinelli の講義の命題 3.4・3.5）と同じ形です 典 （離散のスピン・全変動の結合の形。ここでは一次元・L^2・最大相関の形に書き直した）。

段 2（箱の中の段） 箱の中 — 箱の中の隙間の条件を箱の中の隙間の命題の形で、相内の局所 Poincaré の条件・鞍点の管の条件の入る場所

箱 B（$L\varepsilon=C\xi$）と境界の値 (a,b) を止めます。箱の中の遅い変数を Y＝キンクの配置（キンクの数と、キンクの多様体への射影で定めた各キンクの位置）とします。分散を Y で分けると

$$\operatorname{Var} f=\mathbb{E}\operatorname{Var}(f\mid Y)+\operatorname{Var}\big(\mathbb{E}[f\mid Y]\big) \tag{9}$$

です 初 （条件つき期待値の恒等式）。

第一項＝速い側。ここに相内の局所 Poincaré の条件と鞍点の管の条件が入る。Y を止めた条件つきの測度は、最近接の Markov 性で、次の部分の積に分かれます。(i) キンクとキンクの間の、キンクの無い相の切れ端（長さ $\le C\xi$、両端の値つき）。(ii) 各キンク・キンクの対の周りの管と、その中の芯（頂上の近くにとどまる区間）。積の測度の Poincaré 定数は成分の定数の最大なので（独立な積の分散の不等式）、

$$\mathbb{E}\operatorname{Var}(f\mid Y)\;\le\;C_{\mathrm{loc}}\,\mathcal{E}(f),\qquad C_{\mathrm{loc}}=\max\big(C_{(\mathrm{H1}^{\mathrm{seg}})},\,C_{(\mathrm{H2}^{\mathrm{tube}})},\,C_{(\mathrm{T0}'_{\mathrm{P}})}\big) \tag{10}$$

です 初 （積の測度の Poincaré 定数は成分の定数の最大。積に分かれることは Y の定め方に依り、その正則性は段 0 の行に含める）。(i) の定数が相内の局所 Poincaré の条件の切れ端の版、(ii) の定数が鞍点の管の条件の管と芯の行です 仮 （三つとも仮定の行）。

第二項＝遅い側。ここに鞍点の族に沿う縦の輸送が入る。$\mathbb{E}[f\mid Y]$ は Y だけの関数で、その揺らぎはキンクの位置の拡散と、キンクの対の生成・消滅で緩和します。Y の上の Dirichlet 形 $\mathcal{E}_Y$ は、キンク一本あたりの移動度が $D=\hbar/S_0$ の形です（キンクの拡散係数の行：射影の式、23-04 §03）。ここで二つの行を置きます。

- キンクの気体の隙間の仮定：縮約したキンクの気体の箱の Poincaré 定数 $C_{\mathrm{kg}}\le (C\xi)^2/\big(c_{\mathrm{kg}}(C)(1-\eta_{\mathrm{KG}})D\big)$、$\eta_{\mathrm{KG}}<1$ は $\hbar$ と境界の値に一様 仮 （キンクの気体が一次元 Ising の Glauber 力学と同じ型に入る、という仮定）。

- 交差項の一様性の仮定：交差項 $\mathcal{E}_Y(\mathbb{E}[f \mid Y]) \le (1+\chi)\,\mathcal{E}(f)$、$\chi$ は $\hbar$ と境界の値に一様 仮
  （二尺度の不等式の交差の定数の型。この形の言明は既知の定理から引いていない）。

キンクの気体の隙間の仮定の c_{kg} は、固定した端の Glauber の箱の隙間の閉じた式 $(1-\gamma)+\gamma(1-\cos(\pi/(L+1)))$ を連続の極限で読んだ

$$\frac{D}{\xi^2}+\frac{\pi^2 D}{L_\tau^2}=\left(C^2+\pi^2\right)\frac{D}{(C\xi)^2}\qquad (L_\tau=C\xi) \tag{11}$$

から $c_{\mathrm{kg}}=C^2+\pi^2$ です 初 （(11) の代数） Lean `kg_constant` （仮定：$C\xi\neq 0$）。第一項の D/ξ^2 が対の生成と消滅、第二項がキンクの位置の拡散です。境界の値が頂上の近くにあると箱の端に半分のキンクが座れ（自由端に当たる）、その場合を含む sup では $c_{\mathrm{kg}}=c_{\mathrm{ff}}(C)$、$C=2$ で 7.17 と読まれます 読 （一次元 Ising の自由端の箱の隙間を格子の値で求めた族の値）。

(9)(10) とキンクの気体の隙間の仮定・交差項の一様性の仮定を合わせると

$$C_{\mathrm{box}}\ \le\ C_{\mathrm{loc}}+(1+\chi)\,C_{\mathrm{kg}}\ \le\ K_4\,\frac{(C\xi)^2}{D},\qquad K_4=\frac{1+\chi}{c_{\mathrm{kg}}(1-\eta_{\mathrm{KG}})}+C_{\mathrm{loc}}\,\frac{D}{(C\xi)^2} \tag{12}$$

です 初 Lean `H4_two_scale` （仮定：分解 (9) の不等式・第一項 $\le C_{\mathrm{loc}}\mathcal{E}$・キンクの気体の隙間の仮定 $\le C_{\mathrm{kg}}\mathcal{E}_Y$・交差項の一様性の仮定・$C_{\mathrm{kg}}\ge 0$）・ `H4_gap_form` （仮定：$D>0$・$C\xi\neq 0$・$c_{\mathrm{kg}}>0$・$\eta_{\mathrm{KG}}<1$・$1+\chi\ge 0$・上の二つの不等式）。これが箱の中の隙間の命題です。

K_4 の第二項は C_{loc} に $D/(C\xi)^2$ を掛けたもので、$D/\xi^2=\hbar/(S_0\xi^2)$ は三つの $\hbar$ で $e^{-441.6}/e^{-1328.6}/e^{-4433.1}$（$\hbar=3\cdot10^{-3}/10^{-3}/3\cdot10^{-4}$）の大きさです 読 （23-04 §07 の表 2）。C_{loc} が $\hbar$ について指数で増えない限り、この項は $\hbar\to 0$ で消えます。相内の局所 Poincaré の条件が $C_{\mathrm{loc}}=O(1)$ を要求するのは、この意味では余裕のある要求です。

鞍点の管の条件の行き先の注。 §01 の二つの谷の割り方では、鞍点の管の条件は平均差の定数 C_{md} そのものでした。箱の割り方では、鞍点の族に沿う向き（キンクの位置）を遅い変数 Y に取ったので、その向きの輸送は第二項のキンクの気体の隙間の仮定と交差項の一様性の仮定が受け持ち、鞍点の管の条件に残るのは Y を止めた管と芯の Poincaré です。この本では、管と芯の行を鞍点の管の条件の行、キンクの気体の隙間の仮定・交差項の一様性の仮定を箱の中の隙間の条件の行として数えます（統合表 23-12 と同じ数え方）。

段 3（合成の段） 合成 — $C_P\le K\xi^2 S_0/\hbar$

(8) の C_{box} に (12) を入れ、$L\varepsilon=C\xi$ と $D=\hbar/S_0$ を使うと

$$C_P(\mu)\ \le\ K\,\xi^2\,\frac{S_0}{\hbar},\qquad K=\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{C^2K_4}{1-c_{\mathrm{alt}}} \tag{13}$$

です 初 Lean `H3_H4_compose`（仮定：箱への帰着の命題の結論 (8)・箱の中の隙間の命題の結論 $C_{\mathrm{box}} \le K_4 (C\xi)^2/D \cdot D = \hbar/S_0 \cdot n > 0 \cdot \hbar > 0 \cdot S_0 > 0 \cdot c_{\mathrm{alt}} < 1$）。$K$ が $\hbar$ に依らないことは、$c_{\mathrm{alt}} \cdot \chi \cdot \eta_{\mathrm{KG}} \cdot c_{\mathrm{kg}} \cdot C_{\mathrm{loc}}$ の一様性、つまり仮定の行の中身そのものです。

縮約した模型の値（$\chi = \eta_{\mathrm{KG}} = 0 \cdot n = 3 \cdot \theta = \frac{1}{4}$）を入れると、$C = 2$ で $K \approx 2.76$（頂上の境界の値を含む sup）・1.43（端が井戸の側だけ）、$C = 4$ で $K \approx 1.78$ です 読 （族の値で、K の上界ではない） Lean `K_ff_C2` ・ `K_ff_C4`（仮定：測った c_{ff} と c_{alt} の値。算術だけ）。三つの $\hbar$ で同じ値なのは、縮約した模型に $\hbar$ が入らないからです。

段 4（比を挟む段） 比 R を挟む — $1 \le R \le K'/\hbar$

(13) を ξ^2 で割ると、$R = C_P/\xi^2 \le K S_0/\hbar =: K'/\hbar$ です 初 （割り算）。下からは一次元の片側の橋の命題（23-04 §04）で $R \ge 1$ です 初 （連続の時間・$T \to \infty$。証明は 23-04 に置いた）。合わせて

$$1 \;\le\; R \;\le\; \frac{K'}{\hbar}, \qquad K' = K S_0 \tag{14}$$

です。一次元の片側の橋の命題は条件を使わない下界で、(14) の左の不等号は二重井戸の四条件に依りません。

段 5（冪を読む段） 二重井戸の冪の言明 — $\ln C_P/\ln\xi \to 2$

$\ln C_P/\ln\xi = 2 + \ln R/\ln\xi$ で、(14) から $0 \le \ln R \le \ln K' + \ln(1/\hbar)$ です。残る入力は物差しの伸び方 $\ln\xi \ge s/\hbar$（ある $s > 0$ と小さい $\hbar$）で、これは $\xi \propto \hbar^{1/2} e^{S_0/\hbar}$ から来ます。連続の模型の半古典の主項は既知の式の写しで 典 、格子の模型では $\ln\xi - S_0^{\mathrm{lat}}/\hbar - \frac{1}{2}\ln\hbar$ が三つの $\hbar$ で $-0.774/-0.777/-0.778$ と一定に寄る読みです 読 （23-04 §07）。この入力の上で

$$0 \;\le\; \frac{\ln R}{\ln\xi} \;\le\; \frac{\hbar\big(\ln K' + \ln(1/\hbar)\big)}{s} \;\longrightarrow\; 0 \qquad (\hbar \to 0) \tag{15}$$

となり、二重井戸の冪の言明が従います 初 Lean `power_H_of_kink_ratio`（仮定：$0 < K \cdot 0 < s \cdot 0 < \delta$、$0 < \hbar < \delta$ で $1 \le R \le K/\hbar$ と $s/\hbar \le \ln\xi$。Lean の K は本文の K'）。

一本の筋の確かめ

段 1〜5 を一行に縮めると

$$\underbrace{(\mathrm{H1}^{\mathrm{seg}}),\ (\mathrm{H2}^{\mathrm{tube}}),\ (\mathrm{T0}'_{\mathrm{P}})}_{C_{\mathrm{loc}}} \xrightarrow{(9)(10),\ (\mathrm{KG}),\ (\mathrm{X})} \underbrace{C_{\mathrm{box}} \le K_4 \frac{(C\xi)^2}{D}}_{\text{命題 H4}} \xrightarrow{\text{命題 H3},\ (\mathrm{MIX}_{\mathrm{alt}})}$$

です。矢印の上に書いた入力のうち、仮定の行は切れ端の局所 Poincaré の仮定・鞍点の管の Poincaré の仮定・芯の Poincaré の一様性の仮定・キンクの気体の隙間の仮定・交差項の一様性の仮定・箱の交互の最大相関の仮定と段 0 の前提で、残りは初等の代数か既知の定理か読みです。

仮定の行の言明が結論の量を含んでいないことも、ここで確かめておきます。結論の量は $T = \infty$ の測度全体の $C_P(\mu)$ と比 R で、切れ端の局所 Poincaré の仮定・鞍点の管の Poincaré の仮定・芯の Poincaré の一様性の仮定は切れ端・管・芯の測度の定数、キンクの気体の隙間の仮定は縮約した気体の定数、交差項の一様性の仮定は形の比較、箱の交互の最大相関の仮定は相関の量で、どれも $C_P(\mu)$ や R を含みません。結論を前提に置く形（依存の円）は、この段の組み方には現れません（確かめ方は 23-13）。

正確には、一段目の上界の命題の結論は「Langevin 力学の緩和の時間 C_P が ξ^2 の冪で伸びる」という一段目の文です。C_P は転送作用素の隙間（トンネル分裂）とは別の量で、一段目の上界の命題の全ての行が揃っても、二段目以後の文は従いません（23-01 §08・23-03 §06）。

05

既知の定理との距離

一段目の上界の命題の上界 (5) を与える既知の定理は、探した範囲では見当たりません。近い定理がどこまで届き、どこで止まるかを表 1 にまとめます。

表 1　既知の定理が届く所と届かない所（分類は定理を引く行の分類）

既知の定理	届く所	届かない所	分類
Eyring–Kramers の Poincaré 版（Bovier–Gayrard–Klein・Menz–Schlichting の分散の分割の補題、定理 2.9・2.12）	次元を止めた Morse 関数で、分散の分割・局所 Poincaré・平均差の輸送から隙間の漸近と前因子まで	定数が次元に一様でない。キンクの平行移動のような退化した鞍点の族は仮定の外	典
区間を止めた確率的 Allen–Cahn 方程式の Eyring–Kramers（Di Gesù–Le Peutrec・Brooks–Di Gesù）	区間の長さを分岐の閾の手前に止めた隙間の漸近	区間の長さを無限にする体制と平行移動の族は、著者自身が本文で範囲の外と明記	典
短い経路の遷移の時間（Berglund–Gentz の定理 2.6）	$T < 2\pi\sqrt{2}$（一様な鞍点）で谷を移る平均の時間	長い経路（$T \gg \xi$）	典
単一の界面の拡散（Bertini–Brassesco–Buttà の定理 2.1）	キンク一本の位置が拡散係数 D の Brown 運動に近づくこと（過程の水準）	経路全体のスペクトルの隙間の文ではない	典

既知の定理	届く所	届かない所	分類
体積に一様な判定法（Bauerschmidt–Dagallier の定理 2.1）	経路の格子にそのまま当たり、体積に一様な上界を与える	値は $C_P \le e^{c\xi}$、$c \approx 1.4 \to 1.8$（$\varepsilon = 0.25$・$\hbar = 0.4 \to 0.1$）で、$\hbar$ について二重指数。二重井戸の冪の言明に届かない	典（定理）読（値）
箱の力学の命題（Martinelli の講義の命題 3.4・3.5）	離散のスピンで、全体の隙間を箱の力学と箱の中の隙間で押さえる型	非有界なスピン・境界の値の sup。段 1 は型だけを借り、一次元・L^2 の形に書き直した	典（型）

表 1 の最後の三行が示すように、既知の道具は「一本のキンク」と「体積に一様だが粗い上界」の両端にあり、その間（長い経路の上で、キンクの気体の拡散の時間 ξ^2/D まで鋭い上界）が一段目の上界の命題の場所です。Bauerschmidt–Dagallier の上界が $e^{c\xi}$ になるのは、判定法が感受率という一つの量だけを見るため、遅いが局所的な緩和と遅く大域的な緩和を区別できず、指数の中に ξ が入るからと読まれます 読 。

06

五分類の表 — 一段目の上界の命題の段の行

§04 の段を、五分類の書式（23-00 §01）で一表にします。分類は一行に一つで、機械検査の欄は分類の外です。行の番号は §07 の依存グラフの節点の番号です（式の中の札 $(\mathrm{H1}^{\mathrm{seg}})$・$(\mathrm{H2}^{\mathrm{tube}})$・$(\mathrm{T0}'_{\mathrm{P}})$・(KG)・(X) は、それぞれ [02]〜[06] の仮定）。

表 2　一段目の上界の命題の段の行（$\hbar$ の範囲の「—」は、どの $\hbar$ でも示されていない仮定の行）

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
[01]	$T = \infty$ の測度の一意性・極限の段・正則性	仮	§04 段 0（$\mathbb{R}$ の上の正の核の主固有値の原典は未確認）	—	—
[02]	切れ端の局所 Poincaré の仮定：キンクの無い切れ端の Poincaré が長さ・端の値・$\hbar$ に一様	仮	§03・§04 段 2 の (10)。環の版の節点の命題は 23-06	—	—
[03]	鞍点の管の Poincaré の仮定：管の Poincaré が長さ $\le C\xi$ に一様	仮	§03・(10)	—	—

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
[04]	芯の Poincaré の一様性の仮定：芯の Poincaré が芯の長さに一様	仮	§03・(10)。窓の下の端の仮定つきの命題は 23-09・23-11。区画の側の芯（両端が井戸の中）では、粗い鎖の Dobrushin の判定で $\hbar \in (0,1]$ の全てで支えられる：論文の証明（粗い鎖の Dobrushin の定理（論文の定理 CC））＋機（$\hbar \in [10^{-5},1]$、239 区間、区間演算、$\rho_{\mathrm{col}} \le 0.400$）＋紙の証明と機（小さい $\hbar$ の粗い鎖の命題（論文の命題 PIN）：$\hbar \le 10^{-5}$、$\rho_{\mathrm{col}} \le 0.874$）＋典（Bobkov–Ledoux 2000 の Helffer の判定の Poincaré 版（Ledoux の命題 3.1））・粗い鎖の Brascamp–Lieb の命題（論文の命題 BLc）の上の条件つき。読の行は無い。箱の側の芯は含まない（論文「粗い鎖の Poincaré」）	区画の側：$(0,1]$	—
[05]	キンクの気体の隙間の仮定：縮約したキンクの気体の箱の隙間 $\ge c_{\mathrm{kg}}(1-\eta_{\mathrm{KG}})D/(C\xi)^2$	仮	§04 段 2（Glauber の型に入る仮定）	—	—
[06]	交差項の一様性の仮定：交差項 $\mathcal{E}_Y(\mathbb{E}[f \mid Y]) \le (1+\chi)\mathcal{E}(f)$	仮	§04 段 2	—	—
[07]	箱の交互の最大相関の仮定：$c_{\mathrm{alt}} < 1$ が $\hbar$ に一様	仮	§04 段 1	—	—
[08]	キンク一本の移動度 $D = \hbar/S_0$	典	§02 (d)・23-04 §03（過程の水準の定理の係数の写し）	$\hbar \to 0$	—
[10]	二つの射影の補題	初	§04 段 1 の証明	$\hbar$ に依らない	`two_proj_var`（仮定：$A+B \le (1+c)V$）
[11]	偶の箱の条件つき独立と積の分散の不等式 (7)	初	§04 段 1（証明は 23-11）	$\hbar$ に依らない	—

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
[14]	箱への帰着の命題：(8) $C_P \le (1+1/n)C_{\mathrm{box}}/(1-c_{\mathrm{alt}})$	初	§04 段 1（二つの射影の補題・偶の箱の積の分散・ずらしの平均）	$\hbar$ に依らない	`box_two_family`・`box_shift_average`（仮定：二族の不等式・$C_{\mathrm{box}} \ge 0$・重なりの和 $\le \mathcal{E}$）
[12]	分散の分解 (9) と積への分解 (10)	初	§04 段 2（積への分解は Y の定め方に依り、正則性は共通の前提の行 [01]）	$\hbar$ に依らない	—
[13]	$c_{\mathrm{kg}} = C^2 + \pi^2$（(11) の代数）	初	§04 段 2（Glauber の閉じた式はキンクの気体の隙間の仮定の中）	$\hbar$ に依らない	`kg_constant`（仮定：$C\xi \ne 0$）
[15]	箱の中の隙間の命題：(12) $C_{\mathrm{box}} \le K_4 (C\xi)^2 / D$	初	§04 段 2	$\hbar$ に依らない	`H4_two_scale`・`H4_gap_form`（仮定は §04 段 2 の各行）
[16]	一段目の上界の命題：(13) $C_P \le K \xi^2 S_0/\hbar$	初	§04 段 3	$\hbar \to 0$	`H3_H4_compose`（仮定：(8)・(12)・$D = \hbar/S_0$・$n, \hbar, S_0 > 0$・$c_{\mathrm{alt}} < 1$）
—	$K \approx 2.76/1.43$（$C=2$）・1.78（$C=4$）	読	§04 段 3（縮約した模型・$\chi = \eta_{\mathrm{KG}} = 0$・族の値）	$\hbar$ に依らない	`K_ff_C2`・`K_ff_C4`（仮定：測った値。算術だけ）
[17]	一次元の片側の橋の命題：$R \ge 1$	初	23-04 §04	全ての $\hbar$	`local_rayleigh_ratio_le_one`（有限和の骨だけ。仮定は 23-04 の表 3）
[18]	(14) $1 \le R \le K'/\hbar$	初	§04 段 4	$\hbar \to 0$	—
[09]	$\ln \xi \ge s/\hbar$（$\xi \propto \hbar^{1/2} e^{S_0/\hbar}$）	読	§04 段 5（連続の主項は典、格子の模型の値は読）	三点で読み・$\hbar \to 0$ は主項から	—
[19]	二重井戸の冪の言明：$\ln C_P / \ln \xi \to 2$	初	§04 段 5 の (15)	$\hbar \to 0$	`power_H_of_kink_ratio`（仮定：$0 < K, s, \delta$・$1 \le R \le K/\hbar$・$s/\hbar \le \ln \xi$）

表 2 の「初」の行は、どれも仮定の行を入力にとる代数です。「初」の行が並んでいることは、一段目の上界の命題の結論が示されていることを意味しません。結論が無条件になるのは、全ての「仮」の行と、「読」の行（相関長の伸び方の行 [09]）が置き換わったときだけです。

```
07
```

依存グラフ — 番号で円が無いことを確かめる

表 2 の行を、番号つきの節点の一覧にします。書式はこの部で共通で（23-12 の統合のグラフも同じ）、「⟸」**の右に並ぶ前提の番号は、左の結論の番号より必ず小さく**置きます。葉（仮定・既知・読み）が小さい番号、結論が最大の番号です。

```
[01] 仮  共通の前提の行：T=∞ の測度の一意性・極限の段・正則性          ħ：—
[02] 仮  切れ端の局所 Poincaré の仮定：キンクの無い切れ端の Poincaré   ħ：—
[03] 仮  鞍点の管の Poincaré の仮定：管の Poincaré（長さ ≤ Cξ）       ħ：—
[04] 仮  芯の Poincaré の一様性の仮定（芯の長さに一様）               ħ：—
[05] 仮  キンクの気体の隙間の仮定：縮約したキンクの気体の箱の隙間     ħ：—
[06] 仮  交差項の一様性の仮定：交差項 ℰ_Y ≤ (1+χ)ℰ                   ħ：—
[07] 仮  箱の交互の最大相関の仮定：c_alt < 1                          ħ：—
[08] 典  キンクの拡散係数の行：キンク一本の移動度 D = ħ/S₀            ħ→0
[09] 読  相関長の伸び方の行：ln ξ ≥ s/ħ（ξ ∝ ħ^½ e^(S₀/ħ)）          三点
[10] 初  二つの射影の補題                                            ħ に
         Lean two_proj_var（仮定：A+B ≤ (1+c)V）
[11] 初  偶の箱の条件つき独立と積の分散 (7) ⟸ [01]                    ħ に依
[12] 初  分散の分解 (9)・積への分解 (10) ⟸ [01]                       ħ に
[13] 初  c_kg = C²+π²（(11) の代数）                                  ħ
         Lean kg_constant（仮定：Cξ ≠ 0）
[14] 初  箱への帰着の命題 (8) ⟸ [07][10][11]                          ħ
         Lean box_two_family・box_shift_average（仮定：二族の不等式・C_bo
[15] 初  箱の中の隙間の命題 (12) ⟸ [02][03][04][05][06][08][12][13]   ħ
         Lean H4_two_scale・H4_gap_form（仮定：分解・C_loc・[05]・[06]・[
[16] 初  一段目の上界の命題 (13) C_P ≤ Kξ²S₀/ħ ⟸ [08][14][15]         ħ→0
         Lean H3_H4_compose（仮定：(8)・(12)・D = ħ/S₀・n, ħ, S₀ > 0・c_
[17] 初  一次元の片側の橋の命題 R ≥ 1 ⟸ [01]                          全て
         Lean local_rayleigh_ratio_le_one（有限和の骨だけ）
[18] 初  (14) 1 ≤ R ≤ K'/ħ ⟸ [16][17]
[19] 初  二重井戸の冪の言明 ln C_P / ln ξ → 2 ⟸ [09][18]               ħ→
         Lean power_H_of_kink_ratio（仮定：0 < K, s, δ・1 ≤ R ≤ K/ħ・s/
```

確かめ方。全ての「⟸」の行で、右の番号が左の番号より小さいことを目で見ます。[11] と [12] は [01] だけ、[14] は [07][10][11]、[15] は [02]〜[06][08][12][13]、[16] は [08][14][15]、

[17] は [01]、[18] は [16][17]、[19] は [09][18] で、どの行も規則を守っています。規則が守られていれば、前提をたどると必ず番号が下がり、いずれ葉に着くので、円はありません。

葉のうち「仮」は [01]〜[07] の七つ、「典」は [08]、「読」は [09] です。一段目の上界の命題の結論 [16] は [01]〜[08] の全てに依り（[11][12] を通して [01] にも）、二重井戸の冪の言明 [19] はさらに [09] に依ります。一次元の片側の橋の命題 [17] だけは [01] にしか依らず、二重井戸の四条件を使いません。

正確には、このグラフは一段目の上界の命題の段の組み立ての依存で、各仮定の行の中身（例えば [02] を節点の上で支える六節点の相内 Poincaré の命題）は入れていません。それらは各条件の章のグラフにあり、全てを一つに繋いだものが 23-12 の統合のグラフです。

08

揃う $\hbar$ と四条件の現在地

全ての行が揃う $\hbar$ は無い。相内の局所 Poincaré の条件の節点の命題は $\hbar \geq 0.005$ の六点、芯の行を支える仮定つきの命題は $\hbar \leq 10^{-3}$ の桁の窓の下の端にあって交わらず、キンクの気体の隙間の仮定・交差項の一様性の仮定・鞍点の管の Poincaré の仮定はどの $\hbar$ でも仮定の行です。帯の図と揃え方は 23-12 に置きます。

四つの条件の現在地を一行ずつ並べます。詳細は各章です。

四条件の現在地

1. 相内の局所 Poincaré の条件 — 環の版の六節点の相内 Poincaré の命題：六つの節点 $\hbar \in \{0.2, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01, 0.005\}$・隣と端 $[0, 2.5]$ で余白 ≥ 0.067（計算機援用）。節点の間・$\hbar < 0.005$・端 > 2.5・切れ端の版が残る（23-06）
2. 鞍点の管の条件 — 七つの道筋に割った地図。窓の外の鎖の条件は窓 $[3 \cdot 10^{-4}, 3 \cdot 10^{-3}]$ の全体で計算機援用、区画の枠組みは五段が命題、残る一命題は三本の筋が頂上の一サイトの曲率の不足 $\frac{1}{4}$ で止まる（23-07〜23-10）
3. 箱への帰着の条件 — 箱への帰着の命題（§04 段 1）。箱の交互の最大相関の仮定と境界の値の sup が残る（23-11）
4. 箱の中の隙間の条件 — 箱の中の隙間の命題（§04 段 2）。交差項の一様性の仮定・キンクの気体の隙間の仮定・切れ端の局所 Poincaré の仮定・芯の行が残り、芯の定数は三段で押さえる（23-11）

この部は緩和時間の仮定を取っ掛かりとして選んだ検討で、一段目の上界の命題は一段目の上の側を組む一つの割り方です。別の視点は第 24 部で扱います。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 分散の分割の代数 (3)、二つの射影の補題、箱への帰着の命題 (8)、箱の中の隙間の命題 (12)、合成 (13)、比の挟み (14)、二重井戸の冪の言明への代数 (15)。どれも名指した仮定の行の上の代数 Lean（仮定は表 2 の各行）	仮定の行 [01]〜[07] のどれも。したがって (5) そのものと、一段目の二重井戸の冪の言明
初 一次元の片側の橋の命題：$R \geq 1$（条件を使わない）	R が $1/\hbar$ で伸びるか指数で伸びるか
典 キンク一本の拡散係数、既知の定理の届く範囲（表 1）	長い経路の上でキンクの気体の拡散の時間まで鋭い上界を与える既知の定理（探した範囲で見当たらない、まで）
読 $K \approx 2.76$ ほか（縮約した模型）、$c_{\mathrm{alt}} \approx 0.73$、$\ln \xi$ の伸び方	これらを上界・下界の証明に使うこと
依存グラフに円が無いこと（番号の規則）	全ての行が揃う $\hbar$。一段目から二段目以後への含意

出典と再現

もの	種別	出典・道具
分散の分割・Eyring–Kramers の Poincaré 版の骨組み	典	G. Menz, A. Schlichting, Ann. Probab. 42 (2014), arXiv:1202.1510（分散の分割の補題・定理 2.9・2.12、本文で確認）。A. Bovier, V. Gayrard, M. Klein, J. Eur. Math. Soc. 7 (2005) 69–99（書誌）。
凸な領域の Bakry–Émery	典	D. Bakry, M. Émery, LNM 1123 (1985)；A. V. Kolesnikov, E. Milman, J. Geom. Anal. 27 (2017), arXiv:1310.2526（定理 1.2、本文で確認）。
区間を止めた Eyring–Kramers	典	G. Di Gesù, D. Le Peutrec, arXiv:1506.04434（定理 1.1）；M. Brooks, G. Di Gesù, arXiv:2606.16083（範囲の外の明記、本文で確認）。
短い経路の遷移の時間・単一の界面の拡散	典	23-04 の出典表（Berglund–Gentz、Bertini–Brassesco–Buttà）。
体積に一様な判定法	典・読	R. Bauerschmidt, B. Dagallier, Comm. Pure Appl. Math. 77, arXiv:2202.02295（定理 2.1、本文で確認）。経路の格子への当てはめと $e^{\alpha\xi}$ の値は記録の浮動小数の計算（転送行列・$\varepsilon = 0.25$・調和の陽性対照で 1.0049）。
箱の力学の型	典	F. Martinelli, LNM 1717 (1999) 93–191（予稿の §3.6・命題 3.4・3.5 で確認）。
二つの射影の補題・Efron–Stein の型	初	本文 §04 段 1（Friedrichs の角・Efron–Stein の原典は書誌だけ）。

もの	種別	出典・道具
Glauber 力学の箱の隙間の閉じた式・自由端の値	仮・読	R. J. Glauber, J. Math. Phys. 4 (1963) 294（書誌だけ）。固定の端の式は小さな鎖の全状態の対角化と 6 桁で一致、自由端は格子の値（浮動小数）。
交互の最大相関の値	読	二状態の電信の鎖の閉じた式の値を写した族の値（浮動小数）。
段の代数	初・Lean	定理 `split_poincare_le`・`reduced_two_state_value`・`two_proj_var`・`box_two_family`・`box_shift_average`・`kg_constant`・`H4_two_scale`・`H4_gap_form`・`H3_H4_compose`・`K_ff_C2`・`K_ff_C4`・`power_H_of_kink_ratio`（仮定は表 2 と本文の各行）。言明の一覧は 23-13。

この章で使った語 — 分散の分割・局所 Poincaré・平均差の輸送・二重井戸の四条件・一段目の上界の命題・相（キンクの無い相）・切れ端・管・芯・箱の力学（箱への帰着）・最大相関・交互の最大相関・二つの射影の補題・Efron–Stein の不等式・縮約したキンクの気体・交差項・依存グラフ。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-06 相内の局所 Poincaré の条件 — キンクの無い相の測度の Poincaré 定数を、残したサイトと橋の二尺度の組み立てで六つの $\hbar$ の節点の命題にし、節点の間を埋める方法と費用を述べる。

相内の局所 Poincaré の条件

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 2-05・2-07 にあります。

この章で分かること — 相内の局所 Poincaré の条件は、キンクの無い相（経路が一つの谷の側にとどまる配位）に制限した測度の Poincaré 定数が、$\hbar$ と経路の長さに一様に $O(1)$ であるという文です。この章では、残したサイトと、その間の 11 サイトの橋に割る二尺度の組み立てで、環の上の版を六節点の相内 Poincaré の命題にします。六節点の相内 Poincaré の命題は $\hbar$ の六つの節点 $\{0.2, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01, 0.005\}$ で成り立ち、要の不等式（粗い側の余白 ≥ 0.067）は計算機援用です。節点の間の $\hbar$ を埋める方法と費用、$\hbar < 0.005$ と大きな端の値のように別の方法が要る残りを、最後に並べます。

前提となる章 — 23-05（四条件と二重井戸の緩和時間の上界の命題・五分類の表と依存グラフの書式）・23-04 §06（頂上の台地と凸な芯）・1-10 §07〜§09（Poincaré 不等式）。計算機援用の読み方は 23-08。

先に言うこと — §01 は〔三〕で読める要約で、§02 以降は研究の水準〔研〕です。要約だけを読んで 23-07 へ進めます。六節点の相内 Poincaré の命題は相内の局所 Poincaré の条件の証明ではありません。六つの節点の外の $\hbar$、端の値 > 2.5、箱の中で使う切れ端の版は、仮定の行に残ります。

この章の順序

1. 要約〔三〕 — 言明・組み立て・六節点の相内 Poincaré の命題・残り
2. 言明と相の測度 — 何が難しいか
3. 二尺度の組み立て — 残したサイト・橋・入れ子・粗い側の判定・率の代数
4. 六節点の相内 Poincaré の命題 — 六つの節点の余白（表 1）と定数
5. 五分類の表 — 六節点の相内 Poincaré の命題の行（表 2）
6. 節点の間の $\hbar$ — 方法と費用（表 3・表 4）
7. 残りの行 — 別の方法が要るもの（表 5）

8. 依存グラフ

01

要約〔三〕

言明。二重井戸の経路の格子（$\varepsilon = \frac{1}{2}$）で、全てのサイトを $x_i \geq 0$ に制限した測度 $\mu^{(+)}$ を考えます。相内の局所 Poincaré の条件は「$C_P(\mu^{(+)})$ が $\hbar$ と長さに依らない定数以下」です。凸な芯の Bakry–Émery は谷の奥（$x_i \geq a > 1/\sqrt{3}$）にしか効かず、谷の中の小旅行は長さ ξ の区間に指数で多く入るので、この測度は凸ではありません（23-04 §06）。

組み立て。12 サイトごとに一つのサイトを残し（粗い側）、その間の 11 サイトを、両端を固定した橋（細かい側）とします。分散を「残したサイトを止めた条件つきの分散」と「その期待値の分散」に分け、細かい側は橋の中をさらに三つの小さな橋と二つのサイトに割って押さえ、粗い側は残したサイトの鎖を一サイトの隙間と隣どうしの結合の強さで判定します。粗い側の判定の要は

$$\underbrace{\hbar\rho}_{\text{一サイトの隙間}} \;-\; 2 \;\; \underbrace{\hbar\kappa}_{\text{隣との結合}} \;>\; 0 \tag{1}$$

という余白の不等式で、これを端の値の全ての組について確かめるのに区間演算を使います。

六節点の相内 Poincaré の命題。$\hbar$ の六つの節点の各点で、端と隣の値 $[0, 2.5]$ の全てについて余白 ≥ 0.067 が計算機援用で確かめられ、残りの行（仮定と既知の定理）の上で $C_P(\mu^{(+)}) \leq C$、$C \leq 1.6 \times 10^{10}$（紙と区間演算の入力だけ）です。数値の読みを入力にすると $C \leq 658$ です。どちらも環の長さに依りません。

残り。節点の間の $\hbar$ は、$\beta = 1/\hbar$ を傾けの三つ目の向きにする方法で部分区間ごとに埋める型ができ、費用は一コアで数十時間の見積もりです。$\hbar < 0.005$ は部分区間が無限個要るので別の方法（$\hbar \to 0$ の漸近）が要り、端の値 > 2.5、定数の鋭さ、箱の中で使う切れ端の版、引いた定理の書誌の確認が残ります。

02

言明と相の測度 — 何が難しいか

相の測度。環 $N = 12n$ サイト（$n \geq 3$）の格子の作用

$$S=\sum_i \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2\varepsilon}+\varepsilon\sum_i V(x_i),\qquad V(x)=\frac{(x^2-1)^2}{8},\qquad \varepsilon=\frac{1}{2} \tag{2}$$

から、全てのサイトで $x_i\ge 0$ の配位に制限した測度 $\mu^{(+)}\propto e^{-S/\hbar}\mathbf{1}\{x_i\ge 0\ \forall i\}$ を作ります。直交象限は凸なので、壁 $x_i=0$ で反射する Langevin 力学（Neumann 条件）の平衡がこの測度です。Dirichlet 形は $\mathcal{E}(f)=(\hbar/\varepsilon)\sum_i \mathbb{E}|\partial_i f|^2$ です。経路は谷 $x=1$ の側にとどまり、キンクを持ちません。これが「キンクの無い相」です。

相内の局所 Poincaré の条件（環の版）

ある $\hbar_0>0$ と $C<\infty$ があって、全ての $\hbar\in(0,\hbar_0]$ と全ての n で $\mathrm{Var}_{\mu^{(+)}} f\le C\,\mathcal{E}(f)$。

箱の中で使う版（23-05 §04 の箱の中の段で使う切れ端の局所 Poincaré の仮定）は、環の代わりに両端の値を持つ長さ $\le C\xi$ の切れ端で、端の値にも一様であることを求めます。

何が難しいか。三つの素朴な道がどれも $\hbar$ について指数の損を出します。

- 凸な芯：$x_i\ge a>1/\sqrt{3}$ に制限すれば Bakry–Émery で $C_P\le 2/(3a^2-1)$ ですが、芯の外への小旅行の作用（$a=1/\sqrt{3}$ で 0.1535）はキンクの作用 $2/3$ より小さく、長さ ξ の区間に $e^{(S_0-c_a)/\hbar}$ 個の小旅行が入ります 初 （23-04 §06）。
- 全体の摂動（Holley–Stroock の型）：凸な作用との差の振れ幅は経路の長さに比例し、定数は $e^{T\delta/\hbar}$ の型になります 典 （Holley–Stroock の摂動の補題。Ledoux の命題 6.1 の再述で型を確認）。
- 一サイトずつの摂動：一サイトあたりの非凸性は $\varepsilon/(8\hbar)$ ですが、隣どうしの結合 $(x_{i+1}-x_i)^2/(2\varepsilon)$ が強いので、一サイトずつ切り離して扱えません 読 。

数値は相内の局所 Poincaré の条件と矛盾しません。壁つきの環の Langevin 力学で磁化の積分自己相関の時間を測ると、$\hbar=0.3/0.15/0.1/0.07$ で $0.86/1.40/1.50/1.39$ と $\hbar$ に依らない大きさでした 読 （観測量一つの自己相関は Poincaré 定数の下界しか与えず、上界の証拠ではない）。

03

二尺度の組み立て

残したサイトと橋。サイト $y_j:=x_{12j}$ を残し、y_j と y_{j+1} の間の 11 サイト $x_{12j+1},\dots,x_{12j+11}$ を、両端を y_j,y_{j+1} に固定した橋とします。分散を残したサイト y で分けると

$$\mathrm{Var}_{\mu^{(+)}} f=\mathbb{E}\big[\mathrm{Var}(f\mid y)\big]+\mathrm{Var}\big(\mathbb{E}[f\mid y]\big) \tag{3}$$

です（分散の分解の行：分散の分解は初等、使う関数の正則性・稠密性は仮定）。最近接の相互作用なので、y を止めると橋どうしは独立で、y の周辺の測度は残したサイトの最近接の鎖です（最近接の鎖の行：Markov 性）。

細かい側：橋の中の入れ子。11 サイトの橋は凸ではありません（橋の Hessian の最小固有値は $(1/\varepsilon)\lambda_{\min}(L_{11}) - \varepsilon/2 = -0.11$）。そこで橋の中のサイト 4 と 8 をもう一段残し、三つの小さな橋（3 サイト）と二つのサイト (x_4, x_8) に割ります。

- 3 サイトの小さな橋は対数凹です：Hessian $\geq (1/\varepsilon)\lambda_{\min}(L_3) - \varepsilon/2 = 2(2-\sqrt{2}) - \tfrac{1}{4} \approx 0.92$。Bakry–Émery で隙間 $\rho_f = 0.922$ 初 （曲率の下界）典 （凸な領域の Bakry–Émery）。
- 小さな橋と二つのサイトの交差は Brascamp–Lieb の不等式で $\kappa_f = 1.98$ 典 。
- 二つのサイト (x_4, x_8) の周辺の測度の隙間 $\lambda_c \geq 1.3 \times 10^{-4}$（端の値 $[0,4]^2$・$\hbar \in (0, 0.2]$）機 （二つのサイトの隙間の行）。

三つを入れ子の二尺度の代数で合わせると、橋の隙間は $t^2 - (\rho_f + \lambda_c + \kappa_f^2/\rho_f)t + \rho_f\lambda_c = 0$ の小さい根以上で、$\lambda_S \geq 2.3 \times 10^{-5}$ です 初 （根の算術）。

粗い側：一サイトの隙間と結合。隣の値 c, d を止めた y_j の一次元の条件つきの測度は $\propto e^{-U(t)/\hbar}$ で、

$$U'(t) = \varepsilon V'(t) + \frac{2t - e(c,t) - e(d,t)}{\varepsilon}, \qquad e(a,b) := \mathbb{E}_{a,b}\, x_{11} \tag{4}$$

です（$\mathbb{E}_{a,b}$ は両端 a, b の橋の期待値）。その Poincaré の隙間を $\hbar$ 倍したものを $\hbar\rho(c,d)$、橋の両端の結合の強さを

$$\hbar\kappa(a,b) := \frac{\mathrm{Cov}_{a,b}(x_1, x_{11})}{\varepsilon^2\hbar} = \frac{1}{\varepsilon}\,\partial_a e(a,b) \;\geq\; 0 \tag{5}$$

とします（二つ目の等号は $\partial_a \log Z(a,b)$ を b で微分する恒等式 初 、非負は e が a について増えることから 典 （FKG の相関不等式））。粗い側の鎖の隙間は、Helffer の判定の Poincaré 版を環の Gershgorin の形で使うと、余白

$$\lambda := \min_{c,d} \hbar\rho(c,d) - 2\max_{a,b} \hbar\kappa(a,b) \tag{6}$$

以上です 典 （Helffer の判定の Poincaré 版、Ledoux の命題 3.1）初 （Gershgorin の形）Lean `ring_gershgorin`（環の二次形式の不等式、仮定：$\kappa \geq 0$）。(1) は $\lambda > 0$ のことです。

交差と率の代数。細かい側と粗い側をつなぐ交差の強さは $\kappa^2 = 2(v/\hbar)\lambda_S/\varepsilon^2$、$v/\hbar \leq 2\big(644/1455 + (60/97)^2/\lambda_c\big) \leq 5888$ です（交差の行）初 （算術）Lean `T4_paper_numeric`

（仮定：$\lambda_c \ge 1.3\times 10^{-4}$）典 （Brascamp–Lieb）。$\lambda$ と λ_S はどちらも平らな Dirichlet 形 $\int |\nabla f|^2$ に対する隙間を $\hbar$ 倍した単位です。このとき、$0 \le t < \lambda$ が

$$t\,\kappa^2 \;\le\; \lambda_S(\lambda_S - t)(\lambda - t) \tag{7}$$

を満たせば $C_P(\mu^{(+)}) \le \varepsilon/t$ です 初 Lean `H1_assembly`（仮定に名前をつけた代数：分解 (3)〔`hT5`〕・細かい側〔`hFine`、Lean の ρ は本文の λ_S〕・粗い側の判定の結論〔`hLedoux`〕・余白 $\lambda \le \hbar\rho - 2\hbar\kappa$〔`hT1`〕・$0<\lambda$・交差〔`hT4`〕・率の条件 (7)）。

組み立ての全体を、分散の分解の木にすると次のとおりです。

```
Var f = E[Var(f|y)] + Var(E[f|y])                                  （分
 ├ 細かい側：y を止めた 11 サイトの橋
 │      └ 入れ子 {4,8}：小さな橋 BE ρ_f=0.922・交差 BL κ_f=1.98・二つのサイト
 ├ 粗い側：残したサイトの環（最近接の鎖の行）── Helffer の判定の Poincaré 版（
 │      └ 余白の行：一サイトの隙間 ħρ（Muckenhoupt・FKG の帯・尾）− 2·結合 ħκ
 └ 交差：κ² = 2(v/ħ)λ_S/ε²（交差の行 ← 二つのサイトの隙間の行）
 → 率の条件 tκ² ≤ λ_S(λ_S−t)(λ−t)（H1_assembly）→ C_P ≤ ε/t
```

04

六節点の相内 Poincaré の命題 — 余白と定数

六節点の相内 Poincaré の命題（0+1 次元・環の版・仮定の表つき）

$V=(x^2-1)^2/8$、$\varepsilon=\frac12$、環 $N=12n$（$n\ge 3$）、壁 $x_i\ge 0$ の相の測度 $\mu^{(+)}$、残したサイト $y_j=x_{12j}$、橋の中の入れ子のサイト $\{4,8\}$ とする。表 2 の「仮」と「典」の行の下で、$\hbar\in\{0.2,0.1,0.05,0.02,0.01,0.005\}$ の各点で

$$\mathrm{Var}_{\mu^{(+)}} f \;\le\; C\,\mathcal{E}(f), \qquad C\le 1.6\times 10^{10} \tag{8}$$

が n に依らずに成り立つ。数値の読みを入力にすると $C\le 658$。

要の行は余白 (6) で、隣と端の値 $[0,2.5]$ の全ての組について、六つの節点で表 1 の値が得られています。

機 表 1　節点ごとの粗い側の余白（隣と端の値 $[0,2.5]^2$。$\hbar\rho$ は下界、$\hbar\kappa$ は上界、外向きに切った値）

$\hbar$	$\hbar\rho \ge$	$\hbar\kappa \le$	**余白** $\hbar\rho - 2\hbar\kappa \ge$
0.2	0.7755	0.0358	0.7039

$\hbar$	$\hbar\rho \geq$	$\hbar\kappa \leq$	**余白** $\hbar\rho - 2\hbar\kappa \geq$
0.1	0.7140	0.0664	0.5812
0.05	0.8121	0.1222	0.5677
0.02	0.8846	0.2636	0.3574
0.01	0.8670	0.39996	0.0670
0.005	0.92182	0.41868	0.0844

区間演算の実装は、float64 の演算に外向きの幅を足す形です（非負の和の丸めを相対 10^{-10}、区間の四則を相対 10^{-12} だけ外へ広げ、e^{-700} を下回る重みは上から置き換え、$\varepsilon V/\hbar > 690$ の領域は尾の上界で覆う）。演算ごとに向きを指定した丸めではなく、IEEE の正しい丸めを前提にした幅の上乗せです。この前提は表 2 の行 [01] に同じ行で書きます。六組の値から余白 ≥ 0.067 が出る算術は Lean `T1_margin_six_nodes`（仮定なし・数）、一つの節点で区間の出力から余白へ渡る段は `T1_node_margin`（仮定：区間の出力の二つの不等式と $0.067 \leq r - 2k$）です。

区間を節点の連続体へ広げる道具。表 1 は「隣と端の値の全ての組」についての値で、有限個の箱の計算から連続体へ渡すのに三つの補題を使います。

- $\hbar\rho$ の側：一次元の測度の Poincaré 定数を Hardy 型の量 B で $B \leq C_P \leq 4B$ と挟む Muckenhoupt の評価 典、隣の値についての $e(c,t)$ の単調性（FKG）で節点の値から隣の連続体へ帯を作る補題 典（FKG）、t が大きい側の尾の補題（Holley の比較の連続版と傾けたガウスの橋） 仮（連続版の定理番号を原典で確かめていない）。
- $\hbar\kappa$ の側：端の値の箱の中心の測度を傾け、キュムラント母関数の二次の Taylor 展開と Hölder の剰余で箱の全体を押さえる傾けの二次 Taylor の補題 初（Taylor の剰余と Hölder の不等式）。この式は中心化の定数を何に選んでも正確です。
- 二つの上界の小さい方も上界、反転の対称性 $\hbar\kappa(a,b) = \hbar\kappa(b,a)$ で半分を覆う 初 Lean `min_of_two_upper`・`symm_upper`（仮定：二つの上界／対称性と片側の上界）。

$\hbar = 0.01$ と 0.005 で余白を正にした手。$\hbar$ が小さいと $\hbar\kappa$ の上界が膨らみ、粗い計算では $\hbar = 0.01$ で 0.634 と余白が負でした。律速は場所ごとに違い、三つの手で下げています。(i) 端の角 $(0,0)$ では、傾けの二次 Taylor の補題の中心化の定数を部分長方形ごとにその範囲の中央値で取り直す（式は任意の中心で正確なので、上界だけが下がる）。(ii) 二次の項は箱の幅 δ の二乗で効くので、δ を半分にする。(iii) 大きい端 $(2.5, 2.5)$ では、橋が一歩で井戸へ大きく跳ぶため求積の誤差が律速で、求積の刻みを半分にする。$\hbar = 0.005$ では $\hbar\rho$ の側の求積を細かくして下界が 0.6945 から 0.92182 へ上がります。表 1 の最後の二行がこれらの手の結果です 機。

定数。(8) の $C \le 1.6 \times 10^{10}$ は、紙と区間演算の入力（$\lambda \ge 0.067$・$\lambda_S \ge 2.3 \times 10^{-5}$・$v/\hbar \le 5888$）で率の条件 (7) を $t = 3.2 \times 10^{-11}$ が満たすことからの ε/t です 初 （算術） Lean `H1_rate_paper_six_nodes`（仮定なし・数）。二つのサイトの隙間を数値の $\lambda_c = 0.57$ にすると $\lambda_S \ge 0.093$・$v/\hbar \le 1.0015$ で $t = 7.6 \times 10^{-4}$、$C \le 658$ です 読 （入力が浮動小数の読み） Lean `H1_rate_numeric_six_nodes`（仮定なし・数）。二つの値の差の大半は λ_c の紙の値の弱さから来ます。

05

五分類の表 — 六節点の相内 Poincaré の命題の行

六節点の相内 Poincaré の命題の入力を五分類の書式で一表にします。紙の証明をこの本に置くものは「初」、置かないものは「仮」、区間演算は実装の前提を同じ行に書いて「機」、引く定理は書誌の確かめの水準で「典」か「仮」に分けます。行の欄の番号は §08 の依存グラフの節点の番号で、「—」はグラフに無い行です。

表 2　六節点の相内 Poincaré の命題の行（$\hbar$ の範囲の「六節点」は $\{0.2, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01, 0.005\}$）

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
[01]	余白の行：余白 $\hbar\rho - 2\hbar\kappa \ge 0.067$（隣と端 $[0, 2.5]^2$）	機	§04 表 1。float64 ＋外向きの幅（相対 10^{-10}・10^{-12}）、IEEE の正しい丸めを前提、尾は上界で覆う	六節点	`T1_margin_six_nodes`（数）・`T1_node_margin`（仮定：区間の出力）
[02]	傾けの二次 Taylor の補題（傾けの二次の Taylor と Hölder の剰余、中心は任意）	初	§04（Taylor の剰余・Hölder の不等式）	$\hbar$ に依らない	—
[03]	一次元の Poincaré 定数の挟み $B \le C_P \le 4B$（Muckenhoupt）	典	Barthe–Roberto の定理 1・2 の再述で言明を確認	$\hbar$ に依らない	—
[04]	$e(c,t)$ の単調性と $\hbar\kappa \ge 0$（MTP_2 の相関不等式）	典	Karlin–Rinott の命題 2.1（Fallat ほかの命題 3.5 の再述で確認）	$\hbar$ に依らない	—
[05]	尾の補題に使う Holley の比較の連続版	仮	§04（原典の定理番号は未確認）	六節点	—
[06]	Helffer の判定の Poincaré 版（粗い側の鎖の隙間 $\ge \lambda$）	典	Helffer の判定の Poincaré 版（Ledoux の命題 3.1。原典の本文で確認）	$\hbar$ に依らない	—

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
[14]	環の Gershgorin の形	初	§03 (6)	$\hbar$ に依らない	`ring_gershgorin`（仮定：$\kappa \geq 0$）
[11]	最近接の鎖の行：残したサイトの周辺は最近接の鎖	初	§03（Markov 性）	$\hbar$ に依らない	—
[07]	二つのサイトの隙間の行：$\lambda_c \geq 1.3 \times 10^{-4}$（端 $[0,4]^2$）	機	§03。区間演算（多倍長の区間と float64＋外向きの幅）	$(0, 0.2]$	—
[08]	二つのサイトの隙間の行の箱の被覆に使う Poincaré–Miranda の定理	仮	原典の言明は未確認（書誌だけ）	$(0, 0.2]$	—
[15]	入れ子：小さな橋 $\rho_f = 0.922$（Bakry–Émery）	初	§03（曲率の下界。Bakry–Émery は Kolesnikov–Milman の定理 1.2 で典）	$\hbar$ に依らない	—
[09]	入れ子：交差 $\kappa_f = 1.98$（交差の行でも使う。Brascamp–Lieb）	典	Brascamp–Lieb の定理 4.1（再述で確認）・凸な領域は Kolesnikov–Milman	$\hbar$ に依らない	—
[16]	交差の行：$v/\hbar \leq 5888$ ・$\lambda_S \geq 2.3 \times 10^{-5}$ の算術	初	§03	$(0, 0.2]$	`T4_paper_numeric`（仮定：$\lambda_c \geq 1.3 \times 10^{-4}$）
[12]	分散の分解の行：分散の分解 (3)	初	§03	$\hbar$ に依らない	—
[10]	分散の分解の行：使う関数の正則性・稠密性	仮	§03（原典で確かめていない）	—	—
[17]	率の代数 (7) $\Longrightarrow C_P \leq \varepsilon/t$	初	§03	$\hbar$ に依らない	`H1_assembly`（仮定は §03 の名前つきの七つ）
[18]	$C \leq 1.6 \times 10^{10}$	初	§04（[01]・[07]・[16] の値からの算術）	六節点	`H1_rate_paper_six_nodes`（数）
—	$C \leq 658$	読	§04（$\lambda_c = 0.57$ は浮動小数）	六節点	`H1_rate_numeric_six_nodes`（数）
—	余白の行（端が大きい側）：隣と端 > 2.5	仮	§07	—	—
—	余白の行（節点の間）：節点の間の $\hbar$	仮	§06（方法と費用）	$(0.005, 0.2)$ の節点の外	—

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
—	余白の行（小さい $\hbar$）：$\hbar < 0.005$	仮	§07	—	—
—	二つのサイトの隙間の行（端が大きい側）：二つのサイトの端 > 4	仮	§07	—	—
—	切れ端の局所 Poincaré の仮定：環から切れ端（端の値つき）へ	仮	§07（判定の鎖の版への写しは読み）	—	—

表 2 の「機」の行 [01]・[07] は、計算した節点と範囲の中の不等式です。範囲の外の $\hbar$ と端の値については何も言わず、それを受け持つのが表 2 の終わりの五つの「仮」の行（番号の欄が「—」）です。

06

節点の間の $\hbar$ — 方法と費用

六節点の相内 Poincaré の命題は六つの点の文です。相内の局所 Poincaré の条件は $\hbar$ の連続体の文なので、点の間を埋める必要があります。この節は、そのための方法と、方法を一つの部分区間で試した結果と、全域の費用の見積もりを述べます。

(a) β を傾けの三つ目の向きに。 $\beta = 1/\hbar$ は測度 $e^{-\beta S}$ に重みの指数として入るだけなので、$\hbar$ の区間 $[\hbar_1, \hbar_2]$ を β の区間 $[\beta_{\mathrm{lo}}, \beta_{\mathrm{hi}}]$ と見て、傾けの二次 Taylor の補題の端の値の二つの向きの傾けに、三つ目の向き（観測量 $-S$）を足します。余白 (6) の中で β が入る所は六つ（重み・傾けの幅・前因子・求積の刻み・尾・単調性の帯）で、どれも区間のどちらの端で最悪になるかが決まります 初 。一歩の比 $r = \beta_{\mathrm{hi}}/\beta_{\mathrm{lo}}$ の目安は、作用の揺らぎ $\mathrm{Var}(\beta S)$（橋の自由度のほぼ半分、$11/2$ の近く 読 ）から $r \approx 1.17$ で、$\hbar \in [0.005, 0.2]$ は 24 の部分区間で覆えます 初 （$0.2/1.17^{24} \le 0.005$） Lean `nodes_reach_117`（仮定なし・数）。

(b) 弦の形は壊れる。 端の値 (a, b) を止めると $f(\beta) = \hbar\kappa(a, b; 1/\beta)$ は β について滑らかで、二階微分の下界 $f'' \ge -C$ から弦の上界

$$f(\beta) \;\le\; \max\bigl(K2(\beta_{\mathrm{lo}}), K2(\beta_{\mathrm{hi}})\bigr) + \frac{(\beta_{\mathrm{hi}} - \beta_{\mathrm{lo}})^2}{8}\,\sup|f''| \tag{9}$$

が出ます 初 Lean `chord_beta_upper`（仮定：$f \in C^2$・$f'' \ge -C$・$0 \le C$・$\beta_{\mathrm{lo}} \le \beta_{\mathrm{hi}}$・端の上界）。ところが f'' は連結したキュムラントで、絶対値の積（Hölder）で押さえると真の値の 5×10^3〜1.8×10^6 倍になり 読 、$r = 1.17$ では剰余が 0.25〜0.64 と、許される量を大きく超えます Lean `holder_r117_exceeds`（数）。

(c) 段ごとの型（区間で $\hbar$ を持つ型）。規格化しない積分 $J_X(\beta) = \int X e^{-\beta H} dx$（$X \geq 0$ は端の観測量の積の重み）を β の三点で求め、二次式で補間します。補間の誤差は $|\omega(\tau)|/6 \cdot \sup|J_X'''|$、$\max|\omega| = 2\Delta^3/(3\sqrt{3})$ です 初 （ω は三つの節点で 0 になる三次式。$g(t) = J_X(t) - p_X(t) - K\omega(t)$ が補間の三点と τ の四点で 0 になるように K を選ぶと、Rolle の定理を三回使って g''' が零点を持ち、$K = J_X'''(\eta)/6$）。三階微分は $|y|^3 \leq c_3(\lambda_+)e^{\lambda_+ y} + c_3(\lambda_-)e^{-\lambda_- y}$ と J_X の対数凸性で、ずらした四つの β の積分の端の最大で押さえます 初 。β の区間をさらに小片に割ると、各小片の上で期待値は一次分数の形になり、その値は小片の両端の値の間にあるので、区間の hull で包めます 初 Lean `mobius_between`（仮定：分母が小片の両端で正）・`lebesgue_le`（仮定：$|u| \leq 1$）・`cube_le_exp_split`（仮定：$\lambda_\pm > 0$）。この型は単調性を一度も使いません。剰余は打ち消しを要しない生の積分の三次の量で入り、(b) の Hölder の損は現れません。

(d) 一つの部分区間での試し。$\hbar \in [0.008547, 0.01]$（$r = 1.17$）、端の値の長方形 $[0, 0.18]^2$ で (c) を区間演算で走らせた結果が表 3 です 機 （表 1 と同じ実装の前提）。

機 表 3　一つの部分区間の試し（$\hbar \in [0.008547, 0.01]$・長方形 $[0, 0.18]^2$・最大の箱の値）

量	値	読み方
点 $\hbar = 0.01$ の上界（照合）	`0.18996`	表 1 の計算と五桁で一致
部分区間の上界（剰余を含む）	`0.23638`	点の上界からの膨らみ $+0.0464$
剰余の分	`0.00968`	一様な取り分 0.0335 の内
膨らみの内訳	−	節点の上界が β とともに増える分 48%・補間と小片の hull 31%・剰余 21%

取り分。$\hbar = 0.01$ の部分区間で要るのは、全ての箱で「点の上界＋膨らみ $\leq \hbar\rho/2 = 0.4335$」です。全ての箱に同じ量を許すと、最悪の箱（上界 0.39996）が決める一様な取り分は $0.4335 - 0.39996 \approx 0.0335$ で、表 3 の膨らみ 0.0464 はこれを超えます。一方、表 3 の長方形の中の箱の取り分は $0.4335 - 0.19 \approx 0.24$ で、その内に入ります。

律速。剰余ではなく、節点の上界そのものが β とともに増える分（求積の幅が β で広がる）が律速です。最悪の箱の上界 0.39996 は大半が求積の幅で、同じ箱の浮動小数の値は 0.0076 です 読 。この箱を含む帯を細かい求積で計算し直すと、箱の上界は 0.0751 に下がりますが 機 、全域の最大は 0.39971 にしか下がりません。上界が 0.19 を超える箱が、端の値の正方形の四辺に沿った額縁に約 3.2 万個、粗い設定のまま残っているからです。

費用。全域 $\hbar \in [0.005, 0.2]$ の見積もりが表 4 です（一コアの計算時間・どれもまだ走らせていない見積もり）。部分区間一つの費用は点の計算の約 3.4 倍（表 3 の試しの実測）、$\hbar$ が小さいほど一点の費用は大きくなります。

表 4　節点の間を埋める費用の見積もり（$\hbar\kappa$ の側。$\hbar\rho$ の側は別に要る）

道	前提	r	部分区間	計算時間
額縁を細かい求積で計算し直してから	額縁の点の上界が 0.318 以下に下がること（未計算）	1.17	24	約 23〜39 時間（＋額縁の計算し直し 30〜50 分）
点の上界は今のまま（膨らみが足し算で効く模型）	表 3 の膨らみが箱によらない	1.12	33	約 22 時間
点の上界は今のまま（膨らみが掛け算で効く模型）	表 3 の比 1.363 が箱によらない	1.04	94	約 63 時間

二つの模型のどちらが正しいかは、一つの長方形の試しからは決まりません。額縁を先に計算し直す道は、額縁の上界が 0.318 を割れば模型によらず $r = 1.17$ で通るので、費用の見積もりの幅も狭めます。$\hbar\rho$ の側（一次元の測度・自由度 23）は、同じ目安で $r \approx 1.12$・33 の部分区間と読まれます 読 。

正確には、表 3 は一つの部分区間の一つの長方形の結果で、その部分区間を閉じたことにはなりません。部分区間を閉じるには、その部分区間で全ての長方形を (c) の型で計算する必要があります。

07

残りの行 — 別の方法が要るもの

六節点の相内 Poincaré の命題から相内の局所 Poincaré の条件へ、また箱の中で使う切れ端の局所 Poincaré の仮定へ進むのに残る行を、表 5 に並べます。費用の欄は、見積もりがあるものだけに書きます。

表 5　相内の局所 Poincaré の条件の残りの行

行	中身	いまの状態	要るもの
節点の間の残件	節点の間の $\hbar \in (0.005, 0.2)$	§06 の方法の型ができ、一つの部分区間の一つの長方形で試した	額縁の計算し直しと、全ての部分区間・全ての長方形の計算（表 4）。$\hbar\rho$ の側も同じ型で
小さい $\hbar$ の残件	$\hbar < 0.005$	計算機援用の型は使えない：比 r を一定にすると部分区間の数 $\ln(0.005/\hbar)/\ln r$ が $\hbar \to 0$ で無限に増え、一つの費用も増える	$\hbar \to 0$ の漸近で一様な議論（別の方法）
大きい端の値の残件	隣と端の値 > 2.5	単調性で覆う道は閉じている：FKG が与えるのは尤度比の順序で、隙間は単調にならない（隙間の非単調の命題）。また $e(c,t)$ は c について有界でない（$c^{3^{-11}}$ の速さで増える）	大きい隣で一次元の U が一様に凸になることの紙の議論。有限の範囲 $[2.5, 4]$ は $\hbar \geq 0.05$ なら同じ計算で覆える見込み

行	中身	いまの状態	要るもの
定数の鋭さの残件	定数の鋭さ	紙の入力で 1.6×10^{10}、数値の入力で 658。差は二つのサイトの隙間 λ_c の紙の値の弱さが担う	二つのサイトの隙間の行の組み直し。相内の局所 Poincaré の条件の言明には定数の大きさは要らない（$\hbar$ に依らないことだけが要る）
切れ端の版の残件	切れ端の版（切れ端の局所 Poincaré の仮定）	六節点の相内 Poincaré の命題は環の言明。箱の中では両端の値を持つ切れ端が要る	判定の鎖の版（環より隣が少ない）への写し。いまは読みの水準
書誌の残件	引いた定理の書誌	Muckenhoupt・FKG は二次資料の再述で言明を確認、Ledoux は原典で確認。Holley の連続版の定理番号と Poincaré–Miranda の定理の原典は未確認	原典の取得。取れなければ「仮」のまま（表 2 の [05]・[08]）

隙間の非単調の命題は否定の型の小さな命題です。二点 $\{0,1\}$ の測度 $(1-p,p)$ の分散 $p(1-p)$ は、p を尤度比の順序で上げても単調ではありません（$3/16 < 1/4 > 3/16$） 初 Lean `tilt_variance_not_monotone`（仮定なし・数）。対称な二重井戸を一次で傾けた族でも同じで、FKG だけからは「隙間が隣について単調」は出ません。

08

依存グラフ — 六節点の相内 Poincaré の命題

表 2 の行を、23-05 §07 と同じ書式で節点の一覧にします。前提の番号は結論の番号より必ず小さく置きます。

```
[01] 機  余白の行：余白 ≥ 0.067（隣と端 [0,2.5]²）                    ガ
[02] 初  傾けの二次 Taylor の補題（中心は任意）                      ħ に
[03] 典  Muckenhoupt の挟み B ≤ C_P ≤ 4B
[04] 典  MTP₂ の相関不等式（e の単調性・ħκ ≥ 0）                     ħ に
[05] 仮  Holley の比較の連続版（尾の補題）                           六節
[06] 典  Helffer の判定の Poincaré 版（Ledoux の命題 3.1）
[07] 機  二つのサイトの隙間の行：λ_c ≥ 1.3×10⁻⁴（端 [0,4]²）          (0,(
[08] 仮  Poincaré–Miranda の定理
[09] 典  Brascamp–Lieb（交差 κ_f・交差の行）                         ħ
[10] 仮  分散の分解の行：正則性・稠密性                              —
[11] 初  最近接の鎖の行：残したサイトは最近接の鎖                    ħ に依
[12] 初  分散の分解の行：分散の分解 (3) ⟸ [10]                       ħ
[13] 初  余白 λ の連続体の文 ⟸ [01][02][03][04][05]                  六
         Lean T1_margin_six_nodes（数）・T1_node_margin（仮定：区間の出力）
[14] 初  粗い側の隙間 ≥ λ（Gershgorin）⟸ [06][11][13]                六
         Lean ring_gershgorin（仮定：κ ≥ 0）
[15] 初  入れ子 λ_S ≥ 2.3×10⁻⁵ ⟸ [07][08][09]
[16] 初  交差の行：v/ħ ≤ 5888 ⟸ [07][09]
         Lean T4_paper_numeric（仮定：λ_c ≥ 1.3×10⁻⁴）
[17] 初  率の代数 C_P ≤ ε/t ⟸ [12][14][15][16]
         Lean H1_assembly（仮定：hT5・hFine・hLedoux・hT1・0 < λ・hT4・率
[18] 初  六節点の相内 Poincaré の命題：C ≤ 1.6×10¹⁰ ⟸ [17]           六
         Lean H1_rate_paper_six_nodes（数）
```

どの「⟸」の行でも右の番号が左より小さいので、円はありません。葉のうち「仮」は [05][08][10]、「機」は [01][07] です。数値の入力による $C \le 658$（表 2 の数値の入力の行）は [17] の代数に読みの値を入れたもので、このグラフの結論 [18] には入りません。表 2 の終わりの五つの行は六節点の相内 Poincaré の命題の前提ではなく、六節点の相内 Poincaré の命題から相内の局所 Poincaré の条件と切れ端の局所 Poincaré の仮定へ進むための行で、統合のグラフ（23-12）で [18] と相内の局所 Poincaré の条件の節点の間に入ります。

この章の組み立ては、拡散型緩和時間の仮定を取っ掛かりとした一段目の中の一つの条件の扱い方です。別の視点は第 24 部で扱います。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
機 六つの節点で、隣と端 $[0, 2.5]^2$ の全てについて余白 ≥ 0.067（表 1、実装の前提つき）。二つのサイトの隙間 $\lambda_c \geq 1.3 \times 10^{-4}$	節点の間の $\hbar$、$\hbar < 0.005$、$\hbar > 0.2$。隣と端 > 2.5
初 二尺度の組み立ての代数と率の条件 (7)、六節点の相内 Poincaré の命題の定数 1.6×10^{10}（表 2 の仮定の行の上） Lean （仮定は表 2）	相内の局所 Poincaré の条件そのもの（$\hbar$ の連続体で一様な文）。切れ端の版（切れ端の局所 Poincaré の仮定）
典 Muckenhoupt の挟み・MTP_2 の相関不等式・Helffer の判定の Poincaré 版・Bakry–Émery・Brascamp–Lieb	Holley の比較の連続版と Poincaré–Miranda の定理の原典での確認（表 2 の [05]・[08] は仮）
読 数値の入力での $C \leq 658$、壁つきの相の自己相関の時間、節点の間の一歩の比の目安	これらを上界に使うこと
節点の間を埋める方法の型と、一つの部分区間の一つの長方形の試し（表 3）・費用の見積もり（表 4）	部分区間を一つでも閉じたこと。表 4 の時間は見積もりで、走らせた時間ではない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
一次元の Poincaré 定数の挟み	典	B. Muckenhoupt, Studia Math. 44 (1972) 31–38（書誌）。言明は F. Barthe, C. Roberto, Potential Anal. 29 (2008) 167–193, arXiv:math/0612026 の定理 1・2 で確認。
MTP_2 の相関不等式・Holley の比較	典・仮	S. Karlin, Y. Rinott, J. Multivariate Anal. 10 (1980) 467–498 の命題 2.1（S. Fallat ほか, Ann. Statist. 45 (2017), arXiv:1510.01290 の命題 3.5 の再述で確認）。R. Holley, CMP 36 (1974) 227–231（連続版の定理番号は未確認）。
Helffer の判定の Poincaré 版	典	M. Ledoux, Sém. Probab. XXXV, LNM 1755 (2001) 167–194 のHelffer の判定の Poincaré 版（本文で確認）。原典 B. Helffer, Ann. IHP Probab. Statist. 35 (1999) 483–508。
Bakry–Émery・Brascamp–Lieb	典	D. Bakry, M. Émery, LNM 1123 (1985)；H. J. Brascamp, E. H. Lieb, J. Funct. Anal. 22 (1976) 366–389；凸な領域は A. V. Kolesnikov, E. Milman, J. Geom. Anal. 27 (2017), arXiv:1310.2526 の定理 1.2。
Poincaré–Miranda の定理	仮	W. Kulpa, Amer. Math. Monthly 104 (1997) 545–550（書誌だけ。言明は未確認）。
表 1・表 3 の区間の値	機	記録の区間演算（float64＋外向きの幅、表 2 の [01] の行の前提）。独立な経路（台形則・別の刻み）の浮動小数の値が、各長方形の無作為の箱と最大の箱で全て上界の下にあることを照合。
表 4 の費用	見積もり	表 3 の試しの実測（部分区間一つが点の約 3.4 倍）と、節点ごとの計算時間の $\hbar$ 依存の当てはめからの見積もり。

もの	種別	出典・道具
組み立ての代数・数	初・Lean	定理 `H1_assembly`・`ring_gershgorin`・`T1_margin_six_nodes`・`T1_node_margin`・`T4_paper_numeric`・`H1_rate_paper_six_nodes`・`H1_rate_numeric_six_nodes`・`min_of_two_upper`・`symm_upper`・`tilt_variance_not_monotone`・`chord_beta_upper`・`holder_r117_exceeds`・`nodes_reach_117`・`mobius_between`・`lebesgue_le`・`cube_le_exp_split`（仮定は本文と表 2 の各行）。言明の一覧は 23-13。

この章で使った語 — 相（キンクの無い相）・残したサイト・橋・入れ子・Helffer の判定・余白・節点・部分区間・取り分・膨らみ・額縁・切れ端の版（切れ端の局所 Poincaré の仮定）・計算機援用・区間演算。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-07 鞍点の管の条件の地図 — 七つの道筋と環の継ぎ目 — 鞍点の族に沿う輸送（鞍点の管の条件）を七つの道筋に割った地図と、環の継ぎ目（外の鎖は窓の全体で閉じ、内の鎖は有限の係数）を一枚にする。

2026-10-09 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 23 部 一本目の道（前半）— 時間の方向から 鞍点の管の条件・七つの道筋・環の継ぎ目 · Kiichi, Shiori and Rin

鞍点の管の条件の地図 — 七つの道筋と環の継ぎ目

この章は本書の検討です。§02 は未解決の地図、§07 は案内です。

この章で分かること — 鞍点の管の条件（平らな鞍点の族に沿う輸送）を、七つの道筋に割った地図として一枚にします。道筋ごとに、何を示そうとしているか・いまの分類（初・典・機・読・仮）・残件・詳しく扱う章を一行で並べます。後半では、周期的な経路の上でキンクと反キンクが出会う所（環の継ぎ目）を扱います。継ぎ目は頂上の台地そのもので、外の鎖は計算した $\hbar$ の窓の全体で計算機援用の不等式になり、内の鎖は 1 を越える有限の係数で残ります。

前提となる章 — 23-05 §03（四つの条件の言明）・23-05 §04 箱の中の段（鞍点の管の条件が箱の中に入る場所）・23-04 §06（台地）・23-00 §01（五分類の札）。

先に言うこと — 水準は〔三〕です。この部は拡散型緩和時間の仮定（揺らぎの均される時間が相関長の二乗の冪で伸びる、23-01）を検討の軸に置いています。拡散型緩和時間の仮定は、問題文の量を格子で計算でき機械検査つきで進められる量に言い換えたもので、鞍点の管の条件はその一段目を支える四つの柱の一つです。この章は鞍点の管の条件が閉じたことを述べる章ではなく、どの道筋がどこまで来て何が残っているかを一枚にする章です。別の視点は第 24 部で扱います。

この章の順序

1. 鞍点の管の条件の言明と二つの場所 — 箱の割り方で鞍点の管の条件に残る行、橋の管と環の継ぎ目
2. 七つの道筋の地図 — 一行ずつの分類と残件（表 1）
3. 環の継ぎ目 — 頂上の台地・外の鎖と内の鎖（表 2）
4. 窓の定数の数値の道筋の残る数値と費用 — 本数と時間の見積もり
5. 五分類の表 — 鞍点の管の条件の行（表 4）
6. 依存グラフ — 番号で円が無いことを確かめる
7. 23-08〜23-11 への案内

01

鞍点の管の条件の言明と二つの場所

鞍点の管の条件の言明は 23-05 §03 のとおりです。写しておきます。

鞍点の管の条件 — 平らな鞍点の族に沿う輸送（23-05 の写し）

測度：キンクと反キンクの対の族（対の中心 X と間隔 ℓ を径数とし、作用がほとんど平らな鞍点の族）の周りの管に入る配位の条件つきの測度。**定数**：その族に沿って谷から谷へ移る平均差の輸送の定数と、管の中の Poincaré 定数。**一様性**：経路のサイトの数（次元）と $\hbar$ に一様。箱の中で使うときは、管の長さ $\le C\xi$ に一様な管の Poincaré（鞍点の管の Poincaré の仮定）と、管の中の芯（頂上の近くにとどまる区間）の Poincaré が芯の長さ k に一様なこと（芯の Poincaré の一様性の仮定）の二つの行になる。

箱の割り方で鞍点の管の条件に残るもの。23-05 の箱の割り方では、鞍点の族に沿う向き（キンクの位置）を遅い変数に取ったので、その向きの縦の輸送は箱の中の隙間の条件の行（キンクの気体の隙間の仮定と交差項の一様性の仮定）が受け持ちます（23-05 §04 の箱の中の段の注）。鞍点の管の条件に残るのは、キンクの配置を止めた後の**管と芯の行**、すなわち鞍点の管の Poincaré の仮定と芯の Poincaré の一様性の仮定です。この章の地図はこの二つの行を支える道具の地図です。

なぜ難しいか。芯 $Q_k = (-x_c, 0)^k$（$x_c = 0.89$、谷 -1 の側から頂上 0 の手前までの箱を k サイト並べたもの）の上では、作用が頂上でほとんど平らで、一サイトの曲率が負になります（§05 の表 4 の頂上の曲率の不足の壁、詳しくは 23-09 §06）。凸性の道具（Bakry–Émery）は芯の全体には当たらず、芯の長さ k は相関長まで伸びるので、定数が k に一様であることを別の手で示す必要があります。

二つの場所 — 橋の管と環の継ぎ目

鞍点の管の条件の行は、経路の形の違う二つの場所で現れます。

- **橋の管**。両端を二つの谷に止めた区間（橋）にキンクが一本ある配位の、キンクの周りの管。芯は管の中で頂上の近くにとどまる区間です。箱の中の鞍点の管の Poincaré の仮定・芯の Poincaré の一様性の仮定はこちらの形です。
- **環の継ぎ目**。周期的な短い経路（環、長さ $T \ll \xi$）にキンクと反キンクが一対ある配位で、対の間隔 ℓ が縮んで二つが出会う所。対が消える直前の配位は頂上の台地そのものです

（§03）。橋の管の議論はキンクが離れていることを使うので、継ぎ目では別の扱いが要ります。

どちらの場所でも、芯の定数を押さえる道具は同じ型です。芯の中のサイトに「谷の側か頂上の側か」の粗い印を付け、ある一サイトの周りの 17 サイトの範囲（サイトの窓 W）の印の周辺の対数 Sobolev 定数 A_W と、窓の外へ伸びる鎖の縮みの比 q を組み合わせます。この「窓の外の鎖」の縮みの条件 $q<1$ が窓の外の鎖の道筋と環の継ぎ目の道筋の外の鎖、A_W の大きさが、窓の定数の数値の道筋・区画の枠組みの道筋・窓の対数 Sobolev の道筋の中心です。サイトの窓 W と、計算機援用で扱う $\hbar$ の範囲（$\hbar$ の窓 $[3\cdot10^{-4},3\cdot10^{-3}]$）は別のものです。「窓の外の鎖」「窓の中の段」の窓はサイトの窓、「窓の全体」「窓の下の端」の窓は $\hbar$ の窓で、紛れるときは「サイトの」を付けます。

02

七つの道筋の地図

鞍点の管の条件の芯の行を閉じるために立てた道筋は七つです。道筋は中身の名で呼びます。表の並べ順は順序や重さを表しません。表 1 の「分類」は 23-00 §01 の五分類の記号で、一つの道筋に二つ以上の分類が混ざるときは主なものから並べます。

表 1　七つの道筋（窓＝$\hbar\in[3\cdot10^{-4},3\cdot10^{-3}]$、三点＝$\hbar=3\cdot10^{-3}/10^{-3}/3\cdot10^{-4}$）

道筋	何を示すか	いまの分類	$\hbar$ の範囲	残件	章
窓の外の鎖の道筋（窓の外の鎖の縮み）	橋の芯で、サイトの窓の外へ伸びる印なしの鎖の Stein の核の比 $q_{\mathrm{free}}<1$	機 $q_{\mathrm{free}}\le 0.998854904$（float64＋外向きの幅・IEEE の正しい丸めを前提・$\hbar$ を区間に・25 の部分区間）	窓の全体	窓の外と $\hbar\to0$ には何も言わない	23-08
窓の定数の数値の道筋（残る数値）	サイトの窓の定数：最小の重み π_*・稀さ Λ・一サイトの Poincaré C_{1D}^{W}・印の動力学の隙間 gap_W・橋の窓の内の鎖の比	読（三点の浮動小数）仮（計算の本数に落とす紙の還元は本に置かない）	三点	区間演算の本数と時間（§04）。積の形の床のため走らせない判断	本章 §04
区画の枠組みの道筋	区画の和の五つの段（区画の和・Gibbs の分解・成分ごとの局所化・体積の局所性・区画の合成）と閉じる条件 $b(A_Wc_H+D_W+\ln2)<\kappa\ell_{\min}$	初（五段の証明を 23-09 に置く）。入力は 仮 ・ 読	段は $\hbar$ に依らない／入力は三点	入力（窓の周辺の対数 Sobolev の入力・橋の体積の局所性の入力・E_m・欠陥の行・正則性）	23-09 §02

道筋	何を示すか	いまの分類	$\hbar$ の範囲	残件	章
区画の入力の道筋（小さな仮定）	区画の入力の小さな仮定（十一の行。橋の体積の局所性の入力・芯の対数 Sobolev の一様性の仮定・縦の項・正則性のほか、中身の一行をまだ書いていない七つの行）	仮（一覧だけ・未着手）	—	各行	本章 §05
窓の対数 Sobolev の道筋（残る一命題）	窓の対数 Sobolev の閾の命題：サイトの窓の周辺の対数 Sobolev 定数が要る値 $A_{\max}(\hbar)$ の内	仮。三本の筋（成分ごと・スカラー・Feynman–Kac）はどれも閉じていない	窓（スカラーの筋の命題は $[3\cdot 10^{-4}, 10^{-3}]$）	三本の筋の残る一歩	23-09 §05
環の継ぎ目の道筋	環の上の芯：外の鎖の縮みと内の鎖の係数	外：機（ピン ≤ 0・継ぎ目の極限の仮定・端の値が分布で与えられる仮定は仮）／内：読 $q_{\mathrm{in}} \approx 1.24$–$1.28$	窓	継ぎ目の極限の仮定・端の値が分布で与えられる仮定・台地で条件づけた比・境の段・内の鎖の区間化	本章 §03
$\hbar$ の範囲の道筋	窓の外と $\hbar \to 0$	この部の対象の外	—	紙の漸近	23-12・23-15

表 1 の読み方を三つ添えます。

(a) 計算機援用の行は二つだけ。窓の外の鎖の道筋と環の継ぎ目の道筋の外の鎖です。どちらも「計算した $\hbar$ の窓の中で、区間演算の出力の表を前提に不等式が成り立つ」という意味の閉じ方で、窓の外と $\hbar \to 0$ については何も言いません（23-08）。

(b) 窓の外の鎖の道筋が閉じても鞍点の管の条件は閉じない。窓の外の鎖の道筋の比 q_{free} は、サイトの窓の対数 Sobolev 定数 A_W の上界の一つの因子 $S_W = 1 + 2\big(16 + 1/(1 - q_{\mathrm{free}})\big)$ に入るだけです（§06 の依存グラフの [12]）。いまの上界の組み立てでは A_W の上界は要る値の外にあり（17 サイトの窓の因子の積の形で 4〜5 桁、3 サイトの窓で要る側を上げた形でも 29〜74 倍、23-09 §03）、残る一命題（窓の対数 Sobolev の道筋）は別の筋で攻めています。

(c) $\hbar$ の範囲の道筋は対象の外と決めた。二重井戸の緩和時間の冪の言明は $\hbar \to 0$ の言明なので、最終的には二重井戸の四条件を $\hbar \to 0$ の漸近で言う必要があり、固定した窓の計算機援用だけでは届きません。窓の外は紙の漸近が要ります。この部では、窓の中の行の分類を確かめることを先にし、揃え方は 23-12・23-15 で述べます。

```
03
```

環の継ぎ目 — 頂上の台地と、外の鎖・内の鎖

環は長さ $T \ll \xi$ の周期的な経路で、キンクと反キンクが一対あり、負の側にいる弧の長さを ℓ とします。23-05 §02 (c) の縮約した台地の模型は、この ℓ だけを残したものでした。継ぎ目は ℓ が小さくなって対が消える所です。

継ぎ目は頂上の台地そのもの

負の弧の長さを ℓ に固定した連続の最小作用 $S(\ell)$ は、$\ell \to 0^{+}$ で 0 ではなく S_0 に近づきます（経路は頂上に触れて戻る）。$\ell \le \pi\sqrt{2}$ では最小の配位はキンクを持たず、頂上 0 の上に平らに乗る台地で、作用は $S_0 + \ell/8$ です。$\ell > \pi\sqrt{2}$ で窪みが生じ、作用は $2S_0$ に近づきます（$2S_0 - S \approx 8e^{-\ell}$）仮 （連続の変分の議論と格子の最小の浮動小数の照合。証明は本に置かない）。格子（$\varepsilon = \frac{1}{2}$）でも、負の側の長さ m サイトの最小は $m \le 9$ で $S_{\mathrm{lat}}(1) + (m-1)/16$ に乗ります 読 （浮動小数の最小、差 $\le 5 \times 10^{-11}$）。**継ぎ目の配位は、芯（頂上の近くにとどまる区間）そのもの**で、橋の管の芯と同じ難しさがここに現れます。

ℓ の向きは易しい。ℓ だけの一次元の輸送は、継ぎ目まで含めて押さえられます。継ぎ目の帯・襟・台地のそれぞれで、一次元の Poincaré 定数を 4 倍以内で挟む Muckenhoupt の量が $64 S_0 \hbar \cdot L_0^2/(8D) \cdot T^2/D$ 以下になり、代数は機械検査が通っています 仮 （一次元の模型の上の紙の評価。模型への縮約そのものが仮定）。難しいのは座標の側で、継ぎ目では符号の変わる回数が遅い変数になりません。そこで符号に依らない区画、すなわち $|z| < \theta$（$\theta = \frac{1}{2}$）のサイトの連なり（**塊**）を単位に畳みます。他を止めた k サイトの塊の作用は、$V'' \ge -\frac{1}{2}$ から $k \le 7$ で凸です 初 （三重対角の行列 $\mathrm{tridiag}(-2, 4+w, -2)$、$w \ge -\frac{1}{4}$ の最小固有値 $8\sin^2 \frac{\pi}{2(k+1)} - \frac{1}{4}$ は $k \le 7$ で正）。

外の鎖と内の鎖

環のサイトの窓 W（17 サイト）には、塊が一つ（長さ $k \le 7$、無くてもよい）・窓の他のサイトは谷の側・窓の外は符号の決まった側、という印を付けます。窓の対数 Sobolev 定数の組み立てには、二種類の鎖の縮みの比が入ります。

- **外の鎖**：サイトの窓の外へ伸びる鎖。符号の決まった領域 $[0, \infty)$ を動き、鏡像 $x \mapsto -x$ で $(-\infty, 0]$ に写すと、橋の芯の外の鎖と同じ型の鎖になります。作用は鏡像で不変ですが 初 （V が偶関数）Lean `chain_action_reflect` （仮定なし。測度の像と Stein の核の反転は Lean の外）、橋の鎖と同じ鎖ではありません。橋の箱には下の壁 $-x_c$ があり、環の外の鎖には無いからです。
- **内の鎖**：サイトの窓の中の段。段ごとに箱が「谷の側」「塊」と替わり、塊の箱 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ は 0 を跨ぎます。

二つの鎖の違いは、壁の角で読めます。壁の位置 b での古典の角の比は $r(b) = \Delta/(\Delta - \varepsilon^2 V'(b))$ で、$V'(b) = 0$ の壁（外の鎖の壁 0）でちょうど 1、力が箱の外へ押す壁で 1 を越えます 初 （比の符号の代数） Lean `corner_eq_one` （仮定：$\Delta \neq 0$）・`corner_gt_one` （仮定：$0 < c < \Delta$）。比の式そのものは包絡線の計算から来ていて、その正則性は 仮 です。塊の上の壁 $+\frac{1}{2}$ では $\varepsilon^2 V'(\frac{1}{2}) = -3/64$ で、力が壁へ向かうので角は 1 を越えます（孤立した壁の古典の値 1.2857）。

表 2　環の継ぎ目の外と内（三つ組は $\hbar = 3\cdot 10^{-3}/10^{-3}/3\cdot 10^{-4}$ の順）

量	値	分類	条件
外の鎖（条件づけない形） q_{out}	窓の全ての $\hbar$ で ≤ 0.998888530（最大は窓の下の端、上の半分 $[10^{-3}, 3\cdot 10^{-3}]$ では ≤ 0.996606914）	機	全てのピン $p \le 0$・評価点 $s \le 0$・端 $z_0 = -1$。継ぎ目の極限の仮定・端の値が分布で与えられる仮定・正則性は 仮 。float64＋外向きの幅・IEEE の正しい丸めを前提
外の鎖の深い側（ピン $p < -3$）	≤ 0.592898559	機	同上（尾の分散の上界 ≤ 0.357608022 を使う）
境の段（ピン $\in (0, \frac{1}{2})$）	≈ 1.004–1.045（四点 $\hbar = 3\cdot 10^{-3}/10^{-3}/(3/9100)/3\cdot 10^{-4}$ で $1.0043/1.0282/1.0436/1.0446$）	読	塊が窓の端に触れる配位だけに現れる有限の段。上の外の鎖の行はこのピンを覆わない
内の鎖 q_{in}	$1.2707/1.2765/1.2421$（三つ組の順。四点目の $\hbar = 3/9100 \approx 3.3\cdot 10^{-4}$ で 1.2449）	読	浮動小数の転送・格子を細かくすると上がる向き。律速は塊の中の段でピンが塊の遠い壁の際
有限の係数 $\bar{q} = \max(q_{\mathrm{in}}, 1)$	$\bar{q} \approx 1.3$、$\bar{q}^{16} \approx 27$–67（S_W・T_W の各々に掛かる。積の A_W には $\bar{q}^{32}$）	読	$\bar{q} = 1$ は立たない
$S_W = 1 + 2\bar{q}^{16}\big(16 + 1/(1 - q_{\mathrm{out}})\big)$	≤ 122745（$\bar{q} = 1$ なら ≤ 1833）	初（算術）	入力 $q_{\mathrm{in}} \le 13/10$ は 読 、q_{out} は 機 。 Lean `sw_inner_le` （仮定：$q_{\mathrm{in}} \le 13/10$・$q_{\mathrm{out}} \le 0.998888530$）

表 2 を一行で言えば、**外は閉じ（窓の中・ピン ≤ 0 の条件つき）、内は有限の係数**です。ここでの「閉じ」は、計算した $\hbar$ の窓の中で外の鎖の縮みが計算機援用の不等式になったという意味で、環の上で鞍点の管の条件が閉じた意味ではありません。外の鎖の結果は、箱に条件づけた鎖で一度閉じ（上界 0.998888525）、その後に条件づけない鎖へ広げた（尾の項を区間演算の剰余に入れ、深いピンは閉じた形の上界で覆った）ものです。広げたことで、条件づけた鎖を元の測度へ戻すための四つの仮定の行が要らなくなりました。

内の鎖が 1 を越える理由と、区間化の費用。内の鎖の律速は、塊の箱の遠い壁の際にピンがある段で、上の外へ押す角そのものです（古典の値 1.2857 に近い）。外の鎖の区間の機械は、右の壁が 0 で $V'(0) = 0$・箱が一つ・ピンと格子が同じ、という前提の上に組まれていて、入力を差し替えるだけでは内の鎖に使えません。内の鎖を区間演算に載せる費用の見積もりは、紙

1〜2 段＋台本 1〜2 本＋約 50 本・約 42 時間（一コア）で、得られるのは有限の係数 $\bar{q} \approx 1.3$ の上界だけです。この係数は A_W に $\bar{q}^{32} \approx 10^{3.6}$ 倍で入るので、区画の枠組みの閉じる条件（23-09 §02）を満たす道にはなりません。

環の継ぎ目に残る行。継ぎ目の極限の仮定（段を限りなく重ねた極限が各 $\hbar$ で不動点の囲いに入ること）・端の値が分布で与えられる仮定（鎖の端の値が一点でなく分布で与えられる場合）・台地で条件づけた比（台地の長さで条件づけた比）・境の段・内の鎖の区間化。どれも 仮 か 読 のままです。

04

窓の定数の数値の道筋 — 残る数値と費用

サイトの窓の対数 Sobolev 定数の上界は、いまの組み立て（窓の対数 Sobolev の積の上界）では因子の積 $A = c_W \cdot C_{\mathrm{1D}}^{W} \cdot S_W \cdot T_W$ の形です。c_W は印の周辺の測度の定数で、最小の重み π_* と印の動力学の隙間 gap_W から作り、S_W・T_W は鎖の縮みの比から作ります。窓の定数の数値の道筋は、因子の値を三点の浮動小数から区間演算へ移すための紙の還元と本数の見積もりです。

表 3　窓の定数の数値の道筋の数値と、区間演算へ移す本数（本数と時間は見積もりで、まだ一本も走らせていない）

量	紙の還元（本に置かない）	本数の見積もり	いまの値
最小の重み π_*	印の周辺の測度は MTP_2 で、最小の重みを与える列は端の列（全て谷の側）に寄る（Karlin–Rinott の保存定理 典 、二次資料の再述で言明を確認）	2〜3 本	読 三点で全て谷の側が最小
稀さ Λ	単調な関数の境界値についての sup は端の一本の鎖で取れる（MTP_2 の関連性）	1〜2 本	読
一サイトの Poincaré C_{1D}^{W}	Muckenhoupt の判定量 典 （二次資料の再述で確認）を境界値のセルごとに	約 20 本	読 ≤ 0.66 の桁
隙間 gap_W	一つの印が界面の相互作用を遮ることから、流れの混雑度を端の列の鎖で押さえる	4 本	読 0.959–1.000
橋の窓の内の鎖の比	Stein の核の比は印の列について単調でない（数え上げた 665 組のうち 300 組前後で破れる）ので、列の型ごとと遠い側の帯に分ける	約 13 本	読 三点で < 1

合計 約 42 本・約 21 時間（一コア）の見積もりです。**この 42 本は走らせない判断にしました。**理由は積の形そのものの床です。$S_W \ge 1 + 2/(1 - q_{\mathrm{free}})$・$T_W \ge |W|$・$c_W \ge \ln\bigl(1/\nu(\sigma_i = \text{谷の側})\bigr) \approx E_U/\hbar$ から、因子の真の値を入れても $A \gtrsim 1.4 \times 10^{4}$–$1.4 \times 10^{6}$ で 読 （見積もり）、区画の枠組みの要る値（23-09 §03、数十〜数百）の数十倍から数万倍の外にあります。区間演算で因子を確かめても、この形のままでは閉じる条件に届きません。窓の定数の数値の道筋の紙の還元（遮蔽・端の列）は、積でない形の上界（窓の対数 Sobolev の道筋の筋）にもそのまま入る道具として残します。

05

五分類の表 — 鞍点の管の条件の行

表 1〜表 3 の行を、五分類の書式で一表にします。分類は一行に一つで、機械検査の欄は分類の外です。行の番号は §06 の依存グラフの節点の番号で、「—」はグラフに無い行です。

表 4　鞍点の管の条件の芯の行（$\hbar$ の範囲の「—」は、どの $\hbar$ でも示されていない仮定の行）

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
[01]	区間演算の前提：IEEE 754 の四則の正しい丸め・和の誤差の上界・自前の指数関数の誤差の上界	仮	23-08 §03	—	—
[02]	継ぎ目の極限の仮定・端の値が分布で与えられる仮定・正則性	仮	§03	—	—
[03]	窓の対数 Sobolev の閾の命題：$A_W < A_{\max}(\hbar)$	仮	窓の対数 Sobolev の道筋・23-09 §03	—	—
[04]	区画の入力の道筋の小さな仮定の全て	仮	表 1	—	—
[05]	窓の対数 Sobolev の積の上界：$A_W \le c_W C_{1\mathrm{D}}^{W} S_W T_W$（積の形）	仮	§04（紙の組み立ては本に置かない）	—	—
[06]	窓の定数の数値の道筋の定数 π_*・Λ・$C_{1\mathrm{D}}^{W}$・gap_W・橋の窓の内の鎖の比	読	表 3（三点の浮動小数）	三点	—
[07]	環の内の鎖 $q_{\mathrm{in}} \approx 1.24\text{–}1.28$	読	表 2（浮動小数の転送・上界ではない）	四点	—
[08]	境の段 $q \approx 1.004\text{–}1.045$	読	表 2	四点	—
[09]	窓の外の鎖の縮みの行：$q_{\mathrm{free}} \le 0.998854904$	機	23-08 §05（前提は区間演算の前提の行）	窓	`win_qfree_window_le_of_interval_table`（仮定：25 の部分区間の区間演算の出力の表）

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
[10]	環の外の鎖 $q_{\mathrm{out}} \le 0.998888530$（ピン ≤ 0）	機	23-08 §06（前提は区間演算の前提の行・継ぎ目の極限の仮定の行）	窓	`unc_window_lt_one_of_table`（仮定：25 の部分区間の区間演算の出力の表）
[11]	区画の枠組みの五つの段	初	23-09 §02（入力は小さな仮定の行・継ぎ目の極限の仮定の行）	$\hbar$ に依らない	`cell_sum_sup`・`comp_close`（仮定は 23-09 の表）
[12]	橋の $S_W \le 1 + 2(16 + 1/(1-q)) \approx 1779.6$	初	等比級数の和（23-08 §02）	窓	—
[13]	環の $S_W \le 122745$	初	表 2（入力の q_{in} は読）	窓	`sw_inner_le`（仮定：$q_{\mathrm{in}} \le 13/10$・$q_{\mathrm{out}} \le 0.998888530$）
[14]	積の形の A_W の値 $\approx 2.5 \times 10^6/5.4 \times 10^6/4.7 \times 10^7$	読	§04（c_W の一点は外挿を含む見積もり）	三点	—
[15]	芯の隙間の k に一様な正の下界（区画の合成の形）	初	23-09 §02（窓の対数 Sobolev の閾の行・区画の枠組みの行の上で）	—	`comp_close`（仮定：Barta・成分ごとの局所化・Bochner の三つの不等式）
—	頂上の一サイトの曲率が 4 に $\frac{1}{4}$ 足りない（共通の壁）	初	23-09 §06	$\hbar$ に依らない	—

表 4 の「機」の二行（[09]・[10]）は、どれも前提の区間演算の前提の行の上の計算機援用で、Lean が確かめたのは「区間演算の出力の表を仮定に置いた組み立て」です（23-08 §08）。「初」の芯の下界の行は、仮定の窓の対数 Sobolev の閾の行の上の代数で、芯の隙間の下界が示されたことを意味しません。

06

依存グラフ — 番号で円が無いことを確かめる

表 4 の行を番号つきの節点にします。**「$\Longleftarrow$」の右の前提の番号は、左の結論の番号より必ず小さく**置きます（この部で共通の書式、23-05 §07）。

```
[01] 仮  区間演算の前提の行（IEEE の正しい丸め・和の誤差・自前の exp）    ħ：—
[02] 仮  継ぎ目の極限の仮定・端の値が分布で与えられる仮定・正則性      ħ：—
[03] 仮  窓の対数 Sobolev の閾の命題：A_W < A_max(ħ)                  ħ：
[04] 仮  区画の入力の小さな仮定                                       ħ：
[05] 仮  窓の対数 Sobolev の積の上界（A_W ≤ c_W·C_1D·S_W·T_W）         ħ
[06] 読  窓の定数の数値の道筋の定数                                   ħ：ヨ
[07] 読  環の内の鎖 q_in ≈ 1.24〜1.28
[08] 読  境の段 q ≈ 1.004〜1.045
[09] 機  窓の外の鎖の縮みの行：q_free ≤ 0.998854904 ⟸ [01]           ħ：
         Lean win_qfree_window_le_of_interval_table（仮定：区間演算の出力
[10] 機  環の外の鎖 q_out ≤ 0.998888530（ピン ≤ 0）⟸ [01][02]
         Lean unc_window_lt_one_of_table（仮定：区間演算の出力の表）
[11] 初  区画の枠組みの五つの段 ⟸ [02][04]                            ħ
         Lean cell_sum_sup・comp_close（仮定は 23-09 の表）
[12] 初  橋の S_W ≤ 1779.6 ⟸ [09]
[13] 初  環の S_W ≤ 122745 ⟸ [07][08][10]
         Lean sw_inner_le（仮定：q_in ≤ 13/10・q_out ≤ 0.998888530）
[14] 読  積の形の A_W ≈ 2.5·10⁶〜4.7·10⁷ ⟸ [05][06][12]
[15] 初  芯の隙間の k に一様な正の下界 ⟸ [03][11]
         Lean comp_close（仮定：Barta・成分ごとの局所化・Bochner の三つの不
[16] 初  23-05 の芯の Poincaré の一様性の仮定の形 ⟸ [02][15]
```

確かめ方。[09] は [01]、[10] は [01][02]、[11] は [02][04]、[12] は [09]、[13] は [07][08][10]、[14] は [05][06][12]、[15] は [03][11]、[16] は [02][15] だけを右に持ち、どの行も右の番号が左より小さいので、円はありません。

このグラフで読むこと。(1) 芯の行 [16] に至る道は [15] を通り、[15] は仮定の行 [03]（窓の対数 Sobolev の道筋の残る一命題）に依ります。(2) 計算機援用の [09][10] は [12][13] を通して積の形の値 [14] に入るだけで、[14] は [03] を満たしません（要る値の外）。つまり**計算機援用の二行は、いまのグラフでは [16] への道の上にありません**。積でない形の上界が [03] を満たしたとき、その上界の中に q の比が入れば、[09][10] は [03] の根拠の一部になります。(3) 読みの行 [06][07][08] は、どれも上界の証明には使っていません。

仮定の行の言明が結論の量を含んでいないことも確かめておきます。結論の量は芯の測度の隙間（[15]）と芯の Poincaré の一様性の仮定の定数（[16]）です。[03] はサイトの窓の印の周辺

の対数 Sobolev 定数、[04] は区画の入力の定数、[05] は積の形の上界の組み立て、[02] は極限と正則性で、どれも芯の隙間そのものを含みません。

07

23-08〜23-11 への案内

この章の後に読む章

1. 23-08 計算機援用とは何か — 窓の外の鎖の道筋と環の継ぎ目の道筋の外の鎖を例に、区間演算が浮動小数の値を不等式に変える仕組みと前提、言わないこと
2. 23-09 区画の枠組みと、窓の対数 Sobolev の道筋の三本の筋 — 区画の枠組みの道筋の五段の証明、要る値 $A_{\max}$ の導出、三本の筋と共通の壁
3. 23-10 迂回策の一覧 — 窓の対数 Sobolev の道筋で試した迂回策と、繰り返し現れた壊れ方の型
4. 23-11 箱への帰着と箱の中の隙間 — 芯の定数 — 芯の定数を箱の側から三段で押さえる組み立て

この部は緩和時間の仮定を検討の軸に置き、鞍点の管の条件はその一段目の柱の一つとして扱っています。別の視点は第 24 部で扱います。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
機 窓 $[3\cdot10^{-4}, 3\cdot10^{-3}]$ の全ての $\hbar$ で $q_{\text{free}} \le 0.998854904$、環の外の鎖（ピン ≤ 0）で $q_{\text{out}} \le 0.998888530$。区間演算の前提の上で	窓の外と $\hbar \to 0$ の縮み。境の段（ピン $\in (0, \frac{1}{2})$）
初 区画の枠組みの五段と、仮定の行（窓の対数 Sobolev の閾の命題）の上の芯の隙間の下界（23-09）。S_W の算術	窓の対数 Sobolev の閾の命題そのもの。したがって芯の Poincaré の一様性の仮定・鞍点の管の Poincaré の仮定と鞍点の管の条件
読 環の内の鎖 $q_{\text{in}} \approx 1.24$–$1.28$、窓の定数の数値の道筋の定数	これらの上界。内の鎖の区間の機械
依存グラフに円が無いこと（番号の規則）	計算機援用の行が鞍点の管の条件の芯の行に届く道（いまのグラフには無い）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
窓の外の鎖の縮み・環の外の鎖	機・Lean	Python の float64 の区間演算（演算ごとに外向きの幅・自前の指数関数）。手順と照合は 23-08 の出典表。Lean は `win_qfree_window_le_of_interval_table`・`unc_window_lt_one_of_table`・`vt_window_of_table`（仮定：区間演算の出力の表）。
MTP_2 の保存	典	S. Karlin, Y. Rinott, J. Multivariate Anal. 10 (1980) 467–498；言明は S. Fallat et al., Ann. Statist. 45 (2017) 1152–1184, arXiv:1510.01290（命題 3.5 で確認）。
Muckenhoupt の判定量	典	B. Muckenhoupt, Studia Math. 44 (1972) 31–38；言明は F. Barthe, C. Roberto, Potential Anal. 29 (2008) 167–193（定理 1・2 で確認）。
環の継ぎ目の台地・塊の凸性・壁の角	仮・初・読	連続の変分の議論と浮動小数の最小（仮・読）、三重対角の最小固有値（初）、角の比の符号（初、`corner_eq_one`・`corner_gt_one`）。
環の内の鎖・境の段	読	浮動小数の転送（格子 $h = 2^{-10}$、2^{-11} で律速の組を検算）。正規の Gauss の鎖で $2/3$ を 3 桁で再現（陽性対照）、壁を外へ押す向きに動かした鎖で > 1.2（陰性対照）。
鏡像	初・Lean	`chain_action_reflect`（作用の各項の対称性）。

この章で使った語 — 道筋・芯・サイトの窓・窓（$\hbar$ の）・窓の外の鎖・Stein の核の比・環・継ぎ目・塊・外の鎖・内の鎖・境の段・壁の角・計算機援用・積の形の床。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-08 計算機援用とは何か — 窓の中の鎖の条件 — 区間演算で浮動小数の計算を不等式の証明に変える仕組みと前提を、窓の外の鎖の縮みの条件を例に説明する。

計算機援用とは何か — 窓の中の鎖の条件

この章は本書の検討です。§01・§03 は既存の知見です。

この章で分かること — この部で「計算機援用」の札（機）が付いた結果が、何を保証し何を保証しないかを読めるようにします。例は、芯の外へ伸びる鎖の縮みの条件 $q < 1$ です。浮動小数の値をそのまま書くのではなく、全ての数を真の値を含む区間で持ち、$\hbar$ そのものも区間にして、計算した $\hbar$ の窓 $[3 \cdot 10^{-4}, 3 \cdot 10^{-3}]$ の全ての点で不等式が成り立つことを確かめる仕組みと、その前提（丸めの規約）を述べます。最後に、計算機援用が「否」を返す例と、窓の外については何も言わないことを確かめます。

前提となる章 — 23-07 §02（窓の外の鎖の道筋と環の継ぎ目の道筋）・23-00 §01（五分類の札）・23-04 §01（経路の測度）。

先に言うこと — 水準は〔二〕〜〔三〕です。§01〜§03 は〔二〕で読めるように書き、§04 以降は〔三〕寄りです。この章で扱う不等式は、拡散型緩和時間の仮定を軸に置いた一段目の組み立ての中の一つの入力で、それ自身は鞍点の管の条件を閉じません（23-07 §06）。

この章の順序

1. 浮動小数の値と、区間で書いた不等式 — 手で確かめられる小さな例
2. 鎖の条件 $q < 1$ が保証すること — Stein の核の比と、影響の幾何級数
3. 区間演算の前提 — 丸めの規約と自前の指数関数
4. $\hbar$ を区間にする — 素朴には壊れる理由と三つの補題
5. 例 1：橋の芯の外の鎖 — 25 の部分区間（表 1）
6. 例 2：環の外の鎖 — 条件づけた鎖から条件づけない鎖へ
7. 照合・対照・事前登録 — 別の実装との再現と、陽性・陰性の対照
8. Lean が確かめたこと — 区間演算の出力の表を仮定に置いた組み立て
9. 計算機援用が「否」を返す例 — 内の鎖と、一次の傾けの部分区間
10. 計算機援用が言わないこと・費用 — 札の読み方（囲み）

01

浮動小数の値と、区間で書いた不等式

この節と §03 は既存の知見（浮動小数と区間演算の一般論）の整理です。数値と定理の境目の導入は 5-07 §09 にあります。

計算機の実数は浮動小数で、ほとんどの演算の結果は真の値を一番近い表せる数に丸めたものです。例えば $0.1 + 0.2$ は倍精度で 0.30000000000000004 になります。丸めは毎回小さいので、多くの計算では気にしなくてよいのですが、「$q < 1$ である」という不等式を、$q \approx 0.9989$ のように 1 に近い値について主張するときには、丸めが積もって不等号の向きを変えないことを示す必要があります。

区間演算は、全ての数を「真の値を必ず含む区間」で持つ計算です。足し算は $[a,b] + [c,d] = [a+c, b+d]$、掛け算は四つの端の積の最小と最大、のように区間から区間を作り、端を計算するときの丸めは**外向き**（下の端は下へ、上の端は上へ）に取ります。こうすると、最後に出た区間 $[q^-, q^+]$ は真の q を必ず含み、$q^+ < 1$ なら $q < 1$ が不等式として従います。この部では、こうして得た不等式に 機 （計算機援用）の札を付けます。浮動小数の値をそのまま書いたものは 読 です。

手で確かめられる例。$g(x) = x - x^2$ の $x \in [0,1]$ での値の範囲は真には $[0, \frac{1}{4}]$ です。区間演算で素朴に評価すると、$x \in [0,1]$・$x^2 \in [0,1]$ から $x - x^2 \in [0-1, 1-0] = [-1, 1]$ になります。真の値を含みますが、幅が 8 倍に広がりました。原因は、x と x^2 が同じ x から来るという**依存**を区間が忘れることです。直し方は二つあります。

- **細かく割る**。$[0, \frac{1}{2}]$ と $[\frac{1}{2}, 1]$ に割ると、$[0 - \frac{1}{4}, \frac{1}{2} - 0] = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ と $[\frac{1}{2} - 1, 1 - \frac{1}{4}] = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$、合わせて $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ で幅は 1.25 に縮みます。
- **中心で展開する**。$g(x) = g(c) + g'(\xi)(x-c)$、$c = \frac{1}{2}$、$g'(\xi) = 1 - 2\xi \in [-1, 1]$ とすると $\frac{1}{4} + [-1,1] \cdot [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] = [-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ で幅は 1 です。依存の一次の部分を、区間の外に出した形です。

§04 で $\hbar$ を区間にするときに出会うのは、この二つの直し方の大がかりな版です。$\hbar$ の窓を 25 の部分区間に割り（細かく割る）、各部分区間の中では期待値を $\hbar$ について展開して一次と二次の動きを区間の外に出します（中心で展開する）。

02

鎖の条件 $q<1$ が保証すること

芯の中のあるサイトから見て、片側へ伸びる鎖 $x_{i-1}, x_{i-2}, \dots$ を考えます。作用の隣どうしの項は $(x_{i-1}-x_i)^2/(2\varepsilon)$ で、測度は $e^{-S/\hbar}$ です。$x_i = y$ を止め、さらに遠い側を積分して畳むと、x_{i-1} の条件つきの法則は

$$\rho_y(x) \;\propto\; \exp\!\Big(-\frac{1}{\hbar}\Big[\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon} + U(x)\Big]\Big) \qquad (x \text{ は箱 } [L,R] \text{ の中}) \tag{1}$$

の形になります（U は遠い側を畳んだ有効な位置エネルギーで y に依らない）。ρ_y の平均を $m(y)$、Stein の核を

$$\tau_y(x) = \frac{1}{\rho_y(x)} \int_L^x \big(m(y) - t\big)\rho_y(t)\,dt \quad \geq 0 \tag{2}$$

と置きます。部分積分で $\mathrm{Cov}_y(\varphi(X), X) = \mathbb{E}_y[\varphi'(X)\tau_y(X)]$ です（境界の項は $\int_L^R (m-t)\rho_y\,dt = 0$ で消える）。一方 (1) の y についての対数微分は $(x-m(y))/(\varepsilon\hbar)$ なので

$$\frac{d}{dy}\,\mathbb{E}_y[\varphi(X)] = \frac{\mathrm{Cov}_y(\varphi(X),X)}{\varepsilon\hbar} = \frac{\mathbb{E}_y[\varphi'(X)\tau_y(X)]}{\varepsilon\hbar}, \qquad \Big|\frac{d}{dy}\,\mathbb{E}_y[\varphi(X)]\Big| \;\le\; q\,\sup|\varphi'|, \quad q := \sup_y \frac{\sup\tau_y}{\varepsilon\hbar} \tag{3}$$

です [初]（積分記号の下の微分と部分積分。箱は有界で密度は滑らか）。(3) は「一段さかのぼるごとに、関数の傾き（Lipschitz 定数）が q 倍以下になる」と読めます。d 段さかのぼれば q^d 倍以下です。**$q<1$ なら、遠いサイトの揺らぎが手前のサイトに及ぼす影響は幾何級数で減ります**。これが「鎖の条件」の中身で、q を Stein の核の比と呼びます。

確かめの例。ρ_y が分散 σ^2 の正規分布なら、(2) を計算すると $\tau_y \equiv \sigma^2$ で、$q = \sigma^2/(\varepsilon\hbar)$ です。調和の鎖（U が二次式）では、この比が段ごとに一定の値へ収束することを手で確かめられます。

何に使うか。サイトの窓の対数 Sobolev 定数の組み立て（23-07 §04 の積の形）では、窓の外の全ての段の影響を足した量 S_W が因子として入ります。窓の中の段の寄与と、窓の外の段の寄与 $\sum_{d\ge 0} q^d = 1/(1-q)$ を左右の二つの側で足して

$$S_W = 1 + 2\Big(16 + \frac{1}{1-q}\Big) \tag{4}$$

です（窓の中の段の比を 1 と置いた形。組み立ての紙は本に置かないので、(4) を使う段は [仮] の行の上にあります）。$q<1$ なら S_W は有限で、$q \le 0.998854904$ なら $1/(1-q) \le 873.3$、$S_W \le 1779.6$ です [初]（算術）。

なぜ q は 1 に近いのか。芯の外の鎖の箱の右の壁は頂上 0 で、そこで $V'(0)=0$ です。この壁の角では古典の比がちょうど 1 になり（23-07 §03 の壁の角）、1 からの離れは壁の近くの薄

い層の幅 $\eta \approx 0.5\hbar$ で決まり、$1-q \approx \eta \ln(1/\eta)$ の大きさです 読 （古典の写像の展開と転送行列の値の照合）。$\hbar$ が小さいほど q は 1 に近づきます。**固定した $\hbar$ の窓の中で $q<1$ を確かめても、$\hbar \to 0$ での振る舞いは別の問い**であることが、ここからも分かります。

03 区間演算の前提

この部の計算機援用は、Python の倍精度の浮動小数（float64）で組んだ区間演算です。前提を一か所にまとめます。

- **丸めの規約**。四則の各演算は、IEEE 754 の規格どおり真の値に最も近い浮動小数を返す（正しい丸め）と仮定します。各演算の結果を、隣の浮動小数へ一つずつ外へ動かして（下の端は一つ下へ、上の端は一つ上へ）区間にします。正しい丸めの誤差は半目盛り以下なので、一目盛り外へ動かせば真の値を含みます。演算ごとに丸めの向きを切り替える方式ではありません。融合積和（FMA）は使いません。
- **和の誤差**。長い和は、和の誤差の既知の上界で外向きに広げます。
- **指数関数**。標準の数学関数の誤差は保証されていないので、指数関数は自前の実装を使い、その誤差の上界を区間に足します。上界の定数の算術は Lean で確かめています。
- **積分**。格子のセルごとに被積分関数の上下の包み（凹性の補正つき）を作り、積分を外向きに挟みます。積分の打ち切り（重みが最大の e^{-40} 未満のセル）は、打ち切った質量の上界として区間に入れます。

この前提の行は、この部では 仮 です（23-07 §05 の区間演算の前提の行）。計算機と処理系が IEEE 754 の正しい丸めを守っていることは、前提として置いており、確かめた事柄ではありません。計算機援用の結果を引くときは、この前提を同じ行に書きます。

04 $\hbar$ を区間にする — 素朴には壊れる理由と三つの補題

点の $\hbar$（例えば $\hbar = 3\cdot 10^{-3}$）で $q^{+}<1$ を出すだけなら、§03 の区間演算で足ります。窓 $[3\cdot 10^{-4}, 3\cdot 10^{-3}]$ の**全ての** $\hbar$ について言うには、$\hbar$ そのものを区間に入れる必要があります。三点で値が下がる傾向が見えても、上界が $\hbar$ について単調であることは紙では導けないからです（上界の式の中に、$\hbar$ の逆の端で最大になる二つの項がある）。

記号を決めます。$\beta = 1/(\varepsilon\hbar) = 2/\hbar$、部分区間 $\hbar \in [\hbar_1, \hbar_2]$ に対して $\beta \in [\beta_2, \beta_1]$、中点 $\beta_0 = (\beta_1+\beta_2)/2$、半幅 $\Delta = (\beta_1-\beta_2)/2$、$\tau = \beta - \beta_0 \in [-\Delta, \Delta]$ です。$\hbar$ は β を通してしか入りま

せん。

素朴な区間は壊れる。β の区間をそのまま密度の指数 $\beta(sx-A(x))$ に掛けると、格子の各セルの重みが互いに独立に $e^{\pm\Delta|sx-A|}$ 倍ずつ動いてよいことになり、指数の幅は 10^2 の桁になります。§01 の $x-x^2$ と同じ依存の喪失です。実際、二重井戸の鎖では二段目で平均の区間が箱の全体（幅 0.89）に広がり、段の写像が意味を失いました。

一次分数の補題（期待値を τ の一次分数にする）。$h=g-g^{*}$（g^{*} は定数）、$\varphi_0=\beta_0 h$ と置くと、$\beta=\beta_0+\tau$ で

$$\mathbb{E}_{\beta}[f]=\frac{\int f e^{\beta g}}{\int e^{\beta g}}=\frac{S_0+\tau S_1+R_S(\tau)}{Z_0+\tau Z_1+R_Z(\tau)},\qquad 0\le e^{\tau h}-1-\tau h\le\frac{(\Delta|h|)^2 e^{\Delta|h|}}{2} \tag{5}$$

です（$S_0=\int f e^{\varphi_0}$・$S_1=\int f h e^{\varphi_0}$・$Z_0=\int e^{\varphi_0}$・$Z_1=\int h e^{\varphi_0}$、$R$ は剰余の積分）。剰余の値を止めると、$t\mapsto(S_0+R_S+tS_1)/(Z_0+R_Z+tZ_1)$ は一次分数で、分母が $t=\pm\Delta$ で正なら $[-\Delta,\Delta]$ の上で単調です。したがって全ての $|\tau|\le\Delta$ で、期待値は両端 $t=\pm\Delta$ の二つの値の間にあり、その二つを区間で評価すれば囲えます 初 Lean `mobius_between`（仮定：分母が $t=\pm\Delta$ で正・$-\Delta\le t\le\Delta$）。一次の項 $\tau S_1/Z_0$ は真の $\hbar$ による変化を表し、区間の幅には求積の誤差の Δ 倍と剰余（Δ^2 の桁）しか残りません。

傾けた囲いの補題（第一と第二の形。囲いを τ について傾けて持つ）。段の写像の不動点（鎖の段ごとの条件つきの平均 m_k）は、$\hbar$ とともに真に動きます。部分区間の幅が 3% のとき、その動きだけで 1.5×10^{-4} あり、それを囲いの幅に入れると下流の評価を壊します。そこで囲いを「$m_k-\tau\mu_k-\tau^2\nu_k$ が区間に入る」の形で持ちます（μ_k・ν_k は浮動小数の列）。出力の側は恒等式

$$\frac{A+tB}{C+tD}=\frac{A}{C}+t\,\frac{B-(A/C)D}{C+tD} \tag{6}$$

で一次の動きを取り出します 初 Lean `shear_identity`（仮定：$C\neq0$・$C+tD\neq0$）。二次まで傾けると、残る幅は Δ^3 の桁になります。§01 の「中心で展開する」の形です。

動く中心の補題（中心を τ とともに動かす）。分散の上界は二つの片側の和 $\beta\,\mathbb{E}[(X-c)_+^2]+\beta\,\mathbb{E}[(c-X)_+^2]$ の形で、平均が $\tau\mu$ だけ動くと一方が増え他方が減ります。二つを τ の端で別々に最大にすると、真には打ち消す動きを足すことになります。中心を $c_\tau=c+\tau\kappa$ と動かし、$(y-t)_+^2\le y_+^2-2ty_++t^2$ で押さえると、この損は 3.6×10^{-3} から 2.2×10^{-4} に下がりました 初 Lean `dvtau_pos`（仮定なし）。

不変集合。鎖は無限に長いので、段の写像を有限回回して終わりにはできません。部分区間の写像 $\Phi_{[\hbar_1,\hbar_2]}$ は全ての $\hbar\in[\hbar_1,\hbar_2]$ の写像 $\Phi_\hbar$ の結果を含むように作るので、ある囲い E^{*} で

$\Phi_{[\hbar_1,\hbar_2]}(E^*) \subset E^*$ を区間演算で確かめれば、全ての $\hbar$ で $\Phi_\hbar(E^*) \subset E^*$ です 初 （包含の推移）。それより先の段は全て E^* の中にあり、q の上界を E^* の上で一度評価すれば足ります。

表 1　一つの部分区間での釣り合い（橋の芯の外の鎖、点の $\hbar = 3\cdot 10^{-3}$ の上界は 0.995611069）

版	$\hbar \in [3/1030, 3/1000]$（幅 3%）	$\hbar \in [3/1100, 3/1000]$（幅 10%）
素朴な区間	二段目で壊れる	二段目で壊れる
一次分数の補題だけ	機 $q^+ = 0.998757877$	—
一次分数の補題＋一次の傾け＋動く中心の補題	機 $q^+ = 0.996449644$	上界が 1.00114 で 1 を越え、証明書は出ない（§09）
一次分数の補題＋二次の傾け＋動く中心の補題	—	機 $q^+ = 0.997808483$

二次の傾けで幅 10% の部分区間が使えるようになり、窓 $[3\cdot 10^{-4}, 3\cdot 10^{-3}]$ は端を $\hbar = 3/N$（$N = 1000, 1100, 1210, \dots, 9100, 10000$、隣の比 ≤ 1.1）とする 25 の部分区間で覆えました。格子の幅は 2^{-11}、段の数は上の半分で 20、下の半分で 25 です。

05

例 1：橋の芯の外の鎖 — 窓の全体で $q_{\mathrm{free}} \le 0.998854904$

橋の芯（箱 $(-x_c, 0)$、$x_c = 0.89$）の、サイトの窓の外へ伸びる印なしの鎖の比を q_{free} と書きます（23-07 §02 の窓の外の鎖の道筋）。25 の部分区間の各々で、段の写像の囲いと不変集合を区間演算で作り、全ての鎖の長さ $n \ge 2$・箱の全てのピン（鎖の端の値）について q の上界 q_i^+ を出しました。結果が表 2 の左の列です。

結果（計算機援用）

0+1 次元の二重井戸（$V = (x^2-1)^2/8$・$\varepsilon = \frac{1}{2}$・$x_c = 0.89$・印の閾 $\theta = \frac{1}{2}$）の経路の測度で、§03 の前提の下、窓 $\hbar \in [3\cdot 10^{-4}, 3\cdot 10^{-3}]$ の全ての $\hbar$ について

$$q_{\mathrm{free}}(\hbar) \;\le\; \max_i q_i^+ \;=\; 0.998854904 \;<\; 1 \tag{7}$$

上の半分 $\hbar \in [10^{-3}, 3\cdot 10^{-3}]$ では ≤ 0.998098180。最大は窓の下の端の部分区間。正則性と区画の枠組みの入力は 仮 。

表の値（9 桁で切り上げ）は、$\hbar$ を下げると増え、上の端の二つだけ盛り上がります。律速の場所は、鎖の端の値が壁 0 のすぐ下にあるセルです。§02 の「壁の角がちょうど 1」の場所そのものです。

表 2　25 の部分区間の上界（$\hbar$ の大きい側から。左＝橋の芯の外の鎖 q_i^+、右＝環の外の鎖・条件づけない形 Q_i^{unc}。と

もに 9 桁で切り上げ、計算機援用）

#	$\hbar$ の部分区間	橋 q_i^{+}	環 Q_i^{unc}
01	$[3/1100,\ 3/1000]$	0.997808483	0.993773312
02	$[3/1210,\ 3/1100]$	0.998098180	0.993531447
03	$[3/1330,\ 3/1210]$	0.996740073	0.993402112
04	$[3/1460,\ 3/1330]$	0.995689889	0.993847141
05	$[3/1600,\ 3/1460]$	0.994979345	0.994267993
06	$[3/1760,\ 3/1600]$	0.995310186	0.994690320
07	$[3/1930,\ 3/1760]$	0.995450880	0.995072576
08	$[3/2120,\ 3/1930]$	0.995739245	0.995442678
09	$[3/2330,\ 3/2120]$	0.996022449	0.995791525
10	$[3/2560,\ 3/2330]$	0.996294103	0.996116234
11	$[3/2810,\ 3/2560]$	0.996551317	0.996416208
12	$[3/3000,\ 3/2810]$	0.996695721	0.996606914
13	$[3/3300,\ 3/3000]$	0.996969923	0.996887371
14	$[3/3630,\ 3/3300]$	0.997198625	0.997139630
15	$[3/3990,\ 3/3630]$	0.997410737	0.997371392
16	$[3/4380,\ 3/3990]$	0.997607042	0.997583254
17	$[3/4810,\ 3/4380]$	0.997791698	0.997780790
18	$[3/5290,\ 3/4810]$	0.997966990	0.997966387
19	$[3/5810,\ 3/5290]$	0.998126215	0.998135077
20	$[3/6390,\ 3/5810]$	0.998276990	0.998293614
21	$[3/7020,\ 3/6390]$	0.998414660	0.998437926
22	$[3/7720,\ 3/7020]$	0.998559421	0.998572746
23	$[3/8490,\ 3/7720]$	0.998691543	0.998697045
24	$[3/9100,\ 3/8490]$	0.998741829	0.998780022
25	$[3/10000,\ 3/9100]$	**0.998854904**	**0.998888530**

06

例 2：環の外の鎖 — 条件づけた鎖から条件づけない鎖へ

環の継ぎ目の外の鎖（23-07 §03）は、符号の決まった領域を動く鎖で、鏡像で $(-\infty, 0]$ に写すと例 1 と同じ型になります。ただし橋の箱の下の壁 $-x_c$ が無いので、例 1 の証明書はそのま

まは使えません。同じ機械の格子を差し替え、二段で閉じました。

1. **箱に条件づけた鎖**。部分区間ごとに有限の箱（上の半分で $[-7/5, 0]$、下の半分で $[-6/5, 0]$）に条件づけた鎖で、窓の全体の上界 0.998888525 [機]。このままでは、箱の外へ出る配位を別に払う仮定の行が四つ要ります。
2. **条件づけない鎖**。箱を $[-3, 0]$ に広げ、$(-\infty, -3]$ の尾の寄与を、尾の凸性からの接線の上界で区間演算の剰余に入れます。尾の分散の上界は、法則を尾の端の一行に押し込む形で、全ての $\hbar$ で ≤ 0.357608022（凸性に要る < 5.25・相関不等式に要る ≤ 1 の内）。ピンが -3 より深い所は閉じた形の上界で覆い、≤ 0.592898559。結果が表 2 の右の列で、最大は 0.998888530 です [機]（全てのピン $p \le 0$・評価点 $s \le 0$、端の値 $z_0 = -1$、継ぎ目の極限の仮定・端の値が分布で与えられる仮定・正則性は [仮]）。

二つの列を比べると、橋の上界は上の端の二つで盛り上がり、環の上界は三番目の部分区間で最小になってから単調に増えます。下の端では環の方がわずかに 1 に近く（差 3.4×10^{-5}）、浮動小数の点の値の順序（環の方が 1 に近い）がそのまま上界にも出ています。条件づけない鎖の各行は、条件づけた鎖の対応する行より 2.4×10^{-9}〜6.7×10^{-7} だけ上で、律速の場所と形は同じでした。

境の段は覆っていない。右の列の主張はピン $p \le 0$ の上の主張です。塊が窓の端に触れる配位では、外の最初の段のピンが $(0, \frac{1}{2})$ に入り、そこでは浮動小数の読みで $q \approx 1.004$–1.045 です [読]。有限の段一つなので組み立ての有限性は壊しませんが、表 2 の右の列を引くときは「ピン ≤ 0」の条件を落とせません。

07 照合・対照・事前登録

区間演算の台本そのものの正しさは、形式的には検証していません。代わりに、次の検査を通しています。どれも「確かめたつもりのものが、確かめたいものとずれていないか」を見るための検査です。

- **別の実装との照合**。例 1 の全ての部分区間で、段の写像を区間演算とは別の浮動小数の再帰で、部分区間の両端と中点の三つの $\hbar$ について回し、全ての段・全ての格子点でその値が区間の囲いに入るかを数えました（75 本、外れ 0）。環の条件づけない鎖では各部分区間の一つの $\hbar$ で同じ検査（25 本、外れ 0）。
- **点の値との照合**。転送行列で求めた浮動小数の点の値（26 個の端）は、全て、その端を含む部分区間の上界の下にありました（差の最小は窓の下の端で 2.85×10^{-4}）。

- **陽性対照**。答えが閉じた式で分かる場合に、機械がそれを再現するか。純ガウスの鎖（段ごとの分散 $v_k = (k-1)/k$、平均 $m_k(s) = (k-1)s/k$、どちらも $\hbar$ に依らない）で、$\hbar$ の区間のまま全ての点が囲いの中に入りました。$\hbar$ の区間の幅を 0 にすると、点の $\hbar$ の機械と 10^{-12} の桁で同じ値を出しました。環の条件づけない機械は、箱に条件づけた版と同じ部分区間で、律速の場所と形を再現し、値は 10^{-8} の桁の上向きの差に収まりました（同じ鎖ではないので一致ではなく再現の検査です）。
- **陰性対照**。成り立たないはずの主張を機械が拒むか。律速のセルで目標の上界を 10^{-7} だけ下げると Lean の検査が閉じない、表の一本を 1 に置き換えると窓の全体の < 1 が閉じない、尾の分散を凸性の線より大きく置くと尾の段が止まる、を確かめました。
- **事前登録**。計算を走らせる前に、予想する値の範囲・律速の場所・陽性と陰性の対照の合格の線を書いておき、結果の後に当否を記録しました。例 1 では、部分区間の数を 60〜120 と予想して 25 で済み（外れ）、律速が窓の下の端に来ることは当たりました。予想が外れたことは結果を弱めませんが、結果を見てから合格の線を動かしていないことの記録になります。

08

Lean が確かめたこと — 区間演算の出力の表を仮定に置いた組み立て

計算機援用の結果に付けた Lean の欄は、次の三つの層に分かれます。

1. **代数の核**。一次分数の補題の一次分数の単調性（`mobius_between`）、傾けの恒等式（`shear_identity`）、動く中心の補題の不等式（`dvtau_pos`）、被覆から窓の全体へ移る代数（`cover_le`、仮定：各部分区間で $f \le c$）。
2. **セルの再計算**。区間演算が出した入力の値（浮動小数の正確な値）と部分区間の端の有理数から、律速のセルと無作為に選んだセル（例 1 で 46、環の条件づけた版で 23）について、最後の段の上界の式を Lean の中で計算し直し、区間演算の値$+2 \times 10^{-9}$ 以下を閉じました。全てのセルの検証ではありません（一つの部分区間に数百万を越えるセルがある中の数十）。
3. **表の組み立て**。`win_qfree_window_le_of_interval_table`（例 1）・`unc_window_lt_one_of_table`（例 2）・`vt_window_of_table`（尾の分散）は、**仮定**として「各部分区間の全ての $\hbar$ で $q(\hbar) \le q_i^{+}$」（区間演算の出力の表。q は抽象の関数）を置き、結論として「窓の全ての $\hbar$ で $q \le \max_i q_i^{+} < 1$」を出します。

Lean の外にあるのは、段の写像（一次分数の補題・傾けた囲いの補題・動く中心の補題の区間の評価）、求積、不変集合、q の上界の式の層、評価点の選び方の全てです。したがって機械

検査の欄は「区間演算の出力が正しいなら、窓の全体の結論は代数として正しい」を保証し、「区間演算の出力が正しい」ことは §03 の前提と §07 の検査に依ります。

09

計算機援用が「否」を返す例

区間演算の上界が 1 を越えたとき、言えるのは「この組み立てでは証明書が出ない」ことだけで、「真の値が 1 を越える」ことではありません。二つの場合を区別します。

(a) 道具の側で出ない例。 表 1 の幅 10% の部分区間で、一次の傾けまでの版は上界が 1.00114 になりました。真の値は同じ部分区間で二次の傾けの版により ≤ 0.997808483 と分かっているので、この「否」は道具の幅（真の m の $\hbar$ についての曲がりを区間に入れていたこと）から来ています。部分区間を細かくするか、展開の次数を上げれば消える種類の「否」です。

(b) 対象の側で出ない例 — 環の内の鎖。 環のサイトの窓の中の段（内の鎖）では、浮動小数の転送で q_{in} を測ると $\hbar = 3\cdot 10^{-3}/10^{-3}/3\cdot 10^{-4}$ で $1.2707/1.2765/1.2421$ 読 で、格子を細かくすると上がる向きでした。律速は塊の箱の遠い壁の際にピンがある段で、壁の力が箱の外へ向かう角（古典の値 1.2857）です（23-07 §03）。ここでは区間演算の機械を作っても $q^{+} < 1$ は出ず、得られるのは $\bar{q} = \max(q_{\mathrm{in}}, 1) \approx 1.3$ の有限の上界だけの見込みです。この「否」は道具を細かくしても消えない種類で、組み立ての側（$q_{\mathrm{in}} < 1$ を要らない形にする、または $S_W \cdot T_W$ の各々に係数 $\bar{q}^{16}$、A_W に $\bar{q}^{32}$ を払う）で受けるしかありません。

読者が計算機援用の結果を読むときは、上界が 1 を越えた報告を見たら、(a) と (b) のどちらかが書かれているかを確かめてください。

10

計算機援用が言わないこと・費用

囲み：計算機援用の札の読み方

機 の付いた不等式は、次の全てが揃ったときにだけ付けます。(1) 全ての数を外向きの区間で持った計算の出力で、浮動小数の値をそのまま書いたものではない。(2) 前提（IEEE 754 の正しい丸め・和の誤差の上界・自前の指数関数の誤差の上界・正則性）を同じ行に書いた。(3) 主張の範囲（$\hbar$ の窓・鎖の長さ・ピンの範囲）を同じ行に書いた。$\hbar$ の窓の外、$\hbar \to 0$、範囲の外のピンについては、何も言っていない。

言わないこと。(i) 窓 $[3\cdot10^{-4},3\cdot10^{-3}]$ の外の $\hbar$。§02 で見たとおり q は $\hbar\to0$ で 1 に近づくので、窓を下へ延ばすほど部分区間は細かく、格子は細かく要り、有限の計算で $\hbar\to0$ の全体を覆うことはできません。二重井戸の緩和時間の冪の言明は $\hbar\to0$ の言明なので、そこは紙の漸近の仕事です。(ii) 格子 $\varepsilon=\frac12$ の模型の外（連続の経路の測度との差）。(iii) 正則性（固有関数・条件つきの期待値の滑らかさ）と区画の枠組みの入力。(iv) 例 2 の境の段（ピン $\in(0,\frac12)$）。(v) 鞍点の管の条件そのもの（23-07 §06）。

表 3　費用（一コア。「見積もり」は走らせていない）

計算	本数	時間	一本の大きさ
例 1 橋の芯の外の鎖（窓の全体）	27 本	約 4 時間 10 分	6〜16 分・107 MB 以下
例 2 環の外の鎖・箱に条件づけた形	25 本	約 3 時間 19 分	5〜12 分・114 MB 以下
例 2 環の外の鎖・条件づけない形	25 本	約 6 時間 44 分	13〜22 分・123 MB 以下
環の内の鎖の区間化（見積もり）	約 50 本	約 42 時間	約 50 分
窓の定数の数値の道筋の残る数値（見積もり・走らせない判断）	約 42 本	約 21 時間	30 分以内

この部は拡散型緩和時間の仮定を軸に置いた検討で、計算機援用はその中で、窓の中の個々の不等式を浮動小数の読みから不等式へ上げる道具として使っています。別の視点は第 24 部で扱います。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
機 窓の全ての $\hbar$ で $q_{\mathrm{free}}\le0.998854904$、環の外の鎖（ピン ≤0）で ≤0.998888530。§03 の前提の上で	窓の外・$\hbar\to0$・境の段
初 鎖の条件 (3) の導出、一次分数の補題・傾けた囲いの補題・動く中心の補題の代数、不変集合の包含 Lean （代数の核と表の組み立て）	区間演算の台本の形式的な正しさ（照合と対照で確かめた範囲だけ）
読 環の内の鎖 $q_{\mathrm{in}}\approx1.24$–$1.28$	その区間の上界

出典と再現

もの	種別	出典・道具
区間演算の考え方・依存の喪失と中心形	—	標準の方法（区間演算・Taylor の形の囲い）。この章では書誌を引かず、§01 の例と §04 の補題を本文に置いた。
Stein の核と鎖の条件	初	§02 の (2)(3)（部分積分と積分記号の下の微分）。
区間演算の実装	機	Python の float64、演算ごとに隣の浮動小数へ外向きに一つ、自前の指数関数、格子 2^{-11}、段 20／25、部分区間 25。
照合	読	別の浮動小数の再帰（三つの $\hbar$）・転送行列の点の値（26 点）。
Lean	Lean	`mobius_between`・`shear_identity`・`dvtau_pos`・`cover_le`・`win_qfree_window_le_of_interval_table`・`unc_window_lt_one_of_table`・`vt_window_of_table`（仮定は本文の各行）。言明の一覧は 23-13。

この章で使った語 — 計算機援用・区間演算・外向きの丸め・依存の喪失・中心で展開する・Stein の核の比・鎖の条件・部分区間・傾け・不変集合・照合・陽性対照と陰性対照・事前登録・境の段。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-09 区画の枠組みと、窓の対数 Sobolev の道筋の三本の筋 — 区画の和の五つの段と閉じる条件を述べ、要る値の導出、残る一命題を攻めた三本の筋の到達点、頂上の一サイトの曲率の不足という共通の壁を述べる。

区画の枠組みと、窓の対数 Sobolev の道筋の三本の筋

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 2-05・2-07 にあります。

この章で分かること — 芯の隙間を芯の長さ k に一様に押さえる組み立て（区画の枠組み）を五つの段に分けて証明し、それが閉じる条件 $b(A_W c_H + D_W + \ln 2) < \kappa \ell_{\min}$ と、そこから決まる要る値 $A_{\max}$ を導きます。条件の各定数が構造から来るのか道具の選び方から来るのかを仕分け、要る値を上げる方向と、足りない側を下げる方向を並べます。残る一命題（サイトの窓の対数 Sobolev 定数が要る値の内にあること）を攻めた三本の筋（成分ごと・スカラー・Feynman–Kac）の到達点を一表にし、三本が同じ場所で止まる理由——頂上の一サイトの曲率が凸性に $\frac{1}{4}$ 足りないこと——を、対角優位の一行で述べます。

前提となる章 — 23-07（区画の枠組みの道筋・窓の対数 Sobolev の道筋の位置）・23-08 §02（鎖の条件）・23-05 §03（鞍点の管の条件と芯の Poincaré の一様性の仮定）・1-10 §07〜§09（Poincaré 不等式）。

先に言うこと — 水準は〔研〕で、§01 だけ〔三〕で読めるように書きます。§02 以降は研究の水準の節で、飛ばして §05 の表 4 と §06 の共通の壁に進んでも、この章の結論は読めます。この部は拡散型緩和時間の仮定を検討の軸に置いていて（23-01）、この章はその一段目の鞍点の管の条件の芯の行を、どこまで組めたかを述べる章です。区画の枠組みは示せましたが、残る一命題は三本の筋のどれでも閉じていません。

この章の順序

1. 要約 — 〔三〕で読める一節
2. 区画の枠組みの五つの段 — 区画の和・周辺の形の Gibbs・成分ごとの局所化・体積の局所性・合成
3. 閉じる条件と要る値 $A_{\max}$ — 定数の出所と、二つの方向（表 1・表 2）
4. 閾値の不一致 — 条件が字義どおりには何も与えていなかった例
5. 窓の対数 Sobolev の道筋の三本の筋 — 成分ごと・スカラー（スカラーの筋の命題、表 3）・Feynman–Kac、到達点（表 4）

6. 共通の壁 — 頂上の一サイトの曲率 $15/4$ と 4
7. 五分類の表（表 5）
8. 依存グラフ

01

要約

芯 $Q_k = (-x_c, 0)^k$ は、経路が頂上の近くにとどまる k サイトの区間で、ここでは作用の Hessian が負の向きを持ちます。芯の測度の隙間（芯の Poincaré の一様性の仮定）を k に一様に押さえるには、負の曲率のある場所が**稀**であることを使って払う必要があります。区画の枠組みは、その払い方を五つの段に分けたものです。

1. **区画の和**。配位の空間を箱の直積に割っても、Dirichlet 形・分散・エントロピーは区画ごとの和に分かれ、区画の数は定数に入りません。
2. **周辺の形の Gibbs**。稀な集合 B（測度 $e^{-\ell}$ 以下）の上の重みは、エントロピーと $\ln 2$ で払えます：$\ell \int_B g^2 \le \mathrm{Ent} + \ln 2 \int g^2$。
3. **成分ごとの局所化**。勾配の成分ごとに、そのサイトの周りの 17 サイト（サイトの窓）の印の周辺の対数 Sobolev 定数 A_W で周辺の形の Gibbs の段を当てると、和に k が入りません。
4. **体積の局所性**。稀さの指数 $\ell_{\min}$ は k に依りません。
5. **合成**。以上と Barta・Bochner の二つの不等式を組むと、芯の隙間 λ について $\lambda(1 + bA_W/\ell_{\min}) \ge \kappa - b(A_W c_H + D_W + \ln 2)/\ell_{\min}$ です。右辺が正になる条件が**閉じる条件** $b(A_W c_H + D_W + \ln 2) < \kappa \ell_{\min}$ です。

閉じる条件を A_W について書き直したものが要る値 $A_{\max} = (\kappa \ell_{\min}/b - D_W - \ln 2)/c_H$ で、三つの $\hbar = 3\cdot 10^{-3}/10^{-3}/3\cdot 10^{-4}$ で欠陥を三サイトで定める道の元の形は $3\cdot 10^{-3}$ で負（どの A_W でも閉じない）・0.20・7.13 で、道具の選び方を二つ直すと $25.1/90.3/312.3$ まで上がります 読 （測った稀さの指数の上の算術）。一方 A_W の上界は、いまの組み立てでは $1857/2794/9106$ の桁で 読 （見積もりを含む）、29〜74 倍足りません。

残る一命題「$A_W < A_{\max}$」は三本の筋で攻めました。成分ごとの筋は要る値の 1.4〜5.5 倍の所で止まり、スカラーの筋は $\hbar \in [3\cdot 10^{-4}, 10^{-3}]$ で仮定の表つきの命題（スカラーの筋の命題）になり、Feynman–Kac の筋は Monte Carlo の読みで閾の 0.54 倍の内にありますが上界は閾

の 10^3 倍です。三本とも、頂上で一サイトの対角 $4-\frac14=15/4$ が隣との結合の和 4 に届かない、という同じ場所で止まります（§06）。

02

区画の枠組みの五つの段

設定。 芯 $Q_k=(-x_c,0)^k$（$x_c=0.89$）、両端の値 $z_0,z_{k+1}\le -x_c$ を止め、$\mu\propto e^{-S/\hbar}\mathbf{1}_{Q_k}$、$\mathcal{E}(f)=\hbar\int|\nabla f|^2d\mu$（箱の面では Neumann）とします。$-L$ の最初の非零の固有値を λ、固有関数を f、$u=\nabla f$ とし、

$$X=\int|u|^2d\mu,\qquad Z=\hbar\int\|\nabla u\|^2d\mu,\qquad Y=\sum_{j=1}^{k}\int_{N_j}u_j^2\,d\mu \tag{1}$$

と置きます。N_j はサイト j の欠陥の集合（j とその隣のどれかが閾 $-\theta_B$ より頂上の側にある配位、$\theta_B=0.57$）です。各サイトに印 $\sigma_j=\mathbf{1}[z_j>-\theta]$ を付け、サイト j の周りの窓 W_j の印の組を σ_{W_j} と書きます。区画とは、印の型ごとの箱の直積 $\Omega_\sigma=\prod_j I_{\sigma_j}$ です。

区画の和

任意の箱の直積の分割 $\mathcal{P}$ について、(a) $\sum_P\mu(P)\mathcal{E}_P(f)=\mathcal{E}(f)$（面は測度 0 で、$|\nabla f|^2$ は各区画の上で同じ関数）、(b) $\mathrm{Var}_\mu f=\sum_P\mu(P)\,\mathrm{Var}_{\mu_P}f+\mathrm{Var}_\nu(\mathbb{E}[f\mid\mathcal{P}])$（全分散の公式。エントロピーも同じ形の連鎖律）、(c) 区画ごとに $\mathrm{Var}_{\mu_P}f\le C_P\mathcal{E}_P(f)$ なら第一項は $(\sup_P C_P)\,\mathcal{E}(f)$ 以下です 初 。区画の数は、和が 1 になる重み $\mu(P)$ にしか現れません。 Lean `var_split_cells`（仮定なし）・`cell_sum_sup`（仮定：$w_i\ge0$・$E_i\ge0$・$C_i\le C_{\max}$）。

Gibbs の分解 — 周辺の形の Gibbs の段

Gibbs の変分不等式。 確率測度 ν、$G\ge0$、関数 F について

$$\int FG\,d\nu\;\le\;\mathrm{Ent}_\nu(G)+\Big(\int G\,d\nu\Big)\ln\int e^F\,d\nu \tag{2}$$

初 証明。$\tilde G=G/\int G$ と置き、Jensen の不等式で $\ln\int e^F d\nu\ge\ln\int_{\tilde G>0}e^{F-\ln\tilde G}\tilde G\,d\nu\ge\int(F-\ln\tilde G)\tilde G\,d\nu$。両辺に $\int G$ を掛けると (2) です。∎

(2) で $F=t\mathbf{1}_B$、$p=\nu(B)\le e^{-\ell}$ とすると $\ln\int e^F=\ln(1-p+pe^t)$ で、$t=\ell$ なら $\le\ln 2$ です Lean `gibbs_ln2_cell`（仮定：$p\ge0$・$\ell\ge0$・$pe^\ell\le1$）。B が粗い変数 $\mathcal{F}$ で決まる集合なら、$G=\mathbb{E}[g^2\mid\mathcal{F}]$ と取って

$$\ell \int_B g^2 \, d\mu \;\le\; \mathrm{Ent}_\nu\big(\mathbb{E}[g^2 \mid \mathcal{F}]\big) + \ln 2 \int g^2 \, d\mu \tag{3}$$

です。稀な集合の上の重みを、粗い変数の周辺のエントロピーで払う形です。

成分ごとの局所化

入力として、全ての j と g で窓の周辺の対数 Sobolev 不等式

$$(\mathrm{LS}_W) \qquad \mathrm{Ent}_{\nu_{W_j}}\big(\mathbb{E}[g^2 \mid \sigma_{W_j}]\big) \;\le\; A_W \, \mathcal{E}(g) + D_W \int g^2 \tag{4}$$

を仮定し 仮 、$N_j \subset B_j$（B_j は σ_{W_j} で決まる集合、$\ell_{\min} = \min_j \ln(1/\mu(B_j))$）とします。(3) を $g = u_j$ に当てて j で足すと、$\sum_j \mathcal{E}(u_j) = Z$・$\sum_j \int u_j^2 = X$ から

$$\ell_{\min}\, Y \;\le\; A_W \, Z + (D_W + \ln 2)\, X \tag{5}$$

です 初 Lean `comp_sum_le`（仮定：$0 < \ell \le \ell_j$・各成分の不等式）。**k が入りません**。対照として、勾配を成分に分けずにスカラーの g のまま一つの和集合 $\bigcup_j B_j$ に (3) を当てると、定数関数 $g \equiv 1$ を入れるだけで欠陥の項が $\sum_j \mu(B_j)$ 以上になり、k に一様になりません 初 Lean `scalar_not_uniform`（仮定：$p > 0$。結論は「全ての k で $kp \le d$ となる d は無い」）。**k に一様であることと、条件に A_W が入ることは交換条件**です。

体積の局所性

$\ell_{\min}$ は欠陥の集合の稀さの指数で、k に依りません。欠陥を三サイトで定める道では、測った値 $\hbar \ln \mu(N_j)$ から $\ell_{\min} = 38.3/121.9/406.8$（$\hbar = 3 \cdot 10^{-3}/10^{-3}/3 \cdot 10^{-4}$）です 読 （転送行列の浮動小数。$3 \cdot 10^{-4}$ は外挿で、測り直した値は 420.0）。欠陥を長さ 8 以上の塊で定める道では $\ell_{\min} \ge E_8/\hbar - \ln V_{\mathrm{loc}}$（$E_8 = 0.402$・$\ln V_{\mathrm{loc}} = 2.3$） 読 。橋の上で同じことを言うには、切れ端の転送作用素の剰余が端の値に一様に小さいこと（橋の体積の局所性の入力）が要ります 仮 。

区画の合成

次の三つの不等式を組みます。

- **Barta**：$\lambda X \ge \kappa X - bY$。成分ごとの作用素 $\mathcal{M} = -L + \mathrm{Hess}\, S$（$u = \nabla f$ は $\mathcal{M} u = \lambda u$ を満たす）に重み ψ を当てた行の不等式 $(\mathcal{M}\psi)_j \ge (\kappa - b\mathbf{1}_{N_j})\psi_j$ から来ます。$\kappa = 3/1000$ は欠陥の外での行の下界、$b = 493/1000$ は箱の全体での最悪の行から決まる欠陥の深さです 仮 （行の評価の紙は本に置かない）。
- **(5)**：成分ごとの局所化そのもの。

- **Bochner**：$Z = \lambda X - \int u \cdot \mathrm{Hess}\, S\, u \, d\mu \le (\lambda + c_H) X$、$\mathrm{Hess}\, S \ge -c_H$、$c_H = \frac{1}{4}$。恒等式は Bochner の公式の積分形 典 （Ledoux の講義の命題 1.3、原典の本文で確認）で、箱の平らな面で境界の項が消えることと固有関数の角までの滑らかさは 仮 です。

(5) に Bochner を入れ、それを Barta に入れると

$$\lambda\left(1 + \frac{b A_W}{\ell_{\min}}\right) \;\ge\; \kappa - \frac{b\,(A_W c_H + D_W + \ln 2)}{\ell_{\min}} \tag{6}$$

です 初 Lean `comp_close` （仮定：$X > 0$・$b, A \ge 0$・$\ell > 0$・Barta・(5)・Bochner の三つの不等式）。右辺が正、すなわち

$$b\,(A_W c_H + D_W + \ln 2) \;<\; \kappa\, \ell_{\min} \tag{7}$$

なら、芯の隙間 λ は k に依らない正の数で下から押さえられます。(7) が**閉じる条件**です。五つの段のうち、区画の和・Gibbs の分解・成分ごとの局所化・区画の合成の組み立ては初等の証明を本文に置き、仮定として残るのは窓の周辺の対数 Sobolev の入力・橋の体積の局所性の入力・Barta の行・Bochner の正則性と、(7) を満たすほど A_W が小さいかどうか、です。**仮定として残るのは構造ではなく定数の大きさです。**

03

閉じる条件と要る値 $A_{\max}$

(7) を A_W について解くと、要る値

$$A_W \;<\; A_{\max}(\hbar) := \frac{\kappa \ell_{\min}/b - D_W - \ln 2}{c_H} \tag{8}$$

が出ます 初 （(7) の移項）。A_W がこれより小さいことが残る一命題（窓の対数 Sobolev の閾の命題）で、23-07 §02 の窓の対数 Sobolev の道筋です。

定数の出所。(7) の六つの定数を、構造から来るものと道具の選び方から来るものに仕分けます。

表 1　閉じる条件 (7) の定数の出所

定数	値	出所	側
κ	$3/1000$	Barta の行の、欠陥の外での下界（閾 $\theta_B = 0.57$ を一サイトの閾 0.5653 のすぐ上に置いたので小さい）	構造
b	$493/1000$	同じ行の箱の全体での最悪の値（頂上の側の -0.49）	構造
$\ell_{\min}$	表 2	欠陥の集合の稀さの指数（長さではない）	構造

定数	値	出所	側
c_H	$\frac{1}{4}$	Bochner の段で、負の曲率 $w=\varepsilon V''$ の最小 $w(0)=-\frac{1}{4}$ を芯の**全体で一様に**払った値	道具の選び方
$\ln 2$	0.693	Gibbs の段で傾き t を $t=\ell$ に固定した値	道具の選び方
D_W	0	窓の周辺の対数 Sobolev の入力の欠陥の項を置かない組み立て	—

A_W が c_H と掛かって条件に入る理由は、(5) の右辺の $A_W Z$ を Bochner で $(\lambda+c_H)X$ に替えるとき、λ の部分は左辺に移せますが $c_H X$ は λ を掛けずに残り、κ で払うしかないからです。$b/\kappa \approx 164$ の増幅が、ここで $A_W c_H$ に掛かります。

二つの方向 — 要る側を上げる・足りない側を下げる

要る側を上げる（道具の選び方を直す）。

- **Bochner を局所化する。** 負の曲率 $-w(z)=(1-3z^2)/4$ は $z>-1/\sqrt{3}$ にしか無く、そこは既に欠陥の集合 N_j の中です。区間の一行 $-w(z)\le \delta+\gamma\,\mathbf{1}[z>-\theta_R]$（$\delta=\max(0,(1-3\theta_R^2)/4)$・$\gamma=c_H-\delta$）から 初 Lean `negw_le_localized`（仮定：$\theta\ge 0$・$z\le 0$・$(1-3\theta^2)/4\le\delta\le\frac{1}{4}$）、運動の項 $2T_k$ が半正定値であることを使って

$$Z \;\le\; (\lambda+\delta)X+\gamma Y \tag{9}$$

  が出ます 初 Lean `bochner_localized`（仮定：恒等式 $Z=\lambda X-H$・$-H\le\delta X+\gamma Y$）。Y は (5) が既に払っている項なので、A_W の係数が $bc_H=0.123$ から $b\delta+\kappa\gamma=0.0038$（$\theta_R=0.57$、約 32 分の 1）に下がります。
- **Gibbs の傾きを最適にする。** (2) の t は $t<\ell$ でもよく、$\kappa t-b\ln(1+e^{t-\ell})$ を最大にする $t^*=\ell-\ln((b-\kappa)/\kappa)=\ell-5.10$ で、費用 $b\ln 2=0.342$ が 0.0183 に替わります 初（一変数の凹関数の最大）。Lean の `tilt_cost_le`（仮定：$b\ge 0$・$L\le 1/178$）が示すのは、最適の点ではなく $t=\ell-5.2$ での費用の上界 0.0184 までです Lean（最適化そのものは Lean に在りません）。

二つを合わせた閉じる条件は $b(A_W\delta+D_W+L(t^*))<\kappa(t^*-A_W\gamma)$ で、要る値は $A_{\max}=(\kappa\ell_{\min}-0.0183-bD_W)/(b\delta+\kappa\gamma)$ です。さらに閾 θ を $1/\sqrt{3}$ の近くまで上げると $\delta\le 0$ になり、条件は実質 $A_W\lesssim 4\ell_{\min}$ に変わります。

表 2　要る値 $A_{\max}$（$D_W=0$。三つ組は $\hbar=3\cdot10^{-3}/10^{-3}/3\cdot10^{-4}$。値は測った $\ell_{\min}$ の上の算術で 読 ）

形	$A_{\max}$	備考
元の形（欠陥を長さ 8 以上の塊で定める道）	0.43/6.96/29.8	$\ell_{\min}\ge E_8/\hbar-\ln V_{\mathrm{loc}}$

形	$A_{\max}$	備考
元の形（欠陥を三サイトで定める道）	負／0.20／7.13	$3\cdot10^{-3}$ では $A_W=0$ でも閉じない
Gibbs の傾きだけ	0.78/2.82/9.75	三サイトの道
Bochner の局所化だけ	負／6.23／228	同上
二つを合わせる	25.1/90.3/312.3	同上。値は読 。Lean の `judge_i_inside` が示すのは、ħ の小さい側の二つ（ℓ の下界が 406 と 121 の場合）で、$0 \le A \le 22$ なら閉じる条件が成り立つこと（要る値、すなわち閉じる A の上限が 22 以上であること）までです Lean 。三つ目の ħ と、値そのものは Lean に在りません（仮定：$\ell \ge 406$・$\ell \ge 121$・$0 \le A \le 22$・$0 \le L \le 1/178$）
閾を $1/\sqrt{3}$ に上げる	128/452/1604	$\kappa(\theta)\cdot\ell(\theta)$ は格子の浮動小数

足りない側を下げる（A_W の上界を作り直す）。三サイトの窓 $|W|=3$ での A_W の上界は、いまの組み立てで 1857/2794/9106 読 （見積もりを含む）で、二つを合わせた要る値と比べて **74／31／29 倍**、閾を上げた要る値と比べて 14.5／6.2／5.7 倍外です（後者は同じ上界の技法が閾を上げても同じ値を出すと置いた見積もり）。一方、試験関数で測った A_W の下界は 1.71/1.74/2.59 で、要る値を排除しません。**真の A_W が要る値の内にあることは排除されておらず、足りないのは上界の作り方の側**です。これが窓の対数 Sobolev の道筋の三本の筋の出発点です。

04

閾値の不一致 — 条件が字義どおりには何も与えていなかった例

成分ごとの局所化は $N_j \subset B_j$ で、B_j が窓の印 σ_{W_j} だけで決まる集合であることを使います。表 1 の $\kappa\cdot b\cdot\ell_{\min}$ は欠陥の閾 $\theta_B=0.57$ で測った値で、A_W は印の閾 $\theta_\sigma=\frac{1}{2}$ で測った値でした。$\theta_\sigma<\theta_B$ だと、「窓の印が全て谷の側」という印の原子は $z_i\in(-\theta_B,-\theta_\sigma]$ の点、つまり N_j の点を含みます。印で決まる集合で N_j を含むものは全空間しかなく、$\mu(B_j)=1$、$\ell=0$ です 初 （可測性の一行）。**二つの閾が食い違ったままでは、(7) は字義どおりには何も与えていません**。直し方は θ_B を $\frac{1}{2}$ に下げることではなく（$\theta=\frac{1}{2}$ では Barta の行の下界 κ が負になる）、A_W を $\theta_\sigma=\theta_B$ の印で測ることで、これは足りない側への注文です。数値の組み立てを重ねるとき、合成する条件の一つ一つが同じ定義の上で成り立っているかを、字義どおりに確かめる段が要る、という例です。

05

窓の対数 Sobolev の三本の筋

残る一命題を、条件の関数形の違う三つの形で攻めました。どの筋も区画の合成・芯の Poincaré の一様性の仮定・鞍点の管の条件を示していません。数は全て 0+1 次元の二重井戸・$\varepsilon = \frac{1}{2}$ の格子の上の値です。迂回策の全体の一覧と壊れ方の型は 23-10 に送ります。

成分ごとの筋 — 成分ごとの形

Bochner の局所化と Gibbs の傾きの上に、各点の負の曲率をその点の稀さで払う形（曲率を高さの関数 $h = (-w(z_j))_+$ で払う）を載せると、要る値は $537/1754/6052$ まで上がります 読。上界は「粗い段」と「伝播の段」の積の形で作ります。

- **粗い段は詰んだ。**中央だけ多値の印の鎖で、粗い段の対数 Sobolev 定数は $\le 3.584/3.544/3.613$、一点の指示関数の下界との比 $1.016/1.005/1.003$ 読（倍精度のデータの上の有理数の分解）。この段からはもう取れません。
- **伝播の段に上界が無い。**残りを重みつきの条件つき Poincaré 定数 C_w に移すと、要る値は $C_w \le 39.3/138.2/476.3$、試験関数の族の下界は 15.4–15.6（$\hbar$ にほぼ依らない）読。Lyapunov 関数の判定法（Bakry–Barthe–Cattiaux–Guillin の型 典、二次資料の再述で確認）で、遠い端に依らない Lyapunov 関数の族は頂上の面 $x \equiv 0$ で要る値の $16.6/14.7/14.7$ 倍外でした。遠い端まで延ばした分かれた族の最良を双対で測ると、この主項は越えますが、最も細かい格子で $215/355/654$＝要る値の $5.5/2.6/1.4$ 倍で止まります 読（格子の値、$\hbar$ を下げる側ほど格子に敏感）。全ての Lyapunov 関数に効く床は 31（$\hbar$ に一様）で 読 `Lean` `tilt_g1`（仮定：$\hat{\theta}\,\mathrm{Var} \le \hbar b$）、判定法の形そのものは要る値を割りえます。

残る一歩：隣どうしの結合の項を持つ Lyapunov 関数で、有限の $\hbar$ の補正を下げること。分類は 読 と 仮。

スカラーの筋 — スカラーの形と、スカラーの筋の命題

勾配を成分に分けず、凸な底（谷の側の箱）に Bakry–Émery を当て、頂上の帯は各サイトの Gibbs の段で払う形です。条件は $\ln k < \ell$帯 だけで $A_W \cdot \kappa \cdot b \cdot c_H$ は要りませんが、k が $\ln k$ で入るので、芯の長さには有限の範囲でしか効きません。芯の Poincaré 定数は $C_P^{(1)} \approx 50$–64 と剰余 (Rem_2) の和になり、剰余は最初の固有関数に限れば小ささ $R_2(f)/\int g^2 < \frac{1}{4}$ が要るだけです。これを仮定の表つきの命題にしたのがスカラーの筋の命題です。

スカラーの筋の命題（仮定の表つき）

0+1 次元の二重井戸・$\varepsilon = \frac{1}{2}$・$x_c = 0.89$・芯の長さ $k = 20$・中央の塊 $\{9, 10\}$・f は最初の非零固有関数。表 3 の行の下で、$\hbar \in [3 \cdot 10^{-4}, 10^{-3}]$ の節点 $\{3, 4, \dots, 10\} \cdot 10^{-4}$ の各点で、剰余の量 R は $R \le 2A$、$A = 2kP_v e^{-E_v} \int f^2$、$2kP_v e^{-E_v} \le \frac{1}{4} e^{-3}$。

Lean `path5_conditional`（仮定：剰余の不等式・代理の比・稀さ・算術の余裕 $c_0 + q_g + l_\mu \le -0.7$ を名前つきで）・`p5_assembly`（仮定：代理の比・稀さ・閾・算術・単調性）。

表 3　スカラーの筋の命題の行（五分類）

行	言明（一行）	分類	注
スペクトルの正則性	離散のスペクトル・固有関数の存在と正則性・λ_1 の単純さ	仮	角のある箱の Neumann 問題の正則性は標準の定理から出ない
帯の一サイトの対数 Sobolev	帯の一サイトの欠陥つき対数 Sobolev	仮	未
凸な底と帯の伝播	凸な底と帯の伝播（$C_P^{(1)} \approx 50$–64）	仮	紙は本に置かない
λ_1 の上界	λ_1 の k に一様な上界（Rayleigh 商）	読	区間演算の型（節点ごとに 1 本）、未
射出の向きの局所化	射出の向きの局所化の評価	仮	紙の見積もり。節点ごとに閉じた式 1 本の区間演算の型、未。IMS の局所化の公式は 典 （二次資料で確認）
標的の稀さ	標的の稀さ $\mu(\mathrm{Rem}_v) \le e^{l_\mu(\hbar)}$、$l_\mu \le -4.97$	読	転送の浮動小数。節点ごとに 7 本の区間演算の型、未
非凸な繊維の稀さ	非凸な繊維の上の稀さ（f^2 の割合が e^{-7} 以下）	仮	Markov の不等式と転送。節点ごとに 2 本の区間演算の型、未。作用の差 ΔS_{nc} の下界は区間演算の形に無い
代理の比の持ち上げ	代理の比 $c_1 \le c_*(\hbar)$（$c_* \ge 5.39$、$\hbar \le 10^{-3}$）	仮	**測った範囲の外へ持ち上げる唯一の仮定**：二サイトの塊の測った値 0.002–0.033 と一段 $+0.048$ の線形の持ち上げ（許容 ≥ 0.67）
水準集合の比べ	水準集合の比べ $\ln \Phi \le -4.209$	読	節点ごとに 3 本の区間演算の型、未
余裕の算術	余裕の算術 $c_1 + \ln \Phi \le -3.7$	初	算術
節点の間の包み	節点の間の $\hbar$ の包み	仮	未。範囲 $[3 \cdot 10^{-4}, 10^{-3}]$ は 8 節点の点の値

区間演算に移す本数は、節点ごとに λ_1 の上界 1・射出の向きの局所化 1・標的の稀さ 7・非凸な繊維の稀さ 2・水準集合の比べ 3 の 14 本、8 節点で 112 本と節点の間の包みで、まだ一本も走らせていません。10^{-3} を少し越えると二つの条件が同じ窓で両立しなくなり（$1.35 \cdot 10^{-3}$ で両立しない 読 ）、$\hbar \to 0$ へも、射出の向きの評価が $\hbar^{-1/2}$ で一様でないため延びません。**スカラーの筋の命題は窓の下の端の有限の範囲の、仮定の表つきの命題**です。

Feynman–Kac の筋 — Feynman–Kac の形

比較の対角に Feynman–Kac の重みを残す形で、要るのは芯の全体の対数 Sobolev 定数が $A_{\mathrm{core}} \lesssim a/\hbar$、$a < 1.29/1.47/1.55$（$1/\hbar$ の係数まで問われる）です。試験関数の族の下界は $\hbar A_{\mathrm{core}} \approx 0.78$–$0.83$ 読 で、余裕は 1.6〜1.9 倍です。半径の鎖に分けると、鎖の定数は要る値の 0.54–0.56 倍（模型の鎖の上で）読 、残るのは Helffer–Sjöstrand の表示 典 （書誌だけ、言明は未確認のため本書では 仮 として扱う）の中の量 $K^2 = \sup |\nabla\psi|^2$ で、閾は $1 + K^2 \le W$、すなわち $K^2 \le W - 1 = 0.83$–0.86（W は要る値と鎖の定数の比）です。

- **Monte Carlo の読み**：出発点を探索した後の下からの値で $L = 0.4333 \pm 0.0067$（10^{-3}）・0.4163 ± 0.0079（$3 \cdot 10^{-4}$）、3σ を足して 0.453＝閾 0.835 の **0.54 倍** 読 （出発点の上の最大で、ファイバー全体の上界ではない＝探索した出発点の最大で足りる仮定）。
- **紙の上界**：同じ点・同じ経路で数えた経路ごとの Grönwall 型の上界は $U^2 = 798$＝閾の約 10^3 倍 読 。幅のほとんどは、スカラーの Grönwall が勾配の向きを捨て、全ての向きを最も柔らかい率で減らす段から来ます。時間平均した行列の最小固有値で縮みを押さえる版は偽です Lean `mbar_bound_false` （二次元の反例、仮定なし）。

残る一歩：向きを保つ上界（経路に沿った行列の Lyapunov 関数、または柔らかい部分空間と硬い部分空間に分けた評価）。

三本の並び

表 4　三本の筋の到達点（三つ組は $\hbar = 3 \cdot 10^{-3}/10^{-3}/3 \cdot 10^{-4}$）

筋	到達点	分類	$\hbar$ の範囲	残る一歩
2 スカラー	スカラーの筋の命題（仮定の表つき・持ち上げの仮定一つ・区間演算 112 本は未）	仮 ＋ 読	$[3 \cdot 10^{-4}, 10^{-3}]$ の 8 節点	節点ごとの区間演算・節点の間の包み・持ち上げの仮定の明示
3 Feynman–Kac	Monte Carlo の読みで閾の 0.54 倍。紙の上界は閾の 10^3 倍	読	10^{-3}・$3 \cdot 10^{-4}$	向きを保つ上界
1 成分ごと	Lyapunov の判定法の主項は越えたが要る値の 5.5／2.6／1.4 倍。全ての Lyapunov 関数の床は 31	読	三点	結合の項を持つ Lyapunov 関数

表 4 は、どの筋が「近い」かの順位ではありません。スカラーの筋は窓の下の端でしか形を持たず、窓の全体を覆う形は成分ごとの筋か Feynman–Kac の筋にしかありません。進み具合は行ごとの分類で読んでください。

```
06
```

共通の壁 — 頂上の一サイトの曲率 $15/4$ と 4

芯の作用の Hessian は、格子 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ で三重対角の行列

$$\operatorname{Hess} S = \begin{pmatrix} 4+w_1 & -2 & & \\ -2 & 4+w_2 & -2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -2 & 4+w_k \end{pmatrix}, \qquad w_j = \varepsilon V''(z_j) = \frac{3z_j^2 - 1}{4} \tag{10}$$

です（隣どうしの項 $(z_{j+1}-z_j)^2/(2\varepsilon)$ が対角に 4、隣に -2 を与える）。一つの行を見ると、対角は $4 + w_j$、隣との結合の絶対値の和は $2 + 2 = 4$ です。頂上 $z_j = 0$ では $w_j = -\frac{1}{4}$ なので

$$\text{対角} \;=\; 4 - \tfrac{1}{4} \;=\; \tfrac{15}{4} \;<\; 4 \;=\; \text{結合の和} \tag{11}$$

で、**対角優位が $\frac{1}{4}$ だけ破れます** 初 。行ごとの評価（Gershgorin の円）から言えるのは最小固有値 $\geq \min_j w_j = -\frac{1}{4}$ までで、実際に全てのサイトが頂上にある面 $x \equiv 0$ の上では、両端を止めた k サイトの塊の最小固有値は $8\sin^2\frac{\pi}{2(k+1)} - \frac{1}{4}$ で、$k \geq 8$ で負です 初 （$\operatorname{tridiag}(-2, 4, -2)$ の固有値の閉じた式）。手で確かめるなら、$k = 7$ で $8\sin^2(\pi/16) \approx 0.304 > \frac{1}{4}$、$k = 8$ で $8\sin^2(\pi/18) \approx 0.241 < \frac{1}{4}$ です。

三本の筋は、この一行の不足に形を変えて戻ってきました。

- Barta の重みをどう選んでも、一サイトの重みの行の床は頂上で $F(0,0) = w(0) = -\frac{1}{4}$ です。
- 成分ごとの筋の一様な道の判定は、対角 $A = 4 - \frac{1}{4}$ と結合 $B = 2$ で $A - 2B = -\frac{1}{4}$ でした。
- 成分ごとの筋の Lyapunov の判定法が止まった頂上の面は、作用の勾配が 0 になる面 $x \equiv 0$ そのものです。
- Feynman–Kac の筋で $1/\hbar$ の係数が住むのは、頂上の角からの半径（台地の非凸な向き）でした。

壁が普遍である理由（一行）。凸性（Hessian の正の下界）を入口に持つ道具——Bakry–Émery・Brascamp–Lieb・Barta の行・対角優位——は、頂上の台地で Hessian が本当に負の向きを持つ以上、どこかでこの $\frac{1}{4}$ を台地の稀さ（エントロピー）で払う必要があり、その払い方に $\hbar$ が入ります。この見方の詳しい検討と、凸性に頼らない別の視点は第 24 部（24-06）で扱います。

07

五分類の表 — 区画の枠組みと窓の対数 Sobolev の道筋の行

表 5　この章の行（$\hbar$ の範囲の「—」は、どの $\hbar$ でも示されていない仮定の行。行の欄の番号は §08 の依存グラフの番号）

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
[01]	窓の周辺の対数 Sobolev の入力（窓の周辺の対数 Sobolev 不等式の形）	仮	§02 (4)	—	—
[02]	橋の体積の局所性の入力（橋の上の体積の局所性）	仮	§02 体積の局所性	—	—
[03]	Barta の行 $\kappa = 3/1000$・$b = 493/1000$	仮	§02 区画の合成（紙は本に置かない）	$\hbar$ に依らない	—
[04]	Bochner の境界の項の消滅と固有関数の正則性	仮	§02 区画の合成	—	—
[05]	スカラーの筋の命題の持ち上げの仮定と表 3 の他の仮の行	仮	§05 表 3	—	—
[07]	Bochner の公式の積分形	典	Bochner の公式の積分形（Ledoux の講義の命題 1.3。原典の本文で確認）	$\hbar$ に依らない	—
[08]	$\ell_{\min} = 38.3/121.9/406.8$	読	§02 体積の局所性（転送行列・外挿を含む）	三点	—
[09]	A_W の上界 $1857/2794/9106$・下界 $1.71/1.74/2.59$	読	§03（見積もりを含む／族の値）	三点	—
[10]	区画の和	初	§02	$\hbar$ に依らない	`var_split_cells`（仮定なし）・`cell_sum_sup`（仮定：$w_i, E_i \ge 0$・$C_i \le C_{\max}$）
[11]	Gibbs の分解：Gibbs の変分不等式 (2) と (3)	初	§02 の証明	$\hbar$ に依らない	`gibbs_ln2_cell`（仮定：$p \ge 0$・$\ell \ge 0$・$pe^{\ell} \le 1$）
[12]	成分ごとの局所化 (5) ⟸ [01]	初	§02	$\hbar$ に依らない	`comp_sum_le`（仮定：$0 < \ell \le \ell_j$・各成分の不等式）
[13]	スカラーの形は k に一様でない	初	§02 成分ごとの局所化	$\hbar$ に依らない	`scalar_not_uniform`（仮定：$p > 0$）
[17]	区画の合成 (6) と閉じる条件 (7)	初	§02	$\hbar$ に依らない	`comp_close`（仮定：$X > 0$・$b, A \ge 0$・$\ell > 0$・Barta・(5)・Bochner）

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
[18]	要る値 (8)	初	§03（値は測った ℓ_min の上の算術で読）	三点	—
[15]	局所化した Bochner (9)	初	§03	$\hbar$ に依らない	`negw_le_localized`・`bochner_localized`（仮定は §03 の本文）
[16]	Gibbs の傾きの最適化	初	§03	$\hbar$ に依らない	`tilt_cost_le`（$t=\ell-5.2$ での費用の上界まで。仮定：$b\ge 0$・$L\le 1/178$）
[19]	二つを合わせた要る値 $25.1/90.3/312.3$	読	§03 表 2	三点	`judge_i_inside`（二つの $\hbar$ で、$A\le 22$ なら閉じること。仮定：測った ℓ の下界・$A\le 22$）
[20]	閾が食い違うと $\ell=0$	初	§04	$\hbar$ に依らない	—
[21]	スカラーの筋の命題	仮	§05 スカラーの筋（代理の比の持ち上げの仮定・スペクトルの正則性の行の上の組み立て）	$[3\cdot 10^{-4},10^{-3}]$ の 8 節点	`path5_conditional`・`p5_assembly`（仮定は §05）
[22]	成分ごとの筋の到達点（要る値の 1.4〜5.5 倍・床 31）	読	§05 成分ごとの筋	三点	`tilt_g1`（仮定：$\hat\theta\,\mathrm{Var}\le\hbar b$）
[23]	Feynman–Kac の筋の到達点（読み 0.54 倍・紙の上界 10^3 倍）	読	§05 Feynman–Kac の筋	二点	`mbar_bound_false`（反例、仮定なし）
[24]	頂上の一サイトで対角優位が $\frac14$ 破れる	初	§06 (11)	$\hbar$ に依らない	—
[06]	窓の対数 Sobolev の閾の命題 $A_W<A_{\max}$	仮	窓の対数 Sobolev の道筋	—	—

表 5 の「初」の行は、どれも仮定の行の上の代数か、本文に証明を置いた一般の不等式です。芯の隙間の下界が無条件に示されたことは意味しません。

08 依存グラフ

書式は 23-05 §07 と同じで、「⟸」**の右の番号は左の番号より必ず小さく**置きます。

[01] 仮　窓の周辺の対数 Sobolev の入力　ħ：—

[02] 仮　橋の体積の局所性の入力　ħ：—

[03] 仮　Barta の行 κ = 3/1000・b = 493/1000　ħ に

[04] 仮　Bochner の境界の項と正則性　ħ：—

[05] 仮　スカラーの筋の命題の仮の行（持ち上げの仮定ほか）　ħ：—

[06] 仮　窓の対数 Sobolev の閾の命題：A_W < A_max　ħ：—

[07] 典　Bochner の公式の積分形　ħ に依

[08] 読　ℓ_min = 38.3／121.9／406.8　ħ：

[09] 読　A_W の上界と下界　ħ：三

[10] 初　区画の和　ħ に

Lean var_split_cells・cell_sum_sup

[11] 初　Gibbs の分解（Gibbs の変分不等式）　ħ に依

Lean gibbs_ln2_cell（仮定：p ≥ 0・ℓ ≥ 0・p·e^ℓ ≤ 1）

[12] 初　成分ごとの局所化 (5) ⟸ [01][10][11]　ħ に

Lean comp_sum_le

[13] 初　スカラーの形は k に一様でない　ħ に依ら

Lean scalar_not_uniform（仮定：p > 0）

[14] 読　体積の局所性：ℓ_min は k に依らない ⟸ [02][08]　ħ：三点

[15] 初　局所化した Bochner (9) ⟸ [04][07]　ħ

Lean negw_le_localized・bochner_localized

[16] 初　Gibbs の傾きの最適化　ħ に依

Lean tilt_cost_le（上界まで）

[17] 初　区画の合成 (6)・閉じる条件 (7) ⟸ [03][04][07][12][14]　ħ に依

Lean comp_close（仮定：Barta・(5)・Bochner）

[18] 初　要る値 (8) ⟸ [17]　ħ

[19] 読　要る値 25.1／90.3／312.3 ⟸ [08][15][16][18]　ħ：

Lean judge_i_inside（二つの ħ で A ≤ 22 まで。仮定：測った ℓ の下

[20] 初　閾が食い違うと ℓ = 0　ħ に依

[21] 仮　スカラーの筋の命題 ⟸ [05]　ħ：8

Lean path5_conditional・p5_assembly

[22] 読　成分ごとの筋の到達点 ⟸ [19]　ħ：三

[23] 読　Feynman–Kac の筋の到達点　ħ：二

[24] 初　頂上で対角優位が ¼ 破れる　ħ に依ら

[25] 初　芯の隙間の k に一様な正の下界 ⟸ [06][17]　ħ：—

確かめ方。$\Longleftarrow$ を持つ行は [12]（[01][10][11]）・[14]（[02][08]）・[15]（[04][07]）・[17]（[03][04][07][12][14]）・[18]（[17]）・[19]（[08][15][16][18]）・[21]（[05]）・[22]（[19]）・[25]（[06][17]）で、どれも右の番号が左より小さく、円はありません。

読むこと。結論 [25] は [17] を通して構造の段（[10]〜[14]）と入力の仮定（[01]〜[04]）に依り、さらに仮定の行 [06]（残る一命題）に依ります。[06] を支える候補が三本の筋 [21][22][23] で、どれも [06] を示していません（[21] は窓の下の端の仮定の表つきの命題、[22][23] は読み）。[20] は、[01] と [03] を同じ閾で測らないと [12] が空になる、という確かめの行です。[24] は三本の筋が止まった場所の説明で、どの結論の前提でもありません。

仮定の行の言明が結論の量を含まないことも確かめます。結論の量は芯の測度の隙間 λ です。[01][06] は窓の印の周辺の対数 Sobolev 定数、[02] は切れ端の転送作用素の剰余、[03] は重みの行の下界、[04] は境界の項と正則性、[05] は剰余の量と代理の比で、どれも λ を含みません。

09

次の章へ

窓の対数 Sobolev の道筋で試した迂回策（二十二本と途中で生まれた二本、その派生）の全体の一覧と、繰り返し現れた壊れ方の型は 23-10 で扱います。芯の定数を箱の側から三段で押さえる組み立ては 23-11 です。この部は拡散型緩和時間の仮定を検討の軸に置き、この章はその一段目の鞍点の管の条件の芯の行がどこまで組めたかを述べました。頂上の負の曲率を凸性に頼らずに扱う視点は第 24 部（24-06）で扱います。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 区画の枠組みの区画の和・Gibbs の分解・成分ごとの局所化・区画の合成の組み立て、閉じる条件 (7)、要る値 (8)、局所化した Bochner と Gibbs の傾き、閾の食い違いの帰結、頂上での対角優位の破れ Lean （代数）	入力（窓の周辺の対数 Sobolev の入力・橋の体積の局所性の入力・Barta の行・正則性）
読 要る値 $25.1/90.3/312.3$、A_W の上界との差 29〜74 倍、三本の筋の到達点	残る一命題（窓の対数 Sobolev の閾の命題）。したがって芯の行（芯の Poincaré の一様性の仮定）と鞍点の管の条件
仮 スカラーの筋の命題（$\hbar \in [3 \cdot 10^{-4}, 10^{-3}]$ の 8 節点、仮定の表つき）	スカラーの筋の命題の区間演算・節点の間・窓の上の半分と $\hbar \to 0$

出典と再現

もの	種別	出典・道具
Bochner の公式の積分形	典	M. Ledoux, Sém. Probab. XXXV, LNM 1755 (2001) 167–194（Bochner の公式の積分形、本文で確認）。
Lyapunov 関数と局所 Poincaré の判定法	典	D. Bakry, F. Barthe, P. Cattiaux, A. Guillin, Electron. Commun. Probab. 13 (2008)；D. Bakry, P. Cattiaux, A. Guillin, J. Funct. Anal. 254 (2008) 727–759（定理 3.6 を二次資料の再述で確認）。
IMS の局所化の公式	典	H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, B. Simon, *Schrödinger Operators*, Springer 1987（§3 の再述で確認）。
Helffer–Sjöstrand の表示	仮	B. Helffer, J. Sjöstrand, J. Stat. Phys. 74 (1994) 349–409（書誌だけ、言明は未確認）。
Gibbs の変分不等式・区画の和・成分ごとの局所化・合成	初・Lean	本文 §02 の証明。`var_split_cells`・`cell_sum_sup`・`gibbs_ln2_cell`・`comp_sum_le`・`comp_close`・`scalar_not_uniform`。
要る側の二つの直し	初・読・Lean	§03。`negw_le_localized`・`bochner_localized`・`tilt_cost_le`・`judge_i_inside`。稀さの指数は転送行列（中点則・格子 600 と 1200 の小さい方）。
三本の筋の数	読・Lean	成分ごとの筋：浮動小数の格子の双対と主の問題（格子 40〜160）、`tilt_g1`。スカラーの筋：転送の浮動小数、`path5_conditional`・`p5_assembly`。Feynman–Kac の筋：随伴の推定量の Monte Carlo（経路 32、出発点の探索）、`mbar_bound_false`。

この章で使った語 — 区画の枠組み・区画・印・サイトの窓・欠陥の集合・稀さの指数・Gibbs の変分不等式・成分ごとの局所化・閉じる条件・要る値・道具の選び方と構造・閾値の不一致・三本の筋・スカラーの筋の命題・持ち上げの仮定・共通の壁・対角優位。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-10 迂回策の一覧 — 壊れ方の型 — 迂回策を「殺した一行」つきの一表にし、要る側・形・床の三つの側と、繰り返し現れた壊れ方の型を読む。

迂回策の一覧 — 壊れ方の型

この章は未解決の問いの地図です。§04 は本書の検討、§07 は案内です。

この章で分かること — 窓の対数 Sobolev の道筋の閉じる条件 $b(A_W c_H + D_W + \ln 2) < \kappa \ell_{\min}$ のどの因子を動かすかで、試した迂回策二十四本（迂回策の一覧）を一表にします。各行に「殺した一行」（死んだ案）か「残る仮定」（生きている案）と、動かした因子が構造から来るのか道具の選び方から来るのかを書きます。表から、繰り返し現れた七つの壊れ方の型を抜き出し、型ごとに当たった案と、読者が自分の案を当てて確かめるための問いを添えます。

前提となる章 — 23-09 §03（閉じる条件・要る値・定数の出所の表 1）・23-09 §06（共通の壁）・23-07 §02（窓の対数 Sobolev の道筋の位置）。

先に言うこと — 水準は〔三〕〜〔研〕で、§01・§02 と §04 の型の名と問いは〔三〕で読めます。この部は拡散型緩和時間の仮定を検討の軸に置いていて（23-01）、この章はその一段目の鞍点の管の条件の芯の行に向けて試した案の後始末です。どの案も鞍点の管の条件を示していません。数は全て 0+1 次元の二重井戸・格子 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ の上の値で、三つ組は $\hbar = 3 \cdot 10^{-3}$ / 10^{-3} / $3 \cdot 10^{-4}$ の順です。

この章の順序

1. 要約 — 〔三〕で読める一節
2. 出発点 — 閉じる条件と、三つの側
3. 迂回策の一覧（表 1・数え）
4. 壊れ方の型 — 七つの型と、自分の案を当てる問い（表 2）
5. 生き残ったものの行き先 — 三本の筋へ（表 3）
6. 五分類の表 — 型ごとの主な補題（表 4）

01

要約

窓の対数 Sobolev の道筋の残る一命題は、サイトの窓の対数 Sobolev 定数 A_W が要る値 $A_{\max}$ の内にあることでした（23-09 §03）。迂回策は、この不等式の両辺のどちらか、または不等式の形そのものを動かす案です。

- **二十四本の結果**。最初に並べた二十二本は、死 13・保留 2・条件つき 3・生 4 に分かれました。生の 4 本のうち 2 本（迂回策「負の曲率の局所化」・迂回策「Gibbs の傾きの最適化」）は以後の全ての形に部品として入り、残りの 2 本（迂回策「スカラーの払い」・迂回策「関数の不等式の取り替え」）と途中で生まれた迂回策「高さの関数の払い」が、23-09 の三本の筋になりました。
- **道具の側と構造の側**。要る値を大きく動かしたのは、道具の選び方を直した案（負の曲率の局所化・Gibbs の傾きの最適化：10^{-3} で $0.20 \to 90.3$、約 460 倍）で、構造から来る因子（欠陥の深さ b・欠陥の集合の稀さ ℓ）を動かした案は、どれも 1.15 倍の天井の下で止まりました。
- **七つの壊れ方の型**。源は一つ（頂上の一サイトの曲率）・比で入る構造の因子の天井・同じ場所を二度払う・通貨の取り違え・$1/\hbar$ の住所・揺れの向きと柔らかい向きのずれ・移しかえ。死んだ 13 本のうち 12 本は、このどれかに当たります。

02

出発点 — 閉じる条件と、三つの側

23-09 の写し。芯 Q_k の隙間 λ を芯の長さ k に一様に押さえる区画の枠組みは、Barta・成分ごとの局所化・Bochner の三つの不等式を組んで、次の条件の下で閉じます（23-09 (7)）。

$$b\,(A_W c_H + D_W + \ln 2) \;<\; \kappa\,\ell_{\min}, \qquad A_W \;<\; A_{\max} = \frac{\kappa \ell_{\min}/b - D_W - \ln 2}{c_H} \tag{1}$$

六つの定数のうち、$\kappa = 3/1000$・$b = 493/1000$・$\ell_{\min}$ は模型と欠陥の集合の定め方が決める**構造**の量で、$c_H = \tfrac{1}{4}$（負の曲率を芯の全体で一様に払った値）と $\ln 2$（Gibbs の傾きを $t = \ell$ に固定した値）は**道具の選び方**の量です（23-09 表 1）。元の形で要る値は負／0.20／7.13、一方 A_W の上界は $1857/2794/9106$ 読 （見積もりを含む）、下界は $1.71/1.74/2.59$ 読 （試験関数の族の値）でした。

迂回策とは。(1) を閉じるには、要る値を上げるか、上界を下げるか、条件の形を替えるかです。この章では案をその向きで三つの側に分けます。

図 1　三つの側（テキストの三列）

要る側	形	足りない側（床）
$A_{\max}$ を大きくする。(1) の右辺の κ・$\ell_{\min}$ を大きく、左辺の b・c_H・$\ln 2$ を小さく	(1) の関数形を替える。A_W が条件に入らない組み方・対数 Sobolev でなく Poincaré の組み方	A_W の上界を下げる。上界の組み立ての構造の損（床）を減らす
負の曲率の局所化・Gibbs の傾きの最適化・閾の引き上げ・欠陥の深さの層分け・欠陥の集合の絞り込み・長い塊の欠陥・非線形の Barta の重み・古典の極限への延長・Hölder と超縮小の段・高さの関数の払い	スカラーの払い・迂回策「Agmon の型の払い」・迂回策「下流の洗い直し」・関数の不等式の取り替え	頂上の帯の払い・粗い段と伝播の段の一括・塊を固定した対数 Sobolev・頂上の帯だけの摂動・既知の一様な対数 Sobolev・有限体積の判定・Glauber の対数 Sobolev・二段の塊展開・一・二サイトの窓・塊の芯の局所化

もう一つの軸が、動かした因子の性格です。**構造**の因子は模型が決める量で、動かすには欠陥の集合や重みの定義を替える必要があります。**道具**の因子は証明の段の選び方で、同じ集合のまま替えられます。表 1 の「構造／道具」の列はこの軸で、「道具 → 構造の床」は道具を替えたが構造の床に当たって止まった案です。

03

迂回策の一覧

表 1 の判定の語は次の意味です。**生**＝その形で要る値の内に入った（それでも (1) の証明ではなく、残る仮定がある）。**条件つき**＝残る仮定を名指しできる。**保留**＝紙で決まらない。**死**＝殺す検査で要る値の外に出たか、形が出なかった。殺した一行は、その案を止めた事実を一行に縮めたもので、数は全て浮動小数の格子か転送行列の読みです 読 （下界は試験関数の族の中の値）。

表 1　迂回策の一覧（三つ組は $\hbar = 3\cdot 10^{-3}/10^{-3}/3\cdot 10^{-4}$。「型」は §04 の壊れ方の型）

迂回策	案（一行）	何を動かす	構造／道具	結果	殺した一行（死）／残る仮定	型・章
負の曲率の局所化	Bochner の負の曲率を欠陥の集合に局所化	c_H（要る側）	道具	生（部品として吸収）	Gibbs の傾きの最適化と合わせて要る値 $25.1/90.3/312.3$。残る：Bochner の段の正則性・A_W を欠陥と同じ閾の印で測ること	二度払いの型・23-09 §03
Gibbs の傾きの最適化	Gibbs の傾きを $t^{*}=\ell-5.10$ に	$\ln 2$（要る側）	道具	生（吸収）	費用 $b\ln 2 = 0.342 \to 0.0183$。残る仮定なし（一行の不等式）	二度払いの型・23-09 §03

迂回策	案（一行）	何を動かす	構造／道具	結果	殺した一行（死）／残る仮定	型・章
閾の引き上げ	閾を $1/\sqrt{3}$ に上げ、局所化の残り δ を 0 に	δ・κ（要る側）	道具	条件つき	要る値は実質 $A_W \lesssim 4\ell$：$128/452/1604$ 対 上界 $1629/2444/8153$（12.8／5.41／5.08 倍外）。残る：窓の外の尾	構造の因子の天井の型
欠陥の深さの層分け	欠陥の深さ b を層に分ける	b（要る側）	構造	死	倍率 $1.05/1.01/1.004$。集合を変えず b・κ だけを動かす案は $A_{\max} < 4\ell$（いまの値からの天井 $1.15/1.04/1.01$ 倍）	構造の因子の天井の型
欠陥の集合の絞り込み	欠陥の集合を、行が κ を下回る集合に絞る	$\ell_{\min}$（要る側）	構造	死	集合は 1.40 倍稀になったが、Barta の側の稀さは $\kappa/(\beta_0-\kappa) \approx 1/47$ を掛けてしか効かない（倍率 $1.11/1.05/1.02$）	構造の因子の天井の型
長い塊の欠陥	欠陥を長さ 8 以上の塊で定める道へ	$\ell_{\min}$（要る側）	構造	死	長さ ≥ 2 の短い塊で Barta の行の最良の下界が負（長さ 2 で -0.0096）	頂上の曲率の型
頂上の帯の払い	頂上の帯を欠陥に払う	床	構造	死	帯の稀さと帯を通る尾が両方 $\propto 1/\hbar$ で打ち消し、帯に触れて出る道の尾が全体の尾に等しい	1/ħ の住所の型
スカラーの払い	区画の欠陥をスカラーの形で払う	形	道具	生（条件つき）	条件は $\ln k < \ell_{\text{帯}}$ だけで A_W・κ・b・c_H が要らない。残る：スカラーの筋の命題の表の行	23-09 スカラーの筋
非線形の Barta の重み	Barta の重みを非線形に	b（要る側）	道具 → 構造の床	死	最悪の行は $-0.4865 \to -0.25$ に上がるが、頂上の床 $F(0,0)=w(0)=-\frac{1}{4}$ はどの一サイトの重みにもある（倍率 $1.02/1.006/1.002$）	頂上の曲率の型
Agmon の型の払い	真の固有関数の勾配だけで欠陥の重みを払う（Agmon の型）	形	道具 → 構造の床	死	Agmon の利得は曲率が正の余白を持つ所だけで、欠陥の集合は曲率が負になる唯一の場所＝最も許された側	頂上の曲率の型
下流の洗い直し	下流で要るものを洗い直す	形	道具	保留 → スカラーの払いに吸収	下流は「k に一様・$\hbar$ について多項式」で足りるが、入力を k に一様に出す道具が対数 Sobolev の型しか無かった	23-09 スカラーの筋

迂回策	案（一行）	何を動かす	構造／道具	結果	殺した一行（死）／残る仮定	型・章
粗い段と伝播の段の一括	粗い段と伝播の段を積に分けず一度に	床	道具	条件つき	粗い段は下界との比 $1.016/1.005/1.003$ で詰んだ。残る：伝播の段の重みつき条件つき Poincaré 定数 C_w	23-09 成分ごとの筋
関数の不等式の取り替え	対数 Sobolev でなく Poincaré／修正 LSI／Φ-エントロピー	形	道具	Poincaré は生（条件つき）・他の二つは死	修正 LSI は $\ln(1/\pi_*)$ がエネルギーの側へ移るだけ、Φ-エントロピーは Poincaré の端点に勝てない	移しかえの型・スカラーの筋
塊を固定した対数 Sobolev	塊の状態を固定した条件つき測度の対数 Sobolev	床	道具	死	条件づけた後は欠陥の集合の測度が 0 か 1 で、$\ell = 0$	通貨の取り違えの型
頂上の帯だけの摂動	窓の外に Bakry–Émery、頂上の帯だけ Holley–Stroock の摂動	床	道具	死	一サイトの振れ $\mathrm{osc}/\hbar = 3.7/11/37$ が指数に入り鎖で長さ倍、欠陥の項に払うと許容の 2000〜4900 倍	$1/\hbar$ の住所の型
既知の一様な対数 Sobolev	一次元の一様な対数 Sobolev の既知の定理	床	道具	死	一様な定数は相関の長さを覆う箱（長さ $\gtrsim 230$–810）の有限体積の定数で、窓の定数を下回らない	移しかえの型
有限体積の判定	有限体積の判定（Martinelli–Olivieri・Lu–Yau の型）	床	道具	死	迂回策「既知の一様な対数 Sobolev」と同じ：判定の箱が相関の長さを覆う必要がある	移しかえの型
Glauber の対数 Sobolev	Glauber 力学の既知の対数 Sobolev	床	道具	死	粗い段は律速でなく、Glauber の定数 ≥ 39–400 はむしろ悪い	—
二段の塊展開	二段の塊展開・ブロックスピン	床	道具	死	最大の道のピンは頂上に残り、尾の利得 ≤ 1.8（10^{-3}）・≤ 3（$3 \cdot 10^{-3}$）で、要る 5〜13 倍に届かない	移しかえの型
古典の極限への延長	$\hbar$ を窓の下へ（古典の極限）	要る側（範囲）	構造	保留	帯を外すと境の写像の縮み $0.976/0.952/0.929 < 1$（帯の幅 $0.1/0.2/0.3$）で尾は $\hbar$ に依らず有界。残る：境の自己閉路の補題と帯の補題（迂回策「頂上の帯の払い」は死）	—

迂回策	案（一行）	何を動かす	構造／道具	結果	殺した一行（死）／残る仮定	型・章
一・二サイトの窓	窓を一・二サイトに（半分の行）	床	道具	条件つき（利得は小）	効き目は約 2/3、倍差 $8.45/3.59/3.38$。伝播の尾は残る	移しかえの型
塊の芯の局所化	窓でなく塊の芯で局所化	床	道具	死	窓の尾を 1 にした極限でも $4.2/1.8/1.7$ 倍外（床の出所は窓の選び方に依らない）	移しかえの型
Hölder と超縮小の段	Gibbs の段を Hölder と超縮小に	要る側	道具	単独は迂回策「閾の引き上げ」に支配	$\sqrt{k}$ は出ないが A は $\ln C^2$ に一次で入り、天井は同じ $\approx 4\ell$（要る値は閾の引き上げの 0.80〜0.91 倍）。取り柄は印の集合の可測性が要らないこと	構造の因子の天井の型
高さの関数の払い	負の曲率を高さの関数 $h=(-w(z_j))_+$ で払う（各点の曲率をその点の稀さで）	要る側	道具	条件つき	要る値 $537/1754/6052$（閾の引き上げの 3.8〜4.2 倍）。Rothaus の補題のままでは死。残る：伝播の尾	成分ごとの筋・迂回策「Hölder と超縮小の段」と合わせて Feynman–Kac の筋

数え。最初の二十二本（表 1 の負の曲率の局所化から塊の芯の局所化まで）は、生 4（負の曲率の局所化・Gibbs の傾きの最適化は部品として吸収、スカラーの払い・関数の不等式の取り替えの Poincaré の形は条件つき）・条件つき 3（閾の引き上げ・迂回策「粗い段と伝播の段の一括」・迂回策「一・二サイトの窓」）・保留 2（下流の洗い直しはスカラーの払いに吸収・迂回策「古典の極限への延長」）・死 13 です。死んだ 13 本の側は、床の側 8（頂上の帯の払い・塊を固定した対数 Sobolev・頂上の帯だけの摂動・既知の一様な対数 Sobolev・有限体積の判定・Glauber の対数 Sobolev・二段の塊展開・塊の芯の局所化）・要る側 4（迂回策「欠陥の深さの層分け」・迂回策「欠陥の集合の絞り込み」・迂回策「長い塊の欠陥」・迂回策「非線形の Barta の重み」）・形 1（Agmon の型の払い）です。途中で生まれた二本は、Hölder と超縮小の段が単独では閾の引き上げに支配され、高さの関数の払いは条件つきで成分ごとの筋に入り、Hölder と超縮小の段と合わせた形がFeynman–Kac の筋になりました。

道具の側と構造の側の対比。表 1 の「構造／道具」の列を結果の列と並べると、要る値を大きく動かした行は全て「道具」です。負の曲率の局所化・Gibbs の傾きの最適化は同じ欠陥の集合のまま、負の曲率の払い方と Gibbs の傾きの選び方を直しただけで、要る値を負／0.20／7.13 から $25.1/90.3/312.3$ へ動かしました（10^{-3} で約 460 倍、$3\cdot10^{-4}$ で約 44 倍、$3\cdot10^{-3}$ では負から正へ）読。一方「構造」の行（欠陥の深さの層分け・欠陥の集合の絞り込み・長い塊の欠陥・頂上の帯の払い）と構造の床に当たった行（非線形の Barta の重み・Agmon の型の払い）は、倍率が 1.15 を越えないか、形が出ませんでした。要る側の損の大半は、模型の

構造ではなく道具の選び方にあった、ということです。逆に、道具を直し尽くした後に残る差（閾の引き上げの形で 5〜13 倍）は、§04 の頂上の曲率の型の構造の床に帰ります。

▶ 派生の一覧（筋の中で試した形、折りたたみ）

04

壊れ方の型

表 1 と表 1′ の殺した一行を並べると、同じ理由が形を変えて繰り返し現れます。それを七つの型にまとめます。各型に、当たった案、なぜその型で壊れるかの一段落、自分の案を当てて確かめるための問いを置きます。型は互いに排他ではなく、一つの案が二つの型に当たることもあります。

頂上の曲率の型 — 源は一つ（頂上の一サイトの曲率）

当たった案：長い塊の欠陥・非線形の Barta の重み・Agmon の型の払い、表 1′ の一様な道と区画に分けない Lyapunov の判定。

芯の作用の Hessian の一つの行は、頂上で対角 $4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$ が隣との結合の和 4 に $\frac{1}{4}$ 届きません（23-09 (11)）。この不足は、Barta の重みの行・鎖の縮みの判定・Lyapunov 関数の判定のどれにも、頂上の面 $x\equiv 0$（全てのサイトが頂上）で同じ値として現れます。例えば一サイトの重み $\psi_j=\phi(z_j)$ の Barta の行は $F(z,n)=w(z)+(\text{重みの対数微分})\times(\text{漂流})$ の形で、頂上 $z=0$ と隣 $n=0$ では漂流 $\varepsilon V'(0)+8(0-0)$ が 0 なので、重みをどう選んでも 初

$$F(0,0)=w(0)=-\tfrac{1}{4} \tag{2}$$

です（行の形は 23-09 の Barta の行と同じ仮定の行の上の一行の計算）Lean `floor_top`（仮定：重みの値 $\neq 0$）。Agmon の型の払いの Agmon の型は、曲率が正の余白を持つ所で利得を得る道具で、欠陥の集合はちょうど曲率が負の場所なので、そこでの利得の係数は ≤ 0 です Lean `agmon_no_gain_on_negative_curvature`（仮定：曲率 $w\le 0$・$\lambda\ge 0$ ほか。Agmon の評価の枠組みは本に置かない）。長い塊の欠陥では、欠陥を長い塊で定めると、長さ 2 以上の短い塊の行が負になり、同じ不足が短い塊の側に出ました。

当てる問い：その案は、頂上の面 $x\equiv 0$ の上で何を払っていますか。そこで払う量が $\hbar$ に依らない定数なら、$\frac{1}{4}$ の不足がそのまま残ります。この不足を払えるのは、頂上の台地の稀さ（エントロピー）だけで、その払い方に $\hbar$ が入ります。

構造の因子の天井の型 — 比で入る構造の因子には天井がある

当たった案：欠陥の深さの層分け・欠陥の集合の絞り込み・Hölder と超縮小の段、閾の引き上げの天井。

閾を上げて局所化の残りを $\delta \geq 0$、残りの係数を γ、Gibbs の傾きを t、$L(t) = \ln(1 + e^{t-\ell})$ とした閉じる条件は $b(A\delta + D_W + L(t)) < \kappa(t - A\gamma)$ です（負の曲率の局所化・Gibbs の傾きの最適化・閾の引き上げの形）。

天井の補題。$0 < \kappa < b$、$\delta, D_W \geq 0$ なら、この条件を満たす $A \geq 0$ は $A\gamma < \ell$ を満たす。

初 証明。左辺は $bL(t) > 0$ 以上なので $t - A\gamma > 0$ です。$b > \kappa$ から $b(t - A\gamma) > \kappa(t - A\gamma) > bL(t) \geq b(t - \ell)$（$\ln(1 + e^x) \geq x$）。$b$ で割ると $A\gamma < \ell$。∎ Lean `ceiling_same_set`（仮定：$0 < \kappa < b$・$t - A\gamma > 0$・$t - \ell \leq L$・閉じる条件）

欠陥の集合（したがって ℓ）を変えずに b・κ だけを動かす案は、要る値を ℓ/γ（閾の引き上げの形で 4ℓ）より上に出せません。閾の引き上げの形の要る値はすでに天井の $1/1.15/1/1.04/1/1.01$ の所にあり 読、欠陥の深さの層分けの $1.05/1.01/1.004$ 倍はその内です。集合を変える欠陥の集合の絞り込みでは、Barta の側の稀さ（行が κ を下回る集合の ℓ_B）は $\kappa/(\beta_0 - \kappa) \approx 1/47$ を掛けてしか条件に入らず 仮（紙は本に置かない）Lean `ceiling_split`、集合を 1.40 倍稀にしても倍率は 1.11 止まりでした。Hölder と超縮小の段は Gibbs の段の道具を替えましたが、A が同じ形で入るので天井は同じです。

当てる問い：その案は欠陥の集合を変えますか。変えないなら、要る値は ℓ/γ を越えません。変えるなら、新しい集合の稀さが条件のどの係数と掛かって入るかを先に書いてください。

二度払いの型 — 同じ場所を二度払っていた

当たった案（直した側）：負の曲率の局所化・Gibbs の傾きの最適化、表 $1'$ の窓の組み立て。

元の組み立ての Bochner の段は、負の曲率 $-\frac{1}{4}$ を芯の全体 X で払っていました。ところが負の曲率は $z > -1/\sqrt{3}$ にしか無く、そこは Gibbs の段が既に Y として払っている欠陥の集合の中です。同じ場所を X の側でもう一度払ったために、$b/\kappa \approx 164$ の増幅を通って A_W の係数が $bc_H = 0.123$ になっていました。局所化（負の曲率の局所化）で係数は 0.0038 に下がります（23-09 (9)）。Gibbs の傾き $t = \ell$ の固定（Gibbs の傾きの最適化）と、伝播の段の組み立ての $(1 + \sqrt{C_w})^2$（同じ量を二度数える）も同じ型です。この型は、直すと大きく効く型です。

当てる問い：その段で払っている量は、前の段がすでに払った集合の上にありませんか。二つの段の払う場所を同じ図に描くと見えます。

通貨の取り違えの型 — 出口の速さと稀さ

当たった案：迂回策「塊を固定した対数 Sobolev」、表 $1'$ の帯を稀さで払う形と二重閾値、23-11 §04 の素朴な分散の分解。

Poincaré 不等式が測るのは出口の速さ（分散を Dirichlet 形で割った比）で、稀さ $\mu(B) \le e^{-\ell}$ を払えるのはエントロピーの通貨です（23-09 (3)：$\ell \int_B g^2 \le \mathrm{Ent} + \ln 2 \int g^2$）。分散と Dirichlet 形の比は関数の定数倍で変わらないので、稀な集合に台を持つ関数を入れると、稀さは分子と分母で打ち消します。「帯に張り付いているから揺らぎは小さい」は分散についての直観で、稀さを払う段に要るのはエントロピーの評価です。塊を固定した対数 Sobolev はもっと直接で、欠陥の集合が条件づけの σ-代数で決まるなら、条件つきの測度ではその集合の測度は 0 か 1 で 初 （条件つき確率の定義）、払う稀さ ℓ がもう残っていません。

当てる問い：稀さ $\mu(B)$ を払っている段は、エントロピー（またはそれと同じ型の不等式）を通っていますか。分散と Dirichlet 形だけなら、稀さは効きません。条件づけの後に稀さが残っているかも確かめてください。

1/ħ の住所の型 — $1/\hbar$ の住所

当たった案：頂上の帯の払い・迂回策「頂上の帯だけの摂動」、表 $1'$ の線形の集団座標・区画した鎖・壁で切る多段・壁の印の鎖・平均の高さを足す鎖。

Feynman–Kac の筋で要るのは芯の対数 Sobolev 定数の $1/\hbar$ の係数でした。その $1/\hbar$ がどの量に住むかを見誤ると、案は $1/\hbar$ を別の場所へ移すだけになります。三つの事実が繰り返し出ました。

- **$1/\hbar$ は $\sum z$ でなく半径に住む。** 頂上の台地での作用は、線形の集団座標 $\sum_j z_j/\sqrt{k}$ の向きではなく、頂上の角からの半径（$\sum_j z_j^2$ の向き）に沿って変わり、その長さは交差の長さ $\ell_\times \approx 0.34/\hbar$ です 読 。集団座標と横方向に分ける二尺度は、頂上の面で集団座標に直交する向きの最小の曲率 $4 - 4\cos(2\pi/(k+1)) - \frac{1}{4}$ が $k = 17$ で負になり 初 （三重対角の固有値の閉じた式） Lean `transverse_fails_k17` （仮定なし）、$k \le 16$ でしか凸性を持ちません。
- **区画で切っても $1/\hbar$ は割り振られるだけ。** エントロピーの鎖則 $\mathrm{Ent} = \mathrm{Ent}(\text{印の周辺}) + \mathbb{E}\,\mathrm{Ent}(\text{区画の中})$ は恒等式で 初 Lean `chain_rule_cells` （仮定：鎖則・二つの項の上界）、台地を壁の位置で切ると $\approx 0.8/\hbar$ が印の側と区画の側に割り振られます 読 。和は減りません。
- **印は面をまたぐ一歩しか表さない。** 壁の印の鎖では鎖そのものの定数は小さくなりますが、印は台地の上の位置を見分けず面をまたぐ一歩だけを表すので、$1/\hbar$ は印の鎖と元の測度を比べる定数 $\ge 13/26/66$ に移りました 読 。鎖に足す変数の良し悪しは、その変数の率関数

が極値で平らかどうかで決まり（平らなら足す費用が $O(1)$）Lean `S_ext_01_iff`（代数）、平均の高さは平らでなく $\propto 1/\hbar$ を払い、半径は通りました。

頂上の帯の払い（帯の稀さと帯を通る尾が両方 $\propto 1/\hbar$ で打ち消す）と頂上の帯だけの摂動（Holley–Stroock の摂動の費用 $e^{\mathrm{osc}/\hbar}$）も、$1/\hbar$ を払う場所を移しただけの例です。

当てる問い：その案で $1/\hbar$ はどの量に掛かっていますか。区画・印・比較の定数・摂動の費用のどれかに移っただけなら、消えていません。足す変数の率関数を、極値の近くで描いてみてください。

揺れの向きのずれの型 — 揺れの向きと柔らかい向きのずれ

当たった案：表 1′ の半径と球面の角・三段・分散版の二尺度・内部の半径、Feynman–Kac の筋の紙の上界。

二尺度の合成で、ファイバーの外の勾配を sup で取り（揺れの向き）、それをファイバーの最も柔らかい向きの定数で払う（$\kappa \times A_{\mathrm{fib}}$ の型）と、二つの向きが揃っていない所で上界が桁で過大になります。分散に替えた版でも、損の下界 0.66–1.8 が要る 0.18–0.50 の外でした 読 。払うべき量は、ファイバーの上の Poisson 方程式の解の勾配（Helffer–Sjöstrand の表示の $|M^{-1}\nabla_{\perp}G|$）で、向きを保ったまま評価する必要があります。Feynman–Kac の筋で Monte Carlo の読みが閾の 0.54 倍、紙の上界が閾の 10^3 倍と開いたのも、スカラーの Grönwall が勾配の向きを捨て、全ての向きを最も柔らかい率で減らす段から来ました（23-09 Feynman–Kac の筋）。

当てる問い：上界のどこかで、ベクトルの量をスカラーに潰していませんか。潰した段があれば、そこで最も柔らかい向きの率で払っています。揺れが大きい向きと柔らかい向きを同じ図に描いてください。

移しかえの型 — 重さは別の列へ移るだけ

当たった案：関数の不等式の取り替えの修正 LSI・既知の一様な対数 Sobolev・迂回策「有限体積の判定」・迂回策「二段の塊展開」・一・二サイトの窓・迂回策「塊の芯の局所化」、表 1′ の代理の系列。

既知の一様性の定理（既知の一様な対数 Sobolev・有限体積の判定）は、定数を作るのではなく、問題を相関の長さを覆う箱（長さ $\gtrsim 230$–810）の有限体積の定数へ移します。窓は有限なので存在は元から自明で、効かない理由は大きさです。窓の取り方を替える案（一・二サイトの窓・塊の芯の局所化）は、窓の損を減らしても伝播の段の床が残りました。塊展開（二段の塊展開）では最大の道のピンが頂上に残り、修正 LSI（関数の不等式の取り替え）では $\ln(1/\pi_*)$ がエネルギーの側へ移りました。スカラーの筋の命題の代理の系列では、代理や向き

を替えて仮定の列が軽くなったとき、計算する列が同じだけ重くなっていました（二つの列の和が向きに依らない恒等式）仮（定義は本に置かない）Lean `threshold_gap_invariant`（仮定：二つの和の恒等式）。

当てる問い：その案で軽くなった列の分だけ、別の列（箱の大きさ・伝播の段・計算する量）が重くなっていませんか。和が不変量なら、余裕は動いていません。

表 2　壊れ方の型（一行ずつ）

型	一行	当たった案	当てる問い
頂上の曲率の型	頂上の一サイトの対角 $15/4$ が結合 4 に $\frac{1}{4}$ 届かない	長い塊の欠陥・非線形の Barta の重み・Agmon の型の払い、一様な道、区画しない Lyapunov	頂上の面 $x \equiv 0$ で何を払うか
構造の因子の天井の型	集合を変えず $b \cdot \kappa$ を動かしても $A\gamma < \ell$	閾の引き上げ・欠陥の深さの層分け・欠陥の集合の絞り込み・Hölder と超縮小の段	欠陥の集合を変えるか
二度払いの型	前の段が払った場所を後の段がもう一度払う	負の曲率の局所化・Gibbs の傾きの最適化（直した側）、窓の組み立て	払う場所を同じ図に描いたか
通貨の取り違えの型	Poincaré は出口の速さ、稀さはエントロピーの通貨	塊を固定した対数 Sobolev、帯を稀さで、二重閾値、素朴な分散の分解	稀さを払う段がエントロピーを通るか
$1/\hbar$ の住所の型（$1/\hbar$ の住所）	$1/\hbar$ は半径に住み、区画・印では割り振られるだけ	頂上の帯の払い・頂上の帯だけの摂動、集団座標、区画した鎖、多段、印の鎖、平均の高さ	$1/\hbar$ はどの量に掛かっているか
揺れの向きのずれの型	sup の勾配を最も柔らかい向きで払うと桁で過大	角と半径、三段、分散版、内部の半径、Grönwall	ベクトルをスカラーに潰していないか
移しかえの型	軽くなった列の分だけ別の列が重くなる	関数の不等式の取り替え・既知の一様な対数 Sobolev・有限体積の判定・二段の塊展開・一・二サイトの窓・塊の芯の局所化、代理の系列	和が不変量になっていないか

死んだ案と保留の案のうち、表 1 で型の列が「—」なのは、律速でない段を直した迂回策「Glauber の対数 Sobolev」と、保留の古典の極限への延長です（生と条件つきの案の列は行き先の章）。死んだ案ごとに殺した一行を残しておくこの表の型は、他の問題で迂回策を洗い出した後の後始末にも、そのまま使えます。

05

生き残ったものの行き先 — 三本の筋へ

生と条件つきの案は、要る値の表と三本の筋にまとまりました。三本の筋の到達点と残る一歩は 23-09 表 4 にあり、ここでは案からの対応だけを並べます。

表 3　生き残った案の行き先

案	行き先	そこで残っていること

案	行き先	そこで残っていること
負の曲率の局所化・Gibbs の傾きの最適化（・閾の引き上げ）	要る値の表（23-09 表 2）。以後の全ての形の部品	Bochner の段の正則性・A_W を欠陥と同じ閾の印で測ること（23-09 §04）
高さの関数の払い・粗い段と伝播の段の一括（と表 1′ の成分ごとの筋の派生）	成分ごとの筋　成分ごとの形	伝播の段の C_w の上界（結合の項を持つ Lyapunov 関数）
スカラーの払い・関数の不等式の取り替えの Poincaré の形・下流の洗い直し	スカラーの筋　スカラーの形（スカラーの筋の命題）	区間演算の行・節点の間・持ち上げの仮定一つ
Hölder と超縮小の段と高さの関数の払いを合わせた形	Feynman–Kac の筋 Feynman–Kac の形	向きを保つ上界（揺れの向きのずれの型）

三本の筋がどれも止まった場所は頂上の曲率の型の源で、23-09 §06 の共通の壁と同じものです。芯の定数を区画の枠組みでなく箱の側から押さえる別の組み立ては、23-11 で扱います。

06

五分類の表 — 型ごとの主な補題

この章は一覧の章なので、行は型を支える補題と、表 1 の値に限ります。どの行も窓の対数 Sobolev の道筋の結論の前提ではなく、結論への依存は 23-09 §08 のグラフにあります。そのためこの章には依存グラフを置きません。

表 4　この章の行

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
頂上の床	一サイトの重みの Barta の行の床 $F(0,0)=w(0)=-\frac{1}{4}$	初	§04 (2)（行の形は 23-09 の仮の行（Barta の行の仮定）の上）	$\hbar$ に依らない	`floor_top`（仮定：重みの値 $\neq 0$）
Agmon の利得	負の曲率の所で Agmon の利得の係数は ≤ 0	仮	§04 頂上の曲率の型（Agmon の評価の枠組みは本に置かない）	—	`agmon_no_gain_on_negative_curvature`（代数）
天井の補題	集合を変えない案の天井 $A\gamma<\ell$	初	§04 構造の因子の天井の型の証明	$\hbar$ に依らない	`ceiling_same_set`（仮定：$0<\kappa<b$・$t-A\gamma>0$・$t-\ell\le L$・閉じる条件）
Barta の側の稀さ	Barta の側の稀さは $\kappa/(\beta_0-\kappa)$ を掛けてしか入らない	仮	§04 構造の因子の天井の型（紙は本に置かない）	—	`ceiling_split`（代数）

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
二度払いの直し	局所化した Bochner と Gibbs の傾き（二度払いの直し）	初	23-09 §03	$\hbar$ に依らない	`bochner_localized`・`tilt_cost_le`（仮定と範囲は 23-09）
条件づけの後の稀さ	条件づけの σ-代数で決まる集合の条件つき測度は 0 か 1	初	§04 通貨の取り違えの型	$\hbar$ に依らない	—
横方向の凸性	頂上の面で集団座標に直交する最小の曲率は $k = 17$ で負	初	§04 $1/\hbar$ の住所の型（閉じた式）	$\hbar$ に依らない	`transverse_fails_k17`（仮定なし）
エントロピーの鎖則	エントロピーの鎖則（区画で切っても和は減らない）	初	§04 $1/\hbar$ の住所の型（恒等式）	$\hbar$ に依らない	`chain_rule_cells`（仮定：鎖則・二項の上界）
$1/\hbar$ の住所の値	$1/\hbar$ の住所（交差の長さ $0.34/\hbar$・割り振り $\approx 0.8/\hbar$・比較の定数 $\geq 13/26/66$）	読	§04 $1/\hbar$ の住所の型	三点	—
向きのずれの損	向きのずれの損（下界 0.66–1.8 対 要る 0.18–0.50）	読	§04 揺れの向きのずれの型	三点	—
代理の系列の不変	代理の系列の二つの列の和の不変	仮	§04 移しかえの型（定義は本に置かない）	—	`threshold_gap_invariant`（仮定：二つの和の恒等式）
既知の一様性の読み	一次元の一様な対数 Sobolev の既知の定理は箱の定数を与える	仮	§04 移しかえの型（原典の言明は確かめていない）	—	—
表 1 の値	表 1・表 1′ の倍率・天井・要る値	読	§03（浮動小数の格子と転送行列、下界は族の中）	三点	—

「初」の行は、型を言い当てる一般の事実で、どの迂回策の成功も意味しません。表 4 のどの行も、閉じる条件 (1) を示していません。

```
07
```

次の章へ

芯の定数を、区画の枠組みでなく箱への帰着の条件と箱の中の隙間の条件の側から三段で押さえる組み立てと、端の集合の線引きは 23-11 です。この部は拡散型緩和時間の仮定を検討の軸に置いていて、この章はその一段目の鞍点の管の条件の芯の行に向けた案の後始末でした。頂上の負の曲率を凸性に頼らずに扱う別の視点は第 24 部（24-06）で扱います。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 頂上の床 (2)、集合を変えない案の天井、条件づけの後の稀さの消失、横方向の凸性の閾、エントロピーの鎖則 Lean （代数）	閉じる条件 (1)。したがって窓の対数 Sobolev の道筋の残る一命題と鞍点の管の条件
読 表 1 の倍率と要る値、道具の側の案が要る値を 44〜460 倍に動かし構造の側の案が 1.15 倍の天井の下で止まったこと	型が全ての案を尽くすこと。型に当てはまらない案（Glauber の対数 Sobolev・古典の極限への延長）がある
仮 Agmon の利得・Barta の側の稀さの掛かり方・代理の系列の不変・既知の一様性の定理の読み	死んだ案の命題が偽であること（死は道具の性質で、命題の真偽ではない）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
Bochner の公式の積分形	典	M. Ledoux, Sém. Probab. XXXV, LNM 1755 (2001) 167–194（命題 1.3、本文で確認）。
Holley–Stroock の摂動	典	R. Holley, D. Stroock, J. Stat. Phys. 46 (1987) 1159–1194（型は Holley–Stroock の摂動の補題（Ledoux 2001 の命題 6.1）の再述で確認）。
Rothaus の補題	典	O. S. Rothaus, J. Funct. Anal. 64 (1985) 296–313（再述で言明を確認）。
非有界スピンの一様な対数 Sobolev・有限体積の判定	仮	Th. Bodineau, B. Helffer, J. Funct. Anal. 166 (1999) 168–178；F. Martinelli, E. Olivieri, Comm. Math. Phys. 161 (1994) 447–486・487–514（書誌だけ、言明は未確認）。
一次元 Ising の Glauber 力学	仮	R. J. Glauber, J. Math. Phys. 4 (1963) 294–307（書誌だけ。値は格子の対角化の読み）。
Helffer–Sjöstrand の表示	仮	B. Helffer, J. Sjöstrand, J. Stat. Phys. 74 (1994) 349–409（書誌だけ、言明は未確認）。
型の補題	初・Lean	本文 §04。`floor_top`・`ceiling_same_set`・`ceiling_split`・`agmon_no_gain_on_negative_curvature`・`transverse_fails_k17`・`chain_rule_cells`・`S_ext_O1_iff`・`threshold_gap_invariant`。

もの	種別	出典・道具
表 1 と表 1′ の数	読	浮動小数の格子・転送行列（中点則）・試験関数の族の下界・有理数の分解。区間演算は使っていない。

この章で使った語 — 迂回策・殺した一行・要る側・形・足りない側（床）・構造と道具の選び方・天井・壊れ方の型・二度払い・通貨（出口の速さとエントロピー）・$1/\hbar$ の住所・交差の長さ・揺れの向きと柔らかい向き・移しかえ。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-11 箱への帰着と箱の中の隙間 — 芯の定数 — 箱への帰着と箱の中の隙間を命題にし、芯の定数を三段で押さえる。

箱への帰着と箱の中の隙間 — 芯の定数

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 2-05・2-07 にあります。

この章で分かること — 一段目の二重井戸の緩和時間の上界の命題の段 1（箱への帰着）・段 2（箱の中）を（23-05 §04）、それぞれ箱への帰着の命題（箱への帰着、Poincaré 不等式だけを使う）と箱の中の隙間の命題（箱の中の隙間、仮定の表つき）として述べ、23-05 で「初」とした箱の積の不等式の証明を置きます。次に、箱の中の隙間の命題の速い側に入る芯の定数を、芯の長さで三段に分けて押さえ（凸性・二つのブロック・箱の帰着を芯に当てる形）、最後に芯の端の値の集合をどこまで覆えているかと、頂上を越えた端で現れる双安定を作用の障壁の余裕で払う形を述べます。

前提となる章 — 23-05 §03・§04（箱への帰着の条件・箱の中の隙間の条件の言明と一本の筋）・23-04（経路の測度・相関長 ξ・キンク）・23-09 §06（頂上の一サイトの曲率）。

先に言うこと — 水準は〔研〕で、§01 だけ〔三〕で読めるように書きます。§02 以降は研究の水準の節で、飛ばして §07 の残る行の表に進んでも、この章の結論は読めます。この部は拡散型緩和時間の仮定を検討の軸に置いていて（23-01）、この章はその一段目の箱への帰着の条件と箱の中の隙間の条件をどこまで命題の形にできたかを述べる章です。箱への帰着の命題・箱の中の隙間の命題は仮定の行を残した命題で、箱への帰着の条件・箱の中の隙間の条件を示したものではありません。数は全て 0+1 次元の二重井戸 $V=(x^2-1)^2/8$・格子 $\varepsilon=\frac{1}{2}$ の上の値で、三つ組は $\hbar=3\cdot10^{-3}/10^{-3}/3\cdot10^{-4}$ の順です。

この章の順序

1. 要約 — 〔三〕で読める一節
2. 箱への帰着の命題 — 箱への帰着（図 1・表 1）
3. 箱の積の不等式の証明 — Markov 性と Efron–Stein
4. 箱の中の隙間の命題 — 箱の中の隙間（表 2）
5. 芯の定数の三段 — 芯の定数の三区分の命題（表 3・表 4）
6. 端の集合 — 覆えている所と、双安定の払い方

7. 残る行の一覧（表 5）
8. 五分類の表（表 6）
9. 依存グラフ

01

要約

長い経路の Poincaré 定数を、長さ $C\xi$ の箱の Poincaré 定数で押さえるのが箱への帰着の条件、その箱の中の隙間を $D/(C\xi)^2$ の桁で押さえるのが箱の中の隙間の条件です。

1. **箱への帰着の命題**。直線を重なりのある箱で覆い、偶の箱と奇の箱に分けると、$C_P \le (1+1/n)\,C_{\mathrm{box}}/(1-c_{\mathrm{alt}})$ です。使うのは二つの射影の補題・箱の積の不等式・ずらしの平均だけで、対数 Sobolev 不等式は使いません。残る仮定の行は、偶と奇の間の最大相関 $c_{\mathrm{alt}}<1$ が一様なことと、境界の値についての sup です。相関長は $\xi \propto \hbar^{1/2} e^{S_0/\hbar}$ と読まれ、箱は頂上の台地を切りません。
2. **箱の中の隙間の命題**。箱の中をキンクの配置 Y で分けると、$C_{\mathrm{box}} \le C_{\mathrm{loc}} + (1+\chi) C_{\mathrm{kg}}$。縮約したキンクの気体を一次元 Ising の Glauber 力学と同じ型と置くと、隙間は「対の生成と消滅」と「キンクの拡散」の和 $(C^2+\pi^2)D/(C\xi)^2$ になります。残る行は交差項（交差項の一様性の仮定）・気体の型（キンクの気体の隙間の仮定）・切れ端の版（切れ端の局所 Poincaré の仮定）と、芯の定数です。
3. **芯の定数の三段**。芯の長さ $k \le 7$ は凸性で ≤ 9.18（$\hbar$ と端の値に依らない）、$8 \le k \le 14$ は二つのブロックの補題で、$k \ge 15$ は箱の帰着を芯に当てる形で押さえます。端の値を $[0, x_c]$ の標本に取ると $\sup_k C_P(\text{芯}) \le 22.1/30.5/66.4$ 読 です。
4. **端の集合**。区画の枠組みの芯は端が井戸の側だけで、穴はありません。箱の側の芯は端が頂上を越えることがあり、そこでは条件づけの壁が双安定を作りますが、その障壁 $\Delta S_* \approx 10^{-2}$ は $2S_0$ に対して約 95 倍小さく、箱の中の隙間の命題の局所の項は $\hbar \to 0$ で消えます（$\hbar = 0$ の読みの上で）。

02

箱への帰着の命題

設定。$T=\infty$ の格子の直線 $\mathbb{Z}$（刻み $\varepsilon = \frac{1}{2}$）の上の作用 $S = \sum_i (x_{i+1}-x_i)^2/(2\varepsilon) + \varepsilon \sum_i V(x_i)$、$e^{-S/\hbar}$ の無限体積の測度 μ、Dirichlet 形 $\mathcal{E}(f) = (\hbar/\varepsilon)\sum_i \mathbb{E}_\mu |\partial_i f|^2$ を取ります（

μ の一意性と最近接の Markov 性は共通の前提の行（23-05 §04 の段 0）にある）。箱 B は L サイトの区間、境界の値 (a,b) は B の左右の隣のサイトの値、$\mu_B^{a,b}$ はそれを止めた条件つきの測度、$\mathcal{E}_B$ は B のサイトだけの和で、

$$C_{\mathrm{box}}(L) := \sup_{a,b\in\mathbb{R}} C_P\big(\mu_B^{a,b};\mathcal{E}_B\big)$$

と置きます。二つの σ-代数の最大相関を $c(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2) := \sup\{\mathrm{corr}_\mu(F,G) : F\in L^2(\mathcal{G}_1),\, G\in L^2(\mathcal{G}_2)\}$ とします。

二つの射影の補題。$c = c(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2) < 1$ なら、全ての $f\in L^2(\mu)$ で

$$\mathrm{Var}\, f \;\le\; \frac{1}{1-c}\Big(\mathbb{E}\,\mathrm{Var}(f\mid\mathcal{G}_1) + \mathbb{E}\,\mathrm{Var}(f\mid\mathcal{G}_2)\Big) \tag{1}$$

初 （証明は 23-05 §04 の段 1） Lean `two_proj_sum_le`（仮定：Cauchy–Schwarz と最大相関の不等式）・`two_proj_var`（仮定：$A+B\le(1+c)V$）。

箱の族。L サイトの箱 B_m を、隣どうしが l サイト重なるように並べ（$l\le L/3$）、偶の番号の箱の族を E、奇の番号の族を O とします。$\mathcal{G}_E$ は E の外のサイトの値が生成する σ-代数、$\mathcal{G}_O$ も同じで、$c_{\mathrm{alt}}(L,l) := c(\mathcal{G}_E,\mathcal{G}_O)$ です（平行移動に依らない）。

図 1　偶奇の箱とずらし（L = 8・l = 2 の例。各列の一文字が 1 サイト）

```
サイト        ....|....|....|....|....|....|....|....
偶の族 E     [ B0   ]       [ B2   ]       [ B4   ]
奇の族 O          [ B1   ]       [ B3   ]
重なり            ^^     ^^      ^^     ^^          ← l サイトずつ
ずらし s=1   箱の並び全体を l サイト右へ（重なりの位置が別のサイトへ移る）
n = ⌊(L−l)/l⌋ 通りのずらしで、重なりのサイトは互いに素
```

箱の積。偶の箱どうしは $L-2l\ge 1$ サイト離れていて、次の不等式が成り立ちます（証明は §03）。

$$\mathbb{E}\,\mathrm{Var}(f\mid\mathcal{G}_E) \;\le\; C_{\mathrm{box}}(L)\sum_{B\in E}\mathcal{E}_B(f) \tag{2}$$

箱への帰着の命題。$n := \lfloor (L-l)/l\rfloor$。$c_{\mathrm{alt}}(L,l)<1$ なら

$$C_P(\mu) \;\le\; \Big(1+\frac{1}{n}\Big)\frac{C_{\mathrm{box}}(L)}{1-c_{\mathrm{alt}}(L,l)} \tag{3}$$

初 証明。ずらし s を一つ固定し、その偶奇の族を E^s, O^s とします。(1) と、二つの族の (2) から $(1-c_{\mathrm{alt}})\,\mathrm{Var}\,f \le C_{\mathrm{box}}\big(\sum_{B\in E^s}\mathcal{E}_B + \sum_{B\in O^s}\mathcal{E}_B\big)$。箱は直線を覆い、各サイトは偶の族に高々一度・奇の族に高々一度入り、両方に入るのは重なりのサイトだけなので、括弧の中は $\mathcal{E}(f)+\mathcal{E}_{\mathrm{ov}^s}(f)$（重なりのサイトだけの和）です。ずらし $s=0,\dots,n-1$ で平均すると、重なりのサイトはずらしの間で互いに素なので $\sum_s \mathcal{E}_{\mathrm{ov}^s} \le \mathcal{E}$、よって $(1-c_{\mathrm{alt}})\,\mathrm{Var}\,f \le C_{\mathrm{box}}(1+1/n)\mathcal{E}(f)$。∎ Lean `box_two_family`（仮定：二つの射影の補題・各族の (2)・$\mathcal{E}_E+\mathcal{E}_O \le \mathcal{E}+\mathcal{E}_{\mathrm{ov}}$・$C_{\mathrm{box}}\ge 0$）・`box_shift_average`（仮定：各ずらしの二族の不等式・重なりの和が $\mathcal{E}$ 以下）。

(3) は Poincaré 不等式だけで組まれていて、対数 Sobolev 不等式を使いません。相内の局所 Poincaré の条件・鞍点の管の条件は C_{box} を通してだけ入ります（§04）。箱の中の隙間の条件の $C_{\mathrm{box}} \le K_4(C\xi)^2/D$ と $L\varepsilon = C\xi\cdot D = \hbar/S_0$ を入れると、$C_P \le (1+1/n)K_4C^2/(1-c_{\mathrm{alt}})\cdot\xi^2 S_0/\hbar$ で、一段目の上界の命題の形です Lean `H3_with_H4`・`H3_H4_compose`（仮定：(3)・箱の中の隙間の条件・$D=\hbar/S_0$・$n>0$・$c_{\mathrm{alt}}<1$）。離散のスピンの Glauber 力学の箱の力学（Martinelli の講義の命題 3.4・3.5）と同じ型で 典、ここではそれを一次元・L^2・最大相関の形に書き直しています。

残る仮定の行と、数

- **箱の交互の最大相関の仮定：$c_{\mathrm{alt}}<1$ が $\hbar$ に一様。**紙の証明はありません 仮。値は、遅い部分が符号の二状態の鎖（電信の鎖）であるという読みの上で、$\theta=l/L=\frac14$ の箱で $C=2/4/8$ に $c_{\mathrm{alt}}=0.731/0.410/0.138$ 読（二状態の鎖の閉じた式の値を写した族の値）。この値は §05 の交互の最大相関の閉じた式の $\varphi(s,t)$ で $s=e^{-C\theta}$・$t=e^{-C(1-2\theta)}$ と置いたものと一致します（$C=2$ で $\varphi=0.7308$）。
- **境界の値の sup。**C_{box} は全ての実数の境界の値について sup を取ります。頂上に近い境界の値が最悪になることを §04 で見ます。
- **ξ の大きさ。**転送作用素の偶奇の固有値の差を対数の領域で求めると $\ln\xi = 218.08/661.04/2212.72$、$\ln\xi - S_0^{\mathrm{lat}}/\hbar - \frac12\ln\hbar \to -0.778$ 読（二つの独立な計算の経路が中くらいの $\hbar$ で六桁一致）。つまり $\xi\propto\hbar^{1/2}e^{S_0/\hbar}$ で、頂上の台地の長さ（交差の長さ $\ell_\times \approx 0.34/\hbar$、23-10 1/ħ の住所の型）との比は $\xi/\ell_\times \ge e^{213}$ Lean `xi_over_ellx`（仮定：測った $\ln\xi-\ln\ell_\times\ge 213$）。**長さ $C\xi$ の箱は台地を切らず、丸ごと含みます。**その代わり、箱の中の芯の定数は芯の長さに一様である必要があります（§05）。

表 1　箱への帰着の命題の不等式の陽性対照（閉じた式か対角化で両辺が分かる模型）

模型	何を比べたか	結果

模型	何を比べたか	結果
純ガウス（$V = x^2/2$）	右辺 $(1 + 1/n)C_{\mathrm{box}}/(1 - c_{\mathrm{alt}})$ と $C_P = 1$	右辺 1.10–1.33 ≥ 1（$L = 4$–128） 読 。$l/L \to 0$・$l \to \infty$ で 1 に近づく Lean `gauss_box_le_one`
一次元 Ising の熱浴 Glauber（環 12・16 サイト、結合 $K = 0.3, 0.6, 1.0$）	(3) の両辺	9 例の全てで成立、損は 1.17〜1.35 倍 読 （$c_{\mathrm{alt}} = 0.87$ でも） Lean `ising_K1_holds`（仮定：測った値）
陰性対照	$\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2$（$c = 1$）	帰着は何も言わない Lean `no_bound_when_c_one`・`blowup_as_c_to_one`

Glauber 力学の例では、環の隙間（帯の下端）が箱の隙間の 6 分の 1 ほどしかない場合も、その差を $1 - c_{\mathrm{alt}}$ がちょうど担っていました。キンクの気体の帯の構造は、箱の形を壊しません。

03

箱の積の不等式の証明

23-05 の (7)（この章の (2)）の証明を置きます。23-05 の五分類の表で箱の積の不等式の行を「初」としたのは、この節の証明によります。

命題（箱の積）

偶の族 E の箱どうしが $L - 2l \geq 1$ サイト離れているとき、有限個のサイトにだけ依る滑らかな関数 f について、(2) が成り立つ。

段 (a)　条件つきの独立。作用 S は隣どうしの項 $(x_{i+1} - x_i)^2/(2\varepsilon)$ と一サイトの項 $\varepsilon V(x_i)$ の和です。箱 B の外の全ての値を止めると、x_B の条件つき密度は $e^{-S/\hbar}$ のうち x_B を含む項だけで決まり、それは B の中の項と、B の両端と両隣 a_B, b_B をつなぐ二つの項です。よって条件つきの法則は $\mu_B^{a_B, b_B}$ で、B の外の値には両隣を通してしか依りません（最近接の Markov 性）。偶の箱どうしの間には $\mathcal{G}_E$ が止めたサイトが少なくとも一つあるので、$\mathcal{G}_E$ を与えたとき、偶の箱たちの条件つき密度は箱ごとの因子の積

$$\prod_{B \in E} \frac{1}{Z_B} \exp\!\left(-\frac{S_B(x_B; a_B, b_B)}{\hbar}\right)$$

に分かれ、偶の箱の値 $(x_B)_{B \in E}$ は互いに独立で、法則は積 $\bigotimes_{B \in E} \mu_B^{a_B, b_B}$ です 初 （有限の体積で密度が積に分かれることの一行。$T = \infty$ の測度でも同じ条件つき法則を持つことは共通の前提の行）。

段 (b)　積の測度の Efron–Stein の不等式。$\nu = \nu_1 \otimes \cdots \otimes \nu_m$ を $X_1 \times \cdots \times X_m$ の上の積の測度、$F \in L^2(\nu)$、$\mathrm{Var}_j F$ を j 番目の座標だけを動かした分散（他の座標は止める）とすると

$$\mathrm{Var}_\nu F \;\le\; \sum_{j=1}^{m} \mathbb{E}_\nu\big[\mathrm{Var}_j F\big] \tag{4}$$

初 証明。$F_j := \mathbb{E}[F \mid X_1, \dots, X_j]$（$F_0 = \mathbb{E}F$・$F_m = F$）、$\Delta_j := F_j - F_{j-1}$ と置きます。Δ_j は互いに直交するので $\mathrm{Var}\, F = \sum_j \mathbb{E}\Delta_j^2$ です。座標が独立なので、F_{j-1} は F_j を j 番目の座標について ν_j で積分したもので、$\mathbb{E}\Delta_j^2 = \mathbb{E}[\mathrm{Var}_j F_j]$ です。さらに F_j は F を後ろの座標 $X_{j+1}, \dots, X_m$ について平均したもので、$G \mapsto \mathrm{Var}_j G = \|G - \int G\, d\nu_j\|^2_{L^2(\nu_j)}$ は凸（半ノルムの二乗）なので、Jensen の不等式から $\mathrm{Var}_j F_j \le \int \mathrm{Var}_j F \, d\nu_{j+1} \cdots d\nu_m$。期待値を取って $\mathbb{E}\Delta_j^2 \le \mathbb{E}\,\mathrm{Var}_j F$、$j$ について足すと (4) です。∎

段 (c)　箱の Poincaré。段 (a) の条件つきの積に (4) を当てます（座標 X_j を箱 B の値 x_B とする）。箱 B の座標だけを動かした分散は、測度 $\mu_B^{a_B,b_B}$ の分散なので

$$\mathrm{Var}_B f \;\le\; C_P\big(\mu_B^{a_B,b_B}\big)\,\frac{\hbar}{\varepsilon}\sum_{i\in B}\int |\partial_i f|^2\, d\mu_B^{a_B,b_B} \;\le\; C_{\mathrm{box}}(L)\,\frac{\hbar}{\varepsilon}\sum_{i\in B}\int |\partial_i f|^2\, d\mu_B^{a_B,b_B}$$

です（C_{box} の定義の sup）。

段 (d)　まとめ。(4) と段 (c) から $\mathrm{Var}(f \mid \mathcal{G}_E) \le C_{\mathrm{box}} \sum_{B\in E} \mathbb{E}\big[(\hbar/\varepsilon)\sum_{i\in B}|\partial_i f|^2 \,\big|\, \mathcal{G}_E\big]$。期待値を取ると、条件つき期待値の塔の性質で右辺の各項は $\mathcal{E}_B(f)$ になり、(2) です。f が有限個のサイトにだけ依るので、関わる箱は有限個で、f の台に触れない箱の項は 0 です。∎

$\mathcal{E}$ の定義域の一般の f への延長（有限個のサイトに依る関数による近似）は、共通の前提の行に含めます。奇の族も同じです。段 (b) の (4) は Efron–Stein の不等式（Efron–Stein 1981）の形で、ここでは証明を置いたので分類は「初」です。

04

箱の中の隙間の命題

箱 B（$L\varepsilon = C\xi$）と境界の値 $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ を止め、$\mu = \mu_B^{a,b}$、$D = \hbar/S_0$ とします。箱の中のキンクの数の期待値は、キンクの密度 $1/(2\xi)$ から $C/2$ で $O(1)$ です 初 Lean `pair_fugacity`（仮定：$\xi \neq 0$）。

素朴な割り方は回る。稀な集合 E（例えば長い芯がある配位）で割ると、$p = \mu(E)$ として $\mathrm{Var}\, f = p\,\mathrm{Var}_E f + (1-p)\,\mathrm{Var}_{E^c} f + p(1-p)(m_E - m_{E^c})^2$ です 初 （恒等式）。第二項は E^c の上の定数で払えますが、第一項は f が E に集まれば $\mathrm{Var}\, f$ と同じ大きさで、p の小ささは出ません。払えるのは $p \cdot \mathrm{osc}(f)^2/4$ までで、これは隙間ではなく弱い形の Poincaré 不等式で

す Lean `naive_split_weak`（代数）。稀さは分散では払えない、という 23-10 通貨の取り違えの型 の例です。そこで割り方を、稀な集合でなく遅い変数で取ります。

遅い変数で割る。Y を箱の中のキンクの配置（キンクの数と、キンクの多様体への射影で定めた各キンクの位置）として、条件つき期待値の恒等式 初

$$\operatorname{Var} f = \mathbb{E}\operatorname{Var}(f \mid Y) + \operatorname{Var}\big(\mathbb{E}[f \mid Y]\big)$$

から始めます。

- **第一項（速い側）**。Y を止めた条件つきの測度は、最近接の Markov 性で、キンクの無い相の切れ端（長さ $\le C\xi$・両端の値つき）と、キンクの周りの管、その中の芯の積に分かれます。積の測度の Poincaré 定数は成分の定数の最大以下（(4) と各成分の Poincaré）なので、$\mathbb{E}\operatorname{Var}(f \mid Y) \le C_{\mathrm{loc}}\,\mathcal{E}(f)$、$C_{\mathrm{loc}} = \max(C_{(\mathrm{H1}^{\mathrm{seg}})}, C_{(\mathrm{H2}^{\mathrm{tube}})}, C_{(\mathrm{T0}'_{\mathrm{p}})})$ 初 （積の代数）。三つの定数は仮定の行で 仮、芯の $C_{(\mathrm{T0}'_{\mathrm{p}})}$ を §05・§06 で押さえます。
- **第二項（遅い側）**。$\mathbb{E}[f \mid Y]$ は Y だけの関数で、キンクの位置の拡散（移動度 D、キンクの拡散係数の行 典）と、キンクの対の生成・消滅で緩和します。キンクの気体の隙間の仮定：縮約したキンクの気体の箱の Poincaré 定数 $C_{\mathrm{kg}} \le (C\xi)^2/(c_{\mathrm{kg}}(1-\eta_{\mathrm{KG}})D)$ 仮。交差項の一様性の仮定：交差項 $\mathcal{E}_Y(\mathbb{E}[f \mid Y]) \le (1+\chi)\mathcal{E}(f)$ 仮 （二尺度の不等式の交差の定数の型。この形の言明は既知の定理から引いていない）。

箱の中の隙間の命題。上の行の下で、全ての (a,b) について

$$C_{\mathrm{box}} \;\le\; C_{\mathrm{loc}} + (1+\chi)\,C_{\mathrm{kg}} \;\le\; K_4\,\frac{(C\xi)^2}{D}, \qquad K_4 = \frac{1+\chi}{c_{\mathrm{kg}}(1-\eta_{\mathrm{KG}})} + C_{\mathrm{loc}}\,\frac{D}{(C\xi)^2} \tag{5}$$

初 （上の二項の和）Lean `H4_two_scale`（仮定：分解の不等式・第一項 $\le C_{\mathrm{loc}}\mathcal{E}$・キンクの気体の隙間の仮定・交差項の一様性の仮定・$C_{\mathrm{kg}} \ge 0$）・`H4_gap_form`（仮定：$D > 0$・$C\xi \ne 0$・$c_{\mathrm{kg}} > 0$・$\eta_{\mathrm{KG}} < 1$・$1+\chi \ge 0$）。(5) は 23-05 (12) と同じ式です。

一次元 Ising の Glauber 力学との対照

キンクの気体の隙間の仮定の定数 c_{kg} を決めるのは、縮約したキンクの気体を一次元 Ising の熱浴 Glauber 力学と同じ型と置く仮定です。両端のスピンを止めた L サイトの箱の隙間は、閉じた式

$$\mathrm{gap}_{\mathrm{box}} = 1 - \gamma\cos\frac{\pi}{L+1} = (1-\gamma) + \gamma\Big(1-\cos\frac{\pi}{L+1}\Big), \qquad \gamma = \tanh 2K \tag{6}$$

を持ちます 仮 （原典は書誌だけ。格子の対角化で表示の 6 桁まで一致、境界の値が $(+,+)$ でも $(+,-)$ でも同じ 読 ）Lean `glauber_split`（右の等号、仮定なし）。相関長が長い極限

で、第一項 $1-\gamma \approx 1/(2\xi^2)$ は無限体積の隙間＝**対の生成と消滅**、第二項 $\approx \pi^2/(2L^2)$ は長さ L の区間の**キンクの拡散**で、Glauber の単位 $D=\frac{1}{2}$ で書くと $D/\xi^2+\pi^2 D/L^2=(C^2+\pi^2)D/(C\xi)^2$、すなわち $c_{\mathrm{kg}}=C^2+\pi^2$ 初 （代数） Lean `kg_constant` （仮定：$C\xi\neq 0$）。対の項は小さな摂動ではなく、隙間の主な項の一つとして足し算で入ります。キンクの無い部分の局所の項は、隙間の下端には現れません。

境界の値が頂上の近くにあると、箱の端に半分のキンクが座れます。これは Ising の自由端に当たり、閉じた式がありません。格子の対角化で読むと、どの境界の型でも隙間は $1-\gamma$ を割りませんが（比 ≥ 1.17）、自由端は固定の端より遅くなります。

表 2　縮約した気体の箱の定数 $c_{\mathrm{kg}}=\mathrm{gap}\cdot(C\xi)^2/D$ と一段目の上界の命題の係数 K（$\chi=\eta_{\mathrm{KG}}=0$・$n=3$・$\theta=\frac{1}{4}$。どれも $\hbar$ に依らない模型の値で 読 ）

C	**1**	**2**	**3**	**4**	**6**
固定の端 $C^2+\pi^2$	10.87	13.87	18.87	25.87	45.87
自由端 c_{ff}（格子の値）	2.86	7.17	12.94	20.32	39.07
c_{alt}（二状態の鎖）	0.915	0.731	0.550	0.410	0.234
K（固定の端だけ）	1.44	1.43	1.41	1.40	1.37
K（頂上の境界の値を含む sup）	5.46	2.76	2.06	1.78	1.60

$K=(1+1/n)C^2/(c_{\mathrm{kg}}(1-c_{\mathrm{alt}}))$ Lean `K_fixed_C2`・`K_ff_C2`・`K_ff_C4` （仮定：測った c_{ff} と c_{alt}。算術だけ）。K_4 が C とともに減るので、固定の端だけなら K は C にほとんど依らず、頂上の境界の値を含めると C を大きく取るほど良くなります。

箱の中の隙間の条件に残る行。交差項の一様性の仮定・キンクの気体の隙間の仮定（Glauber の型と自由端）・切れ端の局所 Poincaré の仮定（23-06 の六節点の相内 Poincaré の命題は環の言明で、端の値を持つ切れ端の版は無い）・鞍点の管の Poincaré の仮定・芯の行。K_4 の第二項 $C_{\mathrm{loc}}D/(C\xi)^2$ は、D/ξ^2 が $e^{-441.6}/e^{-1328.6}/e^{-4433.1}$ の大きさなので 読 、C_{loc} が $e^{2S_0/\hbar}$ より十分小さければ消えます。この余裕を §06 で芯に使います。

05

芯の定数の三段の命題

設定。芯は、経路が頂上と井戸の間 $(0,x_c)$（$x_c=0.89$）にとどまるサイトの極大な区間です。この章では対称性で向きを替え、芯を $(0,x_c)^k$ と書きます（23-09 の $Q_k=(-x_c,0)^k$ の鏡映）。芯の測度 $\mu_k^{\alpha,\beta}$ は、両端の外の値 α,β を止めた $e^{-S/\hbar}$ を $(0,x_c)^k$ に Neumann の境界で制限したもの、Dirichlet 形は $\mathcal{E}=(\hbar/\varepsilon)\sum_i \mathbb{E}|\partial_i f|^2$ です（23-09 の $\hbar\int|\nabla g|^2$ の規約とは $C^{(23\text{-}09)}=C/\varepsilon=2C$ で換算）。箱の中の隙間の条件の速い側に要るのは、$C_P(\mu_k^{\alpha,\beta})$ が芯の長さ k と端の値に一様に押さえられることです（芯の Poincaré の一様性の仮定の行）。

短い芯の段　$k \le 7$：凸性（短い芯の凸性の補題）

芯の作用の Hessian は

$$\operatorname{Hess} S = \frac{1}{\varepsilon} T_k + \varepsilon \operatorname{diag} V''(x_i), \qquad T_k = \operatorname{tridiag}(-1, 2, -1)$$

で、端の値 α, β は S の一次の項にしか入らないので Hessian に現れません。$\lambda_{\min}(T_k) = 4\sin^2 \frac{\pi}{2(k+1)}$ 初 （三重対角の固有値の閉じた式）と $\inf V'' = V''(0) = -\frac{1}{2}$ から、$\varepsilon = \frac{1}{2}$ で

$$\operatorname{Hess} S \;\ge\; \kappa(k) := 8\sin^2 \frac{\pi}{2(k+1)} - \frac{1}{4} \tag{7}$$

です。これは 23-09 §06 で頂上の面の最小固有値として出た式と同じもので、$k \le 7$ で正、$k = 8$ で負になります（$8\sin^2(\pi/16) \approx 0.304 > \frac{1}{4}$、$8\sin^2(\pi/18) \approx 0.241 < \frac{1}{4}$） Lean `kappa7_pos` ・ `kappa8_neg` （仮定なし）。

短い芯の凸性の補題。$\kappa(k) > 0$ なら、全ての端の値 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ と全ての $\hbar > 0$ で $C_P(\mu_k^{\alpha,\beta}) \le \varepsilon/\kappa(k)$。

初 証明。(7) から $S/\hbar$ は $\kappa/\hbar$ で一様に凸です。凸な領域（箱 $(0, x_c)^k$）に Neumann で制限した一様に対数凹な測度は $\operatorname{Var} f \le (\hbar/\kappa)\int |\nabla f|^2$ を満たし 典 （凸な領域の Bakry–Émery、Kolesnikov–Milman の定理 1.2 (1) で確認）、$\mathcal{E} = (\hbar/\varepsilon)\int |\nabla f|^2$ に直すと $\le (\varepsilon/\kappa)\mathcal{E}$。∎ Lean `lemma_BV` （仮定：Hessian の下界が端の値に依らず $\ge \kappa > 0$・各点の Bakry–Émery の不等式）。

値は $\varepsilon/\kappa(k) = 0.133/0.286/0.543/0.973/1.749/3.42/9.18$（$k = 1, \dots, 7$）で、$\hbar$ にも端の値にも依りません。$k = 1, 2$ で測った sup（0.128・0.26）はこの内です 読 。**ブロックを 7 サイト以下に刻めば、端の値の sup の難しさは凸性で消えます**。代価は、刻んだブロックの継ぎ目の相関の側へ移ります。

中くらいの芯の段　$8 \le k \le 14$：二つのブロック（二つのブロックの補題）

端への縮約の補題。鎖 $x_1, \dots, x_k$ が Markov なら、$a < b$ について
$c\big(\sigma(x_1, \dots, x_a), \sigma(x_b, \dots, x_k)\big) = c\big(\sigma(x_a), \sigma(x_b)\big)$。

初 証明。右辺 $\le$ 左辺は σ-代数の包含から。逆に F を前の片の、G を後ろの片の中心化した関数とします。Markov 性から $\mathbb{E}[G \mid x_1, \dots, x_a] = \mathbb{E}[G \mid x_a] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[G \mid x_b] \,\big|\, x_a\big]$ なので、$\hat F = \mathbb{E}[F \mid x_a]$・$\hat G = \mathbb{E}[G \mid x_b]$ と置くと $\mathbb{E}[FG] = \mathbb{E}[\hat F\, \mathbb{E}[\hat G \mid x_a]] = \mathbb{E}[\hat F \hat G] \le c(\sigma(x_a), \sigma(x_b))\|\hat F\|\|\hat G\| \le c(\sigma(x_a), \sigma(x_b))\|F\|\|G\|$。∎

二つのブロックの補題。$1 \le a < b \le k$、$k - a \le 7$、$b - 1 \le 7$ とすると

$$C_P(\mu_k^{\alpha,\beta}) \;\le\; \frac{M(a,b)}{1-c(x_a,x_b)}, \qquad M(a,b)=\begin{cases}\varepsilon/\kappa(k-a)+\varepsilon/\kappa(b-1) & (b\ge a+2)\\ \max\bigl(\varepsilon/\kappa(k-a),\,\varepsilon/\kappa(b-1)\bigr) & (b=a+1)\end{cases} \tag{8}$$

初 証明。$\mathcal{G}_1=\sigma(x_1,\dots,x_a)$・$\mathcal{G}_2=\sigma(x_b,\dots,x_k)$ に二つの射影の補題を当てます。端への縮約の補題で $c(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2)=c(x_a,x_b)$。$\mathcal{G}_1$ を与えた条件つき法則は、$x_{a+1},\dots,x_k$ の長さ $k-a\le 7$ の鎖（端 x_a と β）を箱に制限したもので、短い芯の凸性の補題から $\mathrm{Var}(f\mid\mathcal{G}_1)\le(\varepsilon/\kappa(k-a))(\hbar/\varepsilon)\sum_{i>a}\mathbb{E}[|\partial_i f|^2\mid\mathcal{G}_1]$。$\mathcal{G}_2$ も同じく $\sum_{i<b}$ と $\varepsilon/\kappa(b-1)$ です。期待値を取って (1) に入れると、サイト i の係数は $[i>a]\varepsilon/\kappa(k-a)+[i<b]\varepsilon/\kappa(b-1)$ で、両方が立つのは $a<i<b$ のときだけ、それは $b\ge a+2$ のときだけです。∎ Lean `tb_far`・`tb_adjacent`（仮定：二つの射影の補題の結論・各ブロックの短い芯の凸性の補題・$\mathcal{E}_i\le\mathcal{E}$・$c<1$）。

条件 $k-a\le 7$・$b-1\le 7$・$a<b$ から $k\le 14$ で、$k=15$ では (a,b) がありません Lean `tb_range`・`tb_none_at_15`（自然数の算術）。入力は**二点**の最大相関 $c(x_a,x_b)$ 一つで、これは二サイトの同時分布を正規化した行列の第二特異値です 典（Witsenhausen・Rényi の特異値の表示、再述で確認）。格子の上の測度では、この値を転送行列の積から計算できます。

値。端を $[0,x_c]$ の標本に取ると、$8\le k\le 14$ の上界（二つのブロックの補題）の sup は $22.1/30.5/66.4$ で、10^{-3}・$3\cdot10^{-4}$ では $k=8$・両端 0 で、$3\cdot10^{-3}$ では $k=13$ で取られます（$3\cdot10^{-3}$ の $k=8$・両端 0 の値は 15.5）。多項式の試験関数による下界（Rayleigh–Ritz）は $8.39/17.3/38.5$ です 読。$k=8$ は凸性の閾のすぐ外で、$\hbar=0$ の読みでは制約つきの最小点の Hessian の最小固有値が 0.0175、$C_P\to\varepsilon/\lambda_{\min}=28.55$ へ向かいます。$\hbar\approx10^{-4}$ には峰があり（下界 57・上界 99）読、$\hbar$ について単調ではありません。

なぜ長い芯の段の形をここで使わないか。$k=8$・両端が頂上の芯では、長さ 5 の副箱の交互の最大相関が $0.879/0.938/0.971$ まで上がり、長い芯の段の係数が 76 以上になります 読 Lean `coeff_k8`（仮定：測った $\bar c\ge 0.9713$）。柔らかい向き（$\lambda_{\min}=0.0175$）が継ぎ目の相関を 1 に近づけるためで、二つのブロックの形は交互の相関を避けて二点の相関だけで払えます。

長い芯の段　$k\ge 15$：箱の帰着を芯に当てる（長い芯の箱の帰着の不等式）

芯の測度も一次元・最近接の Markov なので（積の箱への制限は Markov 性を保つ）、§02・§03 の組み立てを芯の中で字義どおりに使えます。副箱を長さ $L_c=5$・重なり $l_c=1$（$n_c=4$）に取ると、副箱（端で切られた短いものを含め全て 5 サイト以下）の定数は短い芯の凸性の補題で端の値に一様に $\le\varepsilon/\kappa(5)=1.749$ なので、全ての k と全ての端の値で

$$C_P(\mu_k^{\alpha,\beta}) \;\le\; \Bigl(1+\frac{1}{4}\Bigr)\frac{\varepsilon/\kappa(5)}{1-\bar c_{\mathrm{core}}} = \frac{2.186}{1-\bar c_{\mathrm{core}}} \tag{9}$$

です 初 （箱への帰着の命題の証明を芯に写したもの） Lean `core_uniform_L5` （仮定：箱への帰着の命題の結論・$C_{\mathrm{box}} \le 7/4$・測った $\bar{c}_{\mathrm{core}}$）。$\bar{c}_{\mathrm{core}}$ は芯の中の偶奇の副箱の間の交互の最大相関で、$k \ge 15$ で測った値は端の値（頂上を越えた負の端を含む）について ≤ 0.535、$k = 20$–30 で 7 桁まで飽和しています 読 （多項式の加法の関数と継ぎ目の二点による最大相関の**下界**の測り）。これを入れると $C_P \le 4.70$ です。

交互の最大相関の形（交互の最大相関の閉じた式）。片の内側の相関 t、継ぎ目の相関 s の定常なガウスの鎖 $\ldots, L_j, R_j, L_{j+1}, R_{j+1}, \ldots$（$\mathrm{corr}(L_j, R_j) = t$・$\mathrm{corr}(R_j, L_{j+1}) = s$・$|s|, |t| < 1$。鎖は両側に無限に続くものとします）で、偶の片と奇の片の最大相関は $\varphi(|s|, |t|)$ です。ここで

$$\varphi(s,t) = \frac{s(1+t)}{1+s^2 t}, \qquad 1 - \varphi(s,t) = \frac{(1-s)(1-st)}{1+s^2 t} \tag{10}$$

です。導き方：一様な型 $F = \sum_{j\,\text{偶}}(L_j + R_j)$・$G = \sum_{j\,\text{奇}}(L_j + R_j)$ の一周期あたりの共分散は、Markov 性で二点の相関が途中のリンクの相関の積になることから $S_{AB} = 2s(1+t)^2/(1-s^2t^2)$、分散は $S_{AA} = 2(1+t) + 2(1+t)^2 s^2 t/(1-s^2t^2)$ で、比が φ です 初 （等比級数の和） Lean `gauss_mode0`・`one_sub_phi`。この比は、ガウスの目標分布に対する二ブロックの Gibbs 標本化の収束率の枠に入ります 典 。偶の片の全体と奇の片の全体を交互に引き直す Gibbs 標本化の率は、ブロック Jacobi の行列の最大固有値の二乗で（Roberts–Sahu 1997 の二ブロックの Gibbs 標本化の率の定理（Roberts–Sahu の定理 5）と §2.4）、その最大固有値が二つの片の最大相関 φ です。片の長さが 1 の場合（$L_j = R_j$。(10) で $t = 1$ と置いた値 $2s/(1+s^2)$）は、その二乗が鎖の長さを無限にした極限の率として、Pitt–Shephard 1999 の定理 1 と Mider–Jenkins–Pollock–Roberts 2022 の系 2 にあります 典 。一般の片の長さでの (10) の値は、数値線形代数でいう line Jacobi 反復の収束半径と同じ量です（その側の書誌は照合していません）。ガウスの鎖で最大相関が線形の正準相関に等しいことは 典 （Kolmogorov–Rozanov、再述で確認）、その中で一様な型が最大であることは計算で確かめただけです 読 。$\varphi \ge s \ge st$ なので、素朴な積 $c \le s \cdot t$ は偽です Lean `naive_product_false`（仮定：$0 < s, t < 1$）。§02 の二状態の鎖の $c_{\mathrm{alt}} = 0.7308$ は $s = e^{-1/2}$・$t = e^{-1}$ の φ です。

二点の量には縮まない。芯では、二点の最大相関から作るガウスの代理 φ_G が測った値と 10^{-4} の桁で一致します 読 。それでも、一般の Markov 鎖では二点の量だけで交互の最大相関を押さえる不等式はありません。三変数の鎖 X_1–X_2–X_3：$X_2 \sim \mathrm{Bern}(p)$、$X_2 = 1$ なら $X_1 = X_3 = 1$、$X_2 = 0$ なら X_1, X_3 は独立に確率 e で 1、$p = 10^{-4}$・$e = 10^{-3}$。二値の変数の関数は一次なので二値どうしの最大相関は $|\,\mathrm{corr}\,|$ で、$\mathrm{corr}(X_1, X_2)^2 = p(1-p)(1-e)^2/(m_1(1-m_1)) \le 1/10$（$m_1 = p + (1-p)e$）。ところが $Z = X_1 X_3$ は $\mathrm{corr}(Z, X_2)^2 = p(1-p)(1-e^2)^2/(m_Z(1-m_Z)) \ge 98/100$（$m_Z = p + (1-p)e^2$） 初 （共分散の計算） Lean

`rareR_pair`・`rareR_joint`（有理数の算術）。稀な状態を両側から挟む非線形の関数が効く例で、芯の交互の最大相関の仮定の行の紙は、芯の条件つき法則が対数凹に近いことを使う比較の定理を要ります。

芯の定数の三区分の命題と三段の表

芯の定数の三区分の命題。 端の値の集合 $\mathfrak{E}$ について、$B_2(\hbar;\mathfrak{E}) := \sup_{8\le k\le 14}\sup_{(\alpha,\beta)\in\mathfrak{E}^2}\min_{(a,b)} M(a,b)/(1-c_{k,\alpha,\beta}(x_a,x_b))$、$B_3(\hbar;\mathfrak{E}) := 2.186/(1-\bar{c}_{\ge 15}(\mathfrak{E}))$ とすると、全ての $k\ge 1$ と $(\alpha,\beta)\in\mathfrak{E}^2$ で

$$C_P(\mu_k^{\alpha,\beta}) \;\le\; \max\bigl\{\varepsilon/\kappa(7),\; B_2(\hbar;\mathfrak{E}),\; B_3(\hbar;\mathfrak{E})\bigr\} \tag{11}$$

初 （k で場合を分けて三つの段を当てる） Lean `three_stage`（仮定：各段の上界）。

表 3　芯の長さと段（端は $[0,x_c]$ の標本。三つ組は $\hbar = 3\cdot 10^{-3}/10^{-3}/3\cdot 10^{-4}$）

段	k	道具	分類	上界	下界
1	≤ 7	短い芯の凸性の補題（凸性）	初 ＋典 （凸な領域の Bakry–Émery）	≤ 9.18（$\hbar$ と端に依らない）	—
2	8–14	二つのブロックの補題＋二点の最大相関	初 ＋読	$22.1/30.5/66.4$	$8.39/17.3/38.5$
3	≥ 15	長い芯の箱の帰着の不等式＋交互の最大相関	初 ＋読 ＋仮 （芯の交互の最大相関の仮定）	≤ 4.70（$\bar{c}$ は下界の測り）	—

表 3 から $\sup_k C_P(\text{芯}) \le 22.1/30.5/66.4$ 読 Lean `three_stage_3em4`（仮定：測った中くらいの芯の段・長い芯の段の値）。上界と下界の比は $2.6/1.76/1.72$ です。中くらいの芯の段の入力（二点の最大相関）は、行列の積と第二特異値なので区間演算に載る型ですが、格子の測度と連続の測度の差の紙の評価が要り、走らせる費用は 10^3 CPU 時間の桁の見積もりです（未）。長い芯の段は測っているのが下界で、上界の紙がありません。

06

端の集合 — 覆えている所と、双安定の払い方

表 3 は端の値を $[0,x_c]$ の標本に取った値でした。芯は $(0,x_c)$ に入るサイトの**極大な**区間なので、その外の隣のサイトは本来 $(-\infty,0]\cup[x_c,\infty)$ の値を取ります。どの組み立てでどの端が要るかを分けます。

区画の枠組みの芯 — 端は井戸の側だけ

区画の枠組み（23-09）の芯は、両端の値が井戸の側（この章の向きで $[x_c,\infty)$）にあるものとして定義されています。したがって頂上を越えた端はそこには入らず 初 （定義から） Lean

`p5_end_not_negative`（仮定：$x_c = 0.89$）、端の集合に穴はありません。定常な鎖では、長さ k の連の質量の $1 - e^{-0.63/\hbar}$ がこの型で、$\hbar = 0$ の読みの最小点は全てのサイトを壁 x_c に押しつけた形一つです 読 。

箱の側の芯 — 頂上を越えた端と、条件づけの壁

箱の中の隙間の命題の速い側の芯（キンクの配置で割った後の芯）では、外の隣が頂上を越えた負の値を取りえます。そこでは $k = 9, 10$ の芯に $\hbar = 0$ の局所の最小点が二つ現れ、障壁は $\Delta S \in [1.1 \cdot 10^{-4}, 2.5 \cdot 10^{-3}]$（端の値に依る）、$k = 9$・端 $(-0.035, -0.035)$ の C_P の下界は $13.9/44.6/526$ と $e^{\Delta S/\hbar}$ の型で増えます 読 。

- **二つの最小点はどちらも条件づけの壁の上**。一つは芯の区間そのままの瘤、もう一つは両端の零点が一サイトずつ内へ動いた形です。芯の区間を「ちょうどこの区間」と条件づけたので、零点が動きたい向きに壁が立ち、二つの型が競り合っています。離散のキンクの Peierls–Nabarro の障壁はこの格子では 10^{-12} 以下で、双安定の障壁 $0.5\text{–}2.0 \cdot 10^{-3}$ と桁が違います 読 Lean `pn_vs_bistab`（仮定：測った値）。**双安定は物理の準安定ではなく、条件づけの選び方が作るもの**です。
- **瘤の二値で切れば繊維は戻る**。頂上の近くのサイト x_m が閾 θ^* 以上か（瘤があるか）の二値 Y_3 で割ると、各繊維の C_P は二つのブロックの補題（区間の直積にも同じ証明で当たる）で上界 $25.8/46.2/101$、下界 $8.9/17.4/32.8$ と、表 3 の中くらいの芯の段と同じ桁に戻ります 読 。
- **$e^{\Delta S/\hbar}$ は移るだけ**。その代わり、二値 Y_3 の周辺の Poincaré 定数が $e^{\Delta S/\hbar}$ を受け持ち、$\mathrm{Var}(\mathbb{E}[f \mid Y_3]) \geq 470\,\mathcal{E}(f)$（$3 \cdot 10^{-4}$）です 読 Lean `y_side_k9_3em4`（仮定：測った値）。切っても障壁は消えず、23-10 移しかえの型 の移しかえの形になります。芯の定数を $O(1)$ のまま本来の端の集合に広げることは、この割り方ではできません。

作用の障壁の余裕で払う — 芯の作用の障壁の行

箱の中の隙間の命題で芯の定数は C_{loc} に入り、K_4 には $C_{\mathrm{loc}} \cdot D/(C\xi)^2$ の形でしか現れません（(5)）。$D/(C\xi)^2$ は $e^{-2S_0/\hbar}$ の桁なので、芯の定数は $O(1)$ でなくても、作用の障壁が $2S_0$ より小さければ足ります。これを仮定の行として置きます。

芯の作用の障壁の仮定の行。ある $c_*, p \geq 0$・$\Delta S_* < 2S_0$ があって、箱の側の芯と、それを含む窓（芯・両隣・外の m サイト、外の端は任意）の条件つき測度について $C_P \leq c_* \hbar^{-p} e^{\Delta S_*/\hbar}$（小さい $\hbar$ で） 仮 。

読み。$\hbar = 0$ の読み（停留と正定値を確かめた数値の最小点と、連絡の高さを上下から挟んだ値）で、$k = 8\text{–}14$・$m \leq 12$・外の端 $[-1.3, -0.01]$ の範囲の非大域の最小点の深さの sup は

$\Delta S^0_* \in [9.6\cdot10^{-3}, 1.4\cdot10^{-2}]$、$2S_0 = 4/3$ との比は $\le 1.05\cdot10^{-2}$、余裕は約 95 倍です 読 Lean `measured_ratio`（仮定：測った上界 $\Delta S^0 \le 0.01401$）。端を固定した値（$1.77\cdot10^{-3}$）より 5〜8 倍深く、sup は外の端を動かして二つの型を縮退させる所で取られます。$\hbar \ln C_P$ の下界は ΔS^0 へ下から近づきますが（当てはめで $0.97\Delta S^0$）、上界の前因子 $\hbar^{-p}$ は測っていません。

命題（局所の項が消える）。芯の作用の障壁の仮定と、ξ の読み $D/(C\xi)^2 \le d\,e^{-2S_0/\hbar}$ の下で、任意の $\delta > 0$ について

$$C_{\mathrm{loc}} \cdot \frac{D}{(C\xi)^2} \;\le\; c_* d\, \frac{p!}{\delta^p}\, e^{-(2S_0 - \Delta S_* - \delta)/\hbar} \tag{12}$$

初 証明。$e^x \ge x^p/p!$（$x = \delta/\hbar > 0$）から $\hbar^{-p} \le (p!/\delta^p) e^{\delta/\hbar}$。これと二つの仮定を掛けると $e^{\Delta S_*/\hbar} e^{-2S_0/\hbar} e^{\delta/\hbar}$ が出て (12) です。∎ Lean `cloc_term_poly`・`cloc_term_vanishes`（仮定：芯の作用の障壁の仮定・ξ の読み・$\Delta S_* < 2S_0$）、陰性対照 `no_vanish_if_no_gap`（$\Delta S_* \ge 2S_0$ なら評価は消えない）。

δ を $2S_0 - \Delta S_*$ より小さく取れば (12) の右辺は $\hbar \to 0$ で 0 へ行き、測った値では $2S_0 - \Delta S^0_* \ge 1.319$ の余裕があります。**箱の側の芯の双安定は、条件づけてもしなくても、一段目の上界の命題の係数 K に効きません**（芯の作用の障壁の仮定と $\hbar = 0$ の読みの上で）。負の端の芯は、区画の枠組みではキンクの位置の区画（橋）の中に現れ、定常な鎖での質量は $e^{-1.13/\hbar}$（$k = 9$）の稀さです 読 。

07

残る行の一覧

表 5　箱への帰着の条件・箱の中の隙間の条件と芯に残る行

行	何が残っているか	いまある支え	分類
共通の前提の行	$T = \infty$ の測度の一意性・最近接の Markov 性・局所関数からの延長・条件つきの測度とキンクの座標の正則性	転送作用素の核が正であること（$\mathbb{R}$ の上の版の原典は未確認）	仮
箱の交互の最大相関の仮定	箱の間の交互の最大相関 $c_{\mathrm{alt}} < 1$ が $\hbar$ と境界の値に一様（箱の混合の紙）	二状態の鎖の読み 0.731（$C = 2$）・交互の最大相関の閉じた式の形	仮
境界の値の一様性	境界の値の sup：頂上の近く（自由端の型）と遠方（急な降り）	自由端の c_{ff} の読み、遠方は隙間が消えない見込みだけ	仮
交差項の一様性の仮定	交差項 $\mathcal{E}_Y(\mathbb{E}[f \mid Y]) \le (1+\chi)\mathcal{E}(f)$、$\chi$ が一様	無し（二尺度の不等式の型）	仮
キンクの気体の隙間の仮定	縮約したキンクの気体が Glauber の型に入ること・自由端の損	Ising の閉じた式と対角化	仮

行	何が残っているか	いまある支え	分類
切れ端の局所 Poincaré の仮定	端の値を持つ切れ端の局所 Poincaré	環の版の六節点の相内 Poincaré の命題（23-06）	仮
鞍点の管の Poincaré の仮定	管の Poincaré が管の長さ $\le C\xi$ に一様	無し	仮
中くらいの芯の段の機械化	二点の最大相関を区間演算で包むこと・格子と連続の差の紙	浮動小数の転送（費用は 10^3 CPU 時間の桁の見積もり）	読
芯の交互の最大相関の仮定	長い芯の段の $\bar{c}_{\ge 15} < 1$ の上界	下界の測り ≤ 0.535。二点の量に縮まない（反例）	仮
芯の作用の障壁の仮定	箱の側の芯と窓の $C_P \le c_* \hbar^{-p} e^{\Delta S_*/\hbar}$、特に前因子 $\hbar^{-p}$ と $k \ge 15$・$m > 12$ の窓	$\hbar = 0$ の読み $\Delta S_*^0 \le 1.4 \cdot 10^{-2}$・下界の $\hbar \ln C_P$	仮

箱への帰着の条件・箱の中の隙間の条件の段の組み立てそのもの（(1)〜(5)・(7)〜(12)）は初等の証明を置いた代数で、仮定として残るのは表 5 の行です。四条件の全ての行が同時に揃う $\hbar$ はまだありません（23-05 §08）。

08

五分類の表 — 箱への帰着・箱の中の隙間と芯の行

表 6　この章の行（$\hbar$ の範囲の「—」は、どの $\hbar$ でも示されていない仮定の行。行の欄の番号は §09 の依存グラフの番号で、「—」はグラフに無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
[01]	共通の前提の行（一意性・Markov 性・延長・正則性）	仮	§03・23-05 §04 の段 0	—	—
[16]	二つの射影の補題 (1)	初	23-05 §04 の段 1 の証明	$\hbar$ に依らない	`two_proj_var`（仮定：$A + B \le (1+c)V$）
[17]	積の測度の Efron–Stein (4)	初	§03 段 (b) の証明	$\hbar$ に依らない	—
[18]	箱の積 (2) $\Longleftarrow$ [01]・[17]	初	§03 段 (a)〜(d)	$\hbar$ に依らない	—
[19]	箱への帰着の命題 (3)	初	§02 の証明	$\hbar$ に依らない	`box_two_family`・`box_shift_average`（仮定：二族の不等式・$C_{\mathrm{box}} \ge 0$・重なりの和 $\le \mathcal{E}$）
[02]	箱の交互の最大相関の仮定	仮	§02	—	—
[12]	$c_{\mathrm{alt}} = 0.731/0.410/0.138$（$C = 2/4/8$）	読	§02（二状態の鎖の値を写した族の値）	$\hbar$ に依らない模型	—

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
[11]	$\ln \xi = 218.08/661.04/2212.72$、$\xi/\ell_{\times} \geq e^{213}$	読	§02	三点	`xi_over_ellx`（仮定：測った差）
—	陽性対照（ガウス・Ising）	読	表 1	—	`gauss_box_le_one`・`ising_K1_holds`（仮定：測った値）
[20]	分散の分解と速い側の積	初	§04	$\hbar$ に依らない	—
[03]・[04]	切れ端の局所 Poincaré の仮定・鞍点の管の Poincaré の仮定	仮	§04	—	—
[05]・[06]	キンクの気体の隙間の仮定・交差項の一様性の仮定	仮	§04	—	—
[09]	キンク一本の移動度 $D = \hbar/S_0$	典	23-04 §03・23-05 の箱の中の段	$\hbar \to 0$	—
—	固定の端の Glauber の箱の隙間 (6)	仮	§04（原典は書誌だけ、格子の対角化で 6 桁の読み）	—	`glauber_split`（等式）
[21]	$c_{\mathrm{kg}} = C^2 + \pi^2$	初	§04（(6) の極限の代数）	$\hbar$ に依らない	`kg_constant`（仮定：$C\xi \neq 0$）
—	自由端の c_{ff} と K の値（表 2）	読	§04	$\hbar$ に依らない模型	`K_ff_C2`・`K_ff_C4`（仮定：測った値）
[31]	箱の中の隙間の命題 (5)	初	§04	$\hbar$ に依らない	`H4_two_scale`・`H4_gap_form`（仮定は §04）
[10]	凸な領域の Bakry–Émery	典	Kolesnikov–Milman 定理 1.2 (1)	$\hbar$ に依らない	—
[22]	短い芯の凸性の補題（$k \leq 7$ で $C_P \leq \varepsilon/\kappa(k)$）	初	§05 (7) と証明	$\hbar$ に依らない	`lemma_BV`・`kappa7_pos`・`kappa8_neg`
[23]	端への縮約の補題	初	§05 の証明	$\hbar$ に依らない	—
[24]	二つのブロックの補題 (8)・$k \leq 14$ だけ	初	§05 の証明	$\hbar$ に依らない	`tb_far`・`tb_adjacent`・`tb_range`・`tb_none_at_15`
—	最大相関の特異値の表示	典	Witsenhausen 1975・Rényi 1959（再述で確認）	—	—

行	言明（一行）	分類	根拠	$\hbar$ の範囲	機械検査
[13]	中くらいの芯の段の二点の最大相関と B_2（$22.1/30.5/66.4$）	読	§05 表 3	三点	—
[27]	長い芯の箱の帰着の不等式 (9)	初	§05（箱への帰着の命題の写し）	$\hbar$ に依らない	`core_uniform_L5`（仮定：測った $\bar{c}$）
[07]	芯の交互の最大相関の仮定：$\bar{c}_{\geq 15} < 1$ の上界	仮	§05	—	—
[14]	$\bar{c}_{\geq 15} \leq 0.535$（下界の測り）	読	§05	三点	—
[25]	交互の最大相関の閉じた式の比 (10)	典（枠）＋初（閉じた式）	§05（等比級数）・Roberts–Sahu 1997 の二ブロックの Gibbs 標本化の率の定理	$\hbar$ に依らない	`gauss_mode0`・`one_sub_phi`・`naive_product_false`
—	ガウスで最大相関＝線形の正準相関	典	Kolmogorov–Rozanov（再述で確認）	—	—
[26]	二点の量では交互の最大相関を押さえられない（三変数の例）	初	§05	—	`rareR_pair`・`rareR_joint`（有理数の算術）
[28]	芯の定数の三区分の命題 (11)	初	§05	$\hbar$ に依らない	`three_stage`（仮定：各段の上界）
[29]	区画の枠組みの芯の端は井戸の側だけ	初	§06（定義から）	$\hbar$ に依らない	`p5_end_not_negative`
[15]	箱の側の芯の双安定・瘤の二値の繊維・Y_3 の周辺	読	§06	三点	`pn_vs_bistab`・`y_side_k9_3em4`（仮定：測った値）
[08]	芯の作用の障壁の仮定	仮	§06	—	—
—	$\Delta S_*^0 \leq 1.4 \cdot 10^{-2}$、$2S_0$ との比 $\leq 1.05 \cdot 10^{-2}$	読	§06（$\hbar = 0$ の読み）	$\hbar = 0$	`measured_ratio`（仮定：測った上界）
[30]	局所の項が消える (12)	初	§06 の証明	$\hbar \to 0$	`cloc_term_poly`・`cloc_term_vanishes`（仮定：[08]・[11]・$\Delta S_* < 2S_0$）

表 6 の「初」の行は、仮定の行の上の代数か、本文に証明を置いた一般の不等式です。箱への帰着の条件・箱の中の隙間の条件が示されたこと、芯の定数が無条件に押さえられたことは意味しません。

```
09
```

依存グラフ

書式は 23-05 §07 と同じで、「⟸」**の右の番号は左の番号より必ず小さく**置きます。

[01] 仮　共通の前提の行：T=∞ の一意性・Markov 性・延長・正則性

[02] 仮　箱の交互の最大相関の仮定：箱の間の c_alt < 1　　ħ

[03] 仮　切れ端の局所 Poincaré の仮定

[04] 仮　鞍点の管の Poincaré の仮定：管の Poincaré

[05] 仮　キンクの気体の隙間の仮定：縮約したキンクの気体の箱の隙間　　ħ：

[06] 仮　交差項の一様性の仮定：交差項 $\mathcal{E}_Y \le (1+\chi)\mathcal{E}$

[07] 仮　芯の交互の最大相関の仮定：$\bar{c} < 1$

[08] 仮　芯の作用の障壁の仮定：芯と窓の C_P ≤ c ħ^(−p) e^(ΔS/ħ)

[09] 典　キンクの拡散係数の行：移動度 D = ħ/S_0

[10] 典　凸な領域の Bakry–Émery

[11] 読　相関長の伸び方の行：ξ ∝ ħ^½ e^(S_0/ħ)・D/(Cξ)² ≤ d e^(−2S_0/ħ)

[12] 読　c_alt の値

[13] 読　中くらいの芯の段の二点の最大相関

[14] 読　$\bar{c}$ ≤ 0.535（下界の測り）

[15] 読　双安定・瘤の二値の繊維

[16] 初　二つの射影の補題 (1)
　　Lean two_proj_var

[17] 初　積の Efron–Stein (4)

[18] 初　箱の積 (2) ⟸ [01][17]

[19] 初　箱への帰着の命題 (3) ⟸ [02][16][18]
　　Lean box_two_family・box_shift_average

[20] 初　分散の分解 ⟸ [01]

[21] 初　c_kg = C²+π²
　　Lean kg_constant

[22] 初　短い芯の凸性の補題 (7) ⟸ [10]
　　Lean lemma_BV（仮定：Hessian の下界・凸な領域の Bakry–Émery）

[23] 初　端への縮約の補題 ⟸ [01]

[24] 初　二つのブロックの補題 (8) ⟸ [16][22][23]
　　Lean tb_far・tb_adjacent・tb_range

[25] 初　交互の最大相関の閉じた式の比 (10)

[26] 初　二点の量に縮まない例

[27] 初　長い芯の箱の帰着の不等式 (9) ⟸ [01][16][17][22]

[28] 初　芯の定数の三区分の命題 (11) ⟸ [07][13][14][22][24][27]
　　Lean three_stage（仮定：各段の上界）

[29] 初　区画の枠組みの芯の端は井戸の側

```
[30] 初  局所の項が消える (12) ⟸ [08][11]
         Lean cloc_term_poly・cloc_term_vanishes
[31] 初  箱の中の隙間の命題 (5) ⟸ [03][04][05][06][09][17][20][21]
         Lean H4_two_scale・H4_gap_form
[32] 初  K_4 が ħ に依らない ⟸ [28][30][31]
[33] 初  合成 C_P ≤ Kξ²S₀/ħ ⟸ [19][32]
         Lean H3_H4_compose
```

確かめ方。⟸ を持つ行は [18]（[01][17]）・[19]（[02][16][18]）・[20]（[01]）・[22]（[10]）・[23]（[01]）・[24]（[16][22][23]）・[27]（[01][16][17][22]）・[28]（[07][13][14][22][24][27]）・[30]（[08][11]）・[31]（[03]〜[06][09][17][20][21]）・[32]（[28][30][31]）・[33]（[19][32]）で、どれも右の番号が左より小さく、円はありません。

読むこと。結論 [33] は、仮定の行 [01]〜[08] の全てに依ります（[07][08] は芯の定数 [28]・局所の項 [30] を通して）。[12][15][25][26][29] はどの結論の前提でもなく、値の読み・双安定の正体・交互の相関の形・端の線引きを説明する行です。[28] の $\hbar$ の範囲が「三点」なのは、中くらいの芯の段・長い芯の段の値が三つの $\hbar$ の読みだからで、(11) の形そのものは $\hbar$ に依りません。

仮定の行の言明が結論の量を含まないことも確かめます。結論の量は $T = \infty$ の測度全体の $C_P(\mu)$ です。[02][07] は相関の量、[03][04][08] は切れ端・管・芯と窓の定数、[05] は縮約した気体の定数、[06] は形の比較、[01] は測度の性質で、どれも $C_P(\mu)$ を含みません。

23-05 のグラフとの対応。統合のグラフ（23-12）では、23-05 の葉 [02]（切れ端の局所 Poincaré の仮定）・[03]（鞍点の管の Poincaré の仮定）・[05]（キンクの気体の隙間の仮定）・[06]（交差項の一様性の仮定）・[07]（箱の交互の最大相関の仮定）がこの章の [03][04][05][06][02] と同じ節点で、23-05 の [04]（芯の Poincaré の一様性の仮定）はこの章の [28]（芯の定数の三区分の命題）と [30]（局所の項）に置き換わり、葉が [07][08] に移ります。23-05 の [11]（偶の箱の積の分散）・[14]（箱への帰着の命題）・[15]（箱の中の隙間の命題）・[16]（一段目の上界の命題）は、この章の [18]・[19]・[31]・[33] です。

10

次の章へ

23-05〜23-11 の依存グラフを一つに繋ぎ、全ての行を五分類の一表にして、全ての行が揃う $\hbar$ がまだ無いことを帯の図で見るのが 23-12 です。この部は拡散型緩和時間の仮定を検討の軸に置いていて、この章はその一段目の箱への帰着の条件・箱の中の隙間の条件を命題の形にした

段でした。箱の帰着の形を四次元格子や別の量へ持ち出す視点は第 24 部（24-03）で扱います。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 箱の積 (2) とその証明、箱への帰着の命題 (3)、箱の中の隙間の命題 (5)、短い芯の凸性の補題・端への縮約の補題・二つのブロックの補題、長い芯の箱の帰着の不等式、交互の最大相関の閉じた式の比、二点の量に縮まない例、芯の定数の三区分の命題の組み立て、局所の項が消える (12) Lean （代数）	箱への帰着の条件・箱の中の隙間の条件。箱の交互の最大相関の仮定・交差項の一様性の仮定・キンクの気体の隙間の仮定・切れ端の局所 Poincaré の仮定・鞍点の管の Poincaré の仮定・芯の交互の最大相関の仮定・芯の作用の障壁の仮定の行
読 ξ の大きさ、c_{alt}・c_{ff}・K の値、芯の定数 $22.1/30.5/66.4$、双安定の障壁と余裕 95 倍	芯の定数の上界の機械化・$\hbar \to 0$ での一様性・芯の作用の障壁の仮定の前因子
典 凸な領域の Bakry–Émery・最大相関の特異値の表示・ガウスの最大相関・箱の力学の型	四条件の全ての行が揃う $\hbar$

出典と再現

もの	種別	出典・道具
凸な領域の Bakry–Émery	典	D. Bakry, M. Émery, Sém. Probab. XIX, LNM 1123 (1985) 177–206；A. V. Kolesnikov, E. Milman, J. Geom. Anal. 27 (2017) 1680–1702（定理 1.2 (1)、本文で確認）。
箱の力学（離散のスピン）	典	F. Martinelli, "Lectures on Glauber dynamics for discrete spin models", LNM 1717 (1999) 93–191（命題 3.4・3.5、予稿の本文で確認）。
最大相関の特異値の表示	典	H. S. Witsenhausen, SIAM J. Appl. Math. 28 (1975) 100–113；A. Rényi, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 10 (1959) 441–451（再述で言明を確認）。
ガウスで最大相関＝線形の正準相関・定常な鎖の最大相関	典	A. N. Kolmogorov, Yu. A. Rozanov, Theory Probab. Appl. 5 (1960) 204–208；R. C. Bradley, Probab. Surveys 2 (2005) 107–144（再述で確認）。
二ブロックの Gibbs 標本化の率（交互の最大相関の閉じた式の枠と、片の長さ 1 の場合）	典	G. O. Roberts, S. K. Sahu, J. R. Stat. Soc. B 59 (1997) 291–317, doi:10.1111/1467-9868.00070（二ブロックの Gibbs 標本化の率の定理（定理 5）・系 3・§2.4、本文で確認）；M. K. Pitt, N. Shephard, J. Time Series Anal. 20 (1999) 63–85（定理 1。1996 年の作業論文版の本文で確認、出版版は未照合）；M. Mider, P. A. Jenkins, M. Pollock, G. O. Roberts, arXiv:2009.10440v2 (2022)（定理 2・系 2、本文で確認）。line Jacobi の側の書誌は未照合。
Efron–Stein の不等式	初	B. Efron, C. Stein, Ann. Statist. 9 (1981)（書誌。証明は §03 に置いた）。
一次元 Ising の Glauber 力学	仮	R. J. Glauber, J. Math. Phys. 4 (1963) 294–307（書誌だけ。値は格子の対角化の読み）。

もの	種別	出典・道具
Eyring–Kramers の型（障壁と $\hbar \ln C_P$）	典	G. Menz, A. Schlichting, Ann. Probab. 42 (2014)（境界の無い場合の言明を本文で確認。壁の上の最小点の版は未取得で、芯の作用の障壁の仮定は仮定の行）。
組み立ての代数	初・Lean	本文の証明。`two_proj_var`・`box_two_family`・`box_shift_average`・`H4_two_scale`・`H4_gap_form`・`H3_H4_compose`・`lemma_BV`・`tb_far`・`tb_adjacent`・`three_stage`・`gauss_mode0`・`cloc_term_poly`。
数	読	転送作用素の浮動小数（対数の領域の冪乗法と密な固有値の二つの経路）・Ising の格子の対角化・多項式の Rayleigh–Ritz・$\hbar = 0$ の数値の最小点と連絡の高さ。区間演算は使っていない。

この章で使った語 — 箱の力学（箱への帰着）・偶奇の箱・ずらしの平均・最大相関・交互の最大相関・二つの射影の補題・Efron–Stein の不等式・縮約したキンクの気体・自由端・交差項・芯・凸性の閾・二つのブロックの補題・端への縮約・芯の定数の三区分の命題・条件づけの壁・瘤の二値・作用の障壁。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-12 統合表と依存グラフ — 四条件の全ての行を五分類の一表にし、段の依存グラフで円が無いことを確かめる。

統合表と依存グラフ

この章は本書の検討です。§01・§08 は案内、§06・§07 は未解決の地図です。

この章で分かること — 一段目の二重井戸の四条件について、23-05・23-06・23-07・23-09・23-11 の五分類の表の全ての行を一枚の表にし、五つの依存グラフを番号を振り直して一つに繋ぎます。番号の規則（前提の番号は結論の番号より小さい）で円が無いことを読者が確かめられる形にし、計算機援用の行が結論への道のどこにあるか、全ての行が同時に揃う ħ がまだ無いことを図で見ます。

前提となる章 — 23-05 §07（依存グラフの書式）・23-06 §05・23-07 §05・23-09 §07・23-11 §08（各条件の表）・23-00 §01（五分類の札）。

先に言うこと — 水準は〔三〕です。統合表は「どこまで示し、どこから仮定か」の地図で、進み具合を測る物差しではありません。この部は拡散型緩和時間の仮定を検討の軸に置いた部で、この章はその一段目の組み立ての全体を一枚に並べます。

この章の順序

1. 統合表の作り方 — 五つの表を一枚にする規則・同じ行の合わせ方・列の意味
2. 統合表 — 一段目の全ての行（表 1）と、分類ごとの行の数（表 2）
3. 依存グラフ — 幹（図 1）と全体・円が無いことの確かめ方・仮定の行が結論の量を含まないこと
4. 橋の族 — 一次元と多次元の片側の橋
5. 計算機援用の行の位置 — 結論への道の上にあるもの・無いもの
6. 全ての行が揃う ħ は無い — 範囲の帯（図 2・表 4）と、揃えるために要るもの
7. 冪の文に届くのに要る行 — 芯の行の二つの支え方（表 5）
8. 読み方の注 — 地図であって分数ではない

01

統合表の作り方 — 五つの表を一枚にする

一段目の主張は、二重井戸の緩和時間の上界の命題（23-05 §04）：二重井戸の四条件と前提の行の上で $C_P \le K\xi^2 S_0/\hbar$、したがって二重井戸の冪の言明 $\ln C_P/\ln\xi \to 2$ です。四つの条件はそれぞれの章で、五分類（初・典・機・読・仮）の行の表と、番号つきの節点の依存グラフに書かれています。この章では、それらを次の規則で一枚にします。

1. **行で数える**。条件の名（相内の局所 Poincaré の条件が「閉じた」かどうか）ではなく、表の行の一つ一つを単位にします。一つの条件の中に、証明を置いた行と仮定の行が混ざっているのが普通だからです。
2. **同じ行は一つにする**。二つの章に同じ言明が現れるときは一つの行にし、出所の欄に両方の章の節点を書きます。例えば 23-05 の [14] と 23-11 の [19] はどちらも箱への帰着の命題、23-07 の窓の対数 Sobolev の閾の行と 23-09 の [06] はどちらも残る一命題（窓の対数 Sobolev の閾の命題）です。23-05 の芯の Poincaré の一様性の仮定（[04]）は、23-11 では芯の定数の三区分の命題と局所の項の組で、23-07・23-09 では区画の側の芯の下界で支えられるので、二つの支え方の「または」を持つ一つの節点にしました。
3. **入れない行**。迂回策の一覧（23-10）の行は入れません。どれも、いまの組み立てのどの結論の前提でもないからです。23-04 の行のうち、測度の一意性は共通の前提の行に含め、ゆらぎの作用素の残りのスペクトル（Pöschl–Teller の型）は説明の行として一行だけ入れました。
4. **橋の族を並べる**。一次元の片側の橋の命題（23-04 §04）と片側の橋（23-01 §06）は、同じ「経路の測度の緩和の時間は相関長の二乗以上」という橋の一次元版と多次元版なので、隣り合う節点の族として入れました（§04）。23-01 の表 8 の他の行（緩和時間の上界の仮定・緩和時間の下界の仮定と質量の読み替え、鎖、時間を刻む版、無限体積の段）は、一段目の結論への道に入らないので、23-01 のグラフに残します。

表 1 の列は次のとおりです。**番号**は §03 の依存グラフの節点の番号、**分類**は五分類の札、**$\hbar$ の範囲**はその行が何について言うか（節点・窓・三点・$\hbar$ に依らない・$\hbar \to 0$・どの $\hbar$ でも示されていない「—」）、**条件**はどの条件の行か、**どの結論の前提か**は、その行を直接の前提にとる節点の番号と、含意の辺をたどって最後の結論（二重井戸の冪の言明）に着くかどうか、**出所**は各章の表とグラフの節点です。機械検査（Lean の定理名と仮定）は §03 のグラフの各行の下に置きました。

02

統合表 — 一段目の全ての行

表 1 は、分類ごとに五つの塊に分けて並べています（塊の中はグラフの番号の順）。番号が若いほど葉（仮定・既知・計算機援用・読み）、大きいほど組み立ての段で、最後の [111] が二重井戸の冪の言明です。

表 1　統合表（一段目の全ての行。番号は §03 の依存グラフの節点の番号で、表の並びはグラフと同じ。「二重井戸の冪の言明まで」は、その行から含意の辺をたどって結論 [111] に着くか）

番号	内容（一行）	分類	ħ の範囲	条件	どの結論の前提か	出所（章の節点）
仮 **仮定の行（証明を持たずに置く）（30 行）**						
[001]	T=∞ の測度の一意性・Markov 性・局所関数からの延長・極限の段・正則性	仮	—	共通	[071][073][077][081][106]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [01]・23-11 [01]・23-04 §01
[002]	鞍点の管の Poincaré の仮定：管の Poincaré が管の長さ ≤ Cξ に一様	仮	—	鞍点の管の条件	[075]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [03]・23-11 [04]
[003]	キンクの気体の隙間の仮定：縮約したキンクの気体の箱の隙間が Glauber の型	仮	—	箱の中の隙間の条件	[075]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [05]・23-11 [05]
[004]	固定の端の Glauber の箱の隙間の閉じた式（原典は書誌だけ）	仮	—	箱の中の隙間の条件	どの節点の前提でもない。キンクの気体の隙間の仮定の中身の一部（グラフでは独立の節点にしない読み）	23-11 表 6（固定の端の Glauber の行）
[005]	交差項の一様性の仮定：交差項 Ɛ_Y(E[f|Y]) ≤ (1+χ)Ɛ(f)、χ が一様	仮	—	箱の中の隙間の条件	[075]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [06]・23-11 [06]
[006]	箱の交互の最大相関の仮定：箱の間の交互の最大相関 c_alt < 1 が一様	仮	—	箱への帰着の条件	[072]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [07]・23-11 [02]
[007]	芯の交互の最大相関の仮定：芯の交互の最大相関 c̄ < 1 の上界（k ≥ 15）	仮	—	鞍点の管の条件	[082]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-11 [07]
[008]	芯の作用の障壁の仮定：芯と窓の C_P ≤ c ħ^(−p) e^(ΔS/ħ)	仮	—	鞍点の管の条件	[084]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-11 [08]
[009]	Holley の比較の連続版（尾の補題）	仮	六節点	相内の局所 Poincaré の条件	[061]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [05]

番号	内容（一行）	分類	ħ の範囲	条件	どの結論の前提か	出所（章の節点）
[010]	Poincaré–Miranda の定理（箱の被覆）	仮	(0,0.2]	相内の局所 Poincaré の条件	[063]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [08]
[011]	分散の分解の行：使う関数の正則性・稠密性	仮	—	相内の局所 Poincaré の条件	[060]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [10]
[012]	余白の行（端が大きい側）：隣と端の値 > 2.5	仮	—	相内の局所 Poincaré の条件	[068]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 表 2
[013]	余白の行（節点の間）：節点の間の ħ（一様な形で）	仮	節点の外	相内の局所 Poincaré の条件	[068]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 表 2
[014]	余白の行（小さい ħ）：ħ < 0.005（一様な形で）	仮	—	相内の局所 Poincaré の条件	[068]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 表 2
[015]	二つのサイトの隙間の行（端が大きい側）：二つのサイトの端の値 > 4	仮	—	相内の局所 Poincaré の条件	[068]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 表 2
[016]	環から切れ端（端の値つき）への写し	仮	—	相内の局所 Poincaré の条件	[068]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 表 2
[017]	区間演算の前提（IEEE の正しい丸め・和の誤差・自前の exp）	仮	—	鞍点の管の条件	[042][043]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-07 [01]・23-08 §03
[018]	継ぎ目の極限の仮定・端の値が分布で与えられる仮定・環の継ぎ目の正則性	仮	—	鞍点の管の条件	[043][099][103]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-07 [02]
[019]	区画の入力の道筋の小さな仮定（区画の入力）	仮	—	鞍点の管の条件	[099]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-07 [04]
[020]	窓の対数 Sobolev の積の上界（積の形の A_W の上界の組み立て）	仮	—	鞍点の管の条件	[102]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-07 [05]
[021]	窓の周辺の対数 Sobolev の入力（サイトの窓の周辺の LSI の形）	仮	—	鞍点の管の条件	[087]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-09 [01]

番号	内容（一行）	分類	ħ の範囲	条件	どの結論の前提か	出所（章の節点）
[022]	橋の体積の局所性の入力（橋の上の体積の局所性）	仮	—	鞍点の管の条件	[089]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-09 [02]
[023]	Barta の行 κ = 3/1000・b = 493/1000	仮	ħ に依らない	鞍点の管の条件	[092]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-09 [03]
[024]	Bochner の境界の項と固有関数の正則性	仮	—	鞍点の管の条件	[090][092]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-09 [04]
[025]	スカラーの筋の命題の仮の行（持ち上げの仮定・スペクトルの正則性ほか）	仮	—	鞍点の管の条件	[096]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-09 [05]
[026]	窓の対数 Sobolev の閾の命題：A_W < A_max(ħ)。窓の対数 Sobolev の道筋の残る一命題	仮	—	鞍点の管の条件	[099]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-09 [06]・23-07 [03]
[027]	ゆらぎの作用素の次の固有値 3/4（Pöschl–Teller の型）	仮	ħ に依らない	説明	どの節点の前提でもない。一段目の結論の前提に入らない説明の行	23-04 表 3
[028]	基底状態の仮定：スペクトルの離散・基底状態の単純さと正値（有限の空間格子）	仮	—	橋	[107][108]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-01 [06]
[029]	計量の比べの仮定の κ が β に一様（多次元版の目盛り）	仮	—	橋	[109]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-01 [08]
[096]	スカラーの筋の命題（窓の下の端・仮定の表つき）	仮	8 節点	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない。残る一命題（窓の対数 Sobolev の閾の命題）を支える候補で、含意の辺は無い	23-09 [21]
典 **原典を引く行（10 行）**						
[030]	キンク一本の移動度 D = ħ/S_0（過程の水準）	典	ħ→0	箱の中の隙間の条件	[075][105]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [08]・23-11 [09]
[031]	凸な領域の Bakry–Émery（Kolesnikov–Milman）	典	ħ に依らない	鞍点の管の条件	[076]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-11 [10]
[032]	Muckenhoupt の挟み B ≤ C_P ≤ 4B	典	ħ に依らない	相内の局所 Poincaré の条件	[061]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [03]

番号	内容（一行）	分類	ħ の範囲	条件	どの結論の前提か	出所（章の節点）
[033]	MTP_2 の相関不等式（e の単調性・$\hbar\kappa \geq 0$）	典	ħ に依らない	相内の局所 Poincaré の条件	[061]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [04]
[034]	Helffer の判定の Poincaré 版（Ledoux の命題 3.1）	典	ħ に依らない	相内の局所 Poincaré の条件	[062]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [06]
[035]	Brascamp–Lieb（交差 κ_f・交差の行）	典	ħ に依らない	相内の局所 Poincaré の条件	[063][064]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [09]
[036]	Bochner の公式の積分形（Ledoux の命題 1.3）	典	ħ に依らない	鞍点の管の条件	[090][092]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-09 [07]
[037]	最大相関の特異値の表示（Witsenhausen）	典	—	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない。中くらいの芯の段の読みの値の求め方に使う表示	23-11 表 6
[038]	ガウスで最大相関＝線形の正準相関（Kolmogorov–Rozanov）	典	—	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない。交互の最大相関の閉じた式の読み方に使う	23-11 表 6
[039]	定常な経路の測度の仮定：定常な経路の測度の相関の式	典	T=∞	橋	[108]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-01 [07]
機 **計算機援用の行（4 行）**						
[040]	余白の行：余白 $\hbar\rho - 2\hbar\kappa \geq 0.067$（隣と端 $[0,2.5]^2$）	機	六節点	相内の局所 Poincaré の条件	[061]。二重井戸の冪の言明まで：届く（[068] で [012]〜[016] の仮と合わさる道だけ）	23-06 [01]
[041]	二つのサイトの隙間の行：$\lambda_c \geq 1.3\times10^{-4}$（端 $[0,4]^2$）	機	(0,0.2]	相内の局所 Poincaré の条件	[063][064]。二重井戸の冪の言明まで：届く（[068] で [012]〜[016] の仮と合わさる道だけ）	23-06 [07]
[042]	$q_{\mathrm{free}} \leq 0.998854904$（窓の外の鎖）	機	窓	鞍点の管の条件	[100]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-07 [09]
[043]	$q_{\mathrm{out}} \leq 0.998888530$（環の外の鎖・ピン ≤ 0）	機	窓	鞍点の管の条件	[101]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-07 [10]
読 **読みの行（19 行）**						

番号	内容（一行）	分類	ħ の範囲	条件	どの結論の前提か	出所（章の節点）
[044]	$\ln \xi \geq s/\hbar$（$\xi \propto \hbar^{1/2} e^{(S_0/\hbar)}$）・$D/(C\xi)^2$ の大きさ	読	三点・主項	結論	[084][111]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [09]・23-11 [11]
[045]	$c_{alt} = 0.731 / 0.410 / 0.138$（$C = 2 / 4 / 8$）	読	模型	箱への帰着の条件	どの節点の前提でもない	23-11 [12]
[046]	中くらいの芯の段の二点の最大相関と B_2（22.1／30.5／66.4）	読	三点	鞍点の管の条件	[082]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-11 [13]
[047]	$\bar{c}_{(\geq 15)} \leq 0.535$（下界の測り）	読	三点	鞍点の管の条件	[082]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-11 [14]
[048]	箱の側の芯の双安定・瘤の二値の繊維	読	三点	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない	23-11 [15]
[049]	箱への帰着の命題の陽性対照（純ガウス・Ising）	読	—	箱への帰着の条件	どの節点の前提でもない	23-11 表 6
[050]	$K \approx 2.76$／1.43（$C = 2$）・1.78（$C = 4$）と自由端の c_{ff}	読	模型	箱の中の隙間の条件	どの節点の前提でもない	23-05 表 2・23-11 表 6
[051]	$\Delta S^{o}_{*} \leq 1.4 \cdot 10^{-2}$（$2S_0$ との比 $\leq 1.05 \cdot 10^{-2}$）	読	$\hbar = 0$	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない	23-11 表 6
[052]	窓の定数の数値の道筋の定数 π_{*}・Λ・C_{1D}・gap_W・橋の内の鎖	読	三点	鞍点の管の条件	[102]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-07 [06]
[053]	環の内の鎖 $q_{in} \approx 1.24〜1.28$	読	四点	鞍点の管の条件	[101]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-07 [07]
[054]	境の段 $q \approx 1.004〜1.045$	読	四点	鞍点の管の条件	[101]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-07 [08]
[055]	$\ell_{min} = 38.3$／121.9／406.8	読	三点	鞍点の管の条件	[089][094]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-09 [08]
[056]	A_W の上界 1857／2794／9106・下界 1.71／1.74／2.59	読	三点	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない	23-09 [09]
[057]	Feynman–Kac の筋の到達点（読み 0.54 倍・紙の上界 10^3 倍）	読	二点	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない	23-09 [23]
[067]	$C \leq 658$（数値の入力）	読	六節点	相内の局所 Poincaré の条件	どの節点の前提でもない	23-06 表 2
[089]	体積の局所性：ℓ_{min} は k に依らない	読	三点	鞍点の管の条件	[092]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-09 [14]

番号	内容（一行）	分類	ħ の範囲	条件	どの結論の前提か	出所（章の節点）
[094]	要る値 25.1／90.3／312.3	読	三点	鞍点の管の条件	[097]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-09 [19]
[097]	成分ごとの筋の到達点（要る値の 1.4〜5.5 倍）	読	三点	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない	23-09 [22]
[102]	積の形の A_W ≈ 2.5·10⁶〜4.7·10⁷	読	三点	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない	23-07 [14]
初 **証明を置いた行（初等の証明・名指した前提の上の代数）（48 行）**						
[058]	傾けの二次 Taylor の補題（傾けの二次の Taylor と Hölder の剰余）	初	ħ に依らない	相内の局所 Poincaré の条件	[061]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [02]
[059]	最近接の鎖の行：残したサイトの周辺は最近接の鎖	初	ħ に依らない	相内の局所 Poincaré の条件	[062]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [11]
[060]	分散の分解の行：分散の分解	初	ħ に依らない	相内の局所 Poincaré の条件	[065]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [12]
[061]	余白 λ の連続体の文	初	六節点	相内の局所 Poincaré の条件	[062]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [13]
[062]	粗い側の隙間 ≥ λ（環の Gershgorin）	初	六節点	相内の局所 Poincaré の条件	[065]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [14]
[063]	入れ子 λ_S ≥ 2.3×10⁻⁵	初	(0,0.2]	相内の局所 Poincaré の条件	[065]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [15]
[064]	交差の行：v/ħ ≤ 5888	初	(0,0.2]	相内の局所 Poincaré の条件	[065]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [16]
[065]	率の代数 C_P ≤ ε/t	初	六節点	相内の局所 Poincaré の条件	[066][067]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [17]
[066]	六節点の相内 Poincaré の命題：C ≤ 1.6×10¹⁰（環の版）	初	六節点	相内の局所 Poincaré の条件	[068]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-06 [18]

番号	内容（一行）	分類	ħ の範囲	条件	どの結論の前提か	出所（章の節点）
[068]	相内の局所 Poincaré の条件・切れ端の局所 Poincaré の仮定：[012]〜[016] の行が一様な形で成り立つときの合わせ	初	(0,0.2]	相内の局所 Poincaré の条件	[075]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [02]・23-11 [03]・23-06 §07
[069]	二つの射影の補題	初	ħ に依らない	箱への帰着の条件	[072][078][081]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [10]・23-11 [16]
[070]	積の測度の Efron–Stein（鞅の差と Jensen）	初	ħ に依らない	箱への帰着の条件	[071][075][081]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-11 [17]
[071]	箱の積の不等式（偶の箱の条件つき独立）	初	ħ に依らない	箱への帰着の条件	[072]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [11]・23-11 [18]
[072]	箱への帰着の命題：C_P ≤ (1+1/n)C_box/(1−c_alt)	初	ħ に依らない	箱への帰着の条件	[105]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [14]・23-11 [19]
[073]	分散の分解と速い側の積への分解	初	ħ に依らない	箱の中の隙間の条件	[075]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [12]・23-11 [20]
[074]	c_kg = $C^2+\pi^2$（閉じた式の極限の代数）	初	ħ に依らない	箱の中の隙間の条件	[075]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [13]・23-11 [21]
[075]	箱の中の隙間の命題：C_box ≤ C_loc + (1+χ)C_kg	初	ħ に依らない	箱の中の隙間の条件	[104]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [15]・23-11 [31]
[076]	短い芯の凸性の補題（k ≤ 7 で凸性）	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	[078][081][082]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-11 [22]
[077]	端への縮約の補題	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	[078]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-11 [23]
[078]	二つのブロックの補題（8 ≤ k ≤ 14 の二つのブロック）	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	[082]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-11 [24]
[079]	交互の最大相関の閉じた式の比（等比級数）	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない	23-11 [25]
[080]	二点の量では交互の最大相関を押さえられない例	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない	23-11 [26]
[081]	長い芯の箱の帰着の不等式（k ≥ 15）	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	[082]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-11 [27]
[082]	芯の定数の三区分の命題	初	三点	鞍点の管の条件	[103]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-11 [28]
[083]	区画の枠組みの芯の端は井戸の側だけ	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない	23-11 [29]

番号	内容（一行）	分類	ħ の範囲	条件	どの結論の前提か	出所（章の節点）
[084]	局所の項が ħ→0 で消える	初	ħ→0	鞍点の管の条件	[103]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-11 [30]
[085]	区画の和	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	[087]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-09 [10]
[086]	Gibbs の分解：Gibbs の変分不等式	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	[087]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-09 [11]
[087]	成分ごとの局所化	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	[092]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-09 [12]
[088]	スカラーの形は k に一様でない	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない	23-09 [13]
[090]	局所化した Bochner	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	[094]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-09 [15]
[091]	Gibbs の傾きの最適化	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	[094]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-09 [16]
[092]	区画の合成と閉じる条件	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	[093][099]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-09 [17]・23-07 [11]
[093]	要る値 A_max の式	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	[094]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-09 [18]
[095]	閾が食い違うと ℓ = 0	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない	23-09 [20]
[098]	頂上の一サイトで対角優位が ¼ 破れる	初	ħ に依らない	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない	23-09 [24]・23-07 表 4
[099]	芯の隙間の k に一様な正の下界（区画の側）	初	—	鞍点の管の条件	[103]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-09 [25]・23-07 [15]
[100]	橋の S_W ≤ 1779.6	初	窓	鞍点の管の条件	[102]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-07 [12]
[101]	環の S_W ≤ 122745	初	窓	鞍点の管の条件	どの節点の前提でもない	23-07 [13]

番号	内容（一行）	分類	ħ の範囲	条件	どの結論の前提か	出所（章の節点）
[103]	芯の Poincaré の一様性の仮定：芯の Poincaré が芯の長さと端の値に一様	初	—	鞍点の管の条件	[104]。二重井戸の冪の言明まで：届く。区画の側の芯（両端が井戸の中）では、粗い鎖の Dobrushin の判定で ħ ∈ (0,1] の全てで支えられる：論文の証明（粗い鎖の Dobrushin の定理（論文の定理 CC））＋機（ħ ∈ [10⁻⁵,1]、239 区間、区間演算、ρ_col ≤ 0.400）＋紙の証明と機（小さい ħ の粗い鎖の命題（論文の命題 PIN）：ħ ≤ 10⁻⁵、ρ_col ≤ 0.874）＋典（Bobkov–Ledoux 2000 の Helffer の判定の Poincaré 版（Ledoux の命題 3.1））・粗い鎖の Brascamp–Lieb の命題（論文の命題 BLc）の上の条件つき。読の行は無い。箱の側の芯は含まない（論文「粗い鎖の Poincaré」）	23-05 [04]・23-07 [16]・23-11 [28][30]
[104]	K_4 が ħ に依らない	初	ħ→0	箱の中の隙間の条件	[105]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-11 [32]
[105]	一段目の上界の命題：$C_P \le K\xi^2 S_0/\hbar$	初	ħ→0	結論	[110]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [16]・23-11 [33]
[106]	橋の族・一次元版：一次元の片側の橋の命題（$R \ge 1$）	初	全ての ħ	橋	[110]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [17]・23-04 §04
[107]	基底状態変換の恒等式	初	有限の空間格子	橋	[108]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-01 [11]
[108]	橋の族・多次元版：片側の橋（$C_P \ge \kappa\xi^2$）	初	連続の時間・$T=\infty$	橋	[109]。二重井戸の冪の言明まで：**届かない**	23-01 [12]
[109]	多次元版の冪の下の半分	初	$\xi > 1$	橋	どの節点の前提でもない	23-01 [17]
[110]	$1 \le R \le K'/\hbar$	初	ħ→0	結論	[111]。二重井戸の冪の言明まで：届く	23-05 [18]

番号	内容（一行）	分類	ħ の範囲	条件	どの結論の前提か	出所（章の節点）
[111]	二重井戸の冪の言明：ln C_P / ln ξ → 2	初	ħ→0	結論	最終の結論	23-05 [19]

行を分類で数えると表 2 です。

表 2　表 1 の行の数（分類ごと。条件の欄の内訳は、条件の名でなく行で数えたもの）

分類	行	主な中身
仮	30	共通の前提の行・鞍点の管の Poincaré の仮定・キンクの気体の隙間の仮定・交差項の一様性の仮定・箱の交互の最大相関の仮定・芯の交互の最大相関の仮定・芯の作用の障壁の仮定・相内の局所 Poincaré の条件を節点の外へ延ばす [012]〜[016]・区間演算の前提・区画の入力・残る一命題（窓の対数 Sobolev の閾の命題）・スカラーの筋の命題（仮定の表つき）ほか
典	10	キンクの移動度・凸な領域の Bakry–Émery・Muckenhoupt・MTP_2・Helffer の判定・Brascamp–Lieb・Bochner・最大相関の表示二つ・定常な相関の式
機	4	相内の局所 Poincaré の条件の余白（六節点）・二つのサイトの隙間・窓の外の鎖・環の外の鎖
読	19	相関長の伸び方・最大相関と芯の段の値・窓の定数の数値の道筋の定数・内の鎖・稀さの指数・要る値・縮約した模型の係数 K ほか
初	48	六節点の相内 Poincaré の命題の組み立て・二つの射影の補題・箱の積・箱への帰着の命題・箱の中の隙間の命題・芯の定数の三区分の命題・区画の五段・一段目の上界の命題・一次元の片側の橋の命題・二重井戸の冪の言明への代数ほか
計	111	条件の内訳：相内の局所 Poincaré の条件 25・鞍点の管の条件 57・箱への帰着の条件 7・箱の中の隙間の条件 9・共通 1・橋の族 7・結論 4・説明 1

表 2 で鞍点の管の条件の行が多いのは、鞍点の管の条件の芯の行を二つの側（箱の側の三段と、区画の側の五段）から組んでいるからで、鞍点の管の条件が他より進んでいることを意味しません。逆に箱への帰着の条件の行が少ないのは、箱への帰着の命題の組み立てが短く、残る仮定の行が箱の交互の最大相関の仮定一つに集まっているからです。行の数は、どこに証明があり、どこに仮定が残っているかを数えたもので、四つの条件のうち幾つが済んだかを測るものではありません（§ 08）。

03

依存グラフ — 五つのグラフを一つに繋ぐ

表 1 の 111 行を、23-05 §07 と同じ書式の節点の一覧にします。**「⟸」の右の前提の番号は、左の結論の番号より必ず小さく**置きます。一つだけ、二つの支え方のどちらかがあれば足りる節点 [103]（芯の Poincaré の一様性の仮定）があり、そこでは「(…) または (…)」と書きます。どちらの括弧の番号も [103] より小さいので、規則は同じように働きます。

全体は長いので、先に幹だけを抜き出した図 1 を置きます。幹の番号は全体のグラフと同じです。

図 1　統合のグラフの幹（全体の 111 節点のうち、結論 [111] への主な道の節点だけ。番号は全体と同じ）

```
[001] 仮　共通の前提の行（一意性・Markov 性・延長・極限・正則性）
[002][003][005] 仮 鞍点の管の Poincaré の仮定・キンクの気体の隙間の仮定・交差
[006] 仮 箱の交互の最大相関の仮定　　[007][008] 仮 芯の交互の最大相関
[012]〜[016] 仮 相内の局所 Poincaré の条件を節点の外・端の外・切れ端へ延ばす行
[026] 仮 窓の対数 Sobolev の閾の命題（残る一命題）
[040][041] 機 相内の局所 Poincaré の条件の余白・二つのサイトの隙間（六節点・(0
[044] 読 ln ξ ≥ s/ħ
[066] 初 六節点の相内 Poincaré の命題（環の版・六節点） ⟸ [065]（その下に [
[068] 初 相内の局所 Poincaré の条件・切れ端の局所 Poincaré の仮定 ⟸ [066][
[072] 初 箱への帰着の命題 ⟸ [006][069][071]
[075] 初 箱の中の隙間の命題 ⟸ [068][002][003][005][030][070][073][074]
[082] 初 芯の定数の三区分の命題（箱の側の芯） ⟸ [007][046][047] …
[084] 初 局所の項が消える ⟸ [008][044]
[099] 初 芯の下界（区画の側） ⟸ [026][092][019][018]
[103] 初 芯の Poincaré の一様性の仮定 ⟸ （[082][084]）または（[099][018]）
[104] 初 K₄ が ħ に依らない ⟸ [103][075]
[105] 初 一段目の上界の命題 ⟸ [030][072][104]
[106] 初 橋の族・一次元の片側の橋の命題（一次元版）⟸ [001]　[108] 片側の橋
[110] 初 1 ≤ R ≤ K'/ħ ⟸ [105][106]
[111] 初 二重井戸の冪の言明 ⟸ [044][110]

（脇道）[042][043] 機 窓の外の鎖・環の外の鎖 → [100][101] S_W → [102] 読 積
```

▶ 全体のグラフ（111 節点）を開く

確かめ方。読者が自分で確かめる手順は三つです。(1) 全体のグラフの「⟸」を持つ行を一つずつ見て、右に並ぶ番号が全て左の番号より小さいことを確かめます。[103] では二つの括弧の両方を見ます。(2) この規則が全ての行で守られていれば、前提をたどるたびに番号が真に下がるので、いずれ葉（「⟸」を持たない行）に着き、元の行に戻ることはありません。これが「円が無い」ことの全てです。(3) 規則を守れない辺が一本でも見つかったら、それが依存の円の候補で、どの段がどの段の結論を前提にしているかを本文で名指す必要があります。この章のグラフでは、そのような辺はありませんでした（111 節点の全ての辺を、番号の比較で確かめた）。

仮定の行が結論の量を含まないこと。番号の規則は、仮定の行の*中身*に結論が紛れ込んでいる形（結論を前提に置く形）は防ぎません。そこで仮定の行の言明を一つずつ読みます。結論の量は、$T=\infty$ の測度全体の Poincaré 定数 $C_P(\mu)$、比 $R=C_P/\xi^2$、冪 $\ln C_P/\ln\xi$ の三つです。30 の仮定の行は、(i) 測度の性質（[001]・[011]・[018]・[024]）、(ii) 部分の測度の定数（切れ端・管・芯・サイトの窓：[002]・[008]・[012]〜[016]・[021]・[022]・[026]）、(iii) 相関の量（[006]・[007]）、(iv) 縮約した模型と形の比較（[003]・[004]・[005]）、(v) 計算と引用の前提（[009]・[010]・[017]・[019]・[020]・[023]・[025]・[096]）、(vi) 多次元版と説明の行（[027]・[028]・[029]）に分かれ、どれも $C_P(\mu)$・R・冪を含みません。(ii) の行が含む Poincaré 定数は、切れ端・管・芯・窓という*部分*の測度のもので、全体の測度の定数ではありません。この確かめは目で行うもので、機械検査は代わりになりません（23-13 §05）。

04 橋の族 — 一次元と多次元の片側の橋

[106] 一次元の片側の橋の命題と [108] 片側の橋は、同じ形の文の一次元版と多次元版です。どちらも「経路の測度で、時刻に局所な試験関数の Rayleigh 商の天井は相関長の二乗」で、そこから緩和の時間の下界 $C_P\ge\xi^2$（一次元の片側の橋の命題）・$C_P\ge\kappa\xi^2$（片側の橋）が出ます。

表 3　橋の族の二つの版

版	言明	前提	この部での役目
一次元版 [106]	一次元の片側の橋の命題：0+1 次元の二重井戸で $R=C_P/\xi^2\ge 1$	[001]（連続の時間・$T\to\infty$。証明は 23-04 §04）	(14) の左の不等号。二重井戸の冪の言明の下の半分を条件なしで与える
多次元版 [108]	片側の橋：有限の空間格子で $C_P\ge\kappa\xi^2$	[028] スペクトルの仮定・[039] 相関の式・[107] 基底状態変換（23-01 §06）	[109] 多次元版の冪の下の半分（[029] の目盛りの一様性つき）。一段目の結論 [111] への道には入らない

二つを並べると、拡散型緩和時間の仮定の中身が「上の半分」だけであることが同じ形で読めます。下の半分は橋が自動に与え（一次元版は前提 [001] だけ、多次元版は [028][039] と目盛りの一様性 [029]）、二重井戸の四条件が受け持つのは上の半分 $C_P\le K\xi^2 S_0/\hbar$ です。多次元版が四次元の Wilson 測度に当てはまるには、時間の刻み・無限体積・目盛りの行が残ります（23-01 のグラフの [08][09][10]）。

05 計算機援用の行の位置 — 結論への道の上にあるもの・無いもの

表 1 の「機」の四行について、結論 [111] への道を見ます。

- **[040] 余白・[041] 二つのサイトの隙間（相内の局所 Poincaré の条件）**。[061] 余白の連続体の文 → [062]・[063]・[064] → [065] 率の代数 → [066] 六節点の相内 Poincaré の命題 → [068] 相内の局所 Poincaré の条件 → [075] 箱の中の隙間の命題 → … → [111] と道があります。ただし [068] で [012]〜[016]の仮定の行と合わさる道だけで、[068] を通らずに結論へ着く道はありません。六つの節点の計算機援用は、節点の外・端の外・切れ端へ延ばす仮定の行と組んだときにだけ結論の前提になります。
- **[042] 窓の外の鎖・[043] 環の外の鎖（鞍点の管の条件、窓の外の鎖の道筋と環の継ぎ目の道筋）**。[042] → [100] 橋の S_W → [102] 積の形の A_W（読）で止まり、[043] → [101] 環の S_W で止まります。**どちらも結論への道の上にありません**。積の形の A_W の値は、残る一命題 [026] が求める要る値の外にあるからです（23-09 §03）。

この二行は、窓 $\hbar \in [3\cdot 10^{-4}, 3\cdot 10^{-3}]$ の全体で鎖の縮みを不等式にしたもので、それ自体が窓の中の計算機援用の結果として立っています（23-08）。ただ、いまの組み立てでは結論の前提に使われていません。道の上に入るのは、積でない形の A_W の上界が [026] を満たし、その上界の中に鎖の比 q が入るときです（23-07 §06）。逆向きに言えば、計算機援用の行の数は、結論にどれだけ近いかを表しません。

06

全ての行が揃う $\hbar$ は無い

行ごとの $\hbar$ の範囲を一本の数直線に重ねます（図 2）。範囲が「—」の仮定の行（[002]・[003]・[005]・[006] など、30 の仮定の行の大半）は、どの $\hbar$ でも示されていない行なので図には描かず、範囲を持つ行だけを描きます。

図 2　$\hbar$ の範囲の帯（横軸は $\log_{10}\hbar$、10^{-4} から 1）。実線と丸は計算機援用、破線は仮定、四角は読み、小さな点は仮定の表つきの命題の節点の値

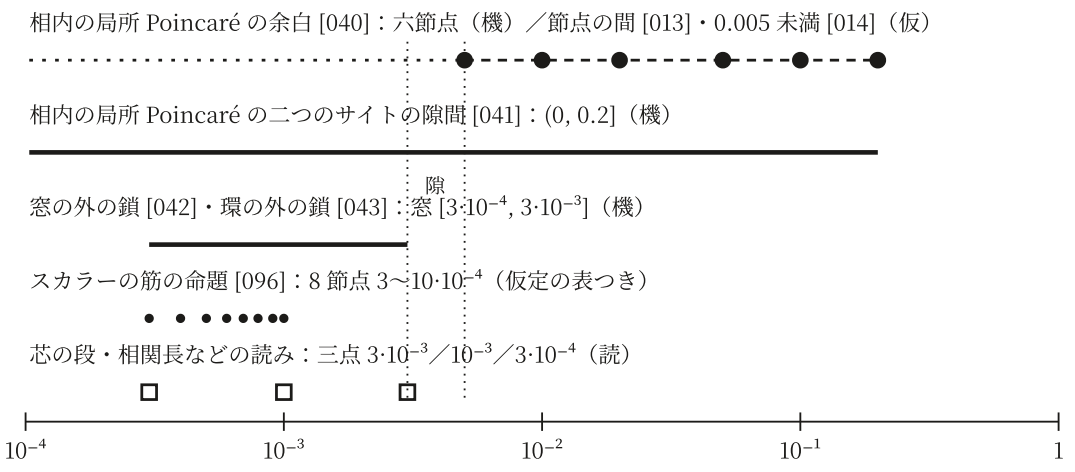


図 2 から読むことは三つです。(a) 相内の局所 Poincaré の条件の余白の計算機援用は $\hbar \geq 0.005$ の六つの節点にあり、いちばん小さい節点 0.005 は窓の上の端 $3 \cdot 10^{-3}$ より大きい（図の縦の点線の間の「隙」）。(b) スカラーの筋の命題は窓の下の端 $[3 \cdot 10^{-4}, 10^{-3}]$ の 8 節点の点の値で、10^{-3} を少し越えると二つの条件が同じ窓で両立しなくなります（$1.35 \cdot 10^{-3}$ で両立しない読み、23-09 §05）。(c) 相内の局所 Poincaré の条件の六節点とスカラーの筋の命題の 8 節点は交わらず、窓の中に相内の局所 Poincaré の条件の節点はありません。そのうえ、範囲が「—」の仮定の行（鞍点の管の Poincaré の仮定・キンクの気体の隙間の仮定・交差項の一様性の仮定・箱の交互の最大相関の仮定など）は、どの $\hbar$ でも仮定のままです。したがって**四つの条件の全ての行が同時に揃う $\hbar$ は、まだ一つもありません**。

表 4　$\hbar$ の範囲の三つの種類（混ぜないこと。23-04 §07 の三点と合わせて四種類）

種類	範囲	どの行	分類
相内の局所 Poincaré の条件の節点	$\{0.2, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01, 0.005\}$	[040]・[061]〜[066]	機・初（節点の間と 0.005 より下は [013][014] の 仮）
計算機援用の窓	$[3 \cdot 10^{-4}, 3 \cdot 10^{-3}]$（25 の部分区間）	[042]・[043]・[100]・[101]	機・初
スカラーの筋の命題の範囲	$[3 \cdot 10^{-4}, 10^{-3}]$ の 8 節点（節点の間の包みは無い）	[096]	仮（仮定の表つきの命題）
読みの三点	$\hbar = 3 \cdot 10^{-3} / 10^{-3} / 3 \cdot 10^{-4}$	[044]・[046]・[047]・[052]〜[056] ほか	読

揃えるために要るもの。同じ $\hbar$ の範囲で揃えるには、次のどちらかが要ります。

1. **相内の局所 Poincaré の条件を $\hbar \leq 10^{-3}$ へ延ばす**。行 [014]（$\hbar < 0.005$）を示すことです。部分区間ごとの計算機援用の型は、比を一定にすると部分区間の数が $\ln(0.005/\hbar)/\ln r$ で $\hbar \to 0$ に無限に増えるので使えず、$\hbar \to 0$ で一様な紙の議論が要ります（23-06 §07 の小さい ħ の残件）。
2. **スカラーの筋の命題を $\hbar \geq 0.005$ へ延ばす**。ħ の範囲の道筋（窓の外）に当たり、この部の対象の外と決めた道です（23-07 §02）。スカラーの筋の命題の形そのものも $1.35 \cdot 10^{-3}$ で止まります。

どちらが済んでも、固定した範囲で揃うだけです。二重井戸の冪の言明は $\hbar \to 0$ の言明なので、最終的には全ての行を $\hbar \to 0$ で一様な形で言う必要があり、窓の計算機援用だけでは届きません。窓の外は紙の漸近が要ります。範囲が「—」の仮定の行は、範囲を揃える前に、まず一つの $\hbar$ で示す段から残っています。

```
07
```

冪の文に届くのに要る行 — 芯の行の二つの支え方

グラフを結論 [111] から前提の向きにたどると、結論に要る葉が全て拾えます。分かれ道は [103]（芯の Poincaré の一様性の仮定）の「または」の一か所だけなので、要る葉の組は二通りです（表 5）。仮定の行を「仮に成り立つ」と置いたとき結論に届く組を数える考え方を、一段目のグラフに当てたものです（四次元格子の側の壁の一覧は 23-02 §06）。

表 5　結論 [111] に要る葉（[103] の支え方ごと。どちらの組も、記載の全ての行が要る）

葉の分類	支え方 A：箱の側の芯（[082] と [084]）	支え方 B：区画の側の芯（[099]）
仮	15 行：[001]・[002]・[003]・[005]・[006]・[007]・[008]・[009]・[010]・[011]・[012]〜[016]	20 行：[001]・[002]・[003]・[005]・[006]・[009]・[010]・[011]・[012]〜[016]・[018]・[019]・[021]・[022]・[023]・[024]・[026]
典	[030]・[031]・[032]・[033]・[034]・[035]	[030]・[032]・[033]・[034]・[035]・[036]
機	[040]・[041]	[040]・[041]
読	[044]・[046]・[047]	[044]・[055]（と、それに依る [089]）

表 5 から読むこと。(1) 二つの支え方に共通の仮定の行は、共通の前提 [001]、箱の中の行 [002][003][005]、箱の間の [006]、相内の局所 Poincaré の条件を延ばす [009]〜[016] です。これらはどちらの道を取っても残ります。(2) 支え方 A は芯の交互の最大相関 [007] と作用の障壁 [008] を仮定に置き、中くらいの芯の段・長い芯の段の読み [046][047] を上界に置き換える必要があります。支え方 B は残る一命題 [026] と区画の入力 [019]・[021]・[022]・[024]・Barta の行 [023] を仮定に置きます。(3) どちらの組にも「読」の行が残ります。結論が無条件になるには、全ての「仮」の行が証明に、全ての「読」の行が上界（初・典・機のどれか）に置き換わる必要があります。

08

読み方の注 — 地図であって分数ではない

統合表は、一段目の主張のどこに証明があり、どこに仮定が残っているかを示す地図です。「111 行のうち 48 行が初」のような割合は、進み具合を表しません。理由は二つです。一つは、行の重さが揃っていないこと（[001] の一行には測度の一意性から正則性までが入り、[074] の一行は二項の和の代数です）。もう一つは、「初」の行の多くが仮定の行を入力にとる代数で、仮定の行が一つ残る限り結論は条件つきのままだということです（23-05 の表 2 の後の注と同じ）。

地図として読むときは、次の順が役に立ちます。(a) 結論 [111] から図 1 の幹をたどり、(b) 表 5 で要る葉の組を見て、(c) その中の「仮」の行を表 1 の出所の欄から各章の本文へ追う。残件と費用は 23-15 で、この表の行ごとに並べます。

この部は緩和時間の仮定を検討の軸に置き、一段目の上の半分を四つの条件に割って組みました。全体を一枚にしたこの地図も、その割り方の中の地図です。別の視点は第 24 部で扱います。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
一段目の五つの章の行を一枚にした統合表（111 行、仮 30・典 10・機 4・読 19・初 48）と、番号の規則を全ての辺で守る依存グラフ（円が無い）	仮定の行 30 のどれも。したがって一段目の上界の命題の結論と一段目の二重井戸の冪の言明
仮定の行の言明が結論の量 $C_P(\mu)$・R・冪を含まないこと（言明を読んだ確かめ）	仮定の行が互いに両立すること、どれかが偽でないこと
計算機援用の四行の位置：相内の局所 Poincaré の条件の二行は [012]〜[016] と合わさる道でだけ結論の前提になり、鞍点の管の条件の二行は結論への道の上に無い	計算機援用の結果を窓の外や $\hbar \to 0$ へ持ち出すこと
全ての行が同時に揃う $\hbar$ が無いこと（範囲の比較）と、揃えるために要る二つのもの	揃える二つのどちらか。$\hbar \to 0$ で一様な形の行
結論に要る葉の組が二通りであること（表 5）	二つの支え方のどちらが易しいか

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1 の各行の言明・分類・範囲	本書	23-05 表 2・23-06 表 2・23-07 表 4・23-09 表 5・23-11 表 6・23-04 表 3・23-01 表 8。引いた定理の原典は各章の出典表
依存グラフの辺	本書	各章の依存グラフの「$\Longleftarrow$」をそのまま写し、同じ行を合わせた（§01 の規則）。[103] の「または」は 23-05・23-07・23-11 の対応の注から
番号の規則の確かめ・行の数え・要る葉の組	文字の処理	表の行と辺を書き写したデータから、全ての辺で番号の大小を比べ、分類ごとに行を数え、結論から前提の向きに葉を集める小さな台本（数学の計算ではない）
Lean の定理名と仮定	Lean	グラフの各行の下。言明の一覧と検査の限界は 23-13

この章で使った語 — 統合表・依存グラフ・節点・葉・幹・番号の規則・依存の円・結論を前提に置く形・橋の族・支え方・要る葉の組・$\hbar$ の範囲の帯（節点・窓・スカラーの筋の命題の範囲・読みの三点）。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-13 Lean の言明と機械検査の限界 — 機械検査が保証する「書いてある命題から結論が出ること」と、保証しないもの（仮定の正しさ・対象の符号化・結論を定義に置く閉じ方・依存の円）を、束の一覧と例で見る。

Lean の言明と機械検査の限界

この章は案内です。§01・§02・§05 は既存の知見です。

この章で分かること — 機械検査（Lean）が保証するのは「書いてある命題（仮定の並び）から結論が出ること」だけで、仮定が正しいことも、Lean の中の実数が物理の量を表していることも保証しない、という約束を、一段目の束の一覧で確かめます。`#print axioms` が標準の三つの公理に収まっていても見抜けない二つの型（結論を定義に置く・依存の円）を、出典を伏せた例で見て、読者が自分で言明を点検する手順を置きます。

前提となる章 — A-04 Lean と機械検査（札「Lean」の意味）・23-12 §03（依存グラフと番号の規則）・23-08 §08（区間演算の出力を仮定に置いた組み立て）。Lean そのものの読み方は Lean の案内。

先に言うこと — 水準は〔二〕〜〔三〕です。§01〜§02 と §06 は〔二〕で読めます。この部は拡散型緩和時間の仮定を検討の軸に置いた部で、Lean はその組み立ての代数の段を確かめる道具として使っています。この章は質量ギャップも連続極限も示しません。

この章の順序

1. 機械検査が保証すること — 仮定の並びから結論への矢印（例：二重井戸の緩和時間の上界の命題の合成）
2. 三つの公理と `#print axioms` — 清さの基準・`native_decide` を使わない理由
3. 一段目の束 — 束ごとの定理の数・何の代数か・仮定の置き方（表 1）・四次元格子の側（表 2）
4. 仮定は定理名の隣に — 読み方の規律と、区間演算の層が Lean の外にあること
5. 四つの限界 — 仮定の正しさ・対象の符号化・結論を定義に置く・依存の円（表 3）
6. 読者が自分で点検する手順 — 六つの問い
7. 規約の翻訳 — 同じ文字・同じ名前が別の量を指す所（表 4）
8. 束の分け方 — 記事・論文・主題ごと

01

機械検査が保証すること — 仮定の並びから結論への矢印

Lean は、数学の言明を型として書き、その証明を型の項として書くと、小さな核（カーネル）がその証明が言明に合っているかを機械的に検査する仕組みです（Lean の案内 01）。この本で「`Lean`」の札を付けた行は、その検査を通った定理を指します。札が保証することは一つだけです。

この本の約束

札「Lean」が付いた行で保証されているのは、**定理の文に書いてある仮定が全て成り立てば、書いてある結論が成り立つ**ことです。仮定が成り立つこと、文の中の記号が本文の量を表していること、その文が本文の主張と同じ意味であることは、保証されていません。

例として、一段目の上界の命題の合成（23-05 §04 の段 3（合成））の定理の文を写します。

```
theorem H3_H4_compose (CP Cbox n ca K4 C ξ D hbar S0 : ℝ) (hn : 0 < n) (hca : ca < 1)
    (hh : 0 < hbar) (hS : 0 < S0) (hD : D = hbar / S0)
    (hH3 : CP ≤ (1 + 1 / n) * Cbox / (1 - ca)) (hH4 : Cbox ≤ K4 * (C * ξ) ^ 2 / D) :
    CP ≤ (1 + 1 / n) * K4 * C ^ 2 / (1 - ca) * (ξ ^ 2 * S0 / hbar)
```

読み方。一行目の括弧の中は全て実数（`ℝ`）で、`CP` も `ξ` も名前の付いただの実数です。`hH3` は箱への帰着の命題の結論 $C_P \le (1+1/n)C_{\mathrm{box}}/(1-c_{\mathrm{alt}})$、`hH4` は箱の中の隙間の命題の結論 $C_{\mathrm{box}} \le K_4(C\xi)^2/D$ を、**仮定**として受け取っています。定理が確かめたのは、この二つと $D=\hbar/S_0$ から (13) $C_P \le K\xi^2 S_0/\hbar$ が出る代数です。`CP` が $T=\infty$ の経路の測度の Poincaré 定数であること、箱への帰着の命題・箱の中の隙間の命題の結論が実際に成り立つこと（つまり二重井戸の四条件と前提の行）は、Lean の外にあります。

この「矢印だけ」という性格は弱点ではなく、使い方の前提です。依存グラフ（23-12 §03）の「初」の節点の多くは、仮定の行を入力にとる代数で、その代数に写し間違いや符号の誤りが無いことを Lean が確かめます。何が仮定として入っているかが文の中で名指されるので、仮定の行の一覧（統合表）と突き合わせることができます。

02

三つの公理と `#print axioms`

この節は既存の知見（Lean の三つの公理と #print axioms）の整理です。導入は A-04 §04 にあります。

Lean の核の型理論の上に、標準の道具立ては三つの公理を足します。命題の外延性 `propext`（同値な命題は等しい）、商の健全性 `Quot.sound`（同値な元は商で等しい）、選択 `Classical.choice`（存在の証明から元を取り出す）です。ある定理がどの公理に依るかは、命令 `#print axioms 定理名` で一覧になります。

この本の束では、各ファイルの末尾に主な定理の `#print axioms` を置き、その出力の**全ての行が三つの公理の部分集合**であることを、清さの基準にしています。証明を飛ばす `sorry` を使うと一覧に `sorryAx` が加わり、自分で `axiom` を宣言するとその名が加わるので、この基準は「証明に穴が無く、勝手な公理も足していない」ことの機械的な確認になります。表 1 の全ての束（「公理の写し」の欄。2026-10-09 に別の計算機で取り直した写しを含む）で、三つ以外の公理の名が一つも無いことを読み直しました。三つのうち `Classical.choice` を使わない定理もあります（例えば `tb_range` は `propext` と `Quot.sound` だけ）。

`native_decide` を使わない理由。
`decide` は、有限の場合分けで決まる命題を核の中の計算で確かめます。`native_decide` は同じ計算を、Lean のプログラムとして翻訳して機械語で走らせ、その答えを信頼します。速い代わりに、信頼の範囲が核から翻訳器と実行環境にまで広がり、その信頼は一覧に追加の公理として現れます（版によっては宣言ごとに別の名前の公理が生える）。この本の束では

`native_decide` を使わず、清さの基準を「一覧の全ての行が三つの公理の部分集合」に置いています。特定の公理の名の有無で見ると、名前の付き方が版で変わったときに見落とすからです。

03

一段目の束 — 何の代数を確かめたか

一段目の Lean の定理は、主題ごとのファイル（束）に分かれています。表 1 は主な束を、本文で引いた章の順に並べたものです。「定理の数」はファイルの中の `theorem` ／ `lemma` の宣言の数、「代表の定理」の欄には定理名と、その定理の仮定を同じ欄に書きます。

表 1　一段目の主な束（定理の数は宣言の数。公理の写し：○＝末尾の `#print axioms` の出力が別に残っていて、全ての行が三つの公理の部分集合であることを読み直した。2026-10-09 に別の計算機で取り直した写しを含む）

束	定理の数	何の代数か	代表の定理（仮定）	章	公理の写し
`LatticeGaugeOneScale`	12	緩和時間の上界の仮定・緩和時間の下界の仮定と質量の読み替え（等号の版）	`hup_is_gap_positivity`（$0 < m \cdot C_P = 1/m^2 \cdot C_P \le K\xi^2$）	23-01	○
`LatticeGaugeHupBridge`	18	片側の橋・冪の下の半分・陰性対照	`hup_is_gap_positivity_of_lower`（$0 < m_{\mathrm{lat}} \cdot \kappa/m_{\mathrm{lat}}^2 \le C_P \cdot C_P \le K\xi^2$）・`first_power_does_not_bridge`（陰性対照）	23-01	○
`LatticeGaugeDoubleWellTestbed`	7	一次元の片側の橋の命題の有限和の骨	`local_rayleigh_ratio_le_one`（$0 < m \cdot a_k \ge m \cdot c_k \ge 0 \cdot \sum c_k a_k > 0$）	23-04	○
`LatticeGaugeTwoScalePoincare`	8	分散の分割・凸な芯の曲率・縮約した二状態の値・Glauber の帯の比	`split_poincare_le`（分割の式・二つの局所 Poincaré・平均差・形の加法・定数が非負）	23-04・23-05	○
`LatticeGaugeDoubleWellKramers`	10	比の挟みから二重井戸の緩和時間の冪の言明へ	`power_H_of_kink_ratio`（$0 < K, s, \delta \cdot 1 \le R \le K/\hbar \cdot s/\hbar \le \ln \xi$）	23-04・23-05	○
`LatticeGaugeH1Assembly`	17	六節点の相内 Poincaré の命題の率の代数・六節点の余白の算術・環の Gershgorin	`H1_assembly`（名前つきの七つ：分解・細かい側・Helffer の判定・余白・$0 < \lambda$・交差の行・率の条件）	23-06	○
`LatticeGaugeCoarseSideUniform`	20	交差の行の算術・Muckenhoupt の両側の形	`T4_paper_numeric`（$\lambda_c \ge 1.3 \times 10^{-4}$）	23-06	○

束	定理の数	何の代数か	代表の定理（仮定）	章	公理の写し
`LatticeGaugeIntervalQfreeWindow`	150	一次分数の補題の一次分数・傾けの恒等式・被覆から窓へ・律速のセルの再計算	`win_qfree_window_le_of_interval_table`（区間演算の出力の表）	23-08	○
`LatticeGaugeRingUnconditionedWindow`	20	環の外の鎖の窓の組み立て	`unc_window_lt_one_of_table`（区間演算の出力の表）	23-07・23-08	○
`LatticeGaugeRingInnerChain`	22	壁の角の比・環の S_W	`sw_inner_le`（$q_{\mathrm{in}} \le 13/10$・$q_{\mathrm{out}} \le 0.998888530$）	23-07	○
`LatticeGaugePartitionFramework`	14	区画の和・Gibbs の段・合成と閉じる条件	`comp_close`（$X>0$・$b, A \ge 0$・$\ell > 0$・Barta・成分ごとの局所化・Bochner の三つの不等式）	23-09	○
`LatticeGaugeRemVProxy`	23	スカラーの筋の命題の組み立て	`path5_conditional`（剰余の不等式・代理の比・稀さ・算術の余裕を名前つきで）	23-09	○
`LatticeGaugeDetourKills`・`…2`	17・16	迂回策の「殺した一行」の算術	型ごとの補題（23-10 表 4）	23-10	○
`LatticeGaugeBoxReduction`	23	二つの射影の補題・偶奇の箱・ずらしの平均・陽性と陰性の対照	`box_shift_average`（各ずらしで二族の不等式・$C_{\mathrm{box}} \ge 0$・重なりの和 $\le \mathcal{E}$）	23-05・23-11	○
`LatticeGaugeBoxGap`	18	箱の中の隙間の命題・c_{kg} の代数・箱への帰着の命題と箱の中の隙間の命題の合成	`H3_H4_compose`（§01 の文）	23-05・23-11	○
`LatticeGaugeCoreMixing`・`CoreMaxCorr`・`CoreThreeStage`	15・20・18	芯の三段（短い芯の凸性の補題・交互の最大相関の閉じた式・二つのブロックの補題・三段の合わせ）	`three_stage`（各段の上界）	23-11	○
`LatticeGaugeCoreActionGap`	15	局所の項が消えること・端の線引き	`cloc_term_vanishes`（芯の作用の障壁の仮定・ξ の読み・$\Delta S_* < 2S_0$）	23-11	○
`LatticeGaugeGlobalLyapunov`	21	Lyapunov の判定の代数と一次元ガウスの陽性対照	`gauss1d_bbcg`・`gauss1d_equality`（仮定なし）	23-14	○

表 1 の定理は、どれも実数・有限の和・数列の上の不等式と等式です。測度・作用素・経路の空間を型として持つ定理はありません。区間演算の束（`IntervalQfreeWindow` の 150 の宣言の大半）は、最後の段の上界の式を

セルごとに有理数で計算し直したもので、数は多いが中身は算術です。全ての束の索引は 付録 A-04 と分担します。

四次元格子の側。四次元格子で試した道の定理（23-02 §07 表 4）は、言明が直接に語る対象の型で分けると表 2 です。

表 2　四次元格子の側の定理の対象の型と性格（行は定理、性格の記号は 23-02 の表 4 の分類に対応：R＝再証明・A＝整理・C＝条件つき・N＝陰性対照・M＝格子の定理）

対象の型	定理の数	例
実数（と自然数）だけ	23	`chain_band`・`drain_exponent`
数列・実関数	11	`S4_two_sided`・`conditional_scale_bound`
有限集合・有限群の上の和	8	`intact_frac_le`・`meff_ge_of_corr`
内積空間の作用素	1	`tau_int_le`
格子のゲージ場（四元数・Haar 測度）	3	`one_link`・`hess_gauge`
計	46	性格で数えると（対にした二つの定理を一行として 41 行）R 11・A 15・C 7・N 5・M 3

格子のゲージ場を型として持つ定理は三つで、Wilson 測度の期待値・相関・隙間についての定理はありません。性格の対応は、23-02 の表 4 の「再証明・整理・条件つき・陰性対照・格子の定理」が、この表の R・A・C・N・M に一つずつ当たります。

04

仮定は定理名の隣に

この部の本文と表では、定理名を書くときに**その定理の仮定を同じ欄に並べます**（例：`H1_assembly`（仮定：名前つきの七つ））。定理名だけを書くと、要約の段で「Lean で確定」と読まれ、条件つきの代数が無条件の結果に膨らむからです。統合表（23-12）でも、グラフの各節点の下に定理名と仮定を書きました。

計算機援用の行では、Lean の欄は三つの層に分かれます（23-08 §08）。(1) 代数の核（一次分数の単調性・傾けの恒等式・被覆から窓への代数）、(2) 律速のセルと無作為に選んだセルの再計算（全てのセルではない）、(3) 区間演算の出力の表を**仮定**に置き、窓の全体の結論を出す組み立てです。区間演算そのもの（段の写像の区間の評価・求積・不変集合・丸めの規約）は Lean の外にあり、その正しさは照合と対照の検査（23-08 §07）に依ります。表を仮定に置いた定理の札は、「区間演算の出力が正しいなら、窓の全体の結論は代数として正しい」と読みます。

05

四つの限界 — 三つの公理に収まっていても見抜けないもの

清さの基準（§02）を満たす定理でも、次の四つは保証されません。前の二つは §01 の約束の言い換えで、後の二つは、言明の書き方そのものが結論を空にしてしまう型です。

(1) 仮定の正しさ。定理は仮定を一歩も証明しません。`H3_H4_compose` の `hH4` が偽なら、結論は何も言いません。

(2) 対象の符号化。Lean の中の `CP` は名前の付いた実数で、それが経路の測度の Poincaré 定数であることは本文の読みです。同じ名前が別の束で別の量を指しても検査は通ります。例えば `measured_ratio` という名の定理は一段目の二つの束（`CoreActionGap` と `HierarchicalLink`）にあり、別の名前空間の別の量についての文です。名前は内容の保証になりません。

(3) 結論を定義に置く。欲しい性質をそのまま定義の中に書き、その定義を仮定に取ると、結論は仮定の書き写しになり、証明は一行で閉じます。次は型だけを示す擬似の Lean です。

結論を定義に置くと何でも閉じる（擬似の Lean・型の例）

```
def InSpectrum (E : ℝ) : Prop := E = 0 ∨ c ≤ E          -- 欲しい性質を「スペクトル」の定義に書く
theorem gap (E : ℝ) (h : InSpectrum E) : E = 0 ∨ c ≤ E := h   -- 仮定をそのまま返すだけ
def massGap : ℝ := 1 / 2                                  -- 値を字面で置けば正であることも閉じる
```

三行とも検査を通り、`#print axioms` の一覧も空か三つの公理の中に収まります。それでも「スペクトル」がどの作用素のスペクトルとも結ばれていないので、数学の内容はありません。ある文書は、主定理の連言の一つをこの型で書き、別の一つを字面で置いた数で書いていました。定理名に「質量ギャップ」が入り、検査は全て通っていても、言明が対象を符号化していない例です。

(4) 依存の円。Lean は定理を一つずつ検査します。定理 A が B の結論を仮定に取り、定理 B が A の結論を仮定に取っていても、二つとも検査を通ります。どちらの結論も無条件には出ていないのに、二つを並べると「示された」ように見えます。証明が文章で書かれた場合も同じで、ある文書では、隙間が正であるという最後の結論を、途中の段（クラスター性・真空の一意性）の前提に「後で示す」として置いていました。依存グラフに描くと、大きな番号の結論から小さな番号の段へ辺が戻り、番号の規則（23-12 §03）が破れます。

表 3　四つの限界と、この本の防ぎ方

限界	検査で見えるか	この本の防ぎ方
(1) 仮定の正しさ	見えない（仮定は引数）	仮定を定理名の隣に書く（§04）・仮定の行を統合表で一つずつ数える（23-12 表 1）
(2) 対象の符号化	見えない（実数に名前を付けただけ）	Lean の対象の型を本文で言う（§03 の「実数・有限の和」）・規約の翻訳（§07）・本文の量と定理の文の記号の対応を章ごとに書く
(3) 結論を定義に置く	見えない（三つの公理に収まる）	定理の文を本文に写し、定義を遡って読む（§06 の問い 3・4）・陰性対照の定理（仮定を外すと崩れる例）を置く
(4) 依存の円	見えない（定理は一つずつ検査される）	依存グラフの番号の規則・仮定の行が結論の量を含まないことの確かめ（23-12 §03）

陰性対照の定理は、(3) への防ぎとして働きます。例えば `no_bound_when_c_one`（二つの σ-代数が同じ $c = 1$ なら箱への帰着は何も言わない）や `first_power_does_not_bridge`（一乗の冪では橋が架からない）は、仮定を外したときに結論が崩れることを示し、仮定が飾りでなく結論に効いていることの確かめになります。

06

読者が自分で点検する手順 — 六つの問い

Lean の札の付いた主張を読むとき、次の六つを順に問います。この本の定理にも、他の文書の定理にも同じように使えます。

1. **清さ**。`#print axioms` の出力の全ての行が `propext`・`Classical.choice`・`Quot.sound` の部分集合か。出力が手元に無ければ、それは「未確認」です。
2. **仮定の一覧**。定理の文の、コロンより前の括弧（型が命題の引数）を全て書き出す。本文が「無条件」と言っている主張に、命題の引数が残っていないか。
3. **結論の定義を遡る**。結論に現れる名前（`InSpectrum` のようなもの）の定義を開き、それが結論と同じ文を中に持っていないか。仮定と結論が同じ命題の展開になっていないか。
4. **対象の型**。主張が語るはずの対象（測度・作用素・場）が、定理の文の中に型として現れているか。現れているのが実数・自然数・有限の和だけなら、対象との結び付きは本文の読みにあります。
5. **依存の向き**。複数の定理をつないだ主張なら、どの定理がどの定理の結論を仮定に取っているかを番号つきの節点に並べ、前提の番号が結論の番号より小さく置けるか。置けなければ円の候補です。
6. **陰性対照**。仮定を一つ外すと結論が崩れる例が示されているか。示されていなければ、その仮定が結論に効いているかを自分で確かめる。

例。§01 の `H3_H4_compose` に当てると、(1) 三つの公理の部分集合、(2) 命題の引数は `hn`・`hca`・`hh`・`hS`・`hD`・`hH3`・`hH4` の七つ、(3) 結論は実数の不等式で、定義の遡りは要らない、(4) 対象は全て実数、(5) `hH3`・`hH4` は箱への帰着の命題・箱の中の隙間の命題の結論で、統合のグラフでは [072]・[075]・[104] が [105] より小さい、(6) $c_{\mathrm{alt}} = 1$ では箱への帰着が何も言わないことを `no_bound_when_c_one` が示す（`hca` は飾りでない）、となります。答えは「箱への帰着の命題と箱の中の隙間の命題が成り立てば、一段目の上界の命題の不等式が代数として出る」で、それ以上ではありません。

07

規約の翻訳 — 同じ文字・同じ名前が別の量を指す所

Lean の定理は記号の意味を知らないので、同じ文字が別のファイルで別の量を指しても検査は通ります。表 4 は、定理の中の規約を本書の記号表（付録 A-01）に翻訳し、食い違いを食い違いとして書いたものです。上の六行は四次元格子の側、下の五行は一段目の側です。

表 4　Lean の中の規約と本書の記号

量	Lean の中	本書	食い違い
β	一リンク積分の $e^{\beta\langle u,M\rangle}$、$\langle u,M\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(UM^{\dagger})$	$\beta = 2N/g^2$	無い（$N=2$ で $\beta = 4/g^2$）。Shen–Zhu–Zhu の規約とは $\beta = 4\beta_{\mathrm{SZZ}}$
tr と角度	リンク角 $U = e^{i\vartheta\cdot\sigma}$	$T^a = \sigma^a/2$、$U = e^{i\theta^a T^a}$	$\theta = 2\vartheta$、$C_P^{(\theta)} = 4C_P^{(\vartheta)}$。定数倍なので冪には効かない
a	`drain_exponent` の `a`	格子間隔	Lean の a は記帳の長さの逆数 $1/\xi_{\mathrm{RG}}$
η	静的な冪・感受率の冪・重なりの冪	η_s と η_{dyn} を添字で分ける	在る（同じ文字が三つの量）
κ	一ループの傾き・模型の係数・Casimir 項の係数・辺を共有しない面の寄与	一ループの傾き $11/(3\pi^2)$ だけ	在る（同じ文字が四つの量）

量	Lean の中	本書	食い違い
C_P（四次元）	名前の付いた実数	Langevin の Poincaré 定数。正規化を名指す	場 A と角度 ϑ の正規化で $C_P^{(A)} = \beta C_P^{(\vartheta)}$
$\hbar$ と ε	`hbar`（実数）。格子の刻みは数として入る	$\mathcal{E}(f) = (\hbar/\varepsilon)\sum_i \mathbb{E}\lvert\partial_i f\rvert^2$、$\varepsilon = \frac{1}{2}$	無い。$\varepsilon = 0.25$ の読みと $\varepsilon = \frac{1}{2}$ の読みの間の換算は書いていない（23-14 §05）
芯の C_P の目盛り	芯の段の定理の C_P	23-11 は $\mathcal{E}$ の規約、23-09 は $\hbar\int\lvert\nabla g\rvert^2$ の規約	$C^{(23\text{-}09)} = C/\varepsilon = 2C$（23-11 §05）
K	`power_H_of_kink_ratio` の `K`	一段目の上界の命題の K と $K' = KS_0$	Lean の K は本文の K'（23-05 §04 の段 5）
定理名	`measured_ratio`	—	二つの束に同じ名の別の定理（§05 の (2)）
読みの値	`K_ff_C2`・`three_stage_3em4` などの数の定理	読	測った値を仮定に置いた算術。値の分類は「読」のまま（Lean の札で「初」にならない）

08

束の分け方 — 記事・論文・主題ごと

束（ファイル）は、一つの主題（一つの命題とその補題）ごとに分けています。一つの章や記事が引く定理が複数の束にまたがるのは普通で、表 1 の「章」の欄がその対応です。分け方の規律は四つです。

- **一つの束に一つの主題。**箱への帰着の命題と箱の中の隙間の命題のように依り合う主題も、束を分け、合成は合成の束に置きます。束の境目が依存グラフの節点の境目になり、どの束がどの束の結論を仮定に取るかが追えます。
- **末尾に `#print axioms`。**各束の末尾に主な定理の `#print axioms` を置き、出力を束と同じ名で残します（表 1 の「公理の写し」）。
- **名前に内部の名を入れない。**束の名と定理名は数学の内容で付け（`LatticeGauge…` の後に主題の名）、読者から見える名前に作業の名や人の名を入れません。
- **記事・論文に渡す束を決める。**記事や論文がある束の定理を引くときは、引いた定理を含む束の一覧を記事の側にも置き、束の版（いつの検査の出力か）を書きます。束を後から直したら、引いている記事の側の一覧も直します。

この部は拡散型緩和時間の仮定を検討の軸に置き、Lean は一段目の組み立ての代数の段に使いました。証明の検査を別の形（例えば対象そのものを型にした形式化）で行う視点は、第 24 部で扱います。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
`Lean` 表 1 の束の定理は、仮定を引数に明示した形で機械検査を通っている。表 1 の全ての束で、残っている `#print axioms` の出力の全ての行が三つの公理の部分集合	仮定の行の正しさ。Lean の実数を経路の測度の量と読むことそのものの検査
一段目の Lean の定理は全て実数・有限の和・数列の上の文で、測度・作用素を型として持つ定理は無い	測度や作用素を型にした形式化
四つの限界と防ぎ方（表 3）・点検の六つの問い	六つの問いを通った主張が正しいこと（問いは必要な確かめで、十分ではない）

言えている	言えていない
区間演算の層が Lean の外にあり、表を仮定に置いた組み立てだけが Lean の中にあること	区間演算の実装の形式的な検証

出典と再現

もの	種別	出典・道具
束の定理の宣言と数	Lean	各束の原稿（Lean 4・Mathlib）の宣言を読み、`theorem`／`lemma` の行を数えた。定理名と仮定は本文の各行
公理の写し	Lean	各束の `#print axioms` の出力の写しを読み、三つ以外の公理の名（`sorryAx` など）が無いことを、それを含む対照の写しで検出できることを確かめてから数えた
三つの公理と `#print axioms`	典	J. Avigad, L. de Moura, S. Kong, S. Ullrich ほか『Theorem Proving in Lean 4』の章 Axioms and Computation
四次元格子の側の型の層と性格（表 2）	本書	23-02 §07 の定理の数え（同じ 46 定理）
結論を定義に置く型・依存の円の型の例	本書	構成や証明を主張する外部の二つの文書の読み（出典は伏せ、型だけを書いた。文書の正否は判定しない）

この章で使った語 — 機械検査・束・清さの基準・三つの公理・`#print axioms`・`native_decide`・対象の符号化・結論を定義に置く・依存の円・陰性対照の定理・規約の翻訳。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-14 突き合わせ — 記録の数と既知の数 — 一段目の各条件に最も近い既知の定理との距離、書誌の確かめの要約、陽性対照に使った既知の数を、記録の数と一行ずつ並べる。

2026-10-09 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 23 部 一本目の道（前半）— 時間の方向から 突き合わせ・既知の定理との距離・書誌 · Kiichi, Shiori and Rin

突き合わせ — 記録の数と既知の数

> この章は本書の検討です。§01・§07 は案内、§02 は既存の知見、§05 は未解決の地図です。

この章で分かること — 一段目の四つの条件のそれぞれについて、最も近い既知の定理がどこまで届き、どこで止まるか。一段目で引いた既知の定理の言明を原典・二次資料で確かめた結果の要約と、確かめる前に起きていたずれの型。陽性対照として使った既知の数（閉じた式）と記録の数を一行ずつ並べ、一致・条件つきの一致・不一致・比べられないに分けます。四次元格子の側の十九行の照合は、そのまま残します。

前提となる章 — 23-05 §05（既知の定理が届く所）・23-12（統合表）・23-13 §07（規約の翻訳）。

先に言うこと — 水準は〔三〕です。数が合うことは、仮定が正しいことも質量ギャップが在ることも示しません。合った数の多くは、既知の値を別の道で計算し直した確かめです。この部は拡散型緩和時間の仮定を検討の軸に置いた部で、この章はその組み立てに使った数と道具を、外の数と道具に照らします。

この章の順序

1. 突き合わせの約束 — 四つの判定と、そろえる三つのこと
2. 既知の定理との距離 — 条件ごとに最も近い既知の結果と、何が違うか（表 1）
3. 書誌の確かめの要約 — 主要な引用の支えと、ずれの型（表 2）
4. 記録の数と既知の数 — 陽性対照に使った閉じた式との照合（表 3）
5. 比べられない行 — 照合の相手が無い数
6. 四次元格子の側の十九行 — 照合の一表（表 4）
7. 外の文書から学んだ依存グラフの見方 — 二つの型

01

突き合わせの約束 — 四つの判定と、そろえる三つのこと

判定は四つです。

- **一致**：同じ量を同じ条件で比べ、誤差か表示の桁の内で合う。
- **条件つきの一致**：合うが、合い方が一つの選択（格子の刻み・箱・規約・外挿の形）に依る。
- **不一致**：同じ量として比べると誤差を超えてずれる。理由が分かっていても不一致と書く。
- **比べられない**：量・条件が違い、照合の相手が見当たらない。

比べる前に三つをそろえます。**規約**（同じ C_P が Dirichlet 形の正規化で値を変える、23-13 の表 4）、**条件**（格子の刻み ε・境界・模型の中か外か）、**数の種類**（閉じた式・計算機援用の上界・浮動小数の読み・族の下界）です。とくに一段目では、照合の相手が「閉じた式で答えの分かる模型」であることが多く、そこで合うことは道具が正しく動くことの確かめ（陽性対照）で、二重井戸の上の主張の確かめではありません。

02

既知の定理との距離 — 条件ごとに

この節は既存の知見（Poincaré 不等式の既知の判定法と定理）の整理です。導入は 1-10 §08 にあります。

23-05 の表 1 は二重井戸の緩和時間の上界の命題全体について既知の定理の届く所を並べました。表 1 はそれを条件ごとに割り、各条件で最も近い既知の結果と、何が違うかを一行で書いたものです。

表 1　条件ごとに最も近い既知の結果（分類は既知の定理を引く行の分類。本文で言明を確かめたもの）

条件	最も近い既知の結果	届く所	何が違うか	分類
相内の局所 Poincaré の条件	Helffer の判定の Poincaré 版（Ledoux の命題 3.1）・凸な領域の Bakry–Émery（Kolesnikov–Milman の定理 1.2）	粗い側の鎖と細かい側の橋の二尺度の組み立て、谷の奥の凸な芯	判定の入力（余白・二つのサイトの隙間）が $\hbar$ の節点ごとの値で、$\hbar$ に一様な入力は与えない	典
鞍点の管の条件（鞍点の族に沿う輸送）	Eyring–Kramers の Poincaré 版（Menz–Schlichting の補題 2.4・定理 2.9・2.12）	Morse 関数の谷の間の隙間の漸近と前因子	**次元を止める**：定数が次元に一様でなく、キンクの平行移動のような退化した鞍点の族は仮定の外	典

条件	最も近い既知の結果	届く所	何が違うか	分類
鞍点の管の条件（同上）	区間を止めた確率的 Allen–Cahn の Eyring–Kramers（Di Gesù–Le Peutrec・Brooks–Di Gesù）	区間の長さを分岐の閾の手前に止めた隙間の漸近	**族を除く**：区間を無限に長くする体制と平行移動の族は、著者自身が範囲の外と明記	典
箱への帰着の条件	Glauber 力学の箱の力学（Martinelli の講義の命題 3.4・3.5）	全体の隙間を箱の力学と箱の中の隙間で押さえる型	離散のスピン・全変動の結合の形。一次元・L^2・最大相関の形への書き直しは本書の側（23-11 §02）	典（型）
箱の中の隙間の条件	一次元 Ising の Glauber 力学の閉じた式・単一の界面の拡散（Bertini–Brassesco–Buttà の定理 2.1）	固定の端の箱の隙間の式、キンク一本の位置の拡散係数 D	前者は離散のスピンで、縮約したキンクの気体がその型に入ることは仮定（キンクの気体の隙間の仮定）。後者は過程の水準の文で、多キンクの箱の隙間の文ではない	仮（閉じた式は原典を確かめていない）・典
全体（体積に一様）	体積に一様な判定法（Bauerschmidt–Dagallier の定理 2.1）	経路の格子にそのまま当たり、長さに一様な上界	**体積に一様だが二重指数**：値は $C_P \le e^{c\xi}$（$c \approx 1.4 \to 1.8$、$\varepsilon = 0.25$・$\hbar = 0.4 \to 0.1$ の読み）で、ξ が $\hbar$ について指数で伸びるので $\hbar$ について二重指数。二重井戸の緩和時間の冪の言明に届かない	典・読（値）
全体（同じ型の定理の類例）	階層的 $\lvert\varphi\rvert_4^4$ の力学の隙間（Bauerschmidt–Bodineau）	隙間が自由場と同じ冪で（対数の補正つきで）消えるという、拡散型緩和時間の仮定と同じ型の定理	**階層的**：入れ子の箱の模型で、格子の模型そのものでも二重井戸の経路の測度でもない。この型の問いが数学として立つ証拠として引く（23-01 §06）	典

表 1 から、既知の道具は「次元を止めた谷の間の漸近」「一本のキンク」「体積に一様だが粗い上界」「別の模型での同じ型の定理」の四か所にあり、長い経路の上でキンクの気体の拡散の時間 ξ^2/D まで鋭い上界を与える定理は、探した範囲で見当たりません。どの行も、四つの条件の一つを丸ごと既知の定理に置き換えることはできず、条件の中の段（判定法・型・係数）を引く形になります。

03

書誌の確かめの要約 — 支えと、ずれの型

一段目の四つの条件の仮定の表で「既知の定理を引く」とした行を全て拾い、原典か、言明を再述した二次資料で確かめました。拾った項目は 55 で、そのうち条件の表の列に直接入る主要な項目が 26 です。表 2 は主要な 26 の行き先です。

表 2　主要な引用 26 の行き先（確かめの水準。「仮定に改めた」は、引用の行でなく仮定の行として名を改めたもの）

行き先	項目	中身
原典の本文で言明を確かめた	4	Helffer の判定の Poincaré 版（Ledoux）・凸な領域の Bakry–Émery と Brascamp–Lieb（Kolesnikov–Milman の一つの定理で）・Sturm の振動定理
二次資料の再述で言明を確かめた	8	Muckenhoupt の挟み（Barthe–Roberto の形）・MTP_2 の相関不等式（Karlin–Rinott）・Lyapunov と局所 Poincaré の型・指数分布の Poincaré 定数・IMS の局所化・bathtub の原理・可逆な鎖の n 歩の最大相関・ガウスの最大相関
本書の中で証明を置く（初等）	7	分散の分解とその周りの段・min-max の向き・基底状態変換（部分積分）・二つの射影の補題・Efron–Stein の型
原典の取得が要る	4	Poincaré–Miranda の定理・箱の上の重みつき Neumann 作用素の正則性・確率的単調性（Herbst–Pitt）・$\mathbb{R}$ の上の正の積分核の主固有値
仮定に改めた	3	交差項（交差項の一様性の仮定）・キンクの気体の型（キンクの気体の隙間の仮定）・壁の上の最小点の Eyring–Kramers（芯の作用の障壁の仮定）
計	26	支えのあるもの 19（上の三行）

取得が要る 4 項目は、統合表では「仮」の行（23-12 表 1 の [010]・[024]・[001] の一部など）として数えています。原典の本文で確かめられない引用は「典」に入れない、というのがこの部の規則（23-00 §01）です。

ずれの型 — 設定の一語。確かめる前の記録と原典の間に、ずれが 15 件ありました。数学が変わらない付け替え（凸な領域の版を別の定理で引く・帰属を直す・頁を直す）が 12 件、仮定の行の書き直しが要るものが 3 件です。書き直しの 3 件は、(a) 箱の上の固有関数の角までの正則性を「標準」として置いていた行（角のある箱と非対称な重みでは標準の結果から出ないので、仮定の行に分けた）、(b) 端の値についての単調性の連続版の定理番号が未確認の行（未確認と行に残した）、(c) 対数 Sobolev の補題を中心化しない形で使っていた行（原典の再述は中心化した形）です。

ずれは、どれも**設定の一語**——境界があるか、有限か、中心化するか——で起きていました。そして、ずれが出たのは、記録の側で出典を「記憶」と書いていた行よりも、「標準」と書いていた行でした。「標準」と書いた行は確かめる動機が弱いからです。この部の五分類に「標準」という分類が無いのは、このためです。引く定理は「原典か二次資料で言明を確かめた（典）」「本書で証明を置く（初）」「確かめていない（仮）」のどれかに必ず割ります。

04

記録の数と既知の数 — 陽性対照に使った閉じた式

一段目の道具（判定法・区間演算の機械・箱への帰着）は、答えが閉じた式で分かる模型に先に当てて、正しく動くことを確かめてから二重井戸に当てました。表 3 はその照合の一覧で、

比は「記録の側 ÷ 既知の側」です。

表 3　一段目の陽性対照と較正（記録の側の分類は札で。行番号は §06 の表 4 の後に続ける）

#	量	記録の側	既知の側	比	判定	条件・注
20	一次元ガウスに Lyapunov と局所 Poincaré の判定（BBCG の型）を当てた最良の定数	読 重みの走査で 5.828427（$u = 0.41422$）	閉じた式 $3 + 2\sqrt{2}$（$u = \sqrt{2} - 1$）	1.000000	一致	6 桁。双対の形でも 8 桁。Lean `gauss1d_bbcg`・`gauss1d_equality`（仮定なし）
21	同じ模型の真の Poincaré の上限	読 4.4979（有限要素 400）・4.4994（800）	判定法の値 $3 + 2\sqrt{2}$	0.77	条件つきの一致	判定法の損は 1.30 倍で、向き（判定法 ≥ 真の値）は正しい
22	純ガウス $V = x^2/2$ の C_P と箱への帰着の命題の右辺	読 右辺 1.10〜1.33（$L = 4$〜128）	$C_P = 1$（Bakry–Émery の等号）	1.10〜1.33	一致	不等式の向きの照合。重なりの割合 $\to 0$ で 1 に近づく Lean `gauss_box_le_one`
23	一次元 Ising の熱浴 Glauber で箱への帰着の命題の両辺	読 9 例の全てで成立、損 1.17〜1.35 倍	全状態の対角化の隙間	–	一致	環 12・16 サイト、結合 0.3・0.6・1.0。不等式の向きの照合
24	固定の端の Glauber の箱の隙間	読 小さな鎖の全状態の対角化	閉じた式 $1 - \gamma\cos(\pi/(L+1))$	1.00000	一致	表示の 6 桁。境界の値 $(+,+)$ でも $(+,-)$ でも同じ。原典は書誌だけ
25	交互の最大相関（$C = 2 \cdot \theta = \frac{1}{4}$）	初 交互の最大相関の閉じた式の $\varphi(e^{-1/2}, e^{-1})$	二状態の電信の鎖の閉じた式 0.7308	1	一致	同じ量の二つの表示（23-11 §02）
26	格子のキンクの作用	読 $S_0^{\mathrm{lat}} = 0.665266$（$\varepsilon = \frac{1}{2}$）	連続の $S_0 = 2/3$	0.998	条件つきの一致	差 0.2% は格子の刻みの分。連続と格子の差の評価は無い
27	相関長の対数 $\ln \xi$	読 固有値の差と Herring の式の転送作用素の版、二つの経路	半古典の主項 $\xi \propto \hbar^{1/2} e^{S_0/\hbar}$	–	条件つきの一致	二つの経路は中くらいの $\hbar$ で 6 桁一致。$\ln\xi - S_0^{\mathrm{lat}}/\hbar - \frac{1}{2}\ln\hbar$ は $-0.774/-0.777/-0.778$ と一定に寄り、主項の形と合う。定数項の比べる相手は無い
28	キンク一本の拡散係数	読 $D/(\hbar/S_0) = 1.00$〜1.14	$D = \hbar/S_0$（過程の水準の定理の係数）	1.00〜1.14	条件つきの一致	$\varepsilon = 0.25$・$\hbar = 0.02, 0.07, 0.1$ の点の値。有限の $\hbar$ の補正と刻みの分

#	量	記録の側	既知の側	比	判定	条件・注
29	体積に一様な判定法の当てはめの機械	読 調和の模型で 1.0049	閉じた式 1	1.005	一致	判定法を経路の格子に当てる転送行列の計算の陽性対照（$\varepsilon = 0.25$）
30	区間演算の機械：純ガウスの鎖	機 $\hbar$ の区間のまま全ての点が囲いの中	段ごとの分散 $(k-1)/k$・平均 $(k-1)s/k$	1	一致	区間の幅を 0 にすると点の機械と 10^{-12} の桁で同じ（23-08 §07）
31	区間演算の機械：別の実装と点の値	機 上界	読 浮動小数の再帰 75 本・転送行列の点の値 26 個	−	一致	外れ 0。点の値は全て上界の下（差の最小は 2.85×10^{-4}）
32	階層的な Gauss 自由場の隙間	—	入れ子の箱の深さ N で L^{-2N}（既知）		比べられない	比べる相手として置いた既知の数。リンクの Langevin の自由場の側の数は、まだ計算していない

表 3 の一致の行は、どれも「答えの分かる模型で道具が正しく動いた」ことの確かめで、二重井戸の上の行の正しさを示すものではありません。条件つきの一致の行の条件は、格子の刻み（行 26・28）、有限の $\hbar$（行 28）、比べる相手の定数項の欠け（行 27）です。行 21 は、判定法が真の値より 1.30 倍大きく出る損を、答えの分かる模型で測った行で、二重井戸の上で判定法の上界と要る値を比べるときの目安になります（23-09 §05）。

05

比べられない行 — 照合の相手が無い数

一段目の数のうち、照合の相手が見当たらないものを並べます。どれも、組み立てが拡散型緩和時間の仮定の上の半分に最も近づいた所にある数で、そこにだけ照合の相手がありません。

- **二つの格子の刻みの間の換算**。キンクの拡散係数と比 R の下界の読みは刻み $\varepsilon = 0.25$、相関長の表と一段目の上界の命題の段は $\varepsilon = \frac{1}{2}$ で、二つの刻みの間の換算は書いていません（23-04 の範囲の表）。
- **芯の対数 Sobolev 定数の $1/\hbar$ の係数**。Feynman–Kac の筋で要る量で、Monte Carlo の読みと経路ごとの上界の幅が三桁あります（23-09 §05）。
- **$\sup |\nabla \psi|^2$ の読み**。閾の 0.54 倍の内という読みで、上界ではありません。同じ量の既知の値は探した範囲で見当たりません。
- **スカラーの筋の命題の持ち上げの仮定**。二サイトの塊の測った値を測った範囲の外へ線形に持ち上げる仮定で、比べる相手は持ち上げた先の値そのものです（23-09 §05）。
- **階層的な自由場との比べ**。表 3 の行 32。既知の数 L^{-2N} は在り、記録の側の数がまだありません。

06

四次元格子の側の十九行

四次元格子の側で記録が計算した数（一ループの傾き κ・取りこぼし $\delta(b)$・比 $m/\sqrt{\sigma}$・質量の上界・C_P と自己相関の時間・強結合の閾値・確率時間の指数）を、既存の計算と格子の一次資料の数に照らした一表を残します。比は「記録の側 ÷ 既存の側」で、比べられない行は空けます。各行の詳細と規約の換算は、四次元格子の側の章（23-02）と第 5 部の出典表にあります。

表 4　四次元格子の側の照合（行 1〜19）

#	量	記録の側	既存の側	比	判定	条件・注
1	κ（窓の模型）	0.371521	0.371511	1.00003	一致	一ループ模型の中
2	二ループの指数	51/121	$b_1/(2b_0^2)$	1	一致	有理数の算術
3	格子の傾き／一ループ	0.304(2)	0.3715	0.819	不一致	β≤2.60、漸近スケーリング前
4	格子の傾き／二ループ	0.304(2)	0.3972	0.766	不一致	二ループはずれを広げる
5	δ(b) の c_2	0.0197・0.4200	—		比べられない	Symanzik・MCRG と変数が違う
6	m/√σ（p=2）／LT	3.844(43)	3.844(61)	1.000	条件つきの一致	同じ数表・p=2 を選ぶ
7	m/√σ（p=1）／LT	4.053(73)	3.844(61)	1.054	条件つきの一致	χ^2 で p を選べない
8	m/√σ（p=2）／AT	3.844(43)	3.781(23)	1.017	条件つきの一致	合成誤差の 1.3 倍
9	上界 β=2.40（APE）	1.025(140)	0.953(19)	1.076	一致	空間の一辺が同じ 12（L√σ≈3.2）
10	上界 β=2.55（APE）	0.531(50)	0.586(10)	0.906	条件つきの一致	−1.1σ。$12^3\times24$（L√σ≈1.9）と 20^4
11	上界 β=2.60（APE）	0.558(51)	0.514(8)	1.086	条件つきの一致	$12^3\times24$（L√σ≈1.6）と 24^4

#	量	記録の側	既存の側	比	判定	条件・注
12	上界 β=2.60（流れ）	0.501(71)	0.514(8)	0.975	条件つきの一致	12^4（L√σ≈1.6）と 24^4
13	比 m(2.40)/m(2.60)	1.837(302)	1.854	0.991	条件つきの一致	β=2.60 は L√σ≈1.6 の小さな箱
14	直線の閾値／SZZ	1/12	1/48（β=4β_SZZ で換算）	1.000	一致	既知の再導出
15	一リンク積分後の閾値	√(2/27)=0.2722	—		比べられない	周辺測度の閾値。同じ判定法の中で定数が 3.27 倍動く。範囲を広げた主張ではない
16	自由場の C_P	C_P^(A)=ξ^2・4C_P(時刻 0)^2	ガウス測度・基底状態変換	1	一致	計算し直し
17	Langevin の τ_int/ξ^2	0.5〜1.4	—		比べられない	ゼロ温度で連続極限に向かう同じ量の一次資料は、探した範囲で見当たらない
18	確率時間の極	13/6・−11/3	Baulieu–Zwanziger	1	一致	独立な一次資料は一つ
19	指数 s	−9/22	g_0^{9/11}（Lüscher–Schaefer 式 (1.1)）	1	条件つきの一致	一ループの主対数と緩和時間の仮定が条件。独立な確かめではない

四次元格子の側は、一致 6・条件つきの一致 8・不一致 2・比べられない 3 です（行 3 と 4 は同じ不一致の二つの読み）。一段目の側（表 3 の行 20〜32）は、一致 8・条件つきの一致 4・比べられない 1 です。二つを合わせて読むと、一致の行は既知の値の計算し直しか、答えの分かる模型での道具の確かめで、照合の相手が無い行は、どちらの側でも緩和時間の仮定に最も近づいた数（四次元格子の側の $\tau_{\mathrm{int}}/\xi^2$、一段目の側の芯の係数と持ち上げの仮定）に集まっています。

07

外の文書から学んだ依存グラフの見方

ヤン–ミルズの存在と質量ギャップの解決を主張する外部の文書を二つ読み、その中身の正否ではなく、**主張の組み立ての読み方**として役に立つ型を二つ取り出しました。出典は書かず、型だけを書きます。この本は、それらの文書の正否を判定しません。

1. **結論を途中の段の前提に置く型**。ある文書は、定理と証明の形で段を積み、途中の段（クラスター性・真空の一意性・指数減衰）が「後で示す」質量ギャップの正を前提に置き、質量ギャップの正そのものは物理の関係式と次元解析で支えていました。段ごとに読むと各段は前提から結論を導いていますが、段を番号つきの節点に並べると、最後の結論から途中の段へ戻る辺ができ、番号の規則が破れます。**段ごとの検査では見えず、依存グラフに並べると見える**型です。
2. **名前は対象、中身は数の型**。もう一つの文書は、主定理を Lean で閉じていました。主定理の連言を定義まで遡ると、「スペクトルに入る」が結論と同じ命題として定義されていたり、隙間の値が字面で置いた有理数だったりして、作用素・場・測度は名前としてだけ現れていました。**機械検査を通り、公理の一覧が清くても見えず、定義を遡ると見える**型です（23-13 §05）。

この二つの型は、この本の組み立てにも同じように当てて確かめるべきものです。一段目の統合のグラフでは、全ての辺で番号の規則を確かめ、仮定の行の言明が結論の量を含まないことを読んで確かめました（23-12 §03）。Lean の定理は、結論の側に定義を遡る必要のある名前が無いこと（実数の不等式だけ）を、23-13 の六つの問いで確かめられます。

この部は緩和時間の仮定を検討の軸に置き、その一段目の数と道具を外の数と道具に照らしました。別の視点は第 24 部で扱います。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
典 各条件に最も近い既知の結果がどこで止まるか（表 1）。長い経路の上でキンクの気体の拡散の時間まで鋭い上界を与える既知の定理は、探した範囲で見当たらない	そのような定理が無いこと（探した範囲の外）
主要な引用 26 のうち 19 は原典・二次資料・本書の証明のどれかで支えられ、4 は取得が要り、3 は仮定の行に改めたこと（表 2）。ずれの型は設定の一語	取得が要る 4 項目の言明
陽性対照の照合（表 3 の行 20〜32）：答えの分かる模型で道具が正しく動いたこと	それが二重井戸の上の行の正しさを示すこと
四次元格子の側の十九行の照合（表 4）	格子の数表の傾きと一ループの値の不一致を、漸近スケーリングの前という理由以上に説明すること
外の文書から取り出した二つの型と、それを本書の組み立てに当てた確かめ	外の文書の正否

出典と再現

もの	種別	出典・道具
既知の定理の言明（表 1）	典	G. Menz, A. Schlichting, Ann. Probab. 42 (2014), arXiv:1202.1510。G. Di Gesù, D. Le Peutrec, arXiv:1506.04434；M. Brooks, G. Di Gesù, arXiv:2606.16083。F. Martinelli, LNM 1717 (1999) 93–191。L. Bertini, S. Brassesco, P. Buttà, Arch. Ration. Mech. Anal. 190 (2008) 307–345。R. Bauerschmidt, B. Dagallier, Comm. Pure Appl. Math. 77, arXiv:2202.02295。R. Bauerschmidt, T. Bodineau, arXiv:1809.02075。M. Ledoux, LNM 1755 (2001) 167–194。A. V. Kolesnikov, E. Milman, J. Geom. Anal. 27 (2017), arXiv:1310.2526。各章の出典表と同じ
Glauber 力学の閉じた式	仮	R. J. Glauber, J. Math. Phys. 4 (1963) 294（書誌だけ）。式は小さな鎖の全状態の対角化で独立に確かめた
書誌の確かめの要約（表 2）	本書	一段目の仮定の表に引いた 55 項目を、原典・二次資料・書誌の照会で確かめた表の要約。項目ごとの書誌は各章の出典表
表 3 の記録の側の数	読・機・初	浮動小数の計算（転送行列・有限要素・全状態の対角化）・区間演算・本文の閉じた式。それぞれの章の出典表
表 4 の十九行	本書	四次元格子の側の照合の一表（第 5 部・23-02 の出典表に原資料の書誌）
二つの型	本書	構成や証明を主張する外部の二つの文書の読み（出典は伏せた）

この章で使った語 — 突き合わせ・一致・条件つきの一致・不一致・比べられない・陽性対照・較正・既知の定理との距離・設定の一語・結論を途中の段の前提に置く型・名前は対象、中身は数の型。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-15 残件と費用 — 定理までの距離 — 統合表の仮定の行ごとに残件と費用を並べ、一段目の中の距離と二段目以後の距離を分ける。

残件と費用 — 定理までの距離

この章は未解決の問いの地図です。閉じた部品と閉じない部品の境を示します。

この章で分かること — 一段目の結論（二重井戸の緩和時間の冪の言明の上の側）に届くのに要る行が、統合表のただ一つの分かれ道で二通りに割れること。二つの道（箱の側の芯・区画の側の芯）ごとに、要る仮定と読みの行、各行を閉じるのに要る作業の種類と費用の見積もり。全ての行が揃う $\hbar$ を作るのに要るもの。一段目の外、二段目以後の距離を、四次元格子の目標の三つの水準で測ったときの姿と、「足りないのは一様性」という一行の意味。

前提となる章 — 23-12 表 1（統合表）と 23-12 §07（要る葉の組）。各行の中身は 23-05〜23-11 の各章。二段目以後は 23-01・23-03 §06。

先に言うこと — 水準は〔三〕です。費用はどれも見積もりで、走らせていません。行の数や時間を足し合わせて「あと何割」と読むことはしません。行の重さが揃っていないうえ、時間の見積もりがあるのは計算で閉じる見込みの行だけで、やり方の分からない行には見積もりそのものがないからです。この部は拡散型緩和時間の仮定を検討の軸に置いた部で、この章が測るのは、その軸の上の一段目の残りです。

この章の順序

1. この章の約束 — 距離は一覧、費用は見積もり
2. 分かれ道と二つの道 — 箱の側の芯・区画の側の芯（表 1）
3. 二つの道を比べる — 作業の種類で数える（表 2・図 1）
4. 結論への道の上に無い残件 — 持っておく値打ちのある仕事（表 3）
5. 揃う $\hbar$ を作るのに要るもの — 窓の計算機援用では届かない理由／分かれ道の第三の枝（ブロックと混合の道）（表 C1・表 C2）
6. 四つの条件に共通する条件 — 五つの前提（表 4）
7. 二段目以後の距離 — 目標の三つの水準と、β の上の段の数（表 5・表 6）／寄り道：φ^4_4 の教訓

8. 距離の読み方 — 一行の結び

01

この章の約束 — 距離は一覧、費用は見積もり

定理までの「距離」は比喩です。この章では、目標の命題の前提のうち、証明の無いものの一覧を距離と呼びます。

距離 ＝ {目標の命題の前提のうち、証明の無い行}　　(集合。大きさで近い遠いを言わ

一段目の目標は、二重井戸の経路の測度で二重井戸の冪の言明の上の側、すなわち二重井戸の緩和時間の上界の命題の結論 $C_P \le K\xi^2 S_0/\hbar$ と、そこから従う $\ln C_P / \ln \xi \to 2$ です（23-05 §04）。前提の全体は統合表の 111 行で（23-12 表 1）、証明の無い行は「仮」と「読」の行です。「読」の行は数値としては手元にありますが、上界や下界の命題ではないので、結論の前提としては証明の無い行に数えます。

各行には、閉じるのに要る作業の種類を付けます。**区間演算**（計算機援用の不等式に置き換える。23-08）、**紙**（証明を書く）、**書誌**（既知の定理を原典で確かめて「典」に上げる）、**測定**（まだ測っていない量を測る）、**別の方法**（いまの道具では届かないことが分かっていて、別の道具が要る）、**方法未定**（どの道具で攻めるかがまだ決まっていない）の六つです。時間の見積もりは、記録に見積もりがある行だけに書き、「見積もり無し」の行は空けておきます。

例。相内の局所 Poincaré の条件の節点の間の行 [013] には「部分区間 24・計 23〜39 時間」という見積もりがあります。一方、管の行 [002] には見積もりがありません。前者が後者より「近い」と読むのは誤りです。前者は計算すれば閉じる見込みの仕事で、後者は何をすれば閉じるかがまだ分からない仕事です。計算の時間を足し上げた数は、距離の大きさを表しません。

02

分かれ道と二つの道 — 箱の側の芯・区画の側の芯

統合表の依存グラフで、結論 [111] から前提の向きにたどると、「または」の分かれ道が一か所だけあります。芯の Poincaré の一様性の仮定（芯の Poincaré 定数が芯の長さと端の値に一様、[103]）です。この行は二通りに支えられます（23-12 §07）。区画の側の芯の道については、この本から出た論文「粗い鎖の Poincaré」が、両端が井戸の中にある芯で芯の Poincaré の一様性の仮定を $\hbar \in (0,1]$ の全てで支えました：論文の証明（粗い鎖の Dobrushin の定理

（論文の定理 CC)）＋機（ħ ∈ [10⁻⁵,1] を 239 区間の区間演算で、ρ_col ≤ 0.400）＋紙の証明と機（小さい ħ の粗い鎖の命題（論文の命題 PIN）：ħ ≤ 10⁻⁵、ρ_col ≤ 0.874）＋典（Bobkov–Ledoux 2000 の Helffer の判定の Poincaré 版（Ledoux の命題 3.1））・粗い鎖の Brascamp–Lieb の命題（論文の命題 BLc）の上の条件つきで、読の行はありません。箱の側の芯（箱の側の芯の道で箱の中の隙間の命題に入る芯）は含みません。

- **箱の側の芯の道**：芯の定数の三区分の命題（芯の定数の三段、[082]）と、局所の項が ħ → 0 で消えること（[084]）で支える（23-11 §05）。
- **区画の側の芯の道**：区画の枠組みの芯の隙間の一様な下界（[099]）と、継ぎ目の正則性（継ぎ目の極限の仮定）で支える（23-09 §02）。

どちらの道を取っても、結論に要る行は一つの集合に決まります。表 1 は、二つの道の和に入る「仮」「読」「機」の行を全て並べ、各行を閉じるのに要る作業と費用を書いたものです。表とグラフと数えは、統合表と同じ一つのデータ（行・辺）に費用の列を足して作りました。

表 1　結論 [111] に要る仮定・読み・計算機援用の行と、閉じるのに要る作業（番号と内容は統合表のまま。A＝箱の側の芯の道、B＝区画の側の芯の道。費用はどれも見積もりで、走らせていない）

番号	内容（統合表）	A	B	閉じるのに要る作業	種類	費用の見積もり	本文
仮	**仮定の行（22 行）**						
[001]	T=∞ の測度の一意性・Markov 性・局所関数からの延長・極限の段・正則性	○	○	測度の一意性（ℝ の上の正の積分核の主固有値）・Markov 性・延長・極限の段・正則性を、原典で引くか紙で示す	書誌・紙	原典の取得 1 件（正の核）と紙。時間の見積もりは無い	23-05
[002]	鞍点の管の Poincaré の仮定：管の Poincaré が管の長さ ≤ Cξ に一様	○	○	管の Poincaré 定数が、管の長さ ≤ Cξ に一様	方法未定	見積もり無し（未着手）	23-07
[003]	キンクの気体の隙間の仮定：縮約したキンクの気体の箱の隙間が Glauber の型	○	○	縮約したキンクの気体の箱の隙間を、一次元 Ising の値を写さずに示す	別の方法	見積もり無し（比較の定理が要る）	23-11
[005]	交差項の一様性の仮定：交差項 Ɛ_Y(E[f|Y]) ≤ (1+χ)Ɛ(f)、χ が一様	○	○	交差項の χ が一様	方法未定	見積もり無し（未着手）	23-11

番号	内容（統合表）	A	B	閉じるのに要る作業	種類	費用の見積もり	本文
[006]	箱の交互の最大相関の仮定：箱の間の交互の最大相関 c_alt < 1 が一様	○	○	箱の間の交互の最大相関 c_alt < 1 を一様に	別の方法	見積もり無し（二点の量に縮まない例を避ける比較の定理が要る）	23-11
[007]	芯の交互の最大相関の仮定：芯の交互の最大相関 c̄ < 1 の上界（k ≥ 15）	○	—	芯の交互の最大相関 c̄ < 1 の上界（k ≥ 15）	別の方法	見積もり無し（飽和は浮動小数の読みだけ）	23-11
[008]	芯の作用の障壁の仮定：芯と窓の C_P ≤ c ħ^(−p) e^(ΔS/ħ)	○	—	芯と窓の C_P ≤ c ħ^(−p) e^(ΔS/ħ)	紙・測定	前因子 ħ^(−p) は未測。次の一手は縮退点の容量（見積もり無し）	23-11
[009]	Holley の比較の連続版（尾の補題）	○	○	Holley の比較の連続版	書誌	版と定理番号の確認	23-06
[010]	Poincaré–Miranda の定理（箱の被覆）	○	○	Poincaré–Miranda の定理	書誌	原典の取得 1 件	23-06
[011]	分散の分解の行：使う関数の正則性・稠密性	○	○	使う関数の正則性・稠密性	書誌・紙	見積もり無し	23-06
[012]	余白の行（端が大きい側）：隣と端の値 > 2.5	○	○	隣と端の値 > 2.5	紙	見積もり無し（単調性の道は閉じず、凸な尾の接線の補題は余白から遠い）	23-06
[013]	余白の行（節点の間）：節点の間の ħ（一様な形で）	○	○	六つの節点の間の ħ（0.005〜0.2）	区間演算	額縁の流し直し 1 回（30〜50 分）の後、部分区間 24・計 23〜39 時間（一コア。一本 25 分以内に切って 60〜170 本）	23-06

番号	内容（統合表）	A	B	閉じるのに要る作業	種類	費用の見積もり	本文
[014]	余白の行（小さい ħ）：ħ < 0.005（一様な形で）	○	○	ħ < 0.005	紙＋区間演算	区間演算だけでは部分区間が無限個要る。紙で余白の行の余白 ħρ − 2ħκ ≥ 0.067 の ħ→0 だけに帰着し、極限の余白は ≥ 0.758（区間演算＋紙）。一様なラプラス法の定量版と ħρ の側の一次元の補題が要る（未）。明示の $\hbar_0$ があれば無限個は有限個に変わる（§05）。上の端の側は、ħ∈[0.001949, 0.005] を六本の部分区間で区間演算により埋めた（余白 ≥ 0.067。部分区間の上の算術は Lean：LatticeGaugeH1HbarInterval）。その下は、この計算の機械では角の尾の評価が閉じず、機械の取り替えが要る（§05）	23-06
[015]	二つのサイトの隙間の行（端が大きい側）：二つのサイトの端の値 > 4	○	○	二つのサイトの端の値 > 4	紙	見積もり無し	23-06
[016]	環から切れ端（端の値つき）への写し	○	○	環の言明から切れ端（端の値つき）の言明へ	紙	見積もり無し	23-06
[018]	継ぎ目の極限の仮定・端の値が分布で与えられる仮定・環の継ぎ目の正則性	—	○	継ぎ目の極限の仮定・端の値が分布で与えられる仮定・継ぎ目の正則性	紙	見積もり無し	23-07
[019]	区画の入力の道筋の小さな仮定（区画の入力）	—	○	区画の入力の道筋の小さな仮定（縦の項・区画の入力の小さな仮定・正則性）	紙	一覧だけで未着手（見積もり無し）	23-07
[021]	窓の周辺の対数 Sobolev の入力（サイトの窓の周辺の LSI の形）	—	○	窓の周辺の対数 Sobolev の入力	紙	見積もり無し	23-09
[022]	橋の体積の局所性の入力（橋の上の体積の局所性）	—	○	橋の体積の局所性の入力（橋の上の体積の局所性）	紙	見積もり無し	23-09
[023]	Barta の行 κ = 3/1000・b = 493/1000	—	○	Barta の行 κ = 3/1000・b = 493/1000（閾 0.57 で）	紙・区間演算	見積もり無し（行の評価の紙はこの本に置いていない）	23-09

番号	内容（統合表）	A	B	閉じるのに要る作業	種類	費用の見積もり	本文
[024]	Bochner の境界の項と固有関数の正則性	—	○	Bochner の境界の項と固有関数の正則性（角まで C^3 は標準の結果から出ない）	別の方法	見積もり無し	23-09
[026]	窓の対数 Sobolev の閾の命題 A_W < A_max(ħ)。窓の対数 Sobolev の道筋の残る一命題	—	○	窓の対数 Sobolev の道筋の残る一命題 A_W < A_max(ħ)	方法未定	見積もり無し。三本の筋はどれも頂上の一サイトの曲率の不足 ¼ で止まる	23-09
読 **読みの行（上界・下界の命題に置き換える必要がある）（5 行）**							
[044]	ln ξ ≥ s/ħ（ξ ∝ ħ^½ e^(S₀/ħ)）・D/(Cξ)² の大きさ	○	○	ln ξ ≥ s/ħ を下界の命題に	書誌・紙	トンネル分裂の半古典の漸近の原典を確かめれば「典」に上がる見込み（見積もり無し）	23-04
[046]	中くらいの芯の段の二点の最大相関と B_2（22.1／30.5／66.4）	○	—	中くらいの芯の段の二点の最大相関（8 ≤ k ≤ 14）を上界に	区間演算・紙	k の七つの値ごと・ħ の点ごとの区間演算と、格子と連続の差の紙（時間の見積もり無し）	23-11
[047]	c̄_(≥15) ≤ 0.535（下界の測り）	○	—	c̄_(≥15) ≤ 0.535 を上界に	別の方法	見積もり無し（いまは下界の測りだけ）	23-11
[055]	ℓ_min = 38.3／121.9／406.8	—	○	ℓ_min = 38.3／121.9／406.8 を下界に	区間演算	見積もり無し	23-09
[089]	体積の局所性：ℓ_min は k に依らない	—	○	体積の局所性：ℓ_min が k に依らない	紙	見積もり無し	23-09
機 **計算機援用の行（節点・範囲の中で済）（2 行）**							
[040]	余白の行：余白 ħρ − 2ħκ ≥ 0.067（隣と端 $[0,2.5]^2$）	○	○	（済）六つの節点で計算機援用	—	節点の中では閉じている。節点の外は [013][014]	23-06
[041]	二つのサイトの隙間の行：λ_c ≥ 1.3×10^{-4}（端 $[0,4]^2$）	○	○	（済）計算機援用の行	—	ħ の範囲は統合表の欄のとおり	23-06

表 1 から読むこと。(1) 二つの道に共通の行は、仮定 13 行と読み 1 行です。共通の前提 [001]、箱の中の行 [002][003][005]、箱の間の [006]、相内の局所 Poincaré の条件を延ばす [009]〜[016]、相関長の伸び方の読み [044] で、どちらの道を取っても残ります。(2) 箱の側の

芯の道だけに要るのは、芯の交互の最大相関 [007] と作用の障壁 [008]、中くらいの芯の段・長い芯の段の読み [046][047] の四行です。(3) 区画の側の芯の道だけに要るのは、窓の対数 Sobolev の道筋の残る一命題 [026] と、区画の入力 [019][021][022][024]・Barta の行 [023]・継ぎ目の正則性 [018] の仮定 7 行と、読み [055][089] の二行です。(4) 計算機援用の二行 [040][041] は、節点と範囲の中では済んでいて、両方の道に共通です。

03

二つの道を比べる — 作業の種類で数える

二つの道の費用を、行の数でなく作業の種類で比べます（表 2）。

表 2　表 1 の仮定と読みの行を、閉じるのに要る作業の種類で数えたもの（一つの行が二つの種類を持つときは両方に数える。計算機援用の二行は済なので除く）

作業の種類	二つの道に共通	A だけ	B だけ
区間演算	1　[013]	1　[046]	2　[023]・[055]
紙	6　[001]・[011]・[012]・[015]・[016]・[044]	2　[008]・[046]	6　[018]・[019]・[021]・[022]・[023]・[089]
書誌	5　[001]・[009]・[010]・[011]・[044]	0	0
測定	0	1　[008]	0
別の方法	3　[003]・[006]・[014]	2　[007]・[047]	1　[024]
方法未定	2　[002]・[005]	0	1　[026]

読み方は三つです。

第一に、**時間の見積もりが付くのは、どちらの道でも共通の [013] だけ**です（部分区間 24・23〜39 時間、走らせていない）。区間演算で閉じる見込みのある行は他にもありますが（[046]・[023]・[055]）、本数と時間の見積もりはまだありません。そして共通の行には、区間演算では届かないと分かっている [014]（$\hbar < 0.005$、部分区間が無限個要る）があります。だから「計算機の時間さえあれば閉じる」道は、二つのどちらにもありません。

第二に、**箱の側の芯の道の追加は「別の方法」に偏り、区画の側の芯の道の追加は「紙」に偏ります**。箱の側の芯の道の [007][047] は、芯の交互の最大相関を k に一様に押さえる比較の定理を要し、それは二点の量に縮まない例（23-11 §05）を避ける形でなければなりません。区画の側の芯の道の追加の多くは区画の入力の紙ですが、その奥に「方法未定」の [026] が一つあります。窓の対数 Sobolev の道筋の残る一命題で、三本の筋がどれも頂上の一サイトの曲率の不足 $\frac{1}{4}$ で止まった場所です（23-09 §06）。

第三に、**行の数の多い区画の側の芯の道が重いとは限りません**。区画の側の芯の道の追加の紙は、どれも何を示せばよいかが言明として決まっている行です。箱の側の芯の道の追加の二行 [007][047] と区画の側の芯の道の一行 [026] は、どれも「何を示せばよいか」は決まっていても「どう示すか」が決まっていない行です。二つの道の差は、このやり方の分からない行が、芯の最大相関の側にあるか、頂上の曲率の側にあるかの違いです。

図 1 は、二つの道それぞれで結論の祖先だけを残した依存グラフです。統合表のグラフ（111 節点）から、[103] の「または」の片方を選んで前提の向きにたどった節点だけを、同じ番号で並べています。

図 1　道ごとの依存グラフ（番号・分類・記号・内容・⟸ の右は前提の番号。番号の規則は統合表と同じで、前提の番号は結論より小さい）
▶ 箱の側の芯の道：箱の側の芯（55 節点）
▶ 区画の側の芯の道：区画の側の芯（59 節点）

例。箱の側の芯の道のグラフで [103] の前提は [082][084]、区画の側の芯の道のグラフでは [099][018] です。それ以外の幹（[104] 以下の箱の隙間と合成）は二つのグラフで同じ節点で、分かれ道の手前の仕事はどちらの道でも共通に効きます。

04

結論への道の上に無い残件 — 持っておく値打ちのある仕事

統合表には、結論への道の上に無いのに残件として名前の付いた仕事があります。どれも閉じても結論 [111] は動きませんが、数の確かさや別の道の材料として持っておく値打ちがあります。

表 3　結論への道の上に無い残件（費用は記録の見積もりの写し。どれも走らせていない）

残件	統合表の行	作業と費用の見積もり	閉じたら何が言えるか	本文
環の内の鎖を区間演算に載せる	[053]・[054]	紙の検討 1〜2 回と台本 1〜2 回で、ピンの格子と位置の格子を分けた機械・外へ押す壁の層の命題を作り、窓の 25 部分区間で約 50 本・約 42 時間（帯の紙が無ければ約 85 時間）	内の鎖の係数 $\bar{q} \approx 1.3$ が上界になる。区画の閉じる条件（23-09 の (7)）を満たす道ではない	23-07 §03
境の段のピンを $(0, \frac{1}{2})$ へ延ばす	[054]	上の機械の一部（外の機械の定義域を延ばす）	外の鎖の「ピン ≤ 0」の条件が外れる	23-07 §03
窓の定数の数値の道筋の残る数値	[052]	窓の定数・最小の重み・混雑度で約 42 本・約 21 時間。積の形の床が要る値より 4〜5 桁上なので、走らせない判断	積の形の上界が機になる（結論には届かない）	23-07 §04

残件	統合表の行	作業と費用の見積もり	閉じたら何が言えるか	本文
閾値をそろえて A_W を測り直す	[056]	A_W を欠陥の閾 $\theta_B = 0.57$ の印で測る（見積もり無し）	23-09 の閉じる条件 (7) が字義どおりに意味を持つ	23-09 §04
スカラーの筋の命題の行を計算機援用に	[025]・[096]	節点ごとに 12 本（bathtub の列 3・稀さ 7・非凸なファイバー 2）、節点 60〜250 の見積もり。非凸なファイバーの作用の差の下界は区間演算の形にまだ無い。持ち上げの仮定は残る	窓の下の端のスカラーの筋の命題の行が機になる。残る一命題 [026] への含意の辺は無い	23-09 §05
相内の局所 Poincaré の条件の定数を鋭く	[066]	二つのサイトの隙間の行の組み直し（見積もり無し）	$C \le 1.6 \times 10^{10}$ が小さくなる（結論の形は変わらない）	23-06 §07
二つの刻みの換算	—	格子の刻み $\varepsilon = 0.25$ の読みと $\varepsilon = \frac{1}{2}$ の表をつなぐ（見積もり無し）	突き合わせの「比べられない」行が一つ減る	23-14 §05
書誌の取得	[010] ほか	要取得 4 件（Poincaré–Miranda・箱の上の Neumann の楕円型の正則性・確率的単調性・正の積分核の主固有値）	取得できた行が「仮」から「典」へ上がる	23-14 §03

表 3 の最初の三行は、計算の量で言えば表 1 の [013] より大きい仕事です。それでも結論への道の上に無いのは、閉じても統合表の「仮」の行が一つも減らないからです（23-12 §05 の「鞍点の管の条件の機の二行は結論への道の上に無い」と同じ理由）。計算の量の大きさと、結論への近さは別の物差しです。

05

揃う $\hbar$ を作るのに要るもの — 窓の計算機援用では届かない理由

表 1 の行が全部閉じても、それぞれの行が成り立つ $\hbar$ の範囲が交わらなければ、結論は一つの $\hbar$ でも言えません。いまの範囲は四種類です（23-12 §06）：相内の局所 Poincaré の条件の節点 $\{0.2, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01, 0.005\}$、計算機援用の窓 $[3 \cdot 10^{-4}, 3 \cdot 10^{-3}]$、スカラーの筋の命題の範囲 $[3 \cdot 10^{-4}, 10^{-3}]$ の節点、読みの三点 $\hbar = 3 \cdot 10^{-3} / 10^{-3} / 3 \cdot 10^{-4}$。相内の局所 Poincaré の条件の側は 0.005 より下に無く、鞍点の管の条件の側は $3 \cdot 10^{-3}$ より上に無いので、交わりは空です。

揃える道は二つしかありません。(a) 相内の局所 Poincaré の条件を $\hbar \le 10^{-3}$ へ延ばす（行 [014]）か、(b) 鞍点の管の条件の側を $\hbar \ge 0.005$ へ延ばすかです。(b) はこの部の対象の外と決めました（$\hbar$ の範囲の道筋、23-07 表 1）。(a) は区間演算では届きません。部分区間の幅は $\hbar$ とともに縮み、$\hbar \to 0$ までを覆うには部分区間が無限個要るからです。要るのは $\hbar \to 0$ の漸近を紙で書く別の方法です。その筋は次の形まで来ています。六節点の相内 Poincaré の命題の入力のうち二つのサイトの隙間の行・交差の行・λ_S・入れ子は $\hbar \in (0, 0.2]$ で閉じ、率の条件

は余白について単調なので、残るのは余白の行の余白 $\hbar\rho - 2\hbar\kappa \ge 0.067$ を $\hbar \to 0$ で示すことだけです [紙]。極限の公式は $\kappa_0(a,b) = (H^{-1})_{1,11}/\varepsilon^2$（11 サイトの橋の最小点の Hessian）で、端 $(a,b) \in [0,2.5]^2$ の全てで大域の最小点がただ一つ内部にあり $\lambda_{\min} H \ge 0.2$、$\kappa_0 \le 0.1282$、粗い景色では $U_0''(t^*) \ge 1.943$ です [機]（区間演算。前提の紙の補題——KKT・切り詰め $x \le \max(a,b,1)$・Jacobi の首座小行列式——は本に置いていない。作用の隙間 g は浮動小数 [計算]）。これから余白の極限は $\ge 1.014 - 2 \times 0.1282 = 0.758$（Muckenhoupt で払った後）で、六節点の 0.067 より大きく、有限の $\hbar$ の真の余白（1.67〜1.79）もほぼ平らです [計算]。$\hbar \to 0$ の極限を有限の $\hbar$ に降ろすには、一様なラプラス法の定量版と、$\hbar\rho$ の側の一次元の Muckenhoupt の漸近の補題が要ります [仮]（一様なラプラス法の定数は Katsevich arXiv:2406.12706 の定理 2.12 では明示されない [典]）。明示の $\hbar_0$ が得られれば、[014] の無限個の部分区間は $[\hbar_0, 0.005]$ の有限個に変わります [読]（$\hbar_0$ の見積りは 4×10^{-4}〜8×10^{-4}）。

上の端からの部分区間。窓 $[\hbar_0, 0.005]$ のうち上の端の側は、六節点と同じ区間演算の機械を $\hbar$ の区間ごとに延ばして埋めました。$\hbar\kappa$ の側は、三点の β の補間と三次の剰余の型で、11 サイトの橋の共分散を $\hbar$ の区間で上から押さえます。$\hbar\rho$ の側は、境界の値の期待値の帯を同じ型で $\hbar$ の区間に延ばし、帯つき Muckenhoupt の指数に現れる前向きの和をセルごとに $\hbar$ の両端で比べて、区間の全ての $\hbar$ で正しい下界にしました [紙]。結果、六本の部分区間 $[0.001949, 0.002281]$・$[0.002281, 0.002668]$・$[0.002668, 0.003122]$・$[0.003122, 0.003653]$・$[0.003653, 0.004274]$・$[0.004274, 0.005]$ の全てで、隣と端 $[0,2.5]^2$ の全ての箱について余白 $\hbar\rho - 2\hbar\kappa$ が 0.067 を上回ります（下の区間から 0.367・0.353・0.321・0.240・0.154・0.077）[機]（float64 と外向きの幅。部分区間の上のセルの指数の比べ・小片の被覆・余白の算術は Lean：LatticeGaugeH1HbarInterval、15 定理。数を入れて確かめたのは上の二本）。したがって余白の行の余白は $\hbar \in [0.001949, 0.005]$ で区間演算により立ちます。一様なラプラス法の定量版の $\hbar_0$（浮動小数で約 5.5×10^{-4}）とは重ならず、間は開いたままです。この機械の費用は $\hbar$ についておよそ -3.5 乗で増え [計算]、さらに次の部分区間からは、重みの打ち切りのために角 $(a,b) = (2.5, 2.5)$ の尾の上界が積分を上回り、float64 の一つの重みの尺度では閉じません [読]。窓をつなぐには、重みを対数で持つか角の尾の評価を見直す機械の取り替えか、一様なラプラス法の定量版の定数を鋭くすることが要ります。

さらに、揃う $\hbar$ が一点でも作れたとしても、二重井戸の冪の言明は $\hbar \to 0$ の極限の文です。

$$\lim_{\hbar \to 0} \frac{\ln C_P(\hbar)}{\ln \xi(\hbar)} = 2 \tag{2}$$

(2) は、どんな有限の窓の上の不等式からも出ません。窓の計算機援用は、窓の中の各 $\hbar$ で不等式を確かめるだけで、窓の外については何も言わないからです（23-08 §10）。だから一段目を閉じるには、表 1 の全ての行を「$\hbar \to 0$ で一様な形」で言う必要があり、計算機援用の役

は、その一様な形の命題の中の有限の部分（例えば $\hbar \ge \hbar_1$ の側）を受け持つことに限られます。

例。[013] を 23〜39 時間かけて閉じても、閉じるのは $0.005 \le \hbar \le 0.2$ の連続体です。[014] は手つかずのまま残り、(2) の極限には一歩も近づきません。計算の時間で買えるのは「節点の間」であって「$\hbar \to 0$」ではありません。

分かれ道の第三の枝 — ブロックの対数 Sobolev の道

分かれ道 [103]（芯の Poincaré の一様性の仮定）を支える道として、箱の側の芯の道・区画の側の芯の道のほかに第三の候補が提案されています。区画の枠組みのサイトの窓の LSI 定数 A_W（[026]）も、芯の定数の三区分の命題の芯の最大相関（[007]・[046]・[047]・[082]）も経由しない道で、この節ではブロックと混合の道と呼びます。証明の書かれていない段が多いので、この節は主張の文ではなく、提案された道を行の表（表 C1）と依存グラフで置くものです。表 1・表 2・図 1 の数えは変えません。

設定。対象は 23-09 と同じ芯 $Q_k = (-x_c, 0)^k$（$x_c = 0.89$、面は Neumann、$\varepsilon = \frac{1}{2}$、$V(z) = (z^2-1)^2/8$）の上の、両端の外の値 a, b を止めた条件つきの測度 $\mu_k^{a,b} \propto e^{-S/\hbar}$ です。Dirichlet 形は 23-09 の規約 $\mathcal{E}(f) = \hbar \int |\nabla f|^2 \, d\mu$（過減衰の Langevin 力学 $dz = -\nabla S \, dt + \sqrt{2\hbar}\, dW$ の形）で、23-11 の $(\hbar/\varepsilon)\sum_i \mathbb{E}|\partial_i f|^2$ とは定数 ε 倍だけ違います。だから「$\hbar$ に一様」はどちらの規約でも同じ意味です。目標は、芯の長さ k・$\hbar$・端の値の全てに一様な対数 Sobolev 不等式（LSI）で、LSI からは Poincaré 不等式が従う [典] ので、目標が示されれば芯の Poincaré の一様性の仮定が出ます。

三段の筋。

1. ブロックの LSI。長さ $\ell_B \ge 12$ のブロック（凸性の閾のすぐ外の長さ 8 を避ける）で、端の値と $\hbar$ に一様な LSI。入力は、下の隠れた凸性の命題（箱の上の極小は一つ）、最悪の端の値での最小点の曲率 $\lambda_*(12) \ge 0.255$、一つの非退化な極小の下では指数的に小さい固有値が無いという Witten の Morse 理論（Neumann の箱）と、一つの極小の場合の Menz–Schlichting の分解です。
2. 強い混合。$\hbar \to 0$ の最適な道が全ての出発点から 7 歩以内に箱の角 $-x_c$ に着き、鎖はその道のまわりに幅 $\sqrt{\hbar}$ の程度で集中し、角の境界層で Doeblin の条件が $\hbar$ に一様に立つ。結論は $\mathrm{TV}(n) \le (1-\delta)^{\lfloor n/10 \rfloor}$、$\delta$ は $\hbar$ に依らない、という形です。
3. 一次元の鎖の標準の定理（Zegarlinski、Martinelli–Olivieri の型：ブロックの LSI と強い混合から長さに一様な LSI）で 1 と 2 を合わせる。

この道は最悪の配位を入口にしません。最悪の配位で評価する道具が頂上の一サイトの曲率の不足 $\frac{1}{4}$ で一様に止まること（23-09 §06）の外にあり、平均の混合で $\hbar$ への一様性を取りにいく道です。

隠れた凸性の命題（箱の上の極小はちょうど一つ）

$\varepsilon>0$、$c>0$、$l\ge 1$、端の値 $a,b\in[-c,0]$ とし、$z_0=a$、$z_{l+1}=b$ として

$$S(z)=\sum_{i=0}^{l}\frac{(z_{i+1}-z_i)^2}{2\varepsilon}+\varepsilon\sum_{i=1}^{l}V(z_i),\qquad V(z)=\frac{(z^2-1)^2}{8}\tag{C1}$$

を箱 $Q=[-c,0]^l$ の上で考える。S は Q の上で局所的な極小をちょうど一つ持ち、それは大域的な最小である。

初 証明。$z_i=-\sqrt{\rho_i}$（$\rho_i\in[0,c^2]$、$i=1,\dots,l$）、端も $a=-\sqrt{\rho_0}$、$b=-\sqrt{\rho_{l+1}}$（ρ_0,ρ_{l+1} は固定）と置きます。$(z_{i+1}-z_i)^2=\rho_{i+1}+\rho_i-2\sqrt{\rho_i\rho_{i+1}}$ で、幾何平均 $(x,y)\mapsto\sqrt{xy}$ は $[0,\infty)^2$ の上で凹なので $-\sqrt{\rho_i\rho_{i+1}}$ は凸です。端の項 $-\sqrt{\rho_0}\sqrt{\rho_1}$ も、$\sqrt{\cdot}$ が凹で係数が ≥ 0 なので凸です。ρ について一次の項は凸で、$V(z_i)=(\rho_i-1)^2/8$ は ρ_i について二階微分が $\frac{1}{4}$ の狭義凸です。よって $\tilde S(\rho):=S(-\sqrt{\rho})$ は凸関数と $\varepsilon\sum_i(\rho_i-1)^2/8$ の和で、$[0,c^2]^l$ の上で狭義凸です。成分ごとの $\rho\mapsto-\sqrt{\rho}$ は $[0,c^2]^l$ から Q への同相写像なので、局所的な極小は互いに対応します。凸な集合の上の狭義凸関数の局所的な極小は大域的な最小で、高々一つです。S はコンパクトな Q の上で連続なので最小は在ります。∎

隠れた凸性の命題が言うのは、z の座標で凸でない作用（頂上の Hessian は長さ 8 以上で正定値でない、次の段落）が、$\rho=z^2$ の座標では長さに依らず凸だということです。ただし Poincaré 定数と LSI 定数は z の平らな計量の量なので、ρ の凸性がそのまま Bakry–Émery の判定を与えるわけではありません。ρ で書いた密度にはヤコビアン $\prod_i(2\sqrt{\rho_i})^{-1}$ が掛かり、ポテンシャルに足される $\frac{1}{2}\ln\rho_i$ は二階微分が $-1/(2\rho_i^2)$ の凹な項です。$\tilde S/\hbar$ の凸性の下界 $\varepsilon/(4\hbar)$ でこれを打ち消せるのは $\rho_i\ge\sqrt{2\hbar/\varepsilon}$ の所だけで、それより薄い層では凸性が保証されません 初 （一行の計算）。非凸性が「長さ 8 以上の頂上の塊」から「サイトごとの稀な薄い層」に移る、という見方です。端の値が箱の下にある場合（$a,b\le -x_c$）に閉じた芯の上の KKT 点が底の角だけであることを示した記録の命題（閉じた芯の KKT 点の命題）は、数列の凸性と KKT の条件による別の方法で、ブロックと混合の道の結論の祖先には入りません。

凸性の閾は頂上の最初の共役点。頂上 $z\equiv 0$ での S の Hessian は三重対角 $\operatorname{tridiag}(-1/\varepsilon,\ 2/\varepsilon+\varepsilon V''(0),\ -1/\varepsilon)$ で、$V''(0)=-\frac{1}{2}$、$\varepsilon=\frac{1}{2}$ では $\operatorname{tridiag}(-2,\frac{15}{4},-2)$ です。長さ l のときの固有値は $\frac{15}{4}-4\cos\frac{\pi j}{l+1}$（$j=1,\dots,l$）で、最小の $j=1$ が正なのは $\cos\frac{\pi}{l+1}<\frac{15}{16}=1-\frac{\varepsilon^2}{4}$、すなわち $l+1<\pi/\theta$（$\cos\theta=1-\varepsilon^2/4$）のときに限ります 初 。$\theta=0.3554$、

$\pi/\theta - 1 = 7.839$ で、最小の固有値は長さ 7 で 0.0545、長さ 8 で -0.0088 です。頂上で線形化した Euler–Lagrange の方程式（Jacobi の方程式）$-2u_{n-1} + \frac{15}{4}u_n - 2u_{n+1} = 0$ の解は $\sin(\theta n)$ で、π/θ はその最初の零点、変分法の言葉で最初の共役点です。短い芯の凸性の補題（23-11 §05）の「長さ ≤ 7 は凸、8 から壊れる」は、区間に共役点が入るかどうかの判定そのものです。この長さは古典的に決まり、$\hbar$ に依りません。

表 C1　ブロックと混合の道の行（番号は統合表の番号と区別して C を付ける。札は第 23 部の五分類。どの行も費用の見積もりは無い）

行	言明（一行）	札	根拠・残り	閉じるのに要る作業
C01	凸性の閾 7.84 は頂上の最初の共役点 $\pi/\theta - 1$（$\cos\theta = 1 - \varepsilon^2/4$）	初	上の段落	—
C02	長さ $k \le 7$ の芯は全ての配位で $\mathrm{Hess}\, S \ge \kappa(k)$（$\kappa(7) = 0.0545$）、$\hbar$ と端の値に一様な Poincaré（短い芯の凸性の補題、統合表 [076]）	初	23-11 §05。凸な領域の Bakry–Émery（Kolesnikov–Milman）は 典 。LSI の形も同じ凸性から出る見込みで、書誌の照合を残す。ブロックと混合の道の結論の祖先には入らない（ブロックは長さ 12 以上）	書誌（LSI の形）
C03	隠れた凸性の命題：端の値 $a, b \in [-c, 0]$ なら、箱の上の局所的な極小はちょうど一つ	初	上の枠の証明	—
C04	最悪の端の値での最小点の曲率 $\lambda_*(12) \ge 0.255$・$\lambda_*(16) \ge 0.305$（$\varepsilon = \frac{1}{2}$、全ての端の値）	読	最小点の端の値についての単調性（Topkis の定理）と Weyl の不等式による細胞ごとの下界。細胞の四隅の最小点は浮動小数の最適化	区間演算（四隅の KKT の残差を区間で確かめれば機）
C05	一つの非退化な極小 $\Rightarrow$ 指数的に小さい固有値が無く、$\hbar \to 0$ で LSI の定数が λ_* で決まる	仮	典の候補（Helffer–Nier、Le Peutrec の Neumann 版、Menz–Schlichting）。箱の角での形は照合していない	書誌
C06	ブロック（$\ell_B \ge 12$）の LSI が端の値と $\hbar$ に一様	仮	C03・C04・C05 と、有限の $\hbar$ の範囲・端の値のコンパクト性の上の組み立ての筋	紙
C07	$\hbar \to 0$ の最適な道は全ての出発点から 7 歩以内に角 $-x_c$ に着く	読	頂上からの道を 50 桁の浮動小数で解き（勾配の残差 3×10^{-51}）、KKT の符号を確かめた記録。一意性は C03、出発点についての単調性は Topkis の定理。区間演算ではないので機にしない	区間演算（解の存在を区間で囲む）で機
C08	一歩の作用の凸性 $\kappa_0 \ge 0.055$（$\hbar \to 0$、全ての出発点）	仮	記録に証明の筋（自由なサイトが 6 以下なら、一歩の作用の二階微分は長さ 7 の最悪の三重対角の最小固有値 0.0545 以上）。本に証明を置いていない。C01・C07 に依る。有限の $\hbar$ で測った $\kappa_\hbar \ge 1.88$（$\hbar = 10^{-2}$〜10^{-5}）は 読	紙

行	言明（一行）	札	根拠・残り	閉じるのに要る作業
C09	$\lvert W_\hbar - W_0\rvert = O(\hbar \ln(1/\hbar))$（$W_\hbar = -\hbar \ln \varphi_0$、$[-x_c, 0]$ で一様）	仮	典の候補（Varadhan 型の極限）。原典の照合未了	書誌
C10	幅 $\sqrt{\hbar}$ への集中と、角の境界層の Doeblin の条件（出発点に一様）	仮	拘束つきの Laplace の方法の筋。出発点に一様な形と、壁の乗数が 0 になる有限個の出発点の扱いが残る	紙
C11	強い混合 $\mathrm{TV}(n) \le (1-\delta)^{\lfloor n/10 \rfloor}$、$\delta$ は $\hbar$ に依らない	仮	C07〜C10 の上の組み立ての筋	紙
C12	混合の長さ $\approx$ 9〜10（最悪の端の値で全変動 $< 10^{-2}$、$\hbar = 10^{-2}$〜10^{-5}）・Langevin の緩和の目安 ≈ 0.46（$k \ge 16$、$\hbar = 10^{-2}$〜10^{-4}）	読	転送作用素の数値（端の値 41 点の最大）と、過減衰 Langevin の数値（256 本の鎖・端は頂上）。結論の祖先には入らない裏づけの行	—
C13	ブロックの LSI ＋ 強い混合 ⇒ 長さに一様な LSI	仮	典の候補（Zegarlinski、Martinelli–Olivieri）。コンパクトな連続スピンの版の照合未了	書誌
C14	芯の LSI が k・$\hbar$・端の値に一様、よって芯の Poincaré の一様性の仮定	仮	C06・C11・C13 の上の組み立て	紙

依存グラフ（番号の規則は図 1 と同じで、前提の番号は結論より小さい。C02 と C12 は結論の祖先に入らない節点）：

```
[C01] 初　凸性の閾 π/θ − 1 = 7.84 は頂上の最初の共役点
[C02] 初　短い芯の凸性の補題：k ≤ 7 で凸（統合表 [076]）　　祖先の外
[C03] 初　隠れた凸性の命題：箱の上の極小はちょうど一つ（ρ = z² で狭義凸）
[C04] 読　λ*(12) ≥ 0.255・λ*(16) ≥ 0.305
[C05] 仮　一つの非退化な極小 ⇒ 小さい固有値が無い（Neumann の箱の角）
[C06] 仮　ブロックの LSI（ℓ_B ≥ 12）が端の値と ħ に一様 ⟸ [C03][C04][C05]
[C07] 読　ħ→0 の最適な道は ≤ 7 歩で角に着く（50 桁の浮動小数） ⟸ [C03]
[C08] 仮　一歩の凸性 κ₀ ≥ 0.055 ⟸ [C01][C07]
[C09] 仮　|W_ħ − W₀| = O(ħ ln(1/ħ))
[C10] 仮　√ħ の幅への集中・角の境界層の Doeblin ⟸ [C03][C07][C08][C09]
[C11] 仮　強い混合 TV(n) ≤ (1−δ)^⌊n/10⌋ ⟸ [C10]
[C12] 読　混合の長さ ≈ 9〜10・Langevin ≈ 0.46　　祖先
[C13] 仮　ブロックの LSI ＋ 強い混合 ⇒ 長さに一様な LSI
[C14] 仮　芯の LSI が k・ħ・端の値に一様 ⟸ [C06][C11][C13]
[103] 初　芯の Poincaré の一様性の仮定 ⟸ [C14]（LSI ⇒ Poincaré は典）
```

表 C2　第 23 部の量と、ブロックと混合の道での扱い

第 23 部の量	意味	ブロックと混合の道での扱い
芯の Poincaré の一様性の仮定（[103]）	芯の Poincaré 定数が芯の長さと端の値に一様（23-09・23-11）	ブロックと混合の道の結論 C14 から従う（LSI ⇒ Poincaré）。規約は 23-09 の $\hbar \int \lvert\nabla f\rvert^2 d\mu$ で揃えてある
窓の対数 Sobolev の閾の命題（[026]）	$A_W < A_{\max}(\hbar)$：窓の対数 Sobolev の道筋の残る一命題	通らない。ブロックと混合の道を選べば [026] と、区画の側の芯の道の区画の入力 6 行（[018]・[019]・[021]〜[024]）と読み [055]・[089] は結論の祖先から外れる
A_W	サイトの窓の印の周辺の LSI 定数	使わない
[007]・[008]・[046]・[047]・[082]	箱の側の芯の道の芯の行（芯の定数の三区分の命題とその入力）	使わない
共通の行（[001]・[002]・[003]・[005]・[006]・[009]〜[016]・[044]）	管・縮約したキンクの気体・交差項・箱の間の最大相関・相内の局所 Poincaré の条件の延長ほか	残る

数えと、閉じないもの。ブロックと混合の道を選ぶと、結論 [111] の祖先にある証明の無い行は、共通の仮定 13 行と読み 1 行（[044]）に、ブロックと混合の道の仮定 8 行（C05・C06・C08・C09・C10・C11・C13・C14）と読み 2 行（C04・C07）を足したものです。行の数は箱の側の芯の道（仮定 15・読み 3）・区画の側の芯の道（仮定 20・読み 3）より少なくありません。違いは作業の種類で、ブロックと混合の道の行は書誌（C05・C09・C13）・区間演算（C04・C07）・紙（C06・C08・C10・C11・C14）に分かれ、表 2 の「別の方法」「方法未定」に当たる行がありません。ただしこれは各行の筋を読んだ上での分類で、書き下しの途中で新しい障害が出ないことは保証されません。

ブロックと混合の道は分かれ道 [103] の一行を支える道で、[104] から先の幹は箱の側の芯の道・区画の側の芯の道と同じです。**共通の 13 行はブロックと混合の道を選んでも残ります。**そのうち [002]（管の Poincaré）と [005]（交差項の χ が一様）は方法未定、[003]・[006] と [014]（$\hbar < 0.005$ で一様な形、区間演算では届かない）は別の方法を要する行です（表 2）。だからブロックと混合の道が閉じても一段目は閉じません。§05 の「揃う $\hbar$」の問題も、[014] を通して残ります。

混合の長さに $\ln(1/\hbar)$ が残る場合。数値では、最悪の端の値からの影響が 10^{-2} 未満になる長さは $\hbar = 10^{-2}$ から 10^{-5} まで 9〜10 で動きませんが、全変動が 0.5 を切る位置は 5 から 8 へ対数的にゆっくり動きます 読 。$\ln(1/\hbar)$ の依存が残る可能性は消えていません。残った場合、ブロックと混合の道の結論の定数は $\hbar$ について $\ln(1/\hbar)$ の多項式で増え、二つの文で扱いが分かれます。(2) の冪の文は影響を受けません。C_P に $(\ln(1/\hbar))^p$ の因子が掛かっても、[044] の $\ln \xi \geq s/\hbar$ の下で $p \ln\ln(1/\hbar)/\ln \xi \to 0$ だからです 初 （[044] の上の代数）。一方、一段目の

上界の命題の $C_P \le K\xi^2 S_0/\hbar$ で K が $\hbar$ に依らないという形は許しません。K の一様性は交差項の χ が一様であること（交差項の一様性の仮定、[005]）を含み、交差項の一様性の仮定を標準の二尺度の議論で示すと χ は局所の定数 C_{loc} の二乗に比例して出る見込みなので、C_{loc} に対数の因子が入れば χ の一様性が崩れます 仮 。23-05 の (12) の第二項 $C_{\mathrm{loc}} D/(C\xi)^2$ は $D/(C\xi)^2$ が $e^{-2S_0/\hbar}$ の程度で小さいので対数の因子を許します。したがってブロックと混合の道の目標は、対数の因子を含まない形の芯の Poincaré の一様性の仮定と置くのが正しく、対数が残った場合に届くのは冪の文までです。

06

四つの条件に共通する条件 — 五つの前提

表 1 の行ごとの作業とは別に、四つの条件の全てに掛かる前提が五つあります。どれも一つの行を閉じても消えず、一段目を「閉じた」と言える形にするときに、文の側に書き込む条件です。

表 4　四つの条件に共通する前提

記号	前提	いまの状態	閉じるのに要るもの
C1	数の種類	読みの行は浮動小数の値（統合表の読 19 行）	結論の前提にある読みの行を、区間演算か紙の上界・下界に置き換える（表 1 の読みの行）
C2	引いた定理の書誌	主要な引用 26 のうち 19 は原典か二次資料で言明を確かめた。要取得 4・仮定に改めた行 3（23-14 表 2）	要取得の 4 件を取得して言明を確かめる。取れなければ「仮」のまま
C3	機械検査の範囲	Lean は代数と算術だけ。解析の定理は仮定として入力する（23-13 §05）	機械検査の範囲を広げることは結論の条件を減らさない。仮定の行を減らすのは紙と書誌
C4	揃う $\hbar$	全ての行が成り立つ $\hbar$ は無い（§05）	相内の局所 Poincaré の条件を $\hbar \to 0$ へ延ばす別の方法
C5	極限と正則性	$T \to \infty$ の極限の存在・正則性・最初の固有値の単純さは仮定（統合表の [001]）	表 1 の [001] と同じ

07

二段目以後の距離 — 目標の三つの水準と、β の上の段の数

一段目の距離は、表 1 の行の一覧でした。二段目（四次元格子・非可換）から先の距離は、行の一覧として書けるほどには言明が割れていません。この節は、四次元格子の目標を三つの水準で書いたときの姿と、β の上の段の数を、物理の外挿の目安として並べます。一段目から二段目以後へ持ち上がる見込みがあるのは文の形と道具の形だけで、定数や $\hbar$ の範囲が持ち上がらない理由は 23-03 §06 にあります。

「最も軽い粒子の質量が正」は、量子論のハミルトニアン H のスペクトルの言明 $\mathrm{spec}(H) \subset \{0\} \cup [\Delta, \infty)$、$\Delta > 0$ です（4-11）。格子から入る道では、同じ目標が三つの水準に割れます。

$$\text{(T1)}\ \ \xi(\beta) < \infty\ (\forall \beta),\ \ \xi(\beta) \to \infty\ (\beta \to \infty); \qquad \text{(T2)}\ \ \frac{m_{\mathrm{lat}}(\beta)}{a(\beta)} \to \Delta_\infty \in (0, \infty); \qquad \text{(T3)}\ \text{連}$$

表 5　目標の三つの水準と、緩和時間の仮定との関係

水準	中身	上の水準から足すもの	四次元での状態	緩和時間の仮定との関係
格子の目標の水準（式の (T1)）	各 β で相関長が有限、$\beta \to \infty$ で発散	—	未解決（格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）） 典	緩和時間の仮定は格子の目標の水準の後半を前提に置く文
物理単位の目標の水準（式の (T2)）	m_{lat}/a が正の有限値へ	格子間隔 $a(\beta)$ の決め方	未解決	緩和時間の上界の仮定と片側の橋（23-01 §06）がそろえば下の半分が従う
連続の目標の水準（式の (T3)）	$\mathbb{R}^4$ の上の非自明な理論で隙間が正	極限の存在（Wilson ループの極限の言明）・回転の回復の言明・OS 再構成の言明・非自明性の言明	未解決（問題文）。極限の存在と公理の側は、2026-11-10 に公開された構成が Wilson の格子ゲージ理論の極限として示している、と委員会が評価した（第 6 部）。隙間は示されていない（6-04）	緩和時間の仮定と橋がそろっても従わない（23-01 §08）

次に、証明の在る β と連続極限の側の β の隔たりを、格子を 2 倍に粗くする段の数で測ります。二ループの漸近スケーリングを、Lucini–Teper の $\beta = 2.60$ の値 $\xi = 1/0.514$ に合わせて延ばした物理の外挿で、定理の距離ではありません。

$$\xi(\beta) \ \propto\ \left(\frac{6\pi^2 \beta}{11}\right)^{-51/121} e^{3\pi^2 \beta/11}, \qquad k = \log_2 \frac{\xi_{\mathrm{target}}}{\xi_{\mathrm{start}}} \tag{4}$$

表 6　目標の相関長と、要る β・段の数 読 （二ループの外挿の値。窓の端は数値の窓の端 $\xi = 1.95$、曲率の端は一リンク積分の後の曲率の下界から出る $\beta < 0.2722$ の端 $\xi \approx 0.093$）

ξ_{target}	β（二ループ）	窓の端から	曲率の端から
10	3.243	2.36	6.75
100	4.136	5.68	10.07
1000	5.022	9.01	13.39
10^4	5.903	12.33	16.72
10^6	7.654	18.97	23.36

表 6 の数はどれも有限です。それでも距離が縮まらないのは、定理に要るのが「ある目標まで」ではなく「すべての目標で、同じ定数で」だからです。比喩で言えば、階段の段数ではな

く、どの段でも踏み外さないという保証が欠けています。強結合の側の定理（Shen–Zhu–Zhu の $\beta < 1/12$ 典 ）の定数を改善しても、手にある β の範囲が広がるだけで、この一様性には触れません。曲率の端 0.2722 は、曲率の下界（Lean）から出る閾で、隙間へ進む段は概略です 仮 。

一段目の言葉に置き直すと、同じことが $\hbar$ について起きています。§05 のとおり、$\hbar$ の窓をいくら広げても二重井戸の冪の言明 (2) は出ず、要るのは $\hbar \to 0$ で一様な形の命題でした。四次元格子では $\beta \to \infty$ で一様な形、一段目では $\hbar \to 0$ で一様な形——階段のどの段でも、足りないものの形は同じです。

寄り道：φ^4_4 の教訓 — 極限まで届いても、着く先が自明かもしれない

飛ばしてよい小節です。四次元のスカラー場 ϕ^4 では、格子で切って自然に極限を取ると、着く先はガウス（自由場）になります（Aizenman–Duminil-Copin 2021、7-08） 典 。極限が在り、質量が有限に残っても、相互作用が消えていれば問題文の意味の解ではありません。表 5 の連続の目標の水準で非自明性の言明を別に書いたのはこのためで、緩和時間の下界の仮定が非自明性と別の文であること（23-01 §06）と同じ注意です。比喩で言えば、山頂に着いたと思ったら平地だった、という着き方がありえます。

08

距離の読み方 — 一行の結び

この章の距離を一つの矢印の図にまとめます。

$$\underbrace{\text{一段目の各行}}_{\text{表 1}} \xrightarrow{\hbar\to 0 \text{ で一様な形}} \text{冪の仮定 } (\xi^2)\text{（一段目）} \quad \cdots \quad \underbrace{\text{各 } \beta \text{ の定理}}_{\text{手にある}} \xrightarrow{\text{一様性（(}}$$

点線は含意ではなく、同じ形の文が二つの段に置かれていることを表します。(5) のどの矢印も証明されていません。一段目では、矢印の手前の行を一覧にし、二つの道に割り、各行に作業の種類を付けたところまでで、割ったことは整理であって矢印を短くしたことではありません。

一行で言えば、**足りないのは段の数ではなく、全ての尺度で同じ定数で成り立つという一様性**です。一段目ではそれが $\hbar \to 0$ で一様な相内の局所 Poincaré の条件と芯の行に、四次元格子では $\beta \to \infty$ で一様な上界の仮定と橋に、形を変えて現れます。

この部は緩和時間の仮定を軸に置いて、その一様性を一段目の行に割りました。緩和時間の仮定とは別の視点から同じ一様性を問う道は 第 24 部 で扱います。四段の階段のそれぞれについ

て、ハードル・既知の到達点・この本の道具で届くか・費用の種類を一枚の表に並べ直したものは 24-07 §04 にあります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
結論 [111] に要る行が、分かれ道 [103] で二つの道に割れること。箱の側の芯の道は仮定 15 行・読み 3 行、区画の側の芯の道は仮定 20 行・読み 3 行（統合表のデータからの数え）	どちらの道が易しいか。行の数は重さを表さない
各行を閉じるのに要る作業の種類（区間演算・紙・書誌・測定・別の方法・方法未定）と、記録にある費用の見積もり	見積もりの当たり。どの見積もりも走らせていない。見積もりの無い行の費用
全ての行が揃う $\hbar$ が無いこと、揃えるには相内の局所 Poincaré の条件を $\hbar \to 0$ へ延ばす別の方法が要ること、窓の計算機援用では (2) に届かないこと	相内の局所 Poincaré の条件の $\hbar \to 0$ の漸近。(2) そのもの
二段目以後の目標の三つの水準と、二ループの外挿での段の数（読み） 読	表 6 は外挿の目安で、相関長の定理ではない。三つの水準のどれも、この部は示していない
ブロックと混合の道（ブロックの LSI と強い混合）の行を表 C1 に置き、隠れた凸性の命題と凸性の閾＝最初の共役点を証明つきで示したこと 初 。ブロックと混合の道を選んでも共通の 13 行が残り、一段目が閉じないこと	ブロックと混合の道の仮定 8 行と読み 2 行。混合の長さに $\ln(1/\hbar)$ が残るかどうか

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1 の行の番号・内容・分類	本書	23-12 表 1。各行の出所は統合表の出所の欄
表 1・表 3 の作業と費用の見積もり	本書	各章の残件の節（23-06 §07・23-07 §04・23-09 §05・23-11 §07）。どれも見積もりで、走らせていない
表 1・表 2・図 1 の数え	文字の処理	統合表と同じ行と辺のデータに費用の列を足し、[103] の片方を選んで結論から前提の向きに節点を集める小さな台本（数学の計算ではない）
(3)・表 5・格子の相関長の問題	典	A. Jaffe, E. Witten, Quantum Yang–Mills Theory, Clay Mathematics Institute (2000)。S. Chatterjee, arXiv:1803.01950 §5
(4)・表 6	読	二ループの係数（4-06 の出典表）と B. Lucini, M. Teper, JHEP 0106 (2001) 050, hep-lat/0103027 表 1 の $\beta = 2.60$ の値。外挿の数は検討の記録の表の写し
強結合の範囲 $\beta < 1/12$	典	H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, Commun. Math. Phys. 400 (2023) 805–851, arXiv:2204.12737（23-01 の出典表）

もの	種別	出典・道具
ϕ^4_4 の自明性	典	M. Aizenman, H. Duminil-Copin, Ann. of Math. 194 (2021) 163（7-08 の出典表）
ブロックと混合の道の行（表 C1）・数値の行 C04・C07・C12	初・読・仮	隠れた凸性の命題と C01 は本文の証明。C04・C07・C08 の $\kappa_\hbar$・C12 は記録の浮動小数の数値（C07 は 50 桁、区間演算ではない）。仮の行の典の候補（Helffer–Nier、Le Peutrec、Menz–Schlichting、Varadhan 型の極限、Zegarlinski、Martinelli–Olivieri、Topkis の単調比較の定理）は書誌を照合していない

この章で使った語 ― 距離（一覧）・分かれ道・箱の側の芯の道・区画の側の芯の道・作業の種類（区間演算・紙・書誌・測定・別の方法・方法未定）・揃う $\hbar$・目標の三つの水準・一様性。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-16 主張しないこと ― この部が示さないこと・強く読まないこと・偽とも言わないことを、本文の文との対応表つきで。

2026-10-09 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 23 部 一本目の道（前半）— 時間の方向から 示さない・強く読まない・偽とも言わない · Kiichi, Shiori and Rin

主張しないこと — 示さない・強く読まない・偽とも言わない

この章は未解決の問いの地図です。§01・§06 は案内です。

この章で分かること — 第 23 部が主張しない事柄の一覧（十四項目）と、各項目を本文のどの章のどの文が支えるかの対応表。主張しないことと反対を主張することの違い。一段目の命題・Lean の定理・計算機援用・読みのそれぞれについて、条件を外すとどう読み違えるかの例。

前提となる章 — なし。どこから読んでもよい章です。語は 23-01 §05（拡散型緩和時間の仮定・緩和時間の上界の仮定・緩和時間の下界の仮定）、23-00 §01（五つの札）、23-05（二重井戸の緩和時間の上界の命題と二重井戸の四条件）で定めています。

先に言うこと — 水準は〔二〕です。この本は、ヤン–ミルズの存在と質量ギャップの問題を解いていません。この部には連続極限の構成も、質量ギャップの証明もありません（連続極限の存在は、2026-11-10 に公開された構成が別の道で Lean で証明している、と委員会が評価した。第 6 部。質量ギャップはそこでも示されていない。6-04）。この章は、その事実を項目に割って書き出すだけで、新たな結果を足しません。この部は拡散型緩和時間の仮定を検討の軸に置いた部で、緩和時間の仮定を唯一の道とも正しい道とも主張しません。

この章の順序

1. 三つの意味 — 示さない／強く読まない／偽とも言わない（表 1）／寄り道：量化子の否定
2. 十四の項目と、それを支える本文の文 — 対応表（表 2）
3. 本体について — 問題文の主張・局所場の脚注・弱い存在の脚注（Jaffe–Witten の脚注）
4. 二重井戸の段について — 一段目の上界の命題は四つの条件の上の代数（表 3）
5. 届かなかったことは偽の証拠ではない — 迂回策の死・周期の箱の読み・下界の仮定と自由場（表 4）

6. 条件は要約で落ちる ― 本文の文と一行の要約（表 5）
7. 類比と他の文書 ― 判定しないこと・外へ出すときの約束

01

三つの意味 ― 示さない・強く読まない・偽とも言わない

数学の文章で「主張しない」と書くとき、意味は三つに分かれます。一つ目は**示していない**。問題の本体について、この部は何も示していません。二つ目は**強く読まない**。示したことには必ず条件や仮定が付いていて、条件を外した形で読むと、示していない文になります。三つ目は**偽とも言わない**。ある方法で届かなかったことは、その方法の性質であって、届かなかった命題が偽だという主張ではありません。

三つ目は論理の形で書くと区別がはっきりします。「P を主張する」を $\vdash P$ と書くと

$$\neg(\vdash P) \quad \text{と} \quad \vdash \neg P \quad \text{は別の文} \tag{1}$$

です。左は「P の証明を持っていない」、右は「P の否定の証明を持っている」です。この章の「主張しない」は、いつも左の意味です。比喩で言えば、地図に道が描いていないことは、そこに道が無いことの証拠ではありません。

表 1　この章の項目の分け方（番号は表 2 の項目）

種類	何を主張しないか	項目
示さない	$\mathbb{R}^4$ の上の存在と質量ギャップ・連続極限の構成・一段目の二重井戸の緩和時間の冪の言明	1・2・3・10
強く読まない	計算機援用・読み・Lean の定理・持ち上げ・緩和時間の仮定と質量ギャップの関係	4・5・6・7・11
偽とも言わない	道具が届かなかった命題・周期の箱で破れると読める上界の仮定	8・12・13
判定しない・数えない	既知の再導出・他の文書の正否・閉じていない命題の外への公開	9・14

寄り道：量化子の否定

飛ばしてよい小節です。「すべての f で $Q(f) \le C$」の否定は「ある f で $Q(f) > C$」です。記号で $\neg\forall f\, A(f) \iff \exists f\, \neg A(f)$。上界の仮定を偽と示すには反例の f の列が一本あれば足り、下界の仮定を偽と示すには「すべての f で比が $o(\xi^2)$」を示す必要があります。後者は上界の仮定と同じ「すべて」の型

の文で、試験関数を並べても出ません。いくつかの族が届かなかったことは、族を限った「すべて」（$\forall f \in \mathcal{F}$）で、族を外した「すべて」ではありません。

02

十四の項目と、それを支える本文の文

表 2 は、この部が主張しないことを一行ずつ書き、その行を支える本文の場所を並べたものです。「支える」とは、その章の文が、条件・仮定・範囲をすでに書いていて、この行はそれを一行に写しただけ、という意味です。

表 2　主張しないことと、それを支える本文の文

項目	主張しないこと	種類	支える本文の文（要旨）
1	ヤン–ミルズの存在と質量ギャップの問題の解決。連続極限の構成も、極限での質量ギャップの証明もここには無い	示さない	23-01 §08：四次元で手にあるのは反射正値性の保存の言明・OS 再構成の言明の定理と小さい β の無限体積の一意性の言明だけ（この部の筋で）。緩和時間の仮定と橋がそろっても無限体積の一意性の言明・Wilson ループの極限の言明・回転の回復の言明・OS 再構成の言明・非自明性の言明は従わない
2	一段目（0+1 次元の二重井戸）でも、緩和時間の仮定（二重井戸の冪の言明）は示していない。一段目の上界の命題は四つの条件の上の代数で、四つの条件はどれも仮定の行を残す	示さない	23-05 §08：四条件の現在地。23-12 §07：結論に要る仮定の行は 15 行か 20 行
3	四つの条件の全ての行が同時に成り立つ $\hbar$ は、まだ一つも無い	示さない	23-12 §06：相内の局所 Poincaré の条件の節点と鞍点の管の条件の範囲が交わらない。23-15 §05
4	計算機援用の結果は、計算した窓・節点の中の不等式で、窓の外と $\hbar \to 0$ については何も言わない	強く読まない	23-08 §10：計算機援用が言わないこと（窓の外・$\hbar \to 0$・連続と格子の差）
5	読み（浮動小数・Monte Carlo・当てはめ・族の下界）は、上界としても下界の証明としても使っていない	強く読まない	23-00 表 1：札「読」が保証しないこと。23-12 表 1：読の 19 行はどれも分類「読」のまま
6	Lean の定理は仮定から結論への代数を検査したもので、仮定の正しさと、実数を物理の量と読むことは検査していない	強く読まない	23-13 §05：四つの限界（仮定の正しさ・対象の符号化・結論を定義に置く・依存の円）
7	一段目から二段目以後へは、文の形と道具の形が持ち上がる見込みを述べるだけで、含意の定理は無い	強く読まない	23-03 §06：持ち上がるもの・持ち上がらないもの（定数と $\hbar$ の範囲は持ち上がらない）

項目	主張しないこと	種類	支える本文の文（要旨）
8	ある道具で届かなかったことは、その道具の性質で、届かなかった命題が偽だという主張ではない	偽とも言わない	23-10 の範囲の表：迂回策の「死」は道具の性質。23-02 §08：四次元格子の道が止まった場所
9	既知の定理の再導出は成果に数えない。構成を主張する他の文書の正否は判定しない	判定しない	23-14 §03：引いた定理の支え。23-14 §07：外の文書からは型だけを取り、出典を挙げて判定はしない
10	四次元格子の側の記録（緩和時間の仮定・三つの鎖・取りこぼしの和）も、仮定のまま	示さない	23-01 §05：三つの鎖はどれも仮定。23-02 §07：残ったのは代数と読み
11	上界の仮定は、片側の橋の仮定のもとで格子の物理単位の隙間の下界を含意するが、逆は一般には偽で、Wilson 測度の類では未決。緩和時間の仮定は質量ギャップそのものではない	強く読まない	23-01 §06 の (4)（片側の橋）と (5)（円の上の自由な粒子の反例：円の上で $\Delta > 0$ かつ $C_P = \infty$）
12	迂回策の「死」は、その組み立ての天井が要る値を越えないという意味で、残る一命題が偽だという意味ではない	偽とも言わない	23-10 §03：殺した一行は道具の不等式の行
13	周期の箱の四次元格子で上界の仮定が破れるという読みは、文献の数値と「HMC と Langevin は同じ普遍類」という予想の上の条件つきの読みで、上界の仮定が偽だという定理ではない	偽とも言わない	23-01 §05 の注（位相の区画と体積の順）・23-02 §05
14	仮定の行が残る命題を、結果として外へ出さない。外に出すのは、条件を全て閉じたものだけ	数えない	23-12 §08：統合表は地図で、進み具合の分数ではない

項目 1〜10 は部の骨子で、11〜14 は各章の記述から足したものです。どの行も、本文の条件を一行に縮めたもので、本文を読めば条件の全体が分かるように書いてあります。

03

本体について — 問題文の主張には何も言わない

問題文（0-03）が求めるのは、コンパクトな単純ゲージ群ごとに $\mathbb{R}^4$ の上の量子ヤン–ミルズ理論が存在し、公理（4-09・4-10）を満たし、質量ギャップを持つことです。

$$\text{存在（公理を満たす）} \quad \wedge \quad \mathrm{spec}(H) \subset \{0\} \cup [\Delta, \infty),\ \Delta > 0 \tag{2}$$

この部は (2) のどちらの部分についても何も示していません（項目 1）。問題文の局所場の脚注・弱い存在の脚注は、弱い存在（コンパクト性）だけによる極限を解から除きます 典 。部

分列の極限がコンパクト性からただで出ることは、この水準の話で、そこから一意性も質量ギャップも出ません。

この部が扱う緩和時間の仮定は、(2) の Δ（ユークリッドの時間の隙間）を、Langevin 力学の緩和の時間 C_P に言い換えた文です。二つは別の量で、片側の橋が成り立つ場合に限って上界の仮定から Δ の下界へ一方向に渡れます（項目 11、23-01 §06）。緩和時間の仮定を検討の軸に置いたのは、格子で計算でき、凸性と Poincaré 不等式の道具があり、機械検査が届く言葉だからで、この言い換えが問題を解く唯一の道だという主張ではありません。別の視点は 第 24 部 に置きます。

04

二重井戸の段について — 一段目の上界の命題は四つの条件の上の代数

一段目の中心の文は一段目の上界の命題です：「二重井戸の四条件の上で $C_P \le K\xi^2 S_0/\hbar$、よって二重井戸の冪の言明」（23-05 §04）。この文を「二重井戸で二重井戸の冪の言明が示された」と読むのは強すぎます（項目 2）。四つの条件の下に、統合表の仮定の行が 15 行か 20 行（二つの道のどちらか）と、読みの行が 3 行あるからです（23-15 表 1）。

組み立ての代数は Lean で検査されていますが、定理名だけが要約に残ると条件が落ちます。表 3 は、この部の定理名のうち、仮定を落とすと強く読まれやすいものです（項目 6）。

表 3　定理名・仮定・強く読まないこと

定理名	仮定（要点）	強く読まないこと
`H3_H4_compose`	箱の積の不等式・箱の隙間の不等式・$D = \hbar/S_0$・$n, \hbar, S_0 > 0$・$c_{\mathrm{alt}} < 1$	「一段目の上界の命題が示された」ではない。相内の局所 Poincaré の条件と鞍点の管の条件は箱の隙間の仮定の中に入っている
`power_H_of_kink_ratio`	$0 < K, s, \delta$・$1 \le R \le K/\hbar$・$s/\hbar \le \ln \xi$	「二重井戸の冪の言明が示された」ではない。$R \le K/\hbar$ が一段目の上界の命題の結論そのもの
`H1_assembly`	名前つきの七つ（分解・細かい側・Helffer の判定・余白・$0 < \lambda$・交差の行・率の条件）	六つの節点の命題で、$\hbar$ に一様な相内の局所 Poincaré の条件ではない
`cloc_term_vanishes`	芯の作用の障壁の仮定・ξ の読み・$\Delta S_* < 2S_0$	局所の項が消えるのは芯の作用の障壁の仮定を仮定したとき。作用の障壁の値は $\hbar = 0$ の読み
`path5_conditional`	剰余の不等式・代理の比・稀さ・算術の余裕（名前つき）	窓の下の端のスカラーの筋の命題で、残る一命題への含意の辺は無い

定理名	仮定（要点）	強く読まないこと
`win_qfree_window_le_of_interval_table`	区間演算の出力の表	窓の中の不等式（項目 4）。統合表で結論への道の上に無い
`hup_is_gap_positivity_of_lower`	$0 < m_{\mathrm{lat}} \cdot \kappa / m_{\mathrm{lat}}^2 \le C_P \cdot C_P \le K\xi^2$	片側の橋は仮定として入る。Wilson 測度で橋が成り立つことは示していない（項目 11）
`drainExp_eq_zero_iff`	$0 \le \eta \le 2 \cdot \theta \ge 0$	四次元格子の側の指数の代数。物理の量への当てはめは仮定の上（項目 10）

例。`power_H_of_kink_ratio` は「比 R が 1 と $K/\hbar$ の間にあり、$\ln \xi$ が $s/\hbar$ 以上なら、$\ln C_P / \ln \xi \to 2$」という代数です。仮定の $R \le K/\hbar$ を外して「Lean で二重井戸の冪の言明」と書けば、示していない文になります。正しい要約は「二重井戸の冪の言明は一段目の上界の命題の結論から代数で従う（Lean）」です。

05

届かなかったことは偽の証拠ではない

迂回策の死（項目 8・12）。窓の対数 Sobolev の道筋の残る一命題に向けた迂回策のうち 13 本は「死」と判定しました（23-10 §03）。死とは、その組み立てで得られる上界の天井が、要る値を越えないということです。残る一命題 [026] が偽だという意味ではなく、別の組み立てで閉じる可能性について何も言いません。

周期の箱の読み（項目 13）。四次元格子では、周期境界の箱で位相電荷の自己相関時間が ξ^2 より速く伸びると報告されていて、$\tau_{\mathrm{int}} \le C_P$ と合わせると上界の仮定は周期の箱で破れると読めます（23-01 §05 の注）。この読みは、文献の数値 読 と、HMC と Langevin が同じ普遍類だという予想 仮 の上に立っています。だからこの部は「四次元格子で上界の仮定は偽」とも主張しません。主張するのは、緩和時間の仮定の言明をどう直すかが問いとして残る、ということだけです。

下界の仮定は非自明性ではない。下界の仮定が避けるのは物理の質量が無限大に潰れることだけで、相互作用の有無は問いません。相互作用の無い理論で緩和時間の仮定を計算すれば確かめられます。格子の質量 m の自由場では、経路の測度の Poincaré 定数は共分散の最大固有値で、

$$C_P = \frac{1}{m^2}, \qquad m^2 = 4 \sinh^2 \frac{1}{2\xi}, \qquad \frac{C_P}{\xi^2} = \frac{1}{4\xi^2 \sinh^2(1/2\xi)} = 1 - \frac{1}{12\xi^2} + O(\xi^{-4}) \tag{3}$$

表 4　格子の自由場の C_P/ξ^2 初 （閉じた式 (3) の値）

ξ	C_P/ξ^2	$1 - 1/(12\xi^2)$
1	0.920674	0.916667

ξ	C_P/ξ^2	$1-1/(12\xi^2)$
2	0.979425	0.979167
8	0.998699	0.998698
64	0.999980	0.999980

比は $\xi \to \infty$ で 1 に近づくので、緩和時間の仮定の上下の両方が成り立ちます。緩和時間の仮定も下界の仮定も相互作用の無い理論で成り立つ文で、緩和時間の仮定から非自明性の言明は出ません（23-01 §06）。

06

条件は要約で落ちる — 本文の文と一行の要約

主張を強く読む誤りは、多くの場合、本文の文を一行に縮める段で起きます。表 5 は、本文の条件つきの文と、条件を落としきった一行を並べたものです。右の列の文はどれも、この部が示していない文です。

表 5　本文の文（条件つき）と、条件の落ちた一行（右はどれも誤り、または示していない文）

話題	本文の文	条件の落ちた一行
窓の外の鎖	$\hbar$ の窓 $[3\cdot10^{-4},3\cdot10^{-3}]$ の全体で $q_{\mathrm{free}}\le 0.998854904$ 機（IEEE の正しい丸めを前提・外向きの幅）	鞍点の管の条件の鎖の条件が閉じた
環の外の鎖	窓の全体で $q_{\mathrm{out}}<1$ 機 （ピン ≤ 0 の条件つき。境の段は 1.004〜1.045 の読み）	環の継ぎ目が閉じた
箱の間の混ざり	$c_{\mathrm{alt}}=0.731/0.410/0.138$（$C=2/4/8$、縮約した模型の値） 読	箱の交互の最大相関の仮定が成り立つ
相内の局所 Poincaré の条件	六つの節点で余白 ≥ 0.067（端 $[0,2.5]^2$） 機 、定数 $C\le 1.6\times10^{10}$（節点の命題）	相内の局所 Poincaré の条件は示された
一段目の上界の命題	二重井戸の四条件の上の代数（Lean は箱の合成の代数）	二重井戸で二重井戸の冪の言明が示された
Feynman–Kac の筋	$\sup\lvert\nabla\psi\rvert^2$ の下からの読み 0.433 ± 0.007（閾の 0.54 倍、$\hbar=10^{-3}$） 読 、紙の上界は閾の約 1000 倍	Feynman–Kac の筋の仮定は閾の内に収まる
周期の箱	文献の数値と予想の上で、上界の仮定は周期の箱では偽と読める	四次元で上界の仮定は偽

表 5 の誤りの型は二つです。一つは範囲（窓・節点・模型の値）が落ちる型、もう一つは分類（読・機・仮）が落ちる型です。どちらも、要約の一行に条件の語を残せば防げます。

07

類比と他の文書 — 判定しないこと・外へ出すときの約束

物理の側の言葉を借りた箇所は、借りた先の水準を引き継ぎます。ホログラフィーは予想で、それを使った対応表は辞書であって証明された同値ではありません。完全な族が $d \le 4$ で在ることの「4」は格子の組合せの数で、物理の時空の次元とは関係のない一致です（23-02 §02）。一段目と四次元格子の対応（$\hbar \to 0$ と $\beta \to \infty$）も類比で、対応の定理ではありません（23-03 §06）。

構成を主張する他の文書について、この部は正否を判定しません（項目 9）。外の文書から取り入れたのは、依存グラフの読み方の型（結論を定義に置く閉じ方・依存の円）だけで、それも出典を伏せた型として書きました（23-13 §05・23-14 §07）。

最後に、外へ出すときの約束です（項目 14）。この部の命題は、仮定の行が一つでも残る限り、結果として外へ出しません。外へ出すのは、全ての条件を閉じ、機械検査と書誌の確かめを通したものだけです。それまでの記述は、どの行が閉じていてどの行が閉じていないかの地図として置きます。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
この部が問題文 (2) について何も示していないこと。主張しないことの十四項目と、それを支える本文の場所（表 2）	(2) の真偽。連続極限の存在。体積に一様な隙間
表 3 の定理名の仮定（各章の言明の写し）	仮定の行の正しさ
初 格子の自由場で $C_P/\xi^2 = 1 - 1/(12\xi^2) + \cdots$ と緩和時間の仮定が成り立つこと（閉じた式）	相互作用のある四次元の測度で C_P と ξ^2 を比べる定理（どちらの向きにも無い）
周期の箱で上界の仮定が破れるという読みの条件（文献の数値と予想）	四次元格子で上界の仮定が偽であること・真であること

出典と再現

もの	種別	出典・道具
問題文・局所場の脚注・弱い存在の脚注	典	A. Jaffe, E. Witten, Quantum Yang–Mills Theory, Clay Mathematics Institute (2000)（0-03 の出典表）
表 2 の各行	本書	表の右の列の章と節
表 3 の定理名と仮定	Lean	言明は 23-13 §03 と各章の分類表
(3)・表 4	初	閉じた式。$1/(4\sinh^2(u/2)) = 1/u^2 - 1/12 + O(u^2)$ の展開

もの	種別	出典・道具
表 5 の本文の文	本書	23-07 §03・23-08 §05・23-11 §02・23-06 §04・23-09 §05・23-01 §05

この章で使った語 — 示さない・強く読まない・偽とも言わない・量化子の否定・片側の橋・迂回策の死・要約で落ちる条件。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：23-17 ひらめきと小さな問い — 一段目の検討で繰り返し役に立った見方と、卒業研究の大きさで決着のつく問い。

2026-10-09 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 23 部 一本目の道（前半）— 時間の方向から 着想の型・捨てた仮説・小さな問い · Kiichi, Shiori and Rin

ひらめきと小さな問い — 手順として残る見方と、決着のつく問い

この章の §01 は案内、§02〜§04 は未解決の地図、§05 は本書の検討です。

この章で分かること — 一段目の検討の途中で、繰り返し役に立った見方を、「どんな問題でもこの手順を踏む必要がある」という形の十二の着想にまとめたもの。各着想に、読者が手で確かめられる小さな問いを一つずつ。捨てた仮説とその理由の表。卒業研究の大きさで決着のつく問いの一覧と、一問を決着の形まで進めた例題。

前提となる章 — 着想の材料は 23-06〜23-11 の各章です。各着想の末尾に、その見方が働いた章を書きます。問いの前提は各問の欄に書きます。

先に言うこと — 水準は〔二〕〜〔三〕です。ここに並ぶのは検証の前の着想と問いで、定理でも結果でもありません。どの問いが決着しても、質量ギャップの証明には届きません。決着しても何が動かないかを、各問に書きました。

この章の順序

1. 着想の読み方 — 三つの状態と、残す基準（表 1）
2. 十二の着想と小さな問い — 払い方・住所・閾・向き・順序
3. 捨てた仮説 — 元の形・直った形・根拠（表 2）
4. 卒業研究の大きさの問い — 十七問の一覧（表 3）
5. 例題：一問を決着の形まで — Hermite の族の $1 - \lambda_k$（表 4）

01

着想の読み方 — 三つの状態と、残す基準

検討の途中では、結果とは別に「見え方の転換」が書き留められます。それらは三つの状態に分かれます。**着想のまま**（検査を受けていない）、**確かめた形**（小さな模型や閉じた式で一度は確かめた）、**既知と重なる**（芯が既知の定理の言い換えだった。着想に数えない）です。

この章に残す基準は一つです。誰が・いつ思いついたかではなく、**同じ型の問題に出会った別の読み手も、この手順を踏む必要がある**と言える形に書けるものだけを残します。例えば「上界を削る前に、要る値の因子を構造と道具に仕分ける」は、二重井戸を離れても意味を持つ手順です。逆に、ある数値がたまたま閾の近くにあったという観察は残しません。

四次元格子の側の着想を七つの型（下からは測れない／一次元に落とす／単位を落とす／反例と対照を先に／差の冪を見る／拡散型緩和時間の仮定は測度と形の組／状態空間のつながり）で読みました。表 1 はその七つと、この章の十二の着想との関係です。

表 1　七つの型と、この章の着想（右の列は §02 の着想）

型	一行	この章で続く着想
下からは測れない	平均や試験関数は C_P を下からしか押さえない	上界を削る前に、下界を一本測る
一次元に落とす	C_P の上界の道具は一次元で手に入る	凸性の閾は、Hessian にパラメータが入るかで決まる（閾より短く刻む）
単位を落とす	無次元比を主役にする	1/ħ は何に住むか（1/ħ の住む長さ）
反例と対照を先に	証明が成り立たない模型を先に挙げる	条件づけの壁が最小点を作る（最小点を先に数える）
差の冪を見る	冪を決めるのは量でなく打ち消しの残り	上界と読みの比を、打ち消しの段と向きの段に分ける
緩和時間の仮定は測度と形の組	Dirichlet 形の正規化を名指して書く	拡散型緩和時間の仮定の真偽は、座標（Dirichlet 形）で変わる
状態空間のつながり	定数の一様性より先に位相を疑う	座標で真偽が変わる着想・23-01 §05 の注

02

十二の着想と小さな問い

同じ場所を二度払っていないか

長い不等式の鎖では、一つの悪い場所（二重井戸では頂上の近く）を、二つの段がそれぞれ別の名前で払っていることがあります。区画の枠組みでは、Bochner の段と Gibbs の段が同じ頂上の近くを払い、一方の増幅の因子が全体に掛かっていました。負の曲率をもう一方の側へ移すと、増幅を通らずに済みます。同じ型で、二つの項が互いに補い合う勾配を使うときは、

分母を分け合って $(1+\sqrt{C})^2$ でなく $(1+C)$ に畳めることがあります。手順として言えば、**組み立てを詰める前に、各段が何を払っているかを場所ごとに書き出し、二度払いを探す**ことです（23-09 §02・23-10 の二度払いの型）。状態：確かめた形。

小さな問い 1。$\|u+v\|^2 \le (1+t)\|u\|^2 + (1+1/t)\|v\|^2$（$t>0$）を、三つのベクトルの和 $u+v+w$ に二回続けて使う組み立てと、三項を一度に $\|u+v+w\|^2 \le (1+s_1)\|u\|^2 + \cdots$ と配分する組み立てで、$\|u\|^2=\|v\|^2=\|w\|^2=1$ のときの最良の右辺を比べよ。二回続けた方はどこで同じ量を二度払っているか。

Poincaré の通貨とエントロピーの通貨

稀な事象を「稀さ」で払いたくなる場面があります。ところが Poincaré 不等式の側では、稀さは通貨になりません。Poincaré が見るのは出口の速さで、稀な状態に質量を載せても分散と Dirichlet 形の両方で質量が打ち消し合うからです。稀さを通貨にできるのはエントロピーの側（対数 Sobolev 不等式）だけですが、こちらは代わりに、試験関数が集まりうる最も稀な状態の $\ln(1/\nu)$ を払います。手順として言えば、**エントロピー型と分散型のどちらを使うかは、二つの稀さ（払いたい欠陥の稀さと、試験関数が集まりうる状態の稀さ）を並べて決める**ことです（23-10 の通貨の取り違えの型）。状態：確かめた形（二点の模型）。

小さな問い 2。二点 $\{0,1\}$ の上の測度 $\pi=(1-p,p)$ と、反転の速さ 1 の Dirichlet 形 $\mathcal{E}(f)=\pi_0\pi_1(f_1-f_0)^2$ を考える。Poincaré 定数は p に依らないことを示せ。対数 Sobolev 定数が $p\to 0$ で $\ln(1/p)$ の速さで伸びることを、二点の空間の既知の公式（Diaconis–Saloff-Coste）を引いて確かめよ。

$1/\hbar$ は何に住むか — 損の読みは、それが掛かる量と同じ長さで

頂上の台地では、$1/\hbar$ の大きさの定数を作る試験関数は、集団の一次の座標 $\sum z_j$ ではなく、頂上の角からの半径 $\sum z_j^2$ の関数でした。線形の集団座標を選ぶと、向きを取り違えます。また、$1/\hbar$ は台地の長さ $\ell \approx 0.34/\hbar$ に住んでいて、損を測るときはそれが掛かる量と同じ長さで測る必要があります。手順として言えば、**二尺度に分ける前に、下界を作る関数が粗い座標に住むかファイバーに住むかを確かめる**ことです（23-10 の 1/ħ の住所の型・23-09 §06）。状態：着想のまま（数値の読みで支えた形）。

小さな問い 3。$\mathbb{R}^k$ の上の測度 $\mu \propto e^{-V(|z|)/\hbar}$、$V(r)=(r^2-1)^2/8$ で、一次の関数 $f=z_1+\cdots+z_k$ と半径の関数 $g=|z|^2$ の比 $\mathrm{Var}(\cdot)/\mathcal{E}(\cdot)$（$\mathcal{E}(f)=\hbar\int|\nabla f|^2 d\mu$）を、$k=1$ と $k=2$ で $\hbar\to 0$ の主項まで比べよ。$k=2$ で μ が円環に集まるとき、遅い向きはどちらの関数が捉えるか。

条件づけの壁が最小点を作る

区間の端をちょうど固定して条件づけると、$\hbar = 0$ の最小点が全て壁の上に乗ることがあります。そのとき見えている「遅さ」や「双安定」は、模型の性質ではなく、条件づけが作った影です（芯の負の端の双安定は、キンクが一サイトずれたい配置を芯の区間に閉じ込めた影でした）。手順として言えば、**区画や条件づけの切り方を変えるたびに、壁の上に乗る $\hbar = 0$ の最小点を数えることを最初の検査にする**ことです（23-11 §06）。状態：確かめた形。

小さな問い 4。$V(x) = (x^2 - 1)^2/8$ を区間 $[0, b]$（$0 < b < 1$）に制限した測度 $\mu_\hbar \propto e^{-V/\hbar}\mathbf{1}_{[0,b]}$ は、$\hbar \to 0$ でどこに集まるか。その近くで $\mu_\hbar$ を指数分布で近似し、$\mu_\hbar$ の Poincaré 定数（Dirichlet 形 $\hbar \int f'^2 d\mu$）の $\hbar \to 0$ での振る舞いを $|V'(b)|$ で書け。壁を $b = 1$ に動かすと何が変わるか。

内側を一様に閉じる前に、外側で何が掛かるかを先に書く

入れ子の評価では、内側の定数を $O(1)$ で押さえようとして詰まることがあります。ところが外側の式で、その定数に小さな因子が掛かっているなら、内側に要る精度はずっと緩くなります。箱の隙間の命題では局所の項に $e^{-2S_0/\hbar}$ が掛かるので、芯の定数は $O(1)$ でなくても $e^{\Delta S/\hbar}$（$\Delta S < 2S_0$）の大きさで足りました。手順として言えば、**内側を一様に閉じる前に、外側の式でその量に何が掛かるかを先に書き、内側に要る精度を外側の尺度との比で決める**ことです（23-11 §06）。状態：確かめた形（作用の障壁の読みは $\hbar = 0$ の値）。

小さな問い 5。$K(\hbar) = A + e^{-2S_0/\hbar} B(\hbar)$ が $\hbar \to 0$ で有界であるために B に要る条件を書け。$B(\hbar) \le c\,\hbar^{-p} e^{\Delta S/\hbar}$ の形なら、ΔS と $2S_0$ と p の関係はどうあればよいか。$\Delta S = 2S_0$ のちょうどの場合は何が要るか。

パラメータの sup は閾のすぐ外で取られる

長さ k の芯の定数を k について一様に押さえるとき、難しいのは長い芯ではなく、凸性が失われる閾のすぐ外（$k = 8$、両端が頂上）でした。閾の内側は凸性で只、遠く外側は箱への帰着で飽和し、その間の一点が sup を取ります。手順として言えば、**パラメータについての sup で詰まったら、まず閾の位置を求め、そのすぐ外の値を名指して別に押さえる**ことです（23-11 §05）。状態：確かめた形（閾は閉じた式）。

小さな問い 6。$\kappa(k) = 8\sin^2\!\big(\pi/(2(k+1))\big) - \tfrac{1}{4}$ が負になる最小の k を求めよ（23-09 §06 の式と同じ）。$\kappa(k)$ は $k \to \infty$ でどう振る舞うか。閾が $k = 8$ にあることと、sup が $k = 8$ で取られることとは、同じことか別のことか。

除外する集合の閾は、下流の不等式が許す質量で決める

悪い集合を除外して残りで評価するとき、閾をどこに置くかは、悪い集合の側の都合ではなく、その集合の質量を受け取る下流の不等式が何を許すかで決まります。区画の枠組みでは、窓の印の閾と欠陥の閾が食い違ったために、印で決まる集合で欠陥を含むものが全空間しか無くなり、閉じる条件が字義どおりには何も与えていませんでした。手順として言えば、**合成する条件の一つ一つが、同じ閾の定義の上で成り立っているかを字義どおりに確かめ、閾は下流が払える質量から逆算する**ことです（23-09 §04）。状態：確かめた形（可測性の一行）。

小さな問い 7。一サイト $z \in \mathbb{R}$ で、印 $\sigma = \mathbf{1}\{z \le -\theta_\sigma\}$ と欠陥の集合 $N = \{-\theta_B < z \le -\theta_\sigma\}$（$\theta_\sigma < \theta_B$）を考える。$\sigma$ の値で決まる集合（σ について可測な集合）で N を含むものを全て挙げよ。$\theta_\sigma = \theta_B$ にすると何が変わるか。

凸性の閾は、Hessian にパラメータが入るかで決まる

端の値の sup で詰まったとき、その端の値が Hessian に入っているかを見ると道が分かれます。最近接の二次の結合で端の値が一次で入るだけなら、Hessian は端の値に依らず、凸性は端の値に一様です。だから凸性の閾より短く刻めば、端の値の sup は只になり、代価は全て刻み目の相関（最大相関）の側へ移ります。手順として言えば、**パラメータの端で詰まったら、まず Hessian にそのパラメータが入るかを確かめ、入らないなら凸性の閾より短く刻み、継ぎ目の相関だけを別に勘定する**ことです（23-11 §05）。状態：確かめた形。

小さな問い 8。$S(x_1,\dots,x_k) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(x_{j+1}-x_j)^2}{2\varepsilon} + \varepsilon \sum_{j=1}^{k} V(x_j)$、$x_0 = a$・$x_{k+1} = b$ を固定した測度 $e^{-S/\hbar}$ で、Hessian が a, b に依らないことを確かめよ。$V'' \ge -\frac{1}{2}$（$V = (x^2-1)^2/8$ の頂上の値）のとき、Hessian の最小固有値が正になる k の範囲を ε で書け（$\varepsilon = \frac{1}{2}$ で小さな問い 6 の $\kappa(k)$ と比べよ）。

上界と読みの比を、打ち消しの段と向きの段に分ける

上界 U と下からの読み L が大きく離れているとき、比 U/L を一つの数で見ても、どこで失っているかは分かりません。間に「同じ経路で、打ち消しを捨てる前の量」R を挟んで、R/L（打ち消しの段）と U/R（向きの段）に分けると、Feynman–Kac の筋では前者が 1.2 前後、後者が 1000 を超え、損はほぼ全てスカラーの Grönwall が向きを捨てる段にありました（23-09 §05）。手順として言えば、**上界と読みの隔たりは、段ごとの比に割ってから改良の的を決める**ことです。状態：確かめた形（読みの比）。

小さな問い 9。$\dot{X} = -CX$、$C = \mathrm{diag}(\lambda, \Lambda)$（$0 < \lambda < \Lambda$）で、初期値 $g = (0, 1)$（硬い向き）のとき、$\int_0^T |X_t|\,dt$ の真の値と、スカラーの Grönwall $|X_t| \le e^{-\lambda t}|g|$ から出る上界を比べよ。比は Λ/λ でどう伸びるか。行列のまま評価すると何が戻るか。

上界を削る前に、下界を一本測る

上界の組み立てを何段も詰めても届かないとき、先に同じ量の下界を試験関数で一本測ると、問題が技法にあるのか目標にあるのかが分かります。下界が目標を越えていれば、上界の改良は無意味です。区画の枠組みでは、伝播の定数の下界が要る値の数倍にあることが分かって、上界の床を削る作業の意味が変わりました。手順として言えば、**上界の床を削る前に、要る値と最良の定数の下界を並べる段を置く**ことです（23-09 §03・23-10 §02）。状態：確かめた形。

小さな問い 10。升 L 個の一本道（一様分布・$\mathcal{E}(f)=\frac{1}{L}\sum (f_{i+1}-f_i)^2$）で、「$C_P \le L^2/12$」という目標を、試験関数 $f_i = i$ 一本で偽と示せ（$\mathrm{Var}(f)/\mathcal{E}(f) = L(L+1)/12$）。真の値 $1/(2(1-\cos(\pi/L)))$（23-00 §04）とも比べよ。

障害は消えずに移る — 移った先を一行ずつ記録する

定式を変えると、障害が消えたように見えて、別の場所に同じ形で現れることがあります。一段目では、頂上の一サイトの曲率が結合に $\frac{1}{4}$ 足りないという一つの数が、芯の塊の Poincaré・斜面の縮みの比が 1 に近づくこと・頂上にピン留めした裾の比が 1 を超えること、と形を変えて三度戻りました（23-09 §06 の共通の壁）。手順として言えば、**定式を変えるたびに「障害がどこへ移ったか」を一行ずつ記録し、移った先の式が同じ数で書けるかを確かめる**ことです。同じ数で書けるなら、それは道具の欠陥ではなく、対象の構造です。状態：確かめた形（共通の壁の式）。

小さな問い 11。三重対角行列 $M_k = \mathrm{tridiag}(-2,\, 4-\frac{1}{4},\, -2)$（$k\times k$、両端は Dirichlet）の最小固有値を閉じた形で求め、$\kappa(k)$（小さな問い 6）と比べよ。対角優位 $\frac{15}{4} < 4$ が破れていることと、最小固有値が $k \ge 8$ で負になることは、どう関係しているか。

拡散型緩和時間の仮定の真偽は、測度だけでなく座標（Dirichlet 形）で変わる

拡散型緩和時間の仮定は測度の文ではなく、測度と Dirichlet 形の組の文です。同じ平衡の測度でも、どの変数を独立に動かす力学かで、隙間の大きさが $O(1)$ にも、体積の一辺の二乗に反比例する大きさにもなります。保存する量（隣どうしで受け渡すだけの量）がある力学では、そのむらは拡散でしか均されないからです。手順として言えば、**緩和時間の仮定を問う前に、どの座標の力学かを名指し、その力学に保存量があるか、保存がどの長さで壊れるかを先に確かめる**ことです（23-01 §05。保存が壊れる長さとの比べ方は 第 24 部）。状態：着想のまま（自由場の近似で確かめた形）。

小さな問い 12。L 個の独立な標準正規の積の測度で、(a) 各座標を独立に Ornstein–Uhlenbeck で動かす力学と、(b) 隣どうしで量を受け渡し和 $\sum x_i$ を保つ力学（和を固定した

測度の上）の隙間を比べよ。(b) の隙間が $4\sin^2(\pi/(2L))$ の形になること、それが静的な相関の長さ（ここでは 0）と関係しないことを確かめよ。

03

捨てた仮説 — 元の形・直った形・根拠

捨てた仮説とその理由は、同じ誤りを避けるための情報です。表 2 の上の六行は一段目の検討で、下の四行は四次元格子の側で捨てたものです。

表 2　捨てた仮説・訂正された着想

元の形	直った形	根拠
凸な芯で局所 Poincaré が出る	芯の外への小旅行の作用が S_0 よりずっと小さく、長さ ξ の区間には小旅行が指数個入る	小旅行の作用の読み（23-06 §03 の二尺度へ）
壁から離れれば凸性は良くなる	逆。端を壁へ押し付けると分散が下がり Hessian が上がる。離すとこの助けだけが消える	端の値ごとの Hessian の比較（23-06 §04）
塊を大きくすれば、塊ごとの凸性で鎖が組める	塊の最悪の凸性は塊の長さとともに減り、塊どうしの結合は減らない	共通の壁の式（23-09 §06）
時間平均した作用素の最小固有値で縮みを押さえられる	偽。使えるのは最小固有値の時間平均だけで、これが向きを捨てる	反例の代数（Lean `mbar_bound_false`、23-09 §05）
点ごとの読みが稀な配位で特異なら、真の勾配も特異	真の勾配の上限を決めるのは点ごとの最小でなく、導関数の流れの減衰の速さ	表示 $\nabla\psi = \int \mathbb{E}[J_t^{\top}\nabla G]\,dt$（23-09 §05）
定数を鋭くする道は $\hbar$ をどこまでも下げられる	凸な半径（約 0.45）で止まり、その先は誤差の項が本物の大きさになる	節点の余白の読み（23-06 §07 の $\hbar < 0.005$ の行へ）
$C_P \asymp \xi^2$ はふつう成り立つ	緩和時間の仮定は動的指数 $z = 2$ という固有の主張	二次元 Ising の熱浴で $z \approx 2.17$
可換の反例は「非可換性が必須」を示す	「第二の小さな径数を禁じる入力」が必須	三次元 $\mathbb{Z}_2$ は可換でも一尺度が保たれる（17-12）
ホログラフィーの密度は対数凹でない	符号が逆（$W'' = -2B''$）	一次元の模型の判定
ゲージ固定の数値は閉じ込めの性質	四次元のコンパクト $U(1)$ の数値で、$SU(2)$ では未測定	23-02 §04

誤りの型は二つで、どちらも要約の一行に上げる段で起きます。一つは条件（群・模型・範囲）が落ちる型、もう一つは「点ごとの量」と「測度の上の量」を取り違える型です。表 2 の上の六行のうち四行は後者です。

04

卒業研究の大きさの問い — 十七問の一覧

「小さな問い」は三つを満たす問いです。答えの形（在る／無い、定数の値、不等式の成否）が先に決まっていること。道具が手元にあること（python3 と NumPy・SciPy、SAT ソルバー、区間演算、Lean と Mathlib、文献の検索）。数学科か物理学科の三・四年生が卒業研究の期間で決着をつけられる見込みがあること。表 3 の一列目は問いの短い名です。

表 3　十七の問い（「決着しても動かないもの」は、その問いが決着しても変わらないこの部の行）

番号	問	一行	道具	決着の形	決着しても動かないもの
1	k=3 胞体の完全な族	$k=3$ 胞体の完全な族は $d=9$ で在るか	SAT・Lean	周期の箱での構成か、箱の非充足の反駁の記録	一リンク積分が一段きりであること（23-02 §02）
2	完全な族が在る最大の次元	完全な族が在る最大の次元 $d_{\max}(k)$	総当たり・紙	$k=3,4,5$ の表と、上界 $3k+1$ が鋭くない理由	同上。周期 2 の非存在（Lean `no_perfect_k4_d9`・`no_perfect_k5_d8`、仮定：周期 2）は既に在る
3	Hermite の族の定数	Hermite の族の $1-\lambda_k$ の定数（§05 の例題）	紙・python3	(5) の二項と剰余	試験関数は C_P を下からしか押さえないこと
4	森の上の比の SU(N) 版	森の上の関数の比が $1/\lambda_1(G)$ で頭打ちになることの $SU(N)$ 版と Lean の言明	紙・Lean	Haar の積の Poincaré の言明	緩和時間の上界の仮定（四次元格子の緩和時間の下界の仮定の試験関数の族を一つ閉じるだけ）
5	二次元格子の C_P(β)	二次元格子 YM のリンク変数での $C_P(\beta)$	紙・python3	$\beta\to\infty$ の冪	四次元の緩和時間の仮定（二次元は対照）
6	一リンク積分の後の曲率	一リンク積分の後の曲率の最良の定数 $c^{*}\in[21,27]$	大域最適化・区間演算	c^{*} と配位、計算機援用の下界	強結合の側から出られないこと
7	柱の模型の N^{−3} の係数	柱の模型の N^{-3} の係数 $C\approx 320$ を解析的に（XX 鎖の有限サイズ展開）	紙・python3	閉じた式と 4 桁以上の一致	管の評価（管の不等式）の矢印の論理
8	柱の模型の 1/P の符号	柱の模型で、有限の u の $1/P$ の符号	python3	$u=0.1\sim 0.3$ の符号の表	同上
9	取りこぼしのゲージ依存	取りこぼし c_2 はブロック変換のゲージの取り方でどれだけ変わるか	python3	ゲージごとの c_2 の表と、正値な核で $c_2>0$ が保たれるか	取りこぼしの和の矢印（$c_2\neq 0$ なら動かない）
10	O(3) σ 模型の C_P と ξ²	二次元 $O(3)$ σ 模型の C_P と ξ^2	python3・文献	傾きと、目盛りを替えたときの対数の有無	四次元の緩和時間の仮定（漸近自由な対照）

番号	問	一行	道具	決着の形	決着しても動かないもの
11	三次元 Z_2 ゲージの C_P/ξ²	三次元 $\mathbb{Z}_2$ ゲージ理論の C_P/ξ^2	python3	表と、双対の Ising 側の動的指数との対応	非可換の場合の緩和時間の仮定
12	C_P(V) の体積単調性	$C_P(V)$ の体積単調性と境界条件（小さな格子で生成作用素の固有値を全て求める）	python3	単調性の反例か証明	緩和時間の仮定を述べる体積の順（23-01 §05 の注）の問いそのもの
13	四次元 SU(2) の動的指数	四次元 $SU(2)$ の局所の算法の動的指数の一次資料を集める	文献	十本前後の一次資料の表（指数・観測量・箱・境界）	周期の箱の読みの条件（予想の部分）
14	芯の最大相関の区間演算	中くらいの芯の段の二点の最大相関（$8 \le k \le 14$）を区間演算で上から押さえる	区間演算・紙	k と $\hbar$ の点ごとの計算機援用の上界と、格子と連続の差の紙	箱の側の芯の道の [007]（$k \ge 15$ の側）と [014]（23-15 表 1）
15	芯と窓の前因子の冪	芯と窓の C_P の前因子 $\hbar^{-p}$ の冪を、縮退点の容量で読む	python3・紙	p の値（読み）と、容量の式の形	作用の障壁 $\Delta S < 2S_0$ の側（小さな問い 5 の条件の片方だけ）
16	箱の交互の最大相関の比較	箱の間の交互の最大相関 $c_{\mathrm{alt}} < 1$ を、二点の量に縮まない例を避けて示す比較の定理	紙	縮約した模型で一様な c_{alt} の上界	相内の局所 Poincaré の条件・鞍点の管の条件の行（[006] だけが動く）
17	保存を壊す項の長さ	小さな問い 12 の保存のある力学で、保存を壊す小さな項を足したとき、隙間が一辺の二乗から離れる長さ	紙・python3	壊す項の強さと長さの関係	四次元の緩和時間の仮定（第 24 部の問いの最小の模型）

どの問いにも、着手の前に同じ問いの答えがあるかを探す段を置きます。問いを定理の形で一文に書き、数学と物理の両方の語の組で検索し、総説の参考文献から一次資料の本文へたどって、同じ答え・近いが違う結果・見当たらない、のどれかに判定します。見当たらなければ「探した範囲で見当たらない」と書き、探した語と資料を出典表に残します。

05

例題：一問を決着の形まで — Hermite の族の $1-\lambda_k$

問いの大きさを見るため、問い「Hermite の族の定数」を最後まで進めます。標準正規分布の Poincaré 定数は $C_P = 1$ で、等号は $f = x$ です（1-10）。x を含まない族 $F_k = \mathrm{span}\{x^3, \dots, x^{2k+1}\}$ での比 $\mathrm{Var}(f)/\mathcal{E}(f)$ の最大を λ_k とします。

Hermite 多項式を $\mathbb{E}[h_m h_n]=\delta_{mn}$ に正規化すると $h_n'=\sqrt{n}\,h_{n-1}$ なので、奇関数 $f=\sum_{j=0}^{k} u_j h_{2j+1}$ の分散と Dirichlet 形は対角になります。

$$\mathrm{Var}(f)=\sum_{j=0}^{k} u_j^2, \qquad \mathcal{E}(f)=\sum_{j=0}^{k}(2j+1)\,u_j^2 \tag{1}$$

族に入る条件は「単項式 x の係数が 0」という一本の一次の拘束 $\sum_j w_j u_j=0$、$w_j=(-1)^j\sqrt{(2j+1)!!/(2j)!!}$ です。拘束の下の $\mathcal{E}/\mathrm{Var}$ の最小 μ_k を Lagrange の未定乗数で求めると、一変数の方程式が残ります [典]（一次の拘束の下の二次形式の停留値の永年方程式、Golub 1973）。

$$g_k(\mu):=\sum_{j=0}^{k}\frac{w_j^2}{2j+1-\mu}=0, \qquad 1<\mu_k<3, \qquad \lambda_k=\frac{1}{\mu_k} \tag{2}$$

$\mu_k=1+\varepsilon$ と置くと $j=0$ の項が $-1/\varepsilon$ で、残りと釣り合います。

$$\frac{1}{\varepsilon}=S_k+O(\varepsilon), \qquad S_k:=\sum_{j=1}^{k}\frac{(2j+1)!!}{(2j)!!\,2j} \tag{3}$$

S_k は母関数で閉じます。$(2j+1)!!/(2j)!!=(2j+1)\binom{2j}{j}4^{-j}$ で各項を二つに割り、部分和の恒等式 $\sum_{j=0}^{k}\binom{2j}{j}4^{-j}=(2k+1)\binom{2k}{k}4^{-k}$（$k$ の帰納法）と、$\ln\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}=\sum_{j\ge1}\binom{2j}{j}\frac{x^j}{2j\,4^j}$ の $x=1$ での値 $\ln 2$ を使うと [初]

$$S_k=2\sqrt{\frac{k}{\pi}}+(\ln 2-1)+O(k^{-1/2}) \tag{4}$$

です。(3) に入れて $1-\lambda_k=\varepsilon-\varepsilon^2+\cdots$ と展開すると、二つの項が決まります [初]。

$$1-\lambda_k=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}}-\frac{\pi\ln 2}{4k}+O(k^{-3/2}), \qquad \frac{\sqrt{\pi}}{2}=0.886227, \quad \frac{\pi\ln 2}{4}=0.544397 \tag{5}$$

表 4　λ_k と (5) の検算 [読]　（(2) の根を数値で求めた値）

k	λ_k	$\sqrt{k}(1-\lambda_k)$	$k\bigl(1-\lambda_k-\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}}\bigr)$
1	0.555556	0.4444	−0.4418
10	0.774921	0.7118	−0.5517
1000	0.972524	0.8689	−0.5489
10^4	0.991192	0.8808	−0.5459
10^6	0.999114	0.8857	−0.5446
(5)	$\to 1$	0.8862	−0.5444

決着しても動かないものは、試験関数が C_P を下からしか押さえないという事実です。族を大きくしても $\lambda_k < 1$ のまま $k^{-1/2}$ の速さで 1 に近づくだけで、極限が 1 だと言えるのは族の外の入力（ガウスの凸性 $V'' = 1$）からです。小さな問いの決着は、多くの場合こういう形になります。

この部は緩和時間の仮定を検討の軸に置いて、その上で繰り返し役に立った見方をこの章に集めました。緩和時間の仮定とは別の視点から立つ問いは 第 24 部 に置きます。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
十二の着想が、本文のどの章のどの段で働いたか（各着想の末尾の章）と、各着想の状態（着想のまま・確かめた形）	着想が一段目の外（四次元格子・他の問題）で働くこと。どの着想も検証の前の見方
初 小さな問い 6・11 の閾の式（$\kappa(k) < 0 \iff k \geq 8$）、(4)(5) の導出の骨	(5) の剰余 $O(k^{-3/2})$ の係数の値
読 表 4 の数値	表 4 は (2) の根の浮動小数の値で、上界・下界の命題ではない
十七の問いの一覧と、決着しても動かないもの	どの問いも、決着しても質量ギャップ・連続極限・緩和時間の仮定について何も示さない。「卒業研究の大きさ」は見込み

出典と再現

もの	種別	出典・道具
十二の着想の材料	本書	各着想の末尾に挙げた章の節（23-06〜23-11）
小さな問い 2 の二点の対数 Sobolev 定数	典	P. Diaconis, L. Saloff-Coste, Logarithmic Sobolev inequalities for finite Markov chains（書誌は未確認。言明は原典で確かめていない。問いの側で確かめる対象）
表 2 の下の二行（二次元 Ising の熱浴・ホログラフィーの密度）	本書	本書の検討で捨てた仮説の記録。二次元 Ising の z は M. P. Nightingale, H. W. J. Blöte, Phys. Rev. Lett. 76 (1996) 4548（要旨のみ）
表 3 の問い 1〜13	本書	本書の検討の小さな問い十四問から、試験台になった一問を除いたもの。問い 14〜17 は 23-09〜23-11 の残る行から
(2) の永年方程式	典	G. H. Golub, Some modified matrix eigenvalue problems, SIAM Review 15 (1973) 318–334（書誌のみ）

もの	種別	出典・道具
表 4	読	(2) の根の二分法と、$k \le 6$ での単項式の Gram 行列の一般化固有値との照合

この章で使った語 ― 着想の三つの状態・二度払い・Poincaré の通貨とエントロピーの通貨・$1/\hbar$ の住む長さ・条件づけの壁・凸性の閾・打ち消しの段と向きの段・障害の移動・保存のある力学・小さな問い。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：第 24 部 一本目の道（後半） ― 緩和時間の仮定とは別の視点と、緩和時間の仮定を前提とした新しい見方の材料の一覧。付録へ進むなら A-01 記号表。

第 24 部の入口 — 第 23 部から受け取るもの

> この章は案内です（この部の入口）。

この部は検討の記録です。機械検査まで済んだ定理は第 20〜22 部、前提の今の一覧は 28-04 に在ります。

この章で分かること — 第 24 部「今後の考察」の位置づけと、第 23 部から受け取る文、九章の地図（題・一行・水準・その章が言えている範囲）、この部で定まった言葉、この部が扱わないもの。

前提となる章 — 23-00（第 23 部の入口）・23-01 §05（拡散型緩和時間の仮定）・23-01 §06（拡散型緩和時間の仮定が与えるもの・与えないもの）。

先に言うこと — 水準は〔二〕です。この頁は地図で、何も証明しません。第 24 部のどの章も、質量ギャップを示しません。緩和時間の仮定が誤りだったとも、正しい道だったとも書きません。

この章の順序

1. 位置づけ — 第 23 部の検討の次に、何を考えるか
2. 第 23 部から受け取る文 — 五つの文と札（表 1）
3. 部の地図 — 九章の一覧と、各章が言えている範囲（図 1・表 2・表 3）
4. この部で定まった言葉 — 局所の拡散型緩和時間の仮定と比の形・閾・保存が壊れる長さ
5. 扱わないもの・記号の対応表・第 23 部への戻り

```
01
```

位置づけ — 第 23 部の検討の次に、何を考えるか

第 23 部は、質量ギャップの問題を、格子で計算でき機械検査の届く量——Langevin 力学の緩和の時間 C_P と相関長 ξ の冪の関係（緩和時間の仮定）——に言い換え、その言い換えを取っ掛かりにして検討した部でした。緩和時間の仮定を鋭い文として立てたことで、緩和時間の仮定がどこで成り立たないかを名指せるようになりました。どの試験関数が緩和時間の仮定の上の半分（緩和時間の上界の仮定）を妨げるかが、一つの型としてまとまったのです。これは「緩和時間の仮定が誤りだった」ではなく、「緩和時間の仮定を立てたから壊れ方の正体が見えた」という順の出来事です。

第 24 部はそこから始まる「今後の考察」です。まず、緩和時間の仮定を妨げるものが一つの形——隙間に映らない大域の量が、相関長とは別の長さで緩和を遅くする——にまとまることを見ます（24-01・24-02）。次に、緩和時間の仮定を前提に置いたまま、その形を避けて緩和時間の仮定を述べ直す二つの候補（位相の区画ごとの緩和時間の仮定と、窓や箱を物差しの数倍に限った局所の緩和時間の仮定）を定義し、片側の橋が質量ギャップに要るのはどちらの部分かを調べます（24-03・24-04）。そこから、緩和時間の仮定を経由しない二つの見方——時間を連続に取った格子では隙間がちょうど真空の測度の Poincaré 定数になること（24-05）と、群の上では凸性の代わりに稀さで払う道具が要ること（24-06）——に進みます。最後に、四次元であることがどこに効いているかを「無次元の結合」と「位相」の二点に限って述べ（24-07）、問いと主張しないことで閉じます（24-08）。

この部の多くの文は見立てで、第 23 部の五つの札（初・典・機・読・仮）に、見立ての札「見」を一つ足して区別します。見立ては判断の材料としての意見で、証明も数値も持ちません。

02

第 23 部から受け取る文

表 1 は、第 24 部が第 23 部から受け取って使う五つの文です。札と言明は第 23 部のままで、この部では式番号と節を引くだけにし、証明を写しません。

表 1　第 23 部から受け取る文

文	札	第 23 部の場所	使う章
言い換えの取引：問題文の量はユークリッドの時間の隙間、緩和時間の仮定の量は Langevin の時間の緩和 C_P（上限で定義され、試験関数一本で下界が出て、上界を部品から組める量）。二つは別の量	約束	23-01 §04（三つの C_P）	24-01・24-04・24-05

文	札	第 23 部の場所	使う章
緩和時間の仮定は冪の文 $\lim \ln C_P / \ln \xi = 2$。帯の文の半分を上界の仮定・緩和時間の下界の仮定と書く	仮	23-01 §05	全章
片側の橋：時間を連続に取った格子で $C_P \geq \kappa \hbar^2 / \Delta^2$。橋の仮定の下で上界の仮定は格子の物理単位の隙間より強い文（論文の形の版もあり、外部の検査の前）	初（連続時間）・仮（Wilson の時間を刻む格子では時間の刻みの比べの仮定（論文「片側の橋」の (D))）	23-01 §06（Lean `hup_is_gap_positivity_of_lower`、仮定：$0 < m \cdot \kappa / m^2 \leq C_P \cdot C_P \leq K \xi^2$）	24-04・24-05
逆向きは一般には偽：円の上の自由な粒子では $\Delta > 0$ のまま $C_P = \infty$（円の上の自由な粒子の反例）	初	23-01 §06	24-01・24-04
四次元の周期の箱では、位相電荷の凍結で上界の仮定が破れると読める（$SU(3)$ 以上の原典と、予想を延ばした読みの上）。位相の区画と体積の順の注	仮・読	23-01 §05 の注・23-02 §05	24-01・24-03・24-07

03

部の地図 — 九章の一覧と、各章が言えている範囲

第 24 部の九章と記号の対応表

0. **24-00 入口 — 第 23 部から受け取るもの** 〔二〕（この頁）
1. 24-01 拡散型緩和時間の仮定を妨げる一つの形 — ほぼ保存される大域の量 〔三〕
2. 24-02 物差しと座標を選び直す — 保存が壊れる長さ 〔三〕
3. 24-03 緩和時間の仮定を直す二つの形 — 区画ごとの仮定と局所の仮定 〔研〕（要約は〔三〕）
4. 24-04 片側の橋は緩和時間の仮定のどの形を要るか 〔研〕（要約は〔三〕）
5. 24-05 時間を連続にする — Hamiltonian 格子と真空の測度 〔三〕
6. 24-06 凸性の代わりに稀さで払う — 群の上の繰り込みと対数 Sobolev 〔研〕（要約は〔三〕）
7. 24-07 四次元だからこそ — 無次元の結合と位相 〔三〕
8. 24-08 問いと、主張しないこと 〔二〕〜〔三〕

24-09 一本目の道（後半）の記号の対応表（参照の頁）

この部は、第 23 部と合わせて「一本目の道 — 時間の方向から」の後半に当たります（二本目の道は第 25 部、二本の道の合流は第 26 部、条件つきの言明は第 27 部）。章の順は、壊れ方の形（24-01・24-02）、緩和時間の仮定を前提に置いた述べ直し（24-03・24-04）、緩和時間の仮定を経由しない見方（24-05・24-06）、四次元に固有のこと（24-07）、問い（24-08）です。24-01 から 24-05 までは、前の章の結論が次の章の問いになる一本の鎖です。24-06 は鎖の帰結ではなく、24-03〜24-05 のどの言明を示すにも要る道具の章で、筋の上では枝に置きます。

図 1　第 24 部の道筋（矢印は「前の章の結論が次の章の問いになる」。含意の定理ではない）

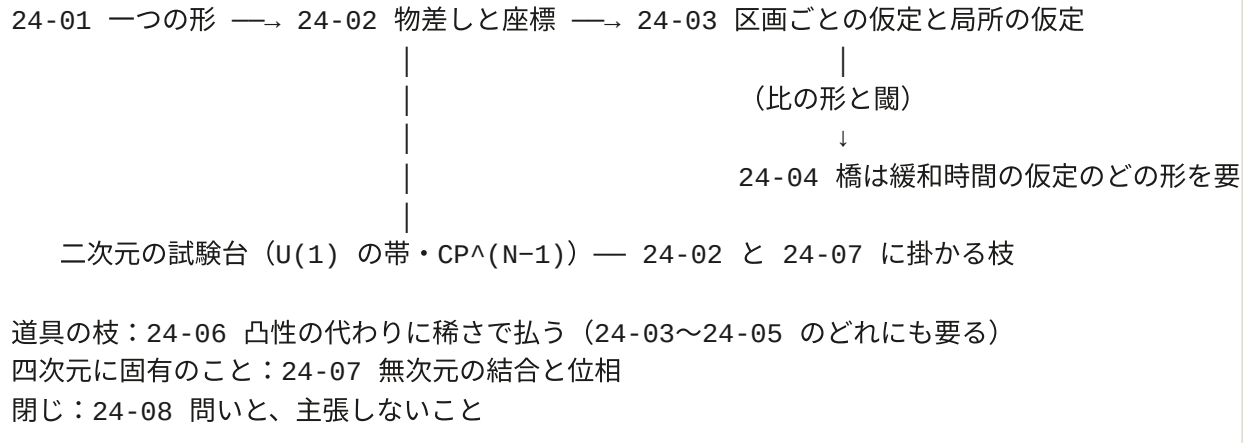


表 2　各章の一行と、その章が言えている範囲

章	一行	この章が言えている範囲
24-01	キンクの数・巻き数・流束・位相電荷・箱を貫く流束が、どれも「隙間に映らない大域の量が別の尺度で緩和を遅くする」同じ型であることを、強さとともに一つの表にする	五つの例が同じ型であることは分類（見立て）。数は行ごとの札
24-02	C_P と比べるべき長さを三つの物差しに分け、座標（Dirichlet 形式）の選び方で緩和の型が変わることと、二次元の帯と試験台の数を並べる	保存が壊れる長さは二次元 $U(1)$ の帯の読み。比べる相手の言い直しは候補。CP^{N-1} は一つの体積・一つの相関長の条件つきの読み
24-03	位相の区画に条件づけた緩和時間の仮定と、窓や箱を物差しの数倍に限った局所の緩和時間の仮定を定義し、無質量の参照との比の形で述べる	二つの緩和時間の仮定は定義が立ち、局所の緩和時間の仮定は比の形でだけ中身を持つ。どの β でも示した不等式は無い
24-04	片側の橋が使うのは上界の仮定の時刻に局所な部分だけであることと、窓の橋・比の形の閾・三つの参照を述べる	橋の閾は参照と族に依り、閾と 1 の間の帯は未決。全ては局所の励起のモーメントの仮定と片側の橋の命題（論文の定理 3.1）の仮定の上
24-05	時間を連続に取った格子では、隙間が一つの時刻の真空の測度の Poincaré 定数とちょうど逆数で結ばれることと、そこで要る道具が当たらない理由を並べる	隙間は真空の測度の Poincaré 定数そのもので、恒等式は問題を易しくしない
24-06	群の上では凸性の道具が弱結合で原理的に立たないこと、凸でない所が確率の小さい所へ押し込まれること、稀さで払う道具と規則の候補を述べる	道具の章。凸性の天井は証明つき、稀さで払う測度の類は候補。階層模型の結果は四次元に含意しない

章	一行	この章が言えている範囲
24-07	四次元で効いていることを無次元の結合と位相の二点に限り、四段のハードルと、三段目がなぜ長く開いていたかを、公開された構成より前の一次資料の記述で並べる	二点は臨界次元の性質の見立て。$SU(2)$ の凍結は未決。二次元の結果は四次元に含意しない
24-08	問いの表・規則の候補の一覧・主張しないことの十六項目	問いと主張しないこと。規則の候補は候補

第 23 部で出た材料のうち、この部の章が本文として受けるものを表 3 に並べます。

表 3　第 23 部から受ける材料と、受ける章

材料	第 23 部の関連	受ける章
他の道の表（繰り込み群と対数 Sobolev・確率量子化・Hamiltonian 格子・階層模型など）	23-02 §08	24-05・24-06
上界の仮定と質量ギャップの片側の橋	23-01 §06	24-04
階層的ゲージ模型と座標の問題	23-17 着想 12	24-02 §02・24-06 §05
流束の保存と「保存が壊れる長さ」	23-17 問い「保存を壊す項の長さ」	24-01・24-02
四次元の格子での緩和時間の仮定の検討（位相電荷の凍結と、区画の文・局所の文への直し方）	23-01 §05 の注・23-02 §05	24-01・24-03

04

この部で定まった言葉

局所の緩和時間の仮定と比の形。試験関数を、物差し ℓ の c 倍の窓（または箱）に台を持つものに限った Poincaré 定数 $C_P^{\mathrm{loc}}(c)$ を、同じ窓・同じ目盛りの無質量の参照との比 $K_{\mathrm{rel}}(c)$ で述べた文（24-03 §03）。「ある定数で押さえる」形は自由場でも成り立って空虚なので、比の形にします。

閾 K_*。比が閾より小さければ、仮定の上で片側の橋が質量の下界を与える、という閾の値。参照の取り方で 0.342κ（スカラー）・0.502κ（ゲージ商）・約 0.62κ（$SU(2)$ の色の一重項）と変わります（24-04 §06。数は自由場の参照の読み）。

保存が壊れる長さ ℓ_*。隙間に映らない大域の量が、局所の輸送でなく保存の破れで緩和しはじめる長さ。静的な相関長とは別の物差しで、二次元 $U(1)$ の帯で測った値は相関長と比例しません（24-02 §01・§03）。

05

扱わないもの・記号の対応表・第 23 部への戻り

扱わないもの。第 24 部は、紫外の側——連続極限の存在・回転の回復・OS 公理・非自明性（第 23 部の Wilson ループの極限の言明・回転の回復の言明・OS 再構成の言明・非自明性の言明、23-01 §02）——に触れません。四次元に固有の難しさとして三段目の到達点を一次資料で並べるのは 24-07 §05 だけで、そこでも構成は扱いません。連続極限の存在は、2026-11-10 に公開された構成（四次元の Wilson の格子の極限として Wightman の公理を満たす理論を作る Lean の形式化。Lean で証明されている、と委員会が評価した）を、第二巻（第 6 部から）で読みます。

記号。第 24 部の記号と、第 23 部の同じ字の記号との対応は 24-09 一本目の道（後半）の記号の対応表 にあります。とくに Δ はハミルトニアンの隙間 $E_1 - E_0$ に限り、物理単位の質量は m_{phys} と書きます。

第 23 部へ戻る。第 23 部の地図は 23-00 §01、主張しないことは 23-16、小さな問いは 23-17 にあります。

この頁が言えている範囲

言えている	言えていない
第 24 部の章の並びと、各章が言えている範囲の一行（表 2）。第 23 部から受け取る文と札（表 1）	どの章も質量ギャップを示さない。緩和時間の仮定の真偽も示さない
この部で定まった言葉の意味（§04）	局所の緩和時間の仮定・閾・保存が壊れる長さについての定理（定義と比の形と、自由場や二次元の数まで）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1 の文	本書	23-01・23-02 の各節と出典表
表 2・§04 の各行	本書	第 24 部の各章の「この章が言えている範囲」

この頁で使った語 — 今後の考察・言い換えの取引・片側の橋・見立ての札「見」・局所の緩和時間の仮定・比の形・閾・保存が壊れる長さ・道具の枝。意味は A-02 用語集 と 24-09 にあります。

次に読む章：24-01 拡散型緩和時間の仮定を妨げる一つの形 ― ほぼ保存される大域の量 ― 隙間に映らない大域の量が別の尺度で緩和を遅くする型を、五つの例で一つの表にする。

拡散型緩和時間の仮定を妨げる一つの形 — ほぼ保存される大域の量

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 2-10・5-09 にあります。

この章で分かること — 拡散型緩和時間の仮定の上の半分（緩和時間の上界の仮定）を妨げる例を五つ並べ、どれも「隙間に映らない大域の量が、相関長とは別の尺度で緩和を遅くする」という一つの型に入ることを見ます。五つの例は、二重井戸のキンクの数、円の上の粒子の巻き数、二次元 $U(1)$ の帯の流束、四次元の周期の箱の位相電荷、箱を貫く流束です。違うのは強さ（対数・冪か指数・無限）と、壊れ方の出来事です。上界の仮定がこの型でどう破れるかは $\tau_{\mathrm{int}} \le C_P$ の一行で決まります。部分領域の電荷で「輸送」と「保存の破れ」の二つの勘定を分け、24-03 の局所の拡散型緩和時間の仮定の準備をします。

前提となる章 — 23-01 §05（緩和時間の仮定の (13)・上界の仮定の (14)(15)・位相の区画の注）・23-01 §06（円の上の自由な粒子の反例）・23-02 §05（$\tau_{\mathrm{int}} \le C_P$）・2-10 の寄り道（保存する力学）。記号は 24-09 にまとめてあります。

先に言うこと — 水準は〔三〕です。五つの例を一つの型と呼ぶのは分類で、定理ではありません 見 。各例の数は、行ごとに札を付けた条件の上の数です。この章は上界の仮定が偽であることを主張しません。四次元の周期の箱の行は、$SU(3)$ 以上の原典の数値と、開いた境界の観察に付いた予想を周期の箱の位相の遅さへ延ばした読みの上にあり、$SU(2)$ については読みの水準でも決まっていません。どの例も質量ギャップを壊しません。

この章の順序

1. ほぼ保存される大域の量の型 — 三つの条件と、上界の仮定が破れる一行（(1)〜(3)）
2. 五つの例を一つの表に — 表 1・下に降ろした三つの行（表 2）
3. 三つの強さ — 対数・冪か指数・無限（表 3）
4. 部分領域の電荷の二つの勘定 — 輸送の係数 d と保存の破れの係数 h（(4)〜(7)）
5. 一段目の壁は、この型の縮小版 — 頂上の $\frac{1}{4}$
   と、第 23 部の壊れ方の型との対応（表 4）

6. 言えないこと — 予想の延長・$SU(2)$・二次元・冪と指数

7. 五分類の表と依存グラフ — 表 5

01

ほぼ保存される大域の量の型 — 三つの条件と、上界の仮定が破れる一行

緩和時間の仮定は冪の文 $\lim \ln C_P / \ln \xi = 2$（23-01 の (13)）で、その上の半分（上界の仮定）は「すべての試験関数 f で $\mathrm{Var}(f) \le C\,\xi_{\mathrm{RG}}^2\,\mathcal{E}(f)$」（同 (15)）です。すべての f の文なので、一本でも比 $\mathrm{Var}/\mathcal{E}$ が ξ^2 より速く伸びる関数があれば崩れます。第 23 部で緩和時間の仮定を鋭い文として立てたので、その関数がどんな形をしているかを名指すことができます。この章の答えは次の型です。

型（見立て）

測度 μ と Dirichlet 形 $\mathcal{E}$ の組に、大域の量 Q があって、

(i) $\mathrm{Var}_\mu(Q)$ は大きい（体積や窓の長さとともに伸びる）。

(ii) $\mathcal{E}(Q)$ は小さい。Q は保存則の流束を通って隣へ受け渡されるか、稀な配位を通ってしか変わらない。

(iii) Q は隙間 Δ に映らない。時刻で積分した一時刻の関数の族（24-04 の $\mathcal{F}_1$）に入らないか、入っても隙間の励起と重ならない。

このとき Q を緩和させる時間は、相関長 ξ ではなく、Q を壊す出来事の尺度で決まる。

(iii) がこの型と質量ギャップを切り離す条件です。隙間に映らないので、緩和がいくら遅くても隙間は正のままで構いません。この切り離しの一番小さな例が、第 23 部の円の上の自由な粒子の反例（円の上の自由な粒子、隙間は正で $C_P = \infty$）でした。

上界の仮定が破れる一行。 力学が可逆（生成作用素 L が $L^2(\mu)$ で自己共役、$-L \ge 0$）なら、どの観測量 f の積分自己相関時間も C_P を越えません。$\tilde f = f - \mu(f)$ の $-L$ のスペクトル測度を ν_f（台は $[\lambda_1, \infty)$、$\lambda_1 = 1/C_P$）とすると

$$\tau_{\mathrm{int}}(f) := \int_0^\infty \frac{\mathrm{Cov}(f(0), f(t))}{\mathrm{Var}\, f}\, dt = \frac{\int \lambda^{-1}\, d\nu_f(\lambda)}{\int d\nu_f(\lambda)} \;\le\; \frac{1}{\lambda_1} = C_P \tag{1}$$

です 初 （$\lambda \ge \lambda_1$ の上で $\lambda^{-1} \le \lambda_1^{-1}$ を積分するだけ。等号は $\tilde{f}$ が最も遅い固有空間に載るとき）。Lean では有限のスペクトル和の版を検査しています（LatticeGauge.FourDTrial.tau_int_le_CP、仮定：重み ≥ 0・各固有値 $\ge \lambda_1 > 0$・重みの和 > 0）。力学を使わない版は上限の定義そのもので

$$\frac{\mathrm{Var}_\mu(Q)}{\mathcal{E}(Q)} \;\le\; C_P \tag{2}$$

初 。したがって、Q の緩和の時間（(1) なら $\tau_{\mathrm{int}}(Q)$、(2) なら静的な比）が $\beta \to \infty$ の列で $c\,\xi^{p}$（$p > 2$）以上に伸びるなら、どの定数 K でも $C_P \le K\xi^2$ は破れます。相関長 ξ と記帳の長さ ξ_{RG} が定数倍で比べられる範囲では、これは上界の仮定の否定です。

$$\tau_{\mathrm{int}}(Q) \le C_P, \quad \tau_{\mathrm{int}}(Q) \ge c\,\xi^{p}\ (p>2), \quad \xi \to \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \neg\,\exists K:\ C_P \le K\xi^2 \tag{3}$$

初 Lean LatticeGauge.FourDTrial.not_hup_of_fast_tau（仮定：$0 < c \cdot 2 < p \cdot \xi_n \to \infty$・$\xi_n > 0$・各 n で $\tau_n \le C_n$ と $c\,\xi_n^p \le \tau_n$）。指数の伸び $\tau \ge c\,e^{\alpha\xi}$ は $p = 3$ を含みます（$e^x \ge x^3/6$）。逆向きの注意も一行です。速い量の τ が小さいことは上界の仮定を支えません。重みが速いモードに載った観測量は、C_P がいくら大きくても τ_{int} が小さいままです（陰性対照 tau_small_but_CP_large）。

この一行の水準を確かめておきます。(3) の左の二つの仮定のうち、Lean が受け取るのは実数の列の不等式だけで、τ_n が可逆な力学の自己相関時間であること、C_n が Wilson 測度の Poincaré 定数であることは Lean の外にあります。四次元で (3) の第二の仮定を支えるのは、原典の Monte Carlo の数値 典 を、算法の違いを越えて Langevin の自己相関に読み替えたもので、その読み替えは仮定です（§06 (a)）。

02

五つの例を一つの表に

表 1 は、型の三つの条件を満たす五つの例を、同じ列で並べたものです。列は、族の外にある量（型の Q）・それを動かす出来事（保存の破れ）・遅さの尺度と相関長の関係・強さ・測った数とその札・本文のある章です。行の札はその行の数の札で、「同じ型に入る」という分類そのものは全ての行で 見 です。

表 1　上界の仮定を妨げる五つの例（強さは C_P/ξ^2 の伸び方。数の条件は各行の段落）

例	族の外にある量	何で動くか（保存の破れ）	遅さの尺度と相関長	強さ	測った数と札	章

例	族の外にある量	何で動くか（保存の破れ）	遅さの尺度と相関長	強さ	測った数と札	章
(a) 0+1 の二重井戸	キンクの数（どちらの井戸にいるか）・窓の中のキンクの位置	キンクの対の生成と消滅（トンネル）・窓を横切る運動	ξ と同じ起源。全体の比は $S_0/\hbar \approx \ln \xi$。局所の比は最短の窓でも ω_b/m	対数	一サイトの比 $= \omega_b/m$ 初 ・ $4.61,\ 21.6,\ 638$ 読 ・全体の比 仮	23-04 §04・24-04
(b) 円の上の自由な粒子	巻き数（持ち上げた角の増分の積分）	壊れない（連続な経路）	無限	無限	$\Delta = \hbar^2/2 > 0$ で $C_P = \infty$ 初	23-01 円の上の自由な粒子の反例
(c) 二次元 $U(1)$ の帯	流束の双極子・帯の位相電荷 Q	一枚のプラケットの巻き付き（高さ 2β の障壁）	$\ell_c \propto e^{0.916\beta}$、$\xi_{XY} \approx 2\beta$	ξ_{XY} について指数	$\ell_c = 3.29 \sim 139$ ・$\tau(Q)/\xi_{XY}^2 = 0.4 \to 24$ 読	24-02
(d) 四次元の周期の箱	滑らかにした位相電荷 Q	格子を通り抜ける小さなインスタントン（転位）	$SU(3)$ 以上の原典で ξ^2 より速い。$SU(2)$ は一次資料一本で a^{-2} に近い	冪か指数（$SU(3)$ 以上）	原典の数値 典 ・上界の仮定の読み 仮	23-01 §05 の注・24-07
(e) 箱を貫く流束	箱の境のサイトのゲージ変換で動く汎関数	境のゲージ変換を割らないと試験の空間に入る	参照の箱の値が $2.22 \sim 2.53$ 倍	定数倍	二つの取り方の差 初 ・倍率 読	24-03 §03

(a) 二重井戸のキンクの数。0+1 次元の経路の測度（23-04、$V = (x^2-1)^2/8$、$S_0 = 2/3$）では、経路がどちらの井戸にいるかは、キンク（谷から谷へ移る道）が入るときだけ変わります。キンクの重み $e^{-S_0/\hbar}$ が相関長 $\xi \propto \hbar^{1/2} e^{S_0/\hbar}$ を決め、キンクの拡散が C_P の上の側の尺度 $\xi^2 S_0/\hbar$ を決めるので、遅い量と相関長は同じ出来事から生まれます。比 C_P/ξ^2 は $S_0/\hbar \approx \ln \xi$ の程度で、帯の上界の仮定は対数だけ破れますが二重井戸の緩和時間の冪の言明は残ります（23-04 の (14)、希薄なキンクの気体の勘定）仮。窓を限った局所の比にも同じ型が出ます。一つの時刻だけの窓では、周辺 ψ_0^2 の Poincaré 定数が基底状態変換で $(H - E_0)$ の隙間に移り、底の曲率の調和振動子との比は**ちょうど** ω_b/m です（ψ_0 が Schrödinger の基底状態のとき）初。格子 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ の転送では $\hbar = 0.3,\ 0.15,\ 0.08$ で $4.61,\ 21.6,\ 638$、ω_b/m の $1.04 \sim 1.05$ 倍です 読。この比の詳しい振る舞い（窓を長くすると $(\omega_b/m)^2$ へ移る）は 24-04 で扱います。

(b) 円の上の粒子の巻き数。第 23 部の円の上の自由な粒子の反例です。経路を実数直線に持ち上げた $\tilde{x}(\tau)$ の増分を重み w で積分した $f = \int w\, d\tilde{x}$ は、$\mathrm{Var}(f) = \hbar \int w^2 \cdot \mathcal{E}(f) = \hbar \int w'^2$ で、窓を伸ばすと比はいくらでも大きくなります。巻き数は連続な経路では決して壊れないの

で、強さは無限です。この f は台が長さ L の窓に入る汎関数で、窓を止めれば比は有限ですが、窓を伸ばすと非有界になります [初]。巻き数は時刻で積分した一時刻の関数ではないので、型の条件 (iii) を満たしています。

(c) 二次元 $U(1)$ の帯の流束と位相電荷。幅 2 の帯で外周のリンクを止め、リンクを Langevin で動かすと、プラケットの角（流束）は隣どうしで受け渡されるだけで、流束のむらは拡散で均されます。群がコンパクトなので、一枚のプラケットの角が π を越える「巻き付き」で流束の総和（帯の位相電荷 Q）が一つ変わり、保存が破れます。保存が壊れる長さ ℓ_c は $\beta = 2, \dots, 6$ で $3.29,\ 9.88,\ 24.7,\ 53.6,\ 139$、$\ln \ell_c$ の傾きは $0.916(21)$ で、静的な長さ $\xi_{XY} = -1/\ln(I_1(\beta)/I_0(\beta))$（$2.78$〜$10.9$）との比は 1.2 から 12.8 に開きます [読]。帯が ℓ_c より長いと、緩和は Q が一つ動く時間で決まり、$\tau(Q)/\xi_{XY}^2$ は $\beta = 4$ で約 0.4、$\beta = 8$（帯の長さ 32）で約 24 です [読]。条件：二次元 $U(1)$・幅 2・外周凍結・リンクの Langevin のゲージ商・帯の長さ ≤ 256・τ_{int} は隙間の上界としての読み・当てはめの形 $A/M^2 + B$。保存が壊れる長さの詳しい話は 24-02 です。

(d) 四次元の周期の箱の位相電荷。滑らかにした位相電荷 Q は、連続極限では区画の間を移れず、格子の上では格子間隔の大きさの小さなインスタントン（転位）が格子を通り抜けるときだけ変わります。周期の箱では Q の自己相関時間が ξ^2 より明らかに速く伸びると報告されています（局所の熱浴・過緩和で Del Debbio–Panagopoulos–Vicari 2002、HMC で Schaefer–Sommer–Virotta 2011、局所の算法で Bonanno–Bonati–D'Elia 2021。冪なら指数は約 5、あるいは $1/a$ について指数的で、三本とも冪と指数をデータでは区別できないと書く）[典]。三本の群はどれも $SU(3)$ 以上です。$SU(2)$ で $\tau_{\mathrm{int}}(Q)$ の格子間隔への依存を測った一次資料は、探した範囲で一本（Abe–Morikawa–Suzuki 2025。HMC・周期・一辺が $2.2/\sqrt{\sigma}$ 程度の小さな箱・三つの格子間隔）で、a^{-2} に近い伸びと報告しています [典]。熱浴系で $SU(2)$ を扱った原典は、どれも「凍結が測れるほど強くない」側の観察でした。(3) を通して上界の仮定の読みに使うときの条件は §06 にまとめます。

(e) 箱を貫く流束。力学の遅さではなく、試験関数の族の取り方で同じ型が出る例です。四次元の箱で局所の Poincaré 定数の参照（無質量の自由なゲージ場の値）を測るとき、箱の全てのサイトのゲージ変換で割れば試験の空間はプラケットの角の関数になり、箱の境のサイトのゲージ変換を割らずに残すと、箱を一様に貫く場（発散が二つの面にしかない流束）が試験の空間に入ります。後者の値は前者の 2.22（一辺 4）から 2.53（一辺 12）倍で、ほぼゲージを固定した値に戻ります [読]（一色のガウスの近似・$\beta = 1$・正準の目盛り・浮動小数）。可縮な箱では、全てのサイトで割った空間とプラケットの関数の空間が一致します [初]（24-03 §03）。この行の数は参照の自由場の数で、対象の測度の数ではありません。型の一員とみなすのは [見] です：箱の境を通る流束は、箱の中から見れば「隙間に映らず、族の取り方一つで比を動かす大域の量」です。

型の条件は満たすが、五つの例の表から下へ降ろした行が三つあります（表 2）。どれも別の章に本文があり、ここでは札だけを写します。

表 2　表 1 の下に降ろした三つの行

例	族の外にある量	遅さ	札	本文
保存する力学（ガウス鎖）	場の総和	波数 $1/\xi$ の成分で $\xi^4/2$、無限の鎖で $C_P = \infty$	初	2-10 の寄り道
階層格子の層のプラケットの流束（Gauss 近似・リンクの座標）	層ごとの流束	最小の固有値 $\beta \cdot 4\sin^2(\pi/2^{N+1})$。層を切り離して静的な相関を 0 にしても同じ遅さ	初 （区画分解と二次元の双対格子の Neumann Laplacian）・読 （$N \le 4$ の照合）	24-02
小さな周期の箱の中心の区画	Polyakov ループの符号	熱浴で長い自己相関。箱が大きくなれば消える有限体積の作り物で、Langevin の C_P ではない	読	24-08（問い）

階層格子の行の上の側は Lean で検査しています（HierLink.lam_le、束 LatticeGaugeHierarchicalLink。仮定なし：$4\sin^2(\pi/2^{N+1}) \le \pi^2/4^N$。最小の固有値がこの式に等しいことは Lean の外）。

03

三つの強さ — 対数・冪か指数・無限

五つの例を、遅さの比 C_P/ξ^2（あるいは $\tau(Q)/\xi^2$）が相関長とともにどう伸びるかで並べ直すと、型は一つでも強さは三つに分かれます。

表 3　一つの形・三つの強さ

強さ	例	壊す出来事と相関長の起源	緩和時間の仮定と上界の仮定への効き
対数	(a) 二重井戸	同じ出来事（キンク）が遅い量と ξ を作る	帯の上界の仮定は対数で破れ、二重井戸の冪の言明は残る 仮
冪か指数	(c) 二次元の帯・(d) 四次元の周期の箱	遅い量を壊す出来事（巻き付き・転位）と ξ の起源が別	(c) は二次元の玩具の中で $\tau(Q)/\xi_{XY}^2$ が β とともに伸びる 読 。(d) は §06 の条件の下で上界の仮定が偽と読める（$SU(3)$ 以上）
無限	(b) 回転子・表 2 の保存する力学と層の流束	壊す出来事が無い	$\Delta > 0$ のまま $C_P = \infty$ 初
（定数倍）	(e) 箱を貫く流束	力学ではなく族の取り方	局所の比の分母を 2.2〜2.5 倍動かす 読

表 3 の真ん中の行が、四次元で問題になる行です。二重井戸では遅い量と相関長が同じキンクから生まれるので、指数が揃って対数の差しか残りません。二次元の帯では、相関長（弦張力の逆数）は β について一次でしか伸びないのに、保存を壊す巻き付きは高さ 2β の障壁を越える出来事で、その長さは β について指数で伸びます。四次元で同じ割れが起きるかと、割れるならなぜかは 24-07 の問いです。

04

部分領域の電荷の二つの勘定 — 輸送の係数と保存の破れの係数

無限体積では位相電荷の総量 Q は L^2 に入らないので、型の (2) に入れるのは部分領域 R の電荷です。その比 $\mathrm{Var}\,/\mathcal{E}$ を二つの係数に分けて書くと、24-03 の局所の緩和時間の仮定が何を問うかがはっきりします。

設定。四次元の無限体積の平行移動で不変な格子の測度 μ と、リンクの Langevin の Dirichlet 形 $\mathcal{E}(f)=\sum_{\ell}\mathbb{E}|\nabla_\ell f|^2$ を取ります。滑らかにした電荷密度 $q(x)$ は、x から距離 r_s 以内のリンクだけに依るものとします（有限回の均しで作る。Wilson 流のガウスの裾は切り落としの誤差として別に扱う）。勾配の場 $J_\ell(x):=\nabla_\ell q(x)$ は $|x-x_\ell|>r_s$ で 0 です。その和 $\bar J_\ell:=\sum_x J_\ell(x)$（全電荷の勾配）と一次のモーメント $D_\ell:=\sum_x (x-x_\ell)J_\ell(x)$（双極子）を置き、三つの係数を

$$\chi_t:=\sum_{y}\mathrm{Cov}\big(q(0),q(y)\big),\qquad h:=\sum_{\ell\in\text{単位胞}}\mathbb{E}|\bar J_\ell|^2,\qquad d:=\sum_{\ell\in\text{単位胞}}\mathbb{E}|D_\ell\cdot e_1|^2 \tag{4}$$

で定めます [初]（定義。立方の対称性で $\mathbb{E}[D\otimes D]$ は d の単位行列倍の型と置く）。χ_t は格子単位の位相感受率、h は**保存の破れ**の密度（連続では位相不変性から $\bar J=0$、格子でだけ転位の配位の上で 0 でない）、d は**輸送**の係数です。境界の層の係数 g は、半空間で切った電荷の $\mathcal{E}$ から体積の項を引いた面あたりの量です。

鋭い箱。一辺 R の箱では、クラスタの減衰 $\sum_z |z|\,|\mathrm{Cov}(q(0),q(z))|<\infty$ を仮定すると [仮]（隙間に相当する仮定なので、隙間の議論に戻すときは循環に注意）、

$$\mathrm{Var}(Q_R)=\chi_t|R|-b|\partial R|+o(|\partial R|),\qquad \mathcal{E}(Q_R)=\sum_{\ell}\mathbb{E}\Big|\sum_{x\in R}J_\ell(x)\Big|^2=h|R|+g|\partial R|+O(R^{2-\eta}) \tag{5}$$

です（b は相関の片側の一次のモーメント）。分母の形に注意します。密度ごとの勾配の二乗の和 $\sum_{x\in R}\mathbb{E}|J_\ell(x)|^2$ は $\mathcal{E}(Q_R)$ ではありません。それは和 $\sum_x J_\ell(x)$ の打ち消し（連続では全電荷が局所に動かないこと）を落とした量で、完全に保存する理論でも体積の項を残してしまいます。正しい体積の項は $|\sum_x J_\ell(x)|^2$ の密度 h です。$|R|=R^4$・$|\partial R|=8R^3$ を入れると

$$\frac{\chi_t}{h}-\frac{\chi_t R-8b}{hR+8g}=\frac{8(g\chi_t+bh)}{h(hR+8g)} \tag{6}$$

初 （代数）Lean LatticeGauge.LocalH.subregion_gap_identity（仮定：$0<h$・$0<hR+8g$）。比は $R\to\infty$ で周期の箱の全体の比 $\mathrm{Var}(Q)/\mathcal{E}(Q)=\chi_t/h$ に戻り、主項の比 $\chi_t R^4/(hR^4+gS)$ は χ_t/h を越えません（subregion_ratio_le、仮定：$0\le\chi_t$・$0<h$・$0\le g$・$0<R^4$・$0\le S$）。

滑らかな窓。$Q_w:=\sum_x w(x)q(x)$、$w(x)=W(x/R)$ とすると、$\nabla_\ell Q_w=w(x_\ell)\bar{J}_\ell+\nabla w(x_\ell)\cdot D_\ell+O(R^{-2})$ で、交差の項は $\sum\nabla(w^2)=0$ で消え、

$$\frac{\mathrm{Var}(Q_w)}{\mathcal{E}(Q_w)}=\frac{\chi_t R^2}{hR^2+d\lambda_W}\big(1+O(\xi^2/R^2)\big),\qquad \lambda_W:=\frac{\|\nabla W\|^2}{\|W\|^2},\qquad R_*^2:=\frac{d\lambda_W}{h} \tag{7}$$

です 仮 （クラスタの減衰と、h,d の定義の上の見積もり。λ_W は単位の四次元立方体の Dirichlet の窓で $4\pi^2$）。二つの領分が交差の長さ R_* で分かれます。$R\ll R_*$ では比は $\chi_t R^2/(d\lambda_W)$ で R^2 に比例し、これは保存する力学（2-10 の寄り道）と同じ**輸送**の型です。$R\gg R_*$ では比は χ_t/h で、**障壁**（保存の破れ）の型です。$D_{\mathrm{eff}}:=d/\chi_t\cdot r\propto h/\chi_t$ と読めば $R_*^2\approx D_{\mathrm{eff}}/r$ で、24-02 の「保存が壊れる長さ」の四次元の候補になります 見 。

二つの係数は別々の問いに掛かります。全体の上界の仮定の必要条件は $\chi_t/h\lesssim\xi^2$ で、保存の破れの係数 h を問います。24-03 の局所の緩和時間の仮定は、箱の一辺 $c\xi$ の窓に (7) を入れた条件で、h が小さい領分では輸送の係数 d を問います（24-03 §05）。h・g・d の四次元の格子の値は、この本にはありません。

05 一段目の壁は、この型の縮小版

第 23 部の一段目は、頂上の一サイトの曲率が凸性に $\frac{1}{4}$ 足りないという共通の壁で止まりました（23-09 の (11)：対角 $4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$ が結合の和 4 に届かない）。この壁は、この章の型の 0+1 次元の縮小版と読めます 見 。理由は次の対応です。

型の (ii) は「Q は稀な配位を通ってしか変わらない」でした。二重井戸で Q（どちらの井戸にいるか）が変わる配位は、経路が頂上の台地を渡る配位で、そこはちょうど作用の Hessian が負の向きを持つ場所です。凸性に頼る道具（Bakry–Émery・Brascamp–Lieb・対角優位）は、この配位の上で不足を出し、不足は台地の稀さ（エントロピー）でしか払えません（23-10 通貨の取り違えの型）。つまり $\frac{1}{4}$ は「ほぼ保存される量を壊す出来事の配位で、凸性が足りない」ことの局所の顔です。四次元でこれに当たるのは、位相電荷が変わる配位（滑らかさの

条件を破る、格子間隔の大きさの転位）です。四次元でも同じ型の壁に出会うという見込みは、ここから来ます[見]。

表 4　この章の型と、第 23 部の注・壊れ方の型の対応

第 23 部の場所	そこで言われていること	この章の型での読み
23-01 §05 の注	位相電荷は区画の間を移れず、周期の箱では予想の下で上界の仮定が偽と読める。緩和時間の仮定を区画ごとか局所の言明に直す方向が候補	表 1 の (d) の行。直す二つの形は 24-03
23-01 §06 の型の段落	緩和が隙間より遅いのは、隙間に映らない時刻に局所でない量が拡散で運ばれるとき	型の (i)〜(iii) そのもの。この章は例を五つに増やし、強さで分けた
23-10 頂上の曲率の型（源は一つ）	不足の源は頂上の一サイトの曲率だけ	壊す出来事の配位が一つの場所に集まる（§05）
23-10 通貨の取り違えの型	Poincaré は出口の速さ、稀さはエントロピーの通貨。条件づけの後には払う稀さが残らない	型の (ii) の「稀な配位」は Poincaré の比では払えない。区画に条件づけると稀さは区画の間の量へ移る（24-03 の C_{trans}）
23-10 移しかえの型	軽くなった列の分だけ別の列が重くなる	区画ごとの拡散型緩和時間の仮定は障害を消さず、区画の間の量一つに押し込む（24-03 §04）

06

言えないこと

(a) **予想の延長。**「HMC と Langevin は同じ動的な普遍類」という予想は、原典（Lüscher–Schaefer 2011）では、開いた境界の $SU(3)$ で自己相関が a^{-2} に伸びるという観察に付いた語です。同じ原典は、周期境界では Langevin を積分する算法も位相の区画を渡りにくくなると書きますが、その根拠に引くのは熱浴と HMC の原典で、自身の周期境界の数値はありません[典]。表 1 の (d) の行を (3) に入れて「上界の仮定は周期の箱で偽と読める」とするのは、**予想を周期境界の位相の遅さへ延ばした読み**です[仮]。熱浴の Dirichlet 形と Langevin の Dirichlet 形の間には一リンクの比較 $\mathcal{E}_{\mathrm{HB}} \le c_1 \mathcal{E}_L$ の一方向しかなく、熱浴の遅さから Langevin の C_P の下界は直接は出ません。HMC と Langevin の関係を定理として述べた一次資料は、探した範囲で見当たりません。

(b) **$SU(2)$ は未決。**原典の群は $SU(3)$ 以上です。$SU(2)$ の一次資料は一本で、その数は a^{-2} に近い側にあります。半古典の粗い勘定（転位の作用を一ループのインスタントンの作用の定数倍と置く）では、$SU(3)$ の数に合わせた定数で $SU(2)$ はちょうど $z = 2$ の境目の近くに落ちます（24-07）。**$SU(2)$ について、位相電荷の凍結が緩和時間の仮定を壊すかは決まっていません。**

(c) **二次元と四次元**。(c) の行は二次元 $U(1)$ の玩具の数で、二次元 $U(1)$ は連続極限で自明な理論です。四次元・非可換・$\beta \to \infty$ の指数については何も言いません。

(d) **冪か指数か**。(d) の行の三本の原典は、自ら「冪と指数はデータで区別できない」と書いています。表 3 の「冪か指数」はその言い方の写しです。

(e) **型は分類**。五つの例が一つの型に入ることは定理ではありません。(e) の行は参照の自由場の数で、対象の測度の数ではありません。(4)〜(7) の係数 h, g, d は定義だけで、四次元の値はありません。

(f) **質量ギャップ**。どの例も隙間を壊しません。型の (iii) がそれを保証する条件で、この章が言うのは「上界の仮定という形では捕まらない遅さがある」ことまでです。

07

五分類の表と依存グラフ

この章の行を五分類の書式（23-00 §01）に、見立ての札「見」を足して一表にします。行の記号は下の依存グラフの節点と同じです。

表 5　ほぼ保存される量の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	クラスタの減衰 $\sum_z \lvert z\rvert \,\lvert \mathrm{Cov}(q(0), q(z))\rvert < \infty$	仮	(5) の前提	無限体積	—
2	予想を周期の箱の位相の遅さへ延ばした読み	仮	§06 (a)	周期の箱	—
3	$SU(3)$ 以上の周期の箱で $\tau(Q)$ が ξ^2 より速い	典	§02 (d)・三本の原典	$SU(3), SU(4), SU(6)$・周期	—
4	$SU(2)$ の一次資料一本で a^{-2} に近い	典	§02 (d)	HMC・小さな箱・三点	—
5	二重井戸の全体の比 $C_P/\xi^2 \approx S_0/\hbar$	仮	23-04 の (14)	$\hbar \to 0$	—
6	帯の $\ell_c \cdot \tau(Q)/\xi_{XY}^2$	読	§02 (c)	二次元 $U(1)$・$\beta = 2..6$（$\tau(Q)$ は 8 も）	—
7	境のゲージを凍らせた参照が 2.22〜2.53 倍	読	§02 (e)	一色のガウス・$\beta = 1$・一辺 ≤ 12	—
8	可逆な力学で $\tau_{\mathrm{int}} \le C_P$	初	(1)	可逆な半群	tau_int_le_CP（仮定：重み ≥ 0・固有値 $\ge \lambda_1 > 0$）
9	円の上の自由な粒子の反例：$\Delta > 0$ で $C_P = \infty$	初	23-01 の (23)	円・全ての $\hbar$	rotor_ratio_unbounded（仮定：$0 < r$。骨の算術だけ）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
10	一サイトの比 $= \omega_b/m$	初	§02 (a)（基底状態変換）	Schrödinger の ψ_0	one_slice_ratio（仮定：$0 < \varepsilon, m, \omega$。比の代数だけ）
11	部分領域の比の式 (6) と、比 $\le \chi_t/h$	初	(5)(6)（行 1 の上）	無限体積	subregion_gap_identity・subregion_ratio_le（仮定：正値）
12	(3)：τ が ξ^p（$p > 2$）なら上界の仮定は破れる	初	(3)	$\xi \to \infty$ の列	not_hup_of_fast_tau（仮定：$\tau_n \le C_n \cdot c\xi_n^p \le \tau_n \cdot p > 2$）
13	周期の箱で上界の仮定は偽と読める（$SU(3)$ 以上）	仮	行 12 に行 3 と行 2 を入れた読み	周期の箱	—
14	五つの例は一つの型	見	§01〜§03	—	—

```
 1  仮  クラスタの減衰                                   無限体積
 2  仮  予想を周期の箱の位相の遅さへ延ばした読み          周期の箱
 3  典  SU(3) 以上で τ(Q) が ξ² より速い                 周期の箱
 4  典  SU(2) の一次資料一本（a⁻² に近い）               HMC・小さな箱
 5  仮  二重井戸の全体の比 ≈ S₀/ħ                       ħ → 0
 6  読  帯の ℓ_c・τ(Q)/ξ_XY²                            二次元 U(1)
 7  読  境のゲージを凍らせた参照の倍率                   一色のガウス
 8  初  τ_int ≤ C_P                                     可逆な半群
        Lean tau_int_le_CP
 9  初  円の上の自由な粒子の反例（23-01）                円
10  初  一サイトの比 = ω_b/m                             0+1
11  初  部分領域の比 (6) ⟸ 1                            無限体積
        Lean subregion_gap_identity・subregion_ratio_le
12  初  τ ≥ cξ^p（p>2）なら上界の仮定は破れる ⟸ 8
        Lean not_hup_of_fast_tau
13  仮  周期の箱で上界の仮定は偽と読める ⟸ 2・3・12      SU(3) 以上
14  見  一つの形 ⟸ 5・6・7・9・10・13
```

確かめ方。「⟸」の行で右の番号が左より小さいことを目で見ます。円はありません。$SU(2)$ の一次資料の行はどの行の前提にも入っていません。$SU(2)$ の読みが決まっていないことの、グラフの上の姿です。「周期の箱で上界の仮定は偽と読める」の行の葉には仮定の行（予想を周期の箱の位相の遅さへ延ばした読み）があり、この行の札が「仮」なのはこのためです。

正確には、「周期の箱で上界の仮定は偽と読める」の言明は結論の量 C_P を含みますが、その前提のうち、予想を延ばした読みと SU(3) 以上の原典の数は C_P を含みません。原典の数は Monte Carlo の自己相関の数、予想を延ばした読みは力学の普遍類についての読みで、C_P に届くのは τ_int ≤ C_P の行を通る一回だけです。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 $\tau_{\mathrm{int}} \le C_P$（可逆な力学）・静的な下界 (2)・(3) の代数・円の上の自由な粒子の反例・一サイトの比 ω_b/m・部分領域の比の式 (6)	(3) の第二の仮定を四次元で満たす $\tau(Q)$ の下界。四次元の h, g, d の値
読 二次元 $U(1)$ の帯の ℓ_c と $\tau(Q)$、境のゲージの倍率、二重井戸の格子の比	どれも条件の中の浮動小数・Monte Carlo の数で、上界・下界の命題ではない。二次元の数は四次元に何も含意しない
典 $SU(3)$ 以上の周期の箱で $\tau(Q)$ が ξ^2 より速い（三本の原典）・$SU(2)$ の一次資料一本	冪か指数か。$SU(2)$ で $z > 2$ か
仮 周期の箱で上界の仮定は偽と読める（$SU(3)$ 以上・予想を延ばした読みの上）	上界の仮定が偽であること。$SU(2)$ での同じ読み
見 五つの例が一つの型であること・一段目の壁がこの型の縮小版であること	型の分類を定理にすること

出典と再現

もの	種別	出典・道具
周期の箱の位相電荷の自己相関（$SU(3)$ 以上）	典	L. Del Debbio, H. Panagopoulos, E. Vicari, JHEP 08 (2002) 044 §2・S. Schaefer, R. Sommer, F. Virotta, Nucl. Phys. B 845 (2011) 93 §4〜§5・C. Bonanno, C. Bonati, M. D'Elia, arXiv:2012.14000 §1（本文で確認）
$SU(2)$ の一次資料	典	M. Abe, O. Morikawa, H. Suzuki, PTEP 2025 063B03（arXiv:2501.00286 の本文 §3.2 と図 6 の文で確認。図の数値は読んでいない）
$SU(2)$ の熱浴系の観察・半古典の指数	典	A. Athenodorou, M. Teper, JHEP 12 (2021) 082 §6.2・B. Lucini, M. Teper, JHEP 06 (2001) 050 §6・B. A. Berg, D. A. Clarke, Phys. Rev. D 97 (2018) 054506 §II（本文で確認）
HMC と Langevin の普遍類の予想・周期境界の文	典	M. Lüscher, S. Schaefer, JHEP 07 (2011) 036（抄録・§3.2〜§3.3・§5.2 を本文で確認）
(1)・(3)・(6) の代数	Lean	LatticeGauge.FourDTrial（tau_int_le_CP・not_hup_of_fast_tau・tau_small_but_CP_large）・LatticeGauge.LocalH（subregion_gap_identity・subregion_ratio_le）。束が保証するのは代数だけ

もの	種別	出典・道具
二次元 $U(1)$ の帯の数	読	リンクの Langevin のゲージ商の模擬（幅 2・外周凍結・帯の長さ ≤ 256）と $A/M^2 + B$ の当てはめ。誤差は Madras–Sokal
二重井戸の一サイトの比・境のゲージの倍率	読	転送の核の格子の固有値問題（$\varepsilon = \frac{1}{2}$）・格子の Green 関数の箱への圧縮の最大固有値（一色のガウス）

この章で使った語 — ほぼ保存される大域の量・保存の破れ・輸送の係数 d と保存の破れの係数 h・交差の長さ R_*・巻き付き・帯の位相電荷・箱を貫く流束。記号は 24-09 にあります。

次に読む章：24-02 物差しと座標を選び直す — 比べるべき長さは静的な相関長か、保存が壊れる長さか。型を避けて緩和時間の仮定を述べ直す二つの形は 24-03。

物差しと座標を選び直す — 保存が壊れる長さ

この章は本書の検討です。§06 は未解決の地図です。

この章で分かること — 拡散型緩和時間の仮定は緩和の時間 C_P を一つの長さ ξ の二乗と比べる文でした。その ξ の役をしうる物差しを三つに分けます：静的な相関長、保存が壊れる長さ ℓ_*、大域の量が一つ動く時間。同じ平衡の測度でも、どの座標で動かすか（Dirichlet 形式の選び方）で拡散型緩和時間の仮定の真偽が変わることを、階層格子で見ます（木の座標では $C_P = 1/\beta$、リンクの座標では一辺の二乗）。二次元 $U(1)$ の帯で保存が壊れる長さを五点で測った数が、静的な長さと比例しないこと、それが位相電荷の一歩と同じ巻き付きから来ること、緩和の率を「生の率」と「静的な揺らぎ」に分けると紙の予想が落としていた因子が見えることを述べます。最後に、比べる相手を $\max(\xi^2,$ **大域の量が一つ動く時間**$)$ に置く直し方の候補と、二次元 CP^{N-1} の試験台で位相電荷の凍結は N で割れ、局所の量の比は割れなかったこと（条件つき）を並べます。

前提となる章 — 24-01（型・(4)〜(7) の二つの勘定・表 1 の (c)）・23-01 §05（緩和時間の仮定の (13) と位相の区画の注）・23-01 §07（記帳の長さ ξ_{RG} と対数の因子）・2-10 の寄り道（保存する力学）・2-10 の「定数のほかの違い」（変数の取り方）。記号は 24-09 にまとめてあります。

先に言うこと — 水準は〔三〕です。この章の数は、階層格子の Gauss 近似と、二次元の模型（$U(1)$ の帯・CP^{N-1}）の数です。二次元の数は四次元のヤン–ミルズについて何も含意しません。「比べる相手を直す」は候補の言い直しで、どの模型でも示していません 見 。この章は質量ギャップも、緩和時間の仮定の真偽も示しません。

この章の順序

1. 三つの物差し — 静的な相関長・保存が壊れる長さ・大域の量が一つ動く時間（(1)(2)）
2. 座標を選び直す — 木の座標とリンクの座標、流束の保存（表 1・(3)〜(5)）
3. 二次元 $U(1)$ の帯 — 保存が壊れる長さを五点で（表 2・(6)）
4. 同じ巻き付きの二つの顔 — 流束の双極子と位相電荷（(7)）
5. 生の率と静的な揺らぎ — 紙の予想が落としていた因子（(8)(9)）
6. 比べる相手を直す — $\max(\xi^2, \tau_{\mathrm{glob}})$（(10)）
7. 二次元 CP^{N-1} の試験台 — 凍結は N で割れ、局所の比は割れない（表 3・表 4）
8. 言えないこと
9. 五分類の表と依存グラフ — 表 5

01

三つの物差し — 拡散型緩和時間の仮定の ξ は何の長さか

緩和時間の仮定は冪の文 $\lim \ln C_P / \ln \xi = 2$（23-01 の (13)）で、緩和の時間 C_P を一つの長さ ξ の二乗と比べます。第 23 部はこの ξ を相関長 $1/m_{\mathrm{lat}}$ とし、その代わりに記帳の長さ ξ_{RG} を使いました（23-01 §07）。ところが 24-01 の型では、遅さを決めるのは相関長ではなく「大域の量 Q を壊す出来事の尺度」でした。そこで、比べる相手の候補を三つに分けておきます。

(a) 静的な相関長 ξ。平衡の測度だけで決まる、二点の相関が減る長さです。四次元では $\xi = 1/m_{\mathrm{lat}}$。二次元の $U(1)$ の帯では、帯の一行が軸ゲージで一次元の回転子の鎖になり、Wilson ループが面積で減る長さ（弦張力の逆数）

$$\xi_{XY} = -\frac{1}{\ln\bigl(I_1(\beta)/I_0(\beta)\bigr)} \;\approx\; 2\beta \qquad (\beta \text{ が大きいとき}) \tag{1}$$

がこれに当たります（I_ν は変形 Bessel 関数。式は標準の計算で、この本では原典を確かめていません 仮 ）。

(b) 保存が壊れる長さ ℓ_*。 部分領域 R の中の大域の量（電荷） Q_R は、二つの道で変わります。境界を通って流れ出る輸送の道（時間は R^2 の程度）と、領域の中で保存が破れる道（転位・巻き付き）です。二つが釣り合う長さが ℓ_* です。24-01 の (7) の交差の長さ R_* は、その静的な版でした。測度だけの量で書く候補の定義は

$$S := \sup_{R} \frac{\mathrm{Var}(Q_R)}{\mathcal{E}(Q_R)}, \qquad \ell_* := \inf\Big\{ R : \ \frac{\mathrm{Var}(Q_R)}{\mathcal{E}(Q_R)} \ \geq \ \frac{S}{2} \Big\} \quad (S=\infty \text{ なら } \ell_*=\infty) \tag{2}$$

です 見 。24-01 の (7) の見積もり $\mathrm{Var}\,/\mathcal{E} \approx \chi_t R^2/(hR^2 + d\lambda_W)$ を入れると $S = \chi_t/h$ で、半分に届くのは $hR^2 = d\lambda_W$ のとき、すなわち $\ell_* = R_*$ です 仮 （(7) の見積もりの上）。保存が破れない（$h=0$）なら $S=\infty$ で $\ell_*=\infty$ となり、後の §02 の Gauss 近似の層の流束（保存がちょうど成り立つ）と合います。正確には、比を R^2 と比べる「$\mathrm{Var}\,/\mathcal{E} \le K R^2$ となる R の上限」という形の定義は、(7) の見積もりでは比を R^2 で割った量が R について減るので、条件を満たす R の集合は上に開いた半直線か空になり、上限は無限か定まらず、長さを決めません。(2) は飽和の値の半分で切ることでこれを避けています。

(c) 大域の量が一つ動く時間 τ_{glob}。 長さではなく時間です。周期の箱の位相電荷 Q の積分自己相関時間 $\tau_{\mathrm{int}}(Q)$ がその代表で、可逆な力学なら $\tau_{\mathrm{int}}(Q) \le C_P$（24-01 の (1)）です。

三つは同じ模型の中で別の値を取りえます。0+1 次元の二重井戸では、遅い量（キンクの数）と相関長が同じキンクから生まれ、三つは対数の差しか持ちません（24-01 表 3）。§03 の二次元の帯では、(a) は β について一次、(b)(c) は指数で伸び、三つが離れていきます。緩和時間の仮定がどの物差しの文かは、模型を決めても自動では決まりません。

この節が言えている範囲：(2) は定義の候補で、四次元の ℓ_* の値はこの本にありません。(1) の ξ_{XY} は帯の静的な長さとして使うだけで、四次元の相関長の代わりにはなりません。

02

座標を選び直す — 木の座標とリンクの座標

Poincaré 定数 $C_P = \sup \mathrm{Var}(f)/\mathcal{E}(f)$ の分母は Dirichlet 形式で、どの変数の勾配で測るかを決めないと定まりません。変数を定数倍に付け替えると C_P が定数倍変わることは第 2 部で見ました（2-10 の「定数のほかの違い」：リンクの角で測るか場で測るかで β 倍）。この節では、座標の選び方で C_P の伸び方の**型**が変わる例を置きます。

舞台。 階層格子は、格子を入れ子の箱に置き換えて繰り込みの一段が書き下せるようにした格子です。ゲージ場では Ito（1984）が、Migdal–Kadanoff の近似の再帰がちょうど成り立つ三次元の格子を作り、高い次元への延長は読者に委ねると書いています 典 。この本は二倍ずつ粗くする四次元の版を自分で定め（各層が一辺 $L=2^N$ の二次元の周期の格子で、水準 r のボンドは 4^r 枚の層で同一視される）、その上の Gauss 近似（$U(1)$、または $SU(2)$ の Lie 環の一成分への線形化）だけを扱います 仮 （四次元の構成はこの本の延長）。

木の座標。 プラケットの値（節点のホロノミー）を変数に取ると、Gauss 近似では配位の空間は線形部分空間 S で、平衡の測度は S の上の密度 $e^{-\beta|x|^2/2}$、Langevin のポテンシャルの Hesse 行列は S の上で βI です。

$$\text{木の座標（Gauss 近似）}: \qquad \lambda_1 = \beta, \qquad C_P = \frac{1}{\beta} \qquad (\text{全ての段数 } N) \tag{3}$$

初 証明。単位の計量の Ornstein–Uhlenbeck 過程で、ドリフトの行列が βI なので、生成作用素の隙間は β です。∎ Lean `HierLink.tree_no_decay`（束 LatticeGaugeHierarchicalLink。仮定：$0<\beta$。比が 1 であることの算術だけ）。段数を増やしても、つまり格子をどれだけ大きくしても、この座標では緩和は遅くなりません。非可換の流れで相関長が伸びても粗い水準は Haar に近く $C_P = O(1)$ のまま、と見込まれ 見 、**木の座標では緩和時間の仮定は偽か空虚**です。

リンクの座標。 第 23 部の緩和時間の仮定が名指すのはリンク変数の Langevin です（23-01 §04）。Gauss 近似のリンクの生成作用素は $\beta\, D\Pi D^*$（D はリンクからプラケットへの外微分、Π は同一視の射影）で、その最小の正の固有値は

$$\lambda_{\min}(N) = 4\sin^2\frac{\pi}{2^{N+1}}, \qquad 4^N \lambda_{\min}(N) \ \longrightarrow \ \pi^2 \qquad (N\to\infty) \tag{4}$$

です 初 （紙：層の関数を階層の射影で区画に割ると、区画 k のブロックの作用素は一辺 2^{k+1} の二次元の双対格子の Neumann Laplacian になり、最小は区画 $k=N-1$ の一辺 2^N の値） 読 （$N\le 2$ で直接の全スペクトル、$N=3,4$ で区画の別の実装と一致）。生成作用素の隙間は $\beta\lambda_{\min}$ で、一辺の二乗に反比例して小さくなります。Lean `HierLink.lam_le`（仮定なし：$4\sin^2(\pi/2^{N+1}) \le \pi^2/4^N$。遅さの向きの上界で、$\lambda_{\min}$ がこの式に等しいことは Lean の外）・`HierLink.measured_scaled`（測った $\lambda_{\min}(4)$ の区間を仮定に $4^4\lambda_{\min} \in (9.83, 9.84)$）。

表 1　座標とギャップ（Gauss 近似・$U(1)$ の一成分・この本の四次元の延長。ギャップは β で割った値）

N	一辺 $L=2^N$	木の座標	リンクの座標（原格子の計量）	$4^N\lambda_{\min}$	リンクの座標（類ごとの計量）	四次元の原格子のゲージ商	層を切り離した対照 $4\sin^2(\pi/L)$
1	2	1	2.000000	8.0000	2.000000	2.0000	4
2	4	1	0.5857864	9.3726	0.8768944	0.5857864	2
3	8	1	0.1522409	9.7434	0.2575235	—	0.5858
4	16	1	0.0384294	9.8379	0.0667663	—	0.1522

表 1 の札：木の座標の列は (3) で 初 。リンクの座標（原格子の計量）は (4) の閉じた式と計算の一致 初 読 。類ごとの計量（同一視したボンドを一つの変数として動かす）は計算だけ 読 で、原格子の計量の 1.0〜1.74 倍です。四次元の原格子のゲージ商は $N\le 2$ で原格子の計量と 10^{-9} まで一致 読 。最小の固有ベクトルは、全ての N で同じ区画（層の四つの最上位の組の対比）に載っています 読 。

遅さの出所は流束の保存。リンクを動かすと、プラケットの値（流束）は隣どうしで受け渡されるだけです。

$$\frac{d}{dt}F = d\Big(\frac{d}{dt}A\Big), \qquad \sum_{p\in\text{ブロック}} F_p = 0 \quad \text{(境のボンドが止まっているとき、Stokes)} \tag{5}$$

流束のむらは拡散でしか均されず、一辺の二乗の時間がかかります（第 2 部の保存する力学＝model B の型、2-10 の寄り道）。決め手は表 1 の最後の列です。層を切り離して全てのボンドを層ごとの独立な変数にすると、静的にはプラケットはほぼ独立（総和の拘束だけ）で相関の長さは 0 なのに、最小の固有値は $4\sin^2(\pi/L)$ で同じ L^{-2} の型が残ります 初 。したがって**この遅さは相関長から来ていません。**Gauss 近似のプラケットの静的な相関は $-\beta^{-1}R^{-4}$ の程度の質量の無い減り方で、β は流れず（四次元で結合が無次元であることの Gauss 近似での姿、24-07）、相関長は体積で切られるだけです 初 。

帰結。緩和時間の仮定は測度だけの文ではなく、**（測度・Dirichlet 形式）の組の文**です 見 。木の座標とリンクの座標は同じ平衡の測度を持つのに、前者では C_P が段数に依らず、後者では一辺の二乗で伸びます。第 2 部の「座標で C_P が定数倍変わる」は伸び方の冪を変えませんでしたが、ここでは冪そのもの（N^0 と 4^N）が変わります。第 23 部の緩和時間の仮定はリンク変数の Langevin を名指しているので、この点は既に満たしています。熱浴や過緩和の数値をリンクの Langevin の C_P に読み替えるのは仮定です（2-10 §「熱浴と Langevin を同一視しない」）。そしてリンクの座標でも、Gauss 近似では保存がちょうど成り立つので (2) の ℓ_* は無限で、「$C_P\propto L^2$」と相関長を比べることには意味がありません。比べるのは、群がコンパクトであることや非可換であることが流束の保存をどの長さで壊すか、という Gauss 近似の外の量です。次の節はその最初の測りです。

この節が言えている範囲：階層模型は平行移動と回転の不変性を欠き、四次元のヤン–ミルズに何も含意しません。四次元の構成は原典の三次元の構成のこの本の延長です。数は Gauss 近似の数で、$N\le 4$ です。

03

二次元 $U(1)$ の帯 — 保存が壊れる長さを五点で

模型。前節の層の一枚を細い帯に切り出します。プラケット (x,y)、$x=0,\dots,M-1$、$y=0,1$（幅 $W=2$）、外周のリンクは全て角 0 に止め、内部のリンクを作用 $S=-\beta\sum_p\cos\varphi_p$ の Langevin $d\theta_\ell=-\partial_\ell S\,dt+\sqrt{2}\,dB_\ell$ で動かします（単位の計量）。内部の頂点のゲージ変換はプラケットの角 φ_p を変えないので、ゲージ不変な関数の上ではリンクの生成作用素は φ の上の拡散に落ち、その計量はプラケットの双対グラフの Neumann Laplacian です 初 。平衡の測度はプラケットごとに独立な $e^{\beta\cos\varphi}$ を $\sum_p\varphi_p\equiv 0\pmod{2\pi}$ で条件づけたもので、プラケットどうしの静的な相関はほぼありません。

Gauss 近似では保存がちょうど成り立つ。$\sin\varphi\to\varphi$ とすると、最小の隙間は $\beta\cdot 4\sin^2(\pi/2M)\approx\beta\pi^2/M^2$ で、帯の長さの二乗に反比例します 初 （Lean `ConsLen.neumann_gap_lower`・`ConsLen.neumann_gap_upper`、束 LatticeGaugeConservationLength。仮定：$1\le M$。$4/M^2\le 4\sin^2(\pi/2M)\le\pi^2/M^2$。隙間がこの式に等しいことは Lean の外）。

群がコンパクトだと保存が破れる。一枚のプラケットの角が $\pm\pi$ を越える出来事（巻き付き）で、角を $(-\pi,\pi]$ に縮めた和

$$Q:=\frac{1}{2\pi}\sum_p[\varphi_p]\ \in\ \mathbb{Z} \tag{6}$$

（帯の位相電荷、外周が止まっているので整数）が一つ変わります。巻き付きは高さ 2β の障壁を越える稀な出来事です。測るのは二つの量です。流束の双極子 $X=\sum_p w_p[\varphi_p]$（$w_p=\cos(\pi(x+\tfrac12)/M)$、Gauss 近似の最も遅いモード）の $\lambda_X:=1/\tau_{\text{int}}(X)$ と、位相電荷の $\lambda_Q:=1/\tau_{\text{int}}(Q)$ です。可逆な力学では $\tau_{\text{int}}\le C_P$（24-01 の (1)）なので、どちらも**隙間の上界**として読みます。保存が壊れる長さは、$\lambda_X=A/M^2+B$ を当てはめて $\ell_c:=\sqrt{A/B}$（拡散の速さ A/M^2 が飽和の値 B に等しくなる長さ）と定めます。

表 2　二次元 $U(1)$ の帯の五点（幅 2・外周凍結・リンクの Langevin のゲージ商・帯の長さ $M \le 256$。λ_Q は $\mathrm{Var}\,Q \ge 0.5$ の M の重みつき平均。$E := \mathbb{E}\,[\varphi_p]^2$。誤差は Madras–Sokal と当てはめの共分散）

β	ξ_{XY}	ℓ_c	紙の見積もり	λ_Q	$\tau(Q)$	$\pi/\sqrt{E\lambda_Q}$	$\rho = \ell_c/\frac{\pi}{\sqrt{E\lambda_Q}}$	ℓ_c/ξ_{XY}
2	2.78	3.29(20)	3.53	0.769(21)	1.30	4.10	0.80(5)	1.2
3	4.75	9.88(39)	8.28	0.224(13)	4.46	10.0	0.985(50)	2.1
4	6.82	24.7(9)	19.6	0.0579(29)	17.3	23.9	1.03(5)	3.6
5	8.87	53.6(3.1)	47.7	0.0127(10)	79	58.5	0.92(6)	6.0
6	10.90	139(14)	118	0.00276(32)	362	139	1.00(11)	12.8

表 2 の札は全て 読 です。「紙の見積もり」は試験関数の容量の見積もり（巻き付きの戻りを容量で最適化した試験関数を入れた上界の、二項が等しくなる長さ。β が大きいとき $e^{\beta}\sqrt{\pi/(6\beta)}$）の数値積分の値で 仮 （独立近似の上の見積もり）、測った ℓ_c と同じ桁です。

傾き。$\beta = 2, \dots, 6$ の重みつき直線で

- $\ln \ell_c$ の傾き $a = 0.916(21)$。区間で割ると $\beta = 2\text{〜}4$ で $0.988(34)$、$4\text{〜}6$ で $0.834(46)$。
- $-\ln \lambda_Q$ の傾き $b = 1.355(18)$。区間で割ると $1.286(28)$ と $1.520(57)$（差は 3.7σ）。
- 合成 $\pi/\sqrt{E\lambda_Q}$ の ln の傾きは $0.884(9)$ で、どの区間でも $0.879\text{〜}0.884$。

読 Lean `ConsExp.lc_slope_2_6`（束 LatticeGaugeConservationExponent。仮定：$\ell_c(2) \in [3.09, 3.49]$・$\ell_c(6) \in [125, 153]$、測った 1σ の区間。結論：$a \in [3/4, 1]$）・`ConsExp.lamQ_slope_2_6`（$\lambda_Q(2)$・$\lambda_Q(6)$ の 1σ の区間を仮定に $b \in [5/4, 3/2]$）。束が保証するのは区間の算術だけです。

静的な長さと比例しない。静的な長さ $\xi_{XY} \approx 2\beta$ は β について一次で、五点で約 4 倍にしかなりません。保存が壊れる長さ $\ell_c \propto e^{0.92\beta}$ は 42 倍になり、比 ℓ_c/ξ_{XY} は 1.2 から 12.8 に開きます 読 。§01 の三つの物差しのうち (a) と (b) が、同じ模型の中で指数で離れていく例です。帯が ℓ_c より長いと、緩和は帯の長さに依らなくなり、Q が一つ動く時間で決まります。

条件：二次元 $U(1)$・幅 2・外周凍結・単位の計量のリンクの Langevin のゲージ商・$\beta = 2, \dots, 6$・帯の長さ $M \le 256$・τ_{int} は隙間の上界としての読み・当てはめの形 $A/M^2 + B$（$\beta = 2$ は $\chi^2/\text{自由度} = 3.3$ で形が合っていない）。$\beta \to \infty$ の指数については何も言いません。

04
同じ巻き付きの二つの顔 — 流束の双極子と位相電荷

表 2 の ρ の列は、二つの量が一つの過程であることを示します。流束の双極子 X の緩和は、Gauss 近似の剛性を $1/E$ に替えた速さ $\mu_1(M)/E$（$\mu_1 \approx \pi^2/M^2$）で M^{-2} に下がり、位相電荷 Q の緩和の率 λ_Q は帯の長さに依りません。拡散が長さ ℓ を渡る時間が、Q が一つ動く時間に等しくなる長さは

$$\frac{\pi^2}{E\,\ell^2} = \lambda_Q \quad \Longleftrightarrow \quad \ell = \frac{\pi}{\sqrt{E\,\lambda_Q}} \tag{7}$$

で 初 （代数）Lean `ConsExp.lc_eq_iff`（仮定：$0 < E$・$0 < \lambda$・$0 < \ell$）、測った ℓ_c との比 ρ は五点で $0.80\text{〜}1.03$ です 読 。**保存が壊れる長さは、位相電荷が一つ動く間に流束が拡散で渡る距離**と読めます。流束の双極子が M^{-2} から外れることと、位相電荷が緩和することは、同じ巻き付きの二つの顔です。

$\beta = 8$ の一点がこの読みを補います。帯の長さ 64 まで X は M^{-2} を保ちます（Gauss の剛性との比 $0.86\text{〜}1.03$）が、帯の長さ 32 で $\tau_{\mathrm{int}}(Q) = 5.3(1.7) \times 10^3$（走りの長さ 10^6・$\mathrm{Var}\,Q = 0.145$）と、X の値の約 $1/380$ の遅いモードが現れます 読 。$\mathrm{Var}\,Q$ が小さい（$Q \neq 0$ が稀な区画）ので、この点は傾きに入れていません。

この節が言えている範囲：ℓ_c は X の緩和の折れの長さで、隙間そのものの折れの長さではありません（Q を含めると $\beta = 4$ の隙間の上界は $M \approx 8\text{〜}16$ で既に飽和します）。帯の位相電荷が四次元の位相電荷と同じものだとは主張しません。

05
生の率と静的な揺らぎ — 紙の予想が落としていた因子

測る前の紙の予想は「$\lambda_Q \propto \beta e^{-2\beta}$」（障壁 2β の Kramers の率）で、傾き b は 2 の近くのはずでした。測った $b = 1.355(18)$ はそれより緩く、しかも β の前後で割れました（表 2 の下）。割れの出所を探すために、緩和の率を二つの因子に分けます。Q は ± 1 の跳びの酔歩

に復元力が掛かった鎖と見なせるので、跳びの総率 $WM\nu$（ν は一枚のプラケットあたりの巻き付きの率）と分散 $\mathrm{Var}\,Q \approx WM\,E/(4\pi^2)$ から

$$\lambda_Q = \kappa \cdot \frac{2\pi^2\,\nu}{E}, \qquad E = \mathbb{E}\left[\varphi_p\right]^2 \tag{8}$$

の形が出ます 仮 （鎖の見立て。κ は生の数え方の補正。片側の橋の命題（論文の定理 3.1）の比べの定数 κ（24-09）とは別の量）。分子の ν は**生の率**（力学の量）、分母の E は**静的な揺らぎ**（測度の量）です。対数を取ると

$$\Delta \ln \lambda_Q = \Delta \ln \nu - \Delta \ln E \tag{9}$$

です 初 （代数）Lean `ConsExp.lamQ_log_split`（仮定：$0 < \kappa$・各量が正）。

巻き付きの生の数 ν_{raw}（$\pm\pi$ を越えた回数）を数えると、次のことが分かりました 読 。

- $\kappa = \lambda_Q E/(2\pi^2 \nu_{\mathrm{raw}})$ は $\beta = 3, 4, 5, 6$ で $0.167,\ 0.165,\ 0.158,\ 0.167$ と一定です（生の数は π の近くの往復も数えるので、実効の越えはその約 $1/6$）。
- 生の率の傾き $-d\ln\nu_{\mathrm{raw}}/d\beta$ は区間 $3\to4,\ 4\to5,\ 5\to6$ で $1.73,\ 1.75,\ 1.79$ で、Kramers の率 $\beta e^{-2\beta}$ の傾き $2 - 1/\beta$（区間の中点で $1.71,\ 1.78,\ 1.82$）と 1〜3% で合います。
- 静的な因子 $\ln(1/E)$ の傾きは $0.38,\ 0.27,\ 0.21$ で、β とともに減ります（Gauss の値 $1/E \approx \beta$ に近づく）。

(9) から $b = (\text{生の率の傾き}) - (\ln(1/E)\ \text{の傾き})$ で、後者が β とともに減るので b は β とともに増えます。これが割れの正体です。**紙の予想は静的な因子 $1/E$ を落としていました。**直した形は $\lambda_Q \propto \beta e^{-2\beta}/E$（$\beta$ が大きいとき $\propto \beta^2 e^{-2\beta}$、$b \to 2 - 2/\beta$）で、測った b と同じ向きです 見 。合成 $\pi/\sqrt{E\lambda_Q}$ では E が打ち消し合って $\nu^{-1/2}$ だけが残るので、傾きは生の率の傾きの半分（約 0.88）で全区間一定になります。表 2 の下の三つ目の傾きがこれです。

正確には、この分け方は割れを見た後に足した検査で、事前に登録した予測の中にはありませんでした。また、$\beta \to \infty$ の指数（$b \to 2$ かどうか）は、この五点からは何も言えません。

見方として残すもの 見 ：大域の量の緩和の率は、「出来事の率」（力学・障壁）と「その出来事一回で大域の量がどれだけ動くかを測る静的な揺らぎ」（測度）の積に割れます。四次元の位相電荷について原典が書く一ループの勘定（24-07 §02）も、出来事の密度の指数だけを数えています。静的な因子が指数の読みを動かすかは、四次元では確かめていません。

06

比べる相手を直す — $\max(\xi^2, \tau_{\mathrm{glob}})$

帯の中で、静的な長さ ξ_{XY} を物差しに $\tau(Q)$ を測ると、$\tau(Q)/\xi_{XY}^2$ は $\beta = 4$ で約 0.4、$\beta = 8$（帯の長さ 32）で約 24 です 読 。$C_P \geq \tau_{\mathrm{int}}(Q)$ なので、C_P/ξ_{XY}^2 も β とともに伸びます。静的な相関長だけを物差しにした「$C_P \lesssim \xi^2$」は、この玩具の中で β とともに破れる向きです（24-01 の型の (c) の行）。そこで、比べる相手に大域の量の時間を加える形を候補として置きます。

$$C_P \ \asymp\ \max\!\left(\xi^2,\ \tau_{\mathrm{glob}}\right), \qquad \tau_{\mathrm{glob}} := (\text{大域の量が一つ動く時間}) \tag{10}$$

見 。これが緩和時間の仮定を直す向きの一つです。もう一つの向きは、試験関数の側を時刻と空間に局所な族に限ることで（24-03 §02）、そこでは箱が ℓ_* より小さい限り大域の量の時間は入らない見込みです（§07）。

(10) には三つの弱点があります。(i) τ_{glob} を同じ力学の $\tau_{\mathrm{int}}(Q)$ で定めると、(10) は $\tau_{\mathrm{int}}(Q) \leq C_P$ の言い直しに近く、中身を持ちません。中身を持たせるには、τ_{glob} を力学と独立に決める必要があります。候補は §05 の分け方（障壁の率と静的な揺らぎ、$\tau_{\mathrm{glob}} \approx E/(2\pi^2\kappa\nu)$）か、(2) の静的な ℓ_* から拡散の時間 ℓ_*^2/D を作ることです 見 。(ii) 帯の数が見ているのは (10) の下の側 $C_P \geq \tau_{\mathrm{glob}}$ だけで、C_P を上から押さえる数は一つもありません。$\beta = 4$ では $\tau(Q) \approx 17$ に対し $\xi_{XY}^2 \approx 46$ で、C_P が ξ_{XY}^2 の側にあるかは測っていません。(iii) 四次元では τ_{glob} の候補は周期の箱の位相電荷で、その測りは原典の熱浴・HMC の数で、Langevin への読み替えは仮定です（24-01 §06）。

この節が言えている範囲：(10) は候補の言い直しで、どの模型でも示していません。第 23 部の緩和時間の仮定を (10) で置き換えることも提案していません。緩和時間の仮定を鋭く立てたからこそ、比べる相手が一つでは足りない場所が名指せた、という順の記述です。

07

二次元 CP^{N-1} の試験台 — 凍結は N で割れ、局所の比は割れない

なぜこの模型か。二次元の CP^{N-1} 模型は、四次元のヤン–ミルズと同じ二点——結合が無次元であることと、尺度を持たないインスタントン——を持ち（24-07）、群の大きさの役をする N を動かせます。周期の箱で位相のモードの自己相関が $\xi = 2$〜6 で $\exp(1.72\,\xi)$ の型に伸び（$N = 21$、Hasenbusch 2017）、N とともに悪くなる（Del Debbio–Manca–Vicari 2004・Berni–Bonanno–D'Elia 2019）という一次資料があります 典 。開いた境界では伸びが $z \approx 1$ に戻るとも報告されています 典 。

設定。作用は Hasenbusch の形 $S = -\beta N \sum_{x,\mu} (\bar{z}_{x+\mu} z_x \lambda_{x,\mu} + \text{c.c.} - 2)$（$z_x \in \mathbb{C}^N$・$|z_x| = 1$、$\lambda \in U(1)$）、位相電荷はプラケットの角の和 $Q = \frac{1}{2\pi} \sum \theta_{\text{plaq}}$ です。力学は熱浴（サイトとリンク）に過緩和を n_{ov} 回混ぜたもので、**Langevin ではありません。**ここで測る自己相関は熱浴の掃きの単位で、Langevin の C_P への読み替えは仮定です（2-10）。局所の量は一辺 R の箱の三つ：エネルギー E_B、箱の位相電荷 q_B、箱の「磁化」m_B です。

二次元の参照は四次元と性格が違う。24-03 の比の形 K_{rel} の参照（無質量の自由場の箱の値）は、二次元では箱の大きさ R に加えて格子の一辺 L の対数で発散します（連続の核 $-\frac{1}{2\pi}\ln|z|$ の定数の部分が箱の平均に載る） 初 。箱の平均を除けば有限で、$1/R^2$ の外挿で約 0.0548 です 読 。さらに、平均 0 の量でも自由場の Langevin の自己相関は $\ln L$ で伸びます 読 （$R = 16$ の箱で、格子の一辺 64 から 1024 で 36 から 119）。そこでこの試験台の比は、**格子の一辺 $L = 64$ を固定した自己相関の比** $K_{\text{rel}}(c;\,\text{量}) := \tau(\text{量}_B(c\xi))/\tau^{\text{free}}(D_B(c\xi))$（$D_B$ は自由場の箱の Neumann の最初のモード、同じ算法・同じ L）と $K_{\text{glob}} := \tau(Q^2)/\tau^{\text{free}}(D_B(4\xi))$ で、24-03 の静的な比とは別の量です。

陽性対照。$N = 21$・$\beta = 0.70$・$L = 44$・$n_{\text{ov}} = 6$ の二本（走りの長さ 70000 掃き）で、$\tau_{\text{int}}(Q^2) = 160(26)$（Hasenbusch の表 II の $199(18)$ の 0.80 倍、事前に決めた帯 $[139, 259]$ の中）、エネルギーの差 -9×10^{-6}、ξ の差 -0.1% で通過しました 読 。

表 3　核心の対と純粋な熱浴の対（$L = 64$・周期・$\xi \approx 4$。K は $c = 1, 2, 4$ の三つの値。一本ずつ・走りの長さを登録より縮めた本がある）

N	β	n_{ov}	ξ_{2nd}	$\tau(Q^2)$	Q の変化／測定	K_{glob}	$K_{\text{rel}}(E_B)$	$K_{\text{rel}}(m_B)$	$K_{\text{rel}}(q_B)$
21	0.70	6	3.738(14)	154(46)	527／30600	定義できない（参照 τ^{free} が 0.33〜0.54）			
2	1.140	6	4.25(8)	0.50	93123／99000	同上			
21	0.70	0	3.76(6)	3874(2810)	120／41400	55	0.32, 0.11, 0.038	0.68, 0.59, 0.51	1.71, 1.74, 2.27
10	0.80	0	4.62(8)	70.9(10.3)	24347／81000	1.01	0.35, 0.13, 0.049	0.83, 0.78, 0.57	1.51, 1.11, 0.83
2	1.140	0	4.89(24)	0.73	133493／144000	0.010	0.26, 0.084, 0.030	0.66, 0.41, 0.25	0.21, 0.062, 0.022

表 3 の札は全て 読 です。$N = 21$・$n_{\text{ov}} = 0$ の $\tau(Q^2)$ は走りの長さが約 11τ しかなく、下界の扱いです。

読めること。

1. **位相電荷の凍結は N で割れる。**$\xi \approx 4$ で、$\tau(Q^2)$ は $N = 21$ 対 $N = 2$ で、過緩和ありで 154 対 0.50（約 300 倍）、純粋な熱浴で 3874 対 0.73（約 5000 倍、前者は下界の扱い）です 読 。
2. **局所の量の比は N に依らず小さい。**純粋な熱浴の対で、エネルギーと磁化の K_{rel} は $N = 2, 10, 21$ でほぼ同じ（E_B で 0.03〜0.35、m_B で 0.25〜0.83）、一歩の Rayleigh 商の比（$1/(1-\rho(1))$ の自由場の値との比）も全て 1.1 以下です 読 。凍る点での判定は「位相の凍結は箱 4ξ までの局所の比を壊さない」の側でした。条件：$L = 64$・$\xi \approx 4$ の一点・一本ずつ・事後の枡（下）。凍る点は $(N = 21,\ \xi \approx 4)$ の一点だけで、$K_{\text{glob}} = 55$ は一本の誤差で 1σ の幅が 15〜95 あり、判定の閾 30 を越えるかはその誤差の中です。**一点の、弱い読み**です。
3. **ℓ_* は N とともに伸びる。**箱の位相電荷の自己相関が大域の値に追いつく長さを表 4 に並べます。

表 4　箱の位相電荷の自己相関 $\tau(q_B(R))$ と大域の $\tau(Q)$（純粋な熱浴・$L = 64$）

N	$R = 2$	4	8	16	32	$\tau(Q)$	$\tau(q_B(32))/\tau(Q)$	$R \to 2R$ の指数
21	3.08	9.82	38.9	160	738	4071	0.18	1.67, 1.98, 2.04, 2.21
10	3.01	8.72	24.7	58.4	113	222	0.51	1.54, 1.50, 1.24, 0.95
2	0.98	1.21	1.39	1.51	1.53	1.55	0.99	0.30, 0.20, 0.12, 0.02

読 $N = 2$ では箱の電荷の自己相関が $R \approx 8$〜16 で大域の値に飽和し、$N = 10$ は $R = 32$ で曲がり始め、$N = 21$ は $R = 32$ でも R^2 で伸びています。箱の電荷は境界を通る輸送（§01 の (b) の道）で R^2 の時間をかけ、大域の値に追いつく長さが ℓ_* の読みです。**この模型のこの範囲では、凍結は ℓ_* より小さな箱の比を壊さず、ℓ_* を越える尺度の量にだけ乗る、**という形です 見 。表 3 で N とともに割れるのが箱の電荷の $K_{\text{rel}}(q_B)$ だけ（$c = 4$ で $0.022 \to 0.83 \to 2.27$）なのは、この追いつく長さの違いの反映と読みます。24-03 の言葉では、局所の拡散型緩和時間の仮定は輸送の係数 d を、全体の緩和時間の仮定は保存の破れの係数 h を問うので（24-03 §05）、局所の比

が凍結の影響を受けないという見込みの、二次元での一つの姿です。片側の橋が要るのは局所の側だという 24-04 の結論（24-04）とも向きが合いますが、ここの比は自己相関の比で、橋の闘の比（静的な比）ではありません。

開示しておくこと。

- **登録の判定は定義できなかった。**事前に登録した判定は過緩和を混ぜた力学（$n_{\mathrm{ov}} > 0$）の比でしたが、過緩和は自由場の参照の自己相関を振動させ、$\tau^{\mathrm{free}}(D_B)$ が 0.33〜0.54 と 1 を下回りました。分母が 2 未満の比は定義しないという規則（本番の前に足した）により、登録の比は全て「定義できない」でした。上の読み 2・3 は、登録を固めた後に別の枡として足した純粋な熱浴の対の数です。
- **動的指数 $z_Q(N)$ は読めない。**各 N で ξ が一点しかありません。判定の台本は $N = 21$ に負の指数を印字しましたが、二点目は位相電荷が一度も変わらなかった（丸め誤差だけの）列に台本が小さな自己相関を返した作り物で、捨てました。
- **$N = 2$ の位相電荷には紫外の札が付く。**$N = 2$ では位相感受率の二つの定義（プラケットの角の和と Berg–Lüscher の三角形の定義）が 13〜14% 違い、$N = 10, 21$ では 0.1〜3% でした 読 。$N = 2$（$O(3)$ と同じ模型）の格子の位相感受率には紫外の問題があることが知られていると理解しています 仮 （記憶・原典は取っていない）。$N = 2$ が凍らないのは、格子の尺度（紫外）が Q を決めている側だからかもしれません 見 。だとすると $N = 2$ の速さは「凍結が弱い」ことではなく「Q が連続の意味の位相電荷になっていない」ことの影で、$SU(2)$ との類比（24-07）はこの留保つきです。
- 走りの長さを登録より縮めた本があり（一本の時間の上限のため）、統計は粗いです。開いた境界の陰性対照は走らせていません。

この節が言えている範囲：二次元の CP^{N-1}・この作用とこの算法（熱浴と過緩和）・$L = 64$・$\xi \approx 4$ の一点の数で、四次元・$SU(N)$・緩和時間の仮定・質量ギャップについては何も言いません。

08

言えないこと

(a) 二次元と四次元。§03〜§07 の数は二次元の $U(1)$ の帯と二次元の CP^{N-1} の数です。二次元 $U(1)$ は連続極限で自明な理論で、どちらの数も四次元・非可換・$\beta \to \infty$ の指数について何も含意しません。

(b) 上界の読み。λ_X・λ_Q は隙間の上界（C_P の下界）としての読みで、隙間そのものではありません。ℓ_c は流束の双極子の緩和の折れの長さで、当てはめの形 $A/M^2 + B$ に依ります。

(c) 候補。(2) の ℓ_* と (10) の比べる相手は候補で、どの模型でも示していません。帯の数が見ているのは (10) の下の側だけです。

(d) 階層格子。結果は Gauss 近似の数で、四次元の構成は原典の三次元の構成のこの本の延長です。階層模型は平行移動と回転の不変性を欠き、四次元のヤン–ミルズに含意しません。

(e) 試験台の条件。CP^{N-1} の比は熱浴の力学の自己相関の比で、$L = 64$ を固定した条件つきの量、24-03 の静的な比とは別の量です。各 N で ξ は一点、凍る点は一つ、局所の比の判定は登録の後に足した枡の上の一点の弱い読みで、登録の判定は定義できませんでした。$z_Q(N)$ は読めていません。

(f) 後付け。§05 の生の率と静的な揺らぎの分け方は、割れを見た後に足した検査です。

(g) $SU(2)$ との類比。N で凍結が割れることを、$SU(2)$ の境目の読みの二次元の類比として使うのは見立てで、$N = 2$ には紫外の札が付きます（24-07）。

09

五分類の表と依存グラフ

表 5　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	Gauss 近似（可換の線形化）と、階層格子の四次元の延長	仮	§02	$N \le 4$	—
2	木の座標で $\lambda_1 = \beta$（(3)）	初	§02	Gauss 近似・全ての N	`HierLink.tree_no_decay`（仮定：$0 < \beta$。比の算術）
3	リンクの座標の $\lambda_{\min}(N) = 4\sin^2(\pi/2^{N+1})$（(4)）	初	§02 の区画分解	Gauss 近似	`HierLink.lam_le`（仮定なし。上界の向きだけ）
4	$N \le 4$ の照合・類ごとの計量・原格子のゲージ商	読	表 1	$N \le 4$（ゲージ商は $N \le 2$）	`HierLink.measured_scaled`（測った区間を仮定）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
5	層を切り離しても L^{-2} が残る（流束の保存）	初	(5)・表 1	Gauss 近似	—
6	緩和時間の仮定は（測度・Dirichlet 形式）の組の文	見	§02	—	—
7	帯の Gauss の隙間 $\beta \cdot 4\sin^2(\pi/2M)$	初	§03	幅 2・外周凍結	`ConsLen.neumann_gap_lower/upper`（仮定：$1 \le M$）
8	$\tau_{\mathrm{int}} \le C_P$	初	24-01 の (1)	可逆な力学	`LatticeGauge.FourDTrial.tau_int_le_CP`（仮定：重み ≥ 0・固有値 $\ge \lambda_1 > 0$）
9	帯の五点 ℓ_c・λ_Q・傾き a, b	読	表 2	§03 の条件	`ConsExp.lc_slope_2_6`・`lamQ_slope_2_6`（1σ の区間を仮定）
10	(7) の代数	初	§04	—	`ConsExp.lc_eq_iff`（仮定：$0 < E, \lambda, \ell$）
11	$\rho = 0.80$〜1.03（二つの顔）	読	表 2	五点	—
12	(9) の分解の代数	初	§05	—	`ConsExp.lamQ_log_split`（仮定：$0 < \kappa$・正値）
13	生の率が Kramers の傾きに 1〜3%・κ が一定（後付け）	読	§05	$\beta = 3..6$	—
14	紙の予想は $1/E$ を落としていた	見	§05	帯	—
15	$\tau(Q)/\xi_{XY}^2$ が $0.4 \to 24$	読	§06	$\beta = 4, 8$	—
16	比べる相手 $\max(\xi^2, \tau_{\mathrm{glob}})$（(10)）	見	§06	—	—
17	CP^{N-1} の陽性対照の通過	読	§07	$N = 21$・$L = 44$	—
18	$\tau(Q^2)$ が N で割れる	読	表 3	$L = 64$・$\xi \approx 4$	—
19	局所の比は N に依らず小さい	読	表 3	事後の枡・一点・弱い	—
20	箱の電荷が大域に追いつく長さが N で伸びる	読	表 4	$L = 64$	—
21	$N = 2$ が凍らないのは紫外が Q を決めている側かもしれない	見	§07	—	—
22	凍結は ℓ_* を越える尺度の量にだけ乗る	見	§07	この模型のこの範囲	—

機械検査の欄が保証するのは算術と代数と区間の比較だけです。固有値が閉じた式に等しいこと・$\tau_{\mathrm{int}} \le C_P$ のスペクトル表示・当てはめ・Monte Carlo は Lean の外にあります（23-13）。

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  仮  Gauss 近似・階層格子の四次元の延長                N ≤ 4
 2  初  木の座標で λ₁ = β ⟸ 1                          Lean tree_no_decay
 3  初  リンクの座標の λ_min(N) ⟸ 1                     Lean lam_le（上界）
 4  読  N ≤ 4 の照合 ⟸ 3                               Lean measured_scaled
 5  初  層を切り離しても L⁻² ⟸ 1
 6  見  緩和時間の仮定は（測度・形式）の組の文 ⟸ 2・3・5
 7  初  帯の Gauss の隙間                              Lean neumann_gap_lower/upper
 8  初  τ_int ≤ C_P（24-01 の (1)）                    Lean tau_int_le_CP
 9  読  帯の五点 ℓ_c・λ_Q・a・b ⟸ 7・8                  Lean lc_slope_2_6・lamQ_slope_2_6
10  初  (7) の代数                                     Lean lc_eq_iff
11  読  ρ = 0.80〜1.03 ⟸ 9・10
12  初  (9) の分解                                     Lean lamQ_log_split
13  読  生の率と κ（後付け） ⟸ 9
14  見  紙の予想は 1/E を落としていた ⟸ 12・13
15  読  τ(Q)/ξ_XY² が 0.4 → 24 ⟸ 8・9
16  見  比べる相手 max(ξ², τ_glob) ⟸ 6・11・15
17  読  CP^{N−1} の陽性対照
18  読  τ(Q²) が N で割れる ⟸ 17
19  読  局所の比は N に依らず小さい ⟸ 17                 事後の枡・一点
20  読  追いつく長さが N で伸びる ⟸ 17
21  見  N = 2 は紫外が Q を決めている側か ⟸ 18
22  見  凍結は ℓ_* を越える量にだけ乗る ⟸ 19・20
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。この章の結論の節点（緩和時間の仮定は測度と形式の組の文・比べる相手の直し・凍結は保存が壊れる長さを越える量にだけ乗る）はどれも「見」で、四次元の節点も、質量ギャップの節点もありません。二次元の読み（帯の五点から先の節点）は四次元の行のどれの前提にも入りません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 Gauss 近似の階層格子で、木の座標のギャップが β、リンクの座標のギャップが $\beta \cdot 4\sin^2(\pi/2^{N+1})$ で、遅さが流束の保存から来ること	非線形・非可換の階層格子のギャップ。四次元のヤン–ミルズへの含意
読 二次元 $U(1)$ の帯の保存が壊れる長さ ℓ_c の五点と傾き $0.916(21)$、静的な長さと比例しないこと、$\ell_c \approx \pi/\sqrt{E\lambda_Q}$	$\beta \to \infty$ の指数。隙間そのものの折れ。四次元の ℓ_*
読 生の率は Kramers の傾きに乗り、割れは静的な因子 $1/E$ から来る（後付け）	四次元の位相電荷の率の静的な因子
見 三つの物差し・ℓ_* の候補の定義 (2)・比べる相手 $\max(\xi^2, \tau_{\mathrm{glob}})$	どの模型でも示した文。緩和時間の仮定の正しい直し方
読 二次元 CP^{N-1}（$L = 64$・$\xi \approx 4$）で、凍結は N で割れ、局所の比は N に依らず小さい（事後の枡・一点・弱い）、追いつく長さが N で伸びる	$z_Q(N)$。登録の判定（定義できなかった）。四次元・$SU(N)$ への含意

出典と再現

もの	種別	出典・道具
階層的なゲージの格子	典	T. Ito, Commun. Math. Phys. 95 (1984) 247（§1 を本文で確認。高い次元への延長は読者に委ねると書く）。四次元の版はこの本の延長
階層 Gauss 自由場の比べの値	典	R. Bauerschmidt, D. C. Brydges, G. Slade, arXiv:1907.05474 §4.1.2（本文で確認）
(3)(4)・(5)・(7)(9) の代数	初・Lean	本文の証明。束 LatticeGaugeHierarchicalLink（`HierLink.*`）・LatticeGaugeConservationLength（`ConsLen.*`）・LatticeGaugeConservationExponent（`ConsExp.*`）。束が保証するのは算術・代数・区間の比較だけ
表 1 の数	読	類の模型の密行列の全固有値（$N \le 2$）・区画ごとの別の実装（$N \le 4$）・四次元の原格子の拘束面の上のゲージ商（$N \le 2$）
表 2 の数	読	帯のリンクの Langevin の模擬（刻み $\beta\,dt \approx 0.04$・帯の長さ ≤ 256）。陽性対照：Gauss の力学の τ が閉じた式と 1σ。陰性対照：外周のリンクも動かすと M に依らない $O(\beta)$。誤差は Madras–Sokal、ブロック平均の別経路
ξ_{XY} の式・Kramers の率	仮	標準の計算として使った（原典を確かめていない）
CP^{N-1} の作用・位相電荷・陽性対照の値	典	M. Hasenbusch, Phys. Rev. D 96 (2017) 054504, arXiv:1706.04443（式 (1)(10)〜(12)・表 II を本文で確認）。B. Berg, M. Lüscher, Nucl. Phys. B 190 (1981) 412（三角形の定義の原典、書誌のみ）
位相のモードの凍結の N 依存	典	L. Del Debbio, G. M. Manca, E. Vicari, Phys. Lett. B 594 (2004) 315（本文）・M. Berni, C. Bonanno, M. D'Elia, Phys. Rev. D 100 (2019) 114509（本文）・M. Campostrini, P. Rossi, E. Vicari, Phys. Rev. D 46 (1992) 2647（要旨）
表 3・表 4 の数	読	熱浴（サイトの $O(3)$ 熱浴・リンクの von Mises の熱浴）と過緩和の模擬、Wolff の窓の自己相関。自由場の参照は同じ算法・同じ L
$O(3)$ の格子の位相感受率の紫外の問題	仮	記憶（原典を取っていない）

この章で使った語 — 三つの物差し・保存が壊れる長さ ℓ_*（ℓ_c）・Dirichlet 形式（座標）・木の座標とリンクの座標・流束の保存・巻き付き・帯の位相電荷・流束の双極子・生の率と静的な揺らぎ・大域の量が一つ動く時間・二次元の試験台。意味は A-02 用語集 と 24-09 にあります。

次に読む章：24-03 緩和時間の仮定を直す二つの形 — 区画ごとの仮定と局所の仮定 — 型を避けて緩和時間の仮定を述べ直す二つの形。四次元に固有のこと（なぜ二つの長さが割れるのか）は 24-07 で扱います。

緩和時間の仮定を直す二つの形 — 区画ごとの仮定と局所の仮定

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 2-10・5-09 にあります。

この章で分かること — 24-01 の型（ほぼ保存される大域の量）を避けて拡散型緩和時間の仮定を述べ直す二つの形を定義します。局所の緩和時間の仮定は、台を長さ $c\ell$ の窓に限った汎関数の上の Poincaré 定数 $C_P^{\mathrm{loc}}(c)$ の文で、窓の周辺の法則だけで決まり、$c \to \infty$ で全体の C_P に無条件で戻ります。ただし「ある $K(c)$ で $C_P^{\mathrm{loc}} \le K(c)\ell^2$」の形は質量の無い自由場でも成り立つので空虚で、同じ箱の無質量の値との比 K_{rel} で述べる必要があります。区画ごとの緩和時間の仮定は、滑らかにした位相電荷の区画ごとの Poincaré 定数の文で、緩和時間の仮定の障害を区画の間の量 C_{trans} 一つに押し込みますが、質量ギャップへの橋にはなりません。部分領域の電荷で見ると、局所の緩和時間の仮定は輸送の係数 d を、全体の緩和時間の仮定は保存の破れの係数 h を問います。

前提となる章 — 24-01（型と、(4)〜(7) の二つの勘定）・23-01 §05（緩和時間の仮定・緩和時間の上界の仮定の (13)〜(15)、位相の区画の注）・23-01 §06（片側の橋の命題（論文の定理 3.1）の設定）・23-11 §02（箱への帰着の命題と閉じた箱 C_{box}）。記号は 24-09。

先に言うこと — 水準は〔研〕で、§01 だけ〔三〕で読めるように書きます。この章の中心は定義で、**二つの緩和時間の仮定のどちらも、どの β でも示していません**。示したのは定義の性質（窓の周辺の量であること・稠密でないこと・単調性・極限）と、区画の分散の分解の不等式と、自由場の参照の値です。四次元の Wilson 測度の上の定義は、時間を連続に取った経路の測度の上の定義の写しで、無限体積の測度の存在は前提の行です。

この章の順序

1. 要約 — 〔三〕で読める一節
2. 局所の緩和時間の仮定の定義 — 時間で均した汎関数の代数 $\mathcal{D}$・窓の族 $\mathcal{D}_c$・局所の Poincaré 定数の性質の命題（(1)〜(4)）
3. 比の形とゲージ商の参照 — 絶対の形の空虚さ・K_{rel}・ゲージ不変な参照・0+1 の注（(5)〜(7)・表 1）

4. 区画ごとの緩和時間の仮定 — 正則値の切り口・反射の形・区画の Poincaré 定数の命題と挟み・三つの弱点（(8)〜(11)）
5. 開いた箱と閉じた箱・二つの係数 — 局所は d、全体は h・表 2（体積と $a \to 0$ の順）
6. 五分類の表 — 表 3／依存グラフ
7. 言えないこと

01

要約

〔三〕で読める一節です。緩和時間の仮定は「すべての試験関数」の文なので、24-01 の型の量（巻き数・位相電荷）の緩和が ξ^2 より速く伸びれば、それ一つで上の半分（上界の仮定）は破れます（24-01 の (3)）。その量は時刻にも空間にも局所でない大域の量です。そこで試験関数を二通りに制限して、緩和時間の仮定を述べ直します。

局所の緩和時間の仮定。試験関数を、長さ $c\ell$ の窓（四次元では一辺 $c\ell$ の時空の箱）の中の配位だけに依るものに限ります。ℓ は隙間とは別に外から与える物差しで、四次元では記帳の長さ ξ_{RG} です。その上限 $C_P^{\mathrm{loc}}(c)$ は窓の周辺の分布だけで決まり、窓を広げると単調に増え、$c \to \infty$ で全体の C_P にちょうど戻ります。ところが四次元の箱では、質量の無い自由場でも C_P^{loc} は箱の一辺の二乗の程度で有限です。「$C_P^{\mathrm{loc}} \le K\ell^2$」を満たすだけでは何も言っていないことになるので、同じ箱の無質量の値との比 K_{rel} が 1 より十分小さいことを求めます。

区画ごとの緩和時間の仮定。周期の箱で、滑らかにした位相電荷の値で配位を区画に分け、区画ごとに Poincaré 定数を測ります。分散を区画の中と区画の間に分けると、全体の C_P は「区画の中の最悪の定数」と「区画の間の量 C_{trans}」の和で上から、C_{trans} で下から挟まれます。区画ごとの緩和時間の仮定を仮定すると、上界の仮定は $C_{\mathrm{trans}} \lesssim \xi^2$ と同じことになります。障害は消えずに一つの量に移るだけです。

何を問うか。部分領域の電荷の比を二つの係数で書くと（24-01 の (7)）、局所の緩和時間の仮定は電荷の**輸送**の係数 d が小さすぎないことを、全体の上界の仮定は電荷の**保存の破れ**の係数 h が小さすぎないことを要ります。四次元で位相電荷の凍結が効くのは h の側なので、局所の緩和時間の仮定は凍結の影響を受けない見込みです 見 。ただし局所の緩和時間の仮定は上界の仮定を組み立てる鎖の部品にはならず、別の文です（§06 の依存グラフ）。片側の橋が要るのは時刻に局所な側であること（片側の橋の仮定の上）は、橋の章 24-04 で扱います。

02

局所の拡散型緩和時間の仮定の定義

設定。第 23 部の片側の橋と同じ設定に置きます（23-01 の (17)）。有限の空間格子、一つの時刻の配位の空間 $\mathcal{Q}$（有限次元の連結な Riemann 多様体、計量 M）、$H = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta_M + V$ と基底状態の仮定（論文の (A1)。スペクトルが離散・基底状態 $\psi_0 > 0$ が単純・$\Delta = E_1 - E_0 > 0$）、μ は $T = \infty$ の定常な経路の測度（一つの時刻の分布 ψ_0^2、推移 $e^{-\tau A}$、$A = (H - E_0)/\hbar$）、$m = \Delta/\hbar$ です。試験関数の集まりを次の**時間で均した汎関数の代数**に取ります。

$$\mathcal{D} := \Big\{ f = \Phi\Big(\int h_1(\tau) F_1(q(\tau))\, d\tau, \dots, \int h_k(\tau) F_k(q(\tau))\, d\tau \Big) \Big\}, \qquad \mathcal{E}_G(f) = \hbar \int \mathbb{E}\big\langle d_{q(\tau)} f,\, G\, d_{q(\tau)} f \big\rangle\, d\tau \tag{1}$$

ここで $\Phi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^k)$、$F_i \in C^\infty(\mathcal{Q})$（$\mathcal{Q} = \mathbb{R}^n$ では多項式の増大まで）、重み $h_i \in L^\infty(\mathbb{R})$ は**台が有界**なものです。$d_{q(\tau)} f = \sum_i \partial_i \Phi \cdot h_i(\tau)\, dF_i(q(\tau))$ で、計量 G は片側の橋の計量の比べの仮定（論文の (A3)）を満たすものとします。全体の Poincaré 定数を $C_P := \sup_{f \in \mathcal{D},\, \mathcal{E}(f) > 0} \mathrm{Var}(f)/\mathcal{E}(f)$ と**$\mathcal{D}$ の上で**定めます。片側の橋の試験関数 $f_T = \int_0^T F(q)\, d\tau$ はこの $\mathcal{D}$ に入ります。

局所の Poincaré 定数の定義

長さの物差し $\ell > 0$ と $c > 0$ に対し、窓 $W_c := [0, c\ell]$ と

$$\mathcal{D}_c := \{ f \in \mathcal{D} : \text{全ての重み } h_i \text{ の台が } W_c \text{ に入る} \}, \qquad C_P^{\mathrm{loc}}(c) := \sup_{f \in \mathcal{D}_c,\, \mathcal{E}(f) > 0} \frac{\mathrm{Var}(f)}{\mathcal{E}(f)} \tag{2}$$

と置く。ℓ は隙間で決めた長さ $\xi = \hbar/\Delta$ ではなく、外から与える長さとする（四次元では記帳の長さ ξ_{RG}）。

ℓ を隙間で決めないのは、24-04 で局所の緩和時間の仮定から隙間の下界を導くとき、窓の長さに隙間が入っていると議論が循環するためです。測度が定常なので、窓の位置は値に効きません（区間 $[a, a + c\ell]$ でも同じ値）。

局所の Poincaré 定数の性質の命題

(i) $C_P^{\mathrm{loc}}(c)$ は、窓の上の経路の周辺の法則 $\mu|_{W_c}$ と、窓の中の Dirichlet 形だけで決まる。

(ii) $\mathcal{D}_c$ は $L^2(\mu)$ で稠密でない。

(iii) $c \le c'$ なら $C_P^{\mathrm{loc}}(c) \le C_P^{\mathrm{loc}}(c') \le C_P$。

(iv) $\lim_{c \to \infty} C_P^{\mathrm{loc}}(c) = C_P$。この極限には仮定が要らない。

初 証明。(i) $f \in \mathcal{D}_c$ は経路の窓の中の値だけで決まります（経路は連続で、$\int h F(q)\, d\tau$ は窓の中の点の Riemann 和の極限）。$\tau \notin W_c$ では $d_{q(\tau)} f = 0$ なので $\mathcal{E}(f) = \hbar \int_{W_c} \mathbb{E}\langle \cdots \rangle\, d\tau$ で、分散も Dirichlet 形も窓の周辺の法則の期待値です。

(ii) $\mathcal{D}_c$ の閉包は、窓の中の経路が生成する σ-代数 $\mathcal{F}_{W_c}$ に可測な関数の空間 $L^2(\mathcal{F}_{W_c})$ に入ります。窓の外の時刻 τ_0 の値 $F(q(\tau_0))$（F は定数でない）は $\mathcal{F}_{W_c}$ に可測でありません。窓の端からの距離を $s > 0$ とすると、条件つき期待値は $\psi_0^{-1} e^{-sA}(F\psi_0)$ の型で、基底状態の仮定の下で F そのものと一致しないからです。

(iii) $c \le c'$ なら $\mathcal{D}_c \subseteq \mathcal{D}_{c'} \subseteq \mathcal{D}$ で、部分集合の上の上限は小さい。

(iv) $\mathcal{D}$ の重みは台が有界なので、定常性で窓を $[-c\ell/2, c\ell/2]$ に取り直せば $\mathcal{D} = \bigcup_c \mathcal{D}_c$ です。$b < C_P$ なら比が b を越える $f \in \mathcal{D}$ があり、その f はある c の $\mathcal{D}_c$ に入るので $C_P^{\mathrm{loc}}(c) > b$ です。(iii) の単調性と合わせて極限は C_P です。∎

Lean LatticeGauge.LocalH.local_le_global（仮定：上に有界・空でない・部分集合）と local_approaches_global（仮定：$S = \bigcup_c S_c$・上に有界・空でない。結論：$\sup S$ より小さいどの b も、ある c の $\sup S_c$ で越えられる）は、(iii)(iv) の実数の集合の上限の部分だけを検査しています。経路の測度・$\mathcal{D}$・$\mathcal{E}$ は Lean の外です。

(iv) が仮定なしで成り立つのは、C_P を $\mathcal{D}$ の上で定めたからです。「局所の関数が形式の芯である」という仮定は、この極限には要りません。芯の問いが残るのは、$C_P(\mathcal{D})$ を確率量子化の方程式（Langevin 力学の SPDE）の生成作用素の隙間と同一視するときだけです（$\mathcal{D}$ の上の形の閉包の生成作用素の隙間は $1/C_P(\mathcal{D})$ で、それが SPDE の生成作用素と一致するかが芯の問い）。

局所の緩和時間の仮定。局所の Poincaré 定数の定義の上で、局所の緩和時間の仮定を二つの水準で書きます。

$$(\xi^2)_c^{\mathrm{loc}}:\ \lim \frac{\ln C_P^{\mathrm{loc}}(c)}{\ln \ell} = 2, \qquad (\xi^2)\!\uparrow_c^{\mathrm{loc}}(K):\ C_P^{\mathrm{loc}}(c) \le K\,\ell^2 \quad (3)$$

（左は $\ell \to \infty$ の族での冪の文、右はその上の半分の絶対の形）。局所の Poincaré 定数の性質の命題から二つのことが一行で出ます 初 。第一に、全体の上界の仮定 $C_P \le K\ell^2$ は、全ての c で同じ定数の $(\xi^2)\!\uparrow_c^{\mathrm{loc}}(K)$ を含意します（(iii)）。第二に、**c に一様な** K で全ての c の $(\xi^2)\!\uparrow_c^{\mathrm{loc}}(K)$ が成り立てば、(iv) で全体の上界の仮定に戻ります。したがって、局所の緩和時間の仮定が全体の上界の仮定と違う中身を持つのは、**一つの** c を止めて述べるときだけです。

空間も局所にした版。無限の空間格子（あるいは箱を含む空間格子）で、空間の箱 B と窓の積 $B \times W_c$ を取り、F_i を B の中の変数だけに依る一時刻の関数に限った族 $\mathcal{D}_{B,c}$ と $C_P^{\mathrm{loc}}(B,c)$ を同じ形で定めます。局所の Poincaré 定数の性質の命題の (i)〜(iv) は同じ証明で成り立ち、

(i) の周辺は $B \times W_c$ の上の場の法則です。四次元の Wilson 測度の上の局所の緩和時間の仮定は、時間と空間を区別しない一辺 $c\ell$（$\ell = \xi_{\mathrm{RG}}$）の時空の箱 B_c と、箱の中のリンクが生成する σ-代数の上でこの定義を写したもので、Dirichlet 形はリンクの Langevin の $\mathcal{E}(f) = \mathbb{E}\sum_{\ell} |\nabla_{\ell} f|^2$ です。写しの段で前提になるのは、無限体積の Wilson 測度の存在と一意性（第 23 部の無限体積の一意性の言明）です 仮 。

03

比の形とゲージ商の参照

絶対の形は空虚。(3) の右の形 $(\xi^2)\uparrow_{C}^{\mathrm{loc}}(K)$ は、空間も局所にした四次元の時空の箱では、質量の無い自由場でも成り立ちます。一辺 R の時空の箱 B_R で、無限体積の無質量の自由スカラー場（一成分・正準の目盛り）の局所の Poincaré 定数を $C_P^{\mathrm{loc},0}(R)$ と書くと

$$\frac{R^2}{4\pi^2} \;\le\; C_P^{\mathrm{loc},0}(R) \;\le\; R^2 \tag{4}$$

です 初 。ガウス測度の勾配の Poincaré 定数は、族を張る部分空間に圧縮した共分散の作用素ノルムに等しいので（Hairer–Stuart–Voss–Wiberg 2005 の共分散の圧縮の補題（Hairer–Stuart–Voss–Wiberg の補題 2.2）の部分空間への写し） 典 、$C_P^{\mathrm{loc},0}(R) = \| P_B (-\Delta)^{-1} P_B \|$ です。四次元では $(-\Delta)^{-1}$ は有限（過渡的）で、核は連続で $1/(4\pi^2|z|^2)$ の型なので、Schur の評価 $\sup_x \sum_{y \in B} G(x-y) \le \int_{|z|<2R} d^4z/(4\pi^2|z|^2) = R^2$ が上を、箱の Dirichlet の基底状態を試験関数にした値が下を与えます。よって $\ell = R/c$ と読めば $(\xi^2)\uparrow_{C}^{\mathrm{loc}}(K)$ は $K = c^2$ で成り立ち、「**ある $K(c)$ で $C_P^{\mathrm{loc}}(c) \le K(c)\ell^2$」の形は隙間について何も言いません**。これがこの定義の陰性対照（無質量の自由場）です。数で見ると、$\Gamma(R) := C_P^{\mathrm{loc},0}(R)/R^2$ は $R = 4, 6, 8, 10, 12, 16$ で $0.0802,\ 0.0768,\ 0.0756,\ 0.0750,\ 0.0747,\ 0.0744$、補正は $1/R^2$ で対数の補正は無く、$\Gamma_\infty = 0.0740$ です 読 （浮動小数・無限格子の熱核の数値積分・$R \le 16$ からの外挿。独立な周期格子の経路と相対 $2 \cdot 10^{-3}$ 以内）。無質量の場そのものが $K(c) = 0.0740\, c^2$ を満たします。

低い次元との対照を一行置きます。時空二次元の無質量では赤外が発散して $C_P^{\mathrm{loc}} = \infty$、有限の空間格子で時間の窓だけに局所化すると、一定のモードが $C_P^{\mathrm{loc}} \approx T/(2m)$（$mT \ll 1$）を与え、$m \to 0$ で発散します。無質量の場が有限の局所の定数を持つのは、時空三次元以上で空間も局所にした場合で、第 24 部の四次元の設定がちょうどそこに当たります 初 。

比の形の定義

対象の測度 μ（Wilson 測度、または連続時間の経路の測度）の箱 $B_{c\ell}$ の局所の Poincaré 定数を、同じ格子・同じ箱・同じ目盛りの Dirichlet 形の無質量の参照の値で割った比を

$$K_{\mathrm{rel}}(c) := \frac{C_P^{\mathrm{loc}}(B_{c\ell};\mu)}{C_P^{\mathrm{loc},0}(c\ell)}, \qquad (\xi^2)\uparrow_c^{\mathrm{rel}}(K):\ K_{\mathrm{rel}}(c) \le K \quad (\beta \ge \beta_0 \text{ に一様},\ \ell = \xi_{\mathrm{RG}})$$

と置く。局所の緩和時間の仮定は**一つの c** でのこの文とし、c に一様には求めない。

絶対の形の定数とは $K(c) = K_{\mathrm{rel}}\,\Gamma\,c^2$ で対応します 初 。比の形にすると定数 K は箱の大きさに依らない絶対の数になり、「1 より十分小さい」が意味を持ちます。

c に一様に求めない理由。質量 m の自由場の比は mR だけの関数 $r(mR)$ で、$mR = 0.5,\ 1,\ 2,\ 4,\ 12$ で $0.932,\ 0.825,\ 0.623,\ 0.359,\ 0.0772$ です 読 （一辺 4〜12 の箱で 0.3% 以内に揃う）。箱が相関長より小さい（$mR \to 0$）と比は 1 に近づきます。漸近自由な理論は短い距離で自由場に近いので、$K < 1$ を $c \to 0$ まで一様に求める文は偽になる見込みです 見 。作用が凸な摂動 $\frac{1}{2}\phi(-\Delta)\phi + \sum U(\phi_x)$（$U$ 凸）の場では Brascamp–Lieb の不等式から $K_{\mathrm{rel}} \le 1$ です 仮 （不等式の原典の言明はこの部では確かめていない）。橋に要るのは比が 1 より小さいことではなく、閾 K_* より小さいことで、閾は参照の取り方で 0.342κ（スカラー）・0.502κ（ゲージ商・一色の線形化）・$\approx 0.62\kappa$（$SU(2)$ の色の一重項・主項）と動きます。閾と、帯 $[K_*, 1)$ が未決であることは 24-04 で扱います。

ゲージ場の参照はゲージ商で。四次元のゲージ場では、参照をどの試験の空間で測るかで値が変わります。対象の Wilson 測度はゲージ不変で、ゲージ不変でない関数の Poincaré 定数はゲージの軌道に沿って無限大になるので、比の分子が有限なのはゲージ不変な関数の上だけです。そこで分母の参照も同じ箱のゲージ不変な関数で測ります。

$$V_F := \{\text{箱のプラケットの角の関数の勾配}\} = d^*\big(\ell^2(P_R)\big), \qquad V_Q := \{\text{箱の全てのサイトの勾}$$

箱が可縮なら $V_F = V_Q$ です 初 （立方体の複体は可縮で一次のホモロジーが 0、よって箱のグラフの閉路はプラケットの 2-鎖の境界）。可縮でない領域（穴あき）では $V_F \subsetneq V_Q$ です。ゲージを固定した参照（Feynman ゲージなど）は固定の母数 α に依り、$\Gamma_Q \le \Gamma_{\mathrm{Landau}} \le \Gamma_{\alpha=1}$、さらに $\Gamma_\alpha \ge \alpha/(\lambda_D^{\mathrm{int}} R^2)$ で $\alpha \to \infty$（固定を外す）と無限大になります 初 。数は表 1 です。

表 1　四次元の箱の参照（一色のガウスの近似・$\beta = 1$・正準の目盛り・浮動小数・$R \le 16$ からの外挿。λ_W は試験の空間の中の箱の Dirichlet の値に R^2 を掛けたもの）

参照	試験の空間	Γ_∞	$\lambda_{W,\infty}$	参照として
スカラー（一成分）	箱の全ての関数	0.0740 読	$4\pi^2 = 39.5$	ゲージ場には使わない
Feynman ゲージ（$\alpha = 1$）	箱のリンクの全ての関数	0.0740 読	39.5	α に依る・内在的でない
ゲージ商	$V_Q = V_F$（プラケットの角の関数）	0.0277 読	72.0 読	α に依らない。これを使う

参照	試験の空間	Γ_∞	$\lambda_{W,\infty}$	参照として
境のゲージを凍らせた変種	内部のサイトのゲージ変換だけで割る	ゲージ商の $2.22\text{〜}2.53$ 倍（一辺 $4\text{〜}12$）読	—	ゲージ不変でない（箱を貫く流束が入る）

表 1 の最後の行が 24-01 の表 1 の (e) です。箱の境のサイトのゲージ変換も箱の中のリンクに作用するので、箱のゲージ不変な観測量（Wilson ループなど）は全てのサイトで割った空間に入ります。「**箱の全てのサイトのゲージ変換で割る」ことは定義の一部**で、書き落とすと数が $2.2\text{〜}2.5$ 倍動きます。どの参照も自由場の数で、対象の Wilson 測度の比は、この本では一つも測っていません。

0+1 の注。0+1 次元には有限の無質量の参照がありません（自由な粒子では $C_P^{\mathrm{loc}}=\infty$）。参照は必ず尺度を持ち、二重井戸では底の曲率の調和振動子（角振動数 ω_b）を取ります。その比は最短の窓（一つの時刻）で**ちょうど** ω_b/m です（ψ_0 が Schrödinger の基底状態のとき）初：

$$K_{\mathrm{rel}}(\text{一つの時刻})=\frac{\varepsilon/(2m)}{\varepsilon/(2\omega_b)}=\frac{\omega_b}{m} \tag{7}$$

（ε は時間の刻み。分子は周辺 ψ_0^2 の Poincaré 定数で、基底状態変換で $(H-E_0)$ の隙間に移る。この恒等式は 24-05 の真空の測度の式と同じもの）Lean LatticeGauge.LocalHDoubleWell.one_slice_ratio（仮定：$0<\varepsilon,m,\omega$。比の代数だけ）。二重井戸ではトンネルで $m\ll\omega_b$ なので、比は窓を短くしても 1 にならず、格子 $\varepsilon=\frac12$ で 4.61（$\hbar=0.3$）から 638（$\hbar=0.08$）です読。したがって「短い距離で比は 1 に近づく」は比の形から出る事実ではなく、**漸近自由（短い距離で自由場に近い）という理論の性質に依る仮定**です仮。窓を長くしたときの比の三つの領分は 24-04 で扱います。

04

区画ごとの拡散型緩和時間の仮定

設定。周期の箱 $\Lambda_L=(\mathbb{Z}/L)^4$、配位の空間 $\mathcal{M}=G^{\text{リンク}}$（コンパクトで連結な多様体・両側不変な計量）、Wilson 測度 μ（滑らかで正の密度）、$\mathcal{E}(f)=\int|\nabla f|^2d\mu$ を取ります。位相電荷は、Wilson 流（流れの時間 s）か有限回の均しで滑らかにした格子の電荷 Q_s を使います。均しの写像は滑らかで電荷密度は行列要素の多項式なので、$Q_s\in C^\infty(\mathcal{M})$ です。

区画と、壁で反射する形の定義

切り口 $\theta_n\in(n-1,n)$ を Q_s の**正則値**に取る（Sard の定理で殆ど全ての値が正則なので、$n-\frac12$ にいくらでも近く取れる）。

$$I_n := \{\theta_n \le Q_s < \theta_{n+1}\}, \quad \mu_n := \mu(\,\cdot\,|I_n), \quad \mathcal{E}_n(f) := \int_{I_n} |\nabla f|^2 d\mu_n \ \ (f \in H^1(I_n)), \quad C_P^{\mathrm{sec}}(n) \tag{8}$$

（$\mu(I_n) > 0$ の n だけ）。$\mathcal{E}_n$ には境界条件を課さない。その生成作用素は、壁で反射する（Neumann の）Langevin である。

正則値で切るので、区画の閉包は滑らかな境界をもつコンパクトな多様体で、壁は余次元 1 の滑らかな超曲面です。幾何学的に定めた整数値の電荷（区分的に定数で不連続）で切ると、形は開集合の上の H^1 で定義できますが、壁の正則性が分からず、次の (i) が言えません。この章が滑らかにした電荷を使うのはこのためです。

区画の Poincaré 定数の命題（区画の Poincaré 定数と、分散の分解）

(i) $C_P^{\mathrm{sec}}(n) < \infty \iff I_n$ が連結。

(ii) 区画の番号を N とすると、滑らかな f で

$$\mathcal{E}(f) = \sum_n \mu(I_n)\,\mathcal{E}_n(f), \qquad \mathrm{Var}\, f = \sum_n \mu(I_n)\,\mathrm{Var}_{\mu_n} f + \mathrm{Var}\big(\mathbb{E}[f \,|\, N]\big) \tag{9}$$

(iii) 区画の間の量 $C_{\mathrm{trans}} := \sup_f \mathrm{Var}(\mathbb{E}[f|N])/\mathcal{E}(f)$ について

$$C_{\mathrm{trans}} \ \le\ C_P \ \le\ \sup_n C_P^{\mathrm{sec}}(n) + C_{\mathrm{trans}} \tag{10}$$

(iv) $C_P^{\mathrm{sec}}(n) \le C_P$ は一般には成り立たない。

初 証明。(i) 区画の閉包はコンパクトで境界が滑らか、密度は正で滑らかなので、Neumann の作用素の解核はコンパクトです（Rellich の定理 仮 ：原典の言明はこの部では確かめていない）。零固有値の重複度が連結成分の数に等しいので、隙間が正であることと連結であることは同じです。(ii) 壁は測度 0 なので Dirichlet 形は区画ごとの和に割れ、分散は条件つき分散の期待値と条件つき期待値の分散の和です。(iii) 左は $\mathrm{Var}(\mathbb{E}[f|N]) \le \mathrm{Var}\, f$、右は (9) の第一項に区画ごとの Poincaré 不等式を使い、$\sum_n \mu(I_n)\mathcal{E}_n = \mathcal{E}$ で閉じます。(iv) 区画の関数は壁で跳んでよい（$H^1(\mathcal{M})$ に入らない）ので、条件づけが新しい隘路を作れば $C_P^{\mathrm{sec}}(n) > C_P$ もありえます。∎ Lean LatticeGauge.LocalH.sector_split（仮定：重み ≥ 0・区画ごとの不等式・(9) の二つの式・$\mathrm{Var}(\mathbb{E}[f|N]) \le C_{\mathrm{trans}}\mathcal{E}$。結論：(10) の右）・trans_le_total（仮定：重みと区画の分散が ≥ 0・(9)。結論：(10) の左の分子の不等式）。(9) の恒等式そのもの・Rellich・測度は Lean の外です。

区画ごとの緩和時間の仮定と、その系。区画ごとの緩和時間の仮定は、物理の一辺を止めた箱で区画の中の Poincaré 定数が相関長の二乗で押さえられるという文です。

$$(\xi^2)\uparrow^{\mathrm{sec}}:\quad L=\lambda\,\xi_{\mathrm{RG}}\ \text{で}\ \sup_n C_P^{\mathrm{sec}}(n)\le K(\lambda)\,\xi_{\mathrm{RG}}^2 \qquad\Longrightarrow\qquad \big(\,(\xi^2)\uparrow\iff C_{\mathrm{trans}}\lesssim \xi_{\mathrm{f}}$$

初 （(10) から。$\lesssim$ は定数の取り替えを除く）。区画ごとの緩和時間の仮定は緩和時間の仮定の障害を区画の間の量 C_{trans} に**ちょうど**押し込みます。障害を消すのではなく、一つの量に移すだけで、23-10 の移しかえの型と同じ形です。C_{trans} の物理の読みは転位の率で、静的には $C_{\mathrm{trans}}\ge \mathrm{Var}(\mathbb{E}[Q_s|N])/\mathcal{E}(Q_s)$ です。

橋にはつながらない。(10) と片側の橋（23-01 の (17)、周期の時間で T が有限の補正つき）から出るのは $\kappa/m^2\lesssim \sup_n C_P^{\mathrm{sec}}(n)+C_{\mathrm{trans}}$ までで、C_{trans} を押さえない限り隙間は出ません 初 。区画の中の Langevin の隙間 $1/C_P^{\mathrm{sec}}(n)$ は第五の時間の量で、条件つきの測度 μ_n には転送作用素がありません（全体の電荷の拘束が時間の Markov 性を壊す）。片側の橋の型の「区画の中の物理の隙間」は定義から立たず、立てるには θ 真空の重ね合わせの扱いが要りますが、定式化していません 見 。

三つの弱点。(a) *条件づけの壁が人工の双安定を作りうる。*第 23 部の箱の側の芯では、区間を「ちょうどこの区間」と条件づけた壁の上に二つの局所の最小点が現れ、物理の準安定ではない双安定が生まれました（23-11 §06）。区画の壁は測度の小さい転位の配位の上にあるので害は小さいと見込みますが、確かめていません 見 。区画の Poincaré 定数の命題の (i) で連結かどうかが分かっていないのは、この弱点の極端な形です。(b) *物理の体積を大きくすると、区画を止めても障害が残る。*β を止めて $L\to\infty$ とすると、区画 I_n の中でも半分の箱の電荷は動けます。24-01 の (5) の係数で、条件つきの分散は $\chi_t V/4$、Dirichlet 形は $hV/2+g\,|\text{面}|$ の程度で、比は $V\to\infty$ で $\chi_t/(2h)$、周期の箱の全体の比 χ_t/h と同じ桁です 仮 （h,g の定義と、二つの半分の和を止めた正規分布の条件つき分散の勘定の上）。区画で止まるのは全体の電荷の一つのモードだけで、部分領域の電荷のモードは残ります。したがって区画ごとの緩和時間の仮定が上界の仮定と違う中身を持つのは、箱が交差の長さより小さい（区画の中の部分領域が輸送の領分にある）ときだけで、**物理の体積を止めた順でしか意味を持たない**見込みです 見 。(c) $T=\infty$ *の経路の測度には区画が無い。*四次元の電荷は時間について積分した量で、$T=\infty$ では L^2 に入りません。

一段目の割り方との対応。(9) は、一段目の分散の分割（相の中の局所 Poincaré と、相を移る輸送、23-05 §01）と同じ割り方で、相 ↔ 区画、キンク ↔ 転位と対応します 見 。23-03 §06 の「二尺度の割り方は持ち上がる見込み」の、具体的な行き先の一つです。ただし一段目では、相を移る輸送（キンクの拡散）の時間は $\xi^2 S_0/\hbar$ の程度と読まれ（23-04 の (14) 仮 ）、二重井戸の緩和時間の冪の言明の形に入ります。四次元の区画の間の量 C_{trans} は 24-01 の型の量そのもので、同じ形に入る見込みは立っていません。

05

開いた箱と閉じた箱・二つの係数

局所は輸送の係数を、全体は保存の破れの係数を問う。24-01 の (7) の滑らかな窓の電荷 Q_w は、一辺 $R = c\xi$ の箱の局所の族に入ります。(7) を局所の緩和時間の仮定（絶対の形）に入れると、必要条件は $\chi_t c^2\xi^2/(hc^2\xi^2 + d\lambda_W) \le K\xi^2$ で、h が小さい領分（交差の長さ R_* が $c\xi$ よりずっと長い）では

$$\frac{\chi_t (c\xi)^2}{d\,\lambda_W} \le K\xi^2 \iff \chi_t c^2 \le K\,d\,\lambda_W, \qquad \text{すなわち} \qquad D_{\text{eff}} := \frac{d}{\chi_t} \ge \frac{c^2}{K\lambda_W} \tag{12}$$

です 初 （代数）Lean LatticeGauge.LocalH.transport_requirement（仮定：$0 < d$・$0 < \lambda_W$・$0 < \xi$）。比の形では K を $K_{\text{rel}}\Gamma c^2$ に読み替えます。一方、全体の上界の仮定の必要条件は、24-01 の (2)(6) で $R \to \infty$ とした

$$\frac{\chi_t}{h} \lesssim \xi^2 \tag{13}$$

です 仮 （24-01 の (5) の上）。(12) と (13) は別の係数に掛かります。**局所の緩和時間の仮定は電荷の輸送の係数 d を、全体の緩和時間の仮定は電荷の保存の破れの係数 h を問います**。四次元の位相電荷の凍結は、連続極限で h が速く消えること（転位の配位が稀になること）の現れと読めるので、効くのは (13) の側です。局所の緩和時間の仮定が凍結の影響を受けない見込みはここから来ます 見 。d と h の四次元の格子の値はありません。

閉じた箱と開いた箱。第 23 部の箱への帰着の命題（23-11 §02）は、全体の C_P を箱の定数 C_{box} で押さえる帰着で、C_{box} は**境界の値を止めた**条件つきの測度の定数（境界の値について sup）でした。これを閉じた箱と呼びます。局所の緩和時間の仮定の箱は境界を止めない周辺の箱で、開いた箱と呼びます。四次元で境界のリンクを止めると、箱の中の位相電荷の整数部分は箱の中の転位でしか変わらない見込みです（連続では、箱の電荷は境界の Chern–Simons の値と巻き数の和） 見 。したがって $\chi_t(c\xi)^4 \gtrsim 1$ の大きさの閉じた箱では、C_{box} が転位の障壁の時間を受け継ぐ見込みです 見 。開いた箱では電荷が境界を通って出入りし、緩和は (12) の輸送の型です 仮 。

閉じた箱と開いた箱の違いは、周期境界と開いた境界の違いと同じ形です。開いた境界は、物理の一辺を止めた有限の箱の中でしか位相の障害を外しません（開いた境界の Q^2 の自己相関時間は、時間の向きの長さにほぼ比例して伸びる、Lüscher–Schaefer 2011 の §5.3 読 ）。これは (12) の輸送の型の、箱の言葉での言い直しです。帰結の読み 見 ：予想を延ばした読み（24-01 の §06 (a)）の下で上界の仮定が四次元で偽と読めるなら、局所の緩和時間の仮定が成り立つ場合でも、箱への帰着の命題の四次元版は閉じた箱の段で破れます。壊れる場所は「箱の中の緩和」ではなく「閉じた箱の中の区画の移り変わり」です。

表 2　体積と $a \to 0$ の順と、効く見込みの直し方

順	先に取るもの	効く見込みの直し方	効かない見込みの直し方	札
物理の一辺を止めて $a \to 0$	有限の箱の連続極限	開いた境界・区画ごとの緩和時間の仮定	—	典（開いた境界の原典）・見
体積を先に無限（この本の順）	無限体積の格子の測度	局所の緩和時間の仮定（開いた箱）	開いた境界・区画ごとの緩和時間の仮定	仮（部分領域の電荷の勘定）・見

Langevin を実装する算法の自己相関の尺度づけ（格子単位で $1/a^2$）を、原典は「無限格子と、開いた境界の有限の格子で成り立つと期待される」と書き、周期境界の位相を変える遷移は格子の作り物として解析から外しています（Lüscher–Schaefer, Non-renormalizability of the HMC algorithm, 2011 の脚注）典。表 2 の二行目はこの言い方と同じ向きですが、原典の対象は局所の量の自己相関で、局所の緩和時間の仮定そのものではありません。

06

五分類の表

この章の行を五分類の書式に「見」を足して一表にします。行の記号は依存グラフの節点と同じで、24-01 の行（クラスタの減衰の行）を一つ引き継ぎます。

表 3　区画ごとの緩和時間の仮定と局所の緩和時間の仮定の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	無限体積の Wilson 測度の存在と一意性	仮	第 23 部の無限体積の一意性の言明	$\beta \geq \beta_0$	—
2	Rellich の定理（Neumann の解核のコンパクト性）	仮	区画の Poincaré 定数の命題 (i)（原典の言明は確かめていない）	滑らかな境界	—
3	ガウス測度の Poincaré 定数＝圧縮した共分散のノルム	典	(4)・Hairer–Stuart–Voss–Wiberg 2005	ガウス	—
4	局所の Poincaré 定数の性質の命題 (i)〜(iv)	初	§02 の証明	連続時間・有限の空間格子・$T = \infty$	local_le_global・local_approaches_global（仮定：上に有界・空でない・$S = \bigcup S_c$。上限の部分だけ）
5	局所の Poincaré 定数の性質の命題の証明が四次元の Wilson 測度の箱で同じに通ること	仮	§02 の末（定義域の扱いを書き下していない）	四次元・無限体積	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
6	四次元の局所の Poincaré 定数の性質	初	行 1・4・5 の上	四次元	—
7	絶対の形は無質量の自由場で $K = c^2$ で成り立つ	初	(4)	時空四次元・空間も局所	—
8	$\Gamma_\infty = 0.0740$・$\Gamma_{Q,\infty} = 0.0277$・$\lambda_W^Q = 72.0$・境の凍結で 2.22〜2.53 倍	読	§03・表 1	自由場・一色のガウス・$\beta = 1$・$R \le 16$	—
9	可縮な箱で $V_F = V_Q$・ゲージ固定の参照は α に依り $\alpha \to \infty$ で発散	初	(6)	可縮な箱	—
10	最短の窓の比 $= \omega_b / m$	初	(7)	0+1・Schrödinger の ψ_0	one_slice_ratio（仮定：$0 < \varepsilon, m, \omega$）
11	短い距離で比は 1 に近づく	仮	§03 の 0+1 の注（漸近自由に依る）	四次元	—
12	局所の緩和時間の仮定（比の形）：一つの c で $K_{\mathrm{rel}}(c) \le K$	仮	(5)	$\beta \ge \beta_0$	—
13	区画の Poincaré 定数の命題 (i)：区画の定数が有限 $\Longleftrightarrow$ 区画が連結	初	§04（行 2 の上）	周期の箱・正則値の切り口	—
14	挟み (10)	初	(9)(10)	周期の箱	sector_split・trans_le_total（仮定：重み ≥ 0・区画ごとの不等式・(9) の二式）
15	系 (11)：区画ごとの緩和時間の仮定の下で上界の仮定 $\Longleftrightarrow C_{\mathrm{trans}} \lesssim \xi^2$	初	(11)	物理の一辺を止めた箱	—
16	区画から出るのは $\kappa / m^2 \lesssim \sup_n C_P^{\mathrm{sec}} + C_{\mathrm{trans}}$ まで	初	§04（片側の橋の上）	有限の箱	—
17	クラスタの減衰（24-01 の表 5 の行 1）	仮	24-01 の (5)	無限体積	—
18	(12)：局所は d・(13)：全体は h	初	(12)（代数）・(13) は行 17 の上	四次元	transport_requirement（仮定：$0 < d, \lambda_W, \xi$）
19	区画の中の半分の箱の比 $\to \chi_t / (2h)$	仮	§04 の弱点 (b)	β を止めて $L \to \infty$	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
20	四次元の箱の交互の最大相関の仮定：閉じた箱の族の間の最大相関 < 1 が β に一様	仮	箱への帰着の命題の四次元版の前提	四次元・2^4 色の族	—
21	四次元の閉じた箱の隙間の仮定：閉じた箱で $C_{\mathrm{box}}(c\xi_{\mathrm{RG}}) \le K'\xi_{\mathrm{RG}}^2$	仮	§05（位相の障壁が入る見込みの行）	四次元	—
22	四次元の多族の箱の帰着 $C_P \le C(c)\,C_{\mathrm{box}}/(1-c_{\mathrm{alt}})$	仮	一次元の箱への帰着の命題の四次元版（書き下していない）	四次元	—
23	緩和時間の上界の仮定	初	行 20・21・22 の上の代数	四次元	—

依存グラフ

```
 1  仮  無限体積の Wilson 測度の存在と一意性                  β ≥ β₀
 2  仮  Rellich の定理                                        滑らかな境界
 3  典  ガウスの Poincaré 定数 = 圧縮した共分散のノルム   ガウス
 4  初  局所の Poincaré 定数の性質の命題（連続時間）       T = ∞
        Lean local_le_global・local_approaches_global（上限の部分だけ）
 5  仮  その証明が四次元の箱で同じに通ること                  四次元
 6  初  四次元の局所の Poincaré 定数の性質 ⟸ 1・4・5
 7  初  絶対の形の空虚さ (4) ⟸ 3                              時空四次元
 8  読  参照の数（Γ_∞・Γ_Q・λ_W^Q・境の凍結の倍率）          自由場
 9  初  可縮な箱で V_F = V_Q・ゲージ固定は α に依る          可縮な箱
10  初  最短の窓の比 = ω_b/m                                  0+1
        Lean one_slice_ratio
11  仮  短い距離で比は 1 に近づく（漸近自由）                四次元
12  仮  局所の緩和時間の仮定（比の形・一つの c）             β ≥ β₀
13  初  区画の定数が有限 ⟺ 連結 ⟸ 2                          正則値の切り口
14  初  挟み C_trans ≤ C_P ≤ sup C^sec + C_trans              周期の箱
        Lean sector_split・trans_le_total
15  初  区画ごとの仮定の下で上界の仮定 ⟺ C_trans ≲ ξ² ⟸ 14
16  初  区画から出る橋の不等式 ⟸ 14（＋片側の橋）
17  仮  クラスタの減衰（24-01）                               無限体積
18  初  局所は d・全体は h ⟸ 17
        Lean transport_requirement
19  仮  区画の中の半分の箱の比 → χ_t/(2h)
20  仮  四次元の箱の交互の最大相関 < 1                       四次元
21  仮  四次元の閉じた箱の隙間 C_box ≤ K'ξ_RG²  ← 位相の障壁が入る見込みの行
22  仮  四次元の多族の箱の帰着（書き下していない）
23  初  上界の仮定 ⟸ 20・21・22
```

確かめ方。「⟸」の行で右の番号が左より小さいことを目で見ます。円はありません。葉の「仮」は十（無限体積の測度の存在・Rellich の定理・局所の Poincaré 定数の性質の証明の四次元への写し・短い距離の比の読み・局所の緩和時間の仮定・クラスタの減衰・半分の箱の比・四次元の箱の交互の最大相関・四次元の閉じた箱の隙間・四次元の多族の箱の帰着）、「典」はガウスの Poincaré 定数の行、「読」は参照の数の行です。

このグラフで読むことは二つです。第一に、**局所の緩和時間の仮定は、上界の仮定を組む鎖のどこにも入りません**。箱への帰着の命題の型の帰着は閉じた箱（四次元の閉じた箱の隙間の仮定）を使い、局所の緩和時間の仮定の箱は開いた箱だからです。局所の緩和時間の仮定は上界の仮定の部品ではなく、別の文です。局所の緩和時間の仮定がどこで使われるかは 24-04 の橋のグラフにあります。第二に、四次元で上界の仮定が壊れる見込みの場所は、四次元の閉じた箱の隙間の仮定の一行に集まります。この行の言明は閉じた箱の定数 C_{box} だけを含み、全体の C_P を含まないので、結論を前提に置く形にはなっていません。

07

言えないこと

(a) 二つの緩和時間の仮定は**定義の候補で、どの β でも、対象のゲージ理論について示した不等式はありません**。示したのは定義の性質（局所の Poincaré 定数の性質の命題・区画の Poincaré 定数の命題）と、自由場の参照の値です。緩和時間の仮定の「正しい直し方」も主張しません。

(b) 四次元の Wilson 測度の上の局所の緩和時間の仮定は、連続時間の経路の測度の上の定義の写しで、無限体積の測度の存在と、定義域の扱い（局所の Poincaré 定数の性質の命題の証明が四次元の箱で同じに通ること）は前提の行です。

(c) 部分領域の電荷の勘定（開いた箱で輸送・閉じた箱で障壁）は、クラスタの減衰と形式的な係数 h, g, d の上の見積もりで、四次元の格子の値はありません。

(d) 四次元の多族の箱の帰着は書かれていません。区画の壁の害・物理の体積を大きくしたときの区画ごとの緩和時間の仮定の破れ方は見立てです。

(e) 局所の緩和時間の仮定が四次元で成り立つ証拠はありません。あるのは「凍結が効くのは h の側で、局所の緩和時間の仮定が問うのは d」という勘定だけです。

(f) 表 1 の数はどれも参照の自由場の数（一色のガウス・$\beta = 1$・浮動小数・外挿）で、対象の測度の比 K_{rel} は一つも測っていません。閾は参照と試験の観測量の族に依り、帯 $[K_{*}, 1)$ の場について橋は何も言いません（24-04）。

(g) 「短い距離で比は 1 に近づく」は漸近自由に依る仮定で、0+1 の二重井戸ではこの読みが成り立ちません（(7)）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 局所の Poincaré 定数の定義と局所の Poincaré 定数の性質の命題（窓の周辺の量・稠密でない・単調・$c \to \infty$ で C_P に無条件で戻る。連続時間・有限の空間格子・$T = \infty$・片側の橋の仮定の上）	四次元の Wilson 測度の上の定義域の扱い（写し）。芯の問い（SPDE の生成作用素との同一視）
初 絶対の形の局所の緩和時間の仮定は、時空四次元で空間も局所にした箱では無質量の自由場でも成り立つ（$K = c^2$）	比の形の局所の緩和時間の仮定が対象の理論で成り立つこと
初 可縮な箱でプラケットの関数の族とゲージ商が一致すること・ゲージ固定の参照が母数に依ること・最短の窓の比 ω_b/m	β 有限の $SU(2)$ の参照・四次元の大きいループの族の値
読 参照の数 $\Gamma_\infty = 0.0740$・$\Gamma_{Q,\infty} = 0.0277$・$\lambda_W^Q = 72.0$・境の凍結で 2.22〜2.53 倍	上界・下界の命題ではない。自由場の数で、対象の測度の数ではない
初 区画の定義（正則値の切り口・反射の形）・有限 $\Longleftrightarrow$ 連結（Rellich の上）・挟み (10)・系 (11)・区画から出る橋の不等式	区画が連結かどうか。C_{trans} の評価。θ 真空の扱い
見 局所の緩和時間の仮定は凍結の影響を受けない見込み・閉じた箱が障壁を受け継ぐ見込み・区画ごとの緩和時間の仮定は物理の体積を止めた順でだけ意味を持つ見込み	どれも定理ではない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
ガウス測度の Poincaré 定数＝共分散のノルム	典	M. Hairer, A. M. Stuart, J. Voss, P. Wiberg (2005) の共分散の圧縮の補題（等号は一次の汎関数）
開いた境界の Q^2 の自己相関と時間の向きの長さ・Langevin の算法の尺度づけの期待	典	M. Lüscher, S. Schaefer, JHEP 07 (2011) 036 §5.3・M. Lüscher, S. Schaefer, JHEP 04 (2011) 104 の §1 と脚注（本文で確認）
局所の Poincaré 定数の性質の命題 (iii)(iv)・区画の Poincaré 定数の命題の (10)・(12) の代数・(7) の比	Lean	LatticeGauge.LocalH（local_le_global・local_approaches_global・sector_split・trans_le_total・transport_requirement）・LatticeGauge.LocalHDoubleWell（one_slice_ratio）。束が保証するのは実数の集合の上限・代数だけ
表 1 の参照の数・$\Gamma(R)$・$r(mR)$	読	格子の Green 関数（熱核の数値積分）の箱への圧縮の最大固有値（Lanczos）と、独立な周期格子の経路（零モードを外す・$1/L^2$ の外挿）。ゲージ商は箱のグラフの Neumann Laplacian による射影と、密な特異値分解による射影の二つの経路
二重井戸の格子の比	読	転送の核（時間の刻み $\varepsilon = \frac{1}{2}$ の対称積）の格子の固有値問題

この章で使った語 — 時間で均した汎関数の代数 $\mathcal{D}$・窓・局所の Poincaré 定数 $C_P^{\mathrm{loc}}(c)$・比の形 K_{rel}・無質量の参照と Γ・ゲージ商の参照・区画と反射の形・区画の間の量 C_{trans}・開いた箱と閉じた箱・輸送の係数 d と保存の破れの係数 h。記号は 24-09 にあります。

次に読む章：24-04 片側の橋は緩和時間の仮定のどの形を要るか ― 比の形の局所の緩和時間の仮定から隙間の下界が出る閾 K_* と、橋が質量を見る箱の大きさ。

2026-10-09 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 24 部 一本目の道（後半）
片側の橋・窓の局所の緩和時間の仮定・比の形と閾 · Kiichi, Shiori and Rin

片側の橋は緩和時間の仮定のどの形を要るか

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 5-09・2-10 にあります。

この章で分かること ― 第 23 部の片側の橋が拡散型緩和時間の仮定のどの部分しか使わないか。時刻で積分した一時刻の関数の族では、Poincaré 定数の上限が隙間でちょうど決まるので、橋に要るのは緩和時間の上界の仮定の時刻に局所な部分だけです。窓を限った局所の緩和時間の仮定から有限の空間体積の隙間の下界が出ること、無限体積では局所の緩和時間の仮定を無質量の参照との比で述べる必要があること、その閾が参照の取り方（スカラー・ゲージ商・$SU(2)$ の色の一重項）で変わること、橋が質量を見るのは箱が相関長の 4〜5 倍以上のときであること。0+1 次元の二重井戸では、最も短い窓でも比が 1 にならないこと。

前提となる章 ― 23-01 §05（拡散型緩和時間の仮定の (13)、上界の仮定の (14)(15)）・23-01 §06（片側の橋の (17)、恒等式 (18)、橋 (19)、時間の刻みの比べの仮定（論文「片側の橋」の (D)）の (20)）・23-01 §06 (5)（円の上の自由な粒子の反例）・24-03（局所の緩和時間の仮定と比の形の定義）。記号は 24-09 にまとめてあります。

先に言うこと ― 水準は〔研〕で、§01 の要約だけ〔三〕です。この章は質量ギャップを示しません。緩和時間の仮定も上界の仮定も、その局所の版も、どの β でも示していません。示すのは、橋がどの仮定のどの部分を使うかという論理の形と、自由場の参照の値です。窓の議論は時間を連続に取った格子・有限の空間格子・$T = \infty$ の定常な経路の測度の上の文で、無限体積の版はさらに局所の励起のモーメントの仮定と無限体積の基底状態変換の恒等式の上にあります。参照の値は浮動小数の計算と外挿の読みです。

この章の順序

1. 要約〔三〕 ― 橋が使うのは上界の仮定の時刻に局所な部分だけ
2. 片側の橋と時刻に局所な族 ― 上限がちょうど ξ^2・論文との対応（(1)〜(3)）
3. 窓を限る ― 窓の因子の単調性・窓の中の上限の命題・有限体積の下界（(4)〜(10)・表 1）
4. 「ある $K(c)$」は空虚 ― 無質量の自由場という陰性対照と、比の形（(11)(12)）
5. 無限体積の橋と閾 ― 局所の励起のモーメントの仮定・比への移しかえ（(13)〜(16)）

6. 三つの参照 — スカラー・ゲージ商・色の一重項（表 2）・橋が質量を見る箱
7. 0+1 次元の注 — 最も短い窓でも比は ω_b/m（(17)・表 3）
8. どの仮定のどの部分がどの結論に要るか — 表 4
9. 言えないこと
10. 五分類の表と依存グラフ — 表 5

01

要約〔三〕 — 橋が使うのは上界の仮定の時刻に局所な部分だけ

第 23 部の 23-01 §06 で、時間を連続に取った格子の経路の測度について、片側の橋 $C_P \geq \kappa\hbar^2/\Delta^2$を示しました。試験関数は、一つの時刻の配位の関数 $F = \psi_1/\psi_0$ を時間で積分した $f_T = \int_0^T F(q(\tau))\,d\tau$ の一本です。この一本と上界の仮定の $C_P \leq C\xi_{\mathrm{RG}}^2$ を並べると、格子の物理単位の隙間の下界 $m_{\mathrm{phys}}^2 \geq \kappa/C$ が出ます（23-01 の (19)）。この章の問いは、そのとき上界の仮定のどの部分が使われているか、です。

答えは三段に分かれます。

第一段。「一つの時刻の関数を時間の重みで均したもの」の族 $\mathcal{F}_1$ の上では、$\mathrm{Var}\,/\mathcal{E}$ の上限が正準の目盛りでちょうど $\xi^2 = \hbar^2/\Delta^2$ です [初]。したがって上界の仮定をこの族に制限した文は「格子の物理単位の隙間が $C^{-1/2}$ 以上」と同じです。上界の仮定のうち隙間を越える中身は、この族の外——巻き数や位相電荷のような、時刻に局所でない関数——にしかありません（23-01 の円の上の自由な粒子の反例、24-01 の型）。橋は上界の仮定の時刻に局所な部分しか使いません。

第二段。時間の窓を長さ $c\ell$ に限った局所の緩和時間の仮定（ℓ は隙間とは別に外から与える物差しで、四次元では記帳の長さ ξ_{RG}）からも、有限の空間体積の隙間の下界 $m_{\mathrm{phys}} \geq \sqrt{1/c^2 + \kappa/K} - 1/c$ が出ます [初]。$c \to \infty$ で第 23 部の $\sqrt{\kappa/K}$ に戻ります。

第三段。空間も局所にして無限体積へ進むと、「箱の中の局所の Poincaré 定数が $K(c)\ell^2$ 以下」という形の文は空虚になります。四次元の質量の無い自由場も、ある $K(c)$ でこの文を満たすからです [初]。そこで、同じ箱・同じ目盛りの無質量の自由場の値（参照）との比 K_{rel} で述べます。局所の励起のモーメントの仮定の上で、比が閾 $K_* = \kappa/(\lambda_W \Gamma)$ より小さければ隙間の下界が出ます [初]（仮定の上の代数）。閾は参照の取り方で変わり、スカラーで 0.342κ、ゲージ商（一色の線形化）で 0.502κ、$SU(2)$ の色の一重項（主項・二次のカオス）で約 0.62κ（試験の値なので使える閾の下の値）です [読]。質量のある自由場で調べると、橋が質量を見

るのは箱の一辺が相関長の約 4.2 倍（スカラー）〜5.2 倍（ゲージ商）以上のときです 読 。比が閾と 1 の間の帯 $[K_*, 1)$ にある場について、この橋は何も言いません。

最後に 0+1 次元の注を置きます。二重井戸では、最も短い窓（一つの時刻）でも比はちょうど ω_b/m で、1 になりません 初 。「短い距離では比が 1 に近い」は比の形から出る事実ではなく、四次元では漸近自由に依る仮定です 仮 。

比喩で言えば、橋は「時計の針が一回りする時間」だけを見ていて、「針が何周したかを数える歯車」の遅さは見ていません。上界の仮定はその歯車も含めた全体の文で、橋に要るのは針の部分だけです。

02

多次元の片側の橋と時刻に局所な族 — 上限がちょうど ξ^2

設定は 23-01 §06 の片側の橋と同じです。空間は有限の格子、一つの時刻の配位の空間 Q、ハミルトニアン $H = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta_M + V$、基底状態の仮定（論文の (A1)。離散スペクトル・基底状態 $\psi_0 > 0$ が重複せず滑らか・$\Delta = E_1 - E_0 > 0$）、定常な経路の測度の仮定（論文の (A2)。$T = \infty$ の定常な経路の測度）、計量の比べの仮定（論文の (A3)。Langevin の計量の比較、$\kappa = 1/\lambda_G$）。$m = \Delta/\hbar$、$\xi = 1/m$、$A = (H - E_0)/\hbar$ です。

時刻に局所な族を次のように置きます。

$$\mathcal{F}_1 = \Big\{ f_{h,G_1} = \int_{\mathbb{R}} h(\tau)\, G_1(q(\tau))\, d\tau \ :\ h \text{ は有界で台が有界, } G_1 \text{ は } Q \text{ の上の滑らかな関数} \Big\} \tag{1}$$

片側の橋の f_T は $h = \mathbf{1}_{[0,T]}$、$G_1 = \psi_1/\psi_0$ の場合です。

片側の橋の上限（時刻に局所な族で最良）

片側の橋の仮定と正準の選び方 $G = M^{-1}$（$\kappa = 1$）のもとで、

$$\sup_{f \in \mathcal{F}_1} \frac{\mathrm{Var}(f)}{\mathcal{E}(f)} = \xi^2 = \frac{\hbar^2}{\Delta^2}, \tag{2}$$

で、上限は達成されない（どの $f \in \mathcal{F}_1$ でも比は ξ^2 より真に小さい）。

初 証明。$\varphi = (G_1 - \langle G_1 \rangle)\psi_0$ の A のスペクトル測度を ν_φ とすると、ν_φ は $[m, \infty)$ に載ります。相関の式と Plancherel の定理から

$$\mathrm{Var}(f) = \int d\nu_\varphi(a) \int_{\mathbb{R}} |\hat{h}(k)|^2 \frac{2a}{a^2 + k^2} \frac{dk}{2\pi}, \qquad \mathcal{E}(f) = \int d\nu_\varphi(a) \int_{\mathbb{R}} |\hat{h}(k)|^2\, 2a\, \frac{dk}{2\pi} \tag{3}$$

です（右は恒等式 (18) から）。$a \geq m$ で $2a/(a^2+k^2) \leq 2a/m^2$、等号は $k=0$ だけなので、比は ξ^2 より小さい。上限が ξ^2 であることは片側の橋の f_T で $T \to \infty$ とすれば分かります。∎
一般の計量では、計量の比べの仮定と逆向きの比較 $G \geq \lambda'_G M^{-1}$ から上限は $\kappa\xi^2$ と ξ^2/λ'_G の間に挟まれます。Lean `EuclideanPath.GapBridge.local_rayleigh_le`（仮定：$0<m$・各 k で $m \leq a_k$・$0 \leq c_k$。結論：$m^2 \sum_k c_k/a_k \leq \sum_k c_k a_k$）と `fourier_weight_le`（仮定：$0<m \leq a$。結論：$2a/(a^2+k^2) \leq 2a/m^2$）は、この証明の有限和と各点の不等式だけを検査したものです。

帰結。上界の仮定を $\mathcal{F}_1$ に制限した文「すべての $f \in \mathcal{F}_1$ で $\mathrm{Var}(f) \leq C\xi_{\mathrm{RG}}^2 \mathcal{E}(f)$」は、(2) によって $\xi^2 \leq C\xi_{\mathrm{RG}}^2$、すなわち

$$\mathcal{F}_1 \text{ の上の上界の仮定} \iff m_{\mathrm{phys}} = m\,\xi_{\mathrm{RG}} \geq C^{-1/2} \text{（正準・各 } \beta\text{）}$$

と同じです 初。右から左も (2) から出ます。上界の仮定が格子の物理単位の隙間より強い分（23-01 §06 の結論）は、すべて $\mathcal{F}_1$ の外にあります。円の上の自由な粒子（円の上の自由な粒子の反例）では、巻き数の汎関数 $\int w\,d\tilde{x}$ が $\mathcal{F}_1$ の外にあって $C_P = \infty$ を作り、$\mathcal{F}_1$ の上の上限は ξ^2 のままです。

論文との対応。片側の橋・(2)・円の上の自由な粒子の反例は、論文（論文の一覧・PDF）“The inverse squared spectral gap bounds the Langevin Poincaré constant of Euclidean path measures from below”（Kiichi, Shiori and Rin）にまとめてあります。要旨の一文は「有限次元の配位の空間の上の、時間の全体で定常な Euclid の経路の測度について、時間で均した滑らかな汎関数の上の確率量子化（Langevin）の Dirichlet 形の Poincaré 定数は $C_P \geq \kappa(\hbar/\Delta)^2$ を満たす」です。片側の橋は論文の定理 3.1、(2) は命題 4.1、円の上の自由な粒子の反例は命題 5.1（時間で均した滑らかな汎関数の族 $\mathcal{D}_0$ の上でも $C_P=\infty$）に当たります。この本では式番号を引くだけにし、証明は 23-01 §06 と論文に任せます。論文は外部の数学者の検査を経ていません。

03

窓を限る — 窓の因子の単調性・窓の中の上限・有限体積の下界

局所の緩和時間の仮定の定義は 24-03 §02 の (1)〜(3) にあります。ここで使う形だけを写します。物差し $\ell > 0$ は隙間とは別に外から与える長さ（四次元では記帳の長さ ξ_{RG}）です。隙間で決めた ξ を物差しにすると、隙間の下界を導くときに循環します。$c > 0$ に対し、時間で均した汎関数のうち重みの台が長さ $c\ell$ の窓に入るものの族を $\mathcal{D}_c$ と書き、

$$C_P^{\mathrm{loc}}(c) = \sup_{f \in \mathcal{D}_c} \frac{\mathrm{Var}(f)}{\mathcal{E}(f)}, \qquad (\xi^2)\!\uparrow_c^{\mathrm{loc}}(K) : \;\; C_P^{\mathrm{loc}}(c) \leq K\ell^2 \quad (4)$$

と置きます。$C_P^{\mathrm{loc}}(c)$ は窓の上の経路の周辺の法則だけで決まり、c について単調に増え、$c \to \infty$ で全体の C_P に戻ります（24-03）。

窓の因子と、その単調性

片側の橋の (17) の右辺の括弧を $\varphi(x)$ と書きます（引数の無い φ は §02 のベクトルで、別の量です。記号は 24-09 に従います）。

$$\varphi(x) = 1 - \frac{1 - e^{-x}}{x}, \qquad g(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2} = \frac{x - 1 + e^{-x}}{x^3} \qquad (x > 0) \tag{5}$$

窓 T の比は $\kappa\xi^2\varphi(T/\xi) = \kappa T^2 g(mT)$ です。$\varphi(x) = x/2 + O(x^2)$、$\varphi(x) \to 1$（$x \to \infty$）で、値は $\varphi(1) = 0.368$・$\varphi(4) = 0.755$・$\varphi(10) = 0.900$ です 初 （閉じた式の値）。

> 窓の因子の単調性の命題（窓の因子は減る）
>
> g は $(0, \infty)$ で狭義に減少する。

初 証明。$x - 1 + e^{-x} = \int_0^x \int_0^u e^{-v}\, dv\, du = x^2 \int_0^1 (1-t) e^{-xt}\, dt$ なので、$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 (1-t)e^{-xt}\, dt$ です。正の狭義減少関数 $1/x$ と、正の狭義減少関数 $\int_0^1 (1-t)e^{-xt} dt$ の積なので狭義に減ります。∎ Lean `LatticeGauge.LocalH.wr_strictAntiOn`（仮定なし。結論：g は $(0,\infty)$ で狭義減少。Lean では微分の符号 $g'(x) = h(x)/x^4$、$h(x) = 3 - 2x - (3+x)e^{-x} < 0$ の経路で閉じている）。

窓の因子の単調性の命題の使い道は二つあります。一つ目に、重みを窓の指示関数 $\mathbf{1}_{[0,T]}$ に固定し、一時刻の関数だけを動かした族では、上限が最低の励起 $a = m$ でちょうど取られ、$T^2 g(mT) = \xi^2 \varphi(T/\xi)$ に等しくなります 初 （スペクトル測度の重みつき平均の比は、成分ごとの比の最大を越えない。最大が $a = m$ で取られることが g の単調性そのもの）。二つ目に、窓を限った上界の仮定 $\kappa T^2 g(c\, m_{\mathrm{phys}}) \le K\ell^2$（$T = c\ell$）を一つの数の不等式にできます。$g$ は $(0,\infty)$ から $(0,\infty)$ への連続な狭義減少の全単射なので、

$$\kappa\,(c\ell)^2\, g(c\, m_{\mathrm{phys}}) \le K\ell^2 \iff m_{\mathrm{phys}} \ge \frac{1}{c}\, g^{-1}\!\Big(\frac{K}{\kappa c^2}\Big) \tag{6}$$

です。$e^{-x} \ge 1 - x + x^2/2 - x^3/6$（$x \ge 0$）から $g(x) \ge 1/(2x) - 1/6$ が出て、陽な形

$$m_{\mathrm{phys}} \ge \frac{3\kappa c}{6K + \kappa c^2} \tag{7}$$

が得られます 初 。Lean `LatticeGauge.LocalH.gap_lower_of_window`（仮定：$0 < \kappa, c, K, \ell, m$・$\kappa(c\ell)^2 g(c\ell m) \le C_P \cdot C_P \le K\ell^2$。結論：$3\kappa c/(6K + \kappa c^2) \le m\ell$）。(7) は

$c\,m_{\mathrm{phys}} \lesssim 1$ で鋭く、$c\,m_{\mathrm{phys}} \gtrsim 3$ では右辺の近似が弱くなるので、大きい c には次の形を使います。

窓の中の重みも動かす — 窓の中の上限の命題

窓の中の上限の命題（窓の中の時刻に局所な族の上限）

片側の橋の仮定と正準の選び方のもとで、重みの台が $[0,T]$ に入る $\mathcal{F}_1$ の元の上の上限は

$$\sup_{f\in\mathcal{F}_1,\,\operatorname{supp} h\subset[0,T]} \frac{\operatorname{Var}(f)}{\mathcal{E}(f)} = \Psi_T(m) := \frac{1}{m^2+\omega_0^2}, \qquad \omega_0\tan\frac{\omega_0 T}{2} = m, \quad \omega_0\in\left(0,\frac{\pi}{T}\right) \tag{8}$$

である。一般の計量（計量の比べの仮定）では左辺は $\kappa\Psi_T(m)$ 以上。

初 証明〔研〕。φ を A の固有成分 φ_k（固有値 a_k）に分けると、$\operatorname{Var} = \sum_k \|\varphi_k\|^2\langle h, e^{-a_k|s-t|}h\rangle$、$\mathcal{E} = 2\|h\|^2\sum_k a_k\|\varphi_k\|^2$（恒等式 (18)）です。重みつき平均の比は成分ごとの比の最大を越えないので、$\operatorname{Var}/\mathcal{E} \le \max_k \langle h, K_{a_k}h\rangle/\|h\|^2$、ここで K_a は核 $e^{-a|s-t|}/(2a)$ を $[0,T]$ に制限した積分作用素で、実数直線の上の $(a^2-\partial^2)^{-1}$ の圧縮です。$a\mapsto(a^2-\partial^2)^{-1}$ は作用素として減少するので、最大は $a=m$ です。K_m の最大の固有値は、固有関数が $u''=-\omega^2u$ と境界条件 $u'(0)=m\,u(0)$・$u'(T)=-m\,u(T)$ を満たすことから、対称な第一の解 $u=\cos(\omega(t-T/2))$ の $\omega\tan(\omega T/2)=m$ で決まり、値は $1/(m^2+\omega^2)$ です。等号は $G_1=\psi_1/\psi_0$・$h=\cos(\omega_0(t-T/2))$ で取られます。∎

根 ω_0 は $\tan z \ge z$ から $\omega_0^2 \le 2m/T$ を満たし、また $\omega_0 < \pi/T$ なので

$$\max\left(\frac{1}{m^2+\pi^2/T^2},\ \frac{1}{m^2+2m/T}\right) \ \le\ \Psi_T(m)\ <\ \frac{1}{m^2} \tag{9}$$

です 初。指示関数の重みの値 $T^2 g(mT)$ は $\Psi_T(m)$ より真に小さく（cos は定数でない）、$T\to 0$ では両方とも $\approx T/(2m)$、$T\to\infty$ では $\Psi_T = 1/m^2 - O(T^{-2})$、$T^2 g = 1/m^2 - O(T^{-1})$ です。

表 1　窓の上限の二つの値（$m=1$）

T	指示関数の重み $T^2 g(T)=\varphi(T)$	重みも動かす $\Psi_T(1)$	分類
1	0.368	0.369	左の列は 初（閉じた式）、右の列は 読（根の式の数値と、核の中点則の最大固有値との照合で相対 2.5×10^{-5} 以内）
4	0.755	0.775	
10	0.900	0.935	

有限の空間体積の下界

局所の緩和時間の仮定 (4) と窓の中の上限の命題を合わせます。$\kappa\Psi_{c\ell}(m) \le C_P^{\mathrm{loc}}(c) \le K\ell^2$ と (9) の $\Psi_{c\ell}(m) \ge 1/(m^2 + 2m/(c\ell))$ から、$\mu = m\ell = m_{\mathrm{phys}}$ は $\mu^2 + 2\mu/c \ge \kappa/K$ を満たし、

$$m_{\mathrm{phys}} \;\ge\; \sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{\kappa}{K}} - \frac{1}{c} \qquad (c > 0) \tag{10}$$

です 初 （片側の橋の仮定の上）。 Lean `LatticeGauge.LocalH.gap_lower_of_local_window`（仮定：$0 < \kappa, c, K, \ell, m \cdot \kappa/(m^2 + w^2) \le C_P \cdot w^2 \le 2m/(c\ell) \cdot C_P \le K\ell^2$。結論：(10))、`local_bound_tendsto`（仮定なし。結論：(10) の右辺は $c \to \infty$ で $\sqrt{\kappa/K}$ に近づく）。$c \to \infty$ で 23-01 の (19) に戻り、$c \to 0$ では $\approx c\kappa/(2K)$ です。(10) は (7) より全ての c で強い形です。

自由場では両向き。ガウスの経路の測度では、Poincaré 定数は共分散作用素のノルムに等しく 典 （Hairer–Stuart–Voss–Wiberg 2005, Lemma 2.2)、窓の族 $\mathcal{D}_c$ 全体の上でも $C_P^{\mathrm{loc}}(c) = \Psi_{c\ell}(m)$ がちょうど成り立ちます 初 （共分散を窓に圧縮した作用素の最大固有値が窓の中の上限の命題の値)。したがって自由場では「$(\xi^2)\!\uparrow_c^{\mathrm{loc}}(K) \Rightarrow$ (10)」に加えて「$m_{\mathrm{phys}} \ge K^{-1/2} \Rightarrow$ 全ての c で $(\xi^2)\!\uparrow_c^{\mathrm{loc}}(K)$」も成り立ちます（$\Psi < 1/m^2$)。局所化が自明でないことも見えます。$C_P^{\mathrm{loc}}(c) < C_P$ が全ての有限の c で真に成り立ち、$c \to 0$ では $\approx c\ell/(2m) \to 0$ です。

この節の条件。(4)〜(10) は時間を連続に取った格子・有限の空間格子・$T = \infty$・片側の橋の三つの仮定（基底状態・定常な経路の測度・計量の比べ）の上の文です。時間も刻む Wilson の格子では時間の刻みの比べの仮定（23-01 の (20)）が残り、窓の版はその上でまだ書いていません。

04

「ある $K(c)$」は空虚 — 無質量の自由場という陰性対照と、比の形

空間も局所にします。無限の空間格子で、一辺 $R = c\ell$ の時空の箱 B_R に台を持つ汎関数だけを動かした局所の Poincaré 定数を $C_P^{\mathrm{loc}}(B_R)$ と書きます（24-03 §03 の空間も局所にした版。下の (11) は 24-03 の (4) と同じ不等式)。素直な局所の緩和時間の仮定は「$C_P^{\mathrm{loc}}(B_{c\ell}) \le K(c)\,\ell^2$」です。ところがこの形は、四次元では隙間について何も言いません。

陰性対照（質量の無い自由場）

時空四次元・無限体積の質量の無い自由スカラー場（正準の目盛り・$\hbar = 1$）で、

$$\frac{R^2}{4\pi^2} \;\le\; C_P^{\mathrm{loc}}(B_R) \;\le\; R^2. \tag{11}$$

したがって $K(c)=c^2$ で「$C_P^{\mathrm{loc}}(B_{c\ell})\le K(c)\ell^2$」が成り立ち、隙間は 0 である。

初 証明。ガウスの Poincaré 定数は共分散を箱に圧縮した作用素のノルムです 典 （前節）。共分散 $(-\Delta)^{-1}$ は四次元で過渡的なので有限で、連続の核は $1/(4\pi^2|z|^2)$ です。上は Schur の評価で、ノルムは $\sup_x\sum_{y\in B_R}G(x-y)\le\int_{|z|<2R}\frac{d^4z}{4\pi^2|z|^2}=R^2$ 以下です（格子の核の漸近は連続の核で置き換えた。この段は 仮 ）。下は、箱の Dirichlet の基底状態 w を試験の向きに取り、$\langle w,Gw\rangle\langle w,-\Delta w\rangle\ge\|w\|^4$（Cauchy–Schwarz）から $C_P^{\mathrm{loc}}\ge 1/\lambda_D(B_R)\approx R^2/(4\pi^2)$ です（時空の箱の四つの向きに π^2/R^2 ずつ）。∎

数で見ると、比 $\Gamma(R):=C_P^{\mathrm{loc},0}(B_R)/R^2$ は $R=4,6,8,10,12,16$ で $0.0802,\ 0.0768,\ 0.0756,\ 0.0750,\ 0.0747,\ 0.0744$ と減り、補正は $1/R^2$ で対数の補正は無く、外挿で $\Gamma_\infty=0.0740$ です 読 （浮動小数・格子の熱核の数値積分と、独立な周期格子の経路の一致が相対 2×10^{-3} 以内・外挿は $R\le16$・一成分）。これは紙の挟み $[1/(4\pi^2),\,0.1125]$ の中で、Dirichlet の値 $1/(4\pi^2)=0.0253$ の 2.92 倍です。連続の核が次数 -2 の斉次なので、圧縮が R^2 にちょうど比例するのは期待どおりです。

低い次元との対照も一行置きます。時空二次元の無質量の場では赤外が発散して $C_P^{\mathrm{loc}}=\infty$、時間の窓だけを局所にした有限の空間体積でも一定のモードが $\approx T/(2m)$ で伸びます。質量の無い場が有限の局所の定数を持つのは、時空三次元以上で空間も局所にした場合だけで、第 24 部の四次元の設定はちょうどそこに当たります 初 。

比の形

そこで、局所の緩和時間の仮定を同じ格子・同じ箱・同じ目盛りの無質量の自由場（参照）との比で述べます。

$$K_{\mathrm{rel}}(c)=\frac{C_P^{\mathrm{loc}}(B_{c\ell};\mu)}{C_P^{\mathrm{loc},0}(c\ell)},\qquad C_P^{\mathrm{loc},0}(R)=\Gamma(R)\,R^2,\qquad (\xi^2)\!\uparrow_c^{\mathrm{rel}}(K):\ \ K_{\mathrm{rel}}(c)\le K \tag{12}$$

（$\beta\ge\beta_0$ に一様、$\ell=\xi_{\mathrm{RG}}(\beta)$）。定数 K は絶対の数になります。**一つの c での文**として置き、c に一様には要求しません。質量 m の自由場の比 $r(mR)$ は $mR\to0$ で 1 に近づくので、短い距離まで一様に $K<1$ を求める文は自由場に近い理論では偽になるからです 見 。c に一様な K を求めると、$c\to\infty$ で全体の上界の仮定に戻ります（24-03）。

凸な相互作用を足した場（作用 $\frac12\langle\Phi,-\Delta\Phi\rangle+\sum_x U(\Phi_x)$、$U$ は凸）では、Hesse 行列が $-\Delta$ 以上なので Brascamp–Lieb の不等式から $K_{\mathrm{rel}}\le1$ です 仮 （不等式の書誌は確かめていない）。凸な場は帯 $[0,1]$ の中にいます。橋に要るのは、次の節で見るとおり、その中の閾より下の部分です。

05

無限体積の橋と閾 — 局所の励起のモーメントの仮定と比への移しかえ

無限体積では、一つの時刻の関数 $F = \psi_1/\psi_0$ は局所でも陽でもありません。代わりに、箱の中の局所の観測量が低いエネルギーの励起を作る、という仮定を置きます。

局所の励起のモーメントの仮定

一辺 $c\ell$ の空間の箱に台を持つ局所の観測量 O があって、$\varphi = (O - \langle O\rangle)\Omega$（$\Omega$ は真空）の、転送の生成作用素 A についてのスペクトル測度 ν_φ が

$$\frac{M_3}{M_1} := \frac{\int a^3\, d\nu_\varphi(a)}{\int a\, d\nu_\varphi(a)} \;\le\; m_\infty^2 + \frac{\gamma}{(c\ell)^2} \tag{13}$$

を満たす。m_∞ は無限体積の格子単位の隙間、γ は β に依らない定数。

仮 どの相互作用のある模型でも示していません。仮定 (13) は結論の量 m_∞ を含みますが、上からの比較にだけ現れ、$m_\infty > 0$ を含意しません。$m_\infty = 0$ でも意味を持つ文で（局所の観測量で低いエネルギーの励起に近づける、という近似の性質）、質量の無い自由場は $\gamma = d\pi^2$ で満たします。

初 自由場での成立。一粒子の状態で $\nu_\varphi = \sum_p |\hat w_p|^2/(2\omega_p)\,\delta_{\omega_p}$、$M_3/M_1 = m_0^2 + \langle w, -\Delta w\rangle/\|w\|^2 \le m_0^2 + d\pi^2/(c\ell)^2$（$w$ は空間の箱の Dirichlet の基底状態、d は空間の次元）。

窓 T の比は Jensen の不等式で $\ge \kappa/(M_3/M_1 + \pi^2/T^2)$ と押さえられます。時空の箱を等方に扱い $\lambda_W := \gamma + \pi^2$ と置くと

$$C_P^{\mathrm{loc}}(B_R) \;\ge\; \frac{\kappa}{m_\infty^2 + \lambda_W/R^2} \tag{14}$$

で、これと局所の緩和時間の仮定 $C_P^{\mathrm{loc}} \le K\ell^2$ から $m_{\mathrm{phys}}^2 \ge \kappa/K - \lambda_W/c^2$ です 初 （(13) と無限体積の基底状態変換の恒等式の上）。Lean `LatticeGauge.LocalH.gap_lower_dirichlet`（仮定：$0 < \kappa, c, K, \ell$ ・$0 < m^2 + \lambda \cdot \kappa/(m^2+\lambda) \le C_P \cdot \lambda \le \gamma/(c\ell)^2 \cdot C_P \le K\ell^2$。結論：$\kappa/K - \gamma/c^2 \le (m\ell)^2$）。

比の形 (12) に移すと、$C_P^{\mathrm{loc}} \le K_{\mathrm{rel}}\Gamma R^2$ と (14) から

$$(m_\infty R)^2 \;\ge\; \lambda_W\Big(\frac{K_*}{K_{\mathrm{rel}}} - 1\Big), \qquad K_* := \frac{\kappa}{\lambda_W\,\Gamma} \tag{15}$$

です 初 （(13) と無限体積の恒等式の上の代数）。 Lean `LatticeGauge.LocalHReference.ratio_bridge`（仮定：$0 < \lambda_W, \Gamma, R, K_{\mathrm{rel}} \cdot \kappa/(m^2 + \lambda_W/R^2) \le C \cdot C \le K_{\mathrm{rel}} \Gamma R^2$。結論：(15)）、`kstar_correspondence`（仮定：$0 < \lambda_W, \Gamma, c$。結論：$K(c) = K_{\mathrm{rel}}\Gamma c^2$ のとき $K(c) < \kappa c^2/\lambda_W \iff K_{\mathrm{rel}} < K_*$）、`ratio_bridge_vacuous_of_ge`（仮定：$K_* \le K_{\mathrm{rel}}$。結論：(15) の右辺 ≤ 0）。

読み方。$K_{\mathrm{rel}} < K_*$ なら右辺は正で、質量の下界

$$m_\infty \ell \;\ge\; \frac{\sqrt{\lambda_W}}{c}\sqrt{\frac{K_*}{K_{\mathrm{rel}}} - 1} \tag{16}$$

が出ます。$K_{\mathrm{rel}} \ge K_*$ なら (15) は空です。参照は自分の Dirichlet の下界を満たす（$\Gamma \ge 1/\lambda_W$、(11) の左と同じ Cauchy–Schwarz）ので、どの参照でも $K_* \le \kappa$ です 初 。 Lean `LatticeGauge.LocalHReference.kstar_le_kappa`（仮定：$0 \le \kappa \cdot 0 < \lambda_W, \Gamma \cdot 1 \le \lambda_W \Gamma$。結論：$K_* \le \kappa$）。比が 1 の場（$K_{\mathrm{rel}} = 1$）では橋は架かりません（`rel_one_no_bridge`、陰性対照）。

(15) の λ_W には注意が要ります。λ_W は「許される局所の観測量の族の中で達せる M_3/M_1 の値」で、試験の観測量の族を選ぶと決まる数です。分母の参照 Γ と分子の下界の λ_W は、同じ族で取らなければなりません。次の節で、この点が閾を動かします。

06

三つの参照 — スカラー・ゲージ商・色の一重項

表 2 に、参照の取り方ごとの値を並べます。どの行も自由場の参照の数で、対象の Wilson 測度の比 K_{rel} は一つも測っていません。

表 2　三つの参照と閾（四次元・正準の目盛り。数は浮動小数の計算と外挿の読み）

参照	試験の観測量の族	Γ_∞	λ_W（R^2 倍）	$\lambda_W\Gamma$	閾 K_*/κ	橋が質量を見る箱	条件
スカラー	箱の場の全ての関数（最良は一次）	0.0740	$4\pi^2 \approx 39.5$	2.92	0.342	$mR \approx 4.2$	一成分・外挿は $R \le 16$ 読
ゲージ商	箱の**全ての**サイトのゲージ変換で割った商＝箱のプラケットの角の関数	0.0277	72.0	1.99	0.502	$mR \approx 5.2$（Proca の横波）	一色の成分のガウス・$\beta = 1$・外挿は $R \le 16$（λ_W は $R \le 14$） 読

参照	試験の観測量の族	Γ_∞	λ_W（R^2 倍）	$\lambda_W\Gamma$	閾 K_*/κ	橋が質量を見る箱	条件
$SU(2)$ の色の一重項	色の一重項（主項は二次のカオス）・箱の差し渡しの大きさのループを含む族	$\Gamma_Q/2 \approx 0.0138$	115〜117（試験の値）	約 1.6	約 0.62（下の値）	—	主項（$\beta \to \infty$）・三色の独立なガウス・一階の試験・外挿は $R \le 10$ 読

Lean `LatticeGauge.LocalHReference.kstar_measured`（仮定：測った $\Gamma \in [0.0739, 0.0741]$。結論：$0.34 < K_* < 0.344$）、`LatticeGauge.GaugeReference.kstar_gauge_measured`（仮定：測った $\Gamma_Q \in [0.02762, 0.02772]$・$\lambda_W^Q \in [71.8, 72.1]$。結論：$0.5 < K_*^Q < 0.505$）、`LatticeGauge.WilsonLoopReference.kstar2_measured`（仮定：測った $\lambda^{(2)} \in [115, 118]$・$\Gamma_Q \in [0.02762, 0.02772]$。結論：$0.61 < K_*^{(2)} < 0.63$）。三つとも測った数を仮定に置いた算術で、数そのものは Lean の外です。

なぜ参照で閾が変わるか

ゲージ固定の値は参照にならない。ゲージを固定した自由なゲージ場（Feynman ゲージ）の値はスカラーと同じ $\Gamma = 0.0740$ ですが、ゲージ固定の母数 α を変えると値が変わり、固定を外す（$\alpha \to \infty$）と箱の中のゲージ変換の向きで無限大になります 初（ゲージの像の向きの試験関数で $\Gamma_a(\alpha) \ge \alpha/(\lambda_D^{\mathrm{int}} R^2)$）。対象の Wilson 測度はゲージを固定しないので、比の分子が有限なのはゲージ不変な関数の上だけです。分母も同じ空間で測ります。Lean `LatticeGauge.GaugeReference.gauge_param_unbounded`（仮定：$0 < \lambda_D, R \cdot \alpha/(\lambda_D R^2) \le \Gamma_a(\alpha)$。結論：$\Gamma_a$ は α について有界でない）。

ゲージ不変な観測量は高い運動量しか持てない。ゲージ商の試験の空間は、箱のグラフの上で発散が 0 の場（横波）です。箱が可縮なら、これは箱のプラケットの角の関数の空間とちょうど一致します 初（立方体の複体の一次のホモロジーが 0 なので、閉じた道はプラケットの和の境界）。発散 0 の制約のもとでは、箱の全体で同じ向きを向く正の場（スカラーの最適な試験の向き）が作れません。最適な向きは運動量の大きい横波になり、$\lambda_W^Q = 72.0$ はスカラーの $4\pi^2$ の 1.82 倍、Γ_Q はスカラーの 0.374 倍です 読。比の閾は $0.342 \to 0.502$ と緩みますが、これは Γ が縮む割合が λ_W の伸びより大きいからで（$0.502/0.342 = 1/(0.374 \times 1.82)$）、局所の Poincaré 定数そのものに直した条件 $C_P^{\mathrm{loc}} < \kappa R^2/\lambda_W$ は $0.0253\kappa R^2$ から $0.0139\kappa R^2$ へ厳しくなります 読。

箱の境のゲージ変換も割る。箱の内部のサイトのゲージ変換だけで割り、境のサイトのゲージを凍らせると、箱を一様に貫く流束が試験の空間に入り、値はほぼゲージ固定の値に戻って Γ_Q の 2.2〜2.5 倍になります 読。箱のゲージ不変な観測量（Wilson ループ）は全てのサイ

トの変換で不変なので、「全てのサイトのゲージ変換で割る」ことが参照の定義の一部です（24-01 の「箱を貫く流束」の行）。

一色の近似が暗に仮定していたこと。一つの色の成分に線形化すると、箱の中のプラケットの角の線形結合だけで横波の試験の空間全体を張り、大きいループも箱の外に掛かるプラケットも要りません 初 （長方形のループの角は内側のプラケットの角の和）。ところが $SU(2)$ のゲージ不変量（色の一重項）には、単位元のまわりの展開で一次の項がありません 初 。一次の項 $\sum c_\ell^a A_\ell^a$ は定数のゲージ変換（大域の色の回転 $SO(3)$）でも不変でなければならず、$SO(3)$ は $\mathbb{R}^3$ に固定されたベクトルを持たないので $c=0$ です。ループの trace $\frac{1}{2}\operatorname{tr} U_C = \cos(|\theta_C|/2) = 1 - |\theta_C|^2/8 + \cdots$ は角の二次から始まります。Lean `LatticeGauge.WilsonLoopReference.no_linear_singlet`（仮定：二つの回転 $\operatorname{diag}(-1,-1,1)$・$\operatorname{diag}(1,-1,-1)$ で不変な一次形式。結論：係数は 0）。

参照はちょうど半分。主項（$\beta \to \infty$、三色の独立なガウス）では、色の一重項の関数は二次以上のカオスです。ガウス測度の Ornstein–Uhlenbeck の生成作用素の固有値は、共分散の固有座標の一粒子の固有値の和なので、二次のカオスの上の最小は一粒子の最小の二倍で、Poincaré 定数は $\Gamma_Q/2$ です 初 （等号は $f_w = \sum_a (\langle w, A^a\rangle^2 - \mathbb{E})$、$w$ は横波の最適な向き）。一階の試験の値は $\lambda_W(f_w) = \lambda(w) + 1/C(w)$ で、Cauchy–Schwarz から $\lambda(w) < \lambda_W(f_w) \le 2\lambda(w)$ です 初 。四次元の箱で $\lambda^{(2)} R^2 \to 115\text{〜}117$（$\lambda_W^Q$ の約 1.6 倍）、閾は $K_*^{(2)} = 2/(\lambda^{(2)}\Gamma_Q) \approx 0.62\kappa$ です 読 。$\lambda^{(2)}$ は試験の値（上からの値）なので、出る閾は使える閾の下の値です。Lean `chaos2_gamma`・`chaos2_lambda`（仮定：$0 < n, g$ と Wick の積率を式として。結論：比の代数）、`chaos2_bracket`（仮定：$0 < C$・$1 \le \lambda C$。結論：$\lambda < \lambda + 1/C \le 2\lambda$）。

大きいループが要る。この値を出すには、箱の差し渡しの大きさのループが要ります。プラケットだけの族 $\{\operatorname{tr} U_p\}$ の主項では参照が $1/R^2$ で消え（二次元で $\Gamma_Q/2$ の 0.29 倍から 0.035 倍、$R = 4 \to 12$）、2×2 までのループを足しても 0.12 倍（$R=12$）で、橋は格子の尺度のことしか言いません 読 。箱の差し渡しの長方形を全て入れると、二次元で $\Gamma_Q/2$ に全ての桁で一致し、三次元の平らな長方形だけでは 0.73 倍です 読 。四次元の大きいループ（平らでないもの・投げ縄の積を含む）の値はありません。

橋が質量を見る箱

質量 m の自由場の比 $r(mR) = C_P^{\mathrm{loc}}(R;m)/C_P^{\mathrm{loc}}(R;0)$ は、$R = 4\text{〜}12$ で 0.3% 以内に mR だけの関数に揃います 読 。スカラーでは $r = 0.932,\ 0.825,\ 0.623,\ 0.359,\ 0.0772$（$mR = 0.5, 1, 2, 4, 12$）、ゲージ商の横波（Proca）では $r_Q = 0.950,\ 0.842,\ 0.721,\ 0.610,\ 0.514,\ 0.434$（$mR = 1, \dots, 6$）です。比が閾に落ちる所は、スカラーで $mR \approx 4.2$、横波で $mR \approx 5.2$ で

す（どちらも線形補間）読。**橋が質量を見るのは、箱の一辺が相関長の 4〜5 倍以上のときだけです。**横波は運動量が大きいので、質量に気づくのが遅れます。

裏から言えば、比が帯 $[K_*, 1)$ にある場について、この橋は何も言いません。質量 $mR < 4.2$ の自由場（スカラーの参照）もこの帯に入るので、橋は質量を持つ場も取りこぼします。帯の中の場で質量を見る別の議論（Jensen の不等式と Dirichlet の試験関数の外）があるかは決まっていません。

07

0+1 次元の注 — 最も短い窓でも比は ω_b/m

0+1 次元の二重井戸 $V(x) = (x^2-1)^2/8$（$V''(\pm 1) = 1 = \omega_b^2$、$S_0 = 2/3$）で、比の形を試します。0+1 次元には有限の無質量の参照がありません（自由な粒子は定常な測度を持たず $C_P^{\mathrm{loc}} = \infty$）。参照は底の曲率の調和振動子 ω_b を取るほかなく、比の文は「$K_{\mathrm{rel}}(T) < \kappa$ なら $m > \omega_b$」になります初（窓の中の上限の命題の下界と Ψ_T の m についての減少から。閾は κ で、四次元の 0.342κ との差は空間の箱の Dirichlet の損そのもの）。Lean `LatticeGauge.LocalHReference.gap_gt_ref_of_ratio`（仮定：Ψ は単調非増加・$0 < \kappa$・$0 < \Psi(\omega_b)$・$\kappa\Psi(m) \le C \le K\Psi(\omega_b)$・$K < \kappa$。結論：$\omega_b < m$）。

一つの時刻だけの窓は閉じた形で計算できます。時間の刻み ε の格子で、一つの時刻の周辺 ψ_0^2 と $\mathcal{E}_1(f) = (\hbar/\varepsilon)\int \psi_0^2 |f'|^2$ の Langevin の生成作用素は、基底状態変換で

$$L = -\frac{2}{\varepsilon\hbar}\,\psi_0^{-1}(H - E_0)\,\psi_0, \qquad C_P^{\mathrm{loc}}(1) = \frac{\varepsilon}{2m}, \qquad K_{\mathrm{rel}}(1) = \frac{\omega_b}{m} \tag{17}$$

です初（ψ_0 が Schrödinger の基底状態のとき。参照は $\varepsilon/(2\omega_b)$）。これは 24-05 の恒等式そのものです。Lean `LatticeGauge.LocalHDoubleWell.one_slice_ratio`（仮定：$0 < \varepsilon, m, \omega$。結論：$(\varepsilon/(2m))/(\varepsilon/(2\omega)) = \omega/m$）。

窓を長くしたときの振る舞いは、窓の中の上限の命題の上で三つの領分に分かれます初。

表 3　0+1 次元の二重井戸の比 $K_{\mathrm{rel}}(T)$（$\mathcal{F}_1$ の部分の値 $\Psi_T(m)/\Psi_T(\omega_b)$ の三つの領分）

窓	比	$m \propto e^{-S_0/\hbar}$ での桁
$T \to 0$（一つの時刻）	ω_b/m	$e^{S_0/\hbar}$
$1/\omega_b \ll T \ll \xi$	$\omega_b^2 T/(2m)$	$T\,e^{S_0/\hbar}$
$T \gg \xi$	$(\omega_b/m)^2$	$e^{2S_0/\hbar}$

移り目は $\Psi_T(m)$ が $1/m^2$ の半分になる窓で、$\omega_0 = m$ すなわち $\tan(mT/2) = 1$、$T_\times = \pi/(2m)$ です初。Lean `LatticeGauge.LocalHDoubleWell.crossover_root`・

`crossover_half`（仮定：$0 < m$。結論：$T = \pi/(2m)$ で $m\tan(mT/2) = m$、値が半分。根の一意性は Lean の外）。

格子の値（時間の刻み $\varepsilon = \frac{1}{2}$・転送の核は Trotter の対称積・$\hbar = 0.3,\ 0.15,\ 0.08$）は、一つの時刻の窓で $K_{\mathrm{rel}}(1) = 4.61,\ 21.6,\ 638$、$K_{\mathrm{rel}}(1)\cdot m = 1.04,\ 1.04,\ 1.05$ です 読 （(17) からのずれは時間を刻んだ転送の ψ_0 と参照の離散化から）。移り目は格子で $k_\times m\varepsilon = 1.571\text{〜}1.574$（$\pi/2 = 1.5708$） 読 。窓の中の汎関数を一点の関数の和から多点の関数に広げると比はさらに上がり、二つの時刻の窓の直接の値は $\mathcal{F}_1$ の値の 1.02・1.09・1.34 倍、八つの時刻の窓で三点の積までの族の下界は 1.07・1.27・2.12 倍以上です 読 （下界・$\hbar$ が小さいほど族を広げるたびに上がり、飽和していない）。

比の文「$K_{\mathrm{rel}} < \kappa$ なら $m > \omega_b$」は、隙間がトンネルで小さい二重井戸では正しく破れます（全ての窓で $K_{\mathrm{rel}} \geq 4.6 > \kappa = 1$）。0+1 は四次元の比の類比ではなく、比の形が非凸性に正しく反応することの陰性の対照です。

この注から四次元へ持ち出すこと。二重井戸の非凸性は窓の長さに依らず、一つの時刻の分布の二峰性として最も短い窓から比に出ます。したがって「短い距離では比が 1 に近い」（§04 で c に一様を求めなかった理由）は、比の形から出る事実ではありません。四次元でそう見込むのは、理論が短い距離で自由場に近いという漸近自由に依る仮定です 仮 。

08 どの仮定のどの部分がどの結論に要るか

表 4　結論ごとに要る緩和時間の仮定の部分と、ほかに要る仮定

結論	要る緩和時間の仮定の部分	ほかに要る仮定	分類
有限の空間体積・各 β の格子の物理単位の隙間の下界	窓 $c\ell$ の局所の緩和時間の仮定（(4)）、または $\mathcal{F}_1$ に制限した上界の仮定	片側の橋の仮定（連続の時間・有限の空間格子・$T = \infty$）。Wilson の時間を刻む格子では時間の刻みの比べの仮定が残り、窓の版は書いていない	初 （(6)(10)）・仮 （時間の刻みの比べの仮定）
無限体積の格子の物理単位の隙間の下界	一つの c で $K_{\mathrm{rel}}(c) < K_*$（比の形 (12)）	局所の励起のモーメントの仮定・無限体積の基底状態変換の恒等式・κ が β に一様・試験の観測量は色の一重項の族（箱の差し渡しのループを含む）	仮
区画の間の移り変わりの速さ	区画ごとの拡散型緩和時間の仮定と区画の間の量 C_{trans}（24-03）	質量ギャップとは無関係	見

結論	要る緩和時間の仮定の部分	ほかに要る仮定	分類
上界の仮定そのもの	全ての f	閉じた箱の段（24-03）	仮 （四次元の周期の箱では、$SU(3)$ 以上の原典の数値と予想を延ばした読みの上で偽と読める側）

表 4 の要点は、どの行の結論にも**全体の上界の仮定は要らない**ことです。片側の橋が使うのは上界の仮定の時刻に局所な部分（有限体積）か、局所の緩和時間の仮定の比の形（無限体積）だけです。上界の仮定の残り――時刻に局所でない関数についての文――は、位相電荷のような量が上界の仮定を妨げうる場所で（24-01）、橋はそこを通りません 初 （表 4 の一行目）・ 見 （二行目以下の読み）。

Jaffe–Witten の問題の解説は「時空の体積に一様な質量ギャップを示すには新しい考えが要る」と書いています 典 。局所の緩和時間の仮定は箱の大きさを記帳の長さに結び、体積に依らない文として立つので、「体積に一様」を Poincaré の言葉で述べる一つの形になっています 見 。ただし、それを示す道具はありません。

09

言えないこと

- 局所の励起のモーメントの仮定はどの相互作用のある模型でも示していません。無限体積の基底状態変換の恒等式も仮定です。無限体積の橋 (15)(16) はこの二つの上の代数です。
- 表 2 の値は浮動小数の計算と外挿の読みです（スカラーと横波は $R \le 16$、色の一重項は $R \le 10$）。0.62κ は一階の試験の値から出した閾で、使える閾の下の値です。色の一重項は主項（$\beta \to \infty$）・三色の独立なガウスの近似で、β が有限の $SU(2)$ の値はありません。四次元の大きいループの値もありません。
- 「橋が質量を見るのは箱が相関長の 4〜5 倍以上」は質量のある**自由場**の比の線形補間です。相互作用のある場の比の値はありません。
- 帯 $[K_*, 1)$ に入る場について、橋は何も言いません。帯の中で質量を見る別の議論は未決です。
- 「短い距離で比は 1 に近い」は漸近自由に依る仮定で、比の形からは出ません（0+1 の二重井戸では偽）。
- 窓の議論は時間を連続に取った格子の文で、Wilson の時間を刻む格子では時間の刻みの比べの仮定が残ります。
- どの結論も、各 β の格子の物理単位の隙間の下界までです。$m_{\mathrm{phys}}(\beta)$ の極限・連続極限・無限体積の測度の存在は従いません。質量ギャップ・緩和時間の仮定・上界の仮定・局所の

緩和時間の仮定のどれも示していません。

10

五分類の表と依存グラフ

この章の行を五分類の書式（23-00 §01）に「見」を足して並べます。行の記号は下の依存グラフの節点の番号です。

表 5　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	無限体積の測度の存在と一意性	仮	23-01 §02	$\beta \geq \beta_0$	—
2	基底状態の仮定・定常な経路の測度の仮定・計量の比べの仮定：離散スペクトル・$T = \infty$ の定常な測度・計量の比較	仮	23-01 表 6	連続の時間・有限の空間格子	—
3	局所の C_P の性質（窓の周辺だけで決まる・c に単調・$c \to \infty$ で C_P）	初	24-03	連続の時間	`local_le_global`・`local_approaches_global`（仮定：有界・非空・族の和が全体）
4	$(\xi^2)\uparrow_c^{\mathrm{rel}}(K)$：一つの c で $K_{\mathrm{rel}}(c) \leq K$	仮	(12)	—	—
5	$(\xi^2)\uparrow_c^{\mathrm{loc}}(K)$：$C_P^{\mathrm{loc}}(c) \leq K\ell^2$（有限の空間体積）	仮	(4)	—	—
6	局所の励起のモーメントの仮定：局所の観測量の励起のモーメント比	仮	(13)	—	—
7	無限体積の基底状態変換の恒等式	仮	§05	—	—
8	κ が β に一様	仮	23-01 §06	場の目盛りでは満たす見込み	—
9	三つの参照の値 Γ_∞・λ_W（表 2）	読	§04・§06	自由場・外挿	—
10	基底状態変換の恒等式	初	23-01 (18)	有限の空間格子	—
11	片側の橋と (2)：$\mathcal{F}_1$ の上限がちょうど ξ^2	初	23-01 (17)・(2)(3)	連続の時間・正準	`poincare_lower_of_gap`（仮定：$0 < p, m, \kappa, E$・$2p/m \leq V$・$E \leq 2mp/\kappa$・$V/E \leq C_P$）・`local_rayleigh_le`
12	窓の因子の単調性の命題：$g(x) = \varphi(x)/x^2$ は狭義減少	初	§03	$x > 0$	`wr_strictAntiOn`（仮定なし）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
13	窓の中の上限の命題：窓の上限 $\Psi_T(m)$	初	(8)	連続の時間・正準	—（根の存在は Lean の外）
14	窓の下界 (7)	初	(6)(7)	有限の空間体積	`gap_lower_of_window`（仮定は (7) の脇）
15	窓の下界 (10)	初	(10)	有限の空間体積	`gap_lower_of_local_window`（仮定は (10) の脇）
16	無質量の自由場が「ある $K(c)$」の文を満たす（(11)）	初	§04	時空四次元・無限体積（格子の核の漸近は仮）	`dirichlet_bound_vacuous`（仮定：$0 < \ell \cdot \kappa c^2/\gamma \le K$。結論：この議論の仮定が $m = 0$ と両立）
17	比の橋 (15)	初	§05	行 6・7 の上	`ratio_bridge`・`kstar_le_kappa`
18	閾 0.342κ・0.502κ・約 0.62κ（下の値）	読	表 2	自由場・外挿	`kstar_measured`・`kstar_gauge_measured`・`kstar2_measured`（測った区間を仮定）
19	色の一重項に一次の項が無い・参照が半分	初	§06	主項・三色の独立なガウス	`no_linear_singlet`・`chaos2_gamma`
20	0+1 の比の文と一つの時刻の比 (17)	初	§07	0+1・Schrödinger の ψ_0	`gap_gt_ref_of_ratio`・`one_slice_ratio`
21	「短い距離で比は 1 に近い」	仮	§07	漸近自由に依る	—
22	有限の空間体積の隙間の下界	初	表 4 の一行目	行 2・5 の上	—
23	無限体積の格子の物理単位の隙間の下界	初	表 4 の二行目	行 1・4・6・7・8 の上	—

Lean の定理の名前空間は、`LatticeGauge.LocalH`（行 3・12・14・15・16）・`LatticeGauge.LocalHReference`（行 17・18 の一つ目・行 20 の一つ目）・`LatticeGauge.GaugeReference`（行 18 の二つ目）・`LatticeGauge.WilsonLoopReference`（行 18 の三つ目・行 19）・`LatticeGauge.LocalHDoubleWell`（行 20 の二つ目）・`EuclideanPath.GapBridge`（行 11）です。どの束も、保証するのは書いてある仮定から結論が出る代数と算術と一変数の解析だけで、経路の測度・恒等式・窓の中の上限の命題・参照の数値は Lean の外にあります（23-13）。

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい。1・3・4・16 は 24-03 の依存グラフの 1（無限体積の測度の存在）・6（四次元の局所の Poincaré 定数の性質）・12（局所の緩和時間の仮定）・7（絶対の形の空虚さ）に当たります）：

```
 1  仮  無限体積の測度の存在と一意性                                  β ≥ β₀
 2  仮  片側の橋の三つの仮定（基底状態・定常な経路の測度・計量の比べ）
        連続の時間・有限の空間格子・T=∞
 3  初  局所の C_P：窓の周辺だけで決まる・c に単調・c→∞ で C_P        Lean local_le_g
 4  仮  局所の緩和時間の仮定（比の形）：一つの c で K_rel(c) ≤ K
 5  仮  局所の緩和時間の仮定（有限体積の形）：C_P^loc(c) ≤ K ℓ²
 6  仮  局所の励起のモーメントの仮定 (13)
 7  仮  無限体積の基底状態変換の恒等式
 8  仮  κ が β に一様
 9  読  参照の値 Γ∞・λ_W（表 2）
10  初  基底状態変換の恒等式（23-01 の (18)）
11  初  片側の橋：F₁ の上限がちょうど ξ² ⟸ 2・10                    Lean poincar
12  初  窓の因子の単調性：g = φ/x² は狭義減少                       Lean wr_stric
13  初  窓の中の上限：Ψ_T(m) ⟸ 2・10
14  初  窓の下界 (7) ⟸ 5・11・12                                    Lean gap_
15  初  窓の下界 (10) ⟸ 5・13                                       Lean gap_
16  初  陰性対照：無質量の自由場が「ある K(c)」を満たす (11)
17  初  比の橋 (15) ⟸ 3・4・6・7                                    Lean rati
18  読  閾 K* = 0.342κ／0.502κ／約 0.62κ ⟸ 9                        Lean ksta
19  初  一重項：一次の項が無い・参照が半分                          Lean no_linear
20  初  0+1：K_rel < κ ⇒ m > ω_b・一つの時刻の比 ω_b/m ⟸ 10・13
21  仮  短い距離：「比は 1 に近い」（漸近自由に依る。0+1 の行 20 では偽）
22  初  有限体積の各 β の格子の物理単位の隙間の下界 ⟸ 14・15
23  初  無限体積の格子の物理単位の隙間の下界（条件つき） ⟸ 1・8・17・18・19
```

円の検査は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを見るだけです。仮定の行のうち結論の量（隙間 m_∞）を含むのは局所の励起のモーメントの仮定だけで、そこでは m_∞ が上からの比較にだけ現れ、$m_\infty > 0$ を含意しないことを §05 で確かめました。無質量の自由場の節点は結論に入らない陰性対照で、「ある $K(c)$」の形を捨てた理由を記録しています。「短い距離で比は 1 に近い」は仮定で、結論の二つの隙間の下界はこれに依りません（c を一つに止めたため）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
時刻に局所な族 $\mathcal{F}_1$ の上の上限が正準でちょうど ξ^2 で、$\mathcal{F}_1$ の上の上界の仮定が格子の物理単位の隙間の下界と同じであること（連続の時間・有限の空間格子・$T=\infty$） 初	Wilson の時間を刻む格子での同じ文（時間の刻みの比べの仮定が残る）。上界の仮定の $\mathcal{F}_1$ の外の部分の真偽
窓の因子の単調性、窓の中の上限の命題、窓の局所の緩和時間の仮定から有限の空間体積の隙間の下界 (7)(10) 初	局所の緩和時間の仮定がどの模型・どの β で成り立つか
「ある $K(c)$」の形は四次元の無質量の自由場で満たされて空虚なこと、比の形への移しかえと $K_* \le \kappa$ 初	局所の励起のモーメントの仮定と無限体積の恒等式（どちらも仮定）

言えている	言えていない
三つの参照の値と閾 0.342κ・0.502κ・約 0.62κ、橋が質量を見る箱 $mR \approx 4.2$・5.2 読	対象の Wilson 測度の比 K_{rel}。β が有限の $SU(2)$ の閾。四次元の大きいループの値。帯 $[K_*, 1)$ の場
0+1 の二重井戸で最も短い窓の比がちょうど ω_b/m、窓による三つの領分 初 ・格子の値 読	四次元で短い距離の比が 1 に近いこと（漸近自由に依る仮定）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
片側の橋・恒等式・円の上の自由な粒子の反例	本書	23-01 §06 の (17)(18)・円の上の自由な粒子の反例。論文「片側の橋」（論文の一覧）の定理 3.1・命題 4.1・命題 5.1
(2)(3)・窓の因子の単調性の命題・窓の中の上限の命題・(6)〜(10)・(15)(16)	初	本文の証明。代数の段は Lean の束（表 5 の機械検査の欄）
ガウスの Poincaré 定数＝共分散のノルム	典	M. Hairer, A. M. Stuart, J. Voss, P. Wiberg, Analysis of SPDEs arising in path sampling. Part I: The Gaussian case, Commun. Math. Sci. 3 (2005) 587–603, arXiv:math/0601095, Lemma 2.2
表 1 の右の列・(11) の $\Gamma(R)$・表 2・$r(mR)$・表 3 の格子の値	読	自由場の共分散を箱に圧縮した作用素の最大固有値（熱核の数値積分と周期格子の二つの経路・Lanczos）、0+1 は転送の核の格子の固有値問題と Rayleigh–Ritz の下界。どれも浮動小数で、外挿は本文に書いた範囲
体積に一様な隙間には新しい考えが要る	典	A. Jaffe, E. Witten, Quantum Yang–Mills Theory, Clay Mathematics Institute (2000), §6
Brascamp–Lieb の不等式（凸な摂動で $K_{\mathrm{rel}} \le 1$）	仮	書誌を確かめていない

この章で使った語 — 時刻に局所な族 $\mathcal{F}_1$・窓・窓の因子 $\varphi(x)$・窓の中の上限の命題・局所の Poincaré 定数 C_P^{loc}・局所の緩和時間の仮定（$(\xi^2)\uparrow_c^{\mathrm{loc}}$・$(\xi^2)\uparrow_c^{\mathrm{rel}}$）・比 K_{rel}・無質量の参照と Γ・ゲージ商の参照・閾 K_*・局所の励起のモーメントの仮定・帯 $[K_*, 1)$・色の一重項と二次のカオス。意味は A-02 用語集 と 24-09 にあります。

次に読む章：24-05 時間を連続にする — Hamiltonian 格子と真空の測度 — (17) の恒等式を一般の格子で述べ、緩和時間の仮定を経由しない Poincaré の文として読む。

2026-10-09 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 24 部 一本目の道（後半） 真空の測度・基底状態変換・Kogut–Susskind · Kiichi, Shiori and Rin

時間を連続にする — Hamiltonian 格子と真空の測度

この章は本書の検討です。§04・§06 は未解決の地図です。

この章で分かること — 時間を連続に取った格子では、ハミルトニアンの隙間 Δ が、一つの時刻の真空の分布 $\nu = \psi_0^2$ の Poincaré 定数とちょうど $\Delta = \hbar^2/(2C_P(\nu))$ で結ばれること（証明つき）。これが第 23 部の片側の橋の $T = \infty$ の裏返しで、24-04 の最も短い窓の比 ω_b/m と同じ式であること。Kogut–Susskind の Hamiltonian 格子で隙間を直接扱う道と、そこで局所から大域への隙間の定理が当たらない理由。$SU(2)$ の色の一重項では、主項で真空の測度の Poincaré 定数が半分になり、ゲージ不変な最低の試験の空間が二粒子になること。真空の測度の定数を測るのに何が要るか。

前提となる章 — 23-01 §04（表 3 の三つの C_P）・23-01 §06（片側の橋の命題（論文の定理 3.1）の (17)、恒等式 (18)）・24-04（時刻に局所な族の上限 (2)、0+1 の窓の (17)、色の一重項）・2-05 §08（一次元の基底状態変換）。記号は 24-09 にまとめてあります。

先に言うこと — 水準は〔三〕です。この章の恒等式は、隙間を「ある測度の Poincaré 定数」と言い換えるだけで、問題を易しくしません。真空の測度は陽に書けず、その Poincaré 定数を結合に一様に押さえる道具はありません。この章は質量ギャップを示しません。拡散型緩和時間の仮定を経由しない見方を一つ置き、その見方で何が要るかを並べます。

この章の順序

1. 隙間は真空の測度の Poincaré 定数 — 隙間と真空の測度の命題（(1)〜(4)）・手で確かめる例
2. 三つの Poincaré 定数 — 経路の測度・時刻に局所な族・真空の測度（表 1・(5)(6)）
3. 0+1 の格子の版 — 一つの時刻の窓と、時間を刻んだときのずれ
4. Kogut–Susskind の Hamiltonian 格子 — 隙間を直接扱う道・電場と磁場の分け方の frustration の命題・道具が当たらない所（表 2）
5. $SU(2)$ の色の一重項と二粒子 — 主項で定数が半分（(7)(8)）
6. 真空の測度の定数を測る道 — 何が要るか

7. 言えないこと

8. 五分類の表と依存グラフ — 表 3

01

隙間は真空の測度の Poincaré 定数

設定は第 23 部の片側の橋と同じです。空間は有限の格子、一つの時刻の配位の空間は Q（$\mathbb{R}^n$、またはコンパクトで連結な Riemann 多様体）、運動項の計量は M、ハミルトニアンは $H = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta_M + V$ で、基底状態の仮定（論文の (A1)。スペクトルは離散・基底状態 ψ_0 は重複せず滑らかで正・$\Delta = E_1 - E_0 > 0$）を置きます。一つの時刻の真空の分布と、その上の Dirichlet 形・Poincaré 定数を

$$\nu = \psi_0^2 \, d\mathrm{vol}, \qquad \mathcal{E}_\nu(F) = \int_Q \psi_0^2 \, |dF|^2_{M^{-1}} \, d\mathrm{vol}, \qquad C_P(\nu) = \sup_F \frac{\mathrm{Var}_\nu(F)}{\mathcal{E}_\nu(F)} \tag{1}$$

と置きます（F は Q の上の滑らかな関数で定数でないもの）。ゲージ理論では F をゲージ不変な関数に限り、Δ はゲージ不変な部分空間の隙間です。

隙間と真空の測度の命題

基底状態の仮定のもとで

$$\Delta = \frac{\hbar^2}{2\, C_P(\nu)} \tag{2}$$

が成り立ち、(1) の上限は $F = \psi_1/\psi_0$ で達成される。

初 証明。写像 $U : F \mapsto F\psi_0$ は $L^2(\nu)$ から $L^2(d\mathrm{vol})$ への等長写像で、定数 1 を ψ_0 に移します。したがって $\langle F \rangle_\nu = 0 \iff F\psi_0 \perp \psi_0$、そのとき $\|F\psi_0\|^2 = \mathrm{Var}_\nu(F)$ です。滑らかな F について、基底状態変換の恒等式（23-01 の (18)）

$$\big\langle F\psi_0, \, (H - E_0)\, F\psi_0 \big\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\, \mathcal{E}_\nu(F) \tag{3}$$

が成り立ちます。$H - E_0$ は ψ_0 の直交補の上で Δ 以上なので（min-max）、$\langle F \rangle_\nu = 0$ の滑らかな F で

$$\Delta \, \mathrm{Var}_\nu(F) \;\le\; \frac{\hbar^2}{2}\, \mathcal{E}_\nu(F), \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{\mathrm{Var}_\nu(F)}{\mathcal{E}_\nu(F)} \le \frac{\hbar^2}{2\Delta} \tag{4}$$

です。定数を足しても両辺は変わらないので、全ての滑らかな F で (4) が成り立ちます。等号は $F = \psi_1/\psi_0$（基底状態の仮定から滑らかで、$F\psi_0 = \psi_1$、(3) の左辺は $\Delta\|\psi_1\|^2$）で取られます。$Q = \mathbb{R}^n$ では、ψ_1/ψ_0 の Dirichlet 積分が有限であることを、論文「片側の橋」（論文の一覧）の切り落としの補題（補題 3.3）で確かめます。∎

言い換えると、真空の分布の上の Langevin 力学の生成作用素は、基底状態変換で $-(2/\hbar^2)\,\psi_0^{-1}(H - E_0)\,\psi_0$ にユニタリ同値です。この型の言い換えはよく知られています（確率量子化や超対称量子力学の言い換え）。隙間と真空の測度の命題はその隙間の部分を、この本の (1) の約束で書いたものです。

較正（一つの調和振動子）。 $Q = \mathbb{R}$・$M = 1$・$V = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$・$\hbar = 1$ では、隙間は $\Delta = \omega$ なので、(2) から $C_P(\nu) = 1/(2\omega)$ です。ψ_0^2 は分散 $1/(2\omega)$ の正規分布で、一次元の正規分布の Poincaré 定数が分散に等しいこと（一次の関数で等号）と一致します。23-01 の表 3 の真空の C_P の行（自由場で $1/(2m)$）はこの値です [初]。

例 1（二つのサイトで手で確かめる）。 23-01 の例 6 の二つのサイトの格子（$\hbar = M = 1$・$V = \frac{1}{2}x^{\mathsf{T}}Kx$、基準振動 $u = (x_1 + x_2)/\sqrt{2}$ の角振動数 m_0、$v = (x_1 - x_2)/\sqrt{2}$ の角振動数 $\sqrt{m_0^2 + 2}$）では、ν は u の分散 $1/(2m_0)$・v の分散 $1/(2\sqrt{m_0^2+2})$ の独立な正規分布です。Poincaré 定数は二つの分散の大きい方 $1/(2m_0)$ で、(2) は $\Delta = m_0$ を与え、23-01 の例 6 の隙間と一致します [初]。$m_0 = \frac{1}{2}$ なら $C_P(\nu) = 1$、経路の測度の $C_P = \xi^2 = 4$ で、$4 = 4\,C_P(\nu)^2$ です（次の節の (5)）。

02

三つの Poincaré 定数

同じ C_P の記号で三つの量が呼ばれます。隙間と真空の測度の命題で、三つの関係が一つの表に並びます。

表 1　三つの Poincaré 定数（時間を連続に取った格子・正準の目盛り。自由場の列は $\hbar = 1$・質量 m）

量	どの測度・どの関数	隙間との関係	自由場	分類
C_P	経路の測度・全ての汎関数	片側 $C_P \geq \kappa\hbar^2/\Delta^2$	$1/m^2$	[初]（23-01 の片側の橋）
$\sup_{\mathcal{F}_1}$	経路の測度・時刻で積分した一時刻の関数	$= \hbar^2/\Delta^2 = (2C_P(\nu)/\hbar)^2$	$1/m^2$	[初]（24-04 の (2) とこの章の (2) を合わせる）
$C_P(\nu)$	一つの時刻の真空の分布	$= \hbar^2/(2\Delta)$	$1/(2m)$	[初]（隙間と真空の測度の命題）

二行目の等式

$$\sup_{f \in \mathcal{F}_1} \frac{\mathrm{Var}(f)}{\mathcal{E}(f)} = \Big(\frac{2\,C_P(\nu)}{\hbar}\Big)^2 \tag{5}$$

は、23-01 §04 の「自由場では $C_P^{(\beta)} = 4(C_P^{(\alpha)})^2$」を、相互作用のある場合に時刻に局所な族の上で正確にしたものです [初]。23-01 ではこの読み替えを自由場の形からの類推として書きました。片側の橋の仮定の上では、時刻に局所な族に限れば類推でなく等式です。拡散型緩和時間の仮定が述べる経路の C_P が $(2C_P(\nu)/\hbar)^2$ を越える分は、時刻に局所でない関数（巻き数や位相電荷）から来ます。

物理の単位で言い直す。格子単位で $\hbar = 1$ とし、記帳の長さ ξ_{RG} で物理の単位に直すと、(2) は

$$m_{\mathrm{phys}} = m\,\xi_{\mathrm{RG}} = \frac{\xi_{\mathrm{RG}}}{2\,C_P(\nu)}, \qquad m_{\mathrm{phys}} \geq c \iff C_P(\nu) \leq \frac{\xi_{\mathrm{RG}}}{2c} \tag{6}$$

です [初]。質量ギャップ（格子の物理単位の隙間が正に残ること）は、「真空の測度の Poincaré 定数が記帳の長さの一乗で押さえられる」という Poincaré の文と同じです。緩和時間の仮定を経由しない Poincaré の文で、伸び方は二乗でなく一乗（動的指数で言えば $z = 1$ の型）です。ただしこれは言い換えで、どちらの側にも新しい情報はありません。$C_P(\nu)$ の上界には全ての F が要り、難しさは隙間の下界とちょうど同じです。

真空の測度では位相の問題が起きない。ν の上で動かすのは一つの時刻の一価の関数だけです。円の上の自由な粒子でいえば、ν は円の上の一様分布で $C_P(\nu) = 1$（周の長さ 2π の円の Wirtinger の不等式）と有限で、(2) は 23-01 の円の上の自由な粒子の反例の $\Delta = \hbar^2/2$ を与えます。そして経路の測度で $C_P = \infty$ を作った巻き数の汎関数（時間について積分した持ち上げの角）は ν の関数ではありません [初]。四次元の位相電荷も時間の積分で定まる量なので、一つの時刻の真空の分布の関数には入りません [見]。境目は 24-04 の $\mathcal{F}_1$ の内と外と同じです。

03

0+1 の格子の版 — 一つの時刻の窓

24-04 §07 の 0+1 次元の二重井戸で、時間を幅 ε で刻んだ鎖の一つの時刻の窓の局所の Poincaré 定数は、ψ_0 が Schrödinger の基底状態なら $C_P^{\mathrm{loc}}(1) = \varepsilon/(2m)$ ちょうどでした（24-04 の (17)）。窓の Dirichlet 形 $(\hbar/\varepsilon)\int \psi_0^2 |F'|^2$ は (1) の $\mathcal{E}_\nu$ の $\hbar/\varepsilon$ 倍なので、これは隙間と真空の測度の命題の $C_P(\nu) = \hbar^2/(2\Delta)$ を $\varepsilon/\hbar$ 倍した値そのものです [初]。最も短い窓の比 ω_b/m は、この恒等式を参照（調和振動子）と対象（二重井戸）で割ったものです。

時間を刻むと、鎖の一つの時刻の分布は転送の核（Trotter の対称積）の最大固有ベクトルの二乗で、Schrödinger の ψ_0^2 とはわずかにずれます。$V = (x^2-1)^2/8$・$\varepsilon = \frac{1}{2}$・$\hbar = 0.3,\ 0.15,\ 0.08$ の格子で、一つの時刻の窓の直接の値を $\varepsilon/(2m_{\mathrm{tr}})$（$m_{\mathrm{tr}}$ は転送の第二固有値から）で割った比は $1.006,\ 1.013,\ 1.019$、参照も刻んだ比 $K_{\mathrm{rel}}(1)\cdot m_{\mathrm{tr}}$ は $1.037,\ 1.044,\ 1.050$ で

す 読 。恒等式は連続の時間の文で、時間を刻んだ格子では近似です。この差が、第 23 部の時間の刻みの比べの仮定（論文「片側の橋」の (D)、23-01 の (20)）が残る理由の、最も小さな形です。

04

Kogut–Susskind の Hamiltonian 格子

この節は既存の知見（Kogut–Susskind の Hamiltonian 格子）の整理です。導入は 5-03 §07 にあります。

時間を連続に取り、空間だけを格子にしたゲージ理論のハミルトニアンが Kogut–Susskind の格子です。配位の空間は空間のリンクごとの群の積 $Q = G^{\{\text{空間のリンク}\}}$（コンパクトで連結な多様体）で、片側の橋の形に合わせて運動項の計量を $M = g^{-2}\cdot$（両側不変な計量）と置くと

$$H_{\mathrm{KS}} = \frac{g^2}{2}\sum_{\ell} E_\ell^2 + \frac{1}{g^2}\sum_{p}\bigl(2 - \operatorname{tr} U_p\bigr) \qquad (\hbar = 1,\ G = SU(2)) \tag{7}$$

です。E_ℓ^2 はリンク ℓ の群の上の Laplace–Beltrami 作用素の符号を変えたもの（電場の二乗）、U_p はプラケットの周りの積で、第二項は磁場の項です。係数の約束は文献で異なり、ここでは片側の橋の形に合わせました。物理の状態はゲージ不変な関数（Gauss の法則）で、H_{KS} はゲージ変換と交換するので ψ_0 は自動的にゲージ不変です。問題文の量はこの格子では H_{KS} のゲージ不変な部分空間の隙間そのもので、隙間と真空の測度の命題から一つの時刻の真空の分布 $\nu = \psi_0^2\cdot$Haar の Poincaré 定数で書けます。

この格子で隙間を直接扱う道は、24-00 の材料の表の「他の道の表」の行の一つです。到達点と止まった場所を表 2 にまとめます。

表 2　Hamiltonian 格子の隙間を直接扱う道（一次資料の等級は出典の表）

道具	言明（要旨）	Kogut–Susskind の格子に当たるか	分類
局所から大域への隙間の定理（Knabe の型、Gosset–Mozgunov）	frustration-free で平行移動に不変な局所のハミルトニアンで、長さ n の開いた鎖の局所の隙間が閾（Gosset–Mozgunov で $6/(n(n+1))$）を越えれば、熱力学極限で隙間が体積に一様に残る（一次元、二次元の正方格子へ拡張）	当たらない。電場の項と磁場の項への分け方では frustration-free でない（電場と磁場の分け方の frustration の命題）	典 （要旨で言明を確認）・ 初 （電場と磁場の分け方の frustration の命題）
摂動（Yarotsky）	古典的な格子系に相対有界な量子の摂動を足した系で、隙間と相関の指数減衰	強結合（電場の項が支配）は摂動の型に乗る見込み。仮定との照合はしていない	典 （要旨）・ 見

道具	言明（要旨）	Kogut–Susskind の格子に当たるか	分類
弱結合（連続極限の側）の隙間の結果	—	探した範囲（短い語の検索二回）で見当たらない	—

電場と磁場の分け方の frustration の命題（電場と磁場への分け方は frustration-free でない）

$g > 0$・空間の格子にプラケットが一つ以上あるとする。(7) を局所の項 $h_\ell = \frac{g^2}{2} E_\ell^2$、$h_p = \frac{1}{g^2}(2 - \operatorname{tr} U_p)$ の和と見るとき、どの定数 c_p を引いても $h_p - c_p$ は固有ベクトルを持たない。したがって全ての局所の項の基底状態を同時に実現する状態は無く、この分け方は frustration-free でない。

初 証明。h_p は $L^2(Q, \mathrm{Haar})$ の上の掛け算の作用素で、掛ける関数 $2 - \operatorname{tr} U_p$ は Q の上の定数でない実解析的な関数です。$(h_p - c_p)\psi = 0$ なら ψ の台は等位集合 $\{2 - \operatorname{tr} U_p = c_p g^2\}$ に入りますが、定数でない実解析的な関数の等位集合は Haar 測度で 0 なので $\psi = 0$ です。∎ 電場の項と磁場の項が交換しないことも同じく初等的です（E_ℓ^2 は微分の作用素で、$\operatorname{tr} U_p$ を掛けることと交換しない）。区画ごとに電場と磁場の項をまとめた分け方でも frustration-free にならないかは、交換しないことからの見込みで、示していません 見 。また、局所の Hilbert 空間 $L^2(SU(2))$ が無限次元であることと定理の設定との照合もしていません。

真空の測度の側の道具。隙間と真空の測度の命題で隙間を $C_P(\nu)$ に移しても、使える道具は増えません。理由を三つ並べます。

- ν は陽に書けません。$-2 \ln \psi_0$ が ν の「作用」で、局所でもありません。凸性で Poincaré 定数を押さえる Bakry–Émery の型の判定には $\mathrm{Hess}(-\ln \psi_0)$ の下界が要ります。凸なポテンシャルの基底状態が対数凹になるという Brascamp–Lieb の型の結果は記憶で、書誌を確かめていません 仮 。しかも (7) の磁場の項はコンパクトな群の上の定数でない滑らかな関数なので、最大点で Hesse 行列が 0 以下になり、一様に凸にはなれません 初 。群の Ricci 曲率の分を足した判定が $g \to 0$ で一様に効くかは、24-06 の凸性の天井の補題と同じ型の障害に当たる見込みです 見 。
- 局所から大域へ、という Glauber 力学の型の議論（局所の箱の Poincaré 定数と強い空間の混合から体積に一様な隙間へ、Martinelli の講義の型）を ν で立てるには、ν の境界の値に対する空間の混合が要ります。ν が陽でない分、Wilson 測度より難しい見込みです 見 （その型の定理の言明は記憶で、原典で確かめていない 仮 ）。
- 時間の格子間隔を先に 0 にする（Hamiltonian 極限）のは、Wilson の等方な格子とは別の極限の順序です。どちらの順でも同じ連続極限に行くことは仮定です 仮 （23-02 の背景）。

05

$SU(2)$ の色の一重項と二粒子

24-04 §06 で、四次元の時空の箱の参照について「$SU(2)$ の色の一重項には一次の項が無く、参照はちょうど半分になる」ことを見ました。同じことを、一つの時刻の真空の分布の側で述べます。

主項（$g \to 0$、三つの色の成分が独立なガウス）では、真空の分布 ν は空間のリンクの横波の場の上のガウス測度で、自由なハミルトニアンの一粒子の角振動数を ω_k とすると、(1) の Dirichlet 形の Langevin の生成作用素は隙間と真空の測度の命題の基底状態変換で $-2(H - E_0)$ にユニタリ同値です（$\hbar = 1$）。$H - E_0$ の固有値は一粒子の角振動数の和 $\sum_k n_k \omega_k$（n_k は粒子の数）で、固有空間は Wiener のカオスに当たります（$n = \sum n_k$ が n 次のカオス）。有限の空間格子で最小の角振動数を $\omega_{\min} > 0$ とします（周期の箱の一定のモードのように $\omega = 0$ になるモードは別に扱う）。

ゲージ不変な関数は、定数のゲージ変換（大域の色の回転 $SO(3)$）で不変でなければなりません。一次のカオスの関数 $\sum c_k^a A_k^a$ は色の添字 a についてのベクトルで、$SO(3)$ は $\mathbb{R}^3$ に固定されたベクトルを持たないので、不変なものは 0 だけです 初 。したがってゲージ不変な関数の最低の試験の空間は二次のカオス（二粒子）で、その上の最小の固有値は $2\omega_{\min}$、等号は二つの粒子を同じ最低のモード w に置いて色で縮めた $F_w = \sum_a (\langle w, A^a \rangle^2 - \mathbb{E})$ で取られます 初 。隙間と真空の測度の命題で読み替えると

$$C_P(\nu \,|\, \text{色の一重項}) = \frac{C_P(\nu)}{2}, \qquad \Delta_{\text{一重項}} = 2\,\omega_{\min} \qquad (\text{主項}) \tag{8}$$

です 初 （主項・三色の独立なガウス・$\omega_{\min} > 0$ の有限の空間格子の上）。ゲージ不変な最低の励起は二粒子の閾にあり、Poincaré 定数は一粒子の定数の半分です。24-04 の時空の箱の参照 $\Gamma_Q/2$ は、同じ仕組みを時空の箱の局所の Poincaré 定数で見たものです。Lean `LatticeGauge.WilsonLoopReference.no_linear_singlet`（仮定：二つの回転で不変な一次形式。結論：係数は 0）・`chaos2_gamma`（仮定：$0 < n, g$ と Wick の積率を式として。結論：比が半分になる代数）。

物理では「最も軽いグルーボールは二つのグルーオンの束縛状態」と語られます。(8) はその主項の局所の Poincaré 版にあたる、という読みができます 見 。ただし、物理の機構は証明にならず（24-07 の物理の機構の表）、(8) は主項の形の文です。無限体積では $\omega_{\min} \to 0$ なので、(8) の右辺も 0 に行きます。質量ギャップは主項には現れず、主項で決まるのは「ゲージ不変な試験の空間は二粒子から始まる」という形だけです。g が有限の $SU(2)$ で (8) がどう変わるかは、何も計算していません。

06

真空の測度の定数を測る道 — 何が要るか

隙間と真空の測度の命題から、真空の分布の Poincaré 定数を測ることは隙間を測ることと同じです。測る道を、第 23 部の一段目の機械がどこまで使えるかで並べます。

- **0+1 次元**。一段目の機械（転送の核の格子の固有値問題と、重みつきの格子 Laplacian の一般化固有値）は、一つの時刻の窓の局所の Poincaré 定数を直接計算し、$\varepsilon/(2m_{\mathrm{tr}})$ と 1.006〜1.019 倍の範囲で一致しました（§03） 読 。0+1 では機械がそのまま $C_P(\nu)$ を測ります。
- **標本**。ν は陽でないので、標本が要ります。時間の格子間隔を小さくした異方的な Wilson 格子の、一つの時刻の切り口の周辺分布は、Hamiltonian 極限で ν に近づく見込みです 見 。時間の刻みが有限なら、その切り口は転送の核の ψ_0^2 で、§03 のずれ（0+1 の $\varepsilon = \frac{1}{2}$ で 1〜2%）が入ります。
- **試験の関数**。ゲージ不変な関数に限るので、Wilson ループの多項式から取ります。24-04 §06 のとおり、箱の差し渡しの大きさのループが要ります。
- **目盛り**。(1) の $\mathcal{E}_\nu$ は運動項の計量 $M^{-1} = g^2\cdot$（両側不変な計量）で測ります。Langevin の目盛りをこれと揃えないと、(2) の係数が κ 倍ずれます。
- **向き**。標本の上の Rayleigh 商は $C_P(\nu)$ の下界、すなわち隙間の**上界**を与えるだけです（試験関数を一つ置けば出る側）。隙間の下界には全ての F が要り、第 23 部の緩和時間の上界の仮定と緩和時間の下界の仮定の非対称（23-01 の (15)）がそのまま現れます。測る道は、隙間の易しい側を測る道です。

この章は計算を置いていません。小さな周期の格子の Kogut–Susskind の隙間を、電場の表現を切って区間で押さえる計算は、有限の箱の数に留まり、体積に一様な隙間への橋にはなりません 見 。

07

言えないこと

- 隙間と真空の測度の命題は恒等式で、問題を易しくしたとは主張しません。$C_P(\nu)$ を β（あるいは g）に一様に押さえる道具はありません。
- 局所から大域への隙間の定理は、Kogut–Susskind の格子の電場と磁場への分け方には当たりません（電場と磁場の分け方の frustration の命題）。区画にまとめた分け方で当たらないことは見込みで、示していません。

- 強結合の摂動の結果を Kogut–Susskind の格子に当てはめる照合はしていません。弱結合の側の結果は、探した範囲で見当たりません。
- Hamiltonian 極限を先に取る順序が Wilson の格子と同じ連続極限を与えることは仮定です。
- (8) は主項（三色の独立なガウス）の文で、g が有限の値はありません。グルーボールとの対応は見立てです。
- この章は質量ギャップを示しません。緩和時間の仮定についても何も示しません。

08

五分類の表と依存グラフ

表 3　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	基底状態の仮定：離散スペクトル・$\psi_0 > 0$ 滑らかで重複しない・$\Delta > 0$	仮	23-01 表 6	有限の空間格子	—
2	基底状態変換の恒等式 (3)	初	23-01 (18)	有限の空間格子	—
3	隙間と真空の測度の命題：$\Delta = \hbar^2/(2C_P(\nu))$	初	(2)〜(4)	連続の時間・有限の空間格子	—
4	三つの定数の関係 (5)	初	表 1	正準・片側の橋の仮定	—
5	物理の単位の言い直し (6)	初	§02	各 β	—
6	0+1 の一つの時刻の窓は隙間と真空の測度の命題の $\varepsilon/\hbar$ 倍	初	§03	0+1・Schrödinger の ψ_0	`LatticeGauge.LocalHDoubleWell.one_slice_ratio`（仮定：$0 < \varepsilon, m, \omega$）
7	時間を刻んだ格子でのずれ 1.006〜1.019・1.037〜1.050	読	§03	$\varepsilon = \frac{1}{2}$・三つの $\hbar$	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
8	電場と磁場の分け方の frustration の命題：電場と磁場への分け方は frustration-free でない	初	§04	$g > 0$・有限の空間格子	—
9	frustration-free を仮定した局所から大域への隙間の定理	典	表 2（要旨で言明を確認）	原典の設定	—
10	強結合の摂動の型（Yarotsky）	典	表 2（要旨）	原典の設定	—
11	凸なポテンシャルの基底状態は対数凹	仮	§04（記憶）	—	—
12	局所から大域への型の議論（Martinelli の講義の型）	仮	§04（記憶）	—	—
13	Hamiltonian 極限と Wilson の格子が同じ連続極限に行く	仮	§04	—	—
14	色の一重項に一次の項が無い	初	§05	主項	`LatticeGauge.WilsonLoopReference.no_linear_singlet`（仮定：二つの回転で不変）
15	(8)：一重項で $C_P(\nu)$ が半分・隙間は $2\omega_{\min}$	初	§05	主項・三色の独立なガウス・$\omega_{\min} > 0$	`chaos2_gamma`（仮定：Wick の積率を式として）
16	局所から大域の定理は Kogut–Susskind の格子に当たらない	見	§04	区画にまとめた分け方を含めて	—
17	強結合は摂動の型に乗る	見	表 2	照合は未	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
18	(8) はグルーボールの局所の Poincaré 版	見	§05	—	—
19	真空の測度の定数を一様に押さえる道具は無い	見	§04・§06	—	—

機械検査の欄は代数だけです。恒等式 (3)・隙間と真空の測度の命題・電場と磁場の分け方の frustration の命題・(8) の測度の段は Lean の外にあります（23-13）。

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  仮  基底状態の仮定：離散スペクトル・ψ₀ > 0・Δ > 0                    有限の空間格子
 2  初  基底状態変換の恒等式（23-01 の (18)）
 3  初  隙間と真空の測度の命題：Δ = ħ²/(2 C_P(ν)) ⟸ 1・2
 4  初  三つの定数：sup over F₁ = (2C_P(ν)/ħ)² ⟸ 3（＋23-01 の片側の橋・24-04 の (
 5  初  物理の単位：m_phys ≥ c ⟺ C_P(ν) ≤ ξ_RG/(2c) ⟸ 3
 6  初  0+1 の窓：一つの時刻の窓は隙間の命題の ε/ħ 倍 ⟸ 3              Lean one_slic
 7  読  格子のずれ：1.006〜1.019（時間を刻んだ転送の ψ₀）
 8  初  電場と磁場の分け方の frustration の命題：frustration-free でない
 9  典  局所→大域：frustration-free を仮定した隙間の定理
10  典  摂動：相対有界な量子の摂動で隙間（要旨）
11  仮  対数凹：凸なポテンシャルの基底状態（記憶）
12  仮  混合：局所の箱と空間の混合から一様な隙間（記憶）
13  仮  極限の順序：Hamiltonian 極限と Wilson の格子
14  初  一次なし：色の一重項に一次の項が無い                          Lean no_linear_
15  初  二粒子：(8) ⟸ 3・14（主項）                                  Lean chaos
16  見  当たらない：局所→大域は KS に当たらない ⟸ 8・9
17  見  強結合：摂動の型に乗る ⟸ 10
18  見  グルーボール：(8) の読み ⟸ 15
19  見  道具なし：C_P(ν) を一様に押さえる道具は無い ⟸ 11・12・13・16
```

円の検査は全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを見るだけです。この章の結論は、隙間と真空の測度の命題とそこから出る三つの関係（三つの定数・物理の単位・0+1 の窓）、二粒子の主項の文で、質量ギャップの節点はありません。仮定の行（基底状態の仮定・対数凹・混合・極限の順序）はどれも隙間の下界を含みません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
時間を連続に取った有限の空間格子で、隙間が一つの時刻の真空の分布の Poincaré 定数と $\Delta = \hbar^2/(2C_P(\nu))$ で結ばれること（基底状態の仮定の上） 初	$C_P(\nu)$ を β に一様に押さえる方法。問題が易しくなったという主張
三つの Poincaré 定数の関係、時刻に局所な族の上で 23-01 の自由場の読み替えが等式になること 初	経路の C_P が $(2C_P(\nu)/\hbar)^2$ を越える分の大きさ
0+1 の一つの時刻の窓がこの恒等式であること 初 ・時間を刻んだときのずれ 読	四次元の Wilson の格子での時間の刻みの比べの仮定の成否
Kogut–Susskind の格子の電場と磁場への分け方が frustration-free でないこと 初	区画にまとめた分け方での成否。強結合の摂動の当てはめ。弱結合の結果
主項で、色の一重項の最低の試験の空間が二粒子で、$C_P(\nu)$ が半分になること 初	g が有限の値。グルーボールとの対応（見立て）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
恒等式 (3)・片側の橋	本書	23-01 §06 の (17)(18)。$\mathbb{R}^n$ の切り落としは論文「片側の橋」（Kiichi, Shiori and Rin）の補題 3.3
隙間と真空の測度の命題・(5)(6)・電場と磁場の分け方の frustration の命題・(8)	初	本文の証明
Kogut–Susskind のハミルトニアン	設定	J. Kogut, L. Susskind, Hamiltonian formulation of Wilson's lattice gauge theories, Phys. Rev. D 11 (1975) 395–408（書誌は照合、本文は取っていない。(7) の係数はこの本の約束）
局所から大域への隙間の定理	典	D. Gosset, E. Mozgunov, arXiv:1512.00088（要旨で言明を確認）。S. Knabe, J. Stat. Phys. 52 (1988) 627–638（書誌は照合、閾の値は前者の要旨の再述）
強結合の摂動	典	D. A. Yarotsky, arXiv:math-ph/0412040（Commun. Math. Phys. 261 (2006)）（要旨）
弱結合の隙間の結果の探索	—	arXiv の短い語の検索二回で該当なし（検索は浅い）
§03 の格子の値	読	0+1 の二重井戸の転送の核の格子の固有値問題（24-04 の出典表と同じ）
Brascamp–Lieb の型の対数凹性・Martinelli の型の局所から大域	仮	記憶。原典で言明を確かめていない

この章で使った語 — 真空の測度 ν・基底状態変換・隙間と真空の測度の命題・三つの Poincaré 定数・Hamiltonian 格子（Kogut–Susskind）・frustration-free・局所から大域へ

の隙間の定理・色の一重項と二次のカオス・Hamiltonian 極限。意味は A-02 用語集 と 24-09 にあります。

次に読む章：24-06 凸性の代わりに稀さで払う ― 群の上では凸性が足りないことを、稀さで払う道具の話として。

凸性の代わりに稀さで払う — 群の上の繰り込みと対数 Sobolev

この章は本書の検討です。§02・§08 は既存の知見、§05・§07 は未解決の地図です。

この章で分かること — ここからは道具の話です。24-01〜24-05 は「何を比べ、どの拡散型緩和時間の仮定を述べ直すか」を扱いました。どの言明を示すにも、緩和の定数を上から押さえる道具が要ります。平らな空間でその道具の中心にあるのは凸性（Bakry–Émery・Brascamp–Lieb）で、スカラーの階層模型では、各尺度で条件つきの測度が一様に凸であることを入口にして、拡散型緩和時間の仮定と同じ型の定理が示されています。この章では、(1) 凸性の道具が何を要り、どこで破れるかを、0+1 次元の頂上・群の反対極・階層模型の帰納の仮定の三か所で見ます。群の上では、閉じた多様体の上の凸性の天井の補題（証明つき）により、弱結合の尺度で凸性は原理的に立ちません。(2) 平らな ϕ^4 と群とでは、凸な場所と凸でない場所が逆になり、壁は消えずに確率 $e^{-c\beta}$ の所へ押し込まれます。(3) そこで、凸性でなく稀さで払う道具（エントロピーの通貨・Lyapunov の条件・場に依る定数）を並べ、第 23 部の作用の障壁の余裕が「稀さで払えた例」であることを見ます。(4) それを規則の形に書き直した「稀さで払う測度の類」を候補として置き、紫外の側と強結合の側の間に残る「結合の窓」が、三段目の難しさの二つ目の言い直しであることを確かめます。(5) 確率量子化の道を一節で添えます。

前提となる章 — 23-09 §06（頂上の一サイトの曲率 $\frac{15}{4}$ と 4）・23-10 通貨の取り違えの型・23-11 §06（作用の障壁の余裕）・24-02 §02（木の座標とリンクの座標）・24-07 §05（根の三つ）。第 1 部の 1-05（多様体）と 1-04（$SU(2)$）。記号は 24-09。

先に言うこと — 水準は〔研〕で、§01 の要約は〔三〕です。証明を置くのは §03 の補題と系と命題だけで、ほかは原典の写し（典）か見立て（見）です。階層模型の結果は四次元のヤン–ミルズに何も含意しません。§07 の「規則」は候補で、どれも三段目（連続極限）を閉じる見込みを約束しません。この章は質量ギャップも、緩和時間の仮定も示しません。記号の注意：この章の Bakry–Émery の曲率の下限は κ_{BE} と書き、片側の橋の命題（論文の定理 3.1）の比べの定数 κ（24-09）とは別の量です。稀さの率は s（$\mu(B) \le e^{-s}$）と書きます。第 23 部の 23-09・23-10 で ℓ と書いた量で、第 24 部では ℓ を長さの物差しに使うため字を替えました。

この章の順序

1. 要約〔三〕 — 凸性の天井・場所の逆転・稀さの通貨
2. 凸性の道具は何を要るか — Bakry–Émery・Brascamp–Lieb・階層模型の帰納の仮定
3. 閉じた多様体の上の凸性の天井 — 群の上の凸性の天井の補題・単位元に集まれない系・一リンクの Wilson の重みの命題（証明つき）
4. 凸と非凸の場所が逆 — ϕ^4 と群・壁は確率の小さい所へ（図 1）
5. 階層模型の帰納を群に写すと — 当たる・変わる・当たらない（表 1）
6. 稀さで払う道具 — 通貨・Lyapunov・場に依る定数・作用の障壁の例（表 2）
7. 規則にするなら — 稀さで払う測度の類 — 対象・規則・最初の定理の候補・結合の窓
8. 確率量子化の道 — 劣臨界性 $d < 4$ と、対象の置き場を作り直す方向
9. 言えないこと
10. 五分類の表と依存グラフ — 表 3

01

要約〔三〕 — 凸性の天井・場所の逆転・稀さの通貨

この節は〔三〕の読者に向けた十段落の要約です。証明と原典の条件は §02 以下にあります。

1. 階層模型は、格子を入れ子の箱に置き換えて、繰り込みの一段が書き下せるようにした模型です。スカラー場の四次元の階層 $|\phi|^4$ では、平衡の性質（Bauerschmidt–Brydges–Slade の本）と、確率力学の緩和の遅さ（Bauerschmidt–Bodineau：隙間が自由場と同じ冪で消える）の両方が定理になっています 典。後者は緩和時間の仮定と同じ型の文です。
2. Bauerschmidt–Bodineau の方法は、各尺度で「粗い場を止めたときの細かい揺らぎの測度が一様に凸」という仮定を入口にします 典。原典自身が、大きな場での凸性を、方法を階層模型の外へ広げる主な課題と書いています。
3. 群 $SU(2)$ は閉じた空間（三次元の球面）です。閉じた空間の上では、凸性を課すとポテンシャルの振れ幅が直径の二乗で抑えられ、測度は一様な分布の定数倍の範囲から出られません（§03 の凸性の天井の補題） 初。弱結合では、測度は単位元の近くに集まる必要があるので、凸性の仮定は弱結合の尺度で原理的に成り立ちません。

4. 平らな空間の ϕ^4 では、大きな場は本来凸で、凸でないのは小さな場（二つの井戸の間）です。群の上では逆に、単位元の近く（小さな場）が凸で、遠い側の半球（大きな場）が必ず凸でなくなります（§04）初 。
5. ただし、凸でない側にいる確率は $e^{-\beta}$ の程度に小さい（§03 の一リンクの Wilson の重みの命題）初 。壁は消えず、確率の小さい所へ押し込まれます。
6. 第 23 部の一段目の壁（頂上の一サイトの対角 $\frac{15}{4}$ が結合の和 4 に $\frac{1}{4}$ 届かないこと）も、凸性の不足を台地の稀さで払う形でした。Poincaré 不等式は出口の速さを測る通貨で、稀さを払えるのはエントロピーの通貨です（23-10 通貨の取り違えの型）。稀さで払う段は、対数 Sobolev の型の不等式を通る必要があります。
7. 凸性の代わりに稀さで払う道具には、Lyapunov の条件（悪い集合から戻る漂流）と、場に依る定数があります。第 23 部の作用の障壁の評価は、芯の双安定の費用を、局所の項の稀さで払えた例でした（余裕は約 95 倍、$\hbar = 0$ の読みの上で）。
8. 一リンクの測度は井戸が一つで、緩和の定数は β について指数では悪くなりません。二重井戸の $\frac{1}{4}$ の型の壁は一リンクには戻りません 見 。
9. 規則の形に書き直すと「稀さで払う測度の類」になります（§07）。紫外の側では粗視化の一段ごとに類が閉じる形が書けそうですが、閉じ込めの尺度で稀さの率が尽き、強結合の側の曲率の道具との間に「結合の窓」が残ります。これは三段目の難しさの二つ目（24-07 §06）の言い直しです 見 。
10. 確率量子化（SPDE）の道は同じ Langevin 力学を使いますが、目的は測度の構成で、解の理論は $d < 4$ でだけ劣臨界です 典 。四次元の緩和時間の仮定にも局所の拡散型緩和時間の仮定にも道具を与えません。

02

凸性の道具は何を要るか — Bakry–Émery・Brascamp–Lieb・階層模型の帰納の仮定

この節は既存の知見（Bakry–Émery・Brascamp–Lieb・階層模型の帰納の仮定）の整理です。導入は 5-11 §02 にあります。

緩和の定数（Poincaré 定数、対数 Sobolev 定数）を**上から**押さえる道具の多くは、ポテンシャルの二階微分の下界、つまり凸性を入口にします。三つを並べます。

Bakry–Émery。Riemann 多様体 M の上の確率測度 $\mu = e^{-V} d\mathrm{vol}/Z$ について、

$$\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\, V \;\geq\; \kappa_{\mathrm{BE}}\, g \quad (\kappa_{\mathrm{BE}} > 0) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leq \frac{2}{\kappa_{\mathrm{BE}}} \int |\nabla f|^2 d\mu, \quad C_P \leq \frac{1}{\kappa_{\mathrm{BE}}} \tag{1}$$

です 典 （Bauerschmidt–Bodineau–Dagallier の総説の定理 3.6 の、尺度が一つの場合）。条件は**全ての点で**の下界です。

Brascamp–Lieb。$\mathbb{R}^n$ の上で $\operatorname{Hess} V > 0$ なら $\operatorname{Var}_\mu(f) \le \mathbb{E}_\mu\langle \nabla f, (\operatorname{Hess} V)^{-1} \nabla f\rangle$ 典 （Bauerschmidt–Bodineau の補題 2.7 が使う形）。これも各点の凸性を使います。

階層模型の帰納。Bauerschmidt–Bodineau は、Gauss の共分散を尺度ごとに $C = C_0 + \cdots + C_N$ と分け、繰り込んだポテンシャル $e^{-V_{j+1}(\phi)} = \mathbb{E}_{C_j} e^{-V_j(\phi+\zeta)}$（場の**加法** $\phi + \zeta$）を作り、次の仮定を置きます 典 （arXiv:1809.02075 §2.3）。

$$\text{(A1)} \qquad C^{1/2}\big(\operatorname{Hess} V_j(\phi)\big)C^{1/2} \;\ge\; -\varepsilon_j\, Q \qquad (\text{全ての } \phi,\ \varepsilon_j < 1) \tag{2}$$

ここで Q は粗い場の空間への射影、ε_j は原典の記号です（0+1 次元の格子間隔 ε とは別）。(A1) と二つの構造の仮定の下で、一段ごとに Brascamp–Lieb の二次形式が $D \le C/(1-\varepsilon) + D_+/(1-\varepsilon)^2$ と受け渡され、全段の積は $\exp\big(2\sum_l(\varepsilon_l + O(\varepsilon_l^2))\big)$ で押さえられます（定理 2.1・系 2.2）典 。結論はスペクトルの隙間（Poincaré の型）で、対数 Sobolev の結果ではありません。対数 Sobolev を多重尺度で流す形は同じ著者たちの後の仕事（Polchinski 流、§05）です。原典は「この方法を階層模型の外へ広げるには、確率の評価でなく凸性が要り、大きな場での凸性が主な課題」と書いています 典 。

破れる三か所。(a) 0+1 次元の二重井戸の頂上。芯の作用の Hessian の一つの行は、頂上で対角 $4 - \frac{1}{4}$ が隣との結合の和 4 に届かず（23-09 の (11)）、全てのサイトが頂上にある面の上で長さ $k \ge 8$ の塊の最小固有値は負になります 初 。凸性の道具はどれも、この $\frac{1}{4}$ を台地の稀さで払う必要がありました。(b) 群の反対側の半球。§03 の一リンクの Wilson の重みの命題で、一リンクの Wilson の重みの Bakry–Émery の曲率が遠い側の半球で負になることを見ます。(c) 階層模型の帰納の (A1)。群に値をとる場では、(A1) は「粗い場を止めた繊維の上の測度の Bakry–Émery」と読むのが自然で 見 、§03 の凸性の天井の補題により弱結合の尺度では成り立ちえません。

この節が言えている範囲：(1)(2) と定理 2.1 は原典の言明の写しです。(c) の読み方（群の (A1) を繊維の Bakry–Émery と読むこと）は見立てで、群の上の帰納の正確な定式化はこの本にありません。

03

閉じた多様体の上の凸性の天井 — 天井の補題・単位元に集まれない系・一リンクの重み

凸性の天井の補題

M を直径 D の、境界の無いコンパクトで連結な Riemann 多様体、$V \in C^2(M)$、$K \geq 0$ とする。$\mathrm{Hess}\, V \geq -K\, g$ なら

$$\operatorname{osc} V := \max_M V - \min_M V \;\leq\; \frac{K D^2}{2}. \tag{3}$$

初 証明。V の最大点を p とします（M はコンパクト）。任意の $q \in M$ について、p から q への最短の測地線 $\gamma : [0, L] \to M$（速さ 1、$L = d(p,q) \leq D$）を取ります（コンパクトな多様体は完備なので Hopf–Rinow の定理で存在する）。$h(t) := V(\gamma(t))$ と置くと、p は境界の無い多様体の上の最大点なので $h'(0) = dV_p(\gamma'(0)) = 0$。測地線に沿っては $h''(t) = \mathrm{Hess}\, V(\gamma'(t), \gamma'(t)) \geq -K$ です。積分して $h'(t) \geq -Kt$、もう一度積分して $h(t) \geq h(0) - Kt^2/2$。$t = L$ で $V(q) \geq \max V - KL^2/2 \geq \max V - KD^2/2$。$q$ は任意なので (3) です。∎

Lean の検査はありません（一次元の版「$h'' \geq -K$・$h'(0) = 0$ なら $h(0) - h(x) \leq Kx^2/2$」は候補として残しています）。証明の要は「最大点で一階微分が消える」ことで、ここに**境界が無いこと**（閉じていること）が効いています。平らな $\mathbb{R}^n$ には最大点が無いので、同じ評価は出ません。

単位元に集まれない系（$SU(2)$ では、凸な測度は単位元に集まれない）

$SU(2)$ を単位の三次元球面 S^3（両側不変の計量・$\mathrm{Ric} = 2g$・直径 π）とし、$\mu = e^{-V} d\mathrm{Haar}/Z$ が $\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\, V \geq 0$ を満たすとする。このとき $\operatorname{osc} V \leq \pi^2$ で、全ての Borel 集合 A について

$$\mu(A) \;\leq\; e^{\pi^2}\, \mathrm{Haar}(A), \qquad \mu\big(\{\theta \leq r\}\big) \;\leq\; e^{\pi^2}\, \frac{2}{3\pi}\, r^3 \tag{4}$$

（θ は単位元からの測地距離、$e^{\pi^2} \approx 1.9 \times 10^4$）。とくに一リンクの Wilson の重み（$\operatorname{osc} V = 2\beta$）は、$\beta > \pi^2/2$ で $\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\, V \geq 0$ を満たさない。

初 証明。$\mathrm{Hess}\, V \geq -\mathrm{Ric} = -2g$ なので凸性の天井の補題を $K = 2$・$D = \pi$ で使うと $\operatorname{osc} V \leq \pi^2$。$Z = \int e^{-V} d\mathrm{Haar} \geq e^{-\max V}$ なので、密度は $e^{-V}/Z \leq e^{\max V - \min V} \leq e^{\pi^2}$ です。類関数の Haar の分布は $\frac{2}{\pi} \sin^2\theta\, d\theta$（$\theta \in [0, \pi]$）で、$\sin\theta \leq \theta$ から $\mathrm{Haar}(\theta \leq r) \leq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{r^3}{3}$。Wilson の重み $V = \beta(1 - \cos\theta)$ は $\operatorname{osc} V = 2\beta$ なので、$2\beta > \pi^2$ なら (4) の前の不等式に反します。∎

(4) の読み方。弱結合の Wilson の測度は、確率の大半を半径 $\beta^{-1/2}$ の程度の球に集めます。(4) の右辺は r^3 で小さくなるので、β が大きいと、Bakry–Émery の型の凸性を持つ測度には

それができません。凸性を課すと、測度は Haar から定数倍 e^{π^2} より遠くへ離れられない、というのが補題の中身です。

一リンクの Wilson の重みの命題

単位の $S^3 = SU(2)$ の上で $V_\beta = \beta(1-\cos\theta)$、$\mu_\beta = e^{-V_\beta} d\mathrm{Haar}/Z_\beta$ とする。

(i) $\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\, V_\beta = (2 + \beta\cos\theta)\, g$。したがって Bakry–Émery の条件は $\beta < 2$ のときだけ成り立ち、そのとき $\kappa_{\mathrm{BE}} = 2 - \beta$。

(ii) $\beta > 2$ のとき、条件が破れる集合 $N_\beta := \{\cos\theta < -2/\beta\}$ は単位元から遠い側の半球に入り、その上で $V_\beta \geq \beta + 2$。

(iii) $\beta \geq 2$ で

$$\mu_\beta(N_\beta) \;\leq\; \frac{54\pi}{25}\, e^{-3/2}\, \beta^{3/2} e^{-\beta} \;<\; 1.52\, \beta^{3/2} e^{-\beta}. \tag{5}$$

初 証明。(i) 単位の球面の上の θ だけの関数 f は、測地極座標 $g = d\theta^2 + \sin^2\theta\, g_{S^2}$ で $\mathrm{Hess}\, f = f''\, d\theta^2 + f' \cot\theta\, (g - d\theta^2)$ です（動径の向きは測地線に沿う二階微分、球面の向きは θ 一定の球の第二基本形式 $\cot\theta$ から）。$f = \beta(1-\cos\theta)$ では $f'' = \beta\cos\theta$、$f' \cot\theta = \beta \sin\theta \cot\theta = \beta\cos\theta$ なので $\mathrm{Hess}\, V_\beta = \beta\cos\theta\, g$。単位の S^3 では $\mathrm{Ric} = 2g$。最小は $\theta = \pi$ の $2 - \beta$ です。(ii) $\cos\theta < -2/\beta < 0$ なら $\theta > \pi/2$ で、$V_\beta = \beta(1-\cos\theta) > \beta + 2$。(iii) N_β の上で $e^{-V_\beta} \leq e^{-\beta-2}$、Haar の測度は 1 以下なので $\int_{N_\beta} e^{-V_\beta} \leq e^{-\beta-2}$。分母は、$r = \beta^{-1/2} \leq 1$ の球の上で $1 - \cos\theta \leq \theta^2/2$ から $V_\beta \leq \frac{1}{2}$、$\theta \leq 1$ で $\sin\theta \geq \theta - \theta^3/6 \geq \frac{5}{6}\theta$ から $\mathrm{Haar}(\theta \leq r) \geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{25}{36} \cdot \frac{r^3}{3} = \frac{25}{54\pi} r^3$。よって $Z_\beta \geq e^{-1/2} \frac{25}{54\pi} \beta^{-3/2}$ で、割ると (5) です（$\frac{54\pi}{25} e^{-3/2} = 1.514\cdots$）。∎

(5) は粗い上界で、反対極の近く（$\theta \approx \pi$、$V_\beta \approx 2\beta$）の確率はさらに小さく $e^{-2\beta}$ の程度です。凸性の天井の補題から出る必要条件 $\beta \leq \pi^2/2$ より、(i) の $\beta < 2$ のほうが鋭い。凸性の天井の補題の役目は Wilson の重みに限らないことで、**どんな**重みでも、凸性を課せば (4) の範囲に閉じ込められる、という所にあります。

この節が言えている範囲：凸性の天井の補題・単位元に集まれない系・一リンクの Wilson の重みの命題は証明を置いた文です。言っているのは一つの多様体の上の一つの測度の凸性で、繊維の上の条件つきの測度（多くのリンクの積の上の測度）の凸性については §05 の見立てを通してしか言いません。

04

凸と非凸の場所が逆 — 壁は確率の小さい所へ

平らな空間の ϕ^4（一つのサイトの $V(\phi)=\lambda(\phi^2-v^2)^2$ の型）では、$V''(\phi)=4\lambda(3\phi^2-v^2)$ は $|\phi|<v/\sqrt{3}$ でだけ負です。凸でないのは**小さな場**（二つの井戸の間の頂上の近く）で、**大きな場**では V は ϕ^4 で育ち凸です。Bauerschmidt–Bodineau が「大きな場の凸性」を課題と書いたのは、繰り込んだ後の有効なポテンシャルが大きな場でも凸に留まるかを、一様に示す必要があるためでした。

群の上では逆です。一リンクの Wilson の重みの命題の (i) のとおり、単位元の近く（小さな場、$\theta<\pi/2$）では $\mathrm{Hess}\,V_\beta>0$ で Gauss に近く、遠い側の半球（大きな場）では $\mathrm{Hess}\,V_\beta<0$ です。これは Wilson の重みに固有のことではありません。閉じた多様体の上の滑らかな関数は最大点を持ち、最大点では $\mathrm{Hess}\,V\le 0$ です。**大きな場の凸でない所は、位相の理由で必ず在ります** 初 。一方、一リンクの Wilson の重みの命題の (iii) のとおり、そこにいる確率は $e^{-\beta}$ の程度です。

```
図 1　凸な場所と凸でない場所（横軸は場の大きさ。φ⁴ は |φ|、群は単位元からの角 θ）

  φ⁴（平らな空間）：
     |φ| 小 ———— |φ| ≈ v ———————— |φ| 大
     凸でない（頂上）      井戸の底（凸）            凸（φ⁴ で育つ）
     → 凸でない所は「小さな場」。確率は井戸の間を渡る頻度で決まる

  SU(2)（閉じた球面）：
     θ 小 ———— θ = π/2 ———————— θ = π（反対極）
     凸（Gauss に近い）    境目                  凸でない（最大点で必ず）
     → 凸でない所は「大きな場」。確率は e^(−β) の程度（一リンクの Wilson の重みの命題）
```

壁は消えず、確率の小さい所へ押し込まれる。平らな空間では、凸でない頂上を避ける道具（大きな場の凸性を課す・小さな場を別に扱う）が考えられました。群の上では、凸でない所は避けられず（凸性の天井の補題）、その代わり確率が指数で小さい（一リンクの Wilson の重みの命題）。だから群の上の道具は、凸性で押すのでなく、確率で押す道具でなければなりません 見 。

稀さの率が測れた例。二次元 $U(1)$ の幅 2 の帯では、一枚のプラケットの巻き付き（高さ 2β の障壁を越える稀な事象）の生の率の傾きが、Kramers の率 $\beta e^{-2\beta}$ の傾き $2-1/\beta$ に 1〜3% で乗りました（$\beta=3..6$・外周凍結・後付けの検査、24-02 §05） 読 。群の上の繰り込みとこの数の関係は見立てです。

稀さを局所の量で払えない最も小さい例。0+1 次元の二重井戸では、最も短い窓（一つの時刻）でも局所の比は 1 にならず、ちょうど ω_b/m です（24-03 の (7)・24-04 §07） 初 （Lean LatticeGauge.LocalHDoubleWell.one_slice_ratio、仮定：$0<\varepsilon$・$0<m$・$0<\omega$。束が保

証するのは代数だけ)。凸でない頂上の影響は、窓をどれだけ短くしても比に残ります。群の上への含意は見立てです 見 。

この節が言えている範囲：凸でない所が位相の理由で必ず在ることと、その確率の上界 (5) は証明つきです。「確率で押す道具でなければならない」は見立てです。

05

階層模型の帰納を群に写すと — 当たる・変わる・当たらない

模型。四次元の階層的なゲージ模型として、Migdal–Kadanoff の近似の再帰がちょうど成り立つ格子（Ito 1984 典 ）を考えます。縦のプラケットの結合を場所ごとに 0 か ∞ に置くと、プラケットの重み g の再帰が $g \mapsto (g^{*4})^4$（四枚を貼り合わせる畳み込みと、四枚を重ねる冪）の形で書き下せます。四次元の $SU(N)$ で全ての結合から強結合へ流れて閉じ込めることが述べられています（Ito 1985 典 （要旨））。この模型は平行移動と回転の不変性を持たず、その定理は四次元のヤン–ミルズの問題の言明の一部になりません。動かす座標の選び方で緩和の型が変わることは 24-02 §02 で見ました（木の座標では Gauss 近似の隙間がちょうど β で段数に依らず、リンクの座標では一辺の二乗に反比例して小さくなる)。

表 1 は、Bauerschmidt–Bodineau の帰納の部品を、群 $SU(2)$ に値をとるこの模型に一行ずつ写したものです。「当たる」は形がそのまま立つ、「変わる」は対応する形があるが中身が替わる、「当たらない」は立たない、の意味で、凸性の天井の補題の行のほかは見立てです。

表 1　階層模型の帰納の部品を $SU(2)$ に写すと（判定の札：初＝凸性の天井の補題から・見＝見立て）

原典の部品	群に写すと	判定
共分散の分解 $C = \sum C_j$ と場の加法 $\phi + \zeta$	加法は群の積に、参照の Gauss は Haar に替わる。「尺度 j の共分散」の役は重みの剛性（$-\ln g$ の Hesse 行列の上限）が担い、畳み込みで剛性の逆数がほぼ足される型の不等式がある（紙の記録、この本に証明は置かない）	変わる 見
(A1) 各点の一様な凸性	繊維の上の測度の Bakry–Émery と読むと、凸性の天井の補題により弱結合の尺度で立たない	当たらない 初 （凸性の天井の補題）＋読み方は 見
大きな場の凸性（原典の主な課題）	群では大きな場（遠い側の半球）が必ず凸でない（§04)。ただし確率は $e^{-c\beta}$	変わる（壁は必須になり、確率の小さい所へ） 見
(A2)(A3) 尺度の結合と交換	木（プラケット）の座標では階層の構造から自動。リンクの座標では Dirichlet 形が階層について対角でなく、交換が崩れる見込み	木：当たる／リンク：当たらない見込み 見

原典の部品	群に写すと	判定
補題 2.7（条件つきの測度の Brascamp–Lieb を凸性から）	典型の粗い値では繊維の上の最小の折れ線は一つで隙間は β の程度。粗い値が -1 に近いと、単位元から -1 への測地線が二次元の球面の族をなし、その向きの隙間が $O(1)$ に落ちる見込み。長い弧は鞍点で二つ目の井戸ではない見込み	変わる（凸性は使えないが、損は多項式の見込み） 見
補題 2.8（粗い場の向きの微分を、揺らぎの平行移動と部分積分で共分散に直す恒等式）	各写しの最後の因子を右から平行移動すると粗いホロノミーが同じだけ動き、Haar の不変性で同じ型の恒等式が立つ。違いは得点が場について線形でなく有界なこと	当たる（形） 見
補題 2.9（Helffer–Sjöstrand の表示と Witten Laplacian の作用素の下界）	多様体では一形式の Witten Laplacian に $\mathrm{Ric}+\mathrm{Hess}\,V$ が入る。要るのは各点の下界で、(A1) と同じ理由で弱結合では立たない	当たらない 見
多重尺度の Bakry–Émery（Polchinski 流・係数 $\dot\lambda_t$ は負でもよい）	群の上の自然な半群は熱核との畳み込み $V_t=-\ln(e^{-V}*K_t)$。Migdal–Kadanoff の畳み込みの段はその離散版。要るのは $\inf \mathrm{Hess}\,V_t$（下から）で、群の上の定式化は探した範囲で見当たらない	変わる（未定式化） 見

まとめ。分散の分解と補題 2.8 の型の恒等式は群の上でも立ちます。立たないのは、凸性を**各点で**使う二か所（補題 2.7・2.9）で、凸性の天井の補題により、弱結合の尺度ではどう定数を工夫しても立ちません。原典の「大きな場の凸性」の壁は、群の上では消えずに必須になり、ただし壁の上の確率が $e^{-c\beta}$ に下がります 見 。

群の上の Polchinski 流。Bauerschmidt–Bodineau–Dagallier の総説の定理 3.6 は、Gauss の共分散の流れ C_t に沿って、条件

$$\dot C_t\,\mathrm{Hess}\,V_t(\phi)\,\dot C_t-\tfrac12\ddot C_t\ \ge\ \dot\lambda_t\,\dot C_t\quad(\text{全ての }\phi),\qquad \frac{1}{\gamma}=\int_0^\infty e^{-2\lambda_t}dt \tag{6}$$

から対数 Sobolev の定数 $2/\gamma$ を出します 典 。$\dot\lambda_t$ は負でもよく、凸でない時間帯は $e^{-2\lambda_t}$ の膨らみとして払われます。曲がった空間の版（計量の流れと Ric を含む形、定理 3.20）も述べられていて、原典は「この一般化の興味深い応用を現在知らない」と書きます 典 。群に値をとる場の置き場の候補です 見 。群の上でこの流れを書くと、自然な半群は熱核との畳み込み $V_t=-\ln(e^{-V}*K_t)$ で、要るのは $\inf \mathrm{Hess}\,V_t$ の下からの評価です。これまでの Migdal–Kadanoff の再帰の評価（剛性の再帰・強結合に入るまでの段数が $\beta+4\log\beta+20$ 以下という紙の記録 仮 （この本に証明を置かない））は、どれも上からの評価（$\sup \mathrm{Hess}$）で、二つをつなぐ量が $\inf \mathrm{Hess}\,V_t$ の流れです。弱結合の時間帯では $\inf \mathrm{Hess}\,V_t\approx-\beta$（反対極）で、$e^{-2\lambda_t}$ がどれだけ膨らむかは評価していません 見 。最初の数は一リンクの重みの一段（問い「一リンクの重みの Hessian」、24-08）です。

一リンクには $\frac14$ の型は戻らない。$e^{(\beta/2)\,\mathrm{tr}\,U}d\mathrm{Haar}=e^{\beta\cos\theta}d\mathrm{Haar}$ は井戸が一つで（$\theta=\pi$ は密度の最小、二つ目の極小は無い）、隙間は大きな β で単位元の Hesse 行列 β に近づき、指数では悪くならない見込みです 見 （半古典の一般論。球面の上の場つきの Boltzmann 測度の一

様な対数 Sobolev の原典は書誌だけで確かめていない)。二重井戸の頂上の $\frac{1}{4}$ の型の壁(井戸が二つ)は、一リンクには現れません。繊維の上では、粗い値が -1 に近い所の縮退した族が多項式の損を生む見込みです(表 1)。

この節が言えている範囲:表 1 の判定は、凸性の天井の補題の行を除いて見立てです。階層模型の結果は、どの判定についても四次元のヤン–ミルズに含意を持ちません。

06

稀さで払う道具 — 通貨・Lyapunov・場に依る定数・作用の障壁の例

通貨。第 23 部の 23-10 通貨の取り違えの型は、Poincaré 不等式が測るのは出口の速さで、稀さを払えるのはエントロピーの通貨だ、と述べました(23-10 通貨の取り違えの型)。式では、集合 B が $\mu(B) \le e^{-s}$ を満たすとき

$$s \int_B g^2 \, d\mu \;\le\; \mathrm{Ent}_\mu(g^2) + \ln 2 \int g^2 \, d\mu \tag{7}$$

です 初 (23-09 の (3))。分散と Dirichlet 形の比は関数の定数倍で変わらないので、稀な集合に台を持つ関数を入れると稀さは分子と分母で打ち消し、Poincaré の段では稀さが効きません。**稀さを払う段は、対数 Sobolev(エントロピー)の型の不等式を通る必要があります。** 群の上の道具の候補が、Poincaré の帰納(離散の尺度の Brascamp–Lieb)でなく、尺度ごとの Bakry–Émery を対数 Sobolev の形で流す型(§05 の (6))になるのはこのためです 見 。

Holley–Stroock の摂動。$\mu' = e^{-U}\mu/Z$ で U が有界なら、μ' の Poincaré 定数(と対数 Sobolev 定数)は μ のものの $e^{\operatorname{osc} U}$ 倍以下です 仮 (記憶にある標準の形。この章では原典を確かめていない)。凸でない所を「振れ幅」で払う道具で、費用は稀さに依らず振れ幅の指数です。一リンクの Wilson の重みを Haar からの摂動と見ると $\operatorname{osc} U = 2\beta$ で、損は $e^{2\beta}$ です。第 23 部では、頂上の帯だけをこの摂動で払う案(迂回策「頂上の帯だけの摂動」)が、一サイトの振れ $\operatorname{osc}/\hbar = 3.7/11/37$ を指数に入れて鎖で長さ倍になり、許容の 2000〜4900 倍外になりました(23-10 §03、1/ħ の住所の型) 読 。

Lyapunov の条件。生成作用素 L について、$W \ge 1$ と良い集合 G があって

$$LW \;\le\; -a\,W + b\,\mathbf{1}_G \qquad (a > 0,\; b \ge 0) \tag{8}$$

(悪い集合から良い集合へ戻る漂流)が成り立ち、G の上で局所の Poincaré 不等式(定数 C_G)が成り立つなら、全体の Poincaré 定数は $(1 + bC_G)/a$ 以下です 典 (Bakry–Barthe–Cattiaux–Guillin 2008 の型。言明は二次資料の再述で確かめた、23-14 §03。一次元ガウスでの陽性対照は 23-14 §04 の 20 行目)。凸性を使うのは良い集合 G の上だけで、悪い集合は

「戻ってくる速さ」で払います。群の上では、良い集合を単位元の近く、悪い集合を遠い側の半球に取るのが自然で、損は多項式の見込みです 見 。ただし (8) は Poincaré の結論で、稀さそのものを使う形ではありません。稀さを使うには、(8) の型を対数 Sobolev の形（エントロピーの通貨）に移す段が要ります 見 。

場に依る定数。Bauerschmidt–Bodineau は注 2.4 で、(A1) の ε を粗い場に依らせ $\varepsilon = \varepsilon(\phi)$ としてもよい（ただし一様に 1 未満）と書き、「使いにくい」と添えています 典 。悪い粗い場で ε が大きくなることを許す方向ですが、一様に 1 未満を要する限り凸性の天井の補題の天井は越えません。越えるには、悪い場の**確率で重みをつけた平均**の形の条件に替える必要があります 見 。

稀さで払えた例 — 作用の障壁の余裕。第 23 部の一段目では、箱の中の隙間の命題の箱の側の芯の端が頂上を越えると、条件づけの壁の上に二つ目の最小点が現れ、芯の Poincaré 定数が $e^{\Delta S/\hbar}$ の型で増えました（23-11 §06）。これは芯の中の凸でない所の費用です。その費用を、箱の中の隙間の命題の局所の項に掛かる稀さ $D/(C\xi)^2 \le d\,e^{-2S_0/\hbar}$（キンクの対の生成の稀さ）が払います：芯の作用の障壁の仮定 $C_P \le c_*\hbar^{-p}e^{\Delta S_*/\hbar}$ と ξ の読みの下で、局所の項は $e^{-(2S_0-\Delta S_*-\delta)/\hbar}$ で消えます 初 （23-11 の (12)。Lean LatticeGauge.CoreActionGap.cloc_term_poly・cloc_term_vanishes、仮定：芯の作用の障壁の仮定・ξ の読み・$\Delta S_* < 2S_0$）。$\hbar = 0$ の読みでは $\Delta S_*^0 \le 1.4 \times 10^{-2}$ で、$2S_0 = 4/3$ との比は 1.05×10^{-2} 以下、余裕は約 95 倍でした 読 （Lean LatticeGauge.CoreActionGap.measured_ratio、仮定：測った上界 $\Delta S^0 \le 0.01401$、結論は比 $\le 1.06 \times 10^{-2}$ の形）。凸でない所を凸性で消すのでなく、それより強い稀さの因子で払う、という形がこの章の型の小さな実例です。ただし芯の作用の障壁の仮定そのものは仮定の行で、$\hbar = 0$ の読みと下界の $\hbar \ln C_P$ でしか支えていません。

表 2　凸でない所の払い方（何で払い、費用は何か）

払い方	何で払うか	費用の形	一リンクの $SU(2)$ では	札
凸性（Bakry–Émery・Brascamp–Lieb）	全ての点の曲率の下界	下界の逆数	$\beta < 2$ でだけ使える（一リンクの Wilson の重みの命題）。凸性の天井の補題で弱結合では原理的に不可	初
Holley–Stroock の摂動	ポテンシャルの振れ幅	e^{osc}	$e^{2\beta}$：指数の損	仮 （記憶）
Lyapunov の条件 (8)	悪い集合から戻る漂流と、良い集合の上の局所の定数	$(1 + bC_G)/a$	良い集合を単位元の近くに取れば、損は多項式の見込み	典 （型）・見 （群への当てはめ）
エントロピーの通貨 (7)	悪い集合の稀さ s	$1/s$ の形で効く	$s \approx \beta$（一リンクの Wilson の重みの命題の (5)）。閉じ込めの尺度で $s = O(1)$ になり尽きる	初 （不等式）・見 （尽きること）

払い方	何で払うか	費用の形	一リンクの $SU(2)$ では	札
強い稀さの因子で払う（作用の障壁の余裕）	費用 $e^{\Delta S_*/\hbar}$ より強い稀さ $e^{-2S_0/\hbar}$	$\Delta S_* < 2S_0$ の余裕	一段目の例（0+1 次元）。群の上の対応は未定	初（代数）・読（余裕）・仮（芯の作用の障壁の仮定）

この節が言えている範囲：(7) と作用の障壁の代数は証明つき、Lyapunov の条件は二次資料で言明を確かめた型、Holley–Stroock は記憶の標準形です。群の上でどれがどの損で効くかは見立てです。

07

規則にするなら — 稀さで払う測度の類

この章で見たことを、規則の形に書き直してみます。「新しい数学を作るなら、何を数学の規則にすればよいか」という問いの言い方に沿った試みで、ここに書く規則は**候補**です。無矛盾性も、既存の結果を言い直せることも確かめていません。どれも三段目（連続極限と OS 公理）を閉じる見込みを約束しません 見。他の候補（尺度の公理化・ループの代数・保存量と区画・漸近自由の公理・曲率の規則）と組み合わせの一覧は 24-08 §02 に置きます。

候補：稀さで払う測度の類

対象。コンパクトな Riemann 多様体 M（群の積）の上の確率測度 $\mu = e^{-V}d\mathrm{vol}/Z$ と、良い集合 $G \subset M$ の組。母数 $(\kappa_{\mathrm{BE}}, s, a, b)$ で類 $\mathcal{C}(\kappa_{\mathrm{BE}}, s, a, b)$ を定める。

規則の候補。局所の凸性の規則 — 良い集合の上では局所に凸：G の上で $\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\, V \geq \kappa_{\mathrm{BE}} > 0$。悪い集合の稀さの規則 — $\mu(M \setminus G) \leq e^{-s}$。戻る漂流の規則 — 悪い集合から戻る漂流：(8) の型 $LW \leq -aW + b\mathbf{1}_G$。エントロピーの払いの規則 — 稀さはエントロピーの不等式 (7) を通してだけ払う（類は Poincaré でなく対数 Sobolev の型の量で定める）。粗視化で閉じる規則 — 群の上の熱核との畳み込み $V_t = -\ln(e^{-V} * K_t)$ が母数を $(\kappa_{\mathrm{BE}}, s, a, b) \mapsto (\kappa'_{\mathrm{BE}}, s', a', b')$ と陽な漸化式で写す。

規則でなく制約。凸性の天井の補題により、M 全体で局所の凸性の規則を置く類は、$\mathrm{osc}\, V$ が $KD^2/2$（一リンクの $SU(2)$ で π^2）を越える重みでは空になる。一リンクの Wilson の重みでは $\beta > \pi^2/2$ で空。**悪い集合は必ず在る**。

エントロピーの払いの規則は第 23 部の通貨の型を規則にしたものです（23-10 通貨の取り違えの型：Poincaré は出口の速さ、稀さはエントロピーの通貨）。

最初の定理の候補。(a) 一つの測度について：$\mu \in \mathcal{C}$ なら対数 Sobolev の定数が $F(\kappa_{\mathrm{BE}}, s, a, b)$ 以下で、F は s について指数でない。平らな空間では、Lyapunov の条件と局所の不等式を合わせる型がこれに当たり（§06）、Holley–Stroock の摂動は e^{osc} を払います。(b) 閉じること：$SU(2)$ の一リンクの Wilson の重みに熱核を一段かけても類に留まり、$s' \geq s - O(1)$。これが問い「一リンクの重みの Hessian」（24-08 §01）の最初の一歩です。類関数（単位元からの角 θ の一変数の関数）では熱核の畳み込みは指標の展開の係数に Casimir の値の指数を掛けるだけなので、良い集合の上の曲率の下限と悪い集合の重さの写り方を、一変数の紙の計算と小さな数値で追えます 見 。

既にある部品。平らな場では、Bauerschmidt–Brydges–Slade の本の付録の重み（regulator）$\tilde{G}(X, \phi)$ が四つの性質――積の分解（交わらない集合で積に分かれる）、場の和の劣乗性 $\tilde{G}(X, \phi + \phi') \leq \tilde{G}^2(X, \phi)\, \tilde{G}^2(X, \phi')$、揺らぎの期待値の閉じ $\mathbb{E}_+ \tilde{G}^t(X) \leq 2^{|B(X)|}$、次の段への単調性 $\tilde{G}^t \leq \tilde{G}_+$――を持ち、そこから一段の評価 $\| \mathbb{E}_+ \theta K(X) \|_{\tilde{G}_+} \leq 2^{|B(X)|} \| K(X) \|_{\tilde{G}}$ が出ます（活動のノルムの一段の評価（BBS の補題 A.6.1））典 。**大きな場の稀さを重みのノルムで書き、粗視化の一段の期待値で閉じる**ことの実例です。群の上で要るのはこの「一段で閉じる」ことの群版で、場の和の劣乗性（BBS の (ii)）が場の**加法**を使っている所が、群の積 $u_1 u_2$ に替わります。Bauerschmidt–Bodineau–Dagallier の多重尺度 Bakry–Émery（§05 の (6)、$\dot{\lambda}_t$ は負でもよい）と、その曲がった空間の版（定理 3.20）も部品の候補です 典 。エントロピーの安定性の補題（各点の Hesse 行列の代わりに共分散の上界を条件にする形、補題 3.21）は線形の傾け $e^{\langle h, \zeta \rangle}$ を使うので、群には直接写りません 見 。

粗視化の一段と組む ― 結合の窓。尺度の公理化（粗視化の半群と、その上の流れ）とこの類を組むと、段ごとの類 $\mathcal{C}_j = \mathcal{C}(\kappa_j, s_j, a_j, b_j)$ を粗視化の核が $\mathcal{C}_j \to \mathcal{C}_{j+1}$ と写す形が書けます。最初の定理の候補は「有限の箱・紫外の側で、実効の結合 β_j が β_* 以上の間は $s_{j+1} \geq s_j - c \cdot \kappa_{j+1} \geq \kappa_j (1 - c/\beta_j)$ の型で類が閉じる」です 見 。閉じた先では実効の測度が一様な対数 Sobolev を持ち、そこから先は強結合の側の道具（群の Ricci 曲率で払う型。小さな β で対数 Sobolev と質量ギャップを与える Shen–Zhu–Zhu の結果 典 （要旨））に渡せます。ところが稀さの率 s_j は実効の結合に比例し（一リンクの Wilson の重みの命題の (5) で $s \approx \beta$）、閉じ込めの尺度で $\beta_j = O(1)$ になると尽きます。曲率の通貨は狭い範囲でしか効きません。**二つの間に、どちらの通貨も足りない結合の窓が残ります**。この窓は、三段目の難しさの二つ目――紫外と赤外をつなぐ展開が無いこと――を規則の言葉で言い直したもので、新しい障害ではありません（24-07 §06・24-07 表 3） 見 。

階層的なゲージ模型（§05）では、静的な流れが強結合へ入るまでの段数が有限で、紫外の側・窓・強結合の側の三つが一つの模型の中で揃います。規則の候補を最初に試すならこの模型です。ただし、その静的な流れは多体の残りを持たない一変数の漸化式なので、窓を横切る

ことが易しいのは模型の構造のためで、結果は四次元のヤン–ミルズに何も含意しません 見 。

根との関係 見 。三段目の三つの根（24-07 §05）のうち、この類が正面から効くのは三つ目（大局的なゲージ固定が無く、大きな場が凸性で制御できない）です。凸性の天井の補題が「群では凸性の類が空」と言う所に、代わりの類を置くからです。一つ目（段数に一様）には尺度の公理化と組んだときだけ効き、粗視化で閉じる規則の漸化式が段数に一様な定数を出すかが要です。二つ目（紫外と赤外をつなぐ）には効きません——上の結合の窓が、その効かなさの姿です。

この節が言えている範囲：規則は候補で、定理の候補は候補です。既存の部品（重みの四性質と活動のノルムの一段の評価・多重尺度の Bakry–Émery）は各原典の条件（平らな場・階層・Gauss の共分散の流れ）の中でだけ成り立ちます。

08

確率量子化の道 — 劣臨界性と、対象の置き場を作り直す方向

確率量子化は、ヤン–ミルズの測度を、それを不変測度に持つ Langevin 力学（確率偏微分方程式）の長時間の極限として作る道です（7-09）。力学はこの本の C_P が測る Langevin 力学と同じ種類ですが、目的は**測度の構成**で、緩和の速さ（緩和時間の仮定）は問いません。

正則性構造の解の理論の鍵の条件は劣臨界性で、それは $d < 4$ のときに限り成り立ちます（Chevyrev の総説 §1.2 典 ）。二次元では、ゲージ軌道の空間の上の Polish な状態空間と Markov 過程が作られ、ヤン–ミルズの測度がその不変測度であることが示されています（Chandra–Chevyrev–Hairer–Shen、Chevyrev–Shen 典 （要旨））。三次元では、熱流で均した一形式の空間という新しい状態空間と、局所の時間の解・ゲージ共変な繰り込みまでで、三次元のヤン–ミルズの測度は周期の箱 $\mathbb{T}^3$ の上でも未構成です（Chevyrev の総説 §1・§4 典 ）。

この道は、格子の繰り込み群を延ばすのでなく、**対象の置き場（状態空間）と構成の手段（確率力学）を作り直す**方向に出ています（24-07 §05） 見 。ただし、劣臨界性の条件は、この新しい道具も四次元でちょうど臨界になることを示します。結合が無次元であること（24-07 §01 の (c)）の一つの現れです。この道は、四次元の緩和時間の仮定にも局所の緩和時間の仮定にも道具を与えません。

この節が言えている範囲：劣臨界性の条件と三次元の未構成は総説の本文の言明、二次元・三次元の個々の結果は要旨の写しです。この本は正則性構造を道具として使っていません。

09

言えないこと

(a) 階層模型。階層模型の結果は、四次元のヤン–ミルズに何も含意しません（平行移動と回転の不変性を欠く）。表 1 の判定も、階層模型の中の見立てです。

(b) 群の上の Polchinski 流。熱核との畳み込みで流す形を、多重尺度の Bakry–Émery の条件まで定式化した資料は、探した範囲で見当たりません（「無い」ではありません）。

(c) 繊維。粗い値が -1 に近い所の縮退した族の向きの隙間が $O(1)$ に落ちること、長い弧が鞍点であることは見立てです（連続の測地線の Morse 指数からの類推）。

(d) 力学。階層的なゲージ模型の Glauber 力学・Langevin 力学の隙間や対数 Sobolev の言明は、探した範囲で見当たりません。

(e) 原典の種類。Bauerschmidt–Bodineau 2019 の帰納は Poincaré の型（スペクトルの隙間）の結果で、対数 Sobolev の結果ではありません。対数 Sobolev を流す形は同じ著者たちの後の仕事と総説の定理です。

(f) 規則の候補。§07 の類は候補で、無矛盾性・既存の結果の言い直し・定理の候補のどれも確かめていません。「結合の窓は尺度をつなぐ展開の欠如の言い直し」は見立てで、窓の幅の数はどの模型でも測っていません。

(g) 作用の障壁の例。余裕 95 倍は 0+1 次元の $\hbar = 0$ の読みで、芯の作用の障壁の仮定は仮定の行です。群の上の繰り込みに同じ形の余裕があるかは言いません。

(h) 確率量子化。四次元が臨界であることは、四次元で道具が作れないことの証明ではありません。原典の条件の言明を写しただけです。

10

五分類の表と依存グラフ

表 3　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	Bakry–Émery (1)	典	総説の定理 3.6	各点の曲率の下界	—
2	階層模型の帰納の (A1) と定理 2.1・系 2.2 (2)	典	§02	スカラー・階層	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
3	頂上の一サイトの対角 $\frac{15}{4}$ と結合の和 4	初	23-09 の (11)	0+1・$\varepsilon=\frac{1}{2}$	—
4	凸性の天井の補題：$\operatorname{osc} V \le K D^2/2$ (3)	初	§03 の証明	境界の無いコンパクトな多様体	—（一次元の版は候補）
5	単位元に集まれない系：$SU(2)$ で凸なら $\mu \le e^{\pi^2}\,\mathrm{Haar}$ (4)	初	§03 の証明	単位の S^3	—
6	一リンクの Wilson の重みの命題：一リンクで $(2+\beta\cos\theta)g$・$\beta<2$・(5)	初	§03 の証明	$\beta \ge 2$（(5)）	—
7	閉じた多様体の最大点では $\operatorname{Hess} V \le 0$	初	§04	—	—
8	帯の巻き付きの生の率が Kramers の傾きに 1〜3%	読	24-02 §05	二次元 $U(1)$・$\beta=3..6$・後付け	—
9	0+1 の一サイトの比 ω_b/m	初	24-03 の (7)・24-04 §07	0+1	`LatticeGauge.LocalHDoubleWell.one_slice_ratio`（仮定：$0<\varepsilon,m,\omega$）
10	群の (A1) を繊維の Bakry–Émery と読むと弱結合で立たない	見	§02・§05	弱結合の尺度	—
11	表 1 の判定	見	表 1	階層模型	—
12	多重尺度の Bakry–Émery (6)・曲がった空間の版	典	総説の定理 3.6・3.20	Gauss の共分散の流れ	—
13	階層模型の強結合に入るまでの段数 $\le \beta + 4\log\beta + 20$	仮	紙の記録（本に証明なし）	Migdal–Kadanoff・$SU(2)$	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
14	一リンクには $\frac{1}{4}$ の型の壁は戻らない	見	§05	一リンク	—
15	通貨の不等式 (7)	初	23-09 の (3)	—	—
16	Holley–Stroock の摂動の費用 e^{osc}	仮	記憶の標準形	—	—
17	Lyapunov の条件 (8) から $(1+bC_G)/a$	典	二次資料（23-14 §03）	—	陽性対照 `gauss1d_bbcg`（仮定なし、23-14）
18	場に依る $\varepsilon(\phi)$（一様に 1 未満）	典	原典の注 2.4	—	—
19	芯の作用の障壁の仮定	仮	23-11 §06	0+1・箱の側の芯	—
20	$\Delta S_*^0 \le 1.4\times 10^{-2}$・余裕約 95 倍	読	23-11 §06	$\hbar=0$ の読み	`LatticeGauge.CoreActionGap.measured_ratio`（仮定：測った上界）
21	局所の項が $e^{-(2S_0-\Delta S_*-\delta)/\hbar}$ で消える	初	23-11 の (12)	$\hbar\to 0$	`LatticeGauge.CoreActionGap.cloc_term_poly`・`cloc_term_vanishes`（仮定：芯の作用の障壁の仮定・ξ の読み・$\Delta S_*<2S_0$）
22	群の上の道具は確率で押す道具でなければならない	見	§04	—	—
23	重みの四性質と活動のノルムの一段の評価	典	BBS の付録	平らな場	—
24	稀さで払う測度の類（候補）	見	§07	候補	—
25	強結合の対数 Sobolev と質量ギャップ	典	Shen–Zhu–Zhu（要旨）	小さな β	—
26	結合の窓は尺度をつなぐ展開の欠如の言い直し	見	§07・24-07 §06	—	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
27	解の理論は $d<4$ で劣臨界・三次元の測度も未構成	典	Chevyrev の総説	—	—
28	確率量子化の道は四次元の緩和時間の仮定に道具を与えない	見	§08	—	—

機械検査の欄が保証するのは実数の代数と算術だけで、ΔS が芯の作用の障壁であること、C_P が経路の測度の Poincaré 定数であることは Lean の外です（23-13）。凸性の天井の補題・単位元に集まれない系・一リンクの Wilson の重みの命題には機械検査がありません。

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  典  Bakry–Émery：曲率の下界 ⇒ 対数 Sobolev・Poincaré
 2  典  階層模型の帰納の (A1)・定理 2.1・系 2.2（Bauerschmidt–Bodineau）
        スカラー・階層
 3  初  頂上の一サイトの対角 15/4 と結合の和 4                          0+1（23-09）
 4  初  凸性の天井の補題：osc V ≤ KD²/2                                閉じた多様体
 5  初  単位元に集まれない系：SU(2) で凸なら μ ≤ e^(π²) Haar ⟸ 4
 6  初  一リンクの Wilson の重みの命題：曲率 (2 + β cos θ)・確率 (5)
 7  初  閉じた多様体の最大点で Hess ≤ 0
 8  読  帯の生の率が Kramers の傾きに 1〜3%                             二次元 U(1)・
 9  初  0+1 の一サイトの比 ω_b/m                                       Lean one_sl
10  見  群の (A1) は弱結合で立たない ⟸ 2・4
11  見  表 1 の判定 ⟸ 10
12  典  多重尺度の Bakry–Émery・曲がった空間の版
13  仮  強結合に入るまでの段数（紙の記録）
14  見  一リンクに 1/4 の型は戻らない ⟸ 6
15  初  通貨の不等式 (7)                                              23-09 の (3
16  仮  Holley–Stroock の費用 e^osc                                    記憶
17  典  Lyapunov の条件 (8)                                            二次資料
18  典  場に依る ε（一様に 1 未満）
19  仮  芯の作用の障壁の仮定                                          0+1
20  読  ΔS⁰ ≤ 1.4·10⁻²・余裕約 95 倍                                   ħ = 0 の読み
21  初  局所の項が消える (12) ⟸ 19                                     Lean cloc_
22  見  群の上の道具は確率で押す ⟸ 5・6・7・15
23  典  重みの四性質・活動のノルムの一段の評価（BBS）                  平らな場
24  見  稀さで払う測度の類（候補）⟸ 4・15・17・23
25  典  強結合の対数 Sobolev と隙間                                    要旨
26  見  結合の窓は尺度をつなぐ展開の欠如の言い直し ⟸ 6・24・25
27  典  劣臨界性 d < 4・三次元も未構成
28  見  確率量子化は四次元の緩和時間の仮定に道具を与えない ⟸ 27
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。証明を置いた節点は、凸性の天井の補題・単位元に集まれない系・一リンクの Wilson の重みの命題・閉じた多様体の最大点の四つで、どれも一つの多様体の上の一つの測度についての文です。この章の結論の側の節点（群の上の道具は確率で押す・稀さで払う測度の類・結合の窓の言い直し・確率量子化の注）は全て「見」で、質量ギャップの節点も、緩和時間の仮定の節点もありません。局所の項が消える節点（稀さで払えた例）は芯の作用の障壁の仮定の上の代数で、結論の側の節点の前提には入りません。0+1 次元の例は型の例であって、群の上の文の根拠ではないからです。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 閉じた多様体の上の凸性の天井（凸性の天井の補題）・$SU(2)$ で凸な測度は Haar の e^{π^2} 倍を越えない（単位元に集まれない系）・一リンクの Wilson の重みの曲率と、凸でない集合の確率の上界（一リンクの Wilson の重みの命題）	繊維の上の条件つきの測度（多くのリンクの積）の凸性と隙間。縮退した族の向きの隙間の値
典 Bakry–Émery・階層模型の帰納の仮定と結論・多重尺度の Bakry–Émery・重みの四性質と活動のノルムの一段の評価・確率量子化の劣臨界性	群の上の Polchinski 流の定式化。階層的なゲージ模型の力学の隙間
初 ＋読 第 23 部の作用の障壁の余裕は、凸でない所を稀さで払えた例（芯の作用の障壁の仮定と $\hbar = 0$ の読みの上）	芯の作用の障壁の仮定そのもの。群の上で同じ余裕があること
見 群の上の道具は確率で押す道具でなければならないこと・表 1 の判定・稀さで払う測度の類（候補）・結合の窓は尺度をつなぐ展開の欠如の言い直し	どれも定理ではない。階層模型の結果の四次元への含意。規則の候補の無矛盾性

出典と再現

もの	種別	出典・道具
階層模型の帰納（(A1)・定理 2.1・系 2.2・注 2.4・補題 2.7〜2.9・自己評価の文）	典	R. Bauerschmidt, T. Bodineau, arXiv:1809.02075（Commun. Math. Phys. 373 (2020) 1167）。§1〜§2 を本文で確認
(1)・(6)・曲がった空間の版・エントロピーの安定性	典	R. Bauerschmidt, T. Bodineau, B. Dagallier, arXiv:2307.07619（総説）。定理 3.6・3.20・補題 3.21 を本文で確認
重みの四性質・活動のノルムの一段の評価	典	R. Bauerschmidt, D. C. Brydges, G. Slade, Introduction to a Renormalisation Group Method, Lecture Notes in Math. 2242 (2019), arXiv:1907.05474。付録 A.6 を本文で確認

もの	種別	出典・道具
階層的なゲージ模型	典	K. R. Ito, Commun. Math. Phys. 95 (1984) 247（本文）。K. R. Ito, Phys. Rev. Lett. 55 (1985) 558（要旨）
Lyapunov の条件 (8)	典	D. Bakry, F. Barthe, P. Cattiaux, A. Guillin, Electron. Commun. Probab. 13 (2008) 60（書誌は記憶。言明は二次資料の再述で確認、23-14 §03）
Holley–Stroock の摂動	仮	R. Holley, D. Stroock, J. Stat. Phys. 46 (1987) 1159（書誌・言明とも記憶）
強結合の対数 Sobolev と質量ギャップ	典	H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, arXiv:2204.12737（要旨）。範囲の数は正規化の約束に依るので書かない
確率量子化	典	I. Chevyrev, Stochastic quantisation of Yang–Mills, arXiv:2202.13359（§1・§1.2・§4 を本文で）。A. Chandra, I. Chevyrev, M. Hairer, H. Shen, arXiv:2006.04987・arXiv:2201.03487（要旨）。I. Chevyrev, H. Shen, arXiv:2302.12160（要旨）
凸性の天井の補題・単位元に集まれない系・一リンクの Wilson の重みの命題	初	本文 §03 の証明。数値は $\frac{54\pi}{25}e^{-3/2}$ と e^{π^2} の値だけ
第 23 部の例（頂上・通貨・Holley–Stroock の案・作用の障壁）	本書	23-09 §06・23-10 §04・23-11 §06
Lean	Lean	LatticeGauge.LocalHDoubleWell（`one_slice_ratio`）・LatticeGauge.CoreActionGap（`cloc_term_poly`・`cloc_term_vanishes`・`measured_ratio`）。束が保証するのは代数と算術だけ

この章で使った語 — 凸性の天井・Bakry–Émery の曲率の下限 κ_{BE}・Brascamp–Lieb・繊維・凸と非凸の場所の逆転・稀さの率 s・通貨（エントロピー）・Holley–Stroock の摂動・Lyapunov の条件・場に依る定数・群の上の Polchinski 流・稀さで払う測度の類・結合の窓・劣臨界性。意味は A-02 用語集 と 24-09 にあります。

次に読む章：24-07 四次元だからこそ — 四次元で効いていることを、無次元の結合と位相の二点に限って。

2026-10-09 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 24 部 一本目の道（後半） 臨界次元・位相・四段のハードル · Kiichi, Shiori and Rin

四次元だからこそ — 無次元の結合と位相

この章は既存の知見の整理です。§03・§04・§06・§07 は未解決の地図です。

この章で分かること — 四次元で効いていることを二点に限って述べます。結合が無次元であること（臨界次元・次元転移・ϕ_4^4 とヤン–ミルズで漸近自由の向きが逆）と、尺度を持たない位相的な配位があること（インスタントンと位相電荷）。二点を合わせると、遅い量と相関長が別の起源に割れる、という見立てが立ちます。次に、第 23 部の四段の階段のそれぞれについて、ハードル・既知の到達点・この本の道具で届くか・費用の種類を一枚の表にし、三段目（連続極限）がなぜ長く開いていたのかを、難しさの三つの源と一次資料の記述で述べます（三段目の存在の部分は、2026-11-10 に公開された構成が示した、と委員会が評価しました。第二巻で読みます）。位相については、周期の箱で緩和時間の上界の仮定が偽と読める範囲と、この本の群 $SU(2)$ では凍結が拡散型緩和時間の仮定を壊すかが決まっていないことを、24-02 の二次元の試験台と並べます。物理の非摂動的な機構が証明にならない理由を一行ずつ添えます。

前提となる章 — 23-03 §02（四段の定義）と 23-03 §06（持ち上がる見込みと持ち上がらない理由）・23-15 §07（二段目以後の距離）・23-16（主張しないこと）・23-01 §05（緩和時間の仮定と位相の区画の注）・4-07（次元転移）・7-07（Balaban と MRS）・24-01・24-02。記号は 24-09。

先に言うこと — 水準は〔三〕です。二点は「四次元でだけ起きること」ではなく、理論がその臨界次元にいることの性質として述べます。二点を合わせた読みは見立てです 見 。四段の表の「届くか」と費用は見立てと見積もりです。§05 は読んだ一次資料の記述の整理で、Balaban の論文の本文は取れていません（書誌と、他の資料の記述を通して）。この章は質量ギャップも、連続極限の構成も示しません。

この章の順序

1. 結合が無次元であること — 臨界次元・次元転移・逆向きの漸近自由（(1)(2)・図 1）
2. 尺度を持たない位相的な配位 — インスタントンと、転位の重みの二つの数え方（(3)・表 1）

3. 二点を合わせた見立て — 遅い量と相関長が別の起源に割れる
4. 四段のハードル — 段・ハードル・既知の到達点・届くか・費用（表 2）
5. なぜ三段目が長く開いていたか — 難しさの三つの源・対象・道具・理論・歴史（表 3）
6. 規則の候補について一段落 — 「結合の窓」は尺度をつなぐ展開の欠如の言い直し
7. 位相と箱 — $SU(2)$ では未決 — 周期の箱・開いた境界・二次元の試験台との対応
8. 物理の機構と、証明にならない理由 — 表 4
9. 言えないこと
10. 五分類の表と依存グラフ — 表 5

01

結合が無次元であること — 臨界次元・次元転移・逆向きの漸近自由

この節は既存の知見（臨界次元・次元転移・漸近自由）の整理です。導入は 4-07 §02 にあります。

d 次元のヤン–ミルズの作用を

$$S = \frac{1}{4g^2}\int d^d x \ \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \qquad [g^2] = (\text{長さ})^{\,d-4} \tag{1}$$

と書くと、結合 g^2 は四次元でちょうど無次元になります 典 （次元の数え。格子では Wilson の発見法で $\beta \propto \varepsilon^{4-d}$、四次元で β は格子間隔 ε に依らない、Chatterjee の総説 §3）。三次元以下では g^2 が長さの負の冪の次元を持ち、短い距離で相互作用は冪で弱まります（超くりこみ可能）。五次元以上では逆に強まります（くりこみ不可能）。ちょうど四次元では、尺度を一段変えるごとの補正が冪で縮まず、g^2 の大きさで残ります。冪の数え方の言葉では、四次元の四次の単項式は relevant でも irrelevant でもなく marginal です（Bauerschmidt–Brydges–Slade の本の定義 5.2.1 典 ）。

次元転移。非可換の場合、その補正の符号は「短い距離ほど弱い」側に向きます（漸近自由、4-06）。作用は長さの物差しを持たないのに、量子化すると一ループで

$$\Lambda = \mu\, \exp\!\Big(-\frac{1}{2b_0\, g^2(\mu)}\Big), \qquad b_0 = \frac{11N}{48\pi^2} \quad (SU(N)\ \text{の純ゲージ}) \tag{2}$$

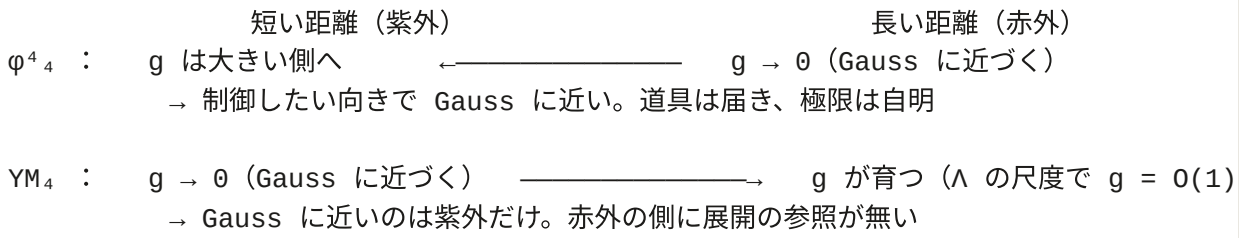
という長さの逆数が生まれます 典 （一ループの標準形、4-07）。質量ギャップと閉じ込めの尺度は Λ の定数倍だと予想されています。$\exp(-1/g^2)$ は $g=0$ で全ての導関数が消えるの

で、Λ は g の摂動の展開のどの次数にも現れません（4-07 の「摂動論に映らない」）。

緩和時間の仮定への現れ。(a) 相関長は β について指数で伸び（$SU(2)$ の一ループの記帳で $\xi \propto e^{3\pi^2\beta/11}$、23-03 表 2）、$\xi$ で測る量には $\ln\xi \sim \beta$ の因子が付きます。第 23 部が緩和時間の仮定を帯の文でなく冪の文に置いたのはこのためでした（23-01 §07）。(b) Gauss 近似では結合が流れません。階層格子の Gauss 近似で、プラケットの静的な相関は質量の無い R^{-4} の減り方で、相関長は体積で切られるだけでした（24-02 §02）。尺度は非可換の補正からだけ生まれます。(c) 確率量子化の方程式の解の理論は、劣臨界性（$d<4$）を鍵の条件にしていて、四次元はちょうど臨界です（Chevyrev の総説 §1.2 [典]、7-09）。

同じ marginal でも向きが逆。四次元の ϕ^4 も結合が無次元（marginal）ですが、繰り込みの流れで結合が 0 に近づくのは長い距離の側です（「赤外の漸近自由」、Bauerschmidt–Brydges–Slade の赤外の漸近自由の命題（BBS の命題 6.1.7） [典] ）。制御したい向き（長い距離）で理論が Gauss に近づくので道具が届き、届いた先の極限は自明（スケーリング極限は Gauss）でした（Aizenman–Duminil-Copin 2021 [典] （要旨）、7-08）。ヤン–ミルズでは結合が 0 に近づくのは短い距離の側で、長い距離に向かって結合が育ちます。

図 1　二本の矢印（結合 g の流れ。左が短い距離、右が長い距離）



四次元でだけ、とは書かない。二次元の $O(N)$（$N\geq 3$）模型と CP^{N-1} 模型も、結合が無次元で漸近自由という同じ組を持ち、CP^{N-1} には尺度を持たないインスタントンもあります。そこでも紫外極限の構成は完成していません（Rivasseau 2000、Douglas 2004 [典] ）。逆に、臨界次元でも可換（$U(1)$）や非ゲージ（ϕ^4_4）なら、理論は自由場に同値か自明になります。この章の「四次元だからこそ」は、**臨界次元にいること（無次元の結合）と、非可換であること（漸近自由の向き・位相・ゲージ軌道の幾何）が同時に起きること**を指します [見] 。

02

尺度を持たない位相的な配位 — インスタントンと転位の重み

$\pi_3(SU(N))=\mathbb{Z}$ により、四次元のゲージ場には整数の位相電荷 Q があり、自己双対な解（インスタントン）の作用は大きさ ρ に依らず $8\pi^2/g^2$ です [典] （Belavin–Polyakov–Schwartz–Tyupkin 1975 の要旨、作用の値は Lucini–Teper 2001・Athenodorou–Teper 2021 の本

文)。作用が ρ に依らないのは、古典のヤン–ミルズが四次元で尺度を持たないことの現れです。

格子の上では、滑らかにした位相電荷は格子間隔の大きさの小さなインスタントンが格子を通り抜けるとき（「超立方体の中に消える」）にだけ変わります（Lucini–Teper 2001 §6.1 典）。その重みは、一ループの小さなインスタントンの密度 $D(\rho) \propto \rho^{11N/3-5}$ から見積もられ、位相電荷が一単位動く時間について

$$\ln \tau_Q = b + \left(\frac{11N}{3} - 5\right) \ln \frac{1}{a\Lambda} \tag{3}$$

という勘定が一次資料にあります（Athenodorou–Teper 2021 の式 (32)(34) 典）。$SU(2)$ では係数が $7/3$ で、原典自身が「かなり弱い」と書きます。当てはめた傾きとの比べは表 1 です。

表 1　(3) の係数と当てはめた傾き（Athenodorou–Teper 2021 の表 43。熱浴と過緩和・周期の箱・標準の物理体積に規格化）

N	(3) の係数 $11N/3-5$	当てはめた傾き
2	$7/3 \approx 2.33$	表から除外（測定の間隔より τ_Q が十分大きくならない）
3	6.0	6.82(7)
4	9.67	9.27(12)
5	13.3	11.13(20)
6	17.0	13.50(30)
8	24.3	17.58(43)

表 1 の札は 典（原典の数）です。独立な経路が一つあります。Wilson 流で滑らかにした場が位相の区画の間にいる確率（滑らかさの閾 $h \geq 0.067$ を越える確率）は、物理の大きさを止めた格子で a^6 に比例して消えると原典の図が示唆していて（Lüscher 2010 §4.3、$SU(3)$・示唆の語 典）、(3) の $SU(3)$ の係数 6 と同じ数です。$SU(2)$ について同じ型の測定は、探した範囲で見当たりません。

二つの数え方。転位の作用を一ループのインスタントンの作用の c 倍と置く粗い勘定では、動的指数は $z = (11N/3)c - 4$ の型になります 仮。(3) の数え方とは、$\rho \sim a$ の体積の因子と $d\rho$ の幅の数え方で 1 違います。$SU(3)$ の数（当てはめの 6.82、あるいは別の原典の $z \approx 5$）に c を合わせると、**どちらの数え方でも $SU(2)$ は $z = 2$ の境目の近くに落ちます** 見。この本は二つの数え方のどちらが正しいかを判定しません。また c が群に依らないことも確かめていません。

> 03

二点を合わせた見立て — 遅い量と相関長が別の起源に割れる

二点を並べると、次の見立てが立ちます[見]。遅い量（位相電荷）の時間と相関長 ξ は、どちらも同じ無次元の結合から $e^{(\text{定数})\cdot\beta}$ の形で生まれます。ところが指数が別の数です。相関長は (2) から $\xi \propto \Lambda^{-1}$、位相電荷の時間は (3) から $\tau_Q \propto (a\Lambda)^{-(11N/3-5)}$ で、格子単位では τ_Q は $\xi^{11N/3-5}$ の型、比べる相手の ξ^2 とは指数が揃いません。

- 0+1 次元の二重井戸では、遅い量（キンクの数）と ξ が同じキンクから生まれ、指数が揃って対数の差しか残りません（24-01 表 3）。
- 二次元 $U(1)$ の帯では、静的な長さは β について一次、保存が壊れる長さは $e^{0.92\beta}$ で、二つが指数で離れます（24-02 §03、二次元の玩具の読み）。
- 二次元 CP^{N-1} では、N を動かすと凍結の強さと保存が壊れる長さが割れ、局所の比は割れませんでした（24-02 §07、条件つきの一点の読み）。

「質量ギャップは生まれても、緩和時間の仮定の形（C_P と ξ^2 を同じ冪で結ぶ形）では捕まらない」ことの正体の候補は、**遅い量と相関長が別の起源に割れること**で、その割れは結合が無次元であることと位相の二つから来る、という読みです。この読みでは、質量ギャップを捕まえる形は緩和時間の仮定の全体ではなく、時刻に局所な部分（24-04）と、その裏返しの真空の測度の Poincaré 定数（24-05）の側にあります。

この節が言えている範囲：読みで、定理ではありません。指数の数は原典の当てはめと半古典の勘定で、$SU(2)$ ではちょうど境目の近くに落ちるので、$SU(2)$ について「割れる」かは決まっていません（§07）。原典の自己相関は熱浴・過緩和・HMC の力学の数で、リンクの Langevin の C_P への読み替えは仮定です（24-01 §06）。

04

四段のハードル

第 23 部は拡散型緩和時間の仮定を四段に分けました（23-03 §02）：一段目＝0+1 次元の二重井戸の経路の測度、二段目＝四次元格子の非可換ゲージ理論（格子間隔を止める）、三段目＝連続極限と OS 公理、四段目＝極限での質量ギャップ。表 2 は、各段のハードル・既知の到達点・この本の道具で届くか・費用の種類を一枚にしたものです。費用の種類は三つです。「週」＝既存の道具の組み合わせで作業を重ねれば届く見込み、「年」＝既存の道具の大きな拡張か、大きな仕事の再構成が要る、「新しい数学」＝読んだ資料の中に道筋の記述が無い（この語は「なぜ三段目の数学が無いのか」という問いの言い方をそのまま借りたもの）。

表 2　四段のハードル（「届くか」と「費用の種類」は見立て。到達点の札は行の中）

段	ハードル	既知の到達点〔出典と札〕	この本の道具で届くか	費用の種類
一段目：0+1 次元の二重井戸	二重井戸の緩和時間の冪の言明を $\hbar \to 0$ で一様に。頂上の曲率の不足 $\frac{1}{4}$ を稀さで払う	静的な側（トンネル分裂・相関長）は半古典で既知 典 。緩和時間の仮定の上の側は二重井戸の緩和時間の上界の命題（四条件の上の代数）まで、行ごとに初・典・機・仮が混在（23-12）	部分的に届いている。残りは条件ごとの行（23-15 表 1）	週（多くの行）。ただし $\hbar < 0.005$ の行は「別の方法」、頂上の一命題は「方法未定」で、見積もりが無い
二段目：四次元格子・非可換	弱結合（大きな β）での相関の指数減衰（格子の質量ギャップ）を体積に一様に。上界の仮定と緩和時間の下界の仮定	強結合（小さな β）では定理（Osterwalder–Seiler 1978 典 （書誌と二次資料））。階層模型では全ての β で閉じ込め（Ito 1985 典 （要旨））。弱結合の実格子では未解決（格子の相関長の問題、Chatterjee の Problem 5.1）	階層模型の中では静的な側は既知で、動的な側（座標と保存、24-02 §02）は届く範囲。実格子の弱結合は届かない（閉じ込めの尺度を横切ることそのもの、§05 の尺度をつなぐ展開の欠如）	週（階層模型の動的な側）／「新しい数学」（実格子の弱結合）
三段目：連続極限と OS 公理	格子間隔 $\to 0$ の極限の存在・一意性・無限体積・OS 公理・非自明性	2026-11-10 に公開された構成：四次元の Wilson の格子の極限として Wightman の公理を満たす理論を、任意のコンパクト単純群で作る Lean の形式化（Lean で証明されている、と委員会が評価した 典 ）。周期の立方の箱の連続極限と、体積の部分列による無限体積の極限。無限体積の極限の収束と一意性は示されていない（6-04）。それより前の到達点：有限体積の格子の紫外安定性（三・四次元、Balaban の Commun. Math. Phys. 1983–89 の 13 本 典 （書誌と、他の資料の本文の記述））。赤外切断つき・軸ゲージの Schwinger 関数（Magnen–Rivasseau–Sénéor 1993 典 （序を本文で））。三次元の測度ですら有限の箱で未構成（Chevyrev 2022 典 ）	この本の道具では届かない。存在の部分は公開された構成から引用する（第二巻）。残る項目（無限体積の極限の収束と一意性・連続の理論の確率測度）は 6-04	（存在の部分は公開された構成。残る項目は「新しい数学」の見込み）
四段目：極限での質量ギャップ	体積に一様な隙間 $\Delta > 0$	無い。問題文は「体積に一様な質量ギャップには新しい考えが要る」と書く（Jaffe–Witten §6.5 典 ）。数値では $SU(3)$ の最も軽いグルーボールが弦張力の平方根の $3.405(21)$ 倍（Athenodorou–Teper 2021 典 ）で、有限個の格子間隔と有限の箱からの外挿。公開された構成にも一様な質量ギャップは無い（在るのは多項式の評価、6-04）	届かない。片側の橋（23-01 §06）は形だけ持ち上がる見込み 見	「新しい数学」

表 2 の三段目の費用は、公開された構成より前には、無次元の結合という源と大域のゲージ固定の欠如について「年」と見積もっていました。この見積もりは資料の記述に依ります 見 ：

Rivasseau 2000 の「Balaban の結果を簡潔にし書き直せ。数百頁に及ぶので小さな仕事ではない」、Dimock の再構成が三次元の ϕ^4 から始めて、三次元の QED の分配関数の安定性に十年あまりで届いたこと（要旨）。尺度をつなぐ展開の欠如には、費用の見積もりを支える資料がありません。一段目の行の費用は 23-15 §03 の見積もりのとおりで、「週」と書いた行にも走らせた見積もりは一つもありません。

この節が言えている範囲：既知の到達点の行は出典の札のとおりです。「届くか」と費用の種類は見立てで、届かないと書いた段について「不可能」とは言いません。

05

なぜ三段目が長く開いていたか

この節は、2026-11-10 に公開された構成より前に読んだ一次資料の記述の整理です。2026-11-10 に、四次元の Wilson の格子の極限として Wightman の公理を満たす理論を作る Lean の形式化と、委員会の評価書が公開され、三段目の存在の部分は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」水準に入りました（第二巻、6-00）。示されていないのは、無限体積の極限の収束と一意性、連続の理論の確率測度、一様な質量ギャップ、Wilson ループと面積則、一粒子の状態です（6-04）。以下の要約と表 3 は、その構成より前の到達点と、難しさの源の読みとして残します。

まず十三行で要約します〔三〕。

1. 三段目は「格子を細かくした極限に一つの確率測度があり、それが OS 公理を満たす」ことです。公開された構成より前に一次資料に在った定理は、有限の箱の中で、格子をどれだけ細かくしても粗視化した理論が暴れない、という一様な評価（Balaban の紫外安定性）までです。
2. そこから先には、相関関数の評価・極限の一意性・箱を無限に広げること、の三つが別々に要りました。公開された構成は、周期の箱の連続極限と、体積の部分列による無限体積の極限を与えますが、無限体積の極限の一意性は示していません。三次元の非可換ゲージ理論の有限の箱の中の測度は、読んだ資料の範囲では構成されていません。
3. 難しさの一つ目は、四次元では結合が無次元であることです。三次元以下では尺度を細かくするほど相互作用が冪で弱まり、扱う発散は有限個で済みました。四次元では一段ごとの補正が冪で縮まず、無限個の段の補正を、段の数に依らない形で全部制御しなければなりません。
4. 二つ目は、漸近自由が「短い距離でだけ」効くことです。短い距離では結合が小さく、自由場の周りの展開が使えます。長い距離では結合が大きくなり、閉じ込めの尺度 Λ が現れます。

5. この Λ は結合のどの次数の展開にも現れないので、短い距離から展開を延ばしても届きません。結合が大きい側で収束する強結合展開は、格子間隔が大きい側でしか使えず、連続極限に届きません。二つの展開の間の尺度を横切る道具がありません。
6. 三つ目は、非可換のゲージ不変性です。全ての配位で同時に効く連続なゲージ固定が存在せず（Gribov・Singer）、Balaban は尺度ごと・場所ごとにゲージを選び直しました。
7. 場が大きい所では展開が使えず、そこは「起こりにくい」ことで押さえるしかありません。群の上では大きな場は必ず非凸になるので、凸性に頼る方法は使えず、稀さで払う方法が要ります（24-06）。
8. Magnen–Rivasseau–Sénéor（1993）は、長い距離に切断を置いたまま、軸ゲージで Schwinger 関数を構成しました。切断を外さない理由を、彼らは序で、結合が大きくなり閉じ込めの非摂動効果に入ること、その周りで展開できる易しい可解模型が無いこと、と書いています。
9. 格子の数値計算では、$SU(3)$ の最も軽いグルーボールの質量が弦張力の平方根の約 3.41 倍と、連続極限へ外挿されています。
10. しかし数値は有限個の格子間隔と有限の箱からの外挿で、極限が存在すること・一意であること・箱の大きさに一様であることを示しません。
11. 四次元で非自明な相互作用を持つ場の理論は、漸近自由なものに限られると考えられています。ϕ^4 理論は四次元で自明（スケーリング極限が Gauss）であることが示されました。
12. その結果、公開された構成より前には、四次元で比べる相手になる「相互作用のある構成済みの理論」は一つも無く、ヤン–ミルズはその最初の例として求められていました。
13. この本が一段目（二重井戸）と二段目（階層的なゲージ模型）で出会った壁——頂上の凸性の不足を稀さで払うこと、群の上で凸性の仮定が立たないこと、隙間に映らない大域の量——は、三段目の三つ目の難しさの小さな版です。三段目では、その「稀さ」が長い距離で稀でなくなります 見 。

難しさの三つの源

表 3　難しさの源（事実の列は出典の札のとおり、「何が止まるか」は見立て）

源	事実（一次資料の記述）	何が止まるか	この本の壁との対応
無次元の結合という源 — 結合が無次元で、全ての尺度が同じ重さで効く	四次元で g は無次元・四次の項は marginal（§01）。構成された模型は二・三次元の超くりこみ可能なものと、二次元の質量のある Gross–Neveu だけ（Rivasseau 2000 典 ）。$d=2,3$ は $d=4$ よりかなり易しい（Chevyrev 2022 典 ）	無限個の段の補正を段数に一様に足し上げる必要。漸近自由は $g_j^2 \sim 1/(bj)$ で、和は対数でしか収束しない	緩和時間の仮定を冪の文に置いたこと（$\ln \xi \sim \beta$ の因子）

源	事実（一次資料の記述）	何が止まるか	この本の壁との対応
尺度をつなぐ展開の欠如 — 紫外と赤外をつなぐ展開が無い	MRS 1993 の序の文（下）。「紫外極限の弱結合展開は低温展開とある程度矛盾する」「異なる展開・繰り込み群の異なる領域を貼り合わせる技法を発展させるべき」（Rivasseau 2000 典 ）。強結合展開は格子間隔の大きい側でしか収束しない（Chatterjee 典 ）	Balaban と MRS の制御は g_j が小さい段だけで効き、Λ^{-1} の尺度を横切る段に使える定理が無い	一段目では頂上の配位が稀で、稀さという通貨があった。赤外では Gauss 近似の効かない配位が典型になり、その通貨が無い
大域のゲージ固定の欠如 — 非可換のゲージ不変性	連続な大域のゲージ固定が無い（Gribov 1978・Singer 1978 典 （書誌のみ、中身は記憶））。Balaban は正則な配位の上で局所的・尺度ごとに固定し、群値の場の平均を別に定義した（論文の題）。大きな場の凸性が階層模型の外への主な課題（Bauerschmidt–Bodineau 典 ）	大きな場を凸性で制御できず、稀さで払うしかない	群の上の凸性の天井（24-06 の補題）。凸と非凸の場所が平らな ϕ^4 と逆

三つの源の関係 見 ：無次元の結合という源は「何段あるか」（段数が無限で各段が同じ重さ）、尺度をつなぐ展開の欠如は「どの段で展開が切れるか」（閉じ込めの尺度）、大域のゲージ固定の欠如は「一段の中で何が足りないか」（凸性と大域のゲージ）。Balaban は有限体積の紫外の段で大域のゲージ固定の欠如を処理し、g_j が小さい範囲で無次元の結合という源を処理しました。尺度をつなぐ展開の欠如には、読んだ資料のどれも手を付けていません。

Balaban と MRS が止まった場所

Balaban。ゲージ理論の系列は Commun. Math. Phys. の 13 本（1983〜1989、格子の Green 関数の評価の一本を含む）で、頁を足すと約 426 頁です 典 （書誌で数えた。本文は取れていない）。到達点は、他の資料の本文の記述を合わせると次のとおりです。有限体積の格子で、ブロックスピン変換を任意に多く繰り返した後も、単位格子の上の有効作用が有界に留まること（紫外安定性）。そこから、滑らかにした Wilson ループのようなゲージ不変な量の極限が、コンパクト性による**部分列**で存在することは従うはずですが、**極限は一意とは限りません**（MRS 1993 の序の整理 典 ）。相関関数の評価・極限の一意性・無限体積・OS 公理・質量ギャップは、どの資料も Balaban の到達点に含めていません。

MRS 1993。示したのは、純 $SU(2)$ の四次元ヤン–ミルズの Schwinger 関数を、固定した赤外切断つき・紫外切断なしで、正則化した軸ゲージで、自明な位相の区画で構成することと、Slavnov 恒等式が非摂動的に成り立つことです。著者自身、収束の証明を全ての細部で与えたとは主張しない、詳しい概略だと書いています 典 （序を本文で確認、証明の本体は読んでいない）。止めた理由は序の次の文です（この本の訳）。

> 大きなゲージ変換の下の不変性や、インスタントンのような非自明な位相の効果は調べない。また赤外切断を外そうとはしない。それは結合定数の大きな値に、おそらく閉じ込めに対応するいわゆる非摂動効果につながるからである。これらの問題は今のところ私たちの構

> 成的方法の及ぶ範囲の外にある。とくに、周りで展開できる、これらの現象の易しい可解模型が無いからである。

引用の「私たち」は MRS の著者たちを指します。赤外切断を外さないので、OS 公理の全体も調べられない、と序は続けます。

対象・道具・理論・歴史

対象が未定義。問題文は「非自明な量子ヤン–ミルズ理論が $\mathbb{R}^4$ の上に存在し、質量ギャップを持つことを示せ」で、存在の部分に Wightman または OS と同じ強さの公理を求め、脚注でコンパクト性による弱い存在だけでは解とみなさないと書きます（Jaffe–Witten 典 ）。構成そのものが問題の中身で、構成が済んだ対象の性質を問う形になっていません。Douglas の 2004 年の報告も「量子ヤン–ミルズ理論の満足な数学的定義は無い」と書きます 典 。さらに、測度を置く空間が決まっていません。自然な空間はゲージ軌道全体の商で、非可換なら非線形の空間になり、状態空間の構成さえ自明でない。三次元ではすでに Gauss 自由場が線に制限できないほど特異で、二次元で使えたホロノミーの空間は使えない、と Chevyrev の総説は書きます 典 。二段目までの対象（格子の上の有限次元の確率測度）は定義済みで、その性質を問う数学があります。公開された構成より前には、三段目の対象は、どの空間にどの位相で置くかからして未定でした。「数字が無い」の一段手前に「対象が無い」があったのです 見 。公開された構成は、対象を相関の表（Schwinger 関数）と OS の空間として与え、連続の理論の確率測度は与えていません（6-04）。

道具は Gauss の参照の周りの摂動。構成された模型の多くは弱結合の領域で、クラスター展開と Mayer 展開とその多重尺度版で作られています（Rivasseau 2000 典 ）。繰り込み群の一段の解析は、場が 0 の周りの冪の摂動とテイラー近似に頼り、それは場が小さいときだけ良い近似です（Bauerschmidt–Brydges–Slade の本 典 ）。確率量子化の解の理論は、劣臨界性（$d < 4$）のもとで解が Gauss 自由場を不変測度に持つ確率熱方程式の摂動であることを使います（Chevyrev 典 ）。どれも「各尺度で Gauss 測度に近い」ことを入力にします。ヤン–ミルズの漸近自由は、この入力を**短い距離でだけ**与えます。長い距離では、Gauss の参照から出発する根拠が尽きます。四次元 ϕ^4 では逆に長い距離で Gauss に近づくので同じ道具が効き、結論は自明でした。**四次元で道具の届く理論は自明になり、非自明であるべき理論には道具の入力が無い** 見 。

小さいパラメータも凸性も無しに、無限個の尺度を横切る理論が無い。読んだ範囲の多重尺度の定理は、どれも各段に小さいパラメータか凸性を置きます：小さな結合（階層と Euclid の ϕ^4_4）、各段の条件つき測度の一様な凸性（Bauerschmidt–Bodineau）、収束する摂動展開（二次元の Gross–Neveu、書誌のみ）、小さな g_j と大きな場の稀さ（Balaban・MRS） 典 。群に値をとる場では、凸性の仮定が弱結合の尺度で原理的に立ちません（24-06 の補題：直径 D

のコンパクトな多様体で $\mathrm{Hess}\, V \geq -K$ なら $\mathrm{osc}\, V \leq K D^2/2$）。**ゲージ不変性はこの制御を禁じます** 見 ：ゲージ不変な関数は軌道に沿って一定なので、軌道の向きに凸性（$\mathrm{Hess}\, V > 0$）を持てません。ゲージを固定して軌道の向きを消そうとすると、連続な大域の固定がありません。Balaban の局所の固定と MRS の二つのゲージの継ぎ目は、どちらも小さな場の領域でだけ効きます。軌道の空間の Riemann 幾何は記述されていますが（Singer 1981、書誌のみ）、その上の Gauss でもその摂動でもない測度を扱う一般論は、読んだ資料の中にはありません。

歴史。Balaban の仕事は「非常に印象的だが近づきにくい。結果が多くの出版物に散らばり、全ての議論の整合性を確かめるのは非常に難しい」と MRS の序は書き、Rivasseau 2000 は書き直しを未解決の問題に挙げます 典 。Dimock の再構成は「他の人々はこの方法を採り入れるのが遅かった」と書いて三次元の ϕ^4 から始め（本文）、三次元の QED の分配関数の格子間隔に一様な評価に至っています（要旨） 典 。四次元の非可換の再構成は、公開された構成より前に読んだ資料の中にはありませんでした。中間の目標のうち、有限の箱 T^4 の上の構成は、公開された構成が周期の箱の連続極限として与えた、と委員会は評価しています。三次元の測度は、読んだ資料の範囲では空いています。別の数学を作る動きもあります。Wilson ループと確率論の言葉での定式化（Chatterjee）と、確率量子化でゲージ軌道の上の Markov 過程を作り不変測度の構成を開いた問題として掲げる道（Chandra–Chevyrev–Hairer–Shen、Chevyrev の総説）です 典 。どちらも格子の繰り込み群を延ばすのでなく、対象の置き場（状態空間）や構成の手段（確率力学）を作り直す向きです。ただし後者の鍵の条件 $d < 4$ は、この新しい道具も四次元でちょうど臨界になることを示しています。

この節が言えている範囲：一次資料の記述の整理と、源の対応づけ（見立て）です。Balaban の本文は取れていないので、到達点の記述は他の資料の本文を通したものです。Gribov と Singer の中身は記憶で、書誌だけを照合しました。

06

規則の候補について一段落

§04 の表の「新しい数学」を作るとしたら何を規則に置くか、という候補の一覧は 24-08 で扱います。ここでは一つだけ書きます 見 。尺度の公理化（粗視化の半群とその上の流れ）と、稀さで払う測度の類（良い集合の上では局所に凸・悪い集合は稀・悪い集合から戻る漂流・稀さはエントロピーの不等式を通してだけ払う）を組み合わせると、紫外の側で、粗視化の一段ごとに類が閉じる形が書けそうです。強結合の側では、群の曲率で払う型の道具が狭い範囲で効きます。**二つの間に、どちらの通貨も足りない「結合の窓」が残ります**。稀さの率は実効の結合に比例して閉じ込めの尺度で尽き、曲率の通貨はまだ足りない、という範囲です。この窓は、尺度をつなぐ展開の欠如（紫外と赤外をつなぐ展開が無いこと）を規則の言葉で言

い直したもので、新しい障害ではありません。階層的なゲージ模型は、紫外の側・窓・強結合の側の三つが一つの模型の中で揃う場所ですが、そこでの結果は四次元のヤン–ミルズに何も含意しません。

07

位相と箱 — この本の群 $SU(2)$ では未決

周期の箱。可逆な力学では $\tau_{\mathrm{int}}(Q) \le C_P$ なので（24-01 の (1)）、位相電荷の自己相関が ξ^2 より速く伸びれば上界の仮定は破れます（24-01 の (3)。Lean `LatticeGauge.FourDTrial.not_hup_of_fast_tau`、仮定：$\tau_n \le C_n \cdot c\,\xi_n^p \le \tau_n \cdot p > 2 \cdot \xi_n \to \infty$。陰性対照 `z_two_compatible_with_hup`、仮定なし：$\tau \propto \xi^2$ は上界の仮定と両立する）。周期の箱では $SU(3)$ 以上の原典がそう報告しているので、HMC と Langevin が同じ動的な普遍類という予想（原典では開いた境界の観察に付いた語）を周期の箱の位相の遅さへ延ばした読みの下で、**上界の仮定は周期の箱で偽と読めます** 仮 （23-01 §05 の注・24-01 §06）。

開いた境界は有限の箱でしか救わない。開いた境界では、物理の一辺を止めた箱の中で自己相関の伸びが a^{-2} に戻ります。ただし箱の空間の一辺を止めて時間の向きの長さだけを延ばすと、Q^2 の自己相関時間は $42.1(2.5)$・$113(6)$・$148(10)$（時間の向きの長さ 24・48・80 の格子）とほぼ長さに比例して伸びます（Lüscher–Schaefer 2011 §5.3 典 ）。電荷が境界を通る輸送でしか出入りしないからで、先に体積を無限にするこの本の順では救いにならない見込みです 仮 （24-03 §05 と表 2）。

$SU(2)$ は一次資料が一本で、a^{-2} の側。$SU(2)$ の純ゲージで位相電荷の自己相関の格子間隔への依存を測った一次資料は、探した範囲で一本です（Abe–Morikawa–Suzuki 2025：HMC・周期・物理の一辺が $2.2/\sqrt{\sigma}$ 程度の小さな箱・三つの格子間隔、a^{-2} にかなりよく乗ると報告 典 ）。熱浴系の原典はどれも $SU(2)$ では凍結が測れるほど強くならない側の観察で、表 1 でも $SU(2)$ は除かれていました。§02 の二つの数え方は、どちらも $SU(2)$ を $z = 2$ の境目の近くに置きます。**したがって、この本の群 $SU(2)$ について、位相電荷の凍結が緩和時間の仮定を壊すかは決まっていません**。一次資料は境目かその下の側に寄っています 読 。

24-02 の二次元の試験台との対応 見 。二次元の CP^{N-1} では、$\xi \approx 4$ で凍結は N で割れ（$N = 21$ で強く凍り、$N = 2$ は凍らない）、局所の量の比は割れませんでした（24-02 §07、条件つきの一点の読み）。群の大きさの役をする N で凍結の強さが割れることは、四次元で $SU(2)$ が境目に落ち $SU(3)$ 以上が明らかに越えることの二次元の類比として読めます。一次資料の二次元の勘定も「$z \sim N$」の型で、同じ議論が四次元の $SU(N)$ にも当てはまると書いています（Del Debbio–Manca–Vicari 2004 典 ）。ただし $N = 2$ には紫外の札（位相感受率の二つの定義が 13〜14% 違う）が付き、$N = 2$ が凍らないのは格子の尺度が位相電荷を決め

ている側だからかもしれません。類比はこの留保つきで、**二次元の結果は四次元に何も含意しません**。

この節が言えている範囲：「上界の仮定は周期の箱で偽と読める」は $SU(3)$ 以上の原典と予想を延ばした読みの上の文で、上界の仮定が偽であることは主張しません。$SU(2)$ については未決です。

08

物理の機構と、証明にならない理由

質量ギャップと閉じ込めを説明する物理の機構は多くあります。この本はどれも証明の道具として使いません。表 4 は、各機構が何を言い、なぜ証明にならないかを一行ずつ並べたものです。最後の行は、この本の 24-05 の主項の文を物理の言葉に寄せた見立てで、他の行と性格が違います。

表 4　物理の機構と、証明にならない理由（札：典＝本文か要旨で言明を確かめた・仮＝記憶）

機構	何を言うか	証明にならない理由（一行）	出所と札
強結合の面積則	強結合の格子では Wilson ループが面積で減り、自由なクォークは無い	強結合の極限には回転（Euclid）不変性が無く、連続極限の側（弱結合）へは延びない	Wilson 1974 典 （要旨）。強結合の定理（Osterwalder–Seiler 1978）は 仮 （記憶）
双対超伝導（可換射影・単極子の凝縮）	非可換部分を先にゲージ固定すると $N-1$ 個の可換ゲージ場と単極子になり、単極子が凝縮すれば閉じ込め	凝縮は示されておらず、射影はゲージの選び方に依る。凝縮で閉じ込めが記述される例は物質場を含む超対称の理論に摂動を加えたもので、純ゲージに当たらない	't Hooft 1981・Seiberg–Witten 1994 典 （要旨）・Jaffe–Witten §6.6 典
中心渦	中心の元に値をとる渦が弦張力を担う	最大中心ゲージと射影の上の格子の数値（「示唆する」の語）で、評価の不等式も極限の文も無い。't Hooft 1978 の代数は相を分類するが、どの相にあるかは決めない	Del Debbio–Faber–Greensite–Olejník 1997・'t Hooft 1978 典 （要旨）
インスタントンの希薄気体	作用 $8\pi^2/g^2$ の位相的な解のまわりの半古典の和で真空を近似	小さな ρ でだけもっともらしく、ρ が大きくなると（反）インスタントンが重なり実効の作用が変わる。隙間の生まれる尺度で近似の前提が崩れる	BPST 1975・'t Hooft 1976・Callan–Dashen–Gross 1978 典 （要旨）・Lucini–Teper 2001 §6 典 （本文）。大きさの積分の赤外の発散は 仮 （記憶）
大 N・弦との双対	平面図形が支配し、$1/N$ が弦の結合定数の役をする	摂動級数の並べ替えか予想で、N が有限への戻り方が無い。問題文も「十分大きな N では出発点かもしれない」としつつ、フェルミオンの無いゲージ理論への有効な道は無いと書く	't Hooft 1974・Witten 1979 典 （要旨）・Jaffe–Witten §6.6 典

機構	何を言うか	証明にならない理由（一行）	出所と札
軌道の空間の曲率	ゲージ軌道の空間の曲率と波動汎関数のゲージ不変性から、励起が有限のエネルギーを持つ	Feynman 自身が定性的・示唆的な議論と書き、3+1 次元は論じない。Singer は幾何の記述で、ハミルトニアンの下界の文は無い。言葉は Bakry–Émery（曲率の下界から隙間）に最も近い 見	Singer 1981・Feynman 1981 典 （要旨）・Jaffe–Witten §6.6 典
（この本の見立て）グルーボールは色の一重項の二粒子	真空の測度の側で、ゲージ不変な最低の試験の空間は $SU(2)$ では一粒子に無く、二粒子（二次のカオス）にある（24-05 §05）	主項（$g \to 0$・三色の独立なガウス）の文で、g が有限の値については何も言わない。無限体積では主項の右辺も 0 へ行く。グルーボールとの対応そのものが見立て	24-05 の (7)(8) 初 （主項）・対応は 見

この節が言えている範囲：各行の「何を言うか」は原典の要旨か本文の写しで、どの機構の正否も判定しません。

09

言えないこと

(a) 正体の候補。§03 の「遅い量と相関長が別の起源に割れる」は見立てです。転位の作用の比 c の値も、それが群に依らないことも確かめていません。$SU(2)$ は二つの数え方のどちらでも境目の近くに落ちます。

(b) 機構。表 4 のどの機構も、この本は証明の道具として使いません。

(c) 二次元。二次元の模型（$U(1)$ の帯・CP^{N-1}）の結果が四次元の何を含意するかは言いません。

(d) 四次元でだけ、とは言わない。二点は臨界次元にいることの性質として述べました。

(e) 表 2。「届くか」と費用の種類は見立てと見積もりで、「新しい数学」は読んだ資料の中に道筋の記述が無いことを指し、不可能を意味しません。

(f) 資料。§05 は読んだ一次資料の範囲の整理で、Balaban の本文・Gribov・Singer・Osterwalder–Seiler の本文は取れていません。「無い」と書いた理論は「読んだ資料の中に無い」の意味で、§05 は 2026-11-10 の公開より前の資料の整理です。

(g) $SU(2)$。この本の群 $SU(2)$ について、位相電荷の凍結が緩和時間の仮定を壊すかは決まっていません。上界の仮定が偽であることも主張しません。

10

五分類の表と依存グラフ

表 5　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	四次元で g^2 は無次元・四次の項は marginal（(1)）	典	§01	—	—
2	次元転移 (2)（一ループ）	典	4-07	一ループ	—
3	ϕ^4_4 のスケーリング極限は Gauss	典	Aizenman–Duminil-Copin（要旨）	最近接・格子切断	—
4	Balaban の紫外安定性（有限体積・格子・部分列）	典	書誌と他の資料の本文	三・四次元・有限体積	—
5	MRS の構成（赤外切断・軸ゲージ・$SU(2)$・自明な区画・概略）	典	序を本文で	固定した赤外切断	—
6	三次元の測度も未構成・解の理論は $d<4$ が鍵	典	Chevyrev の総説	—	—
7	$8\pi^2/g^2$・$D(\rho)\propto \rho^{11N/3-5}$・(3)	典	§02	一ループ	—
8	表 1 の当てはめ（$SU(3)$ で $6.82(7)$）	典	表 1	熱浴と過緩和・周期	—
9	$SU(2)$ の一次資料一本（a^{-2} に近い）	典	§07	HMC・小さな箱・三点	—
10	開いた境界の Q^2 の自己相関が時間の向きの長さに比例	典	§07	$SU(3)$・物理の一辺を止めた箱	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
11	$\tau \geq c\xi^{p}$（$p > 2$）なら上界の仮定は破れる	初	24-01 の (3)	$\xi \to \infty$ の列	`LatticeGauge.FourDTrial.not_hup_of_fast_tau`（仮定：$\tau_n \leq C_n \cdot c\xi_n^{p} \leq \tau_n \cdot p > 2$）・陰性対照 `z_two_compatible_with_hup`（仮定なし）
12	予想を周期の箱の位相の遅さへ延ばした読み	仮	24-01 §06	周期の箱	—
13	周期の箱で上界の仮定は偽と読める（$SU(3)$ 以上）	仮	§07	周期の箱	—
14	先に体積を無限にする順では開いた境界は救いにならない	仮	24-03 §05	無限体積	—
15	二つの数え方で $SU(2)$ は $z = 2$ の境目の近く	見	§02	半古典	—
16	$SU(2)$ で凍結が緩和時間の仮定を壊すかは未決	見	§07	—	—
17	遅い量と相関長が別の起源に割れる（二点の見立て）	見	§03	—	—
18	二点は臨界次元の性質（四次元でだけとは言わない）	見	§01	—	—
19	難しさの三つの源とその関係	見	§05・表 3	読んだ資料の範囲	—
20	「結合の窓」は尺度をつなぐ展開の欠如の言い直し	見	§06	—	—
21	四段の表の「届くか」と費用の種類	見	表 2	—	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
22	二次元の N の割れは $SU(2)$ の境目の類比	見	§07	二次元・$N=2$ に紫外の札	—

機械検査の欄が保証するのは実数の列の代数だけで、τ_n が可逆な力学の自己相関時間であること、C_n が Wilson 測度の Poincaré 定数であることは Lean の外です（23-13）。

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  典  四次元で g² は無次元・marginal
 2  典  次元転移 Λ = μ e^(−1/(2b₀g²))                    ―ループ
 3  典  φ⁴₄ の極限は Gauss
 4  典  Balaban の紫外安定性（部分列・一意性なし）      有限体積
 5  典  MRS 1993（赤外切断・軸ゲージ・SU(2)・概略）
 6  典  三次元の測度も未構成・d < 4 が鍵
 7  典  8π²/g²・D(ρ) ∝ ρ^(11N/3−5)・(3)
 8  典  SU(3) の当てはめ 6.82(7)                          熱浴・周期
 9  典  SU(2) の一次資料一本（a⁻² に近い）              HMC・小さな箱
10  典  開いた境界の τ(Q²) が時間の長さに比例           物理の一辺を止めた箱
11  初  τ ≥ cξ^p（p > 2）⇒ 上界の仮定は破れる          Lean not_hup_of_fast_tau
12  仮  予想を周期の箱へ延ばした読み
13  仮  周期の箱で上界の仮定は偽と読める ⟸ 8・11・12  SU(3) 以上
14  仮  無限体積を先に取る順で開いた境界は救わない ⟸ 10
15  見  SU(2) は z = 2 の境目の近く ⟸ 7・8
16  見  SU(2) で凍結が緩和時間の仮定を壊すかは未決 ⟸ 9・15
17  見  遅い量と相関長が別の起源に割れる ⟸ 1・2・7
18  見  臨界次元の性質 ⟸ 1・3
19  見  難しさの三つの源 ⟸ 1・2・4・5・6
20  見  結合の窓は尺度をつなぐ展開の欠如の言い直し ⟸ 19
21  見  四段の表の「届くか」と費用 ⟸ 4・5・6・19
22  見  二次元の N の割れは SU(2) の境目の類比 ⟸ 15・16
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。この章の結論の節点（周期の箱で上界の仮定は偽と読める、から先）は「仮」か「見」で、質量ギャップの節点も、連続極限の節点もありません。$SU(2)$ の一次資料の節点は「凍結が緩和時間の仮定を壊すかは未決」の節点にだけ入り、周期の箱の節点の前提には入りません。$SU(2)$ の読みが決まっていないことのグラフの上の姿です（24-01 の依存グラフと同じ形）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
典 四次元で結合が無次元であること・次元転移・ϕ^4_4 の自明性・インスタントンの作用と一ループの密度・原典の当てはめ	β と格子間隔の関係の数学の証明。Λ の定数倍が質量ギャップであること
典 三段目の到達点（2026-11-10 に公開された構成の周期の箱の連続極限、委員会の評価の水準。それより前の Balaban の紫外安定性・MRS の赤外切断つきの構成）と、MRS が止めた理由の序の文	Balaban の本文の確認。無限体積の極限の収束と一意性・連続の理論の確率測度・一様な質量ギャップ（公開された構成にも無い）
仮 周期の箱で上界の仮定は偽と読める（$SU(3)$ 以上・予想を延ばした読み）	上界の仮定が偽であること。$SU(2)$ での同じ読み
見 二点の見立て・難しさの三つの源・結合の窓・四段の表の「届くか」と費用・二次元の類比	どれも定理ではない。二次元の結果の四次元への含意

出典と再現

もの	種別	出典・道具
問題文と状況報告	典	A. Jaffe, E. Witten, Quantum Yang–Mills Theory, Clay Mathematics Institute (2000)（§6・§6.5・§6.6・脚注 2 を本文で確認）。M. R. Douglas, Report on the Status of the Yang–Mills Millenium Prize Problem (2004)（本文）
構成的場の理論の現状	典	V. Rivasseau, Constructive field theory and applications: perspectives and open problems, arXiv:math-ph/0006017（II・VI を本文で確認。雑誌の巻頁は記憶）。S. Chatterjee, Yang–Mills for probabilists, arXiv:1803.01950（§3・§5・§6 を本文で）。I. Chevyrev, Stochastic quantisation of Yang–Mills, arXiv:2202.13359（§1・§3・§4 を本文で）
Balaban の系列	典（書誌）	T. Balaban, Commun. Math. Phys. 89 (1983) 571; 95 (1984) 17; 96 (1984) 223; 98 (1985) 17; 99 (1985) 75; 99 (1985) 389; 102 (1985) 255; 102 (1985) 277; 109 (1987) 249; 116 (1988) 1; 119 (1988) 243; 122 (1989) 175; 122 (1989) 355（書誌を照合、本文は取れていない。頁は書誌から数えた）
MRS 1993	典	J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, Construction of YM_4 with an infrared cutoff, Commun. Math. Phys. 155 (1993) 325–383（序を本文で確認、引用はこの本の訳）
再構成	典	J. Dimock, The renormalization group according to Balaban I, arXiv:1108.1335（序を本文で）。同じ著者の三次元の QED の概観 arXiv:2204.07201（要旨）
冪の数え・赤外の漸近自由・大きな場	典	R. Bauerschmidt, D. C. Brydges, G. Slade, arXiv:1907.05474（定義 5.2.1・赤外の漸近自由の命題・§7 を本文で）。R. Bauerschmidt, T. Bodineau, arXiv:1809.02075（序と §2 を本文で）
ϕ^4_4 の自明性	典	M. Aizenman, H. Duminil-Copin, Ann. of Math. 194 (2021) 163–235（要旨。7-08 の出典表）
(2) の一ループの形	典	4-06・4-07 の出典表

もの	種別	出典・道具
インスタントン・(3)・表 1	典	A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, Yu. S. Tyupkin, Phys. Lett. B 59 (1975) 85（要旨）。A. Athenodorou, M. Teper, JHEP 12 (2021) 082（§6.2・式 (32)(34)・表 42・43 を本文で）。B. Lucini, M. Teper, JHEP 06 (2001) 050（§6 を本文で）。M. Lüscher, JHEP 08 (2010) 071（§4.3 を本文で）
位相電荷の自己相関・開いた境界	典	M. Lüscher, S. Schaefer, JHEP 07 (2011) 036（§3・§5.3 を本文で）。M. Abe, O. Morikawa, H. Suzuki, PTEP 2025 063B03（§3.2 と図 6 の文を本文で、図の数値は読んでいない）。L. Del Debbio, G. M. Manca, E. Vicari, Phys. Lett. B 594 (2004) 315（本文）
ゲージ固定の大域の障害	典（書誌のみ）	V. N. Gribov, Nucl. Phys. B 139 (1978) 1。I. M. Singer, Commun. Math. Phys. 60 (1978) 7。中身は記憶
表 4 の機構	典	K. G. Wilson, Phys. Rev. D 10 (1974) 2445。G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 190 (1981) 455。N. Seiberg, E. Witten, Nucl. Phys. B 426 (1994) 19。L. Del Debbio, M. Faber, J. Greensite, S.ˇOlejník, Phys. Rev. D 55 (1997) 2298。G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 138 (1978) 1。G. 't Hooft, Phys. Rev. D 14 (1976) 3432。C. G. Callan, R. F. Dashen, D. J. Gross, Phys. Rev. D 17 (1978) 2717。G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 72 (1974) 461。E. Witten, Nucl. Phys. B 160 (1979) 57。I. M. Singer, Phys. Scripta 24 (1981) 817。R. P. Feynman, Nucl. Phys. B 188 (1981) 479（どれも要旨で確認）。K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（書誌のみ）
グルーボールの数値	典	A. Athenodorou, M. Teper, JHEP 12 (2021) 082（表 24・33）
上界の仮定が破れる一行の代数	Lean	LatticeGauge.FourDTrial（`not_hup_of_fast_tau`・`z_two_compatible_with_hup`）。束が保証するのは実数の列の代数だけ

この章で使った語 — 臨界次元・marginal・次元転移・赤外の漸近自由・インスタントン・転位・四段のハードル・難しさの三つの源・紫外安定性・結合の窓・双対超伝導・中心渦。意味は A-02 用語集 と 24-09 にあります。

次に読む章：24-08 問いと、主張しないこと — 卒業研究の大きさで決着のつく問いと、規則の候補の一覧、第 24 部が主張しないこと。

問いと、主張しないこと

この章は未解決の問いの地図です。閉じた部品と閉じない部品の境を示します。

この章で分かること — 第 24 部の各章が残した問いを一つの表にし（済み・一部済み・未・新、と決着したら動くもの・決着しても動かないもの）、「新しい数学を作るなら何を規則に置くか」という問いへの規則の候補を一覧にし、第 24 部が主張しないことを十六行にして、それぞれを本文のどの章のどの文が支えるかを対応させます。

前提となる章 — なし。どこから読んでもよい章です。三つの意味（示さない・強く読まない・偽とも言わない）は 23-16 §01 のとおりに使います。記号は 24-09。

先に言うこと — 水準は〔二〕〜〔三〕です。この章は新たな結果を足しません。問いの表は問いで、主張はありません。規則の候補は候補で、どれも三段目（連続極限と OS 公理）を閉じる見込みを約束しません。第 23 部の「主張しないこと」（23-16）は、この部にもそのまま効きます。

この章の順序

1. 問いの表 — 十九の問い・状態・決着しても動かないもの（表 1）
2. 規則の候補の一覧 — 六つの候補と三つの組み合わせ・難しさの源との関係（表 2・表 3）
3. 主張しないこと — 十六の項目と、それを支える本文の文（表 4）
4. 第 23 部との関係

01

問いの表 — 卒業研究の大きさで決着のつく問い

表 1 は、第 24 部の各章が残した問いです。「大きさ」は決着に要る作業の種類（紙・読む・計算・Lean）で、時間の見積もりではありません。各行に「決着しても動かないもの」を必ず書きました。問いが決着しても、質量ギャップの問題は動きません。状態の「済み」は、この部の本文がその問いに答えた（条件つきで）という意味で、答えの札は右の章にあります。

表 1　第 24 部の問い（状態：済み・一部済み・未・新〔この部の執筆で足した問い〕）

問	問い	大きさ	状態	決着したら動くもの	決着しても動かないもの	どの章から

問	問い	大きさ	状態	決着したら動くもの	決着しても動かないもの	どの章から
1	**自由場の局所励起の比べ**：自由場で、箱に台を持つ観測量の励起のエネルギーの比べ（局所の励起のモーメントの仮定を計算する）	紙	済み：モーメントの形で、自由場は $\gamma = d\pi^2$ で成り立つ	局所の橋の係数の形	相互作用のある模型での局所の励起のモーメントの仮定	24-04 §05
2	**窓の因子の単調性の問い**：窓の因子 $\varphi(x)/x^2$ の単調性	初等・Lean	済み：$x > 0$ で狭義減少（Lean `wr_strictAntiOn`、仮定なし）	窓の閾の陽な形	何も（定数の形だけ）	24-04 §03
3	**Polyakov ループの符号の問い**：小さな周期の箱の Polyakov ループの符号（答えの分かった遅い区画の量）で、静的な比 $\mathrm{Var}/\mathcal{E}$ が遅さを捕まえるか	小さな計算	未	静的な試験関数の方法の陽性対照	位相電荷の判定	24-01 §02
4	**二次元の層の U(1) の隙間**：二次元の層のコンパクトな $U(1)$ で、帯を伸ばしたとき隙間が M^{-2} で下がり続けるか飽和するか（保存が壊れる長さの非線形の値）	計算	済み：幅 2 の帯・外周凍結・$\beta = 2..6$ の五点で $\ell_c \propto e^{0.916\beta}$（読み）	保存が壊れる長さの非線形の値	四次元の ℓ_*	24-02 §03
5	**位相電荷の自己相関の資料**：$SU(2)$ の純ゲージの位相電荷の自己相関の一次資料（無ければ物理の体積を止めた小さな測り）	読む・計算	一部済み：一次資料は一本（HMC・小さな箱・a^{-2} に近い）。小さな測りは未	$SU(2)$ の行の札（境目か、明らかに ξ^2 より速いか）	HMC と Langevin の関係の予想	24-07 §07
6	**二つの射影の補題の多族版**：二つの射影の補題の多族版（d 次元の箱の 2^d 色の族）と、その最大相関の条件	紙	未	四次元の箱の帰着の節点	最大相関の β に一様な評価	24-03 §06
7	**一リンクの重みの Hessian**：$SU(2)$ の上で熱核と畳み込んだ一リンクの Wilson の重みの $\inf \mathrm{Hess}\, V_t$ と、悪い集合の重さの流れ（類関数の一変数）	紙＋小さな計算	未（稀さで払う測度の類の最初の一歩）	群の上の Polchinski 流の最初の数・類が一段で閉じるか	階層模型でない格子・多段で一様に閉じること	24-06 §07

問	問い	大きさ	状態	決着したら動くもの	決着しても動かないもの	どの章から
8	**転送作用素での刻みの比べ**：Wilson の転送作用素で、時間の刻みの比べの仮定（論文「片側の橋」の (D)。隣の時刻の増分と勾配の比べが β に一様）を低いエネルギーに切った関数に限って示す	紙	未	有限体積の窓の橋を Wilson の時間を刻む格子へ	無限体積	24-04 §08
9	**τ_{int} と C_P の Lean**：有限状態の可逆な Markov 連鎖で、$\tau_{\mathrm{int}} \le C_P$ と基底状態変換の恒等式（隙間と真空の測度の命題の代数）を、確率の対象から定義して Lean で閉じる	Lean	未	対象そのものを型にした形式化の一例（23-13 の別の形の検査）	経路の測度・連続の場	24-05 §01
10	**CP^{N-1} のモードの読み直し**：二次元 CP^{N-1} の局所のモードと位相のモードの自己相関を、局所の拡散型緩和時間の仮定（索引は A-06）の目で読み直す	読む・計算	一部済み：文献は読んだ。試験台の測りは一つの体積・一つの相関長の条件つきの読みまで	試験台の材料	四次元	24-02 §07
11	**二次元 SU(2) のループの族**：二次元 $SU(2)$（プラケットが独立）で、ループの族の λ_W・Γ を有限の β で求める	計算	新	色の一重項の閾の β 依存	四次元の値	24-04 §06
12	**四次元の大きいループの値**：四次元の箱で、差し渡しの大きさのループ（平らでないもの・投げ縄の積を含む）の族の値	計算	新	色の一重項の参照の四次元の値	対象の測度の比	24-04 §06
13	**キンクの位置への還元**：0+1 の二重井戸で、キンクの位置を座標にした一次元への還元で局所の比を挟む	紙＋小さな計算	新	窓を横切る運動の定数	四次元の比	24-04 §07
14	**帯の β=7 の一点**：帯の $\beta = 7$ を一点足し、生の率の傾きが $2 - 1/\beta$ に乗り続けるか、ℓ_c の傾きが収まるか	計算	新	二次元の帯の傾きの確かさ	四次元	24-02 §05

問	問い	大きさ	状態	決着したら動くもの	決着しても動かないもの	どの章から
15	**閾と 1 の間の帯の質量**：比が閾と 1 の間の帯 $[K_*, 1)$ に入る場について、比の形のままで質量を見る別の議論があるか（Jensen と Dirichlet の試験関数の外）	紙	新	未決の帯の扱い	相互作用のある場の比の値	24-04 §06
16	**時間を刻む格子の窓の橋**：Wilson の時間を刻む格子で、窓の版の橋（窓の中の上限の命題と有限体積の下界）を時間の刻みの比べの仮定の下で書く	紙	新	窓の橋の格子の版	無限体積	24-04 §03
17	**区画の分け方の frustration-free**：Kogut–Susskind のハミルトニアンを区画にまとめて分けたとき、frustration-free になるか	紙	新	局所から大域への隙間の定理が当たるか	弱結合の隙間	24-05 §04
18	**$\mathbf{CP^{N-1}}$ の試験台の拡張**：CP^{N-1} の試験台で、別の乱数の種と N の残りの組を足し、位相のモードの遅さの指数を二点目の相関長で読む	計算	新	凍結が N で割れる読みの確かさ	四次元	24-02 §07
19	**部分領域の電荷の保存の長さ**：保存が壊れる長さの定義 (2)（比が飽和の値の半分に届く最小の R）を、四次元の部分領域の電荷で測る	計算	新	四次元の保存が壊れる長さの最初の値	拡散型緩和時間の仮定の真偽	24-02 §01

どの問いも、決着すれば一つの章の一つの行の札が動きます。質量ギャップ・拡散型緩和時間の仮定・緩和時間の上界の仮定の真偽は、どの問いの決着でも動きません。

02

規則の候補の一覧 — 「新しい数学を作るなら、何を規則に置くか」

第 24 部の考察は、「新しい数学を作るなら、何を数学の規則にすればよいか」という問いにも行き当たりました（24-07 §06）。命題の意味を捨てて等式の規則だけを残したブール代数のように、繰り込みや連続極限の性質を規則に置いた体系を組み立てるとしたら、どう組めるか。表 2 はその候補の一覧です。**全ての行は候補**で、無矛盾性も、既存の結果を言い直せることも確かめていません 見 。ブール代数の喩えは組み立て方の比喩で、数学の主張ではありません。

どの候補も同じ形で書けます：既存の枠組みの仮定を一つ外し、代わりの規則を置く。外すものと置くものを各行の一行に縮め、問いを一つと、その問いが決着しても動かないものを添えました。

表 2　規則の候補（各一行・問い一つ）見

規則	規則の候補（一行）	問い（一つ）	決着しても動かないもの
尺度の公理化の規則	粗視化の半群・局所性・ゲージ共変・縮む方向と周辺の方向・大きな場の重み	階層的な $SU(2)$ 模型で、五つの規則のうちどれが当たり、どれが当たらないか	階層でない格子・連続極限
ループの代数の規則	有界・Mandelstam の恒等式・正値と反射正値・ループ方程式（接続を捨て、ループの値を残す）	二次元 $SU(2)$ の格子で、四つの規則を満たす状態は有限の β で一つに決まるか	三次元以上の連続のループの定義
保存量と区画の規則	分散の分解・挟み $C_{\mathrm{trans}} \le C_P \le \sup C_P^{\mathrm{sec}} + C_{\mathrm{trans}}$・局所の窓・二つの長さ（24-03 §04）	挟みの C_{trans} を、区画の間の縮約した鎖の量で書けるか	構成（三段目）
稀さの類の規則	良い集合の上の局所の凸性・悪い集合の稀さ・戻る漂流・エントロピーの通貨（24-06 §07）	一リンクの Wilson の重みを熱核と一段畳み込んで、類の母数がどう写るか（問い「一リンクの重みの Hessian」）	多段で一様に閉じること
漸近自由の公理の規則	尺度の変換・単調な結合・紫外で自由場・次元転移（赤外には何も置かない）	紫外で自由場に近づく規則から、局所の比が短い距離で 1 に近づくことが従うか	赤外・質量ギャップ
曲率の規則	ゲージ軌道の空間の上の Bakry–Émery	一つのプラケットの軌道の空間で、商の曲率の項は強結合の範囲を広げるか	弱結合
尺度の公理化の規則＋稀さの類の規則	粗視化の一段で閉じる稀さの類	階層的な $SU(2)$ 模型で、紫外の側の類の閉じ方と強結合の道具の間に残る結合の窓の幅はいくらか	四次元の窓
保存量と区画の規則＋稀さの類の規則	区画つきの稀さの類（区画の中の定数と、区画の間の遷移の率の大きい方で挟む Eyring–Kramers の型）	二次元 $U(1)$ の帯で、隙間の上界が「区画の中」と「遷移の率」の大きい方で挟めるか	四次元の位相電荷
ループの代数の規則＋保存量と区画の規則	ループの代数に区画を入れる（状態の集合の端点への分解を区画と読む）	ループの規則の解が一つでないことと、相（区画）が複数あることは対応するか	弱結合での一点性

難しさの三つの源（24-07 表 3：無限個の段を段数に一様に制御すること〔無次元の結合という源〕・紫外と赤外をつなぐ展開が無いこと〔尺度をつなぐ展開の欠如〕・大局的なゲージ固定が無く大きな場が凸性で制御できないこと〔大域のゲージ固定の欠如〕）との関係を表 3 にします。

表 3　規則の候補と難しさの三つの源（「効く」は規則の言葉がその源を扱えるという意味で、源を越えるという意味ではない）見

候補	無次元の結合という源（段数に一様）	尺度をつなぐ展開の欠如（紫外と赤外）	大域のゲージ固定の欠如（ゲージと大きな場）
尺度の公理化の規則	効く（言葉そのもの）	効かない（結合が $O(1)$ で領域を出る）	半分（群の重みが未定式化）

候補	無次元の結合という源（段数に一様）	尺度をつなぐ展開の欠如（紫外と赤外）	大域のゲージ固定の欠如（ゲージと大きな場）
ループの代数の規則	効かない（連続のループの定義に戻る）	形の上では効く（全ての β で同じ規則）。解が一つに決まるかが未決	最も効く（ゲージ固定が現れない）
保存量と区画の規則	効かない	効かない	名前を与えるだけ
稀さの類の規則	尺度の公理化の規則と組んだときだけ	効かない（稀さの率が尽きる）	正面から効く
漸近自由の公理の規則	書き写すだけ	効かない（赤外を空ける）	効かない
曲率の規則	効かない	効かない（強結合の側だけ）	意味を与える

表の読み 見 。尺度をつなぐ展開の欠如の列に「効く」は一つもありません。ループの代数の規則だけが全ての結合で同じ形の規則を持ちますが、規則の解が一つに決まるかどうかが尺度をつなぐ展開の欠如の中身そのものに置き換わっています。尺度の公理化の規則＋稀さの類の規則で現れる結合の窓（24-06 §07）は、この尺度をつなぐ展開の欠如を規則の言葉で言い直したものです。

ブール代数の型はどこで可能か 見 。連続の対象を離散の規則に置き換えることは、観測量の**代数**の段では既に半分あります：格子（連続の場を辺の上の群の元に置き換える）、ループの Mandelstam の恒等式とループ方程式、区画の整数、階層模型の一変数の漸化式。しかし三段目を決める規則は、等式でなく**不等式**です：正値性・稀さ・凸性・段数に一様な評価。ループ方程式（等式）は解を一つに決めず、解を絞るのは正値性（無限個の不等式）です。比喩として言えば、三段目に要るのはブール代数より、測度論（σ 加法性という不等式の規則と極限の規則）に近い型です。

規則の候補について主張しないこと。(i) どの候補も、三段目を閉じる見込みを約束しません。(ii) ブール代数の喩えは比喩で、「三段目の規則は不等式」も見立てです。ヤン–ミルズの規則が等式で書けないことを示してはいません。(iii) 候補と既存の結果の対応（例えば、尺度の公理化の規則の安定多様体の形と、有限体積の紫外安定性の対応）は、どれも原典の本文で確かめていない言い直しです。(iv) 「階層模型は紫外の側・窓・強結合の側の三つが揃う場所」は探した範囲での言い方で、四次元への含意はありません。(v) 届かないと書いた候補は、偽であることの証拠ではありません。

03

主張しないこと — 十六の項目と、それを支える本文の文

表 4 は、第 24 部が主張しないことを一行ずつ書き、その行を支える本文の場所を並べたものです。「支える」とは、その章の文が条件・仮定・範囲をすでに書いていて、この行はそれを一行に写しただけ、という意味です。種類の列は 23-16 の三つの意味（示さない・強く読まない・偽とも言わない）です。

表 4　第 24 部が主張しないことと、それを支える本文の文

項目	主張しないこと	種類	支える本文の文（要旨）
1	ヤン–ミルズの存在と質量ギャップの問題の解決。連続極限・回転の回復・OS 公理・非自明性には触れない（存在の部分は、2026-11-10 に公開された構成を第二巻で読む）	示さない	24-00 §05：扱わないもの。24-07 §04：三段目・四段目はこの本の道具では届かない
2	緩和時間の仮定が偽であること。四次元の周期の箱で上界の仮定が成り立たないという文は、$SU(3)$ 以上の原典の数値と、開いた境界の観察に付いた予想（HMC と Langevin が同じ動的な普遍類）を周期の箱の位相の遅さへ延ばした読みの上の文	偽とも言わない	24-01 §06 の (a)(b)・24-07 §07
3	区画ごとの拡散型緩和時間の仮定と局所の緩和時間の仮定は定義の候補で、どの β でも示していない。緩和時間の仮定の「正しい直し方」も主張しない	示さない	24-03 §07
4	片側の橋（局所の版を含む）は時間を連続に取った格子の上の不等式で、Wilson の時間を刻む格子では時間の刻みの比べの仮定が残る。局所の版はさらに局所の励起のモーメントの仮定の上にある	強く読まない	24-04 §08（表 4）・24-04 §09
5	「隙間＝真空の測度の Poincaré 定数」は恒等式で、問題を易しくしたとは主張しない	強く読まない	24-05 §01・24-05 §07
6	保存が壊れる長さ ℓ_* の定義と、比べる相手の言い直し $C_P \asymp \max(\xi^2, \tau_{\mathrm{glob}})$ は候補で、どの模型でも示していない	強く読まない	24-02 §06・24-02 §08
7	階層模型と二次元の模型の結果は、四次元のヤン–ミルズに何も含意しない	強く読まない	24-06 §09 の (a)・24-02 §08
8	物理の非摂動的な機構（閉じ込め・インスタントン・中心渦・双対）は、この部では証明の道具として使っていない	示さない	24-07 §08（表 4）
9	「四次元だからこそ」の二点は臨界次元の性質としての見立てで、四次元でだけ起きるとは主張しない	強く読まない	24-07 §01・24-07 §09 の (d)
10	第 23 部の「主張しないこと」は、この部にもそのまま効く	—	23-16 §02
11	局所の緩和時間の仮定は、定義と比の形まで。どの β でも、対象のゲージ理論について局所の緩和時間の仮定を示していない。示したのは定義の性質と、自由場の参照の値	示さない	24-03 §03・24-04 §04
12	局所の橋の閾（0.342κ・0.502κ・約 0.62κ）は参照の取り方と試験の観測量の族に依る。比が閾と 1 の間にある場について、橋は何も言わない	強く読まない	24-04 §06（表 2）

項目	主張しないこと	種類	支える本文の文（要旨）
13	0+1 の二重井戸では、局所の比は最短の窓でも 1 にならない。四次元で「短い距離で比は 1 に近づく」とするのは、漸近自由に依る仮定	強く読まない	24-04 §07・24-03 の (7)
14	保存が壊れる長さを測ったのは、二次元 $U(1)$ の幅 2 の帯（外周凍結・$\beta = 2..6$）だけ。四次元・非可換・$\beta \to \infty$ の指数については何も言わない	強く読まない	24-02 §03（表 2）
15	$SU(2)$ について、位相電荷の凍結が緩和時間の仮定を壊すかは決まっていない。一次資料は一本で、その数は a^{-2} に近い側にある	偽とも言わない	24-07 §07・24-01 §06 の (b)
16	二次元 CP^{N-1} の試験台の結果は、四次元のヤン–ミルズに何も含意しない（比は一つの体積を止めた条件つきの自己相関の比で、静的な比とは別の量）	強く読まない	24-02 §07

項目 2 の「予想」の語は、原典では開いた境界の観察に付いた語なので、周期の箱への適用は「延ばした読み」と書きます。規則の候補（§02）についての主張しないことは §02 の末尾に置きました。

04

第 23 部との関係

第 23 部の「主張しないこと」の十四項目（23-16）は、この部にもそのまま効きます。ここでは重ねて列挙しません。とくに、届かなかったことは偽の証拠ではない（23-16 の項目 8・12）、条件は要約で落ちる（23-16 §06）、の二つは、この部の見立ての文（札「見」）を読むときにも同じです。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
第 24 部の問いの一覧と、各問いが決着しても動かないもの（表 1）	どの問いの答えも。問いの「大きさ」は作業の種類で、時間の見積もりではない
規則の候補の一覧と、難しさの三つの源との関係の見立て（表 2・表 3）	どの候補の無矛盾性も、三段目への見込みも
第 24 部が主張しないことの十六項目と、それを支える本文の場所（表 4）	各項目の命題の真偽

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1 の各行	本書	右の列の章と節
表 2・表 3 の候補と難しさの源	見	24-06 §07・24-07 §05・§06。候補が引く既存の結果の出典は各章の出典表（重みの四性質は Bauerschmidt–Brydges–Slade の本、二次元のループ方程式は Chatterjee の総説 §6 の整理、強結合の対数 Sobolev は Shen–Zhu–Zhu の要旨）
表 4 の各行	本書	右の列の章と節

もの	種別	出典・道具
三つの意味	本書	23-16 §01

この章で使った語 — 問いの状態（済み・一部済み・未・新）・決着しても動かないもの・規則の候補・組み合わせ・難しさの三つの源・結合の窓・示さない／強く読まない／偽とも言わない。意味は A-02 用語集 と 24-09 にあります。

次に読む頁：24-09 一本目の道（後半）の記号の対応表。第 24 部の地図に戻るなら 24-00。

一本目の道（後半）の記号の対応表

この章は記号と用語の案内です。

この頁で分かること — 第 24 部で使う記号の一覧。各記号の意味・定義の場所・単位と、第 23 部の同じ字の記号と同じ量か別の量か。

前提となる章 — なし。第 23 部の記号は 23-01 §01 と A-01 記号表。

先に言うこと — 量は格子単位（格子間隔が 1）で数えます。Langevin の時間は長さの二乗の次元を持ち（拡散）、C_P を物理の単位で測った値は $a^2 C_P$ です。数は定義の章の条件の上の値で、札はその章にあります。

01

記号の一覧

表 1　第 24 部の記号（「同じ」は第 23 部の同じ字と同じ量、「新」は第 24 部で足した記号）

記号	意味	定義の場所	単位（格子）／物理での読み	第 23 部との対応
ℓ	外から与える長さの物差し（隙間と独立）。四次元では記帳の長さ、0+1 の二重井戸では $1/\omega_b = 1$	24-03 §02	長さ／$a\ell$	新（四次元では 23-01 §07 の記帳の長さと同じ量）
ξ	相関長 $1/m_{\mathrm{lat}}$。0+1 では $\hbar/\Delta$	23-01 の (1)・(17)	長さ／$a\xi$	同じ
ξ_{RG}	記帳の長さ（格子を粗くする段を数えて決めた長さ）$= 1/a$	23-01 §07	長さ／1	同じ
ξ_{XY}	二次元 $U(1)$ の帯の静的な長さ $-1/\ln(I_1(\beta)/I_0(\beta))$（弦張力の逆数）	24-01 §02・24-02	長さ	新
$R = c\ell$	局所の窓・箱の一辺	24-03 §03	長さ	新
c	窓の長さと物差しの比	24-03 の (2)	無次元	新

記号	意味	定義の場所	単位（格子）／物理での読み	第 23 部との対応
$\mathcal{D}$	時間で均した汎関数の代数（重みの台が有界）	24-03 の (1)	—	新（23-01 の (7) の上限を取る集まりを定めたもの）
$\mathcal{D}_c$	重みの台が窓 $[0, c\ell]$ に入る $\mathcal{D}$ の部分族	24-03 の (2)	—	新
$\mathcal{F}_1$	時刻で積分した一時刻の関数の族	24-04	—	23-01 の片側の橋の命題（論文の定理 3.1）の試験関数の族に名を付けたもの
C_P	Poincaré 定数 $\sup \mathrm{Var}/\mathcal{E}$（経路の測度）	23-01 の (7)。第 24 部では上限を $\mathcal{D}$ の上で取る	長さの二乗（Langevin の時間）／$a^2 C_P$	同じ（23-01 表 3 の経路の C_P）
$C_P^{\mathrm{loc}}(c)$	局所の Poincaré 定数（$\mathcal{D}_c$ の上の上限）	24-03 の (2)	長さの二乗	新
$C_P^{\mathrm{loc},0}(R)$	同じ箱・同じ目盛りの無質量の参照の値 $= \Gamma(R) R^2$	24-03 の (4) (5)	長さの二乗	新
$K(c)$	絶対の形の局所の拡散型緩和時間の仮定の定数 $C_P^{\mathrm{loc}}(c) \le K(c)\ell^2$	24-03 の (3)	無次元	23-01 の (14) の C（Lean の K）の局所版
K_{rel}	比 $C_P^{\mathrm{loc}}/C_P^{\mathrm{loc},0}$	24-03 の (5)	無次元	新
Γ	参照の箱の値の係数 $C_P^{\mathrm{loc},0}(R)/R^2$。スカラーで $\Gamma_\infty = 0.0740$、ゲージ商で $\Gamma_Q = 0.0277$	24-03 §03・表 1	無次元	新
λ_W	試験の空間の中の箱の Dirichlet の値に R^2 を掛けたもの（スカラーで $4\pi^2$、ゲージ商で 72.0）。窓の関数 W では $\|\nabla W\|^2/\|W\|^2$	24-01 の (7)・24-03 表 1	無次元	新
κ	Langevin の計量と運動項の計量の比べの定数（計量の比べの仮定（論文の (A3))）。24-02 §05 の帯の生の率の補正 κ（κ_BE でも、この κ でもない）とは別の量	23-01 の片側の橋	無次元	同じ

記号	意味	定義の場所	単位（格子）／物理での読み	第 23 部との対応
$\kappa\mathrm{BE}$	Bakry–Émery の曲率の下限。片側の橋の比べの定数 κ とは別の量	24-06 §01	長さの逆二乗	新
s	稀さの率（悪い集合 B の測度が $\mu(B)\le e^{-s}$ で落ちる指数）。第 23 部の ℓ と同じ量	24-06 §01（式は §06 の (7)・§07 の悪い集合の稀さの規則）	無次元（$-\ln\mu(B)$。0+1 次元の例では作用の差を $\hbar$ で割った桁、群の一リンクでは $s\approx\beta$）	23-09 の稀さの指数 ℓ
K_*	橋の閾 $\kappa/(\lambda_W\Gamma)$	24-04	無次元	新
ℓ_c	二次元 $U(1)$ の帯で保存が壊れる長さ（流束の双極子の緩和の折れ）	24-01 §02・24-02	長さ	新
ℓ_*	保存が壊れる長さ（一般の名。候補の定義は 24-02 の (2)：比が飽和の値の半分に届く最小の R）	24-02	長さ	新
R_*	交差の長さ $\sqrt{d\lambda_W/h}$（輸送と障壁の領分の境）	24-01 の (7)	長さ	新
λ_Q	帯の位相電荷の緩和の率 $1/\tau_{\mathrm{int}}(Q)$	24-02	Langevin の時間の逆数	新
τ_{int}	積分自己相関時間	24-01 の (1)・23-02 §05	Langevin の時間（原典では掃き数・分子動力学の時間）	同じ
m	隙間を時間の逆数で $m=\Delta/\hbar$。四次元では m_{lat}	23-01 の (1)・(17)	長さの逆数	同じ（m_{lat}）
m_{phys}	物理単位の質量 $m\ell$（四次元で $m_{\mathrm{lat}}\xi_{\mathrm{RG}}$）	23-01 の (12) (16)	無次元（物理の単位）	同じ
Δ	ハミルトニアンの隙間 E_1-E_0	23-01 の片側の橋	エネルギー	**意味を一つに限る**（下の §02）
ω_b	二重井戸の底の角振動数 $\sqrt{V''(\pm1)}=1$	24-03 の (7)・24-04	時間の逆数	新（23-04 の模型の量）
S_0	キンクの作用 $2/3$	23-04 §03	作用	同じ
$\varphi(x)$	窓の因子 $1-(1-e^{-x})/x$	23-01 の (17) の括弧・24-04	無次元	同じ（プラケットの角 φ_p とは別）
φ_p	二次元の帯のプラケットの角	24-01 §02・24-02	角	新

記号	意味	定義の場所	単位（格子）／物理での読み	第 23 部との対応
Q, Q_s	位相電荷・滑らかにした位相電荷。二次元の帯では $Q = \sum_p [\varphi_p]/2\pi$	24-01 §02・24-03 §04	整数（Q_s は実数）	23-01 §05 の注の Q と同じ
χ_t, h, d, g	位相感受率・保存の破れの密度・輸送の係数・境界の層の係数	24-01 の (4) (5)	格子単位（h, d, g は $\mathcal{E}$ の目盛りに依る）	新
$C_P^{\mathrm{sec}}(n)$, C_{trans}	区画の Poincaré 定数・区画の間の量	24-03 の (8) (10)	長さの二乗	新

02

字が同じで意味を分けるもの

Δ。第 23 部の 23-01 では、(1) の $\Delta(\beta) = m_{\mathrm{lat}}/a$（物理単位の質量）と、片側の橋の $\Delta = E_1 - E_0$（ハミルトニアンの隙間）の二つの意味で Δ を使いました。第 24 部では Δ を**片側の橋の意味 $E_1 - E_0$ に限り**、物理単位の質量は m_{phys} と書きます。

K。23-01 の (14) は緩和時間の上界の仮定の定数を C と書き、Lean の定理は同じ定数を K と書きます。第 24 部の $K(c)$ はその局所版、K_{rel} は比の形の定数で、K_* は橋の閾です。三つは別の量です。

φ。窓の因子 $\varphi(x)$ は引数つきで、二次元の帯のプラケットの角は添字つきの φ_p です。

Q。四次元の位相電荷と二次元の帯の位相電荷は同じ字で書きます。どちらも「隙間に映らない大域の整数」で、24-01 の型の Q の例です。二次元の数が四次元に何かを含意するわけではありません。

λ の付く記号。λ_1（Langevin の隙間 $= 1/C_P$、23-01）・λ_W（箱の Dirichlet の値）・λ_Q（帯の位相電荷の緩和の率）は、別の量です。

次に読む章：25-00 入口 — 時間でなく空間を。

入口 — 時間でなく空間を

この章は案内です（この部の入口）。

この部は検討の記録です。機械検査まで済んだ定理は第 20〜22 部、前提の今の一覧は 28-04 に在ります。

この章で分かること — 第 23 部は、時間の方向（揺らぎが均される時間と転送行列）から質量ギャップに向かう道でした。第 25 部は、空間の方向から閉じ込めに向かう二本目の道です。四次元のうち二つの方向を小さな捩れた二次元トーラス T^2 に縮め、残りの平面 $\mathbb{R}^2$ の上で Wilson ループの面積則を考えます。この章では、(1) なぜ一度小さな捩れた T^2 を経由するのか、(2) その結果、問題がどう二つに割れるのか、(3) どの尺度でどの道具が効くのか（図 2「尺度のはしご」）、(4) 第 25 部の十章の地図、を述べます。

前提となる章 — 5-01（Wilson の格子）・5-02（強結合）・17-02 中心渦・4-06（漸近自由）・4-07（次元転移）・7-07（四次元の構成の到達点）。第 23 部の入口 23-00。

先に言うこと — この章は地図の章で、新しく証明する文はありません。「小さな捩れた T^2 では T^2 の大きさまで弱結合のまま」は、紫外の制御（格子間隔 a から T^2 の大きさまでの、a に一様な評価）を仮定した上での物理の見立てです。2026-11-10 に公開された構成が示したのは周期の境界条件・立方の箱での連続極限で、捩れた境界条件や細長い箱での構成はそこにありません（検索の範囲で）。この部の「紫外の制御」は、「捩れた境界条件の下で同じ構成が立つこと」という、まだ開いた条件として残ります。第 25 部の道は、質量ギャップそのものではなく、まず閉じ込め（面積則）に向かいます。二つが別の言明であることは 17-02 と 16-08 のとおりです。

この章の順序

1. 二本目の道 — 何を、どの方向から見るか
2. 二つの壁 — 紫外と移り変わりの帯
3. なぜ小さな捩れた T^2 か — 二つの理由
4. 尺度のはしご — どの尺度で、どの道具が効くか（図 2・表 1）

5. 第 25 部の十章の地図（表 2）
6. この部の記号と語の約束
7. 第 23 部・第 26 部への案内
8. 言えないこと
9. 五分類の表と依存グラフ（表 3）

01

二本目の道 — 何を、どの方向から見るか

第 23 部の道は、格子の一つの方向を「時間」と見て、転送行列の隙間や、揺らぎが均される時間から質量ギャップに近づくものでした。どこで止まったかは 23-15 にまとめてあります。

第 25 部では向きを変えます。四次元の格子の四つの方向のうち二つ（1・2 の方向）を小さな周期 L のトーラス T^2 に巻き、残りの二つ（3・4 の方向）を大きな平面と見ます。平面の中に描いた Wilson ループ $W(C)$ が、囲む面積 A について $\langle W(C)\rangle \le e^{-\sigma A}$ と減るか（面積則）を問います。時間の道が「隙間」を見たのに対し、この道が見るのは「平面の中の渦の数え方」です。

巻いた T^2 には 't Hooft の捩れ（25-01）を入れます。捩れの無い周期的な T^2 に縮めると、平坦な接続の族（零モード）が残り、小さな T^2 と大きな四次元の間を相転移なしにつなぐ見通しが立たないことが、物理の文献で知られています[典]（Tanizaki–Ünsal 2022 の §2.1 の題は「周期的な T^2 への縮約と、断熱的な連続性の不在」）。捩れを入れた T^2 では、同じ論文が、小さな $T^2 \times \mathbb{R}^2$ の弱結合の真空の構造が $\mathbb{R}^4$ の強結合の領域へ相転移なしにつながるという予想を述べています[典]。この予想は予想のままで、この本でも予想として扱います。

02

二つの壁 — 紫外と移り変わりの帯

格子から出発して四次元の理論を作り、閉じ込めや質量ギャップを示そうとすると、性質の違う二つの壁に当たります。

1. **紫外の壁**。格子間隔 a を 0 に近づけても崩れない、全ての尺度での一様な評価が要ります。漸近自由（4-06）のおかげで短い距離では結合が弱くなり、摂動の言葉で各尺度を制御する多重尺度の解析が考えられます。四次元のヤン–ミルズでは、2026-11-10 に、Wilson の格子の極限として Wightman の公理を満たす理論を作る Lean の形式化と委員会の評価

書が公開され、Lean で証明されている、と委員会が評価しました（第二巻、6-00）。ただし、その構成が示したのは周期の境界条件・立方の箱での連続極限です。この部が使う捩れた境界条件の小さな T^2 と、細長い箱（小さな T^2 と大きな平面の積）での構成は、公開された構成にありません（検索の範囲で）。この本では、この部の紫外の段を「紫外の制御」という名の仮定として扱い、その中身を「捩れた境界条件の下で同じ構成が立つこと」という開いた条件と読みます 仮 。それより前の到達点（Bałaban の連作）は 7-07 にあります。

2. **移り変わりの帯**。結合が弱い尺度（短い距離）から強い尺度（長い距離）へ移る中間の尺度、物理の長さで $1/\Lambda$ の前後（Λ は次元転移で生まれる尺度、4-07）を、摂動に頼らずに渡る必要があります。両側にはそれぞれ道具があります（弱結合の側の摂動・半古典、強結合の側の強結合展開 5-02）。帯の中で効く道具が無いことが、この本の第 23 部の道もこの道も止まる場所です（第 26 部）。

二つの壁は、四次元に直接向かうと同時に現れます。格子間隔を小さくする（紫外）ことと、大きな箱で長い距離を見る（帯を渡る）ことを、一つの評価の中で同時にこなさなければならないからです。

03

なぜ小さな捩れた T² か — 二つの理由

小さな捩れた T^2 を経由すると、二つの壁を別々の段に分けられる、というのがこの道の骨組みです。理由は二つです。

理由 1：捩れが零モードを消すので、T^2 の大きさまで弱結合のまま進める（見立て）。捩れた T^2 の上では、作用が 0 の配位はゲージを除いて一つに固定され（25-01 捩れた真空の一意性）、その周りの随伴の揺らぎの格子 Laplacian には正のギャップ $4\sin^2(\pi/2N)$ があります（25-01 捩れた随伴のギャップの補題、$N = L/a$）初 。物理の単位に直すと、N が大きいときこのギャップは $(\pi/L)^2$ の程度で、古典的な揺らぎは全て $1/L$ 程度の質量を持ちます。すると、結合の走りは T^2 の大きさ L で止まり、$L\Lambda \ll 1$ なら有効結合 $g^2(L)$ は小さいまま、と見込まれます 読 （物理の見立て。紫外の制御を仮定した上で）。この段には帯が現れません。

理由 2：T^2 を巻く渦の面は、平面の中で局所的に閉じる。中心渦（17-02）は四次元では二次元の面で、平面の Wilson ループと絡む渦の面は、四次元では面積とともにコストが増える広がった対象です。この本の検討で四次元のまま帯を渡ろうとした道は、どれも「位相的な量（渦がループと絡むかどうか）を、局所的な操作で単調に比べられない」という一点で止まりました（地図は 26-08）読 。$\mathbb{R}^2 \times T^2$ では、平面の点 p の上の面 $\{p\} \times T^2$ は面積 L^2 の閉じた面で、平面の中では点のように振る舞います。渦を一枚足す・除く操作が、平面の有界な領

域の中の操作になります 初 （面が有界な領域に入ることは定義からの事実）。この局所性が、容器（25-03）・板の閉じ込め（25-04）・挿入の恒等式（25-05）の全てを支えます。

こうして問題は二つに割れます。

- **中間の到達目標（小さな T^2 の上）：** $\mathbb{R}^2\times$ 小さな捩れた T^2 で、ギャップと面積則を格子間隔 a に一様に示すこと。残る壁は紫外（捩れた境界条件での構成）だけです（ただし、紫外の制御・挿入の一様な受理・枠の減相関という名の仮定を置いた上での条件つきの研究計画で、定理ではありません） 仮 。
- **最後の段（T^2 を広げる）：** L を $1/\Lambda$ を越えて大きくしても、面積則の強さが一様に保たれること。残る壁は帯だけです（25-09） 仮 。

割ることで易しくなったわけではありません。帯は最後の段にそっくり残ります。割って得られたのは、帯の手前の全ての段を、帯と無関係に確かめられる形に並べられることと、帯が要求する不等式の形を一つに絞れることです（第 26 部）。

04

尺度のはしご — どの尺度で、どの道具が効くか

図 2 は、物理の長さ L（小さな T^2 の一辺、あるいは見ている尺度）を縦に取り、下の格子間隔 a から上の無限遠まで、どの尺度でどの道具が効くかを並べたものです。下（弱結合）と上（強結合）にはそれぞれ道具があり、真ん中の帯だけが空いている、という問題の形を一枚で見るための図です。図の番号と題は第 26 部の入口（26-00 の図 2「尺度のはしご」）と揃えてあります。図 1（論理の流れ）は 16-09 にあります。

図 2　尺度のはしご。縦軸は物理の長さ（下ほど短い）。各段の札は表 1 にあり、図の中の文は札の付いた行の要約で、それ自体は主張ではない



図 2 を文字で書くと次のとおりです。下から順に、格子間隔 a から基点の長さ L_0 までが紫外の段（捩れた境界条件での構成、この本では仮定）、L_0 が小さな捩れた T^2 の基点（第 25 部の道具が直接効く所）、L_0 から $1/\Lambda$ までが希薄な分数インスタントンの気体の段（半古典の見立て、弦の張力が $\Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}$ の程度）、$1/\Lambda$ の前後が移り変わりの帯（繰り込みの比較が一ループの水準と数値でしか分かっていない所）、その上が閉じ込めの領域（強結合の道具が効くと見込まれる所）です。

表 1　図 2 の各段の中身と札（条件を同じ行に）

段	中身	札	条件・範囲	章
$a \sim L_0$	a に一様な多重尺度の評価（有効作用の局所性・大きな場の稀さ・結合の流れ）	仮	紫外の制御という名の仮定（捩れた境界条件の下で同じ構成が立つこと）。公開された構成は周期の立方の箱だけ。それより前の Bałaban の連作には原典で未発表とされた段が残る	6-00・7-07
L_0	捩れを食う真空の一意性・随伴の Laplacian のギャップ $4\sin^2(\pi/2N)$・(1,1) の区画で最小作用が正	初	SU(2)・格子・N 固定・$n_{12}=1$	25-01
L_0	格子間隔と T^2 を固定すれば全ての β で面積則	初	N 固定・格子間隔固定。連続極限では張力が 0 になる。先行研究との照合は未了	25-04
L_0	小さな T^2 でのギャップと面積則を a に一様に	仮	紫外の制御・挿入の一様な受理・枠の減相関の下の条件つきの研究計画	25-09・27-01
$L_0 \sim 1/\Lambda$	位相電荷 $\frac{1}{2}$ の自己双対の塊の作用の下限 $4\pi^2/g^2$・希薄な気体の弦の張力 $\Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}$	典＋読	前者は BPS の下限（原典の式）。後者は希薄な領域・一ループの勘定による物理の見立て（Tanizaki–Ünsal の式 (2.32)・(2.37)）	25-02

段	中身	札	条件・範囲	章
$1/\Lambda$ の前後	繰り込みの比較：一ループの水準で $\beta - \beta' = 0.258$（格子を 2 倍にするごと）	初	一ループの水準・SU(2)・$\beta = 4/g^2$。摂動の外の主張ではない	26-06
$1/\Lambda$ の前後	数値の読み：SU(2) で $\beta - \beta' \approx 0.2$、U(1) では逆向き	読	格子 $4^4 \to 8^4$ ほか・種の数と誤差は 26-09	26-06
$1/\Lambda$ の前後	帯を摂動に頼らずに渡る不等式	仮	未解決。形は第 26 部で一つの不等式に絞る	26-02
$1/\Lambda$ 〜 ∞	強結合の側の面積則	典	小さな β での格子の言明。物理の長さの尺度との対応は漸近自由による見立て	5-02

表 1 の L_0 の行のうち、上の二行は格子間隔を固定した言明で、三行目の「a に一様」とは強さが違います。この差（格子間隔に一様にすること）が紫外の壁で、第 25 部の各章は、どの言明がどちらの側にあるかを同じ行に書きます。

05

第 25 部の十章の地図

第 25 部は次の十章です。札は章の中の行の札の主なもので、細かな割り方は各章の五分類の表にあります。「条件」の欄は、その章の主な言明に必ず付く条件です。

表 2　第 25 部の十章（札・条件を同じ行に）

章	題	一行の中身	主な札	条件
25-00	入口 ― 時間でなく空間を	この章	読 ＋典	「弱結合のまま」は紫外の制御の仮定の下の見立て
25-01	捩れた T^2 と 't Hooft の流束	$n_{12} = 1$・区画・流束の自由エネルギー・捩れの和のアンサンブル。三つの初等的な事実	典（定義）／初（三つの事実）	SU(2)・格子・N 固定・$n_{12} = 1$
25-02	渦と分数インスタントン	位相電荷 $\frac{1}{2}$ の塊・作用 $4\pi^2/g^2$・希薄な気体・弦の張力 $\Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}$・格子の作用が $\pi^2\beta$ に下から近づくこと	典／読／機／仮	希薄な領域・一ループ・SU(2)。冷却の作用は上界
25-03	容器 ― 枠を条件づけると独立になる	容器の恒等式（Mack–Petkova）・平面の方向の入れ子・四次元での限界	典／初	恒等式は既知。Lean は有限の代数だけ
25-04	板の閉じ込め	格子間隔と T^2 を固定すれば全ての β で面積則	初	N 固定・格子間隔固定・連続極限では張力が 0。先行研究との照合は未了
25-05	渦の挿入の恒等式	挿入比の期待値 1・区画の符号との相関・平均した評価・二次モーメント	初	有限の配位空間・正の重み・区画を反転する全単射

章	題	一行の中身	主な札	条件
25-06	力学で駆動した挿入と流れの補題	Jarzynski 型の恒等式・同時の反転の評価	初 ／典	一段の核の評価は帯の試験には使えない
25-07	なぜ決まった写像は失敗するか	揺らぎの形を変えない写像は反遮蔽の 4 を見られない。$11/3 = -1/3 + 4$	初 ／読	ループの水準
25-08	測った記録	駆動した挿入の仕事・渦の自由エネルギー・板の弦の張力	読	群・β・格子の大きさ・測定数・誤差を各行に
25-09	この道が止まる場所	T^2 を広げること＝移り変わりの帯	仮 ＋読	—

読む順は番号のとおりを勧めます。急ぐ読者は 25-01 の §01〜§02（設定）、25-02 の §01〜§03（分数インスタントンと希薄な気体）、25-04（板の閉じ込め）、25-09（止まる場所）の順に読めば、道の骨組みが追えます。

06

この部の記号と語の約束

- **群と結合。** 群は第 25 部を通して $SU(2)$ に固定します。Wilson 作用は 5-01 の規約で $\beta \sum_p \bigl(1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{tr} U_p\bigr)$、$\beta = 4/g^2$ です。
- **N と M。** 第 25 部の N は群の次数ではなく、小さな T^2 の一辺の格子点の数です（$L = Na$）。平面の一辺の格子点の数を M と書きます。格子は $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ です。
- **帯と窓。** この部と第 26 部の主語は「移り変わりの帯」（略して帯）です。第 23・24 部の「窓」（サイトの窓・$\hbar$ の窓・時刻の窓）とは別の物で、語が同じでないことに意味はありません（注は 26-00）。
- **仮定の名。** 仮定は記号でなく名で呼びます：紫外の制御・挿入の一様な受理・枠の減相関・一様な板の張力・一様な板のギャップ。索引は A-06 にまとめます。
- **札。** 第 23 部と同じ五つ：初（紙で証明を本文に置いた）・典（原典で確認した既知）・機（計算機援用の評価）・読（数値の読み。物理の見立てには「物理の見立て」と添える）・仮（仮定、あるいは証明の筋だけがある行。根拠の欄に筋の在りかを書く）。読み方は 23-00。

07

第 23 部・第 26 部への案内

第 23 部（一本目の道）へ。第 23 部は時間の方向から質量ギャップに向かう道で、拡散型緩和時間の仮定を一段目の模型で組み立てました。入口は 23-00、止まった所は 23-15、その先の考察は第 24 部（24-00）です。二つの道は、示そうとする言明が違います（第 23 部はギャップ、第 25 部はまず面積則）。

第 26 部（帯）へ。二本の道は、どちらも「全ての尺度で同じ定数」という型の言明の手前で止まります。第 26 部（26-00）は、その言明の正しい形（帯の正しい形、26-01）、一つの不等式への還元（26-02）、時間の側から見た同じ帯（26-07）を扱います。第 25 部の最後の章（25-09）が第 26 部への橋です。

段の表へ。証明が含むべき段（器・紫外・小さな T^2 のギャップ・小さな T^2 の閉じ込め・帯・$\mathbb{R}^4$・一般の群）の表は 16-09 にあります。第 25 部は、その表の「小さな T^2」の二段と「帯」の段の入口を埋めます。

08

言えないこと

(a) 弱結合。「T^2 の大きさまで弱結合のまま」は、紫外の制御を仮定した上での物理の見立てで、定理ではありません。この部の設定（捩れた境界条件の小さな T^2 と細長い箱）での格子間隔に一様な評価は、この本にも、公開された構成にもありません（公開された構成は周期の立方の箱）。

(b) 断熱的な連続性。小さな T^2 と $\mathbb{R}^4$ が相転移なしにつながることは予想で、この本はそれを使いません。使うのは「つながるなら何を示せばよいか」の形だけです。

(c) 閉じ込めとギャップ。この道の目標は面積則で、面積則から質量ギャップを出す既知の道はありません。二つは別の言明です（16-09・27-01）。

(d) 図 2。図 2 は道具の置き場所の地図で、尺度と結合の対応（どの L がどの β に当たるか）は漸近自由による見立てです。図の中の数は表 1 の札の付いた行の要約です。

09

五分類の表と依存グラフ

表 3　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	周期的な T^2 では断熱的な連続性が立たない（物理の文献の記述）	典	Tanizaki–Ünsal §2.1	物理の議論	—
2	捩れた $T^2 \times \mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^4$ への連続性の予想	典	同、要旨	予想として	—
3	捩れを食う真空の一意性と随伴の Laplacian のギャップ	初	25-01 の捩れた真空の一意性・捩れた随伴のギャップの補題	SU(2)・格子・N 固定・$n_{12} = 1$	—
4	面 $\{p\} \times T^2$ は平面の有界な領域に入る	初	定義	—	—
5	紫外の制御（捩れた境界条件の下で、公開された構成と同じ構成が立つこと）	仮	6-00・7-07	a から L_0 まで	—
6	T^2 の大きさまで弱結合のまま ⟸ 3・5	読	物理の見立て	$L\Lambda \ll 1$	—
7	四次元のまま帯を渡ろうとした道が止まった一点（位相的な量を局所的に比べられない）	読	26-08 の地図	試した道の範囲	—
8	問題が中間の到達目標と最後の段に割れる ⟸ 4・6・7	仮	この章 §03	研究計画の形	—
9	図 2 と表 1 の各段 ⟸ 5・6・8	各行の札	表 1	表 1 の条件	—

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
1  典   周期的な T²  では連続性が立たない                物理の議論
2  典   捩れた T² × R²  から R⁴  への連続性（予想）      予想
3  初   捩れを食う真空の一意性・ギャップ  4sin²(π/2N)    SU(2)・N 固定・n₁₂ = 1
4  初   面 {p} × T²  は平面の有界な領域に入る
5  仮   紫外の制御（捩れた境界条件での構成）             a から L₀ まで
6  読   T²  の大きさまで弱結合のまま ⟸ 3・5                物理の見立て・LΛ ≪ 1
7  読   四次元のまま渡る道が止まった一点                  試した道の範囲
8  仮   中間の到達目標と最後の段に割れる ⟸ 4・6・7
9  各   図 2・表 1 ⟸ 5・6・8
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。証明を置いた節点は、捩れた真空の一意性とギャップ（25-01 に証明）と、面が平面の有界な領域に入ること（定義）だけです。捩れた T^2 から R^4 への連続性の予想は、どの節点の前提にも入っていません。仮定の行（紫外の制御）は結論の量（ギャップ・面積則）を含まず、多重尺度の評価の形だけを述べます。この章の結論の側の節点（弱結合のまま・問題が二つに割れる）は「読」と「仮」で、閉じ込めの節点も質量ギャップの節点もありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 捩れた T^2 の上の作用 0 の配位の一意性と随伴の Laplacian のギャップ（25-01 に証明）・渦の面が平面の中で局所的であること	格子間隔に一様なギャップ。小さな T^2 での面積則の a に一様な形
典 周期的な T^2 と捩れた T^2 の違いについての物理の文献の記述・連続性の予想（予想として）	連続性の予想そのもの
読 「T^2 の大きさまで弱結合のまま」（紫外の制御の仮定の下の物理の見立て）・図 2 の配置	尺度と結合の対応の定量的な形。帯の幅
仮 問題が二つの段に割れるという研究計画の形	どちらの段も閉じていない。帯を渡る不等式

出典と再現

もの	種別	出典・道具
周期的な T^2 と捩れた T^2 の縮約・連続性の予想	典	Y. Tanizaki, M. Ünsal, Center vortex and confinement in Yang–Mills theory and QCD with anomaly-preserving compactifications, arXiv:2201.06166（v2, 2022）。要旨・§2.1 の題・§2.2〜2.3 を本文で確認
格子の上の分数インスタントンの気体の数値	典	G. Bergner, A. González-Arroyo, I. Soler, Fractional instantons and confinement: first results on a $T_2 \times R^2$ roadmap, arXiv:2502.09463（2025）。要旨を確認
捩れた境界条件	典	G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141／G. 't Hooft, Commun. Math. Phys. 81 (1981) 267（書誌は 3-05 と同じ）
紫外の到達点	本書	6-00（公開された構成）・7-07
一ループの $\beta - \beta' = 0.258$	初	$\beta = 4/g^2$、一ループの係数 $b_0 = 22/(48\pi^2)$ から $8b_0 \ln 2 \approx 0.2575$。導き方は 26-06
数値 $\beta - \beta' \approx 0.2$	読	この本の検討の数値の記録（26-09）
十章の題と札	本書	表 2。各章の五分類の表が正

この章で使った語 — 二本目の道・小さな捩れた T^2・紫外の壁・移り変わりの帯・紫外の制御・中間の到達目標・尺度のはしご・基点 L_0・希薄な分数インスタントンの気体・繰り込みの比較。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：25-01 捩れた T^2 と 't Hooft の流束 — 設定・区画・流束の自由エネルギーと、三つの初等的な事実。

捩れた T² と 't Hooft の流束

この章の §01・§02 は既存の知見、§03 以降は本書の検討です。

この章で分かること — 第 25 部の舞台を定義します。格子 $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ の上の $SU(2)$ Wilson 作用に、小さな T^2 の平面の 't Hooft の捩れ $n_{12} = 1$ を入れ、平面の方向の流束 n_{34} の二つの区画、その分配関数の比（流束の自由エネルギー）、二つの区画を一つの測度にまとめた捩れの和のアンサンブルを置きます。そのうえで、この道の土台になる三つの初等的な事実 — (1) 作用 0 の配位（捩れを食う真空）の一意性、(2) その周りの随伴の場の反周期性と、格子の二次元 Laplacian のギャップ $4\sin^2(\pi/2N)$、(3) $(1,1)$ の区画には平坦な配位が無く最小作用が正 — を証明つきで述べます。

前提となる章 — 25-00（この部の入口と記号）・5-01（リンク変数・プラケット・Wilson 作用）・1-04（$SU(2)$ と Pauli 行列）・3-05（位相電荷）・17-02 中心渦。

先に言うこと — この章の言明は全て、群 $SU(2)$・有限の格子・N を固定・捩れ $n_{12} = 1$ の上の文です。連続極限・格子間隔に一様な評価・閉じ込めについては何も言いません。定義の多くは 't Hooft（1979・1981）と Mack–Petkova（1980）の型の既知のもので 典 、三つの性質は初等的で、証明を本文に置きます 初 。三つとも物理の文献では知られた事柄の格子版で、新しさは主張しません。

この章の順序

1. 設定 — 格子・作用・符号の場 z
2. 区画と流束の自由エネルギー — 面を動かす補題と定義
3. 捩れの和のアンサンブル — 偏りの偶奇表示
4. 中心の値のプラケットと holonomy — 作用零の配位と一周の交換子
5. 捩れた真空の一意性
6. 捩れた随伴のギャップ — 反周期性と 4sin²(π/2N)
7. 捩れた区画の最小作用の正値性 — (1,1) の区画には平坦な配位が無い
8. 捩れた T^2 の三つの性質が言うこと

9. 言えないこと
10. 五分類の表と依存グラフ（表 1）

01

設定 — 格子・作用・符号の場 z

この節は既存の知見（'t Hooft の捩れた境界条件を格子の符号の場で書く形）の整理です。導入は 3-05 §03 にあります。

格子を $\Lambda = (\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$（$N, M \geq 2$）とします。1・2 の方向が小さな T^2、3・4 の方向が平面です。各リンク (x, μ) に $U_{x,\mu} \in SU(2)$ を置き、プラケット $p = (x; \mu, \nu)$（$\mu < \nu$）の値を

$$U_p = U_{x,\mu}\, U_{x+\hat{\mu},\nu}\, U_{x+\hat{\nu},\mu}^{-1}\, U_{x,\nu}^{-1} \tag{1}$$

と書きます（5-01 と同じ）。プラケットごとの符号 $z_p \in \{+1, -1\}$ を与えたとき、作用と分配関数を

$$S^z(U) = \sum_p \Big(1 - \tfrac{1}{2}\, z_p \operatorname{tr} U_p\Big), \qquad Z[z] = \int e^{-\beta S^z(U)} \prod_\ell dU_\ell, \qquad \beta = \frac{4}{g^2} \tag{2}$$

と置きます。dU_ℓ は正規化した Haar 測度です。$z \equiv +1$ なら (2) は 5-01 の Wilson 作用そのもので、各項は $|\operatorname{tr} U| \leq 2$ から $[0, 2]$ に入ります。$z_p = -1$ のプラケットは「中心の元 -1 を一つ差し込んだプラケット」で、そこでは $U_p = -1$ のとき作用が 0 になります。

二つの区画の符号。小さな T^2 の捩れを、各 $(1,2)$ 平面（x_3, x_4 を止めた $N \times N$ の平面）のちょうど一枚のプラケット、$(x_1, x_2) = (N-1, N-1)$ の $(1,2)$ プラケットに $z_p = -1$ を置くことで入れます。全ての (x_3, x_4) で同じ位置です。これを $z^{(0)}$ と書きます（他は全て $+1$）。平面の方向の流束を一つ足した符号 $z^{(1)}$ は、$z^{(0)}$ に加えて、平面の単位の正方形 $q = (q_3, q_4)$ の上の面

$$\Pi_q = \{\, ((x_1, x_2, q_3, q_4); 3, 4) \;:\; x_1, x_2 \in \mathbb{Z}/N \,\} \tag{3}$$

の N^2 枚の $(3,4)$ プラケットに $z_p = -1$ を置いたものです。Π_q は平面の点 q の上に立つ「T^2 を巻く面」で、平面の中では点のように振る舞います（25-00 §03 の理由 2）。

02

区画と流束の自由エネルギー

面の置き場所 q は分配関数に効きません。それを示すのが次の補題です。

面を動かす補題 初　リンク ℓ について、ℓ を含む全てのプラケットの符号を反転した場を $\delta_\ell z$ と書くと、$Z[\delta_\ell z] = Z[z]$。特に、(a) 面 Π_q は隣の正方形の面 $\Pi_{q'}$ へ動かせ、$z^{(1)}$ の分配関数は q によらない。(b) 面の集合 Q の上に面を置いた符号 $z^{(0)} \prod_{q\in Q}(\text{面 } \Pi_q)$ の分配関数は、$|Q|$ の偶奇だけで決まる。

証明。 変数の取り替え $U_\ell \mapsto -U_\ell$ は Haar 測度を保ちます。-1 は中心の元なので、ℓ を一度だけ含むプラケットでは U_p が $-U_p$ に変わり、他のプラケットは変わりません（格子のプラケットは一つのリンクを高々一度含みます）。よって $S^{\delta_\ell z}(-U_\ell, \dots) = S^{z}(U)$ で、積分は等しくなります。(a)：平面の点 $(a, b+1)$ の上の 3 方向のリンク全て（x_1, x_2 を走らせた N^2 本）に補題を順に使います。$(3,4)$ プラケットでこれらのリンクを含むのは、$\Pi_{(a,b)}$ と $\Pi_{(a,b+1)}$ の上のものだけで、それぞれちょうど一本を含みます。$(\mu, 3)$ プラケット（$\mu \le 2$）は 3 方向のリンクを二本含み、その両方が同じ平面の点の上にあるので、符号は二度反転して元に戻ります。他のプラケットは 3 方向のリンクを含みません。よって二枚の面 $\Pi_{(a,b)}$ と $\Pi_{(a,b+1)}$ の符号が反転し、面は一つ隣へ動きます。4 方向も同じです。(b)：面を動かして二枚を重ねると $(-1)^2 = +1$ で消えるので、(a) と平面の正方形の連結性から従います。∎

面を動かす補題は 't Hooft の捩れの格子版の基本の性質で、z の場そのものではなく、各平面を貫く -1 の個数の偶奇（流束 $n_{\mu\nu} \in \{0,1\}$）だけが分配関数に効くことを言っています 典（一般の形は 't Hooft 1979、格子の $\mathbb{Z}_2$ の符号の場による形は Mack–Petkova 1980）。この章で使うのは (a)・(b) の場合だけです。

区画と流束の自由エネルギーの定義　$Z(0) = Z[z^{(0)}]$、$Z(1) = Z[z^{(1)}]$ と書き、流束の組 $(n_{12}, n_{34}) = (1,0)$ と $(1,1)$ をそれぞれ区画と呼びます。混ざった平面（$(1,3)$ など）の流束は 0 とします。そのうえで

$$\Delta F = \ln \frac{Z(0)}{Z(1)}, \qquad \theta(N, M, \beta) = \frac{Z(0) - Z(1)}{Z(0) + Z(1)} = \tanh \frac{\Delta F}{2} \tag{4}$$

と置きます。ΔF は平面の方向の流束 n_{34} を一つ入れる自由エネルギーの差（'t Hooft の流束の自由エネルギー）、θ は二つの区画の「偏り」です。(4) の右の等式は $(1 - e^{-\Delta F})/(1 + e^{-\Delta F}) = \tanh(\Delta F/2)$ からです。$Z(0), Z(1) > 0$ なので $|\theta| < 1$ です。$\theta \ge 0$（つまり $Z(1) \le Z(0)$）は転送行列による別の議論が要り、26-04 で扱います。

この量が閉じ込めに効く理由は、Tomboulis–Yaffe の不等式が、平面の Wilson ループの期待値を捩れた分配関数の比で上から押さえることにあります 典。θ が平面の大きさ M について

$-\ln\theta \ge cM^2$ と減れば、その不等式を通して面積則が出ます。不等式の正確な形と、θ が 1 から離れるだけでは足りないことは 26-01 で扱います。

03

捩れの和のアンサンブル

二つの区画を別々の測度として持つ代わりに、面の置き方も確率変数にした一つの測度にまとめます。平面の単位の正方形の全体を T（M^2 個）とし、部分集合 $Q \subset T$ ごとに符号 $z^Q = z^{(0)}\prod_{q\in Q}(\Pi_q \text{ の上で } -1)$ を作ります。

定義（捩れの和のアンサンブル） 典　配位と面の集合の組 (U, Q) の上の確率測度

$$\tilde{\mu}(dU, Q) = \frac{1}{\Xi}\, e^{-\beta S^{z^Q}(U)} \prod_{\ell} dU_\ell, \qquad \Xi = \sum_{Q\subset T} Z[z^Q] \tag{5}$$

を捩れの和のアンサンブルと呼びます。プラケットの $\mathbb{Z}_2$ の符号を確率変数として足し上げる形は Mack–Petkova（1980）の表示の型で、彼らは閉じた（各立方体の六枚の積が $+1$ の）符号の場の全体で足し上げています。ここでは平面の流束 n_{34} に関わる面だけを足す、小さな形を使います。

偏りの偶奇表示（偏りを一つの期待値に） 初　$\theta = \mathbb{E}_{\tilde{\mu}}\big[(-1)^{|Q|}\big]$。

証明。 面を動かす補題 (b) から $Z[z^Q]$ は $|Q|$ が偶数なら $Z(0)$、奇数なら $Z(1)$ です。T の 2^{M^2} 個の部分集合のうち、ちょうど半分が偶数個です。よって $\Xi = 2^{M^2-1}(Z(0)+Z(1))$、$\sum_Q (-1)^{|Q|} Z[z^Q] = 2^{M^2-1}(Z(0)-Z(1))$ で、比が (4) の θ です。∎

偏りの偶奇表示の表示では、面の置き方 Q は平面の点の上の「渦がいるか」の記録で、$(-1)^{|Q|}$ は平面全体の渦の数の偶奇です。偏り θ が小さいとは、偶奇がほぼ公平に混ざっていること、つまり渦が平面の中に自由に湧いていることです。$\mathbb{R}^4$ では、ループと絡む渦の面は広がった面で、この「点の上の記録」の形には書けません（25-00 §03）。この表示は、平面をブロックに分けて柱ごとの偏りの積に書き直す形（容器の恒等式、25-03）と、渦を一つ差し込む写像の恒等式（25-05）の出発点になります。

04

中心の値のプラケットと holonomy

三つの性質の証明は、全てのプラケットが中心の値（± 1）を取る配位の性質に帰着します。まず、作用 0 がそれと同じことを確かめます。

作用零の配位の補題（作用 0 の配位） 初　$S^{z}(U)=0$ であるための必要十分条件は、全てのプラケットで $U_p = z_p \cdot \mathbf{1}$ となることです。

証明。 $SU(2)$ の元は $U=\cos\alpha\,\mathbf{1}+i\sin\alpha\,(n\cdot\sigma)$（$|n|=1$）と書け、$\operatorname{tr}U=2\cos\alpha$ です（1-04）。(2) の各項 $1-\frac{1}{2}z_p\operatorname{tr}U_p = 1-z_p\cos\alpha_p$ は 0 以上で、0 になるのは $z_p\cos\alpha_p=1$、つまり $z_p=1$ なら $\alpha_p=0$（$U_p=\mathbf{1}$）、$z_p=-1$ なら $\alpha_p=\pi$（$U_p=-\mathbf{1}$）のときだけです。∎

次に、プラケットが全て中心の値なら、平面を一周する holonomy どうしの交換子は、その平面の符号の積で決まります。基点 x から μ の方向へ一周する直線の道に沿ったリンクの積を $P_\mu(x)$ と書きます（$\mu=1,2$ なら長さ N、$\mu=3,4$ なら長さ M）。

一周の交換子の符号の補題（交換子は平面の符号の積） 初　全てのプラケットで $U_p=z_p\cdot\mathbf{1}$ なら、$\mu\neq\nu$ と基点 x について

$$P_\mu(x)\,P_\nu(x)\,P_\mu(x)^{-1}\,P_\nu(x)^{-1} = \varepsilon_{\mu\nu}\,\mathbf{1}, \qquad \varepsilon_{\mu\nu}=\prod_{p\subset(\mu,\nu)\text{ 平面 }\ni x} z_p \tag{6}$$

が成り立ちます。右の積は x を通る (μ,ν) 平面（二次元のトーラス）の全てのプラケットにわたります。

証明。 x を通る (μ,ν) 平面を、x を角に置いた正方形 R に切り開きます。R の境界を x から反時計回りに一周する道は、μ の方向の一周・ν の方向の一周・μ の方向の逆向きの一周・ν の方向の逆向きの一周をこの順に並べたもので、その holonomy が (6) の左辺です。一方、正方形の格子の円板では、境界の holonomy は、各プラケットの値を基点への道で平行移動して共役したものの、ある順序の積に等しくなります（格子の非可換 Stokes の定理：プラケットを一枚ずつ剥がして境界の道を縮める、帰納法）。全てのプラケットの値が中心の元 $z_p\mathbf{1}$ なら、共役で値は変わらず、順序にもよらないので、積は $\prod_{p\subset R} z_p$ です。∎

$z^{(0)}$ では、$(1,2)$ 平面は全て一枚だけ -1 を持つので $\varepsilon_{12}=-1$、他の平面は $\varepsilon=+1$ です。$z^{(1)}$ では、さらに $(3,4)$ 平面がちょうど一枚（面 Π_q と交わる一枚）の -1 を持つので $\varepsilon_{34}=-1$ です。これは、連続理論の 't Hooft の捩れた境界条件で、二つの方向の貼り合わせの整合が中心の元 $e^{\pi i n_{\mu\nu}}$ だけずれる、という関係の格子版です 典 （'t Hooft 1979）。

最後に、holonomy が配位をどこまで決めるかを述べます。

holonomy による決定の補題（holonomy で決まる） 初　同じ z について $U_p=z_p\mathbf{1}$（全ての p）を満たす二つの配位 U, U' が、基点 0 での四つの holonomy を一致させる（$P_\mu=P'_\mu$、$\mu=1,\dots,4$）なら、U' は U のゲージ変換です。

証明。 各格子点 x に、0 から x への決まった道 γ_x（1 の方向、2 の方向、3 の方向、4 の方向の順に正の向きへ進む道）を選び、道に沿った積を $U(\gamma_x)$ と書きます。リンク $\ell=(x\to y)$ に

ついて、閉じた道 $c_\ell = \gamma_x\,\ell\,\gamma_y^{-1}$ を考えます。トーラスの格子の二次元の骨格では、0 を基点とする閉じた道は、有限枚のプラケットを掃くことで、四つの直線の一周の語に変形できます（$\pi_1(T^4)=\mathbb{Z}^4$ の格子版、標準の位相の事実 [典] ）。変形で掃いたプラケットは中心の値なので、c_ℓ の holonomy は「掃いたプラケットの z の積」と「P_μ の語」の積で、どちらも U と U' で同じです。よって $U(\gamma_x)U_\ell U(\gamma_y)^{-1} = U'(\gamma_x)U'_\ell U'(\gamma_y)^{-1}$、すなわち $g(x)=U'(\gamma_x)^{-1}U(\gamma_x)$ と置くと $U'_\ell = g(x)\,U_\ell\,g(y)^{-1}$ です。∎

05

捩れた真空の一意性

捩れを食う配位。$\Omega_1 = i\sigma_1$、$\Omega_2 = i\sigma_2$ と置き、配位 U^0 を次で定めます。1 の方向のリンクは $x_1 = N-1$ のもの（T^2 の継ぎ目を渡るもの）だけ Ω_1、2 の方向のリンクは $x_2 = N-1$ のものだけ Ω_2、他のリンク（3・4 の方向を含む）は全て $\mathbf{1}$ とします。

捩れを食う配位の補題 [初]　$\Omega_1\Omega_2\Omega_1^{-1}\Omega_2^{-1} = -\mathbf{1}$。また U^0 のプラケットは、$(x_1,x_2)=(N-1,N-1)$ の $(1,2)$ プラケットだけが $-\mathbf{1}$ で、他は全て $\mathbf{1}$ です。よって $S^{z^{(0)}}(U^0)=0$。

証明。 $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3 = -\sigma_2\sigma_1$ から $\Omega_1\Omega_2 = -\sigma_1\sigma_2 = -i\sigma_3$、$\Omega_1^{-1}\Omega_2^{-1} = (-i\sigma_1)(-i\sigma_2) = -i\sigma_3$ で、積は $(-i\sigma_3)^2 = -\mathbf{1}$。プラケット (1) を見ると、継ぎ目を含まない $(1,2)$ プラケットは全て $\mathbf{1}$。$x_1 = N-1$、$x_2 \neq N-1$ では $\Omega_1\cdot\mathbf{1}\cdot\Omega_1^{-1}\cdot\mathbf{1} = \mathbf{1}$、$x_2 = N-1$、$x_1 \neq N-1$ では $\mathbf{1}\cdot\Omega_2\cdot\mathbf{1}\cdot\Omega_2^{-1} = \mathbf{1}$、角 $(N-1,N-1)$ では $\Omega_1\Omega_2\Omega_1^{-1}\Omega_2^{-1} = -\mathbf{1}$。1・2 の方向のリンクは x_3, x_4 によらないので、3・4 の方向を含むプラケットは全て $\mathbf{1}$。作用零の配位の補題から作用は 0 です。∎

反可換の対の剛性の補題（反可換な対） [初]　$A, B \in SU(2)$ が $ABA^{-1}B^{-1} = -\mathbf{1}$ を満たすなら、ある $g \in SU(2)$ で $gAg^{-1} = i\sigma_1$、$gBg^{-1} = i\sigma_2$ となります。また、$i\sigma_1$ と $i\sigma_2$ の両方と可換な $SU(2)$ の元は $\pm\mathbf{1}$ だけです。

証明。 $ABA^{-1} = -B$ の跡を取ると $\operatorname{tr} B = -\operatorname{tr} B$、よって $\operatorname{tr} B = 0$ で $B = i\,b\cdot\sigma$（$|b|=1$）。同様に $BAB^{-1} = -A$ から $A = i\,a\cdot\sigma$。$(a\cdot\sigma)(b\cdot\sigma) = (a\cdot b)\mathbf{1} + i(a\times b)\cdot\sigma$ なので、$AB = -BA$ は $a\cdot b = 0$ と同値です。直交する単位ベクトルの組 (a,b) は、回転 $R\in SO(3)$ で (e_1,e_2) に移せます（$(a,b,a\times b)$ は正の向きの正規直交基底）。$SU(2)\to SO(3)$ は全射で、$g(v\cdot\sigma)g^{-1} = (Rv)\cdot\sigma$ となる g を取れば主張の前半です。後半：$C = c_0\mathbf{1} + i\,c\cdot\sigma$ が σ_1 と可換なら $c\times e_1 = 0$、σ_2 と可換なら $c\times e_2 = 0$、よって $c=0$、$C=\pm\mathbf{1}$。∎

捩れた真空の一意性（捩れを食う真空の一意性） [初]　区画 $(1,0)$ で作用 0 の配位（$S^{z^{(0)}}(U)=0$）は、ゲージ変換と、3・4 の方向の中心の変換（ある 3 方向の切り口 $x_3 = c$ の全ての 3 方向のリンクに -1 を掛ける操作、4 方向も同様）を除いて、U^0 ただ一つです。小さ

な T^2 の上だけ（二次元の格子 $(\mathbb{Z}/N)^2$、捩れ $n_{12}=1$）なら、ゲージ変換だけを除いて一つです。

証明。 作用零の配位の補題から $U_p = z_p^{(0)}\mathbf{1}$。一周の交換子の符号の補題から、基点 0 の holonomy は $P_1P_2P_1^{-1}P_2^{-1} = -\mathbf{1}$、他の対は可換です。反可換の対の剛性の補題で基点のゲージを選び直せば $P_1 = i\sigma_1$、$P_2 = i\sigma_2$。P_3, P_4 は両方と可換なので $\pm\mathbf{1}$。U^0 の holonomy は $(i\sigma_1, i\sigma_2, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ です。切り口 $x_3 = c$ の 3 方向のリンクに -1 を掛けると、それらを含むプラケットは全て二本を含むので（$(\mu, 3)$ と $(3, 4)$ のプラケットの 3 方向の二辺は同じ x_3 にある）、作用は変わらず、P_3 だけが符号を変えます。4 方向も同じです。これで四つの組 $(i\sigma_1, i\sigma_2, \pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{1})$ は全て U^0 から中心の変換で得られ、holonomy による決定の補題から、holonomy が一致する作用 0 の配位はゲージ変換で移り合います。二次元では P_3, P_4 が無いので、ゲージ変換だけで足ります。∎

反可換の対の剛性の補題の証明が示すとおり、$(-i\sigma_1, i\sigma_2)$ は $g = i\sigma_2$ による共役で $(i\sigma_1, i\sigma_2)$ に移ります。小さな T^2 の方向の中心の変換は、ゲージ変換に吸収されます。平面の方向の中心の変換は吸収されず、作用 0 の配位はゲージの類として四つあります。

06

捩れた随伴のギャップ — 反周期性と 4sin²(π/2N)

真空 U^0 の周りの揺らぎの二次の部分には、随伴の場の共変な Laplacian が現れます。小さな T^2（二次元の格子 $(\mathbb{Z}/N)^2$）の上で、$\mathfrak{su}(2)$ に値を取る場 ϕ に

$$(-\Delta_U\phi)(x) = \sum_{\mu=1,2}\Big[\,2\phi(x) - \mathrm{Ad}(U_{x,\mu})\,\phi(x+\hat\mu) - \mathrm{Ad}(U_{x-\hat\mu,\mu})^{-1}\phi(x-\hat\mu)\Big], \qquad \mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1}$$

と置きます。Ad は直交変換なので、$-\Delta_U$ は $\mathfrak{su}(2)$ の内積に関して対称で非負です。

捩れた随伴のギャップの補題 初　$U = U^0$ のとき、$\mathfrak{su}(2)$ の基底 $i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3$ の成分 ϕ^1, ϕ^2, ϕ^3 ごとに、$-\Delta_{U^0}$ は次の符号つきの境界条件の下のスカラーの Laplacian に分かれます。

成分	1 の方向	2 の方向	最小の固有値
ϕ^1（$i\sigma_1$）	周期	反周期	$4\sin^2(\pi/2N)$
ϕ^2（$i\sigma_2$）	反周期	周期	$4\sin^2(\pi/2N)$
ϕ^3（$i\sigma_3$）	反周期	反周期	$8\sin^2(\pi/2N)$

どの成分も少なくとも一つの方向で反周期です。よって $-\Delta_{U^0}$ の最小の固有値は $4\sin^2(\pi/2N) > 0$ で、零モードはありません。

証明。 $\mathrm{Ad}(i\sigma_1)$ は $i\sigma_1$ を保ち $i\sigma_2, i\sigma_3$ の符号を変え（$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = -\sigma_2$ など）、$\mathrm{Ad}(i\sigma_2)$ は $i\sigma_2$ を保ち $i\sigma_1, i\sigma_3$ の符号を変えます。U^0 のリンクは継ぎ目を渡るものだけが Ω_μ なので、(7) は成分ごとに、継ぎ目を渡る結合だけに符号 ± 1 の付いたスカラーの Laplacian になります。長さ N の輪で一本の結合に符号 s を付けた差分作用素 $2f(x) - f(x+1) - f(x-1)$ は、$e^{ikN} = s$ を満たす k について $f(x) = e^{ikx}$ を固有関数に持ち、固有値は $2 - 2\cos k = 4\sin^2(k/2)$ です。$s = +1$ なら $k \in \frac{2\pi}{N}\mathbb{Z}$（最小 0）、$s = -1$ なら $k \in \frac{2\pi}{N}(\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$（最小 $4\sin^2(\pi/2N)$、$k = \pi/N$）です。二次元では二つの方向の和なので、表の値になります。∎

捩れの無い周期的な T^2 の真空 $U \equiv \mathbf{1}$ では、全ての成分が両方の方向で周期的で、定数の ϕ が三次元ぶんの零モードになります。捩れの役目は、この零モードを消して、揺らぎに $4\sin^2(\pi/2N)$ の下限を与えることです。N が大きいとき $4\sin^2(\pi/2N) \approx \pi^2/N^2$ で、格子間隔 a の単位を戻すと $(\pi/L)^2$（$L = Na$）です。

同じギャップを質量に読み替えると、格子の上の質量 m_N は $4\sinh^2(m_N/2) = 4\sin^2(\pi/2N)$、すなわち

$$m_N = 2\ \mathrm{arsinh}\sin\frac{\pi}{2N} \tag{8}$$

です（格子の伝播関数の減衰率と隙間の関係、$2\cosh m - 2 = 4\sinh^2(m/2)$）初。この m_N は 25-02 §05 で、柱に閉じ込めた分数インスタントンの作用の収束の速さとして現れます。

07 捩れた区画の最小作用の正値性 — (1,1) の区画には平坦な配位が無い

捩れた区画の最小作用の正値性 初　区画 $(1,1)$ では、作用 0 の配位はありません。したがって最小作用

$$S_{\min}(N,M) = \min_{U} S^{z^{(1)}}(U) \tag{9}$$

は正です。また $S_{\min}(N,M) \le 2N^2$ です。

証明。 作用 0 の配位があったとすると、作用零の配位の補題と一周の交換子の符号の補題から、基点の holonomy は $P_1P_2P_1^{-1}P_2^{-1} = -\mathbf{1}$、$P_3P_4P_3^{-1}P_4^{-1} = -\mathbf{1}$（$\varepsilon_{34} = -1$）、混ざった対は可換です。反可換の対の剛性の補題から P_3 は P_1, P_2 の両方と可換なので $\pm\mathbf{1}$、P_4 も同じです。すると $P_3P_4P_3^{-1}P_4^{-1} = \mathbf{1}$ となって矛盾します。配位の空間 $SU(2)^{\#\text{リンク}}$ はコンパクトで作用は連続なので最小は達せられ、それは 0 でないので正です。上界：U^0 を区画 $(1,1)$ で評価すると、面 Π_q の N^2 枚では $U_p = \mathbf{1}$、$z_p = -1$ で一枚あたり $1 - \frac{1}{2}(-1)(2) = 2$、他は 0 です。∎

上界の配位は「細い渦の面」で、一枚のプラケットの厚さの面に作用 $2N^2$ を払います。捩れた区画の最小作用の正値性が言うのは最小作用が 0 でないことだけで、どれだけ小さいか（細い面より遥かに安い滑らかな塊があるか）は言いません。それが次の章の分数インスタントンの話で、格子の上の数値では $S_{\min}$ は π^2 の程度で、$2N^2$ よりずっと小さいと読まれています（25-02 §05）。

連続理論では、捩れ $n_{12} = n_{34} = 1$ の束の位相電荷は半整数に限られ、作用は $8\pi^2|Q|/g^2 \geq 4\pi^2/g^2$ で下から押さえられます [典]（'t Hooft 1981、Tanizaki–Ünsal の式 (2.24)・(2.25)）。捩れた区画の最小作用の正値性は、この下限の格子版の最も弱い形（正であること）にあたります。格子の上で $S_{\min}$ が π^2 に近いことは、連続の下限の格子版としては示されていません。

08

捩れた T² の三つの性質が言うこと

- **捩れた真空の一意性**は、小さな T^2 の古典的な真空が孤立していることを言います。周期的な T^2 では、可換な holonomy の組の全体（平坦な接続の族）が真空になり、その上を揺らぎが自由に動くので半古典の勘定が始められません。捩れがそれを一点（とその中心の像）に縮めます。
- **捩れた随伴のギャップの補題**は、孤立した真空の周りの揺らぎが $4\sin^2(\pi/2N)$ の下限を持つことを言います。これが、25-00 §03 の「T^2 の大きさまで弱結合のまま」という見立ての古典の側の根拠です。量子の側（紫外の制御。捩れた境界条件の下で、2026-11-10 に公開された構成と同じ構成が立つこと）は、開いた仮定のままです。
- **捩れた区画の最小作用の正値性**は、平面の方向の流束 n_{34} を入れると必ず作用を払うこと、つまり渦は「ただ」では置けないことを言います。偏り θ を 1 から離すのは渦のコストと渦の位置のエントロピーの競合で、そのコストの下限の一番弱い形が捩れた区画の最小作用の正値性です。

三つとも、N を固定した有限の格子の上の文です。N を増やすこと（T^2 を物理の長さとして広げること）は、この章のどの文も含みません。それが移り変わりの帯の問題です（25-09）。

09

言えないこと

(a) 連続極限。三つの性質はどれも $a \to 0$ について何も言いません。捩れた随伴のギャップの補題のギャップは古典の揺らぎの下限で、量子の有効作用のギャップではありません。

(b) 閉じ込め。θ の定義と偏りの偶奇表示は閉じ込めの道具の置き場所で、θ がどれだけ小さいかは言いません。格子間隔を固定した場合の評価は 25-04、半古典の率は 25-02。

(c) 他の群。証明は $SU(2)$ の Pauli 行列の計算（反可換の対の剛性の補題）に依ります。$SU(N)$ の場合はこの章では扱いません。

(d) 最小作用の値。$S_{\min}(N,M)$ が π^2 に近いこと、N とともに π^2 に近づくことは数値の読みで、この章では示しません。

10

五分類の表と依存グラフ

表 1　この章の行（「—」は機械検査の無い行。条件は全行で SU(2)・有限の格子 $(\mathbb{Z}/N)^2\times(\mathbb{Z}/M)^2$・$N,M\ge 2$）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	流束だけが分配関数に効く（一般の形）・捩れの関係	典	't Hooft 1979・Mack–Petkova 1980	—	—
2	面を動かす補題：面を動かす・偶奇だけで決まる	初	§02 の証明	面 Π_q の場合	—
3	区画と流束の自由エネルギーの定義：$\Delta F\cdot\theta=\tanh(\Delta F/2)$ (4)	定義	§02	$n_{12}=1$・混ざった流束 0	—
4	Tomboulis–Yaffe：Wilson ループを捩れた分配関数の比で押さえる	典	26-01 で式を	—	—
5	偏りの偶奇表示：$\theta=\mathbb{E}_{\tilde\mu}[(-1)^{\lvert Q\rvert}]\Longleftarrow 2$	初	§03 の証明	面の和のアンサンブル (5)	—
6	作用零の配位の補題：作用 $0\Longleftrightarrow U_p=z_p\mathbf{1}$	初	§04	—	—
7	一周の交換子の符号の補題：交換子は平面の符号の積 (6)	初	§04（格子の非可換 Stokes）	全プラケットが中心の値	—
8	閉じた道は直線の一周の語に変形できる	典	標準の位相	トーラスの格子	—
9	holonomy による決定の補題：holonomy で決まる $\Longleftarrow$ 7・8	初	§04	同じ z・中心の値	—
10	捩れを食う配位の補題：U^0 は区画 (1,0) で作用 0	初	§05	—	—
11	反可換の対の剛性の補題：反可換な対の正規形と可換子 $\{\pm\mathbf{1}\}$	初	§05	$SU(2)$	—
12	捩れた真空の一意性：捩れを食う真空の一意性 $\Longleftarrow$ 6・7・9・10・11	初	§05	ゲージ変換と平面の方向の中心の変換を除いて	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
13	捩れた随伴のギャップの補題：随伴の場の反周期性とギャップ $4\sin^2(\pi/2N)$ ⟸ 10	初	§06	二次元の格子 $(\mathbb{Z}/N)^2$・$U=U^0$	—
14	(8)：$m_N = 2\,\mathrm{arsinh}\,\sin(\pi/2N)$ ⟸ 13	初	§06	代数の言い換え	—
15	捩れた区画の最小作用の正値性：(1,1) に平坦な配位が無く $0 < S_{\min} \le 2N^2$ ⟸ 6・7・11	初	§07	区画 (1,1)	—
16	連続理論の下限 $8\pi^2\lvert Q\rvert/g^2 \ge 4\pi^2/g^2$	典	't Hooft 1981・Tanizaki–Ünsal の (2.24)(2.25)	連続・捩れの束	—

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  典  流束だけが効く・捩れの関係                                  't Hooft・Mack–Petko
 2  初  面を動かす補題：面を動かす                                  面 Π_q
 3  定  ΔF・θ = tanh(ΔF/2)                                          n₁₂ = 1
 4  典  Tomboulis–Yaffe                                             26-01
 5  初  偏りの偶奇表示：θ = E[(−1)^|Q|] ⟸ 2
 6  初  作用零の配位の補題：作用 0 ⟺ U_p = z_p
 7  初  一周の交換子の符号の補題：交換子 = 平面の符号の積          中心の値
 8  典  閉じた道は一周の語に変形できる
 9  初  holonomy による決定の補題：holonomy で決まる ⟸ 7・8
10  初  捩れを食う配位の補題：U⁰ は作用 0
11  初  反可換の対の剛性の補題：反可換な対・可換子 ±1              SU(2)
12  初  捩れた真空の一意性 ⟸ 6・7・9・10・11
13  初  捩れた随伴のギャップの補題：ギャップ 4sin²(π/2N) ⟸ 10  (ℤ/N)²
14  初  m_N = 2 arsinh sin(π/2N) ⟸ 13
15  初  捩れた区画の最小作用の正値性：0 < S_min ≤ 2N² ⟸ 6・7・11
16  典  連続の下限 4π²/g²                                          連続
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。この章に仮定の行はありません。引用の行は四つ（流束だけが効くこと・Tomboulis–Yaffe・閉じた道の変形・連続の下限）で、三つの性質の証明が使う引用は閉じた道の変形だけです（holonomy による決定の補題を通して捩れた真空の一意性だけ）。捩れた随伴のギャップの補題・捩れた区画の最小作用の正値性は引用なしで閉じています。

捩れた境界条件の、この本の対象としての定義は 19-02 に在ります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 面を動かす補題・偏りの期待値の表示（偏りの偶奇表示）・捩れを食う真空の一意性（ゲージと平面の方向の中心を除いて）・随伴の Laplacian のギャップ $4\sin^2(\pi/2N)$・(1,1) の区画で $0 < S_{\min} \le 2N^2$。全て SU(2)・有限の格子・N 固定・$n_{12} = 1$	量子の揺らぎのギャップ。格子間隔に一様な評価。$S_{\min}$ の値と N 依存
典 流束だけが効くことの一般の形・Tomboulis–Yaffe の不等式・連続理論の作用の下限	$\theta \ge 0$（26-04 で扱う）。他の群

出典と再現

もの	種別	出典・道具
捩れた境界条件・流束の自由エネルギー	典	G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141。G. 't Hooft, Commun. Math. Phys. 81 (1981) 267（書誌は 3-05 と同じ）
プラケットの $\mathbb{Z}_2$ の符号を足し上げる表示	典	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 125 (1980) 117
Tomboulis–Yaffe の不等式	典	E. T. Tomboulis, L. G. Yaffe, Commun. Math. Phys. 100 (1985)（頁は未確認）。式の形は 26-01
位相電荷の分数部分と作用の下限	典	Y. Tanizaki, M. Ünsal, arXiv:2201.06166 の式 (2.24)・(2.25)（本文で確認）
§02〜§07 の補題と三つの性質・(8)	初	本文の証明。数値の計算は使っていない

この章で使った語 — 't Hooft の捩れ・区画・流束 $n_{\mu\nu}$・面 Π_q・流束の自由エネルギー ΔF・偏り θ・捩れの和のアンサンブル・捩れを食う配位 U^0・中心の変換・随伴の Laplacian・反周期・最小作用 $S_{\min}$。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：25-02 渦と分数インスタントン — $(1,1)$ の区画の最小作用の中身と、希薄な気体の勘定。

2026-10-15 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 25 部 二本目の道 — 空間の方向から 分数インスタントン・希薄な気体・格子の作用 · Kiichi, Shiori and Rin

渦と分数インスタントン

この章は既存の知見の整理です。§02 は未解決の地図、§05・§06 は本書の検討です。

この章で分かること — 前の章の捩れた区画の最小作用の正値性は、平面の方向の流束 n_{34} を一つ入れると必ず作用を払うことを言いました。この章は、その最小のコストの中身を見ます。(1) 連続理論では、捩れた $T^2 \times \mathbb{R}^2$ の上の流束を担う最も安い対象は位相電荷 $\frac{1}{2}$ の自己双対の塊（分数インスタントン）で、作用の下限は $4\pi^2/g^2 = \pi^2\beta$ です。(2) その塊が平面の中で点のように散らばった希薄な気体を数えると、弦の張力は $\Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}$ の程度になります（物理の見立て）。指数の $5/3 = 11/3 - 2$ が、漸近自由の係数と平面の二次元の差です。(3) 格子の上では、流束を入れた区画の最小作用が π^2 より小さい値から π^2 に近づきます（数値の読みと、証明書つきの上界）。(4) 連続理論での塊の存在を、ある性質を仮定して導く筋を、仮定の行として置きます。

前提となる章 — 25-01（区画・θ・捩れた T^2 の三つの性質）・3-05（インスタントンと位相電荷、BPS の下限）・17-02 渦の気体の模型・4-06 一ループの係数・4-07（Λ）。

先に言うこと — 希薄な気体の勘定は、希薄な領域（$\Lambda L \ll 1$）・一ループの水準・群 $SU(2)$ の上の物理の見立てで、定理ではありません。格子の冷却で得た作用の値は、見つけた配位の作用なので最小作用の**上界**で、下界ではありません。連続理論の自己双対の解の存在は、この章では仮定つきの筋として置くだけです。

この章の順序

1. 位相電荷 1/2 の自己双対の塊 — 作用の下限
2. 塊は在るか — 数値と、仮定つきの筋
3. 希薄な気体 — 弦の張力を数える（式 (5)〜(8)）
4. 5/3 = 11/3 − 2 の読み方
5. 格子の上の作用 — $\pi^2\beta$ に下から近づく（表 1・表 2）
6. 格子の上で率を言う言明 — 細い面の率 $2\mathrm{N}^2$ から分数インスタントンの率へ
7. 言えないこと

8. 五分類の表と依存グラフ（表 3）

01

位相電荷 1/2 の自己双対の塊 — 作用の下限

連続理論の位相電荷 Q とインスタントンの作用の下限は 3-05 のとおりで、ユークリッドの作用は

$$S_E \;\geq\; \frac{8\pi^2}{g^2}\,|Q| \tag{1}$$

を満たし、等号は（反）自己双対の方程式 $F = \pm *F$ の解で達せられます[典]。周期的な四次元のトーラスや $\mathbb{R}^4$ では Q は整数です。ところが 't Hooft の捩れのある束では、Q の分数部分が捩れで決まり、$SU(N)$ で $n_{12} = n_{34} = 1$ なら $Q \equiv -1/N \pmod 1$ です（この章で $SU(N)$ と書くときの N は群の次数で、この部の格子の N とは別です）[典]（Tanizaki–Ünsal の式 (2.24)、原典は 't Hooft 1981）。$SU(2)$ では $Q \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ で、(1) から

$$S_E \;\geq\; \frac{4\pi^2}{g^2} = \pi^2 \beta \qquad (\beta = 4/g^2) \tag{2}$$

です（同、式 (2.25)：下限は通常のインスタントンの作用 $8\pi^2/g^2$ の $1/N$）[典]。

この下限を達する解が分数インスタントンです。Tanizaki–Ünsal は、$\mathbb{R}^2 \times T^2$（T^2 に捩れ）の上でこの解の作用密度が $\mathbb{R}^2$ の方向に局在して渦のような形をし、平面の Wilson ループの内側にあるとループに中心の元 -1（$SU(N)$ では $e^{2\pi i/N}$）を掛けること、つまり中心渦（17-02）として振る舞うことを述べています[典]（式 (2.26) の前後）。前の章の言葉では、この塊は区画 $(1,1)$ の最安の住人で、面 Π_q を細い面としてではなく滑らかな塊として運ぶものです。

大きさについて一言。塊の作用は (2) で決まり大きさによりませんが、捩れた T^2 の上では塊は T^2 の大きさ L 程度の広がりに固定されます（同じ論文の脚注は、$SU(N)$ で塊の半径が群の次数の平方根に比例するという先行の数値を引いています）[典]。大きさが決まっているので、希薄な気体の勘定で赤外の発散が起きません。周期的な $\mathbb{R}^4$ のインスタントンの大きさの積分が赤外で発散するのと対照的です（3-05）。

02

塊は在るか — 数値と、仮定つきの筋

文献の状況 典 。Tanizaki–Ünsal は、分数の位相電荷を持つ自己双対の解の解析的な形はほとんど知られていない（特定の縦横比のトーラスの上の可換な定数の解を除いて）と書き、格子の冷却による数値の探索が、格子の離散化の誤差の範囲で下限 (2) を達する配位を見つけ、$\mathbb{R}^2$ の方向を無限に伸ばした極限もよく定まっていると報告していることを引いています（同 §2.3.1）。解析的な存在は、この本が確かめた範囲の文献では示されていません。

仮定つきの筋 仮 （筋：この本の検討の記録の「Nahm 変換による存在の筋」。根拠は 表 3 の Nahm 変換の行）。次の性質を仮定します。

> **仮定（Nahm 変換の同変性）。**二重周期のインスタントン（$T^2 \times \mathbb{R}^2$ の上の荷電 1 の解）と、双対トーラスの上の Hitchin 型のデータの間の Nahm 変換は、物理空間の並進と中心のゲージ変換に同変である：物理空間の並進は双対の側の平坦な直線束の掛け算に、中心の捩れは双対トーラスの半周期の並進に対応する。

筋は次の三段です。(i) $T^2_{2L\times L} \times \mathbb{R}^2$ の上の荷電 1 の $SU(2)$ 二重周期インスタントンを、Nahm 変換で双対の側のデータに対応させる（二重周期インスタントンの構成と変換の全単射性は文献にあるとされる。照合未了）。(ii) 長い方向の半周期の並進と中心のゲージ変換の合成 τ は、仮定により双対の側の半周期の並進と定数のずれの合成に対応し、特異点の位置を四分の一周期に置けば τ で不変なデータが選べる。(iii) 対応する解は τ でゲージを除いて不変で、商 $T^2_{L\times L} \times \mathbb{R}^2$ に降ろすと、τ が中心の捩れを含むので $n_{12} = 1$ の束の上の荷電 $\frac{1}{2}$ の反自己双対解になり、作用は (2) の下限に等しい。

この筋が閉じれば、(2) の下限は連続理論で達せられます。閉じていないのは、仮定そのもの（同変性の正確な形）と、(i) の文献の照合と、商に降ろしたときに束の位相（n_{12} と平面の無限遠での流束）が正しく出ることの確認です。もう一つの筋として、Bogomolny の下限・Uhlenbeck のコンパクト性による泡の排除・集中コンパクト性による分裂の排除を組み合わせる変分法の筋もありますが、最小の値が下限に等しいこと自体を別に示す必要があり、同じく 仮 です。この本は、どちらの筋も以下の章の前提に使いません。

03

希薄な気体 — 弦の張力を数える

この節は既存の知見（希薄な気体の勘定）の整理です。導入は 3-05 §07 にあります。

塊が平面の中で互いに遠く離れて散らばっている（希薄な）と仮定し、塊どうしの相互作用を無視して数えます。これが希薄な気体の近似で、ここからの勘定は Tanizaki–Ünsal の §2.3.2 を $SU(2)$ に写したものです [典]（式の写し）。近似そのものの正しさは物理の見立てです [読]。

注意：原典は小さな T^2 を 3・4 の方向に、平面を 1・2 の方向に置いていて、この本（T^2 が 1・2、平面が 3・4）とは添字が入れ替わっています。以下はこの本の添字で書きます。

一つの塊の重み。平面の上の一つの塊（自己双対・$Q=+\frac{1}{2}$）と反塊（$Q=-\frac{1}{2}$）の重みは、θ 角を 0 として

$$K\,e^{-S_I/2}, \qquad S_I=\frac{8\pi^2}{g^2}, \qquad \frac{S_I}{2}=\frac{4\pi^2}{g^2}=\pi^2\beta \tag{3}$$

です（原典の式 (2.27) の $N=2$）。前因子 K は質量の次元 2 を持ち $K\sim 1/L^2$ で、その正確な値は揺らぎの行列式の解析で決まるもので、原典は与えていません [典]。

漸近自由で書き直す。一ループの走る結合（4-06）で、尺度 L の結合を Λ で書くと、$SU(2)$ で $8\pi^2/g^2(L)=\frac{22}{3}\ln\frac{1}{\Lambda L}$（一ループの水準。一般の $SU(N)$ では $\frac{11N}{3}$）なので、

$$e^{-S_I/2}=e^{-4\pi^2/g^2(L)}=(\Lambda L)^{11/3}\quad(\text{一ループ}), \qquad K\,e^{-S_I/2}\sim\frac{1}{L^2}(\Lambda L)^{11/3}=\Lambda^2(\Lambda L)^{5/3} \tag{4}$$

となります（原典の式 (2.32) の最後の変形）[典]。指数 $11/3$ は群の次数によりません（$SU(N)$ では塊の作用が S_I/N で、係数 $11N/3$ の N と打ち消し合う）。

Wilson ループ。面積 A のループ C の内側に塊が一つあると、ループの値に -1 が掛かります（中心渦）。塊と反塊をそれぞれ密度 $Ke^{-\pi^2\beta}$ の独立な Poisson の点として平面に撒くと、内側の個数 n は平均 ρA（$\rho=2Ke^{-\pi^2\beta}$）の Poisson 分布で、

$$\langle W(C)\rangle=\mathbb{E}\big[(-1)^n\big]=e^{-2\rho A}=\exp\!\big(-4Ke^{-\pi^2\beta}\,A\big) \tag{5}$$

です。Poisson 分布で $\mathbb{E}[(-1)^n]=e^{-\lambda}\sum_k(-\lambda)^k/k!=e^{-2\lambda}$ という一行の計算です [初]（模型の中の計算）。原典は、全体の電荷の制約（塊と反塊の数の差が N の倍数）を Fourier の和で入れて同じ答えを出しています：$\theta=0$ で基本表現の弦の張力は

$$T_R\sim\Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}\sin^2\frac{\pi|R|}{N} \tag{6}$$

（原典の式 (2.37)。N は群の次数、$|R|$ は表現の Young 図の箱の数を N で割った剰余）で、$SU(2)$ の基本表現では $\sin^2(\pi/2)=1$ です [典]。(5) と (4) を合わせると

$$\sigma=4K\,e^{-\pi^2\beta}\ \sim\ \Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}\qquad(\text{希薄な領域・一ループ・}SU(2)) \tag{7}$$

読 （物理の見立て。$\sim$ は前因子の定数を省いた比例）。

偏り θ との関係。同じ数え方を、平面全体（面積 $A_{\text{平面}} = (Ma)^2$）の塊の個数の偶奇に当てると、25-01 の偏りの偶奇表示の $\theta = \mathbb{E}[(-1)^{|Q|}]$ は

$$\theta \approx e^{-2\rho A_{\text{平面}}}, \qquad -\ln\theta \approx 4K e^{-\pi^2\beta}\,(Ma)^2 \tag{8}$$

となり、$-\ln\theta$ が平面の面積に比例する（面積則の型）と同時に、その率が分数インスタントンの重み $e^{-\pi^2\beta}$ で決まることが読めます 読 （希薄な気体の見立て）。格子の上でこの形のうち「率が $e^{-\beta S}$ で、S が π^2 に近い」部分を言う言明が §06 です。

格子の上の数値も同じ描像を支持しています。Bergner–González-Arroyo–Soler（2025）は、二つの方向が他より遥かに小さく捩れた境界条件を持つ四次元のトーラスの $SU(2)$ の格子で、小さな T^2 の大きさでは位相電荷と弦の張力が渦のような分数インスタントンの気体から生じること、大きさを増すと密度が増え、構造の間隔が一定に近づくことを報告しています 典 （要旨で確認。本文の数値は照合未了）。

04

5/3 = 11/3 − 2 の読み方

(4) の指数は二つの寄与の差です 読 （物理の見立て）。

- $11/3$：**漸近自由**。T^2 が小さいほど結合が弱く、塊は $(\Lambda L)^{11/3}$ の割合で稀になります。係数 $11/3$ は一ループの係数（4-06 の $11/3 = -1/3 + 4$）そのものです。
- -2：**平面の二次元**。塊の大きさは L なので、平面の単位面積あたり置ける場所の数は $1/L^2$ です（$K \sim 1/L^2$）。これは塊の位置のエントロピーにあたります。

差 $11/3 - 2 = 5/3$ が正なので、Λ を止めて T^2 を広げると（L を増すと）、物理の単位の弦の張力は増えます。広げるほど閉じ込めが強まる向きで、$L \sim 1/\Lambda$ で Λ^2 の程度に達するのは次元の勘定と矛盾しません。一つの T^2 の大きさの正方形（面積 L^2）あたりで数えると $\sigma L^2 \sim (\Lambda L)^{11/3}$ で、その正方形に塊がいる確率が L とともに増える、と言い換えられます。

可換な群 $U(1)$ には、分数の流束を担う局在した塊がありません。流束は T^2 の上に一様に広がるしかなく、T^2 を広げる向きの振る舞いが逆になります。「非可換が効く唯一の場所」としてこの差を扱うのは 26-03 で、そこでもこの勘定は一ループの水準の見立てです。この章の範囲では、(4)〜(8) は全て $\Lambda L \ll 1$ の希薄な領域の文で、$L \sim 1/\Lambda$ の帯の中には延びません。

05

格子の上の作用 — π²β に下から近づく

単位の合わせ方。25-01 の作用 $S^z(U)=\sum_p(1-\frac12 z_p\,\mathrm{tr}\,U_p)$ は β を掛ける前の量です。5-01 の古典的な連続極限で、$SU(2)$・$\beta=4/g^2$ なら βS^z は連続の作用 S_E に近づくので、作用 $4\pi^2/g^2$ の塊は $S^z\approx\pi^2$（つまり $\beta S^z\approx\pi^2\beta$）に当たります。以下の数は全て S^z の値を π^2 で割ったものです。

冷却の数値 読 。各リンクを、それを含むプラケットの残りの辺の和（staple）の向きに置き換える操作を繰り返して S^z を下げ（冷却）、区画 $(1,1)$ の最小作用 $S_{\min}(N,M)$ を探した結果が表 1 です。冷却が止まった配位の作用は、その配位が実在するので最小作用の**上界**です（浮動小数点の計算の範囲で）。真の最小がさらに低い可能性は、初期配位を替えても同じ値に着いたことで読みとして退けているだけです。

表 1　区画 $(1,1)$ の最小作用の冷却の値（$S_{\min}/\pi^2$。SU(2)・Wilson 作用・$n_{12}=n_{34}=1$・乱数の初期配位から 3 回）

格子 $T_N^2\times T_M^2$	$N\times M$	$S_{\min}$	$S_{\min}/\pi^2$
対称	2×2	7.841	0.794
対称	3×3	9.661	0.979
対称	4×4	9.799	0.993
対称	6×6	–	0.998
細長い	2×4	–	0.683
細長い	2×6	–	0.677
細長い	3×6	–	0.921
細長い	4×8	–	0.960

読み方 読 ：(i) どの値も π^2 より小さく、N とともに π^2 に近づきます（格子の上の値は連続の値に下から近づく。Wilson 作用の離散化の補正が負であることと整合する、という物理の読み）。(ii) 細長い格子（$M>N$）では、$N=2$ で $M=4\to6$ と平面を広げても値がほとんど変わりません。塊が平面の方向に局在していて、その作用が平面の大きさによらないこと、つまり希薄な気体の前提（塊が一つの局在した対象であること）を格子が支持しています。(iii) 対称な格子の値が細長い格子より大きいのは、対称な格子では塊が平面の方向にも N 程度に押し込まれるためと読めます。平面の方向に大きさ 16 の板（$4\times4\times16\times16$）で作用の分布を測った別の冷却では、$S^z/\pi^2\approx0.96$、作用の約 91% が塊の中心から平面の方向の半径 2 以内、約 99.6% が半径 4（$=N$）以内にありました 読 。

柱に閉じ込めた塊と、証明書つきの上界 機 。分数インスタントンの格子の論文（この本から出た論文の一つ、草稿。A-07）は、平面を一辺 ℓ の正方形のブロックに分け、一つのブロック

の上の柱 $T^2_N \times [0,\ell]^2$ に流束を入れ、柱の外枠を捩れを食う真空 U^0（25-01 §05）に固定したときの最小作用を

$$S_*(N,\ell) = \min\{\,\text{外枠を } U^0 \text{ に固定した柱の作用 ： 柱に流束 } n_{34} \text{ を一つ}\,\} \tag{9}$$

と定義しています。保存した配位を正確に正規化し、外枠が真空に一致することを確かめたうえで 40 桁の算術で作用を再評価した値は、それぞれの S_* の上界です：

$$S_*(2,12) \le 6.67348665542 \le 0.6762\,\pi^2, \quad S_*(3,12) \le 9.07284242009 \le 0.9193\,\pi^2, \quad S_*(4,8) \le 10.\ldots \le \ldots\,\pi^2 \tag{10}$$

（$N=4$ は冷却が収束していない値）。条件：群 $SU(2)$・Wilson 作用・具体的な配位の作用の評価であって、上界の向きだけ。札の「機」はこの上界（具体的な配位の作用を桁の保証つきで評価したもの）にだけ付き、最小値そのものには付きません。どれも π^2 より小さいので、「格子の上の最小のコストは連続の値 π^2 より小さい」は、$N=2,3,4$ で上界から直接言えます。

柱の幅への依存 読 。同じ論文の表（冷却の値）：

表 2　$S_*(N,\ell)/\pi^2$ の ℓ 依存（冷却。SU(2)・外枠は真空に固定）

ℓ	3	4	5	6	7	8	10	12
$N=2$	0.7082	0.6924	0.6779	0.6771	0.6763	0.6762	0.67617	0.67617
$N=3$	1.1524	1.0185	0.9493	0.9347	0.9230	0.9213	0.9195	0.9193

S_* の初等的な性質 初 ：(a) 最小は達せられる（コンパクト性）。(b) $S_*(N,\ell) \le 2N^2$（柱に細い面を一枚置く）。(c) ℓ について増えない（小さい柱の最小の配位を、残りを真空で埋めて大きい柱に埋め込めば、境のプラケットは真空どうしで作用 0）。(d) 周期的な格子の最小作用と $S_*(N,\ell) \ge S_{\min}(N,k\ell)$（$k \ge 1$。柱の配位を外を真空で埋めて周期的な格子に延ばす）。よって $\lim_\ell S_*(N,\ell)$ は在ります。

周期的な格子の値（冷却）は $S_{\min}(2,M) = 6.740117,\ 6.677345,\ 6.673724,\ 6.673486,\ 6.673485$（$M=4,6,8,12,16$）、$S_{\min}(3,16) = 9.072494$ で、$S_*(N,\ell)$ は ℓ とともにこれに上から近づきます。その差 $S_*(N,\ell) - S_{\min}(N,\infty)$ は、25-01 の (8) の捩れの質量 $m_N = 2\,\mathrm{arsinh}\sin(\pi/2N)$（$m_2 \approx 1.317$、$m_3 \approx 0.962$）について $e^{-m_N \ell}/\ell$ のように減ると読まれています 読 （分数インスタントンの格子の論文の草稿は、観測した傾き 1.41・1.02 を予想の値 1.45・1.06 と並べている。予想の値の出し方はこの本では確かめていない）。塊の裾が、捩れた T^2 の上の随伴の揺らぎの質量で切られている、という読みです。

まとめると、格子の上の最小のコストは $N=2,3,4$ でおよそ $0.68\pi^2,\ 0.92\pi^2,\ 0.96\pi^2$（周期的な格子の値。$N=4$ は細長い格子 4×8 の冷却）で、N を増すと π^2 に下から近づきます。「$N\to\infty$ で $S_{\min}(N,\infty) \to \pi^2$」は数値だけで、証明はありません 読 。

06

格子の上で率を言う言明 — 細い面の率 2N² から分数インスタントンの率へ

N と格子間隔を固定すれば、どの β でも面積則の型の評価 $-\ln\theta \geq c\,M^2$ が初等的に出ます（25-04）。そこでの率 c は細い面のコストで決まり、$c \approx e^{-2\beta N^2}$ です（25-01 の捩れた区画の最小作用の正値性の上界 $2N^2$ の配位）。$2N^2$ は N とともに増え、分数インスタントンとは関係がありません。

分数インスタントンの格子の論文の主定理（分数インスタントンによる閉じ込めの下界（その論文の定理 A））は、この率を $S_*(N,\ell)$ に置き換える言明です。草稿の形を条件ごと写します仮（この本ではまだ証明を本文に置いていない。根拠の欄は分数インスタントンの格子の論文の草稿の §3〜§6。証明はチェス盤の評価と Morse–Bott の補題を引用で使い、剛性の定数は存在だけが示されて値は明示されない）。

分数インスタントンによる閉じ込めの下界（草稿の言明）。 全ての $N \geq 2$・$\ell \geq 2$・$\beta \geq 1$・$M \in 2\ell\mathbb{N}$ について、ある $c(N,\ell) > 0$・$a > 0$ と $\varepsilon(\beta) = O\big(\sqrt{\ln\beta/\beta}\big)$ があって

$$-\ln\theta(N,M,\beta) \;\geq\; c(N,\ell)\,\beta^{-a}\,e^{-\beta\,(S_*(N,\ell)+\varepsilon(\beta))}\,M^2. \tag{11}$$

(10) の上界と合わせると、率は $2N^2 = 8, 18, 32$ から $\leq 0.68\pi^2,\ 0.92\pi^2,\ 0.98\pi^2$ 程度に下がります（$N = 2, 3, 4$）。ただし前因子 β^{-a} と $\varepsilon(\beta)$ の項が粗いので、(11) が細い面の評価に勝つのは、明示されない大きな β から先です。(11) は N に一様でなく、連続極限についても質量ギャップについても何も言いません。逆向きの評価（希薄な気体の上界、M に一様）は開いています。これらの位置づけは 27-01 と 27-02 で扱います。

(8) の見立てと (11) を並べると、見立ての「率は分数インスタントンの作用」という部分のうち、固定した N の格子の上で閉じ込めの向き（下からの評価）だけが言明の形になっている、という位置です。

07

言えないこと

(a) 希薄な気体。(5)〜(8) は相互作用を無視した勘定で、$\Lambda L \ll 1$ の希薄な領域・一ループの水準の物理の見立てです。前因子 K は値が分かっていません。

(b) 冷却の値。表 1・表 2 の値は最小作用の上界で、下界ではありません。「π^2 に下から近づく」のうち、「π^2 より下」は $N = 2, 3, 4$ で (10) の上界から言え、「近づく」は数値の読みで

す。

(c) 連続の存在。捩れた $T^2 \times \mathbb{R}^2$ の上で (2) の下限を達する解の存在は、この本では仮定つきの筋で、示されていません。

(d) 帯。この章の全ての文は $\Lambda L \ll 1$ か N 固定の文で、T^2 を $1/\Lambda$ を越えて広げることについては何も言いません（25-09）。

(e) 分数インスタントンの格子の論文。分数インスタントンによる閉じ込めの下界は草稿の言明で、この本の札は「仮」です。草稿の証明を一行ずつ確かめて本文に置くまで、上げません。

08

五分類の表と依存グラフ

表 3　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	BPS の下限 (1)	典	3-05	連続	—
2	捩れた束で $Q \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$、下限 $4\pi^2/g^2 = \pi^2\beta$ (2) $\Longleftarrow$ 1	典	Tanizaki–Ünsal の (2.24)(2.25)・'t Hooft 1981	連続・SU(2)・$n_{12}=n_{34}=1$	—
3	塊は平面に局在し中心渦として働く・大きさは L 程度	典	Tanizaki–Ünsal §2.3.1	原典の数値と記述	—
4	解析的な存在は知られていない（原典の記述）	典	Tanizaki–Ünsal §2.3.1	—	—
5	Nahm 変換の同変性の下での存在の筋	仮	筋：検討の記録の「Nahm 変換による存在の筋」・§02	仮定 1 つ・文献の照合未了	—
6	一つの塊の重み $Ke^{-\pi^2\beta}$・$K \sim 1/L^2$ (3)	典	Tanizaki–Ünsal の (2.27)	希薄な気体の模型	—
7	$Ke^{-\pi^2\beta} \sim \Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}$ (4)	典	Tanizaki–Ünsal の (2.32)	一ループ	—
8	Poisson の模型で $\langle W\rangle = e^{-2\rho A}$ (5)	初	§03 の一行	模型の中の計算	—
9	$T_R \sim \Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}\sin^2(\pi\lvert R\rvert/N)$ (6)	典	Tanizaki–Ünsal の (2.37)	$\theta=0$・希薄な領域	—
10	$\sigma = 4Ke^{-\pi^2\beta} \sim \Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}$ $\Longleftarrow$ 6・7・8・9	読	物理の見立て	希薄な領域・一ループ・SU(2)	—
11	$-\ln\theta \approx 4Ke^{-\pi^2\beta}(Ma)^2$ (8) $\Longleftarrow$ 8・10	読	物理の見立て	同上	—
12	格子の気体の数値（Bergner–González-Arroyo–Soler 2025）	典	要旨	SU(2)・捩れた小さな T^2	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
13	$5/3 = 11/3 - 2$ の読み ⟸ 10	読	§04	一ループ・希薄な領域	—
14	冷却の値（表 1）・局在の割合	読	この本の検討の数値の記録	上界・3 回の初期配位	—
15	S_* の性質 (a)〜(d)	初	§05	SU(2)・格子	—
16	証明書つきの上界 (10)	機	分数インスタントンの格子の論文の草稿 §7（40 桁の再評価）	上界の向きだけ・$N = 4$ は未収束	—
17	表 2 の ℓ 依存・$e^{-m_N \ell}/\ell$ の減衰	読	同、§7	冷却	—
18	π^2 に下から近づく ⟸ 14・15・16・17	読	§05	「下」は $N = 2, 3, 4$ で行 16 から	—
19	分数インスタントンによる閉じ込めの下界 (11)	仮	分数インスタントンの格子の論文の草稿 §3〜§6	N 固定・$\beta \geq 1$・N に一様でない・連続極限なし	—

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  典  S ≥ 8π²|Q|/g²                                              連続
 2  典  捩れで Q ∈ 1/2 + ℤ・下限 π²β ⟸ 1                            SU(2)・n₁₂ =
 3  典  塊は平面に局在・中心渦・大きさ L 程度
 4  典  解析的な存在は知られていない
 5  仮  同変性の仮定の下の存在の筋                                  照合未了
 6  典  一つの塊の重み K e^(−π²β)
 7  典  K e^(−π²β) ~ Λ²(ΛL)^(5/3)                                  一ループ
 8  初  Poisson の模型で 〈W〉 = e^(−2ρA)
 9  典  T_R ~ Λ²(ΛL)^(5/3) sin²(π|R|/N)                            θ = 0
10  読  σ = 4K e^(−π²β) ~ Λ²(ΛL)^(5/3) ⟸ 6・7・8・9                 希薄・一ループ
11  読  −ln θ ≈ 4K e^(−π²β)(Ma)² ⟸ 8・10
12  典  格子の気体の数値（要旨）
13  読  5/3 = 11/3 − 2 の読み ⟸ 10
14  読  冷却の値・局在の割合                                        上界
15  初  S_* の性質 (a)〜(d)
16  機  S_* ≤ 0.6762π², 0.9193π², 0.9707π²                          上界・N = 4 ま
17  読  ℓ 依存・e^(−m_N ℓ)/ℓ
18  読  π² に下から近づく ⟸ 14・15・16・17
19  仮  分数インスタントンによる閉じ込めの下界（格子の論文の定理 A）  N 固定・草稿
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。証明を本文に置いた節点は、Poisson の模型の一行と S_* の性質の二つだけで、どちらも模型の中か有限の格子の上の一行の議論です。Nahm 変換による存在の筋と、分数インスタントンによる閉じ込めの下界の「仮」はどの節点の前提にも入っていません。この章の結論の側の節点（弦の張力・θ の読み・5/3 の読み・π^2 に下から近づくこと）は全て「読」で、閉じ込めの節点も質量ギャップの節点もありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
典 捩れた束の作用の下限 $4\pi^2/g^2 = \pi^2\beta$・希薄な気体の原典の式 (2.27)(2.32)(2.37)・格子の気体の数値の報告（要旨）	(2) を達する連続の解の存在
読 弦の張力 $\Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}$（希薄な領域・一ループ・SU(2) の見立て）・$5/3 = 11/3 - 2$ の読み・格子の作用が π^2 に近づくこと	希薄な気体の近似の正しさ。K の値。$N \to \infty$ の極限
機 $S_* \le 0.6762\pi^2,\ 0.9193\pi^2,\ 0.9707\pi^2$（$N = 2, 3, 4$、具体的な配位の上界）	S_* と $S_{\min}$ の下界・一致
初 Poisson の模型の一行・S_* の初等的な性質	—
仮 存在の筋（同変性の仮定）・分数インスタントンによる閉じ込めの下界（草稿）	どちらも本文に証明が無い

出典と再現

もの	種別	出典・道具
(2)(3)(4)(6)・塊の局在・解析解の状況	典	Y. Tanizaki, M. Ünsal, Center vortex and confinement in Yang–Mills theory and QCD with anomaly-preserving compactifications, arXiv:2201.06166（v2, 2022）。§2.2〜§2.3、式 (2.24)〜(2.37) を本文で確認
格子の分数インスタントンの気体	典	G. Bergner, A. González-Arroyo, I. Soler, arXiv:2502.09463（2025、Lattice 2024 の報告）。要旨を確認
捩れた束の位相電荷	典	G. 't Hooft, Commun. Math. Phys. 81 (1981) 267（書誌は 3-05）
存在の筋（同変性の仮定）	仮	この本の検討の記録（Nahm 変換による存在の筋）。そこで引かれた二重周期インスタントンの構成と Nahm 変換の文献は照合未了
表 1・局在の割合	読	この本の検討の数値の記録（冷却、乱数の初期配位から 3 回）
(9)(10)・表 2・周期的な格子の値・減衰の傾き・分数インスタントンによる閉じ込めの下界	機・読・仮	分数インスタントンの格子の論文（分数インスタントンの格子の閉じ込め、草稿 2026-10-14）。§2・§7・§8。題と段階は A-07
(5)・S_* の性質・m_N の数値	初	本文。m_N は 25-01 の (8) に $N = 2, 3$ を入れた値

この章で使った語 — 分数インスタントン・位相電荷 $\frac{1}{2}$・BPS の下限・中心渦・希薄な気体・前因子 K・弦の張力・$5/3 = 11/3 - 2$・冷却・柱に閉じ込めた塊 $S_*(N, \ell)$・証明書つきの上界・捩れの質量 m_N。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：25-03 容器 — 枠を条件づけると独立になる — 平面をブロックに分け、偏りを柱ごとの量の積で押さえる。

2026-10-15 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 25 部 二本目の道 — 空間の方向から 容器の恒等式・入れ子・四次元での限界 · Kiichi, Shiori and Rin

容器 — 枠を条件づけると独立になる

> この章は既存の知見の整理です。§04・§05・§07 は本書の検討です。

この章で分かること — Wilson ループを閉じ込めの向きに押さえる最も素朴な道具は、ループの張る面を小さな領域（容器）に分け、容器の外側（枠）を止めて考えることです。最近接の作用では、枠を止めると容器どうしは独立になり、Wilson ループの期待値は「容器ごとの区画の偏り」の積の平均で上から押さえられます（容器の恒等式）。これは Mack–Petkova（1980）の渦の容器の恒等式を、区画の和のアンサンブルで書き直したもので、この本は新しさを主張しません。この章では、(1) 容器の恒等式とその tanh の形、(2) 固定した区画へ移すときに要る「内側と外側の領域」の形、(3) 平面の方向（R^2 の方向）に容器を入れ子にする不等式、(4) 四次元では長さの決まった容器を独立に並べても $V(R) \gtrsim R/\ln R$ までしか出ないという Kovács–Tomboulis の指摘、(5) 二次元の解ける模型で、容器の恒等式の評価が指数の部分で鋭いこと、を順に見ます。

前提となる章 — 25-01（捩れた T^2 と 't Hooft の流束・区画）・25-02（渦）。第 5 部の 5-01（Wilson 作用と Wilson ループ）・5-08（弦の張力）・第 17 部の 17-02（中心渦の描像）。

先に言うこと — 群は $SU(2)$、作用は Wilson 作用、格子は有限で、格子間隔は固定します。この章の文は全て「格子の上の、ある固定した β」の文で、連続極限については何も言いません。容器の恒等式は既知です（典）。この本が紙で置くのは、区画の和のアンサンブルでの書き直しと、固定した区画へ移すときの修正の形と、入れ子の不等式の三つです（初）。Lean の欄が保証するのは有限和の代数だけで、Haar 測度と区画の位相は本文の議論に依ります。

この章の順序

1. 要約 — 枠を止めると独立になる
2. 設定 — 区画の和のアンサンブル・枠と容器
3. 容器の恒等式と tanh の形 — Mack–Petkova の恒等式との対応
4. 固定した区画へ — 内側と外側の容器
5. 平面の方向の入れ子の不等式

6. 四次元での限界 — $V(R) \gtrsim R/\ln R$（Kovács–Tomboulis の式 (23)〜(25)）
7. 二次元の解ける模型での検査 — 表 1
8. 言えないこと
9. 五分類の表と依存グラフ — 表 2

01

要約 — 枠を止めると独立になる

この節は〔三〕の読者に向けた要約です。式と証明は §02 以下にあります。

1. 格子の Wilson 作用は、隣り合うリンクだけを結ぶ（最近接の）作用です。だから、ある領域の内側のリンクと外側のリンクは、境目のリンクを通してしか話をしません。境目を全部止めてしまえば、別々の領域の内側は互いに独立になります。これは統計力学の Markov 性そのものです。
2. Wilson ループ $W(C)$ を、ループの張る面の上の小さな領域（容器）ごとの「区画の符号」$\sigma_j = \pm 1$ の積に書き直せます（区画の和のアンサンブルで、§02）。枠（容器の外側）を止めると σ_j どうしは独立なので、期待値は積になり、絶対値を取って平均すると $|\langle W \rangle| \le \mathbb{E}[\prod_j \theta_j]$、$\theta_j = |\mathbb{E}[\sigma_j \,|\, \text{枠}]|$ が出ます。これが容器の恒等式です [典]。
3. θ_j は $\tanh(|\Delta F_j|/2)$ と書けます。ΔF_j は、枠を止めた容器の中で、渦が一本ある区画と無い区画の自由エネルギーの差です。渦が安く入る（ΔF_j が小さい）容器ほど θ_j は小さく、Wilson ループは小さく押さえられます。
4. この恒等式は Mack–Petkova（1980）の「渦の容器」の恒等式で、Kovács–Tomboulis（2001）の式 (18)〜(22) にそのまま書かれています。違いは、区画を和にして書いたことと、枠について最大値でなく平均を取ったことだけです。この本は新しさを主張しません。
5. 固定した区画（一つの捩れの区画）の Wilson ループに移すには、ループの内側だけでなく外側にも容器が要ります（§04 の内側と外側の容器の命題）[初]。
6. 容器を平面の方向に入れ子にすると、大きな容器の偏りは小さな容器の偏りの積の平均で押さえられます（§05 の平面の方向の入れ子の不等式）[初]。ただしこれは T^2 の大きさを止めた板の中の話で、T^2 と一緒に広げる話（移り変わりの帯）には使えません。
7. 四次元の空間（R^4）では、ループの内側の点を通る容器の長さはループとともに伸びます。容器の費用を一定に保つには太さを $\sqrt{\ln R}$ の程度に太らせる必要があり、独立な容器から

出るのは $V(R) \gtrsim R/\ln R$ までです（Kovács–Tomboulis）典。小さな T^2 の板では容器の長さが T^2 の面積で止まるので、この障害は現れません。

8. 二次元の $SU(2)$ は解けるので、容器の恒等式の評価がどれだけ鋭いかを数で見られます。一辺 ℓ の容器で敷き詰めると、評価から出る弦の張力は $\sigma - \ln(16/(3\pi))/\ell^2$ の形で真の値に近づきます（§07）初 ＋読 。

02

設定 — 区画の和のアンサンブル・枠と容器

格子 Λ は有限の超立方格子、リンク変数は $U = (U_b) \in SU(2)^{\text{リンク}}$ です。各プラケット p に符号 $z_p \in \{\pm 1\}$ を置き、全ての 3 次元の立方体 c で $\prod_{p \in \partial c} z_p = 1$（余閉）を課します。重みと測度を

$$w(U,z) = \exp\Big(\frac{\beta}{2}\sum_{p} z_p \operatorname{tr} U_p\Big), \qquad d\mu \;\propto\; w(U,z)\prod_{b} dU_b \;\times\; (\text{余閉な } z \text{ の数え上げ}) \tag{1}$$

と置きます（dU_b は Haar 測度）。同じコホモロジー類の z は中心のゲージ変換 $U_b \mapsto \omega U_b$（$\omega \in \{\pm 1\}$）で移り合うので、(1) の和は、全ての 't Hooft の捩れの区画（25-01）の $SU(2)$ 分配関数の和に定数倍を除いて等しくなります（Mack–Petkova の和のアンサンブル）典。どの区画にいるかは z のコホモロジー類で決まり、区画の指示関数は z の関数です。この章では (1) を**区画の和のアンサンブル**と呼び、期待値を $\mathbb{E}$ と書きます。

ループ C と、C を張る面 $S(C)$（プラケットの集まりで、境界が C）を一つ取ると、

$$W(C) = \tfrac{1}{2}\operatorname{tr} U_C \prod_{p \in S(C)} z_p \tag{2}$$

は中心のゲージ変換で変わらず、$|W(C)| \le 1$ です。区画を一つに固定した Wilson ループは、(2) に区画の指示関数を掛けて条件づけたものです（§04）。

枠と容器。 格子の中に互いに離れた領域 $R_1, \dots, R_n$（容器）を取り、容器の内側の変数（内側のリンクと、内側のプラケットの z）を x_j、それ以外の全ての変数を**枠** Φ と呼びます。容器の境のリンクは枠に入ります。作用は最近接なので、各プラケットの項と各立方体の拘束は、高々一つの容器の内側と枠にしか依りません。よって重みは枠を止めると分かれます。

$$w(\Phi, x) = a(\Phi)\prod_{j=1}^{n} f_j(\Phi, x_j), \qquad a > 0,\; f_j > 0 \tag{3}$$

ループ C は枠の中を通り、$S(C)$ の容器 R_j の内側にある部分の z の積を $\sigma_j(x_j) \in \{\pm 1\}$（容器の**区画の符号**）と書くと、(2) も分かれます。

$$W(C) = c(\Phi)\prod_{j=1}^{n}\sigma_j(x_j), \qquad |c(\Phi)| \le 1 \tag{4}$$

（$c(\Phi)$ は $\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,U_C$ と、$S(C)$ の枠に入る部分の z の積。）σ_j は容器の内側の中心のゲージ変換で変わらないので（$S(C)$ の境界 C は枠の中にある）、枠を止めた条件つきの分布の上の量としてよく定まります。また、枠を止めても σ_j は決まりません。小さな T^2 の板 $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ で容器を「平面の円板 $\times\ \mathrm{T}^2$」に取ると、円板の中の平面のプラケット p の上の面 $S_p = \{p\}\times T^2$（N^2 枚の (3,4) プラケット）は余閉で容器の内側にあり、その上の z を全部反転すると、枠は変わらずに σ_j だけが反転するからです [初]（余閉であることの確かめは 25-04 §03 の手順 2）。

03

容器の恒等式と tanh の形

この節は既存の知見（Mack–Petkova の容器の恒等式）の整理です。導入（独立な渦の符号と面積則）は 17-02 §06 にあります。

枠 Φ を止めたときの容器 j の区画の確率を $q_j^{\pm}(\Phi) = \mathbb{P}(\sigma_j = \pm 1 \,|\, \Phi)$、容器の内側の二つの区画の分配関数を $Z_j^{\pm}(\Phi) = \sum_{x_j:\sigma_j=\pm1} f_j(\Phi, x_j)$（連続の変数では Haar 測度の積分）と書き、

$$\theta_j(\Phi) := \big|\mathbb{E}[\sigma_j \,|\, \Phi]\big| = |q_j^{+} - q_j^{-}|, \qquad \Delta F_j(\Phi) := \ln\frac{Z_j^{+}(\Phi)}{Z_j^{-}(\Phi)} = \ln\frac{q_j^{+}}{q_j^{-}} \tag{5}$$

と置きます。θ_j を容器 j の**偏り**、ΔF_j を枠を止めた**渦の自由エネルギー**と呼びます。

容器の恒等式

(3)(4) の下で

$$\mathbb{E}[W(C)\,|\,\Phi] = c(\Phi)\prod_{j=1}^{n}\mathbb{E}[\sigma_j\,|\,\Phi], \qquad |\langle W(C)\rangle| \;\le\; \mathbb{E}_{\Phi}\Big[\,|c(\Phi)|\prod_{j=1}^{n}\theta_j(\Phi)\Big] \;\le\; \mathbb{E}_{\Phi}\Big[\prod_{j=1}^{n}\theta_j(\Phi)\Big]$$

さらに $\theta_j(\Phi) = \tanh\big(|\Delta F_j(\Phi)|/2\big)$。

[典]（恒等式）＋[初]（和のアンサンブルでの書き直し）。証明。(3) から、枠を止めた条件つきの分布は容器ごとの分布 $f_j(\Phi,\cdot)/(Z_j^{+}+Z_j^{-})$ の積で、σ_j はそれぞれ別の容器の変数の関数なので、条件つきの期待値は積に分かれます。(4) を代入すれば第一式です。絶対値を取り、$|c| \le 1$ を使って枠について平均すると第二式です。最後に $q^{+}+q^{-}=1$ と $q^{\pm}>0$ から

$$\frac{q^+ - q^-}{q^+ + q^-} = \frac{e^{\Delta F/2} - e^{-\Delta F/2}}{e^{\Delta F/2} + e^{-\Delta F/2}} = \tanh\frac{\Delta F}{2}, \qquad \Delta F = \ln\frac{q^+}{q^-} \tag{7}$$

です。∎

Lean FrameLemma（`FrameLemma.frame_bound`）（仮定：枠の空間・容器の数・各容器の内側の空間が有限、各容器の内側が空でない、$a(\varphi) > 0$、$f_j(\varphi, y) > 0$。結論：$|\sum_\varphi \sum_x a \prod_j f_j \cdot c \prod_j \sigma_j| \le \sum_\varphi a \prod_j Z_j \cdot |c| \prod_j |\sum_y f_j \sigma_j| / Z_j$、$Z_j = \sum_y f_j$）・FrameLemma（`FrameLemma.sign_mean_le_one`）（仮定：$f > 0$・$\sigma = \pm 1$。結論：正規化した条件つきの平均の絶対値は 1 以下）・FrameLemma（`FrameLemma.ratio_eq_tanh`）（仮定：$q^+, q^- > 0$。結論：(7)）・Containers（`Containers.container_bound`）（仮定：有限・$a \ge 0$・$|s| \le 1$。結論：$|\sum_\varphi \sum_x a\, s \prod_i f_i \sigma_i| \le \sum_\varphi a \prod_i |\sum_y f_i \sigma_i|$）。どれも有限和の代数で、Haar 測度の積分・余閉な z・区画の位相・最近接の作用から (3)(4) が出ることは Lean の外です。

原典との対応。 Kovács–Tomboulis（hep-lat/0108017、Phys. Rev. D 65 (2002) 074501）は、固定した区画で、容器 Λ_i の境のリンクを止めて内側を積分し、余閉な面 V_i の上の結合の符号を反転した分配関数 $z^{(\mp)}_{\Lambda_i}$（彼らの式 (19)）から

$$f_{\Lambda_i}(U_{\partial\Lambda_i}) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{z^{(-)}_{\Lambda_i}}{z^{(+)}_{\Lambda_i}}\Big) \quad (18), \qquad W[C] = \Big\langle \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\, U[C] \prod_i f_{\Lambda_i}(U_{\partial\Lambda_i}) \Big\rangle \quad (20), \qquad W[C] \le \prod_i \mathrm{m}_{U_i}$$

を書き、(20) を Mack–Petkova（Ann. Phys. 125 (1980) 117、彼らの文献 [3]）に帰しています 典 （原典の式は hep-lat/0108017 の本文で確認。Mack–Petkova の本文はこの本では確かめていません）。容器の恒等式との違いは二つだけです。(i) 区画を和にした (1) で書いたので、因子が $\frac{1}{2}(1 - z^-/z^+)$ でなく $(Z^+ - Z^-)/(Z^+ + Z^-) = \tanh(\Delta F/2)$ になる（測度の規格化の違い）。(ii) (22) は枠について最大値を取るが、(6) は平均を取る。(ii) は、悪い枠が稀であることを使える余地を残します。§07 の二次元の検査では、平均の形の方が速く真の値に近づきます。

04

固定した区画へ — 内側と外側の容器

容器の恒等式は区画の和のアンサンブルの文です。物理で見たいのは、一つの捩れの区画に固定した Wilson ループです。板 $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ で、ループ C は T^2 の一点 y_0 の (3,4) 平面の中にあるとします。区画のラベルのうち (3,4) の流束の偶奇を $(-1)^{n_{34}}$（y_0 の (3,4) 平面全体の z の積）、それ以外のラベル（n_{12} など）の指示関数を $\mathbf{1}_o$ と書くと、区画 $s \in \{\pm 1\}$ に固定した期待値は

$$\langle W(C) \rangle_s = \frac{\mathbb{E}\big[W \cdot \frac{1}{2}\big(1 + s(-1)^{n_{34}}\big)\mathbf{1}_o\big]}{\mathbb{E}\big[\frac{1}{2}\big(1 + s(-1)^{n_{34}}\big)\mathbf{1}_o\big]} \tag{8}$$

です。容器をループの内側だけに置くと、分子の第二項 $\mathbb{E}[W(-1)^{n_{34}}\mathbf{1}_o]$ は困ります。$W(-1)^{n_{34}}$ は $\frac{1}{2}\mathrm{tr}\, U_C$ に**平面の $S(C)$ の外側**の z の積を掛けたもので、内側の容器の符号を含ま

ないので、容器の恒等式では小さくならないからです。手当ては、外側にも容器を置くことです。

内側と外側の容器の命題（内側と外側の領域）

(3,4) 平面の中で、ループの内側に容器 $R_1,\dots,R_n$、外側に容器 $R'_1,\dots,R'_m$ を格子状に並べ、枠は直線の帯から成り、各方向に枠の中だけを通る直線があるとする。このとき $\mathbf{1}_o$ は枠の関数で、$(-1)^{n_{34}}=c''(\Phi)\prod_j\sigma_j\prod_k\sigma'_k$（$|c''|=1$）と書ける。$\theta_j,\theta'_k$ を (5) の偏りとし、$\mathbb{E}_o[\,\cdot\,]:=\mathbb{E}[\,\cdot\,\mathbf{1}_o]/\mathbb{E}[\mathbf{1}_o]$ と置くと、$\mathbb{E}_o[\prod_j\theta_j\prod_k\theta'_k]<1$ のとき

$$|\langle W(C)\rangle_s|\ \le\ \frac{\mathbb{E}_o\big[\prod_j\theta_j\big]+\mathbb{E}_o\big[\prod_k\theta'_k\big]}{1-\mathbb{E}_o\big[\prod_j\theta_j\prod_k\theta'_k\big]}\tag{9}$$

初 証明。$n_{12},n_{13},n_{14},n_{23},n_{24}$ は、それぞれの平面の z の積で、その平面を枠の中だけを通る直線の帯の上に取り直せる（z が余閉なので積は平面の位置に依らない）ので、枠の関数です。よって $\mathbf{1}_o$ は枠の関数です。(3,4) 平面は $S(C)$ とその補集合に分かれ、それぞれが枠の部分と容器の部分に分かれるので、$W=c(\Phi)\prod_j\sigma_j$、$W(-1)^{n_{34}}=c'(\Phi)\prod_k\sigma'_k$、$(-1)^{n_{34}}=c''(\Phi)\prod_j\sigma_j\prod_k\sigma'_k$（$|c|,|c'|\le1$、$|c''|=1$）です。容器の恒等式の第一式を枠について $\mathbf{1}_o$ を掛けて平均すると、$|\mathbb{E}[W\mathbf{1}_o]|\le\mathbb{E}[\mathbf{1}_o\prod_j\theta_j]$、$|\mathbb{E}[W(-1)^{n_{34}}\mathbf{1}_o]|\le\mathbb{E}[\mathbf{1}_o\prod_k\theta'_k]$、$|\mathbb{E}[(-1)^{n_{34}}\mathbf{1}_o]|\le\mathbb{E}[\mathbf{1}_o\prod_j\theta_j\prod_k\theta'_k]$。(8) の分子は前の二つの和の半分以下、分母は $\frac12(\mathbb{E}[\mathbf{1}_o]-\mathbb{E}[\mathbf{1}_o\prod\theta\prod\theta'])$ 以上です。両方を $\mathbb{E}[\mathbf{1}_o]$ で割れば (9) です。∎

(9) の第二項が平面の大きさ $M\to\infty$ で 0 に行くのは、外側の容器でも偏りが典型的に 1 より小さい場合（悪い枠の稀さが外側でも使える場合）です。この本はそれを示していません 仮。板の閉じ込めの定理（25-04）では、平面の全てのプラケットに反転の群を働かせるので、外側の項は t^{M^2-A} と自動的に小さくなり、この問題は起きません。

05

平面の方向の入れ子

大きな容器 R（平面の円板 $\times\,\mathrm{T}^2$）を、内側の枠 Φ_{int} で隔てた小さな容器 $R_1,\dots,R_k$ に分けます。R の張る面の z の積は $\sigma_R=s(\Phi_{\mathrm{int}})\prod_i\sigma_i$（$|s|=1$、枠に入る部分の z の積）です。

平面の方向の入れ子の不等式

R の外の枠を Φ_R とすると

$$\left|\mathbb{E}[\sigma_R \,|\, \Phi_R]\right| \;\le\; \mathbb{E}\Big[\prod_{i=1}^{k} \left|\mathbb{E}[\sigma_i \,|\, \Phi_R, \Phi_{\mathrm{int}}]\right| \;\Big|\; \Phi_R\Big] \tag{10}$$

初 証明。Φ_R と Φ_{int} を合わせたものを枠として容器の恒等式を使い（$c = s$）、Φ_R を止めたまま Φ_{int} について平均します。∎ Lean Containers（`Containers.container_bound`）（仮定：有限・$a \ge 0$・$|s| \le 1$）がこの代数の有限和の版で、Lean のファイルの説明の文が「Mack–Petkova の容器の恒等式と平面の倍化の不等式を含む」と書いている形です。

読み方。ある大きさの容器で偏りが典型的な枠で $\theta_0 < 1$ なら、平面の方向に容器を 2 倍にするたびに偏りは θ_0^4 の程度に下がる、と期待できます 読 （物理の見立て：(10) の右辺は積の平均で、平均の積ではないので、これは不等式から直接は出ません）。乱れは平面の方向の大きな尺度へ伝わります。

ただし、(10) は **T^2 の大きさを止めた板の中**の話です。T^2 を広げる（四次元の空間へ近づける）ときに要るのは、T^2 と容器を一緒に倍にしたときの偏り $\theta(L, L)$ の振る舞いで、(10) はそれに何も言いません（T^2 が変わると、渦の面が巻く曲面そのものが変わる）。そこで要る形は「$\theta(L, L)$ が 1 から一様に離れる」では足りず、$\ln(1/\theta(L, L)) \ge cL^2$ の形でなければならないこと（$U(1)$ との対照）は、移り変わりの帯の章 26-01 で扱います。

06

四次元での限界 — 独立な容器では $R/\ln R$ まで

容器の恒等式は格子の大きさにも次元にも依らない恒等式です。では、四次元の空間（R^4 の格子）で容器をたくさん並べれば面積則が出るでしょうか。Kovács–Tomboulis（hep-lat/0108017 §3）は、それが**独立な容器では届かない**ことを次の勘定で示しています 典 （以下の (23)〜(27) は原典の式番号。原典の本文で確認）。

1. 容器 Λ_i の、余閉な面 V_i に横向きの二方向の幅を d_i、縦の長さを $|V_i|$ とする。十分太い容器では、全ての境界の値について $-\ln(z^{(-)}/z^{(+)}) \sim |V_i| \exp(-c\, d_i^2)$ となる領分に入っていると**仮定**する（原典の (23)。c は原典の ρ）。
2. 一つの容器の自由エネルギーの費用を一定の f 以下に保つには $d_i^2 \ge c^{-1} \ln(|V_i|/f)$ が要る（(24)）。すると $\max |f_{\Lambda_i}| < \frac{1}{2}(1 - e^{-f})$ は一定。
3. 辺 $T \times R$（$T > R$）の長方形のループの、周から離れた点を通る容器の長さは $|V_i| \sim R^{d-2}$（四次元で R^2）。よって太さは $\sqrt{\ln R}$ の程度に要り、ループの中に入る容器は $\sim RT/\ln R$ 個。(22) から

$$V(R)\ \geq\ \mathrm{const}\cdot\frac{R}{\ln R}\qquad\text{(原典の (25))}\tag{11}$$

が出るだけで、純粋な線形のポテンシャル（面積則）にはなりません。原典は続けて、隣り合う容器の境界の値も積分して容器をできるだけ太くまとめ、横の面積 $\sim R^2$ の容器を使えば $V(R)\geq \mathrm{const}\,R-\frac{\mathrm{const}}{R}(\ln R+\mathrm{const})$（(27)）となること、つまり**線形のポテンシャルはループの大きさの太い渦の揺らぎから来る**ことを述べています。また、(22) の形は粗く、鏡映正値性から出る不等式（彼らの (11)(13)、Tomboulis–Yaffe の大域の形）は格子の大きさに一様な評価で直接に面積則を与える、とも述べています[典]。

この章の言葉で言い直すと、R^4 では容器の長さがループとともに伸びるので、長さの決まった容器を独立に並べる道は面積則に届きません。小さな T^2 の板では、容器 $\{\text{円板}\}\times T^2$ の長さ（渦の面の面積）が T^2 の面積で止まるので、この障害は現れません[初]（原典の勘定の (24) で $|V_i|=N^2$ が定数になることの読み替え）。障害が戻ってくるのは T^2 を広げるときで、それが移り変わりの帯（26-01・25-09）です。

07

二次元の解ける模型での検査

二次元の $SU(2)$（平面の格子・Wilson 作用 $\frac{\beta}{2}\mathrm{tr}\,U_p$）は、プラケットが互いに独立に振る舞うので解けます。ここで容器の恒等式の評価が真の値にどれだけ近いかを見ます。二次元には「容器の長さ」の問題が無いので、この検査は §06 の四次元の障害については何も言いません。

設定。 ループの内側を一辺 ℓ の正方形の容器で敷き詰め、容器の境のリンクを枠に取ります（容器の面積 $A=\ell^2$）。枠を止めると、容器 j はその境のホロノミー $V_j\in SU(2)$ しか見ません。指標 $\chi_n(V)=\sin((n+1)\vartheta)/\sin\vartheta$（$V$ の固有値 $e^{\pm i\vartheta}$、$n=0,1,2,\dots$ は表現の $2\times$スピン）と $a_n=I_{n+1}(\beta)/I_1(\beta)$（$I$ は変形 Bessel 関数）を使うと、熱核の展開から

$$\mathbb{E}[\sigma_j\,|\,\text{枠}]=\frac{\sum_{n\,\text{奇}}(n+1)\,a_n^{A}\,\chi_n(V_j)}{\sum_{n\,\text{偶}}(n+1)\,a_n^{A}\,\chi_n(V_j)}\tag{12}$$

で、容器のホロノミーは互いに独立に、分母を密度とする分布に従います。よって容器の恒等式の評価は容器ごとの因子の積になり、

$$|\langle W\rangle|\ \leq\ B(A)^{\#\text{容器}},\qquad B(A)=\int_{SU(2)}dV\,\Big|\sum_{n\,\text{奇}}(n+1)\,a_n^{A}\,\chi_n(V)\Big|\tag{13}$$

真の値は $\langle W\rangle=a_1^{\text{面積}}$、真の弦の張力は $\sigma=-\ln a_1$ です。(13) から出る弦の張力を $\sigma_{\mathrm{L}5}(\ell):=-\ln B(\ell^2)/\ell^2$、Kovács–Tomboulis の (22) の形（枠について最大値）から出るものを

$\sigma_{\max}(\ell) := -\ln\bigl(\max_V |(12)|\bigr)/\ell^2$ と書きます。

添字の L5 は、容器の恒等式（枠についての平均）から出る形を指す字で、最大値の形 $\sigma_{\max}$ と対にして使います。

大きな容器の極限。 $A \to \infty$ では奇数の和は $n=1$ の項 $2a_1^A \chi_1(V) = 4a_1^A \cos\vartheta$ が、偶数の和は $n=0$ の項 1 が主になるので、Haar の分布 $\frac{2}{\pi}\sin^2\vartheta\, d\vartheta$ で

$$\frac{B(A)}{a_1^A} \;\longrightarrow\; \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 4|\cos\vartheta|\sin^2\vartheta\, d\vartheta = \frac{16}{3\pi} \approx 1.6977, \qquad \sigma_{\mathrm{L5}}(\ell) \;=\; \sigma - \frac{\ln(16/(3\pi))}{\ell^2} + (A\text{に}4)$$

です 初 。容器の恒等式の評価は**指数の部分で鋭く**、損失は $1/\ell^2$ で消えます。

表 1　二次元 $SU(2)$ で容器の恒等式から出る弦の張力 $\sigma_{\mathrm{L5}}(\ell)$ と、最大値の形 $\sigma_{\max}(\ell)$。浮動小数・ϑ の台形則 4×10^5 点・表現を $n\le 200$ で打ち切り・分母の規格化の確かめは全ての行で 1.000000。数は本書の検討の数値（読）

β	**真の σ**	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=4$	$\ell=8$	$\ell=16$	$\sigma_{\max}$：$\ell=1$・4・16
1	1.4263	0.9132	1.2940	1.3932	1.4180	1.4242	0.2723・1.3397・1.4209
2	0.8367	0.3663	0.7044	0.8036	0.8285	0.8347	0.0366・0.7501・0.8313
4	0.4185	0.0624	0.2866	0.3854	0.4102	0.4164	0.00067・0.3318・0.4131
8	0.1994	0.0016	0.0761	0.1663	0.1911	0.1973	$<10^{-6}$・0.1128・0.1940

読み方 読 。(i) $\ell=16$ の列は (14) の右辺と小数第 4 位まで一致します（例：$\beta=1$ で $1.426309-\ln(1.69765)/256 = 1.424242$）。(ii) 細い容器（$\ell=1$）では、$\beta$ が大きいと評価は指数的に悪くなります（$\beta=8$ で 0.0016 対 0.1994）。太い容器が要ることの、二次元での姿です。(iii) 最大値の形も同じ極限に近づきますが、遅れます。平均を取る容器の恒等式の方が、同じ ℓ で常に真の値に近い。

(ii) の $\ell=1$ の最大値の形は、閉じた形で書けます。一辺 1 の容器はプラケット一枚で、その四本のリンクは全て枠に入るので、$\mathbb{E}[z_p \,|\, V] = \tanh\bigl(\frac{\beta}{2}\mathrm{tr}\, V\bigr)$、最大値は $\mathrm{tr}\, V = \pm 2$ で $\tanh\beta$ です 初 。表の $\sigma_{\max}(1)$ は $-\ln\tanh\beta$（$\beta=1,2,4$ で $0.27234,\ 0.036635,\ 0.000671$）と一致します。これは次の章の板の閉じ込めの評価 $\sigma \ge -\ln\tanh(\beta N^2)$ の $N=1$ の場合と同じ式です（25-04 §05）。

08 言えないこと

(a) 新しさ。容器の恒等式は Mack–Petkova の容器の恒等式で、Kovács–Tomboulis の (18)〜(22) に書かれています。区画の和のアンサンブルでの書き直し・内側と外側の容器の命題・平面の方向の入れ子の不等式は初等的で、Kovács–Tomboulis 以外の文献との照合は済んでいません。この章の結果に新しさは主張しません。

(b) 内側と外側の容器の命題の第二項。外側の容器の偏りが典型的に小さいこと（第二項が $M \to \infty$ で 0 に行くこと）は示していません。

(c) 平面の方向の入れ子の不等式の読み。「2 倍にするたびに θ_0^4」は見立てで、(10) から直接は出ません。T^2 を一緒に広げる話には (10) は何も言いません。

(d) 四次元の勘定。§06 の $R/\ln R$ は、原典の太い容器の自由エネルギーの形の仮定（Kovács–Tomboulis の (23)。太い容器の自由エネルギーが境界の値に一様に $|V_i|e^{-c d_i^2}$ の形）の上の勘定で、四次元の定理ではありません。この本は (23) もその否定も示していません。

(e) 容器の自由エネルギーの一様な評価。ΔF_j を良い枠に一様に、格子間隔に一様に評価することは、この本のどこでも示していません。それには枠を止めた条件つきの測度の多重尺度の解析が要り、変分原理（分配関数の下界しか与えない）だけでは向きが足りません。

(f) Lean。機械検査の欄は有限和の代数だけです。Haar 測度・余閉な z・区画の位相・最近接の作用から (3)(4) が出ることは Lean の外です。

(g) 二次元の検査。表 1 は二次元の数値で、四次元の容器の長さの問題については何も言いません。

09

五分類の表と依存グラフ

表 2　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	区画の和のアンサンブル (1) は全ての捩れの区画の分配関数の和	典	Kovács–Tomboulis §2（捩れの移動）・Mack–Petkova（本文未確認）	$SU(2)$・有限格子	—
2	枠を止めると重みと Wilson ループが容器ごとに分かれる (3)(4)・σ_j は枠で決まらない	初	§02	最近接の作用・容器は互いに離れる	—
3	Kovács–Tomboulis の (18)(20)(22)	典	原典の本文	固定した区画・枠の最大値	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
4	容器の恒等式：(6) と $\theta_j = \tanh(\lvert\Delta F_j\rvert/2)$	典＋初	§03（恒等式は行 3、書き直しは本文）	有限格子・任意の β	FrameLemma（`FrameLemma.frame_bound`）（仮定：有限・$a>0$・$f>0$・内側が空でない）・`sign_mean_le_one`（仮定：$f>0$・$\sigma=\pm1$）・`ratio_eq_tanh`（仮定：$q^{\pm}>0$）・Containers（`Containers.container_bound`）（仮定：有限・$a\ge0$・$\lvert s\rvert\le1$）
5	内側と外側の容器の命題：固定した区画の (9)	初	§04	板・格子状の容器・$\mathbb{E}_o[\prod\theta\prod\theta']<1$	—（代数は行 4 の束と同じ形）
6	(9) の第二項が $M\to\infty$ で 0 に行く	仮	§04（外側の悪い枠の稀さ）	—	—
7	平面の方向の入れ子の不等式 (10)	初	§05	T^2 の大きさを止めた板	Containers（`Containers.container_bound`）（仮定：有限・$a\ge0$・$\lvert s\rvert\le1$）
8	2 倍にするたびに偏りが θ_0^4 の程度	読（物理）	§05	典型的な枠・T^2 固定	—
9	独立な容器では $V(R)\ge \mathrm{const}\,R/\ln R$ まで・太い容器で線形	典	原典 §3 の (23)〜(27)	四次元・原典の太い容器の自由エネルギーの形の仮定の上	—
10	板では容器の長さが T^2 の面積で止まり、行 9 の障害は現れない	初	§06（(24) の読み替え）	小さな T^2 の板・N 固定	—
11	大きな容器で $B(A)/a_1^A\to 16/(3\pi)$・(14)	初	§07	二次元 $SU(2)$・Wilson 作用	—
12	表 1 の数	読	本書の検討の数値	二次元・浮動小数・$n\le200$	—
13	一辺 1 の容器の最大値の形は $\tanh\beta$	初	§07	二次元	—

機械検査の欄の束は、この本の側の再検査で `sorry` を含まず、公理が標準の三つ（propext・Classical.choice・Quot.sound）の部分集合であることが確かめられたものです。保証されるのは有限の集合の上の実数の和と積の代数だけです（23-13）。

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  典  区画の和のアンサンブル (1)                                  SU(2)・有限
 2  初  枠で分かれる (3)(4)・σ_j は枠で決まらない                  最近接
 3  典  Kovács–Tomboulis (18)(20)(22)                                固定した
 4  初  容器の恒等式 (6)(7) ⟸ 1・2（3 と同じ恒等式）                Lean Frame
 5  初  内側と外側の容器の命題 (9) ⟸ 4                               板・内側と
 6  仮  (9) の第二項 → 0                                            外側の稀さ
 7  初  平面の方向の入れ子の不等式 (10) ⟸ 4                         T² 固定
 8  読  2 倍で θ₀⁴（物理）⟸ 7
 9  典  R/ln R・太い容器で線形（太い容器の自由エネルギーの形の仮定の上）
        四次元
10  初  板では容器の長さが止まる ⟸ 9
11  初  16/(3π) の極限 ⟸ 4                                          二次元
12  読  表 1 ⟸ 4・11                                                 浮動小数
13  初  一辺 1 の最大値 = tanh β ⟸ 3                                 二次元
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。外側の稀さの行（(9) の第二項 → 0）は仮定の行で、どの行の前提にも入っていません。内側と外側の容器の命題の不等式 (9) はこの行が無くても成り立ち、この行は (9) を面積則として読むときにだけ要ります。この章には、連続極限の節点も、四次元の面積則の節点もありません。

機械検査まで済んだ渦の側の定理は第 21 部に在ります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
典 ＋ 初　容器の恒等式とその tanh の形。有限格子・任意の β・区画の和のアンサンブル	新しさ（恒等式は Mack–Petkova）。容器の自由エネルギー ΔF_j の、良い枠と格子間隔に一様な評価
初　固定した区画への移し方（内側と外側の容器の命題）と、平面の方向の入れ子（平面の方向の入れ子の不等式）	(9) の第二項が 0 に行くこと。T^2 を一緒に広げたときの偏りの振る舞い（26-01）
典　四次元で独立な容器から出るのは $R/\ln R$ まで（原典の太い容器の自由エネルギーの形の仮定の上の勘定）・板ではこの障害が現れない理由	四次元の面積則。太い容器の自由エネルギーの形の仮定そのもの
初 ＋ 読　二次元 $SU(2)$ で容器の恒等式の評価が指数の部分で鋭いこと（損失 $\ln(16/(3\pi))/\ell^2$）	四次元での評価の鋭さ

出典と再現

もの	種別	出典・道具
容器の恒等式 (18)(20)(22)・四次元の勘定 (23)〜(27)	典	T. G. Kovács, E. T. Tomboulis, Vortex waistlines and long range fluctuations, arXiv:hep-lat/0108017（Phys. Rev. D 65 (2002) 074501）。§2・§3 を本文で確認
渦の容器と和のアンサンブル	典（間接）	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 125 (1980) 117（Kovács–Tomboulis の文献 [3]。本文はこの本では未確認）
鏡映正値性による大域の形	典（間接）	E. T. Tomboulis, L. G. Yaffe, Commun. Math. Phys. 100 (1985) 313（Kovács–Tomboulis の文献 [9] と、その本文 (11)(13) の再述）
容器の恒等式の和のアンサンブルでの形・内側と外側の容器の命題・平面の方向の入れ子の不等式・(14)・一辺 1 の最大値	初	本文 §03〜§07 の証明
表 1	読	本書の検討の数値（二次元 $SU(2)$・指標展開 (12) を数値積分。数秒の計算）
Lean	Lean	FrameLemma（`FrameLemma.frame_bound`・`FrameLemma.sign_mean_le_one`・`FrameLemma.ratio_eq_tanh`）・Containers（`Containers.container_bound`）。束が保証するのは有限和の代数だけ

この章で使った語 — 区画の和のアンサンブル・枠・容器・区画の符号・偏り θ・枠を止めた渦の自由エネルギー ΔF・容器の恒等式・内側と外側の容器・入れ子・容器の長さと太さ。意味は A-02 用語集 にあります（第 25 部の語は追加の予定）。

次に読む章：25-04 板の閉じ込め — 平面の全てのプラケットに反転の群を働かせると、格子間隔と T^2 を止めた板で、全ての β の面積則が出ます。

板の閉じ込め

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 25-03・5-01 にあります。

この章で分かること — 二つの方向が小さな T^2（一辺 N の格子）に巻かれ、残りの二つの方向（平面）が広い「板」の格子を考えます。格子間隔と T^2 の大きさを止めれば、$SU(2)$ の Wilson ループは**全ての** β で面積則に従い、弦の張力は $\sigma \geq -\ln\tanh(\beta N^2) \geq 2e^{-2\beta N^2} > 0$ です（板の閉じ込めの定理）。証明は初等的で、平面のプラケットの真上に立つ渦の面 $\{p\}\times T^2$ の上の符号を一斉に反転する群について平均するだけです。この章では、定理の言明（§02）、五つの手順の証明（§03）、容器の形 $\sup\theta \leq \tanh(\beta N^2)^{\ell^2}$ と、連続極限ではこの下界が 0 になる理由（§04）、二次元での検査（§05）、先行文献との位置（§06）を置きます。

前提となる章 — 25-03（区画の和のアンサンブル・枠と容器・容器の恒等式）・25-01（捩れの区画と流束）。第 5 部の 5-01（Wilson 作用）・5-02（強結合の面積則）・第 7 部の 7-02（二次元）。

先に言うこと — 定理は格子の上の文で、格子間隔と T^2 の一辺 N を止めたときの文です。連続極限（$N\to\infty$、$\beta\to\infty$）では、この下界は 0 に消えます。定理が強結合の展開を使わずに全ての β で成り立つのは、板が実質的に二次元の系だからで、四次元の空間の閉じ込めについては何も言いません。先行文献との照合は済んでいません（Tomboulis–Yaffe 型の議論・Borgs 1985 との照合が残る）。

この章の順序

1. 要約 — 渦の面を一斉に反転して平均する
2. 設定と板の閉じ込めの定理
3. 証明 — 五つの手順
4. 容器の形と細い渦の費用 — 連続極限では張力の下界が 0
5. 二次元での検査
6. 先行文献との位置

7. 言えないこと
8. 五分類の表と依存グラフ — 表 1

01

要約 — 渦の面を一斉に反転して平均する

1. 二次元の格子ゲージ理論は、どの結合でも閉じ込めます（Wilson ループが面積の指数で減る）。プラケットが互いに独立に振る舞うからです（7-02）。
2. 二つの方向が小さく閉じた板 $T^2 \times \mathbb{R}^2$ の格子は、遠くから見れば二次元の系です。だから、T^2 の大きさを止めておけば、やはり全ての結合で閉じ込めると期待できます。この章はそれを、格子の上で証明つきで述べます 初 。
3. 道具は 25-03 の区画の和のアンサンブルです。平面のプラケット p ごとに、その真上に立つ T^2 の全ての点の (3,4) プラケット N^2 枚の面 S_p を考えます。S_p の上の符号 z を一斉に反転しても、余閉の条件は保たれ、リンクは変わりません。ループの内側の p で反転すると Wilson ループの符号が変わり、重みは高々 $e^{\pm 2\beta N^2}$ 倍しか変わりません。
4. 全ての反転の組み合わせ（2^{M^2} 通り）で平均すると、Wilson ループは内側のプラケットごとの因子 $(1-r_p)/(1+r_p)$ の積で押さえられ、各因子は $\tanh(\beta N^2)$ 以下です。よって $|\langle W\rangle| \le \tanh(\beta N^2)^{A}$（$A$ はループの面積）。
5. この下界は N について超指数的に弱く（$\beta = 2.5$、$N = 4$ で $\sigma \ge 2e^{-80}$）、連続極限では 0 になります。細い渦の面を一度に反転する費用 $2\beta N^2$ が、T^2 の格子の点の数とともに増えるからです。物理の渦（分数インスタントン）の費用は $\pi^2\beta$ の程度で N に依らないので、太い渦で同じことをする道が次の二章（25-05・25-06）です。

02

設定と板の閉じ込めの定理

格子 $\Lambda = (\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$。第 1・2 方向が T^2（一辺 N）、第 3・4 方向が平面（周期 M で切ったもの）です。群は $SU(2)$、作用は Wilson 作用 $\frac{\beta}{2}\sum_p \operatorname{tr} U_p$、$\mathrm{T}^2$ の捩れ（n_{12} など）は任意に固定します。ループ C は T^2 の一点 y_0 の (3,4) 平面の中にあり、平面の中で面積 A（プラケットの数）の領域 $S(C)$ を囲むとします。

板の閉じ込めの定理

$t := \tanh(\beta N^2)$ と置く。全ての $\beta > 0$、全ての M、固定した任意の捩れの区画で

$$\left|\langle \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\, U_C\rangle\right| \;\le\; \frac{t^{A}+t^{M^2-A}}{1-t^{M^2}} \tag{1}$$

とくに $M\to\infty$ の任意の極限点で $|\langle\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,U_C\rangle|\le t^{A}$ であり、ループの面積について一様に

$$\sigma \;\ge\; -\ln\tanh(\beta N^2) \;\ge\; 2e^{-2\beta N^2} \;>\; 0. \tag{2}$$

初 （証明は §03）。(2) の σ は格子の単位の弦の張力で、条件は「$SU(2)$・Wilson 作用・N 固定・格子間隔固定・全ての β」です。(2) の右の不等式は、$u=e^{-2x}$ と置いて $-\ln\tanh x=\ln(1+u)-\ln(1-u)=2(u+u^3/3+\cdots)\ge 2u$ から出ます。

03

証明 — 五つの手順

手順 1（区画の和のアンサンブル）。 25-03 §02 の (1)：余閉な $z\in\{\pm1\}^{\text{プラケット}}$ と U について重み $w(U,z)=\exp(\frac{\beta}{2}\sum_p z_p\mathrm{tr}\,U_p)$、測度は Haar × 数え上げ。$z=z_0\cdot\delta\omega$（$\omega\in\{\pm1\}^{\text{リンク}}$、$(\delta\omega)_p=\prod_{b\in\partial p}\omega_b$）と書ける z は全て、Haar 測度の不変性 $U_b\mapsto\omega_b U_b$ により z_0 と同じ積分を与えるので、同じコホモロジー類の z の和は、その類が表す捩れの区画の $SU(2)$ 分配関数の定数倍です 初 。区画は z の類で決まり、区画の指示関数は z の関数です。ゲージ不変な Wilson ループは $W(C)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,U_C\prod_{p\in S(C)}z_p$ で、同じ置き換えで $\prod_{p\in S(C)}(\delta\omega)_p=\prod_{b\in C}\omega_b$ が $\mathrm{tr}\,U_C$ の側の符号と打ち消し合うので、区画の中では $\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,U_C$ と（区画の代表の選び方による符号を除いて）同じ期待値を持ちます。

手順 2（渦の面は余閉）。 平面のプラケット p ごとに $S_p:=\{p\text{ の上の }(3,4)\text{ プラケット}\}\times T^2$（$N^2$ 枚）と置きます。三次元の立方体のうち (3,4) の面を持つのは向き (1,3,4) と (2,3,4) のものだけで、例えば T^2 の点 y から方向 1 に伸びて平面のプラケット p' を張る (1,3,4) の立方体の (3,4) の面は、y と $y+e_1$ の p' の二枚です。$p'=p$ なら二枚とも S_p に入り、$p'\neq p$ なら一枚も入りません。(1,2,3)・(1,2,4) の立方体は (3,4) の面を持ちません。よって全ての立方体は S_p の面を 0 枚か 2 枚含み、S_p の上の z を反転しても余閉の条件は保たれます 初 。$p\neq q$ なら S_p と S_q は共通のプラケットを持ちません。

手順 3（群の作用）。 平面の全てのプラケットの集合を P（$|P|=M^2$）とし、部分集合 $g\subseteq P$ に $z\mapsto z\cdot\chi_{S_g}$（$S_g=\bigcup_{p\in g}S_p$ の上で反転）を対応させます。これは群 $G=\{\pm1\}^P$ の作用で、余閉な z の上の全単射であり、U を変えないので Haar × 数え上げの測度を保ちます。

- Wilson ループ：$S(C)$ は y_0 の平面の中の A 枚で、S_p は y_0 の平面のプラケットを p の位置の一枚だけ含みます。よって $W(g\cdot x)=W(x)\prod_{p\in g}\varepsilon_p$、$\varepsilon_p=-1$（$p\in S(C)$）・$+1$（それ以外）。

- 重み：S_p の上の z を反転すると作用は $-\beta\sum_{q\in S_p} z_q \mathrm{tr}\,U_q$ だけ変わるので、$r_p(x) := \exp(-\beta\sum_{q\in S_p} z_q \mathrm{tr}\,U_q)$ と置くと、$|\mathrm{tr}\,U_q|\le 2$ から $r_p \in [e^{-2\beta N^2}, e^{2\beta N^2}]$。$r_p$ は S_p の上の値だけで決まり、面どうしは交わらないので、$w(g\cdot x)=w(x)\prod_{p\in g} r_p(x)$。

手順 4（平均）。$\mathbb{E}$ を区画の和のアンサンブルの期待値、$\sum_x$ を z の和と U の Haar の積分とします。各 g について変数の付け替えで $\sum_x W(x)w(x) = \sum_x W(g\cdot x)w(g\cdot x) = \sum_x W(x)w(x)\prod_{p\in g}\varepsilon_p r_p(x)$。$g$ について平均し、$\sum_{g\subseteq P}\prod_{p\in g}\varepsilon_p r_p = \prod_{p\in P}(1+\varepsilon_p r_p)$ を使うと

$$2^{M^2}\sum_x W w = \sum_x W(x)w(x)\prod_{p\in S(C)}\big(1-r_p(x)\big)\prod_{p\notin S(C)}\big(1+r_p(x)\big),\qquad 2^{M^2}\sum_x w = \sum_x w(x)\prod_{p\in P}\big(1+r_p(x)\big). \tag{3}$$

です。一枚の不等式 $|1-r|\le \tanh(a)\,(1+r)$（$r\in[e^{-2a},e^{2a}]$、ここでは $a=\beta N^2$）は、$(1-r)/(1+r) = -\tanh(\tfrac12\ln r)$ と $|\tfrac12\ln r|\le a$ から出ます。$|W|\le 1$ と合わせて、(3) の左の式の右辺の絶対値は $t^{A}\sum_x w\prod_P(1+r_p) = t^{A}\,2^{M^2}\sum_x w$ 以下です。よって

$$|\mathbb{E}[W(C)]| \;\le\; t^{A}. \tag{4}$$

この段では軌道に分ける必要がありません。g ごとの付け替え（全単射）と、g の和と x の和の交換だけを使っています。

手順 5（固定した区画への射影）。群 G は (3,4) の流束の偶奇だけを変えます。S_p は y_0 の (3,4) 平面のプラケットを一枚含むので $(-1)^{n_{34}}$（y_0 の (3,4) 平面全体の z の積）を反転し、他の向きのプラケットを含まないので n_{12} などの他のラベルの指示関数 $\mathbf{1}_o$ を変えません。区画 s に固定した期待値は 25-03 の (8) と同じく

$$\langle W\rangle_s = \frac{\mathbb{E}[W\mathbf{1}_o] + s\,\mathbb{E}[W(-1)^{n_{34}}\mathbf{1}_o]}{\mathbb{E}[\mathbf{1}_o] + s\,\mathbb{E}[(-1)^{n_{34}}\mathbf{1}_o]} \tag{5}$$

です。$W(-1)^{n_{34}} = \tfrac12\mathrm{tr}\,U_C\prod_{p\notin S(C)} z_p$（$y_0$ の平面の補集合、面積 M^2-A）は、$p\notin S(C)$ の反転で符号を変え、$p\in S(C)$ の反転で変わりません。$(-1)^{n_{34}}$ は全ての p の反転で符号を変えます。$\mathbf{1}_o$ は G で不変なので、手順 4 と同じ平均で（ε_p の役を取り替えて）

$$|\mathbb{E}[W\mathbf{1}_o]|\le t^{A}\,\mathbb{E}[\mathbf{1}_o],\qquad |\mathbb{E}[W(-1)^{n_{34}}\mathbf{1}_o]|\le t^{M^2-A}\,\mathbb{E}[\mathbf{1}_o],\qquad |\mathbb{E}[(-1)^{n_{34}}\mathbf{1}_o]|\le t^{M^2}\,\mathbb{E}[\mathbf{1}_o]. \tag{6}$$

(5) の分子と分母を (6) で押さえると (1) です。$M\to\infty$ で $t^{M^2-A}\to 0$、$t^{M^2}\to 0$（$t<1$）なので、極限点で $|\langle W\rangle|\le t^{A}$、(2) が出ます。∎

ここでは平面の全てのプラケットに群が働くので、25-03 §04 の「外側の項が小さくならない」問題は起きません。外側の項は t^{M^2-A} と自動的に小さくなります。

Lean SlabConfine（`SlabConfine.group_average`）（仮定なし：$\sum_{g\subseteq P}\prod_{p\in g}\varepsilon_p r_p = \prod_{p\in P}(1+\varepsilon_p r_p)$）・SlabConfine（`SlabConfine.factor_split`）（仮定なし：内側と外側への分解）・SlabConfine（`SlabConfine.tanh_bound`）（仮定：$t\ge 0$・$r_p>0$・$|1-r_p|\le t(1+r_p)$）・SlabConfine（`SlabConfine.one_sheet`）（仮定：$a\ge 0$・$e^{-2a}\le r\le e^{2a}$。結論：$|1-r|\le$

$\tanh a \cdot (1+r)$）・SlabAverage（`SlabAverage.average_bound`）（仮定：配位の集合が有限・$w>0$・$|W|\le 1$・$g\subseteq P$ ごとの作用が全単射・$r_p>0$・$|1-r_p|\le t(1+r_p)$・$W(gx)w(gx)=W(x)w(x)\prod_{p\in g}\varepsilon_p r_p(x)$・$w(gx)=w(x)\prod_{p\in g}r_p(x)$。結論：$|\sum W w|\le t^{|P\cap A|}\sum w$）。手順 4 の有限和の版です。和を Haar 測度の積分に置き換えること、余閉な z と区画の位相（手順 1・2・5）は Lean の外で、本文の議論に依ります。

04

容器の形と細い渦の費用

同じ平均を一つの容器の中だけで行うと、25-03 の偏りの言葉で書けます。平面の一辺 ℓ の正方形 Q（ℓ^2 枚のプラケット）と T^2 の積を容器とし、Q を張る面の z の積を σ_Q とします。$g\subseteq Q$ の反転は容器の内側の z だけを変えるので枠 Φ を変えず、σ_Q を $\prod_{p\in g}(-1)$ 倍します。一つの x の軌道 $\{g\cdot x : g\subseteq Q\}$ の上で、重みは $w(x)\prod_{p\in g}r_p(x)$ と積の形なので、軌道を条件づけると g の各成分は独立で、

$$\mathbb{E}[\sigma_Q \,|\, \text{軌道}] = \sigma_Q(x)\prod_{p\in Q}\frac{1-r_p(x)}{1+r_p(x)} = \pm\prod_{p\in Q}\tanh X_p, \qquad X_p=-\tfrac12\ln r_p\in[-\beta N^2,\beta N^2] \tag{7}$$

です 初 。軌道の条件づけは枠の条件づけより細かいので

$$\sup_{\Phi}\ \theta_Q(\Phi) = \sup_{\Phi}\bigl|\mathbb{E}[\sigma_Q\,|\,\Phi]\bigr| \ \le\ \tanh(\beta N^2)^{\ell^2} \tag{8}$$

です 初 。枠の**最大値**で押さえられるのは、細い面の反転の費用 $|\ln r_p|\le 2\beta N^2$ が枠に依らず一様だからです。

極端に弱いこと。 (2) の下界は N について超指数的に小さくなります。$\beta=2.5$、$N=4$ で $2\beta N^2=80$、$\sigma\ge 2e^{-80}\approx 3.6\times10^{-35}$ です。物理の弦の張力 $\sigma_{\mathrm{phys}}=\sigma/a^2$ の下界 $2e^{-2\beta N^2}/a^2$ は、T^2 の物理の大きさ $L=Na$ を止めて $a\to 0$（$N=L/a\to\infty$、漸近自由により β は増える）とすると 0 に行きます 初 。**連続極限では、この定理の張力の下界は 0 です。**

理由は細い渦の費用。 反転の費用 $2\beta N^2$ は、厚さ一つの格子の面 S_p の N^2 枚を一度に裏返す作用で、T^2 の格子の点の数とともに増えます。一方、物理で渦の費用と考えられているのは、T^2 を巻く滑らかな分数インスタントンの作用 $4\pi^2/g^2=\pi^2\beta$（$\beta=4/g^2$）の程度で、N に依りません（25-02） 読 （物理）。同じ群平均の議論は、反転の重みの比 r_p が $[e^{-F},e^{F}]$ に入れば $t=\tanh(F/2)$ で通るので、細い面の反転を「太い渦を挿入する、測度を保つ写像」に置き換え、F を N に依らない量で押さえられれば、格子間隔に一様な下界が見込めます 仮 （根拠の在りか：この章の (7) の形と、25-05 の挿入の恒等式・25-06 の力学で駆動した挿入）。そのためには、挿入の費用の一様な評価（紫外の制御。この部の設定では、捩れた境界条件の下で 2026-11-10 に公開された構成と同じ構成が立つこと）が要り、この本はそれを示していません。公開された構成は周期の立方の箱の上のもので、ここには届きません。

また (8) は、$\sup_\Phi$ を使う議論が N について超指数的に悪くなることも示しています。T^2 を広げる話（移り変わりの帯）で一様性を得るには、枠についての最大値でなく平均の形しか使えません（25-03 の容器の恒等式 が平均を取る理由の一つ）。

05

二次元での検査

証明の五つの手順を二次元の格子 $(\mathbb{Z}/M)^2$ に直接当てると、立方体が無いので余閉の条件は空で、渦の面は $S_p = \{p\}$（プラケット一枚、板の閉じ込めの定理の式で $N=1$ と置いたもの）です。よって同じ証明が二次元の $SU(2)$ について $|\langle W\rangle| \le \tanh(\beta)^A$ を与えます。二次元の真の値は $\langle W\rangle = a_1^A$、$a_1 = I_2(\beta)/I_1(\beta)$ なので、定理は全ての β で $I_2(\beta)/I_1(\beta) \le \tanh\beta$ を含みます。

- 大きな β での主項：$I_\nu(\beta) \sim e^\beta (2\pi\beta)^{-1/2}(1 - \frac{4\nu^2-1}{8\beta})$ から $a_1 \approx 1 - \frac{3}{2\beta}$、一方 $\tanh\beta \approx 1 - 2e^{-2\beta}$。下界は真の張力 $\approx \frac{3}{2\beta}$ より指数的に小さく、矛盾はありません 初 。
- 数で：真の $\sigma = -\ln a_1$ は $\beta = 1, 2, 4, 8$ で $1.4263,\ 0.8367,\ 0.4185,\ 0.1994$、定理の下界 $-\ln\tanh\beta$ は $0.2723,\ 0.0366,\ 0.00067,\ 2.25\times10^{-7}$ です 読 （浮動小数）。
- この下界は、25-03 の表 1 の「一辺 1 の容器・枠の最大値の形」$\sigma_{\max}(1)$ とちょうど一致します。一辺 1 の容器ではプラケット一枚の z だけが内側にあり、$\mathbb{E}[z_p \,|\, V] = \tanh(\frac{\beta}{2}\mathrm{tr}\, V)$、その最大が $\tanh\beta$ だからです 初 （25-03 §07）。板の定理は「厚さ一つの容器を、枠について最大値で押さえる」評価と同じ形をしています。

四次元の板の Wilson ループの測定（Creutz 比・捩れの有無の比較）は、測った記録の章 25-08 に置きます。

06

先行文献との位置

板の閉じ込めの定理の論法（コンパクトな方向を巻く中心の面の上の符号を群として平均する）は、Mack–Petkova・Tomboulis–Yaffe の渦の自由エネルギーの議論と同じ系統で、厚さ一つの容器 $\{p\}\times T^2$ の自由エネルギーを作用で直接に押さえたものに当たります 典 （系統の対応は Kovács–Tomboulis hep-lat/0108017 §2〜§3 の枠組みとの比較による）。発想は古典的なので、同じ評価が文献に、あるいは言い伝えとして既にある可能性があります。照合が残っているのは次の二つです。

- Tomboulis–Yaffe（Commun. Math. Phys. 100 (1985) 313）型の議論：捩れた分配関数の比で Wilson ループを押さえる不等式（Kanazawa arXiv:0808.3442 の再述）。板の上で同

じ形の評価が明示的に書かれているかは、確かめていません。

- Borgs（Nucl. Phys. B 261 (1985)、高温の格子ゲージ理論の空間的な Wilson ループの面積則）：十分高い温度で、クラスター展開により空間的な Wilson ループの面積則を示した仕事と記録されています。この本は原典の本文を確かめていません（書誌は二次の記録による）。板の閉じ込めの定理との違いとして見込まれるのは、非可換の $SU(2)$・N を止めて全ての β・評価が明示的で初等的、の三点ですが、照合は未了です。

この本の中では、板の閉じ込めの定理は次の章の挿入の恒等式の特別な場合（細い挿入）として再び出てきます（25-05 §06）。

07

言えないこと

(a) 連続極限。(2) の下界は $a \to 0$ で 0 になります。板の閉じ込めの定理は格子間隔に一様な張力について何も言いません。

(b) 四次元の空間。板の閉じ込めの定理は T^2 の大きさ N を止めた文で、$N \to \infty$（四次元の空間へ近づける）では下界が消えます。四次元の閉じ込めについては何も言いません。T^2 を広げる段が移り変わりの帯です（25-09・26-01）。

(c) 太い渦への改良。§04 の「太い渦の写像で F を N に依らず押さえる」は仮の筋で、挿入の費用の一様な評価を含め、証明はありません。

(d) 先行文献。§06 の二つとの照合は済んでいません。この章の結果に新しさは主張しません。

(e) Lean。機械検査の欄は有限和の代数（群平均の恒等式・tanh の評価・一枚の不等式）だけです。$SU(2)$ の Haar 測度、余閉な z、区画の位相と射影（手順 1・2・5）は Lean の外です。

(f) 極限の存在。$M \to \infty$ の極限の測度の存在はこの章では扱わず、全ての極限点についての上界として述べています。

08

五分類の表と依存グラフ

表 1　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	区画の和のアンサンブルは区画の分配関数の和・Wilson ループの対応（手順 1）	初	§03	$SU(2)$・有限格子	—
2	渦の面 S_p は余閉で互いに交わらない（手順 2）	初	§03	板 $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$	—
3	反転で W は ε_p 倍・重みは $r_p \in [e^{-2\beta N^2}, e^{2\beta N^2}]$ 倍（手順 3）	初	§03	Wilson 作用	—
4	群平均 (3) と $\lvert\mathbb{E}[W]\rvert \le t^A$ (4)	初	§03 手順 4	区画の和のアンサンブル	SlabAverage（`SlabAverage.average_bound`）・SlabConfine（`SlabConfine.group_average`・`SlabConfine.tanh_bound`・`SlabConfine.one_sheet`）（仮定は §03 の末尾の通り）
5	固定した区画への射影 (5)(6)	初	§03 手順 5	平面の全てのプラケットに群が働く	—
6	板の閉じ込めの定理：(1) と $\sigma \ge -\ln\tanh(\beta N^2) \ge 2e^{-2\beta N^2}$	初	§02・§03	$SU(2)$・Wilson 作用・N 固定・格子間隔固定・全ての β	—（有限和の核だけ行 4）
7	容器の形 (7)・$\sup_\Phi \theta_Q \le \tanh(\beta N^2)^{\ell^2}$ (8)	初	§04	一辺 ℓ の容器 $\times\, \mathrm{T}^2$	—
8	連続極限（$L = Na$ 固定・$a \to 0$）では下界が 0	初	§04	β が $a \to 0$ で減らないこと	—
9	物理の渦の費用は $\pi^2\beta$ の程度で N に依らない	読（物理）	25-02	希薄な領域・半古典	—
10	太い渦を挿入する写像で、格子間隔に一様な下界が出る	仮	筋：§04 の (7) の形と 25-05・25-06	紫外の制御の下	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
11	二次元へ当てると $I_2(\beta)/I_1(\beta) \le \tanh\beta$ ・一辺 1 の容器の最大値の形と一致	初	§05	二次元 $SU(2)$	—
12	§05 の数	読	§05	浮動小数	—
13	論法は Mack–Petkova・Tomboulis–Yaffe の渦の自由エネルギーの系統	典	Kovács–Tomboulis §2〜§3 との比較	—	—

機械検査の欄の束は、この本の側の再検査で `sorry` を含まず、公理が標準の三つの部分集合であることが確かめられたものです。保証されるのは有限の配位の集合の上の和の代数で、手順 1・2・5 と Haar 測度の積分は Lean の外です（23-13）。

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  初  区画の和 = 区画の分配関数の和・W の対応   SU(2)・有限格子
 2  初  渦の面 S_p は余閉・互いに素                  板
 3  初  W は ε_p 倍・重みは r_p 倍、|ln r_p| ≤ 2βN²
 4  初  群平均 (3)(4) ⟸ 2・3                        Lean average_bound ほか
 5  初  固定した区画へ (5)(6) ⟸ 1・4
 6  初  板の閉じ込めの定理 (1)(2) ⟸ 5              N 固定・a 固定・全ての β
 7  初  容器の形 (7)(8) ⟸ 3
 8  初  連続極限では下界 0 ⟸ 6                     L = Na 固定
 9  読  物理の渦の費用 π²β（物理）                 希薄・半古典
10  仮  太い渦で一様な下界 ⟸ 7・9                   紫外の制御の下
11  初  二次元へ・最大値の形と一致 ⟸ 6
12  読  §05 の数 ⟸ 11                              浮動小数
13  典  渦の自由エネルギーの系統
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。板の閉じ込めの定理の前提は §03 の五つの手順の行だけで、仮定の行（太い渦で一様な下界）はどの行の前提にも入りません。その結論は「格子間隔に一様な下界」で、板の閉じ込めの定理の量（N を止めた下界）を含みません。

機械検査まで済んだ渦の側の定理は第 21 部に在ります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 板 $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ の $SU(2)$ Wilson 作用で、N と格子間隔を止めれば、全ての β と全ての捩れの区画で $\sigma \geq -\ln\tanh(\beta N^2) \geq 2e^{-2\beta N^2}$（板の閉じ込めの定理）	格子間隔に一様な張力。T^2 を広げたときの張力（移り変わりの帯）。新しさ（照合が未了）
初 容器の形 $\sup_\Phi \theta_Q \leq \tanh(\beta N^2)^{\ell^2}$・連続極限では下界が 0 になること	太い渦の挿入の費用の一様な評価（太い渦の行は仮）
初 ＋読 二次元での整合（$I_2/I_1 \leq \tanh\beta$・一辺 1 の容器の最大値の形との一致）	四次元の板の測定（25-08）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
板の閉じ込めの定理と証明の五つの手順・容器の形 (7)(8)・二次元への適用	初	本文 §03〜§05 の証明
渦の容器・自由エネルギーの議論の系統	典	T. G. Kovács, E. T. Tomboulis, arXiv:hep-lat/0108017（Phys. Rev. D 65 (2002) 074501）§2〜§3 を本文で確認。G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 125 (1980) 117 と E. T. Tomboulis, L. G. Yaffe, Commun. Math. Phys. 100 (1985) 313 はその引用を通して（本文は未確認）
Tomboulis–Yaffe の不等式の再述	典	T. Kanazawa, arXiv:0808.3442
高温の空間的な Wilson ループの面積則	照合未了	C. Borgs, Nucl. Phys. B 261 (1985)（書誌は二次の記録。本文は未確認）
二次元の数	読	I_2/I_1 と $\tanh\beta$ の浮動小数の値（25-03 表 1 と同じ計算）
Lean	Lean	SlabConfine（`SlabConfine.group_average`・`SlabConfine.factor_split`・`SlabConfine.tanh_bound`・`SlabConfine.one_sheet`）・SlabAverage（`SlabAverage.average_bound`）。束が保証するのは有限和の代数だけ

この章で使った語 — 板・渦の面 S_p・反転の群・群平均・細い渦の費用・容器の偏り θ_Q・板の閉じ込めの定理。意味は A-02 用語集 にあります（第 25 部の語は追加の予定）。

次に読む章：25-05 渦の挿入の恒等式 — 細い面の反転を一般の「区画を反転する全単射」に置き換えると、何が無条件に言えるか。

渦の挿入の恒等式

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 25-03・1-08 にあります。

この章で分かること — 25-04 では、細い渦の面を反転する写像で平均して板の閉じ込めを出しました。この章では、その写像を一般の「区画を反転する全単射」T（渦を一本挿入する写像）に置き換えたとき、何が**無条件に**言えるかを並べます。使うのは三つだけです：有限の配位空間、正の重み、区画の符号を反転する全単射。そこから、(1) 挿入比 ρ の平均は 1 で、$\mathbb{E}[\rho\sigma] = -\mathbb{E}[\sigma]$、(2) 区画の偏りは挿入比の揺らぎで押さえられる：$4\mathbb{E}[\sigma]^2 \le \mathrm{Var}(\bar{\rho})$、(3) 対合に直すと $\mathbb{E}[H] = \mathbb{E}[H\tanh(\Delta S/2)]$ という有界な形と、位置について平均した形、(4) $\mathbb{E}[H\sqrt{\rho}] = 0$ から出る二次モーメントの形と Paley–Zygmund の形、が出ます。どれも初等的な恒等式と Cauchy–Schwarz で、Lean で有限和の版が検査されています。

前提となる章 — 25-03（区画の和のアンサンブル・区画の符号・偏り）・25-04（板の閉じ込め）。第 1 部の 1-08（確率と測度・Cauchy–Schwarz）。

先に言うこと — この章の定理は全て「有限の配位空間・正の重み・区画を反転する全単射（Haar を保つ写像の有限版）」の三つの条件の上の文で、各定理の行にその条件を書きます。連続の $SU(2)$ の配位空間へ移すには、和を Haar 測度の積分に置き換え、写像が測度を保つ（あるいはヤコビアンを重みに入れる）ことが要り、その部分は Lean の外です。結果は初等的で、先行文献との照合は済んでいません。閉じ込めについて、これらの恒等式だけからは何も出ません。何が足りないかを §07・§08 に書きます。

この章の順序

1. 要約 — 渦を一本入れる写像の帳尻
2. 設定 — 三つの条件
3. 挿入比の平均の恒等式と、揺らぎによる偏りの評価
4. 有界な形 — 有界な挿入の恒等式・揺らぎの関係式・位置の平均
5. 二次モーメントの形 — 平方根の恒等式・Paley–Zygmund の形・多数の細胞
6. 板の閉じ込めの再導出

7. 何を意味し、何が足りないか — 表 1
8. 言えないこと
9. 五分類の表と依存グラフ — 表 2

01

要約 — 渦を一本入れる写像の帳尻

1. 区画の和のアンサンブル（25-03）では、ある領域に渦が通っているかどうかが符号 $\sigma = \pm 1$ で表されます。渦を一本入れる（あるいは抜く）写像 T は σ を反転します。
2. 配位 x で渦を入れたときの重みの比を挿入比 $\rho(x)$ と呼びます。ρ が 1 より小さいほど、渦を入れるのは高くつきます。
3. 挿入比の平均はいつでもちょうど 1 です（挿入比の平均の恒等式）。これは「写像で配位を付け替えても、全体の重みの和は変わらない」という帳尻の式にすぎません。同じ帳尻から $\mathbb{E}[\rho\sigma] = -\mathbb{E}[\sigma]$ も出ます 初 。
4. 二つを組み合わせると、区画の偏り $|\mathbb{E}[\sigma]|$ は、挿入比の揺らぎ（分散）の半分の平方根以下です（挿入比の揺らぎによる偏りの評価）。たくさんの位置で挿入して挿入比を平均すると、揺らぎは小さくなりえます。位置について平均することが、エントロピーの役を果たします 初 。
5. 挿入比は大きな値を取りうる（重い裾）ので、扱いやすい有界な形も用意します。$\tanh(\Delta S/2)$ は常に $[-1, 1]$ に入り、$\mathbb{E}[H] = \mathbb{E}[H \tanh(\Delta S/2)]$ が成り立ちます（有界な挿入の恒等式）。$1 - \mathbb{E}[\tanh]$ は、渦を挿入するモンテカルロの一手の受理率の平均の 2 倍です（挿入の揺らぎの関係式） 初 。
6. $\sqrt{\rho}$ を使う形は、二次モーメントがいつでも 1 以下なので裾の心配がありません（平方根の挿入の恒等式・Paley–Zygmund の形の偏りの評価） 初 。
7. 細い渦の面の反転（25-04）を挿入に取ると、板の閉じ込めの定理がこの章の特別な場合として出ます（§ 06）。
8. これらは閉じ込めの証明ではありません。面積則には、多数の領域で同時に偏りが小さいこと（大偏差）と、挿入の費用の格子間隔に一様な評価（紫外）が要り、どちらもこの章の外です。

02

設定 — 三つの条件

この章を通して次の三つを置きます。

- **有限の配位空間の条件** X（有限集合）。
- **正の重みの条件** $w : X \to (0, \infty)$。期待値は $\mathbb{E}[f] = \sum_x w(x) f(x) / \sum_x w(x)$。
- **区画を反転する全単射の条件**：区画の符号 $\sigma : X \to \{\pm 1\}$ と全単射 $T : X \to X$ で、$\sigma(Tx) = -\sigma(x)$。

区画を反転する全単射の条件は、区画の和のアンサンブルで「Haar 測度を保ち、ある領域の区画の符号を反転する写像」（例：渦の面の z の反転と、領域の内側に台を持つ滑らかな左からの掛け算の合成）の有限版です。対合であること・互いに可換であること・最悪の場合の評価は、§03 では使いません。有限の配位空間の条件から連続の配位空間（$SU(2)^{\text{リンク}}$ と余閉な z）へ移すには、和を Haar 測度と数え上げの積分に置き換え、T が測度を保つこと（保たないならヤコビアンを重みに入れること）が要ります。証明は同じ変数の付け替えで通りますが、その版は Lean の外です。

挿入比を

$$\rho(x) = \begin{cases} w(Tx)/w(x) & (\sigma(x) = +1) \\ w(T^{-1}x)/w(x) & (\sigma(x) = -1) \end{cases} \tag{1}$$

と置きます。$\sigma = +1$ の配位には T で渦を入れ、$\sigma = -1$ の配位には T^{-1} で戻す、という向きの合わせ方です。作用 $S = -\ln w$ で書けば $\rho = e^{-\Delta S}$ です。

03

挿入比の平均の恒等式と、揺らぎによる偏りの評価

挿入比の平均の恒等式

有限の配位空間の条件・正の重みの条件・区画を反転する全単射の条件の下で

$$\mathbb{E}[\rho] = 1, \qquad \mathbb{E}[\rho\,\sigma] = -\mathbb{E}[\sigma]. \tag{2}$$

初 証明。$X_\pm = \{\sigma = \pm 1\}$ と置きます。T は X_+ を X_- に、X_- を X_+ に写し、全単射なので $T(X_+) = X_-$、$T^{-1}(X_-) = X_+$ です。よって

$$\sum_{x \in X_+} w(x)\rho(x) = \sum_{x \in X_+} w(Tx) = \sum_{y \in X_-} w(y), \qquad \sum_{x \in X_-} w(x)\rho(x) = \sum_{x \in X_-} w(T^{-1}x) = \sum_{y \in X_+} w(y).$$

足すと $\sum w\rho = \sum w$、σ を掛けて足すと $\sum w\rho\sigma = \sum_{X_-} w - \sum_{X_+} w = -\sum w\sigma$ です。∎

Lean InsertionIdentity（`Insertion.mean_one`・`Insertion.mean_rho_sigma`）（仮定：X は有限・$w > 0$・T は X の全単射・$\sigma(Tx) = -\sigma(x)$・$\sigma = \pm 1$。結論：$\sum w\rho = \sum w$、$\sum w\rho\sigma = -\sum w\sigma$）。対合・可換性・測度の構造は使っていません。

挿入比の揺らぎによる偏りの評価（区画の偏りは挿入比の揺らぎで押さえられる）

有限の配位空間の条件・正の重みの条件の下で、区画の符号 σ と、それを反転する全単射の空でない有限族 $T_1, \dots, T_n$（各 T_k が区画を反転する全単射の条件を満たす）を取り、挿入比の平均を $\bar\rho = \frac{1}{n}\sum_k \rho_k$ とすると

$$4\,\mathbb{E}[\sigma]^2 \;\le\; \mathbb{E}\big[(\bar\rho - 1)^2\big] = \mathrm{Var}(\bar\rho), \qquad \text{すなわち} \quad |\mathbb{E}[\sigma]| \le \tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Var}(\bar\rho)}. \tag{3}$$

初 証明。挿入比の平均の恒等式を各 T_k に使って平均すると $\mathbb{E}[\bar\rho] = 1$、$\mathbb{E}[\bar\rho\sigma] = -\mathbb{E}[\sigma]$。よって $\mathbb{E}[(\bar\rho - 1)\sigma] = -2\mathbb{E}[\sigma]$。Cauchy–Schwarz と $\sigma^2 = 1$ から $4\mathbb{E}[\sigma]^2 \le \mathbb{E}[(\bar\rho - 1)^2]\mathbb{E}[\sigma^2] = \mathrm{Var}(\bar\rho)$。∎

Lean InsertionIdentity（`Insertion.sector_bias_le`）（仮定：X は有限・族の添字集合は有限で空でない・$w > 0$・各 T_k は全単射で $\sigma(T_k x) = -\sigma(x)$・$\sigma = \pm 1$。結論：$4(\sum w\sigma)^2 \le (\sum w)\sum w(\bar\rho - 1)^2$）。

容器（25-03）に当てるには、枠を止めた条件つきの測度の上で挿入比の揺らぎによる偏りの評価を使います。容器の内側だけを動かす全単射なら枠は変わらないので、$\theta_j(\Phi) = |\mathbb{E}[\sigma_j \,|\, \Phi]| \le \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Var}(\bar\rho \,|\, \Phi)}$ です 初 。容器の恒等式の因子 $\tanh(|\Delta F_j|/2)$ が、容器の中の多数の位置への挿入の、挿入比の平均の揺らぎで上から押さえられる、という読み方になります。

04

有界な形 — tanh と位置の平均

挿入比 $\rho = e^{-\Delta S}$ は大きな値を取りうるので、$\mathrm{Var}(\bar\rho)$ は大きくなりえます。そこで有界な因子に取り替えます。区画を反転する全単射の条件の T から、区画に向きを合わせた写像

$$\tau(x) = \begin{cases} Tx & (\sigma(x) = +1) \\ T^{-1}x & (\sigma(x) = -1) \end{cases} \tag{4}$$

を作ると、τ は**対合**（$\tau \circ \tau = \mathrm{id}$）です（$\sigma(x) = +1$ なら $\tau x = Tx \in X_-$ なので $\tau(\tau x) = T^{-1}Tx = x$。逆も同じ） 初 。$\Delta S = S \circ \tau - S$、$\rho = w \circ \tau / w = e^{-\Delta S}$、そして

$$t(x) := \frac{w(x) - w(\tau x)}{w(x) + w(\tau x)} = \tanh\frac{\Delta S(x)}{2} \;\in (-1, 1) \tag{5}$$

と置きます。

有界な挿入の恒等式

有限の配位空間の条件・正の重みの条件の下で、τ を X の対合、H を τ で奇な関数（$H \circ \tau = -H$）とすると $\mathbb{E}[H] = \mathbb{E}[H\,t]$。

初 証明。$1 - t = 2w \circ \tau / (w + w \circ \tau)$ なので $\mathbb{E}[H] - \mathbb{E}[Ht]$ は $2\sum_x g(x) / \sum w$、$g(x) = w(x)H(x)w(\tau x)/(w(x) + w(\tau x))$ に比例します。$g(\tau x) = -g(x)$（H が奇で、残りは $x \leftrightarrow \tau x$ で対称）なので、和を τ で付け替えると $\sum g = -\sum g$、よって 0 です。∎

Lean BoundedInsertion（`Bounded.single`）（仮定：X は有限・τ は全単射で $\tau \circ \tau = \mathrm{id}$・$w > 0$・$H \circ \tau = -H$。結論：$\sum wHt = \sum wH$）。

挿入の揺らぎの関係式（揺らぎの関係式と受理率）

有界な挿入の恒等式の設定で、全ての実数 s について $\mathbb{P}(\Delta S = s) = e^{s}\,\mathbb{P}(\Delta S = -s)$。とくに $\mathbb{E}[t] \geq 0$ で、

$$1 - \mathbb{E}[t] = 2\,\mathbb{E}\Big[\frac{1}{1 + e^{\Delta S}}\Big] = 2 \times (\text{挿入の一手の Barker 型の受理率の平均}). \tag{6}$$

初 証明。付け替えで任意の g について $\mathbb{E}[g] = \mathbb{E}[(g \circ \tau)\,\rho]$。$\Delta S \circ \tau = -\Delta S$ なので $g = \mathbf{1}\{\Delta S = s\}$ と取ると $g \circ \tau = \mathbf{1}\{\Delta S = -s\}$ で、集合 $\{\Delta S = -s\}$ の上では $\rho = e^{-\Delta S} = e^{s}$ なので第一式。s と $-s$ を組にすると $\mathbb{P}(s)\tanh\frac{s}{2} + \mathbb{P}(-s)\tanh\frac{-s}{2} = \mathbb{P}(-s)(e^{s} - 1)\tanh\frac{s}{2} \geq 0$ なので $\mathbb{E}[t] \geq 0$。最後に $1 - \tanh(\Delta S/2) = 2/(1 + e^{\Delta S})$。∎ この補題には Lean の検査がありません。

(6) の読み方。Barker 型の一手は「渦を挿入した配位を確率 $w(\tau x)/(w(x) + w(\tau x))$ で受け入れる」モンテカルロの一手です。挿入がほとんど断られる（費用が高い）なら $\mathbb{E}[t] \approx 1$、よく通るなら $\mathbb{E}[t]$ は 1 から離れます。第一式は、非平衡の統計力学で Crooks の揺らぎの関係式と呼ばれるものと同じ形です（原典との照合と、力学で駆動した版は 25-06）。

多数の細胞と位置の平均。 互いに離れた細胞 c ごとに、細胞の中の位置 $p \in P$（P は空でない有限集合）の挿入の対合 $\tau_{c,p}$ を取り、$t_{c,p}$ を (5) で作り、$\bar{t}_c = \frac{1}{|P|}\sum_p t_{c,p}$ と置きます。

位置で平均した挿入の評価（位置について平均した有界な評価）

有限の配位空間の条件・正の重みの条件の下で、各 $\tau_{c,p}$ が対合、H が全ての $\tau_{c,p}$ で奇、そして別の細胞の因子が動かないこと（$c \neq d$ なら $t_{d,q} \circ \tau_{c,p} = t_{d,q}$）を仮定すると

$$\mathbb{E}[H]=\mathbb{E}\Big[H\prod_{c}\bar{t}_c\Big],\qquad |H|\le 1 \text{ なら } \ |\mathbb{E}[H]|\le \mathbb{E}\Big[\prod_{c}|\bar{t}_c|\Big]. \tag{7}$$

初 証明。まず各細胞から一つずつ位置を選んだ $\prod_c t_{c,p_c}$ について、細胞を一つずつ足す帰納で $\mathbb{E}[H\prod_c t_{c,p_c}]=\mathbb{E}[H]$：細胞 d を足す段では、それまでの積 $G=\prod_{c\neq d}t_{c,p_c}$ が τ_{d,p_d} で動かないので HG は奇で、有界な挿入の恒等式が使えます。$\prod_c \bar{t}_c$ を展開すると、選び方 $|P|^{\#\text{細胞}}$ 通りの平均なので第一式。$|H|\le 1$ で絶対値を取れば第二式です。∎ 各因子は $[-1,1]$ に入り、モーメントの仮定は要りません。

Lean BoundedInsertion（`Bounded.averaged`・`Bounded.averaged_bound`）（仮定：X と細胞の集合と位置の集合 P は有限・P は空でない・全ての $\tau_{c,p}$ が対合・$w>0$・H は全ての $\tau_{c,p}$ で奇・$c\neq d$ なら $t_{d,q}\circ\tau_{c,p}=t_{d,q}$・後者は $|H|\le 1$ も。結論：(7)）。帰納の一段は BoundedInsertion（`Bounded.multi`）。

05 二次モーメントの形

tanh の形は有界ですが、指数の平均（自由エネルギー）をそのまま捉えません。もう一つの有界な形が $\sqrt{\rho}$ です。

平方根の挿入の恒等式（Bhattacharyya の形）

有限の配位空間の条件・正の重みの条件の下で、τ を対合、$H\circ\tau=-H$、$\rho=w\circ\tau/w$ とすると $\mathbb{E}[H\sqrt{\rho}]=0$。

初 証明。$w\sqrt{\rho}=\sqrt{w\cdot w\circ\tau}$ は $x\leftrightarrow\tau x$ で対称、H は反対称なので、$\sum_x w(x)H(x)\sqrt{\rho(x)}$ は τ で付け替えると符号を変え、0 です。∎

Lean SecondMoment（`SecondMoment.sqrt_identity`）（仮定：X は有限・τ は全単射で $\tau\circ\tau=\mathrm{id}$・$w>0$・$H\circ\tau=-H$。結論：$\sum wH\sqrt{w\circ\tau/w}=0$）。

Paley–Zygmund の形の偏りの評価

有限の配位空間の条件・正の重みの条件の下で、空でない有限集合 P の各 p に対合 τ_p を取り、H は全ての τ_p で奇で $|H|\le 1$ とする。$Y:=\frac{1}{|P|}\sum_p\sqrt{\rho_p}$（区画を反転する挿入の、重みつきの数）と置くと

$$\mathbb{E}[H]^2\,\mathbb{E}[Y^2]\ \le\ \mathbb{E}[Y^2]-\mathbb{E}[Y]^2,\qquad \text{すなわち}\quad \mathbb{E}[H]^2\le 1-\frac{\mathbb{E}[Y]^2}{\mathbb{E}[Y^2]},\qquad \text{かつ } \mathbb{E}[Y^2]\le 1 \tag{8}$$

初 証明。平方根の挿入の恒等式を平均して $\mathbb{E}[HY]=0$。$C=\mathbb{E}[Y^2]$、$B=\mathbb{E}[Y]$ と置くと $\mathbb{E}[H(C-BY)]=C\,\mathbb{E}[H]$。Cauchy–Schwarz と $H^2\le 1$ から $C^2\mathbb{E}[H]^2\le\mathbb{E}[(C-BY)^2]=C^2-2CB^2+B^2C=C(C-B^2)$。$C>0$（$\rho_p>0$）で割って第一式です。最後の不等式は、$Y^2\le\frac{1}{|P|}\sum_p\rho_p$（Cauchy–Schwarz）と、対合については $\mathbb{E}[\rho_p]=\sum_x w(\tau_p x)/\sum w=1$ から出ます。∎

Lean SecondMoment（`SecondMoment.pz_bound`）（仮定：X と P は有限・P は空でない・全ての τ_p が対合・$w>0$・H は全ての τ_p で奇・$|H|\le 1$。結論：$(\sum wH)^2(\sum wY^2)\le(\sum w)\big((\sum wY^2)(\sum w)-(\sum wY)^2\big)$、正規化すると (8) の第一式）。$\mathbb{E}[Y^2]\le 1$ には Lean の検査がありません。

(8) は、Y が二次モーメントの意味で集中している（$\mathbb{E}[Y^2]$ が $\mathbb{E}[Y]^2$ に近い）ほど偏りが小さいことを言います。二次モーメントはいつでも 1 以下なので、ρ の分散の形のような重い裾の心配がありません。

多数の細胞。細胞ごとの挿入比の積を扱う形も置いておきます。

多数の細胞の二次モーメントの評価

有限の配位空間の条件・正の重みの条件の下で、$|H|\le 1$、細胞の有限集合 C の各 c に関数 $r_c : X\to\mathbb{R}$（平均した挿入比）を取り、**挿入で奇であること**——全ての $S\subseteq C$ について $\mathbb{E}[H\prod_{c\in S}r_c]=(-1)^{|S|}\mathbb{E}[H]$——を仮定すると

$$\mathbb{E}\Big[H\prod_{c\in C}(1-r_c)\Big]=2^{|C|}\,\mathbb{E}[H],\qquad 4^{|C|}\,\mathbb{E}[H]^2\ \le\ \mathbb{E}\Big[\prod_{c\in C}(1-r_c)^2\Big]. \tag{9}$$

初 証明。$\prod_c(1-r_c)=\sum_{S\subseteq C}(-1)^{|S|}\prod_{c\in S}r_c$ と展開し、仮定を使うと各項が $\mathbb{E}[H]$ になり、$2^{|C|}$ 個の和です。Cauchy–Schwarz と $H^2\le 1$ で第二式。∎

Lean MultiCell（`MultiCell.bound`）（仮定：X と C は有限・$w>0$・$|H|\le 1$・上の「挿入で奇」の等式を全ての $S\subseteq C$ で。結論：(9) の第二式）と MultiCell（`MultiCell.expand_identity`）（第一式）。「挿入で奇」は Lean の中では**仮定として置かれた等式**です。一つの全単射については押し出しの等式 $\sum w\,(w\circ T/w)\,F=\sum w\,F\circ T^{-1}$（MultiCell（`MultiCell.pushforward`）、仮定：有限・$w>0$）から出ますが、別々の細胞の挿入を合成したときにこの等式が成り立つことは、写像の可換性と比の不変性に依り、Lean の外です。

06

板の閉じ込めの再導出

25-04 の細い挿入を取ります。細胞をループの内側の平面のプラケット $p\in S(C)$ とし、位置は一つ（$|P|=1$）、τ_p を渦の面 S_p の上の z の反転とします。τ_p はそれ自身が対合で、リンクを変えないので Haar × 数え上げの測度を保ちます。$H=W(C)$ は各 τ_p で奇、$t_p=(1-$

$r_p)/(1+r_p)$ は S_p の上の値だけで決まるので $q \neq p$ の τ_q で動きません。位置で平均した挿入の評価から

$$|\mathbb{E}[W(C)]| \;\le\; \mathbb{E}\Big[\prod_{p \in S(C)} |t_p|\Big] \;\le\; \tanh(\beta N^2)^{A} \tag{10}$$

（$|t_p| \le \tanh(\beta N^2)$ は 25-04 の一枚の不等式）初。これは 25-04 の手順 4 の (4) そのもので、固定した区画への射影は 25-04 の手順 5 と同じです。板の閉じ込めの定理は、位置で平均した挿入の評価の「細い挿入・位置一つ」の特別な場合です。連続の配位空間での (10) は、和を積分に置き換えた同じ議論で、Lean の外です。

07

何を意味し、何が足りないか

位置の平均はエントロピー。 挿入比の揺らぎによる偏りの評価の $\mathrm{Var}(\bar{\rho})$ は、n 個の位置のうち互いに相関の届く位置の数を K、一つの挿入比の分散を V とすれば $\approx VK/n$ の程度と見込まれます 読（物理）。位置の数 n を増やすことがエントロピーの役を、位置どうしの相関の減衰（質量ギャップ）が K を小さく保つ役を果たします。滑らかな分数インスタントン型の挿入では $V \sim e^{S_{\mathrm{inst}}}$ の程度と見込まれ、要る領域の面積は V に比例し、弦の張力は $\sigma \sim e^{-S_{\mathrm{inst}}}/L^2$ 程度と、希薄な渦の気体の公式と同じ形になります 読（物理・半古典の見積もり。証明ではない）。

表 1　三つの形の比較（一つの細胞あたりの因子）

形	因子	長所	短所
挿入比の分散（挿入比の揺らぎによる偏りの評価）	$1-\bar{\rho}$	自由エネルギー（指数の平均）をそのまま捉える	重い裾。二次モーメントが大きくなりうる
tanh（位置で平均した挿入の評価）	$\bar{t}_c$	有界。受理率という意味（挿入の揺らぎの関係式）	指数の平均でないので、渦の形のエントロピーを捉えにくい
$\sqrt{\bar{\rho}}$（Paley–Zygmund の形の偏りの評価）	Y	二次モーメントが常に 1 以下で、形のエントロピーも捉えうる	位置・形どうしの重なりの評価が要る

チェス盤への集約。 平面の方向の鏡映正値性があれば、チェス盤の評価で $\mathbb{E}[\prod_{c\in\text{内側}} |\bar{t}_c|] \le \Lambda^{n}$、$\Lambda := (\mathbb{E}[\prod_{\text{全ての細胞}} |\bar{t}_c|])^{1/\#\text{細胞}}$ と、並進不変な一つの量に集約され、$\Lambda < 1$ なら面積則が出る、という筋があります 仮（根拠の在りか：鏡映正値性の扱いは 26-04・26-05。同じ構造は Kovács–Tomboulis の (13)(21) にある 典）。

足りないもの。 (i) 大偏差の段：$\Lambda < 1$ には、全ての細胞で同時に挿入がよく断られる事象が、細胞の数について指数的に稀であることが要ります。(ii) 紫外の段：受理率の下界が格子間隔に一様であることが要り、細い反転（25-04）では N とともに悪くなります。滑らかな挿入にすると、決まった写像は紫外で余分の費用を払うことが分かっています（25-07）。(iii) 二

次モーメントの上界：挿入比の揺らぎによる偏りの評価の V の上界。三つともこの本では示していません。

陰性対照。 四次元の $U(1)$ は弱結合で閉じ込めないので、この章の評価をそこに当てれば、必ずどこかで評価が効かなくなるはずです（例えば V が大きくなる）。その確かめは、この本ではまだ行っていません。

08 言えないこと

(a) 閉じ込め。この章の恒等式と不等式は、どれも閉じ込めを導きません。§07 の (i)〜(iii) が残ります。

(b) 連続の配位空間。定理は全て、有限の配位空間の条件・正の重みの条件・区画を反転する全単射の条件の下の有限の版で、$SU(2)$ の Haar 測度の上の版は、写像が測度を保つこと（あるいはヤコビアン）を足した同じ議論ですが、Lean の外です。

(c) 多数の細胞の二次モーメントの評価の仮定。「挿入で奇」の等式は、別々の細胞の挿入を合成した写像について、この章では示していません（Lean でも仮定）。

(d) 新しさ。どれも変数の付け替えと Cauchy–Schwarz の初等的な組み合わせで、先行文献との照合は済んでいません。和のアンサンブル・容器の恒等式は Mack–Petkova、Wilson ループを捩れた分配関数で押さえる形は Tomboulis–Yaffe、チェス盤の積は Kovács–Tomboulis の枠組みの中にあります。位置について平均した挿入と Cauchy–Schwarz の組み合わせは、Mermin–Wagner の型の証明で標準的な手法と記録されており、ゲージ理論では Chatterjee（arXiv:2602.00436）にも現れる、とされています（照合未了）。この章の結果に新しさは主張しません。

(e) §07 の見積もり。$\mathrm{Var}(\bar{\rho}) \approx VK/n \cdot V \sim e^{S_{\mathrm{inst}}} \cdot \sigma \sim e^{-S_{\mathrm{inst}}}/L^2$ は物理の見立てで、どれも証明ではありません。

(f) 陰性対照。四次元の $U(1)$ で評価が効かなくなることは、まだ確かめていません。

09 五分類の表と依存グラフ

表 2　この章の行（条件は有限の配位空間の条件・正の重みの条件・区画を反転する全単射の条件）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	挿入比の平均の恒等式：$\mathbb{E}[\rho] = 1$・$\mathbb{E}[\rho\sigma] = -\mathbb{E}[\sigma]$	初	§03	有限の配位空間の条件・正の重みの条件・区画を反転する全単射の条件。対合も可換性も使わない	InsertionIdentity（`Insertion.mean_one`・`Insertion.mean_rho_sigma`）（仮定：有限の配位空間の条件・正の重みの条件・区画を反転する全単射の条件・$\sigma = \pm 1$）
2	挿入比の揺らぎによる偏りの評価：$4\mathbb{E}[\sigma]^2 \le \mathrm{Var}(\bar{\rho})$	初	§03	有限の配位空間の条件・正の重みの条件・各 T_k が区画を反転する全単射の条件・族は空でない有限	InsertionIdentity（`Insertion.sector_bias_le`）（仮定：同左）
3	(4) の τ は対合	初	§04	区画を反転する全単射の条件	—
4	有界な挿入の恒等式：$\mathbb{E}[H] = \mathbb{E}[H \tanh(\Delta S/2)]$	初	§04	有限の配位空間の条件・正の重みの条件・τ は対合・H は奇	BoundedInsertion（`Bounded.single`）（仮定：同左）
5	挿入の揺らぎの関係式：$\mathbb{E}[t] \ge 0$・受理率 (6)	初	§04	有限の配位空間の条件・正の重みの条件・τ は対合	—
6	位置で平均した挿入の評価：(7)	初	§04	有限の配位空間の条件・正の重みの条件・対合・H は奇・別の細胞の因子が動かない・$\lvert H\rvert \le 1$	BoundedInsertion（`Bounded.averaged`・`Bounded.averaged_bound`）（仮定：同左）
7	平方根の挿入の恒等式：$\mathbb{E}[H\sqrt{\bar{\rho}}] = 0$	初	§05	有限の配位空間の条件・正の重みの条件・対合・H は奇	SecondMoment（`SecondMoment.sqrt_identity`）（仮定：同左）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
8	Paley–Zygmund の形の偏りの評価：(8) の第一式	初	§05	有限の配位空間の条件・正の重みの条件・対合の族・H は奇・$\lvert H\rvert \le 1$	SecondMoment（`SecondMoment.pz_bound`）（仮定：同左）
9	$\mathbb{E}[Y^2] \le 1$	初	§05	対合	—
10	多数の細胞の二次モーメントの評価：(9)	初	§05	有限の配位空間の条件・正の重みの条件・$\lvert H\rvert \le 1$・「挿入で奇」を仮定	MultiCell（`MultiCell.bound`・`MultiCell.expand_identity`）（仮定：同左。「挿入で奇」は Lean でも仮定）
11	細い挿入で板の閉じ込めの (10)	初	§06	板・N 固定・区画の和のアンサンブル	—（核は行 6 の束）
12	$\mathrm{Var}(\bar\rho) \approx VK/n$・$\sigma \sim e^{-S_{\mathrm{inst}}}/L^2$	読（物理）	§07	希薄な領域・半古典	—
13	チェス盤の積の構造	典	Kovács–Tomboulis の (13)(21)	鏡映正値性の下	—
14	チェス盤で Λ に集約・$\Lambda < 1$ なら面積則	仮	筋：§07・26-04・26-05	平面の方向の鏡映正値性の下	—

機械検査の欄の束は、この本の側の再検査で `sorry` を含まず、公理が標準の三つの部分集合であることが確かめられたものです。保証されるのは有限集合の上の和の代数だけです（23-13）。Lean の名は全ての章で「ファイル（名前空間.定理）」の形で書きます。名前空間 Insertion の定理はファイル InsertionIdentity に、Bounded の定理はファイル BoundedInsertion にあります。

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  初  E[ρ] = 1・E[ρσ] = −E[σ]                  三つの条件
 2  初  4E[σ]² ≤ Var(ρ̄) ⟸ 1                    Lean sector_bias_le
 3  初  向きを合わせた τ は対合                  全単射の条件
 4  初  E[H] = E[H t] ⟸ 3                        Lean Bounded.single
 5  初  揺らぎの関係式・受理率 ⟸ 3
 6  初  位置の平均 (7) ⟸ 4                       Lean averaged_bound
 7  初  E[H√ρ] = 0 ⟸ 3                           Lean sqrt_identity
 8  初  Paley–Zygmund (8) ⟸ 7                    Lean pz_bound
 9  初  E[Y²] ≤ 1 ⟸ 1・3
10  初  多数の細胞 (9)（「挿入で奇」を仮定）   Lean MultiCell.bound
11  初  細い挿入で板の閉じ込め ⟸ 6               板・N 固定
12  読  VK/n・e^(−S_inst)/L²（物理）⟸ 2
13  典  チェス盤の積の構造
14  仮  Λ に集約・Λ < 1 なら面積則 ⟸ 6・13      鏡映正値性の下
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。仮定の行はチェス盤の行（Λ に集約・$\Lambda<1$ なら面積則）だけで、どの行の前提にも入りません。多数の細胞の評価の「挿入で奇」は定理の言明の中の仮定で、別の行から来るものではありません。この章には閉じ込めの節点も、質量ギャップの節点もありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 有限の配位空間の条件・正の重みの条件・区画を反転する全単射の条件の下で $\mathbb{E}[\rho]=1$・$\mathbb{E}[\rho\sigma]=-\mathbb{E}[\sigma]$・$4\mathbb{E}[\sigma]^2\le \mathrm{Var}(\bar\rho)$	$\mathrm{Var}(\bar\rho)$ の上界（二次モーメント V の評価）
初 対合と奇な H について、tanh の形・揺らぎの関係式・位置の平均・$\sqrt{\rho}$ の形・Paley–Zygmund の形	大偏差の段（全ての細胞で同時に断られる事象の稀さ）。紫外の段（受理率の格子間隔に一様な下界）
初 板の閉じ込めの定理は細い挿入の特別な場合	T^2 を広げたときの閉じ込め。四次元の $U(1)$ の陰性対照
仮 チェス盤で一つの量 Λ に集約する筋	$\Lambda<1$ の証明

出典と再現

もの	種別	出典・道具
挿入比の平均の恒等式・挿入比の揺らぎによる偏りの評価・有界な挿入の恒等式・挿入の揺らぎの関係式・位置で平均した挿入の評価・平方根の挿入の恒等式・Paley–Zygmund の形の偏りの評価・多数の細胞の二次モーメントの評価・(10)	初	本文 §03〜§06 の証明。論文の草稿「Exact centre-vortex insertion identities in the twist-summed ensemble, and bounded, averaged and driven confinement bounds」（A-07 の渦の挿入の恒等式の論文）の定理と同じ内容
和のアンサンブル・容器の恒等式	典（間接）	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 125 (1980) 117（25-03 の通り、本文は未確認）
チェス盤の積の構造 (13)(21)	典	T. G. Kovács, E. T. Tomboulis, arXiv:hep-lat/0108017（Phys. Rev. D 65 (2002) 074501）
位置の平均と Cauchy–Schwarz の組み合わせ（ゲージ理論の例）	照合未了	S. Chatterjee, arXiv:2602.00436（書誌は確認済みの記録による。定理の対応は未照合）
Lean	Lean	InsertionIdentity（`Insertion.mean_one`・`Insertion.mean_rho_sigma`・`Insertion.sector_bias_le`）・BoundedInsertion（`Bounded.single`・`Bounded.multi`・`Bounded.averaged`・`Bounded.averaged_bound`）・SecondMoment（`SecondMoment.sqrt_identity`・`SecondMoment.pz_bound`）・MultiCell（`MultiCell.pushforward`・`MultiCell.expand_identity`・`MultiCell.bound`）。束が保証するのは有限和の代数だけ

この章で使った語 — 挿入写像・挿入比 ρ・区画に向きを合わせた対合 τ・tanh の因子 t・受理率・位置の平均・$\sqrt{\rho}$ の形・Paley–Zygmund の形・挿入で奇。意味は A-02 用語集 にあります（第 25 部の語は追加の予定）。

次に読む章：25-06 力学で駆動した挿入と流れの補題 — 写像を一度に当てる代わりに、熱浴の力学でゆっくり渦を入れると、有界な挿入の恒等式が仕事 W の形になります。

2026-10-15 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 25 部 二本目の道 — 空間の方向から 駆動した挿入・Crooks と Jarzynski・流れの補題 · Kiichi, Shiori and Rin

力学で駆動した挿入と流れの補題

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 25-03・2-08 にあります。

この章で分かること — 25-05 では、渦を一度に挿入する写像 τ から $\mathbb{E}[H] = \mathbb{E}[H\tanh(\Delta S/2)]$ を出しました。挿入の費用 ΔS は細い渦では面積に比例して大きく、評価はほとんど役に立ちません。この章では、挿入を一度に行う代わりに、渦の面の結合を少しずつ反転させながら容器の中だけを熱浴で更新する「駆動した挿入」を考え、(1) 経路の空間の上で時間反転と区画の反転を合わせたものが対合になり、重みの比が e^{-W}（W は経路に沿った仕事）になること（Crooks の関係）、(2) そこから $\mathbb{E}[H] = \mathbb{E}[H\tanh(W/2)]$（駆動した恒等式）と Jarzynski の等式が出ること、(3) 区画を反転させる定常な核の一歩の反転の確率 a について $\theta \le 1 - a$（流れの補題）と、反転の確率 $\le 1 - \theta^2$、(4) 容器を同時に動かすと $\mathbb{E}\prod\theta \le \mathbb{P}(\text{どれも反転しない})$、を示します。最後に、この保証が一段の核では $\theta_0 \sim \frac{1}{2}$ までしか届かず、移り変わりの帯（26-01）の試験には使えないことを書きます。

前提となる章 — 25-03（容器・枠・区画の偏り θ・容器の恒等式）・25-05（有界な挿入の恒等式・挿入の揺らぎの関係式・位置で平均した挿入の評価）・26-01（帯の正しい形 $\ln(1/\theta(L,L)) \ge cL^2$）。第 2 部の 2-08（Gibbs 測度・自由エネルギー）と、第 5 部の 5-07（熱浴・詳細つり合い）。

先に言うこと — 定理は全て「有限の配位空間・正の重み・容器の中だけを動かす核」の上の文で、各行にその条件を書きます。連続の $SU(2)$ の配位空間への移し方は 25-05 §02 と同じ（和を Haar 測度の積分に置き換える）で、Lean の外です。Crooks の関係と Jarzynski の等式は非平衡の統計力学で知られた結果で、ここでは格子の区画の和のアンサンブルに当てはめるために証明を書き下します。この章のどの不等式からも、閉じ込めは出ません。

この章の順序

1. 要約 — 渦をゆっくり入れる
2. 設定 — 駆動の手続きと経路の空間
3. Crooks の対合と駆動した恒等式 — Jarzynski の等式・受理率・多数の細胞
4. 二つの極限 — 一度に入れる・準静的に入れる

5. 切った測度の公式
6. 反転の確率の補題と流れの補題
7. 同時の反転の評価と、この保証の限界（表 1）
8. 言えないこと
9. 五分類の表と依存グラフ — 表 2

01

要約 — 渦をゆっくり入れる

1. 25-05 の挿入は、渦の面の上の結合の符号を一度に反転させる操作でした。そのときの費用 ΔS は、細い渦の面では面の上のプラケットの数（T^2 の面積 N_T^2）に比例し、評価の因子 $\tanh(\Delta S/2)$ はほとんど 1 です。
2. そこで、結合を m 段に分けて少しずつ反転させ、各段で容器の中だけを熱浴で更新します。周りの揺らぎが新しい結合に合わせて緩むので、払う仕事 W は下がります。
3. 経路の空間で「時間を逆にたどり、区画を反転する」写像は対合で、重みの比は e^{-W} です（Crooks の関係）典。25-05 の有界な挿入の恒等式をこの対合に当てると $\mathbb{E}[H] = \mathbb{E}[H\tanh(W/2)]$ が出ます 初。
4. 同じ関係から、手続きの段数 m に依らず $\mathbb{E}[e^{-W} \mid \text{枠}] = Z_-/Z_+$（Jarzynski の等式）典。段数 0 では $W = \Delta S$ で 25-05 に戻ります。
5. 区画を反転させる任意の定常な核について、一歩で区画が反転する確率 a は $1-\theta$ 以下です。言い換えると $\theta \le 1-a$（流れの補題）初。より弱い形 $a \le 1-\theta^2$ もあります 初。
6. 枠を固定すると容器は独立なので、全ての容器で同時に核を走らせると $\mathbb{E}\prod_t \theta_t \le \mathbb{P}(\text{どの容器も反転しない})$ です 初。右辺はモンテカルロで測れる量で、Wilson ループの上界を正しい向きに推定できます。
7. ただし帯の形には $a \ge 1 - e^{-cL^2}$、すなわち順と逆の経路の重なりを面積の指数で 1 に近づける核が要り、測った一段の核の a は 0.6〜0.73 程度（受理 $\min(1, e^{-W})$）で、この保証で言えるのは $\theta \le \theta_0$（1 未満の定数）までです 読。帯の形 $\theta \le e^{-cL^2}$ の試験には使えません。正しい用途は、T^2 を固定した板の張力の下界です。

02

設定 — 駆動の手続きと経路の空間

25-03・25-04 の区画の和のアンサンブルを使います。リンクの $SU(2)$ の変数 U と、プラケットの ± 1 の変数 z（余閉）の上の重み $w(U,z)=\exp\!\big(\tfrac{\beta}{2}\sum_p z_p \operatorname{tr} U_p\big)$ です。板 $T^2_{N_T}\times(\mathbb{Z}/M)^2$ の $(3,4)$ 平面のプラケット p について、渦の面 $S_p=\{p\}\times T^2$ の z を全て反転すると、p を囲む Wilson ループに渡る区画の符号が反転します（25-04）。p のまわりに容器 $D_p\times T^2$（D_p は $(3,4)$ 平面の円板）を取り、容器の外の変数を**枠** Φ と呼びます。

この章を通して、次の三つを置きます。

- **有限の配位空間の条件** X。連続の場合は 25-05 §02 の注意のとおり。
- **正の重みの条件** $w=e^{-S}>0$。
- **容器の中だけを動かす核**：以下の核 K は容器の内側の変数だけを更新し、枠を変えない。

結合の補間。 $\lambda\in[0,1]$ について、S_p の上のプラケットの結合だけを $1-2\lambda$ 倍した作用を S_λ とします。$S_0=S$ で、$S_1(x)=S(Rx)$（R は S_p の上の z の反転）です。S_λ はゲージ不変です。

核。 K_λ を、容器の内側のリンクだけを動かす熱浴の遷移核で、e^{-S_λ} について可逆（詳細つり合い）なものとします：

$$e^{-S_\lambda(x)}K_\lambda(x,y)=e^{-S_\lambda(y)}K_\lambda(y,x). \tag{1}$$

順の手続き。 $\lambda_k=k/m$（$k=0,\dots,m$）。区画が $+$ の配位 x_0 から始め、$k=1,\dots,m$ の各段で「結合を $\lambda_{k-1}\to\lambda_k$ に変え、そのときの作用の変化を仕事に加え、次に K_{λ_k} で $x_{k-1}\to x_k$ と更新する」。仕事は

$$W=\sum_{k=1}^{m}\big[S_{\lambda_k}(x_{k-1})-S_{\lambda_{k-1}}(x_{k-1})\big]. \tag{2}$$

最後に R を当てた Rx_m は区画が $-$ の配位です。区画が $-$ の配位からは、同じことを R で写した逆向きの手続き（λ を $1\to0$）で行います。$m=0$ なら更新は無く、$W=S_1(x_0)-S_0(x_0)=\Delta S$ で 25-05 の一度の挿入です。

経路の空間。 $\Omega=\{(s,x_0,\dots,x_m)\}$（$s=\pm$ は始点の区画）とし、区画 $+$ から始まる経路の重みを

$$\hat W(+,x_0,\dots,x_m)=e^{-S_0(x_0)}\prod_{k=1}^{m}K_{\lambda_k}(x_{k-1},x_k), \tag{3}$$

区画 $-$ から始まる経路の重みを、逆向きの手続きの同じ形の積で定めます。核の行の和は 1 なので、Ω の上の測度を始点に射影すると元の測度に戻ります。したがって、始点だけで決まる量の期待値は、Ω の上で計算しても変わりません [初]。

対合。 $\iota(+,x_0,\dots,x_m)=(-,Rx_m,\dots,Rx_0)$：経路を逆にたどり、区画を反転します（$-$ から始まる経路にはその逆）。$\iota\circ\iota=\mathrm{id}$ です。重みが正の経路は、(1) によって重みが正の経路に写ります。

03

Crooks の対合と駆動した恒等式

Crooks の関係

有限の配位空間の条件・正の重みの条件・容器の中だけを動かす核と (1) の下で、重みが正の全ての経路 ω について

$$\frac{\hat{W}(\iota\omega)}{\hat{W}(\omega)}=e^{-W(\omega)},\qquad W\circ\iota=-W. \tag{4}$$

[典] この形の関係は Crooks によるもので（出典の表）、ここでは格子の手続きに合わせた標準の計算を書き下します。証明。$\omega=(+,x_0,\dots,x_m)$ とします。逆向きの経路の重みは、R の下で S_λ が $S_{1-\lambda}$ に写ることを使って $+$ の座標に戻すと $e^{-S_1(x_m)}\prod_{k=1}^{m}K_{\lambda_k}(x_k,x_{k-1})$ です。(1) で各因子を $K_{\lambda_k}(x_{k-1},x_k)\,e^{S_{\lambda_k}(x_k)-S_{\lambda_k}(x_{k-1})}$ に置き換えると、比の指数は

$$S_0(x_0)-S_1(x_m)+\sum_{k=1}^{m}\bigl[S_{\lambda_k}(x_k)-S_{\lambda_k}(x_{k-1})\bigr]=\sum_{k=1}^{m}S_{\lambda_{k-1}}(x_{k-1})-\sum_{k=1}^{m}S_{\lambda_k}(x_{k-1})=-W$$

です（和の添字を一つずらし、$S_0(x_0)$ を $k=1$ の項、$-S_1(x_m)$ を $k=m$ の項と打ち消させる）。逆向きの経路で (2) を計算すると、同じ項が逆の符号で並ぶので $W\circ\iota=-W$。∎

Crooks の関係は、25-05 の (5) の「重みの比が $e^{-\Delta S}$ の対合」が、経路の空間の上で「重みの比が e^{-W} の対合」に置き換わったことを言っています。そこで 25-05 の有界な挿入の恒等式がそのまま使えます。

駆動した挿入の恒等式（駆動した恒等式）

有限の配位空間の条件・正の重みの条件・容器の中だけを動かす核と (1) の下で、$H=h(\Phi)\,\sigma$（h は枠だけの関数、σ は容器の区画の符号）とすると

$$\mathbb{E}[H] = \mathbb{E}_{\Omega}\big[H\tanh(W/2)\big]. \tag{5}$$

初 証明。H を始点で評価した Ω の上の関数とみます。核と R は枠を変えないので h は ι で不変、σ は反転し、$H\circ\iota = -H$。Ω の上の重み $\hat{W}$ と対合 ι について、25-05 の (5) の因子は (4) により $(\hat{W}-\hat{W}\circ\iota)/(\hat{W}+\hat{W}\circ\iota) = (1-e^{-W})/(1+e^{-W}) = \tanh(W/2)$ です。25-05 の有界な挿入の恒等式から $\mathbb{E}_{\Omega}[H] = \mathbb{E}_{\Omega}[H\tanh(W/2)]$。左辺は始点だけで決まるので $\mathbb{E}[H]$ に等しい（§02）。∎

Lean：核の部分は BoundedInsertion（`Bounded.single`）（仮定：有限集合・対合・$w>0$・H は奇。結論：$\sum wHt = \sum wH$）を、有限の経路の空間 Ω（重みが正の経路に制限）に当てたものです。経路の空間の構成とCrooks の関係は Lean の外です。

Jarzynski の等式

有限の配位空間の条件・正の重みの条件・容器の中だけを動かす核と (1) の下で、段数 m に依らず

$$\mathbb{E}\big[e^{-W}\,\big|\,\Phi,\ \sigma=+\big] = \frac{Z_{-}(\Phi)}{Z_{+}(\Phi)}, \tag{6}$$

ここで $Z_{\pm}(\Phi)$ は枠 Φ を固定した区画 $\pm$ の分配関数です。

典 Jarzynski によるものです（出典の表）。証明。(4) から $\sum_{\omega}\hat{W}(\omega)e^{-W(\omega)} = \sum_{\omega}\hat{W}(\iota\omega)$。右辺は区画 $-$ から始まる経路の重みの総和で、核の行の和が 1 なので $Z_{-}(\Phi)$。左辺を区画 $+$ の経路の重みの総和 $Z_{+}(\Phi)$ で割れば (6)。∎

(6) は、手続きの速さ（段数 m）に依らない量で、数値の検算に使えます。一方、e^{-W} の平均は稀な小さい W に支配されるので、少ない標本では推定が大きく揺らぎます（25-08 の表で $-\ln\langle e^{-W}\rangle$ が負になる行があるのはそのためです）。

駆動した挿入の受理率の系（受理率）

駆動した挿入の恒等式の設定で $1-\mathbb{E}_{\Omega}[\tanh(W/2)] = 2\,\mathbb{E}_{\Omega}\big[1/(1+e^{W})\big]$。右辺は、駆動した経路の終点を Barker 型の規則で受け入れる一手の受理率の平均の 2 倍です。

初 $1-\tanh(W/2) = 2/(1+e^{W})$ の期待値を取るだけです。25-05 の挿入の揺らぎの関係式の ΔS を W に置き換えたものです。

多数の細胞。 互いに離れた細胞 c（容器 $D_c \times T^2$）ごとに、位置の集合 P（空でない有限集合）から位置 P_c を一様に、互いに独立に選び、選んだ位置で駆動した挿入を行います。細胞ごとの経路は、始点の配位の中の自分の容器とその周りだけを読みます。

多数の細胞の駆動した評価

有限の配位空間の条件・正の重みの条件・容器の中だけを動かす核と (1) の下で、容器が互いに離れていて（どのプラケットも二つの容器の内側にまたがらない）、$H = h(\Phi)\prod_c \sigma_c$、$|H| \le 1$ とすると

$$|\mathbb{E}[H]| \;\le\; \mathbb{E}\Big[\prod_{c} \frac{1}{|P|}\sum_{p\in P} \mathbb{E}\big[\,|\tanh(W_{c,p}/2)| \;\big|\; x_0\big]\Big]. \tag{7}$$

初 証明。始点 x_0、位置の選択 (P_c)、細胞ごとの経路からなる拡大した空間を作ります。細胞 d の対合 ι_d は、細胞 d の経路を逆にたどり、始点の容器 d の内側を経路の終点の反転に置き換えます。容器が離れているので、枠を止めた重みは容器ごとの積に分かれ、ι_d は他の細胞の経路の重みと仕事を変えません。よって ι_d の重みの比は e^{-W_d} で、他の細胞の因子 $\tanh(W_c/2)$（$c \neq d$）は ι_d で動きません。25-05 の位置で平均した挿入の評価の証明（細胞を一つずつ足す帰納）がそのまま通り、$\mathbb{E}[H] = \mathbb{E}[H\prod_c \tanh(W_{c,P_c}/2)]$。絶対値を取り、始点を止めると細胞ごとの経路と位置の選択が独立であることを使えば (7)。∎

(7) は 25-05 の位置で平均した挿入の評価と違い、位置の平均の中に絶対値が入っています。位置どうしの符号の打ち消しを使わない分だけ弱い形です。

04

二つの極限 — 一度に入れる・準静的に入れる

段数 0。 $m = 0$ では $W = \Delta S$ で、駆動した挿入の恒等式は 25-05 の有界な挿入の恒等式です 初。細い渦では ΔS が T^2 の面積に比例し、$\tanh(W/2)$ はほとんど 1 です。

準静的の極限。 $m \to \infty$（ゆっくり駆動する）で、W は枠を止めた容器の条件つきの自由エネルギー $\Delta F_D(\Phi) = \ln\big(Z_+(\Phi)/Z_-(\Phi)\big)$ に近づく、と見込まれます 読 （物理。熱力学積分の標準的な見立てで、核が各 λ で十分よく混ざることを要する。この本では証明しません）。そのとき駆動した挿入の恒等式の因子は $\tanh(\Delta F_D/2) = \theta_D(\Phi)$ になり、25-03 の容器の恒等式（Mack–Petkova の恒等式）に戻ります。手続きの長さ m が、一度に入れる粗い評価と、正確な条件つきの自由エネルギーとをつなぐ、という読み方です。

数値の姿。 $SU(2)$、$\beta = 2.3$、板 $2 \times 2 \times 8 \times 8$、捩れ $n_{12} = 1$、円板の半径 2、6 配位 × 4 位置で、段数 $m = 0, 4, 16$ の仕事の平均は 10.7・6.5・2.9、$\tanh(W/2)$ の平均は 0.990・0.968・0.688 でした 読 。段数を増やすと仕事が下がり、因子が 1 から離れます。他の β・N_T・容器の半径の記録は 25-08 にまとめます。容器が渦の大きさより小さいと、段数を増やしても仕事は下がりきりません（同じ表）。

05

切った測度の公式

容器 $D \times T^2$ の中で、反転の面 $S = \{p_0\} \times T^2$ の上のプラケットの項だけを作用から除いた測度（枠 Φ を固定）を μ_{cut} とし、$X := \sum_{p \in S} z_p \operatorname{tr} U_p$（$z$ は区画 $+$ の代表）と置きます。面の上の重みは $e^{(\beta/2) z_p \operatorname{tr} U_p}$ で、区画 $-$ では S の上の z が反転するので、

切った測度の公式

$$\frac{Z_{\pm}(\Phi)}{Z_{\mathrm{cut}}(\Phi)} = \mathbb{E}_{\mathrm{cut}}\left[e^{\pm \beta X/2}\right], \qquad \theta(\Phi) = \frac{\left|\mathbb{E}_{\mathrm{cut}}[\sinh(\beta X/2)]\right|}{\mathbb{E}_{\mathrm{cut}}[\cosh(\beta X/2)]}. \tag{8}$$

初 第一式は定義から、第二式は $\theta = |Z_+ - Z_-|/(Z_+ + Z_-)$ に第一式を入れて $e^{a} \mp e^{-a} = 2\sinh a,\ 2\cosh a$ を使うだけです。

Lean FlipLemma（`FlipLemma.cut_formula`）（仮定：有限集合の上の実数値の重み v（非負性も使わない）・実数値の X・実数 b。結論：$\sum v e^{bX/2} - \sum v e^{-bX/2} = 2\sum v \sinh(bX/2)$ と、和の形の cosh の等式）。保証されるのは和の代数だけです。

μ_{cut} には区画がありません。$\theta(\Phi)$ は「枠の情報が、切った測度の中を容器の大きさだけ渡って面に届く強さ」と読めます。駆動した挿入は、$+ \to$ **切った測度** $\leftarrow -$ という対称な形にも組めます（Crooks の関係の対合と両立します）。

06

反転の確率の補題と流れの補題

枠 Φ を止めた条件つきの測度を μ_Φ、容器の区画の符号を $\sigma \in \{\pm 1\}$、$m_\Phi = \mathbb{E}[\sigma \mid \Phi]$、$\theta(\Phi) = |m_\Phi|$ とします。K を容器の中だけを動かす Markov 核とし、$(X, X') \sim \mu_\Phi \otimes K$（$X$ を μ_Φ から引き、K で一歩進めたものが X'）とします。

反転の確率の補題

K が μ_Φ について**定常**（$\sum_x \mu_\Phi(x) K(x,y) = \mu_\Phi(y)$）なら

$$\mathbb{P}\big(\sigma(X') \neq \sigma(X)\big) \;\le\; 1 - m_\Phi^2 = 1 - \theta(\Phi)^2. \tag{9}$$

初 証明。$\sigma = \pm 1$ なので $\mathbb{P}(\sigma(X') \neq \sigma(X)) = \sum_{x,y} \mu_\Phi(x) K(x,y) (\sigma(x) - \sigma(y))^2 / 4$。$(a-b)^2 \le 2(a-m)^2 + 2(b-m)^2$ で上から押さえ、行の和が 1 であることと定常性で二つの和をどちらも $\sum_x \mu_\Phi(x)(\sigma(x)-m)^2 = 1 - m^2$ に直すと、$\frac{1}{2}(1-m^2) + \frac{1}{2}(1-m^2)$。∎ 可逆性は使いません。

Lean FlipLemma（`FlipLemma.flip_le`）（仮定：有限集合・$w \ge 0$・$\sum w = 1$・$K \ge 0$・行の和が 1・定常性 $\sum_x w_x K_{xy} = w_y$・$\sigma^2 = 1$。結論：$\sum_{x,y} w_x K_{xy} (\sigma_x - \sigma_y)^2/4 \le 1 - (\sum w\sigma)^2$。

正の核の反転の確率の系

K が μ_Φ について可逆で、$L^2(\mu_\Phi)$ の作用素として正（$\langle f, Kf\rangle \ge 0$）なら、(9) の右辺は $(1-\theta^2)/2$ に下がる。

初 証明。$\mathbb{P}(\text{反転}) = (1 - \langle \sigma, K\sigma\rangle)/2$（内積は μ_Φ で）。$\tilde\sigma = \sigma - m$ と置くと、K の行の和が 1 で可逆なので $\langle \sigma, K\sigma\rangle = \langle \tilde\sigma, K\tilde\sigma\rangle + m^2 \ge m^2$。∎ この系には Lean の検査がありません。

次の形のほうが鋭く、この章で主に使います。

流れの補題

反転の確率の補題の設定（定常な K）で、一歩で区画が反転する確率を $a(\Phi)$ とすると

$$a(\Phi) \;\le\; 1 - \theta(\Phi), \qquad \text{すなわち} \qquad \theta(\Phi) \;\le\; 1 - a(\Phi). \tag{10}$$

初 証明。$+ \to -$ の流れ $A = \mathbb{P}(\sigma(X) = +, \sigma(X') = -)$ と $- \to +$ の流れ B を取ります。定常性から X' の区画の分布は X と同じなので $A = B$。また $A \le \mathbb{P}(\sigma(X) = +) = (1+m)/2$、$B \le (1-m)/2$。よって $a = A + B = 2A \le 2\min\big((1+m)/2, (1-m)/2\big) = 1 - |m|$。∎ $\theta \le 1$ なので $1 - \theta \le 1 - \theta^2$ で、(10) は (9) より鋭い形です。

Lean FluxLemma（`FluxLemma.flip_le_one_sub_abs`）（仮定：有限集合・$w \ge 0$・$\sum w = 1$・$K \ge 0$・行の和が 1・定常性・σ の値は 1 か -1。結論：$\sum_{x,y} w_x K_{xy} (\sigma_x - \sigma_y)^2/4 \le 1 - |\sum w\sigma|$。

使い方。 区画を反転させる定常な核で、反転の確率が c 以上のものを作れれば $\theta \le 1 - c$ です。駆動した挿入を提案とし、終点を確率 $\min(1, e^{-W})$ で受け入れる核は、Crooks の関係から μ_Φ について可逆（よって定常）で、その反転の確率は受理率です。受理率は $\mathbb{P}(W \le w_0)\, e^{-w_0}$ 以上なので、e^{-W} の平均を制御する必要はなく、「安い仕事が正の確率で起こる」ことだけで足ります 初 。

07

同時の反転と、この保証の限界

互いに離れた容器の有限集合 S を取り、各容器 $t \in S$ の区画の偏りを $\theta_t(\Phi)$ とします（枠 Φ は全ての容器の外の変数）。

同時の反転の評価

有限の配位空間の条件・正の重みの条件の下で、容器が互いに離れていて、各容器 t に、その容器の中だけを動かす定常な核 K_t を取り、全ての容器で同時に一歩ずつ動かすと

$$\mathbb{E}\Big[\prod_{t\in S}\theta_t(\Phi)\Big] \;\le\; \mathbb{P}\big(S\ \text{のどの容器も反転しない}\big). \tag{11}$$

初 証明。枠を止めると容器の内側は条件つきで独立（25-03 の条件つきの独立性）で、核も容器ごとに独立に動くので、$\mathbb{P}(\text{どれも反転しない}\,|\,\Phi)=\prod_t(1-a_t(\Phi))$。流れの補題から各因子は $\theta_t(\Phi)$ 以上。期待値を取る。∎

25-03 の容器の恒等式は $|\langle W(C)\rangle| \le \mathbb{E}\prod_t\theta_t$（$C$ の内側の容器について）の形でした。(11) と合わせると、Wilson ループの上界を、モンテカルロで測れる量 $\mathbb{P}(\text{どれも反転しない})$ で**正しい向きに**押さえられます 初 。

限界（大事な注意）。 (10) から言えるのは $\theta \le 1-a$ です。一段の核（駆動した挿入を一回提案して受け入れるか決める核）の反転の確率 a は、受理 $\min(1,e^{-W})$ の核で測った範囲では 0.6〜0.73 程度です 計算 （25-08 の表 1・表 2 の生の W から出し直した値。表の受理率の列は Barker 型 $1/(1+e^{W})$ の平均で、その天井 $1/(1+e^{\Delta F}) \le \frac{1}{2}$ は受理の規則のもので、核の限界ではありません 紙 Lean ）。そのため、大きさ L の容器で言えるのは $\theta \le \theta_0$（θ_0 は 1 未満の定数）までです。これが L に一様に成り立っても、出るのは

$$\sigma \;\ge\; \frac{\ln(1/\theta_0)}{L^2} \;\longrightarrow\; 0 \qquad (L\to\infty) \tag{12}$$

だけで、これは 26-01 の「弱い形」（$U(1)$ も満たす形）そのものです 初 。帯の正しい形 $\theta(L,L)\le e^{-cL^2}$ を (10) で示すには、$a \ge 1-e^{-cL^2}$ となる核、つまりほとんど確実に区画を反転させる核が要ります 初 （(10) の書き直し）。受理率は順と逆の経路の測度の重なり O で挟まれ（$e^{-\Delta F}O \le a_F \le \min(e^{-\Delta F},O)$、混合した核で $(1-\theta)O \le a \le 1-\theta$） 紙 Lean （LatticeGaugeAcceptanceSandwich（overlap_sandwich・mixture_sandwich）。仮定は Crooks 型の関係 $P_F e^{-W} = e^{-\Delta F}P_R$）、$a \ge 1-e^{-cL^2}$ は $O \ge 1-e^{-cL^2}$、散逸で言えば

$D \lesssim e^{-2cL^2}$ の程度を求めます 読 （Pinsker の不等式の逆向きの読み）。一段の核でそれを作る見込みは立っていません。

したがって、**同時の反転による保証は、移り変わりの帯の数値的な試験には使えません**。この道具で測った記録（25-08 §06）も、帯の数値的な姿としては読めません。正しい用途は、T^2 の大きさ L を固定した板の張力の下界と、チェス盤の密度 κ_{cb}（26-05）の上からの推定です。

表 1　この章の評価の、何が言えて何が言えないか（条件は有限の配位空間の条件・正の重みの条件・容器の中だけを動かす核）

評価	形	言えること	言えないこと
駆動した恒等式（駆動した挿入の恒等式・多数の細胞の駆動した評価）	$\mathbb{E}[H] = \mathbb{E}[H\tanh(W/2)]$	段数を増やすと因子が 1 から離れうる（数値）	因子の上界が L に一様であること
Jarzynski の等式	$\mathbb{E}[e^{-W}] = Z_-/Z_+$	数値の検算	少ない標本での精度（稀な事象に支配される）
反転の確率（反転の確率の補題）	$a \le 1-\theta^2$	$\theta \le \sqrt{1-a}$	—（流れの補題より弱い）
流れの補題	$\theta \le 1-a$	T^2 を固定した板の張力の下界	一段の核では $\theta_0 \sim \frac{1}{2}$ まで。帯の形 e^{-cL^2} は出ない
同時の反転の評価	$\mathbb{E}\prod\theta \le \mathbb{P}(\text{反転なし})$	Wilson ループの上界の正しい向きの推定量	帯の数値的な試験

08 言えないこと

(a) 閉じ込め。この章の恒等式と不等式は、どれも閉じ込めを導きません。駆動した挿入の恒等式・多数の細胞の駆動した評価の因子が L と格子間隔に一様に 1 から離れること、あるいは a が 1 に近い核が要り、どちらもこの本では示していません。

(b) 準静的の極限。$m \to \infty$ で $W \to \Delta F_D$ となることは §04 の見立てで、核の混ざり方の評価を含む証明はこの本にありません。

(c) 連続の配位空間。定理は全て、有限の配位空間の条件の下の有限の版です。$SU(2)$ の Haar 測度の上の版は、熱浴の核の可逆性と経路の空間の測度を連続の場合に書き直す必要があり、Lean の外です。

(d) 一段の核の限界。測った核の a（受理 $\min(1, e^{-W})$ で 0.6〜0.73）は測定の読みで、定理ではありません。帯の形に届かないという結論は、この読みではなく $a \ge 1 - e^{-cL^2}$ が要るという (10) の書き直し（表 2 の「弱い形しか出ない」の行）に依ります。25-08 の表の受理率が $\frac{1}{2}$ の下に留まるのは Barker 型の規則の天井です。逆に a が 1 に近い核があれば (10) はそのまま使えますが、その構成は知られていません。

(e) 新しさ。Crooks の関係と Jarzynski の等式は既知で、区画の和のアンサンブルへの当てはめと、反転の確率の補題・流れの補題・同時の反転の評価は初等的です。区画を反転させる非平衡の提案で受理率を上げる手法は、モンテカルロの文献で tempered transitions や非平衡の候補の手法として知られています（照合未了）。この章の結果に新しさは主張しません。

09

五分類の表と依存グラフ

表 2　この章の行（条件は有限の配位空間の条件・正の重みの条件・容器の中だけを動かす核）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	経路の空間の始点の周辺分布は元の測度	初	§02	有限の配位空間の条件・正の重みの条件・容器の中だけを動かす核・核の行の和が 1	—
2	Crooks の関係：$\hat{W} \circ \iota / \hat{W} = e^{-W} \cdot W \circ \iota = -W$	典	§03・Crooks	有限の配位空間の条件・正の重みの条件・容器の中だけを動かす核・(1) の詳細つり合い	—
3	駆動した挿入の恒等式：$\mathbb{E}[H] = \mathbb{E}_{\Omega}[H \tanh(W/2)]$	初	§03	有限の配位空間の条件・正の重みの条件・容器の中だけを動かす核・(1)・$H = h(\Phi)\sigma$	BoundedInsertion（`Bounded.single`）を Ω に当てる（仮定：有限・対合・$w > 0$・H は奇。Ω の構成は Lean の外）
4	Jarzynski の等式（段数に依らない）	典	§03・Jarzynski	有限の配位空間の条件・正の重みの条件・容器の中だけを動かす核・(1)・枠を止めて	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
5	駆動した挿入の受理率の系：$1-\mathbb{E}[\tanh(W/2)]=2\times$受理率	初	§03	行 3 の設定	—
6	多数の細胞の駆動した評価：(7)	初	§03	容器が離れている・$\lvert H\rvert\le 1$・位置を独立に一様に選ぶ	—（帰納の型は 25-05 の BoundedInsertion（`Bounded.averaged`））
7	$m\to\infty$ で $W\to\Delta F_D(\Phi)$	読（物理）	§04	核が各 λ で十分混ざる	—
8	段数とともに仕事が下がる（$\beta=2.3$、$2\times 2\times 8\times 8$）	読	§04・25-08	$SU(2)$・6 配位 × 4 位置	—
9	切った測度の公式 (8)	初	§05	枠を止めて・反転の面の項を除く	FlipLemma（`FlipLemma.cut_formula`）（仮定：有限集合・実数値の v・X・b）
10	反転の確率の補題：反転の確率 $\le 1-\theta^2$	初	§06	定常な核（可逆は不要）	FlipLemma（`FlipLemma.flip_le`）（仮定：$w\ge 0$・$\sum w=1$・$K\ge 0$・行の和 1・定常・$\sigma^2=1$）
11	正の核の反転の確率の系：正の核なら $(1-\theta^2)/2$	初	§06	可逆で正の作用素	—
12	流れの補題：$\theta\le 1-a$	初	§06	定常な核（可逆は不要）	FluxLemma（`FluxLemma.flip_le_one_sub_abs`）（仮定：$w\ge 0$・$\sum w=1$・$K\ge 0$・行の和 1・定常・$\sigma=\pm 1$）
13	受け入れ $\min(1,e^{-W})$ の核は定常、受理率 $\ge \mathbb{P}(W\le w_0)e^{-w_0}$	初	§06	行 2 の設定	—
14	同時の反転の評価：$\mathbb{E}\prod\theta_t\le\mathbb{P}$(反転なし)	初	§07	容器が離れている・定常な核を容器ごとに	—（核は行 12）
15	一段の核の a は測った範囲で 0.6〜0.73（受理 $\min(1,e^{-W})$。表の Barker 型の列は規則の天井 $\frac{1}{2}$ の下）	読	§07・25-08	測った β・N_T・容器の範囲	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
16	(10) から出るのは $\sigma \geq \ln(1/\theta_0)/L^2$（弱い形）。帯の形には $a \geq 1 - e^{-cL^2}$ が要る	初	§07	$\theta \leq 1 - a$ だけを使う場合	—

機械検査の欄の束は、この本の側の再検査で `sorry` を含まず、公理が標準の三つの部分集合であることが確かめられたものです。保証されるのは有限集合の上の和の代数だけです（23-13）。`flip_le` と `cut_formula` はファイル FlipLemma に、`flip_le_one_sub_abs` はファイル FluxLemma にあります。

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  初  経路の空間の始点の周辺分布 = 元の測度          核の行の和 1
 2  典  重みの比 e^(−W)・W∘ι = −W                      詳細つり合い (1)
 3  初  E[H] = E[H tanh(W/2)] ⟸ 1・2                    Lean Bounded.single を Ω に
 4  典  E[e^(−W) | 枠] = Z₋/Z₊ ⟸ 2
 5  初  1 − E[tanh(W/2)] = 2 × 受理率 ⟸ 3
 6  初  多数の細胞 (7) ⟸ 2                             容器が離れている
 7  読  m → ∞ で W → ΔF_D（物理）⟸ 4
 8  読  段数とともに仕事が下がる                        β = 2.3・2×2×8×8
 9  初  切った測度の公式                                Lean cut_formula
10  初  反転の確率 ≤ 1 − θ²                             Lean flip_le
11  初  正の核なら (1 − θ²)/2 ⟸ 10
12  初  θ ≤ 1 − a                                       Lean flip_le_one_sub_abs
13  初  min(1, e^(−W)) の核は定常・受理率の下界 ⟸ 2
14  初  E∏θ ≤ P(反転なし) ⟸ 12                          容器が離れている
15  読  一段の核の a は 0.6〜0.73（Metropolis 型）     測った範囲
16  初  弱い形しか出ない・帯には a ≥ 1 − e^(−cL²) ⟸ 12
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。この章に仮定（仮）の行はありません。一段の核の受理の読みは「弱い形しか出ない」の行の前提に入れていません（その行は $\theta \leq 1 - a$ だけから出る書き直しで、受理の読みはそれをどこまで使えるかの判断です）。閉じ込めの節点も、質量ギャップの節点もありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 有限の配位空間の条件・正の重みの条件・容器の中だけを動かす核の下で駆動した恒等式 $\mathbb{E}[H] = \mathbb{E}[H \tanh(W/2)]$ と多数の細胞の形	因子 $\tanh(W/2)$ の、L と格子間隔に一様な上界

言えている	言えていない
典 Crooks の関係・Jarzynski の等式（格子の手続きに書き下した）	準静的の極限 $W \to \Delta F_D$ の証明
初 定常な核について $a \le 1-\theta^2$・$\theta \le 1-a$・同時の反転 $\mathbb{E}\prod\theta \le \mathbb{P}$(反転なし)	a が 1 に近い核の構成。帯の形 $\theta \le e^{-cL^2}$
読 測った一段の核は $a \ge 1-e^{-cL^2}$ から遠い（帯の試験には使えない）	連続の配位空間での同じ定理（Lean の外）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
Crooks の関係（経路の重みの比 e^{-W}）	典	G. E. Crooks, “The entropy production fluctuation theorem and the nonequilibrium work relation for free energy differences”, Phys. Rev. E 60 (1999) 2721, arXiv:cond-mat/9901352（書誌は arXiv の頁で確認。Markov 連鎖の形の原典は未確認）
Jarzynski の等式	典	C. Jarzynski, “A nonequilibrium equality for free energy differences”, Phys. Rev. Lett. 78 (1997) 2690, arXiv:cond-mat/9610209（書誌は arXiv の頁で確認）
駆動した挿入の恒等式・駆動した挿入の受理率の系・多数の細胞の駆動した評価・切った測度の公式・反転の確率の補題・正の核の反転の確率の系・流れの補題・同時の反転の評価	初	本文 §03〜§07 の証明。駆動した挿入の恒等式は論文の草稿「Exact centre-vortex insertion identities in the twist-summed ensemble, and bounded, averaged and driven confinement bounds」（A-07 の渦の挿入の恒等式の論文）の driven identity と同じ内容。流れの補題は A-07 の帯の還元の論文の flux bound と同じ内容
容器の恒等式	典（間接）	G. Mack, V. B. Petkova（25-03 の通り）
tempered transitions・非平衡の候補の手法	照合未了	モンテカルロの文献（書誌は未確認）
数値（§04）	読	25-08 の表 1 の最初の行と同じ測定
Lean	Lean	FlipLemma（`FlipLemma.flip_le`・`FlipLemma.cut_formula`）・FluxLemma（`FluxLemma.flip_le_one_sub_abs`）・BoundedInsertion（`Bounded.single`）。束が保証するのは有限和の代数だけ

この章で使った語 — 駆動した挿入・段数 m・仕事 W・経路の空間 Ω・Crooks の対合 ι・準静的・切った測度・反転の確率・流れの補題・同時の反転。意味は A-02 用語集 にあります（第 25 部の語は追加の予定）。

次に読む章：25-07 なぜ決まった写像は失敗するか ― 駆動した挿入が安く、一度に当てる決まった写像が高くつく理由を、一ループの水準で「揺らぎの形を変えるかどうか」の違いとして説明します。

2026-10-15 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 25 部 二本目の道 — 空間の方向から 向きの原理・揺らぎの整形・一ループの表 · Kiichi, Shiori and Rin

なぜ決まった写像は失敗するか

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 4-06・4-04 にあります。

この章で分かること — 25-05 と 25-06 で見たように、渦を一度に挿入する決まった写像は高くつき、熱浴でゆっくり入れる駆動した挿入は安くつきます。この章では、その違いを原理の形で説明します。(1) 区画の比 Z_-/Z_+ の下から（区画の自由エネルギー ΔF の上から）の評価は、写像による Gibbs の変分原理で得られ、その差はちょうど相対エントロピーです（向きの原理）。(2) ガウスの模型では、揺らぎの形を変えない（等長的な）写像の損失は自由度の数を増やしても減らず、行列式 1 の写像で揺らぎを整形すれば損失は $\Delta F^2/n$ まで下がります。(3) 背景の磁場の中のグルーオンの一ループの勘定 $\frac{11}{3} = -\frac{1}{3} + 4$ で、反遮蔽の $+4$ は偏極についてトレース 0 のスピンの項から来るので、**一ループの水準で**、等長的な写像による比較は漸近自由と逆の向き $\beta' \geq \beta + 0.023$ しか出せず、揺らぎを整形する写像は $\beta - \beta' = 0.258$ を再現します。(4) 決まった点ごとの写像は紫外で余分の費用を払うこと（二次元の模型の数値）と、余りの相対エントロピーが面積とともに増えるなら面積則は出ないこと、を並べます。

前提となる章 — 25-05（挿入の恒等式）・25-06（駆動した挿入）・26-01（帯の正しい形）。第 4 部の 4-06（漸近自由・一ループの係数）と 4-04（繰り込み）、第 2 部の 2-08（自由エネルギー・相対エントロピー）。

先に言うこと — §03〜§05 の主張は全て**一ループ（ガウス）の水準**の文です。この章は非摂動の主張をしません。中程度の結合や大きな場で、揺らぎを整形する写像の誤差を押さえることは開いた問題で、移り変わりの帯（第 26 部）の核心はそこにあります。§06 の紫外の余分の費用は、二次元の模型の数値の読みです。

この章の順序

1. 要約 — 揺らぎの形を変えるかどうか
2. 向きの原理 — 上界は変分から（輸送の恒等式）
3. ガウスの模型 — 等長的な写像の損失と揺らぎの整形（表 1）
4. 一ループの表 11/3 = −1/3 + 4 — スピンの項は一次のトレースに出ない（表 2）
5. 繰り込みの比較への帰結 — 等長と整形の比較（表 3）

6. 決まった写像の紫外の余分の費用 — 表 4
7. 決定論的な挟み撃ちと面積則 — 余りの相対エントロピーの障害と加法性
8. 言えないこと
9. 五分類の表と依存グラフ — 表 5

01

要約 — 揺らぎの形を変えるかどうか

1. 閉じ込めには、渦のある区画が無い区画に比べて高くつきすぎないこと、つまり区画の自由エネルギー $\Delta F = \ln(Z_+/Z_-)$ の**上からの**評価が要ります（$\theta = \tanh(\Delta F/2)$ を小さくするため）。
2. その向きの評価を与えるのは、区画 $+$ の測度を区画 $-$ へ運ぶ写像 T による Gibbs の変分原理です：$\Delta F = \mathbb{E}_+[S \circ T - S - \ln J_T] - \mathrm{KL}$。KL（相対エントロピー）を捨てれば上界になります 初 。
3. 捨てた KL が評価の損失です。ガウスの模型で計算すると、揺らぎの形を変えない写像（恒等写像・群の平行移動・ゲージ変換・間引き）の損失は、自由度を増やしても減りません。体積を保ったまま揺らぎを伸び縮みさせる写像なら、損失は $\Delta F^2/n$（n は自由度の数）まで下がります 初 。
4. 漸近自由の係数 $\frac{11}{3}$ は、一ループの水準で、軌道の部分 $-\frac{1}{3}$ とスピンの項の $+4$ に分かれます。スピンの項は偏極についてトレース 0 なので、揺らぎの形を変えない写像の評価（一次のトレース）には現れません 初 （一ループの水準）。
5. その結果、一ループの水準で、等長的な写像で作った繰り込みの比較は 2 倍あたり $\beta' \geq \beta + 0.023$（$U(1)$ と同じ向き）しか出せず、揺らぎを整形する写像は漸近自由の $\beta - \beta' = 0.258$ を再現します 初 （一ループの水準）。
6. 決まった点ごとの写像は、二次元の模型で、捩れの方向の格子の大きさ N_T について線形以上に増える余分の費用を払いました。揺らぎを新しい背景で引き直す試行では、この増加が消えます 読 。
7. 決定論的な写像の余りの KL が面の面積とともに増えるなら、変分の評価から面積則は出ません 初 （その仮定の下で）。輸送の道の役割は、帯の形そのものより弱い定性的な目標にあります。

02

向きの原理 — 上界は変分から

区画 $+$ と区画 $-$ の配位の集合を X_+・X_-、それぞれの上の Gibbs 測度を $\mu_\pm = e^{-S}/Z_\pm$ とし、区画の自由エネルギーを $\Delta F = \ln(Z_+/Z_-)$ と置きます（25-06 の ΔF_D と同じ向き）。区画の偏りは $\theta = \tanh(|\Delta F|/2)$ なので、閉じ込めの向きに要るのは ΔF の**上界**、言い換えると Z_-/Z_+ の**下界**です。

輸送の恒等式（輸送の恒等式・Gibbs の変分原理）

$T : X_+ \to X_-$ を可測な全単射で、基準の測度（Haar × 数え上げ、ガウスの模型では Lebesgue）についてのヤコビアンを J_T とし、$T_\#\mu_+$ を μ_+ の T による押し出しとすると

$$\Delta F = \mathbb{E}_+\big[S\circ T - S - \ln J_T\big] - \mathrm{KL}\big(T_\#\mu_+ \,\big\|\, \mu_-\big). \tag{1}$$

とくに $\Delta F \le \mathbb{E}_+[S\circ T - S - \ln J_T]$ で、等号は $T_\#\mu_+ = \mu_-$（T が μ_+ を μ_- へ正確に運ぶ）ときに限る。

初 標準の計算です。証明。$\nu = T_\#\mu_+$ の密度は $y = Tx$ で $\nu(y) = \mu_+(x)/J_T(x)$。よって

$$\mathrm{KL}(\nu\|\mu_-) = \mathbb{E}_+\big[\ln\mu_+(x) - \ln J_T(x) - \ln\mu_-(Tx)\big] = \mathbb{E}_+\big[S(Tx) - S(x) - \ln J_T(x)\big] - \ln Z_+ +$$

移項すれば (1)。$\mathrm{KL} \ge 0$ から不等式。∎ 有限の配位空間（25-05 の有限の配位空間の条件）で T が全単射なら $J_T = 1$ で、(1) の右辺の第一項は 25-05 の $\mathbb{E}_+[\Delta S]$ です。

もう一方の向き。 この本で使う構造的な道具は、ΔF を上から押さえません。鏡映正値性からは $Z_- \le Z_+$（$\theta \ge 0$、$\Delta F \ge 0$）が出ますが、これは ΔF の**下界**で、閉じ込めと逆の向きです（26-04）初。チェス盤の評価は $\mathbb{E}\prod\theta$ を一つの密度 κ_{cb} に置き換えますが、$\kappa_{cb} < 1$ を言うにはやはり ΔF の上界が要ります（26-05）。Tomboulis–Yaffe の不等式は θ の評価を Wilson ループに運ぶもので、θ 自身は押さえません（26-01）。この本の道具の範囲では、ΔF の上界は (1) の型の変分（試行の写像・試行の測度）と、明示的な構成からしか出ていません読（道具の一覧についての整理の判断で、定理ではありません）。これを**向きの原理**と呼びます。帯を渡る道具の候補は、まずこの向きの評価を与えるものでなければなりません。

03

ガウスの模型 — 等長的な写像と整形する写像

(1) の KL がどれだけ大きいかを、全てが計算できるガウスの模型で見ます。$\mathbb{R}^n$ の上の二つのガウス測度 $\mu_0 = N(0,\Delta_0^{-1})$・$\mu_B = N(0,\Delta_B^{-1})$（作用 $S_0 = \frac12 x^{\mathsf T}\Delta_0 x$・$S_B = \frac12 x^{\mathsf T}\Delta_B x$、$\Delta_0, \Delta_B$

は正定値）を取ります。μ_0 が「区画 $+$（背景なし）の揺らぎ」、μ_B が「区画 $-$（渦の背景 B のまわり）の揺らぎ」の役です。正確な値は

$$\Delta F = -\ln \frac{Z_B}{Z_0} = \tfrac{1}{2}\ln\det(\Delta_B \Delta_0^{-1}) = \tfrac{1}{2}\sum_{k} \ln \lambda_k, \tag{2}$$

λ_k は $\Delta_0^{-1/2}\Delta_B\Delta_0^{-1/2}$ の固有値です。線形写像 T を (1) に入れると、$M := \Delta_0^{-1/2} T^{\mathsf{T}} \Delta_B T \Delta_0^{-1/2}$ を使って評価は

$$\mathbb{E}_0\big[S_B \circ T - S_0\big] - \ln|\det T| = \tfrac{1}{2}(\operatorname{tr} M - n) - \ln|\det T| \tag{3}$$

です（$\mathbb{E}_0[x^{\mathsf{T}} A x] = \operatorname{tr}(A\Delta_0^{-1})$ から）。

揺らぎについて等長的な写像とは、$T^{\mathsf{T}}\Delta_0 T = \Delta_0$（$\mu_0$ の揺らぎの形を変えない、μ_0 を保つ）線形写像のことです。恒等写像、群の平行移動やゲージ変換の線形化、間引き（細かい自由度の一部を捨て、残りをそのまま粗い格子の自由度とする操作）の線形化がこの類に入ります（間引きの扱いは §08 (b)）。

等長的な写像の損失の命題（等長的な写像の損失は自由度で薄まらない）

T が揺らぎについて等長的なら、(3) の評価は T に依らず $\tfrac{1}{2}\sum_k(\lambda_k - 1)$ で、正確な値 (2) との差は

$$\tfrac{1}{2}\sum_{k} \big(\lambda_k - 1 - \ln \lambda_k\big) \;\geq\; 0. \tag{4}$$

初 証明。$O := \Delta_0^{1/2} T \Delta_0^{-1/2}$ は $O^{\mathsf{T}}O = 1$ を満たす直交行列で、$M = O^{\mathsf{T}}(\Delta_0^{-1/2}\Delta_B\Delta_0^{-1/2})O$。よって $\operatorname{tr} M = \sum_k \lambda_k$、$|\det T| = 1$。差は $t - 1 - \ln t \geq 0$ を足したもの。∎ (4) は二つのガウス測度の相対エントロピー $\mathrm{KL}(\mu_0 \| \mu_B)$ そのものです。背景が揺らぎを変えるのが少数の方向（固有値が 1 でない λ_k が有限個）なら、(4) は n を大きくしても減りません。

揺らぎの整形の命題（行列式 1 の写像で整形すれば損失は $\Delta F^2/n$）

$\det T = 1$ の線形写像の全体で (3) の評価の下限を取ると、$r := \det(\Delta_B\Delta_0^{-1}) = e^{2\Delta F}$ として

$$\inf_{\det T = 1}\Big(\tfrac{1}{2}(\operatorname{tr} M - n)\Big) = \tfrac{n}{2}\big(r^{1/n} - 1\big), \qquad 0 \;\leq\; \tfrac{n}{2}\big(e^{2\Delta F/n} - 1\big) - \Delta F \;\leq\; \frac{\Delta F^2}{n}\, e^{2|\Delta F|/n} \tag{5}$$

初 証明。$\det T = 1$ なら $\det M = r$ で、逆に $\det M = r$ の任意の正定値行列 M は $T = \Delta_B^{-1/2} M^{1/2} \Delta_0^{1/2}$（に直交行列を掛けたもの、$\det T = r^{-1/2} r^{1/2} = 1$）で実現できます。相加相乗

平均で $\operatorname{tr} M \geq n(\det M)^{1/n} = n r^{1/n}$、等号は $M = r^{1/n}\cdot 1$。差の評価は $u = 2\Delta F/n$ として $e^{u} - 1 - u \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}$ から。∎

揺らぎの整形の命題の写像は体積を保ち（$\ln J_T = 0$）、背景が変える少数の方向の揺らぎを伸び縮みさせ、その体積の変化を残りの多数の方向に一つあたり $\Delta F/n$ ずつ薄く負わせます。**要るのはヤコビアン（エントロピー）を持つことではなく、揺らぎの形を変えることです。**

表 1　ガウスの模型の例：固有値 0.2・0.3・3・4（残りは全て 1）

評価	$n = 10$	$n = 100$	$n = 10^4$
正確な値 (2)	-0.16425	-0.16425	-0.16425
等長的な写像（等長的な写像の損失の命題）	$+1.75$	$+1.75$	$+1.75$
行列式 1 の最適な写像（揺らぎの整形の命題）	-0.1616	-0.1640	-0.16425

初 （(2)・(4)・(5) の閉じた式の値）。小さい固有値と大きい固有値が混じると、一次のトレース $\frac{1}{2}\sum(\lambda_k - 1)$ と $\frac{1}{2}\sum \ln \lambda_k$ は逆の符号になりえます。この例では正確には区画の変更が**安い**（$\Delta F < 0$）のに、等長的な写像の評価は高い（$+1.75$）と言います。次節のスピンの項がちょうどこの形をしています。

04

ループの表 11/3 = −1/3 + 4

(1,2) 平面の一定の可換な磁場 B を背景に置き、そのまわりの $SU(2)$ のグルーオンの揺らぎを Feynman ゲージで考えます。揺らぎの二次の作用の演算子は

$$M_B = -D^2\,\delta_{\mu\nu} - 2iF_{\mu\nu} \tag{6}$$

で、第一項が軌道の部分（共変微分の二乗）、第二項がスピンの項です。ゴーストの演算子は $-D^2$ です。熱核のトレース（体積あたり。共通の因子 $1/(16\pi^2 s^2)$ と、群の因子 $C_A = 2$＝電荷を持つ成分の数を除く）は、固有時 s の関数として

$$\text{ベクトル（4 偏極）}：\ \frac{Bs}{\sinh Bs}\big(2 + 2\cosh 2Bs\big), \qquad \text{ゴースト}：\ -2\,\frac{Bs}{\sinh Bs} \tag{7}$$

です。$x = Bs$ として $x/\sinh x = 1 - x^2/6 + O(x^4)$、$\cosh 2x = 1 + 2x^2 + O(x^4)$ を使って x^2 の係数を拾うと、次の表になります。

表 2　$B^2 s^2$ の係数の内訳（一ループの水準）

部分	熱核のトレースの形	$B^2 s^2$ の係数	意味
軌道（ベクトルの軌道 4 自由度 − ゴースト 2）	$\frac{Bs}{\sinh Bs}\,(4 - 2)$	$-\frac{1}{3}$	反磁性（遮蔽）。$U(1)$ の荷電粒子と同じ型

部分	熱核のトレースの形	B^2s^2 の係数	意味
スピンの項	$\dfrac{Bs}{\sinh Bs}\,2(\cosh 2Bs-1)$	$+4$	常磁性（反遮蔽）。非可換に特有
合計	(7) の和	$+\frac{11}{3}$	漸近自由の一ループの係数（4-06 の $\frac{11}{3}$）

初 （一ループの水準。展開は二行の計算です：軌道は $2(1-x^2/6)=2-x^2/3$、スピンは $(1-x^2/6)\cdot 4x^2=4x^2+O(x^4)$。）この勘定の規約では、係数 $+\frac{11}{3}$ が漸近自由の向き、$-\frac{1}{3}$ が逆の向きです。

スピンの項の一次の消失の命題（スピンの項は一次のトレースに現れない ― 一ループの水準）

ガウスの水準で、背景なしの演算子 $M_0=-\partial^2\delta_{\mu\nu}$ と (6) の M_B を比べるとき、揺らぎについて等長的な写像による (1) の評価は一次のトレース $\frac{1}{2}\mathrm{tr}\big((M_B-M_0)M_0^{-1}\big)$ で、スピンの項の寄与はちょうど 0 です。この評価は、軌道の部分だけの正確な値 $\frac{1}{2}\ln\det(M_{\mathrm{orb}}M_0^{-1})$ 以上です。

初 （一ループの水準）証明。M_0^{-1} は偏極の添字について $\delta_{\mu\nu}$ に比例し、$F_{\mu\nu}$ は反対称なので、$\mathrm{tr}_{\mu\nu}(F_{\mu\nu})=0$。よってスピンの項の一次のトレースは 0 で、評価は $\frac{1}{2}\mathrm{tr}((M_{\mathrm{orb}}-M_0)M_0^{-1})$ に等しく、等長的な写像の損失の命題の不等式 $t-1\ge\ln t$ から $\frac{1}{2}\ln\det(M_{\mathrm{orb}}M_0^{-1})$ 以上。∎ スピンの項は二次（表 2 の $\cosh 2Bs-1=O(B^2)$）になって効き、反遮蔽の $+4$ を与えます。一次のトレースしか見ない評価は、それを完全に失います。（無限次元の演算子のトレースと行列式は、一ループの計算で通常行う正則化のもとでの文です。）

05

繰り込みの比較への帰結

第 26 部の繰り込みの比較（26-06）は、格子全体を 2 倍にした $(2N,\beta)$ の渦の自由エネルギーを、元の大きさ (N,β') のそれで上から押さえ、$\beta'<\beta$（結合が強くなる向き、漸近自由）を言いたいものです。一ループの水準では、渦の背景のまわりの係数 c が 2 倍あたりの結合の移動を決め、$\beta=4/g^2$、$b_0=c\,C_A/(16\pi^2)$ として $\beta-\beta'=8b_0\ln 2$ です。

等長と整形の比較の命題（二つの写像の比較 ― 一ループの水準）

(a) 揺らぎについて等長的な写像で (1) の評価を作ると、一ループの水準で取り込める係数は高々 $c=-\frac{1}{3}$ で、2 倍あたり $\beta'\ge\beta+0.023$（$U(1)$ と同じ、漸近自由と逆の向き）しか出せない。
(b) 体積を保ちつつ揺らぎを整形する写像（揺らぎの整形の命題）なら、正確な $\frac{1}{2}\ln\det$

を誤差 $O(\Delta F^2/n)$ で再現し、$c=\frac{11}{3}$、$b_0=22/(48\pi^2)$、2 倍あたり $\beta-\beta'=0.258$ を出す。

初 （一ループの水準）証明。(a) はスピンの項の一次の消失の命題と、評価が上界であること（輸送の恒等式）から。数は $8\cdot\frac{-1/3\cdot 2}{16\pi^2}\ln 2=-\frac{0.2575}{11}\approx -0.0234$。(b) は揺らぎの整形の命題を殻ごとの揺らぎに当てたもので、数は $8\cdot\frac{22}{48\pi^2}\ln 2\approx 0.2575$。∎

表 3　2 倍あたりの結合の移動 $\beta-\beta'$（$SU(2)$、$\beta=4/g^2$）

何から	$\beta-\beta'$	分類	同じ行に書く条件
正確な一ループの係数 $\frac{11}{3}$	0.258	初	一ループの水準
揺らぎを整形する写像の評価（等長と整形の比較の命題 (b)）	0.258（誤差 $O(\Delta F^2/n)$）	初	一ループの水準・ガウスの評価
等長的な写像の評価（等長と整形の比較の命題 (a)）	≤ -0.023	初	一ループの水準。$U(1)$ と同じ向き
格子全体を 2 倍にした試験（$4^4\to 8^4$、β ごとに種 1〜3 本）	$+0.16$〜$+0.25$	読	$\beta=2.5$〜3.0。各 β の幅は 26-06 表 4 のとおり（例：$\beta=2.7$ で $+0.13$〜$+0.19$、$\beta=2.5$ で $+0.19$〜$+0.5$）。$\beta=2.3$ では $\gtrsim 0.1$。小さな格子
$U(1)$ の同じ試験（$(N,M)=(4,8)\to(8,16)$、$\beta=1.5$）	<-0.2	読	逆向き（$\beta'>1.7$、曲線の外）。レプリカ 48・交換の受理率の最小 0.37。種 1 本（26-06 表 2）

Migdal–Kadanoff 型の間引きで繰り込みの比較を作る試み（Tomboulis 2007）は、同じ議論が $U(1)$ でも強結合へ流れてしまう点で批判されました 典 （Ito–Seiler・Kanazawa、出典の表）。間引きは揺らぎの形を変えない側に入るので、等長と整形の比較の命題 (a) はこの批判に一ループの水準の説明を与えている、と読めます 読 （物理。非摂動の議論の穴を一ループの計算が言い当てる、という解釈で、批判そのものの証明ではありません）。

選別の基準。 帯を渡る方法の候補は、**試行の写像の線形化が揺らぎについて非等長的**でなければならない——これが一ループの水準での必要条件です 初 （等長と整形の比較の命題 (a) の言い換え。一ループの水準）。非摂動の水準でも同じ条件が要るという見方は 読 （物理）です。25-06 の駆動した挿入が安いのは、熱浴が揺らぎの形を新しい結合に合わせて緩めるからで、この基準と整合します 読 （物理）。

06

決まった写像の紫外の余分の費用

等長的な写像の損失の命題は「等長的な写像の損失は自由度で薄まらない」と言いました。格子の上で決まった点ごとの写像を使うと、損失はさらに、格子間隔を細かくするほど**増える**こ

とが数値で見えています。

二次元の模型。 二次元の $O(3)$ 模型（スピン $s_x \in S^2$、作用 $-\beta \sum s_x \cdot s_y$）を、帯 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/N_T)$ の上で、周期の方向に z 軸まわりの π 回転の捩れを入れて置きます。古典的な真空は北極と南極で、二つを結ぶキンク（分数インスタントンの二次元版）の作用は $2\pi\beta$ に下から近づきます。四次元の小さな捩れた T^2 の、軽い試験台です。

表 4　二次元の捩れた帯でのキンクの挿入の費用（β を除いた作用の単位。余分の費用は $\beta \times (\mathbb{E}[\Delta S] - \text{古典の値})$）

試行	β	$N_T = 2$	$N_T = 4$	$N_T = 8$	条件
決まった点ごとの回転（各点で真空からキンクへの最小の回転）の余分の費用	2	-2.1	$+4.1$	$+14.7$	標準偏差は $N_T = 8$ で 4.6（$\beta = 2$）・2.6（$\beta = 4$）。配位の数は記録に無い
同上	4	-2.0	$+4.6$	$+16.2$	

読 余分の費用は β にほとんど依らず、N_T について線形以上に増えます。期待された「走る結合による $\ln N_T$ の減少」とは逆です。

一方、揺らぎを古い背景のまま運ぶのでなく、**新しい背景（キンク）のまわりのガウス測度から引き直す**試行では、評価の差は一ループの行列式の比 $\frac{1}{2}\ln[\det' H_{\text{kink}} / \det H_{\text{vac}}]$ になります。その値（集団座標の二本を除く）は $N_T = 3, 4, 6, 8, 10$ で $-3.68, -2.94, -2.43, -2.11, -1.88$ と対数的にしか変わらず、回転と並進の集団座標の測度を入れた量は $N_T = 4$〜12 で -4.91〜-4.85 とほぼ一定でした 読 （固有値の数値計算。誤差の評価なし）。線形以上の増加は消えています。

四次元の板。 $SU(2)$、$\beta = 2.3$、板 $2 \times 2 \times 8 \times 8$ で、流束を決まった色の向き（σ_3）に滑らかに広げる挿入は、費用を下げるどころか上げました：ΔS の平均は広げる半径 1 で 21.9、半径 2 で 36.0 読 。ゲージを固定していない配位では、決まった向きの場が各点の色の向きと揃わないためと読めます 読 （物理）。同じ板で、駆動した挿入（25-06）は 16 段で仕事の平均を 2.9 まで下げました。

読み方。 決まった点ごとの写像は、揺らぎを「固定した背景の上で」動かすので、新しい背景での揺らぎのエントロピーの差を取り損ねます。等長的な写像の損失の命題の損失が、格子の細かい自由度ごとに積み上がる、という描像です 読 （物理。N_T に比例するかどうかは三点の数値からの読みで、一般の評価はありません）。挿入の平均（25-05）・駆動した挿入（25-06）・揺らぎの引き直しは、どれもこの費用を避けるための道具です。

> 07

決定論的な挟み撃ちと面積則

帯の正しい形は $\theta(L,L) \le e^{-cL^2}$（26-01）でした。$\theta = \tanh(\Delta F/2) \le \Delta F/2$ なので、変分でこれを示すには $\Delta F(L,L)$ の上界が $2e^{-cL^2}$ の程度まで小さくなければなりません。

相対エントロピーによる面積則の障害（余りの KL が面積とともに増えるなら面積則は出ない）

写像 T について、(1) の余り $\mathrm{KL}(T_{\#}\mu_+ \| \mu_-)$ が渦の面の面積 A について $\ge c'A$（$c' > 0$）なら、(1) から出る評価 $\mathbb{E}_+[S \circ T - S - \ln J_T]$ は $c'A$ 以上で、それから出る θ の上界は $\tanh(c'A/2)$ 以上、$A \to \infty$ で 1 に近づく。とくに $\theta \le e^{-\sigma A}$ の形の評価は出ない。

初 証明。(1) から $\mathbb{E}_+[\cdots] = \Delta F + \mathrm{KL} \ge \mathrm{KL} \ge c'A$（区画の向きを $\Delta F \ge 0$ に取る）。tanh は単調。∎ これは仮定の下の文で、仮定が成り立つかどうかは写像ごとに確かめる必要があります。

容器ごとの相対エントロピーの加法性（独立な容器では余りの KL は足し算になる）

枠を止めて容器 $D_1, \dots, D_k$ の内側が条件つきで独立で（25-03）、写像が容器ごとの積 $T = T_1 \times \cdots \times T_k$ なら、$\mathrm{KL}(T_{\#}\mu_+ \| \mu_- \mid \Phi) = \sum_j \mathrm{KL}(T_{j\#}\mu_{+,j} \| \mu_{-,j} \mid \Phi)$。各項が $c_0 > 0$ 以上なら、余りは容器の数、つまり面積に比例する。

初 積の測度の相対エントロピーは各因子の相対エントロピーの和、という標準の事実です。∎

決まった（揺らぎに合わせない）写像では、各容器の余りが $c_0 > 0$ で下から押さえられ、相対エントロピーによる面積則の障害の仮定が成り立つ、というのが構成的場の理論と確率論の二つの視点からの検討の共通の判断です 読 （物理・見立て。三角な写像の上限は周長型、という判断も同じ）。この判断の下では、輸送の道は帯の形そのものを示す道具ではなく、より弱い定性的な目標——$\Delta F(L,L) \to 0$（速さを問わない）——のための道具になります。$\Delta F(L,L) \to 0$ は、$U(1)$ のクーロン相（$\Delta F(L,L)$ は正の定数に近づく）や $\mathbb{Z}_2$ の非閉じ込め相を排除するには足りますが、閉じ込めも質量ギャップも出しません 読 （物理。数値は 26-06）。

08

言えないこと

(a) 非摂動の水準。スピンの項の一次の消失の命題・等長と整形の比較の命題と表 3 の上三行は全て一ループ（ガウス）の水準の文です。中程度の結合や大きな場で、揺らぎを整形する写像の誤差（渦の面の近くの局所的な相対エントロピーと高次のループ）を押さえることは開いた問題で、この本は示していません。

(b) 等長的な写像の分類。恒等写像・群の平行移動・ゲージ変換の線形化は定義どおり等長的です。間引きを等長的な側に入れるのは、残す自由度の揺らぎをそのまま運ぶ、という意味での分類で、間引きは全単射ではないので等長的な写像の損失の命題の文字どおりの適用ではありません。

(c) 向きの原理。「ΔF の上界は変分と明示的な構成からしか出ない」は、この本の道具の一覧についての判断で、定理ではありません。

(d) 紫外の余分の費用。表 4 は二次元の模型の三点の数値で、四次元のゲージ理論で同じ増え方をすることは示していません。四次元では Ward 恒等式による打ち消しがありうるとされ、それが起きるかはゲージ固定と写像の共変性に依ります。

(e) 相対エントロピーによる面積則の障害の仮定。決まった写像の余りの KL が面積に比例することは、容器ごとの相対エントロピーの加法性の積の場合に、各容器の余りが下から押さえられることを仮定して言えるだけで、一般の写像については見立てです。

(f) 新しさ。Gibbs の変分原理・ガウス測度の相対エントロピー・背景場の一ループの計算はどれも標準です。それらを「揺らぎの形を変えるかどうか」の選別の基準として並べた見方の新しさは主張しません。スカラー場では Polchinski 流の輸送写像（Bauerschmidt–Bodineau–Dagallier）が知られており、ゲージ場の例は探した範囲で見当たりません（照合未了）。

09

五分類の表と依存グラフ

表 5　この章の行（§03〜§05 は全て一ループ（ガウス）の水準）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	輸送の恒等式：$\Delta F = \mathbb{E}_{+}[S \circ T - S - \ln J_T] - \mathrm{KL}$	初	§02（標準）	可測な全単射・ヤコビアンが定まる	—
2	鏡映正値性は $\Delta F \geq 0$（閉じ込めと逆の向き）しか与えない	初	§02・26-04	捩れを固定した鏡映の方向	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
3	向きの原理：ΔF の上界は変分と明示的な構成からだけ	読	§02	この本の道具の一覧についての判断	—
4	等長的な写像の損失の命題：$\frac{1}{2}\sum(\lambda_k - 1 - \ln\lambda_k)$（$n$ で薄まらない）	初	§03	ガウスの模型・$T^{\mathsf{T}}\Delta_0 T = \Delta_0$	—
5	揺らぎの整形の命題：行列式 1 の写像の最適値と損失 $\le (\Delta F^2/n)e^{2\lvert\Delta F\rvert/n}$	初	§03	ガウスの模型・線形写像	—
6	表 1 の例の値	初	§03	固有値 0.2・0.3・3・4	—
7	表 2：$\frac{11}{3} = -\frac{1}{3} + 4$（$+4$ はスピンの項）	初	§04	一ループの水準・一定の可換な背景・Feynman ゲージ	—
8	スピンの項の一次の消失の命題：スピンの項は一次のトレースに現れない	初	§04	一ループの水準	—
9	等長と整形の比較の命題 (a)：等長的な比較は $\beta' \ge \beta + 0.023$	初	§05	一ループの水準・2 倍あたり	—
10	等長と整形の比較の命題 (b)：整形する比較は $\beta - \beta' = 0.258$	初	§05	一ループの水準・2 倍あたり	—
11	2 倍の試験の $\beta - \beta'$（$SU(2)$ で正、$U(1)$ で負）	読	§05・26-06	小さな格子・β は数点・種 1〜3 本	—
12	Migdal–Kadanoff の補間は $U(1)$ を区別しない（批判）	典	Ito–Seiler・Kanazawa	Tomboulis 2007 の議論について	—
13	行 12 の一ループの水準の説明	読（物理）	§05	一ループの水準	—
14	選別の基準：線形化が揺らぎについて非等長的であること	初	§05	一ループの水準での必要条件（非摂動では読）	—
15	決まった点ごとの写像の余分の費用は N_T について線形以上	読	§06	二次元 $O(3)$・捩れた帯・$N_T = 2, 4, 8$	—
16	揺らぎの引き直しでは増加が消える	読	§06	同上・$N_T = 3$〜12・誤差の評価なし	—
17	四次元で決まった向きに広げる挿入は費用が上がる	読	§06	$SU(2)$・$\beta = 2.3$・$2\times2\times8\times8$	—
18	相対エントロピーによる面積則の障害：余りの KL $\ge c'A$ なら面積則は出ない	初	§07	余りの KL の下界を仮定	—
19	容器ごとの相対エントロピーの加法性：独立な容器で KL は足し算	初	§07	枠を止めて容器が独立・写像が積	—
20	決まった写像では各容器の余りが下から押さえられる	読（物理）	§07	見立て	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
21	$\Delta F(L,L) \to 0$ はクーロン相と非閉じ込めの $\mathbb{Z}_2$ 相を排除する	読（物理）	§07・26-06	閉じ込めもギャップも出さない	—

この章に機械検査の束はありません。

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  初  ΔF = E₊[S∘T − S − ln J] − KL                  全単射・ヤコビアン
 2  初  鏡映正値性は ΔF ≥ 0 だけ                      26-04
 3  読  向きの原理（道具の一覧の判断）⟸ 1・2
 4  初  等長的な写像の損失は n で薄まらない ⟸ 1      ガウス
 5  初  行列式 1 の整形で損失 ~ ΔF²/n ⟸ 1            ガウス
 6  初  表 1 の例 ⟸ 4・5
 7  初  11/3 = −1/3 + 4                              一ループの水準
 8  初  スピンの項は一次のトレースに出ない ⟸ 4・7    一ループの水準
 9  初  等長的な比較は β' ≥ β + 0.023 ⟸ 1・8         一ループの水準
10  初  整形する比較は β − β' = 0.258 ⟸ 5・7         一ループの水準
11  読  2 倍の試験の符号（SU(2) 正・U(1) 負）        小さな格子
12  典  Migdal–Kadanoff の補間への批判
13  読  行 12 のループの説明（物理）⟸ 9・12
14  初  選別の基準：非等長的であること ⟸ 9           一ループの水準
15  読  決まった写像の余分の費用（二次元）
16  読  引き直しで増加が消える（二次元）
17  読  決まった向きの挿入は高い（四次元の板）
18  初  余りの KL ≥ c'A なら面積則は出ない ⟸ 1       仮定つき
19  初  独立な容器で KL は足し算
20  読  決まった写像の余りは容器ごとに下から（見立て）⟸ 19
21  読  ΔF(L,L) → 0 の役割（物理）⟸ 18・20
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。仮定（仮）の行はありません。相対エントロピーによる面積則の障害の結論は、「決まった写像では各容器の余りが下から押さえられる」という見立てが正しいときにだけ決まった写像に当てはまり、その区別は最後の行（ΔF(L,L) → 0 の役割）の分類（読）に表しています。この章には閉じ込めの節点も、質量ギャップの節点も、非摂動の節点もありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 輸送の恒等式（Gibbs の変分原理）と、その評価の損失が相対エントロピーであること	非摂動の水準での、揺らぎを整形する写像の誤差の評価

言えている	言えていない
初 ガウスの模型で、等長的な写像の損失は薄まらず、整形する写像の損失は $\Delta F^2/n$	間引きなど全単射でない操作への文字どおりの拡張
初 一ループの水準で $\frac{11}{3} = -\frac{1}{3} + 4$、等長的な比較は $\beta' \geq \beta + 0.023$、整形する比較は $\beta - \beta' = 0.258$	中程度の結合での繰り込みの比較（第 26 部の帯の核心）
読 決まった点ごとの写像は紫外で余分の費用（二次元の模型の三点）	四次元のゲージ理論での同じ増え方
初 余りの KL が面積に比例するなら面積則は出ない（仮定つき）	決まった写像一般についてその仮定が成り立つこと

出典と再現

もの	種別	出典・道具
§02〜§07 の七つの命題・表 1・表 2	初	本文 §02〜§07 の証明と計算。スピンの項の一次の消失の命題・等長と整形の比較の命題と表 2 は論文の草稿（A-07 の帯の還元の論文）の繰り込みの比較の節と同じ内容
漸近自由の一ループの係数	典	4-06 の通り
Migdal–Kadanoff の補間による議論	典	E. T. Tomboulis, arXiv:0707.2179
その批判	典	K. R. Ito, E. Seiler, arXiv:0711.4930。T. Kanazawa, arXiv:0805.2742（照合は 26-06 の通り）
Polchinski 流の輸送写像（スカラー場）	照合未了	Bauerschmidt–Bodineau–Dagallier（書誌は未確認）
表 3 の数値の行	読	26-06（格子全体を 2 倍にした試験）
表 4・§06 の二次元の数値	読	この本の検討で行った二次元 $O(3)$ の捩れた帯の計算（冷却したキンク・点ごとの回転の写像・Hessian の固有値）。誤差の評価は粗い
§06 の四次元の板の数値	読	A-07 の渦の挿入の恒等式の論文の数値の節と同じ測定

この章で使った語 ― 輸送の恒等式・Gibbs の変分原理・向きの原理・揺らぎについて等長的な写像・揺らぎの整形・スピンの項・反遮蔽・余りの相対エントロピー・選別の基準。意味は A-02 用語集 にあります（第 25 部の語は追加の予定）。

次に読む章：25-08 測った記録 ― 第 25 部の数値（駆動した挿入の仕事・T^2 を広げたときの渦の自由エネルギー・板の弦の張力）を、条件つきで一か所にまとめます。

測った記録

> この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 25-03・5-07 にあります。

この章で分かること — 第 25 部の数値の記録を一か所にまとめます。三つの系列があります：(1) 駆動した挿入（25-06）の仕事と受理率、(2) 捩れた T^2 を広げたときの、大域の流束の渦の自由エネルギー（$U(1)$ の対照つき）、(3) 板の弦の張力（Creutz 比）。最後に、同時の反転の測定と、それを帯の試験に使えない理由を注記します。

前提となる章 — 25-06（駆動した挿入・流れの補題）・25-03（容器・区画の偏り θ）・26-02（横広げの不等式・弦の張力の単調性）。第 5 部の 5-07（モンテカルロ）と 5-08（弦の張力・Creutz 比）。

先に言うこと — この章の数は**全て数値の読み**（札「読」）で、どれも証明ではありません。各行に群・β・T^2 の大きさ N_T・平面の大きさ M・測定の数・誤差を書きます。誤差が記録に無いものは「記録に無い」と書きます。格子は小さく、β は数点です。$N_T = 2$ の行は、T^2 が格子の単位で 2 しかない、格子の人工物が大きい領域です。

この章の順序

1. 要約 — 三つの系列
2. 共通の設定と読み方
3. 駆動した挿入の仕事 — 表 1・表 2
4. T^2 を広げたときの渦の自由エネルギー — 表 3・表 4・表 5
5. 板の弦の張力 — 表 6・表 7
6. 同時の反転の測定と、帯の試験に使えない理由 — 表 8・表 9
7. 言えないこと
8. 五分類の表と依存グラフ — 表 10

01

要約 — 三つの系列

1. **駆動した挿入。** $SU(2)$ の板で、渦を一度に挿入する費用（段数 0）は T^2 の面積に比例して 11.8・24.2・44.9（$N_T = 2, 3, 4$、$\beta = 2.3$）と大きいのに、256 段で駆動すると 0.50〜0.63 まで下がりました 読 （表 1 の行 A・B・C。条件の違う行 G・H では、256 段の仕事は 3.64・6.67 と高いままです）。容器（円板）が渦の大きさより小さいと、段数を増やしても下がりきりません。
2. 容器の半径 4 を固定して $N_T = 4, 6, 8$（$\beta = 2.5$、1024 段）と広げても、仕事は 1.1〜1.6 で、N_T についてはっきりした増加はありませんでした 読 （10 配位 × 3 位置）。
3. **渦の自由エネルギー。** 大域の流束の区画の自由エネルギー ΔF は、T^2 を広げると $U(1)$（$\beta = 1.5$）では増え、$SU(2)$（$\beta = 2.4, 2.5$）では増えないか減りました 読 （$M = 8$ と 12、誤差は $U(1)$ で 0.04〜0.78、$SU(2)$ で 0.1〜0.36）。
4. **板の弦の張力。** $SU(2)$、$\beta = 2.5$、$M = 16$ の Creutz 比 $\chi(4)$ は、$N_T = 4 \to 8$ で増え、$N_T = 10$ でほぼ飽和しました。有意な行き過ぎは見えません 読 （2000 測定）。
5. **同時の反転。** 容器を同時に駆動した測定は、移り変わりの帯の数値的な姿としては使えません（25-06 §07）。T^2 を固定した板の張力の下界の道具としてだけ残ります。

02

共通の設定と読み方

- **格子。** 板 $(\mathbb{Z}/N_T)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$。方向 1・2 が捩れた T^2（捩れ $n_{12} = 1$）、方向 3・4 が平面です。$SU(2)$ は Wilson 作用、$U(1)$ は対照として同じ形の作用。
- **駆動した挿入。** 平面の円板（半径 r）× T^2 の容器の中だけを熱浴で更新し、渦の面の結合を m 段で $1 \to -1$ に変えたときの仕事 W（25-06 の (2)）。受理率は $1/(1+e^{W})$ の平均（Barker 型。25-06 の駆動した挿入の受理率の系の受理率で、$\frac{1}{2}(1 - \mathbb{E}\tanh(W/2))$ に等しい）です。表 8・表 9 の同時の反転だけは $\min(1, e^{-W})$（Metropolis 型）の平均です。
- **渦の自由エネルギー。** 平面の $(3,4)$ トーラス全体を通る流束 $n_{34} \in \{0, 1\}$ の二つの区画の $\Delta F = \ln(Z(1,0)/Z(1,1))$ を、結合を補間するレプリカ交換と Bennett の受理率の比（BAR）で推定したもの。偏りは $\theta = \tanh(\Delta F/2)$。誤差は記録の推定値です。
- **弦の張力。** 平面の中の $R \times R$ の Wilson ループから作った Creutz 比 $\chi(R)$。小さな R ではクーロンの項を含み、張力を過大に見積もります。
- **物理の大きさ。** 記録では、$\beta = 2.5$ の $N_T = 8$ は $L\sqrt{\sigma} \approx 1.5$、$\beta = 2.4$ の $N_T = 8$ は $L\sqrt{\sigma} \approx 2.2$、$\beta = 2.7$ の $N_T = 4$ は $L\sqrt{\sigma} \approx 0.4$ と見積もられています 読 （既知の $a\sqrt{\sigma}$ の

値からの換算)。小さな T^2 の半古典の領域にいるのは最後のものだけです。

- $N_T = 2$。T^2 が格子の単位で 2 の行は、格子の人工物が大きい領域です。傾向を読むときには外します。

03

駆動した挿入の仕事

全て $SU(2)$、捩れ $n_{12} = 1$。標本の数は「配位の数 × 一つの配位あたりの挿入の位置の数」です。W の括弧の中は標本の標準偏差（実行の出力の記録から）で、平均の誤差ではありません。同じ配位の異なる位置の標本は独立でないので、平均の誤差は標準偏差を標本の数の平方根で割ったものより大きいと見るべきです。

表 1　駆動した挿入（段数 0 と最も遅い駆動の比較。斜線の左右は段数または半径の二つの値）

実行	β	N_T	M	r	段数 m	標本	W の平均（標準偏差）	$\tanh(W/2)$ の平均	受理率
P	2.3	2	8	2	0 / 4 / 16	6 × 4	10.7 / 6.5 / 2.9（記録に無い）	0.990 / 0.968 / 0.688	0.005 / 0.016 / 0.156
A	2.3	2	8	2	0 / 256	12 × 4	11.8（2.5） / 0.50（0.71）	1.00 / 0.22	0.000 / 0.39
B	2.3	3	8	2	0 / 256	12 × 4	24.2（4.6） / 0.52（0.84）	1.00 / 0.21	0.000 / 0.39
C	2.3	4	8	2	0 / 256	8 × 4	44.9（6.8） / 0.63（1.19）	1.00 / 0.24	0.000 / 0.38
D	2.3	2	10	3	256	12 × 4	0.19（0.74）	0.09	0.46
E	2.5	4	10	2 / 4	1024	8 × 3	2.40（2.11） / 0.44（1.21）	0.67 / 0.17	0.17 / 0.41
F	2.7	4	12	2 / 4	1024	6 × 3	6.00（1.34） / 3.77（1.18）	0.99 / 0.92	0.006 / 0.04
G	2.7	4	18	8	256 / 1024	4〜6 × 3	3.64（3.98） / 2.72（2.53）	0.54 / 0.59	0.23 / 0.20
H	2.5	8	12	4	256 / 1024	4〜6 × 3	6.67（2.63） / 0.51（1.64）	0.98 / 0.17	0.012 / 0.42

行 P は 25-06 §04 で引いた測定です。行 P・A・D は $N_T = 2$（格子の人工物の領域）です。

読み 読 ：(i) 段数 0 の費用は N_T^2 にほぼ比例します（A・B・C で 11.8・24.2・44.9）。(ii) 容器が十分大きければ、駆動した挿入の仕事は 0 近くまで下がります。(iii) 必要な容器の半径

は、格子間隔が半分になるごとに約 2 倍に見えます（$\beta = 2.3$ で 2、2.5 で 4、2.7 では 4 で不足、8 でも 0 近くには届かない）。渦の太さが物理的な長さで決まっていることと整合します。(iv) H（$N_T = 8$）の 1024 段の仕事 0.51 は E（$N_T = 4$）の 0.44 とほぼ同じですが、256 段では 6.67 と高く、駆動の速さに強く依存します。

表 2　統計を増やした駆動した挿入（$SU(2)$、捩れ $n_{12} = 1$）

実行	β	N_T	M	r	段数 m	標本	W の平均（標準偏差）	$-\ln\langle e^{-W}\rangle$	$\tanh(W/2)$ の平均	受理率
I4	2.5	4	12	4	1024	10 × 3	1.32（1.12）	0.72	0.48	0.26
I6	2.5	6	12	4	1024	10 × 3	1.14（1.03）	0.59	0.44	0.28
I8	2.5	8	12	4	1024	10 × 3	1.64（1.59）	0.22	0.52	0.24
J	2.7	4	18	8	4096	記録に無い	2.84（0.84）	2.44	0.85	0.07

読み 読 ：(i) I：容器の半径 4 を固定して $N_T = 4, 6, 8$ と広げても、仕事は 1.1〜1.6 で、N_T についてはっきりした増加はありません（平均の誤差は標準偏差 $/\sqrt{30}$ で 0.2〜0.3 程度）。表 1 の E・H の 0.44・0.51 は少ない統計の揺らぎでした。(ii) J：$\beta = 2.7$、$r = 8$ で駆動を G の 4 倍遅くしても $W \approx 2.8$（G の 1024 段で 2.7）で、Jarzynski の推定は 2.4。仕事の大部分は駆動の速さによる散逸ではなく、本当の自由エネルギーと読めます。$\beta = 2.7$ の $N_T = 4$ は物理的に小さな T^2（$L\sqrt{\sigma} \approx 0.4$）で、希薄な領域の側にいるので渦が実際に高い、という読みです（物理）。

Jarzynski の推定について。 $-\ln\langle e^{-W}\rangle$ は 25-06 の Jarzynski の等式から区画の自由エネルギーの推定ですが、稀な小さい W に支配されるので、少ない標本では大きく揺らぎます。表 1 には載せていない列ですが、負の値も出ています（例：E の半径 4、1024 段で -0.30。A の 64 段で -0.085）。この列は検算の目安で、値そのものは信頼できません。

受理の規則。 表 1・表 2 の受理率の列は Barker 型 $1/(1+e^{W})$ の平均です。同じ記録の生の W から Metropolis 型 $\min(1, e^{-W})$ の平均を出し直すと、最も遅い駆動の行で A 0.641・B 0.647・C 0.595・D 0.729・E（$r = 4$、1024 段）0.607 で、どれも $\frac{1}{2}$ を超えます 計算 。点ごとに $\frac{1}{2}\min(1, e^{-x}) \le 1/(1+e^{x}) \le \min(1, e^{-x})$ で、Crooks 型の関係の下では Barker 型の平均は $1/(1+e^{\Delta F})$ 以下（$\Delta F \ge 0$ なら $\frac{1}{2}$ 以下）です 紙 Lean （LatticeGaugeAcceptanceSandwich（half_metro_le_fermi・fermi_le_metro・barker_le_of_crooks））。表の受理率が $\frac{1}{2}$ の下に留まるのはこの規則の天井で、核の物理の限界ではありません。

この系列の限界。 R^4 の閉じ込めに要るのは、偏りが L とともに面積の指数で小さくなること（26-01）で、それはこの測定では見えません。β は 2.3〜2.7 の数点で、誤差の評価もまだ粗いままです。

04

T² を広げたときの渦の自由エネルギー

容器は平面の全体（$M \times M$）で、$T^2 = N_T \times N_T$ を広げます。横広げの不等式（26-02）の符号の試験です。全てレプリカ交換 + BAR、捩れ $n_{12} = 1$、レプリカの数 24（断りの無い限り）。反復の数は記録にありません。

表 3　ΔF、平面 $M = 8$

理論	β	$N_T = 2$	$N_T = 4$	$N_T = 6$	$N_T = 8$
$U(1)$（対照）	1.5	-0.03 ± 0.04	0.83 ± 0.11	2.10 ± 0.47	5.14 ± 0.78
$SU(2)$	2.5	-0.01 ± 0.12	0.63 ± 0.18	0.33 ± 0.22	1.51 ± 0.29

表 4　ΔF、平面 $M = 12$（容器を大きくした再測定）

理論	β	$N_T = 4$	$N_T = 6$	$N_T = 8$
$U(1)$（対照）	1.5	0.20 ± 0.21	1.35 ± 0.30	1.72 ± 0.47（レプリカ 40。24 では 0.54 ± 0.53 で混ざりが悪かった）
$SU(2)$	2.5	0.57 ± 0.22	0.42 ± 0.24	-0.15 ± 0.36

表 5　ΔF、$SU(2)$、$\beta = 2.4$、平面 $M = 8$

N_T	**4**	**8**
ΔF	0.31 ± 0.10	0.11 ± 0.25

読み 読 ：(i) $U(1)$ は T^2 を広げると ΔF が増えます（$M = 8$ で θ が $0 \to 0.39 \to 0.78 \to 0.99$、$M = 12$ で $0.20 \to 1.35 \to 1.72$）。(ii) $SU(2)$ は三つの設定（$\beta = 2.5$ の $M = 8$・12、$\beta = 2.4$ の $M = 8$）で、広げても増えないか減ります。例外は $\beta = 2.5$、$M = 8$ の $N_T = 8 = M$（対称なトーラス T^4_8）の 1.51 です。(iii) $N_T = 4 \to 8$ で $\ln(1/\theta)$ は $U(1)$ で $0.93 \to 0.012$（約 80 分の 1）、$SU(2)$ で $1.18 \to 0.45$（約 2.6 分の 1）（$M = 8$）。横広げの不等式の符号の、数値的な兆候と読めます。(iv) $\beta = 2.4$ の $N_T = 8$ が $\beta = 2.5$ より小さいのは、同じ格子が物理的に大きい（$L\sqrt{\sigma} \approx 2.2$ と 1.5）ことと整合します。

限界。 θ が 1 に近くない（$O(1)$ の）領域なので、$\theta \le 1$ のために $U(1)$ の比も抑えられ、この幾何では横広げの不等式の判別力は弱いです。誤差は $U(1)$ で 0.04〜0.78、$SU(2)$ で 0.1〜0.36 と大きく、β は一点か二点です。$U(1)$ の $\beta = 1.5$ と $SU(2)$ の $\beta = 2.5$ は「同じ物理」に合わせたものではありません。$N_T = 2$ の列は格子の人工物の領域です。

05

板の弦の張力

$SU(2)$、$\beta = 2.5$、平面 $M = 16$、捩れ $n_{12} = 1$。平面の中の Wilson ループの Creutz 比 $\chi(R)$ を T^2 の大きさ N_T ごとに測りました。26-02 の横広げの不等式（強い形）が含む「縮めた二次元の弦の張力 $\sigma_{\mathrm{eff}}(N_T)$ の単調性」と、$L \sim 1/\Lambda$ で張力が一度大きくなる「行き過ぎ」の試験です。記録では、四次元の $\beta = 2.5$ の値は $\sigma a^2 \approx 0.036$ とされています 読 。

表 6　Creutz 比、400 測定

N_T	$\chi(3)$	$\chi(4)$	$\chi(5)$
2	0.098 ± 0.006	0.034 ± 0.029	-0.02 ± 0.14
4	0.113 ± 0.007	0.070 ± 0.018	0.07 ± 0.06
6	0.108 ± 0.003	0.089 ± 0.013	0.11 ± 0.05
8	0.113 ± 0.003	0.051 ± 0.010	0.07 ± 0.04

表 7　Creutz 比、2000 測定（5 倍の統計）と $N_T = 10$

N_T	$\chi(3)$	$\chi(4)$	$\chi(5)$
4	0.103 ± 0.002	0.059 ± 0.009	0.03 ± 0.04
6	0.115 ± 0.001	0.061 ± 0.004	0.084 ± 0.019
8	0.116 ± 0.002	0.076 ± 0.002	0.070 ± 0.022
10	0.112 ± 0.002	0.071 ± 0.002	0.076 ± 0.009

読み 読 ：(i) 400 測定で $\chi(4)$ は $N_T = 6$ が最大（0.089）で、$N_T = 8$ との差は約 2.3 標準偏差でした。行き過ぎの兆候に見えましたが、2000 測定では $N_T = 6$ は 0.061 ± 0.004 で、**統計の揺らぎ**でした。(ii) 2000 測定の $\chi(4)$ は $N_T = 4 \to 8$ で増え、$N_T = 10$ で 0.071（$N_T = 8$ との差 1.7 標準偏差）とほぼ飽和します。有意な行き過ぎは見えません。張力の単調性（26-02 の必要条件）と整合します。(iii) $\chi(4)$ はクーロンの項を含むので、四次元の $\sigma a^2 \approx 0.036$ より大きく出ます。絶対値ではなく、N_T についての傾向だけを読みます。(iv) $N_T = 2$ の行（表 6）は格子の人工物の領域で、400 測定だけです。

限界。β は 2.5 の一点、平面は $M = 16$ の一つです。$\chi(5)$ 以上は誤差が大きく、張力の値そのものは決まりません。$N_T = 10$ は $L\sqrt{\sigma}$ で 2 程度で、$L \to \infty$ の傾向は外挿になります。

06

同時の反転の測定と、帯の試験に使えない理由

25-06 の同時の反転の評価（$\mathbb{E}\prod\theta \le \mathbb{P}(\text{どの容器も反転しない})$）を数値に使った測定です。$SU(2)$、$\beta = 2.5$、容器を間隔 B で並べ、一つの配位あたり 4 つの容器で同時に、受理

$\min(1, e^{-W})$ の駆動した挿入（512 段）を行いました。受理率の平均を $\bar{a}$ と書きます。

表 8　容器の半径 $r = 4$ を固定（$B = 10$、$M = 20$、512 段）

N_T	配位の数	$\bar{a}$	W の平均	W / N_T^2
4	30	0.36 ± 0.03	1.6	0.10
6	20	0.25 ± 0.04	2.6	0.07
8	10	0.12 ± 0.03	4.5	0.07
10	6	0.02 ± 0.01	8.2	0.08

表 9　容器の半径を N_T に比例させた再測定（$r = N_T$、$B = 2r + 2$、$M = 2B$、512 段）

N_T	r	配位の数	$\bar{a}$	W の平均
4	4	30	0.35 ± 0.03	1.6
6	6	11	0.34 ± 0.05	2.0
8	8	3	0.16 ± 0.08	4.5

読み 読 ：(i) 表 8：半径を固定して T^2 を広げると、仕事は N_T^2 にほぼ比例して増え、受理率は落ちます。渦の大きさは T^2 の大きさで決まるので、半径 $r < L$ の容器には渦が収まらず、細い管の中の面として面積に比例した費用を払う、と読めます。横広げの不等式は容器の大きさが L 以上の範囲の主張なので、これは反例ではありません。保証つきの張力（$-\ln \mathbb{P}(\text{反転なし})$ を容器の数と B^2 で割ったもの）は $N_T = 4$ で約 0.005 でした。(ii) 表 9：容器を L とともに大きくすると、受理率は $N_T = 4 \to 6$ でほぼ一定です（$N_T = 8$ は 3 配位で判断できません）。

帯の試験に使えない理由。 この測定は「一様な板の張力（移り変わりの帯）の数値的な姿」としては**読めません**。理由は 25-06 §07 のとおりです：流れの補題の保証は $\theta \le 1 - a$ で、帯の形 $\theta \le e^{-cL^2}$ を出すには $a \ge 1 - e^{-cL^2}$ の核が要り、それには順と逆の経路の測度の重なり O を面積の指数で 1 に近づけること（散逸で言えば $D \lesssim e^{-2cL^2}$）が要ります（25-06 §07）。測った核はそこから遠いので、言えるのは「大きさ L の容器で $\theta \le \theta_0$（θ_0 は 1 未満の定数）」だけで、そこから出る $\sigma \ge \ln(1/\theta_0)/L^2$ は $U(1)$ も満たす弱い形です（26-01）。**この測定は、T^2 を固定した板の張力の下界を測る道具としてだけ使えます。**表 9 の $N_T = 6, 8$ の続きは止められています。

07

言えないこと

(a) 証明。この章の数はどれも証明ではなく、どの不等式の仮定も確かめていません。

(b) 帯。表 2・表 3〜5・表 7 の傾向は、移り変わりの帯（L に一様な $\theta \le e^{-cL^2}$）を数値で示すものではありません。測った T^2 は $L\sqrt{\sigma} \approx 2$ 程度までで、$L \to \infty$ は外挿です。

(c) 誤差。駆動した挿入の誤差の評価はまだ粗く（標本の標準偏差だけ）、レプリカ交換の誤差は記録の推定値で、自己相関の扱いは記録にありません。

(d) 格子の人工物。$N_T = 2$ の行は格子の人工物の領域です。$N_T = 4$ でも小さな格子の補正は残ります。

(e) 対照の釣り合い。$U(1)$ の $\beta = 1.5$ と $SU(2)$ の $\beta = 2.5$ は、物理の大きさを揃えた比較ではありません。

(f) 同時の反転。表 8・表 9 を帯の数値的な姿として読むことはできません。

08

五分類の表と依存グラフ

表 10　この章の行（全て数値の読み。条件は各行の範囲の欄）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	段数 0 の挿入の費用は N_T^2 にほぼ比例	読	表 1（A・B・C）	$SU(2)$・$\beta = 2.3$・$M = 8$・$r = 2$・8〜12 配位 × 4	—
2	容器が十分大きければ駆動した仕事は 0 近くまで下がる	読	表 1	$\beta = 2.3$〜2.5・256〜1024 段・$N_T = 2$ の行を含む	—
3	要る容器の半径は格子間隔が半分になるごとに約 2 倍	読	表 1（E・F・G）	$\beta = 2.3, 2.5, 2.7$・統計は少ない	—
4	半径 4 を固定して $N_T = 4 \to 8$ で仕事はほっきり増えない	読	表 2（I）	$\beta = 2.5$・$M = 12$・1024 段・10 配位 × 3・誤差 0.2〜0.3	—
5	$\beta = 2.7$、$r = 8$ の仕事は散逸でなく自由エネルギー	読（物理）	表 1（G）・表 2（J）	$N_T = 4$・$M = 18$・Jarzynski の推定は揺らぎが大きい	—
6	T^2 を広げると $U(1)$ の ΔF は増える	読	表 3・表 4	$\beta = 1.5$・$M = 8, 12$・誤差 0.04〜0.78	—
7	T^2 を広げても $SU(2)$ の ΔF は増えないか減る（$N_T = M = 8$ を除く）	読	表 3〜5	$\beta = 2.4, 2.5$・$M = 8, 12$・誤差 0.1〜0.36	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
8	行 6・7 は横広げの不等式の符号の兆候	読（物理）	§04 ⟸ 6・7	θ が $O(1)$ の領域で判別力は弱い	—
9	$N_T = 6$ の行き過ぎは統計の揺らぎ	読	表 6・表 7	$\beta = 2.5$・$M = 16$・400 と 2000 測定	—
10	$\chi(4)$ は $N_T = 4 \to 8$ で増え $N_T = 10$ でほぼ飽和	読	表 7	$\beta = 2.5$・$M = 16$・2000 測定・クーロンの項を含む	—
11	半径を固定すると同時の反転の仕事は N_T^2 に比例して増える	読	表 8	$\beta = 2.5$・$r = 4$・6〜30 配位 × 4 容器	—
12	一段の核の受理率は測った範囲で Barker 型 0.46 以下・Metropolis 型 0.73 以下（表 8・表 9 は Metropolis 型で 0.36 以下）	読	表 1・表 2・表 8・表 9	測った β・N_T・容器の範囲	—
13	同時の反転の測定は帯の試験に使えない	初	§06・25-06 §07 ⟸ 12	流れの補題 $\theta \le 1 - a$ だけを使う場合	—（核は 25-06 の FluxLemma（`FluxLemma.flip_le_one_sub_abs`））

「同時の反転の測定は帯の試験に使えない」の行だけは数値でなく論理の行です：$\theta \le 1 - a$ から出るのは弱い形だけ、という 25-06 の「弱い形しか出ない」の行の当てはめで、受理率の行の読みはそれがどの程度効くかを示します。

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  読  段数 0 の費用 ∝ N_T²                          β = 2.3・M = 8
 2  読  大きな容器で駆動した仕事 → 0 近く              β = 2.3〜2.5
 3  読  要る半径は格子間隔の半分ごとに約 2 倍 ⟸ 2
 4  読  半径 4 で N_T を広げても仕事は増えない  β = 2.5・10 配位 × 3
 5  読  β = 2.7 の仕事は自由エネルギー（物理）  Jarzynski は揺らぐ
 6  読  U(1) の ΔF は T² とともに増える            β = 1.5
 7  読  SU(2) の ΔF は増えない                     β = 2.4, 2.5
 8  読  横広げの不等式の符号の兆候（物理）⟸ 6・7
 9  読  N_T = 6 の行き過ぎは揺らぎ                  2000 測定
10  読  χ(4) は増えて飽和 ⟸ 9                        クーロンの項を含む
11  読  半径固定の同時の反転は面積に比例
12  読  一段の核の受理率：Barker 型 ≤ 0.46・Metropolis 型 ≤ 0.73（測った範囲）
13  初  同時の反転は帯の試験に使えない ⟸ 12       25-06 の流れの補題
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。仮定（仮）の行はありません。閉じ込めの節点も、質量ギャップの節点もありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
読 駆動した挿入は、容器が渦より大きければ仕事を 0 近くまで下げる（$SU(2)$・$\beta = 2.3$〜2.5）	仕事の上界が L と格子間隔に一様であること
読 T^2 を広げると $U(1)$ の渦は高くなり、$SU(2)$ は高くならない（$\beta = 2.4, 2.5$・$M = 8, 12$）	横広げの不等式。θ が小さい領域での判別
読 板の弦の張力（Creutz 比）は N_T とともに増えて飽和し、有意な行き過ぎは無い（$\beta = 2.5$・2000 測定）	張力の値そのもの。$L \to \infty$ の振る舞い
初 同時の反転の保証は帯の試験には使えない	$a \to 1$ の核による帯の数値の試験

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1〜9 の全ての数	読	この本の検討で行ったモンテカルロの記録（熱浴・駆動した挿入・レプリカ交換と BAR・Creutz 比）。各実行の出力の記録と照らし、表 1 の標準偏差は出力の記録から写した
表 1 の行 P	読	A-07 の渦の挿入の恒等式の論文の数値の節と同じ測定（A-07）
表 3〜5・表 7	読	A-07 の帯の還元の論文の数値の節と同じ測定
$L\sqrt{\sigma}$ と四次元の $\sigma a^2 \approx 0.036$	読	記録の換算（既知の $a\sqrt{\sigma}$ の値による。原典の値は未照合）
Jarzynski の等式	典	25-06 の出典の表
同時の反転を帯の試験に使えない論理	初	25-06 §07

この章で使った語 ― 駆動した挿入・段数・仕事・受理率・大域の流束の自由エネルギー・レプリカ交換・BAR・Creutz 比・行き過ぎ・同時の反転・保証つきの張力。意味は A-02 用語集にあります（第 25 部の語は追加の予定）。第 26 部の数値（格子全体を 2 倍にした試験・階段関数・柱の偏り）は 26-09 にあります。

次に読む章：25-09 この道が止まる場所 ― T^2 を広げることが、そのまま移り変わりの帯であることを確かめ、空間の方向の道の到達点をまとめます。

2026-10-15 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 25 部 二本目の道 — 空間の方向から 帯・横広げ・道の終点 · Kiichi, Shiori and Rin

この道が止まる場所 — T² を広げることが帯である

この章は未解決の問いの地図です。閉じた部品と閉じない部品の境を示します。

この章で分かること — 小さな捩れた T^2 から出発する空間の方向の道が、どの段で止まるか。止まるのは T^2 の一辺 L を相関長の尺度 $1/\Lambda$ を越えて広げる段で、これが移り変わりの帯（略して帯）です。帯の両端、つまり L が小さい希薄な分数インスタントンの領域と L が大きい閉じ込めの領域では、要る不等式が成り立つ見込みがあり、真ん中の $L \sim 1/\Lambda$ を非摂動的に通すことだけが残ります。

前提となる章 — 25-00（この部の入口）・25-02（渦と分数インスタントン）・25-04（板の閉じ込め）・16-09（証明が含むべき七つの段の表の帯の段）。

先に言うこと — この章は短い案内の章で、新しい証明を置きません。帯を渡る文はどれも仮定で、両端の見込みは一ループと希薄な気体の勘定、または閉じ込めの描像の上の物理の見立てです。

この章の順序

1. 止まる段 — 小さな T^2 で手にあるものと、広げる段
2. 帯の両端と真ん中 — 希薄な領域・閉じ込めの領域・その間（表 1）
3. 帯で示すべき文 — 帯の正しい形と、途中の到達点
4. 第 26 部へ

01

止まる段 — 小さな T^2 で手にあるものと、広げる段

この部の道は、四次元の問題を二つに分けるために小さな捩れた T^2 を経由しました（25-00）。捩れが零モードを消すので、T^2 の大きさ L までの尺度で理論は弱結合のままで、T^2 を巻く渦の面は分数インスタントンとして局所的に閉じます。こうして、紫外の壁だけが残る中

間の到達目標（小さな T^2 でのギャップと閉じ込め、証明が含むべき七つの段のうち、小さな T^2 のギャップの段と小さな T^2 の閉じ込めの段）と、それ以外の壁が集まる段（T^2 を広げる、帯の段）に分かれます。

小さな T^2 の側で手にあるものは、どれも条件つきか、格子間隔を固定した文です。格子間隔と T^2 を固定すれば全ての β で面積則が成り立ちますが、張力は細い渦のコストで決まり連続極限で 0 になります 初 （25-04）。挿入の恒等式と平均の評価は閉じ込めを一つの局所的な量に帰着させます 初 （25-05）。格子間隔を 0 に送った小さな T^2 の閉じ込めとギャップは、紫外の制御などの仮定の上の筋です 仮 。この部の紫外の制御は「捩れた境界条件の下で、2026-11-10 に公開された構成と同じ構成が立つこと」で、公開された構成は周期の立方の箱だけなので、開いた条件です（27-01 の小さな T^2 のギャップの矢印・小さな T^2 の面積則の矢印）。

問題文が求めるのは $\mathbb{R}^4$ の理論なので、$L \to \infty$ が要ります。L を相関長 $1/\Lambda$ より十分小さい所から十分大きい所まで、全ての L で同じ定数の評価を持って広げること。この段がこの道の止まる場所で、本書ではこれを**移り変わりの帯**（略して帯）と呼びます 仮 。第 23・24 部の「窓」（サイトの窓・$\hbar$ の窓・時刻の窓）とは別の語です（26-00 の注）。

02

帯の両端と真ん中

帯で示すべき文は、容器の区画の偏り $\theta(R;T_L^2)$（容器の一辺 R、横の T^2 の一辺 L、25-03）の言葉で、横の T^2 を広げても偏りが大きくならない、という形をしています（横広げの不等式、26-02）。両端と真ん中で状況が違います。

表 1　帯の両端と真ん中（Λ は力学的な尺度、L は横の T^2 の一辺）

領域	描像	横の T^2 を広げると	札	同じ行に書く条件
$L \ll 1/\Lambda$（希薄な領域）	渦は荷電 $\frac{1}{2}$ の自己双対の塊（分数インスタントン）で、作用 $4\pi^2/g^2$ は T^2 の形に依らない。希薄な気体で $\ln(1/\theta) \propto A_D\, L^{5/3}$（$A_D$ は容器の面積）	$\ln(1/\theta)$ が増え、偏りは小さくなる。指数 $5/3 = 11/3 - 2$ は漸近自由の係数が横の二次元のエントロピーに勝つ余裕	読 （物理：一ループと希薄な気体の勘定）。張力の式 $\Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}$ は 典	希薄な領域・一ループ・SU(2)。U(1) では同じ勘定で指数が -2
$L \gg 1/\Lambda$（閉じ込めの領域）	容器の渦の面の自由エネルギーは張力 × 面積で、T^2 の面積への依存は渦の面の位置のエントロピー（対数）だけ	偏りの比は s^2 の程度に留まる	読 （物理：閉じ込めの描像の上）	閉じ込めを仮定した描像。示されていない

領域	描像	横の T^2 を広げると	札	同じ行に書く条件
$L \sim 1/\Lambda$（真ん中）	弱結合の描像も強結合の描像も使えない	示すべき文そのもの	仮	非摂動の入力が要る。構造的な入力（鏡映正値性・双対性・転送行列）だけでは出ない（26-04）

対照のために U(1) を置くと、$U(1)$ の流束は一様に広がるしかなく、板の上の $U(1)$ は長距離で結合 e^2/A_T（A_T は T^2 の面積）の二次元の $U(1)$ になるので $\ln(1/\theta) \propto A_D/A_T$ で、T^2 を広げたときの偏りの比（広げた後と前の比）はいくらでも大きくなります 読 （物理：帯の還元の論文の見立ての勘定）。四次元の弱結合の $\mathbb{Z}_2$ でも同じく破れます。非可換の流束は尺度に依らない有限作用の塊に局在できる、という点が SU(2) と U(1) を分けます（26-03）。測った記録（T^2 を広げたときの渦の自由エネルギーが U(1) では上がり SU(2) では上がらない、板の張力が増えて飽和する）は 25-08 と 26-09 にあります 読 。

03

帯で示すべき文 — 帯の正しい形と、途中の到達点

帯の目標は「偏りが 1 から一様に離れる」（$\sup_L \theta(L;T_L^2) \le \theta_0 < 1$）ではありません。この形は四次元の $U(1)$ も満たし、出る張力は $\ln(1/\theta_0)/L^2 \to 0$ だからです（26-01）。帯の正しい形は、容器の渦の自由エネルギーが面積の指数で小さくなること

$$\ln \frac{1}{\theta(L;T_L^2)} \;\ge\; c\,L^2 \qquad \text{(物理的な単位で、格子間隔 } a \text{ に一様)} \tag{1}$$

で、't Hooft の閉じ込めの判定の、枠を条件づけた局所版です 仮 。(1) は、基点と枠の減相関と横広げの不等式があれば倍化の反復で従います（27-01 §03 の倍化の反復の定理とその前提）。チェス盤の言葉では、(1) の内容は一様な板の張力と一様な板のギャップの二つの一様性になります（26-05）。

(1) に届く前の途中の到達点として、二つの弱い文が名指されています 仮 。(a) 容器の渦の自由エネルギーが $L \to \infty$ で 0 に近づくこと（閉じ込めない相が無いことの言い換え）。(b) $\ln(1/\theta) \ge cL^2/\ln L$（ほぼ面積則）。どちらも示されていません。

04

第 26 部へ

この道は、帯の手前まで来て止まりました。帯で何が要るかは、この部の道具で形を絞れます。帯の正しい形 (1)、一つの不等式への還元、非可換が効く場所、構造だけでは渡れないこと、の順です。時間の方向の道（第 23・24 部）も、四次元の目標を「$\beta \to \infty$ に一様な定数」

の形で書くと同じ型の一様性に着きます（23-15 §08）。二本の道がこの帯で合流することは、第 26 部の入口 で扱います。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
空間の方向の道が止まる段が、横の T^2 を相関長の尺度を越えて広げる段（帯）であること。帯の正しい形 (1) と、非閉じ込め相の排除 (a) の名指し	(1)・(a)・(b) のどれも 仮
両端の見込み：希薄な領域の $5/3 = 11/3 - 2$、閉じ込めの領域の対数のエントロピー 読 （物理）	真ん中 $L \sim 1/\Lambda$ を非摂動的に通すこと。両端の見込みの証明

出典と再現

もの	種別	出典・道具
小さな T^2 の弦の張力 $\Lambda^2 (\Lambda L)^{5/3}$	典	Y. Tanizaki, M. Ünsal, arXiv:2201.06166 の式 (2.32)・(2.37)（25-02 の出典表）
希薄な領域の $5/3 = 11/3 - 2$、$U(1)$ の -2	読（物理）	帯の還元の論文（草稿、A-07）の「不等式は理論を分ける」の命題（論文自身が見立てと明記）
帯の正しい形 (1) と $U(1)$ の反例	仮・読	26-01。Tomboulis–Yaffe の不等式は典
非閉じ込め相の排除 (a)	仮	27-02 の台帳の「't Hooft の張力の正値性」の行

この章で使った語 — 移り変わりの帯（帯）・横広げの不等式・区画の偏り $\theta(R; T^2_L)$・希薄な領域・閉じ込めの領域・途中の到達点。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：26-00 入口 — 合流 — 二本の道が「全ての尺度で同じ定数」という一つの型の言明に着くこと。

入口 — 合流

この章は案内です。§03・§05 は未解決の地図です。

この部は検討の記録です。機械検査まで済んだ定理は第 20〜22 部、前提の今の一覧は 28-04 に在ります。

この章で分かること — 時間の方向から入る道（第 23・24 部）と、空間の方向から入る道（第 25 部）が、どちらも「全ての尺度で同じ定数で成り立つ」という一つの型の言明に着くこと。その言明が渡らなければならない尺度の区間を、この部では**移り変わりの帯**（略して**帯**）と呼びます。尺度のはしごの図（図 2）で、弱結合の道具と強結合の道具がそれぞれどこまで届き、どこが空いているかを見ます。帯の内訳（目標・還元・否定の補題・電場の流束・非可換の場所・β 単調性・繰り込みの比較・チェス盤）を一つの表にし、第 26 部の十三章の地図を置きます。

前提となる章 — 23-15 §07・23-15 §08（一様性の一行）・24-07 §01（無次元の結合）・4-07（次元転移）・25-00（空間の方向の道の入口）・16-09（証明が含むべき七つの段）。

先に言うこと — この頁は地図で、新しい定理を置きません。図 2 は物理の見立ての図で、行ごとに札を付けます。「二本の道が合流する」は**目標の水準**での言明で、それぞれの道が**いま止まっている壁**が同じものだという言明ではありません（§05）。この部のどの章も、質量ギャップも、連続極限での閉じ込めも示しません。

この章の順序

1. 二本の道が着く一つの型 — 「全ての尺度で同じ定数」
2. 語の注 — この部の「帯」と第 23・24 部の「窓」は別物
3. 尺度のはしご — どの尺度で、どの道具が効くか（図 2）
4. 帯の内訳 — 八つの部品と、その札（表 1）
5. 目標の水準の合流と、壁の水準の違い（表 2）
6. 第 26 部の地図 — 十三章と、24-07 の一行（表 3）

7. 五分類の表と依存グラフ

01

二本の道が着く一つの型 — 「全ての尺度で同じ定数」

この本は第 23 部から、質量ギャップの問題に二つの方向から近づいてきました。

一本目は時間の方向の道です（第 23・24 部）。揺らぎが均される時間が相関長の二乗で伸びるという**拡散型緩和時間の仮定**（上側は緩和時間の上界の仮定、下側は緩和時間の下界の仮定。23-01 §05）を軸に、格子の上の緩和の時間と相関長を比べました。四次元格子で目指す文は、23-15 §07 の表 5 の物理単位の目標の水準——格子の物理単位の質量 $m_{\mathrm{lat}}(\beta)/a(\beta)$ が正の有限値に向かう——です。片側の橋（23-01 §06）と上界の仮定を合わせてそこへ行くには、上界の仮定の定数 K が $\beta \to \infty$ で一様でなければなりません。

二本目は空間の方向の道です（第 25 部）。空間の二方向を、't Hooft の捩れ $n_{12} = 1$ のある小さなトーラス T^2_L に巻き、残りの平面 $\mathbb{R}^2$ の上で閉じ込めを見ます。T^2_L が十分小さければ、捩れが零モードを消し、理論は L の尺度まで弱結合のままで、渦は分数インスタントンとして扱えます（25-00・25-02）。この道の目標は、横を T^2_L に縮めた二次元の理論の弦の張力 $\sigma_{\mathrm{eff}}(L)$ が**L に一様に正**であること、すなわち

$$\inf_{L \geq L_0} \sigma_{\mathrm{eff}}(L) \;>\; 0 \qquad \text{(物理単位、格子間隔 } a \text{ に一様)} \tag{1}$$

です（一様な板の張力。定義は 26-02）。

二つの目標は、形が同じです。どちらも「ある尺度で成り立つ」ではなく「**全ての尺度で、同じ定数で成り立つ**」という文で、格子間隔 a から物理的な長さ $1/\Lambda$ を越えて大きな尺度まで、途中のどの尺度でも定数が崩れないことを求めます。23-15 §08 の一行——足りないのは段の数ではなく、全ての尺度で同じ定数で成り立つという一様性——は、一本目の道の側から書いたこの型の文でした。一段目（0+1 次元）では $\hbar \to 0$ で一様、四次元格子では $\beta \to \infty$ で一様、と形を変えて現れることも、23-15 §07 の末尾で見ました。

四次元では、弱結合の尺度と強結合の尺度の間に、結合の大きさが 1 の程度になる尺度 $L \sim 1/\Lambda$ があります。Λ は次元転移（4-07）で量子的に生まれる尺度で、格子の単位で測ると $a \to 0$ で発散します。二つの目標の文はどちらも、この尺度を一様な定数で通り抜けなければ成り立ちません。この部では、$L \sim 1/\Lambda$ の前後の尺度の区間を**移り変わりの帯**と呼び、二本の道が着く文を「帯を渡る文」と呼びます。

この合流は、検討の外の整理とも合っています。連続の課題の分け方（16-07 の一様なギャップの課題）では、一様なギャップ $\inf_L \Delta_L > 0$ を一つの課題に置きますが、二本の道はそれを二つの言葉で攻める形になっています。16-09 の証明が含むべき七つの段の表では、帯は「帯の段」に当たります。

02

語の注 — この部の「帯」と第 23・24 部の「窓」は別物

第 23・24 部は「窓」という語を、少なくとも三つの意味で使ってきました。**この部の「帯」は、そのどれとも別物です。**語が一致すると、二本の道が同じ所で止まっているように読めてしまうので、ここで分けておきます。

表 0　「窓」と「帯」の対照と、ほかの語と記号の注

語	意味	使う章	帯との関係
サイトの窓（A_W の窓・窓の印 σ_W・窓の周辺の対数 Sobolev の入力）	0+1 次元の経路の上の、有限個のサイトの区間	23-09	格子の単位で有限の長さ。帯ではない
$\hbar$ の窓	計算機援用で確かめられる $\hbar$ の範囲	23-07・23-08・23-15	パラメータの区間。尺度の区間ではない
時刻の窓（窓の因子 φ・窓の中の上限の命題）	時間の区間に限った試験関数	24-04・24-05	道具の名。帯ではない
移り変わりの帯（帯）	弱結合から強結合へ移る尺度 $L \sim 1/\Lambda$ の前後の区間	第 26 部	—
第 23・24 部の「帯」	23-01 §05・23-15 (5) の「帯の文」（量が長さの二乗の定数倍の幅に入るという言明）、23-09 の $\ell_{\text{帯}}$（頂上の帯に関わる長さ）、24-02 §03・§05 と 24-09 の「二次元の帯」（幅の狭い帯状の格子）。25-07 §06 の二次元の模型の「捩れた帯」も帯状の格子の意味	23-01・23-09・23-15・24-02・24-09・25-07	別の意味の語。この部の帯（尺度の区間）ではない
θ の三つの意味	23-09 の閾 θ（θ_B・θ_σ ほか、配位を谷の側と頂上の側に分ける値）・この部の区画の偏り $\theta(R;T_L^2)$（25-01 の (4)）・Tanizaki–Ünsal の真空角 θ（25-02 で $\theta=0$ と置く）	23-09・25-01・25-02	区画の偏りだけがこの部の量。他の二つは別の量
L と L_0	26-11 では L はブロックの倍率、L_0 は箱の一辺（7-05 と同じ）	7-05・26-11	第 25・26 部の L（T^2 の大きさ）とは別

ほかにも記号の衝突があるので、この部では次の約束で書きます。

- 渦の自由エネルギーが β について単調に増えるという性質は「**β 単調性**」、二倍の格子と粗い格子の渦の自由エネルギーを比べる不等式は「**繰り込みの比較**」と名で呼びます。
- 仮定は名だけで呼びます：**小さな $\mathbf{T^2}$ の基点・枠の減相関・横広げの不等式**（強い形・弱い形）・**一様な板の張力・一様な板のギャップ**。
- チェス盤の密度は κ_{cb} と書きます（第 23 部の κ と区別するため）。

03

尺度のはしご — どの尺度で、どの道具が効くか

図 2 は、空間の方向の道の言葉で、尺度 L（小さなトーラス T^2_L の大きさ、または比べる箱の大きさ）を縦に並べたものです。下が短い距離（格子間隔 a）、上が長い距離です。各行の右端に札を付けます。図 1（論理の流れ）は 16-09 にあります。図 2 の番号と題は 25-00 の図 2 と同じです。

```
尺度 L
  ∞ ┤ 閉じ込めの領域：T²  を広げても失うのは渦の面の位置のエントロピー（対数）だけ     〔読〕
    │    強結合の端：面積則は既知
    │    強結合の端の繰り込みの比較：定数は粗い（記帳は概略）                          〔仮
1/Λ ┤▒▒▒▒ 移り変わりの帯 ▒▒▒▒  繰り込みの比較：(2N, β) の渦の自由エネルギー ≤ K·(N, β
    │    一ループ：揺らぎを整形する比較なら β' = β − 0.258（二倍あたり）              〔
    │    一ループ：揺らぎについて等長的な比較では β' ≥ β + 0.023 の向きしか出ない     〔初
    │    数値：SU(2) は β' ≈ β − 0.2、U(1) は β' > β
    │    非摂動の誤差の評価 ← 空いている所
    │ 希薄な分数インスタントンの気体：弦の張力 ∝ Λ²(ΛL)^(5/3)
    │    余裕 5/3 = 11/3 − 2（漸近自由の係数 − 横の二次元のエントロピー）            〔
 L₀ ┤
    │ 紫外：Bałaban の解析。周期の箱の連続極限は公開された構成（第二巻）              〔仮
  a ┤
```

図 2　尺度のはしご。弱結合の道具（下）と強結合の道具（上）はそれぞれの端で効き、帯（L ~ 1/Λ）の非摂動の評価だけが空いている。札は行ごと。

図の読み方を三点だけ書きます。

(i) 二倍あたりの β の移動。「$\beta' = \beta - 0.258$」は、背景の磁場の中の揺らぎの一ループの熱核の係数 $11/3 = -1/3 + 4$ から出る値で、$\beta = 4/g^2$ の慣例で $\beta - \beta' = 8b_0 \ln 2$、$b_0 = 22/(48\pi^2)$ です。揺らぎを整形する比較ならこの値を再現し、揺らぎについて等長的な比較（恒等写像・平行移動・ゲージ変換・Migdal–Kadanoff 型の間引き）ではスピンの項 $+4$ が一次の評価に寄与せず、$-1/3$ の側の $\beta' \geq \beta + 0.023$（U(1) と同じ向き）しか出ません。どちらも**一ループの水準の文**で、非摂動の比較ではありません。表の分解と計算は 25-07 に置き、比較そのものは 26-06 で扱います。

(ii) 数値の「$\beta' \approx \beta - 0.2$」の条件。$SU(2)$、捩れ $n_{12} = 1$、レプリカ交換と Bennett の受理率の方法による渦の自由エネルギー ΔF の測定で、格子全体を二倍にし（$N_T \times M = 4 \times 8 \to 8 \times 16$ と $4^4 \to 8^4$）、大きい格子の値を小さい格子の β' の曲線に当てはめて読んだ値です。$\beta = 2.5$〜3.0、種は 1〜3 本で、読んだ $\beta - \beta'$ は $+0.13$〜$+0.25$（読みの幅は ± 0.05〜0.1 の程度、種の間の差から誤差は過小評価気味）。$U(1)$ は $\beta = 1.5$、$4 \times 8 \to 8 \times 16$ で $\beta - \beta' < -0.2$（逆向き）。格子は小さく、統計も少ないので、向きの読みであって値の決定ではありません 〔読〕。表は 26-09 に置きます。

(iii) 空いている所。強結合の端と一ループの端は、それぞれ別の道具で押さえられます。真ん中の帯で、比較の誤差を非摂動的に（中程度の結合で、大きな場も含めて）評価する道具がありません。図の「▒」の行が、この部の全体の主題です。

04

帯の内訳 — 八つの部品と、その札

表 1 は、帯を渡る文に関わる部品を、空間の方向の道の言葉で並べたものです。札は行ごと、条件は同じ行に書きます。札の意味は第 23 部の五分類のとおりです：〔初〕紙で証明を置いた・〔典〕原典で確認した既知・〔機〕計算機援用・〔読〕数値の読み（物理の見立ては「物理」と注記）・〔仮〕仮定。Lean の欄は札の外で、名と仮定を並べます。

表 1　帯の内訳（札は行ごと。「—」は機械検査の無い行）

部品	一行の中身	札	同じ行の条件	Lean	章
目標	「区画の偏り θ が尺度に一様に 1 から離れる」では足りない。要るのは $\ln(1/\theta(L,L)) \geq cL^2$（面積の指数）。Tomboulis–Yaffe の不等式で面積則へ	初（不足の論理）・典（Tomboulis–Yaffe）・読（U(1) の勘定、物理）	U(1) の行はクーロン相・長距離で二次元の U(1)・見立て	—	26-01
還元	基点・枠の減相関・横広げの不等式の三つの下で、倍化の反復 $\theta(2R) \leq K\theta(R)^4$ から目標が出る	初（条件つき）	三つの仮定の下。格子の人工物の無い $L \geq L_{\min}(a)$。二進の尺度の列の上で	`Doubling.iterate`・`decay`（反復の代数だけ）	26-02
否定の補題	鏡映正値性・中心と双対の恒等式・転送行列の正値性は $\mathbb{Z}_2$・U(1) でも同じに成り立つので、それだけからは横広げの不等式は出ない	初	「この入力の組だけでは」の形	—	26-04

部品	一行の中身	札	同じ行の条件	Lean	章
電場の流束	$\theta = Y(1)/Y(0) \geq 0$（電場の流束 1 と 0 の分配関数の比。't Hooft の双対性の格子版）	初	$\theta \leq 1$ には捩れた分配関数の正値性を仮定として使う	`FluxDuality`（スペクトルの形の代数）	26-04
非可換の場所	希薄な領域で $\ln(1/\theta) \propto A_D L^{5/3}$、指数の余裕 $5/3 = 11/3 - 2$。U(1) は -2	読（物理）・典（Tanizaki–Ünsal）	希薄な領域・一ループ。「この還元の中で」非可換が効く場所	—	26-03
β 単調性	渦の自由エネルギーが β について増える。格子単位の弦の張力の β 単調性と同じ重さの問題	仮（SU(2) では未証明）	証明があるのは限られた場合（二次元の小さな格子・固定した格子で $\beta \to 0$ と $\beta \to \infty$ の近く）だけで、本には置かない	—	26-06
繰り込みの比較	$(2N, \beta)$ の渦の自由エネルギー $\leq K \cdot (N, \beta')$、$\beta' < \beta$。漸近自由が入るのはここだけ	初（一ループの水準）・読（二倍の試験）・仮（非摂動の比較）	強結合の側は定数の粗い記帳、弱結合の側は一ループの水準。U(1) は逆向き	—	26-06
チェス盤	z の鏡映正値性の下で、枠の減相関を一つの密度 κ_{cb} に置き換える。帯は一様な板の張力と一様な板のギャップに集約	初（L を固定したチェス盤）・仮（一様な板の張力・一様な板のギャップ）	L を固定すれば。L に一様にするのは開	`ReflPos`（核の代数）	26-05

Lean の欄が保証するのは、有限和と実数の代数だけです。θ が区画の偏りであること、Haar 測度、転送行列の正値性は Lean の外にあります。名と仮定は各章の分類表に書きます。

表 1 の行のうち、**非可換の力学が入るのは「横広げの不等式」と「一様な板の張力」に関わる行だけ**です（還元の第三の仮定・非可換の場所・繰り込みの比較）。そこは U(1) と $\mathbb{Z}_2$ で破れる形をしています。他の行は、どの群でも成り立つ構造的な事実か、論理の整理です。

05

目標の水準の合流と、壁の水準の違い

「二本の道が同じ壁に着く」という言い方は、**目標の水準では正しく、いま止まっている壁の水準では正確ではありません。**

正しい部分は §01 のとおりです。第 23 部の四次元の目標（23-15 の物理単位の目標の水準：上界の仮定と片側の橋が $\beta \to \infty$ で同じ定数）も、空間の方向の道の目標 (1) も、帯を必ず渡る文です。

正確でない部分は、第 23 部の**いまの壁**です。23-09 §06 の「頂上の曲率の不足の壁」（頂上の一サイトの対角 $15/4$ と結合の和 4 が釣り合わないこと）は、0+1 次元の二重井戸の上の、階段の一段目の壁でした。そこで移り変わる長さは、頂上の Jacobi の方程式の最初の共役点で決まる**古典的な**長さで、$\hbar$ に依らず、格子の単位で有限です。帯で移り変わる長さ $1/\Lambda$ は量子的に生まれ、格子の単位で発散します。表 2 に違いを並べます。

表 2　一段目の壁と帯（詳しくは 26-07）

	一段目の壁（第 23 部）	**移り変わりの帯（第 26 部）**
場所	0+1 次元・二重井戸・$\varepsilon = \frac{1}{2}$ の格子	四次元格子・$SU(2)$
移り変わる長さ	頂上の最初の共役点（古典的・$\hbar$ に依らない）	$1/\Lambda$（次元転移で量子的に生まれる）
格子の単位での大きさ	有限	$a \to 0$ で発散
両端の道具	短い鎖は凸性、長い鎖は混合	弱結合は一ループと紫外の解析、強結合は展開
型	同じ：両端に別の道具があり、真ん中で最悪の配位の評価が止まり、平均の道具に移ると一様性が出る見込みがある	

だから、一段目の壁は帯の**縮図**ではあっても、帯そのものではありません。一段目では、移り変わる長さを越える有限のブロックと強い混合で渡る道が考えられますが（札は〔仮〕）、四次元では「移り変わる長さを越える有限のブロック」がありません。この違いと、型の同じところを、26-07 で時間の側から書きます。違いの理由――四次元の結合が無次元で、古典的な長さを持たないこと――は 24-07 §01 にあります。

06

第 26 部の地図 — 十三章と、24-07 の一行

表 3　第 26 部の章（札は各章の主な行。条件は同じ行に）

章	題	一行	主な札と条件
26-00	入口 — 合流	この頁	地図（物理の図＋各行の札）
26-01	帯の正しい形	θ が 1 から離れるでは足りず、$\ln(1/\theta(L,L)) \geq cL^2$ が要る	〔初〕不足の論理・〔典〕Tomboulis–Yaffe・〔読〕U(1) の勘定（物理）
26-02	一つの不等式への還元	横広げの不等式（強い形・弱い形）と倍化の反復。条件つきの還元の定理	〔初〕基点・枠の減相関・横広げの三つの仮定の下
26-03	非可換が効く唯一の場所	$5/3 = 11/3 - 2$・U(1) と $\mathbb{Z}_2$ の対照	〔読〕物理（希薄な領域・一ループ。「この還元の中で」）

章	題	一行	主な札と条件
26-04	構造だけでは渡れない	鏡映正値性・双対性・転送行列は $\mathbb{Z}_2$・U(1) でも同じ。$\theta = Y(1)/Y(0) \geq 0$	〔初〕「この入力の組だけでは」
26-05	チェス盤と同時の反転	枠の減相関を密度 κ_{cb} に。帯は一様な板の張力と一様な板のギャップに集約	〔初〕L を固定すれば・〔仮〕一様性
26-06	繰り込みの比較 ― 群を区別する比較	帯 ＝ β 単調性＋繰り込みの比較。漸近自由が入るのは $\beta' < \beta$ だけ	〔初〕一ループの水準・〔読〕二倍の試験・〔仮〕非摂動
26-07	時間の側から見た帯	第 23 部の道で帯に当たる文の形。一段目の壁は帯の縮図だが帯ではない	〔初〕最初の共役点の計算・〔仮〕帯を渡る文そのもの
24-07	四次元だからこそ	第 24 部に残す。無次元の結合と位相――帯の長さが量子的に生まれる理由	各行の札は 24-07 のとおり
26-08	試して止まった道の地図	試した道と、止まった理由。Tomboulis（2007）の主張と、U(1) を区別しないという批判	〔典〕照合の済んだ文献だけ・照合未了は明記
26-09	測った記録	T^2 を広げると U(1) の渦は高くなり SU(2) は高くならない。板の張力は増えて飽和。格子を二倍にした試験	〔読〕格子の大きさ・β・種の数・誤差を各行に
26-10	新しい見方の候補	真ん中の帯の四つの顔。検討の結果、否定的だった見方も	〔読〕物理の見立て
26-11	紫外の制御 ― 無限個の段で閉じるとは何か	両方の道の下にある土台。一段で閉じるとは何か・三つの難しさ・連作の五段と止まった場所・言明の案	〔初〕背景と揺らぎの分解の補題・結合の小ささの帰納の補題（一段の剰余＝結合の一段の正味の括弧は未証明）・〔典〕Bałaban の連作の五段・〔読〕一リンクの熱核の類（一リンク・登録範囲）・〔仮〕捩れた小さな四次元トーラスの紫外の言明（案・未証明）
26-12	帯の議論の篩 ― 七つの試験の相手	U(1) のほかに六つの相手を置き、議論の型ごとに落とす相手を並べる。本書の定理と帯の候補の言明を、相手ごとに真・偽・定義されないに分けた表	〔典〕・〔読〕・〔初〕・〔仮〕（文献で確かめたものだけを典に。小さい格子の計算は条件つき）

読む順は番号どおりを勧めます。26-01 と 26-02 で帯を一つの不等式まで絞り、26-03〜26-05 でその不等式のどこに何が入るかを見て、26-06 と 26-07 で二つの方向から帯そのものを眺めます。26-08〜26-10 は記録と候補です。26-11 は二本の道の下にある土台（紫外の制御）で、条件の台帳の「紫外の制御」の行の中身です。26-12 は、帯の議論を試す相手の一覧です。条件つきの言明全体は第 27 部（27-01）でまとめます。

```
07
```

五分類の表と依存グラフ

表 1 と表 3 の行の札は、それぞれの章の分類表で確定します。この頁が自分で置く行は次の十二です。

表 4　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	Λ は次元転移で生まれ、格子の単位で $a \to 0$ で発散する	典	4-07	一ループ・二ループの流れ	—
2	揺らぎを整形する比較で $\beta - \beta' = 8b_0 \ln 2 = 0.258$	初	25-07	一ループの水準・二倍あたり	—
3	揺らぎについて等長的な比較では $\beta' \geq \beta + 0.023$ の向きしか出ない	初	25-07	一ループの水準	—
4	二倍の試験：SU(2) で $\beta - \beta' \approx +0.13$〜$+0.25$、U(1) で逆向き	読	§03 (ii)・26-09	$4 \times 8 \to 8 \times 16$・$4^4 \to 8^4$・$\beta = 2.5$〜$3.0$・種 1〜3 本	—
5	小さな T^2 の弦の張力 $\propto \Lambda^2 (\Lambda L)^{5/3}$	典	Tanizaki–Ünsal 式 (2.37)	希薄な領域・一ループ	—
6	余裕 $5/3 = 11/3 - 2$（漸近自由の係数が横のエントロピーに勝つ）	読（物理）	26-03	希薄な領域・一ループ	—
7	強結合では面積則	典	5-02	小さな β	—
8	強結合の端の繰り込みの比較	仮	26-06（記帳は概略）	極めて小さな β	—
9	紫外の制御（捩れた小さな T^2 の箱。周期の立方の箱での連続極限は公開された構成が示した。第二巻）	仮	7-07・27-02	a から L_0 まで	—
10	二本の道の目標はどちらも「全ての尺度で同じ定数」の文で、帯を渡る	読（物理）	§01	目標の水準	—
11	一段目の壁の移り変わる長さは古典的で、格子の単位で有限	初	26-07 §02	0+1 次元・$\varepsilon = \frac{1}{2}$	—
12	一段目の壁は帯の縮図であって帯ではない	読（物理）	§05	型の比較	—

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  典  次元転移：Λ は量子的・格子の単位で発散                  4-07
 2  初  整形した比較で β − β' = 0.258                          一ループの水準
 3  初  等長的な比較は β' ≥ β + 0.023 の向き                   一ループの水準
 4  読  二倍の試験：SU(2) は β' < β、U(1) は逆                 小さな格子・種 1〜3 本
 5  典  弦の張力 ∝ Λ²(ΛL)^(5/3)                               希薄・一ループ
 6  読  余裕 5/3 = 11/3 − 2 ⟸ 5                               物理
 7  典  強結合の面積則                                        小さな β
 8  仮  強結合の端の繰り込みの比較                            記帳は概略
 9  仮  紫外の制御                                            a から L₀
10  読  二本の道の目標は同じ型で帯を渡る ⟸ 1                   目標の水準
11  初  一段目の移り変わる長さは古典的・有限                  26-07 §02
12  読  一段目の壁は帯の縮図で帯ではない ⟸ 1・10・11
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。図 2 の行は、表 4 の整形した比較から紫外の制御までの行の並べ直しで、図そのものは新しい節点を作りません。結論の側の節点（二本の道の目標が同じ型であること、一段目の壁が帯の縮図であること）は「読（物理）」で、帯を渡る文そのもの（一様な板の張力、上界の仮定の一様性）の節点はこの頁にありません。それは仮定として第 27 部の条件の台帳に置かれます。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
読 （物理） 二本の道の目標が同じ型（全ての尺度で同じ定数）で、どちらも帯を渡ること	帯を渡ること。二本の道のどちらかの目標
初 帯の比較の、一ループの水準での向き（整形した比較と等長的な比較の差）	非摂動の比較。帯の中程度の結合での誤差の評価
読 小さな格子の二倍の試験で SU(2) と U(1) の向きが分かれること	値の決定。大きな格子での振る舞い
読 （物理） 一段目の壁は帯の縮図であって帯ではないこと	一段目の壁を越えること。一段目の道具が帯を渡るかどうか

出典と再現

もの	種別	出典・道具
小さな捩れた T^2 の弦の張力	典	Y. Tanizaki, M. Ünsal, arXiv:2201.06166（Prog. Theor. Exp. Phys. 2022）式 (2.32)・(2.37)。章 25-02
Wilson ループの上界（渦の自由エネルギーから）	典	E. T. Tomboulis, L. G. Yaffe, Commun. Math. Phys. 100 (1985) 313。T. Kanazawa, arXiv:0808.3442（SU(N) への一般化）。章 26-01

もの	種別	出典・道具
強結合の面積則・次元転移・紫外の多重尺度の解析	典	章 5-02・4-07・7-07 の出典
一ループの熱核の係数と二倍あたりの移動	初	章 25-07（一ループの水準）
二倍の試験の数値	読	レプリカ交換と Bennett の受理率の方法。章 26-09 の表（格子の大きさ・β・種・誤差）
第 23 部の目標と一段目の壁	本書	23-15 §07・§08・23-09 §06・24-07 §01

この章で使った語 ― 移り変わりの帯（帯）・尺度のはしご・一様な板の張力・横広げの不等式・枠の減相関・小さな T^2 の基点・β 単調性・繰り込みの比較・チェス盤の密度 κ_{cb}・拡散型緩和時間の仮定。意味は A-02 用語集 と A-06 名前の索引 にあります。

次に読む章：26-01 帯の正しい形 ― 「θ が 1 から離れる」では足りない理由。

帯の正しい形

この章は本書の検討です。§06 は未解決の地図です。

この章で分かること — 帯を渡る文を、区画の偏り θ の言葉でどう書くべきか。「θ が尺度に一様に 1 から離れている」という素朴な形では足りないこと——その形から容器の評価で出る弦の張力の下界は $\ln(1/\theta_0)/L^2$ で、$L \to \infty$ で 0 になること、そして弱結合の四次元 U(1) がその形を満たすと見立てられること。要るのは、偏りが面積の指数で小さくなる形 $\ln(1/\theta(L,L)) \geq cL^2$ で、これは 't Hooft の閉じ込めの判定を枠で条件づけた局所の形です。Tomboulis–Yaffe の不等式が、渦の自由エネルギーの面積の指数の減衰を面積則に結ぶことも見ます。

前提となる章 — 26-00（帯）・25-01（捩れと 't Hooft の流束）・25-03（容器と区画の偏り）・25-04（板の閉じ込め）・5-06（U(1) と非可換）。

先に言うこと — この章の証明は初等的な不等式の操作だけです。U(1) のクーロン相の勘定は有効理論による見立てで（〔読〕、物理）、定理ではありません。「素朴な形が足りない」という結論のうち、紙で言えるのは「その形から容器の評価で出る下界は 0 に向かう」という部分で、「その形からはどの道でも閉じ込めが出ない」という部分は U(1) の見立ての上に立ちます。この章は閉じ込めも、正しい形 (7) も示しません。

この章の順序

1. 素朴な形 — θ が尺度に一様に 1 から離れる
2. 素朴な形から出るもの — 張力の下界は L→∞ で 0
3. U(1) のクーロン相の勘定 — 素朴な形を満たし、閉じ込めない
4. 正しい形 — 面積の指数と Tomboulis–Yaffe の不等式
5. 試金石 — U(1)・$\mathbb{Z}_2$・SU(2) での振る舞い（表 1）
6. この形が帯に課すもの
7. 五分類の表と依存グラフ

01

帯の素朴な形 — θ が尺度に一様に 1 から離れる

記号を 25-03 から受け取ります。格子 $(\mathbb{Z}/L)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ の上の $SU(2)$ の Wilson 作用を、Mack–Petkova の捩れを和に取ったアンサンブル（リンク U と、閉じた ± 1 の変数 z_p、重み $\exp(\frac{\beta}{2}\sum_p z_p \operatorname{tr} U_p)$）で書き、横の二方向 1・2 には背景の捩れ $n_{12}=1$ を固定します。平面（方向 3・4）の中の円板または正方形 D に対し、**容器**を $D \times T^2_L$、その**区画**を D を通る $\mathbb{Z}_2$ の流束 $\sigma_D = \prod_{p \in D \times \{y_0\}} z_p$、容器の外の全ての変数（**枠**）$\Phi$ で条件づけた**区画の偏り**を

$$\theta_D(\Phi) \;:=\; \big|\, \mathbb{E}[\sigma_D \mid \Phi] \,\big| \;\in [0,1] \tag{1}$$

とします。大きさ R の容器で横が T^2_L のときの典型的な枠での値を $\theta(R;T^2_L)$、とくに $\theta(L,L) := \theta(L;T^2_L)$ と書きます。枠を与えると容器の中は条件つきで独立で、平面の中のループ C の内側の互いに素な容器 D_j について

$$|\langle W(C)\rangle| \;\le\; \mathbb{E}\prod_j \theta_{D_j}(\Phi) \tag{2}$$

が成り立ちます（Mack–Petkova の容器の評価 典 、25-03）。

空間の方向の道は、小さな T^2_L では閉じ込めが見え（25-04）、それを $L \to \infty$ へ運べば $\mathbb{R}^4$ の閉じ込めになる、という筋でした。そこで最初に思いつく帯の文は、次の**帯の素朴な形**（以下、素朴な形）です。

$$\text{(素朴な形)} \qquad \sup_{L \ge L_0} \theta(L,L) \;\le\; \theta_0 \;<\; 1 \qquad \text{(典型的な枠で、格子間隔 } a \text{ に一様)} \tag{3}$$

「容器と横のトーラスを一緒に大きくしても、区画の偏りが 1 に張り付かない」——乱れが全ての尺度で残る、という文です。

02

素朴な形から出るもの — 張力の下界は L→∞ で 0

素朴な形の張力の下界 初 　ある L で、平面を一辺 L の正方形の容器で敷き詰めたとき、(2) の右辺の積が定数 $C_{\mathrm{D}} \ge 1$ の違いを除いて各因子の積に分かれ（枠の減相関 仮 ）、各因子が θ_0 以下だとする。このとき、面積 A の正方形のループ C（一辺が L の倍数）について

$$|\langle W(C)\rangle| \;\le\; C_{\mathrm{D}}\, \theta_0^{\,A/L^2} \;=\; C_{\mathrm{D}}\, e^{-\sigma_L A}, \qquad \sigma_L := \frac{\ln(1/\theta_0)}{L^2}. \tag{4}$$

証明　C の内側に一辺 L の正方形の容器を A/L^2 個並べ、(2) と仮定を使うと $|\langle W(C)\rangle| \le C_{\mathrm{D}} \prod_j \theta_0 = C_{\mathrm{D}} \theta_0^{A/L^2}$。指数を書き直せば (4)。∎

(4) の張力 σ_L は各 L で正です。しかし素朴な形 (3) が与えるのは 一つの 定数 θ_0 だけなので、この道で得られる張力の下界は $\ln(1/\theta_0)/L^2$ で、四次元の極限（板 $T^2_L \times \mathbb{R}^2$ が $\mathbb{R}^4$ に近づく $L \to \infty$）で 0 に向かいます。物理単位で書けば、L を $1/\Lambda$ の何倍にとっても下界は $\Lambda^2 \ln(1/\theta_0)/(L\Lambda)^2$ で、一様な張力を与えません。

ここで言えているのは「(3) から**容器の評価で**出る下界は 0 に向かう」ことです。(3) が成り立つ理論が閉じ込めないことは、素朴な形の張力の下界からは出ません。次の節の U(1) の見立てが、その一段を埋めます。

03

U(1) のクーロン相の勘定 — 素朴な形を満たし、閉じ込めない

同じ容器の言葉を四次元のコンパクトな $U(1)$ に当てはめます（捩れは ± 1 の値の中心の流束として同じに入ります）。以下は有効理論による見立てです 読 （物理）。

弱結合の $U(1)$ はクーロン相にいて、板 $T^2_L \times \mathbb{R}^2$ の上では、長い距離で横を積分した二次元の $U(1)$ になり、その結合は e^2/A_T（$A_T = L^2$ は T^2 の面積）です。二次元の $U(1)$ で面積 A_D の領域を通る流束 Φ の分配関数は、巻き付き k についての Poisson の和で

$$Z(\Phi) \;\propto\; \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ik\Phi}\, e^{-e^2 A_D k^2/(2A_T)} \tag{5}$$

と書けます。区画 $\sigma_D = \pm 1$ は $\Phi = 0$ と $\Phi = \pi$ に当たるので、$q := e^{-e^2 A_D/(2A_T)}$ が小さいとき

$$\theta(R; T^2_L) \;=\; \frac{Z(0) - Z(\pi)}{Z(0) + Z(\pi)} \;\approx\; 2q \;=\; 2\exp\!\Big(-\frac{e^2 A_D}{2A_T}\Big). \tag{6}$$

容器の大きさを $R = L$ にとると A_D/A_T は L に依らない数（正方形なら 1）なので、$\theta(L, L)$ は L に依らない定数で、素朴な形 (3) を満たします。一方、弱結合の四次元 $U(1)$ が閉じ込めないことは定理です（Guth 1980・Fröhlich–Spencer 1982、Villain 型の作用 典 、5-06）。二つを合わせると、**(3) は閉じ込めを導けない**、という結論になります。ただし (6) は見立てなので、この結論も同じ札 〔読〕（物理）を持ちます。

(6) は二次元に縮めた U(1) の弦の張力 $\sigma \sim e^2/(2L^2)$ と整合します。板の上の U(1) は閉じ込めますが、その張力は $1/L^2$ で 0 に向かいます。素朴な形の張力の下界の $\ln(1/\theta_0)/L^2$ は、ちょうどこの振る舞いと同じ形です。

注　最初に試した古典的なエネルギーの勘定（流束 π を半径 L の容器に一様に広げたエネルギー $(\beta/2)(\pi/L^2)^2 L^4 = \beta\pi^2/2$ が L に依らない）も同じ結論を与えますが、巻き付き k の和を落としているので、(5)・(6) の形を本文に置きます。

04

帯の正しい形 — 面積の指数

一様な張力を出すには、偏りが容器の面積の指数で小さくならなければなりません。物理単位で

$$\text{(正しい形)} \qquad \ln\frac{1}{\theta(L,L)} \;\geq\; c\,L^2 \qquad (L \geq L_0,\ \text{典型的な枠で、}a\ \text{に一様}) \tag{7}$$

です。これが帯の正しい形です。容器の評価の側から見れば、(7) は張力が L に依らない形にそのままなります。

面積の指数からの面積則 初　素朴な形の張力の下界と同じ枠の減相関の仮定の下で、一辺 L の容器で $\theta \leq e^{-cL^2}$ なら、一辺が L の倍数の正方形のループについて $|\langle W(C)\rangle| \leq C_{\mathrm{D}}\, e^{-cA}$。

証明　素朴な形の張力の下界の証明で θ_0 を e^{-cL^2} に替えると $C_{\mathrm{D}}(e^{-cL^2})^{A/L^2} = C_{\mathrm{D}}e^{-cA}$。∎

(7) は、't Hooft の閉じ込めの判定——渦（中心の流束）の自由エネルギーが断面の面積の指数で小さくなること——を、枠で条件づけた局所の形にしたものです。大域の形は、捩れた境界条件の分配関数で書けます。トーラスの上で、ループの平面 $\mu\nu$ に捩れの流束を入れた分配関数 Z_- と入れない Z_+ の比で渦の自由エネルギーを $e^{-F_v} := Z_-/Z_+$ と定めると、区画の偏りの大域版は

$$\theta \;=\; \frac{Z_+ - Z_-}{Z_+ + Z_-} \;=\; \tanh\frac{F_v}{2} \tag{8}$$

です（定義から、初）。$\tanh x \leq x$ と、$0 \leq \theta \leq 1/\sqrt{2}$ で $\operatorname{artanh}\theta \leq \theta/(1-\theta^2) \leq 2\theta$ から $\theta \leq F_v/2 \leq 2\theta$ なので、$\ln(1/\theta) \geq cL^2$ と $F_v \lesssim e^{-cL^2}$ は定数の違いを除いて同じ条件です。

大域の形を面積則に結ぶのが Tomboulis–Yaffe の不等式です 典。$SU(2)$ の格子ゲージ理論で、周期 L_μ, L_ν の方向の平面にある長方形 C（面積 A_C）について

$$\langle W(C)\rangle \;\leq\; 2\Big\{\tfrac{1}{2}\big(1 - e^{-F_v}\big)\Big\}^{A_C/(L_\mu L_\nu)} \tag{9}$$

が成り立ちます。ここで F_v は C と同じ平面の捩れの流束の自由エネルギーで、渦の面は残りの二方向を巻いて C と一度まわります（板の背景の捩れ n_{12} とは別の捩れです）。T. Kanazawa はこの不等式を $SU(N)$ と一般の古典的なスピン系へ、鏡映正値性を使って拡張しました 典。

Tomboulis–Yaffe からの張力の下界 初　(9) の下で、$F_v \le e^{-\rho L_\mu L_\nu}$（$\rho > 0$ はトーラスの大きさに依らない）なら $\langle W(C) \rangle \le 2e^{-\rho A_C}$、すなわち弦の張力は ρ 以上。

証明　$1 - e^{-F} \le F$ から $\frac{1}{2}(1 - e^{-F_v}) \le \frac{1}{2} e^{-\rho L_\mu L_\nu}$。$A_C/(L_\mu L_\nu)$ 乗すると $2^{-A_C/(L_\mu L_\nu)} e^{-\rho A_C} \le e^{-\rho A_C}$。∎

ρ は 't Hooft の弦の張力と呼ばれます。Tomboulis–Yaffe からの張力の下界の仮定と (7) は同じ型の条件です——前者は大域の分配関数の比、後者は枠で条件づけた容器の偏りです。大域の形は枠の減相関を要しない代わりに、基点（小さな T^2 での評価）も大域の分配関数で示す必要があります（26-02 の注）。

05

試金石 — U(1)・$\mathbb{Z}_2$・SU(2) での振る舞い

帯を渡る議論は、閉じ込めない理論では失敗しなければなりません。素朴な形 (3) はこの試金石に通らず、正しい形 (7) は通る見込みです。表 1 の振る舞いは全て見立てです 読　（物理）。

表 1　$\theta(L, L)$ の振る舞い（見立て。四次元・弱結合）

理論	L を大きくしたときの $\theta(L, L)$	素朴な形 (3)	正しい形 (7)	閉じ込め
$U(1)$（クーロン相）	一定（(6)）	満たす	満たさない	しない 典
$\mathbb{Z}_2$（弱結合）	1 に近づく（流束が T^2 の面積の壁を作る）	満たさない	満たさない	しない
$SU(2)$	0 に近づく（期待）	満たす（期待）	満たす（期待）	する（物理の期待）

素朴な形を**満たす**ことは、閉じ込めの試金石になりません。U(1) が満たすからです。「U(1) で失敗すること」は、「θ が L とともに面積の指数で小さくならないこと」として課すのが正しい言い方です。

06

この形が帯に課すもの

(7) は、帯の両側をつなぐ文です。小さな L（希薄な分数インスタントンの領域）では、$\ln(1/\theta)$ は弦の張力 $\propto \Lambda^2 (\Lambda L)^{5/3}$ と容器の面積の積で増える見込みで（26-03）、大きな L（閉じ込めの領域）では σL^2 から渦の面の位置のエントロピーの対数を引いた形になる見込みです 読　（物理）。(7) はその間——$L \sim 1/\Lambda$——を、一つの定数 c で通すことを求めます。

(7) より弱い途中の到達点も、二つ名指しできます。

- (a) $F_v(L,L)\to 0$：閉じ込めない相の排除。素朴な形よりは強いが、張力の一様な下界は与えない。
- (b) $\ln(1/\theta(L,L))\ge cL^2/\ln L$：ほぼ面積則。素朴な形の張力の下界の形で張力の下界は $c/\ln L$ で、まだ一様ではない。

どちらも未解決です。

この章の結論は、第 25 部の道具の位置づけも変えます。流れの補題 $\theta\le 1-a$（25-06）は、一段の核の反転の確率 a が $\frac12$ 程度にしかなれないので、$\theta_0\sim\frac12$ の形――素朴な形 (3)――の評価しか与えません。だからその道具は帯の試験には使えず、L を固定した板の張力の下界を推す用途に限られます[初]。

次の章 26-02 では、(7) を、容器を固定して横のトーラスだけを広げる一つの不等式に還元します。

07

五分類の表と依存グラフ

表 2　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	容器の評価 (2)	[典]	Mack–Petkova・25-03	捩れを和に取ったアンサンブル	—
2	枠の減相関（(2) の積が定数 C_{D} の違いを除いて分かれる）	[仮]	A-06	—	—
3	素朴な形の張力の下界：素朴な形から容器の評価で出る張力の下界は $\ln(1/\theta_0)/L^2\to 0$	[初]	§02 の証明	枠の減相関の下・一辺 L の倍数のループ	—
4	弱結合の四次元 U(1) は閉じ込めない	[典]	Guth・Fröhlich–Spencer（5-06）	Villain 型の作用	—
5	U(1) のクーロン相で $\theta\approx 2\exp(-e^2A_D/(2A_T))$、$\theta(L,L)$ は一定	[読]（物理）	§03	クーロン相・長距離で二次元の U(1)・見立て	—
6	素朴な形は閉じ込めを導けない	[読]（物理）	§03	U(1) のクーロン相の見立ての上	—
7	$\theta=\tanh(F_v/2)$、$\theta\le F_v/2\le 2\theta$（$\theta\le 1/\sqrt{2}$）	[初]	§04	大域の形	—
8	Tomboulis–Yaffe の不等式 (9)	[典]	Tomboulis–Yaffe（式の形は Kanazawa の再述で確認）	$SU(2)$・格子・トーラス	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
9	(9) の $SU(N)$・古典スピン系への拡張	典	Kanazawa（要旨）	鏡映正値性の下	—
10	Tomboulis–Yaffe からの張力の下界：$F_v \le e^{-\rho L_\mu L_\nu}$ なら張力 $\ge \rho$	初	§04 の証明	Tomboulis–Yaffe の不等式の下	—
11	面積の指数からの面積則：$\theta \le e^{-cL^2}$ なら $\lvert\langle W\rangle\rvert \le C_{\mathrm{D}} e^{-cA}$	初	§04 の証明	枠の減相関の下	—
12	表 1 の振る舞い（U(1) 一定・$\mathbb{Z}_2$ は 1 へ・SU(2) は 0 へ）	読（物理）	§05	四次元・弱結合・見立て	—
13	流れの補題は素朴な形の評価しか与えない	初	§06・25-06	一段の核	—

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  典  容器の評価 |W| ≤ E∏θ                                  捩れを和に取ったアンサン
 2  仮  枠の減相関（定数 C_D）
 3  初  素朴な形の下界 ln(1/θ₀)/L² → 0 ⟸ 1・2
 4  典  弱結合の四次元 U(1) は閉じ込めない                    Villain 型
 5  読  U(1) のクーロン相の θ は L に依らない                 見立て
 6  読  素朴な形は閉じ込めを導けない ⟸ 3・4・5
 7  初  θ = tanh(F_v/2)・θ ≤ F_v/2 ≤ 2θ                      大域の形
 8  典  Tomboulis–Yaffe の不等式                             SU(2)
 9  典  SU(N) への拡張                                       要旨
10  初  F_v ≤ e^(−ρLL) なら張力 ≥ ρ ⟸ 8
11  初  θ ≤ e^(−cL²) なら |W| ≤ C_D e^(−cA) ⟸ 1・2
12  読  表 1 の振る舞い ⟸ 5                                   見立て
13  初  流れの補題は素朴な形の評価だけ ⟸ 3
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。この章の結論の節点のうち、紙で立つのは、素朴な形の張力の下界・Tomboulis–Yaffe からの張力の下界・面積の指数からの面積則・流れの補題の評価の四つで、どれも仮定の行（枠の減相関）か文献の行（Tomboulis–Yaffe の不等式）の上の初等的な操作です。「素朴な形は足りない」の全体は、見立ての行（U(1) のクーロン相の勘定）を前提に持つので「読（物理）」です。正しい形 (7) そのものの節点はありません。それは帯の文で、この章は示しません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 素朴な形から容器の評価で出る張力の下界は $\ln(1/\theta_0)/L^2$ で 0 に向かう（枠の減相関の下）。面積の指数の形なら張力は一様（同じ仮定の下）	枠の減相関そのもの。正しい形 (7)
典 ＋初 Tomboulis–Yaffe の不等式から、渦の自由エネルギーの面積の指数の減衰で張力の下界	大域の渦の自由エネルギーの減衰そのもの
読 （物理） U(1) のクーロン相は素朴な形を満たす。だから素朴な形はどの道でも閉じ込めを導けない	(6) の定理としての証明。U(1) の有効理論の誤差の評価
読 （物理） 試金石の表 1	SU(2) で $\theta(L,L)\to 0$ となること

出典と再現

もの	種別	出典・道具
Tomboulis–Yaffe の不等式 (9)	典	E. T. Tomboulis, L. G. Yaffe, Commun. Math. Phys. 100 (1985) 313。式の形と設定は T. Kanazawa, arXiv:0805.2742 の式 (1) と arXiv:0808.3442 の再述で確認（原論文の本文は未入手）
$SU(N)$ への拡張	典	T. Kanazawa, Generalizing the Tomboulis–Yaffe inequality to SU(N) lattice gauge theories and general classical spin systems, arXiv:0808.3442（要旨で確認）
容器の評価・捩れを和に取ったアンサンブル	典	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 123 (1979) 442・125 (1980) 117。章 25-03
't Hooft の流束と閉じ込めの判定	典	G. 't Hooft, Nucl. Phys. B153 (1979) 141。章 25-01
四次元 U(1) の非閉じ込め	典	A. H. Guth, Phys. Rev. D 21 (1980) 2291。J. Fröhlich, T. Spencer, Commun. Math. Phys. 83 (1982) 411。章 5-06
U(1) のクーロン相の勘定 (5)・(6)	読	本文 §03（有効理論の見立て。Poisson の和）
素朴な形の張力の下界・面積の指数からの面積則・Tomboulis–Yaffe からの張力の下界・(8) の評価	初	本文 §02・§04 の証明

この章で使った語 — 容器・区画・枠・区画の偏り θ・素朴な形・正しい形（面積の指数）・渦の自由エネルギー F_v・'t Hooft の弦の張力・枠の減相関・試金石。意味は A-02 用語集 と A-06 名前の索引 にあります。

次に読む章：26-02 一つの不等式への還元 — 正しい形を、横を広げる一つの不等式へ。

一つの不等式への還元

この章は本書の検討です。§08 は未解決の地図です。

この章で分かること — 帯の正しい形 $\ln(1/\theta(L,L)) \geq cL^2$（26-01）を、三つの仮定——小さな T^2 の基点・枠の減相関・横広げの不等式——の下で導く**条件つきの還元の定理**と、その証明。容器を平面の方向に広げる入れ子と、容器を固定して横の T^2 を広げる不等式を交互に使い、偏りの列 t_k が $t_{k+1} \leq K t_k^4$ を満たすことから面積の指数の減衰を出します（倍化の反復）。横広げの不等式の強い形と弱い形、強い形が閉じ込めより強いこと（板の張力の単調性を含む）、格子の人工物の無い尺度 $L \geq L_{\min}(a)$ に制限して述べる理由も見ます。

前提となる章 — 26-01（記号・容器の評価・面積の指数からの面積則）・25-03（容器の入れ子）・25-04（板の閉じ込め）・A-04（Lean）。

先に言うこと — 条件つきの還元の定理と弱い形での還元の定理は条件つきで、三つの仮定のどれも示されていません。とくに横広げの不等式は、この還元の中で非可換の力学が入る唯一の場所で、帯の難しさはそこに移っただけです。結論は二進の尺度の列 $R_k = 2^k R_0$ の上の文で、定数が格子間隔 a に一様かどうかは仮定の定数が一様かどうかで決まります。Lean で検査したのは反復の実数の代数だけです。

この章の順序

1. 二つの動き — 平面の方向の入れ子と、横の T^2 を広げること
2. 三つの仮定 — 基点・枠の減相関・横広げの不等式（強い形・弱い形）
3. 条件つきの還元の定理と証明
4. 弱い形での還元の定理と、跳躍の段の代わり
5. 横広げの不等式の強い形は閉じ込めより強い — 板の張力の単調性
6. 格子の人工物と $L_{\min}(a)$
7. Lean の言明を読む — Doubling（`Doubling.iterate` ・ `Doubling.decay`）
8. 残るもの

9. 五分類の表と依存グラフ

01

二つの動き — 平面の方向の入れ子と、横の T^2 を広げること

記号は 26-01 §01 のとおりです。$\theta(R;T_L^2)$ は、平面の方向の大きさ R の容器 $D_R\times T_L^2$ の、典型的な枠での区画の偏りで、$\theta(R,R):=\theta(R;T_R^2)$ と書きます。目標は、物理単位で一様な $c>0$ について

$$\ln\frac{1}{\theta(R,R)}\ \geq\ c\,R^2 \tag{1}$$

です。$\theta(R;T_L^2)$ を変える動きは二つあります。

平面の方向の入れ子。T_L^2 を固定したまま、大きな容器 R を内部の枠 Φ_{int} で小さな容器 $R_1,\dots,R_k$ に分けると、枠を条件づけたとき小さな容器は独立なので

$$\bigl|\mathbb{E}[\sigma_R\mid\Phi_R]\bigr|\ \leq\ \mathbb{E}\Bigl[\prod_i\theta_{R_i}\,\Big|\,\Phi_R\Bigr] \tag{2}$$

が成り立ちます（Mack–Petkova の容器の恒等式の入れ子の形 典、25-03）。容器を s 倍にすると、右辺は s^2 個の因子の積です。因子が典型的な値に近く、互いに独立に近ければ $\theta(sR;T_L^2)\approx\theta(R;T_L^2)^{s^2}$ で、乱れは大きな尺度へ伝わります。ただしこれは T^2 を固定した板の中の話で、板の閉じ込め（25-04）と同じ内容です。

横の T^2 を広げること。(1) は容器と横のトーラスを*一緒に*大きくすることを求めます。入れ子は T^2 を変えないので、それだけでは (1) に届きません。T_L^2 を $T_{L'}^2$ に替えると、渦の面が巻く曲面そのものが変わり、二つの尺度の容器を結ぶ関係は構造からは出てきません（26-04）。この関係を仮定として置くのが、次の節の横広げの不等式です。

02

三つの仮定

仮定は名で呼びます。全ての長さは物理単位で、格子の人工物が無視できる $L_{\min}(a)$ 以上とします（§06）。

小さな $\mathbf{T^2}$ の基点 仮　ある物理的な $L_0\geq L_{\min}(a)$ と $\varepsilon_0\in(0,1)$ について

$$\theta(L_0;T_{L_0}^2)\ \le\ 1-\varepsilon_0. \tag{3}$$

希薄な分数インスタントンの気体の見立てでは $\varepsilon_0 \propto (L_0\Lambda)^{11/3}$ です（25-02）。紫外の制御と挿入の一様な受理の下で示す筋が考えられていますが、示されていません。

枠の減相関 仮　定数 $C_{\mathrm{D}} \ge 1$ があって、全ての R、L、整数 $s \ge 1$ について

$$\theta(sR;T_L^2)\ \le\ C_{\mathrm{D}}\,\theta(R;T_L^2)^{s^2}. \tag{4}$$

(2) の右辺は枠を共有する因子の積の平均で、Hölder の不等式だけでは冪が失われます（$\mathbb{E}\theta_{2R}^4 \le \mathbb{E}\theta_R^4$ の形しか出ない）。(4) は、その積が典型的な値の積に定数の違いを除いて分かれる、という仮定です。L を固定すれば、z の鏡映正値性の下でチェス盤の密度 κ_{cb} に置き換えられます（26-05）。κ_{cb} で読めば入れ子の冪は定数 1 で全ての L について立ちます（26-05 の入れ子の超乗法性の補題、§03 のチェス盤の密度で読んだ還元）。θ のままの L に一様な形は開いています。

横広げの不等式（強い形） 仮　定数 C があって、$L_{\min}(a) \le L \le L' \le R$ について

$$\theta(R;T_{L'}^2)\ \le\ C\Big(\frac{L'}{L}\Big)^{2}\theta(R;T_L^2). \tag{5}$$

容器を固定して横の T^2 を $s = L'/L$ 倍に広げても、偏りは高々 Cs^2 倍にしかならない、という文です。因子 s^2 は渦の面の横の位置のエントロピーです。$L' = L$ とおくと $C \ge 1$ が要ります（$\theta > 0$ なら）。

横広げの不等式（弱い形） 仮　二進の尺度 $R_k = 2^k R_0$ について、$0 \le \varepsilon_k < 1$、$\sum_k \varepsilon_k < \infty$、定数 $C' \ge 0$ があって

$$\ln\frac{1}{\theta(R_{k+1};T_{R_{k+1}}^2)}\ \ge\ (1-\varepsilon_k)\ln\frac{1}{\theta(R_{k+1};T_{R_k}^2)}\ -\ C'. \tag{6}$$

横を二倍に広げる一段ごとに、$\ln(1/\theta)$ の割合 ε_k と定数 C' を失ってよく、失う割合の総和が有限であればよい、という文です。強い形 (5) は $s=2$ で $\ln(1/\theta)$ を定数 $\ln(4C)$ だけ失う形なので、(6) の $\varepsilon_k = 0$ の場合に当たります。

03 条件つきの還元の定理

条件つきの還元の定理 初　小さな T^2 の基点・枠の減相関・横広げの不等式（強い形）を仮定する。$K := 4C\,C_{\mathrm{D}}$（≥ 1）とおき、整数 $s \ge 1$ を

$$t_0\ :=\ C\,C_{\mathrm{D}}\,s^2(1-\varepsilon_0)^{s^2}\ <\ K^{-1/3} \tag{7}$$

となるように選ぶ（$s^2(1-\varepsilon_0)^{s^2}\to 0$ なので選べる）。$R_0:=sL_0$、$R_k:=2^kR_0$ とおくと、全ての $k\ge 0$ で

$$\theta(R_k,R_k)\ \le\ K^{-1/3}\bigl(K^{1/3}t_0\bigr)^{4^k},\qquad \text{とくに}\qquad \ln\frac{1}{\theta(R_k,R_k)}\ \ge\ \gamma\,R_k^2,\quad \gamma:=\frac{\ln\bigl(1/(K^{1/3}t_0)\bigr)}{R_0^2}. \tag{8}$$

さらに枠の減相関の下で、26-01 の面積の指数からの面積則により、板 $T^2_{R_k}\times\mathbb{R}^2$ の上の、一辺が R_k の倍数の正方形のループで $|\langle W(C)\rangle|\le C_{\mathrm D}e^{-\gamma A}$。張力の下界 γ は k に依らない。

証明　三段で示す。

*段 1（跳躍）。*枠の減相関を $R=L=L_0$ と s で使い、小さな $\mathrm T^2$ の基点を入れると $\theta(sL_0;T^2_{L_0})\le C_{\mathrm D}(1-\varepsilon_0)^{s^2}$。次に横広げの不等式（強い形）を $L=L_0$、$L'=R=sL_0$ で使うと

$$t_0'\ :=\ \theta(R_0,R_0)\ =\ \theta(sL_0;T^2_{sL_0})\ \le\ C\,s^2\cdot C_{\mathrm D}(1-\varepsilon_0)^{s^2}\ =\ t_0.$$

段 2（一段の倍化）。$t_k:=\theta(R_k,R_k)$ とおく。枠の減相関を $R=L=R_k$、$s=2$ で使うと $\theta(2R_k;T^2_{R_k})\le C_{\mathrm D}t_k^4$。横広げの不等式（強い形）を $L=R_k$、$L'=R=2R_k$ で使うと

$$t_{k+1}\ =\ \theta(2R_k;T^2_{2R_k})\ \le\ 4C\cdot C_{\mathrm D}\,t_k^4\ =\ K\,t_k^4. \tag{9}$$

段 3（反復）。$c:=K^{1/3}\ge 1$ とおくと (9) は $t_{k+1}\le c^3t_k^4$。両辺に c を掛けると $ct_{k+1}\le(ct_k)^4$ なので、帰納法で $ct_k\le(ct_0')^{4^k}\le(ct_0)^{4^k}$（$0\le ct_0'\le ct_0$ を使う）。よって $t_k\le c^{-1}(ct_0)^{4^k}$。$4^k=R_k^2/R_0^2$、$ct_0<1$、$c\ge 1$ から

$$\ln\frac{1}{t_k}\ \ge\ 4^k\ln\frac{1}{ct_0}+\ln c\ \ge\ \frac{\ln(1/(ct_0))}{R_0^2}\,R_k^2\ =\ \gamma R_k^2.$$

最後の主張は面積の指数からの面積則で $L=R_k$、e^{-cL^2} を $e^{-\gamma R_k^2}$ とすればよい。∎

段 3 の反復の代数――$t_{k+1}\le c^3t_k^4$ から $ct_k\le(ct_0)^{4^k}$ と $t_k\le(ct_0)^{4^k}/c$――は Lean で検査されています（§07）。

条件つきの還元の定理が言っていないこと。

- 結論は二進の列 R_k の上の文です。間の尺度 $R_k<R<R_{k+1}$ に広げるには、$\theta(R,R)$ の R についての単調性のような追加の性質が要り、ここでは仮定していません。
- 定数 γ が格子間隔 a に一様なのは、小さな $\mathrm T^2$ の基点・枠の減相関・横広げの不等式（強い形）の定数 $\varepsilon_0,C_{\mathrm D},C$ と L_0 が a に一様なときだけです。
- 枠の減相関は二か所で使われます――入れ子の冪（段 1・段 2）と、偏りから Wilson ループへの橋（面積の指数からの面積則）です。

- 「典型的な枠」の意味は枠の減相関の中に入れてあります。枠の分布の裾（悪い枠の稀さ）を別に扱う形にはしていません。

注（大域の版）。枠で条件づけた θ の代わりに、トーラス $T_L^2 \times T_M^2$ の上の捩れの分配関数の比（26-01 の (8)）で同じ連鎖を書けば、面積則への橋は Tomboulis–Yaffe の不等式（26-01 の Tomboulis–Yaffe からの張力の下界）が担い、枠の減相関は要りません。その代わり、小さな T^2 の基点も大域の分配関数で――渦が安いという下界として――示す必要があります。これも開いています。

チェス盤の密度で読んだ還元（κ_{cb} で読んだ還元） 初　26-05 の $\kappa_{\mathrm{cb}}(R;L)$（容器をブロックの内部全体にとった密度。$M$ は考える段の全ての $2R_k$ の倍数に固定する）について

$$\begin{aligned}&(\mathrm{A_{cb}})\ \ \kappa_{\mathrm{cb}}(L_0;L_0) \le 1-\varepsilon_0,\\ &(\mathrm{C_{cb}})\ \ \kappa_{\mathrm{cb}}(R;L') \le C\,(L'/L)^2\,\kappa_{\mathrm{cb}}(R;L)\quad (L_{\min}(a) \le L \le L' \le R)\end{aligned}$$

を仮定する。式の札 $(\mathrm{A_{cb}})$ はチェス盤の密度の基点、$(\mathrm{C_{cb}})$ はチェス盤の密度の横の比較、下の (B_0) は基点の読み替えの不等式です（名は A-06）。枠の減相関の代わりに 26-05 の入れ子の超乗法性の補題（$\kappa_{\mathrm{cb}}(sR;L) \le \kappa_{\mathrm{cb}}(R;L)^{s^2}$、定数 1、全ての L）を使うと、条件つきの還元の定理の証明が $C_{\mathrm{D}}=1$、$K=4C$、$t_0 = C\,s^2(1-\varepsilon_0)^{s^2} < K^{-1/3}$ でそのまま通り、$t_k := \kappa_{\mathrm{cb}}(R_k;R_k) \le K^{-1/3}(K^{1/3}t_0)^{4^k}$ です。ループへは 26-05 の (5) で直接降りるので、面積の指数からの面積則の C_{D} も要りません。段 3 は Doubling.iterate と同じ代数で、倍化の形は Lean：LatticeGaugeNestedBlocks（doubling_iterate・doubling_bound）。この形では枠の減相関は独立の仮定として残らず、L に一様な中身は $(\mathrm{C_{cb}})$ に入ります。小さな T^2 の基点を θ のまま残すなら、一つの尺度だけの一行

$$(\mathrm{B}_0)\ \ 1-\kappa_{\mathrm{cb}}(L_0;L_0)\ \ge\ \eta\,\big(1-\theta(L_0;L_0)\big)\quad (\eta>0 \text{ は } a \text{ に一様})$$

を足せば $(\mathrm{A_{cb}})$ が $\varepsilon_0 \to \eta\varepsilon_0$ で出ます 初。$(\mathrm{A_{cb}})$・$(\mathrm{C_{cb}})$・(B_0) はどれも示されていません 仮。

04

弱い形での還元

弱い形 (6) でも、反復は面積の指数を保ちます。ただし跳躍の段は弱い形では作れないので、基点を一つの尺度で十分小さく置く形になります。

弱い形での還元の定理 初　枠の減相関と、二進の列 $R_k = 2^k R_0$ の上の横広げの不等式（弱い形）を仮定し、$P := \prod_k (1-\varepsilon_k) > 0$、$A := \ln C_{\mathrm{D}} + C'$、$u_k := \ln(1/\theta(R_k,R_k))$ とおく。$u_0 >$

$A/(3P)$ なら、全ての k で

$$u_k \;\ge\; \Big(P\,u_0 - \frac{A}{3}\Big)4^k \;=\; \gamma'\,R_k^2, \qquad \gamma' := \frac{P u_0 - A/3}{R_0^2} > 0. \tag{10}$$

証明　枠の減相関を $s=2$ で使うと $\ln(1/\theta(R_{k+1};T_{R_k}^2)) \ge 4u_k - \ln C_{\mathrm{D}}$。(6) に入れ、$0 \le 1-\varepsilon_k \le 1$ と $\ln C_{\mathrm{D}} \ge 0$ を使うと $u_{k+1} \ge (1-\varepsilon_k)(4u_k - \ln C_{\mathrm{D}}) - C' \ge 4(1-\varepsilon_k)u_k - A$。$v_k := u_k/4^k$ とおくと $v_{k+1} \ge (1-\varepsilon_k)v_k - A\,4^{-(k+1)}$。$P_k := \prod_{i<k}(1-\varepsilon_i)$、$S_k := \sum_{j=1}^{k} 4^{-j}$ について $v_k \ge P_k v_0 - A S_k$ を帰納法で示す：$k=0$ は等号。k で成り立てば、$AS_k \ge 0$ と $1-\varepsilon_k \le 1$ から $v_{k+1} \ge (1-\varepsilon_k)P_k v_0 - AS_k - A4^{-(k+1)} = P_{k+1}v_0 - AS_{k+1}$。$v_0 = u_0 > 0$、$P_k \ge P$、$S_k < 1/3$ から $v_k \ge Pu_0 - A/3$。∎

強い形は $\varepsilon_k = 0$（$P=1$）、$C' = \ln(4C)$ の場合で、そのときの条件 $u_0 > (\ln C_{\mathrm{D}} + \ln 4C)/3 = \ln K/3$ は、条件つきの還元の定理の $t_0 < K^{-1/3}$ と同じ条件です。弱い形での還元の定理の u_0 の条件は、条件つきの還元の定理の跳躍の段が担っていた役を、基点の仮定に移したものです。

05

横広げの不等式の強い形は閉じ込めより強い — 板の張力の単調性

横を T_L^2 に縮めた二次元の理論の弦の張力（板の張力）を

$$\sigma_{\mathrm{eff}}(L) \;:=\; \liminf_{M\to\infty} \frac{-\ln \theta(M;T_L^2)}{M^2} \tag{11}$$

と定めます。一様な板の張力（26-00 の (1)）は $\inf_L \sigma_{\mathrm{eff}}(L) > 0$ です。

板の張力の単調性の命題 初　強い形 (5) が全ての $R \ge L'$ で成り立てば、$L_{\min}(a) \le L \le L'$ について $\sigma_{\mathrm{eff}}(L') \ge \sigma_{\mathrm{eff}}(L)$。

証明　$M \ge L'$ で (5) の対数を取ると $-\ln\theta(M;T_{L'}^2) \ge -\ln\theta(M;T_L^2) - \ln\big(C(L'/L)^2\big)$。$M^2$ で割って $M\to\infty$ の下極限を取ると、定数の項は消えて $\sigma_{\mathrm{eff}}(L') \ge \sigma_{\mathrm{eff}}(L)$。∎

つまり強い形は、板の張力が L について**減らない**ことを含みます。閉じ込め（面積則）に要るのは $\inf_L \sigma_{\mathrm{eff}}(L) > 0$ だけなので、強い形は閉じ込めより強い仮定です。小さな L では $\sigma_{\mathrm{eff}} \propto \Lambda^{11/3}L^{5/3}$ で増え、大きな L では $\mathbb{R}^4$ の張力 σ_∞ に近づくと見込まれますが 読 （物理）、$L \sim 1/\Lambda$ で σ_{eff} が σ_∞ を一度越えてから戻る（行き過ぎる）なら、定数 C の強い形は偽で、閉じ込めは成り立ちえます。弱い形は、失う割合の総和が有限である限り、この種の行き過ぎを許します。

数値の側では、$SU(2)$、$\beta = 2.5$、$M = 16$ の板で、4×4 のループの Creutz 比が $N_T = 4, 6, 8, 10$ で $0.059,\ 0.061,\ 0.076,\ 0.071$（誤差 0.009〜0.002、2000 測定）で、増えて飽和し、有意な行き過ぎは見えていません 読 。Creutz 比は短距離の Coulomb の項を含むので、値ではなく N_T についての傾向だけを読みます。格子は一つの β だけで、N_T の範囲も狭いので、帯の全体についての読みではありません。測定の表は 26-09 に置きます。

横を一方向だけ広げる形（T^2 を長方形 $L_1 \times L_2$ にして L_1 だけを大きくする）は、二次元の小さな方向が有限温度の時間のように振る舞うので、正方形の形と同じには扱えない見込みです 読 （物理）。この章の連鎖は正方形の形 $L_1 = L_2$ しか使っていません。

06

格子の人工物と $L_{\min}(a)$

(5)・(6) は、格子の人工物が無視できる $L \geq L_{\min}(a)$ に制限して述べます。$L_{\min}(a)$ は物理単位で一定に保ち、格子の単位では $L_{\min}/a \to \infty$ とします。帯の目標 (1) は a に一様な連続極限の文なので、この制限は自然です。

制限が要ることは数値にも出ています。$SU(2)$、$\beta = 2.5$、$M = 8$ で $N_T = 2 \to 4$ にすると、渦の自由エネルギーは $-0.01 \pm 0.12 \to 0.63 \pm 0.18$、偏りは $\theta \lesssim 0.06 \to 0.31$ で、比はおよそ 5 です 読 。強い形が $s = 2$ で許す $Cs^2 = 4C$ と、誤差の範囲で境界にあります。$N_T = 2$ の捩れた 2×2 の T^2 では、渦は滑らかな分数インスタントンではなく格子の上の細い渦として安く入り、板の張力が大きく出るためと読めます。小さな格子の値で強い形を試すことはできません。

07

Lean の言明を読む — `Doubling.iterate` ・ `decay`

条件つきの還元の定理の段 3 の代数は、Lean 4 のファイル `Doubling.lean`（名前空間 `Doubling`）の二つの定理です。言明を本文の言葉で読みます。

`Doubling.iterate`：実数 c と実数列 $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ について、仮定 $0 \leq c$・全ての k で $0 \leq t_k$・全ての k で $t_{k+1} \leq c^3 t_k^4$ の下で、全ての k で $c\,t_k \leq (c\,t_0)^{4^k}$。

`Doubling.decay`：仮定 $0 < c$・$0 \leq t_k$・$t_{k+1} \leq c^3 t_k^4$ の下で、全ての k で $t_k \leq (c\,t_0)^{4^k}/c$。

本文の K は Lean の c^3 です。機械検査が保証するのは、この実数の不等式の代数だけです。t_k が区画の偏りであること、(9) の漸化式が成り立つこと——つまり小さな T^2 の基点・枠の減相関・横広げの不等式——は Lean の外にあります。二つの定理の公理は、記録では標準の三

つ（`propext`・`Classical.choice`・`Quot.sound`）で、本書の再検査を通しています（A-04）。

08 残るもの

条件つきの還元の定理は、帯の正しい形を三つの仮定に還元しました。三つの性格は違います。

- **小さな T^2 の基点**は、弱結合の側の文で、紫外の制御と挿入の一様な受理の下で示す筋が考えられています（第 25 部・27-02）。
- **枠の減相関**は、κ_{cb} で読めば 26-05 の入れ子の超乗法性の補題により定数 1 で全ての L について立ち、独立の仮定としては残りません（§03 のチェス盤の密度で読んだ還元）。L に一様な中身は、横広げの不等式（強い形）を κ_{cb} で読んだ $(\mathrm{C}_{\mathrm{cb}})$ に移ります。その代わり小さな T^2 の基点と横広げの不等式（強い形）を κ_{cb} で読む（または一行 (B_0) を足す）必要があります。
- **横広げの不等式**は、この還元の中で非可換の力学が入る唯一の場所です。$\mathrm{U}(1)$ と $\mathbb{Z}_2$ では破れ、希薄な領域の $\mathrm{SU}(2)$ では余裕 $5/3 = 11/3 - 2$ で成り立つ見込みです（26-03、〔読〕物理）。鏡映正値性や双対性のような構造的な入力だけからは出ません（26-04）。

開いているのは、横広げの不等式の強い形（または弱い形）を、希薄な領域と閉じ込めの領域の間——$L \sim 1/\Lambda$——を通して、非摂動的に示すことです。帯の難しさは、この一つの不等式に集まりました。

09 五分類の表と依存グラフ

表 1　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	平面の方向の入れ子 (2)	典	Mack–Petkova・25-03	T^2 を固定	—
2	小さな T^2 の基点 (3)	仮	25-02・27-02	$L_0 \geq L_{\min}(a)$	—
3	枠の減相関 (4)	仮	26-05・A-06	定数 $C_{\mathrm{D}} \geq 1$	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
4	横広げの不等式（強い形）(5)	仮	A-06	$L_{\min}(a) \le L \le L' \le R$・正方形の T^2	—
5	横広げの不等式（弱い形）(6)	仮	A-06	二進の列・$\sum \varepsilon_k < \infty$	—
6	強い形は弱い形の $\varepsilon_k = 0$、$C' = \ln 4C$ の場合	初	§02	—	—
7	反復：$t_{k+1} \le c^3 t_k^4$ なら $ct_k \le (ct_0)^{4^k}$、$t_k \le (ct_0)^{4^k}/c$	初	§03 段 3	実数の代数	Doubling（`Doubling.iterate`）（仮定：$0 \le c$・$0 \le t_k$・$t_{k+1} \le c^3 t_k^4$）・Doubling（`Doubling.decay`）（仮定：$0 < c$・同じ二つ）
8	条件つきの還元の定理：小さな T^2 の基点・枠の減相関・横広げの不等式（強い形）の下で $\ln(1/\theta(R_k, R_k)) \ge \gamma R_k^2$、板の上の面積則	初	§03 の証明・26-01 の面積の指数からの面積則	三つの仮定の下・二進の列・$L \ge L_{\min}(a)$	—（反復の部分だけ。表の反復の行）
9	弱い形での還元の定理：枠の減相関・横広げの不等式（弱い形）と $u_0 > A/(3P)$ の下で $u_k \ge \gamma' R_k^2$	初	§04 の証明	二つの仮定と基点の大きさの条件の下	—
10	板の張力の単調性の命題：強い形なら σ_{eff} は L について減らない	初	§05 の証明	$L \ge L_{\min}(a)$	—
11	σ_{eff} は小さな L で $L^{5/3}$ で増え、大きな L で σ_∞ へ	読（物理）	§05・26-03	希薄な領域・一ループ／閉じ込めの領域	—
12	Creutz 比が $N_T = 4 \to 10$ で増えて飽和、有意な行き過ぎなし	読	§05・26-09	SU(2)・$\beta = 2.5$・$M = 16$・2000 測定・傾向だけ	—
13	$N_T = 2 \to 4$ で偏りの比がおよそ 5	読	§06	SU(2)・$\beta = 2.5$・$M = 8$・誤差の範囲で境界	—
14	横広げの不等式は $L \ge L_{\min}(a)$ に制限して述べる必要がある	読（物理）	§06	小さな T^2 の格子の人工物	—
15	横広げの不等式（強い形）は U(1)・$\mathbb{Z}_2$ で破れ、希薄な SU(2) では余裕 $5/3$	読（物理）	26-03	希薄な領域・一ループ。「この還元の中で」	—

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  典  平面の方向の入れ子 (2)                                  T² を固定
 2  仮  小さな T² の基点 θ(L₀;T²_L₀) ≤ 1 − ε₀
 3  仮  枠の減相関 θ(sR;T²_L) ≤ C_D θ(R;T²_L)^(s²)
 4  仮  横広げの不等式・強い形 θ(R;T²_L') ≤ C(L'/L)² θ(R;T²_L)
 5  仮  横広げの不等式・弱い形（損失の総和が有限）
 6  初  強い形は弱い形の特別な場合 ⟸ 4
 7  初  t_(k+1) ≤ c³t_k⁴ ⇒ ct_k ≤ (ct₀)^(4^k)              Lean Doubling.ite
 8  初  条件つきの還元の定理：ln(1/θ(R_k,R_k)) ≥ γR_k² ⟸ 1・2・3・4・7
 9  初  弱い形での還元の定理 ⟸ 3・5
10  初  板の張力の単調性の命題：強い形 ⇒ σ_eff は減らない ⟸ 4
11  読  σ_eff の形（小さな L で増え、大きな L で飽和）        物理
12  読  Creutz 比は増えて飽和                                  β = 2.5・M = 16
13  読  N_T = 2 → 4 で比およそ 5                               β = 2.5・M = 8
14  読  L ≥ L_min(a) に制限が要る ⟸ 13
15  読  横広げの不等式は U(1)・Z₂ で破れ、希薄な SU(2) で余裕 5/3      26-03
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。二つの還元の定理の節点の前提には、仮定の行（小さな T^2 の基点・枠の減相関・横広げの不等式の二つの形）が必ず入っています。仮定の行は結論の量（$\theta(R_k, R_k)$ の面積の指数）を含みません——小さな T^2 の基点は一つの小さな尺度の文、枠の減相関は T^2 を固定した入れ子の文、横広げの不等式（強い形）は容器を固定した比較の文です。数値の行（板の Creutz 比・偏りの比）と見立ての行（板の張力の形・群による破れ）は、どの定理の前提にも入っていません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 基点・枠の減相関・横広げの不等式（強い形）の三つの下で、二進の尺度の列で $\ln(1/\theta(R_k, R_k)) \geq \gamma R_k^2$ と、板の上の k に依らない張力（条件つきの還元の定理）	三つの仮定のどれも。間の尺度。定数の a についての一様性（仮定の定数次第）
初 弱い形でも、基点が一つの尺度で十分小さければ同じ結論（弱い形での還元の定理）	弱い形そのもの。弱い形だけからの跳躍
初 強い形は板の張力の単調性を含み、閉じ込めより強い（板の張力の単調性の命題）	板の張力が行き過ぎないこと
読 板の Creutz 比は増えて飽和。小さな T^2 では格子の人工物が強い形の境界に触れる	帯の全体での板の張力の振る舞い。大きな格子での値
Lean：反復の実数の代数（Doubling（`Doubling.iterate`・`Doubling.decay`））	偏りが漸化式を満たすこと（Lean の外）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
容器の恒等式と入れ子	典	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 123 (1979) 442・125 (1980) 117。章 25-03
条件つきの還元の定理・弱い形での還元の定理・板の張力の単調性の命題	初	本文 §03〜§05 の証明
小さな T^2 の弦の張力の形（基点と σ_{eff} の小さな L の側）	典	Y. Tanizaki, M. Ünsal, arXiv:2201.06166 式 (2.32)・(2.37)。章 25-02
板の Creutz 比・$N_T = 2 \to 4$ の偏り	読	SU(2) のモンテカルロ（Creutz 比）と、レプリカ交換と Bennett の受理率の方法（渦の自由エネルギー）。章 26-09 の表
Lean	Lean	Doubling（`Doubling.iterate`・`Doubling.decay`）。保証するのは実数の代数だけ。A-04

この章で使った語 — 平面の方向の入れ子・横広げの不等式（強い形・弱い形）・小さな T^2 の基点・枠の減相関・倍化の反復・跳躍・板の張力 σ_{eff}・行き過ぎ・格子の人工物の尺度 $L_{\min}(a)$。意味は A-02 用語集 と A-06 名前の索引 にあります。

次に読む章：26-03 非可換が効く唯一の場所 — 横広げの不等式の符号を決める $5/3 = 11/3 - 2$。

非可換が効く唯一の場所

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 25-02・3-05 にあります。

この章で分かること — 26-02 の還元の中で、非可換の力学がどこに入るか。三つの仮定（小さな T^2 の基点・枠の減相関・横広げの不等式）と入れ子の不等式のうち、U(1) と $\mathbb{Z}_2$ で破れるのは横広げの不等式だけで、その符号を決めるのは希薄な領域の指数の余裕 $5/3 = 11/3 - 2$ ——漸近自由の係数 $11/3$ が、平面に置ける塊の位置の数（横の二次元のエントロピー）の 2 に勝つ余裕——であることを見ます。対照として、アーベルの流束は一様に広がるしかなく、U(1) の渦の自由エネルギーは T^2 を広げると増えること、$SU(2)$ の渦は尺度不変な自己双対の塊に局在できることを並べます。

前提となる章 — 26-01（区画の偏り θ・U(1) の勘定）・26-02（三つの仮定と条件つきの還元の定理）・25-02（渦と分数インスタントン）・3-05（インスタントンと Bogomolny の下界）・4-06（漸近自由）・5-06（U(1) と非可換）。

先に言うこと — 題の「唯一の場所」は**この還元の中で**の言い方です。別の還元（26-06 の繰り込みの比較）では、非可換の入力は別の形の場所に入ります。U(1)・$\mathbb{Z}_2$・$SU(2)$ の振る舞いの勘定は、原論文自身が見立てと明記している勘定で、この章でも〔読〕（物理）の札で書きます。希薄な領域と一ループの外では何も言いません。紙で置く命題は、流束が一様に広がる初等的な補題と、論理の整理だけです。

この章の順序

1. 問い — 横広げの不等式の符号を決めるもの
2. アーベルの流束は一様に広がるしかない — 流束の一様化の補題と U(1)・$\mathbb{Z}_2$ の勘定
3. 非可換の渦は尺度不変な塊に局在できる — 自己双対の $Q = \frac{1}{2}$ の塊
4. 余裕 $5/3 = 11/3 - 2$ — 希薄な気体の勘定と Tanizaki–Ünsal の式
5. 「この還元の中で」唯一の場所 — 還元の対偶の命題と、その限定
6. 数値の兆候 — T^2 を広げたときの渦の自由エネルギー（表 2）
7. 五分類の表と依存グラフ

01

問い — 横広げの不等式の符号を決めるもの

記号は 26-01 §01 と 26-02 §01 のとおりです。$\theta(R;T^2_L)$ は、平面の方向の大きさ R（面積 A_D）の容器 $D\times T^2_L$ の、典型的な枠での区画の偏りで、捩れ $n_{12}=1$ は横のトーラス T^2_L（面積 $A_T=L^2$）に固定してあります。26-02 の条件つきの還元の定理は、三つの仮定から帯の正しい形 $\ln(1/\theta(R,R))\ge cR^2$ を導きました。その第三の仮定が横広げの不等式（強い形）

$$\theta(R;T^2_{L'})\ \le\ C\Big(\frac{L'}{L}\Big)^2\,\theta(R;T^2_L)\qquad (L_{\min}(a)\le L\le L'\le R) \tag{1}$$

でした。容器を固定したまま横の T^2 を広げると、区画の偏り θ はどちらへ動くか。θ が小さいほど区画の乱れ（渦の多さ）が大きいので、問いは「横を広げると渦は**高くなる**（θ が 1 に近づく）か、**高くならない**か」です。(1) は、高くなるとしても位置の数の因子 s^2（$s=L'/L$）までしか許しません。

この章の答えを先に書きます。アーベルの理論では、渦の流束は横の断面全体に一様に広がるしかないので、横を広げるほど渦は高くなり、(1) は破れます。$SU(2)$ では、渦は大きさ L 程度の自己双対の塊に局在でき、その作用は大きさに依らないので、古典的には横を広げる費用は 0 です。残る量子の効果は、希薄な領域では漸近自由の側に傾き、(1) は余裕 $5/3$ で成り立つ見込みです。

02

アーベルの流束は一様に広がるしかない

最初に、古典的な作用の初等的な事実を一つ置きます。

流束の一様化の補題 初　Ω を面積 $|\Omega|$ の平面の領域、f を Ω の上の二乗可積分な実関数で $\int_\Omega f=\Phi$ とする。このとき

$$\int_\Omega f^2\ \ge\ \frac{\Phi^2}{|\Omega|}, \tag{2}$$

等号は f が Ω の上でほとんど至るところ定数 $\Phi/|\Omega|$ のときに限る。

証明　Cauchy–Schwarz の不等式 $\big(\int_\Omega f\cdot 1\big)^2\le\int_\Omega f^2\cdot\int_\Omega 1$ から (2)。等号は f と 1 が比例するとき、すなわち f が定数のときに限る。∎

アーベルのゲージ場の作用 $\frac{1}{2e^2}\int F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ は場の強さの二乗で、線形の場の理論です。容器 $D\times T^2_L$ の各断面 $D\times\{y\}$（$y\in T^2_L$）を同じ流束 Φ が通る配位を考えると、流束の一様化の補

題を各断面で使い、横の T_L^2 で積分して

$$\frac{1}{2e^2}\int_{D\times T_L^2} F_{34}^2 \;\geq\; \frac{A_T}{2e^2 A_D}\,\Phi^2 \tag{3}$$

を得ます 初 （各断面の流束が同じ Φ であるという条件の下。古典的な作用の下界）。等号は流束が容器の全体に一様に広がる配位で、**流束を局在させると作用は増えるだけ**です。右辺は横の面積 A_T に比例するので、容器を固定して横を s 倍に広げると、流束 π（区画 $\sigma_D=-1$ に当たる）の最小の作用は s^2 倍になります。アーベルの渦は横を広げると高くなる、というのが古典的な水準の答えです。

量子の水準の勘定は 26-01 §03 のとおりです 読 （物理）。クーロン相の U(1) を板 $T_L^2\times\mathbb{R}^2$ の上で長い距離まで見ると二次元の U(1)（結合 e^2/A_T）で、流束 Φ の分配関数は巻き付き k の Poisson の和 $Z(\Phi)\propto\sum_k e^{ik\Phi}e^{-e^2A_Dk^2/(2A_T)}$ です。これは (3) の古典的な作用 $\frac{A_T}{2e^2A_D}(\Phi+2\pi k)^2$ の k についての和を Poisson の和公式で書き直したもので、$q:=e^{-e^2A_D/(2A_T)}$ が小さいとき

$$\theta(R;T_L^2)\;\approx\;2q\;=\;2\exp\!\Big(-\frac{e^2A_D}{2A_T}\Big),\qquad \ln\frac{1}{\theta}\;\approx\;\frac{e^2A_D}{2A_T}\;\propto\;A_D\,L^{-2}. \tag{4}$$

横を s 倍に広げると A_T は s^2 倍、q は q^{1/s^2} になるので、$\theta_{\text{new}}\approx 2(\theta_{\text{old}}/2)^{1/s^2}$ です。比は

$$\frac{\theta(R;T_{sL}^2)}{\theta(R;T_L^2)}\;\approx\;2^{\,1-1/s^2}\,\theta(R;T_L^2)^{-(1-1/s^2)}\;\longrightarrow\;\infty\qquad(\theta(R;T_L^2)\to 0,\;s>1) \tag{5}$$

となり、どんな定数 Cs^2 でも押さえられません。**U(1) では横広げの不等式 (1) は破れます** 読 （物理。(4) を認めた上の一行の代数）。弱い形（26-02 の横広げの不等式（弱い形））も、板の張力が e^2/L^2 で 0 に向かうので破れます 読 （物理）。

四次元の $\mathbb{Z}_2$ の理論は、弱結合（大きな β）で閉じ込めない相にいます（5-10）。そこでは容器を通る流束は、横の T^2 全体に張る面積 A_T の壁を作り、その張力は A_D に依りません。横を広げると壁の費用は A_T に比例して増え、(1) は破れます 読 （物理）。二つのアーベルの理論に共通するのは、**流束の費用が横の面積とともに増える**ことです。U(1) では線形性（流束の一様化の補題）のため、$\mathbb{Z}_2$ では壁の面積のためです。

03

非可換の渦は尺度不変な塊に局在できる

$SU(2)$ では事情が変わります。捩れ $n_{12}=1$ のある $T_L^2\times\mathbb{R}^2$ の上では、位相的な電荷 Q は半整数の値をとれます（'t Hooft の捩れ、25-01 典 ）。そして作用には Bogomolny の下界

$$S \;\geq\; \frac{8\pi^2}{g^2}\,|Q| \tag{6}$$

があり（3-05 典 ）、等号は自己双対（または反自己双対）の配位で成り立ちます。$Q=\frac{1}{2}$ の配位――分数インスタントン――の作用は $4\pi^2/g^2$ 以上で、平面の区画を反転させる渦の役を担います（25-02）。

(6) の右辺は、T^2 の大きさ L にも、容器の大きさ R にも依りません。四次元のヤン–ミルズの古典的な作用が尺度を変えても変わらないからです（結合 g が無次元、24-07 §01）。$Q=\frac{1}{2}$ の最小作用の配位は、大きさ L 程度の範囲に局在した自己双対の塊で、作用が下界 $4\pi^2/g^2$ に一致し、横と縦の比に依らない――というのが原論文の見立てです 読 （物理）。格子の上では、冷却した分数インスタントンの作用が $\pi^2\beta$ に下から近づくこと（$\beta=4/g^2$ で $4\pi^2/g^2=\pi^2\beta$。冷却で得た値は、格子の上の最小作用の上界）が測られています（25-02 の表）。

ここで、§02 の流束の一様化の補題との違いがはっきりします。

- **アーベル**：作用が二次形式なので、決まった流束の最小作用は流束を一様に広げた配位で達成され、その値は横の面積 A_T に比例します（(3)）。局在させても安くならず、広げられた場所全体に費用を払います。
- **非可換**：自己双対方程式は非線形で、有限の作用 $4\pi^2/g^2$ の解が大きさ L 程度に局在できます。容器が塊を入れられる大きさ（$R\geq L'$）である限り、横を L から L' に広げても塊を広げ直せばよく、古典的な費用は 0 です。

これは局所的な運動学の違いではなく、自己双対方程式の解の存在――非線形性――の違いです。古典的な水準で横広げの費用が 0 なので、(1) の符号は量子の効果――渦の位置の数と、結合の走り――で決まります。それが次の節の勘定です。

04

余裕 $5/3 = 11/3 - 2$

希薄な気体の勘定。$L\Lambda \ll 1$（Λ は次元転移の尺度、4-07）では、結合 $g(L)$ は小さく、渦（$Q=\pm\frac{1}{2}$ の塊）は互いに遠く離れた希薄な気体として扱えます。Tanizaki–Ünsal は $SU(N)$ について、小さな捩れた T^2 の上で、中心の渦が平面 $\mathbb{R}^2$ の上の点のように振る舞い、その一つあたりの重みが $Ke^{-S_I/N}$（$S_I=8\pi^2/g^2$、K は単位面積あたりの前因子）であることから、基底のエネルギーと弦の張力を

$$E_k(\theta) \;=\; -2Ke^{-S_I/N}\cos\frac{\theta-2\pi k}{N} \;\sim\; -\Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}\cos\frac{\theta-2\pi k}{N}, \qquad T_R \;\sim\; \Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}\sin^2\frac{\pi|R|}{N} \tag{7}$$

と導きました（Tanizaki–Ünsal、式 (2.32)・(2.37) 典 、希薄な領域・一ループ）。ここでの θ は真空の角で、この本の区画の偏り θ とは別の記号です。指数 $5/3$ は、一ループの結合の走り $8\pi^2/g^2(L) = \frac{11N}{3}\ln\frac{1}{L\Lambda}$（4-06 典 ）から $e^{-S_I/N} = (L\Lambda)^{11/3}$ となり、塊の大きさ L から単位面積あたりの位置の数が $1/L^2$ となるので、$(L\Lambda)^{11/3}/L^2 = \Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}$ と出ます。

区画の偏りに移ります。$SU(2)$ で、渦と反渦を合わせた単位面積あたりの密度を ζ とし、渦の位置を独立な Poisson の点で近似します 読 （物理。希薄な気体の近似）。容器の区画 σ_D は、D の中の渦の数 n について $(-1)^n$ です。平均 m の Poisson 分布の n について

$$\mathbb{E}\big[(-1)^n\big] \;=\; \sum_{n\ge 0} e^{-m}\frac{m^n}{n!}(-1)^n \;=\; e^{-2m} \tag{8}$$

なので 初 （初等的な等式）、$m = \zeta A_D$ とおいて

$$\theta(R;T_L^2) \;\approx\; e^{-2\zeta A_D}, \qquad \ln\frac{1}{\theta} \;\approx\; 2\zeta A_D \;\propto\; A_D\,\Lambda^{11/3}L^{5/3} \qquad (\Lambda \text{ を固定}) \tag{9}$$

です 読 （物理。希薄な領域・一ループ）。(4) と並べると、容器を固定したときの $\ln(1/\theta)$ の L についての冪は

表 1　容器を固定したときの $\ln(1/\theta)$ の L についての冪（見立て。四次元・弱結合の側）

理論	渦の費用の形	$\ln(1/\theta)$ の冪	横を広げると	横広げの不等式 (1)
$U(1)$（クーロン相）	流束が横の断面に一様に広がる（流束の一様化の補題）	L^{-2}	θ は 1 に近づく	破れる（(5)）
$\mathbb{Z}_2$（弱結合）	面積 A_T の壁	—（壁の費用 $\propto L^2$ で $\theta\to 1$）	θ は 1 に近づく	破れる
$SU(2)$（希薄な領域）	大きさ L の自己双対の塊、重み $(L\Lambda)^{11/3}$、位置の密度 $1/L^2$	$L^{+5/3} = L^{11/3-2}$	θ は減る	成り立つ（比は 1 以下）

となります。$SU(2)$ の冪 $5/3$ は、漸近自由の係数 $11/3$ と、平面に置ける塊の位置の数の 2（この部で「横の二次元のエントロピー」と呼んできたもの、26-00 の図 2）の差です。U(1) の冪 -2 は、漸近自由の項が無く位置の数の項だけが残った形と読めます。**漸近自由が横の二次元のエントロピーに勝つ余裕 $5/3 > 0$ が、横広げの不等式の符号そのもの**です 読 （物理）。

(9) から、希薄な領域の $SU(2)$ で横を s 倍に広げたときの比は

$$\frac{\theta(R;T_{sL}^2)}{\theta(R;T_L^2)} \;\approx\; \exp\Big(-2A_D\big(\zeta(sL)-\zeta(L)\big)\Big) \;\le\; 1 \tag{10}$$

で（$\zeta \propto L^{5/3}$ は増加）、(1) は $C = 1$ で、因子 s^2 を使わずに成り立ちます 読 （物理）。ただし (9)・(10) が使えるのは $L\Lambda \ll 1$ の希薄な領域だけです。閉じ込めの領域（$L\Lambda \gg 1$）では $\ln(1/\theta) \approx \sigma A_D - \ln(A_T/\xi^2)$（$\xi$ は相関長）と見込まれ、A_T への依存は渦の面の位置のエント

ロピーの対数だけになり、(1) は因子 s^2 の範囲で成り立つ見込みです 読 （物理）。**二つの領域の間 $L \sim 1/\Lambda$——帯——を非摂動的に通す評価はありません。**

05

「この還元の中で」唯一の場所

26-02 の条件つきの還元の定理の連鎖の部品を、群を替えたときの振る舞いで並べます。

- **平面の方向の入れ子**（26-02 の (2)）は、枠で条件づけると容器の中が独立になるという Markov 性と、Mack–Petkova の容器の恒等式から来る文で、群の非可換性を使いません 典 。
- **小さな T^2 の基点**は、U(1) でも成り立つ見立てです。(4) で $R = L$ とおくと $\theta(L, L) \approx 2e^{-e^2/2}$ は L に依らない 1 未満の定数です（26-01 §03） 読 （物理）。
- **枠の減相関**は、L を固定すれば z の鏡映正値性の下でチェス盤の密度 κ_{cb} に置き換わり（26-05）、その構造は $\mathbb{Z}_2$・U(1) でも同じです（26-04）。L に一様な形（一様な板のギャップ）で U(1) が失敗する見立ては無く、U(1) が失敗するのは一様な板の張力の側だけと見込まれます 読 （物理、26-05 §05）。
- **横広げの不等式**は、U(1) と $\mathbb{Z}_2$ で破れ（§02）、希薄な領域の $SU(2)$ で余裕 $5/3$ で成り立つ見込みです（§04）。

還元の対偶の命題 初 　ある理論で、26-02 の条件つきの還元の定理の結論（二進の尺度の列での $\ln(1/\theta(R_k, R_k)) \geq \gamma R_k^2$ と、板の上の k に依らない張力）が偽なら、その理論では小さな T^2 の基点・枠の減相関・横広げの不等式（強い形）の少なくとも一つが偽である。

証明 　条件つきの還元の定理の対偶。∎

弱結合の U(1) では、板の上の張力は e^2/L^2 の程度で 0 に向かうと見立てられ（26-01 §03）、条件つきの還元の定理の結論は偽です。還元の対偶の命題により三つの仮定のどれかが偽で、上の並びでは小さな T^2 の基点は成り立ち、横広げの不等式（強い形）が破れています。**この還元の中で、U(1) と $\mathbb{Z}_2$ を外すために必ず使われる仮定は横広げの不等式だけ**で、そこが非可換の力学の入る場所です 読 （物理。U(1)・$\mathbb{Z}_2$・$SU(2)$ の振る舞いの見立ての上）。

この言い方には二つの限定が付きます。

- **還元に依る**。「唯一の場所」は 26-02 の連鎖の中の言い方です。帯を「β 単調性」と「繰り込みの比較」に分ける別の還元（26-06）では、漸近自由は比較の結合の移動 $\beta' < \beta$ に入ります。同じ物理が、還元ごとに別の形の不等式に入ると読むのが自然ですが、二つの還元の間の正確な対応は示されていません。

- **符号の見立ては二つの端だけ。**$5/3$ の余裕は希薄な領域（$L\Lambda \ll 1$）・一ループの勘定で、閉じ込めの領域の「対数だけ」も見立てです。横広げの不等式を帯 $L \sim 1/\Lambda$ で示す道具はありません。帯の難しさは、この一つの不等式の中の、この一つの尺度の区間に集まっています。

06

数値の兆候 — T^2 を広げたときの渦の自由エネルギー

容器を平面の方向の全体（周期 M の T^2_M）にとった大域の形（26-01 の (8)）で、横の T^2 を $N_T \times N_T$ に広げたときの渦の自由エネルギー $\Delta F = F_v$（捩れの流束 n_{34} を入れた分配関数との比、$\theta = \tanh(\Delta F/2)$）を、レプリカ交換と Bennett の受理率の方法で測った値です 読 。格子は $N_T^2 \times M^2$、捩れ $n_{12} = 1$、Wilson 作用。誤差は出所の推定の値で、種の数は出所に記載がありません。

表 2　横の T^2 を広げたときの ΔF（大域の形。〔読〕）

理論・β・M	$N_T = 2$	4	6	8
$U(1)$、$\beta = 1.5$、$M = 8$	-0.03 ± 0.04	0.83 ± 0.11	2.10 ± 0.47	5.14 ± 0.78
$SU(2)$、$\beta = 2.5$、$M = 8$	-0.01 ± 0.12	0.63 ± 0.18	0.33 ± 0.22	1.51 ± 0.29
$U(1)$、$\beta = 1.5$、$M = 12$	—	0.20 ± 0.21	1.35 ± 0.30	1.72 ± 0.47
$SU(2)$、$\beta = 2.5$、$M = 12$	—	0.57 ± 0.22	0.42 ± 0.24	-0.15 ± 0.36
$SU(2)$、$\beta = 2.4$、$M = 8$	—	0.31 ± 0.10	—	0.11 ± 0.25

読みは次のとおりです 読 。

- $U(1)$ では、二つの M のどちらでも、横を広げると ΔF が増えます（渦が高くなる）。$M = 8$ で θ は $N_T = 4, 6, 8$ で $0.39,\ 0.78,\ 0.99$、$\ln(1/\theta)$ は $N_T = 4 \to 8$ で $0.93 \to 0.012$（約 80 分の 1）。§02 の予言の向きです。
- $SU(2)$ では増え方がずっと緩やかか、増えません。$M = 8$、$\beta = 2.5$ の $\ln(1/\theta)$ は $N_T = 4 \to 8$ で $1.19 \to 0.45$（約 2.6 分の 1）、θ の比 $0.64/0.31 \approx 2$ は横広げの不等式（強い形）が $s = 2$ で許す $4C$ の中です。$M = 12$ と $\beta = 2.4$ では $N_T = 4 \to 8$ で ΔF は減ります。例外は $\beta = 2.5$、$M = 8$ の $N_T = 8$（$N_T = M$ の対称なトーラス）で、ΔF は 0.33 から 1.51 に上がっています。

限界も同じ重さで書きます。θ が 1 の程度の領域なので、$\theta \le 1$ のために U(1) の θ の比も 2.5 程度に抑えられ、この幾何での判別力は弱い。β は各理論で一点か二点で、U(1) の $\beta = 1.5$ と $SU(2)$ の $\beta = 2.5$ は同じ物理に合わせたものではありません。誤差は 0.04〜0.8 です。$N_T = 2$

の値は格子の人工物の領域です（26-02 §06）。**向きの兆候であって、横広げの不等式の試験の結論ではありません**。測定の詳しい表は 25-08 と 26-09 に置きます。

07

五分類の表と依存グラフ

表 3　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	Bogomolny の下界 $S \geq 8\pi^2\lvert Q\rvert/g^2$	典	3-05	連続の古典的な作用	—
2	捩れ $n_{12}=1$ の下で Q は半整数の値をとれる	典	't Hooft・25-01	$T^2_L\times\mathbb{R}^2$・$SU(2)$	—
3	一ループの走り $8\pi^2/g^2(L)=\frac{11N}{3}\ln\frac{1}{L\Lambda}$	典	4-06	一ループ・$L\Lambda\ll 1$	—
4	小さな捩れた T^2 の弦の張力 $T_R\sim \Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}\sin^2(\pi\lvert R\rvert/N)$	典	Tanizaki–Ünsal 式 (2.32)・(2.37)	希薄な領域・一ループ・$\theta=0$	—
5	流束の一様化の補題：$\int f^2\geq \Phi^2/\lvert\Omega\rvert$、等号は定数のとき	初	§02 の証明	二乗可積分	—
6	アーベルの作用の下界 (3)：$\geq \frac{A_T}{2e^2A_D}\Phi^2$、一様な配位で等号	初	流束の一様化の補題を各断面で	各断面の流束が同じ Φ・古典的な作用	—
7	U(1) のクーロン相で $\theta\approx 2e^{-e^2A_D/(2A_T)}$	読（物理）	26-01 §03	クーロン相・長距離で二次元の U(1)・見立て	—
8	U(1) で横広げの不等式は破れる（比 (5) が有界でない）	読（物理）	§02	U(1) のクーロン相の見立ての上	—
9	弱結合の $\mathbb{Z}_2$ で横広げの不等式は破れる（面積 A_T の壁）	読（物理）	§02・5-10	弱結合・見立て	—
10	$SU(2)$ の $Q=\frac12$ の最小作用は大きさ L 程度の自己双対の塊で、横広げの古典的な費用は 0	読（物理）	§03・25-02	原論文が見立てと明記・容器が塊を入れられる大きさ	—
11	Poisson の等式 $\mathbb{E}[(-1)^n]=e^{-2m}$	初	§04 の (8)	平均 m の Poisson 分布	—
12	希薄な気体で $\theta\approx e^{-2\zeta A_D}$、$\ln(1/\theta)\propto A_DL^{5/3}$	読（物理）	§04 の (9)	希薄な領域・一ループ・独立な点の近似	—
13	余裕 $5/3=11/3-2$ が横広げの不等式の符号を決める	読（物理）	§04	希薄な領域・一ループ	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
14	希薄な $SU(2)$ で横を広げた比は 1 以下（(10)）	読（物理）	§04	$L\Lambda \ll 1$	—
15	閉じ込めの領域で A_T への依存は対数だけ	読（物理）	§04	$L\Lambda \gg 1$・見立て	—
16	還元の対偶の命題：条件つきの還元の定理の結論が偽なら小さな T^2 の基点・枠の減相関・横広げの不等式（強い形）のどれかが偽	初	§05（対偶）	—	—
17	この還元の中で U(1)・$\mathbb{Z}_2$ を外すのは横広げの不等式だけ	読（物理）	§05	26-02 の連鎖の中で	—
18	横を広げると U(1) の ΔF は増え、$SU(2)$ は緩やかか増えない	読	§06 表 2	$M = 8, 12$・U(1) $\beta = 1.5$・SU(2) $\beta = 2.4, 2.5$・$N_T = 2$〜8・誤差 0.04〜0.8・$N_T = M = 8$ の例外	—

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  典  Bogomolny の下界 S ≥ 8π²|Q|/g²                          連続・古典
 2  典  捩れの下で Q は半整数                                   T²_L × R²
 3  典  8π²/g²(L) = (11N/3) ln(1/LΛ)                            ループ
 4  典  T_R ~ Λ²(ΛL)^(5/3) sin²(π|R|/N)                         希薄・ループ
 5  初  流束の一様化の補題：∫f² ≥ Φ²/|Ω|
 6  初  アーベルの作用 ≥ (A_T/2e²A_D)Φ² ⟸ 5                     各断面の流束が同じ
 7  読  U(1)：θ ≈ 2exp(−e²A_D/2A_T)                             見立て
 8  読  U(1) で横広げは破れる ⟸ 6・7
 9  読  Z₂ で横広げは破れる                                     弱結合・壁
10  読  SU(2) の渦は大きさ L の自己双対の塊 ⟸ 1・2              古典的な費用 0
11  初  E[(−1)^n] = e^(−2m)
12  読  θ ≈ e^(−2ζA_D)、ln(1/θ) ∝ A_D L^(5/3) ⟸ 3・4・11        希薄・ループ
13  読  余裕 5/3 = 11/3 − 2 が符号 ⟸ 8・10・12
14  読  希薄な SU(2) で比 ≤ 1 ⟸ 12
15  読  閉じ込めの領域は対数だけ                                 見立て
16  初  還元の対偶の命題                                  26-02
17  読  この還元の中で群を分けるのは横広げだけ ⟸ 8・9・13・16
18  読  表 2 の向き                                             小さな格子・β 一〜二点
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。紙で立つ節点は、流束の一様化の補題・アーベルの作用の下界・Poisson の等式・還元の対偶の命題の四つで、どれも初等的です。章の主張（余裕 5/3 = 11/3 − 2 が符号を決めること、この還元の中で群を分けるのは横広げの不等式だけであること）は「読（物理）」

で、その前提に見立ての行（U(1) のクーロン相・SU(2) の自己双対の塊・希薄な気体の偏り）が入っています。数値の行（表 2 の向き）はどの結論の前提にも入っていません。横広げの不等式そのものの節点はありません。それは仮定として 27-02 の条件の台帳に置かれます。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 アーベルの作用では、決まった流束の最小作用は一様に広げた配位で、横の面積に比例する（各断面の流束が同じ条件の下・古典的な作用）	量子の U(1) の勘定 (4) の定理としての証明
読 （物理） U(1)・$\mathbb{Z}_2$ で横広げの不等式は破れ、希薄な $SU(2)$ では余裕 $5/3 = 11/3 - 2$ で成り立つ	帯 $L \sim 1/\Lambda$ での横広げの不等式。希薄な領域・一ループの外での符号
初 ＋読 （物理） この還元の中で、U(1)・$\mathbb{Z}_2$ を外すのは横広げの不等式だけ	還元に依らない「唯一の場所」。26-06 の還元との正確な対応
読 小さな格子で、横を広げると U(1) の渦は高くなり $SU(2)$ は高くならない向き（一つの例外つき）	大きな格子・多くの β での振る舞い。不等式の定数の値

出典と再現

もの	種別	出典・道具
小さな捩れた T^2 の中心の渦の気体と弦の張力 (7)	典	Y. Tanizaki, M. Ünsal, arXiv:2201.06166（Prog. Theor. Exp. Phys. 2022）式 (2.32)・(2.37)。章 25-02
Bogomolny の下界・半整数の位相電荷	典	章 3-05・25-01 の出典（G. 't Hooft, Nucl. Phys. B153 (1979) 141 ほか）
一ループの結合の走り	典	章 4-06 の出典
U(1) のクーロン相の勘定・横広げの不等式が群を分けるという見立て	読（物理）	帯の還元の論文（この本から出た論文、A-07）の命題「the inequality separates the theories」（論文自身が heuristic と明記）。章 26-01
流束の一様化の補題・(3)・(8)・還元の対偶の命題	初	本文 §02・§04・§05 の証明
表 2 の渦の自由エネルギー	読	レプリカ交換と Bennett の受理率の方法。章 25-08・26-09 の表

この章で使った語 — 横広げの不等式・区画の偏り θ・自己双対の塊（分数インスタントン）・希薄な気体・余裕 $5/3$・横の二次元のエントロピー・クーロン相・移り変わりの帯（帯）。意味は A-02 用語集 と A-06 名前の索引 にあります。

次に読む章：26-04 構造だけでは渡れない — 鏡映正値性や双対性だけでは横広げの不等式が出ない理由。

構造だけでは渡れない

この章は本書の検討です。§01 は既存の知見、§05 は未解決の地図です。

この章で分かること — 格子ゲージ理論の構造的な道具——転送行列の正値性・中心と双対の恒等式・鏡映正値性・格子の対称性・有限の補題——を、捩れのある板の言葉で並べ、どれも $\mathbb{Z}_2$ と U(1) でそのまま成り立つことを確かめます。そこから、**この入力の組だけでは**横広げの不等式は導けない、という否定の補題が出ます。帯を渡るには、閉じ込めない相を外す力学の入力が要ります。途中で、構造の側から確かに言える二つのこと——区画の偏りの電場の流束の形 $\theta = Y(1)/Y(0) \geq 0$ と、z のアンサンブルの格子点を通る鏡映の正値性——を証明つきで置きます。後者は次の章のチェス盤の評価の入力になります。

前提となる章 — 26-01（区画の偏りと大域の形 (8)）・26-02（横広げの不等式）・26-03（U(1)・$\mathbb{Z}_2$ で破れること）・5-03（鏡映正値性と転送行列）・25-01（捩れと 't Hooft の流束）・A-04（Lean）。

先に言うこと — 否定の補題は「**この入力の組だけでは**」の形の文で、入力の一覧を明示した上での論理の整理です。どの入力も役に立たない、とは言いません（鏡映正値性は 26-05 で使います）。「U(1)・$\mathbb{Z}_2$ で横広げの不等式が破れる」は 26-03 の見立て（〔読〕、物理）なので、否定の補題の結論の最後の一段もその札を引き継ぎます。Lean で検査したのは、電場の流束の形のスペクトルの代数と、鏡映正値性の最後の和の代数だけです。

この章の順序

1. 構造の入力の一覧 — 何を「構造」と呼ぶか
2. 電場の流束の形 — $\theta = Y(1)/Y(0) \geq 0$ と tanh の比較
3. z の鏡映正値性 — 格子点を通る鏡映と、横向きの鏡映が捩れで崩れること
4. 構造の入力だけでは足りない補題 — この入力の組だけでは
5. 要る入力 — 閉じ込めない相を外すもの
6. Lean の言明を読む — `FluxDuality` ・ `ReflPos`
7. 五分類の表と依存グラフ

01

構造の入力の一覧 — 何を「構造」と呼ぶか

この節の五つの入力のうち、転送行列の正値性・中心と双対の恒等式・格子の対称性の三つは既存の知見の整理です。導入は 5-03 §05（転送行列）と 5-03 §04（反射正値性）にあります。

格子 $\Lambda = (\mathbb{Z}/L_1) \times (\mathbb{Z}/L_2) \times (\mathbb{Z}/M)^2$ の上の Wilson 作用の格子ゲージ理論で、横の二方向 1・2 に背景の捩れ $n_{12} = 1$ を置きます（25-01）。方向 3・4 が平面です。この章で**構造の入力**と呼ぶのは、次の五つの組 $\mathcal{I}$ です。

1. **転送行列の正値性**：平面の方向（3 または 4）を時間とする転送行列 T が正の作用素（5-03、Osterwalder–Seiler・Lüscher 典 ）。
2. **中心と双対の恒等式**：捩れの流束を入れることは中心変換の挿入であり、電場の流束の射影で分解できること（'t Hooft 典 ）。§02 の電場の流束の分解の補題はこの形の一つです。
3. **平面の方向の鏡映正値性**：捩れを固定した z のアンサンブルでの、方向 3・4 の格子点を通る鏡映の正値性（§03 の z の鏡映正値性）。
4. **格子の対称性**：平行移動・回転・鏡映と、それらで捩れの類が保たれること。
5. **有限の補題**：容器の恒等式と入れ子（25-03）、板の評価 $\sup_\Phi \theta_D \le \tanh(\beta L^2)^{|D|}$（25-04）、流れの補題 $\theta \le 1 - a$（25-06）。どれも測度と有限和の性質だけを使います。

問いは、$\mathcal{I}$ から横広げの不等式（26-02 の (5)）が出るか、です。答えは §04 で「出ない」です。そこへ行く前に、$\mathcal{I}$ の中で、区画の偏りについて確かに言えることを二つ置きます。

02

電場の流束の形 — $\theta = Y(1)/Y(0) \ge 0$

格子を $T^2_{L_1 \times L_2} \times T^2_{M \times M}$ とし、$n_{12} = 1$ に加えて平面 (3,4) を通る捩れの流束 $n_{34} \in \{0, 1\}$ を入れた分配関数を $Z(1, n_{34})$ と書きます。26-01 の (8) の大域の偏りは

$$\theta \;:=\; \frac{Z(1,0) - Z(1,1)}{Z(1,0) + Z(1,1)} \;=\; \tanh \frac{F_v}{2}, \qquad e^{-F_v} := \frac{Z(1,1)}{Z(1,0)} \tag{1}$$

でした。方向 3 を時間に選びます。時刻一つ分の空間は $T^2_{L_1 L_2} \times T^1_M$（方向 1・2・4）で、そこには空間の磁束 $m_4 = n_{12} = 1$ があります。転送行列 $T_3 \ge 0$ と、方向 4 の中心変換 $\hat{C}_4$（方向 4 に一周する結合に中心の元 -1 を掛ける操作）は可換で、$\hat{C}_4^2 = 1$ です。$\hat{C}_4$ の固有値 $(-1)^{e_4}$ で空間を分けたときの $e_4 \in \{0, 1\}$ が、方向 4 の**電場の流束**です（'t Hooft 典 ）。射影を P_e とし

$$Y(e) \;:=\; \mathrm{Tr}\big(P_e\, T_3^{\,M}\big) \qquad (e=0,1) \tag{2}$$

とおきます。

電場の流束の分解の補題（電場の流束の形） 初　上の設定で、$Y(0), Y(1) \ge 0$ で

$$Z(1,0) = Y(0) + Y(1), \qquad Z(1,1) = Y(0) - Y(1). \tag{3}$$

よって $Z(1,0)+Z(1,1) > 0$ のとき $\theta = Y(1)/Y(0) \ge 0$。さらに捩れた分配関数の正値性の仮定なら $\theta \le 1$、すなわち $F_v \ge 0$ で $0 \le \theta \le 1$。

証明　分配関数は転送行列の跡 $Z(1,0) = \mathrm{Tr}\, T_3^{\,M}$ で、平面 $(3,4)$ を通る捩れ $n_{34}=1$ は、時間の一周のどこかで $\hat{C}_4$ を挟むことと同じなので $Z(1,1) = \mathrm{Tr}(\hat{C}_4 T_3^{\,M})$ です（'t Hooft の構成 典 ）。$\hat{C}_4 = P_0 - P_1$、$1 = P_0 + P_1$ を代入すると (3)。P_e は T_3 と可換な直交射影なので $P_e T_3^{\,M} P_e = P_e T_3^{\,M}$ は正の作用素で、跡は 0 以上です。$Z(1,0)+Z(1,1) = 2Y(0) > 0$ のとき (1) に (3) を入れて $\theta = 2Y(1)/2Y(0)$。$Z(1,1) = Y(0) - Y(1) \ge 0$ から $Y(1) \le Y(0)$。∎

二つの注意があります。第一に、$\theta \ge 0$ と $|Z(1,1)| \le Z(1,0)$ は (3) と $Y(e) \ge 0$ だけから出る**スペクトルの**事実ですが、$\theta \le 1$ に要る捩れた分配関数の正値性の仮定はそうではありません。$Z(1,1)$ は捩れた面の重み $e^{-\frac{\beta}{2}\mathrm{tr}U_p}$ を含む正の関数の積分なので 0 以上ですが、これは Boltzmann の重みの正値性で、転送行列のスペクトルからは出ません。第二に、電場の流束の分解の補題は「渦の自由エネルギー（磁束）が小さい $\Longleftrightarrow$ 電場の流束 $e_4=1$ の状態が $e_4=0$ に比べて重い」という 't Hooft の電場と磁場の双対性の格子版です。閉じ込めの領域では $Y(1)/Y(0)$ は電場の弦の張力で小さくなると見込まれます 読 （物理、26-05 §04）。

大域の形で横広げを書くときに使う、初等的な補題を一つ添えます。

tanh の比較の補題 初　$\theta = \tanh(F/2)$、$\theta' = \tanh(F'/2)$、$F, F' \ge 0$ とする。$F' \le KF$（$K \ge 1$）なら $\theta' \le K\theta$。

証明　$\tanh$ は $[0,\infty)$ で単調増加かつ凹で $\tanh 0 = 0$ なので、$K \ge 1$ について $\tanh(Kx) \le K \tanh x$（凹関数 g で $g(0)=0$ なら $g(x) = g(\frac{1}{K}\cdot Kx + (1-\frac{1}{K})\cdot 0) \ge \frac{1}{K} g(Kx)$）。よって $\theta' = \tanh(F'/2) \le \tanh(KF/2) \le K\tanh(F/2) = K\theta$。∎

つまり、渦の自由エネルギーの形の横広げ $F_v(L') \le C(L'/L)^2 F_v(L)$ は、偏りの形の横広げを導きます。

```
03
```

z の鏡映正値性 — 格子点を通る鏡映と、横向きの鏡映

設定。トーラス $\Lambda = (\mathbb{Z}/L)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$、$M$ は偶数とします。変数は結合 $U_\ell \in SU(2)$ と面の変数 $z_p \in \{\pm 1\}$ で、次の拘束を課します。

- 全ての三次元の立方体 c で $\prod_{p \in \partial c} z_p = 1$（$z$ は閉じた $\mathbb{Z}_2$ の 2-余鎖）。
- 大域の類の固定 $n_{12}(z) := \prod_{p \in \Pi} z_p = -1$。$\Pi$ は (x_3, x_4) を固定した (1,2) 平面で、z が閉じているので Π の位置に依りません。

測度は

$$d\mu \;=\; Z^{-1} \prod_{\ell} dU_\ell \sum_{z} \mathbf{1}[\delta z = 1]\, \mathbf{1}[n_{12}(z) = -1]\, \exp\Big(\frac{\beta}{2} \sum_{p} z_p \operatorname{tr} U_p \Big) \tag{4}$$

（dU は Haar 測度）です。これが 26-01 §01 の捩れを和に取ったアンサンブルで、横の捩れを固定したものです。

鏡映。Θ を方向 3 の格子点を通る鏡映 $x_3 \mapsto -x_3 \pmod M$ とします。固定される平面は $P_0 = \{x_3 = 0\}$ と $P_1 = \{x_3 = M/2\}$ です。結合には、方向 $\mu \neq 3$ なら $U_{(x,\mu)} \mapsto U_{(\Theta x, \mu)}$、方向 3 なら $U_{(x,3)} \mapsto U^{-1}_{(\Theta x - e_3, 3)}$、面の変数には $z_p \mapsto z_{\Theta p}$ で作用させ、関数には $(\Theta G)(U, z) := \overline{G(\Theta U, \Theta z)}$ で作用させます。

z の鏡映正値性 初　右半分 $\Lambda_+ = \{0 \le x_3 \le M/2\}$ の変数（平面 $P_0 \cup P_1$ の上の変数を含む）だけに依る任意の有界な関数 G について $\langle G \cdot \Theta G \rangle_\mu \ge 0$。方向 4 についても同じ。

証明　五段で示す。

段 1（変数の分割）。 変数を三つに分ける。φ：平面 $P_0 \cup P_1$ の上の変数（平面の中の方向 1・2・4 の結合と、平面の中の (1,2)・(1,4)・(2,4) 型の面の z）。ψ_+：右の変数（$0 \le x_3 < M/2$ から出る方向 3 の結合、$0 < x_3 < M/2$ の他の方向の結合、$[x_3, x_3+1] \subset [0, M/2]$ の $(3,\nu)$ 型の面、$0 < x_3 < M/2$ の平面の中の型の面の z）。$\psi_- := \Theta \psi_+$：左の変数。Θ は φ を動かさない。

段 2（重みの分解）。 面の重み $e^{\frac{\beta}{2} z_p \operatorname{tr} U_p}$ は、p が右・左・平面のどれか一つに属するので、そのどれかに入る。平面の面の重みは $A(\varphi)$ に入れる。立方体の拘束も同様に分かれる：方向 3 を含む立方体は $[x_3, x_3+1]$ を張るので片側と平面の変数だけに依り、方向 3 を含まない立方体は $0 < x_3 < M/2$ なら右、平面の上なら平面の変数だけに依る。大域の拘束 n_{12} は $\Pi \subset P_0$ で測れば φ の関数。よって重みは $W = A(\varphi)\, F(\psi_+, \varphi)\, F'(\psi_-, \varphi)$、$A \ge 0$、$F \ge 0$ の形。

段 3（左右の因子の関係）。 作用と拘束は Θ で不変である。面の向きが逆になっても $SU(2)$ では $\operatorname{tr} U_{\Theta p} = \operatorname{tr} U_p^{-1} = \operatorname{tr} U_p$。立方体は立方体に移り、$n_{12}$ を測る平面は固定される。よって

$F'(\psi_-,\varphi)=F(\Theta\psi_-,\varphi)$。

*段 4（測度の不変性）。*Haar 測度は逆元をとる操作で不変、z の数え上げの測度は置換で不変。

*段 5（正値性）。*以上から

$$Z\,\langle G\cdot\Theta G\rangle \;=\; \int d\varphi\,A(\varphi)\Big[\int d\psi_+ F(\psi_+,\varphi)G(\psi_+,\varphi)\Big]\overline{\Big[\int d\psi_- F(\Theta\psi_-,\varphi)G(\Theta\psi_-,\varphi)\Big]} \;=\; \int d\varphi$$

∎

最後の等式から不等式への代数（有限和の版）は Lean の ReflPos（`ReflPos.refl_pos`）で検査されています（§06）。正値性から出る Cauchy–Schwarz の形 $\langle G\cdot\Theta H\rangle^2\le\langle G\cdot\Theta G\rangle\langle H\cdot\Theta H\rangle$（実の G,H）の、因子に分けた後の代数が ReflPos（`ReflPos.refl_cs`）です。これはチェス盤の評価の入力です（26-05）。

z の鏡映正値性は Osterwalder–Seiler の格子点を通る鏡映の議論 [典]（5-03）に、$\mathbb{Z}_2$ の面の変数と閉性の拘束を加えたものです。要点は、立方体の拘束が一つずつ片側と平面に収まることと、大域の類 n_{12} が鏡映の方向（3）と直交する平面にあって平面 P_0 の上で測れることです。

横向きの鏡映。同じ議論を方向 1・2 の鏡映でしようとすると、捩れが邪魔をします。

横向きの鏡映の非正値の補題 [初]　$SU(2)$ で $e^{\frac{\beta}{2}\mathrm{tr}U}=\sum_j c_j\chi_j(U)$（$\chi_j$ はスピン j の指標、$c_j=\frac{2(2j+1)}{\beta}I_{2j+1}(\beta)>0$）とすると、捩れた面の重みは

$$e^{-\frac{\beta}{2}\mathrm{tr}U} \;=\; \sum_j (-1)^{2j} c_j\,\chi_j(U) \tag{5}$$

で、半整数の j の係数が負になる。したがって、捩れを固定したまま横の方向 1・2 の鏡映の平面をまたぐ面の重みは正の型でなく、鏡映正値性の標準の議論はそこで成り立たない。

証明　-1 は $SU(2)$ の中心の元で、$-\mathrm{tr}\,U=\mathrm{tr}(-U)$、$\chi_j(-U)=(-1)^{2j}\chi_j(U)$。よって $e^{-\frac{\beta}{2}\mathrm{tr}U}=e^{\frac{\beta}{2}\mathrm{tr}(-U)}=\sum_j c_j\chi_j(-U)$ から (5)。c_j の式と正値性は、変形 Bessel 関数 $I_n(\beta)>0$（$\beta>0$）による標準の展開です [典]。正の型の重み（指標展開の係数が 0 以上）であることが、鏡映の平面をまたぐ面について標準の議論の要る性質で、(5) はそれを満たさない。∎

横向きの鏡映の非正値の補題の帰結は、**鏡映正値性からは横の大きさ L についての凸性や単調性が出ない**ことです。横広げの不等式は L についての比較なので、それを鏡映から得る道は最初から閉じています。横向きの鏡映の非正値の補題が言うのは標準の議論が使えないことで、横の鏡映の正値性が全ての関数で破れることまでは示していません。

04

否定の補題 — この入力の組だけでは

構造の入力だけでは足りない補題（否定の補題） 初　§01 の構造の入力の組 $\mathcal{I}$（転送行列の正値性・中心と双対の恒等式（電場の流束の分解の補題を含む）・平面の方向の鏡映正値性（z の鏡映正値性）・格子の対称性・有限の補題）は、群を $SU(2)$ から $\mathbb{Z}_2$ または U(1) に替え、捩れの変数を ± 1 のまま置いた四次元の Wilson の理論でも、同じ証明で成り立つ。したがって、$\mathcal{I}$ だけを使って横広げの不等式を導く議論があれば、同じ議論が $\mathbb{Z}_2$ と U(1) でも横広げの不等式を導く。対偶として、**$\mathbb{Z}_2$ か U(1) のどちらかで横広げの不等式が偽なら、この入力の組だけでは横広げの不等式は導けない**。

証明　入力ごとに、使っている群の性質を確かめる。

- 転送行列の正値性：Osterwalder–Seiler の議論は、コンパクト群の Wilson 作用で、指標展開の係数が正の作用について成り立つ。$\mathbb{Z}_2$・U(1) の $e^{\beta \operatorname{Re} U_p}$ はこれを満たす 典 。
- 中心と双対の恒等式：使うのは、-1 が群の中心にあること（$\mathbb{Z}_2$ と U(1) の中心は群そのもので -1 を含む）と、捩れの流束が中心変換の挿入であることだけ。電場の流束の分解の補題の証明はそのまま通る。
- 鏡映正値性：z の鏡映正値性の証明が使う群の性質は、段 3 の $\operatorname{tr} U_{\Theta p} = \operatorname{tr} U_p^{-1} = \operatorname{tr} U_p$ と、段 4 の Haar 測度の逆元についての不変性だけ。U(1) では作用を $\operatorname{Re} U_p$ で書くと $\operatorname{Re} U^{-1} = \operatorname{Re} \overline{U} = \operatorname{Re} U$、$\mathbb{Z}_2$ では $U^{-1} = U$ で、どちらも成り立つ。
- 格子の対称性：作用と捩れの類の定義が群に依らない形なので同じ。
- 有限の補題：容器の恒等式は枠で条件づけた独立性（Markov 性）、板の評価は面の変数の反転の軌道についての条件づけ、流れの補題は定常性だけを使い、どれも群の非可換性を使わない。

前半が示せたので、後半は論理である：議論が $\mathcal{I}$ の性質しか使わないなら、$\mathcal{I}$ を満たす全ての理論で同じ結論を与える。∎

構造の入力だけでは足りない補題の前提「$\mathbb{Z}_2$ か U(1) で横広げの不等式が偽」は、26-03 §02 の見立てです 読 （物理。U(1) のクーロン相の勘定と、弱結合の $\mathbb{Z}_2$ の壁の勘定）。それを認めると、**横広げの不等式は構造の入力だけからは出ない**という結論になります。この最後の一段は、前提の札〔読〕（物理）を引き継ぎます。

同じ議論は、弱い形（26-02 の横広げの不等式（弱い形））にも、一様な板の張力にもそのまま当てはまります。U(1)・$\mathbb{Z}_2$ では板の張力が L とともに 0 に向かうと見立てられるので、どちらも同じ入力の組だけでは出ません 読 （物理）。

構造の入力だけでは足りない補題が言っていないことも書いておきます。第一に、$\mathcal{I}$ が帯に無用だとは言っていません。L を固定すれば、z の鏡映正値性は枠の減相関をチェス盤の密度 κ_{cb} に置き換えます（26-05）。第二に、$\mathcal{I}$ に一つ力学の入力を足したときに何が出るかは、構造の入力だけでは足りない補題の外です。第三に、強結合（小さな β）では U(1) も閉じ込めるので、構造の入力だけでは足りない補題が分けるのは群そのものではなく、**閉じ込めない相があるかどうか**です。

薄い渦の床 — 構造だけの道具が出すのは床まで。構造の入力に相関不等式と被覆の比べを足しても、出るのは群を区別しない下からの評価（床）です。板 $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ の $SU(2)$ の Wilson 測度で、全ての実数 β、全ての $N, M \geq 1$、背景 $n_{12} \in \{0,1\}$ について

$$\theta = \frac{Z_{n_{34}=0} - Z_{n_{34}=1}}{Z_{n_{34}=0} + Z_{n_{34}=1}} \;\leq\; \tanh\!\big(N^2|\beta|\big)^{M^2} \tag{6}$$

が成り立ちます[初]（薄い渦の床。$SU(2)$ の系を $\mathbb{Z}_2$ の符号の系で上から押さえ、四次元の $\mathbb{Z}_2$ の系を二次元の面の系に移して閉じた式で評価する。具体の $SU(2)$ の Wilson 測度の定理として Lean で検査した）。不等式の型は Mack–Petkova・Fröhlich の線にあります[典]（原典の本文での照合は未）。結合が正のとき、張力にすると $\sigma_N(\beta) \geq -\ln\tanh(N^2\beta) \approx 2e^{-2N^2\beta}$ で、N とともに急に 0 へ向かい、N に一様ではありません（強結合の窓の中では、面積あたりの率が横の大きさに依らない形が在ります。前の因子は残ります。窓の外では一様な形はありません。20-06）。右辺は面に沿って N^2 枚を重ねた薄い渦の値で、同じ比べは $\mathbb{Z}_2$ の系でも同じ形で立ちます。この型の比べは、当てはまる模型の類の極限に在るガウスの模型で等号になるので、比べだけから床を一様な割合で越え続けること（26-06 §08 の張力の倍化の不等式）は出ません[読]。構造の入力だけでは足りない補題が「この入力の組だけでは出ない」と言う所を、出る側から言うと「出るのは床まで」です。床より上が、§05 の非可換の力学の入力の要る所です。この床の言明と証明は 21-02 に在ります。

05

要る入力 — 閉じ込めない相を外すもの

構造の入力だけでは足りない補題から、帯を渡る議論は $\mathcal{I}$ の外の入力を少なくとも一つ使わなければなりません。それは、弱結合の U(1) と $\mathbb{Z}_2$——閉じ込めない相——で偽になる入力でなければなりません。この本の検討で名指しできる候補は、どれも非可換の力学の性質です。

表 1　帯に要る入力の候補（どれも示されていない。札は候補の見立て）

入力	U(1)・$\mathbb{Z}_2$ で	入る場所	章
漸近自由（結合の走りの符号）	U(1) は走らないか逆向き、$\mathbb{Z}_2$ は連続な走りを持たない	希薄な領域の余裕 $5/3$・繰り込みの比較の $\beta' < \beta$	26-03 §04・26-06

入力	U(1)・$\mathbb{Z}_2$ で	入る場所	章
自己双対の塊への局在（非線形性）	アーベルの流束は一様に広がるしかない	横広げの古典的な費用が 0	26-03 §03
紫外の制御（多重尺度の解析）	U(1) では別の形（共形な長距離）	小さな T^2 の基点	26-02 の小さな T^2 の基点・27-02

表 1 の各行は〔読〕（物理）の見立てで、どの入力も帯 $L \sim 1/\Lambda$ で使える形になっていません。強結合の側では、多面体の展開で横広げの不等式が定数 $C \approx 1$ で成り立つ筋が考えられています（因子 $(L'/L)^2$ が強結合の主要項の文献（Münster 1981）と整合するという報告がありますが、照合未了です）。ただし平面の大きさ M に一様な評価は確かめられておらず、この本では〔仮〕に置きます。強結合では U(1) も閉じ込めるので、この行は構造の入力だけでは足りない補題と矛盾しません。

構造の入力だけでは足りない補題は予想どおりの結果を明示したもので、驚きはありません。役目は、帯の議論を読むときの**試金石**を一つ与えることです：議論が $\mathcal{I}$ の性質だけで進んでいるなら、その議論は U(1) でも同じ結論を与えるので、どこかに誤りがあります。26-08 の、U(1) を区別しないという批判を受けた道の記録は、この試金石の実例です。

06

Lean の言明を読む — `FluxDuality`・`ReflPos`

電場の流束の分解の補題のスペクトルの部分と、z の鏡映正値性の段 5 の代数は、Lean 4 のファイル `FluxDuality.lean`・`ReflPos.lean` の五つの定理です。言明を本文の言葉で読みます。どれも有限集合 ι（または Φ, Ψ）の上の実数の和の文です。

`FluxDuality.split`：実数の族 $t, c : \iota \to \mathbb{R}$ について、仮定「全ての i で $c_i = 1$ または $c_i = -1$」の下で、$\sum_i t_i - \sum_i c_i t_i = 2\sum_{c_i=-1} t_i$ かつ $\sum_i t_i + \sum_i c_i t_i = 2\sum_{c_i=1} t_i$。本文では t_i が T_3^M の固有値、c_i が $\hat{C}_4$ の固有値で、二つの式が (3) の $Z(1,0) \mp Z(1,1) = 2Y(1), 2Y(0)$ です。

`FluxDuality.twisted_le`：仮定「全ての i で $0 \le t_i$」「$c_i = \pm 1$」の下で $\left|\sum_i c_i t_i\right| \le \sum_i t_i$。本文の $|Z(1,1)| \le Z(1,0)$ です。

`FluxDuality.bias_mem`：仮定「$0 \le t_i$」「$c_i = \pm 1$」「$0 \le \sum_i c_i t_i$」「$0 < \sum_i t_i + \sum_i c_i t_i$」の下で、$\theta := (\sum t - \sum ct)/(\sum t + \sum ct)$ について $0 \le \theta \le 1$。**第三の仮定 $Z_{11} := \sum ct \ge 0$ が $\theta \le 1$ に使われ**、これはスペクトルの事実ではなく、本文の Boltzmann の重みの正値性に当たります。

`ReflPos.refl_pos`：有限集合 Φ, Ψ と実関数 $A : \Phi \to \mathbb{R}$、$F, G : \Psi \to \Phi \to \mathbb{R}$ について、仮定「全ての φ で $0 \le A(\varphi)$」の下で $\sum_\varphi \sum_{\psi_1} \sum_{\psi_2} A(\varphi) F(\psi_1, \varphi) F(\psi_2, \varphi) G(\psi_1, \varphi) G(\psi_2, \varphi) \ge 0$

。z の鏡映正値性の段 5 の $\int A\,|\int FG|^2 \geq 0$ の有限和の版で、F の符号は問いません。

`ReflPos.refl_cs`：同じ仮定 $0 \leq A$ の下で、$g(\varphi) := \sum_\psi F(\psi,\varphi)G(\psi,\varphi)$、$h(\varphi) := \sum_\psi F(\psi,\varphi)H(\psi,\varphi)$ について $\left(\sum_\varphi A\,g\,h\right)^2 \leq \left(\sum_\varphi A\,g^2\right)\left(\sum_\varphi A\,h^2\right)$。鏡映の Cauchy–Schwarz の形 $\langle G\cdot\Theta H\rangle^2 \leq \langle G\cdot\Theta G\rangle\langle H\cdot\Theta H\rangle$ を、重みが因子に分かれた後の代数として書いたものです。

機械検査が保証するのは、この有限和と実数の代数だけです。転送行列が正であること、$\hat{C}_4$ と可換であること、捩れが $\hat{C}_4$ の挿入であること、重みが $A\cdot F\cdot F$ の形に分かれること（z の鏡映正値性の段 1〜4）、Haar 測度――は Lean の外にあり、本文の証明と文献が担います。五つの定理の公理は、記録では標準の三つ（`propext`・`Classical.choice`・`Quot.sound`）で、本書の再検査を通しています（A-04）。

07

五分類の表と依存グラフ

表 2　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	転送行列の正値性 $T \geq 0$	典	Osterwalder–Seiler・Lüscher・5-03	コンパクト群の Wilson 作用	—
2	捩れ n_{34} は中心変換 $\hat{C}_4$ の挿入、e_4 は $\hat{C}_4$ の固有値	典	't Hooft・25-01	中心が -1 を含む群	—
3	電場の流束の分解の補題：$Z(1,0)=Y(0)+Y(1)$、$Z(1,1)=Y(0)-Y(1)$、$\theta = Y(1)/Y(0) \geq 0$	初	§02 の証明 $\Longleftarrow$ 1・2	$T^2_{L_1L_2}\times T^2_{M\times M}$・$n_{12}=1$・$Z(1,0)+Z(1,1)>0$	FluxDuality（`FluxDuality.split`）（仮定：$c_i=\pm1$）・`twisted_le`（仮定：$0\leq t_i$・$c_i=\pm1$）
4	$\theta \leq 1$（$F_v \geq 0$）	初	§02 $\Longleftarrow$ 3	捩れた分配関数の正値性の仮定（Boltzmann の重みの正値性）を使う	FluxDuality（`FluxDuality.bias_mem`）（仮定：$0\leq t_i$・$c_i=\pm1$・$Z_{11}\geq 0$・$Z_{10}+Z_{11}>0$）
5	tanh の比較の補題：$F' \leq KF$（$K\geq 1$）なら $\tanh(F'/2) \leq K\tanh(F/2)$	初	§02 の証明（tanh の凹性）	$F, F' \geq 0$	—
6	z の鏡映正値性：z のアンサンブルの、方向 3・4 の格子点を通る鏡映の正値性	初	§03 の証明（Osterwalder–Seiler の議論に z と拘束を加えた形）	$SU(2)$・M は偶数・捩れ $n_{12}=1$ を固定	ReflPos（`ReflPos.refl_pos`）（段 5 の代数だけ。仮定：$0\leq A$）・`refl_cs`（仮定：$0\leq A$）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
7	指標展開の係数 $c_j = \frac{2(2j+1)}{\beta} I_{2j+1}(\beta) > 0$	典	標準の展開（数値で照合）	$SU(2)$・$\beta > 0$	—
8	横向きの鏡映の非正値の補題：捩れた面の重みは半整数の j で負の係数、横向きの鏡映は正の型でない	初	§03 の証明 $\Longleftarrow$ 7	捩れを固定・方向 1・2 の鏡映	—
9	構造の入力だけでは足りない補題：$\mathcal{I}$ は $\mathbb{Z}_2$・U(1) でも成り立ち、$\mathcal{I}$ だけからの議論はそこでも同じ結論を与える	初	§04 の証明 $\Longleftarrow$ 1・3・6	「この入力の組だけでは」の形・捩れは ± 1	—
10	U(1)・$\mathbb{Z}_2$ で横広げの不等式は偽	読（物理）	26-03 §02	弱結合・見立て	—
11	横広げの不等式（強い形・弱い形）と一様な板の張力は、構造の入力だけからは出ない	読（物理）	§04 $\Longleftarrow$ 9・10	U(1)・Z_2 で横広げの不等式が偽という見立ての上	—
12	鏡映正値性からは横の大きさ L についての凸性・単調性は出ない	初	§03 $\Longleftarrow$ 8	標準の議論が使えない、の意味	—
13	強結合で横広げの不等式は $C \approx 1$ で成り立つ	仮	筋：多面体の展開（平面の大きさに一様な評価は未確認）	小さな β	—
14	閉じ込めの領域で $Y(1)/Y(0)$ は電場の弦の張力で小さい	読（物理）	26-05 §04	$L\Lambda \gg 1$・見立て	—

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  典  転送行列の正値性                                          コンパクト群・Wilson 作
 2  典  捩れは中心変換の挿入、e₄ は固有値                        't Hooft
 3  初  電場の流束の分解の補題：θ = Y(1)/Y(0) ≥ 0 ⟸ 1・2                    Lean
 4  初  θ ≤ 1 ⟸ 3                                          Z(1,1) ≥ 0 を使う・
 5  初  tanh の比較の補題：F' ≤ KF ⇒ θ' ≤ Kθ                        K ≥ 1
 6  初  z の鏡映正値性（方向 3・4）                        Lean refl_pos・refl_cs（代数）
 7  典  指標展開の係数 c_j > 0                                SU(2)
 8  初  横向きの鏡映の非正値の補題 ⟸ 7                      捩れを固定
 9  初  構造の入力だけでは足りない補題 ⟸ 1・3・6              この入力の組だけでは
10  読  U(1)・Z₂ で横広げは偽                                  26-03・見立て
11  読  構造の入力だけからは出ない ⟸ 9・10
12  初  鏡映から L の凸性・単調性は出ない ⟸ 8
13  仮  強結合で C ≈ 1                                        筋・M に一様は未確認
14  読  閉じ込めの領域で Y(1)/Y(0) は小さい                   見立て
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。紙で立つ節点は、電場の流束の分解の補題・θ ≤ 1・tanh の比較の補題・z の鏡映正値性・横向きの鏡映の非正値の補題・構造の入力だけでは足りない補題・凸性と単調性が出ないことで、文献の行（転送行列の正値性・中心変換の挿入・指標展開の係数）の上にあります。章の題の主張（横広げの不等式と一様な板の張力は構造の入力だけからは出ない）だけが見立ての行（U(1)・Z_2 で横広げの不等式が偽）を前提に持ち、「読（物理）」です。仮定の行（強結合で横広げの不等式が成り立つ）はどの結論の前提にも入っていません。

鏡映正値性の機械検査した形は 20-01、θ の符号は 21-06 に在ります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 区画の大域の偏りは電場の流束の比 $\theta = Y(1)/Y(0) \in [0,1]$（上界は重みの正値性を使う）	$Y(1)/Y(0)$ の大きさの評価。帯での電場の弦の張力
初 捩れを固定した z のアンサンブルは、方向 3・4 の格子点を通る鏡映で正値。横向きの鏡映は捩れで正の型でない	横の鏡映の正値性が全ての関数で破れること。L についての凸性
初 構造の入力の組 $\mathcal{I}$ は $\mathbb{Z}_2$・U(1) でも成り立ち、$\mathcal{I}$ だけからの議論はそこでも同じ結論を与える（この入力の組だけでは）	$\mathcal{I}$ に力学の入力を足したときに何が出るか
読 （物理） 横広げの不等式と一様な板の張力は、構造の入力だけからは出ない	U(1)・$\mathbb{Z}_2$ で横広げの不等式が偽であることの定理としての証明

言えている	言えていない
Lean：スペクトルの代数（FluxDuality（`FluxDuality.split`・`FluxDuality.twisted_le`・`FluxDuality.bias_mem`））と鏡映の最後の和の代数（ReflPos（`ReflPos.refl_pos`・`ReflPos.refl_cs`））	転送行列・中心変換・重みの分解・Haar 測度（Lean の外）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
鏡映正値性と転送行列の正値性	典	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440。M. Lüscher, Commun. Math. Phys. 54 (1977) 283。章 5-03
電場と磁場の流束・捩れと中心変換	典	G. 't Hooft, Nucl. Phys. B153 (1979) 141。章 25-01
捩れを和に取ったアンサンブル	典	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 123 (1979) 442。章 25-03
電場の流束の分解の補題・tanh の比較の補題・z の鏡映正値性・横向きの鏡映の非正値の補題・構造の入力だけでは足りない補題	初	本文 §02〜§04 の証明。帯の還元の論文（この本から出た論文、A-07）の命題「site-reflection positivity」「no-go from structure」と同じ内容
指標展開の係数の式	典	標準の展開。$\beta = 0.5, 2.5$、$j \le 3/2$ で Haar 測度の数値積分と小数点以下 8 桁で一致することを確かめた
強結合の多面体の展開の筋	仮	筋のみ。主要項の比較の文献（Münster 1981）は照合未了
Lean	Lean	FluxDuality（`FluxDuality.split`・`FluxDuality.twisted_le`・`FluxDuality.bias_mem`）、ReflPos（`ReflPos.refl_pos`・`ReflPos.refl_cs`）。保証するのは有限和と実数の代数だけ。A-04

この章で使った語 — 構造の入力・転送行列・中心変換・電場の流束 e_4・区画の偏り θ・z のアンサンブル・格子点を通る鏡映・正の型・否定の補題・横広げの不等式・試金石。意味は A-02 用語集 と A-06 名前の索引 にあります。

次に読む章：26-05 チェス盤と同時の反転 — z の鏡映正値性を使って、枠の減相関を一つの密度に置き換える。

チェス盤と同時の反転

この章は本書の検討です。§04・§05 は未解決の地図、§06 は案内です。

この章で分かること — 26-02 の還元の第二の仮定「枠の減相関」は、枠を共有する容器の偏りの積が、典型的な値の積に分かれるという仮定でした。横のトーラスの大きさ L を固定すれば、z の鏡映正値性（26-04 の z の鏡映正値性の定理）とチェス盤の評価によって、この仮定は**一つの密度** κ_{cb} に置き換わります。L を固定した板の上では、Wilson ループは $\kappa_{\mathrm{cb}}^{n(C)}$ で押さえられ、残る仕事は $\kappa_{\mathrm{cb}} < 1$ の評価だけです。その評価の道具として、板の評価と同時の反転を並べ、同時の反転が帯の試験には使えない理由も書きます。最後に、帯が「一様な板の張力」と「一様な板のギャップ」の二つの一様性に集約されることを見ます。

前提となる章 — 26-02 §02（枠の減相関）・26-04 §03（z の鏡映正値性）・25-03（容器）・25-04（板の閉じ込め）・25-06（流れの補題と同時の反転）・5-03（鏡映正値性）。

先に言うこと — この章の紙の結果（横を止めたチェス盤の評価・同時の反転の評価）は、L **を固定すれば**の文です。L に一様な評価は一つもありません。帯の二つの一様性は〔仮〕のまま残ります。チェス盤の評価そのものは標準の道具（Fröhlich–Israel–Lieb–Simon）で、新しいのは、それを容器の偏りに当てる組み立てだけです。記号 κ_{cb} の添え字は、この本の他の κ と区別するためのものです（§06）。

この章の順序

1. 置き換えるもの — 枠の減相関と、Hölder で失われる冪
2. チェス盤の評価 — 横を止めたチェス盤と密度 κ_cb
3. κ_{cb} の上界 — 板の評価と同時の反転の評価、そしてその限界
4. 帯が再び現れる場所 — 希薄な領域・閉じ込めの領域・その間
5. 帯の集約 — 一様な板の張力と一様な板のギャップ（表 1）
6. κ の記号の対照（表 2）
7. 五分類の表と依存グラフ

01

置き換えるもの — 枠の減相関と、Hölder で失われる冪

記号は 26-01 §01 のとおりです。容器 $D \times T_L^2$ の区画の偏り $\theta_D(\Phi) = |\mathbb{E}[\sigma_D \mid \Phi]|$ は枠 Φ の関数で、平面の中の互いに素な容器 D_j がループ C の内側にあれば

$$|\langle W(C)\rangle| \;\le\; \mathbb{E}\prod_j \theta_{D_j}(\Phi) \tag{1}$$

でした（Mack–Petkova 典 ）。右辺は**同じ枠を共有する**因子の積の平均です。因子が独立なら $\prod_j \mathbb{E}\theta_{D_j}$ に分かれますが、枠の場は容器の間でつながっているので、そうはなりません。Hölder の不等式で $\mathbb{E}\prod_{j=1}^{n}\theta_j \le \prod_j (\mathbb{E}\theta_j^n)^{1/n}$ とすると、右辺の各因子は θ の n 乗の平均の n 乗根で、典型的な値 θ の積にはならず、面積に比例する冪が失われます（入れ子の形では $\mathbb{E}\theta_{2R}^4 \le \mathbb{E}\theta_R^4$ しか出ない）。

そこで 26-02 §02 は、枠の減相関

$$\theta(sR;T_L^2) \;\le\; C_{\mathrm{D}}\,\theta(R;T_L^2)^{s^2} \tag{2}$$

を仮定として置きました 仮 。(2) は二つの役を担っていました——入れ子の冪（26-02 の条件つきの還元の定理の跳躍の段・倍化の段）と、偏りから Wilson ループへの橋（26-01 の面積の指数からの面積則）です。この章は、**L を固定した板の上で**、積を分けるという役を、一つの並進不変な量に移します。

02

チェス盤の評価 — 密度 κ_{cb}

設定。格子 $(\mathbb{Z}/L)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ の、捩れ $n_{12}=1$ を固定した z のアンサンブル（26-04 の (4)）を考えます。平面 (3,4) を一辺 B の正方形のブロック Q_t（$t \in \mathcal{T}$、境界の格子点を含む）に分け、M は $2B$ の倍数とします。各ブロックの内部に容器 $D_t \times T_L^2$ を一つずつ、互いに鏡映で移り合う位置に置きます。

チェス盤の評価（Fröhlich–Israel–Lieb–Simon） 典 　測度が平面の方向 3・4 の、全てのブロックの境界の格子平面を通る鏡映について鏡映正値であるとする。各 t について f_t をブロック Q_t の変数（境界を含む）だけに依る有界な実関数とし、$f_t^{(s)}$ を、f_t を鏡映の合成でブロック Q_s に運んだ関数とする。このとき

$$\Big|\Big\langle \prod_{t\in\mathcal{T}} f_t \Big\rangle\Big| \;\le\; \prod_{t\in\mathcal{T}} \Big\langle \prod_{s\in\mathcal{T}} f_t^{(s)} \Big\rangle^{1/|\mathcal{T}|}. \tag{3}$$

これは Fröhlich–Israel–Lieb–Simon の標準の議論で、鏡映の Cauchy–Schwarz の形（26-04 §03、Lean の ReflPos（`ReflPos.refl_cs`）はその因子に分けた後の代数）を繰り返し使って得られます（原論文は Fröhlich–Israel–Lieb–Simon（1978）。この本では、鏡映正値性からチェス盤の評価を得る標準の形であることを M. Biskup の講義録 arXiv:math-ph/0610025 の要旨で確かめました）。

z のアンサンブルでは、鏡映正値性は 26-04 の z の鏡映正値性が与えます。z の鏡映正値性は $x_3 = 0$ と $x_3 = M/2$ を通る鏡映について述べていますが、測度は方向 3 の平行移動で不変なので、任意の格子平面 $x_3 = c$ を通る鏡映でも同じです。方向 4 も同様です。

次に、偏りがブロックの関数であることを確かめます。容器 $D_t \times T_L^2$ の内部は、枠を与えると条件つきで独立で、条件つきの分布は容器のすぐ外側の殻の変数だけに依ります（Markov 性）。容器がブロックの内部にあるので、殻はブロックの中にあり、$\theta_t := \theta_{D_t}$ は Q_t の変数の関数です。また、鏡映は測度を保ち、区画 $\sigma_D = \prod_{p \in D \times \{y_0\}} z_p$ を鏡映した容器の区画に移すので、θ_t を鏡映でブロック Q_s に運んだ関数は θ_s です。

横を止めたチェス盤の評価（L を固定したチェス盤） 初　L と M を固定する。上の設定で

$$\kappa_{\mathrm{cb}} \;:=\; \Big(\mathbb{E} \prod_{t \in \mathcal{T}} \theta_t \Big)^{1/|\mathcal{T}|} \tag{4}$$

とおくと、全ての部分集合 $S \subset \mathcal{T}$ について $\mathbb{E} \prod_{t \in S} \theta_t \le \kappa_{\mathrm{cb}}^{|S|}$。とくに、ループ C の内側に容器が丸ごと入るブロックの数を $n(C)$ とすると

$$|\langle W(C) \rangle| \;\le\; \kappa_{\mathrm{cb}}^{\,n(C)}. \tag{5}$$

証明　(3) で $t \in S$ なら $f_t = \theta_t$、$t \notin S$ なら $f_t = 1$ とおく。$\theta_t \ge 0$ なので左辺は $\mathbb{E} \prod_{t \in S} \theta_t$。右辺の $t \in S$ の因子は、上で見たとおり $\theta_t^{(s)} = \theta_s$ なので $\big(\mathbb{E} \prod_{s \in \mathcal{T}} \theta_s \big)^{1/|\mathcal{T}|} = \kappa_{\mathrm{cb}}$、$t \notin S$ の因子は 1。よって $\mathbb{E} \prod_{t \in S} \theta_t \le \kappa_{\mathrm{cb}}^{|S|}$。(5) は (1) で D_j を C の内側の容器にとり、この評価を使えばよい。∎

(5) は、一辺 B のブロックが面積 B^2 を占めるので、張力の下界 $\ln(1/\kappa_{\mathrm{cb}})/B^2$ を与えます（一辺が B の倍数の正方形のループについて）。**L を固定すれば、z の鏡映正値性が閉じたので、板の上の面積則までの隙間は $\kappa_{\mathrm{cb}} < 1$ の評価だけ**になりました 初 （L・M を固定した文）。枠の減相関 (2) のような、枠の分布についての仮定は要りません。

κ_{cb} は、全てのブロックに同時に容器を置いたときの偏りの積の、一ブロックあたりの幾何平均です。「典型的な一つの容器の偏り」ではなく「全ての容器を一度に見た量」なので、枠の相関は κ_{cb} の中に吸収されています。その代わり、κ_{cb} が小さいことは、もはや一つの容器の性質としては読めません。

入れ子の超乗法性の補題 初　容器をブロックの内部全体にとる（D_t を Q_t の内部の (3,4) の面の全てとし、殻 $\partial Q_t \times T_L^2$ は閉じたブロック Q_t の中にある）。一辺 R のブロックについての (4) を $\kappa_{\mathrm{cb}}(R;L)$ と書く（M は固定）。整数 $s \geq 1$ について $2sR$ が M を割り切るなら、全ての L で

$$\kappa_{\mathrm{cb}}(sR;L) \;\leq\; \kappa_{\mathrm{cb}}(R;L)^{s^2}. \tag{5a}$$

証明　一辺 sR の大きなブロック Q'_u は一辺 R の小さなブロック s^2 個の和で、(3,4) 平面の面はブロックの内部にあるので区画は $\sigma'_u = \prod_{t\subset u}\sigma_t$。小さなブロックの殻の全体 Φ' は大きなブロックの殻の全体 Φ を含み、Markov 性から Φ' を与えると小さな容器は条件つきで独立なので、$\theta'_u = |\mathbb{E}[\sigma'_u \mid \Phi]| \leq \mathbb{E}[\prod_{t\subset u}\theta_t \mid \Phi]$（26-02 の (2)、Mack–Petkova の入れ子の形）。$X_u := \prod_{t\subset u}\theta_t$ は閉じた大きなブロック u の変数の関数で、Φ を与えると大きなブロックの内部は条件つきで独立なので $\prod_u \mathbb{E}[X_u \mid \Phi] = \mathbb{E}[\prod_u X_u \mid \Phi]$。平均して $\mathbb{E}\prod_u \theta'_u \leq \mathbb{E}\prod_t \theta_t$。ブロックの数は $|\mathcal{T}| = s^2|\mathcal{T}'|$ なので、両辺の $1/|\mathcal{T}'|$ 乗をとる。∎

入れ子の超乗法性の補題は鏡映正値性を使いません。使うのは Markov 性と入れ子の形だけで、定数は 1、L・R・s に依りません。チェス盤の評価が要るのは、κ_{cb} から一つの容器（$\mathbb{E}\theta_t \leq \kappa_{\mathrm{cb}}$）と Wilson ループ（(5)）へ降りる段だけです。有限の確率空間の上で、大きなブロックを小さなブロック s^2 個の fibre とし平均の不等式を仮定に置いた抽象の形は Lean：LatticeGaugeNestedBlocks（nested_supermultiplicative）。Markov 性は Lean の外です。

03

κ_{cb} の上界 — 板の評価と同時の反転、そしてその限界

(i) 板の評価。容器の各面 $p \in D$ について、面 $\{p\}\times T_L^2$ の z を反転する操作は互いに可換で、どれも区画を反転し、枠を変えません。その軌道で条件づけると $\mathbb{E}[\sigma_D \mid \text{軌道}] = \pm\prod_{p\in D}\tanh X_p$、$|X_p| \leq \beta L^2$ なので、$\sup_\Phi \theta_D(\Phi) \leq \tanh(\beta L^2)^{|D|}$ です（25-04 初 ）。$\theta_t \leq \sup\theta$ から

$$\kappa_{\mathrm{cb}} \;\leq\; \tanh(\beta L^2)^{|D|} \;<\; 1. \tag{6}$$

これで、L を固定した板の上の面積則は既に出ています。ただし張力は $-\ln\tanh(\beta L^2) \approx 2e^{-2\beta L^2}$（面積あたり）で、$\beta = 2.5$、$L = 4$ なら $2e^{-80}$ です。**枠の上限（sup）を通る評価は、L について超指数的に悪くなる**ので、L に一様な評価は平均の形——κ_{cb} のような量——からしか来ません。

(ii) 同時の反転。流れの補題（25-06）は、容器の内部の、条件つきの分布 $\mu(\cdot\mid\Phi)$ を保つ任意の Markov 核 K について、一歩で区画が変わる確率を $a(\Phi)$ とすると $\theta_D(\Phi)\le 1-a(\Phi)$ と言います 初 （定常性だけを使い、可逆性は要らない）。

同時の反転の評価 初　枠を固定したまま、互いに素な容器 D_t（$t\in S$）の内部でそれぞれ定常な核を独立に一歩走らせる（出発は条件つきの分布から）。このとき

$$\mathbb{E}\prod_{t\in S}\theta_t \;\le\; \mathbb{P}\big(S\text{ のどの容器の区画も変わらない}\big). \tag{7}$$

証明　枠 Φ を固定する。容器の内部は条件つきで独立で、核も独立に走らせるので、どの容器も変わらない条件つきの確率は $\prod_{t\in S}(1-a_t(\Phi))$。流れの補題から $\theta_t(\Phi)\le 1-a_t(\Phi)$ なので $\prod_t\theta_t(\Phi)\le\mathbb{P}(\text{どれも変わらない}\mid\Phi)$。$\Phi$ について平均をとれば (7)。∎

(7) の右辺はモンテカルロで測れる量なので、$S=\mathcal{T}$ とおけば $\kappa_{\mathrm{cb}}\le\mathbb{P}(\text{どれも変わらない})^{1/|\mathcal{T}|}$ は、Wilson ループの上界を**正しい向きに**推定する道具になります。自然な核は、力学で駆動した挿入（25-06、受理の確率 $\min(1,e^{-W})$）です。

(iii) 限界。一歩の核の反転の確率 a は、測った範囲では 1 から離れています（駆動した挿入の核で受理 $\min(1,e^{-W})$ のとき 0.6〜0.73、25-08 計算 ）。そのため (7) で保証できるのは $\theta_t\le\theta_0$（θ_0 は 1 未満の定数）の形で、κ_{cb} を面積の指数で小さくはできません。大きさ $B\sim L$ のブロックでそれが L に一様でも、出る張力の下界は $\ln(1/\theta_0)/L^2\to 0$ で、26-01 の素朴な形の張力の下界が扱う帯の素朴な形——U(1) も満たす形——にしかなりません 初 （論理）。**同時の反転は帯の試験には使えません**。帯の正しい形 $\theta\le e^{-cL^2}$ を確かめるには $a\to 1$ となる核が要り、その構成は知られていないからです（25-06 §07）。同時の反転の測定を「帯の数値的な姿」とする位置づけは撤回されており（25-08）、この道具の正しい用途は、L を固定した板の張力の下界——κ_{cb} の推定——です。

04 帯が再び現れる場所 — 希薄な領域・閉じ込めの領域・その間

横を止めたチェス盤の評価は L を固定した文でした。L を動かすと、$\kappa_{\mathrm{cb}}<1$ を示すのに必要なブロックの大きさ B と、評価の質が、尺度ごとに変わります。以下は全て見立てです 読 （物理）。

- **希薄な領域**（$\Lambda L\ll 1$）。一辺 ℓ の容器で $\mathbb{E}[-\ln\theta_D]\approx\sigma_{\mathrm{TU}}\ell^2$、$\sigma_{\mathrm{TU}}\propto\Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}$（26-03 §04）。枠の影響は L/π 程度の距離で減衰します。判定は成り立ちますが、要るブロックは $B\gtrsim\sigma_{\mathrm{TU}}^{-1/2}$ で、その体積は $1/g^2(L)$ について指数的に大きくなります。

- **閉じ込めの領域**（$\Lambda L \gg 1$）。電場の流束の形（26-04 の電場の流束の分解の補題）で $\theta \approx Y(1)/Y(0) \approx c\,\sigma L^2 e^{-\sigma \ell^2}$（因子 L^2 は電場の弦の横の位置のエントロピー）。要るブロックの大きさは $\sqrt{\ln L}$ でしか増えません。
- **その間**（$\Lambda L \sim 1$）——**帯**。二つの一様性が要ります（§05）。

$a \to 0$ では、B も L も格子の単位で無限大になるので、有限個の箱を確かめるだけでは足りません。尺度をつなぐ不等式が要り、それが帯の問題です。

なぜ通常の Dobrushin 型の判定が使えないか。枠を固定すると区画どうしは相互作用しません。依存は全て枠の場にあり、連続な場は境界に追随するので、全変動で測った影響の係数はほぼ 1 になります。Dobrushin、Dobrushin–Shlosman、van den Berg–Maes の型の条件はそのままでは満たされず、良いブロックでの縮小（Bałaban の多重尺度の解析の型）のような別の入力が要ると見込まれます 読 （物理）。これらの判定の原論文はこの本では照合していません。

05

帯の集約 — 一様な板の張力と一様な板のギャップ

チェス盤の言葉では、帯は次の二つの一様性の文に集約されます。どちらも示されておらず、仮定として置きます。

一様な板の張力 仮　横を T_L^2 に縮めた二次元の理論の弦の張力（板の張力、26-02 の (11)）が、L に一様に正：

$$\inf_{L \ge L_0} \sigma_{\mathrm{eff}}(L) \;>\; 0 \qquad \text{(物理単位、格子間隔 } a \text{ に一様)}. \tag{8}$$

容器の言葉では $\inf_L \mathbb{E}[-\ln \theta_D]/(\ell\Lambda)^2 > 0$ の形で、26-02 の横広げの不等式（弱い形）の内容に当たります。チェス盤の判定は、これを面積則へ運ぶだけです。U(1) は全ての L で張力 $\sim e^2/L^2$ で、**ここでだけ**失敗する見込みです 読 （物理）。

一様な板のギャップ 仮　κ_{cb} を尺度をまたいで比べられること：偏りどうしの相関、悪いブロックの確率、殻の揺らぎの評価が L に一様であること（板の質量ギャップが L に一様であることに当たる）。これが、26-02 の枠の減相関 (2) を L に一様にした形の正体です。入れ子の超乗法性の補題（§02）により、固定した L の中では κ_{cb} を尺度 R から sR へ定数 1 で運べるので、この文の L に一様な中身は、L をまたぐ比較

$$(\mathrm{C_{cb}}) \quad \kappa_{\mathrm{cb}}(R; L') \le C\,(L'/L)^2\,\kappa_{\mathrm{cb}}(R; L) \qquad (L_{\min}(a) \le L \le L' \le R)$$

——26-02 の横広げの不等式を κ_{cb} で読んだ文——に移ります 紙 （26-02 §03 のチェス盤の密度で読んだ還元）。横には入れ子がありません（T^2_{2L} を T^2_L の四枚で張ると捩れは $4 \equiv 0 \pmod 2$ になり、$n_{12} = 1$ の集団を作れない）。

表 1　帯の集約（札は行ごと。条件は同じ行に）

文	札	同じ行の条件	26-02 との対応	U(1) で
L を固定したチェス盤：$\lvert\langle W\rangle\rvert \le \kappa_{\mathrm{cb}}^{n(C)}$	初	$L \cdot M$ を固定・z の鏡映正値性（26-04 §03）の下	枠の減相関の「積が分かれる」役を、固定した L で引き受ける	同じく成り立つ
$\kappa_{\mathrm{cb}} < 1$（固定した L）	初	板の評価 (6) から。張力は $\approx 2e^{-2\beta L^2}$ と極めて小さい	—	同じく成り立つ
一様な板の張力 (8)	仮	物理単位・a に一様	横広げの不等式の弱い形の内容	破れる見込み〔読〕
一様な板のギャップ	仮	L に一様な相関・悪いブロック・殻の揺らぎの評価。κ_{cb} で読めば固定した L の中は入れ子の超乗法性の補題で定数 1、残りは $(\mathrm{C}_{\mathrm{cb}})$	枠の減相関を L に一様にした形	破れる見立ては無い〔読〕

こうして、帯の非可換の内容は一様な板の張力の側に、尺度をまたぐ確率論の内容は一様な板のギャップの側に、と分かれて置かれます。κ_{cb} で読むと、一様な板のギャップの L に一様な中身は $(\mathrm{C}_{\mathrm{cb}})$ に移り、横広げの不等式と同じ文になります 紙 （入れ子の超乗法性の補題）。一様な板の張力 (8) との論理的な関係（一方から他方が出るか）は調べられていません。

06

κ の記号の対照

この本は κ をいくつもの意味で使ってきました。この章のチェス盤の密度は κ_{cb} と書き、添え字を落としません。表 2 は、同じ字の別の量の一覧です。量どうしに関係はありません。

表 2　κ の字を使う量

記号	意味	章
κ_{cb}	チェス盤の密度：全てのブロックの容器の偏りの積の、一ブロックあたりの幾何平均 (4)	この章・26-00 表 1
κ（片側の橋）	片側の橋の命題の比べの定数（$C_P \ge \kappa\,\xi^2$ の形）	23-01 §06
κ_{BE}	Bakry–Émery の曲率の下限	24-09
$\hbar\kappa \cdot \kappa_f$	隣のサイトとの結合の強さの上界・Brascamp–Lieb の交差の強さ	23-06
$\kappa = 3/1000$	Barta の行の、欠陥の外での下界	23-09
κ（第 24 部）	Langevin の計量と運動項の計量の比べの定数	24-09

記号	意味	章
$\kappa_{\mathrm{C7}}(k)$	長さ k の鎖の凸性の定数（23-11 の $\kappa(k)$ と同じ量）	26-07
κ_w	適応した剛性：捩れの生成場に沿った力の分散（幅 w。帯の候補の量の一つ）	26-10

記号の対応の全体は A-01 に置きます。

07

五分類の表と依存グラフ

表 3　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	容器の評価 (1)	典	Mack–Petkova・25-03	捩れを和に取ったアンサンブル	—
2	枠の減相関 (2)	仮	26-02・A-06	定数 C_{D}	—
3	z の鏡映正値性（方向 3・4、任意の格子平面）	初	26-04 §03・平行移動の不変性	$SU(2)$・捩れを固定・M は偶数	ReflPos（`ReflPos.refl_pos`・`ReflPos.refl_cs`）（代数だけ。仮定：$0 \le A$）
4	チェス盤の評価 (3)	典	Fröhlich–Israel–Lieb–Simon（講義録の要旨で確認）	鏡映正値性の下・$2B \mid M$	—
5	θ_t はブロックの変数の関数で、鏡映で θ_s に移る	初	§02（Markov 性・測度の鏡映不変性）	容器をブロックの内部に置く	—
6	横を止めたチェス盤の評価：$\mathbb{E}\prod_S \theta_t \le \kappa_{\mathrm{cb}}^{\lvert S\rvert}$、$\lvert\langle W(C)\rangle\rvert \le \kappa_{\mathrm{cb}}^{n(C)}$	初	§02 の証明 $\Longleftarrow$ 1・3・4・5	L を固定すれば（M も固定）	—
7	板の評価 $\sup_\Phi \theta_D \le \tanh(\beta L^2)^{\lvert D\rvert}$、よって $\kappa_{\mathrm{cb}} < 1$	初	25-04・§03 (6)	L を固定・張力 $\approx 2e^{-2\beta L^2}$	—
8	流れの補題 $\theta \le 1 - a$	初	25-06	定常な核（可逆性は不要）	FluxLemma（`FluxLemma.flip_le_one_sub_abs`）（仮定：$w \ge 0$・$K \ge 0$・行和 1・w が定常・$\sum w = 1$・$\sigma = \pm 1$）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
9	同時の反転の評価：$\mathbb{E}\prod_S \theta_t \le \mathbb{P}$(どれも変わらない)	初	§03 の証明 $\Longleftarrow$ 8	枠を固定して独立に一歩・出発は条件つきの分布	—
10	一歩の核の反転の確率は $\frac{1}{2}$ 程度で頭打ち	読	25-08 の測定	駆動した挿入の核	—
11	同時の反転は素朴な形の評価しか与えず、帯の試験に使えない	初	§03 (iii) $\Longleftarrow$ 9・26-01 素朴な形の張力の下界	一歩の反転の確率の頭打ちを前提にした論理	—
12	希薄な領域・閉じ込めの領域での判定とブロックの大きさ	読（物理）	§04	$\Lambda L \ll 1$・$\Lambda L \gg 1$・見立て	—
13	Dobrushin 型の判定はそのままでは使えない	読（物理）	§04	影響の係数がほぼ 1 という見立て・原論文は照合未了	—
14	一様な板の張力 (8)	仮	§05・A-06	物理単位・a に一様	—
15	一様な板のギャップ	仮	§05・A-06	L に一様	—
16	U(1) は一様な板の張力でだけ失敗する	読（物理）	§05	張力 $\sim e^2/L^2$ の見立て	—

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  典  容器の評価 |W| ≤ EΠθ                                  捩れを和に取ったアンサン
 2  仮  枠の減相関（この章で L を固定して置き換える対象）
 3  初  z の鏡映正値性（26-04）                              Lean refl_pos・refl_cs
 4  典  チェス盤の評価                                        Fröhlich–Israel–Lie
 5  初  θ_t はブロックの関数、鏡映で θ_s に移る              Markov 性
 6  初  横を止めたチェス盤の評価：|W| ≤ κ_cb^n(C) ⟸ 1・3・4・5          L を
 7  初  κ_cb ≤ tanh(βL²)^|D| < 1                             L を固定・張力は極小
 8  初  θ ≤ 1 − a                                            Lean flip_le_one_
 9  初  同時の反転の評価：EΠθ ≤ P(どれも変わらない) ⟸ 8
10  読  一歩の反転の確率は ½ 程度で頭打ち                    測定
11  初  同時の反転は帯の試験に使えない ⟸ 9・10              26-01 素朴な形の張力の下界
12  読  両端の領域での判定とブロックの大きさ                 見立て
13  読  Dobrushin 型はそのままでは使えない                   見立て
14  仮  一様な板の張力
15  仮  一様な板のギャップ
16  読  U(1) は一様な板の張力でだけ失敗 ⟸ 14・15            見立て
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。この章の主な結論（横を止めたチェス盤の評価）は紙で立ち、前提は文献の行（容器の評価・チェス盤の評価）と紙の行（z の鏡映正値性・ブロックの関数と鏡映）だけです。仮定の行（枠の減相関）はこの結論の前提に入っていません——それがこの章の要点です。「同時の反転は帯の試験に使えない」は論理の行ですが、前提に測定の行（一歩の反転の確率の頭打ち）を持つので、その頭打ちが成り立つ範囲の文です。帯の二つの仮定（一様な板の張力・一様な板のギャップ）は結論の量（L を固定した κ_{cb}）を含まず、第 27 部の条件の台帳（27-02）に置かれます。

チェス盤の評価の機械検査した形は 22-01 に在ります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 L を固定すれば、z の鏡映正値性とチェス盤の評価で、Wilson ループは $\kappa_{\mathrm{cb}}^{n(C)}$ で押さえられ、枠の減相関は要らない	κ_{cb} の L に一様な評価（一様な板のギャップ）
初 同時の反転は κ_{cb} を正しい向きに推定する道具で、一歩の核では帯の試験に使えない	$a \to 1$ となる核。帯の数値的な試験
読 （物理） 帯は一様な板の張力と一様な板のギャップに集約され、U(1) は前者でだけ失敗する	二つの一様性のどちらも。二つの間の論理的な関係
Lean：鏡映の最後の和の代数と、流れの補題の有限の版	チェス盤の評価そのもの・Markov 性・Haar 測度（Lean の外）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
チェス盤の評価	典	J. Fröhlich, R. Israel, E. H. Lieb, B. Simon（1978）の標準の議論。M. Biskup, Reflection positivity and phase transitions in lattice spin models, arXiv:math-ph/0610025 の要旨で確認（原論文の本文は未入手）。格子ゲージ理論での使用例（Borgs–Seiler）は照合未了
容器の評価・捩れを和に取ったアンサンブル	典	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 123 (1979) 442。章 25-03
z の鏡映正値性	初	章 26-04 の z の鏡映正値性
横を止めたチェス盤の評価・同時の反転の評価・(6)	初	本文 §02・§03 の証明。帯の還元の論文（この本から出た論文、A-07）の系「chessboard」「simultaneous flips」と同じ内容
一歩の核の頭打ち・同時の反転の測定の撤回	読	章 25-08 の表
Dobrushin・Dobrushin–Shlosman・van den Berg–Maes の判定	—	照合未了（名だけを挙げた）
Lean	Lean	ReflPos（`ReflPos.refl_pos`・`ReflPos.refl_cs`）、FluxLemma（`FluxLemma.flip_le_one_sub_abs`）。保証するのは有限和と実数の代数だけ。A-04

この章で使った語 — 枠の減相関・チェス盤の評価・チェス盤の密度 κ_{cb}・ブロック・同時の反転・流れの補題・一様な板の張力・一様な板のギャップ・移り変わりの帯（帯）。意味は A-02 用語集 と A-06 名前の索引 にあります。

次に読む章：26-06 繰り込みの比較 — 群を区別する比較 — 帯を β 単調性と繰り込みの比較に分ける、もう一つの還元。

繰り込みの比較 — 群を区別する比較

この章は本書の検討です。§04・§07・§08 は未解決の地図です。

この章で分かること — 移り変わりの帯を、二つの言明に割ります。一つは、格子の幾何を止めたとき渦の自由エネルギーが β について増えること（β 単調性）。もう一つは、格子全体を 2 倍にした格子が、結合を強めた元の格子と定数倍で比べられること（繰り込みの比較）。漸近自由が入るのは、繰り込みの比較の「結合を強める向き」$\beta' < \beta$ だけです。β 単調性は易しい部品に見えますが、格子単位の弦の張力の β についての単調性と同じ重さの問題でした。繰り込みの比較は強結合の端と一ループの端の両方で成り立ちますが、強結合の側は定数が極端に粗い証明の筋、弱結合の側は一ループの水準の計算です。その間の帯で、$SU(2)$ と $U(1)$ を数値で比べると、比較の向きは $SU(2)$ では帯の全体で変わらず、$U(1)$ では既知の相転移の位置で反転します。最後に、帯が β について有界な区間であることから、帯の中の繰り込みの比較が「固定した β での両側の面積則（周長の次数の誤差つき）」に還元されるという初等的な補題を示し、難しさが帯のどこに寄るかを述べます。

前提となる章 — 26-01（帯の正しい形 $\ln(1/\theta) \geq cL^2$）・26-02（一つの不等式への還元）・25-01（捩れた T^2 と 't Hooft の流束）・25-07（決まった写像が失敗する理由と一ループの表）・4-06（漸近自由）・5-02（強結合展開）・5-06（$U(1)$ と非可換）。

先に言うこと — 水準は〔研〕です。この章は帯のどの β でも、繰り込みの比較を示していません。示すのは、両端で比較が成り立つ範囲と条件、数値の読み、それに一つの還元の補題（§06）です。還元の補題の仮定は、四次元 $SU(2)$ の格子の中間の結合での閉じ込めという未解決の問題を含みます。チェス盤の密度は κ_{cb} と書きます。

この章の順序

1. 帯を二つに割る — β 単調性と繰り込みの比較
2. β 単調性は易しくない — 電場の流束で書き直すと弦の張力の単調性に並ぶ
3. 両端で成り立つ比較 — 強結合の端と一ループの端（表 1）
4. β の上の地図 — 区間ごとの札（図 1）
5. 数値 — 格子を 2 倍にする — $SU(2)$ と $U(1)$（表 2〜表 4）

6. 帯は有界な区間 — 帯の中の比較の還元の補題と、有限の段数で帯を渡る系
7. 真ん中の帯の四つの顔 — 局所量の候補（表 5）
8. 帯を閉じる議論が満たすべき条件 — 基準「U(1) の転移と区別する」
9. 言えないこと
10. 五分類の表と依存グラフ — 表 6

01

帯を二つに割る — β 単調性と繰り込みの比較

対象は 25-01 の板です。格子 $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ に $SU(2)$ の Wilson 作用を置き、$(1,2)$ 平面に捩れ $n_{12} = 1$ を入れます。$(3,4)$ 平面の流束 n_{34} を区画とし、渦の自由エネルギーを

$$\Delta F(N,M,\beta) \;=\; -\ln \frac{Z_{n_{34}=1}(N,M,\beta)}{Z_{n_{34}=0}(N,M,\beta)}, \qquad \theta = \tanh \frac{\Delta F}{2} \tag{1}$$

と書きます。θ は 't Hooft の判定に使う量で、帯の正しい形は「$\ln(1/\theta(L,L)) \geq cL^2$ が L に一様」でした（26-01）。渦の自由エネルギーが大きいほど θ は小さく、閉じ込めの側です。

帯を渡る言明を、次の二つに割ります 仮 （どちらも未証明の言明として置く）。

$$\text{(Mon)} \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \Delta F(N,M,\beta) \;\geq\; 0 \qquad \text{(格子の幾何を止めて)} \tag{2}$$

$$\text{(RG-cmp)} \quad \Delta F(2N,2M,\beta) \;\leq\; K \cdot \Delta F(N,M,\beta'), \qquad \beta' < \beta, \qquad K \text{ は } N,M \text{ に依らない} \tag{3}$$

> 式の札 (Mon) は β 単調性、(RG-cmp) は繰り込みの比較のことです（名は A-06）。下の (5) の (Mon) も同じです。

(2) の左辺は、作用の差の平均として等式で書けます：$\partial_\beta \Delta F = \langle \Delta S \rangle$（渦の有る区画と無い区画の作用の平均の差） 初 （分配関数を β で微分するだけ）。(3) は、2 倍に粗くした格子の渦が、結合を強めた元の大きさの格子の渦より高くつかない、という比較です。

(2) の範囲。(2) はこの章の板——群 $SU(2)$、背景の捩れ $n_{12} = 1$、板の幾何 $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$——についての言明です。非可換の群の一般の性質ではありません：有限の非可換群 Q_8・D_4 の小さな格子では、背景の捩れが無くても $\partial_\beta \Delta F < 0$ となる点があり、背景つきでも横の長い幾何で破れる点があります 読 （有限群の転送行列の浮動小数の値。二つの独立な実

装で一致)。一方、面の符号だけを変数に持つ $\mathbb{Z}_2$ の符号の系では、非負の結合について (2) の型の単調性（$\mathbb{Z}_2$ の単調性）が成り立ちます [初]（相関不等式の型の証明。抽象の符号の系の言明は Lean で検査した。四次元のトーラスの格子への当てはめは紙)。

二つを合わせると帯を渡る筋が立ちます。(3) を $\beta_0 > \beta_1 > \beta_2 > \cdots$ と反復すると、格子を 2^k 倍にした渦の自由エネルギーが、結合 β_k の元の格子の値の K^k 倍以下に押さえられます。β_k が強結合の範囲に入れば、そこでの渦の自由エネルギーは面積の指数で小さく、段を重ねるごとに二重指数で小さくなるので、K^k の損失に勝ちます。(2) は、反復の途中で β' を必要より小さく選んでも損をしない、という調整の役をします。

(3) の率の形。(3) の定数 K は帳簿で、中身は板の張力の比べです。板の張力と、それに面の数を掛けた量を

$$\sigma_N(\beta) := \lim_{M\to\infty} \frac{-\ln \Delta F(N, M, \beta)}{M^2}, \qquad s(N,\beta) := N^2 \sigma_N(\beta) \tag{3′}$$

と置きます（極限が在るとして。無ければ下極限)。(3) の両辺の対数を M^2 で割って $M \to \infty$ とすると K は消え、残るのは $s(N,\beta') \le s(2N,\beta)$ です [初]（(3) からこの形が従う。逆向きには、ΔF と面積の項の差の制御が要る)。この本では、この率の形を繰り込みの比較の主な形として読みます。対称な箱 $N = M$ だけを見て $K > 1$ を許すと、$U(1)$ でも $\beta' < \beta$ が立ってしまいます [読]。$\beta' \ge \beta$ を強いるのは N を止めた $M \to \infty$ の側で、率の形はその向きを持っています。

漸近自由が入るのは (3) の $\beta' < \beta$ だけです。 (2) は群を区別する仕組みを含まない形の文です。$\mathbb{Z}_2$ と $U(1)$ では、捩れの背景が無ければ Ginibre の不等式から出ますが、この章の板には捩れ $n_{12} = 1$ があり、その場合は $\mathbb{Z}_2$ でも Ginibre の不等式では出ません [仮]（Ginibre の不等式の当てはめは原典の本文で照合していない)。一方 (3) の向きは群で変わります。$U(1)$ では一ループで $\beta' \ge \beta$ になり、反復は強結合へ向かわず、正しく失敗します。非可換の $SU(2)$ で $\beta' < \beta$ になるのは、漸近自由（4-06)、つまり格子を粗くすると実効的な結合が強まることの言い直しです。この意味で (3) は「群を区別する比較」でなければなりません。

例。強結合の端では (3) が $K \approx 4$ で成り立ちます（§03)。格子を 2 倍にすると、渦の面の面積は 4 倍になり、面積の指数の率 $\sigma(\beta)$ を 4 倍にした β'、すなわち $\sigma(\beta') = 4\sigma(\beta)$ で釣り合います。$\beta = 1.0$ なら $\beta' \approx 0.013$ です（表 1)。強結合では一段で結合が大きく動きます。

Tomboulis（2007）は (3) の型の比較を Migdal–Kadanoff の間引きで作ろうとし、その流れが $U(1)$ でも強結合へ向かうことが Ito–Seiler と Kanazawa によって指摘されました [典]（Ito–Seiler は残りの段を彼らの式 (3.5) の不等式 $A(\alpha) > A^{+}(\alpha)$ に帰着させ、それが示されていないと書く)。経緯と照合は 26-08 に置きます。この章で必要なのは、群を区別しない比較では帯を渡れない、という一点だけです。

比較の向きを有効作用の言葉で見直すと、木の水準では本当の一段の粗い作用は Migdal–Kadanoff の作用以下で（粗い向きでは 1/4 まで小さく、長波長で一致）、結合の言葉で $\beta/4 \le \beta' \le \beta$ の、閉じ込めに好都合な向きです 初 （下側） 読 （上側は測った箱の数値）。それでも比較に使えないのは、分配関数の不等式 $Z \le Z_{\mathrm{MK}}$ が粗い変数を固定した形に持ち上がらないからです。一ループの漸近では Migdal–Kadanoff の流れの速さ（一段 0.2503）は本当の速さ 0.2575 よりわずかに遅いだけで向きは好都合ですが、U(1) ではどちらも走らず、群の違いは Migdal–Kadanoff の側では指数的に小さい流れにしか現れません 読 。同じ観測量の一段の挟み込み $\langle W\rangle_L < \langle W\rangle_R < \langle W\rangle_{\mathrm{MK}}$ は SU(2) と U(1) の 12 行全てで成り立ち、群を区別しません 読 （Metropolis・$4^4 \to 2^4\cdot 8^4 \to 4^4$・$\beta \in \{2,4,8\}$）。

Ito–Seiler が帰着させた不等式 $A(\alpha) > A^{+}(\alpha)$ は「渦の自由エネルギーが結合とともに増える」という単調性と同じで、小さな箱の数値では脱閉じ込めの U(1) でも成り立ちます 読 （4^4・MK 像の一本の向き・$\alpha \in \{0.9, 1.0\}$）。群を区別すべきなのは、その先の延長と、補間母数を 1 から離す工夫の側です。

「Migdal–Kadanoff の流れは本当の流れより遅い」を捩れの自由エネルギーで測ると、軌道の一段（実効の β で 2.47 → 2.19）で $4^4/2^4$ の箱では本当の一段が Wilson の β に換算して 0.15 だけ速く見えましたが（$R = 1.34(7)$）、$6^4/3^4$ では差は 0.02(2)（$R = 1.17(20)$）で、測り方の分解能（統計と、ΔF の方法の 0.1〜0.25 の系統の床）の内に入ります。二つの流れの速さは帯の中でほぼ揃って見え、2^4 の箱の 7% の離散化が最初の差の大部分を作っていた可能性があります 読 。

02

β 単調性は易しくない — 電場の流束で書き直すと弦の張力の単調性に並ぶ

β 単調性は「構造的な部品で、示せそうだ」と見えます。実際には易しくありません。電場の流束で書き直すと分かります。

流束 n_{34} の区画の分配関数を、$\mathbb{Z}_2$ の Fourier 変換で電場の流束 $e \in \{0,1\}$ の分配関数 Y_0, Y_1 に分けると $Z_{n_{34}=0} = Y_0 + Y_1$、$Z_{n_{34}=1} = Y_0 - Y_1$ です。$E_e = \frac{d}{d\beta}\ln Y_e$ と置くと

$$\frac{\partial \Delta F}{\partial \beta} \;=\; \frac{2\,Y_0 Y_1\,(E_1 - E_0)}{Y_0^2 - Y_1^2}, \qquad \theta = \frac{Y_1}{Y_0} \tag{4}$$

初 証明。$\Delta F = \ln(Y_0+Y_1) - \ln(Y_0-Y_1)$ を微分し、$Y_e' = E_e Y_e$ を入れて通分すると、分子は $(E_0Y_0 + E_1Y_1)(Y_0 - Y_1) - (E_0Y_0 - E_1Y_1)(Y_0+Y_1) = 2Y_0Y_1(E_1 - E_0)$ です。θ の式は $\tanh(\Delta F/2) = (e^{\Delta F}-1)/(e^{\Delta F}+1)$ に $e^{\Delta F} = (Y_0+Y_1)/(Y_0-Y_1)$ を入れたものです。∎

$Y_1 > 0$（26-04 の $\theta = Y(1)/Y(0) \ge 0$ の正の場合）なら、(4) から

$$(\mathrm{Mon}) \iff E_1 \geq E_0 \iff \theta \text{ が } \beta \text{ について増える} \iff \text{電場の流束の自由エネルギー} \tag{5}$$

です[初]。電場の流束の自由エネルギーは、閉じ込めの相では弦の張力と流束の通る長さの積の程度です。だから β 単調性が全ての格子で成り立てば、格子単位の弦の張力 σa^2 が β について減ることが従う、と読めます[仮]（根拠：電場の流束の自由エネルギーと弦の張力を結ぶ段は書き下していない）。**格子単位の弦の張力の β についての単調性は、$SU(2)$ では証明されていません。** Wilson ループの期待値の β についての単調性すら、探した範囲で示されていません。β 単調性は、少なくともこれと同じ重さの問題です[仮]。「β 単調性は構造的で示せそう」という当初の見立ては、ここで訂正されます。

手元にある部分的な結果は次のとおりです[仮]（どれも証明はこの本に置いていない）。二次元で面が 1 枚・2 枚のとき（$O(4)$ の鎖の条件つきのエネルギーの単調性による）、任意の固定した格子で $\beta \to 0$ の近く、捩れ n_{12} の背景で $\beta \to \infty$ の近く（n_{12} と n_{34} を両方持つ平坦な接続が $SU(2)$ に無いので $\partial_\beta \Delta F$ が正の定数に近づく）。反例は、二次元の閉じた式（$N \leq 100$・$\beta \leq 20$）、$\mathbb{Z}_2$ の $2 \times 2 \times 2 \times 1$ の全数え上げ、四次元の 1^4・2^4 の Monte Carlo のどれでも見つかっていません[読]。

詰まる理由は二つ記録されています。Mack–Petkova の表示で $SO(3)$ の配位が捩れの類を持つと、条件つきの Ginibre の不等式が逆向きになり、$\partial_\beta \Delta F$ が「測りたい二つの寄与の差」そのものになること。指標展開では、三次元以上で spin network の積分の符号が定まらないこと[読]（物理の見立て）。

帰結。帯の連鎖に β 単調性を全ての格子で使う必要はありません。(3) を $\Delta F(2N, 2M, \beta) \leq K \Delta F(N, M, \beta')$ の形で直接示せば、β' の選び方の自由度が β 単調性の役を吸収します。だから以下では繰り込みの比較に集中します。

03

両端で成り立つ比較 — 強結合の端とーループの端

強結合の端

Wilson 作用の基本表現の指標展開の係数を $u(\beta) = I_2(\beta)/I_1(\beta)$ と書きます（$\beta \to 0$ で $u \approx \beta/4$）。強結合の展開（5-02）で板の渦の自由エネルギーを展開すると、主要項は $(3,4)$ 平面を巻く N^2 枚の平らな面（面積 M^2、重み u^{M^2}）です。記録には次の形の命題と証明の筋があります。

強結合の端の展開の命題。 絶対定数 u_0, K_0, C があり、$u(\beta) \leq u_0$ と全ての $N, M \geq 2$ で

$$\Delta F(N, M, \beta) = 2N^2 e^{-\sigma_N(\beta) M^2} (1 + \epsilon), \qquad |\epsilon| \leq C M^2 (K_0 u)^{\max(1, M/100)} \leq C' u \tag{6}$$

が成り立つ。σ_N は β・N・n_{12} に依るが M に依らず、$\sigma_\infty = -\ln u - 4u^4 + O(u^5)$。仮
（筋：多面体の展開で捩れの符号が $\mathbb{Z}_2$ のホモロジー類で決まること、面の平らな部分を二次元の指標の貼り合わせで積分してちょうど u^{M^2} を出すこと、面の上の輪郭の Peierls の評価。体積の多面体と面の輪郭の相互作用の記帳（証明の第 5 段）が概略で、この本には証明を置いていない。展開の形は Münster（1981）の型だが原典の本文は照合していない）

強結合の端の比較。 β' を $\sigma_N(\beta') = 4\sigma_{2N}(\beta)$ で定めると、全ての $N, M \geq 2$ で $\Delta F(2N, 2M, \beta) / \Delta F(N, M, \beta') = 4(1 + O(u))$、$\beta' < \beta$、$u' = u^4(1 + O(u^4))$ 仮（強結合の端の展開の命題の上の代数）。

定数は極端に粗く、$u_0 \approx 10^{-80}$、β にして約 4×10^{-80} です。紙の上で強結合の端が閉じているのは、極端に強い結合の範囲だけです。これは定数の問題で、数え上げを詰めれば大きく改善できる見込みですが、平らな面の展開は粗面化（$\beta_R \approx 1.9$）で止まるので、強結合の側だけで帯を覆うことはできません 読（物理の見立て）。$U(1)$ も強結合では閉じ込め、(3) を満たします。群の違いが現れるのは弱結合の側です。

表 1　強結合の主要項の式 $u(\beta') = u(\beta)^4$ の根 β'（一段の結合の動き） 読

β	$u(\beta)$	β'	$\beta - \beta'$
0.5	0.1237	0.0009	0.499
1.0	0.2402	0.0133	0.987
1.5	0.3441	0.0561	1.444
2.0	0.4331	0.1409	1.859

表 1 の β は強結合の端の展開の命題の範囲（$u \leq u_0$）の外にあります。主要項だけで比較の向きと大きさを見る目安で、比較が成り立つという主張ではありません。

ループの端

弱結合の側では、(3) を変分の不等式として作ります。区画 $n_{34} = 0$ の測度 μ_0 を区画 1 へ運ぶ可測な全単射 T について、Gibbs の変分原理から

$$\Delta F \;=\; \mathbb{E}_{\mu_0}\big[S \circ T - S - \ln J_T\big] - \mathrm{KL}\big(T_{\#}\mu_0 \,\|\, \mu_1\big) \;\leq\; \mathbb{E}_{\mu_0}\big[S \circ T - S - \ln J_T\big] \tag{7}$$

です 典（Gibbs の変分原理の標準形。J_T は T の Jacobian）。右辺は μ_0 の平均だけで書けるので、評価は片側で済みます。細かい格子 $(2N, \beta)$ の配位をブロック化して粗い格子 (N, β') に写し、粗い格子でほぼ最適な挿入の写像を使い、細かい格子へ戻すときに揺らぎを運ぶ、という作り方を考えます。そのときの揺らぎの運び方で、一ループの答えが二つに分かれます。

一ループの勘定は、一定の背景の磁場 B の中の $SU(2)$ の揺らぎ（Feynman ゲージ）の熱核の跡で行います。体積あたり、$1/(16\pi^2 s^2)$ を除いて、ベクトル（4 偏極）が $\frac{Bs}{\sinh Bs}(2 +$

$2\cosh 2Bs$)、ゴーストが $-2\frac{Bs}{\sinh Bs}$ です。$x = Bs$ について $\frac{x}{\sinh x} = 1 - \frac{x^2}{6} + O(x^4)$、$\cosh 2x = 1 + 2x^2 + O(x^4)$ を入れると

$$\underbrace{\tfrac{x}{\sinh x}(2 + 2\cosh 2x) - \tfrac{2x}{\sinh x}}_{\text{全体}} = 2 + \tfrac{11}{3}x^2 + O(x^4), \qquad \underbrace{\tfrac{4x}{\sinh x} - \tfrac{2x}{\sinh x}}_{\text{軌道だけ}} = 2 - \tfrac{1}{3}x^2 + O(x^4) \quad (8)$$

で、$\frac{11}{3} = -\frac{1}{3} + 4$ の $+4$ はスピンの項 $\cosh 2Bs$ から来ます 初 （一ループの水準。展開は二行の計算）。$\frac{11}{3}$ が漸近自由の係数です。表と導き方の詳細は 25-07 に置き、ここでは結論だけを使います。

- **等長的な比較**（揺らぎについて等長的な写像：恒等写像・群の平行移動・ゲージ変換・Migdal–Kadanoff 型の間引き）では、(7) の評価は一次の跡 $\frac{1}{2}\operatorname{tr}((M_B - M_0)M_0^{-1})$ で、スピンの項の寄与はちょうど 0 です。評価は軌道だけの値より悪いので、与えうるのは高々 $-\frac{1}{3}$ の側、すなわち $\beta' \geq \beta + 0.023$（2 倍あたり）で、反漸近自由の向き、$U(1)$ と同じ向きです 初 （一ループの水準）。
- **揺らぎを整形する比較**（行列式 1 の最適な線形写像で揺らぎの形を変える）では、正確な $\frac{1}{2}\ln\det$ を誤差 $\sim \Delta F^2/n$（n は自由度の数）で再現し、$\beta' = \beta - 0.258$（2 倍あたり）を出します 初 （一ループの水準）。

数の出所：$\beta = 4/g^2$、$b_0 = 22/(48\pi^2)$ で、一ループの結合の動きは 2 倍あたり $\beta - \beta' = 4 \cdot 2b_0 \ln 2 = 0.2575$ です。軌道だけなら $\frac{11}{3}$ を $-\frac{1}{3}$ に替えて $0.2575 \times (-\frac{1}{11}) = -0.0234$ です 初 （算術）。

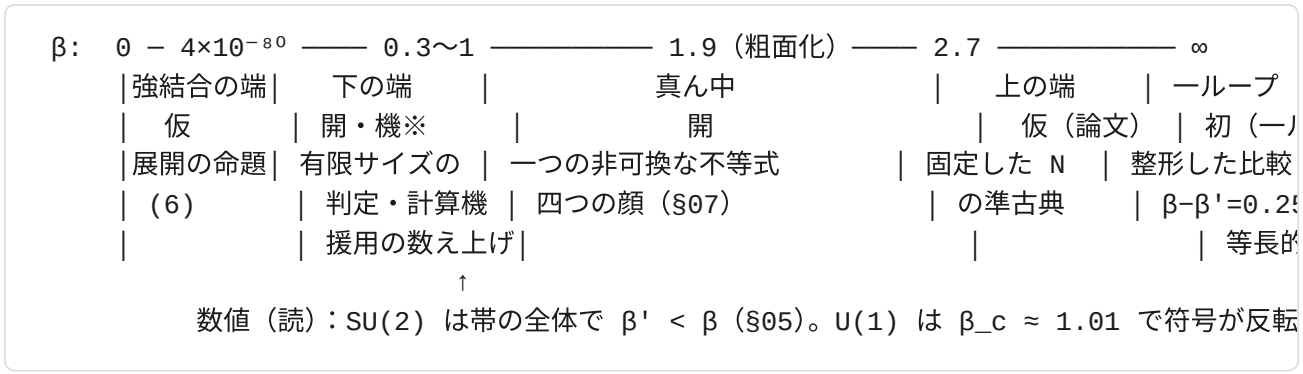
これで、Tomboulis の方法（間引き＝等長的）が群を区別できなかった理由が一ループの水準で数として説明できます。漸近自由を見る仕組みは、揺らぎの整形にあります。残るのは、整形した輸送の評価の誤差（渦の面の近くの局所的な KL と高次のループ）を、中程度の結合と大きな場で押さえることで、これは開いています。

両端の文は必ず条件つきで読んでください。「繰り込みの比較は両端で成り立つので、帯の幅だけが残る」とは言えません。強結合の側は $u \leq u_0 \approx 10^{-80}$ の範囲の、記帳の一部が概略の筋で、弱結合の側は一ループの水準の計算です。非摂動の弱結合の比較は、どの β でも示されていません。

04

β の上の地図 — 区間ごとの札

図 1 は Wilson 作用の β の上に、繰り込みの比較と閉じ込めの状態を区間ごとに並べたものです。区間の境は目安で、どの境も定理の閾ではありません。



- **強結合の端** 仮 ：強結合の端の展開の命題。定数 $u_0 \approx 10^{-80}$ のまま本に証明を置けないので「仮」です。同じ強結合の端には、本書の Lean で検査した結果が在ります（20-06）：面積則と、面積あたりの率が横の大きさに依らない渦の床です（前の因子は残ります）。どちらも強結合の窓（β がおよそ 10^{-3} 以下）の中だけの、格子間隔を固定した言明で、繰り込みの比較そのものではありません。窓の外では、横の大きさに一様な形はありません。
- **下の端**（$\beta \approx 0.3$〜1）：開。ただし強結合の端の固定した β の両側の面積則の上側は延びました（図 1 の※）。$SU(2)$ の元を中心の符号と $SO(3)$ の切断に分けると（$U = \sigma V$）、捩れの自由エネルギーは、$SO(3)$ の背景を止めた $\mathbb{Z}_2$ のゲージのガラス（結合 $|K_p| \le \beta$、符号はランダム）の比の平均で挟まれます 紙 。その閉じた板の多面体展開の Kotecký–Preiss の判定 典 （箱の磁束の混合 δ_C（26-10 §03）の、背景に一様な形）を、10 枚までの全数え上げと木による尾の評価で確かめると、$N, M \ge 11$ で $\beta \le 0.1039$ の全てにおいて $|\Delta F(N, M, \beta)| \le 8 a N^2 e^{-b M^2}$（$a = 0.0454$、$b = 0.01$。$\beta$ を下げると b は大きくなる）が成り立ちます 機 （区間演算。$N, M \ge 2$ の全てでは $\beta \le 0.0680$。有理数の版 $\beta \le 0.1029$ の最後の算術は Lean：CenterFluxPolymerCertificate（tree_k・kp_bound・kp_lt_one・rate_rational・final_real）。$\tanh \beta \le \beta$・木の帰納の補題・KP の定理は Lean の外）。これは固定した β の両側の面積則の上側の形で、率 b は真の σ よりずっと小さく、下側（弦の張力の上界）はありません。同じ分解は $U(1)$ でも $\mathbb{Z}_2$ でも成り立つので、この評価は群を区別せず、純 $\mathbb{Z}_2$ の転移 $\beta \approx 0.44$ を越えられません 読 。$\beta \ge 0.12$ は数え上げの閾で示せません。既知の評価の型である可能性が高く、新しさは主張しません。それより上の候補は、箱の境界の中心の磁束を変えたときの内側への影響 $\delta(L_0, \beta)$ による Dobrushin–Shlosman 型の有限サイズの判定と、許される面の成長定数を計算機援用の数え上げで示して u_0 を 0.04〜0.12 へ上げる道（見込みの範囲は物理の見立て）。どちらも $\beta \approx 1$ より上へは届かない見込みです。
- **真ん中**（$\beta \approx 1$〜2.7）：開。非可換性を使う不等式が一つ要り、それを担う局所量の候補が四つあります（§07）。
- **上の端**（固定した N で大きな β）：閉じ込めの向きは、分数インスタントンによる閉じ込めの下界（この本の検討から出た論文 3 の定理 A。固定した N で $-\ln \theta \ge c \beta^{-a} e^{-\beta(S_* + \varepsilon)} M^2$）に紙の証明があります。ただしチェス盤の一般の定理と Morse–Bott の補題を引用してい

て、この本には証明を置いていないので「仮」とします 仮 。M に一様な逆向きの評価と、率 S_* が最小作用 $S_{\min}$ に一致することは開いています。N を増やす向きは、真ん中と同じ問題です。

- **一ループ** 初 ：§03 の (8) と二つの比較。摂動の水準です。

帯の幅をどう数えるかは、下の端をどこに置くかで変わります。強結合の展開が数値の上で有効なのは $\beta \approx 0.3\text{〜}0.5$ までと見られ、記録はこの帯を「Wilson 作用の β で、およそ 0.5〜2.7」と書いています 読 （物理の見立て）。紙の上の帯は u_0 の小ささのぶん、ずっと広く $[4\times10^{-80},\ 2.7]$ です。

05

数値 — 格子を 2 倍にする

繰り込みの比較を数値で直接試します。手順は、細かい格子の渦の自由エネルギーを測り、それと同じ値を与える粗い格子の β' を、粗い格子の ΔF の曲線から読むことです。測り方はどれも、レプリカ交換で区画をまたぐ標本を作り、Bennett の受理比の方法（BAR）で自由エネルギーの差を出すものです。誤差は統計誤差で、種（乱数の初期値）を替えた二本の差が表示の誤差の 1〜2 倍になる点があり、誤差は小さめに出ている可能性があります。どの数も読みで、証明ではありません 読 。

表 2　板の格子全体を 2 倍にする：$(N,M)=(4,8)\to(8,16)$（$n_{12}=1$） 読

群	β	$\Delta F(4,8,\beta)$	$\Delta F(8,16,\beta)$	種の数	一致する β'	$\beta-\beta'$
$SU(2)$	2.7	2.97 ± 0.33	0.92 ± 0.30（0.65 ± 0.39 と 1.31 ± 0.48 の重みつき平均）	2	≈ 2.57（曲線の誤差を入れて 2.45〜2.65）	$\approx +0.13$（$+0.05$〜$+0.25$）
$SU(2)$	2.6	1.43 ± 0.19	-0.50 ± 0.34（0 と整合）	2	$\lesssim 2.45$	$\gtrsim +0.15$
$SU(2)$	2.5	0.63 ± 0.18	0.41 ± 0.34	1	2.2〜2.5	0〜+0.3
$U(1)$	1.5	0.83 ± 0.11	2.32 ± 0.45（レプリカ 48・交換の受理率の最小 0.37）	1	>1.7（曲線の外）	<-0.2

粗い側の曲線は $SU(2)$ の $\Delta F(4,8,\beta')$ が $\beta'=2.2,2.3,2.4,2.5,2.6,2.7$ で $0.05, 0.00, 0.31, 0.63, 1.43, 2.97$、$U(1)$ が $\beta'=1.3\text{〜}1.7$ で $0.42, 0.55, 0.83, 0.92, 1.46$ です。$SU(2)$ では 2 倍にすると渦の自由エネルギーが下がり（$\beta=2.7$ で $2.97\to0.92$）、一致する β' は β より小さい。$U(1)$ では上がり（$0.83\to2.32$、約 3σ）、$\beta'>\beta$ です。比較の向きが二つの群で分かれました。$U(1)$ の最初の実行（レプリカ 32）は交換の受理率の最小が 0.03 で混ざりが悪く、使っていません。

表 3　対称なトーラス N^4（$n_{12}=1$）の ΔF と、$2^4\to4^4$ の一段の β'。種は各 1 本 読

群	β	$\Delta F(2^4)$	$\Delta F(4^4)$	$\beta-\beta'$

群	β	$\Delta F(2^4)$	$\Delta F(4^4)$	$\beta-\beta'$
$SU(2)$	1.75・2.0	0.573・1.39	0.01・-0.03	>0.75（$\beta'<1.0=2^4$ の曲線の外）
$SU(2)$	2.25	2.71	0.50	0.53
$SU(2)$	2.5	4.29	2.46	0.30
$SU(2)$	2.75	5.95	5.10	0.13
$SU(2)$	3.0	7.88	7.33	0.07
$U(1)$	0.9	1.15	0.05	>0.3
$U(1)$	1.0	1.80	1.07	$+0.12$
$U(1)$	1.1	2.46	2.71	-0.04
$U(1)$	1.2	3.10	3.68	-0.11
$U(1)$	1.4	4.18	4.46	-0.05

誤差は 2^4 で 0.01〜0.08、4^4 で 0.03〜0.26 です。$SU(2)$ は読める全ての β（1.75〜3.0）で $\beta-\beta'>0$、つまり一段の階段関数に固定点がありません。強結合へ向かうほど一段の動きが大きく、表 1 の強結合の値へつながる形です。弱結合の側で 0.07 まで小さくなるのは、2^4 が一ループの領域には小さすぎるための格子の人工物と見られます。$U(1)$ は **$\beta=1.0$ と 1.1 の間で符号が反転**します。既知の相転移 $\beta_c\approx1.01$ の位置で、閉じ込めの相では $\beta'<\beta$、Coulomb の相では $\beta'>\beta$ です。

表 4　$SU(2)$ の $4^4\to8^4$（$n_{12}=1$）。ΔF は種ごとの値の単純平均、誤差は種の差の半分 読

β	$\Delta F(4^4)$	$\Delta F(8^4)$	種の数（8^4）	$\beta-\beta'$
2.3	—	-0.04 ± 0.10（≈0）	1	$\gtrsim0.1$
2.5	2.46（1 本）	0.48 ± 0.48	1	$\approx+0.25$（$+0.19$〜$+0.5$）
2.7	4.72 ± 0.25	3.11 ± 0.46	2	$+0.16$（$+0.13$〜$+0.19$）
2.9	6.56 ± 0.33	4.68 ± 0.63	3	$+0.20$（$+0.12$〜$+0.29$）
3.0	7.58 ± 0.25	5.78 ± 0.40	2	$+0.18$（$+0.14$〜$+0.25$）

4^4 の曲線は $\beta=2.6$（3.96 ± 0.13、1 本）・2.75（5.18 ± 0.10）・2.8（5.60 ± 0.27）の点も使いました。$4^4\to8^4$ でも測った全ての β で $\beta-\beta'>0$ で、平均は約 $+0.2$ です。一ループの漸近値 0.258 と、既知の $a\sqrt{\sigma}$ の値から見込まれる約 0.23 に近い値です 読 。

読み方。階段関数の符号の試験は、相転移の有無を見分けています。$U(1)$ は転移の位置で反転し、$SU(2)$ は測った範囲で反転しません。これは §08 の基準「U(1) の転移と区別する」の数値の姿です。ただし格子は 8^4 までで小さく、β の点も少なく、種の数も 1〜3 本です。「$SU(2)$ では帯の全体で符号が変わらない」は、この格子と点の上の読みです。

06

帯は有界な区間 — 固定した β の面積則への還元

帯は β について有界な閉区間 $I=[\beta_a,\beta_b]$ です。尺度を無限回またぐ比較が、有界な区間の上では有限個の段に縮みます。そのことを、次の補題の形で書きます。

帯の中の両側の面積則の仮定（帯 I の上の、固定した β での両側の面積則）。 定数 $N_1, M_0 \geq 2$、$c_-, c_+ > 0$、$p \geq 0$ と、関数 $\sigma_N(\beta) > 0$ があって、

- 固定した β の両側の面積則：全ての $\beta \in I$、$N \geq N_1$、$M \geq M_0$ で $\ c_- N^2 e^{-\sigma_N(\beta) M^2 - pM} \ \leq \ \Delta F(N,M,\beta) \ \leq \ c_+ N^2 e^{-\sigma_N(\beta) M^2 + pM}$。
- 率の一様な正値と連続性：$\sigma_* := \inf_{N \geq N_1,\, \beta \in I} \sigma_N(\beta) > 0$ で、ある $\delta > 0$ について、$\beta, \beta' \in I$ ・$|\beta - \beta'| \leq \delta$ なら全ての $N \geq N_1$ で $\sigma_N(\beta') \leq \sigma_{2N}(\beta) + \sigma_*$。

固定した β の両側の面積則の上側は面積則（周長の次数の誤差 pM つき）、下側は「渦が安すぎない」こと、すなわち弦の張力の上界です。率の一様な正値と連続性は率が帯の上で一様に正で、β について少し動かしても大きく変わらないことです。

帯の中の比較の還元の補題。 帯の中の両側の面積則の仮定の下で、$\beta \in I$、$\beta' \in [\beta - \delta, \beta) \cap I$、$N \geq N_1$、$M \geq M_0$ について

$$\Delta F(2N, 2M, \beta) \ \leq \ K \cdot \Delta F(N, M, \beta'), \qquad K = 4\,\frac{c_+}{c_-}\exp\!\Big(\frac{9p^2}{8\sigma_*}\Big) \tag{9}$$

が成り立つ。K は N・M・β に依らない。

初 証明。$2N \geq N_1$・$2M \geq M_0$ なので、固定した β の両側の面積則の上側から $\Delta F(2N,2M,\beta) \leq c_+ (2N)^2 e^{-\sigma_{2N}(\beta)(2M)^2 + p(2M)} = 4c_+ N^2 e^{-4\sigma_{2N}(\beta) M^2 + 2pM}$。下側から $\Delta F(N,M,\beta') \geq c_- N^2 e^{-\sigma_N(\beta') M^2 - pM}$。$\eta := 4\sigma_{2N}(\beta) - \sigma_N(\beta')$ と置くと、率の一様な正値と連続性から $\eta \geq 3\sigma_{2N}(\beta) - \sigma_* \geq 2\sigma_*$（$\sigma_{2N}(\beta) \geq \sigma_*$ を使う）。比は

$$\frac{\Delta F(2N,2M,\beta)}{\Delta F(N,M,\beta')} \ \leq \ 4\frac{c_+}{c_-}\, e^{-\eta M^2 + 3pM} \ \leq \ 4\frac{c_+}{c_-}\, e^{9p^2/(4\eta)} \ \leq \ 4\frac{c_+}{c_-}\, e^{9p^2/(8\sigma_*)}$$

です。二つ目の不等号は二次式 $-\eta M^2 + 3pM$ の最大値 $9p^2/(4\eta)$、三つ目は $\eta \geq 2\sigma_*$ です。∎

有限の段数で帯を渡る系。 帯は $\lceil (\beta_b - \beta_a)/\delta \rceil$ 段以内で渡れ、その間の損失は K の段数乗で、N・M に依らない定数です 初 。β' は $\sigma_N(\beta') \leq 4\sigma_{2N}(\beta) - 2\sigma_*$ を満たす範囲なら、もっと大きく下げても同じ証明が通ります。

較正。強結合の端の展開の命題（(6)）は、固定した β の両側の面積則を $p = 0$、$c_\pm = 2(1 \pm C'u)$ で与えます。このとき (9) は $K = 4(1+C'u)/(1-C'u)$ で、§03 の強結合の端の比較の $4(1+O(u))$ と一致します 初 （強結合の端の展開の命題は仮なので、一致は形の一致です）。

帯の中の比較の還元の補題が言うこと。 帯の中の繰り込みの比較は、帯の各 β での「固定した β の閉じ込め（周長の次数の誤差つきの両側の漸近）」に還元されます。尺度をまたぐ比較そのものは要りません。帯に入るのは物理の箱が大きいときなので、固定した β の両側の面積則が要るのは N, M が相関長 $\xi(\beta)$ より十分大きい範囲だけです。

帯の中の比較の還元の補題が言わないこと。 帯の中の両側の面積則の仮定は帯のどの β でも未証明です。上側は、四次元 $SU(2)$ の格子の中間の結合での閉じ込めという未解決の問題そのものです。探した範囲で、$\beta \approx 1$ での四次元 $SU(2)$ の格子の閉じ込めの証明は見当たりません。下側（弦の張力の上界を周長の次数の精度で）も書き下していません。補題は群に依らず、非可換性は全て帯の中の両側の面積則の仮定に入っています。$U(1)$（$\beta \in (1.01, 2.7)$）では帯の中の両側の面積則の仮定が偽なので、結論も出ません。この補題は道具ではなく還元で、帯を易しくしたとは言いません。

難しさが寄る場所 読 （物理の見立て）。帯の中の比較の還元の補題の後、帯の中に残るのは固定した β の問題（体積に一様な評価・凸でない大きな場・相転移が無いこと）です。尺度をまたぐ難しさは帯の中から消えるのではなく、**帯の上端**と**紫外の制御との継ぎ目**に寄ります。帯の上端では $\xi(\beta)$ が格子単位で 10 を超え、固定した β の両側の面積則を有限の箱の計算で確かめる道は規模で止まります。そして帯の上端から先（$\beta \to \infty$）は、紫外の制御（7-07）が受け持つ範囲で、二つを同じ定数でつなぐ必要があります。24-07 §05 の三つの根で言えば、帯の中は大域のゲージ固定の欠如（大きな場の非凸性）と相転移の排除、上端の継ぎ目が尺度をつなぐ展開の欠如（紫外と赤外をつなぐ展開が無い）です。

例。強結合の側（$u \le u_0$）では、ちょうど小さな T^2 の基点の形の言明が強結合の端の展開の命題として（筋の水準で）あります。帯の下の端を $\beta \approx 0.3$〜1 へ押し上げる作業（§04 の下の端）は、帯の中の比較の還元の補題の言葉では「固定した β の両側の面積則の成り立つ区間を広げる」ことで、尺度をまたぐ比較を要りません。

07

真ん中の帯の四つの顔

真ん中の帯を渡るには、非可換性を使う不等式が一つ要る、というところまで絞れています。その一つを**どの局所量で書くか**について、候補が四つあります。どれか一つを、尺度に一様に、$U(1)$ で破れる形で示せばよい、という意味で「顔」と呼びます。表 5 は名前と振る舞いの予想だけを並べたもので、詳しい検討は 26-10 にあります。どの行も見立てです 読 （物理の見立て）。

表 5　真ん中の帯の四つの顔（予想の行は物理の見立て。数値は読）

顔	局所量	$SU(2)$ の予想	$U(1)$ で破れる場所

顔	局所量	$SU(2)$ の予想	$U(1)$ で破れる場所
κ_w	捩れの向きの柔らかさ：捩れの生成場に沿った力の分散（幅 w の帯で）	w とともに減る（Nielsen–Olesen の柔らかい方向。一ループの $+4$ のスピンの項の非摂動版）	スピンの項が無く $\kappa_w \geq c\beta$
$\delta(L_0)$	箱の境界の中心の磁束を変えたときの、内側の立方体の全変動距離	L_0 とともに指数的に 0 へ	Coulomb の相で $O(\beta)$ のまま残る
$f(\ell)$	外枠を止めた $\ell \times \ell$ の柱の捩れの自由エネルギー	$e^{-\sigma\ell^2}$ の型	$\pi^2\beta/\ell^2$ の型（$\mathbb{Z}_2$ では $\approx 2\beta$）
圧力の余裕	捩れの模様を入れた系と入れない系の圧力の差 $p_\infty - p_{G,L}$（チェス盤の密度 κ_{cb} の指数）	正の余裕が残り、固定した β の面積則を出す	小さな κ_{cb} を作らない

数値の一例。柱の顔 $f(\ell)$ を、外枠を止めた $T_4^2 \times \ell \times \ell$ の捩れの偏り $\mathbb{E}|\theta_B|$ で測ると、$SU(2)$（$\beta = 2.3$）は $\ell = 4, 5, 6$ で $0.23, 0.07, 0.09$、$U(1)$ の Coulomb の相（$\beta = 1.3$）は $0.61, 0.49, 0.41$（$\ell = 8$ で 0.25）で、$\ell \geq 5$ で $SU(2)$ は $U(1)$ の 1/5〜1/7 です 読 。ただし $SU(2)$ の値は統計の底に近く、$e^{-\sigma\ell^2}$ と冪の区別はこの大きさではつきません。

四つの顔のどれについても、尺度をまたぐ比較（例えば $f(2\ell, 2N, \beta) \leq K f(\ell, N, \beta')$）は大域の繰り込みの比較と同じ難しさの局所版で、易しくなったわけではありません。顔を替えて得るのは、証明の対象が「境界を止めた有限の領域の言明」に変わることです。

08

帯を閉じる議論が満たすべき条件 — 基準 「U(1) の転移と区別する」

基準「U(1) の転移と区別する」。$U(1)$ はこの帯の中（$\beta \approx 1.01$）に、閉じ込めない相への相転移を持ちます。帯を閉じる議論は、$SU(2)$ に相転移が無いことを、$U(1)$ と区別して示さなければなりません。これは「四次元 $SU(2)$ には零温度で閉じ込めない相への転移が無い」という未解決の問題と同じ重さで、この条件を満たさない案は最初から捨てられます。

§05 の階段関数の符号は、この基準の数値の姿でした。言い直すと、**帯を閉じる証明は、比較の向き $\beta' < \beta$ が $SU(2)$ では帯の全体で変わらないことを示すこと**です。構造だけの議論（鏡映正値性・双対性・転送行列）は $\mathbb{Z}_2$・$U(1)$ でも同じ形で成り立つので、それだけでは基準を満たしません（26-04）。群を区別しない繰り込み（等長的な比較・Migdal–Kadanoff の流れ）も満たしません（§03）。

帯の全体を一度に閉じなくても、基準「U(1) の転移と区別する」を満たす中間の到達点があります。

1. $\Delta F(L, L) \to 0$（速さを問わない）。$U(1)$ の Coulomb の相では $\Delta F(L, L)$ は $\pi^2\beta_R/2 - \ln 2$（古典的な半磁束の値 $\pi^2\beta_R/2$ から、半磁束の向き $\pm\pi$ の二つ分の $\ln 2$ を引いたもの。β_R

は繰り込まれた結合）へ向かい、$\mathbb{Z}_2$ の閉じ込めない相では増えるので、これを示せば既知の閉じ込めない相を排除できます 仮 （相の振る舞いは見立て）。質量ギャップは出ません。数値では $U(1)$（$\beta = 1.2$）の $2^4 \to 4^4$ が $3.10 \to 3.68$ と横ばい、$SU(2)$（$\beta = 2.75$）が $5.95 \to 5.10$ です 読 。

2. 張力の倍化の不等式：ある $\delta_0 > 0$ と N_1 があって、全ての $N \geq N_1$ で $4\sigma_{2N}(\beta) \geq e^{\delta_0}\sigma_N(\beta)$、すなわち $s(2N,\beta) \geq e^{\delta_0} s(N,\beta)$（記号は §01 の繰り込みの比較の率の形）。$U(1)$ の Coulomb の相では s が尺度によらず一定でちょうど $\delta_0 = 0$ の境に、$\mathbb{Z}_2$ の閉じ込めない相では $s \to 0$ で負の側にあるので、基準「U(1) の転移と区別する」を満たします 読 （三つの相の値は閉じた式の模型と小さな格子の値）。出るのは $s(2^k N_1) \geq e^{k\delta_0} s(N_1) \to \infty$ で、Coulomb の相と離散群の閉じ込めない相が外れます 初 （反復の算術）。上の一つ目の文 $\Delta F(L,L) \to 0$ へ移るには、対称な箱の値と板の張力の差の制御が別に要ります。質量ギャップも面積則も出ません。前提の一覧での行は 28-04 に在ります。

3. $\ln(1/\theta(L,L)) \geq cL^2/\ln L$（ほぼ面積則）。Tomboulis–Yaffe の不等式 典 を通せば Wilson ループが周長則より速く減ります（$\langle W \rangle \leq 2\exp(-cA/\ln A)$ の型）。

4. 帯そのもの：$\ln(1/\theta(L,L)) \geq cL^2$（26-01）。

帯をギャップの言葉で読む — 帯の比較（ギャップの言葉）。 渦の自由エネルギーは電束 $e \neq 0$ の側の量（§02 の (4)(5)）で、質量ギャップが要るのは $e = 0$ の側です。中性の側で帯を渡る比較は、箱のギャップを箱の大きさで測った $x(L) = L\,m_0(L)$ の倍化の写像に固定点が無いこと、すなわち帯の区間で $x(2L) \geq x(L) + \delta$（δ は格子間隔に依らない）の形に書けます 仮 。$U(1)$ の Coulomb 相では x が光子の値 2π に止まる（周期の箱で $x(2L)/x(L) = 1/\cos(\pi/2L) \to 1$）ので、この形は基準「U(1) の転移と区別する」を満たします 紙 。率の比 $m_0(2L) \geq (\frac{1}{2} - \varepsilon)m_0(L)$ の形は、$U(1)$ で $m_0(2L)/m_0(L) = 1/(2\cos(\pi/2L)) > \frac{1}{2}$ と自明に満たされるので、区別に使えません 紙 。区別の中身は刻み δ が一様であることにあります。四つの顔（§07）のうち、κ_W と（全ての境界条件に広げた）$\delta(L_0)$ は中性の側にも効き、$f(\ell)$・圧力の余裕は中心の捩れの上の量で、閉じ込めの側だけのものです 読 。Tomboulis–Yaffe の不等式は $U(1)$ でも同じ証明で成り立つ構造の不等式で、出力は荷電セクターなので、閉じ込めの側へ降りる道具で、帯の比較（ギャップの言葉）の道具にはなりません 読 。gap の側の基準は、$\mathbb{Z}_2$ の閉じ込めない相（そこにもギャップがある）を外す必要が無い点で、閉じ込めの側の基準より狭くなります。どの行も示していません。

U(1) のほかの試験の相手（Z_2・有限の非可換群・随伴 Higgs の極限・混合作用・SU(N)・G_2）は 26-12 に並べます。

09

言えないこと

(a) 帯のどの β でも、繰り込みの比較も β 単調性も示していません。

(b) 強結合の端は、$u \le u_0 \approx 10^{-80}$ の範囲の、記帳の一部が概略の筋です。弱結合の端は一ループの水準で、非摂動の主張ではありません。「両端で成り立つ」を、この二つの条件を外して読まないでください。

(c) 帯の中の比較の還元の補題は還元で、帯の中の両側の面積則の仮定は未解決の問題を含みます。帯の中の比較の還元の補題で帯が易しくなったとは言いません。

(d) §05 の数値は 8^4 までの小さな格子・少ない β・1〜3 本の種の読みで、相転移が無いことの証拠ではありません。

(e) 表 5 の四つの顔は候補で、どれも尺度に一様な評価を持っていません。

(f) β 単調性と弦の張力の単調性の関係は読みの段を含みます（§02）。β 単調性が偽だとも言いません。

10

五分類の表と依存グラフ

表 6　この章の行（「—」は機械検査の無い行。この章の行に Lean の欄はありません）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲
1	$\partial_\beta \Delta F = \langle \Delta S \rangle$	初	§01	格子の幾何を止めて
2	Gibbs の変分原理 (7)	典	§03	可測な全単射 T
3	(4)(5)：β 単調性 $\Leftrightarrow E_1 \ge E_0 \Leftrightarrow \theta$ が β について増える	初	§02	$Y_1 > 0$
4	β 単調性は格子単位の弦の張力の β 単調性と同じ重さ	仮	§02（電場の流束と張力を結ぶ段を書き下していない）	全ての格子で
5	β 単調性の部分的な結果（二次元の 1・2 枚、$\beta \to 0$、捩れの背景で $\beta \to \infty$）	仮	§02（証明は本に置いていない）	各場合の条件
6	強結合の端の展開の命題：強結合の端の渦の自由エネルギーの形 (6)	仮	筋：証明の第 5 段の記帳が概略	$u \le u_0 \approx 10^{-80}$・$N, M \ge 2$
7	強結合の端の比較 $K = 4(1 + O(u))$、$\beta' < \beta$	仮	強結合の端の展開の命題の上の代数	同上
8	熱核の跡の展開 (8)：$\frac{11}{3} = -\frac{1}{3} + 4$	初	§03	一ループ・一定の背景
9	等長的な比較は $\beta' \ge \beta + 0.023$（反漸近自由）	初	§03・25-07	一ループの水準・2 倍あたり

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲
10	揺らぎを整形する比較は $\beta' = \beta - 0.258$	初	§03・25-07	一ループの水準・2 倍あたり
11	分数インスタントンによる閉じ込めの下界（論文 3 の定理 A。固定した N・大きな β の閉じ込めの向き）	仮	論文に紙の証明（引用つき）。本には置いていない	固定した N
12	表 2：$(4,8) \to (8,16)$ で $SU(2)$ は $\beta' < \beta$、$U(1)$ は $\beta' > \beta$	読	§05	格子・β・種は表のとおり
13	表 3・表 4：$SU(2)$ は符号が変わらず、$U(1)$ は $\beta = 1.0$〜1.1 で反転	読	§05	8^4 まで・種 1〜3 本
14	帯の中の比較の還元の補題：帯の中の両側の面積則の仮定の下で帯の中の比較 (9)	初	§06	固定した β の両側の面積則・率の一様な正値と連続性・$N \geq N_1$・$M \geq M_0$
15	有限の段数で帯を渡る系：帯は有限段で渡れ、損失は N, M に依らない	初	§06	同上
16	較正：強結合の端の展開の命題の形で $K = 4(1 + C'u)/(1 - C'u)$	初	§06	形の一致（強結合の端の展開の命題が仮）
17	難しさは帯の上端と紫外の制御の継ぎ目に寄る	読	§06（物理の見立て）	—
18	真ん中の帯の四つの顔とその予想	読	§07（物理の見立て）	—
19	基準「U(1) の転移と区別する」：$U(1)$ の帯の中の転移と、帯を閉じる議論の条件	読	§08（転移の位置は数値の既知の値。物理の見立て）	—
20	$\Delta F(L, L) \to 0$ は既知の閉じ込めない相を排除する	仮	§08（相の振る舞いは見立て）	—

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  初  ∂_β ΔF = ⟨ΔS⟩
 2  典  Gibbs の変分原理 (7)
 3  初  β 単調性 ⇔ E₁ ≥ E₀ ⇔ θ が増える ⟸ 1                    Y₁ > 0
 4  仮  β 単調性は張力の β 単調性と同じ重さ ⟸ 3
 5  仮  β 単調性の部分的な結果
 6  仮  強結合の端の展開の命題                                  u ≤ u₀ ≈ 10⁻⁸⁰
 7  仮  強結合の端の比較 K ≈ 4 ⟸ 6
 8  初  11/3 = −1/3 + 4                                      一ループ
 9  初  等長的な比較は β' ≥ β + 0.023 ⟸ 2・8                 一ループ
10  初  整形した比較は β' = β − 0.258 ⟸ 2・8                 一ループ
11  仮  分数インスタントンによる閉じ込めの下界                  固定した N
12  読  (4,8)→(8,16) の向きが群で分かれる
13  読  階段関数の符号：SU(2) は変わらず U(1) は反転
14  初  帯の中の比較の還元の補題
15  初  帯は有限段 ⟸ 14
16  初  較正 ⟸ 6・14                                          形の一致
17  読  難しさは上端と紫外の継ぎ目 ⟸ 14
18  読  四つの顔 ⟸ 9・10・12・13
19  読  基準「U(1) の転移と区別する」 ⟸ 13
20  仮  ΔF(L,L) → 0 は閉じ込めない相を排除 ⟸ 19
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。固定した β の両側の面積則と率の一様な正値と連続性は、帯の中の比較の還元の補題の行の条件として書き、節点にしていません。仮定の行が結論の量（帯を渡る比較）を含まないためです。この章の節点に、帯のどの β での比較の節点も、閉じ込めの節点も、質量ギャップの節点もありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 β 単調性と電場の流束の言い換え (4)(5)。一ループの水準で、等長的な比較が反漸近自由の向き（$\beta' \geq \beta + 0.023$）しか与えず、揺らぎを整形する比較が $\beta - \beta' = 0.258$ を出すこと	β 単調性そのもの。非摂動の弱結合の比較
初 帯の中の比較の還元の補題：帯の中の比較が、固定した β の両側の面積則（帯の中の両側の面積則の仮定）に還元されること	帯の中の両側の面積則の仮定のどの β での証明。帯を易しくしたこと
仮 強結合の端の比較（$u \leq u_0 \approx 10^{-80}$・記帳の一部が概略）。固定した N の上の端（分数インスタントンによる閉じ込めの下界。論文 3 の定理 A）	本に置いた証明。u_0 を実用の範囲へ上げること
読 8^4 までの格子で、比較の向きが $SU(2)$ では変わらず $U(1)$ では転移の位置で反転すること	相転移が無いことの証拠。大きな格子での同じ読み

出典と再現

もの	種別	出典・道具
β 単調性・繰り込みの比較の分割、(4)(5)、部分的な結果、熱核の跡の展開と二つの比較	本書の検討	この本の検討の記録（帯を β 単調性と繰り込みの比較に割る着想と、β 単調性の検討・一ループの確認）。(4) と (8) はこの章で計算を確かめた
強結合の端の展開の命題と強結合の端の比較	本書の検討（仮）	この本の検討の記録（強結合の側の比較の厳しい形と、その訂正の節）。多面体の展開の型は G. Münster（1981）の強結合の渦の自由エネルギーの展開（書誌と原典の本文は照合していない）
表 1	読	修正 Bessel 関数の比 I_2/I_1 の数値と、$u(\beta') = u(\beta)^4$ の数値の根。この章で数値を確かめた
表 2〜表 4・柱の偏り	読	この本の検討の数値の記録（繰り込みの比較の試験・対称なトーラスの階段関数の走査・$U(1)$ の対照・$4^4 \to 8^4$ の追加と種の統合・柱の捩れのコスト）。レプリカ交換と Bennett の受理比の方法
帯の中の比較の還元の補題・有限の段数で帯を渡る系・較正	初	この本の検討（帯の候補の検討の還元の補題）。証明はこの章で一行ずつ確かめた
四つの顔・基準「U(1) の転移と区別する」・中間の到達点	本書の検討	この本の検討の記録（移り変わりの帯を閉じる道の整理）。詳細は 26-10
Tomboulis の主張と批判	典	E. T. Tomboulis, arXiv:0707.2179。K. R. Ito, E. Seiler, arXiv:0711.4930（式 (3.5)）・arXiv:0803.3019（詳しい検討）。T. Kanazawa, arXiv:0805.2742（付録 A）。経緯は 26-08
Tomboulis の 1980 年代の短い論文	典	E. T. Tomboulis, Phys. Rev. Lett. 50 (1983) 885（題は未確認・本文は読んでいない）
Tomboulis–Yaffe の不等式	典	E. T. Tomboulis, L. G. Yaffe, Commun. Math. Phys. 100 (1985)（26-01 の出典表）

この章で使った語 — 移り変わりの帯・β 単調性・繰り込みの比較・等長的な比較・揺らぎを整形する比較・階段関数・四つの顔・基準「U(1) の転移と区別する」・還元の補題。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：26-07 時間の側から見た帯 — 第 23 部の道で帯に当たる言明と、一段目の壁「頂上の曲率の不足の壁」が帯の縮図であって帯ではないこと。

時間の側から見た帯

この章は本書の検討です。§06 は未解決の地図です。

この章で分かること ― 第 23 部は、Langevin の時間（確率力学の緩和）の側から質量ギャップに近づく道でした。この章は、その道の上で移り変わりの帯に当たる言明がどれかを正確に述べ、第 23 部が実際に止まっている壁「頂上の曲率の不足の壁」と帯との関係を決めます。答えは二つです。(1) 第 23 部の四次元の目標（23-15 の物理単位の目標の水準）は、拡散型緩和時間の仮定の上側（緩和時間の上界の仮定）と片側の橋が $\beta \to \infty$ で同じ定数で成り立つという、全ての尺度で一様な言明で、帯を必ず渡ります。(2) 一段目の壁「頂上の曲率の不足の壁」は帯の縮図ですが、帯ではありません。移り変わる長さが、頂上の Jacobi の方程式の最初の共役点（約 7.84 サイト）で古典的に決まり、$\hbar$ に依らず格子の単位で有限だからです。四次元の帯の長さ $1/\Lambda$ は量子化で生まれ、格子の単位で発散します。二つの壁は**型が同じで、中身が違う**。これを六列の対照表にします。

前提となる章 ― 23-15 §07（目標の三つの水準）・23-01 §06（片側の橋）・23-09 §06（頂上の一サイトの曲率 $\frac{15}{4}$ と 4）・23-11 §05 の短い芯の段（長さ 7 までの凸性）・24-06（稀さで払う）・24-07（四次元だからこそ・難しさの三つの源）・26-06（繰り込みの比較と四つの顔）・4-07（次元転移）。

先に言うこと ― 水準は〔研〕です。証明を置くのは、§02 の頂上の Jacobi の方程式と最初の共役点の計算、§03 の隠れた凸性の命題の証明、§01 の一行の代数だけです。二つの壁の対比は物理の見立てで、帯を渡る言明そのものはどちらの道でも仮定です。語の注意：第 23 部の 23-01 §05 は「帯の文」という語を、C_P が長さの二乗の定数倍の幅に入るという言明（定数倍の幅＝帯）に使っています。この章の「帯」は第 26 部の「移り変わりの帯」（$L \sim 1/\Lambda$ の移り変わり）で、別の語です。第 23・24 部で「帯」が別の意味で使われる箇所の一覧は 26-00 表 0 にあります。また第 23・24 部の「窓」（サイトの窓・$\hbar$ の窓・時刻の窓）とも別物です。長さ 7 までの凸性の定数は、チェス盤の密度 κ_{cb} と区別して $\kappa_{\mathrm{C7}}(k)$ と書きます（23-11 の $\kappa(k)$ と同じ量）。

この章の順序

1. 第 23 部の道で帯に当たる言明 ― 物理単位の目標の水準と、同じ定数という一様性
2. 一段目の壁は古典の長さで決まる ― 頂上の Jacobi の方程式と最初の共役点
3. 型は同じ ― 両端に別の道具、真ん中で最悪の評価が止まり、平均の道具へ
4. 中身は違う ― 移り変わる長さの起源・稀さと典型・相転移
5. 二つの壁の対照表 ― 六列（表 1）
6. 第 23 部への補い ― ブロックと混合の道 ― 23-15 の第三の枝へ
7. 言えないこと
8. 五分類の表と依存グラフ ― 表 2

01

第 23 部の道で帯に当たる言明 ― 物理単位の目標の水準と、同じ定数という一様性

第 23 部は、四次元格子の質量ギャップの目標を三つの水準に割りました（23-15 表 5）。格子の目標の水準は格子の各 β で相関長が有限、物理単位の目標の水準は格子の質量を物理の単位で測った $m_{\mathrm{lat}}(\beta)/a(\beta)$ が正の有限値 Δ_∞ へ向かう、連続の目標の水準は連続の理論で隙間が正、です。時間の側の道で帯に当たるのは物理単位の目標の水準です。

物理単位の目標の水準の下の半分（質量が 0 に潰れないこと）は、二つの言明から一行の代数で出ます。拡散型緩和時間の仮定の上側である上界の仮定（23-01 §05 の (14)）と、片側の橋（23-01 §06 の片側の橋の命題の形）です。

$$\exists\, \beta_0,\, C,\, \kappa > 0 \ \ \forall \beta \ge \beta_0 : \qquad \underbrace{a(\beta)^2\, C_P(\beta) \ \le \ C}_{\xi^2\uparrow}, \qquad \underbrace{C_P(\beta) \ \ge \ \kappa\, \xi(\beta)^2}_{\text{片側の橋}} \tag{1}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{m_{\mathrm{lat}}(\beta)}{a(\beta)} \ = \ \frac{1}{a(\beta)\,\xi(\beta)} \ \ge \ \sqrt{\kappa / C} \qquad (\beta \ge \beta_0) \tag{2}$$

初 証明。(1) の二つから $\kappa\xi^2 a^2 \le a^2 C_P \le C$、両辺の平方根の逆数を取れば (2) です。∎（23-01 §06 の (16) と同じ代数。C_P は Wilson 測度の Langevin の Poincaré 定数、$\xi = 1/m_{\mathrm{lat}}$ は格子の単位の相関長、$a(\beta)$ は格子間隔）

(1) の中身は二つの量化子の順にあります。**C と κ が β に依らない**こと、つまり $\beta \to \infty$ の全ての格子で同じ定数で成り立つことです。片側の橋は、連続の時間と有限の空間格子では仮定を名指した命題として示せますが、四次元の格子への持ち上げは形の見込みだけです 仮（24-07 表 2 の四段目の行）。上界の仮定は四次元では仮定です 仮。

なぜこの言明は帯を渡るか 読（物理の見立て）。β を大きくすると格子間隔 $a(\beta)$ は 0 へ向かい、相関長は格子の単位で $\xi(\beta) \propto e^{3\pi^2\beta/11}$ の型で伸びます（一ループの記帳、23-03 表 2）。β を一つ止めた Wilson 測度の中には、格子の一目盛りから $\xi(\beta)$ までの全ての尺度が入っていて、長さ L の尺度の実効的な結合は、$L \ll 1/\Lambda$ では小さく、$L \sim 1/\Lambda$ で $O(1)$ になり、その先で強結合の振る舞いに入ります。$C_P(\beta)$ は全ての試験関数の上限なので、最も遅い緩和、すなわち最も長い尺度の振る舞いまでを含みます。だから (1) を β に依らない C で示すことは、どの β でも、実効的な結合が $O(1)$ になる尺度——移り変わりの帯——を同じ定数で通り抜けることを含みます。空間の側の道の目標（一様な板の張力：L に一様に正の張力、26-00）も同じ型の文です。二本の道が「全ての尺度で同じ定数」という一つの型の言明に着く、というのが第 26 部の合流の意味です。

この一様性は第 23 部が既に述べたことの受け直しです。23-15 §07 の末尾は、足りないのは段の数ではなく全ての尺度で同じ定数で成り立つという一様性で、それが一段目では $\hbar \to 0$ で一様な形に、四次元格子では $\beta \to \infty$ で一様な形に現れる、と書きました。この章の問いは、その一段目の版が四次元の帯と**同じもの**か、ということです。

02

一段目の壁は古典の長さで決まる — 頂上の Jacobi の方程式と最初の共役点

場所を確かめます。一段目は 0+1 次元の二重井戸の経路の測度 $\mu \propto e^{-S/\hbar}$ で、

$$S(z) = \sum_{i} \Big[\frac{(z_{i+1}-z_i)^2}{2\varepsilon} + \varepsilon V(z_i) \Big], \qquad V(z) = \frac{(z^2-1)^2}{8}, \qquad \varepsilon = \tfrac{1}{2} \tag{3}$$

です（23-04）。壁が現れるのは、経路が頂上 $z=0$ と井戸の間にとどまる区間（芯）$Q_k = [-x_c, 0]^k$（$x_c = 0.89$、面は Neumann）の条件つきの測度で、目標は、その Poincaré 定数が芯の長さ k・端の値・$\hbar$ に一様なこと（芯の Poincaré の一様性の仮定、23-15 §02）です。

頂上の配位 $z \equiv 0$ での Hessian は三重対角 $\mathrm{tridiag}(-2, \frac{15}{4}, -2)$ で、一つの行の対角 $\frac{15}{4}$ が結合の和 4 に $\frac{1}{4}$ 届きません（23-09 §06）。この不足を、変分法の言葉で読み直します。

頂上の Jacobi の方程式。 S の Euler–Lagrange の方程式を頂上 $z \equiv 0$ で線形化すると、変位 u_n について

$$-2u_{n-1} + \tfrac{15}{4}\,u_n - 2u_{n+1} = 0 \tag{4}$$

です。一般の ε では対角が $2/\varepsilon + \varepsilon V''(0) = 2/\varepsilon - \varepsilon/2$、隣との結合が $1/\varepsilon$ で、(4) は $u_{n-1} + u_{n+1} = (2 - \varepsilon^2/2)u_n$ と書けます。$u_n = e^{\pm i n\theta}$ を入れると特性の式は $2\cos\theta = 2 - \varepsilon^2/2$、すなわち

$$\cos\theta = 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \qquad (\varepsilon = \tfrac{1}{2} \text{ で } \cos\theta = \tfrac{15}{16},\ \ \theta = 0.35542\ldots) \tag{5}$$

で、$|\cos\theta| < 1$ なので解は回転 $u_n = \sin(n\theta)$（$u_0 = 0$）です。頂上は、Euclid の運動方程式 $\ddot z = V'(z)$ の線形化 $\ddot u = V''(0)u = -\frac{1}{2}u$ で見ても、指数的に離れる点ではなく回転の点です。

最初の共役点。 $u_0 = 0$ から出た解が次に 0 になる位置 $n = \pi/\theta$ が最初の共役点です。$\varepsilon = \frac{1}{2}$ で

$$\frac{\pi}{\theta} = 8.8391\ldots, \qquad \frac{\pi}{\theta} - 1 = 7.8391\ldots \ \approx\ 7.84 \tag{6}$$

です 初（$\theta = \arccos(15/16)$ の数値。独立な確かめとして、漸化式 (4) を $u_0 = 0, u_1 = 1$ から回すと $u_8 = 0.844 > 0$、$u_9 = -0.164 < 0$ で、線形補間の零点は 8.837）。

凸性の閾＝共役点。 両端を止めた長さ k の塊の頂上での Hessian $\mathrm{tridiag}(-2, \frac{15}{4}, -2)$ の最小固有値は

$$\kappa_{\mathrm{C7}}(k) \ =\ \tfrac{15}{4} - 4\cos\frac{\pi}{k+1} \ =\ 8\sin^2\frac{\pi}{2(k+1)} - \frac{1}{4} \tag{7}$$

で（三重対角の固有値の閉じた式）、これが正になるのは $\pi/(k+1) > \theta$、すなわち $k+1 < \pi/\theta$ のときだけです。(6) から $k \le 7$ で正、$k \ge 8$ で負です 初（$\kappa_{\mathrm{C7}}(7) = 0.0545$、$\kappa_{\mathrm{C7}}(8) = -0.0088$。数値の対角化と (7) の差は $k = 5$〜10 で 10^{-15} の程度）。「長さ 7 までは凸、8 から壊れる」（23-11 §05 の短い芯の凸性の補題）は、区間 $[0, k+1]$ に共役点が入るかどうかという、変分法の Jacobi の判定の離散版そのものです。

この長さは古典的で、$\hbar$ に依らない。 (4)〜(7) に $\hbar$ は一度も現れません。現れるのは作用 S の形（運動項の係数 $1/\varepsilon$ と頂上の曲率 $V''(0)=-\frac{1}{2}$）だけです。一段目で取る極限は $\varepsilon=\frac{1}{2}$ を止めた $\hbar\to 0$ なので、移り変わる長さは極限の全体で約 7.84 サイトに留まり、格子の単位で有限です。時間の単位に直すと $\varepsilon\cdot\pi/\theta\approx 4.42$ で、時間を連続にした極限の値 $\pi/\sqrt{|V''(0)|}=\pi\sqrt{2}\approx 4.44$（頂上の回転の半周期）に近い値です。$\varepsilon$ を 0 に送ればサイトの数は $1/\varepsilon$ で伸びますが、それは一段目の問題が取る極限ではありません。

例。$\varepsilon=\frac{1}{4}$ なら $\pi/\theta-1\approx 16.75$ サイトで、時間の単位では ≈ 4.44 です。長さはサイトの数としては刻みで変わり、物理の時間としては作用の中の数 $V''(0)$ で決まっています。

混合の長さとの数値の一致（仕組みは別）。 最悪の端の値（頂上）からの影響が全変動で 10^{-2} 未満になるサイトの数は、$\hbar=10^{-2}$〜10^{-5} でほぼ動かず約 9 で、刻みを $\varepsilon=0.35,0.5,0.7,0.9$ と変えると $12,9,7,5$ と、$\pi/\theta=12.7,8.8,6.3,4.9$ に数値で近い値になります 読 。ただし仕組みは「頂上の近くに半周期とどまる」ことではありません。$\hbar\to 0$ の最適な道は頂上からすぐ下り始め、箱の角 $-x_c$ に有限のステップ（$\varepsilon=\frac{1}{2}$ で 7）で着き、混合の長さはおよそそのステップ数に 2 を足したものです 読 。二つが近い値になる理由は分かっていません。この章が共役点について主張するのは、(7) の凸性の閾だけです。

03

型は同じ — 両端に別の道具、真ん中で最悪の評価が止まり、平均の道具へ

二つの壁を並べると、同じ型が見えます 読 （物理の見立て。型の比較で、どちらの側の言明も含意しない）。

両端に別の道具がある。 一段目では、短い塊（$k\le 7$）は (7) の凸性で端の値と $\hbar$ に一様に押さえられ（短い芯の凸性の補題 初 ）、井戸の中では相の中の局所 Poincaré（相内の局所 Poincaré の条件、23-06）が効きます。四次元の帯では、強結合の端で展開が、弱結合の端で一ループの比較が効きます（26-06 §03。強結合の側は $u\le u_0\approx 10^{-80}$ の筋、弱結合の側は一ループの水準）。

真ん中で、最悪の配位の評価が止まる。 一段目で最悪の配位を入口に持つ道具は、どれも同じ一行の不足 $\frac{15}{4}<4$ に戻ります 初 （各行は二行の計算）。

- 一サイトの Dobrushin の影響係数：条件つきの一サイトの測度は $\frac{15}{4}$-凸で、隣への結合 $1/\varepsilon=2$ から一つの隣への影響は $\le 2/\frac{15}{4}=\frac{8}{15}$、二つで $\frac{16}{15}>1$。
- 長さ 7 のブロックの影響：Brascamp–Lieb と M-行列の成分ごとの比較で、左の端から右の端への影響は $2\,(M_7^{-1})_{71}=2\cdot 2^6/\det M_7\approx 1.18>1$（$M_7=\mathrm{tridiag}(-2,\frac{15}{4},-2)$ の 7×7、$\det M_7=1770735/16384\approx 108.08$）。
- Otto–Reznikoff の判定：$\mathrm{tridiag}(-2,\frac{15}{4},-2)$ の正値性が要り、無限の鎖では下端 $-\frac{1}{4}$ で失敗。

四次元の帯では、最悪の枠で評価する道が同じ役をします。板の閉じ込めの評価 $\sup_\Phi\theta\le\tanh(\beta L^2)^{\ell^2}$（25-04）から出る張力は $\sigma\ge -\ln\tanh(\beta L^2)\approx 2e^{-2\beta L^2}$ で、L について超指数的に悪くなります（$\beta=2.5$・$L=4$ で $2e^{-80}$）。構造だけの入力（鏡映正値性・双対性・転送行列）は $\mathbb{Z}_2$・$U(1)$ でも同じ形で成り立ち、帯を渡れません（26-04）。どちらの側にも「最悪の一点」があります。一段目では全てのサイトが頂上にいる面 $x\equiv 0$、四次元ではプラケットが中心の元 -1 にある所です。

平均の道具に移ると、一様性が出る見込みがある。 一段目では、転送作用素の相関長は $\hbar$ を小さくすると短くなり（$\hbar=0.1$ から 3×10^{-4} で 1.68 から 0.48）読 、最悪の端の値からの影響も $\hbar$ にほぼ依らない長さで消えます（§02）。頂上に近い配位の稀さ（$\hbar=3\times 10^{-4}$ で $P(z>-0.5)\approx 10^{-252}$）読 が、転送作用素の中で自動的に払われているからです（24-06 §06 の「稀さで払う」）。四次元の側では、L を止めれば、枠の減相関がチェス盤の一つの密度 κ_{cb}（平均の量）に置き換わります（26-05）。尺度をまたぐ評価は、四つの顔のどれかに託されています（26-06 §07）仮 。

平均の道具の一段目の版は、具体的な形まで提案されています（§06）。その入口にある一意性の命題を、証明つきで置きます。

隠れた凸性の命題。 任意の $\varepsilon>0$、$c>0$、$l\ge 1$、端の値 $a,b\in[-c,0]$ について、作用 S（(3) の V で、両端を a,b に止めたもの）は箱 $[-c,0]^l$ の上で局所的な極小をちょうど一つ持ち、それは大域的な最小である。

初 証明。$z_i=-\sqrt{\rho_i}$（$\rho_i\in[0,c^2]$）と置きます。(i) $(z_{i+1}-z_i)^2=\rho_{i+1}+\rho_i-2\sqrt{\rho_i\rho_{i+1}}$ で、幾何平均 $\sqrt{xy}$ は $[0,\infty)^2$ の上で凹なので、$-\sqrt{\rho_i\rho_{i+1}}$ は凸です。(ii) 端の項 $(z_1-a)^2=\rho_1+a^2-2|a|\sqrt{\rho_1}$ も、$-\sqrt{\rho_1}$ が凸なので凸です（右端も同じ）。(iii) $V(z)=(z^2-1)^2/8=(\rho-1)^2/8$ は ρ について二階微分 $\frac{1}{4}$ の狭義凸です。よって $\tilde S(\rho):=S(-\sqrt{\rho})$ は凸な集合 $[0,c^2]^l$ の上で $\nabla^2\tilde S\ge(\varepsilon/4)I$ の狭義凸で、局所的な極小は一つで大域的です。$\rho\mapsto-\sqrt{\rho}$ は $[0,c^2]^l$ から $[-c,0]^l$ への同相写像なので、局所的な極小は互いに対応します。∎

隠れた凸性の命題が言うのは極小の一意性で、Poincaré 不等式ではありません。Dirichlet 形は z の平らな計量で書かれているので、ρ の座標での凸性はそのまま Bakry–Émery を与えません。測度を ρ で書くと密度に $\prod_i(2\sqrt{\rho_i})^{-1}$ が付き、その対数の凹性が、$\rho_i\lesssim\sqrt{2\hbar/\varepsilon}$（頂上のごく近くの薄い層）でだけ凸性を壊します（$\frac{\varepsilon}{4\hbar}$ と $\frac{1}{2\rho^2}$ の比べ）。「頂上の曲率の不足の壁」の非凸性は、z の座標で長さ 8 以上の頂上の塊に見えていたものが、ρ の座標では一サイトごとの稀な薄い層に移る、という読みができます 仮 （この層を稀さで払う議論は組んでいない）。

04

中身は違う — 移り変わる長さの起源・稀さと典型・相転移

型が同じでも、壁の重さを決める三点が違います 読 （物理の見立て）。

(i) 移り変わる長さの起源。 一段目の移り変わる長さは最初の共役点（約 7.84 サイト）で、作用 S に書かれた数（運動項の係数と頂上の曲率）だけから決まる古典的な長さです。$\hbar \to 0$ の極限の全体で、格子の単位で有限に留まります（§02）。四次元の帯の長さは $1/\Lambda$ で、作用は長さの物差しを持ちません（四次元で結合は無次元、24-07 §01）。長さは量子化で、一ループの記帳では $\Lambda = \mu \exp(-1/(2b_0 g^2(\mu)))$ の形で生まれ（次元転移、4-07）典、格子の単位では $1/(a\Lambda)$ が $\beta \to \infty$ で $e^{3\pi^2\beta/11}$ の型で発散します。$\exp(-1/g^2)$ は $g = 0$ で全ての導関数が消えるので、この長さは結合の展開のどの次数にも現れません。

(ii) 悪い配位が稀か、典型か。 一段目では頂上の近くの配位は稀で（§03 の 10^{-252}）、24-06 の「稀さで払う」通貨が効きます。四次元の帯では、悪い配位（太い中心渦・分数インスタントン）は閉じ込めの機構そのもので、典型です。稀さの率は帯で尽きています。これは 24-07 §05 の根「尺度をつなぐ展開の欠如」の行（赤外では Gauss 近似の効かない配位が典型になり、稀さという通貨が無い）と同じ指摘です。

(iii) 相転移があり得るか。 一段目の芯は、コンパクトな一サイトの空間の上の最近接の一次元の鎖です。転送作用素は正の積分核なので、鎖の長さに一様な評価を妨げる相転移はありません 仮 （正の積分核の主固有値の事実。23-15 表 1 の [001] と同じ書誌で、原典は要取得）。四次元の固定した β では、体積に一様な評価は「相転移が無いこと」と同じ重さで、$U(1)$ は帯の中（$\beta \approx 1.01$）で実際に転移します。帯を閉じる議論は $U(1)$ と区別しなければならない、という基準「U(1) の転移と区別する」です（26-06 §08）。

(i) から、決定的な違いが一つ出ます。一段目では、移り変わる長さを越える**有限の**ブロック（長さ 12）を選べば、ブロックの中は一つの極小の周りの解析で、ブロックの間は強い混合で、という二段の道が立ちます（§06）。四次元では、移り変わる長さ $1/\Lambda$ が格子の単位で発散するので、それを越える有限のブロックがありません。**だから一段目の道具がそのまま帯を渡ることは期待できません。** 24-07 §01 の「結合が無次元＝古典的な長さが無い」が、この違いの理由です。

補足。26-06 §06 の還元の補題を通すと、帯の中は「固定した β での、体積に一様な評価」になり、一段目の壁（固定した $\hbar$ での、長さ k に一様な評価）と同じ形の文になります。固定したパラメータ・体積に一様・凸でない領域を通る、の三つが共通です。それでも重さが違うのは (ii) (iii) のためです。そして尺度をまたぐ難しさは、還元の後には帯の上端と紫外の制御の継ぎ目に寄ります（同 §06）。一段目には結合の流れが無い（難しさの源のうち、無次元の結合という源が無い）ので、この継ぎ目に当たるものがありません。

05

二つの壁の対照表

表 1 は §02〜§04 を六つの列にまとめたものです。各欄の札は欄の中に書きます。型の比較（行をまたぐ読み）は全て見立てです 読 。

表 1　一段目の壁と四次元の帯（列 (1)〜(6)）

	(1) 場所と対象	(2) 移り変わる長さとその起源	(3) 両端で効く道具	(4) 真ん中で止まる道具とその理由	(5) 平均の道具とその状態	(6) 対
一段目の壁「頂上の曲率の不足の壁」	0+1 次元の二重井戸の経路の測度（$\varepsilon = \frac{1}{2}$、$\hbar \to 0$）。芯 $[-x_c, 0]^k$ の条件つきの測度の Poincaré 定数を k・端の値・$\hbar$ に一様に（芯の Poincaré の一様性の仮定）	頂上の最初の共役点 $\pi/\theta - 1 \approx 7.84$ サイト、$\cos\theta = 1 - \varepsilon^2/4$。作用だけで決まる古典の長さで $\hbar$ に依らず、格子の単位で有限 初	短い塊：$k \le 7$ の凸性（短い芯の凸性の補題、$\kappa_{C7}(7) = 0.0545$） 初 。井戸の中：相の中の局所 Poincaré（相内の局所 Poincaré の条件、行ごとの札は 23-06）	最悪の配位での曲率：Dobrushin（$\frac{16}{15}$）・長さ 7 のブロック（≈ 1.18）・Otto–Reznikoff（$-\frac{1}{4}$）・Brascamp–Lieb・Barta の行が全て $\frac{15}{4}$ 対 4 に戻る 初 。最悪の点は面 $x \equiv 0$	ブロックの LSI（長さ ≥ 12）＋強い混合＝ブロックと混合の道 仮 。入口の隠れた凸性の命題 初 。転送作用素の相関長と混合の長さは $\hbar$ にほぼ依らない 読	一次 の鎖 は核 移が い （正 積分 核。 典は 取 得）。 悪い 位は

	(1) 場所と対象	(2) 移り変わる長さとその起源	(3) 両端で効く道具	(4) 真ん中で止まる道具とその理由	(5) 平均の道具とその状態	(6) 元
四次元の帯	四次元 $SU(2)$ の格子の板 $(\mathbb{Z}/N)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$（$n_{12}=1$）の渦の自由エネルギー。$\ln(1/\theta(L,L)) \geq cL^2$ を L に一様に（26-01）	$1/\Lambda$。作用に長さが無く（結合が無次元）、量子化で生まれる（次元転移）典 。格子の単位で $\beta \to \infty$ で発散	強結合の展開（$u \leq u_0 \approx 10^{-80}$、記帳の一部が概略）仮 。一ループの比較（揺らぎを整形すれば $\beta - \beta' = 0.258$）初（一ループの水準）	最悪の枠：$\sup_\Phi \theta \leq \tanh(\beta L^2)^{\ell^2}$ が L について超指数的に悪い（25-04）。構造だけの入力は $\mathbb{Z}_2$・$U(1)$ でも成り立つ（26-04）。等長的な比較は反漸近自由（26-06）。最悪の点は中心の元 -1	チェス盤の密度 κ_{cb}（L を止めれば、26-05）。尺度をまたぐには四つの顔 $\kappa_w \cdot \delta(L_0) \cdot f(\ell)$・圧力の余裕のどれか 仮	$U(1$ 帯の（β 1.01 に転 を持 ＝基 「U の転 と区 す る」。悪い 位（ い中 渦・ 数イ スタ トン は典

表 1 の読み方。列 (3)〜(5) を横に読むと型が同じで（両端に別の道具、真ん中で最悪の評価が止まり、平均の道具に移る）、列 (2) と (6) を縦に比べると中身が違います（長さの起源が古典か量子か、相転移があり得るか）。「頂上の曲率の不足の壁を帯と同じ言葉で書けるか」という問いへの答えは、**型は同じ言葉で書け、中身（移り変わる長さの起源）は違う**、です。

06

第 23 部への補い — ブロックと混合の道

次の道は、芯の Poincaré の一様性の仮定を、サイトの窓の LSI 定数 A_W（23-09）を経由せずに支える候補として提案されています。第 23 部の分かれ道（23-15 §02）の第三の枝「ブロックと混合の道」として、23-15 のブロックと混合の道の小節に行の表と依存グラフを置きます。ここでは、帯との関係に要る骨組みだけを書きます。

1. **ブロックの LSI** 仮 ：長さ $\ell_B \geq 12$（共役点 ≈ 7.84 と、凸性の壊れる長さ 8 を避ける）のブロックで、端の値と $\hbar$ に一様。入口は隠れた凸性の命題（§03）初 、最悪の端の値での最小点の曲率 $\lambda_*(12) \geq 0.255$ 読 （四隅の最小点の区間演算が残る）、一つの非退化な極小から指数的に小さい固有値が無いことを出す Witten の Morse 理論と Menz–Schlichting の分解（Neumann の箱の角での形は照合未了）。
2. **強い混合** 仮 ：$\hbar \to 0$ の最適な道は全ての出発点から 7 ステップ以内で箱の角に着き（記録は 50 桁の KKT の証明書と隠れた凸性の命題と Topkis の単調性。外向きの丸めの区間演算かを確かめるまで 読 ）、幅 $\approx 0.8\sqrt{\hbar}$ に集中し、角の境界層で Doeblin の重なりを持つ、という三段で $\mathrm{TV}(n) \leq (1-\delta)^{\lfloor n/10 \rfloor}$、$\delta$ は $\hbar$ に依らない。第二段・第三段は拘束つきの Laplace の方法の筋です。
3. **一次元の鎖の標準の定理** 仮 ：ブロックの LSI と強い混合から、鎖の長さに一様な LSI（Zegarlinski、Martinelli–Olivieri の型。コンパクトな連続スピンの版は照合未了）。LSI から Poincaré が出て芯の Poincaré の一様性の仮定に届く。

位置づけ。ブロックと混合の道が閉じても一段目は閉じません。二つの道に共通の行（管・縮約したキンクの気体・交差項・相内の局所 Poincaré の条件の延長ほか、23-15 表 1 の共通の 13 行）はブロックと混合の道でも残ります。混合の長さに $\ln(1/\hbar)$ の緩い依存が残る場合、冪の文（$\ln C_P / \ln \xi \to 2$）は影響を受けない見込みですが、定数が $\hbar$ に一様であることを要る行は影響を受けます（詳しくは 23-15 のブロックと混合の道の小節）。

帯との関係。ブロックと混合の道は、§03 の型の「平均の道具に移る」段の一段目の版です。そして §04 (i) のとおり、その要は「移り変わる長さを越える有限のブロック」があることでした。四次元の帯には、その有限のブロックがありません。ブロックと混合の道が一段目で成功しても、帯を渡る道具を与えるとは言えません。四次元に写した形（境界を止めた箱の判定＋強い混合、顔 $\delta(L_0)$）では、その「強い混合」こそが $U(1)$ で破れる場所です 読 （物理の見立て）。

07

言えないこと

(a) 帯を渡る言明 (1) は、どちらの半分も四次元では示していません。(2) は (1) の上の一行の代数です。

(b) 二つの壁の型の比較（§03・§04・表 1 の行をまたぐ読み）は見立てで、一段目の結果が四次元の何かを含意するとは言いません。持ち上がるのは文の形だけです（23-03 §06）。

(c) 共役点について主張するのは、(7) の凸性の闕が最初の共役点で決まることだけです。混合の長さとの数値の一致の理由は分かっていません。

(d) ブロックと混合の道の行は、隠れた凸性の命題を除いて「仮」と「読」です。ブロックと混合の道が一段目を閉じるとは言いません。

(e) 一次元の鎖に相転移が無いことは、原典を取得していない書誌の上の文です。

(f) 四次元に「有限のブロックが無い」ことは、ブロックの道が四次元で不可能だという主張ではありません。一段目の道具の形がそのまま写らない、という意味です。

08

五分類の表と依存グラフ

表 2　この章の行（この章の行に Lean の欄はありません）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲
1	(1) $\Longrightarrow$ (2)：$m_{\mathrm{lat}}/a \geq \sqrt{\kappa/C}$	初	§01（23-01 の (16) と同じ代数）	$\beta \geq \beta_0$
2	片側の橋 $C_P \geq \kappa \xi^2$	初	23-01 §06	連続の時間・有限の空間格子・基底状態の仮定・定常な経路の測度の仮定・計量の比べの仮定
3	片側の橋の四次元の格子への持ち上げ	仮	24-07 表 2	—
4	上界の仮定：$a^2 C_P \leq C$、C は β に依らない	仮	23-01 §05	四次元・$\beta \geq \beta_0$
5	(1) を同じ定数で示すことは帯を渡ることを含む	読	§01（物理の見立て）	—
6	頂上の Jacobi の方程式 (4) と $\cos\theta = 1 - \varepsilon^2/4$	初	§02	$V = (z^2-1)^2/8$
7	最初の共役点 $\pi/\theta - 1 = 7.839\ldots$	初	§02（二つの独立な数え方）	$\varepsilon = \frac{1}{2}$
8	(7)：$\kappa_{C7}(k) > 0 \iff k+1 < \pi/\theta \iff k \leq 7$	初	§02・23-11 短い芯の段	$\varepsilon = \frac{1}{2}$・頂上の配位
9	移り変わる長さは $\hbar$ に依らず、$\hbar \to 0$ で格子の単位で有限	初	§02（(4)〜(7) に $\hbar$ が無い）	ε を止めた $\hbar \to 0$
10	混合の長さ ≈ 9 と π/θ の数値の近さ（仕組みは角に着く時間）	読	§02	$\hbar = 10^{-2}$〜10^{-5}・ε の四点
11	最悪の配位の道具（Dobrushin・ブロック・Otto–Reznikoff）は $\frac{15}{4}$ 対 4 に戻る	初	§03	$\varepsilon = \frac{1}{2}$
12	最悪の枠の評価は L について超指数的に悪い	初	25-04	N・格子間隔を止めて
13	隠れた凸性の命題（極小の一意性）	初	§03	端の値 $a, b \in [-c, 0]$・箱 $[-c, 0]^t$
14	非凸性は ρ の座標で薄い層 $\rho \lesssim \sqrt{2\hbar/\varepsilon}$ に移る（読み）	仮	§03	—
15	$1/\Lambda$ は次元転移で生まれ、格子の単位で発散	典	4-07・24-07 §01	一ループの記帳
16	一次元の芯の鎖に相転移は無い	仮	§04（正の積分核。原典は要取得）	コンパクトな一サイトの空間
17	二つの壁は型が同じで中身が違う（表 1）	読	§03〜§05（物理の見立て）	—
18	ブロックと混合の道：ブロックの LSI＋強い混合 $\Longrightarrow$ 芯の Poincaré の一様性の仮定	仮	§06・23-15 の第三の枝	$\varepsilon = \frac{1}{2}$・芯 $[-x_c, 0]^k$
19	四次元には移り変わる長さを越える有限のブロックが無く、一段目の道具はそのまま写らない	読	§04・§06（物理の見立て）	—

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  初  (1) ⟹ m_lat/a ≥ √(κ/C)                連続の時間・有限の空間格子
 2  初  片側の橋の命題
 3  仮  橋の四次元への持ち上げ ⟸ 2                  四次元
 4  仮  上界の仮定（C が β に依らない）
 5  読  (1) を同じ定数で示すことは帯を渡る ⟸ 1・3・4
 6  初  頂上の Jacobi の方程式・cos θ = 1 − ε²/4
 7  初  最初の共役点 π/θ − 1 ≈ 7.84 ⟸ 6            ε = ½
 8  初  凸性の閾 k ≤ 7 ＝ 共役点 ⟸ 6・7
 9  初  移り変わる長さは ħ に依らず有限 ⟸ 6・7       ε を止めた ħ → 0
10  読  混合の長さ ≈ 9 と π/θ の数値の近さ
11  初  最悪の配位の道具は 15/4 対 4 に戻る ⟸ 8
12  初  最悪の枠は L について超指数的に悪い（25-04）
13  初  隠れた凸性の命題
14  仮  非凸性は ρ の薄い層へ ⟸ 13
15  典  1/Λ は次元転移・格子の単位で発散
16  仮  一次元の芯の鎖に相転移は無い
17  読  型は同じ・中身は違う ⟸ 9・11・12・15・16
18  仮  ブロックと混合の道 ⟹ 芯の Poincaré の一様性 ⟸ 13
19  読  四次元に有限のブロックは無い ⟸ 9・15・18
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。この章で「初」の節点は、一行の代数、頂上の線形の計算（Jacobi の方程式・最初の共役点・凸性の閾・古典の長さ・最悪の配位の道具）、隠れた凸性の命題で、帯を渡る言明（四次元での上界の仮定と、それを同じ定数で示すこと）は「仮」と「読」です。質量ギャップの節点はありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 物理単位の目標の水準の下の半分が、上界の仮定と片側の橋の同じ定数の組から一行で出ること	四次元での上界の仮定と橋。物理単位の目標の水準そのもの
初 一段目の凸性の閾（長さ 7）が頂上の Jacobi の方程式の最初の共役点 $\pi/\theta - 1 \approx 7.84$ で決まり、$\hbar$ に依らないこと。最悪の配位の道具が $\frac{15}{4}$ 対 4 に戻ること。隠れた凸性の命題	芯の Poincaré の一様性の仮定そのもの。混合の長さが共役点と近い理由
読 二つの壁は型が同じで、移り変わる長さの起源（古典と量子）・稀さと典型・相転移の有無が違うこと（表 1）	一段目の結果の四次元への含意。帯を渡る道具
仮 ブロックと混合の道（ブロックの LSI＋強い混合）が芯の Poincaré の一様性の仮定を支える候補であること	ブロックと混合の道の各段の証明（隠れた凸性の命題を除く）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
目標の三つの水準・上界の仮定・片側の橋	本書	23-15 表 5・23-01 §05・23-01 §06
頂上の Hessian と $\frac{15}{4}$ 対 4・短い芯の凸性の補題	本書	23-09 §06・23-11 §05
Jacobi の方程式・共役点 (4)〜(7)	初	この本の検討（第 23 部の壁への提案の記録の、頂上の線形化の節）。$\theta = \arccos(15/16)$ と π/θ は数値で、漸化式の符号の変わり目と三重対角の行列の対角化を独立な確かめとしてこの章で確かめた（数秒の計算）
最悪の配位の三つの道具の値	初	同じ記録（最悪の場合の解析の節）。$2(M_7^{-1})_{71}$ はこの章で有理数で計算し直した（記録の丸めた値 1.19 に対して 1.184）
隠れた凸性の命題	初	同じ記録（隠れた凸性の命題の証明の節）。証明はこの章で一行ずつ確かめた。Benguria–Brezis–Lieb・Brezis–Oswald の型の議論（原典は照合していない）
転送作用素の相関長・混合の長さ・最適な道・$\lambda_*(12)$	読	同じ記録（数値の節）と、一様な LSI への道の整理版
ブロックと混合の道の標準の定理	仮（典の候補）	B. Zegarlinski、F. Martinelli–E. Olivieri の一次元の鎖の LSI、B. Helffer–F. Nier・D. Le Peutrec の Witten の Morse 理論、G. Menz–A. Schlichting の分解（どれも原典の照合未了）
次元転移・無次元の結合・難しさの三つの源	典	4-07・24-07 の出典表
四次元の側の各欄	本書	25-04・26-04・26-05・26-06

この章で使った語 — 移り変わりの帯・拡散型緩和時間の仮定（上界の仮定）・片側の橋・Jacobi の方程式・共役点・隠れた凸性・ブロックの LSI・強い混合・ブロックと混合の道・基準「U(1) の転移と区別する」。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：26-08 試して止まった道の地図 — 試して止まった道と、止まった理由の一覧。四次元で効いていることの二点は 24-07 四次元だからこそ。

試して止まった道の地図

この章は未解決の問いの地図です。§03 は既存の知見、§04 は本書の検討です。

この章で分かること ― 移り変わりの帯を渡ろうとして試され、止まった道を一つの台帳にまとめます。台帳は三つの層からなります。三十の道（§02）、帯の章の検討で捨てたか範囲を限った道（§05）、そして台帳の道の言い換えにすぎないと分かった三つの着想（§06）です。各行に「止まった理由」と出所を付け、理由の札を行ごとに置きます。文献に拠る行は、原典で照合した文献だけに〔典〕を付け、照合していない文献は「照合未了」と書きます。とくに三つの道を詳しく見ます。局所の容器の平均が四次元で $R/\ln R$ に留まること（§03）、Migdal–Kadanoff の補間による Tomboulis（2007）の主張と、それが U(1) を区別しないという批判（§03）、捩れた T^2 との比較原理が数値で破れること（§04）です。最後に、新しい候補が最初に通るべき選別の基準を置きます（§07）。

前提となる章 ― 26-00（帯の内訳）・26-01（帯の正しい形）・26-02（横広げの不等式）・25-03（容器）・25-04（板の閉じ込め）・26-06（繰り込みの比較）・23-10 §04（壊れ方の七つの型）。

先に言うこと ― この頁は記録の地図で、新しい定理を置きません。「止まった」は「この入力の組では帯を渡れないと分かった」という意味で、その道の部品が他の場所で役に立たないという意味ではありません（例えば板の閉じ込めは、格子間隔と T^2 を止めれば全ての β で成り立つ定理です）。止まった理由の多くは物理の見立ての水準の判断で、証明つきの否定は少数です。札はその区別のために行ごとに付けます。

この章の順序

1. 台帳の読み方 ― 「止まった」の意味と札の付け方
2. 三十の道 ― 止まった理由と出所（表 1）
3. 文献で止まっていた二本 ― 局所の容器の平均と、Migdal–Kadanoff の補間
4. 捩れた T^2 との比較原理 ― 一ループで真、数値で偽
5. 帯の章で捨てた道・範囲を限った道（表 2）

6. 言い換えにすぎなかった三つ（表 3）と、型の問い（表 4）
7. 選別の基準と文献の較正（表 6）
8. 五分類の表と依存グラフ

01

台帳の読み方 — 「止まった」の意味と札の付け方

この本の検討は、帯を渡る道具を探して、多くの道を試しました。どの道も、最後には同じ一点で止まっています。**中程度の結合で、尺度を大きくすると乱れが強くなることを示す、非摂動的な原理が無い**、という一点です。止まり方を並べると、三つの教訓が繰り返し出てきます。

- 摂動の領域（弱結合か強結合）でしか働かない道具は、帯を渡れない。
- 局所的な操作は、捩れの区画のような位相的な量を変えられない。
- 単調性の源（相関不等式・鏡映正値性）は、閉じ込めの機構（乱れ）と逆向きに働く。

台帳の目的は、同じ道を繰り返さないことです。新しい候補を考えたら、まずこの台帳のどれかの言い換えになっていないかを確かめます（§ 06 はその実例です）。

各行の列は次のとおりです。

- **道**：試した着想の一行の要約。
- **止まった理由**：その道がどこで帯を渡れなくなったか。
- **札**：止まった理由の札です。初 は理由に紙の証明がある（この本の章に置いた）、典 は原典で照合した文献に拠る、機 は計算機援用、読 は数値の読み、「読 （物理）」は物理の見立ての水準の判断です。理由が見立てでも、その道を再検討しないという判断は変わりません。ただし見立ての理由で止めた道は、新しい入力があれば開き直せます。
- **出所**：この本の検討の記録か、文献か。文献は、原典で照合したものに〔典〕、照合していないものに「照合未了」と書きます。

語の注意。この部では 26-00 § 02 の約束に従って「帯」と書き、第 23・24 部の「窓」（サイトの窓・ħ の窓・時刻の窓）とは区別します。

02

三十の道 — 止まった理由と出所

表 1 の番号 1〜28 は、この本の検討が帯を渡る原理を探して試した道で、29・30 は、その検討を別の手で確かめ直した際に、文献の中で既に止まっていたと分かった道です。札は「止まった理由」の札です。

表 1　三十の道（札は止まった理由の札。「本書の検討」はこの本の検討の記録）

#	道	止まった理由	札	出所
1	鏡映正値性・チェス盤の評価	不等式の向きが逆で、流束の自由エネルギーの片側（下界）しか出ない	読（物理）	本書の検討。チェス盤そのものは 26-05
2	箱の大きさ L についての連続な単調性（Feynman–Hellmann の微分）	差の符号を決める相関不等式が $SU(2)$ に無い	読（物理）	本書の検討
3	有限個の L を区間演算で確かめる	四次元では計算の規模が届かない。階層模型では区間演算の証明書が作れた（551 区画、全区画の再実行で合格。階層模型だけの結果）	読（物理：規模の判断）・機（階層模型だけ）	本書の検討
4	$\mathbb{Z}_2$ への射影と GKS（$SO(3) \times \mathbb{Z}_2$ の分割）	四次元のデータで分割の前提が棄却された	読	本書の検討
5	赤外の上界（Fröhlich–Simon–Spencer）	向きが逆。質量の無い相を示す側の不等式	読（物理）	Fröhlich–Simon–Spencer（照合未了）
6	小さな T^2 の結果から L について連続に延ばす背理法	固定点を排除する量が無く、帯そのものに戻る	読（物理）	本書の検討
7	Kramers–Wannier の双対	帯を一変数の不等式（磁気流束の自由エネルギーが尺度 $2L$ で L より小さい）に言い換えるだけ	読（物理）	本書の検討（双対そのものは照合未了）
8	局所的なエントロピー・有限エネルギーの議論	位相的な保存：$\mathbb{R}^4$ の局所的な閉曲面は平面と偶数回交わるので、局所の操作では捩れの区画が変わらない	読（物理）	本書の検討
9	板の閉じ込め	格子間隔と T^2 を止めれば全ての β で面積則。N に一様な評価が帯そのもので、張力は連続極限で 0 へ行く	初（N を止めた定理）	25-04
10	中心渦の $\mathbb{Z}_2$ 有効模型の GKS	フラストレーションを消すと、閉じ込めの機構も消える	読（物理）	本書の検討
11	Nishimori の構造	**撤回**（焼きなましと焼き入れの取り違え。数値で否定された）	—	本書の検討

#	道	止まった理由	札	出所
12	データ処理不等式	区画に依らない通信路が作れない。区画を見分ける検出器にはなるが、乱れを生む駆動力にならない	読（物理）	本書の検討
13	太い渦の群平均	小さな T^2 では働くが、$\mathbb{R}^4$ では渦の面の張力の問題に戻る	読（物理）	本書の検討
14	最悪の反転コストの繰り込み	単調非増加にはなるが、減少することが保証されない	読（物理）	本書の検討
15	渦の面のパーコレーション	確率的な支配に最悪の場合の下界が要り、強結合に帰着する	読（物理）	本書の検討
16	ギャップの安定性・Lieb–Robinson の評価	摂動の半径の内側だけで働き、強結合に帰着する	読（物理）	本書の検討
17	面の結合についての凸性	細い面のコストしか見えない	読（物理）	本書の検討
18	面の形の適応的な平均	1 の分割の書き直しで、同語反復	読（物理）	本書の検討
19	大きな N_c の体積独立性	帯が、実効的な体積 $N_c L$ に姿を変えて戻る	読（物理）	本書の検討
20	指標展開の係数の正値性	鏡映正値性から自動的に従い、新しい情報が無い	読（物理）	本書の検討
21	階層模型の単調性の抽出（比の順序・TP_2 など）	一般には偽	読	本書の検討
22	一点の Bakry–Émery の曲率	一点のギャップは常に正で、壁はプラケットの間の影響にある	読（物理）	本書の検討
23	強劣加法性による単調量・a 定理の格子版	格子だけの版は相を区別しない。区別する版は回転不変性を要し、それは帯を渡った後でしか手に入らない（循環）	読（物理）	本書の検討（Casini–Huerta 型の議論は照合未了）
24	ゲージ軌道の空間の曲率・膜の気体の繰り込み・鋭い相転移の道具	曲率の補正は $O(1)$ で、作用の Hessian の $O(\beta)$ の負を打ち消せず強結合に帰着／四次元の膜には遮蔽の機構が無い／$SU(2)$ の面の表示は重みの符号が変わり、FKG が無い	読（物理）	本書の検討
25	スピンと指数定理（柔らかいモードの数え上げ）	一ループでは漸近自由の言い換えで、非摂動の部分は帯に戻る	読（物理）	本書の検討

#	道	止まった理由	札	出所
26	曲率の繰り込み（Bakry–Émery の曲率と O'Neill の公式、商の曲率次元条件）	負の曲率は粗視化で保たれない。一次元の鎖で有効な一リンクの重みを畳み込みで追うと、曲率の最小値は一段目で悪化する（$SU(2)$：$-6 \to -14$、$U(1)$：$-4 \to -8$）	読	本書の検討
27	捩れた T^2 との比較原理（全てのループで）	一ループでは真、非摂動では数値で偽（§04）	読	本書の検討（§04）
28	多尺度の Bakry–Émery の判定（Polchinski 方程式）	凸でない領域は通れるが、繰り込まれたポテンシャルの尺度ごとの制御が帯そのもの。コンパクト群の版も整っていない	読（物理）	Bauerschmidt–Bodineau（照合未了）
29	局所の渦の容器の平均	恒等式は既知で、容器の長さを止めると四次元では $R/\ln R$ まで（§03）	典	Mack–Petkova（1980）・Kovács–Tomboulis hep-lat/0108017。25-03 §06
30	Migdal–Kadanoff の補間による渦の自由エネルギーの単調性	鍵の不等式（Ito–Seiler の (3.5)。補間母数の共通性の不等式）が強結合の外で示されていない。議論が $U(1)$ を区別しない（§03）	典	Tomboulis arXiv:0707.2179・Ito–Seiler arXiv:0711.4930・Kanazawa arXiv:0805.2742

表 1 の N_c は色の数で、T_N^2 の大きさ N とは別の量です。番号 11 は、ここに一行だけ残します。中身は撤回されたので、この本の他の場所では使いません。

表 1 の大半の札が「読（物理）」であることに注意してください。止まった理由の多くは、反例や否定の定理ではなく、「この道はこの点で帯そのものに戻る」という見立てです。証明つきの行は、番号 9（板の閉じ込めは N を止めた定理で、N に一様でないこと）と、表 2 の止まった道「等長的な比較」・止まった道「構造的な入力だけ」・止まった道「反転の証明書」・止まった道「枠の上限の評価」です（範囲は各行の札の括弧の中）。表 1 の 29・30 は、文献で止まっていた「典」の行です。番号 3 の「機」は階層模型の上の結果で、四次元の格子については何も言いません（階層模型では Migdal–Kadanoff の間引きが正確になる点で、四次元とは別物です）。

03

文献で止まっていた二本 — 局所の容器の平均と、Migdal–Kadanoff の補間

この節は既存の知見（文献の中で止まっていた二本の道）の整理です。導入は 17-02 §05 にあります。

表 1 の 29・30 は、この本の検討が自分で試した後に、文献の中で同じ道が既に止まっていたと分かったものです。どちらも原典の本文で照合しました 典。

局所の渦の容器の平均 — 四次元では R/ln R まで

枠（容器の外側）を止めると容器の中の区画の符号が独立になり、Wilson ループが容器ごとの偏りの積で押さえられる、という恒等式は、25-03 §03 の容器の恒等式でした。これは Mack–Petkova（1980）の「渦の容器」の恒等式で、Kovács–Tomboulis（hep-lat/0108017）の式 (18)〜(22) に書かれています。違いは、区画を和のアンサンブルで書いたことと、枠について最大値でなく平均を取ったことだけで、この本は新しさを主張しません。

同じ論文の §3 が、この道の四次元での限界を述べています。辺 $T \times R$（$T > R$）の長方形のループの内側の点を通る容器の長さは R^2 の程度で、容器の費用を一定に保つには、断面の幅を $\sqrt{\ln R}$ の程度に太らせなければなりません。ループの中に入る独立な容器は $RT/\ln R$ の程度しかなく、出るのは

$$V(R) \;\geq\; \text{const} \cdot \frac{R}{\ln R} \qquad \text{(Kovács–Tomboulis の式 (25))} \tag{1}$$

までです 典。線形のポテンシャル（面積則）には、ループの大きさの太い容器が一つ要ります。これは Tomboulis–Yaffe の大域の形（26-01 §04）そのもので、帯を渡ることと同じ条件です。

止まった理由を一行で言えば、**長さの決まった容器を独立に並べる道は、$\mathbb{R}^4$ では面積則に届かない**、です。小さな T^2 の板では、容器の長さ（渦の面の面積）が T^2 の面積で止まるので、この障害は現れません（25-03 §06）。障害が戻るのは T^2 を広げるとき、つまり帯です。

Migdal–Kadanoff の補間による渦の自由エネルギーの単調性

Tomboulis（arXiv:0707.2179）は、四次元 $SU(2)$ の全ての結合での閉じ込めを主張しました。議論の流れは次のとおりです 典。

1. Migdal–Kadanoff 型の間引き（格子間隔 $a \to ba$）で、分配関数の上界と下界を作る（原典の (3.4)・(3.7)）。
2. その係数をパラメータ t で補間し、ある値 t^* で間引きが等式になる表示を得る（(3.12)・(3.16)・(3.35)）。捩れた区画でも同じ表示を作る（(4.19)・(4.26)）。
3. **鍵の段**：捩れの無い区画と捩れた区画で、同じ t^* が取れること（(5.14)）。これを不等式 $A \geq A^{+}$（(5.15)）から導くとし、それは強結合で示せば足りる、と述べる。
4. 結論として、真の渦の自由エネルギーは間引いた系の渦の自由エネルギー以下（(5.22)）。間引いた系は強結合に流れるので、強結合展開で $F \sim L\, e^{-\hat{\sigma} A}$、Tomboulis–Yaffe の不等式で面積則。

これに対して二つの批判があります 典。

- **Ito–Seiler（arXiv:0711.4930）**：t^* が二つの区画で共通に取れることは、彼らの (3.5) の不等式 $A(\alpha) > A^+(\alpha)$ に帰着し、それは強結合の外では示されていない。さらに、Migdal–Kadanoff の流れは**群がアーベルか非可換かに依らず**強結合に向かうので、議論がそのまま通るなら $U(1)$ も全ての結合で閉じ込めることになる。四次元の $U(1)$ には閉じ込めない相があるので、どこかで群を区別する入力が要る。
- **Kanazawa（arXiv:0805.2742 付録 A）**：補間のパラメータについての連続性の議論は成り立たない（反例を挙げる）。$U(1)$ で議論のどの段が破れるかが示されていない。任意のコンパクト連結群で Migdal–Kadanoff の流れは強結合へ行くので、繰り込みの側は $U(1)$ と $SU(2)$ を区別できず、**非可換の中身は全て t^* の存在に入る**。

原典の脚注 10 自身が「アーベルの系では (5.15) 型の不等式は Griffiths の不等式から出る」と書いています。残りの段と合わせると $U(1)$ の閉じ込めを示すことになり、議論が群を区別していない兆候です。

止まった理由を一行で言えば、**群を区別しない繰り込みは、帯を閉じる議論にならない**、です。これは 26-06 §08 の基準「U(1) の転移と区別する」（$U(1)$ が帯の中 $\beta \approx 1.01$ に持つ転移と区別して、$SU(2)$ に転移が無いことを示す）の、文献の中の実例です。この本の横広げの不等式（26-02 §02）は、比較を「一つの理論・一つの結合の中で幾何だけを変える」形に限ったもので、$U(1)$ では破れる形をしています（26-01 §03・26-09 §02）。ただし示す難しさは同じ型で、帯を通して要ることも変わりません。

関連して、Kanazawa（arXiv:0805.2742）の定理 1 は、大きさの違う格子の捩れた分配関数の比を、結合をずらした比に結ぶ恒等式ですが、$U(1)$ でも成り立つので閉じ込めについては何も言いません 典。Ito–Seiler の別の論文（arXiv:0803.3019）は照合未了です。

04

捩れた T² との比較原理 — ループで真、数値で偽

表 1 の 27 です。**比較原理**とは、全ての平面のループ C について

$$\langle W(C)\rangle_{\mathbb{Z}^4} \;\le\; \langle W(C)\rangle_{\mathbb{Z}^2\times T^2_N,\, n_{12}=1} \tag{2}$$

が成り立つ、という主張です（右辺は捩れのある板、25-04 §02）。成り立てば、板の閉じ込め（N を止めて全ての β で面積則）と合わせて、$\mathbb{Z}^4$ の全ての β での面積則が出ます。だから試す価値がありました。

一ループでは真 読。背景の周りの揺らぎの熱核で比べると、各時刻で不等式が成り立ちます。像の和の色の重みは $c(n) = 4\cdot\mathbf{1}[n\in(2\mathbb{Z})^2] - 1$ で、数値で機械精度まで確かめました（一ル

ープの水準の数値の確認で、紙の証明は置いていません)。

非摂動では偽 読。モンテカルロで、格子 $16 \times 16 \times N_T \times N_T$（$\mathbb{R}^2$ の方向を周期 16、T^2 を N_T ）の捩れのある板と、16^4 を比べました（$SU(2)$、Wilson 作用)。

比較原理の試験（プラケットの期待値。括弧は最後の桁の統計誤差）

β	N_T	**捩れのある板**	16^4	**読み**
2.1	2	0.52952(67)	0.53494(40)	板が低い：誤差を両側から取って **7σ**、独立な再実行で **5.5σ**。$W(2,2)$ も低い
1.8	2	0.43966(56)	0.44129(18)	板が低い（約 2.7σ）
2.4	2	0.6275(10)	0.6300(2)	板が低い（約 2.4σ）
2.6	6・8	捩れのある板が 16^4 を下に行き過ぎる兆候（プラケットで 2.5σ・1.9σ）		未確定

(2) で C を一つのプラケットに取ると、右辺は板のプラケット、左辺は 16^4 のプラケットです。$\beta = 2.1$・$N_T = 2$ で板のほうが 7σ 低いので、(2) は小さなループで破れます。捩れのフラストレーション（小さな T^2 に捩れを押し込んだ費用）がプラケットを下げると読めます 読（物理)。弱結合の側（$\beta = 2.6$）の行き過ぎは統計が足りず、確定していません。

もう一つ、$N = 1$ では漸近自由の尺度の振る舞いと矛盾します 読（物理)。板の定理から $\sigma_{\mathrm{tw}}(1) \geq -\ln\tanh\beta \approx 2e^{-2\beta}$ ですが、漸近自由の尺度の振る舞いを認めれば $\sigma_\infty a^2 \propto e^{-(6\pi^2/11)\beta} = e^{-5.38\beta}$ で、大きな β で (2) が逆を向きます。

止まった理由を一行で言えば、**一ループで成り立つ順序が、非摂動で小さなループから壊れる**、です。ここから二つの基準が出ます（§07)：基準「一ループの言い換えでない」(非摂動の評価であること）と、基準「小さなループで破れない」(短い尺度で破れないか、大きなループだけを主張する形であること)。大きなループだけの漸近の形（$\sigma_{\mathrm{tw}}(L) \leq \sigma_\infty$）は否定されていませんが、それを示す機構が無く、表 1 の 2（差の符号を決める不等式が $SU(2)$ に無い）と同じ壁に当たります。

正の観察も一つ残ります 読（物理)。捩れのある T^2 は、弱結合で小さな N_T から無限体積に近く、捩れの無い場合と逆の側から近づきます。断熱的な連続性の描像と合いますが、近づき方は単調でない兆候があり、単調性に基づく道具には不利な事実です。

05

帯の章で捨てた道・範囲を限った道

第 25・26 部の検討の中で、表 1 とは別に捨てた道と、使える範囲を限った道があります。表 2 にまとめます。前半の五つ（1〜5）が「捨てた道」、後半が「範囲を限った道」です。

表 2　帯の章で捨てた道・範囲を限った道（札は止まった理由の札）

#	道	止まった理由	札	章
1	**等長的な比較**：等長的な比較（恒等写像・群の平行移動・ゲージ変換・間引き）	揺らぎの形を変えない比較では、一ループのスピンの項 $+4$ の寄与がちょうど 0 になり、出るのは $\beta' \geq \beta + 0.023$（反漸近自由の向き）だけ	初（一ループの水準）	25-07・26-06 §03
2	**構造的な入力だけ**：構造的な入力だけ（鏡映正値性・双対性・転送行列・中心の恒等式）	$\mathbb{Z}_2$ と $U(1)$ でもそのまま成り立つので、群を区別できない（否定の補題）	初（「この入力の組だけでは」の形）	26-04
3	**決定論的な挟み撃ち**：決定論的な写像による挟み撃ちで面積則を出す	輸送の恒等式（Gibbs の変分原理）の余り（相対エントロピー）が、渦の面の面積とともに増えるので、$e^{-\sigma A}$ の形は出ない。定性的な目標 $\Delta F(L,L) \to 0$ には使える	読（物理）	26-10 §02
4	**ガラスの挟み撃ち**：帯の上半分での $\mathbb{Z}_2$ のガラスの挟み撃ち	$\beta \gtrsim 2$ では実効的な $\mathbb{Z}_2$ 結合の平均が 1.1〜1.9 で、純 $\mathbb{Z}_2$ の転移点 0.44 を大きく超え、ガラスは秩序相の側にある。挟みが緩い	読	26-09 §08・26-10 §03
5	**反転の証明書**：反転の証明書（容器の反転）・同時の反転を帯の試験に使う	一段の核の反転の確率 a は 1/2 程度で頭打ちになり、$\theta \leq 1-a$ から出るのは $\sigma \geq c/L^2$（$U(1)$ も満たす弱い形）だけ	初（$\theta \leq 1-a$）・読（a の頭打ち）	25-06・26-01 §02
6	**枠の上限の評価**：枠の上限 $\sup_\Phi$ を使う評価	$\tanh(\beta L^2)^{\ell^2}$ の形で、L について超指数的に悪くなる。一様性には枠についての平均の形しか使えない	初	25-04 §02
7	**Dobrushin 型の判定**：通常の Dobrushin・Dobrushin–Shlosman・van den Berg–Maes の判定を枠つきで使う	連続な場が境界に追随し、影響係数がほぼ 1 になる	読（物理）	（文献は照合未了）
8	**β 単調性を易しい部品に**：β 単調性を易しい部品として、帯＝β 単調性＋繰り込みの比較とする	β 単調性は、格子単位の弦の張力の β についての単調性と同じ重さの問題だった（訂正）	読（物理）	26-06 §02
9	**一方向の横広げ**：横広げを一方向だけに限る	高温での空間的な弦の張力の振る舞い（Bali らの格子の測定、照合未了）から見て怪しく、正方形の形だけに限る	読（物理）	26-02 §02
10	**Wilson flow の輸送**：Wilson flow を渦の挿入の輸送に使う	数値で否定的。前向きの輸送（Moser 型）に直す形は開いている	読	25-06
11	**共形な枠**：共形な枠 $H^2 \times S^2$（尺度を位置に変える）	検討の結果否定的：双曲的な入れ子で容器の数が増えず、核心は同じ場所に残る	読（物理）	26-10 §04
12	**強結合の展開だけ**：強結合の展開だけで帯を覆う	平らな面の展開は粗面化（$\beta_R \approx 1.9$、照合未了）で止まる	読（物理）	26-06 §04

```
06
```

言い換えにすぎなかった三つと、型の問い

新しい候補を考えるときは、まず台帳のどれかの言い換えでないかを確かめます。表 3 は、帯の候補を検討した際に、候補にせず台帳の言い換えと判定した三つです。

表 3　言い換えにすぎなかった三つの着想

#	着想	何の言い換えだったか	札
1	**ホロノミーの Haar への接近**：大きなループのホロノミーの法則が Haar 測度に近づくこと（Weyl の測度で境界のホロノミーが中心化する）	中心について奇な部分（半整数の表現）の減衰は Wilson の面積則そのもので、柱の分解と Tomboulis–Yaffe の不等式がつくる輪の言い換え。偶の部分（随伴の表現）は周長則で、群の区別に効かない	読（物理）
2	**中心と θ 項のアノマリー**：中心と θ 項の混合アノマリーの整合	運動学的な制約（§07 の基準「力学的である」）。$\theta = 0$ では何も強制しない	読（物理）
3	**階層模型での成功**：階層模型（Migdal–Kadanoff の間引きが正確になる模型）での成功を帯の証拠にする	階層模型では $U(N)$ も閉じ込めるので、基準「非可換性を本質的に使う」の検査にならない	読（物理）

第 23 部の迂回の検討（23-10 §04）は、0+1 次元の二重井戸の上の失敗から七つの型を取り出しました。個々の迂回策は四次元の候補と直接には重なりませんが、型の問いは四次元の候補にもそのまま当てられます。表 4 にその問いを並べます。

表 4　壊れ方の七つの型と、新しい候補に当てる問い

型	一行	候補に当てる問い
1	源は一つ（頂上の一サイトの曲率）	最悪の配位の面で、何を払っているか
2	比で入る構造の因子には天井がある	欠陥の集合を変えているか、比の因子を動かしているだけか
3	同じ場所を二度払う	払う場所を同じ図に描いたか
4	通貨の取り違え（出口の速さと稀さ）	稀さを払う段がエントロピーを通っているか
5	難しさの住所	難しさは、どの量に掛かっているか
6	揺れの向きと柔らかい向きのずれ	ベクトルをスカラーに潰していないか
7	移しかえ	和が不変量になっていないか（軽くした列の分だけ別の列が重くなっていないか）

第 24 部の規則の候補（24-08 §02 の表 3）も、除外ではなく「どの根に効かないか」の記録として、ここで使えます。紫外と赤外をつなぐ根（24-07 の尺度をつなぐ展開の欠如）の列に「効く」と書かれた候補は一つもなく、粗視化の一段で閉じる稀さの類（尺度の公理化の規則＋稀さの類の規則）で現れる「結合の窓」（第 24 部の語、24-06）は、その根の言い直しでし

た。帯の候補が尺度をつなぐ展開の欠如に効くと言うなら、どの候補とも違う入力を名指す必要があります。

07

選別の基準と文献の較正

止まった理由を裏返すと、帯を渡る道具が満たすべき条件の候補が出ます。表 6 は、その条件を、元になった止まり方と並べたものです。どれも必要条件の候補で、満たせば帯を渡れるという十分条件ではありません 読（物理）。特に重いのは「非可換性を本質的に使う」「一ループの言い換えでない」「最小の帯を渡れる」「U(1) の転移と区別する」の四つです。

表 6　選別の基準（元になった止まり方つき）

基準	中身	元になった止まり方
格子だけで立つ	格子だけで成り立つ（回転不変性に頼らない）	表 1 の 23
相を区別する	相を区別する（質量の無い相で破れるか、極限の値が違う）	表 1 の 23
正値性に頼らない	正値性・FKG に頼らない	表 1 の 24（$SU(2)$ の面の表示は重みの符号が変わる）
非可換性を本質的に使う	**非可換性を本質的に使う**。四次元の $U(1)$・二次元の $O(2)$ のように質量の無い相を持つ模型で同じ結論が出る原理は誤り	表 1 の 30・表 2 の「構造的な入力だけ」・表 3 の「階層模型での成功」
漸近自由と両立する	漸近自由と両立する	§04 の $N=1$ の矛盾
位相的な区画を扱える	位相的な区画（捩れ）を扱える	表 1 の 8
一ループの言い換えでない	**一ループの言い換えでない、非摂動の評価**であること	表 1 の 25・27
力学的である	力学的である（作用と結合の流れを使う）。運動学的な制約（双対性・鏡映正値性・アノマリー・分配関数の正値性）だけでは、閉じ込めない相も矛盾なく存在しうるので届かない	表 2 の「構造的な入力だけ」・表 3 の「中心と θ 項のアノマリー」
凸でない領域を通れる	凸でない（負の曲率の）領域を通れる。凸性・対数凹性・曲率の下界だけに基づく道具は帯で使えない	表 1 の 26
最小の帯を渡れる	**最小の帯を渡れる**：二次元の漸近自由な模型（大きな N の $O(N)$ 模型・Gross–Neveu 模型）で、紫外の切断を外したまま。これを渡れない単調量は四次元も渡れない	文献の較正（下）
小さなループで破れない	小さなループ（短い尺度）で破れない。あるいは大きなループだけを主張する形である	§04

基準	中身	元になった止まり方
線形化が非等長的	比較の写像の線形化が、揺らぎについて等長的でない	表 2 の「等長的な比較」
U(1) の転移と区別する	**$U(1)$ が帯の中（$\beta \approx 1.01$）に持つ転移と区別して、$SU(2)$ に転移が無いことを示す**	表 1 の 30・26-06 §08

基準「最小の帯を渡れる」の背景には、二次元の $O(3)$ 模型でさえ格子の水準での全ての温度の指数減衰（Polyakov の予想）が未解決だという事情があります（Peled–Spinka の講義録 arXiv:1708.00058 の記述、照合未了）。四次元で一様なギャップを示す道具は、少なくともそれを示す力を持たなければなりません。

文献の較正。帯の両側で、いまの最前線はどこにあるか。照合の済んだものだけに〔典〕を付けます。

- 強結合の側：Cao–Nissim–Sheffield（arXiv:2505.16585）は、$U(N)$ の格子ヤン–ミルズで、次元 d だけに依る $\beta_0(d)$ 以下の β では全ての N で面積則を示しました 典。同じ著者たちの arXiv:2509.04688 は、Durhuus–Fröhlich（1980）の質量ギャップの条件を確率力学の方法で確かめ、't Hooft の領域（$\beta \lesssim c_d N$）で面積則を得ています 典。どちらも強結合の側の結果で、帯の中の β には届きません。本書の Lean にも、強結合の窓の中だけの面積則と、面積あたりの率が横の大きさに依らない渦の床が在ります（20-06。格子間隔は固定、前の因子は残る）。これも帯には届きません。
- 帯の普遍性：Gross–Neveu 模型のどの版についても、紫外の切断を外した極限でのカイラル対称性の破れの証明は無いと明記した論文があります（Fabbri–Goller arXiv:2606.13075、照合未了）。大きな N の二次元模型の赤外の解析（Kopper–Magnen–Rivasseau 1995、Kopper 1999）は紫外の切断つきです（照合未了）。
- 計算機援用の繰り込み：二次元のテンソル繰り込みで、高温の固定点の近くの流れを計算機援用で示した結果（Ebel–Kennedy–Rychkov arXiv:2506.03247、照合未了）が、いまの最前線の一つと見られます。四次元 $SU(2)$ の帯からは遠い位置です。

まとめると、**漸近自由な理論で、紫外の切断を外した極限での質量の生成の証明は、調べた範囲で見当たりません**。四次元のヤン–ミルズの連続極限の存在は 2026-11-10 に公開された構成が示しました（委員会の評価の水準。第二巻）が、質量ギャップは示していません。帯は、この本の道に固有の穴ではなく、漸近自由な理論に共通の未解決の核心です。ただし、この一文は調べた範囲の言明で、照合未了の文献を含みます。

止まった理由を議論の型で並べ直した表は 16-11 の表 2 に在ります。

```
08
```

五分類の表と依存グラフ

表 1〜表 3 の各行の札は、表の中に置きました。この頁が自分で置く行は次の十四です。

表 7　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	枠を止めた容器の恒等式は Mack–Petkova の容器の恒等式	典	Kovács–Tomboulis 式 (18)〜(22)	和のアンサンブル・平均の形の違いだけ	—
2	長さを止めた独立な容器からは、四次元で $V(R) \gtrsim R/\ln R$ まで	典	Kovács–Tomboulis 式 (23)〜(25)	$\mathbb{R}^4$・独立な容器	—
3	Migdal–Kadanoff の補間の鍵の段は補間母数の共通性の不等式に帰着し、強結合の外で示されていない	典	Ito–Seiler arXiv:0711.4930	Tomboulis arXiv:0707.2179 の議論	—
4	Migdal–Kadanoff の流れは群に依らず強結合へ向かい、繰り込みの側は $U(1)$ と $SU(2)$ を区別しない	典	Kanazawa arXiv:0805.2742 付録 A	任意のコンパクト連結群	—
5	比較原理は一ループで成り立つ	読	§04（熱核の各時刻の不等式を数値で）	一ループの水準	—
6	比較原理は $\beta = 2.1$・$N_T = 2$ で破れる	読	§04 の表	$16^2 \times 2^2$ 対 16^4・7σ（独立な再実行 5.5σ）	—
7	$N = 1$ の比較原理は漸近自由の尺度の振る舞いと矛盾する	読（物理）	§04	漸近自由の尺度の振る舞いを認める限り	—
8	板の閉じ込めは N と格子間隔を止めて全ての β で成り立ち、N に一様でない	初	25-04	N 固定・格子間隔固定	25-04 の Lean 欄
9	等長的な比較からは $\beta' \geq \beta + 0.023$ の向きしか出ない	初	25-07	一ループの水準	—
10	構造的な入力だけでは群を区別できない	初	26-04	「この入力の組だけでは」	—
11	表 1・表 2・表 3 の残りの行の止まった理由	読（物理）	本書の検討	各行の条件	—
12	階層模型では有限個の区画の区間演算で証明書が作れる	機	表 1 の 3	階層模型だけ。四次元の格子には何も言わない	—
13	強結合の側の最前線は小さな β・全ての N の面積則	典	Cao–Nissim–Sheffield arXiv:2505.16585・2509.04688	$\beta \leq \beta_0(d)$・$\beta \lesssim c_d N$	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
14	選別の十三の基準（表 6）は帯を渡る道具の必要条件の候補	読（物理）	§07	必要条件の候補で、十分条件ではない	—

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  典  容器の恒等式は既知                                  Kovács–Tomboulis (18)
 2  典  独立な容器は R/ln R まで ⟸ 1                          R⁴
 3  典  Tomboulis の鍵の段は (3.5) に帰着・未証明             強結合の外
 4  典  Migdal–Kadanoff の流れは群を区別しない                 任意のコンパクト連結群
 5  読  比較原理はループで成り立つ                          ループの水準
 6  読  比較原理は β = 2.1・N_T = 2 で破れる                  7σ・再実行 5.5σ
 7  読  N = 1 の比較原理は漸近自由と矛盾                     物理
 8  初  板の閉じ込め（N 固定）                               25-04
 9  初  等長的な比較は β' ≥ β + 0.023                          25-07・ループ
10  初  構造だけでは群を区別しない                          26-04
11  読  残りの行の止まった理由                               物理の見立て
12  機  階層模型の証明書                                      階層模型だけ
13  典  強結合の側の最前線                                    小さな β
14  読  選別の基準 ⟸ 2・4・5・6・7・9・10・11
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。選別の基準の行は結論の側の唯一の節点で、札は「読（物理）」です。この頁のどの行も、帯を渡ることも、帯を渡れないことも示しません。止まった道は「この入力の組では渡れない」と記録しただけで、その入力に何かを足した道は台帳の外にあります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
典 局所の容器の平均は四次元で $R/\ln R$ まで。Migdal–Kadanoff の補間の議論は鍵の段が未証明で、群を区別しない	Tomboulis（2007）の主張が偽であること（未証明の段が残る、までが言えること）
読 比較原理が小さなループで破れること（$\beta = 2.1$・$N_T = 2$、7σ、再実行 5.5σ）	大きなループだけの漸近の形が偽であること
初 板の閉じ込め・等長的な比較・構造だけの否定の補題（各章の条件の下で）	それらの道に何かを足した道が渡れないこと
読 （物理） 残りの道の止まった理由と、選別の基準	止まった理由の多くの証明。基準を満たす道具が帯を渡ること

出典と再現

もの	種別	出典・道具
渦の容器の恒等式と四次元の限界	典	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 125 (1980) 117。T. G. Kovács, E. T. Tomboulis, hep-lat/0108017（Vortex waistlines and long range fluctuations）式 (18)〜(25)。章 25-03
Migdal–Kadanoff の補間による主張	典	E. T. Tomboulis, arXiv:0707.2179（原典の (3.4)・(3.7)・(3.12)・(3.16)・(3.35)・(4.19)・(4.26)・(5.14)・(5.15)・(5.22)、脚注 10）
その批判	典	K. R. Ito, E. Seiler, arXiv:0711.4930（(3.5)）。T. Kanazawa, arXiv:0805.2742（付録 A・定理 1）。Ito–Seiler arXiv:0803.3019 は照合未了
Tomboulis–Yaffe の不等式	典	E. T. Tomboulis, L. G. Yaffe, Commun. Math. Phys. 100 (1985) 313。T. Kanazawa, arXiv:0808.3442。章 26-01
強結合の側の最前線	典	S. Cao, R. Nissim, S. Sheffield, arXiv:2505.16585・arXiv:2509.04688
文献の較正の残り	照合未了	Fabbri–Goller arXiv:2606.13075、Ebel–Kennedy–Rychkov arXiv:2506.03247、Bauerschmidt–Bodineau（Comm. Pure Appl. Math. 2021）、Kopper–Magnen–Rivasseau（1995）、Kopper（1999）、Peled–Spinka arXiv:1708.00058、Fröhlich–Simon–Spencer、Bali らの空間的な弦の張力の測定
比較原理の試験	読	この本の検討の数値（$SU(2)$・Wilson 作用・$16 \times 16 \times N_T \times N_T$ の捩れのある板と 16^4、プラケットと小さな Wilson ループ）。誤差は検算で取り直した値（7σ）と独立な再実行（5.5σ）
三十の道・帯の章で捨てた道・言い換え・選別の基準	本書の検討	この本の検討の記録（除外の台帳と、帯の候補の検討）

この章で使った語 — 除外の台帳・止まった理由・渦の容器・比較原理・Migdal–Kadanoff の間引き・等長的な比較・選別の基準・移り変わりの帯（帯）・β 単調性・繰り込みの比較。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：26-09 測った記録 — この部が引く数値を一頁に。

2026-10-15 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 26 部 移り変わりの帯
渦の自由エネルギー・板の張力・階段関数・柱の偏り · Kiichi, Shiori and Rin

測った記録

この章は本書の検討です。前提となる既存の知見は 5-07・5-01 にあります。

この章で分かること — 第 26 部が引く数値を、一頁にまとめます。小さな捩れた T^2 を広げたとき、$U(1)$ の渦の自由エネルギーは上がり、$SU(2)$ の渦は上がらないこと（§02）。板の弦の張力は T^2 とともに増えて飽和し、有意な行き過ぎは見えないこと（§03）。渦の自由エネルギーの β 依存（§04）。格子全体を 2 倍にしたとき、$SU(2)$ の渦は安くなり $U(1)$ の渦は高くなること（§05）。一段の階段関数の符号が、$U(1)$ では既知の相転移 $\beta_c \approx 1.01$ で反転し、$SU(2)$ では測った範囲で反転しないこと（§06）。外枠を止めた柱の偏りを小さく保つのに要る幅が、$SU(2)$ では N とともにほとんど伸びず、$U(1)$ では伸びること（§07）。$\mathbb{Z}_2$ のガラスの表示の診断（§08）。

前提となる章 — 25-01（捩れた T^2 と流束）・26-01（区画の偏り θ）・26-02（横広げの不等式）・26-06（繰り込みの比較）・5-07（モンテカルロ法）。

先に言うこと — この頁の数は全て数値の読みです 読。格子は 8^4 までと小さく、β の点も、種（乱数の初期値）や枠の数も少なく、誤差は統計誤差だけで、小さめに出ている可能性があります。どの行も、帯を渡ることの証拠ではなく、候補の向きを選ぶための傾向の記録です。各行に格子の大きさ・β・種や枠の数・誤差を書きます。記録に種の数が書かれていない行は「記載なし」とします。

この章の順序

1. 測り方と記号 — 渦の自由エネルギー・区画の偏り・人工物の注
2. T^2 を広げる — $U(1)$ は上がり、$SU(2)$ は上がらない（表 1〜表 3）
3. 板の弦の張力 — 増えて飽和する（表 4・表 5）
4. 渦の自由エネルギーの β 依存（表 6）
5. 格子全体を 2 倍にする（表 7〜表 10）
6. 階段関数の符号 — $U(1)$ の対照（表 11）
7. 柱の偏り — $\ell \times N$ の走査（表 12〜表 14）

8. $\mathbb{Z}_2$ のガラスの診断（表 15）
9. 小さな格子の人工物 — 読むときの注意の一覧
10. 五分類の表と依存グラフ

01

測り方と記号

格子。板の格子は $(\mathbb{Z}/N_T)^2 \times (\mathbb{Z}/M)^2$ で、最初の二方向（大きさ N_T）が小さな T^2、残りの二方向（大きさ M）が平面 $\mathbb{R}^2$ の代わりです。T^2 には 't Hooft の捩れ $n_{12} = 1$ を入れます（25-01）。対称なトーラスは N^4 と書きます。作用は Wilson 作用 $-\frac{\beta}{2}\sum_p z_p \operatorname{tr} U_p$（$SU(2)$）と、その $U(1)$ 版です。

渦の自由エネルギー。平面の方向の流束 n_{34} を変えた区画との自由エネルギーの差を

$$\Delta F = F(n_{34}=1) - F(n_{34}=0) = -\ln \frac{Z(n_{34}=1)}{Z(n_{34}=0)} \tag{1}$$

と書き、区画の偏りを $\theta = \tanh(\Delta F/2)$ とします（26-01 §04 の F_v と同じ量）。ΔF が大きいほど渦は高く（入りにくく）、θ は 1 に近づきます。閉じ込めの領域では $\Delta F \to 0$ と期待されます。

測り方。ΔF は、レプリカ交換（結合を補間した複製の間で配位を交換し、区画をまたぐ標本を作る）と、Bennett の受理比の方法（BAR）で求めます。誤差は統計誤差です。種を替えた二本の差が、表示した誤差の 1〜2 倍になる点があり、誤差は小さめに出ている可能性があります。板の弦の張力は Creutz 比

$$\chi(R) = -\ln \frac{W(R,R)\,W(R-1,R-1)}{W(R,R-1)\,W(R-1,R)} \tag{2}$$

で読みます（$W(R,T)$ は $R\times T$ の Wilson ループ）。小さな R の Creutz 比は Coulomb の項を含んで張力を大きめに見積もるので、絶対値でなく傾向だけを読みます。

人工物の注（先に）。どの表にも共通の注意を、§09 に一覧にします。特に $N_T = 2$ は格子の人工物の領域で、2^4 は一ループの振る舞いを見るには小さすぎ、柱の偏りの 0.1 程度の値は統計の底です。

02

T² を広げる — U(1) は上がり、SU(2) は上がらない

平面の方向の大きさ M を止めて、T^2 の大きさ N_T だけを広げます。横広げの不等式（26-02 §02）の符号を見る試験です。

表 1　$\Delta F(N_T)$、$M = 8$（$n_{12} = 1$、レプリカ交換＋Bennett の受理比の方法。種の数は記載なし） 読 — 数は 25-08 表 3 に載せた同じ測定です。数はここに写しません。

$U(1)$ では T^2 を広げると ΔF が急に増え、θ は $0 \to 0.39 \to 0.78 \to 0.99$ です。$SU(2)$ は $0 \to 0.63 \to 0.33 \to 1.51$ と、ずっと緩やかです（θ は $0 \to 0.31 \to 0.16 \to 0.64$）。$N_T = 4 \to 8$ で $\ln(1/\theta)$ は、$U(1)$ が $0.93 \to 0.012$（約 80 分の 1）、$SU(2)$ が $1.18 \to 0.45$（約 2.6 分の 1）です。ただしこの幾何では θ が 1 の程度で、$\theta \le 1$ の天井のために判別力が弱く、$SU(2)$ の $N_T = 8 = M$ は対称なトーラス 8^4（物理の大きさ $L\sqrt{\sigma} \approx 1.5$）です。$U(1)$ の $\beta = 1.5$ と $SU(2)$ の $\beta = 2.5$ は、同じ物理の大きさに合わせたものではありません。

表 2　$\Delta F(N_T)$、$M = 12$（容器を大きくした再測定） 読 — 数は 25-08 表 4 に載せた同じ測定です。数はここに写しません。

$U(1)$ の $N_T = 8$ は、レプリカ 24 では 0.54 ± 0.53 で混ざりが悪く、40 に増やした値を載せています。種の数は記載なしです。

表 3　$SU(2)$、$\beta = 2.4$、$M = 8$ 読 — 数は 25-08 表 5 に載せた同じ測定です。数はここに写しません。

読み 読。三つの設定（$\beta = 2.5$ の $M = 8$・12、$\beta = 2.4$ の $M = 8$）で、$SU(2)$ は横の T^2 を広げても渦の自由エネルギーが増えません（$\beta = 2.5$・$M = 8$ の対称点 $N_T = M = 8$ を除く）。$U(1)$ は二つの M で増えます。横広げの不等式の符号の、数値の兆候です。誤差は 0.1〜0.5 と大きく、β も二点だけです。$\beta = 2.4$ の $N_T = 8$ が $\beta = 2.5$ の同じ点より小さいのは、$\beta = 2.4$ では同じ格子が物理的に大きい（$L\sqrt{\sigma} \approx 2.2$ と 1.5）ことと合います。

03

板の弦の張力 — 増えて飽和する

一様な板の張力（26-02）の必要条件の一つは、板の弦の張力 $\sigma_{\text{eff}}(N_T)$ が N_T について大きく行き過ぎないことです。$SU(2)$、$\beta = 2.5$、$M = 16$ で、Creutz 比 (2) を測りました。四次元の値は $\sigma a^2 \approx 0.036$ です。

表 4　板の Creutz 比、400 測定（$SU(2)$、$\beta = 2.5$、$N_T \times N_T \times 16 \times 16$、種の数は記載なし） 読 — 数は 25-08 表 6 に載せた同じ測定です。数はここに写しません。

表 5　同じ設定で 5 倍の統計（2000 測定）と $N_T = 10$ 読 — 数は 25-08 表 7 に載せた同じ測定です。数はここに写しません。

読み 読。400 測定で見えた $N_T = 6$ の $\chi(4)$ の山（0.089 ± 0.013、$N_T = 8$ との差は約 2.3σ）は、2000 測定では 0.061 ± 0.004 になり、統計の揺らぎでした。$\chi(4)$ は $N_T = 4 \to 8$ で増え、$N_T = 10$ で 0.071（$N_T = 8$ との差 1.7σ）とほぼ飽和します。有意な行き過ぎは見えません。$\chi(4)$ は Coulomb の項を含むので、四次元の $\sigma a^2 \approx 0.036$ より大きく出ます。読むのは N_T についての傾向だけで、β は一点です。

04

渦の自由エネルギーの β 依存

表 6　$SU(2)$、$N_T = 4$、$M = 8$（$4 \times 4 \times 8 \times 8$、$n_{12} = 1$、レプリカ交換＋Bennett の受理比の方法、種の数は記載なし）読

β	2.2	2.3	2.4	2.45	2.5	2.55	2.6	2.7
ΔF	0.05 ± 0.05	0.00 ± 0.05	0.31 ± 0.10	0.30 ± 0.13	0.63 ± 0.18	0.66 ± 0.13	1.43 ± 0.19	2.97 ± 0.33

読み 読。誤差の範囲で β について単調に増えます。β 単調性（26-06 §02）と矛盾しない、という読みです（β 単調性は $SU(2)$ で示されていません）。$\beta \le 2.3$ で渦はほぼ自由（$\theta \approx 0$）、$\beta = 2.6$〜2.7 で急に高くなります。固定した格子 $4 \times 4 \times 8 \times 8$ が物理的に小さくなり、希薄な領域（$\theta \to 1$）に入るためと読めます。2.45 と 2.55 の点は、§05 の当てはめのために足した補間点です。

05

格子全体を 2 倍にする

繰り込みの比較（26-06 §05）を直接に試します。細かい格子（全ての方向を 2 倍）の ΔF を測り、それと同じ値を与える粗い格子の β' を、粗い格子の曲線（表 6 など）から読みます。漸近自由の予言は、$SU(2)$ で $\beta' < \beta$、走らない $U(1)$ で $\beta' \ge \beta$ です。

表 7　板 $(N_T, M) = (4, 8) \to (8, 16)$（$n_{12} = 1$）読

群	β	$\Delta F(4, 8, \beta)$	$\Delta F(8, 16, \beta)$：種ごと	統合	種	一致する β'	$\beta - \beta'$
$SU(2)$	2.7	2.97 ± 0.33	0.65 ± 0.39・1.31 ± 0.48（2 本目は交換の受理率の最小 0.10）	0.92 ± 0.30（誤差の重みつき平均）	2	≈ 2.57（曲線の誤差を入れて 2.45〜2.65）	$\approx +0.13$（$+0.05$〜$+0.25$）
$SU(2)$	2.6	1.43 ± 0.19	-0.57 ± 0.46・-0.41 ± 0.51	-0.50 ± 0.34（0 と整合）	2	$\lesssim 2.45$	$\gtrsim +0.15$
$SU(2)$	2.5	0.63 ± 0.18	0.41 ± 0.34	—	1	2.2〜2.5	0〜+0.3

群	β	$\Delta F(4,8,\beta)$	$\Delta F(8,16,\beta)$：種ごと	統合	種	一致する β'	$\beta-\beta'$
$U(1)$	1.5	0.83 ± 0.11	2.32 ± 0.45（レプリカ 48、交換の受理率の最小 0.37）	—	1	> 1.7（曲線の外）	< -0.2

$U(1)$ の粗い格子の曲線は $\Delta F(4,8,\beta') = 0.42, 0.55, 0.83, 0.92, 1.46$（$\beta' = 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7$）です。$U(1)$ の最初の実行（レプリカ 32）は -0.18 ± 0.12 でしたが、交換の受理率の最小が 0.03 で混ざりが悪く、使っていません。

読み 読。$SU(2)$ は 2 倍にすると渦の自由エネルギーが下がり（$\beta = 2.7$ で $2.97 \to 0.92$）、一致する β' は β より小さい。$U(1)$ は上がり（$0.83 \to 2.32$、約 3σ）、$\beta' > \beta$ です。比較の向きが二つの群で分かれました。$\beta = 2.7$ の $+0.13$ は、一ループの 0.258 と、既知の $a\sqrt{\sigma}$ の値から見込まれる約 0.23 より小さめです（約 1.5σ）。$U(1)$ の逆向きには、格子の小ささの人工物も含まれうる、と記録は注しています。

次は対称なトーラス N^4 で、$2^4 \to 4^4$ と $4^4 \to 8^4$ の二段を見ます。

表 8　$SU(2)$、対称なトーラスの $\Delta F(N^4,\beta)$（$n_{12} = 1$、種は各 1 本） 読

β	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.25	2.5	2.75	3.0
2^4	0.034	0.094	0.213	0.573	1.39	2.71	4.29	5.95	7.88
4^4	0.01	-0.01	0.01	0.01	-0.03	0.50	2.46	5.10	7.33

誤差は 2^4 で 0.01〜0.08、4^4 で 0.03〜0.26 です。$2^4 \to 4^4$ の一段の β'（4^4 の値を 2^4 の曲線に当てはめる）は表 9 のとおりです。

表 9　$SU(2)$ の $2^4 \to 4^4$ の一段 読

β	≤ 2.0	2.25	2.5	2.75	3.0
β'	< 1.0（曲線の外）	1.72	2.20	2.62	2.93
$\beta-\beta'$	> 0.75〜1	0.53	0.30	0.13	0.07

読める全ての β（1.75〜3.0）で $\beta - \beta' > 0$、つまり一段の階段関数に固定点がありません。強結合へ向かうほど一段の動きが大きく、弱結合の側で 0.07 まで小さくなるのは、2^4 が一ループの領域には小さすぎるための人工物と見られます。

表 10　$SU(2)$ の $4^4 \to 8^4$。ΔF は種ごとの値と、その単純平均（誤差は種の差の半分。三本の行は平均と散らばり） 読

β	$\Delta F(4^4)$：種ごと → 統合	$\Delta F(8^4)$：種ごと → 統合	種（8^4）	$\beta-\beta'$
2.1	—	-0.04 ± 0.17	1	—（≈ 0）
2.3	—	-0.04 ± 0.10	1	$\gtrsim 0.1$
2.5	2.46（1 本）	0.48 ± 0.48	1	$\approx +0.25$（$+0.19$〜$+0.5$）
2.6	3.96 ± 0.13（1 本）	—	—	—
2.7	4.96・4.47 → 4.72 ± 0.25	3.57・2.65 → 3.11 ± 0.46	2	$+0.16$（$+0.13$〜$+0.19$）
2.75	5.10・5.26 → 5.18 ± 0.10	—	—	—

β	$\Delta F(4^4)$：種ごと → 統合	$\Delta F(8^4)$：種ごと → 統合	種（8^4）	$\beta-\beta'$
2.8	5.33・5.87 → $\mathbf{5.60 \pm 0.27}$	—	—	—
2.9	6.88・6.23 → $\mathbf{6.56 \pm 0.33}$	5.68・3.52・4.84 → $\mathbf{4.68 \pm 0.63}$	3	$+0.20$（$+0.12$〜$+0.29$）
3.0	7.33・7.83 → $\mathbf{7.58 \pm 0.25}$	5.38・6.17 → $\mathbf{5.78 \pm 0.40}$	2	$+0.18$（$+0.14$〜$+0.25$）

読み 読。$4^4 \to 8^4$ でも、測った全ての β で $\beta-\beta' > 0$ で、平均は約 $+0.2$ です。一ループの漸近値 0.258 と、既知の $a\sqrt{\sigma}$ の値から見込まれる約 0.23 に近い値です。種の差が表示の誤差の 1〜2 倍になる点があり（$\beta = 2.9$ の 8^4 は 5.68 と 3.52）、誤差は小さめに出ている可能性が高い、と読みます。種一本だけの読み（$+0.08$〜$+0.13$）より、種を足した読みのほうが漸近的な振る舞いに近づきました。$\beta = 2.7$ の 8×16 の板の読み（表 7、$+0.13$）とも合います。

06

階段関数の符号 — U(1) の対照

同じ $2^4 \to 4^4$ の走査を、$U(1)$ で行いました。四次元の $U(1)$ は $\beta_c \approx 1.01$ に、閉じ込めの相から Coulomb の相への相転移を持ちます。

表 11　$U(1)$、対称なトーラスの $\Delta F(N^4, \beta)$ と $2^4 \to 4^4$ の一段（$n_{12} = 1$、種は各 1 本、誤差は記載なし）

読

β	**0.6**	**0.8**	**0.9**	**1.0**	**1.1**	**1.2**	**1.4**	**1.6**
2^4	0.14	0.62	1.15	1.80	2.46	3.10	4.18	5.23
4^4	0.00	0.00	0.05	1.07	2.71	3.68	4.46	5.85
$\beta-\beta'$	> 0.3	> 0.3	> 0.3	$+0.12$	-0.04	-0.11	-0.05	< 0

読み 読。$U(1)$ の $\beta-\beta'$ は、$\beta = 1.0$ と 1.1 の間で符号が反転します。既知の相転移 $\beta_c \approx 1.01$ の位置です。閉じ込めの相では $\beta' < \beta$、Coulomb の相では $\beta' > \beta$ です。$SU(2)$ は同じ走査で、測った全ての β で $\beta-\beta' > 0$ でした（表 9・表 10）。一段の階段関数の符号は、相転移の有無を見分ける診断として働いています。これは帯を閉じる議論が満たすべき基準「U(1) の転移と区別する」（26-06 §08）の、数値の姿です。

この符号の試験から言えるのは、8^4 までの格子と、表の β の点の上で、$SU(2)$ の符号が変わらなかったことだけです。$SU(2)$ に相転移が無いことの証拠ではありません。

関連して、速さを問わず $\Delta F(L, L) \to 0$ を見る中間の目標（26-06 §08）について、二つの読みがあります 読。$U(1)$（$\beta = 1.2$）の $2^4 \to 4^4$ は $3.10 \to 3.68$ と横ばいで、Coulomb の相で古典的な半磁束の値へ向かう描像と矛盾しません。$SU(2)$（$\beta = 2.75$）は $5.95 \to 5.10$ と下がります。

07

柱の偏り — ℓ × N の走査

柱の顔 $f(\ell)$（26-10 §02）を測ります。柱 $T^2_N \times \ell \times \ell$ の外枠を平衡な配位から取って止め、柱の中に n_{34} の面を入れたときの条件つきの自由エネルギー $\Delta F_B = \ln Z_B(+)/Z_B(-)$ と偏り $\theta_B = \tanh(\Delta F_B/2)$ を、枠ごとにレプリカ交換＋Bennett の受理比の方法で求め、枠について $\mathbb{E}|\theta_B|$ を取ります。チェス盤の評価（26-05）に入るのは、この $\mathbb{E}|\theta_B|$ です。$SU(2)$ は $\beta = 2.3$、$U(1)$ は Coulomb の相の $\beta = 1.3$ です。

表 12　$N = 4$ で ℓ を変える（括弧は枠の数） 読

ℓ	$SU(2)$、$\beta = 2.3$：$\mathbb{E}\lvert\theta_B\rvert$	$U(1)$、$\beta = 1.3$：$\mathbb{E}\lvert\theta_B\rvert$
2	0.93 ± 0.06（5）	—
3	0.58 ± 0.17（4）	0.95 ± 0.05（4）
4	0.23 ± 0.04（12）	0.61 ± 0.21（4）
5	0.07 ± 0.03（12）	0.49 ± 0.09（12）
6	0.09 ± 0.04（4）	0.41 ± 0.06（12）
8	—	0.25 ± 0.05（8）

$\ell \geq 5$ で、$SU(2)$ の柱の偏りは $U(1)$ の 1/5〜1/7 です。$U(1)$ はゆっくり減り（$\ell = 5 \to 8$ で約 $\ell^{-1.4}$）、$SU(2)$ は $\ell = 4 \to 5$ で 1/3 に落ちます。ただし $SU(2)$ の $\ell \geq 5$ の値は、枠ごとの統計誤差がつくる底（$|\theta_B|$ を正に偏らせる）に近く、$e^{-\sigma\ell^2}$ か冪かは、この大きさでは決められません。枠によって符号が変わることもあります（$\ell = 4$ の $SU(2)$ で ΔF_B の平均は -0.05）。ブロックを回るホロノミーが -1 に近い枠では、面のある区画のほうが好まれます。

表 13　$\ell = 5$ で N を変える（括弧は枠の数） 読

N	$SU(2)$、$\beta = 2.3$	$U(1)$、$\beta = 1.3$
4	0.07 ± 0.03（12）	0.49 ± 0.09（12）
6	0.20 ± 0.05（6）	0.97 ± 0.01（6）
8	0.39 ± 0.05（5。6 枠目は時間の上限で途中まで）	—

ℓ を止めると、どちらの群でも偏りは N とともに 1 に近づきます。偏りが小さいうちは、およそ N^2 に比例して増え（$\Delta F_B \propto N^2 f(\ell)$）、比例の係数は $SU(2)$ が $U(1)$ の約 1/7 です。群の違いは、θ を小さく保つのに要る ℓ の伸び方に出るはずなので、ℓ と N の両方を変えました。

表 14　$\ell \times N$ の走査：$\mathbb{E}\lvert\theta_B\rvert$（括弧は枠の数） 読

	$\ell = 4$	5	6	7	8	10
$SU(2)$、$\beta = 2.3$、$N = 4$	0.23（12）	0.07（12）	0.09（4）	0.11（4）		
$SU(2)$、$N = 6$	0.43（4）	0.20（6）	0.15（4）	0.08（4）		
$SU(2)$、$N = 8$	0.43（4）	0.38（5）	0.13（4）	0.29 ± 0.06（3）		

	$\ell = 4$	5	6	7	8	10
$U(1)$、$\beta = 1.3$、$N = 4$	0.61（4）	0.49（12）	0.41（12）		0.25（8）	0.27（4）
$U(1)$、$N = 6$		0.97（6）	0.98（4）		0.51（4）	0.45（4）

読み 読。$SU(2)$ は $N = 4, 6, 8$ のどれでも、$\ell \approx 6$〜7 で統計の底（約 0.1）まで下がり、要る ℓ は N とともにほとんど伸びません。$U(1)$ は $N = 4$ でも $\ell = 10$ で 0.27 に留まり、$N = 6$ では $\ell = 10$ でも 0.45 で、要る ℓ が N とともに伸び、下がり方も遅い。$N = 8$・$\ell = 7$ の 0.29 は 3 枠だけ（時間の上限で打ち切り）で、$\ell = 6$ の 0.13 より大きいのは枠の少なさによる揺らぎと見ます（3 枠とも $\Delta F_B > 0$、0.43〜0.85）。予想（$SU(2)$ は $\ell \sim \sqrt{\ln N}$、$U(1)$ は $\ell \propto N$）と矛盾しませんが、格子が小さく枠も少ないので、伸び方の形までは決められません。

08

$\mathbb{Z}_2$ のガラスの診断

$U = \sigma V$（$\sigma \in \mathbb{Z}_2$、V は $SO(3)$ の切断）と書くと、捩れの区画は「$SO(3)$ の背景の上の $\mathbb{Z}_2$ のランダムな面のゲージ模型」になります（26-10 §03）。面ごとの実効的な $\mathbb{Z}_2$ 結合は $K_p = (\beta/2)|\mathrm{tr}\, U_p|$、フラストレーション（$\mathbb{Z}_2$ の単極子）は $\prod_{p \in \partial c} \mathrm{sign}\, \mathrm{tr}\, U_p = -1$ となる立方体 c です。

表 15　$SU(2)$、周期的な 8^4、熱浴で熱化 150 回・測定 100 回（種の数は記載なし、誤差は記載なし） 読

β	$\langle P \rangle$	$\mathrm{tr}\, U_p < 0$ の割合	$\langle K \rangle$	$K < K_c = 0.4407$ の割合	フラストレートした立方体	p_{eff}
1.0	0.243	0.297	0.455	0.494	0.481	0.209
1.5	0.363	0.204	0.741	0.282	0.452	0.162
2.0	0.501	0.109	1.120	0.149	0.349	0.091
2.3	0.602	0.051	1.437	0.081	0.216	0.045
2.5	0.653	0.029	1.660	0.051	0.140	0.027
2.7	0.686	0.018	1.870	0.034	0.093	0.017

p_{eff} は、立方体のフラストレーションの密度 ρ を、独立な符号の反転の確率に $(1 - 2p_{\mathrm{eff}})^6 = 1 - 2\rho$ で換算した値です。K_c は純 $\mathbb{Z}_2$ のゲージ理論の転移点、比べる値は四次元のランダムな面のゲージ模型の Nishimori 多重臨界点 $p_c \approx 0.11$ です（照合未了）。

読み 読。$\beta \gtrsim 2.0$ では、平均の結合 $\langle K \rangle$ が K_c の 3〜4 倍で、$p_{\mathrm{eff}} < 0.11$ です。$\mathbb{Z}_2$ のガラスは秩序相の側にある見込みです。$\beta \lesssim 1.5$ では $p_{\mathrm{eff}} \geq 0.16$、柔らかい面（$K < K_c$）は 28〜49% で、無秩序の側です。独立な符号への換算は粗い（柔らかい面とフラストレーションは相関している）ので、境は目安です。この診断から、ガラスの道は帯の下半分に限られます（26-08 §05 の止まった道「ガラスの挟み撃ち」）。

09

小さな格子の人工物 — 読むときの注意の一覧

- **$N_T = 2$（および 2^4）は格子の人工物の領域。** $N_T = 2$ では T^2 の一辺が格子二つで、捩れのフラストレーションが大きく、連続の描像（分数インスタントンの気体）からは遠い。$2^4 \to 4^4$ の一段の $\beta - \beta'$ が弱結合の側で 0.07 まで下がる（表 9）のも、2^4 が一ループの領域に小さすぎるためと見られます。$N_T = 2$ の値は「向きの参考」にとどめます。
- **θ の天井。** θ が 1 の程度の幾何（表 1 の $M = 8$）では、$\theta \le 1$ のために比が抑えられ、群の違いの判別力が弱くなります。
- **統計の底。** 柱の偏り $\mathbb{E}|\theta_B|$ は、枠ごとの統計誤差で正に偏ります。0.1 程度の値は底に近く、面積の指数か冪かは決められません（表 12・表 14）。
- **Coulomb の項。** 小さな R の Creutz 比は Coulomb の項を含み、張力を大きめに見積もります（表 4・表 5）。
- **混ざりの悪さ。** レプリカ交換の受理率の最小が小さい実行（$U(1)$ のレプリカ 24・32、$SU(2)$ の 2 本目の 0.10）は、値が大きく揺れます。使わなかった実行は表の注に書きました。
- **種の数と誤差。** 種は 1〜3 本です。種を替えた二本の差が表示の誤差の 1〜2 倍になる点があり、誤差は小さめに出ている可能性が高い。
- **β の合わせ方。** $U(1)$ と $SU(2)$ の β は、同じ物理の大きさに合わせたものではありません。比べているのは、それぞれの群の中での向き（符号）だけです。
- **撤回した測定。** 容器を同時に反転させる測定を「帯の数値の姿」として読むことは撤回しました。一段の核の反転の確率が 1/2 程度で頭打ちになり、出るのは $U(1)$ も満たす弱い形だけだからです（26-08 §05 の止まった道「反転の証明書」）。測定そのものは 25-08 にあります。

10

五分類の表と依存グラフ

この頁の行は全て数値の読みです。札は「読」で、物理の見立てを含む読みには「(物理)」を添えます。

表 16　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	T^2 を広げると $U(1)$ の ΔF は増え、$SU(2)$ は増えない	読	表 1〜表 3	$M = 8, 12$・$\beta = 2.4, 2.5$（$SU(2)$）・$\beta = 1.5$（$U(1)$）・$N_T \le 8$	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
2	板の $\chi(4)$ は N_T とともに増えて飽和し、有意な行き過ぎは無い	読	表 4・表 5	$\beta = 2.5$・$M = 16$・2000 測定・$N_T \le 10$	—
3	ΔF は β について増える	読	表 6	$4 \times 4 \times 8 \times 8$・$\beta = 2.2$〜$2.7$	—
4	格子全体を 2 倍にすると、$SU(2)$ は $\beta' < \beta$、$U(1)$ は $\beta' > \beta$	読	表 7〜表 10	$(4,8) \to (8,16)$・$2^4 \to 4^4$・$4^4 \to 8^4$・種 1〜3 本	—
5	$4^4 \to 8^4$ の $\beta - \beta'$ は平均約 $+0.2$ で、一ループの 0.258 に近い	読	表 10	$\beta = 2.5$〜3.0・種 1〜3 本	—
6	$U(1)$ の一段の符号は $\beta = 1.0$ と 1.1 の間で反転し、$SU(2)$ は測った範囲で反転しない	読	表 9・表 11	$2^4 \to 4^4$・種 1 本	—
7	柱の偏りを小さく保つ ℓ は、$SU(2)$ では N とともにほとんど伸びず、$U(1)$ では伸びる	読	表 12〜表 14	$N \le 8$・$\ell \le 10$・枠 3〜12	—
8	$\beta \gtrsim 2$ で $\mathbb{Z}_2$ のガラスは秩序相の側、$\beta \lesssim 1.5$ で無秩序の側	読（物理）	表 15	8^4・独立な符号への換算は粗い	—
9	1〜7 の測定は、横広げの不等式・繰り込みの比較・基準「U(1) の転移と区別する」の向きと矛盾しない	読（物理）	§02〜§07	小さな格子の傾向。証拠ではない	—

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
1  読   T² を広げる：U(1) は上がり SU(2) は上がらない          M = 8, 12
2  読   板の張力は増えて飽和                                  β = 2.5・2000 測定
3  読   ΔF は β について増える                                4×4×8×8
4  読   2 倍の試験：SU(2) は β' < β、U(1) は逆 ⟸ 3           種 1〜3 本
5  読   4⁴ → 8⁴ の β − β' ≈ +0.2 ⟸ 4                          種 1〜3 本
6  読   階段関数の符号：U(1) は β_c で反転 ⟸ 4                2⁴ → 4⁴
7  読   柱の偏りの ℓ × N                                      N ≤ 8・ℓ ≤ 10
8  読   Z₂ のガラスの診断                                      8⁴
9  読   向きの整合 ⟸ 1・2・4・6・7                             傾向
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。この頁には「初」「典」「仮」の行がありません。帯を渡る文（一様な板の張力・横広げの不等式・繰り込みの比較）の節点も無く、それらは仮定として第 27 部の条件の台帳（27-02）に置かれています。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
読 小さな格子で、T^2 を広げる・格子を 2 倍にする・柱を広げる、のどの試験でも $SU(2)$ と $U(1)$ の向きが分かれること	大きな格子での振る舞い。値の決定。横広げの不等式・繰り込みの比較そのもの
読 $U(1)$ の階段関数の符号が既知の転移の位置で反転し、$SU(2)$ は測った範囲で反転しないこと	$SU(2)$ に相転移が無いこと
読 （物理） $\mathbb{Z}_2$ のガラスが帯の上半分で秩序相の側にあること	ガラスの相の境の位置（換算が粗い）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
全ての表	読	この本の検討の数値の記録（渦の挿入の数値計算：大域の流束の自由エネルギー・板の弦の張力・β 依存・繰り込みの比較の試験・対称なトーラスの階段関数の走査・$U(1)$ の対照・$4^4 \to 8^4$ の追加と種の統合・柱の捩れのコスト・$\mathbb{Z}_2$ のガラスの診断）と、移り変わりの帯を閉じる道の整理の数値の節。レプリカ交換と Bennett の受理比の方法、熱浴、Creutz 比
$U(1)$ の相転移 $\beta_c \approx 1.01$	読	格子の数値の既知の値（5-06）
Nishimori 多重臨界点 $p_c \approx 0.11$	照合未了	四次元のランダムな面のゲージ模型の数値の文献
一ループの 0.258	初	章 25-07（一ループの水準）

この章で使った語 — 渦の自由エネルギー ΔF・区画の偏り θ・Creutz 比・レプリカ交換・Bennett の受理比の方法・階段関数・柱の偏り $\mathbb{E}\lvert\theta_B\rvert$・$\mathbb{Z}_2$ のガラス・フラストレーション。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：26-10 新しい見方の候補 — これらの傾向を、どの局所量の不等式に育てるか。

新しい見方の候補

この章は未解決の問いの地図です。閉じた部品と閉じない部品の境を示します。

この章で分かること — 移り変わりの帯の真ん中を渡るには、非可換性を使う不等式が一つ要る、というところまで絞れています（26-06 §07）。この章は、その一つをどの局所量で書くかの候補を並べます。四つの顔——捩れの向きの柔らかさ κ_w・箱の磁束の混合 $\delta(L_0)$・柱の捩れのコスト $f(\ell)$・圧力の余裕——について、担う局所量、$SU(2)$ で成り立つと見る理由、$U(1)$ で壊れる場所、数値の有無を書きます（§02）。帯の下半分に限った $\mathbb{Z}_2$ のガラスの表示（§03）、検討の結果否定的だった共形な枠 $H^2 \times S^2$（§04）、そして新しい三つの候補——帯のコンパクト性による還元・Weyl の測度の対数凹性と高さ・方位の分解・柱の局所の階段関数（§05）——を置きます。

前提となる章 — 26-06（繰り込みの比較・四つの顔の一覧・還元の補題）・26-08（止まった道と選別の基準）・26-09（測った記録）・25-03（容器）・26-01（帯の正しい形）。

先に言うこと — この頁の候補は、どれも**物理の見立ての水準**のものです。どの候補も帯を閉じず、帯のどの β でも定理を与えません。紙の証明を置くのは、候補の足場になる初等的な事実（輸送の恒等式・Jensen の挟み・射影の密度など）だけで、それぞれに「初」を付けます。候補が当たる見込みの数は書きません（見込みの数は判断の補助にすぎず、根拠のある数ではないため）。

この章の順序

1. 候補の読み方 — 候補が通るべき関所
2. 真ん中の帯の四つの顔（表 1）
3. $\mathbb{Z}_2$ のガラス — 帯の下半分に限る
4. 共形な枠 $H^2 \times S^2$ — 検討の結果否定的
5. 三つの新しい候補 — コンパクト性による還元・Weyl の測度・柱の階段関数
6. ほかの五つの候補（表 2）
7. 言えないこと

8. 五分類の表と依存グラフ

01

候補の読み方 — 候補が通るべき関所

この頁の候補は、26-08 §07 の選別の基準を関所として通してから並べています。とくに次の四つを、各候補で名指しします。

- **非可換性を本質的に使うか**。$U(1)$ で同じ結論が出る候補は誤りです。各候補に「$U(1)$ で壊れる場所」を書くのはこのためです。試験の相手を U(1) のほかへ広げた表は 26-12 に在ります。
- **一ループの言い換えでないか**。一ループでは漸近自由そのものになる量は、それだけでは足りません。
- **小さな尺度で破れないか**。主張は $\ell \geq \ell_{\min}$ のように、格子の人工物の外に限った形にします。
- **$U(1)$ の帯の中の転移（$\beta \approx 1.01$）と区別するか**。

候補ごとに、(i) 担う局所量、(ii) $SU(2)$ で成り立つと見る理由（非可換性が入る場所）、(iii) $U(1)$ と $\mathbb{Z}_2$ で壊れる場所、(iv) 台帳（26-08）との照合、(v) 数値の有無、を書きます。札は、初等的な事実に「初」、数値に「読」、見立てに「読（物理）」です。

02

真ん中の帯の四つの顔

帯を渡る非可換な不等式を、どの局所量で書くかの候補が四つあります。どれか一つを、尺度に一様に、$U(1)$ で破れる形で示せばよい、という意味で「顔」と呼びます。どの顔でも、尺度をまたぐ比較（例えば $f(2\ell, 2N, \beta) \leq K f(\ell, N, \beta')$）は大域の繰り込みの比較と同じ難しさの局所版で、易しくなるわけではありません。顔を替えて得るのは、証明の対象が「境界を止めた有限の領域の言明」に変わることです。

表 1　四つの顔（予想と理由は物理の見立て。数値は読）

顔	担う局所量	$SU(2)$ で成り立つと見る理由	$U(1)$・$\mathbb{Z}_2$ で壊れる場所	数値

顔	担う局所量	$SU(2)$ で成り立つと見る理由	$U(1)$・$\mathbb{Z}_2$ で壊れる場所	数値
捩れの向きの柔らかさ κ_w	幅 w の帯の中で、捩れの生成場に沿った力の分散（適応した剛性）	w とともに減る。Nielsen–Olesen の柔らかい方向で、一ループのスピンの項 $+4$ の非摂動版	$U(1)$ はスピンの項が無く $\kappa_w \geq c\beta$。$\mathbb{Z}_2$ は連続な道が無く、細い面（面積あたり 2β）しか使えない	無し
箱の磁束の混合 $\delta(L_0)$	箱の境界の中心の磁束を変えたときの、内側の立方体の法則の全変動距離	L_0 とともに指数的に 0 へ	$U(1)$ の Coulomb の相では $O(\beta)$ のまま残る	無し
柱の捩れのコスト $f(\ell)$	外枠を止めた $T^2_N \times \ell \times \ell$ の柱の、捩れの条件つきの自由エネルギーと偏り $\mathbb{E}\lvert\theta_B\rvert$	$e^{-\sigma\ell^2}$ の型	$U(1)$ は $\pi^2\beta/\ell^2$ の型、$\mathbb{Z}_2$ は $\approx 2\beta$	有り（26-09 §07）
圧力の余裕	捩れの模様を入れた系と入れない系の圧力の差 $p_\infty - p_{G,L}$（チェス盤の密度 κ_{cb} の指数）	中間の β で正の余裕が残る	$U(1)$ は小さな κ_{cb} を作らない	無し

捩れの向きの柔らかさ κ_w — 輸送で区画をつなぐ

足場になるのは、区画を写す写像による自由エネルギーの恒等式です。区画 0 の配位空間から区画 1 の配位空間への可測な全単射 T（Jacobian J_T）を取り、μ_0, μ_1 を二つの区画の Gibbs 測度、$\Delta F = -\ln(Z_1/Z_0)$ とすると

$$\Delta F \;=\; \mathbb{E}_{\mu_0}\big[S\circ T - S - \ln J_T\big] \;-\; \mathrm{KL}\big(T_{\#}\mu_0 \,\big\|\, \mu_1\big) \tag{1}$$

が成り立ちます 初。

証明。変数変換で $Z_1 = \int e^{-S(Tx)} J_T(x)\,dx$ なので、$G := S\circ T - S - \ln J_T$ と置くと $Z_1/Z_0 = \mathbb{E}_{\mu_0}[e^{-G}]$。測度 $\tilde\mu \propto e^{-G}\mu_0$ は μ_1 を T^{-1} で引き戻したもので、$\mathrm{KL}(\mu_0\|\tilde\mu) = \mathbb{E}_{\mu_0}[G] + \ln \mathbb{E}_{\mu_0}[e^{-G}]$。$T$ が全単射なので $\mathrm{KL}(\mu_0\|\tilde\mu) = \mathrm{KL}(T_{\#}\mu_0\|\mu_1)$。整理すると (1)。∎

(1) の第一項は「写像の作用の費用」、第二項は余りです。写像 T が決定論的だと、余り（相対エントロピー）は渦の面の面積とともに増えるので、$e^{-\sigma A}$ 型の面積則は出ません 読（物理）（26-08 §05 の止まった道「決定論的な挟み撃ち」）。したがって輸送の道の目標は、面積則ではなく、定性的な $\Delta F(L,L) \to 0$（26-06 §08 の中間の到達点）です。

(ii) $SU(2)$ で成り立つと見る理由 読（物理）。捩れの生成場に沿って区画を写す「適応した」写像は、変数を三角に変換するもので $J_T = 1$、つまり体積を保ちながら揺らぎの形を変える写像です。25-07 の原理——体積を保つことでなく、揺らぎの形を変えないことが反遮蔽の

$+4$ を見えなくする——の非摂動版にあたります。κ_w は、その写像の作用の費用の揺らぎの大きさで、幅 w の帯の中で Nielsen–Olesen の柔らかい方向が効けば w とともに減ると見ます。

(iii) 壊れる場所。$U(1)$ にはスピンの項が無く、$\kappa_w \geq c\beta$ が残ります。$\mathbb{Z}_2$ には区画をつなぐ連続な道が無く、細い面（面積あたり 2β）しか使えません。**(iv) 台帳**：表 1 の 25（スピンと指数定理は一ループで漸近自由の言い換え）に当たる危険があり、非摂動の部分を分散 κ_w の評価として切り出せるかが分かれ目です。**(v) 数値**：無し。

箱の磁束の混合 $\delta(L_0)$ — 有限の箱の判定

Dobrushin–Shlosman 型の有限サイズの判定の、ゲージ版の候補です。目標の形は「$\delta(L_0,\beta) \leq \varepsilon_d$ ならば面積則」で、判定そのものは書き下されていません 読（物理）。相関不等式（GKS）を使わないので、$SU(2)$ に GKS が無いという障害（表 1 の 2・4）には当たりません。

$SU(2)$ では $\delta(L_0)$ が L_0 とともに指数的に 0 へ向かうと見ます。$U(1)$ の Coulomb の相では、Gauss 近似の Villain 模型で相対エントロピーが L_0 に依らず $O(\beta)$ で残ります（見立ての水準の勘定）読（物理）。注意：通常の Dobrushin の判定を枠つきで使うと、連続な場が境界に追随して影響係数がほぼ 1 になります（26-08 の止まった道「Dobrushin 型の判定」）。$\delta(L_0)$ が中心の磁束だけを変える量なのは、この追随を避けるためです。数値は無し。

柱の捩れのコスト $f(\ell)$ — 箱の Wilson ループと同じ量

柱の内部は、骨格 Σ（柱の外枠）を与えると条件つきで独立なので

$$|\theta| \;\leq\; \mathbb{E}\prod_{B} |\theta_B(\Sigma)| \tag{2}$$

が成り立ちます 初（25-03 §03 の容器の恒等式と同じ枠組みで、新しい内容はありません）。新しいのは $f(\ell)$ の読み方です。外を止めた箱の中の電気的な流束は、**箱の Wilson ループの面積則と同じ量**です 読（物理）。すると輪が一つできます：Tomboulis–Yaffe の不等式（θ から Wilson の面積則、26-01 §04）と、(2)（箱の Wilson の面積則から θ）です。

輪を回すには二つ足りません（開）：周期的な境界条件と止めた境界条件の比較、そして $\ln N$ の損失です。損失が残っても $\ln(1/\theta(L,L)) \geq cL^2/\ln L$ は出て、Tomboulis–Yaffe を通せば $\langle W\rangle \leq 2\exp(-cA/\ln A)$（周長則より速い減衰）になる、という見立てです 読（物理）。

数値は有ります（26-09 §07）読。外枠を止めた $T_4^2 \times \ell \times \ell$ で、$\ell \geq 5$ の $SU(2)$（$\beta = 2.3$）の $\mathbb{E}|\theta_B|$ は $U(1)$（$\beta = 1.3$）の 1/5〜1/7 で、θ を小さく保つのに要る ℓ は $SU(2)$ では $N \leq 8$ で 6〜7 とほとんど伸びず、$U(1)$ では伸びます。この大きさでは、止めた境界条件と周期的な

境界条件の違いは問題になっていないように見えます。ただし $SU(2)$ の値は統計の底に近く、$e^{-\sigma \ell^2}$ と冪の区別はつきません。

圧力の余裕 — 計算機援用の挟み撃ち

チェス盤の密度を $\kappa_\Lambda = \exp(|B|(p_{G,\Lambda} - p_\Lambda))$（$p_G$ は捩れの模様を入れた系の圧力、$|B|$ はタイルの体積）と書きます。上からは、模様が鏡映対称なら周期の転送行列が正で、Schatten ノルムの単調性から $p_{G,\Lambda} \le p_{G,L}$（$\Lambda$ が L の倍数）。下からは $p_\Lambda \ge p_\infty$ と、無限体積の圧力の下界 p_{lb} をループ方程式のブートストラップの双対の証明書（Kazakov–Zheng の方法、照合未了）から取る。合わせると $\kappa_\Lambda \le \exp(|B|(p_{G,L} - p_{\mathrm{lb}}))$ が Λ に一様になり、固定した β で明示的な張力の面積則が出る、という見立てです 読（物理）。

この顔は帯（格子間隔に一様）を越えません。得られるとすれば、四次元 $SU(2)$ の中間の結合（例えば $\beta = 1.0$）での、固定した β の閉じ込めです。探した範囲で、その証明は見当たりません。§05 の還元（候補「帯のコンパクト性による還元」）と組むと、この種の固定した β の結果がそのまま帯の部品になります。$U(1)$ の $\beta = 1.2$ は小さな κ を作らないはずで、対照に使えます。数値は無し。

03

$\mathbb{Z}_2$ のガラス — 帯の下半分に限る

$SU(2)$ の元を $U = \sigma V$（$\sigma \in \mathbb{Z}_2$、V は $SO(3)$ の切断）と書くと、捩れの区画の分配関数は $Z_n = \int d\omega\, Z_n(\omega)$ と書けます。$Z_n(\omega)$ は、$SO(3)$ の背景 ω が決める結合 $\beta J_p(\omega)$（$J_p = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\, V_p$、符号はランダム）と捩れ n を持つ $\mathbb{Z}_2$ ゲージ理論の分配関数です。$X(\omega) = \ln Z_0(\omega)/Z_1(\omega)$ と置き、$P_n(d\omega) \propto Z_n(\omega) d\omega$ とすると

$$\mathbb{E}_{P_1}[X] \;\le\; \Delta F \;\le\; \mathbb{E}_{P_0}[X] \qquad (\Delta F = \ln Z_0/Z_1) \tag{3}$$

です 初。

証明。$Z_0/Z_1 = \int Z_1(\omega) e^{X(\omega)} d\omega / Z_1 = \mathbb{E}_{P_1}[e^X] \ge e^{\mathbb{E}_{P_1} X}$（Jensen）から左側。同様に $Z_1/Z_0 = \mathbb{E}_{P_0}[e^{-X}] \ge e^{-\mathbb{E}_{P_0} X}$ から右側。∎

(3) の右辺は、$SO(3)$ の背景で焼き入れた $\mathbb{Z}_2$ のランダムな面のゲージ模型の、捩れの自由エネルギーです。この表示だけなら $U(1)$ にも同じものがあるので、基準「U(1) の転移と区別する」は満たしません。群の区別は、背景のフラストレーション（$\mathbb{Z}_2$ の単極子）と柔らかい面の密度という**力学の量**に入ります 読（物理）。

診断の結果（26-09 §08）読。8^4 で、$\beta \gtrsim 2.0$ では実効的な $\mathbb{Z}_2$ 結合の平均が 1.1〜1.9 と純 $\mathbb{Z}_2$ の転移点 0.44 を大きく超え、フラストレーションを独立な符号に換算した p_{eff} は 0.017〜0.09

で、Nishimori 多重臨界点 0.11 より小さい。**帯の上半分では、ガラスは秩序相の側**にあります。$SO(3)$ の場がすでに区画を見分けてしまい（$|X|$ が大きい）、挟み (3) は大きく緩みます。そこでの閉じ込めは $SO(3)$ の部分（太い中心渦）が担う、と読めます。弱結合で中心渦が太いという物理の描像と合います 読（物理）。

$\beta \lesssim 1.5$ では $p_{\mathrm{eff}} \geq 0.16$、柔らかい面は 28〜49% で、ガラスは無秩序の側です。したがって**ガラスの道は帯の下半分に限ります**。上半分については捨てました（26-08 §05 の止まった道「ガラスの挟み撃ち」）。下半分での使い方の候補は、箱の磁束の混合の変種で、外を $SO(3)$ の部分だけで条件づけ、境界の中心の流束（$\mathbb{Z}_2$ の符号）だけを裏返したときの内側の法則の全変動距離 $\delta_c(L_0, \beta)$ を測るものです。$SO(3)$ の枠は動かないので、連続な場が境界に追随する障害（Dobrushin 型の判定）を避けられます。残る結合は $\mathbb{Z}_2$ のガラスだけです。帯の上半分では δ_c も 1 に近いはずで、この変種は帯の下の端を押し上げる作業（26-06 §04）の側に属します 読（物理）。

04

共形な枠 H² × S² — 検討の結果否定的

$\mathbb{R}^4$ から一本の直線を除いた空間は、$H^2 \times S^2$ に共形です 初：直線からの距離を r、直線に沿う座標を t とすると

$$dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \;=\; r^2\Big[\frac{dt^2 + dr^2}{r^2} + d\Omega^2\Big] \tag{4}$$

で、括弧の中は双曲平面 H^2（上半平面のモデル）と単位球面の積です。直線の上に 't Hooft の線を置くと、直線を囲む全ての球面に $\mathbb{Z}_2$ の流束 1 が乗ります（$n_{12} = 1$ の正確な類似）。そして、点 $(t, r) \in H^2$ に対応する球 $\{t\} \times S^2_r$ は、半平面の中のループ C と、(t, r) が C の囲む領域の内側にあるとき、かつそのときに限り奇数回まわります 初（球が張る三次元の球体と C の交点は、線分 $\{t\} \times [0, r)$ と C の交点）。$\mathbb{R}^4$ で局所的な閉曲面を使う道を止めた位相的な障害（表 1 の 8：閉曲面は平面と偶数回交わる）を、直線を「外側」として使うことで避けている形です。直線の近く（$r \to 0$）が小さな球の領域（弱結合）、遠く（$r \to \infty$）が赤外で、**尺度が位置に変わります**。

見込みがあったのはここまでで、検討の結果は否定的でした 読（物理）。

- 高さ r・双曲的な大きさ 1 の容器は、ユークリッドの大きさが r の程度で、球 S^2_r を持ちます。これは帯の量 $\theta(r, r)$ そのもの（T^2 の代わりに S^2）です。
- 双曲的な入れ子：高さ $2r$ の単位の容器（$[-r, r] \times [r, 3r]$ 程度）の双曲面積は $2r\,(1/r - 1/(3r)) = 4/3$ で、高さ r の単位の容器は 1〜2 個しか入りません 初（積分の計算）。双曲面

積は形を止めた拡大で変わらないので、入れ子で部分の容器の数は増えず、出るのは $\theta(2r) \le \theta(r)^{1.3}$ 程度で、平面の入れ子の指数 4 になりません。

- 半平面のループ（高さ d から $d+\ell$、長さ T）の双曲面積は $T(1/d - 1/(d+\ell)) \approx T/d$ で、高さに依らない一様な θ_0 からは周長則しか出ません。面積則には、高さ r の単位の容器で $\theta \le e^{-c(r\Lambda)^2}$、つまり帯と同じ条件が要ります。

結論：共形な枠は「尺度の変化＝H^2 の中の平行移動」として繰り込みを空間の言葉にしますが、運動学だけでは面積則は出ず、核心（漸近自由による乱れの増加）は同じ場所に残ります。価値は、$\mathbb{R}^4$ の段（16-09 ）を板を経由せずに述べる枠組みとしての見通しの良さにあります。't Hooft の線のある測度でのループと、線の無い $\mathbb{R}^4$ のループの関係は開いていて、比較原理が失敗した前例（26-08 §04）があります。

05

三つの新しい候補

帯の候補を八つ検討し、そのうち三つをここに置きます（残りは §06）。選んだ理由は、帯のコンパクト性による還元は紙で確実に書ける還元で、帯の「どこが本当に難しいか」を動かすこと、候補「Weyl の測度の対数凹性」は二次元の関所で四次元より先に安く試せ、単調性の源と乱れの機構が逆向きになる型（26-08 §01 の教訓）に当たらない数少ない形であること、候補「柱の局所の階段関数」は既にある柱の数値の道具でそのまま試せ、基準「U(1) の転移と区別する」を直接見られることです。

帯のコンパクト性による還元

(i) 一行。帯は β について有界な閉区間 $I = [\beta_a, \beta_b]$ なので、帯の中の繰り込みの比較は、β' を β から少し下げるだけで成り立ち、帯は有限回の段で渡れる。要るのは帯の各 β での「固定した β の閉じ込め（周長の次数の誤差つきの両側の漸近）」だけ。

これは 26-06 §06 の帯の中の比較の還元の補題として、証明つきで置かれています 初（固定した β の両側の面積則・率の一様な正値と連続性・$N \ge N_1$・$M \ge M_0$ の下）。ここでは「見方」としての意味だけを書きます。

(ii) 担う局所量。固定した β での、大きな体積の渦の自由エネルギーの両側の評価。局所量としては、柱の偏りの、$\ell \gg \xi(\beta)$ での面積の率 $\sigma_N(\beta)$ と、周長の次数の誤差 p。

(iii) 非可換性の入る場所 読（物理）。補題そのものは群に依りません。非可換性は全て仮定（帯の中の $SU(2)$ の閉じ込め）に入ります。この候補は道具でなく還元で、難しさの場所を移すためのものです。還元の後、帯の中に残るのは固定した β の問題（体積に一様な評価・凸で

ない大きな場・相転移が無いこと）で、尺度をまたぐ難しさは帯の上端（相関長 $\xi(\beta)$ が格子単位で急に伸びる所）と紫外の制御の継ぎ目に寄ります。

(iv) 壊れる場所。$U(1)$（$\beta \in (1.01, 2.7)$）と $\mathbb{Z}_2$（転移より弱結合の側）では仮定が偽なので、結論も出ません。基準「U(1) の転移と区別する」は仮定が担います。

(v) 台帳との照合。表 1 の 6（小さな T^2 から連続に延ばす背理法）とは違い、使う連続性は β についての有限体積の量の連続性だけです。連続極限の結合の階段関数を有界な区間で考える着想と同じ精神ですが、こちらは格子の β で止めて、連続極限を経ません。

(vi) 既知の結果との関係。強結合の側では、ちょうどこの形の言明が筋の水準であります（26-06 §03 の強結合の端の展開の命題）。帯の中の $\beta \approx 1$ での四次元 $SU(2)$ の格子の閉じ込めの証明は、探した範囲で見当たりません（強結合の側の最前線は小さな β、26-08 §07）。Chatterjee（arXiv:2006.16229、抄録で確認・本文は照合未了）は、中心が非自明で、任意の境界条件の下で相関が指数的に減衰すれば中心対称性は破れず、破れなければ閉じ込める、という形の結果を与えています。固定した β の定性的な閉じ込めへの入口になりえますが、固定した β の両側の面積則の周長の次数の精度は出しません。

(vii) 次に要るもの。固定した β の両側の面積則の上側を、有限の箱の判定（箱の磁束の混合・圧力の余裕）で β ごとに出す道と、下側（渦が安すぎないこと＝弦の張力の上界）を試行の渦の変分で出す道です。どちらも固定した β の問題で、箱の大きさは $\xi(\beta)$ 程度で済みますが、帯の上端では $\xi(\beta)$ が格子単位で 10 を超え、四次元の有限の箱の計算は規模で止まります（表 1 の 3）。数値は無し。

Weyl の測度の対数凹性と、高さ・方位の分解

(i) 初等的な事実 初。単位球面 $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ の一様な測度を一つの座標 t に射影した密度は

$$\rho_n(t) \;\propto\; (1-t^2)^{(n-3)/2}, \qquad t \in [-1,1] \tag{5}$$

です。**証明**。高さ t の切り口は半径 $\sqrt{1-t^2}$ の球面 S^{n-2} で、その面積は $(1-t^2)^{(n-2)/2}$ に比例し、高さ dt の帯の幅（球面に沿う長さ）は $dt/\sqrt{1-t^2}$ です。掛けて (5)。∎ よって $n \geq 3$ で ρ_n は対数凹（$n=3$ で平ら）、$n=2$ で対数凸（逆正弦の分布）です。$SU(2) \cong S^3$（$n=4$）では $t = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\, U$ の密度は $\propto \sqrt{1-t^2}$（Weyl の測度）、$U(1) = S^1$ では $\propto 1/\sqrt{1-t^2}$ です。

二次元の $O(3)$ 模型では、スピンを $s = (\sqrt{1-t^2}\cos\varphi,\ \sqrt{1-t^2}\sin\varphi,\ t)$ と書くと、S^2 の一様な測度は $dt\, d\varphi/(4\pi)$ で（(5) の $n=3$）、$s_i \cdot s_j = \sqrt{(1-t_i^2)(1-t_j^2)}\cos(\varphi_i - \varphi_j) + t_i t_j$ なので、高さ t を条件にした方位 φ の模型は、結合 $J_{ij} = \beta\sqrt{(1-t_i^2)(1-t_j^2)} \geq 0$ の XY 模型です初。フラストレーションはありません。

(ii) 担う局所量。ブロック $b \times b$ の粗い変数で測った、方位の実効結合 $J_{\text{eff}}(b)$ と、高さの揺らぎ。

(iii) 成り立つと見る理由 読（物理）。条件つきの方位の模型は強磁性なので、XY の Ginibre の不等式（照合未了）が向きよく使えます：結合を下げると相関が下がる。指数減衰に要るのも相関の上界なので、**単調性の源と乱れの機構が同じ向きを向きます**。乱れは高さの揺らぎ、つまり $n \geq 3$ の測度 (5) から来ます。$O(2)$ には高さがありません。

(iv) 壊れる場所。$O(2)$：高さが無く、方位は結合 β の XY のまま（KT 相）。四次元の $U(1)$：類の向きの自由度（S^2）が無い。$\mathbb{Z}_2$：連続な方位が無い。

(v) 台帳との照合と危険。表 1 の 22（一点の Bakry–Émery）・26（曲率の繰り込み）と違い、曲率でなく射影の対数凹性と条件つきの Ginibre を使います。表 1 の 10（$\mathbb{Z}_2$ の GKS）と違い、条件つきの模型にフラストレーションがありません。危険は二つです。(a) 赤道の向きの埋め込みで逆の結論（$O(3)$ に KT 型の相がありうる）を論じた Patrascioiu–Seiler の議論（照合未了）があり、この候補はその論争の場所に立ちます。(b) 一サイトの水準では J_{ij} の典型値が KT の閾値を超え、比較は何も言いません。効くとすればブロックの水準だけで、そこには Ginibre の比較が直接には無く、迂回の移しかえの型の危険があります。

(vi) 四次元へ。$U = t + i\sqrt{1-t^2}\, n \cdot \sigma$（$n \in S^2$ は類の向き）の n を条件にした残りの $U(1)$ が強磁性になる表示が要りますが、作れていません。二次元の格子の $O(n)$（$n \geq 3$）で全ての温度の指数減衰を示すこと（Polyakov の予想）は未解決です（26-08 §07 の基準「最小の帯を渡れる」）。

(vii) 数値。無し。最初の試験の形は決まっています：二次元の $O(3)$（$\beta = 1.5, 1.7$）・対照の $O(2)$（KT 相と無秩序相）・補助の $O(4)$（高さの密度が $SU(2)$ と同じ $\sqrt{1-t^2}$）で $J_{\text{eff}}(b)$ を測り、$O(3)$ で相関がすでに減衰している大きさでも J_{eff} が KT の目安を超えたままなら、この候補を捨てる。$O(2)$ で J_{eff} が b とともに下がれば、測り方が機械的に結合を下げているとして結果を使わない。ブロックの水準の Ginibre の比較は定理として存在しないので、通っても必要条件の見張りにとどまります。

柱の局所の階段関数

(i) 一行。大域の ΔF の繰り込みの比較を、外枠を止めた柱の量の比較に置き換える：

$$f(2\ell, 2N, \beta) \;\leq\; K \cdot f(\ell, N, \beta')^{c}, \qquad \beta' < \beta, \;\; \ell \geq \ell_{\min} \tag{6}$$

（K・c は ℓ・N に依らない）。**(ii) 担う局所量**。柱 $T^2_N \times \ell \times \ell$（外枠は平衡な配位で止める）の条件つきの捩れの自由エネルギー ΔF_B と偏り $\theta_B = \tanh(\Delta F_B/2)$。比べる量は、枠についての ΔF_B の中央値（符号つき）と $\mathbb{E}|\theta_B|$ の二つ。

(iii) 成り立つと見る理由 読（物理）。既にある数値（26-09 §07）で、θ を小さく保つのに要る ℓ は $SU(2)$ では N とともにほとんど伸びず、$U(1)$ では伸びます。非可換性は、渦が T^2 の大きさの塊（分数インスタントン）に局在できる所に入ります。その作用は Bogomolny の下界で T^2 の大きさに依らないからです（25-02）。

(iv) 壊れる場所。$U(1)$ の Coulomb の相では流束が一様に広がり、柱の偏りは冪でしか減らない（$\ell = 5 \to 8$ で約 $\ell^{-1.4}$）ので、局所の β' は β 以上に出るはずです。$\mathbb{Z}_2$ は面の張力が残り、同様です。

(v) 台帳との照合。表 1 の 27（境界条件・幾何の比較）とは違い、同じ対象を二つの尺度で比べます。表 1 の 2 の相関不等式も使いません。基準「小さなループで破れない」のため、小さな ℓ（3 以下）は格子の人工物で破れうるとして、主張は $\ell \geq \ell_{\min}$ の形にします。捩れの境界条件で定義した結合の階段関数（de Divitiis らの方法、照合未了）の局所版にあたります。

(vi) 数値。(6) そのものを測った数は、まだ有りません。試験の形は決まっています：細かい側 $(N, \ell) = (4, 4)$、粗い側 $(2, 2)$（余裕があれば $(4, 6)$ と $(2, 3)$）で、$SU(2)$ は $\beta = 2.3$、$U(1)$ は閉じ込めの相 $\beta = 0.9$ と Coulomb の相 $\beta = 1.3$。予言は、$SU(2)$ で $\beta' < \beta$、$U(1)$ は $\beta = 0.9$ で $\beta' < \beta$、1.3 で $\beta' \geq \beta$（相で符号が反転）。$U(1)$ の二点で符号が分かれなければ、この観測量は相を見分けないとして候補を一段下げます。$(2, 2)$ は人工物が大きいので、$(4, 6)/(2, 3)$ で確かめるまでは兆候として扱います。

(vii) 難しさ。(6) を示すことは、大域の繰り込みの比較と同じ難しさの局所版です（§02 の冒頭）。得るのは、証明の対象が「境界を止めた有限の領域の言明」になること、そして帯のコンパクト性による還元の仮定（固定した β の両側の面積則）を柱の言葉で書けることです。

06 ほかの五つの候補

検討した八つの候補のうち、残りの五つを一行ずつ置きます。どれも §05 の三つより優先しなかった理由を添えます。札は全て「読（物理）」で、初等的な恒等式を含むものはその行に「初」を足します。

表 2　ほかの五つの候補

候補	一行	優先しなかった理由	札
符号の打ち消しとしての閉じ込め	捩れの和を取った測度 P（重み $Z_0(\omega) + Z_1(\omega)$）で $\theta = \mathbb{E}_P[\tanh(X/2)]$。帯の上半分でガラスが秩序相（$\lvert X\rvert$ が大きい）でも、X の符号が打ち消せば θ は小さい	群の区別が N を大きくしたときの伸び方に出る点で、柱の顔 $f(\ell)$ と同じ量の言い換えに近い。数値は乱れた $\mathbb{Z}_2$ ゲージ理論の分配関数の比を ω ごとに要し、規模が大きい	初（恒等式は θ の定義 $(Z_0 - Z_1)/(Z_0 + Z_1)$ を ω について書き直すだけ）・読（物理）

候補	一行	優先しなかった理由	札
中心だけの影響係数	§03 の $\delta_c(L_0,\beta)$。外を $SO(3)$ の部分だけで条件づけ、境界の中心の流束だけを裏返す	帯の上半分では δ_c も 1 に近いはずで、帯の下半分専用（帯の下の端を押し上げる作業の側）	読 （物理）
$\mathbb{Z}_2$ の単極子の流れによる流束の符号の拡散	平面ごとの符号の流束は、間を横切る $\mathbb{Z}_2$ の単極子の閉曲線の数の偶奇だけ変わる。単極子の巻きの密度で流束が混ざる	$U(1)$ の単極子の描像の $\mathbb{Z}_2$ 版で、基準「非可換性を本質的に使う」が弱い。単極子を抑えた作用でも閉じ込めが残るかどうかに論争がある（照合未了）	読 （物理）
自己双対の座標の行列式	各区画で、測度を反自己双対の部分への押し出しと見たときの Jacobian の、区画の間の差	表 1 の 25（スピンと指数定理は一ループで漸近自由の言い換え）に当たる危険が大きい。格子には自己双対の分解が無い	読 （物理）
二次元に落ちた板の「離散の 1-形式対称性は破れない」の定量版を N に一様に	板の閉じ込めを、二次元で離散の 1-形式対称性が自発的に破れないという型の文の格子版と読み、その定量版（張力 $\geq$ 最も安い区画の壁の密度）を N に一様にする	道としては、小さな T^2 の準古典で N を増やす道（Tanizaki–Ünsal の断熱的な連続性の予想と同じ重さ）そのもので、新しいのは読み方だけ。一般化された対称性の文献の次元の条件は照合未了	読 （物理）

07

言えないこと

- (a) どの候補も帯を閉じません。どの候補についても、帯のどの β でも定理を示していません。
- (b) 帯のコンパクト性による還元は還元で、帯を易しくしたとは言いません。帯の中の両側の面積則の仮定は、四次元 $SU(2)$ の格子の中間の結合での閉じ込め（未解決）を含みます。
- (c) Weyl の測度の対数凹性の二次元の試験が通っても、Polyakov の予想にも四次元にも何も含意しません。ブロックの水準の Ginibre の比較は定理として存在しません。
- (d) 二次元の結果が四次元に持ち上がるとは言いません。持ち上がるのは文の形だけです。
- (e) 四つの顔の $SU(2)$ の予想は、どれも見立てです。数値があるのは柱の顔 $f(\ell)$ だけで、それも小さな格子の傾向です。
- (f) 共形な枠の否定は「運動学だけでは面積則は出ない」という見立ての水準の判断で、その枠で別の入力を足した道を否定してはいません。
- (g) この頁の候補が既知の事実の組み合わせでないとは言いません。帯のコンパクト性による還元の補題や、Weyl の測度の候補の射影の対数凹性は、どこかに書かれているかもしれません。

08

五分類の表と依存グラフ

この頁の候補そのものは全て「読（物理）」です。紙の証明を置いたのは、候補の足場になる初等的な事実だけです。

表 3　この章の行（「—」は機械検査の無い行）

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
1	区画を写す全単射の自由エネルギーの恒等式 (1)	初	§02 捩れの向きの柔らかさ	可測な全単射・Jacobian が定まる	—
2	決定論的な写像では余りが面の面積とともに増え、面積則は出ない	読（物理）	§02 の捩れの向きの柔らかさ・26-08 の「決定論的な挟み撃ち」	—	—
3	柱の分解 $\lvert\theta\rvert \le \mathbb{E}\prod_B \lvert\theta_B(\Sigma)\rvert$	初	§02 の柱の捩れのコスト・25-03 の容器の恒等式の枠組み	骨格を止めた条件つきの独立性	—
4	柱の偏り：$\ell \ge 5$ で $SU(2)$ は $U(1)$ の 1/5〜1/7、要る ℓ は $SU(2)$ で伸びない	読	26-09 §07	$\beta = 2.3$（$SU(2)$）・1.3（$U(1)$）・$N \le 8$・枠 3〜12	—
5	四つの顔の $SU(2)$ の予想と、$U(1)$・$\mathbb{Z}_2$ で壊れる場所	読（物理）	§02 表 1	見立て	—
6	$\mathbb{Z}_2$ のガラスの Jensen の挟み (3)	初	§03	$U = \sigma V$ の表示	—
7	ガラスは帯の上半分で秩序相の側、ガラスの道は下半分に限る	読（物理）	§03・26-09 §08	8^4・換算は粗い	—
8	$\mathbb{R}^4 \setminus$直線 $\cong H^2 \times S^2$（共形）と、球とループの偶奇の判定	初	§04 (4)	—	—
9	双曲的な入れ子の面積 $4/3$、半平面のループの双曲面積 $\approx T/d$	初	§04	積分の計算	—
10	共形な枠では運動学だけで面積則は出ず、核心は同じ場所に残る	読（物理）	§04	検討の結果否定的	—
11	帯のコンパクト性による還元：帯の中の比較は固定した β の両側の面積則に還元される	初	26-06 §06 の帯の中の比較の還元の補題	固定した β の両側の面積則・率の一様な正値と連続性・$N \ge N_1$・$M \ge M_0$	—
12	射影の密度 (5) と、$O(3)$ の高さ・方位の分解（結合 $J_{ij} \ge 0$ の XY）	初	§05 Weyl の測度の対数凹性	—	—

行	言明（一行）	分類	根拠	範囲	機械検査
13	Weyl の測度の対数凹性の機構：単調性の源と乱れの機構が同じ向き	読（物理）	§05 Weyl の測度の対数凹性	ブロックの水準の比較は定理として無い	—
14	柱の局所の階段関数の予言 (6)：$SU(2)$ で $\beta' < \beta$、$U(1)$ は相で符号が反転	読（物理）	§05 柱の局所の階段関数	$\ell \geq \ell_{\min}$。(6) の数値は無し	—
15	候補「符号の打ち消しとしての閉じ込め」の恒等式 $\theta = \mathbb{E}_P[\tanh(X/2)]$	初	§06 表 2	θ の定義の書き直し	—

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい）：

```
 1  初  輸送の恒等式 (1)
 2  読  決定論的な写像の余りは面積とともに増える ⟸ 1          物理
 3  初  柱の分解                                          25-03 の枠組み
 4  読  柱の偏りの数値                                    26-09 §07
 5  読  四つの顔の予想 ⟸ 1・2・3・4                        物理
 6  初  ガラスの Jensen の挟み (3)
 7  読  ガラスの道は下半分に限る ⟸ 6                      8⁴・物理
 8  初  共形同値と偶奇の判定 (4)
 9  初  双曲的な入れ子の面積
10  読  共形な枠は否定的 ⟸ 8・9                           物理
11  初  帯のコンパクト性による還元                        26-06 の還元の補題と仮定
12  初  射影の密度 (5) と高さ・方位の分解
13  読  Weyl の測度の対数凹性の機構 ⟸ 12                                  物理
14  読  柱の局所の階段関数の予言 (6) ⟸ 3・4・11                          物理
15  初  θ = E_P[tanh(X/2)]
```

確かめ方は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを目で見ることです。円はありません。結論の側の節点（四つの顔の予想・ガラスの道の範囲・共形な枠の否定・三つの新しい候補のうち二つの機構と予言）は全て「読（物理）」で、「初」の節点は候補の足場の初等的な事実か、別の章に証明を置いた還元です。帯を渡る文の節点はこの頁にありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 候補の足場の初等的な事実：輸送の恒等式・柱の分解・ガラスの Jensen の挟み・共形同値と偶奇の判定・射影の密度と高さ・方位の分解・$\theta = \mathbb{E}_P[\tanh(X/2)]$	それらから帯を渡る評価が出ること
初 帯の中の比較が、固定した β の両側の面積則に還元されること（26-06 の帯の中の比較の還元の補題、帯の中の両側の面積則の仮定の下）	帯の中の両側の面積則の仮定のどの β での証明。帯を易しくしたこと

言えている	言えていない
読 （物理） 四つの顔と三つの候補の、$SU(2)$ で成り立つと見る理由と $U(1)$ で壊れる場所	どの顔・候補についても、尺度に一様な評価
読 （物理） $\mathbb{Z}_2$ のガラスの道は帯の下半分に限ること・共形な枠は運動学だけでは面積則を出さないこと	下半分でガラスの道が帯の下の端を押し上げること

出典と再現

もの	種別	出典・道具
四つの顔・ガラスの表示・共形な枠の検討	本書の検討	この本の検討の記録（移り変わりの帯を閉じる道の整理・物理の視点からの機構の案）
三つの新しい候補とほかの五つ	本書の検討	この本の検討（帯の候補の検討）。帯のコンパクト性による還元の補題は 26-06 §06
柱の偏り・ガラスの診断の数値	読	26-09
Tomboulis–Yaffe の不等式	典	E. T. Tomboulis, L. G. Yaffe, Commun. Math. Phys. 100 (1985) 313。章 26-01
分数インスタントンの作用	典	Y. Tanizaki, M. Ünsal, arXiv:2201.06166。章 25-02
固定した β の閉じ込めへの入口	抄録で確認	S. Chatterjee, arXiv:2006.16229（本文は照合未了）
照合未了の文献	照合未了	Kazakov–Zheng（格子ヤン–ミルズのブートストラップ）、Patrascioiu–Seiler（$O(3)$ の KT 型の相の議論）、XY の Ginibre の不等式、de Divitiis ら（捩れの境界条件の階段関数）、単極子を抑えた作用の論争、一般化された対称性の Coleman–Mermin–Wagner 型の文献、Dobrushin–Shlosman の判定

この章で使った語 — 四つの顔・適応した剛性 κ_w・箱の磁束の混合 $\delta(L_0)$・柱の捩れのコスト $f(\ell)$・圧力の余裕・$\mathbb{Z}_2$ のガラス・フラストレーション・共形な枠・帯のコンパクト性・Weyl の測度・高さと方位・柱の局所の階段関数・移り変わりの帯（帯）。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：26-11 紫外の制御 — 無限個の段で閉じるとは何か — 二本の道の下にある土台。一段で閉じるとは何かと、連作が止まった場所。

紫外の制御 — 無限個の段で閉じるとは何か

この章は案内です。§01 は未解決の地図です。

この章で分かること — 格子間隔 a を 0 に送ると繰り込みの段の数が無限に増えるとき、「一段で同じ形に戻る」を定数を崩さずに全ての段で示すとは何か。この章の本文は 第 15 部「紫外の制御の試みの記録」の前半（15-00〜15-10）に広げました。この頁には、分かることの五行・紫外の壁の分解の言明・節ごとの案内だけを残します。

前提となる章 — 7-05（繰り込み群の段の列）・7-07（四次元：Bałaban と MRS）・26-00（合流）・27-02（条件の台帳）。

先に言うこと — この章が扱うのは条件の台帳の「紫外の制御」の行で、移り変わりの帯（帯）とは別の課題です。帯より細かい尺度の側だけを扱います。周期の立方の箱での連続極限は、2026-11-10 に公開された構成が示しました（委員会の評価の水準。第二巻）。この章と第 15 部が扱うのは本書の検討が組んだ別の道（捩れた小さな箱と、格子間隔に一様な形）の紫外の制御で、こちらは示されていません。捩れた境界条件・細長い箱での構成と、格子間隔に一様な形の言明は、公開された構成にもありません。第 15 部が置くのは、何を示せばよいかの言明・一行ずつの計算・初等的な補題と、最小の系で測った数で、どれも紫外の制御の一部分を言い直すか、紫外の制御を別の条件に割るだけです。

この章の順序

1. この章で分かること — 五行
2. 紫外の壁の分解 — 有限個の母数で閉じる類と三つの剰余（言明だけ）
3. 第 15 部への案内 — 読む順

00

この章で分かること

- 紫外の制御は、有効密度が「一段で同じ形に戻る」ことを、定数を崩さずに無限個の段で示すことです。段の数は $K = \log_L(L_0/a) \to \infty$ で、一段の損 δ_k の和 $\sum_k \delta_k$ が K に一様に有限なら定数は残ります 初 （15-00）。
- 四次元では結合が無次元なので、一段ごとの g_k^2 の大きさの損の和が $\ln K$ で発散します 初 （一ループの流れの下の算術）。その部分は結合の流れに正確に吸収し、残りを和の有限な大きさか、横に縮む形に閉じ込める必要があります（15-01・15-03）。
- 群に値をとる場では揺らぎの測度が背景に依り、その依存 η_k が難所です。揺らぎの法則が背景に依らない型（辺ごとの熱核の積）では、平らな場の一段の評価の鎖が群の上でそのまま通り $\eta = 0$ です 初 （一段だけ・Wilson の作用と大きな場を含まない。15-07）。
- 粗い一枚の角を固定した最小の系では、不変な曲線の傾き $\sum f^2 = \beta'/\beta$・横の縮み $\lambda = \sum f^4 / \sum f^2$ が一つの射影から決まり、$\lambda \le \max f^2$ です 初 （可換な配位に制限した木の水準・一つの粗い面の周辺分布で見る一段。15-05）。源（毎段注がれる θ^4 の係数）は一ループで測った数です 読 。
- 母数は「引き込む先の一母数の類＋縮む形」で数えるのがよく、二次の結合の比を 2 に保つ類としては一段で閉じません 初 ・ 読 （$SU(2)$・一列四枚・主項。15-06）。Bałaban の四次元の定理は有効結合の小ささを仮定し、外す定理は未発表で、大きな場込みの一段の剰余（結合の一段の正味の括弧）は原典にありません 典 （15-02）。

01

紫外の壁の分解 — 有限個の母数で閉じる類と三つの剰余

有限個の母数 $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$ で番号づけた重みの族 $\{w_\theta\}$ をとり、ブロック化の一段 T が

$$T\big(w_\theta\,(1+\rho)\big) = w_{\Phi(\theta)}\,\big(1 + r_\theta[\rho]\big) \tag{1}$$

の形をとるとします（Φ は母数の流れ、$r_\theta[\rho]$ は剰余）。次の四つから紫外の制御が段数に一様に従う、という形の言明を置きます 仮 （言明の形だけ。詳しくは 15-03 §02）。

- 類が閉じる条件：母数の個数が段に依らず有限で、類は一段の写像の引き込む先の一母数の類と、一段ごとに縮む形の座標からなる（最小の系での根拠は 15-06）。
- 結合の流れの剰余の条件：$\beta_{k+1} = \beta_k - 8b_0 \ln L + O(1/\beta_k)$。
- 形の剰余の条件：横の縮み $\lambda < 1$ と一段の剰余 $\varepsilon(\beta)$ で、外れが $\sup_j \varepsilon(\beta_j)/(1-\lambda)$ に押さえられる型（15-03 §04）。
- 実効の結合の定義と連続性：定義域の中の連続性。

結合の一段の正味の括弧と実効の結合の定義と連続性から結合が小さく留まる条件が出るのは結合の小ささの帰納の補題 初 （15-03 §03。結合の一段の正味の括弧を β の変数で書いたものが結合の流れの剰余の条件）、外れの上限は等比級数の算術 初 です。示されていないのは、四次元の本当の一段で類が閉じる条件と大きな場込みの結合の流れの剰余の条件が立つことで、それが閉じない四行（15-08）です。

02

第 15 部への案内 — 読む順

読む順は三本あります（15-00 §04）：最短は 15-00 → 15-03 → 15-09、計算の筋は 15-04 → 15-05 → 15-06、壁の筋は 15-02 → 15-07 → 15-08 です。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
この頁は要約と案内です。言えている範囲は第 15 部の各章の表にあります	本書の道の形の紫外の制御（第 15 部のどの章も示していません。周期の立方の箱の連続極限は公開された構成が示しました）
仮 紫外の壁の分解（言明の形）	四次元の本当の一段で類が閉じる条件・結合の流れの剰余の条件・形の剰余の条件が立つこと

出典と再現

出典は第 15 部の各章の出典表にあります（原典の書誌は 15-02 の出典表）。

この章で使った語 — 紫外の制御・段の数・同じ形・紫外の制御の三条件・紫外の壁の分解・類が閉じる条件・結合の流れの剰余の条件・形の剰余の条件・結合の連続性・引き込む先の類・横の縮み。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：26-12 帯の議論の篩 — 七つの試験の相手。あわせて読むなら 15-00 入口 — 紫外の制御とは何か。

帯の議論の篩 — 七つの試験の相手

この章は未解決の地図です。§05 は本書の検討（小さい格子の計算）です。

この章で分かること — 帯を閉じる議論は、これまで「U(1) の転移と区別する」という基準で試されてきました（26-06 §08）。この章は試験の相手を七つに増やします：U(1) の弱結合、Z_2 の弱結合、有限の非可換群（四元数群・二項正二十面体群など）、随伴 Higgs の極限（U(1) の Wilson の作用になる）、SU(2) の基本＋随伴の混合作用の一次の転移の線とその端点、SU(N) の体積転移、中心の無い群 G_2。相手ごとに、どの型の議論を落とすかを書き、本書の Lean の定理と帯の候補の言明を七つの相手で「真・偽・定義されない」に分けた表を置きます。欄ごとに、本書の計算・Lean で確かめたもの、文献で確かめたもの、確かめていないものを分けます。最後に、小さい格子の計算で見たこと（有限群の平坦な接続の数え、一点の格子での冪、混合作用のヒステリシス、縦横比を止めた U(1) の定数、項ごとの符号の試し）を、条件つきで並べます。発想の全体の地図は 16-11 に在ります。

前提となる章 — 26-04 構造だけでは渡れない、26-06 繰り込みの比較、21-05 渦の最小作用、5-06 U(1) と非可換の違い、5-10 有限群の格子ゲージ理論。

先に言うこと — **この章は、帯を越える道を与えません。証明は在りません。**七つの相手は、議論を落とすための試験で、どの相手についても新しい定理は置きません。相手の模型の性質のうち、本書が原典か総説の当の箇所で確かめたものだけを典 とし、それ以外は「文献の記述（本書は未確認）」として本文の根拠にしません。**混合作用の端点の話は、格子間隔を止めた上のことです。連続の SU(2) の理論に質量ギャップが無い、という意味ではありません。**試験の相手を増やすという見方そのものは、専門家には知られていることかもしれません。本書はこれを新しい結果ではなく、本書の検討が使う篩として書きます。

この章の順序

1. 篩の考え方 — 二つの向きの試験 — 閉じ込めの量とギャップの量
2. 七つの相手 — 相手ごとの性質と、落とす議論
3. 議論の型と、落とす相手（表 1）
4. Lean の定理と帯の候補の言明 × 七つの相手（表 2）
5. 小さい格子の計算で見たこと — 五つ
6. この章が言っていないこと

札 — 初 ＝この章に導出を置いた手の勘定／典 ＝原典か総説の当の箇所を確かめた文献の事実／読 ＝本書の小さい格子の数値の読み（格子・掃引・種を添える）／仮 ＝推し量り・見込み／Lean ＝本書の Lean の定理（強結合の窓の中だけ、格子間隔は固定）。くわしくは 6-00 の「札」。

記号。SU(2) の Wilson の作用は $\beta \sum_p (1 - \frac{1}{2} \operatorname{tr} U_p)$、混合作用の結合は基本表現 β_F・随伴表現 β_A、随伴 Higgs のとびの結合は J と書きます。ΔF は捩れた箱の渦の自由エネルギー、θ は渦の比です（19-02）。板の張力の量 $s(N) = N^2 \sigma_N$ は 26-06 の記号で、一ループの傾きの s とは別の量です。

言葉。**最大トーラス**は SU(2) の中の可換な部分群 $\{\mathrm{diag}(e^{i\phi}, e^{-i\phi})\}$（U(1) と同じ形）。**混合作用**は Wilson の作用（基本表現の項）に随伴表現の項を足した作用。**一次の転移**は面の平均などが結合について跳ぶ転移、**臨界の端点**は一次の転移の線が終わる点。**体積転移**は、格子の作用に由来する、温度に依らない（零温度の）転移。連続極限の物理ではなく、格子の上の現象です。**平坦な接続**（平らな配位。21-07 の言い方）は全ての面のホロノミーが単位元（捩れが在るときは捩れの符号）に一致する配位。**凍った相**は、有限群のゲージ理論で大きい β の側の、平坦な接続の近くに張り付いた相です。

01

篩の考え方 — 二つの向きの試験

帯を閉じる議論が、別の模型でも同じ形で通ってしまい、しかもその模型で結論が偽なら、その議論はどこかで誤っているか、結論に足りません。これが篩です。これまでの篩は U(1) 一つでした：U(1) は帯の中（$\beta \approx 1.01$）に閉じ込めない相への転移を持つので、帯を閉じる議論は U(1) を区別しなければなりません（26-06 §08）。

篩には二つの向きがあります 仮 。

- **閉じ込めの量**（張力・渦の比・張力の倍化の不等式など）を芯に置く議論は、閉じ込めない相を持つ相手で偽にならなければなりません。
- **ギャップの量**（相関長・有限の箱の混合）を芯に置く議論は、閉じ込めないがギャップは在る相手で真でなければなりません。閉じ込めの量はそこで偽でもかまいません。Z_2 の弱結合の相と中心の無い群がその候補ですが、そこにギャップが在ることは、本書は文献で確かめていません（相手 2・相手 7）。

質量ギャップと閉じ込めは別の言明で（16-09 §03）、篩をどちらの向きで使うかは、芯の言明がどちらの量かで決まります。

02

七つの相手

相手 1 — U(1) の弱結合

性質。四次元の U(1) の格子ゲージ理論は、弱結合で閉じ込めない相を持ちます。Villain の形の作用について、Wilson ループの期待値に Coulomb 型の下界があり、電荷は閉じ込められないことが示されています 典 （Guth 1980、要旨で確かめた）。Fröhlich–Spencer は、四次元の U(1) の格子ゲージ理論で質量の無い（QED の）相への閉じ込めの外れる転移が在ることを別の方法で示し、主に Villain の近似で書いたうえで、

全ての結果を Wilson の作用の模型へ延ばせる、と本文で述べています（延長は別の論文の技法による）典（1982、前刷りの要旨と §1 で確かめた）。転移の位置 $\beta \approx 1.01$ は本書の記録の値です（26-06 §04）。

SU(2) の軸の上の場所。SU(2) の元を最大トーラスに制限すると $\frac{1}{2}\operatorname{tr}\operatorname{diag}(e^{i\phi}, e^{-i\phi}) = \cos\phi$ なので、SU(2) の Wilson の作用 $\beta(1 - \frac{1}{2}\operatorname{tr} U_p)$ は、最大トーラスの上では U(1) の Wilson の作用 $\beta(1 - \cos\phi_p)$ と同じ式になります（同じ β）初。言えるのは作用の式が一致することまでで、SU(2) の測度が最大トーラスに制限されるわけではありません。同じ β の U(1) の模型は $\beta \gtrsim 1.01$ で Coulomb の相に在ります。SU(2) の軸のこの区画が、U(1) を区別する入力の要る区画だ、というのが本書の見立てです仮。

落とす議論。鏡映正値性・中心と双対の恒等式・転送行列の正値性だけの議論（26-04）。縦横比を止めた繰り込みの比較は、弱い側では U(1) でも一様な定数で立つので、弱い側の比べの言明は U(1) を区別しません（§05 の (d)）。U(1) を止めるのは、軌道が転移の区画を跨ぐ所です。ただし縦横比を延ばす量化では、弱い側で既に U(1) が落ちます。芯の言明を書くときは、量化を明記します。

相手 2 — Z_2 の弱結合

性質。四次元の Z_2 の格子ゲージ理論は一次の転移を持ちます典（Creutz–Jacobs–Rebbi 1979、要旨で確かめた。位置は自己双対の点 $\beta \approx 0.44$、26-06 §04 の記述）。弱結合の側は閉じ込めない相で、そこでギャップが在ることは文献の記述（本書は未確認）。

落とす議論。ギャップの量を芯に置くと称して、Z_2 の弱結合で偽になる量を使う議論。張力の倍化の不等式は、Z_2 の閉じ込めない相では板の張力の量 $s(N)$ が 0 へ向かうので偽です（26-06 §08）読。Z_2 の弱結合の相にギャップが在る、という文献の記述が正しければ、張力の倍化の不等式はギャップに必要な量ではないことになります。同じ条件のもとで、トーラスの上の大域の対数 Sobolev 不等式は、ホロノミーの部門の間の混合が遅いので成り立たない見込みで、ギャップの量としては通らないことになります仮。

相手 3 — 有限の非可換群

相手。SU(2) の有限部分群：四元数群 Q_8（位数 8）、二項正四面体群（24）、二項正八面体群（48）、二項正二十面体群（120）。どれも非可換で、中心に -1 を含みます。有限群のゲージ理論は大きい β で凍った相に入る見込みです仮。凍る β の値は文献の記述（本書は未確認）。

落とす議論。「代数としての非可換」だけを入力にする議論。有限の非可換群は非可換ですが、弱結合では SU(2) の連続の揺らぎ（漸近自由）を持ちません。本書の記録では、Q_8 で被覆の不等式と β についての単調性が破れる点が在ります（21-01：三次元・背景なしの β についての単調性）読。凍った相の値の水準は §05 の (a)。

相手 4 — 随伴 Higgs の極限（U(1) の Wilson の作用になる）

模型。SU(2) の Wilson の作用に、各点の単位ベクトル $n(x) \in S^2$（随伴表現）の項 $-J\sum_{x,\mu} n(x)\cdot R(U_{x,\mu})\, n(x+\hat{\mu})$ を足します（R は SU(2) から SO(3) への写像）。

$J = \infty$ での形 初。$J \to \infty$ では重みは $R(U_{x,\mu})n(x+\hat{\mu}) = n(x)$ の配位に集まります。SO(3) は S^2 に推移的に働くので、ゲージ変換で全ての点で $n(x) = e_3$ にできます。すると条件は $R(U)e_3 = e_3$、すなわち U が σ_3 と可換、すなわち U は最大トーラスの元です。このとき面の積も最大トーラスに入り、相手 1 で見た作用の式

の一致から、作用は U(1) の Wilson の作用（同じ β）になります。残るゲージの自由度は U(1) です。極限の測度が実際にこの集合に集まることの確認は、形式的な極限として扱っています。

族として。J の全ての値で、群は連続かつ非可換で、中心 $\mathbb{Z}_2$ は随伴の場に自明に働くので中心の対称性は残り、重みは正です 初 。鏡映正値性もこの族で保たれる見込みです 仮 。

落とす議論。「群が連続で非可換・中心の対称性・重みの正値性」だけを入力にして、族の全ての J について一様に閉じ込めを結論する議論。これらの入力は族の全体で同じで、$J=\infty$ は U(1) の Wilson の作用で、相手 1 の閉じ込めない相を持ちます（Fröhlich–Spencer、相手 1） 典 。漸近自由の符号を入力に足しても、事情は変わらない見込みです 仮 。随伴の実スカラーを一つ足した連続の理論（長さを止めない随伴スカラーの理論）の一ループの係数は、4-06 の式 (3) の規格化（$16\pi^2 b_0$）で、純 SU(2) の $\mathbf{22/3}$ から実スカラー一つぶん（複素スカラーの半分）の $\mathbf{1/3}$ を引いて 7 で、正のままです 初 。ただし $J=\infty$ の極限の理論そのものは U(1) で、漸近自由ではありません。この相手が落とすのは、族の全ての J で成り立つ入力だけから、J に一様に閉じ込めを結論する議論です。

相手 5 — SU(2) の混合作用の一次の転移の線とその端点

模型。作用 $\sum_p \big[\beta_F(1-\frac{1}{2}\operatorname{tr}U_p)+\beta_A\big(1-\frac{1}{3}((\operatorname{tr}U_p)^2-1)\big)\big]$。$\beta_A=0$ が Wilson の作用です。随伴の項は中心の符号を見ません。

性質。SU(2) の Wilson の作用の一般化（SU(2)・SO(3)・Z_2 の模型を極限に含む）で、SO(3) と Z_2 の一次の転移の線が三重点で合流し、臨界の端点まで続くことが、四次元の Monte Carlo で報告されています 典 （Bhanot–Creutz 1981、要旨で確かめた）。端点の位置は文献で揺れています。Bhanot–Creutz が小さい格子で見た見かけの端点はおよそ $(\beta_F,\beta_A)\approx(1.5,\,0.9)$ です（Gavai の本文の引用による）。Gavai は 6^4〜16^4 の格子で $\beta_A=1.25$ に一次の体積転移を見ず、端点は $\beta_A\geq 1.25$ に在る見込みとしています 典 （Gavai 1996、要旨と本文で確かめた）。SU(3) の同じ型の混合作用では、端点に近づくとスカラー（0^{++}）のグルーボールの質量が下がり、ほかのグルーボールの質量は変わらず、端点は 0^{++} の相関長だけが発散する臨界点と矛盾しない、と報告されています 典 （Heller 1995、要旨で確かめた。張力と転移の温度の比はほぼ一定）。SU(2) の端点でスカラーの質量が 0 に向かうことは、文献の記述（本書は未確認）。線の両側が閉じ込めの相であることは、線が端点で終わり Wilson の軸の閉じ込めの相と滑らかにつながることからの推論です 仮 。

本書の計算。$\beta_A=1.5$・2.0 では、4^4 の格子でも強いヒステリシスが見えます（§05 の (c)） 読 。端点の位置はこの計算からは読みません。

落とす議論。「β の軸に転移が無い／段の写像に不動点が無い」を、局所・鏡映正値・純ゲージの作用の類の上で使う議論。この類の中に一次の転移の線と臨界の端点が在ります。これらは Wilson の軸に固有の事実で、作用の類へは延びません。公開された構成の段 0 は Wilson の作用でなく表示つきの有効な作用なので（16-03 §05）、これは飾りの注意ではありません 仮 。「率が一様に正」を作用の類で使う議論は、この相手では判定できません：一次の線をまたいでも張力は跳ぶだけで正のままでありえ、破るのは端点でギャップが閉じる場合だからです。同じ理由で、端点でスカラーの質量が格子の単位で 0 に向かい張力が残るなら、「張力が在れば、作用の類に一様な柔らかい議論でギャップが出る」は偽になりますが、SU(2) についてはこの部分を確かめていないので、判定できない、に置きます（16-11 表 3）。

注意。端点は格子間隔を止めた上の現象です。連続の SU(2) の理論に質量ギャップが無い、という意味ではありません。帯の議論が使ってよいのは「繰り込まれた軌道の上に居る」ことで、「局所・鏡映正値・純ゲージ

の作用の類に居る」だけでは足りない、というのがこの相手の教えです 仮 。

相手 6 — SU(N) の体積転移

性質。SU(N) の面の作用（Wilson の作用）では、強結合と弱結合の間の移り変わりが、SU(4) では滑らかな移り変わりに見え、SU(6) では強い一次の体積転移になっている、と報告されています 典 （Lucini–Teper–Wenger 2002、本文で確かめた）。SU(5) から一次になること、転移の両側が閉じ込めであることは、文献の記述（本書は未確認）。

落とす議論。相手 5 と同じ型（Wilson の軸に転移が無いことに頼る議論）が、SU(N) 一般へ延びないこと。SU(N) 一般の質量ギャップ（A-08 §06）を目指すなら、この篩も通らなければなりません。

相手 7 — 中心の無い群 G_2

性質。G_2 は中心が自明で、そのため基本表現の「クォーク」はグルーオンに遮蔽され、静的なクォークの間の弦は切れ得ます。それでも G_2 のゲージ理論は閉じ込める（論文の意味で）と報告されています 典 （Holland–Minkowski–Pepe–Wiese 2003、要旨で確かめた）。質量ギャップが在ることは文献の記述（本書は未確認）。

落とす議論。中心の捩れ・渦・渦の比 θ で書いた量は、G_2 ではそもそも定義されません 初 （中心の元が無いので捩れが無い）。張力の倍化の不等式や非可換性を使う不等式の四つの顔を芯に置く議論は、全ての群の質量ギャップには届きません。G_2 には別の量（境界の場への応答など）が要ります（16-11 §06）。

03

議論の型と、落とす相手

表 1　議論の型と、それを落とす相手（「落とす」は、その相手でも同じ入力が揃い、結論が偽になるか定義されないこと）

議論の型（入力）	落とす相手	理由と札
鏡映正値性・中心と双対の恒等式・転送行列の正値性だけ	U(1)・Z_2	同じ構造がそこでも成り立つ（26-04） 初
代数としての非可換だけ	有限の非可換群	非可換だが、連続の揺らぎを持たない。単調性の破れ（21-01、三次元・背景なし） 読
群が連続で非可換・中心の対称性・重みの正値性だけから、族に一様に閉じ込めを結論する	随伴 Higgs の族（$J=\infty$ は U(1)）	族の全体でこれらが同じ（相手 4） 初 。U(1) の Wilson の作用の閉じ込めない相 典 （Fröhlich–Spencer）
局所・鏡映正値・純ゲージの作用の類に居ることと、「軸に転移が無い／段の写像に不動点が無い」	混合作用の一次の線	類の中に一次の転移の線と臨界の端点 典 読
作用の類で「率が一様に正」、または作用の類に一様な柔らかい議論で「張力 ⇒ ギャップ」	混合作用の端点（判定できない）	端点でギャップが閉じる場合だけ破れる。SU(3) の類似は 典 、SU(2) は本書は未確認
Wilson の軸に転移が無いことを SU(N) 一般で	SU(N) の体積転移	SU(6) で強い一次 典
中心の捩れ・渦で書いた量だけ	G_2	量が定義されない 初
ギャップの量と称して、大域の混合を使う	Z_2 の弱結合（ギャップが在るなら）	部門の間の遅い混合 仮 。Z_2 の弱結合の相のギャップは文献の記述（本書は未確認）

議論の型（入力）	落とす相手	理由と札
縦横比を止めた、損失を許す繰り込みの比較（弱い側）	U(1)（弱い側では落とさない）	弱い側では U(1) でも一様な定数で立つ（§05 (d)） 初 読 。区別の中身は転移の区画に押し込まれる

04

Lean の定理と帯の候補の言明 × 七つの相手

表 2 は、行に本書の Lean の定理（同じ型の定理が相手の模型でも成り立つか）と帯の候補の言明、列に SU(2) の Wilson の作用（基準）と七つの相手を置きます。欄の札：Lean 本書の Lean、初 この章の導出、読 本書の記録の数値、典 文献で確かめた。「—」は本書が確かめていない欄で、推し量りで埋めていません。「定義されない」は、その相手で量の定義に要るもの（中心の捩れ、連続の生成子）が無いことです。

表 2　真・偽・定義されない

行	SU(2) Wilson（基準）	U(1) 弱結合	Z_2 弱結合	有限の非可換群	随伴 Higgs $J = \infty$	混合作用の端点	SU(N) 体積転移
強結合の窓の無限体積の極限・質量ギャップ・面積則（20-03・20-04・20-06）	真 Lean （窓の中）	—	—	—	—	対象外（端点は窓の外）	—
鏡映正値性・チェス盤・$\theta \geq 0$（20-01・21-06）	真 Lean	—	—	—	—	—	—
薄い渦の床（21-02）	真 Lean	—	—	—	—	—	—

行	SU(2) Wilson（基準）	U(1) 弱結合	Z_2 弱結合	有限の非可換群	随伴 Higgs $J=\infty$	混合作用の端点	SU(N) 体積転移
太い渦の床（21-03。捩れた真空を使う）	真 Lean	—（定義が移らない：作用 0 の捩れた真空が無い）	—（同じ）	—	—（定義が移らない）	—	—
渦の最小作用は正 $S_N>0$（21-05。捩れた真空を使う）	真 Lean	—（定義が移らない：作用 0 の捩れた真空が無い）	—（同じ）	真 初 （$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}$ を含む SU(2) の部分群）	—（定義が移らない）	—	—
張力の倍化の不等式	開	偽 読 （26-06 §08）	偽 読 （26-06 §08）	—	偽 初 読 （$J=\infty$ は U(1) 初 、U(1) の値は 読 ）	—	—
捩れの向きの柔らかさ	開	—	定義されない 初	定義されない 初	—	—	—
箱の磁束の混合	開	—	—	—	—	—	—
柱の捩れのコスト	開	—	—	—	—	—	—
圧力の余裕	開	—	—	—	—	—	—
物理の大きさの箱の混合の言明	開（強い形の質量ギャップの言い換え）	—	—	—	—	—	—

欄の根拠。

- **$S_N > 0$ の行** 初 。S_N の定義（21-05）は、塊の枠を捩れた真空（リンクに四元数 $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}$ が載る、作用 0 の配位）に止めます。四元数の $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}$（反可換な対）を含む SU(2) の有限部分群（この章の四つの群）では、枠の捩れた真空は $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}$ だけでできているので、部分群の配位として作れます。内部のリンクを部分群の元に限った配位は、SU(2) の配位の一部なので、作用の下限は SU(2) の下限より小さくなりません。SU(2) の下限は、塊の大きさに一様に正です（21-05 の定理 `VortexPos.Svortex_ge_unif`）。だから部分群でも渦の最小作用は正です（Lean の定理からの一行の帰結）。U(1) と Z_2 のような可換な群では、一つの捩れを作用 0 では満たせないので（面の積を閉じた面の上で掛けると捩れの符号だけが残る）、作用 0 の捩れた真空が無く、定義が移りません。
- **移した定義での見込み** 仮 。背景の捩れを外した形に定義を移せば、測る捩れの流束 π を m^2 枚の面に一様に分けた配位の作用は、横の位置の数 N^2 を掛けて $N^2 m^2(1-\cos(\pi/m^2)) \le N^2\pi^2/(2m^2)$ で、塊を大きくすると 0 に向かいます（初 ：移した定義の上で）。同じ広げ方は、SU(2) でも背景の捩れを外せば最大トーラスの中でできます。SU(2) で渦の最小作用が正になるのは、背景の捩れの真空（四元数の $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}$）と可換なのが中心の ± 1 だけで、流束を連続に広げられないからです（21-05 の寄り道）。
- **張力の倍化の不等式の行** 読 。U(1) の Coulomb の相では $s(N)$ が尺度に依らず一定でちょうど境、Z_2 の閉じ込めない相では $s(N) \to 0$（26-06 §08。閉じた式の模型と小さい格子の値）。
- **「定義されない」の欄** 初 。G_2 は中心が自明なので、中心の捩れで書く量（θ、渦の床、張力の倍化の不等式、四つの顔のうち捩れか中心の磁束を使う全て）が無い。捩れの向きの柔らかさは捩れの生成場に沿う微分を使うので、離散の群（Z_2・有限群）では定義されない。
- **「—」の欄について。** 本書の Lean の定理（A-04 表 4g と、21-05・21-07・20-06 の頁）の言明を読んだ範囲では、強結合の窓・鏡映正値性・チェス盤・$\theta \ge 0$・薄い渦の床の証明は、SU(2) の非可換性でなく、群の別の構造（Dobrushin の条件、鏡映、中心の元 -1、コンパクト性）に依る型で、U(1)・Z_2・有限群へ移る見込みです 仮 。捩れた真空を使う定理（太い渦の床・渦の最小作用）は、U(1)・Z_2 へは定義ごと移りません。各定理の証明を相手の模型へ移して確かめてはいないので、表では「—」にしました。四つの顔の U(1) での振る舞いの見立ては 26-06 §07 表 5 に在ります（物理の見立て）。

表 2 から読めること 仮 。基準の列と相手の列で値の違う行は、いまのところ張力の倍化の不等式だけです（U(1)・Z_2 で偽、読 ）。$S_N > 0$ の行は、有限の非可換群で真（初 ）、U(1) では定義が移りません。本書の SU(2) に固有の事実がどれも配位の作用についての事実であることは、16-11 §03 に在ります。芯の候補は「U(1) の弱結合で偽、かつ混合作用の端点の型の点で偽（端点でギャップが閉じるなら。SU(2) では本書は未確認）」の両方を満たす言明から選ぶ、という基準を置くと、表 2 の「—」を埋めることがそのまま次の仕事になります。

05

小さい格子の計算で見たこと

どれも小さい格子の浮動小数の計算で、一回の走りの値は「見えた」「試しでは破れなかった」までです。台本は本書の検討のもので、この章のために走らせ直しました（結果は下に書きます）。

(a) 有限群の平坦な接続の数え（1^4 の格子）

設定。1^4 の格子（格子点一つ、リンク四本、面六枚）。凍った極限（$\beta \to \infty$）では、分配関数は平坦な配位の数に比例します。捩れの無い側 Z_0 は、四本のリンクの元が互いに全て可換な四つ組の数。捩れの在る側 Z_1 は、$[U_1, U_2] = -1$（交換子が -1）で、ほかの五つの対が可換な四つ組の数です。

手の勘定 初 （Q_8 の Z_1）。$Q_8 = \{\pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\}$ で反可換な対 (U_1, U_2) は、軸の違う二つの非中心の元で $6 \times 4 = 24$ 通り。U_3, U_4 は U_1 とも U_2 とも可換なので中心の ± 1 で、$2 \times 2 = 4$ 通り。$Z_1 = 96$ です。

表 3　平坦な接続の数（全数え上げ。種は無い） 読

群	位数	Z_0	Z_1	$\ln(Z_0/Z_1)$
Q_8	8	736	96	2.037
二項正四面体群	24	5856	96	4.111
二項正八面体群	48	18816	384	3.892
二項正二十面体群	120	76320	480	5.069

走らせ直した結果、四つの群の Z_0・Z_1 は上の値と一致しました。読み：凍った相では、捩れ一つの自由エネルギーは L に依らない定数の型です（1^4 だけで見た値）。

(b) 一点の格子での冪（SU(2)、1^4）

手の勘定 初 。作用 $S = \sum_{\mu<\nu} (1 - \frac{1}{2} z_{\mu\nu} \operatorname{tr} P_{\mu\nu})$、捩れは $z_{12} = -1$。$Z(\beta) = \int e^{-\beta S}$ は、最小作用の配位の集合が次元 m の多様体で横の Hessian が退化しなければ $Z \sim C \beta^{-(12-m)/2}$（リンク四本で 12 次元）で、$\beta \langle S \rangle = -\beta \, d \ln Z / d\beta \to (12 - m)/2$ です。捩れの在る側：最小は U_1, U_2 が反可換（$U_1 = i\, n_1 \cdot \sigma$、$U_2 = i\, n_2 \cdot \sigma$、$n_1 \perp n_2$：3 次元）で $U_3, U_4 = \pm 1$。$m = 3$ なので $\beta \langle S \rangle \to 9/2$。捩れの無い側：四本が一つの最大トーラスに入る配位（トーラスの選び 2 次元＋角 4 つ：6 次元）で $\beta \langle S \rangle \to 3$。この族は中心の点で次元が跳ねるので、そこから対数の補正が入る見込みです 仮 。比は $Z_1 / Z_0 \sim c\, \beta^{-3/2}$（対数の補正つき）。

計算 読 （Metropolis、鎖 4000 本 × 3000 掃引、最初の 1000 掃引を捨てる、種一本、誤差は区間平均の統計だけ）。

β	捩れ在り $\beta\langle S\rangle$	捩れ無し $\beta\langle S\rangle$
30	4.545(3)	2.862(2)
300	4.498(3)	2.897(2)
3000	4.497(2)	2.860(3)

読み：捩れの在る側は $\beta = 300$・3000 で $9/2$ に合い（$\beta = 30$ は 4.545）、無い側は 3 より 0.10〜0.14 下です。冪 $-3/2$ の差は見えました。対数の係数はこの計算からは決まりません（$\beta = 3000$ の値が 300 より下がっていて、平らな向きの熱化が遅い疑いがあります）。走らせ直し：$\beta = 300$ を同じ種で走らせ、4.4977(33)・2.8970(19) で一致しました。

(c) 混合作用のヒステリシス（SU(2)、4^4）

設定 読 。相手 5 の作用、4^4 周期、Metropolis（部分格子ごとの一斉更新）。β_F を $0 \to 2.5$ と上げてから下げ、各点 80 掃引、冷えた初期配位。種は各 β_A で一本（$\beta_A = 2.0$ だけ二本）。面の平均 $\frac{1}{2} \operatorname{tr} P$ の「下り − 上り」の最大を見ます。

β_A	下り − 上り の最大（その β_F）	読み
0	0.023 以下（全域）	ヒステリシス無し。$\beta_F = 2.0$ で 0.49〜0.52、2.5 で 0.65
1.0	0.079（1.25）、0.063（1.5）	揺らぎと区別しにくい大きさ
1.5	0.317（1.0）、0.165（1.25）	強い
2.0	0.413（0.5・0.75）、0.205（1.0）。別の種で 0.516（0.5）・0.430（0.75）・0.311（1.0）	強い

同じ走りの中に逆符号の差が最大 0.08 の大きさで出ている（$\beta_A = 2.0$・$\beta_F = 0$ で $+0.076$ など）ので、0.08 以下の差はこの計算では揺らぎと区別しにくい大きさです。読み：$\beta_A = 1.5$・2.0 では 4^4 でも強いヒステリシスが見えました。$\beta_A = 1.0$ の弱い差は、4^4 の有限の大きさの効果でありえます（大きい格子で一次の転移が消えることを報告した Gavai の見直しの型）。端点の位置はこの計算からは読みません。ヒステリシスは遅い力学でも出るので、端点での質量や張力もこの計算からは出ません。走らせ直し：同じ種で四つの β_A を走らせ、全ての値が一致しました。

(d) 縦横比を止めた U(1) の定数

手の勘定 初 。U(1) の Coulomb の相の板の近似（26-03 の式 (4) で、$e^2 = 1/\beta$、渦の面積 M^2、横の面積 N^2 と読む）$\theta(N, M, \beta) \approx 2\exp(-M^2/(2\beta N^2))$ を使い、縦横比 $r = M/N$ を止めると

$$\frac{\theta(2N, 2M, \beta)}{\theta(N, M, \beta')} = \exp\Big(\frac{r^2}{2}\Big(\frac{1}{\beta'} - \frac{1}{\beta}\Big)\Big)$$

で、N に依りません。$\beta' = \beta - c$ と置くと $1/(\beta - c) - 1/\beta = c/(\beta(\beta - c))$ は β について減るので、$\beta \geq \beta_1$ の全体で一様に

$$K = \exp\Big(\frac{r^2 c}{2\beta_1(\beta_1 - c)}\Big) \tag{1}$$

で繰り込みの比較の形 $\theta(2N, 2M, \beta) \leq K\theta(N, M, \beta - c)$ が立ちます（近似の式の上で）。

計算 読 （近似の式の数値の走査：$\beta \in [\beta_1, 10^4]$ を 4000 点、$N = 2, 4, 8, 16, 64$、$r = 1, 2, 4$。種は無い）。走査の上限は式 (1) と一致しました。例：$c = 0.258$・$\beta_1 = 3$ で $r = 1, 2, 4$ に $K = 1.016,\ 1.065,\ 1.285$。$c = 0.258$・$\beta_1 = 10$ で $1.0013,\ 1.0053,\ 1.0214$。走らせ直して同じ値を得ました。

読み：縦横比を止めた比べは、弱い側では U(1) でも「好きな速さ c で強結合へ走る」形で一様に立ち、非可換性を何も使いません。$K(r)$ は r とともに限りなく育つので、横を止めて縦を延ばす量化では、弱い側で既に U(1) が落ちます。近似の式は単極子の効果（β が有限で $e^{-c\beta}$ の程度）を落としているので、真の U(1) で同じ定数が立つかは確かめていません。

(e) 項ごとの符号の試し（SU(2)、1^4）

問い。面ごとに別の結合 β_p を置いたとき、ΔF（背景 $z_{12} = -1$ の上で、測る捩れ z_{34} の有無）は各 β_p について増えるか。$\partial \Delta F/\partial \beta_p = \langle E_p\rangle_{z_{34}=-1} - \langle E_p\rangle_{z_{34}=+1}$（$E_p = 1 - \frac{1}{2} z_p \operatorname{tr} P$）の符号を見ます 初 （$\Delta F = \ln Z_{z_{34}=+1} - \ln Z_{z_{34}=-1}$ の微分）。

計算 読 （Metropolis、鎖 3000 本 × 800 掃引、最初の 200 掃引を捨てる、β_p は $[0.2, 3.0]$ の一様乱数で 6 枚ぶん。随伴の項なしで 6 組、随伴 $\beta_A = 1.0$ つきで 2 組、合わせて 48 個の差）。48 個とも正で、最小の差は

0.029（β_p の一つが 0.2 の組）。統計の比は 58〜1700（区間平均の誤差で、自己相関のため小さめに出ている可能性はあるが、符号は動きません）。走らせ直し：最初の 2 組（種 1）を走らせ、全ての値が一致しました。

読み：1^4 は六枚の面が一点でつながった特殊な格子で、β_p は 3 までなので、「項ごとの単調性が立つ」とは言えません。有限群 Q_8 で似た単調性が破れる（21-01：三次元・背景なしの β についての単調性で、条件はこの試しと違う）のとの対照は、記録に残す価値があります。次に試す格子は細長い箱です（16-11 §05）。

06

この章が言っていないこと

- 帯を越える道を与えていません。証明は在りません。
- 混合作用の端点の話は格子間隔を止めた上のことで、連続の SU(2) の理論に質量ギャップが無い、という意味ではありません。SU(2) の端点の位置は文献で揺れており、端点でスカラーの質量が 0 に向かうことは、本書は確かめていません。
- 表 2 の「—」の欄について、真とも偽とも言いません。
- 七つの相手の性質のうち「文献の記述（本書は未確認）」と書いたものは、本文の主張の根拠にしていません。
- 小さい格子の値から、大きい格子や連続の理論の結論を出していません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
Lean 表 2 の基準の列（本書の定理、強結合の窓の中・格子間隔は固定）	相手の模型での同じ型の定理（「—」の欄）
初 最大トーラスの上で SU(2) と U(1) の Wilson の作用の式が一致すること。随伴 Higgs の $J=\infty$ が U(1) の Wilson の作用になること（形式的な極限）。随伴の実スカラー一つで一ループの係数が 7（正）。S_N の行（有限部分群で正、可換な群で定義が移らない）。G_2 と離散の群で定義されない欄。Q_8 の $Z_1=96$。1^4 の冪の勘定。縦横比を止めた U(1) の定数 (1)（近似の式の上で）	極限の測度の集中の確認。真の U(1) での一様な定数。移した定義での $S_N=0$
典 U(1) の閉じ込めない相（Villain の作用、Wilson の作用への延長は Fröhlich–Spencer の本文）。Z_2 の一次の転移。混合作用の一次の線と臨界の端点、端点の位置の見直し（$\beta_A \geq 1.25$ の見込み）。SU(3) の端点に近づくとスカラーの質量が下がること。SU(6) の強い一次の体積転移。G_2 の中心が自明で弦が切れ得ること	SU(2) の端点の質量、SU(5) の体積転移、Z_2 の弱結合・G_2 のギャップ、有限群の凍る β
読 有限群の平坦な接続の数（全数え上げ）。1^4 の SU(2) の $\beta\langle S\rangle$（4000 × 3000、種一本）。4^4 の混合作用のヒステリシス（各点 80 掃引、各 β_A で種一本、$\beta_A=2.0$ は二本）。項ごとの符号の 48 個（3000 × 800）	端点の位置。項ごとの単調性が立つこと

出典と再現

もの	種別	出典・道具
U(1)（Villain の作用）の閉じ込めない相	典	A. H. Guth, “Existence proof of a nonconfining phase in four-dimensional U(1) lattice gauge theory”, Phys. Rev. D 21 (1980) 2291（要旨で確かめた）

もの	種別	出典・道具
U(1) の質量の無い相への転移、Wilson の作用への延長	典	J. Fröhlich, T. Spencer, “Massless phases and symmetry restoration in abelian gauge theories and spin systems”, Commun. Math. Phys. 83 (1982) 411（前刷り IHES/P/81/40 の要旨と §1 で確かめた。主に Villain の近似で書き、全ての結果を Wilson の作用の模型へ延ばせる、と本文で述べる。延長は別の論文の技法による）
四次元 Z_2 の一次の転移	典	M. Creutz, L. Jacobs, C. Rebbi, “Experiments with a gauge-invariant Ising system”, Phys. Rev. Lett. 42 (1979) 1390（要旨で確かめた）
混合作用の一次の線・三重点・臨界の端点	典	G. Bhanot, M. Creutz, “Variant actions and phase structure in lattice gauge theory”, Phys. Rev. D 24 (1981) 3212（要旨で確かめた）
見かけの端点 $(1.5, 0.9)$ の引用と、大きい格子での見直し（$\beta_A = 1.25$ に一次の転移なし、端点は $\beta_A \geq 1.25$ の見込み）	典	R. V. Gavai, “A study of the bulk phase transitions of the SU(2) lattice gauge theory with mixed action”, Nucl. Phys. B 474 (1996) 446, arXiv:hep-lat/9603003（要旨と本文で確かめた）
SU(3) の混合作用の端点に近づくスカラーの質量	典	U. M. Heller, “SU(3) lattice gauge theory in the fundamental–adjoint plane and scaling along the Wilson axis”, Phys. Lett. B 362 (1995) 123, arXiv:hep-lat/9508009（要旨で確かめた）
SU(N) の体積転移（SU(4) は滑らか、SU(6) は強い一次）	典	B. Lucini, M. Teper, U. Wenger, “The deconfinement transition in SU(N) gauge theories”, Phys. Lett. B 545 (2002) 197, arXiv:hep-lat/0206029（本文で確かめた）
G_2 の中心が自明で弦が切れ得ること、閉じ込め	典	K. Holland, P. Minkowski, M. Pepe, U.-J. Wiese, “Exceptional confinement in G(2) gauge theory”, Nucl. Phys. B 668 (2003) 207, arXiv:hep-lat/0302023（要旨で確かめた）
一ループの係数の式	初	4-06 の式 (3) に随伴の実スカラー一つを入れた
文献の記述で本書が確かめていないもの：Z_2 の弱結合の相のギャップ、有限群の凍る β（Petcher–Weingarten 1980）、SU(2) の端点のスカラーの質量、SU(5) の体積転移と両側の相、G_2 のギャップ	—	文献の記述（本書は未確認）。本文の主張の根拠にしていない
本書の Lean の定理	Lean	20-06・21-02・21-03・21-05・21-06・21-07 の宣言（`VortexPos.SN_pos`・`TwistBlocks.thick_vortex_floor`・`TwistedWilson.thin_vortex_floor`・`TwistBlocks.theta_nonneg`・`TwistFlat.no_flat_twist11` ほか）。A-04 表 4g と 21-05・21-07・20-06 の頁で言明を確かめた
U(1) の転移の位置、Z_2 の転移の位置、張力の倍化の不等式の三つの相の値、四つの顔の見立て	読	26-06 §04・§07・§08
§05 の (a)〜(e)	読	本書の検討の台本（numpy の浮動小数、全数え上げと Metropolis）。この章のために走らせ直した：(a) 全て、(b) $\beta = 300$、(c) 全てと別の種一本、(d) 全て、(e) 最初の 2 組

この章で使った語 — 篩・閉じ込めの量・ギャップの量・最大トーラス・随伴 Higgs・混合作用・一次の転移・臨界の端点・体積転移・中心の無い群・平坦な接続・凍った相・捩れた真空・ヒステリシス・縦横比・項ごとの符号。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：27-00 入口 — この部の約束。発想の全体の地図は 16-11 に在ります。

入口 — この部の約束

> この章は案内です（この部の入口）。

この部は検討の記録です。機械検査まで済んだ定理は第 20〜22 部、前提の今の一覧は 28-04 に在ります。

この章で分かること — 第 27 部の書き方の約束と、条件の台帳が空になっても残る差。二本の道が帯で合流する図の再掲と、27-01〜27-04 の地図。

前提となる章 — 16-09（証明が含むべき七つの段の表）。第 23〜26 部を読み終えていなくても読めます。

01

この部の約束

第 27 部は、条件が消えるまで、条件つきで書きます。

- 言明は矢印ごとに分け、各矢印に札を付けます。「定理」と呼ぶのは、紙の証明をこの本に置いた矢印だけです。だから 27-01 の題は「条件つきの言明」です。
- 条件は、条件の台帳（27-02）に一行ずつ置きます。台帳は 2026-11-10 の公開のあとの事実で書きます。周期の立方の箱での連続極限は公開された構成が示しました（委員会の評価の水準。第二巻）が、本書の道に要る形（捩れた境界条件・細長い箱、格子間隔に一様な形）はそこに無いので、紫外の制御の行は残ります。行が消えるのは、紙の証明が本に置かれ、Lean の欄があればその再検査が済んだときです。研究が進むと行は消えますが、割れて増えることもあります。
- 台帳の行が全て消えても、問題文との差は残ります。$\mathbb{R}^4$ の公理（無限体積の極限・回転の回復・非自明性。周期の箱の列からの無限体積（部分列）と再構成は公開された構成が示しましたが、本書の道の捩れた板の族からの帰着は開いています）、全てのコンパクト単純群（存在は任意のコンパクト単純群で公開された構成が示しました。渦の道具は中心の無い群では使えません）、面積則から質量ギャップへの矢印（二本の道の結び）、そして全体の検証と査読です。この四つ（R^4 への極限〔27-02 表 3 では四行に割った〕・二本の道の結び・一

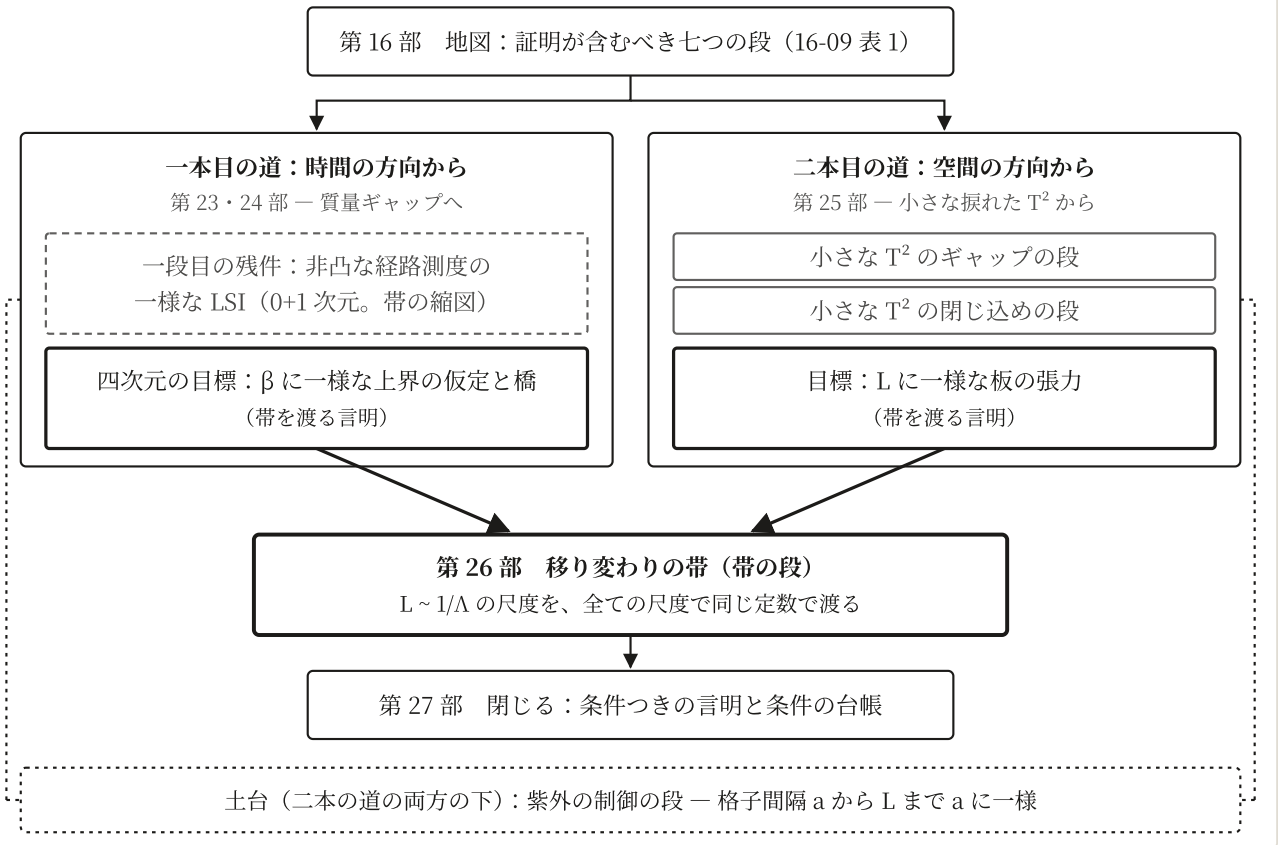
般の群・検証と査読。内訳を入れて七行）は台帳の外の別枠（27-02 §05）に置きます。台帳が空になることは、問題が解けることを意味しません。

- この部に「解ききった」の章は置きません。

02

二本の道が帯で合流する（再掲）

図1　16-09 図 1 の再掲。帯へ流れ込む矢印は、二本の道のどちらでも「四次元の目標」の行からだけ出る。紫外の制御の段は二本の道の両方の下にある。第 27 部は、帯から下の一つの箱にあたる



03

四章の地図

表1　第 27 部の章

章	中身（一行）
27-01 条件つきの言明	仮定の下で、質量ギャップと閉じ込めへ。矢印ごとの札と、まだ空欄の矢印（面積則からギャップへ）
27-02 条件の台帳	条件を一行ずつ。記録の状態・札・消えるのに要るもの・依存の図・台帳の外に残る差
27-03 問いの表	第 23〜26 部の問いを、章と項目番号で引く横断の索引

章	中身（一行）
27-04 主張しないこと	第 23〜26 部の「主張しないこと」を、章と項目番号で引く横断の索引

出典

図 1 は 16-09 と同じ図です。約束の四項目の根拠は 27-02 §01・§05・§06 にあります。

次に読む章：27-01 条件つきの言明。

2026-10-15 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 27 部 閉じる — 条件つきの言明
条件つきの言明・矢印ごとの札・開いた矢印 · Kiichi, Shiori and Rin

条件つきの言明 — 質量ギャップと閉じ込めを矢印ごとに

> この章は未解決の問いの地図です。§03 は本書の検討です。

この章で分かること — 紫外の制御・挿入の一様な受理・小さな T^2 の基点・枠の減相関・一様な板の張力・一様な板のギャップ・二本の道の結び、という仮定の下で、質量ギャップと閉じ込めがどの矢印を通って出るか。ギャップは小さな T^2 のギャップの段と転送行列から、閉じ込めは小さな T^2 の閉じ込めの段と帯の段から出る形で、矢印の一本一本に札を付けます。紙の証明を本に置けた矢印は、倍化の反復の代数（倍化の反復の定理）と、格子間隔を固定した板の閉じ込めだけです（格子間隔を固定したもう一本、分数インスタントンによる閉じ込めの下界（論文 3 の定理 A）は、引用つきの証明が論文にあり、本の札は仮です）。面積則から質量ギャップへの矢印は開いていて、何を足せばよいかの言明もまだ決まっていません。

前提となる章 — 16-09（証明が含むべき七つの段の表）・27-00（この部の約束）・25-04（板の閉じ込め）・25-05（挿入の恒等式）・26-02（一つの不等式への還元）・26-05（チェス盤）。仮定の名と中身は A-06 §06、各仮定の現状は 27-02 表 2（条件の台帳の行）と 表 3（台帳の外に残る差）にあり、この章は仮定を台帳の行の名前で引きます。

先に言うこと — この章は質量ギャップも閉じ込めも示しません。題を「条件つきの定理」としないのは、言明を作る矢印の多くに紙の証明が無いからです。紙の証明を本に置けた矢印だけを「定理」と呼び、残りは札を付けた「矢印」として並べます。条件の台帳の行が全て消えても、問題文の要求との差が残ります（§05）。

この章の順序

1. 言明の形 — 仮定と二つの結論・二つの水準（表 1）
2. ギャップの側 — 小さな T^2 のギャップと転送行列（二本の矢印）
3. 閉じ込めの側 — 小さな T^2 の閉じ込めと帯の矢印・倍化の反復の定理
4. 二本の道の結び — 開いた二本の道の結びの矢印と、時間の方向の道の言明
5. 言えないことと、台帳が空になっても残る差
6. 矢印ごとの札と依存グラフ — 表 2

01

言明の形 — 仮定と二つの結論・二つの水準

この章の言明は、一つの「ならば」ではなく、矢印の束です。結論は二つあります。

- **質量ギャップ**：転送行列（ハミルトニアン）のスペクトルが真空の上で $\{0\} \cup [\Delta, \infty)$、$\Delta > 0$ となること（4-11）。
- **閉じ込め**：大きな Wilson ループの期待値が面積の指数で減ること（面積則、5-08）。

二つは別の言明です。面積則からギャップを出す既知の道は無く、「閉じ込めを示せばギャップも出る」は誤解です（16-08）。だからこの章は、二つの結論をそれぞれ別の矢印の束で出し、最後に二つを同じ理論の上で結ぶ矢印を、開いたまま置きます。

水準も二つに分けます。**小さな $\mathbf{T^2}$ の上の理論**は $\mathbb{R}^2\times$ 小さな捩れた T^2（一辺 L、't Hooft の捩れ $n_{12}=1$）の上の理論で、格子間隔 $a \to 0$ の極限を取ったもの。問題文の要求ではなく、中間の到達目標です。**$\mathbf{R^4}$ の上の理論**は $\mathbb{R}^4$ の理論で、小さな T^2 の上の理論から T^2 を広げる段（帯）と、無限体積の極限の段を通って着きます。

使う仮定を表 1 に並べます。札はどれも「仮」で、証明の無い行です。名前は中身から付けたものです。

表 1　この章の言明が置く仮定（番号は §06 の依存グラフの番号、台帳の欄は 27-02 の行。段は 16-09 の証明が含むべき七つの段）

番号	台帳	名前	中身（一行）	段	札
1	紫外の制御	紫外の制御	格子間隔 a から尺度 L まで、a に一様な多重尺度の解析が成り立つ：小さな場の有効作用の局所性と解析性（小さい場の解析性の条件）、大きな場の稀さ（大きい場の稀さの条件）、有効結合が $(0,\gamma]$ に留まる。周期の立方の箱での連続極限は公開された構成が示した（第二巻）が、捩れた境界条件や細長い箱での構成はそこに無い（検索の範囲で）。ここでの紫外の制御は、捩れた境界条件の下で同じ構成が立つことという、まだ開いた条件	紫外の制御の段	仮
2	挿入の一様な受理	挿入の一様な受理	小さな場の枠の下で、力学で駆動した渦の挿入の $\tanh(W/2)$ の平均が a に一様に $1-\delta$ 以下（25-06）	小さな T^2 の閉じ込めの段	仮
3	小さな T^2 の基点	小さな T^2 の基点	小さな物理的な L_0 で $\theta(L_0;T^2_{L_0}) \le 1-\varepsilon_0$（$\theta$ は容器の区画の偏り、25-03）。期待される大きさは $\varepsilon_0 \propto (L_0\Lambda)^{11/3}$（一ループの見立て）。筋の上では紫外の制御・挿入の一様な受理から出る	小さな T^2 の閉じ込めの段	仮

番号	台帳	名前	中身（一行）	段	札
4	枠の減相関	枠の減相関（L を固定した形）	容器の枠どうしの相関が減り、Wilson ループの評価 $\mathbb{E}\prod\theta$ を各 θ の積に定数の損で分けられる	小さな T^2 の閉じ込めの段・帯の段	仮
5	小さな T^2 のギャップ（格子間隔に一様な形）	ブロック観測量の減衰（L を固定した形）	ブロック観測量の相関が a に一様な率 $m \geq c/L$ で指数的に減る（小さな T^2 の上の理論の研究計画が置く形）	小さな T^2 のギャップの段	仮
6	't Hooft の張力の正値性の中の形（還元の入力の位置は繰り込みの比較）	横広げの不等式	容器を固定して横の T^2 を s 倍に広げても θ は高々 Cs^2 倍（強い形）、または損失の総和が有限な形（弱い形）。帯の還元の論文の形で帯を述べるときの仮定（26-02）	帯の段	仮
7	't Hooft の張力の正値性の弱い形	一様な板の張力	板 $T^2_L \times \mathbb{R}^2$ の弦の張力 $\sigma_{\mathrm{eff}}(L)$ が L に一様に正	帯の段	仮
8	ブロック観測量の一様な減衰	一様な板のギャップ	ブロック観測量の相関が、格子間隔と板の大きさ L に一様に指数で減る（R^4 のギャップの矢印の前提）	帯の段	仮
9	R^4 への極限（台帳の外）	$\mathbb{R}^4$ への極限	無限体積の極限・OS 公理・回転不変性の回復・極限の一意性・非自明性	R^4 の段	仮
10	二本の道の結び（台帳の外）	二本の道の結び	ギャップの道（小さな T^2 のギャップの段を帯を通して運ぶ）と閉じ込めの道（小さな T^2 の閉じ込めの段と帯の段から $\mathbb{R}^4$ へ）が、同じ $\mathbb{R}^4$ の理論の上で両方の結論を与えること。何を仮定すれば足りるかの言明そのものが決まっていない	小さな T^2 のギャップの段・小さな T^2 の閉じ込めの段・R^4 の段	仮（言明が未定）

台帳との対応を先に言います。台帳では枠の減相関（L を固定した形）は枠の減相関の行に、一様な板のギャップはブロック観測量の一様な減衰の行に当たり、横広げの不等式と一様な板の張力は 't Hooft の張力の正値性の行の中の形として扱われています。帯への還元の非可換の入力は、台帳では繰り込みの比較の行に置かれています。z の鏡映正値性の行は閉じた行で（26-04 §03 に証明を置いた。最後の段の代数は Lean（ReflPos）でも閉じている）、この章ではチェス盤の矢印の中で使います。R^4 への極限と二本の道の結びは台帳の外の差で、仮定を外す仕事ではなく、結論を問題文まで運ぶ仕事です。この章では矢印の前提として名指すために表に入れました。

表 1 の「枠の減相関」は二つの形に割りました。枠の減相関（L を固定した形）は閉じ込めの側で容器の評価を分けるための形、ブロック観測量の減衰（L を固定した形）は小さな T^2 の上の理論のギャップの側で研究計画が置く形です。同じ系統の仮定ですが、文としては別物で、ブロック観測量の減衰（L を固定した形）には結論の量（率 m）が入っています（§02）。θ は容器の区画の偏り $\theta(R;T^2_L)$（容器の一辺 R、横の T^2 の一辺 L）で、A-06 表 6 の θ（取りこぼしの溜まりの指数）とは別の量です。

02

ギャップの側 — 小さな T² のギャップの段と転送行列

小さな T^2 のギャップの矢印（小さな T^2 の上の理論）。紫外の制御とブロック観測量の減衰（L を固定した形）の下で、$\mathbb{R}^2\times$ 小さな捩れた T^2 の理論が（ブロック観測量の分布の部分列の極限として）在り、鏡映正値で $\mathbb{R}^2$ の並進に不変で、転送行列が真空の直交補空間の上で $\|T_t\| \le e^{-mt}$、$m \ge c/L$ を満たす 仮 。小さな T^2 の上の理論の研究計画が命題として掲げる形で、証明は筋の段にあります。結論は台帳の行の小さな T^2 のギャップにあたります。

この矢印の中身を正確に言うと、転送行列の段は器の段の抽象の補題です。実内積空間の上の自己共役な縮小作用素について、稠密な集合の上で相関が率 m で減れば作用素のノルムが e^{-m} 以下になる、という一般の事実で、物理の測度とは独立です。したがって小さな T^2 のギャップの矢印の中で質量ギャップの中身を担っているのは、仮定であるブロック観測量の減衰（L を固定した形）の「率 $m \ge c/L$ で減る」の部分です。ブロック観測量の減衰（L を固定した形）は結論の量を含んでいて、小さな T^2 のギャップの矢印は「ブロックの相関の一様な減衰を転送行列の隙間に言い換える矢印」と読むのが正確です。捩れが零モードを消すこと（随伴の場に零モードが無い、25-01）は、ブロック観測量の減衰（L を固定した形）が成り立つと期待される理由で、ブロック観測量の減衰（L を固定した形）の証明ではありません。

R^4 のギャップの矢印（R^4 の上の理論）。小さな T^2 のギャップの矢印の隙間 $m \ge c/L$ は $L \to \infty$ で 0 に近づくので、そのままでは $\mathbb{R}^4$ のギャップになりません。$\mathbb{R}^4$ へ運ぶには、板の質量ギャップが L に一様であること（一様な板のギャップ）が要り、さらに無限体積の極限（R^4 への極限）の中で、一様な指数的な減衰が極限の理論の転送行列の隙間に移ることを使います 仮 。ここでも、ギャップの中身は帯の仮定（一様な板のギャップ）にあります。「ギャップは小さな T^2 のギャップの段と転送行列から」という言い方は、小さな T^2 のギャップの段の隙間を帯を通して L に一様に運べた場合の形で、運ぶ部分が帯の問題そのものです（26-00）。

03

閉じ込めの側 — 小さな T² の閉じ込めの段と帯の段

閉じ込めの側には、格子間隔を固定した段で紙の証明のある矢印が二本あり、格子間隔を 0 に送る段と帯の段は仮定の上の矢印です。

格子間隔を固定した二本の矢印。(a) 板の閉じ込めの矢印：格子間隔と T^2 の大きさ N（格子の単位）を固定すれば、全ての β で面積則が成り立ち、張力は $\sigma \geq -\ln\tanh(\beta N^2) \approx 2e^{-2\beta N^2}$ で押さえられる 初 （25-04）。張力は細い $\mathbb{Z}_2$ の渦の面のコストで決まり、連続極限では 0 に近づきます。(b) 分数インスタントンの率の矢印（分数インスタントンによる閉じ込めの下界）：固定した $N \geq 2$、ブロックの一辺 $\ell \geq 2$、$\beta \geq 1$、$M \in 2\ell\mathbb{N}$ の格子 $T^2_N \times T^2_M$ で、n_{34} の流束の偏り θ が $-\ln\theta \geq c(N,\ell)\,\beta^{-a} e^{-\beta(S_*(N,\ell)+\varepsilon(\beta))} M^2$、$\varepsilon(\beta) = O(\sqrt{\ln\beta/\beta})$ を満たす 仮 （この本には証明を置いていない。引用つきの証明は論文にある：チェス盤の評価と Morse–Bott の補題を引用し、剛性の定数は存在だけが示される。論文は草稿で、外の検査を経ていない。25-02 §07 (e)）。S_* は真空に凍らせた枠の中の分数インスタントンの最小作用で、率が細い渦の $2N^2$ でなく分数インスタントンで決まることを言います。台帳では繰り込みの比較の上の端の閉じ込めの向きの行です。同じ論文の固定した平面での逆向きの評価（論文 3 の定理 B）は、平面の大きさ M を止めた評価です。どちらも N に一様でなく、連続極限については何も言いません。

小さな T^2 の面積則の矢印（小さな T^2 の上の理論）。紫外の制御と挿入の一様な受理の下で、$\mathbb{R}^2\times$ 小さな捩れた T^2 の理論の $\mathbb{R}^2$ の平面の Wilson ループが a に一様な面積則を持つ 仮 。期待される張力の形は $\sigma \geq c' e^{-F/g^2(L)}/L^2$（$F$ は分数インスタントンの作用 $4\pi^2$ の見込み）です。組み立ての部品のうち、挿入の恒等式と平均の評価は紙と有限版の Lean で閉じていて（25-05・25-06）、大偏差の段は紫外の制御の大きい場の稀さの条件と同じ型のチェス盤の評価に帰着する筋です。小さな T^2 の基点は、この矢印の結論を容器の偏りの言葉で書いたものにあたります。

帯の還元の矢印（帯の還元の形）。小さな T^2 の基点・枠の減相関・横広げの不等式の下で、$\theta(R;T^2_R) \leq e^{-cR^2}$ 仮 （帯の還元の論文の条件つきの定理）。帯の還元の論文の証明は概略で、「枠の減相関で積が定数の損で分かれる」の部分が数の不等式として書かれていません。この本では、仮定を数の不等式の形に書き直したうえで、残る代数を倍化の反復の定理として紙に置きます。

倍化の反復の定理

θ を、正の長さの組 (R,L) に $[0,1]$ の値を与える関数とする。$R_0 > 0$、$R_k = 2^k R_0$ とし、正の定数 K_1, K_2 について、全ての $k \geq 0$ で

$\theta(2R_k;T^2_{R_k}) \leq K_1\,\theta(R_k;T^2_{R_k})^4$ （入れ子），　$\theta(R_{k+1};T^2_{R_{k+1}}) \leq K_2\,\theta(R_{k+1};T^2_{R_k})$ （横広

が成り立つとする。$K = K_1 K_2$、$t_k = \theta(R_k; T^2_{R_k})$ と置く。$K^{1/3} t_0 < 1$ ならば、全ての k で

$$\theta(R_k; T^2_{R_k}) \;\le\; K^{-1/3} \exp\!\left(-c\, R_k^2\right), \qquad c = \frac{\ln\!\left(1/(K^{1/3} t_0)\right)}{R_0^2} > 0. \tag{2}$$

初 証明。$2R_k = R_{k+1}$ なので、(1) の二つを続けて $t_{k+1} \le K_2\, \theta(2R_k; T^2_{R_k}) \le K_1 K_2\, t_k^4 = K t_k^4$ です。$u_k = K^{1/3} t_k$ と置くと $u_{k+1} \le u_k^4$、帰納法で $u_k \le u_0^{4^k}$。$4^k = (R_k/R_0)^2$ なので $u_0^{4^k} = \exp(-(R_k/R_0)^2 \ln(1/u_0))$ で、(2) が出ます。∎ Lean Doubling（`Doubling.iterate`）（仮定：$c \ge 0$・$t_k \ge 0$・$t_{k+1} \le c^3 t_k^4$。結論：$c\,t_k \le (c\,t_0)^{4^k}$）・Doubling（`Doubling.decay`）（同じ仮定と $c > 0$。結論：$t_k \le (c\,t_0)^{4^k}/c$）。$c = K^{1/3}$ と読みます。

出発の値 $K^{1/3} t_0 < 1$ は、小さな T^2 の基点から一度だけ大きく跳んで作ります。$T^2_{L_0}$ を固定した入れ子で $\theta(sL_0; T^2_{L_0}) \le C_1 (1-\varepsilon_0)^{s^2}$、横広げで $\theta(sL_0; T^2_{sL_0}) \le C_2 s^2\, \theta(sL_0; T^2_{L_0})$ が言えれば、$R_0 = sL_0$ の $t_0 \le C_1 C_2 s^2 e^{-\varepsilon_0 s^2}$ は $s^2 \gg \varepsilon_0^{-1} \ln(1/\varepsilon_0)$ で $K^{-1/3}$ より小さくなります 初 （同じ代数）。

倍化の反復の定理は代数で、中身は全て (1) と跳躍の二つの不等式にあります。入れ子の不等式は、T^2 を固定した容器の中の分割としては正確ですが（25-03）、部分の容器は枠を共有して相関するので、定数 K_1 で積に分けるところに枠の減相関が要ります。横広げの不等式は表 1 の仮定そのものです。だから帯の還元の矢印の札は「仮」で、紙に置けたのは倍化の反復の定理の部分だけです。

容器の評価から面積則への矢印（還元の形から面積則へ）。$\theta(R; T^2_R) \le e^{-cR^2}$ と枠の減相関から、容器の評価（Mack–Petkova の容器の恒等式、25-03 典 ）で、張力が L に一様な面積則 仮 。枠を使わない大域の版では、捩れの分配関数の比と Tomboulis–Yaffe の不等式 典 を使い、その代わり基点を大域的に示す必要があります（26-01）。

チェス盤の矢印と、二つの一様性から面積則への矢印（チェス盤の形）。T^2 の大きさを固定すれば、z の鏡映正値性 初 （帯の還元の論文の命題。ReflPos（`ReflPos.refl_pos`・`ReflPos.refl_cs`）は核の代数、26-04）とチェス盤の評価 典 から、枠の減相関は一つの密度 κ_{cb} に置き換わり、$|\langle W(C)\rangle| \le \kappa_{\mathrm{cb}}^{\,n(C)}$ です 初 （L を固定した文、26-05）。この言葉では帯は二つの一様性になり、一様な板の張力と一様な板のギャップの下で、張力が L に一様な面積則が出ます 仮 。一様な板のギャップを κ_{cb} で読むと、固定した T^2_L の中の入れ子の冪は定数 1 で全ての L について立ち（26-05 の入れ子の超乗法性の補題 紙 ）、一様な板のギャップの L に一様な中身は L をまたぐ比較 $(\mathrm{C_{cb}})$——横広げの不等式を κ_{cb} で読んだ形（26-02 のチェス盤の密度で読んだ還元）——に移ります。

R^4 の上の理論の閉じ込めは、容器の評価から面積則への矢印か、二つの一様性から面積則への矢印の面積則と、$\mathbb{R}^4$ への極限から出ます 仮 。

04

二本の道の結び — 開いた二本の道の結びの矢印と、時間の方向の道の言明

二本の道の結びの矢印（開いている）。§02 のギャップの道と §03 の閉じ込めの道は、どちらも帯を渡る仮定（一様な板のギャップ、または横広げの不等式・一様な板の張力）を通って $\mathbb{R}^4$ に着きます。二つの結論を同じ $\mathbb{R}^4$ の理論の上で両方言うには、二本の道が同じ極限の理論を与え、その理論で両方が成り立つことを言う矢印が要ります。これが二本の道の結び（台帳の外の差）で、札は「仮」ですが、他の仮定の行と違って、何を仮定すれば足りるかの文がまだありません。

面積則から質量ギャップへ直接進む既知の道は無いので、二本の道の結びの矢印を「閉じ込めの道の延長」として書くことはできません。物理の期待の水準では二つは結びついていますが（張力 $\sigma > 0$ の弦の上の励起が重い、17-03）、それは矢印ではありません 読 （物理の見立て）。ギャップは §02 の道（小さな T^2 のギャップの段の隙間を帯を通して運ぶ）で出し、閉じ込めは §03 の道で出し、二本の道の結びの矢印は「二つが同じ理論の上の文であること」を言う役に限ります。

時間の方向の道の言明。第 23 部の道の条件つきの言明は、別の形をしています。拡散型緩和時間の仮定の上側 $\xi^{2\uparrow}$（$C_P \le K\xi_{\mathrm{RG}}^2$）と片側の橋（片側の橋の命題、$C_P \ge \kappa\xi^2$）から、各 β で格子の物理単位の隙間の下界 $m_{\mathrm{phys}} \ge (\kappa/K)^{1/2}$ が出る 初 （仮定の上の代数、23-01 §06）。これを $\beta \to \infty$ に一様に言うことが第 23 部の四次元の目標（台帳の「緩和時間の上界と片側の橋の一様性」の行。23-15 表 5 の物理単位の目標の水準）で、この目標も帯を渡る言明です。空間の方向の道の一様な板のギャップと、時間の方向の道の「β に一様な $\xi^{2\uparrow}$ と橋」は、同じ型の一様性の文で、どちらも帯の中で示されていません（26-07）。

05

言えないことと、台帳が空になっても残る差

この章のどの矢印も、質量ギャップも閉じ込めも示しません。紙の証明を本に置けたのは、倍化の反復の定理（代数）と、格子間隔を固定した板の閉じ込めの矢印と、T^2 を固定したチェス盤の矢印だけです。板の閉じ込めの矢印は連続極限について何も言わず、分数インスタントンの率の矢印（分数インスタントンによる閉じ込めの下界）は本に証明が無く（札は仮。引用つきの証明は論文にある）、N に一様ではありません。小さな T^2 の上の理論の小さな T^2 のギャップの矢印・小さな T^2 の面積則の矢印は研究計画の命題で、筋の段にあります。帯の形の

横広げの不等式・一様な板の張力は結論の量（偏り・張力）を L に一様という形で含み、一様な板のギャップは相関の減衰を L に一様な形で述べます。帯の言明そのものが結論の中身を担っています。この章の言明は、帯を仮定に置いた限りでの条件つきの言明です。

台帳の行が全て消えても、問題文の要求との差が残ります：全てのコンパクト単純群（中心の無い群では渦の道具が使えない）、$\mathbb{R}^4$ の OS 公理と回転の回復と非自明性、面積則から質量ギャップへの矢印。これらは 27-02 §05 の別枠「台帳の外に残る差」にあります（表 1 の R^4 への極限と二本の道の結びもそこに入ります）。台帳は減るだけの表でもなく、研究が進んで行が割れ、新しい行が立つこともあります。

06

矢印ごとの札と依存グラフ

矢印を五分類の書式（23-00 §01）で並べます。札は矢印の札で、前提の札ではありません。前提が「仮」の矢印でも、前提から結論への推論が紙で書けていれば「初」、筋の段なら「仮」です。

表 2　矢印ごとの札（「—」は機械検査の無い行。Lean の欄は本体が再検査した束の名だけ）

矢印	前提 ⟹ 結論	札	根拠	同じ行に書く条件	機械検査
小さな T^2 のギャップの矢印	$1 \wedge 5 \Longrightarrow$ 小さな T^2 の上の理論の存在とギャップ $m \geq c/L$	仮	小さな T^2 の上の理論の研究計画の命題（筋）。転送行列の段は器の抽象の補題	ブロック観測量の減衰（L を固定した形）が結論の量 m を含む。a に一様・L は小さい	—
R^4 のギャップの矢印	小さな T^2 のギャップの矢印 $\wedge\ 8 \wedge 9 \Longrightarrow \mathbb{R}^4$ のギャップ	仮	筋	一様な板のギャップ（台帳のブロック観測量の一様な減衰の行）はブロック観測量の一様な減衰で、R^4 のギャップの矢印が足すのは極限の理論への移しかえ	—
板の閉じ込めの矢印	格子間隔と N を固定 $\Longrightarrow$ 全ての β で面積則、$\sigma \geq -\ln\tanh(\beta N^2)$	初	25-04	連続極限では張力が 0。先行の議論（Borgs、Tomboulis–Yaffe 型）との照合が残る	25-04 の Lean の欄

矢印	前提 $\Longrightarrow$ 結論	札	根拠	同じ行に書く条件	機械検査
分数インスタントンの率の矢印	固定した $N \geq 2$・$\beta \geq 1$ $\Longrightarrow -\ln \theta \geq c\,\beta^{-a} e^{-\beta(S_* + \varepsilon(\beta))} M^2$	仮	分数インスタントンによる閉じ込めの下界（本に証明を置いていない。引用つきの証明は論文にある。25-02 §07 (e)）	N に一様でない。連続極限について何も言わない。論文は草稿	—
小さな T^2 の面積則の矢印	$1 \wedge 2 \Longrightarrow$ 小さな T^2 の上の理論の面積則（a に一様）	仮	研究計画の命題（筋）。挿入の部品は 25-05・25-06 で 初	張力の形 $e^{-F/g^2(L)}/L^2$ は見込み	25-05 の Lean の欄（有限版）
帯の還元の矢印	$3 \wedge 4 \wedge 6 \Longrightarrow \theta(R; T_R^2) \leq e^{-cR^2}$	仮	帯の還元の論文の条件つきの定理（証明は概略）	格子の人工物の無い $L \geq L_{\min}(a)$ で述べる	—
倍化の反復の定理	$(1) \wedge K^{1/3} t_0 < 1 \Longrightarrow (2)$	初	§03 の証明	θ の中身に依らない代数	Doubling（`Doubling.iterate`・`Doubling.decay`）（仮定は §03）
容器の評価から面積則への矢印	帯の還元の矢印 $\wedge$ 4 $\Longrightarrow$ 張力が L に一様な面積則	仮	容器の恒等式 典（25-03）と枠の減相関	大域の版は Tomboulis–Yaffe 典 と大域の基点	—
チェス盤の矢印	z の鏡映正値性 $\Longrightarrow T^2$ を固定して $\lvert\langle W(C)\rangle\rvert \leq \kappa_{\mathrm{cb}}^{\,n(C)}$	初	帯の還元の論文の命題とチェス盤の評価 典（26-05）	L を固定した文。横向きの鏡映は捩れで正値でない	ReflPos（`ReflPos.refl_pos`・`ReflPos.refl_cs`）（核の代数）
二つの一様性から面積則への矢印	チェス盤の矢印 $\wedge$ 7 $\wedge$ 8 $\Longrightarrow$ 張力が L に一様な面積則	仮	筋	一様な板の張力が結論の量を含む	—

矢印	前提 ⟹ 結論	札	根拠	同じ行に書く条件	機械検査
R^4 の面積則の矢印	（容器の評価から面積則への矢印か、二つの一様性から面積則への矢印）∧ 9 ⟹ $\mathbb{R}^4$ の面積則	仮	筋	—	—
二本の道の結びの矢印	R^4 のギャップの矢印 ∧ R^4 の面積則の矢印 ∧ 10 ⟹ 同じ $\mathbb{R}^4$ の理論で質量ギャップと閉じ込め	仮	開いた矢印。二本の道の結びの言明が未定	面積則だけではギャップにならない	—
時間の方向の道の矢印	$\xi^2\uparrow$ ∧ 片側の橋 ⟹ 各 β で $m_{\mathrm{phys}} \geq (\kappa/K)^{1/2}$	初	23-01 §06（仮定の上の代数）	各 β の文。β に一様にするのは帯を渡る言明	23-01 の Lean の欄

依存グラフ（前提の番号は結論の番号より小さい。1〜10 は表 1 の仮定）：

```
 1  仮  紫外の制御（三条件）                                                  紫外の制御の段
 2  仮  挿入の一様な受理                                                      小さな T² の閉じ込
 3  仮  小さな T² の基点 θ(L₀;T²_L₀) ≤ 1 − ε₀                                小さな T² の閉じ
 4  仮  枠の減相関（L を固定した形。容器の形）                                小さな T² の閉じ込め
 5  仮  ブロック観測量の減衰（L を固定した形。率 m ≥ c/L を含む）             小さな T² のギャップの
 6  仮  横広げの不等式（強い形・弱い形）                                      帯の段
 7  仮  一様な板の張力                                                        帯の段
 8  仮  一様な板のギャップ                                                    帯の段
 9  仮  R⁴ への極限                                                          R⁴ の段
10  仮  二本の道の結び（言明が未定）
11  初  z の鏡映正値性                                                        Lean ReflPos.re
12  典  容器の恒等式（Mack–Petkova）・Tomboulis–Yaffe の不等式
13  初  板の閉じ込めの矢印（格子間隔と N を固定）                             連続極限で張力 → 0
14  仮  分数インスタントンの率の矢印（固定した N・β ≥ 1）                    引用つきの証明は論文に
15  初  倍化の反復の定理                                                      Lean Doubling.i
16  初  チェス盤の矢印：T² を固定して |⟨W(C)⟩| ≤ κ_cb^n(C) ⟸ 11
17  仮  小さな T² のギャップの矢印：m ≥ c/L ⟸ 1・5
18  仮  小さな T² の面積則の矢印（a に一様） ⟸ 1・2
19  仮  帯の還元の矢印：θ(R;T²_R) ≤ e^(−cR²) ⟸ 3・4・6・15
20  仮  容器の評価から面積則への矢印（還元の形） ⟸ 4・12・19
21  仮  二つの一様性から面積則への矢印（チェス盤の形） ⟸ 7・8・16
22  仮  R⁴ のギャップの矢印 ⟸ 8・9・17
23  仮  R⁴ の面積則の矢印 ⟸ 9・20（または 21）
24  仮  二本の道の結びの矢印：同じ R⁴ の理論で質量ギャップと閉じ込め ⟸ 10・22・23
```

円の検査は、全ての「⟸」の右の番号が左の番号より小さいことを見るだけです。仮定の行のうち結論の量を含むのは、ブロック観測量の減衰（L を固定した形）（率 m、a に一様な形）と、't Hooft の張力の正値性の形の横広げの不等式・一様な板の張力（偏り・張力、L に一様

な形）です。これは循環ではありませんが、小さな T^2 のギャップの矢印・帯の還元の矢印・二つの一様性から面積則への矢印が足しているのは一様性の言い換えと代数だけで、中身はこれらの仮定の側にあることを表しています。台帳（27-02 §04）は行を結論の量を含まない形で書きます。結論の量を含むブロック観測量の減衰（L を固定した形）・横広げの不等式・一様な板の張力は、台帳の行をこの章の矢印に合わせて書き直した「言い換え」の形で、台帳の行そのものではありません。R^4 のギャップの矢印の中身も、一様な板のギャップの相関の一様な減衰の側にあります。板の閉じ込めの矢印と分数インスタントンの率の矢印は、二本の道の結びの矢印の祖先に入らない節点で、格子間隔を固定した段で何が紙で言えているかを記録しています。小さな T^2 の面積則の矢印は小さな T^2 の基点と同じ中身を小さな T^2 の上の理論の言葉で書いたもので、グラフでは小さな T^2 の基点を葉として残しました。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
倍化の反復（倍化の反復の定理）：入れ子と横広げを数の不等式 (1) の形で仮定すれば、$\theta(R_k;T^2_{R_k}) \le K^{-1/3}e^{-cR_k^2}$ 初	(1) の二つの不等式そのもの（枠の減相関と横広げの不等式）
格子間隔と T^2 を固定した面積則（板の閉じ込め） 初	固定した N での分数インスタントンの率の評価（分数インスタントンによる閉じ込めの下界）をこの本の中で示すこと（札は仮。引用つきの証明は論文にある）。N に一様な評価。連続極限での張力
T^2 を固定したチェス盤の評価 $\lvert\langle W(C)\rangle\rvert \le \kappa_{\mathrm{cb}}^{n(C)}$ 初	κ_{cb} を尺度をまたいで比べること（一様な板のギャップ）
言明を矢印に割り、矢印ごとに札を付けたこと。ギャップと閉じ込めが別の矢印の束で出ること	ギャップの二本の矢印・小さな T^2 の面積則の矢印・帯の還元から R^4 の面積則までの矢印・二本の道の結びの矢印のどれも（仮定の上の筋か開いた矢印）。質量ギャップ・閉じ込め・連続極限
時間の方向の道の矢印（各 β の隙間の下界）が仮定の上の代数であること 初	β に一様な形（帯を渡る言明）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1 の仮定の名と中身	本書	A-06 §06・27-02
小さな T^2 のギャップの矢印・小さな T^2 の面積則の矢印の形（小さな T^2 の上の理論の研究計画）	仮	この本の検討で書き直した研究計画（$\mathbb{R}^2\times$ 小さな捩れた T^2 の上の SU(2)）。命題は筋の段
板の閉じ込めの矢印	初	25-04

もの	種別	出典・道具
分数インスタントンの率の矢印	仮	分数インスタントンの格子の論文（草稿）“Fractional instantons confine on the lattice: a rigorous semiclassical bound for SU(2) gauge theory on a twisted small torus” の定理 A（分数インスタントンによる閉じ込めの下界）・定理 B（固定した平面での逆向きの評価）（A-07）。本に証明は置いていない（引用つきの証明は論文にある）
帯の還元の矢印・チェス盤の矢印・横広げの不等式の定義	仮・初	帯の還元の論文（草稿）“Where the twisted-slab route to confinement stops: a corrected window target, a reduction to transverse widening, and SU(2) versus U(1) numerics” の条件つきの定理・鏡映正値性の命題・チェス盤の系（A-07）
倍化の反復の定理	初	本文の証明。代数は Lean の束 `Doubling`
容器の恒等式	典	G. Mack, V. B. Petkova（1980）。照合は 25-03 の出典表
Tomboulis–Yaffe の不等式	典	E. T. Tomboulis, L. G. Yaffe, Commun. Math. Phys. 100 (1985)。照合は 26-01 の出典表
時間の方向の道の矢印	初	23-01 §06

この章で使った語 — 条件つきの言明・矢印・小さな T^2 の上の理論と R^4 の上の理論・紫外の制御・挿入の一様な受理・小さな T^2 の基点・枠の減相関・横広げの不等式・一様な板の張力・一様な板のギャップ・二本の道の結び・倍化の反復・チェス盤の密度 κ_{cb}・開いた矢印。意味は A-02 用語集 と A-06 §06 にあります。

次に読む章：27-02 条件の台帳 — 仮定ごとの現状と、消えるために要るもの。

条件の台帳

> この章は未解決の問いの地図です。§01・§02・§06 は案内です。

この章で分かること — 第 27 部の条件つきの言明（27-01）が置いている条件を、一行ずつ並べた台帳。行ごとに、記録の状態の印・本の札・消えるために要るもの・前提の行・扱う章。行の依存の図。台帳の行が全て消えても問題文との差として残るものを、台帳とは別の枠に分けて書くこと。

前提となる章 — 16-09（証明が含むべき七つの段の表と、二本の道の図）。一本目の道の行は 23-15 表 1 と 23-15 §07 から引きます。

先に言うこと — 台帳は、条件の一覧であって進み具合の目盛りではありません。行の数を数えて「あと何割」と読むことはしません。この章は新たな結果を足しません。行の中身の証明や反例は、右の列の章にあります（執筆中の章を含みます）。

この章の順序

1. 「行が消える」の定義 — 台帳の頭に置く規則
2. 段の表の写し — 16-09 表 1 の印と、台帳の行（表 1）
3. 台帳 — 十二の行と内訳（表 2）
4. 行の依存の図 — 前提の番号は結論より小さい
5. 台帳の外に残る差 — 全ての行が消えても残るもの（表 3）
6. 行が増える日 — 台帳は減るだけの表ではない

01

「行が消える」の定義 — 台帳の頭に置く規則

規則

台帳の行は、次の二つが揃ったときに、そのときだけ消える。(1) その行の言明の紙の証明が、この本のどこかの章に置かれている（記録に証明があるだけでは足りない）。(2) その行に

Lean の欄があれば、欄に書いた定理が、この本の側で公理を読み直す再検査を通っている。

この規則の要は、記録の状態と本の状態を分けることです。記録の上で閉じている行（印 ■）でも、紙の証明を本の章に置くまでは、台帳から消しません。例えば z の鏡映正値性は、記録で閉じていた行で、26-04 §03 に証明を置きました。最後の段の代数は Lean（ReflPos）でも閉じています。この行は閉です。

もう一つ。行が消えても、その行を前提に使う行は自動では消えません。例えば、小さな T^2 の基点・枠の減相関・繰り込みの比較が全て消えても、't Hooft の張力の正値性が消えるのは、小さな T^2 の基点・枠の減相関・繰り込みの比較から 't Hooft の張力の正値性への還元の紙が本（26-02）に置かれたときです。そして 't Hooft の張力の正値性が消えても、台帳の外の差（§05）は一つも動きません。

02

段の表の写し — 16-09 表 1 の印と、台帳の行

表 1 は、16-09 表 1 の印の列を写し、各段に台帳のどの行が掛かるかを並べたものです。印の意味は 16-09 と同じで、記録の状態の印であって証明の程度の目盛りではありません（16-09 §02）。段の中身と既知の欄は 16-09 にだけ置き、ここでは重ねません。

表 1　証明が含むべき七つの段の印（16-09 表 1 の写し）と台帳の行（■ 記録では閉じている／◐ 部分的／□ 開いている）

段	印	台帳の行
器の段	◐	z の鏡映正値性（器の組み立ての書き下しは行に立てていない。§06）
紫外の制御の段	◐	紫外の制御（周期の立方の箱の連続極限は公開された構成が示した。本書の道の形は開いている）
小さな T^2 のギャップの段	◐	小さな T^2 のギャップ
小さな T^2 の閉じ込めの段	◐	挿入の一様な受理・小さな T^2 の基点（と枠の減相関の L を固定した形）
帯の段	□	閉じ込めの言葉で枠の減相関・繰り込みの比較・'t Hooft の張力の正値性、ギャップの言葉で帯の比較（ギャップの言葉）・ブロック観測量の一様な減衰。時間の側の言葉では二重井戸の一様なギャップ（縮図）・緩和時間の上界と片側の橋の一様性
R^4 の段	◐	台帳の外：R^4 への極限の四つの内訳・二本の道の結び（周期の箱の列からの無限体積と再構成は公開された構成が示した）
一般の群の段	□	台帳の外：一般の群（存在は任意のコンパクト単純群で公開された構成が示した）

03

台帳 — 十二の行と内訳

表 2 が台帳です。1〜10 の行は二本目の道（空間の方向から）の行、二重井戸の一様なギャップ・緩和時間の上界と片側の橋の一様性は一本目の道（時間の方向から）の行です。帯の行は二つの言葉で立てます。枠の減相関・繰り込みの比較・'t Hooft の張力の正値性は閉じ込めの言葉（渦の自由エネルギー、電束のある荷電セクター）の行、帯の比較（ギャップの言葉）・ブロック観測量の一様な減衰は質量ギャップの言葉（電束の無い中性セクター）の行です。二本の道の台帳を一つにしたのは、どちらの道も同じ帯で止まるからです（16-09 図 1）。行の番号は、前提が結論より先に来る順に振りました（§ 04）。群は SU(2)、格子は Wilson の作用、T^2 には 't Hooft の捩れ $n_{12} = 1$ を入れた場合で書きます。

表 2　条件の台帳（行の名の右は印＝記録の状態。札は本の札で、行の中の主張ごと。「消えるのに要るもの」は § 01 の規則の (1)(2) に足して要るもの。繰り込みの比較の下の六行はその内訳）

行	示すこと（条件を同じ行に）	札	消えるのに要るもの・前提・章
1　**紫外の制御** ◐	格子間隔 a から小さな物理の尺度 L_0 まで、a に一様な多重尺度の解析（小さな場の有効作用の局所性と解析性・大きな場の稀さ・有効結合が小さいまま留まる）。小さな T^2 の上で	評 周期の立方の箱での連続極限は、公開された構成が示した（委員会の評価の水準。第二巻）／仮 捩れた境界条件・細長い箱での構成と、格子間隔に一様な形の言明は、公開された構成に無い（検索の範囲で）。この行の紫外の制御は、捩れた境界条件の下で同じ構成が立つことという、まだ開いた条件	公開された構成を、本書の道に要る形（捩れた境界条件・細長い箱、格子間隔に一様な形）に広げること（第二巻・16-03・A-08 表 2 の継ぎ目）。本書の道（第 15 部）の側では、Bałaban の段の書き下しの完成（原典が未発表とする段を含む）と、その検証。漸近自由に依る仮定で、U(1) や $\mathbb{Z}_2$ には当てはまらない 前提：— 章：7-07・25-00・26-11（要約）→ 第 15 部（15-00〜15-09。分解の言明は 15-03、閉じない四行は 15-08） この行を小さな問いに割った表：15-09 表 1（紫外の問いの表・答えの現在つき）・15-08 表 1（閉じない四行） 小さい場の結合への寄与は平らな場の原典と同じ形が群の上で条件つきで立ち、原典に無いのはブロック間の二次の陽な項とその局所の打ち消しの群版（15-08 § 06）
2　**小さな T^2 のギャップ** ◐	捩れで零モードが消え、転送行列の隙間 $\geq c/L$ が a に一様	初 捩れの部分（真空の一意性・格子の二次元 Laplacian のギャップ $4\sin^2(\pi/2N)$・(1,1) の区画で $S_{\min} > 0$。N 固定）／仮 a に一様な形	紫外の制御の下で、隙間の下界を a に一様に書く 前提：紫外の制御 章：25-01

行	示すこと（条件を同じ行に）	札	消えるのに要るもの・前提・章
3　**挿入の一様な受理** ◐	小さな場の枠の下で、長さ $m(a)$ の手続きで力学で駆動した渦の挿入の Barker 型の受理率 $b_F = (1 - \mathbb{E}[\tanh(W/2)])/2$ が、a に一様に $\delta/2$ 以上。同じことを平均で言えば、$\tanh(W/2)$ の平均が $1-\delta$ 以下（W は挿入の仕事）。「格子間隔に一様」は、手続きの長さ $m(a) \propto (L/a)^2 (r/a)^2$ を言明に入れないと偽になる（長さを固定すると、散逸が $(L/a)^2/m$ の程度に育つ）	紙 受理率の挟み込み：Metropolis 型は $e^{-\Delta F} O \le a_F \le \min(e^{-\Delta F}, O)$、Barker 型は $\frac{1}{2} a_F \le b_F \le \min(a_F, 1/(1+e^{\Delta F}))$。$O$ は順と逆の経路の測度の重なりで、$O \ge \frac{1}{2} e^{-D}$（D は散逸）。系として、挿入の一様な受理は定数を除いて、挿入の自由エネルギーの有界性 ΔF が a に一様に有界 ∧ 経路の重なりの一様な下界 O が a に一様に下から押さえられる、と同じ。挿入の一様な受理 ⇒ 小さな T^2 の基点は一行（$b_F \le 1/(1+e^{\Delta F})$）で、挿入の一様な受理は小さな T^2 の基点を含む（Lean LatticeGaugeAcceptanceSandwich（`barker_le_of_crooks`・`overlap_sandwich`）。Crooks 型の恒等式を仮定に置いた不等式の代数で、Bretagnolle–Huber の段は Lean の外）／典 散逸の線形応答（Sivak–Crooks 2012）／仮 摩擦 $\zeta \le \mathrm{Var}/\mathrm{gap}$ の a に一様な評価と、線形応答の剰余／読 手続きを長くすると仕事が下がり、$m \cdot D$ は $m = 64〜256$ で一定に近づく（計算の記録（2026-10-22）。25-08 表 1・2 の受理率は Barker 型の値。測定の条件は 25-08）	経路の重なりの一様な下界の a に一様な下界：摩擦の評価（面のプラケットあたりの揺らぎの有界性と、容器の熱浴のギャップ $\gtrsim (a/r)^2$。紫外の制御と小さな T^2 のギャップの側で、枠の減相関・繰り込みの比較の側ではない）と線形応答の剰余の評価。挿入の自由エネルギーの有界性は小さな T^2 の基点の中身なので、挿入の一様な受理を消すことは小さな T^2 の基点に測れる証明書を付けることでもある 前提：紫外の制御・小さな T^2 のギャップ 章：25-06・25-08

行	示すこと（条件を同じ行に）	札	消えるのに要るもの・前提・章
4　**小さな T^2 の基点** ◐	小さな物理の長さ L_0 の対称の容器（$D_{L0}\times T^2_{L0}$、捩れ $n_{12}=1$）で $\theta(L_0)\le 1-\varepsilon_0$ が a に一様、$\varepsilon_0 \propto (L_0\Lambda)^{11/3}$	典 弦の張力の形（Tanizaki–Ünsal、arXiv:2201.06166 式 (2.37)、希薄な領域・一ループ）と、捩れた格子の上の分数インスタントンの数値（Bergner–González-Arroyo–Soler、arXiv:2505.10396）／紙 対称の箱の最小作用の上界の補題：対称の箱の最小作用は全ての N で $S_{\min}(N,N)\le 2N^4(1-\cos(\pi/N^2))<\pi^2$（'t Hooft の定数の曲率の解の格子版。可換な配位を陽に置く。`Lean` LatticeGaugeAbelianTwistAction（`totalAction_eq`・`totalAction_lt_pi_sq`）。区画 (1,1) の最小作用がこの配位の作用以下であることは Lean の外）。格子を固定すれば、$\beta\to\infty$ の率は $S_{\min}(N,N)$（Laplace の原理）／仮 a に一様な形。条件つきの二行に割れる：渦の背景のまわりの紫外の制御（定数の曲率の背景。平らでない背景への延長を含む）と、対称の容器での挿入の受理（大きさ L_0 の対称の容器での挿入の一様な受理）	渦の背景のまわりの紫外の制御・対称の容器での挿入の受理の二行。対称の容器での挿入の受理の仕事の一ループの評価は、定数の曲率の背景のまわりの格子の揺らぎの作用素（陽に書ける）の行列式の比になる。作用の下界（格子の BPS の下界）は小さな T^2 の基点には要らない（希薄の上側で、繰り込みの比較の上の端の逆向きで要る）。有限体積は小さな T^2 の基点に現れない（繰り込みの比較の上の端・'t Hooft の張力の正値性の側）。格子の上の版は繰り込みの比較の上の端と同じ準古典の絵 前提：紫外の制御・挿入の一様な受理 章：25-02
5　**$\mathbb{z}$ の鏡映正値性** ■	捩れの和を取った集団が、方向 3・4 の格子点を通る鏡映で正値。系としてチェス盤の評価	初 ／Lean：ReflPos（`ReflPos.refl_pos`・`ReflPos.refl_cs`）（非負の重みの上の核の代数）	—（26-04 §03 に証明を置いた。横向きの鏡映が捩れで正値でないことも同じ節に。最後の段の代数は Lean（ReflPos）でも閉じている。この行は閉） 前提：— 章：26-04・26-05

行	示すこと（条件を同じ行に）	札	消えるのに要るもの・前提・章
6　**枠の減相関（閉じ込めの側）** ◐	容器の枠どうしの相関が L に一様に減衰する。容器をブロックの内部全体にとると、固定した T_L^2 の上で入れ子の不等式 $\kappa_{\mathrm{cb}}(sR;L) \le \kappa_{\mathrm{cb}}(R;L)^{s^2}$ が定数 1 で全ての L・R・s について成り立つ	紙　入れ子の超乗法性の補題（入れ子の超乗法性。Markov 性と Mack–Petkova の入れ子の形だけを使い、鏡映正値性は使わない。Lean LatticeGaugeNestedBlocks（`nested_supermultiplicative`）は有限確率空間の上の抽象形で、Markov 性は Lean の外）。L を固定すれば、z の鏡映正値性からチェス盤で一つの密度 κ_{cb} に置き換わる（初、L 固定）。チェス盤は κ_{cb} から一つの容器と Wilson ループへ降りる段にだけ使う／仮　L をまたぐ比較（チェス盤の密度の横の比較）	26-02 の還元を θ でなく $\kappa_{\mathrm{cb}}(L)$ で書くと $C_D = 1$ になり、L に一様な部分は独立の仮定として残らない紙。残るのは L をまたぐ比較（チェス盤の密度の横の比較）$\kappa_{\mathrm{cb}}(R;L') \le C(L'/L)^2 \kappa_{\mathrm{cb}}(R;L)$ で、横広げの不等式を κ_{cb} で読んだ形。横には入れ子が無い（T_{2L}^2 を T_L^2 四枚で張ると捩れが偶数になり、横向きの鏡映は捩れで正値でない）ので、この比較は繰り込みの比較と同じ場所にある。柱に分けると繰り込みの比較の真ん中の顔の一つ（柱の捩れのコスト）と同じ問題になる。小さな T^2 の基点を θ のまま残すなら、一つの尺度の一行 $1-\kappa_{\mathrm{cb}}(L_0;L_0) \ge \eta(1-\theta(L_0;L_0))$ が要る。紙（入れ子の超乗法性の補題と、κ_{cb} で書いた還元）を本に置くこと 前提：z の鏡映正値性（降りる段だけ） 章：26-02・26-05
7　**繰り込みの比較**（帯の芯） □	一辺 $2N$・結合 β の渦の自由エネルギーが、一辺 N・結合 β' のそれの定数倍以下、$\beta' < \beta$。非摂動で、全ての β で	内訳の六行	全ての β で、誤差が定数倍に収まる評価。帯を閉じる議論は U(1) と区別できなければならない（U(1) は帯の中 $\beta_c \approx 1.01$ に転移を持つ）。2026-11-10 に公開された構成は帯の中には手がかりを与えない（全ての段を弱結合のまま運び、間隔 1 の格子で止まる）。弱い側の端には、「細かい段ほど結合が弱い」ことの摂動に依らない入力が在るが、それは有効な作用の係数についての言明で、係数が非常に大きい（係数がおよそ 9×10^5 以上の、ごく弱い結合の）所でだけ働く。帯の真ん中で要る「U(1) と区別する入力」には当たらない（第二巻） 前提：z の鏡映正値性・枠の減相関 章：26-06

行	示すこと（条件を同じ行に）	札	消えるのに要るもの・前提・章
繰り込みの比較の強結合の端 ■	$\beta \lesssim 10^{-79}$ の範囲	仮 （記録では証明がある。定数が粗く、記帳が概略なので、紙を本に置くまで仮）	段の書き下しと、定数の改善。強結合の窓（β がおよそ 10^{-3} 以下）では、本書の Lean に面積則と、面積あたりの率が横の大きさに依らない渦の床が在る（20-06。格子間隔は固定、前の因子は残る。繰り込みの比較そのものではない） 章：26-06
繰り込みの比較の下の端 □	閉じ込めと比較を $\beta \approx 0.3$〜1 まで押し上げる	仮	箱の磁束の混合による有限の大きさの判定と、計算機援用（区間演算つきの証明書） 階層模型の計算機援用の鎖は Migdal–Kadanoff の像そのものについての定理で、Tomboulis の代表（像を一律に縮めたもの）は一段で横の座標が (5/3)(1−α) 以上押し上がり管の外に出るので、繰り込みの比較の下の端の道具としてもそのままでは使えない 初 （15-04 §05 の注） 章：26-06・15-04

行	示すこと（条件を同じ行に）	札	消えるのに要るもの・前提・章
繰り込みの比較の真ん中 □	非可換性を使う不等式が一つ。四つの顔（捩れの向きの柔らかさ・箱の磁束の混合・柱の捩れのコスト・圧力の余裕）のどれか一つを、尺度に一様に	仮 （どの顔も未証明）	U(1) で破れる形での証明 Tomboulis の挟み込み（arXiv:0707.2179）で証明があるのは分配関数という一つの数の上下の不等式で、繰り込みの比較の形に要る「捩れのある分配関数と無い分配関数を同じ代表で表すこと（共通の補間母数）」が証明されていない段（K. R. Ito と E. Seiler）。この段は U(1) で偽にならなければならず繰り込みの比較の真ん中と同じ場所にある 典 初 読 第五の顔の候補（比べる相手を固定した一段の不等式の案）：Migdal–Kadanoff の一段の像の弦の張力が本当の粗い理論の弦の張力を超えない $\sigma[T_{\mathrm{MK}} w] \le 4\sigma[w]$。強結合の主項と一ループの漸近では向きが揃い、U(1) では MK の像が閉じ込めへ先に入る段で破れる形。帯の中は未知で、どの β でも示していない 仮 （着想） 比べる相手を固定した一段の不等式の案は有限の箱では闘が 1（$R := \Delta F(\text{粗}; T_{\mathrm{MK}} w)/\Delta F(\text{細}; w) \ge 1$。$\Delta F$ は σ の双対で、本当の一段は ΔF を保つ） 初 。軌道の一段で $4^4/2^4$ は $R = 1.34(7)$、$6^4/3^4$ は $R = 1.17(20)$ で分解能の内＝判定しない。破れの証拠も、成り立つ側の数の裏付けも無い。何もしない写像も通る弱い検査で、U(1) の破れは一段の箱には現れない 読 （15-04 §05） 章：26-06・26-10・15-04
繰り込みの比較の上の端 ◐	固定した N、大きな β での準古典	仮 閉じ込めの向き（論文の草稿の分数インスタントンによる閉じ込めの下界（論文 3 の定理 A）：固定した N で $-\ln\theta \ge c\,\beta^{-a} e^{-\beta(S_*+\varepsilon)} M^2$。この本には証明を置いていない。引用つきの証明は論文にある：チェス盤の一般定理と Morse–Bott の議論は引用）／仮 M に一様な逆向きと $S_* = S_{\min}$	逆向きの一様評価（一つの正値性の補題に還元済み）と、最小作用の一致 章：25-02・26-06

行	示すこと（条件を同じ行に）	札	消えるのに要るもの・前提・章
繰り込みの比較の一ループの端 ■	揺らぎを整形した比較で $\beta - \beta' = 0.258$。揺らぎの形を変えない比較では $\beta' \geq \beta + 0.023$（反漸近自由の向き）	初 （一ループの水準。非摂動の主張ではない）／読 数値の向き（SU(2) は帯の全体で $\beta' < \beta$、U(1) は $\beta_c \approx 1.01$ で符号が反転。格子・種・誤差は 26-09）	非摂動化は紫外の制御と繰り込みの比較の真ん中 章：25-07・26-09
結合の言葉の帯（混合微分） □	時間の両端に一様な背景のホロノミー（角 α・γ）を置いた一辺 L の箱（Schrödinger 汎関数の箱）で、混合微分 $M = \partial^2 \ln Z / \partial\alpha\,\partial\gamma$ を木で β になるよう規格化した M_R が、帯の区間で $M_R(2L) \leq (M_R(L) - \delta)_+$、または $-\Delta \ln M_R / \Delta L^2 \geq \sigma_0 > 0$（$\delta$・$\sigma_0$ は格子間隔に依らない）。M は片側の境界だけに依る項を正確に落とし、上下を貫く電場の流束の自由エネルギーを測る（繰り込みの比較の真ん中の渦の双対） 読 。測るのは二本の γ の差分 D_R。同じ箱の結合 $\beta_R = 4/\bar{g}^2$（$\eta = \pi/4$ の一点の微分）との差 $h := \beta_R - D_R$ が片側の項の目印 紫外：M_R は β_R と同じ一ループの走り $-8b_0 \ln(L/a)$ を持ち（格子の一ループで係数は 1.009 倍）、倍化の段は β_R と同じ 0.2575。違うのは定数だけで $M_R - \beta_R = +0.21$、この差は全て荷電の揺らぎから来て $U(1)$ では 0 典 計算 帯：h は $\bar{g}^2$ の関数の形で、$\bar{g}^2 \approx 4.5$ で正に転じ、5〜10 で最大 0.14〜0.18、60〜140 で 0 へ落ち、強結合の側で小さな負（-0.01〜-0.03）。$L/a = 3$〜8 の全 36 点が、点ごとに 2σ の内で一つの曲線に乗る 計算 強結合：固定した $L \geq 4$ で、展開の収束域の下側（$\beta < \beta_0(L)$）では $h < 0$。主項は片側の帯の項 $-(8/s)u^{3L} \approx -(16/\pi)L^2 u^{3L}$（$u = I_2(\beta)/I_1(\beta)$、$s = \sin(\pi/2L^2)$。$D_R$ には入らない）で、上下を結ぶ筒の項も負 紙 Lean （StrongCouplingOneSidedTerm、9 定理。仮定：剰余 $\lvert R\rvert \leq C_L u^{3L+1}$・$\sin x > x - x^3/4$・$D_R$ の木の規格化 $\hat{D} \leq 3$・紙の係数）。展開の収束は 典 （Osterwalder–Seiler）。L に一様な β_0 は未	仮 （帯の不等式はどの β でも示していない）／紫外 典 計算 ／帯 計算 ／強結合 紙 Lean （収束は 典 ）	帯の区間での不等式の非摂動の証明。$U(1)$ との区別は h の大きさでは足りず、$h(\bar{g}^2)$ の形で立てる：$U(1)$ は Coulomb 相と閉じ込め相の奥で $h \approx 0$（12 点中 11 点で $\lvert h\rvert \leq 0.023$）、有限の箱の転移の幅の中の一点にだけ山（$L/a = 4$ で 0.35、$L/a = 8$ でも 0.29(4)）、$SU(2)$ は $\bar{g}^2 \approx 5$〜10 の幅の帯に山 計算 読 。紫外の一ループの差 +0.21 も $U(1)$ では 0 計算 （計算の記録（2026-10-23〜10-28）） Schrödinger 汎関数の箱と結合 $\bar{g}^2$ は Lüscher–Narayanan–Weisz–Wolff（hep-lat/9207009）の定義 典 前提：紫外の制御（紫外の端の結合） 章：26-06・26-09

行	示すこと（条件を同じ行に）	札	消えるのに要るもの・前提・章
8　**帯の比較（ギャップの言葉）** □	箱の中性セクターの最低の質量 $m_0(L)$ を箱の大きさで測った無次元の量 $x(L) = L\,m_0(L)$ について、帯の区間で倍化の写像に固定点が無い：$x(2L) \geq x(L) + \delta$、δ は格子間隔に依らない	仮 ／紙 U(1) の Coulomb 相では x が光子の値 $x^{*} \approx 2\pi$ に止まるので帯の比較（ギャップの言葉）は破れる。率の比の形 $m_0(2L) \geq (\tfrac{1}{2} - \varepsilon) m_0(L)$ は U(1) の周期の箱で成り立ってしまう（$m_0(2L)/m_0(L) = 1/(2\cos(\pi/2L)) > \tfrac{1}{2}$）ので、群を区別する形にならない	U(1) で破れる形での証明。繰り込みの比較の真ん中の四つの顔のうち、ギャップの言葉でも効くのは κ_W（捩れの向きの柔らかさ）と $\delta(L_0)$（箱の境界の中心の磁束を変えたときの内側の全変動距離）を全ての境界条件に広げたものの二つで、新しい顔として x の階段関数が一つ加わる。外すべき相は質量 0 の相と一次の共存で、$\mathbb{Z}_2$ の閉じ込めない相（そこにもギャップがある）は外さなくてよい。Tomboulis–Yaffe の不等式は U(1) でも同じ証明で立ち、荷電セクターへ降りる道具なので帯の比較（ギャップの言葉）の道具にはならない 読 。中心を使わない言葉で書けるので、一般の群の中心の無い群でも定義できる 前提：紫外の制御（紫外の端の結合は紫外の制御が渡す有限の値に置く） 章：26-06
9　**ブロック観測量の一様な減衰（ギャップの側）** □	真空期待値 0 のブロック観測量 F, G（台が距離 t 離れる）について $\lvert\langle FG\rangle_{a,L}\rvert \leq C_F C_G\, e^{-mt}$、$m > 0$ は a と L に依らない。小さな T^2 のギャップの隙間の L に一様な形（16-07 の一様なギャップの課題）	仮 ／紙 ブロック観測量の一様な減衰は R^4 への極限の下で質量ギャップを与える（27-01 の R^4 のギャップの矢印が一様な板のギャップに求める中身はこの形で、枠の減相関では足りない）／典 任意の境界条件での一様な指数減衰は面積則を与える（Chatterjee 2021、CMP 385、一様な減衰から面積則への定理（Chatterjee 2021 の定理 2.4）。格子の上）	帯の比較（ギャップの言葉）と、小さな T^2 のギャップを L に一様に運ぶこと。't Hooft の張力の正値性は閉じ込めの言葉の帯で、小さな T^2 の基点・枠の減相関・繰り込みの比較が消えてもブロック観測量の一様な減衰は動かない。時間の側では緩和時間の上界と片側の橋の一様性が同じ型の行 前提：紫外の制御・小さな T^2 のギャップ・帯の比較（ギャップの言葉） 章：27-01・16-07
10　**'t Hooft の張力の正値性**（閉じ込めの言葉の帯） □	$\ln(1/\theta(L,L)) \geq cL^2$、$c$ は L に依らない（'t Hooft の弦の張力が正）	初 小さな T^2 の基点・枠の減相関・繰り込みの比較からの還元（反復の代数は Lean：Doubling（`Doubling.iterate`））。κ_{cb} で書いた形 チェス盤の密度の基点・チェス盤の密度の横の比較でも $K = 4C$ として同じ反復が通る（Lean：LatticeGaugeNestedBlocks（`doubling_iterate`））／仮 帯そのもの	小さな T^2 の基点・枠の減相関・繰り込みの比較が消え、還元の紙が本に置かれること。't Hooft の張力の正値性は閉じ込めの言葉の帯で、質量ギャップにはブロック観測量の一様な減衰が別に要る。途中の到達点：(a) 非閉じ込め相の排除、(b) $\ln(1/\theta) \geq cL^2/\ln L$ 前提：小さな T^2 の基点・枠の減相関・繰り込みの比較 章：26-01・26-02

行	示すこと（条件を同じ行に）	札	消えるのに要るもの・前提・章
11 **二重井戸の一様なギャップ**（一段目の残件）□	0+1 次元の二重井戸の経路の測度で、鎖の長さ $k \geq 8$ について k と $\hbar$ に一様なギャップ（非凸な所を含む測度の一様な対数 Sobolev 不等式）。帯の縮図	仮 。凸の側（長さ ≤ 7）と極小の一意性は記録では閉じている（本に置く節は 23-15 の補い）	23-15 表 1 の行を $\hbar \to 0$ で一様な形で閉じること、または有限のブロックと強い混合の継ぎ合わせ $\hbar \to 0$ の側（小さい $\hbar$ の残件）は、六節点の相内 Poincaré の命題の入力のうち一つの余白 $\hbar\rho - 2\hbar\kappa \geq 0.067$ を $\hbar \to 0$ で示すことに帰着する 紙 。極限の二条件（橋の景色：大域の最小点が内部にただ一つで $\lambda_{\min} \geq 0.2$、$\kappa_0 \leq 0.1282$。粗い景色：$U_0''(t^*) \geq 1.943$）は区間演算で確かめてあり、余白の極限は 0.758 以上 機 （作用の隙間は浮動小数 読 ）。記録の範囲（$\hbar \geq 0.005$）と重ねるには、一様なラプラス法の定量版と、$\hbar\rho$ の側の一次元の Muckenhoupt の漸近の補題が新しく要る 仮 。一様なラプラス法の定量版から出る $\hbar_0$ の見込みは 4×10^{-4}〜8×10^{-4} 読 （計算の記録（2026-10-22））$\hbar \in [0.001949, 0.005]$ では、格子の目標の水準の余白 $\hbar\rho - 2\hbar\kappa \geq 0.067$ が六本の部分区間で区間演算により立つ 機 （部分区間の上の算術と被覆の論理は Lean ：LatticeGaugeH1HbarInterval、15 定理）。一様なラプラス法の定量版の $\hbar_0$ との間は未で、次の部分区間からは角の尾の評価がこの計算の機械では閉じず、機械の取り替え（重みを対数で持つか、角の尾の評価の見直し）が要る 読 （計算の記録（2026-10-24〜10-28）） 前提：— 章：23-09 §06・23-15・26-07

行	示すこと（条件を同じ行に）	札	消えるのに要るもの・前提・章
12 **緩和時間の上界と片側の橋の一様性**（四次元の目標、時間の側）□	拡散型緩和時間の仮定の上側（緩和時間の上界の仮定。$C_P \le K\xi^2$）と片側の橋が、$\beta \to \infty$ に一様（23-15 表 5 の物理単位の目標の水準）	仮	帯を時間の言葉で渡ること。二重井戸の一様なギャップが消えても緩和時間の上界と片側の橋の一様性は動かない（二重井戸の一様なギャップは縮図で、含意ではない） 前提：紫外の制御 章：23-01・23-15 §07・26-07

表 2 から読むこと。(a) 記録の上で ■ の行は z の鏡映正値性と、繰り込みの比較の内訳の二行（強結合の端・一ループ）だけです。z の鏡映正値性は 26-04 §03 に証明を置き、最後の段の代数は Lean（ReflPos）でも閉じているので、この行は閉です。内訳の二行は §01 の規則ではまだ消えていません。(b) 非可換の力学が入るのは繰り込みの比較の真ん中（と、それに集まる 枠の減相関・'t Hooft の張力の正値性）で、この行は U(1) と $\mathbb{Z}_2$ で正しく破れる形をしています。他の行は、構造の事実か、紫外の制御に依る行です。(c) 't Hooft の張力の正値性の弱い形（横広げの不等式の弱い形・一様な板の張力）は帯とほぼ同じ内容です。還元は問題を易しくしたのではなく、非可換の入力が要る場所を繰り込みの比較の真ん中に特定した、と読みます。(d) 挿入の一様な受理・小さな T^2 の基点・枠の減相関は条件つき（◐）の行ですが、中身は消えずに他の行へ移っています。挿入の一様な受理は挿入の自由エネルギーの有界性・経路の重なりの一様な下界の連言と同じで小さな T^2 の基点を含み、小さな T^2 の基点は渦の背景のまわりの紫外の制御・対称の容器での挿入の受理の二行に割れ、枠の減相関の L に一様な部分はチェス盤の密度の横の比較として繰り込みの比較と同じ場所に移ります。(e) 閉じ込めの言葉の帯 't Hooft の張力の正値性が消えても、質量ギャップにはブロック観測量の一様な減衰が残ります。二本の道が同じ帯で止まるのは型としては正しく、着くセクターが違います。

04

行の依存の図 — 前提の番号は結論より小さい

図 1 は、台帳の行と台帳の外の行の依存を、層に分けて書いたものです。矢印の向きは前提から結論で、どの行も、その前提の行より大きい番号を持ちます。台帳の行は、言明の中に結論の量（$\mathbb{R}^4$ の隙間・$\mathbb{R}^4$ の面積則）を含まない形に書きます（仮定の行 紫外の制御・挿入の一様な受理・枠の減相関・繰り込みの比較の真ん中・帯の比較（ギャップの言葉）・ブロック観測量の一様な減衰・緩和時間の上界と片側の橋の一様性）。結論の量を含む形の仮定（小さな T^2 のギャップの矢印の仮定と帯の形）は、27-01 で「言い換え」と明記してあります（相関の一様な減衰を隙間に、一様な

偏りと張力を面積則に言い換える矢印の仮定)。't Hooft の張力の正値性は帯そのもので、条件つきの言明の結論に近い量を含みます。't Hooft の張力の正値性を台帳に置くのは、還元（小さな T^2 の基点・枠の減相関・繰り込みの比較から 't Hooft の張力の正値性）を紙に置いたうえで、't Hooft の張力の正値性を消す道を一行で見せるためです。番号の規則に例外はありません。

```
層 0     1 紫外の制御 ◂                    5 z の鏡映正値性 ■
層 1     2 小さな T² のギャップ ◂（← 1）
         6 枠の減相関 ◂（← 5。降りる段だけ）
層 2     3 挿入の一様な受理 ◂（← 1・2）
         7 繰り込みの比較 □（← 5・6）
         8 帯の比較（ギャップの言葉）□（← 1）
層 3     4 小さな T² の基点 ◂（← 1・3）
         9 ブロック観測量の一様な減衰 □（← 1・2・8）
層 4    10 't Hooft の張力の正値性 □（← 4・6・7）
──────────── ここから下は台帳の外（§05） ────────────
層 5    R⁴ の極限の測度と正値性 ◂（← 任意の体積への紫外の制御）
        回転不変性 □（← 任意の体積への紫外の制御＋新しい補題）
        局所場と OS の正則性 □（← 任意の体積への紫外の制御＋局所場の課題）
        極限の一意性と非自明性 □（← 10・9）
層 6    二本の道の結び □（← 9・10・極限の一意性と非自明性）
        一般の群 □（← R⁴ への極限）
層 7    検証と査読 □（← 全ての行）

任意の体積への紫外の制御 ＝ 紫外の制御 ＋ 任意の体積への示量的な延長 ＋ 源への連続性（a と L に−
（台帳の外の行は、周期の箱の列からの形では公開された構成が示した部分を含む。表 3）

一本目の道    12 緩和時間の上界と片側の橋の一様性 □（← 1)。9 の時間の側の同じ型の行
                11 二重井戸の一様なギャップ □ は 12 の縮図（含意の矢印ではない）
```

図 1　行の依存（← の右が前提)。小さな T^2 の基点と繰り込みの比較の上の端は同じ準古典の絵の上にありますが、含意の矢印ではないので図に入れていません。挿入の一様な受理 ⇒ 小さな T^2 の基点は一行で出ますが、挿入の一様な受理が小さな T^2 の基点を含むという関係なので、図では小さな T^2 の基点の前提に挿入の一様な受理を置くだけにしています。極限の一意性と非自明性の前提は、16-07 の書き方では 't Hooft の張力の正値性・二本の道の結びで、二本の道の結びのギャップの側をブロック観測量の一様な減衰に移したので 't Hooft の張力の正値性・ブロック観測量の一様な減衰と書きます 読 。「面積則 ⇒ 質量ギャップ」は矢印に立てません（§05)。

05

台帳の外に残る差 — 全ての行が消えても残るもの

別枠

台帳の十二の行が全て消えても、問題文（Jaffe–Witten 2000、0-03）の要件との差が四つ（R^4 への極限〔表 3 では四行に割った〕・二本の道の結び・一般の群・検証と査読。内訳を入れて七行）残ります。台帳が空になることは、問題が解けることを意味しません。

表 3　台帳の外に残る差（16-07 の課題との対応はこの本の整理）

行	差	印	いまの状態	16-07
R^4 の極限の測度と正値性	$\mathbb{R}^4$ への極限のうち、極限の測度・並進・鏡映正値性の保存・Hilbert 空間と $H \geq 0$	◐	評 周期の箱の列からの無限体積（部分列）と再構成は、公開された構成が示した（相ごとに Wightman の公理。極限の収束と一意性は無い。第二巻）／仮 本書の道の捩れた板の族からの帰着は開いている。その帰着の条件は任意の体積への紫外の制御（紫外の制御を任意の体積に示量的な定数で延ばしたもの）と、源への連続性が格子間隔と体積に一様であること。残りは既知の議論（コンパクト性・弱極限での不等式の保存・対称な縮小半群）典 。紫外の制御の言明だけでは足りない：ゲージ不変な観測量の期待値の a に一様な有界性を定理として出した原典は無い 典	無限体積への課題
回転不変性	回転不変性の回復	□	公開された構成の再構成の中では在る（第二巻）。本書の捩れた板の族からは：超立方体群での不変性と連続性からは出ない。格子の向きを替えた正則化どうしで極限が一致する補題か、破れが $a \to 0$ で消える直接の評価が要り、紫外の制御も 't Hooft の張力の正値性も約束しない。z の鏡映正値性の鏡映は方向 3・4 でしか正値でなく、方向 1・2 の鏡映正値性は回転不変性からしか来ない 読	残りの公理の課題
局所場と OS の正則性	局所場と OS の正則性・線形増大の条件（Osterwalder–Schrader の公理 E0′）（Wightman の場）	□	公開された構成の再構成の中では在る（第二巻）。本書の捩れた板の族からは：合成作用素の繰り込みとその一様な評価	残りの公理の課題・局所場と短距離の課題
極限の一意性と非自明性	極限の一意性・非自明性・クラスター性	□	公開された構成に極限の収束と一意性は無い。クラスター性と一意な真空は体積に一様な減衰（ブロック観測量の一様な減衰）と 't Hooft の張力の正値性の側。一意性は問題文の読みでは必須ではないが、回転不変性の回復を一意性から出す道では要る。二本の道が同じ理論を与えることも、ここに含める	非自明性の課題
二本の道の結び	二本の道の結び：同じ $\mathbb{R}^4$ の理論の上で、質量ギャップと閉じ込めの両方を言うこと	□	面積則だけではギャップにならない（16-09 §03）。ギャップの側（「小さな T^2 のギャップの隙間を帯を通して $\mathbb{R}^4$ まで同じ定数で運ぶ」形）は台帳のブロック観測量の一様な減衰に移し、「同じ理論」は極限の一意性と非自明性に含めた。残る実質は尺度の整合 $0 < \inf m/\sqrt{\sigma} \leq \sup m/\sqrt{\sigma} < \infty$（同じ $\beta \to \infty$ の列で）で、これは閉じ込めを物理の単位で言うための条件で、問題文の要件の外にある（問題文が求めるのは質量ギャップ 典 ）。三次元の U(1) では格子で両方が成り立っても比が 0 に行く例があり、条件は空ではない 典 （要旨）	一尺度の課題

行	差	印	いまの状態	16-07
一般の群	全てのコンパクト単純群	□	存在は任意のコンパクト単純群で、公開された構成が示した（第二巻）。渦の道具は中心の無い群では使えない。質量ギャップについて：SU(N) は条件つきに変えられる見込み 読 。SU(2) に固有の所は四種で、そのうちやり直しが要るのは二種：SU(2)＝S^3 の性質（一リンクの条件つき法則が一母数になること・熱核の明示式・熱核の揺らぎの稀さの補題）と、-1 が Weyl 群に入ること（類関数の偶性に代わる三次の扱い）。これに 26-09 の数値の SU(3) でのやり直しが加わる（SU(2) で開いている紫外の制御・繰り込みの比較の上に）。埋まる所：中心 $\mathbb{Z}_N$ の捩れ（原始的な捩れでは時計と移動の対が共役を除いて一意 典 （González-Arroyo、arXiv:hep-th/9807108 §4.2）、随伴のギャップは $4\sin^2(\pi/(NL))$ で SU(3) の $L=3\text{〜}6$ で数値と一致 読 （計算の記録（2026-10-22））、一ループの $\beta-\beta'=11N^2\ln 2/(12\pi^2)$ 紙 ）、色の補題の n 色版（ Lean ColorAverageN（ `colorAverage` ・ `design_identity` ）。重みつきの四次の設計の存在を含めて仮定なし。su(N) への当てはめは紙）、Tomboulis–Yaffe の不等式の SU(N) 版 典 （Kanazawa、arXiv:0808.3442 定理 2。本書の板への当てはめは未）。全てのコンパクト単純群は開：中心の無い群（G_2・F_4・E_8）では渦の道具も中心を使う矢印も使えず 典 （16-07 §07）、Sp(n)（$n\geq 2$）では捩れを食う対の中心化群が連続で、T^2 の捩れ一つでは零モードが消えない 読	16-07 §07
検証と査読	検証	□	全体の書き下し・Lean（届く範囲）・専門家の査読・出版。賞の規定は、査読つきの出版とその後の受容の期間を求める	—

台帳の外の差を台帳に入れないのは、これらが条件つきの言明（27-01）の条件ではなく、言明の結論と問題文の要件の間の距離だからです。台帳の行は「仮定を外す仕事」で、外の行は「結論を問題文まで運ぶ仕事」です。二つを一つの表に混ぜると、台帳が空になった日に、問題が解けたように読めてしまいます。二本の道の結びのギャップの側（帯をギャップの言葉で渡ること）は、27-01 のR^4 のギャップの矢印の仮定と同じ型の条件なので、台帳の中のブロック観測量の一様な減衰に置きました。

矢印に立てないもの。「面積則 ⇒ 質量ギャップ」は物理の期待として読む 読 に留め、図 1 の矢印にはしません。鏡映正値性と面積則だけからは偽です（面積則を持つ格子の測度と、Coulomb 相の U(1) の直積は、鏡映正値性と面積則を保ってギャップを持たない 紙 。単純群の中の反例は知られていない）。格子で知られている定理は逆向きで、任意の境界条件での一様な指数減衰から面積則が出ます 典 （Chatterjee 2021 一様な減衰から面積則への定理、Durhuus–Fröhlich 1980）。転送行列の言葉では、面積則は電束のある荷電セクターの隙間、質量ギャップは電束の無い中性セクターの隙間です。

```
06
```

行が増える日 — 台帳は減るだけの表ではない

研究が進むと行は消えますが、増えることもあります。例えば、帯の還元を詰めたとき、横広げの不等式は強い形と弱い形の二行に割れ、強い形は閉じ込めより強い（板の張力の単調性を含む）ことが分かりました。繰り込みの比較を詰めたときは、強結合の端と一ループの端の二行が新しく立ち、真ん中の行が四つの顔に割れました。二本の道の結びを見直したときは、帯をギャップの言葉で渡る二行 帯の比較（ギャップの言葉）・ブロック観測量の一様な減衰が台帳の中に立ち、枠の減相関の行は閉じ込めの側の行 枠の減相関になり、R^4 への極限は四行に割れました。器の組み立て（器の段）の書き下しは、いまは行を立てていませんが、書き下す段で行が立つかもしれません。

だから、この台帳の行の数を時間の上で並べても、進み具合の目盛りにはなりません。読むのは各行の中身と、その行を消すのに要るものです。

前提の今の一覧は 28-04 に在ります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
条件つきの言明の条件の一覧と、各行の記録の状態・札・消えるのに要るもの（表 2）	どの行の証明も。この章は新たな結果を足さない
初 't Hooft の張力の正値性への還元・z の鏡映正値性・小さな T^2 のギャップの捩れの部分・繰り込みの比較の上の端の閉じ込めの向き・繰り込みの比較の一ループの端の水準（行に書いた条件の範囲で）	't Hooft の張力の正値性そのもの・繰り込みの比較の非摂動の形・紫外の制御・経路の重なりの一様な下界・チェス盤の密度の横の比較・帯の比較（ギャップの言葉）・ブロック観測量の一様な減衰
紙 挿入の一様な受理の受理率の挟み込み・小さな T^2 の基点の対称の箱の最小作用の上界の補題・枠の減相関の入れ子の超乗法性の補題・二重井戸の一様なギャップの小さい $\hbar$ の残件の帰着（計算の記録にあり、本の章に紙の証明はまだ置いていない）	これらの行が §01 の規則で消えること
台帳の行が全て消えても残る差が四つ（R^4 への極限〔表 3 では四行に割った〕・二本の道の結び・一般の群・検証と査読。内訳を入れて七行）あること（表 3）	台帳が空になれば問題が解けること（言えない。台帳の外の差が残る）
R^4 への極限のうち、極限の測度と正値性だけが、任意の体積への紫外の制御を条件に既知の議論で繋がること	任意の体積への紫外の制御が成り立つこと・回転不変性・局所場と OS の正則性・極限の一意性と非自明性
Lean の欄の定理名の算術（有限和の代数と反復の不等式・受理率の挟み込みの不等式・可換な捩れの配位の作用・入れ子の平均の不等式・四次の設計の恒等式）	Lean の欄が行の言明そのものを検査したこと

出典と再現

もの	種別	出典・道具
台帳の行・内訳・依存	本書	第 25・26 部の材料（証明までの課題の一覧と依存の図・仮定の一覧）を、前提が先に来る順に番号を振り直したもの。印は記録の状態の写し

もの	種別	出典・道具
一本目の道の行 二重井戸の一様なギャップ・緩和時間の上界と片側の橋の一様性	本書	23-15 表 1・表 5・23-09 §06
小さな T^2 の基点の弦の張力の形	典	Y. Tanizaki, M. Ünsal, arXiv:2201.06166 式 (2.37)（書誌と式は 25-02 の出典表）
挿入の一様な受理の挟み込み・小さな T^2 の基点の対称の箱の最小作用の上界の補題・枠の減相関の入れ子の超乗法性の補題・二重井戸の一様なギャップの小さい $\hbar$ の残件・一般の群の随伴のギャップ	紙・機・読	計算の記録（2026-10-22）。区間演算は二重井戸の一様なギャップの極限の二条件だけ
挿入の一様な受理の散逸	典	C. Jarzynski, Phys. Rev. Lett. 78 (1997)・G. E. Crooks, Phys. Rev. E 60 (1999)・D. A. Sivak, G. E. Crooks, Phys. Rev. Lett. 108 (2012)
小さな T^2 の基点の格子の数値	典	G. Bergner, A. González-Arroyo, I. Soler, arXiv:2505.10396
二本の道の結びの逆向きの定理	典	S. Chatterjee, Commun. Math. Phys. 385 (2021) 定義 2.3・定理 2.4（一様な減衰から面積則への定理）・B. Durhuus, J. Fröhlich (1980)
一般の群の捩れと TY	典	A. González-Arroyo, arXiv:hep-th/9807108 §4.2・T. Kanazawa, arXiv:0808.3442 定理 2
繰り込みの比較の上の端の分数インスタントンによる閉じ込めの下界	仮	論文の草稿 'Fractional instantons confine on the lattice: a rigorous semiclassical bound for SU(2) gauge theory on a twisted small torus'（2026-10、A-07）。チェス盤の一般定理と Morse–Bott の議論は引用。引用つきの証明は論文にあり、本に証明を置いていないので札は仮
't Hooft の張力の正値性の還元	初	論文の草稿 'Where the twisted-slab route to confinement stops: a corrected window target, a reduction to transverse widening, and SU(2) versus U(1) numerics'（2026-10、A-07）の条件つきの定理と、26-02
台帳の外の差の課題	本書	16-07 表 1・§07、16-09
問題文	典	A. Jaffe, E. Witten, Quantum Yang–Mills Theory, Clay Mathematics Institute (2000)
Lean	Lean	ReflPos（`ReflPos.refl_pos`・`ReflPos.refl_cs`）・Doubling（`Doubling.iterate`）・LatticeGaugeAcceptanceSandwich・LatticeGaugeAbelianTwistAction・LatticeGaugeNestedBlocks・ColorAverageN。束が保証するのは有限和の代数・実数の反復の不等式・行に書いた初等的な不等式と恒等式だけ（A-04）

この章で使った語 — 台帳・行が消える・記録の状態の印（■◐□）・台帳の外に残る差・繰り込みの比較・四つの顔・帯の縮図・拡散型緩和時間の仮定。意味は A-02 用語集 と A-06 名前の索引 にあります。

次に読む章：27-03 問いの表。条件つきの言明そのものは 27-01。

問いの表（横断の索引）

この章は索引です。各章の該当の節へ案内します。

この章で分かること — この本の各部が開いたまま残した問いを、一つの索引にまとめたもの。第 23 部の十七の問い、第 24 部の十九の問いと六つの規則の候補は、項目を移さずに章と項目番号で引きます。第 25・26 部の本文が残した問いには、この頁で表ごとの通し番号を振り、出所の章の節と、関わる条件の台帳の行（27-02 表 2 の行と、台帳の外の差）を並べます。検討の記録が挙げた「次の一手」の二つの表も、台帳の行の言葉で引きます。

前提となる章 — 27-02（条件の台帳。行の番号と名前はそこで決まります）。問いの中身は、各行の右の列の章にあります。

先に言うこと — この章は新たな結果を足しません。問いは問いで、主張ではありません。問いの状態（済み・一部済み・未・新）と「決着しても動かないもの」は、出所の章の表にだけ置き、ここでは写しません。どの問いが決着しても、質量ギャップの問題は動きません。動くのは、台帳の一つの行か、一つの章の一つの札です。

この章の順序

1. 索引の読み方 — 五つの出所・番号の約束・台帳の行との対応（表 1）
2. 第 23 部の問い （表 2）
3. 第 24 部の問いと規則の候補 （表 3・表 4）
4. 第 25 部から出る問い （表 5）
5. 第 26 部から出る問い — 帯の還元の仮定・判定・β 単調性ほか（表 6）
6. 検討の記録が挙げた次の一手 — 二つの表を台帳の行で引く（表 7）
7. 台帳の行から引く — 行ごとに、関わる問い（表 8）

01

索引の読み方 — 五つの出所と番号の約束

問いには五つの出所があります。表 1 は、出所ごとの番号の付け方と、その番号が指す表です。番号は出所の章のものをそのまま使い、この頁で振り直しません。第 25・26 部には問いをまとめた章がまだ無いので、その部の本文の「言えないこと」「残るもの」「足りないもの」の節から問いの形の文を拾い、この頁で番号を振ります。番号は表ごとの文字の無い通し番号で、本文では問いを短い名で引きます。

表 1　問いの五つの出所

出所	番号	数	引く表	問いの大きさの書き方
第 23 部（一本目の道・前半）	通し番号 1〜17	17	23-17 表 3	道具（SAT・紙・python3・区間演算・Lean・文献）と決着の形
第 24 部（一本目の道・後半）	通し番号 1〜19、規則の候補 1〜6 と三つの組み合わせ	19 ＋9	24-08 表 1・表 2	作業の種類（紙・読む・計算・Lean）と状態
第 25・26 部（二本目の道と帯）	表 5・表 6 の通し番号 1〜16	16 ＋ 16	この頁の表 5・表 6	出所の節の文のまま。大きさの見積もりは書かない
第 15 部（紫外の制御）	通し番号 1〜31	31	15-09 表 1	出所の章の文のまま（条件は出所の章の表に）
検討の記録の「次の一手」	記録の表の順 1〜7 と、取り組む順 1〜4	7＋4	この頁の表 7	台帳の行の言葉に置き換えて引く

台帳の行の名は 27-02 表 2 のとおりです（紫外の制御から緩和時間の上界と片側の橋の一様性までの十二行と、繰り込みの比較の内訳の六行）。台帳の外の差は、R^4 への極限・二本の道の結び・一般の群・検証と査読です（27-02 表 3）。表の「関わる行」の欄は、行の名で書きます。

表の「関わる行」の欄は、その問いが決着したとき台帳のどの行の中身に触れるかを、この本の整理として書いたものです。問いが決着しても、行が消えるとは限りません。行が消えるのは、紙の証明が本に置かれ、Lean の欄があればその再検査が済んだときだけです（27-02 §01）。

02

第 23 部の問い

第 23 部の問いは、卒業研究の大きさで決着がつく見込みの「小さな問い」です。表 2 は一行の要旨と引く場所だけを並べます。決着の形と「決着しても動かないもの」は 23-17 表 3 の各行にあります。第 23 部の問いが軸にした仮定は、拡散型緩和時間の仮定（上側は緩和時間の上界の仮定、下側は緩和時間の下界の仮定）です。

表 2　第 23 部の問い（要旨。行の全文は 23-17 表 3）

問	要旨	道具	関わる行	引く場所
1	$k=3$ 胞体の完全な族は $d=9$ で在るか	SAT・Lean	—（一リンク積分の組合せ）	23-17 表 3・23-02 §02
2	完全な族が在る最大の次元 $d_{\max}(k)$	総当たり・紙	—（同上）	23-17 表 3
3	Hermite の族の $1-\lambda_k$ の定数	紙・python3	—（例題）	23-17 §05
4	森の上の関数の比の頭打ちの $SU(N)$ 版と Lean の言明	紙・Lean	緩和時間の上界と片側の橋の一様性	23-17 表 3
5	二次元格子ヤン–ミルズのリンク変数での $C_P(\beta)$	紙・python3	緩和時間の上界と片側の橋の一様性（対照）	23-17 表 3
6	一リンク積分の後の曲率の最良の定数 $c^{*}\in[21,27]$	大域最適化・区間演算	—（強結合の側）	23-17 表 3・5-11
7	柱の模型の N^{-3} の係数を解析的に	紙・python3	二重井戸の一様なギャップ	23-17 表 3
8	柱の模型で、有限の u の $1/P$ の符号	python3	二重井戸の一様なギャップ	23-17 表 3
9	取りこぼし c_2 はブロック変換のゲージの取り方でどれだけ変わるか	python3	緩和時間の上界と片側の橋の一様性	23-17 表 3
10	二次元 $O(3)$ σ 模型の C_P と ξ^2	python3・文献	緩和時間の上界と片側の橋の一様性（漸近自由な対照）	23-17 表 3
11	三次元 $\mathbb{Z}_2$ ゲージ理論の C_P/ξ^2	python3	緩和時間の上界と片側の橋の一様性（対照）	23-17 表 3
12	$C_P(V)$ の体積単調性と境界条件	python3	緩和時間の上界と片側の橋の一様性	23-17 表 3
13	四次元 $SU(2)$ の局所の算法の動的指数の一次資料を集める	文献	緩和時間の上界と片側の橋の一様性	23-17 表 3
14	中くらいの芯の段の二点の最大相関（$8\le k\le 14$）を区間演算で上から押さえる	区間演算・紙	二重井戸の一様なギャップ	23-17 表 3・23-15 表 1
15	芯の C_P の前因子 $\hbar^{-p}$ の冪を、縮退点の容量で読む	python3・紙	二重井戸の一様なギャップ	23-17 表 3
16	箱の間の交互の最大相関 $c_{\mathrm{alt}}<1$ を示す比較の定理	紙	二重井戸の一様なギャップ	23-17 表 3
17	保存のある力学に保存を壊す小さな項を足したとき、隙間が一辺の二乗から離れる長さ	紙・python3	緩和時間の上界と片側の橋の一様性（第 24 部の最小の模型）	23-17 表 3

表 2 の読み。二重井戸の一様なギャップの行（一段目の残件）に関わるのは問い「柱の模型の N^{−3} の係数」・問い「柱の模型の 1/P の符号」・問い「芯の最大相関の区間演算」・問い「芯と窓の前因子の冪」・問い「箱の交互の最大相関の比較」で、第 23 部への補いの「ブロックと混合の道」（23-15 のブロックと混合の道）が開いた問いは第 26 部の表 6 の問い「帯の中の両側の面積則の問い」にまとめました。緩和時間の上界と片側の橋の一様性に関わる問いは、四

次元格子の側で拡散型緩和時間の仮定の言明をどう立てるかの問いで、どれが決着しても緩和時間の上界と片側の橋の一様性そのもの（$\beta \to \infty$ に一様な上界の仮定と橋）は動きません。

03

第 24 部の問いと規則の候補

第 24 部の問いは、緩和時間の仮定の言明の形を直す検討（保存が壊れる長さ・区画と局所の版・片側の橋が要る形・真空の測度）から出たものです。表 3 は要旨と引く場所だけで、状態（済み・一部済み・未・新）と「決着したら動くもの・動かないもの」は 24-08 表 1 にあります。

表 3　第 24 部の問い（要旨。行の全文と状態は 24-08 表 1）

問	要旨	大きさ	引く場所（問いの出た節）
1	自由場で、箱に台を持つ観測量の励起のエネルギーの比べ	紙	24-04 §05
2	時刻を区切る因子 $\varphi(x)/x^2$ の単調性	初等・Lean	24-04 §03
3	小さな周期の箱の Polyakov ループの符号で、静的な比が遅さを捕まえるか	小さな計算	24-01 §02
4	二次元の層の $U(1)$ で、帯状の領域を伸ばしたときの隙間の下がり方	計算	24-02 §03
5	$SU(2)$ の純ゲージの位相電荷の自己相関の一次資料	読む・計算	24-07 §07
6	二つの射影の補題の多族版と、その最大相関の条件	紙	24-03 §06
7	熱核と畳み込んだ一リンクの Wilson の重みの $\inf \mathrm{Hess}\, V_t$ と、悪い集合の重さの流れ	紙＋小さな計算	24-06 §07
8	Wilson の転送作用素で、時間の刻みの比べの仮定（論文「片側の橋」の (D)）を低いエネルギーに切った関数に限って示す	紙	24-04 §08
9	有限状態の可逆な Markov 連鎖で、$\tau_{\mathrm{int}} \le C_P$ と基底状態変換の恒等式を Lean で閉じる	Lean	24-05 §01
10	二次元 CP^{N-1} の局所のモードと位相のモードの自己相関を、局所の版の目で読み直す	読む・計算	24-02 §07
11	二次元 $SU(2)$ で、ループの族の λ_W・Γ を有限の β で求める	計算	24-04 §06
12	四次元の箱で、差し渡しの大きさのループの族の値	計算	24-04 §06
13	0+1 の二重井戸で、キンクの位置を座標にした一次元への還元で局所の比を挟む	紙＋小さな計算	24-04 §07
14	二次元の帯状の領域の $\beta = 7$ を一点足し、傾きが収まるか	計算	24-02 §05
15	比が閾と 1 の間に入る場について、比の形のままで質量を見る別の議論	紙	24-04 §06

問	要旨	大きさ	引く場所（問いの出た節）
16	Wilson の時間を刻む格子で、時刻を区切った版の橋（窓の中の上限の命題と有限体積の下界）を時間の刻みの比べの仮定の下で書く	紙	24-04 §03
17	Kogut–Susskind のハミルトニアンを区画にまとめて分けたとき、frustration-free になるか	紙	24-05 §04
18	CP^{N-1} の試験台で、種と N の組を足し、位相のモードの遅さの指数を読む	計算	24-02 §07
19	保存が壊れる長さの定義 (2) を、四次元の部分領域の電荷で測る	計算	24-02 §01

表 3 の要旨は、出所の表の文を短くしたものです。第 24 部の語「窓の因子」「窓の版の橋」は、第 26 部の帯と取り違えないように、ここでは「時刻を区切る因子」「時刻を区切った版の橋」と言い換えました（語の注は 26-00 §02）。問い「二次元の層の U(1) の隙間」・問い「帯の β=7 の一点」の「帯状の領域」は二次元の格子の幅 2 の領域のことで、移り変わりの帯とは別物です。台帳の行で言えば、問い「キンクの位置への還元」 だけが二重井戸の一様なギャップに触れ、他は緩和時間の上界と片側の橋の一様性の言明の形を直す問いです。

規則の候補は、「新しい数学を作るなら何を規則に置くか」という問いへの候補で、それぞれに問いが一つ付いています（24-08 表 2）。表 4 は記号と規則の名と引く場所だけを並べます。三段目の三つの根との関係は 24-08 表 3 にあります。

表 4　規則の候補（候補の一行と問いは 24-08 表 2）

記号	規則の名	候補が出た節
1	尺度の公理化	24-07 §06
2	ループの代数	24-07 §06
3	保存量と区画	24-03 §04
4	稀さで払う測度の類	24-06 §07
5	漸近自由の公理	24-07 §06
6	曲率の規則（軌道の空間の上の Bakry–Émery）	24-07 §06
1＋4・3＋4・2＋3	三つの組み合わせ	24-08 表 2 の下の三行

第 25・26 部の検討から見ると、候補のうち漸近自由の公理と尺度の公理化が帯の問題に最も近い位置にあります。帯を渡る文で漸近自由が入る場所は一つ（繰り込みの比較の $\beta' < \beta$、26-06 §01）に絞られていて、漸近自由の公理の問い（紫外で自由場に近づく規則から何が従うか）は、その一か所を規則の言葉で言い直す問いになります。これは位置づけの見立てで、どの候補も帯を渡る見込みを約束しません 読 （物理の見立て）。

> 04

第 25 部から出る問い

第 25 部（二本目の道：空間の方向から）の本文が開いたまま残した問いです。各行の文は出所の節の文を問いの形に縮めたもので、条件は同じ行に残しました。群は $SU(2)$、小さな T^2 には 't Hooft の捩れ $n_{12} = 1$ を入れた場合です。25-06〜25-08 の三章（駆動した挿入・決まった写像・測った記録）から出る問いは、表の下の五行（問い「反転の確率が 1 に近い核」から問い「測定の延長と誤差」まで）です。

表 5　第 25 部から出る問い（関わる行は 27-02 の台帳の行。この本の整理）

問	問い（条件を同じ行に）	関わる行	決着しても動かないもの	出所
1　分数インスタントンの下界の逆向き	分数インスタントンによる閉じ込めの下界（論文 3 の定理 A）の逆向き：固定した N で、M に一様な希薄な気体の上界（弦の張力の上からの評価）。草稿では一つの正値性の補題に還元されている	繰り込みの比較の上の端	N に一様な評価・連続極限	25-02 §06・A-07 §06
2　最小作用の一致	最小作用の一致 $S_*(N,\ell) \to S_{\min}(N,\infty)$（枠を真空に凍らせた柱の最小作用と、自由な分数インスタントンの最小作用）。数値は五桁で一致（読み）	繰り込みの比較の上の端	同上	25-02 §06
3　分数インスタントンの存在	捩れた $T^2 \times \mathbb{R}^2$ の上で、作用の下限 $4\pi^2/g^2$ を達する位相電荷 $\frac{1}{2}$ の解の存在（いまは仮定つきの筋）	小さな T^2 の基点	格子の上の率・帯	25-02 §02・§07 (c)
4　三つの事実の SU(N) 版	捩れを食う真空の一意性・随伴の場のギャップ・(1,1) の区画に平坦な配位が無いことの $SU(N)$ 版	一般の群	中心の無い群	25-01 §09 (c)
5　外側の容器の偏り	固定した区画へ移すときの第二項：外側の容器の偏りが典型的に小さいこと（$M \to \infty$ で 0）	枠の減相関	容器の自由エネルギーの一様な評価	25-03 §04・§08 (b)
6　容器の自由エネルギーの評価	容器の自由エネルギー ΔF_j を、良い枠に一様に、格子間隔に一様に評価する（枠を止めた条件つきの測度の多重尺度の解析が要る）	紫外の制御・枠の減相関	帯（横を広げる段）	25-03 §08 (e)
7　太い渦の挿入の費用	太い渦の写像で、挿入の費用を N に依らずに押さえる（板の閉じ込めの定理の連続極限への改良。いまは仮の筋）	紫外の制御・挿入の一様な受理	帯	25-04 §04・§07 (c)
8　挿入から面積則への不足	挿入の評価から面積則へ足りない三つ：(i) 全ての細胞で同時に挿入が断られる事象が細胞の数について指数的に稀であること、(ii) 受理率の下界が格子間隔に一様であること、(iii) 挿入比の分散の上界	挿入の一様な受理	帯	25-05 §07

問	問い（条件を同じ行に）	関わる行	決着しても動かないもの	出所
9　U(1) の陰性対照	挿入の評価を四次元の $U(1)$（弱結合で閉じ込めない）に当て、どこで効かなくなるかを確かめる陰性対照	繰り込みの比較の真ん中（群を区別する条件）	$SU(2)$ の評価	25-05 §07・§08 (f)
10　合成した挿入の奇性	別々の細胞の挿入を合成した写像が「挿入で奇」の等式を満たすこと（いまは多数の細胞の二次モーメントの評価の仮定で、Lean でも仮定）	挿入の一様な受理	一つの細胞の恒等式	25-05 §08 (c)
11　板の閉じ込めの文献照合	板の閉じ込めの定理と、Tomboulis–Yaffe 型の議論・高温の空間的な Wilson ループの面積則（Borgs 1985）との照合	—（札の問い）	定理の内容	25-04 §06
12　反転の確率が 1 に近い核	反転の確率 a が 1 に近い核の構成。流れの補題 $\theta \le 1-a$ は、一段の核では a が $\frac{1}{2}$ 程度で頭打ち（測定と記録の判断）なので素朴な形しか与えない	't Hooft の張力の正値性（帯の試験に使える形）	紫外の制御	25-06 §06・§08 (d)
13　準静的の極限	準静的の極限：駆動の段数 $m \to \infty$ で仕事 W が容器の条件つきの自由エネルギーに近づくこと（核の混ざり方の評価を含む証明）	挿入の一様な受理	帯	25-06 §04・§08 (b)
14　整形の写像の誤差	揺らぎを整形する写像の誤差（渦の面の近くの局所的な相対エントロピーと高次のループ）を、中程度の結合と大きな場で押さえる。一ループでは $\beta - \beta' = 0.258$ を再現する	繰り込みの比較（一ループから非摂動へ）	帯を渡る文そのもの（繰り込みの比較の真ん中）	25-07 §08 (a)
15　決まった写像の紫外の費用	決まった写像の紫外の余分の費用が、四次元のゲージ理論でも同じに増えるか（Ward 恒等式による打ち消しが起きるか）。いまの数は二次元の模型の三点	紫外の制御	帯	25-07 §06・§08 (d)
16　測定の延長と誤差	測った T^2 の大きさ（$L\sqrt{\sigma} \approx 2$ 程度まで）より先へ広げる測定と、駆動した挿入・レプリカ交換の誤差の評価（自己相関の扱い）	—（読みの問い）	どの台帳の行も（数値は証明でない）	25-08 §07 の (b)(c)

表 5 の読み。分数インスタントンの下界の逆向き・最小作用の一致は台帳の繰り込みの比較の上の端の残りそのもので、決着すれば固定した N の格子の上で率の両側が揃いますが、N を増やす向きは繰り込みの比較の真ん中と同じ問題です。問い「容器の自由エネルギーの評価」・問い「太い渦の挿入の費用」は紫外の制御の中身に触れる問いで、帯とは別の壁です（25-00 §02）。問い「挿入から面積則への不足」の (ii) は挿入の一様な受理の行の言い直しです。

```
05
```

第 26 部から出る問い — 帯の還元の仮定・判定・β 単調性ほか

第 26 部（移り変わりの帯）の本文が開いたまま残した問いです。最初の三行は帯の還元の三つの仮定（26-02 §02）を問いの形にしたもので、帯の難しさは三行目の横広げの不等式に集まっています（26-02 §08）。帯を閉じる議論は、$U(1)$ と区別できなければなりません（基準「U(1) の転移と区別する」、26-06 §08）。この条件は表 6 の全ての行に掛かります。

表 6　第 26 部から出る問い（関わる行は 27-02 の台帳の行。この本の整理）

問	問い（条件を同じ行に）	関わる行	決着しても動かないもの	出所
1　横広げの不等式の非摂動の証明	横広げの不等式（強い形 $\theta(R;T_{L'}^2)\le C(L'/L)^2\theta(R;T_L^2)$、または損失の総和が有限な弱い形）を、希薄な領域と閉じ込めの領域の間 $L\sim 1/\Lambda$ を通して非摂動で示す。構造だけの入力（鏡映正値性・双対性・転送行列）からは出ない	't Hooft の張力の正値性（還元の入力の位置は繰り込みの比較）	R^4 への極限〜検証と査読	26-02 §02・§08
2　枠の減相関の一様性	枠の減相関 $\theta(sR;T_L^2)\le C_{\mathrm{D}}\,\theta(R;T_L^2)^{s^2}$ を L に一様に示す。L を固定すればチェス盤の密度 κ_{cb} に置き換わるので、問いは $\kappa_{\mathrm{cb}}(L)$ の尺度をまたぐ比較になる	枠の減相関	帯の非可換の入力（横広げの不等式の非摂動の証明）	26-02 §02・27-02 表 2 枠の減相関
3　小さな T^2 の基点の証明	小さな T^2 の基点 $\theta(L_0;T_{L_0}^2)\le 1-\varepsilon_0$ を、紫外の制御と挿入の一様な受理の下で示す（期待される大きさ $\varepsilon_0\propto(L_0\Lambda)^{11/3}$ は一ループの見立て）	小さな T^2 の基点（前提紫外の制御・挿入の一様な受理）	帯	26-02 §02・27-01 表 1 小さな T^2 の基点
4　非閉じ込め相の排除の問い	非閉じ込め相の排除：$\Delta F(L,L)\to 0$（速さを問わない）。既知の閉じ込めない相を排除するが、張力の一様な下界は与えない	't Hooft の張力の正値性の途中	質量ギャップ・面積則の一様な張力	26-01 §06・26-06 §08
5　ほぼ面積則の問い	ほぼ面積則：$\ln(1/\theta(L,L))\ge cL^2/\ln L$（ほぼ面積則。Tomboulis–Yaffe の不等式で周長則より速い減衰）	't Hooft の張力の正値性の途中	一様な張力	26-01 §06
6　β 単調性の問い	β 単調性：格子の幾何を止めて $\partial_\beta\Delta F\ge 0$。電場の流束で書き直すと格子単位の弦の張力の β 単調性と同じ重さの問題で、Wilson ループの期待値の β 単調性すら探した範囲で示されていない。帯の連鎖では繰り込みの比較を直接示せば要らない	繰り込みの比較（調整の役）	繰り込みの比較そのもの	26-06 §02
7　捩れのある板の Z_2・U(1)	捩れ n_{12} のある板で、$\mathbb{Z}_2$ と $U(1)$ の β 単調性が Ginibre の不等式から出ないことの照合（捩れが無ければ出る）	繰り込みの比較	$SU(2)$ の β 単調性	26-06 §01

問	問い（条件を同じ行に）	関わる行	決着しても動かないもの	出所
8　下の端の判定	下の端の判定：箱の境界の中心の磁束を変えたときの内側への影響 $\delta(L_0,\beta)$ による Dobrushin–Shlosman 型の有限の大きさの判定と、許される面の成長定数の計算機援用の数え上げで、閉じ込めと比較を $\beta \approx 0.3$〜1 へ押し上げる	繰り込みの比較の下の端	$\beta \approx 1$ より上（真ん中）	26-06 §04
9　強結合の端の記帳	強結合の端の展開の命題の記帳（体積の多面体と面の輪郭の相互作用）を書き下し、定数 $u_0 \approx 10^{-80}$ を大きくする	繰り込みの比較の強結合の端	粗面化（$\beta_R \approx 1.9$）より先	26-06 §03
10　真ん中の四つの顔	真ん中の四つの顔（捩れの向きの柔らかさ κ_w・箱の磁束の混合 $\delta(L_0)$・柱の捩れのコスト $f(\ell)$・圧力の余裕）のどれか一つを、尺度に一様に、$U(1)$ で破れる形で示す。手前の段として、κ_w と $\delta(L_0)$ を $U(1)$ を対照にした数値で試す	繰り込みの比較の真ん中	紫外の制御	26-06 §07
11　帯の中の両側の面積則の問い	帯の中の各 β で、固定した β の両側の面積則（周長の次数の誤差つき、帯の中の両側の面積則の仮定）。これが言えれば帯の中の比較は有限個の段に縮む（帯の中の比較の還元の補題）	繰り込みの比較	帯の上端と紫外の制御の継ぎ目	26-06 §06
12　ブロックと混合の道の残り	一段目のブロックと混合の道の残り：強い混合の第二段・第三段（拘束つきの Laplace の方法）、Varadhan 型の極限と Witten の Morse 理論（Neumann の箱の角）と一次元の鎖の標準の定理の原典の照合、最小点の曲率 $\lambda_*(12)$ と最適な道の到達の区間演算	二重井戸の一様なギャップ	緩和時間の上界と片側の橋の一様性（二重井戸の一様なギャップは縮図で含意ではない）	23-15 のブロックと混合の道・26-07 §06
13　凸性の閾と混合の長さ	一段目で、凸性の閾（頂上の最初の共役点 ≈ 7.84）と混合の長さ（約 9）が数値で近い理由	二重井戸の一様なギャップ	緩和時間の上界と片側の橋の一様性	26-07 §07 (c)
14　最小の帯の試金石	最小の帯を渡れるか：帯を渡ると称する道具を、二次元の漸近自由な模型（大きな N の $O(N)$ 模型・Gross–Neveu 模型）で、紫外の切断を外したまま先に試す（選別の基準「最小の帯を渡れる」。二次元 $O(3)$ の全ての温度の指数減衰も未解決とされる、照合未了）	't Hooft の張力の正値性（試金石）	四次元の帯	26-08 §07・問い「O(3) σ 模型の C_P と ξ^2」
15　大きなループの比較原理	比較原理の、大きなループだけの漸近の形 $\sigma_{\mathrm{tw}}(L) \le \sigma_\infty$。小さなループの形は数値で破れたが、この形は否定されていない（示す機構が無い）	't Hooft の張力の正値性	小さなループの比較原理（数値で破れている）	26-08 §04

問	問い（条件を同じ行に）	関わる行	決着しても動かないもの	出所
16　三つの新しい候補の試験	三つの新しい候補（帯のコンパクト性による還元・Weyl の測度の対数凹性と高さ・方位の分解・柱の局所の階段関数）のそれぞれを、選別の基準の試験に通す	繰り込みの比較の真ん中	どの候補も帯を閉じない	26-10 §05・§07

表 6 の読み。表 6 の 1〜3 は還元の定理（26-02 §03）の三つの仮定で、三つが揃えば帯の正しい形が出ます。ただし三つの性格は違い、非可換の力学が入るのは問い「横広げの不等式の非摂動の証明」だけです（枠の減相関の一様性は L を固定すれば構造の事実に置き換わり、問い「小さな T^2 の基点の証明」は弱結合の側の文）。問い「β 単調性の問い」から問い「帯の中の両側の面積則の問い」までは繰り込みの比較の内訳で、問い「下の端の判定」は下の端、問い「真ん中の四つの顔」は真ん中、問い「強結合の端の記帳」は強結合の端です。問い「最小の帯の試金石」から問い「三つの新しい候補の試験」までは試して止まった道と新しい候補の章（26-08・26-10）から出る問いです。問い「ブロックと混合の道の残り」・問い「凸性の閾と混合の長さ」は時間の側（一本目の道）の一段目の問いで、決着しても帯は動きません（26-07 §04）。紫外の制御の問い（紫外の問い）は第 15 部にあり、15-09 表 1 が索引です（表 1 の第五の出所）。

06

検討の記録が挙げた次の一手 — 二つの表を台帳の行で引く

第 25・26 部の材料には、検討の記録として「次の一手」の表が二つあります。一つは閉じる見込みの高い順に七行を並べた表、もう一つは取り組む順に四行を並べた表です。どちらも記録の上の表で、本の章ではありません。表 7 はその各行を、台帳の行と本の章の言葉で引いたものです。記録の表の「作業量」の目盛りは見込みの数で、根拠のある数ではないので写しません。

表 7　記録の二つの表の行と、台帳の行・本の章（行の中身の文は本の章の側にある）

記録の表	順	中身（本の言葉で）	台帳の行	本の章・この頁の問い

記録の表	順	中身（本の言葉で）	台帳の行	本の章・この頁の問い
閉じる見込みの順	1	一段目の強い混合の残り（Varadhan 型の極限の照合・拘束つきの Laplace の方法の一様な形）	二重井戸の一様なギャップ	23-15 のブロックと混合の道・ブロックと混合の道の残り
	2	一段目のブロックの対数 Sobolev 不等式（Witten の Morse 理論と分解の原典の照合・λ_* の区間演算）	二重井戸の一様なギャップ	同上・ブロックと混合の道の残り
	3	1 と 2 の継ぎ合わせ（一次元の鎖の標準の定理）	二重井戸の一様なギャップ	同上・ブロックと混合の道の残り
	4	分数インスタントンの格子の論文の逆向きの評価に要る正値性の補題（一つの尺度の低温のクラスター展開で）	繰り込みの比較の上の端	分数インスタントンの下界の逆向き・A-07 §06
	5	分数インスタントンの格子の論文の最小作用の一致（最小化元の指数的な減衰と切断）	繰り込みの比較の上の端	問い「最小作用の一致」
	6	強結合の端の記帳の書き下しと、定数 u_0 の改善	繰り込みの比較の強結合の端	問い「強結合の端の記帳」
	7	真ん中：四つの顔のどれかで尺度の間の比較を示す	繰り込みの比較の真ん中	問い「真ん中の四つの顔」
取り組む順	1	真ん中の顔のうち κ_w と $\delta(L_0)$ を、$U(1)$ を対照にした数値で試す	繰り込みの比較の真ん中	問い「真ん中の四つの顔」
	2	上の端：固定した N での準古典の定理の書き下し	繰り込みの比較の上の端	分数インスタントンの下界の逆向き・最小作用の一致・25-02 §06
	3	下の端：計算機援用の面の成長定数の評価と、箱の磁束の混合による判定の定式化	繰り込みの比較の下の端	問い「下の端の判定」
	4	帯の還元の論文に、階段関数の走査と $U(1)$ の対照を足す	—（論文の改訂）	A-07 §05

二つの表のどの行も、台帳の外の差には触れていません。台帳の外の差に向かう問いは、第 16 部の課題の表（16-07）と、証明が含むべき七つの段の表の未知の欄（16-09 表 1）にあります。

07

台帳の行から引く — 行ごとに、関わる問い

表 8 は、表 2〜表 7 を台帳の行の側から引き直したものです。行の中身・札・消えるのに要るものは 27-02 表 2 にあり、ここでは関わる問いの番号だけを並べます。問いの無い行は、問いの形に縮められるほど小さな段がまだ見えていない行です。

表 8　台帳の行と、関わる問い（この本の整理）

行	関わる問い
紫外の制御	容器の自由エネルギーの評価・太い渦の挿入の費用・問い「決まった写像の紫外の費用」（部分）、紫外の問い（15-09 表 1、答えの現在つき）。15-08 表 1（閉じない四行）と 15-09 表 1 がこの行を割った表
小さな T^2 のギャップ	—（捩れの部分は 25-01 で紙。a に一様な形は紫外の制御に依る）
挿入の一様な受理	太い渦の挿入の費用・挿入から面積則への不足・問い「合成した挿入の奇性」・問い「準静的の極限」
小さな T^2 の基点	問い「分数インスタントンの存在」・小さな T^2 の基点の証明
z の鏡映正値性	—（26-04 §03 に証明を置いた。この行は閉）
枠の減相関	問い「外側の容器の偏り」・容器の自由エネルギーの評価・枠の減相関の一様性
繰り込みの比較	強結合の端：強結合の端の記帳／繰り込みの比較の下の端：下の端の判定／繰り込みの比較の上の端：分数インスタントンの下界の逆向き・最小作用の一致／繰り込みの比較の真ん中：問い「U(1) の陰性対照」・真ん中の四つの顔／繰り込みの比較の真ん中の候補の試験：問い「三つの新しい候補の試験」／内訳の外：問い「整形の写像の誤差」・問い「β 単調性の問い」・問い「捩れのある板の Z_2・U(1)」・帯の中の両側の面積則の問い
't Hooft の張力の正値性（帯）	横広げの不等式の非摂動の証明（中身）・問い「非閉じ込め相の排除の問い」・問い「ほぼ面積則の問い」（途中の到達点）・問い「反転の確率が 1 に近い核」・問い「大きなループの比較原理」（帯の試験に使える形）・問い「最小の帯の試金石」（試金石）
二重井戸の一様なギャップ（一段目の残件）	問い「柱の模型の N^{−3} の係数」・問い「柱の模型の 1/P の符号」・問い「芯の最大相関の区間演算」・問い「芯と窓の前因子の冪」・問い「箱の交互の最大相関の比較」・問い「キンクの位置への還元」・ブロックと混合の道の残り・凸性の閾と混合の長さ
緩和時間の上界と片側の橋の一様性（四次元の目標、時間の側）	表 2 の 4・5・9〜13・17 と表 3 の 1〜12・14〜19（どれもこの行の言明の形を直す問いで、この行そのものではない）
R^4 への極限	—
二本の道の結び	—（何を仮定すれば足りるかの言明そのものが未定、27-01 §04）
一般の群	問い「三つの事実の SU(N) 版」（$SU(N)$ の部分だけ）
検証と査読	—

表 8 から読むこと。問いが多いのは繰り込みの比較と二重井戸の一様なギャップ・緩和時間の上界と片側の橋の一様性で、帯そのもの（'t Hooft の張力の正値性）の問いは横広げの不等式の非摂動の証明に集まります。非閉じ込め相の排除の問い・ほぼ面積則の問いは 't Hooft の張力の正値性より弱い途中の到達点で、決着しても 't Hooft の張力の正値性は消えません。台帳の外の差には、問いの形に縮められる段がほとんどありません。二本の道の結びは、問いを立てる前に、何を示せばよいかの言明を作るところから始まります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
第 23・24 部の問いと規則の候補が、どの章のどの節から出たか（表 2〜表 4）	どの問いの答えも。状態と「決着しても動かないもの」の全文は出所の表にある
第 25・26 部の本文が開いたまま残した問いの一覧と、出所の節（表 5・表 6）	問いの大きさの見積もり。26-03〜26-05・26-09 の章の文のうち、表 6 の行と重なるもの以外は拾っていない
問いと台帳の行の対応（表 8、この本の整理）	問いが決着すれば行が消えること（行が消える規則は 27-02 §01）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 2 の問い	本書	23-17 表 3
表 3・表 4 の問いと規則の候補	本書	24-08 表 1・表 2
表 5・表 6 の問い	本書	右の列の章の節（「言えないこと」「残るもの」「足りないもの」「地図」）
表 7 の記録の二つの表	本書	第 25・26 部の材料のうち、次の一手の表（閉じる見込みの順の七行）と、証明までの課題の一覧の「次に取り組む順」（四行）。行の中身は本の章の言葉に置き換えた
台帳の行の番号と名前	本書	27-02 表 2・表 3

この章で使った語 — 台帳の行・台帳の外の差・決着しても動かないもの・途中の到達点・横広げの不等式・枠の減相関・小さな T^2 の基点・β 単調性・繰り込みの比較・四つの顔・規則の候補・拡散型緩和時間の仮定。意味は A-02 用語集 と A-06 名前の索引 にあります。

次に読む章：27-04 主張しないこと（横断の索引） — 問いの裏側：この本が示していないこと、強く読まないこと、偽とも言わないこと。

主張しないこと（横断の索引）

この章は索引です。各章の該当の節へ案内します。

この章で分かること — この本が主張しないことを、部をまたいで一つの索引にしたもの。第 23 部の十四項目（23-16 表 2）と第 24 部の十六項目（24-08 表 4）は、項目を移さずに章と項目番号で引きます。第 25・26・27 部の本文の「言えないこと」の節から項目を拾い、この頁で表ごとの通し番号（表 4〜表 6 の項目 1〜）を振って、支える本文の場所と並べます。最後に、第 25〜27 部の文が一行の要約で条件を落とす例を表にします。

前提となる章 — なし。どこから読んでもよい章です。三つの意味（示さない・強く読まない・偽とも言わない）は 23-16 §01 のとおりに使います。台帳の行の番号は 27-02 表 2。

先に言うこと — この本は、ヤン–ミルズの存在と質量ギャップの問題を解いていません。この本の検討は連続極限を構成していません（周期の箱での連続極限と、相ごとの再構成は、2026-11-10 に公開された構成が示しました。委員会の評価の水準。第二巻）。質量ギャップの証明も、連続極限での閉じ込めの証明もありません。この章は、その事実を項目に割って書き出すだけで、新たな結果を足しません。

この章の順序

1. 索引の読み方 — 三つの意味と、部ごとの項目の数（表 1）
2. 第 23 部の十四項目 — 23-16 表 2 を引く（表 2）
3. 第 24 部の十六項目 — 24-08 表 4 を引く（表 3）
4. 第 25 部の項目 — 二本目の道の道具について（表 4）
5. 第 26 部の項目 — 帯について（表 5）
6. 第 27 部の項目 — 条件つきの言明と台帳について（表 6）
7. 条件は要約で落ちる — 第 25〜27 部の文と一行の要約（表 7）

01

索引の読み方 — 三つの意味と、部ごとの項目の数

「主張しない」には三つの意味があります（23-16 §01）。示さない：その命題について、この本は何も示していない。強く読まない：示したことには条件や仮定が付いていて、条件を外した形で読むと示していない文になる。偽とも言わない：ある方法で届かなかったことはその方法の性質で、届かなかった命題が偽だという主張ではない。ほかに、既知の再導出を成果に数えない・他の文書の正否を判定しない、という「判定しない・数えない」の項目があります。

三つ目は論理の形で書くと区別がはっきりします。「P を主張する」を $\vdash P$ と書くと、$\neg(\vdash P)$ と $\vdash \neg P$ は別の文で、この章の「主張しない」はいつも左の意味です。第 26 部の項目には、もう一つの向きがあります。数値の読みが命題の反対を示している場合（比較原理の測定、表 5 の項目 4）で、そのときも本は反対の命題を定理として主張せず、「読み」として置きます。

表 1　部ごとの項目（番号の付け方と数）

部	番号	数	引く表・節
第 23 部（一本目の道・前半）	項目 1〜14	14	23-16 表 2
第 24 部（一本目の道・後半）	項目 1〜16	16	24-08 表 4（規則の候補についての五項目は 24-08 §02 の末尾）
第 25 部（二本目の道）	通し番号 1〜13	13	この頁の表 4（各章の「言えないこと」）
第 26 部（移り変わりの帯）	通し番号 1〜12	12	この頁の表 5
第 27 部（閉じる）	通し番号 1〜6	6	この頁の表 6

第 23 部の項目は第 24 部にもそのまま効き（24-08 §04）、同じように、第 23・24 部の項目は第 25〜27 部にもそのまま効きます。特に「届かなかったことは偽の証拠ではない」（23-16 の項目 8・12）と「条件は要約で落ちる」（23-16 §06）は、全ての部に共通です。

02

第 23 部の十四項目 — 23-16 表 2 を引く

表 2 は項目の要旨と種類と、支える本文の主な場所だけを並べます。項目の全文と、支える本文の全ては 23-16 表 2 にあります。第 23 部の項目が名指す仮定は、拡散型緩和時間の仮定（上側は緩和時間の上界の仮定、下側は緩和時間の下界の仮定）で、表 2 の要旨はこの名で書きます。

表 2　第 23 部の項目（要旨。全文は 23-16 表 2）

項目	要旨	種類	支える本文（主なもの）

項目	要旨	種類	支える本文（主なもの）
1	存在と質量ギャップの問題の解決・連続極限の構成	示さない	23-01 §08
2	一段目でも二重井戸の緩和時間の冪の言明は示していない。一段目の上界の命題は四つの条件の上の代数	示さない	23-05 §08
3	四つの条件の全ての行が同時に成り立つ $\hbar$ は、まだ一つも無い	示さない	23-12 §06
4	計算機援用の結果は、計算した範囲の中の不等式	強く読まない	23-08 §10
5	読みは上界としても下界の証明としても使わない	強く読まない	23-00 表 1
6	Lean の定理は仮定から結論への代数の検査	強く読まない	23-13 §05
7	一段目から二段目以後へは、文の形と道具の形が持ち上がる見込みだけ	強く読まない	23-03 §06
8	ある道具で届かなかったことは、その道具の性質	偽とも言わない	23-10 の範囲の表
9	既知の再導出は成果に数えない。他の文書の正否は判定しない	判定しない	23-14 §03
10	四次元格子の側の記録も仮定のまま	示さない	23-01 §05
11	上界の仮定は片側の橋の仮定の下で隙間の下界を含意するが、逆は一般には偽。拡散型緩和時間の仮定は質量ギャップそのものではない	強く読まない	23-01 §06
12	迂回策の「死」は残る命題が偽だという意味ではない	偽とも言わない	23-10 §03
13	周期の箱で上界の仮定が破れるという読みは、文献の数値と予想の上の条件つきの読み	偽とも言わない	23-01 §05
14	仮定の行が残る命題を、結果として外へ出さない	数えない	23-12 §08

03

第 24 部の十六項目 — 24-08 表 4 を引く

表 3 は第 24 部の項目の要旨と種類と、支える本文の主な場所です。全文は 24-08 表 4 にあります。規則の候補について主張しないこと（無矛盾性も三段目への見込みも示さない、ブール代数の喩えは比喩、ほか五つ）は 24-08 §02 の末尾にあり、ここでは引くだけにします。

表 3　第 24 部の項目（要旨。全文は 24-08 表 4）

項目	要旨	種類	支える本文（主なもの）
1	存在と質量ギャップの問題の解決。連続極限・回転の回復・OS 公理・非自明性には触れない	示さない	24-00 §05

項目	要旨	種類	支える本文（主なもの）
2	緩和時間の仮定が偽であること（周期の箱の読みは原典の数値と予想を延ばした読み）	偽とも言わない	24-01 §06
3	区画の版と局所の版は定義の候補で、どの β でも示していない	示さない	24-03 §07
4	片側の橋は時間を連続に取った格子の上の不等式。Wilson の時間を刻む格子では時間の刻みの比べの仮定（論文「片側の橋」の (D)）が残る	強く読まない	24-04 §08
5	「隙間＝真空の測度の Poincaré 定数」は恒等式で、問題を易しくしたとは言わない	強く読まない	24-05 §07
6	保存が壊れる長さの定義と、比べる相手の言い直しは候補	強く読まない	24-02 §08
7	階層模型と二次元の模型の結果は、四次元に何も含意しない	強く読まない	24-06 §09
8	物理の非摂動的な機構（閉じ込め・インスタントン・中心渦・双対）は、第 24 部では証明の道具として使っていない	示さない	24-07 §08
9	「四次元だからこそ」の二点は臨界次元の性質としての見立て	強く読まない	24-07 §01
10	第 23 部の「主張しないこと」は第 24 部にもそのまま効く	—	23-16 §02
11	局所の版は定義と比の形まで。対象のゲージ理論について局所の拡散型緩和時間の仮定を示していない	示さない	24-03 §03
12	局所の橋の閾は参照の取り方と試験の観測量の族に依る	強く読まない	24-04 §06
13	0+1 の二重井戸では局所の比は 1 にならない。四次元で短い距離で 1 に近づくとするのは漸近自由に依る仮定	強く読まない	24-04 §07
14	保存が壊れる長さを測ったのは二次元 $U(1)$ の幅 2 の領域だけ	強く読まない	24-02 §03
15	$SU(2)$ で位相電荷の凍結が緩和時間の仮定を壊すかは決まっていない	偽とも言わない	24-07 §07
16	二次元 CP^{N-1} の試験台の結果は四次元に何も含意しない	強く読まない	24-02 §07

第 24 部の項目 8 は、第 25・26 部と並べると読み方に注意が要ります。第 24 部は中心渦やインスタントンを証明の道具として使いませんでしたが、第 25 部は渦の面と分数インスタントンを道具の中心に置きます。ただし使うのは格子の上の有限の恒等式と、格子間隔を固定した評価と、条件つきの文だけで、物理の機構をそのまま証明に持ち込むことはしていません（表 4 の項目 2・4・5）。

```
04
```

第 25 部の項目 — 二本目の道の道具について

第 25 部（空間の方向から）の各章の「言えないこと」の節から拾った項目です。群は $SU(2)$、小さな T^2 には捩れ $n_{12}=1$ を入れた場合です。種類の列は三つの意味（と「判定しない・数えない」）です。

表 4　第 25 部が主張しないことと、それを支える本文の文

項目	主張しないこと	種類	支える本文の文（要旨）
1	「小さな T^2 の大きさまで弱結合のまま」は定理ではない。紫外の制御を仮定した上での物理の見立てで、格子間隔に一様な評価はこの本のどこにも無い。小さな T^2 と $\mathbb{R}^4$ が相転移なしにつながること（断熱的な連続性）は予想で、使わない	示さない	25-00 §08 の (a)(b)
2	板の閉じ込めの定理は、格子間隔と T^2 の大きさ N を固定した文。下界 $-\ln\tanh(\beta N^2)\approx 2e^{-2\beta N^2}$ は連続極限で 0 になり、$N\to\infty$ でも消える。格子間隔に一様な張力についても、四次元の閉じ込めについても何も言わない	強く読まない	25-04 §07 の (a)(b)・§04
3	容器の恒等式は Mack–Petkova の恒等式の書き直しで、既知。和のアンサンブルでの書き直し・固定した区画への移し方・入れ子・挿入の恒等式・板の閉じ込めの定理も初等的で、先行文献との照合が済んでいない。この部の結果に新しさは主張しない	数えない	25-03 §08 (a)・25-04 §06・25-05 §08 (d)
4	挿入の恒等式と不等式は、どれも閉じ込めを導かない。大偏差の段・紫外の段・二次モーメントの上界が残る	示さない	25-05 §08 (a)・§07
5	希薄な分数インスタントンの気体の勘定（弦の張力 $\propto\Lambda^2(\Lambda L)^{5/3}$、余裕 $5/3=11/3-2$）は、$\Lambda L\ll 1$ の希薄な領域・一ループの水準の物理の見立て。冷却で得た作用の値は最小作用の上界で、下界ではない	強く読まない	25-02 §07 の (a)(b)
6	分数インスタントンによる閉じ込めの下界（論文 3 の定理 A）は草稿の言明で、この本の札は「仮」。N に一様でなく、連続極限についても質量ギャップについても何も言わない。逆向きの評価（M に一様）は開いている	強く読まない	25-02 §06・§07 (e)
7	四次元で独立な容器から出るのは $R/\ln R$ まで、という勘定は、原典の仮定（太い容器の自由エネルギーが境界の値に一様な形）の上の勘定で、四次元の定理ではない。その仮定もその否定も示していない	強く読まない	25-03 §08 (d)
8	捩れた T^2 の三つの事実（真空の一意性・随伴の場のギャップ $4\sin^2(\pi/2N)$・(1,1) の区画に平坦な配位が無いこと）は、格子間隔 $a\to 0$ について何も言わない。随伴の場のギャップは古典の揺らぎの下限で、量子の有効作用のギャップではない	強く読まない	25-01 §09 (a)
9	Lean の欄は有限和と実数の代数だけ。$SU(2)$ の Haar 測度・余閉な符号の場・区画の位相と射影・θ が区画の偏りであることは Lean の外	強く読まない	25-03 §08 (f)・25-04 §07 (e)・25-05 §08 (b)
10	この部のどの文も、T^2 を $1/\Lambda$ を越えて広げることについて何も言わない。その段が移り変わりの帯で、二本目の道はそこで止まる	示さない	25-02 §07 (d)・25-09

項目	主張しないこと	種類	支える本文の文（要旨）
11	駆動した挿入の恒等式と流れの補題は閉じ込めを導かない。「一段の核では反転の確率が $\frac{1}{2}$ 程度で頭打ち」は測定と記録の判断で、定理ではない。Crooks の関係と Jarzynski の等式は既知	強く読まない	25-06 §08 の (a)(d)(e)
12	等長的な写像と整形する写像の比較は一ループ（ガウス）の水準の文。「上界は変分と明示的な構成からしか出ない」はこの本の道具の一覧についての判断で、定理ではない。余りの相対エントロピーが面積に比例することは、一般の写像については見立て	強く読まない	25-07 §08 の (a)(c)(e)
13	第 25 部の測定の数は証明ではない。T^2 を広げた傾向は帯を数値で示すものではなく（$L\sqrt{\sigma} \approx 2$ 程度まで）、同時の反転の測定を帯の数値的な姿として読むことは撤回されている	強く読まない	25-08 §07 の (a)(b)(f)

05

第 26 部の項目 — 帯について

第 26 部（移り変わりの帯）の各章から拾った項目です。帯は、弱結合から強結合へ移る尺度 $L \sim 1/\Lambda$ の前後の区間で、第 23・24 部の「窓」とは別物です（26-00 §02）。

表 5　第 26 部が主張しないことと、それを支える本文の文

項目	主張しないこと	種類	支える本文の文（要旨）
1	帯は未解決。帯を渡る文（$\ln(1/\theta(L,L)) \geq cL^2$ が L に一様、またはその途中の到達点）を、この本はどの形でも示していない。繰り込みの比較も β 単調性も、帯のどの β でも示していない	示さない	26-01 §06・26-02 §08・26-06 §09 (a)
2	還元は問題を易しくしたのではない。還元の定理は三つの仮定の上の文で、横広げの不等式の強い形は閉じ込めより強い（板の張力の単調性を含む）。帯の中の比較を固定した β の面積則に縮める補題も還元で、その仮定は未解決の問題を含む	強く読まない	26-02 §05・26-06 §09 (c)・27-02 §03
3	「繰り込みの比較は両端で成り立つ」を条件を外して読まない。強結合の端は $u \leq u_0 \approx 10^{-80}$ の範囲の、記帳の一部が概略の筋で、弱結合の端は一ループの水準の計算。非摂動の弱結合の比較は、どの β でも示されていない	強く読まない	26-06 §09 (b)・§03
4	比較原理（$\mathbb{R}^4$ の Wilson ループが捩れた板のループで押さえられる、という形）は一ループの水準の文で、非摂動の道具として使わない。$SU(2)$・Wilson 作用・$\beta = 2.1$ で、捩れのある板 $16 \times 16 \times 2 \times 2$ のプラケットが 16^4 より低い（誤差を両側から取って 7σ、独立な再実行で 5.5σ）ので、小さなループで破れている。本はこれを反証の読みとして置く 読 （定理ではない）	強く読まない	26-08 §04
5	格子を 2 倍にする試験の数値（8^4 までの小さな格子・少ない β・1〜3 本の種）は向きの読みで、$SU(2)$ に閉じ込めない相への相転移が無いことの証拠ではない	強く読まない	26-06 §09 (d)・26-00 §03 (ii)
6	β 単調性が偽だとは言わない（反例は見つかっていない、読）。真ん中の四つの顔は候補で、どれも尺度に一様な評価を持たない	偽とも言わない	26-06 §09 (e)(f)

項目	主張しないこと	種類	支える本文の文（要旨）
7	一段目の壁「頂上の曲率の不足の壁」は帯の縮図であって帯ではない。一段目の結果が四次元の何かを含意するとは言わない。四次元に「移り変わる長さを越える有限のブロック」が無いことは、ブロックの道が四次元で不可能だという主張ではない	強く読まない／偽とも言わない	26-07 §07 の (b)(f)・26-00 §05
8	ブロックと混合の道が一段目を閉じるとは言わない。行は隠れた凸性の命題を除いて「仮」と「読」	示さない	26-07 §07 (d)・23-15 のブロックと混合の道
9	「非可換が効く唯一の場所」は「この還元の中で」という限定つきの言い方。余裕 $5/3 = 11/3 - 2$ は希薄な領域・一ループの水準の物理の見立て	強く読まない	26-02 §08・26-00 表 1
10	構造だけの入力（鏡映正値性・中心と双対の恒等式・転送行列の正値性）から横広げの不等式が出ない、という否定の補題は「この入力の組だけでは」の形の文で、帯が渡れないという主張ではない	偽とも言わない	26-00 表 1・26-04 §04
11	新しい見方の候補は、どれも帯を閉じない。帯のコンパクト性による還元は還元で、帯を易しくしたとは言わない。候補が既知の事実の組み合わせでないとも言わない	示さない	26-10 §07 の (a)(b)(g)
12	試して止まった道の「止まった」は、その道具が帯を渡れなかったという意味で、道の目標の命題が偽だという意味ではない。見立ての理由で止めた道は、新しい入力があれば開き直せる	偽とも言わない	26-08 §01

06

第 27 部の項目 — 条件つきの言明と台帳について

表 6　第 27 部が主張しないことと、それを支える本文の文

項目	主張しないこと	種類	支える本文の文（要旨）
1	閉じ込め（面積則）は質量ギャップではない。面積則から質量ギャップを出す既知の道は無く、二つを同じ理論の上で結ぶ矢印は開いている（何を仮定すれば足りるかの言明も未定）	示さない	16-09 §03・27-01 §04・25-00 §08 (c)
2	条件つきの言明は、帯を仮定に置いた限りでの言明。「定理」と呼ぶのは紙の証明を本に置いた矢印だけで、帯の形の仮定（横広げの不等式・一様な板の張力・一様な板のギャップ）は結論の中身を担っている	強く読まない	27-01 §05
3	$\mathbb{R}^2\times$ 小さな捩れた T^2 の研究計画の命題（ギャップの側の小さな T^2 のギャップの矢印・閉じ込めの側の小さな T^2 の面積則の矢印）は条件つきで、筋の段にある。小さな T^2 のギャップの矢印の仮定（ブロックの相関が率 $m \geq c/L$ で減る）は結論の量を含む	強く読まない	27-01 §02・§03
4	台帳の行が全て消えても、問題が解けることにはならない。$\mathbb{R}^4$ への極限（27-02 表 3 では四行に割った）・二本の道の結び・一般の群・検証と査読の四つ（内訳を入れて七行）が残る	示さない	27-02 §05・27-00 §01

項目	主張しないこと	種類	支える本文の文（要旨）
5	記録の上で閉じている行（印 ■）は、本の台帳から消えたことを意味しない。行が消えるのは、紙の証明が本に置かれ、Lean の欄があればその再検査が済んだときだけ	強く読まない	27-02 §01
6	台帳の行の数は進み具合の目盛りではない。行は割れて増えることもある	数えない	27-02 §06

07

条件は要約で落ちる — 第 25〜27 部の文と一行の要約

主張を強く読む誤りは、多くの場合、本文の文を一行に縮める段で起きます（23-16 §06）。表 7 は、第 25〜27 部の本文の条件つきの文と、条件を落としきった一行を並べたものです。右の列の文はどれも、この本が示していない文です。

表 7　本文の文（条件つき）と、条件の落ちた一行（右はどれも誤り、または示していない文）

話題	本文の文	条件の落ちた一行
板の閉じ込め	格子間隔と T^2 の一辺 N を固定すれば、全ての β で $\sigma \geq -\ln\tanh(\beta N^2)$ 初 （25-04 §02）	格子ゲージ理論の閉じ込めが示された
分数インスタントンによる閉じ込めの下界	固定した $N \geq 2 \cdot \ell \geq 2 \cdot \beta \geq 1 \cdot M \in 2\ell\mathbb{N}$ で、率 $S_*(N,\ell)$ の面積則の下界（草稿の言明。本の札は 仮 、25-02 §06）	分数インスタントンが閉じ込めを起こすことが示された
一ループの比較	揺らぎを整形する比較で $\beta - \beta' = 0.258$（二倍あたり） 初 （一ループの水準、26-06 §03）	繰り込みの比較が成り立つ
二倍の試験	$SU(2)$ で読んだ $\beta - \beta'$ は $+0.13$〜$+0.25$（$4^4 \to 8^4$ ほか・$\beta = 2.5$〜3.0・種 1〜3 本） 読	$SU(2)$ には帯の中に相転移が無い
還元の定理	基点・枠の減相関・横広げの不等式の三つの仮定の下で、帯の正しい形が出る 初 （条件つき、26-02 §03）	帯は一つの不等式に帰着して、易しくなった
帯の中の比較	帯の各 β での両側の面積則（帯の中の両側の面積則の仮定）の下で、帯の中の比較は有限個の段に縮む 初 （26-06 §06）	帯の中の繰り込みの比較が示された
Lean の反復	`Doubling.iterate`（仮定：$c \geq 0 \cdot t_k \geq 0 \cdot t_{k+1} \leq c^3 t_k^4$。結論：$c t_k \leq (c t_0)^{4^k}$）は実数の列の代数	帯の還元は Lean で検査された
z の鏡映正値性	26-04 §03 に証明を置いた。最後の段の代数は Lean（ReflPos）でも閉じている。この行は閉（27-02 §01）	z の鏡映正値性の証明は全て Lean で検査された

表 7 の誤りの型は、第 23 部の表 5 と同じ二つです。一つは範囲（格子間隔の固定・N の固定・一ループの水準・小さな格子）が落ちる型、もう一つは分類（読・仮・Lean の範囲）が落ちる型です。第 25〜27 部ではもう一つ、「還元した」を「易しくした」と読む型が加わります。還元は難しさの場所を一つに集めたもので、難しさを減らしたものではありません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
この本が問題文（0-03）の存在と質量ギャップについて何も示していないこと。第 23・24 部の項目がどの章のどの文に支えられるか（表 2・表 3）	問題文の主張の真偽。連続極限の存在（この本の検討の側では。公開された構成が周期の箱で示した）。体積に一様な隙間
第 25・26・27 部の項目と、それを支える本文の場所（表 4〜表 6）	各項目の命題の真偽。26-03〜26-05・26-09 の章の文のうち、表 5 の行と重なるもの以外は拾っていない
第 25〜27 部の条件つきの文と、条件の落ちた一行の対（表 7）	表 7 の右の列の文が偽であること（示していない、というだけ）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
三つの意味	本書	23-16 §01
表 2 の各行	本書	23-16 表 2 と、その右の列の章
表 3 の各行	本書	24-08 表 4 と、その右の列の章
表 4〜表 6 の各行	本書	右の列の章の「言えないこと」「残るもの」「台帳の外に残る差」の節
表 7	本書	左の列の章の言明と札。数値の条件は 26-00 §03 (ii) と 26-06 §05
問題文	典	A. Jaffe, E. Witten, Quantum Yang–Mills Theory, Clay Mathematics Institute (2000)（0-03 の出典表）

この章で使った語 — 示さない・強く読まない・偽とも言わない・判定しない／数えない・要約で落ちる条件・移り変わりの帯・還元・台帳の外に残る差・拡散型緩和時間の仮定。意味は A-02 用語集 と A-06 名前の索引 にあります。

次に読む章：28-00 入口 — 示すべき言明と、表現を通した十分条件。あわせて読むなら A-07 この本から出た論文 — 論文ごとの主定理と、その札と条件。第 27 部の入口に戻るなら 27-00。

入口 — 示すべき言明と、表現を通した十分条件

この章は案内です。

この章で分かること — 第 28 部は「何が言えれば足りるか」を、根と十分条件の木として並べる部です。この入口では、根と十分条件の区別、前提の札の読み方、この部の章の順を示します。

前提となる章 — 19-07 示すべき言明。確かな定理は第 20〜22 部（20-00・21-00・22-00）。

先に言うこと — この部は前提と含意の一覧で、根のどれも示していません。根のうち紫外の側の四つ（合わせ・全列の収束・非退化・同程度連続）と、それを支える前提の木は、本書の設計（決まったブロック写像で押し出した測度）についての言明です。四次元のヤン–ミルズ理論の存在は、2026-11-10 に公開された構成が別の設計で示し、Lean で証明されている、と委員会が評価しました（第二巻。二つの設計の比べは 第 14 部、本書の紫外の試みの記録は 第 15 部）。そこで紫外の側の根と木は、本書の設計での示すべき言明と十分条件の記録として残します。赤外の側の根（一様な減衰とその帰結の質量ギャップ、帯）は開いたままで、こちらが第三巻の本題です。前提の札は 2026-11-13 の時点のもので、更新は A-08 質量ギャップまでの地図 で行います。

この章の順序

1. 根と、表現を通した十分条件（表 1）
2. 前提の札の凡例（表 2）
3. 形が未定の理由の記号（表 3）
4. この部の章

01

根と、表現を通した十分条件

この部では、示すべき言明を木の「根」、その十分条件を「葉」と呼びます。

根は、第 19 部で定義した対象（Wilson の測度、押し出しの測度、渦の比、再構成の器）だけで書いた、示すべき六つの言明です（19-07）。

十分条件は、今の道で根を導くために置いている前提です。その多くは、粗い尺度の理論を書き表すための量 ― 実効の結合、大きい場の活性、背景場、類 ― を通した言明で、この本ではそれを**表現**と呼びます。表現の量の多くは、まだ格子から定義されていません。

表 1　根と、今の道での十分条件

根（19-07）	根を書く言葉	今の道での十分条件（28-04 の行の名）	十分条件を書く言葉
合わせ	押し出しの測度の期待値、β_n	結合の一段の括弧と活性の再帰（実効の結合の定義と連続性・結合の一段の正味の括弧・大きい場の結合への寄与・活性の再帰・供給の稀さ・動く不変区間と余白）	実効の結合 u_k、活性 z_k、供給 w_k
全列の収束	押し出しの測度 $\nu_{n,m}$	一段の写像の縮みと終点の合わせ、紫外の安定性の前提の評価	一段の写像の座標、類、背景場
非退化	$\nu_{n,m}$ と小さい場の集合	二段の事象の稀さ（面の部分・背景の不変量の部分）	面の部分は根と同じ言葉。背景の不変量の部分は背景場
同程度連続	$\nu_{n,m}$ と観測量の族	観測量の同程度連続	根と同じ言葉
一様な減衰	$\nu_{n,m}$ の共分散、器	根と同じ形のブロック観測量の一様な減衰、質量ギャップの器への継ぎ目、細かい観測量・無限体積・回転・非自明の段の行（流した観測量のブロック変数による近似から極限が自由場でないことまで）、帯の比較（ギャップの言葉）と面積則からギャップへ	流した観測量、回した格子、箱の質量
帯	渦の比 θ	基点・入れ子・横広げ（θ の非負・小さな T^2 の基点・一つの尺度の判定・捩れを入れる写像の費用の問い・枠の減相関・横広げの不等式（強い形））、張力の倍化（張力の倍化の不等式・渦の自由エネルギーの単調性と繰り込みの比較）	θ、板の張力

根は、合わせで決めた列について読みます。結合の列を自由に選べる形で読むと、$\beta_n \equiv 0$ だけで質量ギャップと帯の根が立ってしまいます（19-07 §01）。表 1 の「合わせ」は、ほかの五つと並ぶ一行ではなく、ほかの五つの量化を決める行です。

根は表現に依りません。表現を替えれば（背景の定義を替える、ノルムを替える、など）十分条件は替わりますが、根は替わりません。一覧（28-04）は根を上に、十分条件を「今の道での」ものとして下に書きます。

```
02
```

前提の札の凡例

前提の札は、表の一つの欄として書きます。本文の札（初・典・機・読・仮、23-00 の系統）とは別のものです。本文で前提の言明そのものを書くときは、本文の札では 仮 です。

表 2　前提の札

札	意味	保証しないこと
定理	Lean で機械検査し、定義と言明を別の目で照合する点検が、言明の中身まで確かめた	前提の形そのものであること（範囲は同じ欄に書く）
定理（弱い形）	同じだが、前提の形より弱い形まで。欄をそのまま払うか、似た別の言明かを書き分ける	前提の形まで届くこと
紙	紙の議論が在る	誤りが無いこと（定義と言明を別の目で照合する点検は済んでいない）
形は確定・未証明	言明の形は決まっている。「条件つき」は合わせで決めた列で、閾・周期の制限を入れたときに限る	成り立つこと
形が未定	言明の形がまだ決まっていない。理由を記号で書く（表 3）	—
設計に依る	設計の選び（28-05）で決まる	選びが一つに決まること
文献	文献の結果に依る	本書で再導出したこと

03

形が未定の理由の記号

表 3　理由の記号

記号	意味
(a)	軽すぎる：自明な対象や、量を自由に取ることで立ってしまう
(b)	強すぎる：偽か、偽になる例が在る
(c)	対象が未定義：言明に出る量が格子から定義されていない
(d)	今の形に反する数値の兆しが在る
(e)	一つの尺度の形は在るが、段を跨ぐ形が無い
(f)	量化の順が未定

出どころで分けた一覧は 28-06 にあります。

04

この部の章

章	中身
28-01 部分列の極限と、極限に移る性質	前提なしに立つ部分と、前提が効く部分
28-02 全列の収束	終点の合わせによる全列の収束
28-03 減衰から質量ギャップへ、帯の還元	一様な減衰から器の質量ギャップへ。基点・入れ子・横広げから面積の指数へ
28-04 前提の一覧 — 木と札	根と 57 行の前提の木、段ごとの表、札ごとの数、別名の辞書
28-05 設計の選びに依るもの	九つの選びと、どの定理・前提がどれに依るか
28-06 開いている所と、対象がまだ無い所	形が未定の 24 行の出どころと、何が形を決めるか。主張しないこと

含意の三章は「もし前提が成り立てば何が出るか」を、仮定を全て見せて書く定理です。出るものは根より弱いこともあり（28-01 は部分列の極限まで）、根から先へ進む含意もあります（28-03 の一様な減衰から器の質量ギャップへ）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
根と十分条件の区別、前提の札と理由の記号の意味	根のどれも示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
根と十分条件の木、札	仮	本書の検討の前提の棚卸し（2026-11-13）。全文は 28-04

この章で使った語 — 根、十分条件、表現、前提の札、理由の記号。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：28-01 部分列の極限と、極限に移る性質 — 前提から何が出るかを、仮定を全て見せて読みます。一覧から読むなら 28-04。

2026-11-13 · chapter ヤン–ミルズと質量ギャップ 第 28 部 前提の木 含意 · Kiichi, Shiori and Rin

部分列の極限と、極限に移る性質

この章は本書の検討です。

この章で分かること — 一辺 $2^n L$ の箱の細かい測度 μ_n をブロック写像で粗い段 m へ押し出した測度 $\nu_{n,m}$ について、「もし多くの仮定の欄が成り立つならば、部分列の極限が在り、その極限は鏡映正値・対称・非退化の下界を持つ」という条件つきの定理（Lean：`BoxWalk.chain_end_to_end_box`）を、仮定を全て見せて読みます。この定理の中身は二つに分かれます。(a) 有限の格子で一様に成り立つ性質は、部分列の極限に移ること。(b) 結合の一段の構造体から、合わせの点が陽な括弧の中に取れること。

前提となる章 — 19-04 ブロック写像・押し出しの測度、19-01 Wilson の測度、19-03 鏡映、19-07 示すべき言明。

先に言うこと — これは含意で、仮定のどれも四次元の格子で示されていません。部分列の極限の存在は、仮定なしに、どの確率測度の族にも立ちます。(a) と (b) を結ぶ読み（「細かい測度は、合わせの点で決めた結合の Wilson の測度である」）は定理の外に在ります。仮定に入れる量（実効の結合、活性、供給、剰余、背景の不変量、観測量の列）は、格子から定義されていません。だから、この定理が閉じていることは、連続極限の中身が示されたことを意味しません。四次元のヤン–ミルズ理論の存在は、2026-11-10 に公開された構成が別の設計で示しました（第二巻）。この章の含意は、本書の設計（決まったブロック写像で押し出した測度）が何を前提に置いたかの記録です（§08）。

この章の順序

1. 定理の形 — 何を固定し、何を自由に置くか — 定義から決まるのはブロック写像と押し出しだけ
2. 仮定の欄の表
   — Lean の名・数学の言葉・具体の対象で払われているか（表 1・表 2）
3. 結論の一つ目 — 合わせの点が括弧の中に在る — 関数の族 u だけの言明で、測度とは繋がっていない
4. 結論の二つ目 — 部分列に沿った収束 — コンパクト性から、どの測度の族にも立つ

5. 極限に移る性質 — 鏡映正値性・不変性・閉じた集合の質量の下界・観測量の連続の度合い（表 3）
6. 細かい測度を Wilson の測度にした版 — 二つの欄が消えた範囲と、残る欄
7. 二つを結ぶ読みは定理の外に在る — 裸の結合の列と実効の結合を繋ぐには、実効の結合の定義が要る
8. 先に組んだ条件つきの含意との関係 — その仮定は押し出しの測度で書いた言明

01

定理の形 — 何を固定し、何を自由に置くか

連続極限を作る一つの道は、次のとおりです。格子間隔を半分ずつにした箱（一辺 $2^n L$ の周期の箱、$n = 0, 1, 2, \ldots$）の上に細かい測度 μ_n を置き、それをブロック写像で一辺 $2^m L$ の粗い箱へ押し出します（19-04）。粗い段 m を固定して $n \to \infty$ とした極限が、物理の大きさを固定した箱の上の「連続極限のブロック変数の分布」の候補です。

記号を決めます。$\mathbb{B}$ は四元数の閉じた単位の球、E_m は一辺 $2^m L$ の箱のリンクに $\mathbb{B}$ の値を置いた配位の空間です。E_m は有限個の球の積なので、コンパクトな距離空間です。$B_m : E_{m+1} \to E_m$ はブロック写像、$\mathrm{down}_{n \to m}$ はその $n - m$ 回の合成、押し出しの測度は

$$\nu_{n,m} = (\mathrm{down}_{n \to m})_{*}\, \mu_n \qquad (m \le n) \tag{1}$$

です（Lean：`ChainBlockMap.blockMap`・`down`・`νP`）。ブロック写像は、道の積の平均を閾 $r_0 > 0$ で球へ戻す retract を含みます（19-04）。r_0 は定理の自由な引数（欄 `hr : 0 < r₀`）で、極限は r_0 に依り得ます。箱の版では、道の族と重みも固定されています（重み $(1/8, 3/4, 1/8)$、六つの順。Lean：`BoxWalk.boxPaths`・`boxW`）。

定義から決まっているのは、ここまでです。定理の中で、細かい測度 μ_n は任意の確率測度の族です。ほかに、結合の関数 u_k、活性 z_k、供給 w_k、剰余 $r_k^{\mathrm{s}}, r_k^{\mathrm{l}}$、面の変数 $Y_{m,p}$、背景の不変量 $f_{m,x}$、観測量の列 s_n、鏡映 Θ_m、対称の作用、小さい場の集合 C_m などが、全て自由な変数として入ります。仮定の欄は、これらの自由な量についての条件です。

仮定	結論の一つ目	結論の二つ目
結合の一段の構造体、稀さ、観測量の分かれ方、鏡	任意の目標の値 t と段 n について、$u_n(x) = t$ とな	ある部分列に沿って、全ての段 m で $\nu_{n,m}$ が収束し、

映正値性、対称、表現ほか（§02）	る点 x が陽な括弧の中に在る（§03）	極限が仮定の性質を受け継ぐ（§04・§05）
全て 仮 。量は格子から定義されていない	u だけの言明	収束そのものは仮定なしに立つ

Lean：`ChainBlockMap.chain_end_to_end_blockMap`（道の族と重みが一般の版）、`BoxWalk.chain_end_to_end_box`（箱の版）— 含意として機械検査（仮定は表のとおり）。二つの結論は、一つの言明の中で「かつ」で並んでいます。

02

仮定の欄の表

仮定の欄を全て並べます。「払われているか」の欄は、その欄が具体の対象（定義の在る測度や写像）で示されているか、抽象の量についての仮定のまま残っているかです。箱の版では、ブロック写像の連続性と押し出しの整合（$(B_m)_*\nu_{n,m+1} = \nu_{n,m}$）は定理の中で定義から払われていて、欄として現れません（Lean：`ChainBlockMap.continuous_blockMap`・`hcons_blockMap`）。

表 1　測度・観測量の側の欄（$\nu_{n,m}$ は式 (1)。「大きい n で」は「ある n_0 があって $n \ge n_0$ で」）

Lean の欄	数学の言葉	払われているか
`rarity`	仮 各段 m、大きい n、領域 R_m の各ブロック i で、$\nu_{n,m}$（ブロック i の面の変数 $Y_{m,p}$ が閾 $y_h(m)$ を越えるか、背景の不変量 $f_{m,x}$ が閾 $f_h(m)$ を越える（Lean ではこの閾の名が `θ` ですが、渦の比とは無関係です））$\le n_p(m)P_1(m) + n_{pt}(m)S(m)$。稀さ	抽象。$Y_{m,p}$・$f_{m,x}$ は自由な関数で、事象そのものが定義されていない
`hCc`・`hgood`	仮 C_m は閉じた集合で、全てのブロックで「面の変数 $\le y_h$、不変量 $\le f_h$」となる事象を含む	抽象
`h0c`・`h0p`	仮 Θ_m は連続。大きい n で、類 $\mathcal{A}_m$ の F について $\int F(\Theta_m\omega)F(\omega)\,d\nu_{n,m} \ge 0$。鏡映正値性	**Wilson の測度で払った版が在る**（§06。類は幅一定の帯）
`hsc`・`hsym`	仮 対称の作用 g は連続。大きい n で、$\nu_{n,m}$ は g で不変	抽象（Wilson の版でも残る）
`split`・`lattice_vanishing`・`shift_vanishing`	仮 $\lvert s_n(d) - s_n(d')\rvert \le \tau_n + \Omega(\mathrm{dist}(d,d'))$、$\tau_n \to 0$、$\Omega(r) \to 0$ $(r \downarrow 0)$。観測量の分かれ方（同程度連続の割れた形）	抽象。s_n は自由
`hcount`・`hdense`・`hbd`	仮 観測量の配置の空間 X の中の集合 D は可算で稠密、$\lvert s_n(d)\rvert \le K$（$K$ は d・n に依らない一つの数。Lean の名は `Bd`）	抽象
`hac`・`ham`・`hbr`・`hbv`	仮 X への対称の作用は連続で D を保ち、破れ $\lvert s_n(gd) - s_n(d)\rvert \le \varepsilon_b(g,n,d) \to 0$	抽象

Lean の欄	数学の言葉	払われているか
`hpos`	仮 大きい n で $\sum_{a,b} c_a c_b\, s_n(x_{ab}) \geq 0$（鏡映正値性の行列の形）	抽象
`HR`	仮 各 $d \in D$ と大きい n で $s_n(d) = \int F_d \, d\nu_{n,\mathrm{lev}(d)}$（$F_d$ は段 $\mathrm{lev}(d)$ の有界連続関数）。表現	抽象（s_n を ν の期待値として定義すれば自明に立つ）

表 2　結合の側の欄（構造体 `TransientChainError.CouplingStepsTransientE` と、その外の二つ。定義域は $\{x : u_j(x) \geq u_\star \ (j \leq k)\}$）

Lean の欄	数学の言葉	払われているか
`flow`	仮 $u_{k+1} = u_k - b + r^{\mathrm{s}}_k + r^{\mathrm{l}}_k$（一段の結合の減り）	抽象。$u, z, w, r^{\mathrm{s}}, r^{\mathrm{l}}$ は自由な関数 $\mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$、$W, \Phi, \mathcal{D}, e$ は自由な関数 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
`small_net` ・ `transient`	仮 $b_{\inf} + \delta_k - e(u_k) \leq b - r^{\mathrm{s}}_k \leq b_{\mathrm{p}} + e(u_k)$、$\sum_{k<n} \max(-\delta_k, 0) \leq D_0$（小さい場の正味の括弧と、過渡の和）	
`large_rem`	仮 $\lvert r^{\mathrm{l}}_k \rvert \leq \mathcal{D}(u_k)\, z_k$（大きい場の剰余）	
`act_rec` ・ `act_nonneg` ・ `act_init` ・ `supply`	仮 $z_{k+1} \leq \rho z_k + A w_k + B z_k^2$、$z_k \geq 0$、$z_0 \leq W(u_0)$、$w_k \leq \Phi(u_k)$（活性の再帰と供給）	
`fix_shift` ・ `DW` ・ `margin`	仮 $\rho W(s) + A\Phi(s) + BW(s)^2 \leq W(s')$（$u_\star \leq s$、$u_\star \leq s' \leq s + D_0$）、$\mathcal{D}(s) W(s) \leq Y$、$e(u_\star) + Y \leq b_{\inf}$（動く不変区間と余白）	
`ustar_pos` ・ `he` ・ `hD` ・ `hρ` ・ `hA` ・ `hB`	仮 $u_\star > 0$、e は $[u_\star, \infty)$ で減少、$\mathcal{D} \geq 0$、$\rho, A, B \geq 0$	
`h0` ・ `hCu`	仮 $u_0(x) = x$。$x \mapsto u_{k+1}(x)$ は定義域の上で連続	抽象

二つの表の欄は、同時に満たせます 初 。たとえば領域 R_m・類 $\mathcal{A}_m$・P と、二つの対称の作用の添字の集合を空にし、$C_m = E_m$、X を一点、$s_n(d) = \int F_d \, d\nu_{n,\mathrm{lev}(d)}$、$u_k(x) = x - k$、$b = b_{\inf} = b_{\mathrm{p}} = 1$、剰余・活性・供給と $W, \Phi, \mathcal{D}, e, \delta, D_0, Y, \rho, A, B$ を全て 0、$u_\star = 1$ と取れます。ただし、この取り方では対応する結論も自明です。中身のある量で欄を払う取り方は知られていません。

寄り道：結合の一段の構造体が実際に言っていること

飛ばしてよい。表 2 の構造体は欄が十七ありますが、結論の一つ目に効く中身は「u の一段の減り $u_k - u_{k+1}$ が括弧 $[\, b_{\inf} + \delta_k - e(u_k),\ b_{\mathrm{p}} + e(u_k) \,]$ に入る」ことと、$u_\star, e, \delta, D_0$ だけについての数の条件です 初 。実際、任意の u がこの括弧を満たすなら、$r^{\mathrm{s}}_k := u_{k+1} - u_k + b$、$r^{\mathrm{l}} = z = w = 0$、$W = \Phi = \mathcal{D} = 0$、$Y = \rho = A = B = 0$ と置けば、`flow` ・ `small_net` ・ `large_rem` ・活性と供給の四つ・ `fix_shift` ・ `DW` ・ `hD` ・ `hρ` ・ `hA` ・ `hB` は立ちます。残る四つ — $u_\star > 0$（`ustar_pos`）、e が $[u_\star, \infty)$ で減少（`he`）、過渡の和 $\sum_{k<n} \max(-\delta_k, 0) \leq D_0$（`transient`）、$e(u_\star) \leq b_{\inf}$（`margin` の $Y = 0$ の形）— は、この置き方からは出ず、$u_\star, e, \delta, D_0$ の取り方の条件として残ります。大きい場の剰余・活性・供給の欄は、括弧を出すための一つの「割り方」に名を付けたもので、割り方を決める量

（実効の作用の分解）が格子から定義されていない限り、それ自身は中身を足しません。どの割り方が意味を持つかは、前提の一覧（28-04）と開いている所（28-06）の主題です。

03

結論の一つ目 — 合わせの点が括弧の中に在る

結論の一つ目は次の形です。

$$\forall t \ge u_\star + D_0,\ \forall n,\ \exists x: \quad \begin{cases} t + (b_{\mathrm{inf}} - e(u_\star) - Y)\, n - D_0 \ \le\ x \ \le\ t + (b_{\mathrm{p}} + e(u_\star) + Y)\, n, \\ u_n(x) = t, \qquad u_k(x) \ge t - D_0 \ \ (k \le n). \end{cases} \tag{2}$$

意図の読みでは、x は細かい格子の裸の逆結合、$u_k(x)$ は k 段の繰り込みの後の実効の逆結合、t は粗い端で合わせる目標の値です。式 (2) は「n 段の後にちょうど t になる裸の値 x が、n について一次の陽な括弧の中に在り、途中の段で定義域を外れない」と読めます。一ループの減り b の付近で括弧が閉じるのは、一段の減りが $[b_{\mathrm{inf}} - e,\ b_{\mathrm{p}} + e]$ に入るからです。

式 (2) は、関数の族 u と表 2 の定数だけについての言明です。細かい測度 μ_n、押し出しの測度 $\nu_{n,m}$、観測量 s_n は、式 (2) にも、式 (2) を出すのに使う欄（表 2）にも現れません。定理の中で、u と μ を結ぶ欄は一つもありません。

証明の道筋は二段です。(i) 定義域の上で、活性と結合を一緒に k について帰納し、一段の減りが括弧に入ることを出します（大きい場の剰余は $\mathcal{D}W \le Y$ で抑え、`margin` で括弧に吸います）。(ii) $u_0(x) = x$ と u_{k+1} の連続性から、中間値の定理で $u_n(x) = t$ となる x を括弧の中に取ります[初]。どちらも実数の関数の議論で、格子は出てきません。

04

結論の二つ目 — 部分列に沿った収束

結論の二つ目は、次の存在の言明から始まります。

$$\exists\, \varphi \text{ 狭義増加},\ \exists\, (\nu_m)_{m \ge 0} \text{ 確率測度}: \qquad \nu_{\varphi(k),m} \xrightarrow[k \to \infty]{} \nu_m \quad (\text{弱収束、全ての } m). \tag{3}$$

式 (3) は、**どの確率測度の族 μ_n についても、仮定の欄を一つも使わずに立ちます。**理由は、E_m がコンパクトな距離空間で、その上の確率測度の空間が弱収束の位相でコンパクト（しかも距離づけられる）だからです[典]（Prokhorov の定理の、コンパクトな空間の場合）。可算個の段 m の積もコンパクトなので、全ての m に共通の一本の部分列 φ が取れます（Lean：`WeakUltravioletExistence.exists_common_subseq`）。

だから式 (3) だけでは、極限が何であるかについて何も言っていません。極限は部分列 φ の選び方に依り得ます。極限が細かい測度の選び方を反映した中身を持つのは、次の節の「極限に移る性質」によってだけです。全列（部分列でない）の収束は、この定理の結論にありません。それは次の章 28-02 の主題で、示すべき言明の一つ（19-07 の全列の収束。合わせで決めた結合の列について言う）です。

押し出しの整合 $(B_m)_*\nu_{n,m+1} = \nu_{n,m}$ は定義から立ち、B_m が連続なので極限にも移ります：$(B_m)_*\nu_{m+1} = \nu_m$（Lean：`WeakUltravioletExistence.limit_consistent`）。極限の族は、ブロック写像について整合した射影系です。

05

極限に移る性質

結論の二つ目の残りは、表 1 の欄が部分列の極限に移ることです。どれも「有限の n で（大きい n で）一様に成り立つ閉じた条件は、弱極限で保たれる」という一つの型です。

表 3　大きい n の性質と、極限での性質（Lean の結論の構造体 `WeakUltravioletExistence.BlockConclusion`・`ObservableConclusion`）

仮定（大きい n で）	結論（極限で）	移す道具
`h0c`・`h0p`	`reflection_positive`：$F \in \mathcal{A}_m$ で $\int F(\Theta_m\omega)F(\omega)\,d\nu_m \geq 0$	$F \circ \Theta_m \cdot F$ は有界連続なので積分が収束し、≥ 0 は閉じた条件 初
`hsc`・`hsym`	`symmetric`：ν_m は対称の作用で不変	同じ（有界連続な関数の積分の等式） 初
`rarity`・`hgood`・`hCc`	`small_field_mass`：$\nu_m(C_m) \geq c_m$、$c_m = 1 - \lvert R_m\rvert\,(n_pP_1 + n_{pt}S)$	和の上界で大きい n の $\nu_{n,m}(C_m) \geq c_m$。閉じた集合の質量は弱極限で下がらない：$\limsup_n \nu_n(C) \leq \nu(C)$ 典
`HR`	$d \in D$ で $S(d) = \int F_d\,d\nu_{\mathrm{lev}(d)}$、$s_{\varphi(k)}(d) \to S(d)$	弱収束の定義そのもの 初
`hbd`	`bounded`：全ての $x \in X$ で $\lvert S(x)\rvert \leq K$	閉じた条件 初
`split`・`lattice_vanishing`・`shift_vanishing`・`hcount`・`hdense`	`continuous`・`modulus`：S は X 全体へ一様連続に延び、連続の度合いは Ω から来る	$\varepsilon/2$ の議論で同程度連続、可算稠密な D の上の極限を X へ延ばす 初
`hac`・`ham`・`hbr`・`hbv`	`invariant`：$S(gx) = S(x)$	破れが 0 に行くので D の上で等式、連続性で X へ 初
`hpos`	`positive`：$\sum_{a,b} c_a c_b S(x_{ab}) \geq 0$	閉じた条件 初

非退化の下界 c_m は、Lean では $[0,\infty]$ の値の引き算で書かれていて、$\lvert R_m\rvert(n_pP_1 + n_{pt}S) \geq 1$ のときは $c_m = 0$（中身の無い下界）と読みます。下界が中身を持つのは、稀さの欄の右辺が、

領域の大きさ $|R_m|$ に比べて小さいときだけです。

この節の全体は、測度の側の含意が「有限の n で一様に成り立つ性質が、弱極限に移る」までであることを示しています。性質そのもの（稀さ、鏡映正値性、対称、観測量の同程度連続）は、全て仮定の側に在ります。そのうち具体の対象で示されているのは、次の節の二つの欄だけです。

06

細かい測度を Wilson の測度にした版

細かい測度を、一辺 $2^n L$ の箱 $(\mathbb{Z}/2^n L)^4$ の正規化した SU(2) の Wilson の測度（結合 β_n、19-01）にした版が在ります。$\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ は*任意の列*です。あわせて鏡映 Θ_m を格子点の面の時間の鏡映 $x_0 \mapsto -x_0$、類 $\mathcal{A}_m$ を次の $\mathcal{A}_m^{(c)}$ に固定します。

$$\mathcal{A}_m^{(c)} = \{ F \text{ 有界連続} : \ F \text{ は基点の時間が } \{1, \dots, 1+c\} \text{ の粗いリンクだけに依る} \} \quad (2c+4)$$

このとき鏡映正値性の欄 `h0p` と、鏡映の連続性の欄 `h0c` は、Lean の中で示されて消えます（Lean：`BoxWalk.wilson_h0p` ・ `continuous_reflCfg`。前者は「任意の結合の列 β と大きい n で、押し出した Wilson の測度が帯 (4) の類について鏡映正値」という仮定なしの言明です）。結果の言明が `BoxWalk.chain_end_to_end_box_wilson2` です — 含意として機械検査（仮定は表 1・表 2 から `h0p` ・ `h0c` を除いたもの）。

この版の範囲を、正確に書きます。

- **二つの欄が消えた範囲では確認済みです。**類 (4) は m が十分大きい所で空でなく（一本のリンクの関数 $\cos(\mathrm{Re}\, U_{\ell_0})$ が入ります。Lean：`BoxWalk.stripSet_witness`）、極限の鏡映正値性は中身を持ちます。
- **「鎖を Wilson の測度で閉じた」と読むなら、条件つきです。**結合の一段の構造体、稀さ、対称 `hsym`、表現、観測量の欄は全て仮定のまま残ります。
- 類 (4) は狭い類です。帯の幅 c は全ての段 m で同じ一つの数で、m が大きくなっても広がらず、時間 0 の面のリンクを含みません。先に組んだ条件つきの含意（§08）の正の時間の類 $\mathcal{A}_m(P)$（正の半分全体）より小さい類です。その類は、粗い格子の対称の面（たとえば格子点の間の面）での鏡映と、細かい格子の正の側の台への引き戻しで定義されていて、鏡映そのものも格子点の面の $x_0 \mapsto -x_0$ とは違います。しかも結論は c ごとに「ある部分列と、ある極限」なので、「一つの極限が全ての c の帯で鏡映正値」はこの一本からは出ません。

Wilson の測度の版でも、β_n は任意の列で、u とは何の関係も置かれていません。これが次の節の主題です。

07

二つを結ぶ読みは定理の外に在る

ここまでで、定理の中身は二つに分かれました。

(a) 測度の側	(b) 結合の側
有限の格子で一様に成り立つ性質（鏡映正値性・対称・閉じた集合の質量の下界・観測量の同程度連続）は、部分列の極限に移る。部分列の極限そのものは前提なしに在る。	結合の一段の構造体から、$u_n(x) = t$ となる合わせの点 x が、n について一次の陽な括弧の中に取れる。

意図の読みは、この二つを次の一文で結びます：「細かい測度 μ_n は、合わせの点 x_n（式 (2) で目標 t に対して取った点）で決めた結合 $\beta_n = 4x_n$ の Wilson の測度である」。この一文は、**定理の中にありません**。Wilson の版（§06）は任意の列 β を取り、β_n と x_n の間に関係を置きません。だから定理から読み取れるのは、(a) と (b) が別々に成り立つことだけです。

先に組んだ条件つきの含意（§08）では、この一文は設定の定義として置かれています（細かい測度を、裸の結合の合わせの括弧で選んだ β_n の Wilson の測度と定義する）。ただしその含意でも、実効の結合 u_k は押し出しの測度 $\nu_{n,m}$ からではなく、段 k ごとに決めた別の有限の格子の Gibbs の期待値（または分配関数の比）から作る量として定義され、結合の側の量と測度の側の量（たとえば結合の側の閾と、稀さの事象の閾 $y_h(m)$）は定理の中で結ばれていません。Lean の鎖の定理では、この定義も置かれず、細かい測度は任意の族です。

結ぶには、実効の結合 u_k を格子から定義することが要ります。たとえば u_k を、裸の結合 x の Wilson の測度の何かの期待値の関数として定義すれば、式 (2) の $u_n(x) = t$ は「細かい Wilson の測度を、粗い段のある量が決まった値になるように合わせる」という、定義された対象だけの言明になります。その形は、示すべき言明の一つ「合わせ」として 19-07 に在ります（19-07 は、合わせ以外の言明を全て、合わせで決めた結合の列について述べています）。どの量で合わせるかには選びが残り、それは設計の選び（28-05）に入ります。

あわせて、表 1・表 2 の他の量も格子から定義されていません。実効の結合と剰余（実効の作用の分解から来る量）、大きい場の活性と供給、背景場とその不変量、観測量の列とその表現

は、どれも定理の中では自由な変数です。この定理が「閉じている」ことは、これらの量を格子から定義し、欄を示すことの代わりになりません。

08

先に組んだ条件つきの含意との関係

この定理は、本書の検討が先に組んだ条件つきの含意（小さな箱の四次元 SU(2) 格子ヤン–ミルズの弱い紫外の存在を、段ごとの前提からの機械検査の鎖で導く形。2026-10-30）の鎖の定理と同じ型の含意を、その後に結合の欄を別の形（括弧の幅を誤差の関数 e と過渡の項 δ_k で書く形）にし、ブロック写像を箱の上の具体の写像に置き換えて書き直したものです。先の含意の Lean は、抽象のブロック写像の上の言明です。先の含意では、細かい測度は裸の結合の合わせの括弧で選んだ β_n の Wilson の測度と定義されています（§07）。先の含意の仮定のうち、小さい場の集合の仮定（各段で閉じた集合 C_m があり、大きい n で $\nu_{n,m}(C_m) \geq 1 - \eta_m$ ）、観測量の同程度連続（期待値 s_n の同程度連続）、増分の総和可能性の仮定（$|s_{n+1}(x) - s_n(x)|$ が総和可能）は、細かい測度が与えられれば、押し出しの測度とその期待値だけで書かれた言明です。もう一つの仮定（結合の一段の括弧の仮定）は実効の逆結合 u_k についての言明で、u_k の定義は紙に在り、Lean の中では自由な関数です。これらの仮定はどれも四次元で示されておらず、主定理は含意です。四次元のヤン–ミルズ理論の存在そのものは、2026-11-10 に公開された構成が別の設計で示しました（第二巻。二つの設計の比べは 第 14 部）。本書では、押し出しの測度だけで書ける言明を「示すべき言明」（19-07）として先に置き、この章の定理を、そのうち部分列の極限と極限に移る性質の部分を受け持つ含意として読みます。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
含意：表 1・表 2 の欄が全て成り立てば、式 (2) と、式 (3) の部分列の極限で表 3 の性質が成り立つ。Lean：`BoxWalk.chain_end_to_end_box`（`ChainBlockMap.chain_end_to_end_blockMap` の箱の版）— 含意として機械検査（仮定は表のとおり）	どの欄も、四次元の格子の具体の量で示されていない（§06 の二つを除く）。仮定に入れる量が格子から定義されていない
典 式 (3) の部分列の極限は、どの確率測度の族にも在る（コンパクト性）。Lean：`WeakUltravioletExistence.exists_common_subseq`	極限が部分列に依らないこと（全列の収束。28-02）
初 式 (2) は u と表 2 の定数だけの言明で、測度と繋がっていない	μ_n が合わせの点で決めた Wilson の測度であること（定理の外の読み）

言えている	言えていない
Wilson の版：細かい測度が Wilson の測度（任意の結合の列）のとき、`h0p`・`h0c` が消える。Lean：`BoxWalk.chain_end_to_end_box_wilson2`・`wilson_h0p` — 二つの欄が消えた範囲で確認済み	鎖を Wilson の測度で閉じたこと（残りの欄は仮定）。類は幅一定の帯 (4) で、正の半分全体ではない
初 表 1・表 2 の欄は同時に満たせる（自明な対象で）	中身のある対象で欄を同時に満たす取り方

出典と再現

もの	種別	出典・道具
含意の言明と結論の構造体（§01〜§05）	Lean	本書の検討の Lean：`ChainBlockMap.chain_end_to_end_blockMap`・`BoxWalk.chain_end_to_end_box`、構造体 `TransientChainError.CouplingStepsTransientE`・`WeakUltravioletExistence.BlockConclusion`・`ObservableConclusion`・`Representation`。言明は源の字を読んで写した
Wilson の版（§06）	Lean	`BoxWalk.chain_end_to_end_box_wilson2`・`wilson_h0p`・`stripSet`・`stripSet_witness`・`reflCfg`。細かい格子の鏡映正値性は 20-01
確率測度の空間のコンパクト性（Prokhorov の定理）、閉じた集合の質量の上半連続	典	測度論の標準の事実。書誌のみ（未確認）。Lean は Mathlib の補題を使う
欄が同時に満たせる例（§02）	初	本文の取り方
先に組んだ条件つきの含意の仮定（小さい場の集合の仮定・観測量の同程度連続・増分の総和可能性の仮定・結合の一段の括弧の仮定。§08）	—	本書の検討の記録（2026-10-30）

この章で使った語 — 含意・押し出しの測度・部分列・弱収束・射影系・結合の一段の構造体・合わせの点・括弧・稀さ・小さい場の集合・非退化の下界・同程度連続・表現・帯の類。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：28-02 全列の収束 — 部分列を外すのに足りる条件を、一段の写像の Lipschitz の縮みと終点の合わせの形で読みます。

全列の収束

この章は本書の検討です。

この章で分かること — 前の章の定理は部分列の極限しか出しません。部分列を外すには、格子を一段細かくしたときの粗い尺度の量の差が総和可能であれば足ります。この章では、その差を抑える一つの十分条件 — 繰り込みの一段の写像の Lipschitz の縮みと、粗い端での結合の合わせ — を、終点を合わせた歪積の軌道の収束（Lean：`SkewOrbit.coarse_tendsto` ほか）として、仮定を全て見せて読みます。条件 $\varepsilon + \tau < 1$ と $4cc' < (1-\varepsilon-\tau)^2$ がこの方法に必要十分であること、終点の合わせが外せないことも Lean の例で示されています。

前提となる章 — 28-01 部分列の極限の含意、19-04 ブロック写像、19-07 示すべき言明（全列の収束）。

先に言うこと — これは含意です。定理は距離空間の点の軌道についての言明で、測度は出てきません。仮定の一段の写像（周辺の座標 u と無関係な座標 v の上の写像）は、格子から定義されていません。だから、この定理から格子の連続極限の全列の収束は出ません。出るのは「もし繰り込みの一段がこの形で、この縮みを持つならば」という形の結論だけです。四次元のヤン–ミルズ理論の存在は、2026-11-10 に公開された構成が別の設計で示しました（第二巻）。この章の含意は、本書の設計（決まったブロック写像で押し出した測度）での記録です（28-00）。

この章の順序

1. 部分列から全列へ — 何が足りないか — 増分が総和可能なら全列が収束する
2. 一段の写像の形 — 周辺の方向と無関係な方向 — 歪積の写像と、終点を合わせた軌道の族
3. 仮定の欄の表 — Lipschitz の縮み・直径・終点の合わせ（表 1）
4. 言明 — 粗い端の Cauchy 性と極限の一意性 — 差 $\le D\theta^n$、極限は裸の値に依らない
5. 証明の道筋 — 二点の境界値の問題 — u の差は粗い側から、v の差は細かい側から伝わる

6. 条件と速さ — この方法に必要十分であること — 線形の模型の固有値と、下げられない速さ
7. 終点の合わせは外せない — 同じ写像で合わせを外すと Cauchy でない例
8. 仮定の写像は格子から定義されていない — 何を定義すれば言明が格子の言明になるか

01

部分列から全列へ — 何が足りないか

前の章（28-01 §04）の部分列の極限は、どの確率測度の族にも在ります。極限は部分列の選び方に依り得るので、それだけでは「連続極限が一つ決まった」とは言えません。全列（部分列を取らない列）の収束が要ります。

全列の収束には、易しい十分条件があります。粗い尺度の一つの量の列 s_n（たとえば段 m の観測量の期待値）について

$$|s_{n+1} - s_n| \le \delta_n, \qquad \sum_n \delta_n < \infty \tag{1}$$

なら、s_n は Cauchy 列なので収束し、どの部分列の極限もその極限に等しくなります 初（Lean：`WeakUltravioletExistence.tendsto_of_summable_increments`・`subseq_limit_eq`。観測量の族の形は `WeakUltravioletExistence.weak_uv_observable_full`）。本書の検討が先に組んだ条件つきの含意（28-01 §08）では、式 (1) の形の条件が仮定（増分の総和可能性の仮定）として置かれています。増分の総和可能性の仮定は、ゲージ不変な関数の可算で稠密な族の上で、観測量の値の段ごとの増分が総和可能、という仮定です。押し出しの測度の全列の弱収束（19-07 の全列の収束。合わせで決めた結合の列について言う）とは同じ言明ではなく、総和可能なぶん強く、関数の族も違います。その族から全ての有界連続な関数へ移る一段は、紙の議論です。

問題は、式 (1) の δ_n をどこから得るかです。格子 $n+1$ と格子 n の二つの細かい測度を、同じ粗い段 m まで押し出して比べます。繰り込みの写像は合成できるので、格子 $n+1$ の側は「一段だけ繰り込んでから、格子 n と同じ道を通る」と見られます。一段の後の実効の作用が、格子 n の裸の作用と少しだけ違うなら、その違いが残りの段で縮んでいけば、粗い端での差は小さくなります。この章の定理は、この筋のうち「縮んでいく」の部分を、点の軌道の言明として書いたものです。

02

一段の写像の形 — 周辺の方向と無関係な方向

実効の作用を、二つの座標で表すと考えます。周辺の座標 $u \in \mathbb{R}$（逆結合）と、無関係な座標 v（それ以外。距離空間 X の点）です。尺度 k（$k = n$ が細かい端、$k = 0$ が粗い端）から $k-1$ への一段の写像を

$$\Phi_k(u, v) = \big(u - b_k + r_k(u, v),\ T_k(u, v)\big) \tag{2}$$

とします（Lean：`SkewOrbit.step`）。b_k は一段の結合の減り（一ループの値の付近の数）、r_k はその直し、T_k は無関係な座標の写像です。写像は段 k だけに依り、出発した格子 n には依りません。

なぜ歪積か。全ての方向が縮む写像なら、軌道の収束は縮小写像の原理の型で出ます。繰り込みの写像は、結合の方向 u では縮みません（漸近自由のもとでは、u は一段ごとにほぼ b ずつ減るだけです）。縮むのは無関係な方向 v だけで、二つの方向は r_k と T_k を通して互いに影響します。この形の写像を歪積と呼びます。

格子 n の軌道は、尺度 n の裸の値 $w_n(n)$ から始めて $w_n(k-1) = \Phi_k(w_n(k))$ で粗い端 $w_n(0)$ まで下ろした点の列です（Lean：`SkewOrbit.IsOrbit`）。軌道の族 $(w_n)_n$ について、次の三つをまとめて「許容」と呼びます（Lean：`SkewOrbit.Admissible`）。

- 各 w_n は尺度 n から 0 への軌道。
- **終点の合わせ**：全ての n で、粗い端の周辺の座標が同じ値 $\bar{u}$ になる：$w_n(0)_u = \bar{u}$。
- 無関係な座標は、全ての段で直径 D 以下の集合 $\mathcal{B} \subset X$ に留まる。

終点の合わせは、前の章の結論の一つ目（28-01 §03、n 段の後にちょうど目標の値になる裸の値が在る）と同じ役をします。ただし二つの定理は、互いの量を参照していません。

03

仮定の欄の表

表 1　終点を合わせた歪積の軌道の収束の仮定（中点の版 `SkewOrbit.coarse_tendsto_mid` の欄。$v, v' \in \mathcal{B}$、u, u' は全ての実数）

Lean の欄	数学の言葉	払われているか
`hr`	仮 $\lvert r_k(u,v) - r_k(u',v')\rvert \le \varepsilon\lvert u-u'\rvert + c\,d(v,v')$	抽象。r_k, T_k, X は自由で、格子から定義されていない
`hT`	仮 $d(T_k(u,v), T_k(u',v')) \le c'\lvert u-u'\rvert + \tau\, d(v,v')$	
`hB`	仮 $\mathcal{B}$ の直径 $\le D$	抽象

Lean の欄	数学の言葉	払われているか
`hε` ・ `hc` ・ `hc'` ・ `hτ` ・ `hD`	仮 $\varepsilon, c, c', \tau, D \ge 0$	数の条件
`hετ` ・ `h4`	仮 $\varepsilon + \tau < 1$、$4cc' < (1-\varepsilon-\tau)^2$	数の条件（§06 でこの方法に必要十分）
`hw`（`Admissible`）	仮 軌道の族が許容（軌道であること・終点の合わせ・$\mathcal{B}$ に留まる）	抽象
`[CompleteSpace X]`	仮 X は完備	抽象

一般の版（`SkewOrbit.coarse_step` ・ `coarse_cauchy` ほか）は、θ を一つ与えて、$\tau < \theta < 1-\varepsilon$ と

$$q := \frac{cc'/(1-\varepsilon-\theta) + \tau}{\theta} < 1 \tag{3}$$

を仮定します。この章の θ は縮みの率で、渦の比 θ_M（19-02）とは無関係です。中点 $\theta = (1-\varepsilon+\tau)/2$ を取ると、式 (3) は $4cc' < (1-\varepsilon-\tau)^2$ から出ます（Lean：`SkewOrbit.midpoint_admissible`）。

Lipschitz の欄は u の全ての値で仮定していますが、これは制限になりません。欄を窓 $u, u' \ge a$ の上だけで仮定し、軌道が窓に留まる（全ての n, k で $w_n(k)_u \ge a$）ことを足せば、同じ結論が出ます（Lean：`SkewOrbitProbe.coarse_tendsto_window` ・ `limit_independent_window`。$u \mapsto \max(u, a)$ で切った写像に元の定理を当てる）。弱結合の窓 $u \ge u_\star$ の上の評価だけを使う場面に合います。

仮定は同時に満たせて、しかも自明な場合に限りません。$X = \mathbb{R}$、$\mathcal{B} = [-1, 1]$（$D = 2$）、$b = 0$、$r(u, v) = \frac{7}{20} v$、$T(u, v) = \frac{7}{10} v + \frac{1}{20} u$（$\varepsilon = 0$、$c = 7/20$、$c' = 1/20$、$\tau = 7/10$、$4cc' = 0.07 < 0.09$）で、裸の無関係な座標が $\pm\frac{1}{2}$ の付近で振動して収束しない許容な族が作れ、粗い端は収束します（Lean：`SkewOrbitProbe.Ex.admissible` ・ `Ex.coarse_converges` ・ `Ex.bare_not_cauchy`）。

04

言明 — 粗い端の Cauchy 性と極限の一意性

表 1 の仮定のもとで、$\theta = (1-\varepsilon+\tau)/2$ として次が成り立ちます。

$$d\big(w_{n+1}(0)_v,\ w_n(0)_v\big) \le D\,\theta^n \qquad (\text{全ての } n). \tag{4}$$

だから粗い端の無関係な座標 $w_n(0)_v$ は Cauchy 列で、X が完備なら**全列で**収束し、その極限 v_∞ について $d(w_n(0)_v, v_\infty) \le D\theta^n/(1-\theta)$ です。さらに、同じ $\bar{u}$ で合わせた二つの許容な族の

極限は一致します。極限は、裸の無関係な座標 $w_n(n)_v$ の選び方に依りません。粗い端の点 (u, v) の連続関数 Ψ は、全列で $\Psi(\bar{u}, v_\infty)$ に収束します。

Lean：`SkewOrbit.coarse_step`（式 (4)）・`coarse_cauchy`・`coarse_tendsto`・`coarse_rate`・`limit_independent`・`observable_tendsto`、中点の版 `coarse_step_mid`・`coarse_tendsto_mid`・`limit_independent_mid` — 含意として機械検査（仮定は表 1 のとおり）。

式 (4) が比べているものを確かめておきます。格子 $n+1$ の軌道を尺度 n 以下に切ると、それは尺度 n で「裸の値に一段 Φ_{n+1} を当てた点」から始まる軌道です（Lean：`SkewOrbitProbe.one_step_after`）。格子 n の軌道は尺度 n の裸の値から始まります。どちらも粗い端で $\bar{u}$ に合わせてあるので、同じ長さ n の二つの許容な軌道の比べになります。

この言明を連続極限の言葉に読むと、「粗い尺度の観測量が (u_0, v_0) の連続関数なら、その期待値の列は部分列を取らずに収束し、極限は裸の作用の無関係な部分の選び方に依らない」となります。この読みは定理の外に在ります（§08）。

05

証明の道筋 — 二点の境界値の問題

同じ長さ n の二つの許容な軌道 w, w' を比べ、$x_k = |w(k)_u - w'(k)_u|$、$y_k = d(w(k)_v, w'(k)_v)$ と置きます。

段 1：一段の不等式。 式 (2) の第一成分の差をとり、表 1 の `hr` を使うと $x_k \le x_{k-1} + \varepsilon x_k + c\, y_k$、つまり

$$(1-\varepsilon)\, x_k \le x_{k-1} + c\, y_k, \qquad y_{k-1} \le c' x_k + \tau\, y_k \qquad (1 \le k \le n) \tag{5}$$

です（後者は `hT`）初。境界の値は $x_0 = 0$（終点の合わせ）と $y_n \le D$（$\mathcal{B}$ の直径）です。x は粗い側（$k=0$）から細かい側へ、y は細かい側（$k=n$）から粗い側へ伝わります。

段 2：重みつきの最大。 $M := \max_{k \le n} y_k\, \theta^{-(n-k)}$ と置きます。$x_0 = 0$ から式 (5) の前半を積むと、帰納法で $x_k \le cM\theta^{n-k}/(1-\varepsilon-\theta)$ が出ます（$\theta/(1-\varepsilon-\theta) + 1 = (1-\varepsilon)/(1-\varepsilon-\theta)$ でちょうど閉じます）初。

段 3：締める。 それを式 (5) の後半に入れると、$k-1 < n$ で $y_{k-1}\theta^{-(n-k+1)} \le qM$（$q$ は式 (3)）。$k = n$ では $y_n \le D$。だから $M \le \max(D, qM)$ で、$q < 1$ から $M \le D$、特に $y_0 \le D\theta^n$ です初（Lean：`SkewOrbit.two_point_bound`・`orbit_compare`）。

段 3 で $q < 1$ を使うところが、縮みの条件の効く場所です。u の方向は縮まないので、u の差を v の差で抑えるには、粗い端で u の差が 0 であること（終点の合わせ）が要ります。

06

条件と速さ — この方法に必要十分であること

θ の選び方について、三つのことが Lean で確かめられています。

- **必要十分**：$\tau < \theta < 1 - \varepsilon$ と式 (3) を満たす θ が在ることと、$\varepsilon + \tau < 1$ かつ $4cc' < (1 - \varepsilon - \tau)^2$ であることは同値です（Lean：`SkewOrbitProbe.theta_exists_iff`）。中点を取ることで条件は何も失われません。
- **速さの窓**：$s = \sqrt{(1-\varepsilon-\tau)^2 - 4cc'}$、$\theta_\pm = \big((1-\varepsilon+\tau) \pm s\big)/2$ とすると、$\theta_- < \theta < \theta_+$ の全ての θ が使えます（Lean：`SkewOrbitProbe.rate_window`）。速さは θ_- の直上まで良くできます。
- **下げられない速さ**：$\varepsilon = 0$、$c = 1/6$、$c' = 1/3$、$\tau = 1/2$（$\theta_- = 2/3$、$\theta_+ = 5/6$）で、式 (5) と境界の値を満たし $y_0 \geq (2/3)^n/2$ となる列が在ります。だから式 (5) からは θ_- より速い減りは出ません（Lean：`SkewOrbitProbe.Sharp.sharp`）。

$\theta_\pm$ は、交差の項の符号を逆にした線形の模型の行列 $\begin{pmatrix} 1-\varepsilon & -c \\ c' & \tau \end{pmatrix}$ の固有値です 初 （特性多項式 $\lambda^2 - (1-\varepsilon+\tau)\lambda + (1-\varepsilon)\tau + cc'$ の根）。$4cc' \leq (1-\varepsilon-\tau)^2$ は、それが実数である条件です。

ここで言う「必要十分」は、**この証明の方法（式 (5) からの二点の評価）に対して**です。条件が破れたときに全列の収束そのものが偽になる、という主張ではありません。式 (5) は差の大きさだけを見ていて、交差の項の符号を使っていないので、符号が分かる写像では、より良い評価の余地があります。

07

終点の合わせは外せない

§03 の例と同じ写像（$\varepsilon = 0$、$c = 7/20$、$c' = 1/20$、$\tau = 7/10$、$\mathcal{B} = [-1, 1]$）で、軌道は全て軌道で、無関係な座標は $\mathcal{B}$ に留まるのに、粗い端の周辺の座標を揃えない族が作れます。その族では、粗い端の無関係な座標は Cauchy になりません（Lean：`SkewOrbitProbe.Ex.matching_needed`）。

中身は、写像の行列 $\begin{pmatrix} 1 & c \\ c' & \tau \end{pmatrix}$ が固有値 $21/20 > 1$ の方向（周辺の方向に近い方向）を持つことです。この例では、粗い端の u を揃えないと、軌道はこの方向の成分を持ち、その大きさが n ごとに入れ替わります。終点の合わせは、この拡がる方向の成分を n ごとに決め直す操作です。

だから、全列の収束は「縮み」だけからは出ません。**裸の結合を n ごとにどう選ぶか（合わせ）が、言明の一部です**。格子の言葉では、これは示すべき言明の「合わせ」（19-07）に当たります。同じ型の存在（n 段の後にちょうど目標の値になる裸の値）は前の章の結論の一つ目が別の量について与えますが、二つの定理の u は同じものと置かれていません。そこでも u は格子から定義されていません（28-01 §07）。許容な族が在ること（無関係な座標が $\mathcal{B}$ に留まることを含む）も、一般の写像では示されていません。

08

仮定の写像は格子から定義されていない

この定理は、距離空間 $\mathbb{R} \times X$ の点の軌道についての言明です。測度・格子・ブロック写像は、言明のどこにも出てきません。格子の連続極限の全列の収束に読むには、定理の外で次のものを決める必要があります。

1. **座標**：段 k の実効の作用を (u, v) で表すこと。とくに無関係な座標 v と、その距離。実効の作用（段 k の実効の測度）そのものが、まだ格子から定義されていません。
2. **写像**：一段の繰り込みを、その座標の上の写像 Φ_k として書くこと（式 (2) の形になること、b_k が二つの軌道に共通であること）。
3. **縮み**：その写像が表 1 の Lipschitz の評価を、$4cc' < (1 - \varepsilon - \tau)^2$ を満たす定数で持つこと。
4. **観測量**：粗い尺度の観測量の期待値が、粗い端の座標 (u_0, v_0) の連続関数であること。

四つとも、今は仮定の側に在ります。前提の一覧（28-04）では、一段の写像の Lipschitz の縮みと終点の合わせの行が「形が未定（対象が未定義）」の札を持ち、その下に段に一様な帰納や小さい場の一段の繰り込みなど、表現の水準の前提がぶら下がります。どの座標とノルムを選ぶかは設計の選び（28-05）です。

Lipschitz の縮みが、繰り込み群の既存の評価（場と母数について解析的な形の評価）から出るかどうかは、確かめていません。この章は、その見込みを主張しません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
初 増分が総和可能なら全列が収束し、部分列の極限はそれに等しい。Lean：`WeakUltravioletExistence.tendsto_of_summable_increments`・`weak_uv_observable_full`	格子の期待値の増分が総和可能であること（先に組んだ条件つきの含意の仮定、増分の総和可能性の仮定）
含意：表 1 の仮定のもとで、粗い端の無関係な座標は全列で収束し、差は $D\theta^n$ 以下、極限は裸の値に依らない。Lean：`SkewOrbit.coarse_step`・`coarse_tendsto`・`limit_independent`・`observable_tendsto` — 含意として機械検査（仮定は表のとおり）	仮定の写像 r_k, T_k と座標 X が格子から定義されていること。格子の連続極限の全列の収束
使える θ が在ることは $\varepsilon + \tau < 1$ かつ $4cc' < (1-\varepsilon-\tau)^2$ と同値。Lean：`SkewOrbitProbe.theta_exists_iff`・`rate_window`・`Sharp.sharp`	条件が破れたとき全列の収束が偽になること（方法の限界であって、言明の否定ではない）
終点の合わせを外すと、同じ写像で Cauchy でない族が在る。Lean：`SkewOrbitProbe.Ex.matching_needed`	格子の上の合わせ方（どの量をどの段で合わせるか）
初 この章の u と前の章の結合の関数 u は、別々の定理の別々の変数	二つを同じものと置くこと。許容な族（合わせつきで $\mathcal{B}$ に留まる軌道）が実際の写像で在ること
仮定は自明でない例で同時に満たせる。Lean：`SkewOrbitProbe.Ex.admissible`・`Ex.bare_not_cauchy`	実際の繰り込みの写像が仮定を満たすこと

出典と再現

もの	種別	出典・道具
歪積の軌道の定理（§02〜§05）	Lean	本書の検討の Lean：名前空間 `SkewOrbit` の 13 本（`two_point_bound`・`midpoint_admissible`・`orbit_compare`・`coarse_step`・`coarse_cauchy`・`coarse_tendsto`・`coarse_rate`・`limit_independent`・`observable_tendsto` と中点の版）。Lean 4 で機械検査（13 本）。公理は標準の三つ。核の再検査済み。言明は源の字を読んで写した
条件の同値・速さの窓・下げられない速さ・合わせの必要・窓の版（§03・§06・§07）	Lean	名前空間 `SkewOrbitProbe`（定義と言明を別の目で照合したときに足した補助の宣言：`theta_exists_iff`・`rate_window`・`Sharp.sharp`・`Ex.*`・`coarse_tendsto_window` ほか）。公理は標準の三つ（検査の記録）

もの	種別	出典・道具
増分が総和可能なら全列（§01）	Lean	`WeakUltravioletExistence.tendsto_of_summable_increments`・`subseq_limit_eq`・`weak_uv_observable_full`
線形の模型の固有値（§06）	初	本文の計算（2×2 の行列の特性多項式）
先に組んだ条件つきの含意の仮定（増分の総和可能性の仮定）	—	本書の検討の記録（2026-10-30）。28-01 §08

この章で使った語 — 全列の収束・増分の総和可能性・歪積・周辺の座標・無関係な座標・一段の写像・軌道・終点の合わせ・許容な族・Lipschitz の縮み・二点の境界値の問題・速さの窓。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：28-03 減衰から質量ギャップへ、帯の還元 — 赤外の側の二つの含意と、その間に矢印が無いことを読みます。

減衰から質量ギャップへ、帯の還元

この章は本書の検討です。

この章で分かること — 赤外の側の二つの含意を読みます。(i) 測度の列が一様な指数の減衰を持てば、極限の測度から再構成した理論は質量ギャップを持つ（Lean：`OSGap.massGap_of_measures_sub`）。強結合の窓では、この仮定は全て具体の Wilson の測度で払われています。(ii) 渦の比 θ について基点・入れ子・横広げの三つが成り立てば、$\ln(1/\theta)$ が面積に比例して育つ（Lean：`BandReduction.band_reduction` ほか）。最後に、(ii) の結論から (i) の仮定へ向かう矢印は無い、ということを書きます。

前提となる章 — 19-03 再構成の器・質量ギャップの定義、20-04 再構成と質量ギャップ、19-02 渦の比 θ、26-02 一つの不等式への還元。

先に言うこと — 二つとも含意です。(i) は窓の外では仮定のままで、仮定を払う具体の測度の列（格子間隔を動かす列）はありません。また結論だけでは、Hilbert 空間が真空だけの自明な場合を除けません。(ii) は実数の関数 $\theta(R, L)$ についての不等式の言明で、格子も測度も出てきません。実際の渦の比が三つの仮定を満たすことは示されていません。面積の指数から質量ギャップを出す矢印は、Lean にも紙にもありません。格子間隔に一様な指数の減衰は、2026-11-10 に公開された構成にも無く、在るのは長い距離について多項式の速さの評価までです（16-03）。この章の二つの含意は、開いたままの赤外の側の問いに向けた形です。

この章の順序

1. 二つの含意と、その間 — 減衰 ⇒ ギャップ、三つの仮定 ⇒ 面積の指数、面積 ⇒ ギャップは無い
2. 減衰から質量ギャップへ — 言明 — 極限の測度の上の再構成と、‖T − P_Ω‖ ≤ e^{−m}
3. 減衰からギャップへ — 仮定の欄の表 — 鏡映正値性・対称・並進・減衰（表 1）
4. 強結合の窓の中では全て払われている — 20-04 の定理との関係と、窓の外
5. 帯の還元 — 言明 — 二倍ずつの尺度で、偏りが四乗ずつ小さくなる
6. 帯の還元 — 仮定の欄の表 — 基点・入れ子・横広げ（表 2）

7. 面積の指数から質量ギャップへの矢印は無い — 二本の道は別々に在る

01

二つの含意と、その間

赤外の側（長い距離の側）には、目標が二つあります。一つは質量ギャップ（転送の作用素の、真空の外での縮み）、もう一つは閉じ込め（渦の比やループの期待値が面積に比例して減ること）です。この章の二つの含意は、それぞれの目標へ向かう最後の一段を受け持ちます。

```
一様な減衰（測度の列）   ──〔含意 (i)：Lean〕──▶   極限の理論の質量ギャップ
        ▲
        |   矢印なし（§07）
        |
面積の指数   ◀──〔含意 (ii)：Lean〕──   基点 ＋ 入れ子 ＋ 横広げ（渦の比 θ）
```

二つの矢印は、どちらも「もし〜ならば」の形で Lean で機械検査されています。仮定の側（一様な減衰、三つの不等式）は、示すべき言明の「質量ギャップ（一様な減衰）」と「帯」（19-07 の一様な減衰・帯。どちらも合わせで決めた結合の列について言う）に当たり、どちらも格子間隔を動かす形では示されていません。図の縦の矢印は、§07 で書くとおり、在りません。

02

減衰から質量ギャップへ — 言明

設定を決めます。X は配位の空間、Y は正の側の配位の空間です。連続写像 $r, \Theta_r : X \to Y$ は、配位を正の側へ制限する写像と、鏡に映してから制限する写像です。$\mathrm{sh} : Y \to Y$ は時間の一目盛りの並進です。観測量は Y の上の有界連続関数で、そのうち定数 1 を含み並進で閉じた部分空間 W（たとえば有限個の時刻の切り口だけに依る関数）を使います。測度 ν について、対と並進を

$$\langle F, G \rangle_\nu = \int F(\Theta_r x)\, G(r x)\, d\nu(x), \qquad (\tau F)(y) = F(\mathrm{sh}\, y) \tag{1}$$

とします。対が半正値・対称で、τ が対について対称なら、W を対で割って完備化した Hilbert 空間と、τ から来る転送の作用素 T、定数 1 から来る真空 Ω が作れます（再構成の器。19-03）。質量ギャップ m は $\|T - P_\Omega\| \le e^{-m}$ です（P_Ω は真空への射影。19-03）。

含意 (i)。確率測度の列 μ_n が ν に弱収束し、表 1 の欄が成り立つとします。そのとき W の上の再構成の器 D が在って、その対は ν の対 (1)、並進は τ、定数は 1 で、D は質量ギャップ m を持ちます。

Lean：`OSGap.massGap_of_measures_sub` — 含意として機械検査（仮定は表 1 のとおり）。結論は器の対・並進・定数を ν の量に縛った形で、器を勝手に選べる形ではありません。

証明の道筋は三段です。(1) 鏡映正値性・対称・並進の対称は、$F\circ\Theta_r\cdot G\circ r$ が有界連続なので弱極限に移ります（28-01 §05 と同じ型）初。(2) それで ν の上の器が作れます。(3) 減衰の欄も極限に移り、$\langle\tau^k F,\tau^k F\rangle_\nu-\langle 1,F\rangle_\nu^2\le C_F e^{-2mk}$ が全ての $F\in W$ で立ちます。これを Hilbert 空間の言葉に直すと、真空に直交するベクトルの上で T^k が e^{-mk} で縮むことになり、$\|T-P_\Omega\|\le e^{-m}$ が出ます（Lean：`OSGap.Datum.hasMassGap_of_decay`）。

03

減衰からギャップへ — 仮定の欄の表

表 1　`OSGap.massGap_of_measures_sub` の仮定（「大きい n で」は「ある n_0 があって $n\ge n_0$ で」。$F,G\in W$）

Lean の欄	数学の言葉	強結合の窓の中	窓の外
`h`	仮 $\mu_n\to\nu$（弱収束）	全て Wilson の測度で払われている（§04、20-04）	抽象（格子間隔を動かす列の収束は示されていない）
`h1`・`hW`	仮 $1\in W$、W は並進で閉じる		観測量の類の選び
`hRP`	仮 大きい n で $\int F(\Theta_r x)F(rx)\,d\mu_n\ge 0$（鏡映正値性）		細かい格子の測度では定理（20-01）。押し出した測度では類による
`hsym`・`hshift`	仮 大きい n で対が対称、並進が対について対称		抽象
`hdec`	仮 各 F に定数 C_F が在り、各 k と大きい n で $\int F(\mathrm{sh}^k\Theta_r x)F(\mathrm{sh}^k rx)\,d\mu_n-\left(\int F(rx)\,d\mu_n\right)^2\le C_F e^{-2mk}$（一様な減衰）		形は確定、示されていない（格子間隔に一様な m が要る）

減衰の欄 `hdec` で、m と C_F は n に依りません。極限の理論の質量 m は、測度 μ_n が住む格子の時間の一目盛りを単位にした数です。連続極限で物理の質量を言うには、粗い尺度のブロック観測量について、格子間隔と箱の大きさに依らない率で減衰することが要ります。それが示すべき言明の「質量ギャップ」（19-07 の一様な減衰。合わせで決めた結合の列について言う）で、この含意の仮定 `hdec` をその形で払うことは、窓の外では開いています。また欄 `h` は列 μ_n の弱収束を仮定します。前の章（28-01 §04）のように部分列の極限しか無いときは、その部分列に当てて「その極限点について」の結論になり、極限そのものは一つに決まりません。

結論だけでは、自明な場合を除けません。W を対で割った空間が真空だけ（一次元）なら、$T - P_\Omega = 0$ で、質量ギャップは任意の m で立ちます。仮定の欄も、一点の空間で同時に満たせます 初 。中身のある質量ギャップには、真空の外に状態が在ること（非退化）を別に言う必要があります。強結合の窓の定理は、非退化を言明に入れています（20-04）。

04

強結合の窓の中では全て払われている

強結合の窓 $18 \tanh |\beta| < 1$（$|\beta| < 0.0556$ 読 ）では、周期の箱 $(\mathbb{Z}/2(n+1))^4$ の正規化した Wilson の測度を $\mathbb{Z}^4$ へ周期に持ち上げた列が、部分列なしに一つの測度 ν_β に弱収束します。そのうえで、表 1 の欄に当たる性質（鏡映正値性・対称・並進・減衰）が全て具体の測度で示され、再構成の器は $\|T - P_\Omega\| \le (18 \tanh \beta)^{1/2}$ を満たし、真空の外に状態が在ります（$0 < \beta$。Lean：`InfMain2.wilson_infvol_main2`。20-04 の一本にまとめた言明）。これは強結合の展開による既知の型の結果の形式化です 典 （Osterwalder–Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440 の型）。

窓の中の定理が言っていないことを並べます。格子間隔は 1 に固定です。窓は $|\beta| < 0.0556$ だけで、連続極限の側（$\beta \to \infty$）には届きません。質量の数 $-\frac{1}{2}\log(18 \tanh \beta)$ は下界だけです。

だから含意 (i) の位置は次のとおりです。**窓の中では、含意の仮定が全て払われ、結論が具体の Wilson の測度の定理として立ちます。窓の外では、仮定のままです**。連続極限の質量ギャップに使うには、格子間隔を動かす測度の列（細かい格子の測度を粗い段へ押し出した列、28-01）について表 1 の欄を示すことが要り、そのどれも示されていません。

05

帯の還元 — 言明

閉じ込めの側の目標は、渦の比が面積に比例して小さくなることです。意図の読みでは、$\theta(R, L)$ は平面の向きの大きさ R の容器と一辺 L の横のトーラスの、典型的な枠での区画の偏りで、長さは物理の単位で測ります（26-02 §01。格子の上の渦の比の定義は 19-02）。目標は、物理の単位で一様な $c > 0$ について $\ln(1/\theta(R,R)) \ge cR^2$ です。

含意 (ii)。$\theta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ を任意の関数とし、表 2 の構造体 `Hyp`（非負・基点・入れ子・横広げ）を仮定します。構造体の外の仮定は $L_0 > 0$、$s \ge 1$、$C \ge 0$、$C_D \ge 0$、$c \ge 0$、$c^3 = 4CC_D$ です。二倍ずつの尺度 $R_k = 2^k s L_0$ を取ると、全ての k で

$$c\,\theta(R_k, R_k) \;\le\; \big(c\,t_0\big)^{4^k}, \qquad t_0 := C s^2 C_D \,(1-\varepsilon_0)^{s^2} \tag{2}$$

です。さらに $c \geq 1$ かつ $0 < c\,t_0 < 1$ なら、$\theta(R_k, R_k) > 0$ のとき（`area_exponent` の仮定はこの三つと式 (2)）

$$4^k \ln \frac{1}{c\,t_0} \;\leq\; \ln \frac{1}{\theta(R_k, R_k)} \tag{3}$$

で、$4^k = R_k^2/(sL_0)^2$ なので、これは面積の指数の形 $\ln(1/\theta(R_k, R_k)) \geq c' R_k^2$ です。

Lean：`BandReduction.band_reduction`（式 (2)）・`area_exponent`（式 (3)）、部品 `BandReduction.jump`（基点から一度の入れ子と一度の横広げで $\theta(sL_0, sL_0) \leq t_0$）・`step`（一段の倍化 $\theta(2R, 2R) \leq 4CC_D\,\theta(R, R)^4$）— 含意として機械検査（仮定は表 2 のとおり）。

証明の芯は `step` です。入れ子を $n = 2$ で使うと $\theta(2R, R) \leq C_D \theta(R, R)^4$、横広げを $L = R$、$L' = 2R$ で使うと $\theta(2R, 2R) \leq 4C\,\theta(2R, R)$ で、合わせて $t_{k+1} \leq 4CC_D\,t_k^4$。$c^3 = 4CC_D$ と置くと $c\,t_{k+1} \leq (c\,t_k)^4$ になり、帰納法で式 (2) が出ます 初 。

基点の代わりに一つの大きさでの数 $\theta(R_0, R_0) \leq t_0$ を入れ、横広げを「偏りが既に小さい倍化の段」だけで使う版も在ります（Lean：`BandFiniteSize.doubling`。仮定は構造体の三つ — 非負、入れ子の $n = 2$ の場合、$\theta(2L, L) \leq \delta$ のときの横広げ — と、$R_0 > 0$、$C \geq 0$、$C_D \geq 0$、$c \geq 1$、$c^3 = 4CC_D$、$\theta(R_0, R_0) \leq t_0$、$c\,t_0 \leq 1$、$C_D t_0^4 \leq \delta$）。結論は式 (2) と同じ形です。

06

帯の還元 — 仮定の欄の表

表 2　構造体 `BandReduction.Hyp` の欄（θ は任意の関数 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$）

Lean の欄	数学の言葉	意図の θ について
`nonneg`	仮 全ての R, L で $\theta(R, L) \geq 0$	格子間隔を固定した渦の比では、縦の大きさが偶数なら全ての実の β で定理（21-06）。容器の偏りとの対応は紙
`base`	仮 $\theta(L_0, L_0) \leq 1 - \varepsilon_0$（基点）	格子間隔を固定した形では薄い渦の床 $\lvert\theta_M\rvert \leq \tanh(N^2\lvert\beta\rvert)^{M^2}$ が定理（21-02）。格子間隔に一様な形は示されていない
`nest`	仮 全ての R, L, n で $\theta(nR, L) \leq C_D\,\theta(R, L)^{n^2}$（入れ子）	紙の入力（26-02 の入れ子の議論）。Lean の欄との対応づけも紙
`widen`	仮 $0 < L \leq L' \leq R$ で $\theta(R, L') \leq C\,(L'/L)^2\,\theta(R, L)$（横広げ）	示されていない。十分条件の一つ（渦の自由エネルギーの方向ごとの劣加法性）が在るが（28-04）、それが成り立つかは開いている

この含意は、実数の不等式の言明です。θ は任意の関数で、格子・測度・格子間隔は言明に出てきません。意図の θ（容器の偏り）が三つの仮定を満たすことは、紙の入力として置かれていて、示されていません。とくに意図の読みでは、全ての長さが物理の単位で、仮定は格子間隔に一様でなければなりません。格子間隔を固定した床の定理（21-02・21-03）は、この一様性を与えません。

仮定は同時に満たせます 初 。$\theta(R,L)=e^{-R^2}$、$C_D=C=1$、ε_0 を小さく取ると、入れ子は等号、横広げは $(L'/L)^2\geq 1$ で立ちます。この例では結論も最初から分かっている形で、例は仮定が矛盾しないことを示すだけです。また入れ子を $n=1$ で使うと、$\theta>0$ のとき $C_D\geq 1$ が強いられます。

張力の倍化の不等式・単調性・一つの尺度の判定など、帯に関わる他の言明の形は、前提の一覧（28-04）に札つきで並べてあります。この章ではそれらを章にしません。

07

面積の指数から質量ギャップへの矢印は無い

含意 (ii) の結論（面積の指数）から、含意 (i) の仮定（ブロック観測量の一様な減衰）へ向かう矢印は、Lean にも紙にもありません。

素朴な形の「面積則 ⇒ 質量ギャップ」は、一般には偽です 初 。たとえば二次元の格子で、面積則を持つゲージ理論に、それと切り離された質量ギャップの無い模型（たとえば臨界の二次元 Ising 模型。臨界点で転送行列の隙間が閉じることは 2-09 §07）を直積で足した理論を考えます。Wilson ループの期待値はゲージの部分だけで決まるので面積則のままですが、Ising の部分の相関は指数で減らないので、理論全体に質量ギャップはありません（直積の転送行列の隙間は、二つの隙間の小さい方です）。だから面積の指数から減衰を出すには、そのような切り離された部分が無いことを使う、別の議論が要ります。

逆の向きには次の結果があります 典 （Chatterjee, Comm. Math. Phys. 385 (2021) 1007, arXiv:2006.16229。17-02）。中心対称性が破れなければ、Wilson ループは $|\langle W(R\times T)\rangle|\leq e^{-V(R)T}$、$V(R)\to\infty$ を満たし（弦の張力が正とまでは言いません）、さらに任意の境界条件での一様な指数減衰という強い形のギャップを仮定すると、面積則まで出ます。この強い形の減衰は、この章の含意 (i) の仮定とも、Clay の意味の質量ギャップとも同じではありません。本書の二つの含意は、その向きの矢印も Lean に持っていません。

だから、今の地図では二本の道は別々に在ります。

- **質量ギャップの道**：一様な減衰 ⇒ 質量ギャップ（含意 (i)）。仮定の一様な減衰は、窓の中では示され、窓の外では開いています。
- **閉じ込めの道**：基点・入れ子・横広げ ⇒ 面積の指数（含意 (ii)）。三つの仮定は、格子間隔に一様な形では示されていません。

質量ギャップの最後の矢印をどの道で引くか（帯の量を質量ギャップの言葉で書いた比べの行を使うか、など）は、前提の一覧（28-04）と開いている所（28-06）の主題です。この章は、

どちらの道が通るかを主張しません。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
含意 (i)：測度の列が弱収束し、表 1 の欄が成り立てば、極限の測度の上の再構成の器が質量ギャップ m を持つ。Lean：`OSGap.massGap_of_measures_sub` — 含意として機械検査（仮定は表のとおり）	窓の外で、格子間隔を動かす列について欄を示すこと。結論だけでは非退化（真空の外の状態）が出ないこと
強結合の窓 $18\tanh\lvert\beta\rvert < 1$、$0 < \beta$ では、欄が全て具体の Wilson の測度で払われ、非退化つきの質量ギャップが立つ。Lean：`InfMain2.wilson_infvol_main2`（20-04）	格子間隔を動かすこと、窓の外、質量の上界（下界だけ）
含意 (ii)：基点・入れ子・横広げから、二倍ずつの尺度で $\ln(1/\theta)$ が面積に比例して育つ。Lean：`BandReduction.band_reduction`・`area_exponent`・`jump`・`step`、`BandFiniteSize.doubling` — 含意として機械検査（仮定は表のとおり）	意図の θ が三つの仮定を満たすこと（紙の入力）。格子間隔に一様な基点・横広げ
初 素朴な「面積則 ⇒ 質量ギャップ」は、切り離された、質量ギャップの無い部分があると偽	面積の指数から一様な減衰を出す矢印（Lean にも紙にも無い）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
減衰から質量ギャップへの含意（§02・§03）	Lean	本書の検討の Lean：`OSGap.massGap_of_measures_sub`、器 `OSGap.Datum`・`HasMassGap`、`OSGap.Datum.hasMassGap_of_decay`。言明は源の字を読んで写した
強結合の窓の定理（§04）	Lean・典	`InfMain2.wilson_infvol_main2`（20-04）。型の出典 K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440
帯の還元（§05・§06）	Lean	`BandReduction.Hyp`・`band_reduction`・`area_exponent`・`jump`・`step`・`iterate`、`BandFiniteSize.Hyp`・`doubling`。言明は源の字を読んで写した。紙の還元は 26-02
仮定が同時に満たせる例（§03・§06）	初	本文の取り方
ギャップから閉じ込めへの向きの結果（§07）	典	S. Chatterjee, Comm. Math. Phys. 385 (2021) 1007, arXiv:2006.16229

この章で使った語 — 含意・再構成の器・転送の作用素・真空への射影・質量ギャップ・一様な減衰・非退化・強結合の窓・渦の比・区画の偏り・基点・入れ子・横広げ・面積の指数。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：28-04 前提の一覧 ― 木と札 ― 三つの含意の仮定を含めて、示すべき言明を根に、今の道での十分条件を葉にした木を、札つきで並べます。

前提の一覧 — 木と札

この章は本書の検討です。§09 の辞書は案内です。

この章で分かること — 19-07 の六つの言明（根）を上に、今の道でそれを支える十分条件 57 行を下に置いた木と、57 行の表です。行ごとに、中身の名、一行の言明、どの対象についての言明か、札、形が未定なら理由の記号を書きます。札ごとの数と、先に組んだ条件つきの含意での名と第 27 部の台帳の呼び名との対応表も付けます。

前提となる章 — 28-00 入口（札の凡例）、19-07 示すべき言明。対象の定義は第 19 部（19-01〜19-04）。

先に言うこと — この一覧は 2026-11-13 の時点のもので、札は動きます。更新は A-08 質量ギャップまでの地図 で行います。表の言明の多くは、まだ格子から定義されていない量（実効の結合・活性・背景場など）を使っています。その行は「形が未定」か「対象：定義なし」と書いてあり、言明が意味を持つことを主張していません。紫外の側の根を支える行（表 2・表 3 の大半）は、本書の設計（決まったブロック写像で押し出した測度）での十分条件の記録です。四次元のヤン–ミルズ理論の存在は、2026-11-10 に公開された構成が別の設計で示しました（第二巻。二つの設計の比べは 第 14 部）。赤外の側の行（表 4 の一様な減衰と、表 5 の帯）は、開いたままの問いに向けたものです。

この章の順序

1. 段と札の読み方 — 表の並びと、七つの札
2. 木 — 根と、表現を通した十分条件（図 1）
3. 札ごとの数と、そこから読めること（表 1）
4. 箱の連続極限の前提 — 固定した箱の連続極限（表 2、17 行）
5. 紫外の安定性の前提 — 紫外の安定性の評価（表 3、21 行）
6. 全列の収束・観測量・無限体積・回転・非自明性の前提（表 4、7 行）
7. 帯 — 渦の自由エネルギーの行（表 5、12 行）
8. 57 行の外に足した 5 行（表 6）

9. 別名の辞書（短い版、表 7）

01

段と札の読み方 — 表の並びと、七つの札

表の並び。行は、証明までの道を段に分けたときの段の順に、四つの表に並べています。表の左の列の番号は、表ごとの通し番号です。本文では行を中身の名で引きます。

段	表	行の数
箱の連続極限の前提：大きさを止めた箱の連続極限（ブロック写像の鎖の前提）	表 2	17
紫外の安定性の前提：紫外の安定性の評価（一段ごとの評価。評価の種類は、自由場の入力、拘束つきの Green 関数、背景場、小さい場の展開、大きい場、段を跨ぐ帰納の順）	表 3	21
全列の収束・細かい観測量・無限体積・回転・非自明性の前提	表 4	7
帯（渦の自由エネルギーの移り変わり。条件の台帳 27-02 の帯の周りの行）	表 5	12

自由場の前提（自由場の絶対の条件）は紫外の安定性の前提の行（伝播関数の挟み・無関係な項の縮み・一段の結合の減りの係数・背景の写像の縮み・多体の和の幾何（相関のノルム）・大きい場の評価）への参照なので行を立てていません。フェルミオンの前提はこの一覧の範囲の外です。

札。前提の札は表の一つの欄で、本文の札（初・典・機・読・仮）とは別のものです（凡例は 28-00）。

札	意味
定理	Lean で機械検査し、定義と言明を別の目で照合する点検が、言明の中身まで確かめた
定理（弱い形）	同じだが、前提の形より弱い形まで。前提の欄を**そのまま払う**のか、**似た別の言明**（別の対象・部分族・線形化など）なのかを同じ欄に書く
紙	紙の議論が在る。定義と言明を別の目で照合する点検は済んでいない
形は確定・未証明	言明の形は決まっている。証明は無い。「条件つき」は、合わせで決めた列で閾・周期の制限を言明に入れたときに限る、の意味
形が未定	言明の形がまだ決まっていない。理由を記号で書く
設計に依る	設計の選び（28-05）で決まる行
文献	文献の結果に依る。本書で再導出していない

理由の記号（形が未定の行）：(a) 軽すぎる（自明な対象で立ってしまう）、(b) 強すぎる（偽か、偽の例が在る）、(c) 対象が未定義、(d) 今の形に反する数値の兆しが在る、(e) 一つの尺度の形は在るが段を跨ぐ形が無い、(f) 量化の順が未定。

表の「対象」の欄は、言明がどの対象について語るかです。第 19 部に定義が在るものは錨で結び、無いものは「定義なし」と書きます。

02

木 — 根と、表現を通した十分条件

木の根は 19-07 の六つの言明です。根は定義された対象だけで書けています。その下に、今の道で根を導くために置いている前提（葉）がぶら下がります。葉の多くは、実効の結合・活性・背景場・類といった**表現**（粗い尺度の理論を書き表すための量）を通した言明です。

図 1　根と十分条件の木（2026-11-13 の時点。括弧は札）

合わせ（19-07 §02）
  └ 実効の結合を通した十分条件
        │ ・実効の結合の定義と連続性（設計）
        │ ・結合の一段の正味の括弧（未定）
        │ ・大きい場の結合への寄与（未定）
        │ ・活性の再帰（未定）
        │ ・供給の稀さ（未定）
        │ ・動く不変区間と余白（未定）
        ├ 紫外の安定性の前提の表現の水準
        │   ・一段の結合の減りの係数（定理・弱）
        │   ・一ループの係数の値（文献）
        │   ・小さい場の一段の繰り込み定理（未定）
        │   ・段に一様な帰納（未定）
        │   ・大きい場の評価（未定）
        │   ・大きい場の気体（未定）
        └ 閾どうしの結び（未定）
── 以下の根は、合わせで決めた列 β_n について ──
全列の収束（19-07 §03）
  └ 一段の写像の縮みと終点の合わせ（未定）　※終点の合わせ ＝ 合わせ
        └ ・段に一様な帰納（未定）
          ・小さい場の一段の繰り込み定理（未定）
          ・無関係な項の縮み（定理・弱）
          ・拘束つき減衰の定理（確定・真空の版）
          ・背景の零階の運び（未定）
          ・一段の背景場の補題（紙）・多段の背景場（紙）
          ・一つの尺度の展開の道具（紙）
          ・段ごとのゲージ固定（紙）・類と局所化（紙）
非退化（19-07 §04）
  ├ 二段の事象の稀さ：面の部分（確定・条件つき）
  │   ← これ自身が定義された対象だけの言明
  └ 二段の事象の稀さ：背景の不変量の部分（未定）
        ・小さい場の集合の取り方と背景の不変量の延ばし方（設計）
        ・背景つきの正値性（未定）
        ・背景の二次の型の定数（紙）
        ・一段の背景場の補題（紙）
同程度連続（19-07 §05）
  └ 観測量の同程度連続（確定・条件つき）
        │ ← これ自身が定義された対象だけの言明
        └ 背景の写像の Lipschitz
              ・背景つきの正値性（未定）
              ・背景の二次の型の定数（紙）
              ・背景の写像の縮み（定理・弱）
構造（どの根にも要る）
      ・ブロック写像の連続・合成・押し出しの整合から
        観測量の族と小さい場の集合までの七行（定理 / 定理・弱 / 紙）
自由場の土台
      ・伝播関数の挟み（定理・弱）
      ・多体の和の幾何（相関のノルム）（定理・弱）
      ・多体の和の幾何（到達の定数）（確定）
      ・拘束つきの逆の恒等式（定理）

```
        ・細かい格子の一つの尺度の稀さ（定理・弱）
一様な減衰（19-07 §06）＝ ブロック観測量の一様な減衰（確定・条件つき）
  ├─ 質量ギャップの器への継ぎ目（確定）
  ├─ 無限体積：箱の大きさに一様な紫外の評価（未定）
  ├─ 回転：橋の一段の紫外の評価・無限体積の極限が箱の形に依らないこと（未定）
  ├─ 細かい観測量：流した観測量のブロック変数による近似（未定）
  ├─ 非自明：極限が自由場でないこと（未定）
  └─ 赤外の道
        ・帯の比較（ギャップの言葉）（未定）
        ・面積則からギャップへ（未定）
帯（19-07 §07）
  ├─ θ の非負（定理・弱）
  ├─ 小さな箱の基点（確定・条件つき）
  ├─ 一つの尺度の判定（確定・条件つき）
  │     ← 捩れを入れる写像の費用の問い（未定）
  ├─ 入れ子（枠の減相関）（紙）
  ├─ 倍化の横広げ（確定・条件つき）
  └─ 別の道
        ・張力の倍化の不等式（未定）
        ・渦の自由エネルギーの単調性と繰り込みの比較（未定）
        ・小さな捩れた箱のギャップと挿入の一様な受理（未定）
        ・渦の面積の指数から Wilson ループの面積則へ（文献）
```

木から読めることは三つです。

1. **根の水準では、言明の形は決まっています**（合わせの選びを除く）。ただし根は、合わせで決めた列について読むときだけ中身を持ちます（列を自由に取ると、$\beta_n \equiv 0$ で一様な減衰と帯の根が立ちます。19-07 §01）。形が未定の 24 行のうち 13 行は根より下の表現の水準に、8 行は対象がまだ無いか上流の後に決まる行に、3 行は帯の量化と真偽に在ります（28-06）。表現を替えれば葉は替わり、根は替わりません。
2. **非退化の面の部分（二段の事象の稀さ：面の部分）と同程度連続（観測量の同程度連続）は、前提の形がそのまま定義された対象だけの言明**で、表現を通していません。
3. **帯の側の未定は、表現からではなく、量化の順と真偽から来ています**（張力の倍化の不等式・渦の自由エネルギーの単調性と繰り込みの比較・面積則からギャップへ）。出どころが紫外と違います。

今の道の鎖の定理（28-01）の中では、裸の結合の列 β_n と実効の結合は繋がっていません。Lean の定理は裸の結合の列を任意に取ります。先に組んだ条件つきの含意（28-01 §08）は、細かい測度を「裸の結合の合わせの括弧で選んだ β_n の Wilson の測度」と定義することで両者を結んでいますが、証明そのものは結合の側と測度の側に割れています。鎖の中で両者を結べる候補の場所は、閾どうしの結びです。

03

札ごとの数と、そこから読めること

表 1　札ごとの数（2026-11-13 の時点、57 行。§08 の足した 5 行は数えない）

札	数	行
定理	3	ブロック写像の連続・合成・押し出しの整合・細かい格子の鏡映正値性・拘束つきの逆の恒等式
定理（弱い形）	10	ゲージ共変と局所性・格子の対称との可換・粗い水準の鏡映正値性・細かい格子の一つの尺度の稀さ・伝播関数の挟み・無関係な項の縮み・一段の結合の減りの係数・背景の写像の縮み・多体の和の幾何（相関のノルム）・θ の非負
紙	8	測度の対称・観測量の族と小さい場の集合・一段の背景場の補題・多段の背景場・一つの尺度の展開の道具・段ごとのゲージ固定・類と局所化・枠の減相関
形は確定・未証明	7	二段の事象の稀さ：面の部分・観測量の同程度連続・拘束つき減衰の定理・ブロック観測量の一様な減衰・小さな T^2 の基点・一つの尺度の判定・横広げの不等式（強い形）（拘束つき減衰の定理は真空のまわりの版、ほかの 6 行は条件つき）
形が未定	24	結合の一段の正味の括弧・大きい場の結合への寄与・活性の再帰・供給の稀さ・動く不変区間と余白・二段の事象の稀さ：背景の不変量の部分・背景つきの正値性・背景の零階の運び・小さい場の一段の繰り込み定理・大きい場の評価・大きい場の気体・段に一様な帰納・一段の写像の縮みと終点の合わせ・流した観測量のブロック変数による近似・箱の大きさに一様な紫外の評価・橋の一段の紫外の評価・無限体積の極限が箱の形に依らないこと・極限が自由場でないこと・捩れを入れる写像の費用の問い・張力の倍化の不等式・単調性と繰り込みの比較・小さな捩れた箱のギャップと挿入の一様な受理・帯の比較（ギャップの言葉）・面積則からギャップへ
設計に依る	2	実効の結合の定義と連続性・持ち上げの行和が段に一様
文献	3	一ループの係数の値・渦の面積の指数から Wilson ループの面積則へ・森の補間の公式

定理の札の行が語る対象。「定理」と「定理（弱い形）」の 13 行は、次のどれかについての言明です：細かい格子の Wilson の測度（細かい格子の鏡映正値性・細かい格子の一つの尺度の稀さ・θ の非負）、ブロック写像そのもの（ブロック写像の連続・合成・押し出しの整合・ゲージ共変と局所性・格子の対称との可換）、押し出しの測度の構造の性質（粗い水準の鏡映正値性。帯の類で）、自由場・真空の背景・線形化したブロック化（伝播関数の挟み・無関係な項の縮み・一段の結合の減りの係数・背景の写像の縮み・多体の和の幾何（相関のノルム））、抽象の恒等式（拘束つきの逆の恒等式）。**繰り込んだ尺度の測度（押し出しの測度 $\nu_{n,m}$ や段 $k \geq 1$ の実効の測度）についての、定量の評価の定理は在りません。**押し出しの測度について在るのは、細かい測度から押し出しで運んだ構造の性質だけです。

欄をそのまま払う行。「定理（弱い形）」の 10 行のうち、今の道の前提の欄をそのまま払っているのは粗い水準の鏡映正値性（帯の類で）だけです。ほかは、別の対象・部分族・線形化・一段の形などの、似た別の言明です（表の札の欄に書き分けました）。

形が未定の行の出どころ。24 行のうち 20 行は、理由に (c)（対象が未定義）か (e)（段を跨ぐ形が無い）を含みます。含まない 4 行（背景の零階の運び・張力の倍化の不等式・単調性と繰り込みの比較・面積則からギャップへ）は「強すぎる・偽の例が在る」の側で、背景の零階の運びは、今の形を偽とする紙の議論が在ります（別の目の確かめはまだ）。

形は確定・未証明の行と、自明に立つ取り方。7 行のうち 6 行（二段の事象の稀さ：面の部分・観測量の同程度連続・ブロック観測量の一様な減衰・小さな T^2 の基点・一つの尺度の判定・横広げの不等式（強い形））は、合わせで決めた列で、閾と周期の制限を言明に入れたときだけ「形は確定」です。列を自由に取ると、ブロック観測量の一様な減衰・小さな T^2 の基点・一つの尺度の判定・横広げの不等式（強い形）は $\beta_n \equiv 0$ で自明に立ちます（$\theta = 0$、時間に離れた変数が独立）初。強結合の窓でのブロック観測量の一様な減衰の定理（20-04）はこの向きに在り、言明が満たせる例ではあっても中身の確かめではありません。退化でない小さい例が在るのは、拘束つき減衰の定理の真空のまわりの版（一次元・スカラーで入力の二つ）と、小さな T^2 の基点の格子間隔を止めた形（薄い渦の床、21-02）です。

04

箱の連続極限の前提 — 固定した箱の連続極限

大きさを止めた箱で、ブロック写像の鎖が部分列の極限と、極限に移る性質を出すための前提です。使う側の含意は 28-01。記号：B はブロック写像、$\nu_{n,m}$ は押し出しの測度、u_k は段 k の実効の結合（格子からの定義は未定）、z_k は大きい場の活性、w_k は供給。

表 2　箱の連続極限の前提（2026-11-13 の時点）

番号	中身の名	言明	対象	札	理由
1	ブロック写像の連続・合成・押し出しの整合	B は連続。段 n から m への写像は一段ずつの合成。$(B_m)_* \nu_{n,m+1} = \nu_{n,m}$	19-04・押し出し	定理：全ての道の族・重み・測度の族について	—
2	ゲージ共変と局所性	$B(U^g) = B(U)^{g\vert\text{粗い点}}$。$B(U)_b$ は b から有限の距離の細かいリンクだけに依る	19-04	定理（弱い形、似た別の言明）：一段の写像の形。合成への延長と到達の距離は紙	—
3	格子の対称との可換	並進・鏡映・超立方の群と B が可換	19-04	定理（弱い形、下ごしらえ）：並進は点検済み、時間の向きの鏡映は Lean（中身は未点検）、ほかの軸の鏡映と超立方は紙	—
4	細かい格子の鏡映正値性	正の側のリンクだけに依る有界可測な f で $\int f(\Theta U)\, f(U)\, d\mu_W \geq 0$	19-01・鏡映	定理：一辺が偶数。格子点の面は全ての実の β、リンクの真ん中の面は $\beta \geq 0$ でゲージ不変な f（20-01）	—

番号	中身の名	言明	対象	札	理由
5	粗い水準の鏡映正値性	正の時間の類の F で $\int (F \circ \Theta)\, F \, d\nu_{n,m} \geq 0$、行列の形 $\sum c_a c_b \, s_n(x_{ab}) \geq 0$	19-04・正の側	定理（弱い形、欄をそのまま払う）：正の側を帯に取った類で。行列の形は紙。粗い半分の全部を正の側に取る形は置かない（28-05）	—
6	測度の対称	$\nu_{n,m}$ が格子の対称で不変。観測量の対称の破れ $\to 0$	19-04	紙：純粋なゲージ理論の対称の欄は Lean に無い。Lean に在るのはフェルミオンつきの測度の族の版（大域のゲージ変換と四方向の単位の並進）	—
7	観測量の族と小さい場の集合	D は可算で稠密、$\lvert s_n \rvert \leq B_d$、$s_n(x) = \int G_x \, d\nu_{n,\mathrm{lev}(x)}$、$C_m$ は閉で二段の事象を含む	19-07	紙：包含（二段の事象 $\subseteq$ 小さい場の集合）は背景の不変量の延ばし方に依る（小さい場の集合の取り方と背景の不変量の延ばし方）	—
8	実効の結合の定義と連続性	$u_0(x) = x_\circ$、$x \mapsto u_{k+1}(x)$ が $\{u_j \geq u_\star \ (j \leq k)\}$ で連続	定義なし（u_k）	設計に依る	—
9	結合の一段の正味の括弧	$u_{k+1} = u_k - b + r_k^s + r_k^l$、$b_{\inf} + \delta_k - e(u_k) \leq b - r_k^s \leq b_p + e(u_k)$、$\sum_k \max(-\delta_k, 0) \leq D_0$	定義なし（u_k、小さい場と大きい場の剰余 r_k^s, r_k^l）	形が未定	(c) (e)
10	大きい場の結合への寄与	$\lvert r_k^l \rvert \leq D(u_k)\, z_k$	定義なし（r_k^l、z_k）	形が未定	(a) (c)
11	活性の再帰	$z_{k+1} \leq \rho z_k + A w_k + B z_k^2$、$z_k \geq 0$、$z_0 \leq W(u_0)$	定義なし（z_k・w_k）	形が未定	(a) (c) (e)
12	供給の稀さ	$w_k \leq \Phi(u_k)$（段に一様な面の変数の指数の積率 $\mathbb{E}\, e^{\sigma Y} \leq m_1(\sigma)$ から）	定義なし（w_k、段 k の面の変数）	形が未定	(c) (e)
13	細かい格子の一つの尺度の稀さ	$\beta \geq 81$ で、X の面が全て $\mathrm{Re}\, U_p < 0$ の確率 $\leq q_1^{\lfloor \lvert X \rvert / 6 \rfloor}$、$q_1 < 1$ は体積に依らない	19-01	定理（弱い形、似た別の言明、どの欄にも未接続）：一つの尺度、$\beta \geq 81$、全分配関数に対する比（22-01）	—
14	動く不変区間と余白	$\rho W(s) + A\Phi(s) + B W(s)^2 \leq W(s')$（$u_\star \leq s,\ s' \leq s + D_0$）、$D(s) W(s) \leq Y$、$e(u_\star) + Y \leq b_{\inf}$	実数の関数 W, Φ, D, e	形が未定：W, Φ, D, e が自由で、全て 0 に取ると立つ	(a) (c)
15	二段の事象の稀さ：面の部分	大きい n で $\nu_{n,m}\big(\beta_m(1 - \mathrm{Re}\, U_p) > y_h(m)\big) \leq P_1(m)$	19-04	形は確定・未証明（条件つき：合わせで決めた列で、閾の床と $\eta_m < 1$ を言明に入れたとき）	—

番号	中身の名	言明	対象	札	理由
16	二段の事象の稀さ：背景の不変量の部分	大きい n で $\nu_{n,m}\big(f_{m,x} > f_h(m)\big) \le S(m)$	定義なし（背景場の不変量 f）	形が未定	(c)
17	観測量の同程度連続	$\lvert s_n(d) - s_n(d')\rvert \le \tau_n + \Omega(\mathrm{dist}(d,d'))$、$\tau_n \to 0$、$\Omega(r) \to 0$	19-04（観測量の族は観測量の族と小さい場の集合）	形は確定・未証明（条件つき：合わせで決めた列で）	—

05

紫外の安定性の前提

箱の連続極限の前提の表現の水準の前提（結合の一段の正味の括弧・大きい場の結合への寄与・活性の再帰・供給の稀さ）を、一段ごとの評価から出すための前提です。記号：G_k は段 k の自由場の伝播関数の族、P/ω は自由の伝播関数（19-04 §07）、$\mathcal{M}$ は一段の写像。

表 3　紫外の安定性の前提（2026-11-13 の時点）

番号	中身の名	言明	対象	札	理由
1	伝播関数の挟み	全ての段 k と運動量で $c_0\,P/\omega \preceq G_k \preceq P/\omega$、$c_0 = 3/100$	19-04	定理（弱い形、似た別の言明）：上の側・下の側とも点検済み。対象は記号の漸化式（運動量ごとの行列の族）、自由場・真空の背景・線形化、重み $(1/8, 3/4, 1/8)$（15-12）	—
2	背景つきの正値性	$\lambda_{\min}(H_c(B)) \ge \lambda_0(1 - f_1/f_\star)$	紙の定義（背景場 B、拘束つきの Hessian H_c）	形が未定：背景場と拘束つきの Hessian が紙の定義で、形も三通り並んでいる	(c)
3	無関係な項の縮み	$\mathcal{M}^{17}(\omega G_k) \preceq \tau\,\omega G_{k+17}$、$\tau < 1/170$、$k$ に一様	19-04	定理（弱い形、似た別の言明）：二次形式の τ。帰納の τ_k とは別。段 0 の一段の評価は条件つき（15-12）	—
4	一段の結合の減りの係数	自由場の係数 b_k が率 $(3/5)^k$ で収束し、過渡の和が有限	19-04	定理（弱い形、似た別の言明）：自由場の拘束つき共分散の上の、任意のデータの二次の汎関数が率 $(3/5)^k$ で収束。b_k がこの汎関数であることは紙	—
5	一ループの係数の値	$b_\infty = 2b_0 \ln 2$	—	文献：この写像での再導出なし	—
6	背景の写像の縮み	一目盛りの変位の和 $\sum_j \Delta_j < \infty$（自由場の部分は $\lVert\psi_l\rVert^2 \le 0.608^l$ の型）	19-04	定理（弱い形、似た別の言明）：自由場の部分	—

番号	中身の名	言明	対象	札	理由
7	多体の和の幾何（相関のノルム）	面の場の相関のノルム $\Lambda \le 640/9$	19-04	定理（弱い形、似た別の言明）：自由場・線形化・トーラス（15-12）。到達の定数は 多体の和の幾何（到達の定数）	—
8	拘束つきの逆の恒等式	$C = G - GT^{*}(TGT^{*})^{-1}TG$ と上下の評価	抽象の線形写像	定理：有限次元の抽象の恒等式と評価	—
9	拘束つき減衰の定理	段 k の一段の拘束つき Green 関数が、指数の重み W について $\|Wx\| \le \frac{11}{2}\|Ww\|/r^{2}$、定数が k に一様	抽象（Lean）。具体の対象は紙	形は確定・未証明（真空のまわりの版）。一般の背景の版は形が未定 (c)	—
10	背景の零階の運び	$\sup_n 4^n\theta_n < \infty$、$\sum_n 4^n\theta_n^{3/2} < \infty$（$\theta_n$：段 j の単位の背景の面の上限を粗い単位で割った比）	紙の定義（作用の最小化元の背景）	形が未定：今の形は、作用の最小化元の背景で数値では発散する 読 （偽であることの紙の議論は、点検の前）	(b) (d)
11	一段の背景場の補題	小さい場で、拘束つきの作用の極小が一意・解析的・指数で局所・粗いゲージと可換	紙の定義（背景場）	紙	—
12	多段の背景場	入れ子の小さい場の領域で一意・正則。線形化の逆は作用のノルムで段の数に依らず 1 以下	紙の定義（背景場）	紙	—
13	持ち上げの行和が段に一様	$\sup\|Eg\| \le R\sup\|g\|$、$R$ が k に一様	紙の定義（線形の持ち上げ）	設計に依る：ゲージとノルムの選び。一次元・スカラーは定理	—
14	一つの尺度の展開の道具	直積の白色雑音の測度の上のクラスター展開とその収束	抽象	紙	—
15	森の補間の公式	—	—	文献：本体は Lean に無い	—
16	小さい場の一段の繰り込み定理	粗い作用 $=\beta_{k+1}S_W$（背景）＋ 局所の展開 ＋ 多体。多体は距離について指数で小さい	定義なし（段 k の実効の作用）	形が未定	(c) (e)
17	段ごとのゲージ固定	段ごとの Landau ゲージ。行列式は下三角の塊。Haar の Jacobian の評価	紙の定義	紙	—
18	大きい場の評価	各段 t と各穴 γ で $\|z_t(\gamma)\| \le \exp(-\gamma_E\,\beta\,S^{\flat}(\gamma))$、$S^{\flat}(\gamma) \ge s_*\|\gamma\|$、$s_* > 0$ が段と体積に一様	定義なし（活性、粗い類）	形が未定	(c) (d) (e)
19	大きい場の気体	$\sum_{X \ni x}\|z(X)\|\,e^{2\|X\|} \le 1$ と、気体の分配関数が対応する比に等しいこと	定義なし（活性）	形が未定	(a) (b) (e)

番号	中身の名	言明	対象	札	理由
20	類と局所化	次元 4 以下の局所のゲージ不変な項は定数と $\sum \operatorname{tr} F^2$ だけ	紙の定義（類）	紙：局所化の代数は Lean、類との同一視は紙	—
21	段に一様な帰納	$r_{k+1} \le \tau_k r_k + a_k w_k + s_k$、$w_{k+1} \le b_k r_k + \sigma_k w_k + s'_k$、係数の積が $1/4$ 未満なら球に留まる	定義なし（r_k・w_k は実数の列で、類の座標としての定義が無い）	形が未定	(c) (e)

06

全列の収束・観測量・無限体積・回転・非自明性の前提

箱の連続極限の前提と紫外の安定性の前提の形が決まった後に形を決める行です。細かい観測量と回転の行は、言明を書くための対象がまだ定義されていません（28-06）。

表 4　全列の収束・細かい観測量・無限体積・回転・非自明性の前提（2026-11-13 の時点）

番号	中身の名	言明	対象	札	理由
1	一段の写像の縮みと終点の合わせ	$\lvert r_k(u,v) - r_k(u',v')\rvert \le \varepsilon \lvert u-u'\rvert + c\lVert v-v'\rVert$、$\lVert T_k(u,v) - T_k(u',v')\rVert \le c' \lvert u-u'\rvert + \tau \lVert v-v'\rVert$、$4cc' < (1-\varepsilon-\tau)^2$	定義なし（一段の写像の座標 u, v）	形が未定	(c)
2	流した観測量のブロック変数による近似	流れの時間 t の観測量を、段 m のブロック変数の Lipschitz な関数で、格子に一様に誤差 $\varepsilon_m(t) \to 0$ で近似	対象なし（流した観測量）	形が未定：流した観測量が未定義	(c)
3	箱の大きさに一様な紫外の評価	箱の連続極限の前提と紫外の安定性の前提が、箱の大きさ L に依らない定数で立つ	その二つの前提の全て	形が未定	(e)
4	ブロック観測量の一様な減衰	$\lvert\langle F \cdot G \circ \tau_t\rangle - \langle F\rangle\langle G\rangle\rvert \le C_F C_G\, e^{-mt}$、$m$ が格子間隔と箱に依らない（正確な形は 19-07 §06）	19-04・19-03	形は確定・未証明（条件つき：合わせで決めた列で、時間差を周期の半分までに）。強結合の窓では定理（20-04）だが、自明に立つ側の向き	—
5	橋の一段の紫外の評価	回した細かい格子から標準の粗い格子への一段の像が、鎖の球に入る	対象なし（回した格子からのブロック写像）	形が未定	(c)
6	無限体積の極限が箱の形に依らないこと	形の違うトーラスの列の極限が一致する	定義なし（無限体積の極限）	形が未定	(c)
7	極限が自由場でないこと	（どの量で言うかが未定）	—	形が未定	(c)

07

帯 — 渦の自由エネルギーの行

渦の比 θ（19-02）だけで書ける行が多い段です。言明は 26-02 の記号 $\theta(R;T_L^2)$（縦の大きさ R、横のトーラスの大きさ L）のままに書きます。$m_0(L)$ は大きさ L の箱の質量（転送の作用素の隙間）、$\sigma_N(\beta)=\liminf_M(-\ln\theta_{N,M})/M^2$ は板の張力です。

表 5　帯の前提（2026-11-13 の時点）

番号	中身の名	言明	対象	札	理由
1	θ の非負	M が偶数なら全ての実の β で $0\le\theta_{N,M}(\beta)$	19-02	定理（弱い形、似た別の言明）：M が偶数の部分族。欄は全ての大きさを要る（21-06）	—
2	小さな箱の基点	$\theta(L_0;T_{L_0}^2)\le 1-\varepsilon_0$ が格子間隔に一様	19-02	形は確定・未証明（条件つき：合わせで決めた列で）。格子間隔を止めた形は薄い渦の床（21-02）	—
3	一つの尺度の判定	物理の大きさ L_* で $\theta(L_*;T_{L_*}^2)<(s^2)^{-1/(s^2-1)}$（$s=2$ で 0.63、$s=3$ で 0.7598）	19-02	形は確定・未証明（条件つき：合わせで決めた列で）	—
4	捩れを入れる写像の費用の問い	ゲージ共変で滑らかな写像 T で $\mathbb{E}_+[S\circ T-S-\ln J_T]\le 2\,\mathrm{artanh}(0.7598)$ が格子間隔に一様	対象なし（写像 T）	形が未定	(c)
5	入れ子（枠の減相関）	$\theta(nR;T_L^2)\le C_D\,\theta(R;T_L^2)^{n^2}$	19-02	紙	—
6	倍化の横広げ	$\theta(R;T_{L'}^2)\le C\,(L'/L)^2\,\theta(R;T_L^2)$（$L\le L'\le R$）	19-02	形は確定・未証明（条件つき：合わせで決めた列で）	—
7	張力の倍化の不等式	ある $\delta_0>0$ と N_1 で、全ての $N\ge N_1$ について $4\sigma_{2N}(\beta)\ge e^{\delta_0}\sigma_N(\beta)$	紙の定義（板の張力 σ_N）	形が未定：(d) は β に一様な形についてだけ	(b) (f)
8	渦の自由エネルギーの単調性と繰り込みの比較	捩れの挿入の自由エネルギーが β について単調。$s(N,\beta')\le s(2N,\beta)$	19-02	形が未定	(b)
9	小さな捩れた箱のギャップと挿入の一様な受理	隙間 $\ge c/L$ が格子間隔に一様。駆動した渦の挿入の受理率が格子間隔に一様	19-02・19-03	形が未定：捩れた小さい箱の隙間の作用素と、挿入の写像が未定義	(c)
10	帯の比較（ギャップの言葉）	$x(L):=L\,m_0(L)$ について $x(2L)\ge x(L)+\delta$、かつ閾の上の安定性	19-03（箱の質量）	形が未定：使う箱（空間の面つき）の箱の質量 $m_0(L)$ が未定義	(c)
11	面積則からギャップへ	帯（面積の指数）から、ブロック観測量の一様な減衰へ	—	形が未定：素朴な形は二次元で偽	(b)

番号	中身の名	言明	対象	札	理由
12	渦の面積の指数から Wilson ループの面積則へ	—	—	文献：典型の枠の版は再導出していない	—

帯の行のうち張力の倍化の不等式・単調性と繰り込みの比較には、言明の形をどう量化するか（β に一様に言うか、物理の大きさを止めて言うか）の選びが残っています。面積則からギャップへは質量ギャップの側と閉じ込めの側を結ぶ矢印で、この本には在りません（28-03）。

08

57 行の外に足した 5 行

57 行のどれにも入っていない前提が五つあります。数え方を変えないよう、表 1 の数の外に置きます。この 5 行の札は、57 行と同じ水準の点検をまだ通っていません。

表 6　足した前提（2026-11-13 の時点）

番号	中身の名	言明	対象	札	理由
1	閾どうしの結び	二段の事象の面の変数の倍率 β_m と閾 $y_h(m)$ を、結合の側の u_m と閾 $y_s(u_m)$ に結ぶ（たとえば $\beta_m = 4u_m$、$y_h(m) = y_s(u_m)$、または解析の床 $y_h(m) \le \beta_m(1-\cos\varphi_c)$（$\varphi_c$ は小さい場の閾を決める決まった角）のもとで）	定義なし（u_m）	形が未定：先に組んだ条件つきの含意でも、定理はこの二つを結ばない	(c)
2	小さい場の集合の取り方と背景の不変量の延ばし方	二段の事象が小さい場の集合に含まれること。背景の不変量を $SU(2)$ の外で閾 f_h より大きい値に延ばしたときに立ち、0 に延ばすと偽	紙の定義（背景場）	設計に依る	—
3	背景の二次の型の定数	先に組んだ含意の前提「背景の評価」の三つの定数（背景の写像の Lipschitz の定数を作る二次の型の定数）	紙の定義（背景場）	紙	—
4	多体の和の幾何（到達の定数）	面の場の相関の行の和 R が有限	19-04	形は確定・未証明	—
5	質量ギャップの器への継ぎ目	器の含意（28-03）は、測度の列の全列の弱収束と、観測量の部分空間が時間の並進で閉じることを仮定に持つ。部分列で使うときは「どの極限点でも」の形になる	19-03	形は確定・未証明（条件つき：合わせで決めた列で。全列の収束の根と同じ形）	—

09

別名の辞書（短い版）

同じ前提が、本書の検討が先に組んだ条件つきの含意（小さな箱の弱い紫外の存在。28-01 §08）と、第 27 部の台帳で別の名で呼ばれています。突き合わせに要る分だけを載せます。

表 7　別名の辞書（短い版）

中身の名	先に組んだ条件つきの含意での名	台帳（27-02）	Lean
小さな箱の弱い紫外の存在の含意（先に組んだ含意の主定理）	主定理。仮定は結合の一段の括弧の仮定・観測量の同程度連続・小さい場の集合の仮定、結論は裸の結合の合わせの括弧から非退化（小さい場の集合の質量）まで	紫外の制御（箱の連続極限の前提。27-02）	`WeakUltravioletExistence.BlockConclusion`
段ごとの前提からの鎖の定理	鎖の定理（仮定は段ごとの六つ）。Lean の箱の版とは仮定の組が別	—	`BoxWalk.chain_end_to_end_box`・`ChainBlockMap.chain_end_to_end_blockMap`
結合の一段（実効の結合の定義と連続性・結合の一段の正味の括弧）	結合の一段の括弧の仮定、結合の一段の正味の括弧、一段の剰余の二次の型・類の窓の条件・実効の結合の定義と連続性	—	鎖の欄 `flow`・`small_net`・`transient`
大きい場の結合への寄与	大きい場の結合への寄与	—	鎖の欄 `large_rem`
活性の再帰	活性の再帰、極限の期待値の存在と連続な延長、大きい場の重み	—	鎖の欄 `act_rec`
供給の稀さ・細かい格子の一つの尺度の稀さ	供給の稀さ、一枚の面の積率と稀さ	—	`FoldCap.rarity_explicit`
動く不変区間と余白	動く不変区間と余白、対数の閾と動く区間	—	鎖の欄 `fix_shift`

中身の名	先に組んだ条件つきの含意での名	台帳（27-02）	Lean
二段の事象の稀さ（面の部分・背景の不変量の部分）	小さい場の集合の仮定、格子に一様な小さい場の事象	—	鎖の欄 `rarity`
観測量の同程度連続	観測量の同程度連続、格子に一様な小さい場の事象・背景の評価	—	鎖の欄 `split`
鏡映正値性（細かい格子の鏡映正値性・粗い水準の鏡映正値性）	鏡映正値性の台	z の鏡映正値性（捩れの和を取った集団の正値性で、別物）	`TorusRP.wilson_rp`
背景つきの正値性	背景つきの正値性、背景の評価	—	—
大きい場の気体	面の水準の大きい場の気体	—	—
段に一様な帰納	一段の剰余の二次の型・類の窓の条件	—	`F3Conditional.f3_conditional`
拘束つき減衰の定理	—	—	`RealSpaceThmR.thmR_form`（抽象の形）
一段の写像の縮みと終点の合わせ	増分の総和可能性の仮定に関わる（同じものではない。下の注）	—	—
ブロック観測量の一様な減衰	—	台帳のブロック観測量の一様な減衰	—
小さな箱の基点（小さな T^2 の基点）	—	台帳の小さな T^2 の基点	—
入れ子（枠の減相関）	—	台帳の枠の減相関	—

中身の名	先に組んだ条件つきの含意での名	台帳（27-02）	Lean
倍化の横広げ（横広げの不等式（強い形））	—	26-02 の横広げの不等式（強い形）・27-01 の同じ行	—
渦の自由エネルギーの単調性と繰り込みの比較	—	β 単調性・繰り込みの比較（26-06）	—
小さな捩れた箱のギャップと受理（小さな箱のギャップと受理）	—	小さな T^2 のギャップ・挿入の一様な受理	—
帯の比較（ギャップの言葉）	—	台帳の帯の比較（ギャップの言葉）	—

増分の総和可能性の仮定は、ゲージ不変な関数の可算で稠密な族について、観測量の値の段ごとの増分が総和可能、という仮定です。19-07 §03 の全列の収束とは同じものではありません。総和可能なぶん強く、関数の族も違います。また先に組んだ含意は細かい測度を裸の結合の合わせの括弧で選んだ β_n の Wilson の測度と定義しますが、Lean の定理は裸の結合の列を任意に取ります。

先に組んだ含意の十の前提のうち、鏡映正値性の台が鏡映正値性です。ほかの九つは、鏡映正値性を除いた前提です。四次元のヤン–ミルズ理論の存在そのものは 2026-11-10 に公開された構成が別の設計で示しました（第二巻）。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
六つの根と 57 行の前提を、木と段ごとの表に並べ、札と理由の記号を付けた（2026-11-13 の時点）	どの前提も、この章では示していない。札はこの日の点検の記録による

言えている	言えていない
定理の札の 13 行は、細かい格子の Wilson の測度、ブロック写像そのもの、押し出しの測度の構造の性質、自由場・線形化、抽象の恒等式のどれかについての言明	繰り込んだ尺度の測度についての定量の評価の定理は無い
形が未定の 24 行のうち 20 行は、対象が未定義か段を跨ぐ形が無いことに由来する	未定の行の形を決める問いの答え（28-06 に問いだけ）
形は確定・未証明の 7 行のうち 6 行は、合わせで決めた列についての条件つき	列を自由に取ると、そのうち 4 行は $\beta_n \equiv 0$ で自明に立つ。退化でない小さい例は 2 行だけ

出典と再現

もの	種別	出典・道具
57 行の前提、札、理由の記号、木	仮	本書の検討の前提の棚卸し（2026-11-13）。札は Lean の源と、定義と言明を別の目で照合した点検の記録から
先に組んだ条件つきの含意の仮定と十の前提（表 7）	—	本書の検討の記録（2026-10-30）。28-01 §08
定理の札の行	Lean	各章の出典の表（20-01・21-06・15-12・22-01）
森の補間の公式	典	書誌のみ（未確認）
渦の面積の指数から Wilson ループの面積則へ	典	書誌のみ（未確認）
条件の台帳の行と、ブロック観測量の一様な減衰・帯の比較（ギャップの言葉）の行	—	27-02 条件の台帳

この章で使った語 — 前提、根、十分条件、表現、実効の結合、活性、供給、背景場、類、押し出しの測度、二段の事象、渦の比、板の張力、条件の台帳。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：28-05 設計の選びに依るもの — 「設計に依る」の行と、ほかの行の定数がどの選びに依るかを表にします。

設計の選びに依るもの

この章は本書の検討です。

この章で分かること — 繰り込みの一段や前提の言明には、数学が決めるのではなく、こちらが選んで固定している所があります。その九つの選びについて、今の値と、選びを替えたときに作り直しになる定理・前提を表にします。第 20・21 部の定理と大きい面の稀さ（22-01）がブロック写像の選びに依らないことも、ここで確かめます。

前提となる章 — 19-04 §08 重みという設計の選び、28-04 前提の一覧。

先に言うこと — どの選びが前提を満たしやすいかは、この章では主張しません。重みを替えたときの定数の表と、ブロック平均の重なりが押し出しの測度の鏡映正値性を保つかの計算は、まだ点検を通っていないので載せません。そこには論点が在る、とだけ書きます。ここでの選びは本書の設計（決まったブロック写像で押し出した測度）の中の選びで、四次元のヤン–ミルズ理論の存在を示した公開された構成の設計とは別のものです（二つの設計の比べは第 14 部）。

この章の順序

1. 設計の選びとは — 定義を一つに決めるための固定
2. 九つの選びと今の値（表 1）
3. 横の重み・倍率・引き戻しの半径 — ブロック写像そのものの選び
4. ブロック平均の重なり — 鏡映正値性との論点
5. ノルム・ゲージ・背景の定義 — 表現の選び
6. 合わせ方と気体の両立の定義
7. どの定理・前提がどの選びに依るか（表 2）
8. そのほかの固定（表 3）

01

設計の選びとは — 定義を一つに決めるための固定

繰り込みの一段（19-04）を定義するには、道の族の重み、ブロックの倍率、平均を群へ戻す手続きなどを一つに決めなければなりません。前提の言明（28-04）にも、どのノルムで測るか、どの背景のまわりで展開するか、といった決めが入ります。

これらは数学の側から一つに決まるものではなく、こちらが選んで固定するものです。選びを替えれば、それに依る定理の定数や証明書は作り直しになり、前提の言明そのものも変わります。示すべき言明（19-07）のうち、帯は渦の比 θ だけで書け、ブロック写像の選びに依りません。ほかの五つは押し出しの測度 $\nu_{n,m}$ を通してブロック写像の選び（重み・倍率・半径）に依り、合わせ・非退化・同程度連続は、さらに観測量と集合の選びに依ります。

この章は、どの選びが何に効いているかを、一か所で見えるようにするための表です。

02

九つの選びと今の値

表 1　設計の選び（2026-11-13 の時点）

選び	今の値	依る前提（28-04 の行の名）
ブロック化の横の重み $(\alpha, 1-2\alpha, \alpha)$	$\alpha = 1/8$	自由場の入力（伝播関数の挟み・無関係な項の縮み・一段の結合の減りの係数・背景の写像の縮み・多体の和の幾何）、拘束つき減衰の定理、背景の零階の運び、持ち上げの行和が段に一様、大きい場の評価
ブロックの倍率	2	合わせの括弧、二段の事象の稀さ：面の部分、自由場の入力（伝播関数の挟みから多体の和の幾何まで）、背景の零階の運び、帯の倍化（一つの尺度の判定・横広げの不等式（強い形）・張力の倍化の不等式）
径の引き戻しの半径 r_0	自由な母数（$0 < r_0 \le 1$）	線形化の範囲、大きい場の評価
ブロック平均の重なり	重なりあり（横に $(1/8, 3/4, 1/8)$ でずれる道の平均）	粗い水準の鏡映正値性、活性の再帰、供給の稀さ、ブロック観測量の一様な減衰
ノルム	所によって上限のノルムと二乗和のノルムが混在	拘束つき減衰の定理、背景の零階の運び、多段の背景場、持ち上げの行和が段に一様、段に一様な帰納
ゲージ	段ごとの Landau の切り口／軸のゲージ／木のゲージ	拘束つき減衰の定理、持ち上げの行和が段に一様、段ごとのゲージ固定
背景の定義	拘束つきの作用の最小化元	二段の事象の稀さ：背景の不変量の部分、背景つきの正値性、背景の零階の運び、一段の背景場の補題、多段の背景場

選び	今の値	依る前提（28-04 の行の名）
合わせ方（実効の結合の定義）	未定（観測量・段・目標の値・解の取り方。紙に u_k の定義の案が二通り）	実効の結合の定義と連続性、結合の一段の正味の括弧、箱の連続極限の前提の全ての行の定義域
気体の両立の定義	先に組んだ条件つきの含意：隣接しない／Lean：重ならない	大きい場の結合への寄与、大きい場の気体

03

横の重み・倍率・引き戻しの半径 — ブロック写像そのものの選び

横の重み。粗いリンクを作る道は、横の向きに $-1, 0, +1$ 目盛りずれ、その重みが $(\alpha, 1-2\alpha, \alpha)$ です（19-04 §03）。今は $\alpha = 1/8$ です。自由場の一段の定理（15-12）の定数は全てこの値で計算したもので、別の重みではそのまま使えません：伝播関数の挟みの下の定数 $c_0 = 3/100$、17 段の縮み $\tau < 1/170$、面の場の相関のノルム $\Lambda \le 640/9$ など。

重みを替えると何が良くなり何が悪くなるかには論点が在ります（面の場を粗い単位で測った量が段とともに育つかどうか、重みを替えると拘束の性質がどう変わるか）。

倍率。一段で格子間隔を半分にします。合わせの括弧（19-07 §02）は段の番号 $n = \log_2(1/a_n)$ で書かれ、帯の側の一つの尺度の判定の閾は倍率 s ごとに違います（$s=2$ で 0.63、$s=3$ で 0.7598）。

引き戻しの半径。道の積の平均を単位の球へ戻す手続きの閾 r_0 です。ブロック写像の線形化の定理（15-13）は $0 < r_0 \le 1$ を仮定に持ちます。

選びに依らない定理。第 20 部（鏡映正値性・強結合）、第 21 部（渦の床・Polyakov ループ）の定理と、大きい面の稀さ（22-01）は、細かい格子の Wilson の測度と捩れた分配関数だけを使い、ブロック写像を使いません。だからこの三つの選び（と §04 の重なり）のどれにも依りません[初]。

04

ブロック平均の重なり — 鏡映正値性との論点

今の道の族では、粗いリンクを作る道が横にずれるので、隣り合うブロックが細かいリンクを共有します（重なりのある平均）。

鏡映正値性（20-01）は細かい格子の Wilson の測度について定理です。押し出した粗い測度 $\nu_{n,m}$ でも鏡映正値性が保たれるかは、ブロックが鏡映の面を跨ぐかどうか、つまり重なりの有

無に関わる見込みがあり、**ここに論点が在ります**。計算はまだ点検を通っていないので載せません。

今の前提の一覧では、粗い水準の鏡映正値性（粗い水準の鏡映正値性の行）を、正の側を帯に取った類（細かい格子の正の半分のリンクだけに依る粗い観測量）の形で置いています。この形は、細かい格子の Wilson の測度についての言明として払われています。粗い半分の全部を正の側に取る形は、前提に置いていません。

この選びに依るのは粗い水準の鏡映正値性のほか、段を跨ぐ稀さ（活性の再帰・供給の稀さ。鏡映正値性からのチェス盤の評価を使う道）と、一様な減衰から質量ギャップへ移るときの器（ブロック観測量の一様な減衰）です。

05

ノルム・ゲージ・背景の定義 — 表現の選び

この三つは、ブロック写像ではなく、粗い尺度の理論を書き表す（表現する）ときの選びです。根（19-07）には現れず、十分条件の側にだけ現れます。

- **ノルム**。面の場を上限のノルムで測るか、作用（二乗和）のノルムで測るか。背景の零階の運び（28-04 の行）の今の形は上限のノルムで書かれていて、形が未定の理由 (b)(d) はこの選びに結びついています。拘束つき減衰の定理や多段の背景場は二乗和か作用のノルムで書かれています。
- **ゲージ**。段ごとの Landau の切り口、軸のゲージ、木のゲージ。持ち上げの行和が段に一様か（持ち上げの行和が段に一様）はゲージの選びで変わります。一次元・スカラーの持ち上げの行和は定理です。
- **背景の定義**。ブロックの拘束のもとで作用を最小にする背景を使っています。背景の不変量の稀さ（二段の事象の稀さ：背景の不変量の部分）、背景つきの正値性、背景場の補題（一段の背景場の補題・多段の背景場）はこの定義の上に書かれています。陽な式で書ける別の背景に替える道もあります。

06

合わせ方と気体の両立の定義

合わせ方。裸の結合の列 β_n を、段 m_0 の粗い観測量 Y_0 の期待値を目標の値 κ_0 に合わせて決めます（19-07 §02）。選ぶのは Y_0・m_0・κ_0 と、解が複数あるときの取り方です。前提の側の言葉では、実効の結合 u_k の定義（実効の結合の定義と連続性）に対応させる道が考えられます。u_k には紙に二通りの定義の案が在ります（繰り込んだ結合として読むか、ブロック化した

作用の係数として読むか)。どちらを取るかで、箱の連続極限の前提の全ての行の定義域 $u_m \geq u_\star$ の意味が変わります。本書の検討が先に組んだ条件つきの含意（28-01 §08）は細かい測度を裸の結合の合わせの括弧で選んだ β_n の Wilson の測度と定義し、Lean の定理は裸の結合の列を任意に取ります。測度の側の閾と結合の側の閾を結ぶ前提（閾どうしの結び）も、この選びと一緒に決まります。

気体の両立の定義。大きい場の気体で、二つの大きい場の領域が「両立する」とは何かの定義です。本書の検討が先に組んだ条件つきの含意（28-01 §08）では「隣接しない」、Lean の形は「重ならない」で、二つは別物です。依るのは大きい場の結合への寄与・大きい場の気体で、どちらも形が未定です。

07

どの定理・前提がどの選びに依るか

表 2　依存の表（● は依る)。上の 5 行は定理、下は前提（2026-11-13 の時点）

定理・前提	重み	倍率	半径	重なり	ノルム	ゲージ	背景	合わせ	気体
第 20 部（鏡映正値性・強結合）									
第 21 部（渦の床・Polyakov ループ）									
15-12 自由場の一段	●	●							
15-13 線形化と押し出しの共分散	●	●	●						
22-01 大きい面の稀さ									
粗い水準の鏡映正値性				●					
実効の結合の定義と連続性・結合の一段の正味の括弧		●						●	
大きい場の結合への寄与									●
活性の再帰・供給の稀さ				●					
二段の事象の稀さ：面の部分		●							
二段の事象の稀さ：背景の不変量の部分							●		
自由場の入力（伝播関数の挟み・無関係な項の縮み・一段の結合の減りの係数・背景の写像の縮み・多体の和の幾何（相関のノルム)）	●	●							
背景つきの正値性							●		
拘束つき減衰の定理	●				●	●			

定理・前提	重み	倍率	半径	重なり	ノルム	ゲージ	背景	合わせ	気体
背景の零階の運び	●	●			●		●		
背景場（一段の背景場の補題・多段の背景場）					●（C2）		●		
持ち上げの行和が段に一様	●				●	●			
段ごとのゲージ固定						●			
大きい場の評価	●		●						
大きい場の気体									●
段に一様な帰納					●				
ブロック観測量の一様な減衰（器）				●					
帯の倍化（一つの尺度の判定・横広げの不等式（強い形）・張力の倍化の不等式）		●							

表 2 の上の 5 行のうち、選びに依るのは自由場と線形化の二章だけです。前提の側では、重みに依る行が紫外の安定性の前提に集まり、背景・ノルム・ゲージに依る行が背景場と拘束つきの評価に集まっています。

08 そのほかの固定

ブロック写像や表現の選びではありませんが、定理と前提の範囲を決めている固定です。

表 3　そのほかの固定

固定	今の値	依るもの
大きい面の閾	稀さの定理は $\mathrm{Re}\,U_p < 0$。前提の側は段ごとの閾 $y_h(m)$	22-01、供給の稀さ・細かい格子の一つの尺度の稀さ・二段の事象の稀さ：面の部分
β の範囲	強結合の窓 $18\tanh\lvert\beta\rvert < 1$・$24(1-e^{-4\lvert\beta\rvert}) < 1$、稀さは $\beta \ge 81$	第 20 部、22-01、細かい格子の一つの尺度の稀さ
鏡映の面と正の側	格子点の面（全ての実の β）／リンクの真ん中の面（$\beta \ge 0$）。粗い水準では正の側を帯に取る	20-01、細かい格子の鏡映正値性・粗い水準の鏡映正値性
背景の不変量の延ばし方	$SU(2)$ の外の値の決め方（閾より大きい値に延ばすか）	観測量の族と小さい場の集合の包含、二段の事象の稀さ：背景の不変量の部分、小さい場の集合の取り方と背景の不変量の延ばし方
観測量の類	流した観測量（定義はまだ無い）	流した観測量のブロック変数による近似、回転の前提
捩れの幾何	背景の捩れ $n_{12} = 1$、横の大きさ N を止める	第 21 部、帯の全ての行

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
九つの選びの今の値と、それに依る前提を表にした	どの選びが前提を満たしやすいか
初 第 20・21 部の定理と 22-01 はブロック写像を使わないので、ブロック写像の選びに依らない	—
第 15 部の自由場の一段の定数は、重み 1/8 と倍率 2 で計算したもの	別の重みでの定数（表は点検の前で載せない）
ブロック平均の重なりと押し出しの測度の鏡映正値性の間に論点が在る	その論点の答え（計算は点検の前で載せない）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
選びの一覧と依存	仮	本書の検討の前提の棚卸し（2026-11-13）
ブロック写像の定義と重み	Lean	19-04 の出典の表
自由場の一段の定数	Lean	15-12 の出典の表
気体の両立の二つの定義	—	本書の検討が先に組んだ条件つきの含意（28-01 §08）と本書の Lean の束

この章で使った語 — 設計の選び、横の重み、倍率、引き戻しの半径、ブロック平均の重なり、ノルム、ゲージ、背景場、合わせ、気体の両立。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：28-06 開いている所と、対象がまだ無い所 — 形が未定の前提を、出どころで分けて一覧にします。

開いている所と、対象がまだ無い所

> この章は未解決の地図です。

この章で分かること — 28-04 で「形が未定」の札が付いた 24 行が、どこから未定なのかを三つに分けた一覧です。行ごとに、形を決めるのが紙の議論か、小さい数値実験か、設計の選びかを書きます。言明を書くための対象そのものがまだ無い段（細かい観測量・回転）と、この本が主張しないことを最後に置きます。

前提となる章 — 28-04 前提の一覧（行の名と札）、19-07 示すべき言明。

先に言うこと — この章は一覧で、どの問いにも答えていません。「何が決めるか」の欄は問いの種類を書いたもので、その問いが近く決まることを主張していません。中身は動くので、更新は A-08 質量ギャップまでの地図 で行います。

この章の順序

1. 三つの出どころ — 表 1
2. 表現の対象が未定義 — 紫外の 13 行（表 2）
3. 対象そのものが無い・下流の 8 行（表 3）
4. 量化の順と真偽 — 帯の 3 行（表 4）
5. 形を決める問いの順
6. 対象の定義がまだ無い段
7. この本が主張しないこと

01

三つの出どころ

形が未定の前提は 24 行です（28-04 表 1）。理由の記号（(a) 軽すぎる、(b) 強すぎる、(c) 対象が未定義、(d) 今の形に反する数値の兆し、(e) 段を跨ぐ形が無い、(f) 量化の順が未定）だ

けを見ると散らばって見えますが、出どころで分けると三つです。

表 1　形が未定の 24 行の出どころ（2026-11-13 の時点）

出どころ	行の数	行	根との関係
表現の対象が未定義	13	結合の一段の正味の括弧・大きい場の結合への寄与・活性の再帰・供給の稀さ・動く不変区間と余白・二段の事象の稀さ：背景の不変量の部分・背景つきの正値性・背景の零階の運び・小さい場の一段の繰り込み定理・大きい場の評価・大きい場の気体・段に一様な帰納・一段の写像の縮みと終点の合わせ	根（19-07）は書けている。その下の、実効の結合・活性・背景場・類を通した十分条件の形が未定
対象そのものが無い・下流	8	流した観測量のブロック変数による近似・箱の大きさに一様な紫外の評価・橋の一段の紫外の評価・無限体積の極限が箱の形に依らないこと・極限が自由場でないこと・捩れを入れる写像の費用の問い・小さな捩れた箱のギャップと挿入の一様な受理・帯の比較（ギャップの言葉）	言明に要る対象（流した観測量、回した格子の写像、捩れを入れる写像、捩れた小さい箱の器など）が無いか、上流の形が決まってから形を決める行
量化の順と真偽	3	張力の倍化の不等式・渦の自由エネルギーの単調性と繰り込みの比較・面積則からギャップへ	帯の根は書けている。十分条件の候補が偽の例を持つか、どの順に量化するかが未定

表現の 13 行は、根より下の表現の水準に在ります。表現を替える（背景の定義を替える、ノルムを替える、など）と葉は替わりますが、根は替わりません。帯の側の未定は、表現からではなく、言明の量化と真偽から来ています。

02

表現の対象が未定義 — 紫外の 13 行

今の道の鎖の定理の中では、実効の結合 u、活性 z、供給 w、剰余、面の変数、背景の不変量、観測量は全て自由な変数です。格子から定義されているのは、ブロック写像と押し出しの測度だけです（19-04）。そのため次の行は、証明の前に対象の定義が要ります。

表 2　表現の水準の 13 行と、形を決めるもの

行	理由	何が決めるか	最小の問い
結合の一段の正味の括弧	(c) (e)	紙（設計）	実効の結合を一つに定義する。合わせ（19-07 §02）の言葉に言い直すなら、どの粗い観測量をどの段で合わせるか。そのとき他の行の定義域 $u_m \geq u_\star$ が同じ言葉で書けるか
大きい場の結合への寄与	(a) (c)	小さい数値実験と設計	今の形は活性を自由に取れば立つ（軽い）。体積と段に一様な形を言明の中に入れたとき、素の Wilson の測度の小さい格子で、その一様性が数として立つか
活性の再帰	(a) (c) (e)	紙と小さい数値実験	一段だけ押し出した測度 $\nu_{n,n-1}$ で、粗い面が大きい事象を細かい格子の事象に引き戻すと、チェス盤の評価（22-01）が使える形になるか

行	理由	何が決めるか	最小の問い
供給の稀さ	(c) (e)	設計	供給を、押し出しの測度の事象の確率（細かい側の像は小さく、粗い面は大きい）として定義できるか。できれば二段の事象の稀さ：面の部分と一本になる
動く不変区間と余白	(a) (c)	大きい場の結合への寄与・供給の稀さの定義の後の紙	実数の関数 W, Φ, D, e が自由で、全て 0 に取ると立つ。実際の気体の係数がこの形で、余白の数が立つか
二段の事象の稀さ：背景の不変量の部分	(c)	設計（背景の定義）	背景の不変量を使わず面の変数だけの事象にするか、背景を陽な式で書ける背景に替えるか
背景つきの正値性	(c)	設計（背景の定義）と紙	背景場と拘束つきの Hessian の定義を決め、並んでいる三つの形のどれを前提にするかを決める
背景の零階の運び	(b) (d)	紙（設計）	今の形（面の上限で測る形）は、作用の最小化元の背景で数値では発散する 読 （偽であることの紙の議論は点検の前）。零階の項を作用のノルムで書いたとき、多段の背景場と同じ仮定で閉じるか
小さい場の一段の繰り込み定理	(c) (e)	紙	入力が Wilson の作用そのものの段 0 の言明を書き下すのに要る未定義の対象が、背景場だけか
大きい場の評価	(c) (d) (e)	小さい数値実験	穴ごとの作用の、段についての下限が、段を深くしても面の数に比例する正の値に留まるか
大きい場の気体	(a) (b) (e)	小さい数値実験と設計	文字どおりの形は固定の格子でいつでも立つ（軽い）か、全ての領域での等式の形は小さい格子で数値では成り立たない 読 （強い）。その間の、一様性を含む形を決める。気体の両立の定義（隣接しない／重ならない）の選びも残る（28-05）
段に一様な帰納	(c) (e)	設計（帰納のノルム）と紙	帰納の座標 r_k を類の座標で定義したとき、自由場の縮み（無関係な項の縮み）が r_k の漸化式の係数になるか
一段の写像の縮みと終点の合わせ	(c)	小さい場の一段の繰り込み定理・段に一様な帰納の形が決まった後の紙	段に一様な帰納の座標の言葉で、縮みの条件が同じ座標の言明になるか

13 行のうち 5 行（大きい場の結合への寄与・活性の再帰・供給の稀さ・大きい場の評価・大きい場の気体）は、大きい場の扱い（活性と気体）に集まっています。その中身（評価の形と気体の前提）は、言明の形が決まるまでこの本の章にしません。

03

対象そのものが無い・下流の 8 行

表 3　対象が無いか、上流が決まってから形を決める行

行	理由	何が決めるか
流した観測量のブロック変数による近似	(c)	格子の勾配流と流した観測量の定義（§06）
箱の大きさに一様な紫外の評価	(e)	箱の連続極限の前提と紫外の安定性の前提の形が決まった後に、その一様性の版として決める
橋の一段の紫外の評価	(c)	回した細かい格子から標準の粗い格子へのブロック写像の定義（紙の素描だけ）
無限体積の極限が箱の形に依らないこと	(c)	無限体積の極限（箱を大きくした極限）の定義の後
極限が自由場でないこと	(c)	どの量で言うかの選び（たとえば、段 m_0 で合わせたときの別の段 m_1 の同じ観測量の極限値）
捩れを入れる写像の費用の問い	(c)	写像 T の定義（やり方が未定）。この行は一つの尺度の判定の十分条件なので、一つの尺度の判定を直接確かめる道もある
小さな捩れた箱のギャップと挿入の一様な受理	(c)	捩れた小さい箱の隙間を測る作用素と、駆動した渦の挿入の写像の定義
帯の比較（ギャップの言葉）	(c)	空間の面つきの箱の器と、箱の質量 $m_0(L)$ の定義

04

量化の順と真偽 — 帯の 3 行

表 4　帯の側の未定の行

行	理由	何が決めるか
張力の倍化の不等式	(b)(f)。(d) は β に一様な形についてだけ	小さい数値実験。横の大きさ N を止めて $\beta \to \infty$ とすると、渦の最小作用（21-05）が N とともに増える数が在り、β に一様な形に反する向きの兆しです読。物理の大きさを止めた列（$N = L_*/a$、$\beta = \beta(a)$）の上で言う形にするか、量化の順を決める
渦の自由エネルギーの単調性と繰り込みの比較	(b)	有限の非可換群の格子で、単調性が破れる例が在る読。$SU(2)$ で何を仮定として置くかを決める（26-06 の形）
面積則からギャップへ	(b)	紙（道の選び）。素朴な形は二次元で偽。質量ギャップの側の最後の矢印を、帯の比較（ギャップの言葉）と閾の上の安定性から箱の質量の一様な下界を経て一様な減衰へ、の一本に決めるか

05

形を決める問いの順

安く決まるもの（紙か小さい数値）を先に、同じ安さなら下流の多いものを先に並べると、次の順です。1〜3 は互いに独立です。

1. 合わせの観測量 Y_0 と段 m_0 を決め、実効の結合を一つに定義する（実効の結合の定義と連続性・結合の一段の正味の括弧。紙）。
2. 二段の事象の稀さの面の部分（二段の事象の稀さ：面の部分）を、押し出しの測度で数にする（小さい数値実験）。定義された対象だけで書けている前提なのに、小さい例の確かめが無い行です。
3. 背景の零階の運びを、どの背景・どのノルムで言うかを決める（紙）。二段の事象の稀さ：背景の不変量の部分の背景の定義も同時に決まる。
4. 活性の再帰を、一段だけ押し出した測度で言えるか（紙と小さい数値。2 の後）。
5. 拘束つき減衰の定理を、一次元で入力から出力まで一本に通し、仮定が同時に満たせるかを確かめる（Lean）。
6. 大きい場の気体の一様性を数で見る（小さい数値実験）。
7. 大きい場の評価の、段の深さへの依り方を見る（数値）。
8. 段に一様な帰納の二次の部分を一本に通す（紙。1 の後）。
9. 張力の倍化の不等式が立ちうる領域の形を見る（数値）。
10. 質量ギャップの側の最後の矢印を一本に決める（面積則からギャップへ。紙）。

06

対象の定義がまだ無い段

問題文の要求のうち二つは、前提の形を論じる前に、言明を書く対象が要ります（19-07 §08）。

段	書きたい言明	足りない対象
細かい観測量	点の場・流した観測量の期待値の連続極限での収束	格子の勾配流と、流した観測量の定義（本書の Lean に無い）。近似の行（流した観測量のブロック変数による近似）も、この定義が無いので形が未定
回転	回した観測量の期待値の一致（Euclid の群の不変）	超立方の群より細かい回転が作用する観測量（細かい観測量の段）か、回した格子から標準の格子への一段（橋の一段の紫外の評価の対象）
無限体積	箱を大きくした押し出しの測度の、窓の上の収束	定義を一つ足せば書ける（箱の座標での窓への制限か周期の延長）。強結合の窓では周期の持ち上げで書けて定理（20-03）
非自明	極限が自由場の極限と違うこと	書けるが、どの観測量で言うかが未定（極限が自由場でないこと）

07

この本が主張しないこと

- **質量ギャップの本体**。四次元の $SU(2)$ ヤン–ミルズ理論（どのコンパクト単純群でも）に質量ギャップが在ることについて、この本は何も示していません。強結合の窓での質量の下界（20-04）は、格子間隔を止めた一つの尺度の定理です。
- **連続極限の構成**。格子間隔を 0 にした極限の理論を、この本は構成していません。四次元のヤン–ミルズ理論の存在は、2026-11-10 に公開された構成が別の設計で示し、Lean で証明されている、と委員会が評価しました（第二巻）。本書の検討が先に組んだ条件つきの含意（本書の設計での小さな箱の弱い紫外の存在）の結論は、前提を置いたうえでの部分列の極限と、有限の格子の性質が極限に移ることまでで、その前提の多くは形が未定です（28-01）。
- **帯**。強結合の側と弱結合の側を一つの定数で跨ぐ言明（19-07 §07）について、この本は何も示していません。渦の床（21-02・21-03）は、格子間隔と横の大きさを止めた形です。強結合の窓の中の渦の自由エネルギーの上界（20-06）は率が横の大きさに依りませんが（前の因子は残る）、窓の外へは延びません。
- **閉じ込め**。強結合の窓の外での四次元の面積則も、渦の面積の指数から Wilson ループの面積則への移り（渦の面積の指数から Wilson ループの面積則へ）の再導出も、この本にはありません。強結合の窓の中の格子の面積則は 20-06 に在ります（既知の型の形式化。連続の Wilson ループは、この本にも公開された構成にもありません）。
- **非自明性と回転不変**。問題文のこの二つについて、この本は言明の形も決めていません（回転は対象がまだ無い。19-07 §08）。
- **強結合の窓の定理の位置**。強結合の窓での質量の下界は、示すべき言明が自明に立つ側の例で、言明の中身の確かめではありません（19-07 §01）。

これまでの部の「主張しないこと」の索引は 27-04 にあります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
形が未定の 24 行を出どころで三つに分けた（表現の水準 13、対象が無い・下流 8、量化と真偽 3）	どの行の形も決めていない
行ごとに、形を決めるのが紙・数値・設計のどれかと、最小の問いを書いた	問いの答え。問いの順は安さと下流の数で並べたもので、答えの見込みではない
細かい観測量と回転の段は、言明を書く対象がまだ無い	その対象の定義

言えている	言えていない
この本は質量ギャップの本体・連続極限の構成・帯について何も示していない	—

出典と再現

もの	種別	出典・道具
24 行の分け方、最小の問い、問いの順	仮	本書の検討の前提の棚卸し（2026-11-13）
単調性が破れる有限の非可換群の例	読	本書の検討の数値の記録（有限群の格子の直接の和）。26-06 の記述
面積則からギャップへの素朴な形が二次元で偽であること	初	28-03 §07 の反例（面積則を持つ二次元のゲージ理論と、臨界の二次元 Ising 模型の直積。臨界点で隙間が閉じることは 2-09 §07）
主張しないことの索引	—	27-04

この章で使った語 — 形が未定、表現、実効の結合、活性、気体、背景場、類、量化の順、勾配流、流した観測量、主張しないこと。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：A-01 記号表。あわせて読むなら A-08 質量ギャップまでの地図 — この一覧の更新と、問いの進み具合はそちらで追います。

記号表 — 一つの字に一つの約束、二つの意味は名指して分ける

> この章は記号と用語の案内です。

この章で分かること — この本の記号を「意味・定義した章・注」で引けます。ゲージ場の三つの書き方、結合の六つの書き方、C_P の正規化を、換算の式と表と動く図で並べます。同じ字の別の意味（β・Δ・η・σ・Ω など）を一表で読み分けます。

前提となる章 — なし。辞書として、どの章からでも開けます。各行の「章」の列が、その記号を定義した章です。

先に言うこと — この章は約束の一覧で、内容の主張を含みません。式の正しさは各章で示し、ここでは換算の算術と生成子の規格化だけをこの端末で確かめました。仮定の名前は A-06 名前の索引に分けます。質量ギャップについて、この章は何も示していません。

この章の順序

1. この表の使い方 — 共通の約束と、規約の三つの選択
2. 時空と添字 — 符号 $(-,+,+,+)$ と虚時間（表 1）
3. 群とリー環 — 生成子の規格化と構造定数（表 2・表 3）
4. ゲージ場の三つの書き方 — g と i の置き場所（表 4）。寄り道：なぜ物理は i を付けたがるのか
5. 格子の記号 — リンク・プラケット・リンクの角度（表 5）
6. 結合の六つの書き方 — 換算と一ループの係数（表 6・図 1・表 7）
7. 尺度・長さ・質量 — 格子単位と物理単位、記号 $\asymp$（表 8）
8. 確率・スペクトル・緩和 — 三つの C_P と二つの η（図 2・表 9・表 10）
9. 同じ字の別の意味 — 読み分けの一覧（表 11）。寄り道：記号の衝突を無くすことはできるか

01

この表の使い方 — 一つの字に一つの約束

この章は引く辞書で、前から読む必要はありません。表は「記号・意味・章・注」の四列で、「章」はその記号を定義した章です。式の正しさはその章で確かめてください。

全章に共通の約束は四つです。第 3 部から先は $\hbar = c = 1$。同じ項に二度出た添字は和を取る。ln と log はどちらも自然対数。同じ字が二つの意味を持つときは章の冒頭で宣言する（一覧は §09）。そのうえで、記号の見かけは次の三つの選択で変わります。

$$\underbrace{\text{ゲージ場の書き方}}_{\S04\ \text{の三通り}} \times \underbrace{\text{結合の書き方}}_{\S06\ \text{の六通り}} \times \underbrace{C_P\ \text{の正規化}}_{\S08\ \text{の二通り}} \tag{1}$$

(1) の選択は物理の中身を変えず、係数と符号だけを変えます。ただし同じ条件が別の数に見えます。例。Shen–Zhu–Zhu の強結合の条件 $|\beta_{\mathrm{SZZ}}| < 1/(16(d-1))$ は、四次元（$d = 4$）で $\beta_{\mathrm{SZZ}} < 1/48$ となり、この本の Wilson の β では SU(2) で $\beta < 0.0833$、SU(3) で $\beta < 0.1875$ です（§06）計算 。仮定の名前（拡散型緩和時間の仮定・緩和時間の上界の仮定・構成の八つの言明 など）は A-06 名前の索引、札の凡例は 0-01 にあります。

02

時空と添字 — 符号は $(-,+,+,+)$、虚時間で全部 $+$ になる

物理の時空はミンコフスキー時空で、距離の二乗に時間の向きだけ負の符号が付きます（2-04・既存の記事 符号が一つ違う）。構成的場の理論と格子の議論は、時間を虚数に回したユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ で行います（4-02）。

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1), \qquad t = -i\tau, \qquad A_0 = iA_4, \qquad F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \longmapsto \sum_{\mu,\nu=1}^{4} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{2}$$

(2) は左から、計量・回し方（Wick 回転）・回した結果です。ユークリッドでは計量が単位行列なので、上下の添字を区別しません。例。光の道 $-t^2 + |\mathbf{x}|^2 = 0$ は、回すと $\tau^2 + |\mathbf{x}|^2$ になり、原点以外で正です。

表 1　時空と添字

記号	意味	章	注
$x^\mu,\ \mu = 0,\dots,3$	ミンコフスキーの座標（$x^0 = t$）	2-04	逆の符号 $(+,-,-,-)$ の教科書もある
$x_4 = \tau,\ \mu = 1,\dots,4$	虚時間とユークリッドの添字	4-02	$\tau = it$
$i,j,k = 1,2,3$	空間の添字	3-02	色の添字 a,b,c と混ぜない
$E_i,\ B_i$	色の電場・磁場	3-02	$B_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk}$、ユークリッドで $E_{E,j} = F_{4j}$

記号	意味	章	注
d	（ユークリッド化した）時空の次元	0-03	問題文は $d=4$
$\mathbb{Z}^d$, $a\mathbb{Z}^d$	整数格子、間隔 a の格子	5-01	§05

03

群とリー環 — 生成子は $\mathrm{tr}(T^aT^b)=\frac{1}{2}\delta^{ab}$ で揃える

ゲージ群 G はコンパクトな単純リー群で、例はほとんど $\mathrm{SU}(N)$ です（1-04）。生成子には物理の流儀でエルミートな T^a を取ります。規格化を決めないと、構造定数も結合定数も定数倍ずれます。

$$[T^a,T^b]=i\,f^{abc}\,T^c,\qquad \mathrm{tr}(T^aT^b)=\tfrac{1}{2}\,\delta^{ab},\qquad a,b,c=1,\dots,N^2-1 \tag{3}$$

数学の流儀では反エルミートな $X^a=-iT^a$ を取り、$[X^a,X^b]=f^{abc}X^c$ と i の無い形になります。同じ f^{abc} です。例。SU(2) では $T^a=\sigma^a/2$ で $f^{abc}=\varepsilon^{abc}$、SU(3) では $T^a=\lambda^a/2$（Gell-Mann 行列の半分）です。随伴のカシミール C_A（$f^{acd}f^{bcd}=C_A\delta^{ab}$）は N、基本のカシミール C_F（$\sum_a T^aT^a=C_F\mathbf{1}$）は $(N^2-1)/2N$、表現の指数 $T(R)$（$\mathrm{tr}_R\,T^aT^b=T(R)\delta^{ab}$）は基本表現で $\frac{1}{2}$ です。一ループの係数（4-06）に入るのは C_A と $T(R)$ です。

表 2　生成子の規格化の数値確認 計算

群	$\max\lvert\mathrm{tr}\,T^aT^b-\frac{1}{2}\delta^{ab}\rvert$	C_F	C_A	独立な非零の f^{abc}（$a<b<c$）
SU(2)	0	0.75	2	$f^{123}=1$
SU(3)	1.1×10^{-16}	1.333333	3	$f^{123}=1$；$f^{147}=f^{246}=f^{257}=f^{345}=\frac{1}{2}$；$f^{156}=f^{367}=-\frac{1}{2}$；$f^{458}=f^{678}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

表 2 は、行列を書き下して $f^{abc}=-2i\,\mathrm{tr}([T^a,T^b]T^c)$ を求め、(3) に戻した残差（1.1×10^{-16} 以下）とカシミールが単位行列の定数倍であることを確かめたものです。

表 3　群とリー環の記号

記号	意味	章	注
G, $\mathfrak{g}$, N	ゲージ群、リー環、$\mathrm{SU}(N)$ の大きさ	1-03	大 N は 17-04
T^a, f^{abc}	エルミートな生成子、構造定数	1-04・3-02	規格化は (3)
σ^a, λ^a	パウリ行列、Gell-Mann 行列	1-04	σ は別の意味にも使う（§09）
C_A, C_F, $T(R)$	カシミールと表現の指数	4-06	本文の値
χ_r, d_r	表現 r の指標と次元	5-02	$\chi_r(U)=\mathrm{tr}_r\,U$
$\Omega(x)$	ゲージ変換（点ごとの群の元）	3-01	字 g は結合に取っておく

04

ゲージ場の三つの書き方 — g をどこに置き、i をどこに付けるか

同じゲージ場が三通りに書かれます。物理の章は「エルミートな A と結合 g を分ける」、経路積分と辞書の章は「g を場に吸収し、作用の前に $1/g^2$ を出す」、幾何の章は「反エルミートな 1-形式 $\mathcal{A}$」です。翻訳は一行です。

$$\hat{A} = g\,A, \qquad \mathcal{A} = -i\hat{A} = -ig\,A, \qquad \hat{F} = g\,F, \qquad \mathcal{F} = -i\hat{F} = -ig\,F \tag{4}$$

「吸収」は g を掛けるだけ、「幾何」はさらに $-i$ を掛けるだけです。ただし $-i$ で $\operatorname{tr} F^2$ の符号が変わります。エルミートな X では $\operatorname{tr} X^2 \geq 0$、反エルミートな $-iX$ では ≤ 0 なので、幾何の作用には負の符号が付きます。

表 4　ゲージ場の三つの書き方（作用はユークリッド）

	物理（g を D に置く）	物理（g を吸収）	幾何（反エルミート）
共変微分	$\partial_\mu - igA_\mu$	$\partial_\mu - i\hat{A}_\mu$	$d + \mathcal{A}$
場の強さ	$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$	$\partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - i[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]$	$d\mathcal{A} + \mathcal{A}\wedge\mathcal{A}$
ゲージ変換	$\Omega A \Omega^{-1} - \frac{i}{g}(\partial\Omega)\Omega^{-1}$	$\Omega \hat{A} \Omega^{-1} - i(\partial\Omega)\Omega^{-1}$	$\Omega \mathcal{A} \Omega^{-1} - (d\Omega)\Omega^{-1}$
作用 S_E	$\frac{1}{2}\int \operatorname{tr} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\int F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}$	$\frac{1}{2g^2}\int \operatorname{tr} \hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}_{\mu\nu}$	$-\frac{1}{g^2}\int \operatorname{tr} \mathcal{F}\wedge *\mathcal{F}$
使う章	3-02・3-03・第 4 部（4-02 を除く。4-03 は両方）	0-01・4-02・18-04	1-07・3-04・3-05

位相電荷 Q は、第二 Chern 数 $c_2 = \frac{1}{8\pi^2}\int \operatorname{tr}\mathcal{F}\wedge\mathcal{F}$ と $Q = -c_2$ の関係にあり（3-05 の (2)。符号の差は $\mathcal{F} = -igF$ から来る $(-i)^2 = -1$）、作用には $S_E \geq 8\pi^2|Q|/g^2$ の下界があります 既知 。例。SU(2) で $g^2 = 1$（$\beta = 4$）なら、一つのインスタントンの作用は $8\pi^2 = 78.96$、重み e^{-S_E} は 5×10^{-35} 程度です 計算 。

寄り道：なぜ物理は i を付けたがるのか

飛ばしてよい。量子力学では観測量はエルミートな作用素で、固有値が実数です（2-05）。色の荷は観測量なので、物理は生成子をエルミートに取り、$e^{i\theta^a T^a}$ と i を指数に出します。幾何の側では、リー環は群の単位元での接ベクトルの空間で、$\mathfrak{su}(N)$ は反エルミート行列そのものです。e^X と書けて、曲率に i も g も出ません。正確には、二つの流儀は基底を i 倍だけ取り替えたもので、同じ群の同じ接続を表します。違いは $\operatorname{tr} F^2$ の符号と f^{abc} の前の i だけです。

05

格子の記号 — リンク・プラケット・Wilson ループ

格子ゲージ理論は時空を間隔 a の格子に置き換え、各辺（リンク）に群の元を置きます（5-01）。記号の要は Wilson 作用と、その前の係数 β です。

$$S_W(U)=\beta\sum_{P}\Big(1-\frac{1}{N}\operatorname{Re}\operatorname{tr}U_P\Big),\qquad \beta=\frac{2N}{g^2},\qquad U_P=U_{x,\mu}U_{x+a\hat\mu,\nu}U^{-1}_{x+a\hat\nu,\mu}U^{-1}_{x,\nu}\tag{5}$$

(5) は、小さな正方形（プラケット P）を一周した積 U_P の単位元からのずれを全部足したものです。滑らかな場で $a\to 0$ のとき連続の作用に係数まで合うのが $\beta=2N/g^2$ です（5-01 §05）既知 。この本の β は、断りの無い限りこの Wilson の β です。SU(2) の章（23-01・23-02・18-05）の $\beta=4/g^2$ は $N=2$ の同じ式です。リンクは場を $U_{x,\mu}\approx e^{-igaA_\mu}$ の形でだけ見ます。1-07 の平行移動はその逆元で、プラケットの指数の符号が 1-07 と逆なのはこのためです（トレースは変わりません）。

SU(2) のリンクは角度でも書きます。第 23 部の検討は $U=e^{i\vartheta\cdot\sigma}$ と書き、本の (3) では $U=e^{i\theta^aT^a}$ なので、$\theta=2\vartheta$ でつながります。

$$U=e^{i\vartheta\cdot\sigma}=e^{i\theta^aT^a}\quad(\theta^a=2\vartheta^a),\qquad \tfrac12\operatorname{tr}U=\cos|\vartheta|\tag{6}$$

例。$\vartheta=(0.3,-0.2,0.5)$ では、行列の指数関数で計算した $\frac12\operatorname{tr}U$ と $\cos|\vartheta|$ がどちらも 0.815941 です 計算 。角度の取り方の違いは、§08 の C_P に定数倍として効きます。

表 5　格子の記号

記号	意味	章	注
a, L	格子間隔、周期格子の一辺の点の数	5-01	リンク $4L^4$ 本・プラケット $6L^4$ 枚
$U_\ell=U_{x,\mu}$	リンク ℓ の上の群の元	5-01	$U_{x+a\hat\mu,-\mu}=U^{-1}_{x,\mu}$
P, U_P	プラケットと一周の積	5-01	$1-\frac1N\operatorname{Re}\operatorname{tr}U_P\in[0,2]$
μ_β	Wilson 測度 $Z^{-1}e^{-S_W}\prod dU_\ell$	5-01	dU は Haar 測度
$W(C)$, $W_{R\times T}$	Wilson ループ $\frac1N\operatorname{tr}U_C$、長方形	5-02	T は時間の長さ
σ	弦張力：$\langle W_{R\times T}\rangle\approx e^{-\sigma RT}$	5-02・5-08	格子単位。物理単位は $\sqrt{\sigma}$
ϑ, θ	SU(2) のリンクの角度、$\theta=2\vartheta$	(6)・23-13	θ 項の θ と別
b, k, $\delta(b)$	一段の倍率、段数、記帳の取りこぼし	23-02	第 23 部の検討の定義

```
06
```

結合の六つの書き方 — β ・ β_{Ch} ・ β_{SZZ} ・ λ ・ g^2 ・ α

同じ結合 g^2 が、文献ごとに別の字と別の規格化で書かれます。作用 (5) と項ごとに比べれば換算が決まります（5-01 の (8a) の再掲）。

$$\beta=\frac{2N}{g^2},\qquad \beta_{\mathrm{Ch}}=\frac{\beta}{N},\qquad \beta_{\mathrm{SZZ}}=\frac{\beta}{N^2},\qquad \lambda=g^2N=\frac{2N^2}{\beta},\qquad \alpha=\frac{g^2}{4\pi}\tag{7}$$

β_{Ch} は作用を $\beta_{\mathrm{Ch}}\sum_P \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(I-U_P)$ と書く Chatterjee の形、β_{SZZ} は逆結合を $N\beta_{\mathrm{SZZ}}$ と書く 't Hooft の規約（Shen–Zhu–Zhu。5-04）、λ は 't Hooft 結合、α は物理でいう結合の強さです。走りの係数も変数ごとに書き方があり（4-06 の表 1）、この本では b_0 が g の、κ が Wilson の β の係数です。

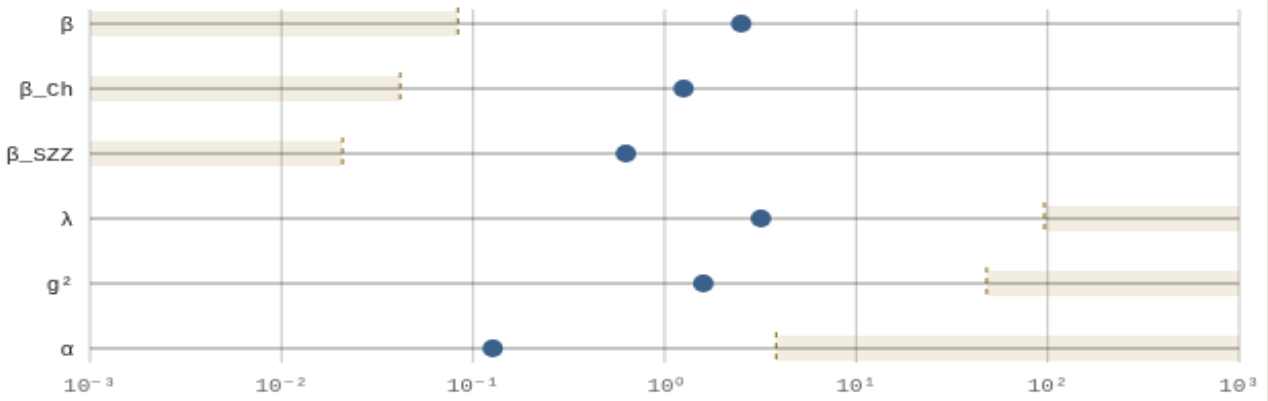
$$\mu\frac{dg}{d\mu}=-b_0g^3+\cdots,\qquad b_0=\frac{11N}{48\pi^2},\qquad \frac{d\beta}{d\ln\mu}=\kappa=4Nb_0=\frac{11N^2}{12\pi^2}\tag{8}$$

(8) の右は、a を半分にするごとに β を $\kappa\ln 2$ 上げれば同じ物理が保たれる、という一ループの予言です 既知 。SU(2) の $\kappa=11/(3\pi^2)$ は、第 23 部の検討の「段の式の傾き」と同じ数で、第二巻の一ループの傾き s = 11C_g/(24π²)（10-01）の SU(2)（C_g = 8）での値とも同じ数です。どれも、既知の係数を格子の規約で書いたものです（23-14）。

表 6　群ごとの定数（純 SU(N)） 計算

N	dim G	b_0	$2b_0$	κ	$\kappa\ln 2$	$b_0^{(\alpha)}=11N/12\pi$（$\mu^2\,d\alpha/d\mu^2=-b_0^{(\alpha)}\alpha^2$、4-06 の表 1
2	3	0.04644	0.09288	0.3715	0.2575	0.583
3	8	0.06966	0.13932	0.8359	0.5794	0.875

図 1　結合の換算器。つまみで Wilson の β を動かすと、六つの書き方の値（●）が対数の目盛りの上で一斉に動きます。縦の破線は四次元（$d=4$）での Shen–Zhu–Zhu の条件の端 $\beta_{\mathrm{SZZ}}=1/(16(d-1))=1/48$、色の帯は条件が成り立つ側です。SU(2)／SU(3) の切り替えで端の位置が変わります。



SU(2)・β = 2.512：β_Ch = 1.256、β_SZZ = 0.6280、λ = 3.185、g² = 1.592、α = 0.1267。条件の外（端は β = 0.08333）。a を半分にする一ループの増分 κ ln2 = 0.2575

計算 この図の数値はこの端末で計算した。図は (7) をその場で計算します（表 7 と同じ式）。

表 7　換算の数値例と、四次元（$d=4$）での強結合の条件の端 計算

場合	β	β_{Ch}	β_{SZZ}	λ	g^2	α
SU(2)・$\beta=2.5$	2.5	1.25	0.625	3.2	1.6	0.12732
SU(3)・$\beta=6.0$	6	2	0.66667	3	1	0.07958
SU(2)・条件の端	0.08333	0.04167	0.02083	96	48	3.81972
SU(3)・条件の端	0.1875	0.0625	0.02083	96	32	2.54648

't Hooft の規約の β_{SZZ} と λ では、条件の端が N に依りません。数値計算でよく使う SU(2) の $\beta=2.5$ と条件の端は、α で約 30 倍離れています。条件は各文献の規格化のまま読むもので、ここの換算はこの本の算術です。

07

尺度・長さ・質量 — 格子単位と物理単位を分ける

長さと質量の記号は、格子単位（格子間隔を 1 とした数）と物理単位で二重になります。混同すると「格子で隙間がある」と「連続で隙間がある」が同じ文に見えます（4-11）。

$$m_{\mathrm{lat}}=\frac{1}{\xi},\qquad \Delta=m_{\mathrm{phys}}=\frac{m_{\mathrm{lat}}}{a},\qquad \xi_{\mathrm{phys}}=a\,\xi \tag{9}$$

ξ は格子単位の相関長で、二点相関の指数減衰の速さで決めます（2-08 の (6)）。連続極限では $a\to 0$ と $\xi\to\infty$ を、積 $a\xi$ が一定になるように同時に取ります。例。$\xi=20$、$a=0.05$ なら $\xi_{\mathrm{phys}}=1$ です。a を半分にすると $\xi=40$ が要り、一ループでは β を $\kappa\ln 2$ 上げることに当たります。二つの量が定数倍の範囲で同じことは次の記号で書きます。

$$A\asymp B\quad\Longleftrightarrow\quad \exists\, 0<c\le C:\ \ c\le A/B\le C\quad\text{(考えている範囲のすべてで)} \tag{10}$$

(10) は比が 0 にも無限大にも行かないことで、冪の指数だけを比べる $\ln A/\ln B\to 1$ より強く、対数の因子のずれを見分けます（§08 の図 2）。

表 8　尺度・長さ・質量の記号

記号	意味	章	注
H, Ω, $\mathcal{H}$	ハミルトニアン、真空、Hilbert 空間	4-11	$H\Omega=0$
Δ, m	Δ：問題文の、励起のエネルギーの下界となる定数。m：Δ として取れる値の最大（スペクトルの下端）	0-03・4-11	$m=\inf\sigma(H\vert_{\Omega^\perp})$。隙間がある $\Longleftrightarrow m>0$
ξ, m_{lat}, m_{phys}	相関長（格子単位）、$1/\xi$、m_{lat}/a	2-08・18-03	(9)

記号	意味	章	注
μ	繰り込みの尺度（運動量）	4-06	添字・測度と同じ字（§09）
Λ	次元転移の尺度（一ループで $\mu e^{-1/(2b_0 g^2)}$）	4-07	値は方式に依る。比 $m/\sqrt{\sigma}$ は依らない
ξ_{RG}，$a := 1/\xi_{\mathrm{RG}}$	記帳の長さ $b^{k(\beta)}$ と、それで決めた格子間隔	23-01	第 23 部の検討の定義。第 5 部の a とは記帳の長さの鎖の下で揃う

08

確率・スペクトル・緩和 — 三つの C_P と二つの η

本の後半では、揺らぎが均される速さを表す Poincaré 定数 C_P が中心に来ます（1-10）。分散を傾きの二乗の平均で割った比の上限です。

$$C_P = \sup_{f} \frac{\mathrm{Var}_\mu(f)}{\mathcal{E}(f)}, \qquad \mathcal{E}(f) = \mathbb{E}_\mu\Big[\sum_{\ell} |\nabla_\ell f|^2\Big], \qquad \lambda_1 = \frac{1}{C_P} \tag{11}$$

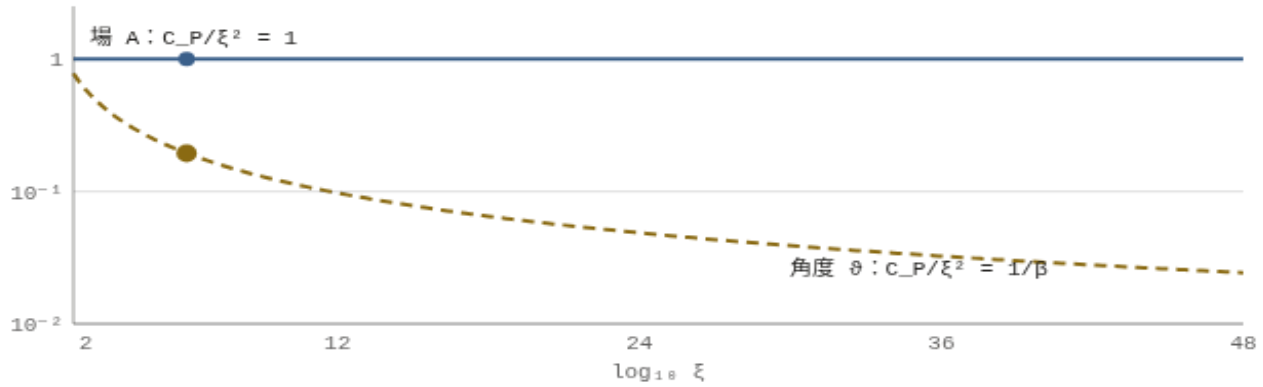
λ_1 は μ を保つ Langevin 力学の隙間です。同じ C_P の字が三つの量に使われます。真空の C_P は一つの時刻の真空の測度の C_P（$\Delta = 1/(2C_P^{(\alpha)})$。運動項 $\frac{1}{2}p^2$ の規約、有限自由度で等号。2-05 §08・A-06 表 4）、経路の C_P は経路の測度（Wilson 測度）の C_P（本書の検討の記録の C_P）、目盛りで測った経路の C_P は、経路の C_P の傾きをリンクの角度 ϑ で測るか場 $A = \sqrt{\beta}\,\vartheta$ で測るかの正規化を名指したものです（23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定）。

$$\mathcal{E}_A = \frac{\mathcal{E}_\vartheta}{\beta}, \qquad C_P[\mathcal{E}_A] = \beta\, C_P[\mathcal{E}_\vartheta], \qquad \text{自由近似で } \; C_P^{(A)} = \xi^2,\; C_P^{(\vartheta)} = \frac{\xi^2}{\beta} \quad (\mathrm{SU}(2)) \tag{12}$$

自由近似は、作用を二次の項だけ残したガウスの自由場とみなす近似で、$C_P^{(A)} = 1/m^2 = \xi^2$ となります（m は格子単位）。(12) の A は §04 の A を格子単位で測ったものです（$\sqrt{\beta}\,\vartheta^a = -aA^a$、符号を除いて同じ場）。

(12) は、正規化を名指さずに「$C_P \asymp \xi^2$」と書くと文の真偽が変わりうることを示します。冪の指数を比べる文（緩和時間の仮定）は β の対数の分しか動かず、二つの正規化で同じ文です。比が定数の範囲に収まるという帯の文は、正規化で真偽が変わります。だからこの本は帯の文を $(\xi^2)_{\mathrm{band}}[\mathcal{E}_\vartheta]$ のように正規化つきで書きます（23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定）。

図 2　正規化を名指す理由（SU(2)・自由近似）。横軸 $\log_{10}\xi$、縦軸 C_P/ξ^2（対数）。実線が場の正規化 1、破線が角度の正規化 $1/\beta$。β は、ξ を記帳の長さの一ループの式 $\xi \approx e^{3\pi^2\beta/11}$（定数倍を除く）で置き換えて結んでいます（漸近スケーリングを仮定 物理 ）。つまみで ξ を動かすと、局所的な冪の指数 $\ln C_P / \ln \xi$ が読み出しに出ます。



ξ = 10^6.0：β = 5.133、C_P^(ϑ)/ξ² = 0.1948、冪の指数 1.8816（角度）／2（場）

計算 この図の数値はこの端末で計算した。図は (12) と一ループの式をその場で計算します（表 9 と同じ式）。

表 9　角度の正規化での C_P/ξ^2 と局所的な冪の指数（SU(2)・自由近似・ξ を記帳の長さの一ループの式で置き換えて $\beta=\frac{11}{3\pi^2}\ln\xi$。漸近スケーリングを仮定 物理 ） 計算

ξ	β	$C_P^{(\vartheta)}/\xi^2$	$\ln C_P^{(\vartheta)}/\ln\xi$	$\ln C_P^{(A)}/\ln\xi$
10^2	1.7109	0.5845	1.8834	2
10^6	5.1326	0.1948	1.8816	2
10^{12}	10.2652	0.0974	1.9157	2
10^{48}	41.0609	0.0244	1.9664	2

角度の正規化の比は 0 に向かうので、$(\xi^2)_{\mathrm{band}}[\mathcal{E}_\vartheta]$ はこの自由近似で破れます。冪の指数 $2-\ln\beta/\ln\xi$ は $\xi=10^{48}$ でも 1.97 ですが、2 に向かいます。これは記号の約束を示す例で、ヤン–ミルズの測度の C_P について何かを示したものではありません。

指数も二つあります。動的指数 z は $C_P\asymp\xi^z$ の冪で、断りの無い η は $\eta_{\mathrm{dyn}}=2-z$ です（18-05 §02・2-10）。静的な $\eta_s=2\Delta_O-(d-2)$ は演算子 O の尺度次元 Δ_O から決まる相関の冪で、二つが等しいのは関係 $z=2-\eta_s$ が成り立つ場合だけです。例。二次元 Ising の Glauber 力学では $\eta_s=1/4$、$\eta_{\mathrm{dyn}}=-0.1665$ です（18-03） 物理 。

表 10　確率・スペクトル・緩和の記号

記号	意味	章	注
$\mathbb{E}_\mu$, Var_μ, $\langle\cdot\rangle$	期待値、分散、物理の期待値	1-08	$\langle\psi,\phi\rangle$ は内積
$\sigma(H)$	作用素のスペクトル	1-10	弦張力 σ と別
C_P, λ_1, $\mathcal{E}_\vartheta$, $\mathcal{E}_A$	(11)(12)	1-10・23-01	三つの C_P：真空の C_P・経路の C_P・目盛りで測った経路の C_P
τ_{exp}, τ_{int}	指数的・積分された自己相関の時間	2-10・5-07	連続時間の Langevin で $\tau_{\mathrm{exp}}=C_P$

記号	意味	章	注
z, η_{dyn}, η_s	動的指数、$2-z$、静的な冪	2-10・18-05	計量 $\eta_{\mu\nu}$ と別

09

同じ字の別の意味 — 文脈で読み分ける一覧

数学と物理の慣習が同じ字を別のものに当ててきたので、一冊の中で衝突は避けられません。この本は慣習の強いものはそのまま残し、章の冒頭で意味を宣言します。読み分けの目安は「添字と引数」です。例。18-04 の $\beta(ba)=\beta(a)-\kappa\ln b+\cdots$ は、格子間隔を引数に取る Wilson の逆結合で、β 関数 $\beta(g)$ ではありません。

表 11　同じ字の別の意味

字	意味（章）	読み分け
β	Wilson の逆結合（5-01。換算した β_{Ch}・β_{SZZ} は §06）／逆温度 $1/k_BT$（2-08。2-07 では輪の長さ $\beta\hbar$）／臨界指数 β（2-08 §06、二次元イジングで $1/8$）／β 関数（4-06）／三つの C_P の (β)（23-01）	断りが無ければ Wilson の逆結合。β 関数は引数 g 付き。指数は α,γ,ν と並べて書く
Δ	質量ギャップ（4-11）／ラプラシアン Δ_{lat}（1-08）／尺度次元 Δ_O（18-05。17-08 のスケーリング次元も同じ）／一段の減り $\Delta(b)$ と MCRG の下げ幅 $\Delta\beta$（18-04）／余積 $\Delta(\Gamma)$（4-05）／群の量 Δ_G（16-01 の Adhikari–Cao。16-05・16-08 の Δ_G は質量ギャップ）／差 Δx（2-04）	尺度次元は演算子の添字付き、ラプラシアンは lat 付き、余積は図を引数に取る。Δ_G は章の宣言を見る
η	計量 $\eta_{\mu\nu}$（2-04）／$\eta_{\mathrm{dyn}},\eta_s$（18-05）	添字二つなら計量
κ	一ループの傾き（4-06）／ガウス鎖の減衰率 $1/\xi$（2-08）	2-08 の中だけ減衰率
λ	Gell-Mann 行列（1-04）／'t Hooft 結合（17-04）／固有値 λ_1（1-10）	色の添字なら行列、数字の添字なら固有値
σ	パウリ行列（1-04）／弦張力（5-02）／スピン σ_x（2-08）／スペクトル $\sigma(H)$（1-10）	引数が作用素ならスペクトル
Ω	ゲージ変換 $\Omega(x)$（3-01）／真空（4-11）	点 x の引数があればゲージ変換
θ	θ 項の角（3-05）／リンク角 2ϑ（§05）／プラケットの gac（5-01）	Q と掛かっていれば θ 項
Λ	ローレンツ変換（2-04）／次元転移の尺度（4-07）	行列なら変換
μ	時空の添字／繰り込みの尺度（4-06）／測度 μ_β	下付きの位置なら添字
a	格子間隔（5-01）／記帳で決めた間隔 $1/\xi_{\mathrm{RG}}$（23-01）／経路の始点（2-07 の 01〜06 節。07 節からは刻みの幅）／色の添字（3-02）	上付きなら色。2-07 では節で切り替わる
δ	クロネッカーの δ^{ab}（1-04）／記帳の取りこぼし $\delta(b)$（23-02）	添字二つならクロネッカー、倍率 b の引数なら取りこぼし
P	プラケット P（5-01）／Poincaré 定数 C_P の添字（1-10）	C の下付きなら Poincaré 定数

字	意味（章）	読み分け
H	ハミルトニアン（4-11）／Ising のエネルギー関数（2-08）	仮定は文の名前
I	単位行列（5-01 の $\mathrm{tr}(I-U_P)$）／変形 Bessel 関数 $I_k(J)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{J\cos\theta}\cos k\theta\,d\theta$（0-04 の 06・07 節）	添字 k と引数があれば Bessel 関数
ゴースト	Faddeev–Popov の反可換な場 $c^a,\bar c^a$（4-08 §03）／Pauli–Villars の正則化の負の重みの状態（4-10）	場なら Faddeev–Popov、内積が負の状態なら Pauli–Villars
リンクの向き	平行移動は始点から終点へ運ぶ（1-07）／格子のリンク $U_{x,\mu}$ はその逆元で $x+a\hat\mu$ から x へ運ぶ、$U\approx e^{-igaA}$（5-01 §02）／鎖の番号の付け方：3-01 は $U_j=U(j{+}1,j)$、3-02 は $U_n=U(n,n{+}1)$	トレースの値は向きに依らない。指数の符号を比べるときは各章の宣言（5-01 §05 の 1-07 との対応）を見る
T	生成子 T^a・指数 $T(R)$／時間の長さ（5-02）／温度（2-08）／転送行列 T（2-08・4-11。$T=e^{-aH}$）	上付きなら生成子。行列の冪やトレースに入っていれば転送行列

寄り道：記号の衝突を無くすことはできるか

飛ばしてよい。全部の量に別の字を割り当てれば衝突は無くなりますが、二つの理由でそうしません。一つは文献との距離で、弦張力を σ 以外で書くと格子の論文の表をそのまま読めなくなります。もう一つは字の数で、量の数はよく使う字体の字の数よりずっと多くなります。正確には、衝突が害になるのは同じ式や同じ表に二つの意味が並ぶときだけです。たとえば 23-01 表 3 の三つの C_P は Wilson の β と同じ表に並ぶので、肩の (β) のような添字だけに頼らず、名（真空の C_P・経路の C_P・目盛りで測った経路の C_P）で区別しています。

表 12　κ の対照（26-05 表 2 の写し）：κ の字を使う量

記号	意味	章
κ_{cb}	チェス盤の密度：全てのブロックの容器の偏りの積の、一ブロックあたりの幾何平均（26-05 の (4)）	26-05・26-00 表 1
κ（片側の橋）	片側の橋の命題（論文の定理 3.1）の比べの定数（$C_P\ge\kappa\,\xi^2$ の形）	23-01 §06
κ_{BE}	Bakry–Émery の曲率の下限	24-09
$\hbar\kappa$・κ_f	隣のサイトとの結合の強さの上界・Brascamp–Lieb の交差の強さ	23-06
$\kappa=3/1000$	Barta の行の、欠陥の外での下界	23-09
κ（第 24 部）	Langevin の計量と運動項の計量の比べの定数	24-09
$\kappa_{\mathrm{C7}}(k)$	長さ k の鎖の凸性の定数（23-11 の $\kappa(k)$ と同じ量）	26-07
κ_w	適応した剛性：捩れの生成場に沿った力の分散（幅 w。帯の候補の量の一つ）	26-10

表 13　θ と「帯」の別の意味（26-00 表 0 の写し）

語	意味	使う章	第 26 部の帯との関係
第 23・24 部の「帯」	23-01 §05・23-15 (5) の「帯の文」（量が長さの二乗の定数倍の幅に入るという言明）、23-09 の ℓ帯（頂上の帯に関わる長さ）、24-02 §03・§05 と 24-09 の「二次元の帯」（幅の狭い帯状の格子）。25-07 §06 の二次元の模型の「捩れた帯」も帯状の格子の意味	23-01・23-09・23-15・24-02・24-09・25-07	別の意味の語。この部の帯（尺度の区間）ではない
θ の三つの意味	23-09 の閾 θ（θ_B・θ_σ ほか、配位を谷の側と頂上の側に分ける値）・この部の区画の偏り $\theta(R;T_L^2)$（25-01 の (4)）・Tanizaki–Ünsal の真空角 θ（25-02 で $\theta=0$ と置く）	23-09・25-01・25-02	区画の偏りだけがこの部の量。他の二つは別の量

この章が言えている範囲

事項	言えている	言えていない
記号の約束（表 1・3・5・8・10・11）	この本の各章が使う約束を一か所に集めた一覧。定義はリンク先の章の通り	各記号が指す量の性質（存在・正値性など）。それは各章の札の範囲でだけ言える
生成子の規格化 (3) と構造定数（表 2）	SU(2)・SU(3) で数値的に確認 計算 。標準の約束 既知	一般の G（1-04 の一覧）
ゲージ場の三つの書き方（表 4）	(4) の置き換えで互いに翻訳できること。$Q=-c_2$（3-05 の (2)） 既知	—
結合の換算 (7) と定数（表 6・7・図 1）	この本の算術としての換算 計算 。b_0・κ は既知の一ループ係数の書き直し 既知	各文献の条件の中身（条件は文献の規格化のまま読む）
C_P の正規化（(12)・表 9・図 2）	自由近似と一ループの式（定数を除く）の下での算術 計算	格子ヤン–ミルズの測度の C_P の大きさ。緩和時間の仮定の成否
質量ギャップ	—	この章は記号の約束だけで、格子の上でも連続でも何も示していない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
各記号の定義（各表の「章」の列）	この本の章	リンク先の章。一次資料はその章の出典表による
問題文の Δ・m の定義	一次資料（本文を確認）	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”（Clay の公式問題説明）§4。4-11 の出典表による
Wilson 作用と $\beta=2N/g^2$	既知	K. G. Wilson, Phys. Rev. D 10 (1974) 2445–2459。5-01 の出典表による
β_{Ch} の規約	一次資料（本文を確認）	S. Chatterjee, “Yang–Mills for probabilists”, arXiv:1803.01950 (2018) §3。5-01 の出典表による

もの	種別	出典・道具
β_{SZZ} の規約と条件 $1/(16(d-1))$	本文の (1.2)(1.3) を確認（規格化の読みは 5-04）	H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, Comm. Math. Phys. 400 (2023) 805–851, arXiv:2204.12737。5-04 の出典表による
一ループの係数 b_0 と四つの書き方	既知	D. J. Gross, F. Wilczek (1973)・H. D. Politzer (1973)、D. Tong の講義録 §2.4、PDG の QCD の章。4-06 の出典表による
三つの C_P・$\mathcal{E}_\vartheta$・$\mathcal{E}_A$・記帳の長さ	第 23 部の検討の定義	23-01・23-13 の出典表
η_s・η_{dyn}・z	物理・第 23 部の検討	18-05・2-10 の出典表
表 2・表 6・表 7・表 9・(6)・§04 の数値	この端末で計算	Python 3・NumPy・SciPy：`generators.py`（規格化・交換関係・カシミール）、`constants.py`（(7)(8) の算術）、`normalisation.py`（(12) と一ループの式）。図 1・図 2 は同じ式を素の JavaScript で計算

次に読む章：A-02 用語集（語の意味を一〜三行で引き、章へ飛ぶ）。仮定の名前は A-06 名前の索引。

用語集 — 本書の言葉を一行で引き、定義の章へ飛ぶ

この章は用語集です。各語を定義の章へ案内します。

この章で分かること — 本書に出る主な言葉の意味を各 1〜3 行で。どの言葉がどの章で定義され、どの順に積み上がって「質量ギャップ」に届くか。同じ名で別の量を指す言葉（β・Δ・η・C_P・「ギャップ」）の見分け方。

前提となる章 — なし。どこから引いてもよく、詳しくはリンク先の章で読みます。記号の約束は A-01 記号表、仮定の一覧は A-06 名前の索引、文献は A-03 文献案内。

先に言うこと — ここでの説明は要約で、定義の正本はリンク先の章です。一行に縮めたために条件を省いた箇所があり、定理の仮定はリンク先で確かめてください。質量ギャップは示されていません（四次元の存在は 2026 年に公開された構成で、Lean で証明されている、と委員会が評価しました。6-00）。この本は問題の解決を主張しません。

この章の順序

1. 使い方と言葉の一本道 — 一項の形・絞り込み・群から質量ギャップまでの十二語（図 1）・よく出る言葉の表
2. 数学の準備（一）群・リー環・幾何 — 群・SU(2)・コンパクト単純群・リー群とリー環・接続・ホロノミー・曲率・ゲージ変換
3. 数学の準備（二）解析と確率 — ガウス測度・無限次元のルベーグ測度・自己共役作用素とスペクトル・変分原理・Poincaré 定数
4. 物理の準備 — 作用・状態とハミルトニアン・経路積分・虚時間・相関長・相転移・転送行列・Langevin と z（図 2）
5. ヤン–ミルズ理論：古典・量子化・公理 — 場の強さ・インスタントン・軌道空間・繰り込み・漸近自由・Λ・ゲージ固定と BRST・Gribov・Schwinger 関数・OS 公理・質量ギャップ
6. 格子ゲージ理論 — リンク変数・プラケット・Wilson 作用・Elitzur の定理・Wilson ループ・面積則と弦張力・強結合展開・連続極限・格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）

7. 構成的場の理論 — 構成的場の理論・自明性・クラスター展開・ブロック化・紫外安定性・確率量子化
8. 公開された構成を読む言葉（第 6〜14 部） — 公開された構成・評価書・確率の核・表示・強制された活動・射撃・暦・帰納の仮定・種・チェス盤の根・相の測度 ほか
9. 物理の描像 — 双対超伝導・中心渦・有効弦・大 N・ホログラフィー・一尺度
10. この本の言葉（第 16・18・23・24 部） — 確定度の二列・切れ目・拡散型緩和時間の仮定を軸に置いた検討（四次元格子の側・一段目の模型・一段目の組み立て・計算と検査）・第 24 部の言葉
11. 同じ名で別の量 — β・Δ・η・b_0・三つの C_P・三つの「ギャップ」・寄り道：「次元」という語の四つの使い方

01

使い方と言葉の一本道

各項は「見出し語」「1〜3 行の意味」「→ 定義を置いた章」でできています。並びは五十音順でなく本の部の順で、一つの項を読むのに要る言葉はたいてい少し上にあります。語で探すときは下の欄で絞り込めます（JavaScript が無いときはページ内検索で）。

本書の背骨は一つの式です。ハミルトニアン H の真空のエネルギーを 0 とし、その次のスペクトルまでの距離を質量ギャップと呼びます（4-11 §01）。

$$\Delta \;=\; \inf\bigl(\operatorname{spec} H \setminus \{0\}\bigr) \;>\; 0 \tag{1}$$

この式を読むには「スペクトル」「ハミルトニアン」「真空」が要り、四次元のヤン–ミルズ理論で意味を持たせるには群から格子・反射正値性までが要ります。図 1 はその一本道です。

図 1 言葉の一本道 — つまみで段を進めると、その言葉と定義の章が下に出る。「順に動かす」で一段ずつ進む。箱の番号は、その言葉を一本道の中で使う章（定義の章は下の各項のリンク先）



1. 群 — 対称性の集まり（1-02）

JavaScript が無くても、図の十二の箱と章番号はそのまま読めます。

表 1 は主な言葉が何章に出るかを数えたものです。「最初に出る章」は名前が出る章で、定義の章とは限りません。

表 1 主な言葉が出る章の数（付録を除く 105 章の本文。script・style・全体目次・meta 行を除いて数えた）

言葉	出る章	最初に出る章
質量ギャップ	101	0-01
閉じ込め	56	0-01
相関長	54	0-02
ゲージ変換	48	0-01
漸近自由	47	0-01
プラケット	46	0-03
反射正値性	43	0-02
Wilson ループ	43	0-01
弦張力	40	0-02
転送行列	38	0-04
拡散型緩和時間の仮定	26	0-02
Poincaré 定数	20	1-10
動的指数	14	2-08

計算 この表の数はこの端末で数えた（下書きの本文から語を数える小さなスクリプト。章の改訂で数は動きます）。数えた 26 語から、出る章の数の上位 10 語（普通の日本語とも重なる「接続」を除く）と、この本の第 23 部の中心の 3 語（緩和時間の仮定・Poincaré 定数・動的指数）を載せました。

> 02

数学の準備（一）群・リー環・幾何

ヤン–ミルズ理論は、群の向きを場所ごとに比べる仕組み（接続）と、比べ方の食い違い（曲率）の理論です。第 1 部の前半はそのための言葉を用意します。要の式は、接続 A から曲率 F を作る一行です（幾何の書き方。物理の書き方との換算は A-01）。

$$F \;=\; dA + A \wedge A \tag{2}$$

例：群が $U(1)$（絶対値 1 の複素数）なら $A \wedge A = 0$ で $F = dA$ となり、電磁気学の場の強さに戻ります（2-03）。$SU(2)$ では $A \wedge A \neq 0$ で、これが場どうしの相互作用の出どころです。

群

積と単位元と逆元を持ち、積が結合的な集合。対称性（形を保つ操作）の集まりを抽象化したもの。 → 1-02

SU(2)・二重被覆

行列式 1 の 2×2 ユニタリ行列の群。長さ 1 の四元数と同じで、形は三次元球面。二対一で回転群 SO(3) に写る。 → 1-02

コンパクト単純群

有界閉な連結な行列群（コンパクトな連結リー群）で、リー環が可換でなく、0 と全体以外のイデアルを持たないもの（リー群の意味の単純。$SU(N)$ のように有限の中心があってよい）。問題文はゲージ群をこの中から任意に選ばせる。 → 0-03

リー群・リー環

滑らかに積が取れる群と、単位元での接空間に交換子 $[X, Y]$ を入れたもの。リー環は群の「無限小の向き」。 → 1-03

接続

隣り合う点のベクトルを比べる規則。ゲージ場 A は接続である。 → 1-07

平行移動・ホロノミー

接続に沿ってベクトルを運ぶこと。閉じた道を一周して戻ったときの変化（群の元）がホロノミー。格子のリンク変数・Wilson ループの原型。 → 1-07

曲率

小さな輪のホロノミーの、面積に比例する主要部分。式 (2)。ゲージ理論の場の強さ。 → 1-07

ゲージ変換（幾何）

各点で基底を群の元で取り替えること。接続は $A \mapsto gAg^{-1} - (dg)g^{-1}$、曲率は $F \mapsto gFg^{-1}$ と変わる。 → 1-07

03

数学の準備（二）解析と確率

量子化したヤン–ミルズ理論は、虚時間では「場の配置の上の確率測度」として書けます。配置は無限個の数なので、無限次元の確率と、作用素のスペクトルの言葉が要ります。この部で最も多く使う不等式は Poincaré 不等式で、分散を「どれだけ揺らすと値が変わるか」で押さえます。

$$\mathrm{Var}_{\mu}(f) \;\le\; C_P\, \mathcal{E}(f), \qquad \mathcal{E}(f) = \mathbb{E}_{\mu}\big[|\nabla f|^2\big] \tag{3}$$

例：μ が実数直線の標準ガウス分布なら $C_P = 1$ で、$f(x) = x$ のとき等号です（分散 1、微分の二乗の期待値 1）。既知 最良の C_P の逆数は、μ を平衡にする拡散の隙間です（1-10）。

ガウス測度

平均と共分散だけで決まる測度。無限次元でも作れる最も基本の測度で、構成的場の理論は多くここから出発する。 → 1-08

無限次元にルベーグ測度は無い

ℓ^2 のような無限次元の可分なヒルベルト（バナッハ）空間には、平行移動で変わらず有界集合に有限の値を与える測度は 0 しか無い。経路積分の「$\mathcal{D}A$」が文字通りには意味を持たない理由。 → 1-09

自己共役作用素・スペクトル

無限次元版のエルミート行列と、その「固有値」の集合（連続な部分も含む）。ハミルトニアンは自己共役で、スペクトルが実数。 → 1-10

変分原理（Rayleigh–Ritz）

スペクトルの下端（最小固有値があればそれ）は $\langle \psi, H\psi\rangle / \langle \psi, \psi\rangle$ の下限。試し関数を何本入れても上界しか出ない。 → 1-10

Poincaré 不等式・Poincaré 定数 C_P

式 (3) と、そこに入る最良の定数。値は $\mathcal{E}$ の正規化（何で微分するか）に依るので、章ごとに正規化を書く。 → 1-10

04

物理の準備

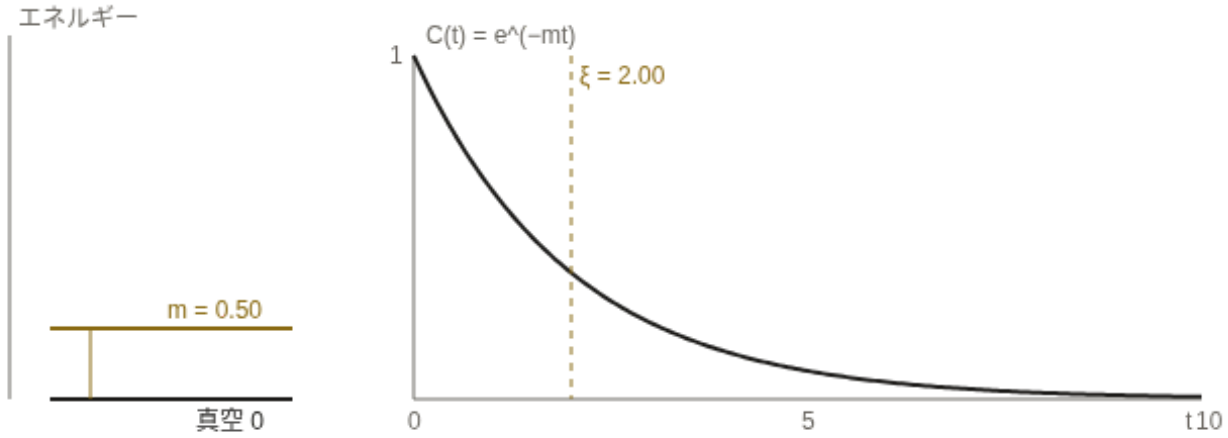
第 2 部の言葉は、量子力学と統計力学の二つの顔を持ちます。量子力学では「エネルギーの隙間」、統計力学では「相関の減る長さ」と呼ばれるものが、虚時間を通すと同じ量になりま

す。これが本書全体を貫く読み替えで、式では、真空 $|0\rangle$ と励起 $|n\rangle$ を使った次の展開です（4-11 §02）。

$$\langle O(t)\,O(0)\rangle - \langle O\rangle^2 \;=\; \sum_{n\geq 1} |\langle n|O|0\rangle|^2\, e^{-(E_n-E_0)t} \;\approx\; C\,e^{-mt}, \qquad \xi = \frac{1}{m} \tag{4}$$

例：$m = 0.5$ なら $\xi = 2$ で、$t = 10$ 離れた相関は $e^{-5} \approx 0.0067$ 倍に減ります。図 2 のつまみで隙間 m を動かすと、左の準位の間隔と右の減り方が一緒に変わります。

図 2 隙間と相関長 — つまみで隙間 m を変えると、左の最初の励起の高さと、右の相関 e^{-mt} の減る速さが同時に変わる。縦の破線は $t = \xi = 1/m$



m = 0.50 ・ ξ = 2.00 ・ C(5) = 0.0821 ・ C(10) = 0.0067

表 2 隙間 m と相関 $C(t) = e^{-mt}$（定数 C = 1 とした）

m	ξ = 1/m	C(1)	C(5)	C(10)
2.00	0.50	0.1353	0.0000	0.00000
0.50	2.00	0.6065	0.0821	0.00674
0.10	10.00	0.9048	0.6065	0.36788

計算 この図と表の数値はこの端末で計算した（指数関数の値。図は同じ式をその場で描く）。隙間が小さいほど相関は遠くまで残り、$m \to 0$ で相関長は無限大になります。これが「臨界」の姿です。

作用・Euler–Lagrange 方程式

道全体に一つの数を与える汎関数 S。古典的な運動は S を停留させる道で、その条件が Euler–Lagrange 方程式。 → 2-01

状態・ハミルトニアン

状態はヒルベルト空間の単位ベクトル、ハミルトニアン H は時間発展 e^{-itH} を生む自己共役作用素でエネルギーを表す。 → 2-05

経路積分

すべての道について $e^{iS/\hbar}$（虚時間では e^{-S}）で重みを付けて足す、という量子論の書き方。 → 2-07

虚時間・Wick 回転

$t = -i\tau$ と置き換えること。振動 e^{iS} が減衰 e^{-S} になり、量子論が統計力学の確率になる。 → 2-07

相関関数・相関長

離れた二点の値の結び付きと、それが $e^{-r/\xi}$ で減るときの長さ ξ。式 (4) で隙間の逆数。 → 2-08

相転移・臨界点・普遍性

径数を動かすと、自由エネルギーなどが滑らかでなく（非解析的に）変わること。量が跳ぶものが一次転移、跳ばずに相関長が無限大になるものが連続転移で、その点が臨界点。臨界点では細部に依らない振る舞い（普遍性）が出る。 → 2-08・16-11 §04・26-12

転送行列

虚時間の一歩分の重みを行列（作用素）にしたもの $T = e^{-H}$。最大固有値と次の比が相関の減り方を決める。 → 2-07

Langevin 力学・Glauber 力学

与えた測度を平衡に持つ、雑音つきの勾配の流れ（連続の場合）と、一点ずつ書き換える確率の力学（離散の場合）。理論の時間ではなく、標本を作るための仮の時間。 → 2-10

動的指数 z・臨界減速

緩和の時間が相関長の冪 $\tau \sim \xi^{z}$ で伸びるときの指数。臨界に近いほど力学が遅くなる現象が臨界減速。 → 2-10

05

ヤン–ミルズ理論：古典・量子化・公理

第 3 部と第 4 部の言葉です。古典論は「曲率の二乗を最小にする接続」の理論で、量子化すると、古典論には無い長さの尺度が一つ生まれます。その尺度を表すのが Λ で、一ループでは次の形です（4-07）。

$$\Lambda = \mu \, \exp\!\Big(-\frac{1}{2 b_0 \, g^2(\mu)}\Big), \qquad b_0 = \frac{11N}{3}\cdot\frac{1}{16\pi^2} \quad (\text{純 } SU(N)) \tag{5}$$

例：$SU(3)$ では $11N/3 = 11$ です。g^2 を小さくすると Λ は e^{-1/g^2} の形で 0 に近づき、g^2 のどの冪の級数にも映りません。 既知

古典

場の強さ

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$。最後の交換子が非可換の印で、場が自分自身と相互作用する。 → 3-02

ヤン–ミルズ作用

$S = \frac{1}{2g^2}\int \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\, d^4x$（ユークリッド・$g$ を A に吸収した書き方）。四次元では尺度を変えても値が変わらない。 → 3-03

自己双対・インスタントン

$F = \pm *F$ を満たす接続（$+$ が自己双対、$-$ が反自己双対で、位相電荷の符号が逆）。作用を位相電荷の絶対値の定数倍まで下げきる、有限作用の解。代表が BPST 解（一点のまわりに大きさを持つ、位相電荷 1 の解）。 → 3-03

第二 Chern 数・位相電荷

$\frac{1}{8\pi^2}\int \mathrm{tr}\, F\wedge F$（反エルミートの書き方）。接続を連続に変えても変わらない整数。 → 3-05

ゲージ軌道空間・Singer の定理

ゲージ変換で移り合う接続を同一視した空間。非可換では、そこから接続を一つずつ連続に選ぶ方法が大域的には無い。 → 3-04

量子化

発散・正則化・繰り込み

ループ積分が短距離で無限大になること、それを一時的に有限にする切断、切断を外しても観測量が有限に残るよう結合を取り直すこと。 → 4-04

繰り込み群・β 関数

見る尺度を変えると有効な結合がどう流れるかの規則。流れの速さが β 関数 $\mu\, dg/d\mu$。 → 4-04

漸近自由

β 関数が負で、短距離ほど結合が弱くなること。純 $SU(N)$ では一ループの係数 $11N/3$ が効く。 → 4-06

次元転移・Λ

無次元の結合しか持たない理論に、量子化で長さの尺度 Λ が一つ現れること。式 (5)。 → 4-07

ゲージ固定・Faddeev–Popov・ゴースト

同じ物理を表す接続を一つに絞る条件と、そのとき積分に現れる行列式。行列式を場で書いたものがゴースト。 → 4-08

BRST 対称性

ゲージを固定した後の作用に残る、ゴーストを含む対称性。ゲージの選び方に物理量が依らないことを、これで確かめる。 → 4-08

Gribov コピー・Gribov 領域

ゲージ条件を満たす接続が一つの軌道に複数あること（Singer の定理の現れ）と、Faddeev–Popov 作用素が正になる範囲。 → 4-08

公理と定義

Wightman の公理・Haag の定理

ミンコフスキー時空の場の量子論が満たすべき条件の組と、相互作用のある場を自由場と同じ表現に置けないことを示す定理（時刻 0 の場が自由場とユニタリに移り合い、真空が一意で空間の並進・回転で不変なら、その場は自由場になる）。 → 4-09 公理・Haag

反射正値性

時間を鏡映した関数との相関が非負になる性質。これがあると、ユークリッドの測度から正の内積を持つ状態空間が作れる。 → 4-10

Schwinger 関数

ユークリッド（虚時間）での場の相関関数 $\langle \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle$。Wightman 関数を虚時間に延ばしたもの。 → 4-10

Osterwalder–Schrader の公理・再構成

Schwinger 関数（すぐ上）が満たすべき条件の組と、それを満たせばヒルベルト空間とハミルトニアンが作れる、という定理。 → 4-10

質量ギャップ

式 (1)。真空の上のスペクトルが $\Delta > 0$ だけ離れていること。最も軽い粒子の質量と言い換えられるが、粒子の存在とは別の条件。 → 4-11

非自明

構成した理論が自由場（ガウス）ではないこと。問題文の要求の一つ。 → 0-03

06

格子ゲージ理論

第 5 部の言葉です。格子は時空を間隔 a の網目に置き換え、ゲージ場を網目の辺（リンク）に置いた群の元で表します。ゲージ不変性がそのまま保たれるのが格子の強みです。作用は小さな正方形（プラケット）一枚ずつの和です。

$$S_W = \beta \sum_P \Big(1 - \tfrac{1}{N}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U_P\Big), \qquad \beta = \frac{2N}{g^2} \tag{6}$$

例：$SU(2)$（$N=2$）で $\beta = 2.4$ なら $g^2 = 4/\beta \approx 1.67$ です。β を大きくすると g が小さくなり、漸近自由により物理単位で測った格子間隔 a が 0 に近づくと期待されます（一ループの走り、4-07）物理。文献によっては別の規格化を使うので、換算は 5-01 を見てください。

リンク変数・格子間隔

隣り合う格子点を結ぶ辺に置いた群の元 U_ℓ（接続の平行移動の格子版）と、網目の幅 a。 → 5-01

プラケット・ステープル

単位正方形の四辺の積 U_P（小さな輪のホロノミー）と、そこから一辺を除いた三辺の積。 → 5-01

Wilson 作用

式 (6)。プラケットごとに $1 - \frac{1}{N}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U_P$ を足した格子の作用で、$a \to 0$ の素朴な極限でヤン–ミルズ作用に戻る。 → 5-01

Elitzur の定理

格子では、ゲージ変換で変わる量（一本のリンクの成分など）の期待値は、どの体積・どの極限でも 0。局所的なゲージ対称性は自発的に破れない。 → 5-04

Wilson ループ

閉じた道に沿ったリンクの積のトレース。ゲージ不変で、重い電荷の対を運んだときの重みを表す。 → 5-02

面積則・周長則・弦張力

Wilson ループの期待値が囲む面積の指数 $e^{-\sigma \cdot \text{面積}}$ で減るのが面積則、周の長さで減るのが周長則。係数 σ が弦張力。 → 5-02

閉じ込め

色の電荷が単独で取り出せないこと。格子では面積則（静的ポテンシャルが距離に比例して伸びる）で判定することが多いが、定式化はいくつかある。 → 5-02

強結合展開・指標展開

β が小さいときに重みを群の指標で展開する方法。ここでは面積則と正のギャップが示せる 既知 （Osterwalder–Seiler 1978）。 → 5-02

連続極限・スケーリング

$\beta \to \infty$（$a \to 0$）で物理単位の量を保つ極限。無次元の比が a に依らなくなることがスケーリング。 → 5-05

グルーボール

純ヤン–ミルズの最も軽い励起を粒子とみたもの。格子では相関の減り方から質量を測る。 → 5-08

格子の相関長の問題・格子版の質量ギャップの向き

Chatterjee（2018）の問題。四次元の格子ゲージ理論で、各 β で相関長 $\xi(\beta)$ が有限に在り、$\beta \to \infty$ で $\xi(\beta) \to \infty$ となることを示せ。格子単位の隙間が一様に正のままでは連続極限で質量が無限大になるので、この向きで問う。物理単位の隙間が保たれることはその先（物理単位の隙間の言明）。 → 5-09

07

構成的場の理論

第 7 部の言葉です。構成的場の理論は、相互作用のある場の理論を確率測度として作り、公理を満たすことを証明する分野です。どの次元が易しく、どこで止まるかは、結合の「次元」で見積もれます。ヤン–ミルズの結合は長さの冪を持ちます。

$$g^2 \ \sim \ (\text{長さ})^{\,d-4} \tag{7}$$

例：$d = 2$ では g^2 は質量の二乗、$d = 3$ では質量の一乗の次元を持ち、短距離では効かなくなります（超繰り込み可能）。$d = 4$ では無次元で、尺度の冪では弱まらず、繰り込み群で対数的にしか動きません（周辺）。ヤン–ミルズでは漸近自由により、短距離で対数的に弱まります（4-06）。既知 次元ごとの現在地は 16-01。

構成的場の理論

場の理論を数学の対象（測度・作用素）として作り、公理を確かめる分野。本書は六つの段に分けて読む。 → 7-01

自明性

連続極限を取るとガウス（自由場）しか残らないこと。四次元の ϕ^4 で示された型の結果。 → 7-08

クラスター展開

測度を互いに離れた小さな塊の寄与の和に分け、収束を示す技法。強結合や大質量で効く。→ 7-04

ブロック化・繰り込み群の段

格子を b 倍に粗くし、細かい揺らぎを積分して新しい作用を得る一段。これを繰り返して連続極限を制御する。→ 7-05

紫外安定性

有限体積で、ブロック化を重ねた最後の作用の上下界が格子間隔に依らないこと。三次元では定理、四次元では仮定つきの定理。強さの違う読みが三通りある。→ 7-06・7-07 三つの読み

確率量子化・正則性構造

測度を Langevin 方程式の平衡として作る方法と、特異な確率偏微分方程式に意味を与える理論。→ 7-09

08

公開された構成を読む言葉（第 6〜14 部）

第二巻の言葉です。第二巻は、2026-11-10 に公開された四次元のヤン–ミルズ理論の存在の構成（Lean のコードと委員会の評価書）を読みます。公開された構成の対象は意味の名前で呼び、コードの識別子は出典として添えます。名前と記号の一覧は A-06 §02、札の約束は 6-00 です。

言明と検査

公開された構成

2026-10-28 に提出された Lean 4 のコード（yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028）と、それを検査した委員会の評価書（2026-11-10）。この本は、その定理を「Lean で証明されている、と委員会が評価した」の水準で引く。→ 6-00

評価書

委員会の評価（yang-mills-group/YM の docs/assessment-1.pdf）。第 I 部は構成の結果と問題文との比べ、第 II 部は検査の記録。→ 6-00

公開の定理・構成の定理・委員会の結合の目標

公開された問いの形の言明（仮定は Lie 環が単純であることだけ）、それを射影として含む強い言明、その上に委員会が独立の検査を一つの族で束ねた言明。言っている範囲が違う。→ 6-02

見出しの定理・依存の外

検証の記録が挙げる 17 の見出しの定理と、そのどれからも届かない宣言。「依存の中」は、公開の定理が使うとは限らない。 → 6-00

核での再検査・Comparator

外部のライブラリだけで初期化した新しい Lean の核で証明を検査し直すことと、言明と定義を独立に書いた定義と照合する道具。どちらも定義が問題の意図を表すことまでは保証しない。 → 6-02

繰り込みの一段と結合

確率の核・予測子・罰の係数

公開された構成の繰り込みの一段は決定的な写像ではなく、粗いリンクを、細かい配位から作った中心値（予測子）のまわりのガウス型の揺らぎで引く確率の核。引き寄せの強さが罰の係数 c_{pen}。 → 9-01・9-04

表示

各段の密度を書く決まった形：真空の項・主な作用・正則な活動・強制された活動の気体。表示は一意ではない。 → 9-06

正則な活動

表示の中の、局所の補正の項の和。平らな配位で 0 になる。 → 9-06

強制された活動

大きい場の旗をちょうど覆う台と、その上の空でない「在庫」を持つ補正の関数。その全体を気体として表示に運ぶ。 → 9-06・11-01

切った作用・旗

面の項を段ごとの閾の上で一次に切った作用と、閾を超える大きい場の印。閾は段とともに 0 へ行く。 → 9-07

段の結合

段 m の表示の中で、正規化した曲率の二乗の項に掛かる係数。測度だけからは決まらない数。 → 10-01

読み直し

一段の後、平らな配位と試験配位の二点での密度の対数比から、表示の結合を読み直すこと。強い単調性で根が一つに決まる。 → 10-03

射撃

段 0 の結合を基準の値 $\bar{\beta}$ にする裸の結合を、段ごとの帯の入れ子の区間と中間値の定理で選ぶこと（射撃法）。一意性は言わない。 → 10-04

暦

一段の評価に使う定数（ブロックの辺・平滑の指数・エネルギーの下界の定数・率・結合の入口）を決まった順に選ぶ条件の束。段に一様な条件はここで払う。 → 10-05・11-08

較正

局所場の挿入の係数を、基準の段で読んで合わせること。繰り込みの輸送の逆を入力に使う。 → 8-04

多段の評価

帰納の仮定・一段の証書

どの段の密度も同じ形の表示を持ち、その材料に段ごとの帳簿（評価）が掛かっていること、と、段 $m+1$ の表示から段 m の表示を押し出しの等式と帳簿つきで作ること。 → 11-00

種・区画

大きい細かい面・予測から大きくずれた辺・旗の一つ一つ（種）と、配位を種の型で分ける条件（区画。幅を持つヒステリシスつき）。 → 11-03

値段・印

種一つあたりの因子（値段）と、その配分のうち出口に残す分（印。保証された下界の半分）。 → 11-05

強い見積もり・弱い帳簿

一段の出口の評価 $e^{-\mathrm{rate}\cdot P^2}$ と、帰納の仮定が運ぶ評価 $e^{-P^{1/5}}$。強い見積もりを弱い帳簿へ換算して運ぶ。 → 11-07

無限体積と再構成

切片・糸

鏡映の向きに垂直な一枚の層の中のリンクの配位（切片）と、隣り合う層をつなぐ向きのリンクの組（糸）。転送作用素の核を作る分け方。 → 12-01

内側の関数

ゲージ不変・可測・有界で、帯の中に両端が在るリンクだけに依る関数。鏡映正値性とチェス盤の根が働く関数の類。 → 12-01

チェス盤の根

一つの関数を全ての箱に写して掛けた期待値の大きさの、箱の数分の一乗。三角不等式を満たす半ノルム（ノルムとは限らない）。 → 12-02

中心に置いた敷き詰め

段 m の格子間隔を一辺とする箱で、基準の箱を観測点の真ん中に置いた敷き詰め。繰り込んだ観測量の大きさをこの根で測る。 → 12-02・12-03

柱

ブロックとその鏡像を、時間の円を埋めるように交互に並べた配置。時間の向きの一方向のチェス盤の写し。 → 12-04

抽出の列

切断の部分列と体積の部分列の組。細分は二つの部分列をそれぞれ合成する。極限は、この列に沿った二つの通常の極限として読む。 → 12-05

窓（窓の関数）

Ward の恒等式で、一つの点の近くで 1 になり、ほかの点を台に含まない、滑らかでコンパクトな台の関数。 → 13-01・12-06

零エネルギーの空間

全ての時間の半群で固定される部分空間 $\ker H$。これが一次元であることが、その相での真空の一意性。 → 12-07

相の測度

混ざった極限の理論を相（成分）に分ける確率測度 μ（評価書では ν）。零エネルギーの空間に圧縮した可換な作用素の環の Gelfand 表現から作る。 → 12-07

増大の条件

点の配置の全ての二点の距離が r 以上のとき、相関とその微分が r^{-A} の定数倍で押さえられること。再構成の公理の束の一つの形。 → 12-08

09

物理の描像

第 17 部の言葉は、物理が「理論は在る」と前提して質量ギャップと閉じ込めを説明する描像で、多くは物理の水準です。代表は、色の電束が細い管に絞られて揺れる弦として振る舞う絵で、重い電荷の間のポテンシャルは長い距離 R で次の形になります（17-03）。

$$V(R) \;=\; \sigma R \;-\; \frac{\pi (d-2)}{24 R} \;+\; \cdots \tag{8}$$

例：$d=4$ で第二項は $-\pi/(12R)$ です。第一項が面積則（弦張力）、第二項が管の横揺れの零点エネルギーです。物理 第二項の係数が細部に依らないのは、長い管を有効弦とみなす仮定の下での結果です。

双対超伝導・アーベル射影

磁気単極子が凝縮すると、超伝導体が磁束を管に絞るのと双対に、電束が管に絞られるという閉じ込めの描像。アーベル射影は、ゲージを部分的に固定して群を可換な部分（対角成分）に縮め、固定の特異点に単極子を見る手続き。 → 17-02

中心渦

群の中心の元だけ位相がずれる面状の欠陥。それが無秩序に多いと Wilson ループが面積則を示す、という描像。 → 17-02

有効弦・Nambu–Goto・Lüscher 項

電束の管を面積で重みを付けた弦とみる理論と、その揺らぎが生む式 (8) の $1/R$ の項。 → 17-03

大 N・'t Hooft 結合・平面図

$SU(N)$ で $\lambda=g^2N$ を固定して $N\to\infty$ とする極限。平面に描ける Feynman 図だけが残る。 → 17-04

ホログラフィー・AdS/CFT

ある時空の重力理論が、その境界のゲージ理論と同じものだという予想。動径の向きが尺度に当たる。 → 17-08

一尺度（尺度は一つ）

純ヤン–ミルズの次元を持つ量はすべて Λ の冪の定数倍、という物理の前提。格子では $m^2\asymp\sigma$ の形で書ける。 → 17-12

10

この本の言葉（第 16・18・23・24 部）

第 18 部以降には、この本の中で名前を付けた言葉が出ます。仮定の網羅的な一覧は A-06 にあり、ここでは中心の一式だけ挙げます。第 23 部の検討が置いた量 a^2C_P は三つの比の積に割れます（17-12。$a=1/\xi_{\mathrm{RG}}$、$\lambda_1=1/C_P$）。

$$a^2C_P \;=\; \underbrace{\frac{a^2}{\sigma}}_{\text{(iii)}}\cdot\underbrace{\frac{\sigma}{m^2}}_{\text{(ii)}}\cdot\underbrace{\frac{m^2}{\lambda_1}}_{\text{(i)}} \tag{9}$$

例：SU(2)・$\beta = 2.60$ の格子の値（17-12 の表）では $m/\sqrt{\sigma} = 3.837$ なので、因子 (ii) は $1/3.837^2 \approx 0.068$ です。計算 (ii) が β に依らない正の定数で上下から押さえられるかが一尺度の問いで、格子の値はその傾向を示しますが、証明ではありません。

辞書と現在地（第 16・18 部）

確定度の二列

物理の言葉と数学の言葉の対応に、(a) 定義として対応しているか、(b) 四次元のヤン–ミルズでその量が在ると示されているか、の二つの格を別々に付ける読み方。 → 18-01

切れ目（seam）

物理の掘り方と数学の掘り方がつながらない箇所。本書は七つを型ごとに並べる。 → 16-05

緩和時間の仮定を軸に置いた検討（第 23 部）

四次元格子の側

構成の八つの言明

格子から入る道で問題文を割った八つの言明（無限体積・反射正値性・Wilson ループ・物理の隙間・ゆらぎの遅さ・回転の回復・OS 再構成・非自明性）。記帳の長さでの緩和時間の帯は問題文の要求に入らない、物理単位の隙間の言明の言い直し。 → 23-01

記帳の長さ ξ_{RG}

格子を b 倍に粗くする段ごとの結合の下がり方を記帳し、決まった値まで下がる段数から決めた長さ。$a := 1/\xi_{\mathrm{RG}}$ と置く（第 23 部の四次元の検討の定義）。 → 23-01

緩和時間の仮定

Poincaré 定数 C_P（Langevin 力学の緩和の時間）が相関長の二乗と同じ冪で伸びる、という冪の文：$\ln C_P / \ln \xi \to 2$。四次元では Wilson 測度で $\beta \to \infty$。証明は無い。 → 23-01

帯の文

「C_P は物差しの二乗の定数倍の幅に入る」という文：$a^2 C_P \asymp 1$。対数の因子に動かされるので、この部では緩和時間の仮定と呼ばない。 → 23-01

緩和時間の上界の仮定・緩和時間の下界の仮定

帯の文を上下に分けた半分：上界の仮定は $a^2 C_P \le C$（すべての試験関数についての上界）、下界の仮定は $a^2 C_P \ge c$（一つの試験関数で足りる下界）。難しいのは上界の仮定。緩和時間の仮定とは別の名。 → 23-01

帯の形の拡散型緩和時間の仮定 $(\xi^2)_{\mathrm{band}}[\mathcal{E}]$

冪でなく定数倍の幅で比べる仮定。帯の文が成り立つかどうかが $\mathcal{E}$ の目盛り（リンクの角度か場か）に依るので、目盛りを名指して書く。緩和時間の仮定とは別の仮定。 → 23-01

緩和の鎖・一尺度の鎖・記帳の長さの鎖

$a^2 C_P$ を割った三つの因子がそれぞれ $\asymp 1$ であること：緩和と相関長（緩和の鎖）・相関長と弦の長さ（一尺度の鎖）・弦の長さと記帳の長さ（記帳の長さの鎖）。三本そろえば $a^2 C_P \asymp 1$ が出る（逆は出ない）。 → 23-01・17-12

片側の橋

連続の時間・有限の空間格子・$T = \infty$ の経路の測度で、基底状態などの仮定の下に、時刻に局所な試験関数から C_P を相関長の二乗の定数倍で下から押さえる命題。下界の仮定の側にだけ架かる。 → 23-01

位相の区画と体積の順

周期の箱では、区画の間を移りにくい位相電荷 Q も試験関数に入る。Q の自己相関が ξ^2 より速く伸びるという $SU(3)$ 以上の原典の読み（$SU(2)$ は一次資料一本で a^{-2} に近い）を、HMC と Langevin が同じ普遍類という開いた境界の観察に付いた予想を延ばして当てると、上界の仮定は周期の箱では偽と読める。体積を先に無限にするこの本の順では、開いた境界は救いにならない見込み（仮定の行）。 → 23-01 §05 の注

四次元格子で試した十七の道

一つの問いと、それに当てた一組の道具の組。投稿の欠陥との比べの道・尺度の一次元鎖の道は元の問いを持ち直したもの。 → 23-02

四次元格子の二十一の壁

ある道がある道具で、ある矢印の手前で止まった理由を一文にしたもの。二十一枚を五つの型に分ける：原理の壁・構造の壁・道具の壁・仮定の壁・測定と文献の壁。 → 23-02

完全な族

どのプラケットからもちょうど一本ずつ消すリンクの集合。残りのリンクを止めれば、族のリンクの重みは一本ずつに分かれ、互いに独立に積分できる。 → 23-02

取りこぼし $\delta(\mathrm{b})$・傾き κ

格子の一段の窓が連続の $\ln b$ に足りない分（一ループ核の模型で測った数）と、一ループの結合の走りの傾き $\kappa = 11/(3\pi^2)$（SU(2)・$\beta = 4/g^2$。既知の係数の書き直し）。 → 23-02

答えの形

「緩和時間の仮定（$\eta = 0$）の下で、物理単位の隙間の言明 $\Longleftrightarrow \sum_k \delta(b_k) < \infty$」という言明。緩和時間の仮定のほかに、冪の形・段の誤差を加法的で有界とする模型・δ が一ループ核の模型の値であること、の上に立つ（仮定の行）。 → 23-02

重なりの下界

相関の非負の重みの表示で、最も軽い状態の重みが C(0) の q 倍以上という入力。これがあると有限の k の相関から隙間の下界が出る。無ければ分光は隙間の上界で終わる（分光の上界の壁）。 → 23-02

尺度の一次元鎖への射影の仮定

測度を尺度 $s = \ln \ell$ の一次元の鎖に射影できるという仮定。この下で二重み Hardy 不等式（一次元の重みつき不等式で、最良の定数が二つの重みの積分で上下から押さえられるもの）が使える。緩和時間の仮定 より弱いとは言えない。 → 23-02

管の転送作用素の不等式

周長 ℓ の管の重さが $\sigma \ell + c/\ell$ 以上、という転送作用素の不等式。成り立てば $m^2 \geq 4c\sigma$。証明は無い。 → 23-02

一段目の模型

階段（四段）

易しい場所から難しい場所へ置いた四段：0+1 次元の二重井戸の経路の測度（$\hbar \to 0$）・四次元格子の Wilson 測度（$\beta \to \infty$）・連続極限と OS 公理・極限の理論の質量ギャップ。この部が扱うのは一段目と二段目。 → 23-03

二重井戸の緩和時間の冪の言明

一段目の言明 $\ln C_P / \ln \xi \to 2$（$\hbar \to 0$）。四次元の緩和時間の仮定と測度の族だけが違う同じ形の文なので、二つの段で同じ名で呼ぶ。定数倍の幅で言う帯の文とは別。

→ 23-03・23-03 §01

五分類（初・典・機・読・仮）

この部の主張の強さの札：初等（証明を本文に置く）・原典から引く既知の定理・計算機援用・読み（浮動小数・Monte Carlo・当てはめ）・仮定。札は一つの文に一つ。 → 23-00

二重井戸

谷を二つ持つ位置エネルギー $V(x) = (x^2 - 1)^2/8$。谷は $x = \pm 1$（底の曲率 1）、頂上は $x = 0$（曲率 $-1/2$）。 → 23-04

経路の測度

虚時間の経路に重み $e^{-S/\hbar}$ を付けた確率の測度。$T \to \infty$ を先に取り、そのあと $\hbar \to 0$。数は刻み $\varepsilon = \frac{1}{2}$ の格子の上で取る。ゲージ場は入っていない。 → 23-04

トンネル分裂

ハミルトニアンの最低の二つの準位の差 $\Delta = E_1 - E_0$。経路で言えばキンクが一本入る重み $e^{-S_0/\hbar}$ で決まる。 → 23-04

相関長（二重井戸の）

経路の二点の相関が減る虚時間の長さ $\xi = \hbar/\Delta$。半古典の主項で $\xi \propto \hbar^{1/2} e^{S_0/\hbar}$ と指数で伸びる。 → 23-04・§03

キンク

一つの谷から他の谷へ移る、谷にとどまる経路の次に作用の小さい経路。作用は $S_0 = 2/3$（インスタントンの作用）、幅は虚時間で 2 程度。 → 23-04

零モード

キンクのゆらぎの作用素の固有値 0 の向き $\dot{x}_{\mathrm{cl}}$。キンクを虚時間の向きにずらしても作用が変わらないことから来る、キンクの位置という一つの遅い自由度。 → 23-04

キンクの拡散係数

Langevin の雑音をキンクの位置の向きに射影して得る $D = \hbar/S_0$。一本のキンクの位置についての文で、経路全体の隙間 $1/C_P$ についての文ではない。 → 23-04

Herring の式

転送作用素の偶と奇の固有値の差を、二つを別々に求めて引かずに、固有関数の内積の比で直接書く式。$\hbar$ が小さいときの桁の消失を避ける。 → 23-04

台地

キンクの対の間で経路が頂上の近くにとどまる区間が作る、作用がほとんど変わらない平らな向き。頂上の一サイトの曲率は、凸であるのに要る値に $\frac{1}{4}$ 足りない（$\varepsilon = \frac{1}{2}$）。 → 23-04

凸な芯

谷の奥の集合 $\{x_i \ge a\}$（$a > 1/\sqrt{3}$）。経路をここに閉じ込めると、Bakry–Émery の型で $C_P \le 2/(3a^2 - 1)$ が長さと $\hbar$ に一様に出る。 → 23-04

相（キンクの無い相）

経路が一つの谷の側にとどまる配位に制限した測度。例えば全てのサイトで $x_i \ge 0$ に制限した $\mu^{(+)}$（壁 $x_i = 0$ では反射）。相内の局所 Poincaré の条件の測度。 → 23-05

一段目の組み立て

分散の分割

配位の空間を二つの谷に割り、分散を「各谷の中の分散」と「二つの谷の平均の差」に分ける恒等式。谷の中の局所 Poincaré と平均差の輸送の定数から C_P の上界を組む最初の道具だが、長い経路では一つの粗い変数では足りない。 → 23-05

局所 Poincaré

割った一つの部分（谷、またはキンクの無い相）に制限した測度の Poincaré 不等式。その定数 C_{loc} が相内の局所 Poincaré の条件になる。 → 23-05

平均差の輸送

二つの谷の上の平均の差の二乗を、Dirichlet 形で押さえる不等式。その定数 C_{md} が鞍点の管の条件の型になる。 → 23-05

二重井戸の四条件

一段目の上の側を割った四つの条件：相内の局所 Poincaré の条件（キンクの無い相の局所 Poincaré）、鞍点の管の条件（平らな鞍点の族に沿う輸送。箱の中では管と芯の行）、箱への帰着の条件（箱の力学への帰着）、箱の中の隙間の条件。どれも仮定の行を残す。結論の側の文である緩和時間の仮定とは別のもの。 → 23-05

二重井戸の緩和時間の上界の命題

二重井戸の経路の測度で、二重井戸の四条件と前提の行を仮定すると $C_P \le K\xi^2 S_0/\hbar$ が成り立ち、$1 \le R \le K'/\hbar$ を経て二重井戸の冪の言明が従う、という条件つきの命題。四条件の上の代数で、一段目が閉じたことは述べない。 → 23-05・23-03

切れ端

箱の中でキンクとキンクの間に挟まれた、キンクの無い相の区間（長さ $C\xi$ 以下、両端の値つき）。その上の相内の局所 Poincaré の条件の版が切れ端の局所 Poincaré の仮定で、端の値にも一様であることを求める。 → 23-05

管

キンク、またはキンクと反キンクの対の周りに入る配位の集まり。キンクの配置を止めた後に残る管の Poincaré を押さえるのが、鞍点の管の Poincaré の仮定の行。両端を二つの谷に止めた区間のものを「橋の管」と呼ぶ。 → 23-05・23-07

芯

管の中で経路が頂上の近くにとどまる区間（$Q_k = (-x_c, 0)^k$、$x_c = 0.89$）。作用の Hessian が負の向きを持ち、その Poincaré 定数を芯の長さ k に一様に押さえることが、芯の Poincaré の一様性の仮定の行。 → 23-07・23-11

箱の力学（箱への帰着）

無限に長い経路の Poincaré 定数を、長さ $C\xi$ の箱の両隣の値を止めた条件つきの測度の Poincaré 定数で押さえる段（箱への帰着の条件）。箱への帰着の命題は $C_P \le (1 + 1/n)\, C_{\mathrm{box}}/(1 - c_{\mathrm{alt}})$ の形で、対数 Sobolev 不等式を使わない。 → 23-05・23-11

偶奇の箱

直線を隣どうし l サイト重なる長さ L の箱で覆い、番号の偶奇で二つの族に分けたもの。同じ族の箱どうしは離れていて、族の外の値を止めると互いに独立になる。 → 23-11

ずらしの平均

箱の並びを l サイトずつ n 通りずらし、各ずらしの不等式を平均すること。重なりのサイトがずらしの間で互いに素なので、係数は 1+1/n で済む。 → 23-05

最大相関

二つの σ-代数について、それぞれに可測な関数どうしの相関の上限。二点の変数なら、同時分布を正規化した行列の第二特異値で表せる。 → 23-05・23-11

交互の最大相関

偶の族の外の値と奇の族の外の値が生成する二つの σ-代数の最大相関 c_{alt}。これが $\hbar$ に一様に 1 未満であることが、箱への帰着の命題に残る仮定の行（箱の交互の最大相関の仮定）。 → 23-05

二つの射影の補題

二つの射影の補題。二つの σ-代数の最大相関 c が 1 未満なら、分散は二つの条件つき分散の期待値の和の $1/(1-c)$ 倍以下。初等の証明を本文に置く。 → 23-05

Efron–Stein の不等式

積の測度の上の関数の分散は、座標を一つずつ動かした分散の期待値の和以下、という不等式。偶の箱の積の不等式に使う。 → 23-11

縮約したキンクの気体

箱の中の遅い変数（キンクの数と位置）だけを残した模型。一次元 Ising の Glauber 力学と同じ型に入ると置く（キンクの気体の隙間の仮定の行）と、隙間は対の生成・消滅とキンクの拡散の和の形になる。 → 23-05

交差項

箱の中の遅い側（キンクの配置 Y）の Dirichlet 形を、元の Dirichlet 形の $(1+\chi)$ 倍で押さえる行（交差項の一様性の仮定）。χ が $\hbar$ と境界の値に一様であることは仮定。 → 23-05

残したサイト

相内の局所 Poincaré の条件の二尺度の組み立てで、12 サイトごとに一つ残すサイト（粗い側）。これを止めると間の区間どうしは独立になり、残したサイトの周辺は最近接の鎖になる。 → 23-06

橋（端を固定した区間）

両端の値を固定した区間。相内の局所 Poincaré の条件では残したサイトの間の 11 サイト（細かい側）、鞍点の管の条件では両端を二つの谷に止めてキンクが一本ある区間。

→ 23-06・23-07

入れ子

凸でない 11 サイトの橋の中のサイト 4 と 8 をもう一段残し、三つの小さな橋（対数凹）と二つのサイトに割る組み立て。 → 23-06

Helffer の判定

鎖の隙間を、一サイトの隙間と隣どうしの結合の強さで判定する道具の Poincaré 版。残したサイトの環に Gershgorin の形で使う。 → 23-06

余白

粗い側の判定の要の量 $\hbar\rho - 2\hbar\kappa$（一サイトの隙間から、隣との結合の二倍を引いたもの）。正であることを端の値の全ての組について区間演算で確かめる。 → 23-06

節点（$\hbar$ の）

計算機援用で確かめる $\hbar$ の点。六節点の相内 Poincaré の命題は六つの節点 $\hbar \in \{0.2, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01, 0.005\}$ の各点の文で、余白は 0.067 以上。依存グラフの節点とは別。 → 23-06

部分区間

節点の間の $\hbar$ を埋めるために $\hbar$ の範囲を割った小区間。各部分区間の中で、期待値の $\hbar$ による動きを区間で包む。 → 23-06・23-08

取り分

部分区間で、点の上界からの膨らみに許される量（余白から決まる上限から点の上界を引いた残り）。全ての箱に同じ量を許すと、最悪の箱が取り分を決める。 → 23-06

道筋

鞍点の管の条件の芯の行を閉じるために立てた七つの攻め方（窓の外の鎖・残る数値・区画の枠組み・小さな仮定・残る一命題・環の継ぎ目・$\hbar$ の範囲）。七つは名で呼び、並びは順序や重さを表さない。 → 23-07

サイトの窓

芯の中のある一サイトの周りの 17 サイトの範囲 W。その印の周辺の対数 Sobolev 定数 A_W が窓の定数の数値の道筋・区画の枠組みの道筋・窓の対数 Sobolev の道筋の中心。$\hbar$ の窓とは別のもの。 → 23-07

$\hbar$ の窓

計算機援用で扱う $\hbar$ の範囲 $[3 \cdot 10^{-4}, 3 \cdot 10^{-3}]$。「窓の全体」「窓の下の端」の窓はこちらで、紛れるときはサイトの窓に「サイトの」を付ける。 → 23-07

窓の外の鎖

サイトの窓の外へ伸びる鎖。その縮みの比 $q < 1$ が窓の外の鎖の道筋と環の継ぎ目の道筋の条件で、橋の芯では $q_{\mathrm{free}} \le 0.998854904$ が $\hbar$ の窓の全体で計算機援用の不等式になった。窓の外と $\hbar \to 0$ については何も言わない。 → 23-07・23-08

環

長さ $T \ll \xi$ の周期的な短い経路で、キンクと反キンクが一対ある配位。 → 23-07

継ぎ目

環の上で対の間隔 ℓ が縮んで対が消える所。そこの配位は頂上の台地そのもので、橋の管の芯と同じ難しさが現れる。 → 23-07

塊

継ぎ目で符号に依らない区画の単位とする、頂上に近いサイト（$|z| < \theta$、$\theta = \frac{1}{2}$）の連なり。他を止めた k サイトの塊の作用は $k \le 7$ で凸。 → 23-07

外の鎖と内の鎖

環のサイトの窓の対数 Sobolev 定数に入る二種類の鎖。外の鎖は窓の外へ伸びる符号の決まった側の鎖で、縮みは窓の中・ピン ≤ 0 などの条件つきで計算機援用の不等式。内の鎖は窓の中の段で、比は 1.24〜1.28 と読まれ 1 を越える（有限の係数）。 → 23-07

境の段

塊が窓の端に触れる配位だけに現れる有限の段（ピンが $(0, \frac{1}{2})$）。比は 1.004〜1.045 と読まれ、外の鎖の計算機援用の行はこのピンを覆わない。 → 23-07

区画の枠組み

芯の隙間を k に一様に押さえるため、負の曲率のある場所の稀さで払う手順を五つの段（区画の和・Gibbs の分解・成分ごとの局所化・体積の局所性・区画の合成）に分けたもの。仮定として残るのは構造ではなく定数の大きさ。 → 23-09

区画

各サイトに付けた印（頂上の側か否か）の型ごとの、箱の直積。分散・Dirichlet 形・エントロピーは区画ごとの和に分かれ、区画の数は定数に入らない。 → 23-09

欠陥の集合

サイト j とその隣のどれかが閾より頂上の側にある配位の集合 N_j。負の曲率はこの中にしか無い。 → 23-09

稀さの指数

欠陥を含む集合の測度の対数の最小 $\ell_{\min}$。長さではなく、芯の長さ k に依らない。 → 23-09

閉じる条件

区画の枠組みの五段を組んだ不等式の右辺が正になる条件 $b(A_W c_H + D_W + \ln 2) < \kappa \ell_{\min}$。満たせば芯の隙間は k に依らない正の数で下から押さえられる。 → 23-09

要る値

閉じる条件を A_W について書き直した上限 $A_{\max}$。A_W がこれより小さいことが残る一命題窓の対数 Sobolev の閾の命題（窓の対数 Sobolev の道筋）。いまの上界は要る値の外にあり、試験関数の下界は要る値を排除しない。 → 23-09

三本の筋

残る一命題を、条件の関数形の違う三つの形で攻めたもの：成分ごとの形・スカラーの形（スカラーの筋の命題）・Feynman–Kac の形。どれも閉じていない。 → 23-09

スカラーの筋の命題

スカラーの筋の、仮定の表つきの命題。芯の長さ $k = 20$ などの設定で、$\hbar \in [3 \cdot 10^{-4}, 10^{-3}]$ の 8 節点の各点で剰余の量を押さえる。区間演算の行はまだ走らせていない。 → 23-09

持ち上げの仮定

スカラーの筋の命題の代理の比の持ち上げの仮定。代理の比を、測った範囲（二サイトの塊の値）の外へ線形に持ち上げる唯一の仮定。 → 23-09

共通の壁

三本の筋が止まる同じ場所：頂上で一サイトの対角 $4 - \frac{1}{4} = 15/4$ が隣との結合の和 4 に届かない。凸性を入口に持つ道具は、この ¼ を台地の稀さで払う必要があり、その払い方に $\hbar$ が入る。 → 23-09

対角優位

行列の各行で、対角が非対角の絶対値の和以上であること。芯の Hessian では頂上で ¼ だけ破れ、全てのサイトが頂上の面では $k \geq 8$ の塊の最小固有値が負になる。 → 23-09

迂回策

閉じる条件の両辺のどちらか、または不等式の形そのものを動かす案。迂回策の一覧を生・条件つき・保留・死に判定した。 → 23-10

殺した一行

迂回策を止めた事実を一行に縮めたもの。数は浮動小数の格子か転送行列の読み。 → 23-10

要る側・形・足りない側（床）

迂回策を向きで分けた三つの側。要る側は要る値 $A_{\max}$ を大きくする案、形は条件の関数形を替える案、足りない側（床）は A_W の上界の構造の損を減らす案。 → 23-10

構造と道具の選び方

閉じる条件の定数の出所の二分。構造の量（κ・b・$\ell_{\min}$）は模型と欠陥の集合の定め方が決め、道具の量（c_H・$\ln 2$）は証明の段の選び方で、同じ集合のまま替えられる。要る値を大きく動かしたのは道具の側だった。 → 23-09・23-10

壊れ方の型

死んだ迂回策の殺した一行に繰り返し現れた理由を、七つにまとめたもの（源は一つ・天井・二度払い・通貨の取り違え・$1/\hbar$ の住所・向きのずれ・移しかえ）。各型に、案に当てて確かめる問いを添える。 → 23-10

二度払い

二度払いの型。前の段がすでに払った集合の上で、同じ量をもう一度払うこと。元の Bochner の段は負の曲率を芯の全体で払っていたが、そこは欠陥の集合の中だった。直すと大きく効く型。 → 23-10

通貨（出口の速さとエントロピー）

通貨の取り違えの型の語。Poincaré 不等式が測るのは出口の速さで、稀さ $\mu(B) \le e^{-\ell}$ を払えるのはエントロピーの通貨。分散と Dirichlet 形の比だけでは、稀さは分子と分母で打ち消す。 → 23-10

$1/\hbar$ の住所

1/ħ の住所の型。$1/\hbar$ がどの量に掛かるかを見誤ると、案は $1/\hbar$ を区画・印・比較の定数・摂動の費用へ移すだけになる。頂上の台地では、$1/\hbar$ は和の向きでなく頂上の角からの半径に住む。 → 23-10

凸性の閾

芯の作用の Hessian の下界 $\kappa(k) = 8\sin^2\!\big(\pi/(2(k+1))\big) - \tfrac{1}{4}$ が正であるのは $k \le 7$ まで、という境。$k \le 7$ の芯は凸性（短い芯の凸性の補題）で、端の値と $\hbar$ に依らず押さえられる。 → 23-11

芯の定数の三区分の命題

芯の Poincaré 定数を長さ k で三段に分けて押さえる命題：$k \le 7$ は凸性、$8 \le k \le 14$ は二つのブロックの補題と二点の最大相関、$k \ge 15$ は箱の帰着を芯に当てる形。中くらいの芯の段・長い芯の段の入力は測った値。 → 23-11

条件づけの壁

芯の区間を「ちょうどこの区間」と条件づけたために、零点が動きたい向きに立つ壁。端が頂上を越える箱の側の芯では、これが双安定を作る。物理の準安定ではなく、条件づけの選び方が作るもの。 → 23-11

作用の障壁

芯の作用の障壁の仮定の行。箱の側の芯の Poincaré 定数が $e^{\Delta S_*/\hbar}$ の型（前因子は $\hbar$ の冪）で押さえられ、障壁が $2S_0$ より小さい（$\Delta S_* < 2S_0$）という仮定。この下で箱の中の隙間の命題の局所の項は $\hbar \to 0$ で消える。 → 23-11

計算と検査

計算機援用

区間演算で、不等式として確かめたもの（札「機」）。丸めの規約などの前提を同じ行に書く。計算した範囲の外で成り立つことは言わない。 → 23-08・23-00

区間演算

全ての数を「真の値を必ず含む区間」で持つ計算。最後に出た区間の上の端が 1 より小さければ（$q^{+} < 1$）、$q < 1$ が不等式として従う。 → 23-08

外向きの丸め

区間の端を計算するとき、下の端は下へ、上の端は上へ丸めること。この部では各演算の結果を隣の浮動小数へ一つずつ外へ動かす。IEEE 754 の正しい丸めは前提の行に置く。 → 23-08

依存の喪失

同じ変数から来た量の結び付きを区間が忘れ、幅が広がること（$x - x^2$ を $[0,1]$ で素朴に評価すると $[-1,1]$）。細かく割るか、中心で展開して直す。 → 23-08・§04

陽性対照・陰性対照

陽性対照は、答えが閉じた式で分かる場合に機械がそれを再現するか。陰性対照は、成り立たないはずの主張を機械が拒むか。 → 23-08・23-14

事前登録

計算を走らせる前に、予想する値の範囲・律速の場所・対照の合格の線を書いておき、結果の後に当否を記録すること。結果を見てから合格の線を動かしていないことの記録になる。 → 23-08

統合表

一段目の四条件の五分類の行を、行を単位に一枚にした表。どこに証明があり、どこに仮定が残るかの地図で、行の割合は進み具合を表さない。 → 23-12

依存グラフ

表の行を番号つきの節点にし、各行の前提を「$\Longleftarrow$」の右に並べた一覧。一段目の上界の命題の結論がどの行に依るかを、前提の向きにたどって読む。 → 23-12・23-05

節点・葉

節点は依存グラフの一行。葉は「⟸」を持たない節点で、仮定・既知・計算機援用・読みの行。 → 23-12

番号の規則

「⟸」の右の前提の番号を、左の結論の番号より必ず小さく置く規則。全ての行で守られていれば、前提をたどるたびに番号が下がって葉に着き、円は無い。 → 23-12

要る葉の組

結論 [111] から前提の向きにたどって拾える葉の全て。分かれ道が [103] の「または」の一か所だけなので、組は二通り。 → 23-12

二つの道（箱の側の芯・区画の側の芯）

分かれ道 [103]（芯の Poincaré 定数が一様という行）の二つの支え方。箱の側の芯の道は芯の定数の三区分の命題と局所の項が $\hbar \to 0$ で消えること、区画の側の芯の道は区画の枠組みの芯の隙間の一様な下界と継ぎ目の正則性で支える。 → 23-15

作業の種類

仮定や読みの行を閉じるのに要る作業の六つの分け方：区間演算・紙（証明を書く）・書誌（原典で確かめて「典」に上げる）・測定・別の方法（いまの道具では届かない）・方法未定。 → 23-15・§03

揃う $\hbar$

四つの条件の全ての行が同時に成り立つ $\hbar$。行ごとの範囲を重ねると、いまは無い。二重井戸の冪の言明には、最終的に全ての行を $\hbar \to 0$ で一様な形で言うことが要る。 → 23-12

清さの基準

Lean の定理の `#print axioms` の出力が、全て `propext`・`Classical.choice`・`Quot.sound` の三つの公理の部分集合であること。証明に穴が無く、勝手な公理も足していないことを示す。 → 23-13

結論を定義に置く

欲しい性質を定義の中に書き、その定義を仮定に取る形。結論は仮定の書き写しになり、証明は一行で閉じる。清さの基準では見えない。 → 23-13

依存の円

定理 A が B の結論を仮定に取り、B が A の結論を仮定に取る形。定理は一つずつ検査されるので機械検査では見えず、依存グラフの番号の規則で確かめる。 → 23-13・23-12

突き合わせの四つの判定

本書の検討で測った数と既知の数を比べたときの判定：一致・条件つきの一致（合い方が刻み・箱・規約・外挿の形の選択に依る）・不一致・比べられない。 → 23-14

第 24 部の言葉

24-00 入口

今後の考察

第 24 部の題。緩和時間の仮定を妨げるものの形、緩和時間の仮定を前提に置いたまま述べ直す二つの候補、緩和時間の仮定を経由しない二つの見方、四次元で効いていることの順に考える部。多くの文は見立て。 → 24-00

言い換えの取引

問題文の量（ユークリッドの時間の隙間）を、緩和時間の仮定の量（Langevin の時間の緩和 C_P：上限で定義され、試験関数一本で下界が出て、上界を部品から組める量）に言い換えること。二つは別の量。 → 24-00・23-01

見立ての札〔見〕

第 23 部の五つの札（初・典・機・読・仮）に足す六つ目の札。判断の材料としての意見で、証明も数値も持たない文に付ける。 → 24-00

24-01 ほぼ保存される大域の量

ほぼ保存される大域の量（一つの型）

分散が大きく、Dirichlet 形が小さく（流束を通して受け渡されるか、稀な配位でしか変わらない）、隙間に映らない大域の量 Q。その緩和の時間は相関長でなく Q を壊す出来事の尺度で決まり、上界の仮定を妨げる。五つの例が同じ型に入ることは分類（見立て）。 → 24-01

保存の破れの係数 h

部分領域の電荷の勾配の和（全電荷の勾配）の二乗の期待値の密度。連続では位相不変性から 0 で、格子でだけ転位の配位の上で 0 でない。全体の上界の仮定が問うのはこの係数。四次元の格子の値はこの本に無い。 → 24-01

輸送の係数 d

電荷の勾配の場の一次のモーメント（双極子）の二乗の期待値の密度。h が小さい領分で、局所の拡散型緩和時間の仮定が問うのはこの係数。四次元の格子の値は無い。 → 24-01・24-03

境界の層の係数 g

半空間で切った電荷の Dirichlet 形から体積の項を引いた、面あたりの量。鋭い箱の比の境界の補正に入る。 → 24-01

交差の長さ R_{*}

輸送の係数と保存の破れの係数の比で決まる長さ（R_{*} の二乗は $\mathrm{d}\lambda_{\mathrm{W}}/\mathrm{h}$）。滑らかな窓の電荷の比が、これより短い箱では R^{2} に比例する輸送の型、長い箱では χ_{t}/h に飽和する障壁の型になる境（クラスタの減衰の仮定の上の見積もり）。 → 24-01

箱を貫く流束

箱の境のサイトのゲージ変換を割らずに残すと試験の空間に入る、箱を一様に貫く場。参照の値を 2.2〜2.5 倍動かす（自由場の参照の数の読み）。力学でなく族の取り方で同じ型が出る例。 → 24-01・24-03

24-02 保存が壊れる長さ

三つの物差し

C_{P} と比べる相手の候補を、静的な相関長 ξ・保存が壊れる長さ ℓ_{*}・大域の量が一つ動く時間 τ_{glob} の三つに分けたもの。同じ模型の中で別の値を取りうる。 → 24-02

保存が壊れる長さ ℓ_{*}

部分領域の電荷が、境界を通る輸送でなく領域の中の保存の破れで緩和しはじめる長さ。候補の定義は (2)：比 Var/$\boxtimes$ が飽和の値の半分に届く最小の R（見立て）。二次元 $U(1)$・幅 2 の帯・外周凍結・β=2〜6・帯の長さ $M \le 256$ で、τ_{int} の読み（隙間の上界）に当てはめの形 $A/M^{2}+B$ を使って読んだ長さは、相関長と比例しない。 → 24-02・24-02 §03

木の座標とリンクの座標

階層格子の Gauss 近似で、プラケットの値を変数に取ると $C_{P}=1/\beta$ で段数に依らず、リンク変数を取ると隙間が一辺の二乗に反比例して小さくなる。座標の選び方で C_{P} の伸び方の型が変わる例（四次元の階層格子はこの本の延長）。 → 24-02

流束の保存

リンクを動かしてもプラケットの値（流束）は隣どうしで受け渡されるだけ、という性質。リンクの座標の遅さの出所。 → 24-02

流束の双極子

帯のプラケットの角を余弦の重みで足した量 X。Gauss 近似の最も遅いモードで、その緩和の折れから保存が壊れる長さを決める。 → 24-02・§04

巻き付き

一枚のプラケットの角が $\pm\pi$ を越える出来事。高さ 2β の障壁を越える稀な出来事で、群がコンパクトなことから保存を破る。 → 24-02

帯の位相電荷

帯のプラケットの角を $(-\pi, \pi]$ に縮めて足し 2π で割った整数。巻き付きのたびに一つ変わる。四次元の位相電荷と同じものだとは主張しない。 → 24-02

生の率と静的な揺らぎ

帯の位相電荷の緩和の率を、巻き付きの出来事の率（力学の量）と、一回の出来事で電荷がどれだけ動くかを測る静的な揺らぎ E（測度の量）の比に分けたもの（鎖の見立て）。 → 24-02

τ_{glob}

大域の量が一つ動く時間。C_P と $\max(\xi^2, \tau_{\mathrm{glob}})$ を比べる形は、二次元の帯の数の上の読みから置いた見立ての候補で、どの模型でも示していない。 → 24-02

二次元の試験台

二次元 CP^{N-1} 模型で、周期の箱の凍結と箱の局所の比を N を変えて比べたもの。比は格子の一辺 $L = 64$ を固定した自己相関の比で、24-03 の静的な比とは別の量。二次元の結果は四次元に何も含意しない。 → 24-02

24-03 緩和時間の仮定を直す二つの形 — 区画ごとの仮定と局所の仮定

時間で均した汎関数の代数 $\mathcal{D}$

一時刻の関数を台が有界な重みで時間に均したものを、滑らかな関数で組んだ試験関数の集まり。第 24 部の C_P はこの上の上限で定める。 → 24-03

窓

長さの物差し ℓ の c 倍の時間の区間 $[0, c\ell]$（空間も局所にした版では一辺 $c\ell$ の時空の箱）。ℓ は隙間で決めず外から与える（四次元では記帳の長さ）。 → 24-03

局所の Poincaré 定数 $C_P^{\mathrm{loc}}(c)$

重みの台が窓に入る試験関数だけの上で取った $\mathrm{Var}\,/\mathcal{E}$ の上限。c について増え、$c \to \infty$ で仮定なしに C_P に戻る。 → 24-03

局所の緩和時間の仮定（$(\xi^2)\!\uparrow_c^{\mathrm{loc}}$）

$C_P^{\mathrm{loc}}(c)$ が ℓ^2 と同じ冪で伸びる文と、その上の半分 $(\xi^2)\!\uparrow_c^{\mathrm{loc}}(K)$（$C_P^{\mathrm{loc}}(c)$ が ℓ^2 の K 倍以下）。一つの c を止めて述べるときだけ全体の緩和時間の仮定と違う中身を持つ。定義は連続時間・有限の空間格子・$T = \infty$・片側の橋の仮定の上で立つ。四次元の Wilson 測度の版はその写しで、無限体積の測度の存在は前提に置く。 → 24-03

比の形 K_{rel}

対象の測度の箱の局所の Poincaré 定数を、同じ格子・同じ箱・同じ目盛りの無質量の参照の値で割った比。「ある $K(c)$ で押さえる」形は、時空 4 次元・空間も局所にした箱では自

由場の計算で満たされて空虚なので、この比で述べる。 → 24-03

無質量の参照と Γ

参照は無限体積の無質量の自由場の箱の局所の Poincaré 定数 $C_P^{\mathrm{loc},0}(R)$ で、Γ はその係数 $C_P^{\mathrm{loc},0}(R)/R^2$。数は自由場の参照の読みで、対象の測度の数ではない。 → 24-03

ゲージ商の参照

ゲージ場の参照を、箱の全てのサイトのゲージ変換で不変な関数（可縮な箱ではプラケットの角の関数）の上で測ったもの。ゲージ固定の母数に依らないので、これを使う。 → 24-03

区画ごとの緩和時間の仮定（上界の仮定 sec）

物理の一辺を止めた箱で、位相電荷の区画の中の Poincaré 定数が記帳の長さの二乗で押さえられるという文。緩和時間の仮定の障害を区画の間の量に押し込むだけで、消しはしない。 → 24-03

区画と反射の形

滑らかにした位相電荷を正則値で切った区画と、その上に境界条件を課さない Dirichlet 形（壁で反射する Langevin の形）。区画の Poincaré 定数は区画が連結のときだけ有限。 → 24-03

区画の間の量 C_{trans}

区画の番号への条件つき期待値の分散と Dirichlet 形の比の上限。$C_{\mathrm{trans}} \le C_P \le \sup C_P^{\mathrm{sec}} + C_{\mathrm{trans}}$ と挟む。物理の読みは転位の率。 → 24-03

開いた箱と閉じた箱

境界の値を止めた条件つきの測度の箱（第 23 部の箱への帰着の命題の箱）が閉じた箱、境界を止めない周辺の箱（局所の緩和時間の仮定の箱）が開いた箱。 → 24-03

24-04 片側の橋は緩和時間の仮定のどの形を要るか

時刻に局所な族 $\mathcal{F}_1$

一つの時刻の関数を有界な重みで時間に積分した汎関数の族。片側の橋の仮定と正準の目盛りの上で、この族の上の $\mathrm{Var}\,/\mathcal{E}$ の上限はちょうど ξ^2。橋が使うのはこの部分だけ。 → 24-04

窓の因子 $\varphi(x)$

$1-(1-e^{-x})/x$。窓 T の比を $\kappa\xi^2\varphi(T/\xi) = \kappa T^2 g(mT)$ と書くときの括弧で、$\varphi(x)/x^2$ は狭義に減る（窓の因子の単調性の命題）。プラケットの角 φ_p とは別。 → 24-04

窓の中の上限の命題

重みの台を窓 $[0,T]$ に限った時刻に局所な族の上限を、超越方程式の根で閉じた形に書いた命題（片側の橋の仮定と正準の目盛りの上）。 → 24-04

局所の緩和時間の仮定の二つの形

絶対の形 $(\xi^2)\uparrow_c^{\mathrm{loc}}$（$C_P^{\mathrm{loc}}(c)$ が $K(c)\ell^2$ 以下）と比の形 $(\xi^2)\uparrow_c^{\mathrm{rel}}$（$K_{\mathrm{rel}}(c)$ が K 以下）。定数は $K(c) = K_{\mathrm{rel}}\,\Gamma\,c^2$ で対応する。 → 24-04

閾 K_*

$K_* = \kappa/(\lambda_W \Gamma)$。局所の励起のモーメントの仮定と無限体積の基底状態変換の恒等式の上で、比 K_{rel} がこれより小さければ隙間の下界が出る（仮定の上の代数）。値は参照の取り方で変わる。 → 24-04

局所の励起のモーメントの仮定

箱に台を持つ局所の観測量があって、それが作る励起のスペクトル測度のモーメント比が、無限体積の隙間 m_∞ の二乗に箱の大きさの補正 $\gamma/(c\ell)^2$ を足した値以下、という仮定。自由場では成り立つが、相互作用のある模型ではどれでも示していない。 → 24-04

帯 $[K_*, 1)$

比がこの範囲にある場について、局所の橋は何も言わない。質量のある自由場もこの帯に入る。帯の中で質量を見る別の議論があるかは未決。 → 24-04

色の一重項と二次のカオス

$SU(2)$ のゲージ不変量（色の一重項）には単位元のまわりの一次の項が無く、主項（$\beta \to \infty$）・三色の独立なガウスでは二次以上のカオスになる。そのため色の一重項の参照はゲージ商の値のちょうど半分。 → 24-04

巻き数の型の汎関数

円の上の自由な粒子の持ち上げた角の増分を重みで積分した汎関数のように、時刻に局所な族の外にある汎関数。上界の仮定が隙間より強い分はすべてこの族の外にある。 → 24-04

24-05 Hamiltonian 格子と真空の測度

真空の測度 ν

一つの時刻の真空の分布（基底状態の二乗 ψ_0^2 を密度とする分布）。ゲージ理論では関数をゲージ不変なものに限る。 → 24-05

基底状態変換

関数 F に $F\psi_0$ を対応させる等長写像。これで $(H - E_0)$ の二次形式が ν の Dirichlet 形の $\hbar^2/2$ 倍に移る。 → 24-05

隙間と真空の測度の命題

基底状態の仮定（論文の (A1)）のもとで、隙間は真空の測度の Poincaré 定数で $\Delta = \hbar^2/(2C_P(\nu))$ と書け、上限は ψ_1/ψ_0 で達成される。 → 24-05

三つの Poincaré 定数

経路の測度の C_P（隙間と片側の関係）・時刻に局所な族の上限（$\xi^2 = \hbar^2/\Delta^2$）・真空の測度の定数（$C_P(\nu) = \hbar^2/(2\Delta)$）。 → 24-05

Kogut–Susskind の格子

時間を連続に取り、空間だけを格子にしたゲージ理論のハミルトニアン（電場の項と磁場の項の和）。問題文の量はそのゲージ不変な部分空間の隙間そのもの。 → 24-05

frustration-free

ハミルトニアンを局所の項の和と見たとき、全ての局所の項の基底状態を同時に実現する状態があること。局所から大域への隙間の定理はこれを要る。 → 24-05

電場と磁場の分け方の frustration の命題

Kogut–Susskind の格子を電場の項と磁場の項に分けた和は frustration-free でない（$g > 0$・有限の空間格子）。そのため局所から大域への隙間の定理はこの分け方に当たらない。 → 24-05

Hamiltonian 極限

時間の格子間隔を先に 0 にする極限の順序。Wilson の等方な格子と同じ連続極限に行くことは仮定。 → 24-05

24-06 凸性の代わりに稀さで払う

凸性の天井

境界の無いコンパクトな多様体の上では、$\mathrm{Hess}\, V \geq -K\, g$ を満たすポテンシャルの振れ幅は $KD^2/2$ 以下（群の上の凸性の天井の補題）。$SU(2)$ では凸な測度は Haar の定数倍の範囲を出られず、弱結合で単位元に集まれない。 → 24-06

Bakry–Émery の曲率の下限 κ_{BE}

$\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\, V \geq \kappa_{\mathrm{BE}} > 0$ の定数。これが成り立てば対数 Sobolev と $\mathrm{C_P} \leq 1/\kappa_{\mathrm{BE}}$ が出る（原典の言明の写し）。片側の橋の比べの定数 κ とは別の量。 → 24-06

繊維

粗い場を止めたときの、細かい揺らぎ（多くのリンクの積）の上の条件つきの測度の置き場。階層模型の帰納の凸性の仮定を、群の上で繊維の Bakry–Émery と読むのは見立て。 → 24-06

凸と非凸の場所の逆転

平らな ϕ^4 では凸でないのは小さな場、群の上では単位元から遠い半球（大きな場）。閉じた多様体の上では凸でない所が必ず在るが、そこにいる確率は小さい。 → 24-06

稀さの率 s

悪い集合 B が $\mu(B) \le e^{-s}$ を満たすときの指数。第 23 部の 23-09・23-10 で ℓ と書いた量で、第 24 部では ℓ を物差しに使うため字を替えた。 → 24-06

通貨（エントロピー）

Poincaré 不等式は出口の速さを測る通貨で、稀さを払えるのはエントロピーの通貨、という区別。稀さで払う段は対数 Sobolev の型の不等式を通る。 → 24-06

Holley–Stroock の摂動

有界な U で測度を e^{-U} 倍に変えると、Poincaré 定数は $e^{\operatorname{osc} U}$ 倍以下に変わる、という道具。費用は稀さでなく振れ幅の指数（この本では原典を確かめていない記憶の標準形）。 → 24-06

Lyapunov の条件

悪い集合から良い集合へ戻る漂流 $LW \le -aW + b\mathbf{1}_G$ と、良い集合の上の局所の Poincaré 不等式から、全体の Poincaré 定数を押さえる型。凸性は良い集合の上だけで使う。 → 24-06

場に依る定数

各尺度の凸性の仮定の定数を粗い場に依らせる方向（ただし一様に 1 未満）。一様に 1 未満を要する限り凸性の天井は越えない。 → 24-06

群の上の Polchinski 流

共分散の流れに沿った多重尺度の Bakry–Émery の条件を、群の上の熱核の畳み込みに写したもの。群の上の定式化は、探した範囲で見当たらない。 → 24-06

稀さで払う測度の類

良い集合の上では局所に凸・悪い集合は稀・悪い集合から戻る漂流・稀さはエントロピーの不等式を通してだけ払う、を規則にした測度の類の候補（見立て）。 → 24-06

劣臨界性

確率量子化の解の理論（正則性構造）の鍵の条件で、$d < 4$ のときに限り成り立つ。四次元はちょうど臨界。 → 24-06

24-07 四次元だからこそ

臨界次元

結合 g^2 がちょうど無次元になる次元。ヤン–ミルズでは四次元で、尺度を一段変えるごとの補正が冪で縮まず残る。 → 24-07

marginal

結合が無次元で、冪の数え方では強まりも弱まりもしない項。四次元の ϕ^4 もヤン–ミルズも marginal だが、流れの向きが逆。 → 24-07

赤外の漸近自由

結合が長い距離の側で 0 に近づくこと（四次元の ϕ^4）。ヤン–ミルズの漸近自由は短い距離の側で、向きが逆。 → 24-07

転位

格子間隔の大きさの小さなインスタントンが格子を通り抜けること。格子の上で滑らかにした位相電荷はこのときだけ変わる。 → 24-07・24-01

四段のハードル

第 23 部の四段（0+1 の二重井戸・四次元格子・連続極限と OS 公理・極限の質量ギャップ）ごとに、ハードル・既知の到達点・届くか・費用の種類を並べた表。届くかと費用は見立て。 → 24-07

難しさの三つの源

三段目の難しさの源：無次元の結合という源（全ての尺度が同じ重さで効く）、尺度をつなぐ展開の欠如（紫外と赤外をつなぐ展開が無い）、大域のゲージ固定の欠如（非可換のゲージ不変性。大域のゲージ固定が無く、大きな場を凸性で制御できない）。 → 24-07

紫外安定性（第 24 部での使い方）

有限体積の格子で、ブロックスピン変換を任意に多く繰り返した後も単位格子の上の有効作用が有界に留まること。三段目の既知の到達点として引く。 → 24-07・上の項

結合の窓

紫外の側の稀さの通貨（稀さの率は実効の結合に比例して閉じ込めの尺度で尽きる）と、強結合の側の曲率の通貨の間に残る、どちらも足りない範囲。根の二つ目 尺度をつなぐ展開の欠如の言い直し（見立て）。 → 24-07・24-06

双対超伝導（第 24 部での扱い）

単極子の凝縮で閉じ込めを説明する機構。凝縮は示されておらず射影はゲージの選び方に依るので、証明の道具にしない。 → 24-07・上の項

中心渦（第 24 部での扱い）

中心の元に値をとる渦が弦張力を担うという機構。根拠は格子の数値で、評価の不等式も極限の文も無いので、証明の道具にしない。 → 24-07・上の項

24-08 問いと、主張しないこと

規則の候補（六つと三つの組み合わせ）

既存の枠組みの仮定を一つ外し代わりの規則を置く体系の候補：尺度の公理化・ループの代数・保存量と区画・稀さで払う測度の類・漸近自由の公理・曲率の規則と、尺度の公理化の規則＋稀さの類の規則・保存量と区画の規則＋稀さの類の規則・ループの代数の規則＋保存量と区画の規則。全て候補で、無矛盾性も確かめていない。 → 24-08

問いの状態（済み・一部済み・未・新）

第 24 部の問いの表の状態の列。「済み」は本文がその問いに条件つきで答えたという意味、「新」はこの部の執筆で足した問い。 → 24-08

決着しても動かないもの

問いや規則の候補の各行に添えた列で、その問いが決着しても動かないものを書く。どの問いが決着しても、質量ギャップの問題は動かない。 → 24-08

11

同じ名で別の量

同じ字や同じ言葉が章によって別の量を指すことがあります。分野の慣習を引き継いでいるためで、章の冒頭で意味を宣言していますが、飛ばし読みでは見落とします。重いのは「隙間」で、三つの作用素の隙間が同じ語で呼ばれます。物理単位と格子単位の換算は次の一行です。

$$\Delta \;=\; \frac{m_{\mathrm{lat}}}{a}, \qquad \xi_{\mathrm{phys}} = a\,\xi_{\mathrm{lat}} \tag{10}$$

例：格子単位の隙間 m_{lat} を 0.5 に止めたまま a を 1 から 1/16 にすると、Δ は 0.5 から 8 に増えます。$m_{\mathrm{lat}} = 0.5a$ と a に比例させれば $\Delta = 0.5$ のまま保たれます。計算 連続極限で求めるのは後者です（23-01）。

表 3 同じ名で別の量

名	意味	どこで
β	格子の結合の逆数 $2N/g^2$／統計力学の逆温度 $1/k_BT$／β 関数 $\mu\,dg/d\mu$	5-01／2-08／4-04
Δ	質量ギャップ／ラプラシアン（格子では Δ_{lat}）	4-11／1-11
η	静的な異常次元 η_s（相関の冪）／動的な $\eta_{\mathrm{dyn}} = 2 - z$。必ず添字を付ける	18-05
b_0	一ループ係数。$\mu\,dg/d\mu = -b_0 g^3$ では $11N/(48\pi^2)$（式 (5)）／0-03 の表では $11C_A/(12\pi)$（$SU(2)$ で 0.5836）。結合の規格化が違う	4-06／0-03
C_P	真空の C_P：一つの時刻の真空の分布の Poincaré 定数（ハミルトニアンの隙間と同値）／経路の C_P：経路の測度の Poincaré 定数（Langevin の隙間の逆数・緩和時間の仮定が指すもの）／目盛りで測った経路の C_P：経路の C_P の正規化を名指したもの	23-01

名	意味	どこで
隙間（ギャップ）	ハミルトニアンの隙間（質量ギャップ）／転送行列の隙間（格子単位の質量 m）／Langevin 力学の隙間 λ_1	4-11／5-03／2-10
質量	質量ギャップ／粒子の質量（孤立した固有値）／作用の質量項の係数（裸の質量）	4-11／2-02
臨界	相関長が無限大になる点／確率偏微分方程式の「臨界」（尺度の勘定）／ひも理論の臨界次元	2-08／7-09／17-05

三つの隙間のうち問題文が求めるのは第一だけで、第二は、連続極限が在って (10) の比が収束すれば第一に移り（物理単位の隙間の言明、23-01）、第三は標本を作る力学の性質です。緩和時間の仮定は第三を第二と比べる文です（23-01）。

二本目の道・帯・紫外（第 15 部と第 25〜27 部）の言葉

移り変わりの帯（帯）

弱結合から強結合へ移る尺度 L ∼ 1/Λ の前後の区間。第 26 部の主語で、二本の道が同じ壁に着く場所。第 23・24 部の「窓」（A_W の窓・ħ の窓・時刻の窓）とは別物で、23-01 §05 の「帯の文」・23-09 の ℓ_帯・24-02 の「二次元の帯」・25-07 の「捩れた帯」も別の意味（26-00 表 0 に対照）。 → 26-00

捩れた T^2

't Hooft の捩れ $n_{12} = 1$ を入れた小さなトーラス。二本目の道が二つの方向を縮める器。 → 25-01

't Hooft の流束

区画 n_{34} と流束の自由エネルギー。真空の一意性・随伴の場のギャップ・(1,1) の区画に平坦な配位が無いこと。 → 25-01

分数インスタントン

位相電荷 ½ の自己双対の塊。作用 $4\pi^2/g^2$。希薄な気体の弦の張力を与える。 → 25-02

容器

枠を止めた領域 $D \times T^2$。容器の恒等式（Mack–Petkova）で、枠を条件づけると独立になる。 → 25-03

区画の和のアンサンブル・偏り θ・挿入比 ρ

区画の和で定めたアンサンブルと、区画の偏り θ(R;T^2_L)（25-01 の (4)）、渦の挿入比 ρ。区画に向きを合わせた対合で駆動する。θ は 23-09 の閾 θ_B・θ_σ や真空角 θ とは別の量（26-00 表 0）。 → 25-05

板の閉じ込めの定理

格子間隔と T^2 を固定すれば全ての β で面積則が成り立つという定理。連続極限では張力の下界が 0 になる。 → 25-04

枠の減相関

枠を固定した上での相関の減り方。横広げの不等式（強い形・弱い形）と合わせて、一つの不等式への還元の条件になる。 → 26-02

横広げの不等式（強い形・弱い形）

横に広げたときの偏りを押さえる不等式。強い形と弱い形で、還元の定理の結論が変わる。 → 26-02

一様な板の張力・一様な板のギャップ

帯を L を固定したときの密度 κ_cb に集約したあとに残る二つの量。帯はこの二つに集約される。 → 26-05

繰り込みの比較・β 単調性

帯 ＝ β 単調性＋繰り込みの比較。群を区別する比較で、26-06 だけが略号を使う。 → 26-06

κ_cb（チェス盤の密度）

L を固定したときの枠の減相関の密度。第 23 部の κ・片側の橋の κ・κ_BE などとは別（対照表は A-01 §09）。 → 26-05

拡散型緩和時間の仮定

緩和の時間が相関長の二乗の冪で伸びるという仮定。短い名は緩和時間の仮定、上側は上界の仮定、下側は下界の仮定。Lean の識別子と論文の中の名は変えていない。 → A-06

一段で閉じる類

繰り込みの一段を施しても同じ形（同じ母数の族）に戻る、有効作用の類。紫外の制御は、この類が段を越えて閉じるかという問い。15-03 ではこれを類が閉じる条件と書き、紫外の壁の分解の前半に置く。一リンクの熱核の類は母数一つで閉じる最小の例。 → 15-03・15-04

損の望遠鏡和

類が母数一つで閉じると、段ごとの損が掛け算で積もらず、母数の差の和（望遠鏡和）として打ち消し合うこと。一リンクの熱核の類が最小の例。 → 26-11

重みの性質（四つ）

多重尺度の解析で一段の重みに求める四つの性質（原典の言い方の整理）。群に値をとる場では一段で閉じる性質が無い。場の和の劣乗性（BBS の (ii)）の群版が背景と揺らぎの分解の補題。 → 26-11

紫外の壁の分解（類が閉じる条件・結合の流れの剰余の条件・形の剰余の条件・実効の結合の定義と連続性）

紫外の制御を、有限個の母数で閉じる類・流れの剰余・形の剰余・定義域の中の連続性の四つに割った言明〔仮〕。帯の分解（β 単調性 × 繰り込みの比較、26-06）との対比は 15-03 §06。この部の問いは 15-09 の表 1 に在る。 → 15-03

揺らぎの期待値の閉じの群版（揺らぎの指数積率の群版）と測度の背景依存 η_k

Balaban–Brydges–Slawny の重みの四性質のうち、揺らぎの期待値の閉じ（BBS の (iii)）と四つ目の性質を群に値をとる場で言い直した言明〔仮〕。一リンクの熱核の積では Haar 測度の不変性から立つ。難所は段ごとの測度の背景依存 η で、素朴な見積もりでは Σ η_k が発散し、母数への吸収が要る（15-07）。 → 15-07・15-01

不変な曲線・横の縮み λ・源 σ

不変な曲線：繰り込みの一段の写像で自分自身に写る、母数一つで番号づけた重みの族。熱核の族はその近似（15-04・15-06）。**横の縮み**（λ）：不変な曲線から外れた重みの外れが一段で掛けられる倍率。λ<1 なら外れは段数に一様に押さえられる（15-03・15-05）。**源**（σ）：一段ごとに新しく注がれる、類から外れる項（例：粗い一枚の θ^4 の係数）（15-04・15-05）。 → 15-04・15-05・15-03

束の網

粗い一枚の角を固定した最小作用の可換な配位を、プラケットの角の比 f として求める網。自由境界の三次元では抵抗の網の電流。$\beta'/\beta = \Sigma f^2$、横の縮み $\lambda = \Sigma f^4/\Sigma f^2$、不等式 $1/(64\Sigma f^2) \le \lambda \le \max f^2$。 → 15-05

ループの形ごとの結合

揺らぎを積分した重みを、単独のループ・合成のループなどの類の角の二次形式で書いたときの係数。母数を数える座標。一列四枚の二次の水準で β と比 κ_ab/κ_a の二つが要り、熱核では群の曲がりの分 2/(3β) が出る。 → 15-06

引き込む先の類

一段の写像が形の座標を縮めるとき、族が近づいていく「母数一つ＋固定された O(1/B) の形」の類。前因子の冪の流れの固定点から定まる。 → 15-06

局所結合のずらし

揺らぎの測度が背景に依る分 η を、背景で決まる局所の結合 b_p(W) の変化として読む見方（案）。多段の帰納はまだ書けていない。 → 15-07・15-08

小さい場の結合への寄与の割り方

小さな場の一段の剰余を、局所の部分・Taylor の切り捨て・小さな場の切り・ブロック間の二次の陽な項に割る見方。前の三つは平らな場の原典と同じ形。 → 15-08 §06

零和の系

ブロックが一つしか無く、ブロック間の二次の陽な項が消える系（一列四枚・階層模型）。→ 15-08 §06

一列四枚の形の剰余の定理

一列四枚の射影の模型で、形の剰余の一段の定数を数で与え、段数に依らない上界にした形。→ 15-06 §09

局所の代表

im D_c の上で F と一致し、体積に一様に押さえられる代表。基点が行とともに動く軸の錐で作る（束の網の定理（局所の形））。→ 15-05

一リンクの熱核比較の補題

Wilson の一リンク法則を、角の上限の内側で熱核の定数倍、外側を稀な尾で押さえる比較。→ 15-07 §05

群の幾何の部分（BCH の三次）

背景の微分のうち SU(2) にだけ残り、形の座標に依らない部分。係数は二リンクの Gauss の主項で 1/9。→ 15-07 §07

背景の変化の予算

各段の背景の変化の幅と結合の積の和。閾をどう選んでも発散する。→ 15-07 §07

背景の写像の非局所性

ブロックの拘束で作った背景が細かい変数を非局所に動かすこと。細かい背景について局所な一ループの式が、粗い変数では非局所の O(1) の項に見える。→ 15-08 §06

尾の型

(1−Loc)W の重みの距離への減り方（平ら・指数・冪）。粗い変数の定義（細かい変数が粗い変数の間をどう跨ぐか）で決まる。→ 15-08 §06

粗いリンク＋大域の札

Bianchi の拘束を粗い変数に昇格させた粗いリンクの座標に、トーラスを貫く束・中心の Z_2 の磁束などの有限個の大域の量を札として足した座標。→ 15-08 §06

二つのゲージの一致

一段・一ループ・臨界点の背景で、木のゲージと背景共変ゲージの一ループの有効作用が等しいこと（式 (5)）。→ 15-08 §05

中心の取り直しの代償と、中心の取り直しの条件

一リンクの条件つきの最大点を背景に取り直すときの Taylor の半径の損（約 4 倍）と結合の動き。 → 15-07 §05

背景を母数に持つ類の命題

背景のホロノミーの対数 a を類の母数に持たせた類で、背景依存の残りが一段下がり予算が段数に一様になる、という案。 → 15-07 §06

面の一段

粗い変数が一つのループの一段。a の更新は群の順序つきの積で正確。 → 15-07 §07

角の三重積

立方体の角に集まる三面の $\kappa \Sigma\, a_x \cdot (a_y \times a_z)$。多ループの類の最初の非可換な座標。 → 15-07 §07

行の重みつきの補間

行をその ℓ^1 ノルムで重みづけた Riesz–Thorin（Stein の解析族）。四次元の ℓ^4 の錐の倍率を 0.823 以下にした。 → 15-05 §07

比の座標

類の結合 B で割った隣・斜めの隣・三次・四次の係数。流れの固定点で値が決まり、独立な母数ではない。 → 15-03 §02・15-07 §07

斜めの隣

頂点を共有しない一辺ずれた面の対の二次の結合。四次元で類に要り、符号と非零は規則に依らず値は依る。 → 15-07 §07

規格 (a)

錐の定数を長波長の結合 β'_0 で割る形の座標。向きごとの規格 λ は縮みの量でない。 → 15-05 §07

辺の和／横の平均のブロック化

粗い辺を細かい二本の和とする規則と、ゲージに共変な横の staple の平均とする規則。後者で共分散の流れが固定点に向かう。 → 15-05 §07

W の再帰

非局所の項の一段の再帰。一列では「縮む像＋段に依らない新しい項＋指数の三体の尾」。 → 15-08 §06

比べる相手を固定した一段の不等式の案

MK の一段の像の弦の張力が本当の粗い理論を超えない、という一段の不等式。有限の箱では閾 1。 → 15-04 §05

家（道具の）

道具の定義と既知の結果を最初に置いた章。本書の検討が使う道具ごとの家と札は 16-10 表 1。 → 16-10

止まった所（道具の）

その道具が本書の検討のどこまで届き、どこで止まっているか（16-10 表 1 の第三列）。 → 16-10

見（札）

第 24 部だけで使う札。「読」と同じ水準で、物理の見立て（五つの札の「物理」）に当たる。凡例は 0-01 §03。 → 0-01 §03

芯の二分け

帯の芯を「紫外の延長」と「強結合への最後の区間の言明」の二つの仕事に分けて見ること。 → 16-11 §01

紫外の延長

公開された構成の制御を、段ごとの誤差の和を有限に保ったまま、閾から結合が数の程度の値 β_{*} まで延ばす仕事。 → 16-11 §01

強結合への最後の区間の言明

β_{*} から強結合の窓までの、少ない段数の非摂動の言明（26-06 の「有限の段数で帯を渡る系」とは別）。 → 16-11 §01

損失のある鎖

段ごとに K 倍の損失を許す繰り込みの比較を、段数ぶんつないだもの。率は一様だが前の因子が $\xi^{\log_2 K}$ で育つ。 → 16-11 §02

前の因子

評価の右辺で、指数の前に掛かる因子。損失のある鎖では $K^{k_0}=\xi^{\log_2 K}$。 → 16-11 §02

エネルギーの側の事実

配位の作用についての事実（捩れた真空の存在、固定群 ± 1、二つの捩れの箱の作用が正、S_N の上下）。 → 16-11 §03

エントロピーの側の不足

帯に要る、渦の揺らぎと配置の数を尺度に一様に下から数える評価が、本書に無いこと。 → 16-11 §03

物理の大きさの箱の混合の言明

箱の辺を物理の長さ C/Λ に取ると、枠を替えたときの内側のゲージ不変な観測量の法則の全変動が閾より小さい（β に一様に）。強い形の質量ギャップの言い換え。 → 16-11 §04

七つの試験の相手

帯の議論を試す相手：U(1) の弱結合・Z_2 の弱結合・有限の非可換群・随伴 Higgs の極限・SU(2) の混合作用の線と端点・SU(N) の体積転移・G_2。 → 16-11 §04・26-12 §02

値の水準の三分類

対称な箱・捩れ一つの量の弱結合の振る舞い：U(1) は β に比例、凍った有限群は定数、SU(2) は (3/2) ln β の型。 → 16-11 §04

混合作用

Wilson の作用（基本表現の項）に随伴表現の項を足した格子の作用。 → 16-11 §04・26-12

臨界の端点

一次の転移の線が終わる点。 → 16-11 §04・26-12

凍った相

有限群のゲージ理論で、大きい β の側の、平坦な接続の近くに張り付いた相。

→ 16-11 §04・26-12

捩れた箱の連続極限の制御

測度で決まる量・捩れた（枠つきの）箱での、誤差の和が有限な尺度の比べ。 → 16-11 §06

ゲージ不変な観測量の法則の結合

ゲージ不変な関数の条件つきの法則を結ぶ作り方と、その上の有限の箱の判定。 → 16-11 §06

篩

帯の議論が別の模型でも同じに通ってしまわないかを試すこと、その相手の集まり。

→ 26-12 §01

閉じ込めの量／ギャップの量

篩の二つの向き：閉じ込めない相で偽になるべき量／閉じ込めないがギャップの在る相手で真であるべき量。 → 26-12 §01

最大トーラス

SU(2) の中の可換な部分群 $\{\mathrm{diag}(e^{i\phi}, e^{-i\phi})\}$。U(1) と同じ形。 → 26-12

随伴 Higgs

SU(2) の Wilson の作用に、各点の単位ベクトル（随伴表現）とリンクを結ぶ項を足した模型。とびの結合 J を無限大にした極限は、形式的には U(1) の Wilson の作用になる。

→ 26-12 §02

体積転移

格子の作用に由来する、温度に依らない（零温度の）転移。連続極限の物理ではなく、格子の上の現象。 → 26-12

中心の無い群

中心が自明な群（G_2 など）。中心の捩れ・渦で書いた量は、この群では定義されない。 → 26-12 §02

ヒステリシス

結合を上げる道と下げる道で量の値が食い違うこと（一次の転移の痕跡になりうる）。 → 26-12 §05

縦横比

捩れた箱の、渦の面の辺 M と横の面の辺 N の比 $r = M/N$。止めた比べと、横を止めて縦を延ばす量化とを分ける。 → 26-12 §05

項ごとの符号

面ごとに別の結合 β_p を置いたとき、ΔF が各 β_p について増えるか（$\partial \Delta F / \partial \beta_p$ の符号）を見る試し。 → 26-12 §05

平坦な接続（平らな配位）

全ての面のホロノミーが単位元（捩れが在るときは捩れの符号）に一致する配位。21-07 では「平らな配位」と呼ぶ。 → 16-11 §04・26-12

対象・確かな定理・前提（第 19〜22 部・第 28 部と第 15 部の後半）の言葉

流束の自由エネルギー ΔF

$\Delta F = \ln(Z_0/Z_1)$。捩れ n_{34} を一枚入れたときの分配関数の比の対数。25-01 の語で、26-03 の渦の自由エネルギー F_V と同じ量。 → 19-02

渦の比 θ

$\theta_M = (Z_0 - Z_1)/(Z_0 + Z_1) = \tanh(\Delta F/2)$。$|\theta_M| < 1$ は定義から出る。$\theta \geq 0$ は定義からは出ず、M が偶数のときの定理（21-06）。 → 19-02

基点の時刻

リンク $\ell = (x, \mu)$ の始点 x をリンクの基点と呼び、時間の向きのリンクでは基点 x の時刻（基点の時刻）をそのリンクの時刻とする。前提の木の「根」とは別の語。 → 19-01

正規化しない Wilson の測度 μ̃・正規化した Wilson の測度 μ

$\tilde{\mu}_{N,\beta}$ は重み $w_\beta(U)$ に Haar の測度の積を掛けた測度、$\mu_{N,\beta}$ はそれを分配関数で割った確率測度。$\tilde{\mu}_{N,\beta} = Z_N(\beta)\,\mu_{N,\beta}$。 → 19-01

二つの Wilson の測度の橋

強結合の側の測度（第 20 部）と渦の側の測度（第 21 部）が、M = N・捩れなしのとき、定義で与えた一対一の対応で写して等しいこと。Lean で示した同一視。 → 19-06

捩れの符号 n_{12}・n_{34}

't Hooft の捩れた境界条件を、面の重みの符号 $z_p \in \{+1, -1\}$ で入れる二つの指標。 → 19-02

捩れた真空

単位の四元数 i・j で作る、作用 0 の配位 V。 → 19-02

Polyakov ループ $P_b(t)$

横の位置 b と時刻 t を止め、向き 3 を一周する M 本のリンクの変数の積の実部。 → 19-02

渦の最小作用 $S_V(N, m)$・S_N

太い渦の床の指数に現れる数。縦 M = 2m の平面を一辺 m の四つの塊に分けて測る最小の作用。$0 \le S_N \le 2N^2$。$S_N > 0$ は 21-05 の定理。 → 19-02

正の側・鏡映の対

鏡の片側（正の側）のリンクだけに依る関数 F・G について、$\langle F, G\rangle = \int F(\Theta\omega)\,G(\omega)\,d\mu$。 → 19-03

再構成の器

Osterwalder–Schrader の再構成から、測度に依らない部分（対・並進・定数）を取り出した組。そこから Hilbert 空間・真空 Ω・転送の作用素 T を作る。 → 19-03

質量ギャップ（器の上の定義）

$\| T - P_\Omega \| \le e^{-m}$。格子間隔を止めた定義で、連続極限の質量ギャップの定義ではない。 → 19-03

非退化（二つの使い方）

器の非退化は、真空の外に状態が在ること（20-04）。示すべき言明の非退化は、粗い場が小さい場に留まること（19-07）。 → 20-04

ブロック写像 B

細かい格子の配位から粗い格子の配位を、道の族に沿った積・重み・平均・群へ戻す操作で作る写像。 → 19-04

道の核 C

U が単位元に近いときのブロック写像 B の一次の部分。 → 19-04

押し出した測度（押し出しの測度）

$(B_*\mu)(E) = \mu(B^{-1}(E))$。細かい格子の測度をブロック写像で粗い格子へ移した測度。 → 19-04

Wilson–Dirac の作用素・フェルミオンつきの測度

Wilson–Dirac の作用素の行列式を重みにしたゲージ場の測度。本の主の対象（純粋なゲージ理論）の外の寄り道。 → 19-05

筒の関数

有限個のリンクの集合 S の値だけで決まる関数（台 S）。 → 20-03

Dobrushin の条件

一本のリンクが周りのリンクから受ける影響を係数で測り、その和が 1 より小さいこと。無限体積の極限を一つに決める条件。 → 20-03

強結合の窓

第 20 部の定理が成り立つ β の範囲（$18\tanh|\beta| < 1$ と $24(1-e^{-4|\beta|}) < 1$）。連続極限が要る弱結合とは反対の端。 → 20-02

符号の系・符号の指標

有限群 G（格子ではリンクごとの符号の場）の上の乗法的な関数（符号の指標）で書いた、格子を忘れた抽象の系。 → 21-01

被覆の不等式

符号の系についての抽象の不等式。薄い渦の床の部品。 → 21-01

Z_2 の単調性

非負の結合で、結合を項ごとに増やすと捩れた比は増えず、流束の自由エネルギーは減らないこと。 → 21-01

床

渦の比 θ の上界。流束の自由エネルギー ΔF の下界で、板の張力の下からの評価。 → 21-02

薄い渦の床

$\theta \le \tanh(N^2|\beta|)^{M^2}$（全ての β・N・M・背景の捩れ、SU(2) の Wilson 測度）。N に一様ではない。 → 21-02

太い渦の床

θ の上界で、指数に渦の最小作用 S_N が現れるもの。閾 β_0・$M_0(\beta)$ は陽でない。 → 21-03

一段の縮み

自由場の一段の記号についての不等式 $\boxtimes P \preccurlyeq (3/5)P$。 → 15-12

冠 h(r)

単位元のまわりの開いた冠 $\{U \in SU(2) : |U - 1| < r\}$ と、その Haar の体積 $h(r)$。 → 22-01

示すべき言明（根）

第 19 部で定義した対象だけで書いた六つの言明：合わせ・全列の収束・非退化・同程度連続・質量ギャップ（一様な減衰）・帯。 → 19-07

合わせ

裸の結合の列 β_n の決め方。格子間隔を目盛るための調整を、定義された対象だけで書いた規則。 → 19-07

全列の収束

合わせで決めた列について、部分列を取らずに押し出しの測度が収束すること。 → 19-07

同程度連続

観測量が、箱の中の物理の位置について一様に連続であること。 → 19-07

十分条件・表現

十分条件は、今の道で根を導くために置く前提。その多くは実効の結合・大きい場の活性・背景場・類（表現）を通した言明で、表現の量の多くはまだ格子から定義されていない。 → 28-00

前提の札

前提の一覧の欄：定理・定理（弱い形）・紙・形は確定・未証明・形が未定・設計に依る・文献。本文の札（初・典・機・読・仮）とは別。 → 28-00

理由の記号 (a)〜(f)

形が未定の前提に付ける理由：軽すぎる・強すぎる・対象が未定義・数値の兆し・段を跨ぐ形が無い・量化の順が未定。 → 28-00

設計の選び

ブロック写像の重み・倍率・閾、ノルムや背景など、数学の側から一つに決まらず、こちらが選んで固定するもの。 → 28-05

含意（第 28 部での使い方）

仮定を全て見せた条件つきの定理。 → 28-01

歪積

結合の方向は縮まず、無関係な方向だけが縮み、二つが互いに影響する形の一段の写像。→ 28-02

終点の合わせ

粗い端の値が目標になるように、段の数ごとに裸の値を選ぶこと。全列の収束は縮みだけからは出ず、これが言明の一部になる。→ 28-02

張力の倍化の不等式

ある $\delta_0 > 0$・N_1 で $4\sigma_{2N} \geq e^{\delta_0}\sigma_N$（$N \geq N_1$）の形の前提。→ 28-04

寄り道：「次元」という語の四つの使い方

飛ばしてよい。「次元」には四つの意味があります。(一) 時空の次元 d（空間だけなら D。ひも理論の章では文献に合わせ D を時空の次元に使う、17-05）。(二) 量の物理の次元（質量の何乗か）。「次元転移」はこちら（4-07）。(三) 線形空間の次元（$\mathfrak{su}(N)$ は N^2-1）。(四) 異常次元 η_s。「次元正則化」は (一) を複素数に延ばす技法です（4-05）。式 (7) と 四次元の記事 の四は、どちらも (一) です。

この章が言えている範囲

言えていること	言えていないこと
各項はリンク先の章の定義を縮めたもの。	定理の仮定（次元・群・規格化）を省いた項がある。正確な言明はリンク先にだけある。
表 1 の数はこの端末で下書きから数えた値。	章の改訂で動く。重要さの指標ではない。
第 17 部の項は物理の描像・予想として書いた。	四次元のヤン–ミルズで定理として成り立つとは言っていない。
第 23 部の項は、本書の検討が置いた仮定の名前と中身。	どれも証明されていない。連続の理論の質量ギャップについて、この本は何も示していない（本書の Lean の質量ギャップは強結合の格子の言明）。

出典と再現

もの	種別	出典・道具
各項の意味	要約	本書の各章（リンク先）。一次資料の書誌は各章の出典表と A-03
記号の約束（β・tr の規格化・ゲージ場の二つの書き方）	本書の規約	A-01 記号表

もの	種別	出典・道具
表 1（言葉の出る章の数）	計算	python3：付録を除く 105 章の下書きから script・style・全体目次・meta 行・head を除いてタグを外し、語の出現を数えた（`term_counts.py`）
表 2・図 2（e^{-mt} と $\xi = 1/m$）・式 (10) の例	計算	python3（`gap_corr.py`）。式 (4) は 4-11 の既知の関係
式 (5) の $b_0 = 11N/3$	既知	4-06 の出典：D. J. Gross, F. Wilczek, PRL 30 (1973) 1343。H. D. Politzer, PRL 30 (1973) 1346（どちらも書誌のみ。各章の出典表による）
強結合展開の項（面積則と正のギャップ）	既知	5-02 の出典：K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440（要旨のみ。各章の出典表による）
式 (8) の Lüscher 項	物理（有効弦の仮定の下）	17-03 の出典：M. Lüscher, NPB 180 (1981) 317（書誌のみ。各章の出典表による）
式 (9) の例の $m/\sqrt{\sigma} = 3.837$	計算（一次資料の値の比）	17-12：B. Lucini, M. Teper, JHEP 0106 (2001) 050, arXiv:hep-lat/0103027 表 1（$\beta = 2.60$・24^4、$a\sqrt{\sigma} = 0.13395(62)$・$am = 0.514(8)$）。3.837 = 0.514/0.13395

次に読む章：A-03 文献案内 — 各章の一次資料・総説・教科書を、入手の状態つきで。

文献案内 — 何から読み、どこで手に入り、本書がどこまで読んだか

この章は文献の案内です。

この章で分かること — 本書の各章が引く主な文献 52 件を、総説・教科書・一次資料の系統と年で並べたもの（ほかに、2026 年に公開された構成の三件を §07 に、個別の章の出典を一次資料で確かめた 18 件を表 3 に）。最初に読むとよい数本。それぞれが手に入る場所（arXiv・出版社・研究所や著者の公開・書籍）と、本書の章がその文献を本文まで読んだのか、要旨だけか、書誌だけか。

前提となる章 — なし。どこから引いてもよく、各文献の中身はリンク先の章で読みます。用語は A-02 用語集、記号は A-01 記号表。

先に言うこと — これは網羅的な文献表ではありません。本書の章が引く文献は数百件あり、ここにはそのうち章をまたいで効くものを選んで載せます。「参照の程度」は各章の出典表の書き方を機械的に読み取った値で、文献の価値の評価ではありません。四次元の存在は 2026 年に公開された構成（§07）で、Lean で証明されている、と委員会が評価しました。質量ギャップは示されていません。本書は問題の解決を主張しません。

この章の順序

1. この案内の使い方 — 三つの種別と二つの状態。寄り道：書誌の読み方
2. 文献の地図 — 七十年を七つの系統に並べる（動く図）
3. 最初に読むもの：問題文と総説 — 問題の文と、現在地を書いた総説
4. 教科書と講義録 — 第 1 部・第 2 部の道具を深めるために
5. 物理の一次資料 — 1954 年の原論文から 1970 年代の骨格まで（と、後の数学・確率量子化の視点）
6. 格子と数値 — Wilson の格子と、グルーボールの測定
7. 構成的場の理論と確率 — 公理・四次元の紫外・二次元と三次元の確率的構成
8. 弦とホログラフィー — 物理の水準の模型

9. 本書の出典表を数える — どの文献が何章に出るか、どこまで読んだか（計算）
10. 入手と読み方の注意 — 版の違い・未査読・古い誌の探し方。章の出典を一次資料で確かめた書誌（表 3）

01

この案内の使い方

文献は三つの種別に分けます。**一次資料**は結果を最初に示した論文で、定理の正確な仮定と言明はここで確かめます。**総説**はある時点までの結果の見取り図で、どの一次資料を読むかの入口です。**教科書・講義録**は道具を順に身につけるためのものです。

状態は二つ付けます。一つ目は**入手**：arXiv（プレプリントの公開の置き場。無料）、出版社（誌の版だけ。図書館の契約が要ることが多い。無料で公開されているものは「出版社（公開）」）、研究所や著者が公開している PDF、書籍。誌に載ったことを本書の時点で確かめていないプレプリントには「未査読」の印を付けます。

二つ目は**本書での参照の程度**です。各章の「出典と再現」の表は、文献を本文まで読んだか、要旨だけか、書誌だけかを書いています。それを全章で集め、章ごとの程度の最大を取ります。

$$\mathrm{best}(r) = \max_{c \in C(r)} s(c, r), \qquad s \in \{\text{書誌のみ} < \text{要旨} < \text{本文}\} \tag{1}$$

ここで r は文献、$C(r)$ はそれを出典表で引く章の集まり、$s(c, r)$ は章 c の出典表から読み取った程度です。「本文」には、序論や一つの節だけを確かめた場合も含みます。たとえば Osterwalder–Seiler（1978）は 40 章が引き、そのうち 25 章が「書誌のみ」と書いています（§09）。

「書誌のみ」の文献に寄せた本書の主張は、本文を確かめた別の文献を経由しています。経由先は各章の出典表にあります。

寄り道：書誌の読み方

飛ばしてよい。物理と数学の論文の書誌は、たいてい「著者, 誌名 巻 (年) 最初の頁」の順に書きます。たとえば `Comm. Math. Phys. 102 (1985) 255` は、Communications in Mathematical Physics の第 102 巻、1985 年、255 頁から、という意味です。誌名は略記され、本書では `CMP`（Comm. Math. Phys.）、`PRL`（Phys. Rev. Lett.）、`NPB`（Nucl. Phys. B）がよく出ます。

arXiv の番号には二つの形があります。2007 年 3 月までは「分野/年月と通し番号」の形、2007 年 4 月からは「年月.通し番号」の形です。通し番号は 2014 年 12 月までが 4 桁、2015 年 1 月からが 5 桁です。

hep-th/9711200 — hep-th/：分野、9711：1997年11月、200：番号
2204.12737 — 2204：2022年4月、12737：番号

この章の表の「年」は、arXiv があればその投稿の年、なければ誌の年です（Shen–Zhu–Zhu は arXiv が 2022 年、誌が 2023 年）。Clay の問題文は発表の年（2000 年）です。

02

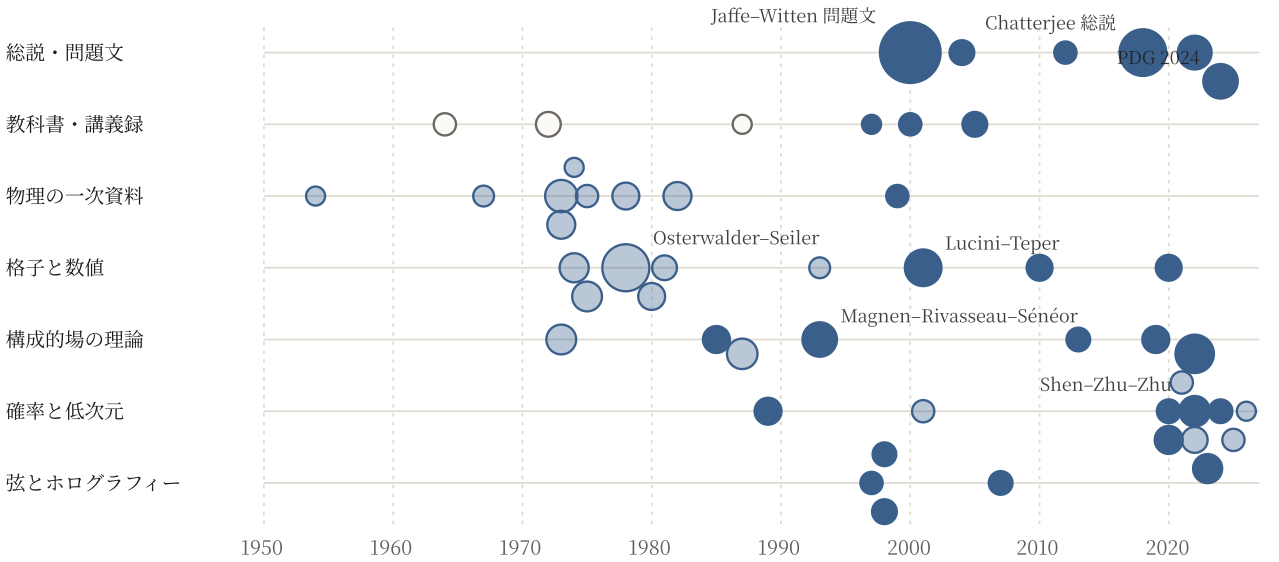
文献の地図

まず全体を一枚で見ます。横軸が年、縦が系統です。点の大きさは、その文献を引く章の数です。点の塗りは本書での参照の程度で、塗りつぶしが「本文」、薄い塗りが「要旨」、白抜きが「書誌のみ」です。

物理の一次資料は 1954 年から 1970 年代に集まっています。四次元の構成に向かう仕事（Bałaban・Magnen–Rivasseau–Sénéor）は 1980 年代から 1990 年代の初めに集中しています。この系統の仕事は四次元の構成を完成させていません（7-07）。四次元の存在は、2026 年に公開された構成で、Lean で証明されている、と委員会が評価しました（§07 の公開された構成の表、6-00）。確率論の側からの仕事は 2018 年ごろから増えています。

年のつまみを動かすと、その年までに出た文献だけが濃く残ります。部のつまみを動かすと、その部の章が引く文献だけが濃くなります。点を押すと、系統と参照の程度と引いている部が下に出て、表の行（章へのリンクがある）へ飛べます。

図 1 文献の地図 — 年のつまみで「その年までの文献」、部のつまみで「その部が引く文献」が浮かぶ。点を押すと系統・参照の程度・引く部が出る。



濃く出ている文献：52 件／52 件

計算 この図の数値（点の位置・大きさ・塗り・部ごとの引用）は、この端末で本書の出典表から数えた（出典と再現）。図と同じ内容は §03〜§08 の系統ごとの表にあり、図が動かない環境でも読めます。

03

最初に読むもの：問題文と総説

一本だけ読むなら、Clay 数学研究所の公式の問題文（Jaffe–Witten）です。問題が何を求めているか、なぜ四次元で難しいかを、作った側の言葉で書いています。本書では 0-03 で一語ずつ読みます。本書の章の中で最も多く引かれる文献でもあります。

問題文が求める性質の芯は、ハミルトニアン H のスペクトルの形です。真空のエネルギーを 0 としたとき、その上に正の隙間 Δ が空いていることを求めます。

$$\operatorname{spec}(H) \subset \{0\} \cup [\Delta, \infty), \qquad \Delta > 0 \tag{2}$$

この式の正確な読み方（真空の一意性・相関の減衰との関係）は 4-11 にあります。

二本目は Chatterjee の総説「Yang–Mills for probabilists」です。格子の上のヤン–ミルズ理論を確率論の言葉で定義し、何が示されていて何が開いているかを、問いの形（格子の相関長の問題・連続の弦張力の問題。Chatterjee の Problem 5.1・5.2）で並べています。本書の第 5 部・第 7 部の多くの章がこれを道しるべにしています。三本目には、二次元・三次元の確率的構成を追うなら Chevyrev、公理と構成の歴史なら Summers の総説です。

年	文献	何が書いてあるか	本書の章	入手	参照
2000	A. Jaffe, E. Witten（Clay 数学研究所の公式の問題文）	問題の公式の文と、その背景の解説	0-01 0-02 ほか 74	研究所の公開 PDF	本文

年	文献	何が書いてあるか	本書の章	入手	参照
2004	M. R. Douglas, Report on the Status of the Yang–Mills Millenium Prize Problem（Clay 数学研究所への報告, 2004）	問題の発表から数年後の現状報告	0-02 4-07 ほか 4	Clay 数学研究所の公開 PDF（年次報告の書庫）	本文
2012	S. J. Summers, arXiv:1203.3991	構成的場の理論の歩みの総説	4-10 7-03 ほか 2	arXiv	本文
2018	S. Chatterjee, arXiv:1803.01950	確率論の読者に向けた総説。格子の定義・強結合の面積則・未解決の問い	0-01 0-02 ほか 37	arXiv	本文
2022	I. Chevyrev, J. Math. Phys. 63 (2022) 091101, arXiv:2202.13359	確率量子化からヤン–ミルズに近づく道の総説	0-02 0-04 ほか 14	arXiv	本文
2024	Particle Data Group（S. Navas et al.）, Phys. Rev. D 110 (2024) 030001（QCD の章ほか）	結合定数の走りなど、物理の標準の数値の参照先	0-02 0-03 ほか 15	出版社（公開）	本文

04

教科書と講義録

本書の第 1 部・第 2 部は、2 年生の知識から必要な道具を最小限に用意します。もう一段深く学びたいときの行き先がこの表です。群と表現なら Hall、多様体と接続なら Carroll、作用素とスペクトルなら Reed–Simon、場の量子論の計算なら Tong の講義録、公理と構成なら Streater–Wightman と Glimm–Jaffe です。

例を一つ挙げます。1-03 で使う Baker–Campbell–Hausdorff の式は、行列の指数関数の積が、交換子だけで書ける補正を受けることを言います。

$$e^{X}e^{Y} = \exp\Big(X + Y + \tfrac{1}{2}[X,Y] + \tfrac{1}{12}\big([X,[X,Y]] + [Y,[Y,X]]\big) + \cdots\Big) \tag{3}$$

本書は三次の項までを Hall の講義録で確かめています。単位元の近くでは、群の積がリー環の交換子だけで決まります。この式がその理由です（群そのものはリー環だけでは決まりません。1-03）。講義録の多くは著者の公開版があり、arXiv の番号を表に書きました。

年	文献	何が書いてあるか	本書の章	入手	参照
1964	R. F. Streater, A. S. Wightman, PCT, Spin and Statistics and All That, Benjamin (1964)	Wightman の公理とその帰結	0-03 0-04 ほか 2	書籍	書誌のみ
1972	M. Reed, B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics I, Academic Press (1972)	作用素論と関数解析の教科書（全 4 巻）	1-03 1-10 ほか 4	書籍	書誌のみ

年	文献	何が書いてあるか	本書の章	入手	参照
1987	J. Glimm, A. Jaffe, Quantum Physics: A Functional Integral Point of View, 2nd ed., Springer (1987)	構成的場の理論の教科書	4-10 7-01	書籍	書誌のみ
1997	S. M. Carroll, arXiv:gr-qc/9712019	一般相対論の講義録。多様体・接続・曲率の入門	1-05 1-07	arXiv	本文
2000	B. C. Hall, arXiv:math-ph/0005032（増補版は Springer GTM 222, 2003）	リー群・リー環・表現の入門	1-02 1-03 ほか 2	arXiv	本文
2005	D. Tong の講義録（Gauge Theory・Statistical Field Theory・TASI Lectures on Solitons, arXiv:hep-th/0509216）	ゲージ理論・統計場の理論・ソリトンの講義録	3-05 4-04 ほか 4	著者の公開	本文

05

物理の一次資料

ヤン–ミルズ理論は、1954 年の Yang と Mills の論文で、アイソスピンの局所対称性から場を作る形で現れました。1960 年代にゲージ固定とゴーストの規則（Faddeev–Popov）が整い、1973 年に漸近自由が見つかります。結合が短い距離で弱まるという符号の発見です。

本書の記号（A-01 の式 (8)）で書くと、一ループの走りは次の形です。

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = -b_0\, g^3 + \cdots, \qquad b_0 = \frac{11N}{48\pi^2} \tag{4}$$

$b_0 > 0$ なので、エネルギー μ を上げると g は小さくなります。既知 これは摂動の一ループの計算で、四次元の理論についての定理ではありません。物理 この符号が、ヤン–ミルズ理論が短い距離で意味を持つと期待される根拠です。中身の勘定（$11/3 = 4 - 1/3$）は 4-06 にあります。

この系統の多くは、本書の章では「要旨」か「書誌のみ」です。古い誌にあり公開の版が無いためで、式や数値は本文を確かめた総説（PDG・Tong・Chatterjee）で照合しています。

表には、1970 年代の骨格のあとに来る三本も入れました。Gribov（1978）はゲージ固定が一意に決まらないことを示しました。Uhlenbeck（1982）は、古典的なヤン–ミルズ場の特異点が取り除けることを示した幾何解析の数学の論文です。Baulieu–Zwanziger（1999）は、確率量子化を五次元の場の理論として見る視点です。

年	文献	何が書いてあるか	本書の章	入手	参照
1954	C. N. Yang, R. L. Mills, Phys. Rev. 96 (1954) 191	非可換ゲージ場の原論文	3-01 3-02	出版社	要旨

年	文献	何が書いてあるか	本書の章	入手	参照
1967	L. D. Faddeev, V. N. Popov, Phys. Lett. B 25 (1967) 29	ゲージ固定とゴーストの規則	4-03 4-08 ほか 1	出版社	要旨
1973	D. J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1343	漸近自由：一ループの β 関数の符号が負になること	0-02 0-03 ほか 12	出版社	要旨
1973	H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1346	漸近自由（Gross–Wilczek と同じ号に並ぶ独立の計算）	0-03 4-06 ほか 7	出版社	要旨
1974	G. ’t Hooft, Nucl. Phys. B 72 (1974) 461	色の数 N を大きくする展開。平面図形が支配すること	17-04 18-04	出版社	要旨
1975	A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, Yu. S. Tyupkin, Phys. Lett. B 59 (1975) 85	インスタントン解（自己双対で作用が有限な解）	1-12 3-03 ほか 2	出版社	要旨
1978	V. N. Gribov, Nucl. Phys. B 139 (1978) 1	ゲージ固定が一意に決まらないこと（Gribov のコピー）	3-04 4-01 ほか 6	出版社	要旨
1982	K. Uhlenbeck, Commun. Math. Phys. 83 (1982) 11	ヤン–ミルズ場の除去可能特異点	1-05 1-07 ほか 7	出版社	要旨
1999	L. Baulieu, D. Zwanziger, Nucl. Phys. B 581 (2000) 604, arXiv:hep-th/9909006	確率量子化を五次元の場の理論として見る	23-00 23-01 ほか 2	arXiv	本文

06

格子と数値

1974 年に Wilson は、時空を格子に置き換え、リンクに群の元を載せる定式化を出しました。これでヤン–ミルズ理論は有限個の変数の積分になり、計算機で測れるようになります。本書の記号では作用は次の形です（5-01）。

$$S_W(U) = \beta \sum_{P} \left(1 - \frac{1}{N} \operatorname{Re}\operatorname{tr} U_P \right), \qquad \beta = \frac{2N}{g^2} \tag{5}$$

和はすべての単位正方形（プラケット）P についてとり、U_P はその周りのリンクの積です。この定式化の数学的な土台（反射正値性と転送行列）を与えたのが Osterwalder–Seiler（1978）です。本書の章の中で、Jaffe–Witten・Chatterjee と並んで最も多く引かれます。

数値の側では、Creutz（1980）のモンテカルロ計算から始まり、Lucini–Teper（2001）や Athenodorou–Teper（2020・2021）がグルーボールの質量と弦張力の比を測っています。物理 これらは数値計算で支持された値で、定理ではありません。弦の揺らぎから出る補正（Lüscher 1981）は次の形です（17-03）。

$$V(R) = \sigma R + c_0 - \frac{\pi (d-2)}{24 R} + \cdots \tag{6}$$

四次元（$d = 4$）では最後の項は $-\pi/(12R)$ です。

年	文献	何が書いてあるか	本書の章	入手	参照
1974	K. G. Wilson, Phys. Rev. D 10 (1974) 2445	格子ゲージ理論と Wilson ループ。強結合での閉じ込め	5-01 5-02 ほか 8	出版社	要旨
1975	S. Elitzur, Phys. Rev. D 12 (1975) 3978	局所ゲージ対称性は自発的に破れない（Elitzur の定理）	3-01 3-07 ほか 9	出版社	要旨
1978	K. Osterwalder, E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440	格子ゲージ理論の反射正値性・転送行列・強結合	0-01 0-02 ほか 38	出版社	要旨
1980	M. Creutz, Phys. Rev. D 21 (1980) 2308	$SU(2)$ 格子ゲージ理論のモンテカルロ計算	4-06 5-02 ほか 6	出版社	要旨
1981	M. Lüscher, Nucl. Phys. B 180 (1981) 317（弦の揺らぎの項）	弦の揺らぎから出る普遍な補正項（有効弦）	2-02 5-08 ほか 4	出版社	要旨
1993	R. Sommer, Nucl. Phys. B 411 (1994) 839, arXiv:hep-lat/9310022	格子の尺度を決める長さ r_0 の導入	5-05 5-08 ほか 1	arXiv	要旨
2001	B. Lucini, M. Teper, JHEP 0106 (2001) 050, arXiv:hep-lat/0103027	$SU(N)$ の弦張力（離れた電荷の間の力の強さ）とグルーボール、大 N への外挿	5-02 5-08 ほか 18	arXiv	本文
2010	S. Schaefer, R. Sommer, F. Virotta, Nucl. Phys. B 845 (2011) 93, arXiv:1009.5228	格子計算の臨界減速（連続極限に近づくほど計算の更新が遅くなること）と、位相電荷（場のねじれを数える整数）の自己相関	5-07 23-01 ほか 5	arXiv	本文
2020	A. Athenodorou, M. Teper, JHEP 11 (2020) 172, arXiv:2007.06422；JHEP 12 (2021) 082, arXiv:2106.00364	グルーボールの質量スペクトルの格子計算	5-08 5-09 ほか 5	arXiv	本文

07

構成的場の理論と確率

質量ギャップの問題は「存在」と「隙間」の二段からなります。数学の側でこれに向かう文献は、三つの群に分かれます。公理の群、四次元の紫外の群、低次元と格子の上の確率論の群です。

公理：確率を量子力学に戻す

Osterwalder–Schrader の公理は、ユークリッド（虚時間）の相関関数から、ヒルベルト空間とハミルトニアンを組み立て直す条件です。中心にあるのは反射正値性で、時間を鏡に映した観測量 ΘF と元の F の積の期待値が負にならない、という条件です（4-10）。

$$\langle F, F \rangle := \mathbb{E}\big[\,\overline{\Theta F}\, F\,\big] \;\geq\; 0 \tag{7}$$

これが成り立てば、正の内積が作れ、時間の並進が e^{-sH}（$H \geq 0$）として現れます。式 (2) の H はここから来ます。

四次元の紫外：Bałaban と MRS

四次元の連続極限に最も近づいた仕事は、Bałaban の連作（1985 年の三次元の論文と、1987〜1989 年の四次元の論文。繰り込み群による格子ヤン–ミルズの紫外安定性）と、Magnen–Rivasseau–Sénéor（1993）の赤外切断つきの構成です。どちらも、本書が問題の文の意味で「完成」と読める段には届いていません。何が示されて何が残るかは 7-07 で読みます。

四次元の存在：公開された構成（2026）

2026-11-10 に、四次元のヤン–ミルズ理論の存在の構成を Lean 4 で書いたコードと、それを検査した委員会の評価書が公開されました。評価書の判定は、提出されたコードが、四次元の Wilson の格子ゲージ理論の尺度の極限として Wightman の公理を満たす理論が作れることを、任意の単純なコンパクト群について証明している、というものです。無限体積の極限の一意性と質量ギャップは示していない、とも書いています。この本は、その定理を「Lean で証明されている、と委員会が評価した」の水準で引きます。第二巻の第 6〜14 部がこの三件を一次資料として読みます。書き方は 6-00 の約束に従います（コードはリポジトリの根からの相対パス・宣言の名・行、評価書は節の番号）。

年	文献	何が書いてあるか	本書の章	入手	参照
2026	yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028（https://github.com/yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028、Apache-2.0）。2026-10-28 に提出された Lean 4 の源。本書が読んだ版は 3456e5e	四次元の純粋なヤン–ミルズ理論の存在の構成（格子・繰り込みの一段・多段の評価・無限体積・再構成）	6-00〜6-04・第 8〜14 部	GitHub（公開）	定義と言明（証明の中身は一部）
2026	委員会の評価書と検査：yang-mills-group/YM（https://github.com/yang-mills-group/YM）の docs/assessment-1.pdf（2026-11-10、35 頁）と submissions/openai-20261028/ の検査のコード。本書が読んだ版は 55ba9fc	構成の結果と問題文との比べ（第 I 部）、組み直し・核での再検査・公理の点検・Comparator による照合の記録（第 II 部）、五つの開いた問い	6-00・6-02・16-02 ほか	GitHub（公開）	本文
2026	委員会の第三の声明（Kavli Institute for Theoretical Physics の頁、2026-11-09）。署名：Michael R. Douglas、David J. Gross（委員長）、Arthur Jaffe、Igor R. Klebanov、Nikita Nekrasov	評価の結論の短い声明。委員の名は評価書の本文には無く、この声明の署名による	6-00	研究所の公開の頁	本文

公開された構成の三件（§07 の表）。表 1・図 1 の数え（52 件）には入れていません。

二次元・三次元と格子の上の確率論

既知 二次元ではヤン–ミルズ測度が構成されています（Driver 1989、Lévy 2001 ほか）。2020 年代には、測度を確率的な力学の平衡として作る道（確率量子化）が二次元・三次元で進んでいます。格子の上では、強結合での相関の指数減衰は Osterwalder–Seiler（1978）のクラスター展開から従い、Shen–Zhu–Zhu は確率解析の方法で、Poincaré 型の不等式と指数減衰を具体的な β の範囲で示しました 既知 。到達点と、四次元で止まる場所は 7-10 と 16-01 にあります。未査読のプレプリントは表で「未査読」と書きました。

年	文献	何が書いてあるか	本書の章	入手	参照
1973	K. Osterwalder, R. Schrader, Comm. Math. Phys. 31 (1973) 83；42 (1975) 281	ユークリッドの公理と再構成定理（1975 年の第二部を含む）	0-03 0-04 ほか 9	出版社	要旨
1985	T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 102 (1985) 255（三次元）	三次元の格子ヤン–ミルズの紫外安定性（短い距離の寄与を格子間隔によらず抑えること）	0-02 7-01 ほか 6	出版社	本文
1987	T. Bałaban, Comm. Math. Phys. 109 (1987) 249；122 (1989) 175；122 (1989) 355（四次元の連作, 1987〜1989）	繰り込み群による四次元の格子ヤン–ミルズの紫外安定性の連作	0-02 4-04 ほか 10	出版社	要旨
1993	J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, Comm. Math. Phys. 155 (1993) 325	赤外切断（大きな距離の寄与を人為的に抑える操作）つきの四次元ヤン–ミルズの構成	0-02 0-03 ほか 15	出版社	本文
2013	M. Hairer, Invent. Math. 198 (2014) 269, arXiv:1303.5113	正則性構造の理論（ふつうの意味では解を持たない確率偏微分方程式に意味を与える枠組み）	1-11 7-03 ほか 3	arXiv	本文
2019	M. Aizenman, H. Duminil-Copin, Ann. of Math. 194 (2021) 163, arXiv:1912.07973	四次元の φ^4 と Ising の、スケーリング極限（格子間隔を 0 にする極限）の自明性	0-03 1-08 ほか 6	arXiv	本文

年	文献	何が書いてあるか	本書の章	入手	参照
1989	B. K. Driver, Comm. Math. Phys. 123 (1989) 575	平面の二次元ヤン–ミルズ測度	0-02 0-04 ほか 6	出版社	本文
2001	T. Lévy, Mem. AMS 166 no. 790 (2003), arXiv:math/0101239	コンパクトな曲面の上のヤン–ミルズ測度	0-02 7-01 ほか 2	arXiv	要旨
2020	A. Chandra, I. Chevyrev, M. Hairer, H. Shen, Publ. Math. IHÉS 136 (2022) 1, arXiv:2006.04987	二次元ヤン–ミルズ測度の Langevin 力学と状態空間	3-04 7-09 ほか 3	arXiv	本文

年	文献	何が書いてあるか	本書の章	入手	参照
2020	S. Chatterjee, Comm. Math. Phys. 385 (2021) 1007, arXiv:2006.16229	閉じ込めの確率論的な機構（中心対称性）	5-10 17-01 ほか 7	arXiv	本文
2021	S. Cao, S. Chatterjee, Comm. Math. Phys. 405 (2024), arXiv:2111.12813	三次元ユークリッドのヤン–ミルズ理論の状態空間	7-06 7-11 ほか 2	arXiv	要旨
2022	A. Adhikari, S. Cao, Ann. Probab. 53 (2025) 140–174, arXiv:2202.10375	有限群の格子ゲージ理論の弱結合での相関の減衰	5-06 5-09 ほか 10	arXiv	本文
2022	A. Chandra, I. Chevyrev, M. Hairer, H. Shen, Invent. Math. 237 (2024) 541, arXiv:2201.03487	三次元ヤン–ミルズ–ヒッグスの確率量子化	4-05 7-06 ほか 5	arXiv	要旨
2022	H. Shen, R. Zhu, X. Zhu, Comm. Math. Phys. 400 (2023) 805, arXiv:2204.12737	強結合の格子ヤン–ミルズの確率解析（Poincaré・指数減衰）	4-11 5-01 ほか 21	arXiv	本文
2023	I. Chevyrev, H. Shen, Comm. Pure Appl. Math. (2026)（巻・頁は未確認）, arXiv:2302.12160	二次元の Langevin 力学の不変測度と普遍性	0-02 4-08 ほか 8	arXiv	本文
2024	S. Chatterjee, Prob. Math. Phys. 7 (2026) 339, arXiv:2401.10507	$SU(2)$ 格子ヤン–ミルズ–ヒッグスのスケーリング極限（格子間隔を 0 にする極限）	7-08 7-10 ほか 3	arXiv	本文
2025	S. Cao, R. Nissim, S. Sheffield, arXiv:2505.16585・arXiv:2509.04688	格子ヤン–ミルズの面積則の領域の拡大（2505.16585）と、その力学的な方法による証明（2509.04688）（未査読）	5-02 5-11 ほか 2	arXiv（未査読）	要旨
2026	I. Chevyrev, T. Klose, A. Mohamed, arXiv:2607.22236／R. Chhaibi ほか, arXiv:2607.24640	二次元ヤン–ミルズ測度の新しい構成法（未査読）	7-02 16-01	arXiv（未査読）	要旨

08

弦とホログラフィー

物理の側には、ヤン–ミルズ理論の閉じ込めとグルーボールの質量を、一次元多い重力の幾何で読む見方があります。Maldacena（1997 年の投稿）の提案した対応と、それを閉じ込めの模型に使った Witten（1998）が出発点です。Csáki–Ooguri–Oz–Terning は、この模型からグルーボールの質量の比を、ある固有値問題の解として出しました。

物理 これらは物理の水準の対応と模型で、数学の定理ではありません。純粋な四次元ヤン–ミルズ理論そのものに当てはまる形でも示されていません。何が模型の仮定で、四次元に戻す極限で何が起きるかは 17-08・17-09・17-10 で読みます。

年	文献	何が書いてあるか	本書の章	入手	参照
1997	J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 231, arXiv:hep-th/9711200	AdS/CFT 対応（ホログラフィー）の提案	17-05 17-08 ほか 2	arXiv	本文
1998	C. Csáki, H. Ooguri, Y. Oz, J. Terning, JHEP 9901 (1999) 017, arXiv:hep-th/9806021	超重力（重力の低エネルギーの理論）の計算からグルーボールの質量の比を出す	17-06 17-08 ほか 4	arXiv	本文
1998	E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 505, arXiv:hep-th/9803131	熱的な相転移と閉じ込めの、一次元多い幾何の模型	17-05 17-07 ほか 3	arXiv	本文
2007	U. Gürsoy, E. Kiritsis, F. Nitti, JHEP 0802 (2008) 019, arXiv:0707.1349	改良したホログラフィーの QCD の模型	5-08 17-01 ほか 3	arXiv	本文

09

本書の出典表を数える

本書の 110 章（この章を除く）の出典表には、合わせて 1035 行があります。そこに現れる arXiv の番号は 206 種類、「巻 (年) 頁」の形の書誌はおよそ 602 種類です（後者は数式の中の数の並びを拾うことがあり、概数です）。計算

各文献について、それを引く章の数と、章ごとの参照の程度を数えました。表 1 は引く章の多い順の上位 10 件です。「読み取れず」は、出典表の行に程度の書き込みが無かったか、語の照合で決められなかった章です。

表 1　本書の章が多く引く文献（各章の出典表の程度の内訳）

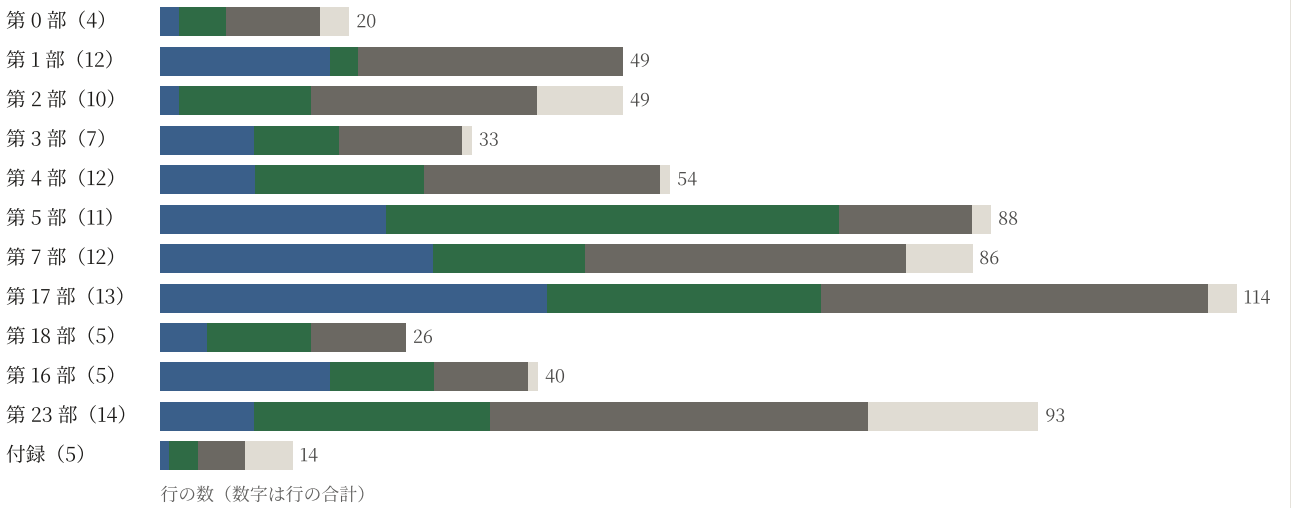
順	文献	引く章	本文	要旨	書誌のみ	読み取れず
1	Jaffe–Witten 問題文	76	61	4	2	9
2	Osterwalder–Seiler	40	0	15	25	0
3	Chatterjee 総説	39	27	4	2	6
4	Shen–Zhu–Zhu	23	6	12	1	4
5	Lucini–Teper	20	12	0	0	8
6	Magnen–Rivasseau–Sénéor	17	2	7	4	4
7	PDG 2024	17	8	1	1	7
8	Chevyrev 総説	16	11	1	1	3
9	Gross–Wilczek	14	0	2	12	0
10	Bałaban 四次元の連作	12	0	7	4	1

Osterwalder–Seiler は 40 章が引きますが、多くの章は要旨と、本文を確かめた総説（Chatterjee §4 など）を経由しています。Lucini–Teper は、20 章のうち 12 章が本文の表まで確かめたと書いています。

部ごとにも数えました。出典表の行のうち一次資料の書誌を含む行について、その行の程度を数えます。本文の割合は、次の比です。

$$\text{本文の割合} = \frac{\#\{\text{本文}\}}{\#\{\text{本文}\} + \#\{\text{要旨}\} + \#\{\text{書誌のみ}\} + \#\{\text{読み取れず}\}} \tag{8}$$

図 2 部ごとの参照の程度 — ボタンで「行の数」と「割合」を切り替える。



計算 この図の数値は、この端末で本書の出典表から数えた。下の表 2 が同じ数値です。

表 2　部ごとの、一次資料を含む出典表の行の程度

部	章	行	本文	要旨	書誌のみ	読み取れず	本文の割合
第 0 部	4	20	2	5	10	3	10%
第 1 部	12	49	18	3	28	0	37%
第 2 部	10	49	2	14	24	9	4%
第 3 部	7	33	10	9	13	1	30%
第 4 部	12	54	10	18	25	1	19%
第 5 部	11	88	24	48	14	2	27%
第 7 部	12	86	29	16	34	7	34%
第 17 部	13	114	41	29	41	3	36%
第 18 部	5	26	5	11	10	0	19%
第 16 部	5	40	18	11	10	1	45%
第 23 部	14	93	10	25	40	18	11%

部	章	行	本文	要旨	書誌のみ	読み取れず	本文の割合
付録	5	14	1	3	5	5	7%
計	110	666	170	192	254	50	26%

程度は出典表の語（「本文を確認」「要旨」「書誌のみ」など）で決めたので、書き方の揺れに左右されます。表 1 は、文献の名が現れる区切り（「／」「；」）の中の語を優先して読んでいます。

10

入手と読み方の注意

版の違い。arXiv の版と誌の版は、頁や定理の番号がずれることがあります。本書の章は、どちらの版で確かめたかを出典表に書いています。

掲載の状態。arXiv の目録の「journal-ref」は著者が書き込む欄で、巻と頁が空のことがあります。たとえば Chevyrev–Shen は目録に「Comm. Pure Appl. Math. (2026)」とだけあり、巻と頁は本書では未確認です。2025 年と 2026 年のプレプリント（Cao–Nissim–Sheffield、2026 年の二本）は、本書の時点で掲載を確認していません。未査読の結果は、査読を経た結果と同じ重さでは扱いません。

古い誌の探し方。1970〜80 年代の論文の多くは誌の版しかありません。書誌は INSPIRE（高エネルギー物理の文献の目録）や Crossref で確かめられます。Comm. Math. Phys. の古い巻は、Project Euclid に公開の版があるものがあります（たとえば Driver 1989、CMP 123）。それ以外は、大学の図書館を通すのが確かです。

章の出典を一次資料で確かめた書誌

§03〜§08 の表は、章をまたいで効く 52 件です。それとは別に、一つか二つの章の主張を支える文献のうち、書誌や本文を一次資料の目録（Crossref・INSPIRE・DML-CZ・Math-Net.Ru・出版社の頁）で確かめ直したものを表 3 に並べます。「確認の水準」は、その文献のどこまでを確かめたかです。図 1・表 1・表 2 の数には入れていません。

表 3　個別の章の出典で、確認の水準を確かめた書誌

年	文献	何に使うか	本書の章	確認の水準
2006	J. Carlson, A. Jaffe, A. Wiles 編, *The Millennium Prize Problems*, Clay Mathematics Institute／American Mathematical Society (2006)。Jaffe–Witten は pp. 129–152	問題文（Jaffe–Witten）を収めた書籍。序文に発表の日と場所（2000 年 5 月 24 日、Collège de France）	0-02	目次と序文を CMI 公開の PDF で、刊行年を AMS の書籍の頁で確認

年	文献	何に使うか	本書の章	確認の水準
1907	O. Perron, Math. Ann. 64 (1907) 248–263, DOI 10.1007/BF01449896	正の行列の最大の固有値は単純	5-03 17-13	書誌を Crossref で確認。本文は書誌のみ
1912	R. Jentzsch, "Über Integralgleichungen mit positivem Kern", J. reine angew. Math. 141 (1912) 235–244, DOI 10.1515/crll.1912.141.235	正の核の積分作用素の最大の固有値は単純（転送行列の基底状態の一意性）	2-07 5-03 ほか 3	書誌を Crossref で確認。本文は未読。主張は二次資料（arXiv:1910.01120）の引用で確認
1948	M. G. Krein, M. A. Rutman, Uspekhi Mat. Nauk 3:1(23) (1948) 3–95（英訳 AMS Translation 26, 1950）	錐を保つ作用素への一般化	5-03 7-01	書誌を Math-Net.Ru の索引で確認。本文は未読
1974	H. H. Schaefer, *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer (1974) p. 337 の定理	コンパクト空間の上の正の核への Jentzsch の定理の一般化（有限の箱の連続で正の核はこの仮定に入る）	5-03 7-01 17-13	書誌のみ。主張は arXiv:1910.01120・arXiv:1501.06011 の引用で確認
1958	J. Feldman, Pacific J. Math. 8 (1958) 699–708	ガウス過程の二つの測度は同値か互いに特異かのどちらか	1-09	本文を確認（序論と定理）
1958	J. Hájek, Czechoslovak Math. J. 8 (1958) 610–618, DOI 10.21136/CMJ.1958.100333	同じ二択（Feldman と独立に）	1-09	書誌を DML-CZ で確認。ロシア語で本文は未読
2023	M. Schröfl, S. Floerchinger, Ann. Henri Poincaré 26 (2025) 3233–3319, arXiv:2307.15548	質量の違う自由場は $d \geq 4$ で互いに特異（Dirichlet・Neumann・周期・Robin の境界）、相対エントロピーが有限 $\Leftrightarrow d < 4$	1-09	本文を確認（§4.1・定理 3）
2002	H. Boschi-Filho, N. R. F. Braga, JHEP 0305 (2003) 009, arXiv:hep-th/0212207	AdS を切った硬い壁に Dirichlet 条件を置いてグルーボールの質量を出す	17-09	要旨を確認
2003	M. Kruczenski, D. Mateos, R. C. Myers, D. J. Winters, JHEP 0405 (2004) 041, arXiv:hep-th/0311270	D4 の模型の弦張力 (2.7)、$\sigma \propto g_{\mathrm{YM}}^2 N_c M_{\mathrm{KK}}^2$	17-09	本文を確認（式 (2.7)）
2005	H. Boschi-Filho, N. R. F. Braga, C. N. Ferreira, Phys. Rev. D 73 (2006) 106006, arXiv:hep-th/0512295	硬い壁の模型で静的なポテンシャルに線形の項が出る	17-09	本文を確認（(12)〜(16)）
2006	A. Karch, E. Katz, D. T. Son, M. A. Stephanov, Phys. Rev. D 74 (2006) 015005, arXiv:hep-ph/0602229	柔らかい壁の模型。中間子の質量の二乗が c に比例（(15)）	17-09	本文を確認（(15)）

年	文献	何に使うか	本書の章	確認の水準
2006	O. Andreev, V. I. Zakharov, Phys. Rev. D 74 (2006) 025023, arXiv:hep-ph/0604204	柔らかい壁の模型の弦張力（(19)、$g = R^2/\alpha'$）	17-09	本文を確認（(19)）
1981	D. Zwanziger, "Covariant quantization of gauge fields without Gribov ambiguity", Nucl. Phys. B 192 (1981) 259–269	確率的ゲージ固定（Parisi–Wu の確率量子化の平衡分布を、ゲージ条件を課さずに定める）	23-02	題・巻・頁・要旨を INSPIRE で確認。本文は未読
1990	C. Parrinello, G. Jona-Lasinio, Phys. Lett. B 251 (1990) 175–180	ゲージ軌道の上の重み付き平均で Gribov コピーを扱う、修正した Faddeev–Popov の式	23-02 23-13 ほか 1	題・巻・頁・要旨を INSPIRE で確認。本文は未読
1990	D. Zwanziger, "Quantization of gauge fields, classical gauge invariance and gluon confinement", Nucl. Phys. B 345 (1990) 461–471	大域的に正しいゲージ固定（23-02 が Parrinello–Jona-Lasinio と並べて引く）	23-02 23-13 ほか 1	題・巻・頁・要旨を INSPIRE で確認。本文は未読
2023	C. Chattopadhyay, J. Ott, T. Schäfer, V. Skokov, Phys. Rev. D 108 (2023) 074004, arXiv:2304.07279	保存する力学の動的指数 $z = \mathbf{3.972(2)}$ と予言 $z = 4 - \eta$	2-10	本文を確認。巻・論文番号は Crossref で確認
2025	R. Masaoka, T. Soejima, H. Watanabe, J. Stat. Phys. 192 (2025) 76, arXiv:2502.09908	二次元以上のイジングで $z \geq 2$（周期境界・$\beta \geq \beta_c$）	2-10	要旨を確認

Zwanziger の二本は別の論文です。1981 年の論文は確率量子化の中でのゲージ固定（確率的ゲージ固定）で、1990 年の論文は Parrinello–Jona-Lasinio と同じ年の、軌道の上の重み付き平均によるゲージ固定です。本書の第 23 部が「Parrinello–Jona-Lasinio・Zwanziger の方式」と呼ぶのは後者の 1990 年の二本で、23-02 の出典表は両方を挙げています。§07 の表の Cao–Nissim–Sheffield は、5-11 が arXiv:2509.04688 の Definition 1.4・Remark 1.5 まで確かめています。

章の著者と全体の著者。PDG のレビューは全体を Navas et al. と書き、その中の章（たとえば QCD の章）を引くときは章の著者の名で書きます。0-03 と 4-06 の書き方の違いはこの区別で、同じ版（2024）を指します。

札の意味は A-04、検証の手順は A-05、このサイトの論文は 論文の一覧 にあります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
載せた 52 件の書誌（arXiv のあるものは arXiv の目録と照合）	本書が引くすべての文献の一覧（各章の出典表を見る）
各文献を引く章と、各章の出典表が書く参照の程度（語の照合による読み取り）	読み取りの完全な正しさ（書き方の揺れによる取り違えが残りうる）
一行の説明（本書の章と arXiv の題・要旨の範囲の要約）	各文献の定理の正確な仮定と言明（一次資料とリンク先の章で確かめる）
入手の場所の区別。2025〜2026 年のプレプリントが本書の時点で未査読であること	誌の版が無料で読めるか（時期と契約で変わる）。未査読の結果の正しさ
表 3 の 18 件の書誌と、各行に書いた確認の水準（Crossref・INSPIRE・DML-CZ・Math-Net.Ru・出版社の頁）	表 3 の「書誌のみ」「要旨」の文献の本文の中身
質量ギャップの問題が未解決であること	挙げた文献を合わせて、解決にどれだけ近いかの量的な評価

出典と再現

もの	種別	出典・道具
arXiv の番号のある文献の題・著者・初出の日付・journal-ref	既知	arXiv の目録（API の問い合わせ）で照合。この章では要旨の範囲まで。本文の照合は各章の出典表による
arXiv の番号の形式と切り替えの時期	既知	arXiv のヘルプ「Understanding the arXiv identifier」（本文を確認）
Clay の問題文の所在	既知	Clay 数学研究所の Yang–Mills のページ（公式の問題文へのリンクを確認）。中身は 0-03
Douglas の報告（2004）の所在	既知	Clay 数学研究所の年次報告の書庫の公開 PDF（題・著者・日付を確認）
表 3 の書誌と確認の水準	既知	Crossref・INSPIRE（Zwanziger 1981・1990、Parrinello–Jona-Lasinio 1990 の題・巻・頁・要旨）・DML-CZ・Math-Net.Ru・CMI 公開の PDF・AMS の書籍の頁で照合。本文を確認した行は各章（1-09・2-10・17-09）の出典表と同じ
arXiv の番号の無い文献の書誌	既知	各章の出典表の書誌を採った。この章では書誌のみ
式 (2)〜(7)	既知	4-11・1-03・A-01・5-01・17-03・4-10 の式の再掲。出典は各章の出典表
表 1・表 2・図 1・図 2・§09 の件数・表の「本書の章」「参照」の列	計算	python3：本書の各章の出典表を読み、文献ごとの正規表現で引く章を集め、語の照合で程度を決めた（`refs.py`・`figdata.py`・`gen.py`。各 1 秒未満）

次に読む章：A-04 Lean と機械検査 — 本書の札のうち「Lean」が何を意味するか。

Lean と機械検査 — 札「Lean」が保証するのは前提から結論への矢印だけ

> この章は案内です。§02・§03・§04・§05・§08 は既存の知見です。

この章で分かること — Lean で「検査済み」とは何が確かめられたことか（命題は型・証明は項・信じるのはカーネル）。
証明の途中のゴールの読み方と、`sorry`・`native_decide`・公理の見つけ方（この端末で七つの小さなファイルを検査した結果つき）。
通っても言いたいことが言えていない四つの型、本書の札の決め方、読者が自分で検査し直す手順。

前提となる章 — なし。Lean を使ったことがなくても読めます。詳しい使い方はこのサイトの Lean の案内（十三ページ）にあり、この付録はその入口と、本書で札を読むための約束をまとめたものです。本書の Lean の定理の一覧は 23-13、札の凡例は 0-01。

先に言うこと — Lean の札は「前提から結論が論理的に従う」ことだけを保証し、前提が正しいこと・言明が意図した数学を言っていることは保証しません。本書の Lean の定理は実数の不等式や有限の和についての文が中心で、四次元のヤン–ミルズ理論の存在や質量ギャップを Lean で示したものはありません。四次元の存在は、2026 年に公開された別の構成の Lean で、証明されている、と委員会が評価しました（6-00）。質量ギャップは示されていません。

この章の順序

1. この付録の役割 — 本書の五つの札のうち Lean の札が何を指すか・案内のページとの分担
2. Lean を一枚で — 命題は型、証明はその型の項、信じるのはカーネルだけ・寄り道：命題と型の対応の呼び名
3. 一手ずつ見る — 証明の途中の「ゴール」と tactic（図 1・表 1）
4. 穴と公理 — `sorry` は警告だけで通る・`#print axioms` で見つける（表 2）・寄り道：実数を使うと三つの公理が出る
5. 通っても、言いたいことか — 定義・名前・空虚な真・仮定の四つの隙間

6. 本書の Lean の言明は何について語るか — 名前の付いた実数・「仮定なら結論」の型・在庫の無い数学
7. 札の決め方 — 一つの文に一つの札・鎖の強さは最も弱い段（図 2・表 5）
8. 自分で確かめる手順 — 検査の四段・版の記録・七つの問い（表 7）

01

この付録の役割 — 札「Lean」と案内のページ

本書の文には五種類の札が付きます（0-01 の凡例）。Lean ・紙 ・計算 ・既知 ・物理 です。このうち Lean の札は、最も強そうに見えて、最も誤読されやすい札です。

誤読の典型は「Lean で検査済み」を「正しいと確定した」と読むことです。Lean が確かめるのは、書かれた前提から書かれた結論が論理的に従うことです。前提が成り立つか、言明が意図した数学を言っているかは、Lean の外にあります。この付録はその境目を、実際に検査した小さな例で示します。

式で書くと、Lean の札が付いた文は次の形をしています。

$$\underbrace{P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_k}_{\text{前提：Lean の外}} \quad \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{Lean の札}} \quad \underbrace{Q}_{\text{結論}} \tag{1}$$

札が保証するのは真ん中の矢印です。前提 P_i に、未証明の仮定（例えば 23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定）や、測った数値が入っていれば、結論 Q も同じだけ条件つきです。本書は Lean の定理名を出すとき、前提を同じ行に書きます。

C_P（Poincaré 定数、第 23 部）・m（質量）・ξ（相関長）は第 23 部の量ですが、この付録ではただの実数として読めば足ります。

例。「$m > 0$、$C_P = 1/m^2$ かつ $C_P \le K\xi^2$ なら $1 \le K(m\xi)^2$」は、両辺に m^2 を掛けるだけの文で、Lean で確かめられます（§03 でこの端末が実際に検査します）。しかし $C_P \le K\xi^2$ が四次元のヤン–ミルズ理論で成り立つかどうかは、この矢印とは関係がありません。それは仮定です。

この付録と、このサイトの Lean の案内（十三ページ）との分担は次の通りです。案内は Lean そのものの入門で、導入の手順・具体的な証明の組み立て・よくある罠を扱います。この付録は、本書を読むのに要る最小限と、本書が札をどう決めているかに絞ります。個々の定理の前提と既知との対応は 23-13 に一覧があります。

02

Lean を一枚で — 命題は型、証明は項、信じるのはカーネル

Lean はプログラミング言語でもあり、証明を確かめる道具でもあります。両方を一つの仕組みで行えるのは、**命題を型として、証明をその型の値（項）として扱う**からです。

プログラムでは「`3` は自然数の型 `Nat` の値だ」と書きます。Lean では同じ書き方で「`p` は命題 P の証明だ」と書きます。

$$3 : \texttt{Nat} \qquad\qquad p : P \tag{2}$$

右の式は「p は P という型を持つ」と読み、それが「p は P の証明である」の意味になります。型の検査は機械的にできるので、証明の検査も機械的になります。

前提つきの命題は、関数の型になります。「P_1 と P_2 なら Q」の証明は、P_1 の証明と P_2 の証明を受け取って Q の証明を返す関数です。

$$(h_1 : P_1) \to (h_2 : P_2) \to Q \tag{3}$$

式 (1) の矢印の正体がこれです。Lean の定理の宣言で、コロンの左に並ぶ引数（`(hm : 0 < m)` のような括弧）が前提で、コロンの右が結論です。**読むときに一番大事なのは、この括弧の列です**（案内の「仮定の一覧を作る」）。

例。この端末で検査した最小の例は次の一行です。

```
theorem pos_nat (n : Nat) (h : 0 < n) : 0 < n := h
```

前提 `h` がそのまま結論の証明になっています。中身の無い定理ですが、「前提を受け取って結論を返す関数」という形がよく見えます。

もう一つの柱は**カーネル**です。人が書く証明は、tactic（証明の一手を指示する命令。§03）を並べた台本で、それを Lean が式 (2) の形の項に展開します。最後にその項を、小さく保たれた検査部であるカーネルが型検査します。tactic に誤りがあっても、カーネルが通さない項は定理になりません。信じる対象をカーネル一つに絞ることが、機械検査の信頼の出所です（案内の「kernel と tactic」・検証の仕組み）。

寄り道：命題と型の対応の呼び名

飛ばしてよい。命題を型と、証明を項と見る対応は、一般に「カリー–ハワード対応」と呼ばれます。この見方では、論理の「ならば」が関数の型、「かつ」が組の型、「または」が二通りの値を持つ型に当た

ります。Lean の論理はこの対応の上に、依存型（型が値に依存してよい型。「長さ n のベクトル」のように）を持つ型理論で作られています。来歴と他の証明支援系との関係は 案内の「来歴」に譲ります。

03

一手ずつ見る — ゴールと tactic

Lean で証明を書くとき、画面には常に「いま示すべきこと」が出ています。これを**ゴール**と呼びます。ゴールは記号 ⊢ の右に書かれ、その上に使ってよい仮定が並びます。tactic を一つ打つたびに、仮定かゴールが書き換わり、ゴールが無くなれば証明は終わりです。

例として §01 の文を Lean で書いたものを使います。前提は三つ（変数の型を除く）です。23-13 の `hup_is_gap_positivity` と同じ言明で、変数の名前だけが違います。

$$m > 0, \quad C_P = \frac{1}{m^2}, \quad C_P \le K\xi^2 \implies 1 \le K(m\xi)^2 \tag{4}$$

紙の上では「C_P を代入し、$m^2 > 0$ を両辺に掛け、整理する」の三行です。Lean では四手になり、二手目の `have` は m^2 を掛けるための下ごしらえです。対応は、代入が段 1、掛けるのが段 2・3、整理が段 4 です。Lean では各手が何を書き換えたかが機械的に記録されます。図 1 の数値（ゴールの文面）は、この端末の Lean 4.33.1 が証明の途中で出した状態を、そのまま写したものです。

図 1 「次へ」で tactic を一つ進めると、そのあとのゴールが出る。前の状態から変わった行が色で示される

証明

```
theorem gap_from_bound (CP m K ξ : ℝ) (hm : 0 < m)
    (hCP : CP = 1 / m ^ 2) (hH : CP ≤ K * ξ ^ 2) :
    1 ≤ K * (m * ξ) ^ 2 := by
  rw [hCP] at hH
  have hm2 : 0 < m ^ 2 := by positivity
  rw [div_le_iff₀ hm2] at hH
  calc (1 : ℝ) ≤ K * ξ ^ 2 * m ^ 2 := hH
    _ = K * (m * ξ) ^ 2 := by ring
```

段 0 の後の状態

```
CP m K ξ : ℝ
hm : 0 < m
hCP : CP = 1 / m ^ 2
hH : CP ≤ K * ξ ^ 2
⊢ 1 ≤ K * (m * ξ) ^ 2
```

段 0／4　宣言の直後。前提が仮定として並び、ゴールは結論そのもの。

計算 この図の数値はこの端末で計算した（Lean 4.33.1 で `trace_state` を各手の後に挟んで検査し、出力をそのまま写した。図では `trace_state` の行を省く。段 4 の「No goals」は出力の写しではなく、エラー無しで終わったことで確かめた）。狭い画面では表 1 で同じ内容を読める。

表 1 は図 1 と同じ内容です。

表 1　式 (4) の証明の各手と、その後の状態 計算

段	打った tactic	何が変わったか
0	（宣言）	仮定 `hm : 0 < m`・`hCP : CP = 1 / m ^ 2`・`hH : CP ≤ K * ξ ^ 2`、ゴール `⊢ 1 ≤ K * (m * ξ) ^ 2`
1	`rw [hCP] at hH`	`hH` の中の `CP` が `1 / m ^ 2` に置き換わる
2	`have hm2 : 0 < m ^ 2 := by positivity`	仮定 `hm2 : 0 < m ^ 2` が増える（`positivity` は正であることを示す自動の手）
3	`rw [div_le_iff₀ hm2] at hH`	`hH` が `1 ≤ K * ξ ^ 2 * m ^ 2` に変わる（分母を払う Mathlib の補題）
4	`calc … := hH`、`_ = … := by ring`	ゴールが閉じる（`ring` は環の恒等式を示す自動の手）

読み方。段 3 で `hH` はゴールとほぼ同じ形になり、違いは積の並べ方だけです。最後の `ring` がその並べ替えを恒等式として確かめます。紙の三行が Lean の四手に、下ごしらえの一手を足しただけで対応していることが分かります。Lean での手の選び方の詳しい例は 案内の「証明の骨」にあります。

この例で Lean が確かめたのは代数だけです。C_P は Lean の中では名前の付いたただの実数で、それが Poincaré 定数であることは検査されていません。この点は §06 で本書の定理全体について見ます。

04

穴と公理 — `sorry` は警告だけで通る

証明の途中を飛ばす方法が Lean には二つ用意されています。一つは `sorry` で、「ここは後で埋める」という印です。もう一つは公理で、証明なしに真と宣言する文です。どちらも書けば定理は通ります。だから「通った」ことだけでは、穴が無いことは分かりません。

穴を見つける道具が `#print axioms` です。定理の名前を渡すと、その定理が（言明と証明をたどって）最終的にどの公理に依存しているかを並べます。`sorry` は内部で `sorryAx` という公理に置き換えられるので、ここに現れます。Lean の参照マニュアルは、検査の手順として「標準の三つの公理 `propext`・`Classical.choice`・`Quot.sound` だけが出ることを確かめよ」と書いています。本書の Lean の札の条件は、この形です。

$$\mathrm{axioms}(\text{定理}) \subseteq \{\texttt{propext},\ \texttt{Classical.choice},\ \texttt{Quot.sound}\} \tag{5}$$

三つの意味は、順に「同値な命題は等しい」「存在の証明から元を一つ取り出せる（選択公理）」「同値な元は商の中で等しい」です。商とは、同値関係で同じとみなす元をひとまとめにした集合（同値類の集合）のことで、例えば整数を 7 で割った余りの類がそうです。数学の普段の推論（排中律を含む）は、この三つで足ります。詳しくは 23-13 Lean の言明と機械検査の限界と 案内の「公理」に譲ります。

この端末で、七つの小さなファイルを検査しました。表 2 がその結果です。

表 2　七つの小さな Lean ファイル・八つの定理の検査結果（Lean 4.33.1） 計算

ファイル（定理）	中身	終了コード	警告・エラー	`#print axioms` の出力
`pos_nat`	自然数で「$0<n$ なら $0<n$」	0（成功）	なし	公理に依存しない
`pow_mod_decide`	$2^{10} \bmod 7 = 2$ を `decide`（カーネルの中での計算）で	0	なし	公理に依存しない
`pow_mod_native`	同じ文を `native_decide`（翻訳したコードで計算）で	0	なし	`pow_mod_native._native.native_decide.`
`pow_mod_wrong`	偽の文 $2^{10} \bmod 7 = 3$ を `decide` で	1（失敗）	エラー：命題が偽であることを示した	—
`gap_from_bound`	式 (4)（Mathlib の実数）	0	なし	標準の三つ
`gap_from_bound'`	式 (4) の証明を `sorry` にしたもの	**0（成功）**	警告：`declaration uses` `` `sorry` ``	標準の三つ＋`sorryAx`
`vacuous`	矛盾する仮定から $x = 42$（§05）	0	なし	標準の三つ
`mass_gap_positive`	名前だけ大きい空の定理（§05）	0	なし	標準の三つ

秒は `import Mathlib` の読み込みを含む壁時計の時間（4 コアの機械・nice 19）。Mathlib を読む行は、読み込みだけで約 5 秒かかる。値は `results.json` の一回分で、実行ごとに 1 割ほど揺れる（終了コード・警告・公理の行は再実行でも同じ）。

読み方は三つです。第一に、`sorry` を含むファイルも終了コード 0 で通ります。出るのは警告だけです。検査の記録で「エラーなし」とだけ書かれていたら、`sorry` が無いことは保証されていません。第二に、`native_decide` は、その呼び出しのためだけの専用の公理を一つ作ります。Lean の参照マニュアルは、各公理が何を主張したかを個別に監査できるようにするためだと説明しています。版による違いがあり、4.28.0 以前は、どの呼び出しも共通の公理 `Lean.ofReduceBool`（その奥に `Lean.trustCompiler`）に依存する形で出ました。4.29.0 から、呼び出しごとの専用の公理（表 2 の `…ax_1_1` の形）に変わりました。公理の名前は版で変わるので、本書は「標準の三つの部分集合か」で判定します。第三に、偽の文は `decide` では通りません。

寄り道：実数を使うと三つの公理が出る

飛ばしてよい。表 2 の `mass_gap_positive` は「$0 < m$ なら $0 < m$」で、証明は前提をそのまま返すだけです。それでも標準の三つが出ます。同じ形の `pos_nat`（自然数）では何も出ません。違いは型だけなので、三つは実数の側から来ています。`#print axioms` は証明だけでなく、言明に現れる定義（型 $\mathbb{R}$ を含む）もたどります。Mathlib の実数の型はコーシー列の商として作られ、その定義そのものが三つに依存しています。実際、「$\mathbb{R}$ の元 m について True」という中身の無い定理でも三つが出ます。だから実数について語る定理には、ほぼ必ず三つが出ます。三つが出たことは、証明が重いことの印ではありません。

本書での使い方は 23-13 §02（束の末尾の #print axioms を清さの基準にする）。

05

通っても、言いたいことか — 四つの隙間

穴が無く、公理が標準の三つだけでも、まだ確かめていないことがあります。それは**言明が言いたいことを言っているか**です。Lean の参照マニュアルは、検査の手順の冒頭で「定理に正しい証明があるか」という問いと「定理の言明が何を意味するか」という問いを区別することが重要だ、と書いています。後者は機械では確かめられません。

このサイトの 案内の第 8 ページは、この隙間を四つの型に分けています（表 3）。

表 3　四つの隙間（案内の分類を本書の例で）

型	何が起きるか	見つけ方
① 定義	定義が意図より弱い・強い（例：「隙間」を ≥ 0 で定義すると 0 でも通る）	言明に現れる定義を全部たどる
② 名前	定理の名前が言明より大きい	名前ではなく言明を読む

型	何が起きるか	見つけ方
③ 空虚な真	前提が同時に成り立たず、何でも結論できる	前提を満たす具体例を一つ作る
④ 仮定	証明すべきことが仮定に置かれ、それがいつ外れるか書かれていない	仮定の一覧を作り、各仮定の札を見る

②と③は、表 2 の最後の二行で実際に起きています。`mass_gap_positive` は質量ギャップという名前を持ちますが、言明は「正の数は正」です。名前は Lean にとってただの文字列で、内容を何も保証しません。本書が定理名を出すとき言明と前提を同じ行に書くのは、このためです。

③の例は次の文です。

$$(x < 0) \ \wedge \ (0 < x) \implies x = 42 \tag{6}$$

前提が矛盾しているので、結論は何でもよく、Lean は `linarith`（線形の不等式を組み合わせる自動の手）一つで通します。前提が多い定理ほど、この危険は見えにくくなります。前提を全部満たす例（自由場など、答えが分かっている場合）を一つ置くのが確かめ方です。本書の第 23 部では、前提を全部満たす例の役は自由場での検算が担います（23-16）。陰性対照（23-13 Lean の言明と機械検査の限界）は逆向きで、仮定を一つ外すと結論が崩れることを示し、仮定が飾りでないことを確かめます。

④（仮定）は本書で最も重要です。拡散型緩和時間の仮定のような未証明の仮定から結論を出す定理は、仮定の側に中身があり、定理はその仮定を一歩も証明しません（23-13 Lean の言明と機械検査の限界）。

06

本書の Lean の言明は何について語るか

Lean の定理は型の付いた対象についての文です。だから定理の引数の型を見ると、その文が実際に何について語っているかが分かります。23-13 Lean の言明と機械検査の限界 は、本書が結論として引く四十六の定理を、言明に現れる型で五つの層に分けています。ちょうど半分の 23 個は実数の不等式か恒等式で、格子のゲージ場を型として持つ定理は 5-11 の 3 個です。

このことを式で書くと、本書の Lean の札の付いた文は二つの部分から成ります。

$$\text{本書の文} \ = \ \underbrace{(P_1 \wedge \cdots \wedge P_k \Rightarrow Q)}_{\text{Lean が検査}} \ + \ \underbrace{\text{読み：「}C_P\text{ は Wilson 測度の Poincaré 定数」など}}_{\text{本文が付ける・Lean は検査しない}} \tag{7}$$

§03 の例で C_P が名前の付いた実数だったのと同じく、本書の多くの定理で C_P・ξ・m は実数の変数です。それを物理の量として読むのは本文で、その読みが正しいかは Lean の外にあ

ります。読みの約束（β の定義・tr の規格化・格子の計量）は 23-13 Lean の言明と機械検査の限界 と A-01 記号表にあります。

なぜ Wilson 測度そのものについての定理が無いのか。理由の一つは在庫です。Lean の数学の標準ライブラリ Mathlib を、この端末にある版（版は §08 の表 7）のソースで語を数えると、表 4 のようになりました。

表 4　Mathlib のソース 8,311 ファイルのうち、語を含むファイルの数 計算

語	ファイル数	語	ファイル数
`Haar`（ハール測度）	70	`plaquette`	0
`Wilson loop`	0	`lattice gauge`	0
`Yang-Mills`（三通りの綴り）	0	`spectral gap`・`SpectralGap`	0
`Poincare inequality`・`PoincareInequality`	0		

群の上の一様な測度（ハール測度）の基礎はありますが、格子ゲージ理論の語は現れません。語が無いことは定義が無いことの証明ではありませんが、少なくとも名前の付いた道具立てとしては、それを使う側が一から作ることになります。案内の 「mathlib に在庫が無い数学」は、こうした厳しさの出所を三つ（量・述べ方・在庫）に分けています。連続極限や四次元の場の理論の構成は、その先にあります（7-10）。

例。 このサイトの論文（5-11）は、格子のゲージ場を型に持つ数少ない例です。そこでも Lean の札は段ごとに分かれ、作用からある下界までの鎖は `Lean`、その下界から格子の質量ギャップへの段は 紙 （しかも概略）です（0-01）。

第 23 部の一段目の組み立てに使った束を表 4b に、第 24 部が引く束を表 4c に並べます。表 4b・4c・4f の外で第 23 部ほかの章が宣言を挙げる単体のファイルは表 4h です。どれも束 `principia-ym-lattice-gauge-2026-11-13`（143 モジュール・約 3 万行、どのモジュールも Mathlib だけを import する）に収めています。行は 23-13 表 1 と同じで、束が保証するのは仮定の並びから結論への代数と算術と一変数の解析だけです。どの束も、仮定を定理名の隣に書く約束（23-13 §04）に従います。

表 4b　一段目の束（第 23 部）。定理の数は `#print axioms` の行数。2026-10-09 に別の計算機で全束を建て直し、全束の定理の部分集合であることを確かめた。源は束 `principia-ym-lattice-gauge-2026-11-13`（表 4c・4f と同じ束）。2026-10-09 に別の計算機で全束を建て直し、全束で一本ずつ書き出し直し、核の再検査と、章が挙げる宣言の `#print axioms` を確かめた `Lean`

束	定理の数	何の代数か	代表の定理（仮定）
LatticeGaugeOneScale	12	緩和時間の上界の仮定・緩和時間の下界の仮定と質量の読み替え（等号の版）	hup_is_gap_positivity（0<m・$C_P=1/m^2$・$C_P \le K\xi^2$）

束	定理の数	何の代数か	代表の定理（仮定）
LatticeGaugeHupBridge	18	片側の橋・冪の下の半分・陰性対照	hup_is_gap_positivity_of_lower（0<m_lat・κ/m_lat²≤C_P・C_P≤K
LatticeGaugeDoubleWellTestbed	7	一次元の片側の橋の命題の有限和の骨	local_rayleigh_ratio_le_one（0<m・a_k≥m・c_k≥0・Σc_ka_k>0）
LatticeGaugeTwoScalePoincare	8	分散の分割・凸な芯・二状態・Glauber の帯	split_poincare_le（分割の式・二つの所 Poincaré・平均差・非負）
LatticeGaugeDoubleWellKramers	10	比の挟みから二重井戸の緩和時間の冪の言明へ	power_H_of_kink_ratio（0<K,s,δ・1≤R≤K/ħ・s/ħ≤ln ξ）
LatticeGaugeH1Assembly	17	六節点の相内 Poincaré の命題の率の代数・六節点の余白の算術	H1_assembly（名前つきの七つ）
LatticeGaugeCoarseSideUniform	20	交差の行の算術・Muckenhoupt の両側	T4_paper_numeric（λ_c≥1.3×10⁻⁴）
LatticeGaugeIntervalQfreeWindow	150	一次分数の補題・被覆から窓へ・律速のセルの再計算	win_qfree_window_le_of_interval_ta（区間演算の出力の表）
LatticeGaugeRingUnconditionedWindow	20	環の外の鎖の窓の組み立て	unc_window_lt_one_of_table（区間演の出力の表）
LatticeGaugeRingInnerChain	22	壁の角の比・環の S_W	sw_inner_le（q_in≤13/10・q_out≤0.998888530）
LatticeGaugePartitionFramework	14	区画の和・Gibbs の段・閉じる条件	comp_close（X>0・b,A≥0・ℓ>0・Barta・成分ごとの局所化・Bochner）
LatticeGaugeRemVProxy	23	スカラーの筋の命題の組み立て	path5_conditional（剰余・代理の比・さ・余裕を名前つきで）
LatticeGaugeDetourKills・DetourKills2	17・16	迂回策の殺した一行の算術	型ごとの補題

束	定理の数	何の代数か	代表の定理（仮定）
LatticeGaugeBoxReduction	23	二つの射影の補題・偶奇の箱・ずらしの平均・対照	box_shift_average（各ずらしで二族の等式・C_box≥0・重なりの和≤ℰ）
LatticeGaugeBoxGap	18	箱の中の隙間の命題・c_kg・H3 と H4 の合成	H3_H4_compose（箱の積・箱の隙間 D=ħ/S_0・n,ħ,S_0>0・c_alt<1）
LatticeGaugeCoreMixing・CoreMaxCorr・CoreThreeStage	15・20・18	芯の三段	three_stage（各段の上界）
LatticeGaugeCoreActionGap	15	局所の項が消えること・端の線引き	cloc_term_vanishes（芯の作用の障壁仮定・ξ の読み・ΔS_*<2S_0）
LatticeGaugeGlobalLyapunov	21	Lyapunov の判定の代数と陽性対照	gauss1d_bbcg・gauss1d_equality（仮なし）

表 4c　第 24 部が引く束。源は束 `principia-ym-lattice-gauge-2026-11-13`。論文の束 EuclideanPath.GapBridg

`principia-gap-bridge-2026-10-09.tar.gz` Lean

束（名前空間）	定理の数	何の代数か	代表の定理（仮定）	
LatticeGaugeLocalH（LatticeGauge.LocalH）	31	局所の Poincaré 定数の上限の性質・部分領域の電荷の代数・窓の因子の単調性・局所の橋	local_le_global（上に有界・空でない・部分集合）・wr_strictAntiOn（仮定なし）・gap_lower_of_local_window（κ/(m²+w²)≤C_P・w²≤2m/(cℓ)・C_P≤Kℓ²）	
LatticeGaugeLocalHReference（LatticeGauge.LocalHReference）	11	比の形の橋・閾 K_* の代数	ratio_bridge・kstar_le_kappa（各の仮定は 24-04 の分類表）	
LatticeGaugeLocalHDoubleWell（LatticeGauge.LocalHDoubleWell）	14	0+1 の一サイトの比・三つの領分	one_slice_ratio（0<ε・0<m・0<ω）	

束（名前空間）	定理の数	何の代数か	代表の定理（仮定）	
LatticeGaugeGaugeReference（LatticeGauge.GaugeReference）	16	ゲージ商の参照・ゲージ固定を外すと参照が消えること	kstar_gauge_measured（測った値）・kstar_vanishes_without_gauge_fixing	
LatticeGaugeWilsonLoopReference（LatticeGauge.WilsonLoopReference）	14	ループの族が商を張ること・色の一重項に一次の項が無いこと・二次のカオスの閾	no_linear_singlet・chaos2_bracket	
LatticeGaugeConservationLength（ConsLen）	14	帯の Gauss の隙間の挟み	neumann_gap_lower／upper（1≤M）	
LatticeGaugeConservationExponent（ConsExp）	16	帯の傾きの区間の算術・ℓ_c の関係式・率の分解	lc_eq_iff（0<E・0<λ・0<ℓ）・lamQ_log_split（0<κ・正値）	
LatticeGaugeHierarchicalLink（HierLink）	14	階層格子の座標とギャップの算術	lam_le（仮定なし）・tree_no_decay（0<β）	
LatticeGaugeFourDTrial（LatticeGauge.FourDTrial）	8	τ_int≤C_P の有限和・上界の仮定が破れる一行と陰性対照	not_hup_of_fast_tau（τ_n≤C_n・cξ_n^p≤τ_n・p>2・ξ_n→∞）・z_two_compatible_with_hup（仮定なし）	
LatticeGaugeHupBridge（LatticeGauge.HupBridge）	18	片側の橋・回転子の比	hup_is_gap_positivity_of_lower（0<m・κ/m²≤C_P・C_P≤Kξ²）・rotor_ratio_unbounded（0<r）	
LatticeGaugeCoreMaxCorr（LatticeGauge.CoreMaxCorr）	20	芯の最大相関の代数	第 24 部の本文では名を引いていない（23-11 の芯の束。24-03 の箱の帰着の背景）	

束（名前空間）	定理の数	何の代数か	代表の定理（仮定）	
AlternatingMaxCorrBloch	33	交互の最大相関の Bloch の二次の式	第 24 部の本文では名を引いていない（箱の帰着の交互の最大相関の背景）	
論文の束 EuclideanPath.GapBridge（`principia-gap-bridge-2026-10-09.tar.gz`）	17	片側の橋の論文の版（時刻局所な族での最良・回転子）	local_rayleigh_le（各の仮定は 24-04 の分類表）	

表 4h　表 4b・4c・4f の外で、第 23 部ほかの章が名を挙げる単体のファイル（40）。定理の数は各ファイルの theoren の宣言の数（private を除く）、計 725。源は束 `principia-ym-lattice-gauge-2026-11-13`（表 4b・4c・4f のファイ束）。2026-11-13 に一本ずつ書き出し、核の再検査と、章が挙げる宣言の `#print axioms`（全て標準三公理）を確かめ

ファイル（名前空間）	定理の数	中身	章が挙げる定理
LatticeGaugePoincareNormalisation（LatticeGauge.PoincareNormalisation）	9	Dirichlet 形の正規化と冪の不変性	`exponent_invariant_of_slowly_varying`
LatticeGaugeAutocorrelationBound（LatticeGauge.AutocorrelationBound）	10	可逆な連鎖の積分自己相関時間と Poincaré 定数の比較	`rayleigh_le_tau`・`tau_int_le`
LatticeGaugeBlockKernel（LatticeGauge）	26	一段のブロック核の一径数の族と、固定した段が有界であるための条件	`fixed_step_bounded_iff`
LatticeGaugeCoarseGraining（LatticeGauge）	24	粗視化の一段の有限の部分（四元数の恒等式・一リンクの量の上下界）	`log_F0_ge`・`log_F0_le`

ファイル（名前空間）	定理の数	中身	章が挙げる定理
LatticeGaugeFiberAverage（LatticeGauge）	37	パッキングの一段の数え上げと、ブロックだけでは下がらないこと	`no_blocking`
LatticeGaugeFlowedPoincare（LatticeGauge.FlowedPoincare）	17	流した関数の族とDirichlet形の鎖則・均しの一段の値段	`comp_class_eq_of_equivariant_bijection`
LatticeGaugeGapVersusCost（GapVersusCost）	13	ギャップが目標を有界にし、局所更新の費用は有界にしないこと	`cost_ge`
LatticeGaugeGaugeFixing（LatticeGauge.GaugeFixing）	10	ゲージを固定した長波長の試験関数の費用	`jump_energy_ge`・`prop_at_gap_scale`
LatticeGaugeHardyLadder（LatticeGauge.HardyLadder）	19	有限の鎖の重みつき Hardy の不等式と尺度の梯子	`conditional_scale_bound`・`const_defect_scale_unbounded`
LatticeGaugeMarginalAccumulation（LatticeGauge.Marginal）	22	繰り込みの梯子での一段の欠損の積み重なりと周辺の次元	`dev_eq_of_marginal`・`dev_le_of_contracting`

ファイル（名前空間）	定理の数	中身	章が挙げる定理
LatticeGaugeMultiStep（LatticeGauge）	19	多段のブロックの傾きの観測量・相関長の関数方程式・異常指数	`S4_two_sided`・`kappaDisj_lt_one`・`xi_eq_exp`
LatticeGaugeOverlapExponent（LatticeGauge.Overlap）	20	零運動量の重なり・作用素の次元・更新級数に見えないもの	`eta_ge_two_of_bounded_susc`・`fisherEta_eq_zero_iff_canonical`・`overlap_le_susc_mul_gap`・`renewal_chi_mul_massSq`・`renewal_residue_pos`
LatticeGaugeProfileFreedom（LatticeGauge.ProfileFreedom）	9	変分の下界での並進の形の自由度	`profileQuotient_isGreatest`
LatticeGaugeRunning（LatticeGauge）	19	一段のブロックが結合定数にすること（強結合の端と弱結合の端）	`discStep_semigroup`・`step_lowers_coupling`
LatticeGaugeSlicePositivity（SlicePositivity）	17	時刻の切り口の均し・転送行列の正値性・有効質量の単調性	`meff_antitone`
LatticeGaugeSmearedSquare（LatticeGauge.SmearedSquare）	10	均した場の二乗の変分の商と、均しで得られるもの	`sqQuotient_between`

ファイル（名前空間）	定理の数	中身	章が挙げる定理
LatticeGaugeSmoothGaugeFixing（LatticeGauge.SmoothGaugeFixing）	11	滑らかなゲージ固定の軌道平均と、蝶番に効かないこと	`orbitAvg_continuous`・`orbitAvg_gauge_invariant`
LatticeGaugeSpectralHinge（LatticeGauge.Hinge）	22	Poincaré定数と相関長の二乗の蝶番の分解（ガウスの最良・排出の指数）	`c2_ge_of_nonneg_weights`・`drainExp_eq_zero_iff`・`drain_exponent`
LatticeGaugeStepSequence（LatticeGauge）	19	段の列（パッキングの積分の分解と一段の Hesse の下界）	`blocking_shortfall`
LatticeGaugeSubspacePoincare（LatticeGauge.SubspacePoincare）	16	関数の空間を制限した Poincaré 定数	`autocov_sum_le_on_invariant`
LatticeGaugeSusceptibilityRatio（SusceptibilityRatio）	8	感受率と同時刻の相関の比が言えること・言えないこと	`gap_ge_of_overlap`・`light_admixture_invisible`
LatticeGaugeTubeDefect	14	正の重みの面の模型での管の欠損の符号	`linear_deficit_breaks_inv`
LatticeGaugeTubeEntropy（LatticeGaugeTube）	18	面の数え上げ（管のエントロピー）と一尺度の下半分	`mass_sq_ge_of_tube`・`linear_regime_breaks_onescale`

ファイル（名前空間）	定理の数	中身	章が挙げる定理
LatticeGaugeTwoLink（LatticeGauge.Character）	28	二リンク積分の有限の部分	`intact_frac_le`
LatticeGaugeVariationalBound（VariationalBound）	9	変分の有効質量がギャップの上界であること	`meff_ge_of_corr`
LatticeGaugeWulffCorrection	13	傾いた壁の張力と Wulff の引き算（閉じた管の欠損）	`casimir_only_no_bound`・`mass_bound_localized`
LatticeGaugeH1TaylorStage（LatticeGauge.H1TaylorStage）	19	β の向きの三点の補間と三次の剰余・小片の一次分数の端点	`cube_le_exp_split`・`lebesgue_le`
LatticeGaugeH1Tilt（LatticeGauge.H1Tilt）	22	β の向きの弦の上界と Hölder の損・部分区間の数	`chord_beta_upper`・`holder_r117_exceeds`・`nodes_reach_117`
LatticeGaugeRingMirror（LatticeGauge.RingMirror）	20	環の継ぎ目の鏡像の代数	`chain_action_reflect`
LatticeGaugeAdjointSandwich（LatticeGauge.AdjointSandwich）	19	残る仮定 (MC-sup) を、下からの読みと経路ごとの上界で挟む算術	`mbar_bound_false`

ファイル（名前空間）	定理の数	中身	章が挙げる定理
LatticeGaugeDriftDual（LatticeGauge.DriftDual）	20	条件つき漂流の双対で測る弱双対の代数と、測った値の算術	`tilt_g1`
LatticeGaugeHbarZero（HbarZero）	23	ħ の範囲を窓の選び直しで決める形の代数	`p5_assembly`
LatticeGaugeLocalizedBochner（LatticeGauge.LocalizedBochner）	29	Bochner の段の負の曲率を欠陥集合に局所化した合成と、傾きの費用	`bochner_localized`・`judge_i_inside`・`negw_le_localized`・`tilt_cost_le`
LatticeGaugeBTDressed（BTDressed）	17	衣の向きで数える一次元の列の形（余裕が向きに依らないこと・尺度の不変性）	`threshold_gap_invariant`
LatticeGaugeBartaRefine（LatticeGauge.BartaRefine）	19	Barta と Bochner の欠陥への傾きの分け方・天井の補題・陰性対照	`ceiling_same_set`・`ceiling_split`
LatticeGaugeEigenGradient（LatticeGauge.EigenGradient）	16	固有関数の勾配だけを使う形・Agmon の重みの一歩・陰性対照	`agmon_no_gain_on_negative_curvature`

ファイル（名前空間）	定理の数	中身	章が挙げる定理
LatticeGaugeExtendedChain（LatticeGauge.ExtendedChain）	19	拡大した鎖の LSI 定数の合成と、その定数が有界であるための条件	`S_ext_01_iff`
LatticeGaugePlateauLSI（LatticeGauge.PlateauLSI）	26	頂上の台地の LSI の分解（集団の座標と横方向）・横方向の固有値	`transverse_fails_k17`
LatticeGaugeWallCut（LatticeGauge.WallCut）	21	壁の位置で切る多段の分解の合成	`chain_rule_cells`
LatticeGaugeKinkPosition（LatticeGauge.KinkPosition）	16	芯の負の端の双安定と、瘤の二値での条件づけ	`pn_vs_bistab`・`y_side_k9_3em4`

表 4d　第 25・26 部の束（Y7、11 ファイル）。定理の数はファイルの theorem と lemma の宣言の数（32）。2026-10-15 に別の計算機で再検査：全て標準三公理・`sorry` 0。`Lean`

ファイル（名前空間）	定理の数	中身	引く章
InsertionIdentity（Insertion）	5	挿入比の和の恒等式・mean_one・mean_rho_sigma・sector_bias_le	25-05
BoundedInsertion（Bounded）	5	single・single_mul・multi・averaged・averaged_bound	25-05
SecondMoment	2	sqrt_identity・pz_bound	25-05
MultiCell	3	pushforward・expand_identity・bound（「挿入で奇」は仮定）	25-05
FlipLemma	2	flip_le・cut_formula	25-06
FluxLemma	1	flip_le_one_sub_abs	25-06・26-05
Containers	2	factorize・container_bound	25-03
FluxDuality	3	split・twisted_le・bias_mem（$\theta \le 1$ には正値性を仮定）	26-04
Doubling	2	iterate・decay	26-02・27-01

ファイル（名前空間）	定理の数	中身	引く章
ReflPos	2	refl_pos・refl_cs	26-04・26-05・27-02
ColumnChessboard	5	signed_sum・unsigned_sum・prod_expand・binomial_bound・exp_bound	25-02（分数インスタントンの格子の論文）

名前空間とファイル名が違うのは InsertionIdentity（Insertion）と BoundedInsertion（Bounded）の二つだけで、本文は「ファイル（名前空間.定理）」の形で引く。束は `principia-ym-insertion-identities-2026-10-15.tar.gz`（package `yminsertion`・lib `Y7`・sha256 `58d60c433cb23cb9cfab1f2299732385f79a362b96a1d49ac109334b4832bdf8`・公理の記録 axioms-ym-insertion-identities-2026-10-15.txt）。

表 4e　板と容器の束（lean-y6、30 ファイル＋ Lemma5Core）。定理の数は `#print axioms` の記録の行数（150。うち 137 は第 25・26 部の検討で書かれた宣言、13 は検証の枝で足した宣言）。2026-10-15 に別の計算機で `lake build` を通し、全て標準三公理・`sorry` 0。束は `principia-ym-slab-containers-2026-10-15.tar.gz`（package `ymslabcontainers`・lib `Y6`・sha256 `4892aca93897af4940828fd14d5fc45ee72bdcfca0914a2dcd20dd2d77229341`・公理の記録 axioms-ym-slab-containers-2026-10-15.txt）。`Lemma5Core.lean` は lean_lib の外にあり、`lake build` だけでは検査されない（別に `lake env lean` で確かめる。公理の記録は `axioms-Lemma5Core.txt`）。`Lean`

主なファイル	中身	引く章
SlabConfine・SlabAverage	板の閉じ込めの定理と板の平均	25-04
FrameLemma・CommutingFlips	容器の恒等式の枠の補題・可換な反転	25-03・25-04
GapFromDecay・LevyArea・TwistLocality ほか	減衰からのギャップ・Lévy の面積・捩れの局所性	25-03〜26-05

表 4f　第 15 部（紫外の制御）の束（72、単体のファイル。定理の数は各ファイルの theorem と lemma の宣言の数、704。末尾の二十五本は 2026-10-17・10-22・10-29 に足したもので、この本の側の再検査は済。DominantMatrixContraction から ConeCalculus までの四本は 15-10 の体系の章のもの、その後の七本は 10-22 に、の七本は 10-29 に足したもの）。2026-10-15 に本体（別の計算機）で一本ずつ再検査：全て rc=0・`sorry` 0・`native_decide` 0・標準三公理。定理ごとの仮定と「入っていないもの」は 15-09 表 3。独立の再検査（同じ環境で一つ、62 本の目録）でも全て rc=0・標準三公理（2026-10-15 夜）。`Lean`

ファイル（名前空間）	定理の数	主な定理	引く章
LatticeGauge.ClassResidualTelescoping	6	`telescoping_residual`・`telescoping_residual_multi`・`inv_sq_sum_le`・`uniform_deviation`	15-03 §04 15-04
LatticeGauge.HierarchicalShapeFlow	11	`quarticStep_fixed`・`shapeStep_contract`・`flow_coefficient`・`affine_contraction`・…	15-04
LatticeGauge.FluxNetwork	11	`ratio_le_max`・`ratio_ge_of_unit_flux`・`energy_split`・`thomson_lower`・…	15-05 §02 15-07 景に依 ない指 ぎの一 の補題

ファイル（名前空間）	定理の数	主な定理	引く章
LatticeGauge.AllFacesBlocking	6	`fine_energy_lower` ・ `block_energy_lower` ・ `smooth_ratio` ・ `equal_split_ratio`	15-05 §07
LatticeGauge.RatioTwoCriterion	9	`ratio_two_iff` ・ `one_loop_D` ・ `gamma_family_one_loop_lower` ・ `fund_adj_one_loop_root` ・…	15-06
LatticeGauge.FundAdjointRefit	8	`refit_solution` ・ `tree_quadratic_split` ・ `tree_value_at_saddle` ・ `image_rho` ・…	15-06
LatticeGauge.PrefactorFlowFixedPoint	12	`step_k2` ・ `step_k2_fixed_iff` ・ `step_k2_contract` ・ `fixed_point_general` ・…	15-06 15-03 §04
LatticeGauge.HeatKernelFourPlaquette	8	`conv_assoc` ・ `convPow_add` ・ `four_plaquette_of_semigroup` ・ `four_plaquette_convPow`	15-06 §05
QuaternionReImSplit	9	`re_mul_split` ・ `commutator_re` ・ `J_imI` ・ `two_link_split`	15-07 §06
LatticeGauge.ShapeRemainderUniform	9	`uv_uniform` ・ `stays_in_box` ・ `pow_sub_pow_norm_le` ・ `keff_half_le` ・…	15-06 列四杉 形の乗 の定理
LatticeGauge.HierarchicalTubeChain	8	`tube_exit` ・ `cell_descent` ・ `chain_compose` ・ `tube_weight_mono` ・…	15-04 §05
LatticeGauge.ShapeResidualGeometric	4	`forced_uniform` ・ `geom_partial_le` ・ `residual_sum_uniform` ・ `harmonic_part_unbounded`	15-07 §06
LatticeGauge.LargeFieldSource	4	`weighted_tail_le_exp_moment` ・ `union_tail_le_sum` ・ `coarse_source_commute` ・ `coarse_source_commute_comp`	15-08 §02 · §03
LatticeGauge.TreeGaugeFixing	29	`exists_gauge_tree_trivial` ・ `gauge_tree_trivial_unique` ・ `configEquiv` ・ `fiber_card_const` ・…	15-08 §05
LatticeGauge.WilsonWindowComparison	4	`one_sub_cos_window` ・ `wilson_weight_window` ・ `window_constant_chain` ・ `window_split_bound`	15-07 §05
LatticeGauge.QuarticRowColumnBound	7	`weighted_quartic` ・ `row_quartic` ・ `schur_quartic` ・ `representative_bound` ・…	15-05 の網の 理（扇 の形）

ファイル（名前空間）	定理の数	主な定理	引く章
LatticeGauge.BCHCubicResidual	6	`nT_sum_diff` · `shape_split` · `score_generator_split` · `bch3_coefficient` · …	15-07 § 07
LatticeGauge.SmallFieldLocSplit	3	`loc_split_unique` · `geom_tail_le` · `taylor_tail_bound`	15-08 § 06
LatticeGauge.BackgroundBudget	4	`budget_term_sq` · `budget_unbounded_of_threshold` · `inv_sq_partial_le` · `inv_sq_budget_bounded`	15-07 § 07
LatticeGaugeInterBlockLocAbsorption	7	`loc_split` · `nonlocal_vanishes_on_constant` · `rowSum_add` · `two_site_split` · …	15-08 § 06
LatticeGaugeBlockCouplingCancellation	28	`locM_idem` · `locLin_idem` · `split_unique` · `bil_split` · …	15-08 § 06
LatticeGaugeSmallFieldRemainderAssembly	16	`one_step_remainder` · `gamma_ge_one` · `cut_sum_le` · `taylor_step_le` · …	15-08 § 06
LatticeGaugeToeplitzTailSplit	10	`split` · `split_unique` · `qform_split` · `cform_split` · …	15-08 § 06
LatticeGaugeWeightedTailBound	5	`weighted_geom_le` · `weighted_tail_le` · `weighted_sum_uniform_linear`	15-08 § 06
LatticeGaugeTailTypeClassification	6	`flat_weighted_sum` · `flat_weighted_unbounded` · `exp_weighted_le` · `power_sum_uniform` · …	15-08 § 06 · 15-05 § 07
LatticeGaugeClassParameterBudget	4	`ghat3_forms` · `ghat3_zero_iff` · `inv_sq_partial_le` · `class_parameter_budget_bounded`	15-07 § 06
LatticeGaugeStokesSecondOrder	7	`log_quadratic_part` · `log_quadratic_part_five` · `commSum_eq_zero_of_comm` · `pure_quaternion_commutator`	15-07 § 07
LatticeGauge.CubeFaceCoupling	9	`total_sq` · `opp_eliminate` · `general_to_diag_adj` · `diag_adj_unique` · …	15-07 § 07
LatticeGaugeStapleSumLowerBound	5	`sum_norm_ge_of_inner_ge` · `card_cos_ge_quadratic` · `first_order_ratio` · `quadratic_margin` · …	15-07 § 05
LatticeGauge.QuarticSplit	4	`titu_two` · `quartic_two` · `quartic_triangle` · `class_split`	15-05 § 07

ファイル（名前空間）	定理の数	主な定理	引く章
LatticeGauge.GhostDeterminantMatching	8	`det_gauge_plus_ghost_split` ・ `log_tree_eq_cov_sub_two_ghost_blocks` ・ `coeff_tree_eq_coeff_cov` ・ `coeff_drop_ghost_shift` ・…	15-08 §05
LatticeGauge.BondMovingSandwich	6	`bond_moving_finite` ・ `iterate_le_of_le_of_monotone` ・ `comparison_fails_at_fixed_point` ・ `shrink_shape_shift` ・…	15-04 §05
LatticeGauge.InfluenceRecursion	6	`tp2_comp` ・ `cdf_upper` ・ `cdf_lower` ・ `k_upper` ・…	第 23 の芯の Poinc の一様 の仮定 行の主 方（2 12。本 は第 2 部、1. 00 §04）
LatticeGauge.CornerCouplingAffineFlow	5	`fixpt_is_fixed` ・ `iterate_dev` ・ `abs_iterate_dev` ・ `ratio_gt_one_below_fixpt` ・…	15-07 §07 ・ 15-03 §02
LatticeGauge.HypercubeFaceCoupling	5	`sigma_is_relation` ・ `relation_is_multiple_of_sigma` ・ `opposite_in_cell_reduces` ・ `diag_adj_not_enough` ・…	15-07 §07
LatticeGauge.SkewCouplingSpectrum	5	`coeffs_of_spectrum` ・ `skew_zero_iff` ・ `one_step_skew` ・ `increment_pow` ・…	15-07 §07
LatticeGauge.HypercubeCochainCount	6	`faceCount_four` ・ `euler_cube` ・ `hypercube_cochain_ranks` ・ `edge_face_dof_agree` ・…	15-03 §02 ・ 15-07 §07
LatticeGaugeNonlocalImageRecursion	12	`affine_iter` ・ `fixed_point` ・ `affine_bound_sum` ・ `affine_bound_uniform` ・…	15-08 §06 ・ 15-03 §03
LatticeGaugeThreeBodyTailRecursion	8	`weighted_geom_le` ・ `three_body_sum_le` ・ `affine_uniform` ・ `pair_tail_uniform` ・…	15-08 §06
CoarseFaceHodgeSplit	7	`range_sup_tags` ・ `finrank_ker_eq` ・ `disjoint_range_tags` ・ `decomp_unique` ・…	15-08 §06 ・ 15-05 §07

ファイル（名前空間）	定理の数	主な定理	引く章
LatticeGauge.QuarticConeNorm	5	`ratio_sandwich` · `ledger` · `transfer` · `cone_b_to_a` · …	15-05 §07
LatticeGauge.BlockCovariance	7	`cone_chain` · `cone_chain_uniform` · `growth_ledger` · `inverse_decay` · …	15-05 §07
LatticeGauge.AveragedBlockFlow	7	`affine_iter` · `affine_dist` · `tail_sum` · `tail_bound` · …	15-05 §07
LatticeGaugeHierarchicalUpperTube	8	`tube_exit_top` · `chain_top` · `steps_numeric_128` · `steps_numeric_64` · …	15-04 §05
LatticeGauge.TensionDomination	6	`iterate_bound_var` · `iterate_bound` · `lower_bound_four` · `area_law_transfer` · …	15-04 §05
LatticeGauge.BlockStepBetaShift	6	`beta_shift_of_inv_sq` · `su2_coeff` · `log_steps` · `shift_bounds` · …	15-01 §01 · 15-03 §02
LatticeGaugeTwoBlockRowSumLoc	14	`sRow_eq_sComp_add` · `nRow_eq_nComp` · `row_sum_cancels` · `row_split_unique` · …	15-08 §06
LatticeGauge.MultiStepCone	5	`step_pair` · `contraction` · `cone_quartic` · `block_three` · `cone_transfer`	15-08 ージの り替え 境目の
LatticeGauge.MultiStepPerturb	3	`three_product_perturb` · `three_product_perturb_grouped` · `block_three_affine`	15-08 ージの り替え 境目の
LatticeGauge.QuarticCone	2	`four_amgm` · `quartic_sum_le`	15-08 §06
LatticeGauge.ColorAverage	10	`colorAverage` · `colorAverage_of_design` · `design_identity` · `isQuarticDesign` · …	15-08 ージの り替え 境目の
LatticeGauge.CubicCone	7	`three_amgm` · `cubic_sum_le` · `triple_amgm` · `cubic_cone_pullback` · `block_three_uniform` · …	15-08 §06
SmallSetRowSum	20	`rowSum_total` · `row_cancel` · `total_split` · `piece_loc_zero` · `theta_ledger` · …	15-08 §06
ThetaSquareOneStep	6	`one_step_affine` · `theta_ledger_half` · `sup_monotone_in_mu` · …	15-08 §06

ファイル（名前空間）	定理の数	主な定理	引く章
DominantMatrixContraction（DominantMatrix）	21	`liftWeight_step`・`weighted_step`・`weighted_iter`・`weight_change`・`norm_pow_le_const_mul`・`sum_norm_pow_le`・`aggregate_step`・`two_by_two_weight`・`signedEx_sq`・…	15-10 §01
SignLossBound（SignLoss）	16	`stein_le_inv_sq_mul_test`・`stein_form_le`・`schur_four`・`loss_le_of_coherent`・`comp_coherent`・`row_l1_comp_le`・…	15-10 §02
ConstrainedExtension（ConstrainedExtension）	20	`isExtension_iff_mem_coset`・`finrank_freedom`・`exists_extension_with_conditions`・`finrank_freedom_with_conditions`・`eq_of_eqOn_iSup`・`comp_isExtension`・`comp_depends_of_not_le`・…	15-10 §03
ConeCalculus（ConeCalculus）	20	`cone_pullback`・`contracts_comp`・`block_decay`・`lp_schur`・`lp_schur_sharp`・`delta_dilution`・`weighted_rpow_midpoint`・`weighted_rpow_shift`・`midpoint_below_one`・`affine_varying`・`affine_block`・…	15-10 §05
ColorAverageN（LatticeGauge.ColorAverageN）	13	`colorAverage_of_design`・`design_identity`・`colorAverage`・`oneColour_of_colorAverage`・`design_identity_two`・`cube_moment`・…	15-08 ージの り替え 境目の 行・1 07 §(
OneStepWindow（LatticeGauge.OneStepWindow）	20	`holder_dual_ratio`・`exists_lpRatio_ge_row`・`lamMax_mono`・`steinWeighted_ge`・`stein_row_weight_saturation`・`window_ordConnected_of_logConvex`・…	15-10 §05
LargeSetWeight（LatticeGauge.LargeSetWeight）	16	`summable_shell_iff`・`bbs_weight_vs_decay`・`bsv_weight_vs_decay`・`card_shell`・`manhattanShell_three`・…	15-08 §06
LatticeGaugeAcceptanceSandwich（LatticeGauge.AcceptanceSandwich）	15	`half_metro_le_fermi`・`fermi_le_metro`・`barker_le_of_crooks`・`overlap_sandwich`・`mixture_sandwich`・`jarzynski_of_crooks`・…	25-06 §07 · 25-08 §03
LatticeGaugeAbelianTwistAction（LatticeGauge.AbelianTwistAction）	13	`abelianAction_lt_pi_sq`・`totalAction_eq`・`plaqTerm_mixed`・…	27-02 さな 1 の基点

ファイル（名前空間）	定理の数	主な定理	引く章
LatticeGaugeNestedBlocks（LatticeGauge.NestedBlocks）	7	`nested_supermultiplicative` ・ `doubling_iterate` ・ `doubling_bound` ・…	26-05 §02 ・ 26-02 §03
CenterFluxPolymerCertificate（PolymerCert）	6	`tree_k` ・ `kp_bound` ・ `kp_lt_one` ・ `rate_rational` ・ `exp_le_inv_one_sub` ・ `final_real`	26-06 §04
ClassFixedPoint（LatticeGauge.ClassFixedPoint）	24	`exists_unique_fixed` ・ `exists_unique_fixed_in_ball` ・ `norm_iterate_sub_le` ・ `exists_unique_fixed_of_iterate` ・ `dist_fixed_fixed_le` ・ `tracking` ・ `exists_unique_entire_orbit` ・ `entire_tracking` ・…	15-03 §04
LocalCancellationOneRow（LatticeGauge.LocalCancellationOneRow）	8	`pairs_sum_to_total` ・ `loc_remainder0_eq_zero` ・ `pairAB_rank_one` ・ `pairAB_local_plus_gradient` ・ `mirror` ・…	15-08 §06
RankOneRemainder（LatticeGauge.RankOneRemainder）	12	`pair_split` ・ `edge_sum_split` ・ `chain_remainder_eq` ・ `chain_remainder_zero_of_match` ・ `deflation_split` ・…	15-08 §06
BlockDeflation（LatticeGauge.BlockDeflation）	9	`blockDeflate_split` ・ `blockDeflate_left_zero` ・ `blockDeflate_right_zero` ・ `twoStep_zero` ・ `twoStep_split` ・…	15-08 §06
ConeCalculusSOS（LatticeGauge.ConeCalculusSOS）	27	`cert_sound` ・ `certValue_anti` ・ `floor_of_coeff` ・ `classSum_pushforward` ・ `classSum_pullback` ・ `shift_rigid` ・ `tensor_ratio_product` ・ `schur_weighted_bound` ・…	15-10 §05
LatticeGaugeH1HbarInterval（LatticeGauge.H1HbarInterval）	15	`cell_lower` ・ `cell_upper` ・ `rho_lower` ・ `pieces_min` ・ `margin_on_interval` ・ `margin_I1` ・ `margin_I2` ・…	23-15 §05 ・ 27-02 重井戸 一様な ャッフ
StrongCouplingOneSidedTerm（StrongCouplingOneSided）	9	`area_le_strip` ・ `strip_coeff_lower` ・ `tube_coeff_neg` ・ `h_main_term` ・ `h_neg` ・ `h_neg_on_interval` ・…	27-02 合の言 の帯

第 15 部の本文の札は五分類のまま（紙は〔初〕）で、Lean は各章の本文に定理の名と仮定を同じ行に添えてある（15-09 §01）。源は束 `principia-ym-lattice-gauge-2026-11-13`（`principia/lean/` の tar.gz、公理の記録 `axioms-ym-lattice-gauge-2026-11-13.txt`）に在ります。うち 23 本は、2026-10 に公開した束（flux-network-blocking・hierarchical-chain・

one-row-renormalisation・coarse-chain-poincare・h1b-margin-interval・boundary-mixed-derivative）にも同じファイルで在ります。

07

札の決め方 — 一つの文に一つの札

本書は札を文ごとに付けます。章ごとでも論文ごとでもありません。一本の論文の中でも、段によって札が違うからです（§06 の例）。どの札を付けるかは、文が受けている保証の種類で決まります。図 2 はその決め方を、上から順に問う形にしたものです。

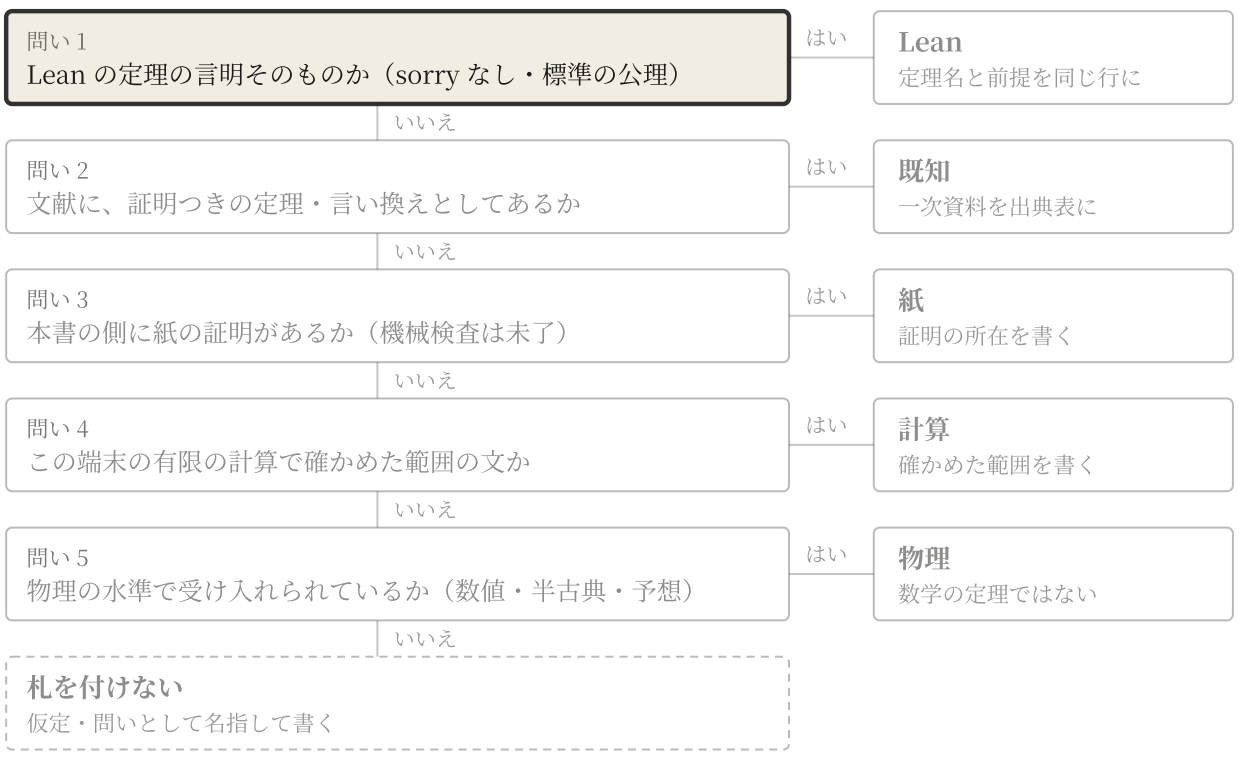
問いの順には理由があります。Lean の札は前提から結論への矢印を保証し、既知の札は文献の証明を、紙の札は本書の側の証明を、計算の札は有限の範囲の確認を、物理の札は物理の水準での受け入れを指します。強い保証を先に問い、当てはまった最初の札を付けます。どれにも当たらない文は札を付けず、「仮定」か「問い」として書きます（23-17 の問いには札を付けません）。

文が鎖になっているときの読み方は次の通りです。

$$\text{鎖 } A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n \text{ の結論の確かさ} \;=\; \text{最も弱い段の札} \tag{8}$$

一つの段だけが 紙 なら、ほかの段が全部 Lean でも、結論は紙の水準です。始点 A_0 が仮定なら、結論も仮定つきです。式 (1) の前提 P_i が、この始点に当たります。

図 2 「はい／いいえ」で上から問いに答えると、通った道と付く札が出る。例のボタンは本書の文を一つ選んで道を示す



問い 1：Lean の定理の言明そのものか。

この図は 0-01 の札の約束を問いの形にしたもの。数値は含まない。

表 5　本書の文の例と、図 2 で通る道

文	通る道（問い 1〜5 への答え）	札	その章
式 (4)：$m > 0,\ C_P = 1/m^2,\ C_P \le K\xi^2 \Rightarrow 1 \le K(m\xi)^2$（23-13 の `hup_is_gap_positivity` と同じ言明）	はい	Lean（前提を併記）	§03・23-13
一ループの係数 b_0（$11N/3$ を含む）	いいえ → はい	既知	4-06
一リンクの下界から格子の質量ギャップへの段	いいえ → いいえ → はい	紙（概略）	5-11
二次元イジングの小さな箱（$L = 3, 4, 5$）での C_P/L^2 の振る舞い	いいえ → いいえ → いいえ → はい	計算	2-10
格子の数値シミュレーションによるグルーボールの質量と弦張力の比	いいえ ×4 → はい	物理	5-08
緩和時間の仮定（冪の水準 $\ln C_P / \ln \xi \to 2$。帯の文は帯の形の拡散型緩和時間の仮定と名指し、その上の半分が上界の仮定：$C_P \le K\xi^2$）	いいえ ×5	札なし（仮定）	23-01

読み方。表の一行目の Lean の前提 $C_P \le K\xi^2$ は、最後の行の仮定の帯の文（帯の形の緩和時間の仮定）の上の半分、つまり上界の仮定です（A-06 名前の索引）。一行目では前提として、最後の行では仮定の主張として。札が違うのは、文の中での役割が違うからです。

08

自分で確かめる手順

Lean の札は、読者が自分の機械で検査し直せることを前提にしています。Lean の参照マニュアルは、検査を四段の階段として説明しています（表 6）。下の段ほど手軽で、上の段ほど疑う範囲が広がります。

表 6　検査の四段（Lean の参照マニュアル「Validating a Lean Proof」の構成から）

段	すること	防げるもの
1	エディタの検査の印、または `lake build` が警告もエラーも出さずに終わることを見る	未完の証明・その定理の中の `sorry`・tactic の正直な誤り
2	定理の後に `#print axioms 定理名` を書き、式 (5) を確かめる	依存する定理の中の `sorry`・余分な公理・`native_decide`
3	`lean4checker` で、ビルドで保存された証明をカーネルに通し直す	カーネルの状態を扱う Lean の中核部の不具合・検査を意図的に迂回するメタプログラムや tactic

段	すること	防げるもの
4	信頼できる場所に言明だけを書き、`lake comparator` で証明を隔離して組み立て、Lean のカーネルと独立に書かれた外部の検査器の両方で通し直し、言明が一致することも確かめる	悪意ある証明・使った検査器の一部にだけある実装の不具合

隔離した照合の段はマニュアル自身が、証明の市場・高額の賞金つきの競技・意図の揃っていない AI のような、危険の高い場面のためのものと位置づけています。マニュアルはビルドの検査の段について、`sorry` を含む依存先があっても検査の印は付く、と注意しています。表 2 の `gap_from_bound'` が終了コード 0 だったのと同じ事情で、だから公理の確認の段（Lean の参照マニュアルの検査の段）が要ります。本書の Lean の札は、少なくとも公理の確認の段までを済ませた定理に付けています。

具体的な手順は次の形です。導入と版の合わせ方は 案内の「入れる」と 「配布されている証明を手元で検査する」にあります。

```
lake build                      # 段 1：プロジェクト全体を検査
lake env lean File.lean         # 一つのファイルだけを検査
#print axioms gap_from_bound    # 段 2：ファイルの中に書く
```

このサイトの Lean の記録（定理の一覧と検査の記録）は Lean の記録にあります。同じ証明でも、Lean と Mathlib の版が違うと補題の名前が変わり、通らなくなることがあります。そのため本書は検査に使った版を記録します。

表 7　この付録の例を検査した環境 計算

もの	版
Lean	4.33.1（commit `819816b2`）
Mathlib	rev `0df444a3`
機械	x86_64・4 コア・Linux。検査は低い優先度（nice 19）で実行

最後に、Lean の札の付いた文を受け取ったときに問うことを七つにまとめます。案内の「言明を読む手順」のチェックリストを、本書の読み方に合わせたものです。

1. 定理名が添えてあり、自分の手で検査し直せるか（ビルドの検査の段）。
2. `sorry` が無く、公理が式 (5) の三つの中に収まっているか（公理の確認の段）。
3. 言明に現れる定義を全部たどったか（§05 の①）。
4. 名前ではなく言明を読んだか（§05 の②）。
5. 前提を全部満たす例が一つ示されているか（§05 の③）。
6. 前提の一覧と、各前提の札が書かれているか（§05 の④・式 (8)）。

7. 実数の変数を物理の量として読む部分が、本文のどこで宣言されているか（§06・式(7)）。

七つ目が本書に固有の問いです。本書の Lean の定理の多くは、ここで質量ギャップの問題とつながり、そのつながりは Lean の札の外にあります。

09

第 19〜22・28 部と第 15 部の後半、第二巻の「本書の検討で見えていたこと」の節の宣言 — 一覧と、検査の手続き

第 19〜22・28 部と第 15 部の後半、および第二巻の「本書の検討で見えていたこと」の節（第 9・10・12・14 部）が挙げる Lean の宣言を、章ごとに一覧にします。範囲と言っていないことの詳しい形は、各部の範囲の章（20-07・21-08・15-14）と 14-02 の「この章が言えている範囲」と、定義の対応表（19-06）に在ります。

検査の手続き。どの宣言も、Lean 4 の核（カーネル）でもう一度検査し直し（核の再検査）、`sorry` が無いことと、使った公理が標準の三つだけであることを確かめています。そのうえで、証明を書いたのとは別の目で、Lean の定義と言明が本文の定義と言明と同じものを指しているか、仮定の欄が実際の対象で満たせるかを照合しています（書き手とは別の読み手による照合）。機械検査が保証するのは、書かれた言明が書かれた仮定から従うことまでです（§05 の四つの隙間）。

束。表 4g の宣言と、それらが `import` で依る全てのファイルを、一つの lake の package にまとめた束 `principia-ym-three-volumes-2026-11-13` に収めています。Lean 4 v4.33.1 と Mathlib v4.33.1、400 モジュール・約 11.5 万行で、章が挙げる宣言は 677（うち定理 455）です。`sorry`・`admit`・`native_decide`・独自の `axiom` は字句の検索で 0 です。検査の仕方（`lake build` と、宣言ごとの `#print axioms`）と、同じ名の宣言を持つために同時に `import` できないモジュールの組は、束の README に書いてあります。同じ日の先の束 `principia-ym-premise-first-2026-11-13`（317 モジュール）は、この束に全て含まれます（317 本のモジュールのファイルは同じです）。

表 4g　第 19〜22・28 部と第 15 部の後半、および第二巻の「本書の検討で見えていたこと」の節（第 9・10・12・14 部）が挙げる Lean の宣言（束 `principia-ym-three-volumes-2026-11-13`、400 モジュール）

章	定理・定義	範囲	Lean の宣言
19-06	強結合の側 ↔ 渦の側（測度）：$\tilde{\mu}_{N,\beta}$（`TorusRP.wilsonMeasure N β`）は、渦の側の Haar の積に重みを掛けた測度を、定義で与えた一対一の対応で写したものに等しい。定数の因子なし	$M = N$、捩れなしのときだけ。捩れた測度（背景 $n_{12} = 1$）の橋は無い	`WilsonBridge.wilsonMeasure_eq_m`
19-06	同（期待値・全質量）：可測な観測量の期待値と、全質量 $Z_N(\beta)$ が二つの側で一致	同上	`WilsonBridge.integral_wilsonMea` `WilsonBridge.wilsonMeasure_univ`
19-06	同（時間を揃えた対応）：強結合の側の時間（添字 0）を渦の側の添字 3 に重ねる対応でも測度が一致し、二つの側の格子点の面の鏡映が同じ写像になる	同上	`WilsonBridgeT.wilsonMeasure_eq_` `WilsonBridgeT.refl_toBallT`
19-06	同（渦の比）：背景の捩れなし（$n_{12} = 0$）の渦の比を、強結合の側の確率測度の期待値として書く。本の θ_M（$n_{12} = 1$）ではない	同上	`WilsonBridgeV.vortex_ratio_eq`
19-06	強結合の側 ↔ フェルミオンの側：$\tilde{\mu}_{2h,\beta}$ は純ゲージの測度 `WilsonGauge.gaugeMeasure` を添字の付け替えで写したものの $e^{6(2h)^4\beta}$ 倍	空間の一辺 $N = 2h$、$2h > 1$	`WilsonGauge.wilsonMeasure_eq_ma`
20-01	格子点の面の鏡映正値性	$(\mathbb{Z}/2M)^4$、全ての β、閉じた正の半分だけに依る有界可測な f	`TorusRP.wilson_rp`
20-01	真ん中の面の鏡映正値性	$(\mathbb{Z}/2M)^4$、$M \geq 2$、$\beta \geq 0$、ゲージ不変な有界可測な F	`MidRP.wilson_rp_mid`
20-01	四方向の格子点の面の鏡映正値性	$(\mathbb{Z}/2M)^4$、全ての β、向き ρ ごと	`PeierlsPerm.wilson_rp_dir`
20-01	鏡映の対の対称性	$(\mathbb{Z}/2M)^4$、全ての β、可測な f, g	`TorusRP.wilson_refl_symm`
20-02	有限体積の強結合の相関の減衰	狭い窓、有限の N ごと、定数に N なし、時間の距離	`TorusRP.wilson_strong_coupling`
20-02	Dobrushin の距離による共分散の減衰	$\lambda \geq 0$、$e^{\lambda} q(\beta) < 1$、有限の N、定数に N なし	`LinkSpec.wilson_cov_dist`
20-03	部分列なしの極限の定理	$\beta \neq 0$、$q(\beta) < 1$	`InfVol.wilson_infvol_unique`

章	定理・定義	範囲	Lean の宣言
20-03	大きさに依らない極限の定理	$\beta \neq 0$、$q(\beta) < 1$、全ての大きさ $m+1$、任意の $s(k) \to \infty$	`AllN.wilson_infvol_allN`
20-03	極限の並進不変	$\beta \neq 0$、$q(\beta) < 1$、四方向の単位の並進	`TransI.wilson_infvol_translatio`
20-03	極限点のクラスター性	$\lambda \geq 0$、$e^{\lambda} q(\beta) < 1$、どの極限点でも、四方向	`WilsonLimit.cluster_limit`
20-04	非退化つきの質量ギャップ（Dobrushin の窓）	$\beta \neq 0$、$q(\beta) < 1$、言明は極限点を一つ選ぶ（同じ評価は全ての極限点で：`WilsonLimit.wilson_massGap_dob`）、$\|T - P_\Omega\| \leq q(\beta)^{1/2}$、$\mathrm{Var}(F_0) \geq \frac{1}{4} e^{-12\|\beta\|}$	`WilsonLimit.wilson_massGap_dob_`
20-04	非退化つきの質量ギャップ（全ての極限点）	$\beta \neq 0$、狭い窓、全ての極限点、率 $-\log 24(1 - e^{-4\|\beta\|})$（一本にまとめた言明には入っていない）	`WilsonLimit.wilson_massGap_nond`
20-04	ゲージ不変な部門の質量ギャップ	$\beta \neq 0$、$q(\beta) < 1$、言明は極限点を一つ選ぶ、証人 $F_p = \mathrm{Re}\, U_p$	`GaugeZ.wilson_massGap_gauge_exi`
20-04	$T \geq 0$（全体の W の上）	$\beta \geq 0$、$\lambda > 0$、$e^{\lambda} q(\beta) < 1$、全ての極限点	`FullT.wilson_Tpos_full`
20-04	T の像はゲージ不変な部門に入る	$\lambda > 0$、$e^{\lambda} q(\beta) < 1$、全ての極限点	`Bind.T_range_gauge_all`
20-04	一本にまとめた言明	$0 < \beta$、$18 \tanh \beta < 1$。収束・並進・鏡映正値・二つの部門のギャップと非退化・$T[F_0] = 0$・$T \geq 0$・クラスター性	`InfMain2.wilson_infvol_main2`
20-05	Wilson–フェルミオンの重みの鏡映正値性	$m > -1$、全ての β・j、格子点の時間の面	`WilsonGauge.site_reflection_pos`
20-05	分配関数が正	全ての β・m・j	`WilsonGauge.partition_pos_wilso`
20-05	行列式の大域ゲージ不変	無条件、定数の g	`GaugeDet.physDirac_det_conj`
20-05	格子の対称性の生成元での不変	全ての N・j・m・β：大域のゲージ、四方向の並進、空間の $90°$ の回転、空間の軸の鏡映、時間の鏡映	`CubicSym.wfProb_lattice_generat`
20-05	超立方の生成元での不変	等方の格子 $N = 2h$、上に (空間, 時間) の $90°$ の回転を足したもの	`CubicSym.wfProb_hypercubic_gene`
20-05	時間の鏡映での行列式の不変	無条件（全ての N・h・m・ω）、反転 $t \mapsto 2h - 1 - t$	`CubicSym.physDirac_det_trefl`
21-01	符号の系の三本（被覆の不等式・$\mathbb{Z}_2$ の単調性・$\mathbb{Z}_2$ との比べ）	抽象の群と符号の指標。仮定の欄つきの含意	`CoveringInequality.covering_ine` `dominated_covering_ineq`・`inva`

章	定理・定義	範囲	Lean の宣言
21-02	薄い渦の床（比の形）	全ての実の β、$N, M \geq 1$、背景の捩れは任意：`twisted_vortex_bound` は符号つきの形 $(Z_0 - Z_1)/(Z_0 + Z_1) \leq t^{M^2}$、`_abs` は絶対値の形 $\lvert Z_0 - Z_1\rvert/(Z_0 + Z_1) \leq t^{M^2}$	`TwistedWilson.twisted_vortex_bo` `twisted_vortex_bound_abs`
21-02	薄い渦の床（指数の形）	$\beta \neq 0$：$\sigma_0 = -\ln t > 0$、$\lvert\theta_M\rvert \leq e^{-\sigma_0 M^2}$	`TwistedWilson.thin_vortex_floor`
21-04	塊の評価	$mk \leq M$、全ての実の β：$\lvert\theta_M\rvert \leq \tanh(K_{\text{eff}})^{k^2}$	`TwistBlocks.block_bound_abs`
21-03	太い渦の床	全ての $N \geq 1$、任意の $\varepsilon > 0$、十分大きい β ごとに十分大きい M：$\lvert\theta_{M+1}\rvert \leq \exp(-(M+1)^2 e^{-\beta(S_N+\varepsilon)})$	`TwistBlocks.thick_vortex_floor`
21-05	渦の最小作用の正値性	全ての $N \geq 1$：m に一様な $\delta > 0$ で $\delta \leq S_{\mathrm{v}}(N, m)$、$S_N > 0$	`VortexPos.Svortex_ge_unif` ・ `Vo`
21-05	上界の証明書 機	$S_{\mathrm{v}}(2,8) \leq 6.67401$、$S_{\mathrm{v}}(3,8) \leq 9.09321$、$S_{\mathrm{v}}(4,4) \leq 12.02057$、よって $S_N < 2N^2$（$N = 2, 3, 4$）	`VortexCert.Svortex_two_eight_le` `Svortex_three_eight_le` ・ `Svort` `SN_two_lt` ・ `SN_three_lt` ・ `SN_f` `VortexCert.Svortex_le_of_cert`
21-05	陽な指数の太い渦の床	$N = 2, 3, 4$、十分大きい β ごとに十分大きい M：指数の数 6.675・9.094・12.021	`TwistBlocks.thick_vortex_floor_`
21-06	渦の比の符号	M が偶数、全ての実の β：$Z_1 \leq Z_0$、$\theta_M \geq 0$	`HalfSplit.Z1_le_Z0` ・ `TwistBloc`
21-06	符号つきの太い渦の床	太い渦の床の範囲で $M+1$ が偶数：$0 \leq \theta_{M+1} \leq \exp(-(M+1)^2 e^{-\beta(S_N+\varepsilon)})$	`TwistBlocks.thick_vortex_floor_`
21-06	θ による Polyakov ループの対の評価	M が偶数、全ての実の β、全ての b, b'：$\lvert\langle P_b(0) P_{b'}(M/2)\rangle_0\rvert \leq 2\sqrt{\theta}/(1+\theta)$	`HalfSplit.polyakov_pair_theta`
21-06	一般の時間差の Polyakov ループの対	$M \equiv 0 \bmod 4$、全ての実の β、$0 \leq T \leq M$：$\lvert\langle P_b(0) P_{b'}(T)\rangle_0\rvert \leq 2t^{M \min(T, M-T)}$	`PolyakovT.polyakov_pair_all`
21-06	同（他の偶奇）	M が偶数 ≥ 4 で $\beta \geq 0$／N, M が偶数（$M \geq 4$）で全ての β	`PolyakovT.polyakov_pair_evenM`
21-06	距離 $M/2$ の対と薄い渦の床	M が偶数（$M = 2$ を含む）、全ての実の β：$\lvert\langle P_b(0) P_{b'}(M/2)\rangle_0\rvert \leq 2t^{M \cdot M/2}$	`PolyakovT.half_pair_tanh`
21-06	太い渦の床と合わせた Polyakov ループの対	十分大きい β ごとに十分大きい M、$M+1$ が偶数：距離 $(M+1)/2$ の対 $\leq 2\exp(-\frac{1}{2}(M+1)^2 e^{-\beta(S_N+\varepsilon)})$	`HalfSplit.polyakov_pair_floor`
15-12	上の側	全ての段 k、$\omega(q) > 0$ の全ての $q \in \mathbb{R}^4$	`OSUpQpos.os_up_Qpos` ・ `OSUpQpos`
15-12	下の側	同上（別名で閉じた族）	`HsSplit.lower_side_c`

章	定理・定義	範囲	Lean の宣言
15-12	伝播関数の挟み	同上、定数は k・q に一様	`LatticeRec.lattice_bracket`・`OneStepLower.bracket_Qpos_free`・`NearAliasB.bracket_Qpos_split`
15-12	一段の縮み	全ての q	`OneStepBridge.Mfam_P_le_row`
15-12	段に一様な縮み	全ての段 k、全ての q	`TorusLam.stage_tau_17`
15-12	Γ_k の収束	全ての段、定数は段と運動量に一様	`AliasPoinc.coupling_converges_`
15-13	局所性・ゲージの共変性	$r_0 > 0$、$\lvert g\rvert = 1$	`BoxWalk.boxMap_local`・`BoxWalk`
15-13	線形化	$0 < r_0 \le 1$、$\varepsilon M \le 1/32$	`BlockLinearKernel.blockMap_exp_`
15-13	押し出しの共分散	任意の測度（意味を持つのは二次の積率があるとき）、一つの色	`PushCov.lattice_pushCov`
15-13	面の共分散	全ての段 m、$N \ge 2$。線形化したブロック化で自由場を押した場	`LatticeFace.lattice_face_T1h`
22-01	チェス盤の評価	$N = 2m$（$m \ge 1$）、全ての実の β、単位の立方体の関数	`FoldWilson.wilson_chessboard_ev`
22-01	体積に一様な稀さ	$\beta \ge 81$、$m \ge 2$、面の任意の集合 X。q_1 は N・X に依らない	`FoldCap.rarity_explicit`
22-01	率 $1/4$ の稀さ	$0 < y \le 2$、存在する β_0 以上、$m \ge 1$	`FoldQuarter.rarity_uniform4`
28-01	部分列の極限と、極限に移る性質（仮定の欄つきの含意）	仮定の欄は 28-01 の表のとおり	`WeakUltravioletExistence.exists`・`limit_consistent`・`BlockConclu`・`ChainBlockMap.chain_end_to_end_`・`continuous_blockMap`、`BoxWalk.`・`chain_end_to_end_box_wilson2`
28-02	終点を合わせた歪積の軌道の収束（仮定の欄つきの含意）	一段の写像は抽象の歪積で、格子からは定義されていない（28-02 §08）	`SkewOrbit` の 13 本（`step`・`IsO`・`two_point_bound`・`midpoint_adm`・`coarse_step`・`coarse_cauchy`・`coarse_rate`・`limit_independen` 中点の版）、`SkewOrbitProbe.theta`・`rate_window`・`one_step_after` は `WeakUltravioletExistence.tendst`・`weak_uv_observable_full`
28-03	減衰から質量ギャップへ・帯の還元（仮定の欄つきの含意）	仮定の欄は 28-03 の表のとおり。強結合の窓の中では欄が全て払える	`OSGap.massGap_of_measures_sub`・`OSGap.Datum.hasMassGap_of_decay`・`BandReduction.band_reduction`、

章	定理・定義	範囲	Lean の宣言
20-06	強結合の面積則（有限体積）：原点を角とする向き 1・2 の長方形の縁の Wilson ループの期待値が、長方形の面積について指数で小さい（式は 20-06 の (3)）	四方向が同じ大きさのトーラス、β は 0 以上、強結合の窓（4096 の窓）の中、長方形の二辺は 1 以上で格子の一辺より小さい。率と前の因子は格子の大きさにも長方形の大きさにも依らない。一辺の 2 倍が格子の一辺以下のときの指数が面積そのものの形は area_law_wilson_area	`AreaLaw.area_law_wilson` ・ `area`
20-06	同（任意の角と向きの長方形）	同上。Wilson 測度の並進と向きの入れ替えでの不変から	`AreaLaw.area_law_wilson_general` `wilson_cfgShift_invariant` ・ `ex`
20-06	同（定数を締めた版、指数を二つの向きの大きいほうにした版）	β は 0 以上、締めた窓（441 の窓）の中。前の因子と率の定数だけが違う。窓の外・一般のループ・Wilson ループの下界は言っていない	`AreaLaw.area_law_wilson_sharp` `area_law_wilson_general_sharp` `area_law_wilson_max_sharp`
20-06	強結合の面積則（無限体積）：極限の測度で、原点を角とする長方形の縁の Wilson ループの期待値が面積について指数で小さい	β は正、20-03 の部分列なしの極限の窓と 4096 の窓の交わり、全ての辺の長さ。全ての極限点でも（β は 0 以上、4096 の窓）。締めた定数・任意の角と向きの無限体積の版は無い	`AreaLaw.area_law_infvol` ・ `area` `area_law_limit_sub` ・ `zRectWord`
20-06	面積則の証明の部品：正の混合、支配の補題、符号の反転と mod 2 の双対で消える項、極小の面の集合の連結性・面積の下界・数え上げ、長方形の道の定義	各宣言の言明のとおり（20-06 §05〜§08）。張る面の集合の族は定義の中に具体に置かれ、仮定ではない	`AreaLaw.rectWord` ・ `rectWordG` ・ `rectWord_one_one` ・ `abs_wordExp` `exp_eq_mix` ・ `mixVar_mem` ・ `prod` `integral_mul_prod_one_add` ・ `ZX` `sum_superset_le` ・ `q_eq` ・ `flipZ` `wordHol_flip` ・ `hol_eq_wordHol` `integral_word_mul_prod_eq_zero` `not_mem_span_iff_exists_sep` ・ `rect_closed_cases` ・ `minSpan_re` `card_ge_of_spans_rect` ・ `wordBd` `card_conn_le` ・ `card_rootP_le` ・
20-06	渦の自由エネルギーの上界（等方のトーラス）：中心の捩れを一つ入れた分配関数と通常の分配関数の差が、捩れの面の面積について指数で小さい	四方向が同じ大きさのトーラス、β は 0 以上、4096 の窓（締めた版は 441 の窓）。面積あたりの率は格子の大きさに依らない。前の因子（横の面積）は残る。差の符号の向き・窓の外は言っていない	`VortexStrong.vortex_floor` ・ `vo` `vortex_floor_rel` ・ `vortex_floo`
20-06	同（横 N・縦 M のトーラス）	β は 0 以上、441 の窓（締めない版 vortex_floor_MN は 9216 の窓）、全ての背景。差は縦の平面の面積について指数で小さく、面積あたりの率は横の大きさにも縦の大きさにも依らない。前の因子（横の面積）は残る	`VortexStrongMN.vortex_floor_MN_`

章	定理・定義	範囲	Lean の宣言
20-06	渦の上界の証明の部品：よい集合・悪い集合、捩れの置き場に依らないこと、悪い集合の大きさの下界と連結性	各宣言の言明のとおり（20-06 §07・§08）	`VortexStrong.Good` ・ `ZM_gauge` ・ `good_twist_iff` ・ `card_bad_ge` ・ `plane_bad` ・ `VortexStrongMN.car`
21-07	渦の比の連続と、結合 0 での値：捩れた分配関数と渦の比は結合について連続で、結合 0 で分配関数は 1、渦の比は 0	横 N・縦 M は 1 以上で止める、全ての実の結合	`ThetaTuning.ZW_continuous` ・ `th` `ZW_zero` ・ `thetaM_zero`
21-07	合わせの弱い形：目標の値が 0 以上で、ある結合での渦の比以下なら、0 からその結合までの間に解と、その中の最大の解が在る	格子の大きさを止めて。最大はその区間の中の最大	`ThetaTuning.tuning_exists` ・ `tu`
21-07	直交する二つの面に捩れを一つずつ持つ箱に、平らな配位は無い（離散の Stokes と四元数の代数から）	全ての N, M（1 以上、退化した格子を含む）、仮定なし。片方の捩れだけの背景では平らな配位が在る	`TwistFlat.no_flat_twist11` ・ `FlatStokes.torus_commutator` ・ `ThetaLimit.flat_exists_10`
21-07	最小の欠けは正で、ある配位で達せられる	全ての N, M（1 以上）、仮定なし。陽な値は言っていない	`TwistFlat.defect11` ・ `defect11_` `ThetaLimit.Smin`
21-07	欠けの一様な下界：対称な箱では、欠けが横の大きさに依らず 1/2 以上	全ての N, M（1 以上）と全ての配位、仮定なし。片方の捩れの背景では正の下界は無い。最小の欠けの真の値は言っていない	`TwistFloor.defect11_ge_two` ・ `d` `defect11_uniform_half` ・ `Smin_s` `QuadFloor.quad_floor_two` ・ `FlatStokes.approx_torus_commuta`
21-07	渦の比は、格子を止めて結合を大きくすると 1 に近づく。値の範囲は −1 より大きく 1 以下	格子の大きさを止めて。下界の定数は格子の大きさに依り、陽な値は無い。速さが格子の大きさに一様なことは言っていない	`ThetaLimit.tendsto_theta_one` ・ `Z10_ge` ・ `volV_pos` ・ `ratio_tend` `theta_gt_neg_one` ・ `theta_le_on`
21-07	流束の自由エネルギーの傾き：二つの捩れた分配関数の対数比を結合で割ったものは、最小の欠けに近づく	格子の大きさを止めて、結合を大きくする極限。対称な箱では極限は 1/2 以上。有限の結合での一様な評価は言っていない	`ThetaLimit.tendsto_logratio_div` `TwistFloor.logratio_limit_half`
21-07	渦の比の合わせ：0 以上 1 未満の全ての目標の値に、渦の比をその値にする結合が在り、解の集合に最大の元が在る	格子の大きさを止めて。目標が正なら最大の解も正。単調性・解の一意性・横の大きさと結合を同時に動かす列は言っていない	`ThetaLimit.tuning_all` ・ `tuning_` `exists_theta_gt` ・ `sanity_half` `thetaLow_mono` ・ `envelope_max_s`
14-02	辺 3・中心の設計のブロック写像：粗いリンクを、ブロックの中心を通る道の族の一様な平均で作る（定義）	道の添字は 1944 通り、重みの和は 1。本書の検討の本線の設計（辺 2）ではない	`Block3.paths` ・ `wts`

章	定理・定義	範囲	Lean の宣言
14-02	同：写像は格子点の面の鏡映とゲージ変換なしで交換し、断面を横切るリンクの符号の反転は粗いリンク一本だけを反転する	一段と全ての段、球の値で	`Block3.blockMap_refl_cfg` ・ `dow` `down_flipSet` ・ `down_local`
14-02	同：押し出した Wilson の測度の、格子点の面での鏡映正値性	SU(2) の Wilson の測度（正規化の有無どちらも）を辺 3 の写像の何段かの合成で押し出したもの、全ての実の β、両端の粗い格子点の二枚の面の間に厳に入る粗いリンクだけに依る有界可測な関数（ゲージ不変は課さない）。リンクの真ん中の面の版・無限体積・質量ギャップは言っていない	`Block3.rp_push` ・ `rp_push_prob`
14-02	同：写像は粗い並進と、境の面の鏡映と交換する	一段と全ての段。格子の対称の範囲	`Block3.blockMap_trans` ・ `down_t`
14-02	同：合わせた列の存在。押し出した測度の粗い面の平均の期待値は、結合 0 で 0、結合を大きくすると 1 に近づき、その間の目標の値に合わせる非負の結合が各段で在る	辺 3 の設計の上で、retract の閾は 1 以下、合わせる段の粗い格子の一辺は 2 以上、目標の値は 0 以上 1 未満（仮定は設計の値と算術だけ）。結合の単調性・発散・一意性は言っていない	`Block3.Y3_zero` ・ `tendsto_Y3_on`
10-01	本書の今の設計（辺 2）で、押し出した測度の粗い面の平均の期待値は結合について連続で、二つの結合の値の間の目標に解が在る	段と粗い面ごとに。合わせた列が全ての段で在ることは、この二つからは言っていない	`TunedCoupling.continuous_Yc` ・
9-05	本書の今の設計（辺 2）で、押し出した Wilson の測度は粗い並進で不変	結合の列に仮定なし。各段について、細かい側の段を十分大きく取ったとき、有界連続な関数について	`TunedCoupling.hsym_translation`

この章が言えている範囲

言えていること	言えていないこと
表 1・表 2・図 1 の出力は、この端末の Lean 4.33.1 と Mathlib（表 7 の版）で七つの小さなファイルを検査した結果そのもの。	ほかの版で同じ出力になるとは言っていない。特に `native_decide` の公理の名前は版で変わる。
Lean の札は前提から結論への矢印を保証する（式 (1)）。`sorry` は警告だけで通り、`#print axioms` で見つかる（表 2）。	Lean の論理そのものの健全性や、カーネルに不具合が無いことは、この付録では確かめていない（参照マニュアルの言うカーネルの再検査の段・隔離した照合の段は、この付録の例では行っていない）。

言えていること	言えていないこと
四つの隙間のうち名前と空虚な真は、実際に通る例で示した（表 2 の最後の二行）。	本書の個々の定理に隙間が無いことは、この付録では確かめていない。前提と読みは 23-13 の各行で読む。
この端末の Mathlib のソースに、格子ゲージ理論の語（Wilson loop・plaquette・Yang–Mills など）は現れない。	語が無いことは、同じ内容が別の名前で定義されていないことの証明ではない。
札の決め方（図 2・表 5）は本書の約束の言い換え。	札は保証の種類を示すもので、文の重要さや確からしさの順位ではない。
本書の Lean の定理は、四次元のヤン–ミルズ理論の存在も質量ギャップも示していない（23-16）。四次元の存在は 2026 年に公開された構成で、Lean で証明されている、と委員会が評価した（6-00）。質量ギャップは示されていない。	

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 1・図 1（ゴールの状態）	計算	Lean 4.33.1＋Mathlib：`e1_gap.lean`（各手の後に `trace_state`）を `run.sh` で検査し、出力を写した
表 2（七つのファイルの終了コード・警告・公理・時間）	計算	python3：`table.py` が `run.sh` で `e1`〜`e7` の七ファイルを順に検査し、`results.json` に残す。秒の列はその一回分
寄り道「実数を使うと三つの公理が出る」の観察	計算	Lean 4.33.1＋Mathlib：`e8_real_probe.lean`（中身の無い定理と、`Real`・`CauSeq.Completion.Cauchy`・`Real.instZero` などに `#print axioms`）
Mathlib のソースの語の数	計算	`mathlib_grep.sh`（8,311 ファイルを大小文字を区別せずに検索）
表 7（版）	計算	`lean --version` と `lake-manifest.json` の Mathlib の rev（`versions.txt`）
検査の四段・「正しい証明があるか」と「言明が何を意味するか」を区別せよ・ビルドの検査の段の印は依存先の `sorry` があっても付く・標準の三つの公理・4.28.0 以前の共通の公理 `Lean.ofReduceBool`（その奥に `Lean.trustCompiler`）と 4.29.0 からの呼び出しごとの専用の公理	既知	Lean Reference Manual, “Validating a Lean Proof”（lean-lang.org/doc/reference/latest/ValidatingProofs/）。本文を読んだ
`native_decide` は呼び出しごとに専用の公理を作る	既知	Lean Reference Manual, “Axioms”（lean-lang.org/doc/reference/latest/Axioms/）。本文を読んだ。表 2 の出力と一致
Lean 4	既知	L. de Moura, S. Ullrich, “The Lean 4 Theorem Prover and Programming Language”, CADE-28, LNCS 12699 (2021), doi:10.1007/978-3-030-79876-5_37。書誌のみ

もの	種別	出典・道具
Lean（最初のシステム記述）	既知	L. de Moura, S. Kong, J. Avigad, F. van Doorn, J. von Raumer, “The Lean Theorem Prover (System Description)”, CADE-25, LNCS 9195 (2015), doi:10.1007/978-3-319-21401-6_26。書誌のみ
Mathlib	既知	The mathlib Community, “The Lean Mathematical Library”, CPP 2020, doi:10.1145/3372885.3373824, arXiv:1910.09336。書誌のみ
四つの隙間の分類・言明を読む手順・在庫の三分類	このサイトの記事	案内 08・09・10
本書の定理の型の層（46 定理・23 個が実数だけ・3 個がゲージ場）	計算（他章）	23-13 Lean の言明と機械検査の限界
札の凡例と、5-11 の論文の札の分かれ方	本書の約束	0-01・5-11
カリー–ハワード対応の呼び名	既知	一般的な呼び名として。来歴は 案内 13 に譲り、ここでは年号・帰属を述べない

次に読む章：A-05 この本の作り方 — 札を付ける前に、文と数値をどう確かめたか。

この本の作り方 — 札と出典表は、文がどの段まで確かめられたかの記録

> この章は案内です（この本の作り方と確かめ方）。

この章で分かること — 一つの文が本文に載るまでに通る七つの段と、各段が拾うもの・拾わないもの（図 1）。
出典表の「本文」「要旨」「書誌のみ」の意味と、反証検査で判定のおよそ半分が訂正だったこと（この端末で数えた表つき）。
札「計算」の約束、章をまたいで記号と名前を揃える段、組み立ての機械的な検査、そしてこの手順が保証しないこと。

前提となる章 — なし。札の凡例（0-01）を先に見ておくと読みやすくなります。Lean による機械検査の手順はこの付録では扱わず、A-04 にあります。

先に言うこと — この付録が説明するのは、誤りを減らすための手順であって、正しさの保証ではありません。この本は専門家の査読を経ていません。また、この本のどの段も、四次元のヤン–ミルズ理論の存在や質量ギャップを示していません。四次元の存在は 2026 年に公開された構成で、Lean で証明されている、と委員会が評価しました（6-00）。質量ギャップは示されていません。

この章の順序

1. この付録の役割 — 札と出典表は信じてよい範囲を測る目盛り・その目盛りを刻んだ手順
2. 一つの文が通る道 — 七つの段と、各段が拾うもの・拾わないもの（図 1・表 1）
3. 一次資料と照合する — 本文・要旨・書誌のみの三段（表 2）・寄り道：伝聞の形で書くということ
4. 反証を探す — 別の読み手が「強すぎないか」を見る・判定の内訳と訂正の型（表 3・表 4）
5. 計算を再現できる形にする — 札「計算」は有限の範囲・規約を書く・数分で終わる規模

6. 札を付ける — どの段まで通ったかの記録・部ごとの札の構成（図 2・表 5）
7. 章をまたいで揃える — 記号・規約・名前・重複・確定度の五つ
8. 組み立てて機械的に検査する — 数式の事前描画・リンク・禁則の語（表 6）
9. この手順が保証しないこと — 査読ではない・未入手の本文・有限の計算・開いたままの問題

01

この付録の役割 — 信じてよい範囲を、読者が自分で測るために

教科書の文は、読者がそのまま信じることを前提に書かれがちです。この本はそうしません。文ごとに札を付け（0-01 の凡例）、出典表に「本文を読んだか」「要旨だけか」「書誌だけか」を書き、計算は手元で再現できる形で残します。札と出典表は、読者が「この文はどこまで信じてよいか」を自分で測るための目盛りです。正確には、札は文がどの段まで確かめられたかの記録で、正しさの程度を数で表すものではありません。

目盛りは、それを刻んだ手順が分からなければ読めません。たとえば「既知」の札が付いた文でも、一次資料の本文と逐語で照合したのか、総説の記述を写したのかで、重みが違います。この付録は、その手順を読者の側から説明します。どの段で何を確かめ、何を確かめていないかを、段ごとに書きます。

流れを一行で書きます。

調べる → 一次資料と照合する → 反証を探す → 計算を再現する → 札を付ける → 章

七つの段はどれも、前の段が見落とすものを拾うために置いてあります。ただし、どの段も「正しいこと」を保証しません。保証しないことは §09 にまとめます。

例。第 5 部の「Wilson 作用は反射正値性を持つ」という文には「既知」の札が付き、出典表に Osterwalder–Seiler の論文が挙がっています（5-03）。「既知」の札は、一次資料で確かめた既知の結果であることを示します。どの深さで確かめたか（本文・要旨・書誌のみ）は出典表に書き、この例の出典表には「要旨を確認、本文は未確認」とあります。反証検査（§04）を通ったかどうかは、札では区別しません。出典表に「書誌のみ」とあれば、照合は書誌の段で止まっています。

Lean による機械検査の手順は、この付録では扱いません。それは A-04 にあります。札の決め方（一つの文に一つの札・鎖の強さは最も弱い段）も A-04 §07 が正本です。

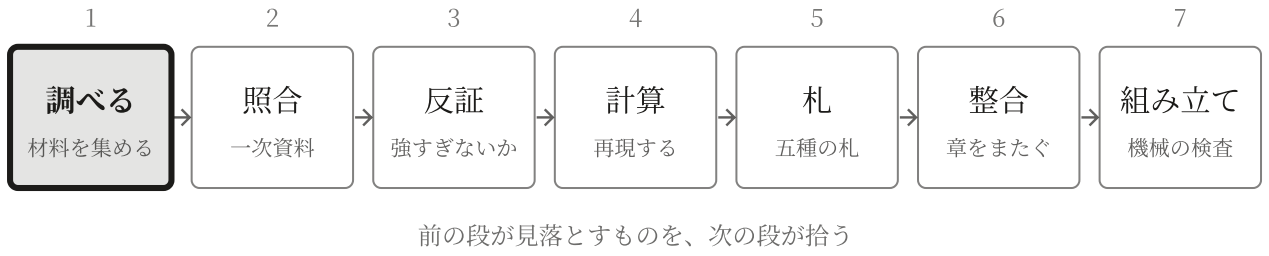
02

一つの文が通る道 — 七つの段

一つの文が本文に載るまでに通る段を、図１に並べました。つまみを動かすと、その段が何を拾い、何を拾わないかが下に出ます。

段の順番には理由があります。照合の段（段 2）より前に反証の段（段 3）を置くと、反証する側が何と比べればよいか分かりません。札の段（段 5）を照合の段と再現の段のあとに置くのは、札が「どの段まで通ったか」の記録だからです。整合の段（段 6）と組み立ての段（段 7）は章を一つずつ見ていては拾えない誤りのための段で、部が揃うたびに（最後は本全体で）通します。

図１　つまみで段を選ぶと、その段が拾うもの・拾わないものが下に出る。選んだ段の枠が太くなる



段 1／7 調べる　拾う：主題ごとの文献・既知の結果・数値の候補。 拾わない：候補の正しさ（ここでは候補を集めるだけ）。

表１は図１と同じ内容です（図は模式図で、数値を含みません）。

表１　七つの段が拾うもの・拾わないもの

段	段の名前	拾うもの	拾わないもの
1	調べる（調べる段）	主題ごとの文献・既知の結果・数値の候補	候補の正しさ（ここでは候補を集めるだけ）
2	一次資料と照合する（照合の段）	書誌の誤り・引用の言い換えすぎ・帰属の取り違え	一次資料そのものの誤り・入手できなかった本文の中身
3	反証を探す（反証の段）	資料より強い言い方・確定度の格上げ・条件の書き落とし	照合した読み手と反証する読み手が同じ誤解をしている場合
4	計算を再現する（再現の段）	数値の写し間違い・規約の取り違え・有限の範囲で反例があること	計算した範囲の外で成り立つかどうか
5	札を付ける（札の段）	「証明された」と「予想」と「数値的に支持」の混在	札の判断そのものの誤り
6	章をまたいで揃える（整合の段）	記号・名前・規約の食い違い・同じ名前で違う文を指すこと・重複	全章が同じ向きに誤っていること
7	組み立てて機械的に検査する（組み立ての段）	描画できない式・切れたリンク・禁則の語・埋め忘れ	内容の誤り（機械は意味を読まない）

03

一次資料と照合する — 本文・要旨・書誌の三段

この本が「一次資料」と呼ぶのは、結果を最初に述べた論文、または問題文そのものです。総説や教科書は、一次資料への道案内として使い、一次資料の代わりにはしません。年号と帰属（誰がいつ何を示したか）は、記憶で書かず、資料の上で確かめます。

照合には深さが三段あり、出典表にはどの段まで届いたかを書きます。

表 2　照合の深さと、出典表での書き方

深さ	何を読んだか	出典表の書き方	本文で書けること
本文	論文の本文（公開の PDF など）を読み、該当箇所を逐語で確かめた	著者・年・誌名か arXiv 番号・節	資料が述べた強さそのまま
要旨	要旨（論文データベースの abstract）だけを読んだ	同上＋「要旨で確認」「要旨のみ」など（表記は章によって少し違う）	要旨に書かれた範囲まで
書誌のみ	著者・題・誌名・年が実在することだけを確かめた	「書誌のみ」	他の資料が「〜とした」と伝える形まで

逐語の確認は、引用符で囲んだ原文が資料の中に文字どおり在ることを、検索で確かめる作業です。訳した文を本文に置くときも、照合は原文で行います。

例。Clay 研究所の問題文（Jaffe–Witten）は公開の PDF の本文で照合しました。問題の要求は原文で次のとおりです。

> “Prove that for any compact simple gauge group G, a non-trivial quantum Yang–Mills theory exists on $\mathbb{R}^4$ and has a mass gap $\Delta > 0$.”

この文は 0-03 が一語ずつ読みます。本文で照合したので、0-03 は「存在」「非自明」「質量ギャップ」の各語を、問題文の強さのまま使えます。

一方、要旨しか読めなかった論文については、要旨にある主張は「要旨で確認」と書き、要旨に無い主張は本文に持ち込みません。節の番号も同じで、要旨が節に触れていなければ、どの節に書いてあるかは本文を読むまで分かりません。

例。Wilson–Kogut の総説（Phys. Rep. 12 (1974) 75）の要旨は一文だけで、節には触れていません。そこでこの本は、ある話題が「Wilson–Kogut の §10 で述べられている」とは書かず、出典表に「§10 は未確認」と書きます。

寄り道：伝聞の形で書くということ

飛ばしてよい。スピン 2 以下の場（重力子を含む超重力）で超対称性を実現できる時空の次元の上限が 11 である、という事実は、Nahm の 1978 年の分類の帰結として広く知られています。ところが、その論文の要旨には 11 という数が出てきません。本文を入手できないあいだ、この本は「Nahm の分類の帰結として知られる」と書き、結論を Nahm の論文に直接帰属させません（17-05）。事実が疑わしいのではありません。この本がどの段まで確かめたかを、文の形で正直に示すためです。正確には、伝聞の形は「誤りかもしれない」という印ではなく、「照合が本文に届いておらず、要旨にはその数が無い」という印です。

04

反証を探す — 別の読み手が「強すぎないか」を見る

照合を済ませた材料は、別の読み手に渡します。その読み手の仕事は確認ではなく、反証です。「この文は資料が言うより強くないか」「確定と書いたが、条件が要るのではないか」「この書誌は実在するか」を、もう一度一次資料に当たって探します。判定は三つです。

- **確認**（confirmed）：資料と照らして、書かれた強さのままでよい。
- **訂正**（corrected）：弱める・条件を足す・書誌を直す必要がある。訂正の文面を添える。
- **確かめられない**（unverifiable）：一次資料に届かず、どちらとも言えない。伝聞の形に下げる。

章を書く段では、訂正をすべて反映することが決まりです。訂正を受けた材料を、訂正前の強さで引くことはしません。

表 3 は、主に第 7 部〜第 23 部（一部は第 0・4・5 部の章）が使う六つの材料について、判定の数を数えたものです。第 1〜5 部の多くの章は、この反証検査の材料を経ていません。

表 3　材料ごとの反証検査の判定（2026-10-01 時点の材料を数えた） 計算

材料の主題	確認	訂正	確かめられない	訂正の割合
物理の言葉と数学の言葉の辞書	25	20	0	44%
余剰次元とゲージ場の出所	16	12	1	41%
物理の見方（閉じ込め・格子の数値・ホログラフィー）	25	17	0	40%
本書の検討の整理	7	14	0	67%
次元ごとの現在地	25	8	0	24%
構成的場の理論の現在地と新しい概念の候補	16	29	0	64%
計	**114**	**100**	**1**	**47%**

読み方。判定のおよそ半分が訂正です。訂正の割合が最も高いのは「本書の検討の整理」で、この材料では訂正が 21 件中 14 件と多く、記録より強い言い方を弱めるものや、落ちていた条件を書き足すものが目立ちました。逆に、次元ごとの現在地のように定理の一覧に近い材料は、訂正が少なめです。

訂正の中身を語で四つの型に振り分けたのが表 4 です。振り分けは訂正の文面に現れる語による機械的なもので、一つの訂正が複数の型に入ることがあります。

表 4　訂正 100 件の型（語による機械的な振り分け・重複あり） 計算

型	手がかりの語	件数	典型
強さ	強すぎ・格上げ・示した・限定	39	「示した」を「提案した」に下げる・「確定」を「条件つき」に
出典の水準	要旨・本文・未入手・未確認	34	要旨に無い主張を「本文未入手」と書き直す
数値・符号	数値・係数・符号・桁	15	係数の規約（どの β か）を書き足す
書誌	書誌・巻・頁・著者・誌名	12	共著者の欠けなど、著者の並びの訂正
上のどれにも当たらない	—	30	補足・言い換えの提案

例。 Clay の問題文 §6.5 が述べるのは「次元正則化や Pauli–Villars など多くの正則化では反射正値性が失われ、それを回復する方法は少ない」ということで、連続的な正則化を一律に否定してはいません。この本はこの強さで引き、「連続的な正則化は反射正値性を保たない」とは書きません。反証の段が拾うのは、このように資料より一段強くなった要約です（正則化と反射正値性は 4-10・5-03）。

05

計算を再現できる形にする — 札「計算」の中身

本文の数値のうち、この端末で計算し直せるものは計算し直し、札「計算」を付けます。計算はすべて短いプログラム（Python）で、章ごとに残してあります。出典表の「道具」の欄にその名前を書くので、同じプログラムを走らせれば同じ表が出ます。

札「計算」が意味するのは、**この端末で、書かれた範囲について確かめた**ことです。式で書くと、ある性質 $P(n)$ を有限個の n について確かめたことは

$$P(n_1) \wedge P(n_2) \wedge \cdots \wedge P(n_k) \qquad \text{であって} \qquad \forall n\, P(n) \text{ ではない}$$

という区別になります。左は計算で、右は定理です。計算の札が付いた文を定理として引くことはしません。

計算には三つの約束があります。一つ目は、図の中で数値を作らないことです。動く図の数値は、あらかじめ計算した表を埋め込むか、その場で計算できる簡単な式（回転・級数の部分和など）に限ります。二つ目は、規約を書くことです。格子の結合 β の定義や跡 tr の規格化が違うと同じ量が数倍ずれるので、計算の前提に規約を明記します（規約の換算は 5-01 と A-01）。三つ目は、普通の計算機で数分以内に終わる規模にすることです。読者が再現できない計算は、札の意味を失うからです。

例。この付録の表 3・表 4・表 5 も計算です。材料と章ページを読んで数を数えるプログラムを一本書き、その出力を写しました。この本の全体では、章ごとの計算の置き場が 100 を超え、プログラムは数百本あります。

06

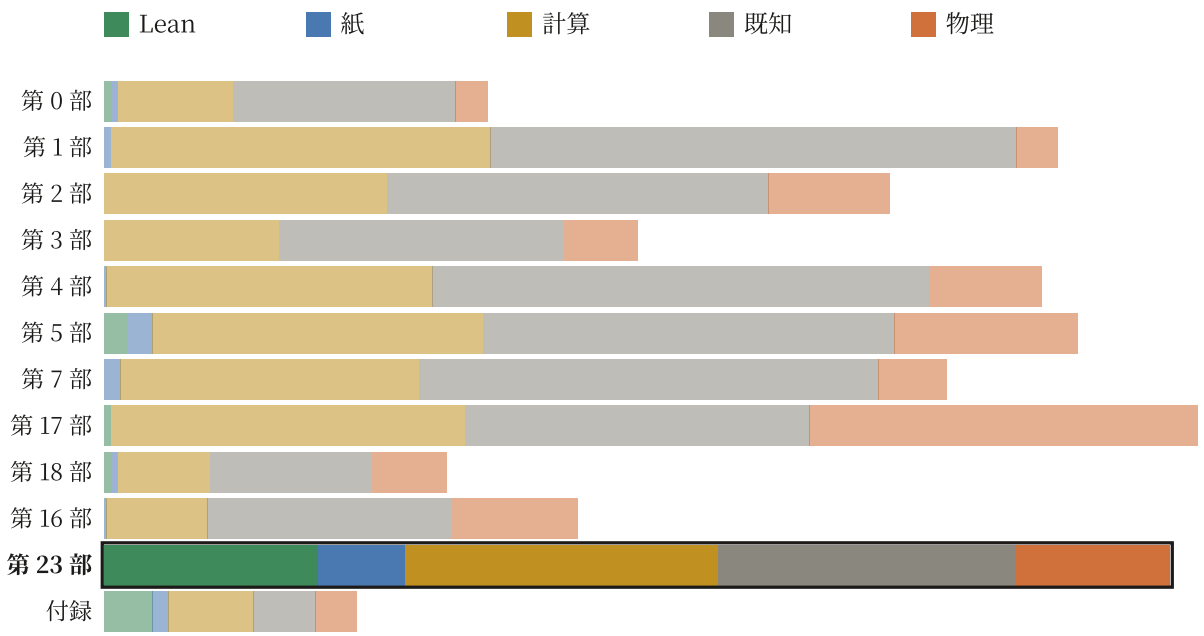
札を付ける — どの段まで通ったかの記録

札は、文がどの段まで通ったかを読者に伝える記録です。照合だけで止まった文には「既知」、手元で再現した数値には「計算」、物理では受け入れられているが証明の無いものには「物理」、という具合です。五つの札の意味と、札が保証しないことは 0-01 §03 の表にあります。

札を付けるときの規則は二つです。一つの文には一つの札を付けます。そして、いくつかの段を経てつながった主張では、最も弱い段の札を全体に付けます（A-04 §07）。たとえば Lean で検査した不等式に、仮定として数値を入れて結論を出したなら、結論の札は「計算」か「物理」です。札を強い側に寄せることはしません。

図 2 は、この本の章ページに現れる札を部ごとに数えたものです。部によって札の構成がはっきり違います。

図 2　部ごとの札の数。「割合で見る」で各部を 100% にそろえる。つまみで部を選ぶと、その部の内訳が下に出る



第 23 部（計 464）：Lean 93（20%）・紙 38（8%）・計算 136（29%）・既知 130（28%）・物理 67（14%）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（2026-10-01 時点の章ページ 110 章（この付録自身は除く）を数えた。凡例の表に置いた札も数える。章が増えれば数は変わる）。

表 5　部ごとの札の数・図の数・「書誌のみ」の出現数（2026-10-01 時点） 計算

部	章	Lean	紙	計算	既知	物理	図	書誌のみ
第 0 部 入口	4	3	3	50	97	14	8	11
第 1 部 数学の準備	12	0	3	165	229	18	40	40
第 2 部 物理の準備	10	0	0	123	166	53	28	41
第 3 部 古典論	7	0	0	76	124	32	13	20
第 4 部 量子論	12	0	1	142	216	49	23	45
第 5 部 格子	11	10	11	144	179	80	22	25
第 7 部 構成的場の理論	12	0	7	130	200	30	24	51
第 17 部 物理の側から	13	3	0	154	150	169	28	60
第 18 部 二つの言葉の辞書	5	3	3	40	70	33	7	14
第 16 部 現在地と課題	5	0	1	44	106	55	10	14
第 23 部 本書の検討の記録	14	93	38	136	130	67	25	47
付録（A-01・A-02・A-03・A-04・A-06）	5	21	7	37	27	18	10	20
計	**110**	**133**	**74**	**1241**	**1694**	**618**	**238**	**388**

読み方。札の大半は「既知」と「計算」です。この本の多くは既知の数学と物理の解説で、そこに手元で再現した数値を添えているからです。「物理」が最も多いのは第 17 部で、閉じ込めの機構や弦の絵のように、物理では受け入れられているが定理ではない話が中心だからです。

「Lean」の札は第 23 部に集まっています。ただし、その Lean の定理の多くは実数の不等式や有限の和についての文で、四次元のヤン–ミルズ理論の存在や質量ギャップを示したものではありません（23-16・A-04 §06）。

07

章をまたいで揃える — 記号・名前・規約

章を一つずつ検査しても、章と章のあいだの食い違いは拾えません。たとえば、ある章で $\beta = 2N/g^2$、別の章で $\beta = 1/g^2$ と書けば、どちらの章も単独では正しくても、読者は同じ β だと思って読み、数値が合わずに迷います。そこで、部が揃うたびに、部をまたいで読む段を通します。

この段で見るものは五つです。

1. **記号**：同じ量に同じ記号を使っているか。基準は A-01 の記号表です。
2. **規約**：結合 β・跡の規格化・格子の計量が章によって違うとき、換算が書いてあるか（5-01）。
3. **名前**：一つの名前が、章によって違う文を指していないか。たとえば第 23 部の拡散型緩和時間の仮定は、どの長さで測るか・どの正規化で測るか・冪で言うか帯で言うかで、八通りの読み方ができます。読みごとに名前を割り当てて固定し（冪の水準を拡散型緩和時間の仮定、帯の文を帯の形の拡散型緩和時間の仮定と呼び分ける。A-06）、他の章はそこにリンクして同じ名前を使います。仮定の一覧は A-06 にあります。
4. **重複**：同じ説明が二つの章にあるとき、一方を正本にし、他方は一行の要約とリンクにする。
5. **確定度**：同じ対応を、ある章は「確定」、別の章は「条件つき」と書いていないか。辞書の部では、定義として対応すること（確定し得る）と、四次元のヤン–ミルズ理論で実際に成り立つこと（未確定）を二つの列に分けて書きます（18-01）。

食い違いが見つかったら、どちらか一方に揃えます。揃えられない食い違い（たとえば文献によって規約が本当に違う場合）は、食い違いとして本文に書きます。

例。第 23 部の C_P は、ゆらぎが均されるのにかかる時間の目安になる数です（定義は 1-10・23-01）。同じ C_P の記号で、何についてのゆらぎかによって違う数を指せてしまいます（ある時刻の場についてか、時間の向きを含めた経路全体についてか）。自由場では一方が他方の二乗の 4 倍なので、取り違えると冪が二倍になります。これがこの段で区別する例で、本の全体で二つを別の量として書きます（23-01）。

08

組み立てて機械的に検査する — 機械に任せられるもの

最後の段は機械が行います。章ページを組み立てる道具は、次のことを全章について機械的に行い、引っかかったものを報告します。

表 6　組み立ての段の機械的な検査

検査	何を見るか	見ないこと
数式の描画	TeX で書いた式を KaTeX で静的な HTML に描画し、描画できない式を報告する	式の数学的な正しさ
リンクと見出し	章の間のリンク先のファイルと見出しの `id` が実在するか	リンク先が話の流れに合っているか
禁則の語	実名・パス・内部の番号・埋め忘れの印が残っていないか	言い方の強さ（これは人と反証の段が見る）
雛形	図の枠に使ってはいけない class 名（`fig`）が残っていないか	図の中身
PDF	部ごとに印刷用の PDF を作る（動く図は初期状態の静止画で入る）	印刷で読みやすいか

数式を読者のブラウザではなく組み立ての段で描画するのは、読者の側で JavaScript が要らず、印刷や PDF にしても崩れないようにするためです。動く図だけが JavaScript を使い、JavaScript が無効でも、図の下の表で同じ内容が読めるようにしてあります。

機械の検査は意味を読みません。この段を通ったことは、ページが壊れていないことの保証であって、内容の保証ではありません。言い方の強さ・札の選び方・出典の深さの判断は、機械に任せず、照合と反証と整合の段で人と書き手が読みます。

09

この手順が保証しないこと

七つの段を通っても、誤りは残り得ます。この本の限界を、手順の側から書いておきます。

専門家の査読を経ていません。反証の段の読み手は、書き手とは別の読み手ですが、学術誌の査読者ではありません。この本の調べ・下書き・反証の多くは、このサイトの AI の書き手が行い、人が方針を決め、公開前に読んでいます。同じ種類の読み手は、同じ誤解を共有することがあります。反証の段が拾えないのは、まさにその誤りです（表 1 の「反証を探す」の行）。

入手できなかった本文の中身は確かめていません。出典表に「書誌のみ」「要旨で確認」とある文献については、本文に何が書いてあるかを、この本は知りません。表 5 の「書誌のみ」の

数は、その範囲の大きさの目安です。

計算は有限の範囲です。札「計算」の付いた数値は、書かれた範囲で手元の計算が出したもので、範囲の外や連続極限について何も言いません（§05）。

質量ギャップの問題は開いたままです。この本のどの段も、四次元のヤン–ミルズ理論の存在や質量ギャップを示したものではありません。四次元の存在は、2026 年に公開された構成が示し、Lean で証明されている、と委員会が評価しました（第 6 部）。この本が主張しないことは 23-16 に一覧があります。

誤りに気づいたら、このサイトの掲示板かお問い合わせから知らせてください。直したものは、各章の末尾の「改訂」の欄に日付つきで記します。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
この本の文が、七つの段（調べる・照合・反証・計算・札・整合・組み立て）を通して本文に載ること。各段が何を拾うか（表 1）	七つの段を通った文が正しいこと。どの段も正しさを保証しない
出典表の「本文」「要旨で確認」「書誌のみ」が、照合の深さの記録であること（表 2）	「書誌のみ」「要旨」の文献の本文に何が書いてあるか
2026-10-01 時点の材料の反証検査で、判定 215 件のうち訂正が 100 件・確かめられないが 1 件だったこと 計算 （表 3）	確認と判定された 114 件に誤りが無いこと。反証の読み手と照合の読み手が同じ誤解をしていれば、この段は拾えない
訂正の文面を語で振り分けた件数 計算 （表 4）	振り分けが訂正の中身を正しく分類していること（語による機械的な分類で、重複がある）
2026-10-01 時点の章ページ 110 章（この付録自身は除く）の札・図・「書誌のみ」の数 計算 （表 5・図 2）	札の数が主張の重みを表すこと。凡例に置いた札も数えており、章が増えれば数は変わる
組み立ての段が機械的に見るもの（表 6）	機械の検査を通ったページの内容が正しいこと
この本が専門家の査読を経ていないこと・調べと反証の多くを AI の書き手が行っていること	—
—	四次元のヤン–ミルズ理論の存在と質量ギャップ。この本のどの段もそれを示していない（存在は公開された構成が示し、委員会がそう評価した。質量ギャップは開いている。23-16）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
表 3・表 4（反証検査の判定と訂正の型）	計算	`tally.py`（この本の材料の判定を数え、訂正の文面を語で振り分ける。出力 `tally.json`）
表 5・図 2（部ごとの札・図・「書誌のみ」の数）	計算	`tally.py`（章ページの `class="label …"`・図の枠・「書誌のみ」の語を数える。図の JavaScript の中は除く）
Clay の問題文の引用（§03）	既知	A. Jaffe, E. Witten, “Quantum Yang–Mills Theory”（Clay Mathematics Institute の公式問題文・公開の PDF）。本文で確認
正則化と反射正値性についての問題文の記述（§04 の例）	既知	同上 §6.5。本文で確認（詳しくは 4-10）
Wilson 作用の反射正値性（§01 の例）	既知	K. Osterwalder, E. Seiler, “Gauge Field Theories on the Lattice”, Ann. Phys. 110 (1978) 440–471。要旨を確認、本文は未確認（本文の扱いは 5-03 の出典表）
要旨が節に触れない例（§03）	既知	K. G. Wilson, J. Kogut, Phys. Rep. 12 (1974) 75–199。要旨のみ（要旨は一文で、§10 は未確認）
超対称性の次元の上限 11（寄り道）	既知	W. Nahm, Nucl. Phys. B135 (1978) 149。要旨のみ。「11 が上限」は要旨に無く未確認。上限はスピン 2 以下の場という条件つき（17-05）
数式の事前描画	道具	KaTeX（TeX の式を静的な HTML に描画する JavaScript の組版ライブラリ。組み立ての段でだけ使い、読者の側では動かない）
図 1・表 1・表 2・表 6（手順の説明）	—	この本の執筆規約と組み立ての手順の要約

次に読む章：A-06 名前の索引。

名前の索引

この章は案内です（索引）。

この章で分かること — この本に出る名前（仮定・条件・命題・補題・定理・言明・道筋・表の行・問い）と記号が、何を指すかと、どの章で導入されたか。第二巻（公開された構成を読む巻）で付いた名前と記号は §02 にまとめ、残りは導入の章の部の順に §03 に並べます。

前提となる章 — なし。記号の一覧は A-01、語の説明は A-02 です。

先に言うこと — この本は、文字や番号だけの名前を使わず、中身の分かる名前で呼びます。文献の標準の札は、名前の初出に「(著者 札)」の形で添えます。「何を指すか」は一行の目安で、正確な言明は導入の章に在ります。

この章の順序

1. この索引の使い方
2. 第二巻の名前と記号 — 公開された構成を読むときの名前・記号の約束（表 1・表 2）
3. 名前の索引 — 導入の章の部の順（表 3）
4. 拡散型緩和時間の仮定の八つの読み — 正規化を名指す理由
5. 記帳と指数の量 — 一段の傾き・取りこぼし・指数
6. 二本目の道と帯の仮定 — 名前・中身・状態

01

この索引の使い方

1. 名前で引きます。ブラウザの頁内検索で名前の一部（「緩和時間」「横広げ」など）を探すのが早道です。
2. 表 3 の「導入の章」は、その名前の言明が最初に置かれた章です。同じ対象を後の章が別の形で使うことはありますが、名前は本の全体で一つです。

3. 名前が長いものは、二度目から短い形で呼ぶことがあります。短い形は表 3 の名前の欄に「(短く：…)」で添えます。
4. 「種別」は、仮定（示していない前提）・条件（言明の中で課す条件）・命題や定理（示したもの）・言明（示すべき文、または問いの形の文）・表の行（表の中で名で引かれる行）・問い、などです。何が示され何が示されていないかは、導入の章の札で読みます。

02

第二巻の名前と記号

第二巻は、2026-11-10 に公開された四次元のヤン–ミルズ理論の存在の構成（Lean のコードと委員会の評価書）を読む巻です。公開された構成の対象は意味の名前で呼び、コードの識別子は出典として添えます（6-00）。札は 源 （公開された構成の源を読んだ）・ 推 （本書の推し量り）・ 評 （委員会の評価書による）の三つで、本全体の札（初・典・機・読・仮・Lean）は全ての巻で同じ意味です。公開された構成の定理は 源 、その水準（Lean で証明されている、と委員会が評価した）は 評 で書きます（6-00 の「札」）。

名前	何を指すか	導入の章
公開の定理	公開された問いの形の言明（仮定は群の Lie 環が単純であることだけ）	6-02
構成の定理	公開の定理を射影として含む、罰の係数ごとの強い言明	6-02
委員会の結合の目標	構成の定理の上に、委員会が独立の検査を一つの族の上で束ねた言明	6-02
見出しの定理・依存の外	検証の記録が挙げる 17 の見出しの定理と、そのどれからも届かない宣言	6-00
族の証書	構成の定理が族に課す条件の束（全ての段の繰り込みの関係・局所の切り口・札の型紙・挿入の係数の較正）	6-02
走	罰の係数ごとに、条件を満たす構成を一度だけ選んだもの。以後の対象は全てこの一つの走の上で作られる	6-03
型紙	局所場の格子の代表を作るための、格子点のずれの有限集合	8-03
確率の核・予測子	繰り込みの一段：粗いリンクを、細かい配位から作った中心値（予測子）のまわりのガウス型の揺らぎで引く確率の核	9-01
表示	各段の密度を書く決まった形（真空の項・主な作用・正則な活動・強制された活動の気体）。一意ではない	9-06
正則な活動・強制された活動	表示の中の局所の補正の項と、大きい場の旗をちょうど覆う補正の気体	9-06
切った作用・旗	面の項を段ごとの閾の上で一次に切った作用と、閾を超える大きい場の印	9-07
段の結合	段 m の表示の中で、正規化した曲率の二乗の項に掛かる係数。測度だけからは決まらない	10-01
読み直し	一段の後、二つの配位での密度の対数比から表示の結合を読み直すこと	10-03

名前	何を指すか	導入の章
射撃法	段 0 の結合を基準の値にする裸の結合を、入れ子の区間と中間値の定理で選ぶこと	10-04
暦	一段の評価に使う定数（辺・平滑の指数・結合の入口など）を、決まった順に選ぶ条件の束。段に一様な条件はここで払う	10-05・11-08
帰納の仮定・一段の証書	どの段の密度も同じ形の表示を持ち帳簿が掛かっていること、と、段 $m+1$ の表示から段 m の表示を押し出しの等式つきで作ること	11-00
種・種の型・区画	大きい細かい面・予測から大きくずれた辺・旗の一つ一つ（種）と、その三つの集合の組（種の型）、配位を種の型で分ける条件（区画）	11-03
値段・印	種一つあたりの因子と、その配分のうち出口に残す分（保証された下界の半分）	11-05
強い見積もり・弱い帳簿	一段の出口の評価 $e^{-\mathrm{rate}\cdot P^{2}}$ と、帰納の仮定が運ぶ評価 $e^{-P^{1/5}}$	11-07
旗を含む塊・含まない塊、硬い群れ・柔らかい群れ	一段の積分の後に塊を出口の気体と正則な活動へ振り分ける分け方	11-06
早い表示	小さい場の一段で、補正の展開を先に表示の形へ書く仕方	11-09
材料の収束・錨・上端の忘却・段を外す一段	段を止めた切断の極限の収束を出す部品（材料の一様な収束、一意性の錨、細かい側の端の影響が消えること、段 0 から極限へ渡す一段）	11-10
切片・糸・内側の関数	鏡映正値性で、一枚の層の中のリンクの配位（切片）、層をつなぐリンクの組（糸）、帯の中だけに依る有界なゲージ不変の関数（内側の関数）	12-01
チェス盤の根・中心に置いた敷き詰め	関数を全ての箱に写して掛けた期待値の、箱の数分の一乗（半ノルム）と、基準の箱を観測点の真ん中に置く敷き詰め	12-02
柱	ブロックとその鏡像を時間の円に交互に並べた配置（時間の向きのチェス盤の写し）	12-04
零エネルギーの空間・相の測度	全ての時間で固定される部分空間 $\ker H$ と、混ざった理論を相に分ける確率測度	12-07
注文の束	核の選び、細かい段と粗い段の段の定数、ブロックの重みの畳み込みの回数などを束ねた入力（源の `Teller`）	11-04
抽出の列	切断の部分列と体積の部分列の組（源の `Extraction.Order`）。二段の Arzelà–Ascoli の抽出で使う	12-03
捩れた箱の最小の欠け	捩れた箱の全体で、作用の最大値から実際の作用までの損の下限 $D_{\min}(N,M)$。渦の最小作用とは別の量	21-07

表 1　第二巻で付いた主な名前（と、第三巻の新しい章の名前一つ）。語の説明は A-02 にも在ります。

記号	何を指すか	導入の章
s	一ループの傾き $s = 11C_g/(24\pi^2)$（評価書の $2b_0$、源の `slopeConstant`）。一段粗くするごとに結合はおよそ $s\log b$ だけ減る	10-01

記号	何を指すか	導入の章
κ	第三巻の一段の傾き $\kappa = 11/(3\pi^2)$（SU(2)）。b 倍に粗くする一段の記帳 $\beta \mapsto \beta - \kappa(\ln b - \delta(b))$ の係数。SU(2) では $C_g = 8$ で $s = 11 \cdot 8/(24\pi^2) = 11/(3\pi^2)$ なので、κ と s は同じ数で、どちらも一段の結合の減りの対数の係数です[初]（本書の $\beta = 4/g^2$ と公開された構成の $\beta = 1/g^2$ は SU(2) で同じ数、8-01）	23-02・10-01
C_g	Casimir の定数（SU(N) の定義表現で $2N^2$）	8-01
$\bar{\beta}$, $\hat{\beta}_m$	段 0 の結合の基準の値と、一ループの走り $\hat{\beta}_m = \bar{\beta} + s \log D_m$	10-01
c_{pen}	確率の核の罰の係数（源の字句では `kernel.penalty`）	9-01
c_E	種一つあたりのエネルギーの定数	11-04
c_{sup}	被覆の指数	11-01
σ	弦の距離（傾き s と紛れないよう別の字にした）	11-01
κ_0	合わせの目標の値（渦の比や粗い面の平均の期待値を合わせる値、$0 \le \kappa_0 < 1$）	19-07・14-03
$\mu^{\mathrm{W}}_{N,p}$, μ^{W}_{β}	公開された構成の Wilson の格子の測度	8-01
μ	相の測度（源の `phaseMeasure`。評価書では ν）。本書の強結合の無限体積の極限の測度は ν_β のまま	12-07
σ_A	状態 A のスペクトルの測度	12-08
τ	熱の評価の Euclid の時間	6-04

表 2　第二巻の記号。記号の一覧の全体は A-01。

03

名前の索引

導入の章の部の順に並べます。部の中は本文に出る順です。「何を指すか」が空の行は、導入の章に中身の一行がまだ無いものです。

第 0 部 入口 — この本の読み方

名前	種別	何を指すか	導入の章
局所場の脚注・弱い存在の脚注（Jaffe–Witten の脚注）（短く：局所場の脚注・弱い存在の脚注）	文献の名	問題文（Jaffe–Witten）の二つの脚注：局所場と量子の演算子の対応を求めること／コンパクト性だけで得た弱い存在は解と認めないこと	0-03

第 2 部 物理の準備

名前	種別	何を指すか	導入の章
源のある Maxwell の式	名	電荷と電流が場を作る二本の式（Gauss の法則と Ampère–Maxwell の法則）	2-03

名前	種別	何を指すか	導入の章
源の無い Maxwell の式	名	場の形への制約の二本の式（磁荷が無いことと Faraday の電磁誘導の法則）。ポテンシャルの表示から自動的に成り立つ	2-03
ポテンシャルの表示	名	E・B をポテンシャルで書く式	2-03
動的指数（記号のまま）	名	緩和時間が相関長の冪 C_P ≍ ξ^z で伸びるときの指数 z（あわせて η_dyn = 2 − z）	2-10
ゲージ変換の式	式	電場と磁場を変えないポテンシャルの付け替え（一つの関数 χ で φ と A を同時に変える変換）	2-03
Euler–Lagrange 方程式	式	作用が停留する条件から出る運動方程式（端を固定した変分と部分積分一回で得る）	2-01

第 4 部 量子化

名前	種別	何を指すか	導入の章
状態と対称性の公理（Wightman の公理）（短く：状態と対称性の公理）	文献の名	状態が可分な Hilbert 空間の元で、Poincaré 群がその上に強連続なユニタリ表現として作用すること	4-09
スペクトル条件（Wightman の公理）（短く：スペクトル条件）	文献の名	$P^\mu = (H, P)$ の同時スペクトルが前方の光円錐 $\overline{V}_+$ に入ること（エネルギーが負にならない）	4-09
真空の一意性（Wightman の公理）（短く：真空の一意性）	文献の名	時空の変換 U で不変な単位ベクトル Ω（真空）が、位相を除いて一つしかないこと	4-09
場の公理（Wightman の公理）（短く：場の公理）	文献の名	場が作用素値の緩増加超関数であること（試験関数 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ ごとに $\phi(f)$ が真空を含む稠密な定義域で定まる）	4-09
共変性（Wightman の公理）（短く：共変性）	文献の名	Poincaré 変換のユニタリ作用素で場を移すと、試験関数を同じ変換で移した場になること（特別な座標系が無い）	4-09
局所可換性（Wightman の公理）（短く：局所可換性）	文献の名	f, g の台が空間的に離れていれば $[\phi(f), \phi(g)] = 0$（光より速い影響が無い）	4-09
巡回性（Wightman の公理）（短く：巡回性）	文献の名	場の積を真空に掛けたもの $\phi(f_1)\cdots\phi(f_n)\Omega$ の一次結合が $\mathcal{H}$ で稠密であること（場と無関係な状態が無い）	4-09
正則性（Osterwalder–Schrader の公理 E0）（短く：正則性）	文献の名	Schwinger 関数が、点の重なりを除いた試験関数の上の緩増加超関数であること（線形増大の条件と組で使う）	4-10
ユークリッド共変性（Osterwalder–Schrader の公理 E1）（短く：ユークリッド共変性）	文献の名	Schwinger 関数がユークリッドの回転と平行移動で変わらないこと	4-10
反射正値性（Osterwalder–Schrader の公理 E2）（短く：反射正値性）	文献の名	時間の反転を挟んだ過去と未来の相関の二次形式が負にならないこと（理論が Hilbert 空間を持つための条件）	4-10

名前	種別	何を指すか	導入の章
置換対称性（Osterwalder–Schrader の公理 E3）（短く：置換対称性）	文献の名	Schwinger 関数が点の並べ替えで変わらないこと	4-10
クラスター性（Osterwalder–Schrader の公理 E4）（短く：クラスター性）	文献の名	引き離した二組の点の相関が、遠くでそれぞれの積に分かれること（真空の一意性に当たる）	4-10
相殺項の一意性の定理（Costello の定理 B）（短く：相殺項の一意性の定理）	文献の名	繰り込みの方式を固定すると、局所的な相殺項が一意に選べて有効作用の極限が存在すること	4-05
有効作用の族の分類の定理（Costello の定理 C）（短く：有効作用の族の分類の定理）	文献の名	局所的な作用と、有効作用の族（方式を固定したもの）が一対一に対応すること	4-05

第 5 部 格子ゲージ理論

名前	種別	何を指すか	導入の章
格子の面積則の問題（Chatterjee の Problem 4.1）（短く：格子の面積則の問題）	文献の名	四次元の非可換なコンパクト群の格子ゲージ理論で、全ての β で Wilson ループの面積則を示せという問題	5-02・16-07
一様な減衰から面積則への定理（Chatterjee 2021 の定理 2.4）（短く：一様な減衰から面積則への定理）	文献の名	格子ゲージ理論が任意の境界条件で一様に指数減衰すれば、中心対称性は破れず、中心に自明でなく作用する表現の Wilson ループは面積則に従う	5-10
中心対称性の非破れの定義（Chatterjee 2021 の定義 2.1）（短く：中心対称性の非破れの定義）	文献の名	スラブの理論がどの境界条件でも中心変換で不変であること（中心対称性が破れない）	5-10
強い減衰の定義（Chatterjee 2021 の定義 2.3）（短く：強い減衰の定義）	文献の名	どの立方体・どの境界条件でも相関が一様に指数減衰すること	5-10
強結合の一意性の定理・指数減衰の系（Shen–Zhu–Zhu の札）（短く：強結合の一意性の定理・指数減衰の系）	文献の名	強結合の条件の下で、確率量子化（Langevin 方程式）の不変測度が一意で無限体積の極限を持ち、相関が指数減衰すること（仮定・定理・系の組）	5-04

第 7 部 構成的場の理論

名前	種別	何を指すか	導入の章
構成の六つの段	表の行	場の量子論を作る仕事の六つの段（正則化・有限体積・紫外極限・無限体積・公理・一様なギャップ）	7-01
正則化の段	表の行	格子などで短い距離を切ること	7-01
有限体積の段	表の行	有限体積の測度 μ_{a,L} を作ること	7-01
紫外極限の段	表の行	a → 0 の紫外極限と一様な評価	7-01

名前	種別	何を指すか	導入の章
無限体積の段	表の行	L → ∞ の無限体積極限・クラスター性	7-01
公理の段	表の行	極限が OS の公理を満たすこと（反射正値性）	7-01
一様なギャップの段	表の行	体積に一様な質量ギャップ	7-01
摂動論の水準	表の行	結合の冪級数（摂動論）としての計算。制御の水準の前提	7-07
一様な評価の水準	表の行	格子間隔に一様な評価が得られる水準（Bałaban の四次元の主定理は仮定つきでここまで）	7-07
部分列の極限の水準	表の行	一様な評価から、格子間隔を細かくする列の部分列で極限が取れる水準	7-07
一意性の水準	表の行	極限が部分列の取り方に依らず一つに決まる水準	7-07
対称性と反射正値性の水準	表の行	極限の理論がユークリッドの対称性と反射正値性を持つ水準	7-07
非自明性の水準	表の行	極限が自由場（ガウス）でない水準。問題文はさらに短距離の振る舞いが漸近自由の予言と一致することを求める	7-07
無限体積の水準	表の行	体積を無限にした極限の理論が在る水準	7-07
一様なギャップの水準	表の行	体積に一様な質量ギャップが在る水準	7-07
赤外の径数の障害	表の行	長い距離では結合が強く、展開に使える小さな径数が無いという障害	7-11
摂動に映らない障害	表の行	結合の冪級数のどの次数にも映らない（e^{−c/α} の形の）寄与があるという障害	7-11
非自明性の障害	表の行	極限が自由場に潰れないこと（非自明性）を別に示さねばならないという障害	7-11
曲がった状態空間の障害	表の行	場の空間（ゲージの軌道の空間）が曲がっていて、ゲージ固定の符号の和が 0 になる（0/0 が残る）という障害	7-11
正値な正則化の障害	表の行	反射正値性を保つ正則化が格子のほかに乏しいという障害	7-11
無限自由度の障害	表の行	無限自由度の構造：体積を大きくすると、異なる真空の重なりが 0 に向かうという障害	7-11
周辺的自明性の定理 ほか（Aizenman–Duminil-Copin の札）（短く：周辺的自明性の定理 ほか）	文献の名	Aizenman–Duminil-Copin の結果の組：四次元の ϕ^4・Ising のスケーリング極限はガウス（定理 1.2）、改良された樹形図の上界（定理 1.3）、特性関数の誤差評価（命題 1.4）	7-08

第 15 部 紫外の制御の試みの記録

名前	種別	何を指すか	導入の章
紫外の制御	条件	格子間隔 a から結合が小さい尺度 L_0 までの全ての段で、有効密度が段に依らない同じ形を、小さい場の解析性・大きい場の稀さ・結合の留まりの三条件つきで保つこと	15-00
小さい場の解析性の条件	条件	各段の局在した補正 E_k(X,·) が背景場の変数の半径 r の複素近傍で解析的で |E_k| ≤ C e^{−κ d}（定数は段 k と格子間隔 a に依らない）	15-00
大きい場の稀さの条件	条件	大きな場の因子が |R_k(Ω^c)| ≤ e^{−c p(g_k)^2 |Ω^c|}（定数は段と格子間隔に依らない）	15-00
結合が小さく留まる条件（短く：結合の留まり）	条件	有効結合の列 g_0,…,g_K が全て (0,γ] に入る（γ は段と格子間隔に依らない）	15-00
紫外の三条件（捩れた箱の版）	条件	紫外の制御を捩れた M^4 の格子の最後の段まで、定数を M だけに依らせて言ったもの	15-02
類が閉じる条件	条件	母数の個数が段に依らず有限で、一段の写像の主要部が族の中に戻る。類は一段の写像が引き込む先の一母数の類（結合 B ＋ O(1/B) の固定した形）に取る	15-03
結合の流れの剰余の条件	条件	Φ の β 成分が β_{k+1} = β_k − 8 b_0 ln L + O(1/β_k)（結合の一段の正味の括弧を β の変数で書いたもの）	15-03
形の剰余の条件	条件	‖ r_{θ_k}[ρ_k] ‖ _{G_{k+1}} ≤ (1+η_k) 2^{|B|} ‖ ρ_k ‖ _{G_k} で Σ η_k < ∞、かつ類からの外れ ρ_k が段に一様に留まる	15-03
実効の結合の定義と連続性（短く：結合の連続性）	条件	D_k = {g_0 : g_0,…,g_k ∈ (0,γ_1]} の上で g_0 ↦ g_{k+1}(g_0) が連続	15-03
結合の一段の正味の括弧	条件	1/g_{k+1}^2 = 1/g_k^2 − b + r_k、|r_k| ≤ C g_k^2（一段ごとの結合の変化が一ループの値 b から O(g_k^2) しかずれないこと）	15-03
小さい場の結合への寄与	条件	結合の一段の正味の括弧の剰余のうち小さな場に条件づけた部分 r^small = b(ρ_S) − β_pred（局所の部分＋Taylor の切り捨て＋小さな場の切り＋ブロック間の二次の陽な項）	15-03
大きい場の結合への寄与	条件	結合の一段の正味の括弧の剰余のうち大きな場の部分 r^large = b(ρ) − b(ρ_S)	15-08
結合の小ささの帰納の補題	補題	結合の一段の正味の括弧と、実効の結合の定義と連続性の下で、全ての γ_0 ∈ (0,γ_1) に g_0 < g_1 < ⋯ < g_n = γ_0 となる裸の結合 g_0 が在る（単調性と中間値。結合が小さく留まる条件をこの二つに割る）	15-03
背景と揺らぎの分解の補題	補題	SU で ‖ U_∂p − 1 ‖ ≤ ‖ W_∂p − 1 ‖ ＋Σ ‖ A_{l_i} ‖ と二乗の版（背景 × 揺らぎ U = W e^A への分解）	15-07
重みの分解	系	G_c(X, W e^A) ≤ G_c(X, W)^2 exp(48c Σ ‖ A_l ‖ ^2)	15-07

名前	種別	何を指すか	導入の章
背景に依らない揺らぎの一段の補題	補題	揺らぎの法則 ν が背景に依らず、揺らぎの背景独立の条件・尺度の縮みの条件・揺らぎの指数積率の条件を満たせば ‖ θ_ν K ‖ _{G_{h+}} ≤ 2^{|B|} ‖ K ‖ _{G_h}（一段だけ。期待値と半ノルムの入れ替えで損が出ない）	15-07
揺らぎの背景独立の条件	条件	ν は背景 W に依らない	15-07
尺度の縮みの条件	条件	h_+^2 ≤ h^2/2（次の段の尺度が半分以下）	15-07
揺らぎの指数積率の条件	条件	M_ν(8qc/h^2, X) ≤ 2^{|B|}（揺らぎの指数積率）	15-07
一リンクの熱核比較の補題	補題	SU(2) の Wilson の一リンク法則 μ^b を、角の上限 θ_0 の内側で熱核 p_{1/b'} の K(b,θ_0) 倍、外側を稀な尾で押さえる	15-07
一リンクの揺らぎの一段の補題	補題	背景に依らない揺らぎの一段の補題の鎖が Wilson の一リンクでも通り、損が K（揺らぎの期待値の閉じの側）と 1+η（結合の動き）に割れる	15-07
中心の取り直しの条件	条件	背景のプラケットの角が $\theta_0 < \pi/2$ 以下で、中心の取り直しの幾何（staple の和の向きの写像の Taylor の半径）を仮定する条件	15-07
揺らぎの指数積率の群版	条件	全ての小さな場の背景 W と $0<t\le t_0$ で E_{μ_{k,W}} exp((48tc/h_k^2) Σ ‖ A_l ‖ ^2) ≤ 2^{|B|}（真の揺らぎの測度について）	15-07
背景の正則性の条件	条件	背景の写像の像の W について G_k(X,W)^{2t} ≤ G_{k+1}(X,W)（細かい曲率が粗い曲率で押さえられる）	15-07
期待値と半ノルムの入れ替えの群版	条件	‖ E θ_W F ‖ _{T_W(h_{k+1})} ≤ (1+η_k) E ‖ F ‖ _{T_{We^A}(h_k)}、Σ η_k < ∞（期待値と半ノルムの入れ替えの群版）	15-07
積の分解（BBS の (i)）（短く：積の分解）	文献の名	BBS の付録 A.6.2 の重み（regulator）の四性質の一つ目：交わらない集合の上で重みが積に分かれること	15-01
場の和の劣乗性（BBS の (ii)）（短く：場の和の劣乗性）	文献の名	重みの四性質の二つ目：場の和について $\tilde{G}(X,\phi+\phi') \le \tilde{G}^2(X,\phi)\tilde{G}^2(X,\phi')$	15-01
揺らぎの期待値の閉じ（BBS の (iii)）（短く：揺らぎの期待値の閉じ）	文献の名	重みの四性質の三つ目：揺らぎについて期待値を取ると、重みが次の段の重みで閉じること	15-01
次の段への単調性（BBS の (iv)）（短く：次の段への単調性）	文献の名	重みの四性質の四つ目：今の段の重みが次の段の重みで押さえられること	15-01
活動のノルムの一段の評価（BBS の補題 A.6.1）（短く：活動のノルムの一段の評価）	文献の名	重みが場の和の劣乗性・揺らぎの期待値の閉じ・次の段への単調性を満たせば ‖ E+θK ‖ _{G̃+} ≤ 2^{|B|} ‖ K ‖ _{G̃}（平らな場で活動のノルムが一段で 2^{|B|} 倍以内に収まる）	15-01
期待値と半ノルムの入れ替えの不等式（BBS の (A.6.5) ほか）（短く：期待値と半ノルムの入れ替えの不等式）	文献の名	BBS の付録 A.6 の式：揺らぎの期待値と半ノルムを入れ替える不等式（あわせてノルムの定義と重みの性質の当て方）	15-02

名前	種別	何を指すか	導入の章
条件つきの紫外安定性の定理（Bałaban 1989 の Theorem 1）（短く：条件つきの紫外安定性の定理）	文献の名	有効結合が小さいまま留まることを仮定すれば、有効密度の形と、小さい場の解析性・大きい場の稀さの評価が全ての段で成り立つ（四次元・有限体積）	15-02
基本の不等式（未公刊）（Bałaban 1989 の Theorem 2）（短く：基本の不等式（未公刊））	文献の名	条件つきの紫外安定性の定理の仮定（結合が小さく留まること）を外すための不等式。未公刊	15-02
軌道の向きの平坦性の命題	命題	ゲージ不変な滑らかな関数の最小点で、軌道の接ベクトル $\xi \neq 0$ について $\mathrm{Hess}\, V(x_0)(\xi,\xi) = 0$	15-01
背景を母数に持つ類の命題	命題	背景のホロノミーの対数 a を類の母数に持たせた類 $C_2 = (B,q,a)$ で、背景依存の残りが θ⁰β^{−3/2}・θ¹β^{−1} に下がり、予算が段数に一様	15-07
一列四枚の形の剰余の定理（短く：一列四枚の定理）	定理	一列四枚の射影の模型（SU(2)・対角の定義・ψ^8 の射影・$B \geq 32$・O(1) の箱）で $r_n \leq \lambda^n r_0 + C/((5-\lambda)B_n)$、$C = 0.0108$（段数に依らない）	15-06
ℓ^4 の錐の一段の縮み	系	四次元の ℓ^4 の錐は一段で 0.823 倍以下に縮む（$\beta'_0 = 1$ の規格・行の重みつきの補間）	15-05
混合の極限の補題	補題	体積の極限で $\sup \lambda = 4 \sup \mu_{\mathrm{loc}}$（局在した向きと最も粗い向きの混合の極限）	15-05
Stein の道の床の補題	補題	行の重みつきの Stein の道は、どの局所の代表・どの重みでも $\Sigma\, s\, \nu_s^2/16 \geq 0.452 > 1/4$ を下回れない	15-05
条件つき平均の共分散の補題	補題	木の水準の一段はガウスの条件つき平均で、粗い作用の逆（ブロックした流束の共分散）は線形に反復する	15-05
熱核の Gauss 上界の補題	補題	SU(2) の熱核 p_t は非減少の $g \geq 0$ について $E\, g(\theta) \leq e^{t/2}\, E\, g(\lvert Z\rvert)$、$Z \sim N(0, tI_3)$	15-08
熱核の揺らぎの稀さの補題	補題	辺ごとに独立な熱核の条件〜揺らぎの背景独立の条件の下で、リンクが閾 h を越える確率と指数積率が背景に依らない閉じた形で押さえられる（熱核の揺らぎで揺らぎの指数積率の群版が立つ）	15-08
大きい場の剰余の上界の補題	補題	剰余を $r = r^{\mathrm{small}} + r^{\mathrm{large}}$ と割り、読み取り b の全変動の Lipschitz 定数から $\lvert r^{\mathrm{large}}\rvert \leq (4/3)(b_S^2/E_S)\, P_L$	15-08
辺ごとに独立な熱核の条件	条件	揺らぎの法則が辺ごとに独立な熱核であるという条件（熱核の揺らぎの稀さの補題などの前提）	15-08
一段に限る条件	条件	主張を繰り込みの一段だけに限るという条件（多段の帰納は含まない）	15-08
複素の背景での解析性の条件	条件	複素の背景での解析性と β に依らない上界（小さな場の有効作用の Taylor の係数の Cauchy 型の評価）	15-08
ブロック間の項の定義	条件	ブロック間の二次の陽な項 W^{gauge} の定義（代数）	15-08
局所の打ち消し	条件	局所の打ち消し（Loc の恒等式）	15-08

名前	種別	何を指すか	導入の章
三次の残りの評価	条件	三次の評価（残りが $O(g^3)$ で複素の背景と体積に一様）	15-08
分配関数の Gauss 比較の条件	条件	e^{−CM⁴} ≤ Z_n/Z_n^G ≤ e^{CM⁴}（孤立した平坦な接続のまわりの Gauss 積分の和との比）	15-02
観測量の源の条件	条件	尺度 L_0/M より大きい台の滑らかな観測量の源（強さ ≤ s_0）を入れても同じ定数で成り立つ	15-02
捩れた小さな四次元トーラスの紫外の言明（短く：捩れたトーラスの紫外の言明）	言明	捩れた小さな M^4 の格子で、裸の結合を選ぶと紫外の三条件（捩れた箱の版）・分配関数の Gauss 比較の条件・観測量の源の条件が成り立つ（案・未証明）	15-02
大きい場込みの剰余の行	表の行	15-08 の閉じない四行の一つ：大きな場も込めた一段の結合の剰余（結合の一段の正味の括弧を大きな場込みで示すこと）	15-08
背景依存の吸収と多段の行	表の行	閉じない四行の芯：背景に依る損 η を類の母数に吸収し、多段の帰納に通す行	15-08
ゲージの張り替えの境目の行	表の行	閉じない四行の一つ：段ごとにゲージ固定を張り替えるときの境目の扱い	15-08
共分散の流れの固定点の条件	条件	ブロックした場の共分散の流れに、スケール不変な固定点が在ること	15-03
固定点での錐の縮みの条件	条件	共分散の流れの固定点で、錐の縮みの率が 1 より小さいこと（sup $\mu_{-\infty} < 1$）	15-03
紫外の問い	問い	第 15 部の各章が残した三十一の問い（15-09 の表 1）。どれも紫外の制御の行の部品に触れる	15-09
体系の問い	問い	15-10（体系の試み）が残した十六の問い（15-10 の表 15）	15-10
類の固定点の縮小写像の窓	名	類が閉じる条件の固定点を縮小写像の形で述べたとき、縮小写像が開く β の範囲（$\tau = 0.695$・$a = 4.335$・$c_0 = 0.02$〜0.04 で β がおよそ 28〜54 から）	15-03
問い「一母数の類での横の縮み」（短く：一母数の類での横の縮み）	問い	引き込む先の一母数の類の上で一段の写像が横に縮むか（λ と源が有限に留まるか・定数が段に依らないか・中心の符号の重みが要るか）	15-09
問い「大きい場込みの剰余の最小模型」（短く：大きい場込みの剰余の最小模型）	問い	結合の一段の正味の括弧を大きな場込みで示せる最小の模型（階層的な SU(2)）で、一枚の拘束つきの吸収を真の臨界点で言い直せるか	15-09
問い「捩れた格子の随伴の最小固有値」（短く：捩れた格子の随伴の最小固有値）	問い	捩れた M^4 の格子で、孤立した平坦な接続のまわりの随伴の揺らぎの作用素の最小固有値が c/M^2 以上か	15-09
問い「階層模型の管の延長」（短く：階層模型の管の延長）	問い	階層模型の管と引き寄せる曲線を $\beta > 64$ へ延ばせるか（漸近の評価と区間演算の継ぎ目）	15-09
問い「層の外の曲率の区間演算」（短く：層の外の曲率の区間演算）	問い	層の外の曲率の下界と層の重さを区間演算で確かめ、曲線の上の流れの係数 $c^* = 1/60$ を $1/48$ から分けられるか	15-09

名前	種別	何を指すか	導入の章
問い「粗い面の源の横の一定性」（短く：粗い面の源の横の一定性）	問い	粗い面の辺 L の列で、源 × L^4 が横を広げても一定の値に寄るか	15-09
問い「木の水準の網の局所の代表」（短く：木の水準の網の局所の代表）	問い	粗い面を固定した木の水準の網で、局所の代表を作り体積に一様な上界が出るか	15-09
問い「一列四枚の一段の補正」（短く：一列四枚の一段の補正）	問い	一列四枚の一段の O(1/B) の補正を紙で出し、形の剰余の条件の一段の不等式の定数 C を与えられるか	15-09
問い「他のループの形での類の一意性」（短く：他のループの形での類の一意性）	問い	一列四枚以外のループの形（2×2・L 字・混じった四次）を含めても、引き込む先の類が一つに定まるか	15-09
問い「同時の法則の密度の割り方」（短く：同時の法則の密度の割り方）	問い	一列四枚で二つのプラケットの同時の法則を局所結合の積 × 密度に割り、密度の θ の最低次数と二次形式の等方性を出せるか	15-09
問い「多段の最小の言明」（短く：多段の最小の言明）	問い	多段の最小の言明を階層模型か二次元の模型で書けるか（背景の正則性の条件と多体のノルムの縮み）	15-09
問い「読み取りの Lipschitz 定数」（短く：読み取りの Lipschitz 定数）	問い	大きい場の剰余の評価に使う読み取りの Lipschitz 定数を紙で出し、大きな場の有無で密度の全変動の差を測ること	15-09
問い「源を足したときの結合のずれ」（短く：源を足したときの結合のずれ）	問い	一列四枚に源 s Re W を足したとき、結合のずれが s について線形か	15-09
問い「臨界点の偶性」（短く：臨界点の偶性）	問い	臨界点の偶性が一列四枚で成り立つか（同時の法則の密度の割り方の問いと組）	15-09
問い「一ループの Hessian とゴースト」（短く：一ループの Hessian とゴースト）	問い	倍率 2 のブロックの一ループの Hessian を割り、ゴーストの F^2 の係数を測れるか（あわせて木のゲージの直積分解の形式化）	15-09
問い「零和でない最小の系」（短く：零和でない最小の系）	問い	零和でない最小の系（一列四枚を二つ並べ、間のリンクを共有）で、周辺の結合への二次の寄与の局所の打ち消しの破れを数にできるか	15-09
問い「2×2 の板の BCH の奇数次」（短く：2×2 の板の BCH の奇数次）	問い	2×2 の板の中央のプラケットで、巡回で対称化した BCH の奇数次の係数を出し、二リンクの値と比べること	15-09
問い「ホロノミーを母数に持つ類」（短く：ホロノミーを母数に持つ類）	問い	背景のホロノミーの対数を母数に持つ類で、背景に依る部分がその母数の流れに正確に移るか	15-09
問い「中心の取り直しの半径」（短く：中心の取り直しの半径）	問い	一リンクの揺らぎの一段の補題の中心の取り直しで、Taylor の半径を明示し、損の係数を一つの数にできるか	15-09

名前	種別	何を指すか	導入の章
問い「四次元の ℓ^4 の直接の上界」（短く：四次元の ℓ^4 の直接の上界）	問い	四次元の ℓ^4 の錐の縮みを直接押さえ（近い部分は有限の網、尾だけ Riesz–Thorin）、$\sup \mu < 1$ かを見ること	15-09
問い「Loc の二通りの定義」（短く：Loc の二通りの定義）	問い	局所化 Loc を行の和（零運動量）と行列の成分の二通りで定義したとき、ブロック間の二次の項が一致するか（原典の切り方はどちらか）	15-09
問い「三次元の非局所の重み」（短く：三次元の非局所の重み）	問い	境の無い三次元で、粗いリンク＋大域の札の座標の一ループの非局所の重みが指数で減るか	15-09
問い「多ループの類の二段目」（短く：多ループの類の二段目）	問い	多ループの類の二段目：角の三重積 κ が段ごとに保たれる座標か、四次元 2^4 で同じ座標が足りるか	15-09
問い「非可換の背景でのゲージの一致」（短く：非可換の背景でのゲージの一致）	問い	非可換の背景（交換子を含む曲率）で、二つのゲージの一致とゴーストの係数を測ること	15-09
問い「向きごとの規格の倍率」（短く：向きごとの規格の倍率）	問い	向きごとの規格の倍率 $\sup \lambda \le 3.29$ を、運動量の帯ごとの重みつきの記号で 1 未満に落とせるか	15-09
問い「結合を母数に持つ類」（短く：結合を母数に持つ類）	問い	結合を類の母数に持たせ、Wilson の一リンクの結合の動きが母数の更新に移るか	15-09
問い「四次元の類の比の固定点」（短く：四次元の類の比の固定点）	問い	四次元の類の比の座標の固定点の値を、角の近くの半無限の問題から直接出せるか	15-09
問い「横の平均の固定点の上界」（短く：横の平均の固定点の上界）	問い	横の平均のブロック化の固定点の上で、$\sup \mu_{\infty}$ の上界を Stein でない道で 1 未満に取れるか	15-09
問い「木の三体の四次の幅」（短く：木の三体の四次の幅）	問い	四次元の粗いリンク＋大域の札で、木の三体の項の四次の幅への依存の率を測ること	15-09
問い「網の長波長の一ループの係数」（短く：網の長波長の一ループの係数）	問い	横の平均のブロック化か大きい倍率で、網の長波長の一ループの係数の倍率への依存が一ループの値に近づくか	15-09
問い「取り直した管の全区間の検査」（短く：取り直した管の全区間の検査）	問い	取り直した管を幅 0.02 の区間で $\beta \in [15.26, 128]$ の全体に通し、曲線が管に入ることと流れの係数 c^* の包みを条件なしにできるか	15-09
問い「最悪の向きの行のそろい」（短く：最悪の向きの行のそろい）	問い	最悪の向きでの行のそろいの下限を段の極限の核で評価し、全ての段で符号を捨てる損を一様に押さえられるか	15-10
問い「Stein の最大点の周期のずれ」（短く：Stein の最大点の周期のずれ）	問い	大きいトーラスで Stein の上界の最大点が周期 2 からずれる分（損 6.4 に対して上界 10.2）はどこから来るか	15-10

名前	種別	何を指すか	導入の章
問い「真の作用素の側の打ち消し」（短く：真の作用素の側の打ち消し）	問い	真の作用素の側の打ち消しを測る量（例：$\|T^k\|$ と $\||T|^k\|$ の比を符号の相似類の中の最小で割る）を一つ決めると、段でゆっくりにしか増えない損の規則性は何から来ると言えるか	15-10
問い「有限の型と戻りの集約」（短く：有限の型と戻りの集約）	問い	有限の型と残りの戻りを二×二に集約し、記録の行列で $bc < (1-a)(1-d)$ が成り立つか	15-10
問い「Schur の重みでの読み直し」（短く：Schur の重みでの読み直し）	問い	W の座標の記録（ℓ^2 で測ったもの）を Schur の判定法の重みで読み直すと、一段の縮みの定数はどうなるか	15-10
問い「拘束つきの和の規則の上限」（短く：拘束つきの和の規則の上限）	問い	$k \le \mathrm{ord}^{V}(F)$ の全てについて、$\mathrm{ord}(K) \ge k$ の局所の代表が有限範囲で取れるか	15-10
問い「自由度の正準な選び方」（短く：自由度の正準な選び方）	問い	Stein 型のノルムを最小にする代表は存在し、一意で、局所か	15-10
問い「段をまたぐ代表の合成の整合」（短く：段をまたぐ代表の合成の整合）	問い	段 k の代表の出力が段 $k+1$ の拘束の部分空間に入るか（入らなければ、代表の合成が選び方に依る）	15-10
問い「Moore–Penrose の核の減衰」（短く：Moore–Penrose の核の減衰）	問い	Moore–Penrose の代表（最小ノルムの代表）の核が、どの速さで減衰するか	15-10
問い「対称な代表の零モード」（短く：対称な代表の零モード）	問い	有限のトーラスの対称な代表の零モードが、指数より速く $U/4$ に近づいて見えるのはなぜか	15-10
問い「三重付値の帯」（短く：三重付値の帯）	問い	三つ目の付値（トランス級数の指数）を足した三重付値で、U(1) と SU(2) の帯の違いが区別できるか	15-10
問い「四次元の級数の同点」（短く：四次元の級数の同点）	問い	四次元の本物の級数（強結合と弱結合の高次）で誤差の同点を求めると、移り変わりの帯とどう重なるか	15-10
問い「二つの結合の空間の骨格」（短く：二つの結合の空間の骨格）	問い	基本と随伴の二つの結合の空間で、同点集合の骨格が非自明な多面体複体になるか	15-10
問い「窓の下端の動き」（短く：窓の下端の動き）	問い	ブロック化の写像の列で、窓の下端が段の数とともにどう動くか（一段の $3.5 \le p \le 5$ で真の値が 1 を下回るか）	15-10
問い「束の数の発散」（短く：束の数の発散）	問い	束の数が $\mathrm{p} \downarrow 2$ でどう発散するか（c/(p−2) 型か、格子の幾何から決まる臨界の指数か）	15-10
問い「Schur の閾値と Stein の窓」（短く：Schur の閾値と Stein の窓）	問い	Schur の閾値の指数と Stein の窓の下端の隔たりはどこから来るか。重みつきの Schur（正の試験関数）で p^* をどこまで下げられるか	15-10

第 16 部 現在地と残る問い

名前	種別	何を指すか	導入の章
証明が含むべき七つの段	表の行	質量ギャップの証明が通るべき七つの段（器・紫外・小さな T^2 のギャップ・小さな T^2 の閉じ込め・帯・R^4・一般の群）	16-09
器の段	表の行	格子・鏡映正値性・ブロックの観測量・コンパクト性。稠密な集合での減衰から転送行列のギャップを出す土台の段	16-09
紫外の制御の段	表の行	格子間隔 a から尺度 L まで、a に一様な多重尺度の解析（有効作用の局所性・大きな場の稀さ・結合の流れ）の段	16-09
小さな T^2 のギャップの段	表の行	捩れた境界条件で零モードを消し、小さな T^2 の上で転送行列の隙間 $\geq c/L$ を a に一様に示す段	16-09
小さな T^2 の閉じ込めの段	表の行	小さな T^2 の上の閉じ込めを、容器の評価と挿入の評価で「一つの渦の挿入」と「領域の間の独立性」に帰着する段	16-09
帯の段	表の行	T^2 を広げても同じ定数で隙間が成り立つこと。中間の尺度 $L \sim 1/\Lambda$ を非摂動的に渡る段	16-09
R^4 の段	表の行	無限体積の極限・OS の公理・回転不変性の回復・非自明性の段	16-09
一般の群の段	表の行	SU(N) と、中心の無い群（G_2 など）へ広げる段	16-09
存在の前提の切れ目	表の行	物理は理論が在ると置いて量を計算し、数学は公理を満たす極限を（部分列でなく）作らねばならないという切れ目	16-05
尺度は一つの切れ目	表の行	物理は質量も弦張力も一つの尺度 Λ の定数倍とみなし、数学はそれが β に一様に成り立つことを示さねばならないという切れ目	16-05
岸の違いの切れ目	表の行	物理は結合が小さい・β が小さい・N が大きいといった計算の効く岸で計算し、数学は有限の N で全ての尺度を制御せねばならないという切れ目	16-05
有限と無限の切れ目	表の行	物理は有限の箱で測って外挿し、数学は体積に一様な隙間を示さねばならないという切れ目	16-05
時空と空間の切れ目	表の行	物理の直感は時空（ミンコフスキー）の上にあり、数学はユークリッドの測度から反射正値性で戻るという切れ目	16-05
粒子の語の切れ目	表の行	物理の「ギャップは最も軽いグルーボールの質量」と、数学のスペクトルの隙間（孤立した一粒子状態は拡張問題）の切れ目	16-05
余剰次元の切れ目	表の行	物理は余剰次元の幾何でギャップを出し、数学は余剰次元を 0 に縮める極限と極限の入れ替えを要るという切れ目	16-05
前提が目標になる型	表の行	物理の前提が数学の目標になる型の切れ目（存在の前提・尺度は一つ）	16-05
極限と一様性の型	表の行	物理が径数の特定の値（岸）で計算し、数学は問題文の値への極限と一様な評価を要る型の切れ目（岸の違い・有限と無限・余剰次元）	16-05
同じ語が別のものを指す型	表の行	物理と数学で同じ語が別のものを指す型の切れ目（時空と空間・粒子の語）	16-05

名前	種別	何を指すか	導入の章
T^4 の構成の課題	課題	T^4 の上で、ゲージ不変な量の期待値が $a \to 0$ で列全体として収束	16-07
無限体積への課題	課題	$L \to \infty$ の極限が列全体で在る	16-07
一様なギャップの課題	課題	$\inf_L \Delta_L > 0$	16-07
残りの公理の課題	課題	回転の対称性の回復と再構成に要る正則性	16-07
非自明性の課題	課題	極限がガウスでない	16-07
局所場と短距離の課題	課題	局所場と短距離で漸近自由と一致	16-07
強い減衰の課題	課題	任意の境界条件で一様な指数減衰	16-07
一尺度の課題	課題	$\beta \geq \beta_0$ で $c\sigma \leq m^2 \leq C\sigma$	16-07
三次元の測度の課題	課題	T^3 の上の測度の構成	16-07
存在の規則	表の行	T^4 の構成の課題と無限体積への課題から、R^4 の上の理論の存在（存在の要件）が出るという規則（定義）	16-07
公理の規則	表の行	理論の存在と残りの公理の課題から、OS の再構成で公理の要件が出るという規則（定理）	16-07
隙間の規則	表の行	理論の存在と一様なギャップの課題から、隙間の要件が出るという規則（定理。一様な隙間が極限に残る）	16-07
非自明性の規則	表の行	非自明性の課題と局所場と短距離の課題から、非自明性の要件が出るという規則（定義）	16-07
問題文の規則	表の行	公理・非自明性・隙間の三つの要件から、群 G での問題文全体が出るという規則（定義）	16-07
減衰から面積則への規則	表の行	強い減衰の課題から格子の面積則が出るという規則（Chatterjee 2021 の一様な減衰から面積則への定理）	16-07
弦張力の規則	表の行	連続の弦張力の問題から弦張力の要件が出るという規則（定義）	16-07
出題者の道筋の規則	表の行	一様なギャップの課題が無限体積への課題を開くという、出題者（Jaffe–Witten）の示した道筋	16-07
弦張力から隙間への規則	表の行	理論の存在・弦張力の要件・一尺度の課題から隙間の要件が出る、という物理の期待（尺度は一つ）	16-07
隙間から弦張力への規則	表の行	理論の存在・隙間の要件・一尺度の課題から弦張力の要件が出る、という物理の期待（弦張力から隙間への規則の逆向き）	16-07
存在の要件	名	R^4 の上の理論が存在すること（問題文の要件の一つ）	16-07
公理の要件	名	理論が Wightman・Osterwalder–Schrader の公理と同等以上の公理を満たすこと（問題文の要件の一つ）	16-07
非自明性の要件	名	理論が非自明で、局所場を持ち、短距離で漸近自由と一致すること（問題文の要件の一つ）	16-07

名前	種別	何を指すか	導入の章
隙間の要件	名	質量の隙間 $\Delta > 0$ が在り、$m < \infty$ であること（問題文の要件の一つ）	16-07
弦張力の要件	名	連続の弦張力 d が 0 でないこと（閉じ込め。問題文の要件の外）	16-07
問題文の要件	名	群 G での問題文の全体：存在・公理・非自明性・隙間の四つの要件を合わせたもの	16-07
芯の二分け	名	帯の芯を「紫外の延長」と「強結合への最後の区間の言明」の二つの仕事に分けて見ること	16-11 §01
紫外の延長	名	公開された構成の制御を、段ごとの誤差の和を有限に保ったまま、閾から結合が数の程度の値 β_* まで延ばす仕事	16-11 §01
強結合への最後の区間の言明	言明	β_* から強結合の窓までの、少ない段数の非摂動の言明（26-06 の「有限の段数で帯を渡る系」とは別）	16-11 §01
損失のある鎖	名	段ごとに K 倍の損失を許す繰り込みの比較を、段数ぶんつないだもの。率は一様だが前の因子が $\xi^{\log_2 K}$ で育つ	16-11 §02
エネルギーの側の事実	名	配位の作用についての事実（捩れた真空の存在、固定群 ± 1、二つの捩れの箱の作用が正、S_N の上下）	16-11 §03
エントロピーの側の不足	名	帯に要る、渦の揺らぎと配置の数を尺度に一様に下から数える評価が、本書に無いこと	16-11 §03
物理の大きさの箱の混合の言明	言明	箱の辺を物理の長さ C/Λ に取ると、枠を替えたときの内側のゲージ不変な観測量の法則の全変動が閾より小さい（β に一様に）。強い形の質量ギャップの言い換え	16-11 §04
七つの試験の相手	名	帯の議論を試す相手：U(1) の弱結合・Z_2 の弱結合・有限の非可換群・随伴 Higgs の極限・SU(2) の混合作用の線と端点・SU(N) の体積転移・G_2	16-11 §04・26-12 §02
値の水準の三分類	名	対称な箱・捩れ一つの量の弱結合の振る舞い：U(1) は β に比例、凍った有限群は定数、SU(2) は $(3/2)\ln\beta$ の型	16-11 §04
捩れた箱の連続極限の制御	課題	測度で決まる量・捩れた（枠つきの）箱での、誤差の和が有限な尺度の比べ	16-11 §06
ゲージ不変な観測量の法則の結合	課題	ゲージ不変な関数の条件つきの法則を結ぶ作り方と、その上の有限の箱の判定	16-11 §06
エントロピーの側の下界の計算法	課題	相対エントロピーが 0 へ向かう、配位に合わせた挿入	16-11 §06
捩れた部門での作用の順序	課題	面の結合について ΔF が増えることを言う不等式か、その代わりの作用の順序	16-11 §06
中心の無い群のための渦の自由エネルギーの代役	課題	G_2 など中心の無い群で、渦の自由エネルギーの役をする量	16-11 §06
項ごとの符号の不等式	問い	面ごとの結合 β_p について $\partial \Delta F / \partial \beta_p \geq 0$	16-11 §04・26-12 §05

第 18 部 二つの言葉の辞書

名前	種別	何を指すか	導入の章
「経路積分（量子力学）」の項	辞書の項目	経路積分（量子力学） ⟷ Feynman–Kac 公式	18-02
「汎関数積分」の項	辞書の項目	汎関数積分 ⟷ ユークリッドの確率測度	18-02
「状態の空間」の項	辞書の項目	状態の空間 ⟷ 再構成の Hilbert 空間	18-02
「ウィック回転」の項	辞書の項目	ウィック回転 ⟷ OS の再構成定理	18-02
「Green 関数」の項	辞書の項目	Green 関数 ⟷ Wightman・Schwinger 関数	18-02
「Källén–Lehmann 表示」の項	辞書の項目	Källén–Lehmann 表示 ⟷ スペクトル測度	18-02
「真空と一意性」の項	辞書の項目	真空と一意性 ⟷ Ω・クラスター性	18-02
「ハミルトニアン」の項	辞書の項目	ハミルトニアン ⟷ 転送行列の対数	18-02
「一粒子状態」の項	辞書の項目	一粒子状態 ⟷ 質量作用素の孤立固有値	18-02
「S 行列」の項	辞書の項目	S 行列 ⟷ Haag–Ruelle 散乱理論	18-02
「正ノルム性」の項	辞書の項目	正ノルム性 ⟷ 反射正値性	18-02
「S 行列のユニタリ性」の項	辞書の項目	S 行列のユニタリ性 ⟷ 正ノルム性＋漸近完全性	18-02
「時空と格子」の項	辞書の項目	時空と格子 ⟷ $a\mathbb{Z}^4 \to \mathbb{R}^4$	18-02

名前	種別	何を指すか	導入の章
「正則化」の項	辞書の項目	正則化 ⟷ 格子間隔 a の測度の族	18-02
「繰り込み可能性」の項	辞書の項目	繰り込み可能性 ⟷ BPHZ・Epstein–Glaser	18-02
「場 φ(x)」の項	辞書の項目	場 $\phi(x)$ ⟷ 作用素値超関数	18-02
「ゲージ固定」の項	辞書の項目	ゲージ固定 ⟷ 軌道空間への切断	18-02
「物理的状態」の項	辞書の項目	物理的状態 ⟷ ゲージ不変量からの再構成	18-02
「局所対称性は破れない」の項	辞書の項目	局所対称性は破れない ⟷ Elitzur の定理	18-02
「質量ギャップ」の項	辞書の項目	質量ギャップ ⟷ スペクトルの隙間・一様な減衰	18-03
「相関長 ξ」の項	辞書の項目	相関長 ξ ⟷ 転送行列の隙間の逆数	18-03
「物理単位のギャップ」の項	辞書の項目	物理単位のギャップ ⟷ 格子単位の一様な下界	18-03
「V(R)」の項	辞書の項目	$V(R)$ ⟷ Wilson ループの減衰率	18-03
「弦張力 σ」の項	辞書の項目	弦張力 σ ⟷ 面積則の係数・Chatterjee の問題 5.2（連続の弦張力の問題）の d	18-03
「閉じ込め」の項	辞書の項目	閉じ込め ⟷ 片向きの定理	18-03
「中心対称性」の項	辞書の項目	中心対称性 ⟷ スラブでの中心不変性	18-03
「Λ・一尺度」の項	辞書の項目	Λ・一尺度（全ての質量が一つの尺度の定数倍） ⟷ 数学の側に対応語なし	18-03

名前	種別	何を指すか	導入の章
「m/√σ」の項	辞書の項目	$m/\sqrt{\sigma}$ ⟷ Chatterjee の問題 5.1・5.2（格子の相関長の問題と連続の弦張力の問題）を組にした極限	18-03
「グルーボール」の項	辞書の項目	グルーボール ⟷ 質量作用素の孤立固有値	18-03
「Langevin の緩和」の項	辞書の項目	Langevin の緩和 ⟷ 生成作用素 L	18-03
「z=2」の項	辞書の項目	$z = 2 \longleftrightarrow \mathrm{gap}(L) \asymp \mathrm{gap}(H_T)^2$（Langevin の隙間が転送行列の隙間の二乗）	18-03
「指数自己相関時間」の項	辞書の項目	指数自己相関時間 ⟷ Poincaré 定数 C_P	18-03
「熱化時間」の項	辞書の項目	熱化時間 ⟷ 混合時間	18-03
「動的指数 z」の項	辞書の項目	動的指数 $z \longleftrightarrow C_P \asymp \xi^z$	18-03
「z=2-η_s」の項	辞書の項目	$z = 2 - \eta_s \longleftrightarrow$ 変分の下界 $C_P \geq \chi$	18-03
「非臨界では減速しない」の項	辞書の項目	非臨界では減速しない ⟷ 一様な混合 ⟺ 一様な log-Sobolev	18-03
「Lüscher 項」の項	辞書の項目	Lüscher 項 ⟷ 帯の Casimir エネルギー	18-03
「粗面化・管の形」の項	辞書の項目	粗面化・管の形 ⟷ Wulff 構成	18-03
「位相電荷の凍結」の項	辞書の項目	位相電荷の凍結 ⟷ 状態空間のボトルネック	18-03
「繰り込み群」の項	辞書の項目	繰り込み群 ⟷ 段の列・UV 安定性	18-04
「β 関数」の項	辞書の項目	β 関数 ⟷ 有効結合の再帰式	18-04

名前	種別	何を指すか	導入の章
「Polchinski の方程式」の項	辞書の項目	Polchinski の方程式 ⟷ 測度の分解の Polchinski 方程式（熱流）	18-04
「MCRG の Δβ」の項	辞書の項目	MCRG の Δβ ⟷ 一段の写像	18-04
「Λ のスキーム変換」の項	辞書の項目	Λ のスキーム変換 ⟷ 結合の再径数化	18-04
「Migdal–Kadanoff」の項	辞書の項目	Migdal–Kadanoff ⟷ 階層格子で閉じる再帰	18-04
「連続極限」の項	辞書の項目	連続極限 ⟷ スケーリング極限	18-04
「a(β)・尺度の設定」の項	辞書の項目	a(β)・尺度の設定 ⟷ ε(β)（Chatterjee の問題 5.2 の尺度の関数）	18-04
「スケーリング」の項	辞書の項目	スケーリング ⟷ 無次元比の極限	18-04
「漸近スケーリング」の項	辞書の項目	漸近スケーリング ⟷ ε(β) の漸近形	18-04
「普遍性」の項	辞書の項目	普遍性 ⟷ 極限の一意性	18-04
「Symanzik の $O(a^2)$」の項	辞書の項目	Symanzik の $O(a^2)$ ⟷ 段の取りこぼし $\delta(b)$	18-04
「改善作用」の項	辞書の項目	改善作用 ⟷ 反射正値性の喪失（負の重みの寄与）	18-04
「周辺的な結合」の項	辞書の項目	周辺的な結合 ⟷ Sobolev の臨界指数	18-04
「大 N・平面図」の項	辞書の項目	大 N・平面図 ⟷ 平面地図・弦の和	18-04
「マスター場」の項	辞書の項目	マスター場 ⟷ 非可換分布の極限	18-04

名前	種別	何を指すか	導入の章
「ホログラフィーの動径」の項	辞書の項目	ホログラフィーの動径 ⟷ Fefferman–Graham 展開	18-04
「KK 塔」の項	辞書の項目	KK 塔 ⟷ 内部ラプラシアンの λ_1	18-04
「位相電荷」の項	辞書の項目	位相電荷 ⟷ 第二 Chern 数	18-04
「インスタントン」の項	辞書の項目	インスタントン ⟷ 反自己双対接続	18-04
「Wilson 流」の項	辞書の項目	Wilson 流 ⟷ ヤン–ミルズ熱流	18-04
「Gribov 領域」の項	辞書の項目	Gribov 領域 ⟷ FP 作用素の正値域	18-04
「トレース異常」の項	辞書の項目	トレース異常 ⟷ 数学の側に対応語なし	18-04
中心対称性から閉じ込めへの定理（Chatterjee 2021 の定理 2.2）（短く：中心対称性から閉じ込めへの定理）	文献の名	中心対称性が破れなければ、静的な対のポテンシャル $V(R)$ が $R \to \infty$ で無限大に向かう（閉じ込め）	18-01
定義の列	表の行	辞書の格の一つ目の列：定義としての対応が確定か・条件つきか・未確定か	18-01
実在の列	表の行	辞書の格の二つ目の列：四次元でその対象が実在するか（構成済み・条件つき・無い）	18-01
測定の列	表の行	辞書の格の三つ目の列：有限の測定でどちらの向きに届くか	18-01
静的な冪（記号のまま）	名	静的な相関の冪 η_s：演算子の尺度次元 Δ から $\eta_s = 2\Delta - (d-2)$ で決まる指数（動的な指数とは別）	18-05

第 19 部 対象と、示すべき言明

名前	種別	何を指すか	導入の章
一様な減衰の言明	言明	示すべき言明の一つ：合わせた結合の列で、相関が格子間隔と箱に一様に指数で減衰すること（帰結が質量ギャップ）	19-07
示すべき言明	言明	第 19 部で定義した対象だけで書いた、連続極限と質量ギャップに向けて示すべき言明の組（合わせ・全列の収束・非退化・同程度連続・一様な減衰・帯）	19-07

名前	種別	何を指すか	導入の章
基点の時刻	言明	リンク (x,μ) の始点 x の時刻。時間の向きのリンクでは、これをそのリンクの時刻とする	19-01

第 21 部 確かな定理 — 渦の床と Polyakov ループ

名前	種別	何を指すか	導入の章
反転の費用の上界	言明	ある S で、全ての ε > 0 に m が在り、全ての M ≥ m で κ_c(N,M,m,⌊M/m⌋) ≤ S + ε（窓の類を反転する費用の上界）	21-04

第 23 部 一本目の道（前半）— 時間の方向から

名前	種別	何を指すか	導入の章
拡散型緩和時間の仮定（短く：緩和時間の仮定）	名	Wilson 測度の族で lim_{β→∞} ln C_P(β)/ln ξ(β) = 2（緩和の時間が相関長の二乗と同じ冪で伸びる。冪の水準の文）	23-01
緩和時間の上界の仮定（短く：上界の仮定）	名	$a^2 C_P \le C$、すなわち $C_P \lesssim \xi_{RG}^2$（ξ_{RG} は記帳の長さ。帯の文の上の半分で、すべての試験関数 f についての Poincaré 不等式）	23-01
緩和時間の下界の仮定（短く：下界の仮定）	名	$a^2 C_P \ge c$、すなわち $C_P \gtrsim \xi_{RG}^2$（ξ_{RG} は記帳の長さ。帯の文の下の半分で、試験関数一つで足りる）	23-01
帯の形の拡散型緩和時間の仮定（短く：帯の形の緩和時間の仮定）	名	ある $0<c\le C$ と β_0 で $c\,\xi^2 \le C_P[E] \le C\,\xi^2$（定数倍の幅で揃う帯の文。目盛り E を名指す）	23-01
二重井戸の緩和時間の冪の言明（短く：二重井戸の冪の言明）	名	二重井戸の経路の測度で lim_{ħ→0} ln C_P(ħ)/ln ξ(ħ) = 2（拡散型緩和時間の仮定と同じ形の文を、一段目の測度の族で述べたもの）	23-03
記帳の長さでの緩和時間の帯	仮定	帯の仮定（角度）と、一尺度の鎖・記帳の長さの鎖から従う帯の文 $a^2 C_P \asymp 1$（$a = 1/\xi_{RG}$）	23-01
構成の八つの言明	言明	問題文の要求を、格子から入る道で割った八つの部品の言明（無限体積の一意性・反射正値性の保存・Wilson ループの極限・物理単位の隙間・回転の回復・OS 再構成・非自明性など）	23-01
無限体積の一意性の言明	言明	各 β で体積無限の極限測度が一つに決まる	23-01
反射正値性の保存の言明	言明	正の自己共役な転送作用素、弱極限で保たれる	23-01
Wilson ループの極限の言明	言明	a→0 で繰り込んだ Wilson ループが自明でない極限を持つ	23-01
物理単位の隙間の言明	言明	物理単位の隙間 Δ(β) が β → ∞ で $\Delta_\infty \in (0,\infty)$ に収束すること	23-01
回転の回復の言明	言明	極限で回転と並進の不変性が戻る	23-01
OS 再構成の言明	言明	OS 公理から Hilbert 空間とハミルトニアンを作る	23-01

名前	種別	何を指すか	導入の章
非自明性の言明	言明	極限がガウスでなく短距離で漸近自由と合う	23-01
緩和の鎖	仮定	$\lambda_1 \asymp m^2$（Langevin の隙間と質量の二乗が揃う）	23-01
一尺度の鎖	仮定	$m^2 \asymp \sigma$（質量の二乗と弦張力が揃う）	23-01
記帳の長さの鎖	仮定	$\sigma \asymp a^2$（弦張力と記帳の長さが揃う）	23-01
管の転送作用素の不等式（短く：管の不等式）	仮定	管の転送作用素 $T \le \exp(-(\sigma\ell + c/\ell))$（周長 ℓ の管が張力の分に加えて c/ℓ 以上重い）	23-02
局所化した管の不等式	仮定	短い輪の T・大きな輪の Casimir の床・その間のつなぎ目。三つで $m^2 \ge 4c\sigma$	23-02
尺度の一次元鎖への射影の仮定（短く：射影の仮定）	仮定	状態空間が尺度 $s = \ln \ell$ の一次元の鎖に射影できる（四つの部分 分散の尺度分解〜一本の線の性質）	23-02
取りこぼしの総和可能性の仮定	仮定	一段の取りこぼし $\delta(b_k)$ の和が有限	23-02
時間の刻みの比べの仮定（論文「片側の橋」の (D)）（短く：時間の刻みの比べの仮定）	仮定	時間を刻む格子で $E\lvert dF\rvert^2_G \le c_D\langle\phi,(1-\hat{T})\phi\rangle$（隣の時刻の増分と勾配の比べ、$c_D$ が β に一様）	23-01
基底状態の仮定（論文の (A1)）（短く：基底状態の仮定）	仮定	スペクトルが離散で基底状態が単純で正	23-01
定常な経路の測度の仮定（論文の (A2)）（短く：定常な経路の測度の仮定）	仮定	$T = \infty$ の（時間方向に無限に長い）定常な経路の測度が在ること	23-01
計量の比べの仮定（論文の (A3)）（短く：計量の比べの仮定）	仮定	Langevin の計量の比べ $G \le \lambda_G\, M^{-1}$	23-01
真空の C_P	名	一つの時刻の真空の測度の Poincaré 定数 C_P（三つの C_P の一つ）	23-01
経路の C_P	名	時空の全ての場の分布（経路の測度＝Wilson 測度）の Poincaré 定数 C_P。緩和時間の仮定はこれについての文	23-01
目盛りで測った経路の C_P	名	経路の C_P と同じ測度で、Dirichlet 形式の目盛り（角度で測るか場で測るか）を名指した C_P。目盛りを c 倍すると C_P は 1/c 倍	23-01
片側の橋の命題（論文の定理 3.1）（短く：片側の橋）	命題	連続の時間・有限の空間格子・$T=\infty$ で、基底状態の仮定・定常な経路の測度の仮定・計量の比べの仮定の下に $C_P \ge \kappa\xi^2 = \kappa\hbar^2/\Delta^2$（時刻に局所な試験関数の族で最良）	23-01
時間を刻む片側の橋の命題	命題	刻み 1 の時間の格子で、時間の刻みの比べの仮定の下に $C_P \ge 2/(c_D\,\Delta^2)$	23-01
一次元の片側の橋の命題	命題	連続の時間・$T\to\infty$ のどの一次元の井戸でも、時刻に局所な試験関数の族の天井は ξ^2、よって $C_P \ge \xi^2$（$R \ge 1$）	23-04
円の上の自由な粒子の反例	命題	円の上の自由な粒子では隙間 $\Delta = \hbar^2/2 > 0$ なのに経路の測度の $C_P = \infty$（逆向きの否定）	23-01

名前	種別	何を指すか	導入の章
二重井戸の緩和時間の上界の命題（短く：一段目の上界の命題）	命題	二重井戸の経路の測度で二重井戸の四条件と前提の行の下に $C_P \le K\xi^2 S_0/\hbar$、したがって $1 \le R \le K'/\hbar$ で冪の文が従う	23-03
六節点の相内 Poincaré の命題	命題	$V=(x^2-1)^2/8$・$\varepsilon=1/2$・環 $N=12n$ の相の測度 $\mu^{(+)}$ で、六つの節点の $\hbar$ の各点で $\mathrm{Var}\, f \le C\, E(f)$、$C \le 1.6\times 10^{10}$（数値の入力なら 658）、$n$ に依らない	23-06
箱への帰着の命題	命題	$c_{alt} < 1$ なら $C_P \le (1+1/n)\, C_{box}/(1-c_{alt})$（重なる箱の偶奇の二族、Poincaré 不等式だけ）	23-05
箱の中の隙間の命題	命題	箱の中をキンクの配置で割り、$C_{box} \le C_{loc} + (1+\chi)C_{kg} \le K_4(C\xi)^2/D$	23-05
芯の定数の三区分の命題	命題	芯の Poincaré 定数を芯の長さ k で三つに分けて押さえる：$k \le 7$ は凸性、$8 \le k \le 14$ は二つのブロック、$k \ge 15$ は箱の帰着を芯に当てる（長い芯の箱の帰着の不等式）	23-11
二つの射影の補題	補題	二つの σ-代数の最大相関 $c < 1$ なら $\mathrm{Var}\, f \le (1-c)^{-1}(E\,\mathrm{Var}(f\|G_1) + E\,\mathrm{Var}(f\|G_2))$	23-05
短い芯の凸性の補題	補題	$\kappa(k) > 0$（$k \le 7$）なら全ての端の値と $\hbar$ で $C_P(\mu_{k^\wedge}\{\alpha,\beta\}) \le \varepsilon/\kappa(k)$	23-11
端への縮約の補題	補題	Markov 鎖では離れた二つの塊の最大相関が向かい合う端の二点の最大相関に等しい	23-11
二つのブロックの補題	補題	$8 \le k \le 14$ の芯を二つのブロックに分けて C_P を押さえる	23-11
交互の最大相関の閉じた式	命題	片の内の相関 t・継ぎ目の相関 s の定常なガウスの鎖で、偶の片と奇の片の最大相関が $\phi(\|s\|,\|t\|)$（閉じた式）	23-11
長い芯の箱の帰着の不等式	命題	長さ $k \ge 15$ の芯に、箱への帰着の命題の箱の帰着を当てて得る芯の Poincaré 定数の不等式	23-11
傾けの二次 Taylor の補題	補題	端の値の箱の中心の測度を傾け、キュムラント母関数の二次の Taylor 展開と Hölder の剰余で箱の全体を押さえる	23-06
隙間の非単調の命題	命題	FKG は尤度比の順序を与えるが、一サイトの隙間は隣の値について単調にならない	23-06
一次分数の補題	補題	$h = g - g^*$ と置き $\beta = \beta_0 + \tau$ で、期待値を τ の一次分数にする	23-08
傾けた囲いの補題	補題	段の写像の不動点の囲いを $m_k - \tau\mu_k - \tau^2\nu_k$ の形で τ について傾けて持つ	23-08
動く中心の補題	補題	分散の上界の二つの片側の中心を $c_\tau = c + \tau\kappa$ と τ とともに動かす	23-08
スカラーの筋の命題	命題	$\hbar \in [3\cdot 10^{-4}, 10^{-3}]$ の 8 節点で、凸な底に Bakry–Émery、頂上の帯を Gibbs の段で払い、芯の Poincaré 定数を押さえる（条件は $\ln k < \ell_{帯}$）	23-09

名前	種別	何を指すか	導入の章
窓の対数 Sobolev の積の上界	命題	サイトの窓の対数 Sobolev 定数を因子の積 A_W ≤ c_W C_1D^W S_W T_W で上から押さえる組み立て	23-07
窓の対数 Sobolev の閾の命題	命題	サイトの窓の対数 Sobolev 定数が要る値の内：A_W < A_max(ħ)	23-09
窓の周辺の対数 Sobolev の入力	仮定	窓の周辺の対数 Sobolev 不等式 Ent(E[g^2|σ_W]) ≤ A_W E(g) + D_W ∫ g^2	23-09
粗い鎖の Dobrushin の定理（論文の定理 CC）（短く：粗い鎖の Dobrushin の定理）	論文の名	両端が井戸の中の芯で、粗い鎖の Dobrushin の判定から芯の Poincaré 定数が一様に押さえられる（ħ ∈ [10^{-5},1] は 239 区間の区間演算で ρ_col ≤ 0.400）	23-05
小さい ħ の粗い鎖の命題（論文の命題 PIN）（短く：小さい ħ の粗い鎖の命題）	論文の名	小さい ħ（ħ ≤ 10^{-5}）で、粗い鎖の Dobrushin の係数が ρ_col ≤ 0.874 に収まること（粗い鎖の Dobrushin の定理の小さい ħ の側）	23-05
粗い鎖の Brascamp–Lieb の命題（論文の命題 BLc）（短く：粗い鎖の Brascamp–Lieb の命題）	論文の名	Brascamp–Lieb の不等式の粗い鎖の版（粗い鎖の Dobrushin の定理の部品）	23-05
閉じた芯の KKT 点の命題	命題	端の値が箱の下にある場合（a,b ≤ −x_c）に閉じた芯の上の KKT 点が底の角だけ	23-15
二重井戸の四条件	条件	一段目（二重井戸）の上界 C_P ≤ K$ξ^2$$S_0$/ħ を割った四つの条件（相内の局所 Poincaré・鞍点の管・箱への帰着・箱の中の隙間）	23-03
相内の局所 Poincaré の条件	条件	キンクの無い相の測度 $μ^{(+)}$ の Poincaré 定数 C_loc が ħ と経路の長さに一様に O(1)（箱の中では切れ端の局所 Poincaré の仮定）	23-05
鞍点の管の条件	条件	キンクと反キンクの対の族の周りの管で、輸送の定数と管の Poincaré 定数が次元と ħ に一様（箱の中では鞍点の管の Poincaré の仮定と芯の Poincaré の一様性の仮定）	23-05
箱への帰着の条件	条件	C_P(μ) ≤ C_box(L)/c_M、c_M は ξ を単位とした長さだけに依る（全体の緩和時間を長さ L の箱の緩和時間に帰着する）	23-05
箱の中の隙間の条件	条件	長さ Cξ の箱の条件つき測度で 1/C_P ≥ cD/(Cξ)^2、c は ħ と境界の値に一様	23-05
切れ端の局所 Poincaré の仮定	条件	端の値を持つ切れ端（長さ ≤ Cξ）の局所 Poincaré が端の値にも一様	23-05
鞍点の管の Poincaré の仮定	条件	管の Poincaré 定数が管の長さ ≤ Cξ に一様	23-05
芯の Poincaré の一様性の仮定	条件	管の中の芯（頂上の近くにとどまる区間）の Poincaré 定数が芯の長さ k と端の値に一様	23-05
箱の交互の最大相関の仮定	仮定	箱の間の交互の最大相関 c_alt < 1 が ħ と境界の値に一様	23-05
芯の交互の最大相関の仮定	仮定	芯の交互の最大相関 $\bar{c}$ < 1 の上界（k ≥ 15）	23-11
芯の作用の障壁の仮定	仮定	芯と窓の C_P ≤ c ħ^(−p) e^(ΔS/ħ)、障壁 ΔS < 2S_0	23-11

名前	種別	何を指すか	導入の章
キンクの気体の隙間の仮定	仮定	縮約したキンクの気体の箱の隙間が一次元 Ising の Glauber の型（C_kg ≤ (Cξ)²/(c_kg(1−η_KG)D)）	23-05
交差項の一様性の仮定	仮定	交差項 E_Y(E[f|Y]) ≤ (1+χ)E(f)、χ が ħ と境界の値に一様	23-05
キンクの拡散係数の行	表の行	キンク一本の移動度 D = ħ/S_0（過程の水準）	23-05
橋の体積の局所性の入力	仮定	橋の上の体積の局所性	23-09
継ぎ目の極限の仮定	仮定	段を限りなく重ねた極限が各 ħ で不動点の囲いに入る	23-07
端の値が分布で与えられる仮定	仮定	外の鎖の端の値が一点でなく分布で与えられる場合にも、継ぎ目の評価が成り立つという仮定	23-07
台地で条件づけた比	仮定	環の継ぎ目（頂上の台地）で、台地の長さで条件づけて測った比	23-07
窓の外の鎖の縮みの行	表の行	q_free ≤ 0.998854904（橋の芯の窓の外の鎖の縮み、ħ の窓の全体）	23-07
区画の入力の小さな仮定	仮定	区画の枠組みに入力として要る十一の小さな仮定の一覧（橋の体積の局所性の入力・芯の対数 Sobolev の一様性の仮定・縦の項・正則性ほか。七つは中身の一行が未記）	23-07
余白の行	表の行	二尺度の組み立ての一つ目の行：粗い側の余白 $\hbar\rho - 2\hbar\kappa \ge 0.067$（隣と端の値 $[0,2.5]^2$ で）	23-06
最近接の鎖の行	表の行	二尺度の組み立ての行：残したサイトの周辺の測度が最近接の鎖であること	23-06
二つのサイトの隙間の行	表の行	二尺度の組み立ての行：二つのサイト (x_4, x_8) の周辺の測度の隙間 $\lambda_c \ge 1.3 \times 10^{-4}$（端の値 $[0,4]^2 \cdot \hbar \in (0, 0.2]$）	23-06
交差の行	表の行	二尺度の組み立ての行：二つの尺度の間の交差の強さ v/ħ ≤ 5888	23-06
分散の分解の行	表の行	二尺度の組み立ての最後の行：分散を残したサイトと残りに分けて、ほかの行を一つの Poincaré 定数に組む式	23-06
格子の目標の水準	条件	目標の第一の水準：各 β で格子の相関長 ξ(β) が有限で、β → ∞ で発散すること	23-15
物理単位の目標の水準	条件	格子の物理単位の質量 m_lat/a が正の有限値に向かう	23-15
連続の目標の水準	条件	目標の第三の水準：R^4 の上の非自明な連続の理論で隙間が正であること	23-15
節点の間の残件	条件	相内の局所 Poincaré の条件を閉じるのに残る行：六つの節点の間の ħ	23-06
小さい ħ の残件	条件	相内の局所 Poincaré の条件を閉じるのに残る行：ħ < 0.005 の側（区間を刻む計算機援用では無限個の区間が要る）	23-06

名前	種別	何を指すか	導入の章
大きい端の値の残件	条件	相内の局所 Poincaré の条件を閉じるのに残る行：隣と端の値が 2.5 を超える場合	23-06
定数の鋭さの残件	条件	相内の局所 Poincaré の条件を閉じるのに残る行：定数 $C \le 1.6\times10^{10}$ を鋭くすること	23-06
切れ端の版の残件	条件	相内の局所 Poincaré の条件を閉じるのに残る行：端の値を持つ切れ端の版（切れ端の局所 Poincaré の仮定）	23-06
書誌の残件	条件	相内の局所 Poincaré の条件を閉じるのに残る行：引いた定理の書誌の確認	23-06
区画の和	段	区画の枠組みの一つ目の段：配位の空間を箱の直積に割っても、Dirichlet 形式・分散・エントロピーが区画ごとの和に分かれること	23-09
Gibbs の分解	段	区画の枠組みの二つ目の段：Gibbs の変分不等式で、稀な集合の上の重みを粗い変数の周辺のエントロピーで払う	23-09
成分ごとの局所化	段	区画の枠組みの三つ目の段：勾配の成分ごとに、サイトの窓の周辺の対数 Sobolev 定数を当てて、和に芯の長さ k を入れない	23-09
体積の局所性	段	区画の枠組みの四つ目の段：欠陥の集合の稀さの指数 ℓ_min が芯の長さ k に依らないこと	23-09
区画の合成	段	区画の枠組みの五つ目の段：Barta・成分ごとの局所化・Bochner の三つの不等式を組み、閉じる条件の下で芯の隙間を k に依らず押さえる	23-09
一様なラプラス法の定量版	条件	一段目の井戸の中の局所 Poincaré と、$\hbar\to0$ の余白の帰着	23-15
仮定を揃える段	段	一段目の上界の命題の証明の最初の段：前提の行を揃える	23-05
箱へ帰着する段	段	一段目の上界の命題の証明の段：箱への帰着の命題で、全体を長さ $C\xi$ の箱に帰着する	23-05
箱の中の段	段	一段目の上界の命題の証明の段：箱の中の隙間をキンクの配置で割って押さえる	23-05
合成の段	段	一段目の上界の命題の証明の段：箱への帰着と箱の中の隙間を合成して $C_P \le K\xi^2 S_0/\hbar$ を得る	23-05
比を挟む段	段	一段目の上界の命題の証明の段：比 $R = C_P/\xi^2$ を $1 \le R \le K'/\hbar$ と挟む	23-05
冪を読む段	段	一段目の上界の命題の証明の最後の段：挟んだ比から冪の文 $\ln C_P/\ln \xi \to 2$ を読む	23-05
短い芯の段	段	芯の定数の三区分の一つ目：長さ $k \le 7$ の芯を凸性で押さえる	23-11
中くらいの芯の段	段	芯の定数の三区分の二つ目：長さ $8 \le k \le 14$ の芯を二つのブロックに分けて押さえる	23-11

名前	種別	何を指すか	導入の章
長い芯の段	段	芯の定数の三区分の三つ目：長さ k ≥ 15 の芯に箱の帰着を当てる	23-11
鞍点の管の七つの道筋	道筋	鞍点の管の条件の芯の行を閉じるために立てた七つの道筋	23-07
窓の外の鎖の道筋	道筋	窓の外の鎖の縮み（橋の芯の q_free < 1、機）	23-07
窓の定数の数値の道筋	道筋	残る数値（サイトの窓の定数の区間化）	23-07
区画の枠組みの道筋	道筋	区画の枠組み（五つの段と閉じる条件）	23-07
区画の入力の道筋	道筋	小さな仮定（区画の入力の一覧）	23-07
窓の対数 Sobolev の道筋	道筋	残る一命題（窓の対数 Sobolev の閾の命題）を三本の筋で攻める道筋	23-07
環の継ぎ目の道筋	道筋	環の継ぎ目（外の鎖と内の鎖）	23-07
ħ の範囲の道筋	道筋	ħ の範囲（窓の外と ħ→0、対象の外）	23-07
成分ごとの筋	道筋	窓の対数 Sobolev の道筋の一本目：勾配の成分ごとの形（要る値の 1.4〜5.5 倍で止まる）	23-09
スカラーの筋	道筋	窓の対数 Sobolev の道筋の二本目：スカラーの形（スカラーの筋の命題）	23-09
Feynman–Kac の筋	道筋	窓の対数 Sobolev の道筋の三本目：Feynman–Kac の形（Monte Carlo の読み）	23-09
箱の側の芯の道	道筋	分かれ道（芯の Poincaré の一様性の仮定）を箱の側の芯で支える道：芯の定数の三区分の命題と、局所の項が ħ→0 で消えること	23-15
区画の側の芯の道	道筋	分かれ道（芯の Poincaré の一様性の仮定）を区画の側の芯で支える道：区画の枠組みの芯の隙間の一様な下界と継ぎ目の極限の仮定	23-15
ブロックと混合の道	道筋	ブロック（ℓ_B ≥ 12）の対数 Sobolev 不等式と強い混合で、分かれ道（芯の Poincaré の一様性の仮定）を支える第三の枝（23-15 の表 C1 の十四の行）	23-15
頂上の曲率の型	型	迂回策の壊れ方の型：源は一つ ― 頂上の一サイトの曲率	23-10
構造の因子の天井の型	型	迂回策の壊れ方の型：比で入る構造の因子には天井がある	23-10
二度払いの型	型	迂回策の壊れ方の型：同じ場所を二度払っていた	23-10
通貨の取り違えの型	型	迂回策の壊れ方の型：通貨の取り違え ― 出口の速さと稀さ	23-10
1/ħ の住所の型	型	迂回策の壊れ方の型：1/ħ の住所（1/ħ の因子がどこから入るかの取り違え）	23-10
揺れの向きのずれの型	型	迂回策の壊れ方の型：揺れの向きと柔らかい向きのずれ	23-10

名前	種別	何を指すか	導入の章
移しかえの型	型	迂回策の壊れ方の型：移しかえ ― 重さは別の列へ移るだけ	23-10
壊れ方の七つの型	表の行	迂回策が壊れた理由を七つに分類した型。新しい候補に当てる問いとして使う	23-10
迂回策「負の曲率の局所化」（短く：負の曲率の局所化）	迂回策	Bochner の負の曲率を欠陥の集合に局所化	23-10
迂回策「Gibbs の傾きの最適化」（短く：Gibbs の傾きの最適化）	迂回策	Gibbs の傾きを $t^*=\ell-5.10$ に	23-10
迂回策「閾の引き上げ」（短く：閾の引き上げ）	迂回策	閾を $1/\sqrt{3}$ に上げ局所化の残りを 0 に	23-10
迂回策「欠陥の深さの層分け」（短く：欠陥の深さの層分け）	迂回策	欠陥の深さ b を層に分ける	23-10
迂回策「欠陥の集合の絞り込み」（短く：欠陥の集合の絞り込み）	迂回策	欠陥の集合を行が κ を下回る集合に絞る	23-10
迂回策「長い塊の欠陥」（短く：長い塊の欠陥）	迂回策	欠陥を長さ 8 以上の塊で定める	23-10
迂回策「頂上の帯の払い」（短く：頂上の帯の払い）	迂回策	頂上の帯を欠陥に払う	23-10
迂回策「スカラーの払い」（短く：スカラーの払い）	迂回策	区画の欠陥をスカラーの形で払う	23-10
迂回策「非線形の Barta の重み」（短く：非線形の Barta の重み）	迂回策	Barta の重みを非線形に	23-10
迂回策「Agmon の型の払い」（短く：Agmon の型の払い）	迂回策	真の固有関数の勾配だけで払う（Agmon の型）	23-10
迂回策「下流の洗い直し」（短く：下流の洗い直し）	迂回策	下流で要るものを洗い直す	23-10
迂回策「粗い段と伝播の段の一括」（短く：粗い段と伝播の段の一括）	迂回策	粗い段と伝播の段を一度に	23-10
迂回策「関数の不等式の取り替え」（短く：関数の不等式の取り替え）	迂回策	対数 Sobolev でなく Poincaré／修正 LSI／Φ-エントロピー	23-10
迂回策「塊を固定した対数 Sobolev」（短く：塊を固定した対数 Sobolev）	迂回策	塊の状態を固定した条件つき測度の対数 Sobolev	23-10
迂回策「頂上の帯だけの摂動」（短く：頂上の帯だけの摂動）	迂回策	窓の外に Bakry–Émery、頂上の帯だけ Holley–Stroock	23-10
迂回策「既知の一様な対数 Sobolev」（短く：既知の一様な対数 Sobolev）	迂回策	一次元の一様な対数 Sobolev の既知の定理	23-10

名前	種別	何を指すか	導入の章
迂回策「有限体積の判定」（短く：有限体積の判定）	迂回策	有限体積の判定（Martinelli–Olivieri・Lu–Yau）	23-10
迂回策「Glauber の対数 Sobolev」（短く：Glauber の対数 Sobolev）	迂回策	Glauber 力学の既知の対数 Sobolev	23-10
迂回策「二段の塊展開」（短く：二段の塊展開）	迂回策	二段の塊展開・ブロックスピン	23-10
迂回策「古典の極限への延長」（短く：古典の極限への延長）	迂回策	ħ を窓の下へ（古典の極限）	23-10
迂回策「一・二サイトの窓」（短く：一・二サイトの窓）	迂回策	窓を一・二サイトに	23-10
迂回策「塊の芯の局所化」（短く：塊の芯の局所化）	迂回策	窓でなく塊の芯で局所化	23-10
迂回策「Hölder と超縮小の段」（短く：Hölder と超縮小の段）	迂回策	Gibbs の段を Hölder と超縮小に	23-10
迂回策「高さの関数の払い」（短く：高さの関数の払い）	迂回策	負の曲率を高さの関数で払う	23-10
迂回策の一覧	表の行	窓の対数 Sobolev の道筋の残る一命題の両辺または形を動かした二十四の迂回策	23-10
強結合の曲率の道	表の行	曲率の方法の効く β を広げる（強結合の側）	23-02
一段の記帳の道	表の行	連続極限を一段の列として記帳する	23-02
取りこぼしの和の道	表の行	取りこぼし δ(b) の和は有限か	23-02
強結合の級数の道	表の行	強結合の級数から動的な冪 η が読めるか	23-02
完全な族の次元の道	表の行	辺・面の完全な族はどの次元で在るか	23-02
次元の境目の道	表の行	なぜ四次元が境目か	23-02
反射正値性の道	表の行	反射正値性を下からの評価に使う	23-02
記帳の面積則の道	表の行	記帳の中に面積則の形が出るか	23-02
多リンク積分の道	表の行	k リンク積分の閉形は解析的か	23-02
投稿の欠陥との比べの道	表の行	構成を主張する投稿の欠陥は δ と同じ量か	23-02

名前	種別	何を指すか	導入の章
多重尺度の曲率の道	表の行	曲率の方法を尺度ごとに重ねる	23-02
体積と境界の道	表の行	C_P の評価は体積と境界条件に一様か	23-02
下界の試験関数の道	表の行	下界の仮定を与える試験関数は在るか	23-02
ゲージ固定の長波長の道	表の行	ゲージ固定した長波長モードを一価に作れるか	23-02
分光の道	表の行	平滑化した演算子と分光で隙間を押さえる	23-02
一尺度の下の半分の道	表の行	一尺度の下の半分 $m^2 \gtrsim \sigma$ を作る	23-02
尺度の一次元鎖の道	表の行	上界の仮定を尺度の一次元鎖で挟む	23-02
四次元格子で試した十七の道	表の行	四次元格子で試した十七の道（一つの問いと一組の道具の組）	23-02
試験関数の片側の壁	壁	試験関数は C_P を下からしか押さえない	23-02
分光の上界の壁	壁	分光は隙間の上界で終わる	23-02
局所演算子の次元の壁	壁	局所ゲージ不変演算子は次元 4 以上で η_s=2	23-02
ゲージ固定の一価性の壁	壁	ゲージ固定：鋭ければ多価、鈍ければ長波長が消える	23-02
測定の費用の壁	壁	均した演算子の分子を測る費用 ≥ cL^{d+2}	23-02
正の重みの核の壁	壁	δ(2)=0 の核は隣の重みが負	23-02
更新形の級数の壁	壁	強結合の級数は更新形で η=0 を強制	23-02
一段きりの積分の壁	壁	完全な族の一リンク積分は一段きり	23-02
極限の性質の壁	壁	Wilson ループの極限の言明・回転の回復の言明は一段の写像の合成からは出ない	23-02
上界の道具の壁	壁	上界の仮定の型の道具が無い（交差項で止まる）	23-02
管の不等式の壁	壁	$m^2 \gtrsim \sigma$ は管の不等式に移ったが証明の型が無い	23-02
射影の仮定の壁	壁	射影の仮定は緩和時間の仮定より弱くない	23-02
検査の道具の壁	壁	機械検査の道具に乏しい	23-02
仮定そのものの壁	壁	緩和時間の仮定と三つの鎖は証明されていない	23-02
同値の足場の壁	壁	物理単位の隙間の言明の同値の足場（冪の形・η≥0・加法的な段の誤差・一ループ核の δ）	23-02
周期境界の予想の壁	壁	周期境界での上界の仮定の破れは予想に依る	23-02
当てはめの壁	壁	$m/\sqrt{\sigma}$ の破れが $O(a^2)$ なのは当てはめ	23-02

名前	種別	何を指すか	導入の章
箱の大きさの壁	壁	箱が小さい	23-02
取りこぼしのゲージ依存の壁	壁	c_2 のゲージの取り方による違い	23-02
管の模型の符号の壁	壁	管の模型の 1/P の係数の符号が未決	23-02
一次資料の壁	壁	一次資料の欠け	23-02
原理の壁	型	壁の五つの型の一つ：不等式の向きから出て、道具の細部に依らない壁	23-02
構造の壁	型	壁の五つの型の一つ：選んだ族・記帳・級数の中で要求が両立しない壁（族の外は未決）	23-02
道具の壁	型	壁の五つの型の一つ：要る種類の道具がまだ無い壁	23-02
仮定の壁	型	壁の五つの型の一つ：拠っている仮定そのものが証明されていない、または予想に依る壁	23-02
測定と文献の壁	型	壁の五つの型の一つ：測れる大きさと一次資料の欠けから来る壁	23-02
問い「k=3 胞体の完全な族」（短く：k=3 胞体の完全な族）	問い	$k=3$ 胞体の完全な族は $d=9$ で在るか	23-17
問い「完全な族が在る最大の次元」（短く：完全な族が在る最大の次元）	問い	完全な族が在る最大の次元 $d_{\max}(k)$	23-17
問い「Hermite の族の定数」（短く：Hermite の族の定数）	問い	Hermite の族の 1 − λ_k の定数を求める問い	23-17
問い「森の上の比の SU(N) 版」（短く：森の上の比の SU(N) 版）	問い	森の上の関数の比が $1/\lambda_1(G)$ で頭打ちになることの $SU(N)$ 版と Lean の言明	23-17
問い「二次元格子の C_P(β)」（短く：二次元格子の C_P(β)）	問い	二次元格子 YM のリンク変数での $C_P(\beta)$	23-17
問い「一リンク積分の後の曲率」（短く：一リンク積分の後の曲率）	問い	一リンク積分の後の曲率の最良の定数 $c^* \in [21, 27]$	23-17
問い「柱の模型の N^{−3} の係数」（短く：柱の模型の N^{−3} の係数）	問い	柱の模型の N^{-3} の係数 $C \approx 320$ を解析的に（XX 鎖の有限サイズ展開）	23-17
問い「柱の模型の 1/P の符号」（短く：柱の模型の 1/P の符号）	問い	柱の模型で、有限の u の $1/P$ の符号	23-17
問い「取りこぼしのゲージ依存」（短く：取りこぼしのゲージ依存）	問い	取りこぼし c_2 はブロック変換のゲージの取り方でどれだけ変わるか	23-17
問い「O(3) σ 模型の C_P と ξ²」（短く：O(3) σ 模型の C_P と ξ²）	問い	二次元 $O(3)$ σ 模型の C_P と ξ^2	23-17

名前	種別	何を指すか	導入の章
問い「三次元 Z_2 ゲージの C_P/ξ²」（短く：三次元 Z_2 ゲージの C_P/ξ²）	問い	三次元 $\mathbb{Z}_2$ ゲージ理論の C_P/ξ^2	23-17
問い「C_P(V) の体積単調性」（短く：C_P(V) の体積単調性）	問い	$C_P(V)$ の体積単調性と境界条件（小さな格子で生成作用素の固有値を全て求める）	23-17
問い「四次元 SU(2) の動的指数」（短く：四次元 SU(2) の動的指数）	問い	四次元 $SU(2)$ の局所の算法の動的指数の一次資料を集める	23-17
問い「芯の最大相関の区間演算」（短く：芯の最大相関の区間演算）	問い	中くらいの芯（$8 \le k \le 14$）の二点の最大相関を区間演算で上から押さえる問い	23-17
問い「芯と窓の前因子の冪」（短く：芯と窓の前因子の冪）	問い	芯と窓の C_P の前因子 $\hbar^{-p}$ の冪を、縮退点の容量で読む	23-17
問い「箱の交互の最大相関の比較」（短く：箱の交互の最大相関の比較）	問い	箱の間の交互の最大相関 $c_{\mathrm{alt}} < 1$ を、二点の量に縮まない例を避けて示す比較の定理	23-17
問い「保存を壊す項の長さ」（短く：保存を壊す項の長さ）	問い	保存のある力学に保存を壊す小さな項を足したとき、隙間が一辺の二乗の振る舞いから離れる長さを問う	23-17
共通の前提の行	表の行	T=∞ の測度の一意性・Markov 性・局所関数からの延長・極限の段・正則性（共通の前提）	23-11
区間演算の前提の行	表の行	区間演算の前提：IEEE 754 の四則の正しい丸め・和の誤差・自前の指数関数の誤差	23-07
頂上の曲率の不足の壁	表の行	23-07 の表 4 の行：頂上の一サイトの曲率が 1/4 足りないこと（三本の筋に共通の壁）	23-07
芯の下界の行	表の行	23-07 の表 4 の行：芯の隙間の一様な下界	23-07
区画の枠組みの行	表の行	23-07 の表 4 の行：区画の枠組み（五つの段と閉じる条件）	23-07
小さな仮定の行	表の行	23-07 の表 4 の行：区画の入力の道筋の小さな仮定	23-07
窓の対数 Sobolev の閾の行	表の行	23-07 の表 4 の行：残る一命題（窓の対数 Sobolev の閾の命題）	23-07
代理の比の持ち上げの仮定	表の行	スカラーの筋の命題の持ち上げの仮定（代理の比を測った範囲の外へ線形に持ち上げる）	23-09
箱の積の不等式の行	表の行	箱の積の不等式（Efron–Stein の型）	23-05
相関長の伸び方の行	表の行	ln ξ ≥ s/ħ（ξ ∝ ħ^{1/2} e^{S_0/ħ}）の読み	23-05
キンクの作用の行	表の行	23-04 の表 3 の行：キンク一本の作用 S_0（零モードの行と組）	23-04

名前	種別	何を指すか	導入の章
零モードの行	表の行	23-04 の表 3 の行：キンクの並進の零モード（キンクの作用の行と組）	23-04
次の固有値の行	表の行	23-04 の表 3 の行：キンクのまわりの揺らぎの作用素の次の固有値 3/4	23-04
箱の力学の命題（Martinelli の講義の命題 3.4・3.5）（短く：箱の力学の命題）	文献の名	箱の力学（離散のスピンで全体の隙間を箱の力学と箱の中の隙間で押さえる型）	23-05
分散の分割の補題（Menz–Schlichting の補題 2.4）（短く：分散の分割の補題）	文献の名	分散の分割の式（Eyring–Kramers の Poincaré 版の骨組み）	23-05
Helffer の判定の Poincaré 版（Ledoux の命題 3.1）（短く：Helffer の判定の Poincaré 版）	文献の名	Helffer の判定の Poincaré 版（Bobkov–Ledoux 2000 の命題 3.1 も同じ番号で引く）	23-06
Bochner の公式の積分形（Ledoux の命題 1.3）（短く：Bochner の公式の積分形）	文献の名	Bochner の公式を積分した恒等式（区画の合成で、勾配の Dirichlet 形式を曲率で押さえるのに使う）	23-09
Holley–Stroock の摂動の補題（Ledoux の命題 6.1）（短く：Holley–Stroock の摂動の補題）	文献の名	凸な作用との差の振れ幅で Poincaré 定数を摂動する補題（Holley–Stroock の型）	23-06
単一の界面の拡散の定理（Bertini–Brassesco–Buttà の定理 2.1）（短く：単一の界面の拡散の定理）	文献の名	単一の界面の拡散係数	23-04
二ブロックの Gibbs 標本化の率の定理（Roberts–Sahu の定理 5）（短く：二ブロックの Gibbs 標本化の率の定理）	文献の名	二ブロックの Gibbs 標本化の収束の率	23-11
格子の相関長の問題（Chatterjee の Problem 5.1）（短く：格子の相関長の問題）	文献の名	Chatterjee の問題 5.1：各 β で格子の相関長 ξ(β) が有限で、β → ∞ で ξ(β) → ∞ となること	23-01・16-07
連続の弦張力の問題（Chatterjee の Problem 5.2）（短く：連続の弦張力の問題）	文献の名	Chatterjee の問題 5.2：格子間隔を選んだ Wilson ループの連続極限で、弦張力 d が 0 でないこと	23-01・16-07
角度の目盛り	名	リンクの角度で測った Dirichlet 形	23-01
場の目盛り	名	場 A = √β ϑ で測った Dirichlet 形	23-01
取りこぼしの溜まりの指数	名	取りこぼしが溜まる速さの指数 θ（aξ ∝ a^θ）	23-01
一段の傾き（記号のまま）	名	一段の傾き $\kappa = 4Nb_0 = 11/(3\pi^2)$	23-02
一段の取りこぼし（記号のまま）	名	一段の取りこぼし。c_2/b^2 で消える	23-02
記帳の長さ	名	格子を粗くする段の数 k(β) で決めた長さ ξ_RG = b^{k(β)}。格子間隔を a := 1/ξ_RG と置く	23-01

名前	種別	何を指すか	導入の章
帯の冪	名	a^2C_P が a の冪 a^p で振る舞うときの指数 p（p = 0 が帯の文）	23-01
芯の対数 Sobolev の一様性の仮定	条件	芯の対数 Sobolev 定数が一様に押さえられること	23-09
上の側の目標の行	表の行	23-04 の表 3 の行：上の側の目標 $C_P \le K\xi^2 S_0/\hbar$（一段目の上界の命題の結論の形）	23-04
キンクの拡散係数の数値の行	表の行	23-04 の表 3 の行：キンクの拡散係数の数値 $D/(\hbar/S_0) = 1.00〜1.14$	23-04
相関長の半古典の主項の行	表の行	23-04 の表 3 の行：相関長 ξ の半古典の主項（$\xi \propto \hbar^{1/2} e^{S_0/\hbar}$）	23-04
格子の ln ξ の行	表の行	23-04 の表 3 の行：格子の ln ξ の数値と格子のキンクの作用 S_0^lat	23-04
R の下界の伸びの行	表の行	23-04 の表 3 の行：比 $R = C_P/\xi^2$ の下界が 1.06 から 6.5 へ伸びること	23-04
希薄な気体の勘定の行	表の行	23-04 の表 3 の行：キンクを希薄な気体として数えた勘定 $C_P \approx \xi^2 S_0/\hbar$	23-04
帯の比の行	表の行	23-04 の表 3 の行：磁化に直交する成分との比が 1 に近づくこと	23-04
Glauber の固有値の行	表の行	23-04 の表 3 の行：Glauber の固有値が全状態のスペクトルに現れること	23-04
凸な芯の曲率の行	表の行	23-04 の表 3 の行：凸な芯で $C_P \le 2/(3a^2-1)$	23-04
探索した出発点の最大で足りる仮定	仮定	Monte Carlo で探索した出発点の上の最大で足りるという仮定（ファイバー全体の上界ではない）	23-09
Barta の行の仮定	表の行	区画の合成に使う Barta の行の不等式（欠陥の外での下界 κ = 3/1000・欠陥の深さ b = 493/1000）の仮定	23-09
固有関数の正則性の仮定	表の行	区画の合成に使う、Bochner の境界の項が消えることと固有関数の正則性の仮定	23-09

第 24 部 一本目の道（後半）

名前	種別	何を指すか	導入の章
局所の拡散型緩和時間の仮定（短く：局所の緩和時間の仮定）	名	台を物差し ℓ の c 倍の窓に限った局所の Poincaré 定数 C_P^loc(c) が ℓ^2 と同じ冪（上側は C_P^loc(c) $\le K(c)\ell^2$）。比の形 K_{rel} で述べる	24-03
区画ごとの拡散型緩和時間の仮定（短く：区画ごとの緩和時間の仮定）	名	位相の区画（電荷の値）ごとに条件づけた測度で拡散型緩和時間の仮定を述べる文（区画の Poincaré 定数 C_P^sec(n)）	24-03

名前	種別	何を指すか	導入の章
局所の励起のモーメントの仮定	仮定	空間の箱に台を持つ局所の観測量のスペクトル測度のモーメント比 $M_3/M_1 \le m_\infty^2 + \gamma/(c\ell)^2$	24-04
四次元の箱の交互の最大相関の仮定	仮定	四次元の閉じた箱の族の間の交互の最大相関が 1 未満で、β に一様であること	24-03
四次元の閉じた箱の隙間の仮定	仮定	四次元の閉じた箱で、箱の緩和時間が C_box(cξ_RG) ≤ K′ξ_RG² となること（ξ_RG は記帳の長さ）	24-03
無限体積の基底状態変換の恒等式	仮定	時間を連続に取った格子の基底状態変換の恒等式（隙間と真空の測度の関係）が、無限体積でも成り立つという仮定	24-04
窓の因子の単調性の命題	命題	$g(x) = \phi(x)/x^2$（$\phi(x) = 1 - (1-e^{-x})/x$）は $x > 0$ で狭義減少（窓の因子は減る）	24-04
窓の中の上限の命題	命題	片側の橋の仮定と正準の目盛りの下で、重みの台を窓 [0,T] に限った時刻に局所な族の上限を超越方程式の根で閉じた形に書く	24-04
隙間と真空の測度の命題	命題	時間を連続に取った格子で、隙間は一つの時刻の真空の測度の Poincaré 定数とちょうど逆数で結ばれる（基底状態変換）	24-05
電場と磁場の分け方の frustration の命題	命題	電場と磁場への分け方では Kogut–Susskind のハミルトニアンは frustration-free でない	24-05
局所の Poincaré 定数の性質の命題	命題	局所の Poincaré 定数 C_P^loc(c) は窓の周辺の法則だけで決まり、D_c は稠密でなく、c について単調で $c \to \infty$ で C_P に戻る	24-03
区画の Poincaré 定数の命題	命題	区画の Poincaré 定数 C_P^sec(n) は区画が連結なら有限で、分散が区画の中と区画の間に分かれ、C_trans で挟める	24-03
群の上の凸性の天井の補題（短く：凸性の天井の補題）	補題	閉じた多様体の上の測度では Bakry–Émery の曲率の下限に天井がある	24-06
単位元に集まれない系	系	SU(2) では凸な測度は単位元に集まれない	24-06
一リンクの Wilson の重みの命題	命題	一リンクの Wilson の重みの凸性の範囲（弱結合で凸でない所が確率の小さい所に押し込まれる）	24-06
局所の凸性の規則	規則	稀さで払う測度の類の規則の候補の一つ：良い集合の上で測度が局所に凸であること	24-06
悪い集合の稀さの規則	規則	稀さで払う測度の類の規則の候補の一つ：凸でない悪い集合が稀であること	24-06
戻る漂流の規則	規則	稀さで払う測度の類の規則の候補の一つ：悪い集合から良い集合へ戻る漂流があること	24-06
エントロピーの払いの規則	規則	稀さで払う測度の類の規則の候補の一つ：悪い集合の稀さをエントロピーの不等式で払うこと	24-06
粗視化で閉じる規則	規則	稀さで払う測度の類の規則の候補の一つ：粗視化した変数の上で評価が閉じること	24-06

名前	種別	何を指すか	導入の章
無次元の結合という源	問い	難しさの源の一つ：結合が無次元で全ての尺度が同じ重さで効き、無限個の段を段数に一様に制御せねばならないこと	24-07
尺度をつなぐ展開の欠如	問い	難しさの源の一つ：紫外と赤外をつなぐ展開が無いこと	24-07
大域のゲージ固定の欠如	問い	難しさの源の一つ：非可換のゲージ不変性のため、連続な大域のゲージ固定が無いこと	24-07
難しさの三つの源	問い	四次元のヤン–ミルズの難しさの三つの源（無次元の結合・尺度をつなぐ展開の欠如・大域のゲージ固定の欠如）	24-07
尺度の公理化の規則	表の行	24-08 の表 2 の規則の候補：尺度を公理として扱う（尺度の公理化）	24-08
ループの代数の規則	表の行	24-08 の表 2 の規則の候補：Wilson ループの代数の規則	24-08
保存量と区画の規則	表の行	24-08 の表 2 の規則の候補：保存量と、保存量で分けた区画の規則	24-08
稀さの類の規則	表の行	24-08 の表 2 の規則の候補：稀さで払う測度の類	24-08
漸近自由の公理の規則	表の行	24-08 の表 2 の規則の候補：漸近自由を公理として置く規則	24-08
曲率の規則	表の行	24-08 の表 2 の規則の候補：ゲージ軌道の空間の上の Bakry–Émery の曲率の規則	24-08
問い「自由場の局所励起の比べ」（短く：自由場の局所励起の比べ）	問い	自由場で局所の励起のエネルギーを比べる問い	24-08
問い「窓の因子の単調性の問い」（短く：窓の因子の単調性の問い）	問い	窓の因子 $\phi(x)/x^2$ の単調性を問う問い	24-08
問い「Polyakov ループの符号の問い」（短く：Polyakov ループの符号の問い）	問い	小さな周期の箱の Polyakov ループの符号で、静的な比が緩和の遅さを捕まえるかを問う	24-08
問い「二次元の層の U(1) の隙間」（短く：二次元の層の U(1) の隙間）	問い	二次元の層の U(1) で、帯を伸ばしたときの隙間を問う	24-08
問い「位相電荷の自己相関の資料」（短く：位相電荷の自己相関の資料）	問い	SU(2) の位相電荷の自己相関の一次資料を集める問い	24-08
問い「二つの射影の補題の多族版」（短く：二つの射影の補題の多族版）	問い	二つの射影の補題の多族版（d 次元の箱の 2^d 色の族）と、その最大相関の条件を問う	24-08
問い「一リンクの重みの Hessian」（短く：一リンクの重みの Hessian）	問い	一リンクの Wilson の重みを熱核と一段畳み込んだときの Hessian と、類の母数の写り方を問う	24-08

名前	種別	何を指すか	導入の章
問い「転送作用素での刻みの比べ」（短く：転送作用素での刻みの比べ）	問い	Wilson の転送作用素で、時間の刻みの比べの仮定が成り立つかを問う	24-08
問い「τ_int と C_P の Lean」（短く：τ_int と C_P の Lean）	問い	τ_int ≤ C_P と基底状態変換の恒等式を Lean で書く問い	24-08
問い「CP^{N−1} のモードの読み直し」（短く：CP^{N−1} のモードの読み直し）	問い	CP^{N−1} 模型の局所のモードと位相のモードを読み直す問い	24-08
問い「二次元 SU(2) のループの族」（短く：二次元 SU(2) のループの族）	問い	二次元 SU(2) のループの族の λ_W・Γ を求める問い	24-08
問い「四次元の大きいループの値」（短く：四次元の大きいループの値）	問い	四次元の箱の大きいループの族の値を求める問い	24-08
問い「キンクの位置への還元」（短く：キンクの位置への還元）	問い	二重井戸の問題をキンクの位置の力学へ還元する問い	24-08
問い「帯の β=7 の一点」（短く：帯の β=7 の一点）	問い	帯の β = 7 の一点を測る問い	24-08
問い「閾と 1 の間の帯の質量」（短く：閾と 1 の間の帯の質量）	問い	閾と 1 の間の帯で、質量を見る別の議論を作る問い	24-08
問い「時間を刻む格子の窓の橋」（短く：時間を刻む格子の窓の橋）	問い	時間を刻む格子で、窓の中の上限の命題（窓の橋）の版を作る問い	24-08
問い「区画の分け方の frustration-free」（短く：区画の分け方の frustration-free）	問い	Kogut–Susskind のハミルトニアンの区画の分け方が frustration-free になるかを問う	24-08
問い「CP^{N−1} の試験台の拡張」（短く：CP^{N−1} の試験台の拡張）	問い	CP^{N−1} の試験台に種と N を足して広げる問い	24-08
問い「部分領域の電荷の保存の長さ」（短く：部分領域の電荷の保存の長さ）	問い	四次元の部分領域の電荷で測ったとき、保存が壊れる長さを問う	24-08
ほぼ保存される大域の量の型	型	隙間に映らない大域の量が、相関長とは別の長さで緩和を遅くする型（量の分散が大きい・Dirichlet 形式が小さい・隙間に映らない、の三つの条件）	24-01
赤外の漸近自由の命題（BBS の命題 6.1.7）（短く：赤外の漸近自由の命題）	文献の名	大きな場の重みのノルムの一段の評価・赤外の漸近自由	24-06
共分散の圧縮の補題（Hairer–Stuart–Voss–Wiberg の補題 2.2）（短く：共分散の圧縮の補題）	文献の名	部分空間に圧縮した共分散の作用素ノルムの表示	24-03

第 25 部 二本目の道 — 空間の方向から

名前	種別	何を指すか	導入の章
証明の五つの手順	名	板の閉じ込めの定理の証明の五つの段	25-04
面を動かす補題	補題	リンクを含む全てのプラケットの符号を反転しても分配関数は変わらず、面 Π_q は動かせ、分配関数は面の数の偶奇だけで決まる	25-01
区画と流束の自由エネルギーの定義	名	ΔF = ln(Z(0)/Z(1))、θ = tanh(ΔF/2) の定義	25-01
偏りの偶奇表示	命題	θ = E[(−1)^|Q|]（捩れの和のアンサンブルの面の数の偶奇の期待値）	25-01
作用零の配位の補題	補題	S^z=0 ⟺ 全てのプラケットで U_p = z_p·1	25-01
一周の交換子の符号の補題	補題	プラケットが全て中心の値なら、二方向の一周の holonomy の交換子はその平面の符号の積	25-01
holonomy による決定の補題	補題	中心の値の配位は基点の四つの holonomy でゲージを除いて決まる	25-01
捩れを食う配位の補題	補題	U^0 は区画 (1,0) で作用 0（$\Omega_1\Omega_2\Omega_1^{-1}\Omega_2^{-1} = -1$）	25-01
反可換の対の剛性の補題	補題	$ABA^{-1}B^{-1} = -1$ の対は $i\sigma_1$, $i\sigma_2$ に共役で、両方と可換な元は ± 1 だけ	25-01
捩れた真空の一意性	命題	区画 (1,0) の作用 0 の配位はゲージと平面の方向の中心の変換を除いて U^0 ただ一つ	25-01
捩れた随伴のギャップの補題	命題	U^0 のまわりの随伴の Laplacian の最小固有値は $4\sin^2(\pi/2N) > 0$（零モードが無い）	25-01
捩れた区画の最小作用の正値性	命題	区画 (1,1) に作用 0 の配位は無く、$0 < S_{\min} \le 2N^2$	25-01
分数インスタントンによる閉じ込めの下界（論文 3 の定理 A）（短く：分数インスタントンによる閉じ込めの下界）	定理	固定した N ≥ 2・ℓ ≥ 2・β ≥ 1 で −ln θ ≥ c β^{−a} e^{−β(S_*+ε(β))} M²（分数インスタントンの作用で流束の自由エネルギーを下から押さえる）	25-02
Nahm 変換による存在の筋	命題	Nahm 変換の同変性を仮定して、捩れた $T^2\times R^2$ 上の荷電 1/2 の自己双対解の存在を出す筋	25-02
容器の恒等式	補題	枠を止めると容器は独立になり、|⟨W⟩| ≤ E_Φ[∏ θ_j]、θ_j = tanh(|ΔF_j|/2)	25-03
σ_avg(ℓ)	名	一辺 ℓ の容器で敷き詰めたとき、容器の恒等式（枠の平均）から出る二次元 SU(2) の弦の張力の評価	25-03
内側と外側の容器の命題	命題	ループの内側と外側に容器を置けば、固定した区画の Wilson ループが容器の偏りの積と外側の項で押さえられる	25-03
平面の方向の入れ子の不等式	命題	大きな容器の偏りは内側の枠で分けた小さな容器の偏りの積の平均で押さえられる	25-03

名前	種別	何を指すか	導入の章
太い容器の自由エネルギーの形の仮定（Kovács–Tomboulis の (23)）（短く：太い容器の自由エネルギーの形の仮定）	文献の名	太い容器の自由エネルギーが境界の値に一様に |V| e^{−cd²} の形	25-03
板の閉じ込めの定理	定理	N と格子間隔を止めれば全ての β で |⟨½tr U_C⟩| ≤ tanh(βN²)^A、σ ≥ −ln tanh(βN²)	25-04
有限の配位空間の条件	条件	挿入の恒等式の三条件の一つ：配位の空間 X が有限集合であること	25-05
正の重みの条件	条件	挿入の恒等式の三条件の一つ：重み $w : X \to (0,\infty)$ が正であること	25-05
区画を反転する全単射の条件	条件	挿入の恒等式の三条件の一つ：区画の符号 $\sigma : X \to \{\pm 1\}$ を反転する全単射 $T : X \to X$ が在ること（$\sigma(Tx) = -\sigma(x)$）	25-05
容器の中だけを動かす核	条件	駆動した挿入の条件：核が容器の内側の変数だけを更新し、枠を変えないこと	25-06
挿入比の平均の恒等式	補題	E[ρ] = 1、E[ρσ] = −E[σ]	25-05
挿入比の揺らぎによる偏りの評価	定理	4E[σ]² ≤ Var(ρ⃗)	25-05
有界な挿入の恒等式	補題	対合 τ と奇な H について E[H] = E[H tanh(ΔS/2)]	25-05
挿入の揺らぎの関係式	補題	P(ΔS=s) = e^s P(ΔS=−s)、E[t] ≥ 0、1−E[t] は受理率の 2 倍	25-05
位置で平均した挿入の評価	定理	位置について平均した tanh の因子の積で |E[H]| を押さえる	25-05
平方根の挿入の恒等式	補題	E[H √ρ] = 0	25-05
Paley–Zygmund の形の偏りの評価	定理	E[H]² ≤ 1 − E[Y]²/E[Y²]、E[Y²] ≤ 1	25-05
多数の細胞の二次モーメントの評価	定理	「挿入で奇」の下で 4^|C| E[H]² ≤ E[∏(1−r_c)²]	25-05
合成した挿入の奇性の仮定	仮定	全ての S ⊆ C で E[H ∏_{c∈S} r_c] = (−1)^|S| E[H]	25-05
Crooks の関係	補題	経路の対合 ι で重みの比が e^{−W}、W∘ι = −W	25-06
駆動した挿入の恒等式	定理	E[H] = E_Ω[H tanh(W/2)]	25-06
Jarzynski の等式	系	E[e^{−W} | Φ, σ=+] = Z₋/Z₊	25-06
駆動した挿入の受理率の系	系	1 − E[tanh(W/2)] = 2 × Barker 型の受理率	25-06
多数の細胞の駆動した評価	定理	多数の細胞で駆動した挿入の |tanh(W/2)| の位置平均の積で押さえる	25-06
切った測度の公式	命題	Z_±/Z_cut = E_cut[e^{±βX/2}]、θ = |E sinh|/E cosh	25-06
反転の確率の補題	定理	定常な核で一歩の反転の確率 ≤ 1 − θ²	25-06
正の核の反転の確率の系	系	可逆で正の核なら (1−θ²)/2	25-06

名前	種別	何を指すか	導入の章
流れの補題	定理	定常な核の一歩の反転の確率 a について θ ≤ 1 − a	25-06
同時の反転の評価	定理	E∏θ_t ≤ P(どの容器も反転しない)	25-06
輸送の恒等式	命題	ΔF = E+[S∘T − S − ln J_T] − KL（輸送の恒等式・Gibbs の変分原理）	25-07
等長的な写像の損失の命題	命題	揺らぎについて等長的な写像の損失は ½Σ(λ−1−ln λ) で自由度で薄まらない	25-07
揺らぎの整形の命題	命題	行列式 1 の写像の最適値は (n/2)(r^{1/n}−1)、損失 ≤ (ΔF²/n)e^{2|ΔF|/n}	25-07
スピンの項の一次の消失の命題	命題	スピンの項は一次のトレースに現れない（一ループの水準）	25-07
等長と整形の比較の命題	命題	(a) 等長的な比較は β′ ≥ β+0.023、(b) 整形する比較は β−β′ = 0.258	25-07
相対エントロピーによる面積則の障害	命題	余りの KL ≥ c'A なら変分から面積則は出ない	25-07
容器ごとの相対エントロピーの加法性	命題	容器ごとの積の写像なら余りの KL は容器ごとの和	25-07

第 26 部 移り変わりの帯

名前	種別	何を指すか	導入の章
隠れた凸性の命題	命題	箱 [−c,0]^l の上で作用は局所的な極小をちょうど一つ持ち、それは大域的	26-07
跳躍の段	名	条件つきの還元の定理の証明の一つ目の段：枠の減相関と小さな T² の基点から、横広げの不等式で最初の偏りに跳ぶ	26-02
倍化の段	名	条件つきの還元の定理の証明の二つ目の段：一段ごとに容器と横の T² を倍にして、偏りが t_{k+1} ≤ K t_k⁴ を満たすことを示す	26-02
反復の段	名	条件つきの還元の定理の証明の三つ目の段：t_{k+1} ≤ K t_k⁴ を反復して、偏りが面積の指数で小さくなることを出す	26-02
素朴な形の張力の下界	命題	帯の素朴な形 θ ≤ θ_0 から容器の評価で出る張力の下界 ln(1/θ_0)/L² は 0 へ	26-01
面積の指数からの面積則	命題	θ ≤ e^{−cL²} なら |⟨W⟩| ≤ C_D e^{−cA}	26-01
Tomboulis–Yaffe からの張力の下界	系	Tomboulis–Yaffe の下で F_v ≤ e^{−ρ L_μ L_v} なら張力 ≥ ρ	26-01
帯の素朴な形	名	帯の素朴な形：区画の偏りが尺度に一様に 1 から離れていること（sup θ(L,L) ≤ θ_0 < 1）。これからは容器の評価で張力の正の下界が出ない	26-01
帯の正しい形	名	帯の正しい形：区画の偏りが面積の指数で小さくなること（ln(1/θ(L,L)) ≥ cL²）	26-01

名前	種別	何を指すか	導入の章
非閉じ込め相の排除	条件	帯への途中の到達点の一つ：渦の自由エネルギー $F_v(L,L)$ が 0 に向かうこと（閉じ込めない相を除く）	26-01
ほぼ面積則	条件	帯への途中の到達点の一つ：$\ln(1/\theta) \geq cL^2/\ln L$（面積の指数に対数の損まで）	26-01
小さな T^2 の基点	仮定	還元の定理の仮定の一つ：ある物理的な尺度 L_0 で、小さな T^2 の上の区画の偏りが $\theta(L_0;T^2_{L_0}) \leq 1-\varepsilon_0$ であること	26-02
枠の減相関	仮定	還元の定理の仮定の一つ：容器を s 倍にすると偏りが定数の違いを除いて s^2 乗になる（$\theta(sR;T^2_L) \leq C_D\,\theta(R;T^2_L)^{s^2}$）こと	26-02
横広げの不等式（強い形）	仮定	還元の定理の仮定の一つ：容器を止めて横の T^2 を L'/L 倍に広げても、偏りは高々 $C(L'/L)^2$ 倍にしかならないこと	26-02
横広げの不等式（弱い形）	仮定	横広げの不等式を、横を二倍にする一段ごとに $\ln(1/\theta)$ の割合 ε_k（総和が有限）と定数を失ってよい形に弱めたもの	26-02
条件つきの還元の定理	定理	小さな T^2 の基点・枠の減相関・横広げの不等式（強い形）の下で $\ln(1/\theta(R_k,R_k)) \geq \gamma R_k^2$（面積の指数で偏りが小さくなる）	26-02
弱い形での還元の定理	定理	枠の減相関と弱い形と基点の大きさの条件の下で $u_k \geq \gamma' R_k^2$	26-02
板の張力の単調性の命題	命題	横広げの不等式（強い形）が成り立てば、実効の張力 σ_{eff} は L について減らない（強い形が閉じ込めより強いことの根拠）	26-02
チェス盤の密度で読んだ還元	系	チェス盤の密度 κ_{cb} で読めば、入れ子の定数 1 で同じ還元が通る（チェス盤の密度の基点と横の比較の下）	26-02
チェス盤の密度の基点	仮定	小さな T^2 の基点をチェス盤の密度で読んだ仮定：$\kappa_{cb}(L_0;L_0) \leq 1-\varepsilon_0$	26-02
チェス盤の密度の横の比較	仮定	横広げの不等式（強い形）をチェス盤の密度で読んだ仮定：$\kappa_{cb}(R;L') \leq C(L'/L)^2\,\kappa_{cb}(R;L)$	26-02
基点の読み替えの不等式	条件	基点の偏りとチェス盤の密度をつなぐ一行：$1-\kappa_{cb}(L_0;L_0) \geq \eta(1-\theta(L_0;L_0))$	26-02
流束の一様化の補題	補題	$\int_\Omega f^2 \geq \Phi^2/\lvert\Omega\rvert$、等号は定数のとき（Cauchy–Schwarz）	26-03
還元の対偶の命題	命題	還元の定理の結論が偽なら三つの仮定のどれかが偽（対偶）	26-03
電場の流束の分解の補題	補題	$Z(1,0) = Y(0)+Y(1)$、$Z(1,1) = Y(0)-Y(1)$、$\theta = Y(1)/Y(0) \geq 0$	26-04
捩れた分配関数の正値性の仮定	仮定	捩れた分配関数 $Z(1,1)$ が 0 以上（Boltzmann の重みの正値性）	26-04

名前	種別	何を指すか	導入の章
tanh の比較の補題	補題	$F' \le KF$（$K \ge 1$）なら $\tanh(F'/2) \le K \tanh(F/2)$	26-04
z の鏡映正値性の定理（短く：z の鏡映正値性）	定理	捩れを固定した z のアンサンブルは方向 3・4 の格子点を通る鏡映で正値（27-02 の条件の台帳の行「z の鏡映正値性」も、この定理を指す）	26-04・27-02
横向きの鏡映の非正値の補題	補題	捩れた面の重みは半整数の j で負の係数で、横向きの鏡映は正の型でない	26-04
構造の入力だけでは足りない補題	補題	構造の入力の組 ⊠ は Z_2・U(1) でも成り立つので、それだけからは横広げの不等式は出ない	26-04
構造の入力の組	名	転送行列の正値性・中心と双対の恒等式・鏡映正値性・格子の対称性・有限の補題の組	26-04
薄い渦の床	名	板の閉じ込めの床まで届く強い形：$\theta \le \tanh(N^2\lvert\beta\rvert)^{M^2}$	26-04
チェス盤の評価（Fröhlich–Israel–Lieb–Simon）（短く：チェス盤の評価）	文献の名	鏡映正値な測度で $\lvert\langle\prod f_t\rangle\rvert \le \prod\langle\prod f_{t^{(s)}}\rangle^{1/\lvert T\rvert}$	26-05
横を止めたチェス盤の評価	系	$E\prod_{t\in S}\theta_t \le \kappa_{cb}^{\lvert S\rvert}$、$\lvert\langle W\rangle\rvert \le \kappa_{cb}^{n}$	26-05
入れ子の超乗法性の補題	補題	$\kappa_{cb}(sR;L) \le \kappa_{cb}(R;L)^{s^2}$（定数 1、全ての L）	26-05
$\kappa_{cvx}(k)$	名	長さ k の鎖の頂上での凸性の定数（23-11 の短い芯の凸性の補題の $\kappa(k)$）	26-07
β 単調性	条件	格子の幾何を止めて $\partial_\beta \Delta F \ge 0$	26-06
繰り込みの比較	条件	$\Delta F(2N,2M,\beta) \le K\cdot\Delta F(N,M,\beta')$、$\beta' < \beta$	26-06
繰り込みの比較の率の形	名	$\sigma_N(\beta)$、$s(N,\beta) = N^2\sigma_N(\beta)$、率の形 $s(N,\beta') \le s(2N,\beta)$	26-06
強結合の端の展開の命題	命題	$u \le u_0 \approx 10^{-80}$ で $\Delta F = 2N^2\, e^{-\sigma_N M^2}(1+\varepsilon)$	26-06
強結合の端の比較	系	強結合の端で $\sigma_N(\beta') = 4\sigma_{2N}(\beta)$ と選べば $\Delta F(2N,2M,\beta)/\Delta F(N,M,\beta') = 4(1+O(u))$	26-06
帯の中の両側の面積則の仮定	仮定	帯 I の上で、固定した β の両側の面積則（周長の次数の誤差つき）と、率の一様な正値と連続性を合わせた仮定	26-06
固定した β の両側の面積則	仮定	帯 I の各 β で、渦の自由エネルギーが面積の率 $\sigma_N(\beta)$ で上下から押さえられる（周長の次数の誤差つき）という仮定	26-06
率の一様な正値と連続性	仮定	率 $\sigma_N(\beta)$ が帯の上で一様に正で、β について一様に連続（近い β どうしで $\sigma_N(\beta') \le \sigma_{2N}(\beta) + \sigma_*$）という仮定	26-06
帯の中の比較の還元の補題	補題	帯の中の両側の面積則の仮定の下で、帯の中の繰り込みの比較が定数 K で立つ	26-06
有限の段数で帯を渡る系	系	帯は $\lceil(\beta_b - \beta_a)/\delta\rceil$ 段で渡れ、損失は N・M に依らない	26-06

名前	種別	何を指すか	導入の章
基準「U(1) の転移と区別する」	条件	U(1) の帯の中の転移と区別して SU(2) に転移が無いことを示す	26-06
張力の倍化の不等式	条件	4σ_{2N}(β) ≥ e^{δ₀}σ_N(β)（全ての N ≥ N₁）：箱を倍にしたときの張力の比が一様に 1 を超えること	26-06
捩れの向きの柔らかさ	名	真ん中の帯の四つの顔の一つ：幅 w の帯の中で、捩れの生成場に沿った力の分散（適応した剛性）	26-06
箱の磁束の混合	名	真ん中の帯の四つの顔の一つ：箱の境界の中心の磁束を変えたときの、内側の立方体の法則の全変動距離	26-06
柱の捩れのコスト	名	真ん中の帯の四つの顔の一つ：外枠を止めた柱 $\mathrm{T}^2_N \times \ell \times \ell$ の、捩れの条件つきの自由エネルギーと偏り	26-06
圧力の余裕	名	真ん中の帯の四つの顔の一つ：捩れの模様を入れた系と入れない系の圧力の差 $p_\infty - p_{G,L}$（チェス盤の密度 κ_{cb} の指数）	26-06
補間母数の共通性の不等式（Ito–Seiler の (3.5)）（短く：補間母数の共通性の不等式）	文献の名	Migdal–Kadanoff の補間の母数 t* が二つの区画で共通に取れることを、A(α) > A⁺(α) に帰着させた不等式	26-06
候補「帯のコンパクト性による還元」（短く：帯のコンパクト性による還元）	名	帯の候補の一つ：帯は β の有界な閉区間なので、帯の中の比較を各 β での固定した β の両側の面積則に還元し、有限回の段で渡る	26-10
候補「Weyl の測度の対数凹性」（短く：Weyl の測度の対数凹性）	名	帯の候補の一つ：球面の一様な測度を一つの座標に射影した密度の対数凹性と、高さ・方位の分解で、条件つきの強磁性の模型に持ち込む	26-10
候補「柱の局所の階段関数」（短く：柱の局所の階段関数）	名	帯の候補の一つ：大域の繰り込みの比較を、外枠を止めた柱の捩れの自由エネルギーの比較（柱の局所の階段関数）に置き換える	26-10
候補「符号の打ち消しとしての閉じ込め」（短く：符号の打ち消しとしての閉じ込め）	名	帯の候補の一つ：捩れの和を取った測度で θ = E[tanh(X/2)] と書き、X の符号の打ち消しで偏りが小さくなるとみる	26-10
候補「中心だけの影響係数」（短く：中心だけの影響係数）	名	帯の候補の一つ：外を SO(3) の部分だけで条件づけ、境界の中心の流束だけを裏返したときの影響係数 $\delta_c(L_0, \beta)$	26-10
候補「単極子の流れによる流束の拡散」（短く：単極子の流れによる流束の拡散）	名	帯の候補の一つ：平面ごとの符号の流束が、間を横切る $\mathbb{Z}_2$ の単極子の閉曲線の偶奇で変わることから、単極子の巻きの密度で流束が混ざるとみる	26-10
候補「自己双対の座標の行列式」（短く：自己双対の座標の行列式）	名	帯の候補の一つ：各区画で、測度を反自己双対の部分への押し出しと見たときの Jacobian の、区画の間の差を見る	26-10
候補「板の 1-形式対称性の定量版」（短く：板の 1-形式対称性の定量版）	名	帯の候補の一つ：板の閉じ込めを「二次元で離散の 1-形式対称性は破れない」の格子版と読み、その定量版を N に一様にする	26-10

名前	種別	何を指すか	導入の章
止まった道「等長的な比較」（短く：等長的な比較）	表の行	帯の章で止まった道：揺らぎの形を変えない等長的な比較（一ループのスピンの項が 0 になり、反漸近自由の向きしか出ない）	26-08
止まった道「構造的な入力だけ」（短く：構造的な入力だけ）	表の行	帯の章で止まった道：鏡映正値性・双対性・転送行列・中心の恒等式の構造的な入力だけで示す（$\mathbb{Z}_2$ と U(1) でも成り立ち群を区別できない）	26-08
止まった道「決定論的な挟み撃ち」（短く：決定論的な挟み撃ち）	表の行	帯の章で止まった道：決定論的な写像による挟み撃ちで面積則を出す（余りの相対エントロピーが面積とともに増える）	26-08
止まった道「ガラスの挟み撃ち」（短く：ガラスの挟み撃ち）	表の行	帯の章で止まった道：帯の上半分での $\mathbb{Z}_2$ のガラスの挟み撃ち（$\beta \gtrsim 2$ ではガラスが秩序相の側にあり挟みが緩い）	26-08
止まった道「反転の証明書」（短く：反転の証明書）	表の行	帯の章で止まった道：容器の反転の証明書と同時の反転を帯の試験に使う（反転の確率が 1/2 程度で頭打ちになり、弱い形しか出ない）	26-08
止まった道「枠の上限の評価」（短く：枠の上限の評価）	表の行	帯の章で止まった道：枠の上限を使う評価（L について超指数的に悪くなり、一様性には枠の平均の形しか使えない）	26-08
止まった道「Dobrushin 型の判定」（短く：Dobrushin 型の判定）	表の行	帯の章で止まった道：Dobrushin・Dobrushin–Shlosman・van den Berg–Maes の判定を枠つきで使う（連続な場が境界に追随し影響係数がほぼ 1）	26-08
止まった道「β 単調性を易しい部品に」（短く：β 単調性を易しい部品に）	表の行	帯の章で止まった道：β 単調性を易しい部品として、帯を β 単調性と繰り込みの比較に分ける（β 単調性は張力の単調性と同じ重さだった）	26-08
止まった道「一方向の横広げ」（短く：一方向の横広げ）	表の行	帯の章で止まった道：横広げを一方向だけに限る（高温の空間的な弦の張力の振る舞いから怪しく、正方形の形だけに限る）	26-08
止まった道「Wilson flow の輸送」（短く：Wilson flow の輸送）	表の行	帯の章で止まった道：Wilson flow を渦の挿入の輸送に使う（数値で否定的。前向きの輸送に直す形は開いている）	26-08
止まった道「共形な枠」（短く：共形な枠）	表の行	帯の章で止まった道：共形な枠 $H^2 \times S^2$ で尺度を位置に変える（双曲的な入れ子で容器の数が増えず、核心は同じ場所に残る）	26-08
止まった道「強結合の展開だけ」（短く：強結合の展開だけ）	表の行	帯の章で止まった道：強結合の展開だけで帯を覆う（平らな面の展開は粗面化 $\beta_R \approx 1.9$ で止まる）	26-08
ホロノミーの Haar への接近	表の行	言い換えにすぎなかった着想：大きなループのホロノミーの法則が Haar 測度に近づくこと（奇な部分の減衰は Wilson の面積則そのもの）	26-08
中心と θ 項のアノマリー	表の行	言い換えにすぎなかった着想：中心と θ 項の混合アノマリーの整合（運動学的な制約で、$\theta = 0$ では何も強制しない）	26-08

名前	種別	何を指すか	導入の章
階層模型での成功	表の行	言い換えにすぎなかった着想：階層模型（Migdal–Kadanoff の間引きが正確な模型）での成功を帯の証拠にすること（U(N) も閉じ込めるので検査にならない）	26-08
基準「格子だけで立つ」（短く：格子だけで立つ）	条件	帯を渡る道具が満たすべき基準：格子だけで成り立ち、回転不変性に頼らないこと	26-08
基準「相を区別する」（短く：相を区別する）	条件	帯を渡る道具が満たすべき基準：相を区別すること（質量の無い相で破れるか、極限の値が違う）	26-08
基準「正値性に頼らない」（短く：正値性に頼らない）	条件	帯を渡る道具が満たすべき基準：正値性・FKG に頼らないこと	26-08
基準「非可換性を本質的に使う」（短く：非可換性を本質的に使う）	条件	帯を渡る道具が満たすべき基準：非可換性を本質的に使うこと（U(1)・$\mathbb{Z}_2$ で同じ議論が通らない）	26-08
基準「漸近自由と両立する」（短く：漸近自由と両立する）	条件	帯を渡る道具が満たすべき基準：漸近自由と両立すること	26-08
基準「位相的な区画を扱える」（短く：位相的な区画を扱える）	条件	帯を渡る道具が満たすべき基準：位相的な区画（捩れ）を扱えること	26-08
基準「一ループの言い換えでない」（短く：一ループの言い換えでない）	条件	帯を渡る道具が満たすべき基準：一ループの言い換えでない非摂動の評価であること	26-08
基準「力学的である」（短く：力学的である）	条件	帯を渡る道具が満たすべき基準：運動学的な制約でなく、力学的な議論であること	26-08
基準「凸でない領域を通れる」（短く：凸でない領域を通れる）	条件	帯を渡る道具が満たすべき基準：凸でない（負の曲率の）領域を通れること。凸性・対数凹性・曲率の下界だけの道具は帯で使えない	26-08
基準「最小の帯を渡れる」（短く：最小の帯を渡れる）	条件	帯を渡る道具が満たすべき基準：二次元の漸近自由な模型（大きな N の O(N) 模型など）の最小の帯を、紫外の切断を外したまま先に渡れること	26-08
基準「小さなループで破れない」（短く：小さなループで破れない）	条件	帯を渡る道具が満たすべき基準：小さなループ（短い尺度）で破れないこと、あるいは大きなループだけを主張する形であること	26-08
基準「線形化が非等長的」（短く：線形化が非等長的）	条件	帯を渡る道具が満たすべき基準：比較の写像の線形化が、揺らぎについて等長的でないこと	26-08

第 27 部 閉じる — 条件つきの言明

名前	種別	何を指すか	導入の章
固定した平面での逆向きの評価（論文 3 の定理 B）（短く：固定した平面での逆向きの評価）	定理	分数インスタントンの格子の論文の、固定した M での逆向きの評価（張力の上からの評価）	27-01
倍化の反復の定理	定理	$\theta(2R_k;T^2_{R_k}) \le K_1\theta^4$ と横広げ (s=2) の下で $\theta(R_k;T^2_{R_k}) \le K^{-1/3}\exp(-cR_k^2)$	27-01

名前	種別	何を指すか	導入の章
挿入の一様な受理	表の行	条件つきの言明の仮定の一つ：小さな場の枠の下で、力学で駆動した渦の挿入の tanh(W/2) の平均が格子間隔に一様に 1 − δ 以下であること	27-01
枠の減相関（L を固定した形）	表の行	条件つきの言明の仮定の一つ：容器の枠どうしの相関が減り、E∏θ を各 θ の積に定数の損で分けられること（L を固定した形）	27-01
ブロック観測量の減衰（L を固定した形）	表の行	条件つきの言明の仮定の一つ：ブロック観測量の相関が a に一様な率 $m \geq c/L$ で指数的に減ること（小さな T^2 の上の理論が置く形）	27-01
横広げの不等式	表の行	条件つきの言明の仮定の一つ：容器を固定して横の T^2 を s 倍に広げても θ は高々 Cs^2 倍（強い形）、または損失の総和が有限な形（弱い形）	27-01
一様な板の張力	表の行	条件つきの言明の仮定の一つ：板 $T_L^2 \times \mathbb{R}^2$ の弦の張力 $\sigma_{\mathrm{eff}}(L)$ が L に一様に正であること	27-01
一様な板のギャップ	表の行	条件つきの言明の仮定の一つ：ブロック観測量の相関が格子間隔と板の大きさ L に一様に指数で減ること（R^4 のギャップの矢印の前提）	27-01
R^4 への極限	表の行	条件つきの言明の仮定の一つ：無限体積の極限・OS の公理・回転不変性の回復・極限の一意性・非自明性（台帳の外）	27-01
二本の道の結び	表の行	条件つきの言明の仮定の一つ：ギャップの道と閉じ込めの道が、同じ R^4 の理論の上で両方の結論を与えること（台帳の外）	27-01
小さな T^2 の上の理論	名	R^2 × 小さな捩れた T^2 の上で格子間隔を 0 にした理論	27-01
R^4 の上の理論	名	R^4 の上の理論（小さな T^2 の上の理論の T^2 を広げた先）	27-01
小さな T^2 のギャップの矢印	条件	紫外の制御とブロック観測量の減衰（L を固定した形）から、小さな T^2 の上の理論の存在とギャップ m ≥ c/L を出す矢印	27-01
R^4 のギャップの矢印	条件	小さな T^2 のギャップの矢印・一様な板のギャップ・R^4 への極限から、R^4 のギャップを出す矢印	27-01
板の閉じ込めの矢印	条件	格子間隔と N を固定した板の閉じ込めの矢印	27-01
分数インスタントンの率の矢印	条件	分数インスタントンによる閉じ込めの下界から、流束の自由エネルギーの率を出す矢印	27-01
小さな T^2 の面積則の矢印	条件	紫外の制御と挿入の一様な受理から、小さな T^2 の上の理論の面積則を出す矢印	27-01
帯の還元の矢印	条件	基点・枠の減相関・横広げから θ(R;T²_R) ≤ e^{−cR²}	27-01

名前	種別	何を指すか	導入の章
容器の評価から面積則への矢印	条件	還元の形と枠の減相関から L に一様な面積則（容器の評価）	27-01
チェス盤の矢印	条件	T^2 を固定したチェス盤の評価の矢印	27-01
二つの一様性から面積則への矢印	条件	一様な板の張力と一様な板のギャップから面積則を出す矢印	27-01
R^4 の面積則の矢印	条件	容器の評価から面積則への矢印か二つの一様性から面積則への矢印と、R^4 への極限から R^4 の面積則を出す矢印	27-01
二本の道の結びの矢印	条件	同じ R^4 の理論で質量ギャップと閉じ込めの両方	27-01
時間の方向の道の矢印	条件	上界の仮定と片側の橋から各 β で m_phys ≥ (κ/K)^{1/2}	27-01
小さな T^2 のギャップ	表の行	捩れで零モードが消え転送行列の隙間 ≥ c/L が a に一様	27-02
帯の比較（ギャップの言葉）	表の行	箱の中性セクターの最低の質量を箱の大きさで測った $x(L) = L\,m_0(L)$ が、帯の区間で $x(2L) \geq x(L) + \delta$ となること	27-02
ブロック観測量の一様な減衰	表の行	真空期待値 0 のブロック観測量の相関が a と L に依らない率で減る	27-02
't Hooft の張力の正値性	表の行	$\ln(1/\theta(L,L)) \geq cL^2$（c は L に依らない）	27-02
二重井戸の一様なギャップ	表の行	0+1 次元の二重井戸の経路の測度の、k と ħ に一様なギャップ	27-02・A-08
緩和時間の上界と片側の橋の一様性	表の行	拡散型緩和時間の仮定の上側と片側の橋が $\beta \to \infty$ に一様	27-02・A-08
条件の台帳	表の行	質量ギャップと閉じ込めへの条件つきの言明が置く仮定を、一行ずつ示すことと状態で並べた台帳（27-02 の表 2）	27-02
繰り込みの比較の下の端	表の行	繰り込みの比較の内訳：閉じ込めと比較を $\beta \approx 0.3$〜1 まで押し上げる下の端	27-02
繰り込みの比較の上の端	表の行	繰り込みの比較の内訳：固定した N、大きな β での準古典の上の端	27-02
繰り込みの比較の真ん中	表の行	繰り込みの比較の内訳：非可換性を使う不等式が一つ要る真ん中（四つの顔のどれかを尺度に一様に）	27-02
繰り込みの比較の強結合の端	表の行	繰り込みの比較の内訳：$\beta \lesssim 10^{-79}$ の強結合の端（記録では証明があり、定数が粗い）	27-02
繰り込みの比較の一ループの端	表の行	繰り込みの比較の内訳：一ループの水準で、揺らぎを整形した比較は $\beta - \beta' = 0.258$、形を変えない比較は $\beta' \geq \beta + 0.023$	27-02

名前	種別	何を指すか	導入の章
結合の言葉の帯	表の行	帯を結合の言葉で述べる行：時間の両端に一様な背景のホロノミーを置いた箱（Schrödinger 汎関数の箱）の混合微分で書く	27-02
任意の体積への紫外の制御	条件	紫外の制御を任意の体積に示量的な定数で延ばし、源への連続性を格子間隔と体積に一様にしたもの	27-02
R^4 の極限の測度と正値性	表の行	台帳の外の差：R^4 への極限のうち、極限の測度・並進・鏡映正値性の保存・Hilbert 空間と $H \geq 0$	27-02
回転不変性の回復	表の行	台帳の外の差：極限での回転不変性の回復	27-02
局所場と OS の正則性	表の行	台帳の外の差：局所場と OS の正則性・線形増大の条件（Wightman の場）	27-02
極限の一意性と非自明性	表の行	台帳の外の差：極限の一意性・非自明性・クラスター性	27-02
全てのコンパクト単純群（短く：一般の群）	表の行	台帳の外の差：全てのコンパクト単純群へ広げること	27-02
検証と査読	表の行	台帳の外の差：全体の書き下し・Lean・専門家の査読・出版	27-02
挿入の自由エネルギーの有界性	条件	挿入の一様な受理の前提の一つ：挿入の自由エネルギー ΔF が格子間隔に一様に有界であること	27-02
経路の重なりの一様な下界	条件	挿入の一様な受理の前提の一つ：順と逆の経路の重なりが格子間隔に一様に下から押さえられること	27-02
渦の背景のまわりの紫外の制御	条件	小さな T^2 の基点の前提の一つ：定数の曲率の背景のまわりの紫外の制御	27-02
対称の容器での挿入の受理	条件	小さな T^2 の基点の前提の一つ：大きさ L_0 の対称の容器での挿入の一様な受理	27-02
対称の箱の最小作用の上界の補題	補題	対称の箱の最小作用は全ての N で $S_{\min}(N,N) \leq 2N^4(1-\cos(\pi/N^2)) < \pi^2$	27-02
十二の課題	表の行	連続の課題を十二に分けた一覧（T^4 の構成・無限体積・一様なギャップ・残りの公理・非自明性・局所場と短距離など。16-07 の表 1）	27-03
線形増大の条件（Osterwalder–Schrader の公理 E0′）（短く：線形増大の条件）	文献の名	Schwinger 関数の増大を n について制御する条件（OS の公理を Wightman の公理へ戻すために 1975 年に加えられた条件）	27-02
問い「分数インスタントンの下界の逆向き」（短く：分数インスタントンの下界の逆向き）	表の行	分数インスタントンによる閉じ込めの下界の逆向き：固定した N で、M に一様な希薄な気体の上界（張力の上からの評価）を示す問い	27-03
問い「最小作用の一致」（短く：最小作用の一致）	表の行	枠を真空に凍らせた柱の最小作用が、自由な分数インスタントンの最小作用に一致することを示す問い	27-03

名前	種別	何を指すか	導入の章
問い「分数インスタントンの存在」（短く：分数インスタントンの存在）	表の行	捩れた $T^2 \times R^2$ の上で、作用の下限 $4\pi^2/g^2$ を達する位相電荷 1/2 の解の存在を示す問い	27-03
問い「三つの事実の SU(N) 版」（短く：三つの事実の SU(N) 版）	表の行	捩れを食う真空の一意性・随伴の場のギャップ・(1,1) の区画に平坦な配位が無いことの SU(N) 版を示す問い	27-03
問い「外側の容器の偏り」（短く：外側の容器の偏り）	表の行	固定した区画へ移すときの第二項：外側の容器の偏りが典型的に小さいこと（$M \to \infty$ で 0）を示す問い	27-03
問い「容器の自由エネルギーの評価」（短く：容器の自由エネルギーの評価）	表の行	容器の自由エネルギーを、良い枠に一様に、格子間隔に一様に評価する問い	27-03
問い「太い渦の挿入の費用」（短く：太い渦の挿入の費用）	表の行	太い渦の写像で、挿入の費用を N に依らずに押さえる問い（板の閉じ込めの定理の連続極限への改良）	27-03
問い「挿入から面積則への不足」（短く：挿入から面積則への不足）	表の行	挿入の評価から面積則へ足りない三つ（同時に断られる事象の稀さ・受理率の下界の一様性・挿入比の分散の上界）を示す問い	27-03
問い「U(1) の陰性対照」（短く：U(1) の陰性対照）	表の行	挿入の評価を四次元の U(1) に当て、どこで効かなくなるかを確かめる陰性対照の問い	27-03
問い「合成した挿入の奇性」（短く：合成した挿入の奇性）	表の行	別々の細胞の挿入を合成した写像が「挿入で奇」の等式を満たすことを示す問い	27-03
問い「板の閉じ込めの文献照合」（短く：板の閉じ込めの文献照合）	表の行	板の閉じ込めの定理を、Tomboulis–Yaffe 型の議論・高温の空間的な Wilson ループの面積則（Borgs 1985）と照合する問い	27-03
問い「反転の確率が 1 に近い核」（短く：反転の確率が 1 に近い核）	表の行	反転の確率が 1 に近い核を作る問い（一段の核では反転の確率が 1/2 程度で頭打ち）	27-03
問い「準静的の極限」（短く：準静的の極限）	表の行	駆動の段数を無限にしたとき、仕事 W が容器の条件つきの自由エネルギーに近づくことを示す問い	27-03
問い「整形の写像の誤差」（短く：整形の写像の誤差）	表の行	揺らぎを整形する写像の誤差（渦の面の近くの相対エントロピーと高次のループ）を、中程度の結合と大きな場で押さえる問い	27-03
問い「決まった写像の紫外の費用」（短く：決まった写像の紫外の費用）	表の行	決まった写像の紫外の余分の費用が、四次元のゲージ理論でも同じに増えるかを問う	27-03
問い「測定の延長と誤差」（短く：測定の延長と誤差）	表の行	測った T^2 の大きさより先へ広げる測定と、駆動した挿入・レプリカ交換の誤差の評価を求める問い	27-03
問い「横広げの不等式の非摂動の証明」（短く：横広げの不等式の非摂動の証明）	表の行	横広げの不等式を、希薄な領域と閉じ込めの領域の間 $L \sim 1/\Lambda$ を通して非摂動で示す問い	27-03
問い「枠の減相関の一様性」（短く：枠の減相関の一様性）	表の行	枠の減相関を L に一様に示す問い（L を固定すればチェス盤の密度の尺度をまたぐ比較になる）	27-03

名前	種別	何を指すか	導入の章
問い「小さな T^2 の基点の証明」（短く：小さな T^2 の基点の証明）	表の行	小さな T^2 の基点を、紫外の制御と挿入の一様な受理の下で示す問い	27-03
問い「非閉じ込め相の排除の問い」（短く：非閉じ込め相の排除の問い）	表の行	閉じ込めない相の排除 $\Delta F(L,L) \to 0$（速さを問わない）を示す問い	27-03
問い「ほぼ面積則の問い」（短く：ほぼ面積則の問い）	表の行	ほぼ面積則 $\ln(1/\theta(L,L)) \geq cL^2/\ln L$ を示す問い	27-03
問い「β 単調性の問い」（短く：β 単調性の問い）	表の行	格子の幾何を止めて $\partial_\beta \Delta F \geq 0$（β 単調性）を示す問い	27-03
問い「捩れのある板の Z_2・U(1)」（短く：捩れのある板の Z_2・U(1)）	表の行	捩れのある板で、$\mathbb{Z}_2$ と U(1) の β 単調性が Ginibre の不等式から出ないことを照合する問い	27-03
問い「下の端の判定」（短く：下の端の判定）	表の行	箱の磁束の混合による Dobrushin–Shlosman 型の有限の大きさの判定と、面の成長定数の計算機援用の数え上げで、下の端を押し上げる問い	27-03
問い「強結合の端の記帳」（短く：強結合の端の記帳）	表の行	強結合の端の展開の命題の記帳を書き下し、定数 $u_0 \approx 10^{-80}$ を大きくする問い	27-03
問い「真ん中の四つの顔」（短く：真ん中の四つの顔）	表の行	真ん中の四つの顔のどれか一つを、尺度に一様に、U(1) で破れる形で示す問い	27-03
問い「帯の中の両側の面積則の問い」（短く：帯の中の両側の面積則の問い）	表の行	帯の中の各 β で、固定した β の両側の面積則を示す問い（言えれば帯の中の比較は有限個の段に縮む）	27-03
問い「ブロックと混合の道の残り」（短く：ブロックと混合の道の残り）	表の行	一段目のブロックと混合の道の残り（強い混合の第二段・第三段、Varadhan 型の極限・Witten の Morse 理論の照合）を片づける問い	27-03
問い「凸性の閾と混合の長さ」（短く：凸性の閾と混合の長さ）	表の行	一段目で、凸性の閾（頂上の最初の共役点 ≈ 7.84）と混合の長さ（約 9）が数値で近い理由を問う	27-03
問い「最小の帯の試金石」（短く：最小の帯の試金石）	表の行	帯を渡ると称する道具を、二次元の漸近自由な模型で紫外の切断を外したまま先に試す問い	27-03
問い「大きなループの比較原理」（短く：大きなループの比較原理）	表の行	比較原理の、大きなループだけの漸近の形 $\sigma_{tw}(L) \leq \sigma_\infty$ を示す問い	27-03
問い「三つの新しい候補の試験」（短く：三つの新しい候補の試験）	表の行	三つの新しい候補（帯のコンパクト性による還元・Weyl の測度の対数凹性・柱の局所の階段関数）を選別の基準の試験に通す問い	27-03

第 28 部 前提の木

名前	種別	何を指すか	導入の章
箱の連続極限の前提	段	前提の木の組の一つ：大きさを止めた箱で、ブロック写像の鎖が部分列の極限と極限に移る性質を出すための前提（28-04 の表 2）	28-04

名前	種別	何を指すか	導入の章
紫外の安定性の前提	段	前提の木の組の一つ：箱の連続極限の前提の表現の水準の行を、一段ごとの評価から出すための前提（28-04 の表 3）	28-04
自由場の前提	段	前提の木の組の一つ：自由場の絶対の条件。紫外の安定性の前提の自由場の行（伝播関数の挟みなど）への参照で、表に行を立てない	28-04
全列の収束の前提	段	前提の木の組の一つ：合わせた結合の列で、部分列を取らずに全列が収束するための前提（28-04 の表 4）	28-04
観測量の前提	段	前提の木の組の一つ：細かい観測量（流した観測量など）を扱うための前提（28-04 の表 4）	28-04
無限体積の前提	段	前提の木の組の一つ：無限体積の極限を取るための前提（28-04 の表 4）	28-04
回転の前提	段	前提の木の組の一つ：極限で回転不変性を回復するための前提（28-04 の表 4）	28-04
非自明性の前提	段	前提の木の組の一つ：極限が自由場でないことの前提（28-04 の表 4）	28-04
フェルミオンの前提	段	前提の木の組の一つ：フェルミオンを含む理論の前提（28-04 の一覧の範囲の外）	28-04
部分列の極限の含意	道筋	押し出しの測度について、前提の欄が成り立てば部分列の極限が在り、極限が鏡映正値・対称・非退化の下界を持つという条件つきの含意	28-01
全列の収束の含意	道筋	部分列を取らずに全列が収束することを、抽象の歪積の写像の軌道の言明として出す条件つきの含意	28-02
ギャップと帯の含意	道筋	ブロック観測量の一様な減衰から質量ギャップを出し、帯を還元する条件つきの含意	28-03
ブロック写像の連続・合成・押し出しの整合	表の行	ブロック写像 B が連続で、段から段への写像が一段ずつの合成であり、押し出しの測度が整合すること（$(B_m)_{*}\nu_{n,m+1} = \nu_{n,m}$）	28-04
ゲージ共変と局所性	表の行	ブロック写像がゲージ変換と共変（$B(U^{g}) = B(U)^{g\vert_{\text{粗い点}}}$）で、粗いリンクの値が有限の距離の細かいリンクだけに依ること	28-04
格子の対称との可換	表の行	ブロック写像が格子の並進・鏡映・超立方の群と可換であること	28-04
細かい格子の鏡映正値性	表の行	細かい格子の Wilson の測度の鏡映正値性：正の側のリンクだけに依る有界可測な f で $\int f(\Theta U)\, f(U)\, d\mu_W \geq 0$	28-04
粗い水準の鏡映正値性	表の行	押し出しの測度の鏡映正値性：正の時間の類の F で、粗い水準の測度について $\mathrm{F}\circ\Theta$ と F の積の積分が 0 以上	28-04
測度の対称	表の行	押し出しの測度 $\nu_{n,m}$ が格子の対称で不変で、観測量の対称の破れが 0 に向かうこと	28-04
観測量の族と小さい場の集合	表の行	観測量の族 D が可算で稠密・一様に有界で、小さい場の集合が閉で二段の事象を含むこと	28-04

名前	種別	何を指すか	導入の章
活性の再帰	表の行	活性 z_k の再帰 z_{k+1} ≤ ρz_k + Aw_k + Bz_k²（あわせて極限の期待値の存在と大きい場の重み）	28-04
供給の稀さ	表の行	供給 w_k が段に一様な面の変数の指数の積率から w_k ≤ Φ(u_k) と押さえられること	28-04
細かい格子の一つの尺度の稀さ	表の行	$\beta \ge 81$ で、集合 X の面が全て $\mathrm{Re}\, U_p < 0$ となる確率 ≤ $q_1^{\lfloor \lvert X\rvert /6 \rfloor}$（$q_1 < 1$ は体積に依らない）	28-04
動く不変区間と余白	表の行	実効の結合が動く不変区間に留まり、余白で剰余を払える（ρW(s) + AΦ(s) + BW(s)² ≤ W(s′) などの実数の関数の不等式）	28-04
二段の事象の稀さ：面の部分	表の行	押し出しの測度で、面の変数 β_m(1 − Re U_p) が閾 y_h(m) を超える確率が $P_1(m)$ 以下（大きい n で）	28-04
二段の事象の稀さ：背景の不変量の部分	表の行	押し出しの測度で、背景場の不変量 f が閾 f_h(m) を超える確率が S(m) 以下（大きい n で）	28-04
観測量の同程度連続	表の行	観測量の値の差が |s_n(d) − s_n(d′)| ≤ τ_n + Ω(dist(d,d′))（τ_n → 0、Ω(r) → 0）で一様に押さえられること	28-04
伝播関数の挟み	表の行	全ての段 k と運動量で $c_0\, P/\omega \preceq G_k \preceq P/\omega$、$c_0 = 3/100$	28-04
背景つきの正値性	表の行	背景場のまわりの拘束つきの Hessian の最小固有値が $\lambda_0(1 - f_1/f_\star)$ 以上であること	28-04
無関係な項の縮み	表の行	$\mathcal{M}^{17}(\omega G_k) \preceq \tau\, \omega G_{k+17}$、$\tau < 1/170$、$k$ に一様	28-04
一段の結合の減りの係数	表の行	自由場の係数 b_k が率 $(3/5)^k$ で収束し、過渡の和が有限	28-04
一ループの係数の値	表の行	一段の結合の減りの係数の極限が一ループの値 $b_\infty = 2b_0 \ln 2$ になること（文献の値。この写像での再導出なし）	28-04
背景の写像の縮み	表の行	一目盛りの変位の和 $\sum_j \Delta_j < \infty$（自由場の部分は $\lVert\psi_l\rVert^2 \le 0.608^l$ の型）	28-04
多体の和の幾何（相関のノルム）	表の行	面の場の相関のノルム $\Lambda \le 640/9$	28-04
拘束つきの逆の恒等式	表の行	拘束つきの Green 関数の恒等式 C = G − GT*(TGT*)⁻¹TG と、その上下の評価	28-04
拘束つき減衰の定理	表の行	段 k の一段の拘束つき Green 関数が、指数の重みについて段に一様な定数で減衰すること	28-04
背景の零階の運び	表の行	段ごとの背景の面の比 θ_n について sup 4ⁿθ_n < ∞・Σ4ⁿθ_n^{3/2} < ∞（今の形は偽と分かっている）	28-04
一段の背景場の補題	表の行	小さい場で、拘束つきの作用の極小が一意・解析的・指数で局所・粗いゲージと可換	28-04
多段の背景場	表の行	入れ子の小さい場の領域で一意・正則。線形化の逆は作用のノルムで段の数に依らず 1 以下	28-04

名前	種別	何を指すか	導入の章
持ち上げの行和が段に一様	表の行	$\sup\lvert Eg\rvert \le R\,\sup\lvert g\rvert$、$R$ が k に一様	28-04
一つの尺度の展開の道具	表の行	直積の白色雑音の測度の上のクラスター展開とその収束	28-04
森の補間の公式	表の行	クラスター展開に使う森の補間の公式（文献。本体は Lean に無い）	28-04
小さい場の一段の繰り込み定理	表の行	粗い作用 $=\beta_{k+1}S_W$（背景）＋局所の展開 ＋ 多体。多体は距離について指数で小さい	28-04
段ごとのゲージ固定	表の行	段ごとの Landau ゲージ。行列式は下三角の塊。Haar の Jacobian の評価	28-04
大きい場の評価	表の行	各段 t と各穴 γ で $\lvert z_t(\gamma)\rvert \le \exp(-\gamma_E\,\beta\,S^\flat(\gamma))$、$S^\flat(\gamma)\ge s_*\lvert\gamma\rvert$、$s_*>0$ が段と体積に一様	28-04
大きい場の気体	表の行	$\sum_{X\ni x}\lvert z(X)\rvert\,e^{2\lvert X\rvert}\le 1$ と、気体の分配関数が対応する比に等しいこと	28-04
類と局所化	表の行	次元 4 以下の局所のゲージ不変な項は定数と $\sum \operatorname{tr}F^2$ だけ	28-04
段に一様な帰納	表の行	$r_{k+1}\le \tau_k r_k + a_k w_k + s_k$、$w_{k+1}\le b_k r_k+\sigma_k w_k + s'_k$、係数の積が $1/4$ 未満なら球に留まる	28-04
一段の写像の縮みと終点の合わせ	表の行	一段の写像の剰余と座標の Lipschitz の評価で、写像が縮み、終点の結合を合わせられること	28-04
流した観測量のブロック変数による近似	表の行	流れの時間 t の観測量を、段 m のブロック変数の Lipschitz な関数で、格子に一様に誤差 $\varepsilon_m(t)\to 0$ で近似	28-04
箱の大きさに一様な紫外の評価	表の行	箱の連続極限の前提と紫外の安定性の前提が、箱の大きさ L に依らない定数で立つ	28-04
橋の一段の紫外の評価	表の行	回した細かい格子から標準の粗い格子への一段の像が、鎖の球に入る	28-04
無限体積の極限が箱の形に依らないこと	表の行	形の違うトーラスの列の極限が一致する	28-04
極限が自由場でないこと	表の行	極限の理論が自由場でないこと（どの量で言うかは未定）	28-04
θ の非負	表の行	M が偶数なら全ての実の β で $0\le\theta_{N,M}(\beta)$	28-04
一つの尺度の判定	表の行	物理の大きさ L_* で $\theta(L_*;T^2_{L_*})<(s^2)^{-1/(s^2-1)}$（$s=2$ で 0.63、$s=3$ で 0.7598）	28-04
捩れを入れる写像の費用の問い	表の行	ゲージ共変で滑らかな写像 T で $\mathbb{E}_+[S\circ T - S - \ln J_T]\le 2\,\operatorname{artanh}(0.7598)$ が格子間隔に一様	28-04
渦の自由エネルギーの単調性と繰り込みの比較（短く：単調性と繰り込みの比較）	表の行	捩れの挿入の自由エネルギーが β について単調。$s(N,\beta')\le s(2N,\beta)$	28-04

名前	種別	何を指すか	導入の章
小さな捩れた箱のギャップと挿入の一様な受理（短く：小さな箱のギャップと受理）	表の行	隙間 $\geq c/L$ が格子間隔に一様。駆動した渦の挿入の受理率が格子間隔に一様	28-04
面積則からギャップへ	表の行	帯（面積の指数）から、ブロック観測量の一様な減衰へ	28-04
渦の面積の指数から Wilson ループの面積則へ（短く：渦の指数から面積則へ）	表の行	渦の自由エネルギーが面積の指数で小さいことから、Wilson ループの面積則を出す段（文献。典型の枠の版は再導出していない）	28-04
閾どうしの結び	表の行	二段の事象の面の変数の倍率と閾を、結合の側の実効の結合と閾に結ぶこと（たとえば β_m = 4u_m、y_h(m) = y_s(u_m)）	28-04
小さい場の集合の取り方と背景の不変量の延ばし方（短く：小さい場の集合の取り方）	表の行	二段の事象が小さい場の集合に含まれること（背景の不変量を閾より大きい値に延ばせば立ち、0 に延ばすと偽）	28-04
背景の二次の型の定数	表の行	背景の写像の Lipschitz の定数を作る、背景の評価の三つの二次の型の定数	28-04
多体の和の幾何（到達の定数）	表の行	面の場の相関の行の和 R が有限であること（到達の定数）	28-04
質量ギャップの器への継ぎ目	表の行	器の含意（28-03）は、測度の列の全列の弱収束と、観測量の部分空間が時間の並進で閉じることを仮定に持つ。部分列で使うときは「どの極限点でも」の形になる	28-04

付録

名前	種別	何を指すか	導入の章
鎖の上側・鎖の下側	仮定	三つの鎖の上の半分を集めると上側、下の半分で下側	A-06
分散の尺度分解	仮定	分散を尺度ごとに分けられる	A-06
尺度ごとの一様な Poincaré	仮定	各段の条件つき Poincaré 定数が一様	A-06
尺度をまたぐ伝導度の上界	仮定	段をまたぐ伝導度が押さえられる	A-06
状態空間が一本の線である性質（短く：一本の線の性質）	仮定	状態空間が尺度の一本の線である	A-06
ビルドの検査の段（Lean の参照マニュアルの検査の段）（短く：ビルドの検査の段）	文献の名	Lean の参照マニュアルの検査の四段の一つ目：エディタの検査の印か lake build が警告もエラーも出さずに終わることを見る	A-04
公理の確認の段（Lean の参照マニュアルの検査の段）（短く：公理の確認の段）	文献の名	検査の四段の二つ目：定理の後に #print axioms を書き、依存する公理が標準の三つだけであることを確かめる	A-04

名前	種別	何を指すか	導入の章
カーネルの再検査の段（Lean の参照マニュアルの検査の段）（短く：カーネルの再検査の段）	文献の名	検査の四段の三つ目：lean4checker で、ビルドで保存された証明をカーネルに通し直す	A-04
隔離した照合の段（Lean の参照マニュアルの検査の段）（短く：隔離した照合の段）	文献の名	検査の四段の四つ目：言明だけを信頼できる場所に書き、証明を隔離して組み立て、独立の外部の検査器でも通し直して言明の一致を確かめる	A-04
代入の手・掛ける手・整理の手	表の行	紙の三行（代入する・両辺に掛ける・整理する）を Lean の四手に対応させたときの手の名	A-04
調べる段	表の行	文が本文に載るまでに通る七つの段の一つ目：主題ごとの文献・既知の結果・数値の候補を集める	A-05
照合の段	表の行	七つの段の二つ目：一次資料と照合し、書誌の誤り・言い換えすぎ・帰属の取り違えを拾う	A-05
反証の段	表の行	七つの段の三つ目：別の読み手が反証を探し、資料より強い言い方・確定度の格上げ・条件の書き落としを拾う	A-05
再現の段	表の行	七つの段の四つ目：計算を再現し、数値の写し間違い・規約の取り違え・有限の範囲の反例を拾う	A-05
札の段	表の行	七つの段の五つ目：札を付け、「証明された」「予想」「数値的に支持」の混在を拾う	A-05
整合の段	表の行	七つの段の六つ目：章をまたいで記号・名前・規約を揃え、食い違いと重複を拾う	A-05
組み立ての段	表の行	七つの段の七つ目：組み立てて機械的に検査し、描画できない式・切れたリンク・禁則の語を拾う	A-05
定義の隙間	表の行	Lean の証明が通っても言いたいことでない隙間の一つ：定義が意図より弱い・強い（例：隙間を ≥ 0 で定義すると 0 でも通る）	A-04
名前の隙間	表の行	通っても言いたいことでない隙間の一つ：定理の名前が言明より大きい	A-04
空虚な真の隙間	表の行	通っても言いたいことでない隙間の一つ：前提が同時に成り立たず、何でも結論できる	A-04
仮定の隙間	表の行	通っても言いたいことでない隙間の一つ：証明すべきことが仮定に置かれ、それがいつ外れるか書かれていない	A-04
張力の率の挟み込み（論文 3 の系 C）（短く：張力の率の挟み込み）	論文の名	分数インスタントンの格子の論文の系：張力の率の上極限と下極限を挟み込むこと	A-07
渦の挿入の恒等式の論文	名	この本の検討から出た、渦の挿入の恒等式をまとめた論文（a-07 の表 4）	A-07
帯の還元の論文	名	この本の検討から出た、帯の還元と SU(2)・U(1) の数値をまとめた論文（a-07 の表 5）	A-07

名前	種別	何を指すか	導入の章
分数インスタントンの格子の論文	名	この本の検討から出た、分数インスタントンの格子の閉じ込めをまとめた論文（a-07 の表 6）	A-07

表 3　名前の索引（902 項目）。表の通し番号や札の範囲は使わず、名前で引きます。

04

拡散型緩和時間の仮定の八つの読み（正本） — 正規化を名指す理由

「C_P が長さの二乗と揃う」という文には三つの選び方があります。冪で言うか帯で言うか、比べる長さを相関長 ξ にするか記帳の長さ ξ_{RG} にするか、C_P を角度の $\mathcal{E}_\vartheta$ で測るか場の $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_\vartheta/\beta$ で測るか。$2\times2\times2$ で八つの読みがあります。次の表が正本です。

表 4　八つの読み（この表が正本。23-01 表 5 は要約。右の二列は緩和時間の仮定を前提にした勘定。指数は C_P/ξ^2 または a^2C_P に掛かる β の冪）

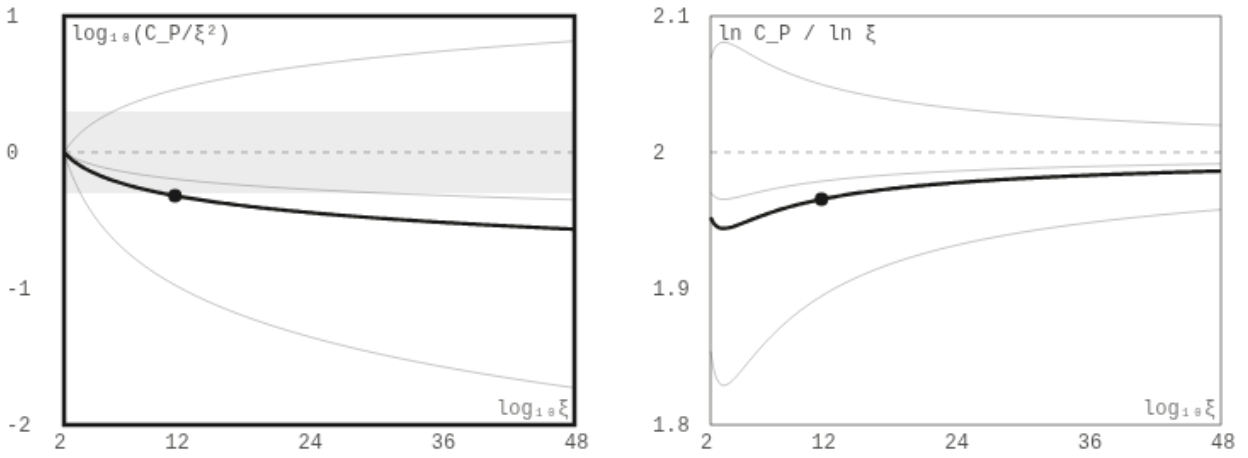
水準・長さ・正規化	文	この本の名前	自由近似	ループの対数 物理
冪・ξ・$\mathcal{E}_\vartheta$	$\ln C_P/\ln\xi\to 2$	緩和時間の仮定（$\eta_{\mathrm{dyn}}=0$）	成り立つ	動かない
冪・ξ・$\mathcal{E}_A$				
冪・記帳の長さ・$\mathcal{E}_\vartheta$	$\ln C_P/\ln\xi_{\mathrm{RG}}\to 2$	緩和時間の仮定と一尺度の鎖・記帳の長さの鎖（冪）	成り立つ（二ループの差は冪に映らない）	動かない
冪・記帳の長さ・$\mathcal{E}_A$				
帯・ξ・$\mathcal{E}_\vartheta$	$C_P^{(\vartheta)}\asymp\xi^2$	帯の形の緩和時間の仮定[$\mathcal{E}_\vartheta$]	下界の仮定[$\mathcal{E}_\vartheta$]が破れる（比 $g^2/4$、指数 -1）	$-9/22$：下界の仮定[$\mathcal{E}_\vartheta$]が破れる
帯・ξ・$\mathcal{E}_A$	$C_P^{(A)}\asymp\xi^2$	帯の形の緩和時間の仮定[$\mathcal{E}_A$]	成り立つ（等号）	$+13/22$：上界の仮定[$\mathcal{E}_A$]が破れる
帯・記帳の長さ・$\mathcal{E}_\vartheta$	$a^2C_P^{(\vartheta)}\asymp 1$	帯の形の緩和時間の仮定[$\mathcal{E}_\vartheta$] と一尺度の鎖・記帳の長さの鎖	記帳の次数で決まる（23-01 §07）	$-303/242$
帯・記帳の長さ・$\mathcal{E}_A$	$a^2C_P^{(A)}\asymp 1$	帯の形の緩和時間の仮定[$\mathcal{E}_A$] と一尺度の鎖・記帳の長さの鎖		$-61/242$

導出は 23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定・4-06 §05 にあり、ここでは和だけを示します（この段は読み飛ばしてよい）。右の列の分数は三つの対数の和です。正規化の -1（$C_P^{(\vartheta)}=C_P^{(A)}/\beta$）、確率時間の繰り込みの $+13/22$（23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定）、そして 記帳の長さの行だけに入る一ループの記帳と二ループの走りの差 $-2\cdot\frac{51}{121}=-\frac{102}{121}$ です（$51/121=b_1/(2b_0^2)$、純 SU(N) で N に依らない。4-06 §05）。どれも一ループの摂動論の繰り込み群の下の勘定で、物理の札です。

$$-1+\tfrac{13}{22}=-\tfrac{9}{22},\qquad \tfrac{13}{22}-\tfrac{102}{121}=-\tfrac{61}{242},\qquad -\tfrac{9}{22}-\tfrac{102}{121}=-\tfrac{303}{242} \tag{3}$$

この和を、この端末で有理数のまま確かめました 計算 。次の図は、この勘定の下で、帯の読みの比 C_P/ξ^2 と冪の読みの指数 $\ln C_P/\ln\xi$ がどう動くかを描きます。β と ξ は一ループの式 $\xi\approx e^{3\pi^2\beta/11}$（定数倍を除く、4-07）で結びます。

図 1　読みを選ぶと、左に帯の読みの比 C_P/ξ^2（$\xi=10^2$ で 1、縦は対数）、右に冪の読みの指数 $\ln C_P/\ln\xi$ を描く。三つのボタンで水準・長さ・正規化、つまみで $\log_{10}\xi$ を選ぶ。枠の太いほうの欄が、選んだ水準の真偽を決める。左の薄い塗りは比 1/2〜2 の目安（帯の定数の一例）



帯・ξ・角度の目盛り → 帯の形の緩和時間の仮定[角度の目盛り]：s = −9/22。ξ = 10^12：β = 10.27、比 0.4805、冪の指数 1.9655。帯：比が 1 から離れ続ける（一様な定数では閉じない）

計算 この図の数値はこの端末で計算した（(3) の指数と一ループの式をその場で評価。表 5 は Python の値）。

JavaScript が無効なときは表 5 で読めます。

表 5　一ループの勘定の下での比と指数（SU(2)。$\beta=\frac{11}{3\pi^2}\ln\xi$。比は $(\beta/\beta(10^2))^s$、指数は $2+s\ln\beta/\ln\xi$） 計算 物理

長さ・正規化	s	比 $\xi=10^3$	比 10^{12}	比 10^{48}	指数 10^3	指数 10^{12}	指数 10^{48}
$\xi\cdot\mathcal{E}_\vartheta$	−9/22	0.8472	0.4805	0.2725	1.9442	1.9655	1.9862
$\xi\cdot\mathcal{E}_A$	+13/22	1.2707	2.8828	6.5400	2.0806	2.0498	2.0199
記帳の長さ・$\mathcal{E}_\vartheta$	−303/242	0.6019	0.1061	0.0187	1.8292	1.8945	1.9579
記帳の長さ・$\mathcal{E}_A$	−61/242	0.9028	0.6366	0.4488	1.9656	1.9788	1.9915
（参考）自由近似・$\mathcal{E}_\vartheta$	−1	0.6667	0.1667	0.0417	1.8636	1.9157	1.9664

読み方は二つです。比の列は四行とも 1 から離れ続け、どの帯の読みも一様な定数では閉じません。指数の列は四行とも 2 に近づき、冪の読みは動きません。ただし近づき方は遅く、$\xi=10^{48}$ でも指数は 2 から 0.008〜0.042 離れています。最後の行は A-01 の表 9 と同じ式で、指数は一致し、比は A-01 の値を $\xi=10^2$ の値で割ると一致します。この表はヤン–ミルズの測度の C_P を測ったものではなく、勘定の帰結を並べた例です。この本が緩和時間の仮定を冪の水準に置いた理由が、この表の二つの列の違いです。

05

記帳と指数の量 — κ・δ・θ・記帳の長さ・p・η_{dyn}

本書の第 23 部の検討は、格子を b 倍に粗くする一段を次の写像で記帳しました（23-02 四次元格子で試した道と壁）。

$$\beta \longmapsto \beta - \kappa\big(\ln b - \delta(b)\big), \qquad a^2 C_P \propto a^{p}, \qquad p = \eta_{\mathrm{dyn}} + (2 - \eta_{\mathrm{dyn}})\,\theta \tag{8}$$

左の式に出る二つの数と、右の式に出る二つの指数が、この節の量です。量は仮定ではありませんが、「$\sum \delta < \infty$」「$\eta_{\mathrm{dyn}} = 0$」のような文は仮定になり、第 23 部の言い方「物理単位の隙間の言明 $\Longleftrightarrow \sum \delta < \infty$ かつ $\eta = 0$」は、冪の形と一ループ核の模型を前提にした $p = 0$ の代数です。

表 6　記帳と指数の量

記号	種	一行の意味	正本	状態
κ	量	一段の傾き。$\kappa = 4Nb_0 = 11/(3\pi^2) = 0.3715110$（$N = 2$）	23-02 四次元格子で試した道と壁・4-06 §02	既知　一ループ係数の書き直し。模型の窓で 5 桁一致は 計算（模型の中の一致）
$\delta(b)$	量	一段の取りこぼし。窓が連続の $\ln b$ に足りない分。c_2/b^2 で消える	23-02 四次元格子で試した道と壁	一ループ核の模型で測った数（非摂動の量ではない） 計算
$\sum_k \delta(b_k) < \infty$	仮定	取りこぼしが総和可能	同上・18-05 §06	仮定。b 固定なら $\delta(b) = 0$ が必要十分　Lean fixed_step_bounded_iff
θ	量	取りこぼしの溜まりの指数。$a\xi \propto a^{\theta}$。b 固定で $\delta(b)/\ln b$	23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定	定義。$\sum \delta < \infty$ なら $\theta = 0$
ξ_{RG}, a	量	記帳の長さ $b^{k(\beta)}$ と、$a := 1/\xi_{\mathrm{RG}}$。一ループで $\xi_{\mathrm{RG}} \approx e^{3\pi^2\beta/11}$	23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定・23-02	第 23 部の定義。一ループの部分は 既知（$1/(a\Lambda)$ と同じ式）
p	量	$a^2 C_P \propto a^{p}$ の冪。(8) の右	23-01 構成の筋と拡散型緩和時間の仮定	$p = 0 \iff \eta_{\mathrm{dyn}} = 0 \wedge \theta = 0$（$0 \le \eta \le 2$・$\theta \ge 0$ の下）Lean drainExp_eq_zero_iff
z, η_{dyn}	量	動的指数 $C_P \asymp \xi^{z}$ と $\eta_{\mathrm{dyn}} = 2 - z$。緩和時間の仮定は $\eta_{\mathrm{dyn}} = 0$	2-10 §06・18-05 §02	定義。前提 $\eta_{\mathrm{dyn}} \ge 0$ は $z \le 2$ を含む
η_s	量	静的な相関の冪。η_{dyn} とは別。等しいのは $z = 2 - \eta_s$ の中だけ	同上・A-01 §08	二次元 Ising で $\eta_s = 1/4$、$\eta_{\mathrm{dyn}} = -0.1665$ 物理

記号 η に注意が要ります。第 23 部の検討の η はもともと二つの量を指していました。この本は、冪の形と物理単位の隙間の言明の同値の η を η_{dyn} に固定し、η_s は試験関数の下界にだけ使います。断りの無い η は η_{dyn} です。

例。$b=2$ に固定すると $\delta(2)=0.1335$（重み w）で、$\theta=\delta(2)/\ln 2\approx 0.19$ です（23-02 四次元格子で試した道と壁）。$\eta_{\mathrm{dyn}}=0$ でも $p=2\theta\approx 0.39>0$ で、$a^2 C_P\to 0$ の側に落ちます。段ごとに $b_k=k+2$ と大きくすれば $\sum c_2/(k+2)^2<\infty$ で $\theta=0$ に戻せます。

06

二本目の道と帯の仮定 — 名前・中身・状態・消すために要るもの・U(1)/$\mathbb{Z}_2$

第 25〜27 部（空間の方向の道・移り変わりの帯・閉じる）が置く仮定を一つの表にまとめます。状態の欄は、この節だけ第 23 部の五分類の札（23-00 §01：初・典・機・読・仮）で書きます。証明の筋の段にある行は「仮」とし、筋のあることを同じ欄に書きます。段は 16-09 の証明が含むべき七つの段、台帳の行は 27-02 表 2 の行で、どちらも名前で引きます。最後の列は、同じ仮定を $U(1)$ と四次元の $\mathbb{Z}_2$ のゲージ理論に置いたときの振る舞いで、非可換性がどの行に入るかを見るための列です。

表 7　二本目の道と帯の仮定（条件つきの言明は 27-01、各行の現状と消える規則は 27-02）

名前	中身（一行）	状態	消すために要るもの	U(1)・$\mathbb{Z}_2$ での振る舞い
紫外の制御（証明が含むべき段では紫外の段、台帳の行も同じ名）	格子間隔 a から尺度 L まで、a に一様な多重尺度の解析：小さい場の解析性の条件（有効作用の局所性と解析性）、大きい場の稀さの条件、結合が小さく留まる条件（有効結合が $(0,\gamma]$ に留まる）	仮（Bałaban の不等式 (0.31) は原典が未発表とする段を含む）	Bałaban の段の書き下しの完成、または原典の照合	漸近自由に依る仮定で、U(1)・$\mathbb{Z}_2$ には当てはまらない
挿入の一様な受理（小さな T^2 の閉じ込めの段）	小さな場の枠の下で、力学で駆動した渦の挿入の $\tanh(W/2)$ の平均が a に一様に $1-\delta$ 以下	仮（手続きを長くすると仕事が下がる数値は 読 ）	仕事の分布を一ループ（行列式）の水準で評価すること	—
小さな T^2 の基点（小さな T^2 の閉じ込めの段）	小さな物理的な L_0 で $\theta(L_0;T^2_{L_0})\le 1-\varepsilon_0$、$\varepsilon_0\propto (L_0\Lambda)^{11/3}$	仮（筋：紫外の制御と挿入の一様な受理の下。張力の形は 典 Tanizaki–Ünsal の式 (2.37)）	紫外の制御と挿入の一様な受理の下での証明	U(1) では ε_0 の L_0 への依存が逆向き

名前	中身（一行）	状態	消すために要るもの	U(1)・$\mathbb{Z}_2$ での振る舞い
枠の減相関（小さな T^2 の上の「一様なブロック減衰」と同じ系統。小さな T^2 の閉じ込めの段と帯の段）	容器の枠どうしの相関が減り、Wilson ループの評価 $\mathbb{E}\prod\theta$ を各 θ の積に分けられる	仮。T^2 を固定すれば、z の鏡映正値性の下でチェス盤により一つの密度 κ_{cb} に置き換わる 初	κ_{cb} の評価。L に一様にするには一様な板のギャップ	—
z の鏡映正値性（小さな T^2 の閉じ込めの段と帯の段）	捩れの和を取った z の集団が、方向 3・4 の格子点を通る鏡映で正値	初 （もう仮定ではない。核の代数は Lean `ReflPos.refl_pos`・`refl_cs`。紙の証明を置く章は 26-04）	—	$\mathbb{Z}_2$・U(1) でも同じく成り立つ（構造の事実）
良いブロックでの縮小（小さな T^2 の閉じ込めの段と帯の段）	良いブロックを通ると、枠の影響がゲージ不変な距離で e^{-mw} に縮む	仮	Bałaban 型の解析	—
横広げの不等式・強い形（帯の段。台帳の行「't Hooft の張力の正値性」の中の形）	容器を固定して横の T^2 を s 倍に広げても、区画の偏り θ は高々 Cs^2 倍	仮。数値は整合 読 。構造の入力だけからは出ない（否定の補題、26-04）	非可換の力学の入力（自己双対の塊・漸近自由）	**破れる**（U(1) は流束が一様に広がり、$\mathbb{Z}_2$ は面の張力）
横広げの不等式・弱い形（帯の段。台帳の行「't Hooft の張力の正値性」の中の形）	強い形の損失の総和が有限な形（板の張力 σ_{eff} が「ほぼ単調」）	仮 （帯とほぼ同じ内容）	同上	破れる
一様な板の張力（帯の段。台帳の行「't Hooft の張力の正値性」の弱い形）	板の弦の張力 $\sigma_{\mathrm{eff}}(L)$ が L に一様に正	仮。Creutz 比は $N_T=4\to 10$ で増えて飽和 読 （条件は 25-08）	帯そのもの	**破れる**（U(1) は $\sigma\sim e^2/L^2$ で 0 へ）

名前	中身（一行）	状態	消すために要るもの	U(1)・$\mathbb{Z}_2$ での振る舞い
一様な板のギャップ（帯の段。台帳の行「ブロック観測量の一様な減衰」）	板の質量ギャップが L に一様。ブロック観測量の相関が L に一様に減ること（27-02 の台帳の行）	仮	$\kappa_{\mathrm{cb}}(L)$ の尺度の間の比較	—
$\mathbb{R}^4$ への極限（R^4 の段。台帳の外に残る差の一つ）	無限体積の極限・OS 公理・回転不変性の回復・非自明性	仮（大部分は標準の筋。回転の赤外の側と極限の一意性は開いている）	—	—
二本の道の結び（ギャップと閉じ込めの結び。小さな T^2 のギャップの段・小さな T^2 の閉じ込めの段・R^4 の段に掛かる。台帳の外に残る差の一つ）	面積則と転送行列の隙間を $\mathbb{R}^4$ の同じ理論で両方出す	仮（言明が未定。面積則だけではギャップにならない）	一様な板のギャップと $\mathbb{R}^4$ への極限	U(1)：閉じ込めず、ギャップもない
全てのコンパクト単純群（一般の群の段。台帳の外に残る差の一つ）	$SU(N)$ と、中心の無い群	仮	—	—
拡散型緩和時間の仮定（上側は上界の仮定、下側は下界の仮定。台帳の行「緩和時間の上界と片側の橋の一様性」）	揺らぎが均される時間が相関長の二乗で伸びる：$C_P \asymp \xi^2$（動的指数 $z = 2$）。上界の仮定は片側の橋と合わせて物理単位の隙間の下界を与える	仮（23-01）。一段目の残件は 23-15 表 1 と、ブロックと混合の道の小節	第 23 部の残件（23-15）と、β に一様な形（帯を時間の言葉で渡ること）	23-01・24-01 を参照

名前	中身（一行）	状態	消すために要るもの	U(1)・$\mathbb{Z}_2$ での振る舞い
区画の偏り $\theta(R;T_L^2)$（量）	容器 $D\times T_L^2$（D の一辺 R）の区画の符号の、枠を条件づけた期待値の絶対値 $\lvert\mathbb{E}[\sigma_D \mid \Phi]\rvert$	定義（25-03）	—	U(1) では一定、四次元の $\mathbb{Z}_2$ では 1 に近づく見込み 読 （物理）
チェス盤の密度 κ_{cb}（量）	平面を同じ大きさのブロックで敷き、全てのブロックに容器を置いたときの $\mathbb{E}\prod_t \theta_t$ の、ブロック一つあたりの値（体積の極限）	定義（26-05）	—	—

記号の注意。表 7 の θ と κ_{cb} は、表 6 の θ（取りこぼしの溜まりの指数）・κ（一段の傾き）とは別の量です。区画の偏りは引数をつけて $\theta(R;T_L^2)$ と書き、チェス盤の密度は添字つきで κ_{cb} と書きます。表の非可換の欄で「破れる」の行が、横広げの不等式の二行と一様な板の張力の行に集まっていることが、この表の読みどころです。非可換の力学が入るのはこれらの行（台帳では 't Hooft の張力の正値性の行と、還元の入力の繰り込みの比較の行）で、他の行は構造の事実か、紫外の壁に依る行です。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
表 3 の名前と導入の章は、本の全体の名前の表から引いた（一つの対象に一つの名前）	「何を指すか」の一行は目安。正確な言明・仮定・状態は導入の章に在る
表 1・表 2 は第二巻の章の名前と記号の約束	公開された構成の源の識別子との対応の全て（在りかは各章の出典）
初 SU(2) で $s=\kappa=11/(3\pi^2)$	ほかの群での第三巻の κ の値（第三巻の定理は SU(2) だけ）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
名前と導入の章	本書	各章の本文。名前は本の全体で一つに揃えた
第二巻の名前と記号	源	yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028（2026-10-28 提出、版 3456e5e）を読んだ第 6〜14 部の各章
s と κ の値	初	10-01（$C_g=8$）・4-06 §02（$\kappa=4Nb_0$）
表 4・表 5（八つの読みと一ループの勘定）	計算・物理	23-01・4-06 §05。分数の和はこの端末で有理数のまま確かめた

次に読む章：A-07 この本から出た論文。

この本から出た論文

この章は本書の検討です。§01・§07 は案内です。

この章で分かること — この本の検討から出た五本の論文の一覧。このサイトの論文の頁で公開している二本（片側の橋・一リンク積分）と、草稿の段階の三本（渦の挿入の恒等式の論文・帯の還元の論文・分数インスタントンの格子の論文）について、題・要旨・主定理を並べ、各主定理に本の札と条件と機械検査の範囲を付け、本のどの章で扱うかを示します。

前提となる章 — なし。札の読み方は 23-00 §01、Lean の欄の読み方は A-04 です。

先に言うこと — どの論文も、ヤン–ミルズの存在と質量ギャップの問題の解決を主張していません。草稿の三本は外部の数学者の検査を経ておらず、本の札は草稿の言明をそのまま写したものではありません（本の章で証明を確かめて置いたものだけが 初 ）。論文の題は原文（英語）のまま引き、要旨と言明は日本語で縮めます（定理の名と番号は原文のもの）。

この章の順序

1. 五本の一覧 — 題・段階・頁数・機械検査・本の章（表 1）
2. 片側の橋 — 隙間の二乗の逆数が Poincaré 定数を下から押さえる（表 2）
3. 一リンク積分 — Bakry–Émery の前に一リンクを積分する（表 3）
4. 渦の挿入の恒等式の論文 — 渦の挿入の恒等式（表 4）
5. 帯の還元の論文 — 帯の還元と $SU(2)$・$U(1)$ の数値（表 5）
6. 分数インスタントンの格子の論文 — 分数インスタントンの格子の閉じ込め（表 6）
7. 論文と Lean の束 — 束の名・定理の数・保証の範囲（表 7）

01

五本の一覧

表 1 の「段階」は、公開（このサイトの論文の頁に PDF と LaTeX 源を置いた）か、草稿（本の検討の材料で、公開していない）かです。頁数は PDF の頁数です。著者表記は刊行の形による。

表 1　この本から出た論文（2026-10-15 の時点）

論文	題（原題）	段階	頁	機械検査	本の章
片側の橋	The inverse squared spectral gap bounds the Langevin Poincaré constant of Euclidean path measures from below	公開（2026-10-09、論文の一覧・PDF）	12	代数の骨（束 EuclideanPath.GapBridge・宣言 17）	23-01 §06・24-04 §02・24-05
一リンク積分	One-link integration before Bakry–Émery for SU(2) lattice Yang–Mills — An explicit strong-coupling threshold $\beta < \sqrt{(2/27)}$ in dimension four, and why complete families of links exist only for $d \leq 4$	公開（2026-09-21、論文の一覧・PDF）	24	Wilson 作用から Hessian の下界までの鎖と、完全な族の組合せ論	5-11・23-02 §02
渦の挿入の恒等式の論文	Exact centre-vortex insertion identities in the twist-summed ensemble, and bounded, averaged and driven confinement bounds	草稿（2026-10-13）	3	有限の配位空間の上の代数	25-05・25-06
帯の還元の論文	Where the twisted-slab route to confinement stops: a corrected window target, a reduction to transverse widening, and SU(2) versus U(1) numerics	草稿（2026-10-13）	9	流束の評価・電場の流束の形・倍化の反復・鏡映正値性の代数	26-01・26-02・26-04・26-05・25-07・26-09
分数インスタントンの格子の論文	Fractional instantons confine on the lattice: a rigorous semiclassical bound for SU(2) gauge theory on a twisted small torus	草稿（2026-10-14）	7	柱の表示の因数分解と二項の評価	25-02 §06・26-06 §04・27-02 繰り込みの比較の上の端

帯の還元の論文の原題の “window” は、この本の語では「移り変わりの帯」です。第 23・24 部の窓（サイトの区間・$\hbar$ の範囲・時刻の区間）とは別物で、本文では帯と書きます（26-00 §02）。分数インスタントンの格子の論文の原題の “rigorous” は原題の語で、本の札とは独立です。

02

片側の橋 — 隙間の二乗の逆数が Poincaré 定数を下から押さえる

要旨。有限次元の配位空間（コンパクトな連結 Riemann 多様体、または $\mathbb{R}^n$ に定数の計量と滑らかで閉じ込めるポテンシャル）の上の $H = -(\hbar^2/2)\Delta_M + V$ で、離散スペクトル・単純な正の基底状態 ψ_0・隙間 $\Delta = E_1 - E_0 > 0$ を仮定する。時間の全体で定常な Euclid の経路の測度について、時間で均した滑らかな汎関数の上の確率量子化（Langevin）の Dirichlet 形の Poincaré 定数は $C_P \geq \kappa(\hbar/\Delta)^2$ を満たす。試験関数は $F = \psi_1/\psi_0$ の時間積分で、時刻に局所な汎関数の中ではこれが最良。逆向きは一般に偽で、円の上の自由な粒子では $\Delta > 0$ のまま $C_P = \infty$。四次元にもゲージ場にも触れない。

表 2　片側の橋の主定理（本の名は 23-01・24-04 のもの）

論文の番号	本の名	言明（条件を同じ行に）	札	Lean
定理 3.1	片側の橋の命題（論文の定理 3.1）	上の設定と三つの仮定（基底状態の仮定・定常な経路の測度の仮定・計量の比べの仮定。論文の (A1)〜(A3)。離散スペクトルと基底状態の単純さ・定常な経路の測度・Langevin の計量の比較定数 κ）の下で $C_P \geq \kappa\hbar^2/\Delta^2$。時間を連続に取った場合	初（23-01 §06）	代数の段だけ：`poincare_lower_of_gap`（仮定：$0 < p, m, \kappa, E$・$2p/m \leq V$・$E \leq 2mp/\kappa$・$V/E \leq C_P$）・`window_ratio_closed`（仮定：$0 < m$・$0 < T$）。経路の測度・共分散の式・基底状態の恒等式は Lean の外
系 3.6	橋の系	同じ仮定で $C_P \leq KL^2$ なら $(\Delta L/\hbar)^2 \geq \kappa/K$。論文はこの仮定 $C_P(\mathcal{D}) \leq KL^2$ に名を付けていない（論文の系 3.6 の仮定。本の拡散型緩和時間の仮定の上側 $\xi^2\uparrow$ と同じ型）	初（仮定の上の代数）	`gap_lower_of_poincare_upper`（仮定：$0 < m$・$\kappa/m^2 \leq C_P$・$C_P \leq KL^2$）
命題 4.1	24-04 の (2)	正準の計量（$\kappa = 1$）で、時刻に局所な汎関数の Rayleigh 商の上限はちょうど $(\hbar/\Delta)^2$、達成されない	初（24-04 §02）	`local_rayleigh_le`（仮定：$0 < m$・$m \leq a_k$・$0 \leq c_k$）・`fourier_weight_le`（仮定：$0 < m \leq a$）。有限和と各点の不等式だけ
命題 5.1	円の上の自由な粒子の反例	円の上の自由な粒子で $\Delta > 0$ かつ $C_P = \infty$（巻き数のため）。逆向きの不等式は一般に偽	初（23-01 §06 (5)）	`rotor_ratio_unbounded`（仮定：$0 < r$）・`rotor_gap_pos`（仮定：$0 < \hbar$）

範囲。Wilson の時間を刻む格子・ゲージ場・無限体積・連続極限は、論文の言明の外です。四次元の格子ゲージ理論で使うには、時間を刻む格子での時間の刻みの比べの仮定（論文「片側の橋」の (D)）が残ります（24-04 §08）。

```
03
```

一リンク積分 — Bakry–Émery の前に一リンクを積分する

要旨。$(\mathbb{Z}/L)^4$ の上の $SU(2)$ の Wilson 作用で、どのプラケットもちょうど一本だけ含む「完全な族」のリンクを先に積分すると、Haar 積分は星ごとに分かれ、残りのリンクの周辺密度は $e^{-\Phi}$ の形になる。Φ の測地線に沿う二階微分は、全ての β と全ての配位で $-27\beta^2\sum_e \|X_e\|^2$ 以上。単位 S^3 の Ricci 曲率 2 と合わせて Bakry–Émery の曲率 $2-27\beta^2$、閾値 $\beta < \sqrt{2/27} = 0.2722$ になる。完全な族が $\mathbb{Z}^d$ に在るのは $d \le 4$ のときに限る。質量ギャップの段は Lean の定理ではなく、紙で、しかも概略。

表 3　一リンク積分の主定理（詳しい札は 5-11）

論文の番号	言明（条件を同じ行に）	札	Lean
Theorem 1	L が偶数で $L \ge 3$、単位四元数の上の任意の Haar 確率測度について、(i) 完全な族のリンクの積分は星ごとに分かれて $e^{-\Phi}$ を与える、(ii) Φ の二階微分は全ての β・全ての配位で $-27\beta^2\sum_e \|X_e\|^2$ 以上	Lean	`WilsonOneLink.integral_star_links`・`StaplePerturbation.hess_gauge`（仮定は論文 §11 の型の署名のとおり）
Theorem 2・2′	$\mathbb{Z}^d$ に完全な族が在るのは $d \le 4$ のときに限る。周期 L のトーラスでは「$d \le 4$ かつ L が偶数」と同値。k 胞体の版では $d \le 3k+1$、密度はちょうど $1/(2(k+1))$	Lean	`no_perfectZ_of_five`（仮定：$5 \le d$）・`perfectK_one_iff`（仮定：$2 \le d$）ほか
Corollary 3 (a)	$\beta < \sqrt{2/27}$ で、周辺の測度は曲率 $2-27\beta^2$ 以上の Bakry–Émery の条件を満たし、体積と境界条件に一様な対数 Sobolev 不等式を持つ	典（Bakry–Émery の定理・S^3 の Ricci 曲率）＋この論文の Theorem 1（上の行）	—
Corollary 3 (b)	無限体積の Gibbs 測度の一意性と相関の指数的な減衰（格子単位の質量ギャップ）	仮（強結合の対数 Sobolev の先行の議論を写した概略。一行ずつは書き下していない）	—

範囲。言えるのは「Bakry–Émery の方法の中で定数が良くなる」ことだけで、強結合の範囲を広げたとは言っていません。連続極限については何も言いません（5-11）。

04

渦の挿入の恒等式の論文 — 渦の挿入の恒等式

要旨（草稿）。$SU(2)$ の Wilson 格子ゲージ理論を Mack–Petkova の捩れの和のアンサンブルで書き、局所的な中心渦の挿入について、近似を含まない恒等式の族を示す。区画に向きを合わせた対合の挿入 τ（作用の変化 ΔS）と、τ で奇な観測量 H について、$\mathbb{E}[H] = \mathbb{E}[H\tanh(\Delta S/2)]$ と $\mathbb{E}[H\sqrt{\rho}] = 0$（$\rho = e^{-\Delta S}$）。離れた細胞の挿入を合わせ、挿入の位置で平均すると、$|\langle W(C)\rangle| \le \mathbb{E}\prod_c |\bar{t}_c|$（各因子は $[-1,1]$）。可逆な熱浴の力学で駆動した挿入では、仕事 W について Crooks 型の恒等式 $\mathbb{E}[H] = \mathbb{E}[H\tanh(W/2)]$。全ての β の板の閉じ込めの定理は細い挿入の特別な場合として戻る。草稿は、これらを Tomboulis–Yaffe・Mack–Petkova・Kovács–Tomboulis の枠組みの中の書き直しと位置づけ、連続極限についても問題そのものについても何も言わない。

表 4　渦の挿入の恒等式の論文の主定理（本の札は 25-05 のもの。条件は全て：有限の配位空間・正の重み・区画を反転する全単射）

論文の名	言明（条件を同じ行に）	札	Lean	本の章
bounded identity	τ が対合で $H\circ\tau = -H$ なら $\mathbb{E}[H] = \mathbb{E}[H\,t]$、$t = \tanh(\Delta S/2)$	初	BoundedInsertion（`Bounded.single`）（仮定：τ が対合・重みが正・$H\circ\tau = -H$）	25-05 §04
Bhattacharyya identity	同じ条件で $\mathbb{E}[H\sqrt{\rho}] = 0$	初	SecondMoment（`SecondMoment.sqrt_identity`）（同上）	25-05 §05
averaged bound	離れた細胞の、位置について平均した挿入で、$\lvert H\rvert \le 1$ かつ全ての挿入で奇なら $\lvert\mathbb{E}[H]\rvert \le \mathbb{E}\prod_c \lvert\bar{t}_c\rvert$	初	BoundedInsertion（`Bounded.averaged`・`Bounded.averaged_bound`）（仮定：別の細胞の t が挿入で不変・$\lvert H\rvert \le 1$）	25-05 §04
Paley–Zygmund form	一つの細胞で $\mathbb{E}[H]^2 \le 1 - \mathbb{E}[Y]^2/\mathbb{E}[Y^2]$、$\mathbb{E}[Y^2] \le 1$	初	SecondMoment（`SecondMoment.pz_bound`）（$\mathbb{E}[Y^2] \le 1$ の部分は含まない）	25-05 §05
slab confinement（系）	細い挿入で $\lvert\langle W(C)\rangle\rvert \le \tanh(\beta N^2)^{A(C)}$（板・$N$ と格子間隔を固定・全ての β）	初	—（板の定理の束は 25-04）	25-05 §06・25-04
driven identity	$H = h(\text{枠})\,\sigma$ なら $\mathbb{E}[H] = \mathbb{E}[H\tanh(W/2)]$（$W$ は可逆な熱浴で駆動した挿入の仕事）	初（Crooks・Jarzynski の恒等式は 典）	—	25-06

論文の名	言明（条件を同じ行に）	札	Lean	本の章
数値	$2 \times 2 \times 8 \times 8$・$\beta = 2.3$・$n_{12} = 1$・半径 2 の円板で、熱浴の 16 段の駆動により仕事の平均 $10.7 \to 2.9$、$\tanh(W/2)$ の平均 $0.99 \to 0.69$	読（草稿に種の数と誤差の記載が無い）	—	25-08

新しさ。草稿は「捩れの和のアンサンブルでの局所の恒等式」などを自らの寄与に挙げていますが、本は先行文献との照合が済んでいないので、新しさを主張しません（25-05 §08 (d)）。

05

帯の還元の論文 — 帯の還元と $SU(2)$・$U(1)$ の数値

要旨（草稿）。小さな捩れたトーラス T^2_L を通る板 $T^2_L \times \mathbb{Z}^2$ の道で、四次元 $SU(2)$ の格子の閉じ込めに向かう。四点を述べる。(i)「$\theta(L,L) \le \theta_0 < 1$ が L に一様」という素朴な条件は四次元の $U(1)$ も満たすので閉じ込めを導かず、正しい目標は $\ln(1/\theta(L,L)) \ge cL^2$（'t Hooft の判定の局所の形）。(ii) 平面の方向の入れ子と合わせると、目標は一つの横広げの不等式に還元される。この不等式は $U(1)$ と $\mathbb{Z}_2$ で破れ、希薄な領域の $SU(2)$ では符号が $11/3 - 2 = 5/3 > 0$ で決まる。(iii) 鏡映正値性・中心と双対の恒等式・転送行列の正値性は $\mathbb{Z}_2$ と $U(1)$ でもそのまま成り立つので、構造の入力だけでは横広げの不等式を示せない。(iv) 板の Monte Carlo は予測された対照を示す。一ループで、揺らぎについて等長的な写像からの比較は $U(1)$ の向き $\beta' \ge \beta + 0.023$ しか出せず、揺らぎを整形する写像は $\beta - \beta' = 0.258$ を出す。連続極限での閉じ込めも質量ギャップも示さない。

表 5　帯の還元の論文の主な言明（本の札は右の章のもの）

論文の名	言明（条件を同じ行に）	札	Lean	本の章
uniform θ_0 is insufficient	帯の素朴な形 $\theta \le \theta_0$ からは張力の下界 $\ln(1/\theta_0)/L^2 \to 0$ しか出ない。$U(1)$ のクーロン相は帯の素朴な形を満たす	初（不足の論理）／読（$U(1)$ の勘定、物理の見立て。草稿も heuristic と明記）	—	26-01

論文の名	言明（条件を同じ行に）	札	Lean	本の章
conditional theorem	小さな T^2 の基点・枠の減相関・横広げの不等式の三つの下で $\theta(R,R)\le e^{-cR^2}$、張力が L に一様な面積則	初（条件つき。草稿の証明は概略で、本は仮定を数の不等式に書き直して証明を置いた）	Doubling（`Doubling.iterate`・`Doubling.decay`）（仮定：$c\ge 0$・$t_k\ge 0$・$t_{k+1}\le c^3 t_k^4$。反復の代数だけ）	26-02 §03
necessary condition	横広げの不等式（強い形）は、板の張力 $\sigma_{\mathrm{eff}}(L)$ が L について減らないことを含む（閉じ込めより強い）	初	—	26-02 §05
the inequality separates the theories	横広げの不等式は $U(1)$・$\mathbb{Z}_2$ で破れ、希薄な領域の $SU(2)$ では $\ln(1/\theta)\propto A_D L^{5/3}$ で増える	読（物理の見立て。草稿も heuristic と明記）	—	26-03
no-go from structure	流束の評価・電場の流束の形・転送行列の正値性・中心と双対の恒等式・格子の対称性は $\mathbb{Z}_2$・$U(1)$ でもそのまま成り立つので、この入力の組だけからは横広げの不等式は出ない	初（「この入力の組だけでは」の形）	FluxDuality（`FluxDuality.split`・`FluxDuality.twisted_le`・`FluxDuality.bias_mem`）（$\theta\le 1$ には捩れた分配関数の正値性を仮定）	26-04
site-reflection positivity	捩れを固定した z のアンサンブルは、方向 3・4 の格子点を通る鏡映で正値（M は偶数）。横向きの鏡映は捩れで正値でない	初（z の鏡映正値性。26-04 §03 に証明を置いた。この行は閉）	ReflPos（`ReflPos.refl_pos`・`ReflPos.refl_cs`）（仮定：$A\ge 0$。核の代数）	26-04・27-02 z の鏡映正値性
chessboard（系）	L を固定すれば、枠の減相関は一つの密度 κ_{cb} に置き換わり $\lvert\langle W(C)\rangle\rvert\le \kappa_{\mathrm{cb}}^{n(C)}$	典（チェス盤の評価）＋ 初（L を固定した文）	—	26-05
flux bound	区画を反転する定常な核について $\theta\le 1-a$。一段の核では $a\lesssim\frac12$ なので帯の素朴な形の評価しか与えない	初	FluxLemma（`FluxLemma.flip_le_one_sub_abs`）	25-06
一ループの比較	揺らぎについて等長的な比較は $\beta'\ge\beta+0.023$（二倍あたり）、揺らぎを整形する比較は $\beta-\beta'=0.258$	初（一ループの水準）	—	25-07・26-06 §03

論文の名	言明（条件を同じ行に）	札	Lean	本の章
数値	T^2 を広げると $U(1)$ の大域の流束の自由エネルギーは上がり $SU(2)$ は上がらない。板の張力は増えて飽和。格子を二倍にする試験で、読んだ $\beta-\beta'$ は $SU(2)$ で $+0.13$〜$+0.25$（$\beta=2.5$〜3.0・種 1〜3 本）、$U(1)$ は逆向き	読 （格子の大きさ・誤差の条件は 26-00 §03 (ii) と 26-09 の各行）	—	26-09・26-06 §05

記録の上の追記の予定。階段関数の走査と $U(1)$ の対照（$\beta_c\approx 1.01$ での符号の反転）を帯の還元の論文に足すことが、取り組む順の一行として挙がっています（27-03 §06）。

06

分数インスタントンの格子の論文 — 分数インスタントンの格子の閉じ込め

要旨（草稿）。小さなトーラス T^2_N に 't Hooft の捩れ $n_{12}=1$ を入れた $T^2_N\times T^2_M$ の上の四次元 $SU(2)$ の Wilson 格子ゲージ理論で、流束 n_{34} の偏り $\theta(N,M,\beta)$ を考える（Tomboulis–Yaffe の不等式で大きな平面の Wilson ループを押さえる量）。固定した N では細い $\mathbb{Z}_2$ の渦の面のコストから率 $\approx e^{-2\beta N^2}$ の面積則が初等的に出る。草稿は、率を、真空に凍らせた枠の中の分数インスタントンの最小作用 $S_*(N,\ell)$ に置き換える下界を示す。固定した M では逆向きの評価も示し、指数の率を $S_{\min}(N,M)$ と $S_*(N,M/2)$ の間に挟む。N に一様でなく、連続極限については何も言わない。

表 6　分数インスタントンの格子の論文の主定理（本の札は 25-02 のもの）

論文の名	言明（条件を同じ行に）	札	Lean	本の章
分数インスタントンによる閉じ込めの下界（論文の定理 A、confinement direction）	全ての $N\ge 2$・$\ell\ge 2$・$\beta\ge 1$・$M\in 2\ell\mathbb{N}$ で $-\ln\theta\ge c(N,\ell)\,\beta^{-a}e^{-\beta(S_*(N,\ell)+\varepsilon(\beta))}M^2$、$\varepsilon(\beta)=O(\sqrt{\ln\beta/\beta})$。細い面の評価に勝つのは、明示されない大きな β から先	仮 （草稿に証明。チェス盤の評価と Morse–Bott の補題を引用で使い、剛性の定数は存在だけ。本文に証明を置くまで上げない）	柱の表示の因数分解と二項の評価だけ（ColumnChessboard（`ColumnChessboard.signed_sum`・`ColumnChessboard.binomial_bound`）ほか）	25-02 §06・26-06 §04

論文の名	言明（条件を同じ行に）	札	Lean	本の章
固定した平面での逆向きの評価（論文の定理 B、fixed-M reverse bound）	全ての $N, M \geq 2$・$\beta \geq 1$ で、$x = 2\exp(-\beta S_{\min}(N,M) + N^2M^2(12\ln\beta + 34)) \leq \frac{1}{2}$ なら $-\ln\theta \leq 2x$。M を固定した文	仮（同上）	—	25-02 §06
張力の率の挟み込み（論文の系 C）	固定した N と $M \in 2\ell\mathbb{N}$ で、$-\ln(-\ln\theta)/\beta$ の $\beta \to \infty$ の下極限と上極限は $S_{\min}(N,M)$ と $S_*(N,\ell)$ の間	仮（分数インスタントンによる閉じ込めの下界と固定した平面での逆向きの評価の上）	—	27-02 繰り込みの比較の上の端
trivial bound（命題）	全ての枠で $\lvert\theta_t\rvert \leq \tanh(\beta N^2)$、$\ell = 2$ で $-\ln\theta \geq \frac{M^2}{2}e^{-2\beta N^2}$	初（板の閉じ込めの定理と同じ型）	—	25-04
証明書つきの上界	$S_*(2,12) \leq 0.6762\pi^2$・$S_*(3,12) \leq 0.9193\pi^2$・$S_*(4,8) \leq 0.9707\pi^2$（具体的な配位の作用の評価。上界の向きだけ。$N=4$ は冷却が収束していない値）	機（上界だけ。最小値そのものには付かない）	—	25-02 §05

開いている所。M に一様な逆向きの評価（希薄な気体の上界）と、$S_* = S_{\min}$ の一致です。草稿は前者を一つの正値性の補題に還元しています（27-03 問い「分数インスタントンの下界の逆向き」・問い「最小作用の一致」）。N を増やす向きは、帯の真ん中と同じ問題です。

07

論文と Lean の束 — 束の名・定理の数・保証の範囲

表 7 は、各論文の機械検査の部分を、束（Lean のファイルの組）の単位で並べたものです。どの束も、保証するのは仮定の並びから結論への有限和と実数の代数だけで、Haar 測度・経路の測度・区画の位相・θ が区画の偏りであること・転送行列の正値性は Lean の外です。束の置き場と名前の付け方は付録 A-04 に揃えます。

表 7　論文の Lean の束（定理の数は、片側の橋は公理の記録の行数、第 25・26 部の束はファイルの定理と補題の宣言の数）

論文	束（ファイル）	定理の数	中身	公理

論文	束（ファイル）	定理の数	中身	公理
片側の橋	EuclideanPath.GapBridge	17	時刻の区間の比の閉じた形・Poincaré の下界の抽象形・時刻に局所な族の和・橋の系・回転子	標準三公理の部分集合（公開の公理の記録、A-04 表 4c）
一リンク積分	LatticeGaugeOneLink（StarInequality・StapleCurve・OneLinkSeries・CompleteFamilyLattice・StaplePerturbation・WilsonOneLink）・PerfectFamily・PlaquetteCounting	—（論文の一覧 の公理の記録）	Wilson 作用から Φ の Hessian の下界までの鎖・完全な族の組合せ論	標準三公理の部分集合（公開の公理の記録）
渦の挿入の恒等式の論文	InsertionIdentity（名前空間 Insertion、5）・BoundedInsertion（名前空間 Bounded、5）・SecondMoment（2）・MultiCell（3）	15	挿入比の恒等式・tanh の形・位置の平均・二次モーメント・細胞の合成（「挿入で奇」は仮定）	標準三公理の部分集合（この本の側で公理を読み直す再検査を通った）
	FlipLemma（2）	2	反転の確率の評価と切断の式（25-06 の流れの補題）	
	Containers（2）	2	容器の積への因数分解と容器の評価（25-03）	
帯の還元の論文	FluxLemma（1）	1	$\theta \le 1 - \lvert a \rvert$ の形の流束の評価	
	FluxDuality（3）	3	電場の流束の分解・捩れた和の評価・偏りの範囲（$\theta \le 1$ には正値性を仮定）	
	Doubling（2）	2	倍化の反復 $t_{k+1} \le c^3 t_k^4 \Rightarrow c\,t_k \le (c\,t_0)^{4^k}$ と減衰	
	ReflPos（2）	2	鏡映正値性の核の代数（$A \ge 0$ の重みの上の Cauchy–Schwarz）	
分数インスタントンの格子の論文	ColumnChessboard（5）	5	柱の表示の符号つき・符号なしの和・積の展開・二項の評価・指数の評価	

第 25・26 部の束は合わせて 11 ファイル・32 の定理と補題です。ほかに、板の閉じ込めの定理と容器の補題（`SlabConfine`・`SlabAverage`・`FrameLemma`・`CommutingFlips` ほか）を含む別の束（150 の定理）があり、25-03・25-04 が引きます。こちらは論文の束ではなく、同じ再検査を通っています。束の名と置き場は、付録 A-04 の束の表に足すときに決めます。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
五本の論文の題・段階・頁数と、主定理の言明と条件（表 1〜表 6）	草稿の三本の証明の正しさ。本の札が 初 の行は本の章で確かめた証明に、仮 の行は草稿の言明に、それぞれ依る
各論文の機械検査の範囲（表 7）	Lean の束が論文の言明そのもの（測度・区画・極限）を検査したこと
どの論文も、存在と質量ギャップの問題の解決を主張していないこと	論文の外部の検査（どの論文も外部の数学者の検査を経ていない）

出典と再現

もの	種別	出典・道具
片側の橋・一リンク積分の題・要旨・言明	本書	このサイトの論文の頁（論文の一覧）の PDF と LaTeX 源。定理の番号と Lean の宣言の対応は片側の橋の論文の対応表（§9）
草稿の三本の題・要旨・言明	本書	各草稿の LaTeX 源（渦の挿入の恒等式の論文：2026-10-13・3 頁、帯の還元の論文：2026-10-13・9 頁、分数インスタントンの格子の論文：2026-10-14・7 頁）。本の札は右の列の章の分類表
Lean の束の定理の数	本書	片側の橋は公開の公理の記録（17 行）。第 25・26 部の束は各ファイルの theorem と lemma の宣言を数えた（11 ファイル・32）
捩れの和のアンサンブル・容器の恒等式	典	G. Mack, V. B. Petkova, Ann. Phys. 123 (1979) 442; 125 (1980) 117（25-03 の出典表）
Wilson ループの上界（渦の自由エネルギーから）	典	E. T. Tomboulis, L. G. Yaffe, Commun. Math. Phys. 100 (1985) 313。T. Kanazawa, arXiv:0808.3442（26-01 の出典表）

この章で使った語 — 公開・草稿・主定理・札・束・捩れの和のアンサンブル・移り変わりの帯・横広げの不等式・分数インスタントン・容器。意味は A-02 用語集 にあります。

次に読む章：A-08 質量ギャップまでの地図。あわせて読むなら 目次。論文の言明が本のどの条件の行に掛かるかは 27-02 条件の台帳 にあります。

質量ギャップまでの地図 — 公開された構成を土台に

この章は未解決の地図です。公開された構成の読みは第 6〜13 部、本書の検討の定理は第 19〜22 部に在ります。

この章で分かること — 2026-11-10 に公開された四次元のヤン–ミルズ理論の存在の構成を土台に置いたとき、質量ギャップの証明までに何を保証しなければならないか。土台として引用するもの、紫外の側に残る継ぎ目、赤外の側（移り変わりの帯）に残るもの、本書の検討が閉じた定理の位置を、三つの表に並べます。

前提となる章 — 6-04 示されていないこと・16-03 公開された構成の赤外の端・16-04 この本の位置。札の読み方は 6-00。

先に言うこと — 公開された構成の定理の水準は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」です。本書が読んだのは定義と言明の形までで、委員会も証明をまだ完全には理解しているとは言わない、と書いています[評]。「いま」の欄は、本書が源と評価書を読んだ範囲で書いています。この地図は道標であって、進み具合の目盛りではありません。本書はヤン–ミルズの存在と質量ギャップの問題の解決を主張しません。

札：[源] ＝公開された構成の源を読んだ／[推] ＝本書の推し量り／[評] ＝委員会の評価書による。本全体の札（[典] ・[Lean] ・[計算] など）はこれまでと同じ意味です（くわしくは 6-00 の「札」）。

この章の順序

1. この章の役割
2. 示すべきこと — 一行と、問いの形
3. 土台 — 公開された構成から引用するもの（表 1）
4. 紫外の側の残り — 継ぎ目（表 2）
5. 赤外の側 — 移り変わりの帯（表 3）
6. 表のほかに要る保証

7. 本書の検討が閉じた定理の位置
8. 言えないこと

01

この章の役割

四次元のヤン–ミルズ理論の存在は、2026-11-10 に公開された構成（Lean のコードと委員会の評価書）で、Lean で証明されている、と委員会が評価しました（第 6 部）。質量ギャップは示されていません（6-04・16-02）。

この章は、その構成を土台に置いて、質量ギャップの証明までに保証しなければならないことを並べ直します。読み方は次のとおりです。

1. §02 で、示すべきことを一行で書きます。
2. §03 の表 1 で、土台として公開された構成から引用するものを並べます。
3. §04 の表 2 が紫外の側、§05 の表 3 が赤外の側に残るものです。紫外の側は「継ぎ目」、赤外の側は「芯」です。
4. §07 で、本書の検討が閉じた定理が、この地図のどこに在るかを書きます。

02

示すべきこと

一行 — 繰り込んだ格子の観測量の相関が、物理の単位で、切断と体積に一様に、指数の速さで減ること。

減衰が要るのは、Osterwalder–Schrader の空間で稠密な族（全ての次数の場の語）の全てです。前の定数は観測量に依ってよく、率は一様でなければなりません。これが出れば、極限の理論の質量ギャップと、その理論の零エネルギーの空間が一次元であること（真空の一意性）は、既知の一般論で従います[典]。無限体積の極限の一意性は、ここからは従いません。公開された構成に在るのは、相に一様な多項式の速さの評価までです[源]（12-08）。

問いの形 — 公開された構成は、一番粗い段（間隔 1 の格子）の結合を基準の値 $\bar{\beta}$ に止めたまま、連続極限を取ります（16-03）。そのため一つの構成について言うなら、残る問いの主部は「間隔 1 の段の有効な理論が、長い距離で指数の減衰を持つか」という格子の上の問いに寄せられる見込みです[推]。ただし、そう言い直すには表 2 の上の三つが要ります。

- 間隔 1 の段の理論は Wilson の作用ではなく、表示つきの有効な作用の理論で、基準の結合はその係数です。表示は一意ではありません源 （10-01）。
- 「長い距離」は、一ループの外挿で、間隔 1 の単位で $e^{\bar{\beta}/s}$ の程度です（s は一ループの傾き）推 。
- 基準の結合に課された条件の一つ（全ての $x \geq \bar{\beta}$ で $x^{-1/2} e^{(\log\log x)^2} \leq 1$）だけから、$\bar{\beta} \geq e^{13.7} \approx 9 \times 10^5$ が要ります計算 。SU(2) の標準の規約では $g^2 \leq 4.5 \times 10^{-6}$ ほどです（8-01 の換算）。だから上の距離は $e^{2.4 \times 10^6}$ 以上の、天文学的な長さです。

残る問いは、弱結合の格子ゲージ理論の質量ギャップという、古くから開いている問いと同程度か、それ以上の難しさです推 。

03

土台 — 公開された構成から引用するもの

項目	公開された構成の形	注意
有限の周期の箱での連続極限	四次元の Wilson の格子、任意のコンパクト単純群。切断については間隔の列の全体で収束源 （8-05・11-10）	立方の箱・周期の境界条件だけ
無限体積・相の分解・再構成	体積は部分列。相ごとに Wightman の公理評 （12-05・12-07・12-08）	極限の収束と一意性は無い
弱結合の側での結合の動き	段ごとの結合が、「基準の値 ＋ 一ループの傾き × 尺度の比の対数」の半分から二倍の間に在る（表示の中の係数として）源 （10-05・11-00）	測度で決まる量ではない（有効な作用の係数）。働くのは、係数が一段の評価の入口の値より大きい所だけ。一段の評価は、辺が大きい奇数のブロックについて
全ての群	存在は、任意のコンパクト単純群評	—

表 1　土台。公開された構成の定理の水準は「Lean で証明されている、と委員会が評価した」です。

04

紫外の側の残り — 継ぎ目

紫外の制御は、存在としては土台に入りました。残るのは、紫外の結果を赤外の議論が使える形にする継ぎ目です。

保証すること	いま	質量ギャップに要るか
間隔 1 の段の理論を、対象として定める（切断を外した極限、同じ形の表示、段の間の整合）	表示の材料と密度が、切断について収束することは言明に在る［源］。極限の対象と、その表示は言明に無い（11-10・16-03）	要る
体積に一様な、局所の評価	一段の帳簿は体積に依らない形。密度の水準の評価は体積の指数を含み、局所の観測量について体積に一様な評価は、読んだ範囲に無い［源］	要る
観測量の橋（連続の相関 ＝ 間隔 1 の段での、観測量の像の期待値）	細かい段での読み出しと、真の相関の差の評価は在る。間隔 1 の段での像と等式は無い［源］	要る
測度で決まる量との読み替え（表示の係数としての結合 ↔ 渦の比・板の張力・粗い Wilson ループ）	無い	本書の道では要る
捩れた境界条件と、細長い箱	無い（周期の立方の箱だけ）	本書の空間の方向の道（小さな捩れた箱から太らせる、第 25〜27 部）では要る。その道の条件は小さな捩れた箱の上の紫外の制御に依っていたので、ここが最初の問いになる
鏡映正値性の持ち方	元の Wilson の測度にだけ在る［源］（12-01）。繰り込んだ段の測度には言われていない	道による（減衰を元の格子の相関で言うなら要らない）
無限体積の極限の一意性、間隔の列や基準の値に依らないこと	無い	一つの理論の質量ギャップには要らない。一様な指数の減衰が出れば、その極限はクラスター性を持つ［推］
土台の理解と、独立の検証	本書が読んだのは定義と言明の形まで。委員会も「まだ完全には理解していない」と書いている［評］	土台の確かさ

表 2　紫外の側の残り。上の三つが本流、四つ目と五つ目が本書の道のためのものです。

05

赤外の側 — 移り変わりの帯

強結合の端（質量ギャップが示しやすい側）と弱結合の端（連続極限を取る側）の間の、移り変わりの帯が芯です（26-00）。

保証すること	いま
帯の両端を決める	強い側は、本書の Lean の窓：無限体積の極限と質量ギャップは $\lvert\beta\rvert < 1/19$、面積則は有限の箱で $\beta < 1.1 \times 10^{-3}$、無限体積で $\beta < 1.2 \times 10^{-4}$ Lean （20-03・20-06）。弱い側は、公開された構成の一段の評価が要求する、有効な作用の係数の下限（Wilson の作用の β ではない）。入口の値は「十分大きければ成り立つ」という存在の形で、源に式も数も無い 源 。基準の結合の条件の一つだけから、少なくとも 9×10^5 計算 。両端が別の量・別の作用の類で言われているので、同じ量で言い直すことも要る
帯の芯 ― 尺度を跨いで保たれ、U(1) と区別でき、強い側で減衰を与える量	無い。本書の形は、板の張力の倍化の不等式（還元は Lean、横広げの不等式そのものは開いている。26-02）。別の形は、有限の箱の混合の条件（時間の方向の道、26-07）
強結合の端を、有効な作用の類へ広げる	Wilson の作用では Lean に在る（無限体積・質量ギャップ・面積則・渦の床）。有効な作用の類では無い。窓が狭い
減衰を、元の観測量へ戻す	無い
張力（面積則）から質量ギャップへ	一般の含意としては偽。何を足せばよいかの言明が未定
減衰からスペクトルへ	一般論は既知 典 。強結合の格子では Lean に在る（20-04）。公開された構成の再構成の枠の中では無い
中心の無い群	渦の道具が使えない。全ての群の質量ギャップには、別の道具が要る

表 3　赤外の側。

読み方を書きます。

- 公開された構成は、帯の中には手がかりを与えません。全ての段を弱結合のまま運び、間隔 1 で止まるからです 推 （16-03）。
- 弱い側の端には、「細かい段ほど結合が弱い」ことの、摂動に依らない入力が在ります（有効な作用の係数として。非可換性を使う入力です） 源 。ただしこれが働くのは、係数が 9×10^5 以上の、ごく弱い結合の端だけです。
- 帯の議論に欠けていた「U(1) と区別する入力」は、真ん中の区画（U(1) が転移する $\beta \approx 1$ のあたり）で要るもので、上の入力はこれには当たりません 推 。
- 上の入力を本書の倍化の不等式に使うには、四つが要ります 推 ：(i) 表示の係数と、捩れた分配関数の比・板の張力との関係、(ii) 有効な作用と Wilson の作用の比べ、(iii) 辺 2・3 の一段への移し、(iv) 捩れた境界条件での構成。
- 閉じ込めではなく質量ギャップに届くには、表 3 の「張力から質量ギャップへ」の行が要ります。張力の道だけでは足りません。
- 帯について本書の検討が試した発想（生きている・壊れた・判定できない）の地図は 16-11、帯の議論を試す七つの相手は 26-12 に在ります。

06

表のほかに要る保証

表 1〜3 の行のほかに、証明が書き下されるときに要る保証を挙げます推。

1. 全ての次数の場の語について、率が一様な減衰（前の定数は観測量に依ってよい）。
2. 体積の順序：箱の辺が相関長より十分大きい所での一様性。捩れた境界条件の道では、細長い箱の極限の順序も。
3. 状態の同定：減衰を捩れた境界条件や純粋な相で出すなら、その状態から作る理論が公理を満たし、公開された構成の理論と同じであること。混ざった状態の減衰が要る所で、純粋な相ごとの減衰では足りない場合があります（低温の Ising 模型が例です）。
4. Lorentz 共変：ハミルトニアンの隙間を質量の隙間に変えるのに使います。公開された構成では、成分の理論に在ります評。
5. SU(N) 一般：本書の Lean の定理は SU(2) だけです。

07

本書の検討が閉じた定理の位置

本書の検討の Lean の定理は、どれも格子間隔を固定した言明で、既知の型の結果の形式化ですLean（一覧は 16-04 の表 1）。この地図の上では、次の所に在ります。

- **強結合の端**：相関の指数的な減衰、無限体積の極限とクラスター性、再構成の器の質量ギャップ（格子の単位）、Wilson ループの面積則、渦の自由エネルギーの上界（20-02〜20-06）。表 3 の一行目の強い側の端です。渦の自由エネルギーの上界の、面積あたりの率は横の大きさに依りませんが、これは強結合の窓の中だけで、前の因子（横の面積）は残ります。
- **どの結合でも**：鏡映正値性、薄い渦の床・太い渦の床、Polyakov ループの対、渦の比の連続と極限と合わせ（第 21 部）。どれも横の大きさに一様ではありません。
- **弱結合の側**：一つの尺度での大きい面の稀さ（22-01）。繰り込んだあとの尺度については何も言いません。
- **本書の設計に固有のもの**：切断に依らない決まったブロック写像（段の間の整合が押し出しの等式で書ける）、押し出した測度の鏡映正値性、測度で決まる量（渦の比・粗い面の平均）による合わせ（14-06）。合わせは、まだ設計の選びの段階です。

帯について本書の検討が持っているのは、条件つきの含意と前提の一覧です（27-01・28-04）。前提を満たすことは示していません。本書の検討が組んだ、小さな箱の弱い紫外の存在

についての条件つきの含意（2026-10-30）が目指した問いには、公開された構成の定理がより強い形で答えました[推]。その含意の前提は本書の設計についての言明で、公開された構成の結果からは従いません。

次の一手の候補は三つです[推]。(1) 捩れた分配関数の比が、公開された構成の表示からどう出るかを読む。(2) 一段の評価の入口の値を読む（帯の弱い側の端）。(3) 強結合の端の窓を広げ、有効な作用の類へ広げる。

08

言えないこと

1. 表の行が全て埋まっても、それで問題の解決になるとは言いません。表は、本書が読んだ範囲で見えている保証の一覧で、全てを尽くしているとは言いません。
2. 行の数を数えて「あと何割」と読むことはできません。
3. 「いま」の欄は、公開された構成の定義と言明の形を読んだ範囲のものです。証明の中身が正しいことは、本書は確かめていません。
4. 本書の強結合の結果（無限体積の極限・質量ギャップ・面積則・渦の床）は、残る問いとは反対の端（強結合・格子間隔は固定）の言明です。

主張しないことの横断の一覧は 27-04、公開された構成が示していないことは 6-04 に在ります。

この章が言えている範囲

言えている	言えていない
[源] 表 1〜3 の「いま」の欄は、公開された構成の源と評価書を、第 6〜13 部が読んだ範囲で書いた	源の証明の中身が正しいこと。読んでいない所に在るかもしれない言明
[計算] 基準の結合の下限 9×10^5 は、条件の一つだけから出した下界	一段の評価の入口の本当の値（源には存在しない）
[推] 残る問いの主部が、間隔 1 の段の有効な理論の長い距離の問いに寄せられる見込み	そう言い直せること（表 2 の上の三つが要る）。難しさの比べ
[Lean] §07 の本書の定理の範囲（格子間隔を固定）	それらが帯を渡ること。この章は新たな結果を足さない

出典と再現

もの	種別	出典・道具
公開されたコード	源	yang-mills-group/OpenAI-YM-20261028（Apache-2.0、2026-10-28 提出、版 3456e5e）。在りかは第 8〜13 部の各章
評価書	評	yang-mills-group/YM の docs/assessment-1.pdf（2026-11-10、版 55ba9fc）
委員会の声明	典	Kavli Institute for Theoretical Physics の頁の第三の声明（2026-11-09）。署名：Michael R. Douglas、David J. Gross（委員長）、Arthur Jaffe、Igor R. Klebanov、Nikita Nekrasov
基準の結合の条件	源・計算	源の `Bar.threshold`（`YM/Price/Intent.lean`）。$(\log\log x)^2 \le \frac{1}{2}\log x$ が全ての $x \ge \bar{\beta}$ で成り立つ最小の $\log \bar{\beta}$ を浮動小数で求めた（約 13.71）
本書の定理の範囲	Lean	16-04 の表 1、A-04 の表 4g
問題文	典	A. Jaffe, E. Witten, Quantum Yang–Mills Theory, Clay Mathematics Institute (2000)。読み方は 0-03

次に読む章：目次。